АБАК — 1) Счетная доска, применявшаяся для арифметич. вычислений в Древней Греции, Риме, затем в Зап. Европе — до 18 в. Доска разделялась на полосы, счет осуществлялся передвижением находящихся в полосах счетных марок (костяшек, камней и т. п.). В странах Дальнего Востока распространен китайский аналог А.— суан-пан, в России — счеты. 2) В номографии особый чертеж (т. н. сетчатая номограмма). *БСЭ-з.*

АБЕЛЕВ ДИФФЕРЕНЦИАЛ — голоморфный или мероморфный дифференциал на компактной, или замкнутой, римановой поверхности S (см. *Дифференциал на римановой поверхности*).

Пусть g — *род поверхности* S; $a_1b_1a_2b_2\ldots a_gb_g$ — циклы канонич. базиса гомологий S. В зависимости от характера особенностей различают А. д. трех родов: I, II и III, причем имеют место строгие включения: I$\subset$II$\subset$III. А. д. I р о д а — это голоморфные всюду на S дифференциалы 1-го порядка, к-рые в окрестности U каждой точки $P_0\in S$ имеют вид $\omega=pdz=p(z)dz$, где $z=x+iy$ — локальная униформизирующая переменная в U, $dz=dx+idy$, а $p(z)$ — голоморфная, или регулярная, аналитич. функция от z в U. Сложение А. д. и умножение на голоморфную функцию определяются естественными правилами: если

$$\omega=pdz,\ \pi=qdz,\ a=a(z),$$

то

$$\omega+\pi=(p+q)dz,\ a\omega=(ap)dz.$$

А. д. I рода образуют векторное пространство $\mathfrak{A}$ размерности g. После введения скалярного произведения

$$(\omega,\ \pi)=\iint_S \omega*\overline{\pi},$$

где $\omega*\overline{\pi}$ — *внешнее произведение* ω на звездно сопряженный дифференциал $\overline{\pi}$, пространство $\mathfrak{A}$ превращается в гильбертово пространство.

Пусть A_1, B_1, A_2, $B_2,\ldots$, A_g, B_g суть A- и B-периоды А. д. I рода ω, т. е. интегралы

$$A_j=\int_{a_j}\omega,\quad B_j=\int_{b_j}\omega,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ g.$$

Тогда имеет место соотношение:

$$\|\omega\|^2=i\sum_{j=1}^{g}(A_j\overline{B}_j-B_j\overline{A}_j)\geqslant 0. \qquad (1)$$

Если A'_1, B'_1, A'_2, $B'_2,\ldots$, A'_g, B'_g — периоды другого А. д. I рода π, то

$$i(\omega,\ \overline{\pi})=\sum_{j=1}^{g}(A_jB'_j-B_jA'_j)=0. \qquad (2)$$

Соотношения (1) и (2) наз. б и л и н е й н ы м и с о о т н о ш е н и я м и Р и м а н а для А. д. I рода. Канонич. б а з и с А. д. I рода, т. е. канонич. базис φ_1, $\varphi_2,\ldots$, φ_g пространства $\mathfrak{A}$, выбирается таким образом, что

$$A_{ij}=\int_{a_i}\varphi_i=\delta_{ij},$$

где $\delta_{ii}=1$ и $\delta_{ij}=0$ при $j\neq i$. При этом матрица (B_{ij}), $i,\ j=1,2,\ldots,\ g$, B-периодов

$$B_{ij}=\int_{b_j}\varphi_i$$

симметрическая, а матрица мнимых частей ($\operatorname{Im} B_{ij}$) положительно определенная. А. д. I рода, у к-рого все A-периоды или все B-периоды равны нулю, тождественно равен нулю. Если все периоды А. д. I рода ω действительны, то $\omega=0$.

А. д. II и III р о д а относятся, вообще говоря, к мероморфным дифференциалам, т. е. к таким аналитич. дифференциалам, к-рые имеют на S не более чем конечное множество особенностей типа полюсов с локальным представлением

$$\left(\frac{a_{-n}}{z^n}+\frac{a_{-n+1}}{z^{n-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z}+f(z)\right)dz, \qquad (3)$$

где $f(z)$ — регулярная функция, n — порядок полюса (если $a_{-n}\neq 0$), a_{-1} — вычет в данном полюсе. При $n=1$ полюс наз. простым. А. д. II рода — это мероморфные дифференциалы, у к-рых все вычеты равны нулю, т. е. мероморфные дифференциалы с локальным представлением

$$\left(\frac{a_{-n}}{z^n}+\frac{a_{-n+1}}{z^{n-1}}+\ldots+\frac{a_{-2}}{z^2}+f(z)\right)dz.$$

А. д. III рода — это А. д. произвольного вида.

Если ω — произвольный А. д. с A-периодами $A_1, A_2,\ldots, A_g$, то А. д. $\omega'=\omega-A_1\varphi_1-A_2\varphi_2-\ldots-A_g\varphi_g$ имеет нулевые A-периоды и наз. н о р м и р о в а н н ы м А. д. В частности, если P_1 и P_2 — любые различные точки S, то можно построить нормированный А. д. $\omega_{1,2}$ с особенностями $(1/z)dz$ в P_1 и $(-1/z)dz$ в P_2, к-рый наз. н о р м а л ь н ы м А. д. III р о д а. Пусть ω — произвольный А. д. с вычетами $c_1, c_2,\ldots, c_n$ в точках $P_1, P_2,\ldots, P_n$ соответственно, при этом всегда $c_1+c_2+\ldots+c_n=0$. Если P_0 — произвольная точка на S такая, что $P_0\neq P_j$, $j=1, 2,\ldots, n$, то ω можно представить в виде линейной комбинации нормированного А. д. II рода ω_2, конечного числа нормальных А. д. III рода $\omega_{j,0}$ и базисных А. д. I рода φ_k:

$$\omega=\omega_2+\sum_{j=1}^{n}c_j\omega_{j,0}+\sum_{k=1}^{g}A_k\varphi_k.$$

Пусть ω_3 — А. д. III рода, имеющий только простые полюсы с вычетами c_j в точках P_j, $j=1, 2,\ldots, n$, а ω_1 — произвольный А. д. I рода;

$$A_k=\int_{a_k}\omega_1, \quad B_k=\int_{b_k}\omega_1,$$

$$A'_k=\int_{a_k}\omega_3, \quad B'_k=\int_{b_k}\omega_3, \quad k=1, 2, \ldots, g,$$

причем циклы a_k, b_k не проходят через полюсы ω_3. Пусть точка $P_0\in S$ не лежит на циклах a_k, b_k и L_j есть путь от P_0 к P_j. Тогда имеем б и л и н е й н ы е с о о т н о ш е н и я для А. д. I и III рода:

$$\sum_{k=1}^{g}(A_kB'_k-B_kA'_k)=2\pi i\sum_{j=1}^{n}c_j\int_{L_j}\omega_1.$$

Между А. д. I и II рода также имеются билинейные соотношения аналогичного вида.

Произвольный А. д. III рода, кроме A- и B-периодов A_k, B_k, $k=1, 2,\ldots, g$, наз. ц и к л и ч е с к и м и п е р и о д а м и, имеет еще п о л я р н ы е п е р и о д ы

вида $2\pi i c_j$ вдоль циклов, гомологичных нулю, но охватывающих полюсы P_j. Таким образом, для произвольного цикла γ имеем:

$$\int_\gamma \omega_3 = \sum_{k=1}^{g} (l_k A_k + l_{g+k} B_k) + 2\pi i \sum_{j=1}^{n} m_j c_j,$$

где l_k, l_{g+k}, m_j — целые числа.

Важные свойства А. д. описываются в терминах дивизоров. Пусть (ω) — дивизор А. д. ω, т. е. выражение вида $(\omega)=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\dots P_n^{\alpha_n}$, где P_j — все нули и полюсы ω, а α_j — их кратности, или порядки. Степень дивизора $d[(\omega)]=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$ для А. д. ω зависит только от рода S, а именно всегда $d[(\omega)]=2g-2$. Пусть $\mathfrak{a}$ — нек-рый произвольно заданный дивизор. Обозначим через $\Omega(\mathfrak{a})$ комплексное векторное пространство А. д. ω, дивизоры к-рых (ω) кратны $\mathfrak{a}$; $L(\mathfrak{a})$ — векторное пространство мероморфных функций f на S, дивизоры к-рых (f) кратны $\mathfrak{a}$. Тогда размерность $\dim \Omega(\mathfrak{a})=\dim L(\mathfrak{a}/(\omega))$. Другая важная информация о размерности этих пространств содержится в теореме Римана — Роха: для любого дивизора $\mathfrak{a}$ имеем равенство:

$$\dim L(\mathfrak{a}^{-1}) - \dim \Omega(\mathfrak{a}) = d[\mathfrak{a}] - g + 1.$$

Отсюда следует, напр., что при $g=1$, т. е. на поверхности тора, мероморфная функция не может иметь единственный простой полюс.

Пусть S — произвольная компактная риманова поверхность, на к-рой z и w — мероморфные функции, удовлетворяющие неприводимому алгебраич. уравнению $F(z, w)=0$. Произвольный А. д. ω на S можно выразить тогда в виде $\omega=R(z, w)dz$, где $R(z, w)$ — нек-рая рациональная функция от z и w, и обратно: выражение $\omega=R(z, w)dz$ есть А. д. Таким образом, произвольный *абелев интеграл*

$$\int R(z, w)\, dz = \int \omega$$

является интегралом от нек-рого А. д. на компактной римановой поверхности S.

См. также *Алгебраическая функция*.

Лит.: [1] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [2] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955; [3] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948.

Е. Д. Соломенцев.

АБЕЛЕВ ИНТЕГРАЛ, алгебраический интеграл,— интеграл от *алгебраической функции*, т. е. интеграл вида:

$$\int_{z_0}^{z_1} R(z, w)\, dz, \qquad (1)$$

где $R(z, w)$ — любая рациональная функция от переменных z и w, связанных алгебраич. уравнением

$$F(z, w) \equiv a_0(z)\, w^n + a_1(z)\, w^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0 \quad (2)$$

с целыми рациональными по z коэффициентами $a_j(z)$, $j=0, 1, \dots, n$. Уравнению (2) соответствует компактная *риманова поверхность* F, n-листно накрывающая сферу Римана, на к-рой z, w, а следовательно, и $R(z, w)$, рассматриваемые как функции точки поверхности F, однозначны.

Интеграл (1) задается как интеграл $\int_L \omega$ от *абелева дифференциала* $\omega=R(z, w)dz$ на F, взятый вдоль некоторого спрямляемого пути L. Вообще говоря, задание только начальной и конечной точек z_0 и z_1 этого пути L не вполне определяет значение А. и. (1), или, что то же, интеграл (1) является, вообще говоря, многозначной функцией от начальной и конечной точек пути L.

Поведение А. и. на F зависит прежде всего от топологич. структуры, в частности от топологич. инвариан-

та — рода g поверхности F (см. *Род поверхности*). Род g связан с числом листов n и числом точек ветвления ν (взятых с надлежащей кратностью) соотношением $g=\frac{\nu}{2}-n+1$. При $g=0$ переменные z и w выражаются рационально через нек-рый параметр t, и А. и. сводится к интегралу от рациональной функции от t. Так обстоит дело, напр., в элементарных случаях $w^2=az+a_1$ и $w^2=a_0z^2+a_1z+a_2$.

При $g\geqslant 1$ любой А. и. можно выразить в виде линейной комбинации элементарных функций и канонических А. и. трех родов. Интеграл $\int_L \omega$ наз. А. и. I рода, если ω — абелев дифференциал I рода. Иначе, А. и. I рода характеризуется тем, что при фиксированном начале z_0 пути L он является всюду конечной на F функцией верхнего предела z_1, вообще говоря, многозначной. Эта характеристика используется, напр., при построении аналогов А. и. I рода на некомпактных римановых поверхностях. Любой А. и. I рода может быть представлен в виде линейной комбинации g линейно независимых нормальных А. и. I рода

$$u_1=\int_L \varphi_1,\quad u_2=\int_L \varphi_2,\quad \ldots,\quad u_g=\int_L \varphi_g$$

от дифференциалов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_g$, составляющих канонич. базис абелевых дифференциалов I рода. Если разрезать поверхность F вдоль циклов $a_1b_1a_2b_2\ldots a_gb_g$ канонич. базиса гомологий, то получается односвязная область F^*. Для всех путей $L^*\subset F^*$ с фиксированным началом z_0 и концом z_1 интегралы $\int_{L^*}\varphi_i$ являются однозначными функциями верхнего предела z_1. Многозначность интегралов u_i на F теперь полностью характеризуется тем, что интеграл $u_i=\int_L \varphi_i$ вдоль произвольного пути $L\subset F$, соединяющего те же точки z_0 и z_1, отличается от интеграла $\int_{L^*}\varphi_i$ лишь прибавлением целочисленной линейной комбинации A-периодов A_{ij} и B-периодов B_{ij} базисных дифференциалов I рода, составляющих матрицу периодов размера $g\times 2g$, к-рая удовлетворяет билинейным соотношениям Римана (см. *Абелев дифференциал*).

Интеграл $\int_L \omega$, где ω — абелев дифференциал II рода, наз. А. и. II рода. Рассматриваемый как функция от верхнего предела, он всюду на F не имеет иных особенностей, кроме полюсов. А. и. от нормированного абелева дифференциала II рода наз. нормальным А. и. II рода.

А. и. III рода — это А. и. произвольного вида. На F они допускают, вообще говоря, и логарифмич. особенности. При этом логарифмич. особенности могут встречаться только попарно. А. и. от нормального абелева дифференциала III рода наз. нормальным А. и. III рода. Любой А. и. можно представить в виде линейной комбинации нормальных А. и. I, II и III рода. В отличие от А. и. I и II рода, А. и. III рода, кроме A- и B-периодов, наз. циклическими периодами, имеет еще, вообще говоря, полярные периоды вдоль циклов, гомологичных нулю, но охватывающих логарифмич. особенности этого А. и., порождаемые полюсами абелева дифференциала ω с отличными от нуля вычетами.

Для произвольно взятых А. и. на одной и той же римановой поверхности F существуют определенные соотношения, обусловленные топологической и конформной структурой F. Напр., если $\omega_{P_iP_j}$ — нормальный абелев дифференциал III рода с простыми полюсами в точках P_i, P_j, то справедлива теорема о пере-

становке параметров и пределов для А. и. III рода: для любых точек P_1, P_2, P_3, P_4

$$\int_{P_1}^{P_2}\omega_{P_3P_4}=\int_{P_3}^{P_4}\omega_{P_1P_2}.$$

Соотношения, связывающие А. и. с рациональными функциями на F, носят назв. теоремы Абеля. Напр., в терминах дивизоров теорема Абеля для А. и. I рода имеет вид: дивизор $\mathfrak{a}$ на F является дивизором мероморфной функции тогда и только тогда, когда существует такая цепь L, что $\partial L=\mathfrak{a}$ и $\int_L\omega=0$ для всех абелевых дифференциалов I рода на F. Существуют варианты теоремы Абеля для А. и. II и III рода (см. [4]). А. и., и в частности теорема Абеля, служат основой для трансцендентного построения *Якоби многообразия* римановой поверхности. Вопрос обращения А. и. как функции верхнего предела ведет также к понятиям *абелевых функций*, *эллиптических функций* и *тета-функций* (см. *Якоби проблема обращения*).

Исторически начало теории А. и. было положено рассмотрением поверхности рода $g=1$. Записав соответствующее уравнение в виде:

$$F(z,\ w)=w^2-f(z)=0,$$

где $f(z)$ — многочлен от z 3-й или 4-й степени, получают в качестве соответствующих А. и. *эллиптические интегралы*. Впервые они появились при спрямлении дуг кривых 2-го порядка в работах Я. и И. Бернулли (Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli), Дж. Фаньяно (G. Faniano) конца 17 и начала 18 вв. Л. Эйлер (L. Euler) подошел к теореме сложения для эллиптич. интегралов — частному случаю теоремы Абеля (1752). В 1827 в работах Н. Абеля (N. Abel) и К. Якоби (C. Jacobi) была поставлена и решена проблема обращения эллиптич. интегралов. Тем самым было положено начало теории эллиптич. функций. Однако нек-рыми фактами этой теории владел уже к началу 18 в. К. Гаусс (C. Gauss). Проблема обращения А. и. в гораздо более сложном случае $g>1$ возникла в работах Н. Абеля и К. Якоби. В самом начале развития теории большое внимание привлек случай *гиперэллиптических интегралов*, когда $F(z,\ w)=w^2-f(z)$, где $f(z)$ — многочлен 5-й или 6-й степени без кратных корней. Здесь $g=2$ и трудности проблемы обращения уже достаточно ощутимы. Существенное продвижение в теории А. и. связано с именем Б. Римана (B. Riemann), к-рый ввел понятие римановой поверхности (1851), сформулировал и доказал ряд важных результатов.

Многомерные обобщения теории А. и. изучаются в алгебраич. геометрии и теории комплексных многообразий.

Лит.: [1] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948, гл. 8, 9; [2] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960, гл. 10; [3] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955, гл. 5; [4] Bliss G. A., Algebraic functions, N. Y., 1966; [5] Stahl H., Theoric der Abelschen Funktionen, Lpz., 1896; [6] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

Е. Д. Соломенцев.

АБЕЛЕВА ГРУППА — группа, операция в к-рой удовлетворяет закону *коммутативности*. Названа по имени Н. Абеля (N. Abel), установившего роль таких групп в теории разрешимости алгебраич. уравнений в радикалах. Обычно для обозначения операции в А. г. используется аддитивная запись, т. е. знак $+$ для самой операции, наз. сложением, знак 0 для нейтрального элемента, наз. нулем (в мультипликативной записи он наз. единицей).

Примеры А. г. Все *циклические группы* — абелевы, в частности аддитивная группа целых чисел — абелева. А. г. будут всевозможные *прямые суммы* циклич. групп, аддитивная группа рациональных чисел Q (*являющаяся локально циклической*

группой, т. е. группой, все конечно порожденные подгруппы к-рой циклические), группы типа p^∞ (или квазициклич. группы Z_{p^∞}, где p — произвольное простое число).

Свободное объединение в многообразии А. г. совпадает с прямой суммой. *Свободная абелева группа* есть прямая сумма нек-рого множества бесконечных циклич. групп. Всякая подгруппа свободной А. г.— свободная А. г. Совокупность всех элементов конечного порядка А. г. образует подгруппу, наз. периодической частью А. г. Факторгруппа А. г. по ее периодич. части является *группой без кручения*. Таким образом, всякая А. г.— расширение периодич. А. г. при помощи А. г. без кручения. Это расширение не всегда расщепляемо, т. е. периодич. часть, вообще говоря, не выделяется в виде прямого слагаемого. Периодич. А. г., порядки всех элементов к-рой являются степенями фиксированного простого числа p, наз. примарной по простому числу p (в общей теории групп употребляется термин p-группа). Всякая периодич. А. г. может быть разложена, притом единственным способом, в прямую сумму примарных групп, относящихся к различным простым числам.

Наиболее полное описание известно для А. г. с конечным числом образующих. Его дает основная теорема об абелевых группах с конечным числом образующих: всякая конечно порожденная А. г. разлагается в прямую сумму конечного числа неразложимых циклич. подгрупп, из к-рых часть — конечные примарные, часть — бесконечные [Г. Фробениус (G. Frobenius), Л. Штикельбергер (L. Stickelberger)]. В частности, конечная А. г. разложима в прямую сумму примарных циклич. групп. Такое разложение, вообще говоря, не единственно, но любые два разложения А. г. с конечным числом образующих в прямую сумму неразложимых циклич. групп изоморфны между собой и, таким образом, число бесконечных циклич. слагаемых и совокупность порядков примарных циклич. слагаемых не зависят от выбора разложения. Эти числа, наз. инвариантами конечно порожденной А. г., они являются полной системой инвариантов в том смысле, что всякие две группы, у к-рых эти инварианты совпадают, изоморфны. Всякая подгруппа А. г. с конечным числом образующих сама обладает конечной системой образующих.

Не всякая А. г. представима в виде прямой суммы (даже бесконечного числа) циклич. групп. Для примарных А. г. имеется необходимое и достаточное условие существования такого разложения — критерий Куликова. Пусть A — примарная А. г. по нек-рому простому p. Ненулевой элемент a группы A наз. элементом бесконечной высоты в A, если для любого целого k уравнение $p^k x = a$ разрешимо в A, и элементом высоты n, если это уравнение разрешимо лишь для $k \leqslant n$. Критерий Куликова: примарная А. г. разложима в прямую сумму циклич. групп тогда и только тогда, когда она есть объединение возрастающей последовательности своих подгрупп, у каждой из к-рых высоты элементов ограничены в совокупности. Любая подгруппа А. г., разложимой в прямую сумму циклич. подгрупп, сама разложима в прямую сумму циклич. подгрупп. Неразложимые (в прямую сумму) примарные группы исчерпываются циклич. примарными группами и группами Z_{p^∞}.

Конечное множество элементов $g_1, \ldots, g_k$ А. г. наз. линейно зависимым, если существуют такие целые числа $n_1, \ldots, n_k$, не все равные нулю, что $\sum_{i=1}^{k} n_i g_i = 0$. Если же таких чисел не существует, то это множество наз. линейно независимым. Произвольная система элементов А. г. наз. линейно зави-

симой, если линейно зависима нек-рая конечная ее подсистема. А. г., не являющаяся периодической, обладает максимальными линейно независимыми системами. Мощности всех максимальных линейно независимых подсистем одинаковы и наз. р а н г о м (П р ю ф е р а) данной А. г. Ранг периодич. группы считается равным нулю. Ранг свободной А. г. совпадает с мощностью системы ее свободных образующих.

Всякая А. г. без кручения ранга I изоморфна нек-рой подгруппе аддитивной группы рациональных чисел. Существует полное описание таких групп на языке типов. Всякому элементу А. г. без кручения ставится в соответствие его х а р а к т е р и с т и к а — счетная последовательность, состоящая из неотрицательных чисел и символа ∞. Эти последовательности строятся следующим образом. Все простые числа нумеруются в порядке возрастания $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$, и элементу a сопоставляется последовательность, на k-м месте к-рой стоит число s_k, если уравнение $a=p_k^{s_k}x$ имеет решение в группе, а уравнение $a=p_k^{s_k+1}x$ уже решения не имеет, и стоит символ ∞, если уравнение $a=p_k^{s}x$ имеет решение при любом s. Характеристики считаются эквивалентными, если они отличаются не более, чем на конечном числе мест, и символ ∞ в каждой из них стоит на местах с одними и теми же номерами. Характеристики двух линейно зависимых элементов эквивалентны. Класс эквивалентных характеристик наз. т и п о м. Всякой А. г. без кручения ранга I однозначно соответствует тип, наз. т и п о м д а н н о й г р у п п ы, причем неизоморфным группам соответствуют различные типы.

А. г. без кручения, разложимые в прямую сумму групп ранга 1, наз. в п о л н е р а з л о ж и м ы м и. Не всякая подгруппа вполне разложимой группы будет вполне разложимой (но всякое прямое слагаемое таково). Для всякого целого n существует А. г. без кручения ранга n, неразложимая в прямую сумму. Для счетных А. г. без кручения может быть построена полная система инвариантов.

А. г. наз. п о л н о й, или д е л и м о й, если для любого ее элемента a и любого целого m в ней разрешимо уравнение $mx=a$. Все делимые А. г. исчерпываются всевозможными прямыми суммами групп, изоморфных Q и группам Z_{p^∞}, причем мощности множеств компонент, изоморфных Q, а также Z_{p^∞} (для каждого p), составляют полную и независимую систему инвариантов делимой группы. Всякая А. г. может быть изоморфно вложена в нек-рую делимую А. г. Делимые А. г. и только они являются инъективными объектами в категории А. г. и служат прямыми слагаемыми для всякой содержащей их А. г. Таким образом, всякая А. г. представима в виде прямой суммы полной группы и так наз. р е д у ц и р о в а н н о й г р у п п ы, т. е. группы, к-рая не содержит ненулевых полных подгрупп. Описание редуцированных А. г. известно лишь в немногих случаях. Так, теорема Ульма (см. [1], § 28) дает описание всех счетных редуцированных периодич. А. г.

Теория А. г., берущая свое начало в теории чисел, находит применение во многих современных математич. теориях. Так, теория двойственности характеров конечных А. г. получила глубокое развитие в теории двойственности для топологических локально компактных групп. Развитие гомологич. алгебры позволило решить ряд проблем в теории А. г., напр. дать описание множества всех расширений одной группы с помощью другой. Развитие теории модулей неразрывно связано с А. г. как модулями над кольцом целых чисел. Многие результаты теории А. г. удается перенести на случай модулей над кольцом главных идеалов. Относительная простота и изученность А. г. (что подтверждает, напр., разрешимость *элементарной теории* А. г.) вместе с до-

вольно разнообразным запасом объектов делают А. г. постоянным источником примеров во многих разделах математики.

Лит.: [1] К у р о ш А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] F u c h s L., Abelian groups, 3 ed., Bdpst., 1966; [3] Ф у к с Л., Бесконечные абелевы группы, пер. с англ., т. 1, М., 1974; [4] K a p l a n s k y I., Infinite abelian groups, Ann Arbor, 1954; [5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 9—44; [6] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 5—45. *Ю. Л. Ершов.*

АБЕЛЕВА КАТЕГОРИЯ — категория, обладающая рядом характерных свойств категории всех абелевых групп. А. к. были введены как основа абстрактного построения гомологич. алгебры (см. [4]). Категория $\mathfrak{A}$ наз. а б е л е в о й (см. [2]), если она удовлетворяет следующим аксиомам:

А0. Существует *нулевой объект*.

А1. Каждый морфизм обладает *ядром* и *коядром*.

А2. Каждый мономорфизм является *нормальным мономорфизмом*; каждый эпиморфизм является *нормальным эпиморфизмом*.

А3. Для каждой пары объектов существуют *произведение* и *копроизведение*.

Часто в определении А. к. дополнительно предполагается, что $\mathfrak{A}$ локально малая слева категория (см. *Малая категория*). Для А. к. это предположение равносильно локальной малости справа и, следовательно, локальной малости. Копроизведение объектов A и B А. к. наз. также п р я м о й с у м м о й этих объектов и обозначают $A \oplus B$ или $A \dotplus B$.

П р и м е р ы А. к.

1) Категория, двойственная А. к., также является А. к.

2) Категория ${}_R\mathfrak{M}$ всех левых унитарных модулей над произвольным ассоциативным кольцом R с единицей и всех R-модульных гомоморфизмов является А. к. (напр., категория всех абелевых групп).

3) Всякая *полная подкатегория* А. к., содержащая вместе с каждым морфизмом его ядро и коядро и вместе с каждой парой объектов A, B — их произведение и копроизведение, есть А. к.

Все малые А. к. исчерпываются подкатегориями указанного типа категорий ${}_R\mathfrak{M}$ левых унитарных модулей, а именно, справедлива следующая т е о р е м а М и т ч е л л а: для всякой малой А. к. существует полное точное вложение в нек-рую категорию ${}_R\mathfrak{M}$.

4) Всякая категория диаграмм $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{A})$ со схемой $\mathfrak{D}$ над А. к. $\mathfrak{A}$ является А. к. В схеме $\mathfrak{D}$ можно выделить множество C соотношений коммутативности, т. е. множество пар (φ, ψ) путей $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$ в $\mathfrak{D}$ с общими началом и концом. Тогда полная подкатегория категории $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{A})$, порожденная всеми такими диаграммами D: $\mathfrak{D} \to \mathfrak{A}$, что

$$D(\varphi) = D(\varphi_1) \ldots D(\varphi_n) = D(\psi_1) \ldots D(\psi_m) = D(\psi),$$

является А. к. В частности, если $\mathfrak{D}$ — малая категория, а множество C состоит из всех пар вида $(\alpha\beta, \gamma)$, где $\gamma = \alpha\beta$, то соответствующая подкатегория является А. к. одноместных ковариантных *функторов* из $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{A}$.

Пусть в малой категории $\mathfrak{D}$ есть нулевой объект; функтор $F : \Sigma \to \mathfrak{A}$ наз. н о р м а л и з о в а н н ы м, если он переводит нулевой объект в нулевой объект. Полная подкатегория категории функторов, порожденная нормализованными функторами, является А. к. В частности, если $\mathfrak{D}$ — категория, объектами к-рой служат все целые числа и нулевой объект N, а ненулевые неединичные морфизмы образуют последовательность

$$\ldots \longrightarrow (-1) \xrightarrow{d_{-1}} 0 \xrightarrow{d_0} 1 \xrightarrow{d_1} 2 \longrightarrow \ldots,$$

в к-рой $d_n d_{n+1} = 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то соответствующая подкатегория, порождаемая нормализованными функторами, наз. к а т е г о р и е й к о м п л е к с о в над $\mathfrak{A}$. В категории комплексов определяются алди-

тивные функторы Z^n, B^n, H^n соответственно n-мерных циклов, n-мерных граней и n-мерной гомологии со значениями в $\mathfrak{A}$ и на их основе развивается аппарат гомологич. алгебры.

5) Полная подкатегория $\mathfrak{A}'$ А. к. $\mathfrak{A}$ наз. п л о т н о й, если она содержит *подобъекты* и *факторобъекты* своих объектов и если в *точной последовательности*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

$B \in \mathrm{Ob}\mathfrak{A}'$ тогда и только тогда, когда A, $C \in \mathrm{Ob}\mathfrak{A}'$. Факторкатегория $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ строится следующим образом. Пусть $(R, \mu]$ — подобъект прямой суммы $A \oplus B$ с проекциями π_1, π_2 и пусть квадрат

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\mu\pi_1} & A \\ {\scriptstyle \mu\pi_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & X \end{array}$$

коуниверсален (т. е. является корасслоенным произведением). Подобъект $(R, \mu]$ наз. $\mathfrak{A}'$-подобъектом, если $\mathrm{Coker}\ \mu\pi_1$, $\mathrm{Ker}\ \beta \in \mathfrak{A}'$. Два $\mathfrak{A}'$-подобъекта эквивалентны, если они содержат нек-рый $\mathfrak{A}'$-подобъект. Множество $H_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'}(A, B)$ состоит по определению из классов эквивалентных $\mathfrak{A}'$-подобъектов. Обычное умножение бинарных отношений согласовано с введенной эквивалентностью, что позволяет построить факторкатегорию $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$, являющуюся А. к. *Точный функтор* $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ определяется сопоставлением каждому морфизму $\alpha: A \to B$ его графика в $A \oplus B$. Подкатегория $\mathfrak{A}'$ наз. п о д к а т е г о р и е й л о к а л и з а ц и и, если функтор T обладает полным унивалентным сопряжением справа функтором $Q : \mathfrak{A}/\mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$.

6) Для всякого топологич. пространства X категория левых G-модулей над X, где G — пучок колец с единицей над X, является А. к.

Во всякой А. к. $\mathfrak{A}$ можно ввести частичное суммирование морфизмов таким образом, что $\mathfrak{A}$ станет *аддитивной категорией*. Поэтому в А. к. произведение и копроизведение любой пары объектов *совпадают*. Более того, в определении А. к. можно предполагать существование либо произведений, либо копроизведений. Всякая А. к. есть *бикатегория* с единственной бикатегорной структурой. Перечисленные свойства характеризуют А. к.: категория $\mathfrak{A}$ с конечными произведениями является абелевой тогда и только тогда, когда она аддитивна и когда всякий морфизм α имеет ядро и коядро и разлагается в произведение

$$\alpha = \mathrm{Coker}\,(\ker \alpha)\ \theta\ \ker\,(\mathrm{Coker}\,\alpha),$$

в к-ром θ — изоморфизм.

Приведенная выше теорема Митчелла обосновывает метод «диаграммного поиска» в А. к.: всякое утверждение о коммутативных диаграммах, справедливое во всех категориях левых модулей ${}_R\mathfrak{M}$ и вытекающее из точности нек-рых последовательностей морфизмов, справедливо во всех А. к.

В локально малой А. к. $\mathfrak{A}$-подобъекты любого объекта образуют *дедекиндову решетку*. Если в $\mathfrak{A}$ существуют произведения (или копроизведения) любого семейства объектов, то эта решетка и оказывается полной. Перечисленные условия заведомо выполняются, если в $\mathfrak{A}$ имеется образующий объект U и существуют копроизведения

$$\prod\nolimits^{*}_{i \in I} U_i, \quad U_i = U$$

для любого множества I. Таковы, напр., *Гротендика категории*, эквивалентные факторкатегориям категорий модулей по подкатегориям локализации (т е о р е м а Г а б р и е л я — П о п е с к у).

Лит.: [1] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [2] Freyd P., Abelian categories, N. Y., 1964; [3] Gabriel P., «Bull. Soc. math. France», 1962, t. 90, № 3, p. 323—448; [4] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961.
М. Ш. Цаленко.

АБЕЛЕВА СХЕМА — гладкая схема групп над базисной схемой S, слои к-рой являются *абелевыми многообразиями*. Эквивалентное определение состоит в том, что абелева схема над S, или абелева S-схема, есть собственная гладкая S-схема групп, все слои к-рой геометрически связаны. С интуитивной точки зрения абелеву S-схему можно понимать как семейство абелевых многообразий, параметризованных схемой S. На А. с. переносится ряд фундаментальных свойств абелевых многообразий. Напр., абелева S-схема A является коммутативной S-схемой групп (см. [1]); если схема S нормальна, то A проективна над S (см. [2]).

А. с. изучаются в основном как схемы модулей абелевых многообразий с различными дополнительными структурами, а также в теории редукции абелевых многообразий (см. *Нерона модель*).

Лит.: [1] Mumford D., Geometric invariant theory, B., 1965; [2] Raynaud M., Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes, B., 1970.
И. В. Долгачев.

АБЕЛЕВА ФУНКЦИЯ — обобщение *эллиптической функции* одного комплексного переменного на случай многих комплексных переменных. Мероморфная в комплексном пространстве $\mathbb{C}^p$, $p \geqslant 1$, функция $f(z)$ от p комплексных переменных $z_1, z_2, \ldots, z_p$, $z=(z_1, z_2, \ldots, z_p)$, наз. А. ф., если существуют $2p$ векторов-строк из $\mathbb{C}^p$

$$w_\nu = (\omega_{1\nu}, \omega_{2\nu}, \ldots, \omega_{p\nu}), \quad \nu = 1, 2, \ldots, 2p,$$

линейно независимых над полем действительных чисел и таких, что $f(z+w_\nu)=f(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}^p$, $\nu=1, 2, \ldots, 2p$. Векторы w_ν наз. периодами, или системами периодов, А. ф. $f(z)$. Все периоды А. ф. $f(z)$ образуют абелеву группу Γ по сложению, наз. группой периодов (или модулем периодов). Базис этой группы наз. базисом периодов А. ф., а также системой основных (или примитивных) периодов. А. ф. наз. вырожденной, если существует такое линейное преобразование переменных $z_1, z_2, \ldots, z_p$, к-рое переводит $f(z)$ в функцию меньшего числа переменных; в противном случае $f(z)$ наз. невырожденной А. ф. Вырожденные А. ф. характеризуются также тем, что они имеют бесконечно малые периоды, т. е. для любого числа $\varepsilon>0$ можно найти период w_ν, для к-рого

$$\| w_p \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} | \omega_{kp} |^2} < \varepsilon.$$

Если $p=1$, то невырожденные А. ф. суть эллиптич. функции одного комплексного переменного. Каждая А. ф. с группой периодов Γ естественным образом отождествляется с мероморфной функцией на комплексном торе $\mathbb{C}^p/\Gamma$, т. е. на факторпространстве $\mathbb{C}^p/\Gamma$ (см. также *Квазиабелева функция*).

Исследование А. ф. началось в 19 в. в связи с проблемой обращения *абелевых интегралов* I рода (см. *Якоби проблема обращения*, [1], [2]). Возникающие при решении этой проблемы А. ф. наз. специальными А. ф., а иногда в старых работах под А. ф. только они и подразумевались. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_p$ — линейно независимые нормальные абелевы интегралы I рода, построенные на римановой поверхности F:

$$u_1 = \int_{c_1}^{x} du_1, \quad u_2 = \int_{c_2}^{x} du_2, \quad \ldots, \quad u_p = \int_{c_p}^{x} du_p,$$

а

$$z_j = \int_{c_1}^{x_1} du_j + \int_{c_2}^{x_2} du_j + \ldots + \int_{c_p}^{x_p} du_j, \quad j=1, 2, \ldots, p,$$

— заданная система сумм, в к-рой нижние пределы интегрирования $c_1, c_2, \ldots, c_p$ считаются фиксированными на поверхности F. Тогда специальные А. ф. можно определить как все рациональные функции координат p верхних пределов $x_1, x_2, \ldots, x_p$, рассматриваемых в свою очередь как функции от p точек $z_1, z_2, \ldots, z_p$ поверхности F. В символической записи, ведущей свое начало от К. Вейерштрасса (K. Weierstrass), любую специальную А. ф. $\mathrm{Al}(z)$ можно изобразить в виде

$$\mathrm{Al}(z)=\mathrm{Al}(z_1, z_2, \ldots, z_p)=$$
$$=R[x_1(z_1, z_2, \ldots, z_p), x_2(z_1, z_2, \ldots, z_p), \ldots, x_p(z_1, z_2, \ldots, z_p)].$$

Соответствующие специальным А. ф. комплексные торы $\mathbb{C}^p/\Gamma$ являются *Якоби многообразиями* алгебраич. кривых.

Матрица W, столбцы к-рой образуют базис периодов А. ф. $f(z)$, имеет размер $p\times 2p$ и наз. матрицей периодов А. ф. $f(z)$. Для того чтобы данная матрица W размера $p\times 2p$ была матрицей периодов нек-рой невырожденной А. ф. $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла определенным условиям (условия Римана – Фробениуса). Она должна являться римановой матрицей, т. е. для W должна существовать такая антисимметрическая неособенная целочисленная квадратная матрица M порядка $2p$, что: 1) $WMW^T=0$, где W^T — транспонированная матрица W; 2) матрица $iWM\bar{W}^T$ определяет положительно определенную эрмитову форму (см. [3]). Если выразить условия 1) и 2) в виде соответственно уравнений и неравенств, то получится система $p(p-1)/2$ римановых уравнений и $p(p-1)/2$ римановых неравенств. Число p наз. родом матрицы W и соответствующей А. ф. $f(z)$. Столбцы $w_\nu=\mathrm{Re}w_\nu+i\mathrm{Im}w_\nu$ матрицы W, рассматриваемые как векторы в действительном евклидовом пространстве R^{2p}, определяют параллелотоп периодов А. ф. $f(z)$.

Все А. ф., соответствующие одной и той же матрице периодов W, образуют абелево функциональное поле K_W. В случае, когда поле K_W содержит невырожденную А. ф., степень его трансцендентности над полем $\mathbb{C}$ равна p; тор $\mathbb{C}^p/\Gamma$ при этом является *абелевым многообразием*, а K_W совпадает с его полем рациональных функций. Если же все А. ф. из K_W вырожденные, то K_W изоморфно полю рациональных функций на абелевом многообразии, размерность к-рого меньше p. См. также *Квазиабелева функция*.

Подобно эллиптич. функциям, каждая А. ф. может быть представлена в виде отношения двух целых трансцендентных *тета-функций*, представимых в свою очередь в виде *тета-рядов*. Задание римановой матрицы W определяет класс тета-рядов, позволяющий построить все А. ф. поля K_W.

Для специальных А. ф. матрица W посредством линейного преобразования независимых переменных $z_1, z_2, \ldots, z_p$ всегда может быть приведена к виду

$$W=\begin{Vmatrix} \pi i & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ 0 & \pi i & \ldots & 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \pi i & a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{Vmatrix}.$$

При этом римановы соотношения между элементами матрицы $\|a_{jk}\|$, $j, k=1, 2, \ldots, p$, должны обеспечивать симметрию этой матрицы, $a_{jk}=a_{kj}$, и положительную определенность матрицы действительных частей $\|\mathrm{Re}\,a_{jk}\|$, $j, k=1, 2, \ldots, p$. Однако при $p>3$ независимых среди элементов a_{jk} матрицы $\|a_{jk}\|$ будет только $3(p-1)$, т. е. столько, сколько конформных модулей имеет риманова поверхность F, на к-рой решается проблема обращения (см. *Модули римановой поверхности*). По-

мимо римановых соотношений, в этом случае между a_{jk} существует $(p-2)(p-3)/2$ соотношений трансцендентной природы, явный вид которых для случая $p=4$ впервые нашел в 1886 Ф. Шотки (F. Schottky; обзор последующих достижений по этой проблеме см. в [5]).

Специальные А. ф. представимы в виде отношения двух целых тета-функций с полуцелыми характеристиками специального вида. Из этого представления вытекает ряд свойств специальных А. ф., обобщающих многие свойства эллиптич. функций; так: производные А. ф. $f(z)$ по любому аргументу z_j суть А. ф.; любые $p+1$ А. ф. связаны алгебраич. уравнением; любую А. ф. можно выразить рационально через $p+1$ нек-рых А. ф., напр. через произвольную А. ф. и ее p частных производных 1-го порядка; для А. ф. справедлива т е о р е м а с л о ж е н и я, т. е. значение А. ф. в точке $a+b\in\mathbb{C}^p$ можно выразить рационально через значения нек-рых $p+1$ А. ф. в точках a, $b\in\mathbb{C}^p$.

А. ф. имеют большое значение в алгебраич. геометрии как средство *униформизации* алгебраич. многообразий определенных классов.

Лит.: [1] С п р и н г е р Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960, гл. 10; [2] Ч е б о т а р е в Н. Г., Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948, гл. 8, 9; [3] З и г е л ь К., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1954; [4] В е й л ь А., Введение в теорию кэлеровых многообразий, пер. с франц., М., 1961; [5] М а м ф о р д Д., «Математика», 1973, т. 17, № 4, с. 34—49; [6] S t a h l H., Theorie der Abelschen Funktionen, Lpz., 1896; [7] C l e b s c h A., G o r d a n P., Theorie der Abelschen Funktionen, Lpz., 1866; Neudruck, Würzburg, 1967; [8] C o n f o r t o F., Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, B.— [u.a.], 1956.

Е. Д. Соломенцев.

АБЕЛЕВО МНОГООБРАЗИЕ — *алгебраическая группа*, являющаяся полным *алгебраическим многообразием*. Условие полноты накладывает сильные ограничения на А. м. Так, А. м. можно вложить в качестве замкнутого подмногообразия в проективное пространство, каждое рациональное отображение неособого многообразия в А. м. регулярно, групповой закон на А. м. всегда коммутативен.

Теория А. м. над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ эквивалентна, по существу, теории абелевых функций, основы к-рой были заложены в работах К. Якоби (C. Jacobi), Н. Абеля (N. Abel) и Б. Римана (B. Riemann). Если $\mathbb{C}^n$ есть n-мерное векторное пространство, $\Gamma\subset\mathbb{C}^n$ — решетка (см. *Дискретная подгруппа)* ранга $2n$, то факторгруппа $X=\mathbb{C}^n/\Gamma$ будет *комплексным тором*. Мероморфные функции на X отождествляются с мероморфными функциями на $\mathbb{C}^n$, инвариантными относительно решетки периодов Γ. Если степень трансцендентности поля K мероморфных функций на X равна n, то X можно наделить структурой алгебраич. группы, единственной в силу компактности X и такой, что поле рациональных функций этой структуры совпадает с K. Получающиеся таким образом алгебраич. группы являются А. м. и всякое А. м. над полем $\mathbb{C}$ имеет такой вид. Матрицу, задающую базис решетки Γ, можно привести к виду $(E|Z)$, где E — единичная матрица, а Z — матрица порядка $n\times n$. Комплексный тор $X=\mathbb{C}^n/\Gamma$ есть А. м. в том и только том случае, когда матрица Z симметрична и ее мнимая часть положительно определена. Необходимо отметить, что как вещественные группы Ли все многообразия X изоморфны, но это неверно для их аналитич. или алгебраич. структур, к-рые сильно меняются при деформации решетки Γ. Рассмотрение матрицы периодов Z показывает, что это изменение носит аналитич. характер и это приводит к конструкции многообразия модулей всех абелевых многообразий данной размерности n. Его размерность равна $\frac{1}{2}n(n+1)$ (см. *Модулей проблема*).

Теория А. м. над произвольным полем k принадлежит А. Вейлю (см. [1], [2]). Она имеет большое количе-

ство приложений как в самой алгебраич. геометрии, так и в других областях математики, особенно в теории чисел и теории автоморфных функций. Каждому полному алгебраич. многообразию можно сопоставить функториальным образом А. м. (см. *Альбанезе многообразие*, *Пикара многообразие*, *Промежуточный якобиан*). Эти конструкции представляют собой мощный метод изучения геометрич. структуры алгебраич. многообразий. Так, с их помощью было получено одно из решений *Люрота проблемы*. Другим приложением является доказательство гипотезы Римана для алгебраич. кривых над конечным полем. Именно для решения этой проблемы и была создана абстрактная теория А. м. Она послужила также одним из источников теории *l-адических когомологий*. Простейшим примером таких когомологий служит *Тейта модуль* А. м. Он является проективным пределом групп X_{l^n} точек l^n-го порядка при $n\to\infty$. Определение структуры последних было одним из главных достижений теории А. Вейля. Именно, если m взаимно просто с характеристикой p поля k и k алгебраически замкнуто, то группа X_m изоморфна $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{2\dim X}$. Ситуация в случае $m=p$ гораздо сложнее и она привела к появлению таких понятий, как конечные групповые схемы, формальные группы и p-делимые группы. Изучение действия эндоморфизмов А. м., в частности *Фробениуса эндоморфизма* на его модуль Тейта, дает возможность доказать гипотезу Римана, а также является основным инструментом в теории комплексного умножения А. м. Другой круг вопросов, связанный с модулем Тейта, состоит в исследовании действия на нем группы Галуа замыкания основного поля. Отсюда возникли гипотезы Тейта и теория Тейта—Хонды, дающая для А. м. над конечными полями их описание в терминах модуля Тейта [5].

Интенсивно развивается изучение А. м. над локальными, в том числе p-адическими полями. Аналог упомянутого выше представления А. м. в виде факторпространства $\mathbb{C}^n/\Gamma$ (которое обычно наз. униформизацией) был построен над такими полями Д. Мамфордом (D. Mumford) и М. Рейно (M. Raynaud). В отличие от комплексного случая униформизуются не все А. м., а только имеющие редукцией по mod p мультипликативную группу [6]. Теория А. м. над глобальными (числовыми и функциональными) полями играет важную роль в диофантовой геометрии. Основной результат здесь — т е о р е м а М о р д е л л а — В е й л я: группа рациональных точек А. м., определенного над конечным расширением поля рациональных чисел, конечно порождена.

Лит.: [1] W e i l A., Variétés abéliennes et courbes algébriques, P., 1948; [2] е г о ж е, Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, P., 1948; [3] В е й л ь А., Введение в теорию келеровых многообразий, пер. с франц., М., 1961; [4] L a n g S., Abelian variétés, N.Y.—L., 1959; [5] М а м ф о р д Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971; [6] М а н и н Ю. И., в сб.: Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики, т. 3, М., 1974, с. 5—93; [7] С е р р Ж. П., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [8] З и г е л ь К., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1954.

Б. Б. Венков, А. Н. Паршин.

АБЕЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'=f_0(x)+f_1(x)y+f_2(x)y^2+f_3(x)y^3$$

(А. д. у. 1-го рода) или

$$[g_0(x)+g_1(x)y]y'=f_0(x)+f_1(x)y+f_2(x)y^2+f_3(x)y^3$$

(А. д. у. 2-го рода). Эти уравнения возникли в связи с исследованиями Н. Абеля [1] по теории эллиптич. функций. А. д. у. 1-го рода представляет естественное обобщение *Риккати уравнения*.

Если $f_1\in C(a,\ b)$, f_2 и $f_3\in C^1(a,\ b)$ и $f_3(x)\neq 0$ при $x\in[a,\ b]$, то А. д. у. 1-го рода заменой переменных

(см. [2]) приводится к нормальной форме $dz/dt = z^3 + \Phi(t)$. В общем случае А. д. у. 1-го рода в замкнутой форме не интегрируется; это удается сделать лишь в отдельных частных случаях (см. [2]). Если g_0 и $g_1 \in C^1(a, b)$ и $g_1(x) \neq 0$, $g_0(x) + g_1(x) y \neq 0$, то А. д. у. 2-го рода сводится к А. д. у. 1-го рода подстановкой $g_0(x) + g_1(x) y = 1/z$.

А. д. у. 1-го и 2-го рода, как и их дальнейшие обобщения

$$y' = \sum_{i=0}^{n} f_i(x)\, y^i, \quad y' \sum_{j=0}^{m} g_j(x)\, y^j = \sum_{i=0}^{n} f_i(x)\, y^i,$$

подробно рассматривались в комплексной области (см., напр., [3]).

Лит.: [1] Abel N. H., «J. reine und angew. Math.», 1829, Bd 4, S. 309—48; [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [3] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950.

Н. Х. Розов.

АБЕЛЯ ЗАДАЧА — задача о нахождении в вертикальной плоскости s, τ) такой кривой, по к-рой материальная точка под действием силы тяжести, начав движение без начальной скорости в точке с ординатой x, достигнет оси $O\tau$ за время $T = f(x)$, где функция $f(x)$ задана заранее. А. з. поставлена Н. Абелем (N. Abel) в 1823; при ее решении им было получено (и решено) одно из первых интегральных уравнений — *Абеля интегральное уравнение*. Именно, если ω есть угол наклона к оси $O\tau$ касательной к искомой кривой, то

$$\frac{ds}{d\tau} = -\sqrt{2g(x - s)}\, \sin\omega.$$

Интегрирование этого равенства в пределах от 0 до x и введение обозначений

$$\frac{1}{\sin\omega} = \varphi(s), \quad -\sqrt{2g}\,\Phi(x) = f(x)$$

приводит к интегральному уравнению

$$\int_0^x \frac{\varphi(s)\, ds}{\sqrt{x - s}} = f(x)$$

относительно неизвестной функции $\varphi(s)$, нахождение к-рой дает возможность составить уравнение искомой кривой. Решение приведенного выше уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{f(0)}{\sqrt{x}} + \int_0^x \frac{f'(\tau)\, d\tau}{\sqrt{x - \tau}}\right].$$

Лит.: [1] Abel N. H., Œuvres complètes, t. 1, Christiania, 1881, p. 11—27.

Б. В. Хведелидзе.

АБЕЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{\varphi(s)}{\sqrt{x - s}}\, ds = f(x), \qquad (1)$$

к к-рому сводится решение *Абеля задачи*. А.и.у. наз. также более общее уравнение (о б о б щ е н н о е А.и.у.)

$$\int_a^x \frac{\varphi(s)}{(x - s)^{\alpha}}\, ds = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \qquad (2)$$

где $a > 0$ и $0 < \alpha < 1$ — заданные постоянные, $f(x)$ — известная функция, а $\varphi(x)$ — искомая функция. Выражение $(x - s)^{-\alpha}$ наз. я д р о м А. и. у., или я д р о м А б е л я. А. и. у. принадлежат к классу *Вольтерра уравнений* 1-го рода. Уравнение

$$\int_a^b \frac{\varphi(s)}{|x - s|^{\alpha}}\, ds = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \qquad (3)$$

наз. А. и. у. с п о с т о я н н ы м и п р е д е л а м и.

Если $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то А.и.у. (2) имеет единственное непрерывное решение, представимое формулой

$$\varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\, \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)\, dt}{(x - t)^{1 - \alpha}}, \qquad (4)$$

или, что то же самое, формулой

$$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\alpha}}+\int_a^x\frac{f'(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right]. \qquad (5)$$

Формула (5) является решением А. и. у. (2) при более широких предположениях (см. [3], [4]). Так, в [3] показано, что если $f(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то А. и.у. (2) имеет в классе интегрируемых по Лебегу функций единственное решение, определяемое формулой (5). Решение А.и.у. (3) дано в [2]; см. также [6].

Лит.: [1] Bôcher M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1909, v. 10, p. 271—78; [2] Carleman T., «Math. Z.», 1922, Bd 15, S. 111—20; [3] Tonelli Z., «Math. Ann.», 1928, Bd 99, S. 183—99; [4] Tamarkin J., «Ann. Math.», 1930, v. 31, p. 219—29; [5] Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959; [6] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 2 изд., М., 1963. *Б. В. Хведелидзе.*

АБЕЛЯ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования числовых рядов. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k$$

суммируется методом Абеля (*A*-методом) к числу S, если для любого действительного числа x, $0<x<1$, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

сходится и

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=S.$$

Этот метод суммирования встречался еще у Л. Эйлера (L. Euler) и даже у Г. Лейбница (G. Leibniz). Название «А.м.с.» обосновано *Абеля теоремой* о непрерывности суммы степенного ряда. А. м. с. является вполне *регулярным методом суммирования*, к-рый сильнее всей совокупности *Чезаро методов суммирования*. А. м. с. применяется в связи с тауберовыми теоремами для доказательства сходимости рядов.

С А. м. с. тесно связан A^*-метод суммирования: пусть z-комплексное число, $|z|<1$; ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k$$

суммируется A^*-методом к числу S, если

$$\lim\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k=S,$$

когда $z\to 1$ по любому некасательному к единичной окружности пути.

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961. *А. А. Захаров.*

АБЕЛЯ НЕРАВЕНСТВО об оценке суммы попарных произведений чисел: если заданы такие множества чисел a_k и b_k, что все суммы $B_k=b_1+b_2+\ldots+b_k$, $k=1,2,\ldots,n$, ограничены по абсолютной величине числом B, т. е. $|B_k|\leqslant B$, и либо $a_i\geqslant a_{i+1}$, либо $a_i\leqslant a_{i+1}$, $i=1,2,\ldots,n-1$, то

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant B(|a_1|+2|a_n|).$$

В случае, когда a_k не возрастают и неотрицательны, оценка упрощается:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant Ba_1.$$

А. н. доказывается с помощью *Абеля преобразования*. *Л. Д. Кудрявцев.*

АБЕЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, суммирование по частям,— преобразование вида:

$$\sum_{k=1}^{N}a_kb_k=a_Nb_N-a_1B_0-\sum_{k=1}^{N-1}B_k(a_{k+1}-a_k),$$

где a_k, b_k заданы, B_0 выбирается произвольно, а $B_k=B_{k-1}+b_k=B_0+b_1+b_2+\ldots+b_k$, $k=1,\ldots,N$. А. п. есть дискретный аналог *интегрирования по частям формулы*.

Если $a_N \to 0$ и последовательность $\{B_k\}$ ограничена, то А. п. обобщается на ряды:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) B_k - a_1 B_0.$$

При помощи А. п. доказываются многие признаки сходимости числовых и функциональных рядов (см. *Абеля признак*). А. п. ряда часто приводит к ряду с той же суммой, но с лучшей сходимостью. Кроме того, А. п. постоянно используется в различных оценках (см. *Абеля неравенство*), в частности при исследовании скорости сходимости ряда. А. п. введено Н. Абелем [1].

Лит.: [1] Abel N. H., «J. reine und angew. Math.», 1826, Bd 1, S. 311—99; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 1, 2 изд., М., 1967; [3] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., ч. 1, 2 изд., М., 1963.

Л. П. Купцов.

АБЕЛЯ ПРИЗНАК — 1) А. п. для числовых рядов: если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

а числа a_n образуют монотонную ограниченную последовательность, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

сходится.

2) А. п. для функциональных рядов: ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$$

равномерно сходится на множестве X, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

равномерно сходится на X, а функции $a_n(x)$, $n=1,2,\ldots$, при каждом $x \in X$ образуют монотонную последовательность, равномерно ограниченную на множестве X. Аналогично формулируется А. п. равномерной сходимости интегралов

$$\int_{\alpha}^{\infty} a(n,\ x)\, b(n,\ x)\, dn,$$

зависящих от параметра $x \in X$.

А. п. могут быть усилены (см., напр., *Дедекинда признак*). См. также *Дирихле признак*, *Абеля преобразование*.

Лит.: [1] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, 7 изд., М., 1969; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, т. 1, 2 изд., М., 1973; [3] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., ч. 1, 2 изд., М., 1963.

Л. П. Купцов.

АБЕЛЯ ТЕОРЕМА — 1) А. т. об алгебраических уравнениях: ни для какого n, большего или равного пяти, нельзя указать формулу, к-рая выражала бы корни любого уравнения n-й степени через его коэффициенты при помощи радикалов. Найдена Н. Абелем в 1824 (см. [1]). А. т. может быть получена также как следствие *Галуа теории*, из к-рой вытекает и более общее утверждение: для любого $n \geqslant 5$ существуют алгебраич. уравнения с целыми коэффициентами, корни к-рых не выражаются через радикалы из рациональных чисел. Современную формулировку А. т. для уравнений над произвольным полем см. *Алгебраическое уравнение*.

2) А. т. для степенных рядов: если степенной ряд

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-b)^k, \qquad (*)$$

где a_k, b, z — комплексные числа, сходится при $z=z_0$, то он абсолютно и равномерно сходится в любом круге $|z-b| \leqslant \rho$ радиуса $\rho < |z_0 - b|$ с центром в точке b. Установлена Н. Абелем [2]. Из этой теоремы вытекает, что

существует число $R \in [0, \infty]$, обладающее тем свойством, что при $|z-b|<R$ ряд сходится, а при $|z-b|>R$ расходится. Это число R наз. радиусом сходимости ряда (*), а круг $|z-b|<R$ наз. кругом сходимости ряда (*).

3) А. т. о непрерывности: если степенной ряд (*) сходится в точке z_0 границы круга сходимости, то он представляет собой непрерывную функцию в любом замкнутом треугольнике T с вершинами z_0, z_1, z_2, где z_1, z_2 лежат внутри круга сходимости. В частности,

$$\lim_{z \to z_0,\ z \in T} S(z) = S(z_0).$$

Этот предельный переход всегда можно осуществить по радиусу: на всем радиусе круга сходимости, соединяющем точки b и z_0, ряд (*) будет сходиться равномерно. Эта теорема используется, в частности, для вычисления суммы степенного ряда, сходящегося в точках на границе круга сходимости.

4) А. т. для рядов Дирихле: если *Дирихле ряд*

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad \lambda_n > 0,$$

сходится в точке $s_0 = \sigma_0 + it_0$, то он сходится в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$ и сходится равномерно внутри любого угла $|\arg(s-s_0)| \leqslant \theta < \pi/2$. Является обобщением А. т. для степенных рядов (достаточно взять $\lambda_n = n$ и обозначить $e^{-s} = z$). Из теоремы следует, что область сходимости ряда Дирихле — нек-рая полуплоскость $\sigma > c$, где c — абсцисса сходимости ряда.

Для обыкновенного ряда Дирихле (когда $\lambda_n = \ln n$) с известной асимптотикой для суматорной функции $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ коэффициентов ряда справедлива следующая теорема: если

$$A_n = Bn^{s_1} (\ln n)^{\alpha} + O(n^{\beta}),$$

где B, s_1, α — комплексные числа, β — действительное число, $\sigma_1 - 1 < \beta < \sigma_1$, то ряд Дирихле сходится при $\sigma_1 < \sigma$, функция $\varphi(s)$ регулярно продолжается на полуплоскость $\beta < \sigma$, исключая точку $s = s_1$, причем

$$\varphi(s) = B\Gamma(\alpha+1)\, s\, (s-s_1)^{-\alpha-1} + g(s),$$

если $\alpha \neq -1, -2, \ldots$,

$$\varphi(s) = B \frac{(-1)^{-\alpha}}{(-\alpha-1)!}\, s\, (s-s_1)^{-\alpha-1} \ln(s-s_1) + g(s),$$

если $\alpha = -1, -2, \ldots$ Здесь $g(s)$ — регулярная при $\sigma > \beta$ функция.

Напр., дзета-функция Римана $\zeta(s)$ ($A_n = n$, $B = 1$, $s_1 = 1$, $\alpha = 0$, $\beta > 0$) регулярна по крайней мере в полуплоскости $\sigma > 0$, исключая точку $s = 1$, в к-рой она имеет полюс 1-го порядка с вычетом, равным 1. Эта теорема допускает различные обобщения. Так, если

$$A_n = \sum_{j=1}^{k} B_j n^{s_j} (\ln n)^{\alpha_j} + O(n^{\beta}),$$

где B_j, s_j, α_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ — любые комплексные числа, и $\sigma_k - 1 < \beta < \sigma_k < \ldots < \sigma_1$, то ряд Дирихле сходится при $\sigma > \sigma_1$, $\varphi(s)$ регулярен в области $\sigma > \beta$, исключая точки $s_1, s_2, \ldots, s_k$, в к-рых он имеет алгебраич. или логарифмич. особенности. Теоремы такого типа позволяют на основании асимптотики A_n получать определенные сведения о поведении ряда Дирихле в нек-рой полуплоскости.

Лит.: [1] Abel N., Oeuvres complètes, t. 1, Christiania, 1881; [2] его же, «J. reine und angew. Math.», 1826, Bd 1, S. 311—99; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967.

Л. П. Купцов.

АБЕЛЯ — ГОНЧАРОВА ПРОБЛЕМА, проблема Гончарова, — проблема в теории функций комплексного переменного, состоящая в нахождении множества всех функций $f(z)$ из того или иного класса, удовлетворяющих соотношениям $f^{(n)}(\lambda_n) = A_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$,

где $\{A_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ — допустимые для данного класса последовательности комплексных чисел. Эта проблема была поставлена В. Л. Гончаровым (см. [2]).

Функции $f(z)$ ставится в соответствие ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(\lambda_n)\, P_n(z) \qquad (*)$$

— интерполяционный ряд Абеля — Гончарова, где $P_n(z)$ — полином Гончарова, определяемый равенствами:

$$P_n^{(k)}(\lambda_k)=0, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1, \quad P_n^{(n)}(z)\equiv 1.$$

Случай, когда $\lambda_n=a+nh\,(n=0,1,\ldots)$, a и h — действительные числа $(h\neq 0)$, с формальной точки зрения рассмотрен Н. Абелем (см. [1]). Здесь

$$P_n(z)=\frac{1}{n!}\,(z-a)\,(z-a-nh)^{n-1}.$$

Ряд $(*)$ является инструментом для изучения нулей последовательных производных регулярных функций. Множество функций $f(z)$, представимых рядом $(*)$, наз. классом сходимости А.— Г. п.

В случае $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n|=\infty$ был выделен класс сходимости А.— Г. п. в терминах ограничений на порядок и тип целых функций $f(z)$ в зависимости от роста величины $\sum_{k=0}^{n-1}|\lambda_{k+1}-\lambda_k|$ (см. [2]).

В случае $\lambda_n=n^{1/\rho}l(n)$, где $l(n)$ — медленно растущая функция, $0<\rho<\infty$, был получен в нек-ром смысле точный класс сходимости А.— Г. п. (см. [6]). Были выделены также классы сходимости А.— Г. п. для целых функций конечного и бесконечного порядков в терминах различных ограничений, наложенных на индикаторы соответствующих классов функций; рассмотрена А.— Г. п. для целых функций многих переменных. Для нек-рого класса узлов интерполяции получены точные оценки полиномов Гончарова.

Пусть A_r^{α} — класс функций $f(z)$ вида

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-\alpha}a_n z^n, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{1/n}\leqslant r,$$

$0<r<\infty$, $0\leqslant\alpha<\infty$, Λ_α — класс всевозможных последовательностей $\{\lambda_n\}$ таких, что $|\lambda_n|\leqslant(n+1)^{\alpha-1}$, $n=0,1,\ldots$. Границей сходимости для класса Λ_α наз. верхняя грань S_α тех значений r, для к-рых всякая функция $f(z)\in A_r^{\alpha}$ представима рядом $(*)$. Нижняя грань W_α тех r, для к-рых существуют функция $f(z)\in A_r^{\alpha}$ и последовательность $\{\lambda_n\}\in\Lambda_\alpha$ такие, что $f^{(n)}(\lambda_n)=0$, $n=0,\ 1,\ldots$, $f(z)\not\equiv 0$, наз. границей единственности. Величины W_1 и W_0 наз. соответственно константами Уиттекера и Гончарова. Было показано, что $S_1=W_1$ (см. [6]); доказаны также более общие утверждения:

$$S_\alpha=W_1 \text{ и } W_\alpha=W_1,\ 0\leqslant\alpha<\infty$$

(см. [5], [10]).

Таким образом, при $\{\lambda_n\}\in\Lambda_\alpha$ А.— Г. п. сводится к нахождению константы W_1. Ее точное числовое значение неизвестно, однако найдены оценки: $0{,}7259<W_1<0{,}7378$ (см. [9]).

При рассмотрении А.— Г. п. в классе A_1^* функций, регулярных в области $|z|\geqslant 1$ и таких, что $f(\infty)=0$, было показано, что для любого множества чисел $\{\lambda_k\}$, $|\lambda_k|\geqslant 1$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_k}{|\lambda_k|}=0,$$

где $\{n_k\}$ — возрастающая подпоследовательность натуральных чисел, из равенств $f^{(n_k)}(\lambda_k)=0$, $k=0,1,\ldots$,

следует $f(z)\not\equiv 0$. Причем для любого числа $b>0$ существуют последовательность $\{\lambda_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|}=b,$$

и функция $f(z)\not\equiv 0$, $f(z)\in A_1^*$, для к-рых $f^{(n)}(\lambda_n)=0$, $n=0, 1, \ldots$ (см. [7]).

А.— Г. п. включает так наз. задачу о двух точках, поставленную Э. Уиттекером (см. [12]). Пусть последовательности $\{\nu_k\}$ и $\{\mu_n\}$ таковы, что $\{\nu_k\}\cup\{\mu_n\}=\{n\}$ и $\{\nu_k\}\cap\{\mu_n\}=\varnothing$. Задача состоит в выяснении условий, при к-рых существует регулярная на отрезке $[0, 1]$ функция $f(z)\not\equiv 0$, удовлетворяющая условиям $f^{(\nu_k)}(1)=0$, $f^{(\mu_n)}(0)=0$. Эта задача решалась в различных подклассах класса функций, регулярных в круге $|z|<R$ $(R>1)$. Полученные в нек-ром смысле точные условия выражены в терминах различных ограничений, наложенных на коэффициенты a_{ν_k} разложений

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{\nu_k}z^{\nu_k}$$

в зависимости от $\{\nu_k\}$ (см. [3]). Эта задача была обобщена, для решения ее были использованы методы теории бесконечных систем линейных уравнений (см. [4]). В частном случае, когда последовательность $\{\nu_k\}$ образует арифметич. прогрессию для целых функций экспоненциального типа, задача о двух точках в известном смысле решена до конца (см. [8]).

Лит.: [1] Abel N. H., Oeuvres complètes, t. 2, Christiania, 1839, p. 77—88; [2] Gontcharoff W. L., «Ann. Ec. Norm. Super.», 1930, t. 47, p. 1—78; [3] Гельфонд А. О., Ибрагимов И. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1947, т. 11, № 6, с. 547—60; [4] Джрбашян М. М., там же, 1952, т. 16, № 3, с. 225—52; [5] Драгилев М. М., Чухлова О. П., «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 2, с. 287—94; [6] Евграфов М. А., Интерполяционная задача Абеля — Гончарова, М., 1954; [7] Казьмин Ю. А., «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех.», 1963, № 1, с. 26—34; [8] Казьмин Ю. А., «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех.», 1965, № 6, с. 37—44; [9] Macintyre S. S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1948, v. 67, p. 241—52; [10] Суетин Ю. К., «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех.», 1966, № 5, с. 16—25; [11] Осколков В. А., «Матем. сб.», 1973, т. 92, № 1, с. 55—59; [12] Whittaker J. T., Interpolatory function theory, Camb., 1935.

В. А. Осколков.

АБЕЛЯ — ПУАССОНА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования рядов Фурье. Ряд Фурье функции $f(x)\in L$ $[0, 2\pi]$ суммируется методом Абеля — Пуассона в точке φ к числу S, если

$$\lim_{\rho\to 1-0}f(\rho, \varphi)=S,$$

где $f(\rho, \varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)\rho^k$,

$$\rho^k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi+t)\frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho\cos t+\rho^2)}\,dt. \qquad (*)$$

Если $f(x)\in C(0, 2\pi)$, то интеграл в правой части есть гармонич. функция для $|z|=|\rho e^{i\varphi}|<1$ и, как показал С. Пуассон (S. Poisson), является решением задачи Дирихле для круга. В связи с этим *Абеля метод суммирования* в применении к рядам Фурье наз. А.— П. м. с., а интеграл $(*)$ — *Пуассона интегралом*.

Если (ρ, φ) — полярные координаты точки внутри круга радиуса 1, то можно рассматривать предел функции $f(\rho, \varphi)$, когда точка (ρ, φ) стремится к точке на окружности не по радиальному, но и не по касательному и даже произвольному пути. Так, имеет место теорема Фату: если функция $f(x)$ принадлежит L $[0, 2\pi]$ и непрерывна в точке φ_0, то

$$\lim_{(\rho, \varphi)\to(1, \varphi_0)}f(\rho, \varphi)=f(\varphi_0)$$

независимо от способа стремления точки $M(\rho, \varphi)$ к точке $P(1, \varphi_0)$ при условии, что она остается внутри круга радиуса 1.

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961.

А. А. Захаров.

АБНОРМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА — подгруппа A группы G, обладающая тем свойством, что $g \in \langle A, A^g \rangle$ для любого элемента $g \in G$. Здесь $\langle A, A^g \rangle$ — подгруппа, порожденная A и сопряженной с ней подгруппой $A^g = gAg^{-1}$. Примером А. п. конечной группы G может служить *нормализатор* $N_G(P)$ любой силовской p-подгруппы $P \subset G$, а также всякая максимальная подгруппа $M \subset G$, не являющаяся нормальной в G. В теории конечных *разрешимых групп*, где к А. п. относятся многие важные классы подгрупп, употребительно еще понятие субабнормальной подгруппы A группы G, определяемой рядом подгрупп:

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = G,$$

где A_i абнормальна в A_{i+1}, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

А. И. Кострикин.

АБСОЛЮТ — 1) А. регулярного топологического пространства X — пространство aX, обладающее тем свойством, что оно совершенно и неприводимо отображается на X, а всякий совершенный неприводимый прообраз пространства aX гомеоморфен пространству aX. У каждого регулярного пространства X имеется единственный А. При этом А. пространства X всегда экстремально несвязан и вполне регулярен и отображается на X совершенно и неприводимо посредством отображения $\pi_X : aX \to X$. Если два пространства X и Y связаны (однозначным или многозначным) *совершенным неприводимым отображением* $f : X \to Y$, то их А. гомеоморфны и существует такой гомеоморфизм $f_a : aX \to aY$, что $f = \pi_X f_a \pi_X^{-1}$.

Если дан гомеоморфизм $f_a : aX \to aY$, то отображение, вообще говоря, многозначное, $f = \pi_Y f_a \pi_X^{-1}$ неприводимо и совершенно. Таким образом, А. и их гомеоморфизмы «управляют» всем классом совершенных неприводимых отображений регулярных пространств. Это фундаментальное свойство означает, что А. регулярных топологич. пространств являются проективными объектами в категории регулярных пространств и совершенных неприводимых отображений. Если регулярное пространство X, соответственно, бикомпактно, финально компактно, полно в смысле Чеха, то тем же свойством обладает и А. этого пространства. У паракомпактного пространства А. даже сильно паракомпактен и, более того, совершенно нульмерен. Но А. нормального пространства может не быть нормальным. Если X — вполне регулярное пространство, то расширение Стоуна — Чеха (см. *Стоуна — Чеха бикомпактное расширение*) его А. является А. любого бикомпактного расширения пространства X. Два пространства называются соабсолютными, если их А. гомеоморфны.

Таким образом, класс регулярных пространств разбивается на дизъюнктные (попарно непересекающиеся) классы соабсолютных пространств. Пространство X соабсолютно с некоторым метрическим пространством тогда и только тогда, когда оно является паракомпактным перистым пространством и в нем существует плотная σ-дискретная система открытых множеств. Бикомпакт соабсолютен с нек-рым компактом в том и только том случае, когда он имеет счетный π-вес. Если бикомпакт имеет счетный π-вес и не имеет изолированных точек (и только в этом случае), то он соабсолютен с канторовым совершенным множеством. Следовательно, все компакты без изолированных точек соабсолютны с канторовым совершенным множеством. А. счетного компакта является расширением Стоуна — Чеха пространства натуральных чисел. А. экстремально несвязного пространства гомеоморфен ему. Таким образом, класс А. (каких бы то ни было) регулярных пространств совпадает с классом экстремально несвязных пространств. Так как недискретное экстремально несвяз-

ное пространство не содержит никакой сходящейся последовательности попарно различных точек, А. любого недискретного пространства неметризуем (и даже не удовлетворяет первой аксиоме счетности).

Среди многочисленных способов построения абсолюта aX данного (регулярного) пространства X одним из простейших является следующий.

Семейство $\xi = \{A\}$ непустых канонич. $\varkappa a$-множеств, т. е. замкнутых канонич. множеств A пространства X, наз. нитью, если оно направлено по включению, т. е. если ко всяким двум элементам A, A' семейства ξ существует элемент A'', содержащийся в $A \cap A'$. Нить ξ наз. максимальной, или концом, если она не является подсемейством никакой отличной от нее нити. Можно доказать, что нити существуют; более того, что для каждого непустого $\varkappa a$-множества A множество D_A всех нитей, содержащих множество A в качестве элемента, непусто. Каждая нить содержится в нек-рой максимальной нити. Пересечение всех множеств, являющихся элементами максимальной нити ξ, или пусто, или состоит из единственной точки $x(\xi)$; в последнем случае нить ξ наз. сходящейся (к точке $x(\xi)$). В множестве $\overline{a}X$ всех концов вводят топологию, объявляя совокупность всех множеств D_A ее замкнутой базой. Полученная топология оказывается хаусдорфовой и бикомпактной. Сходящиеся концы в бикомпакте $\overline{a}X$ образуют всюду плотное подпространство. Подпространство пространства $\overline{a}X$, состоящее из всех сходящихся концов, и есть абсолют $\overline{a}X$ пространства X; при этом оказывается, что бикомпакт $\overline{a}X$ есть не что иное, как максимальное бикомпактное расширение Стоуна — Чеха βaX абсолюта aX. Если же X не только регулярно, но и вполне регулярно, то имеет место формула перестительности операторов a и β:

$$\overline{a}X = \beta aX = a\beta X.$$

В. И. Пономарев.

θ-абсолют пространства θ-близости (X, δ) — пара (X_δ, π_X), состоящая из *близости пространства* X_δ и проекции $\pi_X : X_\delta \to X$, являющейся регулярным θ-отображением. При этом θ-отображением называется всякое θ-совершенное, неприводимое, θ-близостно непрерывное отображение. У всякого пространства θ-близости существует единственный θ-А. Всякое регулярное θ-отображение на θ-А. есть близостная эквивалентность. θ-А. пространства (X, δ) является максимальным прообразом пространства (X, δ) относительно регулярных θ-отображений. Для всякого регулярного θ-отображения $f : (x, \delta) \to (Y, \delta')$ существует такая близостная эквивалентность $F : X_\delta \to Y_\delta$, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X_\delta & \xrightarrow{F} & Y_{\delta'} \\ {\scriptstyle \pi_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Для максимальных θ-близостей на регулярных топологич. пространствах понятие регулярного θ-отображения совпадает с понятием совершенно неприводимого отображения, а понятие θ-А.— с понятием А. регулярного топологич. пространства. *В. В. Федорчук.*

Лит.: [1] Пономарев В. И., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4, с. 101—32; [2] Gleason A. M., «Ill. J. Math.», 1958, v. 2, № 4 (A), p. 482—89; [3] Пономарев В. И., «Матем. сб.», 1963, т. 60, № 1, с. 89—119; [4] Федорчук В. В., «Матем. сб.», 1968, т. 76, № 4, с. 513—36.

2) Абсолют в проективной геометрии — кривая (поверхность) 2-го порядка, представляющая собой множество бесконечно удаленных точек в *Клейна интерпретации* гиперболич. плоскости (про-

странства). При помощи А. может быть введено мероопределение в проективной плоскости (пространстве) (см. *Проективное мероопределение*). Напр., проективная мера отрезка AB определяется как величина, пропорциональная натуральному логарифму *двойного отношения* $(ABCD)$ четырех точек, где C и D — точки пересечения прямой AB с А. *А. Б. Иванов.*

АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА, модуль, действительного числа a — неотрицательное число (обозначается $|a|$), определяемое следующим образом: если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$; если $a < 0$, то $|a| = -a$. А. в. (модуль) комплексного числа $z = x + iy$ (x и y — действительные числа) — число $+\sqrt{x^2+y^2}$. Для А. в. имеют место следующие соотношения:

$$|a| = |-a|, \quad |a|^2 = |a^2| = a^2,$$
$$|a| - |b| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|,$$
$$|a| - |b| \leqslant |a-b| \leqslant |a| + |b|,$$
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \text{а при} \quad b \neq 0 \quad \frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|.$$

Об обобщении понятия А. в. на случай произвольного тела см. статью *Абсолютное значение*.

АБСОЛЮТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — геометрия, в основе к-рой лежат аксиомы евклидовой геометрии, за исключением аксиомы о параллельных (V постулата). А. г. содержит предложения, общие для *евклидовой геометрии* и для *Лобачевского геометрии*. Термин «А. г.» введен Я. Больяй (J. Bolyai, 1832). *А. Б. Иванов.*

АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ — 1) А. н. интеграла — свойство неопределенного интеграла (Лебега). Пусть функция f μ-интегрируема на множестве E. Интеграл от f на μ-измеримых подмножествах $e \subset E$ является абсолютно непрерывной функцией (см. ниже — п. 3) множества относительно меры μ, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что интеграл $\left|\int_e f d\mu\right| < \varepsilon$ для любого множества e с $\mu(e) < \delta$. В общем случае интеграл по конечно аддитивной функции множества μ как со скалярными, так и с векторными f или μ, есть абсолютно непрерывная функция. *А. П. Терехин, В. Ф. Емельянов.*

2) А. н. меры — понятие теории меры. Мера ν наз. абсолютно непрерывной относительно меры μ, если ν — абсолютно непрерывная функция множества относительно μ. Так, пусть ν — конечная мера, заданная с μ на нек-рой фиксированной σ-алгебре G; тогда ν абсолютно непрерывна относительно μ, если из $\mu(A) = 0$, $A \in G$, следует $\nu(A) = 0$. Обобщенная конечная мера ν абсолютно непрерывна относительно обобщенной меры μ, если $\nu(A) = 0$ как только $|\mu|(A) = 0$, где $|\mu|$ — полная вариация μ. *А. П. Терехин.*

3) А. н. функции — усиление понятия непрерывности. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, наз. абсолютно непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset (a, b)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, для которой

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Всякая абсолютно непрерывная на отрезке функция непрерывна на этом отрезке; обратное неверно, напр. функция $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при $0 < x \leqslant 1$ и $f(0) = 0$, будучи непрерывной на отрезке $[0, 1]$, не является на нем абсолютно непрерывной. Если в определении абсолютно непрерывной функции отбросить требование пустоты попарных пересечений интервалов (a_k, b_k), то функция

будет удовлетворять более сильному условию — *Липшица условию* с нек-рой постоянной.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ абсолютно непрерывны, то абсолютно непрерывны и их сумма, разность и произведение, а если $g(x)$ не обращается в нуль, то и частное $f(x)/g(x)$. Суперпозиция двух абсолютно непрерывных функций может и не быть абсолютно непрерывной. Однако, если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $A \leqslant f(x) \leqslant B$, $x \in [a, b]$, а функция $F(y)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[A, B]$, то сложная функция $F[f(x)]$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если абсолютно непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ монотонно возрастает, а функция $F(y)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[f(a), f(b)]$, то функция $F[f(x)]$ также абсолютно непрерывна на $[a, b]$.

Абсолютно непрерывная функция отображает множество меры нуль в множество меры нуль, а измеримое множество в измеримое. Всякая непрерывная функция с конечной вариацией, отображающая каждое множество меры нуль в множество меры нуль, является абсолютно непрерывной функцией. Всякая абсолютно непрерывная функция может быть представлена как разность двух абсолютно непрерывных неубывающих функций.

Абсолютно непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на нем конечную вариацию и почти в каждой его точке — конечную производную $f'(x)$, суммируемую на этом отрезке, причем

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Если производная абсолютно непрерывной функции почти всюду равна нулю, то сама функция постоянна. С другой стороны, для любой суммируемой на отрезке $[a, b]$ функции $\varphi(x)$ функция $\int_a^x \varphi(t)dt$ абсолютно непрерывна на этом отрезке. Поэтому класс абсолютно непрерывных на данном отрезке функций совпадает с классом функций, представимых в виде неопределенного интеграла Лебега: интеграла Лебега с переменным верхним пределом от нек-рой суммируемой функции плюс постоянная.

Если $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, то ее п о л н а я в а р и а ц и я равна:

$$\mathbf{V}_a^b f(x) = \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

Понятие А. н. обобщается как на случай функций многих переменных, так и на случай функций множеств (см. ниже — п. 4).

Лит.: [1] К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976; [2] С м и р н о в В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959.

Л. Д. Кудрявцев.

4) А. н. ф у н к ц и и м н о ж е с т в а — понятие, употребляемое обычно применительно к счетно аддитивным функциям, определенным на σ-кольце S подмножеств множества X. Так, если μ, ν — две определенные на S счетно аддитивные функции со значениями из расширенной числовой прямой $[-\infty, \infty]$, то ν абсолютно непрерывна относительно μ (символически это записывается в виде $\nu \ll \mu$), если $|\mu|(E) = 0$ влечет $\nu(E) = 0$ (здесь $|\mu|$ — полная вариация μ:

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-,$$

$$\mu^+ = \sup\{\mu(F) : E \supset F \in S\},$$

$$\mu^- = -\inf\{\mu(F) : E \supset F \in S\},$$

μ^+ и μ^- — меры, наз. положительной и отрицательной вариациями μ; по теореме Жордана — Хана $\mu = \mu^+ - \mu^-$). Оказывается, что соотношения 1) $\nu \ll \mu$, 2) $\nu^+ \ll \mu$, $\nu^- \ll \mu$, 3) $|\nu| \ll |\mu|$ равносильны. Если мера ν конечна, то $\nu \ll \mu$ тогда и только тогда, когда для любого

$\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $|\mu|<\delta$ влечет $|\nu|<\varepsilon$. В силу *Радона — Никодима теоремы*, если μ, ν — вполне σ-конечны (т. е. $X\in S$ и существует последовательность $\{E_n\}$, $n=1, 2,\ldots$, такая, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X, \quad |\mu(E_n)|, \quad |\nu(E_n)| < \infty,$$

и $\nu\ll\mu$), то на X существует конечная измеримая функция f такая, что

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu, \quad E\in S.$$

Обратно, если μ вполне σ-конечна и интеграл $\int f d\mu$ имеет смысл, то $\int_E f d\mu$ как функция множества E абсолютно непрерывна по μ. Если μ и ν вполне σ-конечные меры на (X, S), то существуют однозначно определенные вполне σ-конечные меры ν_1 и ν_2 такие, что $\nu=\nu_1+\nu_2$, $\nu_1\ll\mu$ и ν_2 сингулярна относительно μ (т. е. существует множество $E\in S$ такое, что $|\nu_2|(A)=0$, $|\mu|(X\setminus A)=0$) (теорема Лебега). Мера, определенная на борелевских множествах конечномерного евклидова пространства (или, более общим образом, локально компактной группы), называется абсолютно непрерывной, если она абсолютно непрерывна относительно меры Лебега (меры Хаара). Неотрицательная мера μ на борелевских множествах действительной прямой абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда отвечающая ей функция распределения $F(x)=\mu\{(-\infty, x)\}$ абсолютно непрерывна (как функция действительного переменного). Понятие А. н. функций множества может быть определено и для конечно аддитивных функций, и для функций с векторными значениями.

Лит.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969. *В. В. Сазонов.*

АБСОЛЮТНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ — см. *Погрешность.*

АБСОЛЮТНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ — специальный вид суммируемости рядов и последовательностей, выделяемый из обычной суммируемости наложением дополнительных условий. В *матричном методе суммирования* эти условия состоят в требовании абсолютной сходимости рядов или последовательностей, полученных в результате преобразования, соответствующего данному методу суммирования. Пусть метод суммирования A определен преобразованием последовательности $\{s_n\}$ в последовательность $\{\sigma_n\}$ посредством матрицы $\|a_{nk}\|$:

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}s_k, \qquad n=0, 1, 2,\ldots,$$

тогда последовательность $\{s_n\}$ абсолютно суммируема методом A ($|A|$-суммируема) к пределу s, если она A-суммируема к этому пределу, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s,$$

и последовательность $\{\sigma_n\}$ имеет ограниченную вариацию:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n - \sigma_{n-1}| < \infty. \qquad (1)$$

Если s_n являются частичными суммами ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k, \qquad (2)$$

то в этом случае ряд (2) абсолютно суммируем методом A к сумме s. Условие (1) и есть то дополнительное условие, к-рое выделяет в этом случае А. с. из обычной суммируемости. Аналогично определяется А. с. для методов, определяемых матричными преобразованиями рядов в последовательности. Если

же метод суммирования определен преобразованием ряда (2) в ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \qquad (3)$$

посредством матрицы $\|b_{nk}\|$:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} u_k,$$

то дополнительное условие здесь состоит в требовании абсолютной сходимости ряда (3). В частном случае, когда методу A соответствует тождественное преобразование последовательности в последовательность или ряда в ряд, А. с. ряда совпадает с его абсолютной сходимостью.

Для нематричных методов суммирования соответствующие дополнительные условия надлежащим образом видоизменяются. Так, для *Абеля метода суммирования* таким условием является требование, чтобы функция

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$$

имела ограниченную вариацию на полуинтервале $0 \leqslant x < 1$. Для интегральных методов суммирования А. с. выделяется требованием абсолютной сходимости соответствующих интегралов. Так, в *Бореля методе суммирования* должен абсолютно сходиться интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k x^k}{k!}\, dx.$$

Метод суммирования наз. сохраняющим абсолютную сходимость ряда, если он абсолютно суммирует каждый абсолютно сходящийся ряд. Если каждый такой ряд суммируем этим методом к той же сумме, к к-рой он сходится, то метод наз. абсолютно регулярным. Напр., *Чезаро метод суммирования* (C, k) абсолютно регулярен при $k \geqslant 0$. Метод Абеля абсолютно регулярен. Необходимыми и достаточными условиями абсолютной регулярности метода суммирования, определенного преобразованием ряда в ряд посредством матрицы $\|b_{nk}\|$, являются условия:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_{nk}| \leqslant M, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_{nk} = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

(теорема Кноппа – Лоренца). Имеются аналоги этих условий и для методов суммирования, определяемых преобразованиями других видов.

Обобщением А. с. является абсолютная суммируемость в степени p $(p \geqslant 1)$. Дополнительным условием, выделяющим А. с. в степени p из обычной суммируемости, напр., для метода суммирования, заданного преобразованием последовательности $\{s_n\}$ в последовательность $\{\sigma_n\}$, является условие:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1} |\sigma_n - \sigma_{n-1}|^p < \infty.$$

Понятие А. с. введено Э. Борелем (E. Borel) для одного из его методов в формулировке, отличной от современной: А. с. выделялась требованием

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_{k+p} x^k}{k!} \right| dx < \infty$$

для каждого $p = 0, 1, 2, \ldots$. А. с. применялась первоначально при исследовании суммируемости степенных рядов вне круга сходимости. В связи с вопросами умножения суммируемых рядов была определена и исследовалась А. с. методами суммирования Чезаро ($|C, k|$-суммируемость). Общее определение А. с. возникло позже и получило широкое применение в исследованиях по *суммированию рядов Фурье*.

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Kogbetliantz E., Sommation des sèries

et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques, P., 1931; [3] Knopp K., Lorentz G. G., «Arch. Math.», 1949/50, Bd 2, S. 10—16; [4] Кангро Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974. *И. И. Волков.*

АБСОЛЮТНО БЕСПРИСТРАСТНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, для к-рой выполняются условия

$$\mathsf{E}(X_1)=0 \text{ и } \mathsf{E}(X_{n+1}\mid X_1, \ldots, X_n)=0,$$

где $n=1, 2, \ldots$. Частные суммы $S_n=X_1+\ldots+X_n$ А. б. п. образуют *мартингал*. Между этими двумя типами последовательностей устанавливается следующая связь: последовательность $\{Y_n\}$ образует мартингал тогда и только тогда, когда она имеет вид $Y_n=X_1+\ldots+X_n+c$ ($n=1, 2, \ldots$ и $c=\mathsf{E}(Y_1)$ — постоянная), где $\{X_n\}$ — А. б. п. Таким образом, все мартингалы связаны с частными суммами нек-рых А. б. п. Простым примером А. б. п. являются последовательности независимых случайных величин с нулевым математич. ожиданием. Наряду с термином «беспристрастная» употребляют и термин «безобидная», связанный с понятием безобидной игры. *А. В. Прохоров.*

АБСОЛЮТНО ИНТЕГРИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ — функция, у к-рой интегрируема ее абсолютная величина. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, $a<b$, то ее абсолютная величина интегрируема по Риману на этом отрезке и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b \left|f(x)\right| dx.$$

Аналогичное утверждение справедливо для функции n переменных, интегрируемой по Риману на кубируемой области n-мерного евклидова пространства. Обратное утверждение для функций, интегрируемых по Риману, не справедливо: функция $f(x)$, равная 1 для рациональных x и -1 для иррациональных, не интегрируема по Риману, а ее абсолютная величина интегрируема. Для функций, интегрируемых по Лебегу, дело обстоит иначе: функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу (суммируема) на измеримом множестве E n-мерного пространства тогда и только тогда, когда на этом множестве интегрируема по Лебегу ее абсолютная величина, при этом справедливо неравенство:

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|\,dx.$$

В случае несобственных одномерных интегралов в смысле Римана или Лебега по промежутку $[a, b)$, $a<b\leqslant+\infty$ (при условии, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману или, соответственно, по Лебегу на любом отрезке $[a, \eta]$, $a<\eta<b$) из существования несобственного интеграла от абсолютной величины функции

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

следует и существование интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

но не наоборот (см. *Абсолютно сходящийся несобственный интеграл*). При этом, если существует несобственный интеграл

$$\int_a^b |f(x)|\,dx=\lim_{\eta\to b}\int_0^\eta |f(x)|\,dx,$$

то функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на промежутке $[a, b)$ и несобственный интеграл от нее равен интегралу Лебега.

В случае функций многих переменных (число к-рых $n>1$) несобственные интегралы обычно определяются таким образом, что существование несобственного интеграла от абсолютной величины функции равносиль-

но существованию несобственного интеграла от самой функции.

Пусть значения функции $f(x)$ принадлежат нек-рому банахову пространству с нормой $\|\cdot\|$. Тогда функция $f(x)$ наз. абсолютно интегрируемой на измеримом множестве E, если существует интеграл

$$\int_E \| f(x) \| \, dx;$$

при этом, если функция $f(x)$ интегрируема на E, то

$$\left\| \int_E f(x) \, dx \right\| \leqslant \int_E \| f(x) \| \, dx.$$

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1, 3 изд., М., 1971; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, т. 1, 2 изд., М., 1973; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975; [4] Шварц Л., Анализ, пер. с франц., т. 1, М., 1972.
Л. Д. Кудрявцев.

АБСОЛЮТНО ПЛОСКОЕ КОЛЬЦО — кольцо, над к-рым любой модуль (правый или левый) является *плоским модулем*. Этот класс колец совпадает с классом *регулярных колец* в смысле фон Неймана.

АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЙСЯ НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ — несобственный интеграл, для к-рого интеграл от абсолютной величины подинтегральной функции сходится. Если несобственный интеграл абсолютно сходится, то он и просто сходится. Пусть дан (для определенности) несобственный интеграл вида:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x) \, dx, \quad -\infty < a < b \leqslant +\infty, \; (*)$$

где функция $f(x)$ интегрируема по Риману (или по Лебегу) на любом отрезке $[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$.

Для абсолютной сходимости интеграла (*) необходимо и достаточно (критерий Коши абсолютной сходимости несобственного интеграла), чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое η_ε, $a \leqslant \eta_\varepsilon < b$, что для всех η' и η'', $\eta_\varepsilon \leqslant \eta' < b$, $\eta_\varepsilon \leqslant \eta'' < b$, выполнялось неравенство

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} | f(x) | \, dx \right| < \varepsilon.$$

Если несобственный интеграл абсолютно сходится, то он равен интегралу Лебега от рассматриваемой функции. Существуют несобственные интегралы, сходящиеся, но не абсолютно сходящиеся, напр.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \, dx}{x}.$$

Чтобы определить сходится или нет заданный интеграл абсолютно, полезно использовать признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций; напр., с помощью *сравнения признака* устанавливается абсолютная сходимость интеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x \ln x \, dx}{x^2}.$$

Для кратных несобственных интегралов (в большей части имеющихся определений) связь сходимости и абсолютной сходимости интегралов другая. Пусть на открытом множестве G n-мерного евклидова пространства определена функция $f(x)$. Если для любой последовательности кубируемых областей G_k, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно исчерпывающей область G (т. е. $G_k \subset \overline{G}_k \subset G_{k+1}$) и

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G,$$

существует при $k \to \infty$ предел интегралов Римана

$$\int_{G_k} f(x) \, dx,$$

и этот предел не зависит от выбора указанной последовательности областей, то он обычно и наз. несобственным интегралом

$$\int_G f(x)\,dx.$$

Так определенный интеграл сходится тогда и только тогда, когда он абсолютно сходится. Существуют и другие определения несобственных кратных интегралов. Напр., для функции $f(x)$, определенной на всем пространстве E^n и интегрируемой по Риману на любом n-мерном шаре Q_r радиуса $r<+\infty$, можно определить несобственный интеграл по E^n равенством

$$\int_{E^n} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{Q_r} f(x)\,dx.$$

В этом случае из абсолютной сходимости интеграла снова следует просто сходимость, но обратное неверно.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 2, М., 1973; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, т. 1, 2 изд., М., 1973; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев.

АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЙСЯ РЯД — ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1}$$

с (вообще говоря) комплексными членами, для к-рого сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{2}$$

Для абсолютной сходимости ряда (1) необходимо и достаточно (к р и т е р и й К о ш и абсолютной сходимости ряда), чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой номер n_ε, что для всех номеров $n>n_\varepsilon$ и всех целых $p\geqslant 0$ выполнялось неравенство

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Если ряд абсолютно сходится, то он сходится. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$$

абсолютно сходится ($i=\sqrt{-1}$), а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

сходится, но не абсолютно. Пусть

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* \tag{3}$$

— ряд, составленный из тех же членов, что и ряд (1), но взятых, вообще говоря, в другом порядке. Из абсолютной сходимости ряда (1) следует и абсолютная сходимость ряда (3), и ряд (3) имеет ту же самую сумму, что и ряд (1). Если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

абсолютно сходятся, то: любая их линейная комбинация

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n + \mu v_n$$

также абсолютно сходится; ряд, полученный из всевозможных попарных произведений $u_m v_n$ членов этих рядов, расположенных в произвольном порядке, также абсолютно сходится и его сумма равна произведению сумм данных рядов. Перечисленные свойства абсолютно сходящихся рядов переносятся и на *кратные ряды*

$$\sum_{(n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_k)} u_{n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_k}. \tag{4}$$

При этом, если кратный ряд абсолютно сходится, то он сходится, напр., как в смысле сферических частных сумм, так и в смысле прямоугольных; притом его сумма в обоих случаях оказывается одной и той же. Если кратный ряд (4) абсолютно сходится, то повторный ряд

$$\sum_{n_k=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} u_{n_1 n_2 \ldots n_k} \qquad (5)$$

абсолютно сходится, т. е. абсолютно сходятся все ряды, получающиеся последовательным суммированием членов ряда (4) по индексам $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем суммы кратного ряда (4) и повторного (5) равны и совпадают с суммой любого однократного ряда, образованного из всех членов ряда (4).

Если члены ряда (1) суть элементы нек-рого банахова пространства с нормой элементов $\|\cdot\|$, то ряд (1) наз. абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| u_n \|.$$

На случай А. с. р. элементов банахова пространства также обобщаются рассмотренные выше свойства абсолютно сходящихся числовых рядов, в частности А. с. р. элементов банахова пространства сходится в этом пространстве. Аналогичным образом понятие А. с. р. переносится и на кратные ряды в банаховом пространстве.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1, 3 изд., М., 1971; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, т. 1, 2 изд., М., 1973; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975. *Л. Д. Кудрявцев.*

АБСОЛЮТНОЕ ЗНАЧЕНИЕ на теле — отображение φ тела K в множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, удовлетворяющее условиям:

1) $\varphi(x) \geqslant 0$ и $\varphi(x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$;
2) $\varphi(x \cdot y)=\varphi(x) \cdot \varphi(y)$;
3) $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x)+\varphi(y)$.

Отсюда $\varphi(1)=\varphi(-1)=1$, $\varphi(x^{-1})=\varphi^{-1}(x)$.

А. з. часто обозначается $|x|$ вместо $\varphi(x)$. А. з. наз. также нормой, мультипликативным нормированием. А. з. могут рассматриваться на любом кольце со значениями в линейно-упорядоченном кольце [4] (см. также *Нормирование*).

Примеры А. з. Если $K=\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, то $|x|=\max\{x, -x\}$ является *абсолютной величиной*, или модулем, числа $x \in \mathbb{R}$. Аналогично, если K — поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел или тело $|\mathrm{H}|$ кватернионов, то $|x|=\sqrt{x \cdot \bar{x}}$ есть А. з. Подполя этих полей также снабжаются индуцированным А. з. Любое тело имеет тривиальное А. з.:

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0, & x=0; \\ 1, & x \neq 0; \end{cases}$$

конечные поля и их алгебраич. расширения имеют только такие А. з.

Примеры А. з. другого типа доставляют логарифмич. нормирования тела K: если v — нормирование K со значениями в группе $\mathbb{R}$ и a — действительное число, $0<a<1$, то $\varphi(x)=a^{v(x)}$ является А. з. Например, если $K=\mathbb{Q}$, а v_p есть p-адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$, то $|x|_p=(1/p)^{v_p(x)}$ называется p-адическим А. з., или p-адической нормой. Эти А. з. удовлетворяют более сильному, чем 3), условию

4) $\varphi(x+y) \leqslant \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$.

А. з., удовлетворяющие условию 4), наз. ультраметрическими А. з., или неархимедовыми А. з. (в отличие от архимедовых А. з., не удовлетворяющих этому условию). Они характеризуются тем, что $\varphi(n \cdot 1) \leqslant 1$ для всех целых n.

Все А. з. тела характеристики $p>0$ являются ультраметрич. А. з. Все ультраметрич. А. з. получаются из нормирований указанным выше способом: $\varphi=a^{v(x)}$ (и обратно, за нормирование всегда можно взять $-\log\varphi$).

А. з. φ определяет метрику на K, если за расстояние между x и y принять $\varphi(x-y)$, и тем самым определяет топологию на K. Так, топология любого локально компактного тела определяется нек-рым абсолютным значением. А. з. φ_1 и φ_2 наз. эквивалентными, если они определяют одну топологию; в этом случае существует такое $\lambda>0$, что $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)^\lambda$ для всех $x\in K$.

Структура всех архимедовых А. з. дается теоремой Островского: если φ — архимедово А. з. на теле K, то существует такой изоморфизм K на нек-рое всюду плотное подтело тела $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $|\mathbb{H}|$, что φ эквивалентно А. з., индуцированному с $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $|\mathbb{H}|$.

Любое нетривиальное А. з. поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел эквивалентно либо p-адическому А. з. $|\ |_p$ (где p — простое число), либо обычной абсолютной величине. При этом для любого рационального числа $r\in\mathbb{Q}$

$$|r|\prod_p|r|_p=1.$$

Аналогичная формула имеет место и для полей алгебраич. чисел (см. [2], [3]).

Если φ — нек-рое А. з. тела K, то K может быть вложено, при помощи классич. процесса пополнения, в тело K_φ, полное относительно А. з., продолжающего φ (см. *Полное топологическое пространство*). Одним из основных современных методов изучения полей является вложение поля K в прямое произведение $\Pi_\varphi K_\varphi$ пополнений K_φ поля K по всем А. з. (см. *Адель*); поле K плотно лежит в $\Pi_\varphi K_\varphi$: именно, если $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ — нетривиальные неэквивалентные А. з. на поле K, $a_1,\dots,a_n$ — элементы из K и $\varepsilon>0$, то существует такое $a\in K$, что $\varphi_i(a-a_i)<\varepsilon$ для всех i (теорема аппроксимации для А. з.).

А. з. поля K может быть продолжено (вообще говоря неоднозначно) на любое алгебраич. расширение поля K. Если K полно относительно А. з. φ, а L есть расширение K степени n, то продолжение φ на L единственно и задается формулой $\varphi'(x)=\sqrt[n]{\varphi(N_{L/K}(x))}$ для $x\in L$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [3] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [4] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [5] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969.

В. И. Данилов.

АБСОЛЮТНОЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО — устаревший термин для обозначения свойства данного множества как топологич. пространства в отличие от свойств его расположения в других пространствах.

П. С. Александров.

АБСОЛЮТНЫЙ МОМЕНТ случайной величины X — математич. ожидание $|X|^r$, $r>0$. Обычное обозначение А. м. β_r; таким образом,

$$\beta_r=\mathsf{E}\,|X|^r.$$

Число r наз. порядком А. м. Если $F(x)$ — функция распределения X, то

$$\beta_r=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^r\,dF(x), \tag{1}$$

и, напр., если распределение X имеет плотность $p(x)$, то

$$\beta_r=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^r\,p(x)\,dx. \tag{2}$$

В соответствии с (1) и (2) говорят об А. м. функции распределения $F(x)$ или плотности $p(x)$. Из существования β_r вытекает существование А. м. $\beta_{r'}$, а также *моментов* порядка r', $0<r'\leqslant r$. А. м. часто фигурируют в оценках для распределений вероятностей и их харак-

теристич. функций (см. *Чебышева неравенство*, *Ляпунова теорема*). Функция $\log \beta_r$ является выпуклой функцией от r, а функция $\beta_r^{1/r}$ — неубывающей функцией от $r (r > 0)$.

Ю. В. Прохоров.

АБСТРАКЦИЯ АКТУАЛЬНОЙ БЕСКОНЕЧНОСТИ — одна из математических идеализаций, связанная с определенной формой идеи бесконечности в математике — с идеей так наз. актуальной бесконечности.

В применении к потенциально неограниченно продолжимым конструктивным процессам (таким, напр., как процесс последовательного, отправляясь от нуля, порождения натуральных чисел) А. а. б. состоит в отвлечении от принципиальной незавершаемости этих процессов и в равноправном затем рассмотрении результатов воображаемого завершения этих процессов — множеств порождаемых ими объектов, причем эти результаты начинают восприниматься нашим сознанием в качестве актуальных, «готовых» объектов рассмотрения. Применение А. а. б. в указанном выше примере позволяет нам считать математич. объектом множество всех натуральных чисел — *натуральный ряд*.

В логич. аспекте последовательное принятие А. а. б. ведет к принятию в качестве логич. принципа закона исключенного третьего.

Особую роль А. а. б. играет при построении математики на базе общей теории множеств, созданной Г. Кантором (G. Cantor). Являясь далеко идущей идеализацией, А. а. б., особенно при многократном применении ее в переплетении с другими идеализациями, порождает объекты, «осязаемость» к-рых становится косвенной, вследствие чего решение проблемы понимания суждений о таких объектах наталкивается на определенные трудности. Неограниченное применение А. а. б. в математике в качестве правомерного средства образования математич. объектов встречало возражения со стороны ряда математиков [Л. Кронекер (L. Kronecker), К. Гаусс (K. Gauss), Д. Гильберт (D. Hilbert), Г. Вейль (H. Weyl) и др.]. Позитивные программы построения математики на базе абстракции потенциальной осуществимости без использования А. а. б. предложили Л. Э. Я. Брауэр (L. E. J. Brouwer, см. *Интуиционизм*) и А. А. Марков (см. *Конструктивная математика*).

См. также *Абстракция математическая*.

Н. М. Нагорный.

АБСТРАКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ — абстракция в математике, мысленное отвлечение, представляющее собой существенную составную часть мыслительной деятельности, направленной на формирование основных математич. понятий. Наиболее характерными для математики типами абстрагирования являются «чистое» отвлечение, идеализация и их разнообразные многоступенчатые наслоения (см. [5], с. 284).

Мысленный акт чистого отвлечения состоит в том, что в нек-рой рассматриваемой нами ситуации наше внимание фиксируется лишь на определенных (существенных для нас) свойствах исходных объектов рассмотрения и отношениях между этими объектами, в то время как другие свойства и отношения, рассматриваемые нами как несущественные, нашим сознанием в расчет не принимаются. Результат такого акта абстрагирования, закрепленный с помощью надлежащих языковых средств, начинает играть роль общего понятия. Типичный пример такой А. м.— *абстракция отождествления*.

Мысленный акт идеализации состоит в том, что в нек-рой рассматриваемой нами ситуации наше воображение порождает нек-рое понятие, становящееся для нашего сознания предметом рассмотрения, причем это понятие наделяется нашим воображением не только

такими свойствами, к-рые были выделены у исходных объектов в результате актов «чистого» отвлечения, но и другими — воображаемыми — свойствами, отражающими свойства исходных объектов в измененном виде или даже вообще отсутствующими у этих последних. Одной из наиболее традиционных для математики идеализаций является *абстракция актуальной бесконечности*, ведущая к идее актуальной бесконечности. Эта абстракция лежит в основе теоретико-множественного построения математики. Другая традиционная идеализация — *абстракция потенциальной осуществимости* — приводит к идее потенциальной бесконечности. Эта абстракция, в сочетании с отказом от применения абстракции актуальной бесконечности, лежит в основе конструктивного построения математики.

Характер той или иной математич. теории в значительной мере определяется характером А. м., применяемых в этой теории при формировании ее основных понятий. Анализ этих А. м. является одной из центральных задач оснований математики. Тщательное рассмотрение относящейся к этому кругу вопросов проблематики привело к осознанию следующих играющих фундаментальную роль обстоятельств: 1) суждения об абстрактных объектах, возникающих в результате наслоения далеко идущих идеализаций, требуют разработки особых способов их понимания; разработка этих способов представляет собой трудную проблему, являющуюся предметом специальной научной дисциплины — *семантики*; 2) логич. аппарат, применение к-рого оказывается допустимым в рамках той или иной математич. теории, существенным образом зависит от характера исходных понятий этой теории, а следовательно, и от характера А. м., применяемых при формировании этих понятий (см. *Интуиционизм*, *Конструктивная математика*).

Значительный вклад в анализ абстракций, применяемых в математике, внесли Л. Э. Я. Брауэр [1], Г. Вейль [2], Д. Гильберт [3], А. А. Марков [4] и др.

Лит.: [1] Brouwer L. E. J., «Tijdschrift voor wijsbegeerte», 1908, t. 2, p. 152; [2] Weyl H., Das Kontinuum, Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis, Lpz., 1918; [3] Гильберт Д., О бесконечном, в кн.: Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948, добавление VIII; [4] Марков А. А., О логике конструктивной математики, М., 1972; [5] Шанин Н. А., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1962, т. 67, с. 15—294. *Н. М. Нагорный.*

АБСТРАКЦИЯ ОТОЖДЕСТВЛЕНИЯ — способ формирования общих абстрактных понятий, состоящий в том, что при рассмотрении к.-л. исходных объектов мы начинаем принимать во внимание лишь те их различия, к-рые в данной ситуации по тем или иным причинам оказываются для нас существенными, игнорируя другие — несущественные. Исходные объекты, различающиеся лишь несущественным образом, мы начинаем считать одинаковыми, и в речевом аспекте А. о. проявляется в том, что о двух одинаковых исходных объектах мы начинаем, отождествляя их, говорить как об одном и том же абстрактном объекте, закрепив за ним соответствующий термин. Так, напр., отождествляя одинаковые *буквы* (*слова*, *алфавиты*), мы приходим к понятию абстрактной буквы (абстрактного слова, абстрактного алфавита, см. [1], с. 7—15); отождествляя эквивалентные фундаментальные последовательности рациональных чисел, мы приходим к понятию *действительного числа*; отождествляя изоморфные группы, мы приходим к понятию абстрактной группы и т. д.

См. также *Абстракция математическая*, *Эквивалентность*, *Изоморфизм*.

Лит.: [1] Марков А. А., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1954, т. 42; [2] его же, О логике конструктивной математики, М., 1972. *Н. М. Нагорный.*

АБСТРАКЦИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ОСУЩЕСТВИМОСТИ — одна из математич. идеализаций, связанная

с определенной формой идеи бесконечности в математике — идеей потенциальной бесконечности.

В применении к потенциально неограниченно продолжимым конструктивным процессам (таким, напр., как процесс последовательного, отправляясь от нуля, порождения натуральных чисел) А. п. о. состоит в отвлечении от возможных пространственных, временны́х и материальных препятствий к осуществлению очередного шага данного конструктивного процесса и в рассмотрении этого шага как потенциально осуществимого. Применение А. п. о. в упомянутом примере позволяет нам считать, что к любому натуральному числу может быть прибавлена единица, что может быть построена сумма любых двух натуральных чисел и т. п., но к возникновению идеи натурального ряда как актуального «бесконечного объекта» применение А. п. о. не приводит.

В логич. аспекте принятие А. п. о. ведет к обоснованию принципа математич. индукции.

Особую роль А. п. о. играет в *конструктивной математике*, в к-рой утверждения о существовании конструктивных объектов, удовлетворяющих заданным условиям, понимаются как утверждения о потенциальной осуществимости этих объектов.

См. также *Абстракция математическая*.

Н. М. Нагорный.

АБСЦИССА — одна из декартовых *координат* точки.

АВТОКОВАРИАЦИЯ случайного процесса X_t — *ковариация* X_t и X_{t+h}. Если $\mathsf{E}X$ обозначает математич. ожидание случайной величины X, то А. равна

$$\mathsf{E}\,(X_t - \mathsf{E}X_t)\,(X_{t+h} - \mathsf{E}X_{t+h}).$$

Термин «А.» употребляют обычно применительно к *стационарным случайным процессам* (в широком смысле). Для них А. зависит только от h и лишь множителем, равным дисперсии X_t, отличается от *автокорреляции*. Наряду с А. употребляют термин «ковариационная функция» (или функция автоковариации).

А. В. Прохоров.

АВТОКОЛЕБАНИЯ — незатухающие колебания в нелинейной *динамической системе*, амплитуда и частота к-рых в течение длительного промежутка времени могут оставаться постоянными, не зависят в широких пределах от начальных условий и определяются свойствами самой системы (см. также *Колебаний теория*). Термин «А.» был введен А. А. Андроновым (см. [1], с. 41—43).

Динамич. системы, способные совершать А., наз. автоколебательными системами. К таковым относятся часы, генераторы электрич. колебаний, электрич. звонок, духовые и смычковые музыкальные инструменты и т. п. При определенных условиях А. могут возникать и в динамич. системах, нормальным состоянием работы к-рых является отсутствие А. (напр., А. в передней подвеске автомобиля — «шимми»; флаттер крыла самолета, А. в системах автоматич. регулирования и управления). Простейшую автоколебательную систему можно представить состоящей из постоянного источника энергии, устройства, регулирующего поступление энергии в колебательную систему, и колебательной системы. Существенным является наличие обратной связи: регулирующее устройство, с одной стороны, управляет движением колебательной системы, а с другой — управление работой регулирующего устройства осуществляется движением колебательной системы (см. [6]). С математич. точки зрения, напр., автономные автоколебательные системы с одной степенью свободы можно определить как такие системы, уравнения движения к-рых характеризуются наличием на фазовой плоскости одного или нескольких *предельных циклов*.

Важным характерным свойством А. является независимость их амплитуды в широких пределах от начальных условий, т. е. существование одной или нескольких областей начальных условий таких, что любым начальным условиям, принадлежащим к.-л. из этих областей, будет соответствовать одна и та же амплитуда А. Это значит, что в колебательных системах может существовать несколько стационарных процессов с различными амплитудами, каждый из к-рых устанавливается в системе в зависимости от выбранной области начальных условий. Рассмотренное свойство является основным отличием периодич. движения в автоколебательной системе от периодич. движения в консервативной системе. Характерным свойством автоколебательных систем является также то, что период А. определяется свойствами самой системы, а не навязывается извне. Это — основное отличие А. от *вынужденных колебаний*.

Для А. существенно то, что для восполнения потерь энергии должен существовать постоянный источник энергии, к-рый в автономной системе, не имеющей сил, явно зависящих от времени, должен создавать силу, не являющуюся заданной функцией времени и определяемую самой системой. Постоянными источниками энергии могут быть: заводной механизм в часах, вал, вращающийся с постоянной угловой скоростью, непрерывная движущаяся с постоянной скоростью лента, струя жидкости или газа, имеющая постоянную скорость, а в системах, где движущая сила — электрич. ток, таким источником энергии является, напр., батарея.

Примером простейшей автоколебательной системы может служить маятник, находящийся в среде с вязким трением, на к-рый действует постоянная по величине сила, всегда направленная в сторону движения. Дифференциальное уравнение этой динамической системы имеет вид

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = F \operatorname{sign} \dot{x},$$

где $h>0$, $F>0$, k^2 — постоянные коэффициенты. При любых начальных условиях в системе устанавливается периодич. движение, причем максимальное отклонение маятника от положения равновесия (амплитуда) равно

$$x_0 = \frac{1+e^{-hT}}{1-e^{-hT}} \cdot \frac{F}{k^2},$$

где $T=\pi/\sqrt{k^2-h^2}$ — полупериод периодич. движения. На фазовой плоскости $x\dot{x}$ этому движению соответствует устойчивый предельный цикл (см. [3]).

Характерной особенностью всех автоколебательных систем является такая связь между постоянным источником энергии и системой, когда энергия, отдаваемая источником, периодически изменяется, причем период этого изменения определяется свойствами системы. Можно сказать, что автоколебательная система представляет собой систему, к-рая за счет непериодич. источника энергии создает периодич. процесс. А. могут быть по форме близки к синусоидальным колебаниям, но могут и существенно отличаться от последних. А., существенно отличающиеся от синусоидальных, наз. р е л а к с а ц и о н н ы м и. А., близкие по форме к синусоидальным, обычно бывают в системах, потери энергии в к-рых за один период малы, и, следовательно, поступление энергии также мало. А., близкие по форме к синусоидальным, могут быть и в том случае, когда потери в системе за один период велики, но при надлежащем подборе параметров происходит компенсация потерь не только за период, а и за каждую малую долю периода в отдельности. К таким системам относятся так наз. *RC*-г е н е р а т о р ы с и н у с о и д а л ь н ы х к о л е б а н и й (см. [4]). При релаксационных колебаниях обычно потери энергии велики и за период ком-

пенсируются почти всей энергией колебательной системы.

Возникновение А. может быть «мягким» и «жестким» (см. [2]). Мягкое возникновение А. характеризуется тем, что в системе, находящейся в положении устойчивого состояния равновесия, при изменении к.-л. параметра возникают А., амплитуда к-рых непрерывно возрастает от нуля при непрерывном изменении параметра. При обратном изменении параметра амплитуда А. непрерывно уменьшается до нуля, и состояние равновесия системы становится устойчивым. При жестком возникновении А. система при медленном и непрерывном изменении параметра переходит из состояния устойчивого равновесия к А. конечной амплитуды; при дальнейшем изменении параметра амплитуда возрастает уже равномерно. При обратном изменении параметра амплитуда непрерывно уменьшается до определенного значения, после чего система переходит к состоянию устойчивого равновесия. Существенно при этом, что система переходит к А. и от А. при различных значениях параметра.

Автоколебательные системы обладают интересным и важным свойством — явлением принудительной синхронизации, называемым иногда «захватыванием». Оно состоит в том, что при достаточно малой разности между частотой автоколебательной системы и частотой внешней силы, действующей на эту систему, устойчивое периодическое движение системы приобретает частоту внешней силы, т. е. внешняя сила навязывает свой темп автоколебательной системе (см. [3], [5]).

Лит.: [1] Андронов А. А., Собрание трудов, [М.], 1956; [2] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., *Теория колебаний*, 2 изд., М., 1959; [3] Бутенин Н. В., Элементы теории нелинейных колебаний, Л., 1962; [4] Горелик Г. С., Колебания и волны, М.— Л., 1950; [5] Фельдбаум А. А., Введение в теорию нелинейных цепей, М.— Л., 1948; [6] Харкевич А. А., Автоколебания, М., 1953.

Н. В. Бутенин.

АВТОКОРРЕЛОГРАММА случайного процесса — то же, что *коррелограмма*.

АВТОКОРРЕЛЯЦИЯ случайного процесса X_t — *корреляция* значений X_t и X_{t+h}. Термин «А.» употребляют (наряду с термином «корреляционная функция») в основном при изучении *стационарных случайных процессов*, для к-рых А. зависит лишь от h (но не от t).

А. В. Прохоров.

АВТОМАТ — *управляющая система*, являющаяся *автоматом конечным* или некоторой его модификацией, полученной путем изменения компонент или функционирования. Основное понятие — конечный А. — возникло в середине 20 в. в связи с попытками описать на математическом языке функционирование нервных систем, универсальных вычислительных машин и других реальных А., предпринятыми впервые У. Мак-Каллоком и У. Питтсом (W. McCulloch, W. Pitts, 1943), С. К. Клини (S. C. Kleene, 1951), А. Бёрксом и Дж. Райтом (A. W. Burks, 1954, J. Wright) и др. Характерной особенностью такого описания является дискретность соответствующих математических моделей и конечность областей значений их параметров, что приводит к понятию конечного А. При этом внешние воздействия, реакции и состояния рассматриваются как буквы трех алфавитов, наз., соответственно, входным алфавитом, выходным алфавитом и алфавитом состояний. Тогда законы их взаимодействия могут быть заданы двумя функциями — функцией переходов и функцией выходов, отображающими пары «состояние — входная буква» в состояния и выходные буквы, соответственно. В каждый из моментов дискретного времени устройство, находящееся в определенном состоянии, воспринимает входной сигнал — букву входного алфавита, выдает выходной сигнал — букву выходного алфавита, определяемую функцией выходов, и переходит в новое состояние, определяемое функцией переходов. Наряду с

понятием конечного А. рассматриваются различные его обобщения и модификации, отражающие те или иные особенности реальных устройств. Для конечного А. (A, S, B, φ, ψ) существующие модификации можно разбить на следующие три основные группы. К первой группе относятся А., у которых некоторые из алфавитов A, S или B бесконечны, в связи с чем такие А. наз. бесконечными. Ко второй группе относятся А., у к-рых вместо функций φ и ψ допускаются произвольные отношения или случайные функции. Таковы частичные, недетерминированные, вероятностные и другие А. К третьей группе относятся А. со специфич. множествами входных объектов. Таковы А. с переменной структурой, А. над термами (см. *Автоматов алгебраическая теория*). Существуют А., принадлежащие одновременно разным группам; напр., А. нечеткие относятся ко всем трем группам. Наряду с этим большую роль играют специальные подклассы конечных А.; например, А. без памяти, автономные, обратимые А. и т. д. Кроме того, использование понятий и методов из других разделов математики также приводит к появлению специфич. классов А. и связанных с ними задач. Напр., при применении алгебраич. средств возникают понятия А. над термами, линейного, группового, свободного и других А. (см. *Автоматов алгебраическая теория*); вопросы теории кодирования порождают понятия самонастраивающихся, обратимых А. и др. (см. также *Автомат вероятностный*). Для структурных А. также имеется целый ряд обобщений, сводящихся в основном к допущению бесконечных сетей и возможности изменения связей между элементами в процессе функционирования. Таким образом возникает понятие растущего А. Ниже описываются основные модификации и подклассы конечных А., а также их важнейшие свойства.

Макроподход. 1. А. бесконечные (первая группа) отличаются от А. конечных только тем, что их алфавиты A, B или S (входной, выходной и множество состояний) могут быть бесконечными. Большинство понятий и задач, связанных с конечными А., естественно распространяются на бесконечные А. Увеличение мощности алфавитов расширяет вычислительные возможности А. Так, напр., если конечные А. реализуют *ограниченно-детерминированные функции*, то с помощью бесконечных А. можно реализовать любую детерминированную функцию. Более того, с помощью бесконечных А. может быть описано функционирование любых А. и машин. Вместе с тем большая общность понятия бесконечного А. снижает его содержательное значение, так что в основном изучаются лишь специальные подклассы бесконечных А., связанные с конкретными моделями управляющих систем.

2. Недетерминированные А. и асинхронные А. (вторая группа). Формально недетерминированный А. определяется как система (A, S, B, χ), где A, S, B — алфавиты, имеющие прежний смысл, а $\chi \subseteq S \times A \times S \times B$ — отношение переходов-выходов. В том случае, когда отношение χ является функцией, отображающей $S \times A$ в $S \times B$, недетерминированный А. наз. детерминированным А. и фактически совпадает с конечным А., поскольку в этом случае функцию χ можно рассматривать как пару функций φ, ψ, отображающих $S \times A$ в S и B, соответственно. В отличие от конечного А., инициальный недетерминированный А. $\mathfrak{A}_{S_1}$ имеет несколько начальных состояний, образующих подмножество S_1 множества S. Под поведением этого А. $\mathfrak{A}_{S_1}$ обычно понимают одно из следующих обобщений поведения конечного А.

1) Вместо функции f автомат $\mathfrak{A}_{S_1}$ реализует отношение f', состоящее из всех пар слов $(a_1 \ldots a_n, b_1 \ldots b_n) \in A^* \times B^*$ таких, что найдутся состояния $s_1, s_2, \ldots,$

s_{n+1}, для к-рых $s_1 \in S_1$ и для любого $i=1, 2, \ldots, n$ имеет место $(s_i a_i s_{i+1} b_i) \in \chi$. Класс отношений, реализуемых инициальным недетерминированным А., совпадает с классом ограниченно-детерминированных отношений (см. *Ограниченно-детерминированная функция*).

2) Инициальный недетерминированный А. $\mathfrak{A}_{S_1}$, у к-рого выделено множество S' заключительных состояний, а алфавит B пуст (т. е. $\chi \subseteq S \times A \times S$), представляет событие $L_{S'}$, состоящее из всех слов $a_1 \ldots a_n \in A^*$ таких, что найдутся состояния $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$, для к-рых $s_1 \in S_1$, $s_{n+1} \in S'$ и для любого $i=1, 2, \ldots, n$ имеет место $(s_i a_i s_{i+1}) \in \chi$. Класс событий, представимых А. $\mathfrak{A}_{S_1}$, совпадает с классом регулярных событий, т. е. относительно такого поведения недетерминированные А. эквивалентны конечным А. В то же время большая общность понятия недетерминированного А. проявляется в том, что для представления одного и того же события с помощью недетерминированного А. и конечного А. требуется различное число состояний. Существуют события, представимые недетерминированными А. с m состояниями и представимые конечными А. с 2^m состояниями, причем никакие конечные А. с меньшим числом состояний не представляют эти события.

Специальный подкласс недетерминированных А. образуют так наз. частичные А., у к-рых отношение χ является частичной функцией, отображающей множество $S \times A$ в $S \times B$, и к-рые реализуют частичные ограниченно-детерминированные функции.

Термином «асинхронный А.» обычно обозначают один из двух следующих видов А. К первому относятся А. вида (A, S, B, φ, ψ), где функция выходов ψ отображает множество $S \times B$ в B^* (у конечного А. ψ отображает $S \times B$ в B). Эти А. используются главным образом в теории кодирования. Ко второму виду относятся конечные А., функция переходов у к-рых обладает следующим свойством: $\varphi(s, aa) = \varphi(s, a)$ для любых s и a. Эти А. также используются в теории кодирования и, кроме того, для моделирования нек-рых систем в технике и биологии.

3. А. с переменной структурой (третья группа) — это конечные А. $\mathfrak{A} = (A \times A, S, B, \varphi, \psi)$ с двумя входами, у к-рых зафиксирована нек-рая бесконечная последовательность α (сверхслово) в алфавите А. На первый вход такого А. подаются произвольные слова в алфавите А, а на второй — начала последовательности α той же длины. Тем самым накладывается ограничение на множество пар входных слов. Если А. с переменной структурой рассматривать как А. с одним первым входом (на к-рый могут подаваться любые слова в алфавите A), то его функции переходов и выходов будут зависеть от длины поданной части входного слова. Относительно поведения А. с переменной структурой эквивалентны бесконечным А. с конечными входным и выходным алфавитами и счетным множеством состояний.

4. Нечеткие А. получаются как обобщение понятия конечного А. путем замены функций переходов и выходов нечеткими отношениями. Нечеткое подмножество множества M задается функцией, отображающей M в отрезок $[0,1]$. Таким образом, роль функций переходов и выходов в нечетком А. играют функции, отображающие множества $S \times A \times S$ и $S \times A \times B$ в отрезок $[0,1]$, где S — множество состояний, A — входной алфавит, B — выходной алфавит. Для нечетких А. естественно обобщаются основные понятия и задачи, характерные для конечных А., в частности задачи представления нечетких событий и реализации нечетких отношений. Нечеткие А. являются математич. моделями нек-рых распознающих устройств и используются в задачах *распознавания образов*.

5. Специальные классы конечных А. А. без памяти — это конечные А. с одним состо-

янием или А., эквивалентные им. Для таких А. каждая выходная буква полностью определяется входной буквой, поступившей в тот же момент. Эти А. часто наз. функциональными элементами и широко применяются в задачах синтеза А.

А. с конечным запоминанием, наз. иногда А. с конечной памятью,— это конечные А., любая выходная буква к-рых при любом исходном состоянии полностью определяется ограниченным отрезком входного слова, поступившим в предшествующие моменты. Минимальная длина таких отрезков для А. с конечным запоминанием с n состояниями не превосходит $\frac{1}{2}n(n-1)$, причем для нек-рых А. эта оценка достигается. А. с конечным запоминанием наз. самонастраивающимся, если для нек-рого t выходная буква в любой момент $\tau \geqslant t$ не зависит от исходного состояния. Эти А. используются в теории кодирования (см. *Кодирование и декодирование*), где обычно рассматривается модификация таких А., к-рая удовлетворяет указанному условию не для всех входных слов, а только для нек-рого подмножества их. А. с конечным запоминанием реализуются логич. сетями без обратных связей.

А. обратимые, или А. без потери информации,— это конечные А., реализующие взаимно однозначные функции. Эти А. также используются в теории кодирования.

Микроподход. Существует три вида обобщений структурных А., к-рые можно рассматривать как обобщенные логич. сети: 1) обобщенные логич. сети с неизменной структурой, у к-рых элементы и связи между ними не меняются в процессе функционирования; 2) обобщенные логич. сети с изменяющейся структурой; 3) обобщенные логич. сети из объемных элементов и связей. Ниже приведены основные классы таких А.

1. Обобщенные логич. сети с неизменной структурой. К ним относятся мозаичные структуры и итеративные сети, являющиеся конечными фрагментами мозаичных структур с аналогичным кругом задач.

Мозаичные структуры представляют собой бесконечные соединения переходных систем (A, S, φ) (т. е. конечных А. вида (A, S, S, φ, φ), где функция выходов совпадает с функцией переходов, а выходной алфавит — с множеством состояний). Такие системы помещаются в целочисленные точки n-мерного пространства, причем для каждой точки определено конечное множество целочисленных точек, называемое ее окрестностью. Входной алфавит переходной системы, помещенной в данную точку, представляет собой декартово произведение множеств состояний переходных систем, помещенных в точки ее окрестности.

Мозаичную структуру можно рассматривать как бесконечный А., входной и выходной алфавиты, а также множество состояний к-рого равны и являются бесконечным декартовым произведением множеств состояний всех переходных систем, содержащихся в ней. Это позволяет сводить многие задачи для мозаичных структур к задачам для бесконечных А. К числу специфич. задач для мозаичных структур относится моделирование эффективных процедур и, в частности, вычислительных процессов. Иногда рассматривают мозаичные структуры, в к-рых вместо переходных систем используются произвольные А.

Важный класс мозаичных структур образуют однородные структуры. В случае, когда все переходные системы одинаковы и окрестность любой точки получается параллельным переносом нек-рой окрестности, мозаичная структура наз. однородной структурой. При этом обычно предполагается, что имеется нек-рое «устойчивое» состояние переходной системы,

к-рое сохраняется, когда входной буквой является *кортеж*, каждый член к-рого совпадает с этим состоянием. Характерными задачами для однородных структур являются задачи о самовоспроизведении и «райских садах».

В каждый момент состояния переходных систем, помещенных в точках целочисленной решетки, образуют как бы пространственную мозаичную картину, наз. обычно конфигурацией. Конфигурация, содержащая только конечное множество переходных систем, находящихся в состояниях, отличных от устойчивого (возбужденная часть), наз. конечной. Задача о самовоспроизведении состоит в выяснении существования конечных конфигураций, к-рые в процессе функционирования однородной системы переходят в конфигурации, возбужденная часть к-рых представляет собой многократно повторенную возбужденную часть исходной конфигурации. «Райским садом» наз. конфигурация, к-рая не может возникнуть из конфигураций, отличных от нее. Задача о «райских садах» состоит в выяснении существования «райских садов» для заданной однородной структуры.

2. Обобщенные логич. сети с изменяющейся структурой. Существуют разные виды таких логич. сетей. К числу наиболее общих из них относятся мозаичные структуры, у к-рых в процессе функционирования меняются как окрестности элементов, так и сами элементы. Примером такой обобщенной логич. сети может служить одномерная структура, имитирующая работу *Тьюринга машины* со входом. Одному из узлов одномерной решетки в этом случае соответствует управляющее устройство, а остальным — ячейки ленты, рассматриваемые как переходные системы, входными буквами и состояниями к-рых являются буквы рабочего алфавита машины Тьюринга. Коммутация определяется положением головки.

Другим видом обобщенных логич. сетей с изменяющейся структурой являются так наз. растущие А. Они представляют собой однородные структуры, в к-рых возбужденная часть растет в процессе функционирования. Существует несколько моделей таких А., отражающих различные особенности реальных устройств.

3. Обобщенные логич. сети из объемных элементов отличаются тем, что элементарным А. и связям между ними приписывается определенный объем, в связи с чем возникает задача синтеза А., имеющих минимальный объем.

Термин «А.» употребляется также в таких понятиях, как двусторонний, многоленточный, многоголовочный, линейно ограниченный и т. п. А., к-рые фактически являются модификациями машин Тьюринга. Более того, иногда в понятие А. включают все абстрактные машины.

Лит.: [1] Мак-Каллок У., Питтс В., в сб.: Автоматы, М., 1956, с. 362—84; [2] Клини С., там же, с. 15—67; [3] Бёркс А., Райт Д., в кн.: Кибернетичсский сборник, в. 4, М., 1962, с. 33—57; [4] Глушков В. М., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, № 5, с. 3—62; 1962, т. 17, № 2; [5] Рабин М. О., Скотт Д., в кн.: Кибернетический сборник, в. 4, М., 1962, с. 58—91; [6] Zadeh L. A., «J. Math. Anal. and Appl.», 1968, v. 23, № 2, p. 421—427; [7] Аладьев В. З., К теории однородных структур, Тал., 1972.

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов.

АВТОМАТ ВЕРОЯТНОСТНЫЙ — обобщение *автомата конечного*, в к-ром функции переходов и выходов являются случайными функциями. Другими словами, А. в. может быть задан системой (A, S, B, φ, ψ), где A, S, B — конечные алфавиты, имеющие тот же смысл, что и в конечном автомате, а φ, ψ — случайные функции, отображающие $S \times A$ соответственно в S и B и задаваемые системами вероятностных мер $\varphi_{s,a}, \psi_{s,a}$, определенных для любых a из A и s из S, соответственно, на множествах S и B. Эти меры обычно задаются с помощью стохастич. матриц (см. *Автоматов способы задания*). В том случае, когда эта вероятностная мера принимает

только два значения 0 и 1, понятие А. в. фактически совпадает с понятием детерминированного *автомата*. Автономные А. в. без выхода по существу эквивалентны дискретным цепям Маркова. Функционирование А. в. определяется аналогично функционированию недетерминированного автомата, причем начальное состояние определяется путем задания вероятностной меры σ на множестве S. Если А. в. находится с нек-рой вероятностью p в состоянии s и воспринимает входную букву a, то с вероятностью $p \cdot \omega(s, a, s', b)$ он переходит в состояние s' и выдает букву b выходного алфавита.

Подобно конечным автоматам, А. в. по характеру поведения разделяются на преобразователи и акцепторы. В первом случае, в соответствии с функционированием, А. в. преобразует входные слова с нек-рыми вероятностями в выходные слова и в слова в алфавите состояний. Эти вероятности для слов одинаковой длины образуют вероятностную меру, так что указанное поведение можно рассматривать как задание счетной системы таких мер. Во втором случае задается подмножество $S' \subseteq S$ заключительных состояний и число λ из отрезка $[0,1]$, называемое т о ч к о й с е ч е н и я. Событие, представимое вероятностным акцептором $\mathfrak{A}_\sigma = (A, S, \varphi, S', \lambda)$, где φ — случайная функция, отображающая $S \times A$ в S и задаваемая системой вероятностных мер $\varphi_{s,a}$, определенных на S, состоит из всех слов в алфавите A, под действием к-рых автомат переходит в одно из заключительных состояний с вероятностью, не меньшей λ. В отличие от конечных атоматов, при помощи А. в. представим континуальный класс событий. Более того, уже один А. в. при варьировании λ может представлять континуальный класс событий. В случае же однобуквенного входного алфавита каждый А. в. представляет лишь счетный класс событий, содержащий, вообще говоря, и нерегулярные события. Для специальных точек сечения, наз. изолированными, А. в. представляют лишь регулярные события. Число λ из отрезка $[0,1]$ наз. и з о л и р о в а н н о й т о ч к о й с е ч е н и я для данного А. в., если существует такое положительное число δ, что для любого входного слова вероятность перевода А. в. этим словом в заключительное состояние отличается от λ не менее чем на δ.

Большая часть понятий и задач, характерных для конечных автоматов, в различных вариантах может быть распространена и на А. в. При этом многие из них сохраняют свойства, присущие конечным автоматам. Напр., можно ввести понятие эквивалентности состояний так, что будет сохранена известная теорема об отличимости состояний простым экспериментом (см. *Эксперименты с автоматами*). Вместе с тем в отличие от конечных автоматов, для к-рых минимальная форма определяется однозначно (с точностью до изоморфизма), для данного А. в. может существовать континуум эквивалентных минимальных А. в.

Существуют различные виды и способы задания А. в. Напр., А. в. может быть представлен в виде детерминированного автомата с двумя входами, на один из к-рых поступает случайная последовательность входных букв. А. в. являются математич. моделями многих реальных устройств и используются при изучении поведения организмов.

Лит.: [1] Бухараев Р. Г., Вероятностные автоматы, Казань, 1970; [2] Starke P., Abstrakte Automaten, B., 1969.

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов.

АВТОМАТ КОНЕЧНЫЙ — математическая модель устройства с конечной памятью, преобразующего дискретную информацию. А. к. является одним из важнейших видов *управляющих систем*. Содержательно А. к. можно охарактеризовать как устройство, имеющее входной и выходной каналы и находящееся в каждый из моментов дискретного времени, наз. т а к т о в ы м и м о м е н т а м и, в одном из n состояний $s_1, s_2, \ldots, s_n$. По

входному каналу в каждый тактовый момент в устройство поступают сигналы — буквы входного алфавита. В те же моменты по выходному каналу устройство выдает сигналы — буквы выходного алфавита. С соответствующей точки зрения, к таким устройствам могут быть отнесены *формальные системы*, реальные автоматы, живые организмы и т. п.

Существуют различные подходы к определению понятия А. к. При макроподходе, т. е. когда интересуются только внешним поведением устройств, определение А. к. может быть дано в виде совокупности функций, либо в виде конечного ориентированного графа, либо в алгебраич. форме — в виде конечной алгебры с унарными операциями (см. *Автоматов способы задания*). При микроподходе А. к. задается множеством элементов и схемой их соединения, т. е. в этом случае кроме функционирования описывается и строение автомата, в связи с чем это понятие обычно наз. структурным, а сами А. к.— структурными автоматами, или автоматными сетями.

Макроподход. А. к.— это система (A, S, B, φ, ψ), где A, S, B — конечные, как правило непустые, алфавиты, наз., соответственно, входным алфавитом, множеством состояний и выходным алфавитом; φ — функция переходов, отображающая множество $S\times A$ в S; ψ — функция выходов, отображающая $S\times A$ в B. Такие А. к. иногда называются автоматами Мили. В случае, когда функция выходов ψ отображает S в B (т. е. не зависит от букв входного алфавита), А. к. называют автоматом Мура. Всякий автомат Мура является автоматом Мили.

Важнейшей характеристикой А. к. является его поведение (см. *Автомата поведение*), к-рое может быть определено по-разному. В зависимости от того, какой тип поведения рассматривается, А. к. подразделяются на преобразователи, акцепторы (распознаватели), генераторы и др. Чтобы определить основные виды поведения А. к., функции φ и ψ распространяют на множество $S\times A^*$ (где A^* — множество всех слов в алфавите A, включая пустое слово $\wedge$):

$$\varphi(s,\ \wedge)=s,\qquad \varphi(s,\ \alpha a)=\varphi(\varphi(s,\ \alpha),\ a),$$
$$\psi(s,\ \wedge)=\wedge,\qquad \psi(s,\ \alpha a)=\psi(\varphi(s,\ \alpha),\ a)$$

(здесь $s\in S$, $\alpha\in A^*$, $a\in A$, а запись αa обозначает слово, получаемое путем приписывания буквы a к слову α). Таким образом распространенные функции $\varphi(s,\ \alpha)$, $\psi(s,\ \alpha)$ для произвольных s и α описывают соответственно состояние, в к-рое переходит автомат из состояния s под действием входного слова α, и выходную букву, к-рая выдается автоматом в момент поступления последней буквы входного слова α. Пусть $\alpha\rfloor_n$ обозначает начало длины n слова α и $\overline{\varphi}(s,\ \alpha)$, $\overline{\psi}(s,\ \alpha)$ — слова в алфавитах S и B, определяемые следующим образом:

$$\overline{\varphi}(s,\ \alpha)=\varphi(s,\ \alpha\rfloor_1)\,\varphi(s,\ \alpha\rfloor_2)\ldots\varphi(s,\ \alpha),$$

$$\overline{\psi}(s,\ \alpha)=\psi(s,\ \alpha\rfloor_1)\,\psi(s,\ \alpha\rfloor_2)\ldots\psi(s,\ \alpha).$$

Функции $\overline{\varphi}(s,\ \alpha)$, $\overline{\psi}(s,\ \alpha)$ описывают уже последовательность всех состояний, в к-рых находился автомат при поступлении в него букв слова α, а также выходное слово, т. е. последовательность букв выходного алфавита, выдаваемых автоматом под воздействием входного слова α. Тернарное отношение

$$F=\{(\alpha,\ \overline{\varphi}(s,\ \alpha),\ \overline{\psi}(s,\ \alpha)):\alpha\in A^*,\ s\in S\}$$

наз. функционированием А. к. $\mathfrak{A}=(A,\ S,\ B,\ \varphi,\ \psi)$. Функции $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ естественно распространяются и на бесконечные последовательности (сверхсло-

в а) в алфавите A. Поэтому под функционированием А. к. иногда понимают отношение вида F, в к-ром α — произвольное сверхслово. В этом случае значение функции $\varphi(s, \alpha)$ определяется как множество всех тех и только тех состояний, к-рые встречаются в последовательности $\overline{\varphi}(s, \alpha)$ бесконечное число раз.

А. к. с выделенным начальным состоянием s_1 наз. инициальным и обозначается $\mathfrak{A}_{s_1}$. Поведением инициального А. к. $\mathfrak{A}_{s_1}$ наз. обычно одно из следующих трех отношений.

1) Функция $f(\alpha)=\overline{\psi}(s_1, \alpha)$, отображающая A^* в B^* (или A^∞ в B^∞, где A^∞, B^∞ — множества всех сверхслов в алфавитах A и B соответственно). Эта функция наз. функцией вычислимой, или реализуемой, инициальным А. к. $\mathfrak{A}_{s_1}$.

2) Множество $L_{S'} \subseteq A^*$, определяемое для выделенного множества $S' \subseteq S$ заключительных состояний так:

$$L_{S'} = \{\alpha \in A^* : \varphi(s_1, \alpha) \in S'\}.$$

Множество $L_{S'}$ наз. событием, представимым А. к. $\mathfrak{A}_{s_1}$ с множеством S' заключительных состояний.

3) Множество значений функции $f(\alpha)=\overline{\psi}(s_1, \alpha)$ для всевозможных α из A^*, называемое множеством, перечислимым данным А. к. $\mathfrak{A}_{s_1}$.

4) Множество $M_\gamma \subseteq A^\infty$, определяемое для системы γ подмножеств множества S следующим образом:

$$M_\gamma = \{\alpha \in A^\infty : \varphi(s_1, \alpha) \in \gamma\}.$$

Множество M_γ наз. сверхсобытием, представимым А. к. $\mathfrak{A}_{s_1}$ с системой γ заключительных подмножеств состояний. А. к. с поведением типа 1) наз. конечным преобразователем, а с поведением типа 2) — конечным распознавателем, или акцептором.

Если в качестве входного и выходного алфавитов взять декартовы произведения $A_1 \times \ldots \times A_m$ и $B_1 \times \ldots \times B_n$, соответственно, то поведением типа 1) будет набор из n функций от m аргументов. В этом случае говорят, что автомат имеет m входов и n выходов, причем алфавиты $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ наз., соответственно, входными и выходными алфавитами такого автомата. Класс событий, представимых А. к., и класс функций, вычислимых А. к., могут быть описаны различными математич. средствами. Основной результат состоит в том, что события, представимые А. к., совпадают с так наз. регулярными событиями, а функции, вычислимые А. к., совпадают с *ограниченно-детерминированными функциями*. Кроме того, класс множеств, перечислимых А. к., совпадает с классом событий, представимых А. к.

Относительно поведений 2), 3) и 4) автоматы Мура эквивалентны автоматам Мили в том смысле, что для всякого автомата Мили найдется эквивалентный ему, т. е. имеющий то же самое поведение, автомат Мура, и обратно. Для поведения 1) это неверно. Однако, если в автоматах Мура вместо $\overline{\psi}$ брать функции вида

$$\overline{\psi}(s, \alpha) = \psi(\underbrace{\varphi(s, \alpha])}_{1}) \psi(\underbrace{\varphi(s, \alpha])}_{2}) \ldots \psi(\varphi(s, \alpha)),$$

то автоматы Мура будут эквивалентны автоматам Мили.

Автомат Мура $\mathfrak{A}=(A, S, B, \varphi, \psi)$ наз. автономным автоматом, или генератором, если функция переходов не зависит от букв входного алфавита. Под поведением инициального автономного автомата $\mathfrak{A}_{s_1}$ принято понимать сверхслово

$$\psi(s_1)\psi(\varphi(s_1))\psi(\varphi^2(s_1)) \ldots,$$

где $\varphi^{n+1}(s)=\varphi(\varphi^n(s))$. Эта последовательность является периодической с нек-рым предпериодом.

А. к. $\mathfrak{A}$ наз. переходной системой, если $B=S$ и для всякого s из S имеет место $\overline{\psi}(s, a)=s$, или же если выходной алфавит B — пустой. Таким образом, переходная система полностью определяется тройкой (A, S, φ).

Понятия А. к. и функционирования А. к. могут быть определены различными эквивалентными способами (см. *Автоматов способы задания*, *Автомата поведение*). Широкое распространение получили так наз. канонические уравнения. Для произвольного слова α пусть $\alpha(t)$ обозначает t-ю букву слова α, а $|\alpha|$ — длину слова α. Тогда функционирование F А. к. $\mathfrak{A}$ состоит из всех тех и только тех троек слов (α, σ, β), к-рые удовлетворяют условиям: 1) $|\alpha|=|\beta|=|\sigma|-1$; 2) для всякого t такого, что $1\leqslant t\leqslant|\alpha|$, имеют место равенства $\sigma(t+1)=\varphi(\sigma(t), \alpha(t))$, $\beta(t)=\psi(\sigma(t), \alpha(t))$. Для определения поведения инициального А. к. $\mathfrak{A}_{s_1}$ необходимо добавить равенство $\sigma(1)=s_1$. Совокупность этих равенств однозначно определяет поведение инициального А. к. и наз. обычно каноническими уравнениями. Канонич. уравнения широко используются в задачах анализа и синтеза автоматов.

Микроподход. Рассматривается множество элементов, состоящее из определенных выше А. к. с входными и

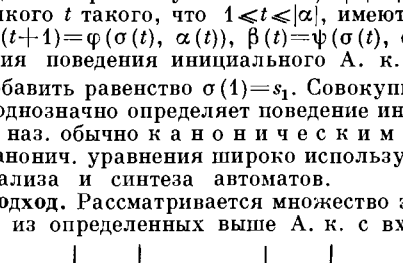


Рис. 1.

выходными алфавитами вида A^n, где A — конечный алфавит, одинаковый для всех элементов. Правила построения структурных А. к. из элементов описывают дозволенные соединения (отождествления) входов и выходов, а также определяют множества входов и выходов, получаемых А. к.

Важнейшим примером таких А. к. являются логические сети (л. с.). Ниже приводится один из вариантов этого понятия. В рассматриваемом случае $A=\{0,1\}$ и элементами являются так наз. функциональные элементы (ф. э.), представляющие собой А. к. с одним состоянием, а также специальные автоматы Мура, наз. задержками. Последние характеризуются тем, что они имеют два состояния, к-рые обычно обозначаются буквами 0 и 1 входного алфавита, причем функции переходов и выходов удовлетворяют условиям: $\varphi(a, b)=b$, $\psi(a)=a$. Поскольку ф. э. имеет только одно состояние, то он полностью характеризуется функцией выходов ψ, являющейся в этом случае *булевой функцией* от n аргументов, где n — число входов ф. э. Элементы являются исходными л. с., входы и выходы к-рых совпадают, соответственно, с входами и выходами элементов. Дальнейшее построение более сложных л. с. производится по следующим правилам.

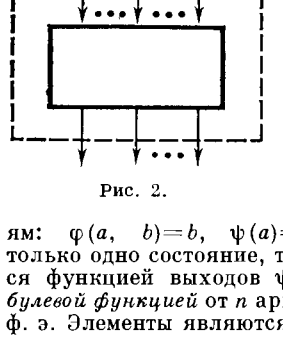


Рис. 2.

1. Объединение двух л. с. есть л. с., входами и выходами к-рой являются, соответственно, входы и выходы объединяемых л. с. (рис. 1).

2. Результат отождествления любых двух входов л. с. является л. с., выходы к-рой совпадают с выходами исходной л. с., а входами служат все входы исходной л. с., кроме одного из отождествленных (рис. 2).

3. Результат отождествления выхода одной л. с. с входом другой л. с. есть л. с. Ее входами являются все входы первой л. с. и те входы второй л. с., к-рые не отождествлялись с выходом первой л. с.; ее выходами являются все выходы обеих л. с. (рис. 3).

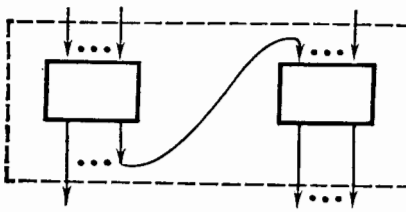


Рис. 3.

4. Результат отождествления выхода л. с., являющегося выходом задержки, с произвольным входом этой же л. с. есть л. с., входы к-рой — все входы исходной л. с., кроме отождествленного, а выходы — все выходы исходной л. с. (рис. 4). (При нек-рых ограничениях это правило может быть применимо и к выходам, не являющимся выходами задержек.)

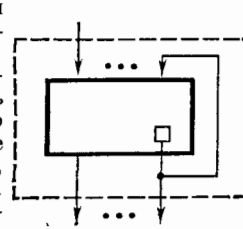


Рис. 4.

5. В любой л. с. можно объявить выходами только часть выходов, определенных согласно правилам 1—4. Л. с., получаемые из ф. э. с помощью правил 1, 2, 3, 5, наз. обычно схемами из ф. э.

Функционирование л. с. содержательно можно описать следующим образом. Пусть в момент t всем входам л. с. приписаны входные буквы и определены состояния задержек. Тогда в этот же момент всем входам и выходам элементов л. с., в частности всем выходам л. с., будут приписаны буквы в соответствии со следующими правилами. Если входам ф. э. с выходной функцией $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ приписаны, соответственно, буквы $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$, то его выходу в этот же момент будет приписана буква, являющаяся значением $\psi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$. Если задержка находится в момент t в состоянии a, то в этот же момент ее выходу приписывается буква a. Отождествленным входам и выходам приписываются одинаковые буквы. Далее, в момент $t+1$ состояния задержек определяются входными буквами в момент t, как было определено выше, т. е. $\varphi(a, b)=b$. Таким образом, при фиксированных начальных состояниях задержек л. с. определяет нек-рое отображение входных последовательностей в алфавите A^m в выходные последовательности в алфавите A^n, где m, $m \geqslant 1$, — число входов, а n, $n \geqslant 1$, — число выходов л. с. Класс таких отображений совпадает с классом функций, реализуемых А. к. в первом смысле (т. е. с классом ограниченно детерминированных функций), поскольку описанное выше функционирование л. с. совпадает с функционированием А. к. (A^m, S, A^n, φ, ψ), где m — число входов, n — число выходов л. с., S — декартово произведение множеств состояний всех задержек л. с.; функция переходов φ является покоординатным применением функций переходов задержек, а функция выходов ψ определяется в соответствии с вышеописанным функционированием ф. э. и задержек.

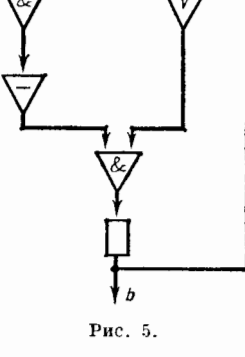


Рис. 5.

Пусть, напр., элементами являются задержки (к-рые на рисунке изображаются прямоугольниками) и ф. э. с выходными функциями $\bar{x}$, $x \vee y$ и $x\&y$ (треугольники с соответствующими символами функций). На рис. 5 изображена л. с., к-рая в тактовый момент t выдает выходную букву 1 в том и только в том случае, если среди входных букв в моменты 0, 1, 2, ..., t содержится нечетное число букв 1 (задержка в начальный момент имеет состояние 0; буквами a и b обозначены, соответственно, вход и выход л. с.). Если обозначить через $s(t)$, $a(t)$, $b(t)$, соответственно, состояние, входную букву и выходную букву в момент t, то функционирование такой л. с. можно задать следующими канонич. уравнениями:

$$s(0)=0, \quad s(t+1)=s(t)+a(t) \pmod 2, \quad b(t)=s(t).$$

При макроподходе этот автомат можно представить в виде (A, S, A, φ, ψ), где $A=S=\{0,1\}$, $\varphi(s, a)=s+a \pmod 2$ и $\psi(s, a)=s$.

Понятие А. к. явилось отправным пунктом современной *автоматов теории*, изучающей также различные модификации и обобщения этого понятия.

Лит.: [1] Автоматы. Сб. статей, под ред. К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, пер. с англ., М., 1956; [2] Глушков В. М., Синтез цифровых автоматов, М., 1962; [3] Кобринский Н. Е., Трахтенброт Б. А., Введение в теорию конечных автоматов, М., 1962. *В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов.*

АВТОМАТА ПОВЕДЕНИЕ — математическое понятие, описывающее взаимодействие автомата с внешней средой. Так, для *автомата конечного* внешней средой обычно является множество входных слов, а поведением — словарная функция, реализуемая автоматом, или событие (иногда сверхсобытие), представимое автоматом. Для автомата над термами (см. *Автоматов алгебраическая теория*) внешней средой является множество константных термов, а поведением — класс тех термов, значения к-рых, вычисляемые с помощью данного автомата, принадлежат выделенному подмножеству элементов соответствующей алгебры. Для мозаичных структур внешней средой является множество начальных конфигураций, а поведением — последовательности конфигураций, возникающих в тактовые моменты времени. Вообще, для большинства автоматов А. п. представляет собой ту или иную модификацию поведения конечных автоматов.

Специальным случаем является так наз. А. п. в случайной среде. Под средой здесь можно понимать вероятностный автомат $\mathfrak{B}$, преобразующий выходные сигналы рассматриваемого автомата $\mathfrak{A}$ в его входные сигналы. Так что можно считать, что автомат $\mathfrak{A}$ в случайной среде $\mathfrak{B}$ представляет собой автономную логич. сеть, построенную из автоматов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ путем соединения выхода каждого из этих автоматов со входом другого. Тогда поведение автомата $\mathfrak{A}$ в случайной среде $\mathfrak{B}$ можно рассматривать как функционирование указанной автономной логич. сети. Среда $\mathfrak{B}$ наз. стационарной, если она является автоматом с одним состоянием. Если рассматривать выходные сигналы автомата $\mathfrak{B}$ как различные «поощрения» или «наказания» автомата $\mathfrak{A}$, то естественно возникает задача построения автомата $\mathfrak{A}$, поведение к-рого в среде $\mathfrak{B}$ является оптимальным, т. е. дает наибольший возможный в данной среде выигрыш. Обычно предполагается, что выходной алфавит среды $\mathfrak{B}$ состоит из букв 0 и 1 и в ответ на выходные сигналы $b_1, \ldots, b_k$ автомата $\mathfrak{A}$ буква 1 выдается, соответственно, с вероятностями $p_1, \ldots, p_k$. При этом «поощрением» автомата $\mathfrak{A}$ считается только буква 1.

Если среда $\mathfrak{B}$ стационарна, то множество состояний автономной логич. сети совпадает с множеством состояний автомата $\mathfrak{A}$. Если, кроме того, выходная буква автомата $\mathfrak{A}$ однозначно определяется состоянием, то функционирование этой логич. сети может быть описано стохастич. матрицей Q переходов состояний. Как

правило, рассматривают случаи, когда матрица Q эргодическая (см. *Эргодичность*). Тогда определена функция:

$$W(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i p_i - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i (1-p_i) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i (2p_i - 1),$$

где σ_i — сумма финальных вероятностей всех состояний, определяющих выходную букву b_i. При этом

$$\min_i (2p_i - 1) \leqslant W(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \leqslant \max_i (2p_i - 1).$$

Если выходные сигналы автомата $\mathfrak{A}$ не зависят от воздействий среды и равновероятны, т. е. $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_k = 1/k$, то

$$W(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = W_0 = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^{k} p_i - 1.$$

Функция $W(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ является математич. ожиданием величины, наз. выигрышем автомата $\mathfrak{A}$ в среде $\mathfrak{B}$. Говорят, что автомат $\mathfrak{A}$ обладает целесообразным поведением в среде $\mathfrak{B}$, если $W(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) > W_0$. Задача об оптимальном поведении в случайной среде ставится следующим образом. Требуется построить так наз. асимптотически оптимальную последовательность автоматов $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ такую, что математич. ожидание выигрыша автомата $\mathfrak{A}_n$ с ростом n стремится к максимальному выигрышу в данной среде, равному величине $d_{\max} = \max_i \{2p_i - 1,\ i = 1, \ldots, k\}$. В рассматриваемом случае такую последовательность образуют так наз. автоматы с линейной тактикой при условии, что $d_{\max} \geqslant 1/2$. [Автомат с линейной тактикой $\mathfrak{A}_n$ с k-буквенным выходным алфавитом имеет kn состояний s_{ij}, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$, и следующие функции φ и ψ переходов и выходов:

$$\varphi(s_{ij}, 1) = s_{i, j+1}, \text{ если } j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\varphi(s_{in}, 1) = s_{in}, \ \varphi(s_{ij}, 0) = s_{i, j-1}, \text{ если } j = 2, \ldots, n,$$

$$\varphi(s_{i1}, 0) = s_{i+1, 1}, \ \psi(s_{ij}, a) = b_i,$$

$$i = 1, \ldots, k, \ j = 1, \ldots, n.]$$

Впервые правила асимптотически оптимального поведения в стационарной случайной среде начали изучаться в математич. статистике. Однако получаемые там результаты естественно переводятся на язык теории автоматов.

Рассматривается А. п. и в более сложных средах, а также поведение коллективов автоматов в случайных средах. В последнем случае автоматы рассматриваются как игроки, а правила игры, в к-рой участвуют эти автоматы, выступают в роли среды.

Лит.: [1] Бардзинь Я. М., Трахтенброт Б. А., Конечные автоматы (Поведение и синтез), М., 1970; [2] Цетлин М. Л., Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем, М., 1969; [3] Robbins H., «Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.», 1956, v. 42, № 12, p. 920—923.

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОГРАММИРОВАНИЯ — использование вычислительных машин для автоматич. получения машинной *программы* по нек-рой исходной записи, более близкой к начальной формулировке задачи. Содержание А. п. меняется со временем, отражая общее развитие средств общения человека с вычислительной машиной и методов программирования. В начале А. п. заключалась в передаче машине процесса трансляции (перевода) в машинную программу описания алгоритма решения задачи, выраженного в нек-ром *алгоритмическом языке*. Затем в процесс А. п. была включена процедура направленного синтеза алгоритма решения по сокращенной записи задачи, принадлежащей нек-рому фиксированному классу. В настоящее вре-

мя (70-е гг.) складывается новое содержание А. п. как всеобъемлющей процедуры синтеза алгоритма решения задачи в рамках существенно более широкого языка формулирования задач, не ограничиваемого конкретным классом. Синтез сопровождается контролем правильности алгоритма и привлекает в качестве формального аппарата различные модели семантики естественных языков, исчисление предикатов и методы поиска доказательств. *А. П. Ершов.*

АВТОМАТИЧЕСКИЙ ПЕРЕВОД, машинный перевод, — перевод текстов с одного языка на другой с помощью автоматич. устройств.

А. п. — одна из задач моделирования и автоматизации различных видов умственной деятельности человека, в данном случае — речевой деятельности. А. п. осуществляется с помощью *алгоритма*, правила к-рого не содержат ссылок на знания и интуицию человека, т. е. строго формальны. Алгоритм А. п. может выполняться любым подходящим устройством, действующим автоматически, напр. универсальной цифровой вычислительной машиной.

Проблема А. п. тесно связана с развитием современной структурной и математич. лингвистики, причем с самыми принципиальными и трудными лингвистич. проблемами, многие из к-рых ранее мало разрабатывались или даже осознанно не ставились.

Теоретич. базой разработки А. п. является теория формальных *грамматик*. Алгоритм А. п. реализует нек-рое соответствие между двумя языками, определяемыми своими грамматиками,— так наз. переводное соответствие. Оно формулируется в терминах структурных описаний предложений этих языков в рамках их грамматик. В качестве структурных описаний чаще всего используются системы составляющих и деревья подчинения (см. *Синтаксическая структура*). В соответствии с этим алгоритм А. п. в общих чертах состоит из трех основных частей: 1) анализ текста на входном языке, т. е. выявление структуры входного текста на основе заданной грамматики входного языка; 2) преобразование, т. е. переход от структуры текста на входном языке к структуре текста на выходном языке на основе заданного переводного соответствия; 3) синтез текста на выходном языке, т. е. переход от структуры выходного текста к конкретной последовательности слов.

В начальный период работ по А. п. правила перевода формулировались обычно сразу в виде алгоритмич. предписаний без предварительного построения формальных грамматик входного и выходного языков и без явной формулировки переводного соответствия. Из-за этого сведения чисто лингвистич. характера перемешивались с математич. оформлением алгоритма. В дальнейшем был взят курс на построение алгоритмов А. п. по общим схемам, пригодным для широкого круга языков, с максимально возможной расчлененностью этапов перевода и независимостью этапа анализа от этапа синтеза, с нахождением всех вариантов обработки текста, допускаемых грамматиками и переводным соответствием (так наз. многовариантный перевод). Сведения о конкретном языке стали, как правило, четко отделяться от алгоритмич. части. Таким образом, оказалось возможным отвлечься от гигантского количества частностей, специфических для конкретных языков, и сосредоточиться на разработке общих процедур поиска решений, удовлетворяющих заданным условиям.

Что касается собственно лингвистич. стороны А. п., то морфологические и почти все синтаксич. проблемы А. п. в рамках изолированного предложения можно считать решенными. Главные трудности при создании полностью автоматизированных систем высококачественного перевода связаны с недостаточным уровнем разработанности семантич. теории языков, с помощью к-рой

можно было бы точно сформулировать правила обработки смысла и значений, а также учитывать смысловые связи между отдельными предложениями связного текста. Без надлежащего учета семантики текста перевод нередко оказывается неоднозначным или неверным. Неправильность перевода является обычно следствием того, что правила перевода не учитывают все возможные осмысления переводимого текста или не позволяют всякий раз выбирать правильное осмысление, к-рое может определяться довольно широким контекстом и в конечном счете — сведениями из конкретной области, знаниями о мире и т. п.

Действующих систем высококачественного А. п. производственного типа пока (70-е гг. 20 в.) нет. Имеются экспериментальные системы разной степени сложности. На практике успешно используются упрощенные и специализированные системы А. п., связанные с автоматизацией обработки научно-технич. информации (пословный перевод с частичной грамматич. обработкой, частичный перевод и автоматич. реферирование для целей экспресс-информации, патентной документации и для информационно-поисковых систем). В обозримом будущем А. п. может использоваться для перевода только научно-технич. публикаций. Задача А. п. для литературно-художественных текстов не представляется реальной и нужной.

Лит.: [1] Машинный перевод. Сб. статей, пер. с англ., М., 1957; [2] Панов Д. Ю., Автоматический перевод, 2 изд., М., 1958; [3] Автоматический перевод. Сб. статей, пер. с англ., итал., нем., франц., М., 1971. *С. Я. Фитиалов.*

АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕОРИЯ — наука о методах определения законов управления к.-л. объектами, допускающих реализацию с помощью технич. средств автоматики. Исторически сложилось так, что методы А. у. т. получили свое первое развитие применительно к процессам, встречающимся главным образом в технике (см. [1]). Напр., летящий самолет представляет собой объект, законы управления к-рым гарантируют его полет по требуемой траектории. Они реализуются с помощью совокупности измерительных приборов, преобразующих и исполнительных устройств, называемой автопилотом. Три причины лежат в основе этого развития: многие объекты управления были идентифицированы классиками науки (идентифицировать объект управления — значит написать его математич. модель, т. е. соотношения (1), (2), см. ниже); еще задолго до развития А. у. т., благодаря установлению ряда фундаментальных законов природы, существовал хорошо развитый математич. аппарат дифференциальных уравнений и особенно аппарат теории устойчивости движения (см. [2]); инженеры открыли закон обратной связи (см. ниже) и нашли средства его реализации.

Простейшие объекты управления описываются (векторным) обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}=f(x,\ u,\ t) \qquad (1)$$

и неравенством

$$N(x,\ u,\ t)\geqslant 0, \qquad (2)$$

где $x\{x_1,\ \ldots,\ x_n\}$ — вектор состояния объекта, $u\{u_1,\ \ldots,\ u_r\}$ — вектор управления, к-рый можно выбирать, t — время. Уравнение (1) есть математич. запись законов, к-рым подчинен объект управления; неравенство (2) — область его определения.

Пусть U есть к.-л. данный класс функций $u(t)$ (напр., кусочно непрерывных), принимающих численное значение из (2). Любую функцию $u(t)\in U$ назовем *допустимым управлением*. Уравнение (1) наз. *математической моделью объекта управления*, если:

1) указана область $N(x,\ u,\ t)\geqslant 0$ определения функции $f(x,\ u,\ t)$;

2) указан интервал времени $\mathscr{T}=[t_i,\ t_f]$ (или $[t_i,\ t_f)$, если $t_f=\infty$), на к-ром наблюдается движение $x(t)$;

3) указан класс допустимых управлений;

4) область $N\geqslant 0$ и функция $f(x,\ u,\ t)$ таковы, что уравнение (1) имеет единственное решение, определенное при любом $t\in\mathscr{T}$, $x_0\in N$, каково бы ни было допустимое управление $u(t)$. Далее всюду в (1) $f(x,\ u,\ t)$ предполагается гладкой по всем аргументам.

Пусть $x_i=x(t_i)$ — начальное, а $x_f=x(t_f)$ — конечное состояния объекта управления. Состояние x_f наз. ц е л ь ю у п р а в л е н и я. Существуют две главные задачи А. у. т.: задача программирования — определение управления $u(t)$, при к-ром гарантируется достижение цели из x_i; определение закона обратной связи (см. ниже). Обе задачи разрешаются при условии полной управляемости объекта (1).

Объект (1) наз. п о л н о с т ь ю у п р а в л я е м ы м, если, каковы бы ни были x_i, $x_f\in N$, найдутся хотя бы одно допустимое управление $u(t)$ и интервал $\mathscr{T}$, при к-рых цель управления достижима. В противном случае говорят, что объект у п р а в л я е м н е п о л н о с т ь ю. Поэтому возникает задача предварительного исследования: дана математич. модель (1), требуется установить критерий управляемости. В разрешении этой задачи достигнут (к 1977) незначительный прогресс. В случае, когда уравнение (1) линейно:

$$\dot{x}=Ax+Bu, \tag{3}$$

где A, B — стационарные матрицы, критерий полной управляемости формулируется так: для того чтобы система (3) была полностью управляема, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$Q=\|\,B,\ AB,\ A^2B,\ \ldots,\ A^{n-1}B\,\| \tag{4}$$

был равен n. Матрица (4) наз. м а т р и ц е й у п р а в л я е м о с т и.

Если A, B — известные дифференцируемые функции от t, то матрица управляемости определяется так:

$$Q=\|\,L_1(t),\ L_2(t),\ \ldots,\ L_n(t)\,\|, \tag{5}$$

где $L_1(t)=B(t)$, $L_k(t)=A(t)L_{k-1}-\frac{dL_{k-1}}{dt}$, $k=2,\ \ldots,\ n$. В этом случае имеет место теорема: для того чтобы система (3) была полностью управляема, достаточно, чтобы существовала хотя бы одна точка $t^*\in\mathscr{T}$, в к-рой ранг матрицы (5) равен n (см. [3]). Для нелинейных систем критерий управляемости пока (к 1977) не найден.

Первая главная задача А. у. т. заключается в выборе допустимого управления, при к-ром гарантируется достижение цели x_f. Она имеет два способа решения. Первый из них состоит в проявлении воли главного конструктора (ГК) объекта (1) — назначение определенного вида движения, при к-ром цель x_f достижима, и в подборе соответствующего управления. Такой способ решения задачи программирования применяется в практике во многих случаях. При другом способе ищется допустимое управление, минимизирующее заданную плату управления. Математич. формулировка задачи такова. Даны: математич. модель объекта управления (1), (2); граничные условия на вектор x, к-рые символически запишем в виде

$$(i,\ f)=0; \tag{6}$$

гладкая функция $G(x,\ t)$ и плата за принятое управление

$$\Delta G=G(x,\ t)\Big|_i^f. \tag{7}$$

З а д а ч а п р о г р а м м и р о в а н и я: среди допустимых управлений требуется найти такое, при к-ром условия (6) выполняются, а функционал (7) принимает минимальное значение. Необходимые условия мини-

мума этой неклассической вариационной задачи доставляются следующей теоремой, носящей название «принцип максимума Л. С. Понтрягина» (см. [4]). Введем в рассмотрение вспомогательный вектор $\psi\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ и вспомогательную скалярную функцию

$$H(\psi, x, u, t)=\psi \cdot f(x, u, t). \tag{8}$$

Функция H позволяет записать уравнение (1) и уравнение для вектора ψ в следующей форме:

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi}=-\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{9}$$

Уравнение (9) является линейным и однородным относительно ψ, имеет единственное непрерывное решение, определенное при любых начальных условиях $\psi(t_i)$ и $t \in \mathscr{T}$. Вектор ψ наз. нулевым, если хотя бы одна из его компонент не обращается тождественно в нуль при $t \in \mathscr{T}$. Справедлива теорема: для того чтобы кривая x^0, u^0 доставляла сильный минимум функционалу (7), необходимо существование ненулевого непрерывного вектора ψ, определенного уравнением (9), при к-ром функция $H(\psi, x, u, t)$ достигает максимума по u и выполняется условие трансверсальности

$$\left[\delta G - H\delta t + \sum \psi_\alpha \delta x_\alpha\right]_i^f = 0.$$

Пусть $x^0(t, x_i, x_f)$, $u^0(t, x_i, x_f)$ — решение, отвечающее задаче. Доказано, что в стационарной системе функция $H(\psi^0, x^0, u^0)$ удовлетворяет условию

$$H(\psi^0, x^0, u^0)=C, \tag{10}$$

где C — постоянная, то есть (10) — ее первый интеграл. Решение u^0, x^0 наз. программой управления.

Пусть u^0, x^0 есть к.-л. (необязательно оптимальная) программа управления. Оказывается, что знание лишь одной программы управления недостаточно для достижения цели. Дело в том, что программа u^0, x^0, как правило, неустойчива относительно любых сколь угодно малых изменений в задаче, в частности наиболее важных изменений начальных значений (i, f), или, иными словами, эта задача некорректна. Особенность некорректности, однако, заключается в том, что она может быть исправлена средствами автоматич. стабилизации, основанными только лишь на использовании «принципа обратной связи». В связи с этим возникает другая главная задача управления — задача определения закона обратной связи.

Пусть y — вектор возмущенного движения системы, а ξ — вектор, характеризующий дополнительное отклонение органа управления, предназначенное для гашения возмущенного движения. Для реализации отклонения ξ должен быть заранее предусмотрен соответствующий ресурс управления. Возмущенное движение будет описываться уравнением

$$\dot{y}=Ay+B\xi+\varphi(y, \xi, t)+f^0(t). \tag{11}$$

Здесь: A, B — известные матрицы, определенные на движении x^0, u^0, и суть известные функции времени; φ — нелинейные члены разложения функции $f(x, u, t)$; $f^0(t)$ — постоянно действующая возмущающая сила, происходящая либо от того, что программное движение не определено точно, либо от того, что при построении модели (1) не были учтены к.-л. дополнительные силы. Уравнение (11) определено в окрестности $\|y\| \leqslant \overline{H}$, где $\overline{H}$, вообще говоря, достаточно малое, а в нек-рых случаях любое конечное положительное число или даже ∞.

Заметим, что полная управляемость системы (1), вообще говоря, не гарантирует полной управляемости системы (11).

Будем говорить, что объект управления (11) наблюдаем по координатам $y_1, \ldots, y_r$, $r \leqslant n$, если

существует набор готовых к действию измерительных приборов, способных непрерывно производить измерения координат в любой момент времени $t \in \mathcal{T}$. Значение этого определения может быть проиллюстрировано примером управления продольным движением самолета. Хотя авиация существует более 50 лет, до сих пор нет прибора, измеряющего возмущение угла атаки крыла самолета или высоту его полета вблизи земли. Совокупность измеряемых координат назовем полем регулирования и обозначим через $P(y_1, \ldots, y_r)$, $r \leqslant n$.

Рассмотрим совокупность допустимых управлений ξ, определенных над полем P:

$$\xi = \xi(y_1, \ldots, y_r, t, p), \quad r \leqslant n, \tag{12}$$

где p — векторный или матричный параметр. Будем говорить, что управление (12) представляет собой закон обратной связи, если операция замыкания [т. е. подстановка (12) в уравнение (11)] дает систему

$$\dot{y} = Ay + B\xi(y_1, \ldots, y_r, t, p) + \varphi(y, \xi(y_1, \ldots, y_r, t, p), t), \tag{13}$$

невозмущенное движение к-рой $y=0$ асимптотически устойчиво (см. *Асимптотически устойчивое решение*). Система (13) наз. асимптотически устойчивой, если ее невозмущенное движение $y=0$ асимптотически устойчиво.

Существует два класса задач, к-рые могут быть сформулированы относительно замкнутой системы (13): класс задач анализа и класс задач синтеза.

Рассмотрим допустимое управление (12), заданное с точностью до выбора параметра p, напр.

$$\xi = \begin{Vmatrix} p_{11} & \ldots & p_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{r1} & \ldots & p_{rr} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_r \end{Vmatrix}.$$

Задача анализа: требуется определить область S значений параметра p, для к-рых замкнутая система (13) асимптотически устойчива. Построение области S осуществляется на основании методов, разработанных в теории устойчивости движения (см. *Устойчивости теория*) и нашедших широкое применение в А. у. т. В частности, отметим методы частотного анализа; методы, основанные: на *Ляпунова теории устойчивости* по первому приближению (теоремы Гурвица, Рауса и др.), на прямом методе Ляпунова построения v-функций, на теории Ляпунова — Пуанкаре построения периодич. решений, на методе гармонич. баланса, методе Б. В. Булгакова, методе А. А. Андронова, теории точечного преобразования поверхностей (см. [5]). Последняя группа методов дает возможность не только строить в пространстве P области S, но также проанализировать параметры устойчивых периодич. решений уравнения (13), характеризующих автоколебательные движения системы (13). Все эти методы получили широкое применение в практике автоматич. управления, и их изучают в рамках различных специальностей в высшей школе (см. [5]).

Если S не пусто, то управление (12) наз. законом обратной связи, или законом регулирования. Его реализация, осуществленная с помощью совокупности измерительных приборов, усилителей, преобразователей и исполнительных устройств, наз. регулятором.

С задачей анализа тесно связана другая весьма важная для практики задача о построении границ области притяжения (см. [6], [7]). Рассмотрим систему (13), в к-рой $p \in S$. Множество значений $y(t_i) = y_0$, содержащее точку $y=0$, для к-рых замк-

нутая система (13) сохраняет свойство асимптотич. устойчивости, наз. *областью притяжения тривиального решения* $y=0$. Задача состоит в том, чтобы для данной замкнутой системы (13) и точки $p \in S$ определить границы области притяжения.

Современная научная литература не содержит эффективных методов построения границ области притяжения, за исключением редких случаев, в к-рых удается построить неустойчивые периодич. решения замкнутых систем. Однако имеются нек-рые методы, позволяющие построить границы множества значений y_0, целиком содержащегося в области притяжения. В большинстве случаев эти методы основаны на оценке области фазового пространства, в к-ром *Ляпунова функция* удовлетворяет условию $v \geqslant 0$, $\dot{v} \leqslant 0$ (см. [7]).

Любое решение $y(t, y_0, p)$ замкнутой системы (13) представляет так наз. *переходный процесс*. В большинстве случаев практич. значения нельзя ограничиться решением лишь проблемы устойчивости. При разработке проекта предъявляются дополнительные, имеющие важное практич. значение, требования, при к-рых гарантируется наличие у переходного процесса нек-рых новых свойств. Характер требований и перечень свойств существенно связаны с физич. природой объекта управления. В задачах анализа обеспечение этих свойств переходного процесса, напр. заданного времени регулирования t^*, в ряде случаев может быть достигнуто за счет выбора параметра p. Задача выбора параметра p носит назв. *проблемы качества регулирования* (см. [5]), и методы решения этой проблемы связаны с тем или иным построением оценок решений $y(t, y_0, p)$: либо фактич. интегрированием уравнения (13), либо нахождением оценки этих решений экспериментально, с помощью аналоговой или цифровой вычислительной машины.

Задачи анализа переходных процессов имеют много иных формулировок во всех случаях, в к-рых $f^0(t)$ представляет собой случайную функцию, как, напр., в следящих системах (см. [5], [8]). Другие формулировки связаны с возможностью случайного изменения матриц A, B или даже функции φ (см. [5], [8]). В связи с этим развивались методы исследования случайных процессов, методы адаптации и обучения машин (см. [9]). Исследовались также переходные процессы в системах с запаздыванием и системах с распределенными параметрами (см. [10], [11]), в системах с переменной структурой (см. [12]).

Задача синтеза: дано уравнение (11), поле регулирования $P(y_1, \ldots, y_r)$, $r \leqslant n$, и множество $\xi(y_1, \ldots, y_r, t)$ допустимых управлений; требуется найти все множество M законов обратной связи (см. [13]). Одной из наиболее важных разновидностей этой задачи является *задача о структуре минимальных полей*. Поле $P(y_1, \ldots, y_r)$, $r \leqslant n$, наз. *минимальным полем*, если на нем существует хотя бы один закон обратной связи и если размерность поля r минимальна. Задача состоит в том, чтобы для данного уравнения (11) и множества допустимых управлений определить структуру $P(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_r})$ всех его минимальных полей. Поясним характер задачи на примере:

$$\dot{z} = Az + Bu,$$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & m & 0 & 0 \\ -m & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & -n & k & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad u = \begin{Vmatrix} u_2 \\ u_4 \end{Vmatrix},$$

m, n, k — заданные числа. Допустимые управления — множество кусочно непрерывных функций u_2, u_4, принимающих свои значения из области

$$|u_2| \leqslant \bar{u}_2, \quad |u_4| \leqslant \bar{u}_4.$$

Минимальными полями в задаче являются либо поле $P(z_2)$, либо поле $P(z_4)$. Размерность каждого поля равна единице и понизить ее нельзя (см. [13]).

Пока известен (1977) лишь один метод синтеза законов обратной связи, основанный на использовании функций Ляпунова (см. [13]). При этом существенную роль играет теорема Барбашина — Красовского (см. [6], [10], [15]): для того чтобы невозмущенное движение $y=0$ замкнутой системы

$$\dot{y}=\varphi(y) \tag{14}$$

было асимптотически устойчиво, достаточно существования знакоопределенной положительной функции $v(y)$, полная производная к-рой, в силу уравнения (14), есть функция $w(y)$, знакопостоянная отрицательная, однако такая, что на многообразии $w(y)=0$ не лежат целые траектории системы (14), кроме $y=0$. Задача выяснения существования и структуры минимальных полей имеет важное практич. значение, поскольку эти поля отвечают требованиям ГК о минимуме веса, габаритов, сложности, стоимости системы управления и ее максимальной надежности. Особый научный и практич. интерес эта задача приобретает для бесконечномерных систем, встречающихся в технике, биологии, медицине, экономике и социологии.

К сожалению, при проектировании систем управления невозможно ограничиться решением задачи синтеза законов обратной связи. В большинстве случаев требования ГК касаются обеспечения нек-рых важных специфич. свойств переходного процесса в замкнутой системе. Важность этих требований видна на примере регулирования атомного реактора. В случае, если переходный процесс затягивается более 5 *сек* или максимальное уклонение к.-л. его координаты превосходит заданное значение, происходит атомный взрыв. В связи с этим возникают новые задачи синтеза законов регулирования, определенных на множестве M. Приведем формулировку одной из таких задач. Рассмотрим две сферы: $\|y_0\|=R$, $y_0=y_i$, $\|y(t_1)\|=\varepsilon$, $R\gg\varepsilon$ — заданные числа. Обратимся к множеству M всех законов обратной связи. Возьмем любой из них и произведем замыкание, получим уравнение:

$$\dot{y}=Ay+B\xi(y_1, \ldots, y_r, t)+\varphi(y, \xi(y_1, \ldots, y_r, t), t). \tag{15}$$

Рассмотрим все множество решений $y(t, y_0)$ уравнения (15), начинающихся на сфере R. Будем называть их R-решениями. Поскольку система (15) асимптотически устойчива для любого y_0 на сфере, существует момент времени t_1, при к-ром соблюдаются условия

$$\|y(t_1, y_0)\|\leqslant\varepsilon,\ \|y(t, y_0)\|<\varepsilon$$

при любом $t>t_1$.

Пусть

$$t^*=\sup_{y_0} t_1.$$

Из определения t_1 ясно, что t^* существует. Интервал t^*-t_i наз. временем регулирования (затухания переходного процесса) в замкнутой системе (15), если любое R-решение выходит на сферу ε при $t_1\leqslant t^*$ и остается внутри ее при $t>t_1$. Очевидно, что время регулирования есть функционал вида $t^*=t^*(R, \varepsilon, \xi)$. Пусть T — заданное число. Возникает задача синтеза быстродействующих регуляторов: дано множество M законов обратной связи, требуется выделить такое его подмножество M_1, на к-ром время регулирования в замкнутой системе удовлетворяет условию

$$t^*-t_i\leqslant T.$$

Аналогично могут быть сформулированы задачи синтеза множеств $M_2, \ldots, M_k$ законов обратной связи, при к-рых соблюдаются другие $k-1$ требований ГК.

Главная задача синтеза об удовлетворении всех требований ГК разрешима, если множества $M_1, \ldots, M_k$ имеют непустое пересечение (см. [13]).

Наиболее детально задача синтеза изучена для случая, в к-ром поле P имеет максимальную размерность $r=n$, а показатель качества системы характеризуется функционалом

$$J=\int_0^\infty w(y,\ \xi,\ t)\,dt, \tag{16}$$

где $w(y,\ \xi,\ t)$ — знакоопределенная положительная функция по y, ξ. В этом случае задача наз. задачей аналитического конструирования оптимальных регуляторов (см. [14]) и формулируется так. Даны уравнение (11), класс допустимых управлений $\xi(y,\ t)$, определенных над полем $P(y)$ максимальной размерности, и функционал (16). Требуется найти управление $\xi=\xi(y,\ t)$, при к-ром функционал (16) достигает минимального значения. Эта задача разрешается теоремой: если уравнение (11) таково, что можно найти знакоопределенную положительную допускающую бесконечно малый высший предел функцию $v^0(y,\ t)$ и функцию $\xi^0(y,\ t)$ такие, что выполняется равенство

$$\frac{\partial v^0}{\partial t}+\frac{\partial v^0}{\partial y}(Ay+B\xi^0+\varphi(y,\ \xi^0,\ t))=0 \tag{17}$$

и справедливо неравенство

$$\frac{\partial v^0}{\partial t}+\frac{\partial v^0}{\partial y}(Ay+B\xi+\varphi(y,\ \xi,\ t))\geqslant 0$$

при любых допустимых ξ, то функция $\xi^0(y,\ t)$ разрешает задачу. При этом имеет место равенство

$$v^0(t_0,\ y_0)=\min_{\xi}\int_0^\infty w(y,\ \xi,\ t)\,dt.$$

Функция $v^0(y,\ t)$ наз. оптимальной функцией Ляпунова (см. [15]). Она служит решением уравнения (17) с частными производными типа Гамильтона—Якоби, удовлетворяющего условию $v(y(\infty),\ \infty)=0$. Методы эффективного решения такой задачи разработаны для случая, в к-ром функции w, φ допускают разложение в целые сходящиеся ряды по y, ξ с коэффициентами, являющимися непрерывными и ограниченными функциями от t. При этом принципиальное значение имеет разрешимость задачи по линейному приближению в уравнении (11) и оптимизации лишь интеграла от квадратичных членов, удерживаемых в разложении w. Разрешимость же последней задачи гарантируется соблюдением условия полной управляемости (см. [15]).

Лит.: [1] Максвелл Д. К., Вышнеградский И. А., Стодола А., Теория автоматического регулирования, М., 1949; [2] Четаев Н. Г., Устойчивость движения, 3 изд., М., 1965; [3] Красовский Н. Н., Теория управления движением, М., 1968; [4] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969; [5] Техническая кибернетика, кн. 1—2, М., 1967; [6] Барбашин Е. А., Введение в теорию устойчивости, М., 1967; [7] Зубов В. И., Математические методы исследования систем автоматического регулирования, Л., 1959; [8] Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, 3 изд., М., 1962; [9] Цыпкин Я. З., *Основы теории обучающихся систем*, М., 1970; [10] Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959; [11] Бесекерский В. А., Попов Е. П., Теория систем автоматического регулирования, М., 1966; [12] Теория систем с переменной структурой, под ред. С. В. Емельянова, М., 1970; [13] Летов А. М., «Дифференц. уравнения», 1970, т. 6, № 4, с. 592—615; [14] его же, Динамика полета и управление, М., 1969; [15] Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, 2 изд., М., 1966, (дополнение 4).

А. М. Летов.

АВТОМАТОВ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — направление в *автоматов теории*, характеризующееся использованием алгебраич. средств в изучении автоматов. А. а. т. основана на том, что автоматы можно рассматривать как нек-рые специальные алгебры или алгебраические системы. Кроме того, события, представимые ко-

нечными автоматами, относительно операций объединения, произведения и итерации образуют алгебру, порождаемую конечным множеством так наз. элементарных событий, каждое из к-рых состоит из одного однобуквенного или пустого слова. Алгебраический подход позволяет непосредственно использовать алгебраич. результаты в теории автоматов, а также помогает в нек-рых случаях установлению связи теории автоматов с другими областями математики. Так, с помощью теории автоматов были получены доказательства разрешимости нек-рых арифметических теорий второй ступени, а также новое, более простое, решение ограниченной *Бернсайда проблемы*.

С алгебраич. точки зрения, автомат (конечный или бесконечный) $\mathfrak{A}=(A, S, B, \varphi, \psi)$ является трехосновной алгеброй, т. е. алгеброй с тремя множествами A, S, B элементов и двумя операциями $\varphi : S\times A\to S$ и $\psi : S\times A\to B$. С другой стороны, переходную систему (A, S, φ), где $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ — входной алфавит, S — множество состояний (см. *Автомат конечный*), можно рассматривать как алгебру $\langle S, a_1, \ldots, a_n\rangle$ с унарными операциями, обозначаемыми буквами a_i входного алфавита A и такими, что $a_i s_j=\varphi(s_j, a_i)$. Таким образом, для автоматов естественно определяются такие понятия, как *автоматов гомоморфизм*, изоморфизм, подавтомат и т. д. Вместе с тем этот подход позволяет сопоставить автомату $\mathfrak{A}=(A, S, B, \varphi, \psi)$ полугруппу преобразований множества S с операцией суперпозиции, порожденную операциями a_i, так что для произвольных a_i, a_j из A и s из S положено

$$a_i a_j S=\varphi(\varphi(s, a_i), a_j).$$

Эта полугруппа наз. полугруппой автомата $\mathfrak{A}$, она используется как средство описания определенных свойств автоматов (классификация, разложимость, изоморфизм и т. д.) на алгебраич. языке. В то же время всякой полугруппе Q с единицей можно сопоставить автомат с заданным входным алфавитом $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ и множеством состояний Q следующим образом. Каждой букве a_i из A ставят в соответствие нек-рый элемент q_i из Q и тогда функцию переходов φ можно определить так: $\varphi(q, a_i)=qq_i$. Полугруппа такого автомата изоморфна подполугруппе полугруппы Q, порожденной элементами $q_1, \ldots, q_n$, и тем самым в случае, если $q_1, \ldots, q_n$ суть образующие полугруппы Q, полугруппа автомата изоморфна исходной полугруппе Q. Полугруппа автомата очевидным образом изоморфна факторполугруппе входной полугруппы всех слов в алфавите A (множество A^*) с операцией последовательного соединения слов (конкатенация) по конгруэнции

$$R=\{(\alpha, \beta): \alpha, \beta\in A^* \quad \text{и} \quad \forall s\in S\,(\varphi(s, \alpha)=\varphi(s, \beta))\}.$$

Для произвольного состояния $s\in S$ конгруэнция R является максимальной подконгруэнцией отношения

$$R_s=\{(\alpha, \beta): \alpha, \beta\in A^* \quad \text{и} \quad \varphi(s, \alpha)=\varphi(s, \beta)\}.$$

Это означает, в частности, что событие, представимое инициальным акцептором $\mathfrak{A}_s=(A, S, \varphi, S')$, является объединением нек-рых R-классов. Поскольку полугруппа автомата характеризует его с точностью до изоморфизма, то различным классам полугрупп соответствуют свои классы автоматов. В том случае, когда полугруппа автомата является свободной, или абелевой, или циклической, или нильпотентной и т. п., или, наконец, группой, автомат называется, соответственно, свободным, абелевым, циклическим, нильпотентным, групповым (или перестановочным). Другой подход, связанный с алгебраич. классификацией функций переходов и выходов, приводит к классам линейных, подстановочных и др. автоматов (см. *Автомат*). Подстановочные автоматы реализуют взаимно однозначные функции и исполь-

зуются в теории кодирования. Линейные автоматы представляют интерес в связи с простотой их схемной реализации.

Автомат (A, S, B, φ, ψ) наз. л и н е й н ы м а в т о м а т о м (л. а.), если A, S и B — линейные пространства над нек-рым полем P,

$$\varphi(s, a)=\varphi_1(s)+\varphi_2(a), \psi(s, a)=\psi_1(s)+\psi_2(a),$$

где φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 — линейные отображения соответственно: S в S, A в S, S в B, A в B. Обычно предполагается, что поле P конечно, а пространства A, S, B конечномерны; в этом случае л. а. является конечным автоматом. Если в представлении конечного акцептора в виде алгебры, операциями к-рой являются буквы входного алфавита, допустить многоместные операции, то полученное обобщение наз. а в т о м а т о м н а д т е р м а м и (а в т о м а т о м н а д д е р е в ь я м и, о б о б щ е н н ы м а в т о м а т о м). Такие автоматы используются для доказательства разрешимости нек-рых математич. теорий второй ступени.

Лит.: [1] Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп, М., 1975; [2] Г л у ш к о в В. М., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, № 5, с. 3—62; [3] Т э т ч е р Дж. В., Р а й т Дж. Б., в кн.: Кибернетический сборник, в. 6, М., 1969, с. 112—44. См. также лит. к статье *Автомат*.

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов.

АВТОМАТОВ ГОМОМОРФИЗМ — отображение входного и выходного алфавитов, а также множества состояний одного автомата в аналогичные множества другого автомата, сохраняющее функции переходов и выходов. Более точно А. г. автомата $\mathfrak{A}_1=(A_1, S_1, B_1, \varphi_1, \psi_1)$ в автомат $\mathfrak{A}_2=(A_2, S_2, B_2, \varphi_2, \psi_2)$ (см. *Автомат конечный*) — это отображение $h=(h_1, h_2, h_3)$ множества $A_1\times S_1\times B_1$ в множество $A_2\times S_2\times B_2$ такое, что

$$h_1: A_1\longrightarrow A_2,\ h_2: S_1\longrightarrow S_2,\ h_3: B_1\longrightarrow B_2,$$

и для любых s из S_1 и a из A_1 имеют место равенства:

$$h_2\varphi_1(s, a)=\varphi_2(h_2(s), h_1(a)),$$

$$h_3\psi_1(s, a)=\psi_2(h_2(s), h_1(a)).$$

Для автоматов инициальных, кроме того, требуется, чтобы функция h начальное состояние переводила в начальное. Автоматы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ наз. г о м о м о р ф н ы м и, если существует А. г. h, отображающий $A_1\times S_1\times B_1$ на $A_2\times S_2\times B_2$. Если, кроме того, отображение h взаимно однозначно, то h наз. и з о м о р ф и з м о м, а автоматы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — и з о м о р ф н ы м и а в т о м а т а м и. Если алфавиты A_1 и A_2, а также B_1 и B_2 совпадают и отображения h_1 и h_3 тождественны, то гомоморфизм (изоморфизм) h наз. г о м о м о р ф и з м о м (и з о м о р ф и з м о м) п о с о с т о я н и я м. Аналогично определяются гомоморфизмы (изоморфизмы) по входному и выходному алфавитам. Изоморфные по состояниям автоматы, а также гомоморфные по состояниям инициальные автоматы эквивалентны (см. *Автоматов эквивалентность*).

Понятие А. г. используется в связи с задачами минимизации, разложения, полноты автоматов и др.

Лит.: [1] Г л у ш к о в В. М., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 5, с. 3—62.

А. А. Летичевский.

АВТОМАТОВ КОМПОЗИЦИИ — операции, позволяющие из одних автоматов получать другие, более сложные, путем соединения исходных автоматов по определенным правилам. А. к. играют важную роль в задачах синтеза и разложения автоматов. Важнейшими и наиболее употребительными А. к. являются прямое произведение, суперпозиция, обратная связь.

П р я м ы м п р о и з в е д е н и е м автоматов $\mathfrak{A}_i=(A_i, S_i, B_i, \varphi_i, \psi_i)$, $i=1, \ldots, n$, наз. автомат $\mathfrak{A}=(A, S, B, \varphi, \psi)$, у к-рого

$$S=S_1\times\ldots\times S_n,\quad A=A_1\times\ldots\times A_n,\quad B=B_1\times\ldots\times B_n,$$

а функции $\varphi(s, a)$ и $\psi(s, a)$ определяются соотношениями:

$$\varphi((s_1, \ldots, s_n), (a_1, \ldots, a_n)) = (\varphi_1(s_1, a_1), \ldots, \varphi_n(s_n, a_n)),$$
$$\psi((s_1, \ldots, s_n), (a_1, \ldots, a_n)) = (\psi_1(s_1, a_1), \ldots, \psi_n(s_n, a_n)).$$

Под суперпозицией автоматов $\mathfrak{A}_1=(A_1, S_1, B_1, \varphi_1, \psi_1)$ и $\mathfrak{A}_2=(B_1, S_2, B_2, \varphi_2, \psi_2)$ понимают автомат $\mathfrak{B}=(A_1, S, B_2, \varphi, \psi)$, у к-рого $S=S_2\times S_1$, а

$$\varphi((s_2, s_1), a) = (\varphi_2(s_2, \psi_1(s_1, a)), \varphi_1(s_1, a))$$

и

$$\psi((s_2, s_1), a) = \psi_2(s_2, \psi_1(s_1, a)),$$

где $(s_2, s_1)\in S$ и $a\in A_1$.

В вопросах полноты и синтеза автоматов большую роль играет операция обратной связи. Эта операция применима к автоматам с n входами и m выходами: $\mathfrak{A}=(A, S, B, \varphi, \psi)$, где $A=A_1\times\ldots\times A_n$, $B=B_1\times\ldots\times B_m$,

$$\psi(s, (a_1, \ldots, a_n)) =$$
$$= (\psi_1(s, (a_1, \ldots, a_n)), \ldots, \psi_m(s, (a_1, \ldots, a_n)))$$

таким, что для нек-рых i, j имеет место $B_i=A_j$ и функция ψ_i не зависит от a_j, т. е.

$$\psi_i = \psi_i(s, (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)).$$

Тогда в применении к i-му выходу и j-му входу автомата $\mathfrak{A}$ операция обратной связи дает автомат $\mathfrak{A}'=(A', S, B, \varphi', \psi')$ такой, что $A'=A_1\times\ldots\times A_{j-1}\times A_{j+1}\times\ldots\times A_n$,

$$\varphi'(s, (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)) =$$
$$= \varphi(s, (a_1, \ldots, a_{j-1}, \psi_i(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n), a_{j+1}, \ldots, a_n)),$$
$$\psi'(s, (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)) =$$
$$= \psi(s, (a_1, \ldots, a_{j-1}, \psi_i(s, (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)), a_{j+1}, \ldots, a_n)).$$

Кроме указанных, иногда используются другие виды А. к., напр. произведение, прямая сумма, полупрямое произведение и т. д.

Лит.: [1] Глушков В. М., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 5 (101), с. 3—62; [2] Кудрявцев В. Б., «Проблемы кибернетики», 1965, в. 13, с. 45—74. *В. Н. Редько.*

АВТОМАТОВ МИНИМИЗАЦИЯ — минимизация значений параметров автоматов, приводящая к эквивалентным и в определенном смысле оптимальным автоматам. Задача А. м. возникает при синтезе автоматов, и ее специфика зависит от подхода к их изучению.

При макроподходе минимизируют, как правило, число состояний автоматов, получая минимальные, или приведенные, автоматы. Специфика отыскания приведенных автоматов связана с формой задания автоматов и типа их поведения. Так, если в качестве поведения *автомата конечного*, заданного, напр., с помощью диаграммы переходов, рассматривать систему *ограниченно-детерминированных функций*, реализуемых автоматом, то отыскание минимального конечного автомата, эквивалентного исходному, осуществляется эффективно; оно основано на теореме Мура, согласно к-рой отличимость двух состояний автомата с n состояниями может быть установлена экспериментом длины $n-1$. Алгоритм минимизации состоит в построении такого автомата при том же способе задания, состояния к-рого соответствуют классам неотличимых состояний исходного автомата, а функции переходов и выходов определяются по представителям из этих классов. При этом минимальный автомат с точностью до изоморфизма состояний единствен. При рассмотрении конечного автомата как акцептора, представляющего подмножеством выделенных состояний событие, описанное с помощью заданного регулярного выражения, минимальный автомат строится эффективно, и алгоритм его построения можно разделить на два этапа. Сначала по исходному регулярному выражению строится нек-рый,

не обязательно минимальный, автомат, представляющий соответствующее регулярное событие. Такой автомат может быть построен, напр., с помощью индукции по операциям объединения $\cup$, конкатенации $\circ$ и итерации $*$, входящим в регулярное выражение. По автоматам $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_3$, представляющим, соответственно, события R_1, R_2 и R_3, специальным образом строятся автоматы $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_5$ и $\mathfrak{A}_6$, представляющие события $R_1 \cup R_2$, $R_1 \circ R_2$ и R_3^*, причем число состояний автомата $\mathfrak{A}_4$ не превосходит произведения чисел состояний автоматов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$; число состояний автомата $\mathfrak{A}_5$, вообще говоря, не больше произведения числа состояний автомата $\mathfrak{A}_1$ на число всех подмножеств множества состояний автомата $\mathfrak{A}_2$, а число состояний автомата $\mathfrak{A}_6$ не больше числа подмножеств множества состояний автомата $\mathfrak{A}_3$. На втором этапе число состояний полученного автомата минимизируется обычным способом, причем классам неотличимых финальных состояний исходного автомата соответствуют финальные состояния минимального автомата. Аналогичным способом строится минимальный автомат, представляющий заданное сверхсобытие. Существуют единственные с точностью до изоморфизма состояний минимальные автоматы, представляющие заданные события и сверхсобытия.

Для недетерминированных конечных, а также для недетерминированных и детерминированных бесконечных автоматов также существует единственный с точностью до изоморфизма состояний приведенный автомат. В первом случае отыскание этого автомата аналогично рассмотренному случаю конечных автоматов, а во втором его построение, вообще говоря, не является эффективным. Для стохастич. автомата с конечным числом состояний существует, вообще говоря, континуум различных приведенных автоматов, эквивалентных исходному. Отсюда следует отсутствие эффективного способа описания множества приведенных автоматов по заданному стохастич. автомату.

При микроподходе к изучению конечных автоматов для построения заданного автомата исходят из нек-рого конечного базисного набора $\mathfrak{B}$ логич. сетей. Требуется по автомату $\mathfrak{A}$, заданному, напр., с помощью канонич. уравнений, указать логич. сеть S, построенную из элементов базиса $\mathfrak{B}$ с использованием операций суперпозиции и обратной связи, к-рая реализует автомат $\mathfrak{A}$ и содержит минимальное число $L(\mathfrak{A})$ элементов базиса $\mathfrak{B}$, достаточное для реализации этого автомата. Т. о., сеть S будет являться в этом смысле оптимальной схемой для автомата $\mathfrak{A}$. В общем случае задача о реализации произвольного автомата $\mathfrak{A}$ с помощью сетей над базисом $\mathfrak{A}$ неразрешима и, следовательно, функция сложности $L(\mathfrak{A})$ автомата $\mathfrak{A}$ невычислима. В случае же, когда известно, что базис $\mathfrak{A}$ является полным (см. *Автоматов полные системы*), построение любой оптимальной сети для $\mathfrak{A}$ может быть осуществлено эффективно, напр., следующим образом. Известно, что проверка реализуемости автомата $\mathfrak{A}$ с помощью заданной сети S устанавливается эффективно. Кроме того, для заданного числа l число сетей над базисом $\mathfrak{B}$ сложности не более чем l вычислимо, и все эти сети строятся эффективно. Тем самым в качестве алгоритма построения всех оптимальных сетей для заданного автомата $\mathfrak{A}$ может быть использован последовательный просмотр на реализуемость автомата $\mathfrak{A}$ всех сетей сложности $1, 2, \ldots, L(\mathfrak{A})$. Вопрос о поведении функции $L(\mathfrak{A})$ и нек-рых ее обобщений составляет часть общей проблемы синтеза автоматов. Существует ряд эвристич. алгоритмов синтеза минимальных схем для автоматов, основанных на специальных свойствах базисов и конкретном содержании понятия оптимальности.

Лит. см. при ст. *Автомат конечный.*

В. А. Буевич.

АВТОМАТОВ ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ — специальные подмножества заданного класса M автоматов, на к-ром

определено нек-рое множество Ω операций со значениями в M. Эти подмножества обладают следующим основным свойством (с в о й с т в о м п о л н о т ы): множество всех автоматов, к-рые получаются путем конечного числа применений операций из Ω к автоматам из заданного подмножества $A \subseteq M$, совпадает с M. Задача о том, обладает ли множество свойством полноты или нет, наз. п р о б л е м о й п о л н о т ы (п. п.) для автоматов. Эта проблема изучена для различных моделей автоматов и операций. В порядке нарастания сложности объекта исследования сюда могут быть отнесены истинностные автоматы, автоматы, реализующие функции с задержками (т. е. функции k-значной логики с нек-рым временны́м сдвигом), конечные автоматы и др. П. п. для истинностных автоматов с обычно рассматриваемыми операциями суперпозиции по существу совпадает с п. п. для функций k-значной логики (см. *Многозначная логика*) и достаточно хорошо изучена. Под с и н х р о н н о й с у п е р п о з и ц и е й понимается такая суперпозиция автоматов, когда ко всем входам присоединяются автоматы, реализующие функции с одной и той же задержкой. Из найденных в этих случаях критериев полноты вытекает, в частности, существование алгоритма, устанавливающего для любой конечной системы автоматов ее полноту или неполноту. Основные критерии полноты даются в терминах так наз. п р е д п о л н ы х к л а с с о в (т. е. таких подмножеств класса M, к-рые замкнуты относительно операций из Ω и каждый из к-рых вместе с любым автоматом, ему не принадлежащим, образует полную систему). Показано, что множество A является полным тогда и только тогда, когда оно не является подмножеством ни одного предполного класса, к-рые, в свою очередь, полностью описаны. Этот подход успешно осуществлен в целом ряде других случаев. Принципиально он возможен и при рассмотрении конечных автоматов, когда в качестве Ω выбираются операции суперпозиции автоматов и операция обратной связи (см. *Автоматов композиции*). Здесь также справедлив указанный выше критерий, однако в этом случае установлено, что семейство предполных классов является континуальным, что исключает возможность получения эффективных критериев полноты в указанных терминах. Заметим, что во всех описанных случаях существуют конечные полные системы, и потому п. п. для произвольных систем автоматов сводится к п. п. для конечных систем автоматов. С последним обстоятельством, как и выше, связана задача об алгоритмич. разрешимости п. п. для конечных систем конечных автоматов. Эта проблема может быть обобщена: для данного автомата a и множества B требуется определить, может ли a быть получен из автоматов множества B при помощи заданного набора операций. Таким образом приходят к изучению предиката $P(x, y)$ — «автомат x реализуется набором y». Установлено, что проблема распознавания реализуемости алгоритмически неразрешима при любом фиксированном a, т. е. одноместный предикат $P(a, y)$ нерекурсивен. С другой стороны, при различных значениях B параметра y предикат $P(x, B)$ может быть как рекурсивным, так и нерекурсивным. В связи с алгоритмич. неразрешимостью п. п. для автоматов возникает задача об отыскании классов множеств, для к-рых указанная проблема имеет эффективное решение. В частности, существует алгоритм для распознавания полноты систем, состоящих только из автоматов Мура и всех истинностных автоматов. С п. п. связана задача нахождения конкретных полных множеств автоматов с заданными свойствами. Установлено, что для любого натурального n существует полная система автоматов, никакая собственная подсистема к-рой не является полной, и таких систем при заданном n бесконечно много. Существует также в нек-ром смысле простейший автомат с двумя состояния-

ми, двумя входными и одним выходным каналами, к-рый образует полную систему. П. п. рассматривается также для различных обобщений конечных автоматов и операций над ними; другое направление обобщений связано с введением различных отношений эквивалентности в рассматриваемом классе автоматов.

Лит.: [1] Яблонский С. В., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 51, с. 5—142; [2] Кудрявцев В. Б., «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8, с. 91—115; [3] его же, там же, 1965, вып. 13, с. 45—74; [4] Кратко М. И., «Алгебра и логика. Тр. семинара», 1964, т. 3, № 2, с. 33—44; [5] Летичевский А. А., Условия полноты в классе автоматов Мура, К., 1963; [6] Буевич В. А., «Проблемы кибернетики», 1970, в. 22, с. 75—83.

В. Б. Кудрявцев.

АВТОМАТОВ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ — варианты описания автоматов, их функционирования или поведения. А. с. з. зависят от подхода к определению понятия автомата. При макроподходе (см. *Автомат конечный*) описывается *внешнее поведение* автомата; при микроподходе задание должно содержать описание элементов, из к-рых строится автомат, и схемы их соединения. Ниже приводятся способы задания конечных автоматов.

Макроподход. В этом случае задать конечный автомат $\mathfrak{A}=\langle A, S, B, \varphi, \psi\rangle$ при условии, что заданы алфавиты $A=\{a_1, \ldots, a_m\}$, $S=\{s_1, \ldots, s_n\}$, $B=\{b_1, \ldots, b_k\}$, — значит описать функции φ и ψ или описать поведение этого автомата (см. *Автомата поведение*). Для задания функций φ и ψ обычно используют таблицу переходов, диаграмму переходов или матрицу переходов. Таблица переходов T автомата $\mathfrak{A}$ состоит из двух подтаблиц $T_\varphi=\|t_{ij}^{\varphi}\|$ и $T_\psi=\|t_{ij}^{\psi}\|$, $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, m$, $t_{ij}^{\varphi}\in S$, $t_{ij}^{\psi}\in B$. Функции φ и ψ определяются как $\varphi(s_i, a_j)=t_{ij}^{\varphi}$, $\psi(s_i, a_j)=t_{ij}^{\psi}$. Если все столбцы T_ψ совпадают, то таблица T задает автомат Мура. Напр., пусть $A_0=\{a_1, a_2\}$, $S_0=\{s_1, s_2\}$, $B_0=\{b_1, b_2\}$; тогда таблица T (рис. 1) задает функции φ_0 и ψ_0 нек-рого автомата $\mathfrak{A}^0$ (на рис. 2 показаны подтаблицы T_φ и T_ψ таблицы T).

	a_1	a_2
s_1	s_1, b_2	s_2, b_2
s_2	s_2, b_1	s_1, b_2

Рис. 1

	a_1	a_2
s_1	s_1	s_2
s_2	s_2	s_1

	a_1	a_2
s_1	b_2	b_2
s_2	b_1	b_2

Рис. 2

Диаграмма автомата (диаграмма переходов автомата) — это ориентированный граф G, вершинам к-рого взаимно однозначно соответствуют элементы S, а ребрам приписаны нек-рые множества пар вида (a, b), $a\in A$, $b\in B$. Из каждой вершины G исходит по крайней мере одно ребро; при этом множество $\mathfrak{N}$ всех пар, приписанных ребрам, исходящим из одной вершины, имеет вид $\mathfrak{N}=\{(a_1, b_{i_1}), (a_2, b_{i_2}), \ldots, (a_m, b_{i_m})\}$. Функции φ и ψ определяются следующим образом: $\varphi(s_i, a_j)=s_r$, $\psi(s_i, a_j)=b_p$, если ребру, исходящему из вершины s_i, приписана пара (a_i, b_p) и это ребро ведет в вершину s_r. Нек-рые свойства автомата удобно формулировать на языке диаграмм (связность автомата, достижимость состояний и т. п.). На рис. 3 представлена диаграмма переходов автомата $\mathfrak{A}^0$.

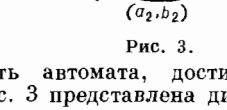


Рис. 3.

Матрица переходов используется для описания функционирования переходной системы $\langle A, S, \varphi\rangle$ (см. *Автомат конечный*). Она представляет собой $(n\times n)$-матрицу $P=\|P_{ij}\|$, элементами к-рой являются подмножества алфавита A (может быть, пустые) такие,

что $a \in P_{ij}$ тогда и только тогда, когда $\varphi(s_i, a) = s_j$ и, следовательно, для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место $P_{ip} \cap P_{ir} = \phi$ при $p \neq r$ и $\bigcup_{j=1}^{n} P_{ij} = A$. Чтобы распространить функцию φ на множество $S \times A^*$ (A^* — множество всех слов в алфавите A, включая пустое слово), рассматривают последовательность степеней матрицы P. Умножение матрицы P на себя производится по обычному алгоритму с использованием вместо операций умножения и сложения операций произведения (к о н к а т е н а ц и и) и объединения множеств слов. Если $\alpha \in A^*$ — слово длины d и $\alpha \in P_{ij}^{(d)}$, где $P_{ij}^{(d)}$ — элемент матрицы P^d, то $\varphi(s_i, \alpha) = s_j$. Так, матрица переходов P переходной системы $\langle A_0, S_0, \varphi_0 \rangle$ и матрица P^2 имеют, соответственно, вид:

$$P = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{matrix} \right\|, \quad P^2 = P \times P = \left\| \begin{matrix} \{a_1a_1, a_2a_2\} & \{a_1a_2, a_2a_1\} \\ \{a_2a_1, a_1a_2\} & \{a_2a_2, a_1a_1\} \end{matrix} \right\|.$$

С указанными А. с. з. связан ряд алгоритмов минимизации (приведения) и синтеза автоматов.

Для задания поведения инициального (не обязательно конечного) автомата $\mathfrak{A}_{s_1}$ (преобразователя) необходимо описать функцию $f(\alpha) = \psi(s_1, \alpha)$, отображающую A^* в B^* (или A^∞ в B^∞, где A^∞, B^∞ — множества всех сверхслов в алфавитах A и B, соответственно). Эта функция может быть задана и н ф о р м а ц и о н н ы м д е р е в о м. Из каждой вершины информационного дерева исходит m ребер, взаимно однозначно соответствующих буквам алфавита A. Каждой вершине приписано состояние автомата $\mathfrak{A}_{s_1}$, а каждому ребру — буква алфавита B следующим образом. Корню приписано состояние s_1. Если нек-рой вершине приписано состояние s_i, то ребру, соответствующему букве a из A, приписана буква $b = \psi(s_i, a)$ и вершине, в к-рую ведет это ребро, приписано состояние $s_j = \varphi(s_i, a)$. Каждому слову $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_r \in A^*$ соответствует единственная последовательность $\rho = \rho_1\rho_2 \ldots \rho_r$ ребер этого дерева такая, что ρ_1 исходит из корня и ρ_{i+1} исходит из вершины, в к-рую ведет ρ_i. Слово $\beta = \beta_1\beta_2 \ldots \beta_r$, где β_i — буква из B, приписанная ребру ρ_i, $i = 1, \ldots, r$, совпадает со значением $\bar{\psi}(s_1, \alpha)$. Если функция f реализуется конечным автоматом, то соответствующее информационное дерево может быть задано эффективно своим конечным поддеревом. На рис. 4 изображено поддерево информационного дерева, задающее поведение инициального автомата $\mathfrak{A}_{s_1}^0$ (левые ребра, исходящие из вершин, соответствуют символу a_1, правые — символу a_2).

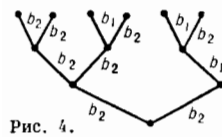


Рис. 4.

Описание поведения конечного автомата (акцептора) в терминах представимого события (сверхсобытия) может быть сделано с помощью регулярного выражения (см. *Регулярное событие*). Такие события могут быть также заданы как множества слов, порождаемых (выводимых) в нек-рой формальной системе (полу-Туэ грамматике и т. п.). Система полу-Туэ в этом случае задается четверкой $T = \langle A, S, \xi, \omega \rangle$, где A, S — конечные алфавиты, $A \cap S = \phi$, ξ — *аксиом схема* вида s_0X и ω — множество схем правил вывода вида $saX \to s'X$, $r \to r$, где $s, s', r \in S$, $a \in A$ и X — переменная, принимающая значения из A^*. При этом, если $saX \to s'X$ и $saX \to s''X$ принадлежат ω, то $s' = s''$. Слово $\alpha \in A^*$ выводимо в системе T, если существует последовательность слов $s_0\alpha = w_1, w_2, \ldots, w_n$ такая, что w_{i+1} получается из w_i, $i = 1, \ldots, n-1$, применением нек-рого правила из ω, $w_n \in S$ и ω не содержит правила $w_n \to w_n$. Аналогичный вид имеет грамматика, порождающая регулярное событие. Она задается четверкой $\Gamma = (A, S, s_1, \omega)$, где s_1 из S — аксиома, ω — множество правил вида $s_i \to as_j$, либо $s_i \to a$.

Слово $\alpha=\alpha_1 \ldots \alpha_n$ выводимо в Γ, если в ω имеются правила $s_1 \to \alpha_1 s_{i_2}$, $s_{i_2} \to \alpha_2 s_{i_3}$, $\ldots$, $s_{i_n} \to \alpha_n$. Известны алгоритмы, позволяющие получать матрицу переходов автомата по формальным системам описанного типа. Так, событие, представимое в акцепторе $\langle A_0, S_0, \varphi_0, s_1 \rangle$ состоянием s_2, может быть, напр., задано как множество слов, выводимых в системе полу-Туэ, к-рая имеет вид:

$$\mathscr{T}=\langle A_0, S_0, \xi=\{s_1 X\},$$
$$\omega=\{s_1 a_2 X \to s_2 X;\ s_1 a_1 X \to s_1 X;$$
$$s_2 a_1 X \to s_2 X;\ s_2 a_2 X \to s_1 X;\ s_1 \to s_1\}\rangle.$$

Существует ряд других А. с. з. Напр., переходная система $\langle A, S, \varphi \rangle$, не обязательно конечная, может быть задана как алгебра $\langle S, \Phi \rangle$, где $\Phi=\{\varphi_a | a \in A\}$ есть множество унарных операций на S таких, что $\varphi_a(s)=\varphi(a, s)$. Так, переходную систему $\langle A_0, S_0, \varphi_0 \rangle$ можно рассматривать как алгебру $\langle S_0, \{\varphi_{a_1}, \varphi_{a_2}\}\rangle$, где $\varphi_{a_1}(s_1)=s_1$, $\varphi_{a_1}(s_2)=s_2$, $\varphi_{a_2}(s_1)=s_2$, $\varphi_{a_2}(s_2)=s_1$. Можно также рассматривать алгебру $\langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle$, где $\tilde{S}$ — множество слов вида $s\alpha$, $s \in S$, $\alpha \in A^*$, и $\tilde{\Phi}=\{\tilde{\varphi}_a | a \in A\}$ — множество унарных операций на $\tilde{S}$ таких, что $\tilde{\varphi}_a(s\alpha)=s\alpha a$. Алгебра $\langle \tilde{S}, \tilde{\Phi} \rangle$ задается системой образующих S и множеством определяющих соотношений $\omega=\{s_i\alpha_i=s_i'\alpha_i',\ i=1, 2 \ldots\}$. Такая алгебра задает автомат (вообще говоря, частичный) $\langle A, S, \varphi \rangle$ такой, что если $s_i\alpha_i=s_i'\alpha_i'$ — соотношение из ω, то $\varphi(s_i, \alpha_i)=\varphi(s_i', \alpha_i')$. Напр., переходную систему $\langle A_0, S_0, \varphi_0 \rangle$ можно задать системой образующих S_0 и множеством определяющих соотношений $\omega=\{s_1=s_1a_1,\ s_1=s_2a_2,\ s_2=s_1a_2,\ s_2=s_2a_1\}$. При этом предполагается, что $\varphi(s_1, \Lambda)=s_1$, $\varphi(s_2, \Lambda)=s_2$.

Поведение автомата может быть описано средствами языка логики одноместных предикатов. При этом выбор класса формул, задающих конечные автоматы, осуществляется различными способами. Описание может быть неполным, тогда оно определяет нек-рый класс автоматов, поведение к-рых идентично с точностью до этого описания. Напр., «анкетный» подход связан с заданием класса автоматов с помощью фрагментов информационных деревьев, частичного определения функций φ и ψ и т. п.

Указанные А. с. з. могут быть использованы с соответствующими модификациями при макроподходе к поведению нек-рых обобщений конечных автоматов (недетерминированных, бесконечных и т. п., см. *Автомат*). Так, элементами таблицы T_φ конечного недетерминированного автомата могут быть произвольные подмножества множества S. Поведение конечного недетерминированного акцептора описывается регулярным выражением, как и в детерминированном случае. Другими обобщениями конечных автоматов являются конечные *автоматы вероятностные*, автоматы над термами, мозаичные структуры и т. п.

Задать вероятностный автомат $\langle A, S, B, \mu \rangle$, если известны алфавиты $A=\{a_1, \ldots, a_m\}$, $B=\{b_1, \ldots, b_k\}$, $S=\{s_1, \ldots, s_n\}$, — значит при любых фиксированных i и j $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ указать условную вероятностную меру $\mu_{ij}(s_r, b_q)$ на множестве всех пар (s_r, b_q), $r=1, \ldots, n$, $q=1, \ldots, k$. Для этого обычно рассматривают систему квадратных матриц с неотрицательными элементами

$$M^{q,j}=\left\| \mu_{i,\ r}^{q,\ j} \right\|,\ i,\ r=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, m;$$
$$q=1, \ldots, k,$$

такую, что каждая матрица $M^j=\sum_{q=1}^{k} M^{q,j}$ является стохастической. Мера μ определяется так: $\mu_{ij}(s_r, b_q)=\mu_{i,r}^{q,j}$. Вероятностный автомат $\langle A, S, B, \mu \rangle$ рассматривается совместно с нек-рым начальным распределением вероятностей на множестве S:

$$\mu_0=(\mu_0(s_1), \ldots, \mu_0(s_n)),\ \mu_0(s_i) \geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{n} \mu_0(s_i)=1.$$

Иногда при задании вероятностных автоматов ограничиваются либо указанием матриц M^j, либо указанием матриц $\overline{M}^j=\|\mu^j_{i,q}\|$, где

$$\mu^j_{i,q}=\sum_{r=1}^{n}\mu^{q,j}_{i,r},$$

$i=1, \ldots, n$, $q=1, \ldots, k$, $j=1, \ldots, m$. Любая конечная *Маркова цепь* может рассматриваться как конечный вероятностный автомат, у к-рого матрицы M^j, $j=1, \ldots, m$, совпадают. Ниже представлены система матриц, задающая нек-рый вероятностный автомат $\mathfrak{A}$ ($n=2$, $k=2$, $m=2$), и матрицы M^1, M^2, $\overline{M}^1$, $\overline{M}^2$ этого автомата:

$$M^{1,1}=\begin{Vmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{Vmatrix},\qquad M^{1,2}=\begin{Vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{Vmatrix},$$

$$M^{2,1}=\begin{Vmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{Vmatrix},\qquad M^{2,2}=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{Vmatrix},$$

$$M^1=\begin{Vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{Vmatrix},\qquad M^2=\begin{Vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{Vmatrix},$$

$$\overline{M}^1=\begin{Vmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{Vmatrix},\qquad \overline{M}^2=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{Vmatrix}.$$

Чтобы задать конечный автомат над термами $\langle A, S, \sigma, \alpha_a\rangle$, когда известны алфавиты $A=\{a_1, \ldots, a_m\}$, $S=\{s_1, \ldots, s_n\}$, необходимо, во-первых, указать отображение σ множества A в конечное множество неотрицательных целых чисел, причем так, чтобы существовал хотя бы один элемент $a\in A$ такой, что $\sigma(a)=0$, а во-вторых, для всякого $a_i\in A$, $i=1, \ldots, m$, требуется определить $\sigma(a_i)$-местную функцию α_{a_i}, отображающую множество $[S]^{\sigma(a_i)}=S\times\ldots\times S$ в S. Каждому элементу $a\in A$ такому, что $\sigma(a)=0$, ставится в соответствие элемент $\alpha_a\in S$, наз. начальным состоянием автомата. Напр., если $A=\{a_1, a_2\}$, $S=\{s_1, s_2\}$, $\sigma(a_1)=0$, $\sigma(a_2)=2$, $\alpha_{a_1}=s_1$, $\alpha_{a_2}(s_1, s_1)=s_2$, $\alpha_{a_2}(s_1, s_2)=s_1$, $\alpha_{a_2}(s_2, s_1)=s_2$, $\alpha_{a_2}(s_2, s_2)=s_2$, то функции σ, α_{a_1}, α_{a_2} задают нек-рый автомат над термами $\langle A, S, \sigma, \{\alpha_{a_1}, \alpha_{a_2}\}\rangle$ с начальным состоянием s_1.

Чтобы задать мозаичную структуру (бесконечное соединение переходных систем вида $\langle A, S, \varphi\rangle$, где $A=S^r$, см. *Автомат*), необходимо для каждой целочисленной точки n-мерного пространства определить конечное упорядоченное множество целочисленных точек — ее окрестность. При этом входной алфавит A переходной системы $\langle A, S, \varphi\rangle$, помещенной в нек-рую точку, есть декартово произведение множеств состояний переходных систем, помещенных в точки ее окрестности. Напр., пусть $S=\{s_1, s_2\}$ и для всякой целочисленной точки двумерного пространства (α, β) ее окрестность $D_{\alpha,\beta}$ есть упорядоченное множество $\{(\alpha-1, \beta), (\alpha, \beta+1), (\alpha+1, \beta)\}$. Чтобы задать однородную двумерную мозаичную структуру, определяют функцию φ следующим образом: $\varphi(s_1, s_1, s_1)=s_1$, $\varphi(s', s'', s''')=s_2$ в остальных случаях. Входной алфавит A в данном случае — декартово произведение $S\times S\times S$.

Микроподход. При микроподходе задать структурный автомат — значит описать элементы, из к-рых он построен, и схему их соединения. Описание может производиться на различных уровнях детализации. Часто ограничиваются рассмотрением так наз. к а н о н и ч е с к о й с х е м ы построения автоматов; при этом элементы делят на две группы — ф у н к ц и о н а л ь н ы е э л е м е н т ы (автоматы с одним состоянием) и э л е м е н т ы п а м я т и. Канонич. схема (рис. 5) состоит из двух функциональных блоков f и g с присоединенными к ним элементами памяти, в качестве к-рых

используются автоматы Мура: $\mathfrak{A}_i = \langle R_i, S_i, Q_i, \varphi_i, \psi_i \rangle$, $i=1, \ldots, l$. Блоки f и g построены из функциональных элементов. При данном способе задания структуру этих блоков не описывают, а задают (напр., таблично) реализуемые ими вектор-функции:

$$f = (f_1(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_l), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_l)):$$
$$A^n \times Q_1 \times \ldots \times Q_l \longrightarrow R_1 \times \ldots \times R_l;$$
$$g = (g_1(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_l), \ldots, g_l(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_l)):$$
$$A^n \times Q_1 \times \ldots \times Q_l \longrightarrow B^m,$$

где A^n и B^m —, соответственно, входной и выходной алфавиты канонич. схемы. Эта схема задает структурный автомат $\langle A^n, S, B^m, \varphi, \psi \rangle$, где $S = S_1 \times \ldots \times S_l$, а функции φ и ψ определяются следующим образом:

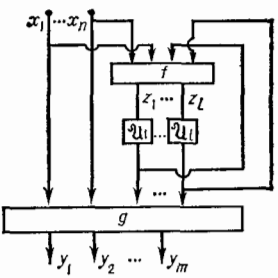


Рис. 5.

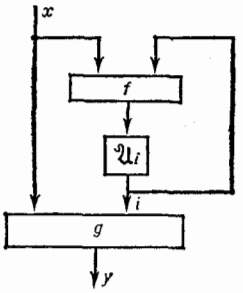


Рис. 6.

$$\varphi((s_1, \ldots, s_l), (a_1, \ldots, a_n)) = (s_1', \ldots, s_n'),$$
$$s_i = \varphi_i(s_i, f_i(a_1, \ldots, a_n, \psi_1(s_1), \psi_2(s_2), \ldots, \psi_l(s_l))),$$
$$\psi((s_1, \ldots, s_l), (a_1, \ldots, a_n)) = (b_1, \ldots, b_m),$$
$$b_j = g_j(a_1, \ldots, a_n, \psi_1(s_1), \ldots, \psi_l(s_l)).$$

Важным примером структурных автоматов являются логич. сети (см. *Автомат конечный*). На рис. 6 представлена канонич. схема автомата $\langle \tilde{A}, \tilde{S}, \tilde{B}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \rangle$, изоморфного автомату $\mathfrak{A}^0$, диаграмма к-рого изображена на рис. 3, $\tilde{A} = \tilde{S} = \tilde{B} = \{0,1\}$. Автомат $\mathfrak{A}' = \langle \tilde{S}, \tilde{S}, \tilde{S}, \varphi', \psi' \rangle$ — автомат Мура такой, что $\varphi'(1, z) = z$, $\varphi'(0, z) = z$.

Для описания структурных автоматов часто используются каноническое уравнения, т. е. системы вида:

$$u_1(1) = s_0,$$
$$\ldots\ldots$$
$$u_l(1) = s_0,$$
$$u_1(t+1) = f_1(u_1(t), \ldots, u_l(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_l(t+1) = f_l(u_1(t), \ldots, u_l(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$
$$y_1(t) = g_1(u_1(t), \ldots, u_l(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_m(t) = g_m(u_1(t), \ldots, u_l(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

где $t=1, 2, \ldots$ — целочисленный параметр, $s_0 \in S$, а функции f_i, $i=1, \ldots, l$, g_i, $i=1, \ldots, m$, и переменные x_r, $r=1, \ldots, n$, принимают значения из множества A. Этой системе соответствует канонич. схема, в к-рой все элементы памяти совпадают: $\mathfrak{U}_i = \langle A, S, B, \varphi, \psi, s_0 \rangle$, где $A = S = B$, $i=1, \ldots, l$; $\varphi(a, a') = a'$, $\psi(a, a') = a$. Функционирование автомата $\mathfrak{U}_i$ содержательно может быть описано следующим образом. Пусть в момент времени t входу $\mathfrak{U}_i$ приписана буква $a(t)$, тогда эта же буква будет приписана выходу $\mathfrak{U}_i$ в момент $t+1$. На рис. 6 представлен автомат $\mathfrak{A}$, канонич. уравнения к-рого имеют вид:

$$u(1) = 0,$$
$$u(t+1) = x(t) + u(t) \pmod 2,$$
$$y(t) = x(t) \vee u(t).$$

В общем случае описание структурных автоматов связано с заданием набора элементарных автоматов и нек-рого класса «правильно устроенных» схем (сетей), причем последние обычно определяются индуктивно.

Лит.: [1] Автоматы. Сб. статей, пер. с англ., М., 1956; [2] Глушков В. М., Синтез цифровых автоматов, М., 1962.

В. А. Буевич, С. В. Алешин.

АВТОМАТОВ ТЕОРИЯ — раздел теории управляющих систем, изучающий математич. модели преобразователей дискретной информации, называемые автоматами. С определенной точки зрения такими преобразователями являются как реальные устройства (вычислительные машины, автоматы, живые организмы и т. д.), так и абстрактные системы (математич. машины, аксиоматич. теории и т. д.). А. т. возникла в сер. 20 в. в связи с изучением *автоматов конечных*, как математич. моделей нервных систем, и вычислительных машин. В дальнейшем класс объектов и проблематика А. т. существенно расширились, включив нек-рые понятия и задачи других разделов математики. Наиболее тесно А. т. связана с *алгоритмов теорией*, в частности с теорией абстрактных машин, поскольку автоматы можно рассматривать как частный случай последних.

Большинство задач А. т.— общие для основных видов управляющих систем. К ним относятся задачи анализа и синтеза автоматов, задачи полноты, минимизации, эквивалентных преобразований автоматов и др. Задача анализа состоит в том, чтобы по заданному автомату описать его поведение или по неполным данным об автомате и его функционированию установить те или иные его свойства (см. *Автомата поведение*, *Эксперименты с автоматами*). Задача синтеза автоматов состоит в построении автомата с наперед заданным поведением или функционированием (см. *Синтеза задачи*). К этой задаче примыкают проблемы, связанные с оценкой сложности автоматов, обладающих заданным поведением, а также с построением алгоритмов, дающих в определенном смысле оптимальные автоматы (см. *Автоматов минимизация*). Кроме того, применительно к классам исходных автоматов или автоматных отображений возникает проблема полноты (см. *Функциональные системы*, *Автоматов полные системы*). Задача эквивалентных преобразований ставится как для автоматов, так и для различных заданий их поведения (см. *Эквивалентные преобразования*). Помимо перечисленных постановок задач, общих для многих управляющих систем, в А. т. имеются специфич. проблемы, характерные для автоматов. Так, в зависимости от условий задачи поведение автоматов удобно задавать на разных языках (регулярные выражения, канонич. уравнения, язык логики предикатов и т. д., см. *Автоматов способы задания*), в связи с чем важными задачами являются выбор достаточно удобного адекватного языка и перевод с одного языка на другой. В тесной связи с задачами синтеза и эквивалентных преобразований находится задача минимизации числа состояний автомата, а также получение соответствующих оценок. Для конечных автоматов выработаны достаточно простые алгоритмы, позволяющие по регулярным выражениям получать автоматы, представляющие соответствующие события и имеющие минимальное возможное число состояний (см. *Автоматов минимизация*). Близкий круг вопросов возникает в связи с моделированием поведения автоматов одного класса автоматами другого класса. Здесь также представляют интерес вопросы минимизации моделирующих автоматов и оценки их сложности. Напр., при переходе от недетерминированного автомата (источника), представляющего (порождающего) регулярное множество слов, к конечному автомату, представляющему это же множество, число состояний может возрастать как показательная функция. Специальный раздел А. т. связан с так наз. *экспериментами с автоматами*. Основная задача здесь состоит в том, чтобы получить определенные

сведения о строении автомата путем наблюдения его реакции на те или иные внешние воздействия. При этом возникает большой круг задач, связанный с классификацией экспериментов и с вопросами разрешимости задач определенными видами экспериментов, а также с оцепками длин минимальных экспериментов, достаточных для решения тех или иных задач. Понятие эксперимента с автоматами используется также в задачах контроля автоматов (см. *Надежность и контроль управляющих систем*). В разделах игры автоматов и *автоматов поведение* в случайной среде рассматриваются вопросы взаимодействия автоматов друг с другом или с определенными внешними средами. Многие из перечисленных выше задач могут рассматриваться как массовые (алгоритмические) проблемы. Для конечных автоматов большинство из них имеет положительное решение.

А. т. находит применение как в других областях математики, так и в решении практич. задач. Напр., средствами А. т. доказывается разрешимость нек-рых формальных исчислений. Применение методов и понятий А. т. к изучению формальных и естественных языков привело к возникновению раздела теории алгоритмов — *математической лингвистике*. Понятие автомата может служить модельным объектом в самых разнообразных задачах, благодаря чему возможно применение А. т. в различных научных и прикладных исследованиях.

Лит.: [1] Автоматы. Сб. ст., пер. с англ., М., 1956; [2] Глушков В. М., Синтез цифровых автоматов, М., 1962; [3] Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М., Конечные автоматы, М., 1970.

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов.

АВТОМАТОВ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ — отношение эквивалентности на множестве автоматов, возникающее в связи с изучением тех или иных содержательных свойств автоматов. Обычно таким свойством является *автоматов поведение*, так что два автомата считаются эквивалентными, если они имеют одинаковое поведение. При этом в качестве поведения автомата, как правило, рассматривается система функций, реализуемых автоматом (см. *Автомат конечный*). Для конечных автоматов такое отношение эквивалентности разрешимо, и потому существует алгоритм минимизации автоматов, т. е. построения для заданного автомата эквивалентного ему автомата с минимальным числом состояний (минимального автомата).

Для определения А. э. удобно использовать понятие эквивалентности состояний: состояния s и s' соответственно автоматов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ (быть может, совпадающих) наз. эквивалентными, если инициальные автоматы $\mathfrak{A}_s$ и $\mathfrak{A}_{s'}$ реализуют одну и ту же функцию. Тогда эквивалентность автоматов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ равносильна тому, что для любого состояния автомата $\mathfrak{A}$ найдется эквивалентное ему состояние автомата $\mathfrak{A}'$, и обратно. Автомат является минимальным тогда и только тогда, когда любые два его состояния неэквивалентны. Для любого автомата минимальный автомат определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Алгоритм разрешения этого отношения эквивалентности для конечных автоматов основывается на теореме Мура о том, что состояния s и s' автомата $\mathfrak{A}$ эквивалентны точно тогда, когда функции, реализуемые инициальными автоматами $\mathfrak{A}_s$ и $\mathfrak{A}_{s'}$, совпадают на словах длины $n-1$, где n — число состояний автомата $\mathfrak{A}$. В случае, когда состояния s и s' принадлежат, соответственно, двум автоматам $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$, эта оценка равна $n+n'-1$, где n' — число состояний автомата $\mathfrak{A}'$. На этой же теореме основан известный алгоритм минимизации конечных автоматов, состоящий в построении так наз. приведенного автомата, состояниями к-рого являются классы эквивалентных состояний, а функции переходов и выходов естественно индуцируются соответствующими функциями исходного автомата. Приведенный автомат является минимальным, поскольку любые два его состояния неэквивалентны.

Существуют асимптотич. оценки числа $A(m, n, p)$ минимальных автоматов с n состояниями, m входными и p выходными буквами; при условии, что $m+n+p\to\infty$ для $m\geqslant 3$ имеет место оценка $A(m, n, p)\sim\frac{(np)^{mn}}{n!}$, в то время как $A(2, n, p)\sim e^{-\frac{1}{2p^2}}\frac{(np)^{2n}}{n!}$. Другой задачей, связанной с изучением А. э., является проблема *эквивалентных преобразований* автоматов. Эта задача рассматривалась применительно к двум формам задания конечных автоматов — диаграммам и логическим сетям. В общем виде она состоит в том, чтобы найти систему правил преобразований, удовлетворяющих определенным условиям и позволяющих преобразовать произвольный автомат в любой эквивалентный ему автомат,— т. н. полную систему правил. В обоих случаях правило преобразования представляет собой пару схем (фрагментов диаграмм или логич. сетей), реализующих одинаковые наборы отображений. Применение такого правила состоит в замене одного фрагмента другим. Для конечных автоматов полной системы таких правил не существует. Однако для логич. сетей с ограниченным числом задержек такая система существует.

Основные понятия, проблематика и методы, возникающие при изучении эквивалентности конечных автоматов, как правило, переносятся и на другие типы автоматов с учетом их особенностей.

Лит. см. при статье *Автомат*.

В. Б. Кудрявцев, Ю. И. Янов.

АВТОМОРФИЗМ — *изоморфизм* (изоморфное отображение) нек-рой системы объектов на себя. Совокупность всех А. произвольной алгебраич. системы является группой; изучение этой группы служит важным и удобным орудием изучения свойств самой системы (см. *Алгебраической системы автоморфизм*).

АВТОМОРФНАЯ ФОРМА — *мероморфная функция* в ограниченной области D комплексного пространства C^n, удовлетворяющая относительно некоторой *дискретной группы* Γ, действующей в этой области, уравнению:

$$f(\gamma(x))=j_\gamma^{-m}(x)\,f(x),\qquad x\in D,\ \gamma\in\Gamma,$$

где $j_\gamma(x)$ — якобиан отображения $x\to\gamma(x)$, а m — целое число, наз. весом автоморфной формы. Если группа Γ действует без неподвижных точек, то А. ф. определяют дифференциальные формы на факторпространстве D/Γ и обратно. С помощью А. ф. можно строить нетривиальные *автоморфные функции*. Оказывается, что если $g(x)$ — голоморфная и ограниченная в области D функция, то ряд

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} g(\gamma(x))\,j_\gamma^m(x)$$

сходится при больших m, давая тем самым нетривиальную А. ф. веса m. Эти ряды наз. тета-рядами Пуанкаре.

Приведенное выше классич. определение А. ф. послужило в последнее время исходным пунктом для весьма широкого обобщения этого понятия в теории дискретных подгрупп групп Ли и групп аделей (см. [3]).

Лит.: [1] Пуанкаре А., Избр. труды, т. 3, пер. с франц., М., 1974; [2] Зигель К. Л., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1954; [3] Арифметические группы и автоморфные функции, пер. с англ. и франц., М., 1969.

А. Н. Паршин.

АВТОМОРФНАЯ ФУНКЦИЯ — *мероморфная функция* нескольких комплексных переменных, инвариантная относительно некоторой *дискретной группы* Γ аналитич. преобразований данного комплексного многообразия M:

$$f(\gamma(x))=f(x),\quad x\in M,\quad \gamma\in\Gamma.$$

Часто под А. ф. понимают лишь функции, определенные в ограниченной связной области D n-мерного комплексного пространства C^n, инвариантные относительно дискретной группы Γ автоморфизмов этой области.

Факторпространство $X=M/\Gamma$ может быть наделено комплексной структурой и А. ф. суть мероморфные функции на X. Подавляющее большинство изученных случаев относится к ситуации, когда пространство X имеет компактификацию $\overline{X}$. В определение А. ф. естественно включается тогда требование ее продолжимости на все пространство X в виде мероморфной функции. Если $M=D$ (т. е. ограниченная связная область), то это условие необходимо требовать лишь при $n=1$ (если $n>1$ или M/Γ компактно, условие выполняется автоматически). Легко проверяется, что А. ф. образуют поле $K(\Gamma)$, изучение к-рого составляет одну из основных задач теории А. ф.

Наиболее подробно исследованы А. ф. одного переменного. Основы их теории заложены в 19 в. Ф. Клейном (F. Klein [1]) и А. Пуанкаре (H. Poincaré [2]). В качестве многообразия M здесь обычно рассматривают односвязную область. Различаются три случая: $M=P^1(C)$ (комплексная проективная прямая, или сфера Римана), $M=C$ и $M=H$ (верхняя полуплоскость $\{z\in C : \operatorname{Im} z>0\}$). В первом случае дискретные группы Γ конечны, кривые M/Γ суть алгебраич. кривые рода 0 (см. *Род кривой*) и, следовательно, А. ф. образуют поле рациональных функций. Примерами А. ф. в случае $M=C$ служат периодич. функции (так, функция $e^{2\pi iz}$ инвариантна относительно группы сдвигов $\{z\to z+n, n\in z\}$) и, в частности, эллиптич. функции. Для последних кривая M/Γ компактна и является эллиптич. кривой. Поле $K(\Gamma)$ в этом случае будет полем всех алгебраич. функций на M/Γ. Наконец, для $M=H$ и дискретных групп Γ таких, что H/Γ компактно или имеет конечный объем (в метрике Пуанкаре), H/Γ — алгебраич. кривая, а $K(\Gamma)$ — также поле всех алгебраич. функций на M/Γ. Род g этой кривой можно определить, построив для группы Γ фундаментальную область в виде многоугольника на верхней полуплоскости H (рассматриваемой как плоскость Лобачевского). Основной способ построения А. ф. в этой ситуации состоит в рассмотрении отношения двух *автоморфных форм* одинакового достаточно большого веса. Этот способ принадлежит А. Пуанкаре, к-рый доказал с его помощью приведенные выше результаты о строении полей А. ф. (см. [2], [3], [4]). Аналогом этой конструкции для эллиптич. функций является представление их в виде отношения тета-функций. С помощью теории униформизации можно показать, что таким образом получаются все поля алгебраич. функций от одной переменной [3].

Эти результаты, полученные еще в 19 в., дают полное описание полей А. ф. для $n=1$ и таких групп Γ, что пространство H/Γ имеет конечный объем. Случай групп Γ с бесконечным объемом пространства H/Γ (клейновы группы) гораздо сложнее и интенсивно изучается вплоть до настоящего времени (см. [5], [6]).

В 20 в. основное внимание в теории А. ф. уделяется функциям нескольких переменных. Пожалуй, единственным примером А. ф. от n переменных, детально изученным в 19 в., являются абелевы функции, связанные с абелевыми многообразиями подобно тому, как связаны эллиптич. функции с эллиптич. кривыми [1], [7]. Первым примером А. ф. n переменных в ограниченной области D явились модулярные функции Зигеля [7] (см. *Модулярная группа*). Их область определения представляет собой n-мерное обобщение верхней полуплоскости H и является одним из основных примеров ограниченной симметрич. области. К. Зигелю (C. Siegel) принадлежат также первые общие результаты о произвольных А. ф. в ограниченной области D. Обобщая упомянутую выше конструкцию Пуанкаре построения А. ф., он показал, что в поле $K(\Gamma)$ всегда существует по крайней мере n алгебраически независимых функций.

В дальнейшем основные усилия были направлены на выяснение, для каких областей D и групп Γ выполняет-

ся следующее утверждение, получившее название теоремы об алгебраических соотношениях. Если $f_1, \ldots, f_n$ — алгебраически независимые функции, то поле $K(\Gamma)$ есть конечное алгебраич. расширение поля рациональных функций $C(f_1, \ldots, f_n) \subset K(\Gamma)$.

Теорема эта доказана к настоящему времени (1977) в следующих случаях: 1) если факторпространство D/Γ компактно [7]; 2) если группа Γ псевдовогнута [8]; 3) если D — симметрическая область, а Γ — арифметическая группа. Псевдовогнутая группа определяется следующим образом. Пусть X — подобласть области D, содержащаяся в ней вместе с замыканием. Тогда точка границы $x_0 \in \partial X$ наз. псевдовогнутой, если для любой открытой окрестности U точки x_0 и для любой регулярной в U функции $\varphi(x)$ существует точка $x \in U \cap X$ такая, что $|\varphi(x)| \geqslant |\varphi(x_0)|$. Группа Γ наз. псевдовогнутой, если существует подобласть $X \subset D$ такая, что каждая граничная точка $x \in \partial X$ переводится преобразованием из Γ либо во внутреннюю точку, принадлежащую X, либо в псевдовогнутую точку границы ∂X.

Вопрос о природе и свойствах алгебраич. многообразий, возникающих в теории А. ф. n переменных, в отличие от случая одной переменной, исследован мало.

Важные обобщения понятия А. ф. — автоморфные формы, *мета-функции* и нек-рые др. Все они — частные случаи следующей общей конструкции. Рассматривается *расслоение* L на M и действие на нем группы Γ. Тогда можно определить сечения расслоения L, инвариантные относительно Γ. А. ф. получаются, когда расслоение L и действие группы Γ тривиальны.

При изучении А. ф. выявилась важная роль группы автоморфизмов области D. Именно на этом пути понятия и методы теории А. ф. были перенесены в теорию алгебраических групп, где они играют существенную роль при описании бесконечномерных представлений (см. [10]).

С самого начала своего развития теория А. ф. была богата связями с другими разделами математики. Прежде всего сюда относится алгебраич. геометрия. Помимо упомянутых выше результатов, методы А. ф. важны для исследования многообразий модулей таких объектов, как алгебраич. кривые и абелевы многообразия. Существенное значение имеют А. ф. и для теории чисел. В настоящее время они служат единственным инструментом для изучения дзета-функций алгебраич. многообразий (см. [11]). Другое весьма многообещающее теоретико-числовое направление в теории А. ф. — исследование p-адических А. ф. и автоморфных форм (см. [9]). Наконец, следует упомянуть о применении А. ф. при исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области [12], или о построении решений алгебраич. уравнений выше 4-й степени посредством автоморфных функций.

Лит.: [1] Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., ч. 1, М.— Л., 1937, гл. 8; [2] Пуанкаре А., Избр. труды, т. 3, пер. с франц., М., 1974; [3] Форд Л. Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.—Л., 1936; [4] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье, пер. с англ., М., 1967; [5] Адамар Ж., Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций, пер. с франц., М., 1952; [6] Кра И., Автоморфные формы и клейновы группы, пер. с англ., М., 1975; [7] Зигель К. Л., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1954; [8] Андреотти А., Грауерт Г., Алгебраические поля автоморфных функций, в кн.: Комплексные пространства, М., 1965; [9] Modular functions of one variable, v. 1—3, B., 1973; [10] Жакет Э., Ленглендс Р., Автоморфные формы на GL (2), пер. с англ., М., 1973; [11] Шимура Г., Введение в арифметическую теорию автоморфных функций, пер. с англ., М., 1973; [12] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, М., 1950.

А. Н. Андрианов, А. Н. Паршин.

АВТОНИМИЯ — использование выражения (слова) в качестве своего собственного имени. Такое употребление выражения наз. автонимным (в противопо-

ложность его употреблению в своем обычном смысле). Напр., говоря «x входит в уравнение $x+3=2$», мы используем x в качестве имени для буквы x, а $x+3=2$ — в качестве имени для выражения $x+3=2$. Говоря «12 делится на 2», мы употребляем выражение 12 неавтонимно (как имя нек-рого упоминаемого натурального числа), а говоря «12 состоит из двух цифр», мы употребляем выражение 12 автонимно (как имя самого себя).

В естественных языках контекст речи и синтаксис обычно являются достаточно надежными критериями отличения автонимного употребления выражения от неавтонимного его употребления. Однако возможны случаи, когда такое отличение затруднительно. В этих случаях *во избежание двусмысленностей* приходится соблюдать осторожность: отличать объект от его имени (обозначения), отличать употребление нек-рого языкового выражения в качестве *названия* от его *упоминания* в качестве предмета высказывания. Различение обозначаемого и обозначающего может быть достигнуто использованием имен, образованных специально для этой цели, или использованием кавычек, причем выражение, заключенное в кавычки, считается отличным от этого же выражения без кавычек. Автонимное употребление выражения означает слияние упоминания выражения с его употреблением в качестве имени; выражение, использованное автонимно,— это и объект, и средство называния этого же объекта.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960, § 8; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957, с. 224—25; [3] Карри Х., Основания математической логики, пер. с англ., М., 1969, с. 59—60. *А. С. Кузичев.*

АВТОНОМНАЯ СИСТЕМА обыкновенных дифференциальных уравнений — система обыкновенных дифференциальных уравнений, в к-рую не входит явно независимое переменное t (время). Общий вид А. с. 1-го порядка в нормальной форме:

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n,$$

или, в векторной записи,

$$\dot{x} = f(x). \tag{1}$$

Неавтономная система $\dot{x} = f(t, x)$ сводится к А. с., если ввести новую неизвестную функцию $x_{n+1} = t$. Исторически А. с. возникли при описании физич. процессов с конечным числом степеней свободы. А. с. наз. также динамическими, или консервативными (см. *Динамическая система*).

Комплексная А. с. вида (1) эквивалентна вещественной А. с. с $2n$ неизвестными функциями

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{Re} x) = \operatorname{Re} f(x), \quad \frac{d}{dt}(\operatorname{Im} x) = \operatorname{Im} f(x).$$

Содержательная теория комплексных А. с., отличная от вещественного случая, имеет место в случае аналитических $f(x)$ (см. *Аналитическая теория дифференциальных уравнений*).

Будем рассматривать А. с. с действительными коэффициентами и их действительные решения. Пусть $x = \varphi(t)$ — (произвольное) решение А. с. (1), $\Delta = (t_-, t_+)$ — интервал его определения, $x(t; t_0, x^0)$ — решение с начальными данными $x|_{t=t_0} = x^0$. Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$ и $f \in C^1(G)$. Точка $x^0 \in G$ наз. положением равновесия (точкой покоя) А. с. (1), если $f(x^0) \equiv 0$. Положению равновесия отвечает решение $\varphi(t) \equiv x^0$, $t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Локальные свойства решений.

1) Если $\varphi(t)$ — решение, то $\varphi(t+c)$ — решение при любом $c \in \mathbb{R}$.

2) Существование: при любых $t_0 \in \mathbb{R}$, $x^0 \in G$ решение $x(t; t_0, x^0)$ существует на нек-ром интервале $\Delta \ni t$.

3) Гладкость: если $f\in C^p(G)$, $p\geqslant 1$, то $\varphi(t)\in C^{p+1}(\Delta)$.

4) Зависимость от параметров: пусть $f=f(x,\ \alpha)$, $\alpha\in G_\alpha\subset\mathbb{R}^m$ (G_α — область); если $f\in C^p(G\times G_\alpha)$, $p\geqslant 1$, то $x(t;\ t_0,\ x^0,\ \alpha)\in C^p(\Delta\times G_\alpha)$ (подробнее см. [1]—[4]).

5) Пусть x^0 не является положением равновесия, тогда существуют окрестности V, W точек x^0, $f(x^0)$, соответственно, и *диффеоморфизм* $y=h(x)$: $V\to W$ такие, что А. с. имеет вид $\dot y=\text{const}$ в W.

Замена переменных $x=\varphi(y)$ в А. с. (1) приводит к системе

$$\dot y=(\varphi'(y))^{-1}f(\varphi(y)) \tag{2}$$

($\varphi'(y)$ — *Якоби матрица*).

Глобальные свойства решений.

1) Любое решение $x=\varphi(t)$ А. с. (1) можно продолжить на интервал $\Delta=(t_-,\ t_+)$. Если $\Delta=\mathbb{R}$, то решение наз. неограниченно продолжаемым; если $t_+=+\infty$, $t_->-\infty$, то решение наз. неограниченно продолжаемым «вперед по времени» (аналогично — «назад»). Если $t_+<+\infty$, то для любого компакта $K\subset\Omega$, $x^0\in K$, существует $\tau=\tau(K)<t_+$ такое, что точка $x(t;\ t_0,\ x^0)$ находится вне K при $t>\tau(K)$ (аналогично при $t_-><-\infty$; см. *Продолжаемость решений дифференциальных уравнений*).

2) Продолжение единственно в том смысле, что любые два решения с общими начальными данными совпадают на общей области их определения.

3) Всякое решение А. с. принадлежит к одному из трех типов: a) непериодическое, причем $\varphi(t_1)\neq\varphi(t_2)$ для любых $t_1\neq t_2$, $t_j\in\mathbb{R}$; b) периодическое, непостоянное; c) $\varphi(t)\equiv\text{const}$.

Геометрическая интерпретация А.с. Каждому решению $x=\varphi(t)$ ставится в соответствие кривая Γ: $x=\varphi(t)$, $t\in\Delta$, лежащая в области G. Тогда G наз. *фазовым пространством* А. с., Γ — фазовой траекторией, решение интерпретируется как движение по фазовой траектории. Фазовым потоком наз. отображение g^t : $G\to G$ по формуле $g^tx^0=x(t;\ 0,\ x^0)$ (т. е. каждая точка сдвигается за время t вдоль фазовой траектории). На своей области определения фазовый поток удовлетворяет условиям: 1) g^tx непрерывно по $(t,\ x)$, 2) справедливо групповое свойство: $g^{t_1+t_2}x=g^{t_1}g^{t_2}x$.

Имеет место теорема Лиувилля: пусть $D\subset G$ — область с конечным объемом, v_t — объем области $g^tD\subset G$; тогда

$$\left.\frac{dv_t}{dt}\right|_{t=0}=\int_D \operatorname{div} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Для гамильтоновой системы из (3) следует сохранение фазового объема фазовым потоком. Другой вариант равенства (3): пусть $x=\varphi(t,\ \alpha)$ — семейство решений А. с. (1), $\alpha=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n-1})\in G_\alpha$ — область, $\varphi\in C^1(\Delta\times G_\alpha)$; тогда

$$\frac{d}{dt}\ln I(t,\ \alpha)=\operatorname{div} f(x), \tag{3'}$$

где $I(t,\ \alpha)=\det\partial x/\partial(t,\ \alpha)$.

Структура фазовых траекторий.

1) Любые две фазовые траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают.

2) Всякая фазовая траектория принадлежит к одному из типов: a) гладкая простая незамкнутая жорданова дуга, b) цикл, т. е. кривая, диффеоморфная окружности, c) точка (положение равновесия). Локальная структура фазовых траекторий в малой окрестности точки, отличной от положения равновесия, тривиальна (см. локальное свойство 5) решений): семейство фазовых траекторий диффеоморфно семейству параллельных прямых. Для линейной А. с. структура фазовых траекторий в окрестности положения равновесия известна, так как

А. с. интегрируема (см. [5]). Для нелинейных А. с. этот вопрос принадлежит к числу не решенных до конца проблем даже при $n=2$ (см. *Качественная теория дифференциальных уравнений*). Одним из аспектов этой проблемы является вопрос об устойчивости положения равновесия (см. *Устойчивости теория*). Ниже приведены нек-рые результаты. Пусть x^0, y^0 — положения равновесия систем (1) и

$$\dot{y}=g(y). \qquad (1')$$

U, V — окрестности точек x^0, y^0. Системы (1) и (1′) наз. эквивалентными в окрестности положения равновесия x^0, y^0, если существуют U, V и взаимно однозначное отображение $h: U\to V$ такие, что $(h\circ f^t)x=(g^t\circ h)x$ (если $x\in U$, $f^tx\in U$, $(g^t\circ h)x\in V$), т. е. при замене $y=h(x)$ траектории А. с. (1) переходят в траектории А. с. (1′). Эквивалентность наз. дифференцируемой (топологической), если h есть диффеоморфизм (гомеоморфизм). Пусть x^0 — положение равновесия А. с. (1), матрица $f'(x^0)$ невырождена и не имеет чисто мнимых собственных значений. Тогда А. с. (1) в окрестности x^0 топологически эквивалентна своей линейной части $\dot{y}=f'(x^0)y$. Полярный пример: А. с. $\dot{x}=Ax$, $\dot{y}=By$, где A, B — постоянные матрицы с чисто мнимыми собственными значениями и $n>2$; неизвестно, когда эти А. с. топологически эквивалентны. Одной из самых фундаментальных задач теории А. с. является задача о структуре всего семейства фазовых траекторий. Наиболее полные результаты получены при $n=2$, но даже в этом случае задача далека от своего разрешения.

Лит.: [1] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970; [2] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 2 изд., М., 1965; [3] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [4] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971; [5] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949.

М. В. Федорюк.

АВТОРЕГРЕССИОННЫЙ ПРОЦЕСС — случайный процесс $\{X_t\}$, значения к-рого удовлетворяют при нек-рых постоянных $a_1, \ldots, a_p$ уравнению *авторегрессии*

$$X_t=a_1X_{t-1}+\ldots+a_pX_{t-p}+Y_t, \qquad (*)$$

где p — нек-рое положительное число, а величины Y_t обычно предполагаются некоррелированными и одинаково распределенными со средним 0 и дисперсией σ^2. Если все нули функции $\varphi(z)=z^p-a_1z^{p-1}-\ldots-a_p$ комплексного аргумента z лежат внутри единичного круга, уравнение (*) имеет решение

$$X_t=\sum\nolimits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu Y_{t-\nu},$$

где b_ν связаны с a_j соотношением

$$\varphi^{-1}(z)=\psi(z)=\sum\nolimits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu.$$

Пусть, напр., $\{Y_t\}$ является процессом *белого шума* со спектральной плотностью $\sigma^2/2\pi$; тогда единственным А. п., удовлетворяющим уравнению (*), будет стационарный в широком смысле процесс $\{X_t\}$ со спектральной плотностью

$$f(\lambda)=(\sigma^2/2\pi)\,|\,\varphi(e^{i\lambda})\,|^{-2},$$

если $\varphi(e^{i\lambda})$ не имеет действительных нулей. *Автоковариации* процесса $r_k=\mathsf{E}X_tX_{t-k}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$r_k=a_1r_{k-1}+\ldots+a_pr_{k-p}, \quad k>0,$$

и в терминах b_ν имеют вид

$$r_k=\sigma^2\sum\nolimits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu b_{\nu+k}.$$

Параметры a_k авторегрессии связаны с коэффициентами *автокорреляции* процесса $\rho_k = r_k/r_0$ матричным соотношением

$$A = R_p^{-1} \rho_p,$$

где $A = (a_1, \ldots, a_p)'$, $\rho_p = (\rho_1, \ldots, \rho_p)$ и R_p — матрица коэффициентов автокорреляции (уравнение Юна — Уокера).

Лит.: [1] Grenander U., Rosenblatt M., Statistical analysis of stationary time series, Stockh., 1956; [2] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964.

А. В. Прохоров.

АВТОРЕГРЕССИЯ — регрессионная зависимость значений X_n некоторой случайной последовательности $\{X_n,\ n=0,\ \pm 1,\ \ldots\}$ от предшествующих значений $X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_{n-m}$. Схема линейной А. m-го порядка определяется уравнением линейной *регрессии* X_n по X_{n-k}, $k=1, \ldots, m$, то есть

$$X_n = \beta_1 X_{n-1} + \ldots + \beta_m X_{n-m} + \varepsilon_n, \qquad (*)$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — постоянные, случайные величины ε_n одинаково распределены с нулевым средним, дисперсией σ^2 и некоррелированы (иногда независимы). Схема А. служит полезной стохастич. моделью для описания некоторых *временных рядов* (впервые схема линейная А. была введена Дж. Юлом, Yule G., 1921) для анализа временных рядов, к-рыми описывается система, осцилирующая под воздействием внутренних сил и случайных ударов извне. Схема А. (*) может быть рассмотрена как случайный процесс особого типа — *авторегрессионный процесс*.

А. В. Прохоров.

АДАМАРА ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛА — формула

$$g^*(z, \zeta) = g(z, \zeta) -$$

$$-\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \int_0^{l_k} \frac{\partial g(\varphi_k(s), z)}{\partial n^{(k)}} \frac{\partial g(\varphi_k(s), \zeta)}{\partial n^{(k)}} \varphi_k(s)\, ds + O(\varepsilon^2)$$

для *Грина функции* $g(z, \zeta)$ n-связной области G ($n=1, 2, \ldots$) комплексной z-плоскости. А. в. ф. имеет место, если: 1) граничные компоненты $\Gamma_k = \{z : z = \varphi_k(s)\}$ области G суть дважды дифференцируемые замкнутые кривые Жордана, s — длина дуги на Γ_k, $0 \leqslant s \leqslant l_k$; 2) числа ε_k, $\varepsilon_k > 0$, настолько малы, что лежащие в G концы отрезков внутренних нормалей $n^{(k)}$ к Γ_k длины $\varepsilon_k \varphi_k(s)$ образуют непрерывно дифференцируемые кривые, ограничивающие n-связную область G^*, $\overline{G^*} \subset G$; 3) ζ есть фиксированная точка в G^*. А. в. ф. представляет функцию Грина $g^*(z, \zeta)$ области G^* через $g(z, \zeta)$ с равномерной оценкой $O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon = \max \varepsilon_k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, остаточного члена в прямом произведении области G^* и любого компакта из G. А. в. ф. применима и для функции Грина конечной римановой поверхности с краем.

Предложена Ж. Адамаром [1].

Лит.: [1] Hadamard J., «Mém. présentés par divers savants à l'Acad. sci.», 1908, t. 33; [2] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957, гл. 7.

И. А. Александров.

АДАМАРА МАТРИЦА — квадратная матрица $H = \|h_{ij}\|$ порядка n, элементы h_{ij} к-рой суть $+1$ или -1, и такая, что имеет место равенство

$$HH^T = nI_n, \qquad (*)$$

где H^T — транспонированная матрица H, а I_n — единичная матрица порядка n. Равенство (*) эквивалентно утверждению, что любые две строки H ортогональны. А. м. названы по имени Ж. Адамара, доказавшего [1], что определитель $|A|$ матрицы $A = \|a_{ij}\|$ порядка n, элементы a_{ij} к-рой суть комплексные числа, удовлетворяет неравенству Адамара:

$$|A|^2 \leqslant \Pi_{i=1}^{n} s_{ii},$$

где

$$s_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{a_{kj}},$$

a_{kj} — элемент, сопряженный a_{kj} (см. *Адамара теорема* об определителях). В частности, если $|a_{ij}| \leqslant M$, то $|A| \leqslant M^n n^{n/2}$. Отсюда следует, что А. м. есть квадратная матрица из ± 1 порядка n с максимальным абсолютным значением определителя, равным $n^{n/2}$. Свойства А. м.: 1) из $HH^T = nI_n$ следует $H^T H = nI_n$, и наоборот; 2) перестановка строк или столбцов и умножение элементов к.-л. строки или столбца А. м. на -1 сохраняют свойство матрицы быть А. м.; 3) прямое произведение двух А. м. есть снова А. м., порядок к-рой равен произведению порядков сомножителей. Иными словами, если $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ суть А. м. порядков m и n соответственно, то $C = \|a_{ij}B\|$ есть А. м. порядка mn. А. м., у к-рой первая строка и первый столбец состоят из $+1$, наз. нормализованной. Порядок А. м. $n = 1, 2$ или $n \equiv 0 \pmod 4$. Нормализованные А. м. порядков 1 и 2 суть:

$$[1], \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Существование А. м. доказано для нескольких классов значений n (см., напр., [2], [3]). Предположение о существовании А. м. для любого $n \equiv 0 \pmod 4$ остается (70-е гг. 20 в.) недоказанным. Методы построения А. м. рассмотрены в [2]. А. м. используются при построении нек-рых типов *блок-схем* [2] и кодов [3]. Так, А. м. порядка $n = 4t$ эквивалентна адамаровой ($v = 4t-1$, $b = 2t-1$, $\lambda = t-1$)-конфигурации.

Обобщенной А. м. наз. квадратная матрица $H(p, h)$ порядка h, элементами к-рой являются корни p-й степени из единицы и к-рая удовлетворяет равенству

$$HH^{cT} = hI_h,$$

где H^{cT} — транспонированная матрица H с сопряженными элементами, а I_h — единичная матрица порядка h. Для обобщенных А. м. справедливы свойства, аналогичные 1) и 3) (см. [4]).

Лит.: [1] Hadamard J., «Bull. sci. math.», 1893, ser. 2, t. 17, pt. 1, p. 240—246; [2] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [3] Питерсон У., Коды, исправляющие ошибки, пер. с англ., М., 1964; [4] Butson A. T., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1962, v. 13, № 6, p. 894—898.

С. А. Рукова.

АДАМАРА ТЕОРЕМА — 1) А. т. о лакунах (о пропусках): если номера $n_1, n_2, \ldots$ всех отличных от нуля коэффициентов степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

удовлетворяют условию

$$n_{k+1} > (1+\theta)\, n_k, \qquad (*)$$

где $\theta > 0$, то граница круга сходимости этого ряда является его естественной границей, т. е. функция не может быть аналитически продолжена за пределы этого круга. Условие (*) наз. условием Адамара; лакуны, удовлетворяющие условию Адамара, наз. лакунами Адамара. См. также *Лакунарный ряд*, *Фабри теорема*.

Лит.: [1] Hadamard J., «J. math. pures et appl.», ser. 4, 1892, t. 8, p. 101—86; [2] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967.

Е. Д. Соломенцев.

2) А. т. о целых функциях — теорема о представлении *целых функций* с помощью их нулей, уточняющая *Вейерштрасса теорему* о бесконечных произведениях в случае целой функции $f(z)$ конечного порядка ρ. Если, для простоты, $f(0) \neq 0$, то

$$f(z) = e^{Q(z)} P(z),$$

где $Q(z)$ — многочлен степени не выше ρ, а

$$P(z) = \prod_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{z}{\alpha_k}, q\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{P_k(z)}$$

— *каноническое произведение* Вейерштрасса рода $q \leqslant \rho$, построенное по нулям α_k функции $f(z)$. Иначе говоря, А. т. утверждает, что род целой функции не превосходит ее порядка. Эта теорема использовалась Ж. Адамаром при доказательстве асимптотич. закона распределения простых чисел.

Лит.: [1] Hadamard J., «J. math. pures et appl.», ser. 4, 1893, t. 9, p. 171—215; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 2; [3] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., 1956. *Е. Д. Соломенцев.*

3) А. т. об определителях: пусть D — определитель матрицы с элементами $a_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 1, \ldots, n$. Тогда имеет место неравенство

$$D^2 \leqslant \sum a_{1\varkappa}^2 \sum a_{2\varkappa}^2 \cdots \sum a_{n\nu}^2 \qquad (*)$$

Равенство имеет место в том и только в том случае, когда

$$a_{\mu 1} a_{\nu 1} + a_{\mu 2} a_{\nu 2} + \ldots + a_{\mu n} a_{\nu n} = 0$$

для каждой пары различных μ, ν, или когда хотя бы один множитель в правой части (*) равен нулю. Геометрич. смысл этой теоремы заключается в том, что объем параллелепипеда в n-мерном пространстве не превышает произведения длин его ребер, исходящих из одной вершины, и что равенство имеет место, когда эти ребра взаимно перпендикулярны или когда длина одного из ребер равна нулю.

Ж. Адамар в [1] рассматривал эту задачу для определителя с комплексными элементами.

Лит.: [1] Hadamard J., «Bull. sci. math.», 1893, ser. 2, t. 17, pt. 1, p. 240—6. *О. А. Иванова.*

4) А. т. о трех кругах: если $f(z)$ — голоморфная функция комплексного переменного $z = re^{i\varphi}$ в кольце $0 < r_1 < r < r_2 < \infty$, непрерывная в замкнутом кольце $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, и $M(r) = \max |f(z)|$ при $|z| = r$, то справедливо неравенство

$$\log M(r) \leqslant \frac{\log \frac{r_2}{r}}{\log \frac{r_2}{r_1}} \log M(r_1) + \frac{\log \frac{r}{r_1}}{\log \frac{r_2}{r_1}} \log M(r_2),$$

$$r_1 \leqslant r \leqslant r_2.$$

Это неравенство означает, что $\log M(r)$ есть *выпуклая функция* от $\log r$. А. т. является частным случаем *двух констант теоремы*.

А. т. допускает обобщения в различных направлениях, в частности обобщение для других метрик, для гармонич. и субгармонич. функций.

Лит.: [1] Hadamard J., «Bull. Soc. math. France», 1896, ser. 2, v. 24, p. 199—220; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 6; [3] Привалов И. И., Субгармонические функции, М.—Л., 1937, гл. 3; [4] Соломенцев Е. Д., «Докл. АН АрмССР», 1966, т. 42, № 5, с. 274—78. *Е. Д. Соломенцев.*

5) А. т. мультипликационная, А. т. об умножении особенностей: если степенные ряды

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \qquad (1)$$

имеют, соответственно, радиусы сходимости $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$, если S_1 и S_2 — звезды Миттаг-Леффлера (см. *Звезда элемента функции*), соответственно, для $f(z)$ и $g(z)$, и если α — множество особых точек функции $f(z)$ на границе звезды S_1, а β — множество особых точек функции $g(z)$ на границе звезды S_2, то степенной ряд

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \qquad (2)$$

имеет радиус сходимости $r \geqslant r_1 r_2$, а его звезда Миттаг-Леффлера S содержит звезду-произведение $C(CS_1 \times CS_2)$, где CA обозначает дополнение множества A и $A \times B$ — множество всех произведений pq чисел $p \in A$, $q \in B$; кроме того, из угловых и хорошо достижимых точек границы звезды-произведения особыми точками

функции $P(z)$ могут быть лишь точки произведения множеств $\alpha \times \beta$. Первоначальные формулировки теоремы (см. [1], [2]) были несколько отличны от приведенной выше, они потребовали уточнений (см. [2]).

Степенной ряд (2) наз. адамаровским произведением, или адамаровской композицией, степенных рядов (1). Свойства адамаровского произведения, выявленные этой А. т. и в последующих исследованиях (см. [3]), позволяют использовать его в вопросах аналитич. продолжения степенных рядов, когда по коэффициентам ряда вида (2) оказывается возможным сделать нек-рые заключения об особенностях представляемой им аналитич. функции.

Если K — произвольное компактное множество, расположенное внутри звезды-произведения $C(CS_1 \times CS_2)$, то найдется такой замкнутый спрямляемый контур L, расположенный внутри $C(CS_1 \times CS_2)$ и охватывающий K, что для всех $z \in K$ справедливо интегральное представление адамаровского произведения:

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(t)\, g\left(\frac{z}{t}\right) \frac{dt}{t}. \qquad (3)$$

Представление (3) также применяется в вопросах аналитич. продолжения.

Лит.: [1] Hadamard J., «Acta math.», 1899, Bd 22, S. 55—63; [2] его же, «Scientia Phys.-math.», 1901, № 12; [3] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967.

Е. Д. Соломенцев.

АДАМСА МЕТОД — конечно разностный метод решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$y' = f(x,\ y), \quad y(x_0) = y_0.$$

При интегрировании по сетке с постоянным шагом $x_n = x_0 + nh$ расчетные формулы имеют вид: а) экстраполяционные

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} f(x_{n-\lambda},\ y_{n-\lambda}),$$

б) интерполяционные

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{\lambda=-1}^{k-1} v_{-\lambda} f(x_{n-\lambda},\ y_{n-\lambda}).$$

При одном и том же k формула б) точнее, но требует решения нелинейной системы уравнений для нахождения значения y_{n+1}.

На практике находят приближение из а), а затем приводят одно-два уточнения по формуле

$$y_{n+1}^{(i+1)} = y_n + h \sum_{\lambda=0}^{k-1} v_{-\lambda} f(x_{n-\lambda},\ y_{n-\lambda}) + h v_1 f(x_{n+1},\ y_{n+1}^{(i)});$$

уточнения сходятся при условии $h|v_1| \|(\partial f/\partial y)\| < 1$. Начальные условия $y_1, \ldots, y_k$ для А. м., необходимые для начала вычислений по формулам а), определяются каким-либо специальным образом. Погрешность решения записывается в виде

$$\chi_{k+1} \left(\int_{x_0}^{x_n} \Omega(x,\ t)\, y^{(k+2)}(t)\, dt \right) h^{k+1} + O(h^{k+2}),$$

где $\Omega(x,\ t)$ — решение системы

$$\frac{d\Omega(x,\ t)}{dx} = f_y(x,\ y(x))\, \Omega(x,\ t) \quad \text{при} \quad \Omega(t,\ t) = E.$$

Структура члена $O(h^{k+2})$ такова, что обычно при малых h он равномерно мал по сравнению с главным членом на больших промежутках интегрирования. Это обстоятельство обеспечивает возможность применения А. м. на больших промежутках интегрирования в случае абсолютно устойчивого решения дифференциальной задачи; в частности, в отличие от *Милна метода*, его можно применять для отыскания устойчивых периодич. решений дифференциальных уравнений. Стандартная программа А. м. интегрирования с автоматич. выбором шага существенно сложнее стандартной программы *Рун-*

ге — Кутта метода, вследствие более сложного алгоритма при изменении шага и нестандартного выбора начальных значений y_k.

Для случая уравнений $y' = -ay$, $a>0$, расчетная формула а) имеет вид:

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda}(-ay_{n-\lambda}).$$

Это уравнение имеет частные решения $y_n = C\mu^n$, где μ — корень уравнения

$$\mu^{k+1} = \mu^k - ah\sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda}\mu^{k-\lambda}.$$

Если $ah\sum_{\lambda=0}^{k}|u_{-\lambda}|>2$, то среди корней этого уравнения есть корень $|\mu|>1$, и ошибки округления сильно возрастают. При интегрировании с автоматич. выбором шага в ряде случаев это обстоятельство вызывает неоправданное измельчение шага. Однако в большинстве случаев А. м. оказывается несколько более экономичным по сравнению с методом Рунге — Кутта. А. м. предложен впервые Дж. К. Адамсом (J. C. Adams, 1855).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Тихонов А. Н., Горбунов А. Д., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 4, с. 537—48; [4] Лозинский С. М., «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1958, № 5, с. 52—90; [5] Беленький В. З., в сб.: Вычислительные методы и программирование, М., 1965, с. 253—61; [6] Бахвалов Н. С., «Докл. АН СССР», 1955, т. 104, № 5, с. 683—86. *Н. С. Бахвалов.*

АДДИТИВНАЯ АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — арифметическая функция одного аргумента, удовлетворяющая для любой пары взаимно простых m, n условию

$$f(mn) = f(m) + f(n).$$

А. а. ф. наз. сильно аддитивной, если $f(p^\alpha) = f(p)$ для всех простых p и всех натуральных α. А. а. ф. наз. вполне аддитивной, если условие $f(mn) = f(m) + f(n)$ справедливо не обязательно для взаимно простых m, n; в этом случае $f(p^\alpha) = \alpha f(p)$.

Примеры. Функция $\Omega(m)$ — число всех простых делителей числа m (кратные делители считаются столько раз, какова их кратность) — А. а. ф.; функция $\omega(m)$ — число различных простых делителей числа m — сильно А. а. ф.; функция $\log m$ — вполне А. а. ф. *И. П. Кубилюс.*

АДДИТИВНАЯ ГРУППА кольца — группа, образуемая всеми элементами данного кольца относительно операции сложения в кольце. А. г. кольца всегда абелева. *О. А. Иванова.*

АДДИТИВНАЯ КАТЕГОРИЯ — категория C, в к-рой для любых двух объектов X и Y на множестве морфизмов $\mathrm{Hom}_C(X, Y)$ определена структура абелевой группы таким образом, что композиция морфизмов

$$\mathrm{Hom}_C(X, Y) \times \mathrm{Hom}_C(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(X, Z)$$

является билинейным отображением. Кроме того, требуется, чтобы в C существовал *нулевой объект* (или нуль), а также произведение $X \times Y$ любых двух объектов X и Y.

В А. к. существует прямая сумма $X \oplus Y$ любых двух объектов, к-рая изоморфна их произведению $X \times Y$. *Двойственная категория* к А. к. также является А. к.

Функтор $F : C \to C'$ из А. к. C в А. к. C' наз. аддитивным, если для любых объектов X и Y категории C отображение $F : \mathrm{Hom}_C(X, Y) \to \mathrm{Hom}_C\{F(X), F(Y)\}$ является гомоморфизмом соответствующих абелевых групп. А. к. наз. предабелевой, если для любого морфизма существует *ядро* и *коядро*.

Если для морфизма $u : X \to Y$ в А. к. существует образ $\mathrm{Im}(u)$ и кообраз $\mathrm{Coim}(u)$, то определен единственный морфизм $u : \mathrm{Coim}(u) \to \mathrm{Im}(u)$ такой, что морфизм u разлагается в композицию

$$X \longrightarrow \mathrm{Coim}(u) \longrightarrow \mathrm{Im}(u) \longrightarrow Y.$$

Каждая абелева категория по определению аддитивна. Примерами аддитивных неабелевых категорий могут служить категория топологич. модулей над заданным топологич. кольцом относительно морфизмов, являющихся непрерывными линейными отображениями, а также категория абелевых групп Γ с фильтрацией $\Gamma=\Gamma_0\supset\Gamma_1\supset\ldots\supset\Gamma_n=\{0\}$ относительно морфизмов, являющихся гомоморфизмами групп, сохраняющими фильтрацию.

Лит.: [1] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [2] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [3] Gruson L., «Bull. sci. math.», 1966, v. 90, № 1, p. 17—40. *И. В. Долгачев.*

АДДИТИВНАЯ ПРОБЛЕМА ДЕЛИТЕЛЕЙ — проблема, заключающаяся в нахождении асимптотич. значения сумм вида:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{m\leqslant n}\tau_{k_1}(m)\,\tau_{k_2}(m+a),\\ \sum_{m<n}\tau_{k_1}(m)\,\tau_{k_2}(n-m),\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

где $\tau_k(m)$ — количество различных разложений целого числа m на k множителей, считая и порядок, k_1 и $k_2\geqslant 2$ — натуральные числа, a — фиксированное целое число, отличное от нуля, n — достаточно большое натуральное число. В частности, $\tau_2(m)=\tau(m)$ — *делителей число* числа m. Суммы вида (1) выражают, соответственно, количества решений уравнений

$$x_1x_2\ldots x_{k_2}-y_1y_2\ldots y_{k_1}=a,$$
$$x_1x_2\ldots x_{k_1}+y_1y_2\ldots y_{k_2}=n.$$

Частные случаи А. п. д. ($k_1=k_2=2$, $k_1=2$ и $k_2=3$) рассматривались в [1]—[3]. А. п. д. при $k_1=2$ и любом натуральном k_2 была решена с помощью *дисперсионного метода* Ю. В. Линником.

Лит.: [1] Ingham A., «J. Lond. Math. Soc.», 1927, v. 2, p. 202—8; [2] Esterman T., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1930, v. 31, p. 123—33; [3] Hooly C., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1957, v. 7, p. 396—413. *Б. М. Бредихин.*

АДДИТИВНАЯ РАВНОМЕРНАЯ СТРУКТУРА топологического тела K — равномерная структура его аддитивной группы. При этом базис окружений равномерной структуры коммутативной топологич. группы K образуют множества $\tilde{V}$ всех таких пар (x, y), что $x-y\in V$, где V — произвольная окрестность нуля. Покрытие топологич. тела K будет равномерным для А. р. с., если в него можно вписать покрытие вида $\{V_y|y\in K\}$, где V — произвольная окрестность нуля и $V_y=\{x+y|x\in V\}$. В частности, базис А. р. с. числовой прямой образуют все покрытия, каждое из к-рых состоит из всех интервалов фиксированной длины. Пополнением тела рациональных чисел по его А. р. с. является числовая прямая.

Равномерная структура группы $\mathbb{R}^n$, называемая ее А. р. с., является произведением равномерных структур ее сомножителей $\mathbb{R}$. Базис ее составляют все покрытия, каждое из к-рых образовано всеми (открытыми) шарами фиксированного радиуса. *В. В. Федорчук.*

АДДИТИВНАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛОВ — одна из ветвей современной алгебры. Главная задача А. т. и.— представление любого *идеала* кольца (или другой алгебраич. системы) в виде пересечения конечного числа идеалов специального вида (примарных, терциарных, примальных, одночастных и др.). При этом вид представлений выбирается так, что: 1) для любого идеала существует нужное представление, или, что то же, справедлива нек-рая теорема «существования»; 2) выбранные представления должны быть единственны с точностью до каких-то ограничений, или, что то же, выполняется нек-рая теорема «единственности». Начало А. т. и. было положено в 20—30-х гг. 20 в. работами Э. Нётер [1] и В. Крулля [2].

Все особенности А. т. и. отчетливо проявляются в случае колец. Пусть R — нётерово кольцо, т. е. — ас-

социативное кольцо с условием максимальности для идеалов. Если A — идеал в R, то существует наибольший идеал N кольца R, обладающий свойством: $N^k \subseteq A$ для нек-рого натурального $k \geqslant 1$. Этот идеал N наз. *примарным радикалом* идеала A (в кольце R) и обозначается через $\mathrm{pr}(A)$. Идеал Q кольца R наз. *примарным*, если для любых двух идеалов A, B в R выполняется условие:

$$AB \subseteq Q, \quad A \not\subseteq Q \Rightarrow B \subseteq \mathrm{pr}(Q).$$

Для примарных идеалов верна *теорема пересечения*: пересечение любых двух примарных идеалов с одним и тем же примарным радикалом P само есть примарный идеал с тем же радикалом P. С помощью этой теоремы доказывается *теорема существования*: если кольцо R коммутативно, то для любого идеала $A \neq R$ существует такое представление идеала A в виде пересечения конечного числа примарных идеалов A_i:

$$A = A_1 \cap \ldots \cap A_n, \tag{1}$$

что ни один из идеалов A_i не содержит пересечения остальных, и примарные радикалы $\mathrm{pr}(A_i)$ попарно различны. Такие представления наз. *несократимыми*, или *примарно редуцированными* (см. [1], [4]). Для этих представлений верна *теорема единственности*: если (1) и

$$A = B_1 \cap \ldots \cap B_m \tag{2}$$

— два примарно редуцированных представления идеала A кольца R, то $m=n$ и $\mathrm{pr}(A_i)=\mathrm{pr}(B_i)$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, при надлежащей перенумеровке идеалов B_i.

Именно А. т. и. нётеровых коммутативных колец (классич. А. т. и.) нашла многочисленные применения в различных разделах математики.

Если кольцо R некоммутативно, то теорема «существования», указанная выше, перестает быть верной, в то время как теоремы «единственности» и «пересечения» верны. Этот факт начиная с 30-х гг. 20 в. привел к поискам такого обобщения классич. примарности на некоммутативный случай, при к-ром оставалась бы справедливой и теорема «существования». Было найдено нужное обобщение (см. [4]) — терциарность (см. *Терциарный идеал*). В дальнейшем было показано, что при нек-рых естественных ограничениях терциарность является единственным «хорошим» обобщением понятия примарности (см. [6], [7], [8]).

В 60-е гг. 20 в. А. т. и. развивалась в рамках теорий решеток, систем с частными и мультипликативных систем (см. [4], [5], [6]), что дало толчок развитию, напр., А. т. и. неассоциативных колец, нормальных делителей группы и подмодулей модуля.

Лит.: [1] Noether E., «Math. Ann.», 1921, Bd 83, H. 1—2, S. 24—66; [2] Krull W., там же, 1929, Bd 101, H. 4, S. 729—744; [3] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963; [4] Lesieur L., Croisot R., Algèbre noethérienne non commutative, P., 1963; [5] Murata K., «J. Inst. Pol. Osaka City Univ.», 1959, v. A10, № 2, p. 91—115; [6] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М., «Изв. АН СССР. Серия матем.», 1967, т. 31, № 5, с. 1057—90; [7] Riley J. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1962, v. 105, № 2, p. 177—201; [8] Гоян И. М., Рябухин Ю. М., «Матем. исследования», 1967, т. 2, в. 1, с. 14—25; [9] Fuchs L., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1950, v. 1, № 1, p. 1—6; [10] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 133—180. *В. А. Андрунакиевич.*

АДДИТИВНАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ — раздел теории чисел, в к-ром изучаются задачи о разложении целых чисел на слагаемые заданного вида, а также алгебраич. и геометрич. аналоги таких задач, относящиеся к полям алгебраич. чисел и к множествам точек решетки. Эти задачи наз. *аддитивными задачами*. Обычно рассматриваются аддитивные задачи о разложении больших чисел.

К классич. проблемам А. т. ч. относятся: задача о представлении числа суммой четырех квадратов, девяти

кубов и т. д. (см. *Варинга проблема*); задача о представлении числа в виде суммы не более трех простых (см. *Гольдбаха проблема*); задача о представлении числа в виде суммы простого и двух квадратов (см. *Харди — Литлвуда проблема*) и другие аддитивные проблемы. Для решения задач А. т. ч. применяются аналитические, алгебраические, элементарные и смешанные методы, а также методы, основанные на вероятностных соображениях. В зависимости от методов решения, аддитивные задачи входят составной частью в другие разделы теории чисел — аналитич. теорию чисел, алгебраич. теорию чисел, вероятностную теорию чисел.

Первые систематич. результаты в А. т. ч. были получены Л. Эйлером (L. Euler, 1748), к-рый исследовал с помощью степенных рядов разложения целых чисел на положительные слагаемые; в частности, им была рассмотрена задача о разложении числа на заданное количество слагаемых.

Многие классич. задачи А. т. ч. решаются методом редукции к производящим функциям, к-рый восходит к Л. Эйлеру и лежит в основе аналитич. методов, развитых Г. Х. Харди (G. H. Hardy) и Дж. И. Литлвудом (J. E. Littlewood) и И. М. Виноградовым. Исходной является идея сопоставления заданным последовательностям $A_i=\{a_i\}$ (где $a_i\geqslant 0$ — целое, $i=1, 2, 3, \ldots$) степенных рядов

$$f_i(z)=\sum\nolimits_{0\leqslant a_i<\infty} z^{a_i}$$

с производящей функцией

$$F(z)=\prod\nolimits_{i=1}^{k} f_i(z)=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} r(n)\, z^n,$$

где $r(n)=r_{k,\,A}(n)$ — количество представлений числа n в виде

$$n=a_1+a_2+\ldots+a_k,\quad a_i\in A_i,\quad A=\{A_1, A_2, \ldots\}.$$

При этом $r(n)$ вычисляется при помощи интеграла Коши. В методе Виноградова степенные ряды заменяются тригонометрич. суммами

$$f_i(\alpha)=\sum\nolimits_{0\leqslant a_i\leqslant n}\exp(2\pi i\alpha a_i),$$

$$r(n)=\int_0^1 F(\alpha)\exp(-2\pi i n\alpha)\, d\alpha.$$

Из $r(n)$ выделяется главная часть, состоящая из интервалов, распространенных на окрестности нек-рых рациональных точек. Вместо аналитич. свойств $F(z)$, требующих в ряде задач А. т. ч. привлечения гипотез, аналогичных *Римана гипотезе*, центральную роль при вычислении $r(n)$ играют чисто арифметич. оценки тригонометрич. сумм по методу Виноградова и законы распределения простых чисел в арифметич. прогрессиях, получаемые трансцендентными методами теории L-функций Дирихле. Устанавливается, что в зависимости от k либо $r(n)\neq 0$ для всех $n\geqslant 1$, либо $r(n)\neq 0$ для достаточно больших n ($n\geqslant n_0(A)$), либо для почти всех n выполняется соотношение $r(n)\neq 0$, т. е.

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\sum\nolimits_{n\leqslant x,\ r(n)\neq 0} 1\Big)/x=1,$$

или, наконец, для $r(n)$ имеется асимптотич. формула. Наименьшее число k, удовлетворяющее одному из перечисленных условий, обозначается соответственно $g(A)$, $G(A)$, $G_0(A)$, $k_0(A)$. В случае $\{a_i\}=\{p\}$, где $\{p\}$ — последовательность простых чисел, при $k=3$ получается теорема Виноградова: всякое достаточно большое нечетное число может быть представлено в виде суммы трех простых чисел; при $k=2$ — теорема Чудакова: почти все четные числа могут быть представлены в виде суммы двух простых чисел.

Нек-рые задачи А. т. ч. решаются при помощи исследования структуры множеств, получающихся в резуль-

тате суммирования последовательностей $A_i\{a_i\}$, заданных лишь их плотностями $d(A_i)=\inf_n A_i(n)/n$, где $A_i(n)=\sum_{1\leqslant a_i\leqslant n}1$. Из положительности $d(A_i)$ при $A_1=A_2=\ldots=A_k=A$ уже следует, что $g(A)<\infty$. Применение этого факта к задачам А. т. ч., в к-рых суммируются последовательности нулевой плотности, осуществляется путем конструирования из данных последовательностей новых последовательностей с положительной плотностью. Ведущую роль при этом играют *решета методы*, с помощью к-рых доказывается положительность $d(A_i)$. Таким способом Л. Г. Шнирельманом доказана теорема о представимости натуральных чисел в виде суммы ограниченного числа простых слагаемых, Ю. В. Линником найдено элементарное решение проблемы Варинга.

Элементарные методы решета, принадлежащие В. Бруну (см. *Бруна решето*) и А. Сельбергу (см. *Сельберга решето*), приводят в ряде задач А. т. ч. к результатам, недоступным пока современным аналитич. средствам. Однако наиболее законченные решения нек-рых задач А. т. ч. получаются путем комбинирования аналитических и элементарных методов. В методах решета принцип высеивания простых чисел из натурального ряда (см. *Эратосфена решето*) распространяется на совокупности последовательностей. Так, одновременное высеивание с должной точностью из последовательностей $\{m\}$ и $\{2n-m\}$ простых чисел, $\leqslant n^{\theta_1}$ и, соответственно, $\leqslant n^{\theta_2}$ (где $\theta_1<1$ и $\theta_2<1$ — надлежащим образом выбранные положительные константы), приводит к решению так наз. квазипроблемы Гольдбаха — Эйлера о представлении четного числа суммой двух чисел, одно из к-рых имеет не более k_1, а другое — не более k_2 простых множителей.

В 1959 Ю. В. Линником при помощи созданного им *дисперсионного метода* была решена проблема Харди — Литлвуда, а именно, было доказано (см. [2]), что всякое достаточно большое натуральное число может быть представлено в виде суммы простого числа и двух квадратов целых чисел. Дисперсионным методом был решен ряд так наз. бинарных проблем, связанных с нахождением числа $Q(n)$ решений уравнения $\alpha+\beta=n$, где α и β пробегают заданные последовательности чисел, достаточно хорошо распределенные в арифметич. прогрессиях. Для метода Линника характерно использование элементарных теоретико-вероятностных понятий, примененных П. Л. Чебышевым в его выводе закона больших чисел. С этой целью данное бинарное уравнение сводится к большому числу вспомогательных уравнений, для к-рых сопоставляются ожидаемые $(S_i(n))$ и истинные $(Q_i(n))$ количества решений уравнений. Если подсчет дисперсии показывает, что $Q_i(n)$ «в среднем» мало отличаются от $S_i(n)$, то $Q(n)=\Sigma S_i(n)$ (с допустимой погрешностью). Дисперсионный метод был использован также для исследования общего уравнения Харди — Литлвуда.

Область применения дисперсионного метода пересекается с областью применения метода *большого решета*, разработанного Ю. В. Линником в 1941. Этот метод позволяет высеивать последовательности при помощи простых чисел с возрастающим числом выбрасываемых вычетов. Фактически метод большого решета является следствием законов распределения слабо зависимых случайных величин.

В А. т. ч. существуют задачи, систематич. изучение к-рых относится к другим разделам теории чисел: проблема представимости целых чисел квадратичными формами и формами высших степеней; исследование диофантовых уравнений, допускающих трактовку с позиций общей А. т. ч.

В современной теории чисел интенсивно развиваются различные направления А. т. ч., наблюдается тенден-

ция к перенесению проблем и методов А. т. ч. на произвольные поля алгебраич. чисел.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Избранные труды, М., 1952; [2] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [3] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [4] Ostmann H. H., Additive Zahlentheorie, Bd 1—2, B., 1956; [5] Чудаков Н. Г., «Успехи матем. наук», 1938, вып. 4, с. 14—33; [6] Бредихин Б. М., там же, 1965, т. 20, в. 2 (122), с. 89—130. *Б. М. Бредихин.*

АДДИТИВНАЯ ФУНКЦИЯ, конечно аддитивная функция (множества, области),— действительная функция μ, определенная на системе множеств E и такая, что

$$\mu\left(\sum E_i\right)=\sum \mu\left(E_i\right)$$

для всякого конечного числа попарно непересекающихся множеств $\{E_1, \ldots, E_n\}$ из E, объединение к-рых также принадлежит E. Особую роль среди А. ф. играют *счетно аддитивные функции.* *А. П. Терехин.*

АДДИТИВНОЕ ОТНОШЕНИЕ — подмодуль r прямой суммы $A \oplus B$ двух модулей A и B над нек-рым кольцом R. Каждое А. о. можно рассматривать, таким образом, и как (неоднозначное) отображение $r : A \rightarrow B$, точнее как «многозначный» гомоморфизм, т. е. гомоморфизм r^0 подмодуля $\mathrm{Def}\, r$ в фактормодуль $B/\mathrm{Ind}\,(r)$, где

$$\mathrm{Def}\, r=\{a\in A \mid (\exists b\in B),\ a,\ b\in r\},$$
$$\mathrm{Ker}\, r=\{a\in A \mid (a,\ 0)\in r\},$$
$$\mathrm{Ind}\, r=\mathrm{Ker}\, r^{-1},$$

здесь $r^{-1} : B \rightarrow A$ — обратное к А. о. r отношение, состоящее из всех таких пар $(b,\ a)\in B\oplus A$, что $(a,\ b)\in r$. Обратно, если даны подмодуль $S\subset A$, фактормодуль B/L модуля B и гомоморфизм $\beta : S \rightarrow B/L$, то существует и притом единственное А. о. $r : A \rightarrow B$ такое, что $r^0=\beta$.

Если даны два А. о. $r : A \rightarrow B$ и $s : B \rightarrow C$, то, как и для других бинарных отношений, может быть определено произведение А. о. $sr : A \rightarrow C$ (это множество всех пар $(a,\ c)\in A\oplus C$ таких, что существует элемент $b\in B$, для к-рого $(a,\ b)\in r$ и $(b,\ c)\in s$). Это умножение ассоциативно (там, где оно определено), более того, А. о. образуют *категорию с инволюцией* $r \rightarrow r^{-1}$.

А. о. используются для естественного определения связывающих гомоморфизмов для точных последовательностей комплексов. Аналогичные рассмотрения могут быть проведены не только в категории модулей, но и в любой абелевой категории.

Лит.: [1] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [2] Пуппе Д., «Математика», 1964, т. 8, № 6, с. 109—139. *А. В. Михалев.*

АДДИТИВНОСТЬ — свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям при любом разбиении объекта на части. Напр., А. объема означает, что объем целого тела равен сумме объемов составляющих его частей. См. *Аддитивная функция, Счетно аддитивная функция.*

АДДИТИВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ — проблемы теории чисел о разложении целых чисел на слагаемые заданного вида. Решение классич. А. п. привело к созданию новых методов в теории чисел. К классич. А. п. относятся:

1) *Гольдбаха проблема* о представлении нечетных натуральных чисел, больших 5, суммой трех простых и проблема Эйлера — Гольдбаха о представлении четных чисел, больших 2, суммой двух простых (поставлены в 1742).

2) *Варинга проблема* (1770) о представлении всякого натурального числа в виде суммы $s=s(k)$ неотрицательных k-х степеней с фиксированным $k\geqslant 1$.

Другими А. п. являются, напр., следующие.

3) Проблема представления натуральных чисел суммой ограниченного числа простых (ослабленная проблема Гольдбаха).

4) *Харди — Литлвуда проблема* о представлении всякого целого числа, большего 1, в виде суммы простого и двух квадратов (сформулирована в 20-х гг. 20 в.).

5) Задачи о представлении всех достаточно больших четных чисел суммами двух чисел с ограниченным числом простых сомножителей.

6) Задачи о представлении целых чисел квадратичными формами с тремя и четырьмя переменными и аналогичные задачи.

Для решения А. п. применяются аналитические, алгебраические, элементарные и смешанные методы (см. *Аддитивная теория чисел*). Значительная часть А. п. может быть сведена к двум классам:

а) Тернарные аддитивные проблемы типа $n=\alpha+\beta+\gamma$, где α и β принадлежат к достаточно густым и хорошо распределенным в арифметич. прогрессиях последовательностям целых чисел, γ принадлежит последовательности, может быть и редкой, но с хорошим поведением нек-рых, соответствующих ей, тригонометрич. сумм.

б) Бинарные аддитивные проблемы типа $n=\alpha+\beta$ с теми же условиями для α и β, что и в а).

Универсальным средством решения тернарных А. п. для достаточно больших n является общий аналитич. метод Харди — Литлвуда — Виноградова в форме метода тригонометрических сумм (см. *Виноградова метод*). Бинарные А. п. обычно не могут быть решены этими методами. Для решения таких А. п. применяются различные варианты элементарного решета (см. *Решета метод*). Особенно сильные результаты получаются при помощи *большого решета* и *дисперсионного метода* Ю. В. Линника. А. п. типа 6) также являются бинарными. Они исследуются своеобразными арифметико-геометрич. методами теории квадратичных форм.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [2] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [3] его же, Эргодические свойства алгебраических полей, Л., 1967; [4] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964.

Б. М. Бредихин.

АДДИЦИОННАЯ ТЕОРЕМА для веса: если би компакт X представим в виде объединения множества бесконечной мощности $\leqslant\tau$ своих подпространств веса $\leqslant\tau$, то вес X не больше τ. А. т. (справедливость ее предполагалась в [1]) установлена в [3] для $\tau=\aleph_0$, в полном объеме — в [4]. См. *Вес* топологич. пространства.

Лит.: [1] Alexandroff P., Urysohn P., Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Amst., 1929; [2] Engelking R., Outline of general topology, Amst.—Warsz., 1968; [3] Смирнов Ю. М., «Fundam. math.», 1956, t. 43, № 3, p. 387—93; [4] Архангельский А. В., «Докл. АН СССР», 1959, т. 126, № 2, с. 239—41.

А. В. Архангельский.

АДЕЛЬ — элемент группы аделей, т. е. топологич. прямого произведения

$$\Pi_{v\in V} G_{k_v}(G_{O_v})$$

групп G_{k_v} с отмеченными открытыми подгруппами G_{O_v}. Здесь G_k — *линейная алгебраическая группа*, определенная над *глобальным полем* k, V — множество всех неэквивалентных *нормирований* поля k, k_v — пополнение k относительно $v\in V$, O_v — кольцо целых элементов в k_v. Группа А. алгебраич. группы G обозначается через G_A. Так как все группы G_{k_v} локально компактны, а G_{O_v} компактны, то G_A — локально компактная группа.

Примеры. 1) Если G_k — аддитивная группа k^+ поля k, то G_A обладает естественной структурой кольца, к-рое наз. кольцом аделей поля k и обозначается A_k. 2) Если G_k — мультипликативная группа k^* поля k, то G_A наз. группой иделей поля k (группа иделей является группой единиц в кольце аделей A_k). 3) Если $G_k=GL(n,k)$ — полная линейная груп-

па над k, то G_A состоит из таких элементов $g=(g_v)\in \in\Pi_{v\in V}G_v$, что $g_v\in GL(n, O_v)$ для почти всех нормирований v.

Понятие группы А. было впервые введено К. Шевалле (C. Chevalley) в 30-х гг. 20 в. для полей алгебраич. чисел в связи с потребностями теории полей классов. Спустя 20 лет оно было обобщено М. Кнезером (M. Kneser) и Ц. Тамагава (T. Tamagawa) на алгебраич. группы (см. [1], [2]). Последние заметили, что основные результаты об арифметике квадратичных форм над числовыми полями удобно переформулировать на языке группы А.

Образ диагонального вложения G_k в G_A является дискретной подгруппой в G_A и наз. подгруппой главных аделей. Если ∞ — множество всех архимедовых нормирований k, то

$$G_{A(\infty)}=\Pi_{v\in\infty}G_{k_v}\times\Pi_{v\in\infty}G_{O_v}$$

наз. подгруппой целых аделей. Если $G_k=k^*$, то число различных двойных классов смежности вида $G_kxG_{A(\infty)}$ группы А. G_A конечно и равно числу *классов идеалов поля* k. Естественно возникающий вопрос о конечности числа таких двойных классов для произвольной алгебраич. группы G связан с теорией приведения для подгруппы главных А., т. е. с конструкцией фундаментальной области для факторпространства G_A/G_k. В [5] доказано, что G_A/G_k тогда и только тогда компактно, когда группа G является k-анизотропной (см. *Анизотропная группа*). Более того, решен вопрос о том, когда над полем алгебраич. чисел факторпространство G_A/G_k имеет конечный объем в *Хаара мере*. Так как G_A локально компактна, то такая мера всегда существует и объем G_A/G_k в мере Хаара конечен тогда и только тогда, когда группа G не имеет рациональных k-характеров (см. *Характер* алгебраич. группы). Величина $\tau(G)$ объема G_A/G_k представляет важный арифметич. инвариант алгебраич. группы G (см. *Тамагавы числа*). Опираясь на эти результаты, доказано (см. [5]), что для произвольной алгебраич. группы G имеет место разложение

$$G_A=\bigcup_{i=1}^{m}G_kx_iG_{A(\infty)}.$$

Для случая, когда k — функциональное поле, также доказана конечность числа двойных классов смежности указанного вида для группы А. алгебраич. группы и построен аналог теории приведения [6]. Относительно разнообразных арифметич. применений группы А. см. [4], [7].

Лит.: [1] Вейль А., «Математика», 1964, т. 8, № 4, с. 3—74; [2] Арифметические группы и автоморфные функции, пер. с англ. и франц., М., 1969, с. 44—55; [3] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [4] Итоги науки. Алгебра. Геометрия. Топология. т. 11, М., 1973, с. 5—37; [5] Borel A., в кн.: Publ. Math. I.H.E.S., 1963, № 16, p. 5—30; [6] Harder G., «Invent. math.», 1969, v. 7, № 1, p. 33—54; [7] Платонов В. П., «Труды матем. института им. Стеклова», 1973, т. 132, с. 162—68; [8] Вейль А., Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972.

В. П. Платонов.

АДИАБАТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ — термин физич. происхождения с математически не вполне точным содержанием. Обычно А. и. определяются как количественные характеристики движения *гамильтоновой системы*, почти не изменяющиеся при адиабатическом (т. е. очень медленным по сравнению с характерным масштабом времени для движения в системе) изменении ее параметров (к-рое может продолжаться столь долго, что значения самих этих параметров, в отличие от А. и., значительно изменяются). Так, для простейшей системы

$$\frac{dx}{dt}=v,\quad \frac{dv}{dt}=-\omega^2(\varepsilon t)\,x, \qquad (*)$$

где ε — малый параметр, а $\omega(s)$ — положительная достаточно гладкая функция, А. и. служит

$$I=\omega x^2+\frac{v^2}{\omega}.$$

При $\omega=\text{const}$ система (*) описывает обычный гармонич. осциллятор с частотой ω; таким образом, в данном случае при медленном (по сравнению с периодом колебания) изменении параметров системы ее энергия $(v^2+\omega^2x^2)/2$ меняется пропорционально частоте. Как и в этом примере, обычно подразумевается, что если бы параметры вообще не изменялись, то рассматриваемая гамильтонова система была бы вполне интегрируемой и ее движения были бы квазипериодическими (в данном примере — просто периодическими); известны и другие обобщения. Во многих работах математиков или специалистов по небесной механике, посвященных гамильтоновым системам, близким к вполне интегрируемым, термин «А. и.» не используется, хотя полученная там информация позволяет утверждать, что те или иные величины в том или ином случае являются А. и.

«Приближенное сохранение» А. и. $I(t)$ означает, что при всех рассматриваемых t разность $I(t)-I(0)$ остается малой. (При этом производная $dI(t)/dt$ вполне может быть величиной того же порядка, что и производные других параметров системы, лишь бы с течением времени изменения А. и. не накапливались.) Такое приближенное сохранение может иметь место либо на очень большом, но конечном промежутке времени (в р е м е н н ы́ е А. и.), либо на всей бесконечной оси t (с т а ц и о н а р н ы е, или в е ч н ы е, А. и.; см. [1]). Слова «медленное изменение параметров системы» можно уточнять двумя способами: а) функция Гамильтона H явно зависит от времени t (система неавтономна), но производная dH/dt мала; б) рассматриваемая система с канонич. переменными p, q представляет собой подсистему в бóльшей системе с переменными p, q, p', q', к-рая уже автономна и такова, что p', q' либо изменяются медленно, либо их изменение слабо влияет на подсистему.

При всех этих подстановках существование А. и. можно утверждать лишь при различных дополнительных предположениях, к-рым трудно дать отчетливую общую формулировку (см., напр., [1]). Временны́е А. и. для систем описанного выше типа фактически относятся к асимптотич. методам теории возмущений (при более общей постановке также имеются нек-рые строгие результаты, см. [4]). При доказательстве временно́й асимптотич. инвариантности к.-л. величины $I(t)$ обычно строится другая величина $J(t)$ с теми свойствами, что значения $I(t)$ осциллируют возле $J(t)$, а $dJ(t)/dt$ имеет более высокий порядок малости, чем производные других параметров системы. Так, в примере (*) для $J=I+\varepsilon\omega' xv/\omega^2$ (штрих обозначает производную от ω по аргументу $s=\varepsilon t$) непосредственное дифференцирование дает $\frac{dJ(t)}{dt}=O(\varepsilon^2)$; это гарантирует, что I — временно́й А. и. Существование вечных А. и. в случае а) при сколько-нибудь общем характере зависимости H от t (исключающем, в частности, периодичность или существование пределов при $t\to\pm\infty$) сомнительно. Для случая б) вопрос о вечных А. и. связан с малыми знаменателями (см. [2]).

Исторически А. и. играли важную роль в квантовой теории Бора — Зоммерфельда, где имелся рецепт: величины, подлежащие квантованию,— А. и. С созданием последовательной квантовой механики этот рецепт потерял значение. В современной физике А. и. используются при исследовании движения заряженных частиц в электромагнитных полях (см. [3]). Здесь чаще всего фигурирует отношение $v_\perp^2/H$, где H — величина напряженности магнитного поля, $v_\perp$ — компонента скорости частицы, лежащая в плоскости, перпендикулярной к вектору H; это отношение является А. и. при условии, что магнитное поле мало изменяется по длине *ларморовского радиуса*.

Кроме того, в квантовой механике при адиабатическом изменении состояния нек-рые величины сохраняют свои значения (напр., квантовые числа), исключая процессы, приводящие к вырожденным состояниям системы. Поэтому в квантовой механике тоже можно говорить об А. и., однако они не играют в ней особой роли и даже сам этот термин там обычно не вводится.

Лит.: [1] Мандельштам Л. И., Андронова А. А., Леонтович М. А., «Журнал Русского физико-химического о-ва», 1928, т. 60, № 5, с. 413—19; [2] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, № 6, с. 91—192; [3] Нортроп Т., Адиабатическая теория движения заряженных частиц, пер. с англ., М., 1967; [4] Kasuga T., «Proc. Japan. Acad.», 1961, v. 37, № 7, p. 366—82.

Д. В. Аносов, А. П. Фаворский.

АДИАБАТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ — течение, при к-ром отсутствует теплообмен между различными участками жидкости и окружающими ее телами. Если течение сжимаемой жидкости является адиабатическим и непрерывным, то энтропия элемента жидкости постоянна. Если движение установившееся, т. е. характеристики поля течения не зависят от времени, то для любого элемента жидкости сумма энтальпии и кинетич. энергии не изменяется.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, 2 изд., М., 1954; [2] Основы газовой динамики, пер. с англ., М., 1963.

А. П. Фаворский.

АДИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ — *линейная топология* кольца A, в к-рой фундаментальная система окрестностей нуля образована степенями $\mathfrak{A}^n$ нек-рого двустороннего идеала $\mathfrak{A}$. В этом случае топология наз. $\mathfrak{A}$-адической, а идеал $\mathfrak{A}$ — идеалом определения топологии. Замыкание любого множества $F \subset A$ в $\mathfrak{A}$-адической топологии равно $\bigcap_{n\geqslant 0}(F+\mathfrak{A}^n)$; в частности, топология отделима тогда, и только тогда, когда $\bigcap_{n\geqslant 0}\mathfrak{A}^n=(0)$. Отделимое пополнение $\hat{A}$ кольца A в $\mathfrak{A}$-адической топологии изоморфно проективному пределу $\varprojlim(A/\mathfrak{A}^n)$.

Аналогично определяется $\mathfrak{A}$-адическая топология A-модуля M: ее фундаментальная система окрестностей нуля задается подмодулями $\mathfrak{A}^nM$; в $\mathfrak{A}$-адической топологии M становится топологическим A-модулем.

Пусть A — коммутативное кольцо с единицей в $\mathfrak{A}$-адической топологии и $\hat{A}$ — его пополнение; если $\mathfrak{A}$ — идеал конечного типа, то топология в $\hat{A}$ является $\hat{\mathfrak{A}}$-адической, а $\hat{\mathfrak{A}}^n=\mathfrak{A}^n\hat{A}$. Если $\mathfrak{A}$ — максимальный идеал, то $\hat{A}$ является локальным кольцом с максимальным идеалом $\hat{\mathfrak{A}}$. Топологией локального кольца считается А. т., определяемая максимальным идеалом (m-адическая топология).

Для изучения А. т. колец фундаментальной является лемма Артина — Риса: пусть A есть коммутативное нётерово кольцо, $\mathfrak{A}$ есть идеал в A, E есть A-модуль конечного типа и F—подмодуль модуля E. Тогда существует такое k, что для любого $n\geqslant 0$ выполняется равенство

$$\mathfrak{A}^n(\mathfrak{A}^kE\cap F)=\mathfrak{A}^{k+n}E\cap F.$$

Топологич. интерпретация леммы Артина — Риса показывает, что $\mathfrak{A}$-адическая топология на F индуцирована $\mathfrak{A}$-адической топологией модуля E. Отсюда следует, что пополнение $\hat{A}$ кольца A в $\mathfrak{A}$-адической топологии является плоским A-модулем (см. *Плоский модуль*), что пополнение $\hat{E}$ A-модуля E конечного типа совпадает с $E\oplus_A\hat{A}$, а также теорема Крулля: $\mathfrak{A}$-адическая топология нётерова кольца отделима тогда, и только тогда, когда множество $1+\mathfrak{A}$ не содержит делителей нуля. В частности, топология отделима, если $\mathfrak{A}$ содержится в радикале (Джекобсона) кольца.

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [2] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

В. И. Данилов.

***l*-АДИЧЕСКИЕ КОГОМОЛОГИИ** — одна из конструкций когомологий абстрактных алгебраич. многообразий и схем. *Этальные когомологии* схем являются периодич. модулями. Для различных нужд, в первую очередь для доказательства формулы Лефшеца и приложений к дзета-функциям, необходимы когомологии «с коэффициентами в кольцах нулевой характеристики». Они получаются из этальных когомологий переходом к проективному пределу.

Пусть l — простое число, l-а д и ч е с к и м п у ч к о м на схеме X наз. проективная система $F=(F_n)_{n\in N}$ этальных абелевых пучков F_n такая, что для всех n гомоморфизмы перехода $F_{n+1}\to F_n$ эквивалентны канонич. морфизму $F_{n+1}\to F_{n+1}/l^nF_{n+1}$. Каждая компонента F_n l-адического пучка является пучком Z/l^n Z-модулей. l-адический пучок F наз. к о н с т р у к т и в н ы м (соответственно, л о к а л ь н о п о с т о я н н ы м), если все пучки F^n конструктивные (локально постоянные) этальные пучки. Имеет место естественная эквивалентность категории локально постоянных конструктивных пучков на связной схеме X и категорией модулей конечного типа над кольцом Z_l целых l-адических чисел, на к-рых непрерывно слева действует фундаментальная группа схемы X. Это показывает, что конструктивные локально постоянные пучки являются абстрактными аналогами системы локальных коэффициентов в топологии. Примерами конструктивных l-адических пучков являются пучок $Z_{l,X}=((Z/l^nZ)_X)_{n\in N}$, п у ч к и Т е й т а $Z_l(m)_X=(\mu_{l^n,X}^{\otimes m})_{n\in N}$, где $(Z/l^nZ)_X$ — постоянный пучок на X, ассоциированный с группой Z/l^nZ, а $\mu_{l^n,X}$ — пучок корней l^n-й степени из единицы на X. Если A — абелева схема над X, то $T_l(A)=(A_{l^n})_{n\in N}$, где A_{l^n} — ядро умножения в A на l^n, образует локально постоянный конструктивный l-адический пучок на X, наз. м о д у л е м Т е й т а абелевой схемы A.

Если X — схема над полем k, а $\overline{X}=X\otimes_k\overline{k}_s$ — схема, полученная из X заменой базы с k на сепарабельное замыкание $\overline{k}_s$ поля k, и $F=(F_n)$ — l-адический пучок на X, то этальные когомологии $H^i(\overline{X}, \overline{F}_n)$ определяют проективную систему $(H^i(\overline{X}, \overline{F}_n))_{n\in N}$ $\mathrm{Gal}(\overline{k}_s/k)$-модулей. Проективный предел $H^i(\overline{X}, F)=\varprojlim_n H^i(\overline{X}, \overline{F}_n)$ естественным образом снабжается структурой Z_l-модуля, на к-ром $\mathrm{Gal}(\overline{k}_s/k)$ действует непрерывно относительно l-адической топологии, и наз. i-ми l-адическими когомологиями пучка F на X. В случае, когда $k=\overline{k}_s$, обычно пишут $H^i(\overline{X}, F)=H^i(X, F)$. На l-А. к. конструктивных l-адических пучков переносятся фундаментальные теоремы об этальных когомологиях. Если Q_l — поле рациональных l-адических чисел, то Q_l-пространства $H^i_l(\overline{X})=H^i(\overline{X}, Z_l)\otimes Q_l$ наз. р а ц и о н а л ь н ы м и l-а д и ч е с к и м и к о г о м о л о г и я м и схемы X. Их размерность $b_i(X; l)$ (в случае, когда она определена) наз. i-м ч и с л о м Б е т т и X. Для полных k-схем числа $b_i(X; l)$ определены и не зависят от l ($l\neq\mathrm{char}\ k$). Если k — алгебраически замкнутое поле характеристики p и $l\neq p$, то сопоставление гладкому полному k-многообразию пространств $H^i_l(X)$ определяет *Вейля когомологии*. В случае, когда $k=C$ — поле комплексных чисел, имеет место т е о р е м а с р а в н е н и я: $H^i_l=H^i(X, Q)\otimes Q_l$.

Лит.: [1] G r o t h e n d i e c k A., в кн.: Seminare Bourbaki, Textes des conférences. Année, 1964/65, N.Y.—Amst., 1966, exposés № 279, p. 1—15.

И. В. Долгачев.

***p*-АДИЧЕСКОЕ ЧИСЛО** — элемент расширения поля рациональных чисел, получаемого на основе свойств делимости целых чисел на заданное простое число p.

Это расширение есть пополнение поля рациональных чисел относительно неархимедова нормирования (см. *Абсолютное значение*).

Целым p-адическим числом для произвольного простого p наз. последовательность $x=(x_0, x_1, \ldots)$ вычетов x_n по mod p^{n+1}, удовлетворяющих условию

$$x_n \equiv x_{n-1} \pmod{p^n}, \quad n \geqslant 1.$$

Сложение и умножение целых p-А. ч. определяется формулами

$$(x+y)_n \equiv x_n + y_n \pmod{p^{n+1}},$$

$$(xy)_n \equiv x_n y_n \pmod{p^{n+1}}.$$

Каждое целое число m отождествляется с p-А. ч. $x=(m, m, \ldots)$. Относительно сложения и умножения целые p-А. ч. образуют кольцо, к-рое содержит кольцо целых чисел. Кольцо целых p-А. ч. может быть также определено как проективный предел

$$\lim_{\leftarrow n} \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}$$

колец вычетов по mod p^n (относительно естественных проекций).

p-адическим числом, или рациональным p-адическим числом, наз. элемент поля отношений Q_p кольца Z_p целых p-А. ч. Это поле наз. полем p-адических чисел и содержит поле рациональных чисел в качестве подполя. Как кольцо, так и поле p-А. ч. наделяются естественной топологией. Эта топология может быть определена метрикой, связанной с p-адической нормой, т. е. с функцией $|x|_p$ от p-А. ч. x, определяемой следующим образом. Если $x\neq 0$, то x однозначно представимо в виде $p^n a$, где a — обратимый элемент кольца целых p-А. ч. Тогда p-адическая норма $|x|_p$ равна p^{-n}. Если $x=0$, то $|x|_p=0$. Определяя $|x|_p$ сначала только на рациональных числах, можно получить поле p-А. ч. как пополнение поля рациональных чисел.

Каждый элемент поля p-А. ч. может быть представлен в виде

$$x = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k p^k, \quad 0 \leqslant a_k < p, \qquad (*)$$

где a_k — целые, k_0 — нек-рое целое число, $a_{k_0}\neq 0$, и ряд $(*)$ сходится в метрике поля Q_p. Числа $x\in Z_p$ с условием $|x|_p\leqslant 1$ (т. е. с $k_0\geqslant 0$) образуют кольцо Z_p целых p-А. ч., являющееся пополнением кольца целых чисел поля Q. Числа $x\in Z_p$ с условием $|x|_p=1$ (т. е. $k_0=0$, $a_0\neq 0$) образуют мультипликативную группу и наз. p-адическими единицами. Совокупность чисел $x\in Z_p$ с условием $|x|<1$ (т. е. с $k_0\geqslant 1$) является главным идеалом в Z_p с образующим элементом p. Кольцо Z_p является полным кольцом дискретного нормирования. Поле Q_p локально компактно в топологии, индуцируемой метрикой $|x-x'|_p$. Поэтому в нем существует инвариантная мера μ, подчиняемая обычно условию $\mu(V_p)=1$. Для различных p нормирования $|x|_p$ независимы, а поля Q_p неизоморфны. Многие факты и понятия классического анализа переносятся на случай p-адических полей.

p-А. ч. связаны с решением диофантовых уравнений по модулю возрастающей степени простого числа. Так, если $F(x_1, \ldots, x_m)$ — многочлен с целыми коэффициентами, то разрешимость при всех $k\geqslant 1$ сравнения

$$F(x_1, \ldots, x_m) \equiv 0 \pmod{p^k}$$

эквивалентна разрешимости уравнения $F(x_1, \ldots, x_m)=0$ в целых p-А. ч. Необходимым условием разрешимости этого уравнения в целых или рациональных числах является его разрешимость в кольцах или, соответственно, полях p-А. ч. при всех p. Такой подход к решению

диофантовых уравнений и, в частности, выяснение вопроса о достаточности этих условий, наз. локальными условиями, составляет важную часть современной теории чисел (см. *Диофантова геометрия*).

Упомянутое выше свойство разрешимости в одном частном случае может быть заменено более простым. Именно, если

$$F(x_1, \ldots, x_m) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$$

имеет решение $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m)$, и это решение определяет неособую точку гиперповерхности $\overline{F}(x_1, \ldots, x_m)=0$, где $\overline{F}$ — многочлен F, взятый по mod p, то данное уравнение имеет решение в целых p-А. ч., сравнимое с $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m)$ по mod p. Это утверждение, известное под назв. *Гензеля леммы*, является частным случаем более общего факта, относящегося к теории схем.

Кольцо целых p-А. ч. может рассматриваться как часть более общей конструкции колец Витта $W(A)$. Кольцо целых p-А. ч. получается в том случае, когда $A=F_p$ — конечное поле из p элементов (см. *Витта вектор*). Другим обобщением p-А. ч. являются $\mathfrak{p}$-адические числа, возникающие при пополнении полей алгебраич. чисел относительно неархимедовых нормирований, связанных с простыми дивизорами.

p-А. ч. были введены К. Гензелем (см. [1]). Существующее для них канонич. представление является аналогом разложения аналитич. функций в степенной ряд. Это есть одно из проявлений аналогии между алгебраич. числами и алгебраич. функциями.

Лит.: [1] Hensel K., «Jahresber. Dtsch. Math. Ver.», 1899, Bd 6, H. 1, S. 83—8; [2] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [3] Ленг С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966; [4] Вейль Г., Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1947; [5] Hasse H., Zahlentheorie, 2 Aufl., B., 1963; [6] Вейль А., Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972; [7] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

А. Н. Паршин, В. Г. Спринджук.

АДСОРБЦИЯ — поглощение вещества из газа или раствора поверхностью раздела между ними (или поверхностью твердого тела). Иными словами, А. есть поглощение адсорбата из объема фаз на поверхности адсорбента. А. является частным случаем сорбции.

Молекулы адсорбата, попадая на поверхность адсорбента, удерживаются силовым полем поверхности в течение нек-рого времени, зависящего от природы адсорбата и адсорбента, от температуры T и давления p, а затем покидают поверхность (десорбируются). В состоянии термодинамического и молекулярного равновесия скорости А. и десорбции равны. Зависимость между относительным давлением $\varphi=p/p_s$ адсорбента и относительной концентрацией $\theta=c/c_s$, где индекс s означает предельное значение при постоянной температуре, наз. изотермой А.

Уравнение Ленгмюра мономолекулярной А. имеет вид

$$\varphi = \frac{\theta}{k(1-\theta)},$$

где k — константа равновесия, приближенно учитывающая взаимодействие между молекулами адсорбат — адсорбент.

Для однородной поверхности адсорбента при полимолекулярной А. обычно используется уравнение Брунауера [1].

Для капиллярных тел широкое распространение получила эмпирическая формула Поснова [2]

$$\frac{1}{\theta} = A \ln \varphi + 1,$$

где A — коэффициент, зависящий от температуры и структуры адсорбента.

Лит.: [1] Брунауер С., Адсорбция газов и паров, пер. с англ., т. 1, М., 1948; [2] Поснов В. А., «Ж. техн.

физики», 1953, № 23, с. 865; [3] Ильин Б. В., Природа адсорбционных сил, М.— Л., 1952; [4] де Бур Я. Х., Динамический характер адсорбции, пер. с англ., М., 1962.

А. В. Лыков.

АЗАРТНАЯ ИГРА — многошаговая игра одного игрока. А. и. G определяют как систему

$$G = \langle F,\ f_0 \in F,\ \{\Gamma(f)\}_{f \in F},\ u(f)\rangle,$$

где F — множество капиталов, f_0 — начальный капитал игрока, $\Gamma(f)$ — множество конечно аддитивных мер, определенных на всех подмножествах F, $u(f)$ — функция полезности (см. *Полезности теория*) игрока, определенная на множестве его капиталов. Игрок выбирает $\sigma_0 \in \Gamma(f_0)$, и его капитал f_1 будет распределен согласно мере σ_0. Затем игрок выбирает $\sigma_1(f_1) \in \Gamma(f_1)$ и получает соответственно f_2 и т. д. Последовательность $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots\}$ является *стратегией* игрока. Если игрок кончает игру в момент t, то его выигрыш определяется как математич. ожидание по σ функции $u(f_t)$. Цель игрока состоит в максимизации его функции полезности. Простейшим примером А. и. является лотерея. Игрок, имея наличный капитал f, может приобрести k лотерейных билетов стоимостью c, $k = 1, \ldots, [f/c]$. Каждому k соответствует вероятностная мера на множестве всех капиталов, и после тиража капитал игрока становится равным f_1. Если $f_1 < c$, то игра кончается; если $f_1 \geqslant c$, то игрок может либо выйти из игры, либо снова приобретать лотерейные билеты в количестве от одного до $[f_1/c]$ штук и т. д. Функцией полезности игрока может являться, напр., математич. ожидание капитала или вероятность получения выигрыша не менее определенной величины.

Теория А. и. является составной частью общей теории *управляемых вероятностных процессов*. В А. и. могут играть и сразу несколько лиц, но с теоретико-игровой точки зрения А. и.— игра одного игрока, т. к. его выигрыш не зависит от стратегий партнеров.

Лит.: [1] Dubins L. E., Savage L. J., How to gamble if you must: Inequalities for stochastic processes, N.Y.— [a.o.], 1965.

Е. Б. Яновская.

АКСИАЛЬНЫЙ ВЕКТОР — то же, что *осевой вектор*.

АКСИОМ СХЕМА — единый способ задания *аксиом*, обладающих одной и той же синтаксич. структурой. Конкретная А. с. обычно реализуется при помощи фиксирующего ее синтаксич. структуру выражения $\mathfrak{A}$ (чаще всего не принадлежащего языку, в к-ром записываются аксиомы) и правил, позволяющих, исходя из выражения $\mathfrak{A}$, получить произвольную аксиому данной структуры.

В контекстах с заранее сформулированными или однозначно подразумеваемыми правилами порождения аксиом с помощью выражения $\mathfrak{A}$ А. с. обычно наз. самовыражение $\mathfrak{A}$. Так, напр., говорят о А. с. $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$ пропозиционального исчисления P, подразумевая под этим совокупность аксиом вида $A \supset (B \supset A)$, где A и B — произвольные формулы исчисления P.

Примером схемы нелогических аксиом является следующий вариант схемы индукции в традиционных аксиоматизациях арифметики:

$$(\alpha(0) \,\&\, \forall x\,(\alpha(x) \supset \alpha(x'))) \supset \forall x \alpha(x);$$

здесь α и x предполагаются не принадлежащими алфавиту языка рассматриваемой формализации арифметики и интерпретируются, соответственно, как произвольная формула и произвольная переменная этой формализации.

Применение А. с. обычно позволяет обойтись без правила подстановки при построении формальных теорий. Так, напр., во всяком достаточно сильном пропозициональном исчислении с двумя правилами вывода — правилом подстановки и правилом заключения — оказывается возможным ограничиться при выводах подста-

новками только в аксиомы, что позволяет эквивалентным образом модифицировать такое исчисление, заменив каждую аксиому соответствующей А. с. и удалив правило подстановки из числа действующих в нем правил вывода.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Чёрч А., Введение в математическую логику, т. 1, пер. с англ., М., 1960. *Ф. А. Кабаков.*

АКСИОМА — основное положение, самоочевидный принцип. В дедуктивных научных теориях А. наз. основные исходные положения той или иной теории, из к-рых путем дедукции, т. е. чисто логич. средствами, извлекается все остальное ее содержание. См. *Аксиоматический метод.* *П. С. Новиков.*

АКСИОМАТИЗИРУЕМЫЙ КЛАСС — класс однотипных моделей, определяемый системой аксиом. Класс K моделей формального языка L наз. аксиоматизируемым (конечно аксиоматизируемым), если существует (конечная) система Σ замкнутых формул языка L такая, что K содержит те и только те модели, на к-рых определены и истинны все формулы из Σ (см. *Алгебраическая система*). Класс моделей рекурсивной сигнатуры наз. рекурсивно аксиоматизируемым, если он может быть задан рекурсивным множеством аксиом.

Многие классы алгебраич. систем, изучаемых в математике, определяются системой аксиом языка 1-й ступени. Напр., классы всех булевых алгебр, всех групп, всех полей, всех решеток являются конечно аксиоматизируемыми. Классы всех групп без кручения, всех полей характеристики 0, всех алгебраически замкнутых полей рекурсивно аксиоматизируемы, хотя не конечно аксиоматизируемы. Теория А. к. выявляет закономерности, общие для всех классов объектов, определяемых с помощью данного языка; она хорошо разработана для языка 1-й ступени, поэтому далее речь идет только о таких классах и формулах.

Две модели наз. элементарно эквивалентными, если всякая формула языка 1-й ступени, истинная в одной из них, истинна и в другой. Модель $\mathfrak{M}$ наз. элементарным расширением модели $\mathfrak{N}$, если всякая формула, определенная и истинная в $\mathfrak{N}$, будет истинной в $\mathfrak{M}$.

Элементарно замкнутый класс K моделей наз. полным, если все его модели элементарно эквивалентны между собой. Каждый А. к. моделей является суммой попарно непересекающихся полных классов. Класс наз. категоричным в мощности $\mathfrak{m}$, если все его модели мощности $\mathfrak{m}$ изоморфны. Полный класс моделей счетной сигнатуры, категоричный в несчетной мощности, будет категоричным во всех несчетных мощностях, но может быть некатегоричным в счетной мощности; и в этом случае класс имеет счетное число попарно неизоморфных счетных моделей. Для любого $n \neq 2$ существует полный А. к., имеющий ровно n неизоморфных счетных моделей.

А. к. моделей K наз. разрешимым, если существует алгорифм, позволяющий для каждой замкнутой формулы языка L указать, истинна или нет она на каждой модели K. Связь полных, категоричных и разрешимых классов дает теорема: если K категоричен в бесконечной мощности и не имеет конечной модели, то он полон. Полный рекурсивно А. к. моделей разрешим.

Обобщениями А. к. являются редукционные классы и проективные классы. Проективные классы определяются аксиомой 2-й ступени, имеющей вид:

$$\exists T_1 \ldots \exists T_n \mathfrak{A}(P_1, \ldots, P_k, T_1, \ldots, T_n),$$

где P_i, T_i — предикатные переменные, $\mathfrak{A}(P_1, \ldots, P_k, T_1, \ldots, T_n)$ — формула сигнатуры $\sigma = (P_1, \ldots, P_k, T_1, \ldots, T_n)$. Многие свойства А. к. переносятся на эти классы.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [2] его же, в кн.: Тр. 4-го Всесоюзн. матем. съезда, т. 1, Л., 1963, с. 169—98.
А. Д. Тайманов.

АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ — направление в математич. логике, занимающееся изучением фрагментов содержательной теории множеств методами математич. логики. Обычно с этой целью фрагменты теории множеств оформляются в виде формальной аксиоматич. теории. В более узком смысле термин «А. т. м.» может служить для обозначения к.-л. формальной аксиоматич. теории, направленной на построение нек-рого фрагмента содержательной («наивной») теории множеств.

Теория множеств, возникшая на рубеже 19—20 вв., уже в самом начале своего развития натолкнулась на парадоксы. Открытие таких фундаментальных парадоксов, как Рассела и Кантора (см. *Антиномия)*, вызвало широкую дискуссию и способствовало коренному пересмотру логико-математич. принципов. Аксиоматич. направление в теории множеств можно рассматривать как инструмент более детального изучения положения дел в создавшейся ситуации.

Построение формальной А. т. м. начинается с точного описания языка, на к-ром формулируются утверждения. Затем принципы «наивной» теории множеств выражаются на описанном языке в виде аксиом, схем аксиом. Ниже дано краткое описание нек-рых наиболее распространенных систем А. т. м. Важную роль при этом играет язык, содержащий следующие исходные символы: 1) переменные x, y, z, u, v, x_1, ..., к-рые в языке играют роль общих имен множеств; 2) предикатные символы $\in$ (знак принадлежности) и $=$ (знак равенства); 3) оператор дескрипции ι (означающий «такой объект, что...»); 4) логические связки и кванторы: $\leftrightarrow$ (эквивалентно), $\rightarrow$ (влечет), $\vee$ (или), $\wedge$ (и), $\neg$ (не), $\forall$ (для всех), $\exists$ (существует); 5) скобки (,). Выражения языка делятся на термы и формулы. Термы являются именами множеств, а формулы выражают суждения. Термы и формулы образуются согласно следующим правилам.

П1. Если τ и σ — переменные или термы, то $(\tau\in\sigma)$ и $(\tau=\sigma)$ суть формулы.

П2. Если A и B — формулы и x — переменная, то $(A\leftrightarrow B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\vee B)$, $(A\wedge B)$, $\neg A$, $\forall xA$, $\exists xA$ суть формулы и ιxA — терм; переменная x есть терм.

Напр., формула $\forall x(x\in y\rightarrow x\in z)$ выражает суждение «y есть подмножество z», ее естественно обозначить $y\subseteq z$; терм $\iota w\forall y(y\in w\leftrightarrow y\subseteq z)$ является именем множества всех подмножеств z, в привычной математич. символике его обозначают через Pz. Пусть знак $\rightleftharpoons$ означает «стоящее слева есть обозначение для стоящего справа». Приведем нек-рые дальнейшие обозначения для формул и термов.

Пустое множество:

$$\varnothing \rightleftharpoons \iota x\forall y\,\neg\, y\in x.$$

Множество таких x, что $A(x)$:

$$\{x \mid A(x)\} \rightleftharpoons \iota z\,\forall x\,(x\in z\leftrightarrow A(x)),$$

где z не входит свободно в $A(x)$ (т. е. не является параметром формулы $A(x)$).

Неупорядоченная пара x и y:

$$\{x, y\} \rightleftharpoons \{z \mid z=x\vee z=y\}.$$

Одноэлементное множество из x:

$$\{x\} \rightleftharpoons \{x, x\}.$$

Упорядоченная пара x и y:

$$\langle x, y\rangle \rightleftharpoons \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Объединение x и y:

$$x\cup y \rightleftharpoons \{z \mid z\in x\vee z\in y\}.$$

Пересечение x и y:

$$x\cap y \rightleftharpoons \{z \mid z\in x\wedge z\in y\}.$$

Объединение всех элементов x:

$$\bigcup x \rightleftarrows \{z \mid \exists v\,(z \varepsilon v \wedge v \varepsilon x)\}.$$

Декартово произведение x и y:

$$x \times y \rightleftarrows \{z \mid \exists u v\,(z = \langle u, v\rangle \wedge u \varepsilon x \wedge v \varepsilon y)\}.$$

w есть функция:

$$\mathrm{Fnc}\,(w) \rightleftarrows \exists v\,(w \subseteq v \times v) \wedge$$
$$\forall u v_1 v_2\,(\langle u, v_1\rangle \varepsilon w \wedge \langle u, v_2\rangle \varepsilon w \longrightarrow v_1 = v_2).$$

Значение функции w на элементе x:

$$w`x \rightleftarrows \iota y\,\langle x, y\rangle \varepsilon w.$$

z есть стандартное бесконечное множество:

$$\mathrm{Inf}\,(z) \rightleftarrows \varnothing \varepsilon z \wedge \forall u\,(u \varepsilon z \longrightarrow u \cup \{u\} \in z).$$

Следующая аксиоматич. теория A наиболее полно отражает принципы «наивной» теории множеств. Аксиомы A:

A1. а к с и о м а о б ъ е м н о с т и:

$$\forall x\,(x \varepsilon y \leftrightarrow x \varepsilon z) \longrightarrow y = z$$

(«если множества y и z содержат одни и те же элементы, то они равны»);

A2. а к с и о м ы с в е р т ы в а н и я:

$$\exists y \forall x\,(x \varepsilon y \leftrightarrow A),$$

где A — произвольная формула, не содержащая в качестве параметра y («существует множество y, содержащее те и только те элементы x, для к-рых A»).

Описанная система противоречива. Если в A2 в качестве A взять формулу $\neg x \varepsilon x$, то из формулы $\forall x\,(x \varepsilon y \leftrightarrow \neg x \varepsilon x)$ легко выводится $y \varepsilon y \leftrightarrow \neg y \varepsilon y$, что противоречиво.

Аксиоматич. системы теории множеств можно разделить на следующие четыре группы.

а) Построение аксиоматич. систем первой группы направлено на такое ограничение аксиом свертывания, к-рое обеспечивает наиболее естественный способ формализации обычных математич. доказательств и в то же время позволяет избежать известных парадоксов. Первой аксиоматикой такого рода была система Z Цермело (E. Zermelo, 1908). Однако в системе Z невозможно естественным образом формализовать нек-рые разделы математики, и А. Френкель (A. Fraenkel, 1922) предложил пополнить Z новым принципом, названным им а к с и о м о й п о д с т а н о в к и. Полученная система наз. с и с т е м о й Ц е р м е л о — Ф р е н к е л я и обозначается ZF.

б) Вторую группу составляют системы, аксиомы к-рых выбраны в связи с к.-л. объяснением парадоксов, напр. как следствий непредикативных определений. Сюда относятся: разветвленная теория типов Рассела, простая теория типов T, теории типов с трансфинитными индексами (см. *Типов теория*).

в) Третья группа характеризуется использованием нестандартных средств логич. вывода, многозначных логик, дополнительных условий на доказательства, бесконечных правил вывода. Системы, относящиеся к этому направлению, наименее развиты.

г) Четвертая группа включает модификации систем первых трех групп, преследующие определенные логич. или математич. цели. Укажем только на системы NBG Неймана — Гёделя — Бернайса (J. Neumann — K. Gödel — P. Bernays, 1925) и NF Куайна (W. Quine, 1937). Построение системы NBG вызвано желанием иметь конечное число аксиом для теории множеств, основанной на системе ZF. В NF реализуется стремление преодолеть расслоение понятий, имеющее место в теории типов.

Системы Z, ZF, NF можно формулировать в описанном выше языке. Правила вывода, а также так наз. л о г и-

ческие аксиомы у этих систем совпадают и образуют прикладное исчисление предикатов 1-й ступени с равенством и оператором дескрипции. Укажем только аксиомы для равенства и оператора дескрипции:

$$x = x,\ x = y \longrightarrow (A(x) \longrightarrow A(y)),$$

где $A(x)$ — формула, не содержащая связанной переменной y (т. е. не имеющая вхождений вида $\forall y$, $\exists y$, ιy), и $A(y)$ получается из формулы $A(x)$ заменой нек-рых свободных вхождений переменной x на y;

$$\exists!\, xA(x) \longrightarrow A(\iota xA(x)),$$

где квантор $\exists!\, x$ означает «существует одно и только одно x», а формула $A(\iota xA(x))$ получается из формулы $A(x)$ заменой всех свободных вхождений переменной x на терм $\iota xA(x)$. Квантор $\exists!\, x$ выразим через кванторы $\forall$ и $\exists$ и равенство.

Нелогические аксиомы системы Z:

Z1. аксиома объемности A1;

Z2. аксиома пары:

$$\exists u \forall z\, (z \varepsilon u \leftrightarrow z = x \vee z = y)$$

(«существует множество $\{x, y\}$»);

Z3. аксиома суммы:

$$\exists y \forall x\, (x \varepsilon y \leftrightarrow \exists t\, (t \varepsilon z \wedge x \varepsilon t))$$

(«существует множество $\bigcup z$»);

Z4. аксиома степени:

$$\exists y \forall x\, (x \varepsilon y \leftrightarrow x \subseteq z)$$

(«существует множество Pz»);

Z5. аксиома выделения:

$$\exists y \forall x\, (x \varepsilon y \leftrightarrow x \varepsilon z \wedge A(x))$$

(«существует подмножество z, состоящее из тех элементов x, для к-рых имеет место $A(x)$»); аксиомы Z2—Z5 являются примерами аксиом свертывания;

Z6. аксиома бесконечности:

$$\exists z\, \mathrm{Inf}(z);$$

Z7. аксиома выбора:

$$\forall z \exists w\, (\mathrm{Fnc}(w) \wedge \forall x\, (x \varepsilon z \wedge \neg\, x = \varnothing \longrightarrow w'x \varepsilon x))$$

(«для всякого множества z существует функция w, выбирающая из каждого непустого элемента x множества z единственный элемент $w'x$»). К этим аксиомам добавляют еще аксиому фундирования:

Z8.

$$\forall x\, (\neg\, x = \varnothing \longrightarrow \exists y\, (y \varepsilon x \wedge y \cap x = \varnothing)),$$

цель к-рой — постулировать, что не существует убывающих цепей $x_2 \varepsilon x_1$, $x_3 \varepsilon x_2$, $x_4 \varepsilon x_3$, ... Аксиома Z8 позволяет упростить построения в Z. Добавление этой аксиомы не вносит противоречия.

В системе Z можно развивать арифметику, анализ, функциональный анализ, рассматривать кардинальные числа, меньшие $\aleph_\omega$. Однако если определить алефы стандартным образом, то доказать в Z существование $\aleph_\omega$ и более высоких кардиналов уже невозможно.

Система ZF получается из Z добавлением аксиом подстановки Френкеля, к-рым можно придать вид аксиом свертывания:

ZF9.

$$\exists y \forall x\, (x \varepsilon y \leftrightarrow \exists v\, (v \varepsilon z \wedge x = \iota t A(t, v)))$$

(«существует множество y, состоящее из x, $x = \iota t A(t, v)$, когда v пробегает все элементы множества z»). Иначе говоря, y получается из z, если каждый элемент v из z заменить на $\iota t A(t, v)$.

Система ZF является очень сильной теорией. Все обычные математич. теоремы формализуются в ZF.

Система NBG получается из системы ZF добавлением нового типа переменных — классовых переменных X,

Y, Z, ... и конечного числа аксиом образования классов, позволяющих доказать формулы вида

$$\exists Y \forall x\,(x \varepsilon Y \leftrightarrow A\,(x)),$$

где $A\,(x)$ — формула системы NBG, не содержащая связанных классовых переменных и символа ι. Поскольку по каждой формуле $A(x)$ можно образовать класс, то бесконечное число аксиом ZF удается заменить конечным числом аксиом, содержащих классовую переменную. Аксиома выбора имеет вид:

$$\exists X\,(\mathrm{Fnc}\,(X) \wedge \forall x\,(\neg\, x = \varnothing \longrightarrow X`x \varepsilon x))$$

и утверждает существование единой для всех множеств функции выбора, являющейся классом.

Система NF имеет наиболее простую аксиоматику, а именно: 1) аксиому объемности и 2) те аксиомы свертывания, в к-рых формулу A можно с т р а т и ф и ц и р о в а т ь, т. е. приписать всем переменным формулы A верхние индексы таким образом, чтобы получилась формула теории типов T, т. е. в подформулах вида $x \varepsilon y$ индекс у x на единицу меньше, чем индекс у y.

Система NF обладает следующими особенностями:

а) *выбора аксиома* и обобщенная *континуум-гипотеза* опровержимы;

б) *бесконечности аксиома* доказуема;

в) аксиома объемности играет весьма существенную роль. Так, если аксиому объемности заменить несколько более слабой аксиомой:

$$(\exists u\,(u \varepsilon y) \wedge \forall u\,(u \varepsilon y \leftrightarrow u \varepsilon z)) \longrightarrow y = z,$$

допускающей много пустых множеств, а аксиомы свертывания NF оставить без изменения, то получится довольно слабая теория, именно: уже в формальной арифметике можно доказать непротиворечивость полученной системы.

Ниже приведены результаты о соотношениях между описанными системами.

(α) Всякая формула ZF доказуема в NBG тогда и только тогда, когда она доказуема в ZF.

(β) В ZF можно установить непротиворечивость Z, пополненной любым конечным числом примеров схемы аксиом подстановки ZF9. Таким образом, ZF значительно сильнее Z.

(γ) В Z доказуема непротиворечивость T, так что Z сильнее T.

(δ) NF не слабее T в том смысле, что в NF можно развить всю теорию типов.

Аксиоматич. подход к теории множеств позволил придать точный смысл утверждению о принципиальной неразрешимости нек-рых математич. проблем и строго доказать его. Общая схема применения аксиоматич. метода здесь такова. Рассматривается формальная аксиоматич. система S теории множеств (как правило, это ZF или нек-рые ее модификации), настолько универсальная, чтобы она содержала все обычные способы рассуждения классич. математики и все обычные математич. факты могли бы в ней быть выведены. Данная проблема A может быть записана в виде формулы в языке S. Затем математич. методами устанавливается, что в S невозможно вывести ни A, ни отрицание A. Отсюда следует, что проблема A не может быть разрешена (в ту или иную сторону) средствами теории S, но так как теория S определялась в расчете охватить все обычные методы рассуждения, то полученный результат свидетельствует о том, что A не может быть разрешена обычными методами рассуждения, т. е. свидетельствует о «трансцендентности» A.

Результаты о невыводимости в теории S доказываются, как правило, в предположении о непротиворечивости S или нек-рого естественного расширения S. Это связано с тем, что, с одной стороны, проблема может быть невыводима в S только при непротиворечивости S, последнее же не может быть установлено средствами S

(согласно *Гёделя теореме о неполноте*), т. е. не может быть доказано обычными методами. С другой стороны, непротиворечивость S является обычно весьма правдоподобной гипотезой. Сама теория S определяется в расчете на выполнение этой гипотезы.

Далее, аксиоматич. подход к теории множеств позволил точно поставить и решить проблемы, связанные с эффективностью в теории множеств, интенсивно обсуждавшиеся особенно в первый период развития теории множеств в работах Р. Бэра (R. Baire), Э. Бореля (E. Borel), А. Лебега (H. Lebesgue), С. Н. Бернштейна, Н. Н. Лузина, В. Серпинского (W. Sierpiński). А именно, говорят, что теоретико-множественный объект, удовлетворяющий свойству $\mathfrak{A}$, задается эффективно в аксиоматич. теории S, если может быть построена формула $A(x)$ теории S, про к-рую в S можно доказать, что ей удовлетворяет единственный объект, и этот объект удовлетворяет свойству $\mathfrak{A}$. Это определение дает возможность точно доказать, что для нек-рых свойств $\mathfrak{A}$ в теории S невозможно эффективно указать объект, удовлетворяющий свойству $\mathfrak{A}$, в то время как существование этих объектов в S может быть установлено. Но поскольку теория S выбирается достаточно универсальной, то неэффективность существования нек-рых объектов в S свидетельствует и о невозможности эффективно установить их существование обычными математич. средствами.

Наконец, методы А. т. м. позволили решить ряд трудных проблем и в классич. ветвях математики: теории кардинальных и ординальных чисел, дескриптивной теории множеств, топологии.

Ниже приведены нек-рые из результатов в А. т. м. Большинство теорем относится к А. т. м. ZF Цермело — Френкеля, наиболее употребительной в настоящее время. Пусть ZF$^-$ есть система ZF без аксиомы выбора Z7. В силу (α) результаты легко адаптируются и к системе NBG.

1) К. Гёдель (1939) показал, что если ZF$^-$ непротиворечива, то она остается непротиворечивой и после добавления аксиомы выбора и континуум-гипотезы. Отсюда следует, что в ZF невозможно опровергнуть аксиому выбора или континуум-гипотезу. Для доказательства этого результата Гёдель построил модель теории ZF, состоящую из так наз. *конструктивных по Гёделю множеств* и играющую важную роль в современной А. т. м.

2) Вопрос о том, можно ли вывести в ZF аксиому выбора или континуум-гипотезу, оставался открытым вплоть до 1963, когда П. Коэн (P. Cohen) с помощью разработанного им *вынуждения метода* показал, что если ZF$^-$ непротиворечива, то она остается таковой и после присоединения любой комбинации из аксиомы выбора, континуум-гипотезы или их отрицаний. Таким образом, эти две проблемы независимы в ZF.

Основным методом установления невыводимости формулы A в ZF является построение модели ZF, в к-рой имеет место отрицание A. Метод вынуждения Коэна, усовершенствованный затем другими авторами, сильно расширил возможности построения моделей теории множеств и в настоящее время лежит в основе почти всех дальнейших результатов о невыводимости. Напр.:

3) Показано, что к ZF без противоречия можно присоединить гипотезу о том, что мощность множества подмножеств множества x может быть почти произвольной наперед заданной функцией мощности x на регулярных кардиналах (единственные существенные ограничения связаны с теоремой Кёнига).

4) В 1920 М. Я. Суслин сформулировал г и п о т е з у: всякое линейно полно упорядоченное множество такое, что всякое попарно непересекающееся семейство непустых открытых интервалов в нем не более чем счетно, необходимо содержит счетное всюду плотное подмно-

жество. Методом Коэна была установлена неразрешимость в ZF гипотезы Суслина.

5) Показана неразрешимость в ZF⁻ (без аксиомы выбора) утверждения: всякое подмножество множества действительных чисел измеримо по Лебегу.

6) Выяснено взаимоотношение с ZF многих важных проблем дескриптивной теории множеств. Первые результаты в этом направлении были объявлены Гёделем в 30-х гг. и доказаны П. С. Новиковым [5]. Методы А. т. м. позволили обнаружить неизвестные ранее связи между проблемами «наивной» теории множеств. Доказано, напр., что из существования неизмеримого по Лебегу множества действительных чисел типа Σ^1_2 (т. е. A_2) вытекает существование несчетного Π^1_1 (т. е. CA) множества без совершенного подмножества.

7) Доказано отсутствие в ZF эффективного вполне упорядочения континуума. Получены многочисленные результаты об отсутствии эффективно определенных объектов в дескриптивной теории множеств и теории ординалов.

Лит.: [1] Френкель А.А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [2] Коэн Пол Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969; [3] Йех Т., Теория множеств и метод форсинга, пер. с англ., М., 1973; [4] Drake F. R., Set theory, Amsterdam. 1974; [5] Новиков П. С., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 279—316.

В. Н. Гришин, А. Г. Драгалин.

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД — способ построения научной теории, при к-ром в основу теории кладутся нек-рые исходные положения, наз. *аксиомами* теории, а все остальные предложения теории получаются как логич. следствия аксиом.

В математике А. м. зародился в работах древнегреческих геометров. Блестящим, остававшимся единственным вплоть до 19 в. образцом применения А. м. была геометрич. система, известная под назв. «Начал» Евклида (ок. 300 до н. э.). Хотя в то время не вставал еще вопрос об описании логич. средств, применяемых для извлечения содержательных следствий из аксиом, в системе Евклида уже достаточно четко проведена идея получения всего основного содержания геометрич. теории чисто дедуктивным путем из нек-рого, относительно небольшого, числа утверждений — аксиом, истинность к-рых представлялась наглядно очевидной.

Открытие в нач. 19 в. неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевским и Я. Больяй (J. Bolyai) явилось толчком к дальнейшему развитию А. м. Они установили, что, заменив привычный и, казалось бы, единственно «объективно истинный» V постулат Евклида о параллельных его отрицанием, можно развивать чисто логич. путем геометрич. теорию, столь же стройную и богатую содержанием, как и геометрия Евклида. Этот факт заставил математиков 19 в. обратить специальное внимание на дедуктивный способ построения математич. теорий, что повлекло за собой возникновение новой проблематики, связанной с самим понятием А. м., и формальной (аксиоматической) математич. теории. По мере того как накапливался опыт аксиоматич. изложения математич. теорий — здесь надо отметить прежде всего завершение логически безупречного (в отличие от «Начал» Евклида) построения элементарной геометрии [М. Паш (M. Pasch), Дж. Пеано (G. Peano), Д. Гильберт (D. Hilbert)] и первые попытки аксиоматизации арифметики (Дж. Пеано),— уточнялось понятие формальной аксиоматич. системы (см. ниже); возникала специфич. проблематика, на основе к-рой выросла так наз. *доказательств теория* как основной раздел современной математич. логики.

Понимание необходимости обоснования математики и конкретные задачи в этой области зародились в более или менее отчетливой форме уже в 19 в. При этом, с одной стороны, уточнение основных понятий и сведéние

более сложных понятий к простейшим на точной и логически все более строгой основе проводились гл. обр. в области анализа [«ε — δ»-язык О. Коши (A. Cauchy), теоретико-функциональные концепции Б. Больцано (B. Bolzano) и К. Вейерштрасса (K. Weierstrass), континуум Г. Кантора (G. Cantor) и Р. Дедекинда (R. Dedekind)]; с другой стороны, открытие неевклидовых геометрий стимулировало развитие А. м., возникновение новых идей и постановку проблем более общего метаматематич. характера, прежде всего проблем, связанных с понятием произвольной аксиоматич. теории, таких, как проблемы непротиворечивости, полноты и независимости той или иной системы аксиом. Первые результаты в этой области принес м е т о д и н т е р п р е т а ц и й, к-рый грубо может быть описан следующим образом. Пусть каждому исходному понятию и отношению данной аксиоматич. теории T поставлен в соответствие нек-рый конкретный математич. объект. Совокупность таких объектов наз. п о л е м и н т е р п р е т а ц и и. Всякому утверждению $\mathfrak{A}$ теории T естественным образом ставится теперь в соответствие нек-рое высказывание $\mathfrak{A}^*$ об элементах поля интерпретации, к-рое может быть истинным или ложным. Тогда говорят, что утверждение $\mathfrak{A}$ теории T, соответственно, истинно или ложно в данной интерпретации. Поле интерпретации и его свойства сами обычно являются объектом рассмотрения к.-л., вообще говоря другой, математич. теории T_1, к-рая, в частности, тоже может быть аксиоматической. Метод интерпретаций следующим образом позволяет устанавливать факт о т н о с и т е л ь н о й н е п р о т и в о р е ч и в о с т и, т. е. доказывать суждения типа: «если теория T_1 непротиворечива, то непротиворечива и теория T». Пусть теория T проинтерпретирована в теории T_1 таким образом, что все аксиомы A_i теории T интерпретируются истинными суждениями A_i^* теории T_1. Тогда всякая т е о р е м а теории T, т. е. всякое утверждение A, логически выведенное из аксиом A_i в T, интерпретируется в T_1 нек-рым утверждением A^*, выводимым в T_1 из интерпретаций A_i^* аксиом A_i, и, следовательно, истинным. Последнее утверждение опирается на еще одно неявно делаемое нами допущение известного подобия логич. средств теорий T и T_1, но практически это условие обычно выполняется. (На заре применения метода интерпретаций об этом допущении специально даже не задумывались: оно представлялось само собой разумеющимся; на самом деле в случае первых опытов доказательства теорем об относительной непротиворечивости логич. средства теорий T и T_1 просто совпадали — это была классич. логика предикатов.) Пусть теперь теория T противоречива, т. е. нек-рое утверждение A этой теории выводимо в ней вместе со своим отрицанием. Тогда из вышесказанного следует, что утверждения A^* и «не A^*» будут одновременно истинными утверждениями теории T_1, т. е., что теория T_1 противоречива. Этим методом была, напр., доказана [Ф. Клейн (F. Klein), А. Пуанкаре (H. Poincaré)] непротиворечивость неевклидовой геометрии Лобачевского в предположении, что непротиворечива геометрия Евклида; а вопрос о непротиворечивости гильбертовой аксиоматизации евклидовой геометрии был сведен (Д. Гильберт) к проблеме непротиворечивости арифметики. Метод интерпретаций позволяет также решать вопрос о независимости систем аксиом: для доказательства того, что аксиома A теории T не зависит от остальных аксиом этой теории, т. е. не выводима из них, и, следовательно, существенно необходима для получения всего объема данной теории, достаточно построить такую интерпретацию теории T, в к-рой аксиома A была бы ложна, а все остальные аксиомы этой теории истинны. Иной формой этого способа доказательства независимости A является установление непротиворе-

чивости теории, к-рая получается, если в данной теории Таксиому A заменить ее отрицанием. Упомянутое выше сведéние проблемы непротиворечивости геометрии Лобачевского к проблеме непротиворечивости евклидовой геометрии, а этой последней — к вопросу о непротиворечивости арифметики имеет своим следствием утверждение, что V постулат Евклида не выводим из остальных аксиом геометрии, если только непротиворечива арифметика натуральных чисел. Слабая сторона метода интерпретаций состоит в том, что в вопросах непротиворечивости и независимости систем аксиом он дает возможность получать результаты, носящие неизбежно лишь относительный характер. Но важным достижением этого метода стал тот факт, что с его помощью была выявлена на достаточно точной основе особая роль арифметики как такой математич. теории, к вопросу о непротиворечивости к-рой сводится аналогичный вопрос для целого ряда других теорий.

Дальнейшее развитие — а в известном смысле это была вершина — А. м. получил в работах Д. Гильберта и его школы в виде так наз. метода *формализма* в основаниях математики. В рамках этого направления была выработана следующая стадия уточнения понятия аксиоматич. теории, а именно понятие *формальной системы*. В результате этого уточнения оказалось возможным представлять сами математич. теории как точные математич. объекты и строить общую теорию, или *метатеорию*, таких теорий. При этом соблазнительной представлялась перспектива (и Д. Гильберт был в свое время ею увлечен) решить на этом пути все главные вопросы обоснования математики. Основным понятием этого направления является понятие формальной системы. Всякая формальная система строится как точно очерченный класс выражений — формул, в к-ром нек-рым точным образом выделяется подкласс формул, наз. теоремами данной формальной системы. При этом формулы формальной системы непосредственно не несут в себе никакого содержательного смысла, и их можно строить из произвольных, вообще говоря, значков или элементарных символов, руководствуясь только соображениями технического удобства. На самом деле способ построения формул и понятие теоремы той или иной формальной системы выбираются с таким расчетом, чтобы весь этот формальный аппарат можно было применять для выражения, возможно более адекватного и полного, той или иной конкретной математической (и не математической) теории, точнее, как ее фактич. содержания, так и ее дедуктивной структуры. Общая схема построения (задания) произвольной формальной системы S такова.

I. Язык системы S:

а) алфавит — перечень элементарных символов системы;

б) правила образования (синтаксис) — правила, по к-рым из элементарных символов строятся формулы системы S; при этом последовательность элементарных символов считается формулой тогда и только тогда, когда она может быть построена с помощью правил образования.

II. Аксиомы системы S. Выделяется нек-рое множество формул (обычно конечное или перечислимое), к-рые наз. аксиомами системы S.

III. Правила вывода системы S. Фиксируется (обычно конечная) совокупность предикатов $R_1, \ldots, R_k$ на множестве всех формул системы S. Пусть $R_i(x_1, \ldots, x_{n_i+1})$ — к.-л. из этих предикатов ($n_i > 0$); если для данных формул $F_1, \ldots, F_{n_i+1}$ утверждение $R_i(F_1, \ldots, F_{n_i+1})$ истинно, то говорят, что формула F_{n_i+1} непосредственно следует из формул $F_1, \ldots, F_{n_i}$ по правилу R_i.

Заданием I, II, III исчерпывается задание формальной системы S как точного математич. объекта, поскольку понятие теоремы или выводимой формулы системы S образуется для всех формальных систем следующим единообразным способом (при этом степень точности определяется уровнем точности задания алфавита, правил образования и правил вывода, т. е. предикатов $R_1, \ldots, R_k$). В ы в о д о м системы S наз. всякая конечная последовательность формул системы S, в к-рой каждая формула либо является аксиомой системы S, либо непосредственно следует из к.-л. предшествующих ей в этой последовательности формул по одному из правил вывода R_i системы S. Формула системы S наз. т е о р е м о й этой системы, если существует вывод системы S, заканчивающийся этой формулой.

Всякую конкретную математич. теорию Т можно перевести на язык подходящей формальной системы S таким образом, что каждое осмысленное (ложное или истинное) предложение теории Т выражается нек-рой формулой системы S.

Естественно было надеяться, что этот метод формализации позволит строить все положительное содержание математич. теорий на такой точной и, казалось бы, надежной основе, как понятие выводимой формулы (теоремы формальной системы), а такие принципиальные вопросы, как проблема непротиворечивости математич. теорий, решать в форме доказательств соответствующих утверждений о формализующих эти теории формальных системах. Поскольку формальные системы описанного выше типа сами оказываются точными, или, как говорили в школе Гильберта, финитными, математич. объектами, можно было ожидать, что удастся получить ф и н и т н ы е д о к а з а т е л ь с т в а утверждений о непротиворечивости, т. е. доказательства, к-рые в определенном смысле были бы эффективными, не зависящими от тех мощных средств, вроде *абстракции актуальной бесконечности*, к-рые в классических математич. теориях как раз и являются причиной трудностей в их обосновании. Таким образом, требование финитности средств, применяемых для получения результатов о формальных системах, в частности теорем о их непротиворечивости, было вполне закономерной особенностью формалистич. программы Гильберта. Однако результаты К. Гёделя (K. Gödel) начала 30-х гг. 20 в. привели к краху основных надежд, связывавшихся с этой программой. Гёдель показал:

1) Всякая естественная, непротиворечивая формализация S арифметики или любой другой математич. теории, содержащей арифметику (напр., теории множеств), неполна и неполнима в том смысле, что: а) в S имеются (содержательно истинные) неразрешимые формулы, т. е. такие формулы A, что ни A, ни отрицание A не выводимы в S (н е п о л н о т а ф о р м а л и з о в а н н о й а р и ф м е т и к и), б) каким бы конечным множеством дополнительных аксиом (напр., неразрешимыми в S формулами) ни расширить систему S, в новой, усиленной таким образом, формальной системе неизбежно появятся свои неразрешимые формулы (н е п о п о л н и м о с т ь; см. [5], а также *Гёделя теорема о неполноте*).

2) Если формализованная арифметика в действительности непротиворечива, то хотя утверждение о ее непротиворечивости выразимо на ее собственном языке, однако доказательство этого утверждения, проведенное средствами, формализуемыми в ней самой, невозможно.

Это означает, что уже для арифметики принципиально невозможно исчерпать весь объем ее содержательно истинных суждений классом выводимых формул какой бы то ни было формальной системы, и что нет никакой надежды получить когда-либо финитное доказательство непротиворечивости арифметики, т. к., по-видимому,

всякое разумное уточнение понятия финитного доказательства оказывается формализуемым в формальной арифметике.

Все это ставит определенные границы возможностям А. м. в том его виде, к-рый он приобрел в рамках гильбертовского формализма. Однако и в этих границах он сыграл и продолжает играть важную роль в основаниях математики. Так, напр., уже после описанных результатов Гёделя им же в 1938—40, а затем П. Коэном (P. Cohen) в 1963 на основе аксиоматич. подхода с применением метода интерпретаций были получены фундаментальные результаты о совместимости и независимости аксиомы выбора и континуум-гипотезы в теории множеств (см. [6], [7]). Что касается такого основного вопроса оснований математики, как проблема непротиворечивости, то после результатов Гёделя стало ясно, что для его решения, по-видимому, не обойтись без других, отличных от финитистских, средств и идей. Здесь оказались возможными разные подходы, не для всех математиков в равной степени приемлемые или убедительные, в частности в виду существования различных точек зрения на допустимость тех или иных логич. средств. Из результатов о непротиворечивости формальных систем следует прежде всего указать на доказательство непротиворечивости формализованной арифметики (см. [8]), к-рое опирается на бесконечную индукцию до нек-рого счетного трансфинита. Другим, более поздним, примером такого рода является попытка обоснования утверждения о непротиворечивости формальной системы анализа с помощью нек-рых идей *интуиционизма* (см. [9]).

Лит.: [1] «Начала» Евклида, пер. с греч., кн. 1—15, М.— Л., 1948—50; [2] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.— Л., 1949; [3] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [4] Peano G., «Rivista di matematica», 1891, v. 1, p. 1—10; [5] Gödel K., «Monatsh. Math. Phys.», 1931, Bd 38, S. 173—98; [6] Гёдель К., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 1, с. 96—149; [7] Коэн П. Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969; [8] Генцен Г., Непротиворечивость чистой теории чисел, в кн.: Математическая теория логического вывода, М., 1967, с. 77—153; [9] Spector C., в кн.: Recursive function theory, Providence, 1962, p. 1—27.

П. С. Новиков.

АКСОНОМЕТРИЯ — один из способов изображения пространственных фигур на плоскости. А. заключается в том, что фигура, выбранная прямоугольная декартова система координат и ортогональная проекция фигуры на одну из координатных плоскостей проектируются на плоскость чертежа. В зависимости от способа проектирования А. делится на параллельную и центральную. Если направление параллельного проектирования на плоскость чертежа перпендикулярно этой плоскости, то А. наз. ортогональной, или нормальной, в противном случае — косоугольной. При ортогональной А. указывают косинусы углов наклона координатных осей к плоскости чертежа, называемые иногда показателями искажения. Если два показателя искажения равны, то А. наз. диметрией; если равны три показателя — изометрией; если все показатели искажения различны — триметрией. Основной теоремой А. является теорема Польке — Шварца, состоящая в том, что любой тетраэдр может быть спроектирован в плоский четырехугольник, подобный данному.

Лит.: Глазунов Е. А., Четверухин Н. Ф., Аксонометрия, М., 1953.

А. Б. Иванов.

АЛГАМС — *алгоритмический язык*, ориентированный в основном на вычислительные машины средней мощности. А. разработан в 1963—66 Группой по Автоматизации программирования для Машин Среднего типа (ГАМС), созданной комиссией многостороннего сотрудничества академий наук социалистич. стран. А. призван сыграть роль эталонного языка для обмена алгоритмами между социалистич. странами. В основу А. положен язык алгол-60 (см. *Алгол*), на к-рый были

наложены нек-рые ограничения, облегчающие процесс *трансляции*. Наиболее важными ограничениями являются: запрещение рекурсивного использования процедур, требование обязательной спецификации формальных параметров процедуры, описание идентификаторов (кроме меток) до их использования, упрощение конструкций именующих выражений. Эти ограничения согласованы с ограничениями, наложенными на алгол-60 в унифицированном языке, называемом подмножеством алгол-60. Наряду с ограничениями в А. введены новые понятия внешнего идентификатора и идентификатора части, отсутствующие в языке алгол-60. С помощью внешних идентификаторов именуются массивы, к-рые желательно разместить во внешней памяти машины. Чтение и запись внешних массивов производятся с помощью стандартной процедуры обмена. Идентификаторы части, помещаемые перед блоками, выделяют части программы, к-рые могут храниться во внешней памяти и вызываться в оперативную память при входе в соответствующий блок. Эти понятия повышают эффективность использования языка при ограниченном объеме оперативной памяти машины. Кроме того, в А. детально разработаны процедуры ввода и вывода информации и уточнен способ описания тел процедур с помощью др. языков.

Лит.: [1] Описание языка АЛГАМС, в сб.: Алгоритмы и алгоритмические языки, в. 3, М., 1968, с. 3—56; [2] Любимский Э. З., Мартынюк В. В., «Программирование», 1976, № 1, с. 87—8.

В. В. Луцикович.

АЛГЕБРА — 1) Часть математики (см. *Алгебра*). В этом понимании термин «А.» употребляется в таких сочетаниях, как *гомологическая алгебра*, *коммутативная алгебра*, *линейная алгебра*, *полилинейная алгебра*, *топологическая алгебра*.

2) Частный случай *операторного кольца*: А. (иногда — линейная, или векторная, А.) над полем, телом, коммутативным кольцом. Ассоциативная А. (прежнее назв. «гиперкомплексная система»), неассоциативная А., альтернативная А.— алгебры именно в этом понимании.

3) То же, что *универсальная алгебра*. В этом понимании алгебрами будут, напр., *булевы алгебры*, *унарные алгебры*.

АЛГЕБРА — часть математики, посвященная изучению *алгебраических операций*.

Исторический очерк. Простейшие алгебраич. операции — арифметич. действия над натуральными и положительными рациональными числами — встречаются в самых ранних математич. текстах, свидетельствующих о том, что уже в глубокой древности были известны все основные свойства этих действий. Значительное влияние на развитие алгебраич. идей и символики оказала, в частности, «Арифметика» Диофанта (3 в. н. э.). Термин «А.» происходит от названия сочинения Мухаммеда аль-Хорезми «Альджебр аль-мукабала» (9 в.), содержащего общие приемы для решения задач, сводящихся к алгебраич. уравнениям 1-й и 2-й степеней. В конце 15 в. вместо громоздкого словесного описания алгебраич. действий, господствовавшего ранее, в математич. сочинениях появляются принятые теперь знаки + и −, затем знаки степеней, корней, скобки. Ф. Виет (F. Viète, конец 16 в.) первым стал применять буквенные обозначения как для неизвестных, так и для заданных в задаче величин. К сер. 17 в. в основном сложилась современная алгебраич. символика и тем самым завершилась «предыстория» А. Развитие собственно А. происходило в три последующих столетия, причем точка зрения на ее предмет несколько раз существенно менялась.

В 17—18 вв. под А. понималась наука о буквенных вычислениях — тождественных преобразованиях буквенных формул, решения *алгебраических уравнений*

и т. п., — в отличие от *арифметики*, занимавшейся вычислениями над конкретными числами. Предполагалось, однако, что под буквами подразумеваются числа, целые или дробные. Вот краткое содержание одного из лучших руководств того времени — «Введения в алгебру» Л. Эйлера (L. Euler): целые числа, обыкновенные и десятичные дроби, корни, логарифмы, алгебраич. уравнения 1-й — 4-й степеней, прогрессии, соединения, бином Ньютона, диофантовы уравнения. Таким образом, к сер. 18 в. А. сложилась в том приблизительно объеме, к-рый теперь принято наз. «элементарной» А.

А. 18—19 вв. есть прежде всего А. многочленов. Исторически первой задачей А. было решение алгебраич. уравнений с одним неизвестным, т. е. уравнений вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Имелось в виду отыскание формул, выражающих корни уравнения через его коэффициенты при помощи сложения, умножения, вычитания, деления и извлечения корней («решение в радикалах»). С древнейших времен математики умели решать уравнения 1-й и 2-й степеней. В 16 в. существенное продвижение было сделано итальянскими математиками — сначала была найдена формула для решения уравнений 3-й степени (см. *Кардано формула*), а затем и метод решения (см. *Феррари метод*) уравнения 4-й степени. В течение почти трех последующих столетий продолжались безуспешные попытки найти аналогичные формулы для решения уравнений высших степеней, в связи с чем приобрела большой интерес задача найти хотя бы «бесформульное» доказательство существования комплексного корня для произвольного алгебраич. уравнения с комплексными коэффициентами. Эта теорема была впервые высказана в 17 в. А. Жираром (A. Girard), но первое строгое доказательство ее дал К. Гаусс (C. Gauss) в конце 18 в. (см. *Алгебры основная теорема*). Наконец, в 1824 Н. Абель (N. Abel) установил, что уравнения выше 4-й степени в общем случае в радикалах не разрешимы, а в 1830 Э. Галуа (E. Galois) указал общий критерий разрешимости алгебраич. уравнения в радикалах (см. *Галуа теория*). Другие задачи отходят в это время на второй план, и под А. понимается «анализ уравнений», как отмечает Ж. Серре (J. Serret) в своем курсе высшей алгебры (1849).

Наряду с теорией алгебраич. уравнений с одним неизвестным развивается теория систем алгебраич. уравнений с несколькими неизвестными, в частности систем линейных уравнений. В связи с исследованием последних возникают понятия *матрицы* и *определителя*. В дальнейшем матрицы становятся предметом самостоят. теории — алгебры матриц, роль к-рой не исчерпывается применением к исследованию систем линейных уравнений.

Начиная с сер. 19 в., центр тяжести в алгебраич. исследованиях постепенно перемещается с теории уравнений на изучение произвольных алгебраич. операций. Первоначальные попытки аксиоматич. изучения алгебраич. операций можно проследить уже в «теории отношений» Евклида, однако они не получили развития из-за невозможности геометрически интерпретировать даже простейшие действия над числами как отношениями длин или площадей. Дальнейший прогресс оказался возможным только после постепенного расширения и углубления понятия *числа*, а также в результате появления разнообразных примеров алгебраич. операций над объектами совсем иной природы, нежели числа,— первыми такими примерами (нач. 19 в.) явились «композиция двоичных квадратичных форм» К. Гаусса и умножение подстановок П. Руффини (P. Ruffini) и О. Коши (A. Cauchy). Явное выделение абстрактного понятия алгебраич. операции было сделано в сер. 19 в.

в связи с исследованиями природы *комплексных чисел*. Возникают *алгебра логики* Дж. Буля (G. Boole), *внешние алгебры* Г. Грассмана (H. Grassmann), *кватернионы* У. Гамильтона (W. Hamilton). А. Кэли (A. Cayley) создает матричное исчисление, К. Жордан (C. Jordan) публикует большой трактат о группах *подстановок*.

Эти работы подготовили вступление А. в конце 19 — нач. 20 вв. в современный этап ее развития, характеризующийся объединением ранее разрозненных алгебраич. идей на общей аксиоматич. основе и существенным расширением области приложений А. Современная точка зрения на А. как на общую теорию алгебраич. операций сформировалась в нач. 20 в. под влиянием работ Д. Гильберта (D. Hilbert), Э. Штейница (E. Steinitz), Э. Артина (E. Artin), Э. Нётер (E. Noether) и окончательно утвердилась с выходом в 1930 монографии Б. Л. ван дер Вардена (B. L. van der Waerden) «Современная алгебра».

Предмет, основные разделы алгебры, связь с другими областями математики. Предметом изучения современной А. являются множества с заданными на них алгебраич. операциями (т. е. алгебры, или *универсальные алгебры*, см. терминологич. справку *Алгебра*), рассматриваемые с точностью до *изоморфизма*. Последнее означает, что природа множеств — носителей алгебраич. операций с точки зрения А. безразлична, и в этом смысле подлинным объектом изучения являются сами алгебраич. операции (см. начало статьи).

Фактическому изучению долгое время подвергались сравнительно немногие основные типы универсальных алгебр, естественно выделившиеся в ходе развития математики и ее приложений.

Один из наиболее важных и наиболее изученных типов алгебр — *группы*, т. е. алгебры с одной ассоциативной бинарной операцией, содержащие единицу и для каждого элемента — обратный элемент. Понятие группы явилось исторически первым примером универсальной алгебры и послужило во многих отношениях образцом при перестройке А. и, вообще, математики на рубеже 19—20 вв. Значительно позже началось самостоятельное изучение таких обобщений групп, как *полугруппы*, *квазигруппы* и *лупы*.

Важнейшие типы алгебр с двумя бинарными операциями — кольца и поля. Операции в них обычно наз. сложением и умножением. Кольцо определяется аксиомами *абелевой группы* для сложения и законами дистрибутивности для умножения относительно сложения (см. *Кольца и алгебры*). Первоначально изучались лишь кольца с ассоциативным умножением, и это требование ассоциативности иногда даже включают в определение кольца (см. *Ассоциативные кольца и алгебры*). В настоящее время вполне сложившимся является общее направление, посвященное изучению неассоциативных колец (см. *Неассоциативные кольца и алгебры*). *Телом* наз. ассоциативное кольцо, все отличные от нуля элементы к-рого образуют группу по умножению. *Поле* — тело с коммутативным умножением. Числовые поля, т. е. совокупности чисел, замкнутые относительно сложения, умножения, вычитания и деления на число, отличное от нуля, неявно фигурировали уже в начальных исследованиях по алгебраич. уравнениям. Ассоциативно-коммутативные кольца и поля являются основными объектами изучения *коммутативной алгебры*, с к-рой тесно связана *алгебраическая геометрия*.

Другой важный тип алгебр с двумя бинарными операциями — *решетки*. Типичные примеры решеток: система подмножеств данного множества с операциями теоретико-множественного объединения и пересечения, множество положительных целых чисел с операциями взятия наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя.

Линейные (или векторные) пространства над полем можно трактовать как универсальные алгебры с одной бинарной операцией — сложением и набором унарных операций — умножений на скаляры из основного поля. Рассматриваются также линейные пространства над телами. Если за множество скаляров взять кольцо, то получается более широкое понятие модуля. Изучению линейных пространств, модулей, а также их линейных преобразований и смежным вопросам посвящен важный раздел А.— *линейная алгебра*, частью к-рой являются сформировавшиеся еще в 19 в. теория линейных уравнений и теория матриц. К линейной алгебре тесно примыкает *полилинейная алгебра*.

Первые работы по общей теории произвольных универсальных алгебр (иногда сама эта теория наз. универсальной алгеброй) относятся к 30-м гг. 20 в. и принадлежат Г. Биркгофу (G. Birkhoff). В те же годы А. И. Мальцев и А. Тарский (A. Tarski) заложили основы теории *моделей*, т. е. множеств с отмеченными на них отношениями. В дальнейшем теория универсальных алгебр и теория моделей столь тесно переплелись между собой, что привели к возникновению новой дисциплины, пограничной между А. и математич. логикой,— теории *алгебраических систем*, изучающей множества с определенными на них алгебраич. операциями и отношениями.

Ряд дисциплин, пограничных между А. и другими частями математики, определяется внесением в универсальные алгебры дополнительных структур, согласованных с алгебраич. операциями. Сюда относятся *топологическая алгебра*, в т. ч. теория *топологических групп* и *Ли групп*, теория *нормированных колец*, *дифференциальная алгебра*, теории различных упорядоченных алгебраич. образований. К сер. 50-х гг. 20 в. оформилась в самостоятельную дисциплину *гомологическая алгебра*, уходящая своими истоками как в А., так и в топологию.

Роль А. в современной математике исключительно велика, и существует объективная тенденция к дальнейшей «алгебраизации» математики. Типичный путь изучения многих математич. объектов, порой очень далеких от А., состоит в построении алгебраич. систем, достаточно хорошо отражающих поведение изучаемых объектов. Так, изучение групп Ли во многом сводится к изучению их алгебраич. отражений — *Ли алгебр*. Аналогичный метод используется в топологии — каждому топологич. пространству сопоставляется нек-рым стандартным способом бесконечная серия групп гомологий (см. *Гомологий группа*), и эти серии алгебраич. отражений позволяют очень точно судить о свойствах самих пространств. Именно с помощью А. сделаны последние крупные открытия в топологии (см. *Алгебраическая топология*).

Казалось бы, перевод задач на язык А., решение их на этом языке, а затем обратный перевод только усложняют дело. В действительности такой путь оказывается весьма выгодным, а порой и единственно возможным. Объясняется это тем, что алгебраизация позволяет применить для решения задачи не только чисто словесные рассуждения, но и мощный аппарат формальных алгебраич. вычислений, сокрушающий подчас самые сложные препятствия. Эта роль А. в математич. творчестве напоминает роль современных ЭВМ в задачах практики.

Алгебраич. понятия и методы широко применяются в теории чисел (см. *Алгебраическая теория чисел*), в *функциональном анализе*, в теории дифференциальных уравнений, в геометрии (см. *Инвариантов теория*, *Проективная геометрия*, *Тензорная алгебра*) и в других математич. дисциплинах.

Наряду с фундаментальной ролью внутри математики А. имеет большое прикладное значение — следует

отметить ее выходы в физику (теория представлений конечных групп в квантовой механике, дискретные группы в кристаллографии), в кибернетику *(автоматов теория)*, в математич. экономику *(линейные неравенства)*.

Лит.: [1] История матсматики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. 1—3, М., 1970—72; [2] Мальцев А. И., К истории алгебры в СССР за первые 25 лет, «Алгебра и логика», 1971, т. 10, № 1, с. 103—18; [3] Математика, ее содержание, методы и значение. Сб. статей, т. 1—3, М., 1956; [4] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 10 изд., М., 1971; [5] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [6] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [7] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [8] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970.

См. также лит. при статьях об отдельных алгебраических дисциплинах. *Ю. И. Мерзляков, А. И. Ширшов.*

C^*-АЛГЕБРА — *банахова алгебра* A над полем комплексных чисел, снабженная такой инволюцией, $x \to x^*$, $x \in A$, что норма и инволюция связаны соотношением $\|x^*x\| = \|x\|^2$ для любого элемента $x \in A$. C^*-А. были введены в 1943 (см. [1]) под назв. вполне регулярных колец, их наз. также B^*-алгебрами.

Важнейшие примеры C^*-А. 1) Алгебра $C_0(X)$ непрерывных комплекснозначных функций на локально компактном хаусдорфовом пространстве X, стремящихся к нулю на бесконечности (т. е. таких непрерывных функций f на X, что для любого $\varepsilon > 0$ множество точек $x \in X$, удовлетворяющих условию $|f(x)| \geqslant \varepsilon$, компактно в X); $C_0(X)$ снабжается равномерной нормой

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|;$$

инволюция в $C_0(X)$ определяется как переход к комплексно сопряженной функции: $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Любая коммутативная C^*-А. A изометрически и симметрически изоморфна C^*-А. (т. е. изоморфна как банахова алгебра A с инволюцией) $C_0(X)$, где X — пространство максимальных идеалов алгебры A, снабженное топологией Гельфанда (см. [1], [2], [3]).

2) Алгебра $L(H)$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H, рассматриваемая относительно обычных линейных операций и умножения операторов; инволюция в $L(H)$ определяется как переход к сопряженному оператору, норма — как обычная норма оператора.

Подмножество $M \subset A$ наз. самосопряженным, если $M = M^*$, где $M^* = \{x^*, x \in M\}$. Любая замкнутая самосопряженная подалгебра B C^*-А. A является C^*-А. относительно линейных операций, умножения, инволюции и нормы, заимствованных из A; B наз. C^*-подалгеброй A. Всякая C^*-А. изометрически и симметрически изоморфна C^*-подалгебре нек-рой C^*-А. вида $L(H)$. Любой замкнутый двусторонний идеал I в C^*-А. A самосопряжен (поэтому I есть C^*-подалгебра A), факторалгебра A/I, снабженная естественными линейными операциями, умножением, инволюцией и нормой факторпространства, есть C^*-А. Множество $K(H)$ вполне непрерывных линейных операторов в гильбертовом пространстве H есть замкнутый двусторонний идеал в $L(H)$. Если A есть C^*-А., $\tilde{A}$ — алгебра с инволюцией, получаемая из A присоединением единичного элемента, то на $\tilde{A}$ существует единственная норма, превращающая $\tilde{A}$ в C^*-А. и продолжающая норму на A. Кроме того, для C^*-А. определены операции ограниченной прямой суммы и тензорного произведения (см. [3], [4]).

Как и во всякой симметричной банаховой алгебре, в C^*-А. A можно выделить подмножества: действительное линейное пространство A_h эрмитовых элементов; множество нормальных элементов; мультипликативную группу U унитарных элементов (если A содержит единичный элемент); множество A^+ положительных эле-

ментов. Множество A^+ есть замкнутый конус в A_h, $A^+\cup(-A)^+=\{0\}$, $A^+-A^+=A_h$, и конус A^+ превращает A_h в упорядоченное действительное векторное пространство. Если A содержит единичный элемент 1, то 1 — внутренняя точка конуса $A^+\subset A_h$. Линейный функционал на A наз. положительным, если $f(x)\geqslant 0$ для всех $x\in A^+$; такой функционал непрерывен. Если $x\in B$, где B есть C^*-подалгебра A, то спектр элемента x в B совпадает со спектром x в A. Спектр эрмитова элемента действителен, спектр унитарного элемента лежит на единичной окружности, спектр положительного элемента неотрицателен. Построено функциональное исчисление для нормальных элементов C^*-А. Любая C^*-А. A имеет аппроксимативную единицу, лежащую в единичном шаре алгебры A и образованную положительными элементами из A. Если I, J — замкнутые двусторонние идеалы в A, то $I+J$ — замкнутый двусторонний идеал в A и $(I+J)^+=I^++J^+$. Если I — замкнутый двусторонний идеал в J, J — замкнутый двусторонний идеал в A, то I — замкнутый двусторонний идеал в A. Всякий замкнутый двусторонний идеал есть пересечение содержащих его двусторонних примитивных идеалов; всякий замкнутый левый идеал в A — есть пересечение содержащих его максимальных регулярных левых идеалов.

Любой *-изоморфизм C^*-А. является изометрическим. Любой *-гомоморфизм π банаховой алгебры с инволюцией B в C^*-А. A непрерывен и $\|\pi(x)\|\leqslant\|x\|$ для всех $x\in B$. В частности, все представления банаховой алгебры с инволюцией (т. е. *-гомоморфизм B в C^*-А. вида $L(H)$) непрерывны. Теория представлений C^*-А. составляют существенную часть теории C^*-А., и приложения теории C^*-А. связаны именно с теорией представлений C^*-А. Свойства представлений C^*-А. позволяют построить для каждой C^*-А. A топологич. пространство $\hat{A}$, наз. спектром C^*-А., и снабдить это пространство *Макки борелевской структурой*. Спектр C^*-А., вообще говоря, не удовлетворяет никаким аксиомам отделимости, но является локально бикомпактным *Бэра пространством*.

C^*-А. A наз. CCR-алгеброй (соответственно GCR-алгеброй), если для любого ненулевого неприводимого представления π C^*-А. A в гильбертовом пространстве H выполняется соотношение $\pi(A)=K(H_\pi)$ (соответственно $\pi(A)\supset K(H_\pi)$).

C^*-А. наз. $NGCR$-алгеброй, если A не содержит ненулевых замкнутых двусторонних GCR-идеалов (т. е. идеалов, являющихся GCR-алгебрами). Любая C^*-А. A содержит максимальный двусторонний GCR-идеал I, и факторалгебра A/I есть $NGCR$-алгебра. Всякая GCR-алгебра содержит возрастающее семейство замкнутых двусторонних идеалов I_α, занумерованных порядковыми числами α, $\alpha\leqslant\rho$, такое, что $I_\rho=A$, $I_1=\{0\}$, $I_{\alpha+1}/I_\alpha$ есть CCR-алгебра при всех $\alpha<\rho$, и $I_\alpha=\bigcup_{\alpha'<\alpha}I_{\alpha'}$ для предельных порядковых чисел α. Спектр GCR-алгебры содержит открытое всюду плотное отделимое локально бикомпактное подмножество.

C^*-А. A наз. C^*-алгеброй типа I, если для любого представления π C^*-А. A в гильбертовом пространстве H_π *Неймана алгебра*, порожденная семейством $\pi(A)$ в H_π, есть алгебра Неймана типа I. Для C^*-А. A *следующие условия эквивалентны*: а) A есть C^*-А. типа I; б) A есть GCR-алгебра; в) любое факторпредставление C^*-А. A кратно неприводимому. Если A удовлетворяет этим условиям, то: 1) неприводимые представления C^*-А. A эквивалентны тогда и только тогда, когда их ядра совпадают; 2) спектр C^*-А. A есть T_0-пространство. Если A — сепарабельная C^*-А., то каждое из условий 1) и 2) эквивалентно условиям а) — в). В частности, всякая сепарабельная C^*-А., имеющая единственное с точностью до эквивалентности неприво-

димое представление, изоморфна C^*-А. $K(H)$ для нек-рого гильбертова пространства H.

Пусть A есть C^*-А., P — множество таких элементов $x \in A$, что функция $\pi \to \mathrm{Tr}\pi(x)$ конечна и непрерывна на спектре C^*-А. A. Если линейная оболочка множества P всюду плотна в A, то A наз. C^*-А. с непрерывным следом. Спектр таких C^*-А. отделим, и при нек-рых дополнительных условиях C^*-А. с непрерывным следом можно представить в виде алгебры вектор-функций на спектре $\hat{A}$ (см. [3]).

Пусть A есть C^*-А., F — множество положительных линейных функционалов на A с нормой $\leqslant 1$, $P(A)$ — множество ненулевых крайних точек выпуклого множества F. Тогда $P(A)$ — множество чистых состояний C^*-А. A (см. *Представления симметричных алгебр*). Пусть B есть C^*-подалгебра A. Если A есть GCR-алгебра и B разделяет точки множества $P(A) \cup \{0\}$, т. е. для любых f_1, $f_2 \in P(A) \cup \{0\}$, $f_1 \neq f_2$, существует $x \in B$ такой, что $f_1(x) \neq f_2(x)$, то $B = A$ (теорема Стоуна — Вейерштрасса). Если A — произвольная C^*-А. и B разделяет точки множества $\overline{P(A)} \cup \{0\}$, то $B = A$.

Второе сопряженное пространство A^{**} с C^*-А. A естественным образом снабжается операцией умножения, превращающей A^{**} в C^*-А., изоморфную нек-рой алгебре Неймана; эта алгебра наз. обертывающей алгеброй Неймана C^*-А. (см. [3], [4]).

Теория C^*-А. имеет многочисленные применения в теории представлений групп и симметричных алгебр [3], теории динамич. систем [4], статистич. физике и квантовой теории поля [5], а также в теории операторов в гильбертовом пространстве [6].

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Наймарк М. А., «Матем. сб.», 1943, т. 12, № 2, с. 197—213; [2] Наймарк М. А., Нормированные кольца, М., 1956; [3] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [4] Sakai S., C^*-algebras and W^*-algebras, N. Y., 1971; [5] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с франц., М., 1971; [6] Douglas R. G., Banach Algebra Technigues in Operator Theory, N. Y., 1972.

А. И. Штерн.

PI-АЛГЕБРА — алгебра над полем, в к-рой выполняются нек-рые полиномиальные тождества.

Пусть A — ассоциативная алгебра над полем F,

$$F[X] = F[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$$

— *свободная ассоциативная алгебра* (алгебра некоммутативных многочленов) от счетного множества образующих $x = (x_1, \ldots, x_n \ldots)$ над F и $f(x_1, \ldots, x_n)$ — ненулевой элемент алгебры $F[x]$. Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

наз. полиномиальным тождеством алгебры A, если $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ для любого набора элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Примеры PI-А. и тождеств. В коммутативной алгебре выполняется тождество

$$[x_1 x_2] = x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0$$

(тождество коммутативности); во внешней алгебре линейного пространства выполняется тождество метабелевости $[[x_1, x_2], x_3] = 0$; алгебра A конечной размерности $n - 1$ над полем F удовлетворяет так наз. стандартному тождеству n-й степени

$$S_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} = 0,$$

где S_n — группа подстановок множества, состоящего из первых n натуральных чисел и $(-1)^\sigma = \mathrm{sgn}\sigma$, а также более общему тождеству Капелли

$$K_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n+1}) =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma y_1 x_{\sigma(1)} y_2 x_{\sigma(2)} \cdots y_n x_{\sigma(n)} y_{n+1} = 0;$$

в алгебре F_n квадратных матриц порядка n над полем F

выполняется стандартное тождество степени $2n$. Тензорное произведение PI-А. является PI-А.

Для всякой PI-А. A над полем F характеристики нуль можно указать такое натуральное число n, что тождества алгебры A исчерпываются степенями тождеств алгебры матриц F_n, причем нек-рая степень любого тождества алгебры F_n является тождеством алгебры A. Таким образом, во всякой PI-А. над полем характеристики нуль выполняется нек-рая степень стандартного тождества.

Совокупность всех левых частей тождеств, выполняющихся в данной алгебре A, образует вполне характеристич. идеал (коротко, Т-*идеал*) свободной алгебры $F[x]$ и обратно, для всякого Т-идеала существует алгебра, совокупность тождеств к-рой совпадает с этим Т-идеалом (ею будет, напр., факторалгебра $F[x]/T$). В случае, когда поле F нулевой характеристики, тождества можно дифференцировать, и Т-идеалы алгебры $F[x]$ — это в точности дифференциально замкнутые односторонние идеалы. Напр., из нильтождества $x^n=0$ многократным дифференцированием получается тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}(x_n)\frac{\partial}{\partial x}(x_{n-1})\dots\frac{\partial}{\partial x}(x_1)\,x^n=$$
$$=\sum\nolimits_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(n)}=0,$$

к-рое является полилинейным (точнее, n-линейным), т. е. линейным по каждой переменной, входящей в его запись. Причем и обратно, положив в последнем тождестве $x_1=\dots=x_n=0$, можно получить тождество $n!\,x^n=0$, или $x^n=0$. Этот процесс линеаризации тождеств позволяет утверждать (в случае полей нулевой характеристики), что все тождества алгебры являются следствиями ее полилинейных тождеств. Для алгебры с единицей, более того, все тождества вытекают из ее полилинейных тождеств, представимых в виде линейных комбинаций произведений правонормированных *коммутаторов* различных степеней от образующих x_i. Вопрос о том, всякая ли ассоциативная алгебра обладает конечным базисом тождеств, составляет содержание проблемы Шпехта.

Совокупность всех алгебр, удовлетворяющих данной системе тождеств, наз. многообразием. Многообразие может быть определено также как класс алгебр, замкнутый относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и подпрямых произведений (см. также *Алгебраических систем многообразие*). Для ряда многообразий алгебр доказана их конечная базируемость (т. е. в этих многообразиях положительно решена проблема Шпехта). Таковы многообразия (все над полем нулевой характеристики) нильпотентных алгебр данного индекса n, алгебр, в к-рых аддитивные коммутаторы длины n равны нулю (Ли-нильпотентные алгебры), многообразие алгебр, определяемое Т-идеалом политождеств M_2—алгебры матриц 2-го порядка. Однако для многообразия, определяемого идеалом тождеств M_n—алгебры матриц порядка $n>2$, вопрос открыт.

Наличие полиномиального тождества жестко определяет структуру ассоциативной алгебры. Примитивная алгебра A, удовлетворяющая полиномиальному тождеству степени d, изоморфна алгебре матриц D_n над телом D с центром Z и

$$\dim_Z A\leqslant\left[\frac{d}{2}\right]^2.$$

Поэтому полупростая (в смысле *Джекобсона радикала*) PI-А. разлагается в подпрямую сумму полных матричных алгебр над телами, причем порядки этих алгебр и размерности тел над центрами ограничены в совокупности, и Т-идеал тождеств полупростой алгебры совпадает с нек-рым «матричным» Т-идеалом M_n. Упорядо-

ченная PI-A. коммутативна. Первичная PI-A. A обладает двусторонним классич. кольцом частных $Q(A)$, к-рое изоморфно матричной алгебре D_m над телом D, конечномерным над своим центром Z. Кольцо $Q(A)$ является центральным расширением алгебры A в том смысле, что $Q(A)=AZ$. Идеалы тождеств алгебр A и $Q(A)$ совпадают. PI-A. удовлетворяют ряду условий «бернсайдовского типа» (см. *Бернсайда проблема*). Например, алгебраическая (ниль-) PI-A. локально конечна (локально нильпотентна). Ассоциативная нильалгебра ограниченного индекса n нильпотентна, если характеристика основного поля нулевая или больше n.

PI-A., не имеющая ненулевых нильидеалов, представима матрицами над коммутативным кольцом. Но не всякая PI-A. представима в таком смысле. Напр., внешняя алгебра счетномерного пространства не представима — в ней не выполняется никакое стандартное тождество. Внутренняя характеризация представимости алгебры матрицами над коммутативным кольцом составляет самостоятельное направление исследований в теории PI-A.

Радикал Джекобсона конечно порожденной PI-A. над полем нулевой характеристики является нильидеалом. Вопрос о его нильпотентности пока (1977) открыт. Если радикал Джекобсона PI-A. нильпотентен, то она удовлетворяет всем тождествам алгебры матриц порядка n для нек-рого n. Для конечно порожденных алгебр доказано и обратное утверждение. Более того, для конечно порожденной алгебры над полем нулевой характеристики нильпотентность радикала Джекобсона эквивалентна выполнимости в ней нек-рого стандартного тождества.

Во многих случаях выполнимость тождества для «части» элементов алгебры влечет за собой выполнимость нек-рого тождества во всей алгебре. Напр., если в алгебре с инволюцией симметрические элементы удовлетворяют тождеству, то она — PI-A.; если на алгебре над полем нулевой характеристики действует конечная группа автоморфизмов и подалгебра инвариантов удовлетворяет нек-рому тождеству, то исходная алгебра будет PI-A.

Представляет интерес при каких условиях те или иные алгебры специального типа удовлетворяют полиномиальному тождеству.

Для того чтобы групповая алгебра $F(G)$ группы G над полем нулевой характеристики удовлетворяла некоторому полиномиальному тождеству, необходимо и достаточно, чтобы группа G обладала абелевой подгруппой конечного индекса. Если же характеристика F конечна и равна p, то $F[G]$ является PI-A. тогда и только тогда, когда G обладает p-абелевой подгруппой конечного индекса (группа наз. p-а б е л е в о й, если ее коммутант — конечная p-группа).

Универсальная обертывающая алгебра U_L алгебры Ли L над полем F характеристики нуль есть PI-A. в том и только том случае, когда L абелева (U_L — коммутативна). Если же F — поле конечной характеристики, то U_L является PI-A. тогда и только тогда, когда L обладает абелевым идеалом конечной коразмерности и присоединенное представление алгебры L является алгебраическим ограниченной степени.

Все PI-подалгебры свободной ассоциативной алгебры коммутативны.

Теория PI-A. является естественным обобщением коммутативной алгебры, она содержит глубокие и законченные аналоги теорем коммутативной алгебры, что позволяет говорить о зарождении некоммутативной алгебраич. геометрии.

Во всякой конечно порожденной PI-A. A с образующими $a_1,\ldots,a_k$ над полем F выполняется у с л о в и е о г р а н и ч е н н о с т и в ы с о т, т. е. существуют

конечное число слов $v_1, \ldots, v_m$ от a_i и натуральное число h такие, что всякое слово u от образующих a_i представимо в A в виде линейной комбинации слов

$$v_{i_1}^{S_{i_1}} \ldots v_{i_d}^{S_{i_d}},$$

где $d \leqslant h$, совпадающих по составу относительно a_i со словом u. В коммутативном случае в качестве слов v_i можно взять сами образующие a_i. Свободным некоммутативным аффинным кольцом наз. факторалгебра

$$\mathfrak{A}(F, k, n) = F[x_1, \ldots, x_k]/M_n,$$

где $F[x_1, \ldots, x_k]$ — свободная алгебра с конечным числом образующих x_i над полем F характеристики нуль, а M_n — определенный выше Т-идеал тождеств матричной алгебры F_n. Алгебра $\mathfrak{A}(F, k, n)$ есть PI-А. без делителей нуля, она обладает классич. телом частных $D(F, k, n)$, конечномерным над своим центром Z. Пусть, далее, $(F_n)_k$ — пространство, элементами к-рого являются строки длины k, состоящие из матриц алгебры F_n. Можно говорить о нулях элементов алгебры $\mathfrak{A}(F, k, n)$, лежащих в пространстве $(F_n)_k$, об алгебраич. многообразиях пространства $(F_n)_k$ и т. д. При этом окажутся выполненными основные положения классической алгебраич. геометрии. Так, имеет место некоммутативный аналог *Гильберта теоремы* о нулях. Неприводимым алгебраич. многообразиям соответствуют первичные идеалы алгебры, удовлетворяющие условию нётеровости. Выполняется теорема Крулля о совпадении максимальной из длин цепочек первичных идеалов алгебры $\mathfrak{A}(F, k, n)$ со степенью трансцендентности Z над F, к-рая в рассматриваемом случае равна

$$kn^2 - (n^2 - 1).$$

По аналогии с ассоциативными алгебрами можно определить с помощью элементов свободных алгебр PI-А. в других классах алгебр, обладающих свободными алгебрами (лиевы, альтернативные и др.).

Алгебра Ли над полем нулевой характеристики, удовлетворяющая n-му тождеству Энгеля

$$[x, \underbrace{y, \ldots, y}_{n}] = 0,$$

локально нильпотентна. Вопрос о том, влечет ли тождество Энгеля нильпотентность (проблема Хигмнса), решен положительно лишь для $n=4$. Для полей положительной характеристики эта проблема имеет отрицательное решение.

Лит.: [1] Procesi C., Rings with polynomical identities, N.Y., 1973; [2] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [3] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [4] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [5] Ширшов А. И., «Матем. сб.», 1957, т. 43 [85], вып. 2, с. 277—83; [6] Кострикин А. И., «Известия АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 1, с. 3—34; [7] Higman G., «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1956, v. 52, part 1, p. 1—4; [8] Higgins P. J., «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1954, t. 50, part 1, p. 8—15.

В. Н. Латышев.

АЛГЕБРА ЛОГИКИ — раздел математической логики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логич. значений (истинности или ложности), и логич. операций над ними.

А. л. возникла в сер. 19 в. в трудах Дж. Буля (см. [1], [2]) и развилась затем в работах Ч. Пирса (C. S. Peirs), П. С. Порецкого, Б. Рассела (B. Russel), Д. Гильберта (D. Hilbert) и др. Создание А. л. представляло собой попытку решать традиционные логич. задачи алгебраич. методами. С появлением теории множеств (70-е гг. 19 в.) основным предметом А. л. стали высказывания и логич. операции над ними. Под высказываниями понимаются предложения, относительно к-рых имеет смысл утверждать, истинны они или лож-

ны; напр., высказывание «кит — животное» истинно, в то время как высказывание «все углы — прямые» ложно. Употребляемые в обычной речи логич. связки «и», «или», «если..., то», «эквивалентно», частица «не» и т. д. позволяют из уже заданных высказываний строить новые, более сложные высказывания. Так, из высказываний $x>2$, $x\leqslant 3$ при помощи связки «и» можно получить высказывание $x>2$ и $x\leqslant 3$, при помощи связки «или» — высказывание $x>2$ или $x\leqslant 3$ и т. д.

Истинность или ложность получаемых таким образом высказываний зависит от истинности или ложности исходных высказываний и соответствующей трактовки связок как операций над высказываниями. Для обозначения истинности вводится символ «И» и для обозначения ложности — символ «Л». Затем вместо этих символов стали употреблять числа 1 и 0. Связки «и», «или», «если..., то», «эквивалентно» обозначаются соответственно знаками & (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\rightarrow$ (импликация), $\sim$ (эквивалентность); для отрицания вводится знак $\bar{}$ (черточка сверху). Наряду с индивидуальными высказываниями, примеры к-рых приводились выше, стали использоваться также переменные высказывания, т. е. такие переменные, значениями к-рых могут быть любые наперед заданные индивидуальные высказывания. Далее индуктивно вводится понятие формулы, являющееся формализацией понятия сложного высказывания. Пусть A, B, C,... обозначают индивидуальные, а x, y, z,... — переменные высказывания. Каждая из этих букв наз. формулой. Если знак $*$ обозначает любую из перечисленных выше связок, а $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ суть формулы, то $(\mathfrak{A}*\mathfrak{B})$ и $\bar{\mathfrak{A}}$ суть формулы, напр. $((x\,\&\,y)\rightarrow\bar{z})$. Связки и частица «не» стали рассматриваться как операции над величинами, принимающими значения 0 и 1, и результатом применения этих операций также являются числа 0 и 1. Конъюнкция $x\,\&\,y$ равна 1 тогда и только тогда, когда и x, и y равны 1; дизъюнкция $x\vee y$ равна 0 тогда и только тогда, когда и x, и y равны 0; импликация $x\rightarrow y$ равна 0 тогда и только тогда, когда x равен 1, а y равен 0; эквивалентность $x\sim y$ равна 1 тогда и только тогда, когда значения x и y совпадают; отрицание $\bar{x}$ равно 1 тогда и только тогда, когда x равен 0. Введенные операции позволяют каждой формуле при заданных значениях входящих в нее высказываний приписать одно из двух значений 0 или 1. Тем самым каждая формула может одновременно рассматриваться как нек-рый способ задания, или реализации, функций А. л., т. е. таких функций, к-рые определены на наборах из нулей и единиц и к-рые в качестве значений принимают также 0 или 1. При этом формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ наз. равными (обозначение $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$), если они реализуют равные функции. Объектом изучения А. л. стали функции А. л. и различные операции над ними. В последующем класс функций А. л. был расширен до класса функций, аргументы к-рых и сами функции принимают в качестве значений элементы фиксированного конечного множества E; расширился также запас операций над функциями. Иногда под А. л. понимается как раз последняя концепция. Для приложений, однако, наибольшее значение имеет все-таки тот случай, когда мощность указанного множества E равна двум, поэтому он будет рассмотрен особенно подробно. Излагаемые здесь результаты также тесно связаны с другим подходом в изучении высказываний — так наз. *высказываний исчислением*.

Для задания функций А. л. иногда используют таблицы, содержащие все наборы значений переменных и значения функций на этих наборах. Так, напр., свод-

ная таблица, задающая функции $\bar{x}$, $x\,\&\,y$, $x\vee y$, $x\to y$, $x\sim y$, имеет вид:

x	y	$\bar{x}$	$x\&y$	$x\vee y$	$x\to y$	$x\sim y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Аналогично устроены таблицы для произвольных функций А. л. Это — так наз. табличный способ задания функций А. л. Сами таблицы иногда наз. истинностными таблицами. Для преобразования формул в равные формулы важную роль играют следующие равенства:

$$x\&y = y\&x, \quad x \vee y = y \vee x \tag{1}$$

(закон коммутативности),

$$(x\&y)\&z = x\&(y\&z),$$
$$(x\vee y)\vee z = x\vee(y\vee z) \tag{2}$$

(закон ассоциативности),

$$x\&(x\vee y) = x,$$
$$x\vee(x\&y) = x \tag{3}$$

(закон поглощения),

$$x\&(y\vee z) = (x\&y)\vee(x\&z),$$
$$x\vee(y\&z) = (x\vee y)\&(x\vee z) \tag{4}$$

(закон дистрибутивности),

$$x\&\bar{x} = 0 \tag{5}$$

(закон противоречия),

$$x\vee\bar{x} = 1 \tag{6}$$

(закон исключенного третьего),

$$x \longrightarrow y = \bar{x}\vee y,$$
$$x \sim y = (x\&y)\vee(\bar{x}\&\bar{y}). \tag{7}$$

Эти равенства позволяют уже без помощи таблиц получать другие равенства. Методом получения последних являются так наз. тождественные преобразования, к-рые меняют, вообще говоря, выражение, но не функцию, реализуемую этим выражением. Напр., при помощи законов поглощения получается закон идемпотентности $x\vee x=x$. Упомянутые равенства в ряде случаев позволяют существенно упростить запись формул освобождением от «лишних скобок». Так, соотношения (1) и (2) дают возможность вместо формул $(\ldots(\mathfrak{A}_1\,\&\,\mathfrak{A}_2)\&\ldots)\&\mathfrak{A}_s)$ и $(\ldots(\mathfrak{B}_1\vee\mathfrak{B}_2)\vee\ldots)\vee\mathfrak{B}_s)$ использовать более компактную запись $\mathfrak{A}_1\,\&\,\mathfrak{A}_2\,\&\ldots\&\,\mathfrak{A}_s$ и $\mathfrak{B}_1\vee\mathfrak{B}_2\vee\ldots\vee\mathfrak{B}_s$. Первое из этих соотношений наз. конъюнкцией сомножителей $\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_s$, а второе — дизъюнкцией слагаемых $\mathfrak{B}_1,\ldots,\mathfrak{B}_s$. Равенства (5), (6), (7) показывают также, что константы 0 и 1, импликацию и эквивалентность, рассматривая их как функции, можно выразить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Более того, всякая функция А. л. может быть реализована формулой, записываемой с помощью символов &, $\vee$, $\bar{}$.

Множество всех формул, в построении к-рых участвуют переменные высказывания и нек-рые из символов &, $\vee$, $\to$, $\sim$, $\bar{}$ и констант 0 и 1, наз. языком над данными символами и константами. Равенства (1)— (7) показывают, что для всякой формулы в языке над &, $\vee$, $\to$, $\sim$, $\bar{}$, 0,1 найдется равная ей формула в языке над &, $\vee$, $\bar{}$, 0, 1, напр.:

$$(x \longrightarrow y) \sim z = ((\overline{x\vee y})\,\&z)\vee((\overline{\overline{x\vee y}})\,\&\bar{z}).$$

Особую роль в последнем языке играет класс формул, к-рые могут быть записаны в виде $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_s$, 0 или 1, где $s \geqslant 1$ и каждое $\mathfrak{A}_i$ — либо переменное высказывание, либо его отрицание, либо конъюнкция таковых, при этом каждое $\mathfrak{A}_i$ не содержит одинаковых сомножителей и не содержит сомножителей вида x и $\bar{x}$ одновременно и все $\mathfrak{A}_i$ попарно не равны. Здесь скобки опускаются, т. к. предполагается, что операция конъюнкции связывает «сильнее», чем дизъюнкция, т. е. при вычислении по заданным значениям переменных следует сначала вычислять значения $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_s$. Эти выражения наз. дизъюнктивными нормальными формами (д. н. ф.). Каждую формулу u в языке над $\&, \vee, \rightarrow, \sim, \bar{}, 0, 1$, реализующую функцию А. л., отличную от 0, при помощи равенств (1) — (7), можно привести к равной ей д. н. ф., содержащей все переменные формулы u и любое число других переменных, причем каждое $\mathfrak{A}_i$ в этой д. н. ф. содержит одни и те же переменные. Такая д. н. ф. наз. совершенной д. н. ф. формулы u; для 0 совершенной д. н. ф. является сама формула 0. Возможность приведения к совершенной д. н. ф. лежит в основе алгоритма, устанавливающего равенство или неравенство двух наперед заданных формул. Алгоритм этот состоит в следующем: приводят исследуемые формулы u_1 и u_2 к совершенным д. н. ф., содержащим все те переменные, к-рые есть как в u_1, так и в u_2, и смотрят, совпадают полученные выражения или нет; если совпадают, то $u_1 = u_2$, если нет, то $u_1 \neq u_2$. Важную роль в А. л. и ее приложениях играет сокращенная д. н. ф., т. е. такая, для к-рой выполнены следующие условия: 1) в ней нет таких пар слагаемых $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$, что всякий сомножитель из $\mathfrak{A}_i$ имеется и в $\mathfrak{A}_j$; 2) для всяких двух слагаемых $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$, из к-рых одно содержит сомножителем нек-рое переменное, а другое — отрицание этого переменного (при условии, что другого переменного, для к-рого это же имеет место, в данной паре слагаемых нет), имеется (в этой же д. н. ф.) слагаемое $\mathfrak{A}_k$, равное конъюнкции остальных сомножителей этих двух слагаемых. Всякая д. н. ф. при помощи равенств (1) — (7) может быть приведена к равной ей сокращенной д. н. ф. Напр., сокращенной д. н. ф. для формулы $((x \sim (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \& z))$ является $x\bar{\&}\bar{y} \vee z \vee x\&y$. Формулы u_1 и u_2 равны тогда и только тогда, когда их сокращенные д. н. ф. совпадают. Кроме д. н. ф., употребляются также конъюнктивные нормальные формы (к. н. ф.), т. е. выражения, к-рые можно получить из д. н. ф. путем замены в них знаков $\vee$ на $\&$, а $\&$ на $\vee$ и 0 на 1. Напр., из д. н. ф. $x\&y \vee \bar{x}\&z$ получается к. н. ф. $(x \vee y) \,\&\, (\bar{x} \vee z)$. Операция (или функция) f наз. двойственной для операции ψ, если таблица, задающая f, получается из таблицы, задающей ψ, путем замены в ней всюду 0 на 1 и 1 на 0 (включая замену значений функций). Напр., конъюнкция и дизъюнкция двойственны между собой, отрицание двойственно самому себе, константы 1 и 0 двойственны друг другу и т. д. Преобразование формул, при к-ром знаки всех операций в выражении заменяются на знаки двойственных им операций, константа 0 заменяется на 1, а 1 на 0, наз. преобразованием двойственности. Если верно равенство $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}^*$ двойственно $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{B}^*$ двойственно $\mathfrak{B}$, то верно равенство $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{B}^*$, наз. двойственным предыдущему; это — так. наз. принцип двойственности. Примерами двойственных равенств являются пары законов (1), (2), (3); равенство (5) двойственно равенству (6), каждая к. н. ф. двойственна нек-рой д. н. ф. Совершенная к. н. ф. и сокращенная к. н. ф. определяются как такие к. н. ф., что двойственные им выражения являются соответственно совершенной д. н. ф. и сокращенной д. н. ф. Совершенные и сокращенные

д. н. ф. и к. н. ф. используются для решения задачи обзора всех гипотез и всех следствий заданной формулы. Под гипотезой формулы $\mathfrak{A}$ понимается такая формула $\mathfrak{B}$, что $(\mathfrak{B}\to\mathfrak{A})=1$; а под следствием формулы $\mathfrak{A}$ — такая формула $\mathfrak{B}$, что $(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})=1$. Гипотеза формулы $\mathfrak{A}$ наз. простой, если она есть конъюнкция переменных или их отрицаний и после отбрасывания любого из ее сомножителей перестает быть гипотезой формулы $\mathfrak{A}$. Аналогично следствие формулы $\mathfrak{A}$ наз. простым, если оно есть дизъюнкция переменных или их отрицаний и после отбрасывания любого из ее слагаемых перестает быть следствием формулы $\mathfrak{A}$. Решение задачи обзора гипотез и следствий основано на указании алгоритма, строящего все простые гипотезы и следствия для заданной формулы, и на получении из них при помощи законов (2) — (7) всех остальных гипотез и следствий. Алгоритм опирается на следующие факты. Если $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеют одни и те же гипотезы и следствия, соответственно. Слагаемое д. н. ф. является гипотезой этой д. н. ф., сомножитель к. н. ф.— следствием этой к. н. ф. Если $\mathfrak{A}$ — гипотеза выражения $\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ есть тоже гипотеза для $\mathfrak{B}$; если $\mathfrak{A}$ — следствие выражения $\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{C}$ есть тоже следствие из $\mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ — гипотезы выражения $\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{C}$ — тоже гипотеза для $\mathfrak{B}$; если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ — следствия из $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — тоже следствие из $\mathfrak{A}$. У совершенной д. н. ф. нет других гипотез (не содержащих букв, не входящих в эту д. н. ф.), кроме дизъюнкций нек-рых ее слагаемых или д. н. ф., равных им. У совершенной к. н. ф. нет других следствий, кроме конъюнкций нек-рых ее сомножителей или равных им выражений. Сокращенная д. н. ф. есть дизъюнкция всех своих простых гипотез; сокращенная к. н. ф. есть конъюнкция всех своих простых следствий. Сокращенная д. н. ф. имеет важные приложения. Прежде всего следует отметить задачу минимизации функций А. л., являющуюся частью задачи синтеза управляющих систем. Минимизация функций А. л. состоит в построении такой д. н. ф. для заданной функции А. л., к-рая реализует эту функцию и имеет наименьшее суммарное число сомножителей в своих слагаемых, т. е. имеет минимальную сложность. Такие д. н. ф. наз. минимальными. Каждая минимальная д. н. ф. для заданной отличной от константы функции А. л. получается из сокращенной д. н. ф. этой функции путем выбрасывания нек-рых слагаемых. Для отдельных функций сокращенная д. н. ф. может совпадать с минимальной д. н. ф. Это имеет место, напр., для монотонных функций, т. е. таких функций, к-рые реализуются формулами над &, $\vee$, 0, 1.

В языке над &, $\vee$, $\to$, $\sim$, 0, 1, $+$, где знак $+$ интерпретируется как сложение по модулю 2, устанавливаются следующие соотношения:

$$x\vee y=((x\&y)+x)+y, \tag{8}$$

$$x\to y=\bar{x}\&y,\quad x\sim y=(x+y)+1, \tag{9}$$

$$x+y=(x\&y)\vee(\bar{x}\&\bar{y}),\quad 1=x\vee\bar{x}. \tag{10}$$

Эти формулы позволяют переводить формулы в языке над &, $\vee$, $\to$, $^-$, 0, 1 в равные им формулы в языке над &, $+$, 1, и обратно. Тождественные преобразования в последнем языке осуществляются при помощи равенств, установленных для конъюнкции, и дополнительных:

$$x+y=y+x, \tag{11}$$

$$(x+y)+z=x+(y+z), \tag{12}$$

$$x\&(y+z)=x\&y+x\&z, \tag{13}$$

$$x\&x=x,\quad x+(y+y)=x,\quad x\&1=x; \tag{14}$$

здесь по-прежнему считается, что конъюнкция связывает сильнее, чем знак $+$. Этих равенств достаточно, для того чтобы из них при помощи тождественных

преобразований так же, как и при рассмотрении языка над &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$, $^-$, 0,1, можно было вывести любое верное равенство в языке над &, +, 1. Выражение в этом языке наз. приведенным полиномом, если оно либо имеет вид $\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2+\ldots+\mathfrak{A}_s$, где $\mathfrak{A}_i$ есть или 1, или переменное, или конъюнкция различных переменных без отрицаний, $\mathfrak{A}_i \neq \mathfrak{A}_j$ при $i \neq j$, $s \geqslant 1$, либо равно 1+1. Напр., выражение $x\&y\&z + x\&y + 1$ является приведенным полиномом. Всякую формулу А. л. при помощи тождественных преобразований можно привести к приведенному полиному. Равенство $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ имеет место тогда и только тогда, когда приведенный полином для $\mathfrak{A}$ совпадает с приведенным полиномом для $\mathfrak{B}$. Кроме рассмотренных языков, существуют и другие языки, равносильные им (два языка наз. равносильными, если при помощи нек-рых правил преобразований каждая формула одного из этих языков переводится в нек-рую равную ей формулу в другом языке, и обратно). В основу такого языка достаточно положить любую систему операций (и констант), обладающую тем свойством, что через операции (и константы) этой системы можно представить всякую функцию А. л. Такие системы наз. функционально полными. Примерами полных систем являются $\{\overline{x \vee y}\}$, $\{x \vee y,\ \bar{x}\}$, $\{x+y,\ 1,\ x\&y\}$ и т. п. Существует алгоритм, к-рый по произвольной конечной системе функций А. л. устанавливает ее полноту или неполноту. Он основан на следующем факте. Система функций А. л. является полной тогда и только тогда, когда она содержит такие функции $f_1(x, y, \ldots, v)$ и $f_2(x, y, \ldots, v)$, что $f_1(0,0,\ldots,\ 0)=1$ и $f_2(1,1,\ldots,1)=0$, а также функции f_3, f_4 и f_5, где $f_3 \neq f_3^*$, f_4 не монотонная, а для f_5 приведенный полином содержит слагаемое $\mathfrak{A}$, в к-ром больше одного сомножителя. Рассматриваются и такие языки, в основе к-рых лежат системы операций, не являющиеся функционально полными, и таких языков бесконечно много. Среди них имеется бесконечно много попарно несравнимых языков (в смысле отсутствия переводимости при помощи тождественных преобразований с одного языка на другой). Однако для всякого языка, построенного на основе тех или иных операций А. л., существует такая конечная система равенств этого языка, что всякое равенство выводимо при помощи тождественных преобразований из равенств этой системы. Такая система наз. дедуктивно полной системой равенств данного языка. Напр., равенства (1) — (6) составляют полную систему равенств языка над &, $\vee$, $^-$, 0, 1.

Рассматривая тот или иной из упомянутых выше языков вместе с нек-рой полной системой равенств этого языка, иногда отвлекаются от табличного задания операций, лежащих в основе языка, и от того, что значениями его переменных являются высказывания. Вместо этого допускаются различные интерпретации языка, состоящие из той или иной совокупности объектов (служащих значениями переменных) и системы операций над объектами этого множества, удовлетворяющих равенствам из полной системы равенств языка. Так, язык над &, $\vee$, $^-$, 0, 1 в результате такого шага превращается в язык *булевой алгебры*; язык над &, +, 1 превращается в язык *булева кольца* (с единицей), язык над &, $\vee$, $^-$ превращается в язык *дистрибутивной решетки* и т. д.

А. л. развивается гл. обр. под влиянием задач, встающих в области ее приложений. Из них самую важную роль играют приложения в теории электрич. схем. Для описания последних в нек-рых случаях приходится отказываться от использования лишь обычной двузначной А. л. и рассматривать те или иные ее многозначные обобщения (см. *Многозначная логика*).

Лит.: [1] Boole G., The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning, Oxf.,

1948; [2] его же, An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities, N.Y., 1951; [3] Порецкий П. С., О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики, в кн.: Собрание протоколов заседаний секции физико-матем. наук Общества естествоиспытателей при Казанском ун-те, т. 2, Казань, 1884, с. 161—330; [4] Гильберт Д., Аккерман Б., Основы теоретической логики, пер. с нем., М., 1947; [5] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [6] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста, М., 1964.
В. Б. Кудрявцев.

АЛГЕБРА МЕР — алгебра $M(G)$ комплексных регулярных борелевских мер на локально компактной абелевой группе G, имеющих ограниченную вариацию, с обычными линейными операциями и сверткой в качестве умножения (см. *Гармонический анализ абстрактный*). Свертка $\lambda * \mu$ мер λ, $\mu \in M(G)$ полностью определяется из условия, что для любой непрерывной функции f на G с компактным носителем

$$\int_G f\, d(\lambda * \mu) = \int_G \int_G f(x+y)\, d\lambda(x)\, d\mu(y).$$

Если за норму в $M(G)$ принять полную вариацию меры, то $M(G)$ становится коммутативной *банаховой алгеброй* над полем комплексных чисел. А. м. $M(G)$ обладает единицей, к-рой служит δ-мера, сосредоточенная в нуле группы. Совокупность дискретных мер, содержащихся в $M(G)$, образует замкнутую подалгебру.

Каждой функции f, принадлежащей *групповой алгебре* $L^1(G)$, может быть поставлена в соответствие мера $\mu_f \in M(G)$ по правилу

$$\mu_f(E) = \int_E f\, dx$$

(интеграл по мере Хаара). При этом возникает изометрическое изоморфное вложение $L^1(G) \to M(G)$. Образ при этом вложении является замкнутым идеалом в $M(G)$.

Преобразованием Фурье — Стилтьеса меры $\mu \in M(G)$ наз. функция $\hat{\mu}$ на двойственной группе $\hat{G}$, определяемая формулой:

$$\hat{\mu}(\chi) = \int_G \bar{\chi}\, d\mu.$$

При этом $\lambda^* \hat{\mu} = \hat{\lambda} \cdot \hat{\mu}$ и $\|\mu\| = 0$, если $\hat{\mu} \equiv 0$. В частности, $M(G)$ есть алгебра без радикала.

Если группа G не дискретна, то А. м. $M(G)$ устроена весьма сложно: она не симметрична, и ее пространство максимальных идеалов обладает рядом патологич. свойств. Напр., это пространство содержит бесконечномерные аналитич. образования, а естественно вложенная в него группа $\hat{G}$ не плотна даже в границе Шилова. Вместе с тем известны идемпотентные меры, т. е. такие, что $\mu * \mu = \mu$. Каждая идемпотентная мера есть конечная целочисленная комбинация $n_1\mu_1 + \ldots + n_k\mu_k$, где $\mu_i = \chi_i \nu_i$, причем ν_i — мера Хаара компактной подгруппы, а χ_i — характер. В случае $G = \mathbb{Z}$ это приводит к тому, что последовательность (c_m) из 0 и 1 тогда и только тогда есть преобразование Фурье — Стилтьеса нек-рой меры на окружности, когда (c_m) не более чем в конечном числе членов отличается от периодич. последовательности.

В общем случае теорема об идемпотентных мерах допускает естественную интерпретацию в терминах нульмерных когомологий пространства максимальных идеалов. Удовлетворительное описание известно и для других групп когомологий пространства максимальных идеалов А. м., что, в частности, позволяет судить о возможности логарифмировать обратимую меру из $M(G)$ (одномерные целочисленные когомологии).

Лит.: [1] Rudin W., Fourier analysis on groups, N.Y.—L., 1962; [2] Taylor J. L., «Acta math.», 1971, v. 126, № 3—4, p. 195—225.
Е. А. Горин.

АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ — непустая совокупность подмножеств нек-рого множества Ω, замкнутая относительно теоретико-множественных операций (объедине-

ния, пересечения, образования дополнения), производимых в конечном числе. Для того чтобы нек-рый класс подмножеств множества Ω был А. м., достаточно (и необходимо), чтобы он был замкнут относительно образования объединений и дополнений. А. м., замкнутая относительно образования счетных объединений, наз. σ-а л г е б р о й м н о ж е с т в (). Всякая σ-А. м. замкнута относительно теоретико-множественных операций, производимых в счетном числе.

П р и м е р ы. 1) Совокупность конечных подмножеств произвольного множества Ω и дополнений к ним есть А. м.; совокупность не более чем счетных подмножеств Ω и дополнений к ним есть σ-А. м.

2) Совокупность конечных объединений интервалов вида

$$\{x \in R' : a \leqslant x < b\}, \quad -\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty,$$

образует А. м.

3) Ω — топологич. пространство; σ-А. м. B, порожденная открытыми подмножествами Ω (иными словами, наименьшая σ-А. м., содержащая все открытые подмножества Ω), наз. б о р е л е в с к о й σ-а л г е б р о й подмножеств Ω, а множества, принадлежащие B, наз. б о р е л е в с к и м и м н о ж е с т в а м и.

4) $\Omega = \mathbb{R}^T$, где T — произвольное множество (т. е. Ω — множество всех действительных функций на T); класс A множеств вида

$$\{\omega \in \Omega : (\omega(t_1), \ \ldots, \ \omega(t_k)) \in E\},$$

где E — борелевское подмножество $\mathbb{R}^k$, образует А. м.; в теории случайных процессов *вероятностная мера* часто задается первоначально лишь для множеств из алгебры этого типа и затем доопределяется на более широком классе множеств (на σ-алгебре, порожденной A).

5) Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}^k$ образует σ-А. м.

Алгебры (соответственно σ-алгебры) являются естественной областью определения конечно аддитивных (соответственно σ-аддитивных) мер. По теореме о продолжении меры всякая σ-конечная σ-аддитивная мера, заданная на алгебре A, может быть однозначно продолжена до σ-аддитивной меры, определенной на σ-алгебре, порожденной A.

Лит.: [1] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д ж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [2] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [3] Н е в ё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969.

В. В. Сазонов.

АЛГЕБРА С АССОЦИАТИВНЫМИ СТЕПЕНЯМИ — линейная алгебра A над полем F, всякий элемент к-рой порождает ассоциативную подалгебру. Множество всех А. с а. с. над данным полем F образует многообразие алгебр, к-рое в случае, когда характеристика поля F равна 0, задается системой тождеств

$$(x, \ x, \ x) = (x^2, \ x, \ x) = 0,$$

где $(x, \ y, \ z) = (xy)z - x(yz)$. Если F — бесконечное поле простой характеристики p, то многообразие А. с а. с. не может быть задано никакой конечной системой тождеств, но известна бесконечная независимая система тождеств, определяющая его (см. [3]). Если коммутативная А. с а. с. A характеристики, отличной от 2, обладает идемпотентом $e \neq 0$, то для A имеет место п и р с о в с к о е р а з л о ж е н и е в прямую сумму векторных подпространств:

$$A = A_0(e) \oplus A_{1/2}(e) \oplus A_1(e), \qquad (*)$$

где $A_\lambda(e) = \{a \in A \mid ea = \lambda a\}$, $\lambda = 0, \ 1/2, \ 1$. При этом $A_0(e)$ и $A_1(e)$ — подалгебры, $A_0(e)A_1(e) = 0$, $A_{1/2}(e)A_{1/2}(e) \subseteq A_0(e) + A_1(e)$, $A_\lambda(e)A_{1/2}(e) \subseteq A_{1/2}(e) + A_{1-\lambda}(e)$ для $\lambda = 0; \ 1$. Разложение $(*)$ играет фундаментальную роль в структурной теории А. с а. с.

Лит.: [1] Albert A. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1948, v. 64, № 3, p. 552—93; [2] Гайнов А. Т., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, № 3 (75), с. 141—46; [3] его же, «Алгебра и логика», 1970, т. 9, № 1, с. 9—33. *А. Т. Гайнов.*

АЛГЕБРА С ДЕЛЕНИЕМ — алгебра A над полем F, для любых элементов $a\neq 0$ и b к-рой уравнения $ax=b$, $ya=b$ разрешимы в A. Ассоциативная А. с д., рассматриваемая как кольцо, является телом, а ее центр C — полем и $C\supseteq F$. Если $C=F$, то А. с д. A наз. центральной А. с д. Конечномерные центральные ассоциативные А. с д. над F, рассматриваемые с точностью до изоморфизма, можно отождествить с элементами *Брауэра группы* $B(F)$ поля F. Пусть $[A:F]$ обозначает размерность A над F. Если $A\in B(F)$ и L — максимальное подполе в A $(L\supseteq F)$, то $[A:F]=[L:F]^2$. Согласно *Фробениуса теореме*, все ассоциативные конечномерные А. с д. над полем действительных чисел R исчерпываются самим R, полем комплексных чисел и алгеброй *кватернионов*. Поэтому группа $B(R)$ является циклической порядка 2. При отказе от ассоциативности появляется еще один пример А. с д. над полем действительных чисел — *Кэли — Диксона алгебра*. Эта алгебра альтернативна и имеет размерность 8 над R. Если A — конечномерная (не обязательно ассоциативная) А. с д. над R, то $[A:R]$ имеет одно из следующих значений: 1, 2, 4, 8.

Лит.: [1] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [2] Albert A. A., Structure of algebras, 3 ed., Providence, [1968]; [3] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [4] Адамс Дж. Ф., «Математика», 1961, т. 5, № 4, с. 3—86. *Е. Н. Кузьмин.*

АЛГЕБРА ФУНКЦИЙ — полупростая *коммутативная банахова алгебра* A, реализованная в виде алгебры непрерывных функций на пространстве максимальных идеалов. Если $a\in A$ и f — нек-рая функция, определенная на спектре элемента a (т. е. на множестве значений функции $\hat{a}=a$), то $f(a)$ есть нек-рая функция на $\mathfrak{M}$. Условие $f(a)\in A$, конечно, не обязано выполняться. Если, однако, f — целая функция, то $f(a)\in A$ для любого $a\in A$. Использование интегральной формулы Коши позволяет существенно усилить этот результат: если функция f регулярна в нек-рой окрестности спектра элемента a, то $f(a)\in A$, и отображение $f\to f(a)$ является гомоморфизмом А. ф., аналитических в нек-рой окрестности спектра элемента $a\in A$, в алгебру A. Это утверждение остается справедливым и для неполупростых коммутативных банаховых алгебр. Кроме того, класс функций, аналитических в окрестности спектра данного элемента, может оказаться не расширяемым: напр., если $A=L^1(\mathbb{Z})$ и $f(a)\in A$ для всех $a\in A$, спектр к-рых принадлежит отрезку $[0,\ 1]$, то f аналитична в нек-рой окрестности этого отрезка.

В отдельных случаях элемент $f(a)$ можно определить и для многозначных аналитич. функций f, но это определение встречает естественные затруднения. Напр., пусть A — алгебра непрерывных функций в круге $|z|\leqslant 1$, аналитических в круге $|z|<1$ и удовлетворяющих условию $f'(0)=0$. Единичный круг естественно отождествляется с пространством максимальных идеалов A. Непрерывная на пространстве максимальных идеалов функция $f_1(z)=z$ не принадлежит алгебре A, но является решением квадратного уравнения

$$f_1^2-z^2=0,$$

где $z^2\in A$.

Если A — полупростая алгебра с пространством максимальных идеалов X, $f\in C(X)$,

$$p(f)\equiv f^n+a_1f^{n-1}+\ldots+a_n=0,\quad a_i\in A,$$

$p'(f)\in\varepsilon(A)$ (простой корень), то $f\in A$. Аналогично, если $f\in C(X)$ и $\exp f\in A$, то $f\in A$.

А. ф. наз. алгеброй с равномерной сходимостью, если норма в этой алгебре определяет сходимость, эквивалентную равномерной сходимости

функций $\hat{a}$ на пространстве максимальных идеалов. Если $\|a^2\|=\|a\|^2$ для всех $a\in A$, то A — алгебра с равномерной сходимостью. Общим примером алгебры с равномерной сходимостью является замкнутая подалгебра в алгебре ограниченных непрерывных функций на некотором топологич. пространстве, наделенной естественной sup-нормой.

Если A — алгебра с равномерной сходимостью, и ее пространство максимальных идеалов метризуемо, то среди всех кольцевых границ (не только замкнутых) существует минимальная граница Γ_0, замыканием к-рой служит граница Шилова. Множество Γ_0 состоит из «точек пика»: x_0 наз. т о ч к о й п и к а, если существует такая функция $f\in A$, что $|f(x)|<|f(x_0)|$ для всех $x\neq x_0$. В рассматриваемом случае для любой точки из пространства максимальных идеалов существует представляющая мера, сосредоточенная на Γ_0.

А. ф. наз. а н а л и т и ч е с к о й, если всякая функция из этой алгебры, равная нулю на непустом открытом подмножестве пространства максимальных идеалов, равна нулю тождественно. Аналогично определяются алгебры, аналитические относительно границы. Всякая аналитич. алгебра является аналитической относительно границы Шилова; обратное, вообще говоря, неверно.

А. ф. A наз. р е г у л я р н о й, если для любого замкнутого множества F в пространстве X максимальных идеалов алгебры A и любой не содержащейся в F точки x_0 найдется такая функция $f\in A$, что $f(x)=1$ для всех $x\in F$ и $f(x_0)=0$. Всякая регулярная алгебра нормальна, т. е. для любой пары непересекающихся замкнутых множеств $F, F_0\subset X$ существует элемент $f\in A$ такой, что $f(x)=1$ для всех $x\in F$ и $f(x_0)=0$ для всех $x\in F_0$. Более того, в регулярной алгебре для любого конечного открытого покрытия $\{U_i\}$, $1\leqslant i\leqslant m$, пространства X имеется разбиение единицы, принадлежащее A, т. е. система функций $f_1,\ldots,f_n\in A$, для к-рых

$$f_1(x)+\ldots+f_n(x)\equiv 1$$

и

$$f_i(x)=0 \text{ при } x\in U_i.$$

Функция g наз. локально принадлежащей А. ф. A, если для любой точки $x_0\in X$ существует такая окрестность, в к-рой эта функция совпадает с нек-рой функцией из алгебры. Всякая функция, локально принадлежащая регулярной алгебре, сама является элементом этой алгебры.

Элемент f А. ф. наз. в е щ е с т в е н н ы м, если $\hat{f}(x)$ вещественно при всех $x\in X$. Если A — алгебра с вещественными образующими f_α и

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\|\exp(itf_\alpha)\|\frac{dt}{1+t^2}<\infty$$

для всех f_α, то A регулярна.

И д е а л в банаховой алгебре наз. п р и м а р н ы м, если он содержится только в одном максимальном идеале. Если A — регулярная А. ф., то в каждом максимальном идеале x_0 имеется наименьший замкнутый примарный идеал $J(x_0)$, к-рый содержится в любом замкнутом примарном идеале, содержащемся в x_0; идеал $J(x_0)$ есть замыкание идеала, образованного функциями $f\in A$, равными нулю в нек-рой (зависящей от f) окрестности точки $x_0\in X$.

В алгебре абсолютно сходящихся интегралов Фурье с присоединенной единицей всякий максимальный идеал совпадает с соответствующим примарным идеалом.

Пусть A — замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$, где X — нек-рый компакт (не обязательно совпадающий с пространством максимальных идеалов алгебры A). Пусть A разделяет точки компакта X, т. е. для

любых двух различных точек $x_1, x_2 \in X$ существует такая функция f из алгебры A, для к-рой $f(x_1) \neq f(x_2)$. Алгебра A наз. симметричной, если вместе с функцией f алгебре принадлежит и функция $\overline{f(x)}$. Согласно теореме Стоуна—Вейерштрасса, если A симметрична, то $A = C(X)$. Алгебра A наз. антисимметричной, если из условий $f \in A$, $\overline{f} \in A$ следует, что f — постоянная функция. Антисимметричными являются, в частности, алгебры аналитич. функций. Подмножество $S \subset X$ наз. множеством антисимметрии (относительно алгебры A), если любая функция $f \in A$, вещественная на S, постоянна на этом множестве. Согласно этому определению алгебра A антисимметрична, если все X являются множеством антисимметрии. В общем случае пространство X можно представить в виде объединения непересекающихся замкнутых максимальных множеств антисимметрии. Каждое максимальное множество антисимметрии является пересечением множеств пика (множество P наз. множеством пика, если существует такая функция $f \in A$, что $f|_P = 1$ и $|f(x)| < 1$ при $x \notin P$). Отсюда следует, что сужение $A|_Y$ алгебры A на максимальное множество антисимметрии есть замкнутая (антисимметричная) подалгебра алгебры $C(Y)$. Если X есть пространство максимальных идеалов алгебры A, то максимальные множества антисимметрии связны. Если непрерывная функция такова, что на каждом максимальном множестве антисимметрии она совпадает с нек-рой функцией из алгебры A, то и сама эта функция принадлежит A. Это обобщение теоремы Стоуна—Вейерштрасса позволяет в принципе свести изучение произвольных алгебр с равномерной сходимостью к изучению антисимметричных алгебр A. Вместе с тем изучение произвольных алгебр A не может быть сведено к аналитическим алгебрам: существует пример алгебры типа $R(X)$ (замкнутой подалгебры алгебры $C(X)$), не совпадающей с $C(X)$, антисимметричной и регулярной.

Пусть $\mathrm{Re}A$ — вещественное пространство функций вида $\mathrm{Re}f$, где $f \in A$; если $\mathrm{Re}A$ — алгебра, или если $\mathrm{Re}A$ замкнуто в $C(X)$, то $A = C(X)$. Пространство X можно рассматривать как часть пространства максимальных идеалов алгебры A; поэтому на X можно рассматривать не только обычную топологию пространства максимальных идеалов, но и метрику, индуцированную вложением X в пространство, сопряженное A. Расстояние в смысле этой метрики обозначим ρ_A. Для любых точек $x_1, x_2 \in X$ имеет место неравенство $\rho_A(x_1, x_2) \leqslant 2$; отношение $\rho_A(x_1, x_2) < 2$ является отношением эквивалентности, и классы эквивалентности наз. долями Глисона. Если X — круг $|z| \leqslant 1$ и A — замкнутая подалгебра в $C(X)$, состоящая из аналитических при $|z| < 1$ функций, то метрика ρ_A неевклидова, а долями Глисона служат одноточечные множества на границе и внутренность круга. Доли Глисона не всегда обладают аналитич. структурой: любое σ-компактное вполне регулярное пространство гомеоморфно доле Глисона пространства максимальных идеалов нек-рой алгебры, такой, что сужение алгебры на эту долю содержит всякую ограниченную непрерывную функцию. Принадлежность двух точек к одной и той же доле Глисона может быть охарактеризована в терминах представляющих мер на границе Шилова: такие две точки обладают взаимно абсолютно непрерывными представляющими мерами с ограниченными производными. Алгебра, для к-рой $\mathrm{Re}A|_\Gamma$ плотно в $C(\Gamma)$, наз. алгеброй Дирихле; если P — доля Глисона в пространстве максимальных идеалов алгебры Дирихле, состоящая более, чем из одной точки, то существует такое непрерывное взаимно однозначное отображение ψ круга $|z| < 1$ на P, что для любой функции $f \in A$ функция $f(\psi(z))$ аналитична при $|z| < 1$. Та-

ким образом, P обладает структурой, относительно к-рой функции $f \in A$ аналитичны; отображение ψ, вообще говоря, не является гомеоморфизмом, если P снабжено обычной топологией пространства максимальных идеалов, но ψ является гомеоморфизмом, если снабдить P метрикой ρ_A.

Лит. см. при статье *Банахова алгебра*. *Е. А. Горин.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА — алгебра A с ассоциативными степенями (в частности, ассоциативная) над полем F, все элементы к-рой являются алгебраическими (элемент $a \in A$ наз. а л г е б р а и ч е с к и м, если порожденная им подалгебра $F[a]$ конечномерна, или, что равносильно, элемент a обладает аннулирующим многочленом с коэффициентами из основного поля F). Алгебра A наз. А. а. о г р а н и ч е н н о й с т е п е н и, если она алгебраическая и степени минимальных аннулирующих многочленов ее элементов ограничены в совокупности. Подалгебра и гомоморфный образ А. а. (ограниченной степени) являются А. а. (ограниченной степени).

П р и м е р ы А. а.: локально конечные алгебры (в частности, конечномерные), нильалгебры, ассоциативные тела со счетным множеством образующих над несчетным полем.

Рассматриваемые ниже алгебры предполагаются ассоциативными. *Джекобсона радикал* А. а. является нильидеалом. Примитивная А. а. A изоморфна плотной алгебре линейных преобразований векторного пространства над телом, если при этом A ограниченной степени, то A изоморфна кольцу матриц над телом. А. а. без ненулевых нильпотентых элементов (в частности, тело) над конечным полем коммутативна. Отсюда следует коммутативность конечных тел. А. а. ограниченной степени удовлетворяет полиномиальному тождеству (PI-*алгебра*). Алгебраическая PI-алгебра локально конечна. Если основное поле несчетно, то алгебра, полученная из А. а. расширением основного поля, а также тензорное произведение А. а., суть А. а.

Лит.: [1] Д ж е к о б с о н Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Х е р с т е й н И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972. *В. Н. Латышев.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел математики, изучающий геометрич. объекты, связанные с коммутативными кольцами: *алгебраические многообразия* и их различные обобщения (*схемы*, *алгебраические пространства* и др.).

В «наивной» формулировке предмет А. г. составляет изучение решений алгебраич. уравнений. Геометрич. интуиция появляется, когда все «множество решений» отождествляется с «множеством точек в нек-ром координатном пространстве». Если координаты — действительные числа и пространство имеет размерность два или три, наглядность ситуации несомненна; однако геометрич. язык используется и при более общих обстоятельствах. Этот язык подсказывает задачи, конструкции и типы рассуждений, едва ли естественные с точки зрения чистой алгебры. В свою очередь, алгебра доставляет аппарат гибкий и мощный, равно приспособленный и для превращения правдоподобных рассуждений в доказательства и для формулировки их в наиболее естественном и общем виде.

В А. г. над полем комплексных чисел всякое алгебраич. многообразие является в то же время комплексно-аналитическим, дифференцируемым и топологич. пространством в обычной хаусдорфовой топологии. Это обстоятельство позволяет ввести целый ряд классич. структур, доставляющих такие инварианты алгебраич. многообразий, к-рые лишь с большим трудом или вовсе не удается получить чисто алгебраич. средствами. Понятия и результаты А. г. интенсивно используются в теории чисел (диофантовы уравнения, оценки тригонометрич. сумм), дифференциальной топологии (осо-

бенности и дифференцируемые структуры), теории групп (алгебраич. группы, простые конечные группы, связанные с группами Ли), теории дифференциальных уравнений (*K*-теория и индекс эллиптич. операторов), теории комплексных пространств, теории категорий (топосы, абелевы категории), функциональном анализе (теория представлений). В свою очередь, А. г. использует идеи и методы названных дисциплин.

Возникновение А. г. относится к 17 в., когда в геометрию было введено понятие координат. Тем не менее только в сер. 19 в. А. г. начала оформляться в самостоятельную науку. Применение координат в проективной геометрии привело к тому, что алгебраич. методы стали соперничать с синтетич. методами. Однако достижения этой ветви А. г. относятся собственно к проективной геометрии, хотя и оставили в наследство А. г. традицию рассмотрения проективных алгебраич. многообразий. Современная А. г. возникла как теория *алгебраических кривых*. Исторически первый этап развития теории алгебраич. кривых состоял в выяснении основных понятий и идей этой теории на примере эллиптич. кривых. Комплекс понятий и результатов, к-рый наз. теперь теорией эллиптич. кривых, возник как часть анализа (а не геометрии) — теория интегралов от рациональных функций на эллиптической кривой. Именно эти интегралы и получили первоначально название эллиптических, а потом это название перешло на функции и на кривые (см. *Эллиптический интеграл*).

В самом конце 17 в. Я. и И. Бернулли (Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli) обнаружили новое интересное свойство эллиптич. интегралов. В их исследованиях рассматривались интегралы, выражающие длины дуг нек-рых кривых. Они нашли преобразования одной кривой в другую, сохраняющие длину дуги кривой, хотя соответствующие дуги не могут быть совмещены друг с другом. Аналитически это приводит к преобразованию одного интеграла в другой. В нек-рых случаях возникают преобразования интеграла в себя. В 1-й пол. 18 в. много примеров таких преобразований нашел Дж. Фаньяно (G. Faniano).

Л. Эйлер (L. Euler) исследовал произвольный многочлен 4-й степени $f(x)$ и поставил вопрос о соотношениях между x и y, при к-рых

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}}. \qquad (1)$$

Это равенство он рассматривал как дифференциальное уравнение, связывающее x и y. Искомое соотношение является общим интегралом данного уравнения. Причина существования интеграла уравнения (1) и всех его частных случаев, открытых Дж. Фаньяно и Бернулли, — наличие группового закона на эллиптич. кривой с уравнением $s^2 = f(t)$ и инвариантность всюду регулярной дифференциальной формы $s^{-1}\,dt$ относительно сдвигов на элементы группы. Найденные Л. Эйлером соотношения, к-рые связывают x и y в (1), могут быть записаны в виде

$$(x,\ \sqrt{f(x)}) \oplus (c,\ \sqrt{f(c)}) = (y,\ \sqrt{f(y)}),$$

где $\oplus$ означает сложение точек на эллиптической кривой.

Таким образом, эти результаты содержат в себе сразу и групповой закон на эллиптич. кривой, и существование инвариантной дифференциальной формы на этой кривой (см. *Эллиптическая кривая*).

После Л. Эйлера теория эллиптич. интегралов развивалась в основном А. Лежандром (A. Legendre). Его исследования, начавшиеся в 1786, собраны в трехтомном «Трактате по теории эллиптич. функций и эйлеровых интегралов».

Работы Н. Абеля (N. Abel) по теории эллиптич. функций появились в 1827—29. Н. Абель исходил из эллиптич. интеграла

$$\theta = \int_0^{\lambda} \frac{dx}{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)},$$

где c и e — комплексные числа, рассматривал его как функцию верхнего предела и ввел обратную функцию $\lambda(\theta)$ и функцию

$$\Delta(\theta) = \sqrt{(1-c^2\lambda^2)(1-e^2\lambda^2)}.$$

Обе эти функции имеют в комплексной области два периода 2ω и $2\tilde{\omega}$:

$$\omega = 2\int_0^{1/c} \frac{dx}{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}, \quad \tilde{\omega} = 2\int_0^{1/e} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}},$$

и тем самым отображение $x=\lambda(\theta)$, $y=\Delta(\theta)$ определяет униформизацию эллиптич. кривой $y^2=(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)$ эллиптич. функциями.

Немного позже Н. Абеля, но независимо от него, К. Якоби (C. Jacobi) также рассмотрел функцию, обратную эллиптич. интегралу, доказал, что она имеет два независимых периода, и получил ряд результатов в проблеме преобразований. Преобразуя в форме рядов найденные Н. Абелем выражения эллиптич. функций в виде произведений, К. Якоби пришел к понятию θ-функций и нашел им многочисленные применения не только в теории эллиптич. функций, но и в теории чисел и в механике.

Занимаясь проблемой преобразований эллиптич. функций, Н. Абель впервые исследовал группу гомоморфизмов одномерных *абелевых многообразий*.

Наконец, после опубликования наследия К. Гаусса (C. Gauss) и, особенно, его дневника стало ясно, что он задолго до работ Н. Абеля и К. Якоби в той или иной мере владел нек-рыми из этих идей. Переход к изучению произвольных алгебраич. кривых произошел все еще в рамках анализа: Н. Абель показал, как основные свойства эллиптич. интегралов могут быть обобщены на интегралы от произвольных алгебраич. функций. Такие интегралы стали впоследствии наз. абелевыми (см. *Абелев интеграл*).

В 1826 Н. Абель написал работу, к-рая явилась началом общей теории алгебраич. кривых. Эта работа содержит понятие рода алгебраич. кривой, эквивалентности дивизоров и дает критерий эквивалентности в терминах интегралов. Она подводит к теории *якобиевых многообразий* алгебраич. кривых.

В диссертации, опубликованной в 1851, Б. Риман (B. Riemann) применил совершенно новый принцип исследования функций комплексного переменного. Он предполагал, что такая функция задана не на плоскости комплексного переменного, а на некоторой поверхности, которая «многолистно распростерта» над этой плоскостью.

Поверхности, введенные Б. Риманом (см. *Риманова поверхность*), близко соответствуют современному понятию одномерного комплексного *аналитического многообразия*; это — такие множества, на к-рых определены аналитич. функции. Б. Риман поставил и решил вопрос о связи этого понятия с понятием алгебраич. кривой; соответствующий результат наз. теперь теоремой существования Римана. Исследуя возможные расположения точек ветвления поверхностей, он доказал, что множество классов зависит при $p>1$ от $3p-3$ независимых параметров, к-рые назвал модулями (см. *Модулей проблема*).

С работы Б. Римана начинается изучение топологии алгебраич. кривых; в ней выясняется топологич. смысл размерности p пространства $\Omega^{\tau}[X]$ — это половина размерности одномерной группы гомологий пространства $X(C)$. Аналитич. путем получено неравенство $l(D) \geqslant \deg D - p + 1$. Равенство Римана — Роха было

доказано Э. Рохом (E. Roche), учеником Б. Римана (см. *Римана — Роха теорема*). Наконец, в этой работе впервые выступает поле $k(X)$ как первичный объект, связанный с кривой X, и появляется понятие бирационального изоморфизма. Еще Н. Абелем поставлен вопрос об обращении интегралов от произвольных алгебраич. функций. Другая часть работы Б. Римана об абелевых функциях посвящена связи между θ-функциями и проблемой обращения в общем случае; в ней рассматривается ряд от p переменных

$$\theta(v) = \sum\nolimits_m e^{F(m)+2(m,\,v)}, \qquad (2)$$

где $m=(m_1, \ldots, m_p)$ пробегает все целочисленные p-мерные векторы,

$$v=(v_1, \ldots, v_p), \quad (m, v)=\sum m_i v_i,$$
$$F(m)=\sum \alpha_{jk} m_j m_k, \quad \alpha_{jk}=\alpha_{kj}.$$

Этот ряд сходится для всех значений v, если действительная часть квадратичной формы F отрицательно определена. Основное свойство функции θ — это уравнение

$$\theta(v+\pi i r)=\theta(r), \quad \theta(v+\alpha_j)=e^{L_j(v)}\theta(v), \qquad (3)$$

где r — целочисленный вектор, α_j — столбец матрицы (α_{jk}), а $L_j(v)$ — линейная функция.

Б. Риман доказал, что можно выбрать разрезы $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p$, превращающие введенную им поверхность в односвязную, и базис $u_1, \ldots, u_p$ всюду конечных интегралов на этой поверхности так, что интегралы u_j по α_k равны 0 при $j\neq k$ и πi при $j=k$, а интегралы u_j по b_k образуют симметрическую матрицу (α_{jk}), удовлетворяющую условиям, при к-рых сходится ряд (2). Он рассмотрел функцию θ, соответствующую этим коэффициентам α_{jk}. Периоды произвольной $2n$-периодической функций от n переменных удовлетворяют соотношениям, аналогичным тем, к-рые необходимы для сходимости рядов, определяющих θ-функции. Эти соотношения между периодами были явно выписаны Г. Фробениусом (G. Frobenius), к-рый доказал, что они необходимы и достаточны для существования нетривиальных функций, удовлетворяющих функциональному уравнению (3) (см. *Тета-функция*, *Абелева функция*). Эти соотношения необходимы и достаточны для существования мероморфной функции с заданными периодами, к-рая не может быть сведена линейной заменой переменных к функции меньшего числа переменных. Эта теорема была сформулирована К. Вейерштрассом (K. Weierstrass) и доказана А. Пуанкаре (H. Poincaré). В 1921 С. Лефшец (S. Lefschetz) доказал, что при выполнении соотношений Фробениуса θ-функции определяют вложение многообразия C^n/Ω в проективное пространство (Ω — решетка, соответствующая заданной матрице периодов; см. *Комплексный тор*).

Понятия и результаты, составляющие теперь основу теории алгебраич. кривых, создавались под влиянием и в рамках аналитич. теории алгебраич. функций и их интегралов. Независимо от этого направления развивалась и чисто геометрич. теория алгебраич. кривых. Напр., в вышедшей в 1834 книге Ю. Плюккер (J. Plücker) нашел формулы, связывающие класс, степень кривой и число ее двойных точек. Там же он доказал существование девяти точек перегиба у плоской кривой 3-й степени. Но подобного рода исследования занимали второстепенное место в математике того времени, они не были связаны с ее наиболее глубокими идеями.

Только после работ Б. Римана, геометрия алгебраич. кривых заняла важное место в математике наряду с теорией абелевых интегралов и абелевых функций. Это изменение точки зрения связано гл. обр. с работами А. Клебша (A. Clebsch). В то время как у Б. Римана ос-

новной являлась функция, А. Клебш считал основным объектом алгебраич. кривую. В книге А. Клебша и П. Гордана [10] выведена формула для числа p линейно независимых интегралов 1-го рода (т. е. рода кривой X), выражающая его через степень кривой и число особых точек. Там же доказано, что при $p=0$ кривая обладает рациональной параметризацией, а при $p=1$ преобразуется в плоскую кривую 3-й степени.

Для развития алгебро-геометрич. аспекта теории алгебраич. кривых полезной оказалась одна ошибка Б. Римана. При доказательстве своих теорем существования он считал очевидной разрешимость нек-рой вариационной задачи: «принципа Дирихле». Вскоре К. Вейерштрасс показал, что не любая вариационная задача имеет решение. Поэтому нек-рое время результаты Б. Римана оставались необоснованными. Один из выходов заключался в алгебраич. доказательстве этих теорем — формулировка их была, по существу, алгебраической. Эти исследования, предпринятые А. Клебшем, в значительной мере способствовали выяснению алгебро-геометрич. характера результатов Н. Абеля и Б. Римана, скрытого под аналитич. оболочкой.

Направление исследований, начатое А. Клебшем, достигло своего расцвета в работах его ученика — М. Нётера (M. Noether). Круг идей М. Нётера особенно ясно намечен в его совместной работе с А. Бриллем (A. Brill). В ней ставится задача развить геометрию на алгебраич. кривой, лежащей в проективной плоскости, как совокупность результатов, инвариантных относительно взаимно однозначных (т. е. бирациональных) преобразований (см. *Бирациональная геометрия*).

К началу 2-й пол. 19 в. было найдено много специальных свойств алгебраич. многообразий размерности большей, чем 1, в основном поверхностей. Напр., были детально исследованы поверхности 3-й степени, и, в частности, Дж. Сальмон (G. Salmon) и А. Кэли (A. Cayley) доказали в 1849, что на любой кубич. поверхности без особых точек лежит 27 различных прямых. Однако эти результаты долго не объединялись к.-л. общими принципами и не были связаны с глубокими идеями, выработанными к тому времени в теории алгебраич. кривых.

Итальянская школа А. г. оказала большое влияние на развитие этой науки. Основателями итальянской геометрич. школы являются Л. Кремона (L. Cremona), К. Сегре (C. Segre), Э. Бертини (E. Bertini). Ее самые значительные представители — Г. Кастельнуово (G. Castelnuovo), Ф. Энрикес (F. Enriques) и Ф. Севери (F. Severi). Одно из основных достижений итальянской школы — классификация *алгебраических поверхностей*. Первым результатом здесь можно считать работу Э. Бертини 1877, в к-рой дана классификация инволютивных преобразований плоскости, т. е. (в современной терминологии) классификация с точностью до сопряженности в группе бирациональных автоморфизмов плоскости всех элементов 2-го порядка этой группы. Классификация оказывается очень простой, и из нее, в частности, легко вывести, что факторплоскость по группе 2-го порядка является рациональной поверхностью. Иначе говоря, если поверхность X унирациональна и морфизм $f: P^2 \to X$ имеет степень 2, то X рациональна. Общий случай *Люрота проблемы* для алгебраич. поверхностей решил (положительно) Г. Кастельнуово в 1893. Он же поставил и решил вопрос о характеристике рациональных поверхностей численными инвариантами. Классификация поверхностей была получена Ф. Энрикесом в серии работ, завершившейся уже в 10-х гг. 20 в.

Основным средством итальянской школы было исследование семейств кривых на поверхности — линейных и алгебраических (последние называли непрерывными). Это привело к понятию линейной и алгебраич.

эквивалентности. Связь этих понятий впервые исследовал Г. Кастельнуово. Важный вклад в дальнейшую разработку вопроса внес Ф. Севери. Хотя значительная часть понятий возникла в аналитич. форме, их алгебраич. смысл был со временем выяснен. Существует тем не менее ряд понятий и результатов, к-рые, по существу (по крайней мере с современной точки зрения), связаны с анализом.

В самом начале 80-х гг. 19 в. появились работы Ф. Клейна (F. Klein) и А. Пуанкаре (H. Poincaré), посвященные проблеме *униформизации* алгебраич. кривых автоморфными функциями. Их цель заключалась в том, чтобы аналогично тому, как эллиптич. функции униформизируют кривые рода 1, униформизировать любые кривые функциями, к-рые теперь наз. автоморфными. Ф. Клейн исходил при этом из теории модулярных функций. Поле модулярных функций изоморфно полю рациональных функций, но можно рассматривать функции, инвариантные относительно различных подгрупп модулярной группы, и получать таким способом более сложные поля. В частности, Ф. Клейн рассмотрел функции, автоморфные относительно группы, состоящей из всех преобразований $z \to \frac{az+b}{cz+d}$, в к-рых, a, b, c и d — целые числа, $ad-bc=1$ и

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 7.$$

Он показал, что эти функции униформизируют кривую рода 3 с уравнением $x_0^3x_1+x_1^3x_2+x_2^3x_0=0$. Можно деформировать фундаментальный многоугольник этой группы и получать таким путем новые группы, к-рые будут униформизировать кривые рода 3. Подобный ход мыслей лежал в основе работ Ф. Клейна и А. Пуанкаре, причем А. Пуанкаре пользовался для построения автоморфных функций рядами, к-рые носят ныне его имя. Оба они правильно угадали, что любая алгебраич. кривая допускает униформизацию соответствующей группой, и значительно продвинулись в направлении доказательства этого результата. Полное доказательство было получено только в 1907 А. Пуанкаре и независимо от него П. Кёбе (P. Koebe). При этом большую роль сыграло то, что к тому времени в работах А. Пуанкаре было исследовано понятие фундаментальной группы и универсальной накрывающей.

Топология алгебраич. кривых очень проста и была полностью исследована Б. Риманом. Для изучения топологии алгебраич. поверхностей Э. Пикар (E. Picard) развил метод, основанный на изучении слоев морфизма $f : X \to P^1$. Он исследовал, как меняется топология слоя $f^{-1}(a)$ при изменении точки $a \in P^1$, и, в частности, когда этот слой приобретает особую точку. Таким способом, напр., была доказана односвязность гладких поверхностей в P^3 (см. [11], т. 1). Важный вклад в топологию алгебраич. поверхностей внес также А. Пуанкаре.

В 1921 С. Лефшец (S. Lefschetz) начал применять новую науку — топологию — к изучению алгебраич. многообразий над полем комплексных чисел. Его первоначальной целью было упрощение результатов Э. Пикара и А. Пуанкаре и обобщение их на многомерный случай. Однако он сделал значительно больше и его работы открыли новую область исследований в А. г. Дальнейший вклад С. Лефшеца в А. г. относится к теории алгебраич. циклов на алгебраич. многообразиях. Он доказал, что двумерный цикл на алгебраич. поверхности гомологичен циклу, представляемому алгебраич. кривой, в том, и только том случае, когда регулярные двойные интегралы $\iint R(x, y, z)\, dxdy$ имеют нулевые периоды на нем.

Исследования С. Лефшеца заложили основу современной теории комплексных многообразий. Позднее

были введены мощные средства для их изучения, среди к-рых — теория гармонич. интегралов [У. Ходж (W. Hodge), Ж. де Рам (G. de Rham)] и теория пучков [А. Картан (H. Cartan), Ж. Лере (J. Leray)]. Используя эту технику, удалось показать, что неособые алгебраич. многообразия составляют часть важного класса комплексных многообразий — *кэлеровых многообразий*.

Теория пучков и связанная с ней теория векторных расслоений на комплексных многообразиях позволили дать новую интерпретацию и значительно обобщить многие классич. инварианты алгебраич. поверхностей (арифметич. и геометрич. род, канонич. системы). Одним из важнейших достижений этой теории было создание теории *Чжэня классов* и значительного обобщения классич. теоремы Римана — Роха (Ф. Хирцебрух [7]).

К сер. 20 в. А. г. подверглась значительной переработке на теоретико-множественной и аксиоматич. основе. Область применения А. г. необычайно расширилась в сторону комплексных многообразий и в сторону алгебраич. многообразий над произвольными полями. Интерес к А. г. над «неклассическими» полями возник сначала в связи с теорией сравнений, к-рые можно интерпретировать как уравнения над конечным полем. В своем докладе на Международном конгрессе математиков в 1908 А. Пуанкаре говорил, что к изучению сравнений от двух неизвестных можно применить методы теории алгебраич. кривых. Почва для систематич. построения А. г. была подготовлена общим развитием теории полей и колец в 10 — 20-х гг. 20 в.

Попытка доказательства *Римана гипотезы* (к-рую можно сформулировать для любой алгебраич. кривой над конечным полем) привела в 30-х гг. в работах Х. Хассе (H. Hasse) и его учеников к построению теории алгебраич. кривых над произвольным полем. При этом сама гипотеза была доказана Х. Хассе для эллиптич. кривых. С другой стороны, в серии статей, опубликованных в 1931—39, Б. Л. ван дер Варден (B. L. van der Waerden) продвинулся в построении А. г. над произвольным полем. В частности, им была построена теория пересечений на гладком проективном многообразии.

В 1940 А. Вейлю (A. Weil) удалось доказать гипотезу Римана для произвольной алгебраич. кривой над конечным полем. Он нашел два пути ее доказательства. Один из них основывается на теории соответствий кривой X (т. е. дивизоров на поверхности $X \times X$), а другой — на рассмотрении ее якобиева многообразия. Таким образом, в обоих случаях привлекаются многомерные многообразия. В связи с этим в книге А. Вейля [5] содержится построение А. г. над произвольным полем: теория дивизоров, циклов, пересечений. Здесь впервые определяются «абстрактные» (не обязательно квазипроективные) многообразия путем процесса склеивания аффинных кусков. Работами О. Зарисского (O. Zariski), П. Самюэля (P. Samuel), К. Шевалле (C. Chevalley) и Ж. П. Серра (J. P. Serre) были введены в А. г. в нач. 50-х гг. 20 в. мощные методы коммутативной и, в частности, локальной алгебры.

Определение многообразий, основанное на понятии пучка, было дано Ж. П. Серром. Он же построил и теорию *когерентных алгебраических пучков*, причем прообразом ее служила незадолго до того созданная теория *когерентных аналитических пучков*.

В конце 50-х гг. 20 в. А. г. подвергается кардинальной перестройке, предпринятой А. Гротендиком (A. Grothendieck) на основе понятия схемы. Используя язык теории категорий, А. Гротендику удалось значительно обобщить и прояснить многие важные классич. конструкции в А. г., абстрактное определение к-рых было ранее мало геометрично. Им же было основано много новых важных разделов А. г. (см. *Алгебраическая геометрия абстрактная*). Язык теории схем прочно вошел в

обиход современной А. г., органически слил ее с коммутативной алгеброй и принес в исследования арифметич. вопросов алгебраич. многообразий значительный прогресс (см. *Алгебраических многообразий арифметика*). Непосредственное влияние теория схем оказала на одно из важнейших достижений А. г. за последний период — решение проблемы существования неособой бирациональной модели алгебраич. многообразий, определенных над полем характеристики нуль (см. *Разрешение особенностей*).

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1—3, М., 1954—55; [3] Бальдассари М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [4] Dieudonné J., «Amer. Math. Monthly», 1972, v. 79, № 8, p. 827—66; [5] Weil A., Foundations of algebraic geometry, N. Y., 1946; [6] Grothendieck A., Dieudonné J., Éléments de géométrie algébrique, B.— [a.o.], 1971; [7] Hirzebruch F., Topological methods in Algebraic Geometry, B. — [a.o.], 1966; [8] Enriques F., Le superficie algebriche, Bologna, 1949; [9] Zariski O., Algebraic surfaces, 2 ed., B.— [a.o.], 1971; [10] Clebsch A., Gordan P., Theorie der Abelschen Funktionen, Lpz., 1866; [11] Picard E., Simart G., Théorie des fonctions algébriques de deux variables independantes, t. 1—2, P., 1897—1906.

По материалам «Исторического очерка» книги И. Р. Шафаревича [1].

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ АБСТРАКТНАЯ — раздел алгебраической геометрии, в к-ром изучаются общие свойства *алгебраических многообразий* над произвольными полями, а также их обобщения — *схемы*. Хотя первые работы в А. г. а. появились еще в 19 в., особенно бурное развитие этой области алгебраич. геометрии происходило, начиная с 50-х гг. 20 в., и было связано с созданием А. Гротендиком (A. Grothendieck) общей теории схем. Интерес к алгебраич. геометрии применительно к произвольным полям возник первоначально в связи с теоретико-числовыми задачами и, в частности, с теорией сравнений от двух неизвестных. Особенно существенным для развития А. г. а. было введенное Э. Артином (E. Artin) в 1924 понятие дзета-функции алгебраич. кривой (см. *Дзета-функция* в алгебраич. геометрии), а также доказательство Х. Хассе (H. Hasse) в 1933 аналога гипотезы Римана для эллиптических кривых. Развитая при этом теория алгебраических кривых над произвольным полем констант играла существенную роль в данном доказательстве.

Почва для систематич. построения многомерной алгебраич. геометрии над произвольными полями констант была подготовлена общим развитием теории колец и полей в 10—20-х гг. 20 в. В цикле статей Б. Л. ван дер Вардена (B. L. van der Waerden, 1933—38) в основу А. г. а. была положена теория полиномиальных идеалов. В частности, им была построена *пересечений теория* на неособом проективном алгебраич. многообразии. Результаты работ этого направления подытожены в [4].

В 1940 А. Вейль (A. Weil) обнаружил, что доказательство гипотезы Римана для алгебраич. кривых произвольного рода требует привлечения теории многомерных многообразий над произвольными полями. В связи с этим им была построена теория абстрактных алгебраич. многообразий (не обязательно проективных) над произвольным основным полем, теория дивизоров и теория пересечений для таких многообразий, а также общая теория абелевых многообразий, ранее изучавшихся только в аналитич. случае. Под влиянием книги [9], вышедшей в 1946, общепринятой основой А. г. а. на долгое время стали теория нормирований и теория полей (язык «общих точек» Вейля).

В нач. 50-х гг. в А. г. а. были введены мощные методы коммутативной алгебры (см. [6], [8]). Дальнейшей перестройке А. г. а. послужила работа Ж. П. Серра о *когерентных алгебраических пучках* [7]. В ней впервые в А. г. а. были изложены идеи и методы гомологической алгебры. Развитие А. г. а. шло параллельно с разви-

тием понятия алгебраич. многообразия. После определения А. Вейлем абстрактного алгебраич. многообразия предлагались различные обобщения этого понятия. Самым плодотворным из них оказалось понятие схемы. Систематич. изложение этих идей и построение общей теории схем было начато А. Гротендиком в 1960 в серии мемуаров [5], где введен в А. г. а. язык функторов и теории категорий и кардинально перестроены многие классич. конструкции в алгебраич. геометрии.

Бурное развитие А. г. а. было связано с осознанием того, что рамки теории схем позволяют перенести на «абстрактный случай» практически все известные в классич. комплексном случае понятия и, в частности, теорию когомологий комплексных аналитич. многообразий. Важную роль для развития А. г. а. сыграла гипотеза А. Вейля (1947), предположившего существование теории когомологий, в к-рой была бы верна *Лефшеца формула* для числа неподвижных точек отображения, и установившего глубокие связи этой гипотезы с чисто арифметич. вопросами алгебраич. многообразий (см. *Дзета-функция* в алгебраической геометрии).

Понятие *топологизированной категории* (топология Гротендика) нашло многочисленные применения, разработка и развитие к-рых положили начало новым направлениям А. г. а.— теории *представимых функторов*, формальной геометрии (см. *Формальная группа*), *Вейля когомологиям*, *К-теории*, теории *групповых схем*. Развитые при этом идеи и методы нашли свое отражение во многих разделах математики (коммутативная алгебра, теория категорий, теория аналитич. пространств, топология).

Предложенное в конце 60-х гг. новое обобщение алгебраич. многообразия — *алгебраическое пространство* позволило расширить рамки А. г. а. и еще теснее связать ее с другими разделами алгебраич. геометрии.

Лит.: [1] Гротендик А., в кн.: Международный математический конгресс в Эдинбурге, 1958, М., 1962, с. 116—37; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 47—112; [3] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5; [4] Gröbner W., Moderne algebraische Geometrie, W.—Innsbruck, 1949; [5] Grothendieck A., Éléments de géométrie algébrique, t. 1, B., 1971; [6] Samuel P., Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, 2 éd., B., 1967; [7] Serre J.-P., «Ann. Math.», 1955, v. 61, № 1, p. 197—278; [8] Zariski O., в кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Cambridge (Mass.), 1950, Providence, 1952, v. 2, p. 77—89; [9] Weil A., Foundations of algebraic geometry, Providence, 1962.

И. В. Долгачев.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа G, наделенная структурой *алгебраического многообразия*, в к-рой умножение $G\times G\xrightarrow{\mu}G$ и переход к обратному элементу $G\xrightarrow{\nu}G$ являются регулярными отображениями (морфизмами) алгебраич. многообразий. А. г. наз. определенной над полем k, если ее алгебраич. многообразие, а также морфизм μ и ν определены над k. В этом случае множество k-рациональных точек многообразия G является абстрактной группой, к-рая обозначается G_k. А. г. наз. связной, если ее алгебраич. многообразие связно. Размерностью А. г. наз. размерность ее алгебраич. многообразия. В дальнейшем рассматриваются только связные А. г. Подгруппа H А. г. G наз. алгебраической, если она является замкнутым подмногообразием алгебраич. многообразия G. Для таких подгрупп пространство классов смежности (левых или правых) может быть естественным образом наделено структурой алгебраич. многообразия, обладающей универсальным свойством (см. *Факторпространство* алгебраической группы). Если подгруппа H, кроме того, нормальна, то факторгруппа G/H является А. г. относительно указанной выше структуры; она наз. алгебраической факторгруппой. Гомоморфизм $G\xrightarrow{\varphi}G'$ А. г. наз. алгебраическим, если φ — морфизм их алгебраич. многообразий; если φ определен над k, то он наз. k-гомо-

морфизмом. Аналогично определяется k-изоморфизм А. г.

Примеры А. г.: полная линейная группа $\mathrm{GL}(n, k)$ — группа всех обратимых матриц порядка n с коэффициентами в фиксированном алгебраически замкнутом поле k, группа треугольных матриц, *эллиптическая кривая*.

Существуют два основных типа А. г., совершенно различных по своим свойствам: *абелевы многообразия* и *линейные алгебраические группы*; при этом принадлежность А. г. к одному из этих типов определяется исключительно свойствами многообразия группы. А. г. наз. абелевым многообразием, если ее алгебраич. многообразие полное. А. г. наз. линейной А. г., если она изоморфна алгебраич. подгруппе полной линейной группы. А. г. является линейной тогда и только тогда, когда ее алгебраич. многообразие аффинно. Эти два класса А. г. имеют тривиальное пересечение: если А. г. есть одновременно абелево многообразие и линейная группа, то она единичная группа. Изучение произвольных А. г. в значительной степени сводится к изучению абелевых многообразий и линейных групп. Именно, в произвольной А. г. существует единственная нормальная линейная алгебраич. подгруппа H такая, что факторгруппа G/H есть абелево многообразие. Многочисленные примеры А. г., не являющихся ни линейными А. г., ни абелевыми многообразиями, дает теория обобщенных *Якоби многообразий* для алгебраич. кривых с особенностями (см. [4]). Естественное расширение класса алгебраич. групп приводит к понятию *групповой схемы*.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Мамфорд Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971; [3] Серр Ж.-П., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [4] Шевалле К., Теория алгебраических групп, в кн.: Международный математический конгресс в Эдинбурге, М., 1962; [5] Demazure M., Grothendieck A., Shemas en groupes, t. 1—3, B.—Hdlb.—N. Y., 1970. *Б. Б. Венков, В. П. Платонов.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ — алгебраическая группа G, действующая регулярно на алгебраич. многообразии V. Точнее, А. г. п. есть тройка (G, V, τ), где τ: $G\times V\to V$ ($\tau(g, x)=gx$) — морфизм алгебраич. многообразий, удовлетворяющий условиям: $ex=x$, $g(hx)=(gh)x$ для всех $x\in V$ и g, $h\in G$ (e — единица G). Если G, V и τ определены над полем k, то (G, V, τ) наз. алгебраич. группой k-преобразований. Напр., (G, G, τ), где τ — присоединенное действие или действие посредством сдвигов, является А. г. п. Если G — алгебраич. подгруппа в $\mathrm{GL}(n)$, τ — ее естественное действие в аффинном пространстве $V=k^n$, то (G, V, τ) — А. г. п. Для всякой точки $x\in V$ через $G(x)=(gx|g\in G)$ обозначается орбита x, а через $G_x=\{g\in G|gx=x\}$ — стабилизатор x. Орбита $G(x)$ не обязательно замкнута в V, но всегда существуют замкнутые орбиты, напр. замкнутые орбиты минимальной размерности. Иногда под А. г. п. понимается алгебраич. группа G, действующая рационально (но не обязательно регулярно) на алгебраич. многообразии V (это значит, что $\tau: G\times V_1\to V$ — рациональное отображение, а выписанные выше свойства τ выполнены для общих точек). Как показал А. Вейль [3], всегда существует многообразие V^1, бирационально изоморфное V и такое, что действие G на V^1, индуцированное рациональным действием G на V, регулярно. Задачи описания орбит, стабилизаторов, полей инвариантных рациональных функций (см. *Инвариантов теория*) и построения фактормногообразий являются основными в теории А. г. п. и имеют многочисленные применения.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Дьедонне Ж., Кэррол Дж., Мамфорд Д., Геометрическая теория инвариантов, пер. с англ., М., 1974; [3] Weil A., «Amer. J. Math.», 1955, v. 77, № 2, p. 355—91. *В. П. Платонов.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ — иррациональное *алгебраическое число*. А. и. является корнем неприводимого многочлена степени, не меньшей двух, с рациональными коэффициентами. *А. И. Галочкин.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КРИВАЯ — *алгебраическое многообразие* размерности 1. А. к. является наиболее изученным объектом алгебраической геометрии. В дальнейшем под А. к. понимается, как правило, неприводимая А. к. над алгебраически замкнутым полем.

Наиболее простым и интуитивно ясным является понятие плоской аффинной А. к. Это — множество точек аффинной плоскости A^2_k, удовлетворяющих уравнению $f(x, y)=0$, где $f(x, y)$ — многочлен с коэффициентами из алгебраически замкнутого поля k. Поле рациональных функций неприводимой А. к. над k есть поле алгебраич. функций одного переменного и имеет вид $k(x, y)$, где x и y связаны уравнением $f(x, y)=0$, а $f(x, y)$ — многочлен над k. Это означает, что всякая А. к. бирационально изоморфна плоской аффинной кривой.

Уже давно было замечено, что даже при изучении аффинных кривых глубокие закономерности удается вскрыть только при учете бесконечно удаленных точек и детальном исследовании особенностей. Для изучения всех точек аффинной кривой ее погружают в проективное пространство P^n с последующим замыканием в *Зарисского топологии*. Таким образом получается проективная кривая X, причем исходная аффинная кривая Y может быть получена из X выбрасыванием конечного числа точек. Если Y неприводима, то X и Y бирационально изоморфны. Каждая полная А. к. является проективной. Если X — гладкая проективная кривая (г. п. к.), то все кольца нормирования поля $k(x)$ исчерпываются *локальными кольцами* O_x, $x \in X$. Если две г. п. к. бирационально эквивалентны, то они изоморфны. Нормальная А. к. является гладкой. В частности, всякая неприводимая А. к. бирационально эквивалентна г. п. к. Получаемая в процессе нормализации гладкая проективная модель А. к. лежит в нек-ром пространстве P^n. Любая г. п. к. изоморфна кривой, расположенной в P^3. Каждая плоская А. к. *кремоновым преобразованием* может быть преобразована в кривую с обыкновенными особыми точками.

Дивизоры на гладкой А. к. представляют собой линейные комбинации точек с целыми коэффициентами

$$D=\sum_{x \in X} n_x x,\ n_x \in \mathbb{Z},$$

$n_x=0$ почти для всех x. Если все $n_x \geqslant 0$, то дивизор D наз. положительным, или эффективным, что обозначается $D \geqslant 0$. Степенью дивизора D наз. число

$$\deg D=\sum_x n_x.$$

Главные дивизоры образуют подгруппу $P(X)$ группы $\mathrm{Div}\ X$ всех дивизоров на X. Факторгруппа $\mathrm{Div}\ X/P(X)$ наз. группой классов дивизоров и обозначается через $\mathrm{Cl}(X)$. Группа $\mathrm{Cl}(X)$ изоморфна группе $\mathrm{Pic}\ (X)$ классов одномерных векторных расслоений на X (см. *Векторное алгебраическое расслоение*). Степень главных дивизоров на г. п. к. равна нулю, поэтому все дивизоры из одного класса имеют одну и ту же степень. В частности, можно говорить о степени класса дивизоров и о подгруппе $\mathrm{Cl}^0(X)$ классов дивизоров степени 0. Справедливо следующее равенство:

$$\mathrm{Cl}\,(X)/\mathrm{Cl}^0\,(X)=\mathbb{Z}.$$

Для прямой P^1, $\mathrm{Cl}\,(P^1)=\mathbb{Z}$, $\mathrm{Cl}^0\,(P^1)=0$, т. е. любой дивизор степени 0 является главным. Это свойство характерно для рациональных г. п. к.

Для любой полной А. к. X число $\pi=\dim\ H^1(X, O_X)$ наз. арифметическим родом А. к. X. Если

X — гладкая, то π совпадает с размерностью пространства $H^0(X, \Omega^1_X)$ всех регулярных дифференциальных форм на X, эта размерность наз. р о д о м А. к. X. По определению, род А. к. равен роду ее неособой модели. Для любого неотрицательного целого числа g существует А. к. рода g. Рациональные кривые характеризуются равенством $g=0$. Если X проективная плоская кривая порядка m, то

$$\pi = \frac{(m-1)\,(m-2)}{2},$$

а ее род вычисляется по формуле:

$$g = \frac{(m-1)\,(m-2)}{2} - d,$$

где d — неотрицательное целое число, измеряющее отклонение от гладкости на X. Если X имеет только обыкновенные двойные точки, то d есть просто число особых точек.

В частности, плоская г. п. к. имеет род

$$g = \frac{1}{2}(m-1)\,(m-2),$$

откуда следует, что не всякая г. п. к. является плоской. Для пространственной кривой X имеет место оценка

$$g \leqslant \begin{cases} \frac{(n-2)^2}{4}, & \text{если } n \text{ — четно,} \\ \frac{(n-1)\,(n-3)}{4}, & \text{если } n \text{ — нечетно,} \end{cases}$$

где n — степень X. Кривые n-й степени максимального рода существуют для каждого значения n и лежат на квадрике (М. Альфан, M. Alphen, 1870, см. [8]).

Степень канонич. класса K_X г. п. к. X связана с родом кривой формулой $\deg K_X = 2g-2$. Если г. п. к. X лежит на гладкой алгебраич. поверхности F, то имеет место ф о р м у л а п р и с о е д и н е н и я: $K_X = X(X+K_F)$. В частности, $\deg K_X = (X)^2 + (X \cdot K_F)$. Для произвольного дивизора D на X можно рассмотреть подмножество поля $k(X)$, состоящее из нуля и тех функций f, для к-рых $(f)+D \geqslant 0$. Это — линейное пространство над k конечной размерности $l(D)$. Размерность полной *линейной системы*, определяемой дивизором D, равна $l(D)-1$. Вычисление размерности $l(D)$ является важной задачей теории А. к. Наиболее сильный результат в этом направлении — *Римана — Роха теорема*. Для г. п. к. эта теорема заключается в равенстве:

$$l(D) - l(K-D) = \deg D - g + 1,$$

где g — род кривой X. В случае, когда $l(K-D)>0$ (соответственно $l(K-D)=0$), говорят, что дивизор D с п е ц и а л ь н ы й (соответственно н е с п е ц и а л ь н ы й). Для неспециальных дивизоров теорема Римана — Роха дает равенство $l(D) = \deg(D) - g + 1$. Каждый дивизор степени большей $2g-2$ является неспециальным.

Класс дивизоров, линейно эквивалентных дивизору D на г. п. к. X, определяет точку на *Якоби многообразии* $J(X)$ А. к. X. Это многообразие совпадает с *Альбанезе многообразием* и *Пикара многообразием* А. к. X. Точки, соответствующие классам специальных дивизоров, есть особые точки *Пуанкаре дивизора* на $J(X)$. Если G^r_n обозначает подмножество точек $J(X)$, соответствующих классам дивизоров D с $\deg D = n$ и $l(D) = r$, то G^r_n образует подсхему в $J(X)$ и

$$\dim G^r_n \geqslant r\,(n-r+1) - (r-1)\,g$$

(т е о р е м а Р и м а н а — Б р и л л я — Н ё т е р а). Эта теорема имеет многочисленные применения, одним из к-рых является следующее. Всякий дивизор D, для к-рого $l(D) \geqslant 1$, определяет рациональное отображение φ_D кривой X в проективное пространство

$P^{l(D)-1}$. Отображение φ_D зависит от класса D. Если $\deg D \geqslant 2g+1$, то φ_D определяет изоморфное вложение кривой X в P^m, причем $\varphi_D(X)$ не содержится ни в каком собственном подпространстве пространства $P^m (m = l(D)-1)$. Наиболее интересным с точки зрения бирациональной классификации кривых являются отображения φ, соответствующие кратности nK канонич. класса кривой X. При $g>1$ класс $3K$ определяет изоморфное вложение г. п. к. в P^{5g-6}. При этом кривые X и X' бирационально эквивалентны тогда и только тогда, когда их образы $\varphi_{3K}(X)$ и $\varphi_{3K}(X')$ получаются друг из друга проективным преобразованием пространства P^{5g-6}. Исследование отображения φ_K позволило получить более тонкую характеристику кривых рода $g>1$. Для этих кривых отображение φ_K: $X \to P^{g-1}$ будет изоморфным вложением в том и только том случае, когда X не является *гиперэллиптической кривой*. В случае, когда φ_K — изоморфизм, кривая $\varphi_K(X)$ наз. к а н о н и ч е с к о й; она определена однозначно с точностью до проективных преобразований в P^{g-1}. Важнейшей задачей теории А. к. является классификация кривых с точностью до бирационального изоморфизма. В этом направлении получен ряд сильных результатов, но исчерпывающего решения задачи пока (1977) не имеется.

Г. п. к. можно разбить на следующие 4 класса:

1) кривые рода 0 бирационально эквивалентны P^1;

2) кривые рода 1 (эллиптич. кривые) бирационально эквивалентны гладкой кубической кривой в P^2;

3) гиперэллиптич. кривые;

4) негиперэллиптич. кривые рода $g>1$ бирационально эквивалентны канонич. кривой в P^{g-1} (А. к. о с н о в н о г о т и п а).

Род кривой не характеризует полностью бирациональный класс А. к. Единственное исключение составляют кривые рода 0. В случае, когда k есть поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, множество классов изоморфных друг другу эллиптич. кривых описывается точками факторпространства H/G, где H — верхняя полуплоскость, G — модулярная группа, состоящая из дробно-линейных преобразований с целыми коэффициентами и определителем, равным $+1$. Пространство H/G имеет строение аналитич. многообразия, изоморфного $\mathbb{C}$ (см. *Эллиптическая кривая*). Классы бирационально эквивалентных кривых рода $g>1$ описываются точками некоторого алгебраич. многообразия M_g размерности $3g-3$, называемого многообразием модулей кривых рода g. Это многообразие неприводимо. Есть гипотеза, что M_g унирационально, но она доказана только для $g<11$ (Ф. Севери, F. Severi).

Имеют место следующие результаты о группе $\mathrm{Aut}(X)$ автоморфизмов г. п. к. X. 1) Если X есть P^1_k, то $\mathrm{Aut}(X)$ —группа дробно-линейных преобразований $\mathrm{PGL}(1, k)$. 2) Если X — эллиптическая кривая, то $\mathrm{Aut}(X)$ есть алгебраич. группа, связная компонента единицы к-рой совпадает с группой точек $X(k)$. 3) Если X — кривая рода $g>1$, то $\mathrm{Aut}(X)$ всегда конечная группа. Ее порядок ограничен числом $84(g-1)$ (см. [6]). В последнем случае важную роль при изучении группы $\mathrm{Aut}(X)$ играют *Вейерштрасса точки* на X.

Другой способ изучения группы $\mathrm{Aut}(X)$ дает тот факт, что каждая г. п. к. является конечным (разветвленным) накрытием проективной прямой.

Пусть X — г. п. к., определенная над полем $\mathbb{C}$. Множество точек кривой $X(\mathbb{C})$ снабжается естественным строением одномерного компактного аналитич. многообразия, к-рое наз. также компактной *римановой поверхностью*. Обратное тоже верно, т. е. всякая компактная риманова поверхность может быть получена из нек-рой г. п. к. Обычно употребляется один и тот же символ X для обозначения г. п. к. и соответствующего ей одномерного комплексного многообразия. Всякое

связное комплексное многообразие представимо в виде фактора $\tilde{X}/G$, где $\tilde{X}$ — связное односвязное комплексное многообразие, G — группа автоморфизмов многообразия $\tilde{X}$, действующая на $\tilde{X}$ дискретно и свободно. Весьма примечательно, что одномерных связных односвязных аналитических многообразий, с точностью до изоморфизма, всего три. Это — проективная прямая $\mathbb{C}P^1$ (риманова сфера), аффинная прямая $\mathbb{C}$ (конечная плоскость) и внутренность единичного круга $D=\{z, |z|<1\}$ (плоскость Лобачевского). Все г. п. к. можно разбить на три класса в зависимости от того, к какому из трех типов относится их универсальная накрывающая.

Вопрос о классификации г. п. к. данного типа сводится к изучению дискретных групп преобразований универсальных накрывающих, действующих свободно с относительно компактной фундаментальной областью. В случае проективной прямой G — единичная группа; в случае аффинной прямой G изоморфна подгруппе Ω аддитивной группы $\mathbb{C}$, являющейся двумерной решеткой в $\mathbb{C}$; в случае внутренности единичного круга G — подгруппа движений в плоскости Лобачевского, определяемая нек-рым неевклидовым ограниченным многоугольником. Таким образом, первый класс содержит единственную кривую P^1, второй класс состоит из комплексных торов $\mathbb{C}/\Omega$, и все они имеют строение одномерного абелевого многообразия (эллиптич. кривой), причем сложение точек на торе определяет групповую структуру на соответствующей кривой. Всякая гладкая эллиптич. кривая получается таким образом. Поле рациональных функций $C(X)$ на эллиптич. кривой $X\simeq\mathbb{C}/\Omega$ изоморфно полю мероморфных двоякопериодических (эллиптических) функций с группой периодов Ω. Если $f(x, y)=0$ — уравнение аффинной модели кривой X, то существует его параметризация $x=\varphi(z)$, $y=\psi(z)$ эллиптич. функциями (униформизация кривой X). Третий класс состоит из всех г. п. к. X рода $g>1$. Поле $C(X)$ в этом случае изоморфно полю мероморфных на D функций, инвариантных относительно группы G. Такие функции наз. а в т о м о р ф н ы м и. Любая А. к. рода $g>1$ униформизуется автоморфными функциями (см. *Униформизация*). Задача классификации эллиптич. кривых также приводила к рассмотрению фактора D/G, но там ситуация существенно отличалась от только что рассмотренной. Во-первых, группа G имела неподвижные точки в D, во-вторых, многообразие D/G было некомпактным, хотя обладало конечной площадью по Лобачевскому. Рассмотрение в общем случае таких групп и соответствующих факторов играет важную роль в современных арифметич. исследованиях.

Если А. к. X определена над незамкнутым полем k, то одним из важнейших является вопрос о существовании и нахождении рациональных точек $X(k)$ кривой X. Для г. п. к. X над конечным полем k доказано неравенство $|N-q-1|\leqslant 2g\sqrt{q}$, где N — число точек кривой X, рациональных над конечным расширением L поля k, q — число элементов поля L, а g — род кривой X. Это неравенство эквивалентно гипотезе Римана о нулях ζ-функции кривой X — все нули ζ-функции лежат на вертикальной прямой $\sigma=1/2$ (см. *Дзета-функция* в алгебраич. геометрии).

Пусть теперь X — А. к., определенная над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Тогда для кривых рода 0 точки $X(\mathbb{Q})$ находятся сравнительно легко, для эллиптич. кривых рациональные точки составляют группу с конечным числом образующих (если $X(\mathbb{Q})$ не пусто), для кривых рода $g\geqslant 2$ имеется пока не доказанная (1977) *Морделла гипотеза* о том, что $X(\mathbb{Q})$ конечно.

Если основное поле k есть поле рациональных функций $k_0(B)$ г. п. к. B, то каждая г. п. к. X над k изоморф-

на общему слою X_η морфизма $f: V \to B$ гладкой проективной алгебраич. поверхности V над k_0. Этот морфизм будет однозначно определен, если потребовать, чтобы в его слоях не было исключительных кривых рода 1. Множество рациональных точек $X(k)$ находится в биективном соответствии с множеством сечений $V(B)$ морфизма f и $X(k)$ конечно для кривых рода $g \geqslant 2$. Кривые рода 0 и 1 над полем $k_0(B)$ изучаются в теории алгебраич. поверхностей (см. *Эллиптическая поверхность*, *Линейчатая поверхность*).

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Уокер Р., Алгебраические кривые, пер. с англ., М., 1952; [3] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [4] Шевалле К., Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной, пер. с англ., М., 1959; [5] Серр Ж.-П., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [6] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948; [7] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [8] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, с. 77—170.

В. Е. Воскресенский.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ — понятие теории *расширений* полей. Пусть K нек-рое расширение поля k. Элементы $b_1, \ldots, b_n \in K$ наз. алгебраически независимыми над k, если для всякого не равного тождественно нулю многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ с коэффициентами из поля k $f(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$. В противном случае элементы $b_1, \ldots, b_n$ наз. алгебраически зависимыми. Бесконечное множество элементов наз. алгебраически независимым, если независимо каждое его конечное подмножество, и зависимым в противном случае. Определение А. н. может быть распространено на случай, когда K—кольцо и k—его подкольцо (см., напр., [1]).

Алгебраическая независимость чисел. Комплексные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ наз. алгебраически независимыми, если они алгебраически независимы над полем алгебраич. чисел, т. е. для любого многочлена $P(x_1, \ldots, x_n)$ с алгебраич. коэффициентами, из к-рых не все равны нулю, имеет место $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq \neq 0$. В противном случае $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ наз. алгебраически зависимыми. Понятие А. н. чисел является обобщением понятия трансцендентности числа (случай $n=1$). Если несколько чисел алгебраически независимы, то каждое из них трансцендентно. Доказательство А. н. каких-либо чисел сопряжено обычно с большими трудностями. Существующие аналитич. методы в теории трансцендентных чисел позволяют решать эту проблему для значений нек-рых классов аналитич. функций. Так, установлено, что значения показательной функции e^z при алгебраических линейно независимых над полем рациональных чисел значениях аргумента алгебраически независимы. Аналогичный результат получен для функций Бесселя (см. *Зигеля метод*). Установлен также ряд общих теорем об А. н. значений в алгебраич. точках E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям с коэффициентами из поля рациональных функций [2], [3]. Доказана А. н. чисел α^β и α^{β^2}, где $\alpha \neq 0, 1$ — алгебраич. число, а β — кубическая иррациональность, и, кроме того, ряд теорем об алгебраич. невыражаемости чисел — понятии, близком к понятию А. н.

Качественному понятию А. н. чисел можно придать количественную характеристику, если рассмотреть *алгебраической независимости меру* этих чисел. Упомянутые аналитич. методы позволяют получать оценки снизу для меры А. н. нек-рых классов чисел. Установлены общие теоремы об оценке меры А. н. значений E-функций [3].

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Фельдман Н. И., Шидловский А. Б., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 3, с. 3—81; [3] Шидловский А. Б., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 132, с. 169—202.

А. Б. Шидловский.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ, n-арная операция, на множестве A — отображение

$$\omega: A^n \longrightarrow A$$

n-й декартовой степени множества A в само множество A. Число n наз. арностью А. о. Исторически сначала возникли понятия бинарной ($n=2$) и унарной ($n=1$) операций. Нульарные операции — это фиксированные элементы множества A, наз. также выделенными элементами, иногда нулями. В 20 в. появилось понятие бесконечноместной операции, т. е. отображения $\omega: A^{\alpha} \to A$, где α — произвольное кардинальное число. Множество с системой определенных на нем А. о. наз. *универсальной алгеброй*. *Т. М. Баранович.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — двумерное *алгебраическое многообразие*. Вместе с *алгебраическими кривыми* А. п. представляют собой наиболее изученный класс алгебраич. многообразий. Богатство задач и идей, применяемых для их решения, делает теорию А. п. одним из самых интересных разделов алгебраич. геометрии.

В отличие от алгебраич. кривых, две бирационально изоморфные А. п. могут не быть бирегулярно изоморфными. На классич. этапе развития алгебраич. геометрии (1868—1920) под А. п. понимался фактически класс по бирациональной эквивалентности, а его представители считались погруженными в комплексное трехмерное проективное пространство $\mathbb{C}P^3$, где они задавались одним однородным алгебраич. уравнением $f(x_0, x_1, x_2, x_3)=0$. Начало теории А. п. положили работы А. Клебша (A. Clebsch) и М. Нётера (M. Noether) (конец 60-х — начало 70-х гг. 19 в.), в к-рых были определены первые важные инварианты А. п. — геометрич. род и канонич. класс. Дальнейшей разработкой теории А. п. занимались представители итальянской школы алгебраич. геометрии — К. Сегре (C. Segre), Л. Кремона (L. Cremona), Э. Бертини (E. Bertini), Г. Кастельнуово (G. Castelnuovo), Ф. Энрикес (F. Enriques), Ф. Севери (F. Severi) и др. Топологические и трансцендентные методы в теорию А. п. были введены Э. Пикаром (E. Picard), А. Пуанкаре (H. Poincaré) и С. Лефшецем (S. Lefschetz). Многие полученные в этих работах общие факты об А. п. оказались затем справедливыми для алгебраич. многообразий и схем произвольной размерности. Часть же результатов до сих пор не поддается обобщению на многомерный случай. Таковы, напр., классификация А. п. с помощью численных инвариантов, критерии рациональности и линейчатости А. п., теория минимальных моделей. Большинство из них были критически пересмотрены и передоказаны современными когомологическими методами в 50—60-х гг. 20 в. (см. [1], [5], [8]).

Общие факты об алгебраических поверхностях. Всюду в дальнейшем, если не оговорено специально, под А. п. понимается проективная А. п. над алгебраически замкнутым полем k.

а) Разрешение особенностей. Первые строгие доказательства существования неособой модели А. п. были даны в 30-х гг. 20 в. (Р. Уокер, R. Walker; О. Зариский, O. Zariski). Ранее существовавшие геометрич. доказательства итальянских геометров содержали пробелы (см. [9]). В случае положительной характеристики основного поля существование неособой модели А. п. было доказано в 1956 (см. *Разрешение особенностей*).

Каждая неособая А. п. может быть бирационально спроектирована в $\mathbb{C}P^3$ на поверхность с обыкновенными особенностями — двойными обыкновенными кривыми с конечным числом на них обыкновенных каспидальных точек и тройных точек, являющихся трипланарными особыми точками поверхности. Именно такие поверх-

ности являлись основными объектами исследования на классич. этапе развития теории А. п. Теорема о разрешении особенностей А. п. позволяет применить для локального изучения особых точек А. п. глобальные методы теории схем. Основополагающей в этом направлении явилась работа Д. Мамфорда (D. Mumford, 1961), в к-рой были введены важные инварианты двумерных особенностей и доказано, что топологич. пространство нормальной А. п. является топологич. многообразием в том и только том случае, когда поверхность неособая.

б) Численные инварианты А. п. Обобщением понятия рода алгебраич. кривой в теории А. п. является понятие геометрич. рода $p_g(V)$ А. п. V — максимальное число линейно независимых регулярных двумерных дифференциалов на V (см. *Геометрический род*). Виртуальный арифметич. род дивизоров из канонич. системы $|K_V|$ А. п. V наз. линейным родом и обозначается через $p^{(1)}$. Для неособой А. п. имеет место равенство

$$p^{(1)} = \left(K_V^2\right) + 1 = \deg\left(c_1^2\right) + 1,$$

где $c_1 = -K_V$ — первый *Чжэня класс* касательного расслоения к поверхности V. Кратные канонич. системы $|K_i| = |iK_V|$ наз. плюриканоническими системами А. п. V. Число $\dim|K_i|+1$ наз. i-родом и обозначается через P_i; оно совпадает с размерностью всюду регулярных i-кратных двумерных дифференциальных форм на V.

Согласно формуле постулации Кэли — Нётера, число N_m линейно независимых форм достаточно большой степени m, проходящих через пространственную кривую степени d рода p с t тройными точками и τ двойными точками, дается формулой

$$N_m = \binom{m+3}{3} - dm + 2t + \tau + p - 1.$$

Для А. п. с обыкновенными особенностями в 1875 был введен в рассмотрение арифметич. род $p_a(V)$, определяемый формулой:

$$p_a(V) = \binom{n-1}{3} - d(n-1) + 2t + \tau + p - 1;$$

здесь d — степень, τ — число двойных точек, p — род, а t — число тройных точек двойной кривой V (для неособых поверхностей считается $t=r=d=0$, $p=1$). Позже были даны другие эквивалентные определения $p_a(V)$ (см. *Арифметический род*).

Разность $p_g(V) - p_a(V)$ всегда неотрицательна, она наз. иррегулярностью А. п. V и обозначается через $q(V)$. А. п. наз. регулярной (соответственно иррегулярной), если $q(V)=0$ (соответственно $q(V)>0$). Первые примеры иррегулярных поверхностей были приведены в конце 19 в. (А. Кэли, A. Cayley; Г. Кастельнуово). Иррегулярность может быть охарактеризована как максимальная недостаточность линейной системы, высекаемой системой $|C+K_V|$ на кривой C (Ф. Энрикес, 1896, см. [9]). Когомологич. определение p_a и q для неособых А. п. дается формулами:

$$p_a(V) = -\dim_k H^1(V, O_V) + \dim_k H^2(V, O_V) = \chi(V, O_V) - 1,$$

$$q(V) = \dim_k H^1(V, O_V).$$

Арифметич. род $p_a(V)$ неособой А. п. V выражается через классы Чжэня касательного расслоения к V по формуле:

$$1 + p_a(V) = \frac{\deg\left(C_1^2\right) + \deg(C_2)}{12},$$

наз. формулой Нётера. Число $I = \deg(C_2) - 4$ наз. инвариантом Цейтена — Сегре.

в) Теорема Римана — Роха для А. п. Обобщение теоремы Римана — Роха для алгебраич. кривых на случай А. п. принадлежит Г. Кастельнуово (1897). Для неособой А. п. V и полной линейной системы $|D|$ дивизоров виртуальной степени $n=(D^2)$ и виртуального рода $\pi=\frac{(D^2)+(DK_V)}{2}+1$ теорема Римана — Роха утверждает существование неравенства

$$\dim|D|\geqslant n-\pi+p_a(V)+1-i.$$

Здесь число $i=\dim|K_V-D|$ наз. индексом специальности дивизора D. Когомологич. доказательство этой теоремы (см. *Римана — Роха теорема*) позволяет дать необходимое и достаточное условие для превращения предыдущего неравенства в равенство. Оно состоит в обращении в нуль пространства когомологий $H^1(V, O_V(D))$. Для любого дивизора D и достаточно больших чисел n доказано, что $H^i(V, O_V(D+nH))=0$, где $i>0$, а H — гиперплоское сечение поверхности V (Ж. П. Серр, J. P. Serre, 1955). В случае нулевой характеристики основного поля неравенство превращается в равенство для любого обильного дивизора D. Этот результат обобщает классич. теорему Пикара — Севери о регулярности присоединенной системы (см. [9]).

г) Системы кривых на А. п. Основным методом в исследованиях итальянских геометров была созданная ими теория линейных и алгебраич. систем кривых на А. п. С этой теорией тесно связаны понятия алгебраич. и линейной эквивалентностей дивизоров. Эти понятия не совпадают только для иррегулярной А. п. (Г. Кастельнуово, 1896). Всякая достаточно общая кривая на А. п. V иррегулярности q содержится в максимальном алгебраич. семействе, к-рое расслаивается на линейные системы одинаковой размерности, а базой расслоения служит многообразие размерности q (Ф. Энрикес, 1904). Это многообразие является абелевым многообразием и наз. многообразием Пикара А. п. V (см. *Пикара схема*). Доказательство приведенного выше результата Ф. Энрикеса (носящего назв. «фундаментальной теоремы в теории иррегулярных поверхностей», или «теоремы о полноте характеристического ряда»), так же как и последующие доказательства Ф. Севери, содержало пробелы. Первое строгое трансцендентное доказательство этой теоремы получено в 1910 А. Пуанкаре, и только через 50 лет было дано алгебраич. доказательство (А. Гротендик, A. Grothendieck, см. [5]). В случае положительной характеристики основного поля эта теорема, вообще говоря, неверна (Д. Игуса, J. Igusa, 1955). В общем случае доказано, что q не меньше размерности многообразия Пикара.

Несовпадение алгебраической и линейной эквивалентностей на А. п. влечет существование на ней всюду регулярных одномерных дифференциалов. Размерность пространства таких дифференциалов в случае $k=\mathbb{C}$ совпадает с иррегулярностью (Г. Кастельнуово, Ф. Севери, 1905). Этот факт является частным случаем равенства $\dim H^p(V, \Omega^q)=\dim H^q(V, \Omega^p)$, справедливого для произвольных компактных *кэлеровых многообразий* V. В случае $\mathrm{char}\ k>0$ этот результат перестает быть верным.

Группа классов дивизоров относительно алгебраич. эквивалентности конечно порождена (см. *Перона — Севери группа*). Ее ранг обозначается через ρ и наз. числом Пикара А. п. V. Порядок подгруппы кручения этой группы обозначается через σ и наз. делителем Севери А. п. V (см. [9]).

Ф. Севери положено также начало теории нульмерных циклов на А. п., в к-рой осталось еще много интересных нерешенных вопросов.

д) Топологические свойства А. п. Неособая проективная А. п. над полем комплексных

чисел представляет собой компактное 4-мерное ориентированное вещественное многообразие, в частности для такой А. п. определены группы целочисленных гомологий $H_i(V, \mathbb{Z})$ и когомологий $H^i(V, \mathbb{Z})$, удовлетворяющие *Пуанкаре двойственности*. Каждый дивизор на А. п. V определяет двумерный цикл, при этом алгебраически эквивалентные нулю дивизоры соответствуют гомологичным нулю циклам. Индекс пересечения дивизоров совпадает с топологич. индексом пересечения циклов. Имеют место равенства: σ равно порядку группы кручения группы $H_2(V, \mathbb{Z})$, $b_1(V)=2q(V)$, где $b_1(V)$ — первое число Бетти поверхности V ([4], [9]).

Для исследования топологии А. п. был развит метод, основанный на рассмотрении линейного пучка кривых на поверхности и изучении поведения топологии кривых, варьируемых в этом пучке. Таким способом была доказана односвязность неособых гиперповерхностей в $\mathbb{C}P^3$ (см. [6]). Этот метод позже нашел применение также для изучения топологии многообразий высшей размерности.

Теория этальных когомологий схем позволяет сформулировать и доказать алгебраич. аналоги многих классич. утверждений о топологии А. п. для поверхностей, определенных над полем произвольной характеристики. В частности, определены группы *l-адических когомологий* $H^i_l(V)$, *фундаментальная группа* и *гомотопический тип* А. п. (см. [9]).

Начало теории интегралов на А. п. положили работы Э. Пикара [6]. В дальнейшем его результаты были обобщены на многообразия высшей размерности (В. Ходж, W. Hodge, 30—40-е гг. 20 в.). Из этих результатов, в частности, следует неравенство $b_2(V)\geqslant\rho+2p_g(V)$. Кроме того, доказано, что число положительных квадратов в квадратичной форме, определяемой на $H_2(V, \mathbb{Z})$ индексом пересечения, равна $2p_g(V)+1$. Аналоги этих результатов для случая поля конечной характеристики неверны. Развитие трансцендентной теории А. п. связано с работами Ф. Гриффитса (P. Griphits).

е) Проективные погружения А. п. В связи с возникновением понятия абстрактного алгебраич. многообразия встал вопрос о существовании (абстрактных) А. п., непогружаемых в проективное пространство. Доказано, что неособая полная А. п. всегда является проективной [8]. Существуют полные особые непроективные А. п. Имеются различные численные критерии проективности А. п. (см. *Обильный пучок*). Каждое неособое двумерное алгебраич. пространство является А. п.

Минимальные модели алгебраических поверхностей. Неособая А. п. V наз. минимальной моделью, если каждый бирациональный морфизм $V\to V'$ на неособую А. п. V' является изоморфизмом. В каждом классе по бирациональной эквивалентности существует минимальная модель. За исключением классов линейчатых поверхностей, эта минимальная модель единственна с точностью до изоморфизма ([2], [8], [1]). Для того чтобы А. п. была минимальной моделью, необходимо и достаточно, чтобы на ней не было исключительных кривых 1-го рода, т. е. неприводимых кривых, стягивающихся в неособую точку при нек-ром бирациональном морфизме. Впервые такие кривые были исследованы в 1895 М. Нётером. Они характеризуются условиями: C — рациональная неособая кривая и $(C^2)=-1$(см. [1], [2]). Минимальные модели линейчатых поверхностей полностью классифицированы.

Классификация алгебраических поверхностей. Согласно классификации Ф. Энрикеса (см. [2]), каждая неособая А. п. над полем нулевой характеристики с точностью до бирациональной эквивалентности принадлежит к одному из следующих типов: а) *линейчатые поверхности*; б) двумерные *абелевы многообразия*;

в) *К3-поверхности*; г) *эллиптические поверхности*; д) *основного типа алгебраические поверхности*. Эта классификация во многом аналогична классификации алгебраич. кривых. При этом рациональным кривым соответствуют линейчатые поверхности, поверхности типов б) — г) соответствуют эллиптич. кривым, поверхности основного типа — кривым рода $g>1$. Тип минимальной модели А. п. определяется значениями ее числовых инвариантов. Линейчатые поверхности характеризуются условием $p_{12}=0$; А. п. типа б) — условиями $p_{12}=1$, $p_g=1$, $p_a=-1$; А. п. типа в) — условиями $K_V=0$, $q=0$; А. п. типа г) — условиями $(K_V^2)=0$ и $p_{12}>1$ либо $p_{12}=1$ и $p_g=0$. Наконец, А. п. основного типа характеризуются условиями $(K_V^2)>0$ и $p_{12}>1$.

В классе линейчатых поверхностей содержатся *рациональные поверхности*, характеризующиеся условиями $p_2=p_a=0$ (что позволяет дать утвердительный ответ в двумерном случае на *Люрота проблему*).

Многие разрозненные результаты в теории классификации А. п. посвящены задаче построения А. п. с заданными численными инвариантами. Наиболее часто встречающийся способ построения А. п. состоит в представлении ее в виде двойного накрытия проективной плоскости со специально подобранной кривой ветвления (см. *Двойная плоскость*). Неизвестно (1977), какие значения инвариантов $p^{(1)}$ и p_a могут принимать поверхности основного типа. Часть результатов о классификации А. п. была распространена в последнее время на случай поля произвольной характеристики. Для *аналитических поверхностей* классификационные результаты Ф. Энрикеса были обобщены К. Кодаирой (K. Kodaira).

Проблема модулей для алгебраических поверхностей. Содержанием проблемы модулей для А. п. является классификация А. п. с точностью до изоморфизма. Первая формула для числа параметров (модулей), от к-рых зависит А. п. с заданными инвариантами p_a, p_g и $p^{(1)}$ для одного класса А. п., была дана М. Нётером (1888). Нелинейчатые поверхности с заданными инвариантами p_a, p_g и $p^{(1)}$ зависят от M модулей, где

$$M=10p_a-p_g-2p^{(1)}+12+\Theta, \qquad (*)$$

Θ — некоторый бирациональный инвариант рассматриваемых А. п. (см. [2], [9]).

Современная теория деформаций дает следующую интерпретацию этого классич. результата. Число модулей M есть не что иное, как размерность касательного пространства Зарисского к локальной (или, в алгебраич. случае, к формальной) схеме модулей S_α для поляризованной поверхности $(V,\ \alpha)$ из данного класса А. п. Кроме того, если

$$0\longrightarrow O_V\longrightarrow E_\alpha\longrightarrow T_V\longrightarrow 0$$

есть канонич. расширение касательного пучка T_V к поверхности V с помощью структурного пучка O_V, определяемое фундаментальным классом поляризации α, то

$$M=\dim \operatorname{Im}(H^1(V,\ E_\alpha)\longrightarrow H^1(V,\ T_V)).$$

Формула $(*)$ является следствием этой точной последовательности и теоремы Римана — Роха. При этом число Θ оказывается суммой

$$\dim_k H^2(V,\ E_2)+\dim_k H^2(V,\ T_V).$$

Имеет место неравенство

$$\dim_k H^2(V,\ E_\alpha)\geqslant 2p_g-p_a-1$$

(см. [9]). Локальная схема модулей S_α может быть особой даже в случае $\operatorname{char} k=0$. Это показывает, что «настоящее» число модулей, т. е. $M'=\dim S_\alpha$, может быть меньше M. Разность $\omega=M-M'$ наз. числом препятствий к деформации; известна оценка

$\omega \leqslant \dim_h H^2(V, E_\alpha)$. Существование глобального многообразия модулей А. п. доказано только в некоторых случаях. Для поверхностей основного типа и К3-поверхностей многообразие модулей существует как *аналитическое пространство* либо как *алгебраическое пространство*.

Автоморфизмы алгебраических поверхностей. Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(V)$ полной А. п. V есть группа k-точек нек-рой схемы групп, связная компонента к-рой $\mathrm{Aut}^0(V)$ является алгебраич. группой. Если V не является линейчатой поверхностью и $\dim \mathrm{Aut}^0(V) > 0$, то $p_a = -1$. При этом если $p_g \neq 1$ либо $p_g = 1$ и $p_2 > 1$, то V — эллиптич. поверхность, а $\mathrm{Aut}^0(V)$ — одномерное абелево многообразие. В остальных случаях V и $\mathrm{Aut}^0(V)$ — абелевы поверхности (см. [2]). Для поверхностей основного типа группа $\mathrm{Aut}(V)$ есть конечная подгруппа проективной группы. Хорошо изучена группа $\mathrm{Aut}(V)$ для К3-поверхностей над полем комплексных чисел и для линейчатых поверхностей. Если поверхность V не является линейчатой, то группа $\mathrm{Aut}(V)$ совпадает с группой бирациональных преобразований поверхности V. Последняя группа для линейчатых поверхностей не обладает алгебраической структурой и мало изучена (см. *Кремоны группа*). Интенсивно изучается группа автоморфизмов аффинных алгебраических поверхностей (см. *Алгебраического многообразия автоморфизм*).

Алгебраические поверхности над алгебраически незамкнутыми полями. Теоретико-числовые вопросы в теории А. п. связаны с диофантовыми задачами (см. *Диофантова геометрия*). До настоящего времени (1977) остается непроверенной последняя из гипотез Вейля для А. п. над конечным полем. Однако для нек-рых классов А. п. это сделано (рациональные поверхности, абелевы поверхности и К3-поверхности, поднимаемые в нулевую характеристику). Завершена начатая Ф. Энрикесом, А. Комессатти (A. Comessatti) и Б. Сегре (B. Segre) классификация рациональных поверхностей над незамкнутыми полями. Для некоторого класса таких поверхностей изучена группа бирациональных автоморфизмов.

Результаты теории А. п. применяются к изучению алгебраических кривых над функциональными полями (см. *Морделла гипотеза*). Обобщение некоторых результатов теории А. п. (минимальные модели, теория пересечений) на более широкий класс регулярных двумерных схем [7] позволяет ввести геометрический язык при изучении алгебраических кривых над числовыми полями.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [2] Enriques F., Le superficie algebriche, Bologna, 1949; [3] Jung H., Algebraische Flächen, Hannover, 1925; [4] Lefschitz S., L'analysis situs et la géométrie algébrique, P., 1924; [5] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [6] Picard E., Simart G., Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, t. 1—2, P., 1897—1906; [7] Safarevich I., Lectures on minimal models and birational transformations of twodimensional schemes, Bombay, 1966; [8] Zariski O., Introduction to the problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces, Tokyo, 1958; [9] его же, Algebraic surfaces, 2 ed., B., 1971; [10] его же, An introduction to the theory of algebraic surfaces, B., 1969.

И. В. Долгачев.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ топологического пространства — различные связанные с размерностью числовые инварианты кольца непрерывных функций на данном пространстве.

П. С. Александров.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА, компактно порожденная решетка,— решетка, каждый элемент к-рой является объединением (т. е. точной верхней гранью) нек-рого множества *компактных элементов*. Решетка изоморфна решетке подалгебр нек-рой *универсальной алгебры* тогда и только тогда, когда она полная и алгебраическая. Эти же условия являются

необходимыми и достаточными, для того чтобы решетка была изоморфна решетке конгруэнций нек-рой универсальной алгебры (теорема Грэтцера — Шмидта). В обоих случаях арность операций универсальной алгебры предполагается конечной.

Лит.: [1] Birkhoff G., Lattice theory, «Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.», 1967, v.25. *Т. С. Фофанова.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — множество с определенными на нем операциями и отношениями. А. с. принадлежат к числу основных математич. структур и имеют глубоко разработанную общую теорию, сформировавшуюся в начале 50-х гг. 20 в. на грани между алгеброй и математич. логикой.

Основные понятия. Алгебраической системой наз. объект $\boldsymbol{A}=\langle A, O, R\rangle$, состоящий из непустого множества A, семейства O *алгебраических операций* $o_i\colon A^{n_i}\to A$ $(i\in I)$ и семейства R *отношений* $r_j\subseteq A^{m_j}$ $(j\in J)$, заданных на множестве A. Показатели n_i, m_j рассматриваемых декартовых степеней множества A предполагаются целыми неотрицательными числами и наз. арностями соответствующих операций и отношений. Множество A наз. носителем, или основным множеством, А. с. $\boldsymbol{A}$, а его элементы — элементами этой системы. Мощность $|A|$ множества A наз. мощностью, или порядком, А. с. $\boldsymbol{A}$. Образ $o_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$ элемента $(a_1, \ldots, a_{n_i})\in A^{n_i}$ при отображении $o_i\colon A^{n_i}\to A$ наз. значением операции o_i в точке $(a_1, \ldots, a_{n_i})$. Аналогично, если $(a_1, \ldots, a_{m_j})\in r_j$, то говорят, что элементы $a_1, \ldots, a_{m_j}$ из A находятся в отношении r_j, и пишут $r_j(a_1, \ldots, a_{m_j})$. Операции $o_i\,(i\in I)$ и отношения $r_j\,(j\in J)$, в отличие от других операций и отношений, к-рые могут быть определены на множестве A, наз. основными, или главными.

Пара семейств $\langle\{n_i\colon i\in I\};\ \{m_j\colon j\in J\}\rangle$ наз. типом А. с. $\boldsymbol{A}$. Две А. с. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}'$ однотипны, если $I=I'$, $J=J'$ и $n_i=n_i'$, $m_j=m_j'$ для всех $i\in I$, $j\in J$. Основные операции o_i, o_i' и основные отношения r_j, r_j' однотипных А. с. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$, имеющих одинаковые индексы в I, J соответственно, наз. одноименными.

А. с. $\boldsymbol{A}$ наз. конечной, если множество A конечно, и конечного типа, если множество IUJ конечно. А. с. $\boldsymbol{A}$ конечного типа записывают в виде $\boldsymbol{A}=\langle A; o_1, \ldots, o_s, r_1, \ldots, r_t\rangle$.

А. с. $\boldsymbol{A}=\langle A, O, R\rangle$ наз. *универсальной алгеброй*, или алгеброй, если множество R основных отношений ее является пустым, и *моделью*, или реляционной системой, если множество O основных операций ее пустое. Классическими А. с. являются группы, кольца, линейные пространства, линейные алгебры, линейно упорядоченные множества, линейно упорядоченные группы, линейно упорядоченные кольца, решетки и т. д.

Непустое подмножество B основного множества A А. с. $\boldsymbol{A}=\langle A, O, R\rangle$ наз. замкнутым, если для любых элементов $b_1, \ldots, b_{n_i}$ из B значение $o_i(b_1, \ldots, b_{n_i})$ каждой основной операции $o_i\in O$ также принадлежит множеству B. Рассматривая операции из O и отношения из R на замкнутом подмножестве B, мы получим А. с. $\mathbf{B}=\langle B, O', R'\rangle$, однотипную данной и наз. подсистемой А. с. $\boldsymbol{A}$. Подсистемы алгебр наз. подалгебрами, а подсистемы моделей — подмоделями. Понятие подалгебры существенно зависит от множества основных операций рассматриваемой алгебры. Напр., группоид $\boldsymbol{G}$ есть алгебра типа $\langle 2\rangle$, т. е. алгебра с одной основной операцией $G\times G\to G$. Группоид $\boldsymbol{H}$ с выделенной единицей e есть алгебра типа $\langle 2, 0\rangle$, выделенный элемент к-рой обладает по отношению к основной операции $o\colon H\times H\to H$ свойством $o(e, h)=o(h, e)=h$ для всех $h\in H$. Поэтому всякий под-

группоид группоида $\boldsymbol{H}$ с выделенной единицей e содержит e, тогда как подгруппоид группоида $\langle H, o\rangle$ не обязан содержать элемент e. В отличие от алгебр, любое непустое подмножество модели может рассматриваться как подмодель.

А. с. $\boldsymbol{A}$ **изоморфна** однотипной А. с. $\boldsymbol{A}'$, если существует такое взаимно однозначное отображение φ множества A на множество A', что

$$\varphi(o_i(a_1, \ldots, a_{n_i})) = o'_i(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{n_i})), \qquad (1)$$

$$r_j(a_1, \ldots, a_{m_j}) \Longleftrightarrow r'_j(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{m_j})) \qquad (2)$$

для всех $a_1, a_2, \ldots$ из A и для всех $i \in I$, $j \in J$. Отображение φ с этими свойствами наз. **изоморфизмом**.

Под классом алгебраич. систем понимается в дальнейшем только абстрактный класс, т. е. такой класс однотипных А. с., к-рый содержит с каждой системой $\boldsymbol{A}$ и все изоморфные ей системы. При рассмотрении того или иного класса $\mathfrak{K}$ А. с. все системы из этого класса записывают обычно в определенной сигнатуре следующим образом. Пусть класс $\mathfrak{K}$ имеет тип $\langle\{n_i\colon i \in I\}, \{m_j\colon j \in J\}\rangle$. Каждому $i \in I$ сопоставляют нек-рый символ F_i, наз. **функциональным**, а каждому $j \in J$ — символ P_j, наз. **предикатным**. Если А. с. $\boldsymbol{A}$ принадлежит классу $\mathfrak{K}$ и $o_i\colon A^{n_i} \to A$ — основная операция в ней, то элемент $o_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$ из A записывают в виде $F_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$. Аналогично, если $r_j \subseteq A^{m_j}$ — основное отношение в A и элемент $(a_1, \ldots, a_{m_j}) \in r_j$, то пишут $P_j(a_1, \ldots, a_{m_j}) = И$ (истинно) или просто $P_j(a_1, \ldots, a_{m_j})$. Если же $(a_1, \ldots, a_{m_j}) \notin r_j$, то пишут $P_j(a_1, \ldots, a_{m_j}) = Л$ (ложно) или $\neg P(a_1, \ldots, a_{m_j})$. Пусть $\Omega_f = \{F_i\colon i \in I\}$, $\Omega_p = \{P_j\colon j \in J\}$ и ν — отображение объединения $\Omega_f \cup \Omega_p$ в множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$, определяемое формулами: $\nu(F_i) = n_i\,(i \in I)$, $\nu(P_j) = m_j\,(j \in J)$. Объект $\Omega = \langle\Omega_f, \Omega_p, \nu\rangle$ наз. **сигнатурой** класса $\mathfrak{K}$. Конечную сигнатуру записывают в виде строки $\langle F_1^{(n_1)}, \ldots, F_s^{(n_s)}, P_1^{(m_1)}, \ldots, P_t^{(m_t)}\rangle$ или короче $\langle F_1, \ldots, F_s; P_1, \ldots, P_t\rangle$. А. с. $\boldsymbol{A}$, записанная в сигнатуре Ω, наз. **Ω-системой** и обозначается $\boldsymbol{A} = \langle A, \Omega\rangle$.

Условия (1), (2) изоморфизма однотипных систем $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$ упрощаются, если эти системы рассматривать в одной сигнатуре Ω. Так, если сигнатурными символами будут $F_i\,(i \in I)$, $P_j\,(j \in J)$, то (1), (2) примут вид

$$\varphi(F_i(a_1, \ldots, a_{n_i})) = F_i(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{n_i})), \qquad (3)$$

$$P_j(a_1, \ldots, a_{m_j}) \Longleftrightarrow P_j(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{m_j})). \qquad (4)$$

Гомоморфизмом Ω-системы $\boldsymbol{A}$ в Ω-систему $\boldsymbol{A}'$ наз. всякое отображение $\varphi\colon A \to A'$, удовлетворяющее условию (3) и условию

$$P_j(a_1, \ldots, a_{m_j}) \Rightarrow P_j(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{m_j})) \qquad (5)$$

для всех $F_i \in \Omega_f$, $P_j \in \Omega_p$ и для всех $a_1, a_2, \ldots$ из A. Гомоморфизм $\varphi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ наз. **сильным**, если для любых элементов $b_1, \ldots, b_{m_j}$ из A' и для любого предикатного символа P_j из Ω_p соотношение $P_j(b_1, \ldots, b_{m_j}) = И$ влечет существование в A таких прообразов $a_1, \ldots, a_{m_j}$ элементов $b_1, \ldots, b_{m_j}$, для к-рых $P_j(a_1, \ldots, a_{m_j}) = И$. Понятия гомоморфизма и сильного гомоморфизма алгебр совпадают. Для моделей существуют гомоморфизмы, к-рые не являются сильными, и взаимно однозначные гомоморфизмы, к-рые не являются изоморфизмами. При гомоморфизме $\varphi\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ образами в $\boldsymbol{A}'$ подсистем из $\boldsymbol{A}$ и непустыми полными прообразами в $\boldsymbol{A}$ подсистем из $\boldsymbol{A}'$ являются подсистемы.

Эквивалентность $\theta \subseteq A \times A$ наз. конгруэнцией Ω-системы $\boldsymbol{A}$, если

$$\theta(a_1, b_1), \ldots, \theta(a_{n_i}, b_{n_i}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \theta(F_i(a_1, \ldots, a_{n_i}), F_i(b_1, \ldots, b_{n_i}))$$

для всех $a_1, b_1, \ldots, a_{n_i}, b_{n_i}$ из A и для всех $F_i \in \Omega_f$. Для каждого гомоморфизма φ А. с. $\boldsymbol{A}$ бинарное отношение $\theta(a, b)$, истинное тогда и только тогда, когда $\varphi(a)=\varphi(b)$, является конгруэнцией в $\boldsymbol{A}$, к-рая наз. ядерной. Для произвольной конгруэнции θ Ω-системы $\boldsymbol{A}$ и для каждого элемента $a \in A$ множество $a/\theta = \{x \in A : \theta(x, a)\}$, наз. смежным классом А. с. $\boldsymbol{A}$ по конгруэнции θ. Полагая для каждых $F_i \in \Omega_f$, $P_j \in \Omega_p$,

$$F_i(a_1/\theta, \ldots, a_{n_i}/\theta) = F_i(a_1, \ldots, a_{n_i})/\theta$$

и

$$P_j(b_1/\theta, \ldots, b_{m_j}/\theta) = И$$

тогда и только тогда, когда существуют такие элементы $c_1, \ldots, c_{m_j}$ в A, что $\theta(b_1, c_1), \ldots, \theta(b_{m_j}, c_{m_j})$ и $P_j(c_1, \ldots, c_{m_j})$, мы получим А. с. $\boldsymbol{A}/\theta$, однотипную данной и наз. факторсистемой А. с. $\boldsymbol{A}$ по конгруэнции θ. Для каждой конгруэнции θ А. с. $\boldsymbol{A}$ канонич. отображение $\varphi(a)=a/\theta$ $(a \in A)$ является гомоморфизмом А. с. $\boldsymbol{A}$ на факторсистему $\boldsymbol{A}/\theta$, для которого данная конгруэнция θ ядерная. Если φ есть гомоморфизм А. с. $\boldsymbol{A}$ на А. с. $\boldsymbol{A}'$ и θ — ядерная конгруэнция для φ, то отображение $\psi(a/\theta)=\varphi(a)$ является гомоморфизмом факторсистемы $\boldsymbol{A}/\theta$ на А. с. $\boldsymbol{A}'$. Если при этом гомоморфизм φ сильный, то ψ есть изоморфизм.

Декартовым произведением Ω-систем $\boldsymbol{A}_\alpha = \langle A_\alpha, \Omega \rangle$ $(\alpha \in \Lambda \neq \varnothing)$ наз. Ω-система $\boldsymbol{D} = \langle D, \Omega \rangle$, в к-рой D есть декартово произведение основных множеств A_α $(\alpha \in \Lambda)$, а основные операции и основные отношения на D задаются условиями: $F_i(d_1, \ldots, d_{n_i})$ $(d_1, \ldots, d_{n_i} \in D, F_i \in \Omega_f)$ есть элемент $d \in D$ с координатами $d(\alpha)=F_i(d_1(\alpha), \ldots, d_{n_i}(\alpha))$ $(\alpha \in \Lambda)$, $P_j(d_1, \ldots, d_{m_j}) = И(P_j \in \Omega_p)$ тогда и только тогда, когда $P_j(d_1(\alpha), \ldots, d_{m_j}(\alpha)) = И$ для всех $\alpha \in \Lambda$.

Язык 1-й ступени. Основным формальным языком теории А. с. является язык 1-й ступени L, к-рый строится следующим образом. Алфавит языка L в заданной сигнатуре $\Omega = \langle \Omega_f, \Omega_p, \nu \rangle$, $\Omega_f = \{F_i;\ i \in I\}$, $\Omega_p = \{P_j;\ j \in J\}$, состоит из предметных переменных $x_1, x_2, \ldots$, функциональных символов $F_i (i \in I)$, предикатных символов $P_j (j \in J)$, символов логич. связок:

$$\&, \vee, \longrightarrow, \neg, =$$

кванторов:

$\forall x_k$ — «для каждого элемента x_k»,

$\exists x_k$ — «существует такой элемент x_k»

и вспомогательных символов: скобок и запятых. Для выражения свойств (1-й ступени) Ω-систем употребляются конечные последовательности алфавитных символов, или слова, составленные по определенным правилам и наз. термами и формулами. Индуктивно полагают, что каждое слово вида x_k или F_i при $\nu(F_i)=0$ есть терм; если $f_1, \ldots, f_n$ — термы и $n=\nu(F_i)$, то $F_i(f_1, \ldots, f_n)$ — также терм.

Если $\boldsymbol{A}$ есть Ω-система и $f(x_1, \ldots, x_n)$ — терм сигнатуры Ω, содержащий предметные переменные $x_1, \ldots, x_k$, то, заменяя $x_1, \ldots, x_k$ к.-н. элементами $a_1, \ldots, a_k$ из A и выполняя над последними операции в $\boldsymbol{A}$, соответствующие входящим в терм символам из Ω_f, получают элемент $f(a_1, \ldots, a_k)$ из A, называемый значением терма $f(x_1, \ldots, x_k)$ при $x_1=a_1, \ldots, x_k=a_k$. Если φ — гомоморфизм Ω-системы $\boldsymbol{A}$ в Ω-систему $\boldsymbol{A}'$, то

$$\varphi(f(a_1, \ldots, a_k)) = f(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k)).$$

Понятие формулы сигнатуры Ω, свободных и связанных предметных переменных в ней определяется также индуктивно:

1) Если P — какой-нибудь предикатный символ из Ω или знак равенства $=$, $m=\nu(P)$ или 2 соответственно, а $f_1, \ldots, f_m$ — произвольные термы сигнатуры Ω, то слово $P(f_1, \ldots, f_m)$ есть формула, в к-рой все предметные переменные свободны.

2) Если $\mathfrak{F}$ — формула, то $\neg\mathfrak{F}$ — также формула. Свободные (связанные) предметные переменные в формуле $\neg\mathfrak{F}$ те и только те, к-рые являются свободными (связанными) в $\mathfrak{F}$.

3) Если $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — формулы и предметные переменные, входящие одновременно в обе эти формулы, свободны в каждой из них, то слова

$$\mathfrak{F}_1 \& \mathfrak{F}_2,\ \mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2,\ \mathfrak{F}_1 \longrightarrow \mathfrak{F}_2 \qquad (6)$$

— также формулы.

Предметные переменные, свободные (связанные) хотя бы в одной из формул $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, наз. свободными (связанными) и в формулах (6).

4) Если предметное переменное x_k входит свободно в формулу $\mathfrak{F}$, то слова $(\forall x_k)\,\mathfrak{F}$, $(\exists x_k)\mathfrak{F}$ снова являются формулами, в к-рых переменное x_k связанное, а все остальные предметные переменные, входящие в формулу $\mathfrak{F}$ свободно или связанно, остаются такими же и в формулах $(\forall x_k)\,\mathfrak{F}$, $(\exists x_k)\,\mathfrak{F}$.

Если заданы Ω-система A и формула $\mathfrak{F}$ сигнатуры Ω, то придавая всем свободным предметным переменным $x_1, \ldots, x_k$ в $\mathfrak{F}$ какие-нибудь значения $a_1, \ldots, a_k$ из A и интерпретируя функциональные и предикатные символы, входящие в $\mathfrak{F}$, как соответствующие основные операции и основные отношения в A, мы получим конкретное высказывание, к-рое будет истинным или ложным. В соответствии с этим формуле $\mathfrak{F}$ приписывают значение $И$ или $Л$ при $x_1=a_1, \ldots, x_k=a_k$, обозначаемое $\mathfrak{F}(a_1, \ldots, a_k)$. Если φ — изоморфное отображение Ω-системы A на Ω-систему A', то

$$\mathfrak{F}\ (a_1, \ldots, a_k)=\mathfrak{F}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k))$$

для всех $a_1, \ldots, a_k$ из A.

Формула $\mathfrak{F}$ наз. замкнутой, если она не содержит свободных предметных переменных. Для любой замкнутой формулы $\mathfrak{F}$ сигнатуры Ω и произвольной Ω-системы A можно говорить об истинности или ложности $\mathfrak{F}$ в A. Совокупность S замкнутых формул данной сигнатуры Ω наз. выполнимой, или совместной, если существует Ω-система, в к-рой истинны все формулы из S.

Теорема компактности или локальная теорема Гёделя—Мальцева. Если выполнима каждая конечная часть бесконечной совокупности S замкнутых формул какой-то сигнатуры Ω, то выполнима и вся совокупность S.

Аксиоматизируемые классы. Пусть S — некоторая совокупность замкнутых формул сигнатуры Ω. Класс всех Ω-систем, в к-рых истинны все формулы из S, будет обозначаться KS. Совокупность $\mathrm{Th}\,\mathfrak{K}$ всех замкнутых формул сигнатуры Ω, истинных во всех Ω-системах из заданного класса $\mathfrak{K}$, наз. элементарной теорией класса $\mathfrak{K}$. В частности, если (A) — класс Ω-систем, изоморфных данной Ω-системе A, то $\mathrm{Th}(A)$ наз. элементарной теорией Ω-системы A и обозначается просто $\mathrm{Th}A$. Класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем наз. аксиоматизируемым, если $\mathfrak{K}=K\mathrm{Th}\,\mathfrak{K}$. Класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем аксиоматизируем тогда и только тогда, когда существует такая совокупность S замкнутых формул сигнатуры Ω, что $\mathfrak{K}=KS$.

Наряду с общим понятием аксиоматизируемости рассматривают аксиоматизируемость при помощи формул 1-й ступени специального вида. Наиболее важными в алгебре специальными формулами заданной сигнатуры Ω являются:

Тождества — формулы вида

$$(\forall x_1)\ \ldots\ (\forall x_s)P(f_1, \ldots, f_m),$$

где P — к.-л. *предикатный символ из* Ω или знак равенства $=$, а $f_1, \ldots, f_m$ — термы сигнатуры Ω от $x_1, \ldots, x_s$.

Квазитождества — формулы вида

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_s)\ [P(f_1, \ldots, f_k)\ \&\ \ldots\ \&Q(g_1, \ldots, g_m) \longrightarrow \longrightarrow R(h_1, \ldots, h_n)],$$

где $P, \ldots, Q, R$ — нек-рые предикатные символы из Ω_p или знаки равенства, а $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n$ — термы сигнатуры Ω от $x_1, \ldots, x_s$.

Универсальные формулы — формулы вида $(\forall x_1)\ldots(\forall x_s)\ \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — формула сигнатуры Ω, не содержащая кванторов.

Если задано множество S тождеств (квазитождеств или универсальных формул) сигнатуры Ω, то класс KS наз. многообразием (квазимногообразием или универсальным классом) Ω-систем.

Теорема Биркгофа. Непустой класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем является многообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подсистем, декартовых произведений и гомоморфных образов.

Если $\boldsymbol{A}=\langle A, \Omega\rangle$ — некоторая Ω-система, то, заменяя каждый функциональный символ F_i из Ω_f предикатным символом F_i^* арности n_i+1 (на 1 выше) и полагая для элементов $a_1, \ldots, a_{n_i}, a$ из A

$$F_i^*(a_1, \ldots, a_{n_i}, a) \Longleftrightarrow F_i(a_1, \ldots, a_{n_i})=a,$$

мы получим модель $\boldsymbol{A}^*=\langle A, \Omega^*\rangle$, для которой $\Omega_p^*=\Omega_p \cup \{F_i^* : F_i \in \Omega_f\}$. Подмодели модели $\boldsymbol{A}^*$ наз. подмоделями Ω-системы $\boldsymbol{A}$. Для любых непустых конечных подмножеств $A_\alpha \subseteq A$, $\Omega_\beta^* \subseteq \Omega^*$ модель $\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}=\langle A_\alpha, \Omega_\beta^*\rangle$ наз. конечным обеднением конечной подмодели $\boldsymbol{A}_\alpha=\langle \boldsymbol{A}_\alpha, \Omega^*\rangle$ Ω-системы $\boldsymbol{A}$. Ω-система $\boldsymbol{A}$ наз. локально вложимой в класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем, если для каждого конечного обеднения $\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}$ любой конечной подмодели $\boldsymbol{A}_\alpha$ Ω-системы $\boldsymbol{A}$ существует в классе $\mathfrak{K}$ такая Ω-система $\boldsymbol{B}$ (зависящая от выбранного конечного обеднения $\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}$), что модель $\boldsymbol{A}_{\alpha\beta}=\langle A_\alpha, \Omega_\beta^*\rangle$ изоморфна модели $\boldsymbol{B}_{\alpha\beta}=\langle B_\alpha, \Omega_\beta^*\rangle$ для подходящего подмножества $B_\alpha \subseteq B$.

Подкласс $\mathfrak{L}$ класса $\mathfrak{K}$ Ω-систем наз. универсальным (или универсально аксиоматизируемым) в $\mathfrak{K}$, если существует такая совокупность S универсальных формул сигнатуры Ω, что $\mathfrak{L}=KS \cap \mathfrak{K}$.

Теорема Тарского — Лося. Подкласс $\mathfrak{L}$ класса $\mathfrak{K}$ Ω-систем универсален в $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{L}$ содержит все системы из $\mathfrak{K}$, локально вложимые в $\mathfrak{L}$.

Фильтрованные произведения. Пусть $\boldsymbol{D}=\prod \boldsymbol{A}_\alpha$ — декартово произведение Ω-систем $\boldsymbol{A}_\alpha (\alpha \in \Lambda,\ \Lambda \neq \varnothing)$ и Φ — некоторый *фильтр* над Λ. Отношение

$$d \equiv_\Phi h \Longleftrightarrow \{\alpha \in \Lambda : d(\alpha)=h(\alpha)\} \in \Phi\ (d, h \in D)$$

есть эквивалентность на основном множестве D Ω-системы $\boldsymbol{D}$. Для каждого элемента $d \in D$ пусть d/Φ есть смежный класс по этой эквивалентности и $D/\Phi=\{d/\Phi : d \in D\}$. Полагая

$$F_i(d_1/\Phi, \ldots, d_{n_i}/\Phi)=d\Phi \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \{\alpha : F_i(d_1(\alpha), \ldots, d_{n_i}(\alpha))=d(\alpha)\} \in \Phi\ (F_i \in \Omega_f),$$

$$P_j(d_1/\Phi, \ldots, d_{m_j}/\Phi) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \{\alpha : P_j(d_1(\alpha), \ldots, d_{m_j}(\alpha))\} \in \Phi\ (P_j \in \Omega_p),$$

можно получить Ω-систему $\boldsymbol{D}/\Phi=\langle D/\Phi, \Omega\rangle$, которая наз. фильтрованным по фильтру Φ произведением Ω-систем $\boldsymbol{A}_\alpha (\alpha \in \Lambda)$. Ω-системы

$A_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ наз. сомножителями этого произведения. Если Φ — *ультрафильтр* над Λ, то фильтрованное произведение D/Φ наз. ультрапроизведением Ω-систем $A_\alpha (\alpha \in \Lambda)$.

Теорема об ультрапроизведениях. Если D/Φ — ультрапроизведение Ω-систем $A_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ и $\mathfrak{F}(x_1, \ldots, x_k)$ — произвольная формула сигнатуры Ω, в к-рой свободными предметными переменными являются $x_1, \ldots, x_k$, то для любых элементов $d_1, \ldots, d_k \in D$

$$\mathfrak{F}(d_1/\Phi, \ldots, d_k/\Phi) = И \iff$$
$$\iff \{\alpha : \mathfrak{F}(d_1(\alpha), \ldots, d_k(\alpha)) = И\} \in \Phi.$$

В частности, замкнутая формула $\mathfrak{F}$ сигнатуры Ω истинна в ультрапроизведении D/Φ Ω-систем $A_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ тогда и только тогда, когда множество номеров сомножителей, в к-рых формула $\mathfrak{F}$ истинна, принадлежит ультрафильтру Φ. Поэтому всякий аксиоматизируемый класс Ω-систем замкнут относительно ультрапроизведений.

Класс L Ω-систем универсально аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подсистем и ультрапроизведений.

Ω-система $E = \langle \{e\}, \Omega \rangle$ наз. единичной, если ее основное множество состоит из одного элемента, скажем e, и $P_f(e, \ldots, e) = И$ для всех $P_f \in \Omega_p$.

Теорема Мальцева. Класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем является квазимногообразием тогда и только тогда, когда он содержит единичную Ω-систему и замкнут относительно подсистем и фильтрованных (по произвольному фильтру) произведений.

Полнота и категоричность. Непустой класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем наз. категоричным, если все Ω-системы из $\mathfrak{K}$ изоморфны между собой. Всякий категоричный аксиоматизируемый класс Ω-систем состоит из одной (с точностью до изоморфизма) конечной Ω-системы.

Класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем наз. категоричным в мощности $\mathfrak{m}$, если он содержит Ω-систему мощности $\mathfrak{m}$ и все Ω-системы из $\mathfrak{K}$, имеющие мощность $\mathfrak{m}$, изоморфны между собой. Напр., класс алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики категоричен в любой несчетной бесконечной мощности. Непустой класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем наз. полным, если для любых Ω-систем A, B из $\mathfrak{K}$ имеет место равенство $\mathrm{Th}\, A = \mathrm{Th}\, B$.

Теорема Воота. Если аксиоматизируемый класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем категоричен в нек-рой мощности $\mathfrak{m} \geqslant |\Omega_f \cup \Omega_p|$ и все Ω-системы из $\mathfrak{K}$ бесконечны, то $\mathfrak{K}$ — полный класс.

В частности, класс всех алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики является полным.

См. также *Алгебраической системы автоморфизм, Алгебраических систем квазимногообразие, Алгебраических систем класс, Алгебраических систем многообразие.*

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [2] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Grätzer G., Universal algebra, Princeton, 1968; [4] Bell J. L., Slomson A. B., Models and ultraproducts, Amst.—L., 1969; [5] Chang C. C., Keisler H. J., Model theory, Amst. — N.Y., 1973. *Д. М. Смирнов.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ *K*-ТЕОРИЯ — раздел алгебры, к-рый в основном занимается изучением *K-функторов* (K_0, K_1 и др.); по существу — это часть общей линейной алгебры. Она имеет дело со структурной теорией проективных модулей и их групп автоморфизмов. Упрощенно, это — обобщение результатов о существовании и единственности (с точностью до автоморфизма) базиса векторного пространства и других общих теоретико-групповых фактов о линейных группах над полями. При переходе от поля к произвольному кольцу R эти теоремы, как правило, уже неверны, а группы Гротендика $K_0(R)$ и Уайтхеда $K_1(R)$, в нек-ром смысле, являются мерой отклонения от их истинности. Аналогичные обобщения структурных теорем линейной алгебры

возникают и в топологии. Векторное пространство можно рассматривать как частный случай *векторного расслоения*. Гомотопич. теория векторных расслоений и топологич. *К-теория* делают возможными рассмотрения такого рода. Существенную роль играет тот факт, что проективный модуль можно рассматривать как модуль сечений векторного расслоения. Это объясняет выбор именно класса проективных модулей в качестве объекта теории. В А. К-т. широко используются теория колец, гомологич. алгебра, теория категорий и теория линейных групп.

А. К-т. имеет два различных историч. источника, оба лежащих в геометрии. Первый связан с нек-рыми топологич. препятствиями. Исходным пунктом было введение понятия *Уайтхеда кручения*, связанного с гомотопич. эквивалентностью конечных комплексов и лежащего в группе Уайтхеда, являющейся нек-рой факторгруппой группы $K_1(R)$, где $R=\mathbb{Z}\Pi$ — целочисленное групповое кольцо фундаментальной группы П. Следующий шаг связан с рассмотрением топологич. пространства X, доминируемого конечным комплексом, и его обобщенной *эйлеровой характеристики* $\chi(A)$, лежащей в группе $K_0(\mathbb{Z}\pi)$. Вычисление групп Уайтхеда и L-групп, являющееся в принципе алгебраич. задачей о групповых кольцах, и было одной из первых целей А. К-т. K_2 и другие высшие функторы имеют топологич. приложения такого же типа (напр., препятствие для деформации псевдоизотопии замкнутого многообразия в изотопию лежит в нек-рой факторгруппе группы $K_2(\mathbb{Z}\pi)$). Алгебраич. изучение группы Уайтхеда началось в 40-х гг. 20 в. Сюда же примыкает изучение структуры линейных групп над произвольными кольцами, в частности теория определителей над телами (см. [10]).

Второй источник А. К-т.— алгебраич. доказательство А. Гротендиком (A. Grothendieck) в 1957 теоремы Римана — Роха (см. [7]) и ее обобщений. В этом доказательстве был введен К-функтор $K(X)$ как группа значений универсальной аддитивной функции на когерентных пучках на гладком алгебраич. многообразии. Впрочем, хорошо известные ранее кольца представлений, *Витта кольца* классов квадратичных форм и т. п. являются родственными конструкциями. Затем К-функтор был перенесен в топологию, где нашел многочисленные применения, сделав возможным решение многих недоступных ранее задач.

Кроме того, выяснилось, что эта конструкция открывает новые перспективы в понимании старых проблем анализа (вопрос об индексе эллиптических операторов), топологии (экстраординарные теории гомологий), теории представлений групп. Развитию А. К-т. для колец (начавшемуся с установления соответствия (аналогии) между проективными конечно порожденными модулями и векторными расслоениями) препятствовало, однако, отсутствие в алгебре адекватного аналога понятия надстройки в топологии.

В 50—60-х гг. 20 в. подверглись систематич. изучению проективные модули над конечными группами, была развита одна из важнейших идей, лежащая в основе А. К-т.,— идея «стабилизации», состоящая, грубо говоря, в том, что общие закономерности проявляются более отчетливо при переходе к пределу по размерности рассматриваемых объектов (напр., линейных групп или проективных модулей). Были обнаружены связи А. К-т. с *взаимности законами* в теории алгебраич. чисел и алгебраич. функций, исследованы вопросы, связанные с *конгруэнц-подгруппами*, получен алгебраич. аналог *Ботта теоремы периодичности* — теория полиномиальных расширений.

Для кольца R с единицей группа Гротендика $K_0(R)$ определяется как абелева группа, образующими к-рой служат классы изоморфных конечно поро-

женных про
отношениями

$$[P_1]+[P_2]=[P_1\oplus P_2],$$

где $[P]$ — класс модулей, изоморфных модулю P. Пусть $\mathrm{GL}(n, R)$ — полная линейная группа над R, $A\to\begin{Vmatrix} A & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$ — вложение $\mathrm{GL}(n, R)$ в $\mathrm{GL}(n+1, R)$, $\mathrm{GL}(R)$ — прямой предел групп $\mathrm{GL}(n, R)$, $E(R)$ — подгруппа в $\mathrm{GL}(R)$, порожденная элементарными матрицами e_{ij}^{λ}, т. е. матрицами с элементом $\lambda\in R$ на i, j-м месте, и совпадающая с единичной матрицей на остальных местах. Тогда $E(R)$ совпадает с коммутантом группы $\mathrm{GL}(R)$. Факторгруппа $\mathrm{GL}(R)/E(R)$ обозначается через $K_1(R)$ и наз. группой Уайтхеда. Наконец, группа Стейнберга $\mathrm{St}(n, R)$ при $n\geqslant 3$ определяется в образующих x_{ij}^{λ}, $\lambda\in R$, $1\leqslant i, j\leqslant n$, $i\neq j$, соотношениями

$$x_{ij}^{\lambda}x_{ij}^{\mu}=x_{ij}^{\lambda+\mu};$$

$$[x_{ij}^{\lambda}, x_{jl}^{\mu}]=x_{il}^{\lambda\mu} \text{ при } i\neq l;$$

$$[x_{ij}^{\lambda}, x_{kl}^{\mu}]=1 \text{ при } j\neq k,\ i\neq l.$$

Переходя к прямому пределу, получают группу $\mathrm{St}(R)$ и естественный гомоморфизм

$$\varphi:\mathrm{St}(R)\longrightarrow E(R),$$

при к-ром

$$\varphi(x_{ij}^{\lambda})=e_{ij}^{\lambda}.$$

Ядро $\ker\varphi$ обозначается через $K_2(R)$ (группа Милнора). Оно совпадает с центром группы $\mathrm{St}(R)$. Таким образом, K_0, K_1, K_2 — функторы из категории колец в категорию абелевых групп. Каждый из функторов K_0 и K_1 может быть охарактеризован как функтор, сопоставляющий конечно порожденному проективному модулю абелеву группу, удовлетворяющий нек-рым свойствам и универсальный относительно этих свойств. Такая «универсальная» характеризация позволяет определить аналог функторов K_0 и K_1 на «достаточно хороших» категориях. В частности, для категории нётеровых R-модулей получаются весьма близкие к $K_i(R)$ функторы $G_i(R)$.

Примеры групп $K_i(R)$. Если R — тело, R^* — его мультипликативная группа, то $K_0(R)=\mathbb{Z}$ — группа целых чисел, $K_1(R)=R^*/[R^*, R^*]$; $K_2(\mathbb{Z})$ — циклич. группа 2-го порядка. Если R — конечное поле, то $K_2(R)=0$.

Важным результатом в А. K-т. является точная последовательность Майера — Вьеториса для *декартова квадрата*. Именно, если диаграмма —

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{h_2} & R_2\\ {\scriptstyle h_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2}\\ R_1 & \xrightarrow[f_1]{} & R' \end{array}$$

декартов квадрат гомоморфизмов колец, в к-ром f_1 — эпиморфизм, то точна последовательность

$$K_1(R)\longrightarrow K_1(R_1)\oplus K_1(R_2)\longrightarrow K_1(R')\longrightarrow$$
$$\longrightarrow K_0(R)\longrightarrow K_0(R_1)+K_0(R_2)\longrightarrow K_0(R');$$

причем, если f_2 также эпиморфизм, то последовательность дополняется членами

$$K_2(R)\longrightarrow K_2(R_1)\oplus K_2(R_2)\longrightarrow K_2(R')\longrightarrow K_1(R)\longrightarrow\ldots$$

Если I — двусторонний идеал кольца R, то последовательность Майера — Вьеториса позволяет (см. [8]) определить относительные функторы $K_i(R, I)$, дающие точную последовательность

$$K_2(R, I)\longrightarrow K_2(R)\longrightarrow K_2(R/I)\longrightarrow K_1(R, I)\longrightarrow K_1(R)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow K_1(R/I)\longrightarrow K_0(R, I)\longrightarrow K_0(R)\longrightarrow K_0(R/I).$$

Достаточно полно исследован вопрос о поведении K-функторов при переходе от кольца R к его локализации по центральной мультипликативно замкнутой системе. В частности, при соответствующих условиях на кольцо R для функтора $G_0(R)$ получена точная последовательность

$$\bigcup_{s \in S} G_0(R/(s)) \longrightarrow G_0(R) \longrightarrow G_0(S^{-1}R) \longrightarrow 0.$$

Если кольцо R коммутативно, то группа $K_0(R)$ превращается в кольцо с единицей путем введения умножения, индуцируемого тензорным произведением модулей. Существует расщепляющийся эпиморфизм кольца $K_0(R)$ на кольцо $H(R)$ непрерывных целочисленных функций (кольцо $\mathbb{Z}$ рассматривается в дискретной топологии) на *спектре* кольца R. Ядро этого гомоморфизма обозначается $\tilde{K}_0(R)$. Известно, что $K_0(R)$ является нильрадикалом кольца $K_0(R)$, причем если R — нётерово и размерность его максимального спектра равна α, то $\tilde{K}_0(R)^{\alpha+1}=0$. Если же эта размерность не превосходит 1, то группа $\tilde{K}_0(R)$ изоморфна *Пикара группе* Pic (K).

Для колец арифметич. типа существуют теоремы конечности для функторов $K_i(R)$ и $G_i(R)$. Именно, если A является кольцом целых чисел или кольцом многочленов над конечным полем, а R является R-порядком и одновременно R-решеткой в полупростой конечномерной алгебре над полем частных кольца A, то группы $K_i(R)$ и $G_i(R)$ конечно порождены ($i=0, 1$).

Развитию А. K-т. способствовали исследования по проблеме конгруэнц-подгрупп: каждая ли подгруппа конечного индекса в арифметич. группе содержит некоторую конгруэнц-подгруппу? Этот вопрос тесно связан с проблемой вычисления группы $K_1(R, I)$ для идеалов I в R.

Из результатов о стабильном строении проективных модулей следует отметить теорему: если R — коммутативное нётерово кольцо, максимальный спектр к-рого имеет размерность d, а A — конечномерная R-алгебра, то любой конечно порожденный проективный A-модуль P такой, что

$$P_{\mathfrak{m}} \cong A^d_{\mathfrak{m}} \oplus Q$$

для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m}$ кольца R изоморфен $A \oplus N$ (здесь $M_{\mathfrak{m}}$ — локализация модуля M по $\mathfrak{m}$). Другой важной теоремой о строении проективных модулей является теорема о сокращении: пусть кольца R, A и модуль P — такие же, как выше, Q — конечно порожденный проективный A-модуль и M, N — произвольные A-модули. Тогда из

$$Q \oplus P \oplus M \cong Q \oplus N$$

следует

$$P \oplus M \cong N.$$

С вопросами стабильного строения проективных модулей тесно связан *стабильный ранг* кольца R. Напр., если R — коммутативное кольцо стабильного ранга меньше d, то

$$K_1(R) \cong \mathrm{CL}\,(d+r,\ R)/E\,(d+1,\ R).$$

В связи с теорией индуцированных представлений групп изучались функторы K_i от групповых колец. Один из результатов этого направления: если G — конечная группа порядка n и C — семейство циклич. подгрупп группы G, то показатель подгруппы

$$\sum_{c \in C} \mathrm{Im}\,(K_i(RC) \longrightarrow K_i(RG))$$

в группе $K_i(RG)$ при $i=0, 1, 2$ делит n.

О полиномиальных расширениях колец известно, что если R — регулярное кольцо, то

$$K_0(R[t]) \cong K_0(R[t, t^{-1}]) \cong K_0(R),$$
$$K_1(R[t]) \cong K_1(R).$$

Кроме того,
вательность

$$0 \longrightarrow K_1(R) \longrightarrow K_1(R[t]) \oplus K_1(R[t^{-1}]) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow K_1(R[t, t^{-1}]) \longrightarrow K_0(R) \longrightarrow 0.$$

Одним из результатов о вычислении функтора $K_2(R)$ является теорема Мацумото: если R — поле, то группа $K_2(R)$ задается образующими $l(a)$ (взаимно однозначно сопоставленным всем ненулевым элементам a поля R) и соотношениями $l(a)\ l(1-a)=1$ при $a\neq 1$.

В 70-х гг. 20 в. появились многочисленные варианты определения функторов K_i при $i\geqslant 2$. Было доказано [9] совпадение этих теорий, дающих классич. функторы K_n при $n\leqslant 2$. В ряде случаев найдены эффективные средства вычисления высших K-групп. Начала развиваться унитарная K-теория (см. [9], т. 3), изучающая аналогичные вопросы для модулей, на к-рых определены квадратичные и билинейные формы.

Лит.: [1] Атья М., Лекции по K-теории, пер. с англ., М., 1967; [2] Bass H., Topics in algebraic K-theory. Tata institute of Fundamental research, Bombay, 1966; [3] Басс Х., Алгебраическая K-теория, пер. с англ., М., 1973; [4] Swan R. G., Algebraic K-theory, B.—Heidelberg—N.Y., 1968; [5] Swan R. G., Evans E. G., K-theory finite groups and orders, B.—Heidelberg—N.Y., 1970; [6] Algebraic K-theory and its Geometric Applications, B.—Heidelberg—N.Y., 1969; [7] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 5, с. 3—86; [8] Милнор Дж., Введение в алгебраическую K-теорию, пер. с англ., М., 1974; [9] Algebraic K-theory, v. I—III, B.—Heidelberg—N.Y., 1973; [10] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969. *А. В. Михалев, А. И. Немытов.*

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ — раздел теории чисел, основной задачей к-рого является изучение свойств целых чисел полей K *алгебраических чисел* конечной степени над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Все целые числа поля $K/\mathbb{Q}$ — *расширения* K поля $\mathbb{Q}$ степени n — могут быть получены с помощью фундаментального базиса $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, если в линейной форме $x_1\omega_1+x_2\omega_2+\ldots+x_n\omega_n$ каждое x_i пробегает все целые рациональные числа. При этом такое представление для каждого целого числа из K единственно.

Переход от целых рациональных чисел к целым алгебраическим не сопровождается ожидаемыми аналогиями. Первое нарушение аналогии относится к *единицам*. В то время как поле рациональных чисел имеет только две единицы: $+1$ и -1, в общих полях алгебраич. чисел может быть даже бесконечно много единиц. Пусть, напр., имеется вещественное квадратичное поле $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, где $D>1$ — целое рациональное число, не равное точному квадрату. Его фундаментальный базис имеет вид $(1, \sqrt{D})$, $D\not\equiv 1 \pmod 4$. У двучленного *Пелля уравнения* $x^2-Dy^2=1$ бесконечно много целочленных решений (x, y). Любое из них порождает единицу $x+y\sqrt{D}$ поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Именно,

$$(x+y\sqrt{D})(x-y\sqrt{D})=1,$$
$$\text{и } 1/(x+y\sqrt{D})=x-y\sqrt{D}$$

тоже является целым числом поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Единицы этого поля образуют бесконечную мультипликативную группу (группу единиц Пелля). Возникает вопрос о том, как устроена эта группа.

Второе нарушение аналогии, при переходе от поля рациональных чисел к полю алгебраич. чисел, связано с теоремой об однозначном разложении целых рациональных n на простые множители:

$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_k^{a_k}.$$

Для алгебраич. чисел это уже не так. Пусть, напр., имеется поле $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$; в нем число 6 можно разложить двумя существенно различными способами: $6=2\cdot 3$, $6=(1+\sqrt{-5})\ (1-\sqrt{-5})$. При переходе к полям более высокой степени картина усложняется. Возникает во-

прос: что происходит с теоремой об однозначном разложении и имеет ли она вообще смысл в полях алгебраич. чисел.

Третье нарушение аналогий доставляют простые числа. При переходе к полям алгебраич. чисел они, вообще говоря, перестают быть простыми. Так, простое число 5 в поле гауссовых чисел $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ распадается на два: $5=(2+\sqrt{-1})(2-\sqrt{-1})$. Но в этом же поле число 7 остается простым. Возникает вопрос: существуют ли общие законы, управляющие поведением простых чисел при переходе к полям алгебраич. чисел более высокой степени. Другими словами, можно ли найти правила, к-рые давали бы однозначный ответ на вопрос — остается данное простое число простым при переходе к полю $K/\mathbb{Q}$ или распадается в нем, и если распадается, то на сколько множителей.

И наконец, последний (четвертый) вопрос касается общей структуры полей алгебраич. чисел. Поле $\mathbb{Q}$ является минимальным полем с нулевой характеристикой и не содержит собственных подполей. Любое другое поле алгебраич. чисел уже имеет подполя. Так, $\mathbb{Q}$ служит подполем любого поля алгебраич. чисел. Возникает вопрос: сколько подполей содержит данное поле $K/\mathbb{Q}$ — конечное или бесконечное — и как они устроены.

Эти четыре вопроса являются главными в А. т. ч., и ответы на них составляют ее содержание. Естественно начать рассмотрение с четвертого вопроса, так как ответ на него прольет свет и на первые три. Соответствующая задача была решена Э. Галуа (E. Galois) в 20-х гг. 19 в. (см. *Галуа теория*). Конечность числа подполей расширения $K/\mathbb{Q}$ степени n над $\mathbb{Q}$ следует из существования взаимно однозначного соответствия (основного соответствия Галуа) между всеми подполями поля K и всеми подгруппами его группы Галуа, порядок (число элементов) к-рой конечен (и не превосходит $n!$).

Строение группы единиц поля было выяснено П. Дирихле (P. Dirichlet). Основную идею можно проследить на примере группы единиц Пелля (см. выше). Любая степень такой единицы (как положительная, так и отрицательная) будет единицей. Существует основная единица $\eta=x_0+y_0\sqrt{D}$, а все остальные являются ее целыми степенями, т. е. единицы Пелля составляют бесконечную циклич. группу с одной образующей. Этот факт есть частный случай общей теоремы Дирихле о единицах поля алгебраич. чисел: если поле $K/\mathbb{Q}$ имеет степень $n=r_1+2r_2$, где r_1 — число вещественных, а r_2 — число пар комплексно сопряженных полей для $K/\mathbb{Q}$, то бесконечная группа единиц поля $K/\mathbb{Q}$ имеет $r=r_1+r_2-1$ образующих единиц $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$, а все остальные являются произведениями их целочисленных степеней $\eta_1^{n_1}\ \eta_2^{n_2}\ \ldots\ \eta_r^{n_r}$. Таким образом, бесконечная группа единиц поля $K/\mathbb{Q}$ является произведением r бесконечных циклич. подгрупп. Если домножить ее на конечную циклич. подгруппу корней из единицы, к-рые могут быть в $K/\mathbb{Q}$, то будет получена самая общая картина строения группы единиц поля. Норма любой единицы поля, т. е. произведение этой единицы и всех ей сопряженных, равна единице поля $\mathbb{Q}$.

Проблема неоднозначного разложения целых чисел в алгебраич. полях была решена Э. Куммером (E. Kummer), к-рый, как и Э. Галуа, начал с частной задачи — попытки доказать великую теорему Ферма о невозможности решить в целых числах уравнение $x^p+y^p=z^p$ для любого простого $p>2$. Э. Куммер разложил левую часть по корням p-й степени из 1, и задача была сведена к целым числам поля $\mathbb{Q}(\zeta)$. Если бы для них существовало однозначное разложение на простые множители в поле $\mathbb{Q}(\zeta)$, то достаточно было бы показать, что не все

простые множители левой части имеют степень, кратную p. Вначале Э. Куммер так и считал, но П. Дирихле обратил его внимание на отсутствие однозначности. Именно для преодоления этой трудности Э. Куммер ввел идеальные числа, и это преобразило в дальнейшем все здание А. т. ч. Понятие идеального числа происходит из того, что если в поле k нет простых чисел, на к-рые однозначно распадалось бы любое целое число из k, то найдется другое поле K/k конечной степени над k, в к-ром существует необходимое количество чисел, играющих роль простых для поля k. Эти числа Э. Куммер назвал идеальными (так как они не принадлежат исходному полю k). С привлечением идеальных чисел теорема об однозначности разложения в поле k восстанавливается. При этом два числа поля, отличающиеся только единицей Дирихле (так наз. ассоциированные числа), имеют одни и те же идеальные множители. Понятие идеального числа относительно — для другого поля k' строится поле K'/k' другой степени над k', в к-ром содержатся идеальные числа поля k'.

Э. Куммер ввел также понятие класса идеальных чисел: два идеальных числа принадлежат одному классу, если их отношение лежит в первоначальном поле k. Он получил важный результат: число этих классов h конечно, и они образуют абелеву группу по умножению. Таким образом, любое идеальное число можно считать корнем h-й степени из нек-рого числа первоначального поля k. Число классов h явно выписывается через константы поля (регулятор, дискриминант, степень поля n).

В дальнейшем понятие идеального числа было заменено эквивалентным понятием *идеала*, к-рое удается описать средствами самого поля k, и уже в сер. 20 в. идеал уступил место более емкому понятию *дивизора*. Поэтому современная теория Куммера излагается на языке дивизоров. Но для полей алгебраич. чисел классич. понятие идеала совпадает с понятием дивизора. Далее всюду идет речь лишь о таких полях. Понятие идеала тесно связано с понятием неассоциированных чисел, что способствует пониманию глубоких связей теории Куммера и теории единиц Дирихле. Хотя Э. Куммеру и не удалось решить проблему Ферма, но его идеи вышли далеко за рамки этой задачи, и понятие идеала ныне является одним из главных для всей математики.

В связи с относительностью понятия простого идеального числа, или, в современной терминологии, простого идеала, третий вопрос о распадении простых чисел поля $\mathbb{Q}$ при переходе к полям алгебраич. чисел может быть поставлен в общем виде. Пусть дано поле k и его простой идеал $\mathfrak{p}$. Ставится вопрос о том, остается ли идеал простым при переходе от поля k к его расширению $K=k(\theta)$ или распадается в произведение простых идеалов поля K, и если распадается, то по какому закону. Этот вопрос приводит к *полей классов теории* — центральной части всей современной А. т. ч. Первое решение этого вопроса было дано Э. Куммером, показавшим, что если θ — корень неприводимого многочлена $f(x)$, то простой идеал $\mathfrak{p}$ распадается в $k(\theta)$ по тому же закону, что и $f(x)$ при переходе к полю вычетов (mod $\mathfrak{p}$). Другими словами, разложение $\mathfrak{p}$ в $k(\theta)$ определяется сравнением

$$f(x) \equiv f_1^{a_1}(x)\, f_2^{a_2}(x) \ldots f_m^{a_m}(x) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Параллельное равенство наз. формулой (или разложением) Куммера:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{a_1} \mathfrak{P}_2^{a_2} \ldots \mathfrak{P}_m^{a_m}, \qquad (1)$$

где $\mathfrak{P}_i$ — простые идеалы поля $K=k(\theta)$.

Это равенство в принципе решает третью задачу А. т. ч., но оно локально в том смысле, что требует

проверки каждого простого идеала в отдельности. Задача же о разбиении всех простых идеалов на классы так, чтобы в одном классе закон разложения был один и тот же и чтобы, кроме того, можно было найти простые правила задания этих классов, решается теорией полей классов для расширения K/k с абелевой группой Галуа $G(K/k)$.

Предварительное понятие класса можно получить из равенства (1). Пусть n — степень поля K/k, f_i — относительная степень идеала $\mathfrak{p}_i$. Вычисление относительной нормы $N_{K/k}$ обеих частей (1) приводит к равенству

$$n = a_1 f_1 + \ldots + a_m f_m, \qquad (2)$$

где a_i, f_i — натуральные. При фиксированном n уравнение (2) имеет конечное число решений, так что все простые идеалы поля k можно разбить на конечное число классов и собрать в один класс те из них, разложению Куммера к-рых соответствует один и тот же набор пар (a_i, f_i) из решения (2). Интерес представляют лишь бесконечные классы, поэтому можно оставить в стороне те классы, где имеется $a_i \geqslant 2$. Число простых идеалов с таким свойством конечно, и все они являются делителями дискриминанта $\mathfrak{B}$ поля K/k.

Для упрощения задачи поле K/k считается нормальным. В таких полях выполняется условие

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_m.$$

Поэтому все $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{B}$ разбиваются на $d(n)$ классов, где $d(n)$ — функция числа делителей. Особый интерес представляет класс с условием $m = n$, где

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 1;$$

в нем $\mathfrak{p}$ имеет максимальное число простых делителей поля K/k:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_n. \qquad (3)$$

Такие $\mathfrak{p}$ наз. в п о л н е р а з л о ж и м ы м и, а их класс наз. г л а в н ы м к л а с с о м поля k относительно K/k. В теории полей классов он является основным объектом изучения. Определение главного класса с помощью (3) требует доказательства того, что в поле k такие идеалы на самом деле существуют и что их бесконечно много. Поэтому основная задача теории полей классов состоит в том, чтобы определить главный класс средствами самого поля k, из к-рого бы следовала его бесконечность. Эта задача полностью решена для абелевых расширений K/k.

Для более подробного ознакомления с идеями теории полей классов идеалов необходимо общее понятие группы классов идеалов. Приведенное выше определение Куммера соответствует современному понятию абсолютной группы классов идеалов. Современные общие понятия группы классов принадлежат Г. Веберу (H. Weber) и Т. Такаги (T. Takagi) (см. [5]).

Г. Вебером введено понятие в е д у щ е г о м о д у л я г р у п п ы к л а с с о в. Пусть $\mathfrak{m}$ — целый идеал поля k, $L_{\mathfrak{m}}$ — подгруппа главных идеалов α поля k, заданных сравнением $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$, $A_{\mathfrak{m}}$ — подгруппа всех идеалов поля k, взаимно простых с $\mathfrak{m}$. Любая подгруппа $H_{\mathfrak{m}}$ с условием $L_{\mathfrak{m}} \subseteq H_{\mathfrak{m}} \subseteq A_{\mathfrak{m}}$ может быть объявлена главной, таким образом и будет построена группа классов $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$. При $\mathfrak{m} = 1$ и $H_1 = L_1$ получается определение Куммера. В общем случае $H_{\mathfrak{m}}$ состоит из прогрессий $(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})$, вычеты к-рых образуют подгруппу всей мультипликативной группы $(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})$. Порядок $h_{\mathfrak{m}}$ этой общей группы классов лежит в пределах $1 \leqslant h_{\mathfrak{m}} \leqslant h \cdot \varphi(\mathfrak{m})$, где h — порядок абсолютной группы Куммера, φ — функция Эйлера. Для разных модулей $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ группы классов могут быть эквивалентными, если $H_{\mathfrak{m}_1}$ и $H_{\mathfrak{m}_2}$ состоят фактически из одних и тех же прогрессий по $(\mathrm{mod}\ f)$, где $f = (\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2)$. Если ус-

ловиться не различать эквивалентные группы классов, то будет получено понятие группы классов в смысле Вебера с ведущим модулем f, к-рый равен наибольшему общему делителю всех эквивалентных модулей. Полем классов в смысле Вебера наз. поле K/k, в к-ром простые идеалы его главного класса H_f и только они, вполне разложимы. Их бесконечность следует из теоремы Дирихле о простых идеалах в прогрессиях, к-рая справедлива для любого поля k. В нек-рых частных случаях Г. Вебер доказал изоморфность группы Галуа поля классов $G(K/k)$ и группы классов A_f/H_f поля k.

К Д. Гильберту (D. Hilbert) восходит совершенно новая точка зрения на теорию полей классов, к-рая сохранилась до настоящего времени. Он понял, что между всеми относительно абелевыми расширениями поля k и всеми полями классов для этого поля должно существовать взаимно однозначное соответствие. Это соответствие выглядит так. Если для нек-рого ведущего модуля f построить группу классов Вебера, то найдется только одно нормальное расширение K/k, в к-ром простые идеалы главного класса Вебера, и только они, будут целиком распадаться, причем группа Галуа поля K/k изоморфна группе классов Вебера, а дискриминант D поля K/k состоит из тех же простых идеалов, что и ведущий модуль f. Верно и обратное: если дано нек-рое абелево расширение K/k с группой Галуа $G(K/k)$, то существует правило (сформулированное впоследствии Т. Такаги), по к-рому можно однозначно построить главный класс H_f так, что группа классов A_f/H_f изоморфна группе Галуа $G(K/k)$, и только простые идеалы главного класса H_f вполне разложимы в K, а ведущий модуль f имеет те же простые делители, что и дискриминант D поля K/k. Эта двойственность полей классов и абелевых расширений была высказана Д. Гильбертом в 1900 в качестве гипотезы (доказательства были даны им лишь для частных случаев). В общем виде она доказана Т. Такаги.

Следующий важный этап в развитии теории полей классов связан с именем Э. Артина (E. Artin), выявившего особую роль канонич. изоморфизма между группой Галуа и группой классов идеалов и показавшего, что эту роль играет *Фробениуса автоморфизм* $\sigma_\mathfrak{p}$ абелевого расширения K/k, к-рый задается сравнением

$$a^{N\mathfrak{p}} \equiv \sigma_\mathfrak{p} a \pmod{\mathfrak{p}},$$

где $N\mathfrak{p}$ — абсолютная норма идеала $\mathfrak{p}$, a пробегает все числа поля K, $\mathfrak{p}$ — простой идеал поля k. Автоморфизм $\sigma_\mathfrak{p}$ (имеющий теперь обозначение $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right)$ зависит только от класса идеалов, к-рому принадлежит $\mathfrak{p}$, и обладает мультипликативным свойством.

$$\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}_1}\right)\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}_2}\right) = \left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}\right),$$

причем символ в правой части понимается как автоморфизм класса, к-рому принадлежит $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$. На основании этого Э. Артин ввел символ $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right)$ на всей группе A_f идеалов $\mathfrak{a}$ поля k, взаимно простых с ведущим модулем f. Он наз. символом Артина и осуществляет изоморфизм группы классов A_f/H_f и группы Галуа $G(K/k)$, явный вид к-рого выражается законом взаимности Артина

$$\left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right) = 1$$

только в том случае, если $\mathfrak{a} \in H_f$ (взаимность понимается пока в групповом смысле, как соответствие между $G(K/k)$ и A_f/H_f). Отсюда можно получить классич. форму *взаимности закона* на языке символа Кум-

мера степенного вычета (рассмотрев поле $K=k(\sqrt[n]{a})$. Из этой формы, в свою очередь, можно получить закон взаимности на языке символа Гильберта. Во всех трех видах закон взаимности рассматривается как изоморфизм групп, а символы Артина, Куммера и Гильберта — как групповые элементы, осуществляющие этот изоморфизм. Но каждый из них имеет и численное значение, равное нек-рому корню n-й степени из 1. Поэтому закон взаимности может быть сформулирован в следующей форме. Если известно значение символа $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n$, то требуется выяснить, каково значение взаимного к нему символа $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_n$, т. е. выяснить явный вид функции от (α, β), определяющий произведение $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1}$. Именно в такой форме этот закон и появился впервые у К. Гаусса (см. *Гаусса закон взаимности*) для квадратичного поля и у Э. Куммера для кругового поля простой степени. В дальнейшем К. Якоби (C. Jacobi), Ф. Г. М. Эйзенштейн (F. G. M. Eisenstein), Д. Гильберт, Х. Хассе (H. Hasse) и др. продолжали исследование закона взаимности в таком виде, но ими были получены лишь частные результаты. В общем виде эта проблема была решена в 1948 И. Р. Шафаревичем [6] на основе идеи, состоящей в выявлении связи между арифметич. определением символа $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$ с аналитич. определением абелевого дифференциала $\alpha\cdot d\beta$ на римановой поверхности, И. Р. Шафаревичем была создана конструкция символа $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$, к-рая в точности соответствует определению вычета абелева дифференциала $\alpha\cdot d\beta$ в $\mathfrak{p}$-адическом поле. Для этого он ввел E-функции, наз. также ф у н к ц и я м и Ш а ф а р е в и ч а, на языке к-рых и получил явный вид закона взаимности в общем случае.

В конце 20-х гг. 20 в. Х. Хассе ввел в теорию полей классов л о к а л ь н ы й п р и н ц и п и передоказал многие теоремы для случая абелевого расширения K_p локального поля k_p. Первоначально этот принцип играл второстепенную роль (он получался в качестве следствия глобальной теории). Но в конце 30-х гг. К. Шевалле (C. Chevalley) показал необычайную важность локальной точки зрения для всего здания теории полей классов. Он ввел понятие группы иделей и на ее языке изложил общую теорию полей классов с локальной точки зрения. После этого в теории полей классов утвердился локально глобальный принцип. В дальнейшем он развивался и дополнялся (см. [5]), и в результате теория полей классов для абелевых расширений приняла стройный и завершенный вид. Встал вопрос о создании неабелевой теории полей классов для нормальных расширений с неабелевой группой Галуа.

Все вышеизложенное относилось к качественным сторонам А. т. ч. В вопросах количественных оценок и методов их получения А. т. ч. тесно переплетается с аналитич. теорией чисел. Она также базируется в значительной мере на свойствах ζ-функций и L-рядов алгебраич. полей.

Лит.: [1] Б о р е в и ч З. И., Ш а ф а р е в и ч И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] П о с т н и к о в М. М., Теория Галуа, М., 1963; [3] В е й л ь Г., Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1947; [4] Л е н г С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966; [5] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [6] Ш а ф а р е в и ч И. Р., «Матем. сб.», 1950, т. 26, в. 1, с. 113—46; [7] Проблемы Гильберта, М., 1969; [8] A r t i n E., T a t e J., Class field theory, N.Y.— [a.o.], 1967; [9] W e i l A., Basic number theory, B.,— [a.o.], 1967; [10] L a n g S., Algebraic numbers, Reading [Mass.], 1964; [11] Б у р б а к и Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

А. И. Виноградов.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ — область математики, возникшая для изучения таких свойств геометрич. фигур (в широком смысле — любых объектов, где можно говорить о непрерывности) и их отображений

друг в друга, к-рые не меняются при непрерывных деформациях (гомотопиях). В принципе, целью А. т. является полное перечисление таких свойств. Само назв. «А. т.» происходит от определяющей роли алгебраич. понятий и методов в решении задач этой области. Наиболее фундаментальными классами объектов, свойства к-рых изучаются в А. т., являются: *комплексы* (многогранники, полиэдры) — симплициальные, клеточные и др.; *многообразия* — замкнутые, открытые, с краем (границей), подразделяющиеся в свою очередь на гладкие (дифференцируемые), аналитические, комплексно аналитические, кусочно линейные и, наконец, чисто непрерывные (топологические); косые произведения (*расслоения*) и их сечения. Основные типы отображений, рассматриваемые в А. т.,— это произвольные непрерывные, кусочно линейные, гладкие отображения или их важнейшие подклассы: *гомеоморфизмы*, в частности непрерывные кусочно линейные или гладкие (*диффеоморфизмы*); вложения одного объекта в другой, а также погружение (локальное вложение, иммерсия).

Важнейшим понятием А. т. является понятие *деформации*. Деформации подвергается отображение какого-то класса одного объекта в другой. Основными типами деформаций являются: гомотопия, или произвольная непрерывная (гладкая, кусочно линейная) деформация, непрерывного отображения; изотопия (непрерывная, гладкая, кусочно линейная) — деформация гомеоморфизма, вложения или погружения, где в процессе деформации в каждый момент времени отображение остается гомеоморфизмом, вложением или погружением.

Главные внутренние проблемы А. т. — это проблема классификации многообразий относительно гомеоморфизмов (непрерывных, гладких, кусочно линейных), классификация вложений (или погружений) относительно изотопий (регулярных гомотопий), классификация общих непрерывных отображений относительно гомотопий. Важную промежуточную роль в решении этих задач играет проблема классификации комплексов или многообразий относительно так наз. гомотопич. эквивалентности или *гомотопического типа*.

Большую роль в развитии А. т. играли следующие задачи, носящие несколько более частный характер.

1) Обычно проблему вложения понимают не в самой общей форме, а лишь для вложений в евклидово пространство. Особо важным частным случаем здесь является *узлов теория* (и зацеплений) в трехмерном пространстве, к-рая послужила одним из главных истоков А. т. К этому случаю примыкает также *кос теория*.

2) Заметную роль в истории А. т. играла теория гомологич. инвариантов расположения различных множеств в евклидовом пространстве и законов двойственности (см. *Двойственность* в алгебраич. топологии), связывающих гомологии множества и дополнения к нему.

3) Ряд фундаментальных результатов был получен о вычислении алгебраич. числа неподвижных точек отображения многообразия в себя; особенно много глубоких фактов было здесь открыто для неподвижных точек компактных гладких групп преобразований — даже циклич. групп конечного порядка.

4) Большую технич. роль в развитии А. т. сыграли методы, развитые для решения так наз. задачи о кобордизме: найдется ли многообразие с краем *(кобордизм)*, границей к-рого служит заданное замкнутое многообразие. Вопросы такого рода возникли впервые в связи с вычислением *гомотопических групп* сфер. Важны случаи, когда задача о кобордизме решается до конца на языке *характеристических классов*.

5) Накоплено много фактов о гомологич. инвариантах особенностей векторных, реперных, тензорных полей и особенностей гладких отображений многообра-

зий друг в друга и, в частности, в евклидово пространство. Решение этой задачи приводит, в частности, к характеристич. классам. Особо важным случаем являются стационарные точки гладких функций на многообразиях или различных функционалов на пространствах путей (экстремалей) — их связь с *гомологий теорией* играет большую роль в выяснении геометрич. строения многообразий, оценке снизу числа экстремалей.

6) Исследование алгебро-топологич. свойств важнейших специальных пространств — *Ли групп* — тесно связано с их алгебраич. структурой, их представлениями, вариационным исчислением на группах Ли. Результаты о топологич. строении групп Ли лежат в основе многих методов и фактов А. т., относящихся к любым многообразиям. К группам Ли по методам примыкает А. т. однородных многообразий.

7) Особую роль в А. т. играют специальные инварианты, связанные с различными алгебраич. структурами над *фундаментальной группой*. Простейшие инварианты такого типа появились в теории узлов и трехмерных многообразий; в дальнейшем их алгебраич. теория существенно развилась и выделилась в алгебраич. дисциплину — стабильную алгебру, или *алгебраическую К-теорию*.

8) Анализ геометрич. строения громадного числа примеров простейших наиболее часто встречающихся типов многообразий (напр., групп Ли, однородных пространств, многообразий линейных элементов, многообразий с дискретными группами движений), а также фундаментальные основы римановой геометрии приводят к понятию косого произведения (расслоения), составленного из сомножителей — базы и слоя, всего пространства произведения вместе с проекцией на базу, структурной группы преобразований слоя. В связи с этим к числу центральных проблем А. т. относятся также проблема классификации косых произведений и проблема классификации их сечений относительно гомотопии. Особо важными являются *главные расслоения* и *векторные расслоения*.

Метод, с помощью к-рого решаются все основные вопросы А. т., состоит в построении алгебраич. инвариантов, эффективно вычислимых в конкретных примерах и принимающих какую-то дискретную совокупность значений; значение инварианта не должно меняться при деформациях в соответствующем классе отображений, для изучения к-рого этот инвариант построен. Большое количество необходимых инвариантов, богатство алгебраич. связей между ними и трудность их вычисления определили, в конечном счете, современное лицо А. т.

Вычисление алгебро-топологич. инвариантов простейших часто встречающихся многообразий не всегда является легким делом. Напр., вычисление гомологич. инвариантов групп Ли и многих однородных пространств потребовало больших усилий и использования сложных методов. Еще труднее вычислять гомотопич. группы. Ряд наиболее важных гомотопич. групп для групп Ли был неожиданным образом вычислен с помощью вариационной теории геодезических; знание таблицы этих гомотопич. групп для групп Ли позволило классифицировать векторные расслоения.

Большинство алгебро-топологич. инвариантов представляет собой так наз. *функтор* на категории топологич. пространств изучаемого типа. Это означает, грубо говоря, что значения инварианта естественно преобразуются при отображениях пространств друг в друга: напр., фундаментальные группы любых пространств или их группы (кольца) гомологий (когомологий) испытывают гомоморфизмы при непрерывных отображениях; характеристич. классы (отмеченные элементы в гомологиях) переходят друг в друга при гомеоморфизмах многообразий; результат применения когомологич.

операции к элементу гомологий (когомологий) переходит, после непрерывного отображения пространства, в результат применения этой операции к образу этого элемента и т. д.

Одно из главных свойств, лежащее в основе изучения и применений почти всех алгебро-топологич. инвариантов, заключается в том, что их эффективное построение, как правило, связано с существенно дополнительной геометрич. структурой: построение всех основных инвариантов гомеоморфизма для комплексов требует разбиения на симплексы или клетки, в то время как результат построения должен быть инвариантен относительно всех непрерывных гомеоморфизмов и даже гомотопич. эквивалентностей — напр., фундаментальная группа, *эйлерова характеристика*, *гомологии группа* (группа Бетти), *когомологий кольцо*, *когомологические операции*. Точно так же построение всех основных инвариантов гомеоморфизма для гладких многообразий требует либо их предварительной триангуляции и тем самым сведения к комплексам, либо существенного использования средств анализа; напр., построение кольца когомологий через дифференциальные формы (кососимметрич. тензоры) и дифференциальные операции над ними, либо построение характеристич. классов через особенности векторных, реперных или тензорных полей. Более того, иногда необходимо использовать средства римановой геометрии — напр., существенную роль играет определение характеристич. классов многообразия или косого произведения через риманову кривизну, хотя результат инвариантен относительно всех непрерывных гомеоморфизмов. В связи с этим в истории топологии появление основных эффективно вычислимых инвариантов было связано с трудным вопросом о том, как доказать инвариантность этой величины. Это — еще один тип проблем, существовавших в А. т. Напр., рациональные характеристич. классы (или интегралы от классов по циклам) оказались топологически инвариантными, а гомотопически неинвариантными. Полные целочисленные характеристич. классы оказались неинвариантными относительно непрерывных и даже кусочно линейных гомеоморфизмов.

Напротив, если инвариант строится так, что он с самого начала — по определению — инвариантен относительно непрерывных гомеоморфизмов (или более общего класса преобразований — гомотопич. эквивалентностей), то этот инвариант, как правило, трудно вычислять. Важнейшим таким инвариантом являются гомотопич. группы или классы гомотопных отображений сферы в изучаемое пространство. Даже в ряде простейших примеров вычисление гомотопич. групп приводит к большим трудностям. Так, гомотопич. группы самих сфер неизвестны полностью, несмотря на большое количество методов, к-рые были найдены для их вычисления в процессе развития А. т.

В основе методов классификации гомотопич. классов отображений лежит теория гомологий в соединении с теорией косых произведений, где возникает аппарат спектральных последовательностей, а также когомологич. операции и их обобщения. Алгебраич. дисциплина, возникшая на базе сложных вычислительных средств А. т., связанных с теорией гомологий, наз. *гомологической алгеброй*.

Все основные первичные построения теории гомологий для комплексов и гладких многообразий через триангуляцию или дифференциальные формы носят эффективный комбинаторно-алгебраич. или аналитич. характер. Вместе с тем в процессе развития А. т. было замечено, что теория гомологий полностью определяется небольшим набором своих формальных свойств (аксиом), к-рые и лежат в основе всех ее вычислительных средств:

1) Гомотопическая инвариантность групп гомологий.

2) При непрерывных отображениях пространств их группы гомологий отображаются друг в друга гомоморфно, причем суперпозиции отображений соответствует суперпозиция этих гомоморфизмов (функториальность).

3) Постулируется определенная форма связи между когомологиями комплекса, подкомплекса и факторкомплекса (аксиома точности).

4) Так наз. аксиома вырезания.

5) Нормировка: надо знать группы гомологий лишь для точки и знать, что они равны нулю в ненулевых размерностях.

Позднее было замечено, что объекты совершенно различной геометрич. природы могут обладать всеми этими свойствами, кроме последнего (нет нормировки). Такие объекты были названы обобщенными, или экстраординарными теориями гомологий; они использованы для усовершенствования вычислительных методов А. т. Важнейшим примером является *K-теория*, построенная из линейных (векторных) косых произведений над изучаемым пространством вместо его циклов или дифференциальных форм, из к-рых строились обычные группы гомологий. Другой важный пример — теория кобордизмов (бордизмов), где вместо любых циклов берутся только отображения замкнутых многообразий в изучаемое пространство, а вместо любых пленок — только отображения многообразий с краем какого-то класса.

Соединение методов А. т. с небольшим числом непосредственно геометрич. фактов о строении многообразий и их групп гомеоморфизмов привело, в конечном счете, к более или менее полному с современной точки зрения решению задачи о классификации многообразий относительно всех видов гомеоморфизмов (гладких, кусочно линейных, непрерывных), а также к решению основных задач о классификации вложений и погружений. Исключение представляют, как ни странно, задачи, связанные с трехмерными и четырехмерными многообразиями, где основные проблемы не решены (1977).

Ввиду завершенности ряда основных внутренних проблем собственно А. т., ее современные усилия постепенно переключаются на применение сложившихся идей к различным задачам других областей.

Лит.: [1] Атья М. Ф., Лекции по *K*-теории, пер. с англ., М., 1967; [2] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.— Л., 1938; [3] Милнор Дж., Теория Морса, пер. с англ., М., 1965; [4] его же, Теорема об h-кобордизме, пер. с англ., М., 1969; [5] его же, Особые точки комплексных гиперповерхностей, пер. с англ., М., 1971; [6] его же, «Математика», 1959, т. 3, № 4, с. 3—53; 1965, т. 9, № 4, с. 3—40; [7] Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология, пер. с англ., М., 1972; [8] Хуцзян, Теория гомотопий, пер. с англ., М., 1964; [9] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [10] Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, пер. с англ., М., 1960; [11] Лере Ж., Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии, пер. с франц., 1961; [12] Чжень Шэншень, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [13] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [14] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947; [15] Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, 2 изд.. М., 1976; [16] его же, Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976; [17] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [18] Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л., Гомотопическая топология, М., 1969; [19] Новиков С. П. [и др.], «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, вып. 5; [20] Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геомстрии, пер. с англ., М., 1973.

С. П. Новиков.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОЧКА ВЕТВЛЕНИЯ, алгебраическая особая точка,— изолированная точка ветвления a конечного порядка аналитич. функции $f(z)$, обладающая тем свойством, что для любого элемента аналитич. продолжения этой функции, регулярного в области, имеющей точку a границ-

ной точкой, существует предел $\lim_{z\to a} f(z)$. Точнее, точка a плоскости комплексного переменного z, являющаяся особой для полной *аналитической функции* $f(z)$ при продолжении нек-рого правильного элемента e_0 этой функции с центром z_0 вдоль путей, проходящих через a, наз. а л г е б р а и ч е с к о й т о ч к о й в е т в л е н и я, если выполняются следующие условия. 1) Существует такое положительное число ρ, что элемент e_0 может быть продолжен вдоль любой непрерывной кривой, лежащей в кольце $D=\{z;\ 0<|z-a|<\rho\}$. 2) Существует такое натуральное $k>1$, что если z_1 — любая точка кольца D, то аналитич. продолжение элемента e_0 в кольце D дает в точности k различных элементов функции $f(z)$ с центром z_1; если e_1 — какой-либо элемент с центром z_1, то все остальные $k-1$ элементов с центром z_1 получаются аналитич. продолжением по замкнутым путям, охватывающим точку a. 3) Значения всех элементов, получаемых из e_0 продолжением в D в точках z кольца D, стремятся к определенному, конечному или бесконечному, пределу, когда z стремится к a, оставаясь в D.

Число $k-1$ наз. п о р я д к о м А. т. в. Все ветви функции $f(z)$, получаемые аналитич. продолжением элемента e_0 в кольце D, могут быть представлены в проколотой окрестности точки a при помощи обобщенного ряда Лорана (р я д а П ю и з ё):

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^{n/k},\quad m\geqslant 0.$$

Бесконечно удаленная точка $a=\infty$ наз. А. т. в. для функции $f(z)$, если точка $b=0$ является А. т. в. функции $g(w)=f(1/w)$.

Может существовать несколько (и даже бесконечно много) различных А. т. в. и правильных точек полной аналитич. функции с одним и тем же аффиксом a.

Лит.: [1] М а р к у ш е в и ч А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 8; [2] Г у р в и ц А., К у р а н т Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968, ч. 3, гл. 4.

Е. Д. Соломенцев.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция $y=f(x_1, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющая уравнению

$$F(y, x_1, \ldots, x_n)=0, \qquad (1)$$

где F — неприводимый многочлен от $y, x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из нек-рого поля K, наз. п о л е м к о н с т а н т. А. ф., заданная над этим полем, наз. А. ф. над полем K. Многочлен $F(y, x_1, \ldots, x_n)$ часто записывается по степеням переменного y, так что уравнение (1) приобретает вид

$$P_k(x_1, \ldots, x_n)\,y^k+P_{k-1}(x_1, \ldots, x_n)\,y^{k-1}+\ldots+$$
$$+P_0(x_1, \ldots, x_n)=0,$$

где $P_k(x_1, \ldots, x_n), \ldots, P_0(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлены от $x_1, \ldots, x_n$, причем $P_k(x_1, \ldots, x_n)\not\equiv 0$. Число k — степень многочлена F относительно y, наз. степенью А. ф. В случае $k=1$ А. ф. может быть представлена в виде отношения

$$y=-\frac{P_0(x_1, \ldots, x_n)}{P_1(x_1, \ldots, x_n)}$$

многочленов и наз. рациональной функцией от $x_1, \ldots, x_n$. При $k=2, 3, 4$ А. ф. может быть выражена через квадратные и кубич. радикалы от рациональных функций переменных $x_1, \ldots, x_n$; при $k>4$ это, вообще говоря, невозможно.

Исторически сложилось три подхода к теории А. ф.: теоретико-функциональный, возникновение к-рого связано в первую очередь с работами Н. Абеля (N. Abel), К. Вейерштрасса (K. Weierstrass) и Б. Римана (B. Riemann), арифметико-алгебраический, восходящий к Р. Дедекинду (R. Dedekind), Г. Веберу (H. Weber) и К. Гензелю (K. Hensel) и алгебро-геометрический, бе-

руций свое начало от работ А. Клебша (A. Clebsh), М. Нётера (M. Noether) и др. (см. *Алгебраическая геометрия*). Первое направление в теории А. ф. одного переменного связано с изучением А. ф. над полем комплексных чисел и рассмотрением их как мероморфных функций на римановых поверхностях и комплексных многообразиях; важнейшие применяемые здесь методы — геометрич. и топологич. методы теории аналитич. функций. Арифметико-алгебраич. подход связан с изучением А. ф. над произвольными полями. Применяемые методы — чисто алгебраические. Особенно большое значение имеют теории нормирований и расширений полей. При алгебро-геометрич. подходе А. ф. рассматриваются как *рациональные функции* на алгебраич. многообразии, а их изучение ведется методами алгебраич. геометрии. Первоначально эти подходы различались не только по методам и по способу изложения, но и по терминологии. На современном этапе такое разделение направлений представляется в значительной мере условным, ибо в функциональном направлении широко используются алгебраич. методы, а многие результаты, полученные в первом направлении с помощью теоретико-функциональных и топологич. методов, успешно переносятся на случай более общих полей при помощи алгебраич. аналогов функциональных и топологич. методов.

Алгебраические функции одного переменного. Над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел А. ф. одного переменного $y=f(x)$ [*в упрощенной записи* — $y(x)$] является k-значной аналитич. функцией. Если обозначить через $D(x)$ дискриминант многочлена

$$F(x,\ y)=P_k(x)\,y^k+\ldots+P_1(x)\,y+P_0(x), \qquad (2)$$
$$P_k(x)\not\equiv 0,$$

(т. е. многочлена, для к-рого $F(x,\ f(x))=0$), получающийся исключением y из уравнений

$$F(x,\ y)=0,\quad \frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}=0,$$

и составить уравнение

$$P_k(x)\,D(x)=0,$$

то корни $x_1,\ \ldots,\ x_m$ этого последнего уравнения наз. критическими значениями А. ф. $y=f(x)$. Дополнительное множество $G=\mathbb{C}-\{x_1,\ \ldots,\ x_m\}$ наз. некритическим множеством. Для любой точки $x_0\in G$ уравнение (2) имеет k различных корней $y_0^1,\ \ldots,\ y_0^k$, причем выполняются условия

$$\frac{\partial F(x_0,\ y_0^j)}{\partial y}\neq 0,\ j=1,\ \ldots,\ k.$$

По теореме о неявных функциях, в окрестности точки x_0 существует k однозначных аналитич. функций $f_0^1(x)$, $\ldots$, $f_0^k(x)$, удовлетворяющих условиям

$$f_0^j(x_0)=y_0^j,\ F(x,\ f_0^j(x))=0$$

и разлагающихся в сходящиеся ряды

$$f_0^j(x)=y_0^j+\alpha_1^j(x-x_0)+\alpha_2^j(x-x_0)^2+\ldots \qquad (3)$$

Таким образом, для каждой точки $x_0\in G$ строится k элементов аналитич. функций, наз. функциональными элементами с центром в точке x_0. Для любых двух точек $x_1,\ x_2\in G$ любые элементы $f_1^j(x)$ и $f_2^j(x)$ с центрами, соответственно, x_1 и x_2, получаются друг из друга аналитич. продолжением вдоль нек-рой кривой, лежащей в G; в частности, таким способом связаны и любые два элемента с одним центром. Если x_0 — критич. точка А. ф., то возможны два случая: 1) x_0 — корень дискриминанта, т. е. $D(x_0)=0$, но $P_k(x_0)\neq 0$; 2) $P_k(x_0)=0$.

Случай 1. Пусть K_0 — малый круг с центром в x_0, не содержащий других критич. точек, а $f_1'(x), \ldots, f_k'(x)$ — система регулярных элементов с центром в $x' \in K_0$, $x' \neq x_0$. Эти функции остаются ограниченными при $x \to x_0$. Пусть, далее, D — окружность с центром x_0, проходящая через x'; она целиком лежит внутри K_0. Аналитич. продолжение нек-рого элемента, напр., $f_1'(x)$, вдоль окружности D (скажем, обходя x_0 по часовой стрелке) приводит к элементу $f'(x)$, также принадлежащему системе элементов с центром x'. Эта система состоит из k элементов, и нек-рое (минимальное) конечное число $a_1 \leqslant k$ таких обходов приводит к исходному элементу $f_1'(x)$. Получается подсистема $f_1'(x)$, $f_2'(x), \ldots, f_{a_1}'(x)$ элементов с центром x'; каждый из этих элементов может быть получен аналитическим продолжением другого путем обходов вокруг точки x_0; такая подсистема наз. цикл ом. Вся система $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ разбивается на нек-рое число непересекающихся циклов

$$\{f_1'(x), \ldots, f_{a_1}'(x)\}, \quad \{f_{a_1+1}'(x), \ldots, f_{a_1+a_2}'(x)\}, \ldots,$$

$$\{f_{a_1+\ldots+a_{s-1}+1}'(x), \ldots, f_{a_1+\ldots+a_s}'(x)\},$$

$a_1+a_2+\ldots+a_{s-1}+a_s=k$. Элемент $f_1'(x)$ не является (в случае $a_1>1$) однозначной функцией от x в круге K_0, но будет однозначной аналитич. функцией от параметра $\tau=\sqrt[a_1]{x-x_0}$ в окрестности точки $\tau=0$. В нек-рой окрестности этой точки элементы $f_1'(x), \ldots, f_{a_1}'(x)$ первого цикла представимы в виде сходящихся рядов

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^1 \tau^i = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^1 (x-x_0)^{i/a_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{a_1}'(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^{a_1} \tau^i = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^{a_1} (x-x_0)^{i/a_1}; \end{aligned} \tag{4}$$

аналогичные разложения имеют место для элементов других циклов. Такие разложения элементов по дробным степеням разности $x-x_0$, где x_0 — критич. точка, наз. рядами Пюизё. Преобразованием $\tau \to \tau r$, $r=e^{2\pi i/a}$, соответствующим однократному обходу вокруг x_0, ряды Пюизё элементов одного цикла переводятся друг в друга в циклич. порядке, т. е. происходит циклич. перестановка рядов и соответствующих элементов. Обходам вокруг критич. точки соответствуют перестановки элементов с центром в этой точке; эти перестановки состоят из циклов порядков $a_1, \ldots, a_s$, $\sum a_i = k$. Определяемые таким способом подстановки составляют группу монодромии А. ф. Если хотя бы одно из a_i больше 1, критич. точка x_0 наз. алгебраической точкой ветвления А. ф.; числа a_i (иногда a_i-1) наз. индексами (или порядками) ветвления А. ф.

Случай 2. Заменой функции y на $P_k(x)y$ сводится к 1); получаются разложения, аналогичные разложениям (4), к-рые могут содержать конечное число членов с отрицательными показателями:

$$f(x) = \sum_{i=-p}^{\infty} \alpha_i \tau^i = \sum_{i=-p}^{\infty} \alpha_i (x-x_0)^{i/a}. \tag{5}$$

При $p>0$ точка x_0 является полюсом порядка p А. ф. Обычно А. ф. рассматриваются на сфере Римана S, т. е. на комплексной плоскости, пополненной бесконечно удаленной точкой $x=\infty$. Введение переменной $\tau=1/x$ сводит этот случай к предыдущему; в окрестности точки $\tau=0$ ($x=\infty$) имеет место разложение

$$y(x) = \sum_{j=-r}^{\infty} \alpha_j \tau^{j/a} = \sum_{j=-r}^{\infty} \alpha_j x^{-j/a}. \tag{6}$$

При $r>0$ точка $x=\infty$ является полюсом порядка r.

Параметр разложения в рядах (3), (4), (5), (6) наз. локальной униформизующей для А. ф. Если x_0 — некритич. точка А. ф., таким параметром может быть $\tau = x - x_0$; если же x_0 — критич. точка, за параметр может быть принят корень $\sqrt[a]{x - x_0}$, где a — натуральное число. Совокупность всех описанных выше элементов А. ф. образует полную А. ф. в смысле Вейерштрасса. А. ф. не имеют других особенностей, кроме, быть может, алгебраич. точек ветвления и полюсов. Верно и обратное: функция $y = f(x)$, аналитическая и не более чем s-значная во всех точках сферы Римана, за исключением конечного числа точек $x_1, \ldots, x_m$ и $x = \infty$, а в этих точках имеющая лишь полюсы или алгебраич. точки ветвления, есть А. ф. степени $k \leqslant s$.

Риманова поверхность полной А. ф. компактна и является k-листным накрытием сферы Римана, точками разветвления к-рого являются, быть может, критич. точки и точка $x = \infty$. А. ф. представляют собой единственный класс функций, риманова поверхность к-рых компактна. Род римановой поверхности А. ф. играет важную роль; он наз. родом А. ф. Он вычисляется по *Римана — Гурвица формуле*. Род рациональной функции равен 0; ее риманова поверхность есть сфера Римана. Риманова поверхность эллиптич. функций, удовлетворяющих уравнениям 3-й и 4-й степеней, есть тор; род этих функций равен 1.

Универсальная накрывающая римановой поверхности А. ф. является односвязным двумерным многообразием, т. е. имеет тривиальную фундаментальную группу и конформно эквивалентна либо сфере Римана, либо комплексной плоскости, либо внутренности единичного круга. В первом случае А. ф. является рациональной, во втором — эллиптич. функцией; третий случай является общим.

С теорией римановых поверхностей А. ф. тесно связана проблема *униформизации* А. ф. Функция $y = f(x)$ может быть униформизована, если y и x представимы как однозначные аналитич. функции

$$y = y(t), \quad x = x(t)$$

параметра t, тождественно удовлетворяющие уравнению (2). Локально проблема униформизации решается при помощи локальной униформизующей; однако интерес представляет ее решение «в целом». При $k = 1$, т. е. когда $y(x)$ есть рациональная функция от x, за этот параметр может быть принято переменное $x - x_0$; при $k = 2$ униформизация достигается посредством рациональных или тригонометрич. функций. Напр., если $y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$y^2 - x^2 = 1,$$

то можно положить

$$y = \frac{t^2+1}{t^2-1}, \quad x = \frac{2t}{t^2-1} \text{ или } y = \sec t, \; x = \operatorname{tg} t.$$

При $k = 3, 4$, в случае А. ф. рода 1, униформизация достигается посредством *эллиптических функций*. Наконец, при $k > 4$, в случае А. ф. рода > 1, униформизация осуществляется при помощи *автоморфных функций*.

Алгебраические функции многих переменных. Если f — А. ф. от переменных $x_1, \ldots, x_n$, то множество всех рациональных функций $R(y, x_1, \ldots, x_n)$ образует поле K_f, совпадающее с полем рациональных функций на алгебраич. гиперповерхности в пространстве $(n+1)$ измерений, задаваемой уравнением $F(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Если поле констант k есть поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, а $n = 1$, то поле K_f совпадает с полем мероморфных функций на римановой поверхности А. ф. f. Поле K_f является расширением конечного типа поля констант k степени трансцендентности n (см. *Расширение* поля). В частности, любые $n+1$ элементов этого поля связаны алгебраич. уравнением и тем самым каждый из них определяет А.ф. от остальных элементов. Любое расширение

K конечного типа поля k степени трансцендентности n наз. полем алгебраических функций от n переменных (иногда функциональным полем). Каждое такое поле содержит чисто трансцендентное расширение $k(x_1, \ldots, x_n)$ поля k (называемое полем рациональных функций от n переменных). Любой элемент $y \in K$ удовлетворяет нек-рому алгебраич. уравнению $\Phi(y, x_1, \ldots, x_n)=0$ и может рассматриваться как А. ф. от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Каждое поле K А. ф. от n переменных изоморфно полю рациональных функций на нек-ром *алгебраическом многообразии* размерности n, называемом моделью поля K. Если поле констант k является алгебраически замкнутым полем характеристики 0, то каждое поле А. ф. имеет неособую проективную модель (см. *Разрешение особенностей*). Пусть S — множество всех нетривиальных *нормирований* поля А. ф. K, неотрицательных на поле констант. Снабженное естественной топологией, оно наз. абстрактной римановой поверхностью поля K [1]. В случае полей А. ф. от одной переменной риманова поверхность совпадает с множеством неособой проективной модели, к-рая в этом случае определена однозначно с точностью до изоморфизма. Многие понятия и результаты алгебраич. геометрии модели поля K можно переформулировать на языке теории нормирований поля (см. [1], [6]). Особенно близкая аналогия существует для полей А. ф. одного переменного, теория к-рых фактически совпадает с теорией алгебраич. кривых.

Каждое поле А. ф. от одного переменного является полем частных дедекиндова кольца, благодаря этому многие результаты и понятия теории делимости в полях алгебраич. чисел переносятся на случай функциональных полей [12]. Многие задачи и построения в теории алгебраич. чисел служат мотивировкой для аналогичных задач и построений в полях А. ф., и наоборот. Так, напр., перенос разложения Пюизё в теорию алгебраич. чисел привел к созданию К. Гензелем p-адического метода в теории чисел. Теория полей классов, первоначально относящаяся к алгебраич. числам, была позже перенесена на функциональный случай (см. [2]). Особенно близкая аналогия существует между полями алгебраич. чисел и полями А. ф. над конечным полем констант. Напр., для последних определяется понятие дзета-функции и доказывается аналог гипотезы Римана (см. *Дзета-функция* в алгебраической геометрии).

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1—2, М., 1963; [2] Серр Ж.-П., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [3] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1—2, М., 1962; [4] Чеботарёв Н. Г., Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948; [5] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [6] Шевалле К., Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной, пер. с англ., М., 1959; [7] Appell P., Coursat E., Théorie des fonctions algébriques, t. 1—2, P., 1929—30; [8] Dedekind R., Weber H., «J. reine und angew. Math.», 1879, Bd 92, S. 181—290; [9] Hensel K., Landsberg G., Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraischen Kurven und Abelsche Integrale, Lpz., 1902; [10] Picard E., Simart G., Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendants, t. 1—2, P., 1897, 1906; [11] Jung H. W. E., Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher, B., 1951; [12] Hasse H., Zahlentheorie, 2 Aufl., B., 1963; [13] Lang S., Algebraic functions, N.Y.—Amst., 1965.

А. Б. Жижченко.

АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАМКНУТОЕ ПОЛЕ — поле k, в к-ром всякий многочлен ненулевой степени над k имеет хотя бы один корень. В действительности, из алгебраич. замкнутости поля будет следовать, что каждый многочлен степени n над k имеет в k ровно n корней, т. е. каждый неприводимый многочлен из кольца многочленов $k[x]$ имеет степень 1. Поле k алгебраически замкнуто тогда и только тогда, когда оно не имеет собственного алгебраич. расширения (см. *Расширение* поля). Существует единственное с точностью до изоморфизма алге-

браич. расширение поля k, являющееся А. з. п.; оно наз. алгебраическим замыканием поля k и обычно обозначается через k. Всякое А. з. п., содержащее k, содержит подполе, изоморфное k.

Алгебраич. замыканием поля действительных чисел является поле комплексных чисел. Его алгебраич. замкнутость устанавливается *Алгебры основной теоремой*.

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, т. 1, пер. с англ., М., 1963; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

О. А. Иванова.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ — многочлен, наименее уклоняющийся от заданной функции. Точнее, пусть измеримая функция $f(x)$ интегрируема с p-й степенью ($p \geqslant 1$) на $[a, b]$ и H_n — множество алгебраич. многочленов степени не выше n. Величину

$$E_n(f)_p = \inf_{P_n(x) \in H_n} \| f(x) - P_n(x) \|_{L_p[a, b]} \qquad (*)$$

наз. *наилучшим приближением*, а многочлен, для к-рого нижняя грань достигается, наз. алгебраическим многочленом наилучшего приближения в $L_p[a, b]$. Многочлены, наименее уклоняющиеся от данной непрерывной функции в равномерной ($p = \infty$) метрике, впервые встретились (1852) у П. Л. Чебышева и были исследованы им в 1856 (см. [1]). Доказательство существования А. м. н. п. дано Э. Борелем [2]. П. Л. Чебышев показал, что $P_n^0(x)$ является А. м. н. п. в равномерной метрике тогда и только тогда, когда у разности $f(x) - P_n^0(x)$ существует *чебышевский альтернанс*; в этом случае такой многочлен единствен. При $p > 1$ А. м. н. п. единствен в силу строгой выпуклости пространства L_p. При $p = 1$ единственности нет, но для непрерывных функций единственность А. м. н. п. доказана Д. Джексоном [3]). Скорость стремления $E_n(f)_p$ к нулю оценивается в *Джексона теореме*.

Аналогично (*) определяется А. м. н. п. для большого числа m переменных. Если число переменных $m \geqslant 2$, то А. м. н. п. (в равномерной метрике), вообще говоря, не единствен.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полное собрание сочинений, т. 2, М., 1947, с. 478, с. 152—236; [2] Borel E., Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en série de polynômes, P., 1905; [3] Jackson D., «Amer. J. Math.», 1924, v. 46; [4] Гаркави А. Л., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969.

Ю. Н. Субботин.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ТОР — *алгебраическая группа*, изоморфная над нек-рым расширением основного поля прямому произведению конечного числа мультипликативных групп G_m. Группа $\hat{T}$ всех гомоморфизмов А. т. T в G_m наз. группой характеров А. т. T; она является свободной абелевой группой ранга, равного размерности А. т. T. Если А. т. T определен над полем k, то $\hat{T}$ наделяется структурой G-модуля, где G есть группа Галуа алгебраич. замыкания поля k. Функтор $T \to \hat{T}$ определяет двойственность между категорией А. т. над k и категорией $\mathbb{Z}$-свободных G-модулей конечного ранга. А. т., изоморфный произведению групп G_m над своим полем определения k, наз. расщепимым над k; всякий А. т. расщепляется над конечным сепарабельным расширением поля k. В теории алгебраич. групп А. т. играет роль, весьма схожую с ролью торов в теории групп Ли. Изучение А. т., определенных над полем алгебраич. чисел, занимает важное место в вопросах арифметики и классификации алгебраич. групп (см. *Линейная алгебраическая группа*, *Тамагавы число*).

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Ono T., «Ann. Math.», 1961, v. 74, p. 101—39; [3] его же, «Ann. Math.», 1963, v. 78, p. 47—73.

В. Е. Воскресенский.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ЦИКЛ на алгебраическом многообразии — элемент *свободной абе-*

левой группы, множество свободных образующих к-рой — все замкнутые неприводимые подмногообразия данного алгебраич. многообразия. Подгруппа группы $C(x)$ алгебраич. циклов на многообразии X, порожденная подмногообразием коразмерности p, обозначается через $C^p(X)$. Группа $C(X)$ представима в виде прямой суммы

$$C(X)=\oplus_p C^p(X).$$

Подгруппа $C^1(X)$ совпадает с группой *дивизоров* Вейля на X.

В дальнейшем X обозначает неособое проективное алгебраич. многообразие размерности n над алгебраически замкнутым полем k. Если k — поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, то каждый А. ц. $Z\in C^p(X)$ определяет $(2n-2p)$-мерный класс гомологий $[Z]\in H_{2n-2p}(X,\mathbb{Z})$ и, по двойственности Пуанкаре, класс когомологий $\gamma(Z)\in H^{2p}(X,\mathbb{Z})$. Классы гомологий (соответственно когомологий) вида $[Z]$ (соответственно $\gamma(Z)$) наз. а л г е б р а и ч е с к и м и к л а с с а м и г о м о л о г и й (соответственно к о г о м о л о г и й). Каждый аналитич. цикл гомологичен А. ц. Имеется предположение (г и п о т е з а Х о д ж а), что целочисленный $(2n-2p)$-мерный цикл Γ на X гомологичен А. ц. тогда и только тогда, когда интегралы всех замкнутых дифференциальных форм типа $(2p-q,\ q)$, $q\neq p$, по Γ равны 0. Эта гипотеза доказана лишь в случаях $p=1$ (для $n=2$ см. [6], для всех n см. [7]) и $p=n-1$, а также для отдельных классов многообразий (см. [4]).

Если $W=\sum n_i\ W_i$ — А. ц. на произведении двух многообразий $X\times T$, то множество циклов на X вида

$$\sum n_i\ W_i\cap(X\times\{t\})$$

наз. с е м е й с т в о м А. ц. на X, параметризованным базой T. При этом обычно требуют, чтобы проекция каждого подмногообразия W_i на T была плоским морфизмом. Если $W=W_i$ определяется неприводимым подмногообразием, то соответствующее семейство А. ц. на X наз. с е м е й с т в о м а л г е б р а и ч е с к и х п о д м н о г о о б р а з и й. В частности, для любого плоского морфизма $f\colon X\to Y$ алгебраич. многообразий его слои X_y образуют семейство алгебраич. подмногообразий X, параметризованное базой Y. Другим частным случаем этого понятия являются *линейные системы*. Все члены семейства алгебраич. подмногообразий (соответственно алгебраич. циклов) проективного многообразия X, параметризованного связной базой, имеют одинаковый *Гильберта многочлен* (соответственно виртуальный *арифметический род*).

А. ц. Z и Z' на многообразии X наз. а л г е б р а и ч е с к и э к в и в а л е н т н ы м и (что обозначается $Z\underset{\text{alg}}{\sim}Z'$), если они принадлежат одному и тому же семейству, параметризованному связной базой. Интуитивно эквивалентность А. ц. означает, что Z можно алгебраически деформировать в Z'. Если в этом определении требовать, чтобы в качестве базы T можно было выбрать рациональное многообразие, то А. ц. Z и Z' наз. р а ц и о н а л ь н о э к в и в а л е н т н ы м и (что обозначается $Z\underset{\text{rat}}{\sim}Z'$). В случае, когда $Z,\ Z'\in C^1(X)$, понятие рациональной эквивалентности сводится к понятию линейной эквивалентности дивизоров. Подгруппа А. ц., рационально (соответственно алгебраически) эквивалентных нулю, обозначается $C_{\text{rat}}(X)$ (соответственно $C_{\text{alg}}(X)$). Каждая из этих групп является прямой суммой своих компонент:

$$C^p_{\text{rat}}(X)=C_{\text{rat}}(X)\cap C^p(X),$$
$$C^p_{\text{alg}}(X)=C_{\text{alg}}(X)\cap C^p(X).$$

Факторгруппа $C^1(X)/C^1_{\text{alg}}(X)$ конечно порождена и наз. г р у п п о й Н е р о н а — С е в е р и многообразия X. Вопрос о конечной порожденности при $p>1$ фактор-

группы $C^p(X)/C^p_{\mathrm{alg}}(X)$ остается открытым (1977). Факторгруппа $C^1_{\mathrm{alg}}(X)/C^1_{\mathrm{rat}}(X)$ обладает структурой абелева многообразия (см. *Пикара схема*). Операция пересечения циклов позволяет определить умножение в факторгруппе $C(X)/C_{\mathrm{rat}}(X)$, превращающее ее в коммутативное кольцо, наз. кольцом Чжоу многообразия X (см. *Пересечений теория*).

Для любой теории когомологий Вейля $H^*(X)$ существует однозначно определенный гомоморфизм групп

$$\gamma: C^p(X) \longrightarrow H^{2p}(X).$$

А. ц. Z и Z' наз. гомологически эквивалентными (что обозначается $Z \underset{\mathrm{hom}}{\sim} Z'$), если $\gamma(Z)=\gamma(Z')$. Подгруппа А. ц., гомологически эквивалентных нулю, обозначается $C_{\mathrm{hom}}(X)$. Имеет место вложение $C_{\mathrm{alg}}(X) \subset C_{\mathrm{hom}}(X)$. Факторгруппа $C(X)/C_{\mathrm{hom}}(X)$ конечно порождена и является подкольцом в кольце $H^*(X)$, к-рое обозначается через $A^*(X)$ и наз. кольцом алгебраических классов когомологий Вейля. Неизвестно (1977), зависит ли $A^*(X)$ от выбранной теории когомологий Вейля.

А. ц. Z и Z' наз. τ-эквивалентными (что обозначается $Z \underset{\tau}{\sim} Z'$), если существует $m \geqslant 1$ такое, что $mZ \underset{\mathrm{alg}}{\sim} mZ'$. Подгруппа А. ц., τ-эквивалентных нулю, обозначается через $C_\tau(X)$. А. ц. Z и Z' из $C^p(X)$ наз. численно эквивалентными (что обозначается $Z \underset{\mathrm{num}}{\sim} Z'$), если для любого $W \in C^{n-p}(X)$ имеет место равенство $WZ = WZ'$, при условии, что обе части равенства определены. Подгруппа А. ц., численно эквивалентных нулю, обозначается через $C_{\mathrm{num}}(X)$. Имеют место включения

$$C_\tau(X) \subset C_{\mathrm{hom}}(X) \subset C_{\mathrm{num}}(X).$$

Для дивизоров группы $C_\tau(X) \cap C^1(X)$, $C_{\mathrm{hom}}(X) \cap C^1(X)$ и $C_{\mathrm{num}}(X) \cap C^1(X)$ совпадают [6]. Однако (как показывает построенный в [5] для случая $k=\mathbb{C}$ контрпример)

$$C_\tau(X) \neq C_{\mathrm{hom}}(X),$$

где $C_{\mathrm{hom}}(X)$ рассматривается относительно обычной теории когомологий с рациональными коэффициентами. Аналогичный контрпример построен для поля k произвольной характеристики и l-адической теории когомологий Вейля. Остается открытым (1977) вопрос о совпадении групп $C_{\mathrm{hom}}(X)$ и $C_{\mathrm{num}}(X)$.

Пусть X вложено в проективное пространство и L_X — класс когомологий гиперплоского сечения. Алгебраич. класс когомологий

$$x \in A^p(X) = A^*(X) \cap H^{2p}(X)$$

наз. примитивным, если $xL_X^{n-p}=0$. В случае, когда k есть поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, билинейная форма

$$(a,\ b) \longrightarrow (-1)^n L_X^{n-2p} ab$$

положительно определена на подпространстве примитивных классов в $A^p(X)$. Аналогичное утверждение для произвольного k, тесно связанное с гипотезами Вейля о дзета-функции на алгебраич. многообразии, доказано лишь для $n \leqslant 2$.

Если многообразие X определено над полем k, не являющимся алгебраически замкнутым полем, то группа Галуа сепарабельного алгебраич. замыкания $G(\bar{k}/k)$ поля k действует на когомологиях Вейля $H^*(\bar{X})$, где $\bar{X} = X \underset{k}{\otimes} \bar{k}$. Каждый элемент из $A^*(X)$ инвариантен относительно нек-рой подгруппы конечного индекса группы $G(\bar{k}/k)$. Имеется предположение (гипотеза Тейта об алгебраических циклах), что обратное утверждение также справедливо, если k конечно порождено над своим простым подполем. На

этом предположении основаны многие гипотезы о дзета-функции алгебраич. многообразия [2].

Лит.: [1] Бальдассари М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [2] Тэйт Дж., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 6, с. 27—40, пер. с англ.; [3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, 77—170; [4] Kleiman S. L., в сб.: Dix exposés sur cohomologie des schémas, Amst.—P., 1968, p. 359—86; [5] Griffiths P. A., «Ann. Math.», 1969, v. 90, № 3, p. 496—541; [6] Lefschetz S., L'Analysis situs et la géométrie algébrique, P., [1924]; [7] Hodge W., The theory and applications of harmonic integrals, Camb., 1941; [8] Groupes de monodromie en géométrie algébrique, B., 1973.

И. В. Долгачев.

АЛГЕБРАИЧЕСКИ-ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА — изолированная особая точка z_0 аналитич. функции $f(z)$, обладающая тем свойством, что в ее окрестности функция $f(z)$ может быть представлена как сумма конечного числа слагаемых вида

$$(z-z_0)^{-s}\,[\ln(z-z_0)]^k\,g(z),$$

где s — комплексное число, k — целое неотрицательное число и $g(z)$ — регулярная аналитич. функция в точке z_0, причем $g(z_0)\neq 0$.

Лит.: [1] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967.

Е. Д. Соломенцев.

АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ АРИФМЕТИКА, арифметическая алгебраическая геометрия,— направление в алгебраич. геометрии, изучающее свойства алгебраич. многообразий, определенных над полями так наз. арифметического типа, т. е. конечными, локальными и глобальными полями алгебраич. чисел или алгебраич. функций. В случае конечных полей основным является изучение числа рациональных точек алгебраич. многообразия в этих полях и их конечных расширениях. Используемая для такого изучения *дзета-функция* многообразия оказала большое влияние на развитие методов алгебраич. геометрии. Большое значение имеют также оценки числа точек снизу (см. [1], [4]).

Если X — алгебраич. многообразие (или схема) над локальным полем K с полем вычетов k, то рассмотрение множества $X(K)$ рациональных точек со значениями в K позволяет связать две совершенно различные задачи: нахождение решений сравнений (или точек многообразий над конечными полями) и целочисленных или рациональных решений диофантовых уравнений (см. *Хассе принцип*). Задавая многообразие X системой уравнений с коэффициентами из кольца A целых элементов поля K, можно определить редукцию этого многообразия той же системой уравнений, но с коэффициентами, взятыми по модулю максимального идеала кольца A. Получаются «многообразие» X_0 над полем вычетов k и канонич. отображение, или редукция:

$$\mathrm{Red}\colon X(K)\longrightarrow X_0(k).$$

Приведенное описание редукции трудно объяснить в рамках классич. алгебраич. геометрии. Это явилось одной из причин введения понятия *схем*, на языке к-рых описанный процесс допускает строгое определение. Основная задача состоит в определении образа отображения Red, т. е. в нахождении тех точек $x\in X_0(k)$, к-рые поднимаются до рациональных K-точек многообразия; *Гензеля лемма* утверждает, что это так, если x — неособая точка. Наиболее общие результаты об этом см. [4].

Другим кругом вопросов, относящихся к локальной А. м. а., является изучение форм над такими полями. Пусть F — форма от n переменных степени d над локальным полем; гипотеза Артина утверждает, что при $n>d^2$ уравнение $F=0$ имеет нетривиальное решение. В функциональном случае справедливость этого утверждения известна. Для p-адических полей доказано, что для каждого d имеется такое конечное число простых $A(d)$, что гипотеза Артина верна для форм степени d; если $p\notin A(d)$. В 1966 было показано, что уже мно-

жество A (L) не пусто, тем самым гипотеза Артина была опровергнута (см. [4]). Неизвестно (1977), верна ли она для форм нечетной степени.

А. м. а. над глобальными полями представляет собой наиболее обширную и разветвленную область алгебраич. геометрии. Сюда относятся диофантова геометрия, теория полей классов, теории дзета-функций многообразий, комплексное умножение абелевых функций (или многообразий). Все эти теории развиваются параллельным образом для числовых и функциональных полей. Впервые такая возможность была продемонстрирована развитием теории полей классов в 30-х гг. 20 в., она основана на глубокой аналогии между этими полями, получившей наиболее полное воплощение в конструкциях теории схем.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Вейль А., «Математика», 1958, т. 2, № 4; [3] Grothendieck A., Dieudonné J., Eléments de géométrie algébrique I, B., 1971; [4] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1970, М., 1971, с. 111—152; [5] Swinnerton-Dyer H. P. F., в кн.: Proceedings of Symposia in pure mathematics, v. 20, 1969, Providence, 1971.

А. Н. Паршин.

АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ КВАЗИМНОГООБРАЗИЕ — класс алгебраич. систем (Ω-систем), аксиоматизируемый при помощи специальных формул логич. языка 1-й ступени, к-рые наз. квазитождествами, или условными тождествами, и имеют вид:

$$(\forall x_1)\ \dots\ (\forall x_s)$$
$$\left[P_1\left(f_1^{(1)},\ \dots,\ f_{m_1}^{(1)}\right)\ \&\ \dots\ \&\ P_k\left(f_1^{(k)},\ \dots,\ f_{m_k}^{(k)}\right)\longrightarrow\right.$$
$$\left.\longrightarrow P_0\left(f_1^{(0)},\ \dots,\ f_{m_0}^{(0)}\right)\right],$$

где $P_0, P_1, \dots, P_k \in \{\Omega, =\}$, а $f_1^{(0)}, \dots, f_{m_k}^{(k)}$ — термы сигнатуры Ω от предметных переменных $x_1, \dots, x_s$. В силу теоремы Мальцева [1], А. с. к. $\mathfrak{K}$ сигнатуры Ω может быть определено также как абстрактный класс Ω-систем, содержащий единичную Ω-систему E и замкнутый относительно подсистем и фильтрованных произведений (см. [1], [2]). Аксиоматизируемый класс Ω-систем является квазимногообразием тогда и только тогда, когда он содержит единичную Ω-систему E и замкнут относительно подсистем и декартовых произведений. Если $\mathfrak{K}$ — квазимногообразие сигнатуры Ω, то подкласс $\mathfrak{K}_1$ тех систем $\mathfrak{A}$, которые изоморфно вложимы в подходящие системы из некоторого квазимногообразия $\mathfrak{K}$ сигнатуры $\Omega' \supseteq \Omega$, сам является квазимногообразием. Напр., класс полугрупп, вложимых в группы, есть квазимногообразие; класс ассоциативных колец без делителей нуля, вложимых в ассоциативные тела, также является квазимногообразием.

Квазимногообразие $\mathfrak{K}$ сигнатуры Ω наз. конечно определимым (или обладающим конечным базисом квазитождеств), если существует такое конечное множество S квазитождеств сигнатуры Ω, что $\mathfrak{K}$ состоит из тех и только тех Ω-систем, в к-рых истинны все формулы из множества S. Напр., квазимногообразие всех полугрупп с сокращением определяется двумя квазитождествами

$$zx = zy \longrightarrow x = y,\ xz = yz \longrightarrow x = y.$$

и потому конечно определимо. Напротив, квазимногообразие полугрупп, вложимых в группы, не имеет конечного базиса квазитождеств (см. [1], [2]).

Если $\mathfrak{K}$ — произвольный (не обязательно абстрактный) класс Ω-систем, то наименьшее среди квазимногообразий, содержащих $\mathfrak{K}$, наз. импликативным замыканием класса $\mathfrak{K}$. Оно состоит из подсистем изоморфных копий фильтрованных произведений Ω-систем из класса $\mathfrak{K} \cup \{E\}$, где E — единичная Ω-система. Если $\mathfrak{K}$ — импликативное замыкание класса Ω-систем $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ наз. порождающим клас-

сом квазимногообразия $\mathfrak{K}$. Квазимногообразие $\mathfrak{K}$ порождается одной системой тогда и только тогда, когда для любых двух систем A, B из $\mathfrak{K}$ существует в классе $\mathfrak{K}$ система C, содержащая подсистемы, изоморфные системам A, B (см. [1]). Всякое квазимногообразие $\mathfrak{K}$, содержащее неодноэлементную систему, обладает свободными системами любого ранга, к-рые являются одновременно свободными системами в эквациональном замыкании класса $\mathfrak{K}$. Квазимногообразия Ω-систем, содержащиеся в к.-л. фиксированном квазимногообразии $\mathfrak{K}$ сигнатуры Ω, составляют полную решетку относительно теоретико-множественного включения. Атомы решетки всех квазимногообразий сигнатуры Ω наз. минимальными квазимногообразиями сигнатуры Ω. Минимальное квазимногообразие $\mathfrak{M}$ порождается любой своей неединичной системой. Каждое квазимногообразие $\mathfrak{K}$, обладающее неединичной системой, содержит хотя бы одно минимальное квазимногообразие. Если $\mathfrak{K}$ — квазимногообразие Ω-систем конечной сигнатуры Ω, то все его подквазимногообразия составляют группоид относительно мальцевского $\mathfrak{K}$-умножения (см. [3]).

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [2] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Мальцев А. И., «Сиб. матем. ж.», 1967, т. 8, № 2, с. 346—65.

Д. М. Смирнов.

АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ КЛАСС — класс однотипных алгебраических систем. Все системы любого данного типа предполагаются записанными в определенной сигнатуре Ω и наз. Ω-системами. Класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем наз. абстрактным, если он содержит вместе с каждой своей системой A и все изоморфные ей Ω-системы.

Пусть $\mathfrak{K}$ — абстрактный класс Ω-систем. Говорят, что Ω-система A обладает локальной совокупностью $\mathfrak{K}$-подсистем, если существует направленное по включению множество $\{A_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$ подсистем A_α системы A, к-рые покрывают систему A (т. е. $\bigcup A_\alpha = A$) и принадлежат классу $\mathfrak{K}$. Класс $\mathfrak{K}$ наз. локальным, если каждая Ω-система A, обладающая локальной совокупностью $\mathfrak{K}$-подсистем, принадлежит классу $\mathfrak{K}$. Теоремы, устанавливающие локальность тех или иных абстрактных классов, принято наз. локальными (см. *Мальцева локальные теоремы*).

Ω-система A наз. $\mathfrak{K}$-аппроксимируемой (или $\mathfrak{K}$-резидуальной), если для любого предиката $P \in \{\Omega_p, =\}$ (т. е. для любого основного предиката, а также для предиката, совпадающего с отношением равенства в A) и для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ из A, для к-рых $P(a_1, \ldots, a_n) = \mathcal{И}$, существует гомоморфизм φ: $A \to B$ системы A в нек-рую систему B из класса $\mathfrak{K}$, при к-ром снова $P(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) = \mathcal{И}$. Любая подсистема $\mathfrak{K}$-аппроксимируемой системы сама $\mathfrak{K}$-аппроксимируема. Если $\mathfrak{K}$ — класс всех конечных Ω-систем, то $\mathfrak{K}$-аппроксимируемая система A наз. финитно аппроксимируемой (или резидуально конечной). Если абстрактный класс $\mathfrak{K}$ обладает единичной системой $E = \langle \{e\}, \Omega \rangle$, то Ω-система A $\mathfrak{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она изоморфно вложима в декартово произведение систем из класса $\mathfrak{K}$ (см. [3]). Класс $\mathfrak{K}$ наз. резидуальным, если всякая $\mathfrak{K}$-аппроксимируемая система принадлежит классу $\mathfrak{K}$. Класс $\mathfrak{K}$ наз. гомоморфно замкнутым, если он содержит с каждой своей Ω-системой A и все Ω-системы, являющиеся гомоморфными образами системы A. Всякий резидуальный гомоморфно замкнутый класс — локальный (см. [5]).

Класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем наз. (конечно) аксиоматизируемым, если существует такая (конечная) совокупность S замкнутых формул 1-й ступени сигнатуры Ω, что $\mathfrak{K}$ состоит из тех и только тех Ω-систем, в к-рых истинны все формулы из S. Конечно аксиомати-

зируемые классы наз. иначе э л е м е н т а р н ы м и к л а с с а м и. При помощи обобщенной гипотезы континуума доказано (см. [5]), что: 1) А. с. к. $\mathfrak{K}$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно ультрапроизведений и его дополнение (в классе всех Ω-систем) замкнуто относительно ультрастепеней; 2) А. с. к. $\mathfrak{K}$ элементарен тогда и только тогда, когда он и его дополнение замкнуты относительно ультрапроизведений. Теория аксиоматизируемых А. с. к. изучает связи между структурными свойствами рассматриваемых классов и синтаксич. особенностями формального языка, на к-ром эти классы могут быть заданы. Среди аксиоматизируемых классов особенно важную роль в алгебре играют многообразия (см. *Алгебраических систем многообразие*) и квазимногообразия (см. *Алгебраических систем квазимногообразие*), к-рые локальны и резидуальны.

Наряду с аксиоматизируемостью замкнутыми формулами 1-й ступени рассматривают также аксиоматизируемость при помощи специальных замкнутых формул 2-й ступени. К сигнатурным функциональным и предикатным символам $F_i (i \in I)$, $P_j (j \in I)$ фиксированной сигнатуры Ω присоединяют предикатные переменные R_1, R_2, ... Пусть $\mathfrak{F}$ — бескванторная формула 1-й ступени, составленная из сигнатурных функциональных и предикатных символов, предикатных переменных $R_1, \ldots, R_s$ и предметных переменных $x_1, \ldots, x_r$. Формула 2-й ступени $Q\,\mathfrak{F}$, где Q — нек-рая последовательность кванторов вида $(\forall R_i)$, $(\exists R_i)$ или $(\forall x_k)$, наз. к р и п т о у н и в е р с а л ь н о й. Формула 2-й ступени, образованная из криптоуниверсальных формул без свободных предметных переменных при помощи логич. связок $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ с последующим навешиванием квантора всеобщности $\forall$ на все свободные предикатные переменные, встречающиеся в записях криптоуниверсальных формул, наз. б у л е в о - у н и в е р с а л ь н о й ф о р м у л о й сигнатуры Ω. Класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем наз. к в а з и у н и в е р с а л ь н ы м, если существует такая совокупность S булево-универсальных формул сигнатуры Ω, что $\mathfrak{K}$ состоит из тех и только тех Ω-систем, в к-рых истинны все формулы из S. Квазиуниверсальный класс Ω-систем локален (т е о р е м а М а л ь ц е в а). Имеется более сложное определение квазиуниверсального класса, данное А. И. Мальцевым [4].

Лит.: [1] М а л ь ц е в А. И., «Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та», 1941, т. 1, в. 1, с. 3—9; [2] е г о ж е, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 3, с. 313—36; [3] е г о ж е, Алгебраические системы, М., 1970; [4] е г о ж е, в кн.: Тр. четвертого всес. матем. съезда. Ленинград, 1961, т. 1, Л., 1963; [5] К о н П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [6] C l e a v e J. P., «J. London Math. Soc.», 1969, v. 44, pt 1, № 173, p. 121—30.

Д. М. Смирнов.

АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ МНОГООБРАЗИЕ — *алгебраических систем класс* фиксированной сигнатуры Ω, аксиоматизируемый при помощи тождеств, т. е. формул вида

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_s)\ P\ (f_1, \ldots, f_n),$$

где P — к.-л. предикатный символ из Ω или знак равенства, а $f_1, \ldots, f_n$ — термы сигнатуры Ω от предметных переменных $x_1, \ldots, x_s$. А. с. м. наз. иначе э к в а ц и о н а л ь н ы м и к л а с с а м и, иногда п р и м и т и в н ы м и к л а с с а м и. Многообразие сигнатуры Ω может быть определено также (т е о р е м а Б и р к г о ф а) как непустой класс Ω-систем, замкнутый относительно подсистем, гомоморфных образов и декартовых произведений.

Пересечение всех многообразий сигнатуры Ω, содержащих данный (не обязательно абстрактный) класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем, наз. э к в а ц и о н а л ь н ы м з а м ы к а н и е м класса $\mathfrak{K}$ (или многообразием, порожденным классом $\mathfrak{K}$) и обозначается $\mathrm{var}\mathfrak{K}$. В частности, если класс $\mathfrak{K}$ состоит из одной Ω-системы $\boldsymbol{A}$, то его эквациональное замыкание обозначают $\mathrm{var}\boldsymbol{A}$. Если система $\boldsymbol{A}$

конечна, то все конечно порожденные системы в многообразии $\mathrm{var}\boldsymbol{A}$ также конечны [1], [2].

Пусть $\mathscr{L}$ — нек-рый класс Ω-систем, $S\mathscr{L}$ — класс подсистем систем из $\mathscr{L}$, $H\mathscr{L}$ — класс гомоморфных образов систем из $\mathscr{L}$, $\Pi\mathscr{L}$ — класс изоморфных копий декартовых произведений систем из $\mathscr{L}$. Для произвольного непустого класса $\mathfrak{K}$ Ω-систем имеет место соотношение (см. [1], [2]):

$$\mathrm{var}\,\mathfrak{K} = HS\Pi\mathfrak{K}.$$

Многообразие наз. т р и в и а л ь н ы м, если в каждой его системе истинно тождество $x=y$. Всякое нетривиальное многообразие $\mathfrak{M}$ обладает свободными системами $F_m(\mathfrak{M})$ любого ранга m и $\mathfrak{M}=\mathrm{var}\,F_{\aleph_0}(\mathfrak{M})$ (см. [1], [2]).

Пусть S — множество тождеств сигнатуры Ω и KS — класс всех Ω-систем, в к-рых истинны все тождества из S. Если для многообразия $\mathfrak{M}$ сигнатуры Ω выполняется равенство $\mathfrak{M}=KS$, то S наз. б а з и с о м для $\mathfrak{M}$. Многообразие $\mathfrak{M}$ наз. к о н е ч н о б а з и р у е м ы м, если оно имеет конечный базис S. Для любой системы $\boldsymbol{A}$ базис многообразия $\mathrm{var}\boldsymbol{A}$ наз. также б а з и с о м т о ж д е с т в системы $\boldsymbol{A}$. Если $\mathfrak{M}$ — конечно базируемое многообразие алгебр конечной сигнатуры и все алгебры из $\mathfrak{M}$ имеют дистрибутивные решетки конгруэнций, то каждая конечная алгебра $\boldsymbol{A}$ из $\mathfrak{M}$ имеет конечный базис тождеств (см. [10]). В частности, любая конечная решетка $\langle \boldsymbol{A}, \vee, \wedge\rangle$ обладает конечным базисом тождеств. Конечный базис тождеств имеет любая конечная группа [3]. Напротив, существует 6-элементная полугруппа [5] и 3-элементный группоид [6], у к-рых нет конечного базиса тождеств.

Многообразия Ω-систем, содержащиеся в к.-л. фиксированном многообразии $\mathfrak{M}$ сигнатуры Ω, составляют по включению полную решетку $L(\mathfrak{M})$ с нулем и единицей, к-рая наз. р е ш е т к о й п о д м н о г о о б р а з и й многообразия $\mathfrak{M}$. Нулем этой решетки служит многообразие с базисом $x=y$, $P(x_1, \ldots, x)$ ($P\in\Omega$), а единицей — многообразие $\mathfrak{M}$. Если многообразие $\mathfrak{M}$ нетривиально, то решетка $L(\mathfrak{M})$ антиизоморфна решетке всех *вполне характеристических конгруэнций* свободной в $\mathfrak{M}$ системы $F_{\aleph_0}(\mathfrak{M})$ счетного ранга [1]. Решетка L_Ω всех многообразий сигнатуры Ω бесконечна, кроме случая, когда множество Ω конечно и состоит лишь из предикатных символов. Известно точное значение мощности бесконечной решетки L_Ω (см. [1]). Решетка всех многообразий решеток $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ дистрибутивна и имеет мощность континуума [7], [8]. Решетка всех многообразий групп $\langle G, \cdot, ^{-1}\rangle$ модулярна, но не дистрибутивна [3], [4]. Решетка многообразий коммутативных полугрупп не модулярна [9].

Атомы решетки L_Ω всех многообразий сигнатуры Ω наз. м и н и м а л ь н ы м и м н о г о о б р а з и я м и сигнатуры Ω. Каждое многообразие, обладающее неединичной системой, содержит хотя бы одно минимальное многообразие. Если Ω-система $\boldsymbol{A}$ конечна и конечного типа, то многообразие $\mathrm{var}\boldsymbol{A}$ содержит лишь конечное число минимальных подмногообразий [1].

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — подмногообразия фиксированного многообразия $\mathfrak{M}$ Ω-систем. М а л ь ц е в с к и м п р о и з в е д е н и е м $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}\circ\mathfrak{B}$ наз. класс тех систем $\boldsymbol{A}$ из $\mathfrak{M}$, к-рые обладают такой конгруэнцией θ, что $(\boldsymbol{A}/\theta)\in\mathfrak{B}$, а все смежные классы a/θ ($a\in\boldsymbol{A}$), являющиеся системами из $\mathfrak{M}$, принадлежат $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{M}$ — многообразие всех групп, а $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — его подмногообразия, то произведение $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}\circ\mathfrak{B}$ совпадает с произведением в смысле Х. Нейман [3]. Произведение многообразий полугрупп может не быть многообразием. Многообразие $\mathfrak{M}$ Ω-систем наз. п о л я р и з о в а н н ы м, если существует такой терм $e(x)$ сигнатуры Ω, что в каждой системе из $\mathfrak{M}$ истинны тождества $e(x)=e(y)$, $F(e(x), \ldots, \ldots, e(x))=e(x)$ ($F\in\Omega$). Если $\mathfrak{M}$ — поляризованное мно-

гообразие алгебр и в каждой алгебре из $\mathfrak{M}$ конгруэнции перестановочны, то мальцевское произведение $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}\circ\mathfrak{B}$ любых подмногообразий $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{M}$ есть многообразие. В частности, можно говорить о группоиде $G_I(\mathfrak{M})$ подмногообразий любого многообразия $\mathfrak{M}$ групп, колец и т. п. Если $\mathfrak{M}$ — многообразие всех групп или всех алгебр Ли над фиксированным полем P характеристики нуль, то $G_I(\mathfrak{M})$ — свободная полугруппа [1].

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [2] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Нейман Х., Многообразия групп, пер. с англ., М., 1969; [4] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [5] Perkins P., «J. of Algebra», 1969, v. 11, № 2, p. 298—314; [6] Мурский В. Л., «Докл. АН СССР», 1965, т. 163, № 4, с. 815—18; [7] Jónsson B., «Math. Scand.», 1967, v. 21, № 1, p. 110—21; [8] Baker K. A., «Pacific J. of Math.», 1969, v. 28, № 1, p. 9—15; [9] Schwabauer R., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 20, № 2, p. 503—04; [10] Baker K. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1974, v. 190, p. 125—50.

Д. М. Смирнов.

АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ АВТОМОРФИЗМ — обратимый морфизм алгебраич. многообразия (или схемы) в себя. Группа всех А. м. а., обозначаемая обычно $\mathrm{Aut}\,X$, — важный инвариант многообразия X. Изучение действий группы А. м. а. на объектах, функториально связанных с X, таких, как *Пикара группа*, *Чжоу кольцо*, *K-функтор*, группа когомологий, является средством изучения самих многообразий. Группа А. м. а. участвует при образовании *форм* алгебраич. многообразия. Для полных алгебраич. многообразий над полем комплексных чисел группа А. м. а. совпадает с группой биголоморфных автоморфизмов.

Для ряда простых алгебраич. многообразий строение группы $\mathrm{Aut}\,X$ известно. Напр., если X проективное n-мерное пространство P^n над полем k, то любой его автоморфизм является линейным проективным преобразованием и $\mathrm{Aut}\,\mathrm{P}^n$ совпадает с проективной линейной группой $\mathrm{PGL}(n+1, k)$. Группа автоморфизмов эллиптич. кривой и, вообще, любого абелева многообразия A является расширением группы G автоморфизмов, сохраняющих структуру абелева многообразия, при помощи группы $A(k)$ сдвигов на точки многообразия A, т. е. последовательность групп

$$1 \longrightarrow A(k) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,A \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

точна. Если X — гладкая полная алгебраич. кривая рода $g>1$, то группа $\mathrm{Aut}\,X$ конечна; известна оценка ее порядка в зависимости от g (см. *Алгебраическая кривая*). Об автоморфизмах поверхностей см. *Алгебраическая поверхность*.

Для алгебраич. многообразий с обильным канонич. или антиканонич. обратимым пучком группа автоморфизмов является алгебраич. подгруппой группы $\mathrm{PGL}(N, k)$ для нек-рого N. Группа автоморфизмов гладкой поверхности размерности $n\geqslant 2$ и степени $d\geqslant 3$ конечна [1].

Во всех приведенных выше примерах $\mathrm{Aut}\,X$ обладает естественной структурой алгебраич. группы, быть может, с бесконечным числом связных компонент; это верно и в общем случае [2].

Современный подход к изучению группы А. м. а. состоит в рассмотрении семейств автоморфизмов. Семейством автоморфизмов многообразия X со схемой параметров T наз. автоморфизм произведения $X\times T$, перестановочный с проекцией на второй множитель; множество семейств автоморфизмов со схемой параметров T обозначается $\mathrm{Aut}_T(X\times T)$. Сопоставление $T\mapsto \mathrm{Aut}_T(X\times T)$ является контравариантным функтором от T. Если многообразие X полное, то этот функтор представим (см. *Представимый функтор*) локально алгебраич. схемой групп с не более чем счетным числом связных компонент [3]. Для проективных многообразий этот факт был доказан А. Гротендиком (A. Grothendieck); существует обобщение этой теоремы на случай собственных плоских морфизмов схем. Представляющая схема

не обязательно является приведенной, даже в случае, когда X — гладкая проективная поверхность; однако, если характеристика основного поля равна 0, либо если X — гладкая кривая или гладкая гиперповерхность, то связная компонента единицы этой схемы является многообразием.

Для неполных многообразий функтор автоморфизмов не всегда представим в категории схем. Для аффинного многообразия функтор автоморфизмов представим в категории индуктивных пределов схем.

Для аффинных пространств, кроме простого случая аффинной прямой, известна только группа автоморфизмов аффинной плоскости. Она является свободным произведением с объединенным пересечением двух своих подгрупп — подгруппы линейных аффинных преобразований и подгруппы треугольных автоморфизмов, т. е. преобразований вида

$$x' = ax + b,$$
$$y' = cy + f(x),$$

где a, b, $c \in k$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, а $f(x)$ — произвольный многочлен от x (см. [4], [5]). Об аффинных алгебраич. поверхностях, на к-рых группа автоморфизмов действует транзитивно, см. [6].

Лит.: [1] Matsumura H., Monsky P., «J. Math. Kyoto Univ.», 1964, v. 3, p. 347—61; [2] Matsusaka T., «Amer. J. Math.», 1958, v. 80, № 1, p. 45—82; [3] Matsumura H., Oort F., «Invent Math.», 1967, v. 4, № 1, p. 1—25; [4] Engel W., «Math. Ann.», 1958, v. 136, p. 319—25; [5] Shafarevich I. R., «Rend. Math.», 1966, v. 25, p. 208—12; [6] Гизатуллин М. Х., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 5, с. 1047—71; [7] Roth L., Algebraic threefolds, B.—[u.a.], 1955. *В. И. Данилов, В. А. Исковских.*

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ для *минора* M — число, равное

$$(-1)^{s+t} \det A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k},$$

где M — минор порядка k, расположенный в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцах с номерами $j_1, j_2, \ldots, \ldots, j_k$ некоторой квадратной матрицы A порядка n; $\det A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ — определитель матрицы порядка $n-k$, полученной из матрицы A вычеркиванием строк и столбцов минора M; $s = i_1 + i_2 + \ldots + i_k$, $t = j_1 + j_2 + \ldots + j_k$. Справедлива теорема Лапласа: если в определителе порядка n фиксировать к.-л. r строк, то сумма произведений миноров r-го порядка, принадлежащих фиксированным строкам, на их А. д. равна величине данного определителя. А. д. наз. также адъюнктой. *В. Н. Ремесленников.*

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ЗАМЫКАНИЕ поля k — алгебраич. *расширение* поля k, являющееся *алгебраически замкнутым полем*. Такое расширение для любого поля k существует и определено однозначно с точностью до изоморфизма. А. з. поля действительных чисел является поле комплексных чисел (см. *Алгебры основная теорема*). *В. Н. Ремесленников.*

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — один из основных объектов изучения алгебраич. геометрии. Современное определение А. м. над полем k как приведенной *схемы* конечного типа над полем k претерпело длительную эволюцию. Классич. определение А. м. ограничивалось аффинными и проективными алгебраич. множествами над полями действительных или комплексных чисел (см. *Аффинное алгебраическое множество*, *Проективное алгебраическое множество*). Начиная с кон. 20-х гг. 20 в. в работах Б. Л. ван дер Вардена (B. L. van der Waerden), Э. Нётер (E. Noether) и др понятие А. м. подверглось существенной алгебраизации, позволившей перейти к рассмотрению А. м. над произвольными полями. А. Вейль [6] перенес на А. м. идею конструкции дифференцируемых многообразий с помощью склейки. Полученное таким образом абстрактное А. м. определяется как система (V_α)

аффинных алгебраич. множеств над полем k, в каждом из к-рых выделены открытые подмножества $W_{\alpha\beta} \subset V_\alpha$, согласованно изоморфные открытым подмножествам $W_{\beta\alpha} \subset V_\beta$. На такие А. м. удалось перенести все основные понятия классической алгебраич. геометрии. Примеры абстрактных А. м., неизоморфных алгебраич. подмножествам проективного пространства, были затем построены М. Нагатой (M. Nagata) и Х. Хиронака (H. Hironaka) (см. [2], [3]). Аналогом проективных алгебраич. множеств при этом служили *полные алгебраические многообразия*.

Ж. П. Серром [5] было обнаружено, что единое определение дифференцируемых многообразий и аналитич. пространств как окольцованных топологич. пространств имеет свой аналог и в алгебраич. геометрии. А. м. стало наз. *окольцованное пространство*, локально изоморфное аффинному алгебраич. множеству над полем k с топологией Зарискоro и пучком ростков регулярных функций на нем. Дополнительная структура окольцованного пространства на А. м. позволяет упростить различные конструкции с абстрактными А. м., а также ввести в их изучение методы гомологич. алгебры, связанные с теорией пучков.

В 1958 на Международном математич. конгрессе в Эдинбурге А. Гротендик (A. Grothendieck) наметил перспективы дальнейшего обобщения понятия А. м., связанного с теорией схем. После того как были заложены [4] основы этой теории, под А. м. стали пониматься приведенные схемы конечного типа над полем k, причем такие аффинные (соответственно проективные) схемы стали наз. аффинными (соответственно проективными) многообразиями. Включение А. м. в более широкие рамки схем оказалось полезным в ряде вопросов классической алгебраич. геометрии (*разрешение особенностей*, *модулей проблема* и др.).

Другое обобщение понятия А. м. связано с понятием *алгебраического пространства*.

Над полем комплексных чисел каждое А. м. обладает структурой комплексного *аналитического пространства*, что позволяет привлекать к изучению топологические и трансцендентные методы (см. *Кэлерово многообразие*).

Многие вопросы теории чисел (теория сравнений, диофантовы уравнения, модулярные формы и др.) приводят к изучению А. м. над конечными полями и полями алгебраич. чисел (см. *Алгебраических многообразий арифметика*, *Диофантова геометрия*, *Дзета-функция* в алгебраической геометрии).

Лит.: [1] Бальдассари М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [2] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. М., 1972, с. 47—112; [4] Grothendieck A., Dieudonné J., Eléments de géométrie algébrique, t. 1—Le langage des schémas, P., 1960; [5] Serre J.-P., «Ann. Math.», 1955, v. 61, № 2, p. 197—278; [6] Weil A., Foundations of algebraic geometry, N.Y., 1946 (2 ed., 1962).

И. В. Долгачев.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — обобщение понятия *схемы* и *алгебраического многообразия*. К этому обобщению приводят нек-рые конструкции алгебраич. геометрии: схемы Гильберта, схемы Пикара, многообразия модулей, стягивания, не выполнимые зачастую в категории схем и требующие расширения ее. В то же время категория А. п. замкнута относительно таких конструкций, что позволяет считать А. п. естественным объектом алгебраич. геометрии.

Любая схема S определяет нек-рый пучок в *этальной топологии* категории схем, к-рый в свою очередь однозначно определяет схему S. Алгебраическим пространством называется пучок множеств F в этальной топологии схем, удовлетворяющей условию локальной представимости (в этальной топологии): существует схема U и морфизм пучков $\tilde{U} \to F$ такие, что для любой схемы V и морфизма

$\tilde{V} \to F$ расслоенное произведение $\tilde{U} \underset{F}{\times} \tilde{V}$ представляется схемой Z, причем индуцированный морфизм схем $Z \to V$ есть сюръективный этальный морфизм. Схема U при этом называется этальным покрытием пучка F, к-рый является факторпучком пучка $\tilde{U}$ по этальному отношению эквивалентности $\tilde{U} \underset{F}{\times} \tilde{U}$. Последнее вскрывает геометрический смысл А. п. как факторсхемы по этальному отношению эквивалентности. Морфизмы А. п. определяются как морфизмы пучков; категория схем отождествляется при этом с полной подкатегорией категории А. п.

На А. п. распространяются многие понятия теории схем: точка, локальное кольцо, этальная топология, топология Зарисского, поле функций, структурный пучок, когерентные пучки. Многие результаты теории схем, таких, как критерий аффинности Серра (см. *Аффинная схема*), теорема конечности и существования для собственного морфизма, переносятся на А. п.

Более тонкие результаты — представимость функторов Пикара и Гильберта в категории А. п. Если на А. п. задано плоское отношение эквивалентности, то факторизация по нему дает А. п. (такая ситуация возникает, например, при свободном действии на пространстве конечной группы). Наконец, А. п. допускает стягивание подпространства с обильным конормальным пучком.

Каждое А. п. содержит открытое и плотное в топологии Зарисского подпространство, являющееся схемой. Одномерные и неособые двумерные А. п. будут схемами, однако это уже не верно для трехмерных и особых двумерных А. п.; группа в категории А. п. над полем есть схема. Полные А. п. размерности n над полем комплексных чисел имеют естественную структуру компактного аналитич. пространства с n алгебраически независимыми мероморфными функциями.

Лит.: [1] Артин М., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 1 (157), с. 181—205; [2] Knutson D., Algebraic spaces, B., 1971.

В. И. Данилов.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ СРАВНЕНИЕ — сравнение вида:

$$F(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{m}, \qquad (1)$$

где

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1=0}^{m_2} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n} a_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$$

— многочлен от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с целыми рациональными коэффициентами $a_{i_1}, \ldots, i_n$. Максимальное значение величины

$$d(i_1, \ldots, i_n) = i_1 + \ldots + i_n,$$

где максимум берется по всевозможным наборам $i_1, \ldots, i_n$, для к-рых $a_{i_1, \ldots, i_n} \not\equiv 0 \pmod{m}$, наз. степенью по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_n$, или степенью алгебраического сравнения (1). Максимальное значение величины i_s, $1 \leqslant s \leqslant n$, где максимум берется по тем же наборам $i_1, \ldots, i_n$, наз. степенью алгебраического сравнения (1) по переменной x_s.

Основным вопросом в теории А. с. является вопрос о числе решений того или иного сравнения. При этом можно ограничиться лишь случаем простого модуля, поскольку вопрос о числе решений А. с. (1) по составному модулю m, за исключением нек-рых вырожденных случаев, сводится к вопросу о числе решений сравнений $F(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{p}$ по простым модулям p, делящим m.

Среди А. с. $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$ от одной переменной наиболее изучены *двучленные сравнения*

$$x^n \equiv a \pmod{p}, \quad a \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Исследование вопроса о числе решений сравнения в случае многочлена $F(x)$ общего вида встречает значительные трудности и при его решении получены лишь отдельные частные результаты.

Систему сравнений

$$F_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod p, \quad i=1, 2, \ldots, m, \qquad (2)$$

можно трактовать как систему алгебраич. уравнений:

$$F_i(x_1, \ldots, x_i)=0, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$

над простым конечным полем $\mathbb{Z}/(p)$, состоящим из p элементов; число решений этой системы сравнений будет числом $\mathbb{Z}/(p)$-рациональных точек *алгебраического многообразия*, определяемого системой уравнений (2). Поэтому, наряду с теоретико-числовыми методами, к изучению А. с. или систем А. с. применяются методы алгебраич. геометрии.

Среди А. с. от нескольких переменных более полно исследованы сравнения вида

$$F(x, y) \equiv 0 \pmod p.$$

Именно, для числа решений N_p А. с. этого вида, где $F(x, y)$ — абсолютно неприводимый многочлен, получена оценка

$$|N_p - p| \leqslant 2g\sqrt{p}.$$

Здесь константа g зависит лишь от многочлена и равна роду кривой $F(x, y)=0$. В первом нетривиальном случае — для эллиптич. сравнения

$$y^2 \equiv x^3+ax+b \pmod p$$

такую оценку получил Х. Хассе (H. Hasse) в 1934, основываясь на формуле сложения точек *Якоби многообразия* кривой $y^2=x^3+ax+b$. Позже метод Хассе был распространен А. Вейлем [4] на случай абсолютно неприводимых многочленов F. В [3] указанная оценка была получена с помощью элементарных методов.

А. с. с числом переменных $n \geqslant 3$ изучены значительно слабее. В качестве общего результата можно отметить т е о р е м у Ш е в а л л е, утверждающую, что если $F(x_1, \ldots, x_n)$ — форма, степень к-рой строго меньше числа переменных, то число решений сравнения

$$F(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod p$$

положительно и делится на p; для однородных многочленов существование решения не гарантируется; но делимость на p остается в силе (т е о р е м а В а р н и н г а). Существуют обобщения последней теоремы на случай систем сравнений.

Теория А. с. имеет многочисленные применения в других разделах теории чисел — в теории диофантовых уравнений, задачах аддитивной теории чисел, теории алгебраич. чисел и т. д.

Лит.: [1] Б о р е в и ч З. И., Ш а ф а р е в и ч И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] В и н о г р а д о в И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [3] С т е п а н о в С. А., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 132, с. 237—46; [4] W e i l A., Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, P., 1948.

С. А. Степанов.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение вида $f_n=0$, где f_n — *многочлен* n-й степени от одного или нескольких переменных ($n \geqslant 0$). А. у. с одним неизвестным наз. уравнение вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (1)$$

Здесь n — целое неотрицательное число, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ наз. к о э ф ф и ц и е н т а м и уравнения и являются данными, x наз. н е и з в е с т н ы м и является искомым. Коэффициенты А. у. (1) предполагаются не все равными нулю. Если $a_0 \neq 0$, то n наз. с т е п е н ь ю у р а в н е н и я.

Значения неизвестного x, к-рые удовлетворяют уравнению (1), т. е. при подстановке вместо x обращают уравнение в тождество, наз. корнями уравнения (1), а также корнями многочлена

$$f_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n. \qquad (2)$$

Корни многочлена связаны с его коэффициентами по формулам Виета (см. *Виета теорема*). Решить уравнение — значит найти все его корни, лежащие в рассматриваемой области значений неизвестного.

Для приложений наиболее важен случай, когда коэффициенты и корни уравнения — числа той или иной природы (напр., рациональные, действительные или комплексные). Рассматривается также и случай, когда коэффициенты и корни — элементы произвольного *поля*.

Если данное число (или элемент поля) c — корень многочлена $f_n(x)$, то согласно *Безу теореме* $f_n(x)$ делится на $x-c$ без остатка. Деление можно выполнять по *Горнера схеме*.

Число (или элемент поля) c наз. k-кратным корнем многочлена $f(x)$ (k — натуральное число), если $f(x)$ делится на $(x-c)^k$, но не делится на $(x-c)^{k+1}$. Корни кратности 1 наз. простыми корнями многочлена.

Каждый многочлен $f(x)$ степени $n>0$ с коэффициентами из поля P имеет в поле P не более n корней, считая каждый корень столько раз, какова его кратность (и, значит, не более n различных корней).

В *алгебраически замкнутом поле* каждый многочлен степени n имеет ровно n корней (считая их кратность). В частности, это справедливо для поля комплексных чисел.

Уравнение (1) степени n с коэффициентами из поля P наз. неприводимым над полем P, если многочлен (2) неприводим над этим полем, т. е. не может быть представлен в виде произведения других многочленов над полем P, степени к-рых меньше n. В противном случае многочлен и соответствующее уравнение наз. приводимыми. Многочлены нулевой степени и сам нуль не причисляются ни к приводимым, ни к неприводимым. Свойство данного многочлена быть приводимым или неприводимым над полем P зависит от рассматриваемого поля. Так, многочлен x^2-2 неприводим над полем рациональных чисел, т. к. иначе он имел бы рациональные корни, но приводим над полем действительных чисел: $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$. Аналогично, многочлен x^2+1 неприводим над полем действительных чисел, но приводим над полем комплексных чисел. Вообще, над полем комплексных чисел неприводимы только многочлены 1-й степени, и всякий многочлен может быть разложен на линейные множители. Над полем действительных чисел неприводимы только многочлены 1-й степени и многочлены 2-й степени, не имеющие действительных корней (и всякий многочлен разлагается в произведение линейных и неприводимых квадратных многочленов). Над полем рациональных чисел существуют неприводимые многочлены любых степеней, таковы, напр., многочлены вида x^n+2. Неприводимость многочлена над полем рациональных чисел устанавливается критерием Эйзенштейна: если для многочлена (2) степени $n>0$ с целыми коэффициентами существует простое число p такое, что старший коэффициент a_0 не делится на p, все остальные коэффициенты делятся на p, а свободный член a_n не делится на p^2, то этот многочлен неприводим над полем рациональных чисел.

Пусть P — произвольное поле. Для любого многочлена $f(x)$ степени $n>1$, неприводимого над полем P, существует такое *расширение* поля P, в к-ром содержится хотя бы один корень многочлена $f(x)$; более того, существует поле разложения многочлена $f(x)$, т. е. расширение поля P, в к-ром этот много-

член может быть разложен на линейные множители. Любое поле имеет алгебраически замкнутое расширение.

Разрешимость алгебраических уравнений в радикалах. Всякое А. у. степени, не превосходящей 4, решается в радикалах. Решение задач, приводящихся к частным видам уравнений 2-й и 3-й степеней, можно найти еще в древнем Вавилоне (2000 лет до н. э.) (см. *Квадратное уравнение*, *Кубическое уравнение*). Первое изложение теории решения квадратных уравнений дано в книге Диофанта «Арифметика» (3 в. н. э.). Решение в радикалах уравнений 3-й и 4-й степеней с буквенными коэффициентами было получено итальянскими математиками в 16 в. (см. *Кардано формула*, *Феррари метод*). В течение почти 300 лет после этого делались безуспешные попытки решить в радикалах уравнение с буквенными коэффициентами 5-й и более высоких степеней. Наконец, в 1826 Н. Абель (N. Abel) доказал, что такое решение невозможно.

Современная формулировка т е о р е м ы А б е л я: пусть (1) — уравнение степени $n>4$ с буквенными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$; K — любое поле и P — поле рациональных функций от $a_0, a_1, \ldots, a_n$ с коэффициентами из K; тогда корни уравнения (1) (лежащие в нек-ром расширении поля P) нельзя выразить через коэффициенты этого уравнения при помощи конечного числа действий сложения, вычитания, умножения, деления (имеющих смысл в поле P) и знаков корня (имеющих смысл в расширении поля P). Иными словами, общее уравнение степени $n>4$ неразрешимо в радикалах (см. [3], с. 226).

Теорема Абеля не исключает, однако, того, что каждое А. у. с данными числовыми коэффициентами (или коэффициентами из данного поля) решается в радикалах. Уравнения любой степени n нек-рых частных видов решаются в радикалах (напр., *двучленные уравнения*). Полное решение вопроса о том, при каких условиях А. у. разрешимо в радикалах, было получено ок. 1830 Э. Галуа (E. Galois).

Основная теорема *Галуа теории* о разрешимости А. у. в радикалах формулируется следующим образом: пусть $f(x)$ — многочлен с коэффициентами из поля K, неприводимый над K; тогда: 1) если хотя бы один корень уравнения $f(x)=0$ выражается в радикалах через коэффициенты этого уравнения, причем показатели радикалов не делятся на характеристику поля K, то группа Галуа этого уравнения над полем K разрешима; 2) обратно, если группа Галуа уравнения $f(x)=0$ над полем K разрешима, причем характеристика поля K или равна нулю, или больше всех порядков композиционных факторов этой группы, то все корни уравнения представляются в радикалах через его коэффициенты, причем все показатели встречающихся радикалов $\sqrt[n]{a}$ — простые числа, а соответствующие этим радикалам двучленные уравнения $x^n-a=0$ неприводимы над полями, к к-рым эти радикалы присоединяются.

Э. Галуа доказал эту теорему для случая, когда K — поле рациональных чисел; при этом все условия на характеристику поля K, содержащиеся в формулировке теоремы, становятся ненужными.

Теорема Абеля является следствием теоремы Галуа, так как группа Галуа уравнения степени n с буквенными коэффициентами над полем P рациональных функций от коэффициентов уравнения с коэффициентами из любого поля K — симметрич. группа S_n и при $n>4$ неразрешима. Для любого $n>4$ существуют уравнения степени n с рациональными (и даже целыми) коэффициентами, неразрешимые в радикалах. Примером такого уравнения для $n=5$ может служить уравнение $x^5-p^2x-p=0$, где p — простое число. В теории Галуа применяется метод сведения решения данного А. у.

к цепочке более простых уравнений, наз. *резольвентами* данного уравнения.

Разрешимость уравнений в радикалах тесно связана с вопросом о геометрич. построениях с помощью циркуля и линейки, в частности задача о делении окружности на n равных частей (см. *Деления круга многочлен*, *Первообразный корень*).

Алгебраические уравнения с одним неизвестным с числовыми коэффициентами. Для отыскания корней А. у. с коэффициентами из поля действительных или комплексных чисел степени выше 2-й, как правило, используются методы приближенных вычислений (напр., *Парабол метод*). При этом удобно сначала освободиться от кратных корней. Число c является k-кратным корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда многочлен и его производные до порядка $k-1$ включительно обращаются в нуль при $x=c$, а $f^{(k)}(c)\neq 0$. Если разделить $f(x)$ на наибольший общий делитель $d(x)$ этого многочлена и его производной, то получится многочлен, имеющий те же корни, что и многочлен $f(x)$, но только первой кратности. Можно даже построить многочлены, имеющие в качестве простых корней все корни многочлена $f(x)$ одинаковой кратности. Многочлен имеет кратные корни тогда и только тогда, когда его *дискриминант* равен нулю.

Часто возникают задачи определения границ и числа корней. За верхнюю границу модулей всех корней (как действительных, так и комплексных) А. у. (1) с любыми комплексными коэффициентами можно взять число

$$1+\frac{\max\limits_{i>0}|a_i|}{|a_0|}.$$

В случае действительных коэффициентов более точную границу обычно дает *Ньютона метод*. К определению верхней границы положительных корней сводится определение нижней границы положительных, а также верхней и нижней границ отрицательных корней.

Для определения числа действительных корней проще всего применить *Декарта теорему*. Если известно, что все корни данного многочлена действительны (как, напр., для характеристич. многочлена действительной симметрич. матрицы), то теорема Декарта дает точное число корней. Рассматривая многочлен $f(-x)$, можно с помощью этой же теоремы найти число отрицательных корней $f(x)$. Точное число действительных корней, лежащих на данном интервале (в частности, число всех действительных корней) многочлена с действительными коэффициентами, не имеющего кратных корней, можно найти по *Штурма правилу*. Теорема Декарта является частным случаем *Будана — Фурье теоремы*, дающей оценку сверху числа действительных корней многочлена с действительными коэффициентами, заключенных в нек-ром фиксированном интервале.

Иногда интересуются разысканием корней специального вида, так, напр., критерий Гурвица дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы все корни уравнения (с комплексными коэффициентами) имели отрицательные действительные части (см. *Рауса — Гурвица критерий*).

Для многочлена с рациональными коэффициентами существует метод вычисления всех его рациональных корней. Многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами имеет те же корни, что и многочлен $g(x)$ с целыми коэффициентами, получающийся из $f(x)$ умножением на общее кратное всех знаменателей коэффициентов $f(x)$. Рациональными корнями многочлена $g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n$, $b_n\neq 0$ с целыми коэффициентами могут быть только те несократимые дроби вида p/q, у к-рых p — делитель числа b_n, а q — делитель числа b_0 (и даже только те из этих дробей, для к-рых при любом целом m число $g(m)$ делится на $p-mq$).

Если $b_0=1$, то все рациональные корни многочлена $g(x)$ (если они у него вообще есть) — целые числа, являющиеся делителями свободного члена, и могут быть найдены перебором.

Системы алгебраических уравнений. О системах А. у. 1-й степени см. *Линейное уравнение.*

Систему двух А. у. любых степеней с двумя неизвестными x и y можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} f(x,\ y)=a_0(x)\,y^n+a_1(x)\,y^{n-1}+\ldots+a_n(x)=0,\\ g(x,\ y)=b_0(x)\,y^s+b_1(x)\,y^{s-1}+\ldots+b_s(x)=0,\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

где $a_i(x)$, $b_j(x)$ — многочлены от одного неизвестного x. Если x придать нек-рое числовое значение, получится система двух уравнений от одного неизвестного y с постоянными коэффициентами a_i, b_j. *Результантом* этой системы будет следующий определитель:

$$R(f,\ g)=\left|\begin{array}{ccccccccc} a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_n & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0\\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_n & 0 & \ldots\ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_0 & a_1 \ldots & a_n\\ b_0 & b_1 & \ldots & \ldots & b_s & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0\\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & \ldots & b_s & 0 & \ldots\ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & b_0 & \ldots\ldots & b_s \end{array}\right\}\begin{array}{l} s\\ \text{строк}\end{array}$$
$$\left.\vphantom{\begin{array}{ccccccccc} a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_n & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0\\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_n & 0 & \ldots\ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_0 & a_1 \ldots & a_n\\ b_0 & b_1 & \ldots & \ldots & b_s & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0\\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & \ldots & b_s & 0 & \ldots\ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & b_0 & \ldots\ldots & b_s \end{array}}\right\}\begin{array}{l} n\\ \text{строк}\end{array}$$

Справедливо утверждение: число x_0 тогда и только тогда является корнем результанта $R(f,\ g)$, когда или многочлены $f(x_0,\ y)$ и $g(x_0,\ y)$ имеют общий корень y_0, или оба старших коэффициента $a_0(x_0)$ и $b_0(x_0)$ равны нулю.

Таким образом, для решения системы (3) надо найти все корни результанта $R(f,\ g)$, подставить каждый из этих корней в систему (3) и найти общие корни этих двух уравнений с одним неизвестным y. Кроме того, надо найти общие корни двух многочленов $a_0(x)$ и $b_0(x)$ и также подставить их в систему (3) и проверить, не имеют ли полученные уравнения с одним неизвестным y общих корней. Иными словами, решение системы двух А. у. с двумя неизвестными сводится к решению одного уравнения с одним неизвестным и вычислению общих корней двух уравнений с одним неизвестным (общие корни двух или нескольких многочленов с одним неизвестным являются корнями их наибольшего общего делителя).

Аналогично рассмотренному случаю решается система любого числа А. у. с любым числом неизвестных. Эта задача приводит к громоздким вычислениям. Она связана с так наз. *исключения теорией.*

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 10 изд., М., 1971; [2] Сушкевич А. К., Основы высшей алгебры, 4 изд., М.— Л., 1941; [3] Ван дер Варден Б. Л., Современная алгебра, пер. с нем., ч. 1—2, 2 изд., М.— Л., 1947; [4] Манин Ю. И., в кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, М., 1963, с. 205—27; [5] Доморяд А. П., в кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. 2, М., 1951, с. 313—411.

И. В. Проскуряков.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ЧИСЛО — комплексное (в частности, действительное) число, являющееся корнем многочлена

$$f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0\qquad(1)$$

с рациональными коэффициентами, из к-рых не все равны нулю. Если α — А. ч., то среди всех многочленов с рациональными коэффициентами, имеющих α своим корнем, существует единственный многочлен $\varphi(x)$ наименьшей степени со старшим коэффициентом, равным 1, и, следовательно, неприводимый (см. *Неприводимый многочлен*). Он наз. каноническим, или минимальным, многочленом А. ч. α. Степень n канонич. многочлена $\varphi(x)$ наз. степенью А. ч. α. Существование неприводимых многочленов любой степени n обусловливает существование А. ч. степени n. Все рациональ-

ные числа, и только они, являются А. ч. 1-й степени. Число i есть А. ч. 2-й степени как корень многочлена x^2+1, а $\sqrt[n]{2}$ при любом натуральном n есть А. ч. степени n как корень неприводимого многочлена x^n-2.

Корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ канонич. многочлена наз. числами, с о п р я ж е н н ы м и с А. ч. α, и тоже являются А. ч. степени n. Все числа, сопряженные с α, различны. Важной характеристикой А. ч., кроме степени, является его высота (аналог знаменателя рациональной дроби). Высотой А. ч. α наз. наибольшая из абсолютных величин коэффициентов в неприводимом и примитивном многочлене с целыми рациональными коэффициентами, имеющем α своим корнем. Сумма, разность, произведение и частное двух А. ч. (кроме деления на нуль) суть А. ч., т. е. множество всех А. ч. образует *поле*. Корень многочлена с алгебраич. коэффициентами есть А. ч.

А. ч. наз. ц е л ы м, если все коэффициенты в его канонич. многочлене — целые рациональные числа. Напр., i и $1+\sqrt{2}$ — целые А. ч. как корни многочленов x^2+1 и x^2-2x-1.

Понятие целого А. ч. является обобщением понятия целого рационального числа (целое рациональное число m есть целое А. ч. как корень многочлена $x-m$). Многие свойства целых рациональных чисел сохраняются и для целых А. ч. Так, целые А. ч. образуют кольцо. Однако действительные целые А. ч. образуют всюду плотное множество, в то время как целые рациональные — дискретное множество. В 1872 Г. Кантор (G. Kantor) доказал, что множество всех А. ч. счетно, откуда следовало существование *трансцендентных чисел*.

Корень любого (не обязательно неприводимого) многочлена с целыми рациональными коэффициентами и старшим коэффициентом, равным единице, является целым А. ч. Более того, корень многочлена с целыми алгебраич. коэффициентами и старшим коэффициентом 1 есть целое А. ч. В частности, корень любой степени k из целого А. ч. есть целое А. ч. Для всякого А. ч. α существует такое натуральное r, что $r\alpha$ — целое А. ч. (аналогия с рациональными числами). В качестве наименьшего возможного числа r можно взять модуль старшего коэффициента в неприводимом и примитивном многочлене с целыми рациональными коэффициентами, имеющем α своим корнем. Все сопряженные целого А. ч.— тоже целые А. ч.

Говорят, что целое А. ч. β делится на целое А. ч. α ($\alpha\neq 0$), если существует целое А. ч. γ, для к-рого $\beta=\gamma\alpha$. Для целых А. ч. справедливы многие свойства делимости, к-рые имеют место для целых рациональных чисел.

Целое А. ч. ε наз. а л г е б р а и ч. е д и н и ц е й (коротко — е д и н и ц е й), если оно делит число 1, т. е. если $1/\varepsilon$ — целое А. ч. Единица делит любое целое А. ч. Число, обратное единице, есть единица; числа, сопряженные с единицей, суть единицы; каждый делитель единицы есть единица; произведение конечного числа единиц есть единица. Целое А. ч. будет единицей тогда и только тогда, когда произведение всех его сопряженных равно ± 1. Корни k-й степени из числа 1 являются единицами, причем каждая из них по модулю равна 1. Существует бесконечное множество других единиц, не равных по модулю 1. Напр., числа $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$ являются единицами как корни многочлена x^2-4x+1. Но среди их степеней найдутся единицы, сколь угодно малые и сколь угодно большие по величине. В поле рациональных чисел имеются лишь две единицы $+1$ и -1.

Два целых А. ч. наз. а с с о ц и и р о в а н н ы м и, если они отличаются множителем, являющимся единицей. Имеется еще одно важное отличие кольца целых

А. ч. от кольца целых рациональных чисел. В первом — нельзя ввести понятие неразложимого целого числа (аналог простого числа). Это видно хотя бы из того, что корень из любого целого А. ч. есть целое А. ч. Понятие неразложимого числа (с точностью до класса ассоциированных чисел) можно ввести в нек-рых подполях поля всех А. ч., так наз. алгебраических полях. Но оказывается, что в таких полях разложение целого А. ч. на неразложимые сомножители не всегда однозначно.

А. ч. не допускают слишком хорошее приближение рациональными и алгебраич. числами (теорема Лиувилля). Этот факт впервые позволил в 1844 доказать существование трансцендентных чисел. Проблема приближения А. ч. рациональными является одной из труднейших в теории чисел; в ее решении получены очень важные результаты (теоремы Туэ, Туэ — Зигеля, Туэ — Зигеля — Рота), но она еще далека от окончательного завершения. Другой труднейшей проблемой теории чисел является вопрос о разложении А. ч. в цепные дроби. Действительные А. ч. 2-й степени (квадратичные иррациональности) представляются в виде бесконечных периодических цепных дробей. О характере разложения действительных А. ч. степеней выше 3-й в обыкновенные цепные дроби до сих пор (70-е гг. 20 в.) ничего не известно.

Комплексное число наз. алгебраическим числом над полем P, если оно является корнем многочлена (1) с коэффициентами из P. Для А. ч. над полем P аналогично определяются канонич. многочлен, степень над полем P, сопряженные числа над полем P. Корень многочлена, коэффициенты к-рого — алгебраические числа над P, есть А. ч. над P.

Не над любым полем P могут существовать А. ч. любой степени n. Напр., над полем комплексных чисел существуют только А. ч. 1-й степени — сами числа этого поля. Одно и то же А. ч. может относительно различных полей иметь разные степени. Так, число i является А. ч. 2-й степени, но имеет 1-ю степень относительно поля комплексных чисел. Множество всех А. ч. над полем P образует числовое поле.

Впервые А. ч. и алгебраич. поле систематически стал рассматривать К. Гаусс (C. Gauss) (гауссовы числа вида $a+bi$, где a и b — рациональные числа). Для обоснования теории биквадратичных вычетов он развил арифметику целых гауссовых чисел. Изучая теорию кубических вычетов, К. Якоби (C. Jacobi) и Ф. Эйзенштейн (F. Eisenstein) создали арифметику чисел вида $a+b\rho$, где $\rho=-(1+\sqrt{-3})/2$ — кубич. корень из числа 1, а a и b — рациональные числа. Попытки доказать *Ферма теорему* привели Э. Куммера (E. Kummer) к глубокому изучению полей деления круга (см. *Круговое поле*), введению понятия идеала и созданию элементов теории А. ч. В работах П. Дирихле (P. Dirichlet), Л. Кронекера (L. Kronecker), Д. Гильберта (D. Hilbert) и др. теория А. ч. получила свое дальнейшее развитие. Большой вклад в нее внесли русские математики Е. И. Золотарев (теория идеалов), Г. Ф. Вороной (кубич. иррациональности, единицы кубич. полей), А. А. Марков (кубич. поле), Ю. В. Сохоцкий (теория идеалов) и др.

Понятие А. ч. и связанное с ним понятие алгебраич. поля — важнейшие понятия теории чисел и алгебры. А. ч., являясь обобщением рациональных чисел, выделяют в полях действительных и комплексных чисел подполя А. ч., обладающих специальными алгебраич. свойствами. Развитие теории А. ч. оказало большое влияние на создание и развитие общей теории колец и полей.

А. ч. находит большое применение в различных разделах теории чисел, алгебры и др. разделах математики:

теории форм, диофантовых уравнениях, диофантовых приближениях, трансцендентных числах, геометрии чисел, алгебраической геометрии, теории Галуа и др.

Лит.: [1] Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, ч. 1—2, М.— Л., 1934—37; [2] Гекке Э., Лекции по теории алгебраических чисел, пер. с нем., М.— Л., 1940; [3] Landau E., Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Lpz.—B., 1918; [4] Landau E., Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd 3, Lpz., 1927; [5] Ленг С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966.

А. Б. Шидловский.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ МЕРА чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — функция

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; n, H) = \min |P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)|,$$

где минимум берется по всем многочленам степени не выше n, с целыми рациональными коэффициентами, из к-рых не все равны нулю, и высоты, не превосходящей H. Подробнее см. *Трансцендентности мера.*

А. Б. Шидловский.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ АВТОМОРФИЗМ — изоморфное отображение алгебраической системы на себя. Автоморфизмом (А.) Ω-системы $\boldsymbol{A} = \langle A, \Omega \rangle$ наз. всякое взаимно однозначное отображение φ множества A на себя, обладающее свойствами:

$$\varphi(F(x_1, \ldots, x_n)) = F(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)), \qquad (1)$$

$$P(x_1, \ldots, x_m) \Longleftrightarrow P(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_m)) \qquad (2)$$

для всех $x_1, x_2, \ldots$ из A и для всех F, P из Ω. Другими словами, А. Ω-системы $\boldsymbol{A}$ есть изоморфное отображение системы $\boldsymbol{A}$ на себя. Пусть G — множество всех А. системы $\boldsymbol{A}$. Если $\varphi \in G$, то обратное отображение φ^{-1} также обладает свойствами (1), (2) и поэтому $\varphi^{-1} \in G$. Произведение $\alpha = \varphi\psi$ А. φ, ψ системы $\boldsymbol{A}$, определяемое формулой $\alpha(x) = \psi(\varphi(x))$, $x \in A$, снова является А. системы $\boldsymbol{A}$. Поскольку умножение отображений ассоциативно, то $\langle G, \cdot, ^{-1} \rangle$ есть группа, наз. группой всех А. системы $\boldsymbol{A}$ и обозначаемая через $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$. Подгруппы группы $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$ наз. просто группами А. системы $\boldsymbol{A}$.

Пусть φ — А. системы $\boldsymbol{A}$ и θ — конгруэнция этой системы. Полагая

$$(x, y) \in \theta_\varphi \Longleftrightarrow (\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) \in \theta, \quad x, y \in A,$$

получим снова конгруэнцию θ_φ системы $\boldsymbol{A}$. А. φ наз. IC-автоморфизмом, если $\theta_\varphi = \vartheta$ для любой конгруэнции θ системы $\boldsymbol{A}$. Множество $IC(\boldsymbol{A})$ всех IC-автоморфизмов системы $\boldsymbol{A}$ является нормальным делителем группы $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$, и факторгруппа $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})/IC(\boldsymbol{A})$ изоморфна нек-рой группе А. решетки всех конгруэнций системы $\boldsymbol{A}$ [1]. В частности, всякий внутренний А. $x \to a^{-1}xa$ группы, определяемый к.-л. фиксированным элементом a этой группы, является IC-автоморфизмом. Однако пример циклич. группы простого порядка показывает, что не всякий IC-автоморфизм группы — внутренний.

Пусть $\mathfrak{K}$ — нетривиальное многообразие Ω-систем или к.-л. другой класс Ω-систем, обладающий свободными системами любого (ненулевого) ранга. А. φ системы $\boldsymbol{A}$ из класса $\mathfrak{K}$ наз. I-автоморфизмом, если существует терм $f_\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры Ω от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$, для к-рого: 1) в системе $\boldsymbol{A}$ существуют такие элементы $a_2, \ldots, a_n$, что для каждого элемента $x \in A$ имеет место равенство

$$\varphi(x) = f_\varphi(x, a_2, \ldots, a_n),$$

2) для любой системы $\boldsymbol{B}$ из класса $\mathfrak{K}$ отображение

$$x \longrightarrow f_\varphi(x_1\ x_2\ , \ldots, x_n) \quad (x \in B)$$

является А. этой системы при любом выборе элементов $x_2, \ldots, x_n$ в системе $\boldsymbol{B}$. Множество $I(\boldsymbol{A})$ всех I-автоморфизмов каждой системы $\boldsymbol{A}$ из класса $\mathfrak{K}$ является нормальным делителем группы $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$. В классе $\mathfrak{K}$ всех групп понятие I-автоморфизма совпадает с понятием

внутреннего А. группы [2]. Более общее понятие формульного А. Ω-системы см. в [3].

Пусть $\boldsymbol{A}$ — алгебраич. система. Заменяя каждую основную операцию F в $\boldsymbol{A}$ предикатом

$$R(x_1, \ldots, x_n, y) \Longleftrightarrow F(x_1, \ldots, x_n) = y$$
$$(x_1, \ldots, x_n, y \in A),$$

получим так наз. модель $\boldsymbol{A}^*$, представляющую систему $\boldsymbol{A}$. Справедливо равенство $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}^*) = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$. Если системы $\boldsymbol{A} = \langle A, \Omega \rangle$, $\boldsymbol{A}' = \langle A, \Omega' \rangle$ имеют общий носитель A и $\Omega \subset \Omega'$, то $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) \supseteq \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}')$. Если Ω-система $\boldsymbol{A}$ с конечным числом порождающих финитно аппроксимируема, то группа $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$ также финитно аппроксимируема (см. [1], с. 432). Пусть $\mathfrak{K}$ — класс Ω-систем и пусть $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ — класс всех изоморфных копий групп $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{K}$, а $S\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ — класс подгрупп групп из класса $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$. Класс $S\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ состоит из групп, изоморфно вложимых в группы $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{K}$.

В исследовании групп А. алгебраич. систем выделились следующие две проблемы.

1) Пусть дан класс $\mathfrak{K}$ Ω-систем. Что можно сказать о классах $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ и $S\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$?

2) Пусть дан (абстрактный) класс K групп. Существует ли класс Ω-систем $\mathfrak{K}$ данной сигнатуры Ω такой, что $K = \mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ или хотя бы $K = S\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$? Доказано, что для любого аксиоматизируемого класса $\mathfrak{K}$ моделей класс групп $S\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ универсально аксиоматизируем [1]. Доказано также [1], [4], что если $\mathfrak{K}$ — аксиоматизируемый класс моделей, имеющий бесконечные модели, $\langle B, \leqslant \rangle$ — линейно упорядоченное множество и $\boldsymbol{G}$ — группа А. модели $\langle B, \leqslant \rangle$, то существует модель $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{K}$ такая, что $A \supseteq B$ и для каждого элемента $g \in G$ существует А. φ системы $\boldsymbol{A}$ такой, что $g(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in B$. Группа G наз.: 1) универсальной, если $G \in S\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ для любого аксиоматизируемого класса $\mathfrak{K}$ моделей, обладающего бесконечными моделями; 2) группой порядковых А. упорядочиваемой группы $\boldsymbol{H}$ (см. *Линейно упорядоченная группа*), если $\boldsymbol{G}$ изоморфна нек-рой группе А. группы $\boldsymbol{H}$, сохраняющих фиксированный линейный порядок $\leqslant$ этой группы (т. е. $a \leqslant b \Rightarrow \varphi(a) \leqslant \varphi(b)$ для всех $a, b \in H$, $\varphi \in G$).

Пусть l — класс линейно упорядоченных множеств $\langle M, \leqslant \rangle$, U — класс универсальных групп, RO — класс правоупорядочиваемых групп, OA — класс групп порядковых А. свободных абелевых групп. Тогда (см. [4] — [6]):

$$S\mathrm{Aut}(l) = \mathfrak{U} = RU = OA.$$

Каждая группа изоморфна группе всех А. нек-рой Ω — алгебры. Если $\mathfrak{K}$ — класс всех колец, то $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$ — класс всех групп (см. [1], с. 117, 118). Но если $\mathfrak{K}$ — класс всех групп, то $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K}) \neq \mathfrak{K}$; напр., циклич. группы $\boldsymbol{C}_3$, $\boldsymbol{C}_5$, $\boldsymbol{C}_7$ порядков 3, 5, 7, соответственно, не принадлежат классу $\mathrm{Aut}(\mathfrak{K})$. Не существует также топологич. группы, для к-рой группа всех топологич. А. была бы изоморфна группе $\boldsymbol{C}_5$ (см. [7]).

Лит.: [1] Плоткин Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966; [2] Csákány B., «Publ. Math. Debrecen», 1965, v. 12, p. 331—33; [3] Grant I., «Pacif. J. Math.», 1973, v. 44, № 1, p. 107—15; [4] Rabin M. O., в кн.: The theory of models, Amst., 1965, p. 274—84; [5] Cohn P. M., «Mathematika», 1957, v. 4, № 7, p. 41—50; [6] Смирнов Д. М., «Алгебра и логика», 1966, т. 5, № 6, с. 41—59; [7] Wille R. J., «Quart. J. Math. Oxford», ser. 2, 1967, v. 18, № 69, p. 53—57.

Д. М. Смирнов.

АЛГЕБРЫ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА — теорема, утверждающая, что любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет корень в поле комплексных чисел. А. о. т. была высказана впервые А. Жираром (A. Girard, 1629) и Р. Декартом (R. Descartes, 1637) в формулировке, отличной от современной. К. Маклорен (C. Maclaurin) и Л. Эйлер (L. Euler) уточнили формулировку А. о. т., придав ей форму, эквивалентную современной: всякий многочлен с действительными коэффициентами

можно разложить в произведение линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами. Ж. Д'Аламбер (J. D'Alembert) первым в 1746 опубликовал доказательство А. о. т. Во 2-й пол. 18 в. появляются доказательства Л. Эйлера, П. Лапласа (P. Laplace), Ж. Лагранжа (J. Lagrange) и др. Во всех этих доказательствах предполагается заранее, что какие-то «идеальные» корни многочлена существуют, а затем доказывается, что, по крайней мере, один из них является комплексным числом. К. Гаусс (C. Gauss) первый доказал А. о. т. без предположения, что корни существуют. Его доказательство, по существу, содержит построение поля разложения многочлена. Во всех доказательствах А. о. т. используются в той или иной форме топологич. свойства действительных и комплексных чисел. Роль топологии была сведена в конечном итоге к единственному предложению, согласно к-рому многочлен с действительными коэффициентами нечетной степени имеет действительный корень.

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, изд. 9, М., 1968, с. 147—55, 345—49; [2] Ленг С., Алгебра, М., 1968, с. 230—31; [3] Башмакова И. Г., сб. «Историко-математические исследования», 1957, в. 10, с. 257—304.

В. Н. Ремесленников.

АЛГОЛ — общее название ряда *алгоритмических языков*, предназначенных для *автоматизации программирования* и для публикации алгоритмов (сокращение от слов ALGOrithmic и Language).

Первый вариант А. был разработан группой ученых разных стран в 1958. На международной конференции в Париже (1960) был принят язык «алгол-60», к-рый объединил многие удачные свойства существовавших ранее языков программирования. Этот язык получил самое широкое распространение и обычно подразумевается под термином «А.». А. особенно удобен для описания алгоритмов численного анализа. В А. не учитываются конкретные особенности вычислительных машин и не предусмотрены развитые канонизированные средства для задания операций ввода и вывода информации. Для различных машин могут быть разработаны различные конкретные представления эталонного языка А., каждое из к-рых является языком, воспринимаемым транслятором для данной машины. Как правило, переход от эталонного языка А. к конкретному представлению является естественным и не представляет большого труда. Основными символами в А. являются десятичные цифры, строчные и заглавные латинские буквы, знаки препинания, знаки арифметич. и логич. операций, прочие специальные знаки и нек-рые английские слова [в частности, begin («начало»), end («конец»), real («вещественный»), integer («целый»), array («массив»)]. Из основных символов языка по определенным правилам образуются числа, идентификаторы (имена), простые переменные, элементы массивов, указатели функций, выражения, описания, примечания и операторы. Предусмотрено несколько основных типов операторов: оператор присваивания, оператор перехода, условный оператор, к-рый в зависимости от значения входящего в него логич. выражения выбирает для выполнения один из содержащихся в нем внутренних операторов, и оператор цикла. Группа операторов может быть объединена в составной оператор или в блок, содержащий описания. В запись алгоритма на А. могут быть включены описания процедур. Описание процедуры состоит из заголовка и тела. Тело процедуры может представлять собой оператор (чаще всего блок), записанный по обычным правилам А. Для придания языку А. большей гибкости допускается применение процедур, описанных на к.-л. другом языке (напр., на машинном языке). Процедуру можно вызвать с помощью оператора процедуры, состоящего из идентификатора процедуры и списка фактич. параметров, к-рые соответствуют формальным параметрам, преду-

смотренным в заголовке процедуры с данным идентификатором. Выражение может содержать указатель функции, означающий вызов процедуры, предназначенной для вычисления одной величины. Допускается рекурсивный вызов процедур, т. е. такой вызов, при к-ром в процессе выполнения процедуры происходит вызов той же процедуры. В конкретных представлениях А. часто сокращаются языковые возможности, имеющиеся в эталонном А. С целью унификации таких сокращений разработан алгоритмич. язык, наз. подмножеством алгол-60 и представляющий собой упрощенный вариант эталонного А., из к-рого исключены возможности, вызывающие особые трудности при разработке трансляторов для небольших машин. В качестве преемника алгола-60 был предложен язык *алгол-68*, к-рый существенно отличается по структуре от алгола-60, содержит много новых понятий и возможностей и рассчитан на более мощные машины.

Лит.: [1] Алгоритмический язык АЛГОЛ-60, пер. с англ., М., 1965; [2] Лавров С. С., Универсальный язык программирования (АЛГОЛ-60), 2 изд., М., 1967; [3] Ван Вейнгаарден А. [и др.], Сообщение об алгоритмическом языке АЛГОЛ-68, «Кибернетика», 1969, № 6, с. 23—145; 1970, № 1, с. 13—160.

В. В. Мартынюк.

АЛГОЛ-68 — универсальный *алгоритмический язык*, разработанный в 1964—68 коллективом ученых 12 стран в составе рабочей группы по *алголу* Международной федерации по обработке информации для обмена алгоритмами, для эффективного их выполнения на различных вычислительных машинах и как средство для изучения алгоритмов. Сохраняя стилистич. связь с алголом-60, А.-68 существенно отличается от него богатством и общностью конструкций. Основными видами данных, в дополнение к типам алгола-60 «вещественный», «целый» и «логический», могут быть «литерный» (для буквенно-цифровой информации), «форматный» (для описания формата внешней информации), имя и процедура. Таким образом, имена и процедуры могут «вычисляться» при выполнении программы на А.-68, хотя это вычисление ограничивается динамич. выбором значения имени или процедуры из явно заданной конечной совокупности. Из основных видов можно индуктивно строить новые, составные виды, представляющие либо однородные индексируемые последовательности данных одного вида (мультизначения), либо упорядоченные наборы данных произвольного вида (структуры).

В дополнение к обычному аппарату описания процедур А.-68 содержит средства для описания так наз. инфиксных операций типа $x+y$. Наличие описания приоритета позволяет задавать отношения старшинства между вводимыми инфиксными операциями. Характерное для А.-68 описание тождества является универсальной конструкцией для описания переменных, задания начальных значений, организации подстановки фактич. параметров в процедуры и для задания синонимии.

В А.-68 в позиции выражения может стоять оператор присваивания или даже любая цепочка операторов, вырабатывающая нек-рое значение. В сочетании с возможностью вычисления имен и процедур, а также введением парных скобок для условных выражений это приводит к допустимости в А.-68 конструкций, поясняемых следующим примером:

1) Алгол-68:

если $x > 0$, **то** u **иначе** z **все**

$:= a + (m < n \mid sin \mid cos)\ (t := x \uparrow 2)$,

2) Алгол-60:

$t := x \uparrow 2;$

$r :=$ $a +$ **если** $m < n$ **то** $sin\ (t)$ **иначе**

$\cos\ (t)$; **если** $x > 0$ **то** $u := r$ **иначе** $z := r$.

Программа в А.-68 состоит из замкнутых, последовательных, условных и совместных предложений. Первые

три обобщают такие понятия алгола-60, как блок, составной оператор и условные выражение и оператор. Совместные предложения обозначают неупорядоченные совокупности составляющих фраз, являясь, в частности, основным средством для указания параллельных ветвей в общем ходе выполнения программы.

Описание семантики А.-68 характерно углубленной проработкой основных концепций алгоритмич. языков, позволяющей с помощью небольшого числа независимых фундаментальных понятий точно описывать процесс выполнения программы. Различаются внешние (относящиеся к конструкциям программы) и внутренние (относящиеся к данным, в том числе к процедурам и именам) объекты. Аксиоматически вводятся отношения между внешними (E) и внутренними (I) объектами, напр. «E_1 содержит E_2», «E_1 идентифицирует E_2», «E обладает I», «I_1 именует I_2», «I_1 является компонентой I_2» и т. п. Выполнение программы описывается в терминах введенных отношений как функция разбора программы.

Особенностью синтаксиса А.-68 является его задание в виде двухступенчатой грамматики, когда порождающие правила А.-68 являются сами допустимыми текстами в нек-ром метаязыке, заданном своей порождающей грамматикой. Грамматич. правила А.-68 имеют, напр., вид:

список ПОНЯТИЙ разделенных РАЗДЕЛИТЕЛЕМ: ПОНЯТИЕ; список ПОНЯТИЙ разделенных разделителем, РАЗДЕЛИТЕЛЬ, ПОНЯТИЕ.

оператор присваивания ВИДА: выражение вырабатывающее имя ВИДА,:=, выражение вырабатывающее вид.

Слова, выраженные большими буквами,— это грамматич. единицы метаязыка, порождающие правила для к-рых имеют, напр., вид:

ПОНЯТИЕ: идентификатор, оператор.

РАЗДЕЛИТЕЛЬ: запятая, точка с запятой.

ВИД: целый, логический, имя ВИДА.

Нек-рые понятия метаязыка, напр. ВИД, могут иметь бесконечное число порождений. Собственно порождающие правила А.-68 получаются систематич. заменой понятий метаязыка в грамматич. правилах на любое одно и то же их порождение. Результирующие правила в металингвистич. обозначениях алгола-60 выглядят, напр., так:

⟨список идентификаторов разделенных запятыми⟩ ::= ⟨идентификатор⟩|⟨список идентификаторов разделенных запятыми⟩⟨запятая⟩⟨идентификатор⟩

⟨оператор присваивания целого⟩ ::= ⟨выражение вырабатывающее имя целого⟩ := ⟨выражение вырабатывающее целое⟩.

Использование двухступенчатой грамматики позволяет, во-первых, сократить число однотипных порождающих правил и, во-вторых, выразить средствами синтаксиса атрибутную информацию понятий и нек-рые контекстные зависимости, к-рые в противном случае формулируются в виде содержательных ограничений.

Лит.: [1] Ван Вейнгаарден А. [и др.], Сообщение об алгоритмическом языке АЛГОЛ-68, «Кибернетика», 1969, № 6, с. 23—145; 1970, № 1, с. 13—160; [2] Линдси Ч., Мюйлен С., Неформальное введение в АЛГОЛ-68, пер. с англ., М., 1973.

А. П. Ершов.

АЛГОРИТМ, алгорифм,— точное предписание, к-рое задает вычислительный процесс (называемый в этом случае алгоритмическим), начинающийся с произвольного исходного данного (из нек-рой совокупности возможных для данного А. исходных данных) и направленный на получение полностью определяемого этим исходным данным результата. А. являются, напр., известные из начальной школы правила сложения, вычитания, умножения и деления столбиком; в этих А. возможными результатами

служат натуральные числа, записанные в десятичной системе, а возможными исходными данными — упорядоченные пары таких чисел. Вообще говоря, не предполагается, что результат будет обязательно получен: процесс применения А. к конкретному возможному исходному данному (т. е. алгоритмич. процесс, развертывающийся начиная с этого данного) может также оборваться безрезультатно (в этом случае говорят, что произошла б е з р е з у л ь т а т н а я о с т а н о в к а) или не закончиться вовсе. В случае, если процесс заканчивается (соответственно не заканчивается) получением результата, говорят, что А. п р и м е н и́ м (соответственно н е п р и м е н и́ м) к рассматриваемому возможному исходному данному. (Можно построить такой А. α, для к-рого не существует А., распознающего по произвольному возможному для α исходному данному, применим к нему α или нет; такой А. α можно, в частности, построить так, чтобы совокупностью его возможных исходных данных служил натуральный ряд.)

Понятие А. занимает одно из центральных мест в современной математике, прежде всего вычислительной. Так, проблема численного решения уравнений данного типа заключается в отыскании А., к-рый всякую пару, составленную из произвольного уравнения этого типа и произвольного положительного рационального числа ε, перерабатывает в число (или набор чисел), отличающееся (отличающихся) от корня (корней) этого уравнения меньше, чем на ε. Усовершенствование цифровых вычислительных машин дает возможность реализовать на них все более сложные А. Однако встретившийся в описывающей понятие А. формулировке термин «вычислительный процесс» не следует понимать в узком смысле только цифровых вычислений: уже в школьном курсе алгебры говорят о буквенных вычислениях, да и в арифметич. вычислениях появляются отличные от цифр символы (скобки, знак равенства, знаки арифметич. действий). Целесообразно, таким образом, рассматривать А., оперирующие с произвольными символами и их комбинациями. Простейшим случаем такой комбинации является линейная последовательность символов, образующая *слово*, однако можно рассматривать и «нелинейные» комбинации — такие, как алгебраич. матрицы, знакосочетания в смысле Н. Бурбаки (N. Bourbaki), фразы того или иного языка с расставленными стрелками синтаксич. управления и, вообще, размеченные тем или иным способом графы. Наиболее общее интуитивное понимание состоит в том, что исходными данными и результатами А. могут служить самые разнообразные *конструктивные объекты*. Это открывает возможность широкого применения понятия А. Можно говорить об А. перевода с одного языка на другой, об А. работы поездного диспетчера (перерабатывающего информацию о движении поездов в приказы) и др. примерах алгоритмич. описания процессов управления; именно поэтому понятие А. является одним из центральных понятий кибернетики.

Пример алгоритма. Пусть возможными исходными данными и возможными результатами служат всевозможные слова в *алфавите* $\{a, b\}$. Условимся называть переход от слова X к слову Y «допустимым» в следующих двух случаях (ниже P обозначает произвольное слово): 1) X имеет вид aP, а Y имеет вид Pb; 2) X имеет вид baP, а Y имеет вид $Paba$. Формулируется предписание: «взяв к.-л. слово в качестве исходного, делай допустимые переходы до тех пор, пока не получится слово вида aaP; тогда остановись, слово P и есть результат». Это предписание образует А., к-рый обозначим $\mathfrak{A}$. Возьмем в качестве исходного данного слово *babaa*. После одного перехода получим *baaaba*, после второго *aabaaba*. В силу предписания мы должны остановиться, результат есть *baaba*. Возьмем в качестве исходного данного слово *baaba*. Получим последовательно *abaaba*,

baabab, *abababa*, *bababab*, *babababa*, ... Можно доказать, что процесс никогда не кончится (т. е. никогда не возникает слово, начинающееся с *aa*, и для каждого из получающихся слов можно будет совершить допустимый переход). Возьмем теперь в качестве исходного данного слово *abaab*. Получим *baabb*, *abbaba*, *bbabab*. Далее мы не можем совершить допустимый переход, и в то же время нет сигнала остановки. Произошла безрезультатная остановка. Итак, $\mathfrak{A}$ применим к слову *babaa* и неприменим к словам *baaba* и *abaab*.

Значение алгоритмов. А. встречаются в науке на каждом шагу: умение решать задачу «в общем виде» всегда означает, по существу, владение нек-рым А. Говоря, напр., об умении человека складывать числа, имеют в виду не то, что он для любых чисел рано или поздно сумеет найти их сумму, а то, что он владеет нек-рым единообразным приемом сложения, применимым к любым двум конкретным записям чисел, т. е., иными словами, А. сложения (примером такого А. и является известное правило сложения чисел столбиком). Понятие задачи «в общем виде» уточняется при помощи понятия массовая *алгоритмическая проблема* (м. а. п.). М. а. п. задается серией отдельных, единичных проблем и состоит в требовании найти единый А. их решения (когда такого А. не существует, говорят, что рассматриваемая м. а. п. н е р а з р е ш и м а). Так, проблема численного решения уравнений данного типа и проблема *автоматического перевода* суть м. а. п.: образующими их единичными проблемами являются в 1-м случае проблемы численного решения отдельных уравнений данного типа, а во 2-м случае — проблемы перевода отдельных фраз. Ролью м. а.п. и определяется как значение, так и сфера приложения понятия А.: напр., а алгебре возникают м. а. п. проверки алгебраич. равенств различных типов, в математич. логике — м. а. п. распознавания выводимости предложений из заданных аксиом и т. п. (для математич. логики понятие А. существенно еще и потому, что на него опирается центральное для математич. логики понятие *исчисления*, служащее обобщением и уточнением интуитивных понятий «вывода» и «доказательства»). Установление неразрешимости к.-л. м. а. п. (напр., проблемы распознавания истинности или доказуемости для к.-л. логико-математич. языка) является важным познавательным актом, показывающим, что для решения конкретных единичных проблем данной серии принципиально необходимы специфические для каждой отдельной проблемы методы.

Содержательные явления, к-рые легли в основу образования понятия «А.», издавна занимали важное место в науке. С древнейших времен многие задачи математики заключались в поисках тех или иных конструктивных методов. Эти поиски, особенно усилившиеся в связи с созданием удобной символики, а также осмысления принципиального отсутствия искомых методов в ряде случаев (задача о квадратуре круга и подобные ей) — все это было мощным фактором развития научных знаний. Осознание невозможности решить задачу прямым вычислением привело к созданию в 19 в. теоретико-множественной концепции. Лишь после периода бурного развития этой концепции (в рамках к-рой вопрос о конструктивных методах в современном их понимании вообще не возникает) оказалось возможным в сер. 20 в. вновь вернуться к вопросам конструктивности, но уже на новом уровне, обогащенном выкристаллизовавшимся понятием А. Это понятие легло в основу конструктивного направления в математике.

Само слово «А.» происходит от algoritmi, являющегося, в свою очередь, латинской транслитерацией арабского имени хорезмийского математика 9 в. аль-Хорезми. В средневековой Европе А. назывались десятичная позиционная система счисления и искусство счета в

ней, поскольку именно благодаря латинскому переводу (12 в.) трактата аль-Хорезми Европа познакомилась с позиционной системой.

Строение алгоритмического процесса. Алгоритмич. процесс есть процесс последовательного преобразования конструктивных объектов (к. о.), происходящий дискретными «шагами»; каждый шаг состоит в смене одного к. о. другим. Так, при применении А. $\mathfrak{A}$ к слову *baaba* возникают последовательно *baaba*, *abaaba*, *baabab* и т. д. А при применении, скажем, А. вычитания столбиком к паре $\langle 307, 49 \rangle$ последовательно возникнут такие к. о.:

$$\begin{array}{cccc} \underline{-307} & \underline{-\dot{3}0\dot{7}} & \underline{-\dot{3}0\dot{7}} & \underline{-\dot{3}0\dot{7}} \\ 49 & 49 & 49 & 49 \\ \hline & 8 & 58 & 258 \end{array}$$

При этом в ряду сменяющих друг друга к. о. каждый последующий полностью определяется (в рамках данного А.) непосредственно предшествующим. При более строгом подходе предполагается также, что переход от каждого к. о. к непосредственно следующему достаточно «элементарен» — в том смысле, что происходящее за один шаг преобразование предыдущего к. о. в следующий носит локальный характер (преобразованию подвергается не весь к. о., а лишь нек-рая, заранее ограниченная для данного А. его часть, и само это преобразование определяется не всем предыдущим к. о., а лишь этой ограниченной частью).

Таким образом, наряду с совокупностями возможных исходных данных и возможных результатов для каждого А. имеется еще совокупность возможных промежуточных результатов, представляющая собой ту рабочую среду, в к-рой развивается алгоритмич. процесс. Для $\mathfrak{A}$ все три совокупности совпадают, а для А. вычитания столбиком — нет: возможными исходными данными служат пары чисел, возможными результатами — числа (все в десятичной системе), а возможные промежуточные результаты суть «трехэтажные» записи вида $\begin{array}{c} \underline{-p} \\ q \\ \hline r \end{array}$, где q — запись числа в десятичной системе, r — такая же запись или пустое слово, а p — запись числа в десятичной системе с допущением точек над нек-рыми цифрами. Как правило, для данного А. можно выделить 7 характеризующих его (не независимых) параметров: 1) совокупность возможных исходных данных, 2) совокупность возможных результатов, 3) совокупность возможных промежуточных результатов, 4) правило начала, 5) правило непосредственной переработки, 6) правило окончания, 7) правило извлечения результата.

«Уточнения» понятия алгоритма. Понятие А. в его общем виде принадлежит к числу основных первоначальных понятий математики, не допускающих определения в терминах более простых понятий. Возможные уточнения понятия А. приводят, строго говоря, к известному сужению этого понятия. Каждое такое уточнение состоит в том, что для каждого из указанных 7 параметров А. точно описывается нек-рый класс, в пределах к-рого этот параметр может меняться. Выбор таких классов и отличает одно уточнение от другого. Поскольку 7 параметров однозначно определяют нек-рый А., то выбор 7 классов изменения этих параметров определяет нек-рый класс А. Однако такой выбор может претендовать на название «уточнения», лишь если имеется убеждение, что для произвольного А., имеющего допускаемые данным выбором совокупности возможных исходных данных и возможных результатов, может быть указан равносильный ему А. из определенного данным выбором класса А. Это убеждение формулируется для каждого уточнения в виде основной гипотезы, к-рая — при современном уровне наших пред-

ставлений — не может быть предметом математич. доказательства.

Первые уточнения описанного типа предложили в 1936 Э. Л. Пост (E. L. Post, см. [5]) и А. М. Тьюринг (A. M. Turing, см. [3], [4]), их конструкции во многом предвосхитили идеи, заложенные в основу современных цифровых вычислительных машин. Известны также уточнения, сформулированные А. А. Марковым (см. [10], [11], *Нормальный алгорифм*) и А. Н. Колмогоровым (см. [12],[13]; последний предложил трактовать конструктивные объекты как топологич. комплексы определенного вида, что дало возможность уточнить свойство «локальности» преобразования). Для каждого из предложенных уточнений соответствующая основная гипотеза хорошо согласуется с практикой. В пользу этой гипотезы говорит и то, что, как можно доказать, все предложенные уточнения в нек-ром естественном смысле эквивалентны друг другу.

В качестве примера рассмотрим уточнение, предложенное А. М. Тьюрингом. В своем оригинальном виде это уточнение заключалось в описании нек-рой абстрактной вычислительной машины, состоящей из: 1) бесконечной ленты, разбитой на следующие друг за другом в линейном порядке ячейки, причем в каждой ячейке записан к.-л. символ из так наз. «внешнего алфавита» машины, и 2) каретки, находящейся в каждый момент в нек-ром «состоянии» (из заданного конечного списка состояний), способной перемещаться вдоль ленты и изменять содержимое ячеек; А. вычислений на такой машине («тьюрингов А.») задается в виде программы, управляющей действиями каретки. Более подробное и точное описание см. в статье *Тьюринга машина*; здесь приводится модернизированное изложение конструкции Тьюринга в терминах, указанных выше 7 параметров. Чтобы задать тьюрингов А., надо указать: а) попарно непересекающиеся алфавиты $Б$, $Д$, $Ч$ с выделенной в $Д$ буквой λ и выделенными в $Ч$ буквами α и ω, б) набор пар вида $\langle p\xi, \eta Tq\rangle$, где p, $q \in Ч$, ξ, $\eta \in Б \cup Д$, а T есть один из трех знаков $-$, 0, $+$, причем предполагается, что в этом наборе (наз. программой) нет 2 пар с одинаковыми первыми членами. Параметры А. задаются так: возможными исходными данными и возможными результатами служат слова в $Б$, а возможными промежуточными результатами — слова в алфавите $Б \cup Д \cup Ч$, содержащие не более одной буквы из $Ч$. Правило начала: исходное слово P переводится в слово $\lambda\alpha P\lambda$. Правило окончания: заключительным является промежуточный результат, содержащий ω. Правило извлечения результата: результатом объявляется цепочка всех тех букв заключительного промежуточного результата, к-рая идет вслед за ω и предшествует первой букве, не принадлежащей $Б$. Правило непосредственной переработки, переводящее A в A', состоит в следующем. Приписываем к A слева и справа букву λ; затем в образовавшемся слове часть вида $\varepsilon p\xi$, где $p \in Ч$, $\varepsilon\xi \in Б \cup Д$, заменяем на слово Q по следующему правилу: в программе ищется пара с первым членом $p\xi$; пусть второй член этой пары есть ηTq; если T есть $-$, то $Q = q\varepsilon\eta$; если T есть 0, то $Q = \varepsilon q\eta$; если T есть $+$, то $Q = \varepsilon\eta q$. Возникающее после этой замены слово и есть A'.

Лит. см. [3]—[5], [10]—[13] при ст. *Алгоритмов теория*.

В. А. Успенский.

АЛГОРИТМ В АЛФАВИТЕ A — «точное общепонятное предписание, определяющее потенциально осуществимый процесс последовательного преобразования абстрактных слов в *алфавите* A, процесс, допускающий любое слово в A в качестве исходного» (см. [1], с. 51).

А. в а. представляют собой частный случай общего понятия *алгоритма*. Исходными данными и возможными результатами применения А. в а. являются *конструктивные объекты* достаточно общего типа — *слова*, и это обстоятельство определяет роль понятия А. в а.

в математике. К 70-м гг. 20 в. были выработаны различные уточнения (стандартизации) понятия А. в а.; наибольшую известность среди них получили *нормальные алгорифмы* А. А. Маркова и алгоритмы, определяемые на основе понятия *Тьюринга машины*. При построении конкретных А. в а., иногда по соображениям технического характера, связанным с деталями определения алгоритма или кодировки исходных данных, приходится расширять исходные алфавиты путем введения дополнительных букв и рассматривать алгоритмы в так расширенных алфавитах. В таких ситуациях удобным инструментом является понятие а л г о р и т м а н а д д а н н ы м а л ф а в и т о м, т. е. алгоритма в нек-ром расширении этого алфавита. Для двух алгоритмов над данным алфавитом могут быть естественным образом введены понятия эквивалентности и полной эквивалентности относительно него этих алгоритмов.

Лит.: [1] М а р к о в А. А., Теория алгорифмов, «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1954, т. 42. *Н. М. Нагорный.*

АЛГОРИТМ ЛОКАЛЬНЫЙ — алгоритм, устанавливающий свойства элементов множества и использующий на каждом шаге при этом только информацию об окрестности элемента. В терминах А. л. естественно формулируются и решаются задачи о существовании или несуществовании эффективных алгоритмов для различных дискретных экстремальных задач.

Пусть задано семейство $\{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \in M\}$ множеств, и пусть каждой паре $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, где $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$, сопоставлено множество $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ такое, что: 1) $\mathfrak{A} \in S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, 2) $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}$, 3) если $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_2$ и $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_1) \subseteq \subseteq \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_1$, то $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_1) = S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_2)$. Тогда множество $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ наз. о к р е с т н о с т ь ю $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}$. Примерами окрестностей служат окрестности конъюнкции в сокращенной нормальной форме (см. *Булевых функций минимизация*).

Пусть Γ — конечный неориентированный *граф*, $\Gamma = M_1 \cup M_2$, $M_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$ — множество вершин Γ, $M_2 = \{(a_{i_1}, a_{i_2}), \ldots, (a_{r_p}, a_{r_t})\}$ — множество ребер Γ. Окрестность $S_1(R, \Gamma)$ ребра $R = (a_i, a_j)$ графа Γ состоит из всех вершин ребер, инцидентных ребру R, а также из всех ребер, вершины к-рых входят в окрестность $S_1(R, \Gamma)$. Пусть определена окрестность $S_{n-1}(R, \Gamma)$, тогда окрестность $S_n(R, \Gamma)$ состоит из всех вершин ребер, инцидентных вершинам окрестности $S_{n-1}(R, \Gamma)$, и всех ребер, вершины к-рых принадлежат окрестности $S_n(R, \Gamma)$. Аналогично вводятся окрестности $S_1(a_j, \Gamma), \ldots, S_n(a_j, \Gamma), \ldots$ для произвольной вершины a_j графа Γ.

Пусть на парах $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$, определена система двуместных предикатов $P_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}), \ldots, P_l(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, к-рая разбита на два непересекающихся подмножества $\langle P_1, \ldots, P_r \rangle$ и $\langle P_{r+1}, \ldots, P_l \rangle$. Элементы первого подмножества наз. о с н о в н ы м и п р е д и к а т а м и, второго — в с п о м о г а т е л ь н ы м и п р е д и к а т а м и. Вектор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ наз. и н ф о р м а ц и о н н ы м, если $\alpha_i \in \{0, 1, \Delta\}$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Вектор $\tilde{\alpha}$ наз. д о п у с т и м ы м для $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}$, если для всех $\alpha_i \neq \Delta$ выполнено равенство $\alpha_i = P_i(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$. Множество $J(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ всех информационных векторов, допустимых для $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}$, наз. и н ф о р м а ц и о н н ы м м н о ж е с т в о м $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}$.

Пусть $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_q\}$ и $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{il}) \in J(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{M})$, $i = 1, 2, \ldots, q$. Множество $\mathfrak{M}^* = \{\mathfrak{A}_1^{\alpha_{11} \ldots \alpha_{1l}}, \ldots, \mathfrak{A}_q^{\alpha_{q1} \ldots \alpha_{ql}}\}$ наз. д о п у с т и м ы м для $\mathfrak{M}$. Класс $J(\mathfrak{M})$ всех допустимых для $\mathfrak{M}$ множеств $\mathfrak{M}^*$ наз. и н ф о р м а ц и о н н ы м к л а с с о м множества $\mathfrak{M}$ по системе предикатов $P_1, P_2, \ldots, P_l$. Очевидно, что окрестность $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ определяет окрестность $S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}, \mathfrak{M}^*)$.

Введем систему функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ таких, что $\varphi_i(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}, S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \ldots \alpha_l}, \mathfrak{M}^*)) = (\beta_1, \ldots, \beta_l)$. Функции φ_i

определены на всех парах $(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \mathfrak{M}^*))$ таких, что $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l} \in \mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{M}^* \in J(\mathfrak{M})$, и удовлетворяют следующим условиям: 1) $\alpha_i = \beta_j$, если $j \neq i$; 2) множество $\widetilde{\mathfrak{M}}^*$, которое получается из $\mathfrak{M}^*$ заменой элемента $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ на $\mathfrak{A}^{\beta_1 \dots \beta_l}$, допустимо для $\mathfrak{M}$, т. е. $\widetilde{\mathfrak{M}}^* \in J(\mathfrak{M})$. Для краткости пары $(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \mathfrak{M}^*))$ обозначаются через $(\mathfrak{A}, \alpha_1, \dots, \alpha_l, S, \mathfrak{M}^*)$.

На нек-рых из описанных множеств вводится частичный порядок: 1) на множестве $M_1 = \{0, 1, \Delta\} - \Delta < 0$, $\Delta < 1$, 2) на множестве M_2 информационных векторов длины l — $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) \leqslant (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$, если $\alpha_i \leqslant \beta_i$, $i = 1, 2, \dots, l$; 3) на множестве элементов с отметками — $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l} \leqslant \mathfrak{A}^{\beta_1 \dots \beta_l}$, если $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \leqslant (\beta_1, \dots, \beta_l)$; 4) на множестве $M^* = \bigcup_{\mathfrak{M} \in M} J(\mathfrak{M}) - \mathfrak{M}_1^* \leqslant \mathfrak{M}_2^*$, если, во-первых, $\mathfrak{M}_1^*$ и $\mathfrak{M}_2^*$ принадлежат одному информационному классу $J(\mathfrak{M})$ и, во-вторых, из того, что $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l} \in \mathfrak{M}_1^*$ и $\mathfrak{A}^{\beta_1 \dots \beta_l} \in \mathfrak{M}_2^*$, следует $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \leqslant (\beta_1, \dots, \beta_l)$; 5) на множестве окрестностей вида $S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \mathfrak{M}^*) - S_1 \leqslant S_2$, где $S_1 = S(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \mathfrak{M}_1^*)$ и $S_2 = S(\mathfrak{A}^{\beta_1 \dots \beta_l}, \mathfrak{M}_2^*)$, тогда и только тогда, когда $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_1) = S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_2)$ и из условий $\mathfrak{B}^{\gamma_1 \dots \gamma_l} \in S_1$, $\mathfrak{B}^{\delta_1 \dots \delta_l} \in S_2$ следует, что $(\gamma_1, \dots, \gamma_l) \leqslant (\delta_1, \dots, \delta_l)$.

Пусть A и B — элементы одного из множеств 1) — 5). Если $A \leqslant B$ и $A \geqslant B$, то элементы A и B наз. р а в н ы м и п о и н ф о р м а ц и и, что обозначается $A \curlywedge B$. Функция $\varphi(\mathfrak{A}, \alpha_1, \dots, \alpha_l, S, \mathfrak{M}^*)$ наз. м о н о т о н н о й, если из соотношения $S_1 \leqslant S_2$ следует, что для $i = 1, 2, \dots, l$

$$\varphi_i(\mathfrak{A}, \alpha_1, \dots, \alpha_l, S_1, \mathfrak{M}_1^*) \leqslant \varphi_i(\mathfrak{A}, \beta_1, \dots, \beta_l, S_2, \mathfrak{M}_2^*).$$

Для определения А. л. необходимо также ввести а л г о р и т м A_π у п о р я д о ч и в а н и я. Пусть M — произвольное множество, составленное из элементов с информационными векторами, а $N = \{1, 2, \dots, l\}$. Рассмотрим множество $M \widetilde{\times} N$ всех пар $(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, j)$ таких, что $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l} \in M$, $j \in N$, $\alpha_j = \Delta$. Алгоритм A_π упорядочивает множество $M \widetilde{\times} N$. А. л. A полностью определяется системой предикатов $P_1, \dots, P_l$, разбиением этой системы на основные $P_1, \dots, P_r$ и вспомогательные $P_{r+1}, \dots, P_l$ предикаты, системой монотонных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_l$, $\varphi_i = \varphi_i(\mathfrak{A}, \alpha_1, \dots, \alpha_l, S, \mathfrak{M}^*)$, и алгоритмом A_π.

Пусть $\mathfrak{M}^* = \bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{A}_i^{\alpha_{i1} \dots \alpha_{il}}$, $\mathfrak{M}^* \in J(\mathfrak{M})$. Первый шаг А. л. состоит в следующем. К множеству $M \widetilde{\times} N$, где $M = \mathfrak{M}^*$, применяется алгоритм A_π; для первой по порядку пары $(\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}, j)$ вычисляется $\varphi_j(\mathfrak{A}, \alpha_1, \dots, \alpha_l, S, \mathfrak{M}^*) = (\beta_1, \dots, \beta_l)$ и элемент $\mathfrak{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ заменяется на $\mathfrak{A}^{\beta_1 \dots \beta_l}$; если $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) = (\beta_1, \dots, \beta_l)$, то берется вторая пара, и т. д.; если для всех элементов $(\mathfrak{B}^{\gamma_1 \dots \gamma_l}, i)$ выполнено равенство $\varphi_i(\mathfrak{B}, \gamma_1, \dots, \gamma_l, S, \mathfrak{M}^*) = (\gamma_1, \dots, \gamma_l)$, то А. л. A заканчивается после просмотра всех пар из $M \widetilde{\times} N$. В противном случае, после замены вектора $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ на новый вектор $(\beta_1, \dots, \beta_l)$, если нет больше элементов, у к-рых на первых r местах в информационных векторах имеется хотя бы один символ Δ, алгоритм A заканчивается; если они есть, то заканчивается первый шаг А. л. Пусть выполнено n шагов А. л. A. Описание $(n+1)$-го шага в точности повторяет описание первого, если вместо множества $\mathfrak{M}^*$ рассматривать множество $\mathfrak{M}_n^*$, в к-рое перешло $\mathfrak{M}^*$ после первых n шагов А. л. A. В силу монотонности функций φ_i, $i = 1, 2, \dots, l$, А. л. A закончится после конечного числа шагов.

Исходными теоремами для А. л. являются т е о р е м а е д и н с т в е н н о с т и и т е о р е м а с у щ е-

ствования наилучшего алгоритма. Первая теорема утверждает, что результат вычислений основных предикатов не зависит от алгоритма A_π (порядка обхода элементов множества $\mathfrak{M}^*$). Вторая теорема утверждает существование в весьма общих предположениях наилучшего А. л., т. е. А. л., к-рый по заданной фиксированной системе окрестностей вычисляет заданные основные предикаты при фиксированных вспомогательных предикатах всегда, когда это делает любой другой А. л. с той же системой окрестностей, основных и вспомогательных предикатов.

Задача получения наилучшего А. л. в явной форме решена для алгоритмов синтеза минимальных покрытий. Пусть задан набор $\langle \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_q, \mu_1, \ldots, \mu_q, M \rangle$, где $\mathfrak{A}_i$ – множество, μ_i – сложность $\mathfrak{A}_i$, $\mu_i > 0$, $i=1, 2, \ldots, q$, $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{q} \mathfrak{A}_i$. Сложность набора $(\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_p})$ есть $\sum_{j=1}^{p} \mu_{i_j}$. Требуется построить покрытие M множествами из числа $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_q$ с минимальной сложностью. Система окрестностей $S_1, \ldots, S_n, \ldots$ для каждого $\mathfrak{A}_i$ вводится аналогично системе окрестностей для конъюнкций. Наилучший А. л. строится для системы окрестностей S_k при фиксированных предикатах: множество вспомогательных предикатов пусто; в качестве основных рассматриваются предикаты $P_1(\mathfrak{A}, M)$ («$\mathfrak{A}$ не входит ни в одно минимальное покрытие M») и $P_2(\mathfrak{A}, M)$ («$\mathfrak{A}$ входит во все минимальные покрытия M»). Наилучшие А. л. построены также для вычисления простых свойств ребер графа. Большое число различных А. л. было предложено для решения задач минимизации булевых функций, дискретного линейного программирования и т. д.

Важное место в теории А. л. занимают задачи о невычислимости экстремальных свойств в классе А. л. Если на парах $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \in M$, задана система вложенных окрестностей: $S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \subseteq S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \subseteq \ldots \subseteq S_n(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \subseteq \ldots$ и А. л. работает по системе окрестностей $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, где $S_{k-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \subseteq S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \subseteq S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, то говорят, что А. л. имеет индекс k. Число предикатов $P_1, \ldots, P_l$ в определении А. л. естественно считать величиной памяти А. л. Пусть задано множество $\mathcal{P}$ предикатов $P(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$. Считается, что все предикаты, участвующие в определении А. л., принадлежат $\mathcal{P}$. Пусть $A(\mathfrak{M}^*)$ – результат применения А. л. A к $\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{M}^* \in J(\mathfrak{M})$, $\mathfrak{M} \in M$. Про предикат $P_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ говорят, что он не является (k, l)-вычислимым, если для всякого А. л. индекса k с величиной памяти l, основным предикатом P_1 и вспомогательными $P_2, \ldots, P_l$ из $\mathcal{P}$ найдется множество $\mathfrak{M}^*$ такое, что в $A(\mathfrak{M}^*)$ предикат P_1 будет вычислен не для всех элементов.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – совокупность всех *булевых функций* от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $P_1(\mathfrak{A}, f(x_1, \ldots, x_n))$ – предикат «конъюнкция $\mathfrak{A}$ входит хотя бы в одну минимальную дизъюнктивную нормальную форму». При естественных ограничениях на класс предикатов $\mathcal{P}$ установлено, что предикат $P_1(\mathfrak{A}, f(x_1, \ldots, x_n))$ не является (k, l)-вычислимым, если $kl < \mathrm{const} \cdot 2^n$. Интересно отметить, что предикат $P(\mathfrak{A}, f(x_1, \ldots, x_n))$ «конъюнкция $\mathfrak{A}$ входит хотя бы в одну тупиковую дизъюнктивную нормальную форму f» (см. *Булевых функций нормальные формы*) является (2, 1)-вычислимым, но не (1, 1)-вычислимым. Аналогичные результаты получены для предикатов, описывающих вхождение ребра в минимальный путь между заданными вершинами графа.

Лит.: [1] Журавлев Ю. И., «Кибернетика», 1965, № 1, с. 12—19; 1966, № 2, с. 1—11; [2] Хуторянская И. В., «Кибернетика», 1971, № 1, с. 29—33; [3] Журавлев Ю. И., сб. «Проблемы кибернетики», 1962, вып. 8, с. 5—44.

См. также лит. при статье *Булевых функций минимизация*.

Ю. И. Журавлев.

АЛГОРИТМА ИЗОБРАЖЕНИЕ — *конструктивный объект* определенного вида (как правило, натуральное число или слово), содержащий в себе закодированную по фиксированным для алгоритмов данного типа правилам полную информацию об этом алгоритме. Обычно определение А. и. формулируется таким образом, чтобы процедуры получения А. и. по исходному алгоритму и восстановления исходного алгоритма по А. и. осуществлялись по возможности более просто.

И з о б р а ж е н и е $\mathfrak{A}^{И}$ *нормального алгорифма* $\mathfrak{A}$ в алфавите A (не содержащем букв α, β и γ) определяется как слово в алфавите $A\alpha\beta\gamma$, получаемое следующим образом (см. [1], с. 163). В каждой формуле подстановки схемы $\mathfrak{A}$ стрелка заменяется буквой α, точка (если она имеется) — буквой β, а в конце так построенного слова приписывается буква γ. Затем полученные слова выписываются друг за другом в том порядке, в каком соответствующие им формулы подстановки шли в схеме $\mathfrak{A}$. По существу, $\mathfrak{A}^{И}$ представляет собой всего лишь несколько иначе — в виде слова — записанную схему нормального алгорифма $\mathfrak{A}$. По соображениям, связанным с технич. деталями определения нормального алгорифма, несколько более удобным оказывается другой тип изображения нормального алгорифма — так называемая з а п и с ь нормального алгорифма (см. [1], с. 187), являющаяся результатом перевода слова $\mathfrak{A}^{И}$ в к.-л. двухбуквенный алфавит (обычно 01). Аналогичным образом может быть построено изображение программы *Тьюринга машины*. Роль изображения *рекурсивной функции* играет гёделев номер системы определяющих эту функцию равенств (см. [2], с. 221).

При к.-л. уточнении общего понятия алгоритма А. и. определяется с таким расчетом, чтобы оно (фактически — изображаемый им алгоритм) могло входить в состав исходных данных для алгоритмов такого типа. При этом открывается возможность доказывать так наз. «теоремы об универсальных алгоритмах», трактующие об осуществимости алгоритмов, способных моделировать по А. и. работу любого алгоритма рассматриваемого типа.

Если для к.-л. алгоритма А. и. является допустимым исходным данным, то этот алгоритм наз. с а м о п р и м е н и м ы м, если он применим к своему А. и., и н е с а м о п р и м е н и м ы м — в противном случае. Рассуждением, представляющим собой вариант «парадокса Рассела» (см. *Антиномия*) применительно к данной ситуации, можно показать, что естественно возникающая при этом алгоритмич. проблема распознавания самоприменимых алгоритмов среди прочих алгоритмов того же типа оказывается неразрешимой. Этот результат лежит в основе многих теорем о неразрешимости алгоритмич. проблем.

Длина А. и. является одной из естественных мер *алгоритма сложности* (объем памяти, требующейся для запоминания программы алгоритма).

Лит.: [1] М а р к о в А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 («Тр. матем. ин-та АН СССР», т. 42); [2] К л и н и С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

Н. М. Нагорный.

АЛГОРИТМА СЛОЖНОСТЬ в ы ч и с л е н и й — функция, дающая числовую оценку трудности (громоздкости) процессов применения алгоритма к исходным данным. Уточнением А. с. вычислений служит понятие с и г н а л и з и р у ю щ е й ф у н к ц и и (или просто с и г н а л и з и р у ю щ е й) — функции, к-рая задается разрешимым отношением между объектами применения алгоритма и натуральными числами и имеет область определения, совпадающую с областью применимости алгоритма.

Чаще всего рассматриваются временные и пространственные характеристики алгоритмич. процессов. Так, для *Тьюринга машины* M с и г н а л и з и р у ю щ а я

функция времени (время работы) $T_M(P)$ есть число t тактов работы M при преобразовании исходных слов P в заключительные; сигнализирующая памяти (или емкости) $S_M(P)$ определяется как количество ячеек ленты, в к-рых хотя бы раз побывала головка машины при работе над P. Сходным образом определяются сигнализирующие времени и емкости для *нормальных алгорифмов*, итеративных сетей, многоголовочных и многоленточных машин Тьюринга и т. п.

Общей особенностью этих двух конкретных типов сигнализирующих является наличие эффективной процедуры, позволяющей для любого алгоритма α (т. е., в частности, для машины Тьюринга, или, точнее, для ее программы), всякого исходного данного x и натурального числа t установить, верно ли, что процесс применения α к x заканчивается со сложностью t. Это обстоятельство положено в основу аксиоматич. построения теории сложности вычислений (см. [1]). Эффективная процедура r наз. мерой вычислений, если она: 1) всегда заканчивается результатом 0 или 1 применительно к тройкам вида ⟨алгоритм, исходное данное, натуральное число⟩, 2) обладает тем свойством, что для любого алгоритма α и исходного данного x равенство $r(\alpha, x, t)=1$ верно не более чем при одном натуральном t, причем такое t существует тогда и только тогда, когда процесс применения α к x заканчивается. Вводится сигнализирующая функция R_α по мере r для α: $R_\alpha(x)=t$ тогда и только тогда, когда $r(\alpha, x, t)=1$.

Таким образом, последнее равенство объявляется эквивалентом высказывания «сложность вычисления α на x равна t (по мере r)».

Фиксируя ту или иную меру вычислений, можно ставить задачи о сложности вычисления конкретных функций f, напр. об отыскании алгоритма α, вычисляющего f «лучше других алгоритмов». Однако, как показывает теорема ускорения (см. ниже), подобная постановка не всегда правомерна, и речь может идти скорее об описании скорости роста тех сигнализирующих R_α, для к-рых α вычисляет f [напр., об отыскании верхней и нижней границ сложности вычисления f — двух функций $G(x)$ и $g(x)$ таких, что существует вычисление α функции f, для к-рого $R_\alpha(x) \leqslant G(x)$, и для всякого алгоритма β, вычисляющего f, функция R_β в каком-то смысле мажорирует g].

Другим важным направлением в теории сложности вычислений является изучение классов сложности — множеств функций, для к-рых существуют вычисления со сложностью, не превышающей к.-л. границы из множества границ, задающих класс. К этому направлению можно отнести и задачи сравнения сложности вычисления для различных типов алгоритмов (автоматов): переход к иной алгоритмич. системе и мере сложности обычно равносилен рассмотрению подходящей новой меры для исходной концепции алгоритмов.

Укажем нек-рые фундаментальные результаты, не зависящие от выбора меры сложности (в том числе и от выбора конкретного уточнения понятия алгоритма) — лишь бы существовала, напр., эффективная возможность взаимного моделирования алгоритмов рассматриваемого типа и обыкновенных машин Тьюринга. (Для простоты можно представить себе дело так, что речь идет о времени вычисления на машинах Тьюринга натуральнозначных функций натурального аргумента.) Пусть T и h суть вычислимые натуральнозначные функции (см. *Вычислимая функция*) на объектах применения алгоритмов, f — функция, определенная на тех же объектах и принимающая лишь два значения (например, 0 и 1).

Во-первых, существуют сколь угодно сложно вычислимые функции. Точнее, для любой функции T су-

ществует вычислимая функция f такая, что для всякого алгоритма α, вычисляющего f, неравенство

$$R_\alpha(x) > T(x)$$

неверно лишь в ограниченном числе случаев.

Во-вторых, существуют функции, любое вычисление к-рых в принципе может быть улучшено как угодно сильно. Точнее, имеет место теорема ускорения: для любой функции h (напр., $h(t)=2^t$) можно указать вычислимую функцию f такую, что для всякого алгоритма α, вычисляющего f, не может не найтись (здесь эффективная процедура не предполагается) алгоритм β, тоже вычисляющий f и такой, что для всех x (кроме конечного множества)

$$h(R_\beta(x)) < R_\alpha(x);$$

в случае $h(t)=2^t$ это приводит к

$$R_\beta(x) < \log_2 R_\alpha(x)$$

для почти всех x.

Для мер вычислений, определяющих время работы и объем памяти, заключение теоремы ускорения верно для большинства вычислений в такой форме: если f вычислима со сложностью $R(n)$, то она вычислима и со сложностью $R(n)/2$ (говорят, что f вычислима со сложностью $R(n)$, если для нек-рого α, вычисляющего ее, $R_\alpha(P)\leqslant R(n)$ для всех слов P длины n в рассматриваемом алфавите). Поэтому временна́я и объемная сложности вычислений конкретных функций часто оцениваются с точностью до порядка. Ниже приведены нек-рые конкретные результаты.

Установлено, что время распознавания равенства слов равно (по порядку) n^2 для машин Тьюринга и нормальных алгорифмов; что всякое свойство слов, распознаваемое на машинах Тьюринга за время, по порядку меньшее функции $n\log_2 n$, распознается и за время n; что вычисления на машинах Тьюринга со временем $T(n)$ (для $T(n)\geqslant n^2$ по порядку) моделируются на машинах Тьюринга с объемом памяти $\sqrt{T(n)}$. Доказано, что умножение двух n-разрядных чисел на многоленточных машинах Тьюринга осуществимо за время $n^{1+\varepsilon}$, но всегда более n по порядку, а итеративные сети могут умножать в реальное время, т. е. i-й младший разряд произведения появляется на выходе с подачей на вход i-х разрядов сомножителей. При моделировании алгоритмич. процессов одного типа с помощью других сложность вычислений, вообще говоря, меняется. Так, уменьшение размерности итеративных сетей приводит к увеличению времени. В то же время замена многоголовочных машин Тьюринга многоленточными не меняет времени вычисления функций. Для многих типов алгоритмов доказывается возможность их моделирования на машинах Тьюринга с полиномиальным (обычно даже квадратичным) возрастанием времени работы и незначительным увеличением объема памяти.

Сложностный подход оказывается полезным при изучении известных иерархий классов *общерекурсивных функций*, связанных с логическими и алгебраическими их особенностями. Так, напр., примитивно рекурсивные функции оказываются в точности теми функциями, к-рые вычислимы на машинах Тьюринга с объемом памяти, ограниченным определенной функцией. Факты существования достаточно сложно распознаваемых свойств, не зависящие от выбора вычислений, доказываются применением диагонального процесса. Их естественные аналоги были обнаружены для нек-рых разрешимых элементарных теорий и в областях, примыкающих к математич. лингвистике. В то же время для многих практически важных проблем получение хороших нижних границ сопряжено со значительными трудностями. Так, в частности, обстоит дело с задачами

переборного характера, к-рые уточняются (в одном из вариантов) как задачи об отыскании среди слов определенной длины слова, удовлетворяющего вычислимому за полиномиальное время условию. Упомянем еще о сложности вычислений на недетерминированных автоматах и *автоматах вероятностных*. В первом случае речь идет о процессах с элементами произвола, и под сложностью вычислений понимается сложность «самого простого» варианта процесса. Во втором — конкретный ход процесса определяется, помимо программы и аргумента, последовательностью показаний датчика случайных чисел, а результат должен с большой вероятностью совпадать со значением вычисляемой функции. В обоих случаях удается доказать иногда уменьшение сложности вычислений по сравнению с детерминированными процессами.

Качество алгоритмов оценивают не только с точки зрения А. с. вычислений, но и с точки зрения *алгоритма сложности* описания. Имеются результаты, совмещающие оба подхода.

Лит.: [1] Хартманис Дж., Хопкрофт Дж. Э., «Кибернетический сборник», 1974, вып. 11, с. 131—76.

Н. В. Петри.

АЛГОРИТМА СЛОЖНОСТЬ описания — величина, характеризующая длину описания алгоритма. В зависимости от точной концепции алгоритма А. с. описания уточняется по-разному. Единого достаточно устоявшегося уточнения к настоящему моменту (1977) не существует. Ниже рассмотрены наиболее часто встречающиеся случаи.

Под сложностью описания *нормального алгорифма* обычно понимают длину его изображения, т. е. длину записи всех его формул подстановок в одну строку (между формулами проставляется специальная разделительная буква). Под сложностью описания *Тьюринга машины* обычно понимают число ее внутренних состояний и внешних символов. Иногда для характеристики сложности машины Тьюринга используют число команд данной машины. Для *рекурсивных функций*, задаваемых схемами рекурсий, в качестве меры сложности обычно используют число букв в этих схемах.

Предложено также и аксиоматическое определение А. с. описания (см. [2]). Рассмотрим это определение применительно к машинам Тьюринга. Пусть (M_i), $i=0, 1, 2, \ldots,$ — естественная нумерация машин Тьюринга, характеризующаяся тем, что по номеру машины можно эффективно восстановить саму машину (т. е. ее программу), а по машине (т. е. программе) — ее номер. Общерекурсивная функция s наз. мерой сложности машин (при этом $s(i)$ наз. сложностью машины M_i) тогда и только тогда, когда: а) для любого y существует не более чем конечное число машин, имеющих сложность y; б) существует эффективная процедура, позволяющая определить для любого y все те машины, к-рые имеют сложность y.

Пусть s — произвольная мера сложности машин Тьюринга. Если U — произвольный эффективно (т. е. алгоритмически) перечислимый бесконечный подкласс машин Тьюринга, то существует машина T, принадлежащая U, и существует машина T' (не обязательно из U) такая, что T' и T вычисляют одну и ту же функцию, и сложность T' значительно меньше, чем сложность T. Отсюда, в частности, вытекает существование примитивно рекурсивных функций, наименьшая сложность к-рых в примитивно рекурсивной форме (т. е. через схемы примитивной рекурсии) значительно больше, чем их наименьшая сложность в общерекурсивной форме (т. е. через схемы общей рекурсии). Пусть под сложностью нормальных алгорифмов и машин Тьюринга понимаются, соответственно, длина изображения и число внутренних состояний. Тогда любую функцию алгебры

логики от N переменных (см. *Булева функция*) можно реализовать (см. [3]): а) нормальным алгорифмом в m-буквенном алфавите со сложностью $\sim 2^N/\log_2 m$; б) машиной Тьюринга с m-буквенным внешним алфавитом со сложностью $\sim 2^N/N(m-1)$.

С 60-х гг. 20 в. начато изучение сложности алгоритмов, решающих конечные куски алгоритмически неразрешимых *массовых проблем* (так наз. ограниченные алгоритмич. проблемы). А. А. Марков рассмотрел следующую задачу: для любой функции алгебры логики от N переменных построить изображение нормального алгорифма в алфавите $\Phi = \{0, 1, a, b, c\}$, реализующего данную функцию и имеющего минимальную сложность среди всех таких алгорифмов. Показано (см. [1], [4]), что сложность нормального алгорифма, решающего эту задачу, имеет порядок 2^N. Изучен также вопрос о сложности алгоритмов, решающих для первых n натуральных чисел проблему вхождения в рекурсивно перечислимое множество (с л о ж н о с т ь n-к у с к о в р е к у р с и в н о п е р е ч и с л и м ы х м н о ж е с т в). Показано, что в случае нормальных алгорифмов эта сложность по порядку не превосходит $\log_2 n$ и что в общем случае эта оценка не может быть понижена. В то же время существуют множества, задаваемые с помощью достаточно простых логич. средств, к-рые имеют сложность n-кусков порядка n. Показано также, что при общерекурсивном ограничении времени работы алгорифмов сложность n-кусков рекурсивно перечислимых множеств может возрастать экспоненциально и по порядку достичь величины n.

Понятие А. с. описания используется в основном при уточнении вопроса о том, какова минимальная сложность алгоритма, строящего тот или иной конечный объект. Эту минимальную сложность часто наз. просто с л о ж н о с т ь ю к о н е ч н о г о о б ъ е к т а (при данном уточнении понятия А. с. описания).

Определение сложности конечных объектов впервые было предложено А. Н. Колмогоровым (см. *Алгоритмическая теория информации*). Оказывается, что между сложностью $K(x)$ по Колмогорову, сложностью $M_m(x)$ этих же объектов, выражаемой через длину изображения нормального алгорифма в m-буквенном алфавите, и сложностью $T_m(x)$, выражаемой числом внутренних состояний машины Тьюринга с m-буквенным внешним алфавитом, существуют асимптотически точные соотношения

$$M_m(x) \sim \frac{K(x)}{\log m}, \quad T_m(x) \sim \frac{K(x)}{(m-1)\log_2 K(x)}.$$

Лит.: [1] М а р к о в А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 1, с. 168—208; [2] Б л ю м М., сб. «Проблемы математической логики», М., 1970, с. 423—31; [3] К у з ь м и н В. А., сб. «Проблемы кибернетики», 1965, вып. 13, с. 75—96; [4] П е т р и Н. В., «Докл. АН СССР», 1969, т. 185, № 1, с. 37—39; [5] З в о н к и н А. К., Л е в и н Л. А., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, вып. 6, с. 85—127.

Я. М. Барздинь.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА — проблема, в к-рой требуется найти единый метод (*алгоритм*) для решения бесконечной серии однотипных единичных задач. Такие проблемы иногда наз. также м а с с о в ы м и п р о б л е м а м и. А. п. возникали и решались в различных областях математики на протяжении всей ее истории; однако нек-рые из них долгое время не поддавались решению. Причина этого выяснилась лишь после того, как в 30-х гг. 20 в. в математич. логике было выработано точное определение понятия алгоритма. Оказалось, что А. п. могут быть неразрешимыми, т. е. искомые в них алгоритмы могут не существовать. Таким образом, представление математиков об А. п. значительно изменилось: теперь уже новые А. п. стали формулировать как проблемы решения вопроса о существовании алгоритма для решения данной бесконечной серии однотипных задач и нахождения такого алгоритма в случае, если он существует.

В *алгоритмов теории* почти одновременно появилось несколько различных по форме уточнений понятия алгоритма, к-рые по существу оказались эквивалентными. Каждое из этих уточнений заключается в том, что выделяется тот или иной достаточно широкий класс конкретных алгоритмов, замкнутый относительно естественных операций соединения алгоритмов. Каждое утверждение о неразрешимости той или иной А. п. представляет собой математически строго доказанную теорему о невозможности решения рассматриваемой А. п. с помощью алгоритмов данного класса. В такой форме эти теоремы можно было бы рассматривать как специфич. теоремы, связанные с данным классом алгоритмов. Однако все результаты такого рода можно перенести на общепонятный для математиков язык алгоритмов, понимаемых в интуитивном смысле. Этот перенос основан на так наз. т е з и с е Ч ё р ч а (в зависимости от формы уточнения понятия алгоритма его наз. еще т е з и с о м Т ь ю р и н г а, или п р и н ц и п о м н о р м а л и з а ц и и), к-рый утверждает, что рассматриваемый класс алгоритмов универсален, т. е. с помощью алгоритмов этого класса по существу можно выполнить работу любого алгоритма, понимаемого в интуитивном смысле. Этот тезис есть естественнонаучный факт, подкрепленный историей математики: все известные в математике алгоритмы удовлетворяют ему; все попытки построить примеры алгоритмов, выходящих за указанные рамки, не увенчались успехом. Наконец, эквивалентность различных по форме уточнений понятия алгоритма также служит подкреплением этого тезиса. Тезис Чёрча не может быть доказан, поскольку относится к математически расплывчатому понятию алгоритма в интуитивном смысле; однако он очень важен для математики, так как позволяет говорить о неразрешимости тех или иных А. п. в широком и общепонятном для математиков смысле.

Первые примеры неразрешимых А. п. были обнаружены в самой теории алгоритмов. К ним относятся проблема распознавания принадлежности данному нерекурсивному множеству натуральных чисел, проблема остановки универсальной машины Тьюринга, проблема распознавания самоприменимости *нормальных алгорифмов* и др.

Из А. п., выходящих за рамки самой теории алгоритмов, прежде всего следует отметить проблему распознавания тождественной истинности формул исчисления предикатов 1-й ступени, неразрешимость к-рой впервые была доказана А. Чёрчем (A. Church) в 1936. К этому результату по существу примыкают многочисленные исследования А. п. в *моделей теории*. Теория моделей, изучающая непустые множества с определенными на них отношениями с помощью исчисления предикатов, возникла в 30-х гг. в работах А. И. Мальцева и А. Тарского (A. Tarski). Им же принадлежат точные постановки многих А. п. в теории моделей и ряд фундаментальных результатов в этом направлении. Э л е м е н т а р н о й т е о р и е й данного класса K моделей наз. совокупность всех замкнутых формул исчисления предикатов 1-й ступени, к-рые истинны во всех моделях класса K. Класс K может состоять из одной модели. Элементарная теория T наз. р а з р е ш и м о й или н е р а з р е ш и м о й в зависимости от того, существует или нет алгоритм для распознавания по любой формуле, принадлежит она теории T или нет. Нек-рый обзор методов исследования А. п. в теории моделей и результатов, полученных в этом направлении, имеется в [3]. Из указанных в [3] и оставшихся пока (1977) нерешенными проблем наиболее интересен вопрос о разрешимости элементарной теории свободных групп.

Многочисленные и разнообразные А. п. возникают также при конструктивном истолковании различных разделов математики. Ниже приведены основные ре-

зультаты, относящиеся к А. п. в традиционных разделах математики.

Долгое время оставался открытым естественный вопрос: являются ли неразрешимые А. п. специфическими для теории алгоритмов и математич. логики? Иначе говоря, существуют ли неразрешимые А. п. в традиционных разделах математики, далеких от математич. логики? Первый результат такого рода был получен в 1947 независимо друг от друга А. А. Марковым и Э. Л. Постом (E. L. Post). Они доказали неразрешимость проблемы равенства слов (тождества) для полугрупп, к-рая была поставлена А. Туэ (A. Thue) еще в 1914. В этой проблеме рассматриваются полугруппы, заданные с помощью конечного числа образующих (алфавита)

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad (1)$$

и определяющих соотношений

$$A_i = B_i, \ i = 1, 2, \ldots, k. \qquad (2)$$

Элементарным преобразованием рассматриваемой полугруппы П наз. переход от слова вида PA_iQ к слову PB_iQ или обратно, где P и Q — произвольные слова в алфавите (1). Два слова X и Y в алфавите (1) наз. эквивалентными в П, если они либо совпадают графически, либо одно из них получается из другого с помощью конечной последовательности элементарных преобразований. Множество всех классов эквивалентности с операцией умножения, к-рая определяется естественным образом через операцию приписывания слов, и есть полугруппа П, заданная образующими (1) и определяющими соотношениями (2). Проблема равенства слов (тождества) полугруппы П заключается в отыскании алгоритма для распознавания по любой паре слов X и Y полугруппы П, эквивалентны они в П или нет, т. е. тождественны определенные ими элементы полугруппы П или нет. А. А. Марков и Э. Л. Пост построили конкретные полугруппы, для к-рых уже невозможен алгоритм, решающий проблему равенства (см. [1]).

Наиболее замечательный результат в этом направлении был получен П. С. Новиковым [4], [5]. Он доказал неразрешимость классич. проблемы тождества теории групп, к-рая была поставлена М. Деном (M. Dehn) в 1912 и привлекала внимание многих алгебраистов мира. Эта проблема формулируется аналогично проблеме тождества для полугрупп с тем отличием, что рассматриваются только такие системы соотношений (2), к-рые гарантируют существование в рассматриваемой полугруппе обратных элементов для всех образующих (1). П. С. Новиков доказал также неразрешимость очень важной для теории групп проблемы изоморфизма, к-рая заключалась в отыскании алгоритма для распознавания по любым двум группам, изоморфны они или нет. Позже было показано [6], что для всякой фиксированной группы G невозможен алгоритм, к-рый проверял бы по произвольной группе, изоморфна она группе G или нет.

А. А. Марков исследовал проблемы распознавания инвариантных свойств полугрупп, т. е. таких свойств, к-рые сохраняются при переходе к изоморфным полугруппам [2]. Он доказал, что если для инвариантного полугруппового свойства α существует полугруппа со свойством α и другая полугруппа, не вложимая ни в какую полугруппу с этим свойством, то невозможен алгоритм для распознавания по любой полугруппе, обладает она свойством α или нет. Это по существу означает, что почти все инвариантные полугрупповые свойства алгоритмически не распознаваемы в классе полугрупп. В теории групп также был получен аналог этой фундаментальной теоремы (см. [7], [8], [9]). Из нее, в частности, вытекает следствие: пусть K_α есть класс всех групп,

обладающих инвариантным свойством α; с каждым таким классом связаны две А. п.— проблема тождества для групп из класса K_α и проблема распознавания по любой группе, принадлежит она классу K_α или нет. Оказывается, что для любого непустого класса K_α по крайней мере одна из этих двух А. п. неразрешима. Аналогичная ситуация имеет место и для полугрупп.

Исследовался вопрос о возможно простых заданиях групп и полугрупп с неразрешимой проблемой равенства слов. Из многочисленных исследований в этом направлении следует отметить доказательство неразрешимости проблемы равенства слов для полугруппы, заданной 7 простыми определяющими соотношениями:

$$ac=ca,\ ad=da,\ bc=cb,\ bd=db,$$
$$eca=ce,\ edb=de,\ cca=ccae$$

(см. [10]). Позже был построен пример полугруппы с 3 определяющими соотношениями и неразрешимой проблемой равенства [11]. Даже для полугрупп с одним определяющим соотношением до сих пор (1977) не найден алгоритм, решающий проблему тождества в общем случае. Такой алгоритм построен только для несократимого определяющего соотношения [12]. Для групп с одним определяющим соотношением алгоритм, решающий проблему равенства, был построен давно [13]; но уже для двух соотношений вопрос остается открытым. Минимальное число определяющих соотношений, при к-ром известны примеры групп с неразрешимой проблемой тождества, равно 12. Доказана разрешимость проблемы равенства слов для коммутативных полугрупп. Для коммутативных групп разрешима также и проблема изоморфизма. Проблема равенства слов разрешима для конечных групп, для конечно определенных простых групп, для нильпотентных групп, а также для разрешимых групп ступени 2. Но уже в классе разрешимых групп ступени 5 можно указать группу с неразрешимой проблемой равенства, заданную с помощью соответствующего тождества ступени 5 и конечного числа определяющих соотношений (см. [15]).

Исследование проблемы тождества для групп с ограниченной мерой налегания определяющих слов, т. е. левых частей определяющих соотношений, было начато еще до того, как была доказана неразрешимость общей проблемы тождества. Самым сильным результатом в этом направлении в настоящее время (1977) является доказательство разрешимости проблемы тождества в классе групп, задаваемых системами определяющих соотношений, в к-рых определяющие слова могут налегать друг на друга лишь менее чем на $^1/_5$ своей длины [14]. Если допустить налегание на $^1/_3$ длины определяющих слов, то пример группы с неразрешимой проблемой тождества строится довольно просто. Для промежутка между $^1/_5$ и $^1/_3$ вопрос остается открытым. Аналогичные исследования проводились и для полугрупп. Оказалось, что для полугрупп с максимальной мерой налегания определяющих слов, меньшей $^1/_2$, проблема тождества разрешима, в то время как известны примеры полугрупп с неразрешимой проблемой тождества и с максимальной мерой налегания определяющих слов, равной $^1/_2$.

Из топологич. А. п. прежде всего выделяется классич. проблема распознавания гомеоморфизма для n-мерных многообразий. А. А. Марков построил пример 4-мерного многообразия $\mathfrak{M}$, для к-рого невозможен алгоритм, распознающий по любому 4-мерному многообразию, гомеоморфно оно $\mathfrak{M}$ или нет [17]. Известно, что при $n=2$ эта проблема имеет положительное решение; при $n=3$ вопрос остается открытым; для n-мерных многообразий при $n\geqslant 4$ неразрешимы также проблемы распознавания комбинаторной и гомотопич. эквивалентностей многообразий. Заметим также, что если

взять полиэдр P, фундаментальная группа к-рого имеет неразрешимую проблему тождества, то для P невозможен алгоритм, распознающий связанную гомотопность (или свободную гомотопность) двух произвольных путей на P, проходящих через данную точку. Получено положительное решение проблемы сопряженности в группах кос, к-рая эквивалентна топологич. проблеме распознавания эквивалентности кос [16].

Одной из наиболее знаменитых А. п. математики являлась 10-я проблема Гильберта, в к-рой требовалось найти алгоритм для распознавания по любой системе диофантовых уравнений с целочисленными коэффициентами, имеет она целочисленное решение или нет. После появления многочисленных результатов о неразрешимых А. п. возникла гипотеза о том, что и эта проблема неразрешима. Более того, группе американских математиков удалось установить, что неразрешимость 10-й проблемы Гильберта следует из существования двуместного диофантова предиката экспоненциального роста (см. [18], [19]). Однако построить такой предикат им не удалось. Они доказали лишь неразрешимость проблемы распознавания существования целочисленных решений показательных уравнений. Искомый диофантов предикат экспоненциального роста впервые был построен в 1970 (см. [20], [21]). Тем самым впервые была доказана неразрешимость 10-й проблемы Гильберта.

В теории алгоритмов доказано существование неразрешимых А. п. различных *неразрешимости степеней*. Многочисленные исследования возникающих в математике А. п. показали, что каждая из этих А. п. в общем случае имеет максимальную степень неразрешимости, а в своих частных вариантах (например, проблема тождества в конкретных полугруппах или группах) может иметь любую наперед заданную степень неразрешимости.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [2] Марков А. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1954, т. 42, с. 1—376; [3] Ершов Ю. Л. и др., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, № 4, с. 37—108; [4] Новиков П. С., «Докл. АН СССР», 1952, т. 85, № 4, с. 709—12; [5] Новиков П. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1955, т. 44, с. 1—444; [6] Адян С. И., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1957, т. 6, с. 231—98; [7] Адян С. И., «Докл. АН СССР», 1957, т. 117, № 1, с. 9—12; [8] Адян С. И., «Докл. АН СССР», 1958, т. 123, № 1, с. 13—16; [9] Rabin M. O., «Ann. math.», 1958, v. 67, № 1, p. 172—94; [10] Пейтин Г. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 52, с. 172—89; [11] Матиясевич Ю. В., «Докл. АН СССР», 1967, т. 173, № 6, с. 1264—6; [12] Адян С. И., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1966, т. 85, с. 1—123; [13] Магнус В., «Успехи матем. наук», 1941, Bd 8, с. 365—76; [14] Lyndon R. C., «Math. Ann.», 1966, Bd. 166, № 3, S. 208—28; [15] Ремесленников В. Н., «Алгебра и логика», 1973, т. 12, № 5, с. 577—602; [16] Гарсайд Ф. А., «Математика», 1970, т. 14, № 4, с. 113—32; [17] Марков А. А., «Докл. АН СССР», 1958, т. 123, № 6, с. 978—80; [18] Дэвис М., Путнам Х., Робинсон Дж., «Математика», 1964, т. 8, № 5, с. 69—79; [19] Робинсон Дж., «Математика», 1964, т. 8, № 5, с. 3—14; [20] Матиясевич Ю. В., «Докл. АН СССР», 1970, т. 191, № 2, с. 279—82; [21] Матиясевич Ю. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 1, с. 3—30.

С. И. Адян.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ СВОДИМОСТЬ — одно из основных понятий *алгоритмов теории* и ее приложений. Возникло в связи с тем, что неразрешимость (и разрешимость) многих *алгоритмических проблем* устанавливается большей частью не непосредственно, а путем сведения к исследуемой проблеме такой алгоритмич. проблемы, неразрешимость к-рой уже доказана (или исследуемой проблемы к нек-рой уже решенной проблеме). Так, неразрешимость проблемы гомотопии путей в полиэдре доказывается путем сведения к ней проблемы равенства слов в соответствующей фундаментальной группе.

Ниже приведены простейшие примеры А. с. теоретико-числовых (т. е. определенных на натуральных числах) предикатов и функций:

$$P(x) \equiv Q(2x+1),$$

где P и Q — предикаты. Проблема разрешения предиката P, т. е. установления истинности и ложности P для разных x, сводится к проблеме разрешения Q, или, короче, P сводится к Q. Говорят также, что множество истинности P, т. е. $\{x|P(x)\}=M_P$, сводится к $M_Q=\{x|Q(x)\}$.

Пусть

$$f(x)=\sum_{u=1}^{x!}\prod_{y=1}^{u} g(u,\ y),$$

где $f(x)$ и $g(u,\ y)$ — теоретико-числовые функции. Проблема вычисления функции f сводится к проблеме вычисления g, или, короче, f сводится к g.

Понятие А. с. было уточнено А. М. Тьюрингом (A. M. Turing): если, грубо говоря, нек-рая *Тьюринга машина* перерабатывает последовательность закодированных значений функции g в последовательность закодированных значений функции f, то функция f сводится к функции g. Близкое понятие относительной вычислимости С. К. Клини (S. C. Kleene) уточнил с помощью рекурсивных схем равенств (см. [1]). После арифметизации каждая алгоритмич. проблема сводится к проблеме вычисления пек-рой теоретико-числовой функции f. Если f сводится к g по Тьюрингу, $f\leqslant_T g$, а g сводится к f, $g\leqslant_T f$, то говорят, что f и g имеют одну и ту же степень неразрешимости, или $f\equiv_T g$. Отношение $\leqslant_T$ рефлексивно и транзитивно. Таким образом, все функции (и множества натуральных чисел или их характеристич. предикаты) разбиваются на классы эквивалентности, наз. тьюринговыми степенями или T-степенями (см. [3]). Большинство алгоритмич. проблем, рассматриваемых в логике и математике, являются проблемами разрешения (рекурсивно) перечислимых множеств конструктивных объектов. В связи с этим Э. Л. Пост [2] в 40-х гг. 20 в. предпринял исследование перечислимых множеств и ввел наряду с тьюринговой нек-рые специальные виды А. с., сформулировав проблему (сводимости): сводятся ли (по Тьюрингу) друг к другу различные перечислимые неразрешимые множества? Позже было установлено, что перечислимые множества образуют бесконечную весьма богатую систему T-степеней. При этом был найден так наз. метод приоритета, широко используемый в теории алгоритмов.

В дальнейшем степени неразрешимости нашли применение в других областях математики. Так, напр., для всяких T-степеней a и b перечислимых множеств при $a\leqslant_T b$ существует конечно определенная группа, в к-рой проблема равенства слов имеет степень a, а проблема сопряженности — степень b. Имеется тесная связь между степенями (относительно различных видов А. с.) перечислимых множеств и скоростью роста сложности начальных фрагментов перечислимых множеств. Специальный вид сводимости — полиномиальная сводимость, или p-сводимость (сводимость с нек-рым ограничением на время),— используется при доказательстве универсальности алгоритмич. проблем «переборного типа», т. е. проблем комбинаторного характера из разных областей математики (см. [5]; более подробную лит. см. в [1]). В свою очередь, при исследовании степеней стали применять методы теории меры (см. [1], гл. 16) и *вынуждения метод* (см. [4]).

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972, гл. 9, 10, 13, 16; [2] Post E. L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1944, v. 50, № 5, p. 284—316; [3] Kleene S. C., Post E. L., «Ann. Math.», ser. 2, 1954, v. 59, № 3, p. 379—407; [4] Selman A. L., «Proc. Lond. Math. Soc.», ser. 3, 1972, v. 25, № 4, p. 586—602; [5] Карп Р., в кн.: Кибернетический сборник, в. 12, М., 1975.

А. А. Мучник.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ — раздел математич. логики, уточняющий и изучаю-

щий на базе понятий *алгоритма* и *вычислимой функции* основные понятия теории информации. А. т. и. стремится обосновать эти понятия без помощи обращения к теории вероятностей и так, чтобы понятия энтропии и количества информации были применимы к индивидуальным объектам. Наряду с этим она порождает и свои собственные проблемы, связанные с изучением энтропии конкретных индивидуальных объектов.

Центральным понятием А. т. и. является понятие энтропии индивидуального объекта, называемое сложностью объекта (по Колмогорову). Интуитивно под этим понимается минимальное количество информации, необходимое для восстановления данного объекта. Точное определение понятия сложности индивидуального объекта и на основе этого понятия количества информации в индивидуальном объекте y относительно индивидуального объекта x было дано А. Н. Колмогоровым в 1962—65, что и послужило началом развития А. т. и.

Без существенных ограничений общности можно рассматривать только двоичные слова (что в дальнейшем и будет делаться). Под сложностью слова x понимается длина $l(p)$ самого короткого (двоичного) слова p, содержащего всю информацию, необходимую для восстановления x при помощи к.-л. фиксированного способа декодирования. Точное определение этого понятия следующее.

Пусть $F(s)$ — произвольная словарная *частично рекурсивная функция*. Тогда под сложностью слова x по F понимается:

$$K_F(x) = \begin{cases} \min l(p), \ F(p) = x, \\ \infty, \text{ если нет такого } p, \text{ что } F(p) = x. \end{cases}$$

Слово p такое, что $F(p)=x$, наз. кодом, или программой, по к-рой F восстанавливает слово x. Имеет место теорема: существует частично рекурсивная функция F_0 (называемая оптимальной) такая, что для любой частично рекурсивной функции F выполняется неравенство:

$$K_{F_0}(x) \leqslant K_F(x) + C_F,$$

где C_F — константа, не зависящая от x. Эта теорема позволяет дать инвариантное (с точностью до аддитивной константы) определение сложности: сложностью $K(x)$ слова x наз. сложность $K_{F_0}(x)$ по нек-рой раз и навсегда фиксированной оптимальной частично рекурсивной функции F_0. Очевидно, $K(x) \leqslant l(x)+C$, где C — константа, не зависящая от x.

Используя $K(x)$, можно определить также сложность $K(x, y)$ пар слов (x, y): для этого пары (x, y) эффективно кодируются в виде одного слова $c(x, y)$, и под сложностью $K(x, y)$ понимается $K(c(x, y))$.

П. Мартином-Лёфом (P. Martin-Löf) был исследован вопрос о том, как ведет себя сложность начальных кусков бесконечных двоичных последовательностей. Пусть ω_n означает начальный кусок последовательности ω, составленной из первых n знаков. Тогда почти все (относительно меры Лебега) бесконечные двоичные последовательности ω обладают свойствами: а) для бесконечно многих натуральных n справедливо неравенство $K(\omega_n) \geqslant n-c$, где c — нек-рая константа; б) для всех натуральных n, бо́льших нек-рого n_ε, $K(\omega_n) \geqslant n-(1+\varepsilon)\log_2 n$, где ε — произвольное положительное число (теорема Мартина-Лёфа). С другой стороны, для любой последовательности ω существует бесконечно много натуральных n таких, что $K(\omega_n) \leqslant n-\log_2 n$.

Понятие сложности используется также при изучении алгоритмич. проблем. Здесь более естественной является так наз. сложность разрешения

слова x. Интуитивно под этим понимается минимальное количество информации, к-рую надо иметь, чтобы по каждому числу $i \leqslant l(x)$ найти i-й знак слова x (длину слова x при этом можно и не знать). Точнее, под сложностью разрешения слова $x = x_1 x_2 \ldots x_{l(x)}$ по частично рекурсивной функции $G(s, t)$ понимается

$$KR_G(x) = \begin{cases} \min l(p): \forall i \leqslant l(x)\ G(p, i) = x_i, \\ \infty, \text{ если нет такого } p. \end{cases}$$

Имеет место теорема: существует частично рекурсивная функция G_0 (называемая оптимальной) такая, что для любой другой частично рекурсивной функции G выполняется неравенство $KR_{G_0}(x) \leqslant KR_G(x) + C_G$, где C_G — константа, не зависящая от x. Сложностью разрешения $KR(x)$ слова x наз. сложность $KR_{G_0}(x)$ по нек-рой раз и навсегда фиксированной оптимальной частично рекурсивной функции G_0. Очевидно, $KR(x) \leqslant K(x) + C$ и $K(x) \leqslant KR(x) + 2l(x) + C$. Используя $KR(x)$, можно для любого множества натуральных чисел M определить сложность $K(M, n)$ для n-куска множества M: $K(M, n) = KR(\omega_n)$, где $\omega = x_1 x_2 \ldots x_i \ldots$ — характеристическая последовательность множества M ($x_i = 1$, если $i \in M$, и $x_i = 0$, если $i \notin M$).

Алгоритмич. проблемы обычно могут быть представлены в виде проблемы вхождения в нек-рое рекурсивно перечислимое множество M. Если мы фиксируем нек-рое n и ограничиваемся рассмотрением проблемы вхождения в M только для первых n натуральных чисел, то мы получаем ограниченную алгоритмическую проблему. Величина $K(M, n)$ интуитивно выражает количество информации, к-рую надо иметь, чтобы можно было решить данную ограниченную проблему. В частности, множество M рекурсивно тогда и только тогда, когда $K(M, n)$ ограничено сверху нек-рой константой.

Из теоремы Мартина-Лёфа следует существование множеств, для к-рых $K(M, n) \sim n$. При этом оказывается, что максимально сложные множества уже существуют среди множеств, задаваемых арифметич. предикатами с двумя кванторами. Однако в случае рекурсивно перечислимых множеств имеет место теорема: а) для любого рекурсивно перечислимого множества M и любого n справедливо неравенство $K(M, n) \leqslant \log_2 n + C$, где C не зависит от n; б) существует рекурсивно перечислимое множество M такое, что для любого n имеет место неравенство $K(M, n) > \log_2 n$. В то же время существуют такие рекурсивно перечислимые множества M, что при ограничении времени вычислений произвольной общерекурсивной функцией t имеет место оценка $K^t(M, n) \geqslant n/c_t$, где c_t не зависит от n.

В указанных терминах можно дать также характеристику универсальных по нек-рому типу сводимости множеств (см. *Универсальное множество*): множество M является слабо таблично универсальным тогда и только тогда, когда существует неограниченная общерекурсивная функция $f(n)$ такая, что для любого n имеет место неравенство $K(M, n) \geqslant f(n)$.

При изучении сложности ограниченных алгоритмич. проблем иногда используются и другие меры сложности, как, напр., минимальная длина изображения *нормального алгорифма*, решающего данную ограниченную проблему. Но оказывается, что между введенными выше сложностями и аналогами этих сложностей, выраженными через минимальную длину изображения нормального алгорифма (или через минимальное число внутренних состояний машины Тьюринга), существуют асимптотически точные соотношения (см. *Алгоритма сложность*).

При построении А. т. и. вводится еще понятие условной сложности слова x при известном y по частично рекурсивной функции $G(s, t)$:

$$K_G(x \mid y) = \begin{cases} \min l(p): G(p, y) = x, \\ \infty, \text{ если нет такого } p, \text{ что } G(p, y) = x. \end{cases}$$

Для этого понятия также имеет место теорема о существовании оптимальной функции G_0, и условная сложность $K(x|y)$ слова x при известном y определяется как сложность $K_{G_0}(x|y)$ по нек-рой раз и навсегда фиксированной оптимальной функции G_0; $K(x|y)$ интуитивно обозначает минимальное количество информации, к-рое необходимо добавить к информации, содержащейся в слове y, чтобы можно было восстановить слово x. Очевидно, $K(x|y) \leqslant K(x) + C$.

Следующим центральным понятием А. т. и. является понятие количества информации в индивидуальном объекте y относительно индивидуального объекта x:

$$I(y : x) = K(x) - K(x|y).$$

Величину $I(y : x)$ наз. алгоритмическим количеством информации в y об x. Соответственно величины $K(x)$ и $K(x|y)$ наз. иногда алгоритмической энтропией x и алгоритмической условной энтропией x при заданном y. Формулы разложения энтропии $H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$ и коммутативности информации $I(X : Y) = I(Y : X)$ верны в алгоритмич. концепции лишь с точностью до членов порядка $O(\log H(X, Y))$:

$$|K(x, y) - [K(x) + K(y \mid x)]| \leqslant O(\log K(x, y)),$$

$$|I(x:y) - I(y:x)| \leqslant O(\log K(x, y)).$$

Между алгоритмич. и классич. определениями количества информации (точнее, между сложностью слова по Колмогорову и энтропией распределения частот по Шеннону) существует определенная связь (А. Н. Колмогоров): пусть задано число r и пусть слово x длины $i \cdot r$ состоит из i слов длины r, причем k-е слово длины r входит в x с частотой q_k ($k = 1, 2, \ldots, 2^r$), тогда

$$\frac{K(x)}{i} \leqslant H + \alpha(i),$$

где

$$H = -\sum_{k=1}^{2^r} q_k \log_2 q_k$$

и $\alpha(i) \to 0$ при $i \to \infty$. В общем случае более тесную связь между энтропией и сложностью установить нельзя. Это объясняется тем, что энтропия приспособлена для изучения текстов, не имеющих других закономерностей, кроме частотных. Следовательно, для случайных последовательностей ω по мере, соответствующей независимым испытаниям, между рассматриваемыми величинами можно установить полную связь:

$$\lim_{i \to \infty} (K(\omega_{ir})/i) = H.$$

Аналогичный факт имеет место и для произвольного эргодического стационарного случайного процесса.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Проблемы передачи информации», 1965, т. 1, вып. 1, с. 3—11; [2] его же, «Проблемы передачи информации», 1969, т. 5, вып. 3, с. 3—7; [3] Звонкин А. К., Левин Л. А., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, вып. 6, с. 85—127; [4] Барздинь Я. М., «Докл. АН СССР», 1968, т. 182, № 6, с. 1249—1252; [5] Кановичм. И., «Докл. АН СССР», 1970, т. 194, № 3, с. 500—503.

Я. М. Барздинь.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ — см. *Рекурсивная теория множеств.*

АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ ЯЗЫК, формальный язык программирования, — *формальный язык*, предназначенный для описания вычислительных процессов, или, что то же, для записи алгоритмов, подлежащих выполнению на вычислительных машинах.

Различают проблемно-ориентированные А. я. (А. я. высокого уровня), предназначенные для записи алгоритмов безотносительно к к.-л. определенным вычислительным машинам, и машинно-ориентированные А. я. (А. я. низкого уровня), уже учитывающие особенности той или иной вычислительной машины (список команд, характеристики запоминающего устройства и т. д.). Обычно под термином «А. я.» понимают проблемно-ориентированный язык, противопоставляя его машинному языку, т. е. средству записи, воспринимаемой машиной непосредственно. Над законченными текстами (*программами*) в А. я. определен универсальный алгоритм их однозначного выполнения, что отличает А. я. от неалгоритмических языков программирования, в к-рых процесс выполнения текста сугубо неоднозначен или текст служит только материалом для синтеза алгоритма решения задачи.

Подобно естественным языкам, А. я. строится над алфавитом основных символов (в к-ром записывается программа) в виде иерархич. системы своих грамматич. элементов с заданными на них отношениями (подобно словам, словосочетаниям и предложениям в естественном языке, связанным синтаксич. правилами). Элементы низшего уровня, образованные цепочками основных символов, наз. лексемами. Для вхождений лексем в программу определена их принадлежность к некрому классу и к области действия — к.-л. однозначно выделяемой части программы, к к-рой относятся все входящие в нее экземпляры лексемы. Среди всех вхождений лексемы выделяется одно, к-рое наз. определяющим; остальные вхождения лексемы в область действия наз. использующими.

Следующие уровни элементов А. я. образуются понятиями. Между понятиями А. я. задается отношение *быть* (прямой) конституентой (т. е. непосредственной составной частью), а между конституентами данного понятия — отношение конкатенации (текстуального *следования*). Транзитивное замыкание конституентного отношения однозначно сопоставляет понятию нек-рое подслово текста программы, наз. порождением этого понятия. Существует одно начальное понятие, порождением к-рого является весь текст программы. Среди понятий выделяются позиции и субституенты. Субституента занимает нек-рую позицию, являясь ее прямой конституентой. Дерево, корень к-рого — начальное понятие, концевые вершины — лексемы и основные символы, внутренние вершины — понятия, а дуги — конституентные отношения, наз. деревом разбора программы. Построение этого дерева наз. синтаксическим анализом программы.

Понятия и лексемы обладают атрибутами, т. е. нек-рыми фиксированными описанием А. я. множествами, элементы к-рых сопоставляются элементам А. я. в качестве их характеристик. Нахождение атрибутов элементов А. я., входящих в программу, наз. ее семантическим анализом. Нахождение атрибутов лексем начинается с анализа их определяющих вхождений, к-рые обычно содержат информацию об атрибутах в явном виде. Затем атрибутивная информация в пределах соответствующей области действия переносится на все использующие вхождения лексемы (идентификация). Атрибуты нек-рого понятия находятся индукцией по дереву разбора как функции атрибутов его конституент. Существенной частью семантич. анализа, имеющей большое значение для контроля правильности программы, является проверка на совместимость атрибутов позиции и ее субституенты (приведение). Почти во всех А. я. действуют те или иные правила умолчания, т. е. приписывание не специфицированному явно атрибуту нек-рого

значения как функции контекста данного понятия. Таким контекстом могут быть: позиция, область действия, вся программа и, наконец, само описание А. я.

Правила синтаксич. анализа задаются либо порождающей грамматикой А. я. (см. *Грамматика порождающая*), либо анализирующим *автоматом* (точнее, его различными обобщениями), преобразующим текст программы в дерево разбора. Правила семантич. анализа описываются обычно неформально, однако предпринимались попытки формализовать определение атрибутивной информации и учет контекста с помощью механизма двухступенчатых грамматик (см. *Алгол-68*).

Алгоритм выполнения программ А. я. задается сопоставлением вершинам дерева разбора различных исполнительных процедур (называемых также трансдукторами, семантическими процедурами). Каждая процедура выполняет нек-рые действия как функцию атрибутов и того или иного контекста данного понятия (или лексемы), а затем определяет последующую процедуру. Действия процедуры либо непосредственно задают вычислительный процесс в терминах нек-рой абстрактной машины (семантика интерпретирующего типа), либо трансформируют порождение данного понятия во фрагмент программы в нек-ром языке низшего уровня (семантика трансляционного типа).

В конкретных А. я. алфавит основных символов обычно состоит из букв латинского (иногда с добавлением русского) алфавита, цифр, парных ограничителей (скобок), разделителей (знаков препинания) и нек-рых знаков операций. В связи с ограниченностью алфавита существуют правила кодирования основных символов комбинациями знаков, воспринимаемых входными устройствами машины. Основные классы лексем — нумералы для изображения чисел, литералы для изображения текстов, идентификаторы для обозначения различных объектов программы, определяемых в ней самой. Основными объектами являются переменные величины, метки (наименования различных частей программы) и процедуры (функциональные обозначения). Смысл и назначение нек-рых идентификаторов фиксируется описанием А. я. (закрепленные слова).

Среди понятий А. я. выделяются базовые конструкции — описания, выражения и операторы. Описания являются источником атрибутивной информации, приписываемой определяющему вхождению лексемы. В основном атрибуты характеризуют тип (вид) значений, вычисляемых при выполнении программы, их представление и режим хранения в памяти ЭВМ. Для составных значений (векторов, матриц, структурных величин) указывается также способ доступа к их элементарным компонентам. Выражения являются источником значений; операторы — единицами законченных действий в программе; базовые операторы — это оператор присваивания значения выражения переменной величине, оператор передачи управления (безусловной или по условию), оператор вызова процедуры, оператор цикла.

Циклы и процедуры являются наиболее характерными средствами А. я. для сокращенной записи сколь угодно длинных вычислений. Оператор цикла организует повторное выполнение нек-рой части программы (тела цикла), управляемое заданным условием на число повторений. Описание процедуры вводит сокращенное параметризованное функциональное обозначение для нек-рой части программы (тело процедуры). Выполнение тела процедуры впоследствии может трактоваться как элементарное действие, инициируемое вызовом процедуры, вносящим одновременно в тело процедуры фактич. значения параметров.

Важное свойство А. я. — возможность регуляризации структуры программы, облегчающей ее написание, изучение и проверку правильности. Основными средствами регуляризации являются ограничения на структуру областей действия, тел процедур и циклов, а также регламентация употребления операторов передачи управления, ограничивающая ветвимость цепочек выполнения базовых операторов параллельно-последовательной структурой.

Программирование с использованием А. я. для вычислительной машины требует включения в ее программное обеспечение специальных программирующих процессоров — посредников между программами на А. я. и машиной. Процессор в своем развернутом составе выполняет следующие функции: ввод программы, лексический (выделение и классификация лексем), синтаксический и семантич. анализы с сигнализацией о формальных ошибках, синтез промежуточной формы (представление программы на внутреннем языке нек-рой абстрактной вычислительной машины, удобное для последующей обработки или выполнения программы), оптимизация (систематич. преобразование промежуточной формы, улучшающее такие характеристики программы, как ее размер, скорость и объем расходуемой памяти), генерация (построение машинной программы), выполнение программы. В процессорах транслирующего типа (трансляторы, компиляторы, программирующие программы) выполнение программы происходит после полного построения машинной программы. В процессорах интерпретирующего типа (шаговые, диалоговые, отладочные трансляторы) программа выполняется с помощью нек-рого механизма интерпретации ее либо промежуточной формы, либо дерева разбора, либо даже исходного текста.

Различают одно-, двух- и многофазные схемы трансляции программ. В однофазной схеме все функции транслятора объединены в один просмотр текста программы. Оптимизация и промежуточная форма отсутствуют, а выделяемые вершины дерева разбора тут же порождают машинные команды программы. В двухфазных трансляторах обычно на первом просмотре программы строится дерево разбора, а на втором просмотре семантич. анализ объединяется с генерацией. Многофазные схемы с использованием промежуточной формы применяются в оптимизирующих трансляторах или в системах со сменной генерацией для различных типов машин, а для нек-рых А. я. требуются в силу сложности синтаксич. и семантич. анализов.

Количество разнообразных А. я., созданных для работы на вычислительных машинах, весьма велико (больше тысячи), однако только нек-рые из них получили широкое распространение. К ним относятся языки *алгол*, *алгол-68*, *кобол*, *лисп*, *ПЛ/1*, *симула*, *фортран*, а в СССР также *алгамс*, *альфа*, *рефал*.

Лит.: [1] Ингерман П., Синтаксически ориентированный транслятор, пер. с англ., М., 1969; [2] Языки программирования, пер. с англ., М., 1972; [3] Хопгуд Ф., Методы компиляции, пер. с англ., М., 1972; [4] Хигман Б., Сравнительное изучение языков программирования, пер. с англ., М., 1974.

А. П. Ершов.

АЛГОРИТМОВ СОЧЕТАНИЯ — название, установившееся за рядом конкретных способов конструирования новых *алгоритмов* из нескольких заданных.

В применении к *нормальным алгорифмам* наибольшую известность получили следующие А. с.: нормальная композиция ($\mathfrak{B} \circ \mathfrak{A}$) двух нормальных алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, нормальное объединение ($\mathfrak{A} \frown \mathfrak{B}$) двух нормальных алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, нормальное разветвление ($\mathfrak{A} \curlyvee \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}$) двух нормальных алгорифмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, управляемое нормальным алгорифмом $\mathfrak{C}$, нормальное повторение ($\mathfrak{A} \bigcirc \mathfrak{C}$) нормального алгорифма $\mathfrak{A}$, уп-

равляемое нормальным алгорифмом $\mathfrak{C}$. Если $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ — нормальные алгорифмы в нек-ром алфавите A, то упомянутые их сочетания являются нормальными алгорифмами в нек-ром фиксированном расширении A и удовлетворяют следующим условиям: а) для любого слова P в A имеет место $(\mathfrak{B}\succ\mathfrak{A})\llcorner P\lrcorner \simeq \mathfrak{B}\llcorner\mathfrak{A}\llcorner P\lrcorner\lrcorner$ (теорема композиции); б) для любого слова P в A имеет место $(\mathfrak{A}\frown\mathfrak{B})\llcorner P\lrcorner \simeq \mathfrak{A}\llcorner P\lrcorner\mathfrak{B}\llcorner P\lrcorner$ (теорема объединения); в) для любого слова P в A

$$(\mathfrak{A}\curlyvee\mathfrak{B}|\mathfrak{C})\llcorner P\lrcorner \simeq \begin{cases} \mathfrak{A}\llcorner P\lrcorner, & \text{если } \mathfrak{C}\llcorner P\lrcorner \mathrel{\overline{\in}} \Lambda, \\ \mathfrak{B}\llcorner P\lrcorner, & \text{если } \mathfrak{C}\llcorner P\lrcorner \mathrel{\overline{\notin}} \Lambda, \end{cases}$$

причем если $(\mathfrak{A}\curlyvee\mathfrak{B}|\mathfrak{C})\llcorner P\lrcorner$ определено, то определено и $\mathfrak{C}\llcorner P\lrcorner$ (теорема разветвления); г) для любых слов P и Q в A *графическое равенство* $(\mathfrak{A}\bigcirc\mathfrak{C})\llcorner P\lrcorner \mathrel{\overline{=}} Q$ имеет место тогда и только тогда, когда может быть указан ряд слов $P_0, P_1, \ldots, P_k$ $(k\geqslant 1)$ в алфавите A таких, что

$$P_0 \mathrel{\overline{=}} P,$$

$$P_k \mathrel{\overline{=}} Q,$$

$$P_i \mathrel{\overline{=}} \mathfrak{A}\llcorner P_{i-1}\lrcorner \quad (i=1, \ldots, k),$$

$$\mathfrak{C}\llcorner P_k\lrcorner \mathrel{\overline{\notin}} \Lambda \quad (i=1, \ldots, k-1),$$

$$\mathfrak{C}\llcorner P_k\lrcorner \mathrel{\overline{\in}} \Lambda$$

(теорема повторения). Аналогичные теоремы могут быть получены и для *Тьюринга машин*. В теории *рекурсивных функций* наибольшее употребление нашли их сочетания, доставляемые оператором подстановки, оператором примитивной *рекурсии* и μ-оператором.

Теоремы об А. с. вскрывают весьма существенную особенность осуществленных стандартизаций общего понятия алгоритма — их «устойчивость» по отношению к естественным способам А. с. Это обстоятельство является одним из наиболее веских доводов в пользу основной гипотезы теории алгоритмов (*Чёрча тезиса*). Теоремы об А. с. составляют важный раздел общей теории алгоритмов. Будучи доказаны однажды, они позволяют в дальнейшем убеждаться в осуществимости сложных и громоздких алгоритмов без фактического выписывания определяющих их схем.

Значительный интерес для общей теории алгоритмов представляет вопрос о разыскании базиса, позволяющего при фиксированном наборе способов А. с. порождать любой алгоритм к.-л. интересующего нас класса.

Лит.: [1] Марков А. А., Теория алгорифмов, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1954, т. 42, с. 94—145; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [4] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965.

Н. М. Нагорный.

АЛГОРИТМОВ ТЕОРИЯ — раздел математики, изучающий общие свойства *алгоритмов*. Содержательные явления, приведшие к образованию понятия «алгоритм», прослеживаются в математике в течение всего времени ее существования. Однако само это понятие сформировалось лишь в 20 в. и стало предметом самостоятельного изучения (по-видимому, впервые, хотя еще в расплывчатом виде) в 20-х гг. 20 в. в трудах представителей *интуционизма* Л. Э. Я. Брауэра (L. E. J. Brouwer) и Г. Вейля (H. Weyl, см. [1]). Началом систематич. разработки А. т. можно считать 1936, когда А. Чёрч (A. Church, [2]) опубликовал первое уточнение понятия *вычислимой функции* (предложив отождествлять понятие всюду определенной вычислимой функции, имеющей натуральные аргументы и значения, с понятием общерекурсивной функции) и привел первый пример функции, не являющейся вычислимой, а А. М. Тьюринг (A. M. Turing, [3], [4]) и Э. Л. Пост (E. L. Post, [5]) дали первые уточнения понятия алгоритма (в терминах идеализированных вычислительных машин, см. *Тьюринга машина*). В дальнейшем А. т. получила развитие

в трудах С. К. Клини (S. C. Kleene), Э.Л. Поста (см. [6] – [8]), А. А. Маркова (см. [9] – [11]) и др. В частности, А. А. Марков предложил уточнять понятие алгоритма с помощью введенного им понятия *нормального алгорифма* (см. [10]). Наиболее общий подход к уточнению понятия алгоритма предложил А. Н. Колмогоров (см. [12], [13]).

Поскольку алгоритмы могут иметь дело лишь с так наз. *конструктивными объектами*, то, чтобы перенести понятия и методы А. т. на случай неконструктивных объектов, надо эти последние объекты обозначить, или поименовать, конструктивными объектами. Изучение общих свойств таких поименований (прежде всего, когда в качестве обозначений, или имен, выступают натуральные числа) составляет предмет теории *нумерации* (см. [14]), образующей важный раздел А. т.

Основные понятия теории алгоритмов. О б л а с т ь ю п р и м е н и м о с т и а л г о р и т м а наз. совокупность тех объектов, к к-рым он применим. Про алгоритм $\mathfrak{A}$ говорят, что он: 1) «вычисляет функцию f», коль скоро его область применимости совпадает с областью определения f, и $\mathfrak{A}$ перерабатывает всякий x из своей области применимости в $f(x)$; 2) «разрешает множество A относительно множества X», коль скоро он применим ко всякому x из X и перерабатывает всякий x из $X \cap A$ в слово «да», а всякий x из $X \setminus A$ в слово «нет»; 3) «перечисляет множество B», коль скоро его область применимости есть натуральный ряд, а совокупность результатов есть B. Функция наз. в ы ч и с л и м о й, если существует вычисляющий ее алгоритм. Множество наз. р а з р е ш и м ы м относительно X, если существует разрешающий его относительно X алгоритм. Множество наз. п е р е ч и с л и м ы м, если либо оно пусто, либо существует перечисляющий его алгоритм.

Детальный анализ понятия «алгоритм» обнаруживает, что: (I) область возможных исходных данных и область применимости любого алгоритма суть перечислимые множества. В свою очередь, (II) для любой пары вложенных одно в другое перечислимых множеств можно подобрать алгоритм, у к-рого большее множество служит областью возможных исходных данных, а меньшее — областью применимости. Имеют место следующие основные теоремы: (III) функция f вычислима тогда и только тогда, когда перечислим ее график, т. е. множество всех пар вида $\langle x, f(x)\rangle$. (IV) Подмножество A перечислимого множества X тогда и только тогда разрешимо относительно X, когда A и $X \setminus A$ перечислимы. (V) Если A и B перечислимы, то $A \cup B$ и $A \cap B$ также перечислимы. (VI) В каждом бесконечном перечислимом множестве X существует перечислимое подмножество с неперечислимым дополнением [в силу (IV) это перечислимое подмножество будет неразрешимым относительно X]. (VII) Для каждого бесконечного перечислимого множества X существует вычислимая функция, определенная на подмножестве этого множества и не продолжаемая до вычислимой функции, определенной на всем X. Утверждения (VI) и (II) в совокупности дают упоминаемый в статье *Алгоритм* пример алгоритма с неразрешимой областью применимости. Разрешимые и перечислимые множества составляют простейшие (и наиболее важные) примеры множеств, строение к-рых задается с помощью тех или иных алгоритмич. процедур. Систематич. изучение множеств конструктивных объектов с точки зрения таких свойств этих множеств, к-рые связаны с наличием тех или иных алгоритмов, образует так наз. алгоритмическую теорию множеств; нек-рые понятия, методы и результаты этой теории находят глубокие аналогии в *дескриптивной теории множеств*.

Алгоритмические проблемы. Проблема построения алгоритма, обладающего теми или иными свойствами, наз. *алгоритмической проблемой* (а. п.). Как правило,

свойство искомого алгоритма формулируется в терминах свойств того соответствия, к-рое должно иметь место между исходными данными и результатами алгоритма. Важные примеры а. п.: проблема вычисления данной функции (требуется построить алгоритм, вычисляющий эту функцию); проблема разрешения данного множества (требуется построить алгоритм, разрешающий это множество относительно нек-рого другого множества); проблема перечисления данного множества (требуется построить алгоритм, перечисляющий данное множество). Все примеры а. п. из различных областей математики, названные ниже в разделе «Приложения», являются проблемами разрешения. Неразрешимость а. п. означает отсутствие соответствующего алгоритма; теоремы, устанавливающие неразрешимость таких проблем, относятся к числу наиболее важных теорем А. т. Так, для алгоритма с неразрешимой областью применимости неразрешима а. п. разрешения этой области относительно области возможных исходных данных. Посредством сведения к неразрешимости этой проблемы была установлена неразрешимость большинства других проблем разрешения (в частности, всех проблем, указанных ниже в разделе «Приложения»). Вопрос о том, для любой ли неразрешимой проблемы разрешения ее неразрешимость может быть установлена таким способом, составляет так наз. проблему *алгоритмической сводимости*.

Метрическая теория алгоритмов. А. т. можно разделить на дескриптивную (качественную) и метрическую (количественную). Первая — исследует алгоритмы с точки зрения устанавливаемого ими соответствия между исходными данными и результатами; к ней относятся, в частности, те алгоритмич. проблемы, о к-рых говорилось в предыдущем разделе. Вторая — исследует алгоритмы с точки зрения сложности как самих алгоритмов (см. *Алгоритма сложность*), так и задаваемых ими «вычислений», то есть процессов последовательного преобразования конструктивных объектов. Важно подчеркнуть, что как сложность алгоритмов, так и сложность вычислений могут определяться различными способами, причем может оказаться, что при одном способе A будет сложнее B, а при другом способе — наоборот. Чтобы говорить о сложности алгоритмов, надо сначала описать к.-л. точный язык для записи алгоритмов и затем под сложностью алгоритма понимать сложность его записи; сложность же записи можно определять различными способами (напр., как число символов данного типа, участвующих в записи, или как набор таких чисел, вычисленных для разных типов символов). Чтобы говорить о сложности вычисления, надо уточнить, как именно вычисление представляется в виде цепочки сменяющих друг друга конструктивных объектов и что считается сложностью такой цепочки (только ли число членов в ней — «число шагов» вычисления, или еще учитывается «размер» этих членов и т. п.); в любом случае сложность вычисления зависит от исходного данного, с к-рого начинается вычисление, поэтому сложность вычисления есть функция, сопоставляющая с каждым объектом из области применимости алгоритма сложность соответствующей цепочки. Разработка методов оценки сложности алгоритмов и вычислений имеет важное теоретич. и практич. значение, однако в отличие от дескриптивной А. т., оформившейся в целостную математич. дисциплину (см. [11], [15], [16]), метрич. А. т. находится в процессе становления (см. [17] — [20]).

Приложения теории алгоритмов имеются во всех областях математики, в к-рых встречаются алгоритмич. проблемы. Такие проблемы возникают в *математической логике* и *моделей теории*; для каждой теории формулируется проблема разрешения множества всех истинных или доказуемых предложений этой теории относительно множества всех ее предложений (теории подраз-

деляются на разрешимые и неразрешимые — в зависимости от разрешимости или неразрешимости указанной проблемы); в 1936 А. Чёрч (см. [21], [22]) установил неразрешимость проблемы разрешения для множества всех истинных предложений логики предикатов, дальнейшие важные результаты в этом направлении принадлежат А. Тарскому (A. Tarski), А. И. Мальцеву и др. (см. [23]). Неразрешимые алгоритмич. проблемы встречаются в алгебре (проблема тождества для полугрупп и, в частности, для групп); первые примеры полугрупп с неразрешимой проблемой тождества были найдены в 1947 независимо А. А. Марковым (см. [9]) и Э. Л. Постом (см. [8]), а пример группы с неразрешимой проблемой тождества — в 1952 П. С. Новиковым (см. [24], [25]); в топологии (проблема гомеоморфии, неразрешимость к-рой для важного класса случаев была доказана в 1958 А. А. Марковым, (см. [26]); в теории чисел (проблема разрешимости диофантовых уравнений, неразрешимость к-рой была установлена в 1970 Ю. В. Матиясевичем, (см. [27], [28]) и др. разделах математики.

А. т. тесно связана с математич. логикой, поскольку на понятие алгоритма опирается одно из центральных понятий математич. логики — понятие *исчисления*, и потому, напр., *Гёделя теорема о неполноте* формальных систем может быть получена как следствие теорем А. т. (см. [29]). Наконец, А. т. тесно связана с основаниями математики, в к-рых одно из центральных мест занимает проблема соотношения конструктивного и неконструктивного; в частности, А. т. дает аппарат, необходимый для разработки конструктивного направления в математике; в 1965 А. Н. Колмогоров предложил использовать А. т. для обоснования теории информации (см. [30], *Алгоритмическая теория информации*). А. т. образует теоретич. фундамент для ряда вопросов вычислительной математики и тесно связана с кибернетикой, в которой важное место занимает изучение алгоритмов управления.

Лит.: [1] Вейль Г., О философии математики, пер. с нем., М.— Л., 1934; [2] Church A., «Amer. J. Math.», 1936, v. 58, № 2, p. 345—63; [3] Turing A. M., «Proc. London Math. Soc.», ser. 2, 1936, v. 42, №№ 3—4, p. 230—65; [4] его же, там же, 1937, v. 43, № 7, p. 544—46; [5] Post E. L., «J. Symbol. Log.», 1936, v. 1, № 3, p. 103—05; [6] его же, «Amer. J. Math.», 1943, v. 65, № 2, p. 197—215; [7] его же, «Bull. Amer. Math. Soc.», 1944, v. 50, № 5, p. 284—316; [8] его же, «J. Symbol. Log.», 1947, v. 12, № 1, p. 1—11; [9] Марков А. А., «Докл. АН СССР», 1947, т. 55, № 7, с. 587—90; [10] его же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 176—89; [11] его же, Теория алгорифмов, М.— Л., 1954; [12] Колмогоров А. Н., «Успехи матем. наук», 1953, т. 8, № 4, с. 175—76; [13] Колмогоров А. Н., Успенский В. А., там же, 1958, т. 13, № 4, с. 3—28; [14] Ершов Ю. Л., Теория нумераций, ч. 1—2, Новосибирск, 1969—73; [15] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [16] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [17] Марков А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 1, с. 161—208; [18] Трахтенброт Б. А., Сложность алгоритмов и вычислений, Новосибирск, 1967; [19] Проблемы математической логики. Сложность алгоритмов и классы вычислимых функций, сб. переводов, М., 1970; [20] Сложность вычислений и алгоритмов, сб. переводов, М., 1974; [21] Church A., «J. Symbol. Log.», 1936, v. 1, № 1, p. 40—41; [22] его же, там же, № 3, p. 101—02; [23] Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, № 4, с. 37—108; [24] Новиков П. С., «Докл. АН СССР», 1952, т. 85, с. 709—12; [25] его же, Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп, М., 1955; [26] Марков А. А., «Докл. АН СССР», 1958, т. 121, № 2, с. 218—20; [27] Матиясевич Ю. В., там же, 1970, т. 191, № 2, с. 279—82; [28] его же, «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, № 5, с. 185—222; [29] Успенский В. А., там же, 1974, т. 29, № 1, с. 3—47; [30] Колмогоров А. Н., «Проблемы передачи информации», 1965, т. 1, № 1, с. 3—11.

В. А. Успенский.

АЛГОРИТМОВ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ — *бинарное отношение*, связывающее алгоритмы фиксированного типа и выражающее тот факт, что у всяких двух связанных этим отношением алгоритмов при совпадении определенного вида исходных данных совпадают и результаты работы (а также, быть может, и нек-рые до-

полнительные сведения относительно выполненных при этом вычислений — так наз. истории вычислений). Ниже приведено несколько типичных примеров таких отношений.

а) Рассматриваются всевозможные рекурсивные схемы — системы равенств, определяющие n-местные частично рекурсивные функции. Две схемы, определяющие функции φ и ψ, наз. функционально эквивалентными, если для любых натуральных чисел $x_1, \ldots, x_n$ имеет место условное равенство

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

(оно считается верным, если обе его части осмысленны одновременно и в случае осмысленности принимают одинаковые значения). С. К. Клини (S. C. Kleene; см., напр., [1], с. 314) показал, что для любого всюду определенного вычислимого оператора $\mathfrak{R}$ над рекурсивными схемами можно указать схему S такую, что S и $\mathfrak{R}(S)$ функционально эквивалентны (так наз. теорема о неподвижной точке). Отсюда, в частности, вытекает теорема Успенского — Райса о неразрешимости произвольного инвариантного относительно функциональной эквивалентности свойства рекурсивных схем при условии, что имеются схемы S_1 и S_2 такие, что S_1 обладает этим свойством, а S_2 им не обладает. Из этой теоремы следует неразрешимость и самого отношения функциональной эквивалентности.

б) Рассматриваются *нормальные алгорифмы* над фиксированным алфавитом A. Два таких алгорифма $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ наз. эквивалентными относительно A (см. [2], с. 51), если для любого слова P в A выполняется следующее условие: если один из этих алгорифмов перерабатывает P в нек-рое слово Q, снова оказывающееся в алфавите A, то и второй из них также перерабатывает P в Q. Те же алгорифмы наз. вполне эквивалентными относительно A, если для любого P в A выполняется условное равенство

$$\mathfrak{A}(P) \simeq \mathfrak{B}(P).$$

Оба эти отношения неразрешимы.

в) Рассматриваются логич. схемы алгоритмов (схемы Янова, см. [3]). Реализацией такой схемы наз. последовательность операторов, выполняемых при прохождении по этой схеме от начала до конца. Две схемы наз. эквивалентными, если множества их реализаций совпадают. Отношение эквивалентности схем Янова оказалось разрешимым, и для него была построена полная система эквивалентных преобразований (см. [3], [4]).

Детальное изучение отношений А. э. представляет большой интерес в связи с рядом актуальных задач (особенно в области теории схем программ), требующих для своего решения развитой техники эквивалентных преобразований алгоритмов. Таковы, напр., задача трансляции алгоритмов (перевод с одного алгоритмич. языка на другой) и их оптимизации (преобразование с целью улучшения «рабочих характеристик»). В этом круге вопросов особое внимание уделяют (см., напр., [5]) возможности отыскания таких разрешимых отношений А. э., к-рые допускали бы удобные в приложениях полные системы эквивалентных преобразований. Концепция, намеченная в [3], во многом предопределила общий подход к исследованию отношений А. э.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Марков А. А., Теория алгорифмов, М., 1954; [3] Янов Ю. И., «Проблемы кибернетики», 1958, в. 1, с. 75—127; [4] Ершов А. П., «Проблемы кибернетики», 1968, в. 20; [5] его же, там же, 1973, в. 27.

Н. М. Нагорный.

АЛЕКСАНДЕРА ДВОЙСТВЕННОСТЬ — связь между гомологич. свойствами взаимно дополнительных подмножеств топологич. пространства, к-рая позволяет гомологич. свойства множества определять нек-рыми свойствами его дополнения. Первые теоремы такого рода

были сформулированы в терминах не алгебраической, а теоретико-множественной топологии. В 1892 К. Жорданом (C. Jordan) было доказано, что простая замкнутая непрерывная кривая разбивает плоскость на две области и является их общей границей (теорема Жордана). Эта теорема была (1911) независимо обобщена А. Лебегом (H. Lebesgue) и Л. Э. Я. Брауэром (L. E. J. Brouwer) на случай n-мерного многообразия, лежащего в $n+1$-мерном сферическом (или евклидовом) пространстве; при этом была установлена связь между указанным фактом и свойством r-мерного многообразия (в n-мерном пространстве) быть зацепленным с $(n-r-1)$-мерным многообразием (А. Лебег). В 1913 Л. Э. Я. Брауэр показал, что число областей, на к-рые плоское замкнутое множество разбивает плоскость, зависит лишь от топологич. свойств этого множества. В 1922 Дж. Александер [1] впервые выразил двойственность этого рода в чисто гомологич. понятиях. Теорема Александера (см. [2], [3], [4]) утверждает, что r-мерное число Бетти mod 2 (конечного) полиэдра Φ, лежащего в n-мерном сферич. пространстве, равно $(n-r-1)$-мерному числу Бетти mod 2 его дополнения. П. С. Александровым (1927) эта теорема была обобщена на случай любого замкнутого множества Φ. Двойственность, сформулированная в этой теореме, наз. двойственностью Александера.

Следующим важным этапом в развитии этого рода двойственности была теорема Понтрягина (1934) (см. [2], [3], [4]), утверждающая, что r-мерная *гомологии группа* $H_r(A, X)$ замкнутого множества A, расположенного в n-мерном сферич. многообразии M^n над компактной группой X коэффициентов, и $(n-r-1)$-мерная группа гомологии $H_{n-r-1}(B, Y)$ дополнения $B=M^n\backslash A$ над (дискретной) группой Y коэффициентов, двойственной с X в смысле теории характеров, двойственны в том же смысле, причем скалярное произведение определяется как коэффициент зацепления циклов, произвольно выбранных из перемножаемых классов гомологии. Эта теорема обычно наз. теоремой Александера — Понтрягина; двойственность, формулируемая в ней, наз. двойственностью Понтрягина, или двойственностью Александера — Понтрягина (см. *Понтрягина двойственность*). Ряд последующих обобщений завершился теоремой П. С. Александрова (см. [5], [7]), формулировка к-рой отличается от теоремы Понтрягина тем, что A может быть произвольным подмножеством из M^n, группа X может быть как компактной, так и дискретной, а под $H_r(A, X)$ и $H_{n-r-1}(B, Y)$ понимаются группы гомологии Александрова — Чеха (см. *Александрова — Чеха гомологии и когомологии*), причем одна — с компактными носителями, а другая — спектрового типа. Формы А. д. для любых множеств получаются заменой последних групп двойственными им группами когомологии той же размерности над двойственной группой коэффициентов.

В дальнейших обобщениях сферич. многообразия заменяются более общими многообразиями (*гомологическими многообразиями*, к-рые ациклични в определенных размерностях), группы Александрова — Чеха — группами Ситникова — Стинрода и др., группы коэффициентов — модулями, пучками и т. п.

Лит.: [1] Alexander J. W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1915, v. 16, p. 148—54; [2] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947; [3] Понтрягин Л. С., «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 2, с. 45—55; [4] Лефшец С., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1949; [5] Александров П. С., «Матем. сб.», 1947, т. 21, в. 3, с. 161—232; [6] его же, Топологические теоремы двойственности, ч. 1—2, «Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова», М., 1955, т. 48; 1959, т. 54; [7] Чогошвили Г. С., в кн.: Тр. 4 Всес. матем. съезда, т. 2, М., 1964, с. 57—62.

Г. С. Чогошвили.

АЛЕКСАНДЕРА ИНВАРИАНТЫ — инварианты, связанные с модульной структурой одномерных гомо-

логий многообразия $\tilde{M}$, на к-ром свободно действует свободная абелева группа J^a ранга a с фиксированной системой образующих $t_1, t_2, \ldots, t_a$.

Проекция многообразия $\tilde{M}$ на пространство *орбит* M является *накрытием*, отвечающим ядру K_a гомоморфизма $\gamma\colon G \to J_a$ *фундаментальной группы* $\pi_1(M) = G$ многообразия M. Так как $K_a = \pi_1(\tilde{M})$, то группа $B_a = K_a / K_a'$, где K_a' — *коммутант* ядра K_a, изоморфна одномерной группе гомологий $H_1(\tilde{M}, Z)$. При этом расширение $1 \to K_a \to G \to J^a \to 1$ порождает расширение (*): $1 \to B_a \to G/K_a' \to J^a \to 1$, к-рое определяет на B_a модульную структуру над целочисленным групповым кольцом $Z(J^a)$ группы J^a (см. *Групповая алгебра*). Та же самая структура индуцируется в B_a данным действием J^a на $\tilde{M}$. Фиксация образующих t_i в J^a отождествляет $Z(J^a)$ с кольцом $L_a = L_a(t_1, \ldots, t_a) = Z[t_1, t_1^{-1}, \ldots t_a, t_a^{-1}]$ лорановых многочленов от переменных t_i. Расширение (*) чисто алгебраически определяет и определено модульным расширением (**): $0 \to B_a \to A_a \to I_a \to 0$ (см. [5]). Здесь I_a — ядро гомоморфизма ε: $L_a \to Z$, $(\varepsilon t_i = 1)$. Модуль A_a наз. модулем Александера накрытия $\tilde{M} \to M$. В случае (рассмотренном впервые Дж. Александером [1]), в к-ром $M = \bar{M}(k)$ — дополнительное пространство нек-рого зацепления k кратности μ в трехмерной сфере S^3, а накрытие отвечает гомоморфизму коммутирования $\gamma_\mu\colon G(k) \to J^\mu$ группы зацепления, $-A_\mu$ наз. модулем Александера зацепления k. Основные свойства G, существенные для дальнейшего: G/G' — свободная абелева группа, дефект группы G равен 1, G имеет копредставление $\{x_1, \ldots, x_{m+1}; r_1, \ldots, r_m\}$, для к-рого $\gamma_\mu(x_i) = t_i$, $1 \leqslant i \leqslant \mu$, $\gamma_\mu(x_i) = 1$, $i > \mu$ (см. *Узлов и зацеплений диаграммы*). В случае зацеплений образующие $t_i \in J^\mu$ отвечают меридианам компонент $k_i \subset k$ и фиксируются ориентацией этих компонент и сферы.

Обычно M есть дополнительное пространство $\bar{M}(k)$ зацепления k, состоящего из μ $(n-2)$-мерных сфер k_i в S^n. Кроме гомоморфизма γ_m рассматривается гомоморфизм $\gamma_\sigma\colon G(k) \to J$, где $\gamma(x)$ равно сумме коэффициентов зацепления *петли*, представляющей x, со всеми k_i.

Матрица $\mathfrak{M}_a$ модульных соотношений модуля A_a наз. матрицей Александера накрытия, а в случае зацеплений — матрицей Александера зацепления. Она может быть получена как матрица

$$(\partial r_i / \partial x_j)^{\gamma_a \Phi},$$

где $\{x_i; r_i\}$ — копредставление группы G. При $\mu = 1$ матрица $\mathfrak{N}_a$ модульных соотношений для B_a получается из $\mathfrak{M}_a$ отбрасыванием столбца из нулей. Матрицы $\mathfrak{M}_a$ и $\mathfrak{N}_a$ определены модулями A_a и B_a лишь с точностью до преобразований, отвечающих переходам к другим копредставлениям модуля. Однако с их помощью вычисляется ряд инвариантов модуля. Идеалами Александера наз. идеалы модуля A_a, т. е. ряд идеалов $E_i(A_a)$ кольца L_a: $(0) \subseteq E_0 \subseteq \ldots \subseteq E_{i-1} \subseteq E_i \subseteq \ldots \subseteq (1)$, где E_i порождается минорами матрицы $\mathfrak{M}_a$ порядка $(m-k) \times (m-k)$ и $E_a^i = L_a$ для $r - i < 1$. Употребляется и противоположный порядок нумерации. Так как L_a — гауссово кольцо и нётерово кольцо, то каждый идеал E_i лежит в минимальном главном идеале (Δ_i); его образующая Δ_i определена с точностью до делителей единицы t_i^k. Лоранов многочлен $\Delta_i(t_1, \ldots, t_\mu)$ наз. i-м многочленом Александера, а $\Delta_1(t_1, \ldots, t_\mu)$ — просто многочленом Александера зацепления k (или накрытия $\tilde{M} \to M$). Если $\Delta_i \neq 0$, то он домножается на $t_1^{k_1}, \ldots, t_\mu^{k_\mu}$ так, чтобы $\Delta_i(0, \ldots, 0) \neq 0$ и $\neq \infty$. Гомоморфизму γ_σ отвечает модуль A, идеа-

лы $\bar{E}_i$ и полиномы Δ_i, к-рые наз., соответственно, приведенным модулем Александера, приведенными идеалами Александера и приведенными многочленами Александера зацепления k (или накрытия $\tilde{M}_\sigma \to M$). Если $\mu=1$, то $A=\bar{A}$. $\mathfrak{M}(\bar{A})$ получается из $\mathfrak{M}$ заменой всех t_i на t. При $\mu \geqslant 2$ $\bar{\Delta}_1$ делится на $(t-1)^{\mu-2}$. Полином $\nabla(t)=\Delta_1(t)/(t-1)^{\mu-2}$ наз. полиномом Хосокавы [4]. Модульные свойства $A(k)$ изучены в [4], [8], [10]. Случай зацеплений исследован мало. Для $\mu=1$ группа $H_1(\tilde{M}; R)$ конечно порождена над любым кольцом R, содержащим Z, в к-ром $\Delta(0)$ обратим [7], в частности, над полем рациональных чисел, а если $\Delta(0)=+1$, то над Z. В этом случае $\Delta(t)$ — характеристич. многочлен преобразования t: $H_1(\tilde{M}; R) \to H_1(\tilde{M}; R)$. Степень $\Delta_1(t)$ равна рангу $H_1(\tilde{M}; R)$; в частности, $\Delta_1(t)=1$ в том и только том случае, когда $H_1(\tilde{M}; Z)=0$. При $n=3$ идеалы зацепления обладают следующим свойством симметрии: $E_i=\bar{E}_i$, где черта означает взятие образа при автоморфизме, порожденном заменой всех t_i на t_i^{-1}. Отсюда вытекает, что $\Delta_i(t_1^{-1}, \ldots, t_\mu^{-1})=t_1^{N_1}, \ldots, t_\mu^{N_\mu}\Delta_i(t_1, \ldots, t_\mu)$ для нек-рых целых N_i. Эта симметрия является следствием двойственности Фокса — Троттера для групп узлов и зацеплений. Она может быть выведена также из *Пуанкаре двойственности* для многообразия $\tilde{M}$ с учетом свободного действия J^a (см. [3]). Если $\Delta_1(t_1, \ldots, t_\mu) \neq 0$, то над полем дробей P_μ кольца L_μ цепной комплекс $C_*(\tilde{M})$ ацикличен ($n=3$). Следовательно, определено *Рейдемейстера кручение* $\tau \in P_\mu/\Pi$, отвечающее вложению $L_\mu \subset P_\mu$, где Π — группа единиц L_μ. Для $\mu=2$ $\tau=\Delta_1$, для $\mu=1$ $\tau=\Delta_1/t-1$ (с точностью до единиц L_μ). Симметрия Δ_1 для $n=3$ является следствием симметрии τ. В случае $\mu=1$ из симметрии $\Delta_i(t)$ и свойства $\Delta_i(1)=\pm 1$ вытекает четность степени $\Delta_i(t)$. Степень $\nabla(t)$ также четна [4]. Свойства многочленов узлов $\Delta_i(t)$: $\Delta_i(1)=\pm 1$, $\Delta_i(t)=t^{2k}\Delta_i(t^{-1})$, Δ_{i+1} делит Δ_i и $\Delta_i=1$ для i, превосходящих нек-рое N, являются характеристическими, т. е. для каждого набора $\Delta_i(t)$ с этими свойствами существует узел k, для к-рого они служат многочленами Александера. Полиномы Хосокавы [4] характеризуются свойством $\nabla(t)=t^{2k}\nabla(t^{-1})$ при любом $\mu \geqslant 2$; полиномы Δ_1 двумерных узлов — свойством $\Delta_1(1)=1$.

А. и., в первую очередь многочлены, являются мощным средством различения узлов и зацеплений. Напр., среди узлов из таблицы с менее чем девятью двойными точками Δ_1 не различает только три пары (см. *Узлов таблица*). См. также *Узлов теория*, *Альтернирующие узлы и зацепления*.

Лит.: [1] Alexander J. W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1928, v. 30, № 2, p. 275—306; [2] Reidemeister K., Knotentheorie, B., 1932; [3] Blanchfield R. C., «Ann. Math.», 1957, v. 65, p. 340—56; [4] Hosokawa F., «Osaka J. Math.», 1958, v. 10, p. 273—82; [5] Crowell R. H., «Nagoya Math. J.», 1961, v. 19, p. 27—40; [6] Кроуэлл Р., Фокс Р., Введение в теорию узлов, пер. с англ., М., 1967; [7] Neuwirth L., Knot group, Princeton (N.Y.), 1965; [8] Crowell R. H., «J. Math. and Mech.», 1965, v. 14, № 2, p. 289—98; [9] Levine J., «Amer. Math.», 1967, v. 89, p. 69—84; [10] Milnor J. W., в кн.: Conference on the topology of manifolds, v. 13, Boston (a.o.), 1968, p. 115—33.

А. В. Чернавский.

АЛЕКСАНДРОВА БИКОМПАКТНОЕ РАСШИРЕНИЕ, Александрова компактификация,— единственное хаусдорфово *бикомпактное расширение* αX локально бикомпактного не бикомпактного хаусдорфова пространства X, получаемое присоединением к пространству X одной точки ∞. Произвольная окрестность точки ∞ при этом обязана иметь вид $\{\infty\} \cup (X \setminus F)$, где F — нек-рый бикомпакт в X. А. б. р. αX является наименьшим элементом во множестве $B(X)$

всех бикомпактных расширений пространства X. При этом наименьший элемент во множестве $B(X)$ существует лишь для локально бикомпактного X и непременно совпадает с αX.

А. б. р. было определено П. С. Александровым [1] и играет важную роль в топологии. Так, А. б. р. $\alpha\mathbb{R}^n$ n-мерного евклидова пространства совпадает с n-мерной сферой, А. б. р. αN множества натуральных чисел гомеоморфно пространству сходящейся последовательности вместе с предельной точкой, А. б. р. «открытого» листа Мёбиуса совпадает с действительной проективной плоскостью $\mathbb{R}P^2$. Имеются патологич. ситуации, связанные с А. б. р., напр. существует совершенно нормальное, локально бикомпактное и счетно компактное пространство X, А. б. р. αX к-рого имеет размерности $\dim \alpha X < \dim X$ и $\operatorname{Ind} \alpha X < \operatorname{Ind} X$.

Лит.: [1] Александров П. С., «Math. Ann.», 1924, Bd. 92, S. 294—301.

В. В. Федорчук.

АЛЕКСАНДРОВА — ЧЕХА ГОМОЛОГИИ И КОГОМОЛОГИИ, спектральные гомологии и когомологии, — гомологии и когомологии, удовлетворяющие всем *Стинрода — Эйленберга аксиомам* (кроме, быть может, аксиомы точности) и нек-рому условию непрерывности. Группы (или модули) гомологий $H_n(X, A; G)$ Александрова — Чеха [1], [2] определяются как обратный предел $\varprojlim H_n(\alpha, \alpha'; G)$ по всем открытым покрытиям α пространства X; при этом α означает не только покрытие, но и его *нерв*, а α' есть подкомплекс в α, являющийся нервом ограничения покрытия α на замкнутое множество A. Возможность перехода к пределу обеспечивается существованием симплициальных проекций $(\beta, \beta') \to (\alpha, \alpha')$, определяемых, с точностью до гомотопных, вписанностью β в α. Когомологии $H^n(X, A; G)$ Александрова — Чеха определяются как прямой предел $\varinjlim H^n(\alpha, \alpha'; G)$. Гомологии удовлетворяют всем аксиомам Стинрода — Эйленберга, кроме аксиомы точности. Для когомологий справедливы все аксиомы; частично поэтому когомологии значительно более употребительны. На категории бикомпактов аксиома точности имеет место и для гомологий, если G — компактная группа или поле. Кроме того, А.— Ч. г. и к. обладают свойством непрерывности: для $X = \varprojlim X_\lambda$ гомологии (когомологии) равны соответствующему пределу гомологий (когомологий) бикомпактов X_λ. При этом теория Александрова — Чеха является единственной теорией, удовлетворяющей аксиомам Стинрода — Эйленберга (с указанным исключением) и этому условию непрерывности. На категории паракомпактных пространств для когомологий справедлива обычная характеристика через отображения в полиэдры Эйленберга — Маклейна, а сами когомологии эквивалентны когомологиям, определяемым в *пучков теории*. Когомологии могут быть определены также как когомологии нек-рого предельного коцепного комплекса, что дает возможность оперировать пучками коцепей. Аналогичные идеи в применении к гомологиям приводят к теории гомологий, идущей от Н. Стинрода (N. Steenrod), А. Бореля (A. Borel) и др. и удовлетворяющей всем аксиомам, включая точность (но свойство непрерывности теряется). А.— Ч. г. и к., вместе с указанной модификацией, применяются в гомологич. вопросах теории непрерывных отображений, в теории групп преобразований (связь с факторпространством), в теории обобщенных многообразий (в частности, в различных соотношениях двойственности), в теории аналитич. пространств (напр., для определения фундаментальных классов гомологий), в гомологич. теории размерности и т. п.

Лит.: [1] Александров П. С., «Ann. of Math.», 1928, v. 30, p. 101—87; [2] Čech E., «Fundam. math.», 1932,

т. 19, р. 149—83; [3] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [4] Скляренко Е. Г., Теория гомологий и аксиома точности, «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, вып. 5 (149), с. 87—140.
Е. Г. Скляренко.

АЛЕФ-НУЛЬ — *кардинальное число*, являющееся мощностью счетного множества, обозначается $\aleph_0$.
П. С. Александров.

АЛЕФЫ, $\aleph$,— первая буква древнееврейского алфавита,— символы, введенные Г. Кантором (G. Cantor) для обозначения *кардинальных чисел* (мощностей) бесконечных вполне упорядоченных множеств. Каждое кардинальное число есть нек-рый А. (следствие *выбора аксиомы*). Но многие теоремы об А. доказываются без аксиомы выбора. Для каждого порядкового числа α через $\aleph_\alpha = w(\omega_\alpha)$ обозначается мощность множества всех порядковых чисел, меньших ω_α. В частности, $\aleph_0$ есть мощность множества всех натуральных чисел, $\aleph_1$ — мощность множества всех счетных порядковых чисел и т. д. Если $\alpha < \beta$, то $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$. Кардинал $\aleph_{\alpha+1}$ является наименьшим кардинальным числом, следующим за $\aleph_\alpha$. Обобщенная континуум-гипотеза заключается в том, что $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ для любого порядкового числа α. При $\alpha = 0$ равенство приобретает вид $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ и составляет содержание *континуум-гипотезы*. Множество всех А., меньших $\aleph_\alpha$, вполне упорядочено по величине и *порядковый тип* его равен α. Естественным образом определяются сумма, произведение и степень A. При этом

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\max(\alpha, \beta)}.$$

Наиболее часто встречаются следующие формулы. Рекурсивная формула Хаусдорфа:

$$\aleph_{\alpha+n}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+n}^{\aleph_\beta},$$

ее частным случаем при $\alpha = 0$ является формула Бернштейна:

$$\aleph_n^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_n^{\aleph_\beta}.$$

Рекурсивная формула Тарского: если порядковое число α предельно и $\beta < cf(\alpha)$, то

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \sum_{\xi < \alpha} \aleph_\xi^{\aleph_\beta}.$$

При этом $cf(\alpha)$ обозначает конфинальный характер порядкового числа α. Как и в случае кардинальных чисел, различают сингулярные А., регулярные А., предельные А., слабо недостижимые А., сильно недостижимые А. и др. Напр., $\aleph_\alpha$ сингулярно, если α предельно и $cf(\alpha) < \alpha$. Среди А. нет наибольшего. Множество всех А., как показал Г. Кантор, не мыслимо, т. е. такого множества не существует. См. также *Вполне упорядоченное множество*, *Кардинальное число*, *Континуум-гипотеза*, *Множеств теория*, *Порядковое число*.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948; [2] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [3] Коэн П. Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969; [4] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970.
Б. А. Ефимов.

АЛИКВОТНАЯ ДРОБЬ — дробь вида $1/n$, где n — натуральное число. Для решения ряда математич. и физич. задач существенно, что каждое положительное рациональное число представимо в виде суммы конечного числа А. д. с различными знаменателями. Так, $\frac{3}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{66}$. А. д. широко использовались в Древнем Египте и получили впоследствии назв. египетских дробей.
Б. М. Бредихин.

АЛФАВИТ — список (конечное множество) *букв*. Обычно в А. объединяются буквы, необходимые для развития той или иной символики (или, как иногда говорят, языка). Для двух А. A и B естественным образом

определяются их объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$ и разность $A \setminus B$, а также отношение включения $A \subset B$. В целях удобства обычно допускают к рассмотрению и п у с т о й А., то есть А., не содержащий ни одной буквы. *Н. М. Нагорный.*

АЛЬБАНЕЗЕ МНОГООБРАЗИЕ — *абелево многообразие* $\mathrm{Alb}(X)$, канонически сопоставляемое каждому алгебраич. многообразию X и являющееся решением следующей универсальной задачи: существует морфизм $\varphi\colon X \to \mathrm{Alb}(X)$ такой, что любой морфизм $f\colon X \to A$ в абелево многообразие A разлагается в произведение $f = f' \cdot \varphi$, где $f'\colon A \to \mathrm{Alb}(X)$ (название в честь Альбанезе; Albanese). Если X полное неособое многообразие над полем комплексных чисел, то А. м. можно описать следующим образом. Пусть Ω^1 — пространство всюду регулярных дифференциальных форм степени 1 на X. Каждый одномерный цикл γ топологич. пространства X определяет линейную функцию $\omega \to \int_\gamma \omega$ на Ω^1. Образ получающегося отображения $H_1(X, \mathbb{Z}) \to (\Omega^1)^*$ является решеткой Γ в $(\Omega^1)^*$, а фактор — пространство $(\Omega^1)^*/\Gamma$ совпадает с А. м. многообразия X. С алгебраич. точки зрения А. м. можно рассматривать как способ задания алгебраич. структуры на нек-рой факторгруппе группы Z нульмерных циклов степени 0 на многообразии X. В случае, когда X — неособая полная кривая, $\mathrm{Alb}(X)$ совпадает с *Якоби многообразием* кривой X. Если основное поле k имеет нулевую характеристику, то имеют место равенства $\dim \mathrm{Alb}(X) = \dim_k H^0(X, \Omega^1_X) = \dim_k H^1(X, O_X)$. Число $\dim \mathrm{Alb}(X)$ наз. и р р е г у л я р н о с т ь ю м н о г о о б р а з и я X. В случае, когда поле имеет конечную характеристику, имеет место неравенство

$$\mathrm{irr}(X) \leqslant \dim H^0(X, \Omega^1_X) \text{ и } \mathrm{irr}(X) \leqslant \dim H^1(X, O_X)$$

и

$$\dim H^1(X, O_X) \neq \dim H^0(X, \Omega^1_X) \text{ в общем случае.}$$

А. м. двойственно *Пикара многообразию*.

Лит.: [1] Бальдассарри М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [2] L a n g S., Abelian varieties, N.Y.—L., 1959. *А. Н. Паршин.*

АЛЬБЕДНЫЙ МЕТОД (в теории переноса) — метод решения краевых задач для уравнения переноса. А. м. представляет собой вариант *матричной факторизации метода*, когда роль коэффициентов факторизации играют матрицы отражения и пропускания последовательности слоев возрастающей толщины. А. м. используется практически лишь в пространственно одномерных задачах, как при отыскании коэффициентов отражения и пропускания, так и для нахождения решения уравнения переноса в среде.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962; [2] Гермогенова Т. А. и др., Альбедо нейтронов, М., 1973, гл. 2. *Т. А. Гермогенова.*

АЛЬТЕРНАНСА ТОЧКИ — последовательность точек

$$\{x_i\}_0^{n+1} \subset Q, \quad a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \leqslant b,$$

в к-рых разность $\alpha_i = f(x_i) - P_n(x_i)$, где $f(x)$ — непрерывная на замкнутом множестве $Q \subset [a, b]$ функция и $P_n(x)$ — алгебраич. многочлен степени не выше n, принимает неравные нулю значения чередующихся знаков. Аналогично вводится понятие А. т. для многочленов по ч е б ы ш е в с к о й с и с т е м е функций $\{s_k(x)\}_0^n$ (удовлетворяющих *Хаара условию*). Если при этом все α_i по абсолютной величине равны

$$\max_{x \in Q} |f(x) - P_n(x)|,$$

то точки $\{x_i\}_0^{n+1}$ наз. т о ч к а м и ч е б ы ш е в с к о г о а л ь т е р н а н с а. А. т. играют важную роль в теории приближения функций. Так, в терминах А. т. формулируется *Валле Пуссена теорема* (об аль-

тернансе) и критерий Чебышева (см. *Чебышевский альтернанс*). А. т. используются при построении многочленов наилучшего приближения. *Ю. Н. Субботин.*

АЛЬТЕРНАТИВА (в теории игр) — одна из позиций, в к-рую, согласно правилам игры, можно перейти из данной позиции за один ход. А. называют также соответствующий ход или приписанный ему индекс. *И. Н. Врублевская.*

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ КОЛЬЦА И АЛГЕБРЫ. Альтернативным кольцом (А. к.) наз. кольцо, в к-ром каждые два элемента порождают ассоциативное подкольцо; альтернативной алгеброй (А. а.) наз. линейная алгебра, являющаяся А. к. Согласно теореме Артина класс всех А. к. задается системой тождеств:

$$(xy)y=x(yy) \text{ — правая альтернативность,}$$
$$(xx)y=x(xy) \text{ — левая альтернативность.}$$

Таким образом, все А. к. составляют многообразие. Термин «А. к.» оправдан тем, что в любом таком кольце *ассоциатор* (дефект ассоциативности)

$$(x, y, z)=(xy)z-x(yz)$$

является кососимметрической (альтернативной) функцией своих аргументов.

Первым примером А. к. явились *Кэли числа*, дающие пример альтернативного тела, т. е. А. к. с единицей, в к-ром однозначно разрешимы уравнения $ax=b$ и $ya=b$ для всех b и всех $a\neq 0$. Альтернативные тела играют существенную роль в теории проективных плоскостей, поскольку проективная плоскость мУфангова (т. е. плоскость трансляций относительно любой прямой) тогда и только тогда, когда любое координатизирующее ее тернарное кольцо является альтернативным телом. Если в кольце R с единицей каждый элемент обратим, и для любых a, $b\in R$ выполняется тождество

$$a^{-1}(ab)=b$$

(или тождество $(ba)a^{-1}=b$), то R является альтернативным телом. Всякое альтернативное тело либо ассоциативно, либо имеет строение *Кэли — Диксона алгебры* над своим центром.

Всякое простое А. к. также либо ассоциативно, либо является алгеброй Кэли — Диксона над своим центром (последняя в этом случае не обязана уже быть телом). Алгебрами Кэли — Диксона исчерпываются за пределами ассоциативных и все примитивные А. к. Всякое первичное А. к. R, если $3R\neq 0$, либо ассоциативно, либо является кольцом Кэли — Диксона.

Многие свойства А. к. весьма сильно отличаются от свойств ассоциативного кольца в аналогичных ситуациях. Так, если R есть А. к., а A и B — его правые идеалы, то их произведение AB уже не обязано быть правым идеалом, даже если A — двусторонний идеал в R; но произведение двусторонних идеалов А. к. является его двусторонним идеалом. Различие в случае ассоциативных колец и А. к. сильно проявляется и в том, что в А. к. существуют различные нильпотентности, поскольку произведение элементов, при одной расстановке скобок равное 0, при другой — может быть отлично от 0. Обычно в А. к. используются следующие нильпотентности: разрешимость (кольцо R наз. разрешимым индекса m, если существует такое число m, что $R_m=0$, где $R_{i+1}=R_iR_i$, $R_1=R$), правая нильпотентность (существует такое число n, что $R^{(n)}=0$, где $R^{(i+1)}=R^{(i)}R^{(1)}$, $R^{(1)}=R$) и нильпотентность (существует такое число k, что $R^k=0$, т. е. произведение любых k элементов R равно 0 при любой расстановке скобок). Имеется А. к. разрешимое индекса 3, но не нильпотентное. Правая нильпотентность в А. к. эквивалентна нильпотентности (А. к.,

правонильпотентное индекса n, нильпотентно индекса $\leqslant(n+1)^2$). Локально, т. е. на конечно порожденных кольцах, все нильпотентности эквивалентны. Теория, устанавливающая достаточные признаки локальной нильпотентности А. к., вполне параллельна соответствующей теории для ассоциативных колец. Это вытекает из следующего факта: пусть R есть А. к., в к-ром можно выбрать такую систему S порождающих, что любые два элемента из S порождают нилькольцо; пусть, далее, все ассоциативные гомоморфные образы R локально нильпотентны, тогда R локально нильпотентно. Поэтому если R есть А. к. с тождеством $x^n=0$, то R локально нильпотентно; если R есть А. а. с тождеством, к-рое не является следствием ассоциативности, и каждый элемент R есть сумма конечного числа нильэлементов, то алгебра R локально нильпотентна. Если речь идет не о локальной, а о глобальной нильпотентности, то ситуация в А. к. отличается от ассоциативной. Так, уже А. к. R с тождеством $x^3=0$ не обязано быть нильпотентным (даже если его аддитивная группа без кручения). Однако А. к. с тождеством $x^n=0$ и без элементов порядка k, $0<k\leqslant n$, в аддитивной группе разрешимо индекса $n(n+1)/2$.

Если R — алгебраич. А. а. с тождественным соотношением, не являющимся следствием ассоциативности (или степени алгебраичности элементов R ограничены в совокупности), то R локально конечномерна.

В А. к. имеется аналог *Джекобсона радикала*: во всяком А. к. R существует максимальный квазирегулярный идеал $J(R)$, равный пересечению всех модулярных максимальных правых идеалов. Факторкольцо $R/J(R)$ является J-полупростым, т. е. $J(R/J(R))=0$; если I есть идеал R, то $J(I)=J(R)\cap I$, всякое J-полупростое кольцо аппроксимируется примитивными А. к. (т. е. примитивными ассоциативными кольцами и алгебрами Кэли — Диксона). Имеются аналоги и всех других ассоциативных радикалов (нижнего нильрадикала, локально нильпотентного радикала и т. д.), к-рые обладают теми же основными свойствами, что и в ассоциативных кольцах.

В артиновом А. к. (то есть в А. к., удовлетворяющем условию минимальности для правых идеалов) R радикал $J(R)$ нильпотентен, нильпотентен и всякий нильподгруппоид мультипликативного группоида R. Кольцо R является артиновым А. к. без нильпотентных идеалов тогда и только тогда, когда R раскладывается в прямую сумму конечного числа полных матричных алгебр (над нек-рыми ассоциативными телами) и алгебр Кэли — Диксона; такое разложение для каждого R единственно с точностью до перенумерации слагаемых. Если R есть А. к., I — его идеал и R удовлетворяет условию минимальности для двусторонних идеалов, содержащихся в I, то I нильпотентен тогда и только тогда, когда для любого гомоморфизма φ кольца R в $I\varphi$ нет идеалов кольца $R\varphi$, которые являются простыми кольцами.

В А. к. R различаются ассоциативный центр

$$N(R)=\{n\in R \mid (n, a, b)=0 \text{ для всех } a, b\in R\},$$

коммутативный центр

$$C(R)=\{c\in R \mid [c, a]=ca-ac=0 \text{ для всех } a\in R\}$$

и центр

$$Z(R)=N(R)\cap C(R).$$

Если в аддитивной группе R нет элементов порядка 3, то $C(R)\subseteq N(R)$. Однако над полем характеристики 3 существуют коммутативные неассоциативные А. а. В первичном А. к. R всегда $C(R)\supseteq N(R)$. В любом А. к. R всегда $[N(R), R]\subseteq N(R)$. Пусть в А. к. R нет нетривиальных идеалов, тогда: 1) либо $3R=0$, либо $N(R)\neq 0$. 2) либо $3R\subseteq N(R)$, либо $Z(R)\neq 0$, 3) если A — правый

идеал R, то $N(A)=A\cap N(R)$ и $Z(A)=A\cap Z(R)$. В то же время над любым полем F можно построить такое А. к. K с тривиальными идеалами, что $N(K)=C(K)=0$, но K^2, являясь идеалом K, будет ассоциативно коммутативным кольцом, т. е.

$$N(K^2)=C(K^2)=K^2\neq 0.$$

Из тождеств, выполняющихся в А. к., наиболее известны следующие:

$$[(xy)\,z]\,y=x\,[(yz)\,y],\quad [(xy)\,x]\,z=x\,[y\,(xz)],$$
$$(xy)\,(zx)=[x\,(yz)]\,x$$

(тождества Муфанг);

$$(xy,\ z,\ t)-y\,(x,\ z,\ t)-(y,\ z,\ t)\,x=$$
$$=([x,\ y],\ z,\ t)+(x,\ y,\ [z,\ t]),$$
$$([x,\ y]^4,\ z,\ t)=[x,\ y]\,([x,\ y]^2,\ z,\ t)=$$
$$=([x,\ y]^2,\ z,\ t)\,[x,\ y]=0.$$

В А. к. с 3 образующими выполняется, кроме того, тождество:

$$([x,\ y]\,[z,\ t]+[z,\ t]\,[x,\ y],\ u,\ v)=0. \qquad (*)$$

В А. к. с более чем 3 образующими тождество (*), вообще говоря, не выполняется, более того, в этих А. к., вообще говоря, $([x,\ y]^2,\ z,\ t)\neq 0$. Во всяком А. к. без локально нильпотентных идеалов тождество (*) выполнено, т. к. такое А. к. аппроксимируется первичными ассоциативными кольцами и кольцами Кэли — Диксона.

Во всяком свободном А. к. R имеется ненулевой идеал $U(R)$, содержащийся в ассоциативном центре $N(R)$. Свободное А. к. с 3 или более образующими не только содержит делители нуля, но и не является первичным. Свободное А. к. с 4 или более образующими содержит даже тривиальные идеалы и поэтому не аппроксимируется первичными кольцами.

Лит.: [1] Дорофеев Г. В., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, № 3, с. 147—50; [2] Жевлаков К. А., «Алгебра и логика», 1966, т. 5, № 3, с. 11—36; [3] его же, там же, 1969, т. 8, № 4, с. 425—39; [4] Ширшов А. И., «Матем. сб.», 1957, т. 41, с. 381—94; [5] Kleinfeld E., «Ann. Math.», 1953, v. 58, № 3, p. 544—547; [6] его же, там же, 1957, v. 66, № 3, p. 395—99; [7] Скорняков Л. А., «Rend. mat. e applic.», 1965, v. 24, № 3—4, p. 360—72; [8] Slater M., «J. Algebra», 1968, v. 8, № 1, p. 60—76; [9] Дорофеев Г. В., «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 5, с. 1029—48.

К. А. Жевлаков.

АЛЬТЕРНИОН — *гиперкомплексное число*, А. могут рассматриваться как обобщение комплексных чисел, двойных чисел (см. *Двойные и дуальные числа*) и кватернионов. Алгеброй ${}^lA_n$ альтернионов n-го порядка индекса l наз. алгебра ранга 2^{n-1} над полем действительных чисел с единицей 1 и системой образующих $l_1,\ \ldots,\ l_{n-1}$, умножение к-рых производится по формулам

$$l_il_j=-\,l_jl_i,\quad l_i^2=-\varepsilon_i,$$

где $\varepsilon_i=\pm 1$, причем -1 встречается l раз, а $+1$, соответственно, $n-l-1$ раз. Базис алгебры можно составить из элементов вида

$$l_{j_1}l_{j_2}\ldots l_{j_k}=l_{j_1j_2\ldots j_k},\ \text{где}\ j_1<\ \ldots<j_k$$

и единицы. Произвольный А. α будет иметь в этой базе запись

$$\alpha=a+\sum\nolimits_i a^il_i+\sum\nolimits_i\sum\nolimits_j a^{ij}l_{ij}+\ldots$$
$$\ldots+a^{12\ldots n-1}\,l_{1,\,2,\,\ldots,\,n-1},$$

где a, a^l, a^{lj}, $\ldots$, $a^{12\ldots(n-1)}$ — действительные числа. Сопряженный к А. α А. $\bar{\alpha}$ определяется формулой

$$\bar{\alpha}=\sum\nolimits_k(-1)^{k(k+1)/2}\,a^{i_1\ldots l_k}l_{i_1}\ldots l_{i_k}.$$

Справедливы равенства

$$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta},\quad \bar{\bar{\alpha}}=\alpha,\quad \overline{\alpha\beta}=\bar{\beta}\bar{\alpha}.$$

Произведение $\bar{\alpha}\alpha$ всегда является положительным действительным числом, величина $|\alpha|=\sqrt{\bar{\alpha}\alpha}$ наз. м о д у л е м А. α. Если принять за расстояние между А. α и β число $|\beta-\alpha|$, то алгебры ${}^0A_n$ и ${}^lA_n$ $(l>0)$ оказываются изометричными евклидовым пространствам $\mathbb{R}_{2^n-1}$ и псевдоевклидовым пространствам ${}^l\mathbb{R}_{2^n-1}$ соответственно. Алгебра ${}^0A_1$ изоморфна полю действительных чисел, алгебра ${}^0A_2$ изоморфна полю комплексных чисел, алгебра ${}^1A_2$ изоморфна алгебре двойных чисел, алгебра ${}^0A_3$ изоморфна телу кватернионов, алгебры ${}^1A_3$ и ${}^2A_3$ изоморфны так наз. алгебрам а н т и к в а т е р н и о н о в. Элементы алгебр ${}^0A_n$ наз. ч и с л а м и К л и ф ф о р д а. Алгебра ${}^4A_5$ рассматривалась П. Дираком (P. Dirac) при изучении спина электрона.

Алгебра А. является частным случаем *Клиффорда алгебр*.

Лит.: [1] Р о з е н ф е л ь д Б. А., Неевклидовы геометрии, М., 1955.
Н. Н. Вильямс.

АЛЬТЕРНИРОВАНИЕ, к о с о с и м м е т р и р о в а н и е, а н т и с и м м е т р и р о в а н и е, а л ь т е р н а ц и я, — одна из операций тензорной алгебры, при помощи к-рой по данному тензору строится кососимметрический (по группе индексов) тензор. А. всегда производится по нескольким верхним или нижним индексам. Тензор A с координатами $\{a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}, i_\nu\leqslant n, j_\mu\leqslant n\}$ является результатом А. тензора T с координатами $\{t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}, 1\leqslant i_\nu, j_\mu\leqslant n\}$ по верхним индексам, напр., по группе индексов $I=(i_1, i_2, \dots, i_m)$, если

$$a^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}=\frac{1}{m!}\sum\nolimits_{I\to\alpha}\sigma(I,\ \alpha)\,t^{\alpha_1\dots\alpha_m i_{m+1}\dots i_p}_{j_1\dots j_q}. \qquad (*)$$

Здесь суммирование производится по всем $m!$ перестановкам $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ группы индексов I, а число $\sigma(I, \alpha)$ равно $+1$ или -1, если соответствующая перестановка четна или нечетна. Аналогично определяется А. по группе нижних индексов.

А. по группе индексов обозначается взятием этих индексов в квадратные скобки. Посторонние индексы, попавшие внутрь квадратных скобок, отделяются вертикальными черточками.

Напр.,

$$t_{[4|23|1]}=\tfrac{1}{2!}[t_{4231}-t_{1234}].$$

Последовательное А. по группам индексов I_1 и I_2, $I_1\subset I_2$, совпадает с А. по группе индексов I_2:

$$t_{[i_1\dots[i_k\dots i_l]\dots i_q]}=t_{[i_1\dots i_q]}.$$

Если n — размерность векторного пространства, в к-ром определен тензор, то А. по группе индексов, количество к-рых больше n, всегда дает нулевой тензор. А. по нек-рой группе индексов тензора, симметричного (см. *Симметрирование*) по этой группе, также дает нулевой тензор. Тензор, не изменяющийся при А. по нек-рой группе индексов I, наз. к о с о с и м м е т р и ч е с к и м, или а л ь т е р н и р о в а н н ы м, по г р у п п е и н д е к с о в I. Перестановка любой пары таких индексов ведет к изменению знака у координаты тензора.

Операция А. тензора, наряду с операцией симметрирования, применяется для разложения тензора на более простые тензоры.

Произведение двух тензоров с последующей А. по всем индексам наз. а л ь т е р н и р о в а н н ы м п р о и з в е д е н и е м (в н е ш н и м п р о и з в е д е н и е м).

А. применяется также для образования знакопеременных (альтернированных) сумм вида (*) с многоиндексными слагаемыми. Напр., вычисление определите-

ля (с коммутирующими при умножении элементами) производится по следующим формулам:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = n!\, a_{[1}^1 a_2^2 \dots a_{n]}^n = n!\, a_{[1}^{[1} a_2^2 \dots a_{n]}^{n]}.$$

Лит.: [1] Широков П. А., Тензорное исчисление, 2 изд., Казань, 1961; [2] Беклемишев Д. В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., 1971; [3] Схоутен Я. А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., М., 1965; [4] Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, М., 1970. *Л. П. Купцов.*

АЛЬТЕРНИРУЮЩИЕ УЗЛЫ И ЗАЦЕПЛЕНИЯ — узлы и зацепления, имеющие альтернирующую диаграмму (см. *Узлов и зацеплений диаграммы*), т. е. такую проекцию в общее положение на плоскость, при к-рой при обходе каждой компоненты проходы сверху и снизу двойных точек чередуются. Каждую диаграмму можно превратить в альтернирующую, изменив в нек-рых двойных точках проходы сверху и снизу.

Пусть F — поверхность Зейферта. В отличие от общего случая, неравенство $d \leqslant 2h+\mu-1$, где d — степень многочлена Александера (см. *Александера инварианты*), h — род поверхности Зейферта и μ — число компонент зацепления k, становится для А. у. и з. равенством. Поэтому род А. з. может быть вычислен по любой его альтернирующей диаграмме, и поверхность Зейферта оказывается поверхностью минимального рода. Это показывает также, что если диаграмма нормирована, т. е. на плоскости проекции нет простого замкнутого контура, который пересекает диаграмму в одной двойной точке, то зацепление тривиально (см. *Узлов теория*) в том и только том случае, когда диаграмма не имеет двойных точек. Если такой контур есть, то вращением на 180^0 части диаграммы, лежащей внутри него, можно уменьшить число двойных точек, сохраняя диаграмму альтернированной. Это дает алгоритм для решения вопроса о тривиальности А. у. и з. Кроме того, если диаграмма связана, то зацепление не распадается, так как $d \geqslant 1$, а приведенный полином Александера распадающегося зацепления равен нулю. Матрица Александера вычисляется как матрица инциденций нек-рого графа, откуда выводится (см. [1], [2]), что $\Delta(t)$ — альтернирующий полином, т. е. его коэффициенты не нули и их знаки чередуются. Если $\Delta(0)=1$, то А. у. и з. являются *Нейвирта узлами* и зацеплениями. Для А. у. и з. число двойных точек нормированной диаграммы не больше, чем его детерминант. Группы А. у. и з. (см. *Узлов и зацеплений группы*) представляются в виде свободного произведения с отождествлением двух свободных групп нек-рого ранга q по подгруппе ранга $2q-1$. Это представление получается с помощью теоремы Ван Кампена, если пространство зацепления k разбить границей регулярной окрестности относительно k поверхности Зейферта, построенной по альтернирующей диаграмме. Все узлы стандартной таблицы (см. *Узлов таблица*) с неальтернирующими диаграммами являются неальтернирующими узлами. Не альтернирует большинство параллельных узлов, обмоток и т. п.

Лит.: [1] Murasugi K., «Osaka J. Math.», 1958, v. 10, p. 181—89; [2] Crowell R. H., «Ann. Math.», 1959, v. 69, p. 258—75; [3] Murasugi K., «Osaka J. Math.», 1960, v. 12, p. 277—303. *А. В. Чернавский.*

АЛЬФА — *алгоритмический язык*, разработанный в СССР для решения научно-технич. задач на вычислительных машинах. Представляет собой нек-рое расширение изобразительных средств языка *алгол*. К величинам алгола добавлены комплексные числа и составные ве-

личины, имеющие внутреннюю размерность (вектор, матрицы и т. п.). Добавлены описания, позволяющие вводить обозначения для компонент комплексных и многомерных величин. Введен особый класс процедур-функций, тело к-рых задается выражением. Разрешается указывать перечисление натуральных чисел через многоточие, употреблять знаки суммирования и произведения, а также цепочки неравенств. Имеется дополнительный вид циклов, в к-рых организация нужного числа повторений не требует введения перечисляющего параметра. Основные системы программирования: альфа (для машин типа М-20), алгибр (для комплекса М-220/БЭСМ-6), альфа-6 (для машин БЭСМ-6).

Лит.: [1] Ершов А. П., Кожухин Г. И., Волошин Ю. М., Входной язык для систем автоматического программирования, Новосиб., 1964; [2] АЛЬФА — система автоматизации программирования, Новосиб., 1967; [3] Ершов А. П., Кожухин Г. И., Поттосин И. В., Руководство к пользованию системой АЛЬФА, Новосиб., 1968; [4] Руководство к пользованию системой автоматизации программирования АЛЬФА-6, Новосиб., 1975.

А. П. Ершов.

АЛЬФАНА ПУЧОК — пучок плоских алгебраич. кривых степени $3n$ с девятью n-кратными базисными точками. Для $n=2$ такие пучки впервые были рассмотрены Ж. Альфаном в [1]. Базисные точки А. п. $P_1, \ldots, P_9$, среди к-рых могут быть и бесконечно близкие точки, всегда лежат на кубич. кривой $F=F(x_0, x_1, x_2)=0$. Произвольная кривая из А. п. имеет уравнение $\lambda G+\mu F^n=0$, где $G=G(x_0, x_1, x_2)=0$ — эллиптич. кривая степени $3n$ с особыми точками $P_1, \ldots, P_9$ кратности n. Если $F=0$ — неособая кривая, то относительно группового закона на этой кривой $n(P_1 \oplus \ldots \oplus P_9)=0$. Имеется обобщение этого факта на случай, когда $F=0$ кривая с особыми точками [3]. Каждый пучок эллиптических кривых на плоскости бирациональным преобразованием плоскости может быть преобразован в А. п. (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Halphen G. H., «Bull. Soc. math. France», 1882, v. 10, p. 162—72; [2] Bertini E., «Ann. mat. pura ed appl.», 1877, v. 8, p. 224—86; [3] Долгачев И. В., «Изв. АН СССР», сер. матем., 1966, т. 30, в. 5, 1073—100.

И. В. Долгачев.

АМАЛЬГАМА — множество M, представимое в виде теоретико-множественного объединения семейства $\{A_i \mid i \in I\}$ *алгебраических систем* A_i из заданного класса $\mathfrak{K}$ с пересечениями U_{ij}, причем для всех i, j пересечение

$$A_i \cap A_j = U_{ij} = U_{ji}$$

непусто и является подсистемой в каждой из систем A_i, A_j. Если существует система B в классе $\mathfrak{K}$, содержащая все $A_i (i \in I)$ в качестве подсистем, то говорят, что А. M *вложима* в $\mathfrak{K}$-систему.

А. двух групп и вообще любая А. групп $\{A_i \mid i \in I\}$, у к-рой все пересечения $U_{ij} (i \neq j)$ совпадают между собой и равны U, всегда вкладывается в группу, напр. в свободное произведение групп $A_i (i \in I)$ с объединенной подгруппой U. Существуют, однако, А. групп, не вложимые в группу. (Условия вложимости А. групп в группу см. в [1], А. полугрупп в полугруппу см. в [2].) См. также *Амальгама групп*.

Пусть $\mathfrak{K}$ — класс всех алгебр над данным полем F или класс коммутативных, антикоммутативных или лиевых алгебр над полем F. А. $\{A_i \mid i \in I\}$ $\mathfrak{K}$-алгебр A_i с совпадающими пересечениями $U_{ij}=U$ (для всех $i \neq j$) вложима в $\mathfrak{K}$-свободное произведение этих алгебр с объединенной подалгеброй U (см. [3]). Доказано (см. [4]), что А. $\{T_i \mid i \in I\}$ ассоциативных тел T_i с совпадающими пересечениями $T_{ij}=T (i \neq j)$ вложима в ассоциативное тело.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967, с. 462; [2] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, т. 2, пер. с англ., М., 1972; [3] Ширшов А. И., «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 2, с. 297—301; [4] Cohn P. M., «Proc. London Math. Soc.», 1971, v. 23, № 2, p. 193—213.

Л. А. Бокуть, Д. М. Смирнов.

АМАЛЬГАМА ГРУПП — совокупность групп G_α, $\alpha \in I$, с условием, что пересечение $G_\alpha \cap G_\beta$ есть подгруппа в G_α и G_β при любых α, β из I. Примером А. г. служит произвольное семейство подгрупп нек-рой группы. В л о ж е н и е м А. г. $A = \{G_\alpha | \alpha \in I\}$ в группу G наз. взаимно однозначное отображение объединения $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ в G, сужение к-рого на каждое G_α есть изоморфизм. А. г., у к-рой все пересечения $G_\alpha \cap G_\beta$ совпадают (и равны, напр., подгруппе H), вкладывается в группу, являющуюся свободным произведением групп G_α с объединенной подгруппой H. С другой стороны, существует амальгама четырех абелевых групп, не вложимая в группу. Основная задача для А. г. в общей постановке состоит в следующем. Пусть σ, τ — свойства, к-рыми могут обладать группы. Спрашивается, при каких условиях А. г., обладающих свойством σ, вкладывается в группу, обладающую свойством τ? Установлено, что всякая амальгама двух конечных групп вложима в конечную группу. Амальгама трех абелевых групп вкладывается в абелеву группу. Амальгама четырех абелевых групп, вложимая в группу, вкладывается в абелеву группу. Существует амальгама пяти абелевых групп, вложимая в группу и не вложимая в абелеву группу. Исследовался также вопрос о вложимости А. г. в случаях, когда σ, τ обозначают (в различных комбинациях) разрешимость, нильпотентность, периодичность, локальную конечность и т. п.

Ю. И. Мерзляков, Н. С. Романовский.

АМПЛИТУДА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА — переменная φ, рассматриваемая как функция от z в *эллиптическом интеграле* I рода

$$z = F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

в нормальной форме Лежандра. Понятие А. э. и. и обозначение $\varphi = \operatorname{am} z$ ввел К. Якоби (C. Jacobi) в 1829. А. э. п. является бесконечнозначной периодич. функцией от z. Однозначными являются основные эллиптич. функции Якоби $\sin \operatorname{am} z = \operatorname{sn} z$, $\cos \operatorname{am} z = \operatorname{cn} z$, $\Delta \operatorname{am} z = \operatorname{dn} z$. С другой стороны, практически удобно, напр. при табулировании, рассматривать эллиптич. интеграл как функцию $F(\varphi, k)$ от амплитуды φ и модуля k. См. также *Якоби эллиптические функции*.

Е. Д. Соломенцев.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии. Основными понятиями А. г. являются простейшие геометрич. образы (точки, прямые, плоскости, кривые и поверхности 2-го порядка). Основными средствами исследования в А. г. служат метод координат и методы элементарной алгебры. Возникновение метода координат тесно связано с бурным развитием астрономии, механики и техники в 17 в. Отчетливое и исчерпывающее изложение этого метода и основ А. г. было сделано Р. Декартом (R. Dercartes) в его «Геометрии» (1637). Основные идеи метода были известны также его современнику П. Ферма (P. Fermat). Дальнейшая разработка А. г. связана с трудами Г. Лейбница (G. Leibniz), И. Ньютона (I. Newton) и особенно Л. Эйлера (L. Euler). Средствами А. г. пользовался Ж. Лагранж (J. Lagrange) при построении аналитич. механики, Г. Монж (G. Monge) в дифференциальной геометрии. Ныне А. г. не имеет самостоятельного значения как наука, однако ее методы широко применяются в различных разделах математики, механики, физики и др. наук.

Сущность метода координат заключается в следующем. Рассмотрим, напр., на плоскости π две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy. Эти прямые с указанным на них направлением, началом координат O и выбранной масштабной единицей e образуют так наз. д е к а р т о в у п р я м о у г о л ь н у ю с и с т е м у координат Oxy на плоскости. Прямые Ox и Oy наз. соответственно о с ь ю а б с ц и с с и о с ь ю о р д и н а т. Положение любой точки M на плоскости по отношению

к этой системе Oxy можно определить следующим образом. Пусть M_x и M_y — проекции M на Ox и Oy, а числа x и y — величины отрезков OM_x и OM_y (величина x отрезка OM_x, напр., равна длине этого отрезка, взятой со знаком плюс, если направление от O к M_x совпадает с направлением на прямой Ox, и со знаком минус — в противоположном случае). Числа x (абсцисса) и y (ордината) наз. декартовыми прямоугольными координатами точки M в системе Oxy. Для обозначения точки M с абсциссой x и ординатой y пользуются символом $M(x, y)$. Ясно, что координаты точки M определяют ее положение относительно системы Oxy.

Пусть на плоскости π с данной декартовой прямоугольной системой координат Oxy задана нек-рая линия L. Используя понятие координат точек, можно ввести понятие уравнения данной линии L относительно системы Oxy как соотношения вида $F(x, y)=0$, к-рому удовлетворяют координаты x и y любой точки M, расположенной на L, и не удовлетворяют координаты каждой точки, не лежащей на L.

Основная идея метода координат на плоскости состоит в том, что геометрич. свойства линии L выясняются путем изучения аналитич. и алгебраич. средствами свойств уравнения $F(x, y)=0$ этой линии. Напр., геометрич. вопрос о числе точек пересечения прямой и окружности сводится к аналитич. вопросу о числе решений алгебраич. системы уравнений прямой и окружности.

В А. г. на плоскости подробно изучаются геометрич. свойства *эллипса*, *гиперболы* и *параболы*, представляющих собой линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину (см. *Конические сечения*).

В А. г. на плоскости систематически исследуются так наз. алгебраические линии 1-го и 2-го порядков; эти линии в декартовых прямоугольных координатах определяются соответственно алгебраич. уравнениями 1-й и 2-й степеней. Линии 1-го порядка суть прямые и обратно, каждая прямая определяется алгебраич. уравнением 1-й степени $Ax+By+C=0$. Линии 2-го порядка определяются уравнениями вида $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. Основной метод исследования и классификации этих линий заключается в подборе такой декартовой прямоугольной системы координат, в к-рой уравнение линии имеет наиболее простой вид, и последующем исследовании этого простого уравнения. См. *Линии второго порядка*.

В А. г. в пространстве декартовы прямоугольные координаты x, y и z (абсцисса, ордината и аппликата) точки M вводятся в полной аналогии с плоским случаем. Каждой поверхности S в пространстве можно сопоставить ее уравнение $F(x, y, z)=0$ относительно системы координат $Oxyz$. При этом геометрич. свойства поверхности S выясняются путем изучения аналитич. и алгебраич. средствами свойств уравнения этой поверхности. Линию L в пространстве задают как линию пересечения двух поверхностей S_1 и S_2. Если $F_1(x, y, z)=0$ и $F_2(x, y, z)=0$ — уравнения S_1 и S_2, то пара этих уравнений, рассматриваемая совместно, представляет собой уравнение линии L. Напр., прямую L в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей. В А. г. в пространстве систематически исследуются так наз. алгебраические поверхности 1-го и 2-го порядков. Выясняется, что алгебраич. поверхностями 1-го порядка являются лишь плоскости. Поверхности 2-го порядка определяются уравнениями вида:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+$$
$$+Gx+Hy+Mz+N=0.$$

Основной метод исследования и классификации этих поверхностей заключается в подборе такой декартовой

прямоугольной системы координат, в к-рой уравнение поверхности имеет наиболее простой вид, и последующем исследовании этого простого уравнения. См. *Поверхности второго порядка.*

Лит.: [1] Декарт Р., Геометрия, пер. с франц. и латин., М.— Л., 1938; [2] Вилейтнер Г., *История математики от* Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966; [3] Ефимов Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 9 изд., М., 1967; [4] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Аналитическая геометрия, М., 1968; [5] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии..., М., 1968; [6] Постников М. М., Аналитическая геометрия, М., 1973; [7] Бахвалов С. В., Моденов П. С., Пархоменко А. С., Сборник задач по аналитической геометрии, 3 изд., М., 1964.

Э. Г. Позняк.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — теория *аналитических пространств*. Этот термин был введен Ж. П. Серром [1] по аналогии с алгебраич. геометрией.

Лит.: [1] Serre J. P., «Ann. Inst. Fourier», 1955—56, t. 6, p. 1—42.

А. Л. Онищик.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГРУППА — множество G, наделенное одновременно структурой *топологической группы* и структурой конечномерного *аналитического многообразия* (над полем k, полным относительно нек-рого нетривиального *абсолютного значения*) так, что отображение $G\times G\to G$, заданное правилом $(x, y)\to xy$, является аналитическим. А. г. G всегда хаусдорфова; если k локально компактно, то G локально компактна. В случае, когда k является соответственно полем действительных, комплексных или p-адических чисел, G наз. соответственно вещественной (действительной), комплексной или p-адической А. г. Примером А. г. может служить полная линейная группа $\mathrm{GL}(n, k)$ векторного пространства k^n над k (см. *Линейная классическая группа*) или, более общо, группа обратимых элементов произвольной конечномерной ассоциативной алгебры с единицей над k. Вообще, группа k-рациональных точек *алгебраической группы*, определенной над k, является А. г. Подгруппа в А. г. G, являющаяся подмногообразием в G, наз. аналитической подгруппой; такая подгруппа обязательно замкнута в G. Напр., *ортогональная* группа $O(n, k)=\{g\in\mathrm{GL}(n, k)|\ {}^tgg=1\}$ является аналитич. подгруппой в $\mathrm{GL}(n, k)$. Всякая замкнутая подгруппа вещественной или p-адической А. г. аналитична и всякий непрерывный гомоморфизм таких групп аналитичен (теоремы Картана, см. [1]).

А. г. иногда наз. группой Ли (см. [1]), однако обычно группа Ли понимается более узко как вещественная А. г. (см. [2], [3] и *Ли группа*). Комплексная же и p-адическая А. г. наз. соответственно комплексной и p-адической группами Ли.

Сформулированные выше теоремы Картана означают, что *категория* вещественных или p-адических А. г. будет полной подкатегорией в категории локально компактных топологич. групп. Вопрос о том, насколько эти категории отличаются, т. е. когда локально компактная группа G является вещественной или p-адической А. г., допускает исчерпывающий ответ: в действительном случае в G должна существовать окрестность единицы, не содержащая нетривиальных подгрупп (см. [5]—[9]); в p-адическом случае в G должна содержаться конечно порожденная открытая подгруппа U, являющаяся *про-p-группой*, коммутант к-рой лежит в множестве U^{p^2} p^2-х степеней элементов из U (см. [10]). В частности, любая топологич. группа, имеющая окрестность единицы, гомеоморфную евклидову пространству (так наз. локально евклидова топологическая группа, см. [4]), есть вещественная А. г. Иначе говоря, из существования в топологич. группе непрерывных локальных координат вытекает существование аналитических локальных координат; этот результат составляет положительное решение пятой проблемы Гильберта (см. [5], [11]).

В случае нулевой характеристики поля k важнейшим методом исследования А. г. является изучение их алгебр Ли (см. *Ли алгебра аналитической группы*).

О бесконечномерных А. г. см. *Ли банахова группа*.

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, т. 1, пер. с англ., М., 1948; [4] Хсллгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [5] Проблемы Гильберта, М., 1969, с. 101—15; [6] Gleason A., «Ann. Math.», 1952, v. 56, № 2, p. 193—212; [7] Montgomery D., Zippin L., «Ann. Math.», 1952, v. 56, № 2, p. 213—41; [8] Yamabe H., «Ann. Math.», 1953, v. 58, № 1, p. 48—54; [9] его же, там же, 1953, v. 58, № 2, p. 351—65; [10] Lazard M., «Publ. Math. IHES», 1965, t. 26, p. 389—594; [11] Капланский И., Алгебры Ли и локально компактные группы, пер. с англ., М., 1974.

В. Л. Попов.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ, аналитическая мера, аналитическая мера Альфорса,— функция плоского множества, введенная Л. Альфорсом [1] и являющаяся аналогом логарифмич. *емкости*, приспособленным для характеризации множеств устранимых особенностей ограниченных аналитических функций. Пусть E — замкнутое ограниченное множество на плоскости, $A(E)$ — множество функций, аналитических вне E, равных нулю в бесконечно удаленной точке и ограниченных всюду вне E константой 1, и пусть $\gamma(E; f)=\lim z\cdot f(z)$ при $z\to\infty$. Число $\gamma(E)=\sup|\gamma(E; f)|$, $f\in A(E)$, наз. аналитической емкостью множества E. А. е. произвольного множества обычно наз. верхняя грань А. е. его замкнутых ограниченных подмножеств.

Если E — замкнутое ограниченное множество, то для того чтобы всякая аналитическая и ограниченная вне E функция аналитически продолжалась на множестве E, необходимо и достаточно равенство нулю А. е. множества E (теорема Альфорса).

Существует также ряд родственных А. е. понятий, приспособленных к метрикам различных других пространств аналитич. функций (см., напр., [2] и [3]).

Понятие А. е. оказалось удачно приспособленным в нек-рых задачах теории приближения, где решение ряда основных вопросов формулируется в терминах А. е. Так [4], для того чтобы на замкнутом ограниченном плоском множестве E всякая непрерывная функция равномерно приближалась с любой точностью рациональными функциями, необходимо и достаточно, чтобы для любого круга σ_δ радиуса δ выполнялось равенство

$$\gamma(\sigma_\delta\setminus E)=\gamma(\sigma_\delta)=\delta.$$

Лит.: [1] Ahlfors L., «Duke. Math. J.», 1947, v. 14, p. 1—11; [2] Garabedian P., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1950, v. 69, № 3, p. 392—415; [3] Синанян С. О., «Докл. АН Арм. ССР», 1962, т. 35, № 3, с. 107—12; [4] Витушкин А. Г., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 6, с. 141—99.

А. Г. Витушкин.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ КРИВАЯ, аналитическая дуга,— кривая K n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, допускающая аналитич. параметризацию. Это означает, что координаты ее точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ могут быть выражены в виде аналитич. функций действительного параметра $x_i=x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, т. е. в нек-рой окрестности каждой точки t_0, $\alpha\leqslant t_0\leqslant\beta$, функции $x_i(t)$ представимы в виде сумм сходящихся степенных рядов по степеням $t-t_0$, причем производные $x_i'(t_0)$, $i=1, 2, \ldots, n$, не равны нулю одновременно ни в одной точке отрезка $[\alpha, \beta]$. Последнее условие иногда оговаривают дополнительно, называя удовлетворяющую ему А. к. правильной. А. к. наз. замкнутой, если $x_i(\alpha)=x_i(\beta)$, $i=1, 2, \ldots, n$.

На плоскости $\mathbb{C}=\mathbb{C}^1$ комплексного переменного $z=x_1+ix_2$ А. к. допускает представление в виде комплексной аналитич. функции действительного параметра $z=f(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, $f'(t)\neq 0$ на $[\alpha, \beta]$. Если А. к. расположена в области $D\subset\mathbb{C}$, то при конформном отображении D на к.-л. область она отображается также в А. к.

Если множество точек пересечения двух А. к. бесконечно, то эти А. к. совпадают.

Вообще, в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, комплексные координаты z_i точек А. к. допускают представление в виде аналитич. функций действительного параметра $z_i = z_i(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Следует, однако, иметь в виду, что при $n > 1$ термин «А. к.» иногда обозначает *аналитическую поверхность* комплексной размерности единица.

На римановой поверхности S А. к. K допускает представление вида $f(t) = \psi(\varphi(t))$, где $z = \psi(P)$ — локальный униформизирующий параметр точек P поверхности S, $f(t)$ — аналитич. функция действительного параметра в окрестности любой точки $t_0 \in [\alpha, \beta]$.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 2, М., 1968, гл. 8; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1—2, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЯЗЫКА, анализирующая модель языка,— один из типов математич. конструкций, используемых в математической лингвистике для описания строения естественных языков. Эти конструкции служат для формального моделирования основных категорий лингвистики, а также самого процесса лингвистич. исследования, иначе говоря — для получения по нек-рым совокупностям «неупорядоченных» данных о языке (точнее, о речи) тех или иных сведений о строении механизма языка, т. е. о его грамматике в широком смысле слова. «Работа» такой модели не всегда носит характер эффективного построения, поскольку совокупность исходных данных может не быть конструктивным объектом; в принципе это не уменьшает значения таких моделей.

В наиболее полно разработанных А. м. я. в качестве совокупности исходных данных выступает объект, моделирующий множество грамматически правильных предложений естественного языка, а именно нек-рый *формальный язык* в заданном алфавите (словаре) V. Если L — язык в словаре V и $\forall u, v \in V^*$ $[uxv \in L \Leftrightarrow uyv \in L]$, то говорят, что цепочка x замещаема на цепочку y относительно V и L; если каждая из двух цепочек x и y замещаема на другую относительно V и L, то говорят, что x и y взаимозамещаемы относительно V и L. Понятие взаимозамещаемости имеет простой лингвистич. смысл: если L понимается как множество грамматически правильных предложений нек-рого естественного языка, то взаимозамещаемые цепочки представляют собой «синтаксически эквивалентные», т. е. выполняющие одни и те же синтаксич. функции, словосочетания. В частности, если односимвольная цепочка a (в лингвистич. интерпретации — слово) взаимозамещаема с цепочкой x длины >1, то x является «потенциальной составляющей», т. е. может входить в лингвистически естественные системы составляющих грамматически правильных предложений данного языка (см. *Синтаксическая структура*); в этом случае цепочку x наз. конфигурацией 1-го ранга языка L с результирующим a. Так, для русского языка цепочку «равномерно непрерывная» можно считать конфигурацией 1-го ранга с результирующим «непрерывная». Однако конфигурациями 1-го ранга не исчерпываются все «потенциальные составляющие»: напр., словосочетание «непрерывная функция» не является конфигурацией 1-го ранга, т. к. на него замещаемы только такие слова, как «функция», «производная», ..., но само оно ни на одно из этих слов не замещаемо («$f(x)$ есть равномерно непрерывная функция» — правильное предложение, а «$f(x)$ есть равномерно функция» — нет). Поэтому вводится следующее определение: если $r > 1$ есть натуральное число и для каждого $i = 1, \ldots, r-1$ определено понятие конфигурации языка L ранга i, то цепочка x длины >1 наз. конфи-

гурацией ранга r языка L с результирующим a, где $a \in V$, если: a замещаема на x относительно V и L; если $z_1xz_2 \in L$ и z_1xz_2 не содержит вхождений конфигураций рангов, меньших r, перекрывающихся с выделенным вхождением x, но не содержащихся в нем целиком, то $z_1az_2 \in L$. В русском языке словосочетание «непрерывная функция» можно считать конфигурацией 2-го ранга с результирующим «функция» (а также, напр., «производная»). Можно показать, что в нек-ром смысле язык вполне определяется совокупностью своих конфигураций.

Конфигурационная модель принадлежит к так наз. синтагматическим А. м. я., предназначенным для описания отношений между элементами отрезков речи (в лингвистике такие отношения наз. синтагматическими). Другой класс А. м. я. составляют парадигматические модели, предназначенные для описания парадигматич. отношений, т. е. отношений между элементами языка в его системе. В таких моделях обычно строятся те или иные отношения на словаре, часто (но не всегда) являющиеся отношениями эквивалентности. В частности, с помощью парадигматич. А. м. я. строятся формальные аналоги традиционных лингвистич. категорий таких, как часть речи, падеж, род, фонема и т. п. «Исходным материалом» во многих парадигматич. А. м. я. также служит множество грамматически правильных предложений; в ряде моделей этого типа используется понятие замещаемости. Простейшее из получаемых таким образом отношений эквивалентности — ограниченное словарем отношение взаимозамещаемости; классы эквивалентности по этому отношению наз. семействами. Если ввести еще одно отношение на словаре, интерпретируемое как «быть формами одного слова» (точнее, одной лексемы; в таком отношении находятся, напр., слова «предел» и «пределом», «число» и «числу»; при этом производится идеализация — считается, что слово может быть формой только одной лексемы; соответствующие классы эквивалентности наз. окрестностями), то с помощью указанных двух отношений удается ввести нек-рые другие классификации, к-рые можно рассматривать как приближения к формальным аналогам понятия части речи и других традиционных грамматических понятий, в частности понятий падежа и рода существительного. Последние два понятия являются объектом особенно интенсивных исследований; для их формализации предложен ряд моделей, основывающихся на понятии грамматич. правильности, а также моделей иного характера. Имеется, в частности, модель, в к-рой каждый падеж трактуется как множество «одинаково управляемых» форм существительных, а каждый род — как множество «одинаково управляющих» существительных. Исходными данными для определения падежа служат в этой модели словарь, множество окрестностей, множество существительных и бинарное отношение «потенциального подчинения» на словаре: a потенциально подчиняет b, если в нек-ром «лингвистически естественном» дереве подчинения (см. *Синтаксическая структура*) грамматически правильного предложения данного языка из к.-л. вхождения a идет дуга в нек-рое вхождение b; для определения рода добавляются еще нек-рые исходные данные аналогичного характера. Модели, основанные на «потенциальном подчинении» или иных понятиях, относящихся к деревьям, позволяют, видимо, дать более адекватную формализацию традиционных грамматич. категорий, чем модели, имеющие дело только с цепочками, поскольку в «древесных» моделях синтаксич. отношения отделены от линейных (ср. *Грамматика трансформационная*).

Математич. аппарат, используемый при построении А. м. я., обычно сравнительно несложен. Для нек-рых моделей он сводится к простейшим понятиям теории

множеств (такие модели часто наз. теоретико-множественными; иногда это назв. распространяют на все А. м. я.), в других случаях используются алгебраич. понятия, в особенности понятия теории полугрупп и алгебры бинарных отношений (в связи с чем теорию А. м. я. иногда наз. алгебраической лингвистикой).

Лит.: [1] Кулагина О. С., «Проблемы кибернетики», 1958, вып. 1, с. 203—14; [2] Успенский В. А., «Бюллетень Объединения по проблемам машинного перевода», 1957, № 5, с. 11—18; [3] его же, «Вопросы языкознания», 1964, № 6, с. 39—53; [4] Маркус С., Теоретико-множественные модели языков, пер. с англ., М., 1970; [5] Ревзин И. И., Метод моделирования и типология славянских языков, М., 1967; [6] Гладкий А. В., «Вопросы языкознания», 1969, № 2, с. 110—23; [7] его же, Формальные грамматики и языки, М., 1973.

А. В. Гладкий.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПЛОСКОСТЬ, комплексно-аналитическая плоскость,— множество точек $z=(z_1, \ldots, z_n)$ в комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}z_i = b_j, \quad j=1, \ldots, k; \; a_{ij}, \; b_j \in \mathbb{C};$$

$$\operatorname{rank} \| a_{ij} \| = k < n.$$

Число k наз. комплексной коразмерностью, а $n-k$ наз. комплексной размерностью А. п. Действительная размерность А. п., равная $2(n-k)$, четная, однако не всякая четномерная действительная плоскость в $\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{C}^n$ является А. п. Комплексно-одномерные А. п. наз. иногда комплексными, или аналитическими, прямыми. См. также *Аналитическая поверхность.*

Е. Д. Соломенцев, Е. М. Чирка.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ (в евклидовом пространстве) — произвольное двумерное аналитическое подмногообразие X в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n>2$. Часто, однако, термин «А. п.» в $\mathbb{R}^n$ употребляется в более широком смысле как многообразие, допускающее аналитич. параметризацию. Это означает, что координаты точек $x=(x_1, \ldots, x_n) \in X$ можно представить в виде аналитич. функций $x_i=x_i(t)$ действительного параметра $t=(t_1, \ldots, t_k)$, изменяющегося в нек-рой области $\Delta \subset \mathbb{R}^k$, $1 \leqslant k < n$. Если при этом ранг матрицы Якоби $\operatorname{rang} \|\partial x/\partial t\|$, к-рый для аналитич. многообразия всюду в Δ максимален и равен k, то размерность А. п. X равна k.

В комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ термин «А. п.» используется также для обозначения комплексно-аналитической поверхности X в $\mathbb{C}^n$, т. е. многообразия, допускающего голоморфную (комплексно-аналитическую) параметризацию. Это означает, что комплексные координаты точек $z=(z_1, \ldots, z_n) \in X$ можно выразить в виде голоморфных функций $z_i=z_i(\tau)$ параметра $\tau=(\tau_1, \ldots, \tau_k)$, изменяющегося в нек-рой области $\Delta \subset \mathbb{C}^k$, $1 \leqslant k < n$ (как правило, предполагается еще, что $\operatorname{rang} \|\partial z/\partial \tau\| \equiv k$). Если $\Delta = \mathbb{C}^k$ и все функции $z_i(\tau)$ линейные, то получается комплексно-аналитич. плоскость (см. *Аналитическая плоскость*). При $k=1$ иногда употребляется термин голоморфная кривая (комплексно-аналитическая кривая); если при этом все функции $z_i(\tau)$ линейные, то говорят о комплексной прямой (в параметрич. представлении):

$$z_i = a_i\tau + b_i; \; a_i, \; b_i \in \mathbb{C}, \; i=1, \ldots, n, \; (a_1, \ldots, a_n) \neq 0.$$

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1—2, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев, Е. М. Чирка.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ абстрактная — двумерное комплексное *аналитическое многообразие*, т. е. четырехмерное гладкое многообразие, снабженное комплексной структурой. Хотя теория А. п. и является частью общей теории комплексных многообразий, двумерный случай выделяется особо, т. к. об А. п. известно гораздо больше, чем о n-мерных многообразиях при $n \geqslant 3$. Кроме того, нек-рые факты специфичны только для размерности 2. Эти специфич. результаты

таты об А. п. касаются классификации А. п., аналогичной классификации *алгебраических поверхностей*, что в значительной степени сводит теорию А. п. к теории алгебраич. поверхностей. Основные результаты по классификации А. п. получены К. Кодаирой [1], [2], [3], к-рый, однако, опирался на работы классиков итальянской школы алгебраич. геометрии по классификации алгебраич. поверхностей.

Все рассматриваемые в дальнейшем А. п. предполагаются компактными и связными.

Примеры. 1) Алгебраические поверхности. Пусть

$$f_i(x_0, \ldots, x_N), \quad i=1, 2, \ldots, m,$$

набор однородных многочленов с комплексными коэффициентами. Замкнутое подмножество комплексного проективного пространства $P^N(\mathbb{C})$, выделяемое уравнениями $f_i(x)=0$, будет А. п., если оно неособо, связно и имеет комплексную размерность 2. Это — основной пример А. п.

2) Комплексные торы. Пусть $\mathbb{C}^2$ — двумерное векторное пространство над полем комплексных чисел (как векторное пространство над полем действительных чисел оно изоморфно $\mathbb{R}^4$) и пусть $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^4$ — решетка в $\mathbb{C}^2$. Факторпространство $X=\mathbb{C}^2/\Gamma$ будет А. п. Как гладкое многообразие X диффеоморфно 4-мерному тору, однако комплексная структура на X зависит от решетки Γ. Комплексные торы $X=\mathbb{C}^2/\Gamma$ играют важную роль в анализе, так как мероморфные функции на них это мероморфные функции на $\mathbb{C}^2$, к-рые периодичны с решеткой периодов Γ. А. п. вида $\mathbb{C}^2/\Gamma$ не всегда алгебраичны. Существуют даже такие решетки Γ, что па соответствующем торе $\mathbb{C}^2/\Gamma$ вообще нет мероморфных функций (кроме констант). Конкретные примеры таких торов можно найти в [5].

3) Поверхности Хопфа. Пусть $Y=c^2-\{0\}$, c — положительное число, и рассматривается действие группы Z на Y

$$(z_1, z_2) \longrightarrow (c^k z_1, c^k z_2), \quad k \in Z.$$

Группа Z действует дискретно и без неподвижных точек на Y, а факторпространство $X=Y/Z$ диффеоморфно $S^1 \times S^3$. Факторпространство X естественным образом является А. п., наз. поверхностью Хопфа.

Классификация аналитических поверхностей. Основным инвариантом при классификации А. п. является степень трансцендентности поля мероморфных функций $\mathbb{C}(X)$ на А. п. X. Согласно теореме Зигеля, для любого компактного связного комплексного многообразия X поле $\mathbb{C}(X)$ конечно порождено и его степень трансцендентности не превышает комплексной размерности для X. Таким образом, для А. п. X поле $\mathbb{C}(X)$ может содержать две алгебраические независимые мероморфные функции, одну такую функцию или, вообще, состоять только из констант. В соответствии с этими возможностями имеют место следующие теоремы.

Для того чтобы А. п. X была алгебраич. поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы на X существовали две алгебраически независимые мероморфные функции.

Если А. п. X обладает полем мероморфных функций степени трансцендентности 1, то X является эллиптич. поверхностью, т. е. обладает голоморфным отображением на алгебраич. кривую Y, $P\colon X \to Y$ таким, что

$$P^*\mathbb{C}(Y)=\mathbb{C}(X)$$

и все слои отображения P, кроме конечного числа, являются эллиптич. кривыми (особые слои могут иметь только очень специальный вид, к-рый хорошо изучен).

Если на А. п. X не существует мероморфных функций, кроме констант, и на X нет исключительных кривых (см. *Исключительное подмногообразие*), то первое число Бетти b_1 для X может принимать только три значения:

4, 1 и 0. При этом, если $b_1=4$, то X является комплексным тором, а если $b_1=0$, то X обладает тривиальным канонич. расслоением. Последние А. п. наз. К3-поверхностями. Все они гомеоморфны между собой. Случай $b_1=1$ подробно не изучен, но известные примеры А. п. с $b_1=1$ получаются обобщением конструкции поверхностей Хопфа.

Кэлерова А. п. не всегда будет алгебраич. поверхностью. Однако это так, если квадрат ее первого *Чжэня класса* положителен. Каждая кэлерова А. п. с $b_1>0$ является деформацией алгебраич. поверхности.

Лит.: [1] Кодаира К., «Математика», сб. переводов, 1962, т. 6, № 6, с. 3—17; [2] Kodaira K., «Ann. Math.», 1960, v. 71, p. 111—52; 1963, v. 77, p. 563—626; 1963, v. 78, p. 1—40; [3] его же, «Amer. J. Math.», 1964, v. 86, p. 751—98; 1966, v. 88, p. 682—721; 1968, v. 90, p. 55—83; 1048—66; [4] Алгебраические поверхности, М., 1965 («Труды Матем. ин-та АН СССР», 1965, т. 75); [5] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

Б. Б. Венков.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ — раздел теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в к-ром решения исследуются с точки зрения теории аналитич. функций. Типичная постановка задачи в А. т. д. у. такова: дан нек-рый класс дифференциальных уравнений, все решения к-рых суть аналитич. функции одной переменной; требуется выяснить, какими специфич. свойствами обладают аналитич. функции, являющиеся решениями данного класса уравнений. В таком широком понимании А. т. д. у. включает теорию алгебраич. функций, теорию абелевых интегралов, теорию специальных функций и т. д. Специальные функции — *Бесселя функции*, *Эйри функции*, *Лежандра функции*, *Лагерра функции*, *Эрмита функции*, *Чебышева многочлены*, Сонина функции, *Уиттекера функции*, *Вебера функции*, *Матье функции*, *гипергеометрическая функция* и многие другие — являются решениями линейных дифференциальных уравнений с аналитич. коэффициентами.

Линейная теория. Рассмотрим систему из n уравнений в матричной записи

$$\dot{x}=A(t)x+f(t). \tag{1}$$

1) Пусть матрицы $A(t)$, $f(t)$ голоморфны в области $G\subset C(t)$ ($C(t)$ — комплексная плоскость t). Тогда всякое решение системы (1) аналитично в G (но, вообще говоря, неоднозначно, если область G неодносвязна). Предположим, что $A(t)$ мероморфна в области G, и рассмотрим *однородную* систему

$$\dot{x}=A(t)x. \tag{2}$$

[Матрица $A(t)$ наз. голоморфной (мероморфной) в области G, если все ее элементы голоморфны (мероморфны) в этой области.] Точка $t_0\in G$ наз. полюсом матрицы $A(t)$ порядка $\nu\geqslant 1$, если в нек-рой окрестности этой точки

$$A(t)=A_{-\nu}(t-t_0)^{-\nu}+A_{-\nu+1}(t-t_0)^{-\nu+1}+\dots$$
$$\dots+A_{-1}(t-t_0)^{-1}+B(t),$$

где A_{-j} — постоянные матрицы, $A_{-\nu}\neq 0$, а матрица $B(t)$ голоморфна в точке t_0. Полюс $t_0\neq\infty$ порядка ν наз. регулярной особой точкой при $\nu=1$ и иррегулярной особой точкой при $\nu\geqslant 2$. Случай $t_0=\infty$ сводится к случаю $t_0=0$ заменой $t\to t^{-1}$. Ниже $t_0\neq\infty$.

2) Пусть t_0 — полюс $A(t)$. Тогда существует фундаментальная матрица $X(t)$ системы (2) вида

$$X(t)=\Phi(t)(t-t_0)^D, \tag{3}$$

где D — постоянная матрица, $\Phi(t)$ — голоморфна при $|t-t_0|<\rho$, если t_0 — регулярная особая точка, и $\Phi(t)$ голоморфна при $0<|t-t_0|<\rho$, если t_0 — иррегулярная особая точка, для нек-рого $\rho>0$. (Здесь $(t-t_0)^D=\exp(\ln(t-t_0)D)$, по определению.) Для регулярной особой точки матрица D выражается через $A(t)$ в явном

виде (см. [1], [2]); для иррегулярных особых точек это не так.

Аналогичная классификация особых точек вводится для дифференциальных уравнений порядка n с мероморфными коэффициентами. Дифференциальные уравнения и системы, все особые точки к-рых регулярны, наз. дифференциальными уравнениями (системами) класса Фукса. Общий вид матрицы $A(t)$ для такой системы:

$$A(t)=\sum_{j=1}^{k}(t-t_j)^{-1}A_j,\quad A_j=\text{const},\ k<\infty.$$

Примером дифференциального уравнения класса Фукса является *гипергеометрическое уравнение*.

3) Пусть $A(t)=t^qB(t)$, $q\geqslant 0$ — целое, $B(t)$ голоморфна при $t=\infty$ (это иррегулярная особая точка, если $B(\infty)\neq 0$). Если S — достаточно узкий сектор вида $|t|>R$, $\alpha<\arg t<\beta$, то существует фундаментальная матрица вида

$$X(t)=P(t)\,t^Q\exp(R(t)),\qquad(4)$$

где Q — постоянная матрица, $R(t)$ — диагональная матрица, элементы к-рой суть полиномы от $t^{1/p}$, $p\geqslant 1$ — целое и

$$P(t)\sim\sum_{j=0}^{\infty}P_jt^{-j/p}$$

при $|t|\to\infty$, $t\in S$. Вся плоскость $C(t)$ разбивается на конечное число секторов, в каждом из к-рых есть фундаментальная матрица вида (4) (см. [3], [4], а также [1], [2]).

4) При аналитич. продолжении вдоль замкнутого пути γ фундаментальная матрица $X(t)$ умножается на B_γ: $X(t)\to X(t)B_\gamma$, где B_γ — постоянная матрица; возникает *монодромии группа* дифференциального уравнения. И. А. Лаппо-Данилевским [5] была исследована проблема Римана: пусть $A(t)$ — рациональная функция от t, и пусть известны особенности фундаментальной матрицы $X(t)$; требуется найти $A(t)$.

5) Пусть функция $z=\varphi(t)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}t>0$ на внутренность многоугольника, граница к-рого состоит из конечного числа отрезков прямых и дуг окружностей. Тогда функция $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению Шварца

$$\{z,\ t\}\equiv\frac{z'''}{z'}-\frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2=R(t),\qquad(5)$$

где $R(t)$ — рациональная функция, причем уравнение

$$w''+\frac{1}{2}R(t)\,w=0\qquad(6)$$

принадлежит классу Фукса. Любое решение уравнения (5) может быть представлено в виде $z=w_1/w_2$, где w_1, w_2 — линейно независимые решения уравнения (6). Пусть G — бесконечная дискретная группа, $\varphi(t)$ — *автоморфная функция* группы G; тогда $\varphi(t)$ может быть представлена в виде $\varphi=w_1/w_2$, где w_1, w_2 — линейно независимые решения уравнения (6) и $R(t)$ — нек-рая *алгебраическая функция*.

Нелинейная теория. 1) Рассмотрим задачу Коши:

$$\dot{x}=f(t,x),\quad x(t_0)=x^0,\qquad(7)$$

здесь $t\in C(t)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in C^n(x)$, $f=(f_1,\ldots,f_n)$.

Теорема Коши: пусть функция $f(t,x)$ голоморфна по (t,x) в области $G\subset C(t)\times C^n(x)$ и точка $(t_0,x^0)\in G$. Тогда существует $\delta>0$ такое, что в области $|t-t_0|<\delta$ существует решение $x(t;t_0,x^0)$ задачи Коши (7), единственное и голоморфное.

Аналитич. продолжение решения $x(t;t_0,x^0)$ также будет решением системы (7), однако полученная в результате продолжения функция может иметь особенности и, вообще говоря, будет неоднозначной функцией от t. Возникают вопросы: какие особенности может иметь эта функция, как устроено решение в целом? В линей-

ном случае получены окончательные ответы на эти вопросы. В нелинейном случае ситуация значительно сложнее и не выяснена достаточно полно даже в том случае, когда $f_j(t, x)$ — рациональные функции от t, x.

2) Рассмотрим одно дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{P(t, x)}{Q(t, x)}, \tag{8}$$

где $t \in C$, $x \in C$, а P и Q — голоморфные по (t, x) функции в нек-рой области G. Точка $(t_0, x_0) \in G$ наз. (с у щ е с т в е н н о) о с о б о й т о ч к о й уравнения (8), если $P(t_0, x_0)=0$, $Q(t_0, x_0)=0$. Выясним структуру решений в окрестности особой точки уравнения. Разложим P и Q в ряды Тейлора:

$$P(t, x) = a_{11}(x-x_0) + a_{12}(t-t_0) + \dots,$$
$$Q(t, x) = a_{21}(x-x_0) + a_{22}(t-t_0) + \dots,$$

и пусть λ_1, λ_2 — собственные значения матрицы $\|a_{ij}\|$. Имеет место теорема: пусть $\lambda_j \neq 0$ и ни одно из чисел λ_1/λ_2, λ_2/λ_1 не является: а) целым неотрицательным числом, б) действительным отрицательным числом. Тогда существуют окрестность U точки (t_0, x_0), окрестность V точки $\tilde{t}=0$, $\tilde{x}=0$ и функции $\tilde{t}=\tilde{t}(t, x)$, $\tilde{x}=\tilde{x}(t, x)$ такие, что: отображение $U \to V$, задаваемое этими функциями, является биголоморфным; дифференциальное уравнение (8) в новых переменных принимает вид (см. [6]):

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{\lambda_1 \tilde{x}}{\lambda_2 \tilde{t}}.$$

Все решения уравнения (8) в новых переменных записываются в виде $\tilde{x}=C\tilde{t}^{\lambda_1/\lambda_2}$ и $\tilde{x}\equiv 0$. Таким образом, особая точка уравнения является точкой ветвления бесконечного порядка для всех решений уравнения (8) (кроме тривиальных). Особые точки решения, совпадающие с особыми точками уравнения, наз. н е п о д в и ж н ы м и. В отличие от линейного случая, решение нелинейного уравнения может иметь особые точки не только в особых точках уравнения; такие особые точки решения наз. п о д в и ж н ы м и. Справедлива т е о р е м а П е н л е в е: решения уравнения

$$P(t, x, \dot{x}) = 0,$$

где P — многочлен от x и $\dot{x}$ с голоморфными по t коэффициентами, не имеют подвижных трансцендентных особых точек (см. [7]).

Если в уравнении (8) P и Q суть многочлены от t, x, то в силу теоремы Пенлеве все подвижные особые точки являются алгебраическими. При замене $t=1/t'$, $x=x'/t'$, уравнение (8) примет вид

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{P_1(t', x')}{Q_1(t', x')},$$

где P_1, Q_1 — многочлены. Пусть x_j' — корни уравнения $P_1(0, x')=0$. Точки $(0, x_j')$ наз. б е с к о н е ч н о у д а л е н н ы м и о с о б ы м и т о ч к а м и у р а в н е н и я (8); структуру решений в окрестности этих точек описывает приведенная выше теорема [6].

Пусть P, Q — многочлены степени n. Поскольку P, Q определяются своими коэффициентами и пара $(\lambda P, \lambda Q)$ задает то же уравнение, получают взаимно однозначное соответствие между уравнениями (8) и точками комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^N (N=(n+1)\times(n+2)-1)$. Имеет место теорема: если удалить из $\mathbb{C}P^N$ нек-рое множество меры нуль, то оставшиеся уравнения (8) обладают следующим свойством: все решения $x=x(t)$ всюду плотны в $C^2=C(t)\times C(x)$ (см. [8]).

3) Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x} = f(x), \tag{9}$$

$t \in C(t)$, $x \in C^n(x)$, $f=(f_1, \dots, f_n)$. Точка x^0 наз. о с о б о й т о ч к о й с и с т е м ы (9), если $f(x^0)=0$. Справедлива т е о р е м а П у а н к а р е. Пусть x^0 —

особая точка автономной системы (9). Пусть, кроме того: а) элементарные делители матрицы Якоби $f'(x^0)$ простые и б) собственные значения λ_j этой матрицы лежат по одну сторону от нек-рой прямой в $C(\lambda)$, проходящей через начало координат. Тогда существуют окрестности U, V точек $x=x^0$, $\tilde{x}=0$ и биголоморфное отображение $x=x(\tilde{x})$: $V\to U$ такое, что в переменных $\tilde{x}$ автономная система (9) имеет вид (см. [9]):

$$\frac{d\tilde{x}_j}{dt}=\lambda_j\tilde{x}_j,\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

В том случае, когда выполнено только условие а), можно с помощью преобразования $x=\varphi(\tilde{x})$, где $\varphi(\tilde{x})$ — формальный степенной ряд, привести систему (9) в окрестности особой точки к системе, к-рая интегрируется в квадратурах (см. [9], [10]). Однако сходимость этих рядов доказана при предположениях, близких к а), б). В случае, когда функция $f(x)$ и преобразование $x=\varphi(\tilde{x})$ вещественны при вещественных x, $\tilde{x}$, доказана теорема (см. [11]), аналогичная теореме Пуанкаре. Структура решений автономной системы (9) в целом, где $f_j(x)$ — полиномы и $n\geqslant 3$, к 70-м гг. 20 в. не исследована.

Лит.: [1] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [2] Вазов В., Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1968; [3] Birkhoff G. D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1909, v. 10, p. 436—70; [4] Trjitzinsky W. J., «Acta math.», 1933, Bd 62, S. 167—226; [5] Лаппо-Данилевский И. А., Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, [пер. с франц.], М., 1957; [6] Bieberbach L., Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Funktionentheoretischer Grundlage dargestellt, B., 1953; [7] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950; [8] Худай-Веренов М. Г., «Матем. сб.», 1962, т. 56, № 3, с. 301—8; [9] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [10] Брюно А. Д., «Докл. АН СССР», 1964, т. 157, № 6, с. 1276—79; [11] Зигель К. Л., «Математика», 1961, т. 5, № 2, с. 119—28; [12] Пуанкаре А., Избранные труды, пер. с франц., т. 3, М., 1974; [13] Форд Л. Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М., 1936.

М. В. Федорюк.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ — раздел теории чисел. В А. т. ч. включают вопросы распределения простых чисел, аддитивные проблемы, исследование поведения теоретико-числовых функций, теорию алгебраических и трансцендентных чисел.

Распределение простых чисел. а) Одной из интереснейших и труднейших задач А. т. ч. является проблема распределения простых чисел (п. ч.). Первый результат в проблеме распределения п. ч.— теорема Евклида: п. ч. бесконечно много. Пусть $\pi(x)$ — число п. ч., не превосходящих x; тогда теорема Евклида может быть сформулирована так: $\pi(x)\to+\infty$ при $x\to\infty$. Следующий шаг в этом вопросе был сделан П. Л. Чебышевым (1850). Он доказал, что:

1) Для величины $\pi(x)$ выполняются неравенства

$$\frac{ax}{\ln x}<\pi(x)<\frac{bx}{\ln x},$$

причем $a\geqslant{}^1/_2\ln 2$, $b\leqslant 2\ln 2$.

2) Если существует предел $\pi(x)\ln x/x$ при $x\to+\infty$, то этот предел равен 1.

Проблему существования последнего предела решили в 1896 Ж. Адамар (J. Hadamard) и Ш. Ж. Ла Валле Пуссен (Ch. J. La Vallée Poussin), установив тем самым, что

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}(1+o(1)).$$

Ш. Ж. Ла Валле Пуссен доказал значительно больше, а именно: пусть

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}+R(x),$$

тогда

$$R(x)=O\left(xe^{-\alpha\sqrt{\ln x}}\right),$$

где $\alpha>0$ — *абсолютная постоянная* (см. *Валле Пуссена теорема*). При решении этой проблемы были использованы методы теории функций комплексного переменного. С проблемой оценки $R(x)$ тесно связана проблема поведения нек-рой функции комплексного переменного, к-рую впервые (1859) изучал Б. Риман (B. Riemann), и к-рая теперь наз. Римана *дзета-функцией*. Эта функция задается равенством

$$\zeta(s)=1^{-s}+2^{-s}+\ldots+n^{-s}+\ldots,\ s=\sigma+it,\ \sigma>1.$$

При действительном s дзета-функцию рассматривал еще Л. Эйлер (L. Euler; 1737, 1749) и им было доказано тождество, к-рое указывает на связь $\zeta(s)$ с п. ч.:

$$\zeta(s)=(1-2^{-s})^{-1}(1-3^{-s})^{-1}\ldots(1-p^{-s})^{-1}\ldots,\ \sigma>1,$$

где произведение берется по всем п. ч. Функцию $\zeta(s)$, заданную рядом при $\sigma>1$, можно аналитически продолжить на всю плоскость комплексного переменного; тогда получится функция, к-рая будет аналитической на всей плоскости комплексного переменного за исключением точки $s=1$, где она имеет простой полюс с вычетом, равным 1. Проблема оценки остатка $R(x)$ в асимптотич. формуле распределения п. ч. тесно связана с проблемой распределения нулей $\zeta(s)$ в «критической» полосе $0\leqslant\sigma\leqslant1$. Б. Риманом была высказана гипотеза, что все нули $\zeta(s)$ в критич. полосе лежат на прямой $\sigma=1/2$. Из этой гипотезы следует, что $R(x)=O(\sqrt{x}\ln x)$. Наоборот, из соотношения $R(x)=O(x^{1/2+\varepsilon})$, где $\varepsilon>0$ — произвольно мало, следует справедливость *Римана гипотезы* о нулях $\zeta(s)$. Ж. Адамар и Ш. Ж. Ла Валле Пуссен получили асимптотич. закон распределения п. ч., доказав, что $\zeta(s)$ не имеет нулей при $\sigma\geqslant1$. Для величины $R(x)$ доказаны так наз. Ω-теоремы: существуют такие две последовательности $X\to+\infty$, $Y\to+\infty$, что

$$R(X)<-X^{1/2}\frac{\ln\ln\ln X}{\ln\ln X},$$

$$R(Y)>Y^{1/2}\frac{\ln\ln\ln Y}{\ln\ln Y}.$$

б) Другой проблемой теории распределения п. ч. является проблема оценки разности соседних п. ч., то есть числа $\Delta_n=p_{n+1}-p_n$, где p_n есть n-е простое число. Здесь также первый общий результат принадлежит П. Л. Чебышеву, доказавшему, что между N и $2N$, $N\geqslant1$, лежит п. ч. (*Бертрана постулат*). Оценка Δ_n тесно связана с функцией $N(\alpha,T)$ — числом нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $1/2\leqslant\alpha\leqslant\sigma\leqslant1$, $|t|\leqslant T$. Функция $N(\alpha,T)$, в свою очередь, тесно связана с функцией $\zeta(1/2+it)$. Существуют гипотезы: $N(\alpha,T)=O(T^{2(1-\alpha)+\varepsilon})$ (*плотностная гипотеза*) и $\zeta(1/2+it)=O(t^{\varepsilon})$ (*Линделёфа гипотеза*), $\varepsilon>0$ — произвольно мало. Из гипотезы Римана о нулях $\zeta(s)$ следует гипотеза Линделёфа, из гипотезы Линделёфа — плотностная гипотеза, из к-рой следует, что $\Delta_n=O(n^{1/2+\varepsilon})$. Доказано, что $\Delta_n=O(n^{\gamma})$, где $\gamma<1$.

в) Вопрос о распределении п. ч. в арифметич. прогрессиях $nk+l$, $(k,l)=1$, $n=0,1,2,\ldots$, приводит к вопросу о нулях специальных дзета-функций, так наз. L-рядов Дирихле, к-рые имеют вид:

$$a_1\cdot1^{-s}+a_2\cdot2^{-s}+\ldots+a_n\cdot n^{-s}+\ldots,$$

$\sigma>1$, a_n — коэффициенты, зависящие от n и от разности прогрессии k (характеры Дирихле по mod k).

Проблемы распределения нулей L-рядов Дирихле и распределения п. ч. в арифметич. прогрессиях имеют свои специфич. особенности. Одно из самых крупных достижений в этом вопросе — следующее (К. Зигель; K. Siegel, 1935): пусть $\pi(x,k,l)$ — число п. ч., не пре-

восходящих x в прогрессии $nk+l$, $n=0, 1, \ldots$. Тогда

$$\pi(x, k, l)=\frac{1}{\varphi(k)}\int_2^x \frac{dt}{\ln t}+O(x\ln^{-A}x),$$

где $\varphi(k)$ — *Эйлера функция* и $1\leqslant k\leqslant \ln^B x$, A и B — произвольные фиксированные числа. Сведения о распределении п. ч. в арифметич. прогрессиях существенно используются при решении аддитивных задач с п. ч. См. также *Распределение простых чисел*.

Аддитивные проблемы. К аддитивным задачам А. т. ч. относятся проблемы, связанные с уравнениями в целых числах специального вида. Основными вопросами в этой проблематике являются следующие: доказать разрешимость заданного уравнения, найти асимптотич. формулу для числа решений заданного уравнения. Второй вопрос значительно труднее, и положительный ответ на него в нек-ром смысле дает ответ на первый вопрос. Классич. примерами аддитивных задач являются *Варинга проблемы*, *Гольдбаха проблема*, *Харди — Литлвуда проблема*.

Проблема Варинга (1770) формулируется так: пусть $J_{k,n}(N)$ — число решений в целых положительных числах $x_1, \ldots, x_k$ уравнения

$$x_1^n+\ldots+x_k^n=N, \qquad (1)$$

где $N\geqslant 1$ — целое число. Доказать, что существует такое число $k_0=k_0(n)$ (k_0 зависит только от n), что $J_{k,n}(N)\geqslant 1$ при $k\geqslant k_0$. Другими словами, доказать, что любое число $N\geqslant 1$ может быть представлено суммой n-х степеней целых положительных чисел, причем число слагаемых в этом представлении зависит только от n. При $n=2$ задача была решена Ж. Лагранжем (J. Lagrange, 1770), к-рый доказал, что каждое целое положительное число есть сумма четырех квадратов целых чисел. Первое общее решение проблемы Варинга дано Д. Гильбертом (D. Hilbert) в 1909. Позднее, в 1924 Г. Х. Харди (G. H. Hardy) и Дж. Литлвуд (J. Littlewood), применив свой круговой метод, доказали, что для $J_{k,n}(N)$ при $k\geqslant n2^n+1$ имеет место асимптотич. формула вида:

$$J_{k,n}(N)=AN^{k/n-1}+O\left(N^{k/n-1-\gamma}\right), \qquad (2)$$

где $\gamma>0$ и $A=A(N)\geqslant c>0$, c — абсолютная константа. А поскольку существует бесконечно много таких чисел N, к-рые для $k=n$ не являются суммой n-х степеней, т. е. $J_{k,n}(N)=0$, то возникла проблема установления истинного порядка величины k в зависимости от n, при к-ром разрешимо уравнение (1) и справедлива формула (2). Самые сильные результаты в этой проблеме принадлежат И. М. Виноградову, к-рый в 1934 доказал, что

а) $J_{k,n}(N)\geqslant 1$ при $N\geqslant N_0(n)$, если $k\geqslant 3n\ln n+11n$;

б) формула (2) имеет место при $k\geqslant 4n^2\ln n$.

Другая классич. аддитивная проблема — проблема Гольдбаха — Эйлера (1742), состоит в следующем: пусть $J(N)$ — число решений в простых числах p_1, p_2, p_3, уравнения $p_1+p_2+p_3=N$; доказать, что при нечетном $N\geqslant 7$ будет $J(N)\geqslant 1$. В 1937 И. М. Виноградов доказал, что (асимптотич. формула для $J(N)$):

$$J(N)=BN^2\ln^{-3}N+O\left(N^2\ln^{-3,5+\varepsilon}N\right),$$

где $B=B(N)\geqslant 0{,}6$. Отсюда, в частности, следует, что $J(N)\geqslant 1$ при $N\geqslant N_0$, т. е. решение проблемы Гольдбаха — Эйлера для достаточно больших N.

К аддитивным задачам относится проблема Харди — Литлвуда (1923); каждое $N\geqslant 2$ может быть представлено в виде $N=p+x^2+y^2$, где p — простое число, x, y — целые положительные числа. В 1958 Ю. В. Линник доказал, что если $W(N)$ — число решений этого уравнения, то имеет место асимптотич. формула

$$W(N)=\frac{\sigma N}{\ln N}+O\left(N\ln^{-1,028}N\right),$$

где $\sigma=\sigma(N)\geqslant c_1>0$, c_1 — абсолютная константа. Отсюда следует, что $W(N)\geqslant 1$ при $N\geqslant N_0$, т. е. решение проблемы Харди — Литлвуда для достаточно больших N. Имеется много аддитивных проблем, к-рые еще не решены и имеют возраст сотен и даже тысяч лет. К ним, напр., относятся вопросы о бесконечности числа п. ч. близнецов, т. е. пар п. ч. p и q таких, что $|p-q|=2$, бинарная проблема Гольбаха — Эйлера, т. е., что каждое четное число $\geqslant 4$ есть сумма двух п. ч., проблема существования бесконечного числа п. ч. в последовательности вида n^2+1. См. также *Аддитивные проблемы*.

Поведение теоретико-числовых функций. В теории чисел имеется ряд классич. функций: $\varphi(n)$ — число чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n (функция Эйлера), $\tau(n)$ — число делителей числа n, $\mu(n)$ — *Мёбиуса функция*, $\Lambda(n)$ — *Мангольдта функция* и др. Несмотря на то, что каждая из указанных функций ведет себя довольно «неправильно», средние значения этих функций уже поддаются изучению. Под средним значением функции $f(n)$ понимают величину $\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n)$. Вопрос об оценке среднего значения функции $\mu(n)$ эквивалентен вопросу о границе нулей дзета-функции Римана. Вопрос об асимптотике среднего значения функции $\Lambda(n)$ эквивалентен вопросу об асимптотич. формуле для $\pi(x)$, т. е. также вопросу о границе нулей дзета-функции Римана. Во всех этих задачах достигнуты те же результаты, что и в проблеме распределения п. ч. Особо стоит вопрос об асимптотике среднего значения $\tau(n)$ или, несколько иначе, вопрос об асимптотич. формуле для суммы значений $\tau(n)$. Пусть

$$\Phi(N)=\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(N).$$

Тогда $\Phi(N)$ — число целых точек под гиперболой $y=N/x$. Таким образом, нахождение асимптотики $\Phi(N)$ — это проблема нахождения асимптотики числа целых точек в расширяющихся областях. К этой проблематике относится задача о числе целых точек в круге, т. е. задача о числе

$$G(N)=\sum_{x^2+y^2\leqslant N} 1,$$

x, y — целые числа, и обобщения этих задач на произвольные области как на плоскости, так и в пространстве. П. Дирихле (1849) доказал, что

$$\Phi(N)=N\ln N+(2\gamma+1)N+R_1(N),$$

где $R_1(N)=O(\sqrt{N})$, а К. Гаусс (1863), что

$$G(N)=\pi N+R_2(N),$$

где $R_2(N)=O(\sqrt{N})$. Задачи нахождения наилучших возможных оценок величин $R_1(N)$ и $R_2(N)$ стали наз. соответственно *делителей проблемой* и *круга проблемой*. Г. Ф. Вороной (1903) получил

$$R_1(N)=O\left(\sqrt[3]{N}\ln N\right),$$

а В. Серпиньский (W. Sierpiński, 1906) —

$$R_2(N)=O\left(\sqrt[3]{N}\right).$$

Кроме того, доказаны Ω-теоремы, а именно, что

$$R_1(N)=\Omega\left(N^{1/4}\right) \quad \text{и} \quad R_2(N)=\Omega\left(N^{1/4}\right).$$

В настоящее время (1976) получены оценки $R_1(N)$ и $R_2(N)$ несколько лучше, чем у Г. Ф. Вороного и В. Серпиньского.

Родственной рассмотренным задачам является задача об асимптотике суммы дробных долей различного вида функций или эквивалентная ей задача — вопрос о распределении дробных долей различного вида функций. Обозначим через $\{\alpha\}$ дробную часть числа α. Тогда если $F(x)$ — вещественная функция, то возни-

кает вопрос об асимптотике следующих двух функций:

$$T_1(N)=\sum_{n\leqslant N}\{F(n)\},$$

$$T_2(\gamma;\ N)=\sum_{0\leqslant\{F(n)\}\leqslant\gamma,\ n\leqslant N}1.$$

Если для любого $0<\gamma\leqslant 1$

$$T_2(\gamma;\ N)=\gamma N+o(N),$$

то говорят, что дробные доли функции $F(n)$ распределены равномерно. Равномерность распределения дробных долей функции $F(n)$ может быть выражена и в терминах асимптотики для $T_1(N)$. Первые результаты о равномерном распределении дробных долей многочленов, критерии равномерного распределения были найдены Г. Вейлем (H. Weyl, 1916). Наиболее точные результаты в этих вопросах получены И. М. Виноградовым. Им же найдены асимптотич. формулы для $T_1(N)$ и $T_2(N)$ и для тех случаев, когда n пробегает часть множества целых чисел, не превосходящих N, в частности множество п. ч. Относительно мало известно о распределении дробных долей функций, растущих быстрее многочленов. Напр., ничего не известно о распределении дробных долей функции $(^3/_2)^x$.

Алгебраические и трансцендентные числа. К теории алгебраических и трансцендентных чисел относятся вопросы, связанные с арифметич. природой тех или иных чисел или классов чисел. Рассмотрим многочлены с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1; если α является корнем такого многочлена степени n и не является корнем многочлена меньшей степени, то оно наз. алгебраическим числом степени n; при $n=1$ число α наз. рациональным. Если же α не является алгебраическим, то оно наз. трансцендентным числом. Алгебраич. чисел «много меньше», чем трансцендентных, «почти любое» число — трансцендентное, однако вопросы об алгебраичности или трансцендентности конкретных чисел очень трудны. Основной «характеристикой» алгебраич. числа является тот факт, что они «плохо» приближаются рациональными числами. Это утверждение (*Лиувилля теорема*, 1844) формулируется так: если α — алгебраич. число степени n, то

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>cq^{-\varkappa},$$

где $\varkappa=n$, $c=c(\alpha)>0$ — константа, зависящая только от α, а p и q — произвольные целые числа. Следующий принципиальный шаг в этом вопросе сделал А. Туэ (A. Thue, 1909), идеи к-рого оказали большое влияние на всю теорию трансцендентных чисел. Он доказал, что $\varkappa=\frac{n}{2}+\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Далее величина $\varkappa$ уменьшалась многими учеными, и в 1955 К. Ф. Рот (K. F. Roth) доказал, что $\varkappa=2+\varepsilon$ (известно, что $\varkappa\geqslant 2$). Недостатком этих теорем (исключая теорему Лиувилля) является то, что все они не эффективны, т. е. по α и ε нельзя вычислять c.

Задачи о приближениях связаны с определенным классом задач из теории неопределенных уравнений. Так, А. Туэ из своей теоремы о приближении получил конечность числа целочисленных решений уравнения $F_n(x,\ y)=a$, где $F_n(x,\ y)$ — форма с целыми коэффициентами степени $n\geqslant 3$, a — целое число, отличное от нуля (эта теорема также не эффективна, т. е. нельзя указать границы для решений уравнения).

Другое направление этой теории — доказательство трансцендентности чисел. Первые результаты здесь были получены в конце 19 в. Ш. Эрмит (Ch. Hermite, 1873) доказал трансцендентность числа e; Ф. Линдеман (F. Lindemann, 1882) — трансцендентность числа π, и тем самым была отрицательно решена проблема о квадратуре круга. А. О. Гельфонд и Т. Шнейдер (T. Schneider) в 1934 доказали теорему о том, что α^β является трансцендентным числом, если α — алгебраич. чис-

ло $\alpha \neq 0,1$ и β — алгебраич. число степени $\geqslant 2$ (седьмая проблема Гильберта). А. Бейкером (A. Baker) начиная с 1967 был получен ряд эффективных теорем об оценке линейных форм от логарифмов алгебраич. чисел. Следствием этих теорем явилось эффективное доказательство теоремы Туэ о числе представлений целого числа формой. Существует много вопросов в теории трансцендентных чисел, к-рые еще ждут своего решения. К ним относятся вопрос о трансцендентности константы Эйлера

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n} \right),$$

вопрос об алгебраич. зависимости чисел e и π и др.

О некоторых методах в аналитической теории чисел. а) Метод комплексного интегрирования. Он порожден методом производящих функций Эйлера, к-рым часто решаются задачи элементарной математики. Основой служит следующая формула (разрывный множитель):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \sigma > 0} \frac{x^s}{s}\, ds = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 1, \\ 0, & \text{если } 0 < x < 1, \end{cases}$$

где интеграл берется по прямой $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$, $s = \sigma + it$. Так, при $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$f(s) = \frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, n^{-s},$$

и при $x = N + {}^1/_2$ получаем

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = 2} \frac{x^s f(s)}{s}\, ds.$$

Слева стоит *Чебышева функция*, асимптотика для к-рой эквивалентна проблеме о п. ч. Правая же часть, после выделения главного члена, будет тем меньше, чем левее удастся перенести контур интегрирования. См. также *Комплексного интегрирования метод*.

б) Круговой метод (Харди — Литлвуда — Рамануджана). Он применяется в основном в аддитивных задачах. Рассмотрим схему применения и существо кругового метода в форме тригонометрич. сумм Виноградова на тернарной проблеме Гольдбаха — Эйлера. Пусть m — целое число. Тогда имеем (разрывный множитель):

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha m}\, d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ 0, & \text{если } m \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$I(N) = \int_0^1 S^3(\alpha)\, e^{-2\pi i \alpha N}\, d\alpha, \quad S(\alpha) = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i x p},$$

$I(N)$ — число решений в п. ч. уравнения $p_1 + p_2 + p_3 = N$. Далее, интервал интегрирования $(0, 1)$ разбивается на две части — основной интервал и дополнительный: к основному интервалу относят все интервалы вида

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{q\tau},$$

где $(a, q) = 1$, $0 \leqslant a \leqslant q$, $q \leqslant \ln^{10} N$, $\tau = N \ln^{-20} N$; к дополнительному интервалу отнесем все остальные. Основные интервалы не пересекаются. Кроме того, для α из основного интервала, сумма $S(\alpha)$ «близка» к рациональной сумме $S(a/q)$. Но при «малых» q, $q \leqslant \ln N$, известен закон распределения п. ч. в прогрессиях с разностью q (напр., теорема Зигеля), т. е. известна асимптотика сумм $S(a/q)$. Так выделяется главный член проблемы, и в этом состоит идея кругового метода. Если теперь нетривиально оценить $|S(\alpha)|$ на дополнительных интервалах (см. *Виноградова метод*), то получится асимптотич. формула в проблеме Гольдбаха — Эйлера. См. также *Круговой метод*.

в) Метод тригонометрических сумм. Большинство задач А. т. ч. может быть сформулировано

в терминах тригонометрич. сумм — конечных сумм вида

$$S = \sum_{x_1, \ldots, x_n} e^{2\pi i F(x_1, \ldots, x_n)}, \qquad (3)$$

где $F(x_1, \ldots, x_n)$ — действительная функция, а $x_1, \ldots, x_n$ пробегают множество целых чисел в количестве P. Таким образом, центр тяжести многих проблем переносится на задачу изучения таких сумм, в частности на задачу получения возможно более точной оценки модуля таких сумм. Тривиальной оценкой суммы (3) будет P. Ставится задача получить оценку типа

$$|S| \leqslant \Delta P,$$

где $0 \leqslant \Delta \leqslant 1$ наз. понижающим множителем. Первые нетривиальные оценки тригонометрич. сумм, когда $F = F(x)$ — многочлен, а $x = 1, 2, \ldots, P$, получил Г. Вейль (1919), к-рый одновременно доказал критерий равнораспределенности дробных долей функции в терминах тригонометрич. сумм. Создателем метода тригонометрич. сумм является И. М. Виноградов, к-рый, используя глубокие арифметич. свойства рассматриваемых сумм, получил исключительно сильные оценки модуля широкого класса таких сумм. Это позволило ему получить фундаментальные близкие к предельно возможным результаты в целом ряде вопросов теории чисел (проблема Варинга, *Гильберта — Камке проблема*, *Вейля суммы*). Другим следствием метода Виноградова (1937) было решение ряда аддитивных проблем с п. ч. и, в частности, решение проблемы Гольдбаха — Эйлера. Основной идеей метода Виноградова является идея «сглаживания» (возведение в степень тригонометрич. суммы и сведение оценки к теореме о среднем при оценках сумм Вейля; введение двойных тригонометрич. сумм при оценках сумм с п. ч.). См. также *Тригонометрических сумм метод*.

г) Дисперсионный метод и метод большого решета. В 1958—60 Ю. В. Линником был создан дисперсионный метод для решения целого ряда аддитивных задач теории чисел. Им были решены проблема Харди — Литлвуда, *Титчмарша проблема* делителей, *аддитивная проблема делителей*. Основным понятием метода является дисперсия для числа решений уравнения при предполагаемой асимптотике для числа решений нек-рого вспомогательного уравнения, связанного с основным (см. также *Дисперсионный метод*). В последнее время получены глубокие результаты при помощи метода *большого решета* Ю. В. Линника, к-рый был создан им в 1940 при решении проблемы о наименьшем квадратичном невычете.

д) Методы теории алгебраических и трансцендентных чисел. При доказательстве теоремы о приближении алгебраич. числа рациональной дробью, А. Туэ (см. *Туэ метод*) строит многочлен

$$f(x, y) = (y - \alpha) f_1(x, y) + (x - \alpha)^m f_2(x, \alpha)$$

с целыми коэффициентами, где f_1 и f_2 — тоже многочлены. Допуская, что α «хорошо» приближаются дробями p_1/q_1 и p_2/q_2 с достаточно большим q_1 и q_2, полагая $m \approx \approx \ln q_1 / \ln q_2$ и доказывая, что $f(x, y)$ при $x = p_1/q_1$, $y = p_2/q_2$ не обращается в нуль, получают противоречие.

При доказательстве трансцендентности чисел А. О. Гельфонд строит функцию

$$f(z) = \sum_{k=0}^{q_0} \sum_{l=0}^{q} c_{k,l} e^{(\lambda k + l) z}, \quad \lambda = \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}.$$

В предположении, что α — алгебраич. число, при помощи принципа ящиков Дирихле целые не равные нулю числа $c_{k,l}$ выбираются так, что $f(z)$ и «много» ее производных имеют «много» нулей. «Большое» количество нулей позволяет получить «хорошие» оценки сверху для «большого» числа производных и точек, а отсюда, при помощи оценок снизу, получаемых из теоремы Лиувилля, следует, что $f(z)$ и «много» ее производных имеют

больше нулей, чем вначале. Повторение этого процесса приводит к тому, что либо λ — рациональное число, либо $c_{k,l}$ равны нулю, что противоречит их выбору. См. также *Алгебраическое число*, *Трансцендентное число*.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Избр. тр., М., 1952; [2] его же, Основы теории чисел, 7 изд., М., 1965; [3] его же, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [4] Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952; [5] Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, М.—Л., 1947; [6] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, М., 1975; [7] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [8] Чудаков Н. Г., Введение в теорию L-функций Дирихле, М.—Л., 1947; [9] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [10] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971; [11] Титчмарш Е., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М., 1953; [12] Хуа Л о-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [13] Baker A., «Mathematika», 1967, v. 14, №1(27), p. 102—07; [14] Виноградов А. И., «Изв. АН СССР. Серия матем.», 1965, т. 29, в. 4, с. 903—34; [15] Bombieri E., «Mathematika», 1965, v. 12, № 24, p. 201—25.

А. А. Карацуба.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция, к-рая может быть представлена степенным рядом. Исключит. важность класса А. ф. определяется следующим. Во-первых, этот класс достаточно широк: он охватывает большинство функций, встречающихся в основных вопросах математики и ее приложений к естествознанию и технике. Во-вторых, класс А. ф. замкнут относительно основных операций арифметики, алгебры и анализа. Наконец, А. ф. обладают важным свойством единственности: каждая А. ф. образует одно «органически связанное целое», представляет собой «единую» функцию во всей своей естественной области существования. Это свойство, к-рое в 18 в. считалось неотделимым от самого понятия функции, приобрело принципиальное значение после установления — в 1-й пол. 19 в.— общей точки зрения на функцию как на произвольное соответствие. Теория А. ф. была создана в 19 в. в первую очередь благодаря работам О. Коши (A. Cauchy), Б. Римана (B. Riemann) и К. Вейерштрасса (K. Weierstrass). Решающее значение в построении этой теории сыграл «выход в комплексную область». Теория А. ф. возникла как теория функций комплексного переменного; и в настоящее время (70-е гг. 20 в.) теория А. ф. составляет основное содержание общей теории функций комплексного переменного.

Существуют различные подходы к понятию аналитичности. В основе одного из них, впервые развитого О. Коши и далеко продвинутого Б. Риманом, лежит структурное свойство функции — существование производной по комплексному переменному, или комплексная дифференцируемость. Этот подход тесно связан с геометрическими представлениями. Другой подход, систематич. развивавшийся К. Вейерштрассом, основывается на возможности представления функций степенными рядами; он связан, тем самым, с аналитическим аппаратом, к-рым может быть изображена функция. Основной факт теории А. ф. заключается в тождественности соответствующих классов функций, рассматриваемых в произвольной области комплексной плоскости.

Перейдем к точным определениям. Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие нек-рое комплексное число w, то говорят, что в области D определена (однозначная) функция f комплексного переменного z, и пишут: $w=f(z)$, $z \in D$ (или $f: D \to \mathbb{C}$). Функция $w=f(z)=f(x+iy)$ может рассматриваться как комплексная функция двух действительных переменных x и y, определенная в области $D \subset \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2$ — евклидова плоскость). Задание такой функции равносильно заданию двух действительных функций

$$u=\varphi(x,\ y),\ v=\psi(x,\ y),\ (x,\ y) \in D\ (w=u+iv).$$

Зафиксировав точку $z \in D$, придадим z приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ (так, что $z + \Delta z \in D$) и рассмотрим соответствующее приращение функции f:

$$\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Если

$$\Delta f(z) = A\,\Delta z + o(\Delta z)$$

при $\Delta z \to 0$, или, что то же, если существует

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = A,$$

то функция f наз. дифференцируемой (в смысле комплексного анализа, или в смысле $\mathbb{C}$) в точке z; $A = f'(z)$ — производная функция f в точке z, а

$$A\,\Delta z = f'(z)dz = df(z)$$

— ее дифференциал в этой точке. Функция f, дифференцируемая в каждой точке области D, наз. дифференцируемой в области D.

Сравним понятия дифференцируемости функции f как функции двух действительных переменных (в смысле $\mathbb{R}^2$) и в смысле $\mathbb{C}$. В первом случае дифференциал df имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy,$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

— частные производные функции f. Переходя от независимых переменных x, y к переменным z, $\bar{z}$, к-рые формально можно считать новыми независимыми переменными, связанными со старыми соотношениями $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ (становясь на эту точку зрения, функцию f иногда записывают в виде $f(z, \bar{z})$), и, выражая dx и dy через dz и $d\bar{z}$ по обычным правилам вычисления дифференциалов, получают запись df в комплексной форме:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z},$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

— (формальные) производные функции f по z и $\bar{z}$, соответственно. Отсюда видно, что дифференцируемость функции f в смысле $\mathbb{C}$ имеет место в том и только том случае, когда она дифференцируема в смысле $\mathbb{R}^2$ и справедливо равенство $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, к-рое в развернутой форме можно переписать так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Если функция f дифференцируема в смысле $\mathbb{C}$ в области D, то последние соотношения справедливы в каждой точке этой области; они наз. уравнениями Коши — Римана. Эти уравнения встречались уже в 18 в. в связи с изучением функций комплексного переменного в трудах Ж. Л. Д'Аламбера и Л. Эйлера (J. L. D'Alembert, L. Euler). Определение, данное в начале, уточняется так. Функция f, определенная в области D, наз. голоморфной (аналитической) в точке $z_0 \in D$, если существует окрестность этой точки, в к-рой функция f представляется степенным рядом

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots.$$

Если это свойство имеет место в каждой точке z_0 области D, то функция f наз. голоморфной (аналитической) в области D.

Функция f, голоморфная в точке $z_0 \in D$, дифференцируема в этой точке. Более того, сумма сходящегося

степенного ряда имеет производные всех порядков (бесконечно дифференцируема) по комплексному переменному z; коэффициенты ряда могут быть выражены через производные функции f в точке z_0 по формулам $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Степенной ряд, записанный в форме

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \ldots,$$

наз. р я д о м Т е й л о р а функции f в точке z_0. Тем самым, голоморфность функции f в области D означает, что в каждой точке области D функция f бесконечно дифференцируема и ее ряд Тейлора сходится к ней в нек-рой окрестности этой точки.

С другой стороны, в теории А. ф. устанавливается следующий замечательный факт: функция f, дифференцируемая в области D, голоморфна в этой области (в отдельной точке это утверждение неверно: $f(z)=|z|^2=z\bar{z}$ дифференцируема в точке $z_0=0$, но нигде не голоморфна). Следовательно, понятия комплексной дифференцируемости и голоморфности функции в о б л а с т и тождественны; каждое из следующих свойств функции f в области D — дифференцируемость в смысле $\mathbb{C}$, дифференцируемость в смысле $\mathbb{R}^2$ вместе с выполнением уравнений Коши — Римана, голоморфность — может служить определением а н а л и т и ч н о с т и f в этой области.

Еще одна характеристика А. ф. связана с понятием интеграла. Интеграл от функции $f=\varphi+i\psi$ вдоль (ориентированной спрямляемой) кривой Γ: $z=z(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, может быть определен формулой:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt$$

или при помощи криволинейного интеграла:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma \varphi\,dx - \psi\,dy + i\int_\Gamma \psi\,dx + \varphi\,dy.$$

Центральное место в теории А. ф. занимает следующая и н т е г р а л ь н а я т е о р е м а К о ш и: если f — А. ф. в области D, то $\int_\Gamma f(z)dz=0$ для любой замкнутой кривой $\Gamma\subset D$, ограничивающей область, принадлежащую D. Верно и обратное заключение (т е о р е м а М о р е р ы): если f непрерывна в области D и $\int_\Gamma f(z)dz=0$ для любой такой кривой Γ, то f — А. ф. в области D. В частности, в односвязной области аналитическими являются те и только те непрерывные функции f, для к-рых интеграл по любой замкнутой кривой $\Gamma\subset D$ равен нулю (или, что то же самое, интеграл по любой кривой Γ, соединяющей произвольные точки z_1, $z_2\in D$, зависит только от точек z_1 и z_2 и не зависит от формы этой кривой). Эта характеристика А. ф. лежит в основе многих их приложений.

Интегральная теорема Коши позволяет получить и н т е г р а л ь н у ю ф о р м у л у К о ш и, выражающую значения А. ф. внутри области через ее значения на границе этой области:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \quad z\in D;$$

здесь D — область, граница к-рой ∂D состоит из конечного числа непересекающихся спрямляемых кривых (ориентация ∂D предполагается положительной относительно области D), f — функция, аналитическая в нек-рой области $G\supset\overline{D}=D\cup\partial D$. Эта формула позволяет, в частности, свести изучение многих вопросов, связанных с А. ф., к соответствующим вопросам для простейшей функции — я д р а К о ш и $\frac{1}{\zeta-z}$, $\zeta\in\partial D$, $z\in D$. (Подробнее см. статью *Интегральные представления аналитических функций*.)

Важнейшее свойство А. ф. выражается следующей теоремой единственности: две функции, аналитические в области D и совпадающие на к.-л. множестве, имеющем предельную точку в D, совпадают и во всей области D (тождественны). В частности, А. ф. $f(z)$, $z \in D$, отличная от тождественного нуля, может иметь в области D лишь изолированные нули. Если при этом z_0 — нуль функции f, то в некоторой окрестности $U(z_0)$ точки z_0 имеем $f(z)=(z-z_0)^{\nu} g(z)$, где $\nu \geqslant 1$ — натуральное число (называемое кратностью нуля функции f в z_0), а $g(z)$ — А. ф. в $U(z_0)$, отличная от нуля.

Важную роль в изучении А. ф. играют точки, в к-рых нарушается свойство аналитичности — так наз. особые точки А. ф. Рассмотрим здесь изолированные особые точки (однозначных) А. ф. (подробнее см. *Особая точка аналитической функции*). Если f — А. ф. в кольце вида $0<|z-z_0|<\rho$, то она разлагается в этой области в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

содержащий, вообще говоря, не только положительные, но и отрицательные степени $z-z_0$. Если в этом разложении члены с отрицательными степенями отсутствуют ($a_n=0$ для $n=-1, -2, \ldots$), то z_0 наз. правильной точкой f (устранимой особой точкой). В правильной точке существует и конечен

$$\lim_{z \to z_0} f(z)=a_0;$$

полагая $f(z_0)=a_0$, получаем А. ф. во всем круге $|z-z_0|<\rho$. Если ряд Лорана функции содержит лишь конечное число членов с отрицательными степенями $z-z_0$:

$$f(z)=\sum_{n=\mu}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \ \mu<0, \ a_{\mu} \neq 0,$$

то точка z_0 наз. полюсом функции f (кратности μ); полюс z_0 характеризуется тем, что

$$\lim_{z \to z_0} f(z)=\infty.$$

Функция f имеет в точке z_0 полюс кратности μ тогда и только тогда, когда функция $1/f$ имеет в этой точке нуль кратности μ. В случае, когда ряд Лорана содержит бесконечное число отрицательных степеней $z-z_0$ ($a_n \neq 0$ для бесконечного множества отрицательных индексов n), точка z_0 наз. существенно особой точкой; в таких точках не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции f. Коэффициент a_{-1} разложения функции f в ряд Лорана с центром в изолированной особой точке z_0 наз. вычетом функции f в точке z_0:

$$a_{-1}=\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z).$$

Вычет функции f в точке z_0 может быть определен формулой

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz,$$

где $\gamma=\{z:|z-z_0|=\rho\}$, $\rho>0$ — достаточно мало (так что круг $|z-z_0|\leqslant\rho$ не содержит особых точек функции f, отличных от z_0). Важная роль вычетов определяется следующей теоремой: если f — А. ф. в области G, за исключением нек-рого множества изолированных особых точек, $\Gamma \subset G$ — контур, ограничивающий область $D \subset G$ и не проходящий через особые точки функции f, $z_1, \ldots, z_n$ — все особые точки f, лежащие в D, то

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz=2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Эта теорема дает эффективное средство для нахождения интегралов (см. также *Вычет*).

Сумма членов ряда Лорана функции f в точке z_0, соответствующая отрицательным индексам n,

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n,$$

наз. главной частью ряда Лорана (или функции f) в точке z_0. Именно главная часть определяет характер особенности функции f в точке z_0.

Функции, представимые в виде отношения двух функций, голоморфных в области D, наз. мероморфными в области D. Мероморфная в области функция голоморфна в этой области за исключением, быть может, конечного или счетного множества полюсов; в полюсах значения мероморфной функции считаются равными бесконечности. Если допустить такие значения, то мероморфные в области D функции могут быть определены как функции, к-рые в окрестности каждой точки $z_0 \in D$ представимы рядом по степеням $z-z_0$, содержащим конечное (зависящее от z_0) число членов с отрицательными степенями $z-z_0$.

Часто аналитическими в области D наз. как голоморфные, так и мероморфные в этой области функции. В этом случае голоморфные функции наз. также регулярными аналитическими, или просто регулярными.

Простейший класс А. ф. составляют функции, голоморфные во всей плоскости; такие функции наз. целыми. Целые функции представимы рядами $a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots$, сходящимися во всей плоскости. К ним относятся многочлены от z, функции

$$e^z = 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots,$$

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,$$

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

Теорема Вейерштрасса утверждает, что какова бы ни была последовательность комплексных чисел α_n, $n=1, 2, \ldots$, не имеющая предельных точек в $\mathbb{C}$, существует целая функция F, обращающаяся в нуль в точках α_n, и только в этих точках (среди точек α_n могут быть совпадающие; им отвечает нуль функции F соответствующей кратности). При этом функция F может быть представлена в виде (вообще говоря, бесконечного) произведения целых функций, каждая из к-рых имеет только по одному нулю. Напр.,

$$\sin z = z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\ldots.$$

Функции, мероморфные во всей плоскости (т. е. представимые в виде отношения целых функций), наз. мероморфными функциями. Таковыми являются рациональные функции, $\operatorname{tg} z=\sin z/\cos z$, $\operatorname{ctg} z=\cos z/\sin z$, эллиптич. функции и др.

Согласно теореме Миттаг-Леффлера, для любой последовательности $\beta_n \in \mathbb{C}$, $n=1, 2, \ldots$, не имеющей предельных точек в $\mathbb{C}$, существует мероморфная функция G с полюсами в точках β_n (и только в этих точках), главные части к-рой в точках β_n совпадают с заранее заданными многочленами от $\frac{1}{z-\beta_n}$. При этом функция G может быть представлена в виде (вообще говоря, бесконечной) суммы мероморфных функций, каждая из к-рых имеет полюс только в одной точке. Напр.,

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z}+\frac{1}{z-\pi}+\frac{1}{z+\pi}+\frac{1}{z-2\pi}+\frac{1}{z+2\pi}+\ldots$$

Теоремы о существовании голоморфной функции с заданными нулями и мероморфных функций с заданными полюсами и главными частями справедливы и для произвольной области $D \subset \mathbb{C}$.

Важное значение для изучения А. ф. имеют связанные с ними геометрич. представления. Если $f : D \to C$ — А. ф., то образ $f(D)$ области D также является областью (принцип сохранения области). При $f'(z_0) \neq 0$ отображение f сохраняет углы в z_0 как по величине, так и по знаку, т. е. является конформным. Таким образом, существует тесная связь между аналитичностью и важным геометрич. понятием конформного отображения. Если f — А. ф. в D и $f(z') \neq f(z'')$ при $z' \neq z''$ (такие функции наз. однолистными), то $f'(z) \neq 0$ в D и f определяет взаимно однозначное и конформное отображение области D на область $f(D)$. Теорема Римана, основная теорема теории конформных отображений, утверждает, что в любой односвязной области, граница к-рой содержит более одной точки, существуют однолистные А. ф., конформно отображающие эту область на круг или полуплоскость (см. *Конформное отображение*, *Однолистная функция*).

Действительная и мнимая части функции $f = \varphi + i\psi$, голоморфной в области D, удовлетворяют в этой области уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. являются *гармоническими функциями*. Две гармонич. функции, связанные между собой уравнениями Коши — Римана, наз. сопряженными. В односвязной области любая гармонич. функция φ имеет сопряженную функцию ψ и является, тем самым, действительной частью нек-рой голоморфной в D функции f.

Связи с конформными отображениями и гармонич. функциями лежат в основе многих приложений теории А. ф.

Функция $f(z)$, $z \in E$ ($E \subset \mathbb{C}$ — произвольное множество) наз. аналитической в точке $z_0 \in E$, если существует окрестность этой точки, на пересечении к-рой с множеством E функция f представляется сходящимся степенным рядом. Функция f наз. аналитической на множестве E, если она аналитична на нек-ром открытом множестве, содержащем E (точнее, если существуют открытое множество, содержащее E, и аналитическая на нем функция F, совпадающая с f на множестве E). Для открытых множеств понятие аналитичности совпадает с понятием дифференцируемости по множеству. Однако в общем случае это не так; в частности, на действительной прямой существуют функции, не только имеющие производную, но и бесконечно дифференцируемые в каждой точке, к-рые не являются аналитическими ни в одной точке этой прямой. Для справедливости теоремы единственности А. ф. существенно свойство связности множества E. Именно поэтому А. ф. рассматриваются обычно в областях, т. е. на открытых и связных множествах.

Все сказанное выше относилось к однозначным А. ф. f, рассматриваемым в данной области D (или на данном множестве E) комплексной плоскости. Задаваясь вопросом о возможности продолжения функции f — как А. ф. — в бо́льшую область, приходят к понятию А. ф., рассматриваемой в целом — во всей своей естественной области существования. При таком продолжении данной функции область ее аналитичности, расширяясь, может налегать сама на себя, доставляя новые значения функции в точках плоскости, где она уже была определена. Поэтому А. ф., рассматриваемая в целом, вообще говоря, оказывается многозначной. К необходимости изучения многозначных А. ф. приводят многие вопросы анализа (обращение функций, нахождение первообразных и построение А. ф. с заданной действительной

частью в *многосвязных областях*, решение алгебраич. уравнений с аналитич. коэффициентами и др.); такими функциями являются $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arctg} z$, *алгебраические функции* и т. д.

Регулярный процесс, приводящий к полной А. ф., рассматриваемой в своей естественной области существования, был указан К. Вейерштрассом; он носит назв. аналитического продолжения по Вейерштрассу.

Исходным является понятие элемента А. ф.— степенного ряда с ненулевым радиусом сходимости. Такой элемент W_0:

$$a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots$$

определяет нек-рую А. ф. f в своем круге сходимости K_0. Пусть z_1 — точка круга K_0, отличная от z_0. Разлагая функцию f в ряд с центром в точке z_1, получаем новый элемент W_1:

$$b_0+b_1(z-z_1)+\ldots+b_n(z-z_1)^n+\ldots,$$

круг сходимости к-рого обозначим через K_1. В общей части кругов K_0 и K_1 ряд W_1 сходится к той же функции, что и ряд W_0. Если круг K_1 выходит за пределы круга K_0, то ряд W_1 определяет функцию, заданную посредством W_0, на нек-ром множестве вне K_0 (где ряд W_0 расходится). В этом случае элемент W_1 наз. непосредственным аналитич. продолжением элемента W_0. Пусть W_0, W_1, ..., W_N — цепочка элементов, в к-рой W_{n+1} является непосредственным аналитич. продолжением W_n ($n=0, 1, \ldots, N-1$); тогда элемент W_N наз. аналитич. продолжением элемента W_0 (посредством данной цепочки элементов). Может оказаться так, что центр круга K_N принадлежит кругу K_0, но элемент W_N не является непосредственным аналитич. продолжением элемента W_0. В этом случае суммы рядов W_0 и W_N в общей части кругов K_0 и K_N имеют различные значения; тем самым аналитич. продолжение может привести к новым значениям функции в круге K_0.

Совокупность всех элементов, к-рые могут быть получены аналитич. продолжением элемента W_0, образуют полную А. ф. (в смысле Вейерштрасса), порожденную элементом W_0; объединение их кругов сходимости представляет собой (вейерштрассову) область существования этой функции. Из теоремы единственности А. ф. следует, что А. ф. в смысле Вейерштрасса полностью определяется заданием элемента W_0. При этом в качестве исходного может быть взят любой другой элемент, принадлежащий этой функции; полная А. ф. от этого не изменится.

Полная А. ф. f, рассматриваемая как функция точек плоскости, принадлежащих ее области существования D, вообще говоря, является многозначной. Чтобы избавиться от многозначности, функцию f рассматривают не как функцию точек плоской области D, а как функцию точек нек-рой (лежащей над областью D) многолистной поверхности R такой, что каждой точке области D соответствует столько (проектирующихся в нее) точек поверхности R, сколько различных элементов с центром в этой точке имеет полная А. ф. f; на поверхности R функция f становится однозначной функцией. Идея перехода к таким поверхностям принадлежит Б. Риману, а сами они носят назв. римановых поверхностей. Абстрактное определение понятия римановой поверхности позволило заменить теорию многозначных А. ф. теорией однозначных А. ф. на *римановых поверхностях*.

Фиксируем область Δ, принадлежащую области существования D полной А. ф. f, и к.-л. элемент W функции f с центром в точке области Δ. Совокупность всех элементов, к-рые могут быть получены аналитич. продолжением элемента W посредством цепочек с

центрами, принадлежащими Δ, наз. в е т в ь ю А. ф. f. Ветвь многозначной А. ф. может оказаться однозначной А. ф. в области Δ. Так, напр., произвольные ветви функций $\sqrt[n]{z}$ и $\operatorname{Ln} z$, соответствующие любой односвязной области, не содержащей точку 0, являются однозначными функциями; при этом $\sqrt[n]{z}$ имеет ровно n, а $\operatorname{Ln} z$ — бесконечное множество различных ветвей в каждой такой области. Выделение однозначных ветвей (при помощи тех или иных разрезов области существования) и их изучение средствами теории однозначных А. ф. является одним из осн. приемов исследования конкретных многозначных А. ф. *А. А. Гончар.*

Аналитические функции нескольких комплексных переменных. Комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ (состоящее из точек $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $z_k=x_k+iy_k$) — это векторное пространство над полем комплексных чисел с евклидовой метрикой

$$|z| = \left\{ \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \right\}^{1/2}, \quad \mathbb{C}^1 = \mathbb{C}.$$

От $2n$-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{2n}$ оно отличается нек-рой асимметрией: при переходе от $\mathbb{R}^{2n}$ к $\mathbb{C}^n$ (т. е. при введении в $\mathbb{R}^{2n}$ комплексной структуры) координаты разбиваются на пары, к-рые выступают в комплексе ($z_k=x_k+iy_k$).

Если комплексная функция $f=\varphi+i\psi$ задана в области $D\subset\mathbb{C}^n$ и дифференцируема в каждой точке $z\in D$ в смысле $\mathbb{R}^{2n}$ (т. е. как функция $2n$ действительных переменных x_k и y_k), то ее дифференциал может быть представлен в виде

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_k}\, dz_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}\, d\bar{z}_k,$$

где $dz_k=dx_k+idy_k$, $d\bar{z}_k=dx_k-idy_k$, а символы $\frac{\partial f}{\partial z_k}$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}$ определяются так же, как и в плоском случае. Если при этом df имеет вид

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_k}\, dz_k,$$

т. е. является комплексно линейной функцией от $dz_1, \ldots, dz_n$, то функция f наз. д и ф ф е р е н ц и р у е м о й в смысле $\mathbb{C}^n$, или г о л о м о р ф н о й, или а н а л и т и ч е с к о й в о б л а с т и D.

Таким образом, условие голоморфности f в области $D\subset\mathbb{C}^n$ состоит из условия ее дифференцируемости в смысле $\mathbb{R}^{2n}$ и системы n комплексных равенств $\partial f/\partial\bar{z}_k=0$ ($k=1, \ldots, n$), к-рая равносильна системе $2n$ уравнений с частными производными 1-го порядка

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial \psi}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_k} \quad (k=1, \ldots, n)$$

(с и с т е м а К о ш и — Р и м а н а).

В пространственном случае ($n>1$), в отличие от плоского ($n=1$), эта система переопределена — число уравнений превышает число неизвестных функций. Переопределенность остается и при переходе к геометрически более естественному пространственному аналогу голоморфной функции одного комплексного переменного — г о л о м о р ф н о м у о т о б р а ж е н и ю f, осуществляемому системой $f=(f_1, \ldots, f_n)$ из n голоморфных в области $D\subset\mathbb{C}$ функций f_k. Отображение $f: D\to G=f(D)$ наз. б и г о л о м о р ф н ы м, если оно взаимно однозначно и голоморфно вместе с обратным $f^{-1}: G\to D$. Условия голоморфности отображения $f: D\to\mathbb{C}^n$ выражаются системой $2n^2$ действительных уравнений относительно $2n$ действительных функций. Переопределенность условий голоморфности при $n>1$ является причиной ряда эффектов, специфичных для пространственного случая, таких, как отсутствие пространственного аналога *Римана теоремы* о существовании конформных отображений. По теореме Римана,

при $n=1$ всякие две односвязные области, границы которых не сводятся к точке, изоморфны. Однако при $n>1$ неизоморфными оказываются даже такие простые односвязные области, как шар $\{|z|<1\}$ и произведение кругов (п о л и к р у г) $\{|z_\nu|<1, \nu=1, \ldots, n\}$. Неизоморфность обнаруживается при сравнении групп а в т о м о р ф и з м о в этих областей (т. е. их *биголоморфных отображений* на себя) — группы оказываются алгебраически неизоморфными, а биголоморфное отображение одной области на другую, если бы оно существовало, устанавливало бы изоморфизм этих групп. Отмеченное обстоятельство существенно отличает теорию биголоморфных отображений областей комплексного пространства от теории конформных отображений плоских областей.

Функция f наз. г о л о м о р ф н о й в т о ч к е $a\in\mathbb{C}^n$, если она голоморфна в нек-рой окрестности этой точки. По условиям Коши — Римана, голоморфная в точке a функция нескольких переменных голоморфна по каждому переменному (при фиксированных значениях остальных переменных). Справедливо и обратное: если функция f в окрестности нек-рой точки голоморфна по каждому переменному в отдельности, то она голоморфна в этой точке (о с н о в н а я т е о р е м а Г а р т о г с а).

Голоморфность функции f в точке $a=(a_1, \ldots, a_n)$, по аналогии с плоским случаем, эквивалентна ее разложимости в окрестности этой точки в к р а т н ы й с т е п е н н о й р я д

$$f(z)=\sum\nolimits_{k_\nu\geqslant 0} c_{k_1\ldots k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\ \ldots(z_n-a_n)^{k_n},$$

или, в сокращенной записи,

$$f(z)=\sum\nolimits_{|k|\geqslant 0} c_k (z-a)^k,$$

где $k=(k_1, \ldots, k_n)$ — целочисленный векторный индекс $k_\nu\geqslant 0$, $|k|=k_1+\ldots+k_n$ и

$$(z-a)^k=(z_1-a_1)^{k_1}\ldots(z_n-a_n)^{k_n}.$$

Голоморфная функция бесконечно дифференцируема, и этот ряд — ее ряд Тейлора, т. е.

$$c_k=\frac{1}{k_1!\ldots k_n!}\,\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1}\partial z_2^{k_2}\ldots\partial z_n^{k_n}}.$$

(производные берутся в точке a).

На голоморфные функции нескольких переменных распространяются основные факты теории голоморфных функций одного переменного, иногда в измененной формулировке, напр., *Вейерштрасса теорема* подготовительная, к-рая распространяет на пространственный случай свойство голоморфных функций одного переменного обращаться в нуль как целая степень $z-a$. Теорема формулируется так: если голоморфная в точке $a\in\mathbb{C}^n$ функция $f\not\equiv 0$ равна нулю в этой точке, то в нек-рой окрестности $U(a)$ ее можно представить (возможно, после невырожденного линейного преобразования независимых переменных) в виде

$$f(z)=\{(z_n-a_n)^k+c_1('z)(z_n-a_n)^{k-1}+\ldots+c_k('z)\}\varphi(z),$$

где $k\geqslant 1$ — целое число, c_ν ($\nu=1, \ldots, k$) — функции от $'z=(z_1, \ldots, z_{n-1})$, голоморфные в окрестности точки $'a=(a_1, \ldots, a_{n-1})\in\mathbb{C}^{n-1}$ (штрих перед буквой обозначает проекцию в пространство первых $(n-1)$ координат) и равные нулю в a, а φ голоморфна и отлична от нуля в $U(a)$.

Эта теорема имеет принципиальное значение для изучения *аналитических множеств*, к-рые локально, в окрестности каждой своей точки, описываются как множества общих нулей нек-рого числа голоморфных в этой точке функций. Согласно теореме Вейерштрасса, такие множества локально описываются как множества

общих нулей полиномов по одному переменному z_n с коэффициентами из кольца голоморфных функций от остальных переменных $'z$. Это обстоятельство позволяет при локальном изучении аналитич. множеств широко пользоваться алгебраич. методами.

Интегральная теорема Коши также несколько видоизменяется в пространственном случае и наз. т е о р е м о й К о ш и — П у а н к а р е: пусть функция f голоморфна в области $D\subset\mathbb{C}^n$, тогда для любой $(n+1)$-мерной поверхности G, компактно принадлежащей D, с кусочно гладкой границей ∂G

$$\int_{\partial G} f\,dz=0.$$

При этом интеграл, как и в плоском случае, определяется параметрич. заданием множества: если ∂G имеет уравнение $z=z(t)$, где параметр $t=(t_1, \ldots, t_n)$ меняется в n-мерной клетке $I^n=\{\alpha_k\leqslant t\leqslant\beta_k,\ k=1, \ldots, n\}$, то, по определению

$$\int_{\partial G} f\,dz=\int_{I^n} f[z(t)]\frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}\,dt_1\ldots dt_n.$$

Отличие пространственного случая от плоского состоит в том, что здесь размерность поверхности G меньше размерности области D, а в плоском случае эти размерности совпадают $(n+1=2n)$.

Пространственный аналог интегральной формулы Коши особенно просто выписывается для поликруговых областей, т. е. произведений плоских областей. Пусть $D=D_1\times\ldots\times D_n$ — такая область, где D_k — область плоскости комплексного переменного с кусочно гладкой границей $\partial D_k (k=1, \ldots, n)$, а функция f голоморфна в области, компактно содержащей D. Тогда последовательное применение интегральной формулы Коши для одного переменного дает для любой точки $z\in D$

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},$$

где $\Gamma=\partial D_1\times\ldots\times\partial D_n$ есть n-мерная поверхность на границе ∂D, $\zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ и

$$\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\frac{d\zeta_1\ldots d\zeta_n}{(\zeta-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}.$$

Однако поликруговые области составляют лишь весьма специальный класс, а в областях общего вида подобное разделение переменных невозможно. Роль интеграла Коши для произвольных областей $D\subset\mathbb{C}^n$ с кусочно гладкой границей играет и н т е г р а л ь н а я ф о р м у л а М а р т и н е л л и — Б о х н е р а: для любой функции f, голоморфной в области, к-рая содержит $\overline{D}$, и для любой точки $z\in D$

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D} f(\zeta)\,\frac{\delta(\bar{\zeta}-\bar{z})\,d\zeta}{|\zeta-z|^{2n}},$$

где $d\zeta=d\zeta_1\ \ldots\ d\zeta_n$, а

$$\delta(\omega)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\omega_k d\omega_1\ldots d\omega_{k-1}d\omega_{k+1}\ldots d\omega_n.$$

Это — ф о р м у л а Г р и н а д л я п а р ы ф у н к ц и й, одна из к-рых голоморфна в D, а другая является фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с особенностью в точке $\zeta=z$. При $n=1$ это обычный интеграл Коши. При $n>1$ формула отличается от кратного интеграла Коши для произведения плоских областей тем, что: во-первых, интегрирование в ней ведется по $(2n-1)$-мерной границе области, а не по ее n-мерной части; во-вторых, ее ядро (множитель при f под знаком интеграла) зависит от параметра z не аналитически. В ряде задач, однако, аналитичность ядра существенна, и поэтому желательно построить интегральную формулу с таким ядром для возможно более широкого класса областей. Обширный

запас интегральных формул, в том числе для многих областей с аналитич. ядром, содержится в общей *Лере формуле*. Эта формула имеет вид

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D} f(\zeta)\ \frac{\delta[\omega(\zeta)]\,d\zeta}{\langle\zeta-z,\ \omega(\zeta)\rangle^n},$$

где $\omega=(\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n)$ — гладкая вектор-функция, $d\zeta$ и δ определены выше и $\langle\zeta-z,\ \omega\rangle=\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-z_k)\omega_k$; предполагается, что $\langle\zeta-z,\ \omega(\zeta)\rangle\neq 0$ при любом фиксированном $z\in D$ и ζ, пробегающем ∂D. Величина интеграла в этой формуле не зависит от выбора вектор-функции $\omega(\zeta)$ (если только $\langle\zeta-z,\ \omega(\zeta)\rangle\neq 0$ при всех $z\in D$, $\zeta\in\partial D$), а при $\omega(\zeta)=\overline{\zeta}-\overline{z}$ этот интеграл совпадает с интегралом Мартинелли — Бохнера. Варьирование выбора ω для разных классов областей позволяет получить из формулы Лере различные интегральные формулы. В теории А. ф. нескольких переменных рассматриваются и другие интегральные представления, справедливые для тех или иных классов областей. Важный класс составляют так наз. о б л а с т и В е й л я, являющиеся обобщением произведения плоских областей. Для них справедливо *Бергмана — Вейля представление* с ядром, также аналитически зависящим от параметра.

Как и в плоском случае, основной интерес представляет изучение особенностей А. ф.; при этом принципиальное отличие пространственного случая от плоского выражается теоремой Осгуда — Брауна о стирании компактных особенностей, согласно к-рой любая функция f, голоморфная в $D\setminus K$, где D — область из $\mathbb{C}^n$ $(n>1)$, а K — компактно принадлежащее D множество, не разбивающее D, голоморфно продолжается во всю область D. По этой теореме голоморфные функции нескольких переменных не могут иметь изолированных особых точек. Место последних в $\mathbb{C}^n(n>1)$ занимают особые множества, к-рые являются аналитическими, если их размерность ниже $2n-1$.

Отмеченное обстоятельство является определяющим для многомерной теории вычетов. В этой теории изучается задача о вычислении интеграла от функции f, голоморфной всюду в области $D\subset\mathbb{C}^n$, за исключением аналитич. множества M, по замкнутой n-мерной поверхности σ, не пересекающейся с M. Так как размерность особого множества M ниже размерности D по крайней мере на 2, то M не разбивает D. Если поверхность σ не зацеплена с M, т. е. ограничивает $(n+1)$-мерную поверхность G, компактно принадлежащую $D\setminus M$, то (по теореме Коши — Пуанкаре) $\int_\sigma f dz=0$. В общем случае для вычисления этого интеграла нужно выяснить, как σ зацеплена с особым множеством M, и вычислить интегралы по специальным n-мерным поверхностям, ассоциированным с отдельными порциями множества M (вычеты).

Решение этой задачи связано со значительными топологич. и аналитич. трудностями. В ряде случаев их помогают преодолеть методы, предложенные Мартинелли и Лере. Метод Мартинелли основан на применении топологич. принципа двойственности Александера — Понтрягина и сводит изучение n-мерных гомологий множества $D\setminus M$ к изучению $(n-1)$-мерных гомологий особого множества M. Метод Лере имеет более общий характер; он основан на рассмотрении специальных гомологич. классов и вычислении нек-рых дифференциальных форм (форм-вычетов). Многомерная теория вычетов нашла приложения в теоретич. физике (см. *Фейнмана интеграл*).

Теорема Осгуда — Брауна выявляет важное принципиальное отличие пространственной теории от плоской. На плоскости для любой области D можно построить функцию f, к-рая голоморфна в D и не продол-

жается аналитически за ее пределы, т. е. является естественной областью существования. В пространстве это не так: напр., шаровой слой $\{1/2<|z|<1\}$ не может быть областью существования никакой голоморфной функции, ибо по теореме Осгуда — Брауна любая голоморфная в нем функция непременно аналитически продолжается на весь шар $\{|z|<1\}$.

Возникает задача характеризации естественных областей существования голоморфных функций — так наз. о б л а с т е й г о л о м о р ф н о с т и. Простой достаточный признак можно сформулировать при помощи понятия барьера в граничной точке области, т. е. функции $f_\zeta(z)$, голоморфной в этой области и неограниченно возрастающей при приближении к ζ. Именно $D\subset\mathbb{C}^n$ является областью голоморфности, если для всюду плотного множества точек ее границы можно построить барьер. Этому условию удовлетворяет, в частности, любая выпуклая область; для любой точки $\zeta\in\partial D$ достаточно в $(2n-1)$-мерной опорной плоскости к D в точке ζ выбрать $(2n-2)$-мерную плоскость вида

$$L_\zeta(z)=\sum_{k=1}^{n} a_k(z_k-\zeta_k)=0,$$

и тогда барьером будет функция $f_\zeta=1/L_\zeta$. Следовательно, каждая выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ есть область голоморфности. Однако выпуклость не является необходимым признаком голоморфности: произведение плоских областей всегда есть область голоморфности, а такое произведение может и не быть выпуклым. Тем не менее если надлежащим образом обобщить понятие выпуклости, то можно прийти к необходимому и достаточному признаку. Одно из таких обобщений основано на том, что выпуклую оболочку множества $K\subset\mathbb{R}^n$ можно описать как совокупность точек, в к-рых значение любой линейной функции не превосходит верхней грани значений этой функции на K. По аналогии, голоморфно выпуклой оболочкой множества $K\subset D\subset\mathbb{C}^n$ наз. совокупность

$$\hat{K}_O=\left\{z\in D:\,|f(z)|\leqslant\sup_{\zeta\in K}|f(\zeta)|\quad\text{для всех } f\in O(D)\right\},$$

где $O(D)$ означает множество всех голоморфных в области D функций. Область $D\subset\mathbb{C}^n$ наз. г о л о м о р ф н о в ы п у к л о й, если из того, что множество компактно принадлежит D, вытекает, что и $\hat{K}_H$ компактно принадлежит D. Голоморфная выпуклость является необходимым и достаточным условием области голоморфности. Этот критерий, однако, не очень эффективен, ибо голоморфная выпуклость трудно проверяется.

Другое обобщение связано с понятием *плюрисубгармонической функции*, к-рая является комплексным аналогом выпуклой функции. Выпуклую функцию в нек-рой области из $\mathbb{R}^n$ можно определить как функцию, сужения к-рой на принадлежащие области отрезки прямых $x=x^0+\omega t$ (здесь x^0, $\omega\in\mathbb{R}$, а t — действительный параметр) являются выпуклыми функциями от t. Плюрисубгармонической в области $D\subset\mathbb{C}^n$ наз. такую полунепрерывную сверху в этой области действительную функцию φ, сужение к-рой на принадлежащие D части комплексной прямой $z=z^0+\omega\zeta$ (z^0, $\omega\in\mathbb{C}^n$, ζ — комплексный параметр) является субгармонич. функцией от ζ. Если φ дважды непрерывно дифференцируема, то условие ее плюрисубгармоничности по правилу дифференцирования сложных функций выражается условием неотрицательности эрмитовой формы

$$H(\omega,\bar{\omega})=\sum_{j,\,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}\omega_j\overline{\omega_k},$$

к-рая наз. ф о р м о й Л е в и.

Область $D\subset\mathbb{C}^n$ наз. п с е в д о в ы п у к л о й, если для нее функция $-\ln d(z,\partial D)$, где $d(z,\partial D)$ означает

евклидово расстояние точки $z \in D$ до границы ∂D, является плюрисубгармонич. в этой области. Псевдовыпуклость также является необходимым и достаточным условием области голоморфности.

В ряде случаев псевдовыпуклость области удается проверить эффективно.

Для областей, не являющихся областью голоморфности, возникает задача описания ее о б о л о ч к и г о л о м о р ф н о с т и, т. е. наименьшей области голоморфности, в к-рую аналитически продолжается любая функция, голоморфная в D. Для областей простейших типов оболочку голоморфности удается построить эффективно. Однако в общем случае задача неразрешима в классе однолистных областей. В процессе аналитич. продолжения функций за пределы заданной области D в нек-рых случаях возникает многозначность, для избежания к-рой приходится вводить многолистные о б л а с т и н а л о ж е н и я над D, аналогичные *римановым поверхностям*. В классе областей наложения задача построения оболочек голоморфности всегда разрешима. Эта задача также имеет приложения в теоретич. физике, именно — в квантовой теории поля.

Переход от плоскости к комплексному пространству существенно расширяет круг геометрич. вопросов, связанных с голоморфными функциями. В частности, такие функции естественно рассматривать не только в областях, но и на к о м п л е к с н ы х м н о г о о б р а з и я х — гладких многообразиях четной действительной размерности, соотношения соседства к-рых биголоморфны. Среди них особую роль играют *Штейна многообразия* — естественные обобщения областей голоморфности.

Ряд вопросов анализа сводится к задаче построения в данной области голоморфной функции с заданными нулями или мероморфной функции с заданными полюсами и главными частями лорановских разложений. В плоском случае, согласно теоремам Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера и их обобщениям, эти задачи решены для произвольной области. В пространственном случае это не так — разрешимость аналогичных задач, к-рые наз. п р о б л е м а м и К у з е н а, обусловлена нек-рыми топологич. и аналитич. свойствами рассматриваемых комплексных многообразий.

Центральным пунктом решения проблем Кузена является построение из локально заданных функций с теми или иными свойствами глобальной функции, определенной на всем рассматриваемом многообразии и обладающей теми же локальными свойствами. Для такого рода построений оказались очень хорошо приспособленными методы т е о р и и п у ч к о в, к-рая возникла в процессе алгебраико-топологич. обработки понятия аналитич. функции и нашла важные применения в самых разных отраслях математики. Решение проблемы Кузена методами теории пучков получено в работах А. Картана (H. Cartan) и Ж. Серра (J. Serre).

Б. В. Шабат.

Современная теория аналитических функций и их обобщений представляет собой одну из важнейших ветвей анализа, тесно связанную с самыми разнообразными разделами математики и имеющую многочисленные приложения к теоретич. физике, механике и технике.

Фундаментальные исследования по теории А. ф. и их приложениям принадлежат советским математикам. Широкий интерес к теории функций комплексного переменного в России возник в нач. 20 в. в связи с замечательными исследованиями рус. ученых по приложениям теории А. ф. к различным вопросам механики сплошных сред. Важнейшие задачи гидро- и аэродинамики были решены на базе методов теории А. ф. в трудах Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина. В работах Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили эти методы нашли глубокие приложения к теории упру-

гости. В последующие годы теория функций комплексного переменного получила в нашей стране всестороннее развитие. Фундаментальные исследования В. В. Голубева, Н. Н. Лузина, И. И. Привалова и В. И. Смирнова — по граничным свойствам А. ф., М. А. Лаврентьева — по геометрич. теории функций комплексного переменного (квазиконформные отображения и их приложения к газовой динамике), М. В. Келдыша, М. А. Лаврентьева и Л. И. Седова — по приложениям методов теории А. ф. к задачам механики сплошных сред, Д. Е. Меньшова — по теории моногенности, М. В. Келдыша, М. А. Лаврентьева и С. Н. Мергеляна — по теории приближений функций комплексного переменного, И. Н. Векуа — по теории обобщенных А. ф. и их приложениям, А. О. Гельфонда — по теории интерполяции, Н. Н. Боголюбова и В. С. Владимирова — по теории А. ф. нескольких переменных и ее применениям в квантовой теории поля и многие др. сыграли определяющую роль в развитии соответствующих разделов теории А. ф. Теория А. ф. одного и нескольких комплексных переменных и их обобщений продолжает активно развиваться. См. *Граничные свойства аналитических функций*, *Квазиконформное отображение*, *Граничные задачи теории аналитических функций*, *Приближение функций* комплексного переменного.

Лит.: [1] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 11 изд., М., 1967; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 8 изд., т. 3, ч. 2, М., 1969; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [4] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973; [5] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [6] Евграфов М. А., Аналитические функции, 2 изд., М., 1968; [7] Свешников А. Г., Тихонов А. Н., Теория функций комплексной переменной, М., 1967; [8] Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, 2 изд., ч. 1—2, М., 1962—63; [9] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [10] Маркушевич А. И., Очерки по истории теории аналитических функций, М.—Л., 1951; [11] Математика в СССР за тридцать лет, 1917—1947, М.—Л., 1948, с. 319—414; [12] Математика в СССР за сорок лет, 1917—1957, т. 1, М., 1959, с. 381—510; [13] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1—2, 2 изд., М., 1976; [14] Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, М., 1969. *А. А. Гончар, Б. В. Шабат.*

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ АБСТРАКТНАЯ, аналитическое отображение банаховых пространств,— функция $f(x)$, действующая из нек-рой области D банахова пространства X в банахово пространство Y и дифференцируемая по Фреше всюду в D, т. е. такая, что для каждой точки $a \in D$ существует ограниченный линейный оператор $\delta f(a, \cdot)$ из X в Y, для к-рого выполняется соотношение:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \|h\|^{-1} \cdot \|f(a+h) - f(a) - \delta f(a, h)\| = 0,$$

где $\|\cdot\|$ обозначает норму в X или Y; $\delta f(a, h)$ наз. дифференциалом Фреше функции f в точке a.

Другой подход к понятию А. ф. а. возникает из дифференцируемости по Гато. Функция $f(x)$ из D в Y наз. слабо аналитической в D, или дифференцируемой по Гатов D, если для каждого линейного непрерывного функционала y' над пространством Y и каждого элемента $h \in X$ комплексная функция $y'(f(x+\xi h))$ является голоморфной функцией комплексного переменного ξ в круге $|\xi| < \rho(x, h)$, где $\rho(x, h) = \sup|\xi|$, $x+\xi h \in D$. Всякая А. ф. а. в области D непрерывна и слабо аналитична в D. Обратное также верно, причем условие непрерывности можно заменить локальной ограниченностью или непрерывностью по Бэру.

Термин «А. ф. а.» иногда используется в более узком смысле, когда под ним понимается функция $f(z)$ комплексного переменного z со значениями в банаховом или даже линейном локально выпуклом топологич.

пространстве Y. В этом случае всякая слабо аналитич. функция $f(z)$ в области D плоскости комплексного переменного $\mathbb{C}$ является А. ф. а. Можно также сказать, что функция $f(z)$ будет А. ф. а. в области $D\subset\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда $f(z)$ непрерывна в D и для любого простого замкнутого спрямляемого контура $L\subset D$ интеграл $\int_L f(z)dz$ обращается в нуль. Для А. ф. а. $f(z)$ комплексного переменного z справедлива интегральная формула Коши (см. *Коши интеграл*).

Пусть $f(x)$ — слабо аналитич. функция в области D банахова пространства X. Тогда $f(x+\xi h)$, как функция комплексного переменного ξ, имеет производные всех порядков в области $\tilde{D}=\{\xi;\ x+\xi h\in D\}$, $h\in X$, причем эти производные суть А. ф. а. из $\tilde{D}$ в Y. Если множество $\{x+\xi h;\ |\xi|\leqslant 1\}$ принадлежит D, то

$$f(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\delta^n f(x,\ h),$$

где ряд сходится по норме и

$$\delta^n f(x,\ h)=\frac{d}{d\xi^n}f(x+\xi h)\,|_{\xi=0}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}f(x+\xi h)\,\xi^{-n-1}\,d\xi.$$

Функция $y=P(x)$ из X в Y наз. полиномом относительно переменного x степени не выше m, если для всех x, $h\in X$ и для всех комплексных ξ

$$P(x+\xi h)=\sum_{\nu=0}^{m}P_\nu(x,\ h)\,\xi^\nu,$$

где функции $P_\nu(x,\ h)$ не зависят от ξ. Степень $P(x)$ точно равна m, если $P_m(x,\ h)\neq 0$. Степенным рядом наз. ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)$, где $P_n(x)$ — однородные полиномы степени n такие, что $P_n(\alpha x)=\alpha^n P_n(x)$, $x\in X$, для всех комплексных α. Всякий слабо сходящийся степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)$ в области D сходится и по норме к нек-рой слабо аналитической функции $f(x)$ в D, причем $P_n(x)=\delta^n f(0,\ x)/n!$, $0\in D$. Функция $f(x)$ является А. ф. а. в D тогда и только тогда, когда в окрестности каждой точки $a\in D$ она разлагается в степенной ряд

$$f(a+h)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(h),$$

где все $P_n(h)$ непрерывны в X.

На А. ф. а. переносятся с соответственными изменениями многие основные результаты классич. теории аналитич. функций такие, как *максимума модуля принцип*, теоремы единственности, *Витали теорема*, *Лиувилля теорема* и др. Множество всех А. ф. а. в области D образует линейное пространство.

Понятие А. ф. а. обобщается и на более широкие классы пространств X и Y, напр. на локально выпуклые топологич. пространства, банаховы пространства над произвольным полным нормированным полем и т.д.

Лит.: [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962; [2] Эдвардс Р.-Э., Функциональный анализ. Теория и приложения, пер. с англ., М., 1969; [3] Шварц Л., Анализ, пер. с англ., т. 2, М., 1972.

А. А. Данилевич, Е. Д. Соломенцев.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ВЕКТОР в пространстве V представления T группы Ли G — вектор $\xi\in V$, для к-рого отображение $g\to T(g)\xi$ является вещественно аналитич. вектор-функцией на G со значениями в V (см. *Представлений теория*). Если T — слабо непрерывное представление группы Ли G в банаховом пространстве V, то множество V^ω аналитич. векторов плотно в V (см. [1], [2], [3]). Существует обобщение этой теоремы на широкий класс представлений в локально выпуклых пространствах [5]. Было доказано [6], что представление связной группы Ли G в банаховом пространстве V однозначно восстанавли-

вается по соответствующему представлению алгебры Ли группы G в пространстве V^ω.

Аналитический вектор для неограниченного оператора A в банаховом пространстве V с областью определения $D(A)$ определяется как вектор

$$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n),$$

для к-рого ряд

$$\sum \frac{x^n}{n!} \| A^n \xi \|$$

имеет положительный радиус сходимости. Это понятие, введенное в [2], является частным случаем общего понятия А. в.— здесь в качестве группы Ли G выступает множество точек действительной прямой с операцией сложения. Оно оказалось полезным в теории операторов в банаховых пространствах и в теории эллиптич. дифференциальных операторов.

Лит.: [1] Cartier P., Dixmier J., «Amer. J. Math.», 1958, v. 80, p. 131—45; [2] Нелсон Э., «Математика», 1962, 6 : 3, с. 89—131; [3] Гординг Л., «Математика», 1965, 9 : 5, с. 78—94; [4] Cartier P., Vecteurs analytiques. Séminaire Bourbaki, Mai 1959; [5] Moore R. T., «Memoirs Amer. Math. Soc.», 1968, v. 78; [6] Harish-Chandra, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 75, p. 185—243. *А. А. Кириллов.*

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ — см. *Дифференциал на римановой поверхности.*

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ЛАНДШАФТ, аналитический рельеф, поверхность модуля,— геометрич. изображение модуля $|f(z)|$ аналитич. функции $f(z)$, $z=x+iy$. Аналитическим ландшафтом функции $f(z)$ наз. поверхность над плоскостью (x, y), имеющая аппликатой значение $|f(z)|$. А. л. позволяет иногда составить наглядное представление о поведении нек-рых конкретных функций. А. л. основных функций см. в [2].

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1, М., 1976; [2] Янке Е., Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, пер. с нем., 3 изд., М., 1959. *Е. Д. Соломенцев.*

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБРАЗ — расширение понятия *полной аналитической функции*, получающееся при рассмотрении всех возможных элементов аналитич. функции в виде обобщенных степенных рядов (рядов Пюизё)

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^{\nu/n}, \quad \sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu z^{-\nu/n}, \qquad (*)$$

где z — комплексное переменное, m — целое, а n — натуральное числа, сходящихся соответственно в областях $|z-z_0|<r$, $|z|>r>0$. А. о. можно отождествить с классом всех элементов вида (*), получающихся друг из друга посредством *аналитического продолжения*. А. о. отличается от полной аналитич. функции присоединением всех разветвленных элементов вида (*) с $n>1$, получающихся при аналитич. продолжении ее регулярных элементов с $n=1$. После введения соответствующей топологии А. о. превращается в *риманову поверхность* данной функции.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 2, М., 1968, гл. 8. *Е. Д. Соломенцев.*

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР в точке x_0— оператор A, действующий из одного банахова пространства в другое и допускающий представление вида

$$A(x_0+h)-Ax_0=\sum_{k=1}^{\infty} C_k h,$$

где C_k — форма порядка k, а ряд сходится равномерно в нек-ром шаре $\|h\|<r$. Оператор наз. аналитическим в области G, если он является А. о. в каждой точке этой области. А. о. бесконечно дифференцируемы; в случае комплексных пространств аналитичность в области есть следствие дифференцируемости (по Гато) в каждой точке этой области. Примерами А. о. могут служить интегро-степенные ряды Ляпунова, операторы Гаммерштейна и Урысона с гладк-

кими ядрами в пространстве C непрерывных функций.

Лит.: [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962; [2] Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969.

П. П. Забрейко.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОЛИЭДР — область П комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ $n \geqslant 1$, представимая посредством неравенств $|f_i(z)| < 1$, где функции $f_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, голоморфны в нек-рой области $D \subset \mathbb{C}^n$, содержащей П, то есть $\Pi = \{z \in D;\ |f_i(z)| < 1,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$. Предполагается также, что П компактна в D. В случае, если $f_i(z)$ — полиномы, А. п. наз. полиномиальным полиэдром. Если $m = n$ и $f_i(z) = a_i z_i$, А. п. является *поликругом*. Гранями А. п. наз. множества $\sigma_i = \{z \in D;\ |f_i(z)| = 1;\ |f_j(z)| < 1,\ j \neq i\}$. Пересечение любых k различных граней ($2 \leqslant k \leqslant n$) наз. ребром А. п. Если $m \geqslant n$ и все грани имеют размерность $2n-1$, а каждое ребро — размерность не выше $2n-k$, то А. п. есть *Вейля область*. Совокупность n-мерных ребер $\sigma_{i_1 \ldots i_n} = \sigma_{i_1} \cap \ldots \cap \sigma_{i_n}$ образует остов А. п. Понятие А. п. играет существенную роль в вопросах интегральных представлений аналитич. функций многих переменных.

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПУЧОК — пучок F на аналитич. пространстве X такой, что для любой точки $x \in X$ множество F_x является *модулем* над кольцом O_x ростков голоморфных функций в точке x, причем отображение $(f, \alpha) \to f\alpha$, определенное на множестве пар (f, α), где $f \in O_x$, $\alpha \in F_x$, для $x \in X$ является непрерывным отображением $O \times F$ в F.

М. И. Войцеховский.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ФУНКЦИОНАЛ — элемент f пространства $H'(\Omega)$, сопряженного к пространству $H(\Omega)$ аналитич. функций, определенный на открытом подмножестве Ω пространства $\mathbb{C}^n$, т. е. функционал на $H(\Omega)$. Напр., распределение с компактным носителем является А. ф. Существует компакт $K \subset \Omega$, наз. носителем А. ф. f, на к-ром сосредоточен f: для любого открытого множества $\omega \supset K$ функционал f продолжается на $H(\omega)$ так, что для всех $u \in H(\Omega)$ имеет место

$$|f(u)| \leqslant C_\omega \sup |u|,$$

где C_ω — константа, зависящая от ω. При этом существует мера μ с носителем в K такая, что

$$f(u) = \int_\Omega u \, d\mu.$$

Аналогично определяется А. ф. на пространстве действительнозначных функций.

М. И. Войцеховский.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ (формула) — совокупность действий, к-рые нужно проделать в определенном порядке над значением аргумента и константами, чтобы получить значение функции. Каждая функция одного переменного x с не более чем счетным числом точек разрыва допускает А. в. $A(x)$, построенное лишь из трех действий (сложение, умножение, переход к пределу по натуральным числам), употребленных не более чем в счетном числе, отправляясь от аргумента x и констант, напр.,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

А. в., изображающих данную функцию, имеется бесконечно много, если существует хотя бы одно. Так, функция, тождественно равная нулю, изобразима рядом:

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}(x-n)}{n!}$$

и из любого А. в. $A(x)$ всегда можно получить другое, тождественно ему равное:

$$A(x) + B(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}(x-n)}{n!},$$

где $B(x)$ — произвольное А. в.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., Теория функций действительного переменного. Общая часть, 2 изд., М., 1948.

Б. В. Кутузов.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ — устаревший термин; обозначает множество, дополнительное к *A-множеству* (на числовой прямой). *П. С. Александров.*

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОЛЬЦО — кольцо ростков аналитич. функций в точке *аналитического пространства*. Более точно: пусть k есть поле с нетривиальным *абсолютным значением* (обычно предполагаемое полным) и $k\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$ есть k-алгебра степенных рядов от $X_1, \ldots, X_n$ с коэффициентами в k, сходящихся в нек-ром полицилиндре с центром $(0, 0, \ldots, 0)$ (при этом каждый ряд сходится в своем полицилиндре). Аналитическим кольцом над k, или аналитической k-алгеброй, наз. факторкольцо кольца $k\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$; обычно k — поле $\mathbb{R}$ действительных или поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Каждое А. к. является локальным, нётеровым и гензелевым кольцом; его поле вычетов изоморфно k. А. к. $k\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$ будет регулярным (и факториальным) кольцом, а его пополнение в топологии, определяемой максимальным идеалом $(X_1, \ldots, X_n)$, совпадает с кольцом формальных степенных рядов $k[[X_1, \ldots, X_n]]$. Для А. к. верна нормализационная лемма: целостное А. к. является конечным расширением А. к. $k\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$. Вообще, алгебры, конечные над $k\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$, наз. квазианалитическими k-алгебрами. Если k — совершенное поле, то А. к. является *превосходным кольцом*.

Лит.: [1] Dieudonné J., Grothendieck A., «J. Algebra», 1967, v. 5, № 3, p. 305—24; [2] Мальгранж Б., Идеалы дифференцируемых функций, пер. с англ., М., 1968; [3] Abhyankar S. S., Local analytic geometry, N. Y., 1964.

В. И. Данилов.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — многообразие с аналитич. атласом. Структура n-мерного аналитич. многообразия над полным недискретно нормированным полем k на топологич. пространстве M определяется заданием на M аналитич. атласа над k, т. е. набора *карт* со значениями в k^n, покрывающего M, любые две карты из к-рого связаны между собой аналитически. При этом считается, что два атласа определяют одну и ту же структуру, если их объединение является аналитич. атласом. На А. м. M определен пучок $\mathcal{O}$ ростков k-значных аналитич. функций. Возникающий таким образом класс окольцованных пространств $(M, \mathcal{O})$ совпадает с классом гладких аналитич. пространств над k.

В случае, если k — поле действительных чисел $\mathbb{R}$, говорят о вещественных аналитических многообразиях; если k — поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, — о комплексных аналитических (или просто комплексных) многообразиях; если k — поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, — о p-адических аналитических многообразиях. Примерами А. м. являются: n-мерное евклидово пространство k^n, n-мерное проективное пространство над k, аффинные и проективные алгебраич. многообразия над k без особых точек, группы Ли и их однородные пространства.

Понятие А. м. восходит к Б. Риману и Ф. Клейну (B. Riemann, F. Klein), но впервые было точно сформулировано Г. Вейлем в книге [4] для случая римановых поверхностей, т. е. одномерных комплексных многообразий. В настоящее время (70-е гг.) А. м. естественно рассматривать как частный случай *аналитических пространств*, к-рые можно грубо описать как «многообразия с особыми точками». Понятие аналитич. пространства возникло в 50-х гг. 20 в. и стало основным объектом теории аналитич. функций; многие фундаментальные результаты, полученные для А. м., удалось перенести на негладкий случай. Изложение

общих свойств А. м. над произвольным полем можно найти в [3].

Существует тесная связь между теориями вещественных аналитических и *дифференцируемых многообразий*, а также между теориями вещественных и комплексных аналитич. многообразий. Очевидно, на всяком вещественном А. м. определена естественная структура многообразия класса C^∞. В 1936 Х. Уитни (H. Whitney) доказал, что и обратно, на всяком паракомпактном многообразии класса C^∞ можно определить аналитич. структуру над $\mathbb{R}$, индуцирующую исходную гладкую структуру. Из теоремы Г. Грауэрта (H. Grayert) о вложимости паракомпактного аналитич. многообразия над $\mathbb{R}$ в евклидово пространство следует, что эта аналитич. структура определена однозначно с точностью до изоморфизма (не обязательно тождественного) (см. [2]).

На каждом комплексном многообразии M определена естественная структура вещественного А. м. (удвоенной размерности). Ответ на обратный вопрос, т. е. на вопрос о существовании и единственности комплексной структуры на заданном вещественном А. м., получен только в простейших случаях. Так, если M — связное двумерное вещественное А. м., то необходимыми и достаточными условиями существования комплексной структуры на M являются паракомпактность и ориентируемость, а задача классификации этих структур есть классич. задача о *модулях римановых поверхностей*. Имеется классификация компактных *аналитических поверхностей* (т. е. двумерных компактных комплексных многообразий), дающая частичный ответ на поставленный выше вопрос для 4-мерных вещественных многообразий. С другой стороны, при помощи топологич. методов можно указать классы вещественных многообразий, не допускающих почти комплексных и тем более комплексных структур. К таким многообразиям относятся сферы S^{2k} при $k \neq 1, 3$. Описание комплексных структур, достаточно близких к заданной, дает теория *деформаций* аналитических структур, важную роль в к-рой играют банаховы А. м.— бесконечномерные аналоги А. м.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов, пер. с франц., М., 1975; [2] Нарасимхан Р., Анализ на действительных и комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1971; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche, 3 Aufl., Stuttg., 1955.

А. Л. Онищик.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО — подмножество полного сепарабельного метрич. пространства, являющееся непрерывным образом пространства иррациональных чисел. Понятие А. м. введено Н. Н. Лузиным [1]. Это классич. определение А. м. обобщается на случай общих метрич. и топологич. пространств.

1) А. м. в произвольном топологич. пространстве X — подмножество этого пространства, являющееся образом замкнутого подмножества пространства иррациональных чисел при полунепрерывном сверху многозначном отображении с бикомпактными образами точек и замкнутым графиком [2]. Если X — хаусдорфово, то последнее условие выполняется автоматически. Если X метризуемо, то это определение эквивалентно классическому.

2) В полном сепарабельном метрич. пространстве классич. А. м. тождественны с *A-множествами*. Этот факт кладется в основу второго определения А. м. (как A-множеств) в общих метрич. и топологич. пространствах (см. [3], [4], [5]). В классе вполне регулярных пространств А. м. в смысле 1) суть абсолютные А. м. в смысле 2). В классе несепарабельных метризуемых пространств используется определение 2), так как 1) дает сепарабельные А. м.

3) А. м. в хаусдорфовом пространстве (см. [6], [7]) — непрерывный образ подмножества бикомпакта типа $F_{\sigma\delta}$.

4) А. м.— непрерывный образ множества, принадлежащего семейству $K_{\sigma\delta}$, где K — семейство всех замкнутых бикомпактных подмножеств нек-рого топологич. пространства (см. [8]). Множество, аналитическое в смысле 3), является аналитическим в смысле 4), а это последнее является аналитическим в смысле 1).

5) В другом направлении дано обобщение в [4]: k-аналитич. множества получаются из замкнутых множеств топологич. пространства с помощью обобщенной *A-операции* (*Бэра пространство* счетного веса заменяется на пространство Бэра веса k) и являются обобщением А. м. в смысле определения 2).

Лит.: [1] Лузин Н. Н., «C. r. Acad. sci.», 1917, v. 164, p. 91—94; [2] Frolik Z., «Mathematika», 1969, v. 16, № 2, S. 153—57; [3] Sierpinski W., General topology, Toronto, 1952; [4] Stone A., «Gen. Topol. and Appl.», 1972, v. 2, № 3, p. 249—70; [5] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970; [6] Шнейдер В. Е., «Уч. зап. МГУ», 1948, в. 135, Математика, т. 2, с. 37—85; [7] Choquet G., «Ann. Inst. Fourier», 1953, t. 5, p. 131—295; [8] Sion M., «Trans. Amer. Math. Sok.», 1960, v. 96, p. 341—54.

А. Г. Елькин.

6) А. м. в теории аналитических функций — множество, определяемое локально как множество общих нулей конечного числа голоморфных функций. Если S — А. м. в открытом подмножестве U пространства n комплексных переменных $\mathbb{C}^n$, то это означает, что для каждой точки $a \in U$ найдется окрестность $V \subset U$ и конечный набор голоморфных в V функций $f_1, \ldots, f_r$ таких, что $S \cap V = \{z \in V : f_1(z) = \ldots = f_r(z) = 0\}$. Если функции f_i можно выбрать (в к.-л. окрестности V) так, что ранг якобиевой матрицы $(\partial f_i/\partial z_j)$ в точке a равен r, то a наз. регулярной точкой А. м. S; число $n-r$ наз. (комплексной) размерностью S в точке a и обозначается $\dim_a S$. Множество S^* всех регулярных точек А. м. S является открытым всюду плотным подмножеством S (в индуцированной топологии S как подмножества U). Его дополнение $S \setminus S^*$ — множество особых точек S — есть А. м. в U, нигде не плотное на S.

По определению,

$$\dim_a S = \overline{\lim_{z \in S^*,\, z \to a}} \dim_z S, \quad a \in S;$$

размерностью А. м. S наз. число

$$\dim S = \sup_{a \in S} \dim_a S.$$

А. м. S наз. однородным k-мерным, если $\dim_a S = k$ для всех $a \in S$. Для каждого k, $0 \leqslant k \leqslant \dim S$, множество $S_k = \{a \in S : \dim_a S = k\}$ является однородным k-мерным А. м. в $U \setminus \bigcup_{j>k} S_j$. Таким образом, всякое А. м. в U представляется в виде конечного объединения однородных А. м. $S = \bigcup S_k$. В особых точках $\dim_a (S \setminus S^*) < \dim_a S$, и поэтому размерность А. м. особых точек однородного k-мерного А. м. в U строго меньше k. Связные компоненты S^* являются комплексными многообразиями. Так как это справедливо и для А. м. $S \setminus S^*$, то получается разложение

$$S = S^* \cup (S \setminus S^*)^* \cup \ldots$$

А. м. на комплексные многообразия. Более удобно разложение

$$S = S_d^* \cup (S \setminus S_d^*)_{d-1}^* \cup \ldots$$

(размерности слагаемых строго убывают, $d = \dim S$), к-рое наз. стратификацией А. м. S; связные компоненты k-го слагаемого этой суммы наз. k-мерными стратами А. м. S.

А. м. S наз. приводимым (в U), если оно является объединением к.-л. двух отличных от него А. м. в U; в противном случае S неприводимо (в U). Всякое неприводимое А. м. в U связно и однородно. А. м. S в U неприводимо тогда и только тогда, когда множество S^* его регулярных точек связно. Замыкание каждой связной компоненты множества S^* — неприводимое А. м. в U; такие А. м. наз. неприводимыми компонентами А. м. S. Всякое

А. м. в U является локально конечным объединением своих неприводимых компонент. Если А. м. не имеют общих неприводимых компонент, то размерность их пересечения строго меньше размерности каждого из них. Если пересечение двух неприводимых А. м. в U содержит множество, открытое на каждом из них, то эти А. м. совпадают (теорема единственности).

А. м. S в U наз. неприводимым в точке $a \in S$, если существует фундаментальная система окрестностей V_i точки a в U такая, что все А. м. $S \cap V_i$ в V_i неприводимы; при этом a наз. точкой неприводимости А. м. S. В окрестности каждой точки неприводимости А. м. устроено как аналитическое накрытие, т. е. для каждой такой точки $a \in S$, $\dim_a S = k$, найдутся связная окрестность $V \subset U$, линейное отображение λ: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ и А. м. $\sigma \in \lambda(V)$ такие, что сужение λ на $S \cap V$ есть собственное отображение на $\lambda(V)$, а сужение λ на $(S \cap V) \setminus \lambda^{-1}(\sigma)$ есть конечнократное локально биголоморфное накрытие над $\lambda(V) \setminus \sigma$. Для неприводимых одномерных А. м. отсюда вытекает (после подходящей линейной замены координат) локальное параметрич. представление вида

$$z_1 = \zeta^m, \ z_2 = f_2(\zeta), \ \ldots, \ z_n = f_n(\zeta),$$

где $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| < r$, m — целое положительное число и функции f_i голоморфны в круге $|\zeta| < r$. Таким образом, в окрестности каждой точки неприводимости одномерное А. м. является топологич. многообразием. Для А. м. большей размерности это в общем неверно.

Объединение конечного числа и пересечение любого семейства А. м. в U суть снова А. м. в U. Всякое аналитическое в U множество замкнуто в U. Всякое компактное А. м. в $U \subset \mathbb{C}^n$ состоит из конечного числа точек. Если U связно и А. м. $S \neq U$, то $U \setminus S$ открыто, всюду плотно в U и тоже связно. Множество всех изолированных точек А. м. S в U не имеет в U предельных точек. Более того, всякое А. м. локально связно. Связное А. м. линейно связно.

Всякое А. м. в U размерности d локально в U имеет конечную $2d$-мерную меру Хаусдорфа mes_{2d}. Если $\dim_a S = k$, то существуют положительные константы c и C (зависящие от a и S) такие, что

$$cr^{2k} \leqslant \mathrm{mes}_{2k}(S \cap \{|z - a| < r\}) \leqslant Cr^{2k}$$

для всех достаточно малых $r > 0$.

Семейство А. м. инвариантно относительно *биголоморфных отображений*. Более того, если S — А. м. в U и $f: U \to U'$ — собственное голоморфное отображение, то $f(S)$ — А. м. в U'.

Определение А. м. на комплексных многообразиях аналогично определению для $\mathbb{C}^n$; при этом сохраняются все перечисленные свойства, за исключением одного: в общем случае существуют компактные, но не дискретные А. м. В конкретном многообразии А. м. могут обладать нек-рыми дополнительными свойствами. Напр., в комплексном n-мерном проективном пространстве всякое А. м. является алгебраическим, т. е. совпадает с множеством общих нулей нек-рого конечного набора однородных многочленов.

Действительные А. м. в открытых подмножествах $\mathbb{R}^n$ определяются так же, только вместо голоморфных надо брать действительные аналитич. функции. Каждое действительное А. м. является пересечением нек-рого А. м. (в нек-ром открытом подмножестве $\mathbb{C}^n$) с действительным подпространством $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$.

Лит.: [1] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [2] Эрве М., Функции многих комплексных переменных. Локальная теория, пер. с англ., М., 1965. *Е. М. Чирка.*

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, аналитический морфизм,— морфизм *аналитических пространств*, рассматриваемых как *окольцованные про-*

странства. А. о. пространства $(X, \mathcal{O}_X)$ в пространство $(Y, \mathcal{O}_Y)$ есть пара (f_0, f_1), где

$$f_0 : X \to Y$$

— непрерывное отображение, а

$$f_1 : f_0^{-1}(\mathcal{O}_Y) \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

— гомоморфизм пучков колец на X. В случае комплексных пространств А. о. наз. также г о л о м о р ф н ы м о т о б р а ж е н и е м.

В случае, когда $(X, \mathcal{O}_X)$ и $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — приведенные аналитич. пространства, гомоморфизм f_1 полностью определяется отображением f_0 и является обратным отображением ростков функций, отвечающим f_0. Таким образом, в этом случае А. о.— это такое отображение $f : X \to Y$, что для любого $x \in X$ и любого $\varphi \in \mathcal{O}_{f(x)}$ имеет место $\varphi \circ f \in \mathcal{O}_x$.

Слоем А. о.

$$f = (f_0, f_1) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

в точке $y \in Y$ наз. аналитич. подпространство

$$f^{-1}(y) = \left(f_0^{-1}(y),\ \mathcal{O}_X / f_1(m_y)\,\mathcal{O}_X \mid f_0^{-1}(y)\right)$$

пространства $(X, \mathcal{O}_X)$, где $m_y \in \mathcal{O}_y$ — пучок ростков функций, обращающихся в 0 в точке y. Если положить

$$d(x) = \dim_x f^{-1}(f_0(x)),\ x \in X,$$

то имеет место неравенство

$$\dim_x X \leqslant \dim_{f_0(x)} Y + d(x). \qquad (*)$$

Если X и Y — приведенные комплексные пространства, то для всякого $l \geqslant 0$ множество

$$X_l = \{x \in X \mid d(x) \geqslant l\}$$

является аналитическим в X.

А. о. $f = (f_0, f_1)$ наз. плоским в точке $x \in X$, если $\mathcal{O}_{X,x}$ является *плоским модулем* над кольцом $\mathcal{O}_{Y, f_0(x)}$. В этом случае неравенство $(*)$ превращается в равенство. А. о. наз. п л о с к и м, если оно — плоское в каждой точке $x \in X$. Плоское А. о. комплексных пространств является открытым. Обратно, если f_0 открыто, Y гладко, а X и все слои приведены, то f — плоское А. о. Множество точек комплексного или жесткого аналитич. пространства X, у к-рых А. о. f не является плоским, будет аналитическим в X. Если X и Y — приведенные комплексные пространства, причем X имеет счетную базу, то в Y существует открытое всюду плотное множество, над к-рым f — плоское А. о. Если А. о.

$$f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

комплексных пространств плоско, то множества тех $x \in X$, в к-рых слой $f^{-1}(x)$ не приведен или ненормален, являются аналитическими в $(X, \mathcal{O}_X)$.

Пусть $f : X \to Y$ — А. о. приведенных комплексных пространств. Если $\dim X < \infty$, то существует стратификация

$$\varnothing = X(-1) \subseteq X(0) \subseteq \ldots \subseteq X(r) \subseteq \ldots,$$

где $X(r)$ — аналитич. множества и $X(r) = X$ для больших r, со следующим свойством: всякая точка $x \in X(r) \setminus X(r-1)$ обладает такой окрестностью U в X, что $f(U \cap X(r))$ — локальное аналитич. множество в Y, все неприводимые компоненты ростка к-рого в точке $f(x)$ имеют размерность r. В частности, если f собственное, то $f(X)$ — аналитич. множество в Y. Этот факт является частным случаем теорем конечности для А. о.

Пусть X, Y — комплексные пространства, причем X компактно. Тогда множество $\mathrm{Mor}(X, Y)$ всех А. о. $f : X \to Y$ можно снабдить такой структурой комплексного пространства, что отображение

$$\mathrm{Mor}(X, Y) \times X \to Y,$$

переводящее пару (f, x) в $f_0(x)$, аналитично. В частности, группа автоморфизмов компактного комплекс-

ного пространства X является комплексной группой Ли, аналитически действующей на X.

Лит.: [1] Remmert R., «Math. Ann.», 1956, Bd 130, S. 410—41; [2] его же, там же, 1957, Bd 133, S. 328—70; [3] Stein K., Analytischer Abbildungen allgemeiner analytischer Räume. Colloque de topologie, Strasbourg, Avril, 1954; [4] Frisch J., «Inventiones math.», 1967, Bd 4, S. 118—38.

Д. А. Пономарев.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ, голоморфное представление,— представление комплексной группы Ли G в топологич. векторном пространстве E, обладающее тем свойством, что все матричные элементы $(\varphi(g)\xi, \eta)$, $\xi \in E$, $\eta \in E'$ (E' — сопряженное топологическое векторное пространство) голоморфны на G. Представление φ наз. антианалитическим представлением, если его матричные элементы становятся голоморфными после комплексного сопряжения. Аналитическое (антианалитическое) представление связной группы Ли G однозначно определяется соответствующим представлением алгебры Ли этой группы (см. *Представление алгебры Ли*). Если G — полупростая комплексная группа Ли, то все ее топологически неприводимые аналитические (антианалитические) представления конечномерны.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Теория представления групп, М., 1976; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970.

Д. П. Желобенко.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ функции — доопределение функции f_0, определенной на нек-ром подмножестве E комплексного многообразия M, до функции f, голоморфной в нек-рой области $D \subset M$, содержащей E, такое, что сужение $f|E = f_0$ функции f на E совпадает с f_0. Отправным в теории А. п. является понятие (аналитического) элемента, т. е. пары (D, f), где D — область на M и f — голоморфная в D функция. Говорят, что элементы (D_0, f_0) и (D_1, f_1) составляют непосредственное А. п. друг друга через связную компоненту Δ множества $D_0 \cap D_1$, если $f_0|\Delta = f_1|\Delta$. Элемент (D_0, f_0), по определению, аналитически продолжается в граничную точку $\zeta \in \partial D \subset M$, если существует непосредственное А. п. (D_1, f_1) элемента (D_0, f_0) через Δ такое, что $\zeta \in \bar{\Delta} \cap D_1$. Максимальным (в M) А. п. (D_0, f_0) наз. элемент (D, f), аналитически продолжающий f_0 в область $D \supset D_0$, но не продолжаемый аналитически ни в одну граничную точку D. Максимальное А. п. (D_0, f_0) в M единственно, но не всегда существует. Для устранения этого недостатка вводятся области наложения над M (римановы поверхности в случае $M = \mathbb{C}$), к-рые строятся из элементов, аналитически продолжающих (D_0, f_0). Элемент (D, f) наз. А. п. элемента (D_0, f_0), если существует конечный набор элементов (D_i, f_i), $i = 0, 1, \ldots, n$, и связных компонент Δ_i соответственно в $D_i \cap D_{i+1}$ таких, что $(D_n, f_n) = (D, f)$ и (D_i, f_i), (D_{i+1}, f_{i+1}) являются непосредственными А. п. друг друга через Δ_i. Говорят, что голоморфная функция f_0, определенная первоначально в области D_0, аналитически продолжается в точку $z \in M$, если существует А. п. (D, f) элемента (D_0, f_0) такое, что $z \in D$. Среди элементов, продолжающих f_0 в точку z, вводится отношение эквивалентности: $(D', f') \sim (D'', f'')$, если $z \in D' \cap D''$ и $f' = f''$ в окрестности z. На множестве классов эквивалентности D_f (для всех возможных z) естественно вводится топология и комплексная структура области наложения над M. Функция f_0 естественно поднимается в D_f (значение на классе эквивалентности в z, содержащем (D_0, f_0), полагаем равным $f_0(z)$), аналитически продолжается на всю D_f и в определенном смысле не продолжается ни в одну граничную точку D_f над M.

В случае, когда M есть комплексная плоскость $\mathbb{C}$ или, более общо́, комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, этот процесс А. п. описывается проще. Канони-

ческим элементом наз. пара (D_a, f_a), где $a \in \mathbb{C}^n$, f_a — степенной ряд с центром в точке a с непустой областью сходимости D_a. Канонич. элемент (D_b, f_b) наз. А. п. (D_a, f_a) вдоль пути γ: $[0, 1] \to \mathbb{C}^n$, если существует семейство канонич. элементов (D_t, f_t), $0 \leqslant t \leqslant 1$, с центрами $a_t = z(t)$ таких, что $(D_0, f_0) = (D_a, f_a)$, $(D_1, f_1) = (D_b, f_b)$ и для каждого $t_0 \in \gamma$ элементы (D_t, f_t) являются непосредственными А. п. (D_{t_0}, f_{t_0}) для всех t, достаточно близких к t_0. Семейство (D_t, f_t) на самом деле определяется однозначно. Если γ_τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, есть непрерывное семейство путей в $\mathbb{C}^n$ с общими концами a и b и если (D_a, f_a) аналитически продолжается вдоль каждого γ_τ, то результат (D_b, f_b) не зависит от τ (*монодромии теорема*). Точками D_f в случае $\mathbb{C}^n$ являются канонич. элементы (D_a, f_a), получаемые посредством А. п. вдоль всевозможных путей в $\mathbb{C}^n$; f_a поднимается в D_f аналитически на всю D_f до голоморфной функции f, причем D_f есть область голоморфности f.

Описанный общий процесс А. п. практически малоэффективен, поэтому в анализе используется много специальных методов А. п. Сюда относятся различные аналитич. представления: интегралы, зависящие от параметра [интеграл типа Коши (см. *Коши интеграл*), *Лапласа интеграл*, интеграл Бореля (см. *Бореля преобразование*) и др.], замена переменного в степенном ряде, специальные способы суммирования степенных рядов [разложение Бореля в ряд многочленов, сходящийся в максимальном полигоне (см. *Бореля метод суммирования*), ряд Миттаг-Леффлера, сходящийся в максимальной звезде (см. *Звезда элемента функции*, *Миттаг-Леффлера метод суммирования*) и др.], принцип симметрии Римана — Шварца (см. *Римана — Шварца принцип*), функциональные и дифференциальные уравнения, определяющие функцию (напр., уравнение $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ для гамма-функции, условия периодичности, четности, симметрии и т. п.), аналитич. выражения через известные функции.

К теме А. п. относятся также исследования о связи между исходным элементом аналитич. функции (рядом Тейлора) и свойствами *полной аналитической функции*, порождаемой этим элементом (см. [1]); результаты об особых точках (критерии особых точек, *Адамара теорема* мультипликационная, *Фабри теорема* об отношении) и особых линиях (теоремы о лакунах и непродолжаемости за границу круга сходимости, напр. *Адамара теорема* о лакунах, *Фабри теорема* о лакунах и др.), теоремы о *сверхсходимости* и о связях А. п. степенного ряда со свойствами целой функции, определяющей его коэффициенты, вопросы мероморфного продолжения, мероморфное продолжение при помощи *Паде аппроксимаций* и др. К А. п. следует отнести и теоремы об устранении особенностей (устранение изолированной особенности ограниченной голоморфной функции, устранение спрямляемых разрезов при условии непрерывности и т. п.), а также большой класс теорем об одновременном продолжении голоморфных функций многих комплексных переменных. В $\mathbb{C}^n$ при $n > 1$ имеются области, из к-рых любая голоморфная функция продолжается в более широкую область (в одномерном случае такого явления нет). Поэтому важной задачей А. п. функций многих комплексных переменных является описание этих более широких областей — так наз. голоморфных расширений, напр. известны описания *голоморфности оболочек* для *Гартогса областей*, n-круговых и *трубчатых областей*, теоремы об устранении компактных особенностей и особенностей коразмерности $\geqslant 2$, *Боголюбова теорема* «острие клина» и теорема В. С. Владимирова о C-выпуклой оболочке (см. [3]). Известно несколько эффективных методов построения голоморфного расширения областей (см. [3]).

А. п. функций действительного переменного сводится к А. п. голоморфных функций, т. к. для любой области $G \subset \mathbb{R}^n$ и любой функции f, аналитической в G, найдутся область $D \subset \mathbb{C}^n$ и голоморфная в D функция $\tilde{f}$ такие, что $D \cap \mathbb{R}^n = G$ и $\tilde{f}|G = f$.

Лит.: [1] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [3] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964. *Е. М. Чирка.*

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — обобщение понятия *аналитического многообразия*. Локальной моделью (и одновременно важнейшим примером) аналитич. пространства над полным недискретно нормированным полем k является *аналитическое множество* X в области U n-мерного пространства k^n над полем k, заданное уравнениями $f_1 = \ldots = f_p = 0$ (где f_i — аналитич. функции в U), к-рое снабжено пучком $\mathcal{O}$, получающимся при ограничении на X пучка $\mathcal{O}_U/I$, где $\mathcal{O}_U$ — пучок ростков аналитич. функций в U, а I — подпучок идеалов, порожденный $f_1, \ldots, f_p$. Аналитическим пространством над k наз. *окольцованное пространство*, локально изоморфное окольцованному пространству $(X, \mathcal{O})$ указанного выше вида. Если k — поле действительных чисел $\mathbb{R}$, говорят о вещественных аналитических пространствах; если k — поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, — о комплексных аналитических (просто комплексных) пространствах; если k — поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, — о p-адических аналитических пространствах.

Аналитическим (голоморфным) отображением одного аналитич. пространства $(X, \mathcal{O}_X)$ в другое $(Y, \mathcal{O}_Y)$ наз. морфизм $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ в смысле теории окольцованных пространств, т. е. пара (φ_0, φ_1), где $\varphi_0 : X \to Y$ — непрерывное отображение, а φ_1: $\varphi_0^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ — гомоморфизм пучков. Точка x А. п. $(X, \mathcal{O})$ наз. простой (или неособой), если x обладает окрестностью, над к-рой $(X, \mathcal{O})$ изоморфно пространству вида $(U, \mathcal{O}_U)$, где U — область в k^n. В противном случае x наз. особой точкой. Пространство наз. гладким, если все его точки просты. Гладкое аналитич. пространство — это не что иное, как аналитич. многообразие.

Размерность $\dim_x X$ А. п. X в точке $x \in X$ определяется как размерность соответствующего аналитич. множества в локальной модели. Глобальная размерность определяется формулой

$$\dim X = \sup_{x \in X} \dim_x X.$$

Пусть m_x — максимальный идеал в локальном кольце $\mathcal{O}_x (x \in X)$. Векторное пространство $T_x(X) = (m_x/m_x^2)^*$ над k наз. касательным пространством к X в точке x, а $T_x^*(X) = m_x/m_x^2$ — кокасательным пространством. Число

$$\operatorname{em}\dim_x X = \dim T_x(X)$$

наз. касательной размерностью, или размерностью вложения, в точке x (последнее наименование связано с тем, что $\operatorname{em}\dim X$ является наименьшим из чисел n таких, что $(X, \mathcal{O})$ в окрестности точки x изоморфно локальной модели в пространстве k^n). Размерность $\dim_x X \leqslant \operatorname{em}\dim_x X$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда x — простая точка. Определяется также размерность

$$\operatorname{em}\dim X = \sup_{x \in X} \operatorname{em}\dim_x X.$$

Каждое аналитич. отображение А. п. $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ определяет линейное отображение $d\varphi_x : T_x(X) \to T_{\varphi_0(x)}(Y)$, к-рое наз. его дифференциалом в точке $x \in X$.

А. п. $(X, \mathcal{O})$ наз. приведенным, если его локальная модель в окрестности любой точки обладает тем свойством, что I состоит из всех ростков голоморфных функций, обращающихся в 0 на $X \subset U$. В случае алгебраически замкнутого поля k это равносильно тому, что слои $\mathcal{O}_x (x \in X)$ пучка $\mathcal{O}$ не содержат нильпотентных элементов. Всякое гладкое пространство является приведенным. Если $(X, \mathcal{O})$ приведено, то можно считать, что $\mathcal{O}$ состоит из ростков нек-рых непрерывных функций на X. Сечения пучка $\mathcal{O}$ на приведенном пространстве $(X, \mathcal{O})$ отождествляются с аналитич. функциями на X, т. е. с *аналитическими отображениями* $X \to k$. Для произвольного А. п. $(X, \mathcal{O})$ имеется естественный эпиморфизм пучков $\mathrm{red} : \mathcal{O} \to \tilde{\mathcal{O}}$ (где $(X, \tilde{\mathcal{O}}$ — приведенное А. п.), к-рый наз. приведением, или редукцией. Если $f \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ — сечение пучка $\mathcal{O}$, то можно говорить о значении сечения f в точке $x \in X$ (оно совпадает со значением аналитич. функции $\mathrm{red}\, f$ в точке x). Поэтому алгебру $\Gamma(X, \mathcal{O})$ и в неприведенном случае часто наз. алгеброй аналитических (голоморфных) функций на $(X, \mathcal{O})$. Пучки $\mathcal{O}$-модулей на А. п. $(X, \mathcal{O})$ наз. также аналитическими пучками.

Если $(X, \mathcal{O})$ — А. п., то каждое открытое $U \subset X$ определяет открытое подпространство $(U, \mathcal{O}|U)$. С другой стороны, можно ввести понятие аналитич. подпространства в $(X, \mathcal{O})$, к-рое обязательно замкнуто. Множество $Y \subset X$ наз. аналитическим, если в окрестности каждой точки $x \in X$ оно определяется конечным числом аналитич. уравнений. С таким множеством связан пучок идеалов $I_Y \subset \mathcal{O}$, состоящий из ростков всех аналитич. функций, равных 0 на Y. Обратно, каждый *аналитический пучок* идеалов конечного типа $I \subset \mathcal{O}$ определяет аналитич. множество $Y \subset X$. Если $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_I | Y$, получается А. п. $(Y, \mathcal{O}_Y)$, к-рое наз. аналитическим подпространством в $(X, \mathcal{O})$; имеется естественный морфизм $(1, \varphi_1) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O})$. Примером аналитич. подпространства в пространстве $(X, \mathcal{O})$ является его редукция.

Понятие А. п. возникло как обобщение понятия аналитич. многообразия. Такое обобщение подсказывала прежде всего алгебраич. геометрия, в к-рой уже давно систематически рассматривались пространства с особыми точками. Влияние идей алгебраич. геометрии непосредственно отразилось на окончательной формулировке понятия А. п. (для комплексных пространств в приведенном случае она была дана в [9], в общем случае — в [6]). В частности, каждая схема конечного типа над полным нормированным полем k естественным образом определяет А. п. над k. Это соответствие схем и А. п. над k для приведенных комплексных пространств изучалось в [9], где теория А. п. была названа «аналитической геометрией». В дальнейшем обе геометрии развивались параллельно, причем обмен идеями между ними существенно способствовал успехам, достигнутым в обеих этих областях.

В теории функций многих комплексных переменных пространства с особыми точками возникли первоначально как *римановы области*, являющиеся аналогом римановых поверхностей функций одного переменного. Используя их в качестве локальных моделей, Х. Бенке и К. Штейн (H. Behnke, K. Stein, 1951) определили нек-рый класс окольцованных пространств, к-рый, как показано в [5], совпадает с классом приведенных *нормальных аналитических пространств*. Локальная геометрия аналитич. множеств в $\mathbb{C}^n$ была изучена еще В. Рюккертом (W. Rückert) в 1932. Наконец, негладкие А. п. естественным образом возникают в теории автоморфных функций, как факторпространства аналитич. многообразий по собственным *дискретным группам* авто-

морфизмов. p-адические аналитич. множества появились впервые в работах Т. Сколема (T. Scolem, 1935) в связи с нек-рыми задачами теории чисел.

Теория А. п. имеет два аспекта — локальный и глобальный. Локальная аналитич. геометрия рассматривает ростки аналитич. множеств в пространстве k^n, снабженные пучками указанного выше вида. Основную роль здесь играет изучение свойств алгебры сходящихся степенных рядов от n переменных над k и ее факторов — так наз. аналитич. алгебр, начало к-рому положил еще К. Вейерштрасс (К. Weierstrass). К локальной теории относятся теория нормализации, изучение особых точек, локальных свойств аналитич. функций и отображений и др. Основные результаты в этой области получены в случае, когда поле k алгебраически замкнуто (см. [1], [4], [7]). Здесь появляется важное понятие *когерентного аналитического пучка*, играющее далее ведущую роль в глобальной теории. В частности, структурный пучок $\mathcal{O}$ А. п. $(X, \mathcal{O})$ и пучок идеалов I_Y любого аналитич. множества $Y \subset X$ оказываются (в случае алгебраически замкнутого k) когерентными. Хорошо изучен также случай $k=\mathbb{R}$.

Глобальная аналитич. геометрия изучает свойства аналитич. функций, отображений и других аналитич. объектов, заданных «в целом» на всем А. п., а также геометрич. свойства этих пространств. В процессе изучения комплексных А. п. были выделены их естественные классы. Это прежде всего класс *Штейна пространств*, к-рый можно грубо охарактеризовать как класс пространств, обладающих достаточно большим запасом глобальных голоморфных функций. Пространства Штейна являются наиболее естественным многомерным обобщением областей комплексной плоскости, рассматриваемых в классич. теории функций одного комплексного переменного. Этот класс пространств по существу совпадает с классом аналитич. подпространств в пространствах $\mathbb{C}^n$. Его алгебраич. аналогом является класс аффинных алгебраич. многообразий (см. *Аффинное многообразие*).

Для области $D \subset \mathbb{C}^n$ голоморфная полнота равносильна тому, что D — *голоморфности область*, т. е. что в D существует голоморфная функция, не продолжающаяся в большую область. Граница области голоморфности обладает свойством псевдовыпуклости, т. е. ведет себя по отношению к локальным аналитич. подмногообразиям в $\mathbb{C}^n$ так же, как выпуклая поверхность по отношению к линейным вещественным подмногообразиям. Вопрос о справедливости обратного утверждения (см. *Леви проблема*) породил ряд исследований и привел к новой характеризации пространств Штейна.

В *известном смысле противоположным* является класс компактных комплексных пространств. Справедливо следующее обобщение классич. теоремы Лиувилля: функции, голоморфные на приведенном компактном пространстве, постоянны на каждой связной компоненте этого пространства и, следовательно, составляют конечномерное векторное пространство. Обобщением этой теоремы являются *конечности теоремы*, утверждающие конечномерность групп когомологий со значениями в когерентном аналитич. пучке. Рассматриваются также *голоморфно выпуклые комплексные пространства*, q-полные, q-псевдовыпуклые, q-псевдовогнутые пространства, являющиеся обобщением пространств Штейна и компактных пространств.

Перечисленные классы комплексных пространств имеют свои аналоги в теории голоморфных отображений. Напр., компактным пространствам соответствуют собственные голоморфные отображения, голоморфно полным — штейновы отображения и т. п. Для многих теорем найдены «относительные» аналоги, причем «абсолютный» вариант теоремы получается из «относительного» в случае, когда все пространство отображается

в точку. Соответствующим обобщением теорем конечности являются теоремы о когерентности прямых образов когерентных аналитич. пучков при голоморфных отображениях, первая и важнейшая из к-рых (для собственных отображений) была доказана Г. Грауэртом (см. [6]).

Большую роль в теории комплексных пространств играют голоморфные отображения специального вида — так наз. *модификации*, т. е. отображения $f: X \to Y$, индуцирующие изоморфизм открытых подпространств $X \setminus X_1 \to Y \setminus Y_1$, где $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$ — нек-рые аналитические множества. При этом говорят, что Y получается из X путем «стягивания» подмножества X_1 на Y_1, а X из Y — путем «раздувания» подмножества Y_1 в X_1. Особый интерес представляют аналитич. подмножества, к-рые можно стянуть в точку (и с к л ю ч и т е л ь н ы е а н а л и т и ч е с к и е м н о ж е с т в а); их характеризация дана Г. Грауэртом (см. [6]). Естественной проблемой аналитич. геометрии является следующая проблема разрешения особенностей: можно ли «раздуть» подпространство А. п. так, чтобы все пространство стало гладким? Следует отметить, что модификации в алгебраич. геометрии изучались еще в 19 в., а в аналитич. геометрии были введены Х. Бенке (H. Behnke) и К. Штейном (K. Stein) в 1951 в связи с понятием римановой области.

Другим естественным объектом изучения, также тесно связанным с идеями алгебраич. геометрии, являются *мероморфные функции* на комплексных пространствах и их обобщения — *мероморфные отображения* (примером может служить «отображение», обратное к модификации). На приведенном компактном комплексном пространстве X мероморфные функции образуют поле степени трансцендентности $t(X) \leqslant \dim X$ [в гладком случае это впервые доказал К. Зигель (C. Siegel) в 1955]. Пространства X, для к-рых $t(X) = \dim X$, образуют класс, весьма близкий к классу проективных алгебраич. многообразий (см. *Алгебраическое пространство*); они могут быть охарактеризованы тем, что являются модификациями гладких проективных алгебраич. многообразий. Другим близким к алгебраич. многообразиям классом А. п. являются *кэлеровы многообразия*. Известен ряд критериев проективности компактного комплексного пространства (см. [3], [6], [13]). Большую роль в развитии этого раздела сыграли работы по автоморфным функциям многих комплексных переменных.

Теория *деформаций* аналитических структур изучает задачу классификации аналитич. объектов заданного типа (напр., всех комплексных структур на заданном вещественном аналитич. многообразии, всех аналитич. подпространств в заданном комплексном пространстве и т. п.), причем цель состоит в том, чтобы ввести на множестве этих объектов «естественную» структуру комплексного пространства, а также задачу описания всех аналитич. объектов, «достаточно близких» к заданному. В первом случае говорят о проблеме глобальных модулей, а во втором — о проблеме локальных модулей. Примером проблемы глобальных модулей является задача классификации всех комплексных структур на компактной римановой поверхности (см. *Модули* римановой поверхности).

Основным аппаратом глобальной аналитич. геометрии являются когерентные аналитические пучки и их когомологии. Первым успехом когомологического метода явилось решение А. Картаном (H. Cartan) аддитивной *Кузена проблемы* и проблемы продолжения голоморфной функции с замкнутого подмногообразия $Y \subset X$ для многообразия Штейна (X, O) [8]; как выяснилось, препятствия к решению этих задач лежат в группах когомологий $H^1(X, O)$ и $H^1(X, I_Y)$ соответственно.

Результаты глобальной теории, как правило, вначале доказывались для комплексных многообразий, а затем уже обобщались на случай комплексных пространств. Возникающие при этом обобщении трудности часто требовали разработки совершенно новых методов. На комплексном многообразии когомологии локально свободного аналитич. пучка можно выразить в терминах *дифференциальных форм* (теорема Дольбо — Серра), что дает возможность применять для их изучения методы теории эллиптич. дифференциальных уравнений и другие аналитич. методы. В негладком случае этот путь связан с большими трудностями, и часто приходится задавать классы когомологий другими способами, напр., с помощью коцепей Чеха в подходящем покрытии. Здесь оказалась полезной техника *банаховых аналитических пространств*, развитая в связи с проблемами модулей.

См. также *Вещественное аналитическое пространство*, *Жесткое аналитическое пространство*.

Лит.: [1] Abhyankar S., Local analytic geometry, N. Y.—L., 1964; [2] Bănică C., Stănăsilă O., Metode algebrice în theoria globală a spaţiilor complexe, Bucureşti, 1974; [3] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [4] Grauert H., Remmert R., Analytische Stellenalgebren, B., 1971; [5] их же, «Math. Ann.», 1958, Bd 136, S. 245—318; [6] Комплексные пространства, сб. переводов, М., 1965; [7] Narasimhan R., Introduction to the theory of analytic spaces, B., 1966; [8] Расслоенные пространства и их приложения, сб. переводов, М., 1958, с. 352—62; [9] Serre J.-P., «Ann. Inst. Fourier», 1956, t. 6, p. 1—42; [10] Фукс Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, 2 изд., М., 1963; [11] Хёрмандер Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968; [12] Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1973; [13] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961.

А. Л. Онищик.

АНАЛЛАГМАТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — геометрия, изучающая свойства фигур, инвариантные относительно *круговых преобразований* расширенной плоскости, т. е. евклидовой плоскости, пополненной бесконечно удаленной точкой.

А. Б. Иванов.

АНГАРМОНИЧЕСКОЕ ОТНОШЕНИЕ — то же, что *двойное отношение*, или сложное отношение.

АНГЕРА ФУНКЦИЯ — функция

$$\mathbf{J}_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\nu\varphi - z\sin\varphi)\,d\varphi, \qquad (*)$$

удовлетворяющая неоднородному уравнению Бесселя:

$$z^2y''+zy'+(z^2-\nu^2)\,y=\frac{1}{\pi}\,(z-\nu)\sin\nu\pi.$$

Для целых $\nu=n$ $\mathbf{J}_\nu(z)=J_n(z)$ — *Бесселя функции* порядка n. Для нецелых ν справедливо разложение

$$\mathbf{J}_\nu(z)=\frac{\sin\nu\pi}{\nu\pi}\left[1-\frac{z^2}{2^2-\nu^2}+\frac{z^4}{(2^2-\nu^2)\,(4^2-\nu^2)}-\right.$$
$$\left.-\frac{z^6}{(z^2-\nu^2)\,(4^2-\nu^2)\,(6^2-\nu^2)}+\cdots\right]+$$
$$+\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\left[\frac{z}{1^2-\nu^2}-\frac{z^3}{(1^2-\nu^2)\,(3^2-\nu^2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{z^5}{(1^2-\nu^2)\,(3^2-\nu^2)\,(5^2-\nu^2)}-\cdots\right].$$

При $|z|\to\infty$ и $|\arg z|<\pi$ имеет место асимптотич. разложение

$$\mathbf{J}_\nu(z)\approx J_\nu(z)+\frac{\sin\nu\pi}{\pi z}\left[1-\frac{1^2-\nu^2}{z^2}+\frac{(1^2-\nu^2)\,(3^2-\nu^2)}{z^4}-\ldots\right]-$$
$$-\frac{\sin\nu\pi}{\pi z}\left[\frac{\nu}{z}-\frac{\nu\,(2^2-\nu^2)}{z^3}+\frac{\nu\,(2^2-\nu^2)\,(4^2-\nu^2)}{z^5}-\cdots\right].$$

А. ф. наз. по имени К. Т. Ангера [1], к-рый изучал функцию типа (*), но с верхним пределом интеграла 2π.

Лит.: [1] Anger C. T., Neueste Schriften der Naturf. Ges. in Danzig, 1855, Bd 5, S. 1—29; [2] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1, М., 1949, гл. 10.

А. П. Прудников.

АНДРОНОВА — ВИТТА ТЕОРЕМА — модификация теоремы Ляпунова (об устойчивости периодич. решения

неавтономной системы дифференциальных уравнений) для автономной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Пусть

$$x_i = \varphi_i(t) \tag{2}$$

— периодич. решение системы (1) и

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial x_j} \xi_j, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

— соответствующая система уравнений в вариациях, имеющая в рассматриваемом случае всегда один нулевой характеристич. показатель. Тогда справедлива А.— В. т.: если $n-1$ характеристич. показателей системы (3) имеют отрицательные действительные части, то периодич. решение (2) системы (1) устойчиво по Ляпунову (см. *Ляпунова характеристический показатель*, *Устойчивость по Ляпунову*).

А.— В. т. впервые была сформулирована А. А. Андроновым и А. А. Виттом в 1930 (см. [1], с. 45) и доказана ими же в 1933 ([1], с. 140).

Лит.: [1] Андронов А. А., Собрание трудов, М., 1956; [2] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 2 изд., М., 1965. *Е. А. Леонтович-Андронова.*

АНИЗОТРОПНАЯ ГРУППА над полем k — *линейная алгебраическая группа* G, определенная над полем k и имеющая нулевой k-ранг, т. е. не содержащая нетривиальных k-разложимых торов (см. *Разложимая группа*). Классич. примеры А. г.— ортогональные группы квадратичных форм, не представляющих нуля над k; алгебраич. группы, определяемые подгруппами элементов единичной нормы в алгебрах с делением над полем k. Если группа G полупроста, а характеристика k равна нулю, то группа G анизотропна над k тогда и только тогда, когда в G_k нет неединичных унипотентных элементов (для поля действительных чисел или поля p-адических чисел это эквивалентно компактности G_k). Классификация произвольных полупростых групп над полем k в существенной мере сведена к классификации А. г.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Титс Ж., «Математика», 1968, т. 12, № 2, с. 110—43. *В. П. Платонов.*

АНИЗОТРОПНОЕ ЯДРО — подгруппа D полупростой *алгебраической группы* G, определенной над полем k, являющаяся коммутантом централизатора максимального k-разложимого тора $S \subset G$; $D = [Z_G(S), Z_G(S)]$. А. я. D — это определенная над k полупростая *анизотропная группа*; $\operatorname{rang} D = \operatorname{rang} G - \operatorname{rang}_k G$. Понятие А. я. играет важную роль в исследовании k-структуры группы G (см. [1]). Если $D = G$, т. е. $\operatorname{rang}_k G = 0$, то группа G является анизотропной над k; в случае $D = (e)$ группа G наз. квазиразложимой над k.

Лит.: [1] Титс Ж., «Математика», 1968, т. 12, № 2, с. 110—43; [2] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; № 2, с. 3—31. *В. П. Платонов.*

АННУЛЯТОР левый множества X в R — множество $\mathfrak{Z}_l(X)$ всех таких элементов y из R, что $yX = 0$. Здесь R — кольцо, или полугруппа (или, вообще, группоид) с нулем. Аналогично определяется правый А. множества X в R: это есть множество

$$\mathfrak{Z}_r(X) = \{z \in R \mid Xz = 0\}.$$

Двусторонний А. множества X есть множество

$$\mathfrak{Z}(X) = \mathfrak{Z}_l(X) \cap \mathfrak{Z}_r(X).$$

В ассоциативном кольце (или полугруппе) R левый А. любого множества X будет левым идеалом, а если X является левым идеалом R, то $\mathfrak{Z}_l(X)$ — двусторонний идеал R; в неассоциативном случае эти утверждения, вообще говоря, не имеют места. *К. А. Жевлаков.*

АНТАГОНИСТИЧЕСКАЯ ИГРА — игра двух участников с прямо противоположными интересами. Формально эта противоположность означает, что при переходе от одной *игровой ситуации* к другой увеличение

выигрыша одного из игроков влечет численно равное уменьшение выигрыша другого, так что во всех ситуациях сумма выигрышей игроков постоянна (можно считать, что эта сумма равна нулю, т. е. что выигрыш одного игрока равен проигрышу другого). Поэтому А. и. наз. также играми двух лиц с нулевой суммой. Математич. понятие антагонистичности (равенство по величине и противоположность по знаку функции выигрыша) является формальным понятием, отличающимся от содержательного философского понятия. Если в А. и. в результате к.-л. переговоров и соглашений один из игроков смог бы увеличить свой выигрыш на нек-рую сумму, то его противник потерял бы такую же сумму. Следовательно, любые соглашения оказываются невыгодными для одного из игроков и потому невозможными. Реальными конфликтными ситуациями, для к-рых А. и. служат достаточно адекватными моделями, являются нек-рые (но не все) военные операции, спортивные и салонные игры, а также ситуации, связанные с принятием деловых решений в условиях конкуренции. Игры против природы и вообще принятие решений в условиях неопределенности (см. *Статистическая игра*) можно рассматривать как А. и. в предположении, что истинная закономерность природы, неизвестная игроку, приведет к действиям, наименее благоприятным для него.

Задание А. и. в нормальной форме (см. *Игр теория*) сводится к заданию множеств стратегий A и B соответственно игроков I и II и функции выигрыша H игрока I, определенной на множестве всех ситуаций $A\times B$ (функция выигрыша игрока II равна, по определению А. и., $-H$). Формально А. и. Γ записывается как тройка $\Gamma=\langle A, B, H\rangle$. Процесс разыгрывания игры Γ состоит в выборе игроками нек-рых своих стратегий $a\in A$, $b\in B$, после чего игрок I получает от игрока II сумму $H(a, b)$. Это определение А. и. является достаточно общим, чтобы при должном описании множеств стратегий и функции выигрыша охватить все варианты А. и., включая *динамические игры*, *дифференциальные игры* и *позиционные игры*. Разумные действия игроков в А. и. осуществляются на основании принципа минимакса: если

$$\max_{a\in A}\inf_{b\in B} H(a, b)=\min_{b\in B}\sup_{a\in A} H(a, b), \qquad (1)$$

или

$$\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} H(a, b)=\inf_{b\in B}\sup_{a\in A} H(a, b), \qquad (1')$$

то в игре Γ существуют оптимальные *стратегии* (ε-оптимальные стратегии) у обоих игроков. Общее значение обеих частей равенства (1′) наз. значением игры Γ. Однако равенство (1) или (1′) уже в самых простых случаях может не иметь места. Напр., в *матричной игре* с матрицей выигрышей

$$\left\|\begin{matrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right\|$$

имеют место равенства

$$\max_i\min_j a_{ij}=-1, \quad \min_j\max_i=1.$$

Поэтому множества стратегий игроков расширяются до множества смешанных стратегий, состоящих в случайном выборе игроками своих первоначальных стратегий, наз. чистыми, а функция выигрыша определяется как математич. ожидание выигрыша в условиях применения смешанных стратегий. В приведенном примере оптимальными смешанными стратегиями игроков являются выборы игроками обеих своих стратегий с вероятностями $^1/_2$, а значение игры в смешанных стратегиях равно нулю. Если множества A и B конечны, то А. и. наз. матричной игрой; для нее всегда существуют значение игры и оптимальные смешанные стратегии у каждого из игроков. Если оба множества A и B бесконеч-

ны, то оптимальные (и даже ε-оптимальные) смешанные стратегии существуют не всегда (см. *Бесконечная игра*).

Лит.: [1] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, пер. с англ., М., 1964; [2] Партхасаратхи Т., Рагхаван Т., Некоторые вопросы теории игр двух лиц, пер. с англ., М., 1974.

Е. Б. Яновская.

АНТИГОЛОМОРФНАЯ ФУНКЦИЯ, антианалитическая функция,— функция $f(z)=u+iv$ одного или нескольких комплексных переменных $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, комплексно сопряженная к голоморфной функции $\overline{f(z)}=u-iv$ (см. *Аналитическая функция*).

Е. Д. Соломенцев.

АНТИДВИЖЕНИЕ — преобразование псевдоевклидова пространства, переводящее точки, отстоящие друг от друга на действительном расстоянии a, в точки, находящиеся на чисто мнимом расстоянии a. Движения и антидвижения псевдоевклидова пространства образуют группу.

А. Б. Иванов.

АНТИДИСКРЕТНАЯ ТОПОЛОГИЯ на множестве — топология, задаваемая открытой *базой*, состоящей из пустого множества и всего пространства.

А. А. Мальцев.

АНТИДИСКРЕТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, в к-ром открыты лишь пустое множество и все пространство.

А. А. Мальцев.

АНТИИЗОМОРФИЗМ колец — отображение φ кольца A в кольцо B, являющееся *изоморфизмом* аддитивной группы кольца A на аддитивную группу кольца B, для к-рого $(ab)\varphi=b\varphi\cdot a\varphi (a,\ b\in A)$.

О. А. Иванова.

АНТИИЗОМОРФИЗМ частично упорядоченных множеств — биективное антитонное отображение частично упорядоченного множества A на частично упорядоченное множество B, т. е. такое взаимно однозначное отображение $\varphi : A\to B$, что из $a<b$ $(a,\ b\in A)$ следует $a\varphi>b\varphi$ в B.

О. А. Иванова.

АНТИКОММУТАТИВНАЯ АЛГЕБРА — линейная алгебра над полем, в к-рой выполняется тождество

$$x^2=0. \qquad (*)$$

Если характеристика поля отлична от 2, то тождество (*) равносильно тождеству $xy=-yx$. Всякая подалгебра свободной А. а. свободна. Важнейшими многообразиями А. а. являются *Ли алгебры*, *Мальцева алгебры* и *бинарно лиевы алгебры*.

Лит.: [1] Ширшов А. И., «Матем. сб.», 1954, т. 34 (76), с. 81—88.

А. Т. Гайнов.

АНТИКОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, конформное отображение второго рода,— непрерывное отображение $w=f(z)$ окрестности точки z_0 плоскости комплексного переменного z на окрестность точки w_0 плоскости комплексного переменного w, сохраняющее углы между кривыми, проходящими через z_0, но меняющее ориентацию. Функция $f(z)$, осуществляющая А. о., является *антиголоморфной функцией*. См. также *Конформное отображение*.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 2.

Е. Д. Соломенцев.

АНТИЛОГАРИФМ числа n — число N (обозначается $\operatorname{ant}\log_a n$), логарифм к-рого при данном основании a равен числу n. Таким образом,

$$\operatorname{ant}\log_a n=N=a^n$$

или

$$\log_a N=n.$$

А. наз. также обращенными логарифмами.

АНТИНОМИЯ, парадокс,— ситуация, когда в теории доказываются два взаимно исключающие друг друга суждения, причем каждое из этих суждений выведено убедительными с точки зрения данной теории средствами.

В отличие от софизма, умышленно ложного умозаключения с замаскированной ошибкой, А., как правило, свидетельствует о более глубоких недостатках

рассматриваемой теории. Часто обнаружение А. приводит к существенной перестройке всей теории в целом, привлекает внимание к новым явлениям и, в конечном счете, служит стимулом дальнейших исследований. Эта особенность А. со времен античности привлекла к ним внимание философов. Можно отметить, напр., существенную роль, к-рую играет исследование А. в философии Канта. Уже в античной философии обсуждалось несколько А., известных под назв. а п о р и й. Приведем две знаменитые а п о р и и З е н о н а из Элеи (5 в. до н. э.).

«А х и л л е с и ч е р е п а х а». Апория описывает противоречивость нек-рых свойств движения и может быть формулирована следующим образом: пусть в пункте A находится бегун («Ахиллес»), а в пункте B на расстоянии 100 $м$ от A — черепаха. В один и тот же момент Ахиллес отправляется бегом из A в направлении к B, стремясь догнать черепаху, а черепаха устремляется из B прочь от A со скоростью, скажем, в сто раз меньшей скорости бегуна. Опыт свидетельствует, что в подобной ситуации Ахиллес довольно быстро догонит черепаху. С другой стороны, можно, как будто, установить, что Ахиллес никогда не догонит черепаху (и даже не достигнет пункта B). В самом деле, к моменту, когда Ахиллес достигнет середины C_1 маршрута AB, черепаха, пусть на небольшое расстояние, но все же удалится от B. Далее, Ахиллес добежит до середины C_2 отрезка C_1B, затем до середины C_3 отрезка C_2B и т. д. Все это время черепаха будет удаляться от B. Чтобы достигнуть B, Ахиллесу, таким образом, необходимо побывать в каждом из бесконечной последовательности пунктов C_1, C_2, C_3, ..., C_n, ... Однако представляется верным, что невозможно за конечное время побывать в бесконечном количестве различных пунктов. Следовательно, Ахиллес никогда не достигнет пункта B и не догонит черепаху.

Парадоксы приведенного типа легко преодолеваются в современной математич. модели непрерывного движения. Как показывает подробный анализ, существенную роль в их преодолении играет выполнение в поле действительных чисел так наз. а к с и о м ы А р х и м е д а: для всяких действительных чисел a, $b>0$ найдется натуральное n такое, что $an>b$. И все же ситуация, отраженная в парадоксе, достаточно глубока. Можно оспаривать удобство или адекватность реальному движению общеупотребительной математич. модели. Для исследования концепции физических бесконечно малых и бесконечно больших величин неоднократно предпринимались попытки построения теории действительных чисел, в к-рой аксиома Архимеда не имеет места. Во всяком случае, теория неархимедовых упорядоченных полей является весьма содержательной частью современной алгебры. В *нестандартном анализе* решающую роль играет именно неархимедовское упорядоченное поле — нестандартная действительная прямая.

«П а р а д о к с к у ч и» состоит в следующем. Одна песчинка, очевидно, не образует кучи песка. Если n песчинок не могут образовать кучи песка, то и после прибавления еще одной песчинки они по-прежнему не могут образовать кучи. Следовательно, никакое число песчинок не образует кучи.

В современной терминологии к этому парадоксу можно сделать следующий комментарий: метод полной математич. индукции нельзя применять, как показывает парадокс, к объемно неопределенным понятиям, каковым является понятие «куча песчинок». В последнее время (2-я пол. 20 в.) объемно неопределенные понятия используются в основаниях математики для установления непротиворечивости классич. теорий, и свойства таких понятий исследуются точными методами. Методами математич. логики можно реализовать

ситуацию, когда математич. индукция неприменима в общей форме ко всему натуральному ряду, хотя весьма многие обычные свойства натуральных чисел при этом выполняются (так наз. нестандартная модель арифметики).

Но наибольший интерес для математики представляют, несомненно, А., связанные с необычными способами образования понятий. Это так наз. *логические и семантические антиномии* (см. также *Сколема парадокс*).

Приведем три примера логических А.

Антиномия Рассела (B. Russell, 1902) открыта независимо также Э. Цермело (E. Zermelo). Рассмотрим следующее свойство D множеств. Именно, будем считать, что для множества X выполняется свойство D тогда и только тогда, когда X не является элементом самого себя. Для подавляющего большинства конкретных множеств, употребляемых в математич. рассуждениях, свойство D выполняется. Так, ни множество всех натуральных чисел, ни множество всех действительных чисел не являются элементами самих себя. Рассмотрим теперь множество T такое, что его элементы суть в точности те множества X, для к-рых выполняется D. Попробуем теперь выяснить, что верно: $T \in T$ или $T \notin T$. Пусть $T \in T$, тогда, по определению, для T выполняется свойство D, то есть $T \notin T$. Таким образом, необходимо $T \notin T$. Но это вновь приводит к противоречию, т. к. ввиду $T \notin T$ для T выполняется D и, следовательно, $T \in T$.

Можно попытаться избежать парадокса, утверждая, что вышеприведенное рассуждение свидетельствует лишь о том, что указанного множества T не существует, т. е. что свойство D не определяет никакого множества. Но такой выход отнюдь не упрощает ситуацию. Действительно, с позиций «наивной» теории множеств естественно считать, что всякое точно описанное свойство B объектов определяет множество C тех объектов, к-рые удовлетворяют свойству B. Парадокс Рассела наносит сильный удар по этой естественной концепции. Приходится согласиться, что нек-рые на первый взгляд весьма простые свойства, вроде описанного выше свойства D, следует считать не точно описанными или же считать, что имеются точно описанные свойства, к-рые не определяют множеств. Такая точка зрения, в свою очередь, выдвигает ряд трудных проблем. Какие свойства считать точно описанными, а какие нет? Какие свойства определяют множества, а какие нет? Может быть, и те свойства, к-рые широко употребляются в практике теоретико-множественной математики, также ведут к парадоксам и должны быть забракованы? Можно ли описать по крайней мере нек-рую надежную область, в к-рой можно считать себя достаточно застрахованным от парадоксов и к-рая все же достаточно обширна, чтобы включать в себя привычную практику математики?

Проблему точного описания свойств можно считать удовлетворительно решенной с созданием точных логико-математич. языков. Что же касается описания критериев для выделения класса свойств, определяющих множества, то эта проблема весьма далека от своего разрешения. Более того, современные результаты аксиоматич. теории множеств свидетельствуют, по-видимому, в пользу того, что окончательного решения этой проблемы не существует. Антиномия Рассела произвела очень большое впечатление на современников именно потому, что эта А. возникает на самой начальной стадии изучения теории множеств. Тем не менее имеются различные пути избежания парадоксов, к-рые, хотя их и нельзя признать окончательными или наиболее естественными, обеспечивают большие практич. удобства и проливают свет как на природу парадоксов, так и на логич. связи других теоретико-множест-

венных принципов. Особенно успешным оказался аксиоматич. подход к основаниям теории множеств (см. *Аксиоматическая теория множеств*). Так, формальная аксиоматич. система Цермело — Френкеля является в настоящее время (70-е гг. 20 в.) самой употребительной аксиоматич. теорией, наиболее адекватно отражающей «непарадоксальную» часть классич. теоретико-множественной практики.

Антиномия «деревенский парикмахер». Это — вариант парадокса Рассела, сформулированный применительно к житейской ситуации. (Несколько иная форма этой А. известна под назв. парадокса Гонсета.) Рассмотрим деревенского парикмахера, к-рый бреет всех тех и только тех жителей своей деревни, к-рые не бреются сами. Бреет ли он сам себя? Рассуждая, как в антиномии Рассела, мы установим, что он бреет себя и не бреет себя. Можно легко выйти из затруднения, заметив, что парадокс свидетельствует только о том, что такого парикмахера не может существовать. Рассматриваемая А. показывает, что условие, к-рому должен удовлетворять деревенский парикмахер, является внутренне противоречивым и, следовательно, невыполнимым. Правда, такая точка зрения естественно вызывает к жизни проблему описания критериев для внутренне непротиворечивых свойств, однако, в отличие от ситуации в антиномии Рассела, здесь эта проблема отнюдь не является столь актуальной. Она относится к житейской ситуации, а такого рода ситуации и вообще далеко не всегда бывают точно сформулированными или надежно установленными. Кроме того, внутренняя непротиворечивость — вовсе не единственный и, по-видимому, не главный критерий приемлемости житейского суждения. Иное дело математич. рассуждение, от к-рого мы вправе ожидать значительно большей окончательности и убедительности. Внутренняя непротиворечивость — важнейшая сторона такого рассуждения.

Антиномия Кантора (G. Cantor, 1899). Пусть M — множество всех множеств и $P(M)$ — множество всех его подмножеств. Из определения M очевидно, что $P(M)$ включено в M. С другой стороны, по известной теореме Кантора, $P(M)$ имеет мощность, большую, чем M, и поэтому $P(M)$ не может быть подмножеством M. Из антиномии Кантора можно сделать примерно те же выводы, что и из антиномии Рассела. В частности, можно считать, что антиномия Кантора представляет собой доказательство несуществования множества M всех множеств. Интересно в связи с этим отметить, что существуют аксиоматич. системы теории множеств, напр. известная система New Foundations У. Куайна (W. v. Quine), в к-рых существование множества M можно установить. Парадокс Кантора в New Foundations избегается благодаря тому, что в этой системе теорему Кантора о мощности удается доказать лишь в нек-рой специальной форме, недостаточной для проведения парадокса. Вообще, для проведения антиномии Кантора нужны существенно более сложные понятия теории множеств, чем для проведения антиномии Рассела (такие, как понятие подмножества, идеи взаимно однозначного соответствия и т. п.).

Сходен с антиномией Кантора так наз. парадокс Бурали — Форти, в котором рассматривается класс всех ординальных чисел. Порядковый тип этого класса должен быть больше всех ординалов, содержащихся в нем.

Значительный интерес представляют также А. несколько иного вида, наз. семантическими. В отличие от логических, в состав семантич. А. входят такие семантич. термины, как «истина», «ложь», «обозначает», «определяет» и другие. Впрочем, это различие, предложенное Ф. Рамсеем (F. Ramsey, 1926), является в значительной степени условным. Многие семантич. А.

могут быть сформулированы в логич. форме, и наоборот. По наблюдению Ф. Рамсея, семантич. А. не могут быть проведены в обычных логико-математич. теориях уже потому, что эти теории не содержат семантич. понятий, нужных для формулировки семантич. А. В этом смысле семантич. А. «безопаснее» логических. Но здесь следует иметь в виду также, что в настоящее время исследуются и теории, содержащие понятия, нужные для формулировки нек-рых семантич. парадоксов, в особенности парадоксов Ришара (но в к-рых парадоксы все же избегаются специальными средствами). Приведем два известных семантич. парадокса.

Антиномия Ришара (J. Richard) в форме Берри (G. D. W. Berry, 1906). Рассмотрим множество натуральных чисел, каждое из к-рых может быть однозначно определено с помощью осмысленного текста, содержащего не более тысячи слогов. Очевидно, таких чисел конечное количество, т. к. совокупность всех текстов с не более чем тысячью слогами конечна. Рассмотрим наименьшее натуральное число, не входящее в упомянутое выше множество.

Приведенный выше абзац представляет собой осмысленный текст, объемом не более чем в тысячу слогов, однозначно определяющий нек-рое натуральное число, к-рое по самому своему определению не может быть охарактеризовано такого рода текстом. Конечно, парадокса можно избежать, если объявить указанный текст неосмысленным (или не определяющим натурального числа), но тогда, как и в ранее рассмотренных случаях, естественно поставить трудные проблемы, касающиеся описания критериев осмысленности текстов, и т. п.

Антиномия Эвбулида (4 в. до н. э.). Допустим, что нек-рый субъект произносит следующую фразу: «Высказывание, к-рое я сейчас произношу, ложно». Ложно само это высказывание или нет? Из допущения, что оно истинно, и его смысла следует, что оно должно быть ложно. С другой стороны, из его ложности немедленно следует, что оно не может быть ложно. Известно много вариантов этого парадокса — парадокс лжеца, парадокс Эпименида и др. Идея этого парадокса лежит в основе доказательства знаменитой *Гёделя теоремы о неполноте* формальных аксиоматич. теорий.

В целом анализ парадоксов способствовал радикальному пересмотру взглядов на проблему обоснования математики и развитию многих современных идей и методов математич. логики.

Лит.: [1] Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

А. Г. Драгалин.

АНТИПАРАЛЛЕЛОГРАММ — плоский четырехугольник, у к-рого все противоположные стороны попарно равны и антипараллельны относительно двух других сторон (см. *Антипараллельные прямые*).

А. Б. Иванов.

АНТИПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ относительно двух заданных прямых m_1 и m_2 — прямые l_1 и l_2, пересекающие m_1 и m_2 так, что $\angle 1 = \angle 2$ (см. рис.). Если l_1 и l_2 — А. п. относительно m_1 и m_2, то m_1 и m_2 — А. п. относительно l_1 и l_2. Во всяком вписанном в окружность четырехугольнике противоположные стороны — А. п. относительно двух других сторон. Если прямые m_1 и m_2 пересекаются в точке O, то говорят также, что l_1 и l_2 — А. п. относительно угла m_1Om_2. Если же прямые m_1 и m_2 совпадают, то l_1 и l_2 наз. А. п. относительно одной прямой.



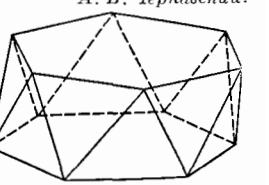
А. Б. Иванов.

АНТИПОДЫ — диаметрально противоположные точки сферы. Имеются следующие теоремы Борсука [1] об А. 1) При любом отображении сферы S^n в евклидово пространство E^n найдутся А. с общим образом. 2) Каждое отображение сферы S^n в себя, при к-ром образы А. являются А., есть существенное отображение.

Лит.: [1] Borsuk K., «Fundam. math.», 1933, t. 20, p. 177—90.

А. В. Чернавский.

АНТИПРИЗМА — *полуправильный многогранник*, у которого две параллельные грани — равные между собой правильные n-угольники, а остальные $2n$ граней — правильные треугольники (см. рис.).



А. Б. Иванов.

АНТИСИММЕТРИЧНЫЙ ТЕНЗОР — см. *Тензорное исчисление.*

АНТИТОННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ частично упорядоченных множеств — отображение φ частично упорядоченного множества A в частично упорядоченное множество B такое, что из $a \leqslant b$ $(a, b \in A)$ следует, $a\varphi \geqslant b\varphi$. Дуальное понятие к А. о.— *изотонное отображение.*

О. А. Иванова.

АНТЬЕ, целая часть (действительного) числа x,— наибольшее целое число, не превосходящее x. Обозначение $[x]$ или $E(x)$. Из определения А. следует, что $[x] \leqslant x < [x]+1$. Если x — целое, то $[x]=x$. Примеры: $[3, 6]=3$, $\left[\frac{1}{3}\right]=0$, $\left[-4\frac{1}{3}\right]=-5$. При помощи А. получают, напр., разложение на простые множители числа $n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$, а именно,

$$n! = \prod\nolimits_{p \leqslant n} p^{\alpha(p)},$$

где произведение составлено из всех простых чисел p, не превосходящих n, а

$$\alpha(p) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots .$$

Функция $y=[x]$ переменного x есть кусочно непрерывная (ступенчатая) функция со скачками в целых точках. Посредством А. определяется дробная часть числа x, обозначаемая символом $\{x\}$ и равная разности

$$x - [x]; \quad 0 \leqslant \{x\} < 1.$$

Функция $y=\{x\}$ — периодическая кусочно непрерывная функция.

Лит.: [1] Виноградов И. М., *Основы теории чисел*, М., 8 изд., 1972.

Б. М. Бредихин.

АНЬЕЗИ ЛОКОН, версиера,— плоская кривая, уравнение к-рой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$y(a^2+x^2)=a^3, \; a>0.$$

Если a есть диаметр окружности с центром в точке $(0, a/2)$, OA — секущая, CB и AM параллельны оси Ox, а BM параллельна оси Oy (см. рис.), то А. л. есть геометрич. место точек M. Если центр образующей окружности и касательная CB смещены по оси Oy, то кривая, получаемая аналогичным построением, наз. агнезиней Ньютона и является обобщением А. л. Названа по имени М. Аньези (M. Agnesi), изучавшей эту кривую (1748).



Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

А. Б. Иванов.

АПЕРИОДИЧЕСКИЙ АВТОМОРФИЗМ пространства с мерой — такой автоморфизм T пространства с мерой, периодич. точки к-рого (т. е. точки

x, для к-рых $T^k x = x$ при нек-ром $k > 0$) образуют множество меры нуль. Введение специального названия для таких преобразований вызвано тем, что в нек-рых теоремах *эргодической теории* автоморфизмы, имеющие «слишком много» периодич. точек, играют роль тривиальных исключений (см. [1]).

Лит.: [1] Рохлин В. А., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, № 2 (30), с. 57—128. *Д. В. Аносов.*

АПОЛЛОНИЯ ЗАДАЧА — задача о построении на плоскости окружности, касающейся трех заданных окружностей. Решается методом *инверсий*. Окружность, являющаяся решением А. з., наз. окружностью Аполлония. А. з. названа по имени Аполлония Пергского (3 в. до н. э.).

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963. *А. Б. Иванов.*

АПОЛЛОНИЯ ТЕОРЕМА — 1) Сумма квадратов длин сопряженных полудиаметров эллипса есть величина постоянная, равная сумме квадратов длин его полуосей. 2) Площадь описанного вокруг эллипса параллелограмма, стороны к-рого имеют сопряженные направления, постоянна и равна произведению длин его диаметров. *А. Б. Иванов.*

АПОЛЯРНЫЕ СЕТИ — две сети, заданные в одной и той же области G двумерного многообразия и обладающие тем свойством, что в каждой точке $x \in G$ касательные направления одной из этих сетей гармонически разделяют касательные направления другой. Например, на поверхности в евклидовом пространстве *асимптотическая сеть* аполярна *кривизны линий сети*. *В. Т. Базылев.*

АПОСТЕРИОРНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ (вероятность a posteriori) какого-либо события — условная вероятность события при нек-ром условии, рассматриваемая в противоположность его безусловной или *априорной вероятности*. Никакого принципиального различия между терминами «условная» и «апостериорная» нет. В применениях первый термин используют, когда самое условие носит предположительный характер и в ходе опытов непосредственно не наблюдается. Второй термин используют, когда желают подчеркнуть, что условие, о к-ром идет речь, фактически наблюдено. А. в. связана с априорной вероятностью *Бейеса формулой*. *Ю. В. Прохоров.*

АПОСТЕРИОРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — условное распределение вероятностей какой-либо случайной величины при нек-ром условии, рассматриваемое в противоположность ее безусловному или *априорному распределению*.

Если Θ — случайный параметр с априорной плотностью $p(\theta)$, X — случайный результат наблюдений и $p(x|\theta)$ — условная плотность X при условии $\Theta=\theta$, то А. р. Θ при данном X согласно *Бейеса формуле* имеет плотность

$$p(\theta|x) = \frac{p(\theta)p(x|\theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\theta)\, p(x|\theta)\, d\theta}.$$

Если $T(x)$ — *достаточная статистика* для семейства распределений с плотностями $p(x|\theta)$, то А. р. зависит не от самого x, а от $T(x)$. Асимптотич. поведение при $n \to \infty$ А. р. $p(\theta|x_1, \ldots, x_n)$, где x_j суть результаты независимых наблюдений с плотностью $p(x|\theta_0)$, оказывается «почти независящим» от априорного распределения θ.

О роли А. р. в теории статистич. решений см. *Бейесовский подход*.

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.—Л., 1946. *Ю. В. Прохоров.*

АПОФЕМА правильного многоугольника — отрезок (а также его длина) перпендикуляра, опущенного из центра правильного многоугольника

на любую из его сторон. А. правильного n-угольника равна радиусу r_n вписанной в него окружности и связана с его стороной a_n и площадью S_n соотношениями

$$a_n = 2r_n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}, \quad S_n = nr_n^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

А. правильной пирамиды — высота ее боковой грани.

АППЕЛЯ МНОГОЧЛЕНЫ, Аппеля полиномы,— класс многочленов над полем комплексных чисел, содержащий многие классич. системы многочленов. А. м. введены П. Аппелем [1]. Последовательность А. м. $\{A_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ определяется формальным равенством

$$A(t)\, e^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z)\, t^n, \qquad (1)$$

в к-ром $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ — формальный степенной ряд с комплексными коэффициентами a_k, $k=0, 1, 2, \ldots$, причем $a_0 \neq 0$. В явном виде А. м. $A_n(z)$ выражаются через числа a_k следующим образом:

$$A_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(n-k)!} z^{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Условие $a_0 \neq 0$ равносильно тому, что степень многочлена $A_n(z)$ равна n.

Имеется другое, эквивалентное определение А. м. Пусть

$$A(D) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k, \quad D = \frac{d}{dz}, \ a_0 \neq 0,$$

— дифференциальный оператор, вообще говоря, бесконечного порядка, определенный над алгеброй P комплексных многочленов переменного $z = x + iy$. Тогда

$$A_n(z) = \frac{A(D)\, z^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

то есть $A_n(z)$ представляет собой образ функции $z^n/n!$ при отображении $p = A(D)q$, $p, q \in P$.

Класс $A^{(1)}$ А. м. определяется как совокупность всевозможных систем многочленов $\{A_n(z)\}$ с производящими функциями вида (1). Принадлежность системы $\{P_n(z)\}$ многочленов (степени n) классу $A^{(1)}$ равносильна выполнению соотношений

$$P_n'(z) = P_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Иногда при определении А. м. класса $A^{(1)}$ пользуются соотношениями

$$A(t)\, e^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}_n(z)}{n!} t^n,$$

$$\hat{A}_n'(z) = n\hat{A}_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

к-рые, с точностью до нормировки, эквивалентны приведенным выше.

А. м. класса $A^{(1)}$ используются при решении уравнений вида

$$A(D)y(z) = f(z); \qquad (2)$$

формальное равенство $y(z) = f(z)/A(D)$ при

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k z^k}{k!}$$

позволяет записать решение (2) в виде

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A_k^*(z),$$

где $\{A_k^*(z)\}$ — А. м. с производящей функцией $e^{zt}/A(t)$. В связи с этим особый интерес представляют разложения аналитич. функций в ряды по А. м. Кроме того, А. м. находят применение в различных задачах, относящихся к функциональным уравнениям, в том числе к дифференциальным уравнениям, отличным от (2), в вопросах интерполирования, теории приближения, в методах суммирования и др. (см., напр., [1]—[6]). С более общей позиции теория А. м. класса $A^{(1)}$ (и нек-рые приложения) изложена в [6].

А. м. класса $A^{(1)}$ содержат в качестве частных случаев целый ряд классических последовательностей многочленов. Примерами, с точностью до нормировки, могут служить *Бернулли многочлены*

$$\frac{te^{zt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(z)}{n!}t^n,$$

Эрмита многочлены

$$e^{zt-t^2/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(z)}{n!}t^n,$$

Лагерра многочлены

$$(1-t)^{\alpha}e^{zt}=\sum_{n=0}^{\infty}L^{(\alpha-n)}(z)\,t^n$$

и т. д. Многочисленные примеры А. м. имеются в [2] и [3].

Существуют различные о б о б щ е н и я А. м., к-рые также носят назв. с и с т е м А. м. Сюда относятся А. м. с производящими функциями вида

$$\left.\begin{aligned}A(w)\,e^{zU(w)}&=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(z)\,w^n,\\ U(w)&=\sum_{k=1}^{\infty}c_kw^k,\qquad c_1\neq 0,\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

а также А. м. с производящими функциями более общего характера:

$$A(w)\,\psi(zU(w))=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(z)\,w^n\tag{4}$$

(см., напр., [2] и [3]). Если $w(u)$ — функция, обратная функции $u(w)$, то принадлежность системы многочленов $\{p_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ к классу последовательностей А. м. с производящей функцией вида (3) равносильна выполнению соотношений

$$w(D)\,p_n(z)=p_{n-1}(z),\quad n=1,\,2,\,\ldots\left(D=\frac{d}{dz}\right).$$

Имеется всего пять ортогональных с весом систем последовательностей А. м. на действительной оси, с производящими функциями вида (3); в том числе среди А. м. с производящими функциями вида (1) лишь одна система многочленов Эрмита является ортогональной с весом $e^{-x^2/2}$ на действительной оси (см. [7]).

О разложениях в ряды по А. м. с производящими функциями вида (3) и (4), а также о связи этих А. м. с различными функциональными уравнениями см. [2], [7], [8].

К л а с с $A^{(p)}$, $p\geqslant 1$ — целое, А. м. определяется следующим образом: это есть множество всех систем многочленов $\{A_n(z)\}$, для каждой из к-рых имеет место (формальное) представление

$$\sum_{k=0}^{p-1}A_k(t)\,e^{z\omega_p kt}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z)\,t^n,$$

где $\omega_p=e^{2\pi i/p}$, а $A_k(t)$, $k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,p-1$ — формальные степенные ряды, свободные члены к-рых таковы, что степень многочлена $A_n(z)$ равна n. Принадлежность последовательности $\{Q_n(z)\}$ многочленов степени n классу $A^{(p)}$ равносильна выполнению соотношений

$$D^pQ_n(z)=Q_n^{(p)}(z)=Q_{n-p}(z),\quad n=p,\,p+1,\,\ldots.$$

Вопросы разложения аналитич. функций в ряды по А. м. класса $A^{(p)}$ исследованы в [9]. Они тесно примыкают к задаче о нахождении аналитич. решений функциональных уравнений вида

$$\sum_{k=0}^{p-1}A_k(D)\,y(z\omega_p^k)=f(z).$$

А. м. о т д в у х п е р е м е н н ы х введены П. Аппелем [10]. Они определяются равенствами

$$J_{m,\,n}(\alpha,\,\gamma,\,\gamma',\,x,\,y)=\frac{x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}}{(\gamma)_m\,(\gamma')_n}(1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha}\times$$

$$\times\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n}\left[x^{\gamma+m-1}y^{\gamma'+n-1}(1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}\right],$$

$$m,\,n=0,\,1,\,2,\,\ldots,$$

в к-рых полагают $(\gamma)_0=1$, $(\gamma)_n=\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)$ для $n\geqslant 1$; эти А. м. представляют собой аналог *Якоби многочленов*. А. м. $J_{m,n}$ ортогональны с весом

$$t(x,y)=x^{\nu-1}y^{\nu'-1}(1-x-y)^{\alpha-\nu-\nu'}$$

любому многочлену от двух переменных, степени, меньшей $m+n$, по области T, где T — треугольник: $x>0$, $y>0$, $x+y<1$; однако они не образуют системы функций, ортогональных с весом $t(x,y)$ в области T (см., напр., [3]).

Лит.: [1] Appell P., «Ann. sci. Ecole norm. supér.», 1880, v. 9, p. 119—44; [2] Boas R. P., Buck R. C., Polynomial expansions of analytic functions, B., 1958; [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, пер. с англ., т. 1—3, М., 1965—67; [4] Wood B., «SIAM J. Appl. Math.», 1969, v. 17, № 4, p. 790—801; [5] Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [6] Бурбаки Н., Функции действительного переменного, пер. с франц., М., 1965; [7] Meixner J., «J. London Math. Soc.», 1934, v. 9, pt 1, p. 6—13; [8] Anderson Ch. A., «J. Math. Analysis and Appl.», 1967, v. 19, № 3, p. 475—91; [9] Казьмин Ю. А., «Матем. заметки», 1969, т. 5, в. 5, с. 509—520; 1969, т. 6, в. 2, с. 161—72; [10] Appell P., «Arch. Math. Phys.», 1881, Bd 66, S. 238—45.

Ю. А. Казьмин.

АППЕЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование уравнений плоского движения материальной точки, находящейся под действием силы, зависящей лишь от координат x, y точки. А. п. состоит из гомографического преобразования координат x, y в координаты x_1, y_1:

$$x_1=\frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''},\quad y_1=\frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}$$

и введения вместо времени t времени t_1 по формуле

$$kdt_1=\frac{dt}{(a''x+b''y+c'')^2}.$$

Благодаря А. п. движению точки (x, y) под влиянием силы $F(x, y)$ будет отвечать движение точки (x_1, y_1), находящейся под действием нек-рой силы $F_1(x_1, y_1)$, зависящей лишь от координат x_1, y_1. Преобразование уравнений движения точки x, y с помощью формул общего вида:

$$x_1=\varphi(x,y),\ y_1=\psi(x,y),\ dt_1=\lambda(x,y)dt, \qquad (*)$$

приводит к уравнениям движения точки (x_1, y_1) под действием силы, зависящей лишь от координат (x_1, y_1), только в том случае, если преобразование $(*)$ — гомографическое. А. п. используется при решении Бертрана задачи об определении тех сил, при к-рых траектории движения материальной точки являются коническими сечениями. А. п. названо по имени П. Аппеля.

Лит.: [1] Appell P., «Amer. J. Math.», 1890, v. 12, p. 103—114; [2] его же, там же, 1891, v. 13, p. 153—58.

Л. Н. Сретенский.

АППЕЛЯ УРАВНЕНИЯ — обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие движения как голономных, так и не голономных систем, установленные П. Аппелем [1]. Иногда А. у. наз. уравнениями Гиббса — Аппеля, т. к. для голономных систем ранее их установил Дж. У. Гиббс [3]. А. у. в независимых лагранжевых координатах q_s $(s=1, \ldots, n)$ имеют вид уравнений 2-го порядка

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i}=Q_i^*,\quad i=1,\ \ldots,\ k\leqslant n. \qquad (1)$$

Здесь

$$S=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu w_\nu^2$$

(m_ν и w_ν — массы и ускорения N точек системы) — энергия ускорений системы, выраженная таким образом, чтобы она содержала вторые производные только от координат q_i, $i=1, \ldots, k$, вариации к-рых рассматриваются как независимые, Q_i^* — обобщенные силы, соответствующие координатам q_i, получаемые как коэффициенты при независимых вариациях δq_i в выражении

суммы элементарных работ заданных активных сил F_ν на возможных перемещениях δr_ν:

$$\sum_{\nu=1}^{N} F_\nu \cdot \delta r_\nu = \sum_{i=1}^{k} Q_i^* \delta q_i.$$

При вычислении S и Q_i^* зависимые $\dot{q}_j(\delta q_j)$ $(j=k+1, \ldots, n)$ выражаются через независимые скорости (вариации) разрешением $n-k$ уравнений неголономных связей (см. *Неголономные системы*), выраженных в обобщенных координатах q_s (и уравнений для δq_s, получаемых из последних). Дифференцированием по времени t найденных выражений для $\dot{q}_j$ получаются выражения $\ddot{q}_j$ через $\ddot{q}_i$.

Уравнения (1) совместно с $n-k$ уравнениями неинтегрируемых связей образуют систему (порядка $n+k$) n дифференциальных уравнений для n неизвестных q_s.

В случае голономной системы $k=n$, все скорости q_s и вариации δq_s независимы, $Q_i^*=Q_i$ и уравнения (1) представляют собой иную запись *Лагранжа уравнений* 2-го рода.

А. у. в квазикоординатах π_r, где

$$\dot{\pi}_r = \sum_{i=1}^{n} a_{r_i} \dot{q}_i, \quad r=1, \ldots, k, \tag{2}$$

имеют вид

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_r} = \Pi_r, \quad r=1, \ldots, k \leqslant n. \tag{3}$$

Здесь S — энергия ускорений, выраженная через вторые производные $\ddot{\pi}_r$ по времени от квазикоординат, Π_r — обобщенные силы, соответствующие квазикоординатам. Уравнения (3) совместно с $n-k$ уравнениями неинтегрируемых связей и k уравнениями (2) образуют систему $n+k$ дифференциальных уравнений 1-го порядка относительно такого же числа неизвестных q_s, $s=1, \ldots, n$, и $\dot{\pi}_r$, $r=1, \ldots, k$.

А. у. являются наиболее общими уравнениями движения механич. систем.

Лит.: [1] Appell P. E., «Comp. Rend.», 1899, t. 129; [2] его же, «J. reine und angew. Math.», 1900, Bd 122, S. 205—08; [3] Gibbs J. W., «Amer. J. Math.», 1879, v. 2, p. 49—64.

В. В. Румянцев.

АППЛИКАТА — одна из декартовых *координат* точки в трехмерном пространстве.

АППРОКСИМАТИВНАЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ — обобщение понятия дифференцируемости с заменой обычного предела *аппроксимативным пределом*. Действительная функция $f(x)$ действительного переменного наз. аппроксимативно дифференцируемой в точке x_0, если существует такое число A, что

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ap} \frac{f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)}{x-x_0} = 0.$$

При этом величина $A(x-x_0)$ наз. аппроксимативным дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0. Функция $f(x)$ аппроксимативно дифференцируема в точке x_0 в том и только том случае, если она имеет в этой точке *аппроксимативную производную* $f'_{\mathrm{ap}}(x_0)=A$. Аналогично определяется А. д. для действительных функций n действительных переменных. Напр., в случае $n=2$, $f(x, y)$ наз. аппроксимативно дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \operatorname{ap} \frac{f(x, y)-f(x_0, y_0)-A(x-x_0)-B(y-y_0)}{\rho} = 0,$$

где A и B — нек-рые числа, $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Выражение $A(x-x_0)+B(y-y_0)$ наз. аппроксимативным дифференциалом функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Теорема Степанова: действительная функция $f(x, y)$, измеримая на множестве E, аппроксиматив-

но дифференцируема почти всюду на E в том и только том случае, если почти всюду на E она имеет конечные аппроксимативные частные производные по x и по y; эти частные производные почти всюду на E совпадают соответственно с коэффициентами A и B аппроксимативного дифференциала.

Понятие А. д. распространяется также на вектор-функции одного или нескольких действительных переменных.

Лит.: [1] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949.

Г. П. Толстов.

АППРОКСИМАТИВНАЯ КОМПАКТНОСТЬ — свойство множества M в метрич. пространстве X, состоящее в том, что для любого $x \in X$ любая минимизирующая последовательность $y_n \in M$ (т. е. последовательность, обладающая свойством $\rho(x, y_n) \to \rho(x, M)$ имеет предельную точку $y \in M$. А. к. данного множества обеспечивает существование элемента наилучшего приближения для любого $x \in X$. Понятие А. к. введено (см. [1]) в связи с изучением *чебышевских множеств* в банаховом пространстве, и это позволило описать выпуклые чебышевские множества в некоторых пространствах. Именно, пусть X — равномерно выпуклое и гладкое банахово пространство. Для того чтобы чебышевское множество $M \subset X$ было выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы оно было аппроксимативно компактным. Отсюда следует, в частности, что множество рациональных дробей с фиксированной степенью числителя и знаменателя не является в пространстве L_p $(1 < p < \infty)$ чебышевским множеством, если степень знаменателя не меньше единицы [1].

О последующих исследованиях в этом направлении см. [2].

Лит.: [1] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б., «Докл. АН СССР», 1961, т. 140, № 3, с. 522—4; [2] Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 75—132.

Ю. Н. Субботин.

АППРОКСИМАТИВНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ — обобщение понятия непрерывности с заменой обычного предела на *аппроксимативный предел*. Функция $f(x)$ наз. аппроксимативно непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ap} f(x) = f(x_0).$$

В простейшем случае $f(x)$ — действительная функция точки n-мерного евклидова пространства (в более общем случае — вектор-функция). Справедливы следующие теоремы. 1) Действительная функция $f(x)$ измерима по Лебегу на множестве E в том и только том случае, если она аппроксимативно непрерывна почти всюду на E (теорема Данжуа—Степанова). 2) Для любой ограниченной измеримой по Лебегу функции $f(x)$ в каждой точке x_0 ее А. н.

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\mu(R)} \int_R f(x)\, d\mu = f(x_0),$$

где μ есть n-мерная мера Лебега, R — содержащий точку x_0 n-мерный невырожденный сегмент, ρ — его диаметр.

Лит.: [1] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949.

Г. П. Толстов.

АППРОКСИМАТИВНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — обобщение понятия производной, в к-ром обычный предел заменяется *аппроксимативным пределом*. Если для функции $f(x)$ действительного переменного x существует

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ap} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то он наз. аппроксимативной производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'_{\mathrm{ap}}(x_0)$. В простейшем случае $f(x)$ есть действительная функция (в более общем случае — вектор-функция). А. п. может быть как конечной, так и бесконечной. Для

конечной А. п. справедливы классич. правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного функций; теорема о дифференцировании сложной функции, вообще говоря, не имеет места. Понятие А. п. введено А. Я. Хинчиным в 1916.

По аналогии с обычными *производными числами* определяются аппроксимативные производные числа: $\Lambda_d(x_0)$ — верхнее правое, $\lambda_d(x_0)$ — нижнее правое, $\Lambda_g(x_0)$ — верхнее левое, $\lambda_g(x_0)$ — нижнее левое; напр.,

$$\Lambda_d(x_0) = \overline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}}} \operatorname{ap} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Справедливы следующие теоремы Данжуа — Хинчина. Если действительная функция $f(x)$ конечна и измерима по Лебегу на множестве E, то почти в каждой точке этого множества либо $f(x)$ имеет конечную А. п., либо

$$\Lambda_d(x) = \Lambda_g(x) = +\infty, \quad \lambda_d(x) = \lambda_g(x) = -\infty.$$

Если

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

— интеграл в смысле Данжуа — Хинчина, то $F'_{\text{ap}}(x) = f(x)$ почти всюду в рассматриваемом промежутке (при этом обычная производная может не существовать на множестве положительной меры). Эта теорема объясняет роль А. п. в теории интеграла.

Существуют непрерывные функции, не имеющие ни обычной, ни А. п. во всех точках произвольно заданного промежутка.

Для функций *нескольких* действительных переменных рассматриваются аппроксимативные частные производные.

Лит.: [1] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949.

Г. П. Толстов.

АППРОКСИМАТИВНО КОМПАКТНОЕ МНОЖЕСТВО — множество, обладающее свойством *аппроксимативной компактности*. Метрич. проекция на любое чебышевское А. к. м. непрерывна. Примерами А. к. м. могут служить ограниченно компактные множества, в пространствах $L^p(0<p<\infty)$ — выпуклые замкнутые множества, а также множество рациональных дробей с фиксированными степенями числителя и знаменателя. В теории приближений и теории некорректных задач часто используются пространства, в к-рых каждое замкнутое множество аппроксимативно компактно.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б., «Докл. АН СССР», 1961, т. 140, № 3, с. 522—24; [2] Власов Л. П., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, № 6, с. 3—66.

Ю. Н. Субботин.

АППРОКСИМАТИВНЫЙ ПРЕДЕЛ — предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ по множеству E, для к-рого x_0 является *плотности точкой*. В простейшем случае $f(x)$ есть действительная функция точки n-мерного евклидова пространства (в более общем случае — вектор-функция). А. п. обозначается

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ap} f(x).$$

Из существования А. п., вообще говоря, не следует существование обычного предела. Для А. п. имеют место элементарные свойства пределов — единственность, теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций.

Пусть x_0 — точка плотности области определения действительной функции $f(x)$. Если при этом существует обычный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то существует и равный ему А. п. Верхним А. п. функции $f(x)$ в точке x_0 наз. нижняя грань множества чисел y (причем $y = +\infty$ не исключается), для к-рых множество $\{x: f(x) > y\}$ имеет x_0 своей точкой разряжения. Аналогично, нижним

А. п. функции $f(x)$ в точке x_0 наз. верхняя грань множества тех y ($y=-\infty$ не исключается), для к-рых x_0 служит точкой разряжения множества $\{x: f(x)<y\}$. Эти А. п. обозначаются соответственно

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\ \mathrm{ap}\, f(x) \text{ и } \underline{\lim_{x\to x_0}}\ \mathrm{ap}\, f(x).$$

А. п. существует в том и только том случае, если верхний и нижний А. п. равны; их общее значение совпадает с А. п.

В случае действительного x употребляются также односторонние (правый и левый) верхние и нижние А. п. (при этом требуется, чтобы x_0 была соответственно правосторонней или левосторонней точкой плотности области определения функции). Для правого верхнего А. п. употребляют запись

$$\overline{\lim_{x\to x_0,\, x>x_0}}\ \mathrm{ap}\quad f(x),$$

аналогично записываются и другие случаи. При совпадении правых верхнего и нижнего А. п. получается п р а в ы й А. п., при совпадении левых — л е в ы й А. п.

А. п. был использован впервые А. Данжуа (A. Denjoy, 1915) и А. Я. Хинчиным (1916—18) при исследовании дифференциальных связей неопределенного интеграла (в смысле Лебега и в смысле Данжуа — Хинчина) и подинтегральной функции (см. *Аппроксимативная непрерывность*, *Аппроксимативная производная*).

Лит.: [1] С а к с С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949.

Г. П. Толстов.

АППРОКСИМАЦИЯ — замена одних математич. объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным. А. позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (напр., таких, характеристики к-рых легко вычисляются или свойства к-рых уже известны). В теории чисел изучаются диофантовы приближения, в частности приближения иррациональных чисел рациональными. В геометрии и топологии рассматриваются А. кривых, поверхностей, пространств и отображений. Нек-рые разделы математики в сущности целиком посвящены А., напр. теория приближения функций, численные методы анализа. *БСЭ-3.*

АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА РАЗНОСТНЫМ — приближение дифференциального оператора таким зависящим от параметра оператором, результат применения к-рого к функции определяется ее значениями на нек-ром дискретном множестве точек — сетке, уточняющееся при стремлении параметра (шага сетки) к нулю.

Пусть L, $Lu=f$ — дифференциальный оператор, переводящий каждую функцию u из класса функций U в функцию f из линейного нормированного пространства F. Пусть D_U — область определения функций из U и в D_U выделено нек-рое дискретное подмножество — сетка D_{hU} («сгущающаяся» при $h\to 0$). Рассматривается множество U_h всех функций $[u]_h$, определенных только на сетке и совпадающих в точках сетки с u. Разностным оператором наз. всякий оператор L_h, переводящий сеточные функции из U_h в функции f_h из F. Говорят, что оператор L_h, $L_h[u]_h=f_h$, аппроксимирует (аппроксимирует с порядком h^p) дифференциальный оператор L на классе U, если для любой функции $u\in U$ при $h\to 0$

$$\| Lu-L_h[u]_h \|_F \longrightarrow 0,$$

$$\| Lu-L_h[u]_h \|_{F_h} \leqslant ch^p,\ c=c(u)=\mathrm{const}.$$

Иногда аппроксимацию понимают как равенство

$$\lim_{h\to 0} L_h[u]_h = Lu$$

в смысле той или иной слабой сходимости. А. д. о. р. используется для приближенного вычисления функции

Lu по таблице $[u]_h$ значений функции u и для *аппроксимации дифференциального уравнения разностным.*

Существуют два основных приема построения оператора L_h, аппроксимирующего L.

Первый состоит в том, что определяют $L_h[u]_h$ как результат применения дифференциального оператора L к функции из U, полученной с помощью той или иной интерполяционной формулы из сеточной функции $[u]_h$.

Второй способ состоит в следующем. В области D_F определения функции f из F вводят сетку D_{hF} и рассматривают линейное пространство F_h сеточных функций, определенных на D_{hF}. Оператор $L_h[u]_h$ строят как произведение двух операторов: оператора, переводящего функцию $[u]_h$ в сеточную функцию f_h из F_h, то есть в приближенную таблицу значений функции $f(x)$, и оператора восполнения f_h с сетки D_{hF} на всю область D_F. Напр., для приближения оператора дифференцирования

$$L = \frac{d}{dx}, \quad \frac{du}{dx} = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

строится сетка D_{hU}, состоящая из точек x_k, $k=0, 1, \ldots, N$,

$$0 = x_0 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_N = 1,$$
$$\max_k (x_{k+1} - x_k) = h,$$

и сетка D_{hF}, состоящая из точек

$$x_k^* = x_k + \theta (x_{k+1} - x_k),$$
$$\theta \leqslant \theta \leqslant 1, \quad \theta = \text{const}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Значения оператора $L_h[u]_h$ в точках x_k^* определяются равенствами

$$L_h [u]_h \Big|_{x=x_k^*} = f_h (x_k^*) = \frac{u(x_{k+1}) - u(x_k)}{x_{k+1} - x_k},$$
$$k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Затем $L_h[u]_h$ доопределяется вне D_{hF} кусочно линейно с изломами, быть может, только в точках x_k^*, $k=1, 2, \ldots, N-2$.

Пусть норма в F определяется формулой

$$\| \varphi \|_F = \sup_x | \varphi (x) |.$$

Тогда на классе функций U, имеющих ограниченную третью производную, при $\theta=0$ и $\theta=\frac{h}{2}$ оператор L_h аппроксимирует $L=\frac{d}{dx}$ с порядком h и h^2 соответственно. На классе U функций с ограниченными вторыми производными аппроксимация при любом $\theta \in [0, 1]$ имеет лишь первый порядок.

Иногда задачу А. д. о. р. условно считают решенной, если указан способ построения сеточной функции

$$L_h [u]_h |_{D_{hF}} = f_h \in F_h,$$

определенной только в точках сетки D_{hF}, оставляя задачу о восполнении функции f_h всюду на D_F вне рассмотрения. В таком случае для определения аппроксимации пространство F_h считают нормированным и притом относительно сетки и нормы предполагается, что для всякой функции $f \in F$ совпадающая с ней в точках D_{hF} функция $\{f\}_h \in F_h$ удовлетворяет равенству

$$\lim_{h \to 0} \| \{f\}_h \|_{F_h} = \| f \|_F.$$

Оператор L_h понимают как оператор из U_h в F_h и говорят, что оператор L_h аппроксимирует (аппроксимирует с порядком h^p) дифференциальный оператор L на множестве U, если при $h \to 0$

$$\| \{Lu\}_h - L_h [u]_h \|_{F_h} \to 0,$$
$$\| \{Lu\}_h - L_h [u]_h \|_{F_h} \leqslant ch^p.$$

Для построения оператора L_h, аппроксимирующего L на достаточно гладких функциях с заданным порядком, часто прибегают к замене каждой производной, входящей в выражение L, ее разностной аппроксимацией, опираясь для этого на следующий факт. При любых натуральных i, j и при любом k_0, $2k_0+1\geqslant i+j$ в равенстве

$$h^{-j}\sum_{k=-k_0}^{k_0} c_k u(x+kh) = u^{(j)}(x) + \varepsilon(x, h, c_{-k_0}, \ldots, c_{k_0}),$$

используя метод неопределенных коэффициентов и формулу Тейлора, можно так подобрать числа c_k, не зависящие от h, чтобы для любой функции $u(x)$, имеющей $j+r$ ($r\leqslant i$) ограниченных производных, выполнялось неравенство вида

$$|\varepsilon(x, h, c_{-k_0}, \ldots, c_{k_0})| \leqslant A_{ij} \sup_t |u^{(j+r)}(t)|\, h^r,$$

где A_{ij} зависит только от i и j. Напр., пусть требуется построить аппроксимирующий оператор для оператора Лапласа

$$\Delta,\ \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

если D_U — замкнутый квадрат $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$, а D_P — его внутренность $|x|<1$, $|y|<1$. Задается $h=1/N$, N — натуральное, и строится сетка, причем к D_{hU} относятся точки

$$(x, y)=(mh, nh),\ |mh|\leqslant 1,\ |nh|\leqslant 1,$$

а к D_{hF} — точки

$$(x, y)=(mh, nh),\ |mh|<1,\ |nh|<1,$$

где m и n — целые. Так как

$$\frac{1}{h^2}[y(x+h)-2y(x)+y(x-h)] = y''(x)+\frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi),$$

то Δ на достаточно гладких функциях аппроксимируется со вторым порядком разностным оператором L_h, если положить в точках D_{hF}:

$$L_h u_{m,n} = \frac{u_{m+1,\,n}-2u_{m,\,n}+u_{m-1,\,n}}{h^2} + \frac{u_{m,\,m+1}-2u_{m,\,n}+u_{m,\,n-1}}{h^2} = f_{mn},$$

где $u_{m,\,n}$ и $f_{m,\,n}$ — значения функций $[u]_h$ и f_h в точке (mh, nh).

Существуют отличные от указанного способы построения операторов L_h, аппроксимирующих оператор L на решениях u дифференциального уравнения $Lu=0$ и удовлетворяющих дополнительным требованиям.

Лит.: [1] Филиппов А. Ф., «Докл. АН СССР», 1955, т. 100, № 6, с. 1045—48; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966. *В. С. Рябенький.*

АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РАЗНОСТНЫМ — приближение дифференциального уравнения системой алгебраич. уравнений относительно значений искомых функций на нек-рой сетке, к-рое уточняется при стремлении параметра (шага сетки) к нулю.

Пусть L, $Lu=f$ нек-рый дифференциальный оператор, а L_h, $L_h u_h=f_h$, $u_h\in U_h$, $f_h\in F_h$ — нек-рый разностный оператор (см. *Аппроксимация дифференциального оператора разностным*). Говорят, что разностное уравнение $L_h u_h=0$, $0\in F_h$ аппроксимирует дифференциальное уравнение $Lu=0$ на решении u с порядком h^p, если оператор L_h аппроксимирует оператор L на решении u с порядком p, т. е. если

$$\|L_h[u]_h\|_{F_h} = O(h^p).$$

Простейший пример построения разностного уравнения $L_h u_h=0$, аппроксимирующего дифференциальное уравнение $Lu=0$ на решениях u, состоит в замене каждой производной, входящей в выражение Lu, аппроксимирующим ее разностным аналогом.

Напр., уравнение

$$Lu \equiv \frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = 0$$

аппроксимируется со 2-м порядком разностным уравнением

$$L_h u_h \equiv \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2} + p(x_m)\frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2h} + q(x_m)u_m = 0,$$

где сетки D_{hU} и D_{hF} состоят из точек $x_m = mh$, m — целое, u_m — значение функции u_h в точке x_m; для уравнения

$$L_u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

напр., двумя различными разностными аппроксимациями на гладких решениях являются:

$$L_h^{(1)} u_h \equiv \frac{u_n^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0$$

(явная схема), и

$$L_h^{(2)} u_h \equiv \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

(неявная схема), где сетки D_{hU} и D_{hF} состоят из точек $(x_m, t_n) = (mh, n\tau)$, $\tau = rh^2$, $r = \text{const}$, m и n — целые, а u_m^n — значение функции u_h в точке (x_m, t_n) сетки. Существуют разностные операторы L_h, аппроксимирующие дифференциальный оператор L особенно хорошо только на решениях u уравнения $Lu = 0$ и хуже на других функциях. Напр., оператор

$$L_h,\ L_h u_n \equiv \frac{u_{m+1} - u_m}{h} - \varphi\left(x_m + \frac{h}{2},\ \frac{u_m + \tilde{u}}{2}\right) = f_h\left(x_m + \frac{h}{2}\right),$$

где $\tilde{u} = u_m + h\varphi(x_m)$ аппроксимирует оператор на

$$L,\ Lu \equiv \frac{du}{dx} - \varphi(x, u) = f(x)$$

произвольных гладких функциях $u(x)$ с первым порядком относительно h, а на решениях уравнения $Lu = 0$ со вторым [функция $u(x)$ предполагается достаточно гладкой]. При численном решении краевых задач для дифференциального уравнения $Lu = 0$ с помощью разностного уравнения $L_h u_h = 0$ существенны свойства аппроксимации оператора L оператором L_h на решениях u уравнения $Lu = 0$, а не на произвольных гладких функциях. Для широкого класса дифференциальных уравнений и систем уравнений существуют способы построения аппроксимирующих их разностных уравнений, при к-рых выполняются различные дополнительные требования: устойчивость решения u_h относительно ошибок округления, допускаемых при вычислениях; выполнение для u_h тех или иных интегральных соотношений, имеющих место для решения u дифференциального уравнения; возможность использовать произвольные сетки D_{hU} и D_{hF} (важная при расчете движения сплошной среды); малое число арифметич. действий, необходимых для вычисления решения, и т. д.

А. д. у. р. является элементом *аппроксимации дифференциальной краевой задачи разностной* с целью приближенного вычисления решения первой.

Лит.: [1] Годунов С. К., Рябенький В. С., Введение в теорию разностных схем, М., 1962; [2] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [3] Годунов С. К. и др., Численное решение многомерных задач газовой динамики, М., 1976; [4] Самарский А. А., Попов Ю. П., Разностные схемы газовой динамики, М., 1975.

В. С. Рябенький.

АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РАЗНОСТНОЙ — приближение дифференциального уравнения и краевых условий системой

конечных (обычно алгебраических) уравнений относительно значений искомой функции на нек-рой сетке, к-рое уточняется при стремлении параметра разностной задачи (шага сетки) к нулю.

Пусть требуется вычислить функцию u, принадлежащую линейному нормированному пространству U функций, определенных в нек-рой области D_U с границей Γ, и являющуюся решением дифференциальной краевой задачи $Lu=0$, $lu|_\Gamma=0$, где $Lu=0$—дифференциальное уравнение, а $lu|_\Gamma=0$—совокупность граничных условий. Пусть D_{hU} — сетка (см. *Аппроксимация дифференциального оператора разностным*) и U_h — линейное нормированное пространство функций u_h, определенных на этой сетке. Норма в U_h вводится так, чтобы для любой функции $v\in U$ выполнялось равенство

$$\lim_{h\to 0}\| [v]_h\|_{U_h}=\| v\|_U,$$

где $[v]_h$ — таблица значений функции v в точках сетки D_{hU}. Задачу вычисления решения u заменяют нек-рой задачей $\mathscr{L}_h u_h=0$ приближенного вычисления таблицы $[u]_h$ значений решения u в точках сетки D_{hU}. Здесь $\mathscr{L}_h u_h$ — нек-рая совокупность конечных (недифференциальных) уравнений относительно значений сеточной функции $u_h\in U_h$.

Пусть v_h — произвольная функция из U_h и $\mathscr{L}_h v_h=\varphi_h$, Φ_h — линейное нормированное пространство, к-рому принадлежат φ_h при любом $v_h\in U_h$. Говорят, что задача $\mathscr{L}_h u_h=0$ является разностной аппроксимацией порядка p дифференциальной краевой задачи $Lu=0$, $lu|_\Gamma=0$ на решении u последней, если

$$\| \mathscr{L}_h [u]_h\|_{\Phi_h}=O(h^p).$$

Фактическое построение системы $\mathscr{L}_h u_h=0$ разбивают на построение двух ее подсистем $L_h u_h=0$ и $l_h u_h|_{\Gamma_h}=0$. В качестве $L_h u_h=0$ используют к.-л. разностную аппроксимацию дифференциального уравнения (см. *Аппроксимация дифференциального уравнения разностным*). Дополнительные уравнения $l_h u_h|_{\Gamma_h}=0$ строят с использованием граничных условий $lu|_\Gamma=0$.

А. д. к. з. р. в смысле приведенного определения ни при каком выборе норм в U_h и Φ_h еще не обеспечивают сходимости (см. [2]) решения u_h разностной задачи к точному решению u, т. е. равенства

$$\lim_{h\to 0}\| [u]_h-u_h\|_{U_h}=0.$$

Дополнительным условием, обеспечивающим сходимость, является свойство устойчивости (см. [3], [5] — [8]), к-рым должна обладать разностная задача $\mathscr{L}_h u_h=0$. Задача $\mathscr{L}_h u_h=0$ наз. устойчивой, если существуют числа $\delta>0$ и $h<h_0$ такие, что уравнение $\mathscr{L}_h z_h=\varphi_h$ имеет единственное решение $z_h\in U_h$ при любом $\varphi_h\in\Phi_h$, $\|\varphi_h\|<\delta$, $h<h_0$, причем это решение удовлетворяет неравенству

$$\| z_h-u_h\|_{U_h}\leqslant C\,\| \varphi_h\|_{\Phi_h},$$

где C — нек-рая постоянная, не зависящая от h и возмущения правой части φ_h, а u_h — решение невозмущенной задачи $\mathscr{L}_h u_h=0$. Если решение u дифференциальной задачи существует, а разностная задача $\mathscr{L}_h u_h=0$ аппроксимирует дифференциальную на решении u с порядком p и устойчива, то имеет место сходимость с тем же порядком, то есть

$$\| [u]_h-u_h\|_{U_h}=O(h^p).$$

Напр., задача

$$\left.\begin{aligned} L(u)\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ t>0,\ -\infty<x<\infty,\\ lu\Big|_\Gamma=u(0,x)-\psi(x)=0,\ -\infty<x<\infty,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

где $\psi(x)$ — заданная функция, имеющая ограниченную

производную 2-го порядка, при естественном определении норм аппроксимируется разностной задачей

$$\mathscr{L}_h u_h = \begin{cases} L_h u_h = \dfrac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \dfrac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0 \\ l_h u_h \Big|_{\Gamma_h} \equiv u_m^0 - \psi\,(mh) = 0 \end{cases} \Bigg\} = 0 \in \Phi_h, \quad (2)$$

где u_m^n — значение функции u_h в точке $(x_m, t_n) = (mh, n\tau)$ сетки, $\tau = rh$, $r = \text{const}$. Если за норму φ_n принять верхнюю грань модулей правых частей уравнений, составляющих систему $\mathscr{L}_h v_h = \varphi_h$, $v_h \in U_h$, то аппроксимация задачи (1) задачей (2) на решении u имеет первый порядок. При $r > 1$ сходимости нет ни при какой норме. При $r \leqslant 1$ и норме

$$\| u_h \|_{U_h} = \sup_{m,\, n} | u_m^n |$$

имеет место устойчивость и, следовательно, сходимость:

$$\| [u]_h - u_h \|_{U_h} = O(h)$$

(см. [2], [3]).

Замена дифференциальных задач разностными является одним из наиболее универсальных средств приближенного вычисления решений дифференциальных краевых задач на ЭВМ (см. [7]).

Замену дифференциальных задач их разностными аналогами, начиная с работ [1], [2], [4], иногда удается использовать для самого доказательства существования решения дифференциальной задачи по следующей схеме. Устанавливается компактность зависящего от h семейства решений u_h разностного аналога дифференциальной краевой задачи и доказывается, что пределом сходящейся при $h_k \to 0$ подпоследовательности u_{h_k} является решение u дифференциальной краевой задачи. Если известно, что оно единственно, то не только подпоследовательность, но и все семейство u_h сходится к решению u при $h \to 0$.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., «Успехи матем. наук», 1940, в. 8, с. 115—24; [2] Курант Р., Фридрихс К., Леви Г., «Успехи матем. наук», 1940, в. 8, с. 125—60; [3] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы. Введение в теорию, М., 1973; [4] Петровский И. Г., «Успехи матем. наук», 1940, в. 8, с. 161—70; [5] Рябенький В. С., «Докл. АН СССР», 1952, т. 86, № 6, с. 1071—3; [6] Рябенький В. С., Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, М., 1956; [7] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [8] Филиппов А. Ф., «Докл. АН СССР», 1955, т. 100, № 6, с. 1045—8.

В. С. Рябенький.

АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ — один из методов в *эргодической теории*. Любой автоморфизм T пространства Лебега X с мерой μ может быть получен как предел периодич. автоморфизмов T_n в естественной для пространства $\mathfrak{M}$ всех автоморфизмов топологии, слабой или равномерной (см. [1]). При количественной характеристике скорости аппроксимации наряду с автоморфизмами T_n рассматривают инвариантные относительно T_n конечные измеримые разбиения X, т. е. разбиения μ пространства X на конечное число непересекающихся измеримых множеств $C_{n,1}, \ldots, C_{n,q_n}$, которые автоморфизм T_n переводит друг в друга. Величина

$$d(T,\ T_n;\ \xi_n) = \sum_{i=1}^{q_n} \mu\,(TC_{n,i}\,\Delta\,T_n C_{n,i})$$

оценивает близость T_n к T относительно разбиения ξ_n; здесь Δ — симметрическая разность:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

При фиксированном q_n можно подобрать такие ξ_n и T_n (с указанными выше свойствами), что $d(T, T_n; \xi_n)$ будет сколь угодно мало (см. [1]). Содержательные ин-

варианты автоморфизма T возникают при рассмотрении такой бесконечной последовательности T_n и ξ_n, что для любого измеримого множества A имеется последовательность множеств A_n, целиком состоящая из нек-рых $C_{n,i}$ и аппроксимирующая A в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A\Delta A_n)=0$$

(«разбиения ξ_n сходятся к разбиению на точки»). Если при этом $d(T, T_n; \xi_n)<f(q_n)$, где $f(n)$ — заданная монотонная последовательность, стремящаяся к нулю, то говорят, что T допускает А. п. п. I рода со скоростью $f(n)$; если, сверх того, T_n циклически переставляет множества $C_{n,i}$, то говорят о циклической А. п. п. Другие варианты см. в [2], [6], [7].

При определенной скорости аппроксимации те или иные свойства периодич. автоморфизмов T_n влияют на свойства предельного автоморфизма T. Напр., если T допускает циклич. А. п. п. со скоростью c/n, то при $c<4$ это гарантирует эргодичность T, при $c<2$ — отсутствие у T перемешивания, а при $c<1$ — простоту спектра соответствующего унитарного оператора сдвига. Нек-рые свойства T могут быть охарактеризованы в терминах скорости аппроксимации. Напр., его *энтропия* равна нижней грани тех c, для к-рых T допускает А. п. п. I рода со скоростью $2c/\log_2 n$ (см. [2], [7]). А. п. п. применялась при исследовании ряда простых конкретных примеров (см. [2]), включая гладкие потоки на двумерных поверхностях (см., напр., [8]). При ее помощи был построен ряд динамич. систем с неожиданными метрич. свойствами (см. [2], [6], [7]) или с неожиданным сочетанием метрич. свойств с дифференциальными (см. [3], [4]).

Утверждение о плотности периодич. автоморфизмов в $\mathfrak{A}$, снабженном слабой топологией, может быть существенно усилено: для любой монотонной последовательности $f(n)>0$ автоморфизмы, допускающие циклич. А. п. п. со скоростью $f(n)$, образуют в $\mathfrak{A}$ множество II категории (см. [2]). Поэтому А. п. п. позволяет получать так наз. категорные теоремы, утверждающие, что в $\mathfrak{A}$ (со слабой топологией) автоморфизмы с тем или иным свойством образуют множество I или II категории (напр., эргодические множества — II категории, а перемешивающие — I категории, см. [1]).

Пусть X — топологическое или гладкое многообразие, а мера μ согласована с топологией или гладкостью. В классе гомеоморфизмов или диффеоморфизмов, сохраняющих μ, естественными являются не слабая, а другие топологии. Для гомеоморфизмов справедливы категорные теоремы, сходные с имеющимися для $\mathfrak{A}$ (историю и современное состояние проблемы см. в [5]).

Лит.: [1] Халмош П., Лекции по эргодической теории, пер. с англ., М., 1959; [2] Каток А. Б., Стёпин А. М., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, № 5, с. 81—106; [3] Аносов Д. В., Каток А. Б., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1970, т. 23, с. 3—36; [4] Каток А. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1973, т. 37, № 3, с. 539—76; [5] Каток А. Б., Стёпин А. М., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, № 2, с. 193—220; [6] Akcoglu M. A., Chacon R. V., Schwartzbauer T., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1970, v. 24, № 3, p. 637—642; [7] Schwartzbauer T., «Pacific J. Math.», 1972, v. 43, № 3, p. 753—64; [8] Кочергин А. В., «Матем. сб.», 1975, т. 96, № 3, с. 472—502.

Д. В. Аносов.

АПРИОРНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ (вероятность a priori) какого-либо события — вероятность события, рассматриваемая в противоположность условной вероятности этого же события при нек-ром дополнительном условии. Последнюю называют в таком случае *апостериорной вероятностью*. Эту терминологию употребляют обычно в связи с *Бейеса формулой*.

Ю. В. Прохоров.

АПРИОРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей какой-либо случайной величины, рассматриваемое в противоположность *условному распределению* этой случайной величины при нек-ром допол-

нительном условии. Обычно термин «А. р.» употребляют в следующей обстановке. Пусть (θ, X) — пара случайных величин (случайных векторов или более общих случайных элементов). Случайную величину θ рассматривают как неизвестный параметр, а X — как результат наблюдений, предназначенных для оценки θ. Совместное распределение θ и X задают распределением θ (которое и называют в этом случае А. р.) и совокупностью условных распределений P_θ случайной величины X по отношению к θ. По *Бейеса формуле* можно вычислить условное распределение θ относительно X (которое в этом случае называют *апостериорным распределением* θ). В статистич. задачах часто А. р. неизвестно (и даже само предположение о его существовании не представляется достаточно обоснованным). Об использовании А. р. см. *Бейесовский подход*.

Ю. В. Прохоров.

АРАБСКИЕ ЦИФРЫ — традиционное название десяти математич. знаков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, с помощью к-рых по десятичной системе *счисления* записываются любые числа. Эти цифры возникли в Индии (не позднее 5 в.), в Европе стали известны в 10—13 вв. по араб. сочинениям (отсюда название). *БСЭ-3.*

АРБИТРАЖНАЯ СХЕМА — правило, по к-рому каждой игре с дележами (см. *Кооперативная игра*) ставится в соответствие единственный дележ этой игры, наз. а р б и т р а ж н ы м р е ш е н и е м. Первоначально А. с. были рассмотрены Дж. Нэшем [1] для случая игры двух лиц. Пусть $R=\{u(u_1, \ldots, u_n)\}$ — множество дележей, $d=(d_1, \ldots, d_n)$ — точка status quo, т. е. точка, соответствующая случаю, когда никакой дележ не осуществляется, $[R, d]$ — игра с дележами, $\bar{u}$ — ее арбитражное решение. Дележ u^* наз. р е ш е н и е м Н э ш а, если

$$\Pi_i (u_i^* - d_i) = \max_{u \in R} \Pi_i (u_i - d_i).$$

Решение Нэша и только оно удовлетворяет следующим аксиомам: 1) если f — линейное неубывающее преобразование, то $f\bar{u}$ есть арбитражное решение игры $[fR, fd]$ (инвариантность относительно преобразований полезности); 2) $\bar{u} \geqslant d$, $\bar{u} \in R$ и нет такого $u \in R$, чтобы $u \geqslant \bar{u}$ (оптимальность по Парето); 3) если $R' \subset R$, $d'=d$, $\bar{u} \in R'$, то $\bar{u}'=\bar{u}$ (независимость несвязанных альтернатив); 4) если $d_i=d_j$, $i, j=1, \ldots, n$ и R симметрична, то $\bar{u}_i=\bar{u}_j$, $i, j=1, \ldots, n$ (симметрия).

Другую А. с. с характеристич. функцией $v(S)$, $S \subset N=\{1, \ldots, n\}$ для игр n лиц дал Л. С. Шепли [2]. Р е ш е н и е Ш е п л и $\varphi(v)=(\varphi_1(v), \ldots, \varphi_n(v))$, где

$$\varphi_i(v) = \sum\nolimits_{S \subset N} \gamma_n(s) [v(S) - v(S \setminus \{i\})],$$

$\gamma_n(s)=(s-1)!(n-s)!/n!$, s — число элементов множества S, также удовлетворяет аксиоме симметрии, кроме того, $\Sigma_i \varphi_i(v)=v(N)$ и для любых двух игр u и v выполняется $\varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v)$. Были также рассмотрены А. с. для случая сравнимых индивидуальных выигрышей (см. [3]).

Арбитражные схемы Дж. Нэша и Л. С. Шепли обобщил Дж. Харшаньи [4]. Р е ш е н и е Х а р ш а н ь и, кроме соответствующих четырех аксиом Нэша, удовлетворяет еще двум аксиомам: 1) решение монотонно зависит от обоснованных требований игрока, 2) если u^* и u^{**} — решения, то решением будет и $\bar{u}$,

$$\bar{u}_i \geqslant \min_{i \in N} (u_i^*, u_i^{**}),$$

если только $\bar{u}$ принадлежит границе множества R.

А. с. непрерывно зависят от параметров игры, если в R имеются лучшие дележи, чем точка status quo.

Лит.: [1] Nash J., «Econometrica», 1950, т. 18, № 2, p. 155—62; [2] Shapley L. S., в кн.: Contributions to the theory of games, v. 2, Princeton (N. J.), 1953, p. 307—17; [3] Raiffa H., в кн.: Contributions to the theory of games, v. 2,

Princeton (N. J.), 1953, p. 361—87; [4] Harsanyi J. C., в кн.: Contributions to the theory of games, v. 4, Princeton (N. J.), 1959, p. 325—55.
Э. И. Вилкас.

АРГУМЕНТ — 1) А. функции — переменная (говорят также независимая переменная), от значений к-рой зависят значения функции. 2) А. комплексного числа $z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, изображаемого на плоскости точкой с координатами x и y,— угол φ радиус-вектора r этой точки с осью абсцисс.

АРГУМЕНТА ПРИНЦИП — геометрический принцип теории функций комплексного переменного, формулируемый следующим образом: пусть D — ограниченная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, причем граница ∂D является непрерывной кривой, ориентация к-рой согласована с D; если функция $w=f(z)$ мероморфна в окрестности $\bar{D}$ и на ∂D не имеет нулей и полюсов, то разность между числом ее нулей N и числом полюсов P в D (с учетом кратностей) равна деленному на 2π приращению аргумента f при положительном обходе ∂D, т. е.

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D}\arg f, \qquad (*)$$

где $\arg f$ обозначает какую-либо непрерывную ветвь $\operatorname{Arg} f$ на кривой ∂D. Выражение справа равно индексу $\operatorname{ind}_0 f(\partial D)$ кривой $f(\partial D)$ относительно точки $w=0$.

А. п. используется для доказательства различных утверждений о нулях голоморфных функций (основная теорема алгебры многочленов, теорема Гурвица о нулях и т. п.). Из А. п. следуют такие важные геометрич. принципы теории функций, как *сохранения области принцип*, *максимума модуля принцип*, теорема о локальном обращении голоморфной функции. Во многих вопросах А. п. используется неявно в виде его следствия — *Руше теоремы*.

Имеются обобщения А. п. Условие мероморфности f в окрестности $\bar{D}$ можно заменить следующим: f имеет в D конечное число нулей и полюсов и непрерывно продолжается на ∂D. Вместо комплексной плоскости можно рассматривать произвольную риманову поверхность, при этом ограниченность D заменяется условием, что $\bar{D}$ — компакт. Из А. п. для римановых поверхностей следует, что на компактной римановой поверхности число нулей любой мероморфной функции, не равной тождественно нулю, равно числу полюсов. А. п. в областях на C эквивалентен теореме о сумме *логарифмических вычетов*. Поэтому обобщенным А. п. иногда называют следующее утверждение. Если f мероморфна в окрестности области $\bar{D}$, ограниченной конечным числом непрерывных кривых, и f на ∂D не имеет нулей и полюсов, то для любой функции φ, голоморфной в окрестности $\bar{D}$, справедливо равенство:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_{k=1}^{N}\varphi(a_k)-\sum_{k=1}^{P}\varphi(b_k),$$

где первая сумма распространяется на все нули, а вторая — на все полюсы f в D. Имеется топологическое обобщение А. п. (*): А. п. справедлив для любых открытых локально конечнократных отображений $f: D\to\bar{\mathbb{C}}$, непрерывно продолжающихся на ∂D и таких, что $0,\ \infty\notin f(\partial D)$.

Аналогом А. п. для многих комплексных переменных является, напр., следующая теорема: пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с жордановой границей ∂D и $f: \bar{D}\to\mathbb{C}^n$ есть отображение, голоморфное в окрестности $\bar{D}$ и такое, что $0\notin f(\partial D)$; тогда число прообразов 0 в D (с учетом кратностей) равно $\operatorname{ind}_0 f(\partial D)$.

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд., М., 1965; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.
Е. М. Чирка.

АРЕА-ФУНКЦИЯ — функция, обратная гиперболической функции, т. е. одна из функций: ареа-синус,

ареа-косинус, ареа-тангенс, ареа-котангенс. См. *Обратные гиперболические функции*.

АРИФМЕТИЗАЦИЯ — метод, применяемый в математич. логике для замены рассуждений о выражениях к.-л. логико-математич. языка рассуждениями о натуральных числах. С целью такой замены устанавливается к.-л. достаточно простое взаимно однозначное отображение множества всех слов (в алфавите рассматриваемого языка) в натуральный ряд; образ слова наз. его н о м е р о м. Отношения и операции, определенные на словах, переходят при этом отображении в отношения и операции, определенные на номерах. Требование «достаточной простоты» отображения сводится к тому, чтобы нек-рые основные отношения (такие, как отношение *вхождения* одного слова в другое и т. п.) и операции (такие, как операция соединения слов и т. п.) переходили в отношения и операции, имеющие простую алгоритмич. природу (напр., оказывающиеся примитивно рекурсивными). В частности, если среди выражений рассматриваемого языка содержатся программы для нек-рого семейства *вычислимых функций*, А. естественно приводит к нумерации этого семейства (при к-рой номером функции считается номер всякой ее программы).

Впервые А. была применена К. Гёделем [1] для доказательства неполноты формальной арифметики (см. *Гёделя теорема о неполноте*). Именно, Гёдель поставил в соответствие буквам алфавита некоторые попарно различные натуральные числа и затем занумеровал слово $\tau_1 \ldots \tau_n$ номером $2^{t_1} \cdot 3^{t_2} \ldots p_n^{t_n}$, где t_i—число, поставленное в соответствие букве τ_i, а p_i есть i-е по порядку простое число. Так описанная нумерация слов наз. гёделевой; в широком смысле слова гёделевой наз. всякая нумерация слов, возникающая при А., при этом номера слов наз. их г ё д е л е в ы м и н о м е р а м и.

В 1936 А. Чёрч [2] с помощью А. получил первый пример неразрешимой алгоритмич. проблемы арифметики.

Термин «А.» (в сочетании «А. анализа») употребляется также в литературе по основаниям математики для обозначения осуществленного в 19 в. построения теории действительных чисел с помощью теоретико-множественных конструкций, отправляющихся от натуральных чисел.

Лит.: [1] G ö d e l K., «Monatsh. Math. und Physik», 1931, Bd 38, № 1, S. 173—98; [2] C h u r c h A., «Amer. J. Math.», 1936, v. 58, № 2, p. 345—63; [3] К л и н и С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

В. А. Успенский.

АРИФМЕТИКА — область знаний о числах и операциях в числовых множествах. Говоря об А., имеют в виду рассмотрение вопросов о происхождении и развитии понятия *числа*, приемы и средства вычислений, исследование операций с числами различной природы, анализ аксиоматич. структуры числовых множеств, свойства чисел. Когда делается упор на логич. анализе понятия числа, то иногда употребляют термин т е о р е т и ч е с к а я а р и ф м е т и к а. А. тесно связана с *алгеброй*, в к-рой, в частности, изучаются свойства операций над числами. Свойства же самих целых чисел составляют предмет теории чисел (см. *Элементарная теория чисел*, *Чисел теория*).

Термин «А.» иногда употребляют и тогда, когда имеют дело с операциями над объектами самой различной природы: «А. матриц», «А. квадратичных форм» и т. д.

Культура счета возникла и развивалась задолго до создания дошедших до нас письменных памятников. Наиболее древними письменными математич. памятниками являются кахунские папирусы и знаменитый папирус Ринда, относящийся приблизительно к 2000 до н. э. Аддитивная иероглифич. система *счисления* позволяла египтянам сравнительно просто производить только операции сложения и вычитания натуральных чисел. Умножение выполнялось с помощью удвоения, т. е. множитель разбивался на сумму степеней двойки, производилось умножение на отдельные слагаемые, а затем

компоненты складывались. Действия с *дробями* египтяне сводили к операциям с а л и к в о т н ы м и д р о б я м и, т. е. с дробями вида $\frac{1}{n}$. Более сложные дроби разбивались с помощью таблиц на сумму аликвотных дробей. Деление осуществлялось вычитанием из делимого чисел, получаемых в процессе последовательного удвоения делителя. Громоздкая шестидесятичная система счисления вавилонян вызывала большие трудности при выполнении арифметич. операций. До нас дошли многочисленные таблицы, с помощью к-рых вавилоняне выполняли умножение и деление.

А. у греков — изучение свойств чисел; они не относили к ней практику вычислений. Вопросы, связанные с техникой операций над числами, т. е. способы вычислений, составляли особую науку, наз. л о г и с т и к о й. Такое разделение от греков перешло в средневековую Европу. Только в эпоху Возрождения общим назв. А. стали объединять как начатки теории чисел, так и практику вычислений. Греческая математика резко разграничивала понятия числа и величины. Греческие математики называли числами только те числа, к-рые теперь наз. *натуральными числами*, и различали такие разнородные, по их представлениям, понятия, как числа и геометрич. величины. Специальные греческие сочинения по логистике до нас не дошли: все же известно, что греки применяли способ умножения, близкий к современному. Алфавитная система нумерации сильно усложняла операции над числами. Греки практиковали вычисления с обыкновенными дробями, однако дроби не рассматривались как числа, а только как отношения натуральных чисел.

7—9-ю книги «Начал» Евклид (3 в. до н. э.) посвятил целиком А. в античном смысле этого слова. Это прежде всего элементы теории чисел: алгоритм отыскания *наибольшего общего делителя* (см. *Евклида алгоритм*), теоремы о *простых числах*. Евклид обосновывает коммутативность умножения, а также дистрибутивность этой операции относительно сложения. Рассматривается теория пропорций, т. е., по существу, теория дробей. В других книгах в геометрич. форме излагается общая теория отношений величин, к-рую можно рассматривать как зачатки теории *действительных чисел*.

В дошедших до нас рукописях Диофанта (вероятно, 3 в.) можно найти действия со степенями, показатели к-рых не превосходят шести, и нек-рые приемы операций с вычитаемыми. В неявной форме это операции с отрицательными числами. Сформулированные Диофантом правила применялись им только к *рациональным числам*.

Китайские математики во 2 в. оперировали с дробями и отрицательными числами. Несколько позже ими рассматривались методы извлечения квадратных и кубич. корней, приближенные значения к-рых выражались в виде *десятичных дробей*. Применявшиеся китайскими математиками для решения арифметич. задач правила, в частности правило двух *ложных положений*, вошли во многие руководства по А. сначала у арабов, а затем и в Европе. О начальном периоде арифметич. культуры в Индии не имеется достаточно данных. Простейшие дроби употреблялись в Индии задолго до нашей эры. Ныне общепринятая *десятичная система счисления* индийского происхождения. Начиная с 5 в. имеются датированные письменные источники и они показывают высокую арифметич. культуру Индии в ту эпоху. Индийские математики оперировали с целыми и дробными числами методами, близкими к современным. Решались многие задачи на пропорции, тройное правило и проводились процентные вычисления. С 7 в. начали рассматриваться отрицательные числа. В сочинениях Бхаскары II «Венец науки» (12 в.) приводятся правила умножения и деления отрицательных чисел.

Индийская математика оказала решающее влияние на развитие арифметич. знаний у арабов. Написанный в 9 в. Мухаммедом аль-Хорезми трактат по А. способствовал повсеместному распространению индийской десятичной системы записи чисел и способов сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

У многих древних народов первоначальные приемы счета на пальцах заменяются вычислениями на *абаке*. Абак менял свою форму, но принцип оставался один и тот же — разграфленные колонны или к.-л. другим образом отведенные места для поразрядной отметки чисел. У греков абак употреблялся задолго до нашей эры. Абак (суан-пан) у китайцев по форме близок к нашим русским счетам, представляющим собой также разновидность абака.

В то время как теоретико-числовые исследования в Европе возникли на базе греческой математики, в первую очередь трудов Евклида и Диофанта, совершенно иначе обстоит дело с техникой вычислений. Развитие А. в Европе связано с распространением индийской десятичной позиционной системы и *арабских цифр*. Техника арифметич. операций заимствована из Индии не непосредственно, а в результате ознакомления с трудами Мухаммеда аль-Хорезми и других арабских математиков.

В средние века широко применялся абак. Он стал даже синонимом слова А., так что Леонардо Пизанский (Leonardo Pisano, 13 в.) назвал свой трактат по А. «Книга абака». В этой книге изложены заимствованные из арабских источников приемы вычисления, однако сделаны и существенные усовершенствования. Напр., при сложении дробей используется наименьшее общее кратное знаменателей, а проверка действий производится не только, как это делали индийцы с помощью девятки, но и с использованием нек-рых других модулей. Рассматриваются задачи на тройное правило, правило товарищества, на смешение величин, задачи, в к-рых фигурируют рекуррентные последовательности, *арифметические прогрессии* и *геометрические прогрессии*. В Европе первые шаги в направлении применения десятичных дробей были сделаны в 15 в., но широкое распространение они получили только в 16 в. после выхода сочинений С. Стевина (S. Stevin).

В 15—16 вв., да и позже, предлагались разные схемы для умножения и деления многозначных чисел. Эти схемы отличаются друг от друга, в сущности, только характером записи промежуточных вычислений. Общепринятый в настоящее время способ умножения ввел А. Ризе (A. Riese, 16 в.).

Отрицательные числа появляются в Европе впервые у Леонардо, к-рый трактовал их в форме долга. Операции с отрицательными числами систематизируются М. Штифелем (M. Stiefel, 16 в.). Такие числа он наз. «фиктивными». В 18 в. еще рассматривались доказательства правил операций с отрицательными числами и только критич. мышление 2-й пол. 19 в. положило конец серьезному восприятию таких работ.

Арифметич. действия над иррациональными числами до 15—16 вв. в Европе ограничивались квадратными корнями. Все же Леонардо рассматривал вопрос о приближенном вычислении не только квадратных, но и кубич. корней. С. Даль Ферро (S. Dal Ferro, конец 15 в.— начало 16 в.) и Н. Тарталья (N. Tartaglia, 16 в.) при решении уравнения 3-й степени стали употреблять кубич. корни. Общая трактовка операций с действительными числами отсутствовала. Понятие действительного числа входило в математич. обиход только постепенно в связи с развитием аналитич. геометрии и математич. анализа. Вплоть до 18 в. обоснование операций над иррациональными числами ограничивалось величинами, выражаемыми в радикалах.

При рассмотрении квадратных уравнений математики разных эпох, начиная с индийских математиков, встречались с комплексными величинами. Однако мнимые решения отбрасывались как несуществующие. А. *комплексных чисел* начинается с работ Р. Бомбелли (R. Bombelli, 16 в.), давшего формальные правила арифметич. действий над такими числами. Но и в 17 в. операции над комплексными числами производили по аналогии с операциями над действительными числами, что часто приводило к ошибкам. Только в 18 в. формулы Муавра и Эйлера обеспечили возможность четкого построения А. комплексных чисел.

Идея введения логарифмов восходит к Архимеду (3 в. до н. э.), к-рый сравнивал члены геометрич. и арифметич. прогрессий. М. Штифель (M. Stiefel, 16 в.) продолжил сравниваемые прогрессии влево, добавив отрицательные степени. Он показал связь между операциями над этими рядами, дав, таким образом, основную идею логарифмов. Логарифмирование и использование этой операции для вычислений начали применять в 1-й пол. 17 в. после работ Дж. Непера (J. Napier) и Й. Бюрги (J. Burgi).

В 17 в. В. Шиккард (W. Schickard) и Б. Паскаль (B. Pascal) создали независимо друг от друга вычислительные машины — прототипы современных арифмометров. Но широкое практич. применение счетные машины получили только в 19 в. В сер. 20 в. распространяются быстродействующие электронные вычислительные машины. В связи с этим актуальными становятся задачи отыскания алгоритмов, позволяющих выполнять арифметич. действия с наименьшим числом элементарных операций.

Чтобы обосновать какую-нибудь теорию, со времени Евклида считалось достаточным выделить в ней небольшое число ясных простейших первичных начал и убедиться, что все основные положения данной теории можно вывести из них чисто логически. Подразумевалось, что связь этих начал с действительным миром должна быть доступной непосредственному восприятию.

В 19 в. был открыт метод моделей для обоснования математич. теорий. Необходимость этого метода была обусловлена тем, что в математике стали рассматриваться объекты и теории, для к-рых не удавалось найти реального истолкования. Это, прежде всего, комплексные числа, идеалы, неевклидовы и n-мерные геометрии. Метод моделей позволял свести *непротиворечивость* одной математич. теории к непротиворечивости другой. Так, в предположении, что непротиворечива евклидова геометрия, была доказана непротиворечивость геометрии Лобачевского, а непротиворечивость евклидовой геометрии была сведена к непротиворечивости А. действительных чисел.

К концу 19 в. обоснование А. казалось завершенным. Р. Дедекинд (R. Dedekind) и, независимо от него, Дж. Пеано (G. Peano) указали систему аксиом А. натуральных чисел, из к-рой можно вывести все известные положения этой науки. К. Вейерштрасс (K. Weierstrass) предложил в качестве моделей для целых и положительных рациональных чисел классы пар натуральных чисел. Геометрич. истолкование комплексных чисел, открытое Ж. Арганом (J. Argand), К. Весселем (C. Wessel) и К. Ф. Гауссом (K. F. Gauss), по существу является моделью для теории комплексных чисел в рамках теории действительных чисел. И, наконец, теоретико-множественный подход позволил Р. Дедекинду, Г. Кантору (G. Cantor) и К. Вейерштрассу построить теории действительных чисел.

Но после того, как стали известны парадоксы в теории множеств, возник вопрос: как обосновать А. натуральных чисел и действительных чисел? Есть ли гарантия, что парадоксы не будут обнаружены и в этих разделах математики? Непосредственное восприятие не по-

зволяет сделать заключение ни о бесконечной протяженности Вселенной, ни о бесконечной делимости вещества. Поэтому представления о бесконечности множества натуральных чисел и о непрерывности числовой прямой нельзя рассматривать как непосредственно связанные с физическим миром. С другой стороны, для А. натуральных чисел нет более простой модели, чем сама эта теория, а при построении моделей для теории действительных чисел существенным образом используется аппарат теории множеств, в надежности к-рого появились основания усомниться.

Какими *должны* быть способы и средства рассуждений, на основании к-рых, не прибегая к построению модели, непосредственно можно убедиться, что в данной теории никогда не возникнет противоречий, что на основании аксиом данной теории нельзя с помощью цепочки логич. умозаключений получить результаты, противоречащие друг другу?

Д. Гильберт (D. Hilbert) считал, что парадоксы в теории множеств возникают вследствие того, что безотказно работающие в области конечных систем объектов способы рассуждений без должных оснований применяются к бесконечным совокупностям. Но этого можно избежать, если рассматривать употребляемые символы как объекты нек-рой новой теории, а логич. умозаключения выражать с помощью формального процесса. В таком случае любое высказывание теории представляется в виде *формулы*, составленной из конечного множества символов, а *доказательство* — в виде конечной цепочки формул, образованной по определенным правилам из формул, наз. *аксиомами*. Тогда, по мысли Д. Гильберта, появится возможность оперирования с бесконечным заменить оперированием с конечным и получить надежный способ установления непротиворечивости любой теории. Д. Гильберт надеялся, что на этом пути будет в первую очередь найдено положительное решение проблемы непротиворечивости А. натуральных чисел и, более того, будет показано, что присоединение к формулам А. любой недоказуемой формулы теории чисел превращает эту систему аксиом в противоречивую систему.

Но эти надежды не оправдались. В 1931 К. Гёдель (K. Gödel) доказал неполноту *арифметики формальной*. Более того, оказывается, что для всякой непротиворечивой *формальной системы*, содержащей аксиомы А., можно дать явное описание нек-рой замкнутой формулы *и* такой, что ни сама формула *и*, ни ее отрицание не выводимы в этой формальной системе.

Воспользовавшись этим результатом, можно доказать существование неизоморфных моделей формальной А. Вместе с тем система *Пеано аксиом* категорична. Как объяснить это? Система аксиом Пеано содержит аксиому индукции: каждое натуральное число обладает нек-рым свойством P, если 1 обладает этим свойством и вместе с каждым натуральным числом n, обладающим свойством P, натуральное число $n+1$ также обладает свойством P. В этой аксиоме за P может быть принято любое мыслимое свойство натуральных чисел. В соответствующей аксиоме формальной А. за P может быть принято лишь такое свойство натуральных чисел, к-рое выразимо средствами данного *формализма*. Различие между этими аксиомами незаметно, пока речь идет о теоремах элементарной теории чисел, и весьма существенно, когда выясняются свойства формальной теории.

К. Гёдель показал также, что в непротиворечивой формальной системе, включающей формальную А., содержится формула, выражающая ее непротиворечивость, и что эта формула недоказуема в этой системе. Следовательно, непротиворечивость такой формальной системы может быть обоснована только средствами более сильными, чем те, к-рые формализованы в данной системе. В 1936 Г. Генцен (G. Gentzen) получил доказательст-

во непротиворечивости формальной А., использующее трансфинитную индукцию до трансфинитного числа E_0. Естественно возникает вопрос о непротиворечивости тех средств, к-рые при этом были использованы. В связи с характером используемых средств рассматривались и другие подходы к проблеме непротиворечивости А. натуральных чисел.

Попытки преодоления трудностей, связанных с обоснованием теории действительных чисел, послужили одним из источников развития конструктивного направления в математике.

Лит.: [1] История математики, т. 1—3, М., 1970—72; [2] Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959; [3] Клини С. К., Математическая логика, пер. с англ., М., 1973; [4] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.—Л., 1948, с. 315—99; [5] Энциклопедия элементарной математики, кн. 1 — Арифметика, М.—Л., 1951; [6] Молодший В. Н., *Основы учения о числе в XVIII* и начале XIX века, М., 1963; [7] Нечаев В. И., Числовые системы, М., 1975. *А. А. Бухштаб, В. И. Нечаев.*

АРИФМЕТИКА ФОРМАЛЬНАЯ, арифметическое исчисление,— логико-математич. исчисление, формализующее элементарную теорию чисел. Язык наиболее употребительного варианта А. ф. содержит константу 0, числовые переменные, символ равенства, функциональные символы $+$, $\cdot$, $'$ (прибавление 1) и логич. связки. Термы строятся из константы 0 и переменных с помощью функциональных символов; в частности, натуральные числа изображаются термами вида $0'\cdots'$. Атомарные формулы — это равенства термов; остальные формулы строятся из атомарных с помощью логич. связок $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$. Формулы в языке А. ф. наз. арифметическими формулами. Постулатами А. ф. являются постулаты *предикатов исчисления* (классического или интуиционистского в зависимости от того, какая А. ф. рассматривается), аксиомы Пеано

$$a'=b'\rightarrow a=b,\ \neg(a'=0),\ (a=b\ \&\ a=c)\rightarrow b=c,$$
$$a=b\rightarrow a'=b',\ a+0=a,\ a+b'=(a+b)',$$
$$a\cdot 0=0,\ a\cdot b'=(a\cdot b)+a$$

и схема аксиом индукции

$$A(0)\ \&\forall x\,(A(x)\rightarrow A(x'))\rightarrow A(x),$$

где A — произвольная формула, наз. индукционной формулой.

Средства А. ф. оказываются достаточными для вывода теорем, устанавливаемых в стандартных курсах элементарной теории чисел. В настоящее время (1970-е гг.), по-видимому, неизвестно ни одной содержательной теоретико-числовой теоремы, доказанной без привлечения средств анализа, к-рая не была бы выводима в А. ф. Запись и доказательство таких теорем в А. ф. требует выявления ее выразительных возможностей. Особенно существенна выразимость в А. ф. многих теоретико-числовых функций. В частности, в А. ф. можно записывать суждения о примитивно (и даже частично) *рекурсивных функциях*. При этом оказываются выводимыми формулы, выражающие важные свойства частично рекурсивных функций, в частности их определяющие равенства. Так, равенство $f(x')=g(x, f(x))$ выражается формулой

$$\forall a\forall b\forall c\,(F(x',\ a)\ \&\ F(x,\ b)\ \&\ G(x,\ b,\ c)\rightarrow a=c),$$

где F и G — формулы, изображающие графики функций f и g, соответственно. В А. ф. можно формулировать суждения о конечных множествах. Более того, классич. А. ф. эквивалентна *аксиоматической теории множеств* Цермело — Френкеля без аксиомы бесконечности: в каждой из этих систем может быть построена модель другой.

Дедуктивная сила системы А. ф. характеризуется ординалом ε_0 (наименьшее решение уравнения $\omega^{\varepsilon}=\varepsilon$): в А. ф. выводима схема *трансфинитной индук-*

ции до любого ординала $\alpha<\varepsilon_0$, но не выводима схема индукции до ε_0. Класс доказуемо рекурсивных функций системы А. ф. (т. е. частично рекурсивных функций, общерекурсивность к-рых может быть установлена средствами А. ф.) совпадает с классом *ординально* рекурсивных функций с ординалами $<\varepsilon_0$. Это позволяет погружать в А. ф. нек-рые ее расширения, напр. А. ф. с символами для всех примитивно рекурсивных функций и соответствующими дополнительными постулатами. А. ф. удовлетворяет условиям обеих *Гёделя теорем о неполноте*. В частности, имеются такие полиномы P, Q от нескольких переменных, что формула $\forall X(P(X)\neq Q(X))$ невыводима, хотя и выражает истинное утверждение, а именно непротиворечивость системы А. ф.

При исследовании структуры А. ф. (в частности, вопросов непротиворечивости) используется ее формулировка без кванторов, но с гильбертовским ε-символом. При построении формул этой системы не допускается употребление кванторов, но разрешается использование термов вида $\varepsilon_x A(x)$ (нек-рое x, удовлетворяющее условию A, если такие x существуют, и 0 в противном случае). Постулаты ε-системы — это постулаты исчисления высказываний, правила для равенства, правило подстановки вместо свободной числовой переменной, аксиомы для функций $+$, $\cdot$, $'$, pd (вычитание 1 из положительных чисел) и следующие ε-аксиомы:

$$A(a)\longrightarrow A(\varepsilon_x A(x));\quad A(a)\longrightarrow \varepsilon_x A(x)\neq a';$$
$$\neg A(\varepsilon_x A(x))\longrightarrow \varepsilon_x A(x)=0.$$

Кванторы вводятся как сокращения:

$$\exists x A(x)\rightleftarrows A(\varepsilon_x A(x));\quad \forall x A\rightleftarrows \neg\exists x\neg A;$$

аксиома индукции оказывается выводимой.

Формулы А. ф., содержащие свободные переменные, задают теоретико-числовые предикаты. Формулы, не содержащие свободных переменных (замкнутые формулы), выражают суждения. k-местный предикат $\mathscr{P}$ от натуральных чисел наз. арифметическим, если найдется такая арифметич. формула $P(x_1, \ldots, x_k)$, что для любых натуральных чисел $n_1, \ldots, n_k$ имеет место

$$P(n_1, \ldots, n_k)\Leftrightarrow \langle n_1, \ldots, n_k\rangle\in\mathscr{P}.$$

Это определяет классификацию арифметич. предикатов по типу префикса в предваренной форме соответствующей формулы. Класс Σ_n (класс Π_n) состоит из предикатов $P(\alpha)$, изобразимых формулой вида

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n(f(x_1, \ldots, x_n, \alpha)=0),$$

где f — примитивно рекурсивная функция, Q_1 есть $\exists$ (соответственно $\forall$) и Q_i — чередующиеся кванторы (т. е. Q_{i+1} есть $\overline{Q}_i$, где $\overline{\forall}$ есть $\exists$, а $\overline{\exists}$ есть $\forall$). Каждый из этих классов содержит универсальный предикат, т. е. такой предикат $T(e, a)$, что для всякого одноместного предиката P из того же класса имеется число e_P, для к-рого верно $\forall x(T(e_P, x)\equiv P(x))$. Многоместные предикаты сводятся к одноместным с помощью функций, нумерующих системы натуральных чисел. При каждом $n>0$ справедливо неравенство $\Sigma_n\neq\Pi_n$, и класс с меньшим индексом есть собственная часть любого класса с бо́льшим индексом. Классификация предикатов порождает классификацию арифметич. функций на основе классификации соответствующих графиков. Не все теоретико-числовые предикаты арифметические: примером неарифметич. предиката является такой предикат $T(x)$, что для любой замкнутой арифметич. формулы A имеет место $T(\ulcorner A\urcorner)\equiv A$, где $\ulcorner A\urcorner$ — номер формулы A в нек-рой фиксированной нумерации, удовлетворяющей естественным условиям. Предикат T играет существенную роль в исследованиях структуры

А. ф., в частности вопроса о независимости ее аксиом. Присоединение к А. ф. символа T с аксиомами типа $T(\ulcorner A\&B\urcorner)\equiv T(\ulcorner A\urcorner)\&T(\ulcorner B\urcorner)$, выражающими его перестановочность с логич. связками, позволяет доказать непротиворечивость А. ф. Та же конструкция (но уже внутри А. ф.) проходит для подсистемы $A_{[n]}$ системы А. ф., в к-рой схема индукции ограничена условием: индукционная формула имеет сложность $\leqslant n$, т. е. принадлежит $\Pi_n\cup\Sigma_n$. Роль T здесь успешно исполняет, напр., универсальный предикат для Σ_{n+1}, и соответствующее доказательство проводится в системе $A_{[n+1]}$. В силу второй теоремы Гёделя о неполноте отсюда следует, что $A_{[n+1]}$ сильнее $A_{[n]}$, так что А. ф. не совпадает ни с одной из систем $A_{[n]}$ и схему индукции нельзя заменить никаким конечным множеством аксиом. А. ф. оказывается полной относительно формул из класса Σ_1: замкнутая формула из этого класса выводима в А. ф. тогда и только тогда, когда она истинна. Так как класс Σ_1 содержит алгорифмически неразрешимый предикат, отсюда следует, что проблема выводимости в А. ф. алгорифмически неразрешима.

При задании А. ф. в виде *Генцена формальной системы* обычного типа сечение оказывается неустранимым. Устранение сечения становится возможным, если заменить схему индукции правилом *бесконечной индукции* (ω-правило):

$$\frac{A(0)\ A(1)\ldots A(N)\ldots}{\forall x\ A(x)}.$$

На этом пути было получено одно из первых доказательств непротиворечивости А. ф. При фактическом построении системы с ω-правилом основным оказывается предикат «число e есть номер общерекурсивной функции, описывающей вывод длины $<\varepsilon_0$ с ω-правилом (ω-вывод)». Этот предикат принадлежит классу Π_2, и получающаяся система оказывается не формальной, а лишь полуформальной. Каждому выводу формулы A в А. ф. удается сопоставить такое число e, что суждение «e есть ω-вывод формулы A без сечения» истинно (и даже доказуемо в А. ф.). Так как ω-вывод без сечения замкнутой бескванторной формулы не содержит кванторов, отсюда следует непротиворечивость А. ф. Применение второй теоремы Гёделя о неполноте позволяет получить отсюда, что теорема об устранении сечения из любого вывода в А. ф. не может быть доказана средствами А. ф.; тем не менее это может быть доказано в А. ф. при любом фиксированном N для любого вывода с индукциями сложности $\leqslant N$. Переход к ω-выводам позволяет устанавливать многие метаматематич. теоремы о системе А. ф., в частности полноту относительно формул из Σ_1 и ординальную характеристику доказуемо рекурсивных функций.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, 2 Aufl., Bd 1—2, B., 1968—70; [3] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [4] Kreisel G., «J. Symbolic Logic», 1968, v. 33, № 3, p. 321—88; [5] Гёдель К., в сб.: Математическая теория логического вывода, М., 1967, с. 299—310.

Г. Е. Минц.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ГРУППА — подгруппа H *линейной алгебраической группы* G, определенной над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, удовлетворяющая следующему условию: существует точное рациональное представление $\rho: G\to \mathrm{GL}_n$, определенное над $\mathbb{Q}$ (см. *Представлений теория*), такое, что $\rho(H)$ соизмерима с $\rho(G)\cap\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел (подгруппы A и B группы C наз. соизмеримыми, если $A\cap B$ имеет конечный индекс в A и в B). Тогда для любого другого точного $\mathbb{Q}$-определенного представления это условие также будет выполнено. Более общо, А. г.— подгруппа алгебраич. группы G, определенной над *глобальным полем* k, соизмеримая с группой G_O O-точек группы G, где O — кольцо целых элементов поля k. А. г. $H\cap G_{\mathbb{R}}$ является *дискретной подгруппой* в $G_{\mathbb{R}}$.

Если $\varphi: G \to G'$ есть k-эпиморфизм алгебраич. групп, то для всякой А. г. $H \subset G$ образ $\varphi(H)$ — А. г. в G' (см. [1]). Иногда называют А. г. абстрактную группу, изоморфную арифметич. подгруппе нек-рой алгебраич. группы. Напр., если k — поле алгебраич. чисел, то группа $G_O \cong G'_{\mathbb{Z}}$, где группа G' получается из G ограничением поля определения с k на $\mathbb{Q}$. В теории групп Ли арифметич. подгруппами наз. также образы арифметич. подгрупп группы вещественных точек $G_{\mathbb{R}}$ при факторизации $G_{\mathbb{R}}$ по компактным нормальным делителям.

Лит.: [1] Борель А., «Математика», 1968, т. 12, № 5, с. 34—90; № 6, с. 3—30; [2] Борель А., Харish-Чандра, «Математика», 1964, т. 8, № 2, с. 19—71; [3] Арифметические группы и автоморфные функции, пер. с англ. и франц., М., 1969.

В. П. Платонов.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ, арифметический ряд 1-го порядка,— последовательность чисел, в к-рой каждый член получается из предыдущего путем прибавления к нему одного и того же числа d, наз. разностью этой А. п. Таким образом, каждая А. п. имеет вид:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots;$$

общий член

$$a_n = a + (n-1)\,d.$$

Характеристич. свойство А. п.

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

Если $d>0$, то А. п. наз. возрастающей, если $d<0$,— убывающей. Простейший пример А. п.— натуральный ряд чисел $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. Число членов А. п. может быть ограниченным или неограниченным. Если А. п. содержит n членов, то ее сумму можно вычислить по формуле

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}.$$

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОПОРЦИЯ — равенство вида

$$a - b = c - d,$$

где a, b, c, d — числа. А. п. иначе наз. разностной пропорцией.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, теоретико-числовая функция,— комплекснозначная функция, областью определения к-рой может служить одно из множеств: множество натуральных чисел, множество целых рациональных чисел, множество целых идеалов фиксированного алгебраич. числового поля, решетка в многомерном координатном пространстве и т. п. Это — А. ф. в широком смысле. Однако часто под А. ф. понимается функция указанного типа, обладающая нек-рыми специальными арифметич. свойствами. Наиболее употребительные А. ф. имеют традиционные символич. обозначения: $\varphi(n)$ — *Эйлера функция*, $d(n)$ или $\tau(n)$ — *делителей число*, $\mu(n)$ — *Мёбиуса функция*, $\Lambda(n)$ — *Мангольдта функция*, $\sigma(n)$ — сумма делителей числа n. К А. ф. относят также целую часть числа $[x]$ и дробную часть числа $\{x\}$. Изучаются А. ф., выражающие число решений уравнения; напр., $r(n)$ — число решений в целых числах x и y уравнения $x^2+y^2=n$ в *Гольдбаха проблеме:* $J(N)$ — число решений в простых числах уравнения $N=p_1+p_2+p_3$. Другие А. ф. выражают количество чисел с к.-л. условиями; напр., функция $\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x, характеризует распределение простых чисел; $\pi(x, q, l)$ — число не превосходящих x простых чисел в арифметич. прогрессии $p \equiv l \pmod q$. Со свойствами простых чисел связаны также *Чебышева функции*: $\theta(x)$ — сумма натуральных логарифмов простых чисел до x и $\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)$.

В алгебраич. теории чисел рассматриваются обобщения названных А. ф. натурального аргумента. Напр., в

алгебраич. поле K степени n для целого идеала $\mathfrak{l}$ вводится функция Эйлера $\varphi(\mathfrak{l})$ — число классов вычетов по идеалу $\mathfrak{l}$, взаимно простых с $\mathfrak{l}$.

А. ф. возникают и используются при изучении свойств чисел. Однако теория А. ф. представляет и самостоятельный интерес. Закономерность изменения А.ф. обычно не удается охарактеризовать простыми формулами — ищется асимптотика числовых функций. Так как многие А. ф. не монотонны, то большое значение имеет изучение средних значений функций. Важный класс А. ф. составляют *мультипликативные арифметические функции* и *аддитивные арифметические функции*. В вероятностной теории чисел изучается вопрос о распределении их значений [5].

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [2] его же, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [3] Хуа Л о-г е н, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [4] Чандрасекхаран К., Арифметические функции, пер. с англ., М., 1975; [5] Кубилюс Й., Вероятностные методы в теории чисел, 2 изд., Вильнюс, 1962.

Н. И. Климов.

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОНТИНУУМ — числовая прямая.

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ, арифметическое значение корня n-й степени из действительного числа $a \geqslant 0$,— неотрицательное число, n-я степень к-рого равна a. Если рассматриваются два действительных значения корня четной степени из неотрицательного числа, то говорят об алгебраическом значении корня в области действительных чисел; если же рассматриваются все n значений корня n-й степени, то говорят о значении корня в области комплексных чисел.

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ РОД — численный инвариант *алгебраических многообразий*. Для произвольного проективного алгебраич. многообразия X (над полем k), все неприводимые компоненты к-рого имеют размерность n и к-рое определяется однородным идеалом I в кольце $k[T_0, \ldots, T_N]$, арифметический род $p_a(X)$ выражается через свободный член $\varphi(I, 0)$ *Гильберта многочлена* $\varphi(I, m)$ идеала I по формуле

$$p_a(X) = (-1)^n (\varphi(I, 0) - 1).$$

Это классич. определение восходит к Ф. Севери (F. Severi, см. [1]). В общем случае оно эквивалентно следующему:

$$p_a(X) = (-1)^n (\chi(X, \mathcal{O}_X) - 1),$$

где

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{O}_X)$$

— эйлерова характеристика многообразия X с коэффициентами в структурном пучке $\mathcal{O}_X$. В такой форме определение А. р. переносится на любые полные алгебраич. многообразия, а также показывает инвариантность $p_a(X)$ относительно бирегулярных отображений. В случае, когда X — неособое связное многообразие, а $k = \mathbb{C}$ есть поле комплексных чисел,

$$p_a(X) = \sum_{i=0}^{n-1} g_{n-1}(X),$$

где $g_k(X)$ — размерность пространства регулярных дифференциальных k-форм на X. При $n = 1, 2$ такое определение было принято в школе итальянских геометров. Напр., если $n = 1$, то $p_a(X)$ есть род кривой X; если $n = 2$, то

$$p_a(X) = -q + p_g,$$

где q — иррегулярность поверхности X, а p_g — *геометрический род* поверхности X.

Для любого дивизора D на нормальном многообразии X О. Зариским (O. Zariski, см. [1]) дано определение виртуального арифметического ро-

да $p_a(D)$ как свободного члена многочлена Гильберта когерентного пучка $\mathcal{O}_X(D)$, соответствующего дивизору D. Если дивизоры D и D' алгебраически эквивалентны, то

$$p_a(D)=p_a(D').$$

А. р. есть бирациональный инвариант в случае поля k нулевой характеристики; в общем случае этот факт доказан (к 1977) лишь для размерности $n\leqslant 3$.

Лит.: [1] Бальдассари М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [2] Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1973.

И. В. Долгачев.

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ РЯД порядка m — последовательность значений многочлена степени m:

$$p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m,$$

принимаемых им при последовательных целых, неотрицательных значениях переменной x ($x=0, 1, 2, \ldots$). Если $m=1$, т. е. $p(x)=a_0+a_1x$, получается арифметич.

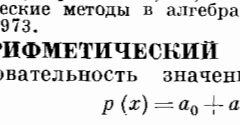


Рис. 1.

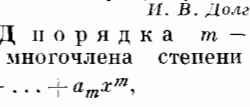


Рис. 2.

прогрессия с начальным членом a_0 и разностью a_1. При $p(x)=x^2$ или $p(x)=x^3$ получаются последовательности квадратов или кубов целых чисел — частные случаи А. р. 2-го и 3-го порядков. Если составить ряд из разностей соседних членов А. р., затем для полученной последовательности разностей также образовать их разности (вторые разности), для вторых разностей образовать разности (третьи разности) и т. д., то на m-м этапе окажется, что все (m-ые) разности равны между собой. Обратно, если для нек-рой последовательности чисел ее m-ые разности равны между собой, то эта последовательность есть А. р. порядка m. Пользуясь этим свойством, можно строить А. р. различных порядков, отправляясь от их разностей. Напр., последовательность единиц: 1, 1, 1, ..., можно рассматривать как первые разности последовательности натуральных чисел: 1, 2, 3, ...,— как вторые разности последовательности треугольных чисел: 1, 3, 6, 10, ...,— как третьи разности последовательности тетраэдрических чисел: 1, 4, 10, 20, ..., и т. д. Названия этих чисел объясняются тем, что треугольные числа выражают числа шаров, уложенных в виде треугольника (рис. 1), а тетраэдрические — в виде тетраэдра (пирамиды) (рис. 2). Треугольные числа выражаются формулой $\frac{n(n+1)}{2}$, а тетраэдрические — формулой

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Обобщением треугольных чисел являются k-угольные, или фигурные числа, игравшие важную роль на разных этапах развития арифметики. k-угольные числа имеют вид:

$$n+(k-2)\frac{n(n-1)}{2},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ .$$

Они образуют А. р. 2-го порядка, с первым членом 1, вторым членом k и вторыми разностями $k-2$. При $k=3$ получаются треугольные числа, при $k=4$ — квадратные (n^2), при $k=5$ — пентагональные (пятиугольные)

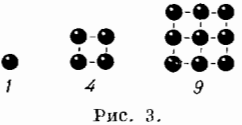


Рис. 3.

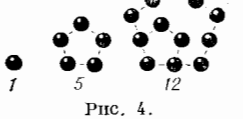


Рис. 4.

$\frac{3n^2-n}{2}$ и т. п. Названия эти поясняются на рис. 3 и 4, где числа шаров, расположенных в виде квадрата или пятиугольника, выражаются соответствующими квадратными или пентагональными числами. Относительно фигурных чисел справедлива следующая теорема, высказанная П. Ферма (P. Fermat) и доказанная впервые О. Коши (A. Cauchy): любое натуральное число можно представить в виде суммы не более, чем k k-угольных чисел.

Лит.: [1] Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, пер. с нем., 2 изд., ч. 1, М.—Л., 1947; [2] Арнольд И. В., Теоретическая арифметика, 2 изд., М., 1939. *БСЭ-2.*

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК — то же, что *Паскаля треугольник.*

АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО, числовое пространство, координатное пространство,— декартова степень $\mathbb{R}^n$ множества действительных чисел $\mathbb{R}$, снабженная структурой линейного топологич. пространства. При этом операция сложения определяется формулой

$$(x_1, \ldots, x_n)+(x_1', \ldots, x_n')=(x_1+x_1', \ldots, x_n+x_n');$$

операция умножения на числа $\lambda\in\mathbb{R}$ формулой

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n)=(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Топология в $\mathbb{R}^n$ есть топология прямого произведения числовой прямой $\mathbb{R}$; ее базой служат открытые n-мерные параллелепипеды:

$$I=\{(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}^n: a_i<x_i<b_i,\ i=1, \ldots, n\},$$

где $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ — заданные числа.

А. п. $\mathbb{R}^n$ является также нормированным пространством относительно нормы

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2},$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}^n$, и евклидовым пространством относительно скалярного произведения

$$\langle x, y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i,$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)\in\mathbb{R}^n$. *И. В. Долгачев.*

АРИФМЕТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — дискретное распределение вероятностей, сосредоточенное на множестве точек вида $\pm nh$, где $h>0$ и $n=1, 2, \ldots$. А. р. представляет собой частный случай *решетчатых распределений.* *А. В. Прохоров.*

АРИФМЕТИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ — число a, получаемое делением суммы нескольких чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на их число n:

$$a=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

АРКСИНУСА ЗАКОН — предельная теорема, описывающая флуктуации случайного блуждания на прямой, приводящая к *арксинуса распределению* или обобщенному распределению арксинуса. В 1939 П. Леви (P. Lévy) для процесса броуновского движения $\{\xi_t, t\geqslant 0, \xi_0=0\}$ отметил следующий факт. Пусть τ_t — мера Лебега множества $\{u: \xi_u>0, 0\leqslant u\leqslant t\}$, другими словами, время, проведенное броуновской частицей на положительной полуоси за промежуток времени $[0, t]$. Тогда отношение τ_t/t имеет распределение арксинуса:

$$\mathsf{P}\{\tau_t/t<x\}=F_{1/2}(x)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x},\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ t>0.$$

Позднее было обнаружено (см. [2]), что для случайного блуждания с дискретным временем имеет место следующий закон арксинуса: пусть $S_0=0$, $S_1, \ldots, S_n, \ldots$ — последовательные положения в случайном блуждании,

$$S_n=\sum_{u=1}^n\xi_u,$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ независимы и одинаково распределены, T_n равно числу индексов k среди $0, 1, \ldots, n$, для к-рых $S_k>0$,

$$K_n = \min\{k : S_k = \max_{0 \leqslant m \leqslant n} S_m\},$$

тогда соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{T_n/n < x\} = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{K_n/n < x\} = F_\alpha(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{P}\{S_1 < 0\} + \ldots + \mathsf{P}\{S_n < 0\}}{n} = \alpha$$

выполняются или не выполняются одновременно, где $F_\alpha(x)$ при $0<\alpha<1$ — обобщенное распределение арксинуса,

$$F_1(x) = \mathsf{E}(x) \text{ и } F_0(x) = \mathsf{E}(x-1),$$

при этом $\mathsf{E}(x)=0$ при $x\leqslant 0$ и $\mathsf{E}(x)=1$ при $x>0$.

А. з. в теории восстановления утверждает, что при $0<\alpha<1$ имеют место равенства:

$$\mathsf{P}\{\xi_1 \geqslant 0\} = 1$$

и

$$y_t = t - S_{\eta_t},$$

где η_t определяется соотношением $S_{\eta_t} < t \leqslant S_{\eta_t+1}$,

$$\lim \mathsf{P}\{y_t/t < x\} = F_\alpha(x)$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathsf{P}\{\xi_1 > x\} = x^{-\alpha} L(x)$$

при $x>0$, где $L(x)$ — функция, определенная при $x>0$ и обладающая свойством

$$\lim_{x\to\infty} L(xy)/L(x) = 1 \text{ при } 0 < y < \infty.$$

Существует тесная связь между А. з. в теории восстановления и для случайных блужданий (см. [3]).

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1967; [2] Спицер Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969; [3] Рогозин Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1971, т. 16, № 4, с. 593—613.

Б. А. Рогозин.

АРКСИНУСА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — *вероятностная мера* на прямой, плотность к-рой равна нулю вне интервала $(0, 1)$ и равна $\frac{1}{\pi}(\sqrt{x(1-x)})^{-1}$ при $0<x<1$. Соответствующая функция распределения равна $\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$ при $0\leqslant x\leqslant 1$.

Наряду с А. р. используется обобщенное распределение арксинуса. Обобщенному А. р. соответствует функция распределения $F_\alpha(x)$, к-рая имеет плотность

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\sin\pi\alpha}{\pi} x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1} & \text{при } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{при } x\leqslant 0,\ x\geqslant 1, \end{cases}$$

при $0<\alpha<1$, плотность $f_{1/2}(x)$ совпадает с плотностью А. р. Обобщенное А. р. есть специальный случай *бета-распределения*. Момент 1-го порядка обобщенного А. р. равен $1-\alpha$, дисперсия этого же распределения равна $\frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha$. А. р. и обобщенное А. р. возникают при изучении флуктуаций случайных блужданий, в теории восстановления (см. *Арксинуса закон*), а также используются в математич. статистике как специальные случаи бета-распределения.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1967; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966.

Б. А. Рогозин.

АРКФУНКЦИЯ, аркус-функция,— функция, обратная тригонометрич. функции, т. е. одна из функций: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, арксеканс, арккосеканс. См. *Обратные тригонометрические функции.*

АРТИНОВ МОДУЛЬ — модуль, удовлетворяющий условию обрыва убывающих цепей для подмодулей. Класс А. м. замкнут относительно перехода к подмодулям, фактормодулям, конечным прямым суммам и расширениям. Последнее означает, что артиновость модулей B и A/B влечет артиновость модуля A. Каждый А. м. разлагается в прямую сумму подмодулей, уже не разлагающихся в прямую сумму. Модуль имеет композиционный ряд тогда и только тогда, когда он артинов и нётеров одновременно. См. также *Артиново кольцо*.

Л. А. Скорняков.

АРТИНОВА ГРУППА, группа с условием минимальности для подгрупп,— группа, в к-рой любая убывающая цепочка различных подгрупп обрывается на конечном номере. А. г.— периодическая и вопрос о ее строении упирается в проблему Шмидта о бесконечной группе с конечными собственными подгруппами [3] и проблему минимальности: будет ли А. г. конечным расширением абелевой группы? Обе эти проблемы решены для локально разрешимых групп [1] и локально конечных групп [3], [4].

Лит.: [1] Черников С. Н., «Матем. сб.», 1940, т. 7, № 1, с. 35—64; [2] его же, «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 5, с. 45—96; [3] Каргаполов М. И., «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 1, с. 232—35; [4] Шунков В. П., «Алгебра и логика», 1970, т. 9, № 2.

В. П. Шунков.

АРТИНОВО КОЛЬЦО, артиново справа кольцо, — кольцо, удовлетворяющее условию минимальности для правых идеалов, т. е. кольцо, в к-ром любое непустое частично упорядоченное по включению множество M правых идеалов имеет минимальный элемент (см. [1]) — такой правый идеал из M, к-рый не содержит строго никакого правого идеала из M. Другими словами, А. к.— это кольцо, являющееся правым *артиновым модулем* над самим собой. Кольцо A есть А. к. тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей правых идеалов, т. е. для любой убывающей последовательности правых идеалов $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots \supseteq B_n \supseteq \ldots$ кольца A существует такое натуральное число m, что $B_m = B_{m+1} = B_{m+2} = \ldots$. Аналогично определяется артиново слева кольцо.

Всякое ассоциативное А. к. с единицей нётерово справа (см. *Нётерово кольцо*). Всякая конечномерная алгебра над полем является А. к. Наиболее полно изучены свойства А. к. в классе альтернативных колец и особенно в классе ассоциативных колец (см. *Альтернативные кольца и алгебры*, *Ассоциативные кольца и алгебры*). *Джекобсона радикал* ассоциативного А. к. нильпотентен и содержит всякий односторонний нильидеал. Кольцо A тогда и только тогда является простым ассоциативным А. к., когда оно изоморфно кольцу всех матриц нек-рого конечного порядка над нек-рым ассоциативным телом. В классе альтернативных колец каждое простое А. к. либо ассоциативно, либо есть *Кэли — Диксона алгебра* над своим центром, являющимся в этом случае полем. Строение ассоциативных А. к. с нулевым радикалом Джекобсона описано (см. *Полупростое кольцо*). Имеется вариант этой теоремы в случае альтернативных колец. Для ассоциативных колец с ненулевым радикалом Джекобсона развита достаточно далеко идущая структурная теория (см. [1], [2]). Весьма интенсивно изучается ряд классов А. к.— *квазифробениусовы кольца*, *однородные кольца*, *сбалансированные кольца*.

Лит.: [1] Artin E., Nesbitt C., Thrall R., Rings with Minimum condition, Michigan, 1944; [2] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [3] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 133—80; [4] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М., 1970, с. 9—56.

К. А. Жевлаков.

АРХИМЕДА АКСИОМА — аксиома, первоначально сформулированная для отрезков, заключающаяся в том, что, отложив достаточное число раз меньший из

двух заданных отрезков, всегда можно получить отрезок, превосходящий больший из них. Аналогично А. а. формулируется для площадей, объемов, положительных чисел и т. д. Вообще, для данной величины имеет место А. а., если для любых двух значений A и B этой величины таких, что $A<B$, всегда можно найти целое число m, что $Am>B$; на этом основан процесс последовательного деления в арифметике и геометрии (см. *Евклида алгоритм*). Значение А. а. выяснилось с полной отчетливостью после того, как в 19 в. было обнаружено существование величин, по отношению к к-рым эта аксиома несправедлива,— т. н. неархимедовых величин (см. *Величина*, а также *Архимедова группа*, *Архимедово кольцо*, *Архимедов класс*).

А. а. отчетливо сформулирована Архимедом (3 в. до н. э.) в соч. «Шар и цилиндр»; ранее ее применял Евдокс Книдский, поэтому иногда А. а. наз. аксиомой Евдокса. *БСЭ-3.*

АРХИМЕДА ТЕЛА — то же, что *полуправильные многогранники*.

АРХИМЕДОВ КЛАСС — класс разбиения, индуцируемого архимедовым отношением эквивалентности на линейно *упорядоченной полугруппе*. Эта эквивалентность определяется следующим образом: элементы a, b полугруппы S наз. архимедово эквивалентными, если имеет место одно из следующих четырех соотношений:

$$a\leqslant b\leqslant a^n,\qquad b\leqslant a\leqslant b^n,$$
$$a^n\leqslant b\leqslant a,\qquad b^n\leqslant a\leqslant b;$$

это равносильно тому, что a и b порождают одну и ту же выпуклую подполугруппу в S. Таким образом, разбиение на А. к. является разбиением на попарно непересекающиеся выпуклые подполугруппы, причем каждое разбиение S на попарно непересекающиеся выпуклые подполугруппы может быть продолжено до разбиения на А. к.

Архимедова эквивалентность на *линейно упорядоченной группе* индуцируется архимедовой эквивалентностью ее положительного конуса: считается, что $a\sim b$, если существуют такие положительные целые числа m и n, что

$$|a|<|b|^m \text{ и } |b|<|a|^m,$$

где

$$|x|=\max\{x, x^{-1}\}.$$

Положительный конус *архимедовой группы* состоит из одного А. к. *О. А. Иванова.*

АРХИМЕДОВА ГРУППА — частично *упорядоченная группа*, в к-рой выполняется аксиома Архимеда: из того, что $a^n<b$ для всех целых n (a, b — элементы А. г.), следует, что a — единица группы (в аддитивной записи: из $na<b$ для всех целых n следует, что $a=0$). Для линейно упорядоченных А. г. существует следующее описание (теорема Гёльдера): линейно упорядоченная группа тогда и только тогда архимедова, когда она изоморфна нек-рой подгруппе аддитивной группы действительных чисел с естественным порядком. Таким образом, аддитивная группа всех действительных чисел является, в нек-ром смысле, самой большой линейно упорядоченной А. г. Всякая линейно упорядоченная А. г. коммутативна. Линейно упорядоченная группа без нетривиальных *выпуклых подгрупп* — архимедова.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] Кокорин А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972; [3] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965. *А. И. Кокорин, В. М. Копытов.*

АРХИМЕДОВА ПОЛУГРУППА — 1) Линейно *упорядоченная полугруппа*, все строго положительные (строго отрицательные) элементы к-рой принадлежат одному *архимедову классу*. Всякая естественно упорядоченная А. п. S (см. *Естественно упорядоченный группоид*) изо-

морфна нек-рой подполугруппе одной из следующих полугрупп: аддитивной полугруппе всех неотрицательных действительных чисел, полугруппе всех действительных чисел интервала (0,1) с обычной упорядоченностью и операцией $ab=\min(a+b, 1)$, полугруппе, состоящей из всех действительных чисел интервала (0, 1) и символа ∞ с обычной упорядоченностью и операцией

$$ab=\begin{cases} a+b, & \text{если } a+b\leqslant 1, \\ \infty, & \text{если } a+b>1. \end{cases}$$

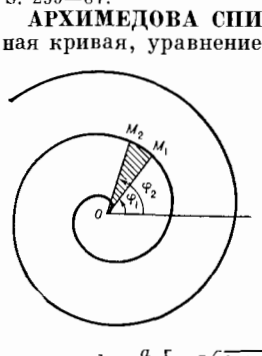
Первый случай имеет место тогда и только тогда, когда S — полугруппа с сокращением.

Лит.: [1] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965. *О. А. Иванова.*

2) Полугруппа S, удовлетворяющая условию: для любых a, $b\in S$ существует такое натуральное число n, что $a^n\in SbS$. При условии $a^n\in Sb\,(a^n\in bS)$ полугруппа S наз. архимедовой слева (справа). Для коммутативных полугрупп все эти понятия эквивалентны. Любая коммутативная полугруппа S единственным образом разложима в связку А. п. (причем такое разложение совпадает с наиболее дробным разложением S в связку полугрупп). Этот результат по-разному обобщался на некоммутативные полугруппы (см. [1]). Полугруппа S с идемпотентом будет архимедовой (архимедовой справа) тогда и только тогда, когда она обладает *ядром* K, причем K содержит идемпотент (K есть *правая группа*), а факторполугруппа Риса (см. *Полугруппа*) S/K есть *нильполугруппа*. А. п. без идемпотентов труднее поддаются изучению. Лишь в коммутативном случае здесь дано полное описание в терминах нек-рых конструкций, особенно прозрачное для полугрупп с законом сокращения (см. [2], § 4.3; [3]).

Лит.: [1] Putcha M. S., «Semigroup Forum», 1973, v. 6, № 3, p. 232—39; [2] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [3] Tamura T., «Math. Nachr.», 1968, Bd 36, № 5/6, S. 255—87. *Л. Н. Шеврин.*

АРХИМЕДОВА СПИРАЛЬ — плоская трансцендентная кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид:



$$\rho=a\varphi.$$

А.с.описывается точкой M,движущейся равномерно по прямой d, к-рая вращается вокруг точки O, принадлежащей этой прямой. В начальный момент движения M совпадает с центром вращения O прямой (см. рис.). Длина дуги между точками M_1 (ρ_1, φ_1) и M_2 (ρ_2, φ_2):

$$l=\frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2}+\ln\left(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Площадь сектора, ограничиваемого дугой А. с. и двумя радиус-векторами ρ_1 и ρ_2, соответствующими углам φ_1 и φ_2:

$$S=\frac{\rho_2^3-\rho_1^3}{a}.$$

А. с. относится к так наз. алгебраич. спиралям (см. *Спирали*). Обобщение А. с.— неоида, уравнение к-рой в полярных координатах

$$\rho=a\varphi+l.$$

А. с. названа по имени Архимеда (3 в. до н. э.), изучавшего ее свойства.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые. Систематика, свойства, применения, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

АРХИМЕДОВО КОЛЬЦО — частично *упорядоченное кольцо*, аддитивная группа к-рого относительно заданного порядка является *архимедовой группой*. Архимедово линейно упорядоченное кольцо R есть либо кольц-

цо с нулевым умножением (т. е. $xy=0$ для любых x и y из R) над аддитивной группой, изоморфной нек-рой подгруппе группы действительных чисел, либо оно изоморфно нек-рому однозначно определенному подкольцу поля действительных чисел, взятому с обычной упорядоченностью. Архимедово линейно упорядоченное кольцо всегда ассоциативно и коммутативно.

Лит.: [1] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965. *О. А. Иванова.*

АРЦЕЛА ВАРИАЦИЯ — одна из числовых характеристик функции нескольких переменных, к-рую можно рассматривать как многомерный аналог *вариации функции* одного переменного. Пусть действительнозначная функция $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ задана на n-мерном параллелепипеде $D_n=[a_1, b_1]\times\ldots\times[a_n, b_n]$, $n=2, 3, \ldots$, и G_n — класс всех таких непрерывных вектор-функций $\overline{x}(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t))(0\leqslant t\leqslant 1)$, что каждая функция $x_k(t)$ не убывает на $[0, 1]$, причем $x_k(0)=a_k$, $x_k(1)=b_k$, $k=1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$A(f, D_n) \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \sup_{\overline{x}(t)\in G_n} \sup_{\Pi} \sum_{s=1}^{m} |f(\overline{x}(t_s)) - f(\overline{x}(t_{s-1}))|,$$

где $\Pi=\{0=t_0<t_1<\ldots<t_m=1\}$ — произвольная система точек из $[0, 1]$. Это определение в случае $n=2$ предложено Ч. Арцела [1] (см. также [2], с. 543). Если $A(f, D_n)<\infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченную (конечную) А. в. на D_n, а класс всех таких функций обозначается $A(D_n)$. Для того чтобы функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежала классу $A(D_n)$, необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение $f(x_1, \ldots, x_n)=f_1(x_1, \ldots, x_n)-f_2(x_1, \ldots, x_n)$, где f_1 и f_2 — конечные неубывающие на D_n функции. При этом функция $f(x)$ наз. неубывающей на D_n,

если $f(x_1'', \ldots, x_n'')\geqslant f(x_1', \ldots, x_n')$

при $a_k\leqslant x_k'<x_k''\leqslant b_k$ $(k=1, \ldots, n)$. Класс $A(D_n)$ содержит в себе класс функций, имеющих ограниченную *Харди вариацию* на D_n.

Лит.: [1] Arzelá C., «Rend. Accad. sci Bologna», 1904—1905, t. 9, pt 2, p. 100—07; [2] Hahn H., Theorie der reellen Funktionen, Bd 1, B., 1921. *Б. И. Голубов.*

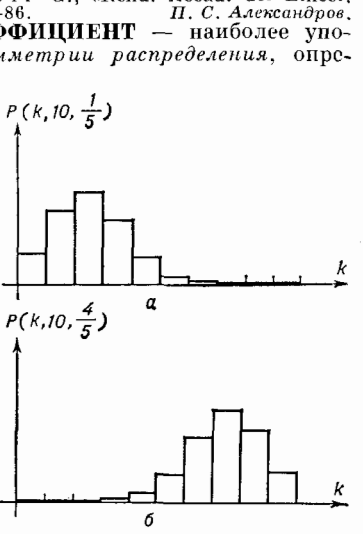
АРЦЕЛА — АСКОЛИ ТЕОРЕМА — название ряда теорем, указывающих условия для того, чтобы предел последовательности непрерывных функций был функцией непрерывной (одно из таких условий — *квазиравномерная сходимость* последовательности).

Лит.: [1] Arzelá C., «Mem. Accad. sci Bologna», (5), 1893, t. 5, p. 225—44; [2] Ascoli G., «Rend. Accad. dei Lincei, Mem.», 1883, t. 18, p. 521—86. *П. С. Александров.*

АСИММЕТРИИ КОЭФФИЦИЕНТ — наиболее употребительная мера *асимметрии распределения*, определяемая отношением

$$\gamma_1=\frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}},$$

где μ_2 и μ_3 — второй и третий центральные моменты распределения, соответственно. Для распределений, симметричных относительно математич. ожи-



Графики биномиального распределения $P(k, n, p)$, соответствующего $n=10$ испытаниям Бернулли, с (*а*) положительной асимметрией $\left(p=\frac{1}{5}\right)$ и (*б*) отрицательной асимметрией $\left(p=\frac{4}{5}\right)$.

дания, $\gamma_1=0$; в зависимости от знака γ_1 говорят о распределениях с положительной асимметрией ($\gamma_1>0$) и с отрицательной асимметрией ($\gamma_1<0$). Для *биномиального распределения*, соответствующего *n Бернулли испытаниям* с вероятностью успеха p,

$$\gamma_1=\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}, \qquad (*)$$

при этом в случае $p=1/2$ ($\gamma_1=0$) распределение симметрично, в случаях $p<1/2$ и $p>1/2$ получаются типичные графики распределения с положительной (рис. *а*) и отрицательной (рис. *б*) асимметрией. А. к. γ_1 стремится к нулю при $n\to\infty$ в соответствии с тем, что нормированное биномиальное распределение сходится к стандартному нормальному.

А. к. вместе с *эксцесса коэффициентом* — наиболее употребительные характеристики точности, с к-рой функция распределения $F_n(x)$ суммы

$$((x_1+\ldots+x_n)-n\mu_1)/\sqrt{n\mu_2},$$

где $(x_1, \ldots, x_n)$ — выборка из распределения, имеющего конечные моменты $\mu_1, \ldots, \mu_r$, $r>2$, может быть приближена функцией нормального распределения

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\,dz,$$

а именно, при довольно общих условиях *Эджворта ряд* дает

$$F_n(x)=\Phi(x)-\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\gamma_1}{6}\Phi^{(3)}(x)+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., М., 1948, с. 253–56; [2] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967, с. 273–77.

А. В. Прохоров.

АСИММЕТРИЧНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — ориентируемое многообразие M, для к-рого не существует гомеоморфизма, обращающего ориентацию. Напр., комплексная проективная плоскость есть А. м., так как самопересечение комплексной прямой равно $+1$ или -1 в зависимости от ориентации. Отличие нек-рых узлов от их зеркального образа возможно из-за того, что их разветвленные накрывающие являются А. м.

А. В. Чернавский.

АСИММЕТРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ — качественное свойство кривой распределения, указывающее на отличие от симметричного распределения. А. р. положительна (отрицательна), если *асимметрии коэффициент* положителен (отрицателен). При положительной (отрицательной) А. р. более «длинная» часть кривой плотности распределения лежит правее (левее) *моды*.

К. П. Латышев.

АСИМПТОТА кривой $y=f(x)$, имеющей бесконечную ветвь,— прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при движении ее вдоль ветви к бесконечности. А. может быть вертикальной или наклонной. Вертикальная А. имеет уравнение $x=a$, причем $f(x)\to+\infty$ ($-\infty$) при $x\to a$ (односторонне). Для существования наклонной А., имеющей уравнение $y=kx+l$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$k=\lim\frac{f(x)}{x}, \quad l=\lim\,[f(x)-kx]$$

при $x\to+\infty$ (или при $x\to-\infty$).

Аналогичные формулы получаются и при параметрич. задании кривой. В полярных координатах А. кривой $r=r(\varphi)$, где $r>0$, с углом наклона α, определяется условием $r\to+\infty$ при $\varphi\to\alpha$. Расстояние p этой А. от начала координат вычисляется по формуле:

$$p=\lim|t|r(\alpha+t) \text{ при } t\to+0 \text{ (или при } t\to-0).$$

Если вдоль бесконечной ветви кривой существует предельное положение касательной, то оно есть А. Обратное

не всегда верно. Напр., кривая $y=\frac{1}{x}\sin x^2$ имеет при $x\to\pm\infty$ асимптоту $y=0$, хотя предельного положения касательной не существует. Среди кривых 2-го порядка А. имеют только гиперболы. А. гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ определяются уравнениями $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$. Наклонная А. дает простое — линейное по x — асимптотическое приближение функции

$$f(x)=kx+l+o(1)$$

при $x\to+\infty$ (или при $x\to-\infty$).

Лит.: [1] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, т. 1, 2 изд., М., 1973. *Л. П. Купцов.*

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ — линия Г на регулярной поверхности F, нормальная кривизна к-рой вдоль Г равна нулю; А. л. определяется дифференциальным уравнением:

$$\mathrm{II}=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0,$$

где II — вторая квадратичная форма поверхности.

Соприкасающаяся плоскость А. л. Г (там, где она существует) совпадает с касательной плоскостью к F (в точках Г); при этом квадрат кручения А. л. равен модулю гауссовой кривизны K поверхности F (теорема Бельтрами — Эннепера). Прямолинейный отрезок $l\in F$ (напр., отрезок образующей линейчатой поверхности) всегда является А. л. Если Г — параболич. кривая (напр., параллель тора, разделяющая области с гауссовой кривизной разных знаков), то она будет А. л. Другим примером является ребро возврата на псевдосфере. Непараболич. кривая, на к-рой $K=0$, представляет собой ребро возврата семейства А. л.

Через каждую точку параболич. области (где $K=0$, но $\mathrm{II}\not\equiv 0$) проходит единственная А. л., совпадающая с прямолинейной образующей. Через каждую точку гиперболич. области (где $K<0$) проходят две и только две А. л., составляющие так наз. *асимптотическую сеть*, играющую важную роль в исследовании пространственной формы *отрицательной кривизны поверхностей*. Так, напр., на полной поверхности эта сеть гомеоморфна декартовой сети на плоскости, если

$$\operatorname{grad}\left|\frac{1}{\sqrt{-K}}\right|\leqslant q,\quad q=\mathrm{const}.$$

На поверхностях постоянной отрицательной кривизны асимптотич. сеть является *чебышевской сетью*, причем площадь S четырехугольника, образованного А. л., пропорциональна избытку суммы его внутренних углов α_i над 2π:

$$S=|K|\,(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4-2\pi)$$

(формула Хаццидакиса).

При проективном преобразовании π пространства А. л. поверхности F переходят в А. л. преобразованной поверхности $\pi(F)$.

Аналогично определяются А. л. и на поверхностях трехмерного риманова пространства. Известны различные пути обобщений понятия А. л. на многообразиях, погруженных в многомерное пространство; наиболее употребительное из них использует понятие второй квадратичной формы, ассоциированной с определенным нормальным вектором.

Лит.: [1] Погорелов А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969; [2] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956.

М. И. Войцеховский.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПЛОТНОСТЬ — разновидность общего понятия *плотности последовательности* натуральных чисел, к-рое является мерой того, какая часть последовательности всех натуральных чисел принадлежит заданной последовательности A натуральных чисел со включением нуля. Асимптотическая

плотность последовательности A выражается действительным числом α, определяемым формулой

$$\alpha = \lim_{x \to \infty} \inf \frac{A(x)}{x},$$

где

$$A(x) = \sum_{a \in A,\ 0 < a \leqslant x} 1,\ x \geqslant 1.$$

Число

$$\beta = \lim_{x \to \infty} \sup \frac{A(x)}{x}$$

наз. верхней А. п. Если числа α и β совпадают, то их общее значение наз. натуральной плотностью. Напр., последовательность чисел, свободных от квадратов, имеет натуральную плотность $\delta = 6/\pi^2$. Понятие А. п. используется при нахождении критериев того, чтобы нек-рая последовательность была *асимптотическим базисом*. *Б. М. Бредихин.*

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность таких функций $\{\varphi_n(x)\}$, что

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)),\quad x \to x_0,\quad x \in M.$$

Здесь x_0 — предельная точка множества M (конечная или бесконечная). Если ясно, о каком множестве M идет речь, то пишется просто $x \to x_0$. Если $\{\varphi_n(x)\}$ — А. п., и функция $\psi(x)$ определена на M, то $\{\psi(x)\varphi_n(x)\}$ также есть А. п.

Примеры А. п.:

1) $\{(x-x_0)^n\}$, $x \to x_0$;
2) $\{x^{-n}\}$, $x \to \infty$;
3) $\{e^x x^{-n}\}$, $x \to \infty$;
4) $\{z^{-n}\}$, $z \to \infty$, $z \in D$,

D — неограниченная область комплексной плоскости. А. п. вида 1), 2) и 4) наз. степенными. *М. И. Шабунин.*

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПРЕНЕБРЕГАЕМОСТЬ — свойство случайных величин, указывающее на их индивидуально малый вклад в качестве отдельных компонент в их сумму. Это понятие существенно, напр., в так наз. *схемах серий*. Именно, пусть случайные величины X_{nk} ($n = 1, 2, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots, k_n$) взаимно независимы при каждом n, и

$$S_n = X_{n1} + \ldots + X_{nk_n}.$$

Если для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ при достаточно больших n выполняется неравенство

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \mathsf{P}(|X_{nk}| > \varepsilon) < \delta, \qquad (1)$$

то отдельные слагаемые S_n наз. А. п. (величины X_{nk} образуют при этом так наз. нулевую схему серий). При условии (1) справедлив следующий важный результат: класс предельных распределений для $S_n - A_n$ (A_n — нек-рые «центрирующие» константы) совпадает с классом *безгранично делимых распределений*. Если распределения S_n сходятся к предельному, $k_n \to \infty$ и слагаемые одинаково распределены, то условие (1) автоматически выполняется. Если усилить требование А. п., предполагая, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ при всех достаточно больших n

$$\mathsf{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} |X_{nk}| > \varepsilon\right) < \delta, \qquad (2)$$

то будет верно утверждение: при условии (2) предельным распределением для $S_n - A_n$ может быть только *нормальное распределение* (в частности, с дисперсией, равной нулю, т. е. вырожденное распределение). *А. В. Прохоров.*

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — то же, что *аппроксимативная производная*.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СЕТЬ — сеть на поверхности, образованная двумя семействами *асимптотических*

линий. А. с. существует только на неразвертывающихся поверхностях неположительной кривизны. Ортогональность А. с. характеризует *минимальную поверхность*.

В. Т. Базылев.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТОЧКА — *особая точка* кривой, вокруг к-рой кривая закручивается бесконечное число раз, неограниченно к ней приближаясь. Напр., А. т. *логарифмической спирали*.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА — формула, содержащая символы o — малое, O — большое или знак эквивалентности $\sim$ (*асимптотическое равенство* функций).

Примеры А. ф.

$$\sin x = x + o(x^2),\ x \to 0;$$

$$\cos x = 1 + O(x^2),\ x \to 0;$$

$$x^3 + x + 1 \sim x^3,\ x \to \infty;$$

$\pi(x) \sim x/\ln x$, $x \to \infty$ ($\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x).

Б. М. Бредихин.

АСИМПТОТИЧЕСКИ НЕСМЕЩЕННАЯ ОЦЕНКА — понятие, утверждающее несмещенность оценки в пределе (см. *Несмещенная оценка*). Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность случайных величин на вероятностном пространстве (Ω, S, P), где P есть одна из мер семейства $\mathcal{P}$. На семействе $\mathcal{P}$ задан функционал $g(P)$ и имеется последовательность S-измеримых функций $T_n(X_1, \ldots, X_n)$, $n=1, 2, \ldots$, математич. ожидания к-рых $\mathsf{E}_P T_n(X_1, \ldots, X_n)$ существуют. Тогда, если при $n \to \infty$

$$\mathsf{E}_P T_n(X_1, \ldots, X_n) \to g(P),\ P \in \mathcal{P},$$

говорят, что T_n есть функция, асимптотически несмещенная для функционала g. Называя $X_1, X_2, \ldots$ наблюдениями и T_n оценкой, получают определение А. н. о. В простейшем случае неограниченного повторного выбора из совокупности, распределение к-рой содержит одномерный параметр $\theta \in \Theta$, А. н. о. T_n для $g(\theta)$, построенная по выборке объема n, удовлетворяет условию

$$\mathsf{E}_\theta T_n(X_1, \ldots, X_n) \to g(\theta)$$

для каждого $\theta \in \Theta$, когда $n \to \infty$.

О. В. Шалаевский.

АСИМПТОТИЧЕСКИ НЕСМЕЩЕННЫЙ КРИТЕРИЙ — понятие, утверждающее несмещенность критерия в пределе. Напр., в случае повторного выбора из одномерного распределения, содержащего параметр $\theta \in \Omega$, пусть H — нулевая гипотеза: $\theta \in \Omega_H$ и K — альтернатива:

$$\theta \in \Omega_K,\ \Omega_H \cup \Omega_K = \Omega,\ \Omega_H \cap \Omega_K = \varnothing.$$

Критическое множество R_n в n-мерном евклидовом пространстве, $n=1, 2, \ldots$, является А. н. к. гипотезы H с уровнем α, если

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(R_n \mid \theta) \leqslant \alpha,\ \theta \in \Omega_H,$$

$$\alpha \leqslant \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(R_n \mid \theta),\ \theta \in \Omega_K.$$

Функция

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(R_n \mid \theta)$$

наз. предельной функцией мощности критерия R_n.

О. В. Шалаевский.

АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОЕ РЕШЕНИЕ — решение дифференциальной системы, устойчивое по Ляпунову (см. *Устойчивость по Ляпунову*) и притягивающее все остальные решения с достаточно близкими начальными значениями. Таким образом, решение

$$x(\tau, \xi_0),\ x(\alpha, \xi_0) = \xi_0,$$

системы

$$\frac{dx}{d\tau} = f(\tau, x) \qquad (*)$$

с правой частью $f(\tau, \xi)$, заданной для всех $\tau \geqslant \alpha$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и обеспечивающей существование и единственность решений системы (*), будет А. у. р., если оно вместе со всеми достаточно близкими решениями

$$x(\tau, \xi), \quad |\xi - \xi_0| < h \quad h > 0,$$

определено для всех $\tau \geqslant \alpha$ и если для любого $\varepsilon > 0$ существует δ, $0 < \delta < h$ такое, что $|\xi - \xi_0| < \delta$ влечет

$$\|x(\tau, \xi) - x(\tau, \xi_0)\| < \varepsilon$$

для всех $\tau \geqslant \alpha$ и

$$x(\tau, \xi) - x(\tau, \xi_0) \| \longrightarrow 0 \quad \text{при } \tau \longrightarrow +\infty.$$

Понятие А. у. р. введено А. М. Ляпуновым [1]; оно широко используется в теории устойчивости наряду с различными специальными типами равномерной асимптотич. устойчивости (см. [2]).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.—Л., 1956; [2] Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959. *Ю. С. Богданов.*

АСИМПТОТИЧЕСКИ ЭФФЕКТИВНАЯ ОЦЕНКА — понятие, расширяющее идею *эффективной оценки* на случай больших выборок. Однозначного определения А. э. о. не имеет. Напр., в классич. варианте речь идет об асимптотич. эффективности оценки в подходящим образом выделенном классе оценок $\mathfrak{K}$. Именно, пусть T_n — *состоятельная оценка* одномерного параметра совокупности θ, построенная по повторной выборке объема n. Тогда $T_n \in \mathfrak{K}$, если существует дисперсия $\sigma^2(\sqrt{n}T_n)$, и в пределе при $n \to \infty$ она ограничена снизу величиной, обратной *Фишера информационному количеству*, приходящемуся на одно наблюдение. Асимптотически эффективной будет оценка $T_n^* \in \mathfrak{K}$, на к-рой указанная нижняя грань достигается. При известных условиях этим свойством обладает оценка максимального правдоподобия для θ, что и придает значимость классическому определению. Если А. э. о. T_n^* существует, то величина

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sigma^2(\sqrt{n}T_n^*)}{\sigma^2(\sqrt{n}T_n)}$$

определяет асимптотич. эффективность оценки T_n. Нек-рые варианты понятия А. э. о. принадлежат Р. Фишеру (R. Fisher), С. Рао (C. Rao) и др.

Лит.: [1] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применение, пер. с англ., М., 1968. *О. В. Шалаевский.*

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ БАЗИС, асимптотический базис порядка k,— последовательность натуральных чисел и нуля, к-рая в результате ее k-кратного суммирования дает все достаточно большие натуральные числа. Число k наз. порядком А. б. Так, последовательность простых чисел есть А. б. порядка 4 (И. М. Виноградов, 1937); последовательность кубов натуральных чисел есть А. б. порядка 7 (Ю. В. Линник, 1942). *Б. М. Бредихин.*

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ — то же, что *аппроксимативный предел*.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РЯД — см. *Асимптотическое разложение* функции.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ СТЕПЕННОЙ РЯД — асимптотический ряд по последовательности

$$\{x^{-n}\} \quad (x \to \infty)$$

или по последовательности

$$\{(x - x_0)^n\} \quad (x \to x_0)$$

(см. *Асимптотическое разложение* функции). А. с. р. можно складывать, перемножать, делить и интегрировать точно так же, как и сходящиеся степенные ряды.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют при $x \to \infty$ асимптотич. разложения:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}.$$

Тогда

1) $Af(x)+Bg(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Aa_n+Bb_n}{x^n}$ (A, B—постоянные);

2) $f(x)\,g(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{x^n}$;

3) $\frac{1}{f(x)}\sim\frac{1}{a_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{x^n}$, $a_0\neq 0$

(c_n, d_n вычисляются по тем же правилам, что и для сходящихся степенных рядов);

4) если функция $f(x)$ непрерывна при $x>a>0$, то

$$\int_x^{\infty}\left(f(t)-a_0-\frac{a_1}{t}\right)dt\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{nx^n};$$

5) А. с. р. не всегда можно дифференцировать, однако, если $f(x)$ имеет непрерывную производную, к-рая разлагается в А. с. р., то

$$f'(x)\sim-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)\,a_{n-1}}{x^n}.$$

Примеры А. с. р.:

$$\int_x^{\infty}\frac{e^{x-t}}{t}\,dt\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n};$$

$$\sqrt{x}\,e^{-ix}H_0^{(1)}(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-i\pi/4}(-i)^n\left[\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{2^{n-1/2}\pi^{3/2}n!\,x^n},$$

где $H_0^{(1)}(x)$ — *Ганкеля функция* нулевого порядка (приведенные А. с. р. расходятся при всех x).

Аналогичные утверждения имеют место и для функций комплексного переменного z при $z\to\infty$ в окрестности бесконечно удаленной точки или внутри угла. В случае комплексного переменного утверждение 5) имеет следующий вид: если функция $f(z)$ регулярна в области $D:\{|z|>a,\ \alpha<|\arg z|<\beta\}$ и если

$$f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}$$

равномерно по $\arg z$ при $|z|\to\infty$ в любом замкнутом угле, содержащемся в D, то

$$f'(z)\sim-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na_n}{z^{n+1}}$$

равномерно по $\arg z$ при $|z|\to\infty$ в любом замкнутом угле, содержащемся в D.

Лит.: (1) Копсон Э. Т., Асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1966; (2) Эрдейи А., Асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1962; (3) Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. П., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1962.

М. И. Шабунин.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ — то же, что *асимптотическая формула*.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ — предельное значение вдоль нек-рого пути. Точнее, комплексное число α или $\alpha=\infty$ наз. А. з. функции $f(z)$ комплексного переменного z в точке a замыкания $\overline{D}$ области определения D, если существует путь $L: z=z(t)$, $0\leqslant t<1$, $L\subset D$, оканчивающийся в точке a,

$$\lim_{t\to 1-0}z(t)=a,$$

вдоль к-рого

$$\lim_{z\to a}f(z)=\alpha,\quad z\in L.$$

Напр., функция $f(z)=e^z$ в точке $a=\infty$ имеет А. з. $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=\infty$ соответственно вдоль путей $L_1: z=-t$, $0\leqslant t<+\infty$, и $L_2: z=t$, $0\leqslant t<+\infty$. Множества А. з. играют важную роль в теории *предельных множеств*.

Если $f(z)$ имеет в a два различных А. з., то a наз. точкой неопределенности функции $f(z)$. Для произвольной функции $f(z)$, определенной в плоской односвязной области, множество ее точек неопределенности не более чем счетно.

Данное выше определение А. з. относится к точечным А. з. Если кривая L имеет в качестве предельного множества не одну точку $a \in \partial D$, а нек-рое множество $E \subset \partial D$, то говорят также об А. з. $A(f, E)$, связанном с E.

Лит.: [1] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [2] Мак-Лейн Г., Асимптотические значения голоморфных функций, пер. с англ., М., 1966.

В. И. Гаврилов, Е. Д. Соломенцев.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ НАПРАВЛЕНИЕ — направление на регулярной поверхности, в к-ром кривизна нормального сечения поверхности равна нулю. Для того чтобы направление $du : dv$ в точке P было А. н., необходимо и достаточно выполнение условия:

$$Ldu^2 + 2\,Mdudv + Ndv^2 = 0,$$

где u и v — внутренние координаты на поверхности, а L, M и N — коэффициенты *второй квадратичной формы* поверхности, вычисленные в точке P. В эллиптической точке поверхности А. н. — мнимые, в гиперболической точке существуют два действительных А. н., в параболической точке — одно действительное А. н., в точке уплощения любое направление является А. н. А. н. являются самосопряженными направлениями (см. *Сопряженные направления*).

Лит.: [1] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956.

Е. В. Шикин.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — то же, что *асимптотическая формула*.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$ означает, что в нек-рой окрестности точки x_0 (за исключением, быть может, самой точки x_0)

$$f(x) = \varepsilon(x)\, g(x), \quad \text{где} \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 1,$$

т. е. что

$$f(x) = g(x)\,[1 + o(1)]$$

при $x \to x_0$ (x_0 — конечная или бесконечная предельная точка множества, на к-ром определены рассматриваемые функции). Если функция $g(x)$ не обращается в нуль в нек-рой окрестности точки x_0, то это условие равносильно требованию

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Иначе говоря, А. р. функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$ означает в этом случае, что относительная погрешность приближенного равенства функций $f(x)$ и $g(x)$, т. е. величина $[f(x) - g(x)]/g(x)$, $g(x) \neq 0$, является бесконечно малой при $x \to x_0$. А. р. функций содержательно для бесконечно малых и бесконечно больших функций. А. р. функций $f(x)$ и $g(x)$ обозначается $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$ и обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. В силу этого совокупность бесконечно малых (бесконечно больших) при $x \to x_0$ функций распадается на классы эквивалентности бесконечно малых (бесконечно больших). Примером асимптотически равных функций (они наз. также эквивалентными) при $x \to x_0$ являются функции $u(x)$, $\sin u(x)$, $\ln[1 + u(x)]$, $e^{u(x)} - 1$, где $\lim_{x \to x_0} u(x) = 0$.

Если $f \sim f_1$ и $g \sim g_1$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

причем из существования каждого из написанных пределов следует существование другого. См. также *Асимптотическое разложение* функций, *Асимптотическая формула*.

М. И. Шабунин.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ функции $f(x)$ — такой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x),$$

что при любом целом $N \geqslant 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \psi_n(x) + o(\varphi_N(x)), \qquad (1)$$

при $x \to x_0$, где $\{\varphi_n(x)\}$ — нек-рая заданная *асимптотическая последовательность* при $x \to x_0$. В этом случае пишется также

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x), \quad \{\varphi_n(x)\}, \quad (x \to x_0). \qquad (2)$$

Если ясно, о какой последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ идет речь, то в (2) она не указывается.

Разложение (2) наз. асимптотическим разложением в смысле Эрдейи [2]. Разложение вида

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (x \to x_0), \qquad (3)$$

где a_n — постоянные, наз. асимптотическим разложением в смысле Пуанкаре. При данной асимптотич. последовательности функций $\{\varphi_n(x)\}$ А. р. (3), в отличие от ее разложения (2), однозначно определяется самой функцией $f(x)$. Если (1) имеет место для конечного числа значений $N = 0, 1, \ldots, N_0 < \infty$, то говорят об А. р. с точностью до $o(\varphi_{N_0}(x))$. Ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

наз. асимптотическими рядами. Как правило, такие ряды расходятся. Наиболее употребительны *асимптотические степенные ряды*; соответствующие им А. р. являются А. р. в смысле Пуанкаре.

Пример А. р. в смысле Эрдейи:

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n} x^{-2n} - \right.$$
$$\left. - \sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n+1} x^{-2n-1} \right]$$
$$(x \to +\infty),$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя,

$$a_n = \frac{\Gamma(\nu + n + 1/2)}{2^n n!\, \Gamma(\nu - n + 1/2)}.$$

Понятия А. р. функции и асимптотический ряд были введены А. Пуанкаре (см. [1]) в связи с задачами небесной механики. Частные случаи А. р. были открыты и применялись еще в 18 в. (см. [2]). Асимптотич. разложения и ряды играют большую роль в различных задачах математики, механики и физики. Это вызвано тем, что многие задачи нельзя решить точно, но удается получить асимптотич. разложения решений. Кроме того, численные методы часто отказывают именно в тех случаях, когда А. р. удается сравнительно просто найти.

Лит.: [1] Poincaré H., «Acta Math.», 1886, v. 8, p. 295—344; [2] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 1, М., 1963; [3] Erdélyi A., Wyman M., «Arch. Ration. Mech. and Analysis», 1963, v. 14, p. 217—60.

М. В. Федорюк.

АССОЦИАТИВНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — название, установившееся за *исчислениями* нек-рого точно охарактеризованного типа, хорошо приспособленными для задания конечно определенных ассоциативных систем (*полугрупп*). Термин «А. и.» введен А. А. Марковым. Им же было осуществлено построение развернутой теории А. и. (см. [2], гл. VI).

Всякое А. и. $\mathfrak{A}$ определяется указанием нек-рого *алфавита* A и конечного списка σ соотношений в A — пар *слов* в этом алфавите. Слова, входящие в состав соотношений, обычно наз. их частями — левыми и правыми. Допустимым относительно σ действием над словами в A наз. любая подстановка одной из частей к.-л. соотношения, принадлежащего σ, вместо любого *вхождения* другой части того же соотношения. А. и. $\mathfrak{A}$ представляет собой разрешение производить, исходя из любого слова P в A, любые до-

пустимые относительно σ действия. Обо всех словах Q, к-рые при этом получаются (в том числе и о самом исходном слове P), говорят, что они эквивалентны P в А. и. $\mathfrak{A}$ (в символич. записи $\mathfrak{A}: P \amalg Q$). Отношение $\amalg$ для любого А. и. $\mathfrak{A}$ рефлексивно, симметрично и транзитивно. Кроме того, из $\mathfrak{A}: P \amalg Q$ и $\mathfrak{A}: R \amalg S$ следует, что $\mathfrak{A}: PR \amalg QS$. Это позволяет естественным образом сопоставить всякому А. и. $\mathfrak{A}$ нек-рую конечно определенную ассоциативную систему $K_{\mathfrak{A}}$, взяв в качестве ее элементов классы слов, эквивалентных друг другу в $\mathfrak{A}$, а в качестве операции умножения в $K_{\mathfrak{A}}$ — операцию, естественно индуцируемую операцией соединения слов в A. Так построенная ассоциативная система $K_{\mathfrak{A}}$ будет иметь единицу (элемент, представленный пустым словом); элементы $K_{\mathfrak{A}}$, представленные буквами алфавита A, будут составлять для $K_{\mathfrak{A}}$ систему порождающих элементов, а список соотношений σ будет представлять собой полную систему соотношений между упомянутыми порождающими элементами $K_{\mathfrak{A}}$ в том смысле, что элементы $K_{\mathfrak{A}}$, представленные словами P и Q, тождественны в $K_{\mathfrak{A}}$ тогда и только тогда, когда P и Q эквивалентны в $\mathfrak{A}$. Таким образом, распознавание тождества элементов в $K_{\mathfrak{A}}$ сводится к распознаванию эквивалентности слов в $\mathfrak{A}$. Отсюда становится понятной важность исследования разрешимости *алгоритмической проблемы* распознавания эквивалентности слов в произвольном А. и. Эта проблема была впервые сформулирована А. Туэ [1]; она заключается в том, что для произвольного А. и. $\mathfrak{A}$ требуется построить алгоритм, к-рый для любой пары слов в алфавите А. и. $\mathfrak{A}$ позволял бы за конечное число шагов выяснить, эквивалентны ли в $\mathfrak{A}$ слова, составляющие эту пару. В алгебраич. интерпретации эта проблема есть проблема тождества для ассоциативной системы $K_{\mathfrak{A}}$. Самому А. Туэ удалось решить ее лишь в весьма частных случаях. В современной интерпретации (после 30-х гг. 20 в.) этой проблемы алгоритм ищется в к.-л. точном смысле слова, напр. *частично рекурсивная функция*, *Тьюринга машина* или *нормальный алгорифм*. При такой модернизации этой проблемы уже становится осмысленным вопрос о том, нельзя ли указать такое конкретное А. и., для к-рого искомый алгоритм оказался бы невозможным. А. А. Марковым [3] и Э. Постом [4] одновременно и независимо были построены **неразрешимые** А. и., то есть А. и. с неразрешимой алгоритмич. проблемой распознавания эквивалентности слов. Эти результаты дают отрицательное решение модернизированной проблемы А. Туэ. Однако, принимая *Чёрча тезис* или к.-л. другое, эквивалентное ему предложение считать произведенное в теории алгоритмов уточнение понятия алгоритма адекватным, мы с необходимостью приходим к заключению, что и в начальной постановке проблема Туэ для нек-рого конкретного А. и. решается отрицательно.

Первоначальные примеры А. А. Маркова и Э. Поста были чрезвычайно сложными. В дальнейшем предложены более простые неразрешимые А. и.; напр., А. и. с семью весьма простыми соотношениями (см. [5]), с всего лишь тремя соотношениями (см. [6]); почти полностью решена проблема Туэ в случае А. и. с одним соотношением (см. [7]).

Естественным образом определяется **изоморфизм** одного А. и. в другое А. и., а также на другое А. и. (см., напр., [2], с. 331—34). С алгебраич. точки зрения особый интерес представляет рассмотрение таких свойств А. и., к-рые являются инвариантными относительно изоморфизмов: эти свойства суть свойства абстрактных ассоциативных систем. А. А. Марков (см. [2], с. 331—70), основываясь на своих исследованиях по проблеме распознавания эквивалентности слов в А. и.,

получил весьма общий результат, дающий отрицательное решение практически всех обсуждавшихся в то время алгоритмич. проблем, связанных с основными классификациями А. и. В частности, он показал, что если $И$ — инвариантное свойство А. и. и имеется единичное А. и. со свойством $И$, а также — А. и., не включаемое ни в какое А. и. со свойством $И$, то для всякого алфавита с числом букв более трех алгоритмич. проблема распознавания А. и. со свойством $И$ среди прочих А. и. неразрешима. Из этого результата непосредственно вытекает неразрешимость (для всякого алфавита, содержащего более трех букв) алгоритмич. проблем распознавания единичности А. и., конечности А. и., полугрупповости А. и., включаемости в групповое А. и., изоморфии для пар А. и. Впоследствии было показано (см. [8]), что множество пар изоморфных А. и. является рекурсивно перечислимым; использованный при этом метод позволяет также установить рекурсивную перечислимость ряда инвариантных свойств А. и.

Лит.: [1] Thue A., «Videnskapsselskapets Skrifter. 1. Mat. Naturv. Kl.», 1914, № 10; [2] Марков А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 («Тр. Матем. ин-та АН СССР», т. 42); [3] его же, «Докл. АН СССР», 1947, т. 55, № 7, с. 587—90; [4] Post E. L., «J. Symb. Logic», 1947, v. 12, p. 1—11; [5] Цейтин Г. С., «Докл. АН СССР», 1956, т. 107, № 3, с. 370—71; [6] Матиясевич Ю. В., «Докл. АН СССР», 1967, т. 173, № 6, с. 1264—66; [7] Адян С. И., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1966, т. 85, с. 1—123; [8] Нагорный Н. М., «Z. math. Logik und Grundl. Math.», 1960, Bd 6, S. 319—24. *Н. М. Нагорный.*

АССОЦИАТИВНОСТЬ, сочетательность, сочетательный закон,— свойство *алгебраической операции*. Для сложения и умножения чисел А. выражается тождествами

$$(a+b)+c=a+(b+c) \text{ и } (ab)c=a(bc).$$

Бинарная алгебраич. операция $*$ ассоциативна (или, что то же, для $*$ выполняется закон ассоциативности), если в данной алгебраич. системе справедливо тождество

$$(x*y)*z=x*(y*z).$$

Аналогично, тождествами

$$(x_1x_2\ \ldots\ x_n\omega)\,x_{n+1}\ \ldots\ x_{2n-1}\omega=$$
$$=x_1x_2\ \ldots\ x_i\,(x_{i+1}x_{i+2}\ \ldots\ x_{i+n}\omega)\,x_{i+n+1}\ \ldots\ x_{2n-1}\omega,$$

для всех $i=1, 2, \ldots, n$, может быть определена А. для n-арной операции ω. *О. А. Иванова, Д. М. Смирнов.*

АССОЦИАТИВНЫЕ КОЛЬЦА И АЛГЕБРЫ — кольца и алгебры с ассоциативным умножением, т. е. множества с двумя бинарными операциями — сложением $+$ и умножением $\cdot$, являющиеся абелевой группой по сложению и полугруппой по умножению, причем умножение дистрибутивно (слева и справа) относительно сложения. Ассоциативная алгебра, кроме того, должна быть векторным пространством над фиксированным полем F и умножение в ней связано с умножением на элементы поля условиями $\alpha(ab)=(\alpha a)\ b=a(\alpha b)$ для всех $\alpha\in F$, a, b из алгебры.

Первыми примерами ассоциативных колец (А. к.) и ассоциативных алгебр (А. а.) были числовые кольца и поля (поле комплексных чисел и его подкольца), алгебры многочленов, алгебры матриц над полями, кольца функций. Как самостоятельная область алгебры теория А. к. и А. а. оформилась к началу 20 в. Эта теория имеет много точек соприкосновения с многими областями математики, в особенности с алгебраич. геометрией и алгебраич. теорией чисел (коммутативные кольца), функциональным анализом (коммутативные нормированные кольца, кольца операторов и кольца функций), топологией (кольца непрерывных функций на топологич. пространствах). Из теории А. к. и А. а. выделились в самостоятельные области алгебры теория *полей* и теория *коммутативных колец* (см. также *Коммутативная алгебра*), теория представлений ассоциативных алгебр.

Теория топологич. колец и тел входит в качестве составной части в *топологическую алгебру*.

Классич. часть теории А. к. и А. а.— теория конечномерных А. а. (см. [2]). Центральные результаты этой теории: конечномерная простая (т. е. без собственных идеалов) А. а. над полем F является полной матричной алгеброй над нек-рым телом, конечномерным над F (теорема Веддерберна); конечномерная А. а. над полем характеристики нуль (и даже более общо — сепарабельная конечномерная А. а.) есть прямая сумма (как линейных пространств) своего радикала I (т. е. максимального нильпотентного идеала) и нек-рой полупростой (т. е. с нулевым радикалом) подалгебры S, причем любые две дополнительные полупростые подалгебры S и S_1 сопряжены (см. *Веддерберна — Мальцева теорема*).

Одним из важнейших классов А. к. являются *тела* (то есть А. к., в к-рых разрешимы уравнения $ax=b$ и $ya=b$ для всех a, b из кольца, $a\neq 0$). Тела, являющиеся алгебрами над нек-рым полем, наз. *алгебрами с делением*. Теория конечномерных алгебр с делением — классич. часть теории тел. Описаны все конечномерные А. а. с делением над полем действительных чисел — это само поле действительных чисел, поле комплексных чисел и тело кватернионов (*Фробениуса теорема*). Всякое конечное тело коммутативно (теорема Веддерберна о телах). Построена теория Галуа тел [5].

Центральными понятиями структурной теории А. к. являются понятия *Джекобсона радикала*, полупростоты и примитивности. А. к. наз. полупростым (в смысле Джекобсона), если его радикал Джекобсона равен нулю. Кольцо наз. примитивным (справа), если оно обладает правым неприводимым точным модулем. Всякое полупростое А. к. является подпрямой суммой примитивных колец. Каждое примитивное А. к. R есть плотное кольцо линейных преобразований нек-рого векторного пространства V над телом (теорема плотности Джекобсона); здесь плотность означает, что для любых линейно независимых элементов $v_1, \ldots, v_k$ из V и любых элементов $u_1, \ldots, u_k$ из V существует преобразование $r\in R$ такое, что $v_i r=u_i$ при $1\leqslant i\leqslant k$. Важное место в структурной теории колец занимает общая теория радикалов (см. *Радикалы колец*).

Классич. частью теории А. к. является теория *артиновых колец* (справа), т. е. колец с условием минимальности для правых идеалов. Центральный результат этой теории: А. к. будет полупростым артиновым кольцом тогда и только тогда, когда оно является прямой суммой конечного числа полных матричных колец над телами (*Веддерберна — Артина теорема*).

Большое значение в структурной теории А. к. имеет понятие (классического) кольца частных. Кольцо $Q(R)$ наз. (правым) кольцом частных своего подкольца R, если в $Q(R)$ все регулярные элементы (т. е. не делители нуля) кольца R обратимы и любой элемент из $Q(R)$ имеет вид ab^{-1}, где a, $b\in R$. А. к. обладает кольцом частных тогда и только тогда, когда для любых элементов a, $b\in R$, где b регулярен, существуют элементы $a_1, b_1\in R$ такие, что $ab_1=ba_1$ и b_1 регулярен (теорема Оре). Кольцо R обладает полупростым артиновым кольцом частных тогда и только тогда, когда оно полупервично (т. е. $I^2\neq 0$ для всякого ненулевого идеала $I\subseteq R$), удовлетворяет условию минимальности для правых аннуляторных идеалов вида

$$r(S)=\{x\in R,\ \ Sx=0\},$$

где S — подмножество R, и не содержит бесконечных прямых сумм правых идеалов (теорема Голди). Наряду с классич. кольцами частных изучаются и кольца частных в других смыслах, в первую очередь максимальные, или полные, кольца частных [8].

Значительное внимание уделяется изучению *свободных ассоциативных алгебр*. Пусть F — поле, X — множество. Свободная А. а. с единицей $F\langle X\rangle$ над F с базой X есть алгебра некоммутативных многочленов со свободными членами от множества переменных X с коэффициентами из F. Алгебра $F\langle X\rangle$ характеризуется тем, что порождается как алгебра с единицей множеством X и любое отображение X в А. а. R с единицей может быть и притом единственным способом продолжено до гомоморфизма $F\langle X\rangle$ в R. Свободная А. а. является кольцом со свободными идеалами, т. е. правые (левые) идеалы кольца $F\langle X\rangle$ суть свободные правые (левые) $F\langle X\rangle$-модули, при этом любые базисы свободного конечно порожденного $F\langle X\rangle$-модуля содержат одинаковое число элементов (теорема Кона). Другие примеры колец со свободными идеалами — групповые алгебры свободных групп и свободные произведения А. а. с делением. Свободная А. а. $F\langle X\rangle$ является также областью с однозначным разложением: любой необратимый элемент $a\in F\langle X\rangle$ обладает представлением $a=p_1\dots p_n$, где p_i — неприводимые элементы, и это представление единственно с точностью до порядка членов и подобия (два элемента a и b кольца R назыподобными, если R/aR и R/bR изоморфны как правые R-модули). *Централизатор* каждого нескалярного элемента алгебры $F\langle X\rangle$ изоморфен алгебре многочленов $F[t]$ от одного переменного t (теорема Бергмана).

Важными классами А. а. являются *групповые алгебры* и PI-*алгебры*. Развивается теория многообразий колец.

Роль теории колец в математике возросла в связи с развитием *гомологической алгебры*. Многие известные классы колец можно охарактеризовать в терминах свойств *модулей категорий* над этими кольцами. Напр., кольцо R является полупростым артиновым тогда и только тогда, когда все правые (левые) модули над R проективны (инъективны). Кольцо R регулярно (в смысле фон Неймана) тогда и только тогда, когда все правые (левые) модули над R являются плоскими; см. также *Регулярное кольцо*, *Гомологическая классификация колец*, *Квазифробениусово кольцо*.

Лит.: [1] Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, ч. 1—2, пер. с нем., М.—Л., 1947; [2] Albert A. A., Structure of alrebras, N. Y., 1939; [3] Artin E., Nesbitt C. J., Thrall R. M., Rings with minimum conditions, Ann Arbor, 1944; [4] Джекобсон Н., Теория колец, пер. с англ., М., 1947; [5] его же, Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [6] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [7] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [8] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971; [9] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [10] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [11] Кон П., Свободные кольца и их связи, пер. с англ., М., 1975; [12] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, т. 1, 2, пер. с англ., М., 1963; [13] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [14] Итоги науки. Алгебра. Топология. 1962, М., 1963, с. 59—79; [15] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 133—180; [16] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1968, М., 1970, с. 9—56; [17] Бокуть Л. А., Кузьмин Е. Н., Ширшов А. И., Кольца, т. 1—3, Новосибирск, 1973; [18] Divinsky N. J., Rings and radicals, L., 1965; [19] Passman D. S., Infinite group rings, N. Y., 1971; [20] Procese C., Rings with polynomial identities, N. Y., 1973.

Л. А. Бокуть.

АССОЦИАТОР элементов a, b, c кольца R — элемент, равный

$$(ab)\,c-a\,(bc);$$

обозначается (a, b, c).

К. А. Жевлаков.

АССОЦИИРОВАННАЯ ФУНКЦИЯ комплексного переменного — функция, получаемая каким-либо способом из заданной функции $f(z)$ при помощи нек-рой фиксированной функции $F(z)$. Напр., если

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$$

— целая функция, а

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

— фиксированная целая функция с $b_k\neq 0$, $k\geqslant 0$, то

$$\gamma(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}\,z^{-(k+1)}$$

есть функция, ассоциированная с $f(z)$ по функции $F(z)$; при этом предполагается, что ряд сходится в нек-рой окрестности $|z|>R$. Функция $f(z)$ представляется в этом случае через $\gamma(z)$ формулой:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R_1>R}\gamma(t)\,F(zt)\,dt.$$

В частности, если

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}\,z^k$$

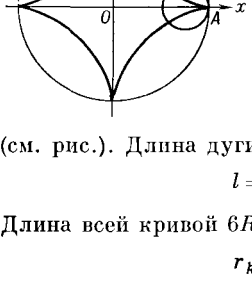
— целая функция экспоненциального типа и $F(z)=e^z$, то

$$\gamma(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{-(k+1)}$$

есть функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$ (см. *Бореля преобразование*).

А. Ф. Леонтьев.

АСТРОИДА — плоская алгебраич. кривая 6-го порядка, к-рая описывается точкой M окружности радиуса r, катящейся по внутренней стороне окружности радиуса $R=4r$; *гипоциклоида* с модулем $m=4$. Уравнение в декартовых прямоугольных координатах:



$$x^{2/3}+y^{2/3}=R^{2/3};$$

параметрич. уравнения:

$$x=R\cos^3\frac{t}{4},\quad y=R\sin^3\frac{t}{4}.$$

Имеются четыре точки возврата (см. рис.). Длина дуги от точки A:

$$l=\frac{3}{2}\,R\sin^2\frac{t}{4}.$$

Длина всей кривой $6R$. Радиус кривизны:

$$r_k=\frac{3}{2}\,R\sin\frac{t}{2}.$$

Площадь, ограниченная кривой:

$$S=\frac{3}{8}\,\pi R^2.$$

А. является огибающей семейства отрезков постоянной длины, концы к-рых расположены на двух взаимно перпендикулярных прямых. С этим свойством А. связано *одно из* ее обобщений — так наз. косая астроида — огибающая отрезков постоянной длины, концы к-рых расположены на двух прямых, пересекающихся под произвольным углом.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

АСТРОМЕТРИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи астрономии, возникающие в связи с созданием опорной инерциальной системы координат в пространстве и согласованием комплекса фундаментальных астрономических постоянных на основе определения координат небесных объектов и изучения вращения Земли. Методы астрометрии основываются на теории и практике геометрич. измерений на небесной сфере и определении расстояний до светил.

Важным элементом астрометрич. исследований является возможно более точное определение направления прямой линии «наблюдатель — светило» в момент наблюдения. Поскольку изучение взаимного расположения точек более удобно и наглядно, чем изучение взаимного расположения направлений, в рассмотрение

вводится вспомогательная сферич. поверхность (так наз. небесная сфера), а все объекты принимаются находящимися от наблюдателя на равном расстоянии и расположенными на этой сфере. При этом сферич. тригонометрия позволяет ввести на небесной сфере различные системы координат и установить многочисленные соотношения между углами и дугами конфигураций небесных объектов. Эти соотношения предопределяют большую часть астрометрич. методов наблюдений и геометрич. основу астрометрич. телескопов.

Явления, изучаемые астрометрией, связаны с различного рода нерегулярностями вращения Земли (неравномерность вращения Земли, движение полюсов, прецессионно-нутационные изменения оси вращения и т. д.), с одной стороны, и собственными перемещениями небесных тел — с другой. Эти обстоятельства задают временную и качественную структуру выполняемых рядов наблюдений и приводят к необходимости использования специфических математич. методов для их анализа. Так, весьма актуальной является задача решения и исследования обширных систем линейных уравнений, насчитывающих тысячи уравнений с сотнями неизвестными, и осложняемая зачастую их недостаточной определенностью. Типичным примером возникновения подобных задач является обработка наблюдений тел солнечной системы (главным образом малых планет) для определения нульпунктов фундаментальной системы координат. Другой пример — вывод составляющих гравитационного поля Земли по наблюдениям искусственных спутников Земли, осуществляемым всемирными сетями станций слежения.

Сложность вращения Земли, отличие реальной упруго-вязкой Земли от модели абсолютно твердого тела приводят к необходимости применения методов поиска скрытых закономерностей таких, как корреляционно-спектральный анализ и различные способы сглаживания. Таковы исследования изменяемости широт и долгот и связанного с ними блуждания полюса, а также очень тонких и сложных колебаний скорости вращения Земли.

Часто специфика явлений не позволяет охватить их в одном цикле наблюдений, что приводит к перекрывающимся отдельным отрезкам наблюдений с переменными нульпунктами. Такие наблюдения требуют применения методов решений уравнений в конечных разностях. Эта тематика характерна для инструментальных исследований астрометрии, а также тех ее задач, где измеряется какая-либо линейная комбинация ошибок координат небесных тел.

Для учета ошибок наблюдений в астрометрии широко применяются методы математич. статистики (в основном линейные). *В. В. Нестеров, В. В. Подобед.*

АСТРОНОМИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — математические задачи, возникающие при исследованиях небесных объектов. Для решения ряда таких задач разработаны специальные методы, к-рые нашли применение и в других разделах науки. С другой стороны, в астрономии широко используется математический аппарат, созданный для решения сугубо «земных» задач, в необходимых случаях модифицированный должным образом.

Астрономия — комплексная наука, исследующая небесные тела и их системы с различных, порой чрезвычайно далеких друг от друга, точек зрения. Это обусловливает и весьма широкий круг А. м. з.

Важным разделом астрономии является астрометрия, одна из основных задач которой состоит в определении опорной инерциальной системы координат в пространстве. Традиционно используемые в астрономии, геодезии и других разделах науки координатные системы, связанные с плоскостью земного экватора и направлением на точку весеннего равноденствия (т. е.

прямой пересечения плоскости земного экватора с плоскостью эклиптики), отнюдь не являются инерциальными и не могут быть строго зафиксированы в пространстве из-за непрерывного сложного движения обеих упомянутых плоскостей (вследствие прецессии, нутации, движения земных полюсов). Для сравнимости координаты небесных светил относят, обычно, к положению плоскости экватора и точки весеннего равноденствия в нек-рую фиксированную дату («эпоху»), причем саму определенную таким образом координатную систему фиксируют наиболее тщательно измеренными координатами нек-рого количества звезд, занесенными в специальные каталоги (фундаментальные звездные каталоги). Однако остается существенная трудность: для восстановления такой координатной системы в момент, отличный от эпохи каталога, необходимо знать, как изменятся вследствие собственных движений положения фундаментальных звезд относительно системы координат. Для преодоления этой трудности, начиная с середины 20 в., инерциальную систему координат стремятся определить относительно далеких галактик, собственные движения к-рых исчезающе малы. В связи с этим в астрометрии особенно большое значение приобретают математические задачи вычисления наиболее вероятных значений параметров, определяющих направления на небесное светило, из многократных наблюдений, а также оценка вероятностных характеристик этих значений. Решение этой задачи характерно и для большинства других разделов астрономии, поскольку астрономия в значительной мере является наукой наблюдательной.

С разнообразными математич. задачами сталкивается теоретич. астрофизика, к-рая на основе результатов наблюдений небесных объектов исследует их строение, происходящие в них физич. процессы, их эволюцию. Одной из главных проблем астрофизики является проблема строения и эволюции звезд. Теория внутреннего строения звезд приводит к дифференциальным уравнениям, описывающим условия механич. и энергетич. равновесия звезды. В частных случаях решения этих уравнений выражаются через элементарные функции; в большинстве же случаев уравнения (вследствие их сложности) решают численными методами.

Исследования звездных атмосфер, так же как и процессов, происходящих в туманностях и межзвездной среде, основаны на математич. теории переноса излучения, получившей существенное развитие в астрофизике. В некоторых случаях, напр. при исследованиях прохождения излучения через плоский слой вещества, уравнение переноса излучения приводится к интегральным уравнениям, решение к-рых позволяет определить характеристики поля излучения внутри среды, а также излучения, выходящего из среды и доступного наблюдениям.

При изучении движения газовых масс в звездах и туманностях, процессов, связанных с расширением газовых облаков, столкновениями их друг с другом и с межзвездной средой, широко используется математич. аппарат газодинамики и электродинамики.

В звездной астрономии, предметом к-рой является изучение закономерностей строения, динамики и эволюции звездных систем, используются математич. зависимости, связывающие распределение тех или иных истинных характеристик звездной системы (так наз. функций распределения) с распределением наблюдаемых характеристик. Так напр., изучение зависимостей (при нек-рых дополнительных допущениях) между функциями распределения звезд по расстоянию в нек-ром телесном угле и их абсолютными и видимыми величинами (получаемыми из наблюдений) приводит к интегральному уравнению, решение к-рого позволяет выяснить закономерности распределения звездной плотности в

этом телесном угле. К таким же уравнениям приводит сопоставление функций распределения искомых пространственных скоростей звезд и наблюдаемых лучевых скоростей.

В звездной кинематике задача определения компонент скорости Солнца и характеристик вращения Галактики на основе статистич. исследований координат, собственных движений и лучевых скоростей звезд приводит к избыточной системе условных уравнений, составляемых для отдельных звезд (или для отдельных площадок неба). Математич. аппарат механики используется при решении задач звездной динамики, связанных с исследованием звездных скоплений, галактик и скоплений галактик. При этом отдельные объекты, составляющие систему, рассматриваются как материальные точки, взаимодействующие по закону тяготения, но с учетом специфич. особенностей, характерных для систем небесных тел. Решение задач небесной механики, изучающей движение небесных тел в гравитационном поле, приводит к системам дифференциальных уравнений движения. Решение наиболее общей задачи n тел, в к-рой рассматривается движение n взаимнопритягивающихся тел для произвольных начальных условий, получается методом численного интегрирования. Однако этот метод дает удовлетворительное решение только на ограниченных интервалах времени и не позволяет делать заключения об эволюции системы тел. Более полно изучена частная задача трех тел с помощью рядов по степеням времени; однако эти ряды, крайне медленно сходящиеся, непригодны для приложения к исследованиям движений конкретных тел. Исследованы также нек-рые частные случаи задачи трех тел, десяти тел (Солнце и 9 больших планет) и др.

Задачи движения конкретных небесных тел решаются с помощью разложений в ряды по степеням малого параметра и при тех или иных допущениях, упрощающих решение.

Со специфическими дифференциальными уравнениями движения сталкивается астродинамика, изучающая движение искусственных небесных тел. В решениях задач движения искусственных спутников Земли приходится учитывать возмущающие силы, обусловленные несферичностью Земли, сопротивлением атмосферы, световым давлением Солнца (в случае спутников-баллонов) и нек-рыми другими факторами.

Подробнее см. в статьях *Астрометрии математические задачи*, *Астрофизики математические задачи*, *Звездной астрономии математические задачи*, *Классической небесной механики математические задачи*.

Н. П. Ерпылев.

АСТРОФИЗИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — круг задач теоретич. астрофизики, в к-рых широко используются математич. методы исследования. Основной предмет теоретич. астрофизики составляет истолкование результатов наблюдений с целью изучения строения объектов, наблюдаемых во Вселенной, а также исследования происходящих в них физич. процессов. Наряду с этим в А. м. з. развиваются нек-рые общие математич. вопросы, имеющие, кроме астрофизики, существенное значение для ряда других разделов физики и для математики. Наиболее яркий пример влияния А. м. з. на развитие математики представляет введенный впервые в А. м. з. так наз. *инвариантности принцип* [1], к-рый получил применение при решении обширного класса задач математич. физики, а также нек-рых задач вероятностей теории.

Одной из главных проблем астрофизики является изучение строения и эволюции звезд, поскольку основная масса вещества во Вселенной сосредоточена в звездах. Обычно отдельно рассматривают внутреннее строение звезд и строение звездных атмосфер. Задачи теории внутреннего строения формулируются в виде

дифференциальных уравнений, вытекающих из условий механич. и энергетич. равновесия звезды [2]. Условие механич. равновесия звезды выражает равенство силы тяготения, направленной внутрь звезды, и силы газового и светового давления, направленной наружу. Условие энергетич. равновесия отражает равенство количества энергии, вырабатываемого в нек-ром объеме звезды, и количества энергии, к-рое из этого объема выходит. Кроме условий равновесия, считаются известными уравнения состояния вещества звезды, коэффициент поглощения излучения и закон выделения энергии в результате термоядерных реакций в зависимости от плотности вещества и температуры при заданном химич. составе. Вследствие сложности уравнений для их решения обычно применяются численные методы. Иногда в качестве граничных условий используют результаты теории звездных атмосфер, что приводит к более надежным выводам. Указанные уравнения равновесия звезды в ряде частных случаев сводятся к *Эмдена уравнению*

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+y^n=0 \qquad (1)$$

с условиями $y=1$ и $y'=0$ при $x=0$. Для значений $n=0$, 1, 5 решения уравнения (1) выражаются через элементарные функции. Уравнение (1) применимо, напр., в тех областях звезды, где перенос энергии осуществляется главным образом конвективными потоками, а перенос лучистой энергии сравнительно мал. Трудность развития теории внутреннего строения звезд состоит еще и в том, что звездные недра ненаблюдаемы. Обычно сопоставляют с данными наблюдений только вычисленные интегральные характеристики звезды такие, как масса, радиус и полное количество энергии, излучаемое звездой в единицу времени. Использование статистич. материала, относящегося к указанным характеристикам, позволяет строить гипотезы о возможных путях эволюции звезд.

Теория звездных атмосфер основывается на исследовании процессов переноса излучения (см. *Переноса излучения теория*). Энергия, вырабатываемая во внутренних областях звезды, после сложного процесса переноса через атмосферу, выходит наружу. Решение уравнения переноса осуществляется здесь при условии лучистого равновесия, выражающем тот факт, что каждый элемент объема атмосферы излучает столько энергии, сколько поглощает. Кроме того, обычно делается предположение о существовании локального термодинамич. равновесия. Результаты решения уравнения переноса при указанных условиях позволяют теоретически построить спектр звезды, а сопоставление с результатами наблюдений дает возможность судить о строении звездной атмосферы и о происходящих в ней процессах. В частности, на исследовании линейчатых спектров звезды основаны способы определения химич. состава звездных атмосфер.

Процессы переноса излучения происходят также в туманностях и межзвездной среде. Часто процесс переноса состоит в многократном рассеянии света при его прохождении через вещество. Солнечный свет после рассеяний в планетной атмосфере несет с собой информацию о ее строении и физич. свойствах. В атмосферах планет и в пылевых туманностях происходит анизотропное рассеяние света.

Теория переноса излучения является одним из важнейших разделов теоретич. астрофизики. Эта теория получила большое развитие в А. м. з. (см. [3], [4]) в связи с решением указанных задач астрофизики. Ее методы находят также различные применения в других разделах физики, например в геофизике (см. *Геофизики математические задачи*), в теории переноса нейтронов и при расчетах свечения плазмы. Наиболее часто

встречается случай, когда излучение проходит через плоский слой вещества. Звездные и планетные атмосферы представляют пример такого рода, поскольку их геометрич. толщина в большинстве случаев мала по сравнению с радиусом. В этом случае для изотропного рассеяния уравнение переноса излучения приводится к интегральному уравнению

$$y(x)=\frac{\lambda}{2}\int_0^{x_0} K(|x-x'|)\,y(x')\,dx'+f(x), \qquad (2)$$

где $f(x)$ определяет распределение источников излучения в слое, а $y(x)$ — искомое поле излучения. Ядро $K(x)$ интегрального уравнения и параметр λ включают закон взаимодействия вещества с излучением, а x_0 есть толщина среды, выраженная в единицах длины свободного пробега излучения. Исследование интегральных уравнений типа (2) составляет одну из основных математич. задач теории переноса излучения. В А. м. з. развит общий метод получения точных аналитич. решений таких уравнений [4]. В частном случае, когда $x_0=\infty$, $\lambda=1$ и $f(x)\equiv 0$, а также $K(x)=E_1(x)$, где $E_1(x)$ — первая интегральная показательная функция, уравнение (2) наз. уравнением Милна. Его решение (см. *Милна проблема*) при нек-рых дополнительных условиях дает распределение температуры в атмосфере звезды. В более сложных задачах (анизотропное рассеяние, рассеяние света с учетом поляризации, рассеяние света в среде произвольной формы и т. п.) вместо искомой функции $y(x)$ возникают функции, зависящие, кроме координат, также от направления и от других величин, характеризующих поле излучения в данной точке. Для определения этих функций используются соответствующие системы интегральных уравнений, обобщающие уравнение (2).

Указанные методы служат для определения полного решения задачи, что позволяет найти как поле излучения внутри среды, так и характеристики выходящего из среды излучения. Для применений теории часто необходимо знать лишь выходящее излучение. Было показано, что определение характеристик выходящего из среды излучения можно сделать непосредственно, без предварительного нахождения полного решения. Это часто значительно упрощает задачу и осуществляется либо с использованием интегрального уравнения (2), либо путем применения принципа инвариантности. Другой путь заключается в представлении заданного слоя как суммы двух слоев и в установлении связей между характеристиками излучения, выходящего из всей среды, и характеристиками излучения на границе двух слоев. Рассмотренные возможности используются также в теории переноса нейтронов и составляют *альбедный метод*.

Наряду с теорией излучения видное место в астрофизике занимает применение методов газодинамики [5] и электродинамики [6] к исследованию звезд и межзвездной среды. Эти методы необходимы для изучения движений газовых масс в звездах и туманностях. Гидродинамич. эффекты (см. *Гидродинамики математические задачи*) в атмосферах Солнца и других звезд, расширение газовых облаков и их столкновения друг с другом и с более разреженной межзвездной средой, возникающие при этом ударные волны и турбулентные движения в межзвездной среде — некоторые из рассматриваемых здесь проблем.

Одной из самых существенных особенностей межзвездной газодинамики является необходимость учета взаимодействия ионизированного газа с магнитными полями. Это взаимодействие оказывает влияние как на движение газа, так и на изменение конфигурации и плотности энергии магнитного поля. При движении газа его частицы остаются все время как бы «приклеенными» к магнитной силовой линии, двигаясь вдоль нее либо

увлекая ее за собой при движении поперек поля. Говорят также, что силовые линии «вморожены» в вещество (см. *Вмороженности интеграл*). Уравнения движения межзвездной магнитной газодинамики включают: уравнение непрерывности (закон сохранения массы); уравнение индукции магнитного поля, выражающее принцип вмороженности; уравнение притока энергии межзвездного излучения (закон сохранения энергии); уравнение, выражающее закон сохранения импульса. При составлении системы используются уравнения электродинамики (*Максвелла уравнения*) и гидродинамики. Решение этой системы весьма осложняется нелинейностью уравнений. Обычно исследуют упрощенные варианты, напр. одномерные и автомодельные движения (см. *Магнитной гидродинамики математические задачи*).

Большое значение для развития астрофизики имеют результаты, получаемые радиоастрономич. методами. Поскольку излучение радиоволн происходит обычно в ионизированном газе (плазме), то возникают задачи об определении свойств плазмы для условий, осуществляющихся в звездах и межзвездной среде [7]. Наиболее полно поведение плазмы описывается *кинетическими уравнениями*. Отличие кинетич. уравнения для плазмы от кинетического *Больцмана уравнения* для обычного газа состоит в том, что кулоновское взаимодействие заряженных частиц плазмы распространяется на сравнительно большие расстояния, тогда как в газе из нейтральных атомов и молекул силы взаимодействия существенны лишь при непосредственных столкновениях частиц.

Изучение распределения вещества в Галактике затруднено поглощением света, производимым межзвездными пылевыми частицами. Этот эффект проявляется главным образом в направлениях, близких к Млечному Пути, поскольку слой межзвездной пыли сконцентрирован вблизи плоскости Галактики. Уменьшение числа наблюдаемых галактик при приближении направления наблюдения к плоскости Галактики вызвано тем же эффектом поглощения света. Однако поглощающее вещество распределено не равномерно, а в основном в виде отдельных облаков различной величины, случайным образом распределенных в пространстве. Поэтому возникает задача о статистич. изучении видимого распределения яркости Млечного Пути и видимого распределения галактик. Указанные вопросы подробно исследованы [1] в теории флуктуации яркости Млечного Пути. При выводе уравнений был использован принцип инвариантности. Математич. вопросы теории флуктуаций яркости близки к теории нек-рых типов случайных процессов. В простейшем варианте считается, что вся экваториальная плоскость Галактики с равномерной плотностью заполнена до бесконечности звездами и поглощающими свет облаками. Если принять долю пропускаемого света q одинаковой для всех облаков и ввести $g(u)du$ — вероятность того, что безразмерная яркость u заключена в пределах от u до $u+du$, то для определения функции $g(u)$ получается уравнение

$$g(u)+g'(u)=\frac{1}{q}\,g\left(\frac{u}{q}\right). \qquad (3)$$

Уравнения аналогичного типа возникают и при рассмотрении более общих моделей. Для анализа результатов наблюдений часто используют моменты исследуемых величин; поэтому решение исходных сложных уравнений не всегда необходимо. Получаемые из исходных уравнений соотношения для моментов достаточно просто и быстро приводят к цели.

Исследование структуры, динамики и эволюции звездных систем составляет предмет статистич. механики звездных систем. В ней изучаются системы тел, рассматриваемых обычно как материальные точки и взаимодействующих по закону тяготения. Важнейшими

системами являются звёздные скопления, галактики и скопления галактик. Указанные задачи входят в круг вопросов, исследуемых в физич. кинетике. Однако, в отличие от изучения свойств обычного газа, при рассмотрении звездного газа встречаются весьма существенные специфич. особенности. Во-первых, для звездного газа нет состояния полного статистич. равновесия. Во-вторых, важно то, что газ находится в собственном гравитационном поле, к-рое должно быть определено наряду с другими искомыми величинами. Наконец, в-третьих, взаимодействие между звездами отличается от взаимодействия между молекулами газа тем, что относится к разряду дальнодействия, аналогичного кулоновскому взаимодействию заряженных частиц в плазме. Указанные особенности весьма усложняют теоретич. рассмотрение. Правда, при исследовании движения звезд в Галактике можно в первом приближении пренебречь взаимодействием благодаря тому, что время релаксации оказывается бо́льшим по сравнению с интервалом времени, определяющим сроки эволюции Вселенной (см. [1], [8]).

Для звездных скоплений время релаксации сравнительно невелико, и в этом случае учет взаимодействий звезд необходим. Здесь обычно используют аналогию гравитационного и кулоновского взаимодействий и применяют кинетич. уравнение Ландау. Это уравнение получено для плазмы с использованием приближения Фоккера — Планка (см. *Фоккера — Планка уравнение*) при представлении процесса диффузии в пространстве скоростей. Уравнение Ландау не может дать достаточно строгого описания процесса эволюции звездной системы, связанного с неизбежной потерей звезд. Поэтому при исследовании эволюции звездных скоплений применяют более общие кинетич. уравнения.

Одним из важнейших этапов астрофизич. исследований является получение наиболее полной и надежной информации об изучаемых объектах на основе сопоставления результатов наблюдений и теории. Обычно обсуждается рассчитанная теоретич. модель и делается проверка правильности предположений, положенных в основу ее построения. В нек-рых случаях удается избежать модельных представлений и непосредственно связать наблюдаемые характеристики с искомыми, вводя лишь минимальное количество исходных обоснованных допущений. Классич. примером такого подхода служит задача о нахождении распределения пространственной плотности звезд по распределению звезд в проекции (см. [8]). Связь между наблюдаемым и пространственным распределением плотности получается в форме интегрального уравнения Абеля, решение которого приводит к цели. Это же уравнение получается и в ряде других задач, например при изучении распределения атомов по высоте в хромосфере и электронов в короне Солнца. Во всех таких случаях делается лишь одно предположение о сферической симметрии. Более сложное интегральное уравнение получается при выводе функции распределения пространственных скоростей звезд из распределения наблюдаемых лучевых скоростей. Здесь восстанавливается функция в трехмерном пространстве по значениям интегралов от нее по всевозможным плоскостям. Рассмотренные примеры относятся к совокупности вопросов, составляющих обратные задачи. При решении обратных задач в астрофизике возникают значительные трудности и неопределенности как математич. характера, так и в получении необходимых результатов наблюдений. Математич. вопросы связаны, в частности, с корректностью постановки задач. При решении многих проблем астрофизики ценным оказывается использование метода регуляризации решения некорректных задач.

Пример некорректной обратной задачи в А. м. з. представляет нахождение оптич. свойств атмосфер планет

по измеренным фотометрич. характеристикам. При многократном рассеянии света в атмосфере и отражении от поверхности планеты происходит потеря информации о величинах, определяющих искомые оптич. свойства атмосферы. Для получения однозначного решения приходится вводить значительные упрощающие допущения, сильно ограничивающие возможности исследования. В А. м. з. обратная задача часто связана с решением интегрального уравнения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x-y)\, f(y)\, dy \qquad (4)$$

1-го рода, к-рое определяет переход от функции $F(x)$, представляющей известные результаты наблюдений некоторой величины, к искомой функции $f(x)$, дающей истинные значения величины. Результаты наблюдений по различным причинам бывают искажены, что выражается количественно функцией $A(x)$, входящей в уравнение (4) и обычно известной для данной задачи. Напр., функции $F(x)$ и $f(x)$ определяют измеренный и истинный профили спектральной линии, а функция $A(x)$ соответствует наблюдаемому профилю расширения идеально монохроматич. спектральной линии, обусловленному свойствами спектрографа.

Много обратных задач возникает в радиоастрономии как при обработке результатов наблюдений, так и при истолковании полученных данных. Переход от наблюдаемого распределения температуры к истинному в одномерном случае осуществляется с использованием уравнения (4), где функция $A(x)$ определяет свойство антенны радиотелескопа и наз. ее диаграммой. Среди радиоастрономич. исследований важное место занимает использование радиолинии с волной 21 *см*, возникающей при переходе между подуровнями сверхтонкой структуры атома водорода. Изучение межзвездного радиоизлучения на этой длине волны дает ценные сведения о структуре Галактики и ее вращении, о распределении в ней межзвездного газа, а также позволяет судить о строении центральной части Галактики, недоступной для оптич. методов. Наблюдаемые в различных направлениях профили линии имеют сложный вид вследствие влияния ряда факторов (тепловое движение атомов, хаотич. движение межзвездного газа, вращение Галактики и т. п.). Поэтому при переходе от измеренных характеристик к искомым возникает ряд своеобразных обратных задач. Для освобождения наблюдаемого профиля от замывающего влияния тепловых и хаотических макроскопич. движений газа применяется уравнение (4), где функция $A(x)$ описывает распределение скоростей. После указанной процедуры находятся систематич. скорости газа и другие величины.

Лит.: [1] Амбарцумян В. А., Научные труды, т. 1, Ер., 1960; [2] Шварцшильд М., Строение и эволюция звезд, пер. с англ., М., 1961; [3] Соболев В. В., Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., 1956; [4] его же, Курс теоретической астрофизики, М., 1967; [5] Каплан С. А., Межзвездная газодинамика, М., 1958; [6] Пикельнер С. Б., Основы космической электродинамики, 2 изд., М., 1966; [7] Спитцер Л., Физика полностью ионизованного газа, пер. с англ., М., 1965; [8] Чандрасекар С., Принципы звездной динамики, пер. с англ., М., 1948.

И. Н. Минин.

АТОМ — минимальный ненулевой элемент *частично упорядоченного множества* с нулем 0, т. е. такой элемент p, что $0 < x \leqslant p$ влечет $x = p$. *Л. А. Скорняков.*

АТОМАРНОЕ КОЛЬЦО — *область целостности* с единицей, удовлетворяющая условию максимальности для главных идеалов. Другими словами, любое семейство главных идеалов А. к. обладает максимальным элементом. Элемент кольца наз. атомом, или экстремальным элементом, или неразложимым элементом, если он не разложим в произведение необратимых элементов. Область целостности является А. к. тогда и только тогда, когда каждый ненулевой необратимый элемент есть произведение ато-

мов. Всякое нетерово кольцо является атомарным. Факториальные кольца — это А. к., в к-рых каждый атом является простым элементом (т. е. элементом, порождающим простой идеал). Атомарное *Безу кольцо* будет кольцом главных идеалов.

В. И. Данилов.

АТОМИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств пространства Ω, сосредоточенное на множестве своих *атомов*. При этом множество $A \in \mathcal{A}$ в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ наз. атомом распределения, если $P(A)>0$ и из $A \supset B \in \mathcal{A}$ следует $P(B)=0$ или $P(A \setminus B)=0$. В частном случае, когда атомы суть отдельные точки, А. р. совпадает с *дискретным распределением*.

А. В. Прохоров.

АТОМНАЯ РЕШЕТКА — решетка с нулем, для всякого ненулевого элемента a к-рой найдется *атом* $p \leqslant a$.

О. А. Иванова.

АФФИКС комплексного числа $z=a+bi$ при геометрическом его представлении — точка комплексной плоскости, соответствующая этому числу, т. е. точка с декартовыми координатами (a, b). Иногда А. не различают с самим комплексным числом.

АФФИНИТЕТ — сокращенное название для *аффинного преобразования*, определяемого невырожденной линейной подстановкой

$$\tilde{x}^i = A_s^i x^s + a^i.$$

А. П. Широков.

АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии, в к-ром изучаются свойства фигур, инвариантные относительно *аффинных преобразований*. Напр., простое отношение трех точек, лежащих на одной прямой, параллельность прямых (плоскостей). Впервые свойства геометрич. образов, переходящих друг в друга при аффинных преобразованиях, изучались А. Ф. Мёбиусом (A. F. Möbius) в 1-й пол. 19 в.; однако понятие «А. г.» возникло лишь после появления в 1872 *эрлангенской программы*, согласно к-рой каждой группе преобразований отвечает своя геометрия, изучающая свойства фигур, инвариантные относительно преобразований этой группы. Группа аффинных преобразований содержит различные подгруппы, в связи с чем наряду с общей А. г. возникли подчиненные ей геометрии, отвечающие этим подгруппам: *эквиаффинная геометрия*, *центроаффинная геометрия* и др. В А. г. изучаются также вопросы дифференциальной геометрии, отвечающие той или иной аффинной подгруппе преобразований (см. *Аффинная дифференциальная геометрия*).

Лит.: [1] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии..., М., 1968; [2] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 4 изд., М., 1961.

Е. В. Шикин.

АФФИННАЯ ГРУППА — фундаментальная группа преобразований *аффинного пространства*. А. г. является подгруппой проективной группы и представляется теми *проективными преобразованиями*, к-рые переводят в себя фиксированную гиперплоскость проективного пространства.

А. П. Широков.

АФФИННАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии, изучающий дифференциально-геометрич. свойства кривых и поверхностей, сохраняющиеся при преобразованиях *аффинной группы* или ее подгрупп. Наиболее полно изучена дифференциальная геометрия эквиаффинного пространства.

В эквиаффинной плоскости каждые два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ имеют инвариант $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. С помощью этого понятия для кривой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, отличной от прямой, строится инвариантный параметр

$$s = \int_{t_0}^{t} |(\ddot{\boldsymbol{r}},\ \dddot{\boldsymbol{r}})|^{1/3}\, dt,$$

наз. эквиаффинной дугой. Дифференциальный инвариант

$$k=\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2},\ \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right)$$

наз. эквиаффинной кривизной плоской кривой. Постоянство эквиаффинной кривизны характеризует кривые 2-го порядка. Натуральное уравнение $k=f(s)$ определяет кривую с точностью до эквиаффинного преобразования. Вектор $n=d^2\boldsymbol{r}/ds^2$ направлен по аффинной нормали к плоской кривой; аффинная нормаль в точке M, $k\neq 0$, касается геометрич. места середин хорд кривой, параллельных касательной в точке M и совпадает с диаметром параболы, имеющей в точке M соприкосновение 3-го порядка с кривой.

При переходе к общей аффинной группе у кривой рассматривают два более сложных инварианта: аффинную дугу σ и аффинную кривизну $\varkappa$. Они могут быть выражены через введенные выше инварианты s и k:

$$\sigma=\int k^{1/2}\,ds,\quad \varkappa=\frac{1}{k^{3/2}}\cdot\frac{dk}{ds}$$

(в эквиаффинной геометрии сами величины s и k для краткости наз. аффинной дугой и аффинной кривизной). Подобным же образом строятся центроаффинная дуга, центроаффинная кривизна, эквицентроаффинная дуга и эквицентроаффинная кривизна плоской кривой.

В эквиаффинном пространстве каждым трем векторам $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ может быть отнесен инвариант $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ — объем ориентированного параллелепипеда, определяемого этими векторами. Натуральный параметр (эквиаффинная дуга) кривой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ $(\boldsymbol{r}\in C^3)$ определяется формулой

$$s=\int_{t_0}^{t}|(\dot{\boldsymbol{r}},\ \ddot{\boldsymbol{r}},\ \dddot{\boldsymbol{r}})|^{1/6}\,dt.$$

Дифференциальные инварианты $\varkappa=(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}''', \boldsymbol{r}^{\mathrm{IV}})$, $\tau=-(\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''', \boldsymbol{r}^{\mathrm{IV}})$, где штрихи означают дифференцирование по натуральному параметру, наз. соответственно эквиаффинной кривизной и эквиаффинным кручением пространственной кривой. Изучение кривой сводится к выбору того или иного сопровождающего репера; особую роль играет репер, образованный векторами

$$\left\{\dot{\boldsymbol{r}},\quad \ddot{\boldsymbol{r}},\quad \dddot{\boldsymbol{r}}+\varkappa\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{4}\right\}$$

и определяемый дифференциальной окрестностью 4-го порядка рассматриваемой кривой. Разработана также центроаффинная теория пространственных кривых (см. [5]).

Для поверхности $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1, u^2)$ в эквиаффинном пространстве, отличной от развертывающейся поверхности, строится тензор

$$g_{ij}=\frac{a_{ij}}{|a|^{1/4}},$$

где $a_{ij}=(r_1, r_2, r_{ij})$, $a=\det(a_{ij})$, $r_i=\partial_i\boldsymbol{r}$, $r_{ij}=\partial_{ij}\boldsymbol{r}$. Вектор

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{2}\,g^{ks}\,\nabla_k r_s,$$

где ∇_k — символ ковариантной производной в связности с метрич. тензором g_{ij}, задает направление аффинной нормали к поверхности. Аффинная нормаль проходит через центр соприкасающейся квадрики Ли. Деривационные уравнения

$$\partial_j r_i=\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{s}r_s+g_{ij}N$$

определяют внутреннюю связность 1-го рода $\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ поверхности. Наряду с ней возникает внутренняя связность 2-го рода $\overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$, определяемая деривационными уравнениями

$$\partial_j\nu_i=\overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{s}\nu_s+A_{ij}\nu,$$

где ν — ковариантный вектор, определяющий касательную плоскость к поверхности и подчиненный условию нормировки $N\nu=1$. Связности $\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ и $\overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ являются сопряженными относительно тензора g_{ij} в смысле А. П. Нордена (см. [3]). Тензор

$$T^{k}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij} - \overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}\right),$$

играющий также основную роль в *проективной дифференциальной геометрии*, позволяет построить симметрич. ковариантный тензор

$$\overset{s}{T}_{ijk} = g_{ks}T^{s}_{ij}.$$

Строятся также две основные формы поверхности: квадратичная форма

$$\varphi = g_{ij}\,du^i\,du^j$$

и кубическая форма Фубини — Пика

$$\psi = T_{ijk}\,du^i\,du^j\,du^k.$$

Эти формы связаны условием аполярности

$$g^{ij}T_{ijk} = 0.$$

Две такие формы, удовлетворяющие дополнительным дифференциальным условиям, определяют поверхность с точностью до эквиаффинных преобразований. Все эти положения обобщаются на многомерный случай.

В аффинном и эквиаффинном пространствах выделяется много специфич. классов поверхностей: аффинные сферы (у к-рых аффинные нормали образуют связку), аффинные поверхности вращения (аффинные нормали пересекают одну собственную или несобственную прямую), аффинные минимальные поверхности и др.

Помимо кривых и поверхностей, изучаются также иные геометрич. образы эквиаффинного пространства, напр. конгруэнции и комплексы прямых, векторные поля и др.

Наряду с эквиаффинной дифференциальной геометрией разрабатывается дифференциальная геометрия общей аффинной группы и других ее подгрупп как в трехмерном, так и в многомерном пространствах (центроаффинном, эквицентроаффинном, аффинно-симплектическом, биаффинном и т. д.).

Лит.: [1] Blaschke W., Affine Differentialgeometrie, B., 1923; [2] Salkowski E., Affine Differentialgeometrie, B.-Lpz., 1934; [3] Норден А. П., Пространства аффинной связности, М.—Л., 1950; [4] Итоги науки. Геометрия. 1963, М., 1965, с. 3—64; [5] Широков П. А., Широков А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1959.

А. П. Широков.

АФФИННАЯ КРИВИЗНА — дифференциальный инвариант плоской кривой в геометрии общей *аффинной группы* или ее подгруппы. Обычно под А. к. понимают дифференциальный инвариант кривой в геометрии аффинной унимодулярной (или эквиаффинной) группы. В этой геометрии А. к. (точнее, эквиаффинная кривизна) плоской кривой $y=y(x)$ вычисляется по формуле

$$k = -\frac{1}{2}\left[(y'')^{-2/3}\right]'',$$

а аффинная (точнее, эквиаффинная) длина дуги кривой равна

$$s = \int (y'')^{1/3}\,dx.$$

Имеется геометрич. истолкование А. к. в точке M_0 кривой: если M — близкая к M_0 точка кривой, s — аффинная длина дуги M_0M, а σ — аффинная длина дуги параболы, касающейся данной кривой в точках M_0 и M, то А. к. в точке M_0 равна

$$k_0 = \pm \lim_{M \to M_0} \sqrt{\frac{720\,(\sigma - s)}{s^5}}.$$

В аффинной теории пространственных кривых и поверхностей также существуют понятия А. к., напоминаю-

щие аналогичные понятия евклидовой дифференциальной геометрии.

Лит. см. при ст. *Аффинная дифференциальная геометрия.* *А. П. Широков.*

АФФИННАЯ МИНИМАЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, средняя аффинная кривизна к-рой равна нулю. В отличие от обычных минимальных поверхностей, состоящих лишь из седловых точек, А. м. п. может содержать эллиптич. точки. Так, эллиптич. параболоид состоит целиком из эллиптич. точек и является А. м. п. *Е. В. Шикин.*

АФФИННАЯ НОРМАЛЬ — прямая, аффинно-инвариантным способом определенная в каждой точке гиперповерхности аффинного пространства с помощью дифференциальной окрестности 3-го порядка этой гиперповерхности; при этом существенно, чтобы у гиперповерхности не вырождалась основная квадратичная форма. А. н. в точке M плоской кривой совпадает с диаметром параболы, имеющей с кривой соприкосновение в M 3-го порядка. Аналогично истолковывается и А. н. гиперповерхности, если использовать соприкасающиеся гиперквадрики. В частности, А. н. гиперквадрики совпадает с ее диаметром. *А. П. Широков.*

АФФИННАЯ ОБОЛОЧКА множества M в векторном пространстве — множество, заполненное точками прямых, полученных при продолжении всех ненулевых отрезков с концами в выпуклой оболочке множества M. *В. А. Залгаллер.*

АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ — *дифференциально-геометрическая структура* на гладком многообразии M, специальный вид *связности на многообразии*, когда приклеенное к M гладкое расслоенное пространство E имеет типовым слоем аффинное пространство A_n размерности $n=\dim M$. Структурой такого E к каждой точке $x\in M$ присоединяется экземпляр аффинного пространства $(A_n)_x$, к-рый отождествляется с касательным центроаффинным пространством $T_x(M)$. А. с. предусматривает такое сопоставление каждой гладкой кривой $L\in M$ с началом x_0 и каждой ее точке x_t аффинного отображения $(A_n)_{x_t}\to(A_n)_{x_0}$, что удовлетворяется ниже сформулированное условие. Пусть M покрыто координатными областями, в каждой из к-рых фиксировано гладкое поле аффинного репера в $(A_n)_x$, у к-рого начало совпадает с x (т. е. фиксированы n гладких векторных полей, линейно независимых в каждой точке x области). Требуется, чтобы при $t\to0$, когда x_t перемещается по L до x_0, отображение $(A_n)_{x_t}\to(A_n)_{x_0}$ стремилось к тождественному отображению, причем главная часть его отклонения от последнего определялось относительно некоторого из реперов системой линейных дифференциальных форм

$$\left.\begin{aligned}&\omega^i=\Gamma^i_k\,dx^k,\ \det|\,\Gamma^i_k\,|\neq0,\\&\omega^i_j=\Gamma^i_{jk}\omega^k.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Итак, образом при $(A_n)_{x_t}\to(A_n)_{x_0}$ репера в точке x_t является система из точки в $(A_n)_{x_0}$ с радиус-вектором $e_i\,[\omega^i(X)\,t+\varepsilon^i(t)]$ и n векторов $e_i\,[\delta^i_j+\omega^i_j(X)\,t+\varepsilon^i(t)]$, где X — касательный вектор к L в точке x_0, причем

$$\lim_{t\to0}\frac{\varepsilon^i(t)}{t}=0,\quad\lim_{t\to0}\frac{\varepsilon^i_j(t)}{t}=0.$$

Многообразие M с заданной на ней А. с. наз. пространством аффинной связности. При преобразовании репера поля в произвольной точке $x\in M$ согласно формулам $e_{i'}=A^i_{i'}e_j$, $e_j=A^{i'}_je_{i'}$, т. е. при переходе к произвольному элементу главного расслоенного пространства P реперов в касательных пространствах $(A_n)_x$ с началами в точке x, формы (1) заменяются следующими 1-формами на P:

$$\left.\begin{aligned}&\omega^{i'}=A^{i'}_j\,\omega^j,\\&\omega^{i'}_{j'}=A^{i'}_k\,dA^k_{j'}+A^{i'}_k\,A^l_{j'}\omega^k_l,\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

а 2-формы

$$\left.\begin{aligned}\Omega^i &= d\omega^i + \omega^i_j \wedge \omega^j,\\ \Omega^i_j &= d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

преобразуются так:

$$\Omega^{i'} = A^{i'}_j \Omega^j, \quad \Omega^{i'}_{j'} = A^{i'}_k A^l_{j'} \Omega^k_l,$$

где $\Omega^{i'}$ и $\Omega_{j'}$ составлены согласно (3) из форм (2). Уравнения (3) называются структурными уравнениями А. с. на М, где левые части — так наз. *кручения формы* Ω^i и *кривизны формы* Ω^i_j — полубазовы, т. е. являются линейными комбинациями $\omega^k \wedge \omega^l$:

$$\left.\begin{aligned}\Omega^i &= \tfrac{1}{2} S^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k,\\ \Omega^i_j &= \tfrac{1}{2} R^i_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Любые 1-формы ω^i и ω^i_j, заданные на P и удовлетворяющие уравнениям (3) с левыми частями вида (4), определяют нек-рую А. с. на M. Отображение $(A_n)_{x_t} \to (A_n)_{x_0}$ для кривой $L \in M$ получается следующим образом: нужно выбрать нек-рое гладкое поле репера в координатной окрестности начала x_0 кривой L, и образ репера в точке x_t определить как решение $\{x(t), e_i(t)\}$ системы

$$\left.\begin{aligned}du &= (\omega^i)_{x(t)}(\dot{x}(t))\, u_i,\\ du_j &= (\omega^i_j)_{x(t)}(\dot{x}(t))\, u_i\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

при начальных условиях $u(0)=0$, $u_i(0)=e_i$, где $x^i = x^i(t)$ — уравнения кривой L. Кривая, описываемая в $(A_n)_{x_0}$ точкой с радиус-вектором $x(t)$ относительно x_0, наз. развертко й кривой L. Поле репера в координатной окрестности можно выбрать так, чтобы $\omega^i = dx^i$; тогда $\omega^i_j = \Gamma^i_{jk} dx^k$. На пересечении координатных окрестностей $dx^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\omega^j$, т. е. $A^{i'}_j = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$ и

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{jk} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}S^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj},\\ R^i_{jkl} &= \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{jk}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Здесь S^i_{jk} и R^i_{jkl} составляют, соответственно, *кручения тензор* и *кривизны тензор* А. с. на M. А. с. на M может быть задана системой функций Γ^i_{jk} на каждой координатной окрестности, преобразующейся на пересечении окрестностей по формуле (5) — так наз. о б ъ е к т о м А. с. Отображение $(A_n)_{x_t} \to (A_n)_{x_0}$ получается с помощью системы (5), в к-рую следует подставить

$$\omega^i = dx^i, \quad \omega^i_j = \Gamma^i_{jk}\, dx^k.$$

Если в нек-рой окрестности точки x_0 дано векторное поле $X = \xi^i e_i$, то при $(A_n)_{x_t} \to (A_n)_{x_0}$ вектор $X_{x(t)}$ отображается в вектор $\xi^i(x_t)\, e_i(t)$ (где $\{e_i(t)\}$ — решение системы (5)), дифференциал к-рого в $(A_n)_{x_0}$ при $t=0$:

$$(d\xi^i + \xi^j \omega^i_j)\, e_i = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \xi^j \Gamma^i_{jk}\right) dx^k e_i,$$

наз. *ковариантным дифференциалом* поля X относительно данной А. с. Здесь

$$\nabla_k \xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} + \xi^j \Gamma^i_{jk}$$

образуют тензорное поле, наз. *ковариантной производной* поля $X = \xi^i e_i$. Если дано второе векторное поле $Y = \eta^k e_k$, то определяется ковариантная производная поля X в направлении Y:

$$\nabla_Y X = \eta^k \nabla_k \xi^i e_i,$$

к-рая относительно произвольного поля репера может быть определена также формулой

$$\omega^i(\nabla_Y X) = Y\omega^i(X) + \omega_k^i(Y)\,\omega^k(X).$$

А. с. на M может быть задана и как билинейный оператор ∇, к-рый двум векторным полям X, Y ставит в соответствие третье $\nabla_Y X$ и обладает свойствами:

$$\nabla_Y(fX) = (Yf)X + f\nabla_Y X,\quad \nabla_{fY}X = f\nabla_Y X,$$

где f — гладкая функция на M. Связь с вышеуказанными способами задания устанавливается формулой: $\nabla_{e_k} e_j = \Gamma_{jk}^i e_i$, где $\{e_i\}$ — поле репера; поля тензоров кручения и кривизны

$$S(X, Y) = S_{jk}^i \xi^j \eta^k e_i = \Omega^i(X, Y) e_i,$$
$$R(X, Y)Z = \left(R_{jkl}^i \xi^k \eta^l\right) \xi^j e_i = \Omega_j^i(X, Y)\,\omega^j(Z)\,e_i$$

определяются формулами

$$S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$
$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Векторное поле X наз. п а р а л л е л ь н ы м вдоль кривой L, если $\nabla_{\dot{x}(t)} X_{x(t)} = 0$ тождественно относительно t, т. е. если вдоль L

$$d\xi^i + \xi^j \omega_j^i = 0.$$

Параллельными векторными полями осуществляется *параллельное перенесение* векторов (и вообще тензоров) в А. с., представляющее собой линейное отображение касательных векторных пространств $T_{x_t}(M) \to T_{x_0}(M)$, определяемые отображением $(A_n)_{x_t} \to (A_n)_{x_0}$. В этом смысле каждая А. с. порождает нек-рую *линейную связность* на M.

Кривая L наз. г е о д е з и ч е с к о й л и н и е й в данной А. с., если ее развертка является прямой линией; другими словами, если в подходящей параметризации ее касательное векторное поле $\dot{x}(t)$ параллельно вдоль ее. Относительно локальной координатной системы геодезич. линии определяются системой

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Через каждую точку в каждом направлении проходит одна геодезическая.

Существует взаимно однозначное соответствие между А. с. на M и связностями в главных расслоенных пространствах свободных аффинных реперов в $(A_n)_x$, $x \in M$, ими порождаемыми. Замкнутым кривым с началом и концом в x соответствуют аффинные преобразования $(A_n)_x \to (A_n)_x$, к-рые образуют неоднородную *голономии группу* данной А. с. Соответствующие линейные автоморфизмы $T_x(M) \to T_x(M)$ образуют однородную группу голономии. Согласно т е о р е м е о г о л о н о м и и алгебры Ли этих групп определяются 2-формами кручения Ω^i и кривизны Ω_j^i. Для последних имеют место т о ж д е с т в а Б и а н к и:

$$d\Omega^i = \Omega_j^i \wedge \omega^j - \omega_j^i \wedge \Omega^j,\quad d\Omega_j^i = \Omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega_k^i \wedge \Omega_j^k,$$

к-рые, в частности, для А. с. без кручения, когда $\Omega^i = 0$, сводятся к следующим:

$$R_{jkl}^i + R_{klj}^i + R_{ljk}^i = 0,\quad \nabla_m R_{jkl}^i + \nabla_k R_{jlm}^i + \nabla_l R_{jmk}^i = 0.$$

Понятие А. с. возникло в 1917 в римановой геометрии (в виде *Леви-Чивита связности*); самостоятельный смысл оно обрело в 1918–24 в работах Г. Вейля [1] и Э. Картана [2].

Лит.: [1] Weyl H., Raum, Zeit, Materie, 5 Aufl., B., 1923; [2] C a r t a n E., «Ann. scient. École norm. supér.», 1923, т. 40, p. 325—412; 1924, t. 41, p. 1—25; 1925, t. 42, p. 17—88; [3] К а р т а н Э., Пространства аффинной, проективной и конформной связности, пер. с франц., Казань, 1962; [4] Р а ш е в с к и й П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [5] П о с т н и к о в М. М., Вариационная теория геодезических, М., 1965.

Ю. Г. Лумисте.

АФФИННАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ — прямолинейная система координат в *аффинном пространстве*. А. с. к. на плоскости задается упорядоченной парой неколлинеарных векторов e_1 и e_2 (аффинный базис) и точкой O (начало координат). Прямые, проходящие через точку O параллельно векторам базиса, наз. осями координат. Векторы e_1 и e_2 задают на осях координат положительное направление. Ось, параллельная вектору e_1, наз. осью абсцисс, а параллельная вектору e_2,— осью ординат. Аффинными координатами точки M наз. упорядоченная пара чисел (x, y), к-рые являются коэффициентами разложения вектора OM по векторам базиса:

$$\overline{OM} = xe_1 + ye_2.$$

Первое из этих чисел x наз. абсциссой, а второе y — ординатой точки M.

А. с. к. в трехмерном пространстве задается упорядоченной тройкой линейно независимых векторов e_1, e_2, e_3 и нек-рой точкой O. Аналогично случаю плоскости определяются оси координат: ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат, и координаты точки: абсцисса, ордината и аппликата. Плоскости, проходящие через пары осей координат, наз. координатными плоскостями. *А. С. Пархоменко.*

АФФИННАЯ СФЕРА — поверхность, *аффинные нормали* к-рой пересекаются в одной точке. А. с. наз. несобственной в случае бесконечно удаленной точки и собственной — в противном случае. В частности, любая поверхность 2-го порядка является А. с. Несобственная выпуклая А. с. является эллиптич. параболоидом. *Е. В. Шикин.*

АФФИННАЯ СХЕМА — обобщение понятия *аффинного многообразия*, играющее роль локального объекта в теории схем. Пусть A — коммутативное кольцо с единицей. Аффинная схема состоит из топологич. пространства Spec A и пучка колец $\tilde{A}$ на Spec A. При этом Spec A есть множество всех простых идеалов кольца A (называемых точками аффинной схемы), наделенное *Зарисского топологией* (или, что то же, спектральной топологией), в к-рой базис открытых множеств составляют подмножества $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A, f \in \mathfrak{p}\}$, когда f пробегает элементы кольца A. Пучок локальных колец $\tilde{A}$ определяется условием $\Gamma(D(f), \tilde{A}) = A_f$, где A_f — кольцо частных кольца A относительно мультипликативной системы $\{f^n\}_{n \geqslant 0}$.

А. с. введены А. Гротендиком [1] при построении теории схем. Схема есть окольцованное пространство, локально изоморфное А. с.

А. с. Spec A наз. нётеровой А. с. (соответственно целостной, приведенной, нормальной, регулярной), если кольцо A нётерово (соответственно целостно, без нильпотентов, целозамкнуто, регулярно). А. с. наз. связной (соответственно неприводимой, дискретной, квазикомпактной), если таковым является топологич. пространство Spec A. Пространство Spec A А. с. всегда квазикомпактно.

А. с. образуют категорию, если морфизмами А. с. считать морфизмы этих схем как локально окольцованных пространств. Каждый гомоморфизм колец φ: $A \to B$ определяет морфизм А. с.: (Spec B, $\tilde{B}$) $\to$ (Spec A, $\tilde{A}$), состоящий из непрерывного отображения ${}^a\varphi$: Spec $B \to$ Spec A (${}^a\varphi(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ для $\mathfrak{p} \in$ Spec B) и гомоморфизма пучков колец $\tilde{\varphi}$: $\tilde{A} \to {}^a\varphi_*(\tilde{B})$, переводящего сечение a/f^n пучка $\tilde{A}$ над множеством $D(f)$ в сечение $\varphi(a)/\varphi(f^n)$. Морфизмы произвольной схемы $(X, \mathcal{O}_X)$ в А. с. (Spec A, $\tilde{A}$) (называемые также X-значными точками схемы Spec A) взаимно однозначно соответствуют гомоморфизмам колец $A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$; тем самым сопоставление

$A \longmapsto (\operatorname{Spec} A, \tilde{A})$ является контравариантным функтором из категории коммутативных колец с единицей в категорию А. с., устанавливающим антиэквивалентность этих категорий. В частности, в категории А. с. существуют конечные прямые суммы и расслоенные произведения, двойственные конструкциям прямой суммы и тензорного произведения колец. Морфизмы А. с., соответствующие сюръективным гомоморфизмам колец, наз. замкнутыми вложениями А. с.

Наиболее важными примерами А. с. являются аффинные многообразия; другими примерами служат аффинные *групповые схемы*.

Подобно тому, как строится пучок $\tilde{A}$, для любого A-модуля M может быть построен пучок $\tilde{A}$-модулей $\tilde{M}$ на Spec A, для к-рого

$$\Gamma(D(f), \tilde{M}) = M_f = M \underset{A}{\otimes} A_f.$$

Такие пучки являются квазикогерентными пучками. Категория A-модулей эквивалентна категории квазикогерентных пучков $\tilde{A}$-модулей на Spec A; проективным модулям соответствуют локально свободные пучки. Когомологии квазикогерентных пучков на А. с. описываются теоремой Серра:

$$H^q(\operatorname{Spec} A, \tilde{M}) = 0 \text{ при } q > 0.$$

Обращение этой теоремы — критерий аффинности Серра — утверждает, что если $(X, \mathcal{O}_X)$ — квазикомпактная отделимая схема и $H^1(X, F) = 0$ для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{O}_X$-модулей F, то X есть А. с. Существуют и другие критерии аффинности (см. [1], [4]).

Лит.: [1] Grothendieck A., Éléments de géométrie algébrique, t. 1, P., 1960; [2] Дьедонне Ж., «Математика», 1965, т. 9, № 1, с. 54—126; [3] Манин Ю. И., Лекции по алгебраической геометрии, ч. 1, М., 1970; [4] Goodman J., Hartshorne R., «Amer. J. Math.», 1969, v. 91, № 1, p. 258—66.

В. И. Данилов, И. В. Долгачев.

АФФИННАЯ УНИМОДУЛЯРНАЯ ГРУППА, эквиаффинная группа,— подгруппа общей *аффинной группы*, состоящая из аффинных преобразований n-мерного аффинного пространства

$$\tilde{x}^i = A^i_s x^s + a^i, \qquad (*)$$

удовлетворяющих условию $\det(A^i_j) = 1$. Если истолковать величины x^i и $\tilde{x}^i$ как прямоугольные координаты точек в n-мерном евклидовом пространстве E^n, то преобразование $(*)$ сохраняет объемы n-мерных областей пространства E^n. Это позволяет ввести понятие объема в эквиаффинном пространстве — пространстве с фундаментальной А. у. г. Если в формулах $(*)$ положить $a^i = 0$, то возникает центроаффинная унимодулярная группа преобразований, изоморфная группе всех матриц порядка n с определителем, равным единице. Такая группа матриц наз. унимодулярной группой порядка n и обозначается через $\mathrm{SL}(n)$.

А. П. Широков.

АФФИННОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО, аффинное алгебраическое k-множество,— множество решений нек-рой системы алгебраич. уравнений. Пусть k поле и $\bar{k}$ — его алгебраич. замыкание. Подмножество X декартова произведения $\bar{k}^n$ наз. аффинным алгебраическим k-множеством, если его точки являются общими нулями нек-рого семейства S *многочленов кольца* $k[T] = k[T_1, \ldots, T_n]$. Множество $\mathfrak{A}_X$ всех многочленов из $k[T_1, \ldots, T_n]$, обращающихся в нуль на X, образует идеал, к-рый наз. идеалом аффинного алгебраического k-множества. Идеал $\mathfrak{A}_X$ совпадает с радикалом идеала $I(S)$, порожденного семейством S, т. е. с множеством таких многочленов $f \in k[T_1, \ldots, T_n]$, что $f^m \in I(S)$ для нек-рого натураль-

ного m. А. а. м. X и Y совпадают тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_X=\mathfrak{A}_Y$. А. а. м. X может быть задано системой образующих идеала $\mathfrak{A}_X$. В частности, всякое А. а. м. может быть задано конечным числом многочленов $(f_1, \ldots, f_k)\in k[T]$. Равенства $f_1=\ldots=f_k=0$ наз. уравнениями А. а. м. X. А. а. м. пространства $\bar{k}^n$ образуют решетку относительно операций пересечения и объединения. При этом идеал пересечения $X\bigcap Y$ совпадает с суммой идеалов $\mathfrak{A}_X+\mathfrak{A}_Y$, а идеал объединения $X\bigcup Y$ — с пересечением идеалов $\mathfrak{A}_X\bigcap\mathfrak{A}_Y$. Все множество $\bar{k}^n$ является А. а. м., к-рое наз. аффинным пространством над полем k и обозначается $\underset{k}{\mathbb{A}}{}^n$; ему соответствует нулевой идеал. Пустое подмножество множества $\bar{k}^n$ тоже есть А. а. м. с единичным идеалом. Факторкольцо $k[X]=k[T]/\mathfrak{A}_X$ наз. координатным кольцом А. а. м. X. Оно отождествляется с кольцом k-регулярных функций на X, т. е. с кольцом $\bar{k}$-значных функций $f: X\to\bar{k}$, для к-рых существует такой многочлен $F\in k[T]$, что $f(x)=F(x)$ для всех $x\in X$. А. а. м. X наз. неприводимым, если оно не является объединением двух собственных аффинных алгебраич. подмножеств. Эквивалентное определение состоит в том, что идеал $\mathfrak{A}_X$ должен быть простым. Неприводимые А. а. м. вместе с проективными алгебраич. множествами являлись объектами классической алгебраич. геометрии. Они наз. соответственно аффинными алгебраическими многообразиями и проективными алгебраическими многообразиями над полем k (или k-многообразиями). А. а. м. наделяются структурой топологич. пространства. Замкнутыми множествами этой топологии *(Зарискоro топологии)* являются неприводимые аффинные алгебраич. подмножества. А. а. м. неприводимо тогда и только тогда, когда оно неприводимо как топологич. пространство. Дальнейшее развитие понятия А. а. м. приводит к понятиям *аффинного многообразия* и *аффинной схемы*.

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [2] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

И. В. Долгачев, В. А. Исковских.

АФФИННОЕ КРУЧЕНИЕ — один из дифференциальных инвариантов пространственной кривой в эквиаффинном пространстве:

$$\tau=-(r', r'', r'''),$$

где штрихи означают производные по аффинному параметру от радиус-вектора кривой. Аналогичные понятия вводятся для кривых в пространствах с другими фундаментальными группами, напр. центроаффинной.

А. П. Широков.

АФФИННОЕ МНОГООБРАЗИЕ, аффинное алгебраическое многообразие,— обобщение понятия *аффинного алгебраического множества*. А. м. есть приведенная *аффинная схема* X конечного типа над полем k, т. е. $X=\operatorname{Spec} A$, где A — коммутативная k-алгебра конечного типа без нильпотентных элементов. А. м. $X=\operatorname{Spec} k[T_1, \ldots, T_n]$, где $k[T_1, \ldots, T_n]$ — кольцо многочленов над полем k, наз. аффинным пространством над k и обозначается $\underset{k}{\mathbb{A}}{}^n$. Аффинная схема является А. м. тогда и только тогда, когда она изоморфна приведенной замкнутой подсхеме аффинного пространства. Каждая система образующих $x_1, \ldots, x_n$ k-алгебры A определяет сюръективный гомоморфизм $\varphi: k[T_1, \ldots, T_n]\to A$, определяемый формулой $\varphi(T_i)=x_i$. Пусть $\bar{k}$ — алгебраич. замыкание поля k. Подмножество множества $\bar{k}^n$, состоящее из общих нулей всех многочленов идеала $\ker\varphi$, является аффинным алгебраич. множеством над полем k. Координатное кольцо такого аффинного алгебраич. множества изоморфно кольцу A. В свою очередь каждое аффинное алгебраич. множество X над полем k определяет А. м.

Spec $k[X]$, где $k[X]$ — координатное кольцо X. При этом множество точек А. м. находится во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми подмногообразиями соответствующего аффинного алгебраич. множества.

С каждым А. м. $X=\mathrm{Spec}\ A$ связан функтор на категории k-алгебр, определяемый соответствием

$$B \longrightarrow X(B)=\mathrm{Hom}_{k-alg}(A,\ B).$$

В случае, когда $B=\bar{k}$ (соответственно $B=k$), элементы множества $X(\bar{k})$ (соответственно $X(k)$) наз. геометрическими (соответственно рациональными) точками А. м. X. Множество $X(\bar{k})$ находится в биективном соответствии с множеством максимальных идеалов $\mathrm{Specm}\ (A)$ кольца A, а также с множеством точек любого аффинного алгебраич. множества V, координатное кольцо к-рого изоморфно A. При этом спектральная топология в пространстве X индуцирует на всюду плотном подмножестве $\mathrm{Specm}\ (A)$ топологию, к-рая соответствует топологии Зариского на V.

И. В. Долгачев.

АФФИННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ евклидова пространства — взаимно однозначное точечное отображение плоскости или пространства на себя, при к-ром трем точкам, лежащим на одной прямой, соответствуют три точки, также лежащие на одной прямой. Таким образом, при А. п. прямые переходят в прямые. А. п. плоскости переводит пересекающиеся прямые в пересекающиеся, параллельные — в параллельные. При А. п. пространства каждая плоскость аффинно отображается на нек-рую плоскость; при этом пересекающиеся плоскости переходят в пересекающиеся, параллельные — в параллельные. Кроме того, сохраняется взаимное расположение двух прямых: пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся, параллельные — в параллельные, скрещивающиеся — в скрещивающиеся.

При А. п. отношение направленных отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению их образов. Сохраняется также отношение площадей двух квадрируемых фигур (на евклидовой плоскости) и отношение объемов двух кубируемых тел (в евклидовом пространстве). При А. п. множество векторов плоскости (пространства) взаимно однозначно отображается на множество векторов плоскости (пространства) и это отображение является линейным. А. п. задается в аффинной системе координат невырожденным (неоднородным) *линейным преобразованием*; таким образом, в случае плоскости А. п. аналитически выражаются при помощи формул

$$x'=c_{11}x+c_{12}y+c_{13},$$
$$y'=c_{21}x+c_{22}y+c_{23}$$

с дополнительным требованием

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Аналогично задаются А. п. в пространстве.

При А. п. алгебраич. линия переходит в алгебраическую; при этом порядок линии сохраняется. В частности, линия 2-го порядка переходит в линию 2-го порядка, причем эллипсы переходят в эллипсы, гиперболы — в гиперболы, параболы — в параболы и т. д.

Примеры А. п.: изометрич. преобразование, преобразование подобия, равномерное сжатие плоскости к прямой. Всякое А. п. плоскости является произведением изометрич. преобразования и двух равномерных сжатий к двум взаимно перпендикулярным прямым. Всякое А. п. пространства является произведением изометрич. преобразования и трех равномерных сжатий к трем попарно перпендикулярным плоскостям.

А. п. образуют группу; преобразования подобия составляют подгруппу этой группы; множество изометрич. преобразований — подгруппу группы преобразований подобия.

А. п. являются самыми общими взаимно однозначными отображениями плоскости (пространства) на себя, сохраняющими прямые линии.

Лит.: [1] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии..., М., 1968; [2] Постников М. М., Аналитическая геометрия, М., 1973.

А. С. Пархоменко.

АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО над полем k — множество A (элементы к-рого наз. точками А. п.), к-рому сопоставлены векторное пространство L над k (наз. пространством присоединенным к A) и отображение множества $A\times A$ в пространство L (образ элемента $(a, b)\in A\times A$ обозначается $\overrightarrow{ab}$ и наз. вектором с началом a и концом b), обладающее свойствами:

для любой фиксированной точки a отображение $x\to\overrightarrow{ax}$, $x\in A$, является биекцией A на L,

для любых точек $a, b, c\in A$ выполняется соотношение Шаля:

$$\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bc}+\overrightarrow{ca}=\overrightarrow{0},$$ где $\overrightarrow{0}$ — нулевой вектор.

Размерностью А. п. A наз. размерность L. Точка $a\in A$ и вектор $l\in L$ определяют другую точку, обозначаемую $a+l$, т. е. аддитивная группа векторов пространства L транзитивно и свободно действует на А. п., соответствующем L.

Примеры. 1) Множество векторов пространства L является А. п. $A(L)$, присоединенное к нему пространство совпадает с L. В частности, поле скаляров есть А. п. размерности 1. Если $L=k^n$, то $A(k^n)$ наз. n-мерным координатным А. п. над полем k, точки его $a=(a_1, \ldots, a_n)$ и $b=(b_1, \ldots, b_n)$ определяют вектор $\overrightarrow{ab}=(b_1-a_1, \ldots, b_n-a_n)$.

2) Дополнение к любой гиперплоскости в проективном пространстве над полем k является А. п.

3) Множество решений системы линейных (алгебраических или дифференциальных) уравнений является А. п., присоединенным к к-рому является пространство решений соответствующей однородной системы уравнений.

Подмножество A' А. п. A наз. аффинным подпространством (или линейным многообразием) в A, если множество векторов $\overrightarrow{ab}$, $a, b\in A$ образует подпространство пространства L. Каждое аффинное подпространство $A'\subset A$ имеет вид $a+L'=\{a+l \mid l\in L'\}$, где L' — нек-рое подпространство в L, а a — произвольный элемент из A'.

Отображение $f\colon A_1\to A_2$ А. п. A_1 в A_2 наз. аффинным, если существует линейное отображение присоединенных векторных пространств $\varphi\colon L_1\to L_2$ такое, что $f(a+l)=f(a)+\varphi(l)$ для любых $a\in A_1$, $l\in L_1$. Биективное аффинное отображение наз. аффинным изоморфизмом. Все А. п. одинаковой размерности аффинно изоморфны между собой.

Аффинные изоморфизмы А. п. A в себя образуют группу, наз. аффинной группой А. п. A и обозначаемую $\mathrm{Aff}(A)$. Аффинная группа А. п. $A(k^n)$ обозначается $\mathrm{Aff}_n(k)$. Каждый элемент $f\in\mathrm{Aff}_n(k)$ задается формулой

$$f((a_1, \ldots, a_n))=(b_1, \ldots, b_n),$$

где

$$b_i=\sum\nolimits_j a_i^j a_j+c_i,$$

(a_i^j) — обратимая матрица. Аффинная группа $\mathrm{Aff}(A)$ содержит инвариантную подгруппу, наз. подгруппой параллельных переносов, состоя-

щую из отображений $f\colon A\to A$, для к-рых отображение $\varphi\colon L\to L$ является тождественным. Эта группа изоморфна аддитивной группе векторов пространства L. Отображение $f\to\varphi$ определяет сюръективный гомоморфизм $\mathrm{Aff}(A)$ в общую линейную группу GL, ядром к-рого является подгруппа параллельных переносов. Если L — евклидово пространство, то прообраз ортогональной группы наз. подгруппой евклидовых движений. Прообраз специальной линейной группы SGL наз. эквиаффинной подгруппой (см. *Аффинная унимодулярная группа*). Подгруппа $G_a\subset\mathrm{Aff}_n(A)$, состоящая из отображений $f\colon A\to A$ таких, что $f(a+l)=a+\varphi(l)$ для нек-рого $a\in A$ и любых $l\in L$, наз. центроаффинной подгруппой, она изоморфна общей линейной группе GL пространства L.

В алгебраич. геометрии А. п. также наз. *аффинные алгебраические множества*, *аффинные многообразия* или *аффинные схемы* специального вида. Каждое конечномерное А. п. можно, в свою очередь, снабдить структурой аффинного алгебраич. множества, снабженного топологией Зариского.

Аналогично строится А. п., ассоциированное с векторным пространством над телом k.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962.

И. В. Долгачев, А. П. Широков.

АФФИННОЕ ПСЕВДОРАССТОЯНИЕ — число $\rho=(\overline{MM}^*, t)$, равное модулю векторного произведения векторов $\overline{MM}^*$ и t, где M^* — произвольная точка в *эквиаффинной плоскости*, M — точка на плоской кривой $r=r(s)$, s — аффинный параметр кривой, а $t=dr/ds$ — касательный вектор в точке M. Это число ρ наз. А. п. от M^* до M. Если точку M^* зафиксировать, а точку M перемещать по кривой, то А. п. от M^* до M принимает стационарное значение тогда и только тогда, когда M^* оказывается расположенной на аффинной нормали кривой в точке M. Аналогично можно определить А. п. в эквиаффинном пространстве после задания гиперповерхности.

А. П. Широков.

АФФИННОЕ РАССТОЯНИЕ — инвариант, определяемый двумя линейными элементами в *эквиаффинной плоскости*. Линейным элементом (M, m) наз. совокупность точки M и проходящей через нее прямой m. Для двух линейных элементов (M, m) и (N, n) А. р. равно $2f^{1/3}$, где f — площадь треугольника MNP, P — точка пересечения прямых m и n. А. р. для двух линейных элементов, касающихся параболы, равно аффинной длине дуги этой параболы (см. *Аффинный параметр*). В трехмерном эквиаффинном пространстве тоже определяется А. р., если пользоваться элементами, состоящими из попарно инцидентных точки, прямой и плоскости.

А. П. Широков

АФФИННЫЙ МОРФИЗМ — морфизм *схем* $f\colon X\to S$ такой, что прообраз любой открытой аффинной подсхемы в S является аффинной схемой; при этом схема X наз. аффинной S-схемой.

Пусть S — схема, A — квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_S$-алгебр и пусть U_i — открытые аффинные подсхемы в S, образующие покрытие схемы S. Тогда склейка аффинных схем $\mathrm{Spec}\,\Gamma(U_i, A)$ определяет аффинную S-схему, обозначаемую $\mathrm{Spec}\,A$. Обратно, любая аффинная S-схема, определяемая А. м. $f\colon X\to S$, изоморфна (как схема над S) схеме $\mathrm{Spec}\,f_*(\mathcal{O}_X)$. Множество S-морфизмов S-схемы $f\colon Z\to S$ в аффинную S-схему $\mathrm{Spec}\,A$ находится в биективном соответствии с гомоморфизмами пучков $\mathcal{O}_S$-алгебр $A\to f_*(\mathcal{O}_Z)$.

Замкнутые вложения схем или произвольные морфизмы аффинных схем являются А. м.; другие примеры А. м. доставляют целые морфизмы и конечные морфизмы. Так, морфизм нормализации схемы есть А. м. Свойство морфизма быть А. м. сохраняется при композиции и замене базы.

Лит.: [1] Гротендик А., В сб.: Международный математический конгресс в Эдинбурге. 1958, М., 1962, с. 116—37; [2] Дьедонне Ж., «Математика», 1965, т. 9, № 1, с. 54—126.

В. И. Данилов, И. В. Долгачев.

АФФИННЫЙ ПАРАМЕТР, аффинная длина дуги,— параметр на кривой, к-рый сохраняется при преобразованиях *аффинной группы* и для определения к-рого необходимо знать производные от радиус-вектора кривой наиболее низкого порядка. Больше всего известен параметр, инвариантный по отношению к эквиаффинной, т. е. *аффинной унимодулярной группе*. Для плоской кривой $r=r(t)$ такой А. п. вычисляется по формуле

$$s=\int_{t_0}^{t} |(\dot{r}, \ddot{r})|^{1/3}\, dt,$$

где $(\dot{r}, \ddot{r})$ — косое произведение векторов $\dot{r}$ и $\ddot{r}$. В частности, для аффинной длины дуги M_0M_1 параболы А. п. $s=2f^{1/3}$, где f — площадь треугольника, образованного хордой M_0M_1 и касательными к параболе в точках M_0 и M_1. Аналогично вводится А. п. пространственной кривой в геометрии общей аффинной группы или какой-либо ее подгруппы.

А. П. Широков.

АФФИННЫЙ РЕПЕР — совокупность n линейно независимых векторов e_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ n-мерного аффинного пространства A_n и точки O. Точка O наз. начальной точкой, а векторы e_i — масштабными векторами. По отношению к А. р. каждая точка M определяется n числами — координатами x^i, входящими в разложение радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ по масштабным векторам: $\overrightarrow{OM}=x^se_s$. Задание двух А. р. определяет единственное аффинное преобразование пространства A_n, переводящее первый репер во второй (см. также *Аффинная система координат*).

А. П. Широков.

АФФИННЫЙ ТЕНЗОР — элемент *тензорного произведения* p экземпляров n-мерного векторного пространства E_n и q экземпляров дуального ему векторного пространства E_n^*. Такой тензор наз. тензором типа (p, q), а число $p+q$ определяет валентность тензора. После выбора в пространстве E_n базиса $\{e_i\}$ А. т. типа (p, q) определяется с помощью n^{p+q} координат $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$, преобразующихся при замене базиса $e_{i'}=A^s_{i'}e_s$ по закону

$$T^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q}=A^{i'_1}_{s_1}\ldots A^{i'_p}_{s_p}A^{t_1}_{j'_1}\ldots A^{t_q}_{j'_q}T^{s_1\ldots s_p}_{t_1\ldots t_q},$$

где $A^s_{j'}$, $A^{i'}_s=\delta^{i'}_{j'}$. Принято говорить, что по верхним индексам координаты тензора преобразуются контравариантно, а по нижним — ковариантно.

А. П. Широков.

АФФИНОР — *аффинный тензор* типа (1,1). Задание А. с координатами f^i_j эквивалентно заданию эндоморфизма векторного пространства по правилу $v^{i'}=f^i_sv^s$. Тождественному эндоморфизму отвечает единичный А. Соответствие, относящее каждому А. матрицу $\|f^i_j\|$, осуществляет изоморфизм между алгеброй А. и алгеброй матриц. Иногда в литературе А. определяется как общий аффинный тензор.

А. П. Широков.

АЦИКЛИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ — компонента множества разделяющих точек и концевых точек континуума.

А. А. Мальцев.

АЦИКЛИЧНЫЙ КОНТИНУУМ — континуум с тривиальными *гомологий группами*.

П. С. Александров.

АЭРОДИНАМИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, связанные с решением основных уравнений аэродинамики, к-рые точно описывают законы движения газообразной среды и ее силового взаимодействия с движущимися в этой среде твердыми телами. Исключение составляет турбулентность, для к-рой не построена сколько-нибудь удовлетворительная математич. модель. Те процессы, при к-рых турбулентность не возни-

кает или не играет существенной роли, могут быть в принципе достаточно полно исследованы с помощью математич. решения соответствующих уравнений. Реальные возможности решения отстают от принципиальных, и на основе оценок порядков различных членов в уравнениях создаются упрощенные математич. модели для различных классов аэродинамич. процессов, в к-рых отброшены те или другие «малые» члены из полной системы уравнений аэродинамики. Даже для таких упрощенных моделей возможность получения аналитич. решений ограничена простейшими случаями и в решении практич. задач аэродинамики широко использовались численные методы. С появлением ЭВМ численные методы стали главенствующими.

В соответствии с характером уравнений А. м. з. можно разбить на четыре крупных раздела.

1) Задачи аэродинамики идеальной (невязкой и нетеплопроводной) жидкости. Слово «жидкость» применяется здесь в общем смысле: капельная жидкость и газы.

2) Задачи аэродинамики вязкой жидкости.

3) Задачи аэродинамики излучающего газа.

4) Задачи аэродинамики разреженного газа.

Уравнения идеальной жидкости получаются из общих уравнений при неограниченном возрастании числа Рейнольдса, характеризующего порядок отношения инерционных сил к силам вязкости.

Для большинства прикладных задач аэродинамики самолетов и ракет, гидродинамики корабля числа Рейнольдса весьма велики (10^6-10^8), так что модель идеальной жидкости весьма точно описывает процессы обтекания тел в этих условиях, за исключением области пограничного слоя. Система уравнений аэродинамики идеальной жидкости:

$$\rho \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \rho g - g\,\mathrm{grad}\, p \quad \text{(уравнение движения)},$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{V} = 0 \quad \text{(уравнение неразрывности)},$$

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2} + U\right) = \rho\,(g\boldsymbol{V}) - \mathrm{div}\,(p\boldsymbol{V}) \quad \text{(уравнение сохранения энергии)}$$

(где $\boldsymbol{V}$ — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление, g — ускорение силы тяжести, U — внутренняя энергия) является системой уравнений 1-го порядка относительно искомых функций. Это остается в силе и для смесей химически реагирующих газов: к упомянутым уравнениям прибавляются уравнения переноса компонентов смеси и в уравнении энергии добавится выделение тепла вследствие химич. реакций.

Из модели идеальной жидкости выделяется ряд более упрощенных моделей. Важнейшими являются модель невесомой и модель несжимаемой жидкости. Первая модель — предельный случай общей модели при неограниченном возрастании числа Фруда, характеризующего порядок отношений сил инерции к силам тяжести. Эта модель весьма точна в приложении к аэродинамике самолетов и ракет (число Фруда порядка 10^2-10^3). Однако для гидродинамики корабля и особенно в метеорологич. применениях аэродинамики сила тяжести играет существенную роль (число Фруда порядка $\leqslant 1$).

Уравнение несжимаемой жидкости получается из общей системы, если в ней положить плотность $\rho = \mathrm{const}$. К этой форме уравнений движения можно придти при стремлении к нулю числа Маха (отношения характерной скорости звука в жидкой среде). В общем случае такое утверждение неверно. Оно справедливо лишь при числах Фруда $\geqslant 1$ (должно быть $\mathrm{Ma} \ll \mathrm{Fr}$), а также для процессов, близких к стационарным: число Струхаля (Строухала) — критерий подобия нестационарных движений жидкости или газа — порядка $\leqslant 1$.

Модель несжимаемой жидкости наиболее проста. Для нее вся система уравнений сводится к одному уравне-

нию Лапласа для потенциала скорости Φ ($\mathrm{grad}\,\Phi = \boldsymbol{V}$). Однако только в случае плоскопараллельных движений невесомой жидкости и осесимметричных движений около тел вращения решение аэродинамич. задач сводится к классич. задачам теории непрерывного потенциала.

Задача обтекания профиля заданной формы решается классич. методами конформных преобразований. Обтекание тел вращения под нулевым углом атаки определяется классич. решением внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа. Ввиду практич. важности этих задач (определение характеристик крыловых профилей, фюзеляжей) были разработаны многочисленные приемы их решения, позволившие относительно простыми вычислениями получить приемлемую точность решения. При использовании ЭВМ эти приемы теряют свой смысл, так как точные численные методы решения указанных задач относятся к простейшим задачам вычислительной математики.

В пространственном случае формальное решение задачи Неймана для потенциала скоростей лишь в исключительных случаях может соответствовать физически реальной картине обтекания. В вязкой жидкости за телом следует вихревой след. При увеличении числа Рейнольдса этот след утоньшается (при безотрывном обтекании) и в пределе переходит в бесконечно тонкую вихревую поверхность, интенсивность вихревого слоя к-рой лишь в редких случаях обращается в нуль (напр., при плоскопараллельных движениях). Поэтому реальными пространственными задачами несжимаемой жидкости являются задачи с разрывным потенциалом скорости в области течения. Положение этой поверхности разрыва неизвестно, поэтому точная задача обтекания пространственных тел при наличии поверхностей разрыва потенциала в потоке является весьма сложной нелинейной задачей. Лишь в линейном приближении, то есть в предположении, что обтекаемое тело мало возмущает основной равномерный поток (тоикое крыло под малым углом атаки), задача получила решение. В этом случае вихревую поверхность можно считать горизонтальной, условием на ней — постоянство разрыва потенциала вдоль потока. На площади проекции тела заданы нормальные производные от потенциала скорости. В этой постановке были получены аналитич. решения (для круглого и эллиптич. крыла). Для любой же формы крыла разработаны численные методы решения, к-рые делают задачу достаточно простой (см. *Крыла теория*).

В задачах для случая тяжелой жидкости основная трудность состоит в нелинейных граничных условиях для потенциала на свободной поверхности. В точной постановке решены лишь плоские задачи теории волн. Весьма мало продвинута пространственная задача о волнах конечной амплитуды. В то же время в линеаризованной постановке (малые амплитуды волн) задача исследована достаточно полно, и именно линейная теория является основой расчета волнового сопротивления корабля.

Выход летательных аппаратов на большие околозвуковые и сверхзвуковые скорости стимулировал быстрое развитие методов решения задач аэродинамики сжимаемой жидкости. Методы существенно различны в разных диапазонах скоростей: дозвуковые скорости течений, трансзвуковые и сверхзвуковые. В дозвуковом диапазоне уравнения аэродинамики остаются эллиптическими и качественный характер решений сохраняется тем же, что и для несжимаемой жидкости.

В начальный период исследований по аэродинамике сжимаемой жидкости были выполнены многочисленные работы, позволяющие оценивать влияние сжимаемости на аэродинамич. характеристики обтекаемых тел. Все эти методы в том или ином виде использовали линеаризацию относительно скорости невозмущенного потока. Исключением явился метод Христиановича, который

позволял находить точные решения уравнений дозвуковой аэродинамики, но для тела неизвестной заранее формы.

Задачи дозвуковой аэродинамики в практике имеют те же трудности, что и соответствующие задачи для несжимаемой жидкости: решение задач для плоскопараллельных и осесимметричных течений может быть получено численными методами без значительных трудностей *(интегральных соотношений метод, установления метод)*. В случае пространственных течений с разрывным потенциалом скоростей решение может быть получено лишь для линеаризированных уравнений. Но эти последние элементарным преобразованием сводятся к уравнениям для несжимаемой жидкости с условиями на границе и на поверхности разрыва, аналогичными несжимаемой жидкости.

Наиболее сложной для математич. решений (в том числе и численных) является область трансзвуковой аэродинамики. Наличие местных сверхзвуковых (гиперболических) зон, заканчивающихся почти всегда ударными волнами, не позволяет вводить к.-л. аналитич. аппроксимации. В то же время эти задачи обладают главным недостатком уравнений эллиптич. типа — распространение влияния любого возмущения на все пространство. Для решения задач трансзвуковой аэродинамики наиболее подходящим является метод установления, заключающийся в том, что решается нестационарная аэродинамич. задача (исходя из произвольного начального состояния), а решение стационарной задачи обтекания тела трансзвуковым потоком получается как предел решения нестационарной задачи при стремлении времени к бесконечности. Метод этот весьма трудоемкий, но по мере роста эффективности ЭВМ он становится практически вполне осуществимым.

Сверхзвуковая аэродинамика по методам математич. исследований разделяется на три области.

1) Чисто сверхзвуковые течения.

2) Смешанные течения, с образованием локальных дозвуковых зон.

3) Высокотемпературные гиперзвуковые течения, при к-рых в газе возникают химич. реакции.

При более высоких скоростях и, как следствие, температурах возникает ионизация и существенными становятся процессы излучения. Эта часть гиперзвуковой аэродинамики выделяется в специальный раздел, так как математич. задачи, связанные с указанными процессами, резко отличаются от задач «прозрачного» газа.

Задачи чисто сверхзвуковых течений наиболее полно исследованы. Разработанные здесь численные методы характеристик, конечно разностный методы и полухарактеристические позволяют сравнительно просто рассчитывать не только плоскопараллельные или осесимметричные течения, но и пространственные. Исчерпывающе разработана также линейная теория сверхзвуковых течений. Для очень многих практических задач она позволяет получать решения в аналитической форме. Некоторую сложность в этих задачах представляют случаи возникновения слабых ударных волн. Но и эти трудности вычислительного, а не принципиального характера.

В практическом отношении эти задачи ограничиваются обтеканием заостренных тел, а также задачами внутренней аэродинамики (расчет сопел). В то же время при больших сверхзвуковых скоростях не используются заостренные тела (обгорание острых кромок), а у затупления обязательно образуется местная дозвуковая область. После расчета этой области дальнейший расчет течения (уже чисто сверхзвукового) проводится методами сверхзвуковой аэродинамики.

По сравнению с аэродинамикой трансзвуковых течений задачи сверхзвуковой аэродинамики с местными дозвуковыми зонами, хотя таковые являются смешанными,

имеют то преимущество, что эти зоны ограничены и не только ограничены, но представляют собой, как правило, узкие зоны в окрестности затупления. Именно это позволило разработать эффективные численные методы для расчета местных дозвуковых зон (метод интегральных соотношений, метод обратных задач, а также метод установления). Следует, однако, отметить, что строгого математич. исследования этих задач пока (1977) не существует. Нет доказательства существования и единственности решения. Поэтому численные методы строятся на основании математич. гипотезы, что условие непрерывности скоростей и ускорений при переходе из дозвуковой в сверхзвуковую область выделяет единственное решение, к-рое и является физически реальным. Все результаты численных расчетов подтверждают эту гипотезу.

Как уже было сказано, после расчета местной дозвуковой зоны (включая сверхзвуковую часть области влияния), дальнейший расчет течения проводится методами чисто сверхзвуковой аэродинамики.

Существует еще круг задач, связанных с гиперзвуковым обтеканием тонких тел (до возникновения химич. реакций). Гиперзвуковые течения возле тонких тел (исключая область затупления), характеризуются малыми изменениями составляющей скорости вдоль основного потока. Этот факт позволяет упростить уравнения так, что задача обтекания тонкого тела заданной формы (в плоском и осесимметричном случаях) становится аналогичной одномерной нестационарной задаче. На этом пути были получены важные качественные характеристики гиперзвуковых течений и установлены приближенные законы подобия, широко используемые также при анализе результатов численных расчетов, позволяя сводить их к весьма компактным зависимостям в широком диапазоне чисел Маха и геометрич. параметров тела.

Аэродинамич. задачи для химически реагирующего газа приводят к необходимости совместного решения уравнений движения и уравнений химич. кинетики. Несмотря на все усложнение системы уравнений, численные методы решения этих задач не отличаются принципиально от задач аэродинамики совершенного газа, приводя лишь к значительному увеличению трудоемкости соответствующих расчетов. Такие расчеты широко внедрены в практику, и поскольку для этого температурного диапазона моделирование натурных условий в аэродинамич. трубах практически неосуществимо, расчетные методы являются основным средством определения аэродинамич. характеристик гиперзвуковых аппаратов.

Теория вязкой жидкости имеет два главных направления — теорию полных уравнений вязкой жидкости (*Навье — Стокса уравнения*) и *пограничного слоя теорию*. Уравнения пограничного слоя представляют собой главный член асимптотич. разложения уравнений Навье — Стокса вблизи твердой границы, на к-рой происходит полное или частичное прилипание частиц жидкости к твердой поверхности. Именно это условие нарушает коренным образом решения, соответствующие идеальной жидкости вблизи поверхности обтекаемого тела. Погрешность уравнений пограничного слоя составляет порядок $1/\sqrt{\mathrm{Re}}$, т. е. эта теория справедлива при больших числах Рейнольдса (при этом лишь в областях плавного безотрывного обтекания). Несмотря на то, что уравнения пограничного слоя сохраняют все основные члены вязких напряжений, математическая их структура значительно проще. Если полные уравнения являются уравнениями эллиптич. типа, то уравнения пограничного слоя — параболич. типа с характеристиками, направленными по нормали к поверхности тела. Поэтому они дают возможность «послойного» расчета, т. е. перехода от одного сечения пограничного слоя

к другому, независимо от к.-л. условий вне промежутка между этими сечениями.

Важное практич. значение теории пограничного слоя (расчет сопротивления, температур поверхности, скорости разрушения поверхности при гиперзвуковых скоростях полета) породило многочисленные приближенные методы его расчета (метод Польхаузена, однопараметрич. метод Кочина — Лойцянского и др.). Однако при применении ЭВМ все эти упрощенные приемы становятся ненужными, так как задача точного численного решения уравнений пограничного слоя, даже в сложных случаях химически реагирующего высокотемпературного газа, не представляет сколько-нибудь большой трудности. Численные схемы могут быть построены таким образом, что на каждом шаге по переменной x (вдоль касательной к контуру тела) система уравнений разбивается на совокупность разделенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, что дает весьма большие вычислительные преимущества.

Сказанное относится к плоскопараллельным и осесимметричным течениям. Трехмерный пограничный слой имеет более сложную структуру. Сами уравнения трехмерного слоя существенно зависят от геометрии обтекаемого тела. Методы решения трехмерного пограничного слоя гораздо меньше разработаны, отчасти потому, что на практике широко используются расчеты по плоским сечениям, хотя и мало обоснованные, но дающие во многих случаях достаточную точность. Для точных уравнений трехмерного слоя нет принципиальных трудностей в решении.

Методы решения полной системы уравнений вязкой жидкости, за исключением немногих частных случаев, когда удавалось получать аналитич. решение, начали развиваться с использованием ЭВМ. Основная трудность в решении этих уравнений состоит в их высоком порядке и неограниченности области влияния. В простейшем случае стационарных движений вязкой несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости уравнения приводятся к системе двух уравнений 2-го порядка относительно функции тока ψ и вихря скорости ω. В безразмерной форме их можно записать в виде:

$$\Delta\omega = 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right),$$

$$\Delta\psi = \omega.$$

Граничные условия на твердых границах имеются только для функции тока $\psi = \text{const}$, $\partial\psi/\partial n = 0$. Решение этой нелинейной системы 4-го порядка может быть получено лишь с помощью нек-рого итерационного процесса. Итерационный процесс строится таким образом, чтобы на каждом шаге итерации получались раздельные уравнения для вихря и функции тока. Это разделение нужно проводить не только в уравнениях, но и в граничных условиях. Напр., выбирая за первое приближение реше-

ние уравнений идеальной жидкости, можно получить следующую систему итераций:

$$\Delta\omega_{n+1} - 2\frac{\partial\omega_{n+1}}{\partial x} = 2\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}\frac{\partial\omega_n}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_n}{\partial x}\frac{\partial\omega_n}{\partial y}\right),$$

$$\Delta\psi_{n+1} = \omega_{n+1}$$

при граничных условиях на твердых границах:

$$\psi_{n+1} = \text{const}, \quad \omega_{n+1} = \alpha\frac{\partial\psi_n}{\partial n} + \omega_n$$

(здесь $\varphi = \psi - y$), т. е. получаем раздельную систему уравнений для вихря и функции тока в $(n+1)$-м приближении. Аналогичным образом можно вести решение методом установления, однако для этой цели не обязательно брать реальную систему нестационарных уравнений, а можно рассмотреть более удобную для численных расчетов систему параболич. уравнений:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \Delta\omega - 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Delta\psi - \omega.$$

Задача обтекания тел вязкой жидкостью требует не только разработки методов расчета, но и принципиальных исследований. Не ясен вопрос существования стационарного решения при больших числах Рейнольдса (напр., при обтекании цилиндра). Численные методы позволяют найти решение до числа Рейнольдса порядка нескольких сотен, но при больших значениях этого числа численные расчеты не дают сходимости.

В аэродинамике излучающего газа и аэродинамике разряженного газа решены задачи лишь для простейших случаев движения газа. Однако практическая важность этих вопросов привела к появлению — как в том, так и в другом разделе — упрощенных математич. моделей явлений, к-рые часто вообще не являются к.-л. предельными случаями полных уравнений (модель серого излучения, модель диффузного излучения в теории излучающего газа, модель Крука в теории разряженного газа), а лишь качественно отражают зависимости, содержащиеся в полных уравнениях. Решение задач этих разделов не может быть получено малыми объемами вычислений и успешное их разрешение зависит от повышения эффективности ЭВМ.

Лит.: [1] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 1—2, М., 1963; [2] Христианович С. А., Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях, М., 1940; [3] Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 2 изд., М., 1966; [4] Hayes W., Probstein R., Hypersonic flow theory, N. Y.—L., 1959; [5] Черный Г. Г., Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью, М., 1959; [6] Белоцерковский О. М., Чушкин П. И., в кн.: Basic developments in fluid dynamics, v. 1, N. Y.—L., 1965; [7] Чушкин П. И., Метод характеристик для пространственных сверхзвуковых течений, М., 1968; [8] Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа, 2 изд., М., 1967; [9] Metody numeryczne w mechanice plynow, Wrocław, 1969.

А. А. Дородницын.

БАЗА топологического пространства X (база топологии, базис топологии, открытая база) — семейство $\mathfrak{B}$ открытых подмножеств X такое, что каждое открытое множество $G \subset X$ является объединением элементов $U \subset \mathfrak{B}$. Понятие Б.— одно из основных в топологии: во многих вопросах, относящихся к открытым множествам некрого пространства, достаточно ограничиться рассмотрением элементов его Б. Пространство может иметь много Б., наибольшую из к-рых образует семейство всех открытых множеств. Минимум мощностей всех Б. наз. весом топологич. пространства X. В пространстве веса τ существует всюду плотное множество мощности $\leqslant \tau$. Пространства со счетной Б. наз. также пространствами со второй аксиомой счетности. Двойственное понятие замкнутой Б., образованной дополнениями к элементам Б., мало употребительно.

Локальной Б. пространства X в точке $x \in X$ (базой точки x) наз. семейство $\mathfrak{B}(x)$ его открытых множеств, обладающее свойством: для любой окрестности Ox точки x найдется элемент $V \in \mathfrak{B}(x)$ такой, что $x \in V \subset Ox$. Пространства, имеющие счетную локальную Б. в каждой точке, наз. также пространствами с первой аксиомой счетности. Семейство $\mathfrak{B}$ открытых в X множеств является Б. тогда и только тогда, когда оно является локальной Б. каждой его точки $x \in X$.

Пусть $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ — нек-рые кардинальные числа. Б. $\mathfrak{B}$ пространства X наз. $\mathfrak{m}$-точечной, если каждая точка $x \in X$ принадлежит не более чем $\mathfrak{m}$ элементам семейства $\mathfrak{B}$; в частности, при $\mathfrak{m}=1$ Б. наз. дизъюнктной, при конечном $\mathfrak{m}$ — точечно конечной, при $\mathfrak{m}=\aleph_0$ — точечно счетной.

Б. $\mathfrak{B}$ пространства X наз. $\mathfrak{m}$-локальной, если для каждой точки $x \in X$ существует ее окрестность Ox, пересекающаяся с не более чем $\mathfrak{m}$ элементами семейства $\mathfrak{B}$; в частности, при $\mathfrak{m}=1$ Б. наз. дискретной, при конечном $\mathfrak{m}$ — локально конечной, при $\mathfrak{m}=\aleph_0$ — локально счетной. Б. $\mathfrak{B}$ наз. $\mathfrak{n}$-$\mathfrak{m}$-точечной ($\mathfrak{n}$-$\mathfrak{m}$-локальной), если она является объединением множества мощности $\mathfrak{n}$ $\mathfrak{m}$-точечных ($\mathfrak{m}$-локальных) Б.; таковы, напр., при $\mathfrak{n}=\aleph_0$ σ-дизъюнктные, σ-точечно конечные, σ-дискретные, σ-локально конечные Б.

Эти понятия находят применение главным образом в критериях метризуемости пространств. Так, пространство со счетной Б. или с первой аксиомой счетности и точечно счетной Б. метризуемо; регулярное пространство с σ-дискретной или с σ-локально конечной Б. метризуемо (обратное верно, однако, лишь для первого утверждения).

Б. $\mathfrak{B}$ пространства X наз. равномерной (k-равномерной), если для каждой точки $x \in X$ (каждого бикомпактного подмножества F) и каждой ее (его) окрестности Ox (OF) лишь конечное число элементов Б. содержит x (пересекается с F) и одновременно пересекается с дополнением $X \setminus Ox$ ($X \setminus OF$). Пространство X метризуемо тогда и только тогда, когда оно является паракомпактом с равномерной Б. (колмогоровским, или T_0-пространством с k-равномерной Б.).

Б. $\mathfrak{B}$ пространства X наз. р е г у л я р н о й, если для каждой точки $x \in X$ и произвольной ее окрестности Ox существует такая окрестность $O'x$, что множество всех элементов Б., пересекающихся одновременно с $O'x$ и $X \setminus Ox$, конечно. Для метризуемости достижимого или T_1-пространства необходимо и достаточно наличие в нем регулярной Б.

Обобщением понятия Б. является так наз. π - б а з а (р е ш е т о ч н а я Б.) — семейство $\mathfrak{B}$ открытых в пространстве X множеств такое, что каждое непустое открытое в X множество содержит непустое множество из $\mathfrak{B}$, т. е. $\mathfrak{B}$ плотно в X по Хаусдорфу. Всякая Б. является π-базой; обратное неверно, напр., в *Стоуна — Чеха бикомпактном расширении* в $\mathbb{Z}^+$ множества натуральных чисел множество $\mathbb{Z}^+$ образует лишь π-базу.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., К о л м о г о р о в А. Н., Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., 1948; [2] У р ы с о н П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1—2, М.—Л., 1951; [3] А л е к с а н д р о в П. С., П а с ы н к о в Б. А., Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности, М., 1973; [4] А р х а н г е л ь с к и й А. В., П о н о м а р е в В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [5] Б у р б а к и Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968. *А. А. Мальцев.*

БАЗИС м н о ж е с т в а X — минимальное порождающее его подмножество B. П о р о ж д е н и е означает, что применением операций нек-рого класса Ω к элементам $b \in B$ получается любой элемент $x \in X$. Это понятие связано с понятием зависимости: элементы X посредством операций из Ω ставятся в зависимость от элементов B. М и н и м а л ь н о с т ь означает, что никакое собственное подмножество $B' \in B$ не порождает X. Это свойство обусловливает в нек-ром смысле независимость его элементов: никакой элемент $b \in B$ не порождается остальными его элементами. Напр., множество всех натуральных чисел $\mathbb{Z}_0$ имеет Б. единственный элемент 0 и порождается из него операцией $'$ непосредственного следования и ее итерациями; множество всех натуральных чисел >1 порождается операцией умножения из Б., состоящего из всех простых чисел. Б а з и с а л г е б р ы к в а т е р н и о н о в состоит из четырех элементов $\{1, i, j, k\}$, если порождающими операциями являются сложение и умножение на действительные числа; если же кроме этих операций используется еще и умножение кватернионов, то Б. будет состоять лишь из трех элементов $\{1, i, j\}$ (ибо $k = ij$).

Б а з и с н а т у р а л ь н о г о р я д а п о р я д к а k — подпоследовательность Ω множества $\mathbb{Z}_0$ натуральных чисел с включением 0, к-рая в результате k-кратного сложения с собой (операция порождения) дает все $\mathbb{Z}_0$. Это означает, что каждое натуральное число n представимо в виде

$$n = a_1 + \ldots + a_k,$$

где $a_i \in \Omega$. Напр., всякое натуральное число есть сумма четырех квадратов натуральных чисел (т е о р е м а Л а г р а н ж а), т. е. последовательность квадратов есть Б. $\mathbb{Z}_0$ порядка 4. Вообще, последовательность m-х степеней натуральных чисел является Б. $\mathbb{Z}_0$ (т е о р е м а Г и л ь б е р т а), порядок к-рого оценивается *Виноградова методом*. Понятие Б. $\mathbb{Z}_0$ обобщается на случай произвольных числовых последовательностей, т. е. функций на $\mathbb{Z}_0$.

Порождающие X множества существуют всегда (тривиально: X порождает X), однако минимальность может оказаться принципиально невозможной (подобная ситуация типична для классов Ω, содержащих бесконечноместные операции, в частности в топологич. структурах, решетках и т. п.). Поэтому условие минимальности заменяется более слабым требованием: Б. есть порождающее множество минимальной мощности. В связи с этим обычно Б. B определяется как параметризованное множество (или с е м е й с т в о), т. е. как функция $b(t)$ на множестве индексов T со значениями в X, причем $b(T)=B$; мощность T иногда наз. б а з и с н о й р а з м е р н о с т ь ю (или р а н г о м) X. Напр., счетное всюду плотное множество B сепарабельного топологич. пространства P можно считать его Б.; P порождается из B операцией замыкания (к-рая, кстати, и в более общих случаях родственна порождению, см. ниже).

Б а з и с т о п о л о г и и топологич. пространства X (*база*) — Б. $\mathfrak{B}$ совокупности всех открытых подмножеств X; порождение осуществляется объединением элементов $\mathfrak{B}$.

Б а з и с б у л е в о й а л г е б р ы $\mathfrak{A}$ (двойственный базе $\mathfrak{A}$ в смысле Тарского) — плотное множество (минимальной мощности) S в $\mathfrak{A}$; порождение $\mathfrak{A}$ из S (а тем самым и само S) определяется условием $s\to a=\vee$ (что равносильно $s\subset a$), где $s\in S$, $a\in\mathfrak{A}$, $\vee$ — единица $\mathfrak{A}$, «$\to$» — операция импликации. Аналогично вводится и б а з и с ф и л ь т р а ∇, как множество S такое, что для любого $a\in\nabla$ существует $s\in S$, и $s\subset a$.

Большинство частных случаев Б. множества X вводится по следующей схеме. Пусть $B(X)$ — б у л е а н X, т. е. совокупность всех его подмножеств. П о р о ж д а ю щ и м о п е р а т о р о м (или о п е р а т о р о м з а м ы к а н и я) J называется отображение $B(X)$ в себя такое, что: если $A\subset B$, то $J(A)\subset J(B)$; $A\subset J(A)$; $JJ(A)=J(A)$.

Элемент $x\in X$ п о р о ж д а е т с я множеством A, если $x\in J(A)$; в частности, A порождает X, если $J(A)=X$. Минимальное множество B, обладающее этим свойством, и наз. б а з и с о м X, о п р е д е л е н н ы м о п е р а т о р о м J. Порождающий оператор J имеет к о н е ч н ы й т и п, если для любых $A\subset X$, и $x\in X$ из $x\in J(A)$ следует $x\in J(A_0)$ для нек-рого конечного подмножества $A_0\subset A$; порождающий оператор J обладает с в о й с т в о м з а м е щ е н и я, если для любых y, $z\in X$ и $A\subset X$ из $y\notin J(A)$ и $y\in J(A\cup\{z\})$ следует $z\in J(A\cup\{y\})$. Порождающий оператор J конечного типа со свойством замещения определяет на X о т н о ш е н и е з а в и с и м о с т и, т. е. разбиение $B(X)$ на два класса — зависимых и независимых множеств; множество A наз. з а в и с и м ы м, если $y\in J(A\setminus y)$ для нек-рого $y\in A$, и н е з а в и с и м ы м, если $y\notin J(A\setminus y)$ для любого $y\in A$. При этом A зависимо (независимо) тогда и только тогда, когда некоторое (любое) непустое конечное подмножество $A_0\subset A$ зависимо (независимо).

Для того чтобы множество B было Б. множества X, необходимо и достаточно, чтобы B было независимым порождающим X множеством или, иначе, максимальным независимым в X множеством.

Если A — произвольное независимое множество, а C — порождающее X множество, содержащее A, то существует Б. B в X такой, что $A\subset B\subset C$. В частности, X всегда обладает Б., и любые два его Б. равномощны.

В алгебраич. системах X важную роль играет понятие так наз. с в о б о д н о г о б а з и с а B, характеризующегося следующим свойством: произвольное отображение $B\subset X$ в любую алгебраич. систему Y (той же сигнатуры) может быть продолжено до (гомо) морфизма X в Y, или, что то же самое, для любого (гомо)морфизма

θ: $X \to Y$ и любого множества $A \subset X$ порождающие операторы J_X и J_Y удовлетворяют условию:

$$\theta\{J_X(A)\} = J_Y(\theta\{A\}).$$

Алгебраич. система, имеющая свободный Б., наз. с в о б о д н о й.

Типичным примером является б а з и с (унитарного) м о д у л я M н а д к о л ь ц о м K — свободное семейство элементов из M, порождающее M (см. [3]). Здесь семейство $A = \{a_t,\ t \in T\}$ элементов K-модуля M наз. с в о б о д н ы м, если из $\Sigma \xi_t a_t = 0$ (где $\xi_t = 0$ для всех, кроме конечного числа индексов t) следует $\xi_t = 0$ для всех t, а порождение осуществляется представлением элементов x в виде л и н е й н ы х к о м б и н а ц и й э л е м е н т о в a_t: существует (зависящее от x) множество элементов $\xi_t \in K$ такое, что $\xi_t = 0$ для всех, кроме конечного числа индексов t, и имеет место разложение

$$x = \sum \xi_t a_t$$

(т. е. X — л и н е й н а я о б о л о ч к а A). Б. M в этом смысле является его свободным Б. в вышеуказанном смысле; обратное также верно. Так, множество периодов двоякопериодич. функции f одного комплексного переменного, являющееся дискретной абелевой группой (и потому модулем над кольцом $\mathbb{Z}$), имеет свободный Б., наз. б а з и с о м п е р и о д о в функции f; он состоит из двух так наз. примитивных периодов. Аналогично определяется Б. периодов абелевой функции нескольких комплексных переменных.

В случае, когда K — тело, всякий Б. (в прежнем смысле) является свободным. Напротив, существуют модули, не имеющие свободного Б.; таковы, напр., неглавные идеалы в области целостности K, рассматриваемой как K-модуль.

Б а з и с в е к т о р н о г о п р о с т р а н с т в а X над полем K — (свободный) Б. подлежащего X унитарного модуля. Аналогично, б а з и с а л г е б р ы A над полем K — Б. подлежащего A векторного пространства. Все Б. данного векторного пространства X имеют одинаковую мощность, равную мощности T, к-рая наз. его а л г е б р а и ч е с к о й р а з м е р н о с т ь ю. Каждый элемент $x \in X$ представим линейной комбинацией элементов Б. единственным образом. Элементы $\xi_t(x) \in K$, являющиеся линейными функционалами на X, наз. к о м п о н е н т а м и (к о о р д и н а т а м и) x в данном Б. $\{a_t\}$.

Множество A является Б. в X тогда и только тогда, когда A — максимальное (относительно включения) *свободное множество* в X.

Отображение

$$\Xi : x \longrightarrow \xi_x(t),$$

где $\xi_x(t) = \xi_t(x)$, если ξ_t — значение t-й компоненты x в Б. A и 0 в противном случае, наз. б а з и с н ы м о т о б р а ж е н и е м; оно является линейным инъективным отображением X в пространство K^T функций на T со значениями в K. В данном случае образ $\Xi(X)$ состоит из функций с конечным числом значений, отличных от нуля (конечнозначных функций). Эта интерпретация позволяет определить о б о б щ е н н ы й б а з и с векторного пространства X над полем K как биективное линейное отображение его на нек-рое подпространство $K(T)$ пространства K^T функций на T со значениями в K, где T — нек-рое надлежащим образом подобранное множество. Однако без введения дополнительных ограничений на T (напр., порядка) и структур на T (напр., топологии) и согласованных с этим условий на $K(T)$ понятие обобщенного Б. практически мало полезно.

Иногда Б. векторного пространства X наз. а л г е б р а и ч е с к и м б а з и с о м (чем подчеркивается отсутствие связи с дополнительными структурами на X, даже если они и согласованы с его векторной структурой).

Б а з и с Г а м е л я (Х а м е л я) — Б. поля действительных чисел $\mathbb{R}$, рассматриваемого как векторное пространство над полем рациональных чисел. Введен Г. Гамелем [4] для получения разрывного решения функционального уравнения $f(x+y)=f(x)+f(y)$; график решения его всюду плотен на плоскости $\mathbb{R}^2$. Каждой почти периодич. функции f соответствует нек-рый счетный базис Гамеля β такой, что каждый показатель Фурье Λ_n этой функции принадлежит линейной оболочке β. При этом элементы β можно выбрать принадлежащими последовательности $\{\Lambda_i\}$; множество β наз. б а з и с о м п о ч т и п е р и о д и ч е с к о й ф у н к ц и и. Аналогичный Б. строится в кольце, содержащем тело P и имеющем единицу тела P своей единицей. Алгебраич. Б. произвольного векторного пространства также наз. иногда базисом Гамеля.

Б а з и с т о п о л о г и ч е с к и й (Б. топологического векторного пространства X над полем K) — семейство $A=\{a_t,\ t\in T\}\subset X$, свойства и функции к-рого аналогичны свойствам и функциям алгебраич. Б. векторного пространства. Понятие топологич. Б.— одно из важнейших в функциональном анализе — расширяет и углубляет понятие алгебраич. Б. с учетом топологич. структуры X и позволяет получать для каждого элемента $x\in X$ его р а з л о ж е н и е по Б. $\{a_t\}$ и притом единственное, т. е. представление x в виде предела (в том или ином смысле) линейных комбинаций элементов a_t:

$$x=\lim \sum \xi_t(x)\, a_t,$$

где $\xi_t(x)$ — линейные функционалы на X со значениями в K, наз. к о м п о н е н т а м и x в Б. A, или к о э ф ф и ц и е н т а м и р а з л о ж е н и я x по Б. A. Очевидно, для существования разложения любого x необходимо, чтобы A было полным множеством в X, а для единственности такого разложения (т. е. для того, чтобы нулевой элемент X имел все компоненты равными нулю) необходимо, чтобы A было топологическим свободным множеством в X.

Смысл и практич. значение топологич. Б. (наз. далее просто Б.) заключается в установлении биективного линейного отображения X, наз. б а з и с н ы м о т о б р а ж е н и е м Ξ, на нек-рое, зависящее от X, пространство $K(T)$ функций со значениями в K, определенных на (топологическом) пространстве T, а именно:

$$\Xi(x): x\in X \longrightarrow \xi_x(t)\in K(T),$$

где $\xi_x(t)=\xi_t(x)$, так что символически $\{\xi_t(X)\}=K(T)$ и $\{\xi_x(T)\}=X$; при этом строение $K(T)$ вследствие конкретности, эффективности своего определения проще и обозримее, чем строение абстрактно заданного X. Так, напр., алгебраич. Б. бесконечномерного банахова пространства несчетен, в то время как в ряде случаев при надлежащем обобщении понятия Б. мощность T существенно уменьшается, одновременно упрощается и $K(T)$.

Пространство $K(T)$ содержит все конечнозначные функции, и множество элементов Б. $\{a_t\}$ является биективным прообразом множества функций $\{\xi_t(s)\}$, имеющих лишь одно ненулевое значение, равное 1 («однозначных» функций):

$$a_t=\Xi^{-1}[\xi_t(s)],$$

где $\xi_t(s)=1$ при $t=s$ и $\xi_t(s)=0$ при $t\neq s$. Другими словами, a_t — образующая одномерного подпространства A_t, дополнительного в X к гиперплоскости, определяемой уравнением $\xi_t(x)=0$.

Таким образом, роль Б. $\{a_t\}$ сводится к организации из множества компонент $\xi_t(x)$, составляющих образ x при базисном отображении, суммируемого (в том или ином смысле) семейства $\{\xi_t(x)a_t\}$, т. е. Б. «разлагает» пространство X в (обобщенную) прямую сумму одномерных подпространств:

$$X=\lim \sum \xi_t(X)\, A_t.$$

Аналогичным образом определяется Б. в векторных пространствах, наделенных равномерной, предельной (псевдотопологической), линейной (L-), близостной и другими дополнительными структурами.

Мыслимы (и существуют) обобщения понятия Б., идущие в различных направлениях. Так, введение топологии и меры на T приводит к понятию так наз. непрерывной суммы элементов из X и соответствующим интегральным представлениям; разложение пространства X на необязательно одномерные компоненты находит применение в спектральной теории линейных операторов; рассмотрение вместо $K(T)$ произвольных топологич. алгебр над полем K (напр., алгебры мер на T со значениями в K или даже в X, алгебры проекторов и т. д.) позволяет конкретизировать многие понятия абстрактной двойственности для топологич. векторных пространств и, в частности, использовать развитый аппарат теории характеров.

Базис счетный — наиболее исследованный (и в то же время практически наиболее важный) пример Б.— последовательность $\{a_i\}$ элементов пространства X такая, что каждому элементу x однозначно соответствует разложение его в ряд по Б. $\{a_i\}$

$$\sum \xi_i(x)\, a_i,\ \xi_i(x) \in K,$$

сходящийся (в топологии X) к x. Здесь $T=\mathbb{Z}$, причем существен естественный порядок в нем. Часто счетный Б. наз. просто Б. [Аналогично, если подразумевается слабая сходимость разложения x, определяется слабый счетный базис.] Так, напр., функции e^{ikt}, $k\in\mathbb{Z}$ образуют Б. в пространствах L^p, $1<p<\infty$ (абсолютно суммируемых в степени p периодич. функций), напротив, в пространствах L^1, L^∞ (измеримых функций, совпадающих почти всюду с ограниченными функциями) и C' (непрерывных периодич. функций) эти функции Б. не образуют. Необходимым (но далеко не достаточным) условием существования счетного Б. является сепарабельность X (напр., в пространстве измеримых на отрезке $[a,\ b]$ функций со значениями в $\mathbb{R}$ счетного Б. быть не может). Впрочем, пространство l_∞ ограниченных последовательностей, не будучи сепарабельным в топологии l_∞, не обладает счетным Б., однако элементы $a_i=\{\delta_{ik}\}$, где $\delta_{ik}=1$ при $i=k$ и $\delta_{ik}=0$ при $i\neq k$, образуют Б. в слабой топологии $\sigma(l_\infty,\ l_1)$. Вопрос о существовании счетного Б. в сепарабельных банаховых пространствах (проблема базиса) решен отрицательно [6]. Аналогичный вопрос для ядерных пространств также решен отрицательно [7].

Счетный Б., однако, не всегда оказывается «достаточно хорошим» для применений (напр., компоненты $\xi_i(x)$ не являются непрерывными, разложение x не сходится безусловно и т. п.), в связи с чем на Б. накладываются некоторые условия или вводится надлежащее его обобщение.

Базис счетного типа — одно из обобщений понятия счетного Б., для к-рого хотя T и несчетно, но разложение элемента $x\in X$ по нему естественно определяется: соответствующее пространство $K(T)$ состоит из счетнозначных функций. Напр., полное ортонормированное множество $\{a_t\}$ в гильбертовом пространстве H является Б.; если $x\in H$, то $\xi_t(x)=\langle x,\ a_t\rangle$ (где $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ — скалярное произведение в H) для всех, за исключением быть может счетного множества, индексов $t\in T$, и ряд $\Sigma\xi_t a_t$ сходится к x. Базисное отображение определяется ортогональным проектированием на замкнутые подпространства, порожденные элементами a_t. Б. пространства AP всех комплекснозначных почти периодич. функций на $\mathbb{R}$ состоит из функций $e^{it\lambda}$; здесь $T=\mathbb{R}$, $K(T)$ — совокупность счетнозначных функций, а базисное отображение определяется формулой

$$\Xi[x(\lambda)]=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{+\tau} x(\lambda)\, e^{it\lambda}d\lambda.$$

Базис безусловный — счетный Б. в пространстве X такой, что разложение любого элемента x сходится безусловно (т. е. сумма ряда не изменяется при перестановке любого числа его слагаемых). Так, напр., в пространствах c_0 (последовательностей, сходящихся к нулю) и l_p (последовательностей, суммируемых в степени p, $1 \leqslant p < \infty$) элементы $a_i = \{\delta_{ik}\}$ образуют безусловный Б.; в пространстве $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций (любой) Б. не может быть безусловным. Ортонормированный счетный Б. гильбертова пространства — безусловный Б. Банахово пространство с безусловным Б. слабо полно (соответственно обладает сепарабельным сопряженным пространством) в том и только в том случае, когда оно не содержит подпространства, изоморфного c_0 (соответственно l_1).

Б. $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ соответствующих банаховых пространств X и Y наз. эквивалентными, если существует биективное линейное отображение T: $a_i \to b_i$, распространяемое до изоморфизма X в Y; эти Б. наз. квазиэквивалентными, если они становятся эквивалентными после нек-рой перестановки и нормировки элементов одного из них. Пространства l_1, l_2, c_0 обладают тем свойством, что в каждом из них все нормированные безусловные Б. эквивалентны. В декартовом произведении $l_p \times l_q$ $(1 \leqslant p < q < \infty)$ квазиэквивалентны все безусловные Б. Существуют, однако, нормированные Б., не эквивалентные ортонормированному.

Базис суммирующий — обобщение понятия безусловного Б., соответствующее множеству T произвольной мощности и совпадающее с ним при $T = \mathbb{Z}$, — семейство $A = \{a_t,\ t \in T\}$ такое, что для любого элемента $x \in X$ существует семейство линейных комбинаций (частичных сумм) элементов из A, называемое обобщенным разложением x, суммируемое к x: для любой окрестности нуля $U \subset X$ найдется конечное подмножество $A_U \subset A$ такое, что для каждого конечного множества $A' \supset A_U$ имеет место

$$\left(\sum_{t \in A'} \xi_t a_t - x\right) \in U,$$

т. е. когда частичные суммы образуют систему (фильтр) Коши. Так, напр., любой ортонормированный Б. гильбертова пространства является суммирующим Б. Аналогично определяется слабый суммирующий базис. Вполне суммирующий базис — такой суммирующий Б., что существует ограниченное множество B такое, что множество полунорм $\{p_B(\xi_t a_t)\}$ суммируемо. Вполне суммирующий Б. не более чем счетен. В дуально ядерном пространстве каждый слабо суммирующий Б. вполне суммирующий.

Базис абсолютный (абсолютно суммирующий базис) — суммирующий Б. локально выпуклого пространства над нормированным полем такой, что для каждой окрестности нуля U и для каждого $t \in T$ суммируемо семейство полунорм $\{p_U(a_t)\}$. Всякий безусловный счетный Б. абсолютен, т. е. ряд $\Sigma |\xi_i(x)| p(a_i)$ сходится для всех $x \in X$ и всех непрерывных полунорм $p(\cdot)$. Среди банаховых пространств абсолютным счетным Б. обладают только пространства l_1. Если пространство Фреше имеет абсолютный Б., то все его безусловные Б. абсолютны. В ядериых пространствах Фреше каждый счетный Б. (если он существует) абсолютный [13].

Базис Шаудера — Б. $\{a_t,\ t \in T\}$ пространства X такой, что определенное им базисное отображение непрерывно [и, следовательно, является изоморфизмом на нек-рое пространство $K(T)$], т. е. Б., в к-ром компоненты $\xi_t(x)$ для любого $x \in X$ и, в частности, коэффициенты разложения x по этому Б., являются непрерывными функционалами на X. Определен впервые Ю. Шаудером [5] для случая $T = \mathbb{Z}$. Понятие базиса Шаудера является важнейшим среди всех модификаций понятия Б.

Базис Шаудера характеризуется тем, что $\{a_t\}$ и $\{\xi_t\}$ образуют биортогональную систему. Напр., в пространствах c_0 и l_p, $p \geqslant 1$ последовательности $a_i = \{\delta_{ik}\}$ образуют счетный базис Шаудера. В пространстве $C[a, b]$ счетный базис Шаудера образует *Хаара система*. В полных метрич. векторных (в частности, банаховых) пространствах всякий счетный Б. является базисом Шаудера [10]. В пространствах Фреше понятия слабого Б. и базиса Шаудера совпадают [11]. В бочечных пространствах, в к-рых нет вообще линейных непрерывных функционалов [8], не существует и базиса Шаудера. Однако, если в них существует слабый базис Шаудера, то он является (обычным) базисом Шаудера [9]. Рефлексивность бочечного локально выпуклого пространства со счетным базисом Шаудера имеет место тогда и только тогда, когда этот Б. является одновременно натягивающим, т. е. если для него $\{\xi_t\}$ будет Б. в сопряженном пространстве X^*, и ограниченно полным, т. е. если ограниченность множества частных сумм ряда $\sum \xi_i a_i$ влечет сходимость этого ряда [12]. Если базис Шаудера является безусловным Б. в банаховом пространстве, то он тогда и только тогда является натягивающим (соответственно ограниченно полным), когда в X нет подпространств, изоморфных l_1 (соответственно c_0).

Базис Шаудера в локально выпуклом пространстве равностепенно непрерывен, если для каждой окрестности нуля U найдется окрестность нуля V такая, что

$$|\xi_t(x)| \, p_U(a_t) \leqslant p_V(x)$$

для всех $x \in X$, $t \in T$. Каждый базис Шаудера бочечного пространства равностепенно непрерывен, и каждое полное локально выпуклое пространство со счетным равностепенно непрерывным Б. отождествимо с некоторым пространством последовательностей [15]. Равностепенно непрерывный Б. ядерного пространства абсолютен.

Лит.: [1] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [3] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [4] Hamel G., «Math. Ann.», 1905, Bd 60, S. 459—62; [5] Schauder J., «Math. Z.», 1927, Bd 26, S. 47—65, 417—31; [6] Энфло П., «Математика», 1974, т. 18, № 1, с. 146—155; [7] Зобин Н. М., Митягин Б. С., «Функциональный анализ и его приложения», 1974, т. 8, № 4, с. 35—47; [8] Эдвардс Р. Э., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969; [9] Dieudonné J., «Arch. Math.», 1951, Bd 1, S. 81—115; [10] Arsov M. G., «Pacific J. Math.», 1960, t. 10, p. 365—79; [11] Bessaga C., Pełczyński A., «Studia Math.», 1960, v. 19, p. 53—62; [12] James R. C., «Ann. Math.», 1950, v. 52, № 2, p. 518—27; [13] Дынин А. С., Митягин Б. С., «Bull. Acad. Polon. Sci.», (Ser. Sci math.), 1960, t. 8, p. 535—40; [14] Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [15] Пич А., Ядерные локально выпуклые пространства, пер. с нем., М., 1967.

М. И. Войцеховский, М. И. Кадец.

БАЗИСНОЕ МНОЖЕСТВО линейной системы — множество точек алгебраич. многообразия (или схемы) X, принадлежащих всем дивизорам подвижной части заданной линейной системы L на X.

Пример. Пусть

$$\lambda_0 F_n(x_0, x_1, x_2) + \lambda_1 G_n(x_0, x_1, x_2) = 0$$

— пучок кривых степени n на проективной плоскости. Тогда Б. м. этого пучка состоит из множества общих нулей форм F' и G', где

$$F' \cdot H = F_n, \quad G' \cdot H = G_n,$$

а H — наибольший общий делитель форм F_n и G_n.

Если φ_L: $X \to P(L)$ — рациональное отображение, определяемое линейной системой L, то Б. м. линейной системы L — множество точек неопределенности отображения φ_L. Б. м. обладает структурой замкнутой подсхемы B в X, к-рая задается как пересечение всех дивизоров из подвижной части линейной системы. Устранение точек неопределенности отображения φ_L сводится к тривиа-

ализации когерентного пучка идеалов, определяющего подсхему B (см. *Бирациональная геометрия*).

Для любой линейной системы без неподвижных компонент L на гладкой проективной поверхности F существует такое целое число n_0, что при $n>n_0$ Б. м. полной линейной системы $|nL|$ пусто (теорема Зарисского). В многомерном случае аналогичный факт неверен.

Лит.: [1] *Алгебраические поверхности*, М., 1965.

В. А. Исковских.

БАЗИСНЫЙ КОММУТАТОР, правильный коммутатор,— объект, построенный индуктивно из элементов данного множества R и из скобок следующим образом. Элементы из R считаются, по определению, Б. к. длины 1 и произвольно линейно упорядочиваются. Пусть Б. к. длин, меньших n, где $n>1$ — целое число, определены и упорядочены. Если a, b суть Б. к. длин, меньших n, то $[ab]$ считается Б. к. длины n тогда и только тогда, когда выполняются условия: 1) a, b суть Б. к. длины k, l, соответственно, $k+l=n$; 2) $a>b$; 3) если $a=[cd]$, то $d\leqslant b$. Полученные Б. к. длины, не превосходящей n, упорядочивают произвольно с выполнением условия $[ab]>b$, сохраняя порядок Б. к. длин, меньших n. Любое построенное таким образом множество Б. к. есть база свободной алгебры Ли [1] с множеством свободных образующих R.

Лит.: [1] Ширшов А. И. «Алгебра и логика», 1962, т. 1, № 1, с. 14—19.

Ю. М. Горчаков.

БАНАХА ИНДИКАТРИСА, функция кратности, непрерывной функции $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$,— целочисленная функция $N(y, f)$, $-\infty<y<+\infty$, равная числу корней уравнения $f(x)=y$. Если это уравнение при данном значении y имеет бесконечное множество корней, то

$$N(y, f)=+\infty,$$

а если оно не имеет корней, то

$$N(y, f)=0.$$

Функция $N(y, f)$ была определена С. Банахом [1] (см. также [2], с. 246). Он доказал, что для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ ее индикатриса $N(y, f)$ есть функция не выше 2-го класса Бэра, причем

$$\bigvee_a^b(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}N(y, f)\,dy, \qquad (*)$$

где $\bigvee_a^b(f)$ — вариация функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Таким образом, равенство (*) можно принять за определение вариации непрерывной функции $f(x)$. Б. и. определяют [с сохранением равенства (*)] и для функций, имеющих разрывы 1-го рода (см. [3]). Понятие Б. и. было использовано для определения вариаций функции нескольких переменных (см. [4], [5]).

Лит.: [1] Banach S., «Fundam. math.», 1925, t. 7, p. 225—36; [2] Натансон И. П., *Теория функций вещественной переменной*, 2 изд., М., 1957; [3] Лозинский С. М., «Вестн. Ленингр. ун-та», 1958, т. 7. Сер. Математика, механика, астрономия, № 2, с. 70—87; [4] Кронрод А. С., «Успехи матем. наук», 1950, т. 5, в. 1, с. 24—134; [5] Витушкин А. Г., *О многомерных вариациях*, М., 1955.

Б. И. Голубов.

БАНАХА — МАЗУРА ФУНКЦИОНАЛ, Банаха — Мазура оператор, — концепция вычислимого функционала (оператора), предложенная С. Банахом (S. Banach) и С. Мазуром (см. [1]) и трактующая вычислимость функционала (оператора), действующего из множества M_1 в множество M_2, как его свойство переводить всякую вычислимую последовательность элементов M_1 в вычислимую последовательность элементов M_2 (см. *Вычислимая функция*).

Пусть R — множество всех одноместных *общерекурсивных функций*. Функционал Φ, определенный на R и принимающий натуральные значения, наз. вычислимым по Банаху — Мазуру, или Б.—

М. ф., если для всякой двухместной общерекурсивной функции g существует общерекурсивная функция f такая, что

$$f(n)=\Phi(g(n,\ m))$$

(здесь g рассматривается как функция от m при каждом фиксированном n). Всякий общерекурсивный функционал и всюду определенный эффективный функционал (см. *Конструктивное метрическое пространство*) являются Б.— М. ф. С другой стороны, был построен пример Б.— М. ф., не совпадающего ни с каким общерекурсивным, а следовательно, и ни с каким эффективным функционалами (см. [2]). Важнейшим свойством Б.— М. ф. является их непрерывность (см. [1]): значения таких функционалов на любой общерекурсивной функции определяются лишь конечным числом значений этой функции.

Вышеописанная концепция вычислимости распространяется на функции действительного переменного. Пусть C — множество вычислимых последовательностей вычислимых действительных чисел; каждая последовательность $\{a_k\}\in C$ задается парой общерекурсивных функций f и g таких, что при всех n, k

$$\left|a_k-\frac{f(k,\ n)-g(k,\ n)}{n+1}\right|<\frac{1}{n+1}\cdot$$

Функция действительного переменного φ наз. в ы ч и с л и м о й п о Б а н а х у — М а з у р у (множество таких функций обозначим $\mathfrak{R}$), если для любой последовательности $\{a_k\}$ из C последовательность $\{\varphi(a_k)\}$ также принадлежит C. Каждая функция $\varphi\in\mathfrak{R}$ непрерывна во всех вычислимых точках (см. [1]; таким образом, напр., $\operatorname{sgn} x\notin\mathfrak{R}$). Вопрос о том, являются ли все функции из $\mathfrak{R}$ вычислимо непрерывными, остается открытым (1977). Множество $\mathfrak{R}$ оказывается замкнутым относительно ряда используемых в анализе операций, что позволяет успешно развивать на его базе вычислимый анализ (см. [1]).

Лит.: [1] M a z u r S., Computable analysis, Warsz., 1963; [2] F r i e d b e r g R. M., «Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.», 1958, t. 6, № 1, p. 1—5; [3] М а р к о в А. А., «Тр. Матем. ин-та. АН СССР», 1958, т. 52, с. 315—48; [4] Р о д ж е р с Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972. *Б. А. Кушнер.*

БАНАХА — ШТЕЙНХАУЗА ТЕОРЕМА — общее название ряда результатов о топологич. свойствах пространства непрерывных линейных отображений одного линейного топологич. пространства в другое. Пусть E, F — локально выпуклые линейные топологич. пространства, где E — *бочечное пространство*, или E, F — линейные топологич. пространства, причем E — *Бэра пространство*; тогда: 1) любое ограниченное в топологии простой сходимости подмножество пространства $L(E, F)$ непрерывных линейных отображений пространства E в F равностепенно непрерывно (п р и н ц и п р а в н о м е р н о й о г р а н и ч е н н о с т и), 2) если фильтр F в пространстве $L(E, F)$ содержит множество, ограниченное в топологии простой сходимости, и сходится в топологии простой сходимости к нек-рому отображению v пространства E в F, то v — непрерывное линейное отображение E в F, и фильтр F сходится к v равномерно на каждом компактном подмножестве пространства E (см. [2, 3]).

Этот общий результат позволяет уточнить классич. результаты С. Банаха и Х. Штейнхауза (см. [1]): пусть E, F — банаховы пространства, M — подмножество второй категории в E; тогда: 1) если $H\subset L(E, F)$ и $\sup\{\|u(x)\|,\ u\in H\}$ конечен для всех $x\in M$, то $\sup\{\|u\|,\ x\in H\}<\infty$, 2) если u_n — последовательность непрерывных линейных отображений E в F и последовательность $u_n(x)$ сходится в F для всех $x\in M$, то u_n сходится к непрерывному линейному отображению v пространства E в F равномерно на любом компактном подмножестве пространства E.

Лит.: [1] Banach S., Steinhaus H., «Fundam. math.», 1927, t. 9, p. 50—61; [2] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [3] Шефер Х., Топологичсские векторные пространства, пер. с англ., М., 1971.
А. И. Штерн.

БАНАХОВ МОДУЛЬ (левый) над банаховой алгеброй A — *банахово пространство* X вместе с непрерывным билинейным оператором m: $A\times X\to X$, задающим на X структуру левого *модуля* над A в алгебраич. смысле. Аналогично определяется правый Б. м. и банахов бимодуль над A. Морфизмом двух Б. м. наз. их непрерывный гомоморфизм. Примерами Б. м. над A служат замкнутый идеал в A и банахова алгебра $B\supset A$. Б. м. над A, представимый как прямое слагаемое Б. м. $A_+\otimes E$, где A_+ — это A с присоединенной единицей, E — банахово пространство, а $m(a, b\otimes x)=ab\otimes x$, наз. проективным. См. *Топологическое тензорное произведение*).

Лит.: [1] Rieffel M. A., «J. Func. Analysis», 1967, v. 1, № 4, p. 443—91.
А. Я. Хелемский.

БАНАХОВА АЛГЕБРА — *топологическая алгебра* A над полем комплексных чисел, топология к-рой определяется нормой, превращающей A в *банахово пространство*, причем умножение элементов непрерывно по каждому из сомножителей. Б. а. наз. коммутативной, если $xy=yx$ для всех $x, y\in A$ (см. *Коммутативная банахова алгебра*). Б. а. A наз. алгеброй с единицей, если A содержит такой элемент e, что $ex=xe=x$ для любого $x\in A$. Если в Б. а. A нет единицы, то ее можно присоединить, т. е. построить Б. а. $\tilde{A}$ с единицей такую, что $\tilde{A}$ содержит исходную алгебру A в качестве замкнутой подалгебры коразмерности 1. В любой Б. а. A с единицей e можно так изменить норму на эквивалентную, чтобы в новой норме выполнялись соотношения $\|ab\|\leqslant\|a\|\|b\|$, $\|e\|=1$. (Последующее изложение предполагает, как правило, наличие в алгебре единицы и выполнение приведенных соотношений для нормы.)

Примеры. 1) Пусть X — компактное топологич. пространство, $C(X)$ — совокупность всех непрерывных комплексных функций на X. Тогда $C(X)$ является Б. а. относительно поточечных операций и нормы

$$\|f\|=\max_X|f|.$$

2) Множество всех ограниченных линейных операторов на банаховом пространстве образует Б. а. относительно обычных операций сложения и умножения линейных операторов и нормы оператора.

3) Пусть V — ограниченная область в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. Совокупность ограниченных голоморфных функций на V является Б. а. относительно поточечных операций и естественной sup-нормы:

$$\|f\|=\sup_V|f|.$$

Эта Б. а. содержит замкнутую подалгебру, образованную ограниченными голоморфными функциями на V, допускающими непрерывное продолжение на замыкание области V. Простейшим примером является алгебра непрерывных в круге $|z|\leqslant1$ функций, аналитических в круге $|z|<1$.

4) Пусть G — локально компактная группа и $L^1(G)$ — пространство (классов эквивалентности) всех измеримых относительно меры Хаара на G абсолютно интегрируемых по этой мере функций, снабженное нормой

$$\|f\|=\int_G|f(g)|\,dg$$

(интеграл по левой мере Хаара).

Если в качестве умножения в $L^1(G)$ рассмотреть операцию свертки

$$(f_1*f_2)(h)=\int_G f_1(g)\,f_2(g^{-1}h)\,dg,$$

то $L^1(G)$ становится Б. а.; если G — абелева локально

компактная группа, то Б. а. $L^1(G)$ коммутативна. Б. а. $L^1(G)$ наз. *групповой алгеброй* локально компактной группы G. Групповая алгебра $L^1(G)$ обладает единицей (относительно свертки) тогда и только тогда, когда G дискретна.

Если G коммутативна, то можно построить точное представление Б. а. $L^1(G)$, сопоставляя каждой функции $f \in L^1(G)$ преобразование Фурье этой функции, т. е. функцию

$$\hat{f}(\chi) = \int_G \chi(g) f(g)\, dg,$$

на группе характеров $\hat{G}$ группы G. Совокупность функций $\hat{f}(\chi)$, образует нек-рую алгебру $A(\hat{G})$ непрерывных функций на $\hat{G}$ (относительно обычных поточечных операций), наз. алгеброй Фурье локально компактной абелевой группы $\hat{G}$. В частности, если G есть группа целых чисел $\mathbb{Z}$, то $A(\mathbb{Z})$ есть алгебра непрерывных функций на окружности, разлагающихся в абсолютно сходящийся тригонометрич. ряд.

5) Пусть G — топологич. группа. Непрерывная комплексная функция $f(g)$ на G наз. почти периодической, если совокупность ее сдвигов $f(g_0 g)$, $g_0 \in G$, образует компактное семейство относительно равномерной сходимости на G. Совокупность почти периодич. функций образует коммутативную Б. а. относительно поточечных операций и нормы

$$\| f \| = \sup_{g \in G} | f(g) |.$$

6) Тело кватернионов не образует Б. а. над полем комплексных чисел, так как произведение элементов Б. а. A должно быть согласовано с умножением на числа: для любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $x, y \in A$ должно выполняться равенство

$$\lambda(xy) = (\lambda x) y = x(\lambda y),$$

к-рое не выполняется в теле кватернионов при $\lambda = i$, $x = j$, $y = k$.

Всякая Б. а. с единицей есть топологич. алгебра с непрерывным обратным. Более того, если $\varepsilon(A)$ — множество элементов Б. а. A, обладающих (двусторонним) обратным относительно умножения, то $\varepsilon(A)$ — топологич. группа в топологии, индуцированной вложением $\varepsilon(A) \subset A$. Если $\|e - a\| < 1$, то $a \in \varepsilon(A)$, причем

$$a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n,$$

где $b = e - a$, и ряд сходится абсолютно. Совокупность элементов, обратимых справа (слева) в A, также образует открытое множество в A.

Если в Б. а. A всякий элемент обладает обратным (или хотя бы левым обратным), то алгебра A изометрически изоморфна полю комплексных чисел (теорема Гельфанда — Мазура).

Поскольку нек-рая окрестность единицы в Б. а. A состоит из обратимых элементов, то замыкание любого нетривиального идеала есть снова идеал, не совпадающий с A. В частности, максимальный (левый, правый, двусторонний) идеал замкнут.

Одну из важных задач теории Б. а. составляет задача описания замкнутых идеалов в Б. а. В ряде случаев она решается просто. В алгебре $C(X)$ (см. пример 1) всякий замкнутый идеал имеет вид $I = \{f \in C(X) : f|_Y = 0\}$, где Y — замкнутое множество в X. Если A — алгебра всех ограниченных линейных операторов в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве, то единственным замкнутым двусторонним идеалом в A служит идеал вполне непрерывных операторов.

Элемент $a \in A$ имеет левый (правый) обратный тогда и только тогда, когда он не содержится ни в каком максимальном левом (правом) идеале. Пересечение всех левых максимальных идеалов в A совпадает с пересе-

чением всех правых максимальных идеалов; это пересечение наз. радикалом алгебры A и обозначается $\mathrm{Rad}\,A$. Элемент $a_0 \in A$ принадлежит $\mathrm{Rad}\,A$ тогда и только тогда, когда $e+aa_0 \in \varepsilon(A)$ для любого $a \in A$. Алгебры, для к-рых $\mathrm{Rad}\,A = \{0\}$, наз. полупростыми. Алгебры $C(X)$ и групповые алгебры $L^1(G)$ полупросты. Полупростыми являются все неприводимые (т. е. не имеющие нетривиального инвариантного подпространства) замкнутые подалгебры алгебры всех ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве.

Резольвентой элемента $a \in A$ наз. функция

$$\lambda \longrightarrow a_\lambda = (a - \lambda e)^{-1},$$

определенная на множестве тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для к-рых (двусторонний) обратный к $a - \lambda e$ существует. Область существования резольвенты содержит все точки λ с $|\lambda| > \|a\|$. Максимальная область существования резольвенты есть открытое множество; на этом множестве резольвента непрерывна и даже аналитична, причем $\frac{da_\lambda}{d\lambda} = a_\lambda^2$. Кроме того, имеет место тождество Гильберта

$$a_{\lambda_2} - a_{\lambda_1} = (\lambda_2 - \lambda_1)\, a_{\lambda_1} a_{\lambda_2}.$$

Дополнение к области существования резольвенты наз. спектром элемента a и обозначается $\sigma(a)$. Для любого $a \in A$ множество $\sigma(a)$ непусто, замкнуто и ограничено.

Если $a, b \in A$, то множества $\sigma(ab)$ и $\sigma(ba)$ могут не совпадать, но

$$\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}.$$

Число

$$|a| = \max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$$

наз. спектральным радиусом элемента $a \in A$; имеет место формула Гельфанда

$$|a| = \lim \|a^n\|^{1/n},$$

где предел справа всегда существует. Если $a \in \mathrm{Rad}\,A$, то $|a| = 0$; обратное верно, вообще говоря, лишь в коммутативных Б. а., радикал к-рых совпадает с множеством обобщенных нильпотентов, т. е. элементов $a \in A$, для к-рых $|a| = 0$. В любой Б. а. справедливы соотношения $|a^k| = |a|^k$, $|\lambda a| = |\lambda|\,|a|$ и $|a| \leqslant \|a\|$; если A коммутативна, то $|ab| \leqslant |a|\,|b|$ и $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

Известны примеры некоммутативных алгебр, в к-рых отсутствуют ненулевые обобщенные нильпотенты. Однако, если $\|a^2\| = \|a\|^2$ для любого $a \in A$, то Б. а. A коммутативна. Условие $\|ab\| = \|ba\|$ для всех $a, b \in A$ также достаточно для коммутативности (алгебры с единицей) A.

Алгебра A наз. алгеброй с инволюцией, если на A определена операция $a \to a^*$, удовлетворяющая условиям:

$$(\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^*, \quad (a^*)^* = a, \quad (ab)^* = b^* a^*$$

для всех $a, b \in A$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$; отображение $a \to a^*$ наз. инволюцией в A. Линейный функционал ψ на алгебре A с инволюцией наз. положительным, если $\psi(aa^*) \geqslant 0$ для любого $a \in A$. При положительном линейном функционале ψ

$$|\psi(a)|^2 \leqslant \psi(e)\, \psi(aa^*)$$

для всех $a \in A$. Если инволюция в A изометрична, т. е. $\|a^*\| = \|a\|$ для всех $a \in A$, то

$$\psi(a^* a) \leqslant \psi(e)\, |a^* a|.$$

Б. а. с инволюцией A наз. вполне симметричной, если $e + a^* a \in \varepsilon(A)$ для любого $a \in A$; A наз. *C^*-алгеброй* (вполне регулярной алгеброй), если $\|a^* a\| = \|a\|^2$ для любого $a \in A$. Всякая C^*-алгебра вполне симметрична. Примерами вполне сим-

метричных алгебр служат групповые алгебры $L^1(G)$ коммутативных, или компактных, групп. Примерами C^*-алгебр служат алгебры $C(X)$ (инволюция в $C(X)$ определяется как переход к комплексно сопряженной функции) и замкнутые подалгебры алгебры ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве, содержащие вместе с данным оператором сопряженный оператор (инволюция определяется как переход к сопряженному оператору). Любая C^*-алгебра изометрически изоморфна (с сохранением инволюции) одной из таких алгебр (теорема Гельфанда — Наймарка). В частности, любая коммутативная C^*-алгебра A изометрически изоморфна (с сохранением инволюции) одной из алгебр $C(X)$ (это утверждение содержит теорему Стоуна — Вейерштрасса).

Элемент a Б. а. с инволюцией наз. эрмитовым, если $a^*=a$. Для того чтобы Б. а. с инволюцией была C^*-алгеброй, необходимо и достаточно выполнение условия $\|e^{ia}\|=1$ для всех эрмитовых элементов a. Если в Б. а. с инволюцией $\sup \|e^{ia}\|<\infty$ (верхняя грань по всем эрмитовым элементам), то такая алгебра топологически t-изоморфна C^*-алгебре. Если в произвольной Б. а. $\|e^{ita}\|=1$ при всех действительных t для нек-рого элемента a, то $\|a\|$ совпадает со спектральным радиусом, т. е. $\|a\|=|a|$.

Теория Б. а. (в особенности коммутативных Б. а.) имеет многочисленные приложения в различных областях функционального анализа и ряде других математич. дисциплин.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Спектральная теория, пер. с франц., М., 1972; [2] Гамелин Т. В., Равномерные алгебры, пер. с англ., М., 1973; [3] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [4] Гельфанд И. М., «Матем. сб.», 1941, т. 9 (51), с. 3—24; [5] Глисон А., «Математика», 1961, т. 5, в. 2, с. 161—6; [6] Гофман К., Банаховы пространства аналитических функций, пер. с англ., М., 1963; [7] Горин Е. А., «Матем. заметки», 1967, т. 1, № 2, с. 173—78; [8] Данфорд Н., Шварц Дж.-Т., Линейные операторы, пер. с англ., т. 2, М., 1966; [9] Żelazko W., Algebry Banacha, Warsz., 1968; [10] Капланский И., «Математика», 1959, т. 3, в. 5, с. 91—115; [11] Люмис Л. Х., Введение в абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., М., 1956; [12] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [13] Некоторые вопросы теории приближений, сб. пер. с англ., М., 1963; [14] Rickart C. E., General theory of Banach algebras, N. Y., 1960; [15] Ройден Х. Л., «Математика», 1965, т. 9, в. 2, с. 98—114; [16] Фелпс Р., Лекции о теоремах Шоке, пер. с англ., М., 1968; [17] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., М., 1962.

Е. А. Горин.

БАНАХОВА РЕШЕТКА, банахова структура, — векторная решетка (структура), являющаяся одновременно *банаховым пространством* с нормой, удовлетворяющей условию монотонности:

$$|x| \leqslant |y| \Rightarrow \|x\| \leqslant \|y\|.$$

Б. р. наз. также *KB*-линеалом, а произвольную нормированную, т. е. векторную решетку с монотонной нормой — *KN*-линеалом. При пополнении нормированной решетки по норме порядковые отношения могут быть распространены на получающееся банахово пространство так, что оно оказывается Б. р. Если в решетке можно ввести банахову топологию, превращающую ее в Б. р., то такая топология единственна. Простейший пример Б. р. — пространство $C(Q)$ непрерывных функций на произвольном компактном топологич. пространстве Q с естественным упорядочением и с обычной (равномерной) нормой. Другие примеры Б. р. — пространства L_p, пространства Орлича. В Б. р. сходимость по норме есть (*)-сходимость для сходимости с регулятором. В нормированной решетке это не так.

Важный частный случай — Б. р. ограниченных элементов. Если в решетке X имеется сильная единица 1, т. е. для каждого $x\in X$ существует такое λ, что $|x|\leqslant\lambda 1$, то наименьшее λ, для к-рого это неравенство справедливо, принимается за $\|x\|$. Полученная нормированная решетка наз. нормированной решет-

кой ограниченных элементов; если же она полна по норме, то она наз. Б. р. ограниченных элементов. В Б. р. (и даже в нормированной решетке) ограниченных элементов сходимость по норме совпадает со сходимостью с регулятором, а ограниченность множества элементов по норме совпадает с ограниченностью по упорядочению. Если нормированная решетка ограниченных элементов есть условно σ-полная решетка, то она полна по норме.

Пространство $C(Q)$ есть Б. р. ограниченных элементов, в к-рой за единицу принята функция $x(q)\equiv 1$. Для всякой Б. р. X ограниченных элементов существует такое компактное хаусдорфово пространство Q, что X алгебраически и структурно изоморфна пространству $C(Q)$. Это — абстрактная характеристика Б. р. непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве.

В любой нормированной решетке каждый аддитивный и непрерывный по норме функционал регулярен и, более того, представим в виде разности двух аддитивных и непрерывных по норме положительных функционалов. В Б. р. всякий положительный аддитивный функционал непрерывен по норме, и значит классы регулярных и аддитивных непрерывных по норме функционалов совпадают. Пространство X', сопряженное в банаховом смысле к нормированной решетке X, есть условно полная Б. р. В нормированной решетке теорема Хана — Банаха допускает следующее уточнение: для любого $x_0>0$ существует такой положительный аддитивный непрерывный по норме функционал f, что $f(x_0)=\|x_0\|$, $\|f\|=1$.

Лит.: [1] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961; [2] Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961. *Б. З. Вулих.*

БАНАХОВО АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — бесконечномерное обобщение понятия аналитич. пространства, возникшее в связи с изучением *деформаций* аналитических структур. Локальной моделью здесь служит банахово аналитическое множество, т. е. подмножество $\mu(U, F, f)=f^{-1}(0)$ открытого множества U в *банаховом пространстве* E над $\mathbb{C}$, где $f\colon U\to F$ — *аналитическое отображение* в банахово пространство F. В отличие от конечномерного случая, на локальной модели задается не один структурный пучок, а набор пучков $\Phi(W)$, где W — открытое множество в произвольном банаховом пространстве G. При этом $\Phi(G)$ определяется как фактор пучка ростков аналитич. отображений $U\to G$ по подпучку ростков отображений вида $x\to\varphi(x)f(x)$, где $\varphi\colon U\to \mathrm{Hom}(F, G)$ — локальное аналитич. отображение, а $\Phi(W)\subset\Phi(G)$ порождается отображениями, принимающими значения в W. Пучки $\Phi(W)$ определяют функтор из категории K открытых множеств банаховых пространств и их аналитич. отображений в категорию пучков множеств на $f^{-1}(0)$.

Банаховым аналитическим пространством наз. топологич. пространство X, снабженное функтором из категории K в категорию пучков множеств на X, каждая точка к-рого имеет окрестность, изоморфную нек-рой локальной модели.

Комплексные аналитич. пространства образуют полную подкатегорию в категории банаховых аналитич. пространств. Б. а. п. конечномерно, если у каждой его точки x есть окрестность, изоморфная такой модели $\mu(U, F, f)$, что существует отображение $g\colon U\to U$, индуцирующее автоморфизм модели и имеющее вполне непрерывный дифференциал dg_x (см. [1]).

Другой частный случай Б. а. п.— банахово аналитическое многообразие, т. е. аналитич. пространство, локально изоморфное открытым подмножествам банаховых пространств. Важным примером является многообразие замкнутых и допу-

скающих замкнутое дополнение линейных подпространств банахова пространства над $\mathbb{C}$.

Конечно определённые банаховы аналитические множества, т. е. модели вида $\mu(U, \mathbb{C}^k, f)$, обладают локальными свойствами, аналогичными классическим: для них имеют место примарное разложение, теорема Гильберта о нулях, теорема о локальном описании и др. (см. [2]).

Лит.: [1] Douady A., «Ann. Inst. Fourier», 1966, t. 16, № 1, p. 1—95; [2] Ramis J.-P., Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe, B.— Hdlb.— N.Y., 1970.

Д. А. Пономарев.

БАНАХОВО ПРОСТРАНСТВО, *B*-пространство,— полное нормированное *векторное пространство*. Исходными для создания теории Б. п. послужили введенные (в 1904—18) Д. Гильбертом (D. Hilbert), М. Фреше (M. Fréchet) и Ф. Рисом (F. Riesz) функциональные пространства. Именно в этих пространствах были первоначально исследованы фундаментальные понятия сильной и слабой сходимости, компактности, линейного функционала, линейного оператора и др. Б. п. названы по имени С. Банаха, к-рый в 1922 (см. [1]) начал систематич. изучение этих пространств на основе введенной им аксиоматики и получил глубокие результаты.

Теория Б. п. развивалась параллельно с общей теорией *линейных топологических пространств*. Эти теории взаимно обогащались идеями и фактами. Так, идея полунормы, заимствованная из теории нормированных пространств, стала необходимым инструментом для построения теории локально выпуклых линейных топологич. пространств. Понятие слабой сходимости элементов и линейных функционалов в Б. п. обрело законченную форму в понятии слабой топологии. Теория Б. п. представляет собой хорошо разработанную область функционального анализа, имеющую (непосредственно или через теорию операторов) многочисленные применения в различных разделах математики.

Проблематика Б. п. складывается из нескольких направлений: геометрия единичной сферы, геометрия подпространств, линейно топологич. классификация, ряды и последовательности в Б. п., наилучшие приближения в Б. п., функции со значениями в Б. п. и др. Относительно теории операторов в Б. п. следует отметить, что многие ее предложения имеют непосредственное отношение к геометрии и топологии Б. п.

Примеры. Встречающиеся в математич. анализе Б. п.— это чаще всего множества функций или числовых последовательностей, подчиненные нек-рым условиям.

1) l_p, $p \geqslant 1$,— пространство числовых последовательностей $x = \{\xi_n\}$, для к-рых

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty,$$

с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{1/p}.$$

2) m — пространство ограниченных числовых последовательностей с нормой

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|.$$

3) c — пространство сходящихся числовых последовательностей с нормой

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|.$$

4) c_0 — пространство сходящихся к нулю числовых последовательностей с нормой

$$\|x\| = \max_n |\xi_n|.$$

5) $C[a, b]$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций $x = x(t)$ с нормой

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|.$$

6) $C[K]$ — пространство непрерывных функций на компакте K с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in K} |x(t)|.$$

7) $C^n[a, b]$ — пространство функций, имеющих непрерывные производные до порядка n включительно, с нормой

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(k)}(t)|.$$

8) $C^n[I_m]$ — пространство всех непрерывно дифференцируемых до порядка n функций, определенных в m-мерном кубе, с равномерной нормой по всем производным порядка не выше n.

9) $M[a, b]$ — пространство ограниченных измеримых функций с нормой

$$\|x\| = \operatorname{vrai} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|.$$

10) $A(D)$ — пространство функций, аналитических в открытом единичном круге D и непрерывных в замкнутом круге $\bar{D}$, с нормой

$$\|x\| = \max_{z \in \bar{D}} |x(z)|.$$

11) $L_p(S; \Sigma, \mu)$, $p \geqslant 1$, — пространство функций $x(s)$ на множестве S с вполне аддитивной мерой μ и с нормой

$$\|x\| = \left(\int_S |x(s)|^p \mu(ds) \right)^{1/p}.$$

12) $L_p[a, b]$, $p \geqslant 1$, — частный случай пространства $L_p(S; \Sigma, \mu)$ — пространство измеримых по Лебегу функций, суммируемых со степенью p, с нормой

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(s)|^p ds \right)^{1/p}.$$

13) AP — пространство Бора почти периодич. функций с нормой

$$\|x\| = \sup_{-\infty < t < +\infty} |x(t)|.$$

Пространства $C[a, b]$, $C^n[a, b]$, $L_p[a, b]$, c, l_p сепарабельны; пространства $M[a, b]$, m, AP несепарабельны; $C[K]$ сепарабельно в том и только в том случае, если K — метрический компакт.

Подпространство Y Б. п., рассматриваемое отдельно от вмещающего пространства X, есть Б. п. Факторопространство X/Y нормированного пространства по подпространству Y становится нормированным пространством, если норму определить так: пусть $Y_1 = x_1 + Y$ — класс смежности. Тогда

$$\|Y\| = \inf_{y \in Y} \|x_1 + y\|.$$

Если X — Б. п., то X/Y — тоже Б. п. Множество всех линейных функционалов, определенных в нормированном пространстве X, с нормой

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{\|x\|}, \quad x \neq 0,$$

наз. пространством, с о п р я ж е н н ы м с X, и обозначается X^*. Оно является Б. п.

Для Б. п. справедлива *Хана — Банаха теорема* о продолжении линейных функционалов: если линейный функционал определен на подпространстве Y нормированного пространства X, то его можно распространить с сохранением линейности и непрерывности на все пространство X. Более того, при этом можно обеспечить сохранение нормы расширенного функционала:

$$\|f\|_X = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|_Y = \sup_{y \in Y} \frac{|f(y)|}{\|y\|}.$$

Справедливо и более общее утверждение: пусть дейст-

вительная функция $p(x)$, определенная в линейном пространстве, удовлетворяет условиям:

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y),$$
$$p(\lambda x)=\lambda p(x), \quad \lambda \geqslant 0, \quad x,\ y \in X,$$

и пусть $f(x)$ — действительный линейный функционал, определенный на подпространстве $Y \subset X$ и такой, что

$$f(x) \leqslant p(x), \quad x \in Y.$$

Тогда существует линейный функционал $F(x)$, определенный на всем X и такой, что

$$F(x)=f(x) \text{ для } x \in Y;\ F(x) \leqslant p(x) \text{ для } x \in Y.$$

Следствием теоремы Хана — Банаха является «обратная» формула, связывающая нормы X и X^*:

$$\| x \| = \max_{f \in X^*} \frac{|f(x)|}{\|f\|}, \quad f \neq 0,\ x \in X,$$

причем max в этой формуле достигается на нек-ром $f=f_x \in X^*$. Другое важное следствие — наличие *достаточного множества* непрерывных линейных функционалов. Говорят, что в Б. п. X существует достаточно много непрерывных линейных функционалов, если для любых $x_1 \neq x_2 \in X$ имеется такой определенный на X линейный функционал f, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Для многих конкретных Б. п. известен общий вид линейного функционала. Так, в $L_p[a,\ b]$, $(p>1)$ каждый линейный функционал определяется по формуле:

$$f(x)=\int_a^b x(t)\, y(t)\, dt,$$

где $y \in L_q[a,\ b]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, а каждая функция $y(t) \in L_q$ определяет по этой формуле линейный функционал f, причем

$$\| f \| = \left\{ \int_a^b | y(t) |^q\, dt \right\}^{1/q}.$$

Таким образом, пространством, сопряженным с L_p, является L_q: $L_p^*=L_q$. В $L_1[a,\ b]$ линейные функционалы задаются той же формулой, но в этом случае $y \in M$, так что $L_1^*=M$.

Пространство X^{**}, сопряженное с X^*, наз. в т о р ы м с о п р я ж е н н ы м. Аналогично определяются третье, четвертое и т. д. сопряженные пространства. Каждый элемент из X может быть отождествлен с нек-рым линейным функционалом, определенным на X^*:

$$F(f)=f(x), \quad \forall f \in X^* \ (F \in X^{**},\ x \in X).$$

При этом $\| F \|=\| x \|$. Тогда можно считать X подпространством пространства X^{**} и $X \subset X^{**} \subset X^{IV}\ldots$, $X^* \subset X^{***} \subset \ldots$. Если при указанном вложении Б. п. совпадает со своим вторым сопряженным, то оно наз. р е ф л е к с и в н ы м. В этом случае все включения оказываются равенствами. Если же X не рефлексивно, то среди включений нет ни одного равенства. Если факторпространство X^{**}/X имеет конечную размерность n, то X наз. к в а з и р е ф л е к с и в н ы м п о р я д к а n. Квазирефлексивные пространства существуют для любого n.

К р и т е р и и р е ф л е к с и в н о с т и Б. п. 1) X рефлексивно тогда и только тогда, когда для каждого $f \in X^*$ найдется $x \in X$, на к-ром достигается sup в формуле

$$\| f \| = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{\|x\|}, \quad x \neq 0.$$

2) В рефлексивных Б. п., и только в них, каждое ограниченное множество компактно относительно слабой сходимости: любая его бесконечная часть содержит слабо сходящуюся подпоследовательность (т е о р е м а Э б е р л е й н а — Ш м у л ь я н а). Пространства L_p и l_p, $p>1$, рефлексивны. Пространства L_1, l_1, C, M, c, m, AP нерефлексивны.

Б. п. наз. слабо полным, если в нем каждая слабо сходящаяся в себе последовательность слабо сходится к элементу пространства. Каждое рефлексивное пространство слабо полно. Кроме того, слабо полны Б. п. L_1 и l_1. Еще более широкий класс — Б. п., не содержащие подпространств, изоморфных c_0. Эти пространства во многом подобны слабо полным.

Б. п. наз. строго нормированным, если его единичная сфера S не содержит отрезков. Для количественной оценки выпуклости единичного шара вводятся модули выпуклости: локальный модуль выпуклости

$$\delta(x,\ \varepsilon)=\inf_{\|x-y\|\geqslant\varepsilon}\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\right\},\ x,\ y\in S,\ 0<\varepsilon\leqslant 2,$$

и равномерный модуль выпуклости

$$\delta(\varepsilon)=\inf_{x\in S}\delta(x,\ \varepsilon).$$

Если $\delta(x,\varepsilon)>0$ для всех $x\in X$ и всех $\varepsilon>0$, то Б. п. наз. локально равномерно выпуклым. Если $\delta(\varepsilon)>0$, то пространство наз. равномерно выпуклым. Каждое равномерно выпуклое Б. п. локально равномерно выпукло; каждое локально равномерно выпуклое Б. п. строго нормировано. В конечномерных Б. п. верны и обратные включения. Если Б. п. равномерно выпукло, то оно рефлексивно.

Б. п. наз. гладким, если для любых линейно независимых элементов x и y функция $\psi(t)=\|x+ty\|$ дифференцируема при всех t. Б. п. наз. равномерно гладким, если для его модуля гладкости

$$\rho(\tau)=\sup_{x,\ y\in S}\left\{\frac{\|x+\tau y\|+\|x-\tau y\|}{2}-1\right\},\ \tau>0,$$

выполняется условие

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\rho(\tau)}{\tau}=0.$$

В равномерно гладких Б. п., и только в них, норма равномерно дифференцируема по Фреше. Равномерно гладкое Б. п. гладко. Обратное верно, если Б. п. конечномерно, Б. п. X равномерно выпукло (равномерно гладко) в том и только в том случае, если X^* равномерно гладко (равномерно выпукло). Между модулем выпуклости Б. п. X и модулем гладкости X^* существует связь

$$\rho_{X^*}(\tau)=\sup_{0<\varepsilon\leqslant 2}\left[\frac{\varepsilon(\tau)}{2}-\delta_X(\varepsilon)\right].$$

Если Б. п. равномерно выпукло (равномерно гладко), то таковы любое его подпространство и факторпространство. Б. п. L_p и $l_p(p>1)$ равномерно выпуклы и равномерно гладки, причем

$$\delta(\varepsilon)\asymp\begin{cases}\varepsilon^2\ (1<p\leqslant 2),\\ \varepsilon^p\ (2\leqslant p<\infty);\end{cases}$$

$$\rho(\tau)\asymp\begin{cases}\tau^p\ (1<p\leqslant 2),\\ \tau^2\ (2\leqslant p<\infty);\end{cases}$$

$$(f(\varepsilon)\asymp\varphi(\varepsilon)\Longleftrightarrow a<f(\varepsilon)/\varphi(\varepsilon)<b).$$

Б. п. M, C, A, L_1, AP, m, c, l_1 не являются строго нормированными и не являются гладкими.

В Б. п. справедливы следующие важные теоремы для линейных операторов:

Теорема Банаха — Штейнхауза. Если семейство линейных операторов $\mathcal{T}=\{T_\alpha\}$ ограничено в каждой точке:

$$\sup_{T\in\mathcal{T}}\|T_\alpha x\|<\infty\ \text{ для всех } x\in X,$$

то оно ограничено по норме:

$$\sup_{T\in\mathcal{T}}\|T_\alpha\|<\infty.$$

Теорема Банаха об обратном операторе. Если линейный непрерывный оператор ото-

бражает взаимно однозначно Б. п. X на Б. п. Y, то обратный оператор T^{-1} тоже непрерывен.

Теорема о замкнутом графике. Если замкнутый линейный оператор отображает Б. п. X в Б. п. Y, то он непрерывен.

Изометрия Б. п. сравнительно редкое явление. Классич. пример — Б. п. L_2 и l_2. Б. п. $C[K_1]$ и $C[K_2]$ изометричны в том и только в том случае, если K_1 и K_2 гомеоморфны (теорема Банаха — Стоуна). Для изоморфных Б. п. мерой близости служит число

$$d(X, Y) = \ln \inf_T \|T\| \cdot \|T^{-1}\|,$$

где T пробегает всевозможные операторы, осуществляющие изоморфизм между X и Y. Если X изометрично Y, то $d(X, Y)=0$. Однако существуют и не изометричные пространства, для к-рых $d(X, Y)=0$; их наз. почти изометричными. Свойства Б. п., сохраняющиеся при изоморфизме, наз. линейно топологическими. К ним относятся сепарабельность, рефлексивность, слабая полнота. Изоморфная классификация Б. п. содержит, в частности, следующие утверждения:

$$L_r \neq L_s;\ l_r \neq l_s,\ r \neq s;$$

$$L_r \neq l_s,\ r \neq s \text{ или } r = s = 2;$$

$$M = m;\ C[0, 1] \neq A(D);$$

$C[K] = C[0, 1]$, если K — метрич. компакт мощности континуума;

$$C^n[I_m] \neq C[0, 1].$$

Каждое сепарабельное Б. п. изоморфно локально равномерно выпуклому. Неизвестно (1977), каждое ли Б. п. изоморфно своей гиперплоскости. Существует Б. п., не изоморфное строго нормированному.

Отвлекаясь от линейной природы нормированных пространств, можно рассматривать их топологич. классификацию. Два пространства гомеоморфны, если между их элементами может быть установлено взаимно однозначное и взаимно непрерывное (не обязательно линейное) соответствие. Неполное нормированное пространство не гомеоморфно никакому Б. п. Все бесконечномерные сепарабельные Б. п. гомеоморфны.

Универсальными (см. *Универсальное пространство*) в классе сепарабельных Б. п. являются $C[0, 1]$ и $A(D)$. В классе рефлексивных сепарабельных Б. п. нет даже изоморфно универсального. Б. п. l_1 универсально в несколько ином смысле: каждое сепарабельное Б. п. изометрично нек-рому его факторпространству.

В каждом из перечисленных выше Б. п., кроме L_2 и l_2, существуют подпространства без дополнения. В частности, в m и M не дополняемо каждое бесконечномерное сепарабельное подпространство, в $C[0, 1]$ не дополняемо каждое бесконечномерное рефлексивное подпространство. Если в Б. п. все подпространства дополняемы, то оно изоморфно гильбертову пространству. Неизвестно (1977), каждое ли Б. п. есть прямая сумма каких-то двух бесконечномерных подпространств. Подпространство Y дополняемо в том и только в том случае, если существует проектор, отображающий X на Y. Относительной проекционной константой $\lambda(Y, X)$ подпространства Y в X наз. нижняя грань норм проекторов на Y. Каждое n-мерное подпространство Б. п. дополняемо и $\lambda(Y_n, X) \leqslant \sqrt{n}$. Абсолютной проекционной константой $\lambda(Y)$ Б. п. Y наз.

$$\lambda(Y) = \sup_X \lambda(Y, X),$$

где X пробегает все Б. п., содержащие Y в качестве подпространства. Для любого бесконечномерного сепарабельного Б. п. Y имеем $\lambda(Y)=\infty$. Б. п., для к-рых $\lambda(Y) \leqslant \lambda < \infty$, образуют класс $\mathcal{P}_\lambda$ $(\lambda \geqslant 1)$. Класс $\mathcal{P}_1$ сов-

падает с классом пространств $C(Q)$, где Q — экстремально несвязные компакты (см. *Экстремально несвязные пространства*).

Основные теоремы о конечномерных Б. п. 1) Конечномерное нормированное пространство *(Минковского пространство)* полно, т. е. является Б. п. 2) Каждый линейный оператор в конечномерном Б. п. непрерывен. 3) Конечномерное Б. п. рефлексивно (размерность X^* равна размерности X). 4) Б. п. конечномерно в том и только в том случае, если его единичный шар компактен. 5) Все n-мерные Б. п. попарно изоморфны; их множество становится компактом, если ввести расстояние

$$d(X, Y) = \ln \inf_T \| T \| \cdot \| T^{-1} \|.$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad x \in X, \tag{*}$$

наз. сходящимся, если существует предел S *последовательности* частных сумм:

$$\lim_{n \to \infty} \left\| S - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| = 0.$$

Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \| < \infty,$$

то ряд (*) сходится; в этом случае он наз. абсолютно сходящимся. Ряд наз. безусловно сходящимся, если он сходится при любой перестановке его членов. Сумма безусловно сходящегося ряда не зависит от порядка его членов. Для рядов в конечномерном пространстве (и, в частности, для числовых рядов) безусловная сходимость эквивалентна абсолютной. В бесконечномерных Б. п. из абсолютной сходимости следует безусловная, но обратное неверно ни в одном бесконечномерном Б. п. Последнее есть следствие теоремы Дворецкого — Роджерса: каковы бы ни были числа $a_k \geqslant 0$, подчиненные условию $\Sigma a_k^2 < \infty$, в любом бесконечномерном Б. п. существует такой безусловно сходящийся ряд Σx_k, что $\| x_k \| = a_k$, $k = 1, 2, \ldots$. В пространстве c_0 (а значит, и в любом Б. п., содержащем подпространство, изоморфное c_0) для любой сходящейся к нулю последовательности $a_k \geqslant 0$ существует безусловно сходящийся ряд Σx_k, $\|x_k\| = a_k$. В $L_p(S, \Sigma, \mu)$ из безусловной сходимости ряда Σx_k следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \|^s < \infty,$$

где

$$s = \begin{cases} 2 & (1 \leqslant p \leqslant 2), \\ p & (p \geqslant 2). \end{cases}$$

В равномерно выпуклом Б. п. с. модулем выпуклости $\delta(\varepsilon)$ из безусловной сходимости ряда Σx_k следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta(\| x_k \|) < \infty.$$

Ряд Σx_k наз. слабо абсолютно сходящимся, если для каждого $f \in X^*$ сходится числовой ряд $\Sigma |f(x_k)|$. Каждый слабо абсолютно сходящийся ряд в X сходится в том и только в том случае, если X не содержит подпространства, изоморфного c_0.

Последовательность элементов $\{e_k\}^{\infty}$ Б. п. наз. минимальной, если любой ее член лежит вне замыкания $X^{(n)} = [e_k]_{k \neq n}$ линейной оболочки остальных членов. Последовательность наз. равномерно минимальной, если

$$\rho(e_n; X^{(n)}) \geqslant \gamma \| e_n \|, \quad 0 < \gamma \leqslant 1, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Если $\gamma = 1$, то последовательность наз. системой Ауэрбаха. В каждом n-мерном Б. п. существует полная система Ауэрбаха $\{e_n\}_1^n$. Неизвестно (1977), в

каждом ли сепарабельном Б. п. существует полная система Ауэрбаха. Для каждой минимальной системы существует сопряженная система линейных функционалов $\{f_n\}$, связанная с $\{e_k\}$ соотношениями биортогональности: $f_i(e_j)=\delta_{ij}$. В этом случае система $\{e_k, f_k\}$ наз. б и о р т о г о н а л ь н о й. Множество линейных функционалов наз. т о т а л ь н ы м, если оно аннулирует только нулевой элемент пространства. В каждом сепарабельном Б. п. существует полная минимальная система с тотальной сопряженной. Каждый элемент $x\in X$ может быть формально разложен в ряд по биортогональной системе:

$$x\sim\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,e_k,$$

однако в общем случае этот ряд расходится.

Система элементов $\{e_k\}_1^\infty$ наз. б а з и с о м в X, если каждый элемент $x\in X$ может быть единственным образом представлен в виде сходящегося ряда

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k,\quad a_k=a_k(x).$$

Каждый базис в Б. п.— полная равномерная минимальная система с тотальной сопряженной. Обратное неверно, как показывает пример системы $\{e^{int}\}_{-\infty}^{\infty}$ в $C[0, 2\pi]$ и $L_1\{0, 2\pi]$.

Базис наз. б е з у с л о в н ы м, если каждая его перестановка — также базис, в противном случае базис наз. у с л о в н ы м. Система $\{e^{int}\}_{-\infty}^{\infty}$ в $L_p[0, 2\pi]$, $p>1$, $p\neq 2$,— условный базис. Безусловным базисом в L_p, $p>1$, является система Хаара. В пространствах C и L_1 нет безусловного базиса. Неизвестно (1977), в каждом ли Б. п. есть бесконечномерное подпространство с безусловным базисом. Каждое Б. п. с безусловным базисом либо рефлексивно, либо содержит подпространство, изоморфное l_1 или c_0.

Нормированные базисы $\{e'_k\}$ и $\{e''_k\}$ в Б. п. X_1 и X_2 наз. эквивалентными, если соответствие $e'_k\leftrightarrow e''_k$ ($k=1, 2, \ldots$) может быть продолжено до изоморфизма между X_1 и X_2. В каждом из пространств l_2, l_1, c_0 каждый нормированный безусловный базис эквивалентен естественному базису. Базисы, построенные в важных для приложений Б. п., не всегда хорошо приспособлены к решению задач, напр. теории операторов. В связи с этим введены T-б а з и с ы, или б а з и с ы с у м м и р о в а н и я. Пусть $\{t_{ij}\}_1^\infty$ — матрица *регулярного метода суммирования*. Система элементов $\{e_n\}\subset X$ наз. T-базисом, соответствующим данному методу суммирования, если каждый $x\in X$ единственным образом представляется в виде ряда

$$x\sim\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k,$$

суммируемого этим методом к x. Тригонометрич. система $\{e^{int}\}_{-\infty}^{\infty}$ в $C[0, 2\pi]$ — базис суммирования для методов Чезаро и Абеля. Каждый T-базис — полная минимальная (не обязательно равномерно) система с тотальной сопряженной. Обратное неверно. До недавнего времени (70-е гг.) одной из основных проблем теории Б. п. была восходящая к С. Банаху п р о б л е м а б а з и с а: в каждом ли сепарабельном Б. п. существует базис? Оставались открытыми также вопросы существования базиса в конкретных Б. п. Первый пример сепарабельного Б. п. без базиса построен в 1972; построены базисы в пространствах $C^n(I_m)$ и $A(D)$.

Лит.: [1] B a n a c h S., «Fund. math.», 1922, t. 3, p. 133—81; [2] Б а н а х С. С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1948; [3] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [4] Д э й М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [5] Б у р б а к и Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959. *М. И. Кадец, Б. М. Левитан.*

БАРБЬЕ ТЕОРЕМА о к р и в ы х п о с т о я н н о й ш и р и н ы: если расстояние между любыми двумя па-

раллельными опорными прямыми к кривой постоянно и равно a, то длина этой кривой равна πa. Установлена С. Барбье (S. Barbier, 1860). *А. Б. Иванов.*

БАР-ИНДУКЦИЯ — индуктивный способ рассуждения, используемый в интуиционистской математике (см. *Интуиционизм*) и состоящий в следующем. Пусть на конечных *кортежах* натуральных чисел заданы нек-рые свойства R и S такие, что: 1) свойство R разрешимо, т. е. для всякого кортежа $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ эффективно выясняется, выполнено R на этом кортеже или нет; 2) для всякой свободно становящейся последовательности α найдется кортеж вида $\langle \alpha(0), \ldots, \alpha(n-1) \rangle$, для к-рого выполнено R. При этом, если выполняется 2), то говорят, что R «запирает» пустой кортеж $\langle\ \rangle$ (отсюда и назв. «Б.-и.», «bar» — «запрать», «замок»); 3) для всякого кортежа π натуральных чисел, если $R(\pi)$, то $S(\pi)$ — так наз. б а з и с Б.-и.; 4) если $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ — кортеж такой, что для всякого натурального k имеет место $S(\langle n_1, \ldots, n_m, k \rangle)$, то необходимо $S(\langle n_1, \ldots, n_m \rangle)$; это свойство наз. ш а г о м Б.-и.

Если выполняются перечисленные условия 1) — 4), то принцип Б.-и. позволяет заключить, что имеет место $S(\langle\ \rangle)$.

Л. Э. Я. Брауэр (L. E. J. Brouwer) предложил Б.-и. как интуиционистски приемлемый способ рассуждения, указывающий на незавершенность, нек-рую эффективную несчетность совокупности всех свободно становящихся последовательностей. В частности, было показано [С. К. Клини (S. C. Kleene) и независимо А. А. Марковым], что из принципа Б.-и. (фактически даже из нек-рого следствия Б.-и. теоремы о *веере*) следует, что не все свободно становящиеся последовательности рекурсивны.

С 60-х гг. 20 в. в основаниях математики нашли употребление формы Б.-и., рассматривающие не кортежи натуральных чисел, а кортежи более сложных объектов, напр. кортежи свободно становящихся последовательностей.

На языке формального интуиционистского математич. анализа Б.-и. может быть записана в виде:

$$\forall x\,(R(x) \vee \neg R(x)) \,\&\, \forall \alpha \exists x R(\overline{\alpha}(x)) \,\&$$
$$\forall x\,(R(x) \supset S(x)) \,\&$$
$$\forall x\,(\forall y S(x * \hat{y}) \supset S(x)) \supset S(0).$$

Лит.: [1] K l e e n e S. C., V e s l e y R. E., The foundations of intuitionistic mathematics, Amst., 1965.

А. Г. Драгалин.

БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — координаты точки n-мерного векторного пространства E^n, отнесенные к нек-рой фиксированной системе $p_0, p_1, \ldots, p_n$ точек, не лежащих в $(n-1)$-мерном подпространстве. Каждая точка $x \in E^n$ может быть единственным образом представлена в виде

$$x = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_n p_n,$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — действительные числа, удовлетворяющие условию $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Точка x, по определению, есть центр тяжести масс $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, помещенных в точках $p_0, p_1, \ldots, p_n$. Числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ наз. б а р и ц е н т р и ч е с к и м и к о о р д и н а т а м и точки x; точка с Б. к. $1/(n+1)$ наз. б а р и ц е н т р о м.

Б. к. введены А. Мёбиусом в 1827 (см. [1]) как ответ на вопрос о том, какие массы следует поместить в вершинах заданного треугольника, чтобы данная точка была центром тяжести этих масс. Б. к. являются частным случаем общих *однородных координат*; они аффинно инвариантны.

Б. к. точек симплекса используются в алгебраич. топологии (см. [2]). Б а р и ц е н т р и ч е с к и м и к о о р д и н а т а м и точек n-мерного симплекса σ относительно его вершин $A_0, A_1, \ldots, A_n$ наз. их (общие)

декартовы координаты в базисе векторов $\overline{OA}_0$, $\overline{OA}_1$, . . . , $\overline{OA}_n$, где O — любая точка, не лежащая в n-мерном подпространстве, несущем σ (считается, что σ лежит в нек-ром евклидовом пространстве; при этом определение не зависит от точки O), или проективные координаты относительно $A_0, A_1, \ldots, A_n$ в проективном пополнении содержащего σ подпространства. Б. к. точек симплекса неотрицательны и их сумма равна единице. Обращение в нуль i-й Б. к. равносильно тому, что точка лежит на противоположной вершине A_i грани симплекса σ. Это позволяет рассматривать Б. к. точек геометрич. комплекса относительно всех его вершин. При помощи Б. к. производится *барицентрическое подразделение* комплекса.

По аналогии с этим вводится формальное определение Б. к. для абстрактных симплексов (см. [3]).

Лит.: [1] Möbius A. F., Der barycentrische Calcul, в его кн.: Gesammelte Werke, Bd 1, Lpz., 1885; [2] Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, 2 изд., М., 1976; [3] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971.

Е. Г. Скляренко.

БАРИЦЕНТРИЧЕСКОЕ ПОДРАЗДЕЛЕНИЕ геометрического комплекса K — комплекс K', получающийся заменой симплексов комплекса K на более мелкие путем следующего процесса. Каждый одномерный симплекс (отрезок) делится пополам. В предположении, что все симплексы размерности $\leqslant n-1$ уже подразделены, разбиение любого n-мерного симплекса σ определяется посредством конусов над симплексами границы симплекса σ, имеющих общую вершину, являющуюся барицентром симплекса σ, т. е. точкой с *барицентрическими координатами* $1/(n+1)$. Вершины полученного комплекса K' находятся во взаимно однозначном соответствии с симплексами комплекса K, а симплексы комплекса K' — с упорядоченными по включению конечными наборами симплексов из K. По аналогии с этим вводится формальное определение Б. п. и в случае абстрактного комплекса.

Е. Г. Скляренко.

БАРТЛЕТТА КРИТЕРИЙ — статистический критерий в *Беренса — Фишера проблеме*. Относится к случаю, когда две выборки $x_1, \ldots, x_{n_1} \in N(a_1, \sigma_1^2)$ и $y_1, \ldots, y_{n_2} \in N(a_2, \sigma_2^2)$ имеют одинаковый объем: $n_1 = n_2 = n$. Критические области даются неравенством

$$\frac{\sqrt{n}\,|\overline{x}-\overline{y}|}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\overline{x})-(y_i-\overline{y})]^2}} > c$$

при любом постоянном $c>0$, где

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, \quad \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i.$$

Левая часть неравенства имеет *Стьюдента распределение* с $n-1$ степенями свободы, что связывает уровень значимости критерия с постоянной c. Б. к. является частным случаем *Шеффе критерия* и обладает аналогичными экстремальными свойствами, однако предложен М. Бартлеттом [1] ранее этого решения. Другой Б. к. относится к сравнению дисперсий многих выборок.

Лит.: [1] Bartlett M. S., «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1936, v. 32, pt 3, p. 560—66.

О. В. Шалаевский.

БАРЬЕР, барьер Лебега, в теории потенциала — функция, существование к-рой является необходимым и достаточным условием регулярности граничной точки в отношении поведения обобщенного решения задачи Дирихле в этой точке (см. также *Перрона метод*, *Регулярная точка*).

Пусть D — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, и ξ — точка ее границы $\Gamma=\partial D$. Барьером для точки ξ наз. всякая функция $w_\xi(x)$, непрерывная в пересечении $(D\cup\Gamma)\cap B$ замкнутой области $D\cup\Gamma$ и нек-рого шара $B=B(R,\xi)$ с центром в точке ξ,

супергармоническая внутри $D \bigcap B$ и положительная в $(D \bigcup \Gamma) \bigcap B$, за исключением точки ξ, в к-рой она обращается в нуль. Напр., при $n \geqslant 3$ во всякой граничной точке ξ, для к-рой существует замкнутый шар $\bar{B}(R, y)$, имеющий с $D \bigcup \Gamma$ единственную общую точку ξ, в качестве Б. можно взять гармонич. функцию

$$w_\xi(x) = \frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x-y|^{n-2}},$$

где R — радиус шара $\bar{B}(R, y)$, а y — его центр.

Б. в теории функций комплексного переменного — функция, из существования к-рой для всех граничных точек области D следует, что D является *голоморфности областью*. Пусть D — область в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $n>1$, и ξ — точка границы $\Gamma = \partial D$. Б. в точке ξ есть всякая аналитич. функция $f(z)$ в D, имеющая особенность в ξ. Так, для граничной точки ξ любой плоской области $D \subset \mathbb{C}'$ Б. является функция $1/(z-\xi)$. В каждой точке $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ границы шара

$$D = \left\{ z = (z_1, z_2, \ldots, z_n);\ \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 < R^2 \right\}$$

также существует Б. — функция $1/(\bar{\xi}_1 z_1 + \ldots + \bar{\xi}_n z_n - R^2)$.

Б. существует в граничной точке ξ области D, если в D определена аналитич. функция $f(z)$, неограниченная в ξ, т. е. такая, что для нек-рой последовательности точек $\{z^{(k)}\} \subset D$, сходящейся к ξ, имеем

$$\lim_{k \to \infty} |f(z^{(k)})| = +\infty.$$

Обратное справедливо для областей $D \subset \mathbb{C}^n$ в следующей усиленной форме: для любого множества E точек границы области D, в к-рых существует Б., найдется голоморфная в D функция, неограниченная во всех точках E. Если E всюду плотно на границе D, то D — область голоморфности.

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964, гл. 4; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 2, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев, М. Ширинбеков.

БАШНЯ ПОЛЕЙ — последовательность *расширений*

$$k \subset k_1 \subset \ldots \subset k_i \subset \ldots \qquad (*)$$

нек-рого поля k. В зависимости от свойств расширений k_{i+1}/k_i башни наз. нормальными, абелевыми, сепарабельными и др. Понятие Б. п. играет важную роль в *Галуа теории*, где вопрос о разрешимости уравнения в радикалах сводится к возможности погружения поля коэффициентов этого уравнения в нормальную и абелеву Б. п.

В *полей классов теории* возникает башня

$$k \subset k_1 \subset \ldots \subset k_i \subset \ldots,$$

где k — нек-рое поле алгебраич. чисел, а каждое поле k_{i+1} является максимальным абелевым неразветвленным расширением поля k_i. Такие башни наз. башнями полей классов. Группа Галуа каждого расширения k_{i+1}/k_i изоморфна, в силу закона взаимности, группе классов идеалов поля k_i, а так как последняя конечна, то конечны и все расширения k_{i+1}/k_i. Объединение K полей k_i является максимальным разрешимым неразветвленным расширением поля k. Вопрос о конечности расширения K/k (проблема Б. п.) был поставлен К. Фуртвенглером (K. Furtwängler) в 1925 и отрицательно решен в 1964 (см. [2]). Примером поля, Б. п. классов к-рого бесконечна, является расширение поля рациональных чисел, получаемое присоединением $\sqrt{-30030}$. В частности, такое поле нельзя вложить ни в какое поле алгебраич. чисел, в к-ром имеет место однозначность разложения чисел на простые множители. Решение проблемы имеет применения в теории алгебраич. чисел, напр. помогает получить точную оценку роста дискриминантов полей алгебраич. чисел.

Лит.: [1] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [2] Голод Е. С., Шафаревич И. Р., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 261—72.

А. Н. Паршин.

БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ МЕТОД — один из прямых методов численного решения задач вариационного исчисления. Применяется для решения задач оптимального управления невысокой размерности, но со сложными ограничениями на фазовые координаты и управляющие функции. После дискретизации функционала и системы дифференциальных уравнений исходная задача сводится к минимизации функционала:

$$I=\sum_{k=0}^{N-1} F^0(x_k,\ x_{k+1},\ u_k,\ t_k,\ t_{k+1}), \tag{1}$$

$$x_{k+1}-x_k=\tau F(x_k,\ x_{k+1},\ u_k,\ t_k,\ t_{k+1}), \tag{2}$$

$$k=0,\ \ldots,\ N-1,$$

$$(x_k,\ u_k)\in G_k,\ k=0,\ \ldots,\ N. \tag{3}$$

Здесь x_k, u_k — векторы фазовых координат и управлений в узле t_k (имеющие размерности соответственно n и m), причем u_k считается постоянным на каждом интервале (t_k, t_{k+1}), G_k — заданные области $(n+m)$-мерного пространства (G_0 и G_N описывают граничные условия), $\tau=(T-t_0)/N$ — шаг разбиения исходного интервала $T-t_0$.

Б. в. м. применяется в случае $n\geqslant m$, характерном для практич. задач и для к-рого использование других методов, основанных на варьировании в пространстве состояний *(блуждающей трубки метод, локальных вариаций метод)*, осложнено в связи с трудоемкостью построения функции управления.

Заданное начальное приближение $(\overset{\circ}{x_0}, \ldots, \overset{\circ}{x_N}, \overset{\circ}{u_0}, \ldots, \overset{\circ}{u_{N-1}})$, удовлетворяющее (2) и (3), улучшается в смысле критерия (1) на каждом участке от t_k до t_{k+p} (x_k, x_{k+p} — фиксируются), и этот участок последовательно сдвигается на один узел от начала траектории до конца, и обратно (отсюда название — «бегущая волна»).

Для каждой волны получается задача нелинейного программирования — минимизация

$$\Delta I_k=\sum_{l=k}^{k+p-1} F^0(x_l,\ x_{l+1},\ u_l,\ t_l,\ t_{l+1}) \tag{4}$$

с p связями типа равенства (2) и условиями (3). При практич. реализации Б. в. м. вместо решения задачи (4) даются приращения $\pm h_i$ каждому из r свободных параметров и в случае уменьшения ΔI_k(4) и удовлетворения условий (3) получается новая траектория. Если траектория не меняется при полном проходе волны, то h_i дробятся.

При $m=n$ Б. в. м. переходит в метод локальных вариаций.

Лит.: [1] Моисеев Н. Н., *Элементы теории оптимальных систем*, М., 1975; [2] Ватель И. А., Кононенко А. Ф., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1970, т. 10, № 1, с. 67—73; [3] их же, Алгоритмы и программы (Информационный бюллетень), М., 1972, № 2, с. 7.

И. Б. Вапнярский, И. А. Ватель.

БЕНКЕ — ШТЕЙНА ТЕОРЕМА: объединение областей голоморфности $G_k\subset\mathbb{C}^n$, $k=1, 2, \ldots$, таких, что $G_k\subset G_{k+1}$ для всех k, тоже является областью голоморфности. Б.— Ш. т. справедлива не только в комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$, но и на любом *Штейна многообразии*. Без условия монотонности последовательности G_k по вложению эта теорема неверна, напр. объединение двух областей голоморфности

$$G_1=\{(z_1,\ z_2):|z_1|<1,\ |z_2|<2\}$$

и

$$G_2=\{(z_1,\ z_2):|z_1|<2,\ |z_2|<1\}$$

в $\mathbb{C}^2$ не является областью голоморфности.

Лит.: [1] Behnke H., Stein K., «Math. Ann.», 1938, Bd 116, S. 204—16; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. М. Чирка.

БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей, к-рое при любом $n=2, 3, 4, \ldots$ может быть представлено как композиция (свертка) n одинаковых распределений вероятностей. Определение Б. д. р. в равной степени применимо к распределениям на прямой, в конечномерных евклидовых пространствах и в нек-рых еще более общих случаях. Ниже рассматривается одномерный случай.

Характеристич. функции $f(t)$ Б. д. р. наз. б е з г р а н и ч н о д е л и м ы м и. Каждая такая функция при любом n может быть представлена как n-я степень некоторой другой характеристич. функции:

$$f(t)=(f_n(t))^n.$$

Примерами Б. д. р. могут служить *нормальное распределение*, *Пуассона распределение*, *Коши распределение*, *«хи-квадрат» распределение*. Проверять свойство безграничной делимости проще всего с помощью характеристич. функций. Композиция Б. д. р. и предел слабо сходящейся последовательности Б. д. р. суть снова Б. д. р.

Случайную величину, определенную на нек-ром вероятностном пространстве, наз. б е з г р а н и ч н о д е л и м о й, если при любом n она может быть представлена в виде суммы n независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на том же пространстве. Распределение каждой такой величины — Б. д. р. Обратное не всегда верно. Так, если взять дискретное вероятностное пространство, образованное неотрицательными целыми числами $m=0, 1, 2, \ldots$ с приписанными им пуассоновскими вероятностями

$$\mathsf{P}(m)=\frac{\lambda^m}{m!}\,e^{-\lambda},$$

то случайная величина $X(m)=m$ не будет безгранично делимой, хотя ее распределение вероятностей (распределение Пуассона) есть Б. д.р.

Б. д. р. впервые появились в связи с изучением стохастически непрерывных однородных *случайных процессов с независимыми приращениями* (см. [1], [2], [3]). Так называют процессы $X(\tau)$, $\tau\geqslant 0$, удовлетворяющие требованиям: 1) $X(0)=0$; 2) распределение вероятностей приращения $X(\tau_2)-X(\tau_1)$, $\tau_2>\tau_1$, зависит только от $\tau_2-\tau_1$; 3) при $\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\ldots\leqslant\tau_k$ разности

$$X(\tau_2)-X(\tau_1),\ X(\tau_3)-X(\tau_2),\ \ldots,\ X(\tau_k)-X(\tau_{k-1})$$

являются взаимно независимыми случайными величинами; 4) для любого $\varepsilon>0$

$$\mathsf{P}(|X(\tau)|>\varepsilon)\longrightarrow 0$$

при $\tau\to 0$. Для такого процесса значение $X(\tau)$ при любом τ будет иметь Б. д. р. и соответствующая характеристич. функция удовлетворяет соотношению:

$$f_\tau(t)=(f_1(t))^\tau.$$

Общий вид $f_\tau(t)$ для таких процессов в предположении конечности дисперсий $\mathsf{D}X(\tau)$ был найден А. Н. Колмогоровым [2] (частный случай приводимого ниже общего канонич. представления Б. д. р.).

Характеристич. функция Б. д. р. нигде не обращается в нуль, и ее логарифм (в смысле главного значения) допускает представление вида:

$$\ln f(\tau)=i\gamma t+\int_{-\infty}^{+\infty}L(u,\ t)\,\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)\qquad(*)$$

(так наз. к а н о н и ч е с к о е п р е д с т а в л е н и е Л е в и — Х и н ч и н а), где

$$L(u,\ t)=e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2},$$

γ — нек-рая действительная постоянная, $G(u)$ — неубывающая функция ограниченной вариации с $G(-\infty)=0$. Подинтегральное выражение при $u=0$ принимают равным $-t^2/2$. При любом выборе постоянной γ

и функции $G(x)$ с указанными выше свойствами формула (*) определяет логарифм характеристич. функции нек-рого Б. д. р. Соответствие между Б. д. р. и парами (γ, G) взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Последнее означает, что Б. д. р. слабо сходятся к предельному Б. д. р. тогда и только тогда, когда $\gamma_n \to \gamma$ и $G_n(x)$ слабо сходятся к $G(x)$ при $n \to \infty$.

Примеры. Пусть $U(x)=0$, $x \leqslant 0$, $U(x)=1$, $x>0$. Тогда для нормального распределения с математич. ожиданием a и дисперсией σ^2 в формуле (*) следует положить

$$\gamma = a, \quad G(x) = \frac{\sigma^2}{2} U(x).$$

Для распределения Пуассона с параметром λ имеем

$$\gamma = \frac{\lambda}{2}, \quad G(x) = \frac{\lambda}{2} U(x-1).$$

Для распределения Коши с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

имеем $\gamma = 0$,

$$G(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.$$

Канонич. представление (*) удобно с чисто «технической» точки зрения (благодаря тому, что G имеет ограниченную вариацию), однако функция G не имеет прямого вероятностного истолкования. Поэтому используют и другую форму представления Б. д. р., допускающую непосредственную вероятностную интерпретацию. Пусть функции $M(u)$ и $N(u)$ определены при $u<0$ и $u>0$, соответственно, формулами:

$$dM(u) = \frac{1+u^2}{u^2} dG(u),$$

$$dN(u) = \frac{1+u^2}{u^2} dG(u),$$

$$M(-\infty) = N(\infty) = 0.$$

Эти функции неубывающие, $M(u) \geqslant 0$ при $u<0$ и $N(u) \leqslant 0$ при $u>0$; в окрестности нуля функции могут неограниченно возрастать. Обозначая дополнительно через σ^2 скачок функции G в нуле, формулу (*) можно переписать в виде:

$$\ln f(t) = i\gamma t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{-\infty}^{-0} L(u, t)\, dM(u) + \int_{+0}^{\infty} L(u, t)\, dN(u)$$

(каноническое представление Леви). Функции M и N описывают, грубо говоря, частоту скачков различного размера в однородном процессе $X(\tau)$ с независимыми приращениями, для к-рого

$$\ln f_\tau(t) = \tau \ln f(t).$$

Важная роль Б. д. р. в предельных теоремах теории вероятностей связана с тем, что эти и только эти распределения могут быть предельными для сумм независимых случайных величин, подчиненных требованию *асимптотической пренебрегаемости*. При этом рассматривают последовательность серий $X_{n1}, \ldots, X_{nk_n}$, $n=1, 2, \ldots$, взаимно независимых случайных величин и затем подбирают взаимно независимые случайные величины $Y_{n1}, \ldots, Y_{nk_n}$, имеющие Б. д. р. (так наз. сопровождающие Б. д. р.); характеристич. функция $g_{nk}(t)$ величины Y_{nk} определяется по характеристич. функции $f_{nk}(t)$ величины X_{nk} так, чтобы выполнялось следующее основное свойство: распределения сумм

$$\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} - A_n$$

сходятся к предельному распределению (при нек-ром

выборе констант A_n) тогда и только тогда, когда сходятся к предельному распределения сумм

$$\sum_{k=1}^{k_n} Y_{nk} - A_n.$$

Для симметричного распределения X_{nk} полагают

$$g_{nk}(t) = \exp(f_{nk}(t) - 1).$$

В других случаях выражение g_{nk} сложнее и содержит так наз. урезанные математич. ожидания X_{nk}. Свойства Б. д. р. описывают в терминах функций, входящих в канонич. представления. Так, напр., безгранично делимая функция распределения $F(x)$ непрерывна тогда и только тогда, когда $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2}\, dG(u) = \infty$.

Важным частным случаем Б. д. р. являются так наз. *устойчивые распределения*. См. также *Безгранично делимых распределений разложение*.

Лит.: [1] Finetti B. de, «Atti Accad. naz. Lincei. Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur. Sez. 1», ser. 6, 1929, v. 10, p. 163—68; [2] Колмогоров А. Н., там же, 1932, v. 15, p. 866—69; [3] Lévy P., «Ann. Scuola Norm. di Pisa», 1934, v. 3, p. 337—66; [4] Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, P., 1937; [5] Хинчин А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1938; [6] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949; [7] Fisz M., «Ann. Math. Statist.», 1962, v. 33, p. 68—84; [8] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [9] Сазонов В. В., Тутубалин В. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1966, т. 11, с. 3—55.

Ю. В. Прохоров.

БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ РАЗЛОЖЕНИЕ — представление безгранично делимых распределений в виде композиции (свертки) нек-рых распределений вероятностей. Распределения, участвующие в Б. д. р. р., наз. компонентами разложения.

Нек-рые Б. д. р. р. могут иметь компоненты, к-рые не являются безгранично делимыми распределениями (см. [1]). Важная задача теории Б. д. р. р.— описание класса I_0 безгранично делимых распределений, имеющих только безгранично делимые компоненты. Представители класса I_0: *нормальное распределение*, *Пуассона распределение*, их композиция (см. *Леви — Крамера теорема*).

В исследованиях по проблеме описания класса I_0 важную роль играет введенный Ю. В. Линником [2] класс $\mathfrak{L}$ безгранично делимых распределений, у к-рых функция $G(x)$ в каноническом представлении Леви — Хинчина является функцией скачков с точками роста среди 0, $\mu_{m,1}$, $\mu_{m,2}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где $\mu_{m,1} > 0$, $\mu_{m,2} < 0$ и числа $\mu_{m+1,r}/\mu_{m,r}$ ($r = 1, 2$; $m = 0; \pm 1, \pm 2, \ldots$) — натуральные, отличные от 1. Если безгранично делимое распределение таково, что $G(+0) - G(-0) > 0$, то для его принадлежности к I_0 необходимо, чтобы оно принадлежало к $\mathfrak{L}$. Достаточным это условие не является, но известно, что распределение класса $\mathfrak{L}$ принадлежит I_0, если

$$\int_{|x|>y} dG(x) = O(\exp\{-ky^2\}),$$

при нек-ром $k > 0$ и при $y \to \infty$.

Если $G(+0) - G(-0) = 0$, то принадлежность к $\mathfrak{L}$ не является необходимым условием принадлежности к I_0. Так, напр., к I_0 принадлежат все безгранично делимые распределения, у к-рых функция $G(x)$ постоянна при $x < a$ и $x > b$, где $0 < a < b \leqslant 2a$.

Простое достаточное условие того, чтобы безгранично делимое распределение не принадлежало к I_0, состоит в следующем: на интервале $a < x < b$, где $0 < a < 2a < b$, выполняется неравенство $G'(x) \geqslant \text{const} > 0$. Из этого условия вытекает, что все *устойчивые распределения*, кроме нормального и единичного, а также гамма-распределение и χ^2-распределение, не принадлежат к I_0.

Класс I_0 является плотным в классе всех безгранично делимых распределений в топологии слабой сходимости,

всякое безгранично делимое распределение представляется в виде композиции конечного или счетного множества распределений из I_0.

Лит.: [1] Хинчин А. Я., «Бюлл. МГУ, секц. А», 1937, т. 1, в. 1, с. 6—17; [2] Линник Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1958, т. 3, с. 3—40; [3] его же, Разложения вероятностных законов, Л., 1960; [4] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972; [5] Ramachandran B., Advanced theory of characteristic functions, Calcutta, 1967; [6] Lukas E., Characteristic functions, L., 1970; [7] Лившиц Л. З., Островский И. В., Чистяков Г. П., в сб.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, [т. 12], М., 1975, с. 5—42.

И. В. Островский.

БЕЗИКОВИЧА ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — класс (B^p-п. п.) почти периодических функций, в к-ром справедлив аналог теоремы Рисса — Фишера: *любой тригонометрич. ряд*

$$\sum_n a_n e^{i\lambda_n x},$$

где

$$\sum_n |a_n|^2 < \infty,$$

служит рядом Фурье нек-рой B^2-п. п. функции. Определение Б. п. п. ф. (А. С. Безикович [1], [2]), основанное на обобщении понятия *почти периода*, требует введения нек-рых дополнений. Множество E действительных чисел наз. достаточно однородным, если существует $L>0$ такое, что отношение наибольшего количества членов E в интервале длины L к наименьшему количеству в том же интервале L меньше 2. Достаточно однородное множество является относительно плотным. Комплексная функция $f(x)$, $-\infty<x<\infty$, суммируемая со степенью p в каждом конечном интервале действительной оси, наз. Б. п. п. ф., если каждому $\varepsilon>0$ соответствует достаточно однородное множество чисел [т. н. (B^p,ε)-почти периодов функции $f(x)$]:

$$\ldots<\tau_{-2}<\tau_{-1}<\tau_0<\tau_1<\ldots$$

такое, что для каждого i

$$\overline{M}_x\{|f(x+\tau_i)-f(x)|^p\}<\varepsilon^p,$$

и для каждого $c>0$

$$\overline{M}_x\overline{M}_i\frac{1}{c}\int_x^{x+c}|f(x+\tau_i)-f(x)|^p\,dx<\varepsilon^p,$$

где

$$\overline{M}_x\{F(x)\}=\overline{\lim_{\tau\to\infty}}\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}F(x)\,dx,$$

$$\overline{M}_i\{F(i)\}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}F(i),$$

$F(x)$ — действительная функция, определенная, соответственно, для действительного переменного и натурального аргумента.

Лит.: [1] Besicovitch A. S., «Proc. London Math. Soc.», 1927, v. 27, p. 495—512; [2] его же, там же, 1927, v. 26, p. 25—34; [3] Левитан Б. М., Почти периодические функции, М., 1953.

Е. А. Бредихина.

БЕЗУ КОЛЬЦО — *область целостности* с единицей, в к-рой любой идеал конечного типа является главным. *Любое кольцо главных идеалов, а также любое кольцо* нормирования суть Б. к. Кольцо Безу целозамкнуто, и его локализация (т. е. кольцо частных) снова есть Б. к. Для конечного множества $a_1, \ldots, a_n$ элементов Б. к. A существуют их наибольший общий делитель (причем н. о. д. $(a_1, \ldots, a_n)$ имеет вид $\sum b_i a_i$, $b_i\in A$ — так наз. тождество Безу) и наименьшее общее кратное. Нётерово (и даже атомарное) Б. к.— кольцо главных идеалов. Как и для колец главных идеалов, модуль конечного типа над Б. к. является прямой суммой модуля кручения и свободного модуля.

В. П. Платонов.

БЕЗУ ТЕОРЕМА — 1) Б. т. о делении многочлена на линейный двучлен: остаток от деления многочлена

$$f(x)=a_0x^n+\ldots+a_n$$

на двучлен $x-a$ равен $f(a)$. Предполагается, что коэффициенты многочленов содержатся в нек-ром коммутативном кольце с единицей (напр., в поле действительных или комплексных чисел). Следствие Б. т.: число α является корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится без остатка на двучлен $x-\alpha$.

2) Б. т. для системы однородных уравнений: если система n однородных уравнений от $n+1$ неизвестных

$$f_i(x_0, \ldots, x_n)=0, \quad i=1,2,\ldots, n, \qquad (*)$$

обладает лишь конечным числом непропорциональных ненулевых решений в алгебраически замкнутом поле, содержащем коэффициенты системы, то число этих решений с учетом кратности равно произведению степеней уравнений. Кратность решения есть, по определению, индекс пересечения гиперповерхностей (*) (см. *Пересечения индекс*) в соответствующей точке. Теорема носит имя Э. Безу [1], изучавшего системы алгебраич. уравнений высших степеней.

Лит.: [1] Bézout E., Théorie générale des équations algébriques, P., 1779. *В. Н. Ремесленников, В. Е. Воскресенский.*

БЕЗУСЛОВНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ — суммируемость ряда при любой перестановке его членов. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

наз. безусловно суммируемым нек-рым методом суммирования A (безусловно A-суммируемым), если он суммируем этим методом к сумме s при любой перестановке его членов, где s может зависеть от перестановки (см. *Суммирования методы*). Начало исследований по Б. с. положено В. Орличем [1]; в частности, он показал, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, то из Б. с. ряда линейным регулярным методом (см. *Регулярные методы суммирования*) следует его *безусловная сходимость*. Позднее было показано, что это условие можно заменить более слабым: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=0$ (см. [2]). Б. с. матричным методом не влечет безусловной сходимости, по существу, для единственного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1$. Именно если A — матричный регулярный метод суммирования и ряд (*) безусловно A-суммируем, то все члены ряда имеют вид $a_n=c+\eta_n$, где c — постоянная, а ряд с членами η абсолютно сходится: $\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| < \infty$; при этом $c=0$, если метод A не суммирует ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ (см. [3]).

В случае функциональных рядов рассматривают Б. с. по мере, всюду, почти всюду и т. п. Для Б. с. функциональных рядов почти всюду справедливо утверждение: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ измеримых на множестве E функций $f_n(x)$ безусловно A-суммируем почти всюду на E, то члены ряда имеют вид $f_n(x)=f(x)+\eta_n(x)$, где $f(x)$ — конечная измеримая на E функция, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x)$ безусловно сходится почти всюду на E; при этом $f(x)=0$, если метод A не суммирует ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ (см. [2]).

Лит.: [1] Orlicz W., «Bull. de l'Acad. polonaise», 1927, № 3A, p. 117—25; [2] Ульянов П. Л., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, №5, с. 781—808; [3] Гапошкин В. Ф., Олевский А. М., «Науч. докл. высш. школы. Физ.-матем. науки», 1958, т. 6, с. 81—86. *И. И. Волков.*

БЕЗУСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ — свойство ряда сходиться при любой перестановке его членов. Точнее, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (*)$$

из элементов линейного пространства E, в к-ром определено понятие сходящейся последовательности, наз. безусловно сходящимся, если он сходится при любой перестановке его членов.

Одно направление исследований относится к изучению безусловно сходящихся рядов в векторных метри-

ческих (или топологических) пространствах (см. [1] — [3]). Так, для Б. с. ряда (*) из элементов банахова пространства E необходимо и достаточно, чтобы каждый частичный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k}$, $n_1 < n_2 < \ldots$, был сходящимся [4]. Б. с. числового ряда равносильна его абсолютной сходимости (см. *Римана теорема* о перестановке членов ряда). Вообще, если E — конечномерное векторное нормированное пространство, то Б. с. ряда равносильна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \| u_n \|_E$. В бесконечномерном банаховом пространстве такое утверждение неверно.

Другое направление исследований касается свойств безусловно сходящихся почти всюду функциональных (или ортогональных) рядов [5]. Эти свойства зачастую принципиально отличны от свойств Б. с. рядов в банаховых пространствах. Так, напр., аналог сформулированной выше теоремы Орлича не имеет места для Б. с. почти всюду [6].

Лит.: [1] Банах С., Курс функціонального аналізу, К., 1948; [2] Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [3] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., [ч. 1], М., 1962; [4] Orlicz W., «Stud. math.», 1929, t. 1, p. 241—55; [5] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [6] Ульянов П. Л., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 3, с. 61—142. *Б. И. Голубов.*

БЕЙЕСА ФОРМУЛА — формула, позволяющая вычислять апостериорные вероятности событий (или гипотез) через априорные вероятности. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — полная группа несовместимых событий: $\bigcup A_i = \Omega$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Тогда апостериорная вероятность $P(A_i|B)$ события A_i при условии, что произошло событие B (с $P(B)>0$), может быть найдена по формуле Бейеса:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\,P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B|A_i)}, \qquad (*)$$

где $P(A_i)$ — априорная вероятность события A_i, $P(B|A_i)$ — условная вероятность события B при условии, что произошло событие A_i (с $P(A_i)>0$). Б. ф. доказана Т. Бейесом (T. Bayes, опубликована в 1763).

Формула (*) является частным случаем следующего абстрактного варианта Б. ф. Пусть θ и ξ — случайные элементы со значениями в измеримых пространствах (Θ, B_Θ) и (X, B_X) и $\mathsf{E}|g(\theta)| < \infty$. Для всякого множества $A \in F_\xi = \sigma\{\omega : \xi(\omega)\}$ положим

$$G(A) = \int_\Omega g(\theta(\omega))\,\mathsf{E}[I_A(\omega)\,|\,F_\theta](\omega)\,P(d\omega),$$

где $F_\theta = \sigma\{\omega : \theta(\omega)\}$ и $I_A(\omega)$ — индикатор множества A. Тогда мера G абсолютно непрерывна относительно меры P ($G \ll P$) и $\mathsf{E}[g(\theta)\,|\,F_\xi](\omega) = \frac{dG}{dP}(\omega)$, где $\frac{dG}{dP}(\omega)$ — производная Радона — Никодима меры G по мере P.

Лит.: [1] Колмогоров А.Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974. *А. Н. Ширяев.*

БЕЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА — оценка неизвестного параметра по результатам наблюдений при *бейесовском подходе*. При таком подходе к задачам статистич. оценивания обычно предполагается, что неизвестный параметр $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ является случайной величиной с заданным (априорным) распределением $\pi = \pi(d\theta)$, пространство решений D совпадает с множеством Θ, а потери $L(\theta, d)$ отражают расхождение между значением θ и его оценкой d. Поэтому, как правило, считается, что функция $L(\theta, d)$ имеет вид $L(\theta, d) = a(\theta)\lambda(\theta - d)$, где λ — некоторая неотрицательная функция от вектора погрешностей $\theta - d$. В случае $k=1$ часто полагают $\lambda(\theta - d) = |\theta - d|^\alpha$, $\alpha > 0$; при этом наиболее употребительной и математически более удобной оказывается квадратичная функция потерь $L(\theta, d) = |\theta - d|^2$. Для такой функции потерь Б. о. (*бейесовская решающая*

функция) $\delta^*=\delta^*(x)$ определяется как функция, на к-рой достигаются минимальные полные потери

$$\inf_{\delta}\rho(\pi,\delta)=\inf_{\delta}\int_{\Theta}\int_{X}|\theta-\delta(x)|^2\,P_\theta(dx)\,\pi(d\theta),$$

или, что эквивалентно, минимальные условные потери

$$\inf_{\delta}\mathsf{E}\left\{[\theta-\delta(x)]^2\mid x\right\}.$$

Отсюда следует, что в случае квадратичной функции потерь Б. о. $\delta^*(x)$ совпадает с апостериорным средним: $\delta^*(x)=\mathsf{E}(\theta|x)$, а байесовский риск

$$\rho(\pi,\delta^*)=\mathsf{E}\,[\mathsf{D}(\theta\mid x)],$$

где $\mathsf{D}(\theta|x)$ — дисперсия апостериорного распределения:

$$\mathsf{D}(\theta\mid x)=\mathsf{E}\left\{[\theta-\mathsf{E}(\theta\mid x)]^2\mid x\right\}.$$

Пример. Пусть $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, где $x_1,\ \ldots,\ x_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие нормальные распределения $N(\theta,\ \sigma^2)$, σ^2 известно, а неизвестный параметр θ имеет нормальное распределение $N(\mu,\ \tau^2)$. Поскольку апостериорное распределение для θ (при заданном x) является нормальным $N(\mu_n,\ \tau_n^2)$ с

$$\mu_n=\frac{n\bar{x}\sigma^{-2}+\mu\tau^{-2}}{n\sigma^{-2}+\tau^{-2}},\quad \tau_n^{-2}=n\sigma^{-2}+\tau^{-2},$$

где $\bar{x}=(x_1+\ldots+x_n)/n$, то в случае квадратичной функции потерь $|\theta-d|^2$ байесовская оценка $\delta^*(x)=\mu_n$, а байесовский риск равен $\tau_n^2=\sigma^2\tau^2/(n\tau^2+\sigma^2)$. *А. Н. Ширяев.*

БАЙЕСОВСКАЯ РЕШАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ — правило (функция) $\delta=\delta(x)$, которое сопоставляет каждому результату статистич. эксперимента x решение $\delta(x)$ со значениями в заданном множестве решений и доставляет минимум полным потерям, определяемым в рамках *байесовского подхода* к статистич. задачам. *А. Н. Ширяев.*

БАЙЕСОВСКИЙ ПОДХОД к статистическим задачам — подход, основанный на предположении, что всякому параметру в статистич. проблеме принятия решения приписано нек-рое распределение вероятностей. Всякая общая статистич. проблема принятия решения определяется следующими элементами: пространством $(X,\ \mathscr{B}_X)$ выборок x, пространством $(\Theta,\ \mathscr{B}_\Theta)$ значений неизвестного параметра θ, семейством распределений вероятностей $\{P_\theta,\ \theta\in\Theta\}$ на $(X,\ \mathscr{B}_X)$, пространством решений $(D,\ \mathscr{B}_D)$ и функцией $L(\theta,\ d)$, характеризующей потери от принятия решения d, когда истинное значение параметра есть θ. Цель же проблемы принятия решения состоит в отыскании в определенном смысле наилучшего правила (решающей функции) $\delta=\delta(x)$, сопоставляющей каждому результату наблюдения $x\in X$ решение $\delta(x)\in D$. При Б. п., когда считается, что неизвестный параметр θ является случайной величиной с заданным (априорным) распределением $\pi=\pi(d\theta)$ на $(\theta,\ \mathscr{B}_\theta)$, наилучшая решающая функция (*байесовская решающая функция*) $\delta^*=\delta^*(x)$ определяется как функция, на к-рой достигаются минимальные полные потери $\inf\limits_{\delta}\rho(\pi,\ \delta)$, где

$$\rho(\pi,\ \delta)=\int_{\Theta}\rho(\theta,\ \delta)\,\pi(d\theta),$$

а

$$\rho(\theta,\ \delta)=\int_{X}L(\theta,\ \delta(x))\,P_\theta(dx).$$

Таким образом,

$$\rho(\pi,\ \delta^*)=\inf_{\delta}\int_{\Theta}\int_{X}L(\theta,\ \delta(x))\,P_\theta(dx)\,\pi(d\theta).$$

При отыскании байесовской решающей функции $\delta^*=\delta^*(x)$ полезным оказывается следующее замечание. Пусть $P_\theta(dx)=p(x|\theta)d\mu(x)$, $\pi(d\theta)=\pi(\theta)d\nu(\theta)$, где μ и ν — некоторые σ-конечные меры. Тогда, предполагая

возможным смену порядков интегрирования, находим

$$\int_\Theta \int_X L(\theta, \delta(x)) P_\theta(dx)\, \pi(d\theta) =$$

$$= \int_\Theta \int_X L(\theta, \delta(x))\, p(x \mid \theta)\, \pi(\theta)\, d\mu(x)\, d\nu(\theta) =$$

$$= \int_X d\mu(x) \left[\int_\Theta L(\theta, \delta(x))\, p(x \mid \theta)\, \pi(\theta)\, d\nu(\theta) \right].$$

Отсюда видно, что для данного $x \in X$ $\delta^*(x)$ есть то значение d^*, на к-ром достигается

$$\inf_d \int_\Theta L(\theta, d)\, p(x \mid \theta)\, \pi(\theta)\, d\nu(\theta)$$

или, что эквивалентно,

$$\inf_d \int_\Theta L(\theta, d)\, \frac{p(x \mid \theta)\, \pi(\theta)}{p(x)}\, d\nu(\theta),$$

где

$$p(x) = \int_\Theta p(x \mid \theta)\, \pi(\theta)\, d\nu(\theta).$$

Но по *Бейеса формуле*

$$\int_\Theta L(\theta, d)\, \frac{p(x \mid \theta)\, \pi(\theta)}{p(x)}\, d\nu(\theta) = \mathsf{E}[L(\theta, d) \mid x].$$

Тем самым для данного x $\delta^*(x)$ есть то значение d^*, на к-ром достигают минимума условные средние потери $\mathsf{E}[L(\theta, d) \mid x]$.

Пример (Б. п. в задаче различения двух простых гипотез). Пусть $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, $D = \{d_1, d_2\}$, $L_{ij} = L(\theta_i, d_j)$, $i, j = 1, 2$; $\pi(\theta_1) = \pi_1$, $\pi(\theta_2) = \pi_2$, $\pi_1 + \pi_2 = 1$. Отождествляя решение d_i с принятием гипотезы H_i: $\theta = \theta_i$, естественно считать, что $L_{11} < L_{12}$, $L_{22} < L_{21}$. Тогда

$$\rho(\pi, \delta) = \int_X [\pi_1 p(x \mid \theta_1)\, L(\theta_1, \delta(x)) +$$

$$+ \pi_2 p(x \mid \theta_2)\, L(\theta_2, \delta(x))]\, d\mu(x),$$

откуда следует, что $\inf_\delta \rho(\pi, \delta)$ достигается на функции

$$\delta^*(x) = \begin{cases} d_1, \text{ если } \dfrac{p(x \mid \theta_2)}{p(x \mid \theta_1)} \leqslant \dfrac{\pi_1}{\pi_2} \dfrac{L_{12} - L_{11}}{L_{21} - L_{22}}, \\ d_2, \text{ если } \dfrac{p(x \mid \theta_2)}{p(x \mid \theta_1)} > \dfrac{\pi_1}{\pi_2} \dfrac{L_{12} - L_{11}}{L_{21} - L_{22}}. \end{cases}$$

Преимущество Б. п. состоит в том, что полные потери $\rho(\pi, \delta)$ оказываются числом (в отличие от потерь $\rho(\theta, \delta)$, зависящих от неизвестного параметра θ), и, следовательно, заведомо существуют, если и не оптимальные, то, по крайней мере, ε-оптимальные ($\varepsilon > 0$) решающие функции δ^*_ε, для к-рых

$$\rho(\pi, \delta^*_\varepsilon) \leqslant \inf_\delta \rho(\pi, \delta) + \varepsilon.$$

Недостатком Б. п. является необходимость постулировать как существование априорного распределения для неизвестного параметра, так и знание его формы (в определенной степени последнее обстоятельство преодолевается в рамках *бейесовского подхода эмпирического*).

Лит.: [1] Вальд А., Статистические решающие функции, в сб.: Позиционные игры, М., 1967, с. 300—522; [2] Де Гроот М., Оптимальные статистические решения, пер. с англ., М., 1974.

А. Н. Ширяев.

БЕЙЕСОВСКИЙ ПОДХОД ЭМПИРИЧЕСКИЙ — статистич. интерпретация *бейесовского подхода* к построению выводов о ненаблюдаемых значениях случайных параметров при неизвестном их *априорном распределении*. Пусть (Y, X) — случайный вектор, причем предполагается, что плотность $p(y|x)$ условного распределения Y при любом заданном значении случайного параметра $X = x$ известна. Если в результате нек-рого эксперимента наблюдается лишь реализация Y, а соответствующая реализация X неизвестна и требуется оценить значение заданной функции $\varphi(X)$ от ненаблюдаемой реализации, то согласно Б. п. э. в качестве приближенного значения $\psi(Y)$ для $\varphi(X)$ следует ис-

пользовать условное математич. ожидание $\mathsf{E}\{\varphi(X)|Y\}$, к-рое в силу *Бейеса формулы* выражается отношением

$$\psi(Y)=\left[\int \varphi(x)\,p(Y\mid x)\,p(x)\,d\mu(x)\right]\Big/ q(Y), \qquad (1)$$

где

$$q(y)=\int p(y\mid x)\,p(x)\,d\mu(x), \qquad (2)$$

$p(x)$ — плотность безусловного (априорного) распределения X, $\mu(x)$ — соответствующая σ-конечная мера; функция $q(y)$ представляет собой плотность безусловного распределения Y.

Если априорная плотность $p(x)$ неизвестна, то вычисление значений ψ и q невозможно. Однако, если имеется достаточно большое количество реализаций независимых случайных величин $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$, подчиняющихся распределению с плотностью $q(y)$, то для $q(y)$ можно построить состоятельную оценку $\hat{q}(y)$, зависящую лишь от $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$. Для оценки значения $\psi(Y)$ С. Н. Бернштейн [1] предложил заменить в (2) $q(y)$ на $\hat{q}(y)$ и найти решение $\hat{p}(x)$ этого интегрального уравнения, а затем подставить $\hat{p}$ и $\hat{q}$ в правую часть (1). Однако этот путь затруднителен, так как решение указанного интегрального уравнения принадлежит к числу некорректно поставленных задач вычислительной математики.

В нек-рых исключительных случаях статистич. подход может быть применен не только для оценки q, но и ψ (см. [3]). Такая возможность возникает тогда, когда справедливо тождество относительно x и y

$$\varphi(x)\,p(y\mid x)=\lambda(y)\,r[z(y)\mid x], \qquad (3)$$

где $\lambda(y)$ и $z(y)$ — функции, зависящие лишь от y, а $r(z|x)$ как функция от z является плотностью вероятности (т. е. ее можно рассматривать как плотность условного распределения нек-рой случайной величины Z при заданном значении $X=x$). Если (3) справедливо, то числитель отношения (1) равен произведению $\lambda(Y)s[z(Y)]$, где $s(z)=\int r(z|x)p(x)d\mu(x)$ — плотность безусловного распределения Z. Т. о., если имеется достаточно большое количество реализаций независимых случайных величин $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$, подчиняющихся распределению с плотностью $s(z)$, то для $s(z)$ можно построить состоятельную оценку $\hat{s}(z)$, а значит, и найти состоятельную оценку $\hat{\psi}(Y)$ для $\psi(Y)$:

$$\varphi(X)\approx\psi(Y)\approx\hat{\psi}(Y)=\lambda(Y)\,\hat{s}[z(Y)]/\hat{q}(Y). \qquad (4)$$

Напр., если требуется оценить $\varphi(X)=X^h$ (h целое >0), причем $p(y|x)=x^y e^{-x}/y!$ ($y=0, 1, 2, \ldots$; $x>0$), то $\varphi(x)p(y|x)=\lambda(y)p(y+h|x)$, где $\lambda(y)=(y+h)!/y!$. Так как здесь $r(z|x)=p(z|x)$, то $s(z)=q(z)$. Поэтому $\hat{\psi}(Y)=\lambda(Y)\hat{q}(Y+h)/\hat{q}(Y)$, т. е. для отыскания $\hat{\psi}$ нужна лишь последовательность реализаций $Y_1, Y_2, \ldots$. Если же $p(y|x)=b_n(y|x)=C_n^y x^y(1-x)^{n-y}$ ($y=0, 1, \ldots, n$; n целое >0; $0\leqslant x\leqslant 1$), то $\varphi(x)p(y|x)=\lambda(y)r(y+h|x)$, где $\lambda(y)=C_n^y/C_{n+h}^{y+h}$ и $r(z|x)=b_{n+h}(z|x)\neq p(z|x)$. Поэтому для построения $\hat{\psi}(Y)$ в этом случае нужно иметь две последовательности эмпирических значений Y_i и Z_j.

Указанная методика Б. п. э. применима к весьма узкому классу плотностей $p(y|x)$ и функций $\varphi(x)$, удовлетворяющему условию (3); и если даже это условие выполняется, то для построения оценки (4) нужно располагать реализациями случайных величин Z_j, распределение к-рых, как правило, отлично от распределения непосредственно наблюдаемых величин Y_i. Для практич. целей предпочтительнее видоизмененная методика Б. п. э., лишенная указанных недостатков. Суть этого видоизменения заключается в построении не самой состоятельной оценки для $\psi(Y)$ (эта оценка может и не существовать), а нижней и верхней оценок для этой

функции, отыскание к-рых сводится к решению задачи линейного программирования следующим образом. Пусть $\Psi_1(Y)$ и $\Psi_2(Y)$ — условные минимум и максимум линейного функционала (относительно неизвестной априорной плотности $p(x)$) в числителе (1), вычисленные при линейных условиях $p(x)\geqslant 0$, $\int p(x)d\mu(x)=1$ и $q(Y)\equiv\int p(Y|x)p(x)d\mu(x)=\hat{q}(Y)$ ($\hat{q}(Y)$ — упомянутая выше оценка для $q(Y)$, построенная по результатам наблюдений $Y_1, \ldots, Y_k$). В таком случае можно заключить, что $\Psi_1(Y)/\hat{q}(Y)\leqslant\psi(Y)\leqslant\Psi_2(Y)/\hat{q}(Y)$, причем вероятность справедливости такого заключения в силу *больших чисел закона* стремится к единице при неограниченном увеличении количества случайных величин Y_i, используемых при построении оценки $\hat{q}(Y)$. Возможны и другие видоизменения Б. п. э., напр., за счет добавления к последнему условию $q(Y)=\hat{q}(Y)$ конечного числа условий вида $q(y_i)=\hat{q}(y_i)$, где y_i — заранее заданные числа; если $\hat{q}$ заменить соответствующими доверительными пределами для q, то получаются условия в виде неравенств $q_1(y_i)\leqslant q(y_i)\leqslant q_2(y_i)$ и т. д.

В нек-рых практически важных случаях для функций Ψ_1 и Ψ_2 удается найти удовлетворительные мажоранты, вычисляемые без применения трудоемких методов линейного программирования (см. пример, посвященный статистич. контролю, в ст. *Выборочный метод*).

О применении Б. п. э. к решению задач статистич. проверки гипотез о значениях случайных параметров см. *Дискриминантный анализ*.

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1941, т. 5, с. 85—94; [2] Большев Л. Н., в кн.: Международный конгресс математиков в Ницце, 1970. Доклады советских математиков, М., 1972, с. 48—55; [3] Robbins H., в кн.: Proceedings Berkeley Symposium Mathematical Statistics and Probability, v. 1, Berk.—Los Ang., 1956, p. 157—63.

Л. Н. Большев.

БЕЙТМЕНА МЕТОД — метод приближения интегрального оператора одномерного интегрального уравнения Фредгольма II рода, частный случай *вырожденных ядер метода*. В Б. м. вырожденное ядро $K_N(x, s)$ строится по правилу:

$$K_N(x,\ s)=-\frac{\begin{vmatrix} 0 & K(x,\ s_1) & \ldots & K(x,\ s_N)\\ K(x_1,\ s) & K(x_1,\ s_1) & \ldots & K(x_1,\ s_N)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K(x_N,\ s) & K(x_N,\ s_1) & \ldots & K(x_N,\ s_N)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K(x_1,\ s_1) & \ldots & K(x_1,\ s_N)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ K(x_N,\ s_1) & \ldots & K(x_N,\ s_N)\end{vmatrix}},$$

где s_i, x_i, $i=1, 2, \ldots, N$,— нек-рые точки отрезка интегрирования в рассматриваемом интегральном уравнении. Б. м. предложен Г. Бейтменом [1].

Лит.: [1] Bateman H., «Messeng. Math.», 1908, v. 37, p. 179—87; [2] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.—Л., 1962.

А. Б. Бакушинский.

БЕЙТМЕНА ФУНКЦИЯ, k-функция,— функция

$$k_\nu(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(x\operatorname{tg}\theta-\nu\theta)\,d\theta, \qquad (1)$$

где x и ν—действительные числа; определена Г. Бейтменом [1]. Б. ф. может быть выражена с помощью вырожденной гипергеометрич. функции 2-го рода $\psi(a, b, x)$:

$$\Gamma(\nu+1)\,k_{2\nu}(x)=e^{-x}\psi(-\nu,\ 0;\ 2x),\quad x>0. \qquad (2)$$

Соотношение (2) удобно принять в качестве определения Б. ф. в комплексной плоскости с разрезом $(0, \infty)$. Справедливы следующие соотношения: для случая (1)

$$k_\nu(-x)=k_{-\nu}(x),$$

для случая (2)

$$k_{2\nu}(-\xi\pm i0)=k_{-2\nu}(\xi)-e^{\pm\nu\pi i}\cdot e^{\xi}\,\Phi(-\nu,\ 0,\ -2\xi),$$

где $\xi>0$, $\Phi(a, b; x)$ — вырожденная гипергеометрич. функция 1-го рода.

Лит.: [1] Bateman H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1931, v. 33, p. 817—31; [2] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, пер. с англ., 2 изд., М., 1973.
Л.Н. Кармазина.

БЕЛЛМАНА УРАВНЕНИЕ — 1) Дифференциальное уравнение с частными производными специального типа для решения задачи *оптимального управления*. В случаях, когда удается найти решение задачи Коши для Б. у., нетрудно построить оптимальное решение исходной задачи. 2) Рекуррентное соотношение для решения дискретной задачи оптимального управления. Метод получения оптимального решения с помощью Б. у. носит назв. *динамического программирования*.

Лит.: [1] Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960.
В. Г. Карманов.

БЕЛЛМАНА — ХАРРИСА ПРОЦЕСС — частный случай *ветвящегося процесса с зависимостью от возраста*, впервые рассмотренный Р. Беллманом и Т. Харрисом [1]. В Б.— Х. п. предполагается, что частицы живут независимо друг от друга случайное время, а в конце жизни производят случайное число новых частиц. Если $G(t)$ — функция распределения времени жизни частиц, $h(s)$ — производящая функция числа непосредственных потомков одной частицы, и если при $t=0$ была одна частица нулевого возраста, то производящая функция $F(t;\ s)=\mathsf{E}s^{\mu(t)}$ числа частиц $\mu(t)$ удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$F(t;\ s)=\int_0^t h(F(t-u;\ s))\,dG(u)+s(1-G(t)).$$

В случае

$$G(t)=1-e^{-\lambda t},\quad t\geqslant 0,$$

Б.— Х. п. есть марковский ветвящийся процесс с непрерывным временем.

Лит.: [1] Bellman R., Harris T., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1948, v. 34, № 12, p. 601—04.
Б. А. Севастьянов.

БЕЛЫЙ ШУМ — обобщенный стационарный случайный процесс $X(t)$ с постоянной *спектральной плотностью*. Корреляционная (обобщенная) функция процесса Б. ш. имеет вид: $B(t)=\sigma^2\delta(t)$, где σ^2 — нек-рая положительная постоянная, а $\delta(t)$ — дельта-функция. Процесс Б. ш. широко используется в приложениях для описания случайных возмущений с очень малым временем корреляции (напр., «теплового шума» — пульсаций силы тока в проводнике, вызываемых тепловым движением электронов). В спектральном разложении Б. ш.

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,dz(\lambda)$$

«элементарные колебания» $e^{i\lambda t}\,dz(\lambda)$ при всех частотах λ имеют в среднем одинаковую интенсивность, точнее, их средний квадрат амплитуды есть

$$\mathsf{E}\,|\,dz(\lambda)\,|^2=\frac{\sigma^2}{2\pi}\,d\lambda,\qquad -\infty<\lambda<\infty.$$

Указанное выше спектральное разложение означает, что для любой интегрируемой с квадратом функции $\varphi(t)$

$$\langle X,\ \varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,X(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(\lambda)\,dz(\lambda),$$

где $\tilde{\varphi}(\lambda)$ — преобразование Фурье $\varphi(t)$; более явная зависимость обобщенного процесса $X=\langle X,\ \varphi\rangle$ от функции $\varphi(t)$ может быть описана с помощью соответствующей стохастич. меры $d\eta(t)$ того же типа, что и $dz(\lambda)$ ($d\eta(t)$ — преобразование Фурье стохастич. меры $dz(\lambda)$), а именно

$$\langle X,\ \varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,d\eta(t).$$

Гауссовский белый шум $X(t)$, являющийся обобщенной производной от броуновского движения $\eta(t)$ ($X(t)=\eta'(t)$), служит основой для построения стохастических *диффузионных процессов* $Y(t)$, «управляемых» стохастическими дифференциальными уравнениями вида

$$Y'(t)=a(t,\ Y(t))+\sigma(t,\ Y(t))\cdot\eta'(t);$$

эти ура
циалов:

$$dY(t)=a(t,\ Y(t))dt+\sigma(t,\ Y(t))d\eta(t).$$

Другой важной моделью с использованием Б. ш. является случайный процесс $Y(t)$, описывающий поведение устойчивой колебательной системы под воздействием стационарных случайных возмущений $X(t)$, когда $Y(s)$, $s<t$, не зависят от $X(u)$, $u>t$; простейшим примером может служить система вида

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)Y(t)=X(t),$$

где $P(z)$ — многочлен с корнями в левой полуплоскости; после затухания «переходных процессов»

$$Y(t)=\int\frac{1}{P(i\lambda)}\,dz(\lambda).$$

В приложениях, при описании так наз. процессов *дробового эффекта*, большую роль играет Б. ш. вида

$$X(t)=\sum\nolimits_k\delta(t-\tau_k)$$

(k изменяется от $-\infty$ до ∞ и $\ldots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \ldots$ — случайные моменты, распределенные во времени по пуассоновскому закону), точнее, $X(t)$ является обобщенной производной пуассоновского процесса $\eta(t)$. Сам процесс дробового эффекта имеет вид:

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}c(t,\ s)\,X(s)\,ds=\int_{-\infty}^{\infty}c(t,\ s)\,d\eta(s)=$$

$$=\sum\nolimits_k c(t,\ s-\tau_k),$$

где $c(t, s)$ — нек-рая весовая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}|c(t,\ s)|^2\,ds<\infty;$$

при этом среднее значение обобщенного процесса $X=\langle X,\ \varphi\rangle$ есть

$$a(\varphi)=a\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,dt,$$

где a — параметр упомянутого выше пуассоновского закона, и стохастич. мера $dz(\lambda)$ в спектральном представлении

$$X(t)=a+\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\,dz(\lambda)$$

этого процесса такова, что

$$\mathsf{E}\,|dz(\lambda)|^2=\frac{a}{2\pi}\,d\lambda.$$

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, М., 1967. *Ю. А. Розанов.*

БЕЛЬТРАМИ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — реализация части плоскости Лобачевского на псевдосфере — поверхности постоянной отрицательной кривизны. В Б. и. *геодезические линии* и их отрезки на псевдосфере играют роль прямых и их отрезков на плоскости Лобачевского. Изометрич. отображение псевдосферы на себя представляет собой движения на плоскости Лобачевского, сохраняющие орикруги. Длины, углы и площади на псевдосфере соответствуют длинам, углам и площадям на плоскости Лобачевского. При этих условиях каждому утверждению планиметрии Лобачевского, относящемуся к куску плоскости Лобачевского, отвечает непосредственный факт внутренней геометрии псевдосферы. Б. и. реализует часть плоскости Лобачевского, вся же плоскость Лобачевского не может быть реализована в трехмерном евклидовом пространстве в виде регулярной поверхности (теорема Гильберта).

Б. и. была предложена Э. Бельтрами (E. Beltrami) в 1868 (см. [1]). В этом мемуаре им впервые была приведена реализация «воображаемой геометрии» Лобачевского в трехмерном евклидовом пространстве.

О других интерпретациях геометрии Лобачевского см. *Клейна интерпретация*, *Пуанкаре интерпретация*.

Лит.: [1] Бельтрами Э., Опыт интерпретации неевклидовой геометрии, в кн.: Об основаниях геометрии, М., 1956; [2] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1—2, М.—Л., 1949—56. *Е. В. Шикин.*

БЕЛЬТРАМИ КООРДИНАТЫ — координаты на поверхности, в к-рых все геодезич. линии выражаются линейными уравнениями. Поверхности, допускающие введение Б. к., наз. проективными (проективные преобразования таких поверхностей переводят геодезические в геодезические). Названы по имени Э. Бельтрами (E. Beltrami), к-рый рассмотрел такие поверхности в 1866. *Е. В. Шикин.*

БЕЛЬТРАМИ МЕТОД — метод решения волнового уравнения с тремя пространственными переменными, предложенный Э. Бельтрами (E. Beltrami) в 1864. Б. м. основан на том, что на поверхности характеристич. конуса с помощью внутренних дифференциальных операторов волновое уравнение преобразуется к специальному простому виду и для решения $u(x,\ t)$ используется формула

$$4\pi u\ (x_0,\ t) = \int\int_{\Omega} \left(u - \tau \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma,$$

где Ω — сфера $\{x;\ |x-x_0|=\tau\}$. Б. м. может быть применен в случае неоднородного уравнения и уравнения с любым нечетным числом пространственных переменных.

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964. *Ш. А. Алимов, В. А. Ильин.*

БЕЛЬТРАМИ УРАВНЕНИЕ — см. *Лапласа — Бельтрами уравнение.*

БЕЛЬТРАМИ — ЭННЕПЕРА ТЕОРЕМА о свойстве *асимптотических линий* поверхности отрицательной кривизны [Э. Бельтрами (E. Beltrami), 1866; А. Эннепер (A. Enneper), 1870]: если кривизна асимптотич. линии в заданной точке отлична от нуля, то квадрат кручения этой линии равен абсолютному значению кривизны поверхности в этой точке. Б.— Э. т. переносится на случай, когда кривизна асимптотич. линии в данной точке равна нулю. Квадрат кручения заменяется квадратом скорости вращения касательной плоскости к поверхности в этой точке при смещении по асимптотической. Асимптотич. линии, исходящие из одной точки, имеют кручения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку. *Е. В. Шикин.*

БЕМОЛЬНАЯ НОРМА r-мерной полиэдральной цепи A в пространстве E^n — норма $|A|^\flat$, определяемая следующим образом:

$$|A|^\flat = \inf\{|A - \partial D|^\flat + |D|\},$$

где $|C|$ — *масса* цепи C, ∂C — ее граница, и нижняя грань берется по всем $(r+1)$-мерным полиэдральным цепям. Свойства Б. н.:

$$|aA|^\flat = |a|\,|A|^\flat,\quad |A+B|^\flat \leqslant |A|^\flat + |B|^\flat,$$

$$|A|^\flat = 0 \Leftrightarrow A = 0,\quad |A|^\flat \leqslant |A|,\quad |\sigma|^\flat = |\sigma|$$

для любой клетки σ, если π — проекция E^n на нек-рую плоскость, то $|\pi A|^\flat \leqslant |A|^\flat$.

Пополнение линейного пространства полиэдральных цепей $C_r(E^n)$ является сепарабельным банаховым пространством $C_r^\flat(E^n)$; элементы его наз. r-мерными бемольными цепями, и каждой из них можно приписать конечную или бесконечную массу:

$$|A|_\flat = \inf\left\{\varliminf_{i\to\infty} |A_i|,\ A_i \xrightarrow[\flat]{} A — \text{полиэдральные цепи}\right\}.$$

Граница ∂ бемольной цепи также определяется предельным переходом, она является непрерывной операцией, и

$$|\partial A|^\flat \leqslant |A|^\flat,\quad |A|^\flat = \inf\{|A - \partial D|^\flat + |D|^\flat\}.$$

Б. н. представляет собой наибольшую из полунорм $|\cdot|'$ в $C_r(E^n)$, удовлетворяющую для любой клетки σ

неравенствам: $|\sigma^r|' \leqslant |\sigma^r|$, $|\partial\sigma^{r+1}|' \leqslant |\sigma^{r+1}|$. r-мерная бемольная цепь X — линейная функция r-мерных бемольных цепей A (обозначается через $X \cdot A$) такая, что ($|X|$ — комасса X)

$$|X \cdot A| \leqslant N |A|^\flat \text{ для нек-рого } N.$$

Она является элементом сопряженного с $C_r^\flat(E^n)$ пространства $C^{\flat r}(E^n)$, к-рое оказывается несепарабельным.

Бемольная норма $|X|^\flat$-мерной бемольной цепи X определяется стандартным образом:

$$|X|^\flat = \sup_{|A|^\flat = 1} |X \cdot A|,$$

так что

$$|A|^\flat = \sup_{|X|^\flat = 1} |X \cdot A| \quad \text{и} \quad |X \cdot A| \leqslant |X|^\flat |A|^\flat,$$

причем $$|X| \leqslant |X|^\flat.$$

Для координаты dX бемольной коцепи (определяемой условием: $dX \cdot A = X \cdot dA$): $|dX|^\flat \leqslant |X|^\flat$,

так что $$|X|^\flat = \sup \{|X|, |dX|\}.$$

Аналогичные понятия вводятся для полиэдральных r-мерных цепей, расположенных в открытых подмножествах $R \subset E^n$. См. также *Бемольная форма*.

Лит.: [1] Уитни Х., Геометрическая теория интегрирования, пер. с англ., М., 1960. *М. И. Войцеховский.*

БЕМОЛЬНАЯ ФОРМА — измеримая r-мерная дифференциальная форма ω на открытом множестве $R \subset E^n$ такая, что:

комасса $|\omega|_0 \leqslant N_1$ для нек-рого N_1;

существует N_2 с

$$\left| \int_{\partial\sigma^{r+1}} \omega \right| \leqslant N_2 |\sigma^{r+1}|$$

для любого симплекса σ^{r+1}, удовлетворяющего условию: существует измеримое $Q \subset R$, $|R \setminus Q|_n = 0$ такое, что ω измерима на σ^{r+1} и на любой из его граней σ^r, составляющих $\partial\sigma^{r+1}$, причем

$$|\sigma^{r+1} \setminus Q|_{r+1} = 0, \quad |\sigma^r \setminus Q|_r = 0;$$

здесь $|M|_s$ означает s-мерную меру Лебега пересечения множества M с нек-рой s-мерной плоскостью.

Если X есть r-мерная бемольная коцепь в R, то существует ограниченная r-мерная форма ω_X в R, измеримая в любом симплексе σ^r относительно плоскости, содержащей σ^r, и

$$X\sigma^r = \int_{\sigma^r} \omega_X, \tag{1}$$

причем $$|\omega_X|_0 = |X|, \quad |\omega_{dX}|_0 = |dX|,$$

где $|X|$ — комасса коцепи X. Обратно, любой r-мерной Б. ф. ω в R соответствует по формуле (1) единственная r-мерная бемольная коцепь X_ω для любого симплекса σ^r, удовлетворяющего вышеуказанному условию, причем

$$|X_\omega| \leqslant N_1, \quad |dX_\omega| \leqslant N_2.$$

Форма ω и коцепь X наз. ассоциированными. Формы, ассоциированные с одной и той же коцепью, эквивалентны, т. е. равны почти всюду в R, и среди них есть бемольный представитель.

Между n-мерными бемольными коцепями X и классами эквивалентных измеримых ограниченных функций $\varphi(p)$ существует взаимно однозначное соответствие, при к-ром $\omega_X = \varphi(p)\, dp$, а

$$\varphi(p) = \lim_{i \to \infty} \frac{X\sigma_i}{|\sigma_i|},$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ — последовательность n-мерных симплексов, стягивающихся к точке p так, что их диаметры $\to 0$,

но

$$\frac{|\sigma_i|}{(\operatorname{diam}\sigma_i)^n} \geqslant \eta$$

при нек-ром η для всех i, $|\sigma_i|$ — объем σ_i.

Пусть $\alpha(p)$ — измеримая суммируемая функция в R, значениями к-рой являются r-векторы; она наз. соответствующей r-мерной бемольной цепи A, если

$$\int_R \omega_X \cdot \alpha = X \cdot A \qquad (2)$$

для всех r-мерных бемольных коцепей X (и тогда A наз. лебеговой цепью). Отображение $\alpha \to A$ является линейным взаимно однозначным отображением множества классов эквивалентности функций $\alpha(p)$ в пространство бемольных цепей $C_r^\flat(R)$, причем $|A| = \int_R |\alpha|_0$, где $|A|$ — *масса* цепи A, $|\alpha|_0$ — масса r-вектора $\alpha(p)$. Кроме того, множество образов непрерывных функций α плотно в $C_r^\flat(R)$.

Представления (1) и (2) обобщают аналогичные результаты для *диезных форм* и диезных коцепей; напр., дифференциал Б. ф. ω_X, определяемый формулой $d\omega_X = \omega_{dX\omega}$, является также Б. ф., и выполнена теорема Стокса: $\int_{\partial\sigma} \omega = \int_\sigma d\omega$ для любого симплекса σ; r-мерная бемольная коцепь — слабый предел гладких коцепей, т. е. таких, для к-рых ассоциированные формы ω являются гладкими, и т. д.

Лит.: [1] Уитни Х., Геометрическая теория интегрирования, пер. с англ., М., 1960.

М. И. Войцеховский.

БЕНДИКСОНА КРИТЕРИЙ — теорема, позволяющая установить отсутствие замкнутых траекторий у динамич. систем на плоскости:

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y). \qquad (*)$$

Впервые был указан И. Бендиксоном [1] в следующей формулировке: если в односвязной области G выражение $P'_x + Q'_y$ знакопостоянно (т. е. сохраняет знак и обращается в нуль лишь в отдельных точках или на нек-рых кривых), то система $(*)$ не имеет в области G замкнутых траекторий. Обобщение Б. к. принадлежит А. Дюлаку [2]: если G — односвязная область в плоскости x, y, функции P и $Q \in C^1(G)$ и если найдется такая функция $f(x, y) \in C^1(G)$, что

$$\iint_D \left\{ \frac{\partial (fP)}{\partial x} + \frac{\partial (fQ)}{\partial y} \right\} dxdy \neq 0$$

для любой односвязной подобласти $D \subset G$, то в области G не существует ни одной простой спрямляемой замкнутой кривой, составленной из траекторий и особых точек системы $(*)$. В случае кольцеобразной области G аналогичная теорема утверждает единственность замкнутой траектории (если она существует) системы $(*)$. Возможно обобщение на случай системы $(*)$ с цилиндрич. фазовым пространством (см. [3]).

Лит.: [1] Bendixson I., «Acta Math.», 1901, Bd 24, № 1, S. 1—88; [2] Dulac H., «C.r. Acad. sci.», 1937, t. 204, № 23, p. 1703—06; [3] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959.

Н. Х. Розов.

БЕНДИКСОНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — отображение

$$u = \frac{4x}{x^2 + y^2}, \qquad v = \frac{4y}{x^2 + y^2}$$

«проколотой» в точке (0,0) евклидовой плоскости (x, y) на такую же плоскость (u, v), представляющее собой координатное выражение биекции φ, порождаемой *Бендиксона сферой*. В случае совпадения плоскостей (u, v) и (x, y) Б. п. есть инверсия плоскости (x, y) относительно окружности $x^2 + y^2 = 4$.

Лит.: [1] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966. *А. Ф. Андреев.*

БЕНДИКСОНА СФЕРА — сфера в вещественном анализе, к-рая в теории функций комплексного переменного известна как *Римана сфера*.

Пусть Σ: $X^2+Y^2+Z^2=1$ есть единичная сфера в евклидовом пространстве (X, Y, Z), $N(0, 0, 1)$ и $S(0, 0, -1)$ — ее северный и южный полюсы, соответственно; ν и σ — касательные плоскости к Σ в точках N и S, соответственно; xSy и uNv — системы координат в σ и ν, оси к-рых параллельны соответствующим осям системы XOY в плоскости $Z=0$ и одинаково направлены с ними; наконец, пусть Π — *стереографическая проекция* Σ на σ из центра N, Π' — стереографич. проекция Σ на ν из центра S. Тогда Σ есть Б. с. по отношению к любой из плоскостей σ, ν. Порождаемая ею биекция $\varphi=\Pi'\Pi^{-1}$ плоскости σ (с «выколотой» точкой S) на («проколотую» в точке N) плоскость ν применяется при изучении вопроса о поведении траекторий вещественной алгебраической (правые части уравнений — многочлены от искомых функций) автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка в окрестности бесконечно удаленной точки фазовой плоскости. Она сводит этот вопрос к аналогичному вопросу для окрестности точки (0,0). Названа по имени И. Бендиксона (I. Bendixson).

Лит.: [1] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966. *А. Ф. Андреев.*

БЕРГМАНА КЕРНФУНКЦИЯ — функция комплексных переменных, обладающая свойством воспроизводящего ядра и определяемая для любой области $D\subset\mathbb{C}^n$, в к-рой существуют голоморфные функции $f\not\equiv 0$, принадлежащие классу $L^2(D)$ по мере Лебега dV. Введена С. Бергманом [1]. Множество указанных функций f образует гильбертово пространство $L^2_h(D)\subset L^2(D)$ с ортонормированным базисом $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$; $L^2_h(D)=L^2(D)\bigcap O(D)$, где $O(D)$ — пространство голоморфных функций. Функция

$$K_D(z, \zeta)=K(z,\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(z)\overline{\varphi_j(\zeta)},$$

$$z=(z_1, \ldots, z_n), \quad \zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_n),$$

наз. Б. к. (или просто ядерной функцией) области D. Ряд справа равномерно сходится на компактных подмножествах D и принадлежит $L^2_h(D)$ при каждом фиксированном $\zeta\in D$, его сумма не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{\varphi_j\}$. Б. к. зависит от $2n$ комплексных переменных и определена в области $D\times D\subset\mathbb{C}^{2n}$; она обладает свойством симметрии $K(\zeta, z)=\overline{K(z, \zeta)}$, голоморфна по переменным z и антиголоморфна по ζ. Если $D=D'\times D''$, $D'\subset\mathbb{C}^m$, $D''\subset\mathbb{C}^{n-m}$, то

$$K_D(z, \zeta)=K_{D'}(z', \zeta')K_{D''}(z'', \zeta''),$$

где $z'=(z_1, \ldots, z_m)$, $z''=(z_{m+1}, \ldots, z_n)$.

Основным свойством Б. к. является ее воспроизводящее свойство: для любой функции $f\in L^2_h(D)$ и любой точки $z\in D$ справедливо интегральное представление

$$f(z)=\int_D f(\zeta)K(z, \zeta)\,dV(\zeta).$$

Экстремальные свойства Б. к. 1) Для любой точки $z\in D$

$$K(z, z)=\sup\{|f(z)|^2: f\in L^2_h(D), \|f\|_{L^2(D)}\leqslant 1\}.$$

2) Пусть точка $\zeta\in D$ такова, что в классе $L^2_h(D)$ имеются функции с условием $f(\zeta)=1$. Тогда функция $K(z, \zeta)/K(\zeta, \zeta)$ удовлетворяет этому условию и имеет норму $K(\zeta, \zeta)^{-1/2}$, минимальную для всех таких f. Функция $K(z, \zeta)/K(\zeta, \zeta)$ наз. экстремальной функцией области D.

Изменение Б. к. при биголоморфных отображениях выражается в следующей теореме: если φ — биголоморфное отображение области D на область D^*, $\varphi(z)=w$, $\varphi(\zeta)=\eta$, то

$$K_{D^*}(w,\ \eta)=K_D(z,\ \zeta)\frac{dz}{dw}\frac{\overline{d\zeta}}{d\eta},$$

где $\frac{dz}{dw}$ — якобиан обратного отображения. Благодаря этому свойству эрмитова квадратичная форма

$$ds^2=\sum_{j,\ k=1}^{n}\frac{\partial^2\log K(z,\ z)}{\partial z_j\,\partial\overline{z}_k}\,dz_j\,d\overline{z}_k$$

инвариантна относительно биголоморфных отображений.

Функция $K(z)=K(z,\ z)$, к-рую также наз. кернфункцией, играет значительную роль во внутренней геометрии областей. В общем случае она неотрицательная, а функция $\log K(z)$ плюрисубгармоническая. В областях D, для к-рых $K(z)$ положительная (напр., в ограниченных областях), функции $K(z)$ и $\log K(z)$ строго плюрисубгармонические. Последнее эквивалентно тому, что в таких областях D указанная форма ds^2 положительно определена и, следовательно, задает в D эрмитову римانову метрику. Эта метрика не меняется при биголоморфных отображениях и наз. м е т р и к о й Б е р г м а н а. Ее можно рассматривать как частный случай *Кэлера метрики*. Из экстремального свойства 1) следует, что коэффициенты метрики Бергмана неограниченно возрастают при подходе к нек-рым граничным точкам. Если $D\subset\mathbb{C}^n$ — строго псевдовыпуклая область или аналитич. полиэдр, то $K(z)$ неограниченно возрастает при любом подходе z к границе области D. Всякая область, обладающая этим свойством Б. к., является областью голоморфности.

Для простейших областей Б. к. вычисляется в явном виде. Напр., Б. к. для шара B: $|z|<R$ в $\mathbb{C}^n$ имеет вид:

$$K_B(z,\ \zeta)=\frac{n!R^n}{\pi^n}\left(R^2-\sum_{j=1}^{n}z_j\overline{\zeta}_j\right)^{-n-1},$$

для поликруга U: $|z_j|<R_j$, $j=1,\ \ldots,\ n$, в $\mathbb{C}^n$:

$$K_U(z,\ \zeta)=\frac{1}{\pi^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{R_j^2}{\left(R_j^2-z_j\overline{\zeta}_j\right)^2}.$$

В частном случае, когда $n=1$ и область U есть круг $|z|<R$ на комплексной плоскости z, метрика Бергмана обращается в классическую гиперболич. метрику

$$ds^2=\frac{2R^2}{(R^2-|z|^2)^2}\,|dz|^2,$$

инвариантную относительно конформных отображений и определяющую в U геометрию Лобачевского.

Лит.: [1] B e r g m a n S., The kernel function and conformal mapping, N. Y., 1950; [2] Ф у к с Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963; [3] Ш а б а т Б. В., Введение в комплексный анализ, М., 1969, ч. 2, гл. 4.

Е. М. Чирка.

БЕРГМАНА — ВЕЙЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ, Б е р г м а н а — В е й л я ф о р м у л а, В е й л я ф о р м у л а,— интегральное представление голоморфных функций, полученное А. Вейлем и С. Бергманом (см. [1], [2]) и определяемое следующим образом. Пусть D — область голоморфности в $\mathbb{C}^n$, функции $W_1,\ \ldots,\ W_N$ голоморфны в D и $V=\{z\in D\colon |W_k(z)|<1,\ k=1,\ \ldots,\ N\}\Subset D$. Тогда любую функцию f, голоморфную в V и непрерывную в $\overline{V}$ в любой точке $z\in V$, можно представить формулой

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum\int\frac{f(\zeta)\det(P_{ijk})}{\prod_{k=1}^{n}(W_{j_k}(\zeta)-W_{j_k}(z))}\,d\zeta,\qquad(*)$$

где суммирование производится по всем $j_1<\ldots<j_n$, а интегрирование — по соответствующим образом ориентированным n-мерным поверхностям $\sigma_{j_1,\ \ldots,\ j_n}$, образующим остов области V (см. *Аналитический полиэдр*), $d\zeta=d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n$, а функции $P_{ij}(\zeta,\ z)$ голоморфны

в области $D\times D$ и определяются в соответствии с Хефера теоремой (см. [3], с. 245) из равенств

$$W_j(\zeta)-W_j(z)=\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i-z_i)\,P_{ij}(\zeta,z).$$

Интегральное представление (*) наз. представлением Бергмана – Вейля.

Области V, фигурирующие в Б.– В. п., наз. областями Вейля; обычно для них требуется дополнительное условие, чтобы ранги матриц $(\partial W_{j\nu}/\partial z_\mu)$, $\nu=1,\ldots,k$, $\mu=1,\ldots,n$, $k\leqslant n$, на соответствующих множествах

$$\{z\in\overline{V}\colon |W_{j_1}|=\ldots=|W_{j_k}|=1\}$$

были максимальными ($=k$) для всех $j_1<\ldots<j_k$ (такие области Вейля наз. регулярными). Области Вейля в Б.– В. п. можно заменить аналитическими полиэдрами

$$U=\{z\in D\colon W_j(z)\in D_j,\ j=1,\ldots,N\}\Subset D,$$

где D_j – ограниченные области с кусочно гладкими границами ∂D_j на плоскости С. Б.– В. п. определяет значение голоморфной функции f внутри аналитич. полиэдра U по значениям f на его остове σ; при $n>1$ размерность σ строго меньше размерности ∂U. При $n=1$ аналитич. полиэдры вырождаются в области с кусочно гладкими границами, остов и граница совпадают, а если еще $N=1$ и $W(z)=z$, то Б.– В. п. совпадает с интегральной формулой Коши.

Важным свойством Б.– В. п. является голоморфность (по z) его ядра. Поэтому если вместо голоморфной функции f поставить произвольную интегрируемую на σ функцию, то правая часть Б.– В. п. даст функцию, голоморфную всюду в U и почти всюду в $D\setminus\partial U$; такие функции наз. интегралами типа Бергмана – Вейля. Если f голоморфна в U и непрерывна в $\overline{U}$, то ее интеграл типа Бергмана – Вейля равен нулю почти всюду в $D\setminus\overline{U}$.

Из Б.– В. п. в области Вейля V после замены

$$(W_{j_k}(\zeta)-W_{j_k}(z))^{-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{W_{j_k}^{\nu}(z)}{W_{j_k}^{\nu+1}(\zeta)}$$

получается разложение Вейля

$$f(z)=$$

$$=\sum_{s_k\geqslant 0}\sum_{j_1<\ldots<j_k}Q_{j_1\ldots j_n s_1\ldots s_n}(z)\left(W_{j_1}^{s_1}(z)\ldots W_{j_k}^{s_k}(z)\right)$$

в ряд по функциям, голоморфным в области D, и этот ряд сходится равномерно на компактных подмножествах V.

Лит.: [1] Weil A., «Math. Ann.», 1935, Bd 111, S. 178—82; [2] Bergman S., «Матем., сб.», 1936, т. 1, с. 242—57; [3] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964. *Е. М. Чирка.*

БЕРЕНСА — ФИШЕРА ПРОБЛЕМА — аналитическая проблема, возникшая в связи со статистич. задачей сравнения по эмпирич. данным математич. ожиданий в двух нормальных распределениях, дисперсии к-рых неизвестны (предполагается, что отношение дисперсий также неизвестно). Эта задача была поставлена В. Беренсом [1] в связи с вопросом обработки данных об урожайности. Современная формулировка Б.– Ф. п. принадлежит Р. Фишеру (R. Fisher) и основана на понятии достаточной статистики. Пусть $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$ и $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$ – взаимно независимые случайные величины, распределенные нормально, причем $\mathsf{E}X_{1i}=\mu_1$, $\mathsf{E}(X_{1i}-\mu_1)^2=\sigma_1^2$ ($i=1,\ldots,n_1$) и $\mathsf{E}X_{2j}=\mu_2$, $\mathsf{E}(X_{2j}-\mu_2)^2=\sigma_2^2$ ($j=1,\ldots,n_2$). Предполагается, что значения математич. ожиданий μ_1, μ_2, дисперсий σ_1^2, σ_2^2, а также их отношения σ_1^2/σ_2^2 неизвестны. Достаточная статистика в случае $n_1\geqslant 2$, $n_2\geqslant 2$ есть четырехмерный

вектор $(\overline{X}_1, \overline{X}_2, S_1^2, S_2^2)$, компоненты к-рого выражаются формулами

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i},\ \overline{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} X_{2j},$$

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\overline{X}_1)^2,\ S_2^2 = \sum_{j=1}^{n_2}(X_{2j}-\overline{X}_2)^2$$

и представляют собой взаимно независимые случайные величины, причем $\sqrt{n_1}(\overline{X}_1-\mu_1)/\sigma_1$ и $\sqrt{n_2}(\overline{X}_2-\mu_2)/\sigma_2$ подчиняются стандартному нормальному распределению, а S_1^2/σ_1^2 и S_2^2/σ_2^2 – распределению хи-квадрат с n_1-1 и n_2-1 степенями свободы соответственно. Поскольку достаточная статистика несет в себе ту же информацию о неизвестных параметрах μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2, что и исходные случайные величины X_{1i} и X_{2j} в количестве n_1+n_2, то при проверке гипотез о значениях этих параметров разумно рассматривать лишь достаточную статистику. В частности, это соображение служит основой современной формулировки задачи о проверке гипотезы, согласно к-рой $\mu_1-\mu_2=\Delta$ (Δ – заранее заданное число); при этом Б.– Ф. п. заключается в отыскании такого множества K_α в пространстве возможных значений случайных величин $\overline{X}_1-\overline{X}_2$, S_1^2, S_2^2, чтобы при справедливости проверяемой гипотезы вероятность события $(\overline{X}_1-\overline{X}_2,\ S_1^2,\ S_2^2)\in K_\alpha$ не зависела от всех неизвестных параметров и в точности равнялась наперед заданному числу α из интервала $0<\alpha<1$.

Вопрос о существовании решения Б.– Ф. п. долгое время дискутировался видными математиками (главным образом в связи с предложенным Р. Фишером подходом к этой проблеме, по существу выходящим за рамки теории вероятностей). В 1964 Ю. В. Линник (совместно с учениками) доказал, что при объемах выборок n_1 и n_2 разной четности решение Б.– Ф. п. K_α существует. Вопрос же о существовании решения для n_1 и n_2 одинаковой четности остался открытым.

Б.– Ф. п. неоднократно подвергалась видоизменениям и обобщениям. В частности, А. Вальд (A. Wald) предложил задачу об отыскании множества K_α в пространстве двух переменных $(\overline{X}_1-\overline{X}_2)/S_1^2$ и S_1^2/S_2^2. Вопрос о существовании такого решения остается открытым. Однако можно эффективно построить такое множество K_α^*, что в случае справедливости проверяемой гипотезы $\mu_1-\mu_2=\Delta$ вероятность события $((\overline{X}_1-\overline{X}_2)/S_1^2,\ S_1^2/S_2^2)\in K_\alpha^*$ хотя и будет зависеть от неизвестного отношения σ_1^2/σ_2^2, но ее отклонение от заданного α будет мало. Это обстоятельство и служит основой современных рекомендаций для практич. построения критериев сравнения μ_1 и μ_2.

Простые и удобные в вычислительном отношении критерии для сравнения μ_1 и μ_2 предложены В. И. Романовским, М. Бартлеттом (M. Bartlett), Г. Шеффе (H. Scheffe) и др. Однако статистики этих критериев в терминах достаточной статистики не выражаются и поэтому имеют, вообще говоря, меньшую мощность, чем критерии, конструируемые с помощью решения Б.– Ф. п. и ее обобщений.

Лит.: [1] Behrens W. U., «Landwirtsch. Jahrb.», 1929, Bd 68, №. 6, S. 807–37; [2] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [3] Линник Ю. В., Романовский И. В., Судаков В. Н., «Докл. АН СССР», 1964, т. 155, № 6, с. 1262–64. *Л. Н. Большев.*

БЁРКИЛЯ ИНТЕГРАЛ — понятие, введенное Дж. Бёркилем [1] для определения площади поверхности. В современном виде Б. и. вводится для интегрирования неаддитивной функции $F(J)$ n-мерного сегмента (бруса). Пусть R есть множество, представимое в виде суммы (объединения) конечного числа сегментов (такое множество наз. фигурой). Каждое представление $R=\bigcup J_k$ наз. разбиением фигуры R. Верхним Б. и. и нижним Б. и. от функции

сегмента $F(J)$ по фигуре R наз. соответственно верхний и нижний пределы сумм $\Sigma_k F(J_k)$ для всевозможных разбиений при стремлении к нулю максимума диаметров сегментов, входящих в разбиение. Если эти интегралы равны, то их общее значение наз. интегралом Бёркиля от функции F по R и обозначается $\int_R F$. Если F интегрируема на R, то F интегрируема на каждой фигуре $R_1 \subset R$. Тем самым вводится неопределенный Б. и., к-рый является аддитивной функцией множества. Если F непрерывна, то и неопределенный Б. и. непрерывен.

Понятие Б. и. может быть обобщено на случай функции множества, определенной на нек-ром классе подмножеств абстрактного пространства с мерой. Этот класс должен удовлетворять ряду требований; в частности, каждое множество из данного класса должно допускать разбиение на составляющие множества из того же класса, имеющие произвольно малые меры. Тогда для любого множества из класса определяется Б. и. по аналогии с n-мерным случаем, причем соответствующие пределы берутся при стремлении к нулю максимума мер составляющих множеств. Б. и. естественным образом обобщается на функции множества со значениями в коммутативной топологич. группе. Б. и. является менее общим, чем введенный позднее *Колмогорова интеграл*, наз. также интегралом Бёркиля — Колмогорова. Всякая интегрируемая по Бёркилю функция интегрируема по Колмогорову при соответствующем упорядочении разбиений. Обратное верно лишь при нек-рых дополнительных условиях. Б. и. используется для построения *Данжуа интеграла* в различных пространствах.

Интегралом Бёркиля наз. также ряд введенных Дж. Бёркилем обобщений *Перрона интеграла* (*AP*-интеграл, *CP*-интеграл, *SCP*-интеграл), в определении к-рых вместо обычных производных чисел используются нек-рые обобщенные производные числа. Эти Б. и. находят применение в теории тригонометрич. рядов.

Лит.: [1] Burkill J. C., «Proc. London Math. Soc.», ser. 2, 1924, v. 22, p. 275—336; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [3] Романовский П. И., «Матем. сб.», 1941, т. 9, № 1, с. 67—120; [4] Burkill J. C., «Proc. London Math. Soc.», ser. III, 1951, v. 1, № 1, p. 46—57.

В. А. Скворцов.

БЁРНСАЙДА ПРОБЛЕМА — 1) Б. п. о конечных группах: существуют ли неразрешимые конечные группы нечетного порядка? Другая формулировка: имеют ли все конечные простые неабелевы группы четные порядки? Эта Б. п. связана с именем У. Бёрнсайда, отметившего в 1897, что порядки всех известных к тому времени простых неабелевых групп четны [1]. Решена в 1962 У. Фейтом и Дж. Томпсоном [2], показавшими, что все конечные группы нечетного порядка разрешимы.

Лит.: [1] Burnside W., The theory of groups of finite order, 2 ed., Camb., 1911; [2] Feit W., Thompson J., «Pacific J. Math.», 1963, v. 13, № 3, p. 775—1029. *В. Д. Мазуров.*

2) Б. п. о периодических группах; поставлена У. Бёрнсайдом в 1902 (см. [1]): всегда ли конечна конечно порожденная группа, каждый элемент к-рой имеет конечный порядок (неограниченная Б. п.)? Эта Б. п. может быть сформулирована также в виде вопроса: будет ли *локально конечной группой* всякая периодическая группа? У. Бёрнсайд специально выделил важный случай этой проблемы, когда порядки всех элементов группы ограничены в совокупности (ограниченная Б. п.), т. е. в группе выполняется тождественное соотношение $x^n = 1$ при нек-ром натуральном n. Наибольшее внимание было привлечено именно к ограниченному варианту Б. п. Другими словами, изучалась факторгруппа $B(d,n) = F/F^n$ свободной группы F с $d \geqslant 2$ образующими по подгруппе F^n, порожденной n-ми степенями f^n всех

элементов $f \in F$. Известны следующие результаты: $B(d, 2)$ — элементарная абелева группа порядка 2^d; $B(d,3)$ — конечная группа порядка 3^{m_d}, где $m_d = d + \binom{d}{2} + \binom{d}{3}$ (см. [1], [2]); $B(d, 4)$ — конечная группа (порядка 2^{12} при $d=2$ и 2^{69} при $d=3$ (см. (1), (3), (4)); $B(d, 6)$ — конечная группа порядка $2^s\ 3^t$, где $s = 1 + (d-1)3^{m_d}$, $t = m_r$ и $r = 1 + (d-1)2^d$ (см. [5],[6]). В 1959 (см. [7]) было анонсировано отрицательное решение ограничений Б. п. В [8] опубликовано отрицательное решение неограниченной Б. п. В дальнейшем была предложена еще одна конструкция периодич. группы, не являющейся локально конечной [9]. В 1968 (см. [10]) было опубликовано доказательство теоремы о бесконечности группы $B(d, n)$, $d \geqslant 2$, для всех нечетных $n \geqslant 4381$ (отрицательное решение ограниченной Б. п.). Позднее было доказано, что в $B(d, n)$ разрешимы проблема тождества слов и проблема сопряженности; $B(d, n)$ не может быть задана конечным числом *определяющих соотношений*; все конечные подгруппы в $B(d, n)$ абелевы, а все абелевы подгруппы являются циклическими; $B(d, n)$, $d \geqslant n$, не удовлетворяют ни условию максимальности, ни условию минимальности для нормальных подгрупп; $B(d, n)$, $d > 2$, изоморфно вкладывается в группу $B(2, n)$. Изучению свойств бесконечных групп $B(d, n)$ на основе усовершенствованных методов из [10] посвящена монография [11], где, в частности, указанная выше граница для нечетных n снижена до $n \geqslant 665$. Трудной задачей является окончательное разграничение показателей n, к-рым соответствуют конечные или бесконечные группы $B(d, n)$. Значения $n=5$ и $n=2^m$, $m \geqslant 3$, представляют в этой связи особый интерес. Остается открытым (1977) вопрос о локальной конечности групп с условием минимальности для подгрупп; в классе 2-групп ответ на него положителен (см. [12]).

С сер. 30-х гг. стала постепенно выкристаллизовываться мысль о том, что для теории конечных групп важно, собственно, знать ответ на следующий вопрос: будет ли порядок любой конечной группы с d образующими и тождественным соотношением $x^n = 1$ ограничен сверху нек-рым натуральным числом $b(d, n)$, зависящим только от d и n? Это так наз. о с л а б л е н н а я Б. п. Она решена положительно для любого простого показателя $n=p$ (см. [13]). Доказано, таким образом, существование универсальной конечной p-группы $\overline{B(d, p)}$ порядка $b(d, p)$, факторгруппам к-рой изоморфны все другие конечные p-группы с d образующими и соотношением $x^p = 1$. В случае конечности $B(d, p)$ имеет место совпадение: $\overline{B(d, p)} = B(d, p)$. Сопоставление результатов из [10] и из [13] приводит к существованию при достаточно большом p конечно порожденной бесконечной простой p-группы показателя p. Было доказано, что $b(2,5) = 5^{34}$. Для $b(d, p)$ при $p \geqslant 7$ имеются лишь нек-рые оценки снизу, связанные с соответствующими оценками для класса нильпотентности $c(d, p)$ группы $\overline{B(d, p)}$. По-видимому, $c(2, p)$ не может быть линейной функцией p. Что более существенно, $c(d, p)$ растет неограниченно вместе с d (см. [14], [15]). Вопрос о существовании $\overline{B}(d, n)$ при $n = p^m$, $m > 1$, начиная с $n=8$ и 9, открыт (1977). В то же время из результатов, полученных в [6] и [13], а также из теоремы о разрешимости групп нечетного порядка (см. *Бернсайда проблема* о конечных группах) и нек-рых классификационных фактов о простых группах вытекает существование $b(d, n)$ для всех n, свободных от квадратов.

В первоначальном решении [8] неограниченной Б. п. и ослабленной Б. п. [13] для простого показателя p использован выход в теорию алгебр, в первом случае — на основе признака бесконечномерности алгебры, а во втором — на основе одного тождества в *Ли алгебрах*, являющегося аналогом тождества $x^p = 1$ в группах

(см. [16], [17]). Проблемы бернсайдовского типа, помимо уже упомянутых, получили весьма широкое распространение (см. [8], [9]).

Лит.: [1] Burnside W., «Quart. J. Pure and Appl. Math.», 1902, v. 33, p. 230—38; [2] Levi F. W., Van der Waerden B. L., «Abh. Math. Sem. in Univ., Hamburg», 1932, Bd 9, S. 154—58; [3] Санов И. Н., «Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем.», 1940, в. 10, с. 166—70; [4] Bayes A. J., Kautsky J., Wamsley T. W., в кн.: Proc. Second internat. conf. theory of groups, Canberra, 1973, p. 82—89; [5] Hall M., «Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.», 1957, v. 43, p. 751—53; [6] Hall Ph., Higman G., «Proc. London Math. Soc.», 1956, v. 6, № 21, p. 1—42; [7] Новиков П. С. «Докл. АН СССР», 1959, т. 127, № 4, с. 749—52; [8] Голод Е. С., в кн.: Труды Международного конгресса математиков, М., 1968, с. 284—89; [9] Алёшин С. В., «Матем. заметки», 1972, т. 11, № 3, с. 319—28; [10] Новиков П. С., Адян С. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1968, т. 32, № 1, с. 212—44, № 3, с. 709—31; [11] Адян С. И., Проблема Бернсайда и тождества в группах, М., 1975; [12] Шмидт О. Ю., Избранные труды. Математика, М., 1959, с. 298—300; [13] Кострикин А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 1, с. 3—34; [14] Buchmuth S. M., Muchizuki H. Y., Walkup D. W., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1970, v. 76, № 3, p. 638—40; [15] Размыслов Ю. П., «Алгебра и логика», 1971, т. 10, № 1, с. 33—44; [16] Magnus W., «J. reine und angew. Math.», 1937, Bd 177, № 1, S. 105—15; [17] Higman G., в кн.: Proceedings of the International congress of mathematicians, Camb., 1960, p. 307—12; [18] Курош А. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1941, т. 5, с. 233—40.

А. И. Кострикин.

БЕРНУЛЛИ АВТОМОРФИЗМ — автоморфизм пространства с мерой, описывающий *Бернулли испытания* и их обобщение — последовательность независимых испытаний, имеющих одни и те же исходы и одно и то же распределение вероятностей.

Пусть A — совокупность всевозможных исходов испытания, а вероятность события $B \subset A$ дается мерой ν; для счетного A обозначим его элементы через a_i и их вероятности через $p_i = \nu(a_i)$. Фазовым пространством Б. а. служит прямое произведение счетного числа экземпляров множества A, т. е. точки фазового пространства суть бесконечные последовательности $b = \{b_k\}$, где k пробегает множество целых чисел и каждое $b_k \in A$. Преобразование T состоит в сдвиге всех членов каждой последовательности влево на одно место: $T\{b_k\} = \{b_{k+1}\}$. Мера μ определяется как прямое произведение счетного числа мер ν; таким образом, если A счетно, то

$$\mu\{b : b_{i_1} = a_{j_1}, \ldots, b_{i_k} = a_{j_k}\} = p_{j_1} \ldots p_{j_k}.$$

В последнем случае *энтропия* Б. п. равна $-\Sigma p_i \log p_i$.

В эргодической теории Б. а. (точнее, получающийся при его итерировании каскад) играет роль стандартного примера динамич. системы, в поведении к-рой проявляются статистич. свойства. Б. а. является K-автоморфизмом, но существуют K-автоморфизмы, метрически неизоморфные Б. а., хотя многие K-автоморфизмы метрически изоморфны Б. а. Два Б. а. метрически изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую энтропию [1]. Б. а. является факторавтоморфизмом любого эргодического автоморфизма пространства Лебега с большей энтропией [2].

Лит.: [1] Орнштейн Д., «Математика», 1971, т. 15, № 1, с. 114—30, 131—50; [2] Синай Я. Г., «Матем. сб.», 1964, т. 63, № 1, с. 23—42.

Д. В. Аносов.

БЕРНУЛЛИ БЛУЖДАНИЕ — *случайное блуждание*, порождаемое *Бернулли испытаниями*. На примере Б. б. можно пояснить нек-рые основные черты более общих случайных блужданий. В частности, уже в этой простейшей схеме проявляются свойства «случайности», парадоксальные с точки зрения интуиции.

Б. б. можно описать, напр., в следующих терминах. Частица движется по оси x («блуждает») по решетке точек вида kh (k — целое, $h > 0$). Движение начинается в момент $t = 0$, и положение частицы отмечается только в дискретные моменты времени $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \ldots$. На каждом шаге координата частица увеличивается или уменьшается на величину h с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно, независимо от предшествую-

щего движения. Таким образом, перемещения в положительном и отрицательном направлениях («успехи» и «неудачи») описываются схемой испытаний Бернулли с вероятностью успеха, равной p. Обычно Б. б. изображают геометрически, беря ось t за ось абсцисс, а ось x — за ось ординат (см. рис. 1, где показан начальный участок графика движения частицы, начинающей блуждание из нуля). Пусть X_j — случайная величина, равная перемещению частицы на j-м шаге. Тогда X_1, X_2, ..., X_n, ... образуют последовательность независимых случайных величин. Координата блуждающей частицы в момент $n\Delta t$ равна сумме $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Поэтому график Б. б. дает также наглядное представление о поведении нарастающих сумм случайных величин, причем многие характерные черты флуктуаций сохраняются и для сумм значительно более общих случайных величин. Этот график показывает также изменения капитала одного из игроков в класcич. задаче о разорении (именно в связи с этой задачей были найдены формулы для вероятностей многих событий в Б. б.).

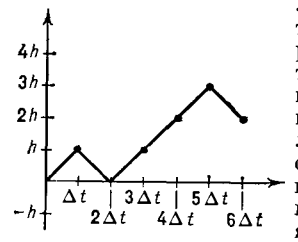


Рис. 1. Начальный участок графика движения частицы, совершающей блуждание Бернулли.

В физике Б. б. используют для грубого описания одномерных процессов диффузии (см. *Диффузионный процесс*) и броуновского движения материальных частиц под действием ударов молекул.

Из важнейших фактов, связанных с Б. б., можно отметить следующие (при этом ниже, если не оговорено противное, принято допущение $\Delta t = 1$, $h = 1$).

Вероятности возвращения. Пусть блуждание начинается из нуля. Тогда вероятность хотя бы одного возвращения в нуль равна $1 - |p - q|$, т. е. равна единице в симметричном случае $p = q = \frac{1}{2}$ и меньше единицы при $p \neq q$. В симметричном случае величины τ_1 (время до первого возвращения в нуль) и τ_2 (время между первым и вторым возвращениями) и т. д. суть независимые случайные величины с бесконечным математич. ожиданием. Время до N-го возвращения, т. е. сумма $\tau_1 + \ldots + \tau_N$ растет как N^2, а среднее число N_{2n} возвращений за $2n$ шагов задается формулой

$$\mathsf{E}(N_{2n}) = \frac{2n+1}{2^{2n}} C_{2n}^{n} - 1$$

и растет как $\sqrt{n}$:

$$\mathsf{E}(N_{2n}) \sim 2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}.$$

Отсюда вытекает парадоксальное следствие: в симметричном Б. б. «волны» на графике между последовательными возвращениями в нуль оказываются поразительно длинными (рис. 2). С этим связано и другое обстоятельство, а именно, что для T_n/n (доли времени, когда график находится выше оси абсцисс) наименее вероятными оказываются значения, близкие к $\frac{1}{2}$. Точнее, справедливо следующее утверждение: при $k \to \infty$, $n - k \to \infty$ для вероятности $p_{2n,\,2k}$ равенства $T_{2n} = 2k$ имеет место формула:

$$p_{2n,\,2k} \sim \frac{1}{\pi n \sqrt{x(1-x)}},$$

где $x = x_{n,k} = k/n$. Следствием является так наз. закон арксинуса: при каждом $0 < \alpha < 1$ вероятность неравенства $T_n/n < \alpha$ стремится к

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\alpha}.$$

Опираясь на этот факт, можно показать, что при 10 000 шагов частица остается на положительной стороне более чем 9930 моментов времени с вероятностью $\geqslant 0{,}1$,

т. е., грубо говоря, подобное положение будет наблюдаться не реже, чем в одном случае из десяти (хотя на первый взгляд оно кажется абсурдным).

Максимальное отклонение. При $p>q$ или $p<q$ блуждающая частица уходит с вероятностью единица в $+\infty$ или $-\infty$. Поэтому, напр., при $p<q$ определена случайная величина

$$M^+ = \max_{0\leqslant j<\infty} S_j,$$

и вероятность того, что $M^+=x$, равна

$$\left(1-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^x.$$

Бернулли блуждание с границами. Часто рассматривают Б. б. при наличии поглощающих или отражающих экранов. Пусть, напр., блуждание начинается из нуля. Наличие в точке a поглощающего экрана проявляется в том, что по достижении этой точки частица перестает двигаться. При наличии в точке $a=(k+1/2)$ ($k\geqslant 0$ целое) отражающего экрана частица с вероятностью q переходит из k в $(k-1)$ и с вероятностью p остается на месте. Основным средством вычисления вероятностей поглощения и вероятностей достижения тех или иных точек служат разностные уравнения. Пусть, напр., поглощающий экран стоит

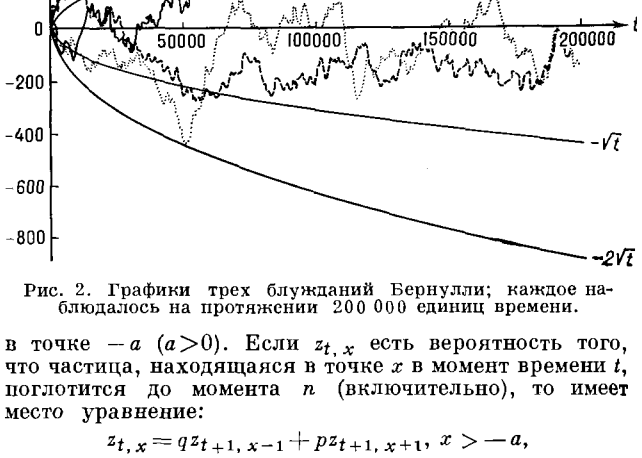


Рис. 2. Графики трех блужданий Бернулли; каждое наблюдалось на протяжении 200 000 единиц времени.

в точке $-a$ ($a>0$). Если $z_{t,x}$ есть вероятность того, что частица, находящаяся в точке x в момент времени t, поглотится до момента n (включительно), то имеет место уравнение:

$$z_{t,x}=qz_{t+1,x-1}+pz_{t+1,x+1},\ x>-a,$$

со следующими очевидными граничными условиями:

$$z_{t,-a}=1,\ 0\leqslant t\leqslant n,$$
$$z_{n,x}=0,\ x>-a.$$

Решение этой задачи при $p=q=1/2$ было известно А. Муавру (A. Moivre) и П. Лапласу (P. Laplace). Формула Лапласа имеет вид:

$$z_{t,x}=1-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(a+x)\varphi}{\sin\varphi}(\cos\varphi)^\gamma d\varphi, \qquad (*)$$

где

$$\gamma=a+x+2\left[\frac{n-t-x-a}{2}\right]+1.$$

Переход к процессам диффузии. Пусть, напр., $p=q=1/2$, $\Delta t=1/N$, $h=1/\sqrt{N}$. Тогда при $N\to\infty$ многие вероятности, вычисленные для схемы Б. б.,

стремятся к пределам, равным аналогичным вероятностям для броуновского движения. Пусть речь идет о вероятности того, что частица, вышедшая из нуля, поглотится экраном, стоящим в точке α, до момента T. Предельным переходом из формулы (*) при $n/N=T$, $t=0$, $x=0$, $a/\sqrt{N}=\alpha$ получается величина

$$1-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\alpha/\sqrt{T}} e^{-z^2/2}\,dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha/\sqrt{T}}^{\infty} e^{-z^2/2}\,dz,$$

равная вероятности того, что координата $X(v)$ частицы, совершающей броуновское движение, удовлетворяет неравенству:

$$\min_{0\leqslant v\leqslant T} X(v)\leqslant -\alpha,$$

т. е. вероятности того, что частица поглотится на барьере $-\alpha$. Для более или менее полного описания всех подобных предельных соотношений уместно встать на общую точку зрения и рассмотреть переход от дискретного процесса «нарастающих сумм» к непрерывному случайному процессу (см. *Предельные теоремы*).

На схеме Б. б. можно весьма наглядно пояснить такие закономерности поведения сумм случайных величин, как *больших чисел усиленный закон* и *повторного логарифма закон*.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967.

Ю. В. Прохоров.

БЕРНУЛЛИ ИНТЕГРАЛ уравнений гидродинамики — интеграл, определяющий давление p в каждой точке установившегося потока идеальной однородной жидкости или баротропного газа ($p=F(\rho)$) через скорость v потока в соответствующей точке и через силовую функцию $u(x, y, z)$ объемных сил:

$$\int\frac{dp}{\rho}=C-\frac{1}{2}|\,v\,|^2+u. \qquad (1)$$

Постоянная C имеет для каждой линии тока свое значение, меняющееся при переходе от одной линии тока к другой. Если движение потенциальное, то постоянная C для всего потока одна и та же.

Для неустановившегося движения Б. и. (наз. иногда интегралом Коши — Лагранжа) имеет место при наличии потенциала скоростей:

$$\int\frac{dp}{\rho}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}|\,v\,|^2+u+f(t), \qquad (2)$$

причем

$$v=\operatorname{grad}\varphi(x, y, z, t)$$

и $f(t)$ есть произвольная функция времени.

Для несжимаемой жидкости левая часть уравнений (1), (2) приводится к виду p/ρ; для баротропного газа ($p=F(\rho)$) — к виду:

$$\int\frac{dp}{\rho}=\int F'(\rho)\,\frac{dp}{\rho}.$$

Б. и. предложен Д. Бернулли (D. Bernoulli, 1738).

Лит.: [1] Милн-Томсон Л. М., Теоретическая гидродинамика, пер. с англ., М., 1964.

Л. Н. Сретенский.

БЕРНУЛЛИ ИСПЫТАНИЯ — независимые испытания с двумя исходами каждое («успехом» и «неудачей») и такие, что вероятности исходов не изменяются от испытания к испытанию. Б. и. служат одной из основных схем, рассматриваемых в теории вероятностей.

Пусть p — вероятность успеха и $q=1-p$ — вероятность неудачи, и пусть 1 обозначает наступление успеха, а 0 — наступление неудачи. Тогда вероятность определенного чередования успехов и неудач, напр.,

$$1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ldots\ 1,$$

равна

$$p\ q\ q\ p\ p\ q\ p\ q\ \ldots\ p=p^m q^{n-m},$$

где m — число успехов в рассматриваемом ряду n испытаний. Со схемой Б. и. связаны многие распростра-

ненные распределения вероятностей. Пусть S_n — случайная величина, равная числу успехов в n Б. и. Тогда вероятность события $\{S_n=k\}$ равна

$$C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

т. е. S_n имеет *биномиальное распределение*. Последнее при $n\to\infty$ аппроксимируется *нормальным распределением* или *Пуассона распределением*. Пусть Y_1 — число испытаний до первого успеха. Тогда вероятность события $\{Y_1=k\}$ равна

$$q^k p,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

т. е. Y_1 имеет *геометрическое распределение*. Если Y_r — число неудач, предшествующих r-му появлению успеха, то Y_r имеет так наз. *отрицательное биномиальное распределение*. Число успехов S_n в Б. и. можно представить в виде суммы $X_1+X_2+\ldots+X_n$ независимых случайных величин, где X_j равно 1, если j-е испытание закончилось успехом, и равно 0 в противном случае. Поэтому многие важные закономерности теории вероятностей, относящиеся к суммам независимых случайных величин, были первоначально установлены для схемы Б. и. (*Бернулли теорема*, *больших чисел закон*, *больших чисел усиленный закон*, *повторного логарифма закон*, *центральная предельная теорема* и т. д.).

Строгое изучение бесконечных последовательностей Б. и. требует введения *вероятностной меры* в пространстве бесконечных последовательностей нулей и единиц. Это можно сделать или непосредственно, или с помощью приема, к-рый иллюстрируется ниже случаем $p=q=1/2$. Пусть ω — число, выбираемое наудачу на отрезке (0, 1) с равномерным распределением, и пусть

$$\omega=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{X_j(\omega)}{2^j},$$

где $X_j(\omega)=0$ или 1, есть разложение ω в двоичную дробь. Тогда X_j, $j=1,\ 2,\ \ldots$, независимы и принимают значения 0 и 1 с вероятностью $1/2$ каждое, т. е. чередование нулей и единиц в двоичном разложении ω описывается схемой Б. и. с $p=1/2$. Однако меру на (0, 1) можно задать и так, чтобы получить Б. и. с любым p (при $p\neq 1/2$ получается мера, сингулярная относительно меры Лебега).

Б. и. часто трактуют геометрически (см. *Бернулли блуждание*). Ряд вероятностей, связанных с Б. и., был вычислен на самой ранней ступени развития теории вероятностей в связи с задачей о разорении игроков.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967; [3] Кац М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963.

А. В. Прохоров.

БЕРНУЛЛИ ЛЕМНИСКАТА — плоская алгебраич. кривая 4-го порядка, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид:

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0;$$

в полярных координатах:

$$\rho^2=2a^2\cos 2\varphi.$$

Б. л. симметрична относительно начала координат O (см. рис.), к-рое является узловой точкой с касательными $y=\pm x$ и точкой перегиба. Радиус кривизны: $r=2a^2/3\rho$. Площадь каждой петли: $S=a^2$. Произведение расстояний каждой точки M Б. л. до двух данных точек $F_1(-a,\ 0)$ и $F_2(a,\ 0)$ равно квадрату расстояний между точками F_1 и F_2. Б. л.— частный случай *Кассини овалов*, *лемнискат*, *синусоидальных спиралей*.



Б. л. названа по имени Я. Бернулли (J. Bernoulli), в статье к-рого впервые встречается уравнение этой кривой (1694).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

БЕРНУЛЛИ МЕТОД — метод нахождения наибольшего по абсолютной величине действительного корня алгебраич. уравнения вида

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0. \qquad (*)$$

Предложен Д. Бернулли [1]; состоит в следующем. Пусть $y(0)$, $y(1)$, ..., $y(n-1)$ — произвольно выбранные числа. Значения $y(n)$, $y(n+1)$, ... вычисляют, пользуясь разностным уравнением:

$$a_0y(m+n)+a_1y(m+n-1)+\ldots+a_ny(m)=0.$$

Отношение $y(m+1)/y(m)$ при $m\to\infty$ стремится, вообще говоря, к наибольшему по абсолютной величине корню уравнения (*).

Лит.: [1] Bernoulli D., в кн.: Commentarii Academiae Scientiarum imperialis Petropolitanae, Petropoli, 1732, t. 3, p. 62—69; [2] Уиттекер Э., Робинсон Г., Математическая обработка результатов наблюдений, пер. с англ., Л.—М., 1935.

Л. Н. Довбыш.

БЕРНУЛЛИ МНОГОЧЛЕНЫ — многочлены вида

$$B_n(x)=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}B_sx^{n-s}\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где B_s — *Бернулли числа*. Так, для $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$

$$B_0(x)=1,\ B_1(x)=x-\frac{1}{2},\ B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},$$

$$B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x.$$

Б. м. можно вычислять по рекуррентной формуле

$$\sum_{s=0}^{n-1}\binom{n}{s}B_s(x)=nx^{n-1},\ n=2,\ 3,\ \ldots$$

Для натурального $x=m$ Б. м. впервые рассматривались Я. Бернулли (J. Bernoulli, 1713) в связи с вычислением суммы

$$\sum_{k=0}^{m}k^n.$$

При произвольном x Б. м. впервые изучал Л. Эйлер (L. Euler) (см. [1], с. 300). Термин «Б. м.» ввел И. Л. Раабе (J. L. Raabe, 1851). Основное свойство: Б. м. удовлетворяют разностному уравнению

$$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$$

и поэтому играют в исчислении конечных разностей ту же роль, что и степенные функции в дифференциальном исчислении.

Б. м. принадлежат к классу *Аппеля многочленов*, т. е. удовлетворяют условию:

$$B_n'(x)=nB_{n-1}(x)$$

и тесно связаны с *Эйлера многочленами*:

$$E_{n-1}(x)=\frac{2}{n}\left[B_n(x)-2^nB_n\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Производящая функция Б. м. имеет вид:

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}t^n.$$

Для Б. м. справедливо разложение в *Фурье ряд*: для $n=1$

$$B_1(x)=x-\frac{1}{2}=-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi sx}{s\pi},\ 0<x<1,$$

и для $n=2,\ 3,\ \ldots$

$$B_n(x)=-2n!\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2\pi sx-\frac{n\pi}{2}\right)}{(2\pi s)^n},\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Б. м. удовлетворяют соотношениям:

$$B_n(mx)=m^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1}B_n\left(x+\frac{s}{m}\right)$$

(теорема умножения),

$$B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x)$$

(теорема дополнения),

$$B_n(x+y)=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}B_s(y)\,x^{n-s}$$

(теорема сложения аргументов).

Б. м. используются для выражения остаточного члена *Эйлера — Маклорена формулы* суммирования и для разложения функций в ряды. Из свойств Б. м. выводятся многие важные свойства чисел Бернулли. Б. м. используются для интегрального представления дифференцируемых периодич. функций

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_k(t)\,f^{(k-1)}(x+\pi-t)\,dt,$$

$$\varphi_k(t)=\frac{2^{k-1}\pi^k}{k!}B_k\left(\frac{\pi+t}{2\pi}\right),$$

и играют важную роль в теории приближения таких функций тригонометрич. полиномами и др. агрегатами, см. *Фавара задача*.

Известны различного рода обобщения Б. м. Н. Э. Нёрлундом введены обобщенные Б. м. порядка ν и степени n:

$$B_n^{(\nu)}(x\mid\omega)=B_n^{(\nu)}(x\mid\omega_1,\ \ldots,\ \omega_\nu)$$

(нек-рые частные случаи этих многочленов рассматривались ранее В. Г. Имшенецким, Н. Я. Сониным и Д. М. Синцовым). Пусть

$$\underset{\omega}{\Delta}f(x)=\frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega}$$

и

$$B_n^{(0)}(x\mid\omega)=x^n,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$

тогда $B_n^{(\nu)}(x|\omega)$ последовательно определяются как полиномиальные решения степени n разностного уравнения

$$\underset{\omega_\nu}{\Delta}B_n^{(0)}(x\mid\omega_1,\ \ldots,\ \omega_\nu)=nB_{n-1}^{(\nu-1)}(x\mid\omega_1,\ \ldots,\ \omega_{\nu-1}),$$

$\nu=1,\ 2,\ \ldots$, с начальными условиями

$$B_n^{(\nu)}(0\mid\omega_1,\ \ldots,\ \omega_\nu)=B_n^{(\nu)}[\omega_1,\ \ldots,\ \omega_\nu],$$

где $B_n^{(\nu)}[\omega_1,\ \ldots,\ \omega_\nu]$ (обобщенные числа Бернулли) находятся из рекуррентного соотношения

$$\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}\omega_\nu^s B_{n-s}^{(\nu)}=\omega_\nu^n B_{n-1}^{(\nu-1)}$$

$$(B_n^{(1)}[\omega_1]=\omega_1^n B_n,\ B_0^{(\nu)}=1,\ B_n^{(0)}=0,\ B_0^{(0)}=1).$$

Лит.: [1] Эйлер Л., Дифференциальное исчисление, пер. с лат., М.—Л., 1949; [2] Nörlund N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung, B., 1924; [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, пер. с англ., М., 1965; [4] Лихин В. В., в сб.: Историко-математические исследования, в. 12, М., 1959, с. 59—134.

Ю. Н. Субботин.

БЕРНУЛЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — то же, что *биномиальное распределение*.

БЕРНУЛЛИ СХЕМА — то же, что схема *Бернулли испытаний*.

БЕРНУЛЛИ ТЕОРЕМА — исторически первая форма *больших чисел закона*. Б. т. приведена в четвертой части книги Я. Бернулли (J. Bernoulli) «Ars conjectandi» («Искусство предположений»). Эту часть можно считать первым серьезным трудом по теории вероятностей. Книга издана в 1713 Н. Бернулли (племянником Я. Бернулли). Б. т. относится к последовательности независимых испытаний (см. *Бернулли испытания*), в каждом из к-рых вероятность появления нек-рого события (успеха) равна p. Пусть n — число испытаний и m — случайная величина, равная числу успехов.

Б. т. утверждает, что каковы бы ни были положительные числа ε и η при всех достаточно больших n ($n \geqslant n_0$) вероятность P неравенства

$$-\varepsilon \leqslant \frac{m}{n} - p \leqslant \varepsilon$$

будет больше $1-\eta$. Доказательство этой теоремы, данное Я. Бернулли (и основанное только на изучении характера убывания вероятностей в биномиальном распределении по мере удаления от наивероятнейшего значения), сопровождалось неравенством, позволяющим указать нек-рую границу для указанного n_0 по данным ε и η. Напр., Я. Бернулли находит, что при $p = {}^2/_5$ вероятность неравенства

$$-\frac{1}{50} \leqslant \frac{m}{n} - \frac{2}{5} \leqslant \frac{1}{50}$$

будет больше 0,999 при $n \geqslant 25\,550$. Несколько совершенствуя первоначальное рассуждение Я. Бернулли, можно установить, что n достаточно выбирать с условием

$$n > \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2} \log \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\varepsilon},$$

что дает, в свою очередь, для вероятности $1-P$ неравенства $\left| \frac{m}{n} - p \right| > \varepsilon$ оценку вида

$$2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} n \varepsilon^2 \right\}.$$

Для приведенного выше примера получается условие $n \geqslant 17\,665$ (более сложные оценки показывают, что достаточно брать $n \geqslant 6\,502$; для сравнения заметим, что теорема Муавра—Лапласа в качестве приближенного значения n_0 дает 6 498). Другие оценки для $1-P$ можно получить, используя *Бернштейна неравенство* и его аналоги (см. также *Биномиальное распределение*).

Лит.: [1] Бернулли Я., Часть четвертая сочинения Якова Бернулли «Ars conjectandi», СПБ, 1913; [2] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [3] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.—Л., 1946.

Ю. В. Прохоров.

БЕРНУЛЛИ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$a_0(x)\, y' + a_1(x)\, y = f(x)\, y^{\alpha},$$

где α — действительное число, не равное нулю и единице. Это уравнение впервые было рассмотрено Я. Бернулли [1]. Подстановкой $y^{1-\alpha} = z$ Б. у. приводится к линейному неоднородному уравнению 1-го порядка (см. [2]). Если $\alpha > 0$, то Б. у. имеет решение $y \equiv 0$; при $0 < \alpha < 1$ в точках этого решения нарушается единственность. Уравнение вида

$$[f(y)\, x + g(y)\, x^{\alpha}]\, y' = h(y),\ \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1,$$

также есть Б. у., если рассматривать y как независимую переменную, а x — как неизвестную функцию от y.

Лит.: [1] Bernoulli J., «Acta Erud.», 1695, p. 59—67, 537—57; [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

Н. Х. Розов.

БЕРНУЛЛИ ЧИСЛА — последовательность рациональных чисел $B_0, B_1, B_2, \ldots$, найденная Я. Бернулли [1] в связи с вычислением суммы одинаковых степеней натуральных чисел:

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{s=0}^{n} C_{n+1}^{s} B_s m^{n+1-s}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Значения первых Б. ч.:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0,$$

$$B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0,$$

$$B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{11} = 0.$$

Все Б. ч. с нечетными номерами, кроме B_1, равны нулю, знаки B_{2n} чередуются. Б. ч. являются значениями при $x=0$ *Бернулли многочленов*: $B_n=B_n(0)$; коэффициентами разложения нек-рых элементарных функций в степенные ряды часто служат Б. ч. Напр.

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu \frac{x^\nu}{\nu!}, \quad |x|<2\pi$$

(т. н. производящая функцию для Б. ч.),

$$x\operatorname{ctg} x=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu B_{2\nu}\frac{2^{2\nu}}{(2\nu)!}x^{2\nu}, \quad |x|<\pi,$$

$$\operatorname{tg} x=\sum_{\nu=1}^{\infty}|B_{2\nu}|\frac{2^{2\nu}(2^{2\nu}-1)}{(2\nu)!}x^{2\nu-1}, \quad |x|<\frac{\pi}{2}.$$

Л. Эйлер (L. Euler, 1740) указал на связь между Б. ч. и значениями дзета-функции Римана $\zeta(s)$ при четных $s=2m$:

$$\zeta(2m)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{-2m}=\frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}|B_{2m}|.$$

Через Б. ч. выражаются многие несобственные интегралы, напр.

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}dx}{e^{2\pi x}-1}=\frac{1}{4n}|B_{2n}|, \quad n=1, 2, \ldots.$$

Некоторые соотношения для Б. ч.:

$$B_0=1, \quad \sum_{k=0}^{n-1}C_n^k B_k=0, \quad n\geqslant 2,$$

(рекуррентная формула):

$$B_{2n}=(-1)^{n-1}4n\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{e^{2\pi x}-1}dx, \quad n\geqslant 1;$$

$$B_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^{2n}}, \quad n\geqslant 1,$$

оценка:

$$\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}<(-1)^{n-1}B_{2n}\leqslant\frac{\pi^2(2n)!}{3(2\pi)^{2n}}, \quad n\geqslant 1.$$

Для Б. ч. имеются обширные таблицы, напр., в [2] приведены точные значения B_{2n} для $n\leqslant 90$ и приближенные значения для $n\leqslant 250$.

Б. ч. находят многочисленные применения в математич. анализе, теории чисел, приближенных вычислениях.

Лит.: [1] Bernoulli J., Ars conjectandi, Basileae, 1713; [2] Tables of the higher mathematical functions, v. 2, Bloomington, 1935; [3] Saalschuetz L., Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, B., 1893; [4] Чистяков И. И., Бернуллиевы числа, М., 1895; [5] Nielsen N., Traité élémentaire de nombres de Bernoulli, P., 1923; [6] Кудрявцев В. А., Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли, М.— Л., 1936; [7] Nörlund N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung, B., 1924; [8] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, 3 изд., М., 1967; [9] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951. *Ю. Н. Субботин.*

БЕРНШТЕЙНА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС — последовательность алгебраич. многочленов, равномерно сходящаяся на отрезке $[-1,1]$ к функции $f(x)$, непрерывной на том же отрезке. Точнее, Б. п. п.— последовательность алгебраич. многочленов

$$P_n(f;x)=\frac{\sum_{k=1}^{n}A_k^{(n)}T_n(x)}{T_n\left(x_k^{(n)}\right)\left(x-x_k^{(n)}\right)}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

где

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$$

— *Чебышева многочлены*;

$$x_k^{(n)}=\cos[(2k-1)\pi/2n]$$

— узлы интерполяции;

$$A_k^{(n)}=f\left(x_k^{(n)}\right),$$

если $k\neq 2ls$, l — произвольное натуральное число, $n=2lq+r$, $q\geqslant 1$, $0\leqslant r<2l$, $s=1, 2, \ldots, q$;

$$A_{2ls}^{(n)}=\sum_{i=0}^{l-1}f\left(x_{2l(s-1)+2i+1}^{(n)}\right)-\sum_{i=1}^{l-1}f\left(x_{2l(s-1)+2i}^{(n)}\right).$$

Отношение степени многочлена $P_n(f;\ x)$ к числу точек, в к-рых $P_n(f;\ x)$ совпадает с $f(x)$, равно $(n-1)/(n-q)$, которое при $n\to\infty$ стремится к $2l/(2l-1)$; при l достаточно большом этот предел сколь угодно близок к единице. Б. и. п. указан С. Н. Бернштейном в 1931 (см. [1]).

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., в кн.: Собр. соч., т. 2, М., 1954, с. 130—40.

П. П. Коровкин.

БЕРНШТЕЙНА МЕТОД, метод вспомогательных функций,— метод, применяемый в теории линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Б. м. состоит в введении нек-рых новых (вспомогательных) функций, зависящих от искомого решения и позволяющих устанавливать для этого решения априорные оценки максимума модуля производных требуемого порядка.

Простым примером применения Б. м. является априорная оценка модуля производных решения задачи Дирихле для нелинейного (квазилинейного) эллиптич. уравнения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\equiv\\ &\equiv a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2b\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}+c\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\\ &+2d\,\frac{\partial z}{\partial x}+2e\,\frac{\partial z}{\partial y}+g\ \text{в круге } D\end{aligned}\right\}\qquad(*)$$

$$z\,|_C=0,$$

где a, b, c, d, e, g — гладкие функции от x, y, z; C — окружность, граница круга D с радиусом R (предположение о том, что D — круг, а $z|_C=0$, не существенно, ибо общий случай произвольной односвязной области и неоднородного граничного условия легко приводятся к рассматриваемому случаю с помощью замены функции и конформного преобразования области).

Если $f_z'\geqslant 0$, то оценка максимума модуля n

$$n=\max_{(x,\ y)\,\in\, D+C}|\,z\,(x,\ y)\,|$$

решения задачи (*) сразу получается из принципа максимума.

Для доказательства существования регулярного решения задачи (*) достаточно иметь априорные оценки максимума модуля производных решения до 3-го порядка (см. *Продолжения по параметру метод*). Для оценки $\max\limits_C\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|$ и $\max\limits_C\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|$ достаточно оценить $\max\limits_C\frac{\partial z}{\partial \rho}$ (т. к. $z|_C=0$), ρ, θ — полярные координаты в круге D. Пусть введена новая (вспомогательная) функция u по формуле

$$z=\varphi_1(u)=-n-\alpha+\alpha\ln u,$$

где $\alpha>0$ будет выбрано позже. Функция $u=u(x,\ y)$ изменяется от e до $e^{(2n+\alpha)/\alpha}$ и в том же направлении, что и $z(x,\ y)$ $(-n\leqslant z\leqslant n)$. Так как

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\alpha}{u}\,\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\alpha}{u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\alpha}{u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

и аналогично для производных по y, то u удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{u}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+$$
$$+\frac{\alpha}{u}\left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2b\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}+c\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+$$
$$+2d\,\frac{\partial u}{\partial x}+2e\,\frac{\partial u}{\partial y}+g\,\frac{u}{\alpha}\equiv Q.$$

Пусть M — верхняя грань $|a|$, $|b|$, $|c|$ в D, а $\alpha=1/8M$.

Если рассматривать $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ как текущие координаты на плоскости, а x, y, z как параметры, то уравнение $Q=0$ есть уравнение эллипса, т. к. определитель $a_1c_1-b_1^2>3/4u^2$, где

$$a_1=\frac{1}{u}\left(1+\frac{a}{8M}\right),\quad b_1=\frac{b}{8Mu},\quad c_1=\frac{1}{u}\left(1+\frac{c}{8M}\right).$$

Таким образом, Q при любых $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ не меньше нек-рого отрицательного числа $-P$, $Q\geqslant -P$ (число P легко указать в явном виде). Если ввести функцию u_1 по формуле

$$u_1=u+\frac{P}{4}(x^2+y^2),$$

то

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=Q+P\geqslant 0$$

и u_1 достигает максимума на границе C области D, а так как u_1 постоянна на C, то

$$\frac{\partial u_1}{\partial \rho}\geqslant 0\quad\text{и}\quad \frac{\partial u}{\partial \rho}\geqslant -\frac{1}{2}PR,$$

R — радиус окружности C. Отсюда может быть найдена отрицательная нижняя грань для $\frac{\partial z}{\partial \rho}$:

$$\frac{\partial z}{\partial \rho}=\frac{\alpha}{u}\frac{\partial u}{\partial \rho}\geqslant -\frac{\alpha PR}{2e^{(n+\alpha)/\alpha}}.$$

Применение тех же рассуждений к другой вспомогательной функции u

$$z=\varphi_2(u)=-n-\alpha+\alpha\ln\frac{1}{1-u}$$

позволяет получить оценку сверху

$$\frac{\partial z}{\partial \rho}\leqslant\frac{\alpha P_1 R}{2}e^{(n+\alpha)/2}.$$

Таким образом, оценивается $\max\limits_C\left|\frac{\partial z}{\partial \rho}\right|$, а значит, и $\max\limits_C\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|$ и $\max\limits_C\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|$. Оценка максимума модуля первых производных внутри области D проводится аналогично: вводится вспомогательная функция u по формуле

$$z=\varphi_3(u)=-n+\alpha\ln\ln u.$$

Функция u изменяется в том же направлении, что и z, от e до $e^{e^{2n/\alpha}}$. Для u из (*) следует

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{u\ln u}\left[(1+\ln u+\alpha a)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\alpha b\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+(1+\ln u+\alpha c)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+2d\frac{\partial u}{\partial x}+2e\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{u\ln u}{\alpha}\equiv Q_1.$$

Рассуждения, подобные приведенным, показывают, что если функция

$$w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

достигает максимума в области D, то этот максимум не превосходит некоторого числа, зависящего лишь от n и M. Это дает требуемую оценку $\max\limits_D\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|$ и $\max\limits_D\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|$.

Б. м. позволяет аналогичным образом оценить и максимум модуля в области $D+C$ всех старших производных решения (при этом дополнительно надо лишь дифференцировать исходное уравнение (*)).

Б. м. впервые был применен С. Н. Бернштейном [1]. В дальнейшем Б. м. развивался и систематически употреблялся при изучении различных задач для эллипти-

ческих и параболических дифференциальных операторов ([3] — [5]).

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., «Math. Ann.», 1906, Bd 62, S. 253—71; 1910, Bd 69, S. 82—136; [2] его же, Собр. соч., т. 3, М., 1960; [3] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., 1964; [4] Погорелов А. В., Изгибание выпуклых поверхностей, М.— Л., 1951; [5] Олейник О. А., Кружков С. Н., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 5, с. 115—55.

И. А. Шишмарёв.

БЕРНШТЕЙНА МНОГОЧЛЕНЫ — алгебраические многочлены, определяемые формулой

$$B_n(f;\ x)=B_n(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},\quad n=1,\ 2,\ \ldots.$$

Введены С. Н. Бернштейном в 1912 (см. [1], т. 1, с. 13). Последовательность Б. м. сходится к функции $f(x)$ равномерно на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$, если функция $f(x)$ на этом отрезке непрерывна. Для функции, ограниченной в точке C, $0<C<1$, имеющей разрыв 1-го рода, имеем

$$B_n(f;\ C)\longrightarrow \frac{f(C_-)+f(C_+)}{2}.$$

Справедливо равенство:

$$B_n(f;\ c)-f(c)=\frac{f''(c)\,c\,(1-c)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

если в точке c функция $f(x)$ дважды дифференцируема. Для функции, k-я производная $f^{(k)}(x)$ к-рой непрерывна на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$,

$$B_n^{(k)}(f;\ x)\longrightarrow f^{(k)}(x)$$

равномерно на этом отрезке. Исследовалась сходимость Б. м. в комплексной плоскости, если $f(x)$ — аналитическая на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$ функция (см. [1], т. 2, с. 310, и [5]).

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 1, М., 1952, с. 105—06; т. 2, М., 1954, с. 310—48; [2] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954, гл. 2; [3] Баскаков В. А., «Докл. АН СССР», 1957, т. 113, № 2, с. 249—51; [4] Коровкин П. П., Линейные операторы и теория приближений, М., 1959, с. 117—24; [5] Канторович Л. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1931, № 8, с. 1103—15.

П. П. Коровкин.

БЕРНШТЕЙНА НЕРАВЕНСТВО — 1) Б. н. в теории вероятностей — уточнение классического *Чебышева неравенства*, принадлежащее С. Н. Бернштейну (1911, см. [1]); позволяет заменить степенную оценку вероятности больших отклонений на экспоненциально убывающую, см. *Больших отклонений вероятности*. Именно, если для независимых случайных величин $X_1,\ \ldots,\ X_n$ с

$$\mathsf{E}X_j=0,\ \mathsf{E}X_j^2=b_j,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

выполняется

$$\mathsf{E}\,|X_j|^l\leqslant \frac{b_j}{2}H^{l-2}\,l!$$

($l>2$, H — постоянная, не зависящая от j), то для суммы $S_n=X_1+\ldots+X_n$ справедливо Б. н. ($r>0$):

$$\mathsf{P}\{|S_n|>r\}\leqslant 2\exp\left\{-\frac{r^2}{2\,(B_n+Hr)}\right\},\qquad (1)$$

где $B_n=\Sigma b_j$. Для одинаково распределенных ограниченных случайных величин X_j ($\mathsf{E}X_j=0$, $\mathsf{E}X_j^2=\sigma^2$ и $|X_j|\leqslant L$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) неравенство (1) приобретает наиболее простой вид:

$$\mathsf{P}\{|S_n|>t\sigma\sqrt{n}\}\leqslant 2\exp\left\{-\frac{t^2}{2\left(1+\frac{a}{3}\right)}\right\},\qquad (2)$$

где $a=Lt/\sqrt{n}\sigma$. А. Н. Колмогоровым была получена нижняя оценка вероятности в (1). Оценки Бернштейна — Колмогорова используются, в частности, при доказательстве *повторного логарифма закона*. Нек-рое пред-

ставление о точности (2) можно получить из сравнения с приближенным значением для левой части (2), даваемым *центральной предельной теоремой* в виде

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_t^\infty e^{-u^2/2}\,du=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,t}\left(1-\frac{\theta}{t^2}\right)e^{-t^2/2},$$

где $0<\theta<1$. После 1967 одномерные Б. н. были распространены на многомерный и бесконечномерный случаи.

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.—Л., 1946; [2] Колмогоров А. Н., «Math. Ann.», 1929, Bd 101, S. 126—35; [3] Hoeffding W., «J. Amer. Statist. Assoc.», 1963, v. 58, № 301, p. 13—30; [4] Прохоров Ю. В., «Теория вероят. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 2, с. 266—74; [5] Прохоров А. В., «Матем. заметки», 1968, т. 3, в. 6, с. 731—9; [6] Юринский В. В., «Теория вероят. и ее примен.», 1970, т. 15, в. 1, с. 106—7. *А. В. Прохоров.*

2) Б. н. для производной от тригонометрич. полинома или алгебраич. многочлена, дающее оценку этой производной через наибольшее значение самого полинома (многочлена). Если $T_n(x)$ — тригонометрич. полином порядка не выше n,

$$M=\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|T_n(x)|,$$

то для любого x выполняются неравенства (см. [1]):

$$|T_n^{(r)}(x)|\leqslant Mn^r,\quad r=1,\ 2,\ \ldots.$$

Оценка неулучшаема; ибо число $M=1$ для

$$T_n(x)=\cos n(x-x_0)$$

и

$$\max_x|T_n^{(r)}(x)|=n^r.$$

Б. н. для тригонометрич. полиномов является частным случаем следующей теоремы [1]: если $f(x)$ — целая функция степени $\leqslant\sigma$ и

$$M=\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)|,$$

то

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|f^{(r)}(x)|\leqslant M\sigma^r\ \ (r=1,\ 2,\ \ldots).$$

Б. н. для алгебраич. многочленов имеет следующий смысл [1]: если многочлен

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^n\alpha_kx^k$$

удовлетворяет условию

$$|P_n(x)|\leqslant M,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

то для его производной $P_n'(x)$ выполняется соотношение

$$|P_n'(x)|\leqslant\frac{Mn}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},\quad a<x<b,$$

к-рое является неулучшаемым. Как заметил сам С. Н. Бернштейн (см. [1], с. 20), последнее неравенство в сущности вытекает из доказательства *Маркова неравенства* самим А. А. Марковым.

Б. н. существенно используются при получении обратных теорем теории приближения функций. Имеется ряд обобщений Б. н., в частности для целых функций многих переменных.

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 1, М., 1952, с. 13—42, 269—70; [2] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969. *Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.*

БЕРНШТЕЙНА ТЕОРЕМА о минимальных поверхностях: если минимальная поверхность задана уравнением $z=f(x,\ y)$, где f имеет непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков при всех действительных x и y, то F — плоскость. Доказательство этой теоремы, предложенное самим С. Н. Бернштейном [1], является следствием одной его более общей теоремы о поведении поверхностей с неположительной

кривизной. Предложены многочисленные обобщения Б. т., идущие гл. обр. в трех направлениях: 1) Количественные уточнения; напр., получение априорных оценок вида $|K(0)| \leqslant \mathrm{const}/R^2$, где R — радиус круга, над к-рым определена минимальная поверхность $z=f(x, y)$, $K(0)$ — гауссова кривизна поверхности в центре круга. 2) Поиски других априорно задаваемых геометрич. условий, при удовлетворении к-рым минимальная поверхность необходима была бы какой-нибудь конкретной поверхностью: плоскостью, катеноидом и т. д.; напр., если сферич. образ полной минимальной поверхности не содержит нек-рое открытое на сфере множество, то такая минимальная поверхность есть плоскость. 3) Перенесение Б. т. на минимальные поверхности F^k размерности k, расположенные в евклидовом пространстве E^n; напр., если $k=n-1$, то при $n \leqslant 8$ всякая минимальная поверхность, однозначно определенная над всем E^{n-1}, есть гиперплоскость, а при $n>8$ существуют минимальные поверхности, отличные от плоскости; если же $k<n-1$, то уже при $n \geqslant 4$ можно найти нелинейные минимальные поверхности F^k, определенные над всем E^{n-1}.

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 3, 1960, с. 251—58; [2] Ниче И. С. С., «Математика», 1967, т. 11, № 3, с. 37—100; [3] Оссерман Р., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 4, с. 55—136; [4] его же, «Математика», 1971, т. 15, № 2, с. 104—25. *И. Х. Сабитов.*

БЕРНШТЕЙНА — РОГОЗИНСКОГО МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования рядов Фурье; обозначается $(БР,\ \alpha_n)$. Тригонометрич. ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx+b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \qquad (*)$$

суммируется методом Бернштейна—Рогозинского в точке x_0 к значению S, если выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x_0;\ \alpha_n) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(x_0+\alpha_n)+S_n(x_0-\alpha_n)}{2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A_k(x_0) \cos k\alpha_n = S,$$

где $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n>0$, $\alpha_n \to 0$, — числовая последовательность, а $S_n(x)$ — частичные суммы ряда $(*)$.

В. Рогозинский (см. [1]) сначала рассмотрел (1924) случай $\alpha_n=p\pi/2n$ (p — нечетное число), потом (1925) общий случай. С. Н. Бернштейн (см. [2]) рассматривал (1930) случай $\alpha_n=\pi/(2n+1)$. $(БР,\ \alpha_n)$-метод суммирует ряд Фурье функции $f(x) \in L[0,\ 2\pi]$ в случаях $\alpha_n=p\pi/2n$ и $\alpha_n=\pi/(2n+1)$ в точках непрерывности функции к ее значению и является *регулярным методом суммирования*.

Суммы $B_n(x,\ \alpha_n)$ Бернштейна — Рогозинского применяются как аппарат приближения. В обоих указанных выше случаях они осуществляют приближение того же порядка, что и наилучшее приближение для функций из классов $\mathrm{Lip}\ \alpha$ и $W^1\ \mathrm{Lip}\ \alpha$.

Лит.: [1] Rogosinski W., «Math. Ann.», 1925, Bd 95, № 1, S. 110—34; [2] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 1, М., 1952, с. 523—25; [3] Стечкин С. Б., Методы суммирования С. Н. Бернштейна и В. Рогозинского, в кн.: Г. Харди, Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951. *А. А. Захаров.*

БЕРТИНИ ТЕОРЕМЫ — две теоремы о свойствах *линейных систем* на алгебраических многообразиях, принадлежащие Э. Бертини (см. [1]).

Пусть V — алгебраич. многообразие над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0, L — линейная система без неподвижных компонент на V и W — образ многообразия V при отображении с помощью L. Следующие два утверждения известны как 1-я и 2-я Б. т.

1) Если $\dim W>1$, то почти все дивизоры из линейной системы L (т. е. все, кроме замкнутого подмножества в пространстве параметров $P(L)$, отличного от

$P(L)$) являются неприводимыми и приведенными алгебраич. многообразиями.

2) Почти все дивизоры из L не имеют особых точек вне базисных точек линейной системы L и особых точек многообразия V.

Обе Б. т. неверны, если характеристика поля не равна 0.

Условия, при к-рых Б. т. верны и для случая конечной характеристики поля, изучены в [3] и [6]. В случае $\dim W=1$ 1-я Б. т. заменяется следующим утверждением: почти все слои отображения $\varphi_L: V\to W$ являются неприводимыми и приведенными, если поле функций $k(W)$ алгебраически замкнуто внутри поля $k(V)$ при вложении $\varphi_L^*: k(W)\to k(V)$. В случае, когда характеристика поля k конечна, соответствующая теорема верна *при условии* сепарабельности расширения $k(V)/k(W)$ (см. [3], [6]). Для линейной системы гиперплоских сечений Б. т. верны без всяких ограничений на характеристику поля [5].

Лит.: [1] Bertini E., Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, 2 ed., Messina, 1923; [2] Алгебраические поверхности, М., 1965; [3] Бальдассари М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [4] Akizuki Y., «J. Math. Soc. Japan», 1951, v. 3, № 1, p. 170—80; [5] Nakai Y., «Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto A», 1950, v. 26, № 2, p. 185—87; [6] Zariski O., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1944, v. 56, № 1, p. 130—40.
В. А. Исковских.

БЕРТРАНА КРИВЫЕ, пара Бертрана,— две пространственные кривые L и L' с общими главными нормалями. Пусть k_1 и k_2— соответственно кривизна и кручение кривой L. Для того чтобы кривая L' образовывала с L пару Бертрана, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$ak_1\sin\omega+ak_2\cos\omega=\sin\omega,$$

где a — постоянная, а ω — угол между касательными векторами к L и L'. Кривой Бертрана наз. также кривая L, для к-рой существует кривая L', образующая с ней пару Бертрана. Рассмотрены Ж. Бертраном (J. Bertrand) в 1850.
Е. В. Шикин.

БЕРТРАНА ПАРАДОКС (в теории вероятностей) — один из парадоксов, связанных с нечеткой формулировкой исходных допущений при решении вероятностных задач. Отмечен Ж. Бертраном [1]. В задаче Бертрана разыскивается вероятность того, что длина хорды, «наудачу» выбранной в круге радиуса 1, превзойдет длину стороны вписанного правильного треугольника. Ж. Бертран указывает три различных значения искомой вероятности ($^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$), в зависимости от того, какими параметрами характеризуется положение хорды (в первом случае — расстоянием ρ до центра круга и углом θ между нормалью к хорде и осью x; во втором — угловыми координатами α и β точек пересечения хорды с окружностью; в третьем — декартовыми координатами (x, y) основания перпендикуляра, опущенного из центра круга; во всех трех случаях центр круга расположен в начале координат). А. Пуанкаре [2] показал, что источник парадокса заключается в следующем: каждый раз соответствующую пару параметров предполагают равномерно распределенной в соответствующей области и таким образом решают три различные задачи. Если распределение к.-л. пары (скажем, α и β) фиксировано, то распределение любых других параметров однозначно вычисляется (и не обязано быть равномерным, даже если α и β распределены равномерно). Наиболее естественным (с геометрической точки зрения) является предположение о том, что ρ и θ независимы и распределены равномерно в интервале $0\leqslant\rho\leqslant1$, $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ (см. [3]).

Лит.: [1] Bertrand J., Calcul des probabilités, P., 1889; [2] Poincaré H., Calcul des probabilités, 2 éd., P., 1912; [3] Кендалл М., Моран П., Геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1972.
А. В. Прохоров.

БЕРТРАНА ПОСТУЛАТ: при натуральном $n>3$ существует простое число, большее n и меньшее $2n-2$. В более слабой формулировке Б. п. утверждает, что при любом $x>1$ имеется простое число, принадлежащее интервалу $(x, 2x)$. Этот постулат был высказан Ж. Бертраном (J. Bertrand) в 1845 на основе табличных данных. Доказательство Б. п. было дано П. Л. Чебышевым (см. *Чебышева теорема* о распределении простых чисел).

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 1, М.—Л., 1946.

Б. М. Бредихин.

БЕРТРАНА ПРИЗНАК сходимости числовых рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами: если

$$B_n = \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right]$$

и существует предел (конечный или бесконечный)

$$B = \lim_{n \to \infty} B_n,$$

то при $B>1$ ряд сходится, а при $B<1$ — расходится. Установлен Ж. Бертраном (J. Bertrand).

Лит.: [1] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, 7 изд., М., 1970.

Л. Д. Кудрявцев.

БЕСКОАЛИЦИОННАЯ ИГРА — система

$$\Gamma = \langle J, \{S_i\}_{i \in J}, \{H_i\}_{i \in J} \rangle,$$

где J — множество игроков, S_i — множество *стратегий* i-го игрока, H_i — функция выигрыша i-го игрока, определенная на декартовом произведении $S = \Pi_{i \in J} S_i$. Б. и. разыгрывается следующим образом: игроки, действуя изолированно (не вступая в коалиции), выбирают свои стратегии $s_i \in S_i$, в результате чего складывается ситуация $s = \Pi_{i \in J} s_i$, в к-рой игрок i получает выигрыш $H_i(s)$. Основным принципом оптимальности в Б. и. является принцип осуществимости цели (см. [1]), приводящий к ситуациям равновесия по Нэшу. Ситуация s^* наз. ситуацией равновесия, если для всех $i \in J$, $s_i \in S_i$ справедливо неравенство

$$H_i(s^*) \geqslant H_i(s^* \| s_i),$$

где $s^* \| s_i = \Pi_{j \in J \setminus i} s_j^* \times s_i$. Таким образом, в одностороннем нарушении договора между игроками, соответствующего ситуации равновесия, не заинтересован ни один из игроков. Было доказано (теорема Нэша), что конечная Б. и. (множества J и S_i конечны) обладает ситуацией равновесия в смешанных стратегиях. Имеются обобщения этой теоремы на бесконечные Б. и. с конечным числом игроков (см. [3]) и на Б. и. с бесконечным числом игроков (см. *Неатомическая игра*).

Ситуации равновесия s и t наз. взаимозаменяемыми, если любая ситуация $r = \Pi_{i \in J} r_i$, где $r_i = s_i$ или $r_i = t_i$, $i \in J$, также равновесна. Они наз. эквивалентными, если $H_i(s) = H_i(t)$ для всех $i \in J$. Пусть Q — множество всех ситуаций равновесия, $Q' \subset Q$ — множество ситуаций равновесия, оптимальных по Парето (см. *Арбитражная схема*). Игра наз. разрешимой в смысле Нэша, а Q наз. решением по Нэшу, если все $s \in Q$ эквивалентны и взаимозаменяемы. Игра наз. строго разрешимой, если Q' не пусто и все $s \in Q'$ эквивалентны и взаимозаменяемы. *Антагонистические игры*, обладающие оптимальными стратегиями, разрешимы в смысле Нэша и строго разрешимы; однако в общем случае такая разрешимость возможна далеко не всегда.

Имеются другие попытки дополнения принципа осуществимости цели. Так, было предложено (см. [4]) решением Б. и. считать единственную ситуацию равновесия или максиминную ситуацию (выигрыши в последней ситуации каждый из игроков может себе га-

рантировать независимо от выбора стратегий остальными игроками), выбор к-рой основан на введении нового отношения предпочтения на множестве ситуаций. Иным подходом к определению решения Б. и. является предположение о субъективном прогнозе поведения игроков (см. [5]).

Лит.: [1] Воробьев Н. Н., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, № 2 (152), с. 81—140; [2] Нэш Дж., в сб.: Матричные игры, М., 1961, с. 205—21; [3] Гликсберг И. Л., в сб.: Бесконечные антагонистические игры, М., 1963, с. 497—503; [4] Harsanyi J. C., в кн.: Advances in game theory, Princeton (N. Y.), 1964, p. 651—79; [5] Вилкас Э. Й., «Теория вероят. и ее примен.», 1968, т. 13, в. 3, с. 555—60.

Э. Й. Вилкас, Е. Б. Яновская.

БЕСКОНЕЧНАЯ ДЕСЯТИЧНАЯ ДРОБЬ — запись числа в виде десятичной дроби, у к-рой ни один знак не является последним. Напр., $\frac{1}{11}=0{,}090909\ldots$, $1\frac{3}{4}=1{,}75000\ldots$, или $1\frac{3}{4}=1{,}74999\ldots$, $\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$ и т. д. Если число рационально, то Б. д. д. является периодической; она состоит, начиная с некоторого места, из неограниченно повторяющихся знаков или групп знаков — периодов Б. д. д. (в приведенных примерах периоды таковы: 09 в случае $\frac{1}{11}$ и 0 или 9 в случае $1\frac{3}{4}$. Если число иррационально, то Б. д. д. не может быть периодической (напр., $\sqrt{2}$).

В. И. Битюцков.

БЕСКОНЕЧНАЯ ИГРА — *бескоалиционная игра*, в частности *антагонистическая игра*, с бесконечными множествами стратегий игроков. Пусть

$$\Gamma=\langle X_1, \ldots, X_n, H_1, \ldots, H_n\rangle$$

— Б. и. n лиц. К. Берж доказал [см. 1], что если $X_1, \ldots, X_n$ — локально выпуклые бикомпактные линейные топологические пространства, функции выигрыша H_i непрерывны на $\Pi_{i=1}^n X_i$ и квазивогнуты по $x_i \in X_i$, $i=1, \ldots, n$, то в игре Γ существуют ситуации равновесия. Показано также [2], что если X_i — бикомпактные хаусдорфовы пространства, H_i непрерывны на $\Pi_{i=1}^n X_i$, $i=1, \ldots, n$, то игра Γ имеет ситуации равновесия в смешанных стратегиях. Однако не все Б. и. имеют ситуации равновесия даже в смешанных стратегиях. Напр., для антагонистич. игры, в к-рой пространствами стратегий игроков являются множества целых чисел, а функция выигрыша имеет вид

$$H(m, n)=\begin{cases} 1, & m>n,\\ 0, & m=n,\\ -1, & m<n,\end{cases}$$

не существует значения. Наиболее исследованным классом Б. и. в нормальной форме являются бесконечные антагонистич. игры и, в частности, *игра на единичном квадрате*.

Лит.: [1] Берж К., Общая теория игр нескольких лиц, пер. с франц., М., 1961; [2] Гликсберг И. Л., в сб.: Бесконечные антагонистические игры, М., 1963, с. 497—503.

Е. Б. Яновская.

БЕСКОНЕЧНАЯ ИНДУКЦИЯ, правило Карнапа, ω-правило,— неэлементарное *вывода правило* с бесконечным числом посылок. Точнее, пусть в нек-ром логико-математич. языке переменная x рассматривается как пробегающая натуральные числа и $\varphi(x)$ — формула этого языка. Если доказана выводимость каждой из бесконечной совокупности формул

$$\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n), \ldots,$$

то правило Б. и. позволяет заключить, что выводима и формула $\forall x \varphi(x)$.

Применение правила Б. и. для вывода формул ведет обычно к тому, что понятие вывода становится неразрешимым. Аксиоматич. системы, содержащие такого рода правила, наз. полуформальными теориями (полуформальными аксио-

матическими системами). Полуформальные теории играют большую роль в *доказательств теории*. При этом на выводы посылок в применении правила Б. и. часто накладывают дополнительные ограничения с целью обеспечить эффективность понятия вывода в теории. Напр., требуют, чтобы выводы посылок перечислялись нек-рой общерекурсивной функцией (так наз. конструктивное правило бесконечной индукции). Известно, что *арифметика формальная*, пополненная конструктивным правилом Б. и., является полной относительно классич. истинности. Правило Б. и. нашло применение для построения семантики конструктивной математики методом ступенчатой семантич. системы. *А. Г. Драгалин.*

БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШАЯ ФУНКЦИЯ — функция переменного x, к-рая в данном процессе изменения x становится и остается по абсолютной величине больше любого наперед заданного числа. Точнее, функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, наз. бесконечно большой функцией при x, стремящемся к x_0, если для любого числа $M>0$ найдется такое число $\delta=\delta(M)>0$, что для всех $x\neq x_0$ и таких, что $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$. Этот факт записывается так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

Аналогичным образом определяются

$$\lim_{x\to x_0\pm 0} f(x)=\pm\infty,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty.$$

Напр.,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

означает, что для любого $M>0$ найдется такое $\delta=\delta(M)>0$, что для всех $x<-\delta$ выполняется неравенство $f(x)>M$. Изучение Б. б. ф. может быть сведено к изучению *бесконечно малых функций*, т. к. если $f(x)$ есть Б. б. ф., то функция $\psi(x)=1/f(x)$ является бесконечно малой. *В. И. Битюцков.*

БЕСКОНЕЧНО МАЛАЯ ФУНКЦИЯ — функция переменного x, к-рая при данном процессе изменения x становится и остается по абсолютной величине меньше любого заданного числа. Точнее, функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, наз. бесконечно малой функцией при x, стремящемся к x_0, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется $|f(x)|<\varepsilon$. Этот факт записывается так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0.$$

Символ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0,$$

напр., означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $N=N(\varepsilon)>0$, что для всех $x>N$ выполняется неравенство $|f(x)|<\varepsilon$. Понятие Б. м. ф. может быть положено в основу общего определения *предела* функции. Именно, предел функции $f(x)$ при $x\to x_0$ конечен и равен A тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-A)=0,$$

т. е. функция $f(x)-A$ есть Б. м. ф. См. также ст. *Бесконечно малых исчисление*. *В. И. Битюцков.*

БЕСКОНЕЧНО МАЛОЕ ИЗГИБАНИЕ — понятие, первоначально возникшее при описании деформации поверхности F в трехмерном евклидовом пространстве, при к-рой изменение длин кривых на F является вели-

чиной порядка малости меньшего, чем изменение пространственного расстояния между точками этих кривых. По существу же в теории Б. м. и. исследуются векторные поля и связанные с ними величины, определенные в точках F и удовлетворяющие тем уравнениям, к-рые являются линеаризацией уравнений изгибания F.

Так, если $x(u, v, t)$ — радиус-вектор деформации F_t поверхности $F=F_0$, то Б. м. и. F характеризуется (начальной) скоростью деформации — вектором

$$z(u, v)=\frac{\partial x}{\partial t}\Big|_{t=0},$$

к-рый удовлетворяет уравнению

$$(dxdz)=0$$

или

$$(x_u z_u)=(x_v z_v)=(x_u z_v)+(x_v z_u)=0, \qquad (1)$$

где $x=x(u, v, 0)$ — радиус-вектор F. Вектор z, наз. также полем скоростей Б. м. и., или изгибающим полем. Однозначно определяется вектор y такой, что $dz=[ydx]$ — множество точек пространства, описываемое радиус-вектором y, наз. диаграммой вращения Б. м. и. См. также *Дарбу поверхности*.

В более общей ситуации Б. м. и. многообразия M^k, расположенного в римановом пространстве V^n, представляет собой изометрич. вариацию вложения i: $M^k \to V^n$, т. е. такое векторное поле вдоль вложения

$$Z \in \tau(V^n),$$

где $\tau(V^n)$ — касательное расслоение к V^n, к-рое удовлетворяет на M^k уравнению

$$g(\nabla_X Z, Y)+g(X, \nabla_Y Z)=0; \qquad (1')$$

здесь $X, Y \in i^*\tau(M^k)$ — векторные поля, касательные к вложению, $g(\cdot, \cdot)$ — метрическая форма V^n, ∇_X — ковариантная произвольная относительно *Леви-Чивита связности* на V^n, соответствующей g. Поле Z однозначно определяет поле K_Z кососимметрических тензоров типа (1,1) вдоль вложения: $K_Z X=\nabla_X Z$, удовлетворяющее уравнению

$$\nabla_X K_Z Y-\nabla_Y K_Z X+K_Z[X, Y]=R(X, Y)Z,$$

где R — оператор римановой кривизны V^n.

Если Z индуцируется *Киллинга вектором* $\xi \in \tau(V^n)$, т. е. $Z=\xi \cdot i$, то соответствующее Б. м. и. (а также и само Z) наз. тривиальным. Если M^k допускает только тривиальные Б. м. и., то оно наз. жестким. См. *Жесткость*.

При *геодезическом отображении* $F: V^n \to \tilde{V}^n$ Б. м. и. $M^k \subset V^n$ с вектором Z однозначно соответствует Б. м. и. $F(M^k) \subset \tilde{V}^n$ с вектором $\tilde{z}=F(Z)$, причем

$$\tilde{g}(\tilde{Z}, F^*(Y))=\psi g(Z, Y),$$

где ψ — потенциал отображения F. В частности, это соответствие имеет место при проективном преобразовании евклидова пространства (теорема Дарбу—Зауэра) и при геодезич. отображении евклидова пространства в пространство постоянной кривизны (преобразование Погорелова).

Изометрич. вариациям высших порядков соответствуют Б. м. и. высших порядков: для них, в отличие от определенных выше Б. м. и. первого порядка, известны лишь отдельные результаты, в основном касающиеся поверхностей вращения.

Теория Б. м. и. имеет многочисленные приложения в математике и механике, в частности она применяется в задачах изометрич. вложения методом продолжения по параметру, для исследования изометричных поверхностей пространств постоянной кривизны (см. *Кон-Фоссена преобразование*), в вопросах устойчивости оболочек и т. д.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 2(24); [2] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969; [3] Бляшке В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., М., 1957; [4] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959.

М. И. Войцеховский.

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИСЧИСЛЕНИЕ — термин, ранее объединявший различные разделы математич. анализа, связанные с понятием *бесконечно малой функции*. Хотя «метод бесконечно малых» (в той или иной форме) с успехом применялся учеными Древней Греции и средневековой Европы для решения задач геометрии и естествознания, точные определения основных понятий теории бесконечно малых функций сложились только в 19 в. Для понимания значения этого метода важно заметить, что практич. интерес представляют не Б. м. и. сами по себе, а те случаи, в к-рых рассмотрение Б. м. и. приводит к величинам конечным. В истории математики основное значение имели три типа такого рода задач.

1) Простейшие задачи древнегреческих математиков на *исчерпывания метод*, в к-рых бесконечно малые используются лишь для доказательства равенства двух заранее заданных величин (или двух отношений заранее заданных величин).

2) Более сложные задачи на метод исчерпывания, в к-рых искомая конечная величина получается в виде предела суммы

$$\Delta_1^{(n)} + \Delta_2^{(n)} + \ldots + \Delta_n^{(n)}$$

неограниченно возрастающего числа бесконечно малых величин. Эти задачи впоследствии привели к созданию *интегрального исчисления*.

3) Задачи, в к-рых конечная величина получается в виде предела отношения бесконечно малых величин. Они послужили материалом для создания *дифференциального исчисления*.

Изобретение метода исчерпывания приписывается Евдоксу Книдскому (4 в. до н. э.). Во всяком случае, он проходит в качестве основного приема доказательства через всю 12-ю книгу «Начал» Евклида (3 в. до н. э.). В современной форме логич. схема рассуждений Евклида может быть записана так: если все отношения

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \ldots = k$$

равны между собой и имеют постоянное значение k и если при $n \to \infty$ обе разности $a - a_n$, $b - b_n$ бесконечно малы, то

$$\frac{a}{b} = k.$$

Напр., для сравнения площадей двух кругов Евклид вписывает в каждый из них по квадрату и доказывает, что площадь этого квадрата превосходит половину пло-

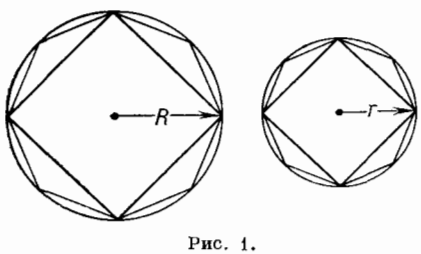


Рис. 1.

щади круга: остающиеся четыре сегмента (рис. 1) составляют вместе меньше половины площади круга; дополнив квадрат до правильного восьмиугольника, он обнаруживает, что остаток составляет уже меньше четверти круга, затем восьмиугольник дополняется до правильного шестнадцатиугольника, причем оставшиеся шестнадцать сегментов составляют в сумме уже

меньше одной восьмой доли площади круга и т. д. Таким образом, площадь круга постепенно «исчерпывается» при переходе к вписанным многоугольникам со все большим числом сторон. Так как в двух кругах площади соответствующих многоугольников относятся как квадраты радиусов, то Евклид заключает отсюда, при помощи доказательства от противного, что то же самое отношение имеют и площади кругов.

Более широкое и свободное употребление бесконечно малых наблюдается у Архимеда (3 в. до н. э.). В своих соч. «О коноидах и сфероидах» и «О спиралях» Архимед систематически пользуется при вычислении площадей и объемов методом, к-рый по своей идее вполне анало-

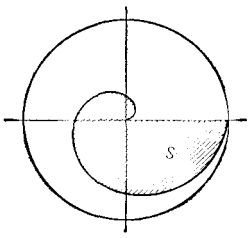


Рис. 2.

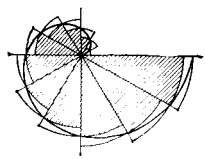


Рис. 3.

гичен современному определению интеграла. Вот как, напр., Архимед определяет площадь первого витка спирали (рис. 2), к-рая наз. теперь «архимедовой» и к-рая в полярных координатах имеет уравнение

$$r = a\varphi.$$

В рассматриваемую фигуру S вписывается фигура, состоящая из $n-1$ круговых секторов с углом при вершине $2\pi/n$ (эти секторы для случая $n=12$ изображены на рис. 3 заштрихованными), а вокруг S описывается фигура, состоящая из n аналогичных круговых секторов (на рис. 3 изображены без штриховки). Легко видеть, что в обоих случаях площадь k-го сектора

$$\Delta_k^{(n)} = 4\pi^3 a^2 k^2 / n^3.$$

Из построения ясно, что площадь S заключена в пределах

$$S_n' < S < S_n'', \qquad (1)$$

где

$$S_n' = \Delta_1^{(n)} + \Delta_2^{(n)} + \ldots + \Delta_{n-1}^{(n)},$$
$$S_n'' = \Delta_1^{(n)} + \Delta_2^{(n)} + \ldots + \Delta_n^{(n)}.$$

Так как

$$S_n' = 4\pi^3 a^2 [1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2]/n^3 = 2\pi^3 a^2 (n-1)(2n-1)/3n^2,$$

$$S_n'' = 4\pi^3 a^2 [1^2 + 2^2 + \ldots + n^2]/n^3 = 2\pi^3 a^2 (n+1)(2n+1)/3n^2,$$

то при любом n

$$S_n' < \tfrac{4}{3}\pi^3 a^2 < S_n''.$$

Архимед выражает последнее соотношение в геометрич. форме: при любом n

$$S_n' < \frac{K}{3} < S_n'', \qquad (2)$$

где K — площадь круга, изображенного на рис. 2. Из сопоставления (1) и (2) и того обстоятельства, что разность

$$S_n'' - S_n' = \Delta_n^{(n)}$$

при $n \to \infty$ является бесконечно малой, Архимед делает вывод, что

$$S = \frac{K}{3}.$$

Конец изложенного рассуждения показывает, каким образом Архимедом был развит и усовершенствован метод исчерпывания Евдокса. Начало же этого рассуждения показывает, что Архимед владел и приемами, к-рые были отнесены выше ко второй группе и к-рые по своему идейному замыслу соответствуют современному интегральному исчислению.

При помощи интегрального исчисления рассматриваемая площадь вычисляется как

$$S=\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{(a\varphi)^2}{2}\,d\varphi=\frac{4}{3}\,\pi^3a^2.$$

Входящий в эту формулу интеграл, по определению, есть предел сумм вида

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{r_k^2}{2}\,(\varphi_k-\varphi_{k-1}),$$

где

$$0=\varphi_0<\varphi_1<\ldots<\varphi_n=2\pi,$$
$$r_k=av_k^2,\quad \varphi_{k-1}\leqslant v_k\leqslant\varphi_k.$$

В частном случае, когда

$$\varphi_k=\frac{2\pi k}{n},\qquad(3)$$

при $v_k=\varphi_{k-1}$ получается архимедова сумма S_n', а при $v_k=\varphi_k$ — архимедова сумма S_n''. Следует специально отметить, что при выборе (3) точек деления φ_k архимедовы суммы S_n' и S_n'' совпадают с *Дарбу суммами*, для к-рых и в общем случае гарантировано выполнение неравенства (1). Таким образом, Архимед для своей частной задачи проделывает весь ряд рассуждений, свойственных интегральному исчислению, и притом в его логически законченной форме (точные оценки сверху и снизу при помощи сумм Дарбу), разработанной в качестве общей теории лишь во 2-й пол. 19 в. Аналогично Архимед поступает и в ряде других задач на вычисление площадей и объемов.

Отсюда следует, что к концу своего развития древнегреческая математика подошла и к решению задач второй из намеченных выше групп. Следует, однако, здесь же отметить и принципиальное отличие всего характера мышления математиков древности от стиля мышления математиков нового времени. В рассмотренной выше в виде примера задаче Архимед не вычисляет

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{K}{3},$$

а берет, не указывая откуда, величину $K/3$ и доказывает равенство $S=K/3$ от противного, устанавливая, что в силу (1), (2) и бесконечной малости разности $S_n''-S_n'$ неравенство $S\neq K/3$ привело бы к противоречию. Греческие математики не только не разработали к.-л. общих правил вычисления пределов, но и вообще не сформулировали лежащего по существу в основе их приемов понятия предела (даже общее назв. «метод исчерпывания» для их приемов возникло лишь в новое время). Тем более, древняя наука не создала ничего подобного современному алгоритму интегрального исчисления, благодаря к-рому теперь совсем не обращаются при вычислении нового интеграла к определению интеграла в качестве предела сумм, а пользуются значительно более простыми в практич. употреблении правилами интегрирования функций различных специальных классов. Из соч. Архимеда (особенно из «Послания Эратосфену») можно усмотреть, что его логически отточенному методу оценки площадей и объемов при помощи сумм возрастающего числа неограниченно убывающих (т. е. бесконечно малых в современном смысле слова) слагаемых предшествовал более примитивный, но более наглядный метод, восходящий, по утверждению Архимеда, к Демокриту (4 в. до н. э.). Архимед указывает, в частности, что Демокрит

раньше Евдокса определил (хотя и без строгого обоснования своих результатов) объем пирамиды.

Для Евклида и Евдокса основную трудность при выводе объема пирамиды представляло доказательство того факта, что объемы двух пирамид с равными высотами и равновеликими основаниями равны. Трудность эта преодолевалась в «Началах» Евклида применением метода исчерпывания.

Судя по указаниям Архимеда, демокритов «атомистический» метод доказательства равенства объемов двух пирамид с равными высотами и равновеликими основаниями (рис. 4) можно представить себе так: из соображений подобия вытекает, что площади сечений, проведенных на равной высоте в наших пирамидах, равны; объемы пирамид воспринимаются просто как «суммы» этих площадей, что и позволяет сразу, исходя из равенства соответствующих членов двух сумм, заключить о равенстве самих сумм. В соч. Архимеда дается много примеров применения этого метода к решению более сложных задач. Архимед считал такой метод нестрогим, но очень ценным с эвристической стороны (т. е. для первоначального получения новых результатов, к-рые потом должны быть обоснованы более строго) и был в этом с современной точки зрения, конечно, прав, так как метод Демокрита является лишь не выдерживающей строгой критики попыткой заменить процесс предельного перехода

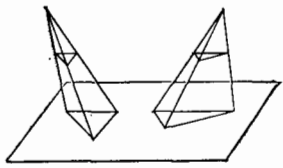


Рис. 4.

$$S = \lim_{n \to \infty} \left(\Delta_1^{(n)} + \Delta_2^{(n)} + \ldots + \Delta_n^{(n)}\right)$$

несостоятельной метафизич. гипотезой о возможности получения объемов суммированием площадей.

Послание Архимеда к Эратосфену, получившее краткое назв. «Эфодикон» (руководство), много комментировалось и цитировалось авторами эллинистич. эпохи, но не дошло до европейских математиков эпохи создания современной высшей математики, к-рые в отношении необычайно простого атомистич. метода рассуждений Демокрита в лучшем случае должны были довольствоваться довольно смутными литературными указаниями других источников (текст «Эфодикона» был вновь открыт лишь в 1906). Тем не менее этот метод получил в 17 в. блестящее развитие в работах И. Кеплера (J. Kepler) и Б. Кавальери (B. Cavalieri). И. Кеплер в своей «Стереометрии винных бочек» (1615) определяет объем 92 тел вращения. Если бы он следовал педантично методу изложения Архимеда при каждом из этих определений, то его труд разросся бы до необъятных размеров. Метод И. Кеплера можно пояснить на простом примере. Определение площади круга И. Кеплер основывает на следующем рассуждении. Круг разбивается на секторы с общей вершиной в центре (рис. 5); чем меньше каждый сектор, тем ближе он подходит к треугольнику, основанием к-рого можно считать дугу сектора; его площадь, следовательно, равна длине его дуги, умноженной на половину радиуса; если суммировать эти площади, то получится, что площадь круга равна длине его окружности, умноженной на половину радиуса. С такой же простотой И. Кеплер вычисляет объем шара и других тел вращения; но эта простота порождает сомнения (к-рых он не скрывает) и иногда приводит его к ошибкам. Чтобы устранить эти сомнения, И. Кеплер подтверждает свое рассужде-

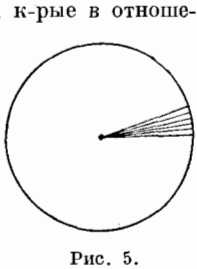


Рис. 5.

ние относительно площади круга такого рода соображениями: составляющие секторы можно сделать настолько малыми, что их основаниями становятся точки, и число секторов тогда становится бесконечным; каждый из этих бесконечно малых секторов уже вовсе не отличается от такого же треугольника. Конечно, это рассуждение ничего не спасает, потому что со сведением основания к точке исчезает сектор, и треугольник превращается просто в радиус. Его существенная особенность заключается в том, что здесь И. Кеплер более или менее сознательно склоняется к статич. разложению круга на бесконечно большое число актуально беско-

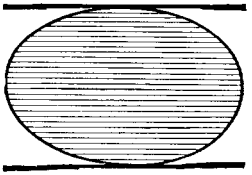


Рис. 6.

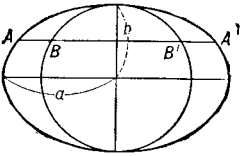


Рис. 7.

нечно малых секторов — радиусов, а не к потенциальной бесконечности непрерывно возрастающего числа непрерывно убывающих слагаемых; в этом виде неограниченно продолжающийся процесс исчезает. Было бы неправильно сказать, что И. Кеплер твердо стоял на точке зрения актуальной бесконечности: он слишком находился еще под влиянием Архимеда, основные сочинения к-рого ему были хорошо известны; но его позиция не тверда, его воззрения в этой области эклектичны. Они представляют собой переходную ступень к взглядам Б. Кавальери.

В 1635 Б. Кавальери опубликовал трактат «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного». Задача сочинения та же, к-рую ставил себе Архимед: вычисление площадей и объемов геометрич. фигур произвольной формы. С этой целью Б. Кавальери рассматривает плоскую фигуру как совокупность параллельных прямолинейных отрезков от одной крайней касательной до другой (рис. 6), тело — как совокупность его параллельных плоских сечений. Эти отрезки и плоские сечения суть те «неделимые», по к-рым назван метод Б. Кавальери (см. *Неделимых метод*). Измерение площадей, объемов совершается путем сравнения неделимых двух фигур. Напр., площадь эллипса Б. Кавальери вычисляет с помощью следующего рассуждения (рис. 7). На малой оси эллипса ($2b$) описываем окружность и проводим хорды (неделимые), параллельные большой оси ($2a$). Из определения эллипса нетрудно вывести, что каждый неделимый элемент эллипса относится к соответствующему неделимому круга, как a относится к b, то есть $AA' : BB' = a : b$. Следовательно, совокупность всех неделимых эллипса (т. е. площадь эллипса) относится к совокупности неделимых круга (к площади круга πb^2), как $a : b$; поэтому площадь эллипса равна πab. Те же приемы Б. Кавальери применяет к сравнению объемов; доказательство равновеликости пирамид, имеющих равновеликие основания и равные высоты, у Б. Кавальери заканчивается там, где у Архимеда оно только начинается. Общность и простота применения приемов привели Б. Кавальери к результатам, до к-рых не дошел Архимед. Но упрощенность его методов не давала гарантии правильности всех полученных результатов; поэтому он каждое вычисление проводит несколькими различными путями.

Если в отношении строгости логич. обоснования своих результатов Б. Кавальери стоит несравненно ниже Архимеда, то зато он превзошел Архимеда, а с ним и всех математиков древнего мира не только в отношении чис-

ла решенных им специальных задач на определение площадей и объемов, но и в отношении понимания дальнейших перспектив развития учения о бесконечно малых. Не ограничиваясь решением отдельных задач, он в геометрической и нестрогой форме получает, по существу, ряд общих формул интегрального исчисления. Например, его утверждение, что сумма квадратов неделимых, на которые разбит параллелограмм на рис. 8, равна утроенной сумме квадратов неделимых, из к-рых состоит на том же рис. каждый из двух составляющих параллелограмм треугольников, есть по существу не что иное, как формула

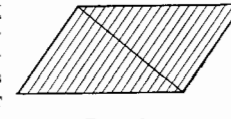


Рис. 8.

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}\int_0^a a^2\,dx = \frac{a^3}{3}.$$

В аналогичной форме Б. Кавальери выражает равенство

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

для степеней n до девятой включительно.

В том же 17 в. внимание математиков привлекает и третья из перечисленных выше групп задач. После создания Р. Декартом (R. Descartes) аналитич. геометрии естественно возникла задача определения углового коэффициента касательной к кривой $y=f(x)$, т. е. определения производной. Приблизительно одновременно развитие механики привело к необходимости определять мгновенную скорость произвольного движения точки, т. е. к той же задаче определения производной. Так как теории пределов и даже отчетливого наглядного понимания предельного перехода еще не было, то производную

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

пытались получить как отношение

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

статических актуально бесконечно малых приращений dy и dx.

Современная концепция бесконечно малых как переменных величин, стремящихся к нулю, а производной как предела отношения бесконечно малых приращений была намечена (хотя и не вполне последовательно) И. Ньютоном (I. Newton, 17 в.), однако укрепилась только после О. Коши (A. Cauchy, 19 в.). Современное понимание дифференциала как главной части приращения по существу восходит к Ж. Лагранжу (J. Lagrange, 18 в.) и было окончательно закреплено О. Коши, к-рый дал и точное определение интеграла как предела суммы.

Для развитого дифференциального или интегрального исчисления характерно, что после строгого обоснования своих основных понятий при помощи предельного перехода они дают возможность решать разнообразнейшие задачи при помощи простого алгоритма чисто алгебраич. характера (в том смысле, что сам этот алгоритм уже не содержит в явном виде предельных переходов). Благодаря этому современные способы вычисления с дифференциалами и интегралами успешно соединяют в себе строгую логич. обоснованность с простотой и наглядностью.

Лит.: [1] Архимед, Сочинения, М., 1962; [2] Кеплер И., Новая стереометрия винных бочек..., пер. с нем., М.— Л., 1935; [3] Кавальери Б., Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного, [пер. с итал.], т. 1, М.— Л., 1940. *БСЭ*-2.

БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ, несобственные элементы,— элементы (точки, прямые, плоскости и т. д.), возникающие при расширении пек-рого аффинного пространства до ком-

пактного пространства. Б. у. э. являются одной из форм проявления в различных математич. теориях «актуальной» *бесконечности*. При этом неразрывная связь бесконечного и конечного проявляется в том, что Б. у. э. имеют смысл лишь постольку, поскольку они рассматриваются при нек-рой конкретной компактификации данного «конечного» пространства. Ниже описываются виды Б. у. э., возникающие при наиболее часто применяемых способах компактификации евклидовых конечномерных пространств.

1) Введением Б. у. э. (точек $-\infty$ и $+\infty$) числовая прямая $\mathbb{R}$ пополняется до компактной расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$, гомеоморфной отрезку. Другой способ компактификации состоит в погружении $\mathbb{R}$ в действительную проективную прямую $P_1(\mathbb{R})=\tilde{\mathbb{R}}$, гомеоморфную окружности S_1 (см. *Проективное пространство*); при этом $\mathbb{R}$ пополняется одной единственной бесконечно удаленной точкой ∞.

2) Добавлением *одной* единственной бесконечно удаленной точки ∞ конечная комплексная плоскость $\mathbb{C}$ пополняется до компактной расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, гомеоморфной комплексной *проективной прямой* или *Римана сфере* S_2 (единичной сфере в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$).

3) Добавлением одной единственной бесконечно удаленной точки ∞ n-мерное действительное числовое пространство $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 1$, пополняется до компактного расширенного числового пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$, гомеоморфного сфере S_n; этот гомеоморфизм наглядно демонстрируется *стереографической проекцией*. Другой способ компактификации состоит в погружении $\mathbb{R}^n$ в n-мерное действительное проективное пространство $P_n(\mathbb{R})$. При $n>1$ эти две компактификации не гомеоморфны.

Например, параллельным прямым в проективной плоскости $P_2(\mathbb{R})$ соответствует одна и та же бесконечно удаленная точка, непараллельным прямым — различные бесконечно удаленные точки. Все бесконечно удаленные точки плоскости $P_2(\mathbb{R})$ составляют бесконечно удаленную прямую. Аналогично, в проективном пространстве $P_3(\mathbb{R})$ каждая плоскость дополнена бесконечно удаленной прямой. Все бесконечно удаленные точки и бесконечно удаленные прямые в $P_3(\mathbb{R})$ составляют бесконечно удаленную плоскость. Вообще, в $P_n(\mathbb{R})$ все Б. у. э. размерности $\leqslant(n-2)$ составляют бесконечно удаленную $(n-1)$-мерную гиперплоскость.

4) Компактификация комплексного n-мерного числового пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, также возможна посредством погружения $\mathbb{C}^n$ в комплексное n-мерное проективное пространство $P_n(\mathbb{C})$. В $P_n(\mathbb{C})$ также все Б. у. э. размерности $\leqslant(n-2)$ составляют комплексную $(n-1)$-мерную бесконечно удаленную гиперплоскость. Другой способ компактификации состоит в расширении $\mathbb{C}^n$ до расширенного комплексного пространства $\overline{\mathbb{C}^n}$, представляющего собой топологич. произведение n пространств $\overline{\mathbb{C}}$. При $n>1$ пространства $P_n(\mathbb{C})$ и $\overline{\mathbb{C}^n}$ не гомеоморфны. Бесконечно удаленными точками пространства $\overline{\mathbb{C}^n}$ являются те наборы $z=(z_1, \ldots, z_n)$, в к-рых хотя бы одна координата $z_\nu=\infty$. Множество всех бесконечно удаленных точек пространства $\overline{\mathbb{C}^n}$ естественно разбивается на n множеств

$$M_\nu=\{z\in\overline{\mathbb{C}^n};\quad z_\nu=\infty;\quad z_k\in\overline{\mathbb{C}},\quad k\neq\nu\},$$

причем каждое M_ν имеет размерность $n-1$. Точка $(\infty, \ldots, \infty)$ принадлежит всем M_ν, $\nu=1, \ldots, n$. При рассмотрении действительных функций в $\mathbb{C}^n$ применима также одноточечная компактификация $\tilde{\mathbb{C}}^n$, гомеоморфная $\tilde{\mathbb{R}}^{2n}$ или сфере S_{2n}.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства, пер. с франц., М., 1969; [2] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 5 изд., М., 1971; [3] Хартсхорн Р., *Основы проективной геометрии*, пер. с англ., М., 1970; [4] Фукс Б. А., Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962; [5] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА УРАВНЕНИЕ в комплексной области — дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)\, y^{(n)}(z) = f(z),$$

где $y(z)$ — искомая функция комплексного переменного z, $a_n(z)$, $f(z)$ — заданные функции. Наиболее полно изучены Б. п. у. с постоянными коэффициентами:

$$Ly \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{(n)}(z) = f(z).$$

Если характеристич. функция

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$$

есть целая функция экспоненциального типа σ, то левая часть Ly имеет смысл при $z=z_0$, когда $y(z)$ — функция, аналитическая в круге $|z-z_0|<R$, $R>\sigma$. При $\sigma=\infty$ необходимо предположить, что $y(z)$ — целая функция. Отличие от уравнения конечного порядка состоит уже в том, что решение $y(z)$ может иметь особенности, даже когда $f(z)$ — целая функция. Если $\sigma=0$ и $f(z)$ есть целая функция, то область существования любого решения выпукла [1]. Общее решение слагается из частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — корни характеристич. уравнения $\varphi(\lambda)=0$ и $m_1, m_2, \ldots$ — соответственно их кратности. Однородное уравнение имеет элементарные частные решения $z^k e^{\lambda_n z}$ ($k=0, 1, \ldots, m_n-1$; $n=1, 2, \ldots$). Решению однородного уравнения можно отнести по определенному правилу ряд из элементарных решений. Если характеристич. функция $\varphi(\lambda)$ имеет правильный рост (в нек-ром определенном смысле), то найдется подпоследовательность частичных сумм этого ряда, сходящаяся к $y(z)$ (см. [4]). В общем случае функцию $y(z)$ можно аппроксимировать с любой точностью конечными линейными комбинациями из элементарных решений [5]. В случае $\sigma=0$ Б. п. у. может иметь неаналитические решения [2]. При нек-рых условиях эти решения образуют *квазианалитический класс функций* с менее сильными ограничениями на рост производных, чем в классич. теореме Данжуа — Карлемана.

Б. п. у. имеют различные применения: для изучения последовательностей полиномов Дирихле, полноты систем аналитических функций, единственности аналитических и гармонических функций, разрешимости таких проблем анализа, как обобщенная проблема квазианалитичности, обобщенная проблема единственности моментов и т. д.

Лит.: [1] Polya G., «Nachr. Ges. Wiss. Göttingen», 1927, S. 187—95; [2] Valiron G., «Ann. scient. École norm. supér.», 1929, t. 46, № 1, p. 25—53; [3] Леонтьев А. Ф., «Тр. четвертого всесоюзн. матем. съезда», Л., 1964, т. 2, с. 648—60; [4] его же, «Матем. сб.», 1966, т. 70, № 1, с. 132—44; [5] Красичков-Терновский И. Ф., «Матем. сб.», 1972, т. 88, № 3, с. 331—52.

А. Ф. Леонтьев.

БЕСКОНЕЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ — выражение

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+u_k), \qquad (*)$$

содержащее бесконечное множество числовых или функциональных сомножителей, каждый из к-рых отличен от нуля. Б. п. наз. сходящимся, если существует

отличный от н
произведений

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + u_k)$$

при $n \to \infty$. Значением Б. п. наз. этот предел

$$\lim_{n \to \infty} p_n = P$$

и пишут

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k) = P.$$

Б. п. сходится тогда и только тогда, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln (1 + u_k).$$

Тем самым исследование сходимости Б. п. сводится к исследованию сходимости рядов. Б. п. (*) наз. абсолютно сходящимся, если сходится Б. п.

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + |u_k|),$$

для абсолютной сходимости Б. п. (*) необходимо и достаточно, чтобы абсолютно сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

Б. п. обладает переместительным свойством (т. е. его значение не зависит от порядка сомножителей) в том и только в том случае, если оно сходится абсолютно.

Б. п. (*) с функциональными сомножителями

$$1 + u_k = 1 + u_k(z),$$

определенными, напр., в области D плоскости комплексного переменного z, сходится равномерно в D, если последовательность частичных произведений $p_n(z)$ сходится в D равномерно к пределу, отличному от нуля. В приложениях, однако, весьма важен случай, когда нек-рые сомножители имеют нули в D такие, что на любом компакте $K \subset D$ их лежит не более конечного числа. Понятие сходимости обобщается при этом следующим образом: Б. п. (*) наз. (абсолютно, равномерно) сходящимся внутри D, если для любого компакта $K \subset D$ существует такой номер $N = N(k)$, что все сомножители $1 + u_k(z) \neq 0$ на k при $k \geqslant N$ и последовательность частичных произведений

$$\prod_{k=N}^{n} [1 + u_k(z)]$$

сходится на K (абсолютно, равномерно) к пределу, отличному от нуля. Если все сомножители — аналитич. функции на D и Б. п. сходится равномерно внутри D, то оно представляет в D аналитич. функцию.

Б. п. впервые встретилось у Ф. Виета (F. Viète, 1593) при рассмотрении задачи о квадратуре круга, а именно он получил аналитич. представление числа π, построив следующее Б. п.:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots.$$

Другое представление числа π восходит к Дж. Валлису (J. Wallis, 1665):

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots.$$

Б. п. с функциональными сомножителями появились у Л. Эйлера (L. Euler, 1742), напр.:

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

Б. п.— основной аппарат для представления аналитич. функций с явным указанием их нулей; они явля-

ются для *целых функций* аналогом разложения многочлена на множители. См. также *Бляшке произведение*, *Вейерштрасса теорема* о бесконечном произведении, *Каноническое произведение*.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [3] Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972. *Е. Д. Соломенцев.*

БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ группы Ли — представление группы Ли в бесконечномерном векторном пространстве. Теория представлений групп Ли есть часть общей теории представлений топологич. групп. Специфика групп Ли позволяет использовать в этой теории средства анализа (в частности, инфинитезимальный метод), а также значительно расширить класс «естественных» *групповых алгебр* (функциональных алгебр относительно свертки), рассмотрение к-рых связывает данную теорию с *гармоническим анализом абстрактным*, т. е. с частью общей теории *топологических алгебр*.

Пусть G — группа Ли. Представлением группы G в широком смысле наз. произвольный гомоморфизм $G \to GL(E)$, где $GL(E)$ — группа всех обратимых линейных преобразований векторного пространства E. Если E — топологич. векторное пространство, то обычно рассматриваются гомоморфизмы со значениями в алгебре $C(E)$ всех непрерывных линейных преобразований пространства E, либо в алгебре $S(E)$ всех слабо непрерывных линейных преобразований пространства E. Алгебры $C(E)$, $S(E)$ наделяются одной из стандартных топологий (напр., слабой или сильной). Представление φ наз. непрерывным (раздельно непрерывным), если вектор-функция $\varphi(g)\xi$ непрерывна (раздельно непрерывна) на $G \times E$. Если E — квазиполное бочечное пространство, то всякое раздельно непрерывное представление непрерывно. Непрерывное представление φ наз. дифференцируемым (аналитическим), если операторная функция $\varphi(g)$ дифференцируема (аналитична) в $S(E)$. Под размерностью представления φ понимают размерность пространства E. Важнейшим примером представления группы G является ее *регулярное представление* $\varphi(g)f(x)=f(xg)$, x, $g \in G$, определяемое в том или ином классе функций $f(x)$ на группе G. Если G — группа Ли, то ее регулярное представление непрерывно в $C(G)$ и $L^p(G)$ ($L^p(G)$ определяется относительно *Хаара меры* на G) и дифференцируемо в $C^\infty(G)$ (относительно стандартной топологии в $C^\infty(G)$ — топологии компактной сходимости). Всякое непрерывное *конечномерное представление* группы G аналитично. Если G — комплексная группа Ли, то естественно рассматривать также ее комплексно аналитические (голоморфные) представления. Как правило, в теории представлений групп Ли рассматриваются только непрерывные представления, и условие непрерывности специально не оговаривается. Если группа G компактна, то все ее неприводимые (непрерывные) представления конечномерны. Соответственно, если G — полупростая комплексная группа Ли, то все ее неприводимые голоморфные представления конечномерны.

Связь с представлениями групповых алгебр. Для группы Ли важнейшими групповыми алгебрами являются алгебра $L^1(G)$, алгебра $C^*(G)$ — пополнение алгебры $L^1(G)$ по наименьшей регулярной норме (см. *Алгебра функций*), $C_0^\infty(G)$ — алгебра всех финитных бесконечно дифференцируемых функций на G, $M(G)$ — алгебра всех комплексных мер Радона с компактными носителями на G, $D(G)$ — алгебра всех финитных обобщенных функций (распределений Шварца) на G, а также, для комплексной группы Ли, алгебра $A(G)$ всех аналитич. функционалов над G. Линейные пространства $M(G)$, $D(G)$, $A(G)$ являются

сопряженными, соответственно, к $C(G)$, $C^\infty(G)$, $H(G)$, где $H(G)$ — множество всех голоморфных функций на G (с топологией компактной сходимости). Все эти алгебры наделяются естественными топологиями; в частности, $L^1(G)$ является *банаховой алгеброй*. Умножение (свертка) элементов a, $b \in A$, где A — одна из указанных выше групповых алгебр, определяется равенством

$$ab(g) = \int a(gh^{-1})\, b(h)\, dh$$

относительно правоинвариантной меры на G, с естественным распространением этой операции на класс обобщенных функций. Интегральная формула

$$\varphi(a) = \int a(g)\, \varphi(g)\, dg, \quad a \in A$$

устанавливает естественную связь между представлениями группы G и представлениями алгебры A (при условии корректной определенности интеграла): если интеграл слабо сходится и определяет оператор $\varphi(a) \in S(E)$ при каждом $a \in A$, то отображение $a \to \varphi(a)$ является гомоморфизмом. В этом случае говорят, что представление $\varphi(g)$ группы G продолжается до представления $\varphi(a)$ алгебры A, или является A-представлением. Обратно, всякое слабо непрерывное невырожденное представление алгебры A определяется, по указанной формуле, нек-рым представлением группы G (слабо непрерывным при $A = M(G)$, слабо дифференцируемым при $A = D(G)$, слабо аналитическим при $A = A(G)$). Указанное соответствие сохраняет естественные соотношения между представлениями, такие, как топологич. неприводимость или эквивалентность. Если группа G унимодулярна, то ее *унитарным представлениям* (в гильбертовых пространствах) соответствуют *симметричные представления* алгебры $L^1(G)$ относительно инволюции в $L^1(G)$ (см. *Групповая алгебра*). Если E — секвенциально полное локально выпуклое хаусдорфово пространство, то всякое непрерывное представление группы G в пространстве E является $M(G)$-представлением. Если, кроме того, представление группы G дифференцируемо, то оно является $D(G)$-представлением. В частности, если E — рефлексивное или квазиполное бочечное пространство, то всякое раздельно непрерывное представление $\varphi(g)$ является $M(G)$-представлением, причем $\varphi(a) \in C(E)$ для всех $a \in M(G)$.

Инфинитезимальный метод. Если представление $\varphi(g)$ дифференцируемо, то оно бесконечно дифференцируемо, и пространство E наделяется структурой $\mathfrak{g}$-модуля, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, путем рассмотрения инфинитезимальных операторов Ли:

$$\varphi(a) = \frac{d}{dt}\, \varphi(\exp ta)_{t=0}, \quad a \in \mathfrak{g}.$$

Операторы $\varphi(a)$ образуют представление алгебры $\mathfrak{g}$, наз. дифференциалом представления $\varphi(g)$. Вектор $\xi \in E$ наз. дифференцируемым (*относительно* $\varphi(g)$), если вектор-функция $\varphi(g)\xi$ дифференцируема на G. Вектор $\xi \in E$ наз. аналитическим, если $\varphi(g)\xi$ — аналитич. функция в окрестности единичной точки $e \in G$. Если $\varphi(g)$ является $C_0^\infty(G)$-представлением, то пространство $V(E)$ всех бесконечно дифференцируемых векторов всюду плотно в E. В частности, это верно для всех непрерывных представлений в банаховом пространстве; более того, в этом случае [4] пространство $W(E)$ всех аналитич. векторов всюду плотно в E. Дифференциал $\varphi(g)$ в $V(E)$ может быть приводимым, даже если $\varphi(g)$ топологически неприводимо в E. Двум эквивалентным представлениям группы G соответствуют эквивалентные дифференциалы в $V(E)(W(E))$; обратное, вообще говоря, неверно. Для унитарных представлений в гильбертовых пространствах E, H из экви-

валентности дифференциалов в $W(E)$, $W(H)$ следует эквивалентность представлений [7]. В конечномерном случае представление группы однозначно восстанавливается по своему дифференциалу. Представление алгебры $\mathfrak{g}$ наз. интегрируемым (G-интегрируемым), если оно совпадает с дифференциалом нек-рого представления группы G на подпространстве, всюду плотном в пространстве представления. Критерии интегрируемости известны (к 1977) лишь в частных случаях (см., напр., [4]). Если G односвязна, то всякое конечномерное представление алгебры $\mathfrak{g}$ является G-интегрируемым.

Неприводимые представления. Одной из основных задач теории представлений является классификация всех *неприводимых представлений* данной группы G, определяемых с точностью до эквивалентности, при согласованном определении понятий неприводимости и эквивалентности. Так, представляют интерес следующие две задачи. 1) Описание множества $\hat{G}$ всех классов унитарной эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы G. 2) Описание множества $\tilde{G}$ всех классов эквивалентности по Феллу [7] вполне неприводимых представлений группы G. Для полупростых групп Ли с конечным центром эквивалентность по Феллу равносильна эквивалентности по Наймарку [7], причем имеет место естественное вложение $\hat{G} \to \tilde{G}$. Множества $\tilde{G}$, $\hat{G}$ естественно топологизируются; при этом топология в них не обязательно хаусдорфова [5]. Если G — компактная группа Ли, то $\tilde{G} = \hat{G}$ — дискретное пространство. Описание множества $\hat{G}$ в этом случае получено Э. Картаном (E. Cartan) и Г. Вейлем (H. Weyl). Линейная оболочка $\gamma(G)$ матричных элементов группы G (т. е. матричных элементов представлений $\varphi \in \hat{G}$) образует в этом случае подалгебру в $C^\infty(G)$ (алгебру сферич. функций), всюду плотную в $C(G)$ и в $C^\infty(G)$. Матричные элементы образуют базис в $C^\infty(G)$. Если матрицы всех представлений $\varphi \in \hat{G}$ определяются в базисе, по отношению к к-рому они унитарны, то соответствующие матричные элементы образуют ортогональный базис в $L^2(G)$ (теорема Петера — Вейля). Если группа G некомпактна, то ее неприводимые представления, как правило, бесконечномерны. Метод построения таких представлений, на примере классических матричных групп предложенный И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком [1], явился началом интенсивного развития теории унитарных бесконечномерных представлений. Обобщением этого метода для произвольных групп Ли является теория индуцированных представлений Дж. Макки [5]. В 50-х гг. 20 в. начинает развиваться также общая теория неунитарных представлений в локально выпуклых векторных пространствах, основанная в значительной степени на теории топологических векторных пространств и теории обобщенных функций. Детальное описание $\tilde{G}(\hat{G})$ известно (к 1977) для отдельных классов групп Ли (полупростых комплексных, нильпотентных и некоторых разрешимых групп Ли, а также их полупрямых произведений).

Пусть G — полупростая группа Ли с конечным центром, φ есть $M(G)$-представление в пространстве E и K — компактная подгруппа в G. Вектор $\xi \in E$ наз. K-финитным, если его циклич. оболочка относительно K конечномерна. Подпространство V всех K-финитных векторов всюду плотно в E и является прямой (алгебраической) суммой подпространств V^λ, $\lambda \in \hat{K}$, где V^λ — максимальное подпространство в V, представление K в к-ром кратно λ. Представление φ наз. K-финитным, если $\dim V^\lambda < \infty$ для всех λ. Подгруппа K наз. массивной, если всякое вполне неприводимое представление группы G является K-финит-

ным. Принципиальное значение в теории представлений имеет следующий факт: если K — максимальная компактная подгруппа в G, то K массивна. Если векторы из V дифференцируемы, то V инвариантно относительно дифференциала $d\varphi$ представления φ. Представление φ наз. н о р м а л ь н ы м, если оно K-финитно и векторы из V слабо аналитичны. Если φ нормально, то существует взаимно однозначное отображение (определяемое сужением на V) замкнутых подмодулей G-модуля φ и подмодулей $\mathfrak{g}$-модуля $\varphi_0 = d\varphi|V$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G (см. [7]). Таким образом, изучение нормальных представлений удается алгебраизовать при помощи инфинитезимального метода. Примером нормального представления группы G является ее *элементарное представление* $e(\alpha)$. Представление $e(\alpha)$ вполне неприводимо для точек α общего положения. В общем случае $e(\alpha)$ допускает разложение в конечный композиционный ряд, факторы к-рого вполне неприводимы. Всякое квазипростое неприводимое представление группы G в банаховом пространстве инфинитезимально эквивалентно одному из факторов $e(\alpha)$, при нек-ром α. Это верно также для вполне неприводимых представлений группы G в квазиполных локально выпуклых пространствах. При этом, если G комплексна, то вместо факторов $e(\alpha)$ достаточно рассматривать подпредставления $e(\alpha)$ (см. [7]). В простейшем случае $G = SL(2, \mathbb{C})$ представление $e(\alpha)$ определяется парой комплексных чисел p, q с целочисленной разностью $p-q$ и действует по формуле правых сдвигов $\varphi(g)f(x) = f(xg)$, $x = (x_1, x_2)$, $g \in G$ в пространстве всех функций $f(x) \in C^\infty(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$, удовлетворяющих условию однородности: $f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^{p-1}\bar{\lambda}^{q-1} f(x_1, x_2)$. Если p и q — положительные целые числа, то $e(\alpha)$ содержит неприводимое конечномерное подпредставление $d(\alpha)$ (в классе полиномов от x_1, x_2), фактор по к-рому вполне неприводим. Если p и q — отрицательные целые числа, то $e(\alpha)$ имеет двойственную структуру. Во всех остальных случаях модуль $e(\alpha)$ вполне неприводим. Множество $\hat{G}$ в этом случае находится во взаимно однозначном соответствии с множеством пар (p, q) ($p-q$ — целое), факторизованном по отношению $(p, q) \sim (-p, -q)$. Подмножество $\hat{G}$ состоит из представлений основной серии ($p+q$ — чисто мнимое) (см. *Серии представлений*), дополнительной серии ($0 \leqslant p = q < 1$) и тривиального (единичного) представления δ_0, к-рое возникает при $p = q = 1$. Пусть G — полупростая связная комплексная группа Ли, B — ее максимальная разрешимая (борелевская) подгруппа, M — максимальный тор, $H = MA$ — картановская подгруппа, α — характер группы H (продолженный на B); множество $\hat{G}$ находится [7] во взаимно однозначном соответствии с A/W, где A — множество всех характеров α, $W = W_1$ — *Вейля группа* комплексной алгебры $\mathfrak{G}$. Для характеров «общего положения» представление $e(\alpha)$ вполне неприводимо. Описание множества G сведено к исследованию положительной определенности нек-рых билинейных форм, но окончательное описание (к 1977) неизвестно. Для вещественных групп особый интерес представляет так наз. *дискретная серия* представлений (прямые слагаемые в $L^2(G)$). Все неприводимые представления дискретной серии классифицированы [3] путем описания характеров этих представлений.

Для нильпотентных связных групп Ли [8] множество $\hat{G}$ эквивалентно $\mathfrak{g}'/G$, где $\mathfrak{g}'$ — линейное пространство, дуальное к $\mathfrak{g}$, и действие G в $\mathfrak{g}'$ сопряжено присоединенному представлению в $\mathfrak{g}$ [9]. Соответствие устанавливается *орбит методом* [8]. Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ наз. п о л я р и з а ц и е й элемента $f \in \mathfrak{g}'$, если f аннулирует $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ и

$$\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - \frac{1}{2} \dim \Omega,$$

где Ω — орбита f относительно G (всякая орбита четномерна). Если H — соответствующая аналитич. подгруппа в G и $\alpha=\exp f$ — характер группы H, то представление $u(\alpha)$, соответствующее f, индуцируется характером α подгруппы H. При этом $u(\alpha_1)$ эквивалентно $u(\alpha_2)$ тогда и только тогда, когда соответствующие функционалы f_1, f_2 лежат на одной орбите Ω. В простейшем случае группы $G=Z(3)$ всех унипотентных матриц по отношению к фиксированному базису в $\mathbb{C}^3$ орбиты общего положения в $\mathbb{C}^3=\{(\lambda, \mu, \nu)\}$ являются двумерными плоскостями $\lambda=\text{const}\neq 0$ и точками (μ, ν) на плоскости $\lambda=0$. Каждой орбите общего положения соответствует неприводимое представление $u(\alpha)$ группы G, определяемое формулой вида

$$u(\alpha, g) f(t)=a(t, g) f(t, g), \quad -\infty < t < \infty,$$

в гильбертовом пространстве $E=L^2(-\infty, \infty)$. Инфинитезимальные операторы этого представления совпадают с операторами d/dt, $i\lambda t$, $i\lambda I$, где I — единичный оператор в пространстве E. Указанный результат равносилен теореме Стоуна — Неймана о самосопряженных операторах P, Q с коммутационным соотношением $[P, Q]=i\lambda I$. Каждой точке (μ, ν) соответствует одномерное представление (характер) $Z(3)$. Множество $\hat{G}$ в этом случае описывается аналогично, с выходом в комплексную область по параметрам λ, μ, ν. Указанный метод орбит естественно обобщается на разрешимые связные группы Ли и даже на произвольные группы Ли, причем в общем случае приходится рассматривать орбиты в $\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}}$, где $\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}}$ — комплексификация $\mathfrak{G}'$, удовлетворяющие нек-рым условиям целочисленности [8].

Исследование о б щ е г о с л у ч а я сводится в известной степени к двум рассмотренным случаям посредством теории индуцированных представлений [5], позволяющей описывать неприводимые унитарные представления полупрямого произведения $G=HN$ с нормальным делителем N в терминах неприводимых представлений N и нек-рых подгрупп группы H (в силу теоремы Леви — Мальцева). Практически этот метод эффективен лишь в том случае, когда радикал коммутативен. Другим методом изучения $\hat{G}$ (и также $\tilde{G}$) является описание характеров неприводимых унитарных представлений группы G; множество таких характеров находится в естественном взаимно однозначном соответствии с $\hat{G}$. Справедливость общей формулы для характеров, предложенной А. А. Кирилловым [8], проверена (к 1977) лишь для отдельных классов групп Ли.

Г а р м о н и ч е с к и й а н а л и з ф у н к ц и й н а G. Для компактной группы Ли гармонич. анализ сводится к разложению функций $f(x)$, $x\in G$ в обобщенные ряды Фурье по матричным элементам группы G (теорема Петера — Вейля для $L^2(G)$ и ее аналоги для других классов функций). Для некомпактных групп Ли основы гармонич. анализа были заложены в [1] введением обобщенного преобразования Фурье

$$F(\alpha)=\int f(x)\, e(\alpha, x)\, dx,$$

где $e(\alpha, x)$ — оператор элементарного представления $e(\alpha)$, dx — мера Хаара на G, и формулой обращения (аналог *Планшереля формулы*) для $L^2(G)$, в случае классических матричных групп над полем G. Этот результат был обобщен на локально компактные унимодулярные группы (абстрактная *Планшереля теорема*). Преобразование Фурье переводит свертку функций на группе в умножение их (операторных) образов Фурье $F(\alpha)$ и потому является важнейшим инструментом изучения групповых алгебр. Если G — полупростая группа Ли, то операторы $F(\alpha)$ удовлетворяют структурным соотношениям вида

$$A_s(\alpha) F(\alpha)=F(s\alpha) A_s(\alpha),$$

$s \in W_i$, $i=1,2$, где $A_s(\alpha)$ — сплетающие операторы, W_1 — группа Вейля симметрического пространства G/K (K — максимальная компактная подгруппа в G), W_2 — группа Вейля алгебры $\mathfrak{g}_C$ ($\mathfrak{g}_C$ — комплексификация алгебры Ли группы G). Если функции $f(x)$ финитны, то операторные функции $F(\alpha)$ являются целыми функциями комплексных параметров α. Для групповых алгебр $C_0^\infty(G)$, $D(G)$, где G — *полупростая связная комплексная* группа Ли, известны аналоги классических *Пэли — Винера теорем* [7], т. е. дано описание образов этих алгебр относительно преобразования Фурье. Эти результаты позволяют изучить структуру групповой алгебры, ее идеалов и представлений; в частности, они используются при классификации неприводимых представлений группы G. Аналоги теорем Пэли—Винера известны также для нек-рых нильпотентных (метабелевых) групп Ли и для групп движений евклидова пространства.

Проблемы спектрального анализа. Для унитарных представлений групп Ли известна общая процедура разложения представления в прямой интеграл неприводимых представлений [5]. Проблема состоит в отыскании аналитич. методов, осуществляющих это разложение для конкретных классов групп и их представлений, а также в установлении критериев однозначности такого разложения. Для нильпотентных групп Ли известен способ сужения неприводимого представления φ группы G на подгруппу G_0 (см. *Орбит метод*). Для неунитарных представлений сама постановка задачи требует уточнения, поскольку в классе таких представлений отсутствует свойство полной приводимости. В ряде случаев рассмотрение группы G заменяется рассмотрением одной из ее групповых алгебр A, и задача *спектрального анализа* трактуется как задача изучения двусторонних идеалов алгебры A. Задача спектрального анализа (и *спектрального синтеза*) тесно связана также с задачей аппроксимации функций на группе G или однородном пространстве G/H (H — подгруппа) линейными комбинациями матричных элементов группы G.

Приложения к математической физике. Связь теории представлений групп Ли со специальными функциями математич. физики была отмечена еще Э. Картаном. В дальнейшем было установлено, что основные классы этих функций тесно связаны с представлениями классических матричных групп [10]. Наличие этой связи позволяет с единой точки зрения осветить важнейшие вопросы теории специальных функций: свойства полноты и ортогональности, дифференциальные, рекуррентные соотношения, теоремы сложения и т. д., а также обнаружить новые соотношения и новые классы функций. Все эти функции являются матричными элементами классич. групп или их модификациями (характеры, сферич. функции). Теория разложения по этим функциям — часть общего гармонич. анализа на однородном пространстве G/H. Принципиальная роль теории групп Ли в математич. физике, в частности в квантовой механике и квантовой теории поля, объясняется наличием групповой симметрии (хотя бы аппроксимативной) в основных уравнениях этой теории. Классич. примерами такой симметрии являются принцип относительности Эйнштейна (относительно группы Лоренца), связь таблицы Менделеева с представлениями группы вращений, теория изотопич. спина, унитарная симметрия элементарных частиц и т. д. Связь с теоретич. физикой оказала стимулирующее влияние на развитие общей теории представлений групп Ли.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Наймарк М. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1950, т. 36; [2] Бурбаки Н., Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свёртка и представления, пер. с франц., М., 1970; [3] Вогel A., Representations de groupes localement compacts, B., 1972; [4] Нелсон Э., Аналитические векторы, «Математика», 1962,

т. 6, в. 3, с. 89—131; [5] Макки Г., Бесконечномерные представления групп, там же, с. 57—103; [6] Наймарк М. А., Бесконечномерные представления групп и смежные вопросы, в кн.: Итоги науки. Сер. матем., [в. 2], М., 1964, с. 38—82; [7] Желобенко Д. П., Гармонический анализ функций на полупростых комплексных группах Ли, М., 1974; [8] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [9] Warner G., Harmonic analisis on semi-simple Lie groups, v. 1, B., 1972; [10] Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965.

Д. П. Желобенко, М. А. Наймарк.

БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — нормальное T_1-пространство X (см. *Нормальное пространство*) такое, что ни для какого $n=-1,0,1,\ldots$ не выполняется неравенство $\dim X\leqslant n$, т. е. $X\neq\varnothing$, и для любого $n=0,1,2,\ldots$ найдется такое конечное открытое покрытие ω_n пространства X, что любое вписанное в ω_n конечное открытое покрытие этого пространства будет иметь кратность $>n+1$. Примерами Б.п. могут служить *гильбертов кирпич* I^∞ и *тихоновский куб* I^τ. Большинство встречающихся в функциональном анализе пространств также бесконечномерно.

Нормальное T_1-пространство X наз. бесконечномерным в смысле большой (соответственно, малой) индуктивной размерности, если неравенство $\operatorname{Ind} X\leqslant n$ (соответственно $\operatorname{ind} X\leqslant n$) не выполняется ни для какого $n=-1,0,1,\ldots$. Если X есть Б.п., то оно бесконечномерно в смысле большой индуктивной размерности. Если, кроме того, X есть бикомпакт, то он бесконечномерен также и в смысле малой индуктивной размерности. Бесконечномерность метрич. пространства равносильна его бесконечномерности в смысле большой индуктивной размерности. Существуют конечномерные бикомпакты, бесконечномерные в смысле малой (следовательно и большой) индуктивной размерности. Существует ли конечномерный в смысле малой индуктивной размерности и бесконечномерный в смысле большой индуктивной размерности бикомпакт (так же как и метрич. пространство),— неизвестно (1977).

Одним из наиболее естественных подходов к изучению Б.п. является введение малой трансфинитной размерности $\operatorname{ind} X$ и большой трансфинитной размерности $\operatorname{Ind} X$. Этот подход заключается в распространении определений малой и большой индуктивных размерностей на бесконечные порядковые числа. Не для всякого Б.п. X определены трансфинитные размерности $\operatorname{ind} X$ и $\operatorname{Ind} X$. Напр., обе эти размерности не определены для гильбертова кирпича. Для пространства $\bigcup I^n$, распадающегося в дискретную сумму n-мерных кубов I^n, $n=0,1,2,\ldots$, малая трансфинитная размерность не определена.

Если для нормального пространства X определена трансфинитная размерность $\operatorname{ind} X$ (соответственно $\operatorname{Ind} X$), то она равна порядковому числу, мощность к-рого не превосходит веса wX (соответственно большого веса WX) пространства X. В частности, если пространство X обладает счетной базой, то $\operatorname{ind} X<\omega_1$, а если X — компакт, то и $\operatorname{Ind} X<\omega_1$. Для метрич. пространств также $\operatorname{Ind} X<\omega_1$. Если $\alpha<\omega_1$, то существуют компакты S_α и L_α, для к-рых $\operatorname{Ind} S_\alpha=\alpha$, $\operatorname{ind} L_\alpha=\alpha$.

Если трансфинитная размерность $\operatorname{Ind} X$ определена, то определена трансфинитная размерность $\operatorname{ind} X$ и $\operatorname{ind} X\leqslant\operatorname{Ind} X$. Построены компакты, для к-рых трансфинитная размерность $\operatorname{Ind} X$ определена и $\omega_0<\operatorname{ind} X<\operatorname{Ind} X$.

Из определенности трансфинитной размерности $\operatorname{ind} X$ (соответственно $\operatorname{Ind} X$) пространства X вытекает определенность трансфинитной размерности $\operatorname{ind} X$ (соответственно $\operatorname{Ind} A$) для любого (соответственно любого замкнутого) множества $A\subseteq X$ и выполняется неравенство $\operatorname{ind} A\leqslant\operatorname{ind} X$ (соответственно $\operatorname{Ind} A\leqslant\operatorname{Ind} X$).

Для максимального бикомпактного расширения βX нормального пространства X выполняется равенство

Ind $\beta X = \operatorname{Ind} X$. Нормальное пространство X веса τ и трансфинитной размерности $\operatorname{Ind} X \leqslant \alpha$ обладает бикомпактным расширением bX веса τ и размерности $\operatorname{Ind} bX \leqslant \alpha$. Существует пространство L со счетной базой и размерности $\operatorname{ind} L = \omega_0$, у к-рого никакое бикомпактное со счетной базой расширение bX не имеет размерности $\operatorname{ind} bX = \omega_0$. Метризуемое пространство R трансфинитной размерности $\operatorname{Ind} R = \alpha$ обладает метрикой, пополнение cR по которой имеет размерность $\operatorname{Ind} cR = \alpha$. Метризуемое со счетной базой пространство R трансфинитной размерности $\operatorname{ind} R = \alpha$ обладает метрикой, пополнение cR по которой имеет размерность $\operatorname{ind} cR = \alpha$.

Класс пространств, для к-рых определена большая или малая трансфинитная размерность, тесно связан с классом *счетномерных пространств*: если полное метрич. пространство счетномерно, то для него определена малая трансфинитная размерность; если для пространства со счетной базой определена малая трансфинитная размерность, то оно счетномерно; если для метрич. пространства определена большая трансфинитная размерность (в частности, если оно конечномерно), то оно счетномерно; для счетномерного компакта определена большая трансфинитная размерность. Пространство $\bigcup I^n$ счетномерно и бесконечномерно. Гильбертов кирпич не счетномерен.

Счетномерность метрич. пространства R эквивалентна любому из следующих свойств: а) существует конечнократное (но, вообще говоря, не k-кратное ни для какого $k = 1, 2, \ldots$) непрерывное замкнутое отображение нульмерного метрич. пространства на пространство R; б) существует счетнократное непрерывное замкнутое отображение нульмерного метрич. пространства на пространство R.

Теоремы о представимости n-мерного метрич. пространства в виде суммы $n+1$ нульмерных слагаемых и в виде образа нульмерного метрич. пространства при непрерывном замкнутом и $(n+1)$-кратном отображении указывают на естественность рассмотрения класса счетномерных (метрических) пространств и на его близость к классу конечномерных пространств. Как и в конечномерном случае, в классе счетномерных метрич. пространств веса $\leqslant \tau$ существует универсальное в смысле гомеоморфного вложения пространство.

Если нормальное пространство представлено в виде конечной или счетной суммы своих счетномерных подпространств, то оно счетномерно. Подпространство счетномерного совершенно нормального пространства счетномерно.

Взаимоотношения между счетномерными и не счетномерными пространствами описывает следующее утверждение: если отображение $f: R \to S$ метрич. пространств R и S непрерывно и замкнуто, пространство R счетномерно, а пространство S не счетномерно, то множество $\{y \in S : |f^{-1}y| \geqslant c\}$ также не счетномерно.

Помимо счетномерных пространств, естественным расширением класса конечномерных пространств является класс слабо счетномерных пространств. Если рассматривать только метризуемые пространства, то слабо счетномерные пространства занимают промежуточное положение между конечномерными и счетномерными пространствами. При этом существуют счетномерные не слабо счетномерные компакты, а пространство $\bigcup I^n$ слабо счетномерно и бесконечномерно. Замкнутое подпространство слабо счетномерного пространства слабо счетномерно. Нормальное пространство слабо счетномерно, если оно представимо в виде конечной или счетной суммы своих слабо счетномерных замкнутых подмножеств.

В классах нормальных слабо счетномерных и метрических слабо счетномерных пространств существуют универсальные в смысле гомеоморфного вложения про-

странства. В случае пространств со счетной базой таким пространством будет подпространство I^ω гильбертова кирпича, состоящее из всех тех точек, лишь конечное число координат к-рых отлично от нуля. Пространство I^ω не имеет слабо счетномерных бикомпактных расширений.

Все рассмотренные выше классы Б.п. «не очень бесконечномерны», если их сравнивать, напр., с гильбертовым кирпичом. Задача отделения «не очень бесконечномерных» пространств от «очень бесконечномерных» была решена П. С. Александровым и Ю. М. Смирновым посредством введения классов A- и S-слабо бесконечномерных и A- и S-сильно бесконечномерных нормальных пространств. Любое конечномерное пространство S-слабо бесконечномерно, а любое S-слабо Б. п. также A-слабо бесконечномерно. Пространство $\bigcup I^n$ является A-слабо бесконечномерным, но S-сильно бесконечномерным.

В случае бикомпактов определения A- и S-слабой (сильной) бесконечномерности эквивалентны, поэтому A-слабо (сильно) бесконечномерные бикомпакты наз. просто с л а б о (с и л ь н о) б е с к о н е ч н о м е р н ы м и. Гильбертов кирпич сильно бесконечномерен. Существуют бесконечномерные и слабо бесконечномерные компакты.

Замкнутое подпространство A-(S-) слабо Б. п. является A-(S-) слабо бесконечномерным. Нормальное пространство, являющееся суммой конечного числа своих замкнутых S-слабо бесконечномерных множеств, само S-слабо бесконечномерно. Паракомпакт, являющийся суммой конечной или счетной системы своих замкнутых A-слабо бесконечномерных множеств, сам A-слабо бесконечномерен. Наследственно нормальное пространство, являющееся суммой конечной или счетной системы своих A-слабо бесконечномерных множеств, само A-слабо бесконечномерно.

Слабо счетномерный паракомпакт является A-слабо бесконечномерным. Наследственно нормальное счетномерное пространство является A-слабо бесконечномерным. Любой ли слабо бесконечномерный компакт счетномерен — неизвестно (1977).

Изучение любых S-слабо бесконечномерных метризуемых пространств следующим образом сводится к компактному случаю: тогда и только тогда метризуемое пространство R является S-слабо бесконечномерным, когда его можно так представить в виде суммы слабо бесконечномерного компакта и конечномерных открытых множеств O_n, $n=1,2, \ldots$, что для любой дискретной последовательности точек

$$x_i \in R, \quad i=1,2, \ldots,$$

существует (зависящее от последовательности) множество O_n, содержащее все точки x_i, начиная с нек-рой.

Другую возможность изучать бесконечномерные бикомпакты вместо любых S-слабо Б.п. дают следующие утверждения: максимальное бикомпактное расширение S-слабо Б.п.— слабо бесконечномерно; любое нормальное S-слабо бесконечномерное пространство веса τ обладает слабо бесконечномерным бикомпактным расширением веса τ. Все бикомпактные расширения A-слабо Б.п. I_ω сильно бесконечномерны.

Бикомпакт сильно бесконечномерен тогда и только тогда, когда имеется такое непрерывное отображение $f: X \to I^\infty$, что для любого множества

$$I^n = \{y=(y_i) \in I^\infty; \quad y_i=0, \quad i>n\}$$

(гомеоморфного n-мерному кубу) ограничение отображения f на прообраз $f^{-1}I^n$ является *существенным отображением*.

Существует бесконечномерный компакт, любое непустое замкнутое подпространство к-рого или нульмерно, или бесконечномерно. Более того, любой сильно

бесконечномерный компакт содержит подкомпакт, любое непустое замкнутое подпространство к-рого или пульмерно, или сильно бесконечномерно. В любом сильно бесконечномерном бикомпакте содержится бесконечномерное канторово многообразие (в смысле П. С. Александрова).

Все сепарабельные банаховы пространства гомеоморфны между собой, A-сильно бесконечномерны и гомеоморфны произведению счетной системы прямых.

Лит.: [1] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности..., М., 1973. *Б. А. Пасынков.*

БЕСКОНЕЧНОСВЯЗНАЯ ОБЛАСТЬ, область бесконечной связности,— область, у к-рой *фундаментальная группа* не является конечнопорожденной. Понятие Б.о. обычно применяется к областям в расширенной комплексной плоскости, и в этом случае данное определение равносильно тому, что граница области состоит из бесконечного числа граничных компонент. Топологические свойства Б. о. изучались П. С. Урысоном [1]. Основы теории аналитических и однолистных функций в Б. о. созданы в основном П. Кёбе и Х. Грётшем (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1, М.—Л., 1951; [2] Koebe P., «Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl.», 1909, S. 324—361; 1918, S. 60—71; [3] Grötzsch H., «Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-naturwiss. Kl.», 1931, Bd 83, № 3, S. 185—200; N 4, S. 238—253; № 5, S. 283—97; 1932, Bd 84, № 1, S. 3—14. *П. М. Тамразов.*

БЕСКОНЕЧНОСТИ АКСИОМА — аксиома формальной или содержательной теории, обеспечивающая наличие бесконечного количества объектов в рассматриваемой теории. Так, Б.а. в нек-рой системе *аксиоматической теории множеств* обеспечивает существование бесконечного множества. Напр., в языке аксиоматич. системы Цермело — Френкеля Б.а. обычно записывают в виде:

$$\exists X\,(\varnothing \in X \,\&\, \forall Z\,(Z \in X \supset Z \cup \{Z\} \in X))$$

(«существует множество X такое, что $\varnothing \in X$ и для всякого Z, принадлежащего X, множество $Z \cup \{Z\}$ также принадлежит X»).

В простой *типов теории*, ввиду специфич. ограничений на язык теории, принята другая формулировка Б. а.: существует отношение, к-рое задает на множестве индивидов линейный порядок без последнего элемента. Во многих теориях удобно применять так наз. аксиому бесконечности Дедекинда: существует множество, взаимно однозначно отобразимое в свою собственную часть. С помощью *выбора аксиомы* нетрудно показать эквивалентность аксиомы бесконечности Дедекинда другим упомянутым формам Б. а. Известно, однако, что без аксиомы выбора эту эквивалентность обычными теоретико-множественными методами доказать нельзя.

В теории множеств употребляются также так наз. высшие аксиомы бесконечности, утверждающие существование множеств весьма высокой мощности: аксиома существования недостижимого кардинала, аксиома существования измеримого кардинала и т. п.

В логике предикатов Б.а. наз. формулы, выполнимые лишь на бесконечном множестве. С точки зрения *доказательств теории* такие формулы утверждают, вообще говоря, меньше, чем Б.а. в аксиоматич. теории множеств: они обеспечивают бесконечность совокупности объектов исследования, но могут и не обеспечивать существования бесконечного объекта исследования. Показано, что существует бесконечное количество попарно неэквивалентных Б. а. логики предикатов.

А. Г. Драгалин.

БЕСКОНЕЧНОСТЬ — понятие, возникающее в различных разделах математики в основном как противопоставление понятию конечного. Понятие Б. исполь-

зуется в аналитич. и геометрич. теориях для обозначения «несобственных» или «бесконечно удаленных» элементов, в теории множеств и математич. логике при изучении «бесконечных множеств» и в др. разделах математики.

1) Представление о бесконечно малых и бесконечно больших переменных величинах является одним из основных в математич. анализе. Предшествовавшая современному подходу к понятию бесконечно малой концепция, по к-рой конечные величины составлялись из бесконечно большого числа бесконечно малых «неделимых» (см. «*Неделимых*» *метод*), трактовавшихся не как переменные, а как постоянные и меньшие любой конечной величины, может служить одним из примеров незаконного отрыва бесконечного от конечного: реальный смысл имеет только разложение конечных величин на неограниченно возрастающее число неограниченно убывающих слагаемых.

2) Совсем в другой логич. обстановке Б. появляется в математике в виде «несобственных» бесконечно удаленных геометрич. образов (см. *Бесконечно удаленные элементы*). Здесь, напр., бесконечно удаленная точка на прямой a рассматривается как особый постоянный объект, «присоединенный» к обычным конечным точкам. Однако неразрывная связь бесконечного с конечным обнаруживается и здесь, хотя бы при проектировании из центра, лежащего вне прямой, при к-ром бесконечно удаленной точке оказывается соответствующей прямая, проходящая через центр проектирования и параллельная основной прямой a.

Аналогичный характер имеет пополнение системы действительных чисел двумя «несобственными» числами $+\infty$ и $-\infty$, соответствующее многим запросам анализа и теории функций действительного переменного. Можно подойти с такой же точки зрения и к пополнению ряда натуральных чисел 1, 2, 3, . . ., *трансфинитными числами* ω, $\omega+1$, . . . , 2ω, $2\omega+1$, ... В связи с различием между переменными бесконечно малыми и бесконечно большими величинами, с одной стороны, и «несобственными» бесконечно большими числами, рассматриваемыми как постоянные, — с другой, возникли термины «потенциальная» Б. (для первых) и «актуальная» Б. (для вторых). В этом первоначальном понимании (о другом, современном понимании, см. ниже) спор между сторонниками потенциальной и актуальной Б. можно считать законченным. Бесконечно малые и бесконечно большие, лежащие в основе определения производной (как отношения бесконечно малых) и интеграла (как суммы бесконечно большого числа бесконечно малых) и примыкающих сюда концепций математич. анализа, должны восприниматься как «потенциальные». Наряду с этим в надлежащей логич. обстановке в математику вполне закономерно входят и «актуальные» бесконечно большие «несобственные» числа (и даже во многих различных аспектах: как количественные и порядковые трансфинитные числа в теории множеств, как несобственные элементы $+\infty$ и $-\infty$ системы действительных чисел и т. д.).

В математике приходится иметь дело с двумя способами присоединения к числовой системе бесконечных «несобственных» элементов.

а) С проективной точки зрения на прямой находится одна «бесконечно удаленная точка». В обычной метрич. системе координат этой точке естественно приписать абсциссу ∞. Такое же присоединение к числовой системе одной Б. без знака употребляется в теории функций комплексного переменного. В элементарном анализе при изучении рациональных функций $f(x)=P(x)/Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, в тех точках, где $Q(x)$ имеет нуль более высокого порядка, чем $P(x)$, естественно положить $f(x)=\infty$.

Для несобственного элемента ∞ устанавливаются такие правила действий:

$\infty + a = \infty$,	если a конечно;
$\infty + \infty$	не имеет смысла;
$\infty \cdot a = \infty$,	если $a \neq 0$;
$\infty \cdot 0$	не имеет смысла.

Неравенства с участием ∞ не рассматриваются: бессмысленно спрашивать, больше или меньше ∞, чем конечное a.

б) При изучении действительных функций действительного переменного систему действительных чисел дополняют двумя несобственными элементами $+\infty$ и $-\infty$. Тогда можно положить, что $-\infty < a < +\infty$ для любого конечного a, и сохранить основные свойства неравенств в расширенной числовой системе. Для $+\infty$ и $-\infty$ устанавливаются такие правила действий:

$(+\infty) + a = +\infty$,	если $a \neq -\infty$;
$(-\infty) + a = -\infty$,	если $a \neq +\infty$;
$(+\infty) + (-\infty)$	лишено смысла;
$(+\infty) \cdot a = +\infty$,	если $a > 0$;
$(+\infty) \cdot a = -\infty$,	если $a < 0$;
$(-\infty) \cdot a = -\infty$,	если $a > 0$;
$(-\infty) \cdot a = +\infty$,	если $a < 0$;
$(+\infty) \cdot 0$ и $(-\infty) \cdot 0$	лишены смысла.

3) Основной интерес, но и основные трудности математич. учения о Б. сосредоточиваются на вопросе о природе б е с к о н е ч н ы х м н о ж е с т в математич. объектов. Следует, в частности, иметь в виду, что достигнутая ныне полная отвлеченность и законченность теории бесконечно больших и бесконечно малых переменных величин заключается лишь в сведении всех трудностей этой теории к вопросу обоснования учения о числе, в к-рое существенно входит представление о Б. системы чисел. Утверждение о том, что y бесконечно мало, имеет смысл только при указании характера изменения y в зависимости от к.-л. другого переменного x; напр., говорят, что y бесконечно мало при $x \to a$, если при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $|x - a| < \delta$ вытекает $|y| < \varepsilon$. В самое это определение уже входит предположение, что функция $y = f(x)$ определена для б е с к о н е ч н о г о м н о ж е с т в а значений x (напр., для всех действительных x, достаточно близких к a).

В теории множеств терминам «актуальная» и «потенциальная» Б. придают обычно глубокий смысл, не имеющий ничего общего с наименованием каждой бесконечной мощности «актуально бесконечным числом». Дело в том, что бесконечные системы математич. объектов (напр., натуральных или действительных чисел) никогда не задаются простым перечислением, как это возможно для конечных систем объектов. Было бы очевидным абсурдом предполагать, что кто-либо «образовал» множество натуральных чисел, перечислив их фактически «все» одно за другим. На самом деле множество натуральных чисел изучают, исходя из процесса образования его элементов переходом от n к $n+1$. В случае *континуума* действительных чисел уже рассмотрение одного его элемента — действительного числа — приводит к изучению процесса образования его последовательных приближенных значений, а рассмотрение всего множества действительных чисел приводит к изучению общих свойств такого рода процессов образования его элементов. В этом именно смысле сама Б. натурального ряда, или системы всех действительных чисел (континуума), может характеризоваться как Б. лишь «потенциальная». Точке зрения потенциальной Б. противополагается взгляд на бесконечные множества как «актуально» заданные, независимо от процесса их образования. Выяснение вопроса о том, в какой мере и при каких условиях при изучении бесконечных множеств законно такое абстрагирование от процесса их образо-

вания, еще нельзя считать законченным. См. также *Абстракция актуальной бесконечности*, *Абстракция потенциальной осуществимости*. *А. Н. Колмогоров.*

БЕССЕЛЕВ ПОТЕНЦИАЛ — потенциал вида

$$P_\alpha(x)=\int_{E^n} G_\alpha(x-y)\,d\mu(y),\quad \alpha>0,$$

где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — точки евклидова пространства E^n, $n\geqslant 2$, $d\mu$ — борелевская мера на E^n,

$$G_\alpha(x)=2^{\frac{2-n-\alpha}{2}}\pi^{-\frac{n}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1}K_{\frac{n-\alpha}{2}}(|x|)\,|x|^{\frac{\alpha-n}{2}},$$

$$|x|=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2},$$

$K_\nu(z)$ — модифицированная *цилиндрическая функция* (или бесселева функция) 2-го рода порядка ν, или функция Макдональда порядка ν; $G_\alpha(x)$ наз. бесселевым ядром.

Основные свойства бесселевых ядер $G_\alpha(x)$ те же, что ядер Рисса (см. *Рисса потенциал*): положительность, непрерывность при $x\neq 0$, свойство композиции

$$\int_{E^n} G_\alpha(x-y)\,G_\beta(y)\,dy=G_{\alpha+\beta}(x),$$

но, в отличие от потенциалов Рисса, Б.п. применимы при всех $\alpha>0$, поскольку

$$G_\alpha(x)\sim 2^{\frac{1-n-\alpha}{2}}\pi^{\frac{1-n}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1}|x|^{\frac{\alpha-n-1}{2}}e^{-|x|}$$

при $|x|\to\infty$.

Если $\alpha>2m$, где m — натуральное число, мера $d\mu$ абсолютно непрерывна с интегрируемой в квадрате плотностью $f(y)\in L^2(E^{2m})$, то для Б. п. выполняются тождества

$$(1-\Delta)^m P_\alpha(x)=P_{\alpha-2m}(x),$$

и

$$(1-\Delta)^m P_{2m}(x)=f(x),$$

где Δ — *Лапласа оператор* в E^{2m}. Иначе говоря, функция $G_{2m}(x)$ есть фундаментальное решение оператора $(1-\Delta)^m$.

Лит.: [1] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969, гл. 8; [2] Aronszajn N., Smith K. T., «Ann. Inst. Fourier», 1961, v. 11, p. 385—475.

Е. Д. Соломенцев.

БЕССЕЛЕВА СИСТЕМА — понятие теории ортогональных систем. Пусть $\{\psi_n\}$ и $\{g_n\}$ — две полные системы функций из $L^2(a, b)=L^2$ (т. е. измеримых функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[a,b]$), образующие *биортогональную систему* функций. Система ψ_n наз. бесселевой, если для любой функции $f\in L^2$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^\infty c_n^2,$$

где $c_n=(f, g_n)$ — коэффициенты разложения:

$$f\sim\sum_{n=1}^\infty c_n\psi_n$$

функции f по системе $\{\psi_n\}$. Для того чтобы система $\{\psi_n\}$ была Б. с., необходимо и достаточно, чтобы в пространстве L^2 можно было определить такой ограниченный линейный оператор A, что система $\{\varphi_n\}$, определенная равенством $A\psi_n=\varphi_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, является полной ортонормированной системой. Если система ψ_n бесселева, то существует константа M такая, что для любой $f\in L^2$

$$\sum_{n=1}^\infty (f, g_n)^2\leqslant M\,\|f\|_{L^2}^2.$$

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958, с. 430—40.

П. И. Лизоркин.

БЕССЕЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — формула, определяемая как полусумма формулы Гаусса (см. *Гаусса интерполяционная формула*) для интерполирования вперед по узлам

$x_0,\ \ x_0+h,\ \ x_0-h,\ \ldots,\ x_0+nh,\ \ x_0-nh,\ \ x_0+(n+1)\,h$

в точке $x=x_0+th$:

$$G_{2n+2}(x_0+th)=f_0+f^1_{1/2}\,t+f^2_0\,\frac{t\,(t-1)}{2!}+\ldots+$$
$$+f^{2n+1}_{1/2}\,\frac{t\,(t^2-1)\ldots(t^2-n^2)}{(2n+1)!}, \qquad (1)$$

и формулы Гаусса того же порядка для интерполирования назад по отношению к узлу $x_1=x_0+h$, т. е. по совокупности узлов

$x_0+h,\ \ x_0,\ \ x_0+2h,\ \ x_0-h,\ \ldots,\ x_0+(n+1)\,h,\ \ x_0-nh$:

$$G_{2n+2}(x_0+th)=f_1+f^1_{1/2}\,(t-1)+f^2_1\,\frac{t\,(t-1)}{2!}+\ldots+$$
$$+f^{2n+1}_{1/2}\,\frac{t\,(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2]\,(t-n)\,(t-n-1)}{(2n+1)!}. \qquad (2)$$

С использованием обозначения

$$f^{2k}_{1/2}=\frac{1}{2}\left(f^{2k}_0+f^{2k}_1\right)$$

Б. и. ф. имеет следующий вид (см. [1], [2]):

$$B_{2n+2}(x_0+th)=$$
$$=f_{1/2}+f^1_{1/2}\left(t-\frac{1}{2}\right)+f^2_{1/2}\,\frac{t\,(t-1)}{2!}+\ldots+$$
$$+f^{2n}_{1/2}\,\frac{t\,(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2]\,(t-n)}{(2n)!}+$$
$$+f^{2n+1}_{1/2}\,\frac{t\,(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2]\,(t-n)\,(t-1/2)}{(2n+1)!}. \qquad (3)$$

Б. и. ф. имеет определенные преимущества по сравнению с формулами Гаусса (1), (2); в частности, при интерполировании на середину отрезка, то есть при $t=1/2$, все коэффициенты при разностях нечетного порядка обращаются в нуль. Если в правой части (3) отбросить последнее слагаемое, то полученный многочлен $B_{2n+1}(x_0+th)$, не являясь собственно интерполяционным многочленом (он совпадает с $f(x)$ лишь в $2n$ узлах $x_0-(n-1)h,\ \ldots,\ x_0+nh$), обладает лучшей оценкой остаточного члена (см. *Интерполяционная формула*), чем интерполяционный многочлен той же степени. Напр., если $x=x_0+th\in(x_0,\ x_1)$, то оценка остаточного члена для наиболее часто используемого многочлена

$$B_3(x_0+th)=f_{1/2}+f^1_{1/2}\left(t-\frac{1}{2}\right)+f^2_{1/2}\,\frac{t\,(t-1)}{2},$$

написанного по узлам $x_0-h,\ x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h$, почти в 8 раз лучше, чем для интерполяционного многочлена, написанного по узлам $x_0-h,\ x_0,\ x_0+h$ или по узлам $x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h$ (см. [2]).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, М., 1973.

М. К. Самарин.

БЕССЕЛЯ НЕРАВЕНСТВО — неравенство

$$\|f\|^2=(f,\ f)\geqslant\sum_{\alpha\in A}\frac{|(f,\ \varphi_\alpha)|^2}{(\varphi_\alpha,\ \varphi_\alpha)}=$$
$$=\sum_{\alpha\in A}\left|\left(f,\ \frac{\varphi_\alpha}{\|\varphi_\alpha\|}\right)\right|^2,$$

где f — элемент (пред)гильбертова пространства H со скалярным произведением $(f,\ \varphi)$, а $\{\varphi_\alpha,\ \alpha\in A\}$ — ортогональная система ненулевых элементов из H. Правая часть Б. н. при любой мощности множества индексов A содержит не более счетного числа слагаемых, отличных от нуля. Б. н. вытекает из тождества Бесселя

$$\left\|f-\sum_{i=1}^n x^{\alpha_i}\varphi_{\alpha_i}\right\|^2\equiv\|f\|^2-\sum_{i=1}^n\lambda_{\alpha_i}\left|x^{\alpha_i}\right|^2,$$

справедливого для любой конечной системы элементов $\{\varphi_{\alpha_i}\}\ i=1,\ 2,\ \ldots\ n$. В этой формуле x^{α_i} — коэффи-

циенты Фурье вектора f по ортогональной системе $\{\varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2}, \ldots, \varphi_{\alpha_m}\}$, т. е. числа

$$x^{\alpha_i} = \frac{1}{\lambda_{\alpha_i}} (f, \varphi_{\alpha_i}), \quad \lambda_{\alpha_i} = (\varphi_{\alpha_i}, \varphi_{\alpha_i}).$$

Геометрически Б. н. означает, что ортогональная проекция элемента f на линейную оболочку элементов φ_α, $\alpha \in A$, имеет норму, не превосходящую нормы f (т. е. гипотенуза не короче катета). Для того чтобы вектор f принадлежал замкнутой линейной оболочке векторов φ_α, $\alpha \in A$, необходимо и достаточно, чтобы Б. н. обращалось в равенство. Если это имеет место при любом $f \in H$, то говорят, что для системы $\{\varphi_\alpha, \alpha \in A\}$ в H выполняется *Парсеваля равенство*.

Для системы $\{\varphi_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots\}$ линейно независимых (не обязательно ортогональных) элементов из H тождество Бесселя и Б. н. принимают вид

$$\left\| f - \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n} b_n^{\alpha\beta} (f, \varphi_\beta) \varphi_\alpha \right\|^2 \equiv$$

$$\equiv \| f \|^2 - \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n} b_n^{\alpha\beta} (f, \varphi_\alpha) (f, \varphi_\beta),$$

$$\| f \|^2 \geqslant \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n} b_n^{\alpha\beta} (f, \varphi_\alpha) (f, \varphi_\beta),$$

где $b_n^{\alpha\beta}$ — элементы матрицы, обратной к матрице Грама (см. *Грама определитель*) первых n векторов исходной системы.

Б. н. предложено Ф. Бесселем (F. Bessel) в 1828 для тригонометрич. системы.

Лит.: [1] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 2, М., 1973. *Л. П. Купцов.*

БЕССЕЛЯ УРАВНЕНИЕ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad \nu = \text{const}, \tag{1}$$

или в самосопряженной форме:

$$(xy')' + \left(x - \frac{\nu^2}{x} \right) y = 0.$$

Число ν наз. индексом Б. у.; величины x, y, ν в общем случае могут принимать комплексные значения. После подстановки $y = ux^{-1/2}$ получается приведенная форма уравнения (1):

$$u'' + \left[1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2} \right] u = 0. \tag{2}$$

Б. у. представляет собой частный случай *вырожденного гипергеометрического уравнения;* уравнение (2) подстановкой $x = z/2i$ приводится к *Уиттекера уравнению*. Точка $x = 0$ является для уравнения (1) слабо особой, а точка $x = \infty$ — сильно особой, и поэтому Б. у. не принадлежит классу *Фукса уравнений*. Первым систематическое изучение решений уравнения (1) предпринял Ф. Бессель [1], но еще раньше они встречались в работах Д. Бернулли (D. Bernoulli), Л. Эйлера (L. Euler), Ж. Лагранжа (J. Lagrange).

Б. у. возникает при разделении переменных во многих задачах математич. физики (см. [2]), в частности в краевых задачах теории потенциала для цилиндрич. области.

Решения Б. у. наз. *цилиндрическими функциями* (или бесселевыми функциями). Среди них выделяют цилиндрич. функции 1-го рода (*Бесселя функции*) $J_\nu(x)$, цилиндрич. функции 2-го рода (*Вебера функции*, или *Неймана функции*) $Y_\nu(x)$, цилиндрич. функции 3-го рода (*Ганкеля функции*) $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$. Если индекс ν фиксирован, то все эти функции — аналитич. функции комплексного аргумента x; для всех этих функций, за исключением функций $J_n(x)$ целого индекса, точка $x = 0$ является *ветвления точкой*. Если же фиксирован аргумент x, то все эти функции

являются однозначными целыми функциями комплексного индекса ν (см. [3]).

Если индекс ν не равен целому числу, то общее решение уравнения (1) можно записать в виде

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. При произвольном индексе любые две из функций $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$ линейно независимы и могут служить фундаментальной системой решений уравнения (1). Поэтому общее решение уравнения (1) представляется, в частности, в следующих формах:

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x), \quad y = C_1 H_\nu^{(1)}(x) + C_2 H_\nu^{(2)}(x).$$

С уравнением (1) тесно связаны: уравнение

$$z^2 y'' + zy' - (z^2 + \nu^2)\, y = 0,$$

переходящее в (1) при подстановке $z = ix$ и имеющее своей фундаментальной системой решений м о д и ф и ц и р о в а н н ы е ц и л и н д р и ч е с к и е ф у н к ц и и (б е с с е л е в ы ф у н к ц и и м н и м о г о а р г у м е н т а), и уравнение

$$z^2 y'' + zy' - (iz^2 + \nu^2)\, y = 0,$$

переходящее в (1) при подстановке $z = \sqrt{i}\, x$ и имеющее своей фундаментальной системой решений *Кельвина функции*. Многие другие линейные обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка (напр., *Эйри уравнение*) преобразованием неизвестной функции и независимой переменной также приводятся к уравнению (1); решение ряда линейных уравнений высших порядков удается записать через бесселевы функции (см. [4]).

Подстановка $y = x^\nu w$ приводит уравнение (1) к *Лапласа уравнению:*

$$xw'' + (2\nu + 1)w' + xw = 0;$$

это позволяет представлять решения уравнения (1) через контурные интегралы на комплексной плоскости.

В приложениях часто возникают задачи на собственные значения для уравнения

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - \nu^2)y = 0, \qquad (3)$$

где ν фиксировано, а λ — параметр. Уравнение (3) на отрезке $0 \leqslant x \leqslant a$ с краевыми условиями:

$$y(x) \text{ ограничена при } x \to 0, \quad y(a) = 0$$

дает пример задачи с дискретным спектром (собственные значения определяются из условия $J_\nu(a\sqrt{\lambda}) = 0$ через нули функции Бесселя). Уравнение (3) с краевым условием:

$$y(x) \text{ ограничена на полуоси } 0 \leqslant x < \infty$$

представляет собой задачу с непрерывным спектром (собственные значения $\lambda \geqslant 0$).

Н е о д н о р о д н о е у р а в н е н и е Б е с с е л я

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = f(x) \qquad (4)$$

имеет частное решение

$$y = \frac{\pi}{2} Y_\nu(x) \int xJ_\nu(x) f(x)\, dx - \frac{\pi}{2} J_\nu(x) \int xY_\nu(x) f(x)\, dx.$$

Для правой части специальных видов решения уравнения (4) изучены более детально. Напр., при $f(x) = x^\rho$ уравнению (4) удовлетворяет *Ломмеля функция*, при

$$f(x) = \frac{4\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}$$

— *Струве функция*, при

$$f(x) = \frac{1}{\pi}(x - \nu)\sin\nu\pi$$

— *Ангера функция*, при

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}[(x+\nu)+(x-\nu)\cos\nu\pi]$$

— *Вебера функция*.

Имеются линейные уравнения высших порядков, свойства решений к-рых аналогичны свойствам бесселевых функций. Общее уравнение типа Бесселя n-го порядка имеет вид

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x\frac{d}{dx}+c_i\right)y+x^n y=0,$$

$$c_i=\text{const},\quad \sum_{i=1}^{n}c_i=0,$$

а его решение зависит от $n-1$ индексов. В частности, уравнение типа Бесселя 3-го порядка (имеющее решение с двумя индексами α, β) можно представить в форме:

$$x^3y'''+3x^2y''+[1+9\alpha\beta-3(\alpha+\beta)^2]xy'+$$
$$+[x^3-9\alpha\beta(\alpha+\beta)+2(\alpha+\beta)^3]y=0,$$
$$\alpha,\ \beta=\text{const}.$$

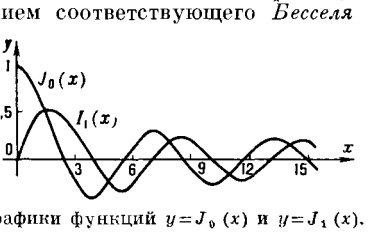
Лит.: [1] Bessel F., «Abhandl. der Königlichen Akad. Wiss. Berlin», 1824, S. 1—52; [2] Грей Э., Мэтьюз Г., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, пер. с англ., 2 изд., М., 1953; [3] Ватсон Г., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1—2, М., 1949; [4] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

Н. Х. Розов.

БЕССЕЛЯ ФУНКЦИИ — *цилиндрические функции* 1-го рода. Б. ф. индекса p может быть определена рядом

$$J_p(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}=$$
$$=\left(\frac{z}{2}\right)^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k},\qquad(*)$$

сходящемся на всей плоскости. Б. ф. индекса p является решением соответствующего *Бесселя уравнения*.



Графики функций $y=J_0(x)$ и $y=J_1(x)$.

При действительных положительных значениях аргумента и индекса ($p=\nu$ — действительное число) Б. ф. действительна, график ее имеет вид затухающего колебания (см. рис.); при четном индексе Б. ф. четна, при нечетном — нечетна. Поведение Б. ф. в окрестности нуля дается первыми слагаемыми ряда (*); при больших x справедливо асимптотич. представление

$$J_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right).$$

Нули Б. ф. [корни уравнения $J_\nu(x)=0$] — простые, при этом нули $J_\nu(x)$ лежат между нулями $J_{\nu+1}(x)$. Б. ф. «полуцелого» порядка $\nu=n+1/2$ выражаются через тригонометрич. функции; в частности,

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\quad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Б. ф. $J_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{l}x\right)$ (μ_n^ν — положительные нули $J_\nu(x)$, $\nu>-1/2$) образуют ортогональную с весом x в промежутке $(0,\ l)$ систему. При определенных условиях имеет место разложение

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nJ_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{l}x\right),$$

$$c_n=\frac{2}{l^2J_{\nu+1}^2(\mu_n^\nu)}\int_0^l f(x)\,J_\nu\left(\frac{\mu_n^\nu}{l}x\right)x\,dx,\quad 0<x<l.$$

В бесконечном промежутке его заменяет интеграл Фурье—Бесселя

$$f(x)=\int_0^\infty c_\lambda J_\nu(\lambda x)\,d\lambda,\quad c_\lambda=\int_0^\infty f(x)\,J_\nu(\lambda x)\,x\,dx,$$
$$0<x<\infty.$$

Важную роль в теории Б. ф. и их применений играют:

1) интегральное представление

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi,$$

2) производящая функция

$$e^{\frac{z}{2}\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\,\xi^n,$$

3) теорема сложения для Б. ф. нулевого индекса

$$J_0\left(\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}\right)=$$
$$=J_0(a)\,J_0(b)+2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(a)\,J_k(b)\cos k\varphi,$$

4) рекуррентные формулы

$$J_{p-1}(z)+J_{p+1}(z)=\frac{2p}{z}J_p(z),$$

$$[J_p(z)]'=\frac{1}{2}[J_{p-1}(z)-J_{p+1}(z)].$$

Лит. см. при статье *Цилиндрические функции*.

П. И. Лизоркин.

БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное сосредоточенное на (0, 1) распределение вероятностей с плотностью

$$\beta_{m,\,n}(x)=\frac{1}{\mathrm{B}(m,\,n)}\,x^{m-1}(1-x)^{n-1},\qquad(1)$$

где параметры m, n неотрицательны и нормирующий множитель $\mathrm{B}(m,\,n)$ есть бета-функция Эйлера

$$\mathrm{B}(m,\,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

($\Gamma(n)$—*гамма-функция*). Функция распределения выражается через неполную бета-функцию

$$\mathrm{B}_{m,n}(x)=\frac{1}{\mathrm{B}(m,\,n)}\int_0^x y^{m-1}(1-y)^{n-1}\,dy,\quad 0<x<1$$

(эта функция табулирована, см. [1], [2]). Моменты Б.-р. выражаются формулой

$$m_k=\frac{\mathrm{B}(m+k,\,n)}{\mathrm{B}(m,\,n)},\quad k=1,\,2,\,\ldots;$$

в частности, математич. ожидание и дисперсия равны $m/(m+n)$ и $mn/(m+n)^2(m+n+1)$, соответственно. Если $m>1$ и $n>1$, то кривая плотности $\beta_{m,\,n}(x)$ имеет единственную точку максимума $x=(m-1)/(m+n-2)$ и обращается в нуль на концах интервала. Если $m<1$ или $n<1$, то одна из крайних ординат графика бесконечна, а если и $m<1$, и $n<1$, то обе ординаты на концах интервала бесконечны и кривая имеет U-образную форму. При $m=1$ и $n=1$ Б.-р. превращается в *равномерное распределение* в интервале (0,1). Другим частным случаем Б.-р. является так наз. *арксинуса распределение*

$$\beta_{1/2,\,1/2}(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

При замене в (1) $x=1/(1+t)$ получается распределение с плотностью

$$\beta'_{m,\,n}(t)=\frac{1}{\mathrm{B}(m,\,n)}\cdot\frac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n-2}},\quad 0<t<\infty.\qquad(2)$$

Это распределение наз. Б.-р. второго рода, в отличие от Б.-р. (1). Распределения (1) и (2) соответствуют распределениям «типа I» и «типа VI» в системе *Пирсона кривых*. Один из важных случаев возникновения Б.-р. таков: если X_1 и X_2 независимы и имеют

гамма-распределения с параметрами m и n соответственно, то случайная величина $X_1/(X_1+X_2)$ имеет Б.-р. с плотностью $\beta_{m,n}(x)$. Этот факт в большой степени объясняет ту роль, к-рую Б.-р. играет в приложениях, в частности в математич. статистике: распределения многих важнейших статистик сводятся к Б.-р. Напр., функция распределения F-отношения

$$F_{m,\,n}=\frac{n\chi_m^2}{m\chi_n^2}$$

(случайная величина χ_k^2 имеет χ^2-распределение с k степенями свободы) выражается формулой

$$\mathbf{P}(F_{m,\,n}<x)=\mathrm{B}_{\frac{m}{2},\,\frac{n}{2}}\left(\frac{mx}{n+mx}\right)$$

(обычно значения F-распределения вычисляются с помощью таблиц Б.-р.). Функция Б.-р. позволяет также вычислять значения функций *биномиального распределения*, ввиду соотношения

$$\mathrm{B}_{n-m,\,m+1}(1-p)=\sum_{k=0}^{m}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

Б.-р. находит применение не только в математич. статистике, так, напр., плотность Б.-р. является весовой функцией для системы ортогональных *Якоби многочленов*.

Лит.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [2] Пирсон К., Таблицы неполной бета-функции, пер. с англ., М., 1974.

А. В. Прохоров.

БЕТА-ФУНКЦИЯ, В-функция, В-функция Эйлера, эйлеров интеграл 1-го рода,— функция двух переменных p и q, определяемая при $p>0$, $q>0$ равенством

$$\mathrm{B}(p,\,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \qquad (*)$$

Значения Б.-ф. при различных значениях параметров p и q связаны между собой следующими соотношениями

$$\mathrm{B}(p,\,q)=\mathrm{B}(q,\,p),$$

$$\mathrm{B}(p,\,q)=\frac{q-1}{p+q-1}\,\mathrm{B}(p,\,q-1),\quad q>1.$$

Справедлива формула

$$\mathrm{B}(p,\,1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi},\quad 0<p<1.$$

В случае комплексных p и q интеграл (*) сходится, когда $\mathrm{Re}\,p>0$ и $\mathrm{Re}\,q>0$. Б.-ф. выражается через *гамма-функцию:*

$$\mathrm{B}(p,\,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

В. И. Битюцков.

БЕТТИ ГРУППА — в широком смысле то же, что и *гомологии группа*; в узком смысле Б. г. является свободной частью группы гомологий с областью коэффициентов — группой $\mathbb{Z}$ целых чисел в случае, если эта группа конечно порождена. Названа по имени Э. Бетти (E. Betti).

Лит.: [1] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.— Л., 1938; [2] Александров П. С., *Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию*, М., 1975.

М. И. Войцеховский.

БЕТТИ ЧИСЛО, r-мерное число Бетти p^r комплекса K,— ранг r-мерной *Бетти группы* с целыми коэффициентами. Для каждого r Б. ч. p^r — топологич. инвариант полиэдра, реализующего комплекс K, указывающий число попарно негомологичных (над рациональными числами) циклов в нем. Например, для сферы S^n:

$$p^0=1,\ p^1=\ldots=p^{n-1}=0,\ p^n=1;$$

для проективной плоскости $P^2(\mathbb{R})$:

$$p^0=1,\ p^1=p^2=0;$$

для тора T^2:

$$p^0=p^2=1,\ p^1=1.$$

Для n-мерного комплекса K^n сумма

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p^k$$

равна его *эйлеровой характеристике*. Б. ч. введены Э. Бетти [1].

Лит.: [1] Betti E., «Ann. mat. pura ed appl.», 1871, v. 4(2), p. 140—58.

М. И. Войцеховский.

БИАНКИ КОНГРУЭНЦИЯ, конгруэнция B, — конгруэнция прямых, у к-рой кривизны фокальных поверхностей в точках, лежащих на одной прямой конгруэнции, равны и отрицательны. Главные поверхности конгруэнции B высекают на ее фокальных поверхностях сопряженные системы линий. Асимптотич. сетям фокальных поверхностей в сферич. отображении Б. к. соответствует ортогональная сеть. Кривизна фокальной поверхности Б. к. в параметрах асимптотич. линий u и v выражается формулой:

$$K=-\frac{1}{(\varphi(u)+\psi(v))^2}.$$

Поверхности, кривизны к-рых удовлетворяют этому условию, наз. *Бианки поверхностями* (поверхности B).

Б. к. рассмотрены Л. Бианки [1].

Лит.: [1] Bianchi L., «Ann. mat. pura ed appl.», 1890, v. 18, S. 301—58; [2] Фиников С. П., Теория конгруэнций, М.— Л., 1950; [3] его же, Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи, М.— Л., 1937; [4] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. Т. Базылев.

БИАНКИ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность отрицательной гауссовой кривизны K, к-рая в асимптотич. параметрах (u, v) имеет вид:

$$K=-\frac{1}{[U(u)+V(v)]^2},$$

где $U(u)$, $V(v)$ — произвольные функции; таким образом, инвариантный признак Б. п. состоит в том, что функция $(-K)^{-1/2}$ диагональна относительно ее асимптотич. сети, т. е.

$$\frac{\partial^2(-K)^{1/2}}{\partial u\,\partial v}=0.$$

Напр., линейчатая Б. п. есть *коноид* — поверхность, присоединенная к *Петерсона поверхности*. Знание Б. п. позволяет определить классы поверхностей, допускающих *изгибание на главном основании*, и классифицировать их. Так, если главное основание содержит два семейства геодезич. линий, то функции U, V постоянны и изгибаемая поверхность есть *Фосса поверхность* (класс B_0).

Класс B_1 характеризуется тем, что только одно семейство линий главного основания состоит из геодезических (одна из функций U, V постоянна), таковы, напр., коноиды. Класс B_2 соответствует функциям U, V, существенно зависящим от своих аргументов. См. также *Бианки конгруэнция*.

И. Х. Сабитов.

БИАНКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — переход от одной фокальной поверхности S конгруэнции Бианки к другой фокальной поверхности S' той же конгруэнции (см. *Бианки конгруэнция*). Если S — псевдосфера, то и все поверхности S' — псевдосферы. Точки псевдосфер S', соответствующие точке $x\in S$, лежат на окружности с центром в точке x и с радиусом, равным радиусу псевдосферы S. Псевдосферы S' секут ортогонально полученную таким образом циклич. систему окружностей.

В. Т. Базылев.

БИАНКИ ТОЖДЕСТВО — соотношение, связывающее компоненты ковариантных производных *кривизны*

тензора R^h_{ijk} риманова пространства:

$$R^h_{ijk,\ l}+R^h_{ikl,\ j}+R^h_{ilj,\ k}=0,$$

где $h,\ i,\ j,\ k,\ l=1,\ \ldots,\ n$. Впервые установлено в 1902 Л. Бианки (см. [1]).

Лит.: [1] Bianchi L., Lezioni di geometria differenziale, 3 ed., v. 1—2, Bologna, 1923—1927. *М. И. Войцеховский.*

БИБЕРБАХА ГИПОТЕЗА — предположение, высказанное в 1916 Л. Бибербахом [1]: для всех функций $f(z)$ к л а с с а S, т. е. для функций $f(z)$, регулярных и однолистных в круге $|z|<1$ и имеющих в нем разложение

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}c_nz^n,$$

справедлива оценка $|c_n|\leqslant n,\ n\geqslant 2$, причем $|c_n|=n$ только для ф у н к ц и й К ё б е

$$f_\theta(z)=z\left(1-e^{i\theta}z\right)^{-2},$$

где θ — действительное число. Л. Бибербах доказал справедливость гипотезы только для $n=2$. Задача нахождения точной оценки коэффициентов в классе S — частный случай *коэффициентов проблемы*.

Б. г. простой формулировкой и глубиной привлекла внимание многих математиков и способствовала развитию различных методов геометрич. теории функций комплексного переменного. К настоящему времени (1977) справедливость Б. г. установлена для $n\leqslant 6$. Для $n=3$ она была впервые доказана К. Лёвнером (K. Löwner) в 1923 параметрич. методом (см. *Параметрических представлений метод*); в дальнейшем появились и другие доказательства оценки $|c_3|\leqslant 3$, при к-рых использовались вариационный метод, параметрич. метод, метод экстремальных метрик. Для $n=4$ справедливость Б. г. была установлена впервые в 1955 посредством одновременного использования вариационного и параметрич. методов. В 1960 с помощью условий однолистности Грунского оценка $|c_4|\leqslant 4$ была получена значительно проще. Эта оценка была получена также методом вариаций и геометрич. рассуждениями; в другом случае — с использованием неравенств Грунского в матричной форме. Для $n=6$ справедливость Б. г. доказана в 1968 с помощью неравенств Грунского, для $n=5$ — в 1972 вариационным методом.

Среди других результатов, направленных на доказательства справедливости Б. г., интересны следующие. У. Хейман [4] получил ряд результатов по асимптотич. поведению коэффициентов при $n\to\infty$ функций, p-листных в среднем в $|z|<1$, в частности для класса S. Он доказал, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{n}=\alpha_f,$$

и что $\alpha_f\leqslant 1$ со знаком равенства только для функций Кёбе.

Ряд работ посвящен л о к а л ь н о й г и п о т е з е Б и б е р б а х а, т. е. доказательству того, что функция Кёбе дает $\max|c_n|$, по крайней мере для тех функций класса S, к-рые близки к ней в соответствующей топологии (см. *Однолистная функция*). Установлено, что для каждого $n=3,4,\ \ldots$ существует достаточно малое $\varepsilon_n>0$ такое, что для функции $f(z)\in S$, удовлетворяющей условию $|c_2-2|<\varepsilon_n$, справедлива оценка $\operatorname{Re}c_n\leqslant n$, причем $\operatorname{Re}c_n=n$ только для $f_\theta(z)$. Оценка коэффициентов для всех n, точная относительно порядка зависимости от n, была впервые получена в 1925 Дж. Литлвудом (J. Littlewood) сведением оценки коэффициентов к оценке среднеинтегрального модуля. Более точные оценки были получены И. Е. Базилевичем ($|c_n|<\frac{e}{2}n+\text{const}$; 1951), И. М. Милиным ($|c_n|<1{,}243\ n,\ n\geqslant 2$; 1965).

Лучшая к настоящему времени (1977) оценка получена в 1972 (см. [7]):

$$|c_n| < \sqrt{\frac{7}{6}}\, n < 1{,}081n, \quad n \geqslant 2.$$

Обзор работ по Б. г. см. в [2], с. 50, 187—90, 571—79, [3], с. 67—121; [9].

Лит.: [1] Bieberbach L., «Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl.», 1916, S. 940—55; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Милин И. М., Однолистные функции и ортонормированные системы, М., 1971; [4] Hayman W. K., «J. London Math. Soc.», 1965, v. 40, № 159, p. 385—406; [5] Ozawa M., «Kōdai Math. Semin. Repts», 1969, v. 21, № 1—2, p. 97—132; [6] Pederson R. N., Schiffer M. M., «Arch. Ration. Mech. and Analysis», 1972, v. 45, № 3, p. 161—93; [7] Fitzgerald C. H., «Arch. Ration. Mech. and Analysis», 1972, v. 46, № 5, p. 356—68; [8] Широков Н. А., «Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР», 1972, т. 24, с. 182—200; [9] Базилевич И. Е., в кн.: Математика в СССР за 40 лет. 1917—1957, т. 1, М., 1959, с. 444—72.

Е. Г. Голузина.

БИБЕРБАХА МНОГОЧЛЕНЫ — экстремальные многочлены, приближающие функцию, к-рая отображает конформно данную односвязную область на круг. Впервые были рассмотрены Л. Бибербахом [1] в связи с задачей о приближенном вычислении конформно отображающей функции.

Пусть односвязная область G расположена в конечной части плоскости и ограничена кривой Γ, а функция $w=\varphi(z)$ отображает эту область конформно и однолистно на круг $|w|<r_0$ при условиях $\varphi(z_0)=0$ и $\varphi'(z_0)=1$, где z_0 — произвольная фиксированная точка области G и r_0 зависит от z_0. Многочлен $\pi_n(z)$, минимизирующий интеграл

$$J(F_n)=\iint_G |F_n'(z)|^2\, dx\, dy$$

в классе всех многочленов $F_n(z)$ степени n при условиях $F_n(z_0)=0$ и $F_n'(z_0)=1$, наз. многочленом Бибербаха. В классе всех функций, аналитических в области G и удовлетворяющих тем же условиям, этот интеграл минимизируется отображающей функцией $w=\varphi(z)$. Если контур Γ — жорданова кривая, то последовательность $\{\pi_n(z)\}$ сходится к функции $\varphi(z)$ равномерно внутри области G. В замкнутой области $\overline{G}$ сходимости может и не быть (см. [2]). Если же контур Γ удовлетворяет нек-рым дополнительным условиям гладкости, то последовательность $\{\pi_n(z)\}$ сходится равномерно в замкнутой области, причем скорость сходимости зависит от степени гладкости кривой Γ.

Лит.: [1] Bieberbach L., Circolo mat. Palermo», v. 38, 1914, p. 98—112; [2] Келдыш М. В., «Матем. сб.», 1939, т. 5(47), в. 2, с. 391—401; [3] Мергелян С. Н., Некоторые вопросы конструктивной теории функций, М., 1951; [4] Суетин П. К., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 100.

П. К. Суетин.

БИБЕРБАХА — ЭЙЛЕНБЕРГА ФУНКЦИИ в круге $|z|<1$ — класс R функций $f(z)$, регулярных в круге $|z|<1$, имеющих в нем разложение вида

$$f(z)=c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots \qquad (1)$$

и удовлетворяющих условию

$$f(z_1)\,f(z_2)\neq 1, \quad |z_1|<1, \quad |z_2|<1.$$

Этот класс функций является естественным расширением класса B функций $f(z)$, регулярных в круге $|z|<1$, имеющих разложение (1) и таких, что $|f(z)|<1$ в круге $|z|<1$. Класс *однолистных функций* из R обозначают $\tilde{R}$. Функции класса R были названы по имени Л. Бибербаха [1], показавшего, что для $f(z)\in\tilde{R}$ имеет место неравенство

$$|c_1|\leqslant 1, \qquad (2)$$

причем равенство в (2) достигается только для функции $f(z)=e^{i\theta}z$, где θ действительное, и С. Эйленберга [2], установившего справедливость неравенства (2) во всем классе R. В. Рогозинский [3] показал, что каждая функция класса R подчинена (см. *Подчинения принцип*)

нек-рой функции из класса $\tilde{R}$. Из (2) для $f(z)\in R$ получается точное неравенство

$$|f'(z)|\leqslant\frac{|1-f^2(z)|}{1-|z|^2},\quad |z|<1. \tag{3}$$

В классе R получена следующая оценка модуля функции: если $f(z)\in R$, то

$$|f(z)|\leqslant r(1-r^2)^{-1/2},\quad |z|=r,\quad 0<r<1, \tag{4}$$

и равенство в (4) реализуется только функциями $\pm f(ze^{i\theta};\ r)$, где θ действительное, а

$$f(z;\ r)=\frac{(1-r^2)^{1/2}z}{1+irz}.$$

Экстремальных метрик методом была решена задача о максимуме и минимуме $|f(z)|$ в классе $\tilde{R}(c)$ функций из $\tilde{R}$ с фиксированным значением $|c_1|=c$, $0<c\leqslant 1$, в разложении (1): для $f(z)\in\tilde{R}(c)$, $0<c<1$, справедливы точные неравенства

$$\operatorname{Im}H(ir;\ r,\ c)\leqslant|f(re^{i\theta})|\leqslant\operatorname{Im}F(ir;\ r,\ c), \tag{5}$$

где функции $w=H(z;\ r,\ c)$ и $w=F(z;\ r,\ c)$ отображают круг $|z|<1$ на области, симметричные относительно мнимой оси плоскости w, границы к-рых принадлежат объединению замыканий нек-рых траекторий или ортогональных траекторий *квадратичного дифференциала* на плоскости w, в расположении нулей и полюсов к-рого имеется определенная симметрия (см. [4], [5]). Нек-рые окончательные результаты для функций класса $\tilde{R}(c)$ были получены одновременным использованием метода экстремальных метрик и метода симметризации (см. [4]).

Большое число результатов для функций классов $\tilde{R}$ и R является следствием соответствующих результатов для систем функций, отображающих круг $|z|<1$ на взаимно неналегающие области (см. [6]). Аналогом класса R для конечно связной области G, не имеющей изолированных граничных точек и не содержащей точки $z=\infty$, является класс $R_a(G)$, $a\in G$, функций $f(z)$, регулярных в G и удовлетворяющих условиям $f(a)=0$, $f(z_1)f(z_2)\neq 1$, где z_1, z_2 — любые точки области G. Класс $R_a(G)$ расширяет класс $B_a(G)$ функций $f(z)$, регулярных в G и таких, что $f(a)=0$, $|f(z)|<1$ в области G. Распространением результата Бибербаха — Эйленберга и неравенства (3) на функции класса $R_a(G)$ является следующая точная оценка: если $f(z)\in R_a(G)$, то

$$|f'(z)|\leqslant|1-f^2(z)|\,F'(z,\ z),\ z\in G,$$

где $F(z,\ b)$, $b\in G$, — та из функций класса $B_b(G)$, для к-рой $F'(b,\ b)=\max|f'(b)|$ в этом классе.

Лит.: [1] Bieberbach L., «Math. Ann.», 1916, Bd 77, S. 153—72; [2] Eilenberg S., «Fundam. math.», 1935, v. 25, p. 267—72; [3] Rogosinski W., «J. London Math. Soc.», 1939, v. 14, № 1, p. 4—11; [4] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [5] Jenkins J. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 119, № 2, p. 195—215; [6] Лебедев Н. А., Принцип площадей в теории однолистных функций, М., 1975.

Г. В. Кузьмина.

БИВЕКТОР — упорядоченная пара $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ векторов аффинного пространства A, отложенных от общего начала. Б. полагается равным нулю, если составляющие его векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ коллинеарны. Ненулевой Б. определяет в A несущую его двумерную плоскость. Два Б. наз. параллельными, если параллельны несущие их плоскости. Если пространство имеет конечную размерность n и $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ — контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{u}$, $(v^1, v^2, \ldots, v^n)$ — контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{v}$, вычисленные в нек-ром базисе $e=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ пространства A, то величины

$$a^{ij}=\begin{vmatrix} u^i & v^i \\ u^j & v^j \end{vmatrix}=2!\,u^{[i}v^{j]},\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant n,$$

наз. координатами бивектора $[u, v]$ в базисе e. Эти координаты кососимметричны по своим индексам; среди них C_n^2 существенных координат. При переходе в A к другому базису координаты Б. ведут себя как координаты дважды контравариантного тензора. Два Б. наз. равными, если в к.-л. базисе равны их координаты (они будут равны и в любом другом базисе). Класс равных Б. наз. свободным бивектором. При наличии в A скалярного произведения на Б. распространяется ряд метрич. понятий векторной алгебры. Мерой Б. наз. площадь параллелограмма, образованного векторами $u, v, -u, -v$, начало каждого из к-рых помещено в конец предыдущего. Равные Б. имеют равную меру. Скалярным произведением двух Б. наз. число, равное произведению мер сомножителей на косинус угла между несущими их плоскостями. Скалярное произведение является билинейной формой от координат сомножителей, коэффициенты к-рой определяются только метрич. тензором пространства A.

Если размерность A равна 3, то Б. $[u, v]$ может быть отождествлен с вектором пространства A, наз. *векторным произведением* векторов u, v.

В тензорном исчислении Б. наз. любой контравариантный кососимметрический тензор валентности 2 [т. е. тензор типа (2,0)]. Каждый такой тензор может быть представлен в виде суммы тензоров, к-рым соответствуют ненулевые Б. с различными несущими плоскостями. Они определяют листы бивектора. Ранг кососимметрической матрицы размера $n \times n$, составленной из координат Б., есть четное число 2ρ, где ρ – число листов Б. В пространстве A над полем действительных чисел эта матрица подобна матрице

$$\left\| \begin{array}{cccccc} J_1 & & & & & 0 \\ & J_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & J_\rho & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{array} \right\|$$

с блоками

$$J_j = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right\|, \quad 1 \leqslant j \leqslant \rho.$$

См. также *Внешнее произведение*, *Поливектор*, *Плюккеровы координаты*.

Лит.: [1] Схоутен Я.-А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., М., 1965.

Л. П. Купцов.

БИВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО – *центроаффинное пространство* E_N (где $N = n(n-1)/2$), к-рое может быть отнесено каждой точке пространства аффинной связности A_n (в частности, риманова пространства V_n). Пусть в точке пространства A_n (или V_n) рассматриваются все тензоры, у к-рых ковариантная и контравариантная валентности четные; ковариантные и контравариантные индексы разбиваются на отдельные пары, для каждой из к-рых тензор кососимметричен. Тензоры, обладающие этими двумя свойствами, наз. битензорами. Если принять каждую кососимметрическую пару индексов за один собирательный индекс, то число новых индексов будет равно $N = n(n-1)/2$. Простейшим битензором является *бивектор*

$$v_{\alpha\beta} = -v_{\beta\alpha} \longrightarrow v_a, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n; \; a = 1, \ldots, N.$$

Если в точке P пространства A_n

$$A_{\beta}^{\alpha'} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} \right)_P, \quad A_b^{a'} \longrightarrow A_{[\beta}^{[\alpha'} A_{\delta]}^{\gamma']}, \quad v^a \longrightarrow v^{\alpha\beta},$$

то $v^{a'} = A_b^{a'} v^b$, и совокупность бивекторов из A_n (или из V_n) в данной точке определяет совокупность векторов с

N компонентами, удовлетворяющими условиям

$$v^{a'} = A^{a'}_{a} v^{a}, \quad v^{a} = A^{a}_{a'} v^{a'},$$
$$|A^{a'}_{a}| \neq 0, \quad A^{a}_{b'} A^{b'}_{c} = \delta^{a}_{c},$$

т. е. эта совокупность определяет центроаффинное пространство E_N, наз. бивекторным пространством. В V_n Б. п. может быть метризовано при помощи метрич. тензора

$$g_{ab} \longrightarrow g_{\alpha\beta\gamma\delta} \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma},$$

после чего E_N становится метрич. пространством R_N.

Б.п. имеют применение в римановой геометрии и общей теории относительности. В данной точке пространства V_n строится Б. п. R_N, а тензору кривизны с компонентами $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$, $R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}$ сопоставляется тензор второй валентности с компонентами R_{ab}, $R^{a}{}_{b}$, $R^{b}{}_{a}$, соответственно. Тогда задача изучения алгебраич. структуры тензора кривизны пространства V_n может быть сведена к изучению пучка квадратичных форм $R_{ab} - \lambda g_{ab}$, вторая из к-рых невырожденная ($|g_{ab}| \neq 0$). Исследование элементарных делителей этой пары приводит к классификации пространств V_n. При $n=4$ ($N=6$) и сигнатуре $(- - - - + +)$ формы $g_{\alpha\beta}$ доказывается, что существует всего три различных типа пространств Эйнштейна.

Каждому вращению в V_n может быть отнесен бивектор; значит, в R_N ему соответствует вектор, что оказывается удобным при исследовании бесконечно малых преобразований. Б. п. по существу совпадают с *бипланарными пространствами* [2].

Лит.: [1] Петров А. З., Новые методы в общей теории относительности, М., 1966; [2] Норден А. П., «Уч. зап. Каз. ун-та», 1954, в. 114, кн. 8.

А. З. Петров.

БИГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ действительных переменных, определенная в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, имеющая непрерывные частные производные до 4-го порядка включительно и удовлетворяющая в D уравнению

$$\Delta^2 u \equiv \Delta(\Delta u) = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа. Это уравнение наз. бигармоническим уравнением. Класс Б. ф. включает класс *гармонических функций* и является подклассом класса *полигармонических функций*. Каждая Б. ф. есть аналитич. функция от координат x_i.

Наибольшее значение с точки зрения приложений имеют Б. ф. $u(x_1, x_2)$ двух переменных. Такие Б. ф. представимы при помощи гармонич. функций u_1, u_2 или v_1, v_2 в виде

$$u(x_1, x_2) = x_1 u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2)$$

или

$$u(x_1, x_2) = (r^2 - r_0^2) v_1(x_1, x_2) + v_2(x_1, x_2),$$

где $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, а r_0^2 — постоянная. Основная краевая задача для Б.ф. состоит в следующем: найти Б. ф. в области D, непрерывную вместе с производными 1-го порядка в замкнутой области $\overline{D} = D \cup C$ и удовлетворяющую на границе C условиям

$$u\Big|_C = f_1(s), \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_C = f_2(s), \qquad (*)$$

где $\partial u/\partial n$ — производная по нормали к C, а $f_1(s)$, $f_2(s)$ — заданные непрерывные функции дуги s на контуре C. Указанные выше представления Б. ф. позволяют получить решение задачи (*) в явном виде в случае круга D, исходя из интеграла Пуассона для гармонич. функций (см. [1]).

Б.ф. двух переменных допускают также представление

$$u(x_1, x_2) = \operatorname{Re}\left\{\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\bar{z}\,\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}\right\}, \qquad \bar{z} = x_1 - i x_2,$$

при помощи двух аналитич. функций $\varphi(z)$, $\chi(z)$ комплексного переменного $z=x_1+ix_2$. Это представление позволяет свести краевую задачу (*) для произвольной области D к системе краевых задач для аналитич. функций, метод решения к-рой подробно разработан Г. В. Колосовым и Н. И. Мусхелишвили. Эта методика получила развитие при решении различных *плоских задач теории упругости*, в к-рых основной Б. ф. является функция напряжений, или *Эйри функция* (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966, гл. 4; [2] Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд., М., 1966, гл. 2; [3] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд., М., 1965.

Е. Д. Соломенцев.

БИГОЛОМОРФНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, голоморфный изоморфизм, голоморфизм, псевдоконформное отображение,— обобщение однолистного *конформного отображения* на случай нескольких комплексных переменных. *Голоморфное отображение* области $D\subset\mathbb{C}^n$ на область $D'\subset\mathbb{C}^n$ наз. биголоморфным отображением, если оно взаимно однозначно. Б. о. всегда невырождено в D; обратное к нему отображение тоже является Б.о.

Голоморфности область при Б. о. переходит в область голоморфности; голоморфные, плюригармонич. и плюрисубгармонич. функции также инвариантны относительно Б. о. При $n>1$ Б. о. не являются конформными (за исключением нек-рых линейных отображений), *Римана теорема* для Б. о. неверна (напр., шар и бикруг в $\mathbb{C}^2$ нельзя биголоморфно отобразить друг на друга). Б. о. области D на себя наз. (голоморфным) автоморфизмом; при $n>1$ существуют односвязные области, у к-рых нет автоморфизмов, отличных от тождественного отображения.

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1—2, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

БИЕКЦИЯ, биективное отображение, множества A в множество B — отображение $f:A\to B$, при к-ром различные элементы из A имеют различные образы и $f(A)=B$. Другими словами, f— взаимно однозначное отображение A на B, или отображение, являющееся одновременно *инъекцией* и *сюръекцией*. Б. устанавливает *взаимно однозначное соответствие* между элементами множеств A и B. Б. множества A на A наз. также перестановкой множества A.

О. А. Иванова.

БИКАТЕГОРИЯ — категория $\mathfrak{K}$, в к-рой выделены подкатегория эпиморфизмов $\mathfrak{E}$ и подкатегория мономорфизмов $\mathfrak{M}$ таким образом, что выполняются следующие условия:

1) всякий морфизм α из категории $\mathfrak{K}$ разлагается в произведение $\alpha=\nu\mu$, где $\nu\in\mathfrak{E}$, $\mu\in\mathfrak{M}$;

2) если $\nu\mu=\rho\tau$, где ν, $\rho\in\mathfrak{E}$, μ, $\tau\in\mathfrak{M}$, то существует такой изоморфизм θ, что $\rho=\nu\theta$, и $\tau=\theta^{-1}\mu$;

3) $\mathfrak{E}\cap\mathfrak{M}$ совпадает с классом изоморфизмов категории $\mathfrak{K}$.

Эпиморфизмы из $\mathfrak{E}$ (мономорфизмы из $\mathfrak{M}$) наз. допустимыми эпиморфизмами (мономорфизмами) бикатегории.

Понятие Б. аксиоматизирует возможность разложения произвольного отображения в произведение сюръективного и инъективного отображений. Категория множеств, категория множеств с отмеченной точкой, категория групп являются бикатегориями с единственной бикатегорной структурой. В категории всех топологич. пространств, а также в категории всех ассоциативных колец имеется целый класс различных бикатегорных структур.

Лит.: [1] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974.

М. Ш. Цаленко.

БИКВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$ax^4+bx^2+c=0,$$

где a, b, c — заданные комплексные числа, причем $a \neq 0$. Подстановкой $y = x^2$ сводится к *квадратному уравнению*.

БИКОМПАКТ — бикомпактное хаусдорфово пространство. См. *Бикомпактное пространство*.

БИКОМПАКТИФИКАЦИЯ — то же, что и *бикомпактное расширение*.

БИКОМПАКТНО ОТКРЫТАЯ ТОПОЛОГИЯ — одна из топологий на множестве отображений одного топологич. пространства в другое. Если F — некоторое множество отображений топологич. пространства X в топологич. пространство Y, то каждый конечный набор пар $(X_1, U_1), \ldots, (X_n, U_n)$, где X_i — бикомпактное подмножество пространства X и U_i — открытое подмножество пространства Y, $i = 1, \ldots, n$, определяет подмножество тех отображений $f \in F$, для к-рых одновременно $f(X_i) \subset U_i$; совокупность всех таких подмножеств объявляется базой Б.о.т. на множестве F. Важность Б.о.т. следует из того, что она входит существенным элементом в принадлежащую Л. С. Понтрягину теорию двойственности локально бикомпактных коммутативных групп и участвует в построении косых произведений. Если Y — хаусдорфово пространство, то и Б.о.т. также удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа. Если все отображения $f \in F$ непрерывны, а Y — вполне регулярное пространство, то и множество F, наделенное Б.о.т., вполне регулярно. В предположении, что все отображения f непрерывны, а пространство X локально бикомпактно, Б.о.т. на F является допустимой или совместно непрерывной, т. е. отображение $\varphi: F \times X \to Y$, определяемое формулой $\varphi(f, x) = f(x)$, непрерывно и при этом Б.о.т. является наименьшей (самой слабой) из всех топологий на F, для которых отображение φ непрерывно. В этом преимущество Б.о.т. перед топологией поточечной сходимости, к-рая обычно слабее Б.о.т. и тогда она не является допустимой. Фундаментальное значение имеет и тот факт, что группа гомеоморфизмов бикомпакта X на себя, наделенная Б.о.т., является топологич. группой, непрерывно действующей (в смысле сказанного выше) на X. Группа гомеоморфизмов произвольного локально бикомпактного пространства на себя уже может не быть топологич. группой относительно Б.о.т. (переход к обратному элементу может оказаться разрывным отображением относительно этой топологии), но если локально бикомпактное пространство X локально связно, то снова Б.о.т. превращает группу всех гомеоморфизмов X на себя в топологич. группу, непрерывно действующую на X. Этот результат важен, ибо все многообразия локально бикомпактны и локально связны.

Лит.: [1] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., М., 1968; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 2 изд., М., 1954; [3] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [4] Arens R., «Amer. J. Math.», 1946, v. 68, № 4, p. 593—610.

А. В. Архангельский, С. И. Сирота.

БИКОМПАКТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение одного пространства в другое, при к-ром прообраз каждой точки есть бикомпакт (см. *Бикомпактное пространство*). Требование бикомпактности отображения особенно полезно в соединении с другими ограничениями на отображение. Прежде всего выделяются открытые Б.о. (см. *Открытое отображение*), *совершенное отображение* и факторные Б. о. (см. *Факторное отображение*). Важный частный случай Б.о. — *конечнократное отображение*. Топологич. свойства более всего устойчивы по отношению к совершенным отображениям, к-рые служат наиболее естественным аналогом непрерывных отображений бикомпактов в классе всех хаусдорфовых пространств. Произведение Б.о. есть Б.о.

Лит.: [1] Александров П. С., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 6(120), с. 3—46; [2] Архангельский А. В., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4(130), с. 133—84.

А. В. Архангельский

БИКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, в каждом открытом покрытии к-рого содержится конечное подпокрытие того же пространства. Следующие утверждения равносильны: 1) пространство X бикомпактно; 2) пересечение любой центрированной системы замкнутых в X множеств не пусто; 3) пересечение любой максимальной центрированной системы замкнутых в X множеств не пусто; 4) пересечение произвольной убывающей вполне упорядоченной последовательности любой мощности непустых замкнутых в X множеств не пусто; 5) каждая центрированная система подмножеств множества X имеет точку прикосновения в X; 6) каждый ультрафильтр на X сходится в X; 7) для каждого бесконечного подмножества M множества X в X существует точка полного накопления. Подпространство n-мерного евклидова пространства бикомпактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Понятие бикомпактного топологического пространства занимает фундаментальное положение в топологии и современном функциональном анализе; при этом нек-рые принципиальные свойства Б.п. (с многочисленными приложениями) рассматриваются уже в математическом анализе, например всякая непрерывная функция, определенная на Б.п., ограничена и принимает наибольшее и наименьшее значения.

Термин «Б.п.» принадлежит П. С. Александрову, внесшему огромный вклад в создание и развитие теории Б.п., начало к-рой положено «Мемуаром о компактных топологических пространствах» П. С. Александрова и П. С. Урысона.

Понятие бикомпактного пространства явилось первоначально усилением введенного М. Фреше (M. Frechet) понятия к о м п а к т н о г о п р о с т р а н с т в а: топологич. пространство к о м п а к т н о — в первоначальном смысле слова, или с ч е т н о к о м п а к т н о, как говорят теперь) если в нем имеет место к.-л. из следующих эквивалентных между собою предложений: 1) в каждом счетном открытом покрытии этого пространства содержится его конечное подпокрытие; 2) пересечение любой счетной центрированной системы непустых замкнутых его подмножеств не пусто; 3) пересечение любой счетной убывающей последовательности непустых замкнутых множеств не пусто; 4) каждая счетная централизованная подмножеств множества система его подмножеств имеет точку прикосновения; 5) для каждого счетного подмножества в нем существует точка полного накопления.

Однако дальнейшее развитие математики и ее приложений показало, что понятие б и к о м п а к т н о с т и настолько важнее первоначального понятия компактности, что сейчас часто под компактностью понимают именно бикомпактность, а компактные в старом смысле пространства называют счетно компактными. Оба понятия равносильны в применении к метрическим пространствам.

Замкнутое подпространство Б.п. бикомпактно. Топологич. произведение любого множества Б.п. бикомпактно (т е о р е м а Т и х о н о в а, см. *Тихоновское произведение*). Топологич. пространство, являющееся образом Б.п. при непрерывном отображении, бикомпактно. Эти свойства Б.п. показывают устойчивость класса Б.п. по отношению к основным для общей топологии операциям, и на них в первую очередь базируются приложения понятия бикомпактности. Особое значение имеют Б. п., удовлетворяющие аксиоме отделимости Хаусдорфа и наз. б и к о м п а к т а м и. При этом топологич. произведение любого множества бикомпактов есть бикомпакт; замкнутое подпространство бикомпакта является бикомпактом; образ бикомпакта при непрерывном отображении в хаусдорфово пространство есть бикомпакт. Далее перечисляются свойства бикомпактов,

не имеющие места для произвольных Б. п. Каждый бикомпакт является нормальным и, тем более, вполне регулярным пространством. Пересечение любого счетного семейства открытых всюду плотных в бикомпакте множеств всюду плотно в нем. Равносильное утверждение: никакой бикомпакт нельзя представить в виде объединения счетного семейства нигде не плотных множеств. Бикомпакты характеризуются как регулярные пространства, замкнутые в любом объемлющем их хаусдорфовом пространстве. На этом основана теорема о том, что каждое непрерывное отображение Б.п. в хаусдорфово пространство замкнуто. Эта теорема имеет важное следствие: любое взаимно однозначное непрерывное отображение Б. п. на хаусдорфово пространство есть гомеоморфизм.

Класс Б. п., равно как и класс бикомпактов, устойчив относительно перехода к пространству замкнутых подмножеств (взятому с топологией Вьеториса); при этом вес пространства не повышается. Пространство непустых замкнутых подмножеств канторова совершенного множества C гомеоморфно C. Особую роль в теории Б. п. играют тихоновские кубы I^τ и обобщенные канторовы дисконтинуумы D^τ, определяемые соответственно как топологич. произведения отрезков $[0,1]$ и как произведения простых двоеточий, где τ — произвольное кардинальное число. При $\tau=\aleph_0$ получаем гильбертов кирпич. Все I^τ являются бикомпактами и каждый бикомпакт веса, не превосходящего τ, гомеоморфен нек-рому замкнутому подпространству куба I^τ. Таким образом, каждый бикомпакт может быть получен из отрезков применением всего лишь двух операций: топологического произведения и перехода к замкнутому подпространству. Класс всех подпространств бикомпактов также допускает теперь точное описание — как класс всех подпространств кубов I^τ. С другой стороны, это в точности класс всех вполне регулярных пространств.

Вес пространства — один из самых общих топологич. инвариантов — в случае бикомпактов становится особенно существенной характеристикой. Бикомпакт метризуем в том и только в том случае, если он обладает счетной базой. В то же время, если бикомпакт Y является образом пространства X при непрерывном отображении, то вес Y не превышает веса X, т. е. среди непрерывных образов пространств со счетной базой нет неметризуемых бикомпактов. Вес бикомпакта $Y=Y_1 \cup Y_2$ не превосходит наибольшего из весов Y_1 и Y_2, т. е. никакой неметризуемый бикомпакт нельзя представить в виде суммы двух пространств со счетной базой. В основе последних двух фактов лежит понятие с е т и. Если бикомпакт обладает сетью мощности $\leqslant\tau$, то он имеет и базу мощности $\leqslant\tau$. В частности, всякий счетный бикомпакт имеет счетную базу, метризуем и даже гомеоморфен замкнутому подмножеству отрезка. Обычно метризуемые бикомпакты наз. к о м п а к т а м и. Всякая метрика на компакте полна и вполне ограничена, и каждое метризуемое пространство с этим свойством есть компакт (Ф. Хаусдорф, F. Hausdorff).

Топологич. произведение счетного семейства компактов и замкнутые подмножества компактов суть компакты. Каждый нульмерный компакт гомеоморфен нек-рому компакту, лежащему в канторовом совершенном множестве (в качестве замкнутого подмножества). Всякий компакт есть непрерывный образ канторова совершенного множества (П.С. Александров). Каждый бикомпакт есть непрерывный образ нек-рого нульмерного бикомпакта.

В связи с важной ролью кубов I^τ в топологии был изучен класс бикомпактов, разлагающихся в произведение компактов, а также класс их непрерывных образов. Бикомпакты, являющиеся непрерывными образами

дисконтинуумов D^τ, наз. диадическими. Класс диадич. бикомпактов достаточно широк: все компакты, все кубы I^τ, пространства всех бикомпактных топологич. групп суть диадич. бикомпакты. Класс диадич. бикомпактов есть наименьший класс топологич. пространств, замкнутый относительно топологич. произведений и непрерывных отображений и содержащий все бикомпакты, состоящие из конечного числа точек.

Простейшим примером недиадич. бикомпакта является несчетный бикомпакт с единственной неизолированной точкой. Диадич. бикомпакты обладают рядом замечательных свойств, напр.: всякая дизъюнктная система непустых открытых множеств диадич. бикомпакта конечна или счетна (свойство Суслина); всякий диадич. бикомпакт с первой аксиомой счетности метризуем, т. е. имеет счетную базу; произведение диадич. бикомпактов есть диадич. бикомпакт; бикомпакт, являющийся непрерывным образом диадич. бикомпакта, диадичен.

Специфич. свойствами обладают и упорядоченные бикомпакты. Связный сепарабельный упорядоченный бикомпакт обладает счетной базой. Примером связного сепарабельного (диадического) бикомпакта без счетной базы служит куб I^τ при $\tau=\mathfrak{c}$ (мощность континуума). Каждый бикомпакт, являющийся непрерывным образом упорядоченного бикомпакта, имеет базу, границы элементов к-рой компакты. Пересечение класса диадич. бикомпактов с классом всех бикомпактов, являющихся непрерывными образами упорядоченных бикомпактов, состоит в точности из всех компактов.

Среди Б.п. важное место занимают совершенно нормальные бикомпакты. Нормальное пространство наз. совершенно нормальным, если каждое замкнутое в нем множество есть пересечение счетного семейства открытых множеств. Каждый совершенно нормальный бикомпакт обладает свойством Суслина. Любое пространство со счетной сетью, лежащее в совершенно нормальном бикомпакте, обладает счетной базой. Произведение даже двух совершенно нормальных бикомпактов может не быть совершенно нормальным бикомпактом: пространство $X\times X$ будет совершенно нормальным бикомпактом в том и только в том случае, если X — компакт. Но образ совершенно нормального бикомпакта и произведение совершенно нормального бикомпакта на компакт совершенно нормальны. Бикомпакт совершенно нормален в том и только в том случае, если каждое его подпространство финально компактно. Проблема существования несепарабельного упорядоченного совершенно нормального бикомпакта эквивалентна *Суслина проблеме*.

Многие исследования посвящены выяснению связи между кардинальнозначными топологич. инвариантами для случая бикомпактов. Если база бикомпакта точечно счетна, то она счетна. Мощность любого несчетного бикомпакта с первой аксиомой счетности равна мощности континуума. Если бикомпакт секвенциален и удовлетворяет условию Суслина, то его мощность не превышает мощности континуума. Если однородный бикомпакт X секвенциален, то $|X|\leqslant\mathfrak{C}$. В специальном предположении построен наследственно сепарабельный бикомпакт мощности, большей, чем $\mathfrak{C}$.

Имеется цикл теорем о бикомпактах, связанный с понятием универсальности (см. *Универсальное пространство*). Для каждого кардинального числа τ существует такой бикомпакт веса τ, что каждый бикомпакт веса, не большего, чем τ, вкладывается в него посредством гомеоморфизма. Этим свойством обладает, напр., I^τ. Аналогичный результат имеет место для случая, когда фиксированы вес и размерность dim или Ind:

каковы бы ни были кардинальное число τ и натуральное число n, существуют такие бикомпакты, $\Pi^{n\tau}$ и $\Psi^{n\tau}$ веса τ и размерности n ($\dim \Pi^{n\tau}$ и $\operatorname{Ind} \Psi^{n\tau}$), что каждый бикомпакт, вес к-рого не превосходит τ, а размерность не превосходит n, вкладывается в $\Pi^{n\tau}$ (соответственно $\Psi^{n\tau}$) посредством гомеоморфизма. В качестве $\Pi^{o\tau}$ и $\Psi^{o\tau}$ можно взять D^{τ}. В предположении справедливости обобщенной континуум-гипотезы получен двойственный результат: для каждого кардинального числа τ существует нульмерный бикомпакт X веса τ, к-рый можно непрерывно отобразить на произвольный бикомпакт веса, не большего, чем τ.

Раздел общей топологии, посвященный непрерывным отображениям бикомпактов, является одним из самых разработанных и богатых результатами. Так, если X и Y бикомпакты, а $\varphi\colon X \to Y$ непрерывное отображение и $\varphi(X)=Y$, то существует замкнутое в X подпространство X_1, для к-рого $\varphi(X_1)=Y$ и сужение $\varphi|_{X_1}\colon X_1 \to Y$ является неприводимым отображением. Это выясняет фундаментальную роль неприводимых отображений. Для произвольного фиксированного бикомпакта X во множестве $N(X)$ всех бикомпактов Z, допускающих неприводимое отображение на X, существует бикомпакт $\dot{X}$, к-рый можно неприводимо отобразить на любой бикомпакт из $N(X)$. Этот бикомпакт $\dot{X}$ наз. абсолютом бикомпакта X (см. *Абсолют* регулярного топологического пространства); он определен с точностью до гомеоморфизма. Бикомпакт тогда и только тогда гомеоморфен своему абсолюту, когда он экстремально несвязен (см. *Экстремально несвязное пространство*). Экстремально несвязных бикомпактов очень много: по каждому бикомпакту определяется его абсолют, являющийся экстремально несвязным бикомпактом. При этом неприводимые отображения бикомпактов определяются гомеоморфизмами их абсолютов. Они имеют весьма своеобразную структуру, в частности бесконечный экстремально несвязный бикомпакт всегда неоднороден. Два бикомпакта называются соабсолютными, если их абсолюты гомеоморфны. Одной из общих задач здесь является отыскание эффективных внутренних критериев соабсолютности топологических пространств. Следует отметить, что естественная область действия теории абсолютов гораздо шире класса бикомпактов.

Неприводимые отображения важны не только в связи с понятием абсолюта. Известно (А.Н. Колмогоров), что каждое неприводимое отображение компакта на компакт имеет всюду плотное множество точек взаимной однозначности. Если диадич. бикомпакт X неприводимо отображается на бикомпакт Y веса τ, то вес X равен τ.

Важны также открытые отображения бикомпактов. Если два бесконечных бикомпакта связаны открытым конечнократным отображением, то их веса равны. Но существует открытое счетнократное отображение неметризуемого совершенно нормального бикомпакта на компакт. При этом каждое открытое счетнократное отображение бикомпакта на бикомпакт имеет всюду плотное множество точек локальной топологичности.

Бикомпакты много изучались в рамках теории размерности. Для любого бикомпакта X имеет место $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$ (П.С. Александров). Существует бикомпакт X с первой аксиомой счетности (а, следовательно, мощности, не превосходящей мощность континуума), для к-рого $\dim X \neq \operatorname{ind} X \neq \operatorname{Ind} X$, но $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$ для всех совершенно нормальных бикомпактов. Представляет интерес сопоставление теоремы о том, что открытые счетнократные отображения не повышают размерности бикомпактов, с теоремой о представлении: каждый бикомпакт положительной размерности есть образ нек-рого одномерного бикомпакта при открыто-

замкнутом непрерывном отображении, в к-ром прообраз каждой точки нульмерен. Важное значение имеет факторизационная теорема: пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение, X и Y — бикомпакты, $f(X)=Y$, $\dim X \leqslant n$ и вес Y меньше или равен τ; тогда существуют бикомпакт Z и непрерывные отображения φ: $X \to Z$ и $\psi: Z \to Y$, для к-рых $f=\psi\varphi$, $\dim Z \leqslant n$, вес Z меньше или равен τ.

Соотношениями между Б. п. и произвольными топологич. пространствами занимается теория *бикомпактных расширений*.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М., 1948; [2] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973; [3] Engelking R., Outline of General Topology, Amst., 1968; [4] Александров П. С., Урысон П. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1950, т. 31, с. 1—96; [5] Александров П. С., «Матем. сб.», 1939, т. 5, в. 2, с. 403—24; [6] Архангельский А. В., «Докл. АН СССР», 1959, т. 126, № 2, с. 239—41; [7] его же, «Труды Моск. матем. об-ва», 1965, т. 13, с. 3—55; [8] его же, «Докл. АН СССР», 1969, т. 184, № 4, с. 767—71; [9] Мищенко А. С., там же, 1962, т. 144, № 5, с. 985—8; [10] Gleason A. M., «Illinois Math. J.», 1958, v. 2, № 4A, p. 482—9; [11] Архангельский А. В., «Докл. АН СССР», 1969, т. 187, № 5, с. 967—70; [12] Mardešić S., «Pacific J. Math.», 1967, v. 23, № 3, p. 557—568; [13] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1941, т. 30, № 6, с. 477—79; [14] Архангельский А. В., там же, 1967, т. 174, № 6, с. 1243—46; [15] Hanf W., «Math. Scand.», 1957, v. 5, № 2, p. 205—17.

А. В. Архангельский.

БИКОМПАКТНОЕ РАСШИРЕНИЕ, (б и)компактификация, — *расширение* топологического пространства, являющееся *бикомпактным пространством*. Б. р. существуют у любого топологич. пространства, у любого T_1-пространства есть Б. р., являющиеся T_1-пространствами, но наибольший интерес представляют хаусдорфовы Б. р., имеющиеся лишь у *вполне регулярных пространств*. Обычно под Б. р. понимают хаусдорфово Б. р., но иногда полезно рассматривать и произвольные Б. р. П. С. Александров [1] доказал, что всякое локально бикомпактное хаусдорфово пространство одной точкой можно дополнить до бикомпакта (см. *Александрова бикомпактное расширение*). П. С. Урысон [2], доказав, что всякое нормальное пространство со счетной базой вкладывается в гильбертов кирпич, установил тем самым, что оно обладает Б. р. счетного веса [2]. Термин «Б. р.» впервые ввел А. Н. Тихонов [3], к-рый определил класс вполне регулярных пространств и доказал, что вполне регулярные пространства и только они обладают хаусдорфовыми Б. р., при этом вполне регулярное пространство веса τ имеет хаусдорфово Б. р. веса τ.

Два Б. р. b_1X и b_2X пространства X наз. эквивалентными ($b_1X = b_2X$), если существует гомеоморфизм $f: b_1X \to b_2X$, тождественный на X. Часто Б. р. наз. само отображение вложения: $i: X \to bX$. При таком определении два расширения $i_1: X \to b_1X$ и $i_2: X \to b_2X$ будут эквивалентны, если существует такой гомеоморфизм $f: b_1X \to b_2X$, что $f_0 i_1 = i_2$. Обычно не различают эквивалентные Б. р. и наз. Б. р. пространства X класс эквивалентных между собой Б. р. этого пространства. В таком случае можно говорить о множестве $B(X)$ хаусдорфовых Б.р. данного (вполне регулярного) пространства X, поскольку мощность любого хаусдорфова расширения пространства X не больше, чем $2^{2^{|X|}}$, а топологии на данном множестве Y также образуют множество мощности $\leqslant 2^{2^{|Y|}}$.

Б. р. b_2X следует за Б. р. b_1X ($b_1X \leqslant b_2X$), если существует непрерывное отображение $f: b_2X \to b_1X$, тождественное на X. Отношение следования превращает $B(X)$ в частично упорядоченное множество. Э. Чех [4] и М. Стоун [5] доказали, что во множестве $B(X)$ существует наибольший элемент βX — *Стоуна — Чеха бикомпактное расширение* (или максимальное Б. р.).

Задача внутреннего описания всех хаусдорфовых Б.р. данного вполне регулярного пространства X решена [6] построением Б.р. произвольного *близости пространства*, тем самым показано, что всякой близости δ на X, совместимой с топологией, соответствует единственное Б. р. $b_\delta X$, к-рое индуцирует на X исходную близость δ, т. е.

$$A\bar{\delta}B \iff [A]_{b_\delta X} \cap [B]_{b_\delta X} = \varnothing.$$

Максимальное Б. р. βX порождается следующей близостью δ:

$A\bar{\delta}B \iff$ множества A и B функционально отделимы. Б. р. Александрова αX локально бикомпактного хаусдорфова пространства X порождается близостью δ: $A\bar{\delta}B \iff$ множества A и B имеют непересекающиеся замыкания, по крайней мере одно из к-рых бикомпактно.

Соответствие $\delta \to b_\delta$ является изоморфизмом между частично упорядоченным множеством близостей на X, совместимых с топологией, и множеством $B(X)$. При этом соответствие $\delta \to b_\delta$ продолжается до функтора из категории пространств близости, совместимых с топологическими, и близостно непрерывных отображений в категорию бикомпактов и непрерывных отображений.

Значительная часть теории Б. р. посвящена методам построения Б.р. А. Н. Тихонов доказал, что во всяком вполне регулярном пространстве X веса τ существует такое семейство функций $f_\alpha : X \to I_\alpha$ мощности τ, что их диагональное произведение осуществляет вложение пространства X в куб $I^\tau = \Pi_\alpha I_\alpha$ (см. *Тихоновский куб*), после чего Б. р. в X веса τ получается как замыкание fX в I^τ. Э. Чех посредством диагонального произведения всех непрерывных функций $f_\alpha : X \to [0,1]$ построил максимальное Б.р. пространства X. М. Стоун построил максимальное Б. р. с применением булевых алгебр и колец непрерывных функций..

Одним из основных методов в теории Б.р. является созданный П. С. Александровым метод центрированных систем открытых множеств [7], вначале использованный для построения максимального Б. р. и впоследствии широко применявшийся многими математиками. Так, было установлено, что всякое хаусдорфово расширение произвольного хаусдорфова пространства X можно реализовать как пространство центрированных систем открытых в X множеств. Метод центрированных систем был применен при построении изоморфизма между множеством близостей на вполне регулярном пространстве и множеством всех его хаусдорфовых Б. р. Этот метод был применен для построения хаусдорфова Б. р. пространств X по заданному на нем подчинению.

Г. Уолмен [9] построил максимальное Б.р. нормального пространства X как пространство максимальных центрированных систем замкнутых множеств этого пространства. Пространство ωX максимальных центрированных систем замкнутых множеств T_1-пространства X является его бикомпактным T_1-расширением и наз. *Уолмена бикомпактным расширением*. Это расширение, как и расширение Стоуна — Чеха, выделяется среди прочих сходством комбинаторного строения с расширяемым пространством, максимальностью (в определенном смысле), возможностью продолжения непрерывных отображений.

Метод центрированных систем замкнутых множеств позволяет дать обобщение расширения Уолмена. Пусть во вполне регулярном пространстве X дана база замкнутых множеств $\mathfrak{B}$, являющаяся кольцом множеств, т. е. вместе с любыми двумя элементами содержащая их пересечение и объединение. База $\mathfrak{B}$ наз. нормальной, если: 1) для любой точки $x \in X$ и всякого не содержащего ее элемента $B \in \mathfrak{B}$ существуют такие элементы базы B_1 и B_2, что $B_1 \cup B_2 = X$, $x \in X \setminus B_1$,

$B \subset X \setminus B_2$; 2) для любых двух элементов B_1, $B_2 \in \mathfrak{B}$ существуют такие элементы $B_1' \in \mathfrak{B}$, что $X = B_1' \cup B_2'$, $B_1 \subset X \setminus B_1'$, $B_2 \subset X \setminus B_2'$. Пространство максимальных центрированных систем нормальной базы-кольца со стандартным заданием на нем базы замкнутых множеств будет хаусдорфовым Б. р. пространства X, наз. расширением уолменовского типа; неизвестно (1977), всякое ли хаусдорфово Б. р. является расширением уолменовского типа.

Другие способы построения Б.р.: метод максимальных идеалов колец непрерывных функций (см. [11]); метод пополнения предкомпактных равномерных структур (см. [12] и *Пополнение равномерного пространства*); метод *проекционных спектров* (см. [10]); при этом было доказано, что верхним пределом максимального конечного спектра любого T_1-пространства X является его уолменовское расширение ωX и этот предел совпадает с максимальным Б. р. βX тогда и только тогда, когда X—*квазинормальное пространство*.

Важность теории Б. р. объясняется фундаментальным положением бикомпактных пространств в топологии и функциональном анализе. Возможность вложить топологич. пространство в бикомпакт позволяет описать многие свойства вполне регулярных пространств посредством (как правило, более простых) свойств бикомпактов. Так, нормальные пространства с первой аксиомой счетности гомеоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны их максимальные Б. р. Это позволяет в принципе свести изучение нормальных пространств с первой аксиомой счетности к изучению бикомпактов. Довольно часто топологич. инварианты расширяемого пространства удается просто выразить в терминах расположения пространства в его Б.р. (см. *Перистое пространство*, *Полнота*, *Нормально расположенное подпространство*). Так, напр., для того чтобы пространство X было пространством счетного типа, т. е. пространством, в к-ром всякий бикомпакт содержится в бикомпакте счетного характера, необходимо и достаточно, чтобы для нек-рого (и, следовательно, для всякого) Б. р. bX нарост $bX \setminus X$ был финально компактен. Пространство X счетного типа интересно также тем, что оно нормально прилегает к наросту всякого своего Б. р. bX, т. е. тем, что любые два непересекающиеся замкнутые в нароste множества имеют непересекающиеся в bX окрестности. С точки зрения расположенности в Б.р. двойственными к пространствам счетного типа являются финально компактные пространства. Пространство X финально компактно тогда и только тогда, когда нек-рое, а значит и всякое, его Б. р. bX обладает следующим свойством: для всякого бикомпакта $\Phi \subset bX \setminus X$ в нароste существует содержащий его бикомпакт F, имеющий счетный характер в bX.

Особенно важна роль Б. р. в теории размерности. Это, в частности, объясняется равенствами

$$\dim \beta X = \dim X, \quad \operatorname{Ind} \beta X = \operatorname{Ind} X$$

для произвольного нормального пространства X и равенством

$$\operatorname{ind} \beta X = \operatorname{ind} X$$

для совершенно нормального пространства X. Одним из первых утверждений о размерностных свойствах Б. р. явилась теорема о существовании у всякого n-мерного нормального пространства со счетной базой хаусдорфова Б. р. того же (счетного) веса и той же размерности (см. [16]). Доказано [20], что среди нормальных пространств X со счетной базой *периферически бикомпактное пространство* и только оно имеет Б.р. bX с нульмерным (в смысле размерности ind) наростом $bX \setminus X$ (см. *Фрейденталя бикомпактное расширение*). При этом среди таких Б.р. данного пространства суще-

ствует наибольшее. Эти два результата явились отправной точкой для целого ряда исследований. Так, доказано [8], что для всякого вполне регулярного пространства X веса τ с $\dim\beta X\leqslant n$, в частности для всякого нормального пространства X веса τ с $\dim X\leqslant n$, существует Б.р. bX веса τ и размерности $\dim bX\leqslant n$. С другой стороны, вполне регулярное пространство X периферически бикомпактно тогда и только тогда, когда X имеет Б. р. с нульмерно лежащим в нем наростом [8]. При этом нарост $bX\setminus X$ нульмерно расположен в расширении bX, если существует такая база $\mathfrak{B}=\{\Gamma\}$ бикомпакта bX, что

$$(bX\setminus X)\cap\Gamma p_{bX}\Gamma=\varnothing$$

для всех $\Gamma\in\mathfrak{B}$.

Видную роль в теории Б. р. играют *совершенно бикомпактные расширения* (см. [15]). Всякое совершенное Б.р. bX пространства X является монотонным образом максимального Б. р. βX (в частности, совершенно и само βX), как и βX, близко к X по комбинаторному строению, но, в отличие от βX, не всегда $\dim X=\dim bX$ даже для метрич. пространства X. В то время, как βX есть наибольшее совершенное Б.р., минимальное совершенное Б.р. существует лишь тогда, когда пространство X имеет Б.р. с пунктиформным наростом (в частности, когда пространство X периферически бикомпактно). При этом минимальное совершенное Б.р. единственно, обладает пунктиформным наростом и является наибольшим среди всех расширений с пунктиформным наростом.

Понятие совершенного Б. р. оказывается полезным при изучении размерности нароста. Если метрич. пространство X со счетной базой вкладывается в компакт bX с наростом $bX\setminus X$ размерности $\leqslant n$, то в X существует такая (открытая) база, что пересечение границ любых ее $n+1$ элементов компактно [15]. Это условие не является достаточным для существования у пространства X Б.р. bX с $\dim bX=\dim X$ и $\dim(bX\setminus X)\leqslant n$. Более того, если bX совершенное Б.р. пространства X, $\dim bX=n$, $\dim\Phi\leqslant n-1$ для всякого бикомпакта $\Phi\subset bX\setminus X$, то $\dim vX\geqslant n$ для всякого Б. р. vX с пунктиформным наростом [15]. Совершенное Б. р., как и максимальное, интересно возможностью продолжения отображений. Так, в частности, если пространства X и Y обладают минимальными совершенными расширениями μX и μY, то всякое совершенное отображение $f\colon X\to Y$ продолжается в отображение $\tilde{f}\colon\mu X\to\mu Y$.

Топологич. пространство X веса τ индуктивно нульмерно (т. е. $\operatorname{ind}X=0$) тогда и только тогда (см. [16]), когда оно имеет индуктивно нульмерное Б.р. bX веса τ, так что пространство X веса τ с $\operatorname{Ind}X=0$ имеет Б.р. того же веса и той же размерности. У вполне регулярного пространства X с $\operatorname{Ind}\beta X\leqslant n$ существует Б. р. bX с $nbX=wX$ и $\operatorname{Ind}bX\leqslant n$, причем это верно и для трансфинитных значений $\operatorname{Ind}\beta X$. Поэтому у сильно паракомпактного метрич. пространства X существует такое Б. р. bX, что $wbX=wX$, $\dim bX=\operatorname{ind}bX=\operatorname{ind}bX=\dim X$, в то же время существует такое пространство X, что $\operatorname{ind}bX>\operatorname{ind}X$ для всякого его Б. р. в X (см. [21]).

Имеется ряд утверждений о Б.р. бесконечномерных пространств. Так, максимальное Б.р. βX нормального S-слабо бесконечномерного пространства X слабо бесконечномерно [16]. Далее, любое вполне регулярное пространство X веса τ, максимальное Б. р. к-рого слабо бесконечномерно (в частности, любое нормальное S-слабо бесконечномерное пространство X веса $\leqslant\tau$), обладает слабо бесконечномерным Б. р. веса $\leqslant\tau$. В этих утверждениях S-слабую бесконечномерность нельзя заменить на A-слабую бесконечномерность (см. *Слабо бесконечномерное пространство*): так, все Б. р. растущей суммы кубов Q^ω (подмножества *гильбертова кир-*

пича Q^∞, состоящего из точек, у к-рых лишь конечное число координат отлично от нуля) суть сильно бесконечномерные пространства [15].

Исследованы [17] вопросы, касающиеся размерности dim наростов Б. р. пространств близости и вполне регулярных пространств. Если пространство близости нормально прилегает к $cP \setminus P$, где cP (единственное) Б. р. пространства P, то $\dim(cP \setminus P)$ равна наименьшему из тех чисел k, что в каждое продолжаемое окаймление можно вписать окаймление кратности $\leqslant k+1$ (см. *Окаймление пространства* в расширении). Пространство X счетного типа обладает Б.р. bX с наростом размерности $\leqslant n$ тогда и только тогда, когда в X существует структура окаймлений кратности $\leqslant n+1$, обладающая базисным свойством. Кроме того, из существования у данного пространства X Б.р. с наростом размерности $\leqslant n$ вытекает существование Б.р. bX веса $wbX = wX$ с наростом размерности $\leqslant n$.

Частично упорядоченное множество $B(X)$ всех хаусдорфовых Б.р. пространства X является полной *полурешеткой* (относительно операции взятия верхней грани). Множество $B(X)$ есть (полная) решетка тогда и только тогда, когда пространство X локально бикомпактно. Если пространства X и Y локально бикомпактны, то решетки $B(X)$ и $B(Y)$ изоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны наросты $\beta X \setminus X$ и $\beta Y \setminus Y$ (см. [18]). Неизвестны условия, к-рым должно удовлетворять (совершенное) отображение $f: X \to Y$, чтобы полурешетки $B(X)$ и $B(Y)$ были изоморфны. В то же время Б. р. совершенных неприводимых прообразов пространства X описываются θ-*близостями* на пространстве X и образуют полную полурешетку относительно естественно определяемого порядка [19]. Б. р. совершенных неприводимых прообразов пространства X связаны также с H-замкнутыми расширениями пространства X.

Лит.: [1] Александров П. С., Урысон П. С., Мемуар о компактных топологических пространствах, 3 изд., М., 1971; [2] Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1—2, М.— Л., 1951; [3] Тихонов А. Н., «Math. Ann.», 1929, Bd 102, S. 544—61; [4] Cech E., «Ann. Math.», 1937, v. 38, p. 823—44; [5] Stone M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1937, v. 41, p. 375—481; [6] Смирнов Ю. М., «Матем. сб.», 1952, т. 31, с. 543—74; [7] Александров П. С., «Матем. сб.», 1939, т. 5 [47], с. 403—23; [8] его же, «Успехи матем. науки», 1960, т. 15, в. 2, с. 25—95; [9] Wallman H., «Ann. Math.», 1941, v. 42 [2], p. 687—97; [10] Зайцев В. И., «Труды Моск. матем. об-ва», 1972, т. 27, с. 129—93; [11] Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., «Успехи матем. наук», 1946, т. 1, в. 2, с. 48—146; [12] Samuel P., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1948, v. 64, p. 100—32; [13] Архангельский А. В., «Матем. сб.», 1973, т. 91, № 1, с. 78—87; [14] Малыхин В., «Докл. АН СССР», 1972; т. 206, № 6, с. 1293—1296; [15] Александров П. С., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19 : 6, с. 3—46; 1965, т. 20, в. 1, с. 253—4; [16] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973; [17] Смирнов Ю. М., «Матем. сб.», 1966, т. 69, № 1, с. 141—60; 1966, т. 71 : 4, с. 454—82; [18] Magill K. D., «Proc. London Math. Soc.», 1968. Ser. 3, v. 18, pt 2, p. 231—44; [19] Федорчук В. В., «Матем. сб.», 1968, т. 76 : 4, с. 513—36; [20] Freudenthal H., «Ann. Math.», 1942, v. 43, № 2, p. 261—79; [21] Смирнов Ю. М., «Докл. АН СССР», 1957, т. 117, № 6, с. 939—42.

В. В. Федорчук.

БИКОМПАКТНОСТЬ — свойство, характеризующее широкий класс топологич. пространств и состоящее в том, что из любого покрытия пространства открытыми множествами можно выделить конечное покрытие. Наряду с термином «Б.» употребляется термин «компактность». Топологич. пространства, обладающие свойством Б., наз. *бикомпактными пространствами.*

А. В. Архангельский.

БИКОМПЛЕКС, двойной комплекс,— дважды градуированный модуль, т. е. представимый как прямая сумма $\Sigma A^{m,n}$ своих подмодулей $A^{m,n}$, рассматриваемый вместе с парой дифференциальных операторов

$$d_1: \quad A^{m,n} \longrightarrow A^{m+1,n},$$
$$d_2: \quad A^{m,n} \longrightarrow A^{m,n+1},$$

удовлетворяющих условиям

$$d_1 \cdot d_2 = 0,\ d_2 \cdot d_2 = 0,\ d_2 d_1 + d_1 d_2 = 0.$$

Иногда вместо прямой суммы рассматривается просто множество $\{A^{m,n}\}$, а также дифференциалы

$$d_1\colon\ A^{m,n} \longrightarrow A^{m-1,n},$$
$$d_2\colon\ A^{m,n} \longrightarrow A^{m,n-1},$$

удовлетворяющие тем же условиям. *В. Е. Говоров.*

БИЛИНЕЙНАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА — двойной интеграл

$$J(\varphi,\ \psi) = \int_a^b \int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(x)\,\overline{\psi}(s)\,dx\,ds,$$

где $K(x, s)$ — заданная (вообще говоря, комплекснозначная) функция действительных переменных, интегрируемая с квадратом, $\varphi(x)$, $\psi(s)$ — произвольные (тоже комплекснозначные) функции, интегрируемые с квадратом, а $\overline{\psi}(s)$ — комплексно сопряженная функция с $\psi(s)$. Если $\psi(s) = \varphi(s)$, то $J(\varphi, \varphi)$ наз. квадратичной интегральной формой.

Б. В. Хведелидзе.

БИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА на произведении модулей $V \times W$ — *билинейное отображение* $f\colon V \times W \to A$, где V — левый унитарный A-модуль, W — правый унитарный A-модуль, A — кольцо с единицей, рассматриваемое также как (A, A)-бимодуль. Если $V = W$, то говорят, что f есть Б. ф. на модуле V, а также, что V наделен метрич. структурой с помощью f. Определения, касающиеся билинейных отображений, имеют смысл, в частности, для Б. ф. Так, говорят о матрице Б. ф. относительно выбранных базисов в V и W, об ортогональности элементов и подмодулей относительно Б. ф., об ортогональных прямых суммах, невырожденности и т. д. Напр., если A — поле и $V = W$ — конечномерное векторное пространство над A с базисом $e_1, \ldots, e_n$, то для векторов

$$v = v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n$$

и

$$w = w_1 e_1 + \ldots + w_n e_n$$

значение формы

$$f(v,\ w) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_i w_j,$$

где $a_{ij} = f(e_i, e_j)$. Иногда полином $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_i w_j$ от переменных $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n$ отождествляют с f и называют билинейной формой на V. Если кольцо A коммутативно, то Б. ф. есть частный случай *полуторалинейной формы* (с тождественным антиавтоморфизмом).

Пусть кольцо A коммутативно. Б. ф. f на A-модуле V наз. симметрической (соответственно антисимметрической, или кососимметрической), если для всех $v_1, v_2 \in V$ будет $f(v_1, v_2) = f(v_2, v_1)$ (соответственно $f(v_1, v_2) = -f(v_2, v_1)$) и наз. знакопеременной, если $f(v, v) = 0$. Знакопеременная Б. ф. антисимметрична, обратное верно только, если для любого $a \in A$ из $2a = 0$ следует $a = 0$. Если V имеет конечный базис, то симметрические (соответственно антисимметрические, знакопеременные) формы на V и только они имеют в этом базисе симметрическую (соответственно антисимметрическую, знакопеременную) матрицу. Отношение ортогональности относительно симметрич. или антисимметрич. формы на V симметрично.

Б. ф. f на V наз. изометричной Б. ф. g на W, если существует такой изоморфизм A-модулей $\varphi\colon V \to W$, что

$$g(\varphi(v),\ \varphi(w)) = f(v,\ w)$$

для любых $v \in V$. Этот изоморфизм наз. изометрией форм, а если $V = W$ и $f = g$ — метрическим автоморфизмом модуля V (или авто-

морфизмом формы f). Метрич. автоморфизмы модуля образуют группу (группу автоморфизмов формы f), примеры таких групп — ортогональная группа, симплектич. группа.

Пусть A — тело, f — Б. ф. на $V\times W$, пространства $V/W^{\perp}$ и $W/V^{\perp}$ конечномерны над A, тогда

$$\dim V/W^{\perp}=\dim W/V^{\perp},$$

и это число наз. рангом f. Если V конечномерно, а f невырождена, то

$$\dim V=\dim W$$

и для каждого базиса $v_1, \ldots, v_n$ в V существует дуальный относительно f базис $w_1, \ldots, w_n$ в W, определяемый условиями $f(v_i, w_j)=\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символы Кронекера). Пусть, кроме того, $V=W$, тогда подмодули $V^{\perp}$ и $W^{\perp}$ наз. соответственно правым и левым ядрами f; для симметрич. и антисимметрич. форм правое и левое ядра совпадают и наз. просто ядром формы.

Пусть f симметрич. или антисимметрич. Б. ф. на V. Элемент $v\in V$, для к-рого $f(v, v)=0$, наз. изотропным; подмодуль $M\subset V$ наз. изотропным, если $M\cap M^{\perp}\neq\{0\}$, вполне изотропным, если $M\subset M^{\perp}$. Вполне изотропные подмодули играют важную роль в изучении структуры Б. ф. (см. *Витта разложение*, *Витта теорема*, *Витта кольцо*). О строении Б. ф. см. также *Квадратичная форма*.

Пусть A коммутативно и пусть $\mathrm{Hom}_A(V, W)$ есть A-модуль всех A-линейных отображений V в W, а $L^2(V, W, A)$ — A-модуль всех Б. ф. на $V\times W$. Для всякой Б. ф. f на $V\times W$ и всякого $v_0\in V$ формула

$$l_{f, v_0}(w)=f(v_0, w), \quad w\in W,$$

определяет A-линейную форму на W. Соответственно, для $w_0\in W$ формула

$$r_{f, w_0}(v)=f(v, w_0), \quad v\in V,$$

определяет A-линейную форму на V. Отображение l_f: $v_0\longmapsto l_{f, v_0}$ есть элемент из

$$\mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{Hom}_A(V, A)).$$

Аналогично определяется отображение r_f из

$$\mathrm{Hom}_A(W, \mathrm{Hom}_A(V, A)).$$

Отображения $f\longmapsto l_f$ и $f\longmapsto r_f$ осуществляют изоморфизмы A-модулей

$$L^2(V, W, A)\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{Hom}_A(W, A))$$

и

$$L^2(V, W, A)\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(W, \mathrm{Hom}_A(V, A)).$$

Б. ф. f наз. неособой слева (справа), если $l_f(r_f)$ — изоморфизм; если f неособая и слева и справа, то она наз. неособой, в противном случае f наз. особой. Невырожденная Б. ф. может быть особой. Для свободных модулей V и W одинаковой конечной размерности Б. ф. f на $V\times W$ является неособой тогда и только тогда, когда определитель матрицы f относительно любых базисов в V и W — обратимый элемент кольца A. Следующие изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}_A(V, V)\xrightarrow{l} L^2(V, W, A)$$

и

$$\mathrm{Hom}_A(W, W)\xrightarrow{r} L^2(V, W, A),$$

задаваемые неособой Б. ф. f, определяются формулами

$$l(\varphi)(v, w)=f(\varphi(v), w)$$

и

$$r(\psi)(v, w)=f(v, \psi(w)).$$

Эндоморфизмы $\varphi\in\mathrm{Hom}_A(V, V)$ и $\psi\in\mathrm{Hom}_A(W, W)$ наз. сопряженными относительно f, если $\psi=(r^{-1}\circ l)(\varphi)$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969.
В. Л. Попов.

БИЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, билинейная функция,— отображение f произведения $V\times W$ левого унитарного A-модуля V и правого унитарного B-модуля W в (A, B)-*бимодуль* H, удовлетворяющее следующим условиям:

$$f(v+v', w)=f(v, w)+f(v', w);$$
$$f(v, w+w')=f(v, w)+f(v, w');$$
$$f(av, w)=af(v, w);$$
$$f(v, wb)=f(v, w)b;$$

здесь $v, v'\in V$, $w, w'\in W$, $a\in A$, $b\in B$ — произвольно выбранные элементы, A и B — кольца с единицей. Тензорное произведение $V\otimes W$ над $\mathbb{Z}$ имеет естественную структуру (A, B)-бимодуля. Пусть φ: $V\times W\to V\otimes W$ — канонич. отображение, тогда любое Б. о. f индуцирует гомоморфизм (A, B)-бимодулей $\tilde{f}$: $V\otimes W\to H$, для к-рого $f=\tilde{f}\circ\varphi$. Если $A=B$ и коммутативно, то множество $L^2(V, W, H)$ всех Б. о. $V\times W\to H$ является A-модулем относительно обычным образом определяемых операций сложения и умножения на элементы из A, а соответствие $f\to\tilde{f}$ устанавливает канонич. изоморфизм A-модуля $L^2(V, W, H)$ и A-модуля $L(V\otimes W, H)$ всех A-линейных отображений $V\otimes W$ в H.

Пусть V и W— свободные модули с базисами v_i, $i\in I$ и w_j, $j\in J$, соответственно. Б. о. f полностью определяется заданием $f(v_i, w_j)$, для всех $i\in I$, $j\in J$, поскольку для любых конечных подмножеств $I'\subset I$, $J'\subset J$ имеет место формула

$$f\left(\sum_{i\in I'} a_iv_i,\quad \sum_{j\in J'} b_jw_j\right)=$$
$$=\sum_{i\in I',\ j\in J'} a_if(v_i, w_j)\,b_j. \qquad (*)$$

И обратно, при произвольном выборе элементов $h_{ij}\in H$, $i\in I$, $j\in J$, формула (*), где $f(v_i, w_j)=h_{ij}$, определяет Б. о. $V\times W$ в H. Если I и J конечны, матрица $\|f(v_i, w_j)\|$ называется матрицей Б. о. f относительно данных базисов.

Пусть задано Б. о. f: $V\times W\to H$. Элементы $v\in V$, $w\in W$ наз. ортогональными относительно f, если $f(v, w)=0$. Подмножества $X\subset V$ и $Y\subset W$ наз. ортогональными относительно f, если всякий $x\in X$ ортогонален всякому $y\in Y$. Если X — подмодуль в V, то

$$X^{\perp}=\{w\in W\mid f(x, w)=0 \text{ для всех } x\in X\}$$

— подмодуль в W, наз. ортогональным подмодулем, или ортогональным дополнением, к X. Аналогично определяется ортогональное дополнение $Y^{\perp}$ к подмодулю Y в W. Отображение f наз. вырожденным справа (соответственно слева), если $V^{\perp}\neq\{0\}$ (соответственно $W^{\perp}\neq\{0\}$). Подмодули $V^{\perp}$ и $W^{\perp}$ наз. соответственно левым и правым ядром Б. о. f. Если $V^{\perp}=\{0\}$ и $W^{\perp}=\{0\}$, то f наз. невырожденным, а в противном случае — вырожденным. Отображение f наз. нулевым, если $V^{\perp}=W$ и $W^{\perp}=V$.

Пусть V_i, $i\in I$,— семейство левых A-модулей, W_i, $i\in I$,— семейство правых B-модулей, f_i — Б. о. $V_i\times W_i$ в H, V — прямая сумма A-модулей V_i, а W — прямая сумма B-модулей W_i. Отображение f: $V\times W\to H$, определяемое правилом

$$f\left(\sum_{i\in I} v_i,\ \sum_{i\in I} w_i\right)=\sum_{i\in I} f(v_i, w_i),$$

является Б. о. и наз. прямой суммой отображений f_i. Эта сумма ортогональна, т. е. подмодуль V_i ортогонален подмодулю W_j относительно f при $i\neq j$.

Б. о. f невырождено тогда и только тогда, когда f_i невырождено для всех $i \in I$; при этом

$$V^{\perp} = \sum_{j \neq i} W_j, \quad W_i^{\perp} = \sum_{j \neq i} V_j.$$

В случае $A = B = H$ Б. о. наз. *билинейной формой*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

В. Л. Попов.

БИЛИНЕЙНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ — аналитический *дифференциал на римановой поверхности*, зависящий от двух точек P и Q и имеющий вид

$$f(z, \zeta) dz d\zeta,$$

где z и ζ — локальные униформизирующие параметры в окрестностях P и Q соответственно, $f(z, \zeta)$ — аналитич. функция от z и ζ. При помощи Б. д. выражаются многие функционалы *конечных римановых поверхностей*.

Лит.: [1] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957.

Е. Д. Соломенцев.

БИЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ — *билинейное отображение* модуля над коммутативным кольцом K (K-модуля) в само это кольцо (рассматриваемое как K-модуль).

М. И. Войцеховский.

БИМАТРИЧНАЯ ИГРА — конечная *бескоалиционная игра* двух лиц. Б. и. задается двумя матрицами $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ одинакового размера $m \times n$, являющимися матрицами выигрышей соответственно игроков I и II. Стратегией игрока I является выбор строки матриц, стратегией игрока II — выбор столбца. Если игрок I выбирает i ($1 \leqslant i \leqslant m$), а игрок II выбирает j ($1 \leqslant j \leqslant n$), то они получают соответственно выигрыши a_{ij} и b_{ij}. Если $a_{ij} + b_{ij} = 0$ для всех i, j, то Б. и. является *матричной игрой*. Теория Б. и.— наиболее простой раздел общей теории бескоалиционных игр, однако и Б. и. не всегда разрешимы по Нэшу или строго разрешимы. Для Б. и. имеются различные алгоритмы, посредством к-рых находят ситуации равновесия: метод описания подматриц A, B, доставляющих все крайние точки множества ситуаций равновесия [1], [2]; методы, сводящие задачу отыскания ситуаций равновесия в Б. и. к задачам *квадратичного программирования* (см. [3], [4], [5]).

Лит.: [1] Воробьев Н. Н., «Теория вероятностей и её применения», 1958, т. 3, в. 3, с. 318—31; [2] Kuhn H. W., «Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.», 1961, v. 47, № 10, p. 1657—62; [3] Mills H., «J. Soc. Industr. Appl. Math.», 1960, v. 8, № 2, p. 397—402; [4] Mangasarian O. L., «J. Soc. Industr. Appl. Math.», 1964, v. 12, № 4, p. 778—80; [5] Lemke C. E., Howson J. T., «J. Soc. Industr. Appl. Math.», 1964, v. 12, № 2, p. 413—23.

Е. Б. Яновская.

БИМОДАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, двувершинное распределение,— распределение вероятностей, характеризуемое существованием у кривой плотности двух максимумов, к-рые определяются двумя значениями *моды*. Б. р. часто возникает как «смесь» двух *нормальных распределений*. См. также *Мультимодальное распределение*, *Унимодальное распределение*.

А. В. Прохоров.

БИМОДУЛЬ, двойной модуль,— абелева группа B, являющаяся левым модулем над кольцом R и правым модулем над кольцом S, причем $(rb)s = r(bs)$ для любых $r \in R$, $b \in B$ и $s \in S$. В этом случае говорят, что имеет место ситуация ${}_R B_S$ или что B является (R, S)-бимодулем. Б. B можно рассматривать как левый $R \otimes S^*$-модуль, где S^* — кольцо, дуально изоморфное (антиизоморфное) S, а $\otimes$ означает тензорное произведение над кольцом целых чисел, причем $(r \otimes s)b = rbs$. Для всякого левого R-модуля M имеет место ситуация ${}_R M_E$, где E — кольцо эндоморфизмов модуля M. Всякое кольцо A может быть наделено естественной структурой (A, A)-бимодуля.

Л. А. Скорняков.

БИМОРФИЗМ, биективный морфизм в категории,— одно из теоретико-категорных обобщений понятия биективного отображения множеств.

Морфизм u в категории C наз. Б., если он одновременно является *мономорфизмом* и *эпиморфизмом* в C. Произведение Б. есть Б., то есть Б. образуют подкатегорию, содержащую все изоморфизмы. В категориях множеств, групп всякий Б. является изоморфизмом. Однако уже в категориях колец, топологических пространств или абелевых групп без кручения существуют Б., не являющиеся изоморфизмами.

И. В. Долгачев, М. Ш. Цаленко.

БИНАРНАЯ p-АДИЧЕСКАЯ ГРУППА — бесконечная группа G квадратных матриц 2-го порядка

$$\left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|,$$

где a, b, c, d — элементы кольца целых *p-адических чисел*, подчиненные следующим условиям:

$$ad-bc=1,\ c\equiv 0 \pmod{p},\ d\equiv 1 \pmod{p}.$$

Факторгруппы таких групп вида G/N, где N — n-й член нижнего центрального ряда группы G или n-й член производного ряда (ряда высших коммутантов группы G),— примеры конечных p-групп, обладающих заданными экстремальными свойствами.

А. И. Кострикин.

БИНАРНАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА — квадратичная форма от двух переменных, т. е. форма вида

$$f=f(x,\ y)=ax^2+bxy+cy^2; \qquad (*)$$

если a, b, c — целые числа, Б. к. ф. наз. целочисленной. Выражение $d=ac-b^2/4$ наз. определителем, или дискриминантом, Б. к. ф. Иногда под дискриминантом понимается также величина b^2-4ac. Арифметич. теория Б. к. ф. начата П. Ферма (P. Fermat), утверждавшим, что всякое простое число вида $4k+1$ представимо суммой двух квадратов целых чисел. Законченная теория Б. к. ф. построена Ж. Лагранжем (J. Lagrange) и К. Гауссом (C. Gauss). Теория Б. к. ф.— частный случай теории *квадратичных форм* от n переменных; арифметич. теория Б. к. ф. равносильна теории идеалов *квадратичных полей*. Теория Б. к. ф. является одним из истоков теории алгебраических чисел.

Число родов Б. к. ф. с определителем d равно 2^{s-1}, где s — число различных простых делителей числителя d, кроме случаев $d\equiv 1 \pmod 4$, $d\equiv 0 \pmod 8$, когда s увеличивается на 1; при этом, если $-d$ есть квадрат, число родов удваивается. Количество $r(d,\ m)$ существенно различных примитивных представлений числа m полной системой Б. к. ф. определителя d равно числу решений сравнения

$$x^2\equiv -d \pmod{m}.$$

Как и в общем случае, имеется алгоритм, сводящий вопрос о решении данного диофантова уравнения 2-й степени с двумя неизвестными (в частности, уравнения $f(x,\ y)=m$) к проблеме арифметич. эквивалентности двух Б. к. ф.

Все целочисленные автоморфизмы примитивной формы f с $a\neq 0$ представимы в виде

$$\left\| \begin{matrix} t-bu/2 & -cu \\ au & t+bu/2 \end{matrix} \right\|,$$

где $t^2+du^2=1$, причем $2t$ и u — целые числа (см. *Пелля уравнение*). Поэтому проблема эквивалентности двух форм решается теорией приведения Б. к. ф. Теория приведения положительных Б. к. ф. есть частный случай теории приведения положительных квадратичных форм по Минковскому. Теория приведения целочисленных неопределенных Б. к. ф. сводится к теории приведения квадратичных иррациональностей (см. [2], с. 97—103, [3], с. 170—80).

Важную роль в теории чисел играет арифметич. функция $h(d)$ — число классов целочисленных примитивных Б. к. ф. определителя d. Известно, что $h(d)<+\infty$. Нек-рое представление о характере роста функции $h(d)$ дает теорема Зигеля: для $d>0$ по $\varepsilon>0$ найдутся постоянные c_ε и $c'_\varepsilon>0$, для к-рых

$$c'_\varepsilon d^{1/2-\varepsilon} < h(d) < c_\varepsilon d^{1/2+\varepsilon}$$

(подобная формула имеет место и для $d<0$).

Пусть Δ — целое число, $\Delta\equiv 1$ или $0 \pmod 4$, причем если $s^2 \mid \Delta$, то $s=1$ или $s=2$, и пусть $F=Q(\sqrt{\Delta})$ есть квадратичное поле, получающееся присоединением $\sqrt{\Delta}$ к полю рациональных чисел. Целым идеалам $[\alpha_1, \alpha_2]$ поля F ставятся в соответствие целочисленные квадратичные формы

$$f(x, y)=\frac{N(\alpha_1 x+\alpha_2 y)}{N[\alpha_1, \alpha_2]}$$

с определителем $-\Delta/4$. Это приводит к взаимно однозначному соответствию (с точностью до перехода к сопряженным классам идеалов) между классами идеалов поля F и классами Б. к. ф. При этом соответствии умножение классов идеалов определяет композицию классов Б. к. ф.

Как и для формы от n переменных, теория Б. к. ф. может быть обобщена на формы вида (*) с коэффициентами a, b, c из заданного алгебраич. числового поля.

Имеются разночтения в определении целочисленной формы, определителя (дискриминанта) формы, эквивалентности форм, класса и рода форм. Приведенное выше определение целочисленной формы принадлежит Л. Кронекеру (L. Kronecker). К. Гаусс требовал (см. [1]), чтобы b было четным. При определении эквивалентности (и класса форм) иногда рассматривают только подстановки определителя $+1$; иногда же ± 1. В [6] дается более широкое, чем по Гауссу, определение рода.

Лит.: [1] Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел, [пер. с нем. и латин.], М., 1959; [2] Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.—Л., 1937; [3] Jones B. W., The arithmetic theory of quadratic forms, N. Y., 1950; [4] Гельфонд А. О., Линник Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962; [5] Landau E., Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd 1, Lpz., 1927; [6] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [7] O'Meara O. T., Introduction to quadratic forms, B., 1963. *А. В. Малышев.*

БИНАРНАЯ ФОРМА — форма от двух переменных, т. е. однородный *многочлен*

$$f=f(x, y)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} y^k,$$

где коэффициенты a_k, $k=0, 1, \ldots, n$, принадлежат заданному *коммутативному кольцу* с единицей. В качестве такого кольца часто выбирается кольцо $\mathbb{Z}$ целых рациональных чисел, кольцо целых элементов нек-рого алгебраического числового поля, поле $\mathbb{R}$ действительных чисел или поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Число n наз. степенью формы. Если $n=2$, то f наз. *бинарной квадратичной формой*.

В теории форм можно выделить алгебраическое (теория инвариантов), арифметическое (представление чисел формами) и геометрическое (теория арифметич. минимумов форм) направления. Задачей алгебраич. теории Б. ф. (в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) является построение полной системы инвариантов таких форм при линейных преобразованиях переменных с коэффициентами из того же поля (см. *Инвариантов теория*, а также [2], гл. 5). В арифметической теории Б. ф. изучаются диофантовы уравнения вида

$$f(x, y)=b,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, b\in\mathbb{Z}$ — их разрешимость и решения в кольце $\mathbb{Z}$. Важнейший результат здесь — теорема Туэ, а также ее обобщения и уточнения (см. *Туэ — Зигеля — Рота теорема*). О разрешимости таких уравнений в поле $\mathbb{Q}$ и возможном числе решений см. [5],

гл. 9—17, а также *Морделла гипотеза*. Теория арифметич. минимумов Б. ф. изучается в *геометрии чисел*. Арифметическим минимумом формы f наз. величина

$$m(f)=\inf_{(x,\ y)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,\ 0)}|f(x,\ y)|.$$

В случае $n=3$ доказано, что

$$m(f)\leqslant\begin{cases}|D/49|^{1/4}, & \text{если } D>0,\\ |D/23|^{1/4}, & \text{если } D<0.\end{cases}$$

Здесь D — дискриминант формы f, в данном случае равный

$$18a_0a_1a_2a_3+a_1^2a_2^2-4a_0a_2^3-4a_3a_1^3-27a_0^2a_3^2.$$

Эти оценки неулучшаемы.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Гуревич Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, М.—Л., 1948; [3] Landau E., Walfisz A., Diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen, B., 1959; [4] Lekkerkerker C. G., Geometry of numbers, Groningen [a.o.], 1969; [5] Mordell L. J., Diophantine equations, L.— N. Y., 1969. *А. В. Малышев.*

БИНАРНО ЛИЕВА АЛГЕБРА, BL-алгебра,— линейная алгебра A над полем F, любые два элемента к-рой порождают подалгебру Ли. Класс всех Б. л. а. над данным полем F порождает многообразие, к-рое в случае характеристики поля F, отличной от 2, задается системой тождеств

$$x^2=J(xy,\ x,\ y)=0, \qquad (*)$$

где

$$J(x,\ y,\ z)=(xy)z+(yz)x+(zx)y.$$

Если характеристика поля F равна 2, а кардинальное число его не меньше 4, то класс Б. л. а., кроме системы тождеств (*), задается еще тождеством

$$J([(xy)y]x,\ x,\ y)=0.$$

Касательная алгебра аналитической локальной альтернативной *лупы* является Б. л. а., и обратно.

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Матем. сб.», 1955, т. 36 (78), с. 569—75; [2] Гайнов А. Т., «Алгебра и логика», 1969, т. 8, № 5, с. 505—22. *А. Т. Гайнов.*

БИНАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ — двуместный *предикат* на заданном множестве. Под Б. о. иногда понимают подмножество множества $A\times A$ упорядоченных пар $(a,\ b)$ элементов заданного множества A. Б. о.— частный случай *отношения*. Пусть $R\subseteq A\times A$. Если $(a,\ b)\in R$, то говорят, что элемент a находится в бинарном отношении R к элементу b. Вместо $(a,\ b)\in R$ пишут также aRb.

Пустое подмножество $\varnothing$ в $A\times A$ и само множество $A\times A$ наз., соответственно, нуль-отношением и универсальным отношением в множестве A. Диагональ множества $A\times A$, т. е. множество $\Delta=\{(a,\ a)/a\in A\}$, есть отношение равенства, или единичное бинарное отношение в A.

Пусть R, R_1, R_2 — Б. о. в множестве A. Наряду с теоретико-множественными операциями объединения $R_1\cup R_2$, пересечения $R_1\cap R_2$ и дополнения $R'=(A\times A)\setminus R$ для Б. о. рассматривают также операцию обращения:

$$R^{-1}=\{(a,\ b)\mid(b,\ a)\in R\}$$

и операцию умножения:

$$R_1\circ R_2=\{(a,\ b)\mid(\exists c\in A)\,(aR_1c \text{ и } cR_2b)\}.$$

Б. о. R^{-1} наз. обратным для R. Умножение Б. о. ассоциативно, но, вообще говоря, не коммутативно.

Б. о. R в A называется: а) рефлексивным, если $\Delta\subseteq R$; б) транзитивным, если $R\circ R\subseteq R$; в) симметричным, если $R^{-1}\subseteq R$; г) антисимметричным, если $R\cap R^{-1}\subseteq\Delta$. Если Б. о. R обладает нек-рым из свойств а), б), в), г), то обратное

отношение R^{-1} обладает этим же свойством. Б. о. $R \subseteq A \times A$ наз. функциональным, если $R^{-1} \circ R \subseteq \Delta$.

Наиболее важными типами Б. о. являются *эквивалентности*, *порядки* (линейные и частичные) и *функциональные отношения*. *Д. М. Смирнов.*

БИНОМ — двучлен, сумма или разность двух алгебраич. выражений, называемых членами Б., напр. $a+b$, $5x-\frac{y^2}{1+x^2}$ и т. д. О степенях Б., то есть выражениях вида $(x+y)^n$, см. *Ньютона бином*.

БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, распределение Бернулли,— распределение вероятностей случайной величины X, принимающей целочисленные значения $x=0, 1, \ldots, n$ с вероятностями соответственно

$$\mathsf{P}\{X=x\}=b_x(n, p)=C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

(C_n^x — биномиальный коэффициент; p — параметр Б. р., наз. вероятностью положительного исхода, принимающей значения на отрезке $0 \leqslant p \leqslant 1$). Б. р.— одно из основных распределений вероятностей, связанных с последовательностью независимых испытаний. Пусть $Y_1, Y_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из к-рых может принимать лишь два значения 1 или 0 с вероятностями p и $1-p$ соответственно (т. е. каждая из Y_i подчиняется Б. р. при $n=1$). Величины Y_i можно трактовать как результаты независимых испытаний, причем $Y_i=1$ в случае «положительного исхода» и $Y_i=0$ в случае «отрицательного исхода» испытания с номером i. Если общее количество независимых испытаний n фиксированно, то такая схема наз. *Бернулли испытаниями*, причем суммарное количество положительных исходов

$$X=Y_1+\ldots+Y_n,\ n \geqslant 1,$$

в этом случае подчиняется Б. р. с параметром p.

Математич. ожидание $\mathsf{E}z^X$ (*производящая функция* Б.р.) при любом значении z есть многочлен $[pz+(1-p)]^n$, представление к-рого по формуле бинома Ньютона имеет вид

$$b_0+b_1z+\ldots+b_nz^n$$

(отсюда и произошло само назв. «Б. р.»). *Моменты* Б. р. выражаются формулами

$$\mathsf{E}X=np,$$
$$\mathsf{D}X=\mathsf{E}(X-np)^2=np(1-p),$$
$$\mathsf{E}(X-np)^3=np(1-p)(1-2p).$$

Функция Б. р. определяется при любом действительном значении $0 < y < n$ формулой

$$F(y)=\mathsf{P}\{X \leqslant y\}=\sum_{x=0}^{[y]} C_n^x p^x (1-p)^{n-x},$$

где $[y]$ — целая часть y, причем

$$F(y)=\frac{1}{\mathrm{B}([y]+1, n-[y])}\int_p^1 t^{[y]}(1-t)^{n-[y]-1}\,dt$$

($\mathrm{B}(a, b)$ — *бета-функция* Эйлера, интеграл в правой части наз. неполной бета-функцией).

При $n \to \infty$ функция Б. р. выражается в терминах функции Φ стандартного нормального распределения асимптотич. формулой (теорема Муавра — Лапласа)

$$F(y)=\Phi\left[\frac{y-np+0{,}5}{\sqrt{np(1-p)}}\right]+R_n(y, p),$$

где

$$R_n(y, p)=O(n^{-1/2})$$

равномерно для всех действительных y. Существуют и другие нормальные приближения Б. р. с остатками более высокого порядка малости.

Если количество независимых испытаний n велико, а вероятность p мала, то индивидуальные вероятности

$b_x(n,\ p)$ приближенно выражаются в терминах *Пуассона распределения*:

$$b_x(n,\ p) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{(np)^x}{x!} e^{-np}.$$

При этом, если $n \to \infty$ и $0 < c \leqslant y \leqslant C$ (c и C — постоянные), то равномерно относительно всех p из интервала $0 < p < 1$ имеет место асимптотич. формула

$$F(y) = \sum_{x=0}^{[y]} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} + O(n^{-2}),$$

где $\lambda = \frac{(2n-[y])p}{2-p}$.

Многомерным обобщением Б. р. является *полиномиальное распределение*.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, пер. с англ., 2 изд., М., 1967; [3] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [4] Прохоров Ю. В., «Успехи математических наук», 1953, т. 8, № 3, с. 135—42; [5] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

Л. Н. Большев.

БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ — коэффициенты при степенях z в разложении *Ньютона бинома* $(1+z)^N$. Б. к. обозначается $\binom{N}{n}$ или C_N^n и равен

$$\binom{N}{n} = C_N^n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} = \frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{n!},\quad 0 \leqslant n \leqslant N. \tag{1}$$

Обозначение $\binom{N}{n}$ восходит к Л. Эйлеру (L. Euler); второе обозначение C_N^n появилось в 19 в. и связано, по-видимому, с интерпретацией Б. к. C_N^n как числа различимых неупорядоченных *сочетаний* из N различных объектов по n в каждом сочетании. Б. к. наиболее удобно выписываются в виде арифметического треугольника, или *Паскаля треугольника*, построение к-рого основано на свойстве Б. к.

$$C_N^n + C_N^{n+1} = C_{N+1}^{n+1}. \tag{2}$$

Как понятие Б. к., так и арифметич. треугольник в более или менее развитой форме были известны еще математикам древности, Б. Паскаль (B. Pascal) составил подробное исследование (1665) свойств Б. к. Кроме соотношения (2), имеется много других полезных соотношений между Б. к., напр.:

$$\left.\begin{aligned}
&C_N^n = C_N^{N-n};\\
&C_N^n = \sum_{k=0}^{n} C_m^k C_{N-m}^{n-k},\quad n \leqslant m \leqslant N-n;\\
&\sum_{k=0}^{N} (-1)^k k^m C_N^k = 0,\quad m = 0, 1, 2, \ldots, N-1;\\
&\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n;\\
&\sum_{k=0}^{N} C_N^k k(k-1)\ldots(k-r+1) =\\
&\quad = N(N-1)\ldots(N-r+1)\cdot 2^{N-r};\\
&\sum_{k=0}^{N} (-1)^k C_N^k k(k-1)\ldots(k-r+1) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

В частности, отсюда получается

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N} C_N^k = 2^N;\\
&\sum_{k=0}^{N} (-1)^k C_N^k = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Использование *Стирлинга формулы* позволяет получать приближенные выражения для Б. к. Напр., если N много больше n:

$$C_N^n \sim \frac{N^n}{n!}.$$

На случай любого комплексного числа α Б. к. обобщаются по формуле

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha\,(\alpha-1)\,\ldots\,(\alpha-n+1)}{n!},\quad n>0;\quad \binom{\alpha}{0}=1.$$

При этом нек-рые из соотношений (2) — (4) сохраняются, но, вообще говоря, в измененном виде. Напр.,

$$\binom{\alpha}{n}+\binom{\alpha}{n+1}=\binom{\alpha+1}{n+1};$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}=2^{\alpha},\quad \operatorname{Re}\alpha>-1;$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}=0,\quad \operatorname{Re}\alpha>0.$$

Таблицы Б. к. см. [2], [3].

Лит.: [1] Корн Г., Корн Т., Справочник по математике, пер. с англ., 2 изд., М., 1973; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [3] Table of binomial coefficients, Cambridge, 1954.

Е. Д. Соломенцев.

БИНОМИАЛЬНЫЙ РЯД — степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n=1+\binom{\alpha}{1}z+\binom{\alpha}{2}z^2+\ldots,$$

где n — целое, а α — произвольное фиксированное число (вообще говоря, комплексное), $z=x+iy$ — комплексное переменное, $\binom{\alpha}{n}$ — *биномиальные коэффициенты*. Для целых $\alpha=m\geqslant 0$ Б. р. сводится к конечной сумме $m+1$ слагаемых

$$(1+z)^m=1+mz+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\ldots+z^m,$$

называемой *Ньютона биномом*. Для остальных значений α Б. р. абсолютно сходится при $|z|<1$ и расходится при $|z|>1$. В граничных точках единичной окружности $|z|=1$ Б. р. ведет себя следующим образом: 1) если $\operatorname{Re}\alpha>0$, то он абсолютно сходится во всех точках окружности $|z|=1$; 2) если $\operatorname{Re}\alpha\leqslant -1$, то он расходится во всех точках окружности $|z|=1$; 3) если $-1<\operatorname{Re}\alpha\leqslant 0$, то Б. р. расходится в точке $z=-1$ и условно сходится во всех остальных точках окружности $|z|=1$. Во всех точках, в к-рых Б. р. сходится, он представляет главное значение функции $(1+z)^{\alpha}$, равное 1 при $z=0$. Б. р. является частным случаем *гипергеометрического ряда*.

Если $z=x$ и α — действительные числа, причем α не есть целое неотрицательное число, то Б. р. ведет себя следующим образом: 1) если $\alpha>0$, то он абсолютно сходится при $-1\leqslant x\leqslant 1$; 2) если $\alpha\leqslant -1$, то Б. р. абсолютно сходится при $-1<x<1$ и расходится при всех иных значениях x; 3) если $-1<\alpha\leqslant 0$, то Б. р. абсолютно сходится при $-1<x<1$, условно сходится при $x=1$ и расходится при $x=-1$; при $|x|>1$ Б. р. всегда расходится.

Б. р. появляется впервые, по-видимому, у И. Ньютона (I. Newton) в 1664—65. Исчерпывающее исследование Б. р. было проделано Н. Абелем [1]. Оно послужило началом теории степенных рядов в комплексной области.

Лит.: [1] Abel N., «J. reine und angew. Math.», 1826, Bd 1, № 4, S. 311—39; [2] Knopp K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 5 Aufl., B., 1947; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М. 1967.

Е. Д. Соломенцев

БИНОРМАЛЬ — прямая, проходящая через точку M_0 кривой L перпендикулярно соприкасающейся плоскости к L в точке M_0. Если $r=r(t)$ — параметрич. уравнение кривой L, то векторное уравнение Б. в точке M_0, отвечающей значению t_0 параметра t, имеет вид

$$r(\lambda)=r(t_0)+\lambda\,[r'(t_0),\ r''(t_0)].$$

Е. В. Шикин.

БИОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА — пара множеств $\{a_t\}$ и $\{\xi_t\}$, $t\in T$, элементов (топологического) векторного пространства X и (топологического) сопряженного

пространства X^* соответственно, удовлетворяющая условиям:

$$\xi^t(a_s) = \langle \xi^t, a_s \rangle = 0,$$

если $t \neq s$, и отлично от нуля при $t=s$ (здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — каноническая билинейная форма, спаривающая X и X^*). Напр., Б. с. является базис Шаудера и множество, образованное коэффициентами разложения x по нему. В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и базисом $\{a_t\}$ множество $\{b_s\}$, удовлетворяющее условиям:

$$\langle a_t, b_s \rangle = \delta_{st},$$

где $\delta_{st}=1$ при $t=s$ и $\delta_{st}=0$ при $t \neq s$, также является базисом; он наз. базисом, дуальным к $\{a_t\}$, и, поскольку $H=H^*$, множества $\{a_t\}$ и $\{b_t\}$ образуют Б. с. В частности, базис в H наз. ортонормированным, если он дуален самому себе.

Существуют, однако, Б. с., не образующие даже слабого базиса,— таково, напр., множество функций e^{ikx}, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in R$, в пространстве непрерывных периодич. функций, наделенном нормой $\|f\| = \sup |f(x)|$.

М. И. Войцеховский.

БИПЛАНАРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — действительное $(2n+1)$-мерное проективное пространство, в к-ром выделены две непересекающиеся n-мерные плоскости, действительные (Б. п. гиперболич. типа) или комплексно сопряженные (Б. п. эллиптич. типа), а фундаментальная группа состоит из проективных преобразований, переводящих каждую из этих плоскостей в себя. Указанные две n-мерные плоскости наз. абсолютными плоскостями. Линейная конгруэнция действительных прямых, пересекающих каждую из абсолютных плоскостей, наз. абсолютной конгруэнцией. Эта конгруэнция служит действительной моделью n-мерного проективного пространства над алгеброй двойных или комплексных чисел. При $n=1$ Б. п. наз. биаксиальным пространством. Совокупность свойств геометрич. образов Б. п., сохраняющихся при преобразованиях фундаментальной группы, составляет содержание бипланарной геометрии. Наиболее подробно изучена биаксиальная геометрия ($n=1$), в к-рой развита теория кривых, поверхностей и комплексов прямых.

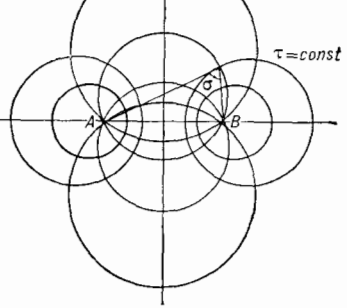
А. П. Широков.

БИПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ — числа τ и σ, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x и y формулами

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma},$$

$$y = \frac{a \sin \sigma}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma},$$

где $0 \leqslant \sigma < \pi$, $-\infty < \tau < \infty$. Координатные линии: два семейства окружностей ($\tau=\text{const}$) с полюсами A и B и семейство окружностей, ортогональных к ним ($\sigma=\text{const}$).



Коэффициенты Ламе:

$$L_\tau = L_\sigma = \frac{a^2}{(\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^2}.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta f = \frac{1}{a^2} (\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} \right).$$

Б. к. в пространстве (бисферические координаты) наз. числа σ, τ и φ, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x, y и z формулами:

$$x = \frac{a \sin \sigma \cos \varphi}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma}, \quad y = \frac{a \sin \sigma \sin \varphi}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma}, \quad z = \frac{a \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma},$$

где $-\infty<\sigma<\infty$, $0\leqslant\tau<\pi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$. Координатные поверхности: сферы ($\sigma=$const), поверхности, полученные при вращении дуг окружностей ($\tau=$const), и полуплоскости, проходящие через ось Oz. Система Б. к. в пространстве образуется при вращении системы Б. к. на плоскости Ozy вокруг оси Oz.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\sigma = L_\tau = \frac{a^2}{(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)^2},$$

$$L_\varphi = \frac{a^2\sin^2\sigma}{(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)^2}.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta f = \frac{(\operatorname{ch}\tau-\operatorname{ch}\sigma)^3}{a^2\sin\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}\frac{\partial f}{\partial\tau}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)+\frac{1}{\sin\sigma\,(\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma)}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right].$$

Д. Д. Соколов.

БИРАЦИОНАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел алгебраич. геометрии, основной задачей к-рого является классификация алгебраич. многообразий с точностью до бирациональной эквивалентности (см. *Бирациональное отображение*). Над фиксированным полем констант k каждый класс бирационально эквивалентных многообразий определяет конечно порожденное над k поле, изоморфное полю рациональных функций любого многообразия из этого класса. Обратно, каждому такому полю соответствует класс бирационально эквивалентных многообразий — моделей этого поля. Таким образом, бирациональная классификация алгебраич. многообразий эквивалентна классификации с точностью до k-изоморфизма конечно порожденных полей над k.

Наиболее общим б и р а ц и о н а л ь н ы м и н в а р и а н т о м является размерность алгебраич. многообразий. Для одномерных алгебраич. многообразий — неприводимых алгебраич. кривых — в каждом классе бирациональной эквивалентности существует единственная с точностью до k-изоморфизма гладкая проективная кривая — неособая модель. Тем самым бирациональная классификация алгебраич. кривых сводится к классификации с точностью до k-изоморфизма гладких проективных кривых, что приводит к *модулей проблеме*. В размерности $\geqslant 2$ задача сильно усложняется. Уже существование гладкой модели есть проблема *разрешения особенностей* алгебраич. многообразий, решенная положительно (к 1977) только для поверхностей и для многообразий произвольной размерности над полем характеристики нуль. В том случае, когда такие модели существуют, в классе бирационально эквивалентных многообразий их бесконечно много. Особое место среди них занимают *минимальные модели*. Их бирациональная классификация во многих случаях совпадает с классификацией с точностью до k-изоморфизма, как и для кривых. Однако даже для поверхностей (а именно, рациональных и линейчатых) это, вообще говоря, не так.

Основные результаты в классификации алгебраических поверхностей были получены геометрами итальянской школы (см. [1]). Для многообразий размерности $\geqslant 3$ имеются (к 1977) лишь отдельные результаты (см. [3]).

Основными дискретными бирациональными инвариантами гладких полных алгебраич. многообразий над полем k характеристики нуль являются следующие: арифметич. род, геометрич. род, кратный род, размерность пространства регулярных дифференциальных форм, кручения Севери, фундаментальная группа, группа Брауэра.

Одна из важнейших задач Б. г.— проблема рациональности алгебраич. многообразий, т. е. проблема описания *рациональных многообразий* — многообразий, бирационально эквивалентных проективному пространству.

Если поле констант не является алгебраически замкнутым, то задачи Б. г. тесно связаны с *алгебраических многообразий арифметикой*. В этом случае важной является проблема описания бирациональных k-форм данного многообразия V над полем k, в частности, напр., когда $V=P_k^n$ — проективное пространство над k (см. [2]). Существенным в заданной задаче является описание группы бирациональных преобразований многообразия V.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965; [2] Манин Ю. И., Кубические формы, М., 1972; [3] Roth L., Algebraic threefolds, B., [u.a.], 1955; [4] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [5] Бальдассарри М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [6] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974. *И. В. Долгачев, В. А. Исковских.*

БИРАЦИОНАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, бирациональный изоморфизм,— рациональное отображение алгебраич. многообразий, индуцирующее изоморфизм их полей рациональных функций. В более общем смысле, рациональное отображение схем $f\colon X\to Y$ наз. бирациональным отображением, если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий: а) существуют такие плотные открытые множества $U\subset X$ и $V\subset Y$, что f определено на U и осуществляет изоморфизм подсхем $f|U\colon U\xrightarrow{\sim}V$; б) если $\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_j\}_{j\in J}$ — множества общих точек неприводимых компонент соответственно схем X и Y, то f индуцирует биективное соответствие множеств $\alpha\colon I\to J$ и изоморфизм локальных колец $O_{X,\,x_i}\xrightarrow{\sim}O_{Y,\,y\alpha(i)}$ для каждого $i\in I$.

Если схемы X и Y неприводимы и приведены, то локальные кольца их общих точек отождествляются с полями рациональных функций соответственно на X и Y. В этом случае Б. о. $f\colon X\to Y$ индуцирует, согласно условию б), изоморфизм полей рациональных функций: $R(Y)\simeq R(X)$.

Схемы X и Y наз. бирационально эквивалентными, или бирационально изоморфными, если существует Б. о. $f\colon X\to Y$. Частный случай Б. о.— *бирациональный морфизм*.

Простейшим Б. о. является *моноидальное преобразование* с неособым центром. Для гладких полных многообразий размерности $\leqslant 2$ всякое Б. о. может быть представлено в виде композиции таких преобразований и обратных к ним. В общем случае вопрос остается (к 1977) открытым.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972. *И. В. Долгачев, В. А. Исковских.*

БИРАЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — *бирациональное отображение* алгебраич. многообразия (или схемы) в себя. Б. п. иногда наз. также бирациональными автоморфизмами. Группа всех Б. п. алгебраич. многообразия канонически изоморфна группе автоморфизмов его поля рациональных функций над полем констант. Примерами Б. п. могут служить *кремоновы преобразования*, в частности стандартное квадратичное преобразование проективной плоскости, задаваемое формулой

$$(x_0,\ x_1,\ x_2)\to(x_1x_2,\ x_0x_2,\ x_0x_1),$$

где $(x_0,\ x_1,\ x_2)$ — однородные координаты проективной плоскости. *И. В. Долгачев, В. А. Исковских.*

БИРАЦИОНАЛЬНЫЙ МОРФИЗМ — морфизм схем, являющийся бирациональным отображением. К наиболее важным примерам Б. м. относятся: нормализация, раздутие, моноидальное преобразование. Любой собственный Б. м. регулярных двумерных схем разлагается в композицию *моноидальных преобразований* с неособыми центрами (см. [2]). Для размерности, большей двух, это уже не так.

Лит.: [1] Grothendieck A., Éléments de géométrie algébrique, ch. 2, № 8, P., 1961; [2] Šafarevič I. R., Lec-

tures on minimal models, Bombay, 1966; [3] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

И. В. Долгачев, В. А. Исковских.

БИРКГОФА ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА — одна из важнейших теорем *эргодической теории*. Для эндоморфизма T пространства X с σ-конечной мерой μ Б. э. т. утверждает, что для любой функции $f \in L^1(X, \mu)$ почти всюду (при почти всех $x \in X$) существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \overline{f}(x)$$

(временно́е среднее, или среднее вдоль траектории), причем $\overline{f} \in L^1(X, \mu)$, а если $\mu(X) < \infty$, то

$$\int_X f\, d\mu = \int_X \overline{f}\, d\mu.$$

Для *измеримого потока* $\{T_t\}$ пространства X с инвариантной σ-конечной мерой μ Б. э. т. утверждает, что для любой функции $f \in L^1(X, \mu)$ почти всюду существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(T_t x)\, dt = \overline{f}(x)$$

с теми же свойствами $\overline{f}$.

Б. э. т. была высказана и доказана Дж. Биркгофом [1]. Она подверглась модификациям и обобщениям в различных направлениях (имеются теоремы, к-рые, помимо Б. э. т., охватывают также многие из утверждений несколько иного рода, известные в теории вероятностей как *эргодические теоремы*; имеются также эргодические теоремы для более общих полугрупп преобразований, см. [2]). Б. э. т. и ее обобщения наз. индивидуальными эргодическими теоремами, т. к. в них речь идет о существовании средних вдоль (почти каждой) отдельной траектории, в отличие от статистических эргодических теорем — эргодической *Неймана теоремы* и ее обобщений. (В зарубежной литературе сходимость средних почти всюду часто подчеркивают термином pointwise ergodic theorem.)

Лит.: [1] Birkhoff G. D., «Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A.», 1931, v. 17; [2] Каток А. Б., Синай Я. Г., Стёпин А. М., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975.

Д. В. Аносов.

БИРКГОФА — ВИТТА ТЕОРЕМА, Пуанкаре — Биркгофа — Витта теорема,— теорема о представимости алгебр Ли в ассоциативных алгебрах. Пусть G — алгебра Ли над полем k, $U(G)$ — ее *универсальная обертывающая алгебра*, $B = \{b_i,\ i \in I\}$ — базис алгебры G, линейно упорядоченный нек-рым образом. Тогда всевозможные конечные произведения $b_{\alpha_1} b_{\alpha_2} \dots b_{\alpha_r}$, где $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots \leqslant \alpha_r$, образуют базис алгебры $U(G)$ и, таким образом, канонич. гомоморфизм: $G \to U(G)$ является мономорфизмом.

Из всякой ассоциативной алгебры R может быть построена алгебра Ли $L(R)$ заменой операции умножения в R на операцию коммутирования

$$[xy] = xy - yx.$$

Б.— В. т. иногда формулируют следующим образом: *для всякой алгебры Ли G над любым полем k существует такая ассоциативная алгебра R над этим же полем, что G изоморфно вкладывается в $L(R)$.*

Первый вариант этой теоремы был получен А. Пуанкаре [1]. Более полное доказательство позднее дано Э. Виттом [2] и Г. Биркгофом [3]. Утверждение теоремы остается верным, если k — область главных идеалов [4], в частности для колец Ли без операторов, но в общем случае — для алгебр Ли с произвольной областью операторов — утверждение теоремы не верно [5].

Лит.: [1] Poincaré H., «Cambrige Phil. Trans.», 1900, v. 18, p. 220—5; [2] Witt E., «J. reine und angew. Math.», 1937, Bd 177, № 3, S. 152—60; [3] Birkhoff G., «Ann. Math.», 1937, v. 38, № 2, p. 526—32; [4] Lazard M., «Compt. rend. Acad. Sci.», 1952, v. 234, № 8, p. 788—91; [5] Ширшов

А. И., «Успехи матем. наук», 1953, т. 8, в. 5, с. 173—5; [6] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [7] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [8] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [9] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960. *Т. С. Фофанова.*

БИСВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО — пространство, не допускающее никакого разложения в сумму двух связных непересекающихся собственных подмножеств, содержащих более одной точки. *А. А. Мальцев.*

БИССЕКТОРНАЯ ПЛОСКОСТЬ двугранного угла, биссектор, — плоскость, проходящая через ребро двугранного угла и делящая этот угол пополам.

БИССЕКТРИСА угла — полупрямая (луч), исходящая из вершины угла и делящая его пополам. Иначе говоря, Б. угла — множество точек, расположенных внутри угла и равноудаленных от его сторон. Б. треугольника — отрезок (а также его длина) Б. внутреннего угла треугольника от вершины угла до пересечения с противоположной стороной. Б. треугольника делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Б. треугольника пересекаются в одной точке — центре вписанной в треугольник окружности. Четверка точек (A, B, K, L), две из к-рых A, B — вершины треугольника ABC, K — точка пересечения Б. угла C с отрезком AB, L — точка пересечения Б. внешнего угла C с прямой AB, образует *гармоническую четверку* точек. *А. Б. Иванов.*

БИТ — двоичная единица информации, численно равная количеству информации в испытании с двумя взаимно исключающими равновероятными альтернативами ($p_1 = p_2 = {}^1/_2$):

$$I(p_1, p_2) = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2 = \log_2 2 = 1 \text{ «бит»}$$

в случае, если логарифмы берутся по основанию 2. Б. является самой распространенной единицей, но приняты и другие единицы информации — «хартли» или «нит», в определении к-рых используются, соответственно, десятичные или натуральные логарифмы. *А. В. Прохоров.*

БИФАКТОРНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение f топологич. пространства X в топологич. пространство Y, при к-ром из любого покрытия открытыми в X множествами прообраза $f^{-1}(y)$ любой точки $y \in f(X)$ можно выбрать конечное число множеств так, чтобы y лежала внутри образа их объединения. Особенно важно, что произведение любого множества Б. о. является бифакторным отображением. Б. о. составляют обширный класс *факторных отображений* и тем не менее сохраняют тонкие топологич. свойства пространств. Так, непрерывные бифакторные s-отображения сохраняют точечно счетную базу, факторное s-отображение пространства с точечно счетной базой на пространство точечно счетного типа является бифакторным. *В. В. Филиппов.*

БИФУНКТОР — отображение T: $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, определенное на декартовом произведении категорий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ со значениями в $\mathfrak{C}$, сопоставляющее каждой паре объектов $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ нек-рый объект $C \in \mathfrak{C}$ и каждой паре морфизмов

$$\alpha\colon A \to A', \quad \beta\colon B \to B'$$

морфизм

$$T(\alpha, \beta)\colon \quad T(A', B) \to T(A, B').$$

Как правило, требуется также выполнение условий

$$T(1_A, 1_B) = 1_{T(A, B)},$$

$$T(\alpha' \circ \alpha, \beta' \circ \beta) = T(\alpha, \beta') \circ T(\alpha', \beta).$$

В этом случае говорят, что Б. T контравариантен по первому аргументу и ковариантен по второму. *В. Е. Говоров.*

БИФУРКАЦИЯ — термин, употребляемый в нек-рых разделах математики применительно к ситуации, когда

нек-рый объект $\mathfrak{O}=\mathfrak{O}(\lambda)$ зависит от параметра λ (не обязательно скалярного) и в любой окрестности нек-рого значения λ_0 последнего (*бифуркационное значение*, или *точка Б.*) исследуемые качественные свойства объекта $\mathfrak{O}(\lambda)$ не являются одинаковыми для всех λ. Соответствующие точные определения различны в различных случаях, но в общем они следуют (с теми или иными модификациями) двум вариантам:

а) Изучаемые качественные свойства объекта $\mathfrak{O}$ состоят в существовании других объектов O, определенным образом связанных с ним. Б. состоит в том, что при изменении λ объекты O возникают или исчезают (в частности, они могут сливаться друг с другом, или из одного объекта может «рождаться» несколько). См. ниже — п. 1).

б) Сначала для объектов $\mathfrak{O}(\lambda)$ определяется, когда два таких объекта считаются эквивалентными. (Определение должно быть таким, чтобы у эквивалентных объектов все интересующие нас качественные свойства были одинаковыми.) Изменение качественных свойств $\mathfrak{O}(\lambda)$ в окрестности точки Б. λ_0, по определению, понимается в том смысле, что там имеются значения λ с неэквивалентными $\mathfrak{O}(\lambda)$. См. ниже — п. 2).

1) В теории операторов исходный объект $\mathfrak{O}(\lambda)$ — это нелинейный оператор $\Phi(x, \lambda)$ в действительном банаховом пространстве, с действительным параметром λ, определенный в окрестности точки $x=0$ и такой, что $\Phi(0, \lambda)\equiv 0$. Ему при каждом фиксированном λ сопоставляются другие объекты O — решения x нелинейного операторного уравнения $\Phi(x, \lambda)=0$. Точка Б.— это точка, в к-рой происходит рождение нового, нетривиального решения этого уравнения. Именно, это такая точка λ_0, что для любого $\varepsilon>0$ существует λ, $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$, при к-ром уравнение $x=\Phi(x, \lambda)$ имеет решение $x(\lambda)$, удовлетворяющее условиям $0<\|x(\lambda)\|<\varepsilon$. Если $\Phi(x, \lambda)\equiv \equiv \lambda A x$, где A — линейный *вполне непрерывный оператор*, то понятие точки Б. совпадает с понятием характеристич. значения оператора A.

Если $\Phi(x, \lambda)$ — нелинейный вполне непрерывный оператор, непрерывно дифференцируемый в смысле Фреше и такой, что $\Phi_x(0, \lambda)\equiv \lambda A$, то точками Б. оператора Φ могут служить лишь характеристич. значения оператора A. Топологич. методом (см. [1], [2]) установлено, что каждое нечетнократное (в частности, простое) характеристич. значение оператора A является точкой Б. оператора Φ. Аналогичное достаточное условие для случая четнократных характеристических значений формулируется с помощью понятия вращения векторного поля.

Если $x=0$ — неизолированное решение уравнения $x=\Phi(x, \lambda)$, то λ_0 есть точка Б. оператора Φ. Вариационным методом доказано (см. [1], [2]), что если $\Phi(x)$ — нелинейный вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве, являющийся градиентом слабо непрерывного функционала, а $A=\Phi'(0)$ — вполне непрерывный самосопряженный оператор, то каждое характеристич. значение оператора A является точкой Б. оператора Φ. Понятие точки Б. видоизменяется также на случай больших решений $x(\lambda)\to\infty$ при $\lambda\to\lambda_0$. Важное значение этих понятий и результатов состоит в том, что при сравнительно слабых ограничениях удается установить ветвление решения $x=0$, в частности доказать неединственность решения нелинейной задачи. В ряде случаев более точную информацию дают аналитич. методы теории *ветвления решений* нелинейных уравнений (см. [5]).

2) В теории гладких динамич. систем рассматриваются однопараметрические (и отчасти двупараметрические [6]) семейства потоков (и каскадов; здесь рассматриваются лишь первые), причем выясняется, когда Б. «типичная», т. е. сохраняет свой характер при малом изменении рассматриваемого семейства [9]; употребительны оба

варианта а) и б). При втором два потока считаются эквивалентными, если существует гомеоморфизм фазового пространства, переводящий траектории одного из них в траектории другого с сохранением направления движения. Имеется вполне удовлетворительная теория Б. однопараметрич. семейств потоков с двумерным фазовым многообразием [7], [9], а также локальный вариант, относящийся к окрестности положения равновесия или периодич. решения в n-мерном случае [6].

В варианте а) изучаемые объекты O, к-рые сопоставляются данной динамич. системе,— это положения равновесия и периодич. решения, а иногда также нек-рые инвариантные многообразия (преимущественно торы) и гиперболич. инвариантные множества. Рассматривается «рождение» этих объектов, происходящее как «локально», возле нек-рого положения равновесия или периодич. решения, так и «полулокально», в окрестности «замкнутого контура», образованного несколькими траекториями, к-рые при $t \to \pm\infty$ стремятся к положению равновесия или к периодич. решениям. Возможен случай Б., к-рая в определенном смысле связана с подобным контуром, но к-рая происходит (с изменением параметра λ) еще до его возникновения [8]. Часто рождение периодич. решений бывает удобно рассматривать, переписывая дифференциальное уравнение и условие периодичности в виде интегрального уравнения и применяя к нему соответствующие методы [5].

3) В теории особенностей отображений встречаются разнообразные Б. различных объектов (как исходных, так и сопоставленных им), в связи с чем имеются различные случаи использования этого термина (вернее, производных от него) (см. [10], [6], [11]), но еще чаще соответствующие понятия получают самостоятельные названия. Таковы, напр., в е р с а л ь н ы е с е м е й с т в а (или деформации) (см. [6], [11], [12]), к-рые (в нек-ром смысле) описывают все возможные Б., могущие произойти при малой деформации рассматриваемого объекта, в частности сюда относятся семь э л е м е н т а р н ы х к а т а с т р о ф [12], к-рые представляют собой «типичные» k-параметрические ($k \leqslant 4$) семейства функций, включающие функцию с вырожденной критической точкой и определенные в окрестности последней; тем самым они описывают соответствующую Б. (Вообще, в иностранной литературе по теории особенностей вместо Б. часто говорят о «катастрофах».)

Лит.: [1] К р а с н о с е л ь с к и й М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956; [2] Функциональный анализ, М., 1964; [3] К р а с н о с е л ь с к и й М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962; [4] В а й н б е р г М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956; [5] В а й н б е р г М. М., Т р е н о г и н В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969; [6] А р н о л ь д В. И., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 5, 119—84; [7] А н д р о н о в А. А., Л е о н т о в и ч Е. А., Г о р д о н И. И., М а й е р А. Г., Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, М., 1967; [8] Г а в р и л о в Н. К., Ш и л ь н и к о в Л. П., «Матем. сб.», 1972, т. 88, № 4, 475—92; 1973, т. 90, № 1, 139—56; [9] P e i x o t o M. M., в кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematics, Vancouver, 1974, v. 2, p. 315—19; [10] Т о м Р., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 5, 51—7; [11] А р н о л ь д В. И., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 5, 3—65; [12] B r ö c k e r P., L a n d e r L., Differentiable germs and catastrophes, Cambrige, 1975.

Д. В. Аносов, В. А. Треногин.

БИХАРАКТЕРИСТИКА, л у ч, дифференциального оператора — линия, по к-рой происходит касание любых двух *характеристик*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{и} \quad \psi(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

этого дифференциального оператора. Если на Б. ввести параметр s, то ее уравнения $x_i = x_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, определяются из решения системы $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i(s) = Q_{\xi_i}, \quad \dot{\xi}_i = -Q_{x_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (*)$$

где $Q(\xi_1, \ldots, \xi_n, x_1, \ldots, x_n)$ — характеристич. форма

дифференциального оператора, точка означает дифференцирование по параметру s, а уравнение $Q=0$ при $\xi_i=\varphi_{x_i}$ — характеристич. уравнение дифференциального оператора. Таким образом, решение $x_i=x_i(s)$; $\xi_i=\xi_i(s)$, $i=1, \ldots, n$, системы (*) задает характеристич. полосу уравнения $Q=0$. Эта характеристич. полоса принадлежит характеристике $\varphi(x_1, \ldots, x_n)=0$, то есть $\varphi(x_1(s), \ldots, x_n(s))\equiv 0$, если хотя бы при одном значении s справедливы равенства

$$\varphi(x_1(s), \ldots, x_n(s))=0$$

и

$$\xi_i(s)=\varphi_{x_i}(x_1(s), \ldots, x_n(s)), \quad i=1, \ldots, n;$$

тогда эти равенства выполнены при всех значениях s.

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964. *Б. Л. Рождественский.*

БИЦАДЗЕ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными, к-рое в комплексной записи имеет вид

$$4w_{z\bar{z}}\equiv w_{xx}+2iw_{xy}-w_{yy}=0,$$

где $w(z)=u+iv$, $z=x+iy$, и к-рое сводится к эллиптич. системе

$$u_{xx}-u_{yy}-2v_{xy}=0,$$
$$v_{xx}-v_{yy}+2u_{xy}=0$$

с действительными независимыми переменными x и y. Для Б. у. (и сопряженного с ним уравнения) однородная задача Дирихле в круге C: $|z-z_0|<\varepsilon$, любого, пусть даже сколь угодно малого, радиуса ε имеет бесконечное множество линейно независимых регулярных решений (см. [1]). Задача Дирихле для неоднородного уравнения $w_{z\bar{z}}=f$ в круге C, не будучи ни фредгольмовой, ни нётеровой — нормально разрешима по Хаусдорфу; эта же задача в области с границей, содержащей отрезок прямой $y=0$, не является даже хаусдорфовой, хотя однородная задача имеет только нулевое решение (см. [2]).

Лит.: [1] Бицадзе А. В., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 6 (28), с. 211—12; [2] его же, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [3] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [4] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966. *А. М. Нахушев.*

БИЦИКЛИЧЕСКАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа с единицей и с двумя образующими a, b, заданная определяющим соотношением $ab=1$. Одна из реализаций Б. п. — декартов квадрат $N\times N$, где N — множество неотрицательных целых чисел относительно операции $(k, l)*(m, n)=(k+m-\min(l, m), l+n-\min(l, m))$. Б. п. является *инверсной полугруппой* и как инверсная полугруппа моногенна, т. е. порождена одним элементом. *Идемпотенты* Б. п. образуют цепь, упорядоченную по типу неотрицательных чисел. Б. п. бипроста (см. *Простая полугруппа*).

Б. п. нередко возникают в теоретико-полугрупповых исследованиях, не только как один из представителей нек-рых важных классов полугрупп, но и в качестве «блоков», определяющих строение тех или иных полугрупп. Напр., для всякого идемпотента e 0-простой, но не вполне 0-простой полугруппы S существует бициклическая подполугруппа в S, содержащая e в качестве единицы (см. [1], § 2. 7). Указанные в определении элементы a и b Б. п. B будут соответственно ее левым и правым увеличительными элементами (т. е. существуют такие собственные подмножества X и Y в B, что $aX=B$, $Yb=B$). Более того, в полугруппе S с единицей e элемент c будет левым увеличительным тогда и только тогда, когда S содержит бициклическую полугруппу, единица к-рой совпадает с e, а роль элемента a играет c; аналогичное утверждение верно для правых увеличительных элементов, так что S обладает левыми увеличительными элементами тогда

и только тогда, когда она обладает правыми увеличительными элементами.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960. *Л. Н. Шеврин.*

БИЦИЛИНДР — см. *Бицилиндрическая область.*

БИЦИЛИНДРИКА — две замкнутые линии, получающиеся в пересечении двух цилиндров, оси к-рых пересекаются под прямым углом. Параметрич. уравнения Б.

$$x = a\cos t, \quad y = \pm\sqrt{b^2 - a^2\sin^2 t}, \quad z = a\sin t, \quad b \geqslant a,$$

где a и b — радиусы цилиндров, t — параметр. При $a=b$ Б. представляет собой пару равных эллипсов.

Е. В. Шикин.

БИЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБЛАСТЬ — область D в комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$, представимая в виде декартова произведения двух плоских областей D_1 и D_2, то есть

$$D = [(z_1,\ z_2) : z_1 \in D_1,\ z_2 \in D_2].$$

Частным случаем Б. о. является бикруг (бицилиндр) $B(a, r) = \{(z_1,\ z_2) : |z_1 - a_1| < r_1,\ |z_2 - a_2| < r_2\}$ радиуса $r = (r_1, r_2)$ с центром в точке $a = (a_1, a_2)$. Декартово произведение n (для $n \geqslant 3$) плоских областей наз. полицилиндрической областью. Аналогично определяется и поликруг (полицилиндр).

М. Ширинбеков.

БИЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — числа τ, σ и z, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x, y и z формулами

$$x = \frac{a\,\mathrm{sh}\,\tau}{\mathrm{ch}\,\tau - \cos\sigma}, \quad y = \frac{a\sin\sigma}{\mathrm{ch}\,\tau - \cos\sigma}, \quad z = z,$$

где $0 \leqslant \sigma < \pi$, $-\infty < \tau < \infty$. Координатные поверхности: семейство пар круговых цилиндров с параллельными осями ($\tau = \mathrm{const}$), семейство круговых цилиндров, ортогональных к ним ($\sigma = \mathrm{const}$), и плоскости ($z = \mathrm{const}$). Система Б. к. образуется в результате параллельного переноса вдоль оси Oz системы биполярных координат на плоскости Oxy.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\sigma = L_\tau = \frac{a^2}{(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\sigma)^2}, \quad L_z = 1.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta f = \frac{1}{a^2}(\mathrm{ch}\,\tau - \cos\sigma)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Д. Д. Соколов.

БЛИЗНЕЦЫ, простые близнецы, — два простых числа с разностью, равной 2. Обобщенные близнецы — пары соседних простых чисел с разностью $2m$, где m — фиксированное натуральное число. Пользуясь таблицей простых чисел, легко указать примеры Б. Это 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19. Обобщенными Б. будут для $m=2$, напр., 13 и 17, 19 и 23, 43 и 47. До сих пор (1977) неизвестно, бесконечно ли множество Б. и даже обобщенных Б. для к.-л. фиксированного m. В этом заключается проблема близнецов.

Лит.: [1] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [2] Трост Э., Простые числа, пер. с нем., М., 1959. *Н. И. Климов.*

БЛИЗОСТИ ПРОСТРАНСТВО — множество P с бинарным отношением δ на множестве всех его подмножеств, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $A\delta B$ равносильно $B\delta A$ (симметричность);

2) $A\delta(B \cup C)$ равносильно $A\delta B$ или $A\delta C$ (аддитивность);

3) $A\delta A$ равносильно $A \neq \varnothing$ (рефлексивность). Отношение δ определяет близостную структуру, или просто близость, на P; при этом, если $A\delta B$, то A и B наз. близкими множествами, а если $A\bar{\delta}B$ ($\bar{\delta}$ означает отрицание δ), — то далекими. Б. п. введены в 1936 (опубликовано в 1951, см [1]). Свойства Б. п. являются обобщением равномерных свойств метрич. пространства

аналогично тому, как в топологич. пространстве обобщаются его непрерывные свойства. Попытка введения структуры, до нек-рой степени аналогичной близостной, была предпринята в [3], когда еще не вполне оформилось понятие топологич. пространства, и вместо замыкания рассматривалось производное множество: введенное там отношение между множествами соответствовало у них общей (быть может, «идеальной») точки прикосновения.

Более содержательны понятия близости, удовлетворяющие, кроме 1) — 3), дополнительным аксиомам, аналогичным аксиомам отделимости; такова, напр., хаусдорфова близость, к-рая удовлетворяет аксиоме: $\{x\}\delta\{y\}$ равносильно $x=y$ (при этом вместо 3) достаточно принять ее следствие: $\varnothing\overline{\delta}\varnothing$); нормальная близость, характеризующаяся аксиомой: если $A\overline{\delta}B$, то существуют непересекающиеся подмножества U и V такие, что $A\overline{\delta}(P\setminus U)$ и $B\overline{\delta}(P\setminus V)$.

Появление аксиом Б. п., естественно симметризующих аксиомы топологич. пространства, сформулированные в терминах замыкания (т. е. близости множества и точки), стало возможным после того, как было установлено, что свойство отображений f: $M_1\to M_2$ метрич. пространств, состоящее в том, что любые множества, лежащие в M_1 на нулевом расстоянии, имеют в M_2 образы, также расположенные бесконечно близко, в точности эквивалентно равномерной непрерывности. (Аналогичное топологич. свойство $f[K]\subset[fK]$, где $[K]$ — замыкание K, иногда принимается за определение непрерывности.) Таким образом, всякая метрика dist на множестве P порождает близость на нем: $A\delta B$ эквивалентно $\mathrm{dist}(A,B)=0$, причем δ-непрерывность в смысле последней эквивалентна равномерной непрерывности [2]; Б. п., для к-рых такая метрика возможна, наз. метризуемыми. Близостная структура порождает топологич. структуру: замыкание множества K определяется следующим образом: $x\in[K]$ тогда и только тогда, когда $\{x\}\delta K$; при этом из δ-непрерывности отображения вытекает его непрерывность в этой топологии. Б. п., порождающие одну и ту же топологию, не обязательно δ-изоморфны: так, плоскости Евклида и Лобачевского не δ-изоморфны, хотя и гомеоморфны [2]. Топология хаусдорфовых близостей хаусдорфова; напротив, из близостной нормальности следует лишь полная регулярность: замкнутые непересекающиеся множества не обязательно далеки. Более того, всякая вполне регулярная топология порождается нормальной близостью, причем бикомпактная — единственной. Поскольку произвольные далекие множества в Б. п. можно отделить δ-непрерывной функцией [2], они функционально отделимы в смысле его топологии; те Б. п., для к-рых верно обратное, наз. пространствами близости Стоуна — Чеха.

С наличием топологии в Б. п. связаны нек-рые обобщения близостной структуры, к-рые обычно сводятся к замене аксиомы нормальности какой-либо более слабой. Таковы, напр., близость Лодато: если $A\overline{\delta}B$, то $A\overline{\delta}[B]$; близость Федорчука (θ-близость): $A\overline{\delta}B$ равносильно существованию открытого $C\supset A$, для к-рого внутренность замыкания $\mathrm{Int}\,[C]$ совпадает с A и притом $A\overline{\delta}(X\setminus[C])$; и т. д.

Естественность понятия Б. п. проявляется еще и в том, что всякое Б. п. имеет *бикомпактное расширение* и притом единственное; таким образом, гомеоморфные Б. п. взаимно однозначно соответствуют бикомпактным расширениям порождаемого ими топологич. пространства. δ-непрерывное отображение, т. е. такое отображение f: $P\to Q$, что для любых A, $B\subset P$ из $A\delta B$ следует $fA\delta fB$, и только оно продолжается в непрерывное отображение $\overline{P}\to\overline{Q}$ бикомпактных расширений. Высказанные утверждения, впервые сформулированные

в терминах Б. п. в [4], были доказаны, по существу, еще в 1948 П. Самюэлем (P. Samuel). При изучении компактификаций равномерных пространств им было установлено [10], что не всякие, а только нек-рые равномерные пространства (так наз. *прекомпактные* — пространства с бикомпактными пополнениями) можно равномерно непрерывно вложить в бикомпакт, однако для каждого равномерного пространства существует единственное бикомпактное расширение (S-рефлексия) $r : P \to SP$ (обратное отображение r^{-1} лишь непрерывно, но не равномерно непрерывно), причем на это расширение можно продолжить все окружения нек-рого типа, напр., все окружения вида $P \times P \setminus A \times B$. Таким образом, равномерные структуры разбиваются на классы эквивалентности, — две равномерности эквивалентны, если они имеют одну и ту же S-рефлексию. Близость в равномерном пространстве вводится условием: $A \delta B$, если для любого окружения Ω имеет место $(A \times B) \cap \Omega \neq \varnothing$; построенное вложение, равно как и указанная эквивалентность, есть δ-*изоморфизм*, т. е. взаимно однозначное и δ-непрерывное отображение.

Взаимно однозначное соответствие между близостями и компактификациями привело к тому, что в течение довольно длительного времени после обнаружения факта старались исследовать главным образом те свойства этих пространств, к-рые формулируются непосредственно в терминах бикомпактных расширений. Таковы, напр., размерности δd (но не Δd) [6], близостный вес, близостная связность и т. п. На простое свойство близостной связности, т. е. свойство: из $A \times (P \setminus A) \neq \varnothing$ следует $A \delta P \setminus A$, обратил внимание еще Г. Кантор (G. Cantor), к-рый определил континуум (не путать с введенным позже канторовым континуумом!) как близостно связное полное подпространство в E^n. Хотя, в принципе, все свойства Б. п. P заключены в свойствах инъекции $P \to \overline{P}$, все они, во-первых, отнюдь не обязательно заключены в свойствах самого $\overline{P}$, во-вторых, не известно, каким именно особенностям инъекции $P \to \overline{P}$ соответствуют такие свойства P, как, напр., метризуемость, полнота, правильность. Б. п. ценны именно тем, что с их помощью можно изучать компактификации, но не наоборот. Свойства Б. п., не описываемые непосредственно в топологич. терминах, наз. *равномерными*. Первым систематически изученным равномерным свойством Б. п. явилась полнота: попытки ввести фильтры Кощи или фундаментальные последовательности в терминах бикомпактных расширений не увенчались успехом.

Покрытие ω наз. *равномерным покрытием* Б. п. P, если с него начинается измельчающаяся последовательность $\omega \gg \omega_1 \gg \omega_2 \gg \ldots$ звездно вписанных покрытий (т. е. $\mathrm{St}(x, \omega_{n+1}) \subset U \in \omega_n$), причем ни одно из них не разрывает близких множеств, т. е. всегда $L \delta \overline{P} \setminus \mathrm{St}(L, \omega_n)$.

Множество равномерных покрытий Б. п. совпадает с объединением всех равномерных структур, совместимых с этим пространством [4]. Можно также определить равномерные покрытия как прообразы при всевозможных δ-непрерывных отображениях в метрич. пространства покрытий, имеющих положительное лебегово число.

Полнота, определенная с помощью *фильтров Кощи* — таких фильтров Φ, что $\Phi \cap \omega \neq \varnothing$ для любого равномерного покрытия ω, — соответствует интуитивным представлениям и совпадает с метрической для метризуемых пространств. Для полноты Б. п. достаточно, чтобы какое-либо из совместимых с ним равномерных пространств было полным. Неизвестно (1977), необходимо ли это условие; во всяком случае, контрпримеры могут доставляться только неправильными (см. ниже) Б. п. Построены [5] пополнения Б. п. как наименьшие (уже не единственные) полные расширения;

одновременно пополнения суть наибольшие расширения, на к-рые продолжаются все равномерные покрытия в виде равномерных же покрытий, а также все δ-непрерывные отображения в полные Б. п. (другими словами, подкатегория полных Б. п.— наряду с подкатегорией бикомпактных пространств — рефлексивная категория). Пространства с бикомпактными пополнениями (т. е. прекомпактные пространства) характеризуются тем, что из каждого их равномерного покрытия можно выбрать конечное равномерное подпокрытие.

Произведение Б. п. P и Q первоначально вводили, индуцируя на теоретико-множественное произведение близость из топологич. произведения $\overline{P\times Q}$ их бикомпактных расширений. Такое произведение, несмотря на то, что оно идентично с произведением в смысле категории Б. п., все же неудовлетворительно геометрически и пригодно главным образом для построения экзотических примеров: так, это произведение (обозначаемое обычно $P\cdot Q$) двух бесконечных дискретных пространств недискретно и даже неметризуемо, двух прямых линий — неметризуемо и анизотропно: поворот получившейся «плоскости» на острый угол не будет δ-изоморфизмом, и т. п.

Б л и з о с т н ы м п р о и з в е д е н и е м двух (и аналогично любого числа) Б. п. P и Q наз. произведение, наделенное грубейшей близостью [7], в к-рой равномерны все декартовы произведения равномерных покрытий факторов, т. е. все покрытия вида $\omega(\times)\psi=\{U\times V,\ U\in\omega,\ V\in\psi\}$. Требование δ-непрерывности обеих проекций $P\times Q\to P$ и $P\times Q\to Q$ эквивалентно аналогичному условию лишь для конечных равномерных покрытий. Для равномерных пространств, в отличие от Б. п., оба определения эквивалентны, так как подкатегория метрич. пространств не замкнута относительно декартова произведения в категории Б. п., хотя замкнута в категориях топологических и равномерных пространств. Близостное произведение можно понимать как естественное распространение функтора произведения с подкатегории метризуемых Б. п. на все Б. п., т. е. близость произведения $Q_1\times Q_2$ представляет собой грубейшую близость, в к-рой δ-непрерывность любого отображения $f_1\times f_2$: $Q_1\times Q_2\to M_1\times M_2$, где M_i — метрич. пространства, следует из δ-непрерывности обоих отображений f_i: $Q_i\to M_i$, если под $M_1\times M_2$ понимать обычное произведение метрич. пространств [7].

Незамкнутость подкатегории метрич. пространств приводит к непривычному, но неизбежному следствию: «вектор-функция» $P\to A\times B$, у к-рой обе «координатные» функции $P\to A$ и $P\to B$ δ-непрерывны, не обязательно δ-непрерывна (причем безразлично, что понимается под A и B: произвольные Б. п. или только метризуемые), лишь бы произведение метрич. пространств понималось в обычном смысле. Те Б. п., для к-рых указанного явления не происходит, наз. п р а в и л ь н ы м и. Правильные Б. п. можно определять также, как такие, у к-рых проекция диагонали в $P\times P$ является δ-изоморфизмом. В правильных Б. п. и только в них пересечение $\omega(\bigcap)\psi=\{U\bigcap V,\ U\in\omega,\ V\in\psi\}$ двух равномерных покрытий снова есть равномерное покрытие, и совокупность всех таких пересечений является равномерностью [7].

Для произвольного Б. п. P имеется грубейшее правильное пространство $P!$, мажорирующее P,— так наз. п о п р а в л е н и е. Поправление $P!$ является в то же время тончайшим Б. п., на к-рое продолжаются любые отображения вида $M\to P$, где M — метризуемо (т. е. отображение $M\to P!$ δ-непрерывно, если отображение $M\to P$ δ-непрерывно). Утверждение остается верным, если M заменить на произвольное правильное Б. п. Q; таким образом, множества δ-непрерывных отображений $Q\to P$ и $Q\to P!$ находятся в естественном взаимно одно-

значном соответствии, т. е. подкатегория правильных Б. п. корефлективна, а функтор «!» является корефлектором. Метризуемые Б. п. правильны (и проекция $P!\to P$ — гомеоморфизм), подкатегория метрич. пространств замкнута относительно декартова произведения в категории правильных пространств. Кроме метрических, правильны прекомпактные пространства, более того, утверждение: если для всех Q из $Q!=P$ следует $Q=P$,— эквивалентно прекомпактности P.

Поправления произведений «$\cdot$» и «$\times$» совпадают: $(P\cdot Q)!=(P\times Q)!=(P!\times Q!)!$. Таким образом, произведение $P\cdot Q$ почти всегда неправильно, поскольку совпадение $P\cdot Q=P\times Q$ имеет место тогда и только тогда, когда один из факторов прекомпактен; неизвестно (1977), правильно ли произведение правильных Б. п.

Теория размерности Б. п. имеет нек-рые особенности. Прежде всего, для Б. п. рассматриваются две размерности «по покрытиям» δd и Δd (определенные аналогично топологич. размерности dim, но с использованием конечных или, соответственно, произвольных равномерных покрытий), и только одна индуктивная размерность δ Ind, аналогичная размерности Ind, с заменой непересекающихся множеств на далекие [11]. Однако близостный аналог перегородки нетривиален: множество H «освобождает» далекие множества A и B, если $H\overline{\delta}A\cup B$ и из $H\overline{\delta}U\supset A\cup B$ следует $U=V\times W$, причем $A\subset V\overline{\delta}W\supset B$. Нет примера (1977) несовпадения хотя бы каких-нибудь двух из этих трех размерностей. Размерность δd конечно аддитивна, и $\delta dP=\dim P$; если P плотно в Q, то $\delta dP=\delta dQ$. Размерность δInd не меньше размерности δd и тоже не может уменьшаться при переходе к плотному подпространству, хотя неизвестно (1977), может ли она при этом увеличиваться; при переходе к пополнению она сохраняется. Для метризуемых пространств $\delta\mathrm{Ind}\, M\leqslant\Delta dM$, в произвольном пространстве выполнено либо $\Delta dP=\delta dP$, либо $\Delta dP=\infty$. Построено несколько примеров равномерных пространств с несовпадающими размерностями, но ни одна из этих конструкций не верна для Б. п. В близостном произведении $N\times N$, где N дискретно и счетно, совпадение размерностей Δd и δd происходит в том и только в том случае, когда это Б. п. правильно [8]. Одновременно из неправильности $N\times N$ следует нарушение монотонности для Δd (так как $\Delta d\ (N\times N)=0$).

Лит.: [1] Ефремович В. А., «Докл. АН СССР», 1951, т. 76, с. 341—3; [2] его же, «Матем. сб.», 1952, т. 31, № 1, с. 189—200; [3] Riesz F., «Atti del IV Congresso Intern. dei Matem. Roma, 1908», v. 2, Roma, 1909, p. 18—24; [4] Смирнов Ю. М., «Матем. сб.», 1952, т. 31, № 3, с. 543—74; [5] его же, «Тр. Моск. матем. об-ва», 1954, т. 3, с. 271—306; 1955, т. 4, с. 421—438; [6] его же, «Матем. сб.», 1956, т. 38, № 3, с. 283—302; [7] Поляков В. З., «Матем. сб.», 1965, т. 67, № 3, с. 428—39; [8] его же, там же, 1965, т. 68, № 2, с. 242—50; [9] его же, там же, 1968, т. 76, № 4, с. 593—604; [10] Samuel P., «Trans. Amer. Math. Soc.» 1948, v. 64, p. 100—32; [11] Isbell J., «Pacif. J. Math.», 1959, v. 9, p. 107—21.

В. З. Поляков.

БЛИЗОСТЬ — см. *Близости пространство.*

БЛОК-СХЕМА — система подмножеств конечного множества, удовлетворяющая нек-рым условиям, связанным с частотой появления пар элементов множества в подмножествах системы. Понятие Б.-с. возникло в теории планирования эксперимента в 20—30-х гг. 20 в., однако под названием тактических конфигураций Б.-с. изучались уже в сер. 19 в. Понятие Б.-с. является вариантом понятий гиперграфа, сети, комплекса. Обычно в Б.-с. на семейства подмножеств накладывается целый ряд дополнительных ограничений. Б.-с. можно задать парой множеств (V, B), где

$$V=\{a_1, a_2, \ldots, a_v\},\quad B=\{B_1, B_2, \ldots, B_b\},$$
$$B_i\subseteq V,\ i=1, \ldots, b.$$

Элементы множества V наз. элементами Б.-с., а элементы множества B — ее блоками. Элемент a_i и блок B_j инцидентны, если $a_i\in B_j$. Число $|B_j|$

элементов, инцидентных блоку B_j, обозначается обычно через k_j, а число блоков, инцидентных элементу a_i, — через r_i. Через λ_{il} обозначается число

$$|\{B_j : a_i \in B_j,\ a_l \in B_j\}|.$$

Числа v, b, r_i, k_j, λ_{il} ($i, l = 1, \ldots, v$, $j = 1, \ldots, b$) наз. параметрами Б.-с. Если $r_i = r$ для всех $i = 1, \ldots, v$, $k_j = k$ для всех $j = 1, \ldots, b$, а $\lambda_{il} = \lambda$, то (V, B) есть уравновешенная неполная Б.-с., или BIB-схема (от английского balanced incomplete block design) с параметрами v, b, r, k, λ. Слово «уравновешенный» характеризует одинаковую частоту появлений элементов и пар элементов в блоках, а слово «неполный» служит для указания того, что, вообще говоря, не все k-элементные подмножества входят в B.

Пусть среди чисел λ_{il}, $i, l = 1, \ldots, v$, встречается ровно m различных: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, и пусть на элементах множества V введено m симметричных отношений связанности так, что выполнены следующие условия:

а) множество V^2 всех пар элементов множества V разбивается на m непересекающихся подмножеств $V_1^2, V_2^2, \ldots, V_m^2$, причем если $(a, a') \in V_j^2$, то говорят, что элементы a и a' j-связаны;

б) $|\{B_j : a \in B_j,\ a' \in B_j,\ (a, a') \in V_i^2\}| = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, b$;

в) $|\{a : \exists a'\ (a, a') \in V_i^2\}| = n_i$, $i = 1, \ldots, m$;

г) $|\{a'' : (a'', a) \in V_j^2,\ (a'', a') \in V_k^2,\ (a, a') \in V_i^2\}| = p_{jk}^i$,

причем в силу симметричности $p_{jk}^i = p_{kj}^i$, $i, j, k = 1, \ldots, m$. Б.-с. со свойствами а) — г) наз. частично уравновешенной Б.-с. с m типами связей, или PBIB(m)-схемой (от английского partially balanced incomplete block design). Правило, задающее отношение связанности, наз. схемой связанности. BIB-схема является PBIB(1)-схемой. Примером PBIB(2)-схемы является Б.-с., к-рую можно представить в виде таблицы

1	1	1	2	2	2	3	3	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	9	7	8	8	9	7
10	11	12	11	12	10	12	10	11

,

где любые два числа из одного столбца 1-связаны, а любые два числа, не принадлежащие одному столбцу, — 2-связаны. Здесь $v = 12$, $b = 9$, $r = 3$, $k = 4$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $n_1 = 9$, $n_2 = 2$,

$$P^1 = \| p_{jk}^1 \| = \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{Vmatrix}, \quad P^2 = \| p_{jk}^2 \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{Vmatrix}.$$

Всякой Б.-с. с v элементами и b блоками соответствует матрица инцидентности $A = \|c_{ij}\|$, где $c_{ij} = 1$, если $a_i \in B_j$, и $c_{ij} = 0$ в противном случае, $i = 1, \ldots, v$, $j = 1, \ldots, b$. В теории Б.-с. рассматриваются вопросы существования, классификации и вопросы, связанные с построением Б.-с. с заданными параметрами. Параметры Б.-с. связаны определенными соотношениями. Для BIB-схем справедливы равенства:

$$\begin{aligned} vr &= kb, \\ \lambda(v-1) &= r(k-1). \end{aligned} \tag{1}$$

Для параметров PBIB(m)-схем справедливы равенство (1) и следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^m n_i = v - 1,$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i n_i = r\,(k-1),$$

$$\sum_{k=1}^m p_{jk}^i = \begin{cases} n_j, & \text{если } i \neq j, \\ n_j - 1, & \text{если } i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, \ldots, m,$$

$$n_i p_{jk}^i = n_j p_{ik}^j = n_k p_{ij}^k, \quad i,\ j,\ k = 1, \ldots, m.$$

Матрица инцидентности BIB-схемы удовлетворяет основному матричному соотношению

$$AA^T=(r-\lambda)E+\lambda J, \qquad (2)$$

где E — единичная матрица порядка v, а J — матрица порядка v, составленная сплошь из единиц. Существование (0,1)-матрицы, удовлетворяющей условию (2), является достаточным условием существования BIB-схемы с заданными параметрами. Из (2) вытекает неравенство $b\geqslant v$. BIB-схема, для к-рой $b=v$ (и значит $r=k$), наз. симметричной Б.-с., или (v, k, λ)-конфигурацией. Для симметричных BIB-схем справедлива теорема: если существует симметричная BIB-схема с параметрами v, k, λ, то: а) при v четном $k-\lambda$ есть квадрат, б) при v нечетном уравнение

$$z^2=(k-\lambda)x^2+(-1)^{\frac{v-1}{2}}\lambda y^2$$

имеет решение в целых числах x, y, z, не равных одновременно нулю. Условия этой теоремы достаточны для существования рациональной матрицы A, удовлетворяющей (2).

Специальный круг вопросов, относящихся к существованию BIB-схем, возникает в связи с задачей: даны b блоков; каковы условия того, чтобы эти блоки можно было дополнить до BIB-схемы? В наиболее общем виде эти условия выражаются как требования положительной определенности нек-рой квадратичной формы Q, а также возможности представить Q в виде суммы квадратов линейных форм с неотрицательными коэффициентами.

Среди BIB-схем различают как наиболее изученные следующие подклассы: системы Штейнера (BIB-схемы с $\lambda=1$), в частности системы троек Штейнера ($k=3$); адамаровы конфигурации ($v=b=4t-1$, $r=k=2t-1$, $\lambda=t-1$, $t\geqslant 2$), матрица инцидентности к-рых получается из *Адамара матрицы*; аффинные конечные геометрии и проективные конечные геометрии (см. [1]). В классе PBIB-схем наиболее изучены PBIB(2)-схемы, среди к-рых по виду схемы связанности выделяют так наз. Б.-с. с делимостью на группы, треугольные Б.-с., Б.-с. типа латинского квадрата, циклические Б.-с. и т. д. (см. [3]).

Методы построения Б.-с. принято разделять на прямые и рекурсивные. Рекурсивные методы позволяют строить с помощью схем с меньшими значениями параметров схемы с большими значениями параметров. В прямых методах обычно используются свойства конечных полей или какие-либо геометрические свойства.

Помимо планирования экспериментов, Б.-с. применяются также в теории игр, теории графов и при построении кодов, исправляющих ошибки.

Лит.: [1] Райзер Г. Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [2] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [3] Ширококова С. А., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, № 5, с. 51—98. *В. Е. Тараканов.*

БЛОТТО ИГРЫ — класс *антагонистических игр* в нормальной форме, в к-рых чистыми *стратегиями* игроков являются распределения ограниченных ресурсов (неделимых или делимых) по нескольким объектам, а выигрыш равен сумме выигрышей на отдельных объектах. Название получили по имени вымышленного лица — полковника Блотто — участника одной из первых игр такого типа.

Лит.: [1] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, пер. с англ., М., 1964. *И. Н. Врублевская.*

БЛОХА КОНСТАНТА — абсолютная константа, существование к-рой устанавливается следующей теоремой Блоха. Пусть H — класс всех голоморфных функций $f(z)$ в круге $|z|<1$ таких, что $f'(0)=1$.

Риманова поверхность функции $f(z)$ содержит на одном из своих листов наибольший открытый круг радиуса $B_f > 0$. А. Блох доказал [1], что

$$\inf \{B_f;\ f \in H\} = B > 0.$$

Более точной является оценка [2]: $\sqrt{3}/4 \leqslant B \leqslant 0{,}472$. Для целых функций из теоремы Блоха вытекает, что их римановы поверхности содержат однолистные круги сколь угодно большого радиуса, а это утверждение равносильно *Пикара теореме*.

Лит.: [1] Bloch A., «Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse. sci. math. et sci. phys.», p. 3, 1925, t. 17, p. 1—22; [2] Ahlfors L. V., Grunsky H., «Math. Z.», 1937, Bd 42, № 5, S. 671—3; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966, гл. 8.

Е. Д. Соломенцев.

БЛУЖДАЮЩАЯ ТОЧКА — точка q фазового пространства R *динамической системы* $f(p, t)$, обладающая окрестностью $U(q)$, для к-рой существует такой момент времени T, что $f(U(q), t)$ не имеет общих точек с $U(q)$ при всяких $t \geqslant T$ (все точки из $U(q)$, начиная с нек-рого момента, покидают навсегда окрестность $U(q)$). Точка q, не обладающая такой окрестностью, наз. н е б л у ж д а ю щ е й. Свойство точки быть блуждающей или неблуждающей является двусторонним: если $f(U(q), t)$ не имеет общих точек с $U(q)$, то $U(q)$ не имеет общих точек с $f(U(q), -t)$. Б. т. может стать неблуждающей при расширении пространства R. Так, напр., если R — окружность с одной точкой покоя r, то все точки $R \setminus r$ блуждающие. Они становятся неблуждающими, если к R присоединить точки нек-рой спирали без точек покоя, навивающейся на эту окружность изнутри или снаружи.

К. С. Сибирский.

БЛУЖДАЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО — множество W всех *блуждающих точек* нек-рой динамич. системы $f(p, t)$. Так как вместе с каждой точкой q множество W содержит все точки окрестности $U(q)$, оно открыто в пространстве R. В связи с этим множество $M = R \setminus W$ всех неблуждающих точек замкнуто. Множества W и M и н в а р и а н т н ы, т. е. вместе с каждой своей точкой q они содержат точку $f(q, t)$ при любом t. В компактном пространстве R всякая блуждающая точка $f(q, t)$ стремится к M, как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$.

Лит.: [1] Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, пер. с англ., М.— Л., 1941; [2] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [3] Сибирский К. С., Введение в топологическую динамику, Кишинев, 1970.

К. С. Сибирский.

БЛУЖДАЮЩЕЙ ТРУБКИ МЕТОД — один из прямых методов численного решения задач оптимального управления с ограничениями на фазовые координаты и управляющие функции. В Б. т. м. исходная задача оптимального управления в результате дискретизации (по времени T и фазовому вектору x) и при помощи операции, исключающей управление, сводится к минимизации функции вида

$$I(x_0, \ldots, x_N) = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_i(x_i, x_{i+1}),$$

где x_i — значение вектора x в узловых точках гиперплоскостей, заданных в пространстве (t, x) уравнениями $t = t_i$. Дискретизация по t и x производится с заданными шагами Δt и Δx. Каждой совокупности векторов $\{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ соответствует ломаная, проходящая через узлы и приближенно представляющая траекторию $x(t)$ исходной задачи оптимального управления. Длина $I(x_0, \ldots, x_N)$ этой ломаной складывается из длин $\varphi_i(x_i, x_{i+1})$ отдельных звеньев. Ломаная наименьшей длины находится с помощью рекуррентного соотношения

$$l_s(i+1) = \min_k (l_k(i) + l_{ks}(i))$$

(см. *Вариационное исчисление*; численные методы).

Поиск глобального минимума на всем полученном графе требует большой оперативной памяти и значи-

тельных затрат машинного времени ЭВМ (особенно при дроблении Δx и Δt для получения заданной точности решения).

В Б. т. м. ценой отказа от решения задачи отыскания глобального минимума удается резко сократить требуемую память и число операций. В этом алгоритме (имеющем характер последовательных приближений) поиск наилучшей траектории производится не на всем графе, а на подграфе, задаваемом «трубкой», содержащей исходную ломаную — начальное приближение. В каждом сечении трубки содержится заданное количество узлов. Найденная ломаная выбирается за очередное приближение, после чего процесс вычислений повторяется на новом подграфе.

Оценки показывают, что в Б. т. м. число операций растет линейно с увеличением числа узлов сетки по x (с уменьшением шага Δx), тогда как в методе глобального перебора этот рост квадратичен.

Частным случаем Б.т.м. является *локальных вариаций метод*, в к-ром число узлов в каждом сечении трубки минимально и равно двум.

Лит.: [1] Моисеев Н. Н., Элементы теории оптимальных систем, М., 1975.

И. Б. Вапнярский, И. А. Ватель.

БЛЯШКЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, Бляшке функция,— регулярная аналитич. функция комплексного переменного z, определенная в единичном круге $K=\{z;\ |z|<1\}$ в виде конечного или бесконечного произведения

$$B(z)=z^n\prod_k \frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k-z}{1-\bar{a}_k z}, \qquad (*)$$

где n — целое неотрицательное число, $\{a_k\}$, $k=1,2,\ldots$, — последовательность точек $a_k\in K\setminus\{0\}$ такая, что произведение в правой части (*) сходится (условие сходимости необходимо лишь в случае бесконечного произведения). Б. п. было введено В. Бляшке [1], установившим следующее утверждение: последовательность $\{a_k\}$ точек $a_k\in K\setminus\{0\}$ определяет функцию вида (*) тогда и только тогда, когда сходится ряд $\Sigma_k(1-|a_k|)$. Каждый множитель вида

$$b_k(z)=\frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k-z}{1-\bar{a}_k z},$$

наз. множителем Бляшке для a_k, осуществляет однолистное конформное отображение круга K на себя, переводящее точку $z=a_k$ в нуль, с нормировкой $b_k(-a_k/|a_k|)=1$. Множители вида $b_0(z)=z$ можно интерпретировать как множители Бляшке, соответствующие нулю $z=0$ и нормировке $b_0(1)=1$. Определение множителей Бляшке и Б.п. легко переносится на круг произвольного радиуса, а также на любую односвязную область, конформно эквивалентную кругу.

Последовательность $0,\ \ldots,\ 0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$ (здесь n нулей), обычно выписываемая в порядке неубывания $|a_k|$, является последовательностью всех нулей Б. п. (*) (каждый нуль выписывается столько раз, какова его кратность). Таким образом, сформулированное выше утверждение Бляшке описывает те последовательности, к-рые являются последовательностями нулей всевозможных Б. п. Произведение (*) можно рассматривать как простейшую ограниченную голоморфную в круге K функцию, имеющую заданную последовательность нулей. Оно сходится абсолютно и равномерно внутри K, представляет в круге K ограниченную голоморфную функцию, $|B(z)|<1$, а на ∂K почти всюду имеет угловые граничные значения, по модулю равные 1. Для того чтобы ограниченная голоморфная функция $f(z)$ в K, $|f(z)|<1$, была Б. п., необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta=0.$$

С помощью Б.п. удается дать факторизационное описание важных классов голоморфных функций в единичном круге K. Так, доказана следующая теорема Бляшке: последовательность $\{a_k\}$ точек круга K является последовательностью всех нулей некоторой ограниченной голоморфной в K функции $f(z)$, $|f(z)|<1$, тогда и только тогда, когда ряд $\Sigma_k\ (1-|a_k|)$ сходится. При этом $f(z)$ представима в виде произведения

$$f(z)=B_f(z)\,g(z),$$

где $B_f(z)$ — Б.п., построенное по нулям $\{a_k\}$ функции $f(z)$, а $g(z)$ — отличная от нуля голоморфная в K функция, $|g(z)|<1$, допускающая сравнительно простое интегральное представление. Кроме ограниченных функций, аналогичное факторизационное описание строится для *ограниченного вида функций*, *Харди классов* (см. [2]—[4]).

Изложенная теория получила существенное обобщение в работах М. М. Джрбашяна (см. [5], [6]), построившего бесконечные произведения более общей природы, пригодные для факторизации гораздо более широких классов мероморфных функций. Решена также задача построения аналогов Б. п. и теоремы Бляшке для двусвязных [7] и, вообще, конечносвязных [8] областей. Решение проблемы построения удобных аналогов Б.п. для голоморфных функций многих комплексных переменных чрезвычайно затруднено тем обстоятельством, что нули таких функций не могут быть изолированными.

Лит.: [1] Blaschke W., «Ber. Verhandl Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-naturwiss. Kl». 1915, Bd 67, S. 194—200; [2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [3] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.— Л., 1941; [4] Коллингвуд Э., Ловатер Дж., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [5] Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966; [6] его же, «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 4 (172), с. 3—14; [7] Касьянюк С. А., «Матем. сб.», 1957, т. 42 (84), № 3, с. 301—26; [8] Тамразов П. М., «Докл. АН СССР», 1965, т. 161, № 2, с. 308—11.

П. М. Тамразов.

БЛЯШКЕ ТЕОРЕМА ВЫБОРА, принцип компактности Бляшке: метрическое пространство выпуклых тел является локально компактным, т. е. из бесконечного множества выпуклых тел, принадлежащих фиксированному кубу, можно выбрать последовательность, сходящуюся к нек-рому выпуклому телу, принадлежащему этому кубу.

Теорема доказана В. Бляшке (W. Blaschke, 1916) (см. [1]).

Лит.: [1] Бляшке В., Круг и шар, пер. с нем., М., 1967.

А. Б. Иванов.

БЛЯШКЕ — ВЕЙЛЬ ФОРМУЛА — вариант *Грина формулы* для поля вращений $\boldsymbol{y}$ *бесконечно малого изгибания* поверхности с радиус-вектором $\boldsymbol{x}$:

$$2\iint_G\left(\boldsymbol{x}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial u}\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial v}\right)du\,dv=\oint_{\partial G}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\,d\boldsymbol{y}).$$

Вывод и идея применения Б.—В.ф. для доказательства жесткости овалоидов принадлежит В. Бляшке [1] и Г. Вейлю [2], о дальнейших приложениях см. [3]; аналогом Б.—В.ф. является *Герглотца формула*. Б.—В.ф. обобщается на случай бесконечно малых изгибаний поверхностей в пространствах постоянной кривизны.

Лит.: [1] Blaschke W., «Nachr. Akad. Wiss. Göttingen», 1912, S. 44—55; [2] Weyl H., «Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin», 1917, S. 250—66; [3] Ефимов Н. В., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 2(24), с. 47—158; [4] Бляшке В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., М., 1957.

М. И. Войцеховский.

БОГОЛЮБОВА НЕРАВЕНСТВО в статистической механике,— 1) Б. н. для функционала свободной энергии — неравенство, реализующее вариационный принцип статистич.

механики. Для любых эрмитовых операторов U_1 и U_2 справедливо неравенство:

$$\frac{1}{N}\langle U_1-U_2\rangle_{U_1} \leqslant f[U_1]-f[U_2] \leqslant \frac{1}{N}\langle U_1-U_2\rangle_{U_2}, \quad (*)$$

где

$$f[U] \equiv -\frac{\Theta}{N}\ln \mathrm{Tr}\, e^{-U/\Theta}$$

и имеет смысл плотности свободной энергии для системы с гамильтонианом U, аддитивный параметр N — число частиц или объем в зависимости от системы, Θ — абсолютная температура в энергетич. единицах, а

$$\langle \ldots\rangle_U \equiv \frac{\mathrm{Tr}\,(\ldots e^{-U/\Theta})}{\mathrm{Tr}\, e^{-U/\Theta}}$$

и обозначает термодинамические средние по гамильтониану U.

Б. н. (*) находит применение при получении точных в термодинамич. пределе решений для модельных задач квантовой статистич. физики [1], [2], в исследованиях методом молекулярного поля [3], при доказательстве существования термодинамич. предела, а также для получения физически важных оценок для свободной энергии различных многочастичных систем [4]. Существуют обобщения Б. н. (*) на случай алгебры Неймана со «следом» [5] и общей алгебры Неймана [6].

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., «J. Phisica», 1966, v. 32, p. 933—944; [2] Боголюбов Н. Н. (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, М., 1974; [3] Тябликов С. В., Методы квантовой теории магнетизма, 2 изд., М., 1975; [4] Кудрин Л. П., Статистическая физика плазмы, М., 1974; [5] Ruskai M. B., «Commun. Math. Phys.», 1972, v. 26, p. 280—289; [6] Araki H., «Commun. Math. Phys.», 1973, v. 34, p. 167—178.

2) **Б.н. для функций Грина и корреляционных функций.** Для двумерных временных температурных коммутаторных функций Грина в энергетич. представлении справедливо неравенство

$$|\langle\langle A;\, B\rangle\rangle_{E=0}|^2 \leqslant |\langle\langle A;\, A^+\rangle\rangle_{E=0}|\cdot|\langle\langle B^+;\, B\rangle\rangle_{E=0}|, \quad (1)$$

где $\langle\langle \ldots\rangle\rangle_E$ обозначает фурье-образ функции Грина (в энергетич. представлении) от соответствующих операторов в представлении Гейзенберга. Через спектральные представления функции Грина (полагая $A = iQ \equiv [Q,\, H]$) Б. н. (1) можно представить в виде:

$$|\langle\langle B^+;\, B\rangle\rangle_{E=0}| \geqslant \frac{|\langle [Q,\, B]_-\rangle_H|^2}{2\pi\sqrt{|\langle [Q;\, [Q^+,\, H]_-]_-\rangle_H|}}, \quad (2)$$

где $\langle \ldots\rangle_H$ обозначает термодинамич. средние по гамильтониану системы H, $[,]_-$ — знак коммутатора; а также можно получить неравенство, мажорирующее (2):

$$\langle BB^+ + B^+B\rangle \geqslant 2Q\frac{|\langle [Q;\, B]_-\rangle|^2}{|\langle [Q;\, [Q^+;\, H]_-]_-\rangle|}. \quad (3)$$

Общность неравенств (2) и (3) определяет их широкое применение при изучении различных физич. систем.

Улучшение оценок для корреляционной функции

$$\langle B_kB_k^+ + B_k^+B_k\rangle_H$$

достигается в (3) выбором в качестве оператора $Q_k = Q(k)$ некоторого «квазиинтеграла» движения, коммутирующего при $k=0$ с гамильтонианом системы H. При этом коммутатор в числителе правой части в (3) отражает трансформационные свойства операторов B_k при инфинитезимальных преобразованиях непрерывной группы симметрии, генератором к-рой является оператор $Q_{k=0}$. Неравенства (2), (3) эффективно используются при рассмотрении систем со спонтанным нарушением симметрии: термодинамич. средние тогда следует рассматривать в рамках *квазисредних метода*.

Для функций Грина в классической статистич. механике справедливы аналогичные неравенства, причем соответствующие коммутаторы «переходят» в *Пуассона скобки*.

Б. н. позволили установить ряд соотношений для модельных систем статистич. физики, исследовать проблему упорядочения в конечных системах и др.

Лит. см. при статье *Боголюбова теорема. А. М. Курбатов.*

БОГОЛЮБОВА ТЕОРЕМА — 1) Б. т. «о с т р и е к л и н а» — обобщение принципа *аналитического продолжения*, особенно для случая многих комплексных переменных; получена Н. Н. Боголюбовым в 1956 при обосновании дисперсионных соотношений в квантовой теории поля (см. [1], Дополнение А). Современная формулировка: пусть функция $f(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)=x+iy$, голоморфна в открытом множестве $T_\eta^C=[z : |z|<\eta,\ y\in C]$, где C — такой открытый конус в R^n с вершиной в нуле, что $C\cap(-C)\neq\varnothing$, открытое множество $\mathcal{O}\subset R^n$ содержится в шаре $|x|<\eta$ и для любой основной функции $\varphi(x)$ из $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ существует

$$\lim \int f(x+iy)\,\varphi(x)\,dx, \quad y\longrightarrow 0, \quad y\in C,$$

не зависящий от способа стремления $y\to 0$, $y\in C$; тогда $f(z)$ допускает аналитич. продолжение в область $T_\eta^C\cup\tilde{\mathcal{O}}$:

$$\tilde{\mathcal{O}}=U_{\xi\in\mathcal{O}}[z : |z-\xi| < \theta\Delta_{\mathcal{O}}(\xi)],$$

где $\tilde{\mathcal{O}}$ — комплексная окрестность множества $\mathcal{O}$, причем $0<\theta<1$ — постоянная, зависящая только от конуса C, а $\Delta_{\mathcal{O}}(\xi)$ — расстояние от точки ξ до границы множества $\mathcal{O}$. Б. т. «острие клина» остается верной и при $\eta=\infty$. В этом случае и при нек-рых предположениях о росте функции $f(z)$ получается первоначальная формулировка Н. Н. Боголюбова (см. [1]; роль конуса играл световой конус в R^4). Существуют различные доказательства и обобщения этой теоремы (см. [2]). Особо следует отметить обобщения на гиперфункции (см. [4]) и голоморфные коциклы (см. [3]).

Б. т. «острие клина» находит широкие применения в аксиоматич. квантовой теории поля, в теории дифференциальных уравнений с частными производными, в теории граничных значений голоморфных функций (особенно функций многих комплексных переменных). При этом полезным дополнением к теореме является т е о р е м а о C-в ы п у к л о й о б о л о ч к е [2]; пусть, в условиях Б. т. «острие клина», $C=C^+\cup C^-$, $C^-=-C^+$, где C^+ — выпуклый острый конус; тогда

$$B_C(\mathcal{O})\subset \mathrm{Re}\,H(T_\eta^C\cup\tilde{\mathcal{O}}),$$

где $H(\mathcal{D})$ — *голоморфности оболочка* области $\mathcal{D}$, $\mathrm{Re}\,\mathcal{D}$ — действительное сечение области $\mathcal{D}$, $B_C(\mathcal{O})$ есть C-выпуклая оболочка множества $\mathcal{O}$, т. е. наименьшее открытое множество, содержащее $\mathcal{O}$ и обладающее тем свойством, что если точки x' и x'' из $B_C(\mathcal{O})$ могут быть соединены C-подобной кривой, целиком лежащей в $B_C(\mathcal{O})$, то и все гомотонные ей кривые лежат в $B_C(\mathcal{O})$.

Лит.: [1] Б о г о л ю б о в Н. Н., М е д в е д е в Б. В., П о л и в а н о в М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., 1958; [2] В л а д и м и р о в В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [3] M a r t i n e a u A., Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes — «Théory of Distributions. Proc. of an intern. Summer Institute Held», Lisboa, 1964, p. 193—326; [4] Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations, Lectures Notes in Mathematics, 287, B.—Hdlb.—N. Y., 1973. *В. С. Владимиров.*

2) Б. т. о б о с о б е н н о с т я х т и п а $1/q^2$: теорема статистич. механики об асимптотич. поведении *Грина функций* в пределе малых импульсов ($q\to 0$) для бозе- и ферми-систем с градиентно-инвариантным потенциалом взаимодействия. Установлена Н. Н. Боголюбовым в 1961 (см. [1]).

Для систем многих взаимодействующих частиц в случае вырождения состояния статистич. равновесия для двувременных температурных коммутаторных функций Грина в энергетич. представлении справедливо неравенство:

$$|\langle\langle a_q,\ a_q^+\rangle\rangle_{E=0}|\geqslant \mathrm{const}\cdot q^{-2}, \qquad (1)$$

где a_q, a_q^+ — операторы уничтожения и рождения частицы с импульсом $\vec{q}$.

Возникающие (при $q \to 0$), в соответствии с Б. т., у функций Грина особенности отвечают элементарным возбуждениям в исследуемой физич. системе. Б. т. предсказывает также асимптотич. поведение при малых импульсах макроскопич. характеристик системы, связанных с функциями Грина известными формулами.

Согласно (1), напр., для сверхтекучих бозе- (или ферми-) систем плотность непрерывного распределения частиц по импульсам $\omega(q)$ при $q \to 0$ стремится к бесконечности не медленнее, чем $1/q^2$. В этом случае вырождение состояния статистич. равновесия связано с законом сохранения полного числа частиц, т. е. с инвариантностью гамильтониана системы относительно градиентных преобразований. Но аналогичные особенности появляются у соответствующих функций Грина и, следовательно, у корреляционных функций, характеризующих системы с другими видами вырождения, обусловленными наличием нек-рых аддитивных законов сохранения, т. е. инвариантностью гамильтониана системы относительно нек-рых групп преобразований. Б. т. приводит к целому ряду нетривиальных физич. следствий, связанных, напр., с вопросами специфич. упорядочения в системах многих взаимодействующих частиц, спонтанное нарушение симметрии в к-рых проявляется совершенно различным образом: модель Гейзенберга с ферро-, антиферро- и ферримагнитным упорядочиванием, системы сверхтекучего и сверхпроводящего типа, системы с кристаллич. упорядочением.

Возникновение у функций Грина особенностей при $q \to 0$ связывается с наличием в энергетич. спектре системы ветви коллективных возбуждений «бесщелевого» типа, что отвечает при определенном ограничении на потенциал взаимодействия спонтанному нарушению симметрии.

Характер энергетич. спектра элементарных возбуждений может быть исследован с помощью неравенства для построенного на функциях Грина типа (1) *массового оператора*. Для бозе-систем при конечной температуре ($\theta \equiv k_B T > 0$) это неравенство имеет вид:

$$|\Sigma_{11}(0, \boldsymbol{q}) - \Sigma_{12}(0, \boldsymbol{q})| \leqslant \text{const} \cdot \boldsymbol{q}^2. \qquad (2)$$

При $\boldsymbol{q}=0$ формула (2) дает обобщение (на конечные температуры) так наз. формулы Гугенгольца — Пайнса. В предположении регулярности массового оператора в окрестности точки ($E=0$, $\vec{\boldsymbol{q}}=0$) из (2) можно получить «бесщелевой» характер (акустич. типа) энергетич. спектра возбужденных состояний.

В случае же нулевых температур ($\theta=0$) неравенство (1) позволяет установить связь между плотностью непрерывного распределения частиц по импульсам и минимальной энергией возбужденного состояния.

Соотношения типа (1) должны быть справедливы и в квантовой теории поля, где в случае спонтанного нарушения симметрии (при переходе от одного основного состояния к другому) возникает [4], [5] бесконечное число частиц нулевой массы (Голдстоуна теорема), интерпретируемых как особенности при малых импульсах в квантово-полевых функциях Грина. Б. т. перенесена на релятивистскую квантово-полевую модель со спонтанным нарушением симметрии в [6].

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избранные труды, т. 3, Киев, 1971; [2] Садовников Б. И., Федянин В. К., «Теор. и матем. физ.», 1973, т. 16, в. 3, с. 368—93; [3] Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И., Некоторые вопросы статистической механики, М., 1975; [4] Goldstone J., «Nuovo Cim.», 1961, v. 19, p. 154—64; [5] Goldstone J., Salam A., Weinberg S., «Phis. Rev.», 1962, v. 127, p. 965—70; [6] Казанский А. К., «Теор. и матем. физ.», 1975, т. 22, в. 3, с. 418—21.

А. М. Курбатов.

БОГОЛЮБОВА ЦЕПОЧКА УРАВНЕНИЙ (ББГКИ-уравнения — Н. Н. Боголюбов, М. Борн (М.

Born), Дж. Грин (G. Green), Дж. Кирквуд (J. G. Kirkwood), Дж. Ивон (J. Yvon) — цепочка уравнений (иерархия) для одночастичных, двухчастичных и т. д. функций распределения классической статистич. системы. Эти функции определяются как

$$F_s(t, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_s, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s) = \\ = V^s \int w_N \, d\boldsymbol{r}_{s+1} \ldots d\boldsymbol{r}_N \, d\boldsymbol{p}_{s+1} \ldots d\boldsymbol{p}_N, \qquad (1)$$

где $s=1,2, \ldots, V$ — объем системы, а w_N есть N-частичная нормированная на единицу функция распределения, удовлетворяющая *Лиувилля уравнению*

$$\frac{\partial w_N}{\partial t} = \{H, w_N\}, \qquad (2)$$

где фигурные скобки — *Пуассона скобки*, а H есть гамильтониан системы. Б. ц. у. в предельном статистич. случае $V \to \infty$, $V/N = v = \text{const}$ имеет вид уравнения для F_s со специфич. «зацеплением» с функцией F_{s+1} более высокого ранга:

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} - \{H_s, F_s\} = \\ = \frac{1}{v} \int \left\{ \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} \Phi(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{s+1}|), F_{s+1} \right\} d\boldsymbol{r}_{s+1} d\boldsymbol{p}_{s+1}, \qquad (3)$$

где $\Phi(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{s+1}|)$ — потенциал взаимодействия i-й и $(s+1)$-й частиц, а H_s — гамильтониан s частиц системы.

В термодинамически равновесном случае, когда распределение по импульсам каждой частицы является *Максвелла распределением*, рассматриваются s-частичные функции распределения по координатам частиц, к-рые определяются соотношениями типа (1) через N-частичную функцию

$$w_N(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = \frac{1}{Q} \exp\left(-\frac{H_1}{\theta}\right), \qquad (4)$$

где $H_1 = H - H_0$, причем H_0 есть сумма кинетич. энергий частиц системы, а конфигурационный интеграл Q определяется из условия нормировки (4). Б. ц. у. для этих функций имеет вид:

$$\frac{\partial F_s}{\partial \boldsymbol{x}_1} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial U_s}{\partial \boldsymbol{x}_1} F_s + \\ + \frac{1}{\theta} \frac{1}{v} \int \frac{\partial \Phi(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_{s+1}|)}{\partial \boldsymbol{x}_1} F_{s+1} \, d\boldsymbol{r}_{s+1} = 0, \qquad (5)$$

где U_s — потенциальная энергия взаимодействия s частиц системы.

При помощи функций распределения, гл. обр. F_1 и F_2, могут быть выражены все специфические характеристики статистич. систем. Основные трудности исследования Б. ц. у. (3) или (5) связаны с проблемами замыкания системы (расцепление Б. ц. у.) и решения замкнутой системы со специальными предельными условиями для функций F_s. Это исследование специфично для физич. систем различного типа и наиболее разработано для случаев короткодействия, когда $r_0^3/v \ll 1$, где r_0 — эффективный радиус взаимодействия частиц друг с другом, и для случаев дальнодействия, когда $r_0^3/v \gg 1$, в частности для системы с кулоновским взаимодействием. Во временной теории это приводит непосредственно к кинетич. *Больцмана уравнению* для одночастичной функции F_1 или к *Власова кинетическому уравнению*, а в равновесной теории — к *вириальному разложению* для термодинамич. потенциала или к специфическим кулоновским поправкам.

При рассмотрении квантовых статистич. систем Б. ц. у. составляется для s-частичных статистич. квантовых операторов $\langle x_1, \ldots, x_s | F_s | x_1', \ldots, x_s' \rangle$, являющихся следами по переменным $s+1, \ldots, N$ частиц общего N-частичного оператора — матрицы плотности. Эти уравнения имеют вид, аналогичный уравнениям

(3), в к-рых клас
товыми скобками.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избр. тр., т. 2, К., 1970, с. 99—196; [2] его же, там же, с. 227—493; [3] Уленбек Дж., Форд Дж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965. *И. А. Квасников.*

БОЗЕ — ЭЙНШТЕЙНА СТАТИСТИКА, Бозе статистика,— квантовая статистика, применяемая к системам тождественных частиц с целым спином (0,1, 2, . . . в единицах $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ *эрг·сек*). Предложена Ш. Бозе (S. Bose) и А. Эйнштейном (A. Einstein) в 1924. Согласно этой статистике, в каждом квантовом состоянии может находиться произвольное число частиц. В. Паули (W. Pauli) доказал, что тип квантовой статистики однозначно связан со спином частиц, так как совокупности частиц с целым спином подчиняются Б. — Э. с., а с полуцелым спином — *Ферми — Дирака статистике.*

Состояние системы многих частиц в квантовой механике определяется волновой функцией, к-рая в случае тождественных частиц может быть либо симметричной по отношению к перестановкам любой пары частиц (для частиц с целым спином), либо антисимметричной (для частиц с полуцелым спином). Для системы частиц, подчиняющихся Б. — Э. с., состояния описываются симметричными волновыми функциями, что является другой, эквивалентной формулировкой Б. — Э. с. Системы из большого числа частиц, подчиняющихся Б. — Э. с., наз. системами Бозе, например газом Бозе.

Для идеального квантового газа, т. е. для системы тождественных частиц с массой m без взаимодействия, находящихся в кубе объема $V = L^3$, квантовые одночастичные уровни энергии равны

$$\varepsilon_p = p^2/2m,$$

где p — собственные значения импульса отдельной частицы: $p = 2\pi\hbar n/L$, n — вектор с целочисленными (положительными, отрицательными или равными нулю) компонентами.

Квантовое состояние идеального газа определяется заданием совокупности чисел заполнения уровней $\{n_p\}$, где каждое n_p указывает число частиц в одночастичном состоянии p. Для систем Бозе $n_p = 0,1,2,\ldots$.

Для больших систем уровни энергии расположены очень плотно и стремятся к непрерывному спектру при $V \to \infty$. Пусть уровни сгруппированы по малым ячейкам, содержащим G_i уровней в ячейке. Каждой ячейке соответствует средняя энергия ε_i, число G_i предполагается очень большим. Состояние системы определяется набором $\{N_i\}$, где N_i есть сумма n_p по уровням ячейки. Статистический вес, т. е. число различных распределений частиц по ячейкам, равен

$$W\{N_i\} = \prod_i \frac{(G_i + N_i - 1)!}{N_i!\,(G_i - 1)!} \qquad (1)$$

и определяет вероятность распределения частиц по ячейкам, характеризуемым числами заполнения n_1, n_2.

Наиболее вероятное распределение, соответствующее заданной энергии E и числу частиц N:

$$E = \sum_i \varepsilon_i N_i, \quad N = \sum_i N_i, \qquad (2)$$

находится из экстремума (1) при дополнительных условиях (2). Соответствующие средние числа заполнения равны

$$\bar{n}_i = \frac{\bar{N}}{G_i} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu) - 1}}, \qquad (3)$$

где μ — химич. потенциал $\beta = 1/kT$, k — постоянная Больцмана (универсальная постоянная $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ *эрг/град*), T — абсолютная температура. Величины β и μ находятся из условий (2).

Энтропия системы определяется логарифмом статистич. веса (1) для наиболее вероятного распределения (3):

$$S = k \ln W \{\bar{n}_i\} =$$

$$= k \sum_i g_i \left\{ n_i \ln \left(1 + \frac{1}{\bar{n}_i}\right) + \ln \left(1 + \bar{n}_i\right) \right\}. \quad (4)$$

По энтропии и средней энергии можно найти и другие термодинамич. функции.

Общий подход к Б.—Э.с. состоит в применении большого канонич. *Гиббса распределения* для вероятности w_n заполнения квантового уровня n всей системы

$$w_n = Q^{-1} \exp \left\{ -\frac{E_n - \mu N}{kT} \right\}, \quad (5)$$

где

$$Q = \sum_n \exp \left\{ -\frac{E_n - \mu N}{kT} \right\} \quad (6)$$

— статистич. сумма, E_n — уровни энергии всей системы. Напр., для идеального газа Бозе

$$E_n = \Sigma_p \frac{p^2}{2m} n_p, \quad n = \{n_p\}, \quad n_p = 0, 1, 2, \ldots,$$

и из (5), (6) может быть получена для чисел заполнения формула (3), а для энтропии — формула (4) без использования комбинаторики. Такой подход особенно важен для неидеальных систем Бозе, когда применение Б.—Э. с. не сводится к простой комбинаторной задаче. В этом случае требования Б.—Э.с. могут быть удовлетворены, если для оператора Гамильтона H использовать представление вторичного квантования, в к-ром его действие определено в пространстве симметрических волновых функций, или в пространстве чисел заполнения. Тогда статистич. сумма равна

$$Q = \mathrm{Sp} \exp \left\{ -\frac{H - \mu N}{kT} \right\},$$

где N — оператор числа частиц, и с ее помощью можно найти все термодинамич. функции системы Бозе.

Лит.: [1] Хуанг К., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1966; [2] Кубо Р., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1967; [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, 2 изд., М., 1964; [4] Шредингер Э., Статистическая термодинамика, пер. с англ., М., 1948; [5] Боголюбов Н. Н., Лекции по квантовой статистике, в кн.: Избр. тр., т. 2, К., 1970. *Д. Н. Зубарев.*

БОКСА ИНТЕГРАЛ — одно из обобщений интеграла Лебега, предложенных А. Данжуа (A. Denjoy, 1919), подробно изученное Т. Дж. Боксом (T. J. Boks, 1921). Действительная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ периодически (с периодом $b-a$) продолжается на всю прямую. Для произвольного разбиения $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$, произвольного набора точек $\bar{\xi} = \{\xi_i\}_1^n$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и произвольного t строится сумма

$$I(t) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i + t)\,[x_i - x_{i-1}].$$

Если $I(t)$ при $\rho = \max_i (x_i - x_{i-1}) \longrightarrow 0$ сходится по мере к определенному пределу I, то число I наз. интегралом Бокса (*B*-интегралом) от $f(x)$ по $[a, b]$. Таким образом, Б. и. есть интеграл римановa типа и является также обобщением интеграла Римана.

Б.и. существенно расширяет интеграл Лебега: всякая суммируемая функция *B*-интегрируема и эти интегралы совпадают, в то время как существуют несуммируемые *B*-интегрируемые функции; в частности, если g — сопряженная функция к суммируемой функции f, то она *B*-интегрируема и коэффициенты ряда, сопряженного к ряду Фурье от f, есть коэффициенты соответствующего ряда Фурье (в смысле *B*-интегрирования) от g (А. Н. Колмогоров). Дальнейшего развития теория Б. и. не получила, т. к. для интегрирования функций, сопряженных к суммируемым, более удобным оказался *A-интеграл*.

Лит.: [1] Boks T. J., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1921, v. 45, p. 211—264; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1—2, М., 1965. *И. А. Виноградова.*

БОЛЬЦА ЗАДАЧА — одна из основных задач классического вариационного исчисления на условный экстремум при наличии ограничений типа равенств; сформулирована О. Больца (O. Bolza) в 1913. Б. з. состоит в том, чтобы минимизировать функционал

$$J(x)=\int_{t_1}^{t_2} f(t, x, \dot{x})\,dt+g(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)),$$

$$f: R\times R^n\times R^n \longrightarrow R, \quad g: R\times R^n\times R\times R^n \longrightarrow R,$$

при наличии дифференциальных ограничений типа равенства:

$$\varphi(t, x, \dot{x})=0, \quad \varphi: R\times R^n\times R^n \longrightarrow R^m, \quad m<n,$$

и граничных условий:

$$\psi(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2))=0, \quad \psi: R\times R^n\times R\times R^n \longrightarrow R^p,$$
$$p\leqslant 2n+2.$$

При $g\equiv 0$ Б.з. наз. *Лагранжа задачей*, при $f\equiv 0$ и $p<2n+2$ — *Майера задачей*. Особенностью Б.з. является смешанный характер функционала, к-рый представляет собой сумму интегрального функционала и функции от концов. С принципиальной точки зрения Б.з. равносильна задаче Лагранжа и приводится к ней, если положить

$$J_1(x)=\int_{t_1}^{t_2}(f(t, x, \dot{x})+x_{n+1})\,dt,$$
$$\dot{x}_{n+1}=0, \quad x_{n+1}(t_1)=g/(t_2-t_1),$$

а также — задаче Майера, если положить

$$J_2=x_0(t_2)+g(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)),$$
где $\dot{x}_0=f(t, x, \dot{x}), \quad x_0(t_1)=0.$

Выбор той или иной формы задачи, а также той топологии, в к-рой затем рассматривается эта задача, диктуется соображениями удобства или конкретной целесообразности. В теории оптимального управления чаще рассматриваются задачи в форме Майера, в классическом вариационном исчислении — в форме Лагранжа. Наиболее употребительна топология пространства C^1 непрерывно дифференцируемых функций. Для получения необходимых или достаточных условий экстремума надо накладывать требования гладкости на входящие в определения задачи функции f и g и отображения φ и ψ, а также требования о регулярности отображений φ и ψ, заключающиеся в том, что матрицы $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t_1}, \frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \frac{\partial\psi}{\partial t_2}, \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)$ и $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\right)$ должны иметь максимальный ранг p и m соответственно. Для того чтобы вектор-функция $x(t)$ доставляла экстремум в Б.з. (аналогично в задачах Лагранжа и Майера), необходимо, чтобы вдоль нее удовлетворялись *Эйлера уравнения* и *Вейерштрасса условие* относительно *Лагранжа функции*, составленной по входящим в задачу данным с *Лагранжа множителями*, а также *Якоби условие* и *трансверсальности условия*.

В приведенной формулировке Б. з. использованы обозначения, характерные для теории оптимального управления. В классическом вариационном исчислении Б. з. формулируют, используя другие обозначения:

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx+g(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)),$$
$$\varphi(x, y, y')=0, \quad \psi(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2))=0.$$

Лит.: [1] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950. *И. Б. Вапнярский.*

БОЛЬЦАНО — ВЕЙЕРШТРАССА ПРИНЦИП ВЫБОРА — метод доказательства, часто применяемый в математич. анализе и основанный на последовательном

делении отрезка пополам и выборе из двух получившихся отрезков отрезка, обладающего нек-рым свойством. Этот метод может быть применен, если свойство отрезков таково, что из наличия свойства у нек-рого отрезка вытекает его наличие по крайней мере у одного из отрезков, получающихся делением пополам исходного. Напр., если на отрезке находится бесконечно много точек к.-л. множества, или если нек-рая функция неограничена на отрезке, или если не обращающаяся в нуль функция принимает на концах отрезка значения разного знака, то все это — свойства указанного типа. Применяя Б.— В. п. в., можно доказать *Больцано — Вейерштрасса теорему* и ряд других теорем анализа.

В зависимости от признака, по к-рому производится выбор отрезков при применении Б.—В. п. в., получается либо эффективный процесс, либо неэффективный. Примером первого случая является применение Б.—В.п. в. к доказательству существования у непрерывной действительной функции, принимающей на концах нек-рого отрезка значения разного знака, точки на этом отрезке, в к-рой она обращается в нуль (см. *Коши теорема* о промежуточных значениях непрерывной функции). В этом случае признаком, по к-рому производится последовательный выбор отрезков, является наличие у функции значений разных знаков на концах выбираемых отрезков. Если имеется способ вычисления функции в каждой точке, то в результате достаточно большого числа шагов можно получить координату точки, в к-рой функция на рассматриваемом отрезке обращается в нуль, с любой наперед заданной точностью. Таким образом, в этом случае одновременно с доказательством существования корня уравнения $f(x)=0$ на отрезке, на концах к-рого функция f принимает значения разных знаков, дается и метод приближенного решения этого уравнения. Примером второго случая является доказательство с помощью Б.—В. п. в. теоремы о достижимости действительной непрерывной на отрезке функцией ее верхней грани. Здесь при последовательном делении отрезков пополам выбирается тот отрезок, на к-ром верхняя грань значений функции не меньше, чем на втором. Если, как и в первом случае, известен способ вычисления функции в каждой точке, то этого недостаточно для эффективного выбора нужного отрезка. Поэтому в этом случае с помощью Б.— В. п. в. можно лишь доказать теорему существования, утверждающую, что рассматриваемая функция принимает в нек-рой точке свое наибольшее значение, а не получить метод для приближенного отыскания с наперед заданной точностью этой точки.

Имеются различные обобщения Б.—В.п.в., напр. на случай n-мерного евклидова пространства ($n=2,3, \ldots$) применительно к n-мерным кубам при последовательном их делении на конгруэнтные кубы с ребрами, вдвое меньшими ребер исходного куба. *Л. Д. Кудрявцев.*

БОЛЬЦАНО — ВЕЙЕРШТРАССА ТЕОРЕМА: каждая ограниченная числовая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность. Теорема справедлива как для действительных, так и для комплексных чисел. Она обобщается на более общие объекты, напр.: всякое ограниченное бесконечное множество n-мерного евклидова пространства имеет в этом пространстве хотя бы одну предельную точку. Аналоги этого утверждения имеются и для еще более общих пространств.

Эта теорема доказана Б. Больцано [1]; позже она была независимо получена К. Вейерштрассом (K. Weierstrass).

Лит.: [1] Bolzano B., «Abhandl. Bochemische Ges. Wiss.», 1817. *Л. Д. Кудрявцев.*

БОЛЬЦМАНА ЛИНЕАРИЗОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ в кинетической теории газов — линейное интегро-дифференциальное уравнение, прибли-

женно описывающее эволюцию одночастичной функции распределения достаточно разреженного газа без внутренних степеней свободы при малых отклонениях от равновесия.

Это уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \langle c, \nabla_x \varphi \rangle = \frac{1}{\varepsilon} L_0(\varphi)$$

получается из *Больцмана уравнения*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \langle c, \nabla_x f \rangle = \frac{1}{\varepsilon} L(f, f)$$

с помощью замены

$$f = \pi^{-3/2} \exp(-c^2) + \mu \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right) \varphi$$

и приравнивания членов, содержащих 1-ю степень параметра μ. Оператор L_0 наз. линеаризованным оператором столкновений. Б. л. у. хорошо описывает эволюцию функции распределения только в том случае, если

$$\sup_{x, c, t} | f(x, c, t) - \pi^{-3/2} \exp(-c^2) | \ll 1.$$

При весьма общих предположениях оператор L_0 неположителен: $\langle \varphi, L_0 \varphi \rangle \leqslant 0$, и его можно записать в виде

$$L_0(\varphi) = -\nu(c)\varphi + G\varphi,$$

где $\nu(c)$ — оператор умножения на нек-рую функцию φ (к-рую иногда наз. частотой столкновений), а G — вполне непрерывный интегральный оператор. Для модели твердых шариков [1] функция $\nu(c)$ и ядро оператора G имеют следующий вид

$$\nu(c) = 4\pi^2 \left[\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} c^2\right) + \left(|c| + \frac{1}{2|c|}\right) \int_0^{|c|} \exp(-\alpha^2)\, d\alpha \right],$$

$$G(c, c') = 4\pi |c - c'|^{-1} \exp\left\{ -\frac{1}{4} |c - c'|^2 - \frac{(|c|^2 - |c'|^2)}{4|c - c'|^2} \right\} - 2\pi |c - c'| \exp\left(-\frac{c^2 + c'^2}{2}\right).$$

Для Б. л. у. доказана теорема существования решения задачи Коши при $t \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$, исследовано дисперсионное уравнение. Основная область приложений Б. л. у. — молекулярная акустика идеальных газов. Б. л. у. позволяет получить правильные значения коэффициентов переноса (вязкости, теплопроводности, скорости звука) и закон Стокса — Кирхгофа поглощения ультразвука.

Лит.: [1] Карлеман Т., Математические задачи кинетической теории газов, пер. с франц., 1960; [2] Арсеньев А. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1965, т. 5, № 5, с. 864—82.

А. А. Арсеньев.

БОЛЬЦМАНА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — статистически равновесная функция $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$ распределения по импульсам $\boldsymbol{p}$ и координатам $\boldsymbol{r}$ частиц идеального газа, молекулы к-рого подчиняются классич. механике, во внешнем потенциальном поле:

$$f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}) = A \exp\left\{ -\frac{\frac{p^2}{2m} + U(r)}{kT} \right\}. \qquad (1)$$

Здесь k — постоянная Больцмана (универсальная постоянная $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ *эрг/град*), T — абсолютная температура, $p^2/2m$ — кинетич. энергия частицы, $U(r)$ — потенциальная энергия частицы в поле, константа A определяется из условия нормировки по безразмерному фазовому объекту:

$$\iint f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}) \frac{d^3p\, d^3r}{h^3} = N,$$

где N — полное число частиц, h — постоянная Планка (универсальная постоянная $h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ *эрг·сек*),

$$d^3\boldsymbol{p} = dp_x\, dp_y\, dp_z, \quad d^3\boldsymbol{r} = dx\, dy\, dz,$$

или из более обычного в кинетич. теории газов условия нормировки в пространстве скоростей и координат:

$$\int\int f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})\, d^3\boldsymbol{v}\, d^3\boldsymbol{r} = N,$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/m, \quad d^3\boldsymbol{v} = dv_x\, dv_y\, dv_z.$$

Б.р. есть следствие *Больцмана статистики* идеального газа; представляет собой частный случай *Гиббса распределения*

$$\rho(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N, \boldsymbol{r}_N) = \frac{1}{z} e^{-\frac{H(p_1, r_1, \ldots, p_N, r_N)}{kT}}$$

для идеального газа, когда

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_i u(\boldsymbol{r}_i)$$

и канонич. распределение Гиббса распадается на произведение Б. р. для отдельных частиц. Б. р.— предельный случай квантовых статистик идеального газа при достаточно высоких температурах, когда можно пренебречь квантовыми эффектами. При этом среднее число заполнения i-го квантового состояния частицы равно

$$\overline{n_i} = e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}}, \qquad (2)$$

где ε_i — энергия, соответствующая i-му квантовому состоянию частицы, μ — химич. потенциал, определяемый из условия $\sum_i \overline{n_i} = N$. Формула (2) справедлива при таких температурах и плотностях, когда среднее расстояние между частицами больше отношения постоянной Планка h к модулю средней тепловой скорости

$$\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \gg \frac{h}{\sqrt{mkT}}.$$

Частным случаем Б.р. (1) при $U=0$ является *Максвелла распределение*

$$f(\boldsymbol{p}) = \frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{p^2}{2mkT}\right\}. \qquad (3)$$

Функцию распределения (1) иногда наз. распределением Максвелла — Больцмана, а распределением Больцмана наз. функцию распределения (1), проинтегрированную по всем импульсам частиц, представляющую плотность числа частиц в точке $\boldsymbol{r}$:

$$n(\boldsymbol{r}) = n_0 \exp\left\{-\frac{U(r)}{kT}\right\}, \qquad (4)$$

n_0 — плотность числа частиц, соответствующая точке, где $U=0$. Отношение плотностей числа частиц в различных точках зависит от разности потенциальных энергий, соответствующей этим точкам:

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{\Delta U}{kT}},$$

где $\Delta U = U(r_1) - U(r_2)$. В частном случае из (4) следует барометрическая формула, определяющая распределение плотности числа частиц в поле тяжести над земной поверхностью

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}, \qquad (5)$$

где g — ускорение силы тяжести, m — масса частицы, h — высота над земной поверхностью, n_0 — плотность при $z=0$.

Для смеси газов с различной массой Б. р. показывает, что распределение парциональных плотностей частиц для каждой из компонент независимо от других компонент. Для газа во вращающемся сосуде $U(r)$ есть поле центробежных сил:

$$U(r) = -\frac{m\omega^2 r^2}{2},$$

где ω — угловая скорость вращения.

Лит. см. при ст. *Больцмана статистика*. *Д. Н. Зубарев.*

БОЛЬЦМАНА СТАТИСТИКА — статистика, применяемая к системе невзаимодействующих частиц, подчиняющихся классич. механике (классический идеальный газ). Распределение частиц идеального газа (поскольку они не взаимодействуют между собой) рассматривается не в фазовом пространстве всех частиц (Г-пространстве) как в статистич. механике Гиббса (см. *Гиббса распределение*), а в фазовом пространстве — пространстве координат и импульсов одной частицы (μ-пространстве). Это связано с тем, что для идеального газа фазовый объем в μ-пространстве сохраняется (частный случай *Лиувилля теоремы*).

Согласно Б. с., это фазовое пространство разбивается на большое число малых ячеек с таким фазовым объемом, чтобы в каждой из них содержалось еще большое число частиц N_i, и рассматриваются все возможные распределения частиц по этим ячейкам. Фазовый объем i-й ячейки G_i — ее объем в μ-пространстве в единицах h, где h — постоянная Планка (универсальная постоянная $h=6{,}62\cdot10^{-27}$ *эрг·сек*). Такое безразмерное G_i имеет смысл максимально возможного числа микросостояний в ячейке i, так как наименьшая величина произведения каждой пары координат и импульсов, согласно квантовой механике, равна h, а частица имеет три степени свободы.

В основу статистич. механики положено предположение, что все микроскопич. состояния, соответствующие заданной полной энергии и заданному числу частиц, равновероятны. Число различных способов, к-рыми можно распределить N частиц по M ячейкам размера G_i по N_i частиц в каждой, равно

$$W_{\text{Б}}(\ldots N\ldots)=N!\prod_{1\leqslant i\leqslant M}\frac{G_i^{N_i}}{N_i!},\quad N=\sum_i N_i,$$

где учитывается, что частицы полностью независимы, различимы и перестановки частиц в пределах каждой ячейки не меняют состояния. В Б. с. эта величина определяет статистич. вес или термодинамич. вероятность состояния (в отличие от обычной вероятности она не нормированна на единицу). При подсчете статистич. веса учитывается, что перестановка тождественных частиц не меняет состояния, и поэтому фазовый объем $W_{\text{Б}}$ следует уменьшить в $N!$ раз:

$$W(\ldots N\ldots)=\frac{W_{\text{Б}}}{N!}.$$

Фазы с таким уменьшенным объемом наз. р о д о в ы м и ф а з а м и (в отличие от исходных в и д о в ы х ф а з).

Все микроскопич. состояния с различными распределениями частиц по фазовым ячейкам при заданном числе частиц

$$N=\sum_{i=1}^{M}N_i$$

и полной энергии

$$E=\sum_{i=1}^{M}\varepsilon_i N_i$$

(ε_i — энергия частиц в i-й ячейке) соответствуют одному и тому же макроскопич. состоянию.

Предполагается, что распределение частиц в состоянии статистич. равновесия соответствует наиболее вероятному распределению, т. е. максимуму $W(\ldots N_i\ldots)$ при заданном числе частиц N и энергии E. Задача на условный экстремум $W(\ldots N_i\ldots)$ при фиксированных N и E дает для среднего числа частиц в ячейке *Больцмана распределение*

$$\overline{n_i}=\frac{\overline{N_i}}{G_i}=e^{(\mu-\varepsilon_i)/kT},$$

где k — постоянная Больцмана (универсальная постоянная $k=1{,}38\cdot10^{-16}$ *эрг/град*), T — абсолютная температура, μ — химич. потенциал, определяемый

из условия $N=\Sigma_i N_i$. В частном случае потенциального поля $U(\boldsymbol{r})$:

$$\varepsilon_i=\frac{p_i^2}{2m}+U(\boldsymbol{r}_i).$$

Б. с. есть частный случай статистики Гиббса — канонич. ансамбля для газа из невзаимодействующих частиц. Б. с.— предельный случай квантовых *Ферми — Дирака статистики* и *Бозе — Эйнштейна статистики* при достаточно высоких температурах, когда можно пренебречь квантовыми эффектами.

Б. с. предложена Л. Больцманом (L. Boltzmann) в 1868—71.

Лит.: [1] Майер Дж., Гепперт-Майер М., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1952; [2] Зоммерфельд А., Термодинамика и статистическая физика, пер. с нем., М., 1955; [3] Шредингер Э., Статистическая термодинамика, пер. с англ., М., 1948; [4] Фаулер Р., Гуггенгейм Э., Статистическая термодинамика, пер. с англ., М., 1949.

Д. Н. Зубарев.

БОЛЬЦМАНА *H*-ТЕОРЕМА — одно из следствий кинетического *Больцмана уравнения*, согласно к-рому величина

$$H(t)\equiv\int h(t,\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}=\int f\ln f\,d\boldsymbol{p}\,d\boldsymbol{r},$$

где $f=f(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ — безразмерная удовлетворяющая уравнению Больцмана классическая одночастичная функция распределения в пространстве координат $\boldsymbol{r}$ и импульсов $\boldsymbol{p}$, является невозрастающей функцией времени t. Временно́е поведение плотности $h(t,\boldsymbol{r})$ определяется релаксационным характером эволюции функции f к локальному *Максвелла распределению*, предельное же значение H-функции при $t\to\infty$ равно вычисленной по методу Гиббса энтропии идеального газа с обратным знаком. Если рассматриваемые приращения t значительно больше времени установления локального распределения Максвелла, то величину $(-h(t,\boldsymbol{r}))$ можно отождествить с плотностью энтропии, а $(-H(t))$ — с энтропией неравновесного идеального газа.

Принципиальное значение Б. H-т. с точки зрения статистич. механики состоит в математическом выражении основных положений макроскопич. термодинамики, согласно к-рым, напр., изолированная система самопроизвольно стремится к состоянию термодинамич. равновесия, причем этот процесс сопровождается увеличением энтропии.

H-теоремой наз. утверждения, аналогичные первоначальной Б.*H*-т., но сформулированные для статистич. систем иного или более общего типа, включая случай неидеальных и квантовых систем.

Б. H-т. получена Л. Больцманом (L. Boltzmann, 1872).

Лит.: [1] Зоммерфельд А., Термодинамика и статистическая физика, пер. с нем., М., 1955; [2] Уленбек Дж., Форд Дж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965.

И. А. Квасников.

БОЛЬЦМАНА УРАВНЕНИЕ — уравнение кинетич. теории газов, предложенное Л. Больцманом (L. Boltzmann) для определения одночастичной функции распределения идеального одноатомного газа (см. [1]). В безразмерных переменных Б. у. имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(v,\,\nabla_x f)+(F,\,\nabla_v f)=\frac{1}{\varepsilon}L(f,\,f). \qquad (*)$$

Здесь $f(x,\,v,\,t)$ — плотность функции распределения числа частиц в фазовом пространстве $x\otimes v$, x — трехмерная пространственная координата, v — скорость, t — время, F — плотность внешних массовых сил, ε — безразмерный параметр (пропорциональный отношению среднего расстояния, к-рое частицы пролетают без столкновений, к характерному масштабу рассматриваемых явлений). Оператор столкновений L в простейшем случае имеет следующий вид:

$$L(f,\,f)=\int\left[f(v')\,f(v_1')-f(v)\,f(v_1)\right]|\,v-v_1\,|\,d\omega\,dv_1,$$

где v_1 и v — скорости молекул до столкновения, v_1' и v' — скорости молекул после столкновения, $d\omega$ — элемент площади в плоскости, перпендикулярной вектору $v_1 - v$.

При выводе Б.у. предполагается, что эволюция функции $f(x, v, t)$ определяется ее значением в данный момент времени t и парными столкновениями между молекулами газа, причем время взаимодействия двух молекул газа при столкновении много меньше того времени, в течение к-рого они двигаются как свободные частицы. С математич. точки зрения вывод Б. у. заключается в определенном алгоритме построения оператора L на основе известного закона движения двух сталкивающихся друг с другом молекул газа.

В уравнении (*) область изменения переменной t — полупрямая $t \geqslant 0$, область изменения v — все пространство R^3, область изменения x — подобласть Ω в R^3 (Ω может и совпадать с R^3). По физич. смыслу функция $f(x, v, t)$ должна быть неотрицательной и такой, что

$$\int f(x, v, t)\, v^2\, dv < \infty.$$

Простейшее граничное условие на $d\Omega$ имеет следующий вид:

$$f(v - 2n(n, v);\ x;\ t) = f(v, x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad v \in R^3,$$

где n — нормаль к $d\Omega$. Имеется несколько различных точных постановок задачи Коши для уравнения (*), однако ни для одной из них не доказано существование в целом решения уравнения (*) при естественных с физич. точки зрения предположениях об операторе L.

Лит.: [1] Больцман Л., Лекции по теории газов, пер. с нем., М., 1956; [2] Боголюбов Н. Н., Избр. труды, т. 2, К., 1970; [3] Чепмен С. и Каулинг Т. Д., Математическая теория неоднородных газов, пер. с англ., М., 1960.

А. А. Арсеньев.

БОЛЬШАЯ СИСТЕМА — см. *Сложная система.*

БОЛЬШИХ ОТКЛОНЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТИ — вероятности вида

$$\mathsf{P}(S_n - b_n > a_n),\ \mathsf{P}(S_n - b_n < -a_n) \text{ и } \mathsf{P}(|S_n - b_n| > a_n),$$

где

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j,$$

$\{X_j\}$ — последовательность независимых случайных величин, а $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности чисел такие, что $a_n > 0$, $\dfrac{S_n - b_n}{a_n} \to 0$ по вероятности.

Если случайные величины $X_1, X_2 \ldots$ имеют одинаковое распределение с математич. ожиданием, равным нулю, и конечной дисперсией σ^2, то можно положить $b_n = 0$ и $a_n = x_n \sigma \sqrt{n}$, где $x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Особенно большое значение имеют *Крамера теорема* и ее усиления.

В случаях, когда необходимо иметь гарантированные оценки для Б. о. в., пользуются неравенствами типа *Чебышева неравенств* — это так наз. показательные оценки для Б. о. в. Напр., если случайные величины X_j независимы, $\mathsf{E}X_j = 0$, $\mathsf{E}X_j^2 = \sigma_j^2$, $|X_j| \leqslant L$ с вероятностью 1, $B_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$, и $a = xL/B_n$, то при всех $x \geqslant 0$ верна оценка

$$\mathsf{P}\{|S_n| > xB_n\} \leqslant 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{a}{3}\right)^{-1}\right\},$$

правая часть к-рой экспоненциально убывает с ростом x.

Лит.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [3] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [4] Прохоров Ю. В., в кн.: Итоги науки и техники, т. 10, М., 1972, с. 5—24; [5] Юринский В. В., «Теория вероятностей и её применения», 1974, т. 19, в. 1, с. 152—153.

В. В. Петров, В. В. Юринский.

БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ЗАКОН — общий принцип, в силу к-рого совместное действие случайных факторов

приводит при нек-рых весьма общих условиях к результату, почти не зависящему от случая. Сближение частоты наступления случайного события с его вероятностью при возрастании числа испытаний (подмеченное сначала, по-видимому, на азартных играх) может служить первым примером действия этого принципа.

На рубеже 17 и 18 вв. Я. Бернулли [1] доказал теорему, утверждающую, что в последовательности независимых испытаний, в каждом из к-рых вероятность наступления нек-рого события A имеет одно и то же значение p, $0<p<1$, верно соотношение:

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right\}\longrightarrow 0 \qquad (1)$$

при любом $\varepsilon>0$ и $n\to\infty$; здесь μ_n — число появлений события в первых n испытаниях, μ_n/n — частота появлений. Эта *Бернулли теорема* была распространена С. Пуассоном [2] на случай последовательности независимых испытаний, где вероятность появления события A может зависеть от номера испытания. Пусть эта вероятность для k-го испытания равна p_k, $k=1, 2, 3, \ldots$, и пусть

$$\overline{p}=\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}.$$

Тогда *Пуассона теорема* утверждает, что

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-\overline{p}\right|>\varepsilon\right\}\longrightarrow 0 \qquad (2)$$

при любом $\varepsilon>0$ и $n\to\infty$. Первое строгое доказательство этой теоремы было дано П. Л. Чебышевым (1846), метод к-рого полностью отличен от метода Пуассона и основан на нек-рых экстремальных соображениях; С. Пуассон выводил (2) из приближенной формулы для указанной вероятности, основанной на использовании закона Гаусса и в то время еще строго не обоснованной. У С. Пуассона впервые встречается и термин «закон больших чисел», к-рым он назвал свое обобщение теоремы Бернулли.

Естественное дальнейшее обобщение теорем Бернулли и Пуассона возникает, если заметить, что случайные величины μ_n можно представить в виде суммы

$$\mu_n=X_1+X_2+\ldots+X_n$$

независимых случайных величин, где $X_k=1$, если A появляется в k-м испытании, и $X_k=0$ — в противном случае. При этом математич. ожидание $\mathsf{E}(\mu_n/n)$ (совпадающее со средним арифметическим математич. ожиданий $\mathsf{E}X_k$) равно p для случая Бернулли и $\overline{p}$ для случая Пуассона. Другими словами, в обоих случаях рассматривается отклонение среднего арифметического величин X_k от среднего арифметического их математич. ожиданий.

В работе П. Л. Чебышева «О средних величинах» (1867) было установлено, что для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ соотношение

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-\frac{\mathsf{E}X_1+\ldots+\mathsf{E}X_n}{n}\right|>\varepsilon\right\}\longrightarrow 0 \qquad (3)$$

(при любом $\varepsilon>0$ и $n\to\infty$) верно при весьма общих предположениях. П. Л. Чебышев предполагал, что математич. ожидания $\mathsf{E}X_k^2$ все ограничены одной и той же постоянной, хотя из его доказательства видно, что достаточно требования ограниченности дисперсий X_k, $\mathsf{D}X_k=\mathsf{E}X_k^2-(\mathsf{E}X_k)^2$, или даже требования

$$B_n^2=\mathsf{D}X_1+\ldots+\mathsf{D}X_n=o\,(n^2)\ \text{ при }\ n\longrightarrow\infty.$$

Таким образом, П. Л. Чебышев показал возможность широкого обобщения теоремы Бернулли. А. А. Марков отметил возможность дальнейших обобщений и предложил применять название Б. ч. з. ко всей совокупности обобщений теоремы Бернулли [и в частности,

к (3)]. Метод Чебышева основан на точном установлении общих свойств математич. ожиданий и на использовании так наз. *Чебышева неравенства* [для вероятности (3) оно дает оценку вида

$$n^{-2}\varepsilon^{-2}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{D}X_k;$$

эту границу можно заменить более точной, разумеется при более значительных ограничениях, см. *Бернштейна неравенство*]. Последующие доказательства различных форм Б. ч. з. в той или иной степени являются развитием метода Чебышева. Применяя надлежащее «урезание» случайных величин X_k (замену их вспомогательными величинами $X'_{n,\,k}$; именно: $X'_{n,\,k}=X_k$, если $|X_k-\mathsf{E}X_k|\leqslant L_n$, и $X'_{n,\,k}=0$, если $|X_k-\mathsf{E}X_k|>L_n$, где L_n — нек-рые постоянные), А. А. Марков распространил Б. ч. з. на случаи, когда дисперсии слагаемых не существуют. Напр., он показал, что (3) имеет место, если при нек-рых постоянных $\delta>0$ и $L>0$ и всех n

$$\mathsf{E}\,|X_n-\mathsf{E}X_n|^{1+\delta}<L.$$

Аналогично доказывается т е о р е м а Х и н ч и н а (1929): если X_n имеют одинаковые законы распределения и $\mathsf{E}X_n$ существует, то Б. ч. з. (3) выполняется.

Для сумм независимых случайных величин можно сформулировать более или менее окончательный вариант Б. ч. з. Для этого целесообразно перейти на более общую точку зрения, связанную с понятием предельного постоянства последовательности случайных величин. Случайные величины последовательности $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ наз. п р е д е л ь н о п о с т о я н н ы м и, если существует такая последовательность постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, что при любом $\varepsilon>0$ и $n\to\infty$

$$\mathsf{P}\{|Y_n-C_n|>\varepsilon\}\longrightarrow 0 \qquad (4)$$

(т. е. Y_n-C_n сходится к нулю «по вероятности»; если (4) выполняется с к.-л. C_n, то оно выполняется и с $C'_n=mY_n$, где mY — *медиана* случайной величины Y). Далее, вместо последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимых случайных величин можно взять так наз. схему серий (см. *Серий схема*):

$$\begin{array}{c} X_{1,1},\ \ldots,\ X_{1,k_1},\\ X_{2,1},\ \ldots,\ X_{2,k_2},\\ \ldots\ldots\ldots\\ X_{n,1},\ \ldots,\ X_{n,k_n},\\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

случайных величин (первый индекс — номер серии, второй — номер величины внутри серии). Случайные величины каждой отдельной серии предполагаются взаимно независимыми. Схему последовательности легко свести к схеме серий, полагая $k_1=1$, $k_2=2$, $\ldots$, $X_{n,k}=X_k/n$.

Пусть

$$Y_n=X_{n,1}+\ldots+X_{n,k_n}.$$

Тогда общая форма вопроса о применимости Б.ч.з. для сумм независимых случайных величин такова: при каких условиях суммы Y_n предельно постоянны?

Ответ на этот вопрос дал А. Н. Колмогоров (1928). Допустим, не ограничивая общности, что медианы величин $X_{n,k}$ равны нулю. Пусть $\tilde{X}_{n,k}=X_{n,k}$ при $|X_{n,k}|\leqslant 1$ и $\tilde{X}_{n,k}=0$ при $|X_{n,k}|>1$. Тогда одновременное выполнение двух условий:

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathsf{P}\{|X_{n,k}|>1\}\longrightarrow 0 \text{ при } n\longrightarrow\infty$$

и

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathsf{E}\tilde{X}^2_{n,k}\longrightarrow 0 \text{ при } n\longrightarrow\infty,$$

необходимо и достаточно для предельного постоянства сумм Y_n. В качестве C_n можно взять $\sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{E}\tilde{X}_{n,k}$. Достаточность этих условий легко доказывается методом Чебышева. Если математич. ожидания $\mathsf{E}X_{n,k}$ существуют, то легко указать дополнительные условия, при к-рых можно выбрать $C_n = \mathsf{E}Y_n$, что приводит к необходимым и достаточным условиям Б.ч.з. в классич. формулировке (3). Для последовательности независимых одинаково распределенных величин $\{X_n\}$ эти условия сводятся, в соответствии с указанной теоремой Хинчина, к существованию математич. ожидания. В то же время для предельного постоянства средних арифметических Y_n в этом случае необходимо и достаточно условие

$$n\mathsf{P}\{|X_1| > n\} \longrightarrow 0 \text{ при } n \longrightarrow \infty. \qquad (5)$$

Легко привести примеры, когда условие (5) не выполняется. Так, оно не выполняется, если все X_n имеют распределение Коши с плотностью $1/\pi(1+x^2)$ (к-рой соответствует характеристич. функция $e^{-|t|}$). Здесь средние арифметические $Y_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ имеют характеристич. функцию $e^{-n|t/n|} = e^{-|t|}$, и следовательно, имеют при любом n то же самое распределение, что и отдельные слагаемые.

В числе наиболее важных примеров, где Б. ч. з. не имеет места, следует отметить примеры, связанные с временами возвращения в случайных блужданиях. Напр., в симметричном *Бернулли блуждании* время T_n до n-го возвращения в исходную точку есть сумма n независимых случайных величин X_1, X_2, ..., X_n, где X_1— время до 1-го возвращения, X_2— время между 1-м и 2-м возвращениями и т. д. Распределение величины $2T_n/\pi n^2$ сходится при $n \to \infty$ к невырожденному предельному закону с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2x} x^{-3/2} \text{ при } x > 0$$

и равной нулю при $x \leqslant 0$. Таким образом, в этом случае распределение среднего арифметического величин X_i, т. е. T_n/n, размещается, грубо говоря, на отрезке длины порядка n (в то время как в случае применимости Б. ч. з. оно сосредоточивается на отрезках длины $o(1)$).

Применимость Б. ч. з. к суммам зависимых величин (и в его классич. формулировке, и в более общих) связана в первую очередь с неограниченным убыванием зависимости между случайными величинами X_i и X_j при увеличении разности их номеров, т. е. $|i-j|$. Впервые соответствующие теоремы были доказаны А. А. Марковым для величин, связанных в цепь Маркова (1907). Именно, пусть X_1, X_2, ..., X_n, ... принимают конечное число значений и связаны в однородную цепь Маркова, причем все вероятности перехода за один шаг положительны. Здесь неограниченное убывание зависимости между X_j и X_i при $j-i \to \infty$ проявляется в том, что условное распределение X_j при фиксированном значении X_i стремится при $n \to \infty$ к пределу, не зависящему от выбранного значения X_i (эргодическая теорема Маркова). Как следствие этого утверждения выводится Б. ч. з.: сначала устанавливается, что при $n \to \infty$

$$\mathsf{E}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - a\right)^2 \longrightarrow 0,$$

где $a = \lim\limits_{k \to \infty} \mathsf{E}X_k$; отсюда же вытекает, что при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right\} \longrightarrow 0.$$

Более общий случай охватывается условиями С. Н. Бернштейна: если $\mathsf{D}X_j < L$, $R(X_i, X_j) \leqslant \varphi(|i-j|)$, где L — нек-рая постоянная, R — коэффициент корреляции, $\varphi(n)$ — функция, стремящаяся к нулю при

$n \to \infty$, то к величинам $\{X_n\}$ применим Б. ч. з. (3). Для стационарных в широком смысле последовательностей $\{X_n\}$ условие на корреляцию можно несколько ослабить, заменив его условием

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} R(j) = 0,$$

где $R_j = R(X_i, X_{i+j})$.

Предыдущие результаты можно обобщить в различных направлениях. Во-первых, всюду выше рассматривалась сходимость «по вероятности». Рассматривают и другие типы сходимости: с вероятностью единица, в среднем квадратичном и т. п. (в действительности многие из указанных выше условий обеспечивают сходимость в среднем квадратичном, из к-рой вытекает сходимость по вероятности). Случай сходимости с вероятностью единица, ввиду его важности, выделяется особым названием «усиленного закона больших чисел» (см. *Больших чисел усиленный закон*).

Далее, многие теоремы переносятся с соответствующими изменениями на случайные векторы со значениями из евклидовых пространств любой размерности, из гильбертова пространства, из нек-рых банаховых пространств. Так, напр., если $\{X_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов со значениями из сепарабельного банахова пространства и если $\mathsf{E}\|X_n\|$ ($\|x\|$ — норма x) существует, то

$$\mathsf{P}\left\{\left\|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} - \mathsf{E}X_1\right\| > \varepsilon\right\} \longrightarrow 0$$

при любом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$.

Рассматриваемый в наиболее общей форме Б. ч. з. оказывается тесно связанным с *эргодическими теоремами*. Разумеется, многие теоремы переносятся и на случай средних $\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$, где $X(t)$ — случайный процесс, зависящий от непрерывного параметра (см., например, [10]).

Наконец, вместо сумм случайных величин можно рассмотреть другие симметрические функции от них. Это было сделано А. Я. Хинчиным (1951—55) в связи с обоснованием нек-рых выводов статистич. механики [9]. Результат А. Я. Хинчина можно пояснить следующим частным примером. Пусть $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ — координаты точки, равномерно распределенной на поверхности сферы

$$X_{n,1}^2 + \ldots + X_{n,n}^2 = n\mu, \ \mu > 0.$$

Тогда для широкого класса симметрических функций $f(X_{n,1}, \ldots, X_{n,n})$ имеет место Б.ч.з. в том смысле, что их значения при $n \to \infty$ оказываются предельно постоянными [это близко к замечанию П. Леви (P. Lévy, 1925) о том, что достаточно регулярные функции очень большого числа переменных почти постоянны в большей части области определения].

В большинстве старых руководств приводились обширные статистич. данные, иллюстрирующие Б.ч.з. (см., напр. [4], [11]).

Лит.: [1] Bernoulli J., Ars conjectandi, opus posthumum, Basileae, 1713 (в рус. пер.— Часть четвертая сочинения Я. Бернулли..., СПБ, 1913); [2] Poisson S.-D., Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précedées des règles générales du calcul des probabilités, P., 1837; [3] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947; [4] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [5] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.— Л., 1946; [6] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [7] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [8] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [9] Хинчин А. Я., Симметрические функции на многомерных поверхностях, в кн.: Памяти А. А. Андронова, М., 1955, с. 541—74; [10] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [11] Uspensky J. V., Introduction to mathematical probability, N. Y.— L., 1937.

Ю. В. Прохоров.

БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН — одна из форм *больших чисел закона* (в его общем понимании), утверждающая, что при определенных условиях с вероятностью единица происходит неограниченное сближение средних арифметических последовательности случайных величин с нек-рыми постоянными величинами. Точнее, пусть

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots \tag{1}$$

— последовательность случайных величин и $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Говорят, что последовательность (1) удовлетворяет Б.ч.у.з., если существует такая последовательность постоянных A_n, что вероятность соотношения

$$\frac{S_n}{n} - A_n \longrightarrow 0 \tag{2}$$

(при $n \to \infty$) равна 1. Другая формулировка, равносильная предыдущей, такова: последовательность (1) удовлетворяет Б.ч.у.з., если при любом $\varepsilon > 0$ вероятность одновременного выполнения всех неравенств

$$\left|\frac{S_n}{n} - A_n\right| \leqslant \varepsilon,\quad \left|\frac{S_{n+1}}{n+1} - A_{n+1}\right| \leqslant \varepsilon,\quad \ldots \tag{3}$$

стремится к 1 при $n \to \infty$. Таким образом, здесь рассматривается поведение всей последовательности сумм в целом, в то время как в обычном законе больших чисел речь идет лишь об отдельных суммах. Если последовательность (1) удовлетворяет Б.ч.у.з., то она удовлетворяет и обычному закону больших чисел с теми же самыми A_n, т. е.

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - A_n\right| \leqslant \varepsilon\right\} \longrightarrow 1 \tag{4}$$

(при любом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$). Обратное может быть неверно. Напр., если случайные величины (1) независимы и принимают при $n \geqslant 16$ два значения $\pm \sqrt{n/\ln\ln\ln n}$ с вероятностью 1/2 каждое, то для них выполняется закон больших чисел (4) с $A_n = 0$, но ни при каких A_n не выполняется Б.ч.у.з. (2). Заранее существование таких примеров совсем не очевидно, т. к. хотя вообще сходимость по вероятности слабее сходимости с вероятностью 1, тем не менее, напр., для рядов из независимых случайных величин оба вида сходимости равносильны.

Б.ч.у.з. был впервые сформулирован и доказан Э. Борелем [1] для схемы Бернулли (в теоретико-числовой интерпретации; см. *Бореля усиленный закон больших чисел*). Частные случаи схемы Бернулли возникают при разложении взятого наудачу (с равномерным распределением) действительного числа ω из отрезка (0,1) в бесконечную дробь по к.-л. основанию (см. *Бернулли испытания*). Так, в двоичном разложении

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\omega)}{2^n}$$

последовательные знаки $X_n(\omega)$ принимают два значения 0 и 1 с вероятностью 1/2 каждое и являются независимыми случайными величинами. Сумма $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)$ равна числу единиц среди первых n знаков двоичного разложения, а $S_n(\omega)/n$ — их доле. В то же время S_n может рассматриваться как число «успехов» в схеме Бернулли с вероятностью «успеха» (появление 1), равной 1/2. Э. Борель доказал, что доля единиц $S_n(\omega)/n$ стремится к 1/2 для почти всех ω из отрезка (0,1). Аналогично, при разложении ω по основанию 10 можно назвать «успехом» появление к.-л. одной из цифр 0, 1, 2, . . ., 9 (напр., цифры 3). При этом получается схема Бернулли с вероятностью успеха 1/10, и частота появления выбранной цифры среди первых n знаков десятичного разложения стремится к 1/10 для почти всех ω из отрезка (0,1). Э. Борель отметил также, что частота

появления любой фиксированной группы r цифр стремится для почти всех ω к $1/10^r$ (см. *Нормальное число*).

Ф. Кантелли [2] дал достаточные условия Б.ч.у.з. для независимых случайных величин X_n в терминах вторых и четвертых центральных моментов слагаемых (схема Бернулли охватывается этими условиями). Вводя обозначение

$$B_{n,k}=\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}\,|\,X_j-\mathsf{E}X_j\,|^k,$$

условию Кантелли можно придать вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n,4}+B_{n,2}^2}{n^2}<\infty.$$

Доказательства Э. Бореля и Ф. Кантелли основаны на следующем соображении. Пусть для нек-рой последовательности положительных чисел $\varepsilon_n\to 0$ (при $n\to\infty$)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n}-A_n\right|>\varepsilon_n\right\}<\infty. \qquad (5)$$

Тогда по *Бореля — Кантелли лемме* с вероятностью 1 осуществляется лишь конечное число событий, стоящих под знаком вероятности в (5). Поэтому с вероятностью 1 для всех достаточно больших n

$$\left|\frac{S_n}{n}-A_n\right|\leqslant\varepsilon_n,$$

т. е. имеет место (3). Э. Борель оценивал члены ряда (5) по теореме Муавра — Лапласа, а Ф. Кантелли — по неравенству Чебышева с четвертыми моментами.

Дальнейшее расширение условий приложимости Б.ч.у.з. было осуществлено А. Я. Хинчиным и А. Н. Колмогоровым. А. Я. Хинчин [3], [4] ввел самый термин «усиленный закон больших чисел» и дал достаточное условие Б.ч.у.з. с $A_n=\mathsf{E}(S_n/n)$ (применимое и к зависимым величинам). Обозначая через $r_{i,k}$ коэффициент корреляции между X_i и X_k и полагая

$$c_n=\sup_{|i-k|=n}|r_{i,k}|,\quad C_n=\sum_{k=0}^{n}c_k,$$

можно записать условие Хинчина в форме: $B_{n,2}C_n=O(n^{2-\delta})$ для нек-рого $\delta>0$. В действительности из доказательства А. Я. Хинчина вытекает значительно более сильное утверждение.

В случае независимых слагаемых наиболее известными являются условия приложимости Б.ч.у.з., установленные А. Н. Колмогоровым: достаточное (1930) — для величин с конечными дисперсиями и необходимое и достаточное (1933) — для одинаково распределенных величин (заключающееся в существовании математич. ожидания величин X_i). Теорема Колмогорова для случайных величин (1) с конечными дисперсиями утверждает, что из условия

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathsf{D}X_n}{n^2}<\infty \qquad (6)$$

вытекает приложимость к последовательности (1) Б. ч. у. з. с $A_n=\mathsf{E}(S_n/n)$. В терминах дисперсий условие (6) оказывается наилучшим в том смысле, что для любой последовательности положительных чисел b_n с расходящимся рядом $\sum b_n/n^2$ можно построить последовательность независимых случайных величин X_n с $\mathsf{D}X_n=b_n$, не удовлетворяющую Б. ч. у. з. Область применения условия (6) (как, впрочем, и ряда других условий Б. ч. у. з. для независимых величин) может быть расширена на основе следующего замечания. Пусть m_n — медиана X_n. Сходимость ряда

$$\sum\mathsf{P}\left\{|\,X_n-m_n\,|>n\right\}$$

необходима для Б. ч. у. з. Из леммы Бореля — Кантелли вытекает, что с вероятностью 1, начиная с нек-рого номера, $|X_n-m_n|<n$. Поэтому при изучении условий приложимости Б. ч. у. з. можно сразу ограничиться случайными величинами, удовлетворяющими последнему условию.

В доказательствах А. Я. Хинчина и А. Н. Колмогорова вместо сходимости ряда (5) устанавливается сходимость ряда

$$\sum_k \mathsf{P}\left\{\max_{n_k < n \leqslant n_{k+1}} \left|\frac{S_n}{n} - A_n\right| > \varepsilon_n\right\},$$

где $n_k = 2^k$. При этом А. Я. Хинчин привлекал, по существу, нек-рые идеи из теории рядов по ортогональным системам функций, а А. Н. Колмогоров использовал носящее его имя неравенство для максимумов сумм случайных величин.

Для независимых случайных величин можно дать необходимое и достаточное условие Б. ч. у. з. Полагая

$$Z_k = 2^{-k}\sum_{(k)} X_n,$$

где сумма $\sum_{(k)}$ распространена на те n, для к-рых $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$, это условие можно записать в виде: при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_k \mathsf{P}\{|Z_k - mZ_k| > \varepsilon\} < \infty, \qquad (7)$$

где mZ_k — медиана Z_k (см. [6]). Из (7) при дополнительных ограничениях можно получить условия, выраженные через характеристики отдельных слагаемых. Если, напр., $X_n = O\left(\frac{n}{\ln \ln n}\right)$ или если все X_n распределены по нормальному закону, то условие (7) равносильно следующему: при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_k \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{\mathsf{D}Z_k}\right\} < \infty. \qquad (8)$$

Здесь, в силу независимости X_i,

$$\mathsf{D}Z_k = 2^{-2k}\sum_{(k)} \mathsf{D}X_n.$$

Известны условия применимости Б. ч. у. з. к марковским цепям и процессам и стационарным процессам (см. [7]). Напр., метод Хинчина, примененный к стационарным в широком смысле последовательностям X_n с корреляционной функцией $R(n)$, приводит к следующему утверждению: если ряд $\sum \frac{\ln^2 n}{n}|R(n)|$ сходится, то $\frac{X_0 + \ldots + X_n}{n+1} \to \mathsf{E}X_0$ с вероятностью 1. Для стационарных в узком смысле процессов Б. ч. у. з. иногда толкуют, понимая под этим утверждение, что с вероятностью 1 существует предел

$$Y = \lim_{n\to\infty} \frac{X_0 + \ldots + X_n}{n+1}$$

(случайная величина Y равна условному математич. ожиданию X_0 по отношению к σ-алгебре множеств, инвариантных относительно сдвига; с вероятностью 1 величина Y постоянна и равна $\mathsf{E}X_0$ только для метрически транзитивных процессов). В указанной форме Б. ч. у. з. есть не что иное, как *Биркгофа эргодическая теорема*.

Существуют варианты Б. ч. у. з. для случайных векторов в нормированных линейных пространствах [9]. В качестве исторически первого примера можно привести теорему Гливенко — Кантелли о сходимости эмпирической функции распределения к теоретической.

Представление об отклонениях S_n/n от A_n дает *повторного логарифма закон*.

Лит.: [1] Borel E., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1909, v. 27, p. 247—71; [2] Cantelli F. P., «Atti Accad. naz. Lincei», 1917, v. 26, p. 39—45; [3] Хинчин А. Я., Основные законы теории вероятностей, М., 1927; [4] его же, «C. r. Acad. sci.», 1928, t. 186, p. 285—7; [5] Колмогоров А. Н., «C. r. Acad. sci.», 1930, t. 191, p. 910—2; [6] Прохоров Ю. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, с. 523—36; [7] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [8] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [9] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965.

Ю. В. Прохоров.

БОЛЬШОЕ РЕШЕТО — метод, разработанный Ю. В. Линником в 1941 и позволяющий высеивать последовательности с возрастающим числом выбрасываемых вычетов. Сущность Б. р. заключается в следующем. Пусть задана последовательность целых положительных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_z$, не превосходящих N, простое число $p \leqslant \sqrt{N}$ и вычет l, $0 \leqslant l \leqslant p-1$. Пусть

$$Q(p, l) = \sum_{n_i \equiv l \pmod p,\ n_i \leqslant N} 1.$$

Из статистич. соображений, к-рые могут быть строго обоснованы с помощью основной идеи *кругового метода*, следует, что $Q(p, l) > 0$ для почти всех p и, соответственно, для почти всех l. Пусть A — количество таких p, а $B = B(p)$ — количество соответствующих l.

Ю. В. Линник доказал, что

$$A \geqslant \pi(\sqrt{N}) - \frac{CN}{\tau^2 Z}$$

и

$$B(p) \geqslant (1-\tau)\, p,$$

где $C > 0$ — константа, а $\tau \in (0, 1)$, и вывел теорему о том, что количество простых чисел из сегмента $[N^\varepsilon, N]$, для к-рых нарушается гипотеза И. М. Виноградова о наименьшем квадратичном невычете (см. *Виноградова гипотезы*), может быть только конечным (зависящим от ε).

Имеются усовершенствования метода Б. р., при этом рассматриваются оценки величины $Q(p, l)$ в среднем. Лучший результат принадлежит Э. Бомбьери (E. Bombieri, 1965):

$$\sum_{p \leqslant \sqrt{N}} p \sum_{l=0}^{p-1} \left[Q(p, l) - \frac{Z}{p} \right]^2 \leqslant CNZ.$$

Наиболее значительный вклад в современную аналитич. теорию чисел метод Б. р. дал в сочетании с *плотностным методом*, что привело к доказательству теоремы Виноградова — Бомбьери (1965) — усредненного асимптотич. закона простых чисел в прогрессиях. Эта и другие аналогичные теоремы о среднем нашли широкое применение при решении ряда известных задач теории чисел, заменяя во многих случаях *Римана обобщенную гипотезу*.

Лит.: [1] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [2] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971; [3] Монтгомери Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1974.

Б. М. Бредихин.

БОЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — класс функций, определяемый тем свойством, что они могут быть равномерно приближены на всей действительной оси посредством обобщенных тригонометрич. полиномов вида:

$$\sum a_{n_1 n_2 \ldots n_k} e^{i(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_k\alpha_k)x},$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — любые целые, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — заданные действительные числа. Этот класс функций был впервые рассмотрен и подробно исследован П. Болем [1]. Класс Б. п. п. ф. содержит в себе класс непрерывных 2π-периодических функций, и содержится в классе *Бора почти периодических функций*. П. Боль указал ряд необходимых и достаточных условий почти периодичности функции. В частности, всякая функция вида:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x),$$

где каждая из функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ непрерывна и периодична (периоды их могут быть различны), является Б. п. п. ф.

Лит.: [1] Bohl P., Ueber die Darstellung von Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten, Dorpat, 1893; [2] Bohl P., «J. reine und angew. Math.», 1906, Bd 131, S. 268—321; [3] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953.

Е. А. Бредихина.

БОННЕ СЕТЬ — *изотермическая сеть*, линии к-рой имеют постоянную геодезич. кривизну. Квадрат линейного элемента в параметрах этой сети:

$$ds^2 = \frac{du^2+dv^2}{(U+V)^2},$$

где $U=U(u)$, $V=V(v)$. Б. с. рассмотрена О. Бонне (O. Bonnet) в 1848. *А. Б. Иванов.*

БОННЕ ТЕОРЕМА — 1) Б. т. о существовании и единственности поверхности с заданными первой и второй квадратичными формами [1]: пусть заданы две квадратичные формы:

$$E\,du^2+2F\,dudv+G\,dv^2,$$
$$L\,du^2+2\,M\,dudv+N\,dv^2,$$

первая из к-рых положительно определенная и коэффициенты этих форм удовлетворяют уравнениям Гаусса (см. *Гаусса теорема*) и *Петерсона — Кодацци уравнениям*; тогда существует, и притом единственная с точностью до положения в пространстве поверхность, для к-рой эти формы являются соответственно первой и второй квадратичными формами.

2) Б. т. о диаметре овальной поверхности: если кривизна овальной поверхности во всех ее точках больше или равна $1/A^2$, то внешний диаметр этой поверхности меньше πA; эта оценка не может быть улучшена. Установлена О. Бонне (O. Bonnet, 1855). *А. Б. Иванов.*

3) Б. т. о среднем значении, вторая теорема о среднем значении [2]: пусть $f(x)$, $\varphi(x)$ интегрируемые функции на отрезке $[a, b]$ и пусть $\varphi(x)$ — положительная убывающая функция от x; тогда найдется такое число ξ на отрезке $[a,b]$, для к-рого имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

Если от $\varphi(x)$ требовать только монотонности, то Б. т. утверждает, что на $[a, b]$ найдется такая точка ξ, что выполняется

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Лит.: [1] Bonnet O., «J. École polyt.», 1865, t. 24, p. 204—230; 1867, t. 25, p. 1—151; [2] его же, «J. math.», 1849, t. 14, p. 249—56. *Т. Ю. Попова.*

БОННЕЗЕНА НЕРАВЕНСТВО — одно из уточнений *изопериметрического неравенства* для выпуклых областей на плоскости. Пусть K — выпуклая область на плоскости, r — радиус наибольшего круга, к-рый можно поместить в K, R — радиус наименьшего круга, содержащего K, L — периметр, а F — площадь области K. Тогда справедливо неравенство Боннезена [1]:

$$\Delta = L^2 - 4\pi F \geqslant \pi^2(R-r)^2.$$

Равенство $\Delta=0$ достигается только при $R=r$, т. е. в том случае, когда K есть круг. Обобщения Б. н. см. [2].

Лит.: [1] Bonnesen T., «Math. Ann.», 1921, Bd 84, S. 216; [2] Дискант В. И., «Докл. АН СССР», 1973, т. 213, № 3, с. 519—21. *А. Б. Иванов.*

БОРА КОМПАКТ — пространство X максимальных идеалов алгебры почти периодических по Бору функций (см. *Банахова алгебра*, *Бора почти периодические функции*). Почти периодические по Бору функции на действительной оси R образуют коммутативную C^*-алгебру A. Алгебра A изометрически изоморфна алгебре $C(X)$ всех непрерывных функций на компакте X. Действительная ось R естественно вкладывается в X в качестве всюду плотного подмножества (это вложение, однако, не есть гомеоморфизм). Компакт X обладает структурой связной компактной группы, к-рая отождествляется с группой характеров действительной оси, если последнюю рассмотреть в дискретной топологии. Наличие указанного изоморфизма между алгеброй поч-

ти периодич. функций и алгеброй всех непрерывных функций на Б. к. позволяет упростить доказательства целого ряда классич. теорем. Понятие Б. к. имеет смысл и для алгебр почти периодич. функций на других группах. Для множества условно-периодич. функций с n независимыми фиксированными периодами роль Б. к. играет n-мерный тор с этими периодами.

Лит.: Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., М., 1956. *Е. А. Горин.*

БОРА ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, равномерные почти периодические функции,— класс (U-п. п.) почти периодических функций. Первое определение, данное Х. Бором [1], основано на обобщении понятия периода: функция $f(x)$, непрерывная в интервале $(-\infty, \infty)$, наз. Б. п. п. ф., если для любого $\varepsilon>0$ существует относительно плотное множество ε-почти периодов этой функции (см. *Почти период*). Иначе: $f(x)\in U$-п. п., если для каждого $\varepsilon>0$ существует $L=L(\varepsilon)$ такое, что в каждом интервале длины L найдется хотя бы одно число τ, для к-рого

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon, \quad -\infty<x<\infty.$$

В случае ограниченности $L(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$, Б. п. п. ф. $f(x)$ оказывается непрерывной периодич. функцией. В теории почти периодич. функций применяется также определение Бохнера (см. *Бохнера почти периодические функции*), эквивалентное определению Бора. Функции класса U-п. п. ограничены, равномерно непрерывны на всей действительной оси. Предел $f(x)$ равномерно сходящейся последовательности Б. п. п. ф. $\{f_n(x)\}$ принадлежит классу U-п. п.; этот класс инвариантен по отношению к арифметич. операциям (частное Б. п. п. ф. $f(x)/g(x)\in U$-п. п. при условии $\inf\limits_{-\infty<x<\infty}|g(x)|>\gamma>0$). Если $f(x)\in U$-п. п. и $f'(x)$ равномерно непрерывна на $(-\infty, \infty)$, то $f'(x)\in U$-п. п.; неопределенный интеграл $F(x)=\int_0^x f(t)dt\in U$-п. п., если $F(x)$ ограниченная функция.

Лит.: [1] Bohr H., «Acta math.», 1925, t. 45, p. 29—127; [2] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953. *Е. А. Бредихина.*

БОРА — ФАВАРА НЕРАВЕНСТВО — неравенство, возникшее в связи с задачей Х. Бора [1] об ограниченности на всей действительной оси первообразной почти периодич. функции. Окончательный вид этому неравенству дал Ж. Фавар [2], существенно дополнивший исследования Х. Бора и рассмотревший для фиксированных натуральных чисел r и n произвольную периодич. функцию

$$f(x)=\sum_{k=n}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

с непрерывной производной $f^{(r)}(x)$. Б.— Ф. н. принято наз. неравенство

$$\|f\|_C\leqslant K\|f^{(r)}\|_C,$$

$$\|f\|_C=\max_{x=[0,\,2\pi]}|f(x)|,$$

с наилучшей константой $K=K(n, r)$:

$$K=\sup_{\|f^{(r)}\|_C\leqslant 1}\|f\|_C.$$

Б.— Ф. н. тесно связано с неравенством для наилучших приближений функции и ее r-й производной тригонометрич. полиномами порядка не выше n и с *поперечниками* Колмогорова класса дифференцируемых функций.

Лит.: [1] Bohr H., «C. r. Acad. sci.», 1935, t. 200, № 15, p. 1276—7; [2] Favard J., «Bull. sci. math.», 1937, t. 61, p. 243—56; [3] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965. *Л. В. Тайков.*

БОРДИЗМ, бордантность,— термин, употребляющийся самостоятельно или в составе стандартных

словосочетаний в нескольких родственных смыслах (почти во всех из них вместо Б. раньше говорили о кобордизмах; старая терминология тоже сохранилась).

Простейший вариант: два гладких замкнутых n-мерных многообразия M_0 и M бордантны (соограничивают, или внутренне гомологичны), если существует гладкое компактное $(n+1)$-мерное многообразие W («пленка»), край к-рого состоит из двух многообразий N_0 и N, диффеоморфных, соответственно, M_0 и M посредством нек-рых *диффеоморфизмов*

$$g_0: N_0 \to M_0 \text{ и } g: N \to M.$$

Совокупность многообразий, бордантных друг другу, наз. классами бордизмов, а тройку (W, M_0, M) иногда наз. бордизмом [точнее было бы говорить о пятерке (W, M_0, M, g_0, g)]. Множество классов Б. n-мерных многообразий образует абелеву группу $\mathfrak{N}_n$ относительно несвязного объединения. Нулем в ней служит класс Б., состоящих из многообразий M, к-рые являются границей нек-рого многообразия W [формально говорят о тройке (W, M_0, M) с пустым M_0; другие названия: M — ограничивающее многообразие, M — внутренне гомологично, или бордантно нулю]. Элементом $\mathfrak{N}_n$, обратным данному классу Б., является сам этот класс (т. к. $M \bigcup M$ диффеоморфно границе прямого произведения $M \times [0,1]$). Прямая сумма $\mathfrak{N}_*$ групп $\mathfrak{N}_n$ является коммутативным градуированным кольцом, умножение в к-ром индуцировано прямым произведением многообразий, с единицей, заданной классом Б. точки.

Более сложные варианты — Б. гладких замкнутых многообразий с дополнительной структурой. Напр., два ориентированных многообразия M_0 и M ориентированно бордантны, если они бордантны в прежнем смысле, причем «пленка» W ориентирована, и (в прежних обозначениях) ориентация, индуцированная ориентацией W на N_0 и N (как на частях края), переходит при диффеоморфизмах g_0 и g, соответственно, в исходную ориентацию M и в ориентацию, противоположную исходной ориентации M_0. В этом случае говорят об ориентированных бордизмах, а если надо подчеркнуть отличие от них Б. в предыдущем смысле, последние наз. неориентированными. Аналогично $\mathfrak{N}_n$ и $\mathfrak{N}_*$ вводятся группы ориентированных Б. Ω_n и кольцо $\Omega_* = \Sigma \Omega_n$.

Исторически первый пример — Б. оснащенных многообразий, введенный в 1938 Л. С. Понтрягиным, к-рый показал, что классификация этих Б. эквивалентна вычислению гомотопич. групп сфер $\pi_i(S^n)$, и таким путем смог найти $\pi_{n+1}(S^n)$ и $\pi_{n+2}(S^n)$ (подробное изложение его исследований см. в более поздней публикации [2], элементарное введение — в [4]). Неориентированные и ориентированные Б. были введены в 1951—53 В. А. Рохлиным (см. [3]), вычислившим $\mathfrak{N}_n$ и Ω_n для $n \leqslant 4$. Ранее Л. С. Понтрягин [1] доказал, что если два многообразия бордантны, то у них совпадают характеристич. числа (числа Штифеля — Уитни в неориентируемом случае, числа Штифеля — Уитни и числа Понтрягина — в ориентируемом). (Впоследствии оказалось, что обратное тоже верно.)

Использование в теории Б. современных методов алгебраич. топологии началось с вышедшей в 1954 работы Р. Тома (см. [5], [6]), переоткрывшего применительно к неориентированным и ориентированным Б. связь между Б. и нек-рыми гомотопич. задачами. Так, группа $\mathfrak{N}_n$ изоморфна группе $\pi_{n+r}(\boldsymbol{TBO}(r))$ с достаточно большим r; здесь $\boldsymbol{TBO}(r)$ — *Тома пространство* универсального векторного расслоения со структурной группой $O(r)$. Эта связь позволила Р. Тому полностью вычислить кольцо $\mathfrak{N}_*$ и существенно продвинуть

изучение Ω_*, впоследствии завершенное другими учеными. Напр., $\mathfrak{N}_*$ оказалось кольцом многочленов над полем вычетов mod 2 от образующих x_i размерности i, где i пробегает все положительные числа, не равные 2^s-1, $s\geqslant 1$; известна геометрич. реализация этих образующих (т. е. указаны конкретные многообразия, классы Б. к-рых суть x_i (см. [7]).

Другие варианты Б. многообразия с дополнительной структурой — очень важные Б. квазикомплексных многообразий (наз. также унитарными Б.) (см. [8], [9]), Б. многообразий, на к-рых действует группа преобразований (см. [10]); имеются также варианты несколько иного рода (для кусочно линейных или топологич. многообразий, для комплексов Пуанкаре) и т. д. (см. [11]). Особое положение занимают бордизмы слоений и h-бордизмы (ранее наз. J-эквивалентностями); последние служат для связи дифференциальной и гомотопич. топологии [12].

Дальнейшее развитие теории Б. связано с группами бордизмов топологич. пространства X (короче, Б. пространства X, см. [13]). Они определяются для различных вариантов Б. (ниже приводится простейший случай). Сингулярным n-мерным (под)многообразием пространства X наз. пара (M^n, f), где M^n — замкнутое гладкое многообразие, $f: M^n\to X$ — непрерывное отображение. Две такие пары (M_0, f_0), (M^n, f) бордантны, если M_0 и M бордантны в обычном смысле и (в прежних обозначениях) существует такое непрерывное отображение $h: W\to X$, что $hg_0^{-1}=f_0$, $hg^{-1}=f_0$. (Если отождествить M_0 и M с N_0 и N, то можно просто сказать, что отображение h индуцирует заданные отображения M_0 и M в X). Классы Б. сингулярных многообразий пространства X образуют n-мерную группу Б. $\mathfrak{N}_n(X)$ этого пространства (групповая операция порождена объединением многообразий).

Если X — многообразие размерности $>2n$, то элементы $\mathfrak{N}_n(X)$ наглядно представляются подмногообразиями, как и соответствующие «пленки», в этом отношении Б. пространства X близки к первоначальным попыткам введения гомологий. Если X — точка, то $\mathfrak{N}_n(X)$ сводится к прежнему $\mathfrak{N}_n$. Отображению $\varphi: X\to Y$ соответствуют гомоморфизмы $\varphi_n: \mathfrak{N}_n(X)\to \mathfrak{N}_n(Y)$, порожденные переходом от сингулярных многообразий (M, f) к $(M, \varphi f)$. Функтор, сопоставляющий каждому пространству X группы $\mathfrak{N}_n(X)$ и отображению φ — отображения φ_n, является обобщенной теорией гомологий. В данном случае она сводится к обычным гомологиям, а именно, для любого клеточного полиэдра X

$$\sum \mathfrak{N}_n(X)\cong H_*(X, \mathbb{Z}_2)\otimes \mathfrak{N}_*$$

(справа стоит тензорное произведение градуированных модулей над $\mathbb{Z}_2$), но для других Б. (ориентированных и т. д.) это, вообще говоря, не так. Многие обобщенные теории гомологий могут быть получены посредством так наз. Б. с особенностями (см. [14]).

Наряду с Б. пространства X существуют двойственные им обобщенные когомологии. Введение этих функторов обобщенных гомологий и когомологий сделало желательным то изменение терминологии, о к-ром говорилось в начале статьи: термин «кобордизм» резервируется для обобщенных когомологий, двойственных Б.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Матем. сб.», 1947, т. 21, № 2, с. 233—84; [2] его же, Гладкие многообразия и их применение в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976; [3] Рохлин В. А., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, № 4, с. 3—20; [4] Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология, пер. с англ., М., 1972; [5] Том Р., в кн.: «Расслоенные пространства и их приложения» (сб. переводов), М., 1958, с. 293—351; [6] Милнор Дж., «Математика», 1964, т. 9, № 4, с. 3—40; [7] Dold A., «Math. Z.», 1956, Bd 65, S. 25—35; [8] Milnor J., «Amer. J. math.», 1960, v. 82, p. 505—21; [9] Новиков С. П., «Матем. сб.», 1962, т. 57 [99], с. 406—42; [10] Коннер П., Флойд Э., Гладкие периодические

отображения, пер. с англ., М., 1969; [11] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [12] Милнор Дж., Теорема об h-кобордизме, пер. с англ., М., 1969; [13] Atiyah M., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1961, v. 57, pt 2, p. 200—8; [14] Baas N., «Math. Scand.», 1973, v. 33, № 2, p. 279—302, 302—13. *Д. В. Аносов, М. И. Войцеховский.*

БОРЕЛЕВСКАЯ СИСТЕМА МНОЖЕСТВ (*B* - система), порожденная системой множеств M,— наименьшая (σ,δ)-система множеств $B(M)$, содержащая M. Множества Б. с. м. $B(M)$ наз. *борелевскими множествами* (или *B*-множествами), порожденными системой M. Для каждого порядкового числа $\alpha<\omega_1$ (ω_1 — начальное порядковое число мощности $\aleph_1$) следующим образом определяются борелевские классы M_α: $M_0=M$, M_α при нечетном α состоит из объединений, а при четном α — из пересечений последовательностей множеств, принадлежащих M_β, $\beta<\alpha$. Тогда $B(M)=\bigcup_{\alpha<\omega_1}M_\alpha$. Видоизмененное построение Б. с. м. $B(M)$ получится, если поменять ролями операции пересечения и объединения. Борелевское множество принадлежит в точности классу M_α, если оно принадлежит M_α, но не принадлежит M_β при $\beta<\alpha$ (иногда считают классы непересекающимися, т. е. наз. классом систему $M_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}M_\beta$). *А. Г. Елькин.*

БОРЕЛЕВСКАЯ ФУНКЦИЯ, *B*-функция,— функция, для к-рой все подмножества вида $E(x;\ f(x)\geqslant a)$ из области ее определения являются *борелевскими множествами*. Другие назв. Б. ф.: функции, измеримые по Борелю, *B*-измеримые функции. Операции сложения, умножения и предельного перехода, как и в общем случае измеримых функций, не выводят из класса Б. ф., но из класса Б. ф., в отличие от общего случая, не выводит и взятие суперпозиции двух Б. ф. Более того (см. [1]), если $f(x)$ — измеримая функция на любом пространстве Ω, а g есть Б. ф. на пространстве действительных чисел, то функция $h(x)=g[f(x)]$ измерима на пространстве Ω. Всякая Б. ф. измерима по Лебегу (см. *Измеримая функция*). Обратное неверно. Однако для любой измеримой по Лебегу функции f найдется такая Б. ф. g, что $f(x)=g(x)$ почти всюду (см. [1]). Б. ф. наз. также иногда бэровскими функциями, ибо множество всех Б. ф. совпадает с множеством функций, принадлежащих *Бэра классам* (теорема Лебега, см. [2]). Б. ф. могут быть классифицированы по порядкам борелевских множеств $E(x;\ f(x)\geqslant a)$; полученные классы будут соответствовать классам Бэра.

Понятие Б. ф. обобщается на функции со значениями в любом метрич. пространстве (см. [3]). В этом случае говорят также о *B*-измеримых отображениях. Б. ф., помимо теории множеств и теории функций, находят применение в теории вероятностей (см. [1], [4]).

Лит.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.—Л., 1937; [3] Куратовский К., Топология, т. 1, М., 1966; [4] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974. *В. А. Скворцов.*

БОРЕЛЕВСКИЙ ИЗОМОРФИЗМ, *B* - изоморфизм, — взаимно однозначное отображение f пространства X на пространство Y такое, что f и f^{-1} переводят *борелевские множества* в борелевские. В классе борелевских подмножеств полных сепарабельных метрич. пространств равномощные множества борелевски изоморфны. *А. Г. Елькин.*

БОРЕЛЕВСКИХ МНОЖЕСТВ КРИТЕРИЙ — необходимое и достаточное условие того, чтобы *A-множество* в полном сепарабельном метрич. пространстве было борелевским, заключается в том, что: 1) его дополнение также является *A*-множеством (критерий Суслина), 2) оно представляется в виде объединения непересекающихся слагаемых (критерий Лузина). *А. Г. Елькин.*

БОРЕЛЕВСКОЕ МНОЖЕСТВО, *B* - множество,— множество, к-рое может быть получено в результате не более чем счетной совокупности операций объединения и пересечения открытых и замкнутых множеств топологич. пространства. Более точно, борелевским множеством наз. элемент наименьшего замкнутого относительно дополнений счетно аддитивного класса множеств, содержащего замкнутые множества. Другие названия Б. м.: множества, измеримые по Борелю, *B*-измеримые множества. Открытые и замкнутые множества наз. Б. м. нулевого порядка. Б. м. первого порядка наз. *множества типа* F_σ и G_δ, являющиеся, соответственно, счетными суммами замкнутых и счетными пересечениями открытых множеств. Б. м. второго порядка наз. множества типа $F_{\sigma\delta}$ (пересечение счетного числа множеств типа F_σ) и множества типа $G_{\delta\sigma}$ (сумма счетного числа множеств типа G_δ). Так, по индукции, определяются Б. м. любого конечного порядка. Эта классификация может быть продолжена при помощи *трансфинитных чисел* второго класса, и ею исчерпываются все Б. м. Если α— какое-нибудь трансфинитное число второго класса, то Б. м. класса α наз. все Б. м. порядка α, не являющиеся Б. м. порядка α' ни при каком $\alpha' < \alpha$. Непустота классов Б. м. зависит от основного пространства, в к-ром ведется рассмотрение. В евклидовом, гильбертовом и бэровском пространствах существуют Б. м. любого класса.

Б. м. представляет собой частный случай *A-множеств*. Для того чтобы *A*-множество *E* было Б. м., необходимо и достаточно, чтобы дополнение к *E* также было *A*-множеством (М. Я. Суслин). В пространствах, где введена *Лебега мера*, всякое Б. м. является измеримым по Лебегу. Обратное неверно. В любом сепарабельном пространстве мощности континуум существуют множества, не являющиеся Б. м.

Б. м. введены Э. Борелем [1]; они играют важную роль при изучении *борелевских функций*.

В более общем понимании Б. м.— множество любой *борелевской системы множеств*, порожденной нек-рой системой множеств. Б. м. топологич. пространства порождаются системой замкнутых подмножеств этого пространства.

Лит.: [1] Borel E., Leçons sur les fonctions discontinues, P., 1898; [2] Куратовский К., Топология, т. 1, М., 1966; [3] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [4] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948. *В. А. Скворцов.*

БОРЕЛЕВСКОЕ ПОЛЕ МНОЖЕСТВ, борелевское тело множеств, порожденное системой множеств M,— наименьшая система множеств, содержащая M и замкнутая относительно операций счетного объединения и перехода к дополнению. *А. Г. Елькин.*

БОРЕЛЕВСКОЕ ПОЛЕ СОБЫТИЙ, σ-поле, борелевская алгебра, σ-алгебра событий,— нек-рый фиксированный класс A подмножеств (событий) непустого множества Ω (пространства элементарных событий), образующий *борелевское поле множеств*. *В. В. Сазонов.*

БОРЕЛЯ МЕРА множеств — неотрицательная функция μ подмножеств топологич. пространства X, обладающая следующими свойствами: 1) область ее определения есть σ-алгебра *борелевских множеств* из X, т. е. наименьший класс подмножеств из X, содержащий открытые множества и замкнутый относительно теоретико-множественных операций, производимых в счетном числе; 2) $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$, если $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то есть μ счетно аддитивна. Б. м. μ наз. регулярной, если

$$\mu(E) = \sup_{E \supset F} \mu(F),$$

где F принадлежит классу $\mathcal{F}$ замкнутых подмножеств

из X. Нередко изучение Б. м. связывают с изучением мер Бэра, к-рые отличаются от Б. м. лишь областью их определения: они определены на наименьшей σ-алгебре $\mathscr{B}_0$, относительно к-рой измеримы все непрерывные функции на X. Б. м. μ (соответственно мера Бэра ν) наз. τ-гладкой, если $\mu(F_\alpha)\downarrow 0$ для любой сети $\{F_\alpha\}$ замкнутых множеств, удовлетворяющей условию $F_\alpha\downarrow\varnothing$ (соответственно $\nu(Z_\alpha)\downarrow 0$ для любой сети $\{Z_\alpha\}$ множеств, являющихся нулями непрерывных функций, при условии, что $Z_\alpha\downarrow\varnothing$. Б. м. μ (соответственно мера Бэра ν) наз. плотной, если $\mu(E)=\sup\limits_{E\supset K\in\mathscr{K}}\mu(K)$, где $\mathscr{K}$ — класс компактных подмножеств из X (соответственно $\nu(E)=\sup\limits_{E\supset K\in\mathscr{K}}\nu^*(K)$, где $\nu^*(K)=\inf\limits_{K\subset E_0\in\mathscr{B}_0}\nu(E_0)$). Плотность и τ-гладкость являются ограничениями, обеспечивающими дополнительную гладкость мер, и часто выполняются в конкретных ситуациях. При определенных условиях меры Бэра могут быть продолжены до Б. м. Напр., если X вполне регулярно и хаусдорфово, то всякая τ-гладкая (плотная) конечная мера Бэра может быть продолжена до регулярной τ-гладкой (плотной) конечной Б. м. При изучении мер на локально компактных пространствах Б. м. (соответственно мерами Бэра) наз. иногда меры, определенные на σ-кольце множеств, порожденном компактными (соответственно компактными G_δ) множествами, и конечные на компактных множествах. Мерой Бореля на прямой часто наз. меру, определенную на борелевских множествах и такую, что ее значение на произвольном отрезке равно длине этого отрезка.

Лит.: [1] Варадарайн В. С., «Матем. сб.», 1961, т. 55, № 1, с. 35—100; [2] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [3] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969. *В. В. Сазонов.*

БОРЕЛЯ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования функциональных рядов, предложенный Э. Борелем [1]. Пусть дан числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \qquad (*)$$

S_n — его частные суммы и S — действительное число. Ряд (*) суммируется методом Бореля (B-методом) к числу S, если

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}S_k = S.$$

Существует интегральный метод суммирования Бореля, B'-метод: если

$$\int_0^{\infty} e^{-u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k u^k}{k!}\,du = S,$$

то говорят, что ряд (*) суммируется B'-методом к числу s. Условия, при к-рых B-метод и B'-метод равносильны, см. [2], с. 229. B-метод возник в связи с аналитич. продолжением функции, регулярной в точке. Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

регулярна в точке O и C — совокупность всех ее особых точек. Через каждую точку $P\in C$ проведем отрезок OP и прямую L_P, проходящую через точку P перпендикулярно к OP. Совокупность точек, лежащих по одну сторону с O от каждой из прямых L_P, обозначим Π. Тогда граница Γ области Π наз. многоугольником Бореля функции $f(z)$, а область Π — его внутренней областью. Имеет место теорема: ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

суммируется B'-методом в области Π и не суммируется в области Π^* — дополнении к Π (см. [2]).

Лит.: [1] Borel E., «Ann. scient. École norm. supér.», 1899, ser. 3, t. 16, p. 9—136; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951. *А. А. Захаров.*

БОРЕЛЯ ПОДГРУППА, борелевская подгруппа,— максимальная связная разрешимая алгебраич. подгруппа *линейной алгебраической группы* G. Напр., подгруппа всех невырожденных верхних треугольных матриц является Б. п. в полной линейной группе $GL(n)$. Систематич. исследование максимальных связных разрешимых подгрупп алгебраич. групп впервые проведено А. Борелем [1]. Б. п. может быть эквивалентным образом определена как минимальный элемент множества параболических подгрупп, т. е. таких алгебраич. подгрупп H группы G, для к-рых факторногообразие G/H проективно. Все Б. п. группы G сопряжены, причем, если Б. п. B_1, B_2 и группа G определены над полем k, то B_1 и B_2 сопряжены посредством элемента из G_k. Пересечение любых двух Б. п. группы G содержит максимальный тор группы G; если это пересечение есть в точности максимальный тор, то такие Б. п. наз. противоположными. Противоположные Б. п. существуют в G тогда и только тогда, когда G *редуктивная группа*. Если G связна, то объединение всех ее Б. п. совпадает с ней самой и всякая параболич. подгруппа совпадает со своим нормализатором в G. В этом случае Б. п. является максимальной среди всех (а не только алгебраических и связных) разрешимых подгрупп группы G. Однако, вообще говоря, могут существовать максимальные разрешимые подгруппы в G, не являющиеся Б. п. Коммутант Б. п. B совпадает с ее унипотентной частью B_u, а нормализатор B_u в G совпадает с B. Если характеристика основного поля равна 0, а $\mathfrak{G}$ есть алгебра Ли группы G, то подалгебра $\mathfrak{S}$ алгебры $\mathfrak{G}$, являющаяся алгеброй Ли Б. п. B группы G часто наз. Бореля подалгеброй (или борелевской подалгеброй) в $\mathfrak{G}$. Подалгебры Бореля в алгебре $\mathfrak{G}$— это в точности ее максимальные разрешимые подалгебры. Для k-определенной алгебраич. группы G над произвольным полем k обобщением Б. п. над k являются минимальные параболич. k-определенные подгруппы, к-рые сопряжены посредством элементов из G_k (см. [2]).

Лит.: [1] Borel A., «Ann. Math.», 1956, v. 64, № 1, p. 20—82; [2] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111.

В. П. Платонов.

БОРЕЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$\gamma(t)=\int_0^\infty f(z)\,e^{-zt}\,dz,$$

где $f(z)$— целая функция экспоненциального типа. Б. п. есть частный случай *Лапласа преобразования*. Функция $\gamma(t)$ наз. ассоциированной функцией (по Борелю) с $f(z)$. Если

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\,z^n,$$

то

$$\gamma(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu t^{-(\nu+1)};$$

ряд сходится при $|t|>\sigma$, где σ — тип функции $f(z)$. Пусть $\overline{D}$— наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности функции $\gamma(t)$,

$$K(\varphi)=\max_{z\in\overline{D}}\operatorname{Re}\left(ze^{-i\varphi}\right)$$

— опорная функция множества $\overline{D}$ и $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $f(z)$. Тогда $K(\varphi)=h(-\varphi)$. Если интегрирование в Б. п. происходит по лучу $\arg z=\varphi$, то соответствующий интеграл сходится в полуплоскости $x\cos\varphi+y\sin\varphi>K(-\varphi)$. Пусть C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$. Тогда

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\gamma(t)\,e^{zt}\,dt.$$

При дополнительных условиях из этой формулы могут быть выведены и другие представления. Так, пусть

имеется класс целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leqslant\sigma$, для к-рых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Этот класс совпадает с классом функций $f(z)$, допускающих представление

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izt}\varphi(t)\,dt,$$

где $\varphi(t) \in L^2(-\sigma, \sigma)$.

Лит.: [1] Borel E., Leçons sur les séries divergentes, 2 éd., P., 1928; [2] Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.

А. Ф. Леонтьев.

БОРЕЛЯ ТЕОРЕМА о неподвижной точке: связная разрешимая алгебраич. группа G, действующая регулярно (см. *Алгебраическая группа преобразований*) на непустом полном алгебраич. многообразии V над алгебраически замкнутым полем k имеет в V неподвижную точку. Из Б. т. следует сопряженность *Бореля подгрупп* алгебраич. групп (теорема Бореля — Морозова). Б. т. доказана А. Борелем [1]. Б. т. обобщается на случай произвольного (не обязательно алгебраически замкнутого) поля k: пусть V — полное многообразие, определенное над полем k, на к-ром k-регулярно действует связная разрешимая *k-разложимая группа* G, тогда множество рациональных k-точек $V(k)$ либо пусто, либо содержит точку, неподвижную относительно группы G. Отсюда получается обобщение теоремы о сопряженности подгрупп Бореля: если поле k совершенно, то максимальные связные разрешимые k-разложимые подгруппы связной k-определенной алгебраич. группы H сопряжены друг с другом при помощи элементов группы k-точек группы H (см. [2]).

Лит.: [1] Borel A., «Ann. Math.», 1956, v. 64, № 1, p. 20—82; [2] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [3] Морозов В. В., «Докл. АН СССР», 1942, т. 36, № 3, с. 91—4.

В. П. Платонов.

БОРЕЛЯ УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ — исторически первый вариант *больших чисел усиленного закона*, сформулированный и доказанный Э. Борелем [1] применительно к схеме Бернулли (см. *Бернулли испытания*). Пусть независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ одинаково распределены и принимают два значения 0 и 1 с вероятностью 1/2 каждое, тогда $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ есть число успехов в схеме Бернулли с вероятностью успеха 1/2. Э. Борель [1] доказал, что с вероятностью 1

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

при $n\to\infty$. Впоследствии (1914) Г. Харди и Дж. Литлвуд (G. Hardy, J. Littlewood) показали, что почти наверное

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left|S_n-\frac{n}{2}\right|}{\sqrt{n\ln\ln n}} < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

а затем А. Я. Хинчин (1922) доказал более сильный результат:

$$\mathrm{P}\left[\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left|S_n-\frac{n}{2}\right|}{\sqrt{n\ln\ln n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right]=1.$$

См. также *Повторного логарифма закон.*

Лит.: [1] Borel E., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1909, v. 27, p. 247—71; [2] Кац М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963.

А. В. Прохоров.

БОРЕЛЯ — КАНТЕЛЛИ ЛЕММА — одно из часто используемых утверждений о бесконечных последовательностях случайных событий. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — последовательность нек-рых событий и A — событие, состоящее в наступлении конечного числа из

событий A_n, $n=1, 2, \ldots$ Б.— К. л. утверждает, что при условии

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(A_n) < \infty \qquad (*)$$

справедливо равенство

$$p(A)=1.$$

Если события A_n взаимно независимы, то $p(A)=1$ или 0 в зависимости от того, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p(A_n)$, т. е. в этом случае для $p(A)=1$ условие (*) является необходимым и достаточным (так наз. критерий Бореля «нуль или единица», см. *Нуль-единица закон*). Известны распространения последнего критерия на нек-рые классы зависимых событий. Б.— К. л. используется, напр., при доказательстве *больших чисел усиленного закона*.

Лит.: [1] Borel E., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1909, v. 27, p. 247—71; [2] Cantelli F. P., «Atti Accad. naz. Lincei», 1917, v. 26; [3] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962, с. 242—43.

А. В. Прохоров.

БОРЕЛЯ — ЛЕБЕГА ТЕОРЕМА о покрытии: пусть A — ограниченное замкнутое множество в R^n и G его открытое покрытие, т. е. система открытых множеств, объединение к-рых включает A; тогда существует конечная подсистема множеств $\{G_i\}$, $i=1, 2, \ldots, N$, из G (подпокрытие), также являющаяся покрытием A, т. е.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} G_i.$$

Б.— Л. т. обратима: если $A \subset R^n$ и из любого открытого покрытия A можно выделить конечное подпокрытие, то A замкнуто и ограничено. Возможность выделения конечного подпокрытия из любого открытого покрытия множества A часто принимается за определение множества A как компакта. В такой терминологии Б.— Л. т. вместе с обратной принимает вид: чтобы множество $A \subset R^n$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы A было ограниченным и замкнутым. Б.— Л. т. была в 1898 доказана Э. Борелем (см. [1]) в случае, когда A есть отрезок $[a, b] \subset R^1$ и G есть система интервалов, окончательную форму получила в 1900—10 в работах А. Лебега (см. [2]). Б.— Л. т. называют иногда также леммой Бореля, леммой Гейне—Бореля, теоремой Гейне—Бореля.

Лит.: [1] Borel E., Leçons sur la théorie des fonctions, 3 éd., P., 1928; [2] Рудин У., Основы математического анализа, пер. с англ., М., 1966.

И. А. Виноградова.

БОРСУКА ПРОБЛЕМА — одна из основных задач комбинаторной геометрии: существует ли для каждого ограниченного множества *разбиение* диаметра $d>0$ евклидова n-мерного пространства на не более чем $n+1$ подмножеств, диаметр каждого из к-рых меньше d? Б. п. была сформулирована К. Борсуком [1] в связи с невозможностью разбиения n-мерного симплекса и n-мерного шара из R^n на n частей меньшего диаметра. Б. п. положительно решается для случаев $n=2$, $n=3$; для случаев $n>3$ имеются частичные результаты. Напр., Б. п. положительно решается для каждого ограниченного гладкого выпуклого тела из R^n [2]. Доказано, что решение Б. п. сводится к случаю тел постоянной ширины. Если $a(F)$ — наименьшее число частей диаметра, меньшего d, на к-рое разбивается множество $F \subset R^n$, то для фигуры $F \subset R^2$ диаметра d равенство $a(F)=3$ верно в том и только том случае, когда в R^2 существует единственная фигура постоянной ширины d, содержащая F (см. [3]). Для $n>2$ этот факт непосредственно не обобщается. Б. п. тесно примыкает к *освещения задачам* и к *Хадвигера гипотезе*, представляющей обобщение Б. п. на случай, когда R^n заменяется конечномерным нормированным пространством.

Лит.: [1] Borsuk K., «Fundam. math.», 1933, t. 20, p. 177—90; [2] Грюнбаум Б., Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел, пер. с англ., М., 1971; [3] Болтянский В. Г., «Colloq. math.», 1970, v. 21, № 2, 253—63.

П. С. Солтан.

БОТТА ТЕОРЕМА ПЕРИОДИЧНОСТИ — основная теорема *K-теории*, в простейшем виде утверждающая, что для любого (компактного) пространства X существует изоморфизм между кольцами $K(X) \otimes K(S^2)$ и $K(X \times S^2)$. Более общо, если L — линейное комплексное расслоение над X, $P(L \oplus 1)$ — проективизация расслоения $L \oplus 1$, то кольцо $K(P(L \oplus 1))$ представляет собой $K(X)$-алгебру с одной образующей $[H]$ и единственным соотношением $([H]-[1])([L][H]-[1])=0$; здесь $[E]$ — образ расслоения E в кольце $K(X)$, H^{-1} — расслоение Хопфа над $P(L \oplus 1)$. Этот факт равносилен существованию изоморфизма Тома в K-теории для комплексных векторных расслоений. В частности, $P(1 \oplus 1) = X \times S^2$. Б. т. п. впервые доказана Р. Боттом [1] с использованием теории Морса и получила переформулировку в терминах K-теории [6]; также доказано утверждение, аналогичное Б.т.п., для вещественных расслоений.

Б. т. п. устанавливает закономерность свойства стабильного гомотопич. типа унитарной группы U_n, состоящую в том, что $\Omega^2 U_n \sim U_n$, где ΩX — пространство петель на X, $\sim$ — слабая гомотопич. эквивалентность, в частности $\pi_i(U) = \pi_{i+2}(U)$ для $i=0, 1, \ldots$, π_i есть i-я гомотопич. группа; аналогично, для ортогональной группы O_n:

$$\Omega^8 O_n \sim O_n, \ \pi_i(O) = \pi_{i+8}(O).$$

Лит.: [1] Bott R., «Ann. math.», 1959, v. 70, p. 313—37; [2] Милнор Дж., Теория Морса, пер. с англ., М., 1965; [3] Атья М., Лекция по K-теории, пер. с англ., М., 1967; [4] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [5] Moore I. C., On the periodicity theorem for complex vector bundles, Seminaire H. Cartan, 1959—60; [6] Atiyah M., Bott R., «Acta math.», 1964, v. 112, p. 229—47.

А. Ф. Щекутьев.

БОХНЕРА ИНТЕГРАЛ — интеграл от функции со значениями в банаховом пространстве по скалярной мере. Б. и. принадлежит к так наз. *сильным интегралам*.

Пусть $F(X; E, \mathfrak{B}, \mu)$ — векторное пространство функций $x(t)$, $t \in E$, со значениями в банаховом пространстве X, заданных на пространстве $(E, \mathfrak{B}, \mu)$ со счетно аддитивной скалярной мерой μ на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ подмножеств множества E. Функция $x_0(t) \in F$ наз. п р о с т о й, если

$$x_0(t) = \begin{cases} x_i, \ t \in B_i \in \mathfrak{B}, \ B_i \cap B_j = \varnothing, \ i \neq j; \ i, j = 1, \ldots, N, \\ 0, \ t \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i. \end{cases}$$

Функция $x(t) \in F$ наз. с и л ь н о и з м е р и м о й, если существует последовательность $\{x_n(t)\}$ простых функций и $\|x(t) - x_n(t)\| \to 0$ почти всюду относительно меры μ на E. В этом случае скалярная функция $\|x(t)\|$ является $\mathfrak{B}$-измеримой. Для простой функции $x_0(t)$

$$\int_E x_0(t)\, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} x_i \mu(B_i).$$

Функция $x(t)$ наз. и н т е г р и р у е м о й п о Б о х н е р у, если она сильно измерима и если для любой аппроксимирующей последовательности $\{x_n(t)\}$ простых функций

$$\lim_{n \to \infty} \int_E \| x(t) - x_n(t) \| \, d\mu = 0.$$

Для такой функции и н т е г р а л о м Б о х н е р а по множеству $B \in \mathfrak{B}$ наз.

$$\int_B x(t)\, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \int_E \chi_B(t)\, x_n(t)\, d\mu,$$

где $\chi_B(t)$ — характеристич. функция множества B, а предел понимается в смысле сильной сходимости в банаховом пространстве X. Этот предел существует и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности простых функций.

К р и т е р и й и н т е г р и р у е м о с т и п о Б о х н е р у: для того чтобы сильно измеримая функция $x(t) \in F$ была интегрируема по Бохнеру, необходи-

мо и достаточно, чтобы норма этой функции была интегрируема, т. е.

$$\int_B \|x(t)\|\, d\mu < \infty.$$

Множество функций, интегрируемых по Бохнеру, образует векторное подпространство $\mathscr{L}$ пространства F, а Б. и. есть аддитивный и однородный оператор на этом подпространстве.

Свойства Б. и.:

1) $$\left\| \int_B x(t)\, d\mu \right\| \leqslant \int_B \| x(t) \|\, d\mu;$$

2) Б. и. есть счетно аддитивная и абсолютно непрерывная функция множеств σ-алгебры $\mathfrak{B}$, т. е.

а) $$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i} x(t)\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_i} x(t)\, d\mu,$$

$$B_i \in \mathfrak{B},\ B_i \cap B_j = \varnothing,\ i \neq j,\ \mu(B_i) < \infty;$$

б) $\left\| \int_B x(t)\, d\mu \right\| \longrightarrow 0$ при $\mu(B) \longrightarrow 0$ равномерно по $B \in \mathfrak{B}$;

3) если $x_n(t) \in F$, $x_n(t) = X(t)$ почти всюду относительно меры μ на $B \in \mathfrak{B}$ и $\|x_n(t)\| \leqslant f(t)$ почти всюду относительно μ на B, причем

$$\int_B f(t)\, d\mu < \infty, \text{ то } x(t) \in \mathscr{L}$$

и

$$\int_B x_n(t)\, d\mu \longrightarrow \int_B x(t)\, d\mu;$$

4) пространство $\mathscr{L}$ полно относительно *сходимости по норме*

$$\left\| x(t) - y(t) \right\| = \int_B \| x(t) - y(t) \|\, d\mu;$$

5) если T — замкнутый линейный оператор из банахова пространства x в банахово пространство y и

$$x(t) \in \mathscr{L}(x;\ E,\ \mathfrak{B},\ \mu), \quad Tx(t) \in \mathscr{L}(y;\ E,\ \mathfrak{B},\ \mu),$$

то

$$\int_B Tx(t)\, d\mu = T \int_B x(t)\, d\mu;$$

в случае ограниченности T условие

$$Tx(t) \in \mathscr{L}(y;\ E,\ \mathfrak{B},\ \mu)$$

выполняется автоматически ([3]—[5]).

Б.и. введен С. Бохнером [1]. Эквивалентные определения даны Т. Гильденбрандтом [2] и Н. Данфордом (интеграл D_0).

Лит.: [1] Bochner S., «Fundam. math.», 1933, t. 20, p. 262—76; [2] Hildebrandt T., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 59; p. 111—39; [3] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [4] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., [2 изд.], М., 1962; [5] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы, пер. с англ., т. 1 — Общая теория, М., 1962.

В. И. Соболев.

БОХНЕРА ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — функции, эквивалентные *Бора почти периодическим функциям*; определение дано С. Бохнером [1]. Непрерывная на интервале $(-\infty, \infty)$ функция $f(x)$ наз. Б. п. п. ф., если семейство функций $\{f(x+h)\}$, $-\infty < h < \infty$ компактно в смысле равномерной сходимости на $(-\infty, \infty)$, т. е. если из каждой бесконечной последовательности $f(x+h_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $(-\infty, \infty)$ к $f(x)$. Определение С. Бохнера широко применяется в теории почти периодич. функций; в частности, оно служит отправным пунктом в абстрактных обобщениях понятия почти периодичности.

Лит.: [1] Bochner S., «Math. Ann.», 1926, Bd 96, S. 119—47; S. 383—409; [2] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953.

Е. А. Бредихина.

БОХНЕРА — МАРТИНЕЛЛИ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ, Мартинелли — Бохнера представ-

ление, Мартинелли — Бохнера формула, — интегральное представление голоморфных функций, определяемое следующим образом (см. [1], [2]). Пусть функция f голоморфна в области $D\subset\mathbb{C}^n$ с кусочно гладкой границей ∂D и непрерывна в ее замыкании $\bar{D}$. Тогда выражение

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n}}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{n}(\bar{\zeta}_j-\bar{z}_j)\,d\bar{\zeta}_1\wedge d\zeta_1\wedge\ldots\wedge[d\bar{\zeta}_j]\wedge d\zeta_j\wedge\ldots$$

$$\ldots\wedge d\bar{\zeta}_n\wedge d\zeta_n=\begin{cases}f(z), & \text{если } z\in D,\\ 0, & \text{если } z\notin\bar{D},\end{cases}\qquad(*)$$

где $[d\bar{\zeta}_j]$ означает, что член $d\bar{\zeta}_j$ следует опустить, наз. Б.—М. п. При $n=1$ Б.—М. п. совпадает с интегральной формулой Коши (см. *Коши интеграл*), однако при $n>1$ его ядро не является голоморфным по z, и этим объясняется ограниченность применения Б.—М. п. в теории функций многих комплексных переменных. Ядром Б.—М. п. является дифференциальная форма по ζ бистепени $(n,\ n-1)$:

$$\omega(\zeta,\ z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\,\frac{1}{|\zeta-z|^{2n}}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{n}(\bar{\zeta}_j-\bar{z}_j)\,d\bar{\zeta}_1\wedge d\zeta_1\wedge\ldots[d\bar{\zeta}_j]\wedge d\zeta_j\wedge\ldots\wedge d\bar{\zeta}_n\wedge d\zeta_n,$$

определенная в $\mathbb{C}^n$, с особенностью в точке $\zeta=z$, $\bar{\partial}$-замкнутая (т. е. $\bar{\partial}\omega=0$) вне особенности. При $n>1$ форма ω равна $\partial\omega'(\zeta,\ z)$, где

$$\omega'(\zeta,\ z)=-\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n}\cdot\frac{1}{|\zeta-z|^{2n-2}}\sum_{j=1}^{n}(\Pi_{k\neq j}\,d\bar{\zeta}_k\wedge d\zeta_k)$$

— форма бистепени $(n-1,\ n-1)$, коэффициент к-рой является фундаментальным решением уравнения Лапласа; здесь

$$\partial\varphi=\sum dz_k\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}\ \text{ и }\ \bar{\partial}\varphi=\sum d\bar{z}_k\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_k}.$$

Следующее интегральное представление, обобщающее формулу (*), является аналогом формулы Коши—Грина (см. *Коши интеграл*): если функция f непрерывно дифференцируема в замыкании области $D\subset\mathbb{C}^n$ с кусочно гладкой границей ∂D, то для всякой точки $z\in D$

$$f(z)=\int_{\partial D}f(\zeta)\,\omega(\zeta,\ z)-\int_D\bar{\partial}f(\zeta)\wedge\omega(\zeta,\ z).$$

Функция

$$\hat{f}(z)=\int_\Gamma f(\zeta)\,\omega(\zeta,\ z),$$

где Γ — гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{C}^n$ и f — функция на Γ, интегрируемая по мере Лебега, наз. интегралом типа Бохнера — Мартинелли. Как и для интегралов типа Коши, для интегралов типа Бохнера — Мартинелли справедлива формула Сохоцкого при обычных ограничениях на Γ и f. Интеграл типа Бохнера — Мартинелли является комплексной функцией, гармонической всюду вне Γ; в общем случае эта функция голоморфна лишь при $n=1$. Если $\Gamma=\partial D$, то при $n\geqslant 1$ условие $\hat{f}(z)\equiv 0$ вне $\bar{D}$ эквивалентно голоморфности $\hat{f}$ в D.

Б.—М. п. используется для вывода других интегральных представлений (напр., *Бергмана — Вейля представления*), для голоморфного продолжения с границы, а также в теории граничных значений голоморфных функций нескольких комплексных переменных. Б.—М. п. получено С. Бохнером и Э. Мартинелли (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Bochner S., «Ann. Math.», 1943, v. 44, №4, p. 652—673; [2] Martinelli E., «Rend. Accad. Italia», 1938, v. 9, p. 269—83; [3] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. М. Чирка.

БОЧЕЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО — локально выпуклое линейное топологич. пространство, обладающее рядом свойств *банаховых пространств* и *Фреше пространств* без предположения о метризуемости; это один из наиболее широких классов пространств, в к-рых справедлива *Банаха — Штейнхауза теорема*. Б. п. были впервые введены Н. Бурбаки (см. [1]).

Множество A векторного пространства E наз. у р а в н о в е ш е н н ы м м н о ж е с т в о м, если $\alpha x \in A$ для всех $x \in A$ и α, для к-рого $|\alpha| \leqslant 1$. Множество $A \subset E$ наз. п о г л о щ а ю щ и м м н о ж е с т в о м, если оно поглощает каждую точку из E, т. е. если для каждого $x \in E$ существует такое $\alpha > 0$, что $\alpha x \in A$.

Б о ч к о й в линейном топологич. пространстве наз. замкнутое, уравновешенное поглощающее выпуклое множество. Б о ч е ч н ы м п р о с т р а н с т в о м наз. линейное топологич. пространство, наделенное локально выпуклой топологией, в к-рой всякая бочка является окрестностью нуля. Пространства Фреше и, в частности, банаховы пространства служат примерами Б.п. Важный класс Б. п., наделенных особенно замечательными свойствами, составляют *Монтеля пространства*.

С в о й с т в а Б. п. Фактор пространство, прямая сумма и индуктивный предел Б. п. являются Б. п. Всякое поточечно ограниченное множество линейных непрерывных изображений Б. п. в локально выпуклое линейное топологич. пространство равностепенно непрерывно. В пространстве, сопряженном к Б. п., ограниченное множество в слабой топологии будет ограниченным в сильной топологии и компактным в слабой топологии. Замкнутая выпуклая оболочка компактного множества, лежащего в пространстве, сопряженном к Б. п., компактна.

Лит.: [1] Б у р б а к и Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [2] Э д в а р д с Р., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969. *В. М. Тихомиров.*

БРАНДТА ПОЛУГРУППА — полугруппа S с нулем, в к-рой каждому ненулевому элементу a соответствуют такие однозначно определенные элементы e, f, $a' \in S$, что $ea = af = a$ и $a'a = f$, и для любых двух ненулевых идемпотентов g_1, $g_2 \in S$ имеет место $g_1 S g_2 \neq 0$. Элементы e и f, указанные в определении, на самом деле будут идемпотентами, причем $fa' = a'e = a'$ и $aa' = e$. Кроме того, в Б. п. каждое из условий $ac = bc \neq 0$, $ca = cb \neq 0$ влечет $a = b$, а условия $ab \neq 0$ и $bc \neq 0$ влекут $abc \neq 0$.

Частичный группоид, получающийся выкидыванием нуля из Б. п., наз. г р у п п о и д о м Б р а н д т а. Это понятие было введено Г. Брандтом в [1], фактически там же было введено понятие Б. п. Понятие группоида Брандта является абстракцией системы нормальных идеалов полупростых линейных алгебр относительно так наз. собственного умножения (см. [2], гл. 6, а также [3], гл. 6). Роль Б. п. для теории полугрупп определяется тем, что Б. п. — это в точности вполне 0-простые *инверсные полугруппы* (см. *Вполне простая полугруппа*). Полугруппа будет Б. п. тогда и только тогда, когда она изоморфна *рисовской полугруппе матричного типа* с единичной сэндвич-матрицей над группой с присоединенным нулем.

Лит.: [1] B r a n d t H., «Math. Ann.», 1927, Bd 96, S. 360—66; [2] D e u r i n g M., Algebren, B., 1935; [3] Д ж е к о б с о н Н., Теория колец, пер. с англ., М., 1947; [4] С у ш к е в и ч А. К., Теория обобщенных групп, Хар.—К., 1937; [5] К л и ф ф о р д А., П р е с т о н Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972. *Л. Н. Шеврин.*

БРАУЭРА ГРУППА п о л я k — группа классов конечномерных *центральных простых алгебр* над полем k, относительно эквивалентности, определенной следующим образом. Две центральные простые k-алгебры A и B конечного ранга эквивалентны, если существуют такие целые положительные числа m и n, что тензорные произведения $A \otimes_k M_m(k)$ и $B \otimes_k M_n(k)$ являются изоморфными k-алгебрами (здесь $M_r(k)$ алгебра квадратных матриц порядка r над k). Тензорное умножение алгебр

индуцирует на множестве классов эквивалентных центральных простых конечномерных алгебр структуру абелевой группы, к-рая и наз. Б. г. поля k и обозначается $\mathrm{Br}k$. Нулевым элементом этой группы служит класс полных матричных алгебр, а обратным элементом к классу алгебры A — класс ее инверсной алгебры. Каждый ненулевой класс содержит ровно одну, с точностью до изоморфизма, k-алгебру с делением (т. е. тело над k).

Б. г. была определена и изучалась в серии работ Р. Брауэра (R. Brauer), Э. Нётер (E. Noether), А. Альберта (A. Albert), Х. Хассе (H. Hasse) и др. начиная с 20-х гг. 20 в. (см., напр., [6]). Наиболее законченные результаты, вплоть до полного вычисления Б. г., были получены для числовых полей в связи с развитием *полей классов теории*. В терминах Б. г. формулируется общая форма закона взаимности.

Б. г. равна 0 для любого сепарабельно замкнутого поля и любого конечного поля. Для поля действительных чисел Б. г. есть циклич. группа 2-го порядка и ее ненулевой элемент — класс алгебры кватернионов. Если k — поле p-адических чисел или любое полное дискретно нормированное локально компактное поле, то его Б. г. изоморфна $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (здесь $\mathbf{Q}$ — аддитивная группа рациональных чисел, $\mathbf{Z}$ — аддитивная группа целых чисел). Этот факт занимает важное место в локальной теории полей классов.

Пусть k — поле алгебраич. чисел конечной степени или поле алгебраич. функций от одной переменной с конечным полем констант. Тогда имеет место точная последовательность групп:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}\, k \xrightarrow{\mathrm{inv}} \sum\nolimits_{\nu} \mathrm{Br}\, k_{\nu} \xrightarrow{\Sigma} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow 0,$$

где ν пробегает всевозможные нормирования поля k, k_ν — соответствующие пополнения поля k, гомоморфизм inv индуцируется естественными вложениями $k \to k_\nu$. Образ элемента из $\mathrm{Br}\, k$ в $\mathrm{Br}\, k_\nu$ наз. *локальным инвариантом*, гомоморфизм Σ является суммированием локальных инвариантов. Этот факт устанавливается в глобальной теории полей классов. Если k — поле алгебраич. функций от одной переменной над алгебраически замкнутым полем констант, то его Б. г. нулевая (*теорема Тзена*). Случай произвольного поля констант разобран в [4] и [7].

Б. г. функториально зависит от k, т. е. если K — расширение поля k, то определен гомоморфизм $\mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Br}K$. Его ядро, обозначаемое $\mathrm{Br}(K/k)$, состоит из классов алгебр, распадающихся над K.

Конструкции скрещенных произведений с помощью систем факторов (см. [5]) приводят к когомологич. интерпретации Б. г. Для любого нормального расширения K/k имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Br}\,(K/k) \cong H^2(K,\ K^*),$$

где $H^2(K,\ K^*)$ — группа двумерных когомологий Галуа с коэффициентами в мультипликативной группе K^* поля K. Более того, группа $\mathrm{Br}k$ изоморфна $H^2(\bar{k},\ \bar{k}^*)$, где $\bar{k}$ — сепарабельное замыкание поля k. Сопоставление центральной простой алгебре ее класса в Б. г. осуществляется при помощи когранично́го оператора

$$\delta: H^1(K,\ \mathrm{PGL}(n,\ K)) \to H^2(K,\ K^*)$$

в когомологич. последовательности, соответствующей точной последовательности групп

$$1 \to K^* \to \mathrm{GL}(n,\ K) \to \mathrm{PGL}(n,\ K) \to 1,$$

где $\mathrm{GL}(n,\ K)$ и $\mathrm{PGL}(n,\ K)$ — линейная и проективная группы матриц порядка $n \times n$. Здесь группа $H^1(K,\ \mathrm{PGL}(n,\ K))$ интерпретируется как множество классов с точностью до k-изоморфизма центральных простых алгебр ранга n^2 над полем k, распадающихся над k, или как множество классов k-изоморфных *Брауэра* —

Севери многообразий размерности $n-1$, имеющих K-точку.

Б. г. всегда является периодической группой. Порядок любого ее элемента делит число n, где n^2 — ранг тела, представляющего этот элемент.

Когомологич. интерпретация Б. г. позволяет рассматривать ее как группу классов центральных расширений группы Галуа сепарабельного замыкания $\bar{k}/k$ при помощи группы $\bar{k}^*$.

Обобщением понятия Б. г. является г р у п п а Б р а у э р а — Г р о т е н д и к а, определяемая аналогично Б. г. с заменой центральных простых алгебр на алгебры Адзумая (см. [7]).

Лит.: [1] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [2] Б у р б а к и Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [3] С е р р Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [4] Ф а д д е е в Д. К., «Вестник Ленингр. ун-та», 1957, № 7, в. 2, с. 45—51; [5] Ч е б о т а р е в Н. Г., Введение в теорию алгебр, М.— Л., 1949; [6] D e u r i n g M., «Algebren», 2 Aufl., B., 1968, Bd 4; [7] G r o t h e n d i e c k A., в кн.: Dix exposés sur la cohomologie des schémax, Amst., 1968, p. 46—188.

В. А. Исковских.

БРАУЭРА РЕШЕТКА, Б р а у э р а с т р у к т у р а, Б р а у э р а а л г е б р а, — *дистрибутивная решетка*, в к-рой для каждой пары элементов a, b существует элемент, наз. п с е в д о р а з н о с т ь ю (часто обозначаемый через $a \overset{*}{-} b$), являющийся наименьшим среди элементов c со свойством $b+c \geqslant a$. Возможно эквивалентное описание Б. р. как многообразия *универсальных алгебр* с тремя бинарными операциями $\bigcup$, $\bigcap$ и $\overset{*}{-}$, удовлетворяющими нек-рым аксиомам. Термин «Брауэра алгебра» был введен ввиду наличия связи Б. р. с *интуиционистской логикой* Брауэра (L. E. J. Brouwer). Чаще вместо Б. р. используются так наз. п с е в д о б у л е в ы а л г е б р ы, теория к-рых двойственна теории Б. р. Любая Б. р. превращается в псевдобулеву алгебру при введении нового порядка $(a \leqslant' b) \rightleftarrows (b \leqslant a)$, новых объединений и пересечений по формулам

$$(a \bigcup' b) \rightleftarrows (a \bigcap b), \quad (a \bigcap' b) \rightleftarrows (a \bigcup b)$$

и о п е р а ц и и о т н о с и т е л ь н о г о п с е в д о д о п о л н е н и я $a \Rightarrow b$, совпадающей с псевдоразностью $a \overset{*}{-} b$. Обратно, любая псевдобулева алгебра может быть рассматриваема как Б. р. Иногда термин «Б. р.» используется для псевдобулевых алгебр (см., напр., [2]).

Лит.: [1] M a c K i n s e y J. C. C., T a r s k i A., «Ann. Math.», 1944, v. 45, p. 141—91; [2] Б и р к г о ф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952.

В. А. Янков.

БРАУЭРА ТЕОРЕМА — 1) Б. т. н е п о д в и ж н о й т о ч к е: при непрерывном отображении $f: S \to S$ n-мерного симплекса S в себя существует по крайней мере одна точка $x \in S$ такая, что $f(x)=x$; доказана Л. Брауэром [1]. Эквивалентное утверждение было несколько ранее доказано П. Г. Болем [2]. Б. т. распространяется на непрерывные отображения замкнутых выпуклых тел n-мерного топологического векторного пространства и имеет широкие применения в доказательствах теорем существования решений различных уравнений. Б. т. обобщается на бесконечномерные топологич. векторные пространства.

Лит.: [1] B r o u w e r L. E. J., «Math. Ann.», 1910, Bd 69, S. 176—80; [2] B o h l P. G., «J. reine u. angew. Math.», 1904, Bd 127, S. 88.

В. И. Соболев.

2) Б. т. о б и н в а р и а н т н о с т и о б л а с т и: при всяком гомеоморфном отображении подмножества A евклидова пространства E^n на подмножество B того же пространства любая внутренняя точка A (относительно E^n) переходит во внутреннюю точку B (относительно E^n), а любая невнутренняя точка переходит в невнутреннюю. Доказана Л. Брауэром [1].

Лит.: [1] B r o u w e r L. E. J., «Math. Ann.», 1912, Bd 71, S. 97—115.

М. И. Войцеховский.

БРАУЭРА — СЕВЕРИ МНОГООБРАЗИЕ — *алгебраическое многообразие* над полем k, которое, если его

рассматривать над алгебраич. замыканием $\overline{k}$ поля k, изоморфно *проективному пространству*.

Арифметич. свойства таких многообразий изучал Ф. Севери (F. Severi, 1932), позднее Ф. Шатле [1] вскрыл связь Б.—С. м. с *центральными простыми алгебрами* над полем k и с *Брауэра группой*.

Простейшим нетривиальным примером одномерного Б.— С. м. является проективная коника Q:

$$x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$$

на действительной проективной плоскости $\mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$. Над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ это многообразие изоморфно проективной прямой $\mathbf{P}^1_{\mathbb{C}}$. Множество всех одномерных Б.— С. м. (рассматриваемых с точностью до изоморфизма) находится во взаимно однозначном соответствии с множеством проективных невырожденных коник (рассматриваемых с точностью до проективной эквивалентности над k), к-рое, в свою очередь, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством (неизоморфных) алгебр обобщенных *кватернионов* над k. В приведенном выше примере конике Q соответствует алгебра обычных кватернионов.

В многомерном случае множество классов n-мерных Б.—С. м. (т. е. множество Б.—С. м., различаемых с точностью до k-изоморфизма) может быть отождествлено с множеством *Галуа когомологий* $H^1(k, \mathrm{PGL}(n+1, k))$, где $\mathrm{PGL}(n+1, k)$ — проективная группа автоморфизмов проективного пространства P^n_k (см. [3], [4]). Этим же множеством когомологий описываются классы k-изоморфных центральных простых k-алгебр ранга $(n+1)^2$ (т. е. форм матричной алгебры $M_{n+1}(k)$). Более явно связь Б.— С. м. с центральными простыми алгебрами устанавливается следующим образом. k-алгебре A ранга r^2 сопоставляется многообразие X ее левых *идеалов* ранга r, к-рое задается как замкнутое подмногообразие в *Грассмана многообразии* всех k-линейных подпространств размерности r в A. В нек-рых случаях многообразие X можно задать с помощью норменных уравнений, как, например, в случае алгебр кватернионов. Взаимосвязь Б.— С. м. и алгебр существенно используется при изучении как тех, так и других (см. [1], [4]).

Наиболее существенными свойствами Б.— С. м. являются следующие. Б.—С. м. X тогда и только тогда k-изоморфно проективному пространству P^n_k, когда оно имеет точку в поле k. Любое Б.— С. м. имеет точку в нек-ром конечном сепарабельном расширении K поля k (см. [1]).

Для Б.— С. м., определенных над полем алгебраич. чисел, справедлив *Хассе принцип*.

Поле рациональных функций $k(X)$ на Б.—С. м. X является полем разложения соответствующей алгебры A; более того, произвольное расширение K поля k тогда и только тогда является полем разложения для A, когда X имеет K-точку (см. [4]).

В связи с обобщением на схемы понятий центральной простой алгебры и группы Брауэра было введено понятие схем Брауэра—Севери, обобщающее понятие Б.— С. м. (см. [2]). Пусть $f: P\to X$ — морфизм схем. Схема P наз. с х е м о й Б р а у э р а — С е в е р и, если локально, в *этальной топологии* схемы X, схема P изоморфна проективному пространству P^n_X над X. Схема P над схемой X тогда и только тогда является схемой Брауэра — Севери, когда $f: P\to X$ — конечно представленный собственный плоский морфизм и все геометрич. слои его изоморфны проективным пространствам [2].

Лит.: [1] C h â t e l e t F., «Ann. École Normal supereur», 1944, t. 61, p. 249—300; [2] G r o t h e n d i e e k A., Le groupe de Brauer, в кн.: *Seminaire Bourbaki, année 17, 1964/65*, N. Y.— Amst., exposes 290, p. 1—21; [3] C e p p Ж.-П., Когомологии

Галуа, пер. с франц., М., 1968; [4] Рокетт П., «Математика», 1967, т. 11, в. 5, с. 88—116. *В. А. Исковских.*

БРАХИСТОХРОНА — кривая скорейшего спуска. Задача о ее нахождении, поставленная Г. Галилеем (G. Galilei) в [1], заключается в следующем: среди плоских кривых, соединяющих две данные точки A и B, лежащие в одной вертикальной плоскости (B ниже A), найти ту, двигаясь по к-рой под действием только силы тяжести материальная точка достигнет B за кратчайшее время. Задача сводится к нахождению функции $y(x)$, доставляющей минимум функционалу:

$$J(y)=\int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx,$$

где a и b — абсциссы точек A и B. Б. является *циклоидой* с горизонтальным основанием, точка возврата к-рой находится в точке A.

Лит.: [1] Галилей Г., Беседы и математические доказательства, пер. с лат., М.— Л., 1934; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950. *Л. П. Купцов.*

БРИАНШОНА ТЕОРЕМА: во всяком шестистороннике (см. рис.), описанном вокруг кривой 2-го порядка (шестистороннике Брианшона), прямые, соединяющие пары противоположных вершин, проходят через одну точку (точку Брианшона). Б. т. двойственна *Паскаля теореме*. Б. т. доказана Ш. Ж. Брианшоном (Ch. J. Brianchon) в 1806. *А. Б. Иванов.*



БРИО — БУКЕ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение

$$x^m y'=f(x,\ y), \qquad (1)$$

где m — целое положительное число, функция f аналитична при $x=y=0$, $f'_y(0,0)\neq 0$, $f(0,\ 0)=0$. Ш. Брио и Т. Буке показали [1], что всякое уравнение вида

$$\alpha(z,\ w)\ w'=\beta(z,\ w),$$

где $\alpha(0,\ 0)=\beta(0,\ 0)=0$ и α и β аналитичны в начале, с помощью специальных локальных замен переменных может быть сведено к нек-рому числу уравнений вида (1). Уравнение (1) всегда (кроме случая $m=1$, $f'_y(0,\ 0)$ есть натуральное число) имеет единственное решение в виде формального степенного ряда

$$y=\xi(x)\equiv\xi_1 x+\xi_2 x^2+\ldots, \qquad (2)$$

к-рый сходится для достаточно малых $|x|$, если $m=1$, и может расходиться для всех $x\neq 0$, если $m>1$. Пусть в (1)

$$f\equiv f_0(x)+f_1(x)y,$$

тогда для сходимости ряда (2) необходимо и достаточно выполнения $m-1$ условий на коэффициенты рядов Тейлора функций f_0 и f_1, причем в эти условия входят все коэффициенты, так что наличие или отсутствие аналитич. решения $y=\xi(x)$ уравнения (1) не может быть определено ни по какому конечному отрезку ряда Тейлора функции f. Поэтому иногда Б.—Б. у. наз. уравнение (1) с $m>1$.

Лит.: [1] Briot C., Bouquet T., «J. de l'Ecole polytechnique», 1856, v. 21, p. 85—132, 133—98; [2] Bieberbach L., Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage dargestellt, 2 Aufl., B., 1965; [3] Брюно А. Д., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1971, т. 25, с. 120—138 (Введение). *А. Д. Брюно.*

БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ ПРОЦЕСС — процесс, описывающий хаотическое перемещение взвешенных в жидкости или газе мелких частиц, являющееся следствием соударений с молекулами среды. Существует несколько математич. моделей такого движения (см. [1]). Наиболее важная для теории случайных процессов — модель Б. д. п., известная под назв. *винеровского процесса* (более того, часто ставится знак равенства между этими понятиями).

Лит.: [1] Павлов В. П., Броуновское движение, в кн.: БСЭ, 3 изд., т. 4.

БРУНА РЕШЕТО — один из *решета методов* в элементарной теории чисел, созданный В. Бруном [1]; является развитием *Эратосфена решета*. Метод Б. р. заключается в следующем: из последовательности натуральных чисел $a_n \leqslant x$ высеиваются (выбрасываются) числа с малыми простыми делителями, после этого остаются простые и *почти простые числа*, содержащие только большие простые делители. Пусть $P(x)$ — их количество. Доказывается, что $P(x)$ заключено между двумя суммами со сравнительно небольшим числом слагаемых, к-рые можно оценить сверху и снизу. Так, напр., оценивается сверху число *близнецов* на заданном интервале. Б. р. применяется в аддитивной теории чисел. В. Брун доказал с помощью Б. р., что каждое большое четное число N представимо в виде $N=P_1+P_2$, где P_1 и P_2 содержат не более чем по 9 простых множителей.

Лит.: [1] Brun V., «C. r. Acad. sci.», 1919, t. 168, № 11, p. 544—46; [2] Гельфонд А. О., Линник Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962; [3] Трост Э., Простые числа, пер. с нем., М., 1959.

Н. И. Климов.

БРУНА ТЕОРЕМА о простых близнецах: ряд $\sum\frac{1}{p}$ сходится, если p пробегает все простые *близнецы*. Это означает, что если простых близнецов и бесконечно много, то они все же расположены в натуральном ряду довольно редко. Теорема доказана В. Бруном [1]. Впоследствии была доказана сходимость аналогичного ряда для обобщенных близнецов.

Лит.: [1] Brun V., «Bull. sci. math.», 1919, ser. 2, t. 43, p. 100—04, 124—28; [2] Трост Э., Простые числа, пер. с нем., М., 1959.

Н. И. Климов.

БРУННА—МИНКОВСКОГО ТЕОРЕМА: пусть K_0 и K_1 — выпуклые множества, n-мерного евклидова пространства, K_λ, $\lambda\in[0,\ 1]$ (линейная комбинация K_0 и K_1) — множество точек, делящих отрезки с концами в любых точках множеств K_0 и K_1 в отношении $\lambda/(1-\lambda)$, $V(\lambda)$ — корень n-й степени из объема множества K_λ; тогда $V(\lambda)$ — вогнутая функция от λ, т. е. для любых λ_1, λ_2, $\rho\in[0,1]$ выполняется неравенство

$$V(\lambda_1(1-\rho)+\lambda_2\rho)\geqslant(1-\rho)V(\lambda_1)+\rho V(\lambda_2).$$

Функция $V(\lambda)$ линейна (и тогда неравенство обращается в равенство) в том и только в том случае, когда K_0 и K_1 гомотетичны. Б.— М. т. обобщается на линейные комбинации нескольких выпуклых множеств. Б.— М. т. используется для решения экстремальных задач и задач единственности. Б.— М. т. установлена Г. Брунном (H. Brunn) в 1887, уточнена и дополнена Г. Минковским (H. Minkowski) в 1897.

Лит.: [1] Буземан Г., Выпуклые поверхности, пер. с англ., М., 1964; [2] Хадвигер Г., Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, пер. с нем., М., 1966.

М. И. Войцеховский.

БРЮА РАЗЛОЖЕНИЕ — представление связной алгебраич. редуктивной группы G в виде объединения двойных классов смежности по *Бореля подгруппе*, параметризуемых *Вейля группой* группы G. Точнее, пусть B, B^- — противоположные подгруппы Бореля редуктивной группы G, U, U^- — соответственно унипотентные части B, B^- (см. *Линейная алгебраическая группа*), W — группа Вейля группы G. Через w ниже обозначается как элемент группы W, так и его представитель в нормализаторе тора $B\bigcap B^-$, поскольку приводимая конструкция не зависит от выбора представителя. Для каждого $w\in W$ рассматривается группа $U_w^-=U\bigcap{}_wU^-w^{-1}$. Тогда группа G представима в виде объединения непересекающихся двойных смежных классов BwB ($w\in W$), причем морфизм $U_w^-\times B\to B_wB$ ($(x, y)\to\to xwy$) является изоморфизмом алгебраич. многообразий. Дальнейшее уточнение Б. р. позволяет получить клеточное разбиение проективного многообразия G/B, а именно: если x_0 — неподвижная относительно левых

сдвигов на элементы из B точка многообразия G/B (такая точка всегда существует, см. *Бореля теорема* о неподвижной точке), то G/B является объединением непересекающихся U-орбит вида $U(w(x_0))$, $w \in W$ (см. *Алгебраическая группа преобразований*), причем морфизм $U_{\overline{w}} \to U_{w(x_0)}$ $(u \to u(w(x_0)))$ есть изоморфизм алгебраич. многообразий. Каждая из групп $U_{\overline{w}}$, как многообразие, изоморфна аффинному пространству; в случае, когда основное поле есть поле комплексных чисел, каждая из указанных U-орбит является клеткой в смысле алгебраич. топологии и это позволяет вычислить гомологии G/B. Существование Б. р. для ряда классич. групп было установлено Ф. Брюа (F. Bruhat, 1956), в общем случае это доказал К. Шевалле [3]. А. Борель (A. Borel) и Ж. Титс (J. Tits) обобщили конструкцию Б. р. на группы G_k k-точек k-определенной алгебраич. группы [2]. При этом роль борелевских подгрупп играют минимальные параболич. k-подгруппы, роль групп U — их унипотентные радикалы, а вместо W рассматривается относительная, или k-группа Вейля W_k.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; [3] Chevalley C., Classification des groupes de Lie algébriques, v. 2, P., 1958.

В. П. Платонов.

БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА МЕТОД — см. *Галеркина метод*.

БУКВА — элементарный знак к.-л. символики, рассматриваемый вне зависимости от выражаемого им смысла. Обычно Б. вводятся в рассмотрение путем соглашения и используются в качестве элементарных «кирпичиков», из к-рых по определенным правилам строятся выражения данной символики. Правила построения выражений составляют синтаксис символики. Разработка способов понимания полученных выражений составляет предмет ее семантики.

Н. М. Нагорный.

БУЛЕВА АЛГЕБРА, булева решетка,— частично упорядоченное множество специального вида. Б. а. наз. *дистрибутивная решетка* (дистрибутивная структура), имеющая наибольший элемент 1 — единицу Б. а., наименьший элемент 0 — нуль Б. а. и содержащая вместе с каждым своим элементом x его дополнение — элемент Cx, удовлетворяющий соотношениям

$$\sup\{x, Cx\}=1, \quad \inf\{x, Cx\}=0.$$

Операции sup и inf обозначаются обычно знаками $\vee$ и $\wedge$, а иногда $\bigcup$ и $\bigcap$, чем подчеркивается их сходство с теоретико-множественными операциями объединения и пересечения. Вместо Cx иногда пишут $\bar{x}$, x', $-x$. Дополнение всякого элемента в Б. а. единственно.

Б. а. может определяться и иначе, а именно, как непустое множество с операциями C, $\vee$, $\wedge$, удовлетворяющими аксиомам:

1) $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$;
2) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
3) $(x \wedge y) \vee y = y$, $(x \vee y) \wedge y = y$;
4) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
5) $(x \wedge Cx) \vee y = y$, $(x \vee Cx) \wedge y = y$.

При таком подходе упорядочение не предполагается заранее заданным, а вводится условием: $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $x = x \wedge y$.

Возможны и другие аксиоматики. В аксиомах Б. а. отражена аналогия между понятиями «множества», «события», «высказывания». Отношение порядка в Б. а. может быть (в зависимости от выбора интерпретации) истолковано как теоретико-множественное включение, как причинное следование для событий, как логич. следование для высказываний и т. д.

Кроме основных операций C, $\vee$, $\wedge$, в Б. а. могут быть определены и другие, среди к-рых особенно важна операция симметрической разности:

$$x+_2y=(x\wedge Cy)\vee(y\wedge Cx)$$

(пишут также $x\Delta y$, $|x-y|$).

Всякая Б. а. есть *булево кольцо* с единицей относительно операций $+_2$ («сложение») и $\wedge$ («умножение»); любое булево кольцо с единицей можно рассматривать как Б. а.

Б. а. возникли в трудах Дж. Буля [1], [2] как аппарат символич. логики. В последующем они нашли широкое применение в различных разделах математики — в теории вероятностей, топологии, функциональном анализе и др. В основе приложений Б. а. к логике лежит интерпретация элементов Б. а. как высказываний (см. *Алгебра логики)*; при этом дополнение Cx истолковывается как отрицание высказывания x, а операции $\wedge$ и $\vee$ — как конъюнкция и дизъюнкция. К логике близка и другая область применения Б. а.— теория *контактных схем*. Б. а. используются при обосновании теории вероятностей. Поле событий, изучаемое в теории вероятностей, есть Б. а.; при этом неравенство $x\leqslant y$ означает, что событие x влечет событие y; соответственно с этим истолковываются нуль Б. а., единица Б. а. и булевы операции $\vee$, $\wedge$, C.

Пример Б. а.— упорядоченная по включению система всех подмножеств к.-л. фиксированного множества Q. Такая Б. а. обозначается 2^Q; ее нулем служит пустое множество, единицей — само множество Q. Дополнение элемента x есть множество $Q\setminus x$; булевы операции $\vee$ и $\wedge$ совпадают соответственно с объединением и пересечением.

Вместо подмножеств множества Q удобно рассматривать их характеристич. функции. Система X_Q всех таких функций при естественном упорядочении оказывается Б. а., изоморфной Б. а. 2^Q. Операции $\vee$, $\wedge$, C, $+_2$ истолковываются в такой Б. а. следующим образом:

$$(x\vee y)(q)=\max\{x(q),\ y(q)\},$$
$$(x\wedge y)(q)=\min\{x(q),\ y(q)\}=x(q)\cdot y(q),$$
$$(Cx)(q)=1-x(q),$$
$$(x+_2y)(q)=|x(q)-y(q)|=x(q)+y(q)\pmod 2,$$
$$(q\in Q).$$

Особенно важны случаи:

1) $Q=Q_n=\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$.

Характеристич. функции подмножеств в данном случае суть «двоичные символы» вида

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\quad x_i=\begin{cases}0\\1\end{cases}.$$

Их число равно 2^n. При $n=1$ получается двухэлементная Б. а., состоящая только из нуля и единицы.

2) $Q=X_{Q_n}$.

В этом случае элементами X_Q будут всевозможные функции, заданные на системе всех двоичных символов длины n и принимающие только значения 0 и 1. Их наз. *булевыми функциями* от n переменных. Всякая правильно построенная формула логики высказываний определяет нек-рую булеву функцию, причем совпадение функций означает эквивалентность формул.

При нек-рых условиях множество E элементов Б. а. X само оказывается Б. а. относительно индуцированного из X порядка. Так будет, в частности, в следующих случаях:

а) E — главный идеал, т. е. множество вида $\{x\in X|x\leqslant u\}$; роль единицы здесь играет элемент u;

б) E — подалгебра Б. а. X. Это означает, что из $x,\ y\in E$ следует $x\vee y$, $x\wedge y$, $Cx\in E$. Нулем и единицей новой Б. а. служат нуль и единица исходной Б. а. Особенно

важны подалгебры Б. а. 2^Q; их наз. а л г е б р а м и м н о ж е с т в. Всякое множество $E \subset X$ порождает нек-рую подалгебру — наименьшую подалгебру, содержащую E.

Среди отображений Б. а. особую роль играют гомоморфизмы Б. а., то есть отображения, перестановочные с булевыми операциями. Биективный гомоморфизм Б. а. является изоморфизмом Б. а. Если Б. а. X порождена множеством E, то для того чтобы всякое отображение множества E в произвольную Б.а. допускало продолжение до гомоморфизма, необходимо и достаточно, чтобы E было н е з а в и с и м ы м м н о ж е с т в о м, т. е. чтобы все элементы вида

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge Cx_{p+1} \wedge \ldots \wedge Cx_m, \quad x_i \in E, \quad x_i \neq x_k,$$

были отличны от нуля. Б. а., порожденная независимой системой, наз. с в о б о д н о й Б. а.

Пример свободной Б. а. — рассмотренная выше алгебра булевых функций от n переменных. Ее независимыми образующими являются функции

$$f_i\colon f_i(x) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i.$$

Т е о р е м а С т о у н а: всякая Б. а. X изоморфна нек-рой алгебре множеств, а именно, алгебре всех открыто-замкнутых множеств вполне несвязного бикомпакта $\Sigma(X)$, определяемого с точностью до гомеоморфизма. Этот бикомпакт наз. с т о у н о в с к и м б и к о м п а к т о м. Гомоморфизму Б. а. X в Б. а. Y соответствует топологич. вложение $\Sigma(Y)$ в $\Sigma(X)$; подалгебре Б. а. X соответствует непрерывный образ бикомпакта $\Sigma(X)$. Стоуновский бикомпакт свободной Б. а. есть двоичный дисконтинуум.

Б. а. X наз. п о л н о й, если всякое множество $E \subset X$ имеет верхнюю грань $\sup E$ и нижнюю грань $\inf E$. Это равносильно экстремальности бикомпакта $\Sigma(X)$ (см. *Экстремально несвязные пространства*). Подалгебры полной Б. а., содержащие вычисленные в X грани всех своих подмножеств, наз. п р а в и л ь н ы м и п о д а л г е б р а м и. В е с Б. а. X есть наименьшая мощность в п о л н е п о р о ж д а ю щ е г о м н о ж е с т в а, т. е. множества, не содержащегося ни в какой правильной подалгебре, отличной от X. Если веса всех ненулевых главных идеалов совпадают, то Б. а. наз. о д н о р о д н о й; такая Б. а. всегда содержит вполне порождающее независимое множество. Другими словами, полная однородная Б. а. «натянута» на свободную Б. а. Изучение произвольной Б. а. легко сводится к изучению однородных Б. а. Неполная Б. а. может быть многими способами пополнена, т. е. вложена в качестве подалгебры в нек-рую полную Б. а.

Полная Б. а. наз. н о р м и р о в а н н о й, если на ней определена действительная функция μ (мера), обладающая свойствами: 1) $\mu(x) > 0$ при $x \neq 0$; 2) если $E \subset X$ и $x \wedge y = 0$ при $x, y \in E$, $x \neq y$, то

$$\mu(\sup E) = \sum\nolimits_{x \in E} \mu(x).$$

В теории вероятностей, где нормированные Б. а. особенно важны, обычно предполагают, что $\mu(1) = 1$. При этом значение $\mu(x)$ интерпретируется как вероятность события x. На нормированные Б. а. в основном переносится классическая теория меры и интеграла. Для нормированных Б. а. имеется полная классификация (см. [4], [5], [7]). В частности, для однородных нормированных Б. а. единственным инвариантом является вес. Не всякая Б. а. может быть нормирована. Известны различные условия существования меры, однако они далеко не исчерпывают проблемы нормируемости.

Б. а. может быть наделена различными топологиями. Особенно важна так наз. (o)-топология, к-рая в

случае норм
ет метрике

$$\rho(x, y) = \mu[(x \wedge Cy) \vee (Cx \wedge y)],$$

а для Б. а. вида 2^Q совпадает с тихоновской топологией. В самом общем случае может не существовать никакой топологии, хорошо согласованной с порядком в Б. а.

Лит.: [1] Boole G., The mathematical analysis of logic, Camb.— L., 1847; [2] его же, An investigation of the laws of thought, L., 1854; [3] Сикорский Р., Булевы алгебры, пер. с англ., М., 1969; [4] Владимиров Д. А., Булевы алгебры, М., 1969; [5] Halmos P., Lectures on Boolean algebras, Toronto — N. Y.— L., [1963]; [6] Расёва Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972; [7] Stone M. H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1936, v. 40, № 1, p. 37—111; [8] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [9] Hermes H., Einführung in die Verbandstheorie, B.— Gött.— Hdlb., 1955; [10] Колмогоров А. Н., Algèbres de Boole mètriques complètes, в кн.: VI Zjazd, Mathematyków Polskich, Kraków, 1950; [11] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, [ч. 3] — Спектральные операторы, пер. с англ., М., 1974; [12] Kakutani S., «Ann. Math.», 1941, v. 42, ser. 2, p. 523—37, 994—1024; [13] Maharam D., «Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.», 1942, v. 28, p. 108—11; [14] Макки Дж., Лекции по математическим основам квантовой механики, пер. с англ., М., 1965; [15] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [16] Куратовский К., Топология, т. 2, пер. с англ., М., 1969.

Д. А. Владимиров.

БУЛЕВА ФУНКЦИЯ, функция алгебры логики,— функция, аргументы к-рой, равно как и сама функция, принимают значения из двухэлементного множества (обычно {0,1}). Б. ф. являются одним из основных объектов дискретной математики, в особенности тех ее разделов, к-рые входят в математич. логику и математич. кибернетику. Б. ф. возникли при математич. постановке задач логики и были названы по имени Дж. Буля (G. Boole), положившего начало применению математики в логике (сер. 19 в.; см. *Алгебра логики*).

Одной из таких задач является построение алгебры высказываний. Для этого каждому высказыванию приписывается одно из двух значений 0 или 1 (играющие, соответственно, роль «лжи» и «истины»), и тогда основные логич. связки «и», «или», «не», «если..., то» и др. можно рассматривать, соответственно, как «элементарные» Б. ф.: $x\&y$, $x \vee y$, $\bar{x}$, $x \to y$ и т. д. Тем самым значение любого сложного высказывания, построенного с помощью основных логич. связок из заданных высказываний, является Б. ф. от значений этих высказываний. Такая Б. ф. представляет собой суперпозицию элементарных Б. ф., соответствующих логич. связкам, входящим в сложное высказывание. Позднее выяснилось, что язык Б. ф. удобен для описания функционирования дискретных *управляющих систем* таких, как контактные схемы, схемы из функциональных элементов, логич. сети и др. Эти управляющие системы строятся по определенным правилам из нек-рых исходных элементов подобно тому, как сложные высказывания строятся из элементарных. Правила построения указанных управляющих систем, а также функционирование исходных элементов таковы, что функционирование сложных управляющих систем может быть описано с помощью Б. ф. Б. ф. используются также в нек-рых задачах целочисленного программирования, к-рые сводятся к решению систем булевых уравнений вида

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

где f_i — Б. ф., $i = 1, 2, \ldots, m$. Существуют и другие возможности применения Б. ф. в дискретной математике, благодаря чему изучение Б. ф. представляет самостоятельный интерес.

При решении различных задач, связанных с Б. ф., существенным моментом является способ задания Б. ф. Имеется целый ряд таких способов: таблицы, формулы, специальные классы формул, наз. нормальными формами (см. *Булевых функций нормальные*

формы), подмножества вершин n-мерного единичного куба и др. В последнем случае каждый набор длины n значений аргументов (0 или 1) рассматривается как вершина n-мерного единичного куба, и тогда Б. ф. от n аргументов может быть задана с помощью подмножества вершин, в к-рых эта функция принимает значение 1. Это подмножество, выписанное в виде матрицы, строками к-рой являются наборы значений аргументов Б. ф., наз. б у л е в о й м а т р и ц е й. В том случае, когда Б. ф. описывает функционирование управляющих систем, последнюю также можно рассматривать как средство задания Б. ф. Обычно говорят, что эта управляющая система реализует данную Б. ф. С реализацией Б. ф. теми или иными видами управляющих систем связан большой круг задач таких, как задачи синтеза, минимизации, задачи контроля и надежности и др. Другой круг задач возникает при изучении свойств и классов Б. ф. в связи с различными способами задания; это — изучение метрич. характеристик различных классов нормальных форм Б. ф. и связанных с ними геометрич. свойств n-мерного единичного куба (см. *Булевых функций метрическая теория*), а также различных алгебр Б. ф. (см. *Многозначная логика*, *Эквивалентные преобразования*). Система всех классов Б. ф., замкнутых относительно суперпозиций, была описана Э. Постом (E. Post). Она образует счетно бесконечную структуру с пятью максимальными (предполными) классами.

В нек-рых случаях возникает необходимость рассматривать частичные, т. е. не всюду определенные, Б. ф., для к-рых перечисленные задачи имеют характерную специфику.

Лит.: [1] Н о в и к о в П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [2] Я б л о н с к и й С. В., Г а в р и л о в Г. П., К у д р я в ц е в В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста, М., 1966. *В. Б. Кудрявцев.*

БУЛЕВО КОЛЬЦО — ассоциативное кольцо K, все элементы к-рого идемпотентны, т. е. $x^2=x$ для любого $x\in K$. Любое Б. к. $K\neq 0$ коммутативно и является подпрямой суммой полей Z_2 из двух элементов. При этом $x+x=0$ для всех $x\in K$. Конечное Б. к. $K\neq 0$ является прямой суммой полей Z_2 и потому имеет единицу.

Б. к.— это кольцевой вариант *булевых алгебр*, а именно: любая булева алгебра является Б. к. с единицей относительно операций сложения и умножения, определяемых правилами

$$(x+y)=(x+C_y)\cup(y+C_x),\quad x\cdot y=x\cap y,$$

где C_x — дополнение элемента x. Нуль и единица кольца совпадают с нулем и единицей алгебры. Обратно, любое Б. к. с единицей есть булева алгебра относительно операций $x\cup y=x+y+xy$, $x\cap y=x\cdot y$, $C_x=1+x$.

Лит.: [1] S t o n e M. H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1936, v. 40, № 1, p. 37—111; [2] Ж е г а л к и н И. И., «Матем. сб.», 1927, т. 34, в. 1, с. 9—28; [3] В л а д и м и р о в Д. А., Булевы алгебры, М., 1969; [4] С и к о р с к и й Р., Булевы алгебры, пер. с англ., М., 1969. *Ю. М. Рябухин.*

БУЛЕВО УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=0, \qquad (*)$$

где f — *булева функция* n переменных. Множество всех решений уравнения вида (*) может быть описано системой булевых функций, зависящих от n произвольных параметров.

Лит.: [1] Б и р к г о ф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952. *Т. С. Фофанова.*

БУЛЕВОЗНАЧНАЯ МОДЕЛЬ — модель, определяемая следующим образом. Пусть Ω — сигнатура нек-рого языка L 1-й ступени с одним сортом переменных, т. е. Ω — множество символов функций и предикатов. Б. м. наз. тройка $M=(B_M,\ V_M,\ \Omega_M)$, где B_M — невырожденная *булева алгебра*, V_M — непустое множество и Ω_M — функция, определенная на Ω и такая, что

$$\Omega_M(\rho)\in V_M^{V_M^n},$$

если ρ есть n-местный функциональный символ, и

$$\Omega_M(\rho) \in B^{V_M^n},$$

если ρ есть n-местный предикатный символ. Запись X^Y обозначает множество всех функций, определенных на Y со значениями в X и $X^n = X^{\{m \mid m<n\}}$, где $n \geqslant 0$ — натуральное число. Булева алгебра B_M наз. множеством истинностных значений модели M. Множество V_M наз. универсумом модели M. Б. м. M наз. также B-моделью, если множество истинностных значений есть булева алгебра B, $B_M = B$. Если булева алгебра B двухэлементна (т. е. $B = \{0,1\}$), то B-модель M есть классическая двузначная модель.

Пусть L_M — язык, пополненный новыми индивидными константами: для каждого $v \in V_M$ своя индивидная константа $\boldsymbol{v}$. Пусть M есть B-модель и $B = (B; 0, 1, -, \cup, \cap,)$ — полная булева алгебра. Тогда нижеследующие равенства 1) — 8) определяют значение $\|e\|_M$ каждого замкнутого выражения e (т. е. формулы или терма без свободных переменных) языка L_M:

1) $\| \boldsymbol{v} \|_M = v$, где $v \in V_M$;

2) $\| \rho(\tau_1, \ldots, \tau_n) \|_M = (\Omega_M(\rho))(\| \tau_1 \|_M, \ldots, \| \tau_n \|_M)$,

где $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — замкнутые термы и ρ есть n-местный функциональный или предикатный символ;

3) $\| \varphi \supset \psi \|_M = - \| \varphi \|_M \cup \| \psi \|_M$;

4) $\| \varphi \vee \psi \|_M = \| \varphi \|_M \cup \| \psi \|_M$;

5) $\| \varphi \wedge \psi \|_M = \| \varphi \|_M \cap \| \psi \|_M$;

6) $\| \neg \varphi \|_M = - \| \varphi \|_M$;

7) $\| \exists \xi \varphi(\xi) \|_M = \bigcup_{v \in V_M} \| \varphi(\boldsymbol{v}) \|_M$;

8) $\| \forall \xi \varphi(\xi) \|_M = \bigcap_{v \in V_M} \| \varphi(\boldsymbol{v}) \|_M$.

Соотношения 1) — 8) определяют значение $\|e\|_M$ и для некоторых неполных булевых алгебр; надо только, чтобы существовали бесконечные объединения и пересечения в 7) и 8). Понятие Б. м. можно ввести и для языков со многими сортами переменных. В этом случае для каждого сорта переменных будет своя область изменения V_M.

Замкнутая формула φ наз. истинной в B-модели M ($M \models \varphi$), если

$$\| \varphi \|_M = 1.$$

B-модель M наз. моделью теории T, если $M \models \varphi$ для каждой аксиомы φ теории T. Если h есть гомоморфизм булевой алгебры B на булеву алгебру B', сохраняющий бесконечные объединения и пересечения, то существует B'-модель M' такая, что

$$\| \varphi \|_{M'} = h(\| \varphi \|_M)$$

для каждой замкнутой формулы φ языка L_M. В случае, если универсум модели M счетен, то существует гомоморфизм h в булеву алгебру $\{0,1\}$, позволяющий переделать модель M в классическую двузначную модель M' такую, что

$$M \models \varphi \rightarrow M' \models \varphi.$$

Доказано, что теория T непротиворечива тогда и только тогда, когда она имеет Б. м. На этой теореме основано применение теории Б. м. к вопросам непротиворечивости аксиоматич. теорий.

Если Б. м. теории T строится средствами другой аксиоматич. теории S, то получается результат о непротиворечивости теории T относительно S. Так, напр., результат П. Коэна (P. Cohen) о непротиворечивости теории $ZF + (2^{\aleph_0} > \aleph_1)$ относительно ZF можно получить построением соответствующей Б. м. средствами системы ZF (см. *Вынуждения метод*). Построение ко-

эновского отношения вынуждения $p \| - \varphi$ равносильно построению такой Б. м. M, что

$$\| \varphi \|_M = \{p : p \| - \neg\neg\varphi\}.$$

Лит.: [1] Расёва Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972; [2] Йех Т., Теория множеств и метод форсинга, пер. с англ., М., 1973; [3] Takeuti G., Zaring W. M., Axiomatic set theory, N. Y. [a. o.], (1973); [4] Манин Ю. И., в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 5, М., 1975, с. 5—72.

В. Н. Гришин.

БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — направление, связанное с изучением числовых характеристик и метрич. свойств булевых функций. Основные разделы этой теории посвящены исследованию свойств «почти всех» булевых функций (см. *Булевых функций минимизация*), свойств совокупности всех булевых функций данного числа переменных и специальных подклассов булевых функций. Кроме того, изучается строение областей истинности булевых функций с помощью числовых характеристик, появившихся в основном в задачах, связанных с минимизацией булевых функций и теорией локальных алгоритмов. Этими характеристиками являются размерность и протяженность функции.

Пусть $N_{f(x_1, \ldots, x_n)}$ — множество вершин единичного n-мерного куба, на к-рых функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ равна единице. Рассмотрим все максимальные интервалы функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и выделим среди них интервал наибольшей размерности r. Величина r наз. р а з м е р н о с т ь ю функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и обозначается через $\mathrm{Dim}\, f(x_1, \ldots, x_n)$. С помощью размерности оцениваются отношения сложностей самой сложной тупиковой и кратчайшей дизъюнктивных нормальных форм (д. н. ф.) функции f (см. *Булевых функций нормальные формы*). Сверху это отношение оценивается величиной $2^{\mathrm{Dim}\, f}$. В то же время для «почти всех» булевых функций имеет место неравенство

$$\mathrm{Dim}\, f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant [\log_2 n] + 1.$$

При решении задачи минимизации булевых функций представляет интерес вычисление размерности «типичных» максимальных интервалов. Доказано, что «почти все» максимальные интервалы «почти всех» булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеют размерность, близкую к $\log_2 \log_2 n$.

Пусть $S_k(\mathfrak{A}, f)$ — главная окрестность k-го порядка (см. *Алгоритм локальный*) элементарной конъюнкции $\mathfrak{A}$, входящей в сокращенную д. н. ф. $\mathfrak{N}_f$ функции f, и $k(\mathfrak{A}, f)$ — минимальное значение порядка окрестности, при к-ром $S_k(\mathfrak{A}, f)$ включает в себя все элементарные конъюнкции, входящие в сокращенную д. н. ф. $\mathfrak{N}_f$. Величина

$$p(f) = \max_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{N}_f} k(\mathfrak{A}, f)$$

наз. п р о т я ж е н н о с т ь ю функции f. Для «почти всех» булевых функций

$$p(f(x_1, \ldots, x_n)) \sim \frac{n}{\log_2 \log_2 n}.$$

Пусть

$$p(n) = \max_{f(x_1, \ldots, x_n)} p(f(x_1, \ldots, x_n)).$$

Известно, что величина $p(n)$ реализуется на булевой функции специального вида, называемой цепью. Функция $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ наз. ц е п ь ю, если множество N_ψ единиц этой функции можно представить в виде последовательности $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_q$ такой, что $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_{i+1}) = 1$, где ρ — расстояние Хемминга (см. *Код*); расстояние между другими парами $\tilde{\alpha}_r, \tilde{\alpha}_s$ (может быть, за исключением пары $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_q)$) больше единицы, и в множестве единиц функции ψ не содержится целиком ни один интервал размерности 2. Протяженность цепи ψ равна $q-1$. Поэтому задача вычисления $p(n)$ сводится к построению

в n-мерном единичном кубе цепи с максимальным q. Прямым построением таких цепей доказано, что

$$c_1 \cdot 2^n < p(n) < c_2 \cdot 2^n,$$

где c_1, c_2 — константы. Построение замкнутых цепей (цикло в), т. е. цепей, у к-рых $\rho(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_q)=1$, с максимальной мощностью множества N_ψ является важной составной частью доказательства теоремы о невычислимости свойств конъюнкций «входить в минимальные или кратчайшие д. н. ф.» в классе локальных алгоритмов.

Следующий результат выясняет строение областей истинности «почти всех» булевых функций. Множество M вершин n-мерного единичного куба наз. связным, если для всякой точки $\tilde{\alpha} \in M$ существует точка $\tilde{\beta}$ из M такая, что $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})=1$ Точка $\tilde{\alpha}$ в множестве M наз. изолированной, если для всех $\tilde{\beta}$ таких, что $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})=1$, выполнено условие: $\tilde{\beta} \notin M$. Имеет место следующее утверждение: у «почти всех» булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ множество единиц $N_{f(x_1, \ldots, x_n)}$ разбивается на сумму одного связного множества и нек-рого множества изолированных точек. При этом мощность связного множества не меньше $2^{n-1} - \sqrt{n} \cdot 2^{n/2} - \mathrm{const} \cdot \log_2 n$, а число изолированных точек не превосходит $\mathrm{const} \cdot \log_2 n$.

С результатами по вычислению протяженности «почти всех» булевых функций тесно связаны результаты по вычислению радиусов и диаметров графов, порождаемых булевыми функциями. Графом $G(f)$, порожденным булевой функцией f, наз. граф, вершинами к-рого являются точки множества N_f, а ребрами — пары точек множества N_f, расстояние Хэмминга между к-рыми равно единице. Расстояние $r_G(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ между вершинами $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ графа $G(f)$ определяется как длина минимальной цепи, связывающей $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ (предполагается, что вершины $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ принадлежат одной компоненте связности графа $G(f)$). Отклоненностью вершины $\tilde{\alpha}$ в графе $G(f)$ наз. величина $l(\tilde{\alpha})=\max r_G(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, где максимум берется по всем вершинам G, принадлежащим вместе с $\tilde{\alpha}$ к одной компоненте связности. Радиусом компоненты связности K графа G наз. число $R(K)=\min\limits_{\tilde{\alpha} \in K} l(\tilde{\alpha})$. Величина $R(G)=\max R(K)$, где максимум берется по всем компонентам связности графа G, наз. радиусом графа G. Диаметром графа G наз. число $D(G)=\max r_G(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, где максимум берется по всем парам вершин $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, принадлежащим одной компоненте связности. Для «почти всех» булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ величины $R(G)$ и $D(G)$ таковы, что $n-2 \leqslant R(G(f)) \leqslant n-1$ и $D(G(f))=n-1$.

Из результатов, относящихся к вычислению числовых характеристик отдельных классов булевых функций, выделяются результаты, относящиеся к монотонным булевым функциям. Пусть $\tilde{\alpha}=(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)$, $\tilde{\beta}=(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n)$ — бинарные наборы. Говорят, что $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$, если $\alpha_i \leqslant \beta_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. Булева функция наз. монотонной, если из соотношения $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$ следует, что $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta})$. Представляет интерес определение точного числа $\psi(n)$ различных монотонных булевых функций от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Это число известно лишь для небольших значений n. Известно также асимптотич. равенство

$$\log_2 \psi(n) \sim C_n^{[n/2]}.$$

Большое число приложений при решении дискретных экстремальных задач имеет задача оптимальной рас-

шифровки монотонной булевой функции. Пусть задан алгоритм A, позволяющий вычислять монотонную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ в каждой точке $\tilde{\alpha}$. Если в процессе вычислений установлено, что $f(\tilde{\alpha})=1$ для нек-рой точки $\tilde{\alpha}$, то $f(\tilde{\beta})=1$ для всех $\tilde{\beta}\geqslant\tilde{\alpha}$. При $f(\tilde{\alpha})=0$ функция f известна (равна нулю) во всех точках $\tilde{\beta}\leqslant\tilde{\alpha}$. Поэтому для р а с ш и ф р о в к и, т. е. полного восстановления функции f, алгоритм A должен вычислить ее значения лишь в нек-ром множестве точек. Пусть $m(f)$ обозначает минимальное число точек, в к-рых достаточно вычислить $f(x_1, \ldots, x_n)$ для полного восстановления f. Пусть

$$m(n)=\max_{f(x_1, \ldots, x_n)} m(f).$$

Величина $m(n)$ удовлетворяет асимптотич. равенству:

$$m(n)\sim 2C_n^{[n/2]}.$$

Оценка для $m(f)$ может быть понижена, если известна дополнительная информация о монотонной булевой функции.

С задачей расшифровки монотонных булевых функций связана задача вычисления числовых характеристик совокупностей существенных переменных не всюду определенных булевых функций, т. е. функций, заданных на нек-ром подмножестве множества вершин единичного n-мерного куба. Совокупность переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ наз. с у щ е с т в е н н о й для не всюду определенной булевой функции $F(x_1, \ldots, x_n)$, если $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}\subseteq\{x_1, \ldots, x_n\}$ и существует не всюду определенная булева функция $\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ такая, что $F(x_1, \ldots, x_n)\equiv\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ на всей области определения F. Существенная совокупность наз. т у п и к о в о й для F, если никакая истинная часть этой совокупности не является существенной для F.

У каждой всюду определенной булевой функции имеется единственная тупиковая совокупность переменных. Для не всюду определенных булевых функций строение совокупностей существенных переменных отличается большим разнообразием. Пусть Σ — система подмножеств множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, удовлетворяющая условию: если $S\in\Sigma$ и S' — произвольное подмножество множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то $S\cup S'\in\Sigma$. Тогда существует не всюду определенная булева функция $F_\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что система существенных для F_Σ наборов переменных есть Σ. Пусть $t_F(n)$ — число различных тупиковых наборов для $F(x_1, \ldots, x_n)$ и

$$t(n)=\max_{F(x_1, \ldots, x_n)} t_F(n).$$

Известно, что

$$t(n)=C_n^{[n/2]}.$$

Алгоритм построения всех тупиковых совокупностей переменных для $F(x_1, \ldots, x_n)$ имеет максимальную трудоемкость $2C_n^{[n/2]}$, причем этот максимум достигается (здесь единицей трудоемкости считается трудоемкость проверки, является ли данная совокупность переменных существенной для F).

К Б. ф. м. т. относят также задачи вычисления характеристик, связанных с задачей минимизации булевых функций.

Лит.: [1] Г л а г о л е в В. В., «Проблемы кибернетики», 1967, в. 19, с. 75—94; [2] Ж у р а в л е в Ю. И., «Проблемы кибернетики», 1964, в. 11, с. 271—75; [3] К о р о б к о в В. К., «Проблемы кибернетики», 1965, в. 13, с. 5—28; [4] С а п о ж е н к о А. А., сб. «Дискретный анализ», 1967, в. 10, с. 91—119; [5] е г о ж е, «Докл. АН СССР», 1968, т. 180, № 1, с. 32—35; [6] K l e i t m a n D., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 21, № 3, p. 677—82.

Ю. И. Журавлев.

БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ МИНИМИЗАЦИЯ — представление булевых функций нормальными формами (см. *Булевых функций нормальные формы*), простейши-

ми относительно нек-рой меры сложности. Обычно под сложностью нормальной формы понимается число букв в ней. В этом случае простейшая форма наз. минимальной. Иногда в качестве меры сложности рассматривается число элементарных конъюнкций в дизъюнктивной нормальной форме или число сомножителей в конъюнктивной нормальной форме. В этом случае простейшая форма наз. кратчайшей. В силу двойственности дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм достаточно рассматривать только дизъюнктивные нормальные формы (д. н. ф.).

Построение кратчайших и минимальных д. н. ф. имеет каждое свою специфику. Множества минимальных и кратчайших д. н. ф. одной и той же функции могут находиться в любых теоретико-множественных соотношениях: содержаться одно в другом, иметь пустое пересечение или непустую симметрическую разность. Если для функции f обозначить через m_f сложность минимальной д. н. ф., через k_f — минимальную сложность кратчайшей д. н. ф., а через $l(n)$ — наибольшее из отношений k_f/m_f по всем функциям от n переменных, то справедливо асимптотич. соотношение:

$$l(n) \sim \frac{n}{2}.$$

Обычно под задачей Б. ф. м. понимается задача построения их минимальных д. н. ф. Существует тривиальный алгоритм построения всех минимальных д. н. ф. для произвольной булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Он состоит в просмотре всех д. н. ф. с переменными $x_1, \ldots, x_n$ и выделении тех из них, к-рые реализуют функцию f и имеют минимальную сложность. Этот алгоритм фактически неприменим уже при небольших n ввиду быстрого роста числа операций. Поэтому было построено большое число других алгоритмов, к-рые, однако, эффективно применимы не ко всем функциям.

Исходным заданием функции в задаче минимизации обычно считают таблицу, совершенную д. н. ф. (см. *Булевых функций нормальные формы*) или произвольную д. н. ф. На первом этапе от исходного задания осуществляется переход к так наз. сокращенной д. н. ф., к-рая определена для каждой функции однозначно. Существует большое число методов реализации этого перехода. Наиболее универсальный метод состоит в выполнении над д. н. ф. преобразований вида

$$A \vee A \cdot B \Rightarrow A \text{ (поглощение)},$$

$$xA \vee \bar{x}B \Rightarrow xA \vee \bar{x}B \vee AB.$$

Сокращенная д. н. ф. обладает тем свойством, что любая минимальная д. н. ф. получается из нее удалением нек-рых элементарных конъюнкций. Второй, наиболее трудоемкий, этап состоит в получении из сокращенной д. н. ф. всех тупиковых д. н. ф., среди к-рых содержатся и все минимальные. На этом этапе обычно используется геометрич. представление булевых функций. Пусть E_n обозначает множество всех вершин n-мерного единичного куба. Каждой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ взаимно однозначно соответствует подмножество N_f, $N_f \subseteq E_n$, таких вершин $\tilde{\alpha}$, где $f(\tilde{\alpha}) = 1$. Пусть $\mathfrak{A}$ — элементарная конъюнкция ранга r, тогда множество $N_{\mathfrak{A}}$ наз. интервалом ранга r, соответствующим элементарной конъюнкции $\mathfrak{A}$. Говорят, что система интервалов $N_{\mathfrak{A}_1}, \ldots, N_{\mathfrak{A}_m}$ образует покрытие множества $N \subseteq E_n$, если

$$N = N_{\mathfrak{A}_1} \cup \ldots \cup N_{\mathfrak{A}_m}.$$

Так как равенства

$$f = \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_m \quad \text{и} \quad N_f = N_{\mathfrak{A}_1} \cup \ldots \cup N_{\mathfrak{A}_m}$$

эквивалентны, то задача Б. ф. м. равносильна отысканию покрытий, сумма рангов интервалов к-рых мини-

мальна. Такие покрытия наз. минимальными. Интервал $N_{\mathfrak{A}}$ наз. максимальным для функции f, если $N_{\mathfrak{A}} \subseteq N_f$ и не существует интервала $N_{\mathfrak{B}}$ такого, что $N_{\mathfrak{A}} \subset N_{\mathfrak{B}} \subseteq N_f$. Построение тупиковых д. н. ф. функции f сводится к отысканию таких покрытий множества N_f максимальными интервалами, никакое собственное подмножество к-рых не является покрытием множества N_f. Эти покрытия соответствуют тупиковым д. н. ф. и наз. неприводимыми. Они получаются из покрытий, соответствующих сокращенным д. н. ф., путем удаления нек-рых интервалов.

Выбор минимальных д. н. ф. из всех тупиковых также оказывается весьма трудоемким процессом, поскольку для «почти всех» булевых функций от n аргументов различных тупиковых д. н. ф. не меньше, чем 2^{2^n}. При этом разброс сложностей тупиковых д. н. ф. может быть очень велик, так что выбор случайной тупиковой д. н. ф. вместо минимальной может привести к большой погрешности.

Оценки числа тупиковых д. н. ф. и разброса сложностей показывают, что естественным путем улучшения эффективности алгоритмов минимизации является путь более тонких рассмотрений при удалении элементарной конъюнкции из д. н. ф. Удалять (или, наоборот, закреплять до конца процесса) конъюнкцию следует лишь в том случае, если для нее посредством нек-рой процедуры удается установить, что она не входит ни в одну минимальную д. н. ф. для f (входит во все минимальные д. н. ф. для f). Последний факт устанавливается обычно при помощи анализа конъюнкций, близких к рассматриваемой, т. е. входящих в окрестность этой конъюнкции (см. *Алгоритм локальный*). При этом разрешается накапливать информацию об элементарных конъюнкциях и использовать ее в дальнейшем анализе. Процедуры указанного вида получили назв. локальных алгоритмов упрощения. Ниже приводятся нек-рые из них. В их описании используется понятие окрестности k-го порядка $S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ элементарной конъюнкции $\mathfrak{A}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{N}$.

Окрестность нулевого порядка $S_0(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ состоит из одной конъюнкции $\mathfrak{A}$. Если $S_{k-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ есть окрестность $(k-1)$-го порядка, то окрестность k-го порядка $S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ состоит из всех конъюнкций $\mathfrak{A}_j$ д. н. ф. $\mathfrak{N}$, удовлетворяющих одному из следующих условий: 1) $N_{\mathfrak{A}_j}$ имеет непустое пересечение хотя бы с одним интервалом, соответствующим конъюнкции из $S_{k-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$; 2) $N_{\mathfrak{A}_j} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} N_{\mathfrak{B}_i}$, где $N_{\mathfrak{B}_i}$, $i=1, 2, \ldots, r$, удовлетворяют условию 1).

Алгоритм Куайна. На каждом шаге рассматривается окрестность $S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ одной из конъюнкций в д. н. ф. $\mathfrak{N}$. В процессе работы алгоритма для каждой из конъюнкций делается попытка вычислить одно из свойств: $P_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ — «$\mathfrak{A}$ входит во все минимальные д. н. ф.», $P_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ — «$\mathfrak{A}$ — не входит ни в одну минимальную д. н. ф.».

Алгоритм работает следующим образом. 1) По очереди для каждой конъюнкции $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{N}$ строится окрестность $S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}) = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m\}$. Проверяется включение: $N_{\mathfrak{N}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} N_{\mathfrak{A}_i}$. Если оно не имеет места, то $\mathfrak{A}$ отмечается нек-рым способом как входящая во все минимальные д. н. ф. В этом случае говорят, что $\mathfrak{A}$ входит в ядро д. н. ф. $\mathfrak{N}$ (является ядровой конъюнкцией). 2) Пусть на первом этапе в $\mathfrak{N}$ отмечены конъюнкции $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_q$. Остальные конъюнкции из $\mathfrak{N}$ упорядочиваются, и для каждой такой конъюнкции $\mathfrak{B}$ проверяется включение $N_{\mathfrak{B}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{q} N_{\mathfrak{B}_i}$. Конъюнкции, для к-рых это соотношение выполнено, не входят ни в одну минимальную д. н. ф.; они удаляются из $\mathfrak{N}$.

Алгоритм регулярных точек. Этот алгоритм на каждом шаге осматривает окрестность $S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ конъюнкции $\mathfrak{A}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}$ и удаляет конъюнкции, не входящие ни в одну тупиковую и, следовательно, ни в одну минимальную д. н. ф. В описании алгоритма используется понятие $\tilde{\alpha}$-пучка в д. н. ф. $\mathfrak{N}$, представляющего собой для рассматриваемой точки $\tilde{\alpha}$ из $N_{\mathfrak{N}}$ множество $M(\tilde{\alpha}, \mathfrak{N})$ интервалов $N_{\mathfrak{N}_j}$ таких, что $\mathfrak{N}_j \in \mathfrak{N}$, $\tilde{\alpha} \in N_{\mathfrak{N}_j}$. Для конъюнкции $\mathfrak{A}$ из д. н. ф. $\mathfrak{N}$ точка $\tilde{\alpha}$ из $N_{\mathfrak{N}}$ наз. регулярной относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, если существует точка $\tilde{\alpha}'$ такая, что $\tilde{\alpha}' \in N_{\mathfrak{N}} \setminus N_{\mathfrak{A}}$ и $M(\tilde{\alpha}', \mathfrak{N}) \subseteq M(\tilde{\alpha}, \mathfrak{N})$. Множество $M \subseteq N_{\mathfrak{N}}$ наз. регулярным относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, если все его точки регулярны относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. Описываемый алгоритм основывается на том, что конъюнкция $\mathfrak{A}$ из сокращенной д. н. ф. функции f не входит ни в одну тупиковую д. н. ф. функции f тогда и только тогда, когда $N_{\mathfrak{N}}$ есть множество, регулярное относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. Алгоритм проверяет в нек-ром порядке, являются ли интервалы конъюнкций, входящих в д. н. ф., регулярными множествами, и удаляет те из них, интервалы к-рых регулярны. Свойство интервала $N_{\mathfrak{N}}$ быть регулярным относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ полностью определяется окрестностью $S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ и, вообще говоря, не определяется окрестностью $S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$.

A-алгоритм. Здесь используется понятие д. н. ф., минимальной относительно д. н. ф. $\mathfrak{N}$, т. е. такой д. н. ф., к-рая минимальна среди всех д. н. ф., эквивалентных $\mathfrak{N}$ и получающихся из $\mathfrak{N}$ опусканием нек-рых элементарных конъюнкций. Рассматриваются два свойства элементарной конъюнкции в д. н. ф.:

$P_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ — «$\mathfrak{A}$ входит во все д. н. ф., минимальные относительно $\mathfrak{N}$», и

$P_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ — «$\mathfrak{A}$ не входит ни в одну д. н. ф., минимальную относительно $\mathfrak{N}$».

Считается, что $P_i = 1$, если свойство P_i имеет место, и $P_i = 0$ в противном случае. Предполагается, что д. н. ф. составлены из конъюнкций с информационными отметками (ω_1, ω_2), где $\omega_i \in \{0, 1, \Delta\}$. При этом равенство $\omega_i = \Delta$ означает, что свойство P_i не вычислено $(i = 1, 2)$, а равенства $\omega_i = 1$ означают, что $P_i = \omega_i$ $(i = 1, 2)$. Конъюнкция $\mathfrak{A}$ с информационными отметками (ω_1, ω_2) обозначается через $\mathfrak{A}^{\omega_1\omega_2}$. *A*-алгоритм вычисляет значения свойств P_1 и P_2 для конъюнкций $\mathfrak{A}$ из д. н. ф. $\mathfrak{N}$, используя для этого лишь конъюнкции из окрестности $S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ и их информационные отметки. Для конъюнкции $\mathfrak{A}$ ранга r из д. н. ф. $\mathfrak{N}$ множество $M \subseteq N_{\mathfrak{N}}$ наз. множеством первого типа относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, если в д. н. ф. $\mathfrak{N}$ существуют конъюнкции $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$ рангов $r_1, \ldots, r_m$ такие, что $M \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} N_{\mathfrak{A}_j}$ и $r > \sum_{j=1}^{m} r_j$.

Разностью $\mathfrak{N}_1 \setminus \mathfrak{N}_2$ д. н. ф. $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ наз. д. н. ф., состоящая из элементарных конъюнкций, входящих в $\mathfrak{N}_1$ и не входящих в $\mathfrak{N}_2$.

До применения *A*-алгоритма все конъюнкции из рассматриваемой д. н. ф. $\mathfrak{N}$ имеют отметку (Δ, Δ). Если выполнены i шагов и отметку $(1, \Delta)$ получили конъюнкции $\mathfrak{A}'_1, \ldots, \mathfrak{A}'_s$, а отметку $(\Delta, 1)$ — конъюнкции $\mathfrak{A}''_1, \ldots, \mathfrak{A}''_t$, то $(i+1)$-й шаг состоит в следующем. Упорядочивают нек-рым способом конъюнкции из д. н. ф. Если д. н. ф. $\mathfrak{N} \setminus (\vee_{j=1}^{s} \mathfrak{A}'_j \vee \vee_{j=1}^{t} \mathfrak{A}''_j)$ пустая, то *A*-алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае после упорядочивания к.-л. способом конъюнкций из этой д. н. ф. выделяются первая по порядку конъюнкция $\mathfrak{A}$ и ее окрестности S_1 и S_2 в д. н. ф.

$\tilde{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N} \setminus (\vee_{j=1}^{t} \mathfrak{A}_j'')$ и проверяется соотношение

$$N_{\mathfrak{A}} \equiv \bigcup_{\mathfrak{B} \in (S_1(\mathfrak{A}, \tilde{\mathfrak{N}}) \setminus \mathfrak{A})} N_{\mathfrak{B}}.$$

Если оно выполнено, то отметка (Δ, Δ) над $\mathfrak{A}$ заменяется на $(1, \Delta)$ и $(i+1)$-й шаг A-алгоритма заканчивается. Если оно не выполнено, то проверяется, можно ли $N_{\mathfrak{A}}$ представить в виде $M_1 \cup M_2$, где M_1 — множество, регулярное относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, а M_2 — множество первого типа относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. Если $N_{\mathfrak{A}}$ можно представить в таком виде, то отметка (Δ, Δ) над $\mathfrak{A}$ заменяется на отметку $(\Delta, 1)$, и $(i+1)$-й шаг A-алгоритма заканчивается; если — нельзя, то описанная процедура применяется ко второй по порядку конъюнкции, и т. д. Если при этом ни у одной из конъюнкций отметка не изменится, то после просмотра всех конъюнкций работа A-алгоритма закапчивается.

Если за д. н. ф. $\mathfrak{N}$ принять сокращенную д. н. ф. $\mathfrak{N}_f$ функции f, то все конъюнкции, получившие в алгоритме отметку $(\Delta, 1)$, не входят ни в одну минимальную д. н. ф. функции f; они удаляются из $\mathfrak{N}_f$. Конъюнкции, получившие отметку $(1, \Delta)$, входят во все минимальные д. н. ф. функции f. Рассматривались также различные частные случаи A-алгоритма.

Кольцевой алгоритм расставляет над конъюнкциями информационные отметки (ω_1, ω_2), значение к-рых то же, что и в A-алгоритме. На каждом шаге кольцевой алгоритм использует конъюнкции, входящие в окрестность k-го порядка нек-рой конъюнкции, и их информационные отметки. Ниже излагается упрощенный вариант этого алгоритма. В полном виде кольцевой алгоритм — наилучший в классе локальных алгоритмов со специальной памятью по окрестностям $S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. Описанные выше алгоритмы являются частными случаями общего кольцевого алгоритма. Если

$$S_{k-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}) = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_l\},$$

$$S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}) = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{A}_m\}$$

и

$$N_{S_{k-1}} = N_{\mathfrak{A}} \cup \bigcup_{i=1}^{l} N_{\mathfrak{A}_i}, \quad N_{S_k} = N_{\mathfrak{A}} \cup \bigcup_{j=1}^{m} N_{\mathfrak{A}_j},$$

$$Q(S_k) = N_{S_k} \setminus N_{S_{k-1}},$$

то каждому подмножеству $N \subseteq Q(S_k)$ сопоставляется не всюду определенная булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, множество M_1^f единиц к-рой есть $N_{S_k} \setminus N$, а множество M_0^f нулей есть $E_n \setminus N_{S_k}$; на множестве N функция f не определена. Множество таких функций обозначается через $F_k(\mathfrak{A})$. До начала работы алгоритма все конъюнкции из рассматриваемой д. н. ф. $\mathfrak{N}$ имеют отметку (Δ, Δ). Если выполнены i шагов и отметку $(1, \Delta)$ получили конъюнкции $\mathfrak{A}_1', \ldots, \mathfrak{A}_s'$, а отметку $(\Delta, 1)$ — конъюнкции $\mathfrak{A}_1'', \ldots, \mathfrak{A}_t''$, то $(i+1)$-й шаг состоит в следующем. Упорядочивают нек-рым способом конъюнкции из д. н. ф. Если д. н. ф. $\mathfrak{N} \setminus (\vee_{j=1}^{s} \mathfrak{A}_j' \vee \vee_{j=1}^{t} \mathfrak{A}_j'')$ пустая, то алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае после упорядочения к.-л. способом всех конъюнкций этой д. н. ф. для конъюнкции $\mathfrak{A}$, являющейся первой из них, и для каждой функции f из множества $F_k(\mathfrak{A})$ находятся все д. н. ф., реализующие f на ее области определения, к-рые составлены из конъюнкций окрестности $S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ и содержат по сравнению с другими такими д. н. ф. наименьшее число символов переменных. Среди них выделяются все те д. н. ф., к-рые, во-первых, не содержат конъюнкций $\mathfrak{A}_1'', \ldots, \mathfrak{A}_t''$ и, во-вторых, содержат все конъюнкции $\mathfrak{A}_j'$, $j = 1, 2, \ldots, s$, удовлетворяющие условию $N_{\mathfrak{A}_j'} \cap (N_{S_k} \setminus N) = \varnothing$.

Если для всех f из $F_k(\mathfrak{A})$ конъюнкция $\mathfrak{A}$ входит во все выделенные д. н. ф., то отметка (Δ, Δ) над $\mathfrak{A}$ заменяется на отметку $(1, \Delta)$ и $(i+1)$-й шаг алгоритма заканчивается. Если $\mathfrak{A}$ не входит ни в одну из выделенных д. н. ф., то отметка (Δ, Δ) заменяется на отметку $(\Delta, 1)$ и $(i+1)$-й шаг алгоритма заканчивается. В остальных случаях описанная процедура применяется ко второй по порядку конъюнкции и т. д. Если ни у одной из конъюнкций не удается изменить отметку, то на $(i+1)$-м шаге работа алгоритма заканчивается. Все конъюнкции, получившие в кольцевом алгоритме над сокращенной д. н. ф. $\mathfrak{N}_f$ функции f отметки $(1, \Delta)$ (соответственно $(\Delta, 1)$), входят во все минимальные д. н. ф. (соответственно не входят ни в одну минимальную д. н. ф.) функции f. Результат применения описанных выше алгоритмов не зависит от способа упорядочения конъюнкций в д. н. ф.

Задача выделения всех конъюнкций, входящих хотя бы в одну и не входящих ни в одну минимальную д. н. ф., не может быть решена алгоритмами, работающими с $S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ при k, ограниченных или недостаточно быстро растущих с ростом n числа переменных. Ситуация не изменится, если к запоминаемым в алгоритме свойствам P_1, P_2 добавить ограниченное или недостаточно быстро растущее с ростом n множество свойств.

Лит.: [1] Яблонский С. В., Функциональные построения в k-значной логике, 1958 («Тр. Матем. ин-та АН СССР», т. 51); [2] Журавлев Ю. И., «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8, с. 5—44; [3] Quine W. V., «Amer. Math. Monthly», 1959, v. 66, № 9, p. 755—60. *Ю. И. Журавлев.*

БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ — формулы специального вида, реализующие булевы функции. Различают дизъюнктивные нормальные формы (д. н. ф.; см. *Булевых функций минимизация*) и конъюнктивные нормальные формы (к. н. ф.). Произведение $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_k}^{\sigma_k}$, где $x^{\sigma} = x$ при $\sigma = 1$ и $x^{\sigma} = \bar{x}$ при $\sigma = 0$, наз. элементарной конъюнкцией ранга k, если все переменные в нем различны; 1 считается элементарной конъюнкцией нулевого ранга. Логическая сумма $x_{j_1}^{\sigma_1} \vee x_{j_2}^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_{j_r}^{\sigma_r}$ наз. элементарной дизъюнкцией ранга r, если все переменные в ней различны; 0 считается элементарной дизъюнкцией нулевого ранга.

Формула $\mathfrak{A}_1 \vee \dots \vee \mathfrak{A}_l$, где $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_l$ — различные элементарные конъюнкции рангов $r_1, \dots, r_l$ соответственно, наз. д. н. ф., а число $\sum_{i=1}^{l} r_i$ — сложностью этой д. н. ф.; формула $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_t$, где $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_t$ — различные элементарные дизъюнкции рангов $\rho_1, \dots, \rho_t$ соответственно, наз. к. н. ф., а число $\sum_{i=1}^{t} \rho_i$ — сложностью этой к. н. ф. Всякая булева функция, отличная от тождественного нуля, может быть задана д. н. ф. и, вообще говоря, неоднозначно. Аналогичный факт имеет место для к. н. ф. и функций, не равных тождественно единице.

По таблице, задающей булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, легко строится совершенная д. н. ф. $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \dots \vee \mathfrak{A}_s$, где $\mathfrak{A}_i = x_1^{\sigma_{i1}} x_2^{\sigma_{i2}} \dots x_n^{\sigma_{in}}$, $i = 1, 2, \dots, s$, и наборы $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \dots, \sigma_{in}$ таковы, что $f(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \dots, \sigma_{in}) = 1$. Совершенная д. н. ф., реализующая булеву функцию f, строится однозначно. Аналогично определяется совершенная к. н. ф.

Так как «почти все» булевы функции имеют число единичных наборов в пределах от $2^{n-1} - \sqrt{n} \cdot 2^{n/2}$ до $2^{n-1} + \sqrt{n} \cdot 2^{n/2}$, то асимптотич. сложность совершенной д. н. ф. для «почти всех» булевых функций равна $n \cdot 2^{n-1}$. Максимальная сложность совершенной д. н. ф. для функций от n переменных достигается для функций, равных 0, в одной точке. Она равна $n \cdot (2^n - 1)$.

Основной задачей в теории Б. ф. н. ф. является задача минимизации булевых функций, т. е. построение для произвольной булевой функции к. н. ф. или д. н. ф. минимальной сложности — м и н и м а л ь н о й к. н. ф. или д. н. ф. (см. *Булевых функций минимизация*, *Алгоритм локальный*). При этом, в силу принципа двойственности, достаточно рассматривать только д. н. ф. В связи с задачей минимизации булевых функций рассматриваются также д. н. ф. сокращенная, тупиковые, кратчайшие и минимальные. Важной задачей теории д. н. ф. является отыскание их числовых характеристик, а также характеристик, связывающих различные типы д. н. ф. одной функции.

Сокращенная д. н. ф. строится по булевой функции однозначно с помощью достаточно простых алгоритмов. Ее важнейшим свойством является то, что всякая минимальная д. н. ф. функции и хотя бы одна кратчайшая получаются из сокращенной д. н. ф. удалением нек-рых элементарных конъюнкций. Поэтому многие алгоритмы минимизации используют сокращенные д. н. ф. в качестве исходного задания булевой функции. В связи с этим большой интерес представляет определение сложности сокращенных д. н. ф. для «почти всех» функций и выяснение абсолютного максимума этой сложности. Если $S_f(n)$ — число элементарных конъюнкций в сокращенной д. н. ф. булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и

$$S(n) = \max_{f(x_1, \ldots, x_n)} S_f(n),$$

то имеют место следующие оценки:

$$C_1 \frac{3^n}{n} \leqslant S(n) \leqslant C_2 \cdot \frac{3^n}{\sqrt{n}},$$

и для «почти всех» булевых функций

$$n^{(1-\varepsilon)\log_2 \log_2 n} 2^n < S_f(n) < n^{(1+\varepsilon)\log_2 \log_2 n} \cdot 2^n,$$
$$\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Из этих результатов и оценок сложности совершенной д. н. ф. видно, что сложность сокращенной д. н. ф. существенно больше сложности совершенной д. н. ф. как в «типичном», так и в «рекордном» случаях. В отличие от совершенной и сокращенной д. н. ф., у одной булевой функции может быть много тупиковых и минимальных д. н. ф. Пусть $t_f(n)$ — число тупиковых д. н. ф., $m_f(n)$ — число минимальных д. н. ф. булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$t(n) = \max_{f(x_1, \ldots, x_n)} t_f(n), \quad m(n) = \max_{f(x_1, \ldots, x_n)} m_f(n).$$

Имеют место следующие оценки:

$$\left(2^{2^n}\right)^{1/\sqrt{n}} \leqslant t(n) \leqslant \left(2^{2^n}\right)^{n/2}, \quad m(n) > \left(2^{2^n}\right)^{\text{const} \cdot \sqrt{n}}$$

и для «почти всех» булевых функций

$$\left(2^{2^n-1}\right)^{(1-\varepsilon)\log_2 n \log_2 \log_2 n} < t_f(n) <$$
$$< \left(2^{2^n-1}\right)^{(1+\varepsilon)\log_2 n \log_2 \log_2 n},$$
$$\varepsilon \longrightarrow 0 \text{ при } n \longrightarrow \infty.$$

Верхняя оценка для $m(n)$ и оценка $m_f(n)$ для «почти всех» функций, отличных от тривиальных, пока (1977) не найдены. Большой интерес в задачах минимизации булевых функций представляют оценки сложности тупиковых д. н. ф. и минимальных д. н. ф. Пусть $\lambda_f^T(n)$ — число элементарных конъюнкций в тупиковой д. н. ф. T функции $f(x_1, \ldots, x_n)$; $l_f(n)$ — число элементарных конъюнкций в кратчайших д. н. ф. функции $f(x_1, \ldots, x_n)$,

$$\lambda(n) = \max_{f,\ T} \lambda_f^T(n), \quad l(n) = \max_f l_f(n).$$

Имеют место следующие оценки:

$$\lambda(n) \sim 2^n, \quad l(n) = 2^{n-1}.$$

У «почти всех» булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ для почти всех тупиковых д. н. ф. T:

$$\lambda_f^T(n) \sim 2^{n-1}.$$

Для «почти всех» булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$

$$\frac{2^n}{\log_2 n \log_2 \log_2 n} < l_f(n) < \frac{2^n}{\log_2 n}.$$

Эти оценки показывают, что кратчайшие (а также минимальные) д. н. ф. составляют у «почти всех» булевых функций малую долю от числа тупиковых д. н. ф. Существуют также оценки о т н о с и т е л ь н о й с л о ж н о с т и тупиковых д. н. ф. и кратчайших д. н. ф. булевых функций. Пусть $\lambda_f(n)$ — максимальное число элементарных конъюнкций в тупиковой д. н. ф. функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Для «почти всех» булевых функций

$$\log_2 n < \frac{\lambda_f(n)}{l_f(n)} < \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n.$$

Максимальное значение отношения $\lambda_f(n)/l_f(n)$ оценивается снизу величиной $2^{n(1-\varepsilon)}$, $\varepsilon \to 0$ при $n \to \infty$. Получены также оценки для величины $y(f)$, наз. р а з б р о с о м булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Здесь

$$y(f) = \max_{T', T''} \frac{L(T')}{L(T'')},$$

где T' и T'' — произвольные тупиковые д. н. ф., реализующие $f(x_1, \ldots, x_n)$, а $L(T)$ — число букв в тупиковой д. н. ф. T. Построены примеры булевых функций, у к-рых $y(f) \geqslant 2^{n(1-o(1))}$; установлено, однако, что для «почти всех» булевых функций

$$y(f) \leqslant \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n.$$

Приведенные выше оценки позволяют получить полное представление о тех трудностях, к-рые возникают при минимизации булевых функций по схеме: совершенная д. н. ф.— сокращенная д. н. ф.— тупиковая д. н. ф.— минимальная д. н. ф.

Лит.: [1] В а с и л ь е в Ю. Л., «Проблемы кибернетики», 1963, в. 10, с. 5—61; [2] Г л а г о л е в В. В., «Проблемы кибернетики», 1967, в. 19, с. 75—94; [3] К о р ш у н о в А. Д., «Кибернетика», 1969, т. 6, с. 1—8; [4] С а п о ж е н к о А. А., «Матем. заметки», 1968, т. 4, № 6, с. 649—58. *Ю. И. Журавлев.*

БУНЯКОВСКОГО НЕРАВЕНСТВО — неравенство математич. анализа; для функций $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемых с квадратом,

$$\left[\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\, dx \int_a^b g^2(x)\, dx;$$

установлено В. Я. Буняковским [1]. Это неравенство аналогично алгебраич. неравенству Коши:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leqslant$$
$$\leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Иногда Б. н. наз. неравенством Шварца (по имени Г. А. Шварца; H. A. Schwarz). Однако В. Я. Буняковский опубликовал свою работу о неравенствах еще в 1859, тогда как в работах Г. А. Шварца то же неравенство появилось не ранее 1884 (без ссылок на Буняковского).

Лит.: B o u n j a k o w s k y W., «Mémoires de l'Académie des sciences de St-Pétersbourg. 7 série», 1859, t. 1, № 9.

В. И. Битюцков.

БУРЖЕ ФУНКЦИЯ — функция $J_{n,k}(z)$, определяемая как обобщение интегрального представления *бесселевых функций*:

$$J_{n,k}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int t^{-n-1} \left(t + \frac{1}{t}\right)^k \exp\left\{\frac{1}{2} z \left(t - \frac{1}{t}\right)\right\} dt,$$

где n — целое, а k — положительное целое. Контур интегрирования обходит один раз начало координат против часовой стрелки. Иначе,

$$J_{n,k}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (2\cos\theta)^k \cos(n\theta - z\sin\theta)\, d\theta,$$

$J_{n,0}(z) \equiv J_n(z)$ — цилиндрич. функция 1-го рода. Б. ф. наз. по имени Ж. Бурже [1], к-рый изучал ее, имея в виду различные астрономич. приложения.

Лит.: [1] Bourget J., «J. math. pures et appl.», 1861, t. 6, p. 32—54; [2] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., 1949, ч. 1, гл. 10.

В. И. Пагурова.

БУТА ЛЕМНИСКАТА — плоская алгебраич. кривая 4-го порядка, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид:

$$(x^2+y^2)^2+(2m^2+n)x^2+(2m^2-n)\,y^2=0.$$

Если $|n|<2m^2$, то Б. л. наз. эллиптической Б. л. (имеет изолированную особую точку O, см. рис. 1, где $0<n<2m^2$). Если $|n|>2m^2$, то Б. л. наз. гиперболической Б. л. (имеет в начале координат узловую точку, см. рис. 2, где $n>2m^2$). В полярных координатах уравнение эллиптич. Б. л. имеет вид:

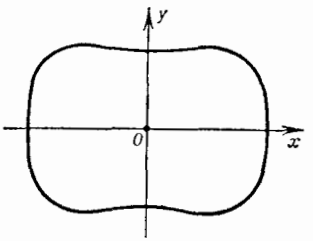


Рис. 1.

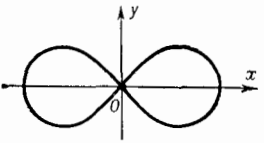


Рис. 2.

$$\rho^2=a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi \text{ или } \rho\equiv 0;$$

если $n>2m^2$, то уравнение гиперболической Б. л. имеет вид:

$$\rho^2=a^2\cos^2\varphi-b^2\sin^2\varphi,$$

если $n<-2m^2$:

$$\rho^2=-a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi$$

$$(a^2=|2m^2+n|,\ b^2=|2m^2-n|).$$

Длина дуги Б. л. выражается через эллиптич. интегралы. Площадь, ограничиваемая эллиптич. Б. л.:

$$S=\frac{\pi}{2}(a^2+b^2),$$

гиперболич. Б. л.:

$$S=\frac{a^2-b^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{a}{b}+\frac{ab}{2}.$$

Б. л. — частный случай *Персея кривой*.

Б. л. названа по имени Дж. Бута [1].

Лит.: [1] Booth J., A treatise on some new geometrical methods, v. 1—2, L., 1873—77; [2] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960, с. 144—46.

Д. Д. Соколов.

БУШУЮЩАЯ СИСТЕМА — *динамическая система* с пространством состояний, содержащим многообразия бушевания, т. е. многообразия, при прохождении к-рых изменяется закон, управляющий движением системы. Б. с. S в $\mathbb{R}^n$ описывается несколькими системами дифференциальных уравнений

$$x'=f_i(x),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad x'=\frac{dx}{dt}\qquad (S_i)$$

и поверхностями

$$M_i\subset\mathbb{R}^n,\quad i=1,\ \ldots,\ m.$$

При попадании траектории S на участке действия (S_i) к поверхности M_i происходит бушевание, т. е. замена системы (S_i) системой (S_{i+1}), причем (S_{m+1}) совпадает с (S_1) (подробнее см. [3]). Участие в задании Б. с. нескольких дифференциальных систем (S_i) приводит к большому разнообразию качественных картин семейств траекторий Б. с. Напр., Б. с., описываемая двумя стационарными системами линейных дифференциальных уравнений

$$x_1'=a_i+b_ix_1+c_ix_2,$$

$$x_2'=\beta_ix_1+\gamma_ix_2,\quad i=1,\ 2,$$

и имеющая в качестве многообразий бушевания $M_1 = M_2$ прямую $x_2 = 0$, может, в частности, иметь *предельный цикл* (см. [3]). Б. с. доставляют специфич. модели нелинейных колебаний, позволяя описывать явления типа «гистерезиса».

Лит.: [1] Vogel T., «Bull. Soc. Math. France», 1953, t. 81, № 1, 63—75; [2] Вогель Т., Бушующие системы, наследственные системы, динамические системы, пер. с франц., К., 1961; [3] Мышкис А. Д., Хохряков А. Я., «Матем. сб.», 1958, т. 45, № 3, с. 401—14.

Ю. С. Богданов.

БЬЁРЛИНГА ЗАДАЧА — задача теории *минимальных поверхностей*, состоящая в нахождении минимальной поверхности, проходящей через заданную незамкнутую аналитич. кривую L и имеющей вдоль L заданные касательные плоскости. Б. з. является для минимальных поверхностей аналогом задачи Коши для дифференциальных уравнений. Эта задача поставлена и решена Э. Бьёрлингом [1]. Решение ее всегда существует, единственно и в явном виде выражается формулой Шварца для минимальных поверхностей. Решение Б. з. позволяет найти минимальную поверхность всякий раз, когда известна или ее геодезическая линия, или асимптотическая линия, или линия тени. В случае, когда заданная кривая L плоская и является на искомой минимальной поверхности геодезической, плоскость кривой L будет для минимальной поверхности плоскостью симметрии.

Лит.: [1] Björling E. G., Archikes Grunert, t. IV, 1844, p. 290; [2] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, P., 1914, pt 1; [3] Бляшке В., Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна, пер. с нем., т. 1, М.— Л., 1935, с. 264—65; [4] Ниче С. С., «Математика», 1967, т. 11, № 3, с. 37—100.

И. Х. Сабитов.

БЭРА КЛАССЫ — семейства действительных функций, определяемые индуктивно по порядковому числу знаков предела, входящих в определение функции, и составляющие классификацию функций, предложенную Р. Бэром (R. Baire, 1899; см. [1]) и называемую *классификацией Бэра*. *Нулевым классом Бэра* H_0 наз. множество всех непрерывных функций $f : A \to \mathbb{R}$, где A — метрич. пространство. *Первый класс Бэра* H_1 есть множество разрывных функций $f : A \to \mathbb{R}$, являющихся пределом сходящейся в каждой точке последовательности непрерывных функций. *Класс Бэра* H_α, где α — трансфинитное число первого или второго класса, определяется как множество функций $f : A \to \mathbb{R}$, не входящих ни в один из предшествующих классов, но представимых в виде $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, где $f_n \in H_{\beta_n}$, $\beta_n < \alpha$. Объединение Б. к. H_α по всем трансфинитам первого и второго классов составляет множество *функций Бэра* (или *бэровских функций*). Это есть минимальный, замкнутый в смысле поточечной сходимости, класс функций $f : A \to \mathbb{R}$, содержащий все непрерывные функции. Линейная комбинация, произведение и частное (если знаменатель не обращается в нуль) функции Б. к. не выше α является функцией Б. к. не выше α. Равномерно сходящаяся последовательность функций Б. к. не выше α имеет пределом функцию Б. к. не выше α. Установлены [4] необходимые и достаточные условия для того, чтобы последовательность функций Б. к. не выше α сходилась к функции Б. к. не выше α. Открытым *ядром множества* A *топологического пространства* наз. объединение всех открытых множеств $M \subset A$. Если A — полное пространство с непустым плотным в себе ядром, то ни один Б. к. не пуст (см. [2]). Множество функций Бэра совпадает с множеством функций, измеримых по Борелю (см. *Бореля мера*); поэтому все они измеримы по Лебегу (см. *Лебега мера*). Функция $g : A \to \mathbb{R}$, измеримая по Лебегу, эквивалентна нек-рой функции Бэра не выше второго Б. к. (см. [3]). Р. Бэр, рассматривая функции, определенные в $\mathbb{R}^n$ (в основном в $\mathbb{R}$), наиболее подробно исследовал

функции первого класса. Он показал, что для принадлежности разрывной функции первому классу необходимо и достаточно существование точки непрерывности индуцированной функции на каждом совершенном множестве (теорема Бэра). Это утверждение переносится на функции $f: A \to \mathbb{R}$, если A обладает *Бэра свойством* (см. [2]). Понятие функций Бэра естественным образом обобщается на функции $\varphi: A \to Y$, где Y — произвольное метрич. пространство.

Лит.: [1] Бэр Р., Теория разрывных функций, пер. с франц., М.— Л., 1932; [2] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [3] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 2 изд., М., 1957; [4] Гагаев Б. М., «Fundam. math.», 1932, t. 18, p. 182—88.

И. А. Виноградова.

БЭРА МНОЖЕСТВО в локально компактном хаусдорфовом пространстве X — множество, принадлежащее σ-кольцу, порожденному классом всех компактных множеств в X, являющихся G_δ-множествами. С помощью Б. м. определяется понятие функции, измеримой в смысле Бэра. Во всех классич. частных случаях, когда теория меры строится в топологич. пространствах, напр. в евклидовых пространствах, понятие Б. м. совпадает с понятием *борелевского множества*.

Лит.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953, с. 214—18.

В. А. Скворцов.

БЭРА ПРОСТРАНСТВО — 1) Всякое пространство, в к-ром верна *Бэра теорема* (о полных пространствах). 2) Метрич. пространство, точками к-рого являются конечные последовательности $\{n_i\} = \{n_1, \ldots, n_k, \ldots\}$ натуральных чисел, а расстояние задается формулой:

$$\rho(\{n_i\}, \{m_i\}) = \frac{1}{k_0},$$

где k_0 — первое натуральное k, для к-рого $n_k \neq m_k$. Это — полное метрическое сепарабельное нульмерное пространство, содержащее топологич. образ всякого нульмерного метрического сепарабельного пространства.

П. С. Александров.

БЭРА СВОЙСТВО множества A в топологическом пространстве — свойство, аналогичное свойству измеримости множества. Множество A *обладает свойством Бэра*, если существует такое открытое множество G, что разности $A \setminus G$ и $G \setminus A$ являются множествами 1-й категории по Бэру (см. *Категория множества*) (термин «открытое» можно заменить на «замкнутое»). Существуют другие эквивалентные определения, напр. множество обладает Б. с., если оно является объединением множества типа G_δ и множества 1-й категории. Операция взятия дополнения, счетного объединения и счетного пересечения не выводит из класса множеств, обладающих Б. с. Пример множества, не обладающего Б. с., см. [1].

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 1, М., 1966, с. 96.

В. А. Скворцов.

БЭРА ТЕОРЕМА — 1) Б. т. о полных пространствах: любая счетная система открытых и всюду плотных в данном полном метрическом пространстве множеств имеет непустое, и даже всюду плотное в этом пространстве пересечение. Эквивалентная формулировка: полное метрич. пространство не может быть представлено в виде счетной суммы своих нигде не плотных подмножеств. Установлена Р. Бэром [1].

Лит.: [1] Baire R., «Ann. di mat.», 1899, (3), t. 3, p. 67.

П. С. Александров.

2) Б. т. о полунепрерывных функциях: пусть A — подмножество метрич. пространства M и $f: M \to \mathbb{R}$; тогда условие: для любого числа a множество $E\{x, x \in A, f(x) \geqslant a\}$ (соответственно $E\{x, x \in A, f(x) \leqslant a\}$) замкнуто в A, — необходимо и достаточно для того, чтобы $f(x)$ была полунепрерывна сверху (соответственно снизу) на A. Доказана Р. Бэром для $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (см. [1]). Из Б. т. следует, что полунепрерывные

функции входят в первый *Бэра класс*. Имеет место более сильное утверждение: полунепрерывная сверху (снизу) функция, не принимающая значение $+\infty$ ($-\infty$), есть предел монотонно невозрастающей (неубывающей) последовательности непрерывных функций.

Лит.: [1] Бэр Р., Теория разрывных функций, пер. с франц., М.— Л., 1932; [2] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 2 изд., М., 1957.

И. А. Виноградова.

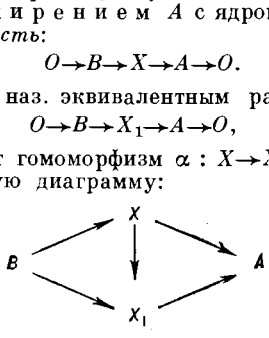
БЭРА УМНОЖЕНИЕ — бинарная операция на множестве классов эквивалентных расширений модулей; предложена Р. Бэром [1]. Пусть A и B — произвольные модули. Расширением A с ядром B наз. *точная последовательность*:

$$O \to B \to X \to A \to O. \qquad (1)$$

Расширение (1) наз. эквивалентным расширению

$$O \to B \to X_1 \to A \to O,$$

если существует гомоморфизм $\alpha : X \to X_1$, включаемый в коммутативную диаграмму:



Множество классов эквивалентных расширений обозначается $\mathrm{Ext}(A, B)$. Б. у. на $\mathrm{Ext}(A, B)$ индуцируется следующим образом определенной операцией произведения расширений. Пусть

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\beta} X \xrightarrow{\alpha} A \longrightarrow 0, \qquad (2)$$

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\beta_1} Y \xrightarrow{\alpha_1} A \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

два расширения. В прямой сумме $X \oplus Y$ выбираются подмодули

$$C = \{(x,\ y) \mid \alpha(x) = \alpha(y)\}$$

и

$$D = \{(-x,\ y) \mid x = \beta(b),\ y = \beta_1(b)\}.$$

Ясно, что $D \subset C$, так что определен фактормодуль $Z = C/D$. Произведением Бэра расширений (2) и (3) наз. расширение

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\beta_2} Z \xrightarrow{\alpha_2} A \longrightarrow 0,$$

где

$$\beta_2(b) = [\beta(b), 0] = [0, \beta'(b)],$$

а

$$\alpha_2[x,\ y] = \alpha(x) = \alpha_1(y).$$

Лит.: [1] Baer R., «Math. Z.», 1934, Bd 38, S. 374—416; [2] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960.

В. Е. Говоров.

БЭРРИ — ЭССЕЕНА НЕРАВЕНСТВО — неравенство, дающее оценку отклонения функции распределения суммы независимых случайных величин от нормальной функции распределения. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что

$$\mathsf{E}X_j = 0, \quad \mathsf{E}X_j^2 = \sigma^2 > 0, \quad \mathsf{E}\,|X_j|^3 < \infty.$$

Пусть

$$\rho = \frac{\mathsf{E}\,|X_j|^3}{\sigma^3}$$

и

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt;$$

тогда для любого n

$$\sup_x \left| \mathrm{P}\left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum\nolimits_{j=1}^{n} X_j \leqslant x \right\} - \Phi(x) \right| \leqslant A\,\frac{\rho}{\sqrt{n}},$$

где A — абсолютная положительная постоянная. Этот

результат был получен А. Бэрри [1] и независимо от него К.-Г. Эссееном [2].

Лит.: [1] Berry A. C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 49, № 1, p. 122—36; [2] Esseen C.-G., «Ark. Mat., Astr. och Fysik», 1942, Bd 28A, № 9, p. 1—19; [3] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972.

В. В. Петров.

БЮДАНА — ФУРЬЕ ТЕОРЕМА: число корней алгебраич. уравнения

$$f(x)=0,$$

заключенных в интервале (a, b), $a<b$, равно или на четное число меньше, чем $\tau=t_1-t_2$, где t_1 — число перемен знака в ряду производных многочлена $f(x)$ в точке a, т. е. в ряду

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots,\ f^{(n)}(a),$$

а t_2 — число перемен знака в этом ряду в точке b. При этом каждый кратный корень считается за столько корней, какова его кратность. Установлена Ф. Бюданом (F. Budan, 1822) и Ж. Фурье (J. Fourier, 1820).

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 2 — Алгебра, М.— Л., 1951, с. 331.

О. А. Иванова.

БЮРМАНА — ЛАГРАНЖА РЯД, ряд Лагранжа,— степенной ряд, полностью решающий задачу локального обращения голоморфных функций. Именно, пусть функция $w=g(z)$ комплексного переменного z регулярна в окрестности точки $z=a$, причем $g(a)=b$ и $g'(a)\neq 0$. Тогда в нек-рой окрестности точки $w=b$ плоскости w определена регулярная функция $z=h(w)$, обратная по отношению к $g(z)$ и такая, что $h(b)=a$; при этом, если $f(z)$ — любая регулярная в окрестности точки $z=a$ функция, то сложная функция $F(w)=f[h(w)]$ разлагается в окрестности точки $w=b$ в ряд Бюрмана — Лагранжа

$$F(w)=f(a)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f'(z)\left(\frac{z-a}{g(z)-b}\right)^n\right]\right\}_{z=a}(w-b)^n. \quad (*)$$

Случай непосредственного обращения функции $w=g(z)$ получается при $f(z)\equiv z$.

Разложение (*) вытекает из теоремы Бюрмана [1]: при указанных выше предположениях относительно голоморфных функций $g(z)$ и $f(z)$ последняя в нек-рой области на плоскости z, содержащей точку a, может быть представлена в виде:

$$f(z)=f(a)+$$

$$+\sum_{n=1}^{m-1}\frac{[g(z)-b]^n}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f'(z)\left(\frac{z-a}{g(z)-b}\right)^n\right]\right\}_{z=a}+R_m,$$

где

$$R_m=\frac{1}{2\pi i}\int_a^z\int_\gamma\left[\frac{g(z)-b}{g(t)-b}\right]^{m-1}\frac{f'(t)\,g'(z)\,dt\,dz}{g(t)-g(z)},$$

γ — контур на плоскости t, содержащий внутри точки a и z и такой, что если ζ — какая-либо точка внутри γ, то уравнение $g(t)=g(\zeta)$ не имеет ни на γ, ни внутри γ иных корней, кроме простого корня $t=\zeta$.

Разложение (*) для случая $b=0$ было получено Ж. Лагранжем [2].

В случае, когда производная $g'(t)$ имеет в точке $z=a$ нуль порядка $r-1$, Б.—Л. р. для многозначной обратной функции допускает следующее обобщение (см. [3]):

$$F(w)=f(a)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f'(z)\left(\frac{z-a}{g(z)-b}\right)^n\right]\right\}_{z=a}(w-b)^{n/r}.$$

Другое обобщение (см., напр., [4]) относится к функциям $g(z)$, регулярным в кольце; оно приводит вместо ряда (*) к ряду по положительным и отрицательным степеням разности $w-b$.

Лит.: [1] Burmann H., «Mem. de l'Inst. national des sci. et arts. Sci. Math. et Phys.», P., 1799, t. 2, p. 13—17; [2] Lag-

r a n g e J. L., «Mem. de l'Académie royale des sci. et belles-lettres de Berlin», 1770, t. 24; Œuvres, t. 2, P., 1868, p. 581—652; [3] Г у р в и ц А., К у р а н т Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968, ч. 1, гл. 8; [4] У и т т е к е р Э. Т., В а т с о н Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1962; [5] М а р к у ш е в и ч А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967. *Е. Д. Соломенцев.*

БЮФФОНА ЗАДАЧА о б и г л е — классическая задача теории *геометрических вероятностей*, по праву считающаяся исходным пунктом развития этой теории. Впервые была отмечена Ж. Бюффоном в 1733 и воспроизведена вместе с решением в [1]. Ж. Бюффон рассматривал следующую ситуацию: на плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии a, наудачу бросается игла длиною $2r$ ($2r<a$). Какова вероятность того, что игла пересечет одну из проведенных параллелей? Очевидно, что положение иглы определяется расстоянием x от ее центра до ближайшей прямой линии и острым углом θ, составленным иглой с перпендикуляром к этой линии. Величина x лежит между нулем и $a/2$, а θ — между нулем и $\pi/2$. Предполагается, что точка (x, θ) распределена равномерно в соответствующем прямоугольнике (это равносильно тому, что случайные величины x и θ независимы и равномерно распределены на $(0, a/2)$ и $(0, \pi/2)$). Тогда искомая вероятность определяется как отношение площадей, соответствующих благо-

приятствующим и всем возможным исходам, и равна

$$p = \frac{1}{\frac{a}{2}\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi/2} r \cos\theta \, d\theta = \frac{4r}{a\pi}. \qquad (*)$$

В свое время Б. з. послужила основой для экспериментальной проверки *Бернулли теоремы*. Действительно, если игла бросается n раз и в m случаях игла пересекает одну из линий, то частота m/n при больших n по теореме Бернулли должна быть близка к вероятности (*). Это соображение было использовано многими исследователями для определения числа π методом случайных испытаний (см. [1], [2]). Ж. Бюффон рассматривал и другие сходные задачи, в частности задачу о вероятности пересечения иглой линий, принадлежащих двум взаимно перпендикулярным системам, к-рые разбивают плоскость на прямоугольники со сторонами a и b, соответственно. Ответ Ж. Бюффона к этой задаче неверен. Правильный ответ:

$$\frac{4r(a+b)-4r^2}{\pi ab}$$

был указан П. Лапласом (P. Laplace) в 1812.

Лит.: [1] Buffon G., Essai d'arithmétique morale. Supplément à «l'Histoire Naturelle», v. 4, 1777; [2] Uspensky J. V., Introduction to mathematical Probability, N. Y.— L., 1937; [3] Кендалл М., Моран П., Геометричеекие вероятности, пер. с англ., М., 1972.

А. В. Прохоров.

ВАЛЛЕ ПУССЕНА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования числовых рядов; обозначается символом (VP). Числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

суммируется методом Валле Пуссена к числу S, если выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left[a_0+\frac{n}{n+1}a_1+\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}a_2+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{n!}{(n+1)\ldots 2n}a_n\right]=S.$$

Метод предложен Ш. Валле Пуссеном [1]. Для ряда Фурье функции $f(x)\in L[0,\ 2\pi]$ средние Валле Пуссена (см. также *Валле Пуссена сингулярный интеграл*) имеют вид

$$V_n(f,\ x)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\tau_n(t)\,dt,$$

где

$$\tau_n(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cos^{2n}\frac{t}{2}$$

— так наз. ядро Валле Пуссена. В. П. м. с. является *регулярным методом суммирования*. Этот метод сильнее всей совокупности *Чезаро методов суммирования* (см. *Включение методов суммирования*). Ввиду слабых аппроксимативных свойств В. П. м. с. практически не имеет применения в теории приближения функций.

Лит.: [1] La Vallée Poussin Ch. J., «Bull. Acad. de Belgique», 1908, t. 3; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [3] Gronwall T., «J. reine und angew. Math.», 1917, Bd 147, S. 16—35. *А. А. Захаров.*

ВАЛЛЕ ПУССЕНА МНОГОТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА — задача отыскания решения обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

или линейного уравнения

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)\,y=0, \qquad (2)$$

где $x\in[a,\ b]$, $|y^{(s)}|<+\infty$, $s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, при условиях

$$y(x_i)=c_i,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad x_i\in[a,\ b]. \qquad (3)$$

Ш. Валле Пуссен [1] доказал, что если $p_k(x)\in C_{[a,b]}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} l_k\,\frac{h^k}{k!}<1, \qquad (4)$$

где $l_k\geqslant|p_k(x)|$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, $x\in[a,\ b]$, $h=b-a$, то существует единственное решение задачи (2), (3). Им же было доказано, что если $f(x,\ u_1,\ \ldots,\ u_n)$ непрерывна по всем своим аргументам и удовлетворяет условиям Липшица с константами l_k по переменным u_{n+1-k}, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, то при выполнении неравенства (4) может существовать лишь одно решение задачи (1), (3).

Исследования по В. П. м. з. проводятся в следующих направлениях: улучшение оценки числа h с помощью изменения коэффициентов в (4); расширение класса функций $p_k(x)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, или $f(x,\ u_1,\ \ldots,\ u_n)$; обобщение условий (3). Основная проблема (1977) —

доказательство существования и единственности решения. Для задачи (2), (3) это свойство равносильно следующему: любое нетривиальное решение уравнения (2) имеет не более $n-1$ нулей на $[a, b]$ [неосцилляция (или неколеблемость) решений, или разъединенность нулей].

Лит.: [1] La Vallée Poussin Ch. J., «J. math. pures et appl.», 1929, сер. 9, t. 8, № 1, p. 125—44; [2] Сансоне Д ж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 1, М., 1953. *Л. Н. Ешуков.*

ВАЛЛЕ ПУССЕНА ПРИЗНАК точечной сходимости ряда Фурье: если 2π-периодическая интегрируемая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$ такова, что функция

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x \{f(x_0+t)+f(x_0-t)\}\,dt, \quad x\neq 0,$$

$F(0)=0$, имеет ограниченную вариацию на нек-ром отрезке $[0, \delta]$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к числу

$$F(+0)=\lim_{x\to+0} F(x).$$

В. П. п. сильнее *Дини признака*, *Дирихле признака*, *Жордана признака*. В. П. п. доказан Ш. Валле Пуссеном [1].

Лит.: [1] La Vallée Poussin Ch. J., «Rend. circolo mat. Palermo», 1911, t. 31, p. 296—99; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, с. 247—48. *Б. И. Голубов.*

ВАЛЛЕ ПУССЕНА ПРОИЗВОДНАЯ, обобщенная симметрическая производная; определена Ш. Валле Пуссеном [1]. Пусть r — четное и пусть существует $\delta>0$ такое, что для всех t с $|t|<\delta$

$$\frac{1}{2}\{f(x_0+t)+f(x_0-t)\}=$$

$$=\beta_0+\frac{t^2\beta_2}{2}+\ldots+\frac{t^r\beta_r}{r!}+\gamma(t)\,t^r, \qquad (*)$$

где $\beta_0, \ldots, \beta_r$ — постоянные, $\gamma(t)\to 0$ при $t\to 0$ и $\gamma(0)=0$. Тогда число $\beta_r=f_{(r)}(x_0)$ наз. производной Валле Пуссена порядка r, иначе — симметрической производной порядка r функции f в точке x_0.

Аналогично определяется В. П. п. нечетного порядка r с заменой равенства $(*)$ на

$$\frac{1}{2}\{f(x_0+t)-f(x_0-t)\}=$$

$$=t\beta_1+\frac{t^3\beta_3}{3!}+\ldots+\frac{t^r\beta_r}{r!}+\gamma(t)t^r.$$

В. П. п. $f_{(2)}(x_0)$ совпадает со второй производной Римана, к-рую часто наз. производной Шварца. Если существует $f_{(r)}(x_0)$, то существует и $f_{(r-2)}(x_0)$, $r\geqslant 2$; при этом $f_{(r-1)}(x_0)$ может не существовать. Если существует конечная обычная двусторонняя производная $f^{(r)}(x_0)$, то $f_{(r)}(x_0)=f^{(r)}(x_0)$. Для функции $f(x)=\operatorname{sgn} x$, напр., $f_{(2k)}(0)=0$, $k=1, 2, \ldots$, и не существуют конечные $f_{(2k+1)}(0)$, $k=0,1, \ldots$ Если существует В. П. п. $f_{(r)}(x_0)$, то ряд $S^{(r)}(f)$, полученный из ряда Фурье функции f почленным дифференцированием r раз, суммируем в точке x_0 к $f_{(r)}(x_0)$ методом (C, α) при $\alpha>r$ [2] (см. *Чезаро методы суммирования*).

Лит.: [1] La Vallée Poussin Ch. J., «Bull. Acad. de Belgique», 1908, t. 3, p. 193—254; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., М., 1965, гл. 11. *А. А. Конюшков.*

ВАЛЛЕ ПУССЕНА СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл вида

$$V_n(f;\ x)=\frac{1}{2\pi}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt$$

(см. также *Валле Пуссена метод суммирования*). Последовательность $V_n(f;\ x)$ равномерно сходится к $f(x)$ для функций $f(x)$, непрерывных и 2π-периодических на $(-\infty;\ \infty)$ (см. [1]). Если

$$\left(\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt\right)'_x = f(x)$$

в точке x, то $V_n(f;\ x)\to f(x)$ при $n\to\infty$. Справедливо равенство [2]:

$$V_n(f;\ x)-f(x)=\frac{f''(x)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.— Л., 1949, с. 263.

П. П. Коровкин.

ВАЛЛЕ ПУССЕНА СУММА — выражение

$$V_{n,\,p}(f,\ x)=\frac{1}{p+1}\sum_{k=n-p}^{n} S_k(f,\ x), \qquad (*)$$

$$p=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\ n=0,\ 1,\ \ldots,$$

где $S_k(f, x)$, $k=0, 1, \ldots$ — частные суммы *Фурье ряда* функции $f(x)$ периода 2π. При $p=0$ В. П. с. $V_{n,0}(f,\ x)$ совпадают с частными суммами Фурье, а при $p=n$ — с *Фейера суммами*. Метод приближения периодич. функций полиномами вида (*) впервые рассмотрел Ш. Валле Пуссен (см. [1], [2]); он же установил неравенство

$$|f(x)-V_{n,\,p}(f,\ x)|\leqslant 2\frac{n+1}{p+1}E_{n-p}(f),$$

$$p=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

где $E_m(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f(x)\in C_{2\pi}$ при помощи тригонометрич. полиномов порядка не выше m. Если $p=[cn]$, $0<c<1$, $[a]$ — целая часть числа a, то полиномы $V_{n,[cn]}(f,\ x)$ осуществляют приближение, имеющее порядок $O(E_{[(1-c)n]}(f))$. К непрерывным функциям периода 2π, для к-рых при некоторых θ, $0\leqslant\theta<1$, имеет место оценка $E_{[\theta n]}(f)=O(E_n(f))$, полиномы $V_{n,[cn]}(f,\ x)$ дают наилучшее по порядку приближение. В. П. с. обладают рядом свойств, представляющих интерес для теории суммирования рядов Фурье. Напр., если $p=[cn]$, $0<c<1$, то $|V_{n,p}(f,\ x)|\leqslant K(c)\max|f(x)|$, а если $f(x)$ — тригонометрич. полином порядка не выше $n-p$, то $V_{n,p}(f,\ x)=f(x)$. В. П. с. можно записать в виде

$$V_{n,\,p}(f,\ x)=$$

$$=\frac{1}{(p+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+t)\sin\frac{2n+1}{2}t\,\frac{\sin^{\frac{p+1}{2}}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}\right]dt,$$

где выражения

$$K_{n,\,p}(t)=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t\sin^{\frac{p+1}{2}}t}{2(p+1)\sin^2\frac{t}{2}},$$

$$p=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\quad n=0,\ 1,\ \ldots$$

наз. ядрами Валле Пуссена.

Лит.: [1] La Vallée Poussin Ch. J., «C. r. Acad. sci.», 1918, t. 166, p. 799—802; [2] его же, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réele, P., 1919; [3] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.— Л., 1949, с. 211—13; [4] Коровкин П. П., Линейные операторы и теория приближений, М., 1959, с. 150—59; [5] Никольский С. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1940, т. 4, № 6, с. 509—20; [6] Стечкин С. Б., «Докл. АН СССР», 1951, т. 80, № 4, с. 545—48; [7] Щербина А. Д., «Матем. сб.», 1950, т. 27, в. 2, с. 157—70; [8] Тиман А. Ф., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1953, 17, № 1, с. 99—134; [9] его же, Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [10] Ефимов А. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.,»

1959, 23, № 5, с. 737—70; [11] его же, там же, 1960, 24, № 3, с. 431—68; [12] Теляковский С. А., «Докл. АН СССР», 1958, т. 121, № 3, с. 426—29; [13] его же, там же, 1960, т. 131, № 2, с. 259—62. *А. В. Ефимов.*

ВАЛЛЕ ПУССЕНА ТЕОРЕМА — 1) В. П. т. о распределении простых чисел: пусть $\pi(x)$ — число простых чисел, меньших x; тогда при $x \geqslant 1$ выполняется равенство

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O\left(xe^{-C\sqrt{\ln x}}\right),$$

где C — нек-рая положительная постоянная, а $\operatorname{li} x$ — *интегральный логарифм* x. Из В. П. т. следует справедливость гипотезы Гаусса о распределении простых чисел, т. е. при $x \to +\infty$

$$\operatorname{li} x \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Установлена Ш. Валле Пуссеном [1]. См. *Распределение простых чисел.*

Лит.: [1] La Vallée Poussin Ch. J., «Ann. Soc. sci. Bruxelles», 1899, t. 20, p. 183—256; [2] его же, «Mem. couronnes Acad. sci. de Belgique», 1899—1900, t. 59, № 1; [3] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с англ., М., 1967. *С. М. Воронин.*

2) В. П. т. об альтернансе: если последовательность точек $\{x_i\}$, $i=0, 1, \ldots, n+1$ из замкнутого множества $Q \in [a, b]$ образует альтернанс, то для *наилучшего приближения* функции $f(x)$ полиномами вида

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k s_k(x),$$

где $\{s_k(x)\}_0^n$ — система Чебышева, верна оценка:

$$E_n(f) = \inf_{C_k} \sup_{x \in Q} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k s_k(x) \right| \geqslant$$

$$\geqslant \min_{0 \leqslant i \leqslant n+1} |f(x_i) - P_n(x_i)|.$$

Установлена Ш. Валле Пуссеном [1].

По *Чебышева теореме* равенство достигается тогда и только тогда, когда $P_n(x)$ — полином наилучшего приближения. Имеются аналоги этой теоремы для произвольных банаховых пространств [2]. Применяется в численных методах построения полиномов наилучшего приближения.

Лит.: [1] La Vallée Poussin Ch. J., Sur les polynômes d'approximation et la représentation approchée d'un angle, «Bull. Acad. de Belgique», 1910, t. 12, p. 808—45; [2] Гаркави А. Л., в сб.: Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 75—132. *Ю. Н. Субботин.*

ВАЛЛИСА ФОРМУЛА — формула, выражающая число $\pi/2$ в виде бесконечного произведения:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \cdots . \qquad (*)$$

Существуют другие варианты этой формулы, напр.

$$\sqrt{\pi} = \lim_{m \to \infty} \frac{(m!)^2 \cdot 2^{2m}}{(2m)! \sqrt{m}}.$$

Формула (*) впервые встречается у Дж. Валлиса [1] в его вычислениях площади круга; В. ф.— один из первых примеров бесконечного произведения.

Лит.: [1] Wallis J., ... Arithmetica infinitorum, [Oxf.], 1655. *Т. Ю. Попова.*

ВАЛЬДА ТОЖДЕСТВО — тождество в последовательном анализе, утверждающее, что математич. ожидание суммы $S_\tau = X_1 + \ldots + X_\tau$ случайного числа τ независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ равно произведению математич. ожиданий $\mathsf{E}X_1$ и $\mathsf{E}\tau$:

$$\mathsf{E}(X_1 + \ldots + X_\tau) = \mathsf{E}X_1 \cdot \mathsf{E}\tau.$$

Для справедливости В. т. достаточно, чтобы существовали математич. ожидания $\mathsf{E}|X_1|$ и $\mathsf{E}\tau$ и чтобы случайная величина τ была марковским моментом (т. е. чтобы при каждом $n=1, 2, \ldots$ событие $\{\tau=n\}$ определялось по значениям случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ или, что то же, событие $\{\tau=n\}$ принадлежало σ-алгебре,

порожденной случайными величинами $X_1, \ldots, X_n$). В. т. является частным случаем основной теоремы последовательного анализа, утверждающей, что

$$\mathsf{E}\left[e^{\lambda s_\tau}(\varphi(\lambda))^{-\tau}\right]=1$$

для всех комплексных λ, для к-рых $\varphi(\lambda)=\mathsf{E}e^{\lambda X_1}$ существует и $|\varphi(\lambda)|\geqslant 1$. Установлено А. Вальдом (A. Wald, см. [1]).

Лит.: [1] Вальд А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., М., т. 1, 1967, гл. 14.

А. Н. Ширяев.

ВАН ДЕР ВАРДЕНА КРИТЕРИЙ — *непараметрический критерий* однородности двух выборок $Y_1, \ldots, Y_n$ и $Z_1, \ldots, Z_m$, основанный на *ранговой статистике*

$$X=\sum_{i=1}^{m}\Psi\left(\frac{s(r_i)}{m+n+1}\right),$$

где r_i — ранги (порядковые номера) случайных величин Z_i в общем вариационном ряду из Y_j и Z_i, функция $s(r)$ определяется заранее выбранной подстановкой

$$\begin{pmatrix}1 & \ldots & (m+n)\\ s(1) & \ldots & s(m+n)\end{pmatrix},$$

$\Psi(p)$ — обратная функция нормального распределения с параметрами (0, 1). Выбор подстановки определяется тем, что для заданной альтернативной гипотезы мощность критерия должна быть наибольшей. При $m+n\to\infty$, независимо от поведения m и n по отдельности, величина Y распределена асимптотически нормально. В предположении, что Y и Z независимы и распределены нормально с одинаковыми дисперсиями, В. д. В. к. для альтернативы $\mathsf{P}(Y<T)<\mathsf{P}(Z<T)$ или $\mathsf{P}(Y<T)>\mathsf{P}(Z<T)$ (в этом случае $s(r)\equiv r$) имеет асимптотически ту же мощность, что и *Стьюдента критерий*. Введен Б. Л. Ван дер Варденом [1].

Лит.: [1] Van der Waerden B. L., «Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch.», A., 1955, v. 55, p. 453; [2] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

А. В. Прохоров.

ВАН ДЕР ПОЛЯ УРАВНЕНИЕ — нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\ddot{x}-\mu(1-x^2)\dot{x}+x=0,\quad \mu=\text{const}>0,\quad \dot{x}(t)\equiv\frac{dx}{dt}. \tag{1}$$

Является важным частным случаем *Льенара уравнения*. В. д. П. у. описывает свободные *автоколебания* одной из простейших нелинейных колебательных систем (осциллятора Ван дер Поля). В частности, уравнение (1) служит математич. моделью (при ряде упрощающих предположений) лампового генератора на триоде в случае кубич. характеристики лампы. Характер решений уравнения (1) был впервые подробно изучен Б. Ван дер Полем (см. [1]).

Уравнение (1) эквивалентно системе двух уравнений относительно фазовых переменных x, v:

$$\dot{x}=v,\quad \dot{v}=-x+\mu(1-x^2)v. \tag{2}$$

Иногда вместо x удобнее ввести переменную $z(t)=\int_0^t x(\tau)\,d\tau$; тогда уравнение (1) приведется к уравнению

$$\ddot{z}-\mu\left(\dot{z}-\frac{\dot{z}^3}{3}\right)+z=0,$$

являющемуся частным случаем *Рэлея уравнения*. Если вместе с переменной x рассмотреть переменную $y=-x+\frac{x^3}{3}+\frac{\dot{x}}{\mu}$, ввести новое время $\tau=t/\mu$ и положить $\varepsilon=\mu^{-2}$, то вместо уравнения (1) получим систему

$$\varepsilon x'=y-x+\frac{x^3}{3},\quad y'=-x,\quad {}'=\frac{d}{d\tau}. \tag{3}$$

При любом $\mu>0$ в фазовой плоскости системы (2) существует единственный устойчивый предельный цикл,

к к-рому при $t \to \infty$ приближаются все остальные траектории (кроме положения равновесия в начале координат); этот предельный цикл адекватен автоколебаниям осциллятора Ван дер Поля (см. [2] — [4]).

При малых μ автоколебания осциллятора (1) близки к простым гармоническим колебаниям (см. *Нелинейные колебания*) с периодом 2π и с определенной амплитудой. Для вычисления колебательного процесса с большей точностью применяются асимптотич. методы. При возрастании μ автоколебания осциллятора (1) все более отклоняются от гармонич. колебаний. При больших μ уравнение (1) описывает *релаксационные колебания* с периодом (в первом приближении) $1{,}614\,\mu$. Известны более точные асимптотич. разложения величин, характеризующих релаксационные колебания (см. [5]); изучение этих колебаний равносильно исследованию решений системы (3) с малым параметром ε при производной (см. [6]).

Уравнение

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = E_0 + E \sin \omega t$$

описывает поведение осциллятора Ван дер Поля под воздействием внешнего периодич. возмущения. Здесь наиболее важны изучение явления захватывания частоты (существования периодич. колебаний) и исследование биений (возможности почти периодич. колебаний; см. [2], [4]).

Лит.: [1] Van der Pol B., «Phil. Mag.», 1922, ser. 6, v. 43, p. 700—19; 1926, ser. 7, v. 2, p. 978—92; [2] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [3] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961; [4] Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, пер. с англ., 2 изд., М., 1953; [5] Дородницын А. А., «Прикл. матем. и механика», 1947, т. 11, с. 313—28; [6] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975. *Н. Х. Розов.*

ВАНДЕРМОНДА ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ — определитель порядка n вида:

$$B(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — элементы нек-рого коммутативного кольца. При любом $n \geqslant 2$

$$B(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

Для колец без делителей нуля имеет место основное свойство В. о.: $B(a_1, \ldots, a_n) = 0$ тогда и только тогда, когда среди элементов $a_1, \ldots, a_n$ не все элементы различны. В. о. был рассмотрен впервые А. Т. Вандермондом для случая $n = 3$ (см. [1]), затем О. Коши (1815, см. [2]).

Лит.: [1] Vandermonde A. T., в кн.: Histoire de l'Académie royale des sciences, année 1771, P., 1774, p. 365—416; année 1772, pt 2, P., 1776, p. 516—32; [2] Cauchy A., Oeuvres, sér. 2, t. 1, P., 1905, p. 91—169. *В. Н. Ремесленников.*

ВАРДА ТЕОРЕМА о дифференцировании аддитивной функции сегмента: пусть F — аддитивная функция сегмента, а $\underline{F}(x)(\overline{F}(x))$ — нижняя (верхняя) грань пределов отношений $F(G_n)$ к мере Лебега G_n, где $\{G_n\}$ — регулярная последовательность сегментов, стягивающихся к точке x. Тогда равенство $\overline{F}(x) = \underline{F}(x)$ выполняется почти везде (в смысле меры Лебега) на множестве $\{x : \underline{F}(x) > -\infty$ или $\overline{F}(x) < \infty\}$. Регулярность последовательности сегментов G_n означает, что существует число $\alpha > 0$ и последовательность шаров S_n', S_n'' таких, что для всех n

$$\operatorname{diam} S_n' > \alpha \operatorname{diam} S_n''$$

и

$$S_n' \subset G_n \subset S_n''.$$

Если в приведенной выше формулировке отбросить условие регулярности, то получится вторая В. т. Эти теоремы обобщают *Данжуа теорему* о производных числах функции одной переменной. В. т. установлены А. Вардом [1].

Лит.: [1] Ward A. J., «Fundam. math.», 1936, t. 28, p. 167—182; 1937, t. 28, p. 265—79. *Л. Д. Иванов.*

ВАРИАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТ — безразмерная мера рассеяния распределения случайной величины. Существует несколько способов определения В. к. Наиболее часто в практике В. к. определяется по формуле

$$V = \frac{\sigma}{\mu},$$

где σ^2 — дисперсия, μ — математич. ожидание (при этом μ должно быть положительным). Иногда это выражение приводится к процентам, т. е. $V = 100\ \sigma/\mu\%$. Такое определение В. к. было предложено К. Пирсоном (K. Pearson, 1895). *Т. С. Лельчук.*

ВАРИАЦИИ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ТЕОРЕМА в статистической механике — утверждение об изменении (вариации) среднего значения динамич. величины по *Гиббса статистическому ансамблю* вследствие бесконечно малого изменения гамильтониана. Изменение среднего зависит, вообще говоря, от способа «включения» изменения гамильтониана и от начальных условий. Пусть в начальный момент времени $t \to -\infty$ система многих взаимодействующих частиц (квантовая или классическая), описываемая не зависящим от времени явно гамильтонианом H, находилась в состоянии термодинамич. равновесия. При адиабатич. включении бесконечно малого зависящего от времени возмущения гамильтониана

$$H \to H + \delta V(t),$$

где

$$\delta V(t) = \sum_{(E)} e^{\varepsilon t - iEt}\, \delta V_E, \quad \varepsilon > 0,\ \varepsilon \to +0,$$

равновесное гиббсовское среднее $\langle A \rangle$ не зависящей от времени явно динамич. величины A изменяется на величину (в линейном приближении по возмущению)

$$\delta \langle A(t) \rangle = -2\pi i \sum_{(E)} e^{\varepsilon t - iEt} \ll A \mid \delta V_E \gg_E^{(\mathrm{ret})},$$

где $\ll A \mid \delta V_E \gg_E^{(\mathrm{ret})}$ — фурье-образ запаздывающей коммутаторной функции Грина.

Основное применение теорема находит в теории неравновесных и необратимых процессов (где одна из формулировок этой теоремы известна также под назв. флюктуационно-диссипационной теоремы), а также при выводе цепочек и систем уравнений для функций Грина из цепочек и систем уравнений для *корреляционных функций*.

Лит.: [1] Kubo R., «J. Phys. Soc. Japan», 1957, t. 12, p. 570; [2] Боголюбов Н. Н. [мл.], Садовников Б. И., «Ж. экспер. и теор. физики», 1962, № 43, с. 677; [3] их же, Некоторые вопросы статистической механики, М., 1975; [4] Тябликов С. В., Методы квантовой теории магнетизма, 2 изд., М., 1975. *В. Н. Плечко.*

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА — 1) В. з. с закрепленными концами — задача вариационного исчисления, в к-рой концы кривой, доставляющей экстремум, зафиксированы. Напр., в простейшей задаче вариационного исчисления $\inf \int_{(t_0,\ x_0)}^{(t_1,\ x_1)} F(t,\ x,\ \dot{x})\, dt$ с закрепленными концами заданы начальная и конечная точки $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, через к-рые должна проходить искомая кривая $x(t)$. Учитывая, что общее решение *Эйлера уравнения* простейшей задачи зависит от двух произвольных постоянных $x = x(t, c_1, c_2)$, кривая, доставляющая экстремум, ищется среди решений соответствующей краевой задачи. При этом может оказаться, что краевая задача имеет единственное решение, неединственное или не имеет решения.

2) В. з. со свободными (подвижными) концами — задача вариационного исчисления, в к-рой концы кривой, доставляющей экстремум, могут перемещаться вдоль заданных многообразий. Напр., если в *Больца задаче* число граничных условий, к-рым должна удовлетворять искомая кривая $x=(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ строго меньше $2n+2$:

$$\psi_\mu(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2))=0, \ \mu=1, \ \ldots, \ p<2n+2, \ (*)$$

то концы кривой могут смещаться вдоль $(2n+2-p)$-мерного многообразия (*). В случае, когда граничные условия (*) заданы в виде

$$\psi_\rho(t_1, x(t_1))=0, \ \psi_\sigma(t_2, x(t_2))=0,$$

$$\rho=1, \ \ldots, r, \ \sigma=1, \ldots, q,$$

и $n+1-r>0$ или $n+1-q>0$, концы кривой $x(t)$ могут смещаться по соответствующим многообразиям размерностей $n+1-r$ и $n+1-q$. На концах кривой, доставляющей экстремум, должны выполняться *трансверсальности условия*, к-рые в совокупности с условиями (*) позволяют получить замкнутую систему соотношения, приводящую к нек-рой краевой задаче. Из решения этой краевой задачи определяются произвольные постоянные, входящие в общий интеграл уравнения Эйлера.

Качественным отличием В. з. от задачи на экстремум функции многих переменных является то, что объектом поиска в В. з. является не точка в конечномерном пространстве, а функция (или точка в бесконечномерном пространстве). *И. Б. Вапнярский.*

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — раздел математики, посвященный исследованию методов отыскания экстремумов функционалов, зависящих от выбора одной или нескольких функций при разного рода ограничениях (фазовых, дифференциальных, интегральных и т. п.), накладываемых на эти функции. Этими рамками обозначен класс задач, наз. еще задачами классического В. и. Иногда в термин «В. и.» вкладывают более широкий смысл, понимая под ним тот раздел теории экстремальных задач, где исследование экстремумов проводят «методом вариаций» (см. *Вариация*), т. е. методом малого возмущения аргументов и функционалов; задачи, относящиеся к В. и. в этом широком смысле, противопоставляются дискретным задачам оптимизации.

Весьма широкий круг задач классич. В. и. описывает следующая схема. Требуется минимизировать функционал

$$J(x)=\int_T f(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt, \qquad (1)$$

где $T\subset\mathbb{R}^m$, $t=(t_1, \ldots, t_m)$, $x=(x^1, \ldots, x^n)$,

$$\dot{x}=\left(\frac{\partial x^i}{\partial t_\alpha}\right), \quad f:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{mn}\longrightarrow\mathbb{R},$$

при ограничениях типа равенств:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(t, x(t), \dot{x}(t))=0,\\ \varphi:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{mn}\longrightarrow\mathbb{R}^s\end{array}\right\} \qquad (2)$$

и некоторых краевых условиях: $x|_{\partial T}\in\Gamma$. Задачи такого типа наз. *Лагранжа задачами*. Кроме задач Лагранжа, рассматривают еще *Майера задачи*, *Больца задачи* и ряд других.

Наиболее элементарной среди задач классич. В. и. является простейшая задача В. и., когда в (1) t и x одномерны, ограничения (2) отсутствуют, а граничные условия закрепленные:

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\,dt\longrightarrow\inf; \ x(t_0)=x_0, \ x(t_1)=x_1. \ (3)$$

К этому типу относится задача о *брахистохроне* или о кривой наикратчайшего спуска. С задачей о брахи-

стохроне обычно связывают начало истории классич. В. и.

Теоретич. основы классич. В. и. были заложены Л. Эйлером (L. Euler) и Ж. Лагранжем (J. Lagrange) в 18 в. Ими же были вскрыты важнейшие связи этой дисциплины с механикой и физикой. На первом же этапе развития В. и. усилиями в основном Г. Лейбница (G. Leibniz), Я. и И. Бернулли (Jacob et Johann Bernoulli), Л. Эйлера и Ж. Лагранжа получили решение многие конкретные задачи (о геодезических, о поверхности вращения, ряд изопериметрич. задач и т. п.).

В В. и. изучаются алгоритмич. методы отыскания экстремумов, методы получения необходимых и достаточных условий, условия, гарантирующие существование экстремума, качественные вопросы и т. п. Среди алгоритмич. методов нахождения экстремумов важнейшее место занимают прямые методы.

Прямые методы. Л. Эйлер (1768) создал метод приближенного (численного) решения задач В. и., к-рый получил назв. метода ломаных Эйлера. С этого момента начались исследования путей численного решения экстремальных задач. Метод Эйлера был первым представителем большого класса методов, наз. прямыми методами В. и. Эти методы основаны на редукции задачи отыскания экстремума функционала к задаче математич. анализа об отыскании экстремума функции многих переменных.

Метод ломаных Эйлера в применении к задаче (3) состоит в следующем. Интервал $[t_0, t_1]$ разбивается на N равных частей точками $\tau_0=t_0$, $\tau_1=t_0+\tau$, . . ., $\tau_N=t_0+N\tau=t_1$. Значения функции в этих точках обозначены $x_0, x_1, \ldots, x_N$ соответственно. Каждая совокупность точек (τ_0, x_0), (τ_1, x_1), . . ., (τ_N, x_N) определяет нек-рую ломаную. Ставится задача: среди всех возможных ломаных, соединяющих точки (τ_0, x_0) и (τ_N, x_N), найти ту, к-рая доставляет функционалу (1) экстремальное значение. Значение производной $\dot{x}$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ будет: $\dot{x}_i=(x_{i+1}-x_i)/\tau$. Функционал $J(x)$ превращается в функцию конечного числа переменных x_i:

$$J(x) \sim J(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

и задача (3) сводится к задаче отыскания экстремума функции $J(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Для того чтобы ломаная Эйлера, реализующая экстремум этой функции, аппроксимировала решение задачи (3) с высокой точностью, число N должно быть, вообще говоря, достаточно велико. При этом объем вычислений для отыскания экстремума функции (3) столь велик, что проведение вычислений «вручную» весьма сложно. Поэтому долгое время прямые методы были в стороне от основных исследований по В. и.

В 20 в. интерес к прямым методам значительно возрос. Прежде всего были предложены новые способы редукции к задаче об экстремуме функции конечного числа переменных. Эти идеи могут быть пояснены на примере минимизации функционала (3) при условии

$$x(t_0)=x(t_1)=0.$$

Пусть разыскивается решение задачи в форме

$$x(t)=\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(t),$$

где $\varphi_n(t)$ — некоторая система функций, удовлетворяющих условиям $\varphi_i(t_0)=\varphi_i(t_1)=0$, $i=1, \ldots, N$. Тогда функционал $J(x)$ становится функцией коэффициентов $J(x) \sim J(a_1, \ldots, a_n)$, и задача сводится к отысканию экстремума этой функции N переменных. При нек-рых условиях, наложенных на систему функций $\{\varphi_n\}$, решение задачи стремится при $N \to \infty$ к решению задачи (3) (см. *Галеркина метод*).

Метод вариаций. Второе направление исследований — изучение необходимых и достаточных условий, к-рым должна удовлетворять функция $x(t)$, реализующая

экстремум функционала $J(x)$. Основным методом получения необходимых условий является метод вариаций. Пусть тем или иным способом построена нек-рая функция $x(t)$. Как проверить, является ли эта функция решением вариационной задачи (3)? Первый вариант ответа на этот вопрос был дан Л. Эйлером (1744). В приведенной ниже формулировке ответа употребляется введенное Ж. Лагранжем (1762) понятие вариации (отсюда назв. «В. и.») δJ функционала J (см. *Вариация*, *Вариация функционала*).

Для простейшей задачи В. и.:

$$\delta J(x, h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{x(t)} h(t)\, dt,$$

где $h(t)$ — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условиям $h(t_0)=h(t_1)=0$. Условие $\delta J=0$ является необходимым, для того чтобы функция $x(t)$ реализовала экстремум функционала (3). Отсюда и из выражения для вариации δJ следует: для того чтобы функция $x(t)$ доставляла экстремум функционалу (3), необходимо, чтобы она удовлетворяла следующему дифференциальному уравнению 2-го порядка относительно функции $x(t)$:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0. \qquad (4)$$

Это уравнение наз. *Эйлера уравнением*, а интегральные кривые этого семейства — э к с т р е м а л я м и рассматриваемой вариационной задачи. Функция $x(t)$, на к-рой $J(x)$ достигает экстремума, необходимо должна быть решением краевой задачи $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$ для уравнения (4). Таким образом, возникает второй путь решения экстремальной задачи: надо решить краевую задачу для уравнения Эйлера (в регулярных случаях при этом получится лишь конечное число решений), и далее надо каждую из полученных экстремалей подвергнуть дополнительному исследованию, чтобы определить, имеется ли среди них кривая, дающая решения задачи. Однако указанный метод обладает тем существенным недостатком, что не имеется универсальных способов решения краевых задач для обыкновенных (нелинейных) дифференциальных уравнений.

Весьма часто встречаются *вариационные задачи* с п о д в и ж н ы м и к о н ц а м и. Напр., в простейшей задаче точки $x(t_0)$ и $x(t_1)$ могут перемещаться вдоль заданных кривых. Для задач с подвижными концами из условия $\delta J=0$ выводятся дополнительные условия, к-рым должны удовлетворять подвижные концы, — так наз. *трансверсальности условия*, к-рые в совокупности с граничными условиями приводят к замкнутой системе условий для краевой задачи.

Основные результаты, относящиеся к простейшей задаче В. и., переносятся на общий случай функционалов вида

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x(t), \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^sx}{dt^s}\right) dt,$$

где $x(t)$ — вектор-функция произвольной размерности (см. [3]).

Задача Лагранжа. Л. Эйлер и Ж. Лагранж изучали и задачи на условный экстремум. Простейшим классом задач подобного рода является класс так наз. *изопериметрических задач*. Ж. Лагранж выделил (в случае, когда t одномерно) класс задач (1), (2) и получил для них аналог уравнения Эйлера с привлечением так наз. множителей Лагранжа. Такой аналог получается и для самого общего случая — задачи (1), (2). Особое значение задача Лагранжа приобрела в середине 20 в. в связи с созданием *оптимального управления математической теории*. Далее основные результаты, касающиеся задачи Лагранжа, даются на языке этой теории, возникшем после работ Л. С. Понтрягина и его учеников.

Рассмотрим тот случай, когда в задаче (1), (2) t одномерно и система $\varphi(t, x, \dot{x})$ может быть частично разрешена относительно последних переменных. Тогда получается задача о минимизации функционала

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)\, dt \tag{5}$$

при дифференциальной связи

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{6}$$

и граничных условиях:

$$(x(t_0), x(t_1)) \in E. \tag{7}$$

В (5) — (7) $x=(x^1, \ldots, x^n)$ — вектор-функция, наз. фазовым вектором, $u=(u^1, \ldots, u^m)$ — вектор-функция, наз. управлением, $F: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to R$, $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $E\subset\mathbb{R}^{2n}$.

Примером граничных условий типа (7) могут служить закрепленные условия как в задаче (3). В задачах оптимального управления помимо условий (6) и (7) накладывают еще и «неклассические» условия, напр.

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m. \tag{8}$$

Слабый и сильный экстремумы. В В. и. обычно различают две топологии — сильную и слабую, и в соответствии с этим оперируют понятиями сильного и слабого экстремумов. Напр., в применении к задаче (3) говорят, что кривая $x_0(t)$ реализует с л а б ы й м и н и м у м, если можно указать такое $\varepsilon>0$, что $J(x)\geqslant J(x_0)$ для всех непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям: $x(t_0)=x_0(t_0)$, $x(t_1)=x_0(t_1)$ и

$$\max_{t\in[t_0, t_1]} |x(t)-x_0(t)| + \max_{t\in[t_0, t_1]} |\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t)| < \varepsilon.$$

Иными словами, здесь фиксируется близость не только фазовых переменных, но и скоростей (управлений). Говорят, что функция доставляет с и л ь н ы й э к с т р е м у м, если можно указать такое $\varepsilon>0$, что $J(x)\geqslant J(x_0)$ для всех допустимых абсолютно непрерывных функций $x(t)$ (для к-рых $J(x)$ существует), удовлетворяющих условиям $x(t_0)=x_0(t_0)$, $x(t_1)=x_0(t_1)$ и

$$\max_{t\in[t_0, t_1]} |x(t)-x_0(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Здесь фиксируется лишь близость фазовых переменных.

Если $x_0(t)$ реализует сильный экстремум, то эта функция реализует тем более и слабый экстремум, поэтому достаточные условия сильного экстремума являются достаточными условиями и слабого. С другой стороны, из отсутствия слабого экстремума следует отсутствие сильного экстремума, т. е. необходимые условия слабого экстремума являются необходимыми условиями сильного экстремума.

Необходимые и достаточные условия экстремума. Уравнение Эйлера, о к-ром рассказывалось выше, представляет собой необходимое условие слабого экстремума. В конце 50-х гг. 20 в. Л. С. Понтрягиным был выдвинут принцип максимума для задач (5) — (8), являющийся необходимым условием сильного экстремума. Принцип максимума гласит: если пара (x, u) доставляет сильный экстремум в задаче (5) — (8), то найдутся вектор-функция ψ и число λ_0 такие, что для функции Гамильтона $H(t, x, \psi, u, \lambda_0)=(\psi, f)-\lambda_0 F$ выполняются следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad -\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial x}, \\ \max_{u\in U} H(t, x(t), \psi(t), u, \lambda_0) &= \\ = H(t, x(t), \psi(t), u(t), \lambda_0). & \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если приложить принцип максимума Понтрягина к задаче (3), то получится, что для того чтобы кривая

$x(t)$ доставляла сильный минимум в задаче (3), необходимо, чтобы она была экстремалью (т. е. удовлетворяла уравнению Эйлера (4)) и, кроме того, чтобы выполнялось необходимое условие Вейерштрасса:

$$\mathcal{E}(t, x(t), \dot{x}(t), \xi) \geqslant 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1], \ \xi \in R, \qquad (10)$$

где

$$\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, \xi) = L(t, x, \xi) - L(t, x, \dot{x}) - (\xi - \dot{x}) L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})$$

— так наз. $\mathcal{E}$-функция Вейерштрасса.

Помимо условий типа (4) и (10), носящих л о к а л ь н ы й характер (т. е. проверяемых в каждой точке экстремали), имеется необходимое условие г л о б а л ь н о г о характера, связанное с поведением множества экстремалей, близких к заданной экстремали (см. *Якоби условие*). Для задачи (3) условие Якоби состоит в следующем. Для того чтобы экстремаль $x(t)$ доставляла минимум в задаче (3), необходимо, чтобы решение уравнения (*Якоби уравнения*)

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\Big|_{x(t)} \frac{d}{dt} h(t)\right) + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\right)\Big|_{x(t)} h(t) = 0 \qquad (11)$$

с краевыми условиями $h(t_0)=0$, $\dot{h}(t_0)\neq 0$ не имело бы нулей в интервале (t_0, t_1). Нули решения $h(t)$ уравнения (11) наз. т о ч к а м и, с о п р я ж е н н ы м и с т о ч к о й t_0. Таким образом, условие Якоби заключается в том, что интервал (t_0, t_1) не должен содержать точек, сопряженных с t_0.

Необходимые условия слабого минимума $\delta J = 0$, $\delta^2 J \geqslant 0$ являются точными аналогами условий минимума $f'(x)=0$, $f''(x)\geqslant 0$ для функций одного переменного. Условие Якоби при выполнении *Лежандра условия* (усиленного) является необходимым условием неотрицательности второй вариации. Это приводит к следующему результату: для того чтобы функция $x(t)$ реализовывала слабый минимум функционала (3), необходимо, чтобы: а) функция $x(t)$ удовлетворяла уравнению Эйлера, б) выполнялось условие Лежандра $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\Big|_{x(t)} > 0$, в) интервал (t_0, t_1) не содержал точек, сопряженных с точкой t_0 (при условии, что выполняется усиленное условие Лежандра).

Достаточные условия слабого минимума таковы: функция $x(t)$ должна быть экстремалью, на ней выполняется усиленное условие Лежандра и полуинтервал $(t_0, t_1]$ не содержит точек, сопряженных с точкой t_0. Для того чтобы кривая $x(t)$ доставляла сильный минимум, достаточно, чтобы, помимо сформулированных достаточных условий слабого минимума, выполнялось *Вейерштрасса условие* достаточное.

Задачи оптимального управления. Одним из основных направлений развития В. и. являются неклассич. задачи В. и., подобные сформулированной выше задаче (5) — (8). Задачи, укладывающиеся в эту схему, имеют огромное прикладное значение. Пусть, напр., уравнение (6) описывает движение нек-рого динамич. объекта, напр. космич. корабля. Управление — вектор u — тяга его двигателя. Начальное положение корабля — это нек-рая орбита, конечное положение — это орбита другого радиуса. Функционал J описывает расход горючего на выполнение маневра. Тогда задачу (5) — (7) можно применительно к данной ситуации сформулировать следующим образом: определить закон изменения тяги двигателя космич. аппарата, совершающего переход с одной орбиты на другую за фиксированное время так, чтобы расход топлива был минимальным. При этом необходимо учитывать ограничения на управления: тяга двигателя не может превосходить нек-рой величины и угол поворота тяги также ограничен. Таким образом, в данном примере получается, что компо-

непты u^i, $i=1, 2, 3$, вектора тяги подчинены ограничениям

$$a_i^- \leqslant u^i \leqslant a_i^+,$$

где a_i^- и a_i^+ — нек-рые заданные числа.

Имеется большое число задач, к-рые сводятся к задаче Лагранжа, но при дополнительном ограничении типа (8). Такие задачи получили назв. задач о п т и м а л ь н о г о у п р а в л е н и я. Для теории оптимального управления должен был быть разработан специальный аппарат. Им и явился принцип максимума Понтрягина.

Возможен и другой подход к тем же проблемам теории оптимального управления. Пусть $S(t, x)$ — значение функционала (5) вдоль оптимального решения от точки (t_0, x_0) до точки (t, x). Тогда для того чтобы функция $u(t)$ была оптимальным управлением, необходимо (а в нек-рых случаях и достаточно), чтобы удовлетворялось следующее дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\min_{u\in U}\left(\frac{\partial S}{\partial x},\ (f(t,\ x(t),\ u,\ \psi(t))-F(t,\ x(t),\ u)\right),$$

наз. у р а в н е н и е м Б е л л м а н а (см. *Динамическое программирование*). Для задач классич. В. и. S-функция $S(t, x)$ (или функция действия) должна удовлетворять у р а в н е н и ю Г а м и л ь т о п а—Я к о б и:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t,\ x,\ \frac{\partial S}{\partial x}\right)=0,$$

где H — *Гамильтона функция*. Для задачи (3) функция есть *Лежандра преобразование* по $\dot{x}$ интегранта $L(t, x, \dot{x})$. Теория Гамильтона — Якоби является мощным инструментом исследования многих важнейших задач вариационного типа, связанных с классич. механикой.

Связь В. и. с задачами теории уравнений с частными производными была обнаружена уже в 19 в. П. Дирихле (P. Dirichlet) показал, что решение краевых задач для уравнения Лапласа эквивалентно решению нек-рой вариационной задачи. Пусть, напр., имеется нек-рое линейное операторное уравнение

$$Ax=f, \tag{12}$$

где $x(\xi, \eta)$ — нек-рая функция двух независимых переменных, обращающаяся в нуль на замкнутой кривой Г. В предположениях, естественных для нек-рого класса задач физики, задача отыскания решения уравнения (8) эквивалентна отысканию минимума функционала

$$J(x)=\iint_\Omega A_{xx}\,d\xi\,d\eta-2\iint_\Omega fx\,d\xi\,d\eta, \tag{13}$$

где Ω — область, ограниченная кривой Г. Уравнение (12) в этом случае является уравнением Эйлера для функционала (13).

Редукция задачи (12) к (13) возможна, напр., если A — самосопряженный и положительно определенный оператор. Связь между проблемами для уравнений с частными производными и вариационными задачами позволяет, в частности, устанавливать справедливость различных теорем существования и единственности; она сыграла важную роль в кристаллизации понятия обобщенного решения. Эта редукция очень важна и для вычислительной математики, поскольку она позволяет использовать прямые методы В. и. для решения краевых задач теории уравнений с частными производными.

Качественные методы исследования задач В. и. дают возможность ответить на вопросы о существовании решений, об их числе, о качественных особенностях экстремалей и их семейств. В 20 в. была установлена зависимость числа решений вариационных задач от свойств пространства, на к-ром определен функционал. Так, напр., если функционал J задан на всевозможных гладких кривых тора (на торе), соединяющих две фиксированные точки, или если функционал J задан на

всевозможных замкнутых кривых поверхности, топологически эквивалентной тору, то в обоих случаях число критич. элементов — линий, на к-рых вариация $\delta J=0$, бесконечно. Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман (7) доказали, что на каждой поверхности, топологически эквивалентной сфере, существует по крайней мере три самопересекающиеся замкнутые геодезические различной длины; если же длины хотя бы двух из этих геодезических совпадают, то существует бесконечное множество замкнутых геодезических равной длины. Проблемы подобного рода указывают на тесную связь В. и. с качественной теорией дифференциальных уравнений и топологией. При исследовании качественных методов сыграло большую роль развитие функционального анализа. См. также *Вариационное исчисление в целом*.

Связь В. и. с теорией конусов. Круг вопросов, к-рыми занимается В. и., непрерывно расширяется. В частности, все большее и большее внимание уделяется изучению функционалов $J(x)$ весьма общего вида, задаваемых на множествах G_k элементов нормированных пространств. Для задач такого рода уже трудно ввести понятие вариации. Потребовалось привлечение нового аппарата исследования. Таким аппаратом оказалась теория конусов в банаховых пространствах. Напр., пусть поставлена задача о минимуме $f(x)$, где $x-$ элемент замкнутого множества G. Конусом $\Gamma_G(x_0)$ наз. множество ненулевых векторов e, каждому из к-рых можно поставить в соответствие положительное число λ_e таким образом, чтобы вектор $x=x_0+\lambda e\in G$ для любого $\lambda\in(0,\ \lambda_e^*)$. Конусом $\Gamma_f(x_0)$ наз. множество ненулевых векторов e, каждому из к-рых можно поставить в соответствие положительное λ_e^* таким образом, чтобы

$$f(x_0+\lambda e)\geqslant f(x_0)$$

для любого $\lambda\in[0,\ \lambda_e^*]$. Для того чтобы x_0 реализовал минимум функции $f(x)$, необходимо, чтобы пересечение конусов $\Gamma_G(x_0)$ и $\Gamma_f(x_0)$ было пустым. Это условие столь же элементарно, как и условие обращения в нуль вариации, однако из него вытекают не только те результаты, к-рые можно получить классич. методами В. и.; оно позволяет подойти к проблемам гораздо более сложным, напр. к исследованию экстремальных значений недифференцируемых функционалов (см. [6]).

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950; [3] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [4] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, М., 1957; [5] Понтрягин Л. С. (и др.), Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969; [6] Пшеничный Б. Н., Необходимые условия экстремума, М., 1969; [7] Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г., Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930.

Н. Н. Моисеев.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ; численные методы — раздел вычислительной математики, посвященный методам отыскания экстремальных значений функционалов.

Численные методы В. и. принято разделять на два больших класса: непрямые и прямые методы. Непрямые методы основаны на использовании необходимых условий оптимальности (см. *Вариационное исчисление, Эйлера уравнение, Вейерштрасса условия, Трансверсальности условие, Понтрягина принцип максимума*), с помощью к-рых исходная вариационная задача сводится к краевой задаче. Поэтому вычислительные достоинства и недостатки непрямых методов полностью определяются свойствами соответствующей краевой задачи. Прямые методы ориентированы на непосредственное отыскание экстремума функционала. Используемые при этом методы оптимизации являются развитием идей математич. программирования.

Разделение численных методов В. и. на прямые и непрямые весьма условно. Нек-рые алгоритмы используют элементы обоих подходов. Кроме того, существуют методы, к-рые непосредственно не относятся к двум выделенным классам. Например, методы, основанные на достаточных условиях оптимальности, образуют самостоятельную группу.

Первые численные методы В. и. появились в работах Л. Эйлера (L. Euler). Однако наибольшее развитие они получили с 50-х гг. 20 в. в результате распространения вычислительной техники и открывшейся в связи с этим возможностью решения сложных технич. задач. При этом разработка численных методов В. и. шла в основном применительно к задачам теории оптимального управления — наиболее важного для практич. приложений раздела В. и. (см. *Оптимального управления математическая теория*).

Непрямые методы. С появлением принципа максимума Понтрягина (1956) сведение вариационных задач к краевым стало особенно популярным.

Пусть в задаче оптимального управления требуется найти траекторию $x(t)$ и управление $u(t)$, доставляющие минимум функционалу

$$J=\int_{t_0}^{T} f^0(t,\ x,\ u)\,dt \tag{1}$$

при дифференциальных связях:

$$\dot{x}=f(t,\ x,\ u), \tag{2}$$

граничных условиях:

$$x(t_0)=x_0, \tag{3}$$

$$x(T)=x_T \tag{4}$$

и ограничениях на управление:

$$u\in U, \tag{5}$$

где $x=(x^1,\ \ldots,\ x^n)$, $u=(u^1,\ \ldots,\ u^m)$ — векторы фазовых координат и управлений, $f=(f^1,\ \ldots,\ f^n)$, U — замкнутое множество m-мерного пространства, t — независимое переменное (время).

Согласно принципу максимума Понтрягина, оптимальное управление $u(t)$ должно при каждом t доставлять абсолютный максимум *Гамильтона функции*

$$H(\tilde{u})=\max_{u\in U} H(u)=$$

$$=\max_{u\in U}\left[\sum_{i=1}^{n}\psi_i f^i(t,\ x,\ u)-f^0(t,\ x,\ u)\right], \tag{6}$$

где $\psi=(\psi_1,\ \ldots,\ \psi_n)$ определяется системой уравнений

$$\dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\quad i=1,\ \ldots,\ n. \tag{7}$$

Из условия (6) находится управление $u(t,\ x,\ \psi)$ и подставляется в (2) и (7). В результате получается замкнутая краевая задача для системы $2n$ дифференциальных уравнений (2) и (7) с $2n$ граничными условиями (3) и (4).

Наиболее распространенной схемой численного решения этой краевой задачи является схема, использующая метод Ньютона с дроблением шага (см. [3]). При этом вводится вектор невязки

$$\varphi_i=x^i(T)-x^i_T,\quad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{8}$$

где значение $x^i(T)$ получается из решения задачи Коши для системы (2), (7) с начальными условиями (3) и $\psi_j(t_0)=\psi_{j0}$, $j=1,\ \ldots,\ n$. Невязки (8) рассматриваются как функции от неизвестных $\psi_{10},\ \ldots,\ \psi_{n0}$, к-рые определяются из системы уравнений

$$\varphi_i(\psi_{10},\ \ldots,\ \psi_{n0})=0,\quad i=1,\ \ldots,\ n. \tag{9}$$

Решение системы (9) проводится *Ньютона методом*; используемые при этом частные производные

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\psi_{j0}},\quad i,\ j=1,\ \ldots,\ n,$$

определяются численно по формуле

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_{j0}} = \frac{\varphi_i(\psi_{10}, \ldots, \psi_{j0} + \Delta\psi_{j0}, \ldots, \psi_{n0}) - \varphi_i(\psi_{10}, \ldots, \psi_{n0})}{\Delta\psi_{j0}},$$

где значения $\varphi_i(\psi_{10}, \ldots, \psi_{j0} + \Delta\psi_{j0}, \ldots, \psi_{n0})$ получаются путем решения задачи Коши для системы (2), (7) с начальными условиями (3) и условиями

$$\psi_l(t_0) = \psi_{l_0}, \quad \psi_j(t_0) = \psi_{j0} + \Delta\psi_{j0}, \quad l \neq j,$$

$\Delta\psi_{j0}$ — малое приращение величины ψ_{j0}.

Для определения частных производных известен более точный, но громоздкий метод (см. [4]), в к-ром используется интегрирование системы $2n$ уравнений в вариациях для системы (2), (7).

Трудности в использовании метода Ньютона связаны, во-первых, с проблемой выбора удачного начального приближения для ψ_{j0} и, во-вторых, с неустойчивостью задачи Коши, к-рая особенно сильно проявляется на больших интервалах $[t_0, t_1]$. Для преодоления первой трудности не существует универсального подхода. Для преодоления неустойчивости задачи Коши имеется ряд приемов (*Коши задача*; численные методы).

В тех случаях, когда граничные условия и функционал заданы в более общем виде, чем в (3), (4) и (1) [напр., *Больца задача* с подвижными концами, *вариационная задача* со свободными (подвижными) концами], к необходимым условиям оптимальности (6), (7) добавляются *трансверсальности условия*. После исключения входящих в эти условия произвольных постоянных получаются замкнутая краевая задача и отвечающая ей система уравнений типа (9).

Решение системы (9) может отыскиваться любым другим методом, применяемым для решения нелинейных систем.

Специфич. методы разработаны для решения краевых задач частного вида. Так, линейные краевые задачи решаются методом переноса граничных условий (*прогонки метод*). Этот метод также используется в качестве составного элемента для итеративного решения нелинейных краевых задач (см. [1]).

Эффективность и относительная простота реализации непрямых методов на ЭВМ сделали их весьма распространенным средством для решения задач вариационного исчисления. Однако эти методы не стали универсальными: для некоторых важных классов задач В. и., например, содержащих фазовые ограничения, выписывание необходимых условий оптимальности затруднено и приводит к краевым задачам со сложной структурой. Кроме того, необходимые условия не гарантируют, что найденное решение доставляет относительный экстремум функционалу. Для проверки приходится привлекать достаточные условия оптимальности. Все это ограничивает сферу применения непрямых методов.

Прямые методы. Первый прямой метод был предложен Л. Эйлером для решения простейшей задачи В. и. Этот метод известен под названием метода ломаных Эйлера (или конечно разностного метода Эйлера) и заключается в том, что функционал

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt \tag{10}$$

рассматривается на непрерывных ломаных $x(t)$, удовлетворяющих заданным граничным условиям

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \tag{11}$$

и состоящих из N прямолинейных отрезков с заданными абсциссами концов. Таким образом, функционал превращается в функцию от ординат вершин этих ломаных, а исходная задача — в задачу минимизации функции многих переменных (см. *Эйлера метод*).

Из-за сложности подобных задач для ручного счета прямые методы долгое время оставались в стороне от

традиционных исследований по В. и. Интерес к ним вновь возрос в нач. 20 в. Были предложены новые способы редукции к задаче об отыскании экстремума функции многих переменных. Наиболее важным из них является *Ритца метод*, согласно к-рому решение задачи о минимуме (10) при условии (11) разыскивается на классе функций вида

$$x = \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(t),$$

где $\varphi_i(t)$, $i=0, 1, \ldots, N$ — элементы бесконечной полной системы линейно независимых функций, удовлетворяющих граничным условиям

$\varphi_0(t_0) = x_0$, $\varphi_0(t_1) = x_1$, $\varphi_i(t_0) = \varphi_i(t_1) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$.

Задача сводится к отысканию минимума функции N переменных

$$J = J(a_1, \ldots, a_N).$$

Метод Ритца является достаточно общим. Он применяется для решения вариационных задач математич. физики, заключающихся в минимизации функционала, зависящего от функций многих переменных. Его дальнейшим обобщением для данного класса задач является метод (см. [2]), в к-ром коэффициенты считаются неизвестными функциями одного из независимых переменных (напр., если в задаче две независимые переменные t и τ, то a_i могут задаваться в виде $a_i(\tau)$). Исходный функционал становится зависящим от N функций $a_i(\tau)$, к-рые могут определяться с помощью необходимых условий, т. е., в конечном счете, из решения краевой задачи для системы N уравнений Эйлера.

Потребности практики увеличили интерес к неклассич. задачам оптимального управления. Наличие в технич. задачах сложных ограничений на фазовые координаты и управляющие функции, разрывность правых частей дифференциальных уравнений, возможность существования особых и скользящих оптимальных режимов и т. д.— все это потребовало разработки новых разновидностей прямых методов. Наибольшее распространение получили методы, использующие идеи спуска в пространстве управлений и идеи последовательного анализа вариантов (типа *динамического программирования*).

Методы спуска в пространстве управлений основаны на получении последовательности управлений $u_k \in U$ вида

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \delta u_k(t), \qquad (12)$$

к-рой соответствует монотонно убывающая последовательность значений функционала. Пусть, напр., ищется минимум функционала

$$J = F(x(T)) \qquad (13)$$

при условиях (2), (3) и (5) (U — выпуклое и односвязное множество). Отыскание $\delta u_k(t)$ производится следующим образом. С помощью уравнений в вариациях для (2) и сопряженной системы (7) с условиями на правом конце

$$\psi_i(T) = -\frac{\partial F(x(T))}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

линейная часть приращения функционала (13) от вариации δu представляется в виде

$$\delta J = -\int_{t_0}^{T} \frac{\partial H}{\partial u}\, \delta u\, dt.$$

Для уменьшения функционала (13) следует на каждой итерации выбирать приращение

$$\delta u_k(t) = \varkappa \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \varkappa > 0,$$

где величина $\partial H/\partial u$ вычисляется на управлении $u_k(t)$ и соответствующей ему траектории $x_k(t)$. Закон-

ность линеаризации, а следовательно, и уменьшение функционала (13) обеспечиваются выбором достаточно малой величины $\varkappa$. Процесс спуска (12) начинается с нек-рого $u_0(t)$ и заканчивается, когда на нек-рой итерации $|\delta J|$ становится меньше нек-рого заданного ε. Для описанного случая свободного правого конца алгоритм получается наиболее простым (см. [5], [6], [7]). Весьма эффективным для решения задач со свободным концом является метод (см. [8]), к-рый не использует линеаризации исходной задачи. В случае, когда граничные условия заданы и на правом конце, все эти алгоритмы существенно усложняются. Для учета граничных условий в [5] привлекается процедура проектирования градиента, а в [6] вводится штраф за невыполнение граничных условий, т. е. вместо (13) рассматривается функционал

$$J = F(x(T)) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x^i(T) - x_T^i)^2, \quad \lambda_i > 0. \quad (14)$$

К градиентным методам примыкает метод [9], в к-ром приращение управления определяется из решения вспомогательной задачи линейного программирования.

Большая группа прямых методов численного решения задач оптимального управления основана на идеях последовательного анализа вариантов (см. [10], [11], [12]). Важным достоинством этих методов является то, что с их помощью удается решать задачи с фазовыми ограничениями вида

$$x \in G, \quad (15)$$

где G — замкнутое множество n-мерного пространства. Их основной недостаток — существенное возрастание трудностей с увеличением размерности пространства. Эти методы используют редукцию исходной задачи к задаче нелинейного программирования специального вида. Распространены два способа такой редукции. Согласно первому способу в конечном итоге получается задача минимизации функции, зависящей только от управлений, заданных в точках дискретной сетки на оси (см. [13]). Во втором способе (см. [12]) управление исключается и задача сводится к минимизации функции вида

$$J(x_0, \ldots, x_N) = \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i, x_{i+1}), \quad (16)$$

где x_i — значение вектора x в точке t_i, $i=0, 1, \ldots, N$, при ограничениях

$$x_i \in G_i, \quad (17)$$

к-рые получаются из ограничений (3), (4), (15). Для пояснения схемы решения задачи минимизации (16) при условиях (17) удобно использовать следующую геометрич. интерпретацию. Каждой совокупности векторов $\{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ ставится в соответствие ломаная (см. рис.), к-рая проходит через точки $x_0, \ldots, x_N$, лежащие в гиперплоскостях Σ_i, задаваемых уравнениями $t=t_i$. Длина этой ломаной $J(x_0, \ldots, x_N)$ складывается из длин $f_i(x_i, x_{i+1})$ отдельных звеньев. Область допустимых значений x_i задается (17) и эта область отделяется от запретной нек-рой ломаной (на рис. запретная область заштрихована). Задача состоит в отыскании ломаной наименьшей длины, лежащей в допустимой области и соединяющей гиперплоскости Σ_0 и Σ_N. Алгоритм решения задачи представляет собой многошаговый процесс, на каждом шаге i к-рого отметается нек-рое множество вариантов Ω_i, заведомо не содержащее оптимальной ломаной. На нулевом шаге определяется функция



$$l(x_1) = \min_{x_0 \in G_0} f_0(x_0, x_1),$$

т. е. длина кратчайшего звена, соединяющего каждую точку $x_1 \in \Sigma_1$ с гиперплоскостью Σ_0. Так как

$$\min_{x_0 \in G_0} J(x_0, x_1, \ldots, x_N) = l(x_1) + \sum_{i=1}^{N-1} f_i(x_i, x_{i+1}),$$

то множество ломаных Ω_0, не содержащих отрезка $l(x_1)$, может быть отброшено. На первом шаге строится кратчайшая ломаная

$$l(x_2) = \min_{x_1 \in G_1} (l(x_1) + f_1(x_1, x_2)),$$

соединяющая каждую точку $x_2 \in \Sigma_2$ с Σ_0, и множество ломаных Ω_1, не содержащих ломаной $l(x_2)$, также отбрасывается, и т. д. На i-м шаге строится кратчайшая ломаная

$$l(x_{i+1}) = \min_{x_i \in G_i} (l(x_i) + f_i(x_i, x_{i+1})), \qquad (18)$$

соединяющая каждую точку $x_{i+1} \in \Sigma_{i+1}$ с Σ_0, и отбрасывается множество ломаных Ω_i, не содержащих ломаной $l(x_{i+1})$. На последнем шаге находится решение исходной задачи — кратчайшая ломаная, соединяющая гиперповерхности Σ_N и Σ_0:

$$l = \min_{x_N \in G_N} l(x_N).$$

Формула (18) — рекуррентное соотношение, описывающее многошаговый процесс отыскания решения. На этом соотношении основаны динамич. программирование и принцип оптимальности Беллмана.

В соответствии с (18) необходимо отыскивать минимум на множествах G_i, имеющих, вообще говоря, мощность континуума. При численной реализации используется их конечномерная аппроксимация. Для этого, кроме сетки, по t (напр., с постоянным шагом τ) строится сетка по x^j с шагом h^j ($j=1, \ldots, n$). Тогда задача сводится к отысканию кратчайшего пути на специальном графе с вершинами — узлами сетки. Пусть $P_k(i)$ — узел k, лежащий в гиперплоскости Σ_i;

$$l_{ks}(i) = f_i(P_k(i),\ P_s(i+1))$$

—длина отрезка, соединяющего два узла k и s в соседних гиперплоскостях, $l_k(i)$ — длина наикратчайшего пути, соединяющего узел $P_k(i)$ с гиперплоскостью Σ_0. Тогда рекуррентное соотношение (18) имеет вид

$$l_s(i+1) = \min_k (l_k(i) + l_{ks}(i)),$$

где минимум берется по номерам k всех узлов, к-рые лежат в допустимой области G_i гиперплоскости Σ_i. В общем случае этот минимум отыскивается перебором по всем узлам. Изложенный метод позволяет отыскивать глобальный экстремум функции (16) при ограничениях (3), (4), (15) с точностью, определяемой шагами сетки τ и h^j. Для сходимости метода к решению исходной задачи необходимо наличие определенных соотношений между этими шагами [напр., вида $h^j = o(\tau)$]. Метод предъявляет большие требования к быстродействию и памяти ЭВМ. Поэтому при практич. реализации сначала находят экстремум на грубой сетке, а затем в окрестности полученного решения его уточняют на более мелкой сетке. Это делается с помощью одного из методов, позволяющих отыскивать локальный экстремум (см. *Блуждающей трубки метод*, *Локальных вариаций метод*, *Бегущей волны метод*).

Лит.: [1] Моисеев Н. Н., Численные методы в теории оптимальных систем, М., 1971; [2] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.— Л., 1962; [3] Исаев В. К., Сонин В. В., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1965, т. 5, № 2, с. 252—61; [4] Джурович С., Макинтайр Д., «Ракетная техника», 1962, № 9, с. 47—53; [5] Денхэм В., Брайсон В., «Ракетная техника и космонавтика», 1964, № 1, с. 34—47; [6] Шатровский Л. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 3, с. 488—91; [7] Энеев Т. М., «Космические исследования», 1966, т. 4, вып. 5, с. 651—69; [8] Крылов И. А., Черноусько Ф. Л., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 6, с. 1132—9; [9] Федоренко Р. П.,

там же, 1964, т. 4, № 6, с. 1045—64; [10] Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960; [11] Михалевич В. С., «Кибернетика», 1965, № 1, с. 45—46; [12] Моисеев Н. Н., там же, 1966, № 3, с. 1—29; [13] Ермольев Ю. М., Гуленко В. П., там же, 1967, № 3, с. 1—20.

И. Б. Вапнярский, И. А. Ватель.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ЦЕЛОМ — раздел математики, в к-ром применяются топологич. понятия и методы для качественного исследования вариационных задач — существование и оценка числа экстремалей, выяснение нек-рых качественных свойств последних и соотношений между числом экстремалей различных типов. Часто в состав В. и. в ц. включают также теорию «в целом» стационарных (критических) точек функций на многообразиях, где для этих точек рассматриваются такие же задачи. (Во всяком случае, эта последняя теория тесно связана с В. и. в ц. и возникла вместе с ним, а относящиеся к ней задачи часто служат упрощенной моделью собственно вариационных задач. Иногда последние даже изучают с помощью некрой аппроксимации их первыми.) При этом интересуются всеми экстремалями (стационарными точками), существующими для данной задачи, независимо от того, отвечает ли им действительно экстремальное (т. е. минимальное или максимальное) значение рассматриваемого функционала (функции) или же это последнее является только стационарным. В этом одно из отличий В. и. в ц. от возникших ранее «классических» разделов *вариационного исчисления*, где после сравнительно простого вывода условий стационарности, общих для всех экстремалей, основное внимание уделялось экстремуму (хотя бы локальному), обычно минимуму. Кроме того, значительная часть «классических» разделов связана с исследованием малой окрестности экстремали, тогда как в В. и. в ц. используются топологич. свойства всего функционального пространства вариационной задачи, т. е. всего пространства кривых (функций, поверхностей и т. п.), где задан рассматриваемый функционал (или всего многообразия, где задана рассматриваемая функция). Эти свойства, в свою очередь, связываются с топологией того пространства (области, многообразия и т. д.), где должны лежать эти кривые (поверхности) или где должны быть определены и (или) принимать значение эти функции (а также с характером краевых или еще каких-либо дополнительных условий). Такой «глобальный» характер свойственного В. и. в ц. подхода и подчеркивается в его названии определением «в целом». (В ходе развития В. и. в ц. оказалось необходимым подробнее исследовать свойства *второй вариации* [1], имеющей чисто локальный характер. Раньше эти свойства исследовались лишь в той мере, в какой это было нужно для применений к условиям минимума функционала.)

В. и. в ц. сложилось в 20—30-х гг. 20 в. в работах, посвященных решению задачи об оценке числа *замкнутых геодезических* на замкнутом римановом (более общо, финслеровом) многообразии (называемой также непериодической задачей В. и. в ц.) (см. [1], [2], [4]).

Общий прием исследования, свойственный для В. и. в ц., состоит в том, что для функции (в том числе и для функционала, рассматриваемого как функция на соответствующем бесконечномерном функциональном пространстве) следят за изменением тех или иных топологич. свойств области меньших значений

$$f^{-1}(-\infty, C] = \{x : f(x) \leqslant C\}$$

с изменением уровня функции C. Стремятся доказать, что эти свойства изменяются только при прохождении C через стационарные значения (отвечающие стационарным точкам функции), и описать, как связаны изменения, происходящие при таких прохождениях, со свойствами соответствующих стационарных точек. Получаются нек-рые связи между стационарными точ-

ками f, с одной стороны, и топологич.свойствами области меньших значений $f^{-1}(-\infty, C]$ с достаточно большими C или даже всего пространства, где задана f, — с другой. Если эти последние свойства известны, то из установленных связей делают определенные заключения о стационарных точках. Для собственно вариационных задач остается еще один шаг (иногда тривиальный, иногда очень трудный): полученные результаты, относящиеся к вспомогательным объектам (точки нек-рого функционального пространства), нужно интерпретировать в терминах первоначальной постановки задачи. (В задаче о замкнутых геодезических именно этот последний шаг вызывает основные затруднения.)

Описанную программу сравнительно легко удается осуществить для гладкой функции f на замкнутом многообразии M. При сравнении областей меньших значений $f^{-1}(-\infty, C]$ с различными C обычно используется градиентный спуск, т. е. движение точек согласно *градиентной динамической системе*, определяемой f и какой-нибудь вспомогательной римановой метрикой на M. Отдельно рассматривается ситуация возле стационарных точек. Если все они невырожденные, то изменение области меньших значений $f^{-1}(-\infty, C]$ при прохождении C через стационарный уровень можно описать очень подробно — с точностью до диффеоморфизма. Такое описание, как и апалогичное описание изменений многообразий уровня $f^{-1}(C)$, оказалось важным для топологии (см. [5], [6]), тогда как для В. и. в ц. пока оказывается достаточной менее полная информация в терминах нек-рого числового инварианта — категории Люстерника — Шнирельмана cat M и в терминах гомологий. Последняя приводит к *Морса неравенствам*, дающим обычно значительно лучшую оценку числа невырожденных критич. точек, чем категория. В то же время и оценка через категорию, и неравенства Морса годятся также без предположения о невырожденности стационарных точек, хотя из неравенств Морса при этом следует оценка, в к-рой вырожденные стационарные точки считаются со специально приписываемыми им кратностями (в связи с чем говорят об оценке числа аналитически различных стационарных точек или алгебраического числа этих точек). Категория же дает оценку числа стационарных точек в обычном смысле (подчеркивая это обстоятельство, говорят об оценке числа геометрически различных стационарных точек) и даже с нек-рой дополнительной информацией: либо число стационарных уровней не меньше cat M, либо имеется континуум стационарных точек.

Чтобы получить аналогичные результаты для функций на бесконечномерных многообразиях, необходимы определенные дополнительные предположения об аналитич. свойствах этих функций (кроме гладкости). Наиболее полная аналогия с конечномерным случаем достигается при использовании так наз. условия (C) Пале — Смейла (R. Palais — S. Smale, см. [7]), но оно не выполняется в нек-рых интересных случаях, а при выполнении более слабых условий соответствующие результаты тоже могут быть слабее. Затруднения может вызвать исследование траекторий градиентного спуска или какого-нибудь его аналога. Напр., для нек-рых задач геометрич. происхождения — минимальные замкнутые подмногообразия риманова многообразия, гармонические отображения — этот вопрос сводится к поведению решений параболич. систем нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными (см. [8]). Иногда удовлетворительные результаты удается получить только для точек минимума. Основные применения — собственные значения нелинейных операторов (см. [7], [8], [9]) и многомерные задачи вариационного исчисления (т. е. такие, в к-рых рассматриваемый функционал выража-

ется в виде некоторого кратного интеграла), в том числе упомянутые выше задачи геометрич. происхождения.

Для одномерных задач (т. е. тех, в к-рых рассматриваемый функционал выражается в виде интеграла по одной независимой переменной) вместо градиентного спуска можно использовать специфические для них более элементарные приемы [фактически с их помощью и были получены многие имеющиеся здесь результаты (см. [1], [2], [3])]. Одномерными являются задача о замкнутых геодезических и задача об оценке числа геодезич. дуг, соединяющих две точки на связном полном римановом многообразии M. Последняя полностью решена: если M не стягивается по себе в точку, то таких дуг бесконечное число (см. [10]). (На примере обычной сферы видно, что одни из этих дуг могут включать в себя многократно проходимые другие дуги.)

По-видимому, первым применением В. и. в ц. в других областях математики было вычисление гомологий классич. групп Ли (см. [11]). Важнейшим из современных применений, наряду с упомянутым выше использованием теории стационарных точек функций в топологии, является вычисление стационарных гомотопич. групп Ли (так наз. теория Ботта; см. [12]). В. и. в ц. используется также в глобальной дифференциальной геометрии (см. [13]).

Лит.: [1] Morse M., The calculus of variations in the large, N. Y., 1934; [2] Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г., «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 1, с. 166—217; [3] Зейферт Г., Трельфалль В., Вариационное исчисление в целом, пер. с нем., М., 1947; [4] Birkhoff G. D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1917, v. 18, p. 199—300; [5] Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология. Начальный курс, пер. с англ., М., 1972; [6] Милнор Дж., Теорема об h-кобордизме, пер. с англ., М., 1969; [7] Иллс Дж., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, № 3, с. 157—210; [8] Альбер С. И., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 4, с. 57—122; [9] Бергер М. С., Теория бифуркаций в случае нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений и систем, в сб.: Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения, М., 1974; [10] Серр Ж. П., Сингулярные гомологии расслоенных пространств, пер. с франц., в сб.: Расслоенные пространства и их приложения, М., 1958; [11] Понтрягин Л. С., «Матем. сб.», 1939, т. 6, № 3, с. 389—422; «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 6, с. 151—85; [12] Милнор Дж., Теория Морса, пер. с англ., М., 1965; [13] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971.

Д. В. Аносов.

ВАРИАЦИОННО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД — метод, объединяющий вариационный метод Г. М. Голузина (см. *Внутренних вариаций метод*) и *параметрических представлений метод* К. Лёвнера (K. Löwner) для важного подкласса однолистных функций класса S, отображающих круг $E=\{z : |z|<1\}$ на области, получающиеся из плоскости $\mathbb{C}_w$ проведением разрезов по кусочно непрерывным дугам. Это объединение достигается посредством специальной вариации, определяемой в простейшем случае одного жорданова разреза следующей теоремой. Пусть функция $w=f(z)\in S$ отображает E на область $B(0)$, полученную из $\mathbb{C}_w$ проведением разреза

$$L=\{w : w=\varphi(t),\ \ 0\leqslant t\leqslant\infty\},\ \ \varphi(\infty)=\infty,$$

где $\varphi(t)$ непрерывна, а область $B(\tau)=\mathbb{C}_w\setminus L(\tau)$, где $L(\tau)=\{w : w=\varphi(t),\ \ 0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant\infty\}$, односвязна. Можно считать параметризацию разреза L такой, что присоединенная к $f(z)$ функция $z=F(w,\tau)$, $F(0,\tau)=0$, однолистно и конформно отображающая $B(\tau)$ на E, нормирована условием $F'_w(0,\ \tau)=e^{-\tau}$. Пусть $\Psi(z,\ \tau)$ обозначает функцию, обратную к $F(w,\tau)$ при фиксированном τ. Тогда, каковы бы ни были точки $z_k\in E\,(k=1,\ \ldots,\ n;\ n=1,\ 2,\ \ldots)$ и постоянные A_k, в классе S существует функция $f_*(z)$, представимая в виде

$$f_*(z)=f(z)+$$
$$+\lambda\sum_{k=1}^{n}\left[2A_kH^2(z_k,\tau)\frac{f^2(z)}{f(z)-\Psi(z_k,\tau)}+\right.$$
$$\left.+A_kK(z,\tau,z_k)+\overline{A}_kK\left(z,\tau,\frac{1}{z_k}\right)\right]+\gamma(\lambda,E).$$

Здесь

$$K(z, \tau, \zeta) = \frac{F(f(z), \tau)}{F'_{\omega}(f(z), \tau)} \cdot \frac{\zeta + F(f(z), \tau)}{\zeta - F(f(z), \tau)} - f(z),$$

$$H(z, \tau) = \frac{z\Psi'_z(z, \tau)}{\Psi(z, \tau)}$$

и $\gamma(\lambda, E)$ — голоморфная в E функция, предел отношения к-рой к λ при $\lambda \to 0$ ($\lambda > 0$) равномерно стремится к нулю внутри E.

Использование в процессе исследования экстремальных задач на классе S специальной (упомянутой выше) вариации и уравнения Лёвнера

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta \frac{\mu(\tau) + \zeta}{\mu(\tau) - \zeta},$$

$$\mu(\tau) = \Psi(\varphi(\tau), \tau),$$

к-рому удовлетворяет функция $F(w, \tau)$ при условии $F(f(z), 0) = z$, обычно позволяет получать для функции, присоединенной к экстремальной, два уравнения. Несмотря на содержащиеся в них постоянные, выражаемые через значения экстремальной функции, дальнейшее исследование этих уравнений в большом числе случаев привело к полному решению рассмотренных задач, в частности к решению задачи об области значений функционала, аналитически зависящего от функции, ее производной и сопряженных им значений на классе S. Метод был предложен П. П. Куфаревым [1] (о дальнейшем его развитии и применениях см. [2] — [5]).

Лит.: [1] Куфарев П. П., «Докл. АН СССР», 1954, т. 97, № 3, с. 391—93; [2] Александров И. А., «Уч. зап. Томск. ун-та», 1958, т. 32, с. 41—57; [3] его же, «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 1, с. 17—31; [4] Редьков М. И., «Докл. АН СССР», 1960, т. 133, № 2, с. 284—87; [5] его же, «Изв. вузов. Математика», 1962, т. 29, с. 134—42.

И. А. Александров.

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ в теории функций комплексного переменного — положения, выявляющие закономерности изменения отображающих функций при определенных деформациях плоских областей.

Основным качественным В. п. является *Линделёфа принцип*, к-рый состоит в следующем. Пусть B_k, $0 \in B_k$ ($k = 1, 2$),—односвязная конечная область в z_k-плоскости, имеющая более одной граничной точки, и пусть $L(r, B_k)$, $0 < r < 1$,—линия уровня функции Грина для B_k, т. е. образ окружности $C(r) = \{\zeta : |\zeta| = r\}$ при однолистном конформном отображении круга $\{\zeta : |\zeta| < 1\}$ на область B_k, оставляющем неподвижным начало. Пусть далее функция $f(z_1)$, $f(0) = 0$, осуществляет однолистное конформное отображение области B_1 в область B_2. Тогда: 1) любой точке z_1^0, лежащей на $L(r, B_1)$, соответствует точка, находящаяся либо на линии уровня $L(r, B_2)$ (это возможно лишь, если $f(B_1) = B_2$), либо внутри нее; 2) $|f'(0)| \leqslant |g'(0)|$, где $g(z_1)$, $g(0) = 0$, однолистное конформное отображение B_1 на B_2 (равенство имеет место только в случае $f(B_1) = B_2$). Принцип Линделёфа выводится из теоремы Римана о конформном изоморфизме областей и из леммы Шварца. Более тонкие построения позволяют находить поточечные отклонения отображающих функций, вызванные заданной деформацией отображаемых областей.

Основной количественный В. п., полученный М. А. Лаврентьевым [1] (см. также [2]), состоит в следующем. Пусть B_1, $0 \in B_1$,—односвязная конечная область с аналитич. границей. Пусть имеется семейство областей $B_1(t)$, $0 \in B_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $T > 0$, $B_1(0) \equiv B_1$, с жордановыми границами $\Gamma_1(t) = \{z_1 : z_1 = \Omega(\lambda, t)\}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi$, $\Omega(0, t) = \Omega(2\pi, t)$, где $\Omega(\lambda, t)$ равномерно относительно λ дифференцируема по t при $t = 0$, и пусть $F(z_1, t)$, $F(0, t) = 0$, $F'_{z_1}(0, t) > 0$,—функция, однолистно и конформно отображающая $B_1(t)$ на круг $B_2 = \{z_2 : |z_2| < 1\}$, а $\Phi(z_2, t)$ — обратная к $F(z_1, t)$ функция при фиксированном t.

Тогда

$$F(z_1, t) = F(z_1, 0) - tK(F(z_1, 0)) + \gamma_1(z_1, t),$$

$$\Phi(z_2, t) = \Phi(z_2, 0) + t\Phi'_{z_2}(z_2, 0)\, K(z_2) + \gamma_2(z_2, t),$$

где

$$K(z) = \lim_{r \to 1-0} \int_{C(r)} \frac{\partial \ln |F(\Omega(\lambda, t), 0)|}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

и $\frac{1}{t}\gamma_k(z_k, t)$ равномерно внутри B_k ($k = 1, 2$) стремится к нулю при $t \to 0$. В [3] дано распространение этого результата на двусвязные области. При дальнейших ограничениях на области $B_1(t)$ удается получить равномерные в замкнутой области оценки остаточных членов в разложении отображающей функции по параметрам, характеризующим деформацию границ рассматриваемых областей (см. [4]).

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., «Тр. Физ.-матем. ин-та АН СССР», 1934, т. 5, с. 159—246; [2] Куфарев П. П., «Матем. сб.», 1943, т. 13(55), № 1, с. 87—118; [3] Александров И. А., «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 5, с. 961—76; [4] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд., М., 1965.

И. А. Александров.

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ — основные, исходные положения аналитич. механики, математически выраженные в форме вариационных соотношений, из к-рых как логич. следствия вытекают дифференциальные уравнения движения, а также все положения и законы механики. В В. п. к. м. действительные движения материальной системы, происходящие под действием заданных сил, сравниваются с кинематически возможными движениями, допускаемыми наложенными на систему связями и удовлетворяющими определенным условиям. В большинстве случаев признаком, по к-рому действительное движение выделяется из рассматриваемого класса кинематически возможных движений, служит условие экстремальности (стационарности) нек-рой скалярной функции или функционала, обеспечивающее инвариантность описания.

В. п. к. м. отличаются один от другого как по форме и способам варьирования, так и по общности, но каждый из них, в рамках его приложимости, образует единую основу и как бы синтезирует всю механику соответствующих материальных систем. Иными словами, тот или иной из В. п. к. м. потенциально заключает в себе все содержание этой области науки и объединяет все ее положения в единой формулировке.

Классич. механика основывается на законах Ньютона, установленных для свободных материальных точек, и аксиомах связей. Справедливость В. п. к. м. доказывается, исходя из этих законов и аксиом. В свою очередь, любой из В. п. к. м. можно принять за аксиому и из нее логически вывести законы механики.

В. п. к. м. по форме подразделяются на дифференциальные и интегральные принципы. К дифференциальным принципам, характеризующим свойства движения для любого данного момента времени, относятся: принцип возможных перемещений, принцип Д'Аламбера — Лагранжа, принципы Гаусса, Герца, Четаева и Журдена. Интегральными принципами, характеризующими свойства движения на любых конечных промежутках времени, являются принципы наименьшего действия в формах Гамильтона — Остроградского, Лагранжа, Якоби и нек-рые др.

Первый из В. п. к. м.— принцип возможных (виртуальных) перемещений, применялся еще Г. Галилеем (G. Galilei, 1665). Первым, кто понял общность этого принципа и его полезность для решения задач статики, был И. Бернулли (J. Bernoulli, 1717). Принцип получил обоснование, существенное развитие и применение в «Аналитической механике» Ж. Лагранжа (J. Lagrange, 1788), считавшего его основным для всей механики.

Этот принцип позволяет находить положения равновесия системы материальных точек, т. е. такие положения $r_\nu = r_\nu(t_0)$, в к-рых система будет оставаться все время, если она помещена в эти положения с нулевыми начальными скоростями $v_\nu(t_0)=0$ при условии, что $r_\nu(t_0)$ — возможные положения и $v_\nu = 0$ — кинематически возможные скорости при любом t. Здесь r_ν — радиус-векторы точек системы относительно начала O инерциальной системы координат $Oxyz$, причем $v_\nu = \dot{r}_\nu$; δr_ν — возможные перемещения, допускаемые в данный момент времени наложенными на систему связями, $F_\nu(t, r_\mu, \dot{r}_\mu) \in C^1$ — заданные активные силы, R_ν — реакции связей. Связи далее предполагаются идеальными и удерживающими, т. е.

$$\sum\nolimits_\nu R_\nu \cdot \delta r_\nu = 0.$$

Принцип возможных перемещений: механич. система находится в равновесии в нек-ром положении тогда и только тогда, когда сумма элементарных (бесконечно малых) работ активных сил на всяком возможном перемещении, выводящем систему из рассматриваемого положения, равна нулю

$$\sum\nolimits_\nu F_\nu \cdot \delta r_\nu = 0 \qquad (1)$$

в любой момент времени.

Уравнение (1) является общим уравнением статики, сводящим любую задачу статики к математич. задаче исследования этого уравнения. Для частного случая потенциальных сил

$$F_\nu = \operatorname{grad}_{r_\nu} U(t, r_1, \ldots, r_N); \quad U(t, r_\nu) \in C^2,$$

где N — число точек системы, равенство (1) принимает вид

$$\delta U = 0 \qquad (2)$$

при любом t, т. е. механич. система, подверженная действию потенциальных сил, находится в равновесии тогда и только тогда, когда силовая функция имеет стационарное значение.

Для вывода уравнений динамики методами статики применяется так наз. принцип Д'Аламбера: если к действующим на точки материальной системы заданным (активным) силам и силам реакций связей присоединить силы инерции $-m_\nu w_\nu$, то такая система сил будет находиться в равновесии. Здесь m_ν — масса ν-й точки, $w_\nu = \ddot{r}_\nu$ — ее ускорение. Обобщение принципа Д'Аламбера и принципа возможных перемещений было получено Ж. Лагранжем (1788).

Принцип Д'Аламбера — Лагранжа: для действительного движения системы сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях равна нулю:

$$\sum\nolimits_\nu (F_\nu - m_\nu w_\nu) \cdot \delta r_\nu = 0 \qquad (3)$$

в любой момент времени.

В принципе Д'Аламбера — Лагранжа сравниваются положения системы в ее действительном движении с бесконечно близкими положениями, допускаемыми связями в рассматриваемый момент времени. Соотношение (3) определяет зависимость между активными силами, вызываемыми ими при наложенных связях ускорениями и возможными перемещениями. Выражая необходимое и достаточное условие соответствия действительного движения, являющегося одним из кинематически возможных движений, заданным активным силам, уравнение (3) является общим уравнением динамики. Когда все ускорения $w_\nu = 0$, уравнение (3) принимает вид (1) общего уравнения статики.

Уравнения движений содержатся в уравнении (3). Для получения полной системы независимых дифференциальных уравнений динамики достаточно выразить

возможные перемещения δr_ν через систему независимых перемещений и подставить в уравнение (3). Таким путем могут быть получены, напр., уравнения Лагранжа, Аппеля и любая другая система независимых дифференциальных уравнений движения. Если же из семейства возможных перемещений выделить к.-л. одно перемещение и подставить его в уравнение (3), то полученное соотношение будет являться или одним из дифференциальных уравнений движения системы или следствием из них. Таким способом можно получить, например, общие теоремы (законы) динамики: о количестве движения, моменте количеств движения, кинетической энергии.

Общие теоремы динамики системы характеризуют нек-рые свойства движения, но, в отличие от В. п. к. м., ни одна из них в общем случае не в состоянии заменить всю систему дифференциальных уравнений движения и вполне охарактеризовать движение системы.

Принцип Д'Аламбера — Лагранжа является одним из наиболее общих В. п. к. м., справедливым как для голономных, так и для неголономных систем. Все другие В. п. к. м. представляют собой или иные формулировки этого принципа или следствия из него. Принцип Д'Аламбера — Лагранжа не связан, однако, с понятием экстремума к.-л. функции. В нем фигурирует бесконечно малая величина — сумма элементарных работ заданных сил и сил инерции на бесконечно малом возможном перемещении из заданной конфигурации, не представляющая собой вариации к.-л. функции, подобно равенству (2).

К. Гаусс (C. Gauss, 1829) предложил новый вариационный принцип, представляющий собой модификацию принципа Д'Аламбера—Лагранжа. Среди всех кинематически возможных движений рассматриваются мыслимые по Гауссу движения, удовлетворяющие условиям, наложенным на систему связей, и условиям постоянства r_ν и v_ν для рассматриваемого момента времени t. В момент $t+dt$:

$$\delta r_\nu = \frac{1}{2}\Delta w_\nu (dt)^2, \quad \Delta w = \frac{\delta v_\nu}{dt} - \frac{dv_\nu}{dt},$$

где dv_ν и δv_ν обозначают изменения скоростей за промежуток времени dt для действительного и к.-л. мыслимого движений; при этом уравнение (3) приводится к виду

$$\Delta Z = 0, \; Z = \frac{1}{2}\sum_\nu \frac{m_\nu}{2}\left(w_\nu - \frac{F_\nu}{m_\nu}\right)^2, \qquad (4)$$

причем $\Delta^2 Z > 0$.

Принцип наименьшего принуждения (Гаусса принцип): движение системы материальных точек, связанных между собой произвольным образом и подверженных любым влияниям, в каждое мгновение происходит в наиболее совершенном, какое только возможно, согласии с тем движением, каким обладали бы эти точки, если бы они стали свободными, т. е. движение происходит с наименьшим возможным принуждением, если в качестве меры принуждения за время dt принять величину Z, равную сумме произведений массы каждой точки на квадрат величины ее отклонения от того положения, которое она заняла бы, если бы была свободной. Иначе говоря, в каждый момент времени t среди всех ускорений, обусловленных связями, действительными ускорениями w_ν различных точек системы будут те, которые обращают в минимум функцию Z второй степени относительно ускорений.

Равновесие является частным случаем общего закона: оно имеет место в том случае, когда точки не имеют скорости и когда сохранение системы в состоянии покоя более близко к свободному движению в случае упразднения связей, чем к возможным движениям, допускаемым связями.

Из принципа Гаусса при выражении Z через независимые ускорения системы получаются уравнения Аппеля. Принцип Гаусса представляет собой физич. аналогию предложенному К. Гауссом *наименьших квадратов методу* теории ошибок. Принцип Гаусса эквивалентен принципу Д'Аламбера — Лагранжа, однако при рассмотрении нелинейных дифференциальных связей вида $\varphi_s(t, r_\nu, \dot{r}_\nu)=0$ эти принципы по П. Аппелю (P. Appell) и Э. Делассю (E. Delassus, 1911—13) оказались несовместимыми. Этот вопрос был разрешен Н. Г. Четаевым (1932—33), предложившим определять возможные перемещения для нелинейных связей условиями вида

$$\sum_\nu \operatorname{grad}_{r_\nu}\varphi_s \cdot \delta r_\nu = 0.$$

Из принципа Гаусса следует п р и н ц и п н а и м е н ь ш и х р е а к ц и й: для действительного движения величина

$$\sum_\nu \frac{R_\nu^2}{2m_\nu}$$

есть минимум. Принцип Гаусса обобщен на случай освобождения системы от части связей. Так как возможные перемещения исходной системы находятся среди возможных перемещений освобожденной системы, то справедливо соотношение:

$$\frac{(dt)^2}{2}\sum_\nu\left(m_\nu\frac{\partial v_\nu}{dt}-F_\nu\right)\cdot\Delta w_\nu = 0,$$

где ∂v_ν — изменение скорости за время dt в освобожденном движении. Это уравнение с учетом (4) можно привести к виду

$$A_{d\delta} + A_{d\partial} - A_{\partial\delta} = 0, \tag{5}$$

где

$$A_{\partial\delta} = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\left(\frac{\partial v_\nu}{dt}-\frac{\delta v_\nu}{dt}\right)^2$$

характеризует меру отклонения движения (∂) от движения (δ) за время dt. Аналогично записываются $A_{d\delta}$ и $A_{d\partial}$. Из уравнения (5) следуют неравенства

$$A_{d\delta} < A_{\partial\delta}, \quad A_{d\partial} < A_{\partial\delta}, \tag{6}$$

выражающие теорему: отклонение действительного движения (d) системы от мыслимого (δ) [освобожденного действительного (∂)] движения меньше отклонения движения (δ) от движения (∂). Эта теорема доказана Н. Г. Четаевым (1932—33). Теорема, выражаемая вторым из неравенств (6), для случая линейных неголономных связей высказана Э. Махом (E. Mach, 1883) и доказана Е. А. Болотовым (1916).

К принципу Гаусса тесно примыкает принцип прямейшего пути, постулированный Г. Герцем (H. Hertz, 1894) в качестве основного закона разработанной им механики, в которой, в отличие от механики Ньютона, вместо понятия силы введены представления о скрытых связях, скрытых массах и скрытых движениях.

П р и н ц и п п р я м е й ш е г о п у т и (н а и м е н ь ш е й к р и в и з н ы п р и н ц и п, Г е р ц а п р и н ц и п): всякая свободная система пребывает в своем состоянии покоя или равномерного движения вдоль прямейшего пути. Под свободной системой Г. Герц понимает систему, не подверженную действию активных сил и стесненную только внутренними связями, накладывающими условия лишь на взаимное расположение точек системы. Прямейший путь определяется как такая траектория, элементарные дуги к-рой обладают наименьшей кривизной по сравнению с любыми другими дугами, допускаемыми связями и имеющими с рассматриваемой элементарной дугой общие начальную точку и касательную в ней, причем величина Z интерпретируется как кривизна траектории точки, изо-

бражающей положение системы в $3N$-мерном евклидовом пространстве с прямоугольными координатами $\sqrt{m_\nu}\,x_\nu$, $\sqrt{m_\nu}\,y_\nu$, $\sqrt{m_\nu}\,z_\nu$. Иными словами, принцип Герца утверждает, что среди всех совместимых со связями траекторий действительная траектория обладает наименьшей кривизной.

Принцип Герца эквивалентен принципу Гаусса для систем, стесненных стационарными связями и не подверженных действию активных сил. Н. Г. Четаев (1941) предложил следующее видоизменение принципа Гаусса.

Принцип максимума работы (принцип Четаева): работа

$$A_\delta = \sum\nolimits_\nu (F_\nu - m_\nu w_\nu)\cdot\left(v_\nu + \frac{\delta v_\nu}{dt}\,\frac{dt}{2}\right)dt + \ldots$$

на элементарном цикле, состоящем из прямого движения в поле заданных сил и движения обратного в поле сил, к-рых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы механич. система была совершенно свободной; для действительного движения имеет (относительный) максимум в классе мыслимых по Гауссу движений. Принцип Четаева позволяет расширить характер обычно рассматриваемых механич. систем путем привлечения принципа Карно из термодинамики.

Изложенные принципы по способам варьирования подразделяются на две группы: в принципах возможных перемещений и Д'Аламбера — Лагранжа варьируется в нек-рый момент времени положение r_ν системы, а в принципах Гаусса, Герца и Четаева варьируются ускорения $\ddot{r}_\nu$ системы при постоянных r_ν и $\dot{r}_\nu$. Промежуточное место между этими двумя группами занимает принцип Журдена, в к-ром в момент t варьируются скорости $\dot{r}_\nu$ при постоянных r_ν. В момент $t+dt$ возможные перемещения $\delta r_\nu = \delta\ddot{r}_\nu\,dt$, и уравнение (3) принимает вид:

$$\sum\nolimits_\nu (F_\nu - m_\nu w_\nu)\cdot\delta\dot{r}_\nu = 0.$$

В интегральных В. п. к. м. сравнение действительного и кинематически возможных движений производится для конечных промежутков времени. Именно, сравниваются значения нек-рых определенных интегралов (наз. действием), вычисляемых для действительного и кинематически возможных движений, удовлетворяющих определенным условиям, между нек-рыми двумя конечными положениями системы. Интегральные В. п. к. м. менее общи по сравнению с дифференциальными принципами и применимы гл. обр. к голономным системам, находящимся под действием потенциальных сил. Наиболее общим из них является принцип, установленный У. Гамильтоном (W. Hamilton, 1834—35) для случая стационарных голономных связей и обобщенный М. В. Остроградским (1848) на нестационарные геометрич. связи. Пусть известны положения P_0 и P_1 голономной системы в моменты времени t_0 и t_1 в нек-ром ее действительном движении под действием заданных сил и сил реакций. В этом движении r_ν будут функциями времени, к-рые удовлетворяют связям и принимают для $t=t_0$ и $t=t_1$ значения, отвечающие положениям P_0 и P_1. Пусть $r_\nu+\delta r_\nu$ — нек-рые функции времени класса C^2, достаточно близкие к $r_\nu(t)$, удовлетворяющие связям и принимающие для $t=t_0$ и $t=t_1$ те же значения, что и $r_\nu(t)$. При этом δr_ν уничтожаются при $t=t_0$ и $t=t_1$ и имеют смысл возможных перемещений. Если считать $F_\nu = \operatorname{grad}_{r_\nu} U$, то

$$\delta S = 0,\quad S = \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt, \tag{7}$$

где функционал S наз. действием по Гамильтону за промежуток времени $t_1 - t_0$.

Принцип стационарного действия (принцип Гамильтона — Остроград-

с к о г о): в действительном движении системы действие по Гамильтону имеет стационарное значение по сравнению с любыми бесконечно близкими кинематически возможными движениями, для к-рых начальное и конечное положения системы одинаковы с соответствующими положениями для действительного движения и время движения одинаково. В случае непотенциальных сил принцип Гамильтона — Остроградского выражается уравнением

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \sum_{\nu} F_{\nu} \cdot \delta r_{\nu})\, dt = 0, \qquad (8)$$

т. е., если $r_{\nu}(t)$ — функции времени, соответствующие действительному движению системы, то интеграл в (8) равен нулю для всех вариаций функций $r_{\nu}(t)$, совместимых со связями и уничтожающихся на обоих пределах интеграла.

Равенства (7) и (8) представляют собой необходимые и достаточные условия для действительности движения системы под действием заданных сил. Уравнение (8) справедливо и для неголономных систем, однако для последних движение $r_{\nu} + \delta r_{\nu}$ не является, вообще говоря, кинематически возможным; уравнение (7) несправедливо для неголономных систем.

Если уравнения геометрич. связей представить в виде

$$r_{\nu} = r_{\nu}(t, q_1, \ldots, q_n),\ n = 3N - k,$$

где k — число связей, и ввести функцию Лагранжа

$$L(t, q_i, \dot{q}_i) = T + U,$$

то

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt.$$

При этом в расширенном $(n+1)$-мерном координатном пространстве $(t, q_1, \ldots, q_n)$ равенство (7) соответствует обычной (непараметрической) задаче вариационного исчисления при закрепленных концах. В $(2n+1)$-мерном расширенном фазовом пространстве с координатами t, q_i, $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ равенство (7) соответствует вариационной задаче со свободными концами (t и q_i — фиксированы, p_i — свободны), причем

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \Big)\, dt,$$

где $H(t, q_i, p_i)$ — функция Гамильтона.

Из уравнения (7) выводятся уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (9)$$

и канонич. уравнения Гамильтона:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (10)$$

Для решения основной задачи динамики достаточно знания функции действия

$$v(t, q_i, q_{i0}) = \int_{t_0}^{t} L\, dt. \qquad (11)$$

Однако для определения функции действия по формуле (11) необходимо знание закона движения. Чтобы обойти эту трудность, У. Гамильтон нашел дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + H\Big(t, q_i, \frac{\partial v}{\partial q_i}\Big) = 0, \qquad (12)$$

к-рому удовлетворяет функция действия. К. Якоби (C. Jacobi, 1837) показал, что если известен полный интеграл $v(t, q_i, \alpha_i)$ уравнения (12), зависящий от n произвольных постоянных α_i, из к-рых ни одна не является аддитивной, то общее решение уравнений (10) дается равенствами:

$$p_i = \frac{\partial v}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial v}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где β_i — произвольные постоянные.

Для систем, стесненных стационарными связями и находящихся под действием потенциальных сил, не зависящих явно от времени, существует интеграл энергии

$$E = T - U = h. \tag{13}$$

Его существование позволяет ограничить множество сравниваемых кинематически возможных движений, переводящих систему из положения P_0 в положение P_1, движениями, при к-рых полная механич. энергия E имеет одно и то же фиксированное значение h. В этом случае интеграл (13) можно рассматривать как неголономное условие и искать принцип механики в виде условного вариационного принципа. Эту задачу разрешил Ж. Лагранж (1760).

Принцип стационарного действия Лагранжа: если заданы начальный момент времени t_0 и начальное и конечное положения голономной системы, для к-рой существует интеграл энергии, то для действительного движения

$$\delta \int_{t_0}^{t} 2T\, dt = 0 \tag{14}$$

по сравнению с варьированными движениями между теми же начальным и конечным положениями и с той же энергией h, что и в действительном движении. Символ δ — вариация при условии (13).

Выполнение соотношения (13) при постоянном h для всех сравниваемых в принципе Лагранжа движений налагает определенные ограничения на скорости этих движений и время движения из положения P_0 в положение P_1 зависит от кривой, по к-рой совершается движение. Таким образом, принцип Лагранжа (14) [с учетом (13)] представляет собой условную вариационную задачу с верхним свободным концом.

Для рассматриваемых систем исключением времени t из (14) с помощью интеграла энергии (13) К. Якоби (1837) получил новый В. п. к. м.

В обобщенных координатах q_i кинетич. энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Пусть заданы метрика координатного пространства формулой

$$ds^2 = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}\, dq_i\, dq_j, \tag{15}$$

а также конечные положения системы P_0 и P_1 в нек-ром действительном движении системы.

Принцип стационарного действия Якоби: если заданы начальное и конечное положения голономной консервативной системы, то для действительного движения

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2(U+h)}\, ds = 0 \tag{16}$$

при сравнении со всякими другими бесконечно близкими движениями между теми же самыми начальным и конечным положениями и с тем же самым постоянным значением энергии h, что и в действительном движении.

Принцип Якоби приводит задачу изучения движения голономной консервативной системы к геометрич. задаче отыскания в римановом пространстве с метрикой (15) экстремалей вариационной задачи (16), к-рые представляют собой действительные траектории системы. Принцип Якоби выявляет тесную связь, существующую между движениями голономной консервативной системы и римановой геометрией пространства. Если движение системы происходит в отсутствие заданных сил, когда $U=0$, то система движется вдоль геодезич. линии координатного пространства $(q_1, \ldots, q_n)$ с постоянной скоростью. Этот факт является обобщением закона инерции Галилея. Когда $U \neq 0$, разыскание движения голо-

номной консервативной системы также сводится к задаче определения геодезических в римановом пространстве с метрикой

$$ds_1^2 = 2(U+h)\,ds^2 = \sum_{i,\,j=1}^{n} b_{ij}\,dq_i\,dq_j .$$

Для случая одной материальной точки, когда линейный элемент ds — элемент евклидова 3-мерного пространства, принцип Якоби представляет собой механич. аналог принципа Ферма в оптике.

Уравнения Лагранжа (9) или уравнения экстремалей вариационных принципов Гамильтона — Остроградского, Лагранжа и Якоби являются необходимыми условиями экстремума соответствующего интеграла, или действия по Гамильтону, Лагранжу, Якоби. В случаях, когда выполняются достаточные условия минимума, эти интегралы в действительных движениях принимают минимальные значения. Вследствие этого интегральные В. п. к. м. наз. также принципами наименьшего действия.

Использование интегральных В. п. к. м. естественным образом приводит к понятию обобщенных решений и расширению классов функциональных пространств, в к-рых разыскиваются решения задач математич. физики.

В. п. к. м. оказались применимыми не только к дискретным материальным системам, но и к системам с распределенными параметрами, к сплошным средам; они играют важную роль в теории поля и в математич. физике. С В. п. к. м. тесно связаны оптико-механич. аналогия, теория канонич. преобразований, теория групп Ли и законы сохранения. В. п. к. м. обладают большой эвристической ценностью, они распространены и на другие области физики, в частности на теорию относительности и на квантовую и волновую механику, где важную роль играют принципы наименьшего действия и связанный с ними лагранжев и гамильтонов математич. формализм.

Лит.: [1] Аппель П., Теоретическая механика, 6 изд., т. 2, пер. с франц., М., 1960; [2] Болотов Е. А., О принципе Гаусса, «Изв. физ.-матем. об-ва при Казан. ун-те. Сер. 2», 1916, т. 21, № 3, с. 99—152; [3] Вариационные принципы механики, сб. статей, М., 1959; [4] Ланцош К., Вариационные принципы механики, пер. с англ., М., 1965; [5] Парс Л. А., Аналитическая динамика, пер. с англ., М., 1971; [6] Розе Н. В., Лекции по аналитической механике, ч. 1, Л., 1938; [7] Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, М., 1962.

В. В. Румянцев.

ВАРИАЦИОННЫЙ РЯД — расположение значений случайной выборки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с функцией распределения $F(x)$ в порядке их возрастания: $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$. В. р. служит для построения эмпирич. функции распределения $F_n(x) = m_x/n$, где m_x — число членов ряда, меньших x. Важными характеристиками В. р. являются его крайние члены $(x_{(1)} = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i,\ x_{(n)} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i)$ и размах $R_n = x_{(n)} - x_{(1)}$. Плотности распределения минимального и максимального членов В. р. в случае

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)\,dy$$

задаются соответственно выражениями

$$p_{(1)}(x) = n\,[1 - F(x)]^{n-1} p(x)$$

и

$$p_{(n)}(x) = nF^{n-1}(x)\,p(x).$$

Для повторной выборки В. р. образует неоднородную цепь Маркова.

Лит.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967, гл. 8.

А. И. Шалыт.

ВАРИАЦИЯ — термин, введенный в математику Ж. Лагранжем [1] для обозначения малого смещения независимого переменного или функционала. Метод В.— метод исследования экстремальной задачи, основанный на малых смещениях аргумента и изучении того, как в зависимости от них изменяются функционалы. Этот метод является одним из основных методов при решении

задач на экстремум (отсюда и назв. *Вариационное исчисление*).

Пусть X — нек-рое пространство, на к-ром задан функционал $f(x)$, а V — пространство нек-рых параметров. Под вариацией аргумента $x_0 \in X$, понимают обычно кривую $x(t, v)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\alpha \leqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $v \in V$ в пространстве X, проходящую через x_0 в определенной близости от ограничений, причем x_0 соответствует значение $t=0$. Когда v пробегает множество всех параметров, вариации пробегают определенное семейство кривых, исходящих из точки x_0. В конечномерном и бесконечномерном анализе, начиная с первой работы Ж. Лагранжа, обычно применяют вариации по направлениям, когда $V=X$ и $x(t, v)=x_0+tv$. В этом случае В. наз. вектор v. Однако в геометрии, в вариационном исчислении и в особенности в теории оптимального управления применяют и др. классы В., напр. ломаные В., игольчатые В., В., связанные со скользящими режимами (см. [2], [3]). Выбор пространства В. и построение самих В. — важнейший элемент при получении необходимых условий экстремума. См. также *Вариация функционала*, *Гато производная*, *Фреше производная*, *Функциональная производная*.

Лит.: [1] Lagrange J., Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies, Turin, 1762; [2] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [3] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969. *В. М. Тихомиров.*

ВАРИАЦИЯ МНОЖЕСТВА — число, характеризующее k-мерную протяженность множества в n-мерном евклидовом пространстве. Нулевая вариация $V_0(E)$ замкнутого ограниченного множества E есть число компонент этого множества.

Для простейшего случая плоскости линейная вариация множества (то есть В. м. порядка 1) $V_1(E)$ есть интеграл

$$V_1(E) = c \int_0^{2\pi} \Phi(\alpha, E)\, d\alpha$$

от функции

$$\Phi(\alpha, E) = \int_{\Pi_\alpha} V_0\left(E \cap \Pi^{\perp}_{\alpha, z}\right) dz,$$

где интегрирование ведется по прямой Π_α, проходящей через начало координат, α — угол наклона Π_α к фиксированной оси и $\Pi^{\perp}_{\alpha, z}$ — прямая, перпендикулярная к Π_α и пересекающая ее в точке z. Нормирующая константа c выбирается так, чтобы вариация $V_1(E)$ отрезка E совпадала с его длиной. Для достаточно простых множеств, напр. спрямляемых кривых, В. м. равна длине кривой. Для замкнутой области E со спрямляемой границей Γ линейная В. м. $V_1(E)$ равна половине длины Γ. Вторая В. м. (то есть В. м. порядка 2) есть двумерная мера множества E и $V_k(E)=0$ при $k>2$.

Для n-мерного евклидова пространства вариацией $V_i(E)$ порядка $i=0, 1, \ldots, n$ ограниченного замкнутого множества E наз. интеграл

$$V_k(E) = \int_{\Omega^n_k} V_0(E \cap \beta)\, d\mu_\beta$$

от нулевой вариации пересечения E с $(n-k)$-мерной плоскостью β по пространству Ω^n_k всех $(n-k)$-мерных плоскостей из R_n, с *Хаара мерой* $d\mu_\beta$, нормированной так, чтобы единичный k-мерный куб J_k имел В. м. $V_k(J_k)=1$.

В. м. $V_n(E)$ совпадает с n-мерной мерой Лебега множества E. Для выпуклых тел В. м. при надлежащей нормировке совпадает со *смешанными объемами* Минковского (см. [4]).

Свойства В. м. 1) Для $E \subset R_n \subset R_{n'}$ В. м. $V_k(E)$ не зависит от того, вычисляется она для $E \subset R_n$ или для $E \subset R_{n'}$.

2) В. м. выражаются индуктивно по формуле

$$\int_{\Omega_k^n} V_i(E \cap \beta)\, d\mu_\beta = c(n, k, i)\, V_{k+i}(E), \quad k+i \leqslant n,$$

где $c(n, k, i)$ — нормирующая константа.

3) Условие $V_i(E)=0$ влечет $V_{i+1}(E)=0$.

4) В. м. (в известном смысле) не зависят друг от друга, т. е. для любой последовательности чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$, где $a_0>0$ — целое, $0<a_i\leqslant\infty$, $i=1, \ldots, n-1$; $a_n=0$, можно построить множество $E\subset R_n$, для к-рого $V_i(E)=a_i$, $i=0,1, \ldots, n$.

5) $V_i(E_1\cup E_2)=V_i(E_1)+V_i(E_2)$, если E_1 и E_2 не пересекаются. В общем случае

$$V_i(E_1\cup E_2)\leqslant V_i(E_1)+V_i(E_2).$$

Для $i=0, 1, \ldots, n-1$ В. м. V_i не монотонны, т. е. может оказаться, что $V_i(E_1)<V_i(E_2)$ для $E_1\supset E_2$.

6) В. м. полунепрерывны, т. е. если последовательность замкнутых ограниченных множеств E_k сходится (в смысле метрики уклонений) к множеству E, то

$$V_0(E)\leqslant \varlimsup_{k\to\infty} V_0(E_n),$$

а если, к тому же, равномерно ограничены суммы $V_0(E_k)+\ldots+V_{i-1}(E_k)$, то

$$V_i(E)\leqslant \varlimsup_{k\to\infty} V_i(E_k), \quad i=1, \ldots, n.$$

7) В. м. $V_k(E)$ совпадает с k-мерной *Хаусдорфа мерой* множества E, если $V_{k+1}(E)=0$, а

$$V_0(E)+\ldots+V_k(E)<\infty.$$

Эти условия выполняются, напр., для дважды гладких многообразий.

Понятие В. м. возникло в связи с исследованием решений системы Коши — Римана и в окончательной формулировке принадлежит А. Г. Витушкину. В. м. оказалась полезным аппаратом при решении нек-рых задач анализа, в частности при изучении *суперпозиций функций* многих переменных (см. [1]), а также в вопросах аппроксимации (см. [2]).

Лит.: [1] Витушкин А. Г., О *многомерных вариациях*, М., 1955; [2] его же, Оценка сложности задачи табулирования, М., 1959; [3] его же, «Докл. АН СССР», 1966, т. 166, № 5, с. 1022—25; [4] Леонтович А. М., Мельников М. С., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1965, т. 14, с. 306—37; [5] Иванов Л. Д., «Матем. сб.», 1967, т. 72 (114), № 3, с. 445—70; [6] его же, там же, 1969, т. 78(120), № 1, с. 85—100.

А. Г. Витушкин, Л. Д. Иванов.

ВАРИАЦИЯ ОДНОЛИСТНОЙ ФУНКЦИИ — понятие теории однолистных функций. Пусть в нек-рой области D плоскости комплексного переменного z заданы однолистная функция $f(z)$ и зависящее от вещественного параметра λ, $0\leqslant\lambda\leqslant\Lambda$, $\Lambda>0$, семейство $F(z, \lambda)$ функций, однолистных в D при каждом фиксированном $\lambda\in[0, \Lambda]$. Считая, что $F(z, 0)=f(z)$, образуем разность $F(z, \lambda)-f(z)\equiv\Phi(z, \lambda)$. Вариацией n-го порядка, или n-й вариацией, $n=1, 2, \ldots$, функции $f(z)$ (по семейству $F(z, \lambda)$) наз. коэффициент $q_n(z)$ при λ^n в разложении $\Phi(z, \lambda)$ по параметру при условии, что остаточный член

$$\varphi_n(z, \lambda)=\Phi(z, \lambda)-q_1(z)\lambda-\ldots-q_n(z)\lambda^n$$

имеет порядок малости более высокий, чем λ^n, равномерно относительно z или в области D, или внутри D, или в замыкании D. Выбор одного из указанных дополнительных условий обычно предопределяется задачей, в исследовании к-рой используются вариационные методы, связанные с В. о. ф.

Впервые вычисления и применения вариаций 1-го порядка однолистных функций были проведены Ж. Адамаром [1], а позднее М. А. Лаврентьевым [2]. Получение вариаций в нек-ром классе однолистных функций нередко (из-за нелинейности семейств таких функций) представляет сложную самостоятельную задачу. Она

решена для нек-рых классов функций в односвязных и многосвязных областях.

Лит.: [1] Hadamard J., Leçons sur le calcul des variations, t. 1, P., 1910; [2] Лаврентьев М. А., «Матем. сб.», 1938, т. 4(46), № 3, с. 391—458; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., 1966; [4] Бабенко К. И., «Тр. матем. ин-та АН СССР», М., 1972, т. 101.

И. А. Александров.

ВАРИАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЯ — числовая характеристика отображения, связанная с его дифференциальными свойствами. Определена С. Банахом [1]. Ниже дается определение лишь для двумерного случая. Рассмотрим отображение

$$\alpha : x=f(u,\ v),\ y=\varphi(u,\ v),$$

где $f(u,v)$ и $\varphi(u,v)$ — непрерывные на квадрате $D_0=[0,1]\times[0,1]$ функции. Говорят, что отображение α имеет ограниченную вариацию, если существует число $M>0$ такое, что для любой последовательности неперекрывающихся квадратов $D^i\subset D_0$ ($i=1, 2, \ldots$) со сторонами, параллельными осям координат u, v, справедливо неравенство

$$\sum\nolimits_i \operatorname{mes} D^i_{xy}\leqslant M,$$

где E_{xy} обозначает образ множества $E\subset D_0$ при отображении α, а $\operatorname{mes} E$ — плоскую меру Лебега множества E. При этом численное значение $V(\alpha)$ В. о. α может быть определено различными способами. Напр., пусть отображение α имеет ограниченную вариацию. Тогда вариация $V(\alpha)$ может быть определена по формуле

$$V(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N(s,\ t)\,ds\,dt,$$

где $N(s, t)$ — число решений системы $f(u, v)=s$, $\varphi(u, v)=t$ (индикатриса Банаха отобр жения α).

Если отображение α имеет ограниченную вариацию, то почти всюду на D_0 существует обобщенный якобиан $J(P)$ ($P\subset D_0$), к-рый интегрируем на D_0. При этом

$$J(P)\overset{\text{def}}{=\!=}\lim_{\operatorname{mes} K\to 0}\frac{\operatorname{mes} K_{xy}}{\operatorname{mes} K},$$

где $K\subset D_0$ — квадрат, содержащий точку $P\subset D_0$, стороны к-рого параллельны осям u, v (см. [2]).

Лит.: [1] Banach S., «Fundam. math.», 1925, t.7, p. 225—36; [2] Кудрявцев Л. Д., в сб.: Метрические вопросы теории функций и отображений, в. 1, К., 1969, с. 34—108.

В. И. Голубов.

ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИИ — числовая характеристика функции одного действительного переменного, связанная с ее дифференциальными свойствами.

1) Пусть $f(x)$ — функция действительного переменного x, заданная на отрезке $[a, b]$; ее вариация $V_a^b(f)$ есть точная верхняя грань сумм вида

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|,$$

где $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ — произвольная система точек из $[a, b]$. Это определение предложено К. Жорданом [1]. Если $V_a^b(f)<\infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченную (конечную) вариацию на отрезке $[a, b]$, а класс всех таких функций обозначают через $V[a, b]$ или просто через V. Функция $f(x)$ принадлежит классу $V[a, b]$ тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$, где f_1 и f_2 — возрастающие (убывающие) на $[a, b]$ функции (*Жордана разложение* функции ограниченной вариации). Сумма, разность и произведение двух функций класса $V[a, b]$ также есть функция класса $V[a, b]$. Это справедливо и для частного двух функций класса $V[a, b]$, если модуль знаменателя превосходит положительную постоянную на отрезке $[a, b]$. Каждая функция класса $V[a, b]$ ограничена и может иметь не более чем счетное множество точек разрыва, причем все они 1-го рода. Все эти свойства функций класса

$V[a, b]$ установлены К. Жорданом [1] (см. также [2], с. 234—38).

Функции $f(x)$ класса $V[a, b]$ почти всюду дифференцируемы на $[a, b]$ и для них имеет место разложение

$$f(x)=A(x)+S(x)+D(x),$$

где $A(x)$ — абсолютно непрерывная, $S(x)$ — сингулярная функция, а $D(x)$ — функция скачков (*Лебега разложение* функции ограниченной вариации). Это разложение единственно, если $f(a)=A(a)$ (см. [3] и [2], с. 290).

Первоначально класс $V[a, b]$ был введен К. Жорданом в связи с обобщением Дирихле признака сходимости рядов Фурье кусочно монотонных функций. К. Жордан доказал, что ряды Фурье 2π-периодич. функций класса $V[0, 2\pi]$ сходятся в каждой точке действительной оси. Однако в дальнейшем функции ограниченной вариации нашли широкое применение в различных областях математики, особенно в теории интеграла Стилтьеса.

Иногда рассматриваются классы $V_\Phi[a, b]$, к-рые определяются следующим образом. Пусть $\Phi(u)$ ($u\geqslant 0$, $\Phi(0)=0$) положительная при $u>0$ монотонно возрастающая непрерывная функция. Обозначим через $V^b_{\Phi a}(f)$ точную верхнюю грань сумм вида

$$\sum_{k=1}^{n}\Phi(|f(x_k)-f(x_{k-1})|),$$

где $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. Величина $V^b_{\Phi a}(f)$ наз. Ф-вариацией функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Если $V^b_{\Phi a}(f)<\infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченную Ф-вариацию на отрезке $[a, b]$, а класс всех таких функций обозначается через $V_\Phi[a, b]$ или просто через V_Φ (см. [4], с. 287). При $\Phi(u)=u$ получается класс $V[a, b]$ К. Жордана, а при $\Phi(u)=u^p$ ($1<p<\infty$) — классы V_p Н. Винера [5]. Определение класса $V_\Phi[a, b]$ предложено Л. Юнг [6].

Если

$$\overline{\lim_{u\to+0}}\frac{\Phi_1(u)}{\Phi_2(u)}<\infty,$$

то

$$V_{\Phi_2}[a, b]\subset V_{\Phi_1}[a, b].$$

В частности,

$$V_{u^p}\subset V_{u^q}\subset V_{\exp(-u^{-\alpha})}\subset V_{\exp(-u^{-\beta})}$$

при $1\leqslant p<q<\infty$, $0<\alpha<\beta<\infty$, причем эти вложения строгие.

Лит.: [1] Jordan C., «C. r. Acad. sci.», 1881, t. 92, № 5, p. 228—30; [2] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 2 изд., М., 1957; [3] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, (пер. с франц.), М.— Л., 1934; [4] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [5] Wiener N., «Massachusetts J. Math. and Phys.», 1924, v. 3, p. 72—94; [6] Young L. C., «C. r. Acad. sci.», 1937, t. 204, № 7, p. 470—72.

Б. И. Голубов.

2) Для функции нескольких переменных имеются различные определения вариаций (*Арцела вариация*, *Витали вариация*, *Пьерпонта вариация*, *Тонелли плоская вариация*, *Фреше вариация*, *Харди вариация*). Очень плодотворным оказалось также следующее определение (см. [1]), основанное на использовании *Банаха индикатрисы*. Пусть действительнозначная функция $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ задана и измерима по Лебегу на n-мерном кубе Q_n. Вариацией $V_k(f)$ порядка k ($k=1, 2, \ldots, n$) функции $f(x)$ на кубе Q_n наз. число

$$\int_{-\infty}^{+\infty}v_{k-1}(l_t)\,dt,$$

где $v_{k-1}(l_t)$ обозначает $(k-1)$-ю вариацию множества $l_t=\{x: x\in Q_n, f(x)=t\}$, а интеграл понимается в смысле Лебега. Это определение позволяет перенести на функ-

ции нескольких переменных многие свойства функций ограниченной вариации одного переменного. Напр.:

а) $$V_n(f+g) \leqslant V_n(f) + V_n(g);$$
$$V_k(cf) = |c| V_k(f), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

б) Если последовательность функций $f_s(x)$ ($s=1, 2, \ldots$) сходится к $f(x)$ равномерно на Q_n, то
$$V_k(f) \leqslant \varliminf_{s \to \infty} V_k(f_s), \quad k = 1, \ldots, n.$$

в) Если функция $f(x)$ непрерывна на Q_n и все ее вариации конечны, то $f(x)$ почти всюду имеет полный дифференциал.

г) Если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на Q_n, то
$$V_n(f) = \int_{Q_n} |\operatorname{grad} f| \, dx.$$

д) Если функция $f(x)$ непрерывна на кубе Q_n со стороной 2π, имеет конечные вариации всех порядков на кубе Q_n и может быть периодически продолжена с периодом 2π по каждому аргументу x_k, $k=1, \ldots, n$ на все n-мерное пространство, то ее ряд Фурье равномерно сходится к ней на Q_n по Прингсхейму.

Достаточные условия конечности вариаций: если функция $f(x)$ имеет на кубе Q_n непрерывные производные всех порядков до $(n-k+1)$-го включительно, то ее вариация порядка k конечна. Эта теорема является окончательной в том смысле, что условия на гладкость не улучшаемы ни при одном k.

Лит.: [1] Витушкин А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955.

А. Г. Витушкин.

ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА, первая вариация,— обобщение понятия дифференциала функции одного переменного, главная линейная часть приращения функционала вдоль определенного направления; используется в теории экстремальных задач для получения необходимых и достаточных условий экстремума. Именно такой смысл вкладывается в термин «В. ф.», начиная с работы Ж. Лагранжа [1] (1760). Ж. Лагранж рассматривал по преимуществу функционалы классического вариационного исчисления вида:
$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) \, td. \qquad (1)$$

Если заданную функцию $x_0(t)$ заменить на $x_0(t) + \alpha h(t)$ и подставить в выражение для $J(x)$, то при допущении о непрерывной дифференцируемости интеграта L имеет место следующее равенство:
$$J(x_0 + \alpha h) = J(x_0) + \alpha J_1(x_0)(h) + r(\alpha), \qquad (2)$$
где $|r(\alpha)| \to 0$ при $\alpha \to 0$. Функцию $h(t)$ часто наз. вариацией функции $x_0(t)$ и иногда обозначают через $\delta x(t)$. Выражение $J_1(x_0)(h)$, представляющее собой функционал относительно вариаций h, наз. первой вариацией функционала $J(x)$ и обозначают через $\delta J(x_0, h)$. В применении к функционалу (1) выражение для первой вариации имеет вид:
$$\delta J(x_0, h) = \int_{t_0}^{t_1} (p(t) \dot{h}(t) + q(t) h(t)) \, dt, \qquad (3)$$
где
$$p(t) = L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)), \; q(t) = L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)).$$

Равенство нулю первой вариации для всех h является необходимым условием экстремума функционала $J(x)$. Для функционала (1) из этого необходимого условия и основной леммы вариационного исчисления (см. *Дюбуа-Реймона лемма)* следует уравнение Эйлера:
$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) + L_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = 0.$$

Путем, аналогичным (2), определяются и вариации более высоких порядков (см., напр., в ст. *Вторая вариация* функционала).

Общее определение первой вариации в бесконечномерном анализе было дано Р. Гато (R. Gateaux) в 1913 (см. *Гато вариация*). По сути своей определение Гато тождественно с определением Лагранжа. Первая вариация функционала является однородным, но не обязательно линейным функционалом, В. ф. при дополнительном предположении о линейности и непрерывности (по h) выражения $\delta J(x_0, h)$ наз. обычно *Гато производной*. Термины «вариация Гато», «производная Гато», «дифференциал Гато» более употребимы, чем В. ф.; термин «В. ф.» сохранился лишь для функционалов классического вариационного исчисления (см. [3]).

Лит.: [1] Lagrange J., Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies, Turin, 1762; [2] Gateaux R., «Bull. Soc. Math. France», 1919, т. 47, с. 70—96; [3] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950.

В. М. Тихомиров.

ВАРИНГА ПРОБЛЕМА — проблема теории чисел, сформулированная Э. Варингом (E. Waring) в 1770 в следующем виде: всякое натуральное число есть сумма четырех квадратов, девяти кубов, девятнадцати четвертых степеней. Другими словами: для любого $n \geqslant 2$ существует такое $k = k(n)$, зависящее только от n, что любое натуральное число есть сумма k n-х степеней неотрицательных целых чисел. Первое общее решение В. п. с очень грубой оценкой величины k в зависимости от n дано в 1909 Д. Гильбертом (D. Hilbert), в связи с чем В. п. иногда наз. проблемой Гильберта — Варинга. Если через $J_{k,n}(N)$ обозначить число решений в целых неотрицательных числах уравнения

$$x_1^n + \ldots + x_k^n = N, \qquad (1)$$

то теорема Гильберта утверждает, что существует $K = k(n)$, для к-рого $J_{k,n}(N) \geqslant 1$ при любом $N \geqslant 1$. В 1928 Г. Х. Харди и Дж. И. Литлвуд (G. H. Hardy, J. E. Littlewood), применив к В. п. круговой метод, доказали, что при $k \geqslant (n-2)\, 2^{n-1} + 5$ для $J_{k,n}(N)$ имеет место асимптотич. формула вида

$$J_{k,n}(N) = AN^{k/n-1} + O\left(N^{k/n-1-\gamma}\right), \qquad (2)$$

где $A = A(N) \geqslant c_0 > 0$, а c_0 и $\gamma > 0$ некоторые постоянные. Следовательно, при $N \geqslant N_0(n)$ уравнение (1) имеет решение. В связи с этим результатом возникли три проблемы: установить порядок трех величин $G(n)$, $g(n)$, $k_0(n)$ — наименьших целых чисел, для к-рых: а) уравнение (1) разрешимо при $k \geqslant G(n)$ и $N \geqslant N_0(n)$; б) уравнение (1) разрешимо при $k \geqslant g(n)$ и $N \geqslant 1$; в) для величины $J_{k,n}(N)$ при $k \geqslant k_0(n)$ имеет место асимптотич. формула (2).

а) Известно, что $G(n) \geqslant n + 1$. В 1934 И. М. Виноградов при помощи созданного им метода доказал, что

$$G(n) \leqslant 3n(\ln n + 9).$$

Кроме того, имеется много результатов относительно $G(n)$ для небольших значений n: $G(4) = 16$ (Х. Давенпорт, H. Davenport, 1939), $G(3) = 7$ (Ю. В. Линник, 1942).

б) В 1936 Л. Диксон и С. Пиллаи (L. Dickson, S. Pillai), применив *Виноградова метод*, доказали, что

$$g(n) = 2^n + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right] - 2$$

для всех $n > 6$, для к-рых

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] + 3\right\}.$$

Последнее же условие доказано К. Малером (K. Mahler) в 1957 для всех достаточно больших n.

в) Наилучший результат принадлежит И. М. Виноградову, к-рый доказал, что

$$k_0(n) \leqslant 4n^2 \ln n.$$

Элементарное доказательство В. п. дано Ю. В. Линником в 1942. Существует много различных обобщений

В. п. (переменные пробегают нек-рое подмножество множества натуральных чисел; вместо одночленов $x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n$ в представлении числа N рассматриваются многочлены $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_k(x_k)$; вместо уравнения (1) рассматривается сравнение и т. д.).

Особое значение В. п. состоит в том, что при ее решении созданы мощные методы *аналитической теории чисел*.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Избранные труды, М., 1952; [2] его же, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [3] Хуа Л о-г е н, Метод тригонометрических сумм и его применение в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [4] Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, М.—Л., 1947; [5] Хинчин А. Я., Три жемчужины теории чисел, 2 изд., М.— Л., 1948.

А. А. Карацуба.

ВАРИНЬОНА ТЕОРЕМА — одна из основных теорем теории скользящих векторов. Согласно В. т., если система скользящих векторов $\boldsymbol{F}_\nu$ приводится к одной равнодействующей $\boldsymbol{F}$, то момент равнодействующей относительно нек-рой точки 0 (или оси l) равен сумме моментов векторов системы относительно той же точки (или оси):

$$\mathrm{mom}_0 \boldsymbol{F} = \sum_\nu \mathrm{mom}_0 \boldsymbol{F}_\nu, \quad \mathrm{mom}_l \boldsymbol{F} = \sum_\nu \mathrm{mom}_l \boldsymbol{F}_\nu.$$

В. т. установлена П. Вариньоном (P. Varignon, 1687) для случая сходящейся системы сил. Эта теорема широко используется в геометрич. статике, кинематике твердого тела, сопротивлении материалов.

В. В. Румянцев.

ВАТСОНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование $g(x)$ функции $f \in L^2(0, \infty)$, определяемое следующим образом:

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \tilde{\omega}_1(xu) f(u) \frac{du}{u}, \qquad (1)$$

где x — действительное переменное, ядро $\tilde{\omega}(x)$ представляется в виде

$$\tilde{\omega}_1(x) = \frac{x}{2\pi} \operatorname*{l.i.m.}_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \frac{\Omega\left(\frac{1}{2} + it\right)}{\frac{1}{2} - it} x^{-\frac{1}{2} - it} dt \qquad (2)$$

(l. i. m. означает предел в среднем в L^2); причем функция $\Omega\left(\frac{1}{2} + it\right)$ удовлетворяет условию

$$\Omega(s)\Omega(1-s) = 1.$$

Достаточными условиями существования ядра $\tilde{\omega}_1(x)$ и включения $\frac{\tilde{\omega}_1(x)}{x} \in L^2(0, \infty)$ являются

$$\Omega\left(\frac{1}{2} - it\right) = \Omega\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

и

$$\frac{\Omega\left(\frac{1}{2} + it\right)}{\frac{1}{2} - it} \in L^2(-\infty, \infty).$$

Для функции $f \in L^2(0, \infty)$ формула (1) определяет почти всюду функцию $g \in L^2(0, \infty)$. Формула обращения для В. п. (1) имеет вид

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \tilde{\omega}_1(xu) g(u) \frac{du}{u}.$$

В. п. названо по имени Дж. Ватсона [1], впервые рассмотревшего это преобразование.

Лит.: [1] Watson G. N., «Proc. London Math. Soc.», Ser. 2, 1933, v. 35, p. 156—99.

А. П. Прудников.

ВВЕДЕНИЯ ПАРАМЕТРА МЕТОД — метод представления правой части системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad (1)$$

в виде

$$f(t, x) = f_0(t, x) + \varepsilon g(t, x), \quad \varepsilon = 1, \quad g = f - f_0,$$

где f_0 означает главную (в том или ином смысле) часть

вектор-функции f, а g — совокупность членов второстепенного значения. Разбиение f на f_0 и g обычно диктуется физич. или аналитич. смыслом задачи, описываемой системой (1). Наряду с (1) рассматривают систему с параметром

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = f_0(t,\ x_\varepsilon) + \varepsilon g(t,\ x_\varepsilon), \qquad (2)$$

к-рая при $\varepsilon = 0$ обращается в вырожденную систему

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(t,\ x_0). \qquad (3)$$

Если $f(t,\ x)$ и $g(t,\ x)$ голоморфны в окрестности точки $(\tau,\ \xi)$, то система (2) при достаточно малых по модулю значениях ε имеет решение $x_\varepsilon(t;\ \tau,\ \xi)$, $x_\varepsilon(\tau;\ \tau,\ \xi) = \xi$, к-рое в окрестности начальных значений $(\tau,\ \xi)$ представимо в виде ряда по степеням ε:

$$x_\varepsilon(t;\ \tau,\ \xi) = x_0(t;\ \tau,\ \xi) + \varepsilon\varphi_1(t;\ \tau,\ \xi) + \ldots$$
$$\ldots + \varepsilon^n\varphi_n(t;\ \tau,\ \xi) + \ldots,\quad \varphi_k(\tau;\ \tau,\ \xi) = 0 \qquad (4)$$

(в нек-рых случаях для φ_k задают и ненулевые начальные значения). Если ряд (4) сходится при $\varepsilon = 1$, то он доставляет решение системы (1) с начальными значениями $(\tau,\ \xi)$. Для фактического построения коэффициентов φ_n достаточно располагать общим решением системы (3) и частным решением $z(t;\ \tau,\ 0)$ любой системы

$$\frac{dz}{dt} = f_0(t,\ z) + h(t),$$

где $h(t)$ голоморфна в окрестности $t = \tau$.

В частности, все φ_n последовательно определяются с помощью квадратур, если $f_0(t,\ x) = Ax$, где A — постоянная матрица.

Особенно широко В. п. м. используется в теории нелинейных колебаний [3] при построении периодич. решений системы (1). См. также *Малого параметра метод*. В. п. м. был использован П. Пенлеве (P. Painlevé) для выделения дифференциальных уравнений 2-го порядка, решения к-рых не имеют подвижных критических особых точек (см. *Пенлеве уравнение*). Справедливо утверждение: системами с неподвижными критич. точками могут быть лишь такие системы (1), к-рые после введения подходящего параметра ε имеют в качестве вырожденных систем (3) системы без подвижных критич. особенностей. В. п. м. широко применяется для построения новых классов существенно нелинейных дифференциальных систем (1) без подвижных критических особых точек и для исследования систем указанных классов (см. *Особая точка дифференциального уравнения*).

Лит.: [1] Пуанкаре А., Избр. труды, пер. с франц., М., 1971, т. 1, с. 9—456; [2] Ляпунов А. М., Собр. соч., М.— Л., 1956, т. II, с. 7—263; [3] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974; [4] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950; [5] Еругин Н. П., «Дифференц. уравнения», 1967, т. 3, № 11, с. 1821—63.

Ю. С. Богданов.

ВЕБЕРА УРАВНЕНИЕ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right) y = 0,\ \nu = \text{const}; \qquad (*)$$

точка $x = \infty$ является для него сильно особой точкой. Уравнение этого вида впервые было рассмотрено Г. Вебером в теории потенциала в связи с параболич. цилиндром (см. [1]); оно возникает при разделении переменных в уравнении Лапласа в параболич. координатах. В. у. заменой $y = x^{-1/2}w$, $z = x^2/2$ приводится к *Уиттекера уравнению* и представляет собой частный случай *вырожденного гипергеометрического уравнения*. Замена $y = u\exp(-x^2/4)$ приводит В. у. к виду

$$u'' - xu' + \nu u = 0.$$

Решения уравнения (*) наз. функциями параболического цилиндра, или функциями Вебера — Эрмита. В частности, если ν — целое неотрицательное число, то уравнению (*) удовлетворяет функция

$$y = \exp(-x^2/4)\, H_\nu(x),$$

где $H_\nu(x)$ — *Эрмита многочлен* (см. [2] — [4]).

Лит.: [1] Weber H., «Math. Ann.», 1869, Bd 1, S. 1—36; [2] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963; [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [4] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968. *Н. Х. Розов.*

ВЕБЕРА ФУНКЦИЯ — функция

$$E_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\nu\theta - z\sin\theta)\, d\theta,$$

где z — комплексное, ν — действительное, удовлетворяющая неоднородному *Бесселя уравнению*:

$$z^2y'' + zy' + (z^2-\nu^2)\, y = -\pi^{-1}[(z+\nu) + (z-\nu)\cos\nu\pi].$$

Для нецелых ν справедливо разложение

$$E_\nu(z) = \frac{1-\cos\nu\pi}{\nu\pi}\left[1 - \frac{z^2}{2^2-\nu^2} + \frac{z^4}{(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)} - \dots\right] - \frac{1+\cos\nu\pi}{\pi}\left[\frac{z}{1^2-\nu^2} - \frac{z^3}{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)} + \frac{z^5}{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)(5^2-\nu^2)} - \dots\right].$$

При $|z|\to\infty$ и $|\arg z| < \pi/2$ имеет место асимптотич. разложение

$$E_\nu(z) \approx -N_\nu(z) - \frac{1+\cos\nu\pi}{\pi z}\left[1 - \frac{1^2-\nu^2}{z^2} + \frac{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)}{z^4} - \dots\right] - \frac{1-\cos\nu\pi}{\pi z}\left[\frac{\nu}{z} - \frac{\nu(2^2-\nu^2)}{z^3} + \frac{\nu(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)}{z^5} - \dots\right],$$

где N_ν — *Неймана функция*. Если ν не целое, то В. ф. связана с *Ангера функцией* $\mathbf{J}_\nu(z)$ следующими соотношениями:

$$\sin\nu\pi\cdot\mathbf{J}_\nu(z) = \cos\nu\pi\, E_\nu(z) - E_{-\nu}(z),$$
$$\sin\nu\pi\cdot E_\nu(z) = \mathbf{J}_{-\nu}(z) - \cos\nu\pi\cdot\mathbf{J}_\nu(z).$$

В. ф. впервые изучалась Г. Вебером [1].

Лит.: [1] Weber H. F., «Zürich Vierteljahresschrift», 1879, Bd 24, S. 33—76; [2] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1, М., 1949. *А. П. Прудников.*

ВЕДДЕРБЕРНА — АРТИНА ТЕОРЕМА — теорема, полностью описывающая строение ассоциативных *артиновых колец* без нильпотентных идеалов; ассоциативное кольцо R удовлетворяет условию минимальности для правых идеалов и не имеет нильпотентных идеалов в том и только том случае, если R есть прямая сумма конечного числа идеалов, каждый из к-рых изоморфен полному кольцу матриц конечного порядка над подходящим телом, причем это разложение в прямую сумму единственно с точностью до порядка следования слагаемых. Эта теорема получена первоначально Дж. Веддерберном (J. Wedderburn) и доказана в окончательной формулировке Э. Артином [1].

Лит.: [1] Artin E., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1950, v. 56, № 1, p. 65—72. *К. А. Жевлаков.*

ВЕДДЕРБЕРНА — МАЛЬЦЕВА ТЕОРЕМА: пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над полем F с радикалом N и пусть факторалгебра A/N — *сепарабельная алгебра* (для алгебр над полем характеристики 0 это всегда выполнено); тогда алгебра A разлагается (как линейное пространство) в прямую сумму радикала N и нек-рой полупростой подалгебры S

$$A = N \oplus S,$$

причем, если имеется другое разложение $A=N\oplus S_1$, где S_1 — полупростая подалгебра, то существует автоморфизм φ алгебры A, отображающий S на S_1 (автоморфизм φ является внутренним, т. е. существуют элементы a, $a'\in A$ такие, что $a\cdot a'=a'\cdot a=0$ и $x\varphi=a\cdot x\cdot a'$ для всех $x\in A$, где $x\cdot y=x+y+xy$). Существование указанного разложения получено Дж. Веддерберном [1], а единственность (с точностью до автоморфизма) полупростого слагаемого доказана А. И. Мальцевым [2]. Эта теорема вместе с теоремой Веддерберна (см. *Ассоциативные кольца и алгебры*) о строении полупростых алгебр составляет центральную часть классич. теории конечномерных алгебр.

Лит.: [1] Wedderburn J. H. M., «Proc. London Math. Soc.», ser. 2, 1908, v. 6, p. 77—118; [2] Мальцев А. И., «Докл. АН СССР», 1942, т. 36, № 1, с. 42—5; [3] Albert A. A., Structure of algebras, N. Y., 1939; [4] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969. *Л. А. Бокуть.*

ВЕЕР, финитарный поток,—*поток* π такой, что для всякого узла $\langle n_1, \ldots, n_m\rangle$ из π существует лишь конечное число натуральных k, для к-рых $\langle n_1, \ldots, n_m, k\rangle$ является узлом π.

На языке формального интуиционистского математич. анализа формула $\mathrm{Fan}(a)$, выражающая понятие «функция a задает В.», записывается в виде

$$\mathrm{Spr}(a)\ \&\ \forall x\,(a(x)=0\supset\exists y\,\forall z\,(a(x*\hat{z})=0\supset z\leqslant y)),$$

где $\mathrm{Spr}(a)$ означает «функция a задает поток».

Теорема Брауэра о веере: если имеется правило, согласно к-рому каждому элементу В. сопоставлен нек-рый объект, напр. натуральное число, то найдется натуральное z такое, что для всякого элемента В. этот объект определяется уже первыми z значениями элемента. Теорема Брауэра используется в доказательстве многих специфически интуиционистских фактов, таких, как равномерная непрерывность всякой действительнозначной функции, заданной на отрезке. В формальном интуиционистском математич. анализе теорема Брауэра о В. выводится обычно с помощью *бар-индукции* и принципа непрерывности Брауэра (см. *Интуиционизм*). На языке этой формальной теории теорема о В. может быть записана следующим образом:

$$\mathrm{Fan}(a)\ \&\ (\forall\alpha\in a)\,\exists x\varphi(\alpha,x)\supset$$

$$\exists z\,(\forall\alpha\in a)\,\exists x\,(\forall\beta\in a)\,(\overline{\alpha}(z)=\overline{\beta}(z)\supset\varphi(\beta,x)).$$

Лит.: [1] Kleene S. C., Vesley R. E., The foundations of intuitionistic mathematics, Amst., 1965. *А. Г. Драгалин.*

ВЕЕРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ системы топологических пространств X_α относительно системы непрерывных отображений $f_\alpha: X_\alpha\to X_0$, $\alpha\in\mathfrak{A}$,— подмножество $X_\mathfrak{A}$ *тихоновского произведения* $\Pi_{\alpha\in\mathfrak{A}}X_\alpha$, рассматриваемое в индуцированной топологии и состоящее из таких точек $x=\{x_\alpha\}\in\Pi_{\alpha\in\mathfrak{A}}X_\alpha$, для к-рых $f_\alpha x_\alpha=f_{\alpha'}x_{\alpha'}$ при любом выборе индексов α и α' из $\mathfrak{A}$. Отображение, ставящее в соответствие точке $x=\{x_\alpha\}\in X_\mathfrak{A}$ точку $x_\alpha\in X_\alpha$ (соответственно точку $f_\alpha x_\alpha\in X_0$), наз. проекцией В. п. $X_\mathfrak{A}$ в X_α, $\alpha\in\mathfrak{A}$ (соответственно в X_0). Если пространство X_0 одноточечно, то $X_\mathfrak{A}=\Pi_{\alpha\in\mathfrak{A}}X_\alpha$. Если X_α, $\alpha\in\mathfrak{A}$,— вполне регулярные пространства, то В. п. $X_\mathfrak{A}$ вполне регулярно. В. п., и особенно их частный случай — *частичное произведение*, хорошо приспособлено к построению универсальных (в смысле гомеоморфного вложения) топологич. пространств данного веса и данной размерности (см. *Универсальное пространство*). *Б. А. Пасынков.*

ВЕЙБУЛЛА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — специальный вид распределения вероятностей случайных величин X_w; характеризуется функцией распределения

$$F_w(t,\ p,\ \sigma,\ \mu)=\begin{cases}1-\exp\left\{-\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^p\right\} & \text{при } t>\mu,\\ 0 & \text{при } t\leqslant\mu,\end{cases} \quad (*)$$

где p — параметр формы кривой распределения, σ — параметр масштаба, μ — параметр сдвига. Семейство распределений (*) названо по имени В. Вейбулла [1], впервые использовавшего его для аппроксимации экспериментальных данных о прочности стали на разрыв при усталостных испытаниях и предложившего методы оценки параметров распределения (*). В. р. принадлежит к асимптотич. распределению третьего типа крайних членов вариационного ряда. Оно широко используется для описания закономерностей отказов шарикоподшипников, вакуумных приборов, элементов электроники. Частными случаями В. р. являются экспоненциальное ($p=1$) и рэлеевское ($p=2$) распределения. Кривые функции распределения (*) не принадлежат семейству распределений Пирсона. Имеются вспомогательные таблицы для вычислений функции распределения Вейбулла (см. [2]). При $\mu=0$ квантиль уровня q равна $\sigma[-\ln(1-q)]^{1/p}$,

$$\mathsf{E}X_w^k=\sigma^k\Gamma\left(1+\frac{k}{p}\right),\quad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

$$\mathsf{D}X_w=\sigma^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{p}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{p}\right)\right],$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция; коэффициент вариации, асимметрия и эксцесс не зависят от σ, что облегчает их табулирование и создание вспомогательных таблиц для получения оценок параметров. При $p\geqslant 1$ В. р. унимодально, мода равна $\sigma(p-1)^{1/p}$, а функция опасности отказов $\lambda(t)=pt^{p-1}/\sigma^p$ не убывает. При $p<1$ функция $\lambda(t)$ монотонно убывает. Можно построить так. наз. вероятностную бумагу Вейбулла (см. [3]). На ней $F_w(t,\ p,\ \sigma,\ 0)$ трансформируется в прямую, при $\mu>0$ образ $F_w(t,\ p,\ \sigma,\ \mu)$ имеет вогнутость, а при $\mu<0$ — выпуклость. Оценки параметров В. р. по методу квантилей приводят к уравнениям существенно более простым, чем по методу максимального правдоподобия. Совместная асимптотич. эффективность оценок параметров p и σ (при $\mu=0$) по методу квантилей максимальна (и равна 0,64) при использовании квантилей уровня 0,24 и 0,93. Функция распределения (*) хорошо аппроксимируется функцией распределения логнормального распределения

$$\Phi\left(\frac{\ln(t-b)-a}{c}\right)$$

($\Phi(x)$ — функция распределения нормированного нормального распределения, $-\infty<b<\infty$, $-\infty<a<\infty$, $c>0$):

$$\inf_{p,\ \sigma\ a,\ c}\ \sup_{t}\left|F_w(t,\ p,\ \sigma,\ 0)-\Phi\left(\frac{\ln t-a}{c}\right)\right|=$$

$$=\inf_{a,\ c}\ \sup_{t}\left|F_w(t,\ 1,\ 1,\ 0)-\Phi\left(\frac{\ln t-a}{c}\right)\right|=0{,}038.$$

Лит.: [1] Weibull W., A statistical theory of the strength of materials, Stockh., 1939; [2] Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д., Математические методы в теории надежности, М., 1965; [3] Johnson L., The statistical treatment of fatigue experiments, Amst., 1964; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

Ю. К. Беляев, Е. В. Чепурин.

ВЕЙЕРШТРАССА КОЛЬЦО — локальное гензелево псевдогеометрическое (см. *Геометрическое кольцо*) кольцо, каждое факторкольцо к-рого по простому идеалу является конечным расширением регулярного локального кольца. В. к. аналитически неприводимо. Любое конечное расширение В. к. есть В. к. Примерами В. к. являются *аналитические кольца* (кольца сходящихся

степенных рядов) над совершенным полем, для к-рых имеет место подготовительная *Вейерштрасса теорема.*

Лит.: [1] Nagata M., Lokal rings, N. Y., 1962; [2] Seydi H., «Bull. Soc. Math. France», 1971, t. 95, p. 227—35.

В. И. Данилов.

ВЕЙЕРШТРАССА КООРДИНАТЫ — один из видов координат в эллиптическом пространстве. Пусть M^n — эллиптическое пространство, а S — изометричное ему пространство, полученное отождествлением диаметрально противоположных точек единичной сферы S^n $(n+1)$-мерного евклидова пространства. В. к. $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ точки пространства M^n есть декартовы прямоугольные координаты соответствующей ей по изометрии точки сферы S^n. Вследствие неоднозначности изометрич. отображения M^n на S^n В. к. определены с точностью до знака. Гиперплоскость в M^n задается линейным однородным уравнением

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0,$$

где $a_i = \text{const} \neq 0$. В. к. названы по имени К. Вейерштрасса (K. Weierstrass), к-рый пользовался ими в своих лекциях по геометрии Лобачевского в 1872. *Е. В. Шикин.*

ВЕЙЕРШТРАССА КРИТЕРИЙ минимальности поверхности: для того чтобы двумерная поверхность в n-мерном евклидовом пространстве E^n, $n \geqslant 3$, принадлежащая в изотермич. координатах u и v классу C^2, была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы компоненты ее радиус-вектора были гармонич. функциями от (u, v). *И. Х. Сабитов.*

ВЕЙЕРШТРАССА ПРИЗНАК равномерной сходимости — утверждение, дающее достаточные условия равномерной сходимости ряда или последовательности функций посредством сравнения их с соответствующими числовыми рядами и последовательностями; установлен К. Вейерштрассом [1]. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

составленного из действительных или комплексных функций, определенных на нек-ром множестве E, существует числовой сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

такой, что

$$|u_n(x)| \leqslant a_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то исходный ряд сходится равномерно и абсолютно на множестве E. Напр., ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

абсолютно сходится на всей действительной оси, поскольку

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится.

Если для последовательности действительных или комплексных функций $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящейся на множестве E к функции $f(x)$, существует бесконечно малая числовая последовательность α_n такая, что $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \alpha_n$, $x \in E$, $n = 1, 2, \ldots$, то данная последовательность сходится на множестве E равномерно. Напр., последовательность

$$f_n(x) = 1 - \frac{(-1)^n}{x^2 + n}$$

равномерно на всей действительной оси сходится к

функции $f(x)=1$, так как

$$|1-f_n(x)|<\frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

В. п. равномерной сходимости переносится на функции, значения к-рых лежат в нормированных линейных пространствах.

Лит.: [1] Weierstrass K., Abhandlungen aus der Funktionenlehre, B., 1886; Math. Werke, Bd 2, B., 1895.

Л. Д. Кудрявцев.

ВЕЙЕРШТРАССА ТЕОРЕМА — 1) В. т. о бесконечном произведении [1]: для любой наперед заданной последовательности точек плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z

$$0,\ \dots,\ 0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,$$
$$0<|\alpha_k|\leqslant|\alpha_{k+1}|,\quad k=1,\ 2,\ \dots;\quad \lim_{k\to\infty}|\alpha_k|=\infty, \tag{1}$$

существует целая функция, имеющая нулями точки α_k этой последовательности и только их. Эта функция может быть построена в виде *канонического произведения*

$$W(z)=z^{\lambda}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)e^{P_k(z)}, \tag{2}$$

где λ — кратность нуля в последовательности (1), а

$$P_k(z)=\frac{z}{\alpha_k}+\frac{z^2}{2\alpha_k^2}+\dots+\frac{z^{m_k}}{k\alpha_k^{m_k}}.$$

Множители

$$W\left(\frac{z}{\alpha_k};\ m_k\right)=\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)e^{P_k(z)}$$

наз. первичными, или примарными, множителями Вейерштрасса. Показатели m_k в них выбираются так, чтобы обеспечить сходимость произведения (2), напр., выбор $m_k=k$ обеспечивает сходимость (2) для любой последовательности вида (1).

Из этой теоремы вытекает также, что любая целая функция $f(z)$ с нулями (1) имеет вид

$$f(z)=e^{g(z)}W(z),$$

где $W(z)$ — канонич. произведение (2), а $g(z)$ — нек-рая целая функция (см. также *Адамара теорема* о целых функциях).

В. т. о бесконечном произведении обобщается на случай произвольной области $D\subset\mathbb{C}$: какова бы ни была последовательность точек $\{\alpha_k\}\subset D$, не имеющая предельных точек в D, существует голоморфная в D функция f, имеющая нули в точках α_k и только в них.

Утверждение теоремы в части, касающейся существования целой функции с произвольно заданными нулями, обобщается следующим образом на функции многих комплексных переменных: пусть каждой точке α комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, поставлена в соответствие нек-рая ее окрестность U_α и голоморфная в U_α функция f_α. При этом, если пересечение $U_\alpha\cap U_\beta$ окрестностей точек α, $\beta\in\mathbb{C}^n$ не пусто, то отношение $f_\alpha/f_\beta\neq 0$ в $U_\alpha\cap U_\beta$ есть голоморфная функция. При этих условиях существует целая функция f в $\mathbb{C}^n$ такая, что отношение f/f_α есть голоморфная функция в любой точке $\alpha\in\mathbb{C}^n$. Это утверждение известно как вторая теорема Кузена (см. также *Кузена проблемы*).

Лит.: [1] Weierstrass K., Math. Werke, Bd 2, B., 1895; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 2, 2 изд., М., 1968; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1—2, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

2) В. т. о приближении функций: для любой действительной непрерывной на отрезке $[a,\ b]$ функции $f(x)$ существует последовательность алгебраич. многочленов $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$, ..., равномерно сходящаяся на $[a,\ b]$ к функции $f(x)$; установлена К. Вейерштрассом [1].

Аналогичные результаты имеют место во всех пространствах $L_p[a, b]$. Усилением этой В. т. является *Джексона теорема*.

Эта теорема справедлива также для действительных непрерывных 2π-периодич. функций и тригонометрич. полиномов или, напр., для действительных функций, непрерывных на ограниченной замкнутой области m-мерного пространства, и многочленов от m переменных. Об обобщениях см. *Вейерштрасса — Стоуна теорема*. О приближении функций комплексного переменного многочленами см. [3].

Лит.: [1] Weierstrass K., «Sitzungsber. Acad. Berlin», 1885, S. 633—9, 789—805; [2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1—2, 2 изд., М., 1976. *Ю. Н. Субботин.*

3) В. т. о равномерно сходящихся рядах аналитических функций [1]: если члены ряда

$$s(z)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z), \qquad (*)$$

равномерно сходящегося внутри области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, являются аналитич. функциями в D, то его сумма $s(z)$ также является аналитич. функцией в D. Кроме того, ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(m)}(z),$$

полученные m-кратным почленным дифференцированием ряда (*) при любом m, также равномерно сходятся внутри D к производным $s^{(m)}(z)$ от суммы ряда (*). Эта теорема обобщается на ряды аналитич. функций многих комплексных переменных, равномерно сходящиеся внутри области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, причем ряды, составленные из частных производных любого порядка от членов ряда (*), сходятся равномерно к соответствующим частным производным от суммы ряда:

$$\frac{\partial^m s(z)}{\partial z_1^{m_1}\,\partial z_2^{m_2}\ldots\partial z_n^{m_n}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial^m u_k(z)}{\partial z_1^{m_1}\partial z_2^{m_2}\ldots\partial z_n^{m_n}},$$

$$z=(z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad m=m_1+m_2+\ldots+m_n.$$

Е. Д. Соломенцев.

4) В. т. о равномерной сходимости на границе области [1]: если члены ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$$

непрерывны в замкнутой ограниченной области $\overline{D}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и аналитичны в D, то из равномерной сходимости этого ряда на границе области D вытекает его равномерная сходимость в замкнутой области $\overline{D}$.

Это свойство рядов, составленных из аналитич. функций, остается справедливым и для аналитич. или гармонич. функций, заданных соответственно в областях комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, или евклидова пространства E^n, $n\geqslant 2$. Вообще, оно остается справедливым в любой ситуации, где применим *максимума модуля принцип*.

Лит.: [1] Weierstrass K., Abhandlungen aus der Funktionenlehre, B., 1860; Math. Werke, Bd 2, B., 1895; [2] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, 2 изд., пер. с англ., ч. 1, М., 1963, гл. 3; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 3, т. 2, М., 1968, гл. 7. *Е. Д. Соломенцев.*

5) В. т. подготовительная — теорема, полученная К. Вейерштрассом [1] и сформулированная им первоначально в 1860 как подготовительная лемма при доказательстве существования и аналитичности неявной функции комплексного переменного, определяемой уравнением $f(z, w)=0$, левая часть к-рого есть голоморфная функция двух комплексных переменных. Эта теорема обобщает на функции многих комплексных переменных следующее важное свойство голоморфных

функций одного комплексного переменного: если $f(z)$ — голоморфная функция от z в окрестности начала координат и $f(0)=0$, $f(z)\not\equiv 0$, то она представима в виде $f(z)=z^s g(z)$, где s — кратность нуля $f(z)$ в начале координат, $s\geqslant 1$, а голоморфная функция $g(z)$ отлична от нуля в нек-рой окрестности начала.

Формулировка подготовительной теоремы Вейерштрасса для функций n комплексных переменных, $n\geqslant 1$. Пусть

$$f(z)=f(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)$$

— голоморфная функция от $z=(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)$ в поликруге

$$U=\{z;\ |z_i|<a_i,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\},$$

причем

$$f(0)=0,\quad f(0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ z_n)\not\equiv 0.$$

Тогда в некотором поликруге

$$V=\{z;\ |z_i|<b_i\leqslant a_i,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$$

функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z)=[z_n^s+f_1(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n-1})\,z_n^{s-1}+\ldots$$
$$\ldots+f_s(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n-1})]\,g(z)$$

где s — кратность нуля функции

$$f(z_n)=f(0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ z_n)$$

в начале координат, $s\geqslant 1$; функции $f_j(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n-1})$ голоморфны в поликруге

$$V'=\{(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n-1});\ |z_i|<b_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\},$$
$$f_j(0,\ 0,\ \ldots,\ 0)=0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ s;$$

функция $g(z)$ голоморфна и не обращается в нуль в поликруге V. Функции $f_j(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n-1})$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ s$, и $g(z)$ определяются условиями теоремы однозначно.

Вместо начала координат можно принять, изменив соответственно формулировку, любую точку $a=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Из подготовительной В. т. вытекает, что при $n>1$, в отличие от случая одного комплексного переменного, во всякой окрестности любого нуля голоморфной функции находится бесконечное множество других ее нулей.

Подготовительная В. т. имеет чисто алгебраич. природу и может быть сформулирована для формальных степенных рядов. Пусть $\mathbb{C}[[z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n]]$ — кольцо формальных *степенных рядов* от переменных $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$ с коэффициентами из поля комплексных чисел $\mathbb{C}$; f — такой ряд из этого кольца, члены к-рого имеют низшую степень $s\geqslant 1$, причем существует член вида cz_n^s, $c\neq 0$. Тогда f можно представить в виде

$$f=(z_n^s+f_1z_n^{s-1}+\ldots+f_s)\,g,$$

где $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_s$ — ряды из кольца $\mathbb{C}[[z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n-1}]]$, свободные члены к-рых равны нулю, а g — ряд из $\mathbb{C}[[z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n]]$ со свободным членом, отличным от нуля. Формальные степенные ряды $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_s$ и g определяются по f однозначно.

Иногда подготовительной В. т. наз. следующее утверждение о делении: пусть ряд

$$f\in\mathbb{C}[[z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n]]$$

удовлетворяет только что указанным условиям, g — любой ряд из $\mathbb{C}[[z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n]]$. Тогда существуют такой ряд

$$h\in\mathbb{C}[[z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n]]$$

и такие ряды

$$a_j\in\mathbb{C}[[z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n-1}]],\quad a_j(0,\ 0,\ \ldots,\ 0)=0,$$
$$j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1,$$

для к-рых выполняется равенство

$$g = hf + a_0 + a_1 z_n + \ldots + a_{s-1} z_n^{s-1}.$$

Подготовительная В. т. верна также для колец формальных ограниченных рядов. Она дает способ индуктивного перехода, напр., от $\mathbb{C}[[z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}]]$ к $\mathbb{C}[[z_1, z_2, \ldots, z_n]]$. Таким образом удается установить нек-рые свойства колец $\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ и $\mathbb{C}[[z_1, z_2, \ldots, z_n]]$, напр., нётеровость и факториальность. Имеется обобщение этой теоремы для дифференцируемых функций (см. [6]).

Лит.: [1] Weierstrass K., Abhandlungen aus der Funktionenlehre, B., 1860; Math. Werke, Bd 2, B., 1895; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1—2, 2 изд., М., 1976; [3] Бохнер С., Мартин У., Функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1951, гл. 9; [4] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969, гл. 2; [5] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972, гл. 2; [6] Мальгранж Б., Идеалы дифференцируемых функций, пер. с англ., М., 1968. *Е. Д. Соломенцев.*

ВЕЙЕРШТРАССА ТОЧКА — точка на алгебраич. кривой (или римановой поверхности) X рода g, удовлетворяющая следующему условию: существует рациональная непостоянная функция на X, имеющая в этой точке полюс порядка не больше g и не имеющая особенностей в остальных точках X. На X может существовать только конечное число В. т., причем для g, равного 0 и 1, их нет совсем, а для $g \geqslant 2$ В. т. всегда существуют. Для римановых поверхностей эти результаты были получены К. Вейерштрассом (K. Weierstrass). Для алгебраич. кривых рода $g \geqslant 2$ всегда существует не менее $2g+2$ В. т., причем точно $2g+2$ их имеется только для гиперэллиптич. кривых. Верхняя граница для числа В. т. равна $(g-1)g(g+1)$. Наличие В. т. на алгебраич. кривой X рода $g \geqslant 2$ гарантирует существование морфизма степени не выше g кривой X на прямую P^1.

Лит.: [1] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.—Л., 1948; [2] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960. *В. Е. Воскресенский.*

ВЕЙЕРШТРАССА УСЛОВИЯ экстремума — необходимое и (отдельно) достаточное условия сильного экстремума в классическом вариационном исчислении. Предложены К. Вейерштрассом (K. Weierstrass, 1879).

Необходимое условие Вейерштрасса: для того чтобы функционал

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt, \quad L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

достигал локального сильного минимума на экстремали $x_0(t)$, необходимо, чтобы для всех t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнялось неравенство

$$\mathcal{E}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \xi) \geqslant 0,$$

где $\mathcal{E}$ — *Вейерштрасса $\mathcal{E}$-функция*. Это условие может быть выражено через функцию

$$\prod(t, x, p, u) = (p, u) - L(t, x, u)$$

(см. *Понтрягина принцип максимума*). В. у. ($\mathcal{E} \geqslant 0$ на экстремали $x_0(t)$) эквивалентно тому, что функция

$$\prod(t, x_0(t), p_0(t), u), \text{ где } p_0(t) = L_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)),$$

достигает максимума по u при $u = \dot{x}_0(t)$. Тем самым необходимое В. у. оказывается частным случаем принципа максимума Понтрягина.

Достаточное условие Вейерштрасса: для того чтобы функционал

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt, \quad L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

достигал локального сильного минимума на вектор-функции $x_0(t)$ достаточно, чтобы в окрестности G кривой $x_0(t)$ нашлась вектор-функция $U(t, x)$ наклона

поля (геодезич. наклона) (см. *Гильберта инвариантный интеграл*), для к-рой

$$\dot{x}_0(t) = U(t, x_0(t))$$

и

$$\mathcal{E}(t, x, U(t, x), \xi) \geqslant 0$$

для всех $(t, x) \in G$ и любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.—Л., 1950; [2] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [3] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969.

В. М. Тихомиров.

ВЕЙЕРШТРАССА ФОРМУЛА для приращения функционала — формула классич. вариационного исчисления, задающая значения функционала

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt, \quad L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

в виде криволинейного интеграла от *Вейерштрасса $\mathcal{E}$-функции*. Пусть вектор-функция $x_0(t)$ является *экстремалью* функционала $J(x)$ и при этом она включена в поле экстремалей с вектор-функцией наклона поля $U(t, x)$ и действием $S(t, x)$, соответствующим этому полю (см. *Гильберта инвариантный интеграл*). Для любой кривой $\gamma = x(t)$, лежащей в области, покрытой полем, имеет место В. ф.:

$$J(x) = S(t_1, x(t_1)) - S(t_0, x(t_0)) + \int_\gamma \mathcal{E}(t, x, U(t, x), \dot{x})\, dt. \qquad (1)$$

В частности, если граничные условия кривых $\gamma = x(t)$ и $\gamma_0 = x_0(t)$ совпадают, т. е. если $x(t_i) = x_0(t_i)$, $i = 0, 1$, то получается В. ф. для приращения функционала:

$$\Delta J = J(x) - J(x_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, x(t), U(t, x(t)), \dot{x}(t))\, dt. \qquad (2)$$

Иногда формулы (1) и (2) наз. основной теоремой Вейерштрасса.

Лит.: [1] Carathcodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, B.—Lpz., 1935; [2] Янг Л., Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления, пер. с англ., М., 1974; [3] Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955.

В. М. Тихомиров.

ВЕЙЕРШТРАССА $\mathcal{E}$-ФУНКЦИЯ в классическом вариационном исчислении — функция, выделяющая главную часть приращения функционала при варьировании экстремали при помощи локальной (игольчатой) вариации с заданным значением ее производной в фиксированной точке экстремали. Для функционала

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt, \quad L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

$\mathcal{E}$-функция имеет вид

$$\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, x') = L(t, x, x') - L(t, x, \dot{x}) - (x' - \dot{x}, L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})). \qquad (1)$$

Если ввести функцию

$$\Pi(t, x, p, x') = (p, x') - L(t, x, x')$$

(см. *Лежандра преобразование*, *Понтрягина принцип максимума*), то $\mathcal{E}$-функция принимает вид

$$\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, x') = \Pi(t, x, p, \dot{x}) - \Pi(t, x, p, x'),$$

где $p = L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})$. Общая конструкция, приводящая к функциям, аналогичным $\mathcal{E}$-функции (1), состоит в следующем. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая или выпуклая функция, заданная в банаховом пространстве

X, и X^* — сопряженное пространство. Если функция $\Pi : X^* \times X \to R$ определяется равенством

$$\Pi(x^*, x') = \langle x^*, x' \rangle - f'(x),$$

где x^* — производная $f'(x)$ функции f в точке x (или элемент субдифференциала, если f выпукла), то функция

$$\mathscr{E}(x, x', x^*) = \Pi(x^*, x) - \Pi(x^*, x')$$

есть $\mathscr{E}$-функция, построенная по f. В случае, если f дифференцируема,

$$\mathscr{E}(x, x') = f(x') - f(x) - \langle x' - x, f'(x) \rangle, \qquad (2)$$

т. е. $\mathscr{E}$-функция есть разность в точке x' между функцией f и линейной функцией, касательной к f в x. Сравнение формул (1) и (2) показывает, что $\mathscr{E}$-функция в классич. вариационном исчислении получается из конструкции (2) относительно переменных, связанных с производными, а переменные t, x играют роль параметров.

Для случая функционала

$$\int_T L(t, x, \dot{x})\, dt, \quad t = (t_1, \ldots, t_m), \quad T \subset \mathbb{R}^m,$$
$$L : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad \dot{x} = \left(\frac{\partial x}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial t_m} \right)$$

многомерной вариационной задачи $\mathscr{E}$-функция имеет вид

$$\mathscr{E}(t, x, z, z') = L(t, x, z') - L(t, x, z) - (z' - z, L_z(t, x, z)).$$

Для *Лагранжа задачи* с ограничениями $\varphi_i(t, x, \dot{x}) = 0$ и множителями Лагранжа $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, s$, $\mathscr{E}$-функция имеет вид (1), где L заменяется на

$$\tilde{L} = L + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \varphi_i.$$

$\mathscr{E}$-функция была впервые введена К. Вейерштрассом в 1879 (см. [1]) и лежит в основе теории вариационного исчисления. В терминах $\mathscr{E}$-функции формулируются необходимое и (отдельно) достаточное условия экстремума (см. *Вейерштрасса условия*), через $\mathscr{E}$-функции выражается в виде конечного интеграла приращение функционала J на экстремали (см. *Вейерштрасса формула* для приращения функционала).

Особенно важную роль в вариационном исчислении играют гладкие функционалы, у к-рых в нек-рой области параметров $\mathscr{E}(\cdot, \dot{x}, x') \geqslant 0$ для всех $\dot{x}$, x', или, сильнее, если $\mathscr{E}(\cdot, \dot{x}, x') > 0$ для всех $\dot{x} \neq x'$. Они наз. квазирегулярными (соответственно регулярными, или эллиптическими). Для них всегда выполнены *Лежандра условие* и необходимое *Вейерштрасса условие*, а также справедливы теоремы существования и регулярности [7].

Лит.: [1] Weierstrass K., Vorlesungen über Variationsrechnung (Math. Werke, Bd 7), Lpz., 1927; [2] Caratheodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, B.—Lpz., 1935; [3] Bolza O., Vorlesungen über Variationsrechnung, Lpz., 1949; [4] Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955; [5] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969; [6] Hestenes M. R., Calculus of variations and optimal control theory, N. Y.— L., 1966; [7] Проблемы Гильберта, М., 1969; [8] Блисс Г., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950.

В. М. Тихомиров.

ВЕЙЕРШТРАССА $\wp$-ФУНКЦИЯ — см. *Вейерштрасса эллиптические функции.*

ВЕЙЕРШТРАССА ζ-ФУНКЦИЯ — см. *Вейерштрасса эллиптические функции.*

ВЕЙЕРШТРАССА σ-ФУНКЦИЯ — см. *Вейерштрасса эллиптические функции.*

ВЕЙЕРШТРАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — функции, положенные К. Вейерштрассом в основу его общей теории *эллиптических функций*, излагавшейся им с 1862 на лекциях в Берлинском университете (см.

[1], [2]). В отличие от более раннего построения теории эллиптич. функций, связанного с именами А. Лежандра (A. Legendre), Н. Абеля (N. Abel) и К. Якоби (C. Jacobi), в основу к-рого были положены эллиптич. функции 2-го порядка, имеющие в параллелограмме периодов два простых полюса, основная В. э. ф. имеет в параллелограмме периодов один полюс 2-го порядка. В теоретич. отношении теория Вейерштрасса более проста, так как исходная в этой теории функция $\wp(z)$ и ее производная служат образующими алгебраич. поля эллиптич. функций с заданными примитивными периодами.

Пэ-функция ($\wp$-функция) Вейерштрасса $\wp(z)$ ($\wp$ — знак Вейерштрасса, стилизованная буква «пэ») для заданных примитивных периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$, $\mathrm{Im}(\omega_3/\omega_1)>0$, определяется рядом

$$\wp(z)=\wp(z;\ 2\omega_1,\ 2\omega_3)=$$
$$=\frac{1}{z^2}+\sum{}'_{m_1,\ m_3=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{(z-2\Omega_{m_1,\ m_3})^2}-\frac{1}{(2\Omega_{m_1,\ m_3})^2}\right]=$$
$$=\frac{1}{z^2}+c_2z^2+c_4z^4+\ldots, \qquad (1)$$

где $2\Omega_{m_1,\ m_3}=2m_1\omega_1+2m_3\omega_3$ и целые числа m_1, m_3 пробегают все значения, кроме пары $m_1=m_3=0$. Функция $\wp(z)$ есть четная эллиптич. функция порядка 2, имеющая в каждом параллелограмме периодов единственный полюс 2-го порядка с нулевым вычетом. Ее производная $\wp'(z)$ есть нечетная эллиптич. функция порядка 3 с теми же примитивными периодами; $\wp'(z)$ имеет простые нули в точках, конгруэнтных $2\omega_1$, $2\omega_2=2\omega_1+2\omega_3$, $2\omega_3$. Наиболее важное свойство функции $\wp(z)$ состоит в том, что любая эллиптич. функция с данными примитивными периодами $2\omega_1$, $2\omega_3$ может быть представлена в виде рациональной функции от $\wp(z)$ и $\wp'(z)$, т. е. $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ являются образующими алгебраич. поля эллиптич. функций с данными периодами. Среди одноперио дических тригонометрич. функций аналогом функции $\wp(z)$ служит $1/\sin^2 z$.

Функция $\wp(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\wp'^2(z)=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3\equiv$$
$$\equiv 4[\wp(z)-e_1][\wp(z)-e_2][\wp(z)-e_3],\quad e_1+e_2+e_3=0, \qquad (2)$$

в к-ром *модулярные формы*

$$g_2=20c_2=60\sum{}'_{m_1,\ m_3=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2\Omega_{m_1,\ m_3})^4},$$
$$g_3=28c_4=140\sum{}'_{m_1,\ m_3=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2\Omega_{m_1,\ m_3})^6}$$

наз. относительными инвариантами, а величины $e_1=\wp(2\omega_1)$, $e_2=\wp(2\omega_2)$, $e_3=\wp(2\omega_3)$ — иррациональными инвариантами функции $\wp(z)$. Абсолютным инвариантом функции $\wp(z)$ наз. всякая рациональная функция от $j=g_2^3/g_3^2$ или от $J=g_2^3/\Delta$, где $\Delta=g_2^3-27g_3^2$ есть дискриминант. Имеется в виду инвариантность относительно модулярных преобразований (см. *Модулярная функция*). В приложениях обычно g_2 и g_3 — действительные; если при этом $\Delta>0$, то e_1, e_2, e_3 — также все действительные. Уравнение (2) показывает, что $\wp(z)$ может быть определена как обращение *эллиптического интеграла* I рода в нормальной форме Вейерштрасса:

$$u=-\int_{(z,\ w)}^{\infty}\frac{dz}{w},\quad w^2=4z^3-g_2z-g_3.$$

Функция $\wp(z)$ отображает взаимно однозначно и конформно параллелограмм периодов на канонически разрезанную двулистную компактную риманову поверхность F с точками ветвления e_1, e_2, e_3, ∞ рода 1; поверхность F иногда наз. эллиптическим обра-

з о м. На главной накрывающей поверхности F указанный интеграл I рода однозначен и является униформизирующей переменной для F.

Эллиптич. интеграл II рода поля эллиптич. функций с данными периодами $2\omega_1$, $2\omega_3$ при этой униформизации переходит в д з е т а-ф у н к ц и ю (ζ-ф у н к ц и ю) В е й е р ш т р а с с а $\zeta(z)$, определяемую рядом

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum\nolimits'_{m_1,\ m_3=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{z-2\Omega_{m_1,\ m_3}}+\frac{1}{2\Omega_{m_1,\ m_3}}+\right.$$
$$\left.+\frac{z}{(2\Omega_{m_1,\ m_3})^2}\right]. \qquad (3)$$

Функция $\zeta(z)$ — нечетная мероморфная функция, связанная с $\wp(z)$ соотношением $\zeta'(z)=-\wp(z)$; она не является периодической и при добавлении периодов преобразуется по закону $\zeta(z\pm 2\omega_i)=\zeta(z)\pm 2\eta_i$, где $\eta_i=\zeta(\omega_i)$. При этом между ω_1, ω_3, η_1, η_3 имеет место с о о т н о ш е н и е Л е ж а н д р а

$$\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=\frac{\pi i}{2},$$

равносильное соотношению между полными эллиптич. интегралами:

$$EK'+E'K-KK'=\frac{\pi}{2}.$$

Произвольная эллиптич. функция $f(z)$ с данными периодами $2\omega_1$, $2\omega_3$ выражается через $\zeta(z)$ по ф о р м у л е Э р м и т а:

$$f(z)=C+\sum\nolimits_{k=1}^{s}\left[B_1^k\,\zeta(z-b_k)-B_2^k\,\zeta'(z-b_k)+\right.$$
$$+\frac{B_3^k}{2!}\,\zeta''(z-b_k)-\ldots+$$
$$\left.+(-1)^{\nu_k-1}\frac{B_{\nu_k}^k}{(\nu_k-1)!}\,\zeta^{(\nu_k-1)}(z-b_k)\right], \qquad (4)$$

где C — постоянная, b_1, b_2, …, b_s — полная система полюсов функции $f(z)$, числа B_1^k, B_2^k, …, $B_{\nu_k}^k$ — коэффициенты главной части разложения Лорана функции $f(z)$ в окрестности полюса b_k. Разложение (4) есть аналог разложения произвольной рациональной функции на простейшие дроби. Среди тригонометрич. функций аналогом функции $\zeta(z)$ является ctg z.

С и г м а-ф у н к ц и я (σ-ф у н к ц и я) В е й е р ш т р а с с а $\sigma(z)$ определяется как бесконечное произведение

$$\sigma(z)=$$
$$=z\prod\nolimits'_{m_1,\ m_3=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{2\Omega_{m_1,\ m_3}}\right)e^{\frac{z}{2\Omega_{m_1,\ m_3}}+\frac{z^2}{8\Omega^2_{m_1,\ m_3}}}.$$

Функция $\sigma(z)$ есть нечетная целая функция с нулями $2\Omega_{m_1,\ m_3}$, связанная с функциями $\wp(z)$ и $\zeta(z)$ соотношениями:

$$\frac{d^2\ln\sigma(z)}{dz^2}=-\wp(z),\qquad \frac{d\ln\sigma(z)}{dz}=\zeta(z);$$

она не является двоякопериодической; имеют место тождества:

$$\sigma(z+2\Omega_{mn})=(-1)^{m+n+mn}\,\sigma(z)\,e^{H_{mn}(z+\Omega_{mn})},$$

где

$$H_{mn}=2m\eta_1+2n\eta_3,\qquad \eta_i=\zeta(\omega_i)=\frac{\sigma'(\omega_i)}{\sigma(\omega_i)}.$$

Произвольная эллиптич. функция $f(z)$ с периодами $2\omega_1$, $2\omega_3$ выражается через $\sigma(z)$ в виде:

$$f(z)=C\,\frac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\ldots\sigma(z-a_s)}{\sigma(z-b_1)\,\sigma(z-b_2)\ldots\sigma(z-b_s)},$$

где C — постоянная; a_1, a_2, …, a_s, b_1, b_2, …, b_s — нулевая полная система нулей и полюсов функции

$f(z)$. Среди тригонометрич. функций аналогом функции $\sigma(z)$ является $\sin z$.

В теории Вейерштрасса имеют также значение с и г м а-ф у н к ц и и с и н д е к с а м и:

$$\sigma_i(z) = \frac{\sigma(z+\omega_i)}{\sigma(\omega_i)} e^{-\eta_i z}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Функции $\sigma(z)$, $\sigma_1(z)$, $\sigma_2(z)$, $\sigma_3(z)$ выражаются через *тета-функции* $\vartheta_0(v)$, $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ (см. *Якоби эллиптические функции*), а функция $\wp(z)$ просто выражается через $\sigma(z)$, $\sigma_1(z)$, $\sigma_2(z)$, $\sigma_3(z)$, что составляет вычислительный базис функций Вейерштрасса. Можно получить и непосредственное выражение В. э. ф. через эллиптич. функции Якоби, напр. в виде:

$$\wp(z+\omega_3) - e_1 = (e_3 - e_1)\,\mathrm{dn}^2\left(z\sqrt{e_1 - e_3}\right),$$
$$\wp(z+\omega_3) - e_2 = (e_3 - e_2)\,\mathrm{cn}^2\left(z\sqrt{e_1 - e_3}\right),$$
$$\wp(z+\omega_3) - e_3 = (e_2 - e_3)\,\mathrm{sn}^2\left(z\sqrt{e_1 - e_3}\right).$$

В прикладных вопросах обычно заданы относительные инварианты g_2, g_3. При этом для вычисления примитивных периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$ используется абсолютный инвариант $J = g_2^3/\Delta$, к-рый является модулярной функцией от отношения периодов $\tau = \omega_3/\omega_1$ (см. также *Модулярная функция*).

Лит.: [1] Weierstrass K., Mathematische Werke, Bd 1—2, B., 1894—95; [2] Schwarz H. A., Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, 2 Aufl., B., 1893; [3] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, М., 1968, ч. 2; [4] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963, гл. 20; [5] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970. *Е. Д. Соломенцев.*

ВЕЙЕРШТРАССА — СТОУНА ТЕОРЕМА — широкое обобщение классической *Вейерштрасса теоремы* о приближении функций, принадлежащее М. Стоуну (M. Stone, 1935). Пусть $C(X)$ — кольцо непрерывных функций на бикомпакте X с топологией равномерной сходимости, порожденной нормой

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|, \qquad f \in C(X),$$

и пусть $C_0 \subseteq C(X)$ есть подкольцо, содержащее все константы и разделяющее все точки из X, т. е. для любых двух различных точек $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ существует функция $f \in C_0$, для к-рой $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда $[C_0] = C(X)$, т. е. всякая непрерывная функция на X есть предел равномерно сходящейся последовательности функций из C_0. *В. И. Пономарев.*

ВЕЙЕРШТРАССА — ЭРДМАНА УГЛОВЫЕ УСЛОВИЯ — дополнительные к *Эйлера уравнению* необходимые условия экстремума, задаваемые в точках, где экстремаль имеет излом. Пусть

$$J(x) = \int L(t,\ x,\ \dot{x})\,dt$$

— функционал классического вариационного исчисления, а *экстремаль* $x_0(t)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки τ за исключением самой точки τ, где $x_0(t)$ имеет разрыв. Тогда для того чтобы $x_0(t)$ давала хотя бы слабый локальный экстремум функционалу $J(x)$ необходимо, чтобы в угловой точке τ выполнялись равенства

$$p(\tau - 0) = p(\tau + 0),$$
$$H(\tau - 0) = H(\tau + 0),$$

где

$$p(t) = \frac{\partial L(t,\ x_0(t),\ \dot{x}_0(t))}{\partial \dot{x}},$$

а

$$H(t) = (\dot{x}_0(t),\ p(t)) - L(t,\ x_0(t),\ \dot{x}_0(t)).$$

Эти равенства и наз. у г л о в ы м и у с л о в и я м и

Вейерштрасса — Эрдмана (К. Вейерштрасс, К. Weierstrass, 1865; Г. Эрдман, 1877, см. [1]).

В.—Э. у. у. означают непрерывность в угловой точке экстремали канонич. переменных и гамильтониана; в классич. механике они означают непрерывность в угловой точке импульсов и энергии.

В регулярных задачах, когда L — строго выпуклая по $\dot{x}$ функция, экстремали не могут иметь угловых точек. Угловые точки появляются, когда $L(t, x, \dot{x})$, а следовательно, и *Вейерштрасса $\mathcal{E}$-функция* содержат отрезки по $\dot{x}$. В случае, когда рассматривается *Лагранжа задача* с ограничениями $\varphi_i(t, x, \dot{x})=0$ и *Лагранжа множителями* $\lambda_i(t)$, L в В.—Э. у. у. заменяется на $\tilde{L}=L+\sum_i \lambda_i \varphi_i$.

Лит.: [1] Erdmann G., «J. für Math.», 1877, Bd 82, S. 21—30; [2] Bolza O., Vorlesungen über Variationsrechnung, Lpz., 1949, S. 367; [3] Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955, с. 17—18. *В. М. Тихомиров.*

ВЕЙЛЯ ГРУППА — 1) В. г. симметрий *корневой системы*. В зависимости от конкретной реализации корневой системы рассматривают и различные В. г.; так возникают В. г. полупростой расщепляемой алгебры Ли, В. г. симметрич. пространства, В. г. алгебраич. группы.

Пусть G — связная аффинная алгебраич. группа, определенная над алгебраически замкнутым полем k. В. г. группы G относительно тора $T \subset G$ наз. факторгруппа

$$W(T, G)=N_G(T)/Z_G(T),$$

рассматриваемая как группа автоморфизмов тора T, индуцированных сопряжениями T с помощью $N_G(T)$. Здесь $N_G(T)$ — нормализатор, а $Z_G(T)$ — централизатор подгруппы T в G. Группа $W(T, G)$ конечна. Если T_0 — максимальный тор, то $W(T_0 G)$ наз. группой Вейля $W(G)$ алгебраической группы G. Это определение (с точностью до изоморфизма) не зависит от выбора максимального тора T_0. Действие с помощью сопряжений группы $N_G(T_0)$ на множестве B^{T_0} *Бореля подгрупп* в G, содержащих T_0, индуцирует просто транзитивное действие $W(T_0, G)$ на B^{T_0}. Действие T на G сопряжениями индуцирует присоединенное действие T на алгебре Ли $\mathfrak{G}$ группы G. Пусть $\Phi(T, G)$ — множество ненулевых весов весового разложения $\mathfrak{G}$ относительно этого действия, т. е. $\Phi(T, G)$ — корневая система $\mathfrak{G}$ относительно T (см. *Вес представления*). $\Phi(T, G)$ является подмножеством в группе $X(T)$ рациональных характеров тора T, причем $\Phi(T, G)$ инвариантно относительно действия $W(T, G)$ на $X(T)$.

Пусть G — редуктивная группа, $Z(G)^0$ — связная компонента единицы ее центра и T_0 — максимальный тор. Векторное пространство

$$X(T_0/Z(G)^0)_{\mathbb{Q}}=X(T_0/Z(G)^0)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$$

канонически отождествляется с подпространством в векторном пространстве

$$X(T_0)_{\mathbb{Q}}=X(T_0)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}.$$

Множество $\Phi(T_0, G)$ (как подмножество в $X(T_0)_{\mathbb{Q}}$) является приведенной системой корней в $X(T_0/Z(G)^0)_{\mathbb{Q}}$, причем естественное действие $W(T_0, G)$ на $X(T_0)_{\mathbb{Q}}$ определяет изоморфизм $W(T_0, G)$ с В. г. корневой системы $\Phi(T_0, G)$. Таким образом, $W(T_0, G)$ обладает всеми свойствами В. г. приведенной корневой системы, напр. она порождается *отражениями*.

Как обобщение этой ситуации возникает В. г. системы Титса (ее точное определение см. *Титса система*).

Группа Вейля W конечномерной редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ над алгебра-

ически замкнутым полем нулевой характеристики определяется как В. г. ее присоединенной группы. Присоединенное действие W в подалгебре Картана $\mathfrak{P}$ алгебры $\mathfrak{G}$ является точным представлением W; группу W часто отождествляют с образом этого представления, рассматривая ее как соответствующую линейную группу в $\mathfrak{P}$, порожденную отражениями. Понятие «В. г.» впервые появилось в работе Г. Вейля [1] для частного случая рассматриваемых здесь алгебр — для конечномерной полупростой алгебры Ли над полем комплексных чисел. В. г. может быть определена и для любой расщепляемой полупростой конечномерной алгебры Ли как В. г. ее корневой системы.

Для аффинной алгебраич. группы G, определенной над алгебраически незамкнутым полем, может быть определена относительная В. г. А именно, если T — максимальный разложимый над k тор группы G, то факторгруппа $N_G(T)/Z_G(T)$ (нормализатора тора T по его централизатору в G), рассматриваемая как группа автоморфизмов T, индуцированных сопряжениями T с помощью элементов из $N_G(T)$, наз. относительной группой Вейля группы G.

О В. г. симметрического пространства см. *Симметрическое пространство*. В. г. действительной связной некомпактной полупростой алгебраич. группы совпадает с В. г. соответствующего симметрического пространства. Об аффинной В. г. см. *Корневая система*.

Лит.: [1] Weyl H., «Math. Z.», 1925, Bd 23, S. 271—309; 1925, Bd 24, S. 328—95; [2] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [3] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [4] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., М., 1972; [5] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111, № 2, с. 3—31; [6] Брюа Ф., Титс Ж., «Математика», 1968, т. 12, № 5, с. 19—33; [7] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964.

В. Л. Попов.

2) В. г. компактной связной группы Ли G — факторгруппа $W=N/T$, где N — нормализатор в G нек-рого максимального тора T группы G. В. г. изоморфна нек-рой конечной группе линейных преобразований алгебры Ли t группы T (изоморфизм осуществляется с помощью присоединенного представления N в t) и может быть охарактеризована с помощью корневой системы Δ алгебры Ли g группы G (относительно t), а именно: если $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — система простых корней алгебры, являющихся линейными формами на действительном векторном пространстве t, то В. г. порождается отражениями в гиперплоскостях $\alpha_i(x)=0$. Таким образом, W является группой Вейля системы Δ (как линейная группа в t). W просто транзитивно действует на множестве всех *камер* системы Δ (называемых в данном случае камерами Вейля). Следует отметить, что N не является, вообще говоря, полупрямым произведением W и T; все случаи, когда это так, изучены. В. г. группы G изоморфна В. г. соответствующей комплексной полупростой алгебраич. группы $G_{\mathbb{C}}$ (см. *Комплексификация группы Ли*).

А. С. Феденко.

ВЕЙЛЯ КОГОМОЛОГИИ — когомологии алгебраич. многообразий с коэффициентами в поле нулевой характеристики, обладающие формальными свойствами, необходимыми для получения *Лефшеца формулы* для числа неподвижных точек. Необходимость такой теории была высказана А. Вейлем [1], показавшим, что рациональность *дзета-функций* многообразия и L-функций многообразия над конечным полем следует из формулы Лефшеца, а остальные гипотезы о ζ-функции естественно формулируются в когомологических терминах. Пусть многообразие X есть связная гладкая проективная схема над фиксированным алгебраически замкнутым полем k и пусть K — некоторое поле характеристики 0. Тогда когомологиями Вейля с полем коэффициентов K называется контравари-

антный функтор $X \to H^*(X)$ из категории многообразий в категорию конечномерных градуированных антикоммутативных K-алгебр, удовлетворяющий следующим условиям:

1) Если $n = \dim X$, то $H^{2n}(X)$ изоморфно K, и отображение

$$H^i(X) \times H^{2n-i}(X) \longrightarrow H^{2n}(X),$$

определенное умножением в $H^*(X)$, невырождено при всех i;

2) $H^*(X) \otimes_K H^*(Y) \to H^*(X \times Y)$ (формула Кюннета);

3) Отображение циклов. Существует функториальный гомоморфизм γ_X группы $C^p(X)$ алгебраич. циклов X коразмерности p в $H^{2p}(X)$, переводящий прямое произведение циклов в тензорное произведение, и нетривиальный в том смысле, что (для точки P) γ_P превращается в канонич. вложение $\mathbb{Z}$ в K.

$$b_i(X) = \dim_K H^i(X)$$

наз. i-м числом Бетти многообразия X.

Примеры. Если $k = \mathbb{C}$, то классические когомологии комплексных многообразий с коэффициентами в $\mathbb{C}$ являются В. к. Если l — простое число, отличное от характеристики поля k, то этальные l-адические когомологии

$$X \mapsto [\lim_{\nu} H^*_{\text{et}}(X, \mathbb{Z}/l^\nu \mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{Z}_l} Q_l$$

являются В. к. с коэффициентами в поле Q_l. Для В.к. верна формула Лефшеца

$$\langle u \cdot \Delta \rangle = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{Tr}(u_i),$$

где $\langle u \cdot \Delta \rangle$ — индекс пересечения в $X \times X$ графика Γ морфизма u с диагональю $\Delta \subset X \times X$, интерпретируемый также как число неподвижных точек эндоморфизма u, а $\operatorname{Tr}(u_i)$ — след эндоморфизма u_i, являющегося ограничением u на $H^i(X)$. Более того, эта формула верна также для соответствий, т. е. элементов $u \in H^{2n}(X \times X)$.

Лит.: [1] Weil A., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1949, v. 55, p. 497—508; [2] Dix exposes sur la cohomologie des schemas, P., 1968, p. 359—86.

В. И. Данилов.

ВЕЙЛЯ КРИТЕРИЙ — основной критерий, с помощью к-рого для бесконечной последовательности (x_n) любых действительных чисел x_n решается вопрос о ее равномерном распределении по mod 1, т. е. устанавливается существование предела:

$$\lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n \leqslant N,\ \alpha \leqslant \{x_n\} < \beta} \frac{1}{N} \right) = \beta - \alpha,$$

где $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, $\{x_n\}$ — дробная часть x_n. По В. к. последовательность $\{x_n\}$ тогда и только тогда равномерно распределена по mod 1, когда

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp(2\pi i m x_n) = 0$$

для всех целых $m \neq 0$. В. к. доказан Г. Вейлем (H. Weyl, 1916). См. *Вейля метод.*

Лит.: [1] Касселс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1961.

Б. М. Бредихин.

ВЕЙЛЯ МЕТОД в теории чисел — метод для получения нетривиальных оценок тригонометрич. сумм вида

$$S(f) = \sum_{1 \leqslant x \leqslant P} e^{2\pi i f(x)}, \qquad (1)$$

где

$$f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x,$$

а $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ — любые действительные числа. В. м. был разработан Г. Вейлем [1] для установления критериев равномерного распределения (см. *Вейля критерий*).

Сущность В. м. заключается в следующем. Сумма (1) возвышается в степень $\rho_0 = 2^{n-1}$ путем последова-

тельных возвышений в квадрат с целью понижения степени многочлена $f(x)$. Напр., на первом шаге

$$S^2(f)=\sum_{\lambda_1\neq 0}\sum_x e^{2\pi i\,(f(x+\lambda_1)-f(x))}+O(P),$$

где суммирования производятся по интервалам длины $\ll P$,

$$f(x+\lambda_1)-f(x)=n\alpha_n\lambda_1 x^{n-1}+\dots$$

является многочленом степени $n-1$ относительно x (символы $O(P)$, $\ll P$ обозначают величины порядка P). На $(n-1)$-м шаге приходят к внутренней сумме

$$S(\alpha)=\sum_{x=a+1}^{a+P_1} e^{2\pi i\alpha x}, \qquad (2)$$

где $P_1\leqslant P$, $\alpha=n!\,\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{n-1}\alpha_n$, $\lambda_i\neq 0$. Суммы вида (2) оцениваются с помощью неравенства:

$$|S(\alpha)|\leqslant\min\left(P_1,\ \frac{1}{|\sin\pi\alpha|}\right).$$

В результате получается оценка:

$$|S(f)|^{\rho_0}\leqslant P^{\rho_0-1}+$$

$$+P^{\rho_0-n+\varepsilon}\sum_{0<y\leqslant P^{n-1}}\min\left(P_1,\ \frac{1}{|\sin\pi y\alpha_n|}\right). \qquad (3)$$

Из неравенства (3) выводятся различные оценки суммы (1) в случае, когда $\frac{1}{|\sin\pi y\alpha_n|}$ будет величиной малой по сравнению с P. Эти оценки зависят от точности, с к-рой коэффициент α_n многочлена $f(x)$ аппроксимируется рациональными дробями.

Пример. Пусть

$$\left|\alpha_n-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^2}, \qquad (a,\ q)=1.$$

Тогда имеет место неравенство

$$|S(f)|\ll P^{1+\varepsilon}q^{\varepsilon}\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{q}+\frac{q}{P^n}\right)^{\rho_0}.$$

В частности, если

$$P\leqslant q\leqslant P^{n-1},$$

то

$$|S(f)|\ll P^{1-\rho_0+\varepsilon}.$$

В. м. позволил решить в первом приближении ряд важных проблем теории чисел. С помощью оценки (3) и ее следствий было исследовано *распределение дробных долей* многочлена $f(x)$. Решение *Варинга проблемы*, данное в 1919 Г. Х. Харди (G. H. Hardy) и Дж. И. Литлвудом (J. E. Littlewood), опиралось на оценки сумм (1) с помощью В. м. При этом им удалось оценить значения $r=r(k)$, для к-рых уравнение

$$N=x_1^k+\dots+x_r^k$$

($N>0$ — целое, x_i — целые) разрешимо или даже имеет асимптотику для числа решений. Обобщение оценки (3) на случай функций $f(x)$, не являющихся многочленами, но в известном смысле близких к ним, привело к улучшению нек-рых теорем в теории *распределения простых чисел* (оценка разности соседних простых чисел, оценка остаточного члена в асимптотич. формуле для числа $\pi(N)$ простых чисел, не превосходящих N).

Недостаточная сила оценок, получаемых с помощью В. м., объясняется высокой степенью ρ_0, в к-рую возвышается сумма $S(f)$. Нек-рое усовершенствование оценок сумм (1) дал И. ван дер Корпут (J. van der Corput). С помощью *Виноградова метода* получается весьма точная оценка сверху для интеграла

$$\int_0^1\dots\int_0^1|S(f)|^{2b}d\alpha_n\dots d\alpha_1$$

уже при $b\geqslant cn^2$ ($c>0$ — константа, $n\geqslant 2$). Из этой

оценки (см. *Виноградова теорема* о среднем) выводятся принципиально новые оценки сумм Вейля (1) (с понижающим множителем $P^{-\rho}$, $\rho = c_1 n^2 \ln n$, $c_1 > 0$ — константа), недосягаемые для В. м.

Лит.: [1] Weyl H., «Math. Ann.», 1916, Bd 77, S. 313—52; [2] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971.

Б. М. Бредихин.

ВЕЙЛЯ ОБЛАСТЬ — частный случай *аналитического полиэдра*. Ограниченная область D n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ наз. областью Вейля, если существует $N \geqslant n$ таких функций $f_i(z)$, $i=1, 2, \ldots, N$, голоморфных в фиксированной окрестности $U(\overline{D})$ замыкания $\overline{D}$, что:

1) $D = [z : |f_i(z)| < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N; \quad z \in U(\overline{D})]$;

2) грани В. о. D, т. е. множества

$$\sigma_i = \{z \in D; \quad |f_i(z)| = 1, \quad |f_j(z)| \leqslant 1, \quad j \neq i\},$$

имеют размерность $2n-1$;

3) ребра В. о. D, т. е. пересечения любых k $(2 \leqslant k \leqslant n)$ различных граней, имеют размерность $\leqslant 2n-k$. Совокупность всех n-мерных ребер В. о. наз. остовом В. о. Для В. о. справедливо интегральное *Бергмана — Вейля представление*. Названа по имени А. Вейля, к-рому принадлежат первые важные результаты для этой области [1].

Лит.: [1] Weil A., «Math. Ann.», 1935, Bd 111, S. 178—82; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1—2, 2 изд., М., 1976; [3] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

М. Ширинбеков.

ВЕЙЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — класс W^p-пп комплекснозначных почти периодических функций $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, суммируемых со степенью p в каждом конечном интервале действительной оси и обладающих, при нек-ром $l = l(\varepsilon, f)$, относительно плотным множеством S_l^p, *ε-почти периодов*; определены Г. Вейлем [1]. Класс W^p-пп является расширением класса *Степанова почти периодических функций*.

В. п. п. ф. связаны с метрикой

$$W^p(f, g) = \left\{ \lim_{l \to \infty} \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{1}{2l} \int_{x-l}^{x+l} |f(t) - g(t)|^p dt \right\}^{1/p}.$$

Если $\varphi(x)$ нулевая функция в метрике W^p, т. е.

$$\lim_{l \to \infty} \sup_{x} \frac{1}{2l} \int_{x-l}^{x+l} |\varphi(t)|^p \, dt = 0,$$

а $f(x)$ — почти периодическая функция Степанова, то

$$f(x) + \varphi(x) \qquad (*)$$

есть В. п. п. ф. Существуют (см. [3]) В. п. п. ф., не представимые в виде (*).

Лит.: [1] Weyl H., «Math. Ann.», 1926, Bd 97, S. 338—56; [2] Левитан Б. М., Почти периодические функции, М., 1953; [3] Левитан Б. М., Степанов В. В., «Докл. АН СССР», 1939, т. 22, № 5, с. 229—32.

Е. А. Бредихина.

ВЕЙЛЯ ПРОБЛЕМА — проблема реализации в трехмерном евклидовом пространстве регулярной метрики положительной кривизны, заданной на сфере; т. е. вопрос о существовании регулярного овалоида, метрика к-рого совпадала бы с заданной. В. п. была поставлена Г. Вейлем (H. Weyl, 1915; см. [1]). Х. Леви (H. Lewy, 1937; см. [2]) дано решение В. п. в случае аналитич. метрики: заданная на сфере аналитич. метрика положительной кривизны всегда реализуется на нек-рой аналитич. поверхности трехмерного евклидова пространства. Теорема А. Д. Александрова о реализации метрики положительной кривизны выпуклой поверхностью в соединении с теоремой А. В. Погорелова о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой дают полное решение В. п. (см. [3], с. 121). А именно, регулярная метрика класса C^n, $n \geqslant 2$ с положительной гауссовой кривизной, заданная на многообразии, гомеоморфном сфере, реализуется замкнутой регулярной выпуклой поверхностью по крайней

мере класса $C^{n-1+\alpha}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Если метрика аналитическая, то поверхность аналитическая. В. п. для случая общего трехмерного риманова пространства поставлена и решена А. В. Погореловым ([3], гл. 6).

Лит.: [1] Вейль Г., Успехи матем. наук, 1948, т. 3, в. 2, с. 159—90; [2] Леви Г., там же, с. 191—219; [3] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969, гл. 5—7.

Е. В. Шикин.

ВЕЙЛЯ СВЯЗНОСТЬ — *аффинная связность* без кручения на римановом пространстве M, обобщающая *Леви-Чивита связность* в том смысле, что ковариантный дифференциал метрич. тензора g_{ij} пространства M относительно нее необязательно равен нулю, но является пропорциональным самому тензору g_{ij}. Если аффинная связность на M задана с помощью матрицы локальных форм связности

$$\left.\begin{aligned} &\omega^i = \Gamma^i_k(x)\,dx^k, \quad \det|\Gamma^i_k| \neq 0, \\ &\omega^i_j = \Gamma^i_{jk}(x)\,\omega^k, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$, то она является В. с. тогда и только тогда, когда

$$dg_{ij} = g_{kj}\omega^k_i + g_{ik}\omega^k_j + \theta g_{ij}. \tag{2}$$

Другая, эквивалентная форма этого условия:

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle + \theta(Z)\langle X, Y\rangle,$$

где $\nabla_Z X$ — ковариантная производная X по Z — определяется формулой

$$\omega^i(\nabla_Z X) = Z\omega^i(X) + \omega^i_k(Z)\,\omega^k(X).$$

Относительно локального поля ортонормированных реперов, где $g_{ij} = \delta_{ij}$, имеет место

$$\omega^j_i + \omega^i_j + \delta^i_j\theta = 0,$$

то есть В. с. для нек-рой римановой метрики на M является каждая аффинная связность без кручения, *голономии группа* к-рой является группой подобий или нек-рой ее подгруппой.

Если в (1) $\omega^i = dx^i$, то в случае В. с.

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right) + \frac{1}{2}g^{il}g_{jk}\theta_l - \delta^i_{(j}\theta_{k)},$$

где $\theta = \theta_k\,dx^k$. Так как

$$g_{kj}\Omega^k_i + g_{ik}\Omega^k_l + g_{ij}d\theta = 0,$$

то тензор

$$F_{ij,\,kl} = g_{im}R^m_{jkl} + \frac{1}{2}g_{ij}(\nabla_k\theta_l - \nabla_l\theta_k),$$

наз. (по Вейлю) тензором кривизны направлений, антисимметричен по обеим парам индексов:

$$F_{ij,\,kl} + F_{ji,\,kl} = 0.$$

В. с. введена Г. Вейлем [1].

Лит.: [1] Weyl H., «Math. Z.», 1918, Bd 2, S. 384—411; [2] Норден А. П., Пространства аффинной связности, М.—Л., 1950; [3] Folland G. B., «J. Different. Geom.», 1970, v. 4, p. 145—53.

Ю. Г. Лумисте.

ВЕЙЛЯ СУММА — тригонометрическая сумма вида

$$S(f) = \sum\nolimits_{1 \leqslant x \leqslant P} e^{2\pi i f(x)}, \tag{*}$$

где

$$f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x,$$

а $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ — любые действительные числа. В. с. применяются при решении многих известных проблем теории чисел. Первый метод нетривиальных оценок сумм (*) был разработан в 1916 Г. Вейлем (см. *Вейля метод*). Принципиально лучшие оценки В. с. были получены в 1934 И. М. Виноградовым с помощью созданного им нового метода оценок тригонометрич. сумм (см. *Виноградова метод*).

Б. М. Бредихин.

ВЕЙЛЯ — ШАТЛЕ ГРУППА — группа *главных однородных пространств* над абелевым многообразием. То, что для любого абелева многообразия A над полем k множество $\mathrm{WC}(A, k)$ главных однородных пространств над A, определенных над k, обладает групповой структурой, было доказано А. Вейлем [1], а в одном частном случае — Ф. Шатле (F. Chatelet). Группа $\mathrm{WC}(A, k)$ изоморфна одномерной группе *Галуа когомологий* $H^1(k, A)$. Группа $\mathrm{WC}(A, k)$ всегда периодична, кроме того, в случае $k=\mathbb{Q}$ в ней имеются элементы произвольного порядка (см. [4], [5]). Согласно теореме Ленга $\mathrm{WC}(A, k)=0$, если k — конечное поле. Для любого элемента $D\in\mathrm{WC}(A, k)$ определен показатель $I=\mathrm{ind}_k(D)$, равный наименьшей степени расширения K/k, для к-рого существует K-рациональная точка D. В случае, когда $\dim A=1$ и k — поле алгебраич. функций над алгебраически замкнутым полем констант или локальное поле, I совпадает с порядком D в группе $\mathrm{WC}(A, k)$ (см. [6], [10]). В общем случае эти числа различны, однако всегда $\mathrm{ord}(D)$ делит I (см. [7]). Для локальных полей k группа $\mathrm{WC}(A, k)$ вычисляется (см., напр., [6], [8], [9]).

Если k — глобальное поле, то основой для вычисления группы $\mathrm{WC}(A, k)$ являются гомоморфизмы редукции

$$\varphi_v\colon \mathrm{WC}(A, k)\longrightarrow \mathrm{WC}(A, k_v),$$

где v — произвольное нормирование поля k, а k_v — пополнение k относительно v. Ядро $Ш(A)$ гомоморфизма

$$\varphi=\sum\varphi_v\colon \mathrm{WC}(A, k)\longrightarrow\sum\nolimits_v \mathrm{WC}(A, k_v),$$

наз. группой Тейта — Шафаревича абелевого многообразия A, вычислено только в случае, когда k — поле алгебраич. функций от одного переменного над алгебраически замкнутым полем констант (см. [5], [8], [11]). В этом же случае описано и коядро φ (все с точностью до p-компоненты, где p — характеристика k). Результаты этих вычислений применяются в теории эллиптич. поверхностей. В случае, когда k — поле алгебраич. чисел, структура группы $Ш(A)$ мало изучена.

Лит.: [1] Weil A., «Amer. J. Math.», 1955, v. 77, № 3, p. 493—512; [2] Башмаков М. И., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 6, с. 25—66; [3] Касселс Дж., «Математика», (Сб. переводов), 1968, т. 12, № 1, с. 113—60; № 2, с. 3—49; [4] Шафаревич И. Р., «Докл. АН СССР», 1957, т. 114, № 2, с. 267—70; [5] его же, там же, 1957, № 4, с. 714—6; [6] его же, «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 64, с. 316—46; [7] Lang S., Tate J., «Amer. J. Math.», 1958, v. 80, № 3, p. 659—84; [8] Ogg A. P., «Ann. Math.», 1962, v. 76, № 2, p. 185—212; [9] Tate J., в кн.: Semin. Bourbaki, 2 èd., P., 1958, t. 10, exposes 156, p. 1—13; [10] Lichtenbaum S., «Amer. J. Math.», 1968, v. 90, № 4, p. 1209—23; [11] Roynaud M., в кн.: Semin. Bourbaki, 2 èd., P., 1964/65, exposes 286.

И. В. Долгачев.

ВЕЙНГАРТЕНА ДЕРИВАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ — формулы, дающие разложение производной единичного вектора нормали к поверхности по первым производным радиус-вектора этой поверхности. Если $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ — радиус-вектор поверхности, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали и E, F, G, L, M, N — коэффициенты соответственно первой и второй квадратичных форм поверхности, то В. д. ф. имеют вид

$$\boldsymbol{n}_u=\frac{FM-GL}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_u+\frac{FL-EM}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_v,$$

$$\boldsymbol{n}_v=\frac{FN-GM}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_u+\frac{FM-EN}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_v.$$

В. д. ф. установлены Ю. Вейнгартеном (J. Weingarten, 1861).

Лит.: [1] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956.

А. Б. Иванов.

ВЕЙНГАРТЕНА ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, средняя кривизна к-рой связана с ее гауссовой кривизной функциональной зависимостью. Для того чтобы поверхность S была В. п., необходимо и достаточно,

чтобы обе полости ее эволюты были наложимы на поверхности вращения, и ребра возврата нормалей линий кривизны поверхности S налагались на меридианы. Примеры В. п.: поверхности вращения, поверхности постоянной средней или гауссовой кривизны. В. п. введены Ю. Вейнгартеном ([1], [2]) в связи с задачей отыскания всех поверхностей, изометрических с данной поверхностью вращения. Эта задача сводится к задаче отыскания всех В. п. того же класса.

Лит.: [1] Weingarten J., «J. reine und angew. Math.», 1861, Bd 59, S. 382; [2] его же, там же, 1861, Bd 62, S. 164; [3] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

А. Б. Иванов.

ВЕКОВОЕ УРАВНЕНИЕ — см. *Характеристическое уравнение.*

ВЕКТОР геометрический — направленный отрезок прямой евклидова пространства, у к-рого один конец (точка A) называется началом B., другой конец (точка B) концом В. Обозначения В.: $\boldsymbol{a}$, $\overline{a}$, $\vec{a}$ или $\overline{AB}$. В., начало и конец к-рого совпадают, наз. нулевым В. и обычно обозначается $\mathbf{0}$. В. характеризуется модулем (или длиной), к-рый равен длине отрезка AB, и обозначается $|\boldsymbol{a}|$, и направлением: *от* A *к* B. Вектор $\overline{BA}$ наз. В., *противоположным* вектору $\overline{AB}$. В. длины, равной единице, наз. единичным вектором, или ортом. Нулевому В. приписывают любое направление. Два В. наз. коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. В. наз. компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Два коллинеарных В. наз. одинаково (противоположно) направленными, если их концы лежат по одну сторону (по разные стороны) от прямой, соединяющей их начала, или от общего начала. Два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$, лежащие на одной прямой, наз. одинаково (противоположно) направленными, если один из лучей AB, $A'B'$ целиком содержится (не содержится целиком) в другом. Два В. наз. равными, если они имеют равные модули и одинаково направлены (такие В. наз. также свободными векторами). Все нулевые В. считаются равными.

Кроме свободных В., то есть В., начальная точка к-рых может быть выбрана свободно, в механике и физике часто рассматриваются В., к-рые характеризуются модулем, направлением и положением начальной точки — точки приложения. Класс равных между собой В., расположенных на одной прямой, наз. скользящим вектором. Рассматриваются связанные векторы, к-рые считаются равными, если они имеют не только равные модули и одинаковые направления, но и общую точку приложения. В основу *векторного исчисления*, занимающегося изучением операций над В., положено понятие свободного В., так как задание скользящего или связанного В. может быть заменено заданием двух свободных В.

Понятие В. возникло как математич. абстракция объектов, характеризующихся величиной и направлением, напр.: перемещение, скорость, напряженность электрического или магнитного поля.

Понятие В. может быть введено аксиоматически (см. *Векторное пространство*).

А. Б. Иванов.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА — раздел *векторного исчисления*, в к-ром изучаются простейшие операции над (свободными) *векторами*. К числу этих операций относятся линейные операции над векторами: операция сложения векторов и умножения вектора на число.

Суммой $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ наз. вектор, проведенный из начала $\boldsymbol{a}$ к концу $\boldsymbol{b}$, если конец $\boldsymbol{a}$ и начало

$\boldsymbol{b}$ совмещены. Операция сложения векторов обладает свойствами:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \quad \text{(коммутативность)},$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \quad \text{(ассоциативность)},$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a} \quad \text{(наличие нулевого элемента)},$$

$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ (наличие противоположного элемента), где $\boldsymbol{0}$ — нулевой вектор, $-\boldsymbol{a}$ есть вектор, п р о т и в о п о л о ж н ы й вектору $\boldsymbol{a}$. Р а з н о с т ь ю $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ наз. вектор $\boldsymbol{x}$ такой, что $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$.

П р о и з в е д е н и е м $\lambda\boldsymbol{a}$ вектора $\boldsymbol{a}$ на число λ в случае $\lambda\neq 0$, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ наз. вектор, модуль к-рого равен $|\lambda||\boldsymbol{a}|$ и к-рый направлен в ту же сторону, что и вектор $\boldsymbol{a}$, если $\lambda>0$, и в противоположную, если $\lambda<0$. Если $\lambda=0$ или (и) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, то $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. Операция умножения вектора на число обладает свойствами:

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов),

$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ (дистрибутивность относительно сложения чисел),

$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ (ассоциативность),

$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ (умножение на единицу).

Множество всех векторов пространства с введенными в нем операциями сложения и умножения на число образует *векторное пространство* (линейное пространство).

В В. а. важное значение имеет понятие линейной зависимости векторов. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ..., $\boldsymbol{c}$ наз. л и н е й н о з а в и с и м ы м и в е к т о р а м и, если существуют числа α, β, ..., γ, из к-рых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что справедливо равенство

$$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\ldots+\gamma\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}. \qquad (1)$$

Для линейной зависимости двух векторов необходима и достаточна их коллинеарность, для линейной зависимости трех векторов необходима и достаточна их компланарность. Если один из векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ..., $\boldsymbol{c}$ нулевой, то они линейно зависимы. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ..., $\boldsymbol{c}$ наз. л и н е й н о н е з а в и с и м ы м и, если из равенства (1) следует, что числа α, β, ..., γ равны нулю. На плоскости существует не более двух, а в трехмерном пространстве не более трех линейно независимых векторов.

Совокупность трех (двух) линейно независимых векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ трехмерного пространства (плоскости), взятых в определенном порядке, образует б а з и с. Любой вектор $\boldsymbol{a}$ единственным образом представляется в виде суммы:

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3.$$

Числа a_1, a_2, a_3 наз. к о о р д и н а т а м и (к о м п о н е н т а м и) в е к т о р а $\boldsymbol{a}$ в д а н н о м б а з и с е и пишут $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$.

Два вектора $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты в одном и том же базисе. Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, является пропорциональность их соответствующих координат: $a_1=\lambda b_1$, $a_2=\lambda b_2$, $a_3=\lambda b_3$. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$ и $\boldsymbol{c}=\{c_1, c_2, c_3\}$ является равенство

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

Линейные операции над векторами сводятся к линейным операциям над координатами. Координаты суммы векторов $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$ равны суммам соответствующих координат: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3\}$. Координаты произведения вектора $\boldsymbol{a}$ на число λ равны произведениям координат $\boldsymbol{a}$ на λ: $\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$.

Скалярным произведением (a, b) ненулевых векторов a и b наз. произведение их модулей на косинус угла φ между ними:

$$(a, b) = |a||b|\cos\varphi.$$

За φ принимается угол между векторами, не превосходящий π. Если $a=0$ или $b=0$, то скалярное произведение полагают равным нулю. Скалярное произведение обладает свойствами:

$(a, b)=(b, a)$ (коммутативность),

$(a, b+c)=(a, b)+(a, c)$ (дистрибутивность относительно сложения векторов),

$\lambda(a, b)=(\lambda a, b)=(a, \lambda b)$ (сочетательность относительно умножения на число),

$(a, b)=0$, лишь если $a=0$ или (и) $b=0$ или $a \perp b$.

Для вычисления скалярных произведений векторов часто пользуются декартовыми прямоугольными координатами, т. е. координатами векторов в базисе, состоящем из единичных взаимно перпендикулярных векторов (ортов) i, j, k (ортонормированный базис). Скалярное произведение векторов

$$a=\{a_1, a_2, a_3\} \text{ и } b=\{b_1, b_2, b_3\},$$

заданных в ортонормированном базисе, вычисляется по формуле:

$$(a, b)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Косинус угла φ между ненулевыми векторами $a=\{a_1, a_2, a_3\}$ и $b=\{b_1, b_2, b_3\}$ может быть вычислен по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(a, b)}{|a|\cdot|b|},$$

где $|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ и $|b|=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$.

Косинусы углов вектора $a=\{a_1, a_2, a_3\}$ с векторами базиса i, j, k наз. направляющими косинусами вектора a:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

Направляющие косинусы обладают следующим свойством:

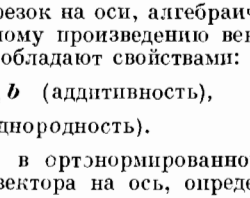
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Осью наз. прямая с лежащим на ней единичным вектором e — ортом, задающим положительное направление на прямой. Проекцией $\text{Пр.}_e a$ вектора a на ось наз. направленный отрезок на оси, алгебраич. значение к-рого равно скалярному произведению вектора a на вектор e. Проекции обладают свойствами:

$$\text{Пр.}_e(a+b)=\text{Пр.}_e a+\text{Пр.}_e b \quad \text{(аддитивность)},$$

$$\lambda\text{Пр.}_e a=\text{Пр.}_e \lambda a \quad \text{(однородность)}.$$

Каждая координата вектора в ортонормированном базисе равна проекции этого вектора на ось, определяемую соответствующим вектором базиса.



В пространстве различают правые и левые тройки векторов. Тройка некомпланарных векторов a, b, c наз. правой, если наблюдателю из их общего начала обход концов векторов a, b, c в указанном порядке кажется совершающимся по часовой стрелке. В противном случае a, b, c — левая тройка. Правая (левая) тройка векторов располагается так, как могут быть расположены соответственно большой, несогнутый указательный и средний пальцы правой (левой) руки (см. рис.). Все правые (или левые) тройки векторов

наз. *одинаково ориентированными*. Ниже тройка векторов базиса i, j, k считается правой.

Пусть на плоскости задано направление положительного вращения (от i к j). Псевдоскалярным произведением $a \vee b$ ненулевых векторов a и b наз. произведение их модулей на синус угла φ положительного вращения от a к b:

$$a \vee b = |a||b| \sin \varphi.$$

Псевдоскалярное произведение нулевых векторов полагают равным нулю. Псевдоскалярное произведение обладает свойствами:

$a \vee b = -b \vee a$ (антикоммутативность),

$a \vee (b+c) = a \vee b + a \vee c$ (дистрибутивность относительно сложения векторов),

$\lambda(a \vee b) = \lambda a \vee b$ (сочетательность относительно умножения на число),

$a \vee b = 0$, лишь если $a=0$ или (и) $b=0$ или a и b коллинеарны.

Если в ортонормированном базисе векторы a и b имеют координаты $\{a_1, a_2\}$ и $\{b_1, b_2\}$, то

$$a \vee b = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Векторным произведением $[a, b]$ ненулевых и неколлинеарных векторов a и b наз. вектор, модуль к-рого равен произведению их модулей на синус угла φ между ними, перпендикулярный a и b и направленный так, что тройка векторов a, b, $[a, b]$ — правая:

$$[a, b] = |a||b| \sin \varphi.$$

Векторное произведение полагают равным нулю, если $a=0$ или (и) $b=0$ или они коллинеарны. Векторное произведение обладает свойствами:

$[a, b] = -[b, a]$ (антикоммутативность),

$[a, b+c] = [a, b] + [a, c]$ (дистрибутивность относительно сложения векторов),

$\lambda[a, b] = [\lambda a, b] = [a, \lambda b]$ (сочетательность относительно умножения на число),

$[a, b] = 0$, лишь если $a=0$ или(и) $b=0$ или a и b коллинеарны.

Если в ортонормированном базисе векторы a и b имеют координаты $\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$, то

$$[a, b] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Смешанным произведением (a, b, c) векторов a, b, c наз. скалярное произведение вектора a на векторное произведение векторов b и c:

$$(a, b, c) = (a, [b, c]).$$

Смешанное произведение обладает свойствами:

$$(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b) = -(b, a, c) = -(c, b, a) = -(a, c, b).$$

$(a, b, c) = 0$, лишь если $a=0$ или (и) $b=0$ или (и) $c=0$, или векторы a, b, c компланарны.

$(a, b, c) > 0$, если тройка векторов a, b, c — правая, $(a, b, c) < 0$, если a, b, c — тройка левая.

Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах a, b, c. Если в ортонормированном базисе векторы a, b и c имеют координаты $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2, b_3\}$ и $\{c_1, c_2, c_3\}$, то

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Двойным векторным произведением $[a, b, c]$ векторов a, b, c наз. векторное произведение $[a, [b, c]]$.

При вычислении двойного векторного произведения имеют место формулы:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{b}, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})] - [\boldsymbol{c}, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})],$$
$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}),$$
$$[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]] = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{d}.$$

Лит.: [1] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии..., М., 1968; [2] Ефимов Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 9 изд., М., 1967; [3] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Аналитическая геометрия, М., 1968; [4] Погорелов А. В., Аналитическая геометрия, 3 изд., М., 1968.

Ю. П. Пытьев.

ВЕКТОРНАЯ ГРУППА — *частично упорядоченная группа*, вложимая в полное прямое произведение линейно упорядоченных групп. Группа G тогда и только тогда есть В. г., когда ее частичный порядок есть пересечение линейных порядков G. Частично упорядоченная группа тогда и только тогда является В. г., когда ее полугруппа P положительных элементов удовлетворяет условию: для любого конечного набора элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из G пересечение

$$\bigcap PS(a_1^{\varepsilon_1}, \quad \ldots, a_n^{\varepsilon_n}, e) = P.$$

Здесь пересечение берется по всем наборам знаков $\varepsilon_i = \pm 1$, а $S(x, y, \ldots, z)$ обозначает наименьшую инвариантную подполугруппу группы G, содержащую $x, y, \ldots, z$. *Доупорядочиваемая группа* G есть В. г. тогда и только тогда, когда для любых $g, g_1, \ldots, g_n \in G$ из

$$gg_1^{-1}gg_1 \ldots g_n^{-1}gg_n \in P$$

следует $g \in P$.

Лит.: [1] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965.

А. И. Кокорин, В. М. Копытов.

ВЕКТОРНАЯ РЕШЕТКА, векторная структура, K-линеал,— частично упорядоченное действительное *векторное пространство* с отношением порядка, определяющим *решетку*. См. *Полуупорядоченное пространство*.

ВЕКТОРНАЯ ТРУБКА — замкнутое множество Ф точек области Ω пространства, в к-рой задано *векторное поле* $\boldsymbol{a}(M)$, такое, что всюду на его граничной поверхности S вектор нормали $\boldsymbol{n}$ ортогонален $\boldsymbol{a}$. В. т. Ф состоит из векторных линий Г поля $\boldsymbol{a}$, т. е. кривых в Ω, в каждой точке к-рых направление касательной совпадает с направлением $\boldsymbol{a}$. Линия Г целиком содержится в Ф, если одна точка Г содержится в Ф. Если $\boldsymbol{a}$ — поле скоростей стационарного потока жидкости, то Г — траектория частицы жидкости, а Ф — часть Ω, к-рую при движении «заметает» фиксированное множество частиц жидкости.

Интенсивностью I трубки Ф в сечении S наз. поток (см. *Векторный анализ*) поля $\boldsymbol{a}$ через S':

$$I(S') = \int\int_{S'} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, d\sigma,$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к S'. Если поле $\boldsymbol{a}$ — соленоидально ($\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$), то выполняется закон сохранения интенсивности В. т.:

$$I(S') = I(S'').$$

Пусть $a_1(x, y, z)$, $a_2(x, y, z)$, $a_3(x, y, z)$ — декартовы прямоугольные координаты вектора $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$; x, y, z — координаты точки M. Тогда локально граница Ф задается уравнением $F(x, y, z) = \text{const}$, где $F(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению с частными производными:

$$(\boldsymbol{a}, \nabla F) = a_1(x, y, z)\frac{\partial F}{\partial x} + a_2(x, y, z)\frac{\partial F}{\partial y} + a_3(x, y, z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Ю. П. Пытьев.

ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ — то же, что *вектор-функция*.

ВЕКТОРНОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ РАССЛОЕНИЕ — морфизм многообразий $E \to X$, локально (в *Зарисского топологии*) устроенный как проекция прямого произведения $k^n \times X$ на X, причем склейка сохраняет послойно структуру векторного пространства. При этом E наз. пространством расслоения, X — базой, а n — рангом (или размерностью) расслоения. Морфизмы В. а. р. определяются так же, как и в топологии. Более общее определение, пригодное для произвольной схемы, использует понятие *пучка*. Пусть $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей конечного (постоянного) ранга, тогда *аффинный морфизм* $V(\mathcal{E})$: $\operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}\mathcal{E}) \to X$, где $\operatorname{Sym}\mathcal{E}$ — пучок симметрических алгебр $\mathcal{E}$, наз. векторным расслоением, ассоциированным с $\mathcal{E}$. Эту терминологию сохраняют иногда и в случае, когда $\mathcal{E}$ — произвольный квазикогерентный пучок. Пучок $\mathcal{E}$ однозначно восстанавливается по В. а. р. $V(\mathcal{E})$, и категория В. а. р. на X оказывается двойственной к категории локально свободных пучков $\mathcal{O}_X$-модулей. При этом для X-схемы Y множество X-морфизмов $Y \to V(\mathcal{E})$ биективно соответствует множеству гомоморфизмов $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{E} \to f_*(\mathcal{O}_Y)$, где f — структурный морфизм X-схемы Y. В частности, пучок ростков сечений В. а. р. $V(\mathcal{E})$ отождествляется с двойственным к $\mathcal{E}$ пучком $\mathcal{E}^\vee$. В. а. р. $V(\mathcal{O}_X^n)$ наз. тривиальным векторным расслоением ранга n. Множество всех В. а. р. ранга n на схеме находится во взаимно однозначном соответствии с множеством когомологий $H^1(X, \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_X))$, где $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_X)$ — пучок автоморфизмов тривиального векторного расслоения ранга n. В. а. р. ранга 1 наз. линейными векторными расслоениями, они соответствуют обратимым пучкам $\mathcal{O}_X$-модулей и тесно связаны с *дивизорами* на X; множество линейных векторных расслоений с операцией тензорного произведения образует группу $\operatorname{Pic}(X) \approx H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ (см. *Пикара группа*).

Для В. а. р., как и в топологии, определены операции прямой суммы, тензорного произведения, двойственного расслоения, симметрической и внешней степени, индуцированного В. а. р. и др. Для В. а. р. E ранга n линейное векторное расслоение $\lambda^n E$ наз. определителем. С В. а. р. E можно связать проективное расслоение $P(E)$ аналогично тому, как с векторным пространством связано проективное пространство (см. *Проективная схема*).

Примеры нетривиальных В. а. р. дают канонические В. а. р. на *Грассмана многообразиях*; в частности, на проективном пространстве $\mathbf{P}^n$ имеется каноническое линейное расслоение, соответствующее пучку $\mathcal{O}(1)$. Если В. а. р. E на схеме X является подрасслоением тривиального В. а. р., то такое вложение определяет морфизм X в соответствующее многообразие Грассмана, причем относительно этого морфизма индуцируется каноническим В. а. р. на многообразии Грассмана. Линейные расслоения, определяющие вложение X в $\mathbf{P}^n$, наз. очень обильными (см. *Обильное векторное расслоение*).

Другими примерами В. а. р. являются касательное расслоение $T(X)$ на гладком многообразии X и расслоения, построенные из него при помощи различных операций (см. *Касательный пучок*, *Канонический класс*, *Нормальный пучок*).

В. а. р. на многообразии, определенном над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, можно рассматривать как аналитическое или как топологическое (в топологии комплексного пространства) В. а. р. На полном алгебраич. многообразии категории аналитич. и алгебраич. В. а. р. эквивалентны (см. *Сравнения теоремы* в алгебраич. геометрии). Топологич. векторное расслоение не всегда допускает алгебраич. структуру, а если и допускает

(как, например, расслоения на P^2), то, вообще говоря, не единственную. Рассмотрение В. а. р. как топологического позволяет использовать топологические методы, в частности, вводить *Чжэня классы* В. а. р. Имеется и абстрактное определение классов Чжэня, использующее *K-функтор* или один из вариантов *Вейля когомологий*.

Свойства В. а. р. зависят от того, является ли его база полной или аффинной схемой. В случае аффинной базы $X=\operatorname{Spec} A$, В. а. р. соответствуют *проективным модулям* конечного типа над кольцом A. Если ранг В. а. р. E больше размерности базы X, то E можно представить в виде $E=E'\oplus 1$, где 1 — одномерное тривиальное расслоение. E' определяется, вообще говоря, не однозначно. Все же, если ранг E больше размерности базы и $E\oplus 1\simeq F\oplus 1$, то $E\simeq F$ (см. [4]). Если X неособая одномерная схема (т. е. A — *дедекиндово кольцо*), то любое В. а. р. есть прямая сумма тривиального и линейного векторного расслоений. Это же верно для В. а. р. на неособой аффинной поверхности над алгебраически замкнутым полем, бирационально эквивалентной линейчатой поверхности.

Случай проективной базы. Изучение линейных расслоений на проективных многообразиях — классич. задача алгебраич. геометрии (см. *Пикара группа*, *Пикара схема*). Исследование В. а. р. большего ранга началось в 1957, когда А. Гротендик (A. Grothendieck) показал, что В. а. р. на проективной прямой является прямой суммой линейных расслоений. М. Атья (M. Atiyah) классифицировал В. а. р. на эллиптич. кривой X: если через $\mathcal{E}(r, d)$ обозначить множество неразложимых (в прямую сумму) В. а. р. ранга r и степени d (под степенью понимается степень определителя расслоения), то $\mathcal{E}(r, d)$ отождествляется с точками самой кривой X ([3]).

При изучении В. а. р. на кривых полезным оказалось понятие стабильного В. а. р. Положим для В. а. р. E, что $\mu(E)$ есть степень E, деленная на ранг E; тогда В. а. р. E наз. стабильным (соответственно полустабильным), если для любого подрасслоения $E'\subset E$ имеет место $\mu(E')<\mu(E)$ (соответственно $\mu(E')\leqslant\mu(E)$). Стабильное расслоение просто (т. е. $\operatorname{End}(E)\simeq k$) и, в частности, неразложимо. В. а. р. степени 0 на алгебраич. кривой X рода $g\geqslant 2$ стабильно в том и только том случае, когда оно ассоциировано с неприводимым унитарным представлением фундаментальной группы $\pi_1(X)$ (см. [1]). Пусть $U(r, d)$ — множество всех полустабильных В. а. р. ранга r и степени d, являющихся прямой суммой стабильных В. а. р., $US(r, d)$ — подмножество стабильных В. а. р. Если род g гладкой кривой X больше 1, то $U(r, d)$ обладает естественной структурой нормального проективного многообразия размерности $r^2(g-1)+1$, а $US(r, d)$ — открытое гладкое подмногообразие $U(r, d)$ (см. [1]). Если r и d взаимно простые, то $U(r, d)=US(r, d)$ и поэтому гладкое. Пространство модулей полустабильных В. а. р. достаточно изучено, а именно, известно, что $U(1, d)$ — компонента схемы Пикара для X, слои отображения определителя $\det: U(r, d)\to U(1, d)$ являются унирациональными многообразиями; если r и d взаимно просты, то $U(r, d)$ однозначно определяет исходную кривую X. Поскольку над $U(r, d)$ не всегда существует универсальное семейство В. а. р., то $U(r, d)$ не является представляющим объектом подходящего функтора [1]. Большинство указанных результатов получены для случая поля $\mathbb{C}$, хотя многие остаются верны и для произвольного алгебраически замкнутого поля. Некоторые специальные факты известны для В. а. р. на алгебраич. поверхностях и проективных пространствах (см. [5]).

Лит.: [1] Нарасимхан М., Шешадри К., «Математика», 1969, т. 13, вып. 1, с. 27—52; [2] Тюрин А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30, в. 6, с. 1353—66;

[3] Atiyah M., «Proc. London Math. Soc.», 1957, v. 7, p. 414—52; [4] Басс Х., Алгебраическая К-теория, пер. с англ., М., 1973; [5] Долгачев И. В., Исковских В. А., в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, с. 77—170.
В. И. Данилов.

ВЕКТОРНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РАССЛОЕНИЕ — локально тривиальное аналитич. расслоение над аналитич. пространством, слои к-рого обладают структурой n-мерного векторного пространства над основным полем k (если $k=\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, то аналитич. расслоение наз. также голоморфным). Число n наз. рангом, или размерностью, расслоения. Так же, как в топологич. случае (см. *Векторное расслоение*), определяются категория векторных аналитич. расслоений, понятия подрасслоения, факторрасслоения, прямой суммы, тензорного произведения, внешней степени В. а. р. и т. д.

Аналитич. сечения В. а. р. $E\to X$ с базой X образуют модуль $\Gamma(E)$ над алгеброй $A(X)$ аналитич. функций на базе. В случае, когда $k=\mathbb{C}$ и X компактно, $\Gamma(E)$ — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$ (см. *Конечности теоремы*). Если же X — конечномерное комплексное пространство Штейна, то $\Gamma(E)$ — проективный модуль конечного типа над $A(X)$, причем соответствие $E\mapsto\Gamma(E)$ определяет эквивалентность категории В. а. р. над X и категории проективных $A(X)$-модулей конечного типа [4].

Примерами В. а. р. являются касательное расслоение на аналитич. многообразии X (его аналитич. сечения — аналитич. векторные поля на X), нормальное расслоение на подмногообразии $Y\subset X$.

Классификация В. а. р. ранга n на заданном аналитич. пространстве X равносильна классификации *главных аналитических расслоений* с базой X и структурной группой $\mathrm{GL}(n, k)$ и при $n>1$ проведена полностью только в некоторых специальных случаях. Для проективных комплексных алгебраич. многообразий X она совпадает с классификацией алгебраич. векторных расслоений (см. *Сравнения теоремы* в алгебраической геометрии).

В. а. р. ранга 1 на комплексном пространстве X (иначе, расслоения на комплексные прямые или линейные расслоения) играют важную роль в комплексной аналитич. геометрии. Каждый *дивизор* на пространстве X естественным образом определяет аналитич. расслоение ранга 1, причем два дивизора определяют изоморфные расслоения тогда и только тогда, когда они линейно эквивалентны. На проективном алгебраич. многообразии всякое линейное аналитич. расслоение определяется дивизором. Вложимость комплексного пространства X в проективное пространство тесно связана с существованием на X обильных линейных расслоений (см. *Обильное векторное расслоение*). Если на комплексном пространстве X задана дискретная группа Γ его автоморфизмов, то каждый фактор автоморфности группы Γ определяет линейное расслоение над X/Γ, аналитич. сечения к-рого суть соответствующие автоморфные формы. В. а. р. ранга 1 составляют группу $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, где $\mathcal{O}_X^*$ — пучок обратимых элементов структурного пучка. Сопоставление каждому расслоению его 1-го класса Чжэня дает гомоморфизм

$$\gamma: H^1(X, \mathcal{O}_X^*)\to H^2(X, \mathbb{Z}),$$

ядро к-рого есть множество топологически тривиальных линейных расслоений. В случае, когда X — комплексное многообразие, $\mathrm{Im}\,\gamma$ можно описать как множество классов когомологий, представимых замкнутыми дифференциальными формами типа (1,1). Если X, кроме того, компактно и кэлерово, то $\mathrm{Ker}\,\gamma$ изоморфно *Пикара многообразию* многообразия X и тем самым является комплексным тором [2].

Каждому В. а. р. V ранга n на аналитич. пространстве X соответствует пучок ростков аналитич. сечений

расслоения V, к-рый является локально свободным аналитическим пучком ранга n на X. Это соответствие определяет эквивалентность между категориями В.а.р. и локально свободных аналитич. пучков на X. Попытка обобщить этот результат на произвольные когерентные аналитич. пучки привела к следующему обобщению понятия В. а. р. [3]. Сюръективный морфизм $\pi\colon V\to X$ наз. *аналитическим семейством векторных пространств над* X (или *линейным пространством над* X), если его слои обладают структурой конечномерных векторных пространств над k, причем операции сложения, умножения на скаляр и нулевое сечение удовлетворяют естественным требованиям аналитичности. Если $k=\mathbb{C}$ (или $k=\mathbb{R}$ и X когерентно), то аналитич. семейство векторных пространств $\pi\colon V\to X$ определяет когерентный аналитич. пучок F на X: для $U\subset X$ группа $F(U)$ есть пространство аналитич. функций на $\pi^{-1}(U)$, линейных на слоях. Тем самым определяется двойственность между категориями аналитич. семейств векторных пространств и когерентных аналитич. пучков на X.

Лит.: [1] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [2] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [3] Fischer G., «Arch. Math.», 1967, Bd 18, s. 609—17; [4] Forster O., Ramspott K. J., там же, 1968, Bd 19, s. 417—22.

А. Л. Онищик.

ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — устаревшее название раздела математики, в к-ром изучаются свойства операций над *векторами*. В. и. подразделяют на векторную алгебру и векторный анализ. В *векторной алгебре* изучают линейные операции (сложение векторов и умножение векторов на число) и различные произведения векторов (скалярное, псевдоскалярное, векторное, смешанное, двойное векторное). В *векторном анализе* изучают векторы, являющиеся функциями от одного или нескольких скалярных аргументов.

Возникло В. и. в 19 в. в связи с потребностями механики и физики, когда операции над векторами стали проводиться непосредственно над ними, без обращения к координатному способу их задания (см. [1], [2], [3]). Дальнейшее изучение тех свойств математич. и физич. объектов, к-рые инвариантны относительно выбора системы координат, привело к одному из обобщений В. и.— *тензорному исчислению*.

Лит.: [1] Wessel C., Om directionens analytiske Betegning, «Danske Selsk. Skr.», N. Samml., 1799 («Arch. for Math. og Naturvid.», 1896, Bd 18); [2] Hamilton W. R., Lectures on quaternions..., Dublin, 1853; [3] Gibbs J. W., Wilson E. B., Vector Analysis, New Haven, 1901; [4] Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 9 изд., М., 1965; [5] Дубнов Я. С., Основы векторного исчисления, 4 изд., ч. 1—2, М.—Л., 1950—52.

А. Б. Иванов.

ВЕКТОРНОЕ КОЛЬЦО — частично упорядоченное кольцо R, являющееся подпрямой суммой линейно упорядоченных колец R_λ. Каждый элемент В. к. есть вектор

$$a=\{\ldots, a_\lambda, \ldots\}$$

с координатами из R_λ и $a\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда каждое $a_\lambda\geqslant 0$. Если частичный порядок кольца R является пересечением линейных порядков, то R будет В. к., причем за R_λ можно принять само R, снабженное различными линейными продолжениями его частичного порядка.

Лит.: [1] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965.

О. А. Иванова.

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ — термин, под к-рым обычно понимается функция точки нек-рого пространства X, значениями к-рой являются *векторы*, в том или ином смысле определенные для этого пространства.

В классическом *векторном исчислении* роль X играет подмножество евклидова пространства, а В. п. представляет собой направленные отрезки, приложенные в точках этого подмножества. Напр., совокупность касательных или нормальных векторов к гладкой кривой (поверхности) — В. п. на ней.

Если X — абстрактно заданное дифференцируемое многообразие, то под В. п. понимается касательное В. п., т. е. функция, относящая каждой точке X инвариантно сконструированный касательный вектор к X. В случае конечномерности X В. п. равносильно определяется как совокупность одновалентных контравариантных тензоров, зависящих от точек.

В общем случае В. п. интерпретируется как определенная на X функция со значениями в *векторном пространстве* P, тем или иным способом ассоциированного с X; ее отличие от произвольной вектор-функции состоит в том, что P определяется по отношению к X «внутренним образом», а не «надстройкой» над X. Впрочем, напр., иногда и сечение *векторного расслоения* с базой X считается В. п. *М. И. Войцеховский.*

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ на многообразии M— сечение *касательного расслоения* $\tau(M)$. Множество В. п. образует модуль над кольцом F дифференцируемых функций на M.

Пример 1. Для карты x_U многообразия M определяется i-е базисное В. п. $\frac{\partial}{\partial x^i}$ по формуле

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \quad p \in U,$$

$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ есть i-й базисный касательный вектор к M в точке p, и любое В. п. однозначно представляется в виде

$$X = \sum\nolimits_i \xi^i(p)\, \frac{\partial}{\partial x^i}(p),$$

$\xi^i(p)$ наз. компонентами В. п. X в карте x_U. В. п. является дифференцированием кольца F, вследствие чего множество В. п. образует относительно операции коммутирования (скобки Ли) алгебру Ли.

Пример 2. Для карты x_U и $f \in F$ функция Xf определяется формулой

$$(Xf)(p) = \sum\nolimits_i \xi^i(p)\, D_i(f(x_u^{-1}))\,|_{x(p)} = \\ = \sum\nolimits_i \xi^i(p)\, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p (f),$$

где D_i— частная производная по x^i, $\xi^i(p) = Xx^i(p)$; Xf наз. производной от f по направлению X.

Пример 3. Для карты x_U и $f \in F$ коммутатор (скобка Ли) $[X, Y]$ В. п.

$$X = \sum\nolimits_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{и} \quad Y = \sum\nolimits_i \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

определяется формулой

$$([X, Y]f)(p) = \sum\nolimits_i (X\eta^i - Y\xi^i)\, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p (f) = \\ = \sum\nolimits_{i,\,k} \left(\xi^k \frac{\partial \eta^i}{\partial x^k} - \eta^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\right) \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p;$$

он удовлетворяет соотношениям:

$$[X, Y] = -[Y, X],$$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0,$$

в частности

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0.$$

Каждое В. п. X индуцирует на M локальный поток — семейство диффеоморфизмов окрестности U

$$\Phi: (-\varepsilon, +\varepsilon) \times U \longrightarrow M$$

такое, что $\Phi(0, p) = p$ для $p \in U$ и

$$\Phi(t, p) = \Phi_p(t): (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$$

— интегральный путь В. п. X, т. е.

$$\Phi^* \frac{\partial}{\partial t} = X\Phi(t, p),$$

где $\Phi^* \frac{\partial}{\partial t}$ — В. п., касательное к отображению $\Phi_p(t)$. И наоборот, В. п. X ассоциировано с локальным потоком $\Phi(t,\ p)=\Phi_t(p)$ — вариацией отображения $\Phi_0(p)$; при этом

$$(Xf)(p)=\lim_{t\to 0}\frac{f(\Phi_t(p))-f(p)}{t}.$$

Каждое В. п. определяет дифференцирование Ли LX тензорного поля типа λ со значениями в векторном пространстве (инфинитезимальное преобразование λ), соответствующее локальному потоку $\Phi(t,\ p)$, частными случаями к-рого являются действие В. п. на $f\in F$

$$L_Xf=Xf$$

и скобка Ли

$$L_XY=[XY]=\lim_{t\to 0}\frac{Y-\Phi_t^*Y\Phi_{-t}}{t}.$$

В. п. без особенностей порождает на M интегрируемую одномерную дифференциальную систему и ассоциированную с ней *Пфаффа систему*.

Обобщением понятия В. п. на многообразии является В. п. вдоль отображения φ: $N\to M$ — сечение расслоения $\tau_\varphi(N)$, индуцированного φ, а также тензорное поле типа λ — сечение ассоциированного с $\tau(M)$ при помощи функтора λ расслоения $\lambda[\tau]$.

Лит.: [1] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973; [2] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [3] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967; [4] Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, пер. с англ., М., 1960; [5] Постников М. М., Введение в теорию Морса, М., 1971; [6] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964. *А. Ф. Щекутьев.*

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ — вектор $\boldsymbol{c}$, обозначаемый символом $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ или $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ и удовлетворяющий условиям:

длина вектора $\boldsymbol{c}$ равна произведению длин векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на синус угла φ между ними, т. е.

$$|\boldsymbol{c}|=|[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\varphi;$$

вектор $\boldsymbol{c}$ ортогонален каждому из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Ориентация тройки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ совпадает с ориентацией тройки базисных векторов. См. *Векторная алгебра*. *А. Б. Иванов.*

ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО, линейное пространство, над полем K, — аддитивно записанная абелева группа E, в которой определено умножение элементов на скаляры, т. е. отображение

$$K\times E\to E:(\lambda,\ x)\to\lambda x,$$

удовлетворяющее следующим аксиомам ($x,\ y\in E$, $\lambda,\ \mu,\ 1\in K$):

1) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$,
2) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$,
3) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$,
4) $1\cdot x=x$.

Из аксиом 1) — 4) вытекают следующие важные свойства векторного пространства ($0\in E$):

5) $\lambda\cdot 0=0$,
6) $0\cdot x=0$,
7) $(-1)x=-x$.

Элементы В. п. наз. точками В. п., или векторами, а элементы поля K — скалярами.

Наибольшее применение в математике и приложениях имеют В. п. над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел или над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел; они наз. соответственно комплексными В. п. или действительными В. п.

Аксиомы В. п. выявляют нек-рые алгебраич. свойства многих классов функций, часто встречающихся в анализе. Из примеров В. п. самыми фундаментальными и наиболее ранними являются n-мерные евкли-

довы пространства. Почти столь же важными примерами являются многие функциональные пространства: пространство непрерывных функций, пространство измеримых функций, пространство суммируемых функций, пространство аналитич. функций, пространство функций ограниченной вариации.

Понятие В. п. есть частный случай понятия модуля над кольцом, а именно, В. п. есть *унитарный модуль* над полем. Унитарный модуль над некоммутативным телом также наз. векторным пространством над телом; теория таких В. п. во многом сложнее теории В. п. над полем.

Одной из важных задач, связанных с В. п., является изучение геометрии В. п., т. е. изучение прямых в В. п., плоских и выпуклых множеств в В. п., подпространств В. п. и базисов в В. п.

Векторным подпространством, или просто подпространством, В. п. E над полем K наз. подмножество $F \subset E$, замкнутое относительно действий сложения и умножения на скаляр. Подпространство, рассматриваемое отдельно от вмещающего его пространства, есть В. п. над тем же полем.

Прямой линией, проходящей через две точки x и y В. п. E, наз. множество элементов $z \in E$ вида $z=\lambda x+(1-\lambda)y$, $\lambda \in K$. Множество $G \in E$ наз. плоским множеством, если вместе с любыми двумя точками оно содержит прямую, проходящую через эти точки. Каждое плоское множество получается из нек-рого подпространства с помощью сдвига (параллельного переноса): $G=x+F$; это означает, что каждый элемент $z \in G$ представим единственным образом в виде $z=x+y$, $y \in F$, причем это равенство осуществляет взаимно однозначное соответствие между F и G.

Совокупность всех сдвигов $F_x=x+F$ данного подпространства F образует В. п. над K, наз. факторпространством E/F, если определить операции следующим образом:

$$F_x+F_y=F_{x+y}; \quad \lambda F_x=F_{\lambda x}, \quad \lambda \in K.$$

Пусть $M=\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — произвольное множество векторов из E; линейной комбинацией векторов $x_\alpha \in E$ наз. вектор x, определенный формулой

$$x=\sum\nolimits_\alpha \lambda_\alpha x_\alpha, \quad \lambda_\alpha \in K,$$

в к-рой лишь конечное число коэффициентов отлично от нуля. Совокупность всех линейных комбинаций векторов данного множества M является наименьшим подпространством, содержащим M, и наз. линейной оболочкой множества M. Линейная комбинация наз. тривиальной, если все коэффициенты λ_α равны нулю. Множество M наз. линейно независимым множеством, если все нетривиальные линейные комбинации векторов из M отличны от нуля.

Любое линейно независимое множество содержится в нек-ром максимальном линейно независимом множестве M_0, т. е. в таком множестве, к-рое перестает быть линейно независимым после присоединения к нему любого элемента из E.

Каждый элемент $x \in E$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации элементов максимального линейно независимого множества:

$$x=\sum\nolimits_\alpha \lambda_\alpha x_\alpha. \quad x_\alpha \in M_0.$$

В связи с этим максимальное линейно независимое множество наз. *базисом* В. п. (алгебраическим базисом). Все базисы данного В. п. имеют одинаковую мощность, к-рая наз. размерностью В. п. Если эта мощность конечна, пространство наз. конечномерным В. п.; в противном случае оно наз. бесконечномерным В. п.

Поле K можно рассматривать как одномерное В. п. над полем K; базис этого В. п. состоит из одного элемента; им может быть любой элемент, отличный от нуля. Конечномерное В. п. с базисом из n элементов наз. n-мерным пространством.

В теории действительных и комплексных В. п. важную роль играет теория *выпуклых множеств*. Множество M в действительном В. п. наз. выпуклым множеством, если вместе с любыми двумя его точками x, y отрезок $tx+(1-t)y$, $t\in[0, 1]$, также принадлежит M.

Большое место в теории В. п. занимает теория линейных функционалов на В. п. и связанная с этим теория двойственности. Пусть E есть В. п. над полем K. Линейным функционалом на E наз. аддитивное и однородное отображение $f: E\to K$:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ f(\lambda x)=\lambda f(x).$$

Множество E^* всех линейных функционалов на E образует В. п. над полем K относительно операций

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x),$$
$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x),$$
$$x\in E,\quad \lambda\in K,\quad f_1,\ f_2,\ f\in E^*.$$

Это В. п. наз. сопряженным (или двойственным) пространством (к E). С понятием сопряженного пространства связан ряд геометрич. терминов. Пусть $D\subset E$ (соответственно $\Gamma\subset E^*$); аннулятором множества D, или ортогональным дополнением множества D (соответственно множества Γ) наз. множество

$$D^\perp=\{f\in E^*:\ f(x)=0 \text{ для всех } x\in D\}$$

(соответственно $\Gamma_\perp=\{x\in E: f(x)=0$ для всех $f\in\Gamma\}$); здесь $D^\perp$ и $\Gamma_\perp$ — подпространства соответственно пространств E^* и E. Если f — ненулевой элемент из E^*, то $\{f\}$ есть максимальное собственное линейное подпространство в E, наз. иногда гиперподпространством; сдвиг такого подпространства наз. гиперплоскостью в E; всякая гиперплоскость имеет вид

$$\{x: f(x)=\lambda\},\ \text{где } f\neq 0,\ f\in E^*,\ \lambda\in K.$$

Если F — подпространство В. п. E, то существуют естественные изоморфизмы между F^* и

$$E^*/F^\perp \text{ и между } (E/F)^* \text{ и } F^\perp.$$

Подмножество $\Gamma\subset E^*$ наз. тотальным подмножеством над E, если его аннулятор содержит лишь нулевой элемент: $\Gamma_\perp=\{0\}$.

Каждому линейно независимому множеству $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset E$ можно сопоставить сопряженное множество $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset E^*$, т. е. такое множество, что $f_\alpha(x_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$ (*Кронекера символ*) для всех α, $\beta\in A$. Множество пар $\{x_\alpha, f_\alpha\}$ наз. при этом биортогональной системой. Если множество $\{x_\alpha\}$ есть базис в E, то $\{f_\alpha\}$ тотально над E.

Значительное место в теории В. п. занимает теория линейных преобразований В. п. Пусть E_1, E_2 — два В. п. над одним и тем же полем K. Линейным отображением, или линейным оператором, T, отображающим В. п. E_1 в В. п. E_2 (или линейным оператором из E_1 в E_2), наз. аддитивное и однородное отображение пространства E_1 в E_2:

$$T(x+y)=Tx+Ty;\quad T(\lambda x)=\lambda T(x);\quad x, y\in E_1.$$

Частным случаем этого понятия является линейный функционал, или линейный оператор из E_1 в K. Линейным отображением является, напр., естественное отображение В. п. E на факторпростран-

ство E/F, сопоставляющее каждому элементу $x \in E$ плоское множество $F_x \in E/F$. Совокупность $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ всех линейных операторов T: $E_1 \to E_2$ образует В. п. относительно операций

$$(T_1+T_2)x = T_1x + T_2x; \quad (\lambda T)x = \lambda Tx;$$
$$x \in E_1; \ \lambda \in K; \ T_1, \ T_2, \ T \in \mathscr{L}(E_1, E_2).$$

Два В. п. E_1 и E_2 наз. изоморфными В. п., если существует линейный оператор («изоморфизм»), осуществляющий взаимно однозначное соответствие между их элементами. E_1 и E_2 изоморфны тогда и только тогда, когда их базисы имеют одинаковую мощность.

Пусть T — линейный оператор, отображающий E_1 в E_2. Сопряженным линейным оператором, или двойственным линейным оператором, по отношению к T, наз. линейный оператор T^* из E_2^* в E_1^*, определенный равенством

$$(T^*\varphi)\, x = \varphi\,(Tx) \quad \text{для всех } x \in E_1, \ \varphi \in E_2^*.$$

Имеют место соотношения $T^{*-1}(0) = [T(E_1)]^\perp$, $T^*(E_2^*) = [T^{-1}(0)]^\perp$, откуда следует, что T^* является изоморфизмом тогда и только тогда, когда T является изоморфизмом.

С теорией линейных отображений В. п. тесно связана теория *билинейных отображений* и *полилинейных отображений* В. п.

Важную группу задач теории В. п. образуют задачи продолжения линейных отображений. Пусть F — подпространство В. п. E_1, E_2 — линейное пространство над тем же полем, что и E_1, и пусть T_0 — линейное отображение F в E_2; требуется найти продолжение T отображения T_0, определенное на всем E_1 и являющееся линейным отображением E_1 в E_2. Такое продолжение всегда существует, но дополнительные ограничения на функции (связанные с дополнительными структурами в В. п., напр., топологией или отношением порядка) могут сделать задачу неразрешимой. Примерами решения задачи продолжения являются *Хана — Банаха теорема* и теоремы о продолжении положительных функционалов в пространствах с конусом.

Важным разделом теории В. п. является теория операций над В. п., т. е. способов построения новых В. п. по известным. Примеры таких операций — известные операции взятия подпространства и образования факторпространства по подпространству. Другие важные операции — построение прямой суммы, прямого произведения и тензорного произведения В. п.

Пусть $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — семейство В. п. над полем K. Множество E — произведение множеств E_α — можно превратить в В. п. над полем K, введя операции

$$(x_\alpha)+(y_\alpha) = (x_\alpha + y_\alpha); \quad \lambda(x_\alpha) = (\lambda x_\alpha);$$
$$\lambda \in K; \quad x_\alpha, \ y_\alpha \in E_\alpha, \quad \alpha \in I;$$

полученное В. п. E наз. прямым произведением В. п. E_α и обозначается $\Pi_{\alpha \in I} E_\alpha$. Подпространство В. п. E, состоящее из всех тех наборов (x_α), для каждого из к-рых множество $\{\alpha : x_\alpha \neq 0\}$ конечно, наз. прямой суммой В. п. E_α и обозначается $\Sigma_\alpha E_\alpha$ или $\Sigma_\alpha + E_\alpha$; для конечного числа слагаемых эти определения совпадают; в этом случае используются обозначения:

$$E_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_n \text{ или } E_1 \times \ldots \times E_n.$$

Пусть E_1, E_2 — два В. п. над полем K; E_1', E_2' — тотальные подпространства В. п. E_1^*, E_2^*, и $E_1 \square E_2$ — В. п., имеющее своим базисом совокупность всех элементов пространства $E_1 \times E_2$. Каждому элементу $x \square y \in E_1 \square E_2$ сопоставляется билинейная функция $b = T(x, y)$ на $E_1' \times E_2'$ по формуле $b(f, g) = f(x)g(y)$,

$f \in E_1'$, $g \in E_2'$. Это отображение базисных векторов $x \square y \in E_1 \square E_2$ можно продолжить до линейного отображения T В. п. $E_1 \square E_2$ в В. п. всех билинейных функционалов на $E_1' \times E_2'$. Пусть $E_0 = T^{-1}(0)$. Тензорным произведением В. п. E_1 и E_2 наз. факторпространство $E_1 \circ E_2 = (E_1 \square E_2)/E_0$; образ элемента $x \square y$ обозначается $x \circ y$. В. п. $E_1 \circ E_2$ изоморфно В. п. билинейных функционалов на $E_1' \times E_2'$ (см. *Тензорное произведение* векторных пространств).

Наиболее содержательной частью теории В. п. является теория конечномерных В. п. Но и понятие бесконечномерного В. п. часто оказывается плодотворным и имеет интересные приложения, особенно в теории топологических векторных пространств, т. е. В. п., наделенных топологией, определенным образом согласованной с его алгебраич. структурой.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Райков Д. А., Векторные пространства, М., 1962; [3] Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [4] Эдвардс Р., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969; [5] Халмош П., Конечномерные векторные пространства, пер. с англ., М., 1963; [6] Глазман И. М., Любич Ю. И., Конечномерный линейный анализ в задачах, М., 1969.

М. И. Кадец.

ВЕКТОРНОЕ РАССЛОЕНИЕ — *локально тривиальное расслоение* $\pi : X \to B$, каждый слой к-рого $\pi^{-1}(b)$ наделен структурой (конечномерного) векторного пространства V над телом $\mathcal{P}$; $\dim V$ наз. размерностью В. р. Сечения В. р. π образуют локально свободный модуль $\Gamma(\pi)$ над кольцом непрерывных функций на B со значениями в $\mathcal{P}$. Морфизмом В. р. наз. морфизм расслоений $f : \pi \to \pi'$, для к-рого каждое отображение является линейным отображением. Совокупность В. р. и их морфизмов образует категорию Bund. Понятие В. р. возникло как обобщение *касательного расслоения* и нормального расслоения в дифференциальной геометрии; в настоящее время оно является базой и орудием исследования в различных областях математики — в дифференциальной и алгебраич. топологии, теории линейных связностей, алгебраич. геометрии, теории (псевдо)дифференциальных операторов и т. д.

Подмножество $X' \subset X$ такое, что $\pi|_{X'} : X' \to B$ есть В. р. и $X' \cap \pi^{-1}(b)$ — векторное подпространство $\pi^{-1}(b)$, наз. подрасслоением В. р. π. Пусть, напр., V — векторное пространство и $G_k(V)$ — *Грассмана многообразие* подпространства V размерности k; тогда подпространства произведения $G_k(V) \times V$, состоящее из пар (p, v) таких, что $v \in p$, есть подрасслоение γ_k тривиального В. р. $G_k(V) \times V$; объединение всех векторных пространств $\pi^{-1}(b)/\pi_2^{-1}(b)$, где π_2 — подрасслоение π, снабженное фактортопологией, наз. факторрасслоением В. р. π. Пусть, далее, V — векторное пространство и $G^k(V)$ — комногообразие Грассмана подпространств V коразмерности k; тогда факторпространство произведения $G^k(V) \times V$ по подрасслоению, состоящему из пар (p, v) с $v \in p$, есть факторрасслоение γ^k тривиального В. р. $G^k(V) \times V$. Понятия подрасслоения и факторрасслоения используются в конструкциях стягивания и склеивания, применяющихся для построения В. р. над факторпространствами.

B-морфизм В. р. $f : \pi \to \pi'$ наз. точным, если $\dim \ker f|\pi^{-1}(b)$ локально постоянна на B. Инъективный и сюръективный морфизмы являются точными и наз. соответственно мономорфизмом и эпиморфизмом В. р. Для точного морфизма f однозначно определены следующие В. р.: $\operatorname{Ker} f$ (ядро f) — подрасслоение π, $\operatorname{Im} f$ (образ f) — подрасслоение π', $\operatorname{Coker} f$ (коядро f) — факторрасслоение π, $\operatorname{Coim} f$ (кообраз f) — факторрасслоение π'; каждое под-

расслоение π_1 является образом нек-рого мономорфизма $i:\pi_1\to\pi$, а факторрасслоение π_2 — коядром нек-рого эпиморфизма $j:\pi\to\pi_2$. Последовательность B-морфизмов В. р.

$$\ldots\to\pi'\to\pi\to\pi''\to\ldots$$

наз. *точной*, если для всех $b\in B$ является точной последовательность

$$\ldots\to(\pi')^{-1}(b)\to\pi^{-1}(b)\to(\pi'')^{-1}(b)\to\ldots$$

В частности, последовательность

$$0\to\pi_1\xrightarrow{i}\pi\xrightarrow{j}\pi_2\to 0$$

(где 0 — нулевое В. р.: $X=B$, $\pi=id$) точна, если i — мономорфизм, j — эпиморфизм и $\operatorname{Im} i=\operatorname{Ker} j$. Совокупность В. р. над B и их точных B-морфизмов образует точную подкатегорию Bund_B категории Bund.

Для любого В. р. $\pi:X\to B$ и отображения $u:B_1\to B$ — *индуцированное расслоение* $u^*(\pi)$ снабжается такой структурой В. р., что морфизм $U:u^*(\pi)\to\pi$ является морфизмом В. р. Эта структура единственна и обладает тем свойством, что каждое отображение $(u^*(\pi))^{-1}(b)\to\pi^{-1}(u(b))$ является изоморфизмом векторных пространств. Напр., каждое В. р. размерности k над паракомпактным пространством B изоморфно В. р. $u^*(\gamma_k)$ и $\tilde{u}^*(\gamma^k)$, индуцированным нек-рыми отображениями $u:B\to G_k(V)$ и $\tilde{u}:B\to G^k(V)$ соответственно, причем гомотопные отображения индуцируют изоморфные В. р., и, если $\dim V\neq\infty$,— наоборот: изоморфным В. р. соответствуют гомотопные отображения u и $\tilde{u}$. Это — одна из основных теорем гомотопической классификации В. р., выражающая универсальность В. р. γ_k и γ^k по отношению к классифицирующим отображениям u и $\tilde{u}$.

Любой непрерывной операции (*функтору*) T на категории векторных пространств однозначно соответствует непрерывный функтор на категории В. р. над B; таким образом строятся расслоения, ассоциированные с данным В. р.: тензорные расслоения, В. р. морфизмов $\mathrm{Hom}_B(\pi,\pi')$ и, в частности, сопряженное В. р. π^*, внешние степени В. р. и т. д., сечения к-рых наделяют В. р. дополнительными структурами, широко используемыми в приложениях.

Для В. р. π и π' определяются прямая сумма (с у м м а У и т н и) $\pi\oplus\pi'$ и тензорное произведение $\pi\otimes\pi'$,— относительно этих операций множество классов Vekt_B, изоморфных над B, В. р. образуют полукольцо, играющее важную роль в построении *K-функтора*; так, если для В. р. π и π' существуют тривиальные В. р. θ и θ' такие, что В. р. $\pi\oplus\theta$ и $\pi'\oplus\theta'$ изоморфны (т. е. π и π' стабильно эквивалентны), то их образы в пополнении $K(B)$ полукольца Vekt_B совпадают, при этом существование обратного В. р. для любого В. р. над паракомпактным пространством влечет совпадение кольца $K(B)$ и множества классов стабильной эквивалентности В. р.

Для каждого В. р. $\pi:X\to B$ над паракомпактным пространством B существует сечение β В. р.

$$\pi^*\oplus\pi^*=\mathrm{Hom}(\pi\oplus\pi,\ P),$$

где P — тривиальное одномерное В. р., являющееся на каждом слое $\pi^{-1}(b)$ положительно определенной формой, т. е. π — метризуемое; это позволяет установить, в частности, расщепляемость любой точной последовательности В. р. $0\to\xi\xrightarrow{u}\pi\xrightarrow{v}\zeta\to 0$, в которой π метризовано,— существование такого морфизма $w:\xi\oplus\zeta\to\pi$, что $wi=u$, $vw=j$, причем i — вложение в первое слагаемое, j — проекция на второе слагаемое.

Отождествлением в каждом слое $\pi^{-1}(b)$ В. р. $\pi:X\to B$ точек, лежащих на одной прямой, проходящей через 0, получается расслоение $\pi_0:\Pi_{(\pi)}\to B$, ассоциированное

с В. р. π и наз. его *проективизацией*; слоем π_0 является проективное пространство $\Pi(V)$, ассоциированное с V. С помощью этого расслоения изучаются *Тома пространства* $T(\pi)=\Pi(\pi\bigoplus\theta)/\Pi(\pi)$, используемые для гомотопической интерпретации классов бордантных многообразий, характеристических классов В. р., описывающих гомологические свойства многообразий, и т. д.

Понятие В. р. обобщается на случай, когда слой является бесконечномерным векторным пространством; при этом следует различать разные топологии пространства морфизмов $\mathrm{Hom}(\pi, \pi')$, вносить соответствующие изменения в определение точности морфизмов и их последовательностей, а также в построение В. р., ассоциированных с непрерывными функторами на категории бесконечномерных векторных пространств.

Лит.: [1] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973; [2] Атья М., Лекции по K-теории, пер. с англ., М., 1967; [3] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967; [4] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [5] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [6] Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1973. *А. Ф. Щекутьев.*

ВЕКТОРНО-ТОЧЕЧНАЯ АКСИОМАТИКА — аксиоматика n-мерного аффинного пространства R^n, первичными понятиями к-рой являются «точка» и «вектор»; связь между ними реализуется с помощью сопоставления парам точек однозначно определенного вектора. Выполняются следующие аксиомы.

I. Множество всех векторов пространства R^n есть n-мерное векторное пространство V^n.

II. Каждые две точки A и B (данные в определенном порядке) определяют единственный вектор $\boldsymbol{u}$.

III. Если даны произвольный вектор $\boldsymbol{u}$ и произвольная точка A, то существует единственная точка B такая, что $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{AB}$.

IV. Если $\boldsymbol{u}_1=\overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{u}_2=\overrightarrow{BC}$, то $\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2=\overrightarrow{AC}$.

Пара «точка A и вектор $\boldsymbol{u}$» наз. «вектором $\boldsymbol{u}$, приложенным к точке A» (или «закрепленным в этой точке»); сама точка A наз. начальной точкой приложенного к ней вектора $\boldsymbol{u}$, а точка B (однозначно определенная парой A, $\boldsymbol{u}$) наз. концом вектора $\boldsymbol{u}$ (приложенного к точке A).

Произвольно данный вектор $\boldsymbol{u}$ порождает вполне определенное взаимно однозначное отображение множества всех точек пространства R^n на себя. Это отображение, называемое *сдвигом* пространства R^n на вектор $\boldsymbol{u}$, состоит в том, что каждой точке $A\in R^n$ ставится в соответствие конец B приложенного к точке A вектора $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{AB}$.

Лит.: [1] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии..., М., 1968; [2] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963. *А. Б. Иванов.*

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ — раздел *векторного исчисления*, в к-ром изучаются *векторные поля* и *скалярные поля*.

Одним из основных понятий В. а. для изучения скалярных полей является градиент. Скалярное поле $u(M)$ наз. дифференцируемым в точке M области D, если приращение поля Δu в точке M может быть представлено в виде:

$$\Delta u=f(\Delta\boldsymbol{r})+o(\rho),$$

где $\Delta\boldsymbol{r}$ — вектор, соединяющий точку M с M', $\rho=\rho(M, M')$ — расстояние между точками M и M', а $f(\Delta\boldsymbol{r})$ — линейная форма относительно вектора $\Delta\boldsymbol{r}$. Линейная форма $f(\Delta\boldsymbol{r})$ единственным образом может быть представлена в следующем виде:

$$f(\Delta\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{g}, \Delta\boldsymbol{r}),$$

где $\boldsymbol{g}$ — не зависящий от $\Delta\boldsymbol{r}$ (т. е. выбора точки M')

вектор. Вектор $\boldsymbol{g}$ наз. градиентом скалярного поля и обозначается символом grad u. В случае, когда скалярное поле дифференцируемо в каждой точке нек-рой области, grad u является векторным полем. Градиент всегда направлен ортогонально линии (поверхности) уровня $u(M)=\text{const}$ скалярного поля u с производной по направлению $\boldsymbol{e}$ связан соотношением:

$$\frac{\partial u}{\partial e} = (\text{grad}\, u,\ \boldsymbol{e}).$$

Для изучения векторных полей используется понятие дивергенции и ротора. Пусть векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ наз. дифференцируемым в точке M нек-рой области D, т. е. приращение поля $\Delta\boldsymbol{a}$ в точке M единственным образом может быть представлено в виде:

$$\Delta\boldsymbol{a} = A\Delta\boldsymbol{r} + o(|\,\Delta\boldsymbol{r}\,|),$$

где $\Delta\boldsymbol{r}=|MM'|$, A — линейный оператор, не зависящий от $\Delta\boldsymbol{r}$ (от выбора точки M'). Дивергенцией $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ наз. следующий скалярный инвариант линейного оператора A:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} \equiv (\boldsymbol{r}^i,\ A\boldsymbol{r}_i), \qquad (*)$$

где $\boldsymbol{r}^i$, $\boldsymbol{r}_i$ — взаимные базисы $(\boldsymbol{r}_i,\ \boldsymbol{r}^k)=\delta_i^k$ (δ_i^k — символ Кронекера). Если $\boldsymbol{a}(M)$ — поле скоростей в установившемся потоке несжимаемой жидкости, то $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ в точке M означает интенсивность источника ($\operatorname{div}\boldsymbol{a}>0$) или стока ($\operatorname{div}\boldsymbol{a}<0$), находящихся в точке M, или отсутствие их ($\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$).

Вихрем (ротором) $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ наз. следующий векторный инвариант линейного оператора A из $(*)$:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} \equiv [\boldsymbol{r}_i,\ A\boldsymbol{r}^i],$$

где $\boldsymbol{r}^i$, $\boldsymbol{r}_i$ — взаимные базисы. Вихрь векторного поля может быть интерпретирован как векторная «вращательная составляющая» этого поля.

Для векторных и скалярных полей класса C^2 возможны повторные операции, напр.:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0,$$
$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0,$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a},$$
$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u,$$

где Δ — оператор Лапласа.

Градиент, дивергенция и вихрь обычно наз. основными дифференциальными операциями В. а. О свойствах основных дифференциальных операций В. а. и записи в специальных системах координат см. *Вихрь*, *Градиент*, *Дивергенция*.

В терминах основных операций В. а. могут быть записаны основные интегральные формулы, связывающие объемные, поверхностные и контурные интегралы. Пусть векторное поле непрерывно дифференцируемо в конечной связной области V, граница L — кусочно гладкая.

Пусть S — ограниченная, полная, кусочно гладкая двусторонняя поверхность с кусочно гладкой границей ∂S. Тогда справедлива *Стокса формула*:

$$\iint_S (\boldsymbol{n},\ \operatorname{rot}\boldsymbol{a})\,ds = \oint_{\partial S} (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{t})\,dl,$$

причем нормальный к S вектор $\boldsymbol{n}$ и касательный к ∂S вектор $\boldsymbol{t}$ должны определять согласованные ориентации поверхности S и края ∂S. Интеграл $\oint_{\partial S}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{t})dl$ наз. циркуляцией векторного поля $\boldsymbol{a}$ по кривой ∂S. Если циркуляция векторного поля по любой замкнутой кусочно гладкой кривой, расположенной в нек-рой области, равна нулю, то векторное поле наз. потенциальным в этой области. В односвязной области векторное поле потенциальное, если $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0$. Для

потенциального векторного поля существует так наз. скалярный потенциал — функция $v(M)$ такая, что $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad} v$; при этом

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{t})\, dl = v(B) - v(A),$$

где точки $A,\ B \in D$, AB — кусочно гладкая кривая, $\boldsymbol{t}$ — единичный вектор касательной к AB, dl — дифференциал дуги.

Пусть векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ непрерывно и дифференцируемо в конечной связной области V с кусочно гладкой границей ∂V, тогда справедлива *Остроградского формула*:

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, d\sigma = \iint_{\partial V} (\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{a})\, ds,$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор внешней нормали к ∂V.

Интеграл $\iint_{\partial V} (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}) ds$ наз. потоком векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ через поверхность ∂V. Если поток векторного поля через любую замкнутую кусочно гладкую несамопересекающуюся ориентированную поверхность, расположенную в V и представляющую собой границу нек-рой ограниченной подобласти области V, равен нулю, то векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ наз. соленоидальным в области V. Для того чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{div} \boldsymbol{a}=0$ во всех точках V. Для соленоидального векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ существует так наз. векторный потенциал — функция $A(M)$ такая, что

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{rot} A\,(M).$$

Если дивергенция и вихрь векторного поля определены в каждой точке M области D, то всюду в D векторное поле может быть представлено в виде суммы потенциального $\boldsymbol{a}_1(M)$ и соленоидального $\boldsymbol{a}_2(M)$ полей (теорема Гельмгольца):

$$\boldsymbol{a}(M) = \boldsymbol{a}_1(M) + \boldsymbol{a}_2(M).$$

Векторные поля, для к-рых $\operatorname{div} \boldsymbol{a}=0$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}=0$, наз. гармоническими. Потенциал v гармонич. поля удовлетворяет уравнению Лапласа. Скалярное поле v также наз. гармоническим.

Лит. см. при статье *Векторное исчисление*. *А. Б. Иванов.*

ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ АЛГЕБРА — произвольное семейство A функций $x=\{x(t)\}$ на топологич. пространстве T, принимающих в каждой точке $t \in T$ значения в нек-рой алгебре $A(t)$ (вообще говоря, зависящей от t), образующее алгебру относительно поточечных операций. Если каждая из алгебр $A(t)$ является банаховой алгеброй, то A наз. В.-ф. а. при условии, что для любой функции $x=\{x(t)\} \in A$ функция $t \to \| x(t) \|$ непрерывна на T. Важнейшие общие вопросы теории В.-ф. а.: описание идеалов в A в терминах идеалов в алгебрах $A(t)$ и установление критерия принадлежности функции $x=\{x(t)\}$ алгебре A; чаще всего рассматривается случай, когда A — банахова алгебра относительно нормы

$$\| x \| = \sup_{t \in T} \| x(t) \|_{A(t)},$$

а T — локально компактное или паракомпактное пространство. Особый интерес представляет В.-ф. а., связанная с семейством *C*-алгебр* $A(t)$; в этом частном случае известны некоммутативные аналоги *Вейерштрасса — Стоуна теоремы* и нек-рые теоремы о реализации C*-алгебр (в частности, C*-алгебр с непрерывным следом) в виде В.-ф. а. В свою очередь, эти теоремы позволяют в нек-рых случаях доказать коммутативность совокупности операторов, перестановочных с операторами симметричных представлений алгебр с инволюцией (континуальный аналог леммы Шура).

А. И. Штерн.

ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ, векторная функция,— функция $\boldsymbol{r}(t)$ аргумента t, значения к-рой принадлежат нек-рому векторному пространству V.

В конечномерном (размерности m) векторном пространстве V задание В.-ф. эквивалентно заданию ее координат $r_j(t)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, в нек-ром базисе $e_1, \ldots, e_m$ пространства V:

$$\boldsymbol{r}(t) = \sum_{j=1}^{m} r_j(t)\, \boldsymbol{e}_j. \qquad (1)$$

В.-ф. наз. непрерывной, дифференцируемой и т. п. (в точке или в области), если такими являются все функции $r_j(t)$. Для функции $\boldsymbol{r}(t)$ одного переменного справедливы формулы:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)}{h} = \sum_{j=1}^{m} r_j'(t)\, \boldsymbol{e}_j, \qquad (2)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{r}(t)\, dt = \sum_{j=1}^{m} \left(\int_{t_0}^{t_1} r_j(t)\, dt \right) \boldsymbol{e}_j, \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0) + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \boldsymbol{r}^{(k)}(t_0)\, (t - t_0)^k + \\ + \frac{1}{N!} \int_{t_0}^{t} (t - \tau)^N \boldsymbol{r}^{(N+1)}(\tau)\, d\tau$$

(формула Тейлора).

Множество концов векторов $\boldsymbol{r}(t)$, отложенных от нулевой точки пространства V, наз. годографом В.-ф. Первая производная $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ В.-ф. одного действительного переменного представляет собой вектор пространства V, касательный к годографу В.-ф. $\boldsymbol{r}(t)$ в точке $\boldsymbol{r}(t)$. Если $\boldsymbol{r}(t)$ есть закон движения материальной точки (t — время), то $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ является вектором мгновенной скорости точки в момент t. Вторая производная $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ — вектор ускорения точки.

Аналогично формулам (2), (3) определяются частные производные и кратные интегралы В.-ф. нескольких переменных. О понятиях векторного анализа для В.-ф. см. *Векторный анализ*, *Градиент*, *Дивергенция*, *Вихрь*.

В бесконечномерном векторном пространстве, имеющем базис, представление В.-ф. вида (1) является бесконечным рядом и покоординатное определение операций математического анализа встречает трудности, связанные с понятиями сходимости рядов, возможности почленного дифференцирования и интегрирования и т. п.

Лит.: [1] Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 9 изд., М., 1965; [2] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956.

Л. П. Купцов.

ВЕКУА МЕТОД в теории *бесконечно малых изгибаний*—метод, заключающийся в том, что нек-рые величины, характеризующие изгибание поверхностей положительной гауссовой кривизны K, в сопряженно-изотермической параметризации являются *обобщенными аналитическими функциями*. Это обстоятельство позволяет свести задачу исследования изгибания поверхностей переменной $K>0$ к определенной задаче для поверхностей с $K=\text{const}>0$, бесконечно малые изгибания к-рых описываются обычными аналитич. функциями, и тем самым установить далеко идущую аналогию в свойствах изгибаний поверхностей с переменной и постоянной положительной гауссовой кривизной.

Лит.: [1] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959.

М. И. Войцеховский.

ВЕЛИЧИНА — одно из основных математич. понятий, смысл к-рого с развитием математики подвергался ряду обобщений.

I. Еще в «Началах» Евклида (3 в. до н. э.) были отчетливо сформулированы свойства В., наз. теперь, для отличия от дальнейших обобщений, положительными скалярными величинами. Это первоначальное понятие В. является непосредственным обобщением более конкретных понятий: длины, площа-

ди, объема, массы и т. п. Каждый конкретный род В. связан с определенным способом сравнения физич. тел или др. объектов. Напр., в геометрии отрезки сравниваются при помощи наложения, и это сравнение приводит к понятию длины: два отрезка имеют одну и ту же длину, если при наложении они совпадают; если же один отрезок накладывается на часть другого, не покрывая его целиком, то длина первого меньше длины второго. Общеизвестны более сложные приемы, необходимые для сравнения плоских фигур по площади или пространственных тел по объему.

В соответствии со сказанным, в пределах системы всех однородных В. (т. е. в пределах системы всех длин или всех площадей, всех объемов) устанавливается отношение неравенства: две В. a и b одного и того же рода или совпадают ($a=b$), или первая меньше второй ($a<b$), или вторая меньше первой ($b<a$). Общеизвестно также в случае длин, площадей, объемов и то, каким образом устанавливается для каждого рода В. смысл операции сложения. В пределах каждой из рассматриваемых систем однородных В. отношение $a<b$ и операция $a+b=c$ обладают следующими свойствами:

1) каковы бы ни были a и b, имеет место одно и только одно из трех соотношений: или $a=b$, или $a<b$, или $b<a$;

2) если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$ (транзитивность отношений «меньше», «больше»);

3) для любых двух В. a и b существует однозначно определенная В. $c=a+b$;

4) $a+b=b+a$ (коммутативность сложения);

5) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (ассоциативность сложения);

6) $a+b>a$ (монотонность сложения);

7) если $a>b$, то существует одна и только одна В. c, для к-рой $b+c=a$ (возможность вычитания);

8) каковы бы ни были В. a и натуральное число n, существует такая В. b, что $nb=a$ (возможность деления);

9) каковы бы ни были В. a и b, существует такое натуральное число n, что $a<nb$. Это свойство наз. а к с и о м о й Е в д о к с а, или а к с и о м о й А р х и м е д а. В нем вместе с более элементарными свойствами 1) — 8) основана теория измерения В., развитая древнегреческими математиками.

Если взять к.-л. длину l за единичную, то система s' всех длин, находящихся в рациональном отношении к l, удовлетворяет требованиям 1) — 9). Существование несоизмеримых отрезков (открытие к-рых приписывается Пифагору, 6 в. до н. э.) показывает, что система s' еще не охватывает системы s всех вообще длин.

Чтобы получить вполне законченную теорию В., к требованиям 1) — 9) надо присоединить еще ту или иную дополнительную аксиому непрерывности, напр.:

10) если последовательности величин $a_1<a_2<\ldots<\ldots<b_2<b_1$ обладают тем свойством, что $b_n-a_n<c$ для любой В. c при достаточно большом номере n, то существует единственная В. x, к-рая больше всех a_n и меньше всех b_n.

Свойства 1) — 10) и определяют полностью современное понятие системы положительных скалярных В. Если в такой системе выбрать к.-л. В. l за единицу измерения, то все остальные В. системы однозначно представляются в виде $a=\alpha l$, где α — положительное действительное число.

II. Рассмотрение направленных отрезков на прямой, скоростей, могущих иметь два противоположных направления, и т. п. В. естественно приводит к тому обобщению понятия скалярной В., к-рое является основным в механике и физике. Система скалярных В. в этом понимании включает в себя, кроме положительной, В., нуль и отрицательную В. Выбирая в такой системе к.-л. положительную величину l за единицу измерения, выражают все остальные В. системы в виде $a=\alpha l$, где α — действительное число, положительное, отрица-

тельное или равно нулю. Конечно, систему скалярных В. в этом понимании можно охарактеризовать и аксиоматически, не опираясь на понятие числа. Для этого пришлось бы несколько изменить требования 1) — 10), к-рыми выше охарактеризовано понятие положительной скалярной В.

III. В более общем смысле слова величинами называются *векторы*, *тензоры* и др. «нескалярные величины». Такие В. можно складывать, но отношение неравенства ($a<b$) для них теряет смысл.

IV. В нек-рых более отвлеченных математич. исследованиях играют известную роль «неархимедовы» В., к-рые имеют с обычными скалярными В. то общее, что для них сохраняются обычные свойства неравенств, но аксиома 9) не выполняется (для скалярных В. в смысле пункта II она сохраняется с оговоркой, что $b>0$).

V. Так как система действительных положительных чисел удовлетворяет перечисленным выше свойствам 1) — 10), а система всех действительных чисел обладает всеми свойствами скалярных В., то вполне законно сами действительные числа называть величинами. Это особенно принято при рассмотрении п е р е м е н н ы х В. Если какая-либо конкретная В., напр. длина l нагреваемого металлич. стержня, изменяется во времени, то меняется и измеряющее ее число $x=l/l_0$ (при постоянной единице измерения l_0). Само это меняющееся во времени число x принято называть переменной В. и говорить, что x принимает в какие-либо последовательные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ «числовые значения» $x_1, x_2, \ldots$. В традиционной математич. терминологии говорить о «переменных числах» не принято. Однако логичнее такая точка зрения: числа, как и длины, объемы и т. п., являются частными случаями В. и, как всякие В., могут быть и переменными, и постоянными. Столь же законно и рассмотрение переменных векторов, тензоров и т. п. *А. Н. Колмогоров.*

ВЕННА ДИАГРАММА — графический способ изображения формул математич. логики, прежде всего формул исчисления высказываний. В. д. n переменных $a_1, \ldots, a_n$ классич. логики высказываний представляет собой такой набор замкнутых контуров $C_1, \ldots, C_n$ (гомеоморфных окружностям), к-рый разбивает плоскость на 2^n областей, причем нек-рые из этих областей (например, $v_1, \ldots, v_k$, $0\leqslant k\leqslant 2^n$) отмечены. Каждой отмеченной области V_i, $0<i\leqslant k$, ставится в соответствие формула $B_i=b_1\&b_2\&\ldots\&b_n$, где b_j, $0<j\leqslant n$, есть a_j, если v_i лежит внутри контура C_j, и b_j есть $\neg a_j$ в противном случае. Диаграмме в целом соответствует формула $B_1\vee B_2\vee\ldots\vee B_n$. Напр., В. д., изображенной на рис., соответствует формула

$$(\neg a_1\,\&\,\neg a_2\,\&\,\neg a_3)\vee(a_1\,\&\,\neg a_2\,\&\,a_3)\vee(\neg a_1\,\&\,a_2\,\&\,\neg a_3).$$

Если отмеченных областей нет ($k=0$), то диаграмме сопоставляется тождественно ложная формула, напр. $a_1\&\neg a_1$. В логике высказываний В. д. используются для решения проблемы разрешения, проблемы вывода всех возможных попарно неэквивалентных логич. следствий из данных посылок и др. Логика высказываний может быть построена в виде операций над В. д., сопоставленных логич. операциям.



Аппарат диаграмм был предложен Дж. Венном [1] для решения задач логики классов. Метод В. д. распространен на классич. исчисление многоместных предикатов. В. д. находят применение в приложениях математич. логики и теории автоматов, в частности для решения задач теории нейронных сетей.

Лит.: [1] Venn J., Symbolic logic, 2 ed., L., 1894; [2] Кузичев А. С., Диаграммы Венна, М., 1968.

А. С. Кузичев.

ВЕРБАЛЬНАЯ КОНГРУЭНЦИЯ — пересечение всех конгруэнций θ алгебры $\boldsymbol{A}$, факторалгебры $\boldsymbol{A}/\theta$ по к-рым принадлежат нек-рому фиксированному многообразию Ω-алгебр. Конгруэнция θ произвольной алгебраич. системы $\boldsymbol{A}=\langle A,\ \Omega\rangle$ наз. вербальной, если существует многообразие $\mathfrak{M}$ Ω-систем, для к-рого каноническое отображение $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}/\theta$ является $\mathfrak{M}$-морфизмом. В. к. является *вполне характеристической конгруэнцией*. Если $\boldsymbol{F}$ — свободная Ω-система в нек-ром многообразии $\mathfrak{B}$, то и, обратно, всякая вполне характеристическая конгруэнция η в $\boldsymbol{F}$ является В. к. относительно многообразия $\mathfrak{M}$, порожденного факторсистемой $\boldsymbol{F}/\eta$.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970.

Д. М. Смирнов.

ВЕРБАЛЬНАЯ ПОДГРУППА — подгруппа $V(G)$ группы G, порожденная всевозможными значениями всех *слов* из нек-рого множества $V=\{f_\nu(x_1,\ \ldots,\ x_{n_\nu})|\nu\in I\}$, когда $x_1,\ x_2,\ \ldots$ независимо друг от друга пробегают всю группу G. В. п. нормальна; конгруэнция, определяемая с помощью В. п. на группе, является *вербальной конгруэнцией* (см. также *Алгебраических систем многообразие*).

Примеры В. п.: 1) коммутант G' группы G, определяемый коммутатором $[x,\ y]=x^{-1}y^{-1}xy$; 2) n-й коммутант $G^{(n)}=(G^{(n-1)})'$; 3) члены нижнего центрального ряда

$$\Gamma_1(G)=G\supseteq\Gamma_2(G)\supseteq\ldots\supseteq\Gamma_n(G)\supseteq\ldots,$$

где $\Gamma_n(G)$ — В. п., определяемая коммутатором

$$[x_1,\ \ldots,\ x_n]=[[x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}],\ x_n];$$

4) степень G^n группы G, определяемая словом x^n.

При любом гомоморфизме φ справедливо равенство $V(G)\varphi=V(G\varphi)$. В частности, $V(G)$ — *вполне характеристическая подгруппа* в G. Обратное верно для свободных групп, но не в общем случае: пересечение двух В. п. может и не быть В. п. Для прямого произведения групп

$$V(\Pi\times G_i)=\Pi\times V(G_i),$$

что, однако, уже неверно при переходе к декартову произведению.

Особо важную роль играют В. п. свободной группы X счетного ранга. Они составляют (дедекиндову) подрешетку решетки всех ее подгрупп. В. п. обладает свойством «монотонности»: если $V(X)\neq E$ и $V(R)\supseteq V(S)$, где $R\lhd X$, $S\lhd X$ ($R\lhd X$ означает, что R является нормальным делителем группы X), то и $R\supseteq S$. В частности, $V(R)=V(S)$ влечет $R=S$.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Нейман Х., Многообразия групп, пер. с англ., М., 1969.

О. Н. Головин.

ВЕРБАЛЬНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ групп G_i, $i\in I$,— факторгруппа $F/(V(F)\bigcap C)$, где F — *свободное произведение* групп G_i, $i\in I$, V — нек-рое множество слов, $V(F)$ — вербальная V-подгруппа (см. *Вербальная подгруппа*) группы F, а C — декартова подгруппа (т. е. ядро естественного эпиморфизма F на прямое произведение тех же групп). Как операция на классе групп В. п. ассоциативно, а в пределах соответствующего многообразия групп и свободно.

О. Н. Головин.

ВЕРЗОР, версор,— *аффинор*, производящий поворот вектора на прямой угол.

ВЕРИФИКАЦИЯ — процесс проверки истинности *суждений*. В более узком смысле — процесс проверки истинности формул специального вида нек-рого логико-математич. языка.

А. Г. Драгалин.

ВЕРОНЕЗЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — специальное регулярное отображение проективного пространства; наз-

вано в честь Дж. Веронезе (G. Veronese). Пусть n, m — целые положительные числа, $\nu_{nm}=C^n_{n+m}-1$, а $\boldsymbol{P}^n$ $\boldsymbol{P}^{\nu_{nm}}$ — проективные пространства над произвольным полем (или над кольцом целых чисел), рассматриваемые как схемы, $u_0, \ldots, u_n$ — проективные координаты в $\boldsymbol{P}^n$, $v_{i_0\ldots i_n}$, $i_0+\ldots+i_n=m$, — проективные координаты в $\boldsymbol{P}^{\nu_{nm}}$. Отображение Веронезе есть морфизм

$$v_m: \boldsymbol{P}^n \longrightarrow \boldsymbol{P}^{\nu_{nm}},$$

задаваемый формулами $v_{i_0\ldots i_n}=u_0^{i_0}\ldots u_n^{i_n}$, $i_0+\ldots+i_n=m$. В инвариантных терминах В. о. может быть определено как регулярное отображение, задаваемое полной линейной системой $|mH|$, где H — гиперплоское сечение в $\boldsymbol{P}^n$. В. о. является замкнутым вложением, его образ $v_m(\boldsymbol{P}^n)$ наз. многообразием Веронезе и задается уравнениями

$$v_{i_0\ldots i_n}v_{j_0\ldots j_n}=v_{k_0\ldots k_n}v_{r_0\ldots r_n},$$

где $i_0+j_0=k_0+r_0$, $\ldots$, $i_n+j_n=k_n+r_n$. Напр., $v_2(\boldsymbol{P}^1)$ есть кривая с уравнением $x_0x_1=x_2^2$ в $\boldsymbol{P}^2$. Степень многообразия Веронезе равна m^n. Для любой гиперповерхности

$$F=\sum_{i_0+\ldots+i_n=m} a_{i_0\ldots i_n}u_0^{i_0}\ldots u_n^{i_n}=0$$

в $\boldsymbol{P}^n$ ее образ относительно В. о. v_m является сечением многообразия Веронезе $v_m(\boldsymbol{P}^n)$ гиперплоскостью

$$\sum_{i_0+\ldots+i_n=m} a_{i_0\ldots i_n}v_{i_0\ldots i_n}=0.$$

Этот факт позволяет использовать В. о. для сведения нек-рых задач о гиперповерхностях к случаю гиперплоских сечений.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.
И. В. Долгачев.

ВЕРОЯТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ, срединное отклонение,— характеристика рассеяния *распределения вероятностей*. Для непрерывно распределенной симметричной случайной величины X В. о. B определяется условием:

$$\mathsf{P}\{|X-m|<B\}=\mathsf{P}\{|X-m|>B\}=\frac{1}{2}, \qquad (*)$$

где m — медиана X (совпадающая в этом случае с математич. ожиданием, если оно существует). Для *нормального распределения* существует простая связь В. о. со стандартной мерой рассеяния — квадратичным отклонением σ:

$$\Phi\left(\frac{B}{\sigma}\right)=\frac{3}{4},$$

где $\Phi(x)$ — функция нормального (0,1) распределения. Приближенно $B=0{,}6745\sigma$.
А. В. Прохоров.

ВЕРОЯТНОСТЕЙ ТЕОРИЯ — математическая наука, позволяющая по *вероятностям* одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных к.-л. образом с первыми.

Утверждение о том, что к.-л. событие наступает с вероятностью, равной, напр., 1/2, еще не представляет само по себе окончательной ценности, т. к. мы стремимся к достоверному знанию. Окончательную познавательную ценность имеют те результаты В. т., к-рые позволяют утверждать, что вероятность наступления к.-л. события A весьма близка к единице или (что то же самое) вероятность ненаступления события A весьма мала. В соответствии с принципом «пренебрежения достаточно малыми вероятностями» такое событие справедливо считают практически достоверным. Ниже (в разделе Предельные теоремы) показано, что имеющие научный и практич. интерес выводы такого рода обычно основаны на допущении, что наступление или ненаступле-

ние события A зависит от большого числа случайных, мало связанных друг с другом факторов (см. по этому поводу ст. *Больших чисел закон*). Поэтому можно также сказать, что В. т. есть математич. наука, выясняющая закономерности, к-рые возникают при взаимодействии большого числа случайных факторов.

Предмет теории вероятностей. Для описания закономерной связи между нек-рыми условиями S и событием A, наступление или ненаступление к-рого при данных условиях может быть точно установлено, естествознание использует обычно одну из следующих двух схем.

а) При каждом осуществлении условий S наступает событие A. Такой вид, напр., имеют все законы классич. механики, к-рые утверждают, что при заданных начальных условиях и силах, действующих на тело или систему тел, движение будет происходить однозначно определенным образом.

б) При условиях S событие A имеет определенную вероятность $P(A|S)$, равную p. Так, напр., законы радиоактивного излучения утверждают, что для каждого радиоактивного вещества существует определенная вероятность того, что из данного количества вещества за данный промежуток времени распадается к.-л. число N атомов.

Назовем частотой события A в данной серии из n испытаний (т. е. из n повторных осуществлений условий S) отношение $p=m/n$ числа m тех испытаний, в к-рых A наступило, к общему их числу n. Наличие у события A при условиях S определенной вероятности, равной p, проявляется в том, что в почти каждой достаточно длинной серии испытаний частота события A приблизительно равна p. Всякая математич. модель, предназначенная для схематич. описания связи между условиями S и случайным событием A, обычно включает также определенные допущения о характере и степени зависимости испытаний. После того как такие дополнительные допущения (из к-рых наиболее часто встречающимся является независимость испытаний, см. раздел Основные понятия теории вероятностей) сделаны, вышеприведенное расплывчатое утверждение о близости частоты к вероятности может быть количественно уточнено.

Статистич. закономерности, т. е. закономерности, описываемые схемой типа б), были впервые обнаружены на примере азартных игр, подобных игре в кости. Очень давно известны также статистич. закономерности рождения, смерти (напр., вероятность новорожденному быть мальчиком равна 0,515). Конец 19 в. и 1-я пол. 20 в. отмечены открытием большого числа статистич. закономерностей в физике, химии, биологии и др. науках. Следует отметить, что статистич. закономерности возникают и в схемах, не связанных непосредственно с понятием случая, напр., в распределении цифр в таблицах функций и т. п., см. *Случайные и псевдослучайные числа*; это обстоятельство используют, в частности, при «моделировании» случайных явлений, см. *Статистических испытаний метод*.

Возможность применения методов В. т. к изучению статистич. закономерностей, относящихся к весьма далеким друг от друга областям науки, основана на том, что вероятности событий всегда удовлетворяют нек-рым простым соотношениям, о к-рых сказано ниже (см. раздел Основные понятия теории вероятностей). Изучение свойств вероятностей событий на основе этих простых соотношений и составляет предмет В. т.

Основные понятия теории вероятностей. Наиболее просто определяются основные понятия В. т. как математич. дисциплины в рамках так наз. элементарной теории вероятностей. Каждое испытание T, рассматриваемое в элементарной В. т., таково, что оно заканчивается одним и только одним из исходов, или, как говорят, одним из элементар-

ных событий $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$. С каждым исходом ω_k связывается неотрицательное число p_k — вероятность этого исхода. Числа p_k должны при этом в сумме давать единицу. Рассматриваются затем события A, заключающиеся в том, что

«наступает или ω_i, или ω_j, ..., или ω_k».

Исходы $\omega_i, \omega_j, \ldots, \omega_k$ наз. благоприятствующими A, и, по определению, полагают вероятность $P(A)$ события A, равной сумме вероятностей благоприятствующих ему исходов:

$$P(A) = p_i + p_j + \ldots + p_k. \qquad (1)$$

Частный случай $p_1 = p_2 = \ldots = p_s = 1/s$ приводит к формуле

$$P(A) = \frac{r}{s}. \qquad (2)$$

Формула (2) выражает так наз. классическое определение вероятности, в соответствии с к-рым вероятность к.-л. события A равна отношению числа r исходов, благоприятствующих A, к числу s всех «равновозможных» исходов. Вычисление вероятностей сводится при этом к подсчету числа благоприятствующих событию A исходов и часто оказывается трудной комбинаторной задачей (см. *Комбинаторные задачи* в теории вероятностей).

Пример. При бросании двух игральных костей каждый из 36 возможных исходов может быть обозначен (i, j), где i — число очков, выпадающее на первой кости, j — на второй. Исходы предполагаются равновероятными. Событию A — «сумма очков равна 4», благоприятствуют три исхода (1; 3), (2; 2), (3; 1). Следовательно, $P(A) = 3/36 = 1/12$.

Вопрос о том, как определяются численные значения вероятностей p_k в данной конкретной задаче, лежит по существу за пределами В. т. как чисто математич. дисциплины. В одних случаях выбор этих значений производится на основе обработки результатов большого числа наблюдений. В других случаях возможно теоретич. предсказание вероятностей, с к-рыми те или иные события будут встречаться в данном испытании. Такое предсказание часто основывается на объективной симметрии связи между условиями, в к-рых производится испытание, и исходами этих испытаний, и приводит тогда к формуле (2). Пусть, напр., испытание состоит в подбрасывании игральной кости, представляющей собой кубик из однородного материала. Тогда можно предполагать, что с вероятностью 1/6 кость может упасть на каждую из своих граней. В этом примере предположение о равновероятности исходов находится в согласии с опытом. Такого рода примеры и послужили основой для классич. определения вероятности.

Более тонкое и глубокое объяснение причин равновероятности исходов в нек-рых специальных случаях дается так наз. методом произвольных функций. Суть этого метода можно пояснить следующим образом на примере бросания кости. Пусть опыт поставлен так, что случайные воздействия на кость со стороны воздуха можно считать пренебрежимо малыми. Тогда, если точно даны начальное положение, начальная скорость кости и ее механич. характеристики, движение может быть рассчитано по законам классич. механики, и результат опыта можно предсказать достоверно. Практически начальные условия не могут никогда быть фиксированы с абсолютной точностью и, напр., даже очень малые изменения начальной скорости приводят к другому результату, если только время t от момента подбрасывания до момента падения достаточно велико. Оказывается, что при очень широких допущениях относительно распределения вероятностей начальных значений (отсюда и название метода) вероятность каждого из шести возможных исходов стремится к 1/6 при $t \to \infty$.

Другой пример — тасование колоды карт с целью достижения равновероятности всех возможных расположений. Здесь переход от одного расположения карт к другому при очередном тасовании обычно носит вероятностный характер. Факт стремления к равновероятности устанавливается методами теории *Маркова цепей*.

Оба случая могут быть включены в общую эргодическую теорию.

Исходя из к.-л. данных событий, можно определить два новых события: их объединение (сумму) и совмещение (произведение). Событие B наз. объединением событий $A_1, A_2, \ldots, A_r$, если оно имеет вид:

«наступает или A_1, или A_2, ..., или A_r».

Событие C наз. совмещением событий $A_1, A_2, \ldots, A_r$, если оно имеет вид:

«наступает и A_1, и A_2, ..., и A_r».

Объединение событий обозначают знаком $\bigcup$, а совмещение — знаком $\bigcap$. Таким образом, пишут:

$$B = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_r, \quad C = A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_r.$$

События A и B наз. несовместными, если их одновременное осуществление невозможно, т. е. если не существует среди исходов испытания ни одного благоприятствующего и A, и B. Если события A_i отождествить со множествами благоприятствующих им исходов, то события B и C будут отождествляться с объединением и пересечением соответствующих множеств.

С введенными операциями связаны две основные теоремы В. т.— теоремы сложения и умножения вероятностей.

Теорема сложения вероятностей. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_r$ таковы, что каждые два из них несовместны, то вероятность их объединения равна сумме их вероятностей.

Так, в приведенном выше примере с бросанием двух костей событие B — «сумма очков не превосходит 4», есть объединение трех несовместных событий A_2, A_3, A_4, заключающихся в том, что сумма очков равна соответственно 2, 3, 4. Вероятности этих событий 1/36; 2/36; 3/36. По теореме сложения вероятность $P(B)$ равна

$$1/36 + 2/36 + 3/36 = 6/36 = 1/6.$$

Условную вероятность события B при условии A определяют формулой

$$P(B|A) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(A)},$$

что, как можно показать, находится в полном соответствии со свойствами частот. События $A_1, A_2, \ldots, A_r$ наз. независимыми, если условная вероятность каждого из них при условии, что какие-либо из остальных наступили, равна его «безусловной» вероятности (см. также *Независимость* в теории вероятностей).

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совмещения событий $A_1, A_2, \ldots, A_r$ равна вероятности события A_1, умноженной на вероятность события A_2, взятую при условии, что A_1 наступило, ..., умноженной на вероятность события A_r при условии, что $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$ наступили. Для независимых событий теорема умножения приводит к формуле:

$$P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_r) = P(A_1)\,P(A_2)\,\ldots\,P(A_r), \quad (3)$$

т. е. вероятность совмещения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Формула (3) остается справедливой, если в обеих ее частях нек-рые из событий заменить на противоположные им.

Пример. Производится 4 выстрела по цели с вероятностью попадания 0,2 при отдельном выстреле.

Попадания в цель при различных выстрелах предполагаются независимыми событиями. Какова вероятность попадания в цель ровно три раза?

Каждый исход испытания может быть обозначен последовательностью из четырех букв [напр., (у, н, н, у) означает, что при первом и четвертом выстрелах были попадания (успех), а при втором и третьем — попаданий не было (неудача)]. Всего будет $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ исходов. В соответствии с предположением о независимости результатов отдельных выстрелов следует для определения вероятностей этих исходов использовать формулу (3) и примечание к ней. Так, вероятность исхода (у, **н**, **н**, н) следует положить равной

$$0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}1024;$$

здесь $0{,}8 = 1 - 0{,}2$ — вероятность промаха при отдельном выстреле. Событию «в цель попадают три раза» благоприятствуют исходы (у, у, у, **н**), (у, у, **н**, у), (у, **н**, у, у), (**н**, у, у, у), вероятность каждого одна и та же:

$$0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = \ldots = 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}0064;$$

следовательно, искомая вероятность равна

$$4 \cdot 0{,}0064 = 0{,}0256.$$

Обобщая рассуждения разобранного примера, можно вывести одну из основных формул В. т.: если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы и имеют каждое вероятность p, то вероятность наступления ровно m из них равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}; \qquad (4)$$

здесь C_n^m обозначает число сочетаний из n элементов по m (см. *Биномиальное распределение*). При больших n вычисления по формуле (4) становятся затруднительными. Пусть в предыдущем примере число выстрелов равно 100, и ставится вопрос об отыскании вероятности x того, что число попаданий лежит в пределах от 8 до 32. Применение формулы (4) и теоремы сложения дает точное, но практически мало пригодное выражение искомой вероятности

$$x = \sum_{m=8}^{32} C_{100}^m (0{,}2)^m (0{,}8)^{100-m}.$$

Приближенное значение вероятности x можно найти по *Лапласа теореме*

$$x \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^{+3} e^{-z^2/2} dz = 0{,}9973,$$

причем ошибка не превосходит 0,0009. Найденный результат показывает, что событие $8 \leqslant m \leqslant 32$ практически достоверно. Это самый простой, но типичный пример использования *предельных теорем* В. т.

К числу основных формул элементарной В. т. относится также так наз. формула полной вероятности: если события $A_1, A_2, \ldots, A_r$ попарно несовместны и их объединение есть достоверное событие, то для любого события B его вероятность равна сумме

$$P(B) = \sum_{k=1}^{r} P(B|A_k) P(A_k).$$

Теорема умножения вероятностей оказывается особенно полезной при рассмотрении составных испытаний. Говорят, что испытание T составлено из испытаний $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}, T_n$, если каждый исход испытания T есть совмещение нек-рых исходов $A_i, B_j, \ldots, X_k, Y_l$ соответствующих испытаний $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}, T_n$. Из тех или иных соображений часто бывают известны вероятности

$$P(A_i),\ P(B_j|A_i),\ \ldots,\ P(Y_l|A_i \cap B_j \cap \ldots \cap X_k). \qquad (5)$$

По вероятностям (5) с помощью теоремы умножения могут быть определены вероятности $P(E)$ для всех исходов E составного испытания, а вместе с тем и ве-

роятности всех событий, связанных с этим испытанием (подобно тому, как это было сделано в разобранном выше примере). Наиболее значительными с практич. точки зрения представляются два типа составных испытаний: а) составляющие испытания н е з а в и с и м ы, т. е. вероятности (5) равны безусловным вероятностям $P(A_i)$, $P(B_j)$, ..., $P(X_k)$, $P(Y_l)$; б) на вероятности исходов к.-л. испытания влияют результаты лишь непосредственно предшествующего испытания, т. е. вероятности (5) равны соответственно: $P(A_i)$, $P(B_j|A_i)$, ..., $P(Y_l|X_k)$. В этом случае говорят об испытаниях, с в я з а н н ы х в ц е п ь М а р к о в а. Вероятности всех событий, связанных с составным испытанием, вполне определяются здесь начальными вероятностями $P(A_i)$ и переходными вероятностями $P(B_j|A_i)$, ..., $P(Y_l|X_k)$ (см. *Марковские процессы*).

С л у ч а й н ы е в е л и ч и н ы. Если каждому исходу испытания T поставлено в соответствие число x_r, говорят, что задана с л у ч а й н а я в е л и ч и н а X. Среди чисел x_1, x_2, ..., x_s могут быть и равные; совокупность р а з л и ч н ы х значений x_r при $r=1, 2, \ldots, s$ называют совокупностью в о з м о ж н ы х значений случайной величины. Набор возможных значений случайной величины и соответствующих им вероятностей наз. р а с п р е д е л е н и е м в е р о я т н о с т е й случайной величины. Так, в примере с бросанием двух костей с каждым исходом испытания (i, j) связывается случайная величина $X=i+j$ — сумма очков на обеих костях. Возможные значения суть 2, 3, 4, ..., 11, 12; соответствующие вероятности равны 1/36, 2/36, 3/36, ..., 2/36, 1/36.

При одновременном изучении нескольких случайных величин вводится понятие их совместного распределения, к-рое задается указыванием возможных значений каждой из них и вероятностей совмещения событий

$$\{X_1=x_1\},\ \{X_2=x_2\},\ \ldots,\ \{X_n=x_n\}, \qquad (6)$$

где x_k — какое-либо из возможных значений величины X_k. Случайные величины наз. н е з а в и с и м ы м и, если при любом выборе x_k события (6) независимы. С помощью совместного распределения случайных величин можно вычислить вероятность любого события, определяемого этими величинами, напр., события

$$a<X_1+X_2+\ldots+X_n<b$$

и т. п.

Часто вместо полного задания распределения вероятностей случайной величины предпочитают пользоваться небольшим количеством числовых характеристик. Из них наиболее употребительны *математическое ожидание* и *дисперсия* (см. также *Момент*, *Семиинвариант*).

В число основных характеристик совместного распределения нескольких случайных величин, наряду с математич. ожиданиями и дисперсиями этих величин, включаются коэффициенты *корреляции* и т. п. Смысл перечисленных характеристик в значительной степени разъясняется предельными теоремами (см. раздел Предельные теоремы).

Схема испытаний с конечным числом исходов недостаточна уже для самых простых применений В. т. Так, при изучении случайного разброса точек попаданий снарядов вокруг центра цели, при изучении случайных ошибок, возникающих при измерении к.-л. величины, и т. д. уже невозможно ограничиться испытаниями с конечным числом исходов. При этом в одних случаях результат испытания может быть выражен числом или системой чисел, в других — результатом испытания может быть функция (напр., запись изменения давления в данной точке атмосферы за данный промежуток времени), системы функций и т. п. Следует отметить, что многие данные выше определения и тео-

ремы с соответствующими изменениями приложимы и в этих более общих обстоятельствах, хотя способы задания распределения вероятностей изменяются (см. *Распределение вероятностей*, *Плотность вероятности*). Аналогом классич. «равновероятности исходов» здесь служит равномерное распределение рассматриваемых объектов в к.-л. области (именно его имеют в виду, говоря о наудачу взятой из данной области точке, о наудачу взятой секущей данной фигуры и т. п.).

Наиболее серьезное изменение претерпевает определение вероятности, к-рое в элементарном случае давалось формулой (2). В более общих схемах, о к-рых идет речь, события являются объединениями бесконечного числа элементарных событий, вероятность каждого из к-рого может быть равна нулю. В соответствии с этим свойство, выраженное теоремой сложения, не выводится из определения вероятности, а включается в него.

Наиболее распространенная в настоящее время логич. схема построения основ В. т. разработана в 1933 А. Н. Колмогоровым. Основные черты этой схемы следующие. При изучении к.-л. реальной задачи методами В. т. прежде всего выделяется множество U элементов u, называемых элементарными событиями. Всякое событие вполне описывается множеством благоприятствующих ему элементарных событий и потому рассматривается как нек-рое множество элементарных событий. С нек-рыми из событий A связываются определенные числа $P(A)$, называемые их вероятностями и удовлетворяющие условиям

1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

2) $P(U)=1$;

3) если события $A_1, \ldots, A_n$ попарно несовместны и A — их сумма, то

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

(аддитивность вероятности).

Для создания полноценной математич. теории требуют, чтобы область определения $P(A)$ была σ-алгеброй и чтобы условие 3) выполнялось и для бесконечных последовательностей попарно несовместных событий (счетная аддитивность вероятности). Свойства неотрицательности и счетной аддитивности есть основные свойства меры множества. В. т. может, таким образом, с формальной точки зрения рассматриваться как часть теории меры. Основные понятия В. т. получают при таком подходе новое освещение. Случайные величины превращаются в измеримые функции, их математич. ожидания — в абстрактные интегралы Лебега и т. п. Однако основные проблемы В. т. и теории меры различны. Основным, специфическим для В. т. является понятие независимости событий, испытаний, случайных величин. Наряду с этим В. т. тщательно изучает и такие объекты, как условные распределения, условные математические ожидания и т. п.

В отношении указанной выше схемы можно сделать следующие замечания. В соответствии с ней в основе каждой вероятностной модели лежит *вероятностное пространство*, рассматриваемое как тройка (Ω, S, P), где Ω — множество элементарных событий, S — выделенная в X σ-алгебра подмножеств, P — распределение вероятностей (счетно аддитивная нормированная мера) на S. Два достижения, связанных с этой схемой, — определение вероятностей в бесконечномерных пространствах (в частности, вероятностей, связанных с бесконечными последовательностями испытаний и случайными процессами) и общее определение *условных вероятностей* и условных математич. ожиданий (по отношению к данной случайной величине и т. п.).

При последующем развитии В. т. выяснилось, что указанное общее определение вероятностного пространства целесообразно ограничить. Так появились понятия совершенных распределений, плотных распределений и т. п. (см. *Распределение вероятностей*).

Известны и другие подходы к основным понятиям В. т., напр. аксиоматизация, при к-рой основным объектом становятся нормированные булевы алгебры событий. Основное преимущество (в предположении, что рассматриваемая алгебра полна в метрич. смысле) здесь состоит в том, что для любых направленных систем событий выполняются соотношения

$$P\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right) = \sup_{\alpha} P(A_\alpha), \quad A_\alpha \uparrow,$$

$$P\left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right) = \inf_{\alpha} P(A_\alpha), \quad A_\alpha \downarrow.$$

Возможна аксиоматизация понятия случайной величины как элемента нек-рой коммутативной алгебры, на к-рой определен линейный функционал (аналог математич. ожидания).

Предельные теоремы. При формальном изложении В. т. предельные теоремы появляются в виде своего рода надстройки над ее элементарными разделами, в к-рых все задачи имеют конечный, чисто арифметич. характер. Однако познавательная ценность В. т. раскрывается только предельными теоремами. Так, *Бернулли теорема* показывает, что при независимых испытаниях частота появления к.-л. события, как правило, мало отклоняется от его вероятности, а *Лапласа теорема* указывает вероятности тех или иных отклонений. Аналогично смысл таких характеристик случайной величины, как ее математич. ожидание и дисперсия, разъясняется законом больших чисел и центральной предельной теоремой (см. *Больших чисел закон*, *Больших чисел усиленный закон*, *Предельные теоремы* теории вероятностей).

Пусть

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \tag{7}$$

— независимые случайные величины, имеющие одно и то же распределение вероятностей с $\mathsf{E}X_k = a$, $\mathsf{D}X_k = \sigma^2$ и Y_n — среднее арифметическое первых n величин из последовательности (7):

$$Y_n = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n.$$

В соответствии с законом больших чисел, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства $|Y_n - a| \leqslant \varepsilon$ имеет при $n \to \infty$ пределом 1 и, таким образом, Y_n, как правило, мало отличается от a. Центральная предельная теорема уточняет этот результат, показывая, что отклонения Y_n от a приближенно подчинены нормальному распределению со средним 0 и дисперсией σ^2/n. Таким образом, для вычисления (в первом приближении) вероятностей тех или иных отклонений Y_n от a при больших n нет надобности знать во всех деталях распределение величин X_n; достаточно знать лишь их дисперсию. При необходимости увеличить точность приближения необходимо привлекать моменты более высокого порядка.

Эти утверждения могут быть с надлежащими изменениями распространены на случайные векторы (из конечномерных и нек-рых бесконечномерных векторных пространств). Условия независимости могут быть заменены условиями «слабой» (в том или ином смысле) зависимости X_n. Известны также предельные теоремы для распределений на группах, для распределений значений арифметич. функций и т. д.

В приложениях (в частности, в математич. статистике и статистич. физике) возникает необходимость аппроксимировать малые вероятности (событий типа $|Y_n - a| > \varepsilon$) с большой относительной точностью.

Это приводит к значительным поправкам в аппроксимации нормальным законом (см. *Больших отклонений вероятности*).

В 20-х гг. 20 в. было обнаружено, что даже в схеме последовательности одинаково распределенных и независимых случайных величин могут вполне естественным образом возникать предельные распределения, отличные от нормального. Так, напр., если X_1 — время до первого возвращения нек-рой случайно меняющейся системы в исходное положение, X_2 — время между первым и вторым возвращениями и т. д., то при очень общих условиях распределение суммы $X_1+\ldots+X_n$ (т. е. времени до n-го возвращения) после умножения на $n^{-1/\alpha}$ (α — постоянная, меньшая 1) сходится к некоторому предельному распределению. Таким образом, время до n-го возвращения растет, грубо говоря, как $n^{1/\alpha}$, т. е. быстрее n (в случае приложимости закона больших чисел оно было бы порядка n). Это обстоятельство видно уже в примере *Бернулли блуждания* (где проявляется и другой парадоксальный закон — *арксинуса закон*).

Основным методом доказательства предельных теорем является метод *характеристических функций* (и близкие к нему методы преобразований Лапласа и производящих функций). В ряде случаев необходимо обращение к методам теории функций комплексного переменного.

Механизм возникновения большинства предельных закономерностей может быть до конца понят лишь в связи с теорией случайных процессов.

Случайные процессы. В ряде физич. и химич. исследований последних десятилетий возникла потребность, наряду с одномерными и многомерными случайными величинами, рассматривать *случайные процессы*, т. е. процессы, для к-рых определена вероятность того или иного их течения. Примером случайного процесса может служить координата частицы, совершающей броуновское движение. В В. т. случайный процесс рассматривают обычно как однопараметрич. семейство случайных величин $X(t)$. В подавляющем числе приложений параметр t является временем, но этим параметром может быть, напр., произвольное независимое переменное и тогда обычно говорят о *случайной функции* (если t точка пространства, то — о *случайном поле*). В том случае, когда параметр t пробегает целочисленные значения, случайная функция наз. случайной последовательностью (или временны́м рядом). Подобно тому, как случайная величина характеризуется законом распределения, случайный процесс может быть охарактеризован совокупностью совместных законов распределения для $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., $X(t_n)$ для всевозможных моментов времени t_1, t_2, ..., t_n при любом $n>0$ (так наз. конечномерными распределениями). Наиболее интересные конкретные результаты теории случайных процессов получены в двух специальных направлениях — *марковские процессы* и *стационарные случайные процессы*; наряду с ними сильно повысился интерес к *мартингалам*.

Исторически первыми изучались марковские процессы. Случайный процесс $X(t)$ наз. марковским, если для любых двух моментов времени t_0 и t_1 (где $t_0<t_1$) условное распределение вероятностей $X(t_1)$ при условии, что заданы все значения $X(t)$ при $t\leqslant t_0$, зависит только от $X(t_0)$ (в силу этого марковские случайные процессы иногда наз. процессами без последействия). Марковские процессы являются естественным обобщением детерминированных процессов, рассматриваемых в классич. физике. В детерминированных процессах состояние системы в момент времени t_0 однозначно определяет ход процесса

в будущем; в марковских процессах состояние системы в момент времени t_0 однозначно определяет распределение вероятностей хода процесса при $t>t_0$, причем никакие сведения о ходе процесса до момента времени t_0 не изменяют это распределение.

Подобно тому, как изучение непрерывных детерминированных процессов сводится к дифференциальным уравнениям относительно функций, описывающих состояние системы, изучение непрерывных марковских процессов сводится к дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнениям относительно распределения вероятностей процесса.

Вторым крупным направлением случайных процессов является теория стационарных случайных процессов. Стационарность процесса, т. е. неизменность во времени его вероятностных закономерностей, налагает сильное ограничение на процесс и позволяет из одного этого допущения извлечь ряд важных следствий.

Для большей части теории достаточно предположения о стационарности в широком смысле, т. е. требования независимости от t математич. ожиданий $\mathsf{E}X(t)$ и $\mathsf{E}X(t)\,X(t+\tau)$. Из этого предположения вытекает возможность так наз. «спектрального разложения»

$$X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}dz(\lambda),$$

где $z(\lambda)$ — случайная функция с некоррелированными приращениями. Для стационарных процессов развиты способы наилучшей (в среднем квадратичном) линейной интерполяции, экстраполяции и фильтрации.

В последнее время выделен довольно широкий класс процессов, для к-рых эффективно решаются задачи наилучшей нелинейной фильтрации, интерполяции и экстраполяции (см. *Случайных процессов прогнозирование*, *Случайных процессов фильтрация*). Существенную часть соответствующего аналитич. аппарата составляют стохастические дифференциальные уравнения, стохастич. интегралы и мартингалы. Отличительное свойство мартингала $X(t)$ состоит в том, что условное математич. ожидание $X(t)$ при условии, что известно поведение процесса до момента $s<t$, равно $X(s)$.

Теория случайных процессов тесно связана с классич. проблематикой предельных теорем для сумм случайных величин. Те законы распределения, к-рые выступают при изучении сумм случайных величин как предельные, в теории случайных процессов являются точными законами распределения соответствующих характеристик. Этот факт позволяет доказывать многие предельные теоремы с помощью соответствующих случайных процессов.

В заключение следует добавить, что логически безупречное определение понятий, связанных со случайными процессами в рамках указанной выше аксиоматики создавало и создает много трудностей теоретико-множественного характера (связанных, напр., с определением вероятности, непрерывности или дифференцируемости и т. п. свойств случайных процессов, см. *Сепарабельный процесс*). Поэтому, в частности, в монографиях по теории случайных процессов около половины объема отводится анализу развития теоретико-множественных конструкций.

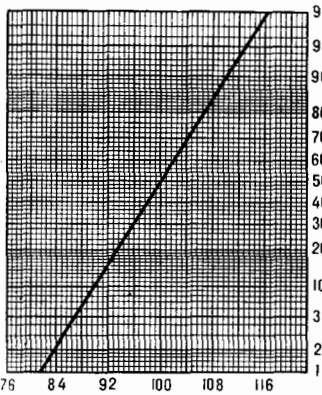
Лит.: [1] Bernoulli J., Ars conjectandi, opus posthumum, Basileae, 1713 (в рус. пер.— Четвертая часть сочинения Я. Бернулли, СПБ, 1913); [2] Moivre A. de, Doctrine of Chances, 3 ed., ..., 1756; [3] Laplace [P. S.], Théorie analityque des probabilites, 3 ed., P., 1886; [4] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2—3, М.—Л., 1947—48; [5] Liapounoff A., Nouvelle forme du théoréme sur la limite de probabilité, СПБ, 1901; [6] Марков А. А., Исследование замечательного случая зависимых испытаний, «Изв. АН, 6 серия», 1907, т. 1, № 3; [7] его же, Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [8] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.—Л., 1946; [9] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [10] Боровков А. А., Теория вероятностей, М., 1976; [11] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, 2 изд.,

пер. с англ., т. 1—2, М., 1967; [12] Poincaré, H., Calcul des probabilités, P., 1912; [13] Mises R., Wahrscheinlichkeitsrechnung..., W., 1931; [14] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Теория вероятностей, в кн.: Математика в СССР за тридцать лет. 1917—47», М.—Л., 1948; [15] Колмогоров А. Н., Теория вероятностей, в кн.: Математика в СССР за сорок лет. 1917—57, т. 1, М., 1959; [16] его же, Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [17] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973.

См. также лит. при статьях о разделах В. т.

Ю. В. Прохоров, Б. А. Севастьянов.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ БУМАГА нормальная — специальным образом разграфленная бумага, построенная так, что график функции *нормального распределения* изображается на ней прямой линией. Это достигается изменением шкалы на вертикальной оси (см. рис.). На свойстве «выпрямления» основан простой способ проверки гипотезы о принадлежности данной выборки к нормальной совокупности: если построенная на В. б. эмпирич. функция распределения хорошо приближается прямой линией, то можно с основанием полагать, что совокупность, из к-рой взята выборка, является приближенно нормальной. Достоинство этого метода состоит в том, что вывод о принадлежности к нормальной совокупности можно сделать без знания численных значений параметров гипотетич. распределения.



Проведенная линия — график функции нормального распределения со средним 100 и стандартным отклонением 8.

Лит.: [1] Арлей Н., Бух К. Р., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, пер. с англ., М., 1951; [2] Dixon W. J., Massey F. J., Introduction to statistical analysis, N. Y.— Toronto—L., 1951.

А. В. Прохоров.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МЕРА, вероятностное распределение, распределение вероятностей, распределение, вероятность,— действительная неотрицательная функция P на классе $\mathcal{A}$ подмножеств (событий) непустого множества Ω (пространства элементарных событий), образующем борелевское поле (т. е. замкнутом относительно теоретико-множественных операций, производимых в счетном числе), такая, что

$$\mathsf{P}(\Omega)=1 \text{ и } \mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{P}(A_i),$$

если $A_i \cap A_j=\phi$ при $i\neq j$ (счетная аддитивность).

Примеры В. м.: 1) $\Omega=\{1, 2\}$, $\mathcal{A}$ — класс всех подмножеств Ω, $\mathsf{P}(\{1\})=\mathsf{P}(\{2\})=1/2$ (эта В. м. отвечает случайному эксперименту с подбрасыванием симметричной монеты; гербу ставится в соответствие 1, решетке — 2; вероятность выпадения герба (решетки) равна $1/2$);

2) $\Omega=\{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathcal{A}$ — класс всех подмножеств Ω,

$$\mathsf{P}(\{k\})=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

где $\lambda>0$ (*Пуассона распределение*);

3) $\Omega=R^1$, $\mathcal{A}$ — класс борелевских подмножеств R^1,

$$\mathsf{P}(A)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A e^{-x^2/2}dx$$

(*нормальное распределение*);

4) $\Omega=C_0[0, 1]$ — пространство обращающихся в нуле в нуль непрерывных действительных функций

$x(t)$ на $[0, 1]$, $\mathcal{A}$ — класс борелевских подмножеств Ω относительно топологии равномерной сходимости, P — мера, однозначно определяемая формулой

$$\mathsf{P}(x:\ a_i < x(t_i) < b_i,\quad i=1,\ \ldots,\ n) =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}))^{-1/2} \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} \right\} dx_1 \ \ldots \ dx_n,$$

где n — произвольное натуральное число и $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant 1$ (мера Винера).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969. *В. В. Сазонов.*

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО, поле вероятностей,— совокупность $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ непустого множества Ω, класса $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω, являющегося борелевским полем (т. е. замкнутым относительно теоретико-множественных операций, производимых в счетном числе) и распределения *(вероятностной меры)* P на $\mathcal{A}$. Понятие В. п. принадлежит А. Н. Колмогорову [1]. Точки множества Ω наз. элементарными событиями, а само множество Ω — пространством элементарных событий. Принадлежащие $\mathcal{A}$ подмножества множества Ω наз. (случайными) событиями. Нередко ограничиваются рассмотрением лишь полных В. п., то есть пространств, удовлетворяющих требованию $B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $\mathsf{P}(B) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{A}$. Если $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — произвольное В. п., то класс множеств вида $A \cup N$, где $A \in \mathcal{A}$ и $N \subset M$, $\mathsf{P}(M) = 0$, образует борелевское поле $\overline{\mathcal{A}}$, а функция $\overline{\mathsf{P}}$ на $\overline{\mathcal{A}}$, определяемая формулой $\overline{\mathsf{P}}(A \cup N) = \mathsf{P}(A)$, есть распределение на $\overline{\mathcal{A}}$. Пространство $(\Omega, \overline{\mathcal{A}}, \mathsf{P})$ полно и наз. пополнением $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Иногда также ограничиваются рассмотрением лишь совершенных В. п., то есть таких, что для любой действительной $\mathcal{A}$-измеримой функции f и любого множества E на прямой, для к-рого $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, существует борелевское множество B такое, что $B \subset E$ и $\mathsf{P}(f^{-1}(E)) = \mathsf{P}(f^{-1}(B))$. В рамках совершенных В. п. невозможны нек-рые «патологические» явления (связанные с существованием условных вероятностей, определением независимых случайных величин и т. д.), возникающие в общей схеме. Не всегда тривиален вопрос о существовании В. п., удовлетворяющего тем или иным специальным требованиям. Одним из результатов такого рода является фундаментальная теорема Колмогорова о согласованных распределениях: пусть каждому упорядоченному конечному набору $t_1, \ldots, t_n$ элементов множества T отвечает распределение $\mathsf{P}_{t_1, \ldots, t_n}$ на борелевских множествах евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и пусть выполнены следующие условия согласованности:

1) $\mathsf{P}_{t_1, \ldots, t_n}(I_{y_1, \ldots, y_n}) = \mathsf{P}_{t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_n}}(I_{y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_n}})$ при всех $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, где

$$I_{y_1, \ldots, y_n} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \leqslant y_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольная перестановка чисел $1, \ldots, n$;

2) $\mathsf{P}_{t_1, \ldots, t_n}(I_{y_1, \ldots, y_{n-1}, \infty}) = \mathsf{P}_{t_1, \ldots, t_{n-1}}(I_{y_1, \ldots, y_{n-1}})$.

Тогда на наименьшем борелевском поле $\mathcal{A}$ подмножеств произведения $\mathbb{R}^T = \{x = \{x_t\},\ t \in T,\ x_t \in \mathbb{R}^1\}$, относительно к-рого измеримы все координатные функции $t(x) = x_t$, существует распределение P такое, что для любого конечного подмножества $t_1, \ldots, t_n$ множества T и любого n-мерного борелевского множества B справедливо равенство:

$$\mathsf{P}_{t_1, \ldots, t_n}(B) = \mathsf{P}\{t_1(x), \ \ldots, \ t_n(x) \in B\}.$$

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949; [3] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969. *В. В. Сазонов.*

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПРОЦЕСС — то же, что *случайный процесс.*

ВЕРОЯТНОСТЬ математическая — числовая характеристика степени возможности появления к.-л. определенного события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз условиях. Как категория научного познания понятие «В.» отражает особый тип связей между явлениями, характерных для массовых процессов. Категория В. лежит в основе особого класса закономерностей — вероятностных или статистических.

Численное значение В. в нек-рых случаях получается из «классического» определения В.: В. равна отношению числа случаев, «благоприятствующих» данному событию, к общему числу «равновозможных» случаев. Напр., если из 10 млн. облигаций гос. выигрышного займа, на к-рые в одном тираже должен выпасть один выигрыш максимального размера, в данном городе размещено 500 тыс. облигаций, то В. того, что максимальный выигрыш достанется жителю данного города, равна 500 000/10 000 000=1/20.

В других, более сложных случаях определение численного значения В. требует статистического подхода. Напр., если при 100 попытках стрелок попал в цель 39 раз, то можно думать, что для него В. попадания в цель при данных условиях приблизительно равна 4/10. По В., определенной классич. или статистич. способом, могут быть вычислены в соответствии с правилами теории вероятностей новые В. Напр., если для нашего стрелка В. попадания при отдельном выстреле равна 4/10, то В. того, что он будет иметь хотя бы одно попадание при четырех выстрелах, равна $1-(1-4/10)^4\approx 0{,}87$. Этот вывод может быть проверен статистически: если попытки поразить цель хотя бы одним выстрелом из четырех будут повторяться много раз, то они будут иметь успех приблизительно в 87% случаев (в предположении, что за это время искусство стрелка не изменится заметным образом).

Математич. В. является выражением качественно своеобразной связи между случайным и необходимым. При изложении теории В. формулируются в виде аксиом те свойства В., к-рые на данном этапе развития науки необходимы для ее развития. Однако ни эти аксиомы, ни классич. подход к В., ни статистич. подход не дают исчерпывающего определения реального содержания понятия «В.»; они являются лишь известными приближениями ко все более полному его раскрытию. Далеко не всякое событие, наступление к-рого при заданных условиях не является однозначно определенным, имеет при этом комплексе условий определенную В. Предположение, что при данных условиях для данного события В. (т. е. вполне определенная нормальная доля числа появлений данного события при большом числе повторений данных условий) существует, является гипотезой, к-рая в каждом отдельном вопросе требует специальной проверки или обоснования. Напр., имеет смысл говорить о В. попадания в цель заданных размеров, с заданного расстояния из винтовки известного образца стрелком, вызванным наудачу из определенного воинского подразделения. Однако было бы бессмысленно говорить о В. попадания в цель, если об условиях стрельбы ничего не известно.

По поводу связи В. с частотой надо иметь в виду следующее: при конечном числе n повторений заданных условий доля числа случаев m, в к-рых данное событие появится, т. е. так наз. частота m/n, как

правило, мало отличается от вероятности p. Чем больше число повторений n, тем реже встречаются сколько-либо значительные отклонения частоты m/n от вероятности p. Для пояснения этого обстоятельства рассмотрим пример бросания монеты, в к-ром В. появления «герба» и «надписи» одинаковы и равны 1/2. При десяти бросаниях ($n=10$) появление десяти «гербов» или десяти «надписей» очень мало вероятно. Но и утверждать, что «герб» выпадет ровно пять раз, нет достаточных оснований; более того, утверждая, что «герб» выпадет 4 или 5, или 6 раз, мы еще довольно сильно рисковали бы ошибиться. Но при ста бросаниях монеты можно уже без практически ощутимого риска заранее утверждать, что число выпавших «гербов» будет лежать между 40—60 (см. *Больших чисел закон*).

Математическая В. может служить для оценки В. события в обычном, житейском смысле, т. е. для уточнения так наз. «проблематических» суждений, выражающихся обычно словами «возможно», «вероятно», «очень вероятно» и т. п. По поводу этих оценок следует иметь в виду, что в применении к любому определенному суждению, к-рое на самом деле может быть только истинным или ложным, оценка его В. имеет лишь временный или же субъективный смысл, т. е. выражает лишь наше отношение к делу. Напр., если кто-либо, не имея по этому поводу специальных сведений, захочет представить себе вид окрестностей Москвы 23 марта 1930, то он скажет: «вероятно, в этот день на полях лежал снег». Однако на самом деле в 1930 снег под Москвой к 22 марта уже сошел с полей. Выяснив это обстоятельство, мы должны будем отменить первоначальную оценку, выраженную заключенным в кавычки проблематич. суждением. Тем не менее эта оценка, оказавшаяся в применении к данному индивидуальному случаю ошибочной, основана на верном общем правиле: «в начале двадцатых чисел марта на полях под Москвой по большей части лежит снег». Это правило отражает объективные свойства климата Подмосковья. Такого рода правила можно выражать, указывая уровень В. интересующего нас события, при тех или иных общих, осуществимых неограниченное число раз условиях. Эти оценки уже имеют объективный смысл. Поэтому употребление расчета В. для подтверждения наших оценок степени надежности тех или иных утверждений, относящихся к отдельным индивидуальным событиям, не должно давать повода к мнению, что математич. В. является только числовым выражением нашей субъективной уверенности в наступлении нек-рого события. Такое идеалистическое, субъективное понимание смысла математич. В. является ошибочным. При последовательном развитии оно приводит к абсурдному утверждению, что из чистого незнания, анализируя одни лишь субъективные состояния нашей большей или меньшей уверенности, мы можем сделать к.-л. определенные заключения относительно внешнего мира.

Описанное выше употребление расчета В. для оценки положения в отдельных индивидуальных случаях неизбежно приводит к вопросу о том, какими В. можно пренебрегать на практике. Этот вопрос решается поразному, в зависимости от того, насколько велика необходимость быстрого перехода от накопления надежных данных к их действенному употреблению. Напр., если при данных условиях стрельбы теоретич. расчет приводит к тому, что поставленная боевая задача будет решена данным числом выстрелов с В. 0,95 (т. е. В. того, что назначенного числа снарядов не хватит, равна 0,05), то обычно считают возможным исходить при руководстве боевыми операциями из предположения, что назначенное число снарядов окажется достаточным. В более спокойной обстановке научных исследований принято пренебрегать лишь В. в 0,003 (эта норма связана с так наз. правилом трех сигма), а иногда требо-

вать и еще большего приближения В. отсутствия ошибки к единице. В математич. статистике В., к-рой решено пренебрегать в данном исследовании, наз. *значимости уровнем*. Хотя в статистике обычно рекомендуют пользоваться уровнями значимости от 0,05 при предварительных ориентировочных исследованиях до 0,001 при окончательных серьезных выводах, часто достижима значительно большая достоверность вероятностных выводов. Напр., основные выводы статистич. физики основаны на пренебрежении лишь В. порядка меньшего 0,000 000 000 1.

В основе математич. моделей, используемых в *вероятностей теории* лежат три понятия: пространство Ω так наз. элементарных событий, класс подмножеств Ω (событий) и определенная на этом классе функция множеств P — *распределение вероятностей*. Значение $P(A)$ функции P для события A наз. в этом случае вероятностью события A.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974. *А. Н. Колмогоров.*

ВЕРТОР — *тензор*, при помощи к-рого осуществляется перебрасывание индексов.

ВЕРХНИЙ И НИЖНИЙ ПРЕДЕЛЫ — 1) В. и н. п. последовательности — наибольший, и соответственно, наименьший, *предел* среди всех частичных пределов (конечных и бесконечных) данной последовательности действительных чисел. Для любой последовательности действительных чисел x_n, $n=1, 2, \ldots$, множество всех ее частичных пределов (конечных и бесконечных) на расширенной числовой прямой (т. е. в множестве действительных чисел, пополненном символами $-\infty$ и $+\infty$) не пусто и имеет как наибольший, так и наименьший элементы (конечный или бесконечный). Наибольший элемент множества частичных пределов наз. верхним пределом (в. п.) последовательности и обозначается

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n, \text{ или } \lim_{n\to\infty} \sup x_n;$$

наименьший элемент — нижним пределом (н. п.) и обозначается

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n, \text{ или } \lim_{n\to\infty} \inf x_n.$$

Напр., если

$$x_n=(-1)^n,$$

то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=-1, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=1;$$

если

$$x_n=(-1)^n\, n,$$

то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=-\infty, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=+\infty;$$

если

$$x_n=n+(-1)^n n,$$

то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=+\infty.$$

У всякой последовательности существует в. п. (н. п.), при этом, если последовательность ограничена сверху (снизу), то ее в. п. (н. п.) конечен. Для того чтобы число a было в. п. (соответственно н. п.) последовательности x_n, $n=1, 2, \ldots$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ выполнялись условия: а) существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n\geqslant n_\varepsilon$ справедливо неравенство $x_n<a+\varepsilon$ ($x_n>a-\varepsilon$); б) для любого номера n_0 существует такой номер $n'=n'(\varepsilon, n_0)$, что $n'>n_0$ и $x_{n'}>a-\varepsilon$ ($x_{n'}<a+\varepsilon$). Условие а) означает существование при любом фиксированном $\varepsilon>0$ в последовательности $\{x_n\}$ лишь конечного числа таких членов x_n, что $x_n>a+\varepsilon$ ($x_n<a-\varepsilon$). Условие б) означает

существование бесконечного множества таких членов x_n, что $x_n > a - \varepsilon\,(x_n < a + \varepsilon)$. Понятие н. п. сводится к понятию в. п. с помощью изменения знака у членов последовательности:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = -\varlimsup_{n\to\infty} (-x_n).$$

Для того чтобы последовательность x_n, $n=1, 2, \ldots$, имела предел (конечный или бесконечный, равный одному из символов $-\infty$ или $+\infty$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

2) В. п. (н. п.) функции $f(x)$ в точке x_0 — предел верхних (нижних) граней множеств значений функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, когда эти окрестности стягиваются к точке x_0. Он обозначается

$$\varlimsup_{x\to x_0} f(x) \left(\varliminf_{x\to x_0} f(x)\right).$$

Пусть функция $f(x)$ определена на метрич. пространстве R и принимает действительные значения на R. Если $x_0 \in R$ и $O(x_0;\ \varepsilon)$ есть ε-окрестность точки x_0, $\varepsilon > 0$, то

$$\varlimsup_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\sup_{x\in O(x_0;\ \varepsilon)} f(x)\right];$$

соответственно

$$\varliminf_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf_{x\in O(x_0;\ \varepsilon)} f(x)\right].$$

В каждой точке $x \in R$ у функции $f(x)$ существуют как в. п. $\overline{f(x)}$, так и н. п. $\underline{f(x)}$ (конечные или бесконечные). Функция $\overline{f(x)}$ полунепрерывна сверху, а функция $\underline{f(x)}$ полунепрерывна снизу на пространстве R (в смысле понятия полунепрерывности функций, принимающих значения из расширенной числовой прямой).

Для того чтобы функция $f(x)$ в точке x_0 имела предел (конечный или бесконечный, равный одному из символов $+\infty$ или $-\infty$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\varliminf_{x\to x_0} f(x) = \varlimsup_{x\to x_0} f(x).$$

Естественным образом понятие в. п. (н. п.) функции в точке переносится на действительные функции, определенные на топологич. пространствах.

3) В. п. (н. п.) последовательности множеств A_n, $n=1, 2, \ldots$, множество

$$\overline{A} = \varlimsup_{n\to\infty} A_n,$$

состоящее из таких элементов x, к-рые принадлежат бесконечному числу множеств A_n; соответственно, множество

$$\underline{A} = \varliminf_{n\to\infty} A_n$$

таких элементов x, к-рые принадлежат всем множествам A_n, начиная с нек-рого номера $n = n(x)$. Очевидно, $\underline{A} \subset \overline{A}$.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1971; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976; [3] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973; [4] Никольский С. М., Курс математического анализа, т. 1, М., 1973; [5] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М., 1937.

Л. Д. Кудрявцев.

ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ФУНКЦИЙ МЕТОД — метод доказательства существования решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Идея В. и н. ф. м. для случая обыкновенных дифференциальных уравнений усматривается в работах Дж. Пеано (G. Pea-

по, 1880), для случая *Дирихле задачи* и для *Лапласа уравнения* — в *выметании методе* А. Пуанкаре (H. Poincaré); первое полное изложение В. и н. ф. м. для этого последнего случая дано О. Перроном [1].

Пусть поставлена задача Дирихле в области G пространства R^n, $n\geqslant 2$, для линейного однородного эллиптич. уравнения 2-го порядка с непрерывными коэффициентами вида

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0, \quad (1)$$
$$c \leqslant 0, \quad x \in G,$$

с краевым условием

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial G. \quad (2)$$

В. и н. ф. м. состоит в том, что, в предположении разрешимости задачи (1), (2) в малом, вводятся обобщенные супергармонич. функции (соответственно субгармонические). Непрерывная на области G функция v наз. о б о б щ е н н о й с у п е р г а р м о н и ч е с к о й ф у н к ц и е й (соответственно с у б г а р м о н и ч е с к о й) в области G, если для любого достаточно малого шара K, $\overline{K}\subset G$, справедливо неравенство $(v)_k \leqslant v$ (соответственно $(v)_k \geqslant v$), где $(v)_k$ — непрерывная на G функция, равная v вне K и на его границе и удовлетворяющая внутри K уравнению (1). Для непрерывной на границе ∂G функции f обобщенная супергармонич. (соответственно субгармоническая) функция v наз. в е р х н е й (соответственно н и ж н е й), если для $x\in\partial G$ справедливо неравенство $v(x)\geqslant f(x)$ (соответственно $v(x)\leqslant f(x)$).

Классы $\Phi(G, f)$ и $\Psi(G, f)$ всех, соответственно, верхних и нижних функций не пусты, причем если $v\in\Phi(G, f)$ и $w\in\Psi(G, f)$, то $v\geqslant w$ (см. [3]). О б о б щ е н н о е р е ш е н и е з а д а ч и Д и р и х л е определяется как нижняя огибающая класса $\Phi(G, f)$ или как верхняя огибающая класса $\Psi(G, f)$:

$$u(x) = \inf\{v(x);\ v \in \Phi(G, f)\} = \sup\{w(x);\ w \in \Psi(G, f)\},\quad x \in G. \quad (3)$$

Если граница ∂G допускает существование *барьера* в каждой своей точке, то $u(x)=f(x)$ всюду на ∂G, т. е. u — классич. решение задачи Дирихле. В общем случае поведение обобщенного решения (3) эллиптич. уравнения (1) в точках границы совершенно аналогично поведению обобщенного решения уравнения Лапласа; см. *Перрона метод*.

В. и н. ф. м. применяется также при исследовании первой краевой задачи для линейного однородного параболич. уравнения 2-го порядка вида

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (x,\ t) \in G\times[0,\ T],$$

с начальным условием

$$u(x,\ 0) = f(x,\ 0),\ x \in G,$$

и краевым условием

$$u(x,\ t) = f(x,\ t), \quad (x,\ t) \in \partial G\times[0,\ T],$$

если ввести суперпараболические (субпараболические) функции, аналогичные по своим свойствам обобщенным супергармоническим (субгармоническим) функциям (см. [4]).

Лит.: [1] Perron O., «Math. Z.», 1923, Bd 18, № 1/2, S. 42—54; [2] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [3] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [4] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, 3 изд., М., 1957.
Л. И. Камынин, Е. Д. Соломенцев.

ВЕРХНЯЯ ГРАНЬ СЕМЕЙСТВА ТОПОЛОГИЙ, т о ч н а я в е р х н я я г р а н ь, на множестве S — топология ξ, наименьшая из всех топологий на множестве S, содержащих каждую топологию заданного семейства (см. *Сравнение топологий*). П р е д б а з у т о п о л о г и и ξ образует семейство всех подмножеств множе-

ства S, открытых хотя бы в одной топологии семейства $\mathfrak{M}$.

Семейство всех возможных топологий на множестве S с определенной выше операцией взятия верхней грани любого подсемейства и минимальным элементом — тривиальной топологией — есть *полная решетка*. В. г. с. т. наз. также индуктивным пределом семейства топологий.

Полезна следующая интерпретация В. г. с. т. Пусть

$$T=\Pi\{(S,\ \mathscr{T}):\mathscr{T}\in\mathfrak{M}\}$$

— *тихоновское произведение* всех топологич. пространств, возникающих от наделения множества S различными топологиями из семейства $\mathfrak{M}$. Через S^* обозначим диагональ этого произведения, т. е. множество всех постоянных отображений $\mathfrak{M}$ в S (или, что то же самое, множество всех *нитей* $\{S:\mathscr{T}\in\mathfrak{M}\}$, для к-рых $S_{\mathscr{T}}=S_{\mathscr{T}'}$, при всех $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}'\in\mathfrak{M}$). Множество S^* находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством S, к-рое осуществляется при проектировании множества T на любой сомножитель. Если наделить S^* топологией, индуцированной из пространства T, и перенести эту топологию посредством указанного естественного соответствия на S, то получим верхнюю грань семейства — $\mathfrak{M}$. Эта интерпретация В. г. с. т. позволяет понять, что верхняя грань любого семейства хаусдорфовых топологий есть хаусдорфова топология, верхняя грань любого семейства вполне регулярных топологий есть вполне регулярная топология. Аналогичные утверждения для семейств регулярных, нормальных и паракомпактных топологий неверны. Но верхняя грань счетного семейства метризуемых топологий (со счетной базой) есть метризуемая топология (со счетной базой). Диагональ S^* не замкнута, как правило, в T, и потому верхняя грань двух бикомпактных топологий обычно не является бикомпактной.

Лит.: [1] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., М., 1968; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968.

А. В. Архангельский.

ВЕРХНЯЯ И НИЖНЯЯ ГРАНИ — характеристики множеств на прямой. Верхняя грань нек-рого множества действительных чисел — наименьшее число, ограничивающее сверху это множество. Нижняя грань данного множества — наибольшее число, ограничивающее его снизу. Более подробно: пусть задано нек-рое подмножество X действительных чисел. Число β наз. его верхней гранью (в. г.) и обозначается $\sup X$ (от латинского слова supremum — наивысшее), если для каждого числа $x\in X$ выполняется неравенство $x\leqslant\beta$, и каково бы ни было $\beta'<\beta$ существует такое $x'\in X$, что $x'>\beta'$. Число α наз. нижней гранью (н. г.) множества X и обозначается $\inf X$ (от латинского слова infimum — наинизшее), если для каждого $x\in X$ выполняется неравенство $x\geqslant\alpha$, и каково бы ни было $\alpha'>\alpha$ существует такое $x'\in X$, что $x'<\alpha'$.

Примеры:

$$\inf[a,\ b)=a,\ \sup[a,\ b]=b,$$
$$\inf(a,\ b)=a,\ \sup(a,\ b)=b;$$

если множество X состоит из двух точек a и b, $a<b$, то

$$\inf X=a,\ \sup X=b.$$

Эти примеры показывают, в частности, что в. г. (н. г.) может как принадлежать этому множеству (напр., в случае отрезка $[a, b]$), так и не принадлежать ему (напр., в случае интервала (a, b)). Если в нек-ром множестве существует наибольшее (наименьшее) число, то оно, очевидно, и является в. г. (н. г.) этого множества.

В. г. (н. г.) не ограниченного сверху (снизу) множества наз. символ $+\infty$ (соответственно символ $-\infty$).

Если N — множество натуральных чисел: $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$, то

$$\inf N=1, \ \sup N=+\infty.$$

Если $\mathfrak{N}$ множество всех целых чисел, положительных и отрицательных, то

$$\inf \mathfrak{N}=-\infty, \ \sup \mathfrak{N}=+\infty.$$

Всякое непустое множество действительных чисел имеет и притом единственную в. г. (н. г.) конечную или бесконечную. При этом всякое ограниченное сверху непустое множество имеет конечную в. г., а всякое ограниченное снизу — конечную н. г.

Иногда в. г. (н. г.) множества наз. его точной верхней (нижней) гранью, понимая в этом случае под термином в. г. (н. г.) множества любое число, ограничивающее его сверху (снизу). Реже, вместо термина в. г. (н. г.) множества, в том или ином из вышеуказанных смыслов, употребляется термин верхняя (нижняя) граница множества. В. г. (н. г.) функции, принимающей действительные значения, в частности последовательности действительных чисел, называют в. г. (н. г.) множества ее значений.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, т. 1, М., 1973. *Л. Д. Кудрявцев.*

ВЕС — то же, что *весовая функция*.

ВЕС топологического пространства — наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью открытой *базы* топологич. пространства. В., наряду с мощностью, — важнейший инвариант топологич. пространства. *П. С. Александров.*

ВЕС представления ρ алгебры Ли в векторном пространстве — отображение α алгебры Ли L в ее поле определения k, для к-рого существует такой ненулевой вектор x пространства V, что

$$(\rho(h)-\alpha(h)\,1)^{n_{x,h}}(x)=0$$

для всех $h\in L$ и некоторого целого $n_{x,h}>0$ (вообще говоря, зависящего от x и h), где 1 обозначает тождественное преобразование V. В этом случае говорят также, что α — вес L-модуля V, определяемого представлением ρ. Множество всех векторов $x\in V$, удовлетворяющих указанному условию, вместе с нулем образует подпространство V_α, наз. весовым подпространством веса α (или, соответствующим весу α). Если $V=V_\alpha$, то V наз. весовым пространством, или весовым модулем над L, веса α.

Если V — конечномерный весовой модуль над L веса α, то контрагредиентный модуль (см. *Контрагредиентное представление*) V^* является весовым веса $-\alpha$; если V и W — весовые модули над L весов α и β соответственно, то их тензорное произведение $V\otimes W$ является весовым модулем веса $\alpha+\beta$. Если L — нильпотентная алгебра Ли, то весовое подпространство V_α веса α в V является подмодулем L-модуля V. Если, кроме того,

$$\dim_k V<\infty,$$

а $\rho(L)$ — расщепляемая алгебра Ли линейных преобразований модуля V, то V разлагается в прямую сумму конечного числа весовых L-подмодулей разных весов:

$$V=V_\sigma\oplus V_\delta\oplus\ldots\oplus V_\tau$$

(весовое разложение V относительно L). Если L — нильпотентная подалгебра конечномерной алгебры Ли M, рассматриваемой как L-модуль относительно присоединенного представления ad_M алгебры M, и $\mathrm{ad}_M L$ является расщепляемой алгеброй Ли линейных

преобразований M, то соответствующее весовое разложение M относительно L:

$$M = M_\alpha \oplus M_\beta \oplus \ldots \oplus M_\gamma$$

наз. разложением Фиттинга M относительно L, веса α, β, ..., γ наз. корнями, а пространства M_α, M_β, ..., M_γ — корневыми подпространствами M относительно L. Если, кроме того, задано представление ρ алгебры M в конечномерном векторном пространстве V, для которого $\rho(L)$ — расщепляемая алгебра Ли линейных преобразований V, и

$$V = V_\sigma \oplus V_\delta \oplus \ldots \oplus V_\tau$$

— соответствующее весовое разложение V относительно L, то $\rho(M_\alpha)(V_\sigma) \subseteq V_{\alpha+\sigma}$, когда $\alpha+\sigma$ есть вес V относительно L, и $\rho(M_\alpha)(V_\sigma) = 0$ в противном случае. В частности, если $\alpha+\beta$ — корень, то $[M_\alpha, M_\beta] \subseteq M_{\alpha+\beta}$, в остальных случаях $[M_\alpha, M_\beta] = 0$. Если характеристика поля k равна нулю, то веса σ, δ, ..., τ и корни α, β, ..., γ являются линейными функциями на L, обращающимися в нуль на коммутанте алгебры L.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970.

В. Л. Попов.

ВЕСОВАЯ ФУНКЦИЯ, вес,— функциональный множитель, позволяющий получить конечность нормы заданного типа для функции, у к-рой указанная норма (или полунорма) без этого множителя бесконечна. Понятие В. ф. играет большую роль в вопросах приближения функции (в частности, на бесконечных промежутках), в проблеме моментов, в теории вложения функциональных пространств (см. *Весовое пространство*), в задачах о продолжении функций и в теории дифференциальных уравнений.

Л. Д. Кудрявцев.

ВЕСОВОЕ ПРОСТРАНСТВО, весовой класс, пространство с весом,— пространство функций, имеющих конечную норму (или полунорму) с нек-рым функциональным множителем — весом. При этом норма (полунорма) функции наз. в этом случае весовой нормой (полунормой), а вес наз. также весовой функцией нормы (полунормы). Введение веса позволяет расширять и сужать обычные невесовые функциональные нормированные и полунормированные пространства, состоящие из функций, имеющих бесконечную обычную безвесовую норму (полунорму). Напр., В. п. $C_\varphi(E)$ (где φ — весовая функция), норма в к-ром определяется формулой

$$\| f \|_{C_\varphi} = \sup_{x \in E} | \varphi(x) f(x) |,$$

при соответствующем выборе функции φ может быть как шире, так и уже пространства $C(E)$ с обычной нормой

$$\| f \|_C = \sup_{x \in E} | f(x) |.$$

Так, в пространство $C_x(0, 1)$ с нормой

$$\| f \|_{C_x} = \sup_{0 < x < 1} | xf(x) |$$

входят нек-рые неограниченные функции, и оно содержит в себе пространство $C(0, 1)$ ограниченных на интервале $(0, 1)$ функций в качестве собственного подпространства. Наоборот, пространство $C_{1/x}(0, 1)$ с нормой

$$\| f \|_{C_{1/x}} = \sup_{0 < x < 1} \left| \frac{1}{x} f(x) \right|$$

содержится в пространстве $C(0, 1)$ как собственное подпространство. Другой пример: полунормированное пространство с весовой полунормой $\sqrt{D_\alpha(u)}$, где $u = u(x, y)$ и

$$D_\alpha(u) = \iint_{r \leqslant 1} (1 - r)^\alpha \left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\, dy,$$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$, при $\alpha>0$ содержит в себе как собственное подпространство пространство функций с безвесовой полунормой $\sqrt{D_0(u)}$, а при $\alpha<0$ содержится в нем как собственное подпространство.

Наиболее часто рассматривается случай, когда весовая функция стремится к нулю или к бесконечности при приближении к заданному многообразию, к-рое может вырождаться в точку, в частности в бесконечно удаленную. В. п. естественным образом возникают как в теории функций при изучении обычных (невесовых) функциональных пространств, так и в приложениях теории функций, напр. к теории краевых задач для уравнений с частными производными.

Основным вопросом при изучении В. п. является получение для них *вложения теорем*. В теоремах вложения одного типа устанавливается оценка нормы функции через ее норму в другом В. п., причем в обеих нормах фигурирует одна и та же область задания функции. К теоремам такого типа относятся теоремы об эквивалентности норм в В. п., в частности теоремы о нормах, определяемых с помощью преобразования Фурье — Бесселя. Сюда же относятся оценки в соответствующих пространствах весовых норм младших производных, в частности самой функции через (весовые) нормы старших производных. С помощью этих теорем можно, напр., определить с каким весом суммируема функция в данной области, если все ее старшие производные принадлежат данному В. п. В теоремах вложения другого типа даются оценки тех или иных норм следов функций на многообразиях меньшего числа измерений через их весовые нормы.

Важный класс В. п. составляют пространства функций, у к-рых абсолютные величины всех их производных до какого-то порядка суммируемы в определенной степени с весом степенного характера. В этом случае вложения В. п. изучены наиболее полно. Напр., пусть В. п. $W^l_{p,\,\alpha}(E^n|\infty)$ состоит из функций f, имеющих на n-мерном евклидовом пространстве E^n все обобщенные производные $D^k_0 f$, $k=(k_1,\ \ldots,\ k_n)$, до порядка l включительно, такие, что для них конечна величина (являющаяся нормой):

$$|f,\ W^l_{p,\,\alpha}(E^n|\infty)|=$$

$$=\sum_{|k|=l}|(1+|x|)^{-\alpha}D^l f,\quad L_p(E^n)|+|f,\quad L_p(Q^n)|,$$

где $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)\in E^n$, $|x|=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, Q^n — единичный n-мерный шар в E^n, $1\leqslant p\leqslant\infty$, α — действительное число, $|k|=k_1+\ldots+k_n$. Тогда справедлива теорема вложения: если $\alpha>(n/p)-1$, $0\leqslant k\leqslant l$, то

$$W^l_{p,\,\alpha}(E^n|\infty)\longrightarrow W^{l-k}_{p,\,\alpha+k}(E^n|\infty).$$

При малых $\alpha>0$ (т. е. при так наз. слабом вырождении) В. п. $W^l_{p,\,\alpha}(E^n|\infty)$ имеют свойства, близкие к свойствам безвесовых пространств: если $0\leqslant\alpha\leqslant(n/p)-1$, то при любом $\varepsilon>0$ справедливо вложение

$$W^1_{p,\,\alpha}(E^n|\infty)\longrightarrow W^0_{p,\,\frac{n+\varepsilon}{p}}(E^n|\infty).$$

Из этого вложения при $\alpha=0$ следует, напр., что *Дирихле интеграл*

$$D(f)=\int\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 d\overset{+}{E}{}^n$$

(где $\overset{+}{E}{}^n=\{x:x_n>0\}$ — полупространство), не будучи полуограниченным снизу как функционал над пространством функций, принадлежащих $L_2(\overset{+}{E}{}^n)$ и обращающихся в нуль на гиперплоскости $E^{n-1}=\{x:x_n=0\}$, будет полуограничен снизу над соответствующим В. п.

Если $0\leqslant\alpha<(n/p)-1$, то для всякой функции из В. п. $W^l_{p,\,\alpha}(E^n|\infty)$ существует такой многочлен сте-

пени не выше $l-1$, что разность между ним и самой функцией стремится к нулю, когда точка стремится к бесконечности по радиусам.

Теоремы вложения о следах для В. п. являются обобщением прямых и обратных теорем вложения для обычных функциональных пространств и изучены достаточно полно для весов, имеющих порядок степени расстояния от точки области до границы области.

Теоремы вложения для В. п. применяются прежде всего в теории вырождающихся эллиптич. уравнений; они дают возможность точно сформулировать граничные задачи, указать, в зависимости от степени вырождения, какие части границы освобождаются от задания граничных условий, позволяют получить необходимые и достаточные условия (в терминах свойств граничных значений) для разрешимости ряда краевых задач; они играют важную роль при доказательстве существования и единственности решения краевых задач в соответствующем В. п. и устойчивости этого решения в смысле интеграла энергии при вариации граничных значений. В случае же неограниченных областей В. п. используются и для теории равномерно эллиптич. уравнений.

Теоремы вложения для В. п. нашли свое непосредственное применение при решении задач о наилучшем продолжении функции (или систем функций) с многообразия на все пространство таким образом, что продолженная функция бесконечно дифференцируема на дополнении к многообразию. Наилучшее продолжение здесь понимается в смысле минимального порядка роста производных при приближении точки к данному многообразию. Глобальная гладкость заданной на многообразии продолжаемой функции определяет (при достаточно гладком многообразии) максимально возможную глобальную гладкость продолжаемой функции; поэтому, начиная с нек-рого порядка, производные продолженной функции будут иметь конечную норму лишь с нек-рым весом, т. е. принадлежать соответствующему В. п.

Лит.: [1] Никольский С. М., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 5, с. 63—114; [2] Кудрявцев Л. Д., Никольский С. М., в сб.: Некоторые проблемы математики и механики, Новосибирск, 1961, с. 87—109; [3] Кудрявцев Л. Д., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1959, т. 55, с. 1—181; [4] Теория вложений классов дифференцируемых функций многих переменных, в сб.: Дифференциальные уравнения с частными производными, М., 1970, с. 38—63. *Л. Д. Кудрявцев.*

ВЕСОВОЕ ПРОСТРАНСТВО — конечномерное пространство V, удовлетворяющее условию: если L — *Ли алгебра* над полем F, а ρ — ее представление в V, то существует такая функция α: $L \to F$, что для любых $x \in V$, $l \in L$

$$x(l^{\rho} - \alpha(l)1)^k = 0$$

при нек-ром целом $k>0$. Функция α наз. в е с о м. Тензорное произведение $\rho_1 \otimes \rho_2$ представлений ρ_1, ρ_2 алгебры L в В. п. V_1, V_2, принадлежащих весам α_1, α_2, соответственно, является представлением L в пространстве $V_1 \otimes V_2$, к-рое также оказывается В. п. и принадлежит весу $\alpha_1+\alpha_2$. При переходе от представления ρ к контраградиентному представлению ρ^* пространство V заменяется на сопряженное пространство V^*, а вес α переходит в вес $-\alpha$. *Е. Н. Кузьмин.*

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ н е л и н е й н ы х у р а в н е н и й — явление перехода нек-рого решения нелинейного уравнения в несколько решений (или полное его исчезновение) при малых изменениях параметров. Более точно, пусть нелинейное уравнение

$$F(x, \lambda) = 0 \qquad (*)$$

с (не обязательно числовым) параметром λ имеет при фиксированном значении λ_0 решение x_0. Тогда при значениях λ, близких к λ_0, уравнение $(*)$ может иметь несколько (более одного) решений $x(\lambda)$, близких к x_0. В этих случаях говорят, что происходит в е т в л е-

ние решения x_0, а пара (x_0, λ_0) наз. точкой ветвления уравнения (*).

Пример: Уравнение $x^2-\lambda=0$, где x и λ — комплексные переменные, имеет точку ветвления $(x_0, \lambda_0)=(0, 0)$, ибо существует двузначное решение $x=\sqrt{\lambda}$, т. е. решение $x=0$ (при $\lambda=0$) разветвляется при малых $\lambda\neq 0$ на два малых нетривиальных решения.

Современная теория В. р. основывается на идеях А. М. Ляпунова [1] и Э. Шмидта [2] и наиболее развита для нелинейных уравнений в банаховых пространствах.

Пусть E_1 и E_2 — комплексные банаховы пространства, $x\in E_1$, λ — комплексное переменное, а $F(x, \lambda)$ — нелинейный оператор, непрерывный вместе с *Фреше производной* $F_x(x, \lambda)$ в окрестности Ω точки (x_0, λ_0), отображающий Ω в окрестность нуля пространства E_2 и такой, что $F(x_0, \lambda_0)=0$, а $F_x(x_0, \lambda_0)\equiv B$ — *Фредгольма оператор*.

Задача состоит в том, чтобы найти в шаре $\|x-x_0\|<r$ достаточно малого радиуса r все решения уравнения (*), непрерывные при $|\lambda-\lambda_0|<\rho$, где ρ также достаточно мало. Иными словами, это есть задача локального продолжения решения x_0 по параметру λ. Если существует обратный оператор B^{-1}, то задача имеет единственное решение $x(\lambda)$, причем $x(\lambda_0)=x_0$. Если же B^{-1} не существует, то нуль-пространство $N(B)$ оператора B имеет размерность $n\geqslant 1$. В этом случае задача может быть сведена к аналогичной конечномерной задаче. Пусть через P обозначен *проектор* E_1 на $N(B)$, а через $I-Q$ — проектор E_2 на область значений оператора B, где I — тождественный оператор. Уравнение (*) может быть записано в виде системы

$$\left.\begin{aligned}(I-Q)\,F(x_0+u+v,\ \lambda)=0,\\ QF(x_0+u+v,\ \lambda)=0,\end{aligned}\right\}$$

где $u=(I-P)(x-x_0)$, $v=P(x-x_0)$. Из первого уравнения системы определяется неявный оператор $u=f(v, \lambda)$. В результате его подстановки во второе уравнение системы получается уравнение

$$QF(x_0+f(v,\ \lambda)+v,\ \lambda)=0$$

для определения v; оно наз. уравнением разветвления. Полное решение задачи о нахождении в шаре $\|v\|<r$ достаточно малого радиуса r всех решений $v(\lambda)$ уравнения разветвления, непрерывных при $|\lambda-\lambda_0|<\rho$ (где ρ достаточно мало), приводит к полному решению исходной задачи, ибо всякое ее решение представимо в виде

$$x(\lambda)=x_0+v(\lambda)+f[v(\lambda),\ \lambda],$$

где v — нек-рое решение уравнения разветвления.

Пусть $F(x, \lambda)$ — *аналитический оператор* в Ω. Выбор базисов в n-мерных подпространствах $PE_1=N(B)$ и QE_2 позволяет записать уравнение разветвления в виде системы

$$\mathscr{L}_i(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n,\ \lambda)=0,\ i=1,\ \ldots,\ n,$$

$\mathscr{L}_i$, $i=1, \ldots, n$ — аналитич. функции в точке $(0, \ldots, 0, \lambda_0)$, причем все частные производные $\partial\mathscr{L}_i/\partial\xi_j$ обращаются в нуль в этой точке. Исследование этой системы может осуществляться при помощи теории исключения, метода *Ньютона диаграммы* и др. методов (см. [3] — [5]). При $n=1$ полный анализ осуществляется методом диаграммы Ньютона. Применительно к исследованию уравнения разветвления, а значит и исходной задачи, возможны лишь следующие три случая: а) задача не имеет решений; б) задача имеет конечное число решений и все они представимы сходящимися рядами по целым или дробным степеням разности $\lambda-\lambda_0$; в) задача имеет конечное число семейств решений, каждое из к-рых зависит от конечного числа свободных малых

параметров, и, быть может, конечное число решений, указанных в б).

Для того чтобы имел место случай б), достаточно, чтобы x_0 было изолированным решением уравнения $F(x, \lambda_0)=0$. В случае б) решения удобно искать методом неопределенных коэффициентов в виде

$$x(\lambda)=x_0+\sum_{k=1}^{\infty} x_k(\lambda-\lambda_0)^{k/p},$$

где x_k — коэффициенты, подлежащие определению, а возможные значения p могут быть предварительно найдены с помощью уравнения разветвления. Подстановка такого ряда в (*) приводит к рекуррентной системе для нахождения $x_1, x_2, \ldots$. При этом получаются задачи вида $Bx_k=H(x_1, \ldots, x_{k-1})$ и каждое x_k определяется с точностью до n произвольных постоянных, к-рые определяются из требований разрешимости последующих уравнений. Все полученные ряды сходятся в нек-рой окрестности точки λ_0. Оценка снизу радиуса окрестности может быть получена с помощью построения мажорант (см. [6]).

Для того чтобы имел место случай в), необходимо, чтобы x_0 было неизолированным решением уравнения $F(x, \lambda_0)=0$. Здесь применение метода неопределенных коэффициентов может привести к расходящимся рядам (формальным решениям). Если задача инвариантна относительно непрерывной группы линейных операторов в E_1, то в ряде случаев использование групповых соображений позволяет уменьшить число уравнений и неизвестных в уравнении разветвления и тем самым упростить задачу или даже свести ее к случаю б) (см. [7], [8]).

Уравнение (*) может иметь также решения, определенные лишь при $\lambda=\lambda_0$. Эти решения возможны только тогда, когда x_0 — неизолированное решение уравнения $F(x, \lambda_0)=0$; они находятся при помощи уравнения разветвления при $\lambda=\lambda_0$. Определение всех его многопараметрич. семейств решений приводит к определению всех решений уравнения (*) с $\lambda=\lambda_0$.

В случае вещественных пространств E_1 и E_2 уравнение разветвления изучается в комплексной области, а затем отбираются вещественные решения. Нек-рые из них могут оказаться определенными в полуокрестностях точки λ_0.

Изложенная методика частично применима также в случаях, когда $F(x, \lambda)$ — достаточно гладкий оператор, B — *нётеров оператор*, а параметр λ — элемент еще одного банахова пространства E (точки ветвления могут заполнять в E линии и поверхности). Этим же способом исследуются нек-рые близкие задачи: задача отыскания больших решений (уравнение (*) может иметь решения $x(\lambda)\to\infty$ при $\lambda\to\lambda_0$), задача ветвления собственных значений и собственных элементов линейных операторов и др. (см. [3]). Частный случай, когда

$$E_1=E_2,\ F(x, \lambda)\equiv x-\Phi(x, \lambda),\ \Phi(0, \lambda)\equiv 0$$

исследовался также топологическими, вариационными методами и методами, использующими конусы в банаховом пространстве. В этом круге вопросов значительную роль играет понятие точки *бифуркации*. Встречаются также задачи о ветвлении решений, не укладывающиеся в описанную выше схему. Это, напр., задачи для дифференциальных уравнений с вырождением (см. [9], [10]) и задачи о длинных и уединенных волнах (см. [11]).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., О фигурах равновесия, мало отличающихся от эллипсоидов, вращающейся однородной массы жидкости, Собр. соч., т. 4, М., 1959; [2] Schmidt E., «Math. Ann.», 1908, Bd 65, S. 370—99; [3] Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория вствления решений нелинейных уравнений, М., 1969; 4 Вайнберг М. М., Треногин В. А., «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, в. 2; [5] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [6] Ахмедов

К. Т., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 4, с. 135—53; [7] Юдович В. И., «Прикл. матем. и механ.», 1967, т. 31, в. 1, с. 101—11; [8] Логинов Б. В., Треногин В. А., «Докл. АН СССР», 1971, т. 197, № 1; [9] Ахмедов К. Т., там же, 1957, т. 115, № 1; [10] Сидоров Н. А., «Дифференц. уравнения», 1967, т. 3, № 9; [11] Тер-Крикоров А. М., Треногин В. А., там же, т. 3, № 3.

В. А. Треногин.

ВЕТВЛЕНИЯ ИНДЕКС — сумма $V=\sum(k-1)$ порядков *ветвления точек* компактной римановой поверхности S, рассматриваемой как n-листная поверхность наложения над римановой сферой, распространенная на все конечные и бесконечно удаленные точки ветвления S. В. и. связан с родом g и числом листов n поверхности S:

$$V=2(n+g-1).$$

См. также *Риманова поверхность*.

Лит.: [1] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960, гл. 10.

Е. Д. Соломенцев.

ВЕТВЛЕНИЯ ТОЧКА, особая точка многозначного характера,— *изолированная особая точка* a аналитич. функции $f(z)$ одного комплексного переменного z такая, что *аналитическое продолжение* к.-л. элемента функции $f(z)$ вдоль замкнутого пути, охватывающего a, приводит к новым элементам $f(z)$. Точнее, a наз. В. т., если существуют: 1) кольцо $V=\{z;\ 0<|z-a|<\rho\}$, в к-ром $f(z)$ аналитически продолжается по любому пути; 2) точка $z_1\in V$ и к.-л. элемент функции $f(z)$, представленный степенным рядом

$$\Pi(z_1;\ r)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(z-z_1)^\nu$$

с центром z_1 и радиусом сходимости $r>0$, аналитич. продолжение к-рого вдоль окружности $|z-a|=|z_1-a|$, проходимой один раз, напр. в положительном направлении, приводит к новому элементу $\Pi'(z_1;\ r')$, отличающемуся от $\Pi(z_1;\ r)$. Если после нек-рого минимального числа $k>1$ таких обходов снова получается исходный элемент $\Pi(z_1;\ r)$, то это же самое будет иметь место для всех элементов *ветви аналитической функции* $f(z)$, определяемой в V элементом $\Pi(z_1;\ r)$. В таком случае a является В. т. конечного порядка $k-1$ для указанной ветви. В проколотой окрестности V В. т. a конечного порядка эта ветвь представима в виде обобщенного ряда Лорана, или ряда Пюизё:

$$f(z)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}b_\nu(z-a)^{\nu/k},\quad z\in V. \tag{1}$$

Если $a=\infty$ — бесконечно удаленная В. т. конечного порядка, то в нек-рой окрестности $V'=\{z;\ |z|>\rho\}$ данная ветвь $f(z)$ представима в виде аналога ряда (1):

$$f(z)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}b_\nu z^{-\nu/k},\quad z\in V'. \tag{2}$$

Поведение *римановой поверхности* R функции $f(z)$ над В. т. конечного порядка a характеризуется тем, что над a соединяются вместе k листов той ветви $f(z)$, к-рая определяется элементом $\Pi(z_1;\ r)$. При этом поведение других ветвей R над a может быть совершенно иным.

Если в ряде (1) или (2) среди коэффициентов b_ν с отрицательными индексами ν имеется лишь конечное число отличных от нуля, то a — *алгебраическая точка ветвления*, или алгебраическая особая точка. Такая В. т. конечного порядка характеризуется также тем, что при любом стремлении $z\to a$ в V или V' значения всех элементов ветви, определяемой $\Pi(z_1;\ r)$, стремятся к определенному конечному или бесконечному пределу.

Пример: $f(z)=\sqrt[k]{z}$, $k>1$ — натуральное число, $a=0,\ \infty$.

Если в ряде (1) или (2) имеется бесконечно много ненулевых коэффициентов b_ν с отрицательными индексами ν, то В. т. конечного порядка a относится к классу трансцендентных В. т. Пример: $f(z)=\exp(1/\sqrt[k]{z})$, $k>1$ — натуральное число, $a=0$.

Наконец, если ни при каком числе последовательных обходов нельзя возвратиться к исходному элементу, то a наз. *логарифмической точкой ветвления*, или В. т. бесконечного порядка, и также относится к трансцендентным В. т. Пример: $f(z)=\operatorname{Ln} z$, $a=0,\ \infty$. Над логарифмич. В. т. соединяются бесконечно много листов той ветви $f(z)$, к-рая определяется элементом $\Pi(z_1;\ r)$.

В случае аналитич. функции многих комплексных переменных $f(z)$, $z=(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)$, $n\geqslant 2$, точка a пространства $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{C}P^n$ наз. В. т. порядка m, $1\leqslant m\leqslant\infty$, если она является В. т. порядка m, вообще говоря, многолистной *голоморфности области* функции $f(z)$. В отличие от случая $n=1$, при $n\geqslant 2$ В. т., как и другие *особые точки аналитических функций* многих комплексных переменных, не могут быть изолированными.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 8; [2] Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, 2 изд., М., 1962, ч. 1, гл. 2.

Е. Д. Соломенцев.

ВЕТВЛЕНИЯ ТОЧКА минимальной поверхности — особая точка минимальной поверхности, в к-рой первая квадратичная форма поверхности обращается в нуль; тем самым фактически В. т. возможна лишь на обобщенной минимальной поверхности. Своим названием эта особая точка обязана тому факту, что в ее окрестности строение обобщенной минимальной поверхности подобно строению римановой поверхности функции $w=z^n$, $n\geqslant 2$, над точкой $z=0$, т. е. там обобщенная минимальная поверхность имеет многолистную ортогональную проекцию на нек-рую плоскую область, в к-рой проекция самой В. т. является внутренней точкой с единственным прообразом. В окрестности В. т. ($u=0$, $v=0$) координаты $(x,\ y,\ z)$ минимальной поверхности представимы в виде

$$x+iy=aw^m+O(|w|^{m+1}),$$

$$z=\operatorname{Re}(bw^{m+n})+O(|w|^{m+n+1}),\quad w=u+iv,$$

где $a\neq 0$ и $b\neq 0$ — две комплексные постоянные, $m\geqslant 2$ и $n\geqslant 1$ — целые числа, соответственно называемые порядком и индексом В. т., u и v — внутренние изотермич. координаты.

На основании этого представления получена теорема: если числа $m+n$ и m — взаимно простые, то минимальная поверхность имеет $(m-1)(m+n)$ различных линий самопересечения, исходящих из В. т. с определенными направлениями, причем все соседние направления образуют между собой равные углы.

Различают два вида В. т.— фальшивые В. т. и истинные (-нефальшивые). Фальшивые В. т. представляют собой особенность отображения, определяющего поверхность, и от нее можно избавиться перепараметризацией (напр., если $r=r(w)$ — регулярная минимальная поверхность, то обобщенная минимальная поверхность $r=r(w^2)$ будет иметь в точке $w=0$ фальшивую В. т.). Истинная В. т. представляет собой реальную особенность самой поверхности, и у нее есть следующее важное свойство: в окрестности истинной В. т. поверхность можно изменить так, что новая поверхность, совпадая с исходной вне деформированной окрестности, будет иметь меньшую площадь по сравнению с исходной поверхностью. Теория обобщенных минимальных поверхностей с В. т. послужила основой для общей теории вложений с ветвлениями, развитой для широкого класса двумерных поверхностей в R^n, $n\geqslant 3$.

И. Х. Сабитов.

ВЕТВЬ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ — результат *аналитического продолжения* данного элемента

аналитич. функции, представленного степенным рядом

$$\Pi(a;\ r)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z-a)^\nu$$

с центром a и радиусом сходимости $r>0$, вдоль всевозможных путей, принадлежащих данной области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $a\in D$. Таким образом, В. а. ф. определяется элементом $\Pi(a;\ r)$ и областью D. Для вычисления применяются только о д н о з н а ч н ы е, или р е г у л я р н ы е, В. а. ф., которые существуют не для всех областей D, принадлежащих области существования *полной аналитической функции*. Напр., в разрезанной комплексной плоскости $D=\mathbb{C}\setminus\{z=x;\ -\infty\leqslant x\leqslant 0\}$ многозначная аналитич. функция $w=\operatorname{Ln} z$ допускает регулярную В. а. ф.

$$w=\ln z=\ln|z|+i\arg z,\quad |\arg z|<\pi,$$

— главное значение логарифма, а в кольце $D=\{z;\ 1<|z|<2\}$ выделение регулярной В. а. ф. $w=\operatorname{Ln} z$ невозможно.

Лит.: [1] Г у р в и ц А., К у р а н т Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968, ч. 1, гл. 3, ч. 3, гл. 4; [2] М а р к у ш е в и ч А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 8.

Е. Д. Соломенцев.

ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС — *случайный процесс*, описывающий широкий круг явлений, связанных с размножением и превращением к.-л. объектов (напр., частиц в физике, молекул в химии, особей к.-л. популяции в биологии и т. п.). Основным математич. предположением, выделяющим класс В. п., является предположение независимости размножения частиц друг от друга.

Однородный во времени В. п. $\mu(t)$ с однотипными частицами определяется как *марковский процесс* со счетным числом состояний 0, 1, 2, ..., переходные вероятности $P_{ij}(t)$ к-рого удовлетворяют дополнительному у с л о в и ю в е т в л е н и я:

$$P_{ij}(t)=\sum_{j_1+\ldots+j_i=j} P_{1j_1}(t)\,P_{1j_2}(t)\ \ldots\ P_{1j_i}(t). \quad (1)$$

Состояния 0, 1, 2, ... в В. п. интерпретируются как числа частиц. Вероятность $P_{ij}(t)$ равна вероятности

$$\mathsf{P}\{\mu(t+t_0)=j\mid \mu(t_0)=i\}$$

того, что i частиц за время t превращаются в j частиц. Основным аналитич. аппаратом В. п. являются *производящие функции*

$$F(t;\ s)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}\{\mu(t)=n\mid\mu(0)=1\}\,s^n. \quad (2)$$

Из условия ветвления (1) вытекает равенство

$$F(t+\tau;\ s)=F(t;\ F(\tau;\ s)). \quad (3)$$

В В. п. с д и с к р е т н ы м в р е м е н е м (в. п. с д. в.) t принимает целые неотрицательные значения, и из (3) следует, что $F(t;\ s)$ есть t-кратная итерация функции $F(s)=F(1;\ s)$. Такой процесс иногда наз. п р о ц е с с о м Г а л ь т о н а — В а т с о н а. В В. п. с непрерывным временем (в. п. с н. в.) предполагается, что $t\in[0,\ \infty)$, и существует правая производная

$$\left.\frac{\partial F(t;\ s)}{\partial t}\right|_{t=0}=f(s).$$

Из (3) следует, что $F(t;\ s)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F(t;\ s)}{\partial t}=f(F(t;\ s)) \quad (4)$$

и начальному условию $F(0,\ s)=s$.

Если $A=F'(1)$ и $a=f'(1)$ конечны, то математич. ожидание $\mathsf{E}\mu(t)$ числа частиц $\mu(t)$ (при условии $\mu(0)=1$) равно A^t для в. п. с д. в. и равно e^{at} для в. п. с н. в. В зависимости от значения параметров A или a В. п. подразделяются на д о к р и т и ч е с к и е ($A<1$, $a<0$), к р и т и ч е с к и е ($A=1$, $a=0$) и н а д к р и т и ч е с к и е ($A>1$, $a>0$). Основным свойством,

определяющим эту классификацию, является поведение $\mathsf{E}\mu(t)$ при $t \to \infty$.

Ниже исключаются из рассмотрения тривиальные случаи $F(s) \equiv s$ и $f(s) \equiv 0$, когда

$$\mathsf{P}\{\mu(t) = 1 \mid \mu(0) = 1\} \equiv 1.$$

Вероятность вырождения равна 1 в докритич. и критич. В. п. и меньше 1 в надкритич. В. п. Если $\mathsf{E}\mu(t) \ln \mu(t) < \infty$, то в докритич. В. п. вероятность продолжения процесса $\mathsf{P}\{\mu(t) > 0\}$ при $t \to \infty$ асимптотически ведет себя как $K\mathsf{E}\mu(t)$, где K — положительная константа. В критич. В. п. с конечным $\mathsf{E}\mu^2(t)$ при $t \to \infty$ имеет место асимптотика

$$\mathsf{P}\{\mu(t) > 0\} \sim \frac{2}{\mathsf{D}\mu(t)},$$

где $\mathsf{D}\mu(t) = Bt$ в в. п. с д. в. и $\mathsf{D}\mu(t) = bt$ в в. п. с н. в., $B = F''(1)$, $b = f''(1)$. Более детальное изучение асимптотич. поведения распределения $\mu(t)$ при $t \to \infty$ показывает, что условный закон распределения

$$S_t(x) = \mathsf{P}\left\{\frac{\mu(t)}{\mathsf{E}\{\mu(t) \mid \mu(t) > 0\}} \leqslant x \mid \mu(t) > 0\right\} \qquad (5)$$

при $t \to \infty$ слабо сходится к предельному распределению $S(x)$, если конечны нек-рые моменты $\mu(t)$. В докритич. В. п. предельный закон $S(x)$ дискретен, а в остальных случаях абсолютно непрерывен. Особенно интересен случай критич. В. п., для к-рого предельный закон $S(x)$ показательный

$$S(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geqslant 0. \qquad (6)$$

Распределение (6) является предельным также и для В. п., близких к критическим. Точнее, если рассматривать класс производящих функций $F(s)$ или $f(s)$ с ограниченной 3-й производной $F'''(1)$, $f'''(1)$ и с $F''(1) \geqslant B_0 > 0$, $f''(1) \geqslant b_0 > 0$, то

$$\lim_{\substack{t \to \infty \\ A \to 1}} S_t(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geqslant 0,$$

где $S_t(x)$ определяется формулой (5). Явления, возникающие при $t \to \infty$ в В. п., близких к критическим, наз. п е р е х о д н ы м и.

Другой моделью В. п. является *Беллмана — Харриса процесс*, в к-ром каждая частица имеет случайное время жизни с функцией распределения $G(t)$. В конце жизни частица оставляет потомство численности n с вероятностью q_n,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = 1.$$

Времена жизни и численности потомства разных частиц независимы. Пусть в начальный момент $t = 0$ была одна частица нулевого возраста. Тогда производящая функция $F(t; s)$ числа частиц $\mu(t)$ в момент t, определяемая формулой (2), удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$F(t; s) = \int_0^t h(F(t-u; s))\, dG(u) + s(1 - G(t)), \qquad (7)$$

где

$$h(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n.$$

В частном случае, когда $G(t)$ — вырожденная функция распределения, процесс Беллмана — Харриса есть в. п. с д. в.; когда же $G(t)$ — показательная функция распределения, получается в. п. с н. в. В общем случае процесс Беллмана — Харриса — это немарковский В. п.

Другое усложнение В. п. связано с зависимостью частиц от положения в пространстве. Пусть, напр., частицы независимо друг от друга совершают броуновское движение в r-мерной области G с поглощающей

границей ∂G. Частица, находящаяся внутри области G, за время $\Delta t \to 0$ с вероятностью

$$p_n \Delta t + o(\Delta t), \quad n \neq 1,$$

превращается в n частиц, к-рые начинают независимо друг от друга блуждать по броуновским траекториям из точки их рождения. Пусть $\mu_{xt}(A)$ равно числу частиц в множестве A в момент t, если в начальный момент 0 была одна частица в точке $x \in G$. Производящий функционал

$$H(t, x, s(\cdot)) = \mathsf{E} \exp\left[\int_G \ln s(y)\, \mu_{xt}(dy)\right]$$

удовлетворяет квазилинейному параболич. уравнению

$$\Delta H + f(H) = 0 \qquad (8)$$

с начальным условием $H(0, x, s(\cdot)) = s(x)$ и граничным условием $H(t, x, s(\cdot))|_{x \to \partial G} = 0$, где $\Delta = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа, а $f(s) = \sum_n p_n s^n$, $p_1 = -\sum_{n \neq 1} p_n$.

В общем случае В. п. предполагается, что размножающиеся частицы характеризуются к.-л. параметрами, к-рые можно интерпретировать как возраст, положение частицы в пространстве, тип, размер или энергию частицы и т. п. Изучение таких процессов ведется с помощью производящих функций или функционалов, для к-рых выводятся нелинейные дифференциальные или интегральные уравнения, обобщающие уравнения (4), (7), (8). Можно дать следующее общее описание таких моделей В. п. Пусть в нек-ром фазовом пространстве X независимо друг от друга по закону марковского процесса блуждают частицы. Предполагается, что случайное время жизни частицы есть марковский момент, зависящий от ее траектории. В конце своей жизни частица производит новые частицы, к-рые по к.-л. вероятностному закону распределяются по фазовому пространству X. Новые частицы эволюционируют независимо друг от друга аналогичным образом. В пространстве целочисленных мер, определяемых численностями частиц в подмножествах X, так построенный В. п. является марковским. Однако В. п. часто рассматриваются в более простых редуцированных пространствах. В этом случае многие из них становятся немарковскими.

В большей части приведенных выше моделей сохраняет смысл подразделение процессов на докритические, критические и надкритические В. п. При этом в более сложной обстановке сохраняются многие свойства, установленные для простых В. п., описываемых уравнением (4). В частности, в критич. процессах, как правило, в качестве предельного распределения для (5) (при соответствующей нормировке) возникает показательное распределение (6).

В. п. находят применение при расчетах различных реальных биологич., генетич., физич., химич. или технич. процессов. В реальных процессах часто нарушается условие независимости размножения различных частиц и, наоборот, при размножении имеется взаимодействие частиц. Так обстоит дело во многих биологич. процессах размножения, в процессах распространения эпидемий (см. *Эпидемии процессы*), в бимолекулярных химич. реакциях и т. п. Однако начальные стадии развития таких процессов можно рассчитывать с помощью соответственно подобранных моделей В. п. Это делается в тех случаях, когда в среде имеется не очень много активных частиц, к-рые при малых концентрациях почти не встречаются друг с другом, а изменения состояния системы происходят при встречах этих активных частиц с частицами среды. В процессах эпидемии, напр., такими «активными частицами» можно считать больных индивидуумов. В генетике с помощью В. п. можно рассчитывать, напр., явления, связанные с му-

тациями. *Ветвящийся процесс с конечным числом типов частиц* может служить моделью при расчетах цепных реакций; *ветвящийся процесс с диффузией* частиц — моделью нейтронных процессов в ядерных реакторах. Явления, возникающие в ливнях космич. лучей, также могут изучаться с помощью В. п. В телефонии расчет нек-рых систем с ожиданием сводится к моделям В. п.

См. также *Ветвящийся процесс со случайной средой*, *Ветвящийся процесс с иммиграцией*, *Ветвящихся процессов регулярность*.

Лит.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [2] Athreya K. B., Ney P. E., Branching Processes, B.— Hdlb., N. Y., 1972. *Б. А. Севастьянов.*

ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС С ДИФФУЗИЕЙ — модель ветвящегося процесса, в к-ром размножающиеся частицы диффундируют в к.-л. области G. Пусть область G r-мерна, ее граница ∂G — поглощающая, и в самой области частицы независимо друг от друга совершают броуновское движение. Каждая частица в области G за время $\Delta t \to 0$ независимо от других частиц с вероятностью $p_n \Delta t + o(\Delta t)$, $n \neq 1$, превращается в n частиц, к-рые независимо друг от друга начинают свою эволюцию из точки их рождения. Пусть

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

— производящая функция $\{p_n\}$, $p_1 = -\sum_{n \neq 1} p_n$, $\mu_{xt}(A)$ — число частиц в множестве $A \subseteq G$ в момент t, если в начальный момент была одна частица в точке $x \in G$. Производящий функционал

$$H(t;\ x,\ s(\cdot)) = \mathsf{E} \exp\left[\int_G \ln s(y)\, \mu_{xt}(dy)\right]$$

удовлетворяет квазилинейному параболич. уравнению

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2} + f(H) = 0$$

с начальным условием

$$H(0,\ x,\ s(\cdot)) = s(x)$$

и граничным условием

$$H(t,\ x,\ s(\cdot))\,|_{x \to \partial G} = 0.$$

Обозначим $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$ собственные значения, $\varphi_1(x) > 0$ — соответствующую λ_1 собственную функцию задачи

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} + \lambda \varphi = 0, \quad \varphi(x)\,|_{x \to \partial G} = 0.$$

При $t \to \infty$ имеет место асимптотика

$$\mathsf{E}\mu_{xt}(G) \sim K e^{(a-\lambda_1)\, t} \varphi_1(x),$$

в соответствии с к-рой процесс наз. докритическим при $a < \lambda_1$, критическим при $a = \lambda_1$ и надкритическим при $a > \lambda_1$. При $a \leqslant \lambda_1$ В. п. с д. вырождается с вероятностью 1, а при $a > \lambda_1$ с положительной вероятностью $\mu_{xt}(G) \to \infty$ при $t \to \infty$. В зависимости от критичности В. п. с д. имеют место предельные теоремы, аналогичные теоремам для ветвящихся процессов без диффузии.

Лит.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971. *Б. А. Севастьянов.*

ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС С ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ВОЗРАСТА — модель ветвящегося процесса, в к-ром время жизни частицы является произвольной неотрицательной случайной величиной, а число потомков частицы зависит от ее возраста в момент превращения. В модели с однотипными частицами каждая частица имеет случайную продолжительность жизни τ с функцией распределения

$$\mathsf{P}\{\tau \leqslant t\} = G(t).$$

В конце жизни частица превращается в k частиц нулевого возраста с вероятностью $p_k(u)$, если превраще-

ние произошло, когда частица достигла возраста u. Пусть $\mu(t)$ — число частиц в момент времени t. Производящая функция $F(t, x)$ распределения вероятностей $\mu(t)$ для процесса, начавшегося с одной частицы нулевого возраста, удовлетворяет уравнению

$$F(t, x) = \int_0^t h(u, F(t-u, x))\, dG(u) + x(1-G(t)), \quad (*)$$

где

$$h(u, x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(u)\, x^k.$$

Положим

$$a(u) = \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{x=1}, \quad b(u) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\Big|_{x=1},$$

$$A = \int_0^{\infty} a(u)\, dG(u), \quad B = \int_0^{\infty} b(u)\, dG(u).$$

В. п. с з. от в. наз. *докритическим*, *критическим* или *надкритическим*, если соответственно $A<1$, $A=1$ и $B>0$, $A>1$. Поведение процесса при $t \to \infty$ существенно зависит от критичности процесса. Докритич. и критич. процессы вырождаются с вероятностью 1, т. е.

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\mu(t)=0\} = 1.$$

Для рассматриваемых процессов получены [1] асимптотич. формулы моментов $\mu(t)$, необходимые и достаточные условия вырождения, условия существования и единственности решения уравнения (*), асимптотич. формулы при $t \to \infty$ для

$$Q(t) = \mathsf{P}\{\mu(t) > 0\}$$

и найдены предельные распределения. В критич. случае при $t \to \infty$:

$$Q(t) \sim \frac{2\int_0^{\infty} u\, a(u)\, dG(u)}{Bt},$$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\mu(t)}{t\,(\mu(t) \mid \mu(t)>0)} < x \,\middle|\, \mu(t)>0\right\} \to 1-e^{-x}, \quad x>0.$$

В случае, когда $h(u, x)$ не зависит от u, В. п. с з. от в. — *Беллмана — Харриса процесс*. Имеются обобщения описанной модели на процессы с несколькими типами частиц, а также на процессы с предположением, что частица может в течение жизни порождать новые частицы несколько раз (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [2] его же, «Теория вероят. и ее примен.», 1964, т. 9, № 4, с. 577—94; [3] Mode C. J., Multitype Branching Processes, N. Y., 1971.

В. П. Чистяков.

ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС С ИММИГРАЦИЕЙ — модель ветвящегося процесса (с дискретным или непрерывным временем, с одним или несколькими типами частиц и т. д.), в к-рой новые частицы могут появляться не только при делении частиц, но и в результате иммиграции из какого-то «внешнего источника». Напр., пусть

$$X_{t,i},\ Y_t,\ t=0, 1, \ldots;\ i=1, 2, \ldots,$$

— независимые случайные величины с производящими функциями

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\{X_{t,i}=k\}\, s^k,$$

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\{Y_t=k\}\, s^k$$

соответственно; тогда ветвящийся *Гальтона—Ватсона процесс* с иммиграцией можно задать соотношениями ($\mu(t)$ — число частиц): $\mu(0)=0$ и

$$\mu(t+1) = X_{t,1} + \ldots + X_{t,\mu(t)} + Y_t, \quad t=0, 1, \ldots$$

(величина $X_{t,i}$ интерпретируется как размер потомства i-й частицы t-го поколения, величина Y_t—как число

частиц, иммигрирующих в t-е поколение). Производящие функции

$$H_t(s) = \mathsf{E}\left\{s^{\mu(t)} \mid \mu(0) = 0\right\}$$

определяются рекуррентными соотношениями

$$H_0(s) \equiv 1, \quad H_{t+1}(s) = G(s)\, H_t(F(s)).$$

Соответствующая ветвящемуся процессу Гальтона—Ватсона с иммиграцией цепь Маркова $\mu(t)$ возвратна, если $\mathsf{E}X_{t,i} < 1$ и $\mathsf{E}\ln(1+Y_t) < \infty$ или $\mathsf{E}X_{t,i} = 1$ и $B = \mathsf{D}X_{t,i} > 2C = 2\mathsf{E}Y_t$, и невозвратна, если $\mathsf{E}X_{t,i} = 1$ и $B < 2C$ или $\mathsf{E}X_{t,i} > 1$. Для эргодичности цепи Маркова $\mu(t)$, т. е. для того чтобы существовали пределы

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\mu(t) = k\} = p_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,$$

необходимо и достаточно (см. [3]), чтобы

$$\int_0^1 \frac{1 - G(s)}{F(s) - s}\, ds < \infty$$

(это условие выполняется, в частности, если $\mathsf{E}X_{t,i} < 1$ и $\mathsf{E}\ln(1+Y_t) < \infty$). Если $\mathsf{E}X_{t,i} = 1$, $B > 0$, $C < \infty$, то (см. [4]):

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{2\mu(t)}{Bt} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\Gamma\left(2CB^{-1}\right)} \int_0^x y^{2CB^{-1}-1} e^{-y}\, dy, \quad x \geqslant 0.$$

Если $A = \mathsf{E}X_{t,i} > 1$ и $\mathsf{E}\ln(1+Y_t) < \infty$, то (см. [5]) существует такая последовательность чисел $c_t \downarrow 0$, $c_t/c_{t+1} \to A$, что

$$\mathsf{P}\left\{\exists \lim_{t\to\infty} \mu(t)\, c_t \in (0, \infty)\right\} = 1.$$

Для В. п. с и., в к-рых иммиграция происходит только при $\mu(t) = 0$, т. е.

$$\mu(t+1) = X_{t,1} + \ldots + X_{t,\mu(t)} + \delta_{0,\mu(t)} Y_t, \quad t = 0, 1, \ldots,$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, при $\mathsf{E}X_{t,i} = 1$, $1 < \mathsf{E}X_{t,i}^2 < \infty$ и $0 < \mathsf{E}Y_t < \infty$ справедливо соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\ln(1+\mu(t))}{\ln t} \leqslant x\right\} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Лит.: [1] Зубков А. М., «Теория вероят. и ее примен.», 1972, т. 17, в. 1, с. 179—88; [2] Pakes A. G., «J. Austral. Math. Soc.», 1972, v. 13, № 3, p. 277—90; [3] Foster J. H., Williamson J. A., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.», 1971, Bd 20, № 3, S. 227—35; [4] Seneta E., «J. Roy. Statist. Soc.», 1970, v. 32, № 1, p. 149—52; [5] его же, «Math. Biosci.», 1970, v. 7, № 1, p. 9—14; [6] Foster J. H., «Ann. Statistics», 1971, v. 42, № 5, p. 1773—6.

А. М. Зубков.

ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ТИПОВ ЧАСТИЦ — модель ветвящегося процесса, являющаяся частным случаем марковского процесса со счетным множеством состояний. Состояние ветвящегося процесса описывается случайным вектором

$$\mu(t) = (\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t)),$$

k-я компонента к-рого $\mu_k(t)$ показывает, что в момент t имеется $\mu_k(t)$ частиц типа T_k. Основное свойство, выделяющее ветвящиеся процессы из марковских, состоит в том, что частицы, существующие в момент t_1, в любой следующий момент $t_1 + t$, $t > 0$, дают потомство независимо друг от друга. При этом производящие функции

$$F_k(t, x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \mathsf{E}\left(x_1^{\mu_1(t)}, \ldots, x_n^{\mu_n(t)} \mid \mu_k(0) = 1;\ \mu_i(0) = 0,\ i \neq k\right)$$

удовлетворяют системе уравнений

$$F_k(t+\tau, x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= F_k(t, F_1(\tau, x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(\tau, x_1, \ldots, x_n)) \quad (*)$$

и начальным условиям

$$F_k(0, x_1, \ldots, x_n) = x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Уравнениям (*) удовлетворяют процессы с дискретным и с непрерывным временем.

В случае дискретного времени матрица математич. ожиданий

$$A(t) = \| A_{ij}(t) \|,$$
$$A_{ij}(t) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\Big|_{x_1=\ldots=x_n=1},$$

является t-й степенью матрицы $A=A(1)$: $A(t)=A^t$. Если матрица A неразложима и непериодична, то она имеет простое положительное характеристич. число λ, к-рое больше модулей остальных характеристич. чисел. В этом случае при $t \to \infty$

$$A_{ij}(t) = u_i v_j \lambda^t + o(\lambda^t),$$

где $(u_1, \ldots, u_n)$, $(v_1, \ldots, v_n)$ — правый и левый собственные векторы матрицы A, соответствующие λ. Ветвящиеся процессы с неразложимой матрицей A наз. д о к р и т и ч е с к и м и, если $\lambda<1$, н а д к р и т и ч е с к и м и, если $\lambda>1$, и к р и т и ч е с к и м и, если $\lambda=1$ и хотя бы одна из функций $F_k(1, x_1, \ldots, x_n)$ нелинейна. Для процессов с непрерывным временем понятие критичности вводится аналогично.

Асимптотич. свойства ветвящегося процесса существенно зависят от критичности. Докритич. и критич. процессы вырождаются с вероятностью 1. Асимптотические при $t \to \infty$ формулы для вероятности

$$Q_k(t) = \mathsf{P}\{\mu_1(t) + \ldots + \mu_n(t) > 0 \mid \mu_k(0)=1; \ \mu_i(0)=0,\ i \neq k\}$$

и теоремы о предельных распределениях числа частиц [2] аналогичны соответствующим результатам для процессов с одним типом частиц (см. *Ветвящийся процесс*). Изучены асимптотич. свойства процессов, близких к критическим ($t \to \infty$, $\lambda \to 1$) (см. [3]). Изучаются также процессы с разложимой матрицей математич. ожиданий (см. [4]).

Лит.: [1] К о л м о г о р о в А. Н., Д м и т р и е в Н. А., «Докл. АН СССР», 1947, т. 56, № 1, с. 7—10; [2] С е в а с т ь я н о в Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971; [3] Ч и с т я к о в В. П., «Теории вероят. и ее примен.», 1972, т. 17, № 4, с. 669—78; [4] O g u r a J., «J. Math. Kyoto Univ.», ser. A, 1975, v. 15, № 2, p. 251—302.

В. П. Чистяков.

ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС СО СЛУЧАЙНОЙ СРЕДОЙ — неоднородный по времени ветвящийся процесс, в к-ром неоднородность имеет случайный характер. Пусть $\bar{\xi}=\{\xi_0, \xi_1, \ldots\}$ — стационарная последовательность случайных величин (значение ξ_t интерпретируется как состояние «среды» в момент времени t) и каждому возможному состоянию среды ξ сопоставлено распределение вероятностей $\{p_k(\xi)\}$ числа потомков одной частицы:

$$p_k(\xi) \geqslant 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\xi) = 1,$$
$$F_\xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\xi)\, s^k.$$

Для построения траектории $\{\mu(0), \mu(1), \ldots\}$ В. п. со с. с. фиксируют значение $\mu(0)=m$ и траекторию $\bar{\xi}$ состояний среды и при каждом $t=0, 1, \ldots$ определяют $\mu(t+1)$ как сумму $\mu(t)$ независимых случайных величин, имеющих распределение $\{p_k(\xi_t)\}$. Такое усложнение ветвящегося *Гальтона—Ватсона процесса* довольно естественно, если, напр., рассматривать В. п. со с. с. как модель биологич. популяции.

Свойства В. п. со с. с. аналогичны свойствам обычных ветвящихся процессов. Напр., производящая функция распределения $\mu(t)$ при условии, что $\mu(0)=1$, имеет вид

$$\mathsf{E}\{s^{\mu(t)} \mid \mu(0)=1\} = \mathsf{E}_{\bar{\xi}} F_{\xi_0}\left(F_{\xi_1}\left(\ldots\left(F_{\xi_{t-1}}(s)\right)\ldots\right)\right) \quad (*)$$

(для ветвящегося процесса Гальтона — Ватсона, т. е. при $\mathsf{P}\{\xi_t \equiv 0\}=1$, в правой части (*) стоит t-кратная итерация $F_0(s)$). В. п. со с. с. делятся на докритиче-

ские, критические и надкритические; «критич. параметром» является (см. [1]) величина

$$\rho = \mathbf{E}_{\xi_0} \ln \sum_{k=0}^{\infty} k p_k (\xi_0) = \mathbf{E}_{\xi_0} \ln F'_{\xi_0}(1)$$

(для обычных ветвящихся процессов «критич. параметром» является математич. ожидание числа потомков одной частицы). Если $\rho<0$, то В. п. со с. с. наз. д о к р и т и ч е с к и м, и для случайной величины

$$q(\bar{\xi}) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\mu(t)=0 \mid \mu(0)=1,\ \bar{\xi}\}$$

— вероятности вырождения В. п. со с. с. при фиксированной траектории $\bar{\xi}$ — справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{q(\bar{\xi})=1\}=1.$$

Имеет место аналог предельной теоремы для докритического ветвящегося процесса Гальтона — Ватсона: для почти всех реализаций последовательности $\bar{\xi}$ существуют пределы

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\mu(t)=k \mid \mu(0)=1,\ \mu(t)>0,\ \bar{\xi}\} = p_k^*(\bar{\xi}),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k^*(\bar{\xi}) = 1.$$

Если $\rho=0$, то В. п. со с. с. наз. к р и т и ч е с к и м, тогда

$$\mathbf{P}\{q(\bar{\xi})=1\}=1$$

и для почти всех реализаций $\bar{\xi}$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\mu(t)=k \mid \mu(0)=1,\ \mu(t)>0,\ \bar{\xi}\}=0.$$

При $\rho>0$ В. п. со с. с. наз. н а д к р и т и ч е с к и м; в этом случае

$$\mathbf{P}\{q(\bar{\xi})<1\}=1$$

и при нек-рых дополнительных условиях для почти всех $\bar{\xi}$ существует неотрицательная случайная величина

$$W = \lim_{t\to\infty} \frac{\mu(t)}{F'_{\xi_0}(1)\dots F'_{\xi_{t-1}}(1)}, \quad \mathbf{E}W=1.$$

Лит.: [1] A t h r e y a K. B., N e y P., Branching processes, B.—Hdlb.—N.Y., 1972.

А. М. Зубков.

ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ РЕГУЛЯРНОСТЬ — свойство ветвящегося процесса, обеспечивающее конечность числа частиц в любой момент времени. Вопрос о В. п. р. сводится, как правило, к вопросу о единственности решения нек-рого дифференциального или интегрального уравнения. Напр., в ветвящемся процессе с непрерывным временем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F(t;\ s)}{\partial t} = f(F(t,\ s))$$

с начальным условием $F(0, s)=s$ имеет единственное решение $F(t, s)$ тогда и только тогда, когда при любом $\varepsilon>0$ расходится интеграл

$$\int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{dx}{f(x)}.$$

В ветвящемся *Беллмана—Харриса процессе* производящая функция $F(t; s)$ числа частиц есть решение нелинейного интегрального уравнения

$$F(t;\ s) = \int_0^t h(F(t-u;\ s))\, dG(u) + s(1-G(t)), \quad (*)$$

где $G(t)$ — функция распределения времени жизни частиц, $h(t)$ — производящая функция числа непосредственных потомков одной частицы. Если при некоторых t_0, c_1, $c_2>0$ и целом $h\geqslant 1$ для всех $0\leqslant t\leqslant t_0$ выполняются неравенства

$$c_1 t^n \leqslant G(t) \leqslant c_2 t^n,$$

то единственность решения уравнения (*) имеет место тогда и только тогда, когда уравнение

$$\frac{d^n\varphi}{dt^n} = h(\varphi) - 1$$

с начальными условиями

$$\varphi(0) = 1,\ \varphi^{(r)}(0) = 0,\ r = 1,\ \ldots,\ n-1,$$

имеет единственное решение

$$0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1.$$

Для регулярности ветвящегося процесса, описываемого уравнением (*), необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ интеграл

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{x^{1-1/n}(1-h(1-x))^{1/n}}$$

расходился.

Лит.: [1] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.

Б. А. Севастьянов.

ВЕЩЕСТВЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — аналитическое пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. В отличие от комплексных аналитич. пространств, структурные пучки В. а. п. могут не быть *когерентными пучками*. В. а. п. наз. к о г е р е н т н ы м, если его структурный пучок когерентен. Все вещественные аналитич. многообразия (т. е. гладкие В. а. п.) являются когерентными В. а. п.

Пусть V_a — росток в точке a вещественного аналитич. подмножества пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда определен росток в точке a комплексного аналитич. подмножества $\tilde{V}_a$ пространства $\mathbb{C}^n$, обладающий следующими эквивалентными свойствами: а) $\tilde{V}_a$ есть пересечение всех ростков комплексных аналитич. множеств, содержащих V_a; б) если $\mathcal{O}_{V_a}$ — аналитич. алгебра ростка V_a, то $\mathcal{O}_{V_a} \otimes \mathbb{C}$ есть аналитич. алгебра ростка $\tilde{V}_a$. Росток $\tilde{V}_a$ наз. к о м п л е к с и ф и к а ц и е й р о с т к а V_a, а V_a — вещественной частью ростка $\tilde{V}_a$. Аналогично для всякого когерентного В. а. п. X можно построить комплексификацию $\tilde{X}$, являющуюся комплексным аналитич. пространством. При этом X будет обладать в $\tilde{X}$ фундаментальной системой окрестностей, являющихся *Штейна пространствами*.

Теория когерентных В. а. п. аналогична теории комплексных пространств Штейна. Глобальные сечения всякого *когерентного аналитического пучка* модулей F на когерентном В. а. п. X порождают модули ростков его сечений в любой точке пространства X, и все группы $H^q(X, F)$ равны нулю при $q \geqslant 1$.

Для всякого конечномерного когерентного В. а. п. $(x, \mathcal{O}_X)$ существует морфизм

$$f = (f_0, f_1) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$$

такой, что f_0 — собственное взаимно однозначное отображение пространства X на когерентное подпространство в $\mathbb{R}^n$, причем f — вложение в гладких точках пространства X. В частности, всякое (хаусдорфово и счетное в бесконечности) вещественное аналитич. многообразие изоморфно вещественному аналитич. подмногообразию в $\mathbb{R}^n$. Для приведенного когерентного В. а. п. X множество классов изоморфных вещественно аналитич. главных расслоений со структурной вещественной группой Ли G, допускающей комплексификацию, и базой X находится во взаимно однозначном соответствии с множеством классов изоморфных топологич. главных расслоений с той же структурной группой G.

Лит.: [1] Espaces analytiques, Buc., 1971, p. 149—57.

Д. А. Пономарев.

ВЕЩЕСТВЕННОЕ НОРМИРОВАНИЕ — мультипликативное нормирование поля (или кольца) со значения-

ми нормы в поле действительных чисел (см. также *Абсолютное значение*).

ВЕЩЕСТВЕННОЕ ЧИСЛО — то же, что *действительное число*.

ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНОЕ СООТВЕТСТВИЕ — соответствие между элементами двух множеств, при к-ром каждому элементу первого множества соответствует единственный элемент второго множества, причем разным элементам первого множества соответствуют разные элементы второго и каждый элемент второго множества поставлен в соответствие некоторому элементу первого. В. о. с. обладает свойством симметричности (отображение, обратное В. о. с., является В. о. с.) и транзитивности (произведение В. о. с. является В. о. с.). Если каждой точке x ориентированной прямой поставить в соответствие ее расстояние до нек-рой фиксированной точки O (взятое со знаком плюс, если точка лежит в положительном направлении от точки O, и со знаком минус — в противоположном случае), то получится В. о. с. между точками прямой и действительными числами. *Л. Д. Кудрявцев.*

ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ ЧИСЛА — целые числа, не имеющие общих (простых) делителей. *Наибольший общий делитель* В. п. ч. a и b равен единице, это принято обозначать $(a, b)=1$. Если a и b взаимно просты, то существуют такие числа u и v, $|u|<|b|$, $|v|<a$, что $au+bv=1$.

Понятие взаимной простоты может быть введено также для многочленов и вообще для элементов любого *евклидова кольца*.

ВЗАИМНОСТИ ЗАКОНЫ — ряд утверждений, касающихся связи между символами степенных или норменных вычетов.

Простейшим проявлением В. з. является следующий факт, известный еще П. Ферма (P. Fermat). Простыми делителями чисел x^2+1 могут быть лишь число 2 и простые числа, лежащие в арифметич. прогрессии $1+4k$. Другими словами, сравнение

$$x^2+1\equiv 0 \pmod p$$

по простому модулю $p>2$ разрешимо в том и только в том случае, когда $p\equiv 1 \pmod 4$. С помощью символа квадратичного вычета $\left(\frac{a}{p}\right)$ (*Лежандра символа*) последнее утверждение может быть выражено следующим образом:

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

В более общем случае вопрос о разрешимости сравнения

$$x^2\equiv a \pmod p \qquad (*)$$

решается с помощью *Гаусса закона взаимности*:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{8}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

где p и q — различные нечетные простые числа, а также двух дополнений к этому закону

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Из этих соотношений для символов Лежандра следует, что простые числа p, для к-рых сравнение (*) при фиксированном a разрешимо, укладываются ровно в половину приведенных классов вычетов по модулю $4|a|$.

К. Гаусс (C. Gauss) справедливо придавал большое значение указанному В. з. и дал несколько его доказательств, основанных на совершенно различных идеях [1]. Из закона взаимности Гаусса и его дальнейшего обобщения — В. з. для *Якоби символа* — следует, в частности, что тип разложения простого числа p

в квадратичном расширении $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ определяется вычетом p по модулю $4|d|$.

Закон взаимности Гаусса обобщается на сравнения вида

$$x^n \equiv a \pmod{p}, \quad n > 2.$$

Однако при этом происходит переход от арифметики целых рациональных чисел к арифметике целых чисел расширения K конечной степени m поля рациональных чисел. Кроме того, для обобщения В. з. на вычеты n-й степени нужно предполагать, что рассматриваемое расширение содержит примитивный корень ζ степени n из 1. При таком предположении для простых дивизоров $\mathfrak{P}$ поля K, не делящих n, имеет место сравнение

$$N_{\mathfrak{P}} \equiv 1 \pmod{n},$$

где $N_{\mathfrak{P}}$ — норма дивизора $\mathfrak{P}$, равная числу классов вычетов максимального порядка этого поля по модулю $\mathfrak{P}$. Аналог символа Лежандра определяется при помощи сравнения

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{P}}\right) = \zeta^k \equiv a^{\frac{N_{\mathfrak{P}}-1}{n}} \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Символ степенного вычета $\left(\frac{a}{b}\right)$ для пары целых чисел a и b, аналогичный символу Якоби, определяется по формуле

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \prod \left(\frac{a}{\mathfrak{P}_i}\right)^{m_i},$$

если $(b) = \prod \mathfrak{P}_i^{m_i}$ — разложение главного дивизора (b) на простые сомножители и если b взаимно просто с an.

В. з. для $n=4$ в поле $\mathbb{Q}(i)$ был установлен К. Гауссом [2], для $n=3$ в поле $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}})$ — Г. Эйзенштейном [3]. Общий В. з. для символа степенного вычета в поле $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$ простой степени n был установлен Э. Куммером [4]. Формула Куммера для регулярного простого числа n имеет вид

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{-1} = \zeta^{l^1(a)\,l^{n-1}(b) - l^2(a)\,l^{n-2}(b) + \ldots - l^{n-1}(a)\,l^1(b)},$$

где a, b — целые числа поля $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$,

$$a \equiv b \equiv 1 \pmod{(\zeta - 1)},$$

$$l_i(a) = \left[\frac{d^i \log f(e^u)}{du^i}\right]_{u=0}$$

и $f(t)$ — многочлен степени $n-1$ такой, что

$$a = f(\zeta), \quad f(1) = 1.$$

Следующий этап в изучении общих В. з. связан с работами Д. Гильберта [5], [6], выяснившего их локальный аспект. Д. Гильберт для нек-рых случаев установил В. з. в виде формулы произведения для его символа норменного вычета

$$\prod_{\mathfrak{P}} \left(\frac{a, b}{\mathfrak{P}}\right) = 1.$$

Он подметил также аналогию этой формулы с теоремой о вычетах алгебраич. функций — простые точки $\mathfrak{P}$ с символом норменного вычета $\neq 1$ соответствуют точкам ветвления на римановой поверхности.

Дальнейший прогресс в изучении В. з. связан с именами Ф. Фуртвенглера [7], Т. Такаги [8], Э. Артина [9], Х. Хассе [10]. Наиболее общая форма В. з. была получена И. Р. Шафаревичем [11].

Как и закон взаимности Гаусса, общие В. з. тесно связаны с задачей изучения законов разложения простых дивизоров $\mathfrak{P}$ заданного поля алгебраич. чисел k в его

алгебраич. расширениях K/k с абелевой Галуа группой. В частности, теория полей классов, решающая эту задачу, может быть обоснована (см. [12]), исходя из закона взаимности Шафаревича.

Лит.: [1] Gauss C. F., Werke, Bd 1 — Disquisitiones arithmeticae, Gött., 1870; [2] его же, Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio prima et secunda, в кн.: Werke, Bd 2, Gött., 1863, S. 65, 93; [3] Eisenstein G., «J. Math.», 1844, Bd 27; [4] Kummer E., «Ber. K. Akad. Wiss. Berlin», 1850; [5] Hilbert D., «Jahresber. Dtsch. Math.—Ver.», 1897, Bd 4, S. 175—546; [6] его же, там же, 1899, Bd 6, № 1, S. 88—94; [7] Furtwängler Ph., «Math. Ann.», 1909, Bd 67, S. 1—31; 1912, Bd 72, S. 346—86; 1913, Bd 74, S. 413—29; [8] Takagi T., «J. Colloid Science», 1920, v. 41, t. 9; [9] Artin E., «Abh. Math. Semin. Hamburg Univ.», 1928, Bd 5; [10] Hasse H., «Math. Ann.», 1933, Bd 107, № 5, S. 731—60; [11] Шафаревич И. Р., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 3 (25), с. 165; [12] Лапин А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1954, т. 18, № 4, с. 335—78; [13] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [14] Фаддеев Д. К., в кн.: Проблемы Гильберта, М., 1969, с. 131—40.

С. А. Степанов.

ВЗАИМНЫЕ ЯДРА — две функции $K(x, s)$ и $K_1(x, s)$ действительных переменных x, s (или, вообще, точек P, Q евклидова пространства), определенные на квадрате $[a, b]\times[a, b]$ и удовлетворяющие условию:

$$K_1(x, s)+K(x, s)=$$
$$=\int_a^b K(x, t)\,K_1(t, s)\,dt=\int_a^b K_1(x, t)\,K(t, s)\,dt.$$

Взаимное с $K(x, s)$ ядро $K_1(x, s)$, когда оно существует, является ядром резольвенты интегрального *Фредгольма уравнения*:

$$\varphi(x)-\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds=f(x).$$

А. Б. Бакушинский.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — одно из основных возможных (наряду с *Шрёдингера представлением* и с *Гейзенберга представлением*) эквивалентных представлений зависимости от времени t операторов A и волновых функций ψ в квантовой механике и квантовой теории поля. Квантовую систему с учетом взаимодействия между ее частями (в квантовой механике) или составляющими ее различными полями (в квантовой теории поля) можно описать в представлении Шрёдингера с помощью *Шрёдингера уравнения*:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_S(t)}{\partial t}=H\psi_S(t)=(H_0+H_1)\,\psi_S(t). \qquad (1)$$

Предполагается, что полный гамильтониан H разделяется на гамильтониан свободных (невзаимодействующих) частей или полей H_0 и гамильтониан взаимодействия H_1. Гамильтонианы H_0 и H_1 являются некоммутирующими (иначе задача становится тривиальной, так как разбиение гамильтониана H на H_0 и H_1 теряет смысл) функциями операторов, соответствующих различным свободным полям и не зависящих от времени t в представлении Шрёдингера. Унитарное преобразование

$$\psi_S(t)=e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t}\,\Phi_I(t) \qquad (2)$$

осуществляет переход к В. п., где волновая функция удовлетворяет уравнению:

$$i\hbar\frac{\partial\Phi_I(t)}{\partial t}=H_1(t)\Phi_I(t), \qquad (3)$$

т. е. зависимость $\Phi_I(t)$ от t определяется гамильтонианом взаимодействия в представлении

$$H_1(t)=e^{+i\frac{H_0}{\hbar}t}\,H_1e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t}. \qquad (4)$$

При этом среднее значение оператора A в представлении Шрёдингера

$$\overline{A}\equiv\overline{A}_S=\psi_S^*(t)\,A_S\psi_S(t)=\Phi_I^*(t)\,e^{i\frac{H_0}{\hbar}t}\,A_Se^{-i\frac{H_0}{\hbar}t}\,\Phi_I(t) \qquad (5)$$

можно также понимать как среднее значение по волновым функциям $\Phi_I(t)$ от оператора A_I в В. п.

$$A_I(t) = e^{i\frac{H_0}{\hbar}t} A_S e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t}. \quad (6)$$

В В. п. операторы, соответствующие физическим динамич. величинам, зависят от времени согласно (6) как операторы в представлении Гейзенберга для свободных полей, а изменение волновых функций с течением времени t определяется эффектами взаимодействия между полями. При описании поведения квантовой системы с течением времени t В. п. позволяет выделить зависимость от гамильтониана свободных полей H_0, к-рую обычно легко определить, и сосредоточить внимание на исследовании уравнений (3) и (4), содержащих всю информацию о взаимодействии между полями. Особенно удобно использовать В. п. в случае, когда H_1 содержит нек-рый малый параметр и соответствующие решения можно искать по теории возмущений в виде рядов по степеням этого малого параметра.

Свойство инвариантности средних значений (5), к-рые должны быть наблюдаемыми и иметь тем самым физич. смысл относительно унитарных преобразований (2) и (6), означает эквивалентность В. п. и представлений Шрёдингера и Гейзенберга. *В. Д. Кукин.*

ВЗВЕШЕННОЕ СРЕДНЕЕ — величина

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

где $x_1, \ldots, x_n$ суть n величин, взятых с весами $p_1, \ldots, p_n$ соответственно.

ВИВИАНИ КРИВАЯ, окно Вивиани, — линия пересечения сферы радиуса R и кругового цилиндра радиуса $R/2$, образующая к-рого проходит через центр сферы. Часть шара, находящаяся внутри цилиндра, наз. телом Вивиани. В. к. названа по имени В. Вивиани (V. Viviani, 17 в.). *Е. В. Шикин.*

ВИД в логике — интуиционистский аналог понятия множества, точно сформулированное условие, выделяющее часть объектов из уже определенной совокупности объектов исследования. Существенно, что условие, задающее В., понимается при этом интуиционистски, так что, напр., двойное отрицание условия не обязательно эквивалентно самому этому условию. Над В. естественным образом определяются операции, аналогичные нек-рым операциям над множествами, такие, как объединение, пересечение и другие, однако в силу интуиционистской специфики понимания (см. *Интуиционизм*) свойства этих интуиционистских операций отнюдь не всегда совпадают со свойствами соответствующих классич. операций. Напр., в интуиционистской теории В. неверно, что для всякого В. дополнение к его дополнению совпадает с самим В.

При построении теории В. обычные парадоксы избегаются с помощью требования, чтобы члены В. были определены независимо от определения самого В. Такие интуиционистские теории, как интуиционистская арифметика, интуиционистский математич. анализ, могут быть построены вообще без употребления понятия «В.», но в более абстрактных областях интуиционистской математики (теория доказательств, семантика, интуиционистский функциональный анализ) разработка теории В. является актуальной задачей.

Лит.: [1] Гейтинг А., Интуиционизм, пер. с англ., М., 1965. *А. Г. Драгалин.*

ВИЕТА ТЕОРЕМА о корнях — теорема, устанавливающая соотношения между корнями и коэффициентами многочлена. Пусть $f(x)$ — многочлен степени n с коэффициентами из нек-рого поля и старшим коэффициентом 1. Над полем, содержащим все корни $f(x)$

(напр., над полем разложения для $f(x)$), многочлен $f(x)$ разлагается на линейные множители:

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=$$
$$=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n),$$

где α_i — корни $f(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$. В. т. устанавливает справедливость соотношений (ф о р м у л ы В и е т а):

$$a_0=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,$$
$$a_1=(-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}+\alpha_1\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n+\ldots+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-2}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n,$$
$$a_{n-1}=-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n).$$

Ф. Виет нашел эту зависимость для всех n, однако с оговоркой на положительность корней (см. [1]); в общем виде В. т. установлена А. Жираром [2].

Лит.: [1] V i è t e F., Opera mathematica..., Lugduni Batavorum, 1646, p. 123, 158; [2] G i r a r d A., Invention nouvelle en Algèbre..., Amst., 1629.

В. Н. Ремесленников.

ВИЛКОКСОНА КРИТЕРИЙ — *непараметрический критерий* однородности двух выборок $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$. Элементы выборок предполагают взаимно независимыми с непрерывными функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно; проверяемая гипотеза $F(x)=G(x)$. В. к. основан на *ранговой статистике*

$$W=s(r_1)+\ldots+s(r_m), \qquad (*)$$

где r_j — ранги случайных величин Y_j в общем вариационном ряду X_i и Y_j, а функция $s(r)$, $r=1, \ldots, n+m$, определяется заранее фиксированной подстановкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n+m \\ s(1) & s(2) & \ldots & s(n+m) \end{pmatrix},$$

где $s(1), \ldots, s(n+m)$ — одна из возможных перестановок чисел $1, 2, \ldots, n+m$. Выбор подстановки осуществляется так, чтобы мощность В. к. для заданной альтернативы была наибольшей. Распределение статистики W зависит лишь от объемов выборок и не зависит от выбора подстановки (если справедлива гипотеза однородности). При $n\to\infty$ и $m\to\infty$ случайная величина W распределена асимптотически нормально. Вариант В. к. этого типа предложен впервые Ф. Вилкоксоном (F. Wilcoxon, 1945) для выборок равного объема и был основан на статистике $(*)$ специального вида при $s(r)\equiv r$ (см. *Суммы рангов критерий, Манна — Уитни критерий*). См. также *Ван дер Вардена критерий, Ранговый критерий.*

Лит.: [1] W i l c o x o n F., «Biometrics», 1945, v. 1, p. 80—83; [2] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, М., 1965; [3] В а н д е р В а р д е н Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960.

А. В. Прохоров.

ВИЛЬСОНА ТЕОРЕМА: для каждого простого числа p число $(p-1)!+1$ делится на p. Теорема впервые сформулирована Э. Варингом (E. Waring, 1770) и принадлежала, по его словам, Дж. Вильсону (J. Wilson), доказал ее Ж. Лагранж (J. Lagrange, 1771). Из В. т. следует критерий простоты числа: натуральное число $n>1$ тогда и только тогда является простым, когда

$$(n-1)!+1\equiv 0 \pmod n.$$

Практическое использование В. т. для определения простоты числа нецелесообразно из-за быстрого роста факториала.

Лит.: [1] Б у х ш т а б А. А., Теория чисел, 2 изд., М., 1966; [2] Т р о с т Э., Простые числа, пер. с нем., М., 1959; [3] В и н о г р а д о в И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972.

Н. И. Климов.

ВИНЕРА ИНТЕГРАЛ — абстрактный интеграл лебеговского типа по множествам бесконечномерного функционального пространства от функционалов, определенных на этих множествах. В. и. введен Н. Винером (N. Wiener) в 20-х гг. 20 в. в связи с вопросами броуновского движения (см. [1], [2]).

Пусть C_0 — векторное пространство непрерывных функций $x(t)$, определенных на [0, 1] и таких, что $x(0)=0$, с нормой

$$\| x \| = \max_{t \in [0,\,1]} | x(t) |.$$

Квазиинтервалом этого пространства наз. множество

$$Q = \{x(t) \in C_0, \quad a_i < x(t_i) \leqslant b_i, \ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\}$$

(a_i и b_i могут равняться, соответственно, $-\infty$ и $+\infty$, но тогда знак $\leqslant$ заменяется на $<$). Примером квазиинтервала может служить все пространство

$$C_0 = \{x(t), \ -\infty < x(1) < +\infty\}.$$

Мерой Винера квазиинтервала Q наз. число

$$\mu_W(Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi^n \prod_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})}} \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} e^{-L_n} dx_1 \ldots dx_n,$$

где

$$L_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}$$

и $x_j = x(t_j)$. Эта мера распространяется до σ-аддитивной меры, определенной на борелевском теле множеств, порожденном квазиинтервалами (по-прежнему наз. мерой Винера). Пространство C_0 измеримо в смысле меры Винера и $\mu_W(C_0)=1$.

Пусть $F(x)$ — функционал, определенный на C_0 и измеримый относительно меры μ_W. Интеграл

$$\int_{C_0} F(x)\, d\mu_W$$

лебеговского типа наз. интегралом Винера, или интегралом по мере Винера от функционала $F(x)$. Если $E \subset C_0$ измеримо, то

$$\int_E F(x) d\mu_W = \int_{C_0} F(x)\, \chi_E(x)\, d\mu_W,$$

где $\chi_E(x)$ — характеристич. функция множества E.

В. и. обладает рядом свойств обычного интеграла Лебега. В частности, ограниченный и измеримый на множестве E функционал интегрируем по мере Винера на этом множестве и если, кроме того, функционал $F(x)$ непрерывен и неотрицателен, то

$$\int_{C_0} F(x)\, d\mu_W =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi^n \prod_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{F_n(x_1, \ldots, x_n)}{e^{L_n}}\, dx_1 \ldots dx_n,$$

где $F_n(x_1, \ldots, x_n)$ — значение функционала F на ломаной с вершинами в $(t_i,\ x_i = x(t_i))$.

Вычисление В. и. даже для сравнительно простых функционалов представляет значительную трудность. Иногда эту задачу удается свести к нахождению решения некоторого дифференциального уравнения (см. [1]).

Существует метод приближенного вычисления В. и. путем аппроксимации его конечномерными *Стилтьеса интегралами* высокой кратности.

Лит.: [1] Ковальчик И. М., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 1, с. 97—134; [2] Шилов Г. Е., там же, в. 2, с. 99—120.

В. И. Соболев.

ВИНЕРА МЕРА, винеровская мера, — *вероятностная мера* μ_W, определенная на пространстве $C[0, 1]$ непрерывных числовых функций $x(t)$, заданных на отрезке [0, 1], следующим образом. Пусть $0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant 1$ — произвольный набор точек из [0, 1], A_1, ..., A_n — борелевские множества на прямой. Пусть $C(t_1, \ldots, t_n, A_1, \ldots, A_n)$ обозначает множество функций $x(t)$ из $C[0, 1]$, для к-рых $x(t_k) \in A_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Тогда

$$\mu_W(C(t_1, \ldots, t_n; A_1, \ldots, A_n)) = \int_{A_1} p(t_1, x_1)\, dx_1 \int_{A_2} p(t_2 - t_1, x_2 - x_1)\, dx_2 \ldots \ldots \int_{A_n} p(t_n - t_{n-1}, x_n - x_{n-1})\, dx_n, \quad (*)$$

где

$$p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\}.$$

С помощью теоремы о продолжении меры можно, исходя из равенства (*), определить значение меры μ_W на всех борелевских множествах пространства $C[0, 1]$.

А. В. Скороход.

ВИНЕРА ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА: если $x \in L^1(-\infty, \infty)$ и преобразование Фурье функции x не обращается в нуль, а y — функция из $L^\infty(-\infty, \infty)$ такая, что свертка $(x*y)$ стремится к нулю при $t \to \infty$, то для любой $z \in L^1(-\infty, \infty)$ свертка $(z*y)$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Установлена Н. Винером [1]. Эта теорема обобщена на случай любой коммутативной локально компактной некомпактной группы G: если x — суммируемая относительно *Хаара меры* функция на G и преобразование Фурье функции x не обращается в нуль на группе характеров $\hat{G}$ группы G, а функция y принадлежит пространству $L^\infty(G)$ и свертка $(x*y)$ стремится к нулю на бесконечности на G, то свертка $(z*y)$ стремится к нулю на бесконечности на G для всех суммируемых функций на G.

Эта теорема основана на регулярности *групповой алгебры* коммутативной локально компактной группы и на возможности спектрального синтеза в групповых алгебрах для замкнутых идеалов, принадлежащих лишь конечному числу регулярных максимальных идеалов [3].

Лит.: [1] Wiener N., «Ann. Math.», 1932, v. 33, p. 1—100; [2] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [3] Бурбаки Н., Спектральная теория, пер. с франц., М., 1972.

А. И. Штерн.

ВИНЕРА — ХОПФА МЕТОД — метод решения функционального уравнения вида:

$$A(\lambda)\Phi_+(\lambda) + B(\lambda)\Phi_-(\lambda) + C(\lambda) = 0, \quad (1)$$

где $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ — заданные функции комплексного переменного λ, аналитические в полосе $\tau_- < \operatorname{Im}\lambda < \tau_+$, причем $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ отличны от нуля в этой полосе; функции $\Phi_+(\lambda)$ и $\Phi_-(\lambda)$ — неизвестные функции комплексного переменного λ, стремящиеся к нулю при $|\lambda| \to \infty$ и подлежащие определению, причем $\Phi_+(\lambda)$ аналитична при $\operatorname{Im}\lambda > \tau_-$, а $\Phi_-(\lambda)$ аналитична при $\operatorname{Im}\lambda < \tau_+$. Уравнение (1) выполняется в общей полосе аналитичности $\tau_- < \operatorname{Im}\lambda < \tau_+$.

Основой В.—Х. м. являются следующие две теоремы.

1) Функция $F(\lambda)$, аналитическая в полосе $\tau_- < \operatorname{Im}\lambda < \tau_+$ и равномерно стремящаяся к нулю при $|\lambda| \to \infty$, представима в этой полосе в виде суммы:

$$F(\lambda) = F_+(\lambda) + F_-(\lambda),$$

где $F_+(\lambda)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > \tau_-$, а $F_-(\lambda)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda < \tau_+$.

2) Функция $F(\lambda)$, аналитическая и отличная от нуля в полосе $\tau_- < \operatorname{Im}\lambda < \tau_+$ и равномерно стремящаяся в этой полосе к единице при $|\lambda| \to \infty$, представима в данной полосе в виде произведения:

$$F(\lambda) = F_+(\lambda) \cdot F_-(\lambda), \quad (2)$$

где $F_+(\lambda)$ и $F_-(\lambda)$ аналитичны и отличны от нуля, соответственно, в полуплоскостях $\operatorname{Im}\lambda > \tau_-$ и $\operatorname{Im}\lambda < \tau_+$. Представление (2) часто наз. факторизацией функции $F(\lambda)$.

Основная идея В.—Х. м. заключается в возможности факторизации функции $L(\lambda)=A(\lambda)/B(\lambda)$, т. е. в возможности представления

$$\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}=\frac{L_+(\lambda)}{L_-(\lambda)}. \qquad (3)$$

Используя (3), уравнение (1) можно переписать в виде:

$$L_+(\lambda)\,\Phi_+(\lambda)+L_-(\lambda)\,\Phi_-(\lambda)+L_-(\lambda)\,\frac{C(\lambda)}{B(\lambda)}=0.$$

Поскольку $L_-(\lambda)C(\lambda)/B(\lambda)$ аналитична в полосе, то

$$L_-(\lambda)\,\frac{C(\lambda)}{B(\lambda)}=D_+(\lambda)+D_-(\lambda). \qquad (4)$$

Используя (4), получают окончательно уравнение (1) в виде:

$$L_+\Phi_++D_+=-D_--L_-\Phi_-. \qquad (5)$$

Левая часть выражения (5) представляет собой функцию, аналитическую в $\operatorname{Im}\lambda>\tau_-$, а правая — функцию, аналитическую в $\operatorname{Im}\lambda<\tau_+$. Так как они имеют общую полосу аналитичности, где выполняется условие (5), то существует единственная целая функция $P(\lambda)$, совпадающая, соответственно, с левой и правой частями (5) в областях их аналитичности. Отсюда

$$\Phi_+(\lambda)=\frac{P(\lambda)-D_+(\lambda)}{L_+(\lambda)},\quad \Phi_-(\lambda)=\frac{-P(\lambda)-D_-(\lambda)}{L_-(\lambda)},$$

т. е. решение уравнения (1) определено с точностью до целой функции. Если степень роста функций $L(\lambda)$ и $D(\lambda)$ ограничена на бесконечности, то $P(\lambda)$ будет многочленом. Тогда искомые функции определяются с точностью до постоянных, к-рые вычисляются из дополнительных условий.

В.—Х. м. был разработан в [1] для решения интегральных уравнений специального вида (см. *Винера — Хопфа уравнение*). В дальнейшем он нашел широкое применение в различных задачах математич. физики (см. также [2]).

Лит.: [1] Wiener N., Hopf E., Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, «Sitz. Akad. Wiss.», B., 1931; [2] Нобл Б., Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, пер. с англ., М., 1962. *В. И. Дмитриев.*

ВИНЕРА — ХОПФА УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов:

$$u(x)-\int_0^\infty k(x-s)\,u(s)\,ds=f(x),\quad 0\leqslant x<\infty. \qquad (1)$$

Уравнения такого типа часто возникают в задачах математич. физики, напр. в теории переноса излучения (проблема Милна), в теории дифракции (дифракция на полуплоскости, задача береговой рефракции).

Впервые исследования уравнения (1) были проведены в работах [1] и [2], где был развит метод факторизации (см. *Винера—Хопфа метод*). Именно идея факторизации явилась решающей для построения теории интегральных уравнений вида (1). В.—Х. у. в предположении четности и экспоненциального убывания ядра $k(x)$ рассматривались в [3].

Формальная схема решения В.—Х. у. состоит в следующем. Пусть

$$v(x)=\begin{cases}u(x) & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x<0,\end{cases}$$

$$n(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ -\int_0^\infty k(x-s)\,u(s)\,ds & \text{при } x<0,\end{cases}$$

тогда уравнение (1) можно записать на всей бесконечной прямой:

$$v(x)-\int_{-\infty}^{\infty}k(x-s)\,v(x)\,ds=f(x)+n(x),\quad -\infty<x<\infty. \qquad (2)$$

Если выполнены условия, при к-рых существует пре-

образование Фурье всех функций, входящих в уравнение (2):

$$V(\lambda)=\int_0^\infty u(x)\,e^{i\lambda x}\,dx,$$

$$K(\lambda)=\int_{-\infty}^\infty k(x)\,e^{i\lambda x}\,dx,$$

$$F(\lambda)=\int_0^\infty f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx,$$

$$N(\lambda)=\int_{-\infty}^0 n(x)\,e^{i\lambda x}\,dx,$$

то с помощью преобразования Фурье уравнение (2) сводится к функциональному уравнению

$$[1-K(\lambda)]V(\lambda)=F(\lambda)+N(\lambda), \qquad (3)$$

где $V(\lambda)$ и $N(\lambda)$ — неизвестные функции. Метод Винера — Хопфа позволяет решить уравнение (3) для определенного класса функций. При этом обязательно должно выполняться условие: $1-K(\lambda)\neq 0$. Для несимметричного ядра в теории уравнения (1) особую роль играет индекс уравнения:

$$\nu=-\operatorname{ind}[1-K(\lambda)]=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d_\lambda[1-K(\lambda)]. \qquad (4)$$

Если $K(x)\in L_1(-\infty,\ \infty)$ и $1-K(\lambda)\neq 0$, то: при $\nu=0$ неоднородное уравнение (1) имеет единственное решение; при $\nu>0$ однородное уравнение (1) имеет ν линейно независимых решений; при $\nu<0$ неоднородное уравнение (1) либо не имеет решения, либо имеет единственное решение при условии:

$$\int_0^\infty f(x)\,\psi_k(x)\,dx=0,\ \ k=0,\ 1,\ \ldots,\ |\nu|-1,$$

где $\psi_k(x)$ — линейно независимые решения транспонированного однородного уравнения (1)

$$\psi(x)-\int_0^\infty k(x-s)\,\psi(s)\,ds=0.$$

Лит.: [1] Wiener N., Hopf E., Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, «Sitz. Akad. Wiss.», B., 1931; [2] Hopf E., Mathematical problems of radiative equilibrium, Camb., 1934; [3] Фок В. А., «Матем. сб.», 1944, т. 14, № 1—2, с. 3—50; [4] Нобл Б., Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, пер. с англ., М., 1962. *В. И. Дмитриев.*

ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС — однородный *гауссовский процесс* $X(t)$ с независимыми приращениями. В. п. служит одной из математич. моделей для процесса броуновского движения. Простым преобразованием В. п. может быть превращен в «стандартный» В. п. $X(t)$, $t\geqslant 0$, для к-рого

$$X(0)=0,\ \mathsf{E}(X(t)-X(s))=0,$$
$$\mathsf{D}[X(t)-X(s)]=t-s,\ \ s\leqslant t;$$

при таких средних значениях и дисперсиях приращений это единственный непрерывный с вероятностью 1 процесс с независимыми приращениями. Ниже под В. п. будет пониматься именно этот процесс.

В. п. $X(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, определяется также как гауссовский случайный процесс с нулевым математич. ожиданием и корреляционной функцией

$$B(s,\ t)=\min(s,\ t).$$

В. п. $X=X(t)$, $t\geqslant 0$, может быть определен как однородный *марковский процесс* с переходной функцией

$$P(t,\ x,\ \Gamma)=\int_\Gamma p(t,\ x,\ y)\,dy,$$

где переходная плотность $p(t,\ x,\ y)$ есть фундаментальное решение параболического дифференциального уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

и описывается формулой

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(y-x)^2/2t}.$$

Переходная функция $P(t, x, \Gamma)$ инвариантна относительно преобразований сдвига в фазовом пространстве:

$$P(t, x+y, \Gamma) = P(t, x, \Gamma - y),$$

где $\Gamma - y$ обозначает множество $\{z : z+y \in \Gamma\}$.

В. п. является непрерывным аналогом *случайного блуждания* частицы, к-рая в дискретные моменты времени $t = k\Delta t$ (кратные Δt) в результате случайного воздействия каждый раз независимо от предшествующих обстоятельств смещается на величину $\Delta X(t)$ ($\mathsf{E}\Delta X(t) = 0$, $\mathsf{D}\Delta X(t) = \Delta t$); точнее, если при $\Delta t = 1/n$

$$X(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \Delta X\left(\frac{k}{n}\right) + (nt - m)\Delta X\left(\frac{m}{n}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

— случайная траектория движения такой частицы на отрезке $[0, 1]$ (здесь $\Delta t = 1/n$, $m = [nt]$ — целая часть nt, $X(t) = nt\Delta X(0)$ при $0 \leqslant t < 1/n$), а P_n — соответствующее распределение вероятностей в пространстве непрерывных функций $x = x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то распределение вероятностей P траектории В. п. $X(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, является предельным (в смысле слабой сходимости) для распределений P_n при $n \to \infty$: $\mathsf{P}_n \Rightarrow \mathsf{P}$.

Как функция со значениями в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$ всех случайных величин X, $\mathsf{E}X^2 < \infty$, в к-ром скалярное произведение определено формулой

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \mathsf{E}X_1X_2,$$

В. п. $X = X(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, допускает следующее каноническое представление:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k \varphi_k(t),$$

где z_k — независимые гауссовские величины:

$$\mathsf{E}z_k = 0, \ \mathsf{D}z_k = \frac{1}{\left[\frac{\pi}{2}(2k+1)\right]^2},$$

$$\varphi_k(t) = \sin\left[\frac{\pi}{2}(2k+1)\, t\right], \quad k = 0, 1, \ldots,$$

— собственные функции оператора B, определенного формулой:

$$B\varphi(t) = \int_0^1 B(s, t)\, \varphi(s)\, ds$$

в гильбертовом пространстве $L^2[0, 1]$ всех интегрируемых с квадратом (относительно лебеговской меры) функций $\varphi = \varphi(t)$ на отрезке $[0, 1]$.

Для почти всех траекторий В. п. имеют место следующие соотношения:

$$\lim_{h \to \infty} \frac{X(h)}{\sqrt{2h \ln \ln \frac{1}{h}}} = 1, \ X(0) = 0,$$

— закон повторного логарифма;

$$\lim_{h \to +0} \sup_{0 \leqslant t \leqslant \delta - h} \frac{|X(t+h) - X(t)|}{\sqrt{2h \ln \frac{\delta}{h}}} = 1,$$

что характеризует модуль непрерывности на отрезке $[0, h]$;

$$\lim_{h \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta X(kh)|^2 = \delta,$$

$$h = \delta/n, \ \Delta X(t) = X(t+h) - X(t).$$

В применении к В. п. вида $X_1(t) = tX\left(\frac{1}{t}\right)$, $0 \leqslant t < \infty$, закон повторного логарифма записывается в форме:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{X(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1.$$

Характер смещения броуновской частицы за конечное время t может быть описан с помощью распределения

вероятностей максимума $\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t} X(s)$:

$$\mathsf{P}\left\{\max_{0\leqslant s\leqslant t} X(s)\geqslant x\right\}=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_x^\infty e^{-u^2/2t}\,du,$$

$0\leqslant x<\infty$, t фиксировано, $0\leqslant t<\infty$, а также с помощью распределения времени τ первого достижения броуновской частицей фиксированной точки $x>0$:

$$\mathsf{P}\{\tau_x\geqslant t\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{t}} e^{-u^2/2}\,du,$$

$0\leqslant t<\infty$, x фиксировано, $0\leqslant x<\infty$ (закономерности В. п. остаются без изменения при преобразовании фазового пространства $x\to -x$). Совместное распределение точки максимума τ, $0\leqslant\tau\leqslant t$, и самого максимума $\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t} X(s)$ имеет плотность вероятности

$$p(s,x)=\frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}}\,\frac{x}{s}\,e^{-x^2/2s},$$
$$0\leqslant s\leqslant t,\ 0\leqslant x<\infty,$$

а отдельно взятая точка τ (с вероятностью 1 имеется лишь один максимум на отрезке $0\leqslant s\leqslant t$) распределена по *арксинуса закону*:

$$\mathsf{P}\{\tau\leqslant s\}=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{s}{t}},\ 0\leqslant s\leqslant t,$$

с плотностью вероятности

$$p(s)=\frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}},\ 0\leqslant s\leqslant t.$$

Из приведенных выше формул легко выводятся следующие характерные свойства В. п. Броуновская траектория является нигде не дифференцируемой, причем при выходе из к.-л. точки x эта траектория за сколь угодно малое время δ с вероятностью 1 бесконечно много раз пересекает «уровень» x (возвращаясь в исходную точку); с течением времени t броуновская траектория обходит все точки x, точнее $\tau_x<\infty$, с вероятностью 1 (при этом вероятное значение τ_x для больших x имеет порядок x^2); рассматриваемая на фиксированном отрезке $[0,\ t]$, эта траектория имеет тенденцию достигать экстремальных значений вблизи концевых точек $s=0$ и $s=t$.

Для В. п. как марковского однородного процесса существует инвариантная мера $Q(dx)$:

$$Q(A)\equiv\int Q(dx)\,P(t,x,A),$$

к-рая в силу упомянутого выше свойства инвариантности переходной функции $P(t,\ x,\ A)$ совпадает с лебеговской мерой на прямой: $Q(dx)=dx$. Время $T(A)$, проведенное броуновской частицей в множестве A за промежуток от 0 до T, таково, что с вероятностью 1

$$\frac{T(A_1)}{T(A_2)}\longrightarrow\frac{Q(A_1)}{Q(A_2)}\ \text{ при }\ T\longrightarrow\infty$$

для любых ограниченных борелевских множеств A_1 и A_2.

Аналогом В. п. $X=X(t)$ для векторного параметра $t=(t_1,\ldots,t_n)$ являются случайные поля, введенные П. Леви (P. Lévy, см. [3]).

Лит.: [1] Ито К., Маккин Г., Диффузионные процессы и их траектории, пер. с англ., М., 1968; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [3] Lévy P., Prossesus stochastiques et mouvément brownien, 2 éd., P., 1965; [4] Павлов В. П., Броуновское движение, в кн.: БСЭ, 3 изд., т. 4.

Ю. А. Розанов.

ВИНОГРАДОВА ГИПОТЕЗЫ — ряд гипотез относительно центральных проблем аналитической теории чисел, высказанных в разное время И. М. Виноградовым [1] — [3].

Гипотезы о распределении степенных вычетов и невычетов. Одной из самых старых и знаменитых из них является гипотеза о том,

что расстояние между соседними квадратичными невычетами $\mathrm{mod}\ p$ есть величина порядка p^{ε}.

Гипотезы об оценках тригонометрических сумм. Одной из них является гипотеза о том, что

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f(x)}\right| \ll p^{1-\rho(n)},$$

где

$$f(x)=\alpha_n x^n+\ldots+\alpha_1 x, \quad \alpha_r=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}, \quad (a,\ q)=1,$$

$|\theta|\leqslant 1$, $P^{0,25}<q<P^{r-0,25}$, r — одно из чисел $2,\ldots,n$ и $\rho(n)$ имеет порядок $n^{-1-\varepsilon}$.

Гипотезы о количестве решений диофантовых уравнений. Одной из них является гипотеза о том, что число решений системы уравнений

$$x_1^{n_1}+\ldots+x_r^{n_1}=y_1^{n_1}+\ldots+y_r^{n_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1^{n_m}+\ldots+x_r^{n_m}=y_1^{n_m}+\ldots+y_r^{n_m},$$

$1\leqslant x_i,\ y_i<P,\ i=1,\ldots,r,\ 1\leqslant n_1<\ldots<n_m=n$, при постоянном n будет величиною порядка

$$p^{2r-k},\ k=n_1+\ldots+n_m,$$

при всех $r\geqslant r_0$, где r_0 имеет порядок $k^{1+\varepsilon}$.

Гипотезы о количестве целых точек в областях на плоскости и пространстве. Одной из них является гипотеза о том, что число целых точек в шаре $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ выражается формулой

$$\frac{4}{3}\pi R^3+O\left(R^{1+\varepsilon}\right).$$

Лит.: [1] Виноградов И. М., Некоторые проблемы аналитической теории чисел, в кн.: Тр. третьего Всесоюзного математического съезда, т. 3, М., 1958, с. 3—13; [2] его же, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [3] его же, Избранные труды, М., 1952. *А. А. Карацуба.*

ВИНОГРАДОВА ИНТЕГРАЛ — кратный интеграл вида

$$\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1 |S|^{2k}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_n,$$

где

$$S=\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i\left(\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n\right)},$$

являющийся средним значением степени $2k$ модуля тригонометрич. суммы. Теорема Виноградова о величине этого интеграла — теорема о среднем — лежит в основе оценок сумм Вейля (см. *Виноградова метод*, *Виноградова теорема* о среднем). *А. А. Карацуба.*

ВИНОГРАДОВА МЕТОД — новый метод оценок тригонометрич. сумм (см. *Тригонометрических сумм метод*). В. м. позволяет получить очень точные оценки для широкого класса тригонометрич. сумм, в к-рых переменная суммирования пробегает значения последовательных целых чисел, последовательных простых чисел и т. д., что, в свою очередь, дает возможность решить целый ряд классич. проблем аналитич. теории чисел (распределение дробных долей широкого класса функций, распределение простых чисел в натуральном ряде, аддитивные проблемы, частными случаями к-рых являются проблемы Варинга и Гольдбаха, и др.).

Различают две части В. м.: метод оценок *Вейля сумм* и метод оценок тригонометрич. сумм с простыми числами. Обе части метода используют основную идею И. М. Виноградова — идею сглаживания двойной тригонометрич. суммы, к-рая состоит в следующем. Пусть дана сумма

$$W=\sum_u\sum_v \psi_1(u)\,\psi_2(v)\,e^{2\pi i\alpha uv},$$

где переменные суммирования u и v пробегают значения целых чисел (не обязательно последовательные) в количестве, соответственно, U и V, $A<u<2A$, а $\psi_1(u)$ и $\psi_2(v)$ — произвольные комплекснозначные функции. Тогда

$$|W|^2\leqslant B\sum_{A<u\leqslant 2A}\left|\sum_v \psi_2(v)\,e^{2\pi i\alpha uv}\right|^2,$$

где u пробегает последовательные целые числа интервала $(A,\ 2A]$ (сглаживание),

$$B=\sum_u |\psi_1(u)|^2.$$

В. м. оценок сумм Вейля. Оцениваются суммы

$$S=\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i f(x)},$$

где $f(x)=\alpha_{n+1}x^{n+1}+\ldots+\alpha_1 x$, причем $\alpha_{n+1},\ldots,\ \alpha_1$ — действительные числа. При $Y=[P^{1-1/4n^2}]$ будет

$$S=Y^{-1}\sum_{1\leqslant x\leqslant P}\sum_{1\leqslant y\leqslant Y} e^{2\pi i f(x+y)}+2\theta Y=$$
$$=Y^{-1}\sum_{1\leqslant x\leqslant P}\sum_{1\leqslant y\leqslant Y} e^{2\pi i v}+2\theta Y=Y^{-1}W+2\theta Y,$$

где $\mathfrak{A}=\alpha_{n+1}x^{n+1}+A_n(y)x^n+\ldots+A_1(y)+A_0(y)$, а буквой W обозначена двойная сумма по x и y, и $|\theta|\leqslant 1$. Далее, обозначив $\mathfrak{B}$ выражение

$$\alpha_{n+1}x^{n+1}+(A_n(y)+B_n)\,x^n+\ldots+(A_1(y)+B_1)\,x$$

$$|W|\leqslant\sum_{1\leqslant y\leqslant Y}\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i\mathfrak{B}}\right|+Y_n P^{1-1/4n^2},$$

при любых $B_n,\ldots,B_1$ из области

$$|B_n|\leqslant L_n=P^{-n-1/4n^2},$$
$$|B_{n-1}|\leqslant L_{n-1}=P^{-n+1-1/4n^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|B_1|\leqslant L_1=P^{-1-1/4n^2}.$$

При любом целом $k\geqslant 1$:

$$|W|^{2k}\leqslant 2^k Y^{2k-1}\sum_{1\leqslant y\leqslant Y}\int_{|B_n|\leqslant L_n}\ldots\int_{|B_1|\leqslant L_1}\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i\mathfrak{B}}\right|dB_n\ldots dB_1+2^k\left(Y_n P^{1-1/4n^2}\right)^{2k}\leqslant$$
$$\leqslant 2^k Y^{2k-1}G(Y)\int_0^1\ldots\int_0^1\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i\mathfrak{C}}\right|^{2k}d\gamma_n\ldots d\gamma_1+2^k\left(Y_n P^{1-1/4n^2}\right)^{2k},$$

где $\mathfrak{C}=\alpha_{n+1}x^{n+1}+\gamma_n x^n+\ldots+\gamma_1 x$, а $G(Y)$ — максимальное число совпадений точек с координатами

$$\{A_n(y)+B_n\},\ \{A_n(y)+B_{n-1}\},\ \ldots,\ \{A_1(y)+B_1\},$$

причем фигурные скобки обозначают дробную часть числа, а y меняется в пределах от 1 до Y, и

$$|B_n|\leqslant L_n,\ |B_{n-1}|\leqslant L_{n-1},\ \ldots,\ |B_1|\leqslant L_1.$$

При определенных арифметич. свойствах коэффициентов $\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_2$ многочлена $f(x)$ для величины $G(Y)$ можно получить оценку $G(Y)\leqslant Y^{0,9}$. Кроме того, последний интеграл не превосходит числа решений системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1^n+x_2^n+\ldots+x_k^n=y_1^n+y_2^n+\ldots+y_k^n,\\ x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\ldots+x_k^{n-1}=y_1^{n-1}+y_2^{n-1}+\ldots+y_k^{n-1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_1+x_2+\ldots+x_k=y_1+y_2+\ldots+y_k, \end{cases}$$
$$1\leqslant x_1,\ \ldots,\ y_k\leqslant P.$$

Для оценки числа решений этой системы используется *Виноградова теорема* о среднем, к-рая является основной в В. м. оценок сумм Вейля (см. *Виноградова оценки*).

В. м. оценок тригонометрических сумм с простыми числами. Оцениваются суммы

$$S'=\sum_{p\leqslant P} e^{2\pi i f(p)},$$

что расстояние между соседними квадратичными невычетами $\mathrm{mod}\ p$ есть величина порядка p^{ε}.

Гипотезы об оценках тригонометрических сумм. Одной из них является гипотеза о том, что

$$\left|\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f(x)}\right| \ll p^{1-\rho(n)},$$

где

$$f(x)=\alpha_n x^n+\ldots+\alpha_1 x, \quad \alpha_r=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}, \quad (a,\ q)=1,$$

$|\theta|\leqslant 1$, $P^{0,25}<q<P^{r-0,25}$, r — одно из чисел $2,\ldots,n$ и $\rho(n)$ имеет порядок $n^{-1-\varepsilon}$.

Гипотезы о количестве решений диофантовых уравнений. Одной из них является гипотеза о том, что число решений системы уравнений

$$x_1^{n_1}+\ldots+x_r^{n_1}=y_1^{n_1}+\ldots+y_r^{n_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1^{n_m}+\ldots+x_r^{n_m}=y_1^{n_m}+\ldots+y_r^{n_m},$$

$1\leqslant x_i,\ y_i<P,\ i=1,\ldots,r,\ 1\leqslant n_1<\ldots<n_m=n$, при постоянном n будет величиною порядка

$$p^{2r-k},\ k=n_1+\ldots+n_m,$$

при всех $r\geqslant r_0$, где r_0 имеет порядок $k^{1+\varepsilon}$.

Гипотезы о количестве целых точек в областях на плоскости и пространстве. Одной из них является гипотеза о том, что число целых точек в шаре $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ выражается формулой

$$\frac{4}{3}\pi R^3+O\left(R^{1+\varepsilon}\right).$$

Лит.: [1] Виноградов И. М., Некоторые проблемы аналитической теории чисел, в кн.: Тр. третьего Всесоюзного математического съезда, т. 3, М., 1958, с. 3—13; [2] его же, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [3] его же, Избранные труды, М., 1952. *А. А. Карацуба.*

ВИНОГРАДОВА ИНТЕГРАЛ — кратный интеграл вида

$$\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1 |S|^{2k}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_n,$$

где

$$S=\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i\left(\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n\right)},$$

являющийся средним значением степени $2k$ модуля тригонометрич. суммы. Теорема Виноградова о величине этого интеграла — теорема о среднем — лежит в основе оценок сумм Вейля (см. *Виноградова метод*, *Виноградова теорема* о среднем). *А. А. Карацуба.*

ВИНОГРАДОВА МЕТОД — новый метод оценок тригонометрич. сумм (см. *Тригонометрических сумм метод*). В. м. позволяет получить очень точные оценки для широкого класса тригонометрич. сумм, в к-рых переменная суммирования пробегает значения последовательных целых чисел, последовательных простых чисел и т. д., что, в свою очередь, дает возможность решить целый ряд классич. проблем аналитич. теории чисел (распределение дробных долей широкого класса функций, распределение простых чисел в натуральном ряде, аддитивные проблемы, частными случаями к-рых являются проблемы Варинга и Гольдбаха, и др.).

Различают две части В. м.: метод оценок *Вейля сумм* и метод оценок тригонометрич. сумм с простыми числами. Обе части метода используют основную идею И. М. Виноградова — идею сглаживания двойной тригонометрич. суммы, к-рая состоит в следующем. Пусть дана сумма

$$W=\sum_u\sum_v \psi_1(u)\,\psi_2(v)\,e^{2\pi i\alpha uv},$$

где переменные суммирования u и v пробегают значения целых чисел (не обязательно последовательные) в количестве, соответственно, U и V, $A<u<2A$, а $\psi_1(u)$ и $\psi_2(v)$ — произвольные комплекснозначные функции. Тогда

$$|W|^2\leqslant B\sum_{A<u\leqslant 2A}\left|\sum_v \psi_2(v)\,e^{2\pi i\alpha uv}\right|^2,$$

где u пробегает последовательные целые числа интервала $(A,\ 2A]$ (сглаживание),

$$B=\sum_u |\psi_1(u)|^2.$$

В. м. оценок сумм Вейля. Оцениваются суммы

$$S=\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i f(x)},$$

где $f(x)=\alpha_{n+1}x^{n+1}+\ldots+\alpha_1 x$, причем $\alpha_{n+1},\ldots,\ \alpha_1$ — действительные числа. При $Y=[P^{1-1/4n^2}]$ будет

$$S=Y^{-1}\sum_{1\leqslant x\leqslant P}\sum_{1\leqslant y\leqslant Y} e^{2\pi i f(x+y)}+2\theta Y=$$
$$=Y^{-1}\sum_{1\leqslant x\leqslant P}\sum_{1\leqslant y\leqslant Y} e^{2\pi i v}+2\theta Y=Y^{-1}W+2\theta Y,$$

где $\mathfrak{A}=\alpha_{n+1}x^{n+1}+A_n(y)x^n+\ldots+A_1(y)+A_0(y)$, а буквой W обозначена двойная сумма по x и y, и $|\theta|\leqslant 1$. Далее, обозначив $\mathfrak{B}$ выражение

$$\alpha_{n+1}x^{n+1}+(A_n(y)+B_n)\,x^n+\ldots+(A_1(y)+B_1)\,x$$

$$|W|\leqslant\sum_{1\leqslant y\leqslant Y}\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i\mathfrak{B}}\right|+Y_n P^{1-1/4n^2},$$

при любых $B_n,\ldots,B_1$ из области

$$|B_n|\leqslant L_n=P^{-n-1/4n^2},$$
$$|B_{n-1}|\leqslant L_{n-1}=P^{-n+1-1/4n^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|B_1|\leqslant L_1=P^{-1-1/4n^2}.$$

При любом целом $k\geqslant 1$:

$$|W|^{2k}\leqslant 2^k Y^{2k-1}\sum_{1\leqslant y\leqslant Y}\int_{|B_n|\leqslant L_n}\ldots\int_{|B_1|\leqslant L_1}\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i\mathfrak{B}}\right|dB_n\ldots dB_1+2^k\left(Y_n P^{1-1/4n^2}\right)^{2k}\leqslant$$
$$\leqslant 2^k Y^{2k-1}G(Y)\int_0^1\ldots\int_0^1\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e^{2\pi i\mathfrak{C}}\right|^{2k}d\gamma_n\ldots d\gamma_1+2^k\left(Y_n P^{1-1/4n^2}\right)^{2k},$$

где $\mathfrak{C}=\alpha_{n+1}x^{n+1}+\gamma_n x^n+\ldots+\gamma_1 x$, а $G(Y)$ — максимальное число совпадений точек с координатами

$$\{A_n(y)+B_n\},\ \{A_n(y)+B_{n-1}\},\ \ldots,\ \{A_1(y)+B_1\},$$

причем фигурные скобки обозначают дробную часть числа, а y меняется в пределах от 1 до Y, и

$$|B_n|\leqslant L_n,\ |B_{n-1}|\leqslant L_{n-1},\ \ldots,\ |B_1|\leqslant L_1.$$

При определенных арифметич. свойствах коэффициентов $\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_2$ многочлена $f(x)$ для величины $G(Y)$ можно получить оценку $G(Y)\leqslant Y^{0,9}$. Кроме того, последний интеграл не превосходит числа решений системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1^n+x_2^n+\ldots+x_k^n=y_1^n+y_2^n+\ldots+y_k^n,\\ x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\ldots+x_k^{n-1}=y_1^{n-1}+y_2^{n-1}+\ldots+y_k^{n-1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_1+x_2+\ldots+x_k=y_1+y_2+\ldots+y_k, \end{cases}$$
$$1\leqslant x_1,\ \ldots,\ y_k\leqslant P.$$

Для оценки числа решений этой системы используется *Виноградова теорема* о среднем, к-рая является основной в В. м. оценок сумм Вейля (см. *Виноградова оценки*).

В. м. оценок тригонометрических сумм с простыми числами. Оцениваются суммы

$$S'=\sum_{p\leqslant P} e^{2\pi i f(p)},$$

где $f(p)=\alpha_n p^n+\ldots+\alpha_1 p, \alpha_n, \ldots, \alpha_1$ — действительные числа. Пусть $D=\Pi_{p\leqslant H}$, где $H\leqslant p^{0,25}$. С помощью известного свойства функции Мебиуса S' сводится к небольшому числу сумм (это число не превосходит $\frac{\ln P}{\ln H}$) вида

$$W_S=\sum_{d_1\backslash D}\ldots\sum_{d_s\backslash D}\sum_{m_1>0}\ldots\sum_{m_s>0}\mu(d_1)\ldots\mu(d_s)\times$$
$$\times e^{2\pi i f(m_1\ldots m_s d_1\ldots d_s)},$$

где $m_1\ldots m_s d_1\ldots d_s\leqslant P$. В кратной сумме W_S переменные $m_1,\ldots, m_s$ пробегают сплошные интервалы суммирования. Те суммы W_S, в к-рых интервал суммирования хотя бы по одной переменной m длинный, оцениваются с помощью В. м. оценок сумм Вейля. В противном случае длинным будет интервал суммирования по одной из переменных суммирования d, $d\backslash D$. Тогда применяется следующая лемма И. М. Виноградова, к-рая вместе с идеей сглаживания двойных сумм является основной в В. м. оценок тригонометрич. сумм с простыми числами.

Лемма. Пусть $0\leqslant\sigma\leqslant 1/3$ и D — произведение всех простых чисел, не превосходящих x^σ, тогда все делители d числа D, не превосходящие x, можно распределить среди менее чем x^ε совокупностей со следующими свойствами:

а) числа d, принадлежащие одной совокупности, обладают одним и тем же числом β простых сомножителей и, следовательно, одним и тем же значением $\mu(d)=(-1)^\beta$;

б) одна из совокупностей, к-рая наз. простейшей, состоит из одного числа $d=1$. Для каждой из остальных совокупностей имеется свое φ такое, что все числа этой совокупности удовлетворяют условию

$$\varphi<d\leqslant\varphi^{1+\varepsilon_1},\ \varepsilon_1=\varepsilon_1(\varepsilon);$$

в) для всякой совокупности, отличной от простейшей, при любом U с условием $0\leqslant U\leqslant\varphi$ существуют две совокупности чисел d: числа d' и d'' с отвечающими им числами φ' и φ'', к-рые удовлетворяют условиям

$$U<\varphi'\leqslant Ux^\sigma,\quad \varphi'\varphi''=\varphi,$$

такие, что при нек-ром натуральном B все числа выбранной совокупности, каждое B раз получим, если из всех произведений $d'd''$ выберем лишь удовлетворяющие условию $(d',\ d'')=1$.

Применяя пункт в) этой леммы с надлежащим значением U, получают

$$W_S=\sum_u\sum_v\psi_1(u)\,\psi_2(v)\,e^{2\pi i f(uv)},$$

где переменные u и v пробегают длинные интервалы суммирования. Из этой леммы может быть выведена оценка И. М. Виноградова тригонометрич. суммы с простыми числами (см. *Виноградова оценки*).

Если $F(x)$ в определенном смысле хорошо приближается многочленом, то В. м. позволяет оценивать суммы вида

$$S=\sum_{1\leqslant x\leqslant P}e^{2\pi i F(x)},\ S'=\sum_{p\leqslant P}e^{2\pi i F(p)}$$

(см. [2], [4]). Кроме того, В. м. позволяет оценивать суммы вида

$$\sum_{p\leqslant P}\chi(p+a),\ \sum_{1\leqslant n\leqslant N}\mu(n)\,\chi(n+a)$$

и т. п. Это дает возможность решать проблемы распределения степенных вычетов, первообразных корней и др. в последовательностях вида $p+a$, где $a>0$ — фиксированное целое число, а p принимает значения последовательных простых чисел (см. [3], [5]). О применениях В. м. в аналитич. теории чисел см. [1], [2], [4], [5], [6].

Лит.: [1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [2] его же, Избранные труды, М., 1952; [3] его же, «Изв. АН СССР, Сер. матем.», т. 30, № 3, 1966, с. 481—96; [4] Карацуба А. А., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 112, с. 241—55; 1973,

т. 122, с. 257—61; [5] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [6] Чандрасекхаран К., Арифметические функции, пер. с англ., М., 1974. *А. А. Карацуба.*

ВИНОГРАДОВА ОЦЕНКИ — название нескольких теорем И. М. Виноградова. Наиболее известными из них являются следующие.

а) В. о. сумм характеров (см. *Дирихле характер*). Если χ — неглавный характер mod D, то при $N>0$, $M\geqslant 1$,

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+M}\chi(n)\right|\leqslant\sqrt{D}\log D.$$

б) В. о. сумм Вейля (см. *Вейля сумма*). Пусть n — постоянное число с условием $n\geqslant 12$ и пусть $\nu=1/n$. Пусть далее точки n-мерного пространства разбиты на два класса — точки класса 1 и точки класса 2. Точкой класса 1 наз. точка

$$\left(\frac{a_n}{q_n}+z_n,\ \ldots,\frac{a_1}{q_1}+z_1\right),$$

где первые слагаемые — рациональные несократимые дроби с положительными знаменателями, имеющими общим наименьшим кратным число Q, не превосходящее p^{ν}, а вторые слагаемые удовлетворяют условию

$$|z_s|\leqslant p^{-s+\nu}.$$

Точкой класса 2 наз. точка, не являющаяся точкой класса 1. Тогда, если положить

$$\rho=\frac{1}{8n^2(\log n+0{,}5\log\log n+1{,}3)},$$

то для точек класса 2 при $m\leqslant P^{2\rho}$ будет выполняться

$$|T_m|=\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P}e^{2\pi i m(\alpha_n x^n+\ldots+\alpha_1 x)}\right|\leqslant P^{1-\rho}.$$

Если же положить

$$\delta_s=z_s p^s,\ \delta_0=\max(|\delta_n|,\ldots,|\delta_1|),$$

то для точек класса 1 при $m\leqslant P^{4\nu^2}$ будет выполняться

$$|T_m|\leqslant P\,(m,Q)^{\nu}\,Q^{-\nu+\varepsilon}$$

или также

$$|T_m|\leqslant PQ^{-\nu+\varepsilon}\delta_0^{-\nu},\ \text{если}\ \delta_0\geqslant 1.$$

в) В. о. тригонометрических сумм с простыми числами. Пусть $\varepsilon\leqslant 0{,}001$. И пусть, в обозначениях теоремы б), точки n-мерного пространства разбиты на классы следующим образом.

К классу $1a$ отнесены точки, удовлетворяющие условиям

$$Q\leqslant e^{u\varepsilon},\ \delta_0\leqslant e^{u\varepsilon},\ \text{где}\ u=\log P.$$

К классу $1b$ отнесены точки, не являющиеся точками класса $1a$ и удовлетворяющие условиям

$$Q\leqslant P^{0{,}2\nu},\ \delta_0\leqslant P^{\nu}.$$

Наконец, к классу 2 отнесены все остальные точки.

Если положить для точек класса $1a$

$$\Delta=u^{9\varepsilon}Q^{-0{,}5\nu+\varepsilon'},\ \mu=(m,Q)^{0{,}5\nu},$$

или также

$$\Delta=u^{9\varepsilon}\delta_0^{-0{,}5\nu},\ \mu=m^{-0{,}5\nu},\ \text{если}\ \delta_0\geqslant 1;$$

для точек класса $1b$, взяв $\varepsilon=2\varepsilon'$, положить

$$\Delta=Q^{-0{,}5+\varepsilon_3},\ \mu=(m,Q)^{0{,}5\nu},\ \text{если}\ Q>e^{u\varepsilon},$$

$$\Delta=Q^{-0{,}5\nu+\varepsilon_3}\,\delta_0^{-0{,}5\nu+\varepsilon_3},\ \mu=1,\ \text{если}\ \delta_0>e^{u\varepsilon}$$

(при $Q>e^{u\varepsilon}$, $\delta_0>e^{u\varepsilon}$ можно брать любую из указанных пар значений Δ и μ); и, наконец, для точек класса 2 положить

$$\Delta=P^{-\rho_1},\ \rho_1=\frac{1}{17n^2(2\log n+\log\log n+2{,}9)},\ \mu=1,$$

то при $m\leqslant\Lambda^{-2}$ всегда будет выполняться

$$\left|\sum_{p\leqslant P}e^{2\pi i m(\alpha_n p^n+\ldots+\alpha_1 p)}\right|\leqslant\frac{P}{u}\,\Delta\mu.$$

Лит.: [1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [2] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964. *А. А. Карацуба.*

ВИНОГРАДОВА ТЕОРЕМА о среднем — теорема об оценке сверху величины *Виноградова интеграла*:

$$J_b = J_{b,\,n}(P) =$$

$$= \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\,(\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x)} \right|^{2b} d\alpha_n \dots d\alpha_1.$$

J_b — среднее значение тригонометрич. суммы. Формулируется следующим образом. Если при целом неотрицательном t положить

$$D_t = (20n)^{\frac{n(n+1)}{2}t}, \quad b_t = nt + \left[\frac{n(n+1)}{4} + 1\right],$$

то при $l > 0$ и целом $b \geqslant b_l$ будет выполняться

$$J_b = J_{b,\,n}(P) < D_l P^{2b - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^l}.$$

Оценка J_b, даваемая В. т., предельно точна. В. т. является основной в *Виноградова методе* оценок *Вейля сумм*. Кроме того, из нее был получен целый ряд результатов, близких к наилучшим, в классич. проблемах теории чисел (см. *Варинга проблема*, *Гильберта — Камке проблема*, *Распределение дробных долей* многочлена).

Лит.: [1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [2] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964. *А. А. Карацуба.*

ВИНОГРАДОВА — ГОЛЬДБАХА ТЕОРЕМА — теорема о представлении всех достаточно больших нечетных чисел суммой трех простых. Эта теорема является следствием асимптотич. формулы для числа $I(N)$ решений уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3 = N$$

в простых числах, доказанной И. М. Виноградовым в 1937:

$$I(N) = \frac{N^2}{2r^3} S(N) + O\left(\frac{N^2}{r^{3,5-\varepsilon}}\right),$$

где N — нечетное, $r = \log N$,

$$S(N) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p \nmid N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right) > 0{,}6.$$

См. *Виноградова метод*, *Гольдбаха проблема*.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Избранные труды, М., 1952; [2] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964. *А. А. Карацуба.*

ВИНТОВАЯ ЛИНИЯ — пространственная кривая, расположенная на поверхности круглого цилиндра (цилиндрическая В. л.; рис. 1) или круглого

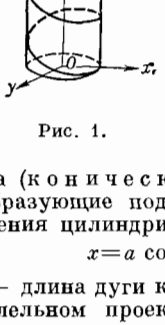


Рис. 1.

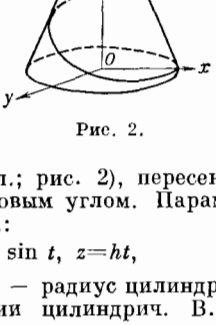


Рис. 2.

конуса (коническая В. л.; рис. 2), пересекающая все образующие под одинаковым углом. Параметрич. уравнения цилиндрич. В. л.:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = ht,$$

где t — длина дуги кривой, a — радиус цилиндра. При параллельном проектировании цилиндрич. В. л. на плоскость, параллельную образующим цилиндра, по-

лучается синусоида. Во всех точках цилиндрич. В. л. кривизна и кручение имеют постоянную величину. Главные нормали цилиндрич. В. л. пересекают ось цилиндра под прямым углом. Длина отрезка В. л. между двумя последовательными точками ее встречи с какой-либо образующей наз. в и т к о м В. л., а длина соответствующего отрезка образующей — ш а г о м В. л. Параметрич. уравнения конич. В. л.:

$$x = ce^{mt}\cos t, \quad y = ce^{mt}\sin t, \quad z = ce^{mt}\operatorname{ctg}\alpha,$$

где t — длина дуги кривой, α — угол между осью конуса и его образующей, $m = \sin\alpha/\operatorname{tg}\varphi$, φ — угол между касательной к В. л. и образующей конуса. Параллельная оси конуса проекция конич. В. л. на плоскость, перпендикулярную оси конуса, есть логарифмич. спираль с полюсом в проекции вершины конуса. Кривизна и кручение конич. В. л. сохраняют постоянное отношение во всех точках.

Различают п р а в о- или л е в о з а к р у ч е н н ы е В. л., т. е. при возрастании координаты z В. л. идет по направлению или против направления движения часовой стрелки. О б о б щ е н н а я В. л.— линия на цилиндре (произвольном), к-рая каждую из образующих цилиндра пересекает под постоянным углом. В. л. являются частным случаем *откоса линии*.

Лит.: [1] Б ю ш г е н с С. С., Дифференциальная геометрия, М.—Л., 1940; [2] Б л я ш к е В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., М., 1957.

Е. В. Шикин.

ВИНТОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, описываемая плоской кривой L, к-рая, равномерно вращаясь вокруг оси, одновременно совершает равномерное поступательное перемещение вдоль этой же оси. Если L лежит в плоскости оси вращения z и определяется уравнением $z = f(u)$, то радиус-вектор В. п. есть

$$r = \{u\cos v,\ u\sin v,\ f(u) + hv\},\ h = \text{const},$$

ее линейный элемент

$$ds^2 = (1 + f'^2)\,du^2 + 2hf'\,du\,dv + (u^2 + h^2)\,dv^2.$$

В. п. изгибается в поверхность вращения так, что винтовые линии, образующие поверхность, накладываются на параллели (т е о р е м а Б у р а). Если $f = \text{const}$, то В. п. есть *геликоид*. Если $h = 0$, то В. п. есть *вращения поверхность*.

И. Х. Сабитов.

ВИНТОВОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — раздел *векторного исчисления*, в к-ром изучаются операции над в и н т а м и — упорядоченными парами коллинеарных векторов (r, r^0), приложенных началами к одной точке. Вектор r наз. в е к т о р о м в и н т а; ось, определенная этим вектором,— о с ь ю в и н т а, r^0 — м о м е н т о м в и н т а, а число p в равенстве $r^0 = pr$ наз. п а р а м е т р о м в и н т а.

В В. и. рассматриваются операции сложения винтов, умножения на число, скалярного и винтового умножения и др. При этом операции В. и. сводятся к операциям над комплексными векторами вида

$$r + \omega r^0,$$

где $\omega^2 = 0$; комплексное число $|r|e^{\omega p}$ наз. к о м п л е к с н ы м м о д у л е м в и н т а; число $\alpha + \omega\alpha^0$ наз. к о м п л е к с н ы м у г л о м между винтами (α — угол между осями, а α^0 — расстояние между ними). Все формулы В. и. идентичны формулам векторного исчисления, если модуль вектора заменить комплексным модулем винта, а обыкновенный угол между прямыми — комплексным углом.

Например, скалярное произведение двух винтов равно произведению их комплексных модулей на косинус комплексного угла между ними ($\cos(\alpha + \omega\alpha^0) = \cos\alpha - \omega\alpha^0\sin\alpha$); винтовое произведение двух винтов есть винт, ось которого перпендикулярна осям сомножителей, вектор имеет направление векторного произведения векторов сомножителей, а комплексный

модуль равен произведению комплексных модулей этих винтов на синус комплексного угла между осями сомножителей ($\sin(\alpha+\omega\alpha^0)=\sin\alpha+\omega\alpha^0\cos\alpha$). Аналогично устанавливается соответствие между формулами векторного анализа и формулами винтового анализа, в к-ром фигурируют комплексные скалярные функции и винт-функции винтового аргумента.

В. и. применяется в механике, где произвольные перемещения твердого тела или произвольная система сил, действующих на тело, могут быть выражены винтами (см. [4]), в геометрии в теории линейчатых поверхностей (см. [3], [5]).

Теория винтов возникла в начале 19 в. после появления работ Л. Пуансо (L. Poinsot), М. Шаля (M. Chasles), А. Мёбиуса (A. Möbius), Ю. Плюккера (J. Plücker), первый капитальный труд по теории винтов принадлежит Р. Боллу [1]. Собственно В. и. было построено А. П. Котельниковым [2].

Лит.: [1] Ball R., A Treatise on the Theory of the Screws, Dublin, 1876; [2] Котельников А. П., Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике, Казань, 1895; [3] Бляшке В., Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна, пер. с нем., М.—Л., 1935; [4] Дименберг Ф. М., Винтовое исчисление и его приложения к механике, М., 1965; [5] Зейлигер Д. Н., Комплексная линейчатая геометрия, Л.—М., 1934.

А. Б. Иванов.

ВИРИАЛА ТЕОРЕМА — теорема, согласно к-рой усредненная по бесконечному интервалу времени кинетич. энергия $\overline{T}$ механич. системы равна усредненному по тому же интервалу вириалу сил, т. е.

$$\overline{T}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\overline{\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{r}_i}, \qquad (1)$$

где N — число материальных точек системы, $\boldsymbol{F}_i$ — сила, действующая на i-ю точку системы, а $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор этой точки. Черта над соответствующей функцией означает усреднение этой функции по бесконечному интервалу времени.

В. т. была установлена Р. Клаузиусом (R. Clausius) в 1870 и является следствием уравнений движения механич. системы при условии, что движение системы происходит в ограниченной области пространства с ограниченными по модулю скоростями точек. В случае потенциальности сил, действующих на точки системы, соотношение (1) принимает вид

$$\overline{T}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\overline{(\boldsymbol{r}_i\nabla_i)\,U}\,. \qquad (2)$$

При дополнительном требовании об однородности ν-й степени потенциальной энергии относительно координат точек из (2) следует практически важное соотношение между средними значениями кинетической и потенциальной энергиями системы:

$$\overline{T}=\frac{\nu}{2}\,\overline{U}\,. \qquad (3)$$

Напр., для линейного гармонического осциллятора ($U\sim r^2$, $\nu=2$) $\overline{T}=\overline{U}$; а для точки, движущейся в поле тяготения Ньютона ($U\sim 1/r$, $\nu=-1$), $\overline{T}=-\overline{U}/2$.

В. т. используется в механике, статистич. механике и атомной физике (напр., для вывода уравнений состояния и определения постоянных межмолекулярных взаимодействий). В. т. в виде (2) и (3) имеет место и в квантовой механике (с соответствующими обобщениями операции усреднения и др. понятий, используемых в (2) и (3)).

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, 3 изд., М., 1973; [2] Давыдов А. С., Квантовая механика, М., 1963; [3] Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р., Молекулярная теория газов и жидкостей, пер. с англ., М., 1961; [4] Ольховский И. И., Курс теоретической механики для физиков, 2 изд., М., 1974.

И. И. Ольховский.

ВИРИАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ, вириальный ряд,— ряд в правой части уравнения состояния газа:

$$\frac{Pv}{kT}=1+\sum_{1\leqslant i\leqslant\infty}\frac{B_{i+1}(T)}{v^i},$$

где P — давление, T — температура, v — удельный объем, k — постоянная Больцмана. Член ряда, содержащий k-й вириальный коэффициент B_k, характеризует отклонение газа от идеальности, связанное с взаимодействием групп из k молекул. B_k выражаются через неприводимые групповые интегралы b_k:

$$B_k=\frac{k-1}{k}\sum\frac{(k-2+\Sigma n_j)!}{(k-1)!}(-1)^{\Sigma n_j}\prod_j\frac{(jb_j)^{n_j}}{n_j!};$$

суммирование идет по всем натуральным n_j, $j\geqslant 2$, удовлетворяющим условию

$$\sum_{2\leqslant j\leqslant k}(j-1)\,n_j=k-1.$$

В частности,

$$B_2=-b_2,\quad B_3=4b_2^2-2b_3;\quad b_2=\frac{1}{2!\,V}\int\int f_{12}d^3q_1d^3q_2,$$

$$b_3=\frac{1}{3!\,V}\int\int\int(f_{31}f_{21}+f_{32}f_{31}+f_{32}f_{21}+f_{21}f_{32}f_{31})\,d^3q_1d^3q_2d^3q_3,$$

где

$$f_{ij}=\exp\left[-\frac{\phi(|q_i-q_j|)}{kT}\right]-1,$$

V — объем газа; интегрирование распространяется на весь объем, занятый газом. Существует правило, позволяющее с помощью f_{ij} записывать b_j для любого j. После упрощений оказывается:

$$B_3=-\frac{1}{3}\int\int f_{12}f_{13}f_{23}d^3q_1d^3q_2.$$

Фактически удается вычислить лишь первые вириальные коэффициенты.

Рядом по степеням v^{-1} с коэффициентами, выраженными через b_j, могут быть представлены s-частичные равновесные корреляционные функции, что приводит, в частности, к простому способу получения уравнения состояния (см. [3]).

Существует квантовомеханический аналог В. р.

Лит.: [1] Майер Дж., Гепперт-Майер М., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1952; [2] Хилл Т., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1960; [3] Боголюбов Н. Н., Избранные труды, т. 2, Киев, 1970; [4] Уленбек Дж., Форд Дж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965.

И. П. Павлоцкий.

ВИРТУАЛЬНО-АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СЕТЬ — *сеть* на поверхности V_2 евклидова пространства, к-рая при нек-ром изгибании f: $V_2\to V_2^*$ переходит в *асимптотическую сеть* поверхности V_2^*. Существование сопряженной В.-а. с. характеризует *Фосса поверхность*.

Лит.: [1] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. Т. Базылев.

ВИТАЛИ ВАРИАЦИЯ — одна из числовых характеристик функции нескольких переменных, к-рую можно рассматривать как многомерный аналог *вариации функции* одного переменного. Пусть функция $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ $(n=2,3,\ldots)$ задана на n-мерном параллелепипеде $D_n=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$. Введем обозначения

$$\Delta_{h_k}(f;x)=f(x_1,\ldots,x_k+h_k,\ldots,x_n)-$$
$$-f(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n),\ k=1,\ldots,n,$$
$$\Delta_{h_1\ldots h_k}(f;x)=\Delta_{h_k}(\Delta_{h_1\ldots h_{k-1}};x),\quad k=2,\ldots,n.$$

Пусть Π — произвольное разбиение параллелепипеда гиперплоскостями $x_s=x_s^{(r_s)}$, $x_s^{(r_s)}<x_s^{(r_s+1)}$, $x_s^{(r_s+1)}-x_s^{(r_s)}=h_s^{(r_s)}$, $x_s^{(0)}=a_s$, $x_s^{(l_s)}=b_s$, $r_s=0,1,\ldots,l_s$, $s=1,2,\ldots,$

n на n-мерные параллелепипеды. Обозначим через $V(f)$ точную верхнюю грань сумм вида

$$\sum_{r_1=0}^{l_1-1} \cdots \sum_{r_n=0}^{l_n-1} \left| \Delta_{\substack{(r_1) \\ h_1}} \cdots \Delta_{\substack{(r_n) \\ h_n}} (f; x_1^{(r_1)}, \ldots, x_n^{(r_n)}) \right|, \quad (*)$$

взятую по всевозможным разбиениям П. Если $V(f) < \infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет о г р а н и ч е н н у ю (конечную) в а р и а ц и ю В и т а л и на D_n, а класс всех таких функций обозначается через $V(D_n)$ или просто через V. Этот класс был определен Дж. Витали [1]. Позже это же определение вариации было предложено А. Лебегом [2] и М. Фреше [3]. Действительнозначная функция $f(x)$, заданная на D_n, принадлежит классу $V(D_n)$ тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где функции f_1 и f_2 таковы, что для каждой из них суммы вида (*), взятые без знака модуля, неотрицательны [4] (аналог *Жордана разложения* функции ограниченной вариации одного переменного). С помощью функций класса $V(D_n)$ вводится многомерный интеграл Стилтьеса. В частности, для любой непрерывной на D_n функции $g(x)$ и любой функции $f(x)$ из класса $V(D_n)$ существует интеграл $\int_{D_n} g(x)\, df(x)$ (см. [3], с. 143).

Лит.: [1] V i t a l i G., «Atti Accad. sci. Torino», 1908, v. 43, p. 75—92; [2] L e b e s g u e A., «Ann. Ecol. Norm. super.», 1910, ser. 3, v. 27, p. 361—450; [3] F r e c h e t M., «Nouv. anniv.», 1910, ser. 4, t. 10, p. 241—56; [4] H a h n H., Theorie der reellen Funktionen, Bd 1, B., 1921; [5] Р и с с Ф., С е к е ф а л ь в и - Н а д ь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., М., 1954. *Б. И. Голубов.*

ВИТАЛИ ТЕОРЕМА — 1) В. т. о п о к р ы т и и. Если система замкнутых множеств $\{F\}$ является покрытием Витали (см. ниже) множества $A \subset \mathbb{R}^n$, то из $\{F\}$ можно выделить не более чем счетную последовательность попарно непересекающихся множеств $\{F_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, такую, что

$$m_e [A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i] = 0,$$

где m_e — внешняя мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

П о к р ы т и е м В и т а л и множества $A \subset \mathbb{R}^n$ наз. система $\{E\}$ подмножеств $\mathbb{R}^n$ такая, что для любого $x \in A$ существует последовательность $\{E_n\}$ из $\{E\}$, удовлетворяющая условиям:

1) $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$;

2) $\delta_n = \delta(E_n) \to 0$ при $n \to \infty$,

где $\delta(E_n)$ — диаметр E_n;

3) $\inf_n \left[\sup \frac{m_e E_n}{ml} \right] = \alpha > 0$,

где sup берется по всем I — кубам с гранями, параллельными координатным плоскостям, содержащим E_n, и m_e — внешняя мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ (этот sup наз. параметром регулярности E_n).

Теорема была доказана Дж. Витали [1] в случае, когда $\{F\}$ состоит из кубов с гранями, параллельными координатным плоскостям. Условие, что $\{F\}$ есть покрытие Витали множества A, а не покрытие в обычном смысле, существенно для справедливости В. т. Это условие не может быть опущено, даже если $\{F\}$ есть система сегментов и каждому $x \in A$ соответствует последовательность $\{F_n\}$ из $\{F\}$ с центром в x и диаметрами, стремящимися к нулю.

Лит.: [1] V i t a l i G., «Atti Accad. sci. Torino», 1908, v. 43, p. 75—92; [2] С а к с С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949. *И. А. Виноградова.*

2) В. т. о р а в н о м е р н о й с х о д и м о с т и п о с л е д о в а т е л ь н о с т и г о л о м о р ф н ы х ф у н к ц и й: пусть последовательность $\{f_n(z)\}$ голоморфных функций в области D комплексной плоскости z равномерно ограничена и сходится на множестве

E, обладающем предельной точкой в D; тогда последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится внутри D к регулярной функции, т. е. равномерно сходится на любом компактном множестве $K \subset D$. Получена Дж. Витали [1].

Компактности принцип позволяет усилить В. т., заменив в ее условии требование равномерной ограниченности в D требованием равномерной ограниченности внутри D, т. е. на любом компактном множестве $K \subset D$. Имеются также обобщения В. т. для *нормальных семейств* мероморфных функций, для семейств квазианалитич. функций и для семейств голоморфных функций многих комплексных переменных; в последнем случае, однако, на множество $E \subset D \subset \mathbb{C}^n$ необходимо наложить дополнительные ограничения, напр., что E содержит внутренние точки в $\mathbb{C}^n$ (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Vitali G., «Rend. del R. Ist. Lombardo», 2 ser., 1903, v. 36, p. 772; «Ann. mat. pura ed appl.», 3 ser., 1904, v. 10, p. 73; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 1, 2 изд., М., 1967, гл. 4; [3] Монтель П., Нормальные семейства аналитических функций, пер. с франц., М.—Л., 1936; [4] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969. *Е. Д. Соломенцев.*

ВИТТА ВЕКТОР — элемент алгебраич. конструкции, впервые предложенной Э. Виттом в 1936 [1] в связи с описанием неразветвленных расширений полей p-адических чисел. Позже В. в. были применены при изучении алгебраических многообразий над полем положительной характеристики (см. [3]), а также в теории коммутативных алгебраических групп (см. [4], [5]) и в теории формальных групп (см. [6]). Пусть A — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Векторами Витта с компонентами в A наз. бесконечные последовательности $a=(a_0, a_1, \ldots)$, $a_i \in A$, к-рые складываются и перемножаются по следующим правилам:

$$(a_0, a_1, \ldots) \dot{+} (b_0, b_1, \ldots) = (S_0(a_0, b_0), S_1(a_0, a_1; b_0, b_1), \ldots),$$

$$(a_0, a_1, \ldots) \dot{\times} (b_0, b_1, \ldots) = (M_0(a_0, b_0), M_1(a_0, a_1; b_0, b_1), \ldots),$$

где S_n, M_n — многочлены от переменных $X_0, \ldots, X_n, Y_0, \ldots, Y_n$ с целыми коэффициентами, однозначно определяемые условиями

$$\Phi_n(S_0, \ldots, S_n) = \Phi_n(X_0, \ldots, X_n) + \Phi_n(Y_0, \ldots, Y_n),$$
$$\Phi_n(M_0, \ldots, M_n) = \Phi_n(X_0, \ldots, X_n) \cdot \Phi_n(Y_0, \ldots, Y_n);$$

здесь

$$\Phi_n = Z_0^{p^n} + pZ_1^{p^{n-1}} + \ldots + p^n Z_n$$

— многочлены, $n \in N$, p — простое число. В частности,

$$S_0 = X_0 + Y_0; \quad S_1 = X_1 + Y_1 - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{i} X_0^i Y_0^{p-i};$$

$$M_0 = X_0 Y_0, \quad M_1 = X_0^p Y_1 + X_1 Y_0^p + pX_1 Y_1.$$

В. в. с введенными выше операциями образуют кольцо, наз. кольцом векторов Витта и обозначаемое $W(A)$. Для любого натурального n определено также кольцо $W_n(A)$ усеченных векторов Витта длины n. Элементы этого кольца являются конечными наборами $a=(a_0, \ldots, a_{n-1})$, $a_i \in A$, с операциями сложения и умножения, приведенными выше. Канонич. отображения:

$$R: W_{n+1}(A) \longrightarrow W_n(A), \quad R((a_0, \ldots, a_n)) = (a_0, \ldots, a_{n-1}),$$
$$T: W_n(A) \longrightarrow W_{n+1}(A), \quad T((a_0, \ldots, a_{n-1})) = (0, a_0, \ldots, a_{n-1})$$

являются гомоморфизмами. Сопоставление $A \to W(A)$ (соответственно $A \to W_n(A)$) определяет ковариантный функтор из категории коммутативных колец с единицей в категорию колец. Этот функтор представим кольцом многочленов $Z[X_0, \ldots, X_n, \ldots]$ (соответственно $Z[X_0, \ldots, X_{n-1}]$), на к-ром определена структура кольцевого объекта. Спектр $\operatorname{Spec} Z[X_0, \ldots, X_n, \ldots]$ (соответственно $\operatorname{Spec} Z[X_0, \ldots, X_{n-1}]$) наз. схемой Витта

(соответственно усеченной схемой Витта) и является кольцевой схемой [3].

Каждый элемент $a \in A$ определяет В. в.

$$a^\tau = (a, 0, 0, \ldots)\, r \in W(A),$$

наз. представлением Тейхмюллера элемента a. Если $A = k$ — совершенное поле характеристики $p > 0$, то $W(k)$ является полным кольцом дискретного нормирования характеристики нуль с полем вычетов k и максимальным идеалом $pW(k)$. При этом каждый элемент $\omega \in W(k)$ однозначно записывается в виде

$$\omega = \omega_0^\tau + p\omega_1^\tau + p^2\omega_2^\tau + \ldots,$$

где $\omega_i \in k$. Наоборот, каждое такое кольцо A с полем вычетов $k = A/p$ канонически изоморфно кольцу $W(k)$. Представление Тейхмюллера позволяет построить канонический мультипликативный гомоморфизм $k \to W(k)$, расщепляющий отображение

$$W(k) \longrightarrow W(k)/p \simeq k.$$

Если $k = F_p$ — простое поле из p элементов, то $W(F_p)$ есть кольцо целых p-адических чисел Z_p.

Лит.: [1] Witt E., «J. reine und angew. Math.», 1936, Bd 176, S. 176—240; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [4] Серр Ж. П., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [5] Demazure M., Gabriel P., Groupes algebriques, t. 1, P.— Amst., 1970; [6] Dieudonne J., «Math. Ann.», 1957, Bd 134, S. 114—33.

И. В. Долгачев.

ВИТТА КОЛЬЦО поля k, кольцо типов квадратичных форм над k,— кольцо $W(k)$ классов невырожденных квадратичных форм на конечномерных векторных пространствах над k по следующему отношению эквивалентности: форма f_1 эквивалентна форме f_2 ($f_1 \sim f_2$) тогда и только тогда, когда для некоторых нейтральных квадратичных форм g_1 и g_2 ортогональная прямая сумма форм f_1 и g_1 изометрична ортогональной прямой сумме f_2 и g_2. Операции сложения и умножения в $W(k)$ индуцируются взятием ортогональной прямой суммы и тензорного произведения форм.

Пусть характеристика поля k отлична от 2. Тогда определение эквивалентности форм равносильно следующему: $f_1 \sim f_2$ тогда и только тогда, когда анизотропные формы f_1^a и f_2^a, соответствующие f_1 и f_2 (см. *Витта разложение*), изометричны. Класс эквивалентности формы f наз. ее типом и обозначается $[f]$. В. к., или кольцо типов квадратичных форм, есть ассоциативно коммутативное кольцо с единицей. Единицей кольца $W(k)$ является тип формы (1). [Здесь через $(a_1, \ldots, a_n)$ обозначается квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_i x_i^2$.] Нулем служит тип нулевой формы ранга нуль, содержащий также все нейтральные формы. Противоположным к типу $[f]$ является тип $[-f]$.

Аддитивная группа кольца $W(k)$ наз. группой Витта поля k, или группой типов квадратичных форм над k. Типы квадратичных форм вида (a), где a — элемент мультипликативной группы $k^\times$ поля k, порождают кольцо $W(k)$. Причем $W(k)$ полностью определяется в этих образующих соотношениями:

$$(a)(b) = (ab),$$
$$(a) + (b) = (a+b) + ((a+b)ab),$$
$$(a)^2 = 1,$$
$$(a) + (-a) = 0.$$

В. к. можно описать как кольцо, изоморфное факторкольцу целочисленного группового кольца

$$\mathbb{Z}[k^\times/(k^\times)^2]$$

группы $k^\times/(k^\times)^2$ по идеалу, порожденному элементами

$$\overline{1}+(-\overline{1}) \text{ и } \overline{1}+\overline{a}-\overline{1}-\overline{a}-(\overline{1}+\overline{a})\,\overline{a},\ (a\in k^\times),$$

где $\overline{x}$ — смежный класс элемента x по подгруппе $(k^\times)^2$.

В ряде случаев В. к. вычисляется явно: напр., если k — квадратично (в частности, алгебраически) замкнутое поле, то $W(k)\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; если k — вещественно замкнутое поле, то $W(k)\simeq\mathbb{Z}$ (изоморфизм осуществляется сопоставлением типу $[f]$ сигнатуры формы f); если k — п и ф а г о р о в о п о л е (т. е. сумма любых двух квадратов в k является квадратом) и не вещественно, то $W(k)\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; если k — конечное поле, то кольцо $W(k)$ изоморфно либо кольцу вычетов $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, либо $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[t]/(t^2-1)$; если k — полное локальное поле и его поле классов $\overline{k}$ имеет характеристику, отличную от 2, то

$$W(k)\simeq W(\overline{k})[t]/(t^2-1).$$

Расширение $k'|k$ поля k определяет гомоморфизм колец Витта φ: $W(k)\to W(k')$, при котором $[(a_1,\ldots,a_n)]\to[(a_1,\ldots,a_n)]$. Если расширение конечно и имеет нечетную степень, то φ — мономорфизм, а если, кроме того, оно является *Галуа расширением* с группой G, то действие группы G продолжается на $W(k)$ и

$$\varphi(W(k))=W(k')^G.$$

Общие свойства В. к. описываются т е о р е м о й П ф и с т е р а:

1) для любого поля k периодическая подгруппа $W_t(k)$ группы $W(k)$ 2-примарна;

2) если k — вещественное поле, а k_p — его п и ф а г о р о в о з а м ы к а н и е (т. е. наименьшее пифагорово поле, содержащее k), то точна последовательность

$$0\longrightarrow W_t(k)\longrightarrow W(k)\longrightarrow W(k_p)$$

(при этом, если $W_t(k)=0$, то поле k — пифагорово);

3) если $\{k_\alpha\}$ — семейство всех вещественных замыканий поля k, то точна последовательность

$$0\longrightarrow W_t(k)\longrightarrow W(k)\longrightarrow\prod W(k_\alpha)$$

в частности,

4) если k — не вещественное поле, то группа $W(k)$ периодическая.

Ряд других результатов относится к *мультипликативной теории форм*. В частности, пусть m — множество типов квадратичных форм на четномерных пространствах. Тогда m является двусторонним идеалом в $W(k)$ и $W(k)/m\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, идеал m содержит все делители нуля кольца $W(k)$, множество *нильпотентных элементов* кольца $W(k)$ совпадает с множеством элементов конечного порядка идеала m и является радикалом Джекобсона и первичным радикалом кольца $W(k)$. Кольцо $W(k)$ конечно тогда и только тогда, когда поле k не вещественно, а группа $k^\times/(k^\times)^2$ конечна; кольцо $W(k)$ нетерово тогда и только тогда, когда группа $k^\times/(k^\times)^2$ конечна. Если k — не вещественное поле, то m является единственным простым идеалом кольца $W(k)$. Если же k — вещественное поле, то множество простых идеалов кольца $W(k)$ является дизъюнктным объединением идеала m и семейств простых идеалов, соответствующих упорядочениям p поля k:

$$P=\Big\{[(a_1,\ldots,a_n)]\ \Big|\ \sum\operatorname{sgn}_p a_i=0\Big\},$$

$$P_l=\Big\{[(a_1,\ldots,a_n)]\ \Big|\ \sum\operatorname{sgn}_p a_i\equiv 0 \bmod l\Big\},$$

где l пробегает множество простых чисел, а $\operatorname{sgn}_p a_i$ означает знак элемента a_i при упорядочении p.

Если k — кольцо с инволюцией, то конструкция, аналогичная конструкции В. к., приводит к понятию г р у п п ы В и т т а к о л ь ц а с и н в о л ю ц и е й.

С более широкой точки зрения кольцо (группа) Витта является одним из первых примеров K-функторов (см.

Алгебраическая K-теория), которые играют важную роль в унитарной алгебраической K-теории.

Лит.: [1] Witt E., «J. reine u. angew. Math.», 1936, Bd 176, S. 31—44; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [3] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [4] Lorenz F., Quadratische Formen über Körpern, B. [u. a.], 1970; [5] O'Meara O. T., Introduction to quadratic forms, B.—Gött.— Hdlb., 1963; [6] Lam T. Y., The algebraic theory of quadratic forms, Massachusets, 1973; [7] Milnor J., Husemoller D., Symmetric bilinear forms, B. [u. a.], 1973.

А. В. Михалев, А. И. Немытов, В. Л. Попов.

ВИТТА РАЗЛОЖЕНИЕ векторного пространства — разложение пространства в прямую сумму трех подпространств, обладающих определенными свойствами. Точнее, пусть V — векторное пространство над полем k характеристики, отличной от двух, наделенное метрич. структурой с помощью симметрической или знакопеременной *билинейной формы* f. Прямое разложение

$$V=N_1+N_2+D$$

наз. В. р. пространства V, если N_1 и N_2 вполне изотропны, а D неизотропно и ортогонально N_1+N_2 относительно f. В. р. играет важную роль в изучении структуры формы f и в вопросах классификации билинейных форм.

Пусть f — невырожденная билинейная форма и V — конечномерно. Тогда любое максимальное вполне изотропное подпространство в V может быть включено в В. р. пространства V в качестве N_1 (или N_2). Для всякого В. р. $\dim N_1=\dim N_2$ и для любого базиса $v_1^{(1)},\ldots, v_n^{(1)}$ в N_1 существует такой базис $v_1^{(2)},\ldots, v_n^{(2)}$ в N_2, что $f(v_i^{(1)}, v_j^{(2)})=\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символы Кронекера). Для любых двух В. р.

$$V=N_1+N_2+D=N_1'+N_2'+D'$$

условие $\dim N_i=\dim N_i'$, $i=1, 2$, необходимо и достаточно для того, чтобы существовал такой метрич. автоморфизм φ пространства V, что

$$\varphi(N_1)=N_1',\quad \varphi(N_2)=N_2',\quad \varphi(D)=D'.$$

Невырожденная билинейная симметрическая или знакопеременная форма f на V наз. нейтральной, если V конечномерно и обладает В. р. с $D=0$. Симметрическая форма в этом случае наз. гиперболической формой, а V — гиперболическим пространством. Ортогональная прямая сумма нейтральных форм нейтральна. Матрица нейтральной формы (в описанном выше базисе $v_1^{(1)},\ldots, v_n^{(1)}, v_1^{(2)},\ldots, v_n^{(2)}$ пространства $V=N_1+N_2$) имеет вид

$$\left\|\begin{array}{c|c} 0 & E_n \\ \hline \varepsilon E_n & 0 \end{array}\right\|,$$

где E_n — единичная матрица порядка n, а $\varepsilon=1$ для симметрической формы и -1 для знакопеременной. Нейтральные формы изометричны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ранг. Класс нейтральных симметрических билинейных форм является нулем (т. е. нейтральным элементом по сложению) в *Витта кольце* поля k. Нейтральные формы и только они имеют индекс Витта, равный $\frac{1}{2}\dim V$. Знакопеременная форма на конечномерном пространстве нейтральна.

Если f — невырожденная симметрическая билинейная форма на конечномерном пространстве V и $V=N_1+N_2+D$ — В. р., в котором $\dim N_1=\dim N_2$ и равно индексу Витта формы f, то сужение f на D является определенной, или анизотропной, билинейной формой, т. е. такой, что $f(v, v)\neq 0$ для любого ненулевого $v\in D$. Эта форма не зависит (с точностью до изометрии) от выбора В. р. на V. В множестве определенных билинейных форм можно ввести

операцию сложения, превращающую его в абелеву группу — группу Витта поля k (см. *Витта кольцо*).

Пусть $v_1^{(i)}, \ldots, v_n^{(i)}$ — такие базисы в N_i, $i=1, 2$, что $f(v_i^{(1)}, v_j^{(2)})=\delta_{ij}$, объединяя эти базисы с произвольным базисом в D, получают базис в V, в к-ром матрица формы f имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & E_n & 0 \\ E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{Vmatrix}.$$

Для симметрических билинейных форм существует ортогональный базис в V, т. е. такой, в к-ром матрица формы диагональна. Если поле k алгебраически замкнуто, то найдется даже ортонормированный базис (базис, в к-ром матрица формы является единичной), поэтому невырожденные симметрические билинейные формы конечного ранга над k изометричны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ранг. В общем случае классификация таких форм существенно зависит от арифметич. свойств поля k.

Изучение и классификация вырожденных симметрических и знакопеременных билинейных форм сводится к изучению невырожденных форм (сужение формы на подпространство, дополнительное к ядру формы).

Все изложенное допускает обобщение на случай ε-эрмитовых форм над телом, обладающих свойством (T) (см. *Витта теорема*), а также на случай симметрических билинейных форм, ассоциированных с квадратичной формой, без ограничений на характеристику поля.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [4] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974. *В. Л. Попов.*

ВИТТА ТЕОРЕМА: всякая изометрия между двумя подпространствами F_1 и F_2 конечномерного векторного пространства V, определенного над полем k характеристики, отличной от двух, и наделенного метрич. структурой с помощью невырожденной симметрической или кососимметрической *билинейной формы* f, может быть продолжена до метрич. автоморфизма всего пространства V. Впервые эта теорема получена Э. Виттом [1].

В. т. может быть доказана и в более широких предположениях на k и f (см. [2], [3]). А именно, утверждение теоремы остается в силе, если k — тело, V — левый конечномерный k-модуль, а f — невырожденная *ε-эрмитова форма* (относительно нек-рого фиксированного инволютивного антиавтоморфизма σ тела k), удовлетворяющая условию: для всякого $v \in V$ найдется такой элемент $\alpha \in k$, что

$$f(v, v)=\alpha+\varepsilon\alpha^{\sigma}$$

(свойство (T)). Свойство (T) выполняется, напр., когда f — эрмитова форма и характеристика k отлична от двух, или когда f — знакопеременная форма. В. т. справедлива также, если k — поле, а f — симметрическая билинейная форма, ассоциированная с невырожденной *квадратичной формой* Q на V. Из В. т. следует, что группа метрич. автоморфизмов пространства V транзитивно переставляет вполне изотропные подпространства одинаковой размерности и что все максимальные вполне изотропные подпространства в V имеют одну и ту же размерность (индекс Витта формы f). Другое следствие В. т.: классы изометрии невырожденных симметрических билинейных форм конечного ранга над k относительно взятия ортогональной прямой суммы образуют моноид с сокращением; каноническое отображение этого моноида в его *Гротендика группу* инъективно. Группа $\mathrm{WG}(k)$ наз. групп-

пой Витта — Гротендика $WG(k)$ поля k; тензорное произведение форм индуцирует на ней структуру кольца, к-рое наз. кольцом Витта — Гротендика поля k (см. [7]).

О других приложениях В. т. см. *Витта разложение*, *Витта кольцо*.

Лит.: [1] Witt E., «J. reine angew. Math.», 1936, Bd 176, S. 31—44; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [3] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [4] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [5] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [6] Серр Ж.-П., Курс арифметики, пер. с франц., М., 1972; [7] Милнор Дж., «Математика», 1974, т. 15, в. 4, с. 3—27.

В. Л. Попов.

ВИХРЕВОЕ КОЛЬЦО — вихревая нить, имеющая вид тора малого поперечного сечения. Общие формулы, определяющие скорости частиц жидкости по вихрям, дают возможность представить потенциал скоростей $\varphi(z, r)$ и функцию Стокса тока $\psi(z, r)$ течения, возникающего в неограниченной жидкости от вихревого кольца, в виде интегралов, содержащих функции Бесселя нулевого и 1-го порядка:

$$\varphi(z, r) = \frac{1}{2} a\varkappa \int_0^\infty e^{-kz} J_0(kr) J_1(ka)\, dk,$$

$$\psi(z, r) = -\frac{1}{2} a\varkappa r \int_0^\infty e^{-kz} J_1(kr) J_1(ka)\, dk.$$

В этих формулах, пригодных для $z>0$, a — радиус кольца, $\varkappa$ — напряженность вихревого кольца. Координата z отсчитывается от плоскости кольца, находящегося в движении. Под влиянием скоростей, им же самим создаваемых в жидкости, кольцо перемещается в направлении оси Oz с постоянной скоростью c, определяемой следующей приближенной формулой:

$$c = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon}\left[\ln\frac{8\varepsilon}{a} - \frac{1}{4}\right],$$

где ε — радиус поперечного сечения В. к. Для нескольких В. к. функции φ и ψ представляются в виде суммы соответствующих функций каждого кольца.

Лит.: [1] Милн-Томсон Л. М., Теоретическая гидродинамика, пер. с англ., М., 1964.

Л. Н. Сретенский.

ВИХРЬ, ротор, векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ — векторная «вращательная составляющая» этого поля. Если $\boldsymbol{a}(M)$ — поле скоростей частиц движущейся непрерывной среды, то В. равен половине угловой скорости частицы. В. обозначается $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ (иногда — $\operatorname{curl}\boldsymbol{a}$). В декартовых прямоугольных координатах x, y, z В. определяется выражением:

$$\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right);\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right);\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\},$$

где $u(M)$, $v(M)$, $w(M)$ — компоненты $\boldsymbol{a}(M)$.

Линия в пространстве, в каждой точке к-рой в данный момент времени В. лежит на касательной прямой, наз. вихревой линией. Всякая поверхность, на к-рой расположено семейство вихревых линий, зависящее от одного параметра, наз. вихревой поверхностью. Частным, но весьма важным примером вихревых поверхностей являются вихревые трубки, к-рые образуются вихревыми линиями, выходящими из всех точек какой-нибудь замкнутой кривой. Если эта кривая бесконечно мала, то образующаяся вихревая поверхность наз. вихревой нитью. Вихревые поверхности наз. также вихревыми слоями, считая слой как бы состоящим из геометрич. поверхности с нанесенной на ней обкладкой из вихревых линий. При пересечении вихревого слоя скорости частиц жидкости испытывают тангенциальный разрыв, пропорциональный В. в соответствующей точке.

Основная теорема Гельмгольца в гидродинамике заключается в том, что если объемные силы имеют потенциал, то при течении однородной, идеальной несжимае-

мой жидкости или баротропного газа частицы среды, расположенные в нек-рый момент времени на вихревой линии, будут и во все последующее время располагаться на вихревой линии. Таким образом, с течением времени сохраняются вихревые поверхности и, в частности, вихревые трубки и нити. Каждая вихревая трубка может быть охарактеризована нек-рым числом, наз. напряженностью трубки, и равным потоку вектора В. через произвольным образом проведенное сечение трубки. Это число не зависит от формы поперечного сечения, так как $\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{a}=0$. Оно означает, что вихревая трубка может быть либо замкнутой (*вихревое кольцо*), либо иметь начало и конец на границах жидкости. С течением времени напряженность вихревой трубки в идеальной жидкости не меняется.

Перечисленные свойства вихревых трубок, найденные Г. Гельмгольцем (H. Helmholtz), получают исключительно простое доказательство с помощью введенного У. Томсоном (W. Thomson) понятия о циркуляции Г скорости v по замкнутому контуру (L):

$$\Gamma = \oint_{(L)} | \boldsymbol{v} | \cos (\widehat{\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{s}})\, ds,$$

где ds — элемент дуги контура L. Изучение свойств циркуляции скорости приводит к теореме Лагранжа о сохранении с течением времени безвихревого движения.

Основной задачей теории В. является определение поля скоростей движения жидкости по заданному полю векторов В. Если область, занятая жидкостью, безгранична во всех направлениях и если область (D), занятая В., ограничена замкнутой вихревой поверхностью, то поле скоростей находится с помощью вектор-потенциала

$$\boldsymbol{\Pi} = \frac{1}{4\pi} \int\int\int_{(D)} \frac{[\operatorname{rot} \boldsymbol{v}}{r}\, d\tau,$$

по формуле:

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\Pi}.$$

Если же задача состоит в определении скоростей по вихрям в ограниченном пространстве, то решение весьма сложно вследствие необходимости рассматривать интегральные уравнения с особыми ядрами. Полное решение этой задачи в [6], [7].

Для важного частного случая плоскопараллельных движений:

$$u = u(x,\ y),\ v = v(x,\ y),\ w = w(x,\ y)$$

две компоненты α, β В. равны нулю, а третья компонента γ представляет собой весь В., к-рый в данном случае перпендикулярен к плоскости XOY. В пересечении вихревой нити с плоскостью XOY образуется маленькая площадка, наз. вихревой точкой. При наличии в жидкости нескольких вихревых точек возникает движение самих точек благодаря тем скоростям, какие возбуждают в жидкости эти точки. Уравнения движения вихревых точек имеют вид канонич. уравнений механики.

Лит.: [1] Аппель П., Руководство теоретической (рациональной) механики, пер. с франц., т. 3, М., 1911; [2] Вилля Г., Теория вихрей, пер. с франц., Л.—М., 1936; [3] Lichtenstein L., Grundlagen der Hydromechanik, B., 1929; [4] Милн-Томсон Л. М., Теоретическая гидродинамика, пер. с англ., М., 1964; [5] Ламб Г., Гидродинамика, пер. с англ., М.—Л., 1947; [6] Гюнтер Н. М., «Изв. АН СССР», 6 сер., 1926, т. 20, № 13—14, с. 1323—48; № 15—17, с. 1503—1532; [7] его же, «Ж. Ленингр. Физ.-матем. об-ва», 1926, т. 1, в. 1, с. 12—36.

Л. Н. Сретенский.

ВКБ-МЕТОД — асимптотический метод Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна (и Джефриса) решения обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon^2 \frac{d^2x}{dt^2} - q(t)\, x = 0, \qquad (1)$$

с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной. Для построения приближенных решений волнового

уравнения Шрёдингера в квантовой механике этот метод был введен в 1926 Л. Бриллюэном (L. Brillouin), Г. Вентцелем (G. Wentzel) и Х. Крамерсом (H. Kramers), а также Х. Джефрисом (H. Jeffreys) (подробный историч. очерк и библиографию см. в [5], [6]). Для ВКБ-м. используются и другие названия: «приближение Лиувилля — Грина», «метод фазового интеграла», «квазиклассическое приближение», а также любые комбинации из букв W, K, B (и J).

Пусть $I=[a,\ b]$, $q(t)\in\mathbb{C}^\infty(I)$ и $\operatorname{Re}\sqrt{q(t)}\geqslant 0$ при $t\in I$ или $q(t)<0$ при $t\in I$. Тогда существуют решения уравнения (1) такие, что при $\varepsilon\to+0$ равномерно по $t\in I$

$$x_j(t,\ \varepsilon)\approx w_j(t,\ \varepsilon)\,(1+\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k a_{kj}(t)),\quad j=1,\ 2,$$

причем

$$w_{1,\,2}(t,\ \varepsilon)=q^{-1/4}(t)\exp\left(\pm\varepsilon^{-1}\int_a^t\sqrt{q(\tau)}\,d\tau\right). \quad (2)$$

Главный член асимптотич. разложения (2) обычно наз. ВКБ-приближением.

Пусть $I=[0,\ +\infty)$, предыдущие условия на $q(t)$ выполнены и

$$\int_0^\infty\left(|q'(t)|^2\,|q(t)|^{-5/2}+|q''(t)|\,|q(t)|^{-3/2}\right)dt<\infty.$$

Тогда существуют решения уравнения (1) такие, что $x_j(t,\ \varepsilon)=w_j(t,\ \varepsilon)(1+\varepsilon\varphi_j(t,\ \varepsilon))$, $j=1,\ 2$, где $|\varphi_j(t,\ \varepsilon)|\leqslant C$ при $t\in I$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, если $\varepsilon_0>0$ достаточно мало, и $\varphi_j(t,\ \varepsilon)\to 0$ при $t\to+\infty$, $\varepsilon>0$.

Точка t_0 наз. точкой поворота уравнения (1), если $q(t_0)=0$. ВКБ-приближение непригодно в точках поворота. Были получены асимптотич. формулы, справедливые в окрестностях точек поворота (см. [1], [4]). Главный член асимптотики выражается через бесселевы функции.

В ряде задач (задача на собственные значения, задача о рассеянии) для уравнения (1) требуется знать асимптотику решений только на концах интервала, т. е. не нужно находить асимптотику в точках поворота. Если $q(t)$ — аналитич. функция, то можно, вообще говоря, продолжить ВКБ-формулы с одного конца интервала I на другой через комплексную плоскость $\mathbb{C}(t)$ (строгое обоснование дано в [2]). Для целых функций $q(t)$ оказывается, что ВКБ-приближение (2) пригодно в нек-рых областях комплексной плоскости $\mathbb{C}(t)$, ограниченных линиями Стокса (т. е. линиями уровня $\operatorname{Re}\int\sqrt{q(t)}\,dt=\text{const}$, проходящими через точки поворота). Получены асимптотич. формулы для фундаментальной системы решений уравнения (1), пригодные во всей комплексной плоскости, за исключением окрестностей точек поворота (см. [2]).

О ВКБ-приближении для уравнений с частными производными см. [5], [6], [8] — [10].

Лит.: [1] Вазов В., Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1968; [2] Евграфов М. А., Федорюк М. В., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, № 1, с. 3—50; [3] Федорюк М. В., Добавление к книге В. Вазова [1], с. 406—33; [4] Дородницын А. А., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, № 6, с. 3—96; [5] Хединг Дж., Введение в метод фазовых интегралов (Метод ВКБ), пер. с англ., М., 1965; [6] Фрёман Н., Фрёман П. У., ВКБ-приближение, пер. с англ., М., 1967; [7] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 2 изд., М., 1963; [8] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; [9] его же, Операторные методы, М., 1973; [10] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976.

М. В. Федорюк.

ВКЛЮЧЕНИЕ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ — включение *суммируемости полей*, соответствующих этим методам. Если A и B — два метода суммирования, определенные на множестве M рядов (или последова-

тельностей), A^* и B^* — их поля суммируемости и $A^* \subset B^*$, то говорят, что метод B в к л ю ч а е т метод A и обозначают символом $A \subset B$. Методы A и B наз. р а в н о с и л ь н ы м и и обозначают $A=B$, если каждый из них включает другой. Равносильные методы имеют одно и то же поле суммируемости. Метод B с и л ь н е е метода A, если B включает A, но не равносилен ему. Если поле суммируемости метода совпадает с множеством всех сходящихся рядов, то метод наз. р а в н о с и л ь н ы м с х о д и м о с т и. Иногда рассматривают В. м. с. не на всем множестве их определения, а лишь на некотором его подмножестве.

Для *Чезаро методов суммирования* (C, k) имеет место включение $(C, k_1) \subset (C, k_2)$ при $k_2 \geqslant k_1 > -1$, *Абеля метод суммирования* сильнее всей совокупности методов Чезаро (C, k) при $k > -1$, *Рисса метод суммирования* (R, n, k) равносилен Чезаро методу суммирования (C, k) $(k \geqslant 0)$, Абеля метод суммирования равносилен сходимости на множестве рядов, члены к-рых a_n удовлетворяют условию $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. В приведенных примерах методы суммирования являются одновременно и совместными (см. *Совместность методов суммирования*), хотя в общем в случае В. м. с. не предполагает их совместности. Однако, если A и B — регулярные матричные методы и $A \subset B$ на множестве ограниченных последовательностей, то A и B совместны на этом множестве (т е о р е м а М а з у р а — О р л и ч а — Б р у д н о). В литературных источниках иногда требование совместности методов налагают при самом определении включения.

В. м. с., определенных на множестве рядов с действительными членами, наз. п о л н ы м, если включение полей суммируемости сохраняется и при пополнении их рядами, суммируемыми к $+\infty$ и $-\infty$. Напр., *Гёльдера метод суммирования* (H, k) вполне включает метод Чезаро (C, k).

В. м. с. для специальных видов суммируемости (напр., для абсолютной суммируемости, сильной суммируемости и др.) определяется аналогичным образом.

Лит.: [1] Х а р д и Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] К у к Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] К а н Г. Ф., Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70; [4] M a z u r S., O r l i c z W., «C. r. Acad. sci.», 1933, t. 196, p. 32—4; [5] Б р у д н о А. Л., «Матем. сб.», 1945, т. 16, с. 191—247; [6] Б а р о н С., Введение в теорию суммируемости рядов, Тарту, 1966.

И. И. Волков.

ВКЛЮЧЕНИЯ И ИСКЛЮЧЕНИЯ ПРИНЦИП — метод подсчета числа $N(a_1' a_2' \dots a_r')$ объектов, не обладающих ни одним из данных свойств $a_1, a_2, \dots, a_r$, по следующей формуле:

$$N(a_1' a_2' \dots a_r') = N - \sum_{i=1}^{r} N(a_i) +$$

$$+ \sum_{i,\, j=1,\, i<j}^{r} N(a_i a_j) - \dots + (-1)^r N(a_1 a_2 \dots a_r), \quad (1)$$

где a_i' означает отсутствие свойства a_i, N — число всех объектов, $N(a_i)$ — число объектов, обладающих свойством a_i, $N(a_i a_j)$ — число объектов, обладающих одновременно свойствами a_i и a_j, и т. д. (см., напр., [3]). Из В. и и. п. вытекает формула для подсчета числа объектов, обладающих точно m свойствами из $a_1, a_2, \dots, a_r$, $m=0, 1, \dots, r$:

$$e_m = \sum_{i=0}^{r-m} (-1)^i \binom{m+i}{i} s_{m+i}, \quad (2)$$

где $s_0 = N$, $s_k = \sum N(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k})$, причем здесь суммирование производится по всем k-наборам $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ таким, что $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k$, $k=1, \dots, r$, т. е.

$$s_1 = \sum_i N(a_i), \quad s_2 = \sum_{i,j,\, i \neq j} N(a_i a_j), \dots, s_r = N(a_1 a_2 \dots a_r).$$

Иногда метод подсчета e_m по формуле (2) также наз. В. и и. п. Этот принцип находит применение при

решении комбинаторных и теоретико-числовых задач (см., напр., [1]). Так, если дано натуральное число a и натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_N$ такие, что $(a_i, a_j)=1$ при $i \neq j$, то число целых чисел k таких, что $0<k \leqslant n$ и не делящихся на a_i, $i=1, 2, \ldots, N$, равно по (1):

$$n-\sum_{1 \leqslant i \leqslant N}\left[\frac{n}{a_i}\right]+\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant N}\left[\frac{n}{a_i a_j}\right]- \\ -\ldots+(-1)^N\left[\frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_N}\right].$$

При помощи В. и п. п. решается также задача о беспорядках (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [2] Райзер Г. Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [3] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963. *С. А. Рукова.*

ВЛАДИМИРОВА ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП — вариационный принцип для стационарного односкоростного однородного уравнения переноса

$$(\bar{\Omega}, \nabla\psi)+\Sigma(x)\psi= \\ =\lambda\int_{|\bar{\Omega}'|=1}\theta(x, \mu_0)\,\psi(\bar{\Omega}', x)\,d\bar{\Omega}'; \quad \mu_0=(\bar{\Omega}', \bar{\Omega}), \quad (1)$$

с граничным условием

$$\psi|_{x \in \Gamma}=0, \quad (\bar{\Omega}, \bar{n})<0, \quad (2)$$

где Γ — граница выпуклой ограниченной области G. При условии, что индикатриса рассеяния $\theta(x, \mu_0)$ есть четная функция от μ_0, переход к новой неизвестной функции

$$u=[\psi(\bar{\Omega}, x)+\psi(-\bar{\Omega}, x)]/2$$

приводит задачу (1), (2) к самосопряженной форме. В полученной задаче В. в. п. для наименьшего собственного значения λ_1 состоит в том, что λ_1 есть минимум функционала

$$\int_{|\bar{\Omega}|=1}\int_{\Gamma}|(\bar{\Omega}, \bar{n})|\,u^2(\bar{\Omega}, x)\,d\bar{\Omega}\,dS_x+ \\ +\int_{|\bar{\Omega}|=1}\int_G\frac{1}{\Sigma(x)}(\bar{\Omega}, \nabla u)^2\,dx\,d\bar{\Omega}+ \\ +\int_{|\bar{\Omega}|=1}\int_G\Sigma(x)\,u^2(\bar{\Omega}, x)\,dx\,d\bar{\Omega}$$

на множестве функций $u(\bar{\Omega}, x)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{|\bar{\Omega}|=1}\int_{|\bar{\Omega}'|=1}\int\theta(x, \mu_0)\,u(\bar{\Omega}', x)\,dx\,d\bar{\Omega}'\,d\bar{\Omega}=1.$$

Соответствующая (неотрицательная) собственная функция реализует минимум функционала [3]. В этом вариационном принципе соответствующие граничные условия являются естественными. Аналогично формулируются вариационные принципы для высших собственных значений и для неоднородной задачи.

В. в. п. впервые получен В. С. Владимировым [1]. Из В.в.п. были выведены наилучшие граничные условия в методе сферических гармоник. В. в. п., в комбинации с конечно разностными методами, широко используется в численных расчетах задач нейтронной физики.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Математические задачи односкоростной теории переноса частиц, М., 1961; [2] Марчук Г. И., Методы расчета ядерных реакторов, М., 1961; [3] Дэвисон Б., Теория переноса нейтронов, пер. с англ., М., 1960. *Ю. Н. Дрожжинов.*

ВЛАДИМИРОВА МЕТОД — один из наиболее точных численных методов решения кинетич. уравнения переноса нейтронов в ядерных реакторах, основанный на интегрировании вдоль характеристик. Предложен в 1952 В. С. Владимировым для решения интегродифференциальных кинетич. уравнений в случае сферически симметричных реакторов. Идея В. м. может быть изложена на примере задачи о расчете подкритического реактора с источником нейтронов. Для одномерной сфе-

рически симметричной геометрии в односкоростном случае кинетич. уравнение для потока нейтронов $\varphi(r, \mu)$ (где r — радиус, $0 \leqslant r \leqslant R$, μ — косинус угла между вектором скорости нейтрона и радиусом) имеет вид

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \Sigma(r)\varphi = \frac{\Sigma_s(r)}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi(r, \mu')\, d\mu' + f(r) \quad (1)$$

с граничным условием

$$\varphi(R, \mu) = 0 \text{ для } \mu \leqslant 0, \quad (2)$$

означающим, что на внешнюю границу $r=R$ системы снаружи ($\mu \leqslant 0$) нейтроны не падают, причем $\Sigma(r)$, $\Sigma_s(r)$, $f(r)$ — заданные кусочно непрерывные функции от r. Замена

$$x = r\mu; \quad y = r\sqrt{1-\mu^2} \quad (3)$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \Sigma\psi(x, y) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi\, d\mu + f, \quad (4)$$

где $\psi(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2};\ \cos \operatorname{arc\,tg} y/x)$. Это уравнение легко решается как обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка и

$$\psi(x, y) = \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{x} \left[\frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi\, d\mu + f\right] e^{-\int_{x'}^{x} \Sigma\, dx''} dx'. \quad (5)$$

Для каждой характеристики $y=y_i$ дифференциальной части кинетич. уравнения (1) выбирается своя система узлов $x_{ki} = \sqrt{r_k^2 - y_i^2}$, где r_k — выбранная сетка по радиусу. Решение уравнения (5) проводится методом последовательных приближений, начиная с заданного начального приближения функции:

$$Q(r) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi\, d\mu + f. \quad (6)$$

При этом

$$\varphi(r_k, \mu_{ki}) = \psi(x_{ki}, y_i)$$

(где $\mu_{ki} = x_{ki}/r_k$) легко найти при помощи (5) во всех узлах сетки после того, как интегралы в (5) будут заменены суммами и будет получено выражение, связывающее значения φ и Q в двух соседних точках на характеристике. Чтобы получить значение $Q(r)$ в следующем приближении, необходимо вычислить $\int_{-1}^{+1} \varphi d\mu$, что делается с помощью квадратурной формулы, использующей точки окружности $x^2+y^2=r_k^2$. Скорость сходимости последовательных приближений определяется размерами и физич. характеристиками реактора.

Задача на собственные значения (определение критич. параметров реактора) решается аналогично.

В. м. обобщается на многоскоростные и многомерные задачи и легко программируется для ЭВМ. В отличие от *Карлсона метода*, В. м. использует переменную сетку по μ для разных r, что позволяет увеличивать точность расчета на границе реактора с вакуумом (вблизи $r=R$) по сравнению с областями вблизи $r=0$, где поток нейтронов близок к изотропному.

Лит.: [1] Марчук Г. И., Методы расчета ядерных реакторов, М., 1961.

В. А. Чуянов.

ВЛАСОВА КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — кинетическое уравнение для заряженных частиц, в к-ром взаимодействие между частицами описывается через самосогласованное электромагнитное поле. В. к. у. имеет вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \boldsymbol{v}\,\mathrm{grad}_r f_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}]\right)\mathrm{grad}_v f_\alpha = 0, \quad (1)$$

где $f_\alpha(t, r, v)$ — функция распределения, а индекс α означает сорт частиц. Самосогласованное электромагнитное поле $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ определяется из уравнений Максвелла:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j},\ \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

в к-рых плотности зарядов и токов вычисляются через функции распределения:

$$\left.\begin{aligned} \rho(t, r) &= \sum\nolimits_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(t, r, v)\, d^3v, \\ \boldsymbol{j}(t, r) &= \sum\nolimits_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(t, r, v)\, v\, d^3v. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

В. к. у. может быть получено из *Лиувилля уравнения* для функции распределения всех частиц данного сорта α, если пренебречь корреляциями частиц и предположить, что многочастичная функция распределения есть произведение одночастичных функций распределения.

Система уравнений (1) — (3), предложенная А. А. Власовым [1], широко используется в физике плазмы. Наиболее разработана линейная теория, основанная на линеаризации уравнений (1) — (3). Она применяется для исследования малых колебаний и устойчивости плазмы [5]. Интенсивно развивается квазилинейная теория, позволяющая рассматривать нелинейные эффекты.

Лит.: [1] Власов А. А., «Ж. экспер. и теор. физики», 1938, т. 8, вып. 3, с. 291; [2] его же, Теория многих частиц, М.—Л., 1950; [3] Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, М.—Л., 1946; [4] Силин В. П., Введение в кинетическую теорию газов, М., 1971; [5] Силин В. П., Рухадзе А. А., Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, М., 1961.

Д. П. Костомаров.

ВЛИЯНИЯ ОБЛАСТЬ точки M (множества A точек M) — множество $B(M)$ (соответственно $B(A)$) всех тех точек, в к-рых решение дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений изменяется при изменении его в точке M (соответственно A). В простейших случаях линейных дифференциальных уравнений с частными производными В. о. не зависит от решения; для большинства нелинейных задач В. о. зависит как от самого решения, так и от характера возмущений. В этом случае рассматриваются бесконечно малые возмущения. Для гиперболических уравнений В. о. точки M есть внутренность характеристического коноида (см. *Характеристическое многообразие*), проведенного через точку M; для уравнений параболических и эллиптических типов В. о. точки M, как правило, есть область определения решения.

Б. Л. Рождественский.

ВЛОЖЕНИЕ КАТЕГОРИЙ — ковариантный *функтор* F из категории C в категорию C', инъективный на классе морфизмов категории C.

ВЛОЖЕНИЕ КОЛЬЦА — мономорфизм кольца в некоторое другое кольцо; кольцо R вкладывается в кольцо L, если R изоморфно подкольцу кольца L. Наиболее подробно изучались условия вложения ассоциативного кольца в (ассоциативное) тело и произвольного кольца в кольцо с делением. Начало этим исследованиям положила работа А. И. Мальцева [1], в которой был построен пример ассоциативного кольца без делителей нуля, не вложимого в тело. Долгое время оставалась открытой следующая проблема Мальцева: будет ли вложимо в тело каждое ассоциативное кольцо без делителей нуля, полугруппа ненулевых элементов к-рого вложима в группу? Эта проблема была решена отрицательно в 1966 (см. [2], с. 354). Квадратная матрица A порядка $n \times n$ над ассоциатив-

ным кольцом R наз. неполной, если она представима в виде $A=BC$, где B, C — матрицы порядков $n\times r$ и $r\times n$ соответственно и $r<n$. Пусть

$$A=(a, a_2, \ldots, a_n),\ B=(b, a_2, \ldots, a_n)$$

— квадратные матрицы порядка $n\times n$ над R, у к-рых совпадают все столбцы, кроме, возможно, первого. Тогда матрица

$$C=(a+b, a_2, \ldots, a_n)$$

наз. детерминантной суммой матриц A и B относительно первого столбца. Аналогично определяется детерминантная сумма квадратных матриц одинаковых порядков относительно произвольного столбца (строки). Ассоциативное кольцо R с 1 вложимо в тело тогда и только тогда, когда оно не имеет делителей нуля и никакая скалярная матрица aE с ненулевым элементом a по диагонали не может быть представлена в виде детерминантной суммы конечного числа неполных матриц ([2], с. 349). Класс ассоциативных колец, вложимых в тела, не является конечно аксиоматизируемым (т. е. его нельзя задать конечным числом аксиом) [3]. Известен ряд достаточных условий вложения ассоциативного кольца в тело. Наиболее важными из них являются следующие. Пусть R — ассоциативное кольцо без делителей нуля, полугруппа ненулевых элементов к-рого удовлетворяет условию Оре (см. *Вложение полугруппы*). Тогда кольцо R вложимо в тело ([4], с. 293). Групповая алгебра упорядоченной группы вложима в тело (теорема Мальцева — Неймана, см. [4], с. 294). Произвольная область свободных правых (левых) идеалов (см. *Ассоциативные кольца и алгебры*) вложима в тело ([2], с. 351).

Кольцо R вложимо в кольцо с делением тогда и только тогда, когда оно не содержит делителей нуля. Пусть R, L — кольца, ∞ — символ, $\infty\notin L$. Отображение φ: $R\to\{L, \infty\}$ наз. T-гомоморфизмом; если: 1) множество $\varphi^{-1}(L)$ есть кольцо и отображение φ на этом множестве есть кольцевой гомоморфизм; 2) из $\varphi(ab)\neq\infty$, $\varphi(a)=\infty$ следует $\varphi(b)=0$; 3) из $\varphi(ab)\neq\infty$, $\varphi(b)=\infty$ следует $\varphi(a)=0$. T-гомоморфизм поля есть не что иное, как специализация (или точка) поля. Кольцо с делением L наз. свободным T-расширением кольца R, если: L содержит R и порождается (как кольцо с делением) кольцом R, а любой T-гомоморфизм кольца R в некоторое кольцо с делением S можно продолжить до T-гомоморфизма L в S. Каждое кольцо без делителей нуля обладает свободным T-расширением ([4], с. 301).

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Math. Ann.», 1937, Bd 113, S. 686—691; [2] Кон П. М., Свободные кольца и их связи, пер. с англ., М., 1975; [3] Cohn P. M., «Bull. Lond. Math. Soc.», 1974, v. 6, p. 147—148; [4] Кон П. М., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968. *Л. А. Бокуть.*

ВЛОЖЕНИЕ ПОЛУГРУППЫ в группу — мономорфизм полугруппы в группу. Полугруппа S вкладывается в группу G, если S изоморфна подполугруппе группы G. Необходимые и достаточные условия В. п. в группу были найдены А. И. Мальцевым [1] (см. также [3], с. 286). Эти условия представляют собой бесконечную систему условных тождеств (*квазитождеств*), среди к-рых, в частности, имеются следующие:

$$ap=aq\to p=q,\ pa=qa\to p=q$$

(законы сокращения);

$$ap=bq,\ ar=bs,\ cp=dq\to cr=ds,$$

где a, b, c, d, p, q, r, s — элементы полугруппы. Класс полугрупп, вложимых в группы, нельзя охарактеризовать конечным числом условных тождеств [2]. Известен ряд достаточных условий В. п. в группу. Наиболее важными из них являются следующие. Если S — полугруппа с сокращением и для любых элементов a, b полугруппы S найдутся элементы x, $y\in S$ та-

кие, что $ax=by$ (условие Оре), то полугруппа S вложима в группу. Если S — полугруппа с сокращением, в к-рой из равенства $ab=cd$ всегда следует, что либо $a=cx$, либо $c=ax$ для нек-рого элемента $x\in S$, то полугруппа S вложима в группу [4]. Известны достаточные условия В. п., сформулированные на языке теории графов (см., напр., [5]).

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Матем. сб.», 1939, т. 6 (48), с. 331—36; [2] его же, там же, 1940, т. 8(50), с. 251—64; [3] Кон П. М., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [4] Doss R., «Bull. Sci. Math.», 1948, v. 72, p. 139—150; [5] Адян С. И., Труды матем. ин-та АН СССР, 1966, т. 85, с. 1—123.

Л. А. Бокутъ.

ВЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ — теоретико-множественное включение $V\subset W$ линейного нормированного пространства V в линейное нормированное (полунормированное) пространство W, при к-ром для любого $x\in V$ справедливо неравенство

$$\| x \|_W \leqslant C \| x \|_V$$

с постоянной C, не зависящей от $x\in V$. При этом $\|x\|_W$ — есть норма (полунорма) элемента x в пространстве W, а $\|x\|_V$ — норма (полунорма) элемента x в V.

Тождественный оператор, действующий из пространства V в пространство W и ставящий в соответствие элементу $x\in V$ тот же элемент как элемент пространства W, наз. оператором вложения пространства V в пространство W. Оператор вложения всегда ограничен. Если оператор вложения есть *вполне непрерывный оператор*, то В. ф. п. наз. компактным. Факт В. ф. п. устанавливается *вложения теоремами*.

Пример. Пусть E — измеримое по Лебегу множество в n-мерном евклидовом пространстве с конечной мерой mes E и пусть $L_p(E)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, есть пространство Лебега измеримых функций, суммируемых по E в степени p, с нормой

$$\| x \|_p = \left[\int_E | x(t) |^p \, dt \right]^{1/p}.$$

Тогда при $p\geqslant q$ справедливо В. ф. п. $L_p(E)\to L_q(E)$ и

$$\| x \|_q \leqslant (\text{mes } E)^{1/q-1/p} \| x \|_p.$$

Л. П. Купцов.

ВЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ — теоремы, относящиеся к циклу вопросов, посвященных изучению неравенств между нормами одной и той же функции, принадлежащей к разным классам (нормированным пространствам). Обычно речь идет о двух классах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}$ есть часть $\mathfrak{M}_1$ ($\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}_1$), и при этом выполняется неравенство

$$\|f\|_{\mathfrak{M}_1} \leqslant C\|f\|_{\mathfrak{M}}$$

для всех $f\in\mathfrak{M}$, где C — константа, не зависящая от f, а $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}_1}$ — нормы соответственно в $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$. При указанных условиях говорят, что имеет место вложение $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}_1$ или, что $\mathfrak{M}$ вкладывается в $\mathfrak{M}_1$, и пишут $\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}_1$. Исследования, связанные с В. т., составляют раздел теории функций, но главные направления в них развиваются под влиянием краевых задач математической физики, в частности прямых вариационных методов. В связи с этим в течение последних трех десятилетий создана стройная теория вложений классов дифференцируемых функций многих переменных.

К числу задач, решаемых В. т., относятся, напр., следующие. Пусть известно, что функция f имеет частные производные порядка l, вообще говоря, обобщенные (см. *Обобщенная производная*), интегрируемые в p-й степени на данной области Ω n-мерного пространства R_n. Спрашивается: 1) какое гарантированное число непрерывных производных имеет эта функция на Ω? 2) если область Ω имеет достаточно гладкую границу Γ, то можно ли в том или ином смысле определить след $\varphi(x)$ функции f в точках $x\in\Gamma$, т. е. предельные значения $f(u)$, когда u приближается к x, и какими га-

рантированными дифференциальными свойствами обладает этот след? При этом часто надо знать эти свойства настолько точно, чтобы наличие таковых у функции φ, заданной на Γ, влекло возможность продолжения φ с Γ на Ω так, чтобы продолженная функция имела на Ω обобщенные производные порядка l, интегрируемые в p-й степени. Из фактов, приводимых ниже, будет видно, что указанные пределы (понимаемые в смысле сходимости почти всюду) определения следа φ функции f и продолжения φ могут сопровождаться неравенствами между нормами f на Ω и Γ, к-рые и применяются в теории краевых задач.

Многомерная теория вложений классов дифференцируемых функций возникла в 30-х гг. 20 в. в работах С. Л. Соболева в связи с решением задач математич. физики. Ему принадлежат основные В. т. для классов $W_p^l(\Omega)$ (*Соболева пространств*), играющих важную роль в анализе. Функция $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит $W_p^l(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $l=0, 1, \ldots$, если она определена на Ω и для нее конечна норма

$$\| f \|_{W_p^l(\Omega)} = \| f \|_{L_p(\Omega)} + \| f \|_{W_p^l(\Omega)}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \ l=0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \| f \|_{L_p(\Omega)} &= \left(\int_\Omega | f(x) |^p dx \right)^{1/p}, \\ \| f \|_{W_p^l(\Omega)} &= \sum_{|k|=l} \| D^k f \|_{L_p(\Omega)}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и сумма распространена на всевозможные (обобщенные по Соболеву) частные производные

$$D^k f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \tag{3}$$

$$k=(k_1, \ldots, k_n), \ |k| = \sum_{j=1}^n k_j,$$

порядка $|k|=l$.

Основная теорема С. Л. Соболева (с дополнениями В. И. Кондрашова и В. П. Ильина) для случая $\Omega=R_n$:

при условиях $1 \leqslant m \leqslant n$, $1<p<q<\infty$, $0 \leqslant k=l-n/p+m/q$ справедливо вложение

$$W_p^l(R_n) \longrightarrow W_q^{[k]}(R_m), \tag{4}$$

где $[k]$ — целая часть k.

При $m<n$ это означает, что функция $f \in W_p^l(R_n)$ имеет след (см. ниже) на любой координатной гиперплоскости R_m размерности m,

$$f|_{R_m} = \varphi \in W_q^{[k]}(R_m)$$

и

$$\| f \|_{W_q^{[k]}(R_m)} \leqslant C \| f \|_{W_p^l(R_n)},$$

где C не зависит от f (см. [6], [7]).

Функция f, заданная на R_n, имеет след на R_m, где R_m есть m-мерное (координатное) подпространство точек $x=(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0)$ с фиксированными $x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0$, если f можно видоизменить на нек-ром множестве n-мерной меры нуль так, чтобы для видоизмененной функции, к-рая снова обозначается через f, имело место

$$\| f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \|_{L_p(R_m)} \longrightarrow 0 \tag{5}$$

$$x_j \longrightarrow x_j^0 \quad (j=m+1, \ldots, n).$$

Если $\mathfrak{M}$ есть множество функций f, заданных на R_n, то задача описания свойств следов этих функций на подпространство $R_m (1 \leqslant m < n)$ наз. п р о б л е м о й с л е д о в для класса $\mathfrak{M}$.

Теорема (4) является окончательной в терминах классов $W_p^l(\Omega)$. Дальнейшее ее улучшение возможно лишь путем введения новых классов.

В одномерном случае $n=m=1$, где проблема следов не возникает, теорема (4) принадлежит Г. Харди и Дж. Литлвуду (G. Hardy, J. Littlewood).

Следующим этапом в развитии этой теории являются теоремы вложения С. М. Никольского для обобщенных гёльдеровых классов (см. *Гёльдерово пространство*) (H-классов). Эти классы образуют шкалу с непрерывно меняющимися параметрами, характеризующими гладкость функций. Они анизотропны в том смысле, что принадлежащие к ним функции обладают, вообще говоря, разными дифференциальными свойствами по разным направлениям. Пусть Ω_η есть множество точек $x \in \Omega$, удаленных от границы Ω больше чем на $\eta > 0$, и пусть $r=(r_1, \ldots, r_n)$ — положительный вектор ($r_j > 0$; $j=1, \ldots, n$), $r_j = r_j^* + \alpha_j$, r_j^* — целое и $0 < \alpha_j \leqslant 1$.

Функция п р и н а д л е ж и т к л а с с у $f \in H_p^r(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, если $f \in L_p(\Omega)$ и для любого $j=1, \ldots, m$ существует обобщенная частная производная

$$D_j^{r_j^*} f = \frac{\partial^{r_j^*} f}{\partial x_j^{r_j^*}}, \tag{6}$$

удовлетворяющая неравенству

$$\left\| \Delta_{jh}^2 \left(D_j^{r_j^*} f \right) \right\|_{L_p(\Omega_{2;h})} \leqslant M \, |h|^{\alpha_j}, \tag{7}$$

где Δ_{jh}^2 — вторая разность функции по переменной x_j с шагом h и M — константа, не зависящая от h.

Класс $H_p^r(\Omega)$ образует банахово пространство, если ввести норму

$$\| f \|_{H_p^r(\Omega)} = \| f \|_{L_p(\Omega)} + M_f,$$

где M_f — наименьшая константа M, при к-рой выполняются неравенства (7). Для $r_1 = \ldots = r_n = r$ соответствующий (изотропный) класс обозначается через H_p^r. При целом l класс H_p^l близок к классу Соболева W_p^l с точностью до $\varepsilon > 0$ в том смысле, что

$$H_p^{l+\varepsilon}(R_n) \longrightarrow W_p^l(R_n) \longrightarrow H_p^{l-\varepsilon}(R_n). \tag{8}$$

Справедливы теоремы вложения (С. М. Никольский)

$$H_p^r(R_n) \longrightarrow H_q^\rho(R_m), \tag{9}$$

где $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m)$,

$$\rho_j = \varkappa r_j \quad (j=1, \ldots, m),$$

$$\varkappa = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \sum_{j=1}^m \frac{1}{r_j} - \frac{1}{p} \sum_{j=m+1}^n \frac{1}{r_j} > 0;$$

$$H_p^r(R_n) \rightleftarrows H_p^\rho(R_m), \tag{10}$$

где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant m < n$, $\rho_j = \varkappa r_j$, $j=1, \ldots, m$,

$$\varkappa = 1 - \frac{1}{p} \sum_{j=m+1}^n \frac{1}{r_j} > 0$$

(см. [5]).

Теорема (9) является анизотропным аналогом теоремы (4), но имеет то преимущество, что верхние (векторные) индексы r, ρ фигурирующих в ней классов могут изменяться непрерывно. Кроме того, она полностью охватывает случаи $p=1$, ∞. Однако при $\varkappa = 0$ она, в отличие от (4), неверна. В одном случае ($n=m=1$) при r и ρ не целых она доказана Г. Харди и Дж. Литлвудом.

Частный случай теоремы (9) при $p=q$ записан еще раз в виде вложения (10) с верхней стрелкой. Оно гласит: функция $f\in H_p^r(R_n)$ имеет след $f|_{R_m}=\varphi$ на R_m и при этом

$$\|\varphi\|_{H_p^{\rho}(R_m)}\leqslant C\,\|f\|_{H_p^r(R_n)}, \tag{11}$$

где C не зависит от f. Но справедливо и обратное утверждение, выражаемое нижней стрелкой, к-рое надо понимать в следующем смысле: каждая определенная на R_m функция $\varphi\in H_p^{\rho}(R_m)$ может быть продолжена на все пространство R_n так, что полученная функция $f(x)$ (со следом на R_m, равным φ) принадлежит к $H_p^r(R_n)$ и выполняется неравенство (обратное к (11)):

$$\|f\|_{H_p^r(R_n)}\leqslant C_1\,\|\varphi\|_{H_p^{\rho}(R_m)},$$

где C_1 не зависит от φ.

Взаимно обратные вложения (10) полностью решают проблему следов для H-классов и при этом в терминах H-классов.

Теорема (9) носит транзитивный характер, заключающийся в том, что переход

$$H_p^r(R_n)\longrightarrow H_{p'}^{\rho'}(R_m)\longrightarrow H_{p''}^{\rho''}(R_{m''}) \tag{12}$$

от первого класса в цепи (12) ко второму, а затем от второго к третьему, где параметры $\boldsymbol{\rho}'$, $\boldsymbol{\rho}''$ вычисляются по указанным в (9) формулам, может быть заменен одним переходом от первого класса к третьему при непосредственном вычислении $\boldsymbol{\rho}''$ по тем же формулам.

В дальнейшем (см. далее [14]) была решена проблема следов для W-классов, вообще анизотропных. Это привело к введению нового семейства классов дифференцируемых функций многих переменных $B_{p\theta}^r(R_n)$, зависящих от векторного параметра $\boldsymbol{r}$ и двух скалярных параметров p, θ, удовлетворяющих неравенствам $1\leqslant p,\ \theta\leqslant\infty$. Во всей полноте это семейство определил О. В. Бесов, изучивший также его основные свойства.

Функция f принадлежит классу $W_p^{\boldsymbol{l}}(\Omega)$, где $\boldsymbol{l}=(l_1,\ldots,l_n)$ — целый вектор, если для нее имеет смысл конечная норма

$$\|f\|_{W_p^{\boldsymbol{l}}(\Omega)}=\|f\|_{L_p(\Omega)}+\|f\|_{w_p^{\boldsymbol{l}}(\Omega)}, \tag{13}$$

$$\|f\|_{w_p^{\boldsymbol{l}}(\Omega)}=\sum_{j=1}^n\|D_j^{l_j}f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Функция f принадлежит классу $B_{p\theta}^r(\Omega)$, где $\boldsymbol{r}=(r_1,\ldots,r_n)$ — произвольный, не обязательно целый вектор, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $1\leqslant\theta<\infty$, $r_j>0$, если для нее конечна норма

$$\|f\|_{B_p^r(\Omega)}=\|f\|_{L_p(\Omega)}+\|f\|_{b_p^r(\Omega)},$$

$$\|f\|_{b_p^r(\Omega)}=$$

$$=\sum_{j=1}^n\left\{\int_0^{\infty}t^{-\theta\alpha_j-1}\left\|\Delta_{jt}^2 f\binom{r_j^*}{x_j}\right\|_{L_p(\Omega_{2t})}^{\theta}dt\right\}^{1/\theta},$$

где числа r_j^* и α_j определены выше.

Естественно считать, что класс $B_{p\theta}^r$ при $\theta=\infty$ совпадает с классом $H_p^r(B_{p\infty}^r=H_p^r)$. Обычно пишут еще $B_{p}^r\theta$ вместо $B_{p\theta}^r$, когда $r_1=\ldots=r_n=r$ и $B_p^r=B_{pp}^r$, $B_p^r=B_{pp}^r$. Для любых указанных p, θ, $\boldsymbol{r}$ классы $B_{p\theta}^r$ суть банаховы пространства.

Теоремы вложения (9), (10) верны, если в них заменить H на B. Имеют место также взаимно обратные вложения

$$W_p^r(R_n)\rightleftarrows B_p^{\times r\cdot m}(R_m), \tag{14}$$

где $\boldsymbol{r}$ — целое, $1<p<\infty$, $\boldsymbol{r}^m=(r_1, \ldots, r_m, 0, \ldots, 0)$, $\varkappa=1-\frac{1}{p}\sum_{j=m+1}^{n}\frac{1}{r_j}>0$, полностью решающие проблему следов для W-классов, что не мешает выполняться взаимно обратным вложениям, выраженным полностью на языке B-классов:

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p\theta}(R_n) \rightleftarrows B^{\varkappa, \boldsymbol{r}^m}_{p\theta}(R_m). \tag{15}$$

Классы $B^{\boldsymbol{r}}_{2}$, соответствующие значениям параметров $p=\theta=2$, принято еще обозначать через $W^{\boldsymbol{r}}_{2}(B^{\boldsymbol{r}}_{2}=W^{\boldsymbol{r}}_{2})$. При $p=2$ вложения (14) записываются еще и так

$$W^{\boldsymbol{r}}_{2}(R_n) \rightleftarrows W_2^{\varkappa, \boldsymbol{r}^m}(R_m). \tag{16}$$

Естественными продолжениями W-классов являются классы, в определении к-рых фигурирует понятие дробной производной по Лиувиллю (см. *Дробное интегрирование и дифференцирование*).

Употребляя терминологию обобщенных функций, можно задать основной класс Λ функций так, что построенный над ним класс Λ' обобщенных функций будет обладать следующими свойствами: 1) $L_p(R_n)\subset\Lambda'$ при любом конечном $p\geqslant 0$; 2) при любом $l>0$, не обязательно целом, имеет смысл операция

$$D^l_j f = \widehat{(x_j^l \hat{f})}, \ f\in\Lambda', \tag{17}$$

где $\tilde{\psi}$, $\hat{\psi}$ означают соответственно прямое и обратное *Фурье преобразование* $\psi\in\Lambda'$; 3) если l — целое и функция $f\in L_p(R_n)$ имеет обобщенную по Соболеву производную $D^l_j f\in L_p(R_n)$, то для нее имеет место равенство (17).

При дробных l на бесконечно дифференцируемых финитных функциях операция (17) совпадает с операцией дробного дифференцирования по Лиувиллю. Естественно называть $D^l_j f$ при нецелом l д р о б н о й п р о и з в о д н о й от f порядка l по x_j.

Если теперь задан произвольный вектор $\boldsymbol{l}=(l_1, \ldots, l_n)$, то можно ввести пространство $L^{\boldsymbol{l}}_p(R_n)$, $1\leqslant p<\infty$, совпадающее с $W^{\boldsymbol{l}}_p(R_n)$ при целых $\boldsymbol{l}$, заменив в (13) W на L.

Если $l=l_1=\ldots=l_n$, то положим $L^l_p=L^{\boldsymbol{l}}_p$. Семейство классов $L^{\boldsymbol{l}}_p(R_n)$, $\boldsymbol{l}>0$, $1\leqslant p<\infty$, может рассматриваться как естественное расширение семейства $W^{\boldsymbol{l}}_p(R_n)$ на дробное $\boldsymbol{l}$, «естественное» потому, что с точки зрения интересующего нас круга идей классы $L^{\boldsymbol{l}}_p$ обладают «всеми достоинствами и недостатками классов $W^{\boldsymbol{l}}_p$». Если в формуле (4) (где $[k]$ можно заменить на k), или (8) (где l может быть дробным), или в (14), (16) (где $\boldsymbol{r}$ может быть дробным) заменить W на L, то они останутся верными. Верной также останется формула (9), если в ней заменить H на L даже при более широком условии $\varkappa\geqslant 0$, однако в предположении, что $1<p<q<\infty$.

В дальнейшем продолжается применение аппарата обобщенных функций, но теперь уже составляющих пространство S'. Для любого действительного числа ρ имеет смысл операция (Бесселя — Макдональда):

$$J_\rho f=\widehat{(1+|\boldsymbol{x}|^2)^{-\rho/2}\tilde{f}}, \ f\in S', \ |\boldsymbol{x}|^2=\sum_{j=1}^{n}x_j^2,$$

обладающая свойствами: $J_0 f=f$, $J_{r+\rho}=J_r J_\rho$, $J_{-2l}=(1-\Delta)^l$, $l=0, 1, \ldots$, где $\Delta=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа.

Изотропный класс $L^\rho_p=L^\rho_p(R_n)$, $1<p<\infty$, может быть определен еще как совокупность функций f, представимых в виде $f=J_\rho\varphi$, где функции φ пробегают

пространство $L_p=L_p(R_n)$ ($L_p^\rho=J_\rho(L_p)$), при этом, с точностью до эквивалентности,

$$\|f\|_{L_p^\rho}=\|\varphi\|_{L_p}.$$

Это определение класса L_p^ρ годится и для отрицательных ρ, но в этом случае L_p^ρ есть совокупность, вообще говоря, обобщенных функций ($L_p^\rho\subset S'$). В частности, $L_p^0=L_p$.

Операция J_ρ может служить средством и для определения классов $B_{p\theta}^r(B_{p\infty}^r=H_p^r)$. Именно, будем называть обобщенную функцию f регулярной в смысле L_p или принадлежащей к S_p', если найдется такое $\rho>0$, что $J_\rho f\in L_p$. Всякую функцию $f\in B_{p\theta}^r=B_{p\theta}^r(R_n)$, $1\leqslant\rho$, $\theta\leqslant\infty$, $B_{p\infty}^r=H_p^r$, можно определить как регулярную в смысле L_p функцию, представимую рядом

$$f(x)=\sum_{s=0}^{\infty}q_s(x),$$

слабо сходящимся к f (в смысле S'), где q_0 имеет *спектр* (носитель $\widetilde{q_0}$) в Δ_0, а q_s при $s\geqslant1$ имеет спектр в $\Delta_{s+1}\setminus\Delta_{s-1}$ и

$$\Delta_s=\{x;\ |x_j|\leqslant2^s;\ j=1,\ldots,n\},$$

и при этом

$$\|f\|_{B_{p\theta}^r}=\Big(\sum_{s=0}^{\infty}2^{s\theta r}\|q_s\|_{L_p}^{\theta}\Big)^{1/\theta}<\infty.$$

В частности,

$$\|f\|_{H_p^r}=\|f\|_{B_{p\infty}^r}=\sup_s(2^{sr}\|q_s\|_{L_p}).$$

Это определение класса $B_{p\theta}^r$ автоматически распространяется на случай $r\leqslant0$, и тогда функции f, входящие в эти классы, будут, вообще говоря, обобщенными ($f\in S'$). При этом $J_r(B_p^0)=B_p^r$, $-\infty<r<\infty$.

Существуют и другие эквивалентные определения отрицательных классов $B_{p\theta}^r$, основанные на принципе интерполяции функциональных пространств. Приведенное определение носит конструктивный характер — каждый заданный параметрами r, p, θ класс определяется независимо, при этом можно конструктивно определить линейные операции, при помощи к-рых по данной функции $f\in S_p'$ определяется функция q_s (экспоненциального типа 2^{s+1} при $s\geqslant1$ и типа 1 при $s=0$).

Справедлива теорема вложения:

$$\Lambda_p^r(R_n)\longrightarrow\Lambda_q^{r-(1/p-1/q)n}(R_n)$$

типа теоремы (4), но с $n=m$, верная при любом действительном r для $\Lambda=L$, $1<p<q<\infty$ или для $\Lambda=B$, $1\leqslant p<q<\infty$, $1\leqslant\theta<\infty$ или для $\Lambda=H$, $1\leqslant p<q\leqslant\infty$.

С другой стороны, при $r-(n-m)/p=0$ произвольная функция $f\in\Lambda_p^r(R_n)$, вообще говоря, не имеет следа на R_m ($m<n$), если не налагать на нее дополнительных условий.

Выше были сформулированы В. т. для классов функций, определенных на всем n-мерном пространстве R_n (см. [5]). Но для приложений важно иметь подобные теоремы для возможно общих областей $\Omega\subset R_n$. В настоящее время выяснена геометрич. структура областей Ω, для к-рых верны указанные теоремы вложения для W-, B- и H-классов, где надо заменить R_n, R_m соответственно на Ω, $R_m\cap\Omega$. Для изотропных классов $W_p^r(\Omega)$, $B_{p\theta}^r(\Omega)$ область Ω должна удовлетворять условию конуса или, что равносильно, граница ее должна удовлетворять локально условию Липшица. Для анизотропных же классов $W_p^{\mathbf{r}}(\Omega)$, $B_{p\theta}^{\mathbf{r}}(\Omega)$ область Ω должна удовлетворять условию $\mathbf{r}$-рога или изогнутого конуса (*конуса*

условие) и это условие является в известном смысле необходимым (см. [2]).

Для приложений важна еще проблема о следах на m-мерных многообразиях S_m.

Для изотропных классов W, H, B эта проблема решена полностью (см. [2], [16]), если S_m достаточно много раз дифференцируемо при $r=r_1=\ldots=r_n$, в (14), (15) и (16) можно заменить R_m на S_m, а в (19), кроме того, можно заменить H на B. В случае кусочно гладких S_m этот вопрос тоже в ряде случаев решен до конца ([16], [22]), условия, решающие проблему, выражаются, с одной стороны, указанными выше взаимно обратными вложениями на отдельных гладких кусках S_m, а с другой — специальными дополнительными условиями на поведение функций соответствующих классов на стыках этих гладких кусков. Существенно продвинута также проблема следов для анизотропных классов ([9], [21]). Здесь возникают особые затруднения характеристики следа в точках S_m, касательные плоскости к к-рым параллельны осям координат.

Остановимся еще на одной задаче. Пусть функция

$$f\in\Lambda_p^{\mathbf{r}}(R_n)=\Lambda_p^{\mathbf{r}},$$

где $\Lambda_p^{\mathbf{r}}$ означает один из рассмотренных выше классов. Спрашивается, какие она имеет частные смешанные производные $D^{\mathbf{k}}f$ и каковы их свойства? Положительный ответ на этот вопрос зависит от величины

$$\varkappa=1-\sum\nolimits_{j=1}^{m}\frac{k_j}{r_j}.$$

Именно, если $f\in\Lambda_p^{\mathbf{r}}$, то существует частная производная $D^{\mathbf{k}}f$, принадлежащая к пространству $\Lambda_p^{\varkappa\mathbf{r}}$ при условии, что $\varkappa>0$. В случае же пространств $L_p^{\mathbf{r}}$ это условие можно расширить, считая $\varkappa\geqslant 0$ (см. [5]).

Приведем еще характерную теорему, к-рую естественно назвать теоремой об ослабленной компактности и к-рая имеет применение в теории прямых методов вариационного исчисления.

Из бесконечного множества $\mathfrak{M}$ функций f, удовлетворяющих неравенству

$$\|f\|_{\Lambda_p^{\mathbf{r}}(R_n)}\leqslant K,$$

где K — заданная константа, а Λ — один из рассмотренных выше классов, можно выделить последовательность $\{f_m\}$ функций и указать такую функцию f_0 с нормой

$$\|f_0\|_{\Lambda_p^{\mathbf{r}}(R_n)}\leqslant K,$$

что какова бы ни была ограниченная область $G\subset R_n$ и вектор $\boldsymbol{\varepsilon}>0$

$$\|f_m-f_0\|_{\Lambda_p^{\mathbf{r}-\boldsymbol{\varepsilon}_{(G)}}}\longrightarrow 0,\quad m\longrightarrow\infty,$$

(см. [5]). В этой формулировке R_n может быть заменено на область Ω, если она имеет достаточно хорошую границу. Выше были рассмотрены только характерные классы функций и связанные с ними теоремы вложения, наиболее часто встречающиеся в приложениях. В современных исследованиях большое внимание [2] уделяется классам более общим, где роль исходных частных производных $D^{\mathbf{k}}f$, $D_j^{\rho}f$ играют более или менее произвольные дифференциальные операторы.

Изучаются еще так наз. весовые классы, характерным примером к-рых является класс $W_{p\alpha}^{r}(\Omega)$, определяемый следующим образом. Пусть $\rho(x)$ есть расстояние от точки x до границы Γ области $\Omega\subset R_n$. Функция f принадлежит к $W_{p\alpha}^{r}(\Omega)$, $r>0$, $1\leqslant p<\infty$, если для

нее конечна норма (см. [4], [12])

$$\|f\|_{W^r_{p\alpha}(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{\dot{W}^r_{p\alpha}(\Omega)},$$

где

$$\|f\|_{\dot{W}^r_{p\alpha}(\Omega)} = \sum_{|k|=r} \left\| \frac{D^k f}{\rho^\alpha} \right\|_{L_p(\Omega)}.$$

Приведем только один результат. Пусть Γ_m — достаточно гладкая граница m измерений; тогда

$$W^r_{p\alpha}(\Omega) \rightleftarrows H^{r+\alpha-(n-m)/p}_p(\Gamma),$$

если $r+\alpha-(n-m)/p>0$, $\alpha<(n-m)/p$, $1<p<\infty$.

Пример. Использование В. т. полностью решает вопрос об условиях на граничную функцию, при к-рых применим *Дирихле принцип*. Именно, понимая частные производные в обобщенном смысле и считая для простоты, что поверхность Г (граница трехмерной области) ограничена и дважды дифференцируема, задаем на Ω функцию $f_0 \in W^1_2(\Omega)$. Для нее *Дирихле интеграл* $D(f_0)<\infty$ и, кроме того, по В. т.

$$W^1_2(\Omega) \rightleftarrows W^{1/2}_2(\Gamma) = B^{1/2}_2(\Gamma)$$

f_0 имеет след на Г (факт существования следа у f_0 устанавливался при помощи более грубых В. т.). Обозначив через $\mathfrak{M}$ класс функций $f \in W^1_2(\Omega)$, имеющих тот же след на Г, что и f_0, $f|_\Gamma = f_0|_\Gamma = \varphi$, можно сформулировать принцип Дирихле следующим образом: минимум $D(f)$ среди функций $f \in \mathfrak{M}$ достигается для единственной функции и к тому же гармонической на Ω. Из приведенной В. т. следует, что принцип Дирихле применим тогда и только тогда, когда класс $\mathfrak{M}$ не пуст, т. е. когда граничная функция $\varphi \in B^{1/2}_2(\Gamma)$.

При обосновании принципа Дирихле сначала доказывается существование и единственность функции $u \in \mathfrak{M}$, а также тот факт, что u есть обобщенное решение задачи Дирихле, а затем при помощи специального метода последовательно устанавливается, что обобщенное решение принадлежит классам $W^l_2(\omega)$, где $l=2, 3, \ldots$, а $\omega \subset \Omega$ — произвольный замкнутый шар. В частности, из того факта, что $u \in W^4_2(\omega)$, на основании В. т.

$$W^4_2(\omega) \longrightarrow H^4_2(\omega) \longrightarrow H^{5/2}_\infty(\omega)$$

(см. [2] и [5]) при $n=m=3$, $p=2$, $q=\infty$, $r_1=r_2=r_3=4$) заключаем, что функцию u можно видоизменить на множестве трехмерной меры нуль так, чтобы полученная функция была дважды непрерывно дифференцируема на Ω. После этого легко доказывается, что u — гармоническая.

Приведенный пример может быть значительно обобщен на нек-рые функционалы, в к-рые входят частные производные разных порядков, возведенные в степень, вообще не равную 2 ($p \neq 2$), и тогда появляется необходимость применения В. т. для более общих классов, вообще говоря, анизотропных.

Лит.: [1] Сб. дифференциальные уравнения с частными производными, М., 1970, с. 38—63; [2] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М., Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., 1974; [3] Буренков В. И., Теоремы вложения и продолжения для классов дифференцируемых функций многих переменных во всем пространстве, в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1965, М., 1966; [4] Никольский С. М., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 5,с. 63—114; [5] его же, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969; [6] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950; [7] его же, Введение в теорию кубатурных формул, М., 1974; [8] Бесов О. В., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 60, с. 42—81; [9] Бугров Я. С., «Сиб. матем. ж.», 1964, т. 5, № 5, с. 1007—26; [10] Ильин В. П., «Докл. АН СССР», 1954, т. 96, № 5, с. 905—8; [11] Кондрашов В. И., там же, 1945, т. 48, с. 563—6; [12] Кудрявцев Л. Д., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1959, т. 55, с. 1—182; [13] Лизоркин П. И., «Докл. АН СССР», 1960, т. 132, № 3, с. 514—17; [14] его же, «Матем. сб.»,

1963, т. 60, в. 3, с. 325—53; [15] Никольский С. М., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 244—78; [16] его же, «Матем. сб.», 1953, т. 33, в. 2, с. 261—326; 1957, т. 43, в. 7, с. 127—44; [17] Соболев С. Л., «Докл. АН СССР», 1935, т. 3, № 7, с. 291—4; [18] его же, «Матем. сб.», 1936, т. 1, в. 1, с. 39—72; 1938, т. 4, в. 3, с. 471—97; [19] Слободецкий Л. Н., «Докл. АН СССР», 1958, т. 118, в. 2, с. 243—6; [20] Успенский С. В., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 60, с. 282—303; [21] его же, «Докл. АН СССР», 1965, т. 164, № 4, с. 750—2; [22] Яковлев Г. Н., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 60, с. 325—49; [23] Gagliardo E., «Rend Semin. matem. in-ta di Padova», 1957, t. 27, p. 284—305; [24] Hardy G. H., Lilttlewood J. E., «Math. Z.», 1928, Bd 28, № 4, S. 612—34; [25] Lions J. L., Mageles E., Problemes aux limites non homogénes et applications, P., 1968, v. 1—2.

С. М. Никольский.

ВМОРОЖЕННОСТИ ИНТЕГРАЛ — интеграл уравнения индукции магнитного поля в предельном случае идеально проводящей среды. Физический смысл В. и. заключается в том, что при перемещении жидкости силовые линии магнитного поля перемещаются вместе с ее частицами.

При движении идеально проводящей среды напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$ описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{H}}{\rho}\right)=\left(\frac{\boldsymbol{H}}{\rho},\ \nabla\right)\boldsymbol{v},$$

где ρ — плотность, $\boldsymbol{v}$ — скорость среды, а изменение элемента длины $d\boldsymbol{l}$ силовой линии магнитного поля уравнением

$$\frac{d}{dt}\,d\boldsymbol{l}=(d\boldsymbol{l},\ \nabla)\,\boldsymbol{v}.$$

Векторы $\boldsymbol{H}$ и $d\boldsymbol{l}$ — коллинеарны:

$$\frac{\boldsymbol{H}}{\rho}=\mathrm{const}\cdot d\boldsymbol{l}.$$

Справедливо равенство, наз. интегралом вмороженности,

$$\frac{\boldsymbol{H}d\boldsymbol{l}_0}{\rho}=\frac{\boldsymbol{H}_0}{\rho_0}\,d\boldsymbol{l},$$

где индекс «0» относится к величинам в начальный момент времени.

Следствием В. и. является независимость от времени потока магнитного поля через любую поверхность, охватываемую контуром из жидких частиц.

Лит.: [1] Каулинг Т., Магнитная гидродинамика, пер. с англ., М., 1959; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, М., 1959; [3] Куликовский А. Г., Любимов Г. А., Магнитная гидродинамика, М., 1962.

А. П. Фаворский.

ВНЕШНЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ — основная операция *внешней алгебры* тензоров, определенных в n-мерном векторном пространстве V над полем K.

Пусть $e_1,\ldots,e_n$ — базис V, a и b — p- и q-формы:

$$a=a^{i_1\ldots i_p}e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_p},$$
$$b=b^{j_1\ldots j_q}e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{j_p}.$$

Внешнее произведение форм a и b есть $(p+q)$-форма c, получающаяся альтернацией тензорного произведения $a\otimes b$. Форма c обозначается $a\wedge b$; она имеет кососимметрические координаты

$$c^{k_1\ldots k_{p+q}}=\frac{1}{p!\,q!}\,\delta^{k_1,\ldots,\ldots,k_{p+q}}_{i_1\ldots i_p j_1\ldots j_q}\,a^{i_1\ldots i_p}b^{j_1\ldots j_q},$$

где $\delta^{k_1\ldots k_{p+q}}_{i_1\ldots j_q}$ — компоненты обобщенного *Кронекера символа*. Аналогично определяется В. п. ковариантных тензоров.

Основные свойства В. п.:

1) $(ka)\wedge b=a\wedge(kb)=k(a\wedge b)$, $k\in K$, — однородность,

2) $(a+b)\wedge c=a\wedge c+b\wedge c$ — дистрибутивность,

3) $(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$ — ассоциативность.

4) $a\wedge b=(-1)^{pq}b\wedge a$; если характеристика поля K отлична от двух, то для формы a нечетной валентности $a\wedge a=0$.

В. п. s векторов наз. р а з л о ж и м ы м s-в е к т о р о м. Каждый *поливектор* размерности s есть линейная комбинация разложимых s-векторов. Компоненты разложения являются $s\times s$-минорами $n\times s$-матрицы (a^i_j), $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant s$, коэффициентов векторов $a_1, \ldots, a_s$. При $s=n$ их В. п. имеет вид:

$$\alpha_n = a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_n = \det(a^i_j)\, e_1\wedge\ldots\wedge e_n.$$

Над полями характеристики, отличной от двух, равенство $a_1\wedge\ldots\wedge a_s=0$ необходимо и достаточно для линейной зависимости векторов $a_1, \ldots, a_s$. Ненулевой разложимый s-вектор α_s определяет в V s-мерное ориентированное подпространство A, параллельное векторам $a_1, \ldots, a_s$, и *параллелотоп*, лежащий в A и образованный векторами $a_1, \ldots, a_s$, выходящими из одной точки (этот параллелотоп обозначается через $[a_1, \ldots, a_s]$). Условия $a\in A$ и $\alpha_s\wedge a=0$ эквивалентны.

Лит. см. при статье *Внешняя алгебра*. *Л. П. Купцов.*

ВНЕШНИХ ФОРМ МЕТОД — см. *Картана метод внешних форм*.

ВНЕШНЯЯ АЛГЕБРА, а л г е б р а Г р а с с м а н а, векторного пространства V над полем k — ассоциативная алгебра над k, операция в к-рой обозначается знаком $\wedge$, порождающими элементами к-рой являются $1, e_1, \ldots, e_n$, где $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства V, а определяющие соотношения имеют вид

$$e_i\wedge e_j = -e_j\wedge e_i \ (i,\ j=1,\ \ldots,\ n),\ e_i\wedge e_i=0,$$
$$1\wedge e_i = e_i\wedge 1 = e_i \ (i=1,\ \ldots,\ n),\ 1\wedge 1=1.$$

В. а. не зависит от выбора базиса и обозначается $\wedge V$. Подпространство $\wedge^r V$ ($r=0,\ 1, \ldots$) в $\wedge V$, порожденное элементами вида $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_r}$, наз. r-й в н е ш н е й с т е п е н ь ю п р о с т р а н с т в а V. Имеют место равенства: $\dim\wedge^r V=C^r_n$, $r=0, \ldots, n$, $\wedge^r V=0$, $r>n$. Кроме того, $v\wedge u=(-1)^{rs}u\wedge v$, если $u\in\wedge^r V$, $v\in\wedge^s V$. Элементы пространства $\wedge^r V$ наз. r-в е к т о р а м и; их можно понимать также как кососимметрические r раз контравариантные тензоры в V (см. *Внешнее произведение*).

r-векторы тесно связаны с r-мерными подпространствами в V: линейно независимые системы векторов $x_1, \ldots, x_r$ и $y_1, \ldots, y_r$ из V порождают одно и то же подпространство тогда и только тогда, когда r-векторы $x_1\wedge\ldots\wedge x_r$ и $y_1\wedge\ldots\wedge y_r$ пропорциональны. Этот факт был одним из отправных пунктов в исследованиях Г. Грассмана [1], к-рый ввел В. а. как алгебраич. аппарат для описания порождения многомерных подпространств одномерными. С помощью В. а. легко строится теория определителей. В. а. может быть определена и для более общих объектов, а именно, для унитарных модулей M над коммутативным кольцом A с единицей (см. [4]). r-я внешняя степень $\wedge^r M$, $r>0$, модуля M определяется как фактормодуль r-й тензорной степени этого модуля по подмодулю, порожденному элементами вида $x_1\otimes\ldots\otimes x_r$, где $x_i\in M$ и $x_j=x_k$ для нек-рых $j\neq k$. В. а. для M определяется как прямая сумма $\wedge M=\bigoplus_{r\geqslant 0}\wedge^r M$, где $\wedge^0 M=A$, с естественно введенным умножением. В случае конечномерного векторного пространства это определение совпадает с первоначальным. В. а. модуля находит применение в теории модулей над кольцом главных идеалов (см. [5]).

Г р а с с м а н о в ы м и (или п л ю к к е р о в ы м и) к о о р д и н а т а м и r-мерного подпространства L в n-мерном пространстве V над k наз. координаты r-вектора в V, соответствующего L, к-рый определен с точностью до пропорциональности. С помощью грассмановых координат множество всех r-мерных подпространств в V естественным образом вкладывается в проективное пространство размерности C^r_n-1 и оказывается там алгебраич. многообразием (наз. *Грассмана многообразием*). Этот метод позволяет построить целый

ряд важны:
разий [6].

В форме исчисления внешних *дифференциальных форм* В. а. используется в качестве одного из основных формализмов в дифференциальной геометрии (см. [8], [7]). В терминах В. а. формулируются многие важные результаты алгебраич. топологии.

Например, если G — конечномерное H-пространство (например, группа Ли), то алгебра $H^*(G, k)$ когомологий пространства G с коэффициентами в поле k характеристики нуль является В. а. с образующими нечетных степеней. Если G — односвязная компактная группа Ли, то В. а. (над кольцом целых чисел) является также кольцо $K^*(G)$, изучаемое в *K-теории*.

Лит.: [1] Grassmann H., Gesammelte mathematische und physikalische Werke, Bd 1, Tl. 1—2, Lpz., 1894—96; [2] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 2 изд., М., 1956; [3] Калужнин Л. А., Введение в общую алгебру, М., 1973; [4] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [5] его же, Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1968; [6] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1—3, М., 1954; [7] Фиников С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.—Л., 1948; [8] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970.

А. Л. Онищик.

ВНЕШНЯЯ И ВНУТРЕННЯЯ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ — краевые задачи (к. з.) для эллиптич. уравнений с частными производными соответственно в конечной (внутренней) D^+ и бесконечной (внешней) D^- областях, на к-рые данная замкнутая гладкая поверхность S, гомеоморфная сфере, разделяет евклидово пространство $\mathbb{R}^3$.

Основное отличие внешней к. з. от внутренней состоит в том, что в ней необходимо дополнительно к краевому условию потребовать от решения определенного поведения на бесконечности, обеспечивающего единственность решения и являющегося естественным с точки зрения физического происхождения данной задачи.

Напр., в случае внешней к. з. для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ (функция f предполагается достаточно гладкой и финитной) достаточно потребовать, чтобы решение $u(M)$ было регулярным на бесконечности, т. е. чтобы

$$\lim_{r\to\infty} u(M) = 0, \quad r = |OM|. \tag{1}$$

В случае внешней к. з. для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ в бесконечной плоской области $D^- \subset \mathbb{R}^2$ условие регулярности на бесконечности сводится к требованию, чтобы решение $u(M)$ было ограниченным на бесконечности:

$$u(M) = 0(1), \quad r\to\infty. \tag{2}$$

В случае внешней к. з. для уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = f$, $k^2 > 0$, требование регулярности на бесконечности оказывается недостаточным для выделения единственного решения и применяется так наз. *излучения условие*. Для области D^- в $\mathbb{R}^3$:

$$u(M) = O(r^{-1}),$$
$$\frac{\partial u}{\partial r} \pm iku = O(r^{-1}), \quad r\to\infty, \tag{3}$$

и для $D^- \subset \mathbb{R}^2$:

$$u(M) = O(r^{-1/2}),$$
$$\frac{\partial u}{\partial r} \pm iku = O(r^{-1/2}), \quad r\to\infty, \tag{4}$$

причем знаки здесь выбираются в зависимости от условий задачи и выбора *главного фундаментального решения*. О других условиях на бесконечности см. *Предельного поглощения принцип*, *Предельной амплитуды принцип*.

Пусть теперь рассматриваются к. з. для линейного эллиптич. уравнения общего вида

$$Lu \equiv \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \qquad (5)$$

в областях D^+ и D^- евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, выделяемых замкнутой гладкой гиперповерхностью S, гомеоморфной сфере в $\mathbb{R}^n$, причем функции a_{ik}, b_i, c и f предполагаются достаточно гладкими, f — финитная. Условия регулярности на бесконечности типа (1) или (2) будут достаточны во внешних к. з. соответственно при $n \geqslant 3$ или $n=2$ в тех случаях, когда для оператора L выполняется принцип максимума и существует одно единственное главное фундаментальное решение; в частности, для этого необходимо $c \leqslant 0$; см. [1], [2], [3]. Вопрос о применимости условия излучения, принципа предельного поглощения и принципа предельной амплитуды в общем виде нельзя считать полностью изученным (1977).

Кроме условий на бесконечности, внешняя и внутренняя к. з. могут отличаться условиями существования решения. Напр., в случае внутренней *Неймана задачи* для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в конечной области $D^+ \subset \mathbb{R}^3$ необходимое условие существования решения имеет вид

$$\int_S \psi(M)\, dS = 0,$$

где $\psi(M)$ — заданная граничная функция в условии Неймана $\partial u/\partial n = \psi(M)$. Однако для внешней задачи Неймана в бесконечной области $D^- \subset \mathbb{R}^3$ это условие уже не является необходимым.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, 5 изд., М., 1958; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [3] Купрадзе В. Д., Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, М.—Л., 1950; [4] его же, Методы потенциала в теории, упругости, М., 1963; [5] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957. *Е. Д. Соломенцев.*

ВНЕШНЯЯ МЕРА — неотрицательная функция множества, обозначаемая μ^*, заданная на счетно аддитивном классе множеств, содержащем вместе с множеством любое его подмножество и обладающая свойствами: монотонности, т. е.

$$\mu^*(X) \leqslant \mu^*(Y), \text{ если } X \subset Y;$$

счетной полуаддитивности, т. е.

$$\mu^*\left(\bigcup_i X_i\right) \leqslant \sum_i \mu^*(X_i);$$

$\mu^*(\phi) = 0$, где ϕ — пустое множество.

В. м., заданная на всех подмножествах метрич. пространства, наз. В. м. в смысле Каратеодори, или метрической В. м., если

$$\mu^*(X \cup Y) = \mu^*(X) + \mu^*(Y),$$

как только $\rho(X, Y) > 0$, где $\rho(X, Y)$ — расстояние между множествами X и Y. По данной В. м. может быть выделен класс измеримых множеств, на к-рых μ^* становится мерой.

В. м., в частности, возникают при построении продолжения меры с кольца R на порожденное им σ-кольцо.

В классич. теории *Лебега меры* (см. [1]) внешняя мера множества определяется как нижняя грань мер открытых множеств, содержащих данное множество, а внутренняя мера множества — как верхняя грань мер замкнутых множеств, содержащихся в заданном множестве.

Лит.: [1] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 2 изд., М., 1957; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [3] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953. *В. А. Скворцов.*

ВНЕШНЯЯ НОРМАЛЬ выпуклой поверхности — вектор, перпендикулярный *опорной пло-*

скости и направленный в то полупространство, определяемое опорной плоскостью, к-рое не содержит точек поверхности.

Е. В. Шикин.

ВНЕШНЯЯ ФОРМА степени r, внешняя r-форма, — однородный элемент степени r *внешней алгебры* $\wedge V$ векторного пространства V, т. е. элемент r-й внешней степени $\wedge^r V$. Выражение «внешняя форма степени r на пространстве V» обычно обозначает кососимметрическую r-линейную функцию (или кососимметрический r раз ковариантный тензор) на V. Прямая сумма пространств кососимметрических r-линейных функций на V, $r=0, 1, \ldots$, снабженная *внешним произведением*, есть алгебра, изоморфная внешней алгебре $\wedge V^*$.

Под В. ф. иногда понимают также внешнюю дифференциальную форму, см. *Дифференциальная форма.*

А. Л. Онищик.

ВНУТРЕННЕЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение $f: X \to Y$ топологич. пространства X в топологич. пространство Y такое, что образ любого открытого в X множества U открыт в Y, а прообраз $f^{-1}(y)$ любой точки $y \in Y$ вполне несвязен (т. е. не содержит связных компонент, отличных от точки).

Пусть F отображает нек-рую *риманову поверхность* R на сферу S^2, тогда гомеоморфизм $T: M \to R$ ориентированной поверхности M индуцирует отображение

$$\tilde{F} = F \circ T: M \to S^2,$$

топологически эквивалентное F. Для топологич. эквивалентности аналитич. функции F и нек-рого отображения $\tilde{F}$ необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{F}$ было внутренним отображением (тогда существует гомеоморфизм T такой, что $\tilde{F} = F \circ T$) (теорема Стоилова).

Локальная структура В. о. $\tilde{F}: M \to \mathbb{R}^2$ описывается следующим образом: для любой точки $a \in M$ существуют окрестность $U(a)$ и гомеоморфизмы $T_1: B \to U(a)$ единичного круга $B = \{z \in \mathbb{R}^2, \ |z| < 1\}$ на $U(a)$ и $T_2: \tilde{F}(U(a)) \to B$ такие, что $T_2 \circ \tilde{F} \circ T_1 = z^n$.

Лит.: [1] Стоилов С., Лекции о топологических принципах теории аналитических функций, пер. с франц., М., 1964.

В. А. Зорич.

ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ — колебания поверхности раздела двух или нескольких тяжелых жидкостей разных плотностей. При непрерывном распределении плотности жидкости под В. в. понимают колебания поверхностей равной плотности.

Пусть на поверхности бесконечно глубокой тяжелой жидкости плотности ρ_2 покоится слой жидкости плотности $\rho_1 < \rho_2$ и глубины h. На открытой поверхности жидкости и на поверхности раздела двух жидкостей могут возникнуть потенциальные стоячие волны длины $\lambda = 2\pi/k$ двух видов. Частота σ колебаний волн первого вида определяется формулой:

$$\sigma^2 = gk,$$

частота колебаний волн второго вида определяется формулой:

$$\sigma^2 = gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2 \operatorname{cth} kh}.$$

При данной длине волн второго вида частота их колебаний мала для небольшой разности плотностей. Амплитуда колебаний поверхности раздела во много раз превосходит амплитуду колебаний открытой поверхности, будучи равной

$$\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} e^{kh}. \qquad (*)$$

Прогрессивные волны, возникающие от колебаний первого вида, имеют скорость распространения

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}.$$

Скорость распространения прогрессивных волн, возникающих из стоячих волн второго вида, значительно меньше:

$$c^2=\frac{g\lambda}{2\pi}\,\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+\rho_2\operatorname{cth}\frac{2\pi h}{\lambda}}.$$

Амплитуда прогрессивных волн второго вида для поверхности раздела значительно превосходит амплитуду волн, распространяющихся по открытой поверхности. Отношение этих амплитуд дается формулой (*).

Лит.: [1] Краусс В., Внутренние волны, пер. с нем., Л., 1968.

Л. Н. Сретенский.

ВНУТРЕННИЙ АВТОМОРФИЗМ группы G — автоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x)=g^{-1}xg$$

для некоторого фиксированного элемента $g\in G$. Совокупность всех В. а. группы G образует нормальную подгруппу в группе всех автоморфизмов G, эта подгруппа изоморфна $G/Z(G)$, где $Z(G)$ — центр группы G. Автоморфизмы, не являющиеся внутренними, наз. внешними.

Употребляются также понятия внутренний автоморфизм моноида (полугруппы с единицей) и внутренний автоморфизм кольца (ассоциативного с единицей), вводимые аналогично с помощью обратимых элементов.

В. Н. Ремесленников.

ВНУТРЕННИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР относительно поверхности Σ_m — дифференциальный оператор $L(u)$, обладающий тем свойством, что для любой функции, для к-рой он определен, его значение в точке $M\in\Sigma_m$ может быть вычислено лишь по значениям этой функции на гладкой поверхности Σ_m, заданной в пространстве E_n, $m<n$. В. д. о. может быть вычислен с помощью производных в направлениях l, к-рые лежат в касательном к поверхности Σ_m многообразии. Если ввести такие координаты, что на Σ_m:

$$x_{m+1}=x^0_{m+1},\ \ldots,\ x_n=x^0_n,$$

то оператор $L(u)$, если он внутренний относительно Σ_m, после надлежащих преобразований не будет содержать производных по переменным $x_{m+1},\ldots,x_n$ (так наз. выводящих производных x). Напр., оператор

$$L(u)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}$$

есть В. д. о. относительно любой гладкой поверхности, составленной из прямых $x-x_0=y-y_0=z-z_0$, а также относительно любой из этих прямых. Если оператор $L(u)$ является В. д. о. относительно поверхности Σ_{n-1}, то Σ_{n-1} наз. *характеристикой* дифференциального уравнения $L(u)=0$.

Иногда оператор наз. внутренним по отношению к поверхности Σ_m, если в точках этой поверхности старший порядок выводящих производных ниже порядка оператора. *Б. Л. Рождественский.*

ВНУТРЕННИХ ВАРИАЦИЙ МЕТОД — метод в теории функций комплексного переменного, используемый при решении экстремальных задач на классах однолистных и многолистных аналитич. функций. Преимущества В. в. м. связаны с тем, что при выводе лежащих в его основе вариационных формул не делается предположений о поведении варьируемых функций на границе области D их задания, а сами вариационные формулы являются следствием единообразного изменения функций класса на внутренних подмножествах из D. Для однолистных функций в круге $E=\{z:|z|<1\}$, В. в. м. был предложен М. Шиффером [1] и, в более усовершенствованной и развитой форме, Г. М. Голузиным [2]. В применении к классу S функций $f(z)=z+$

$+c_2z^2+\ldots$, голоморфных и однолистных в E, ими была установлена основная вариационная формула:

$$f_*(z;\lambda)=f(z)+\lambda f(z)\sum_{k=1}^{n}\left[2A_kH^2(z_k)\frac{f(z)}{f(z)-f(z_k)}+\right.$$
$$\left.+A_kK(z,z_k)+\overline{A}_kK\left(z,\frac{1}{z_k}\right)\right]+\gamma(z;\lambda),$$

где

$$H(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)},\quad K(z,\zeta)=H(z)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+1,$$

z_k ($k=1,\ 2,\ldots,\ n$; $n=1,\ 2,\ldots$) — фиксированные точки в круге E, A_k — произвольные комплексные постоянные, а $\gamma(z;\ \lambda)/\lambda$ при $\lambda\to 0$, $\lambda>0$, стремится к нулю равномерно относительно z внутри E. Иными словами, в классе S, не образующем к.-л. линейного пространства, для каждой функции $f(z)$ указывается однопараметрическое семейство $f_*(z;\ \lambda)$, $\lambda>0$, функций этого же класса такое, что на любом замкнутом множестве в E разложение $f_*(z;\ \lambda)$ по степеням λ дается записанной выше формулой. Аналогичные формулы (с оценкой порядка малости остаточного члена внутри соответствующей области) имеют место и для других классов аналитич. функций.

Характерной чертой В. в. м. является возможность, исходя из вариационных формул, получить для граничных или экстремальных функций дифференциальное уравнение. Его исследование с использованием аналитич. теории дифференциальных уравнений приводит к важным качественным результатам, а в ряде случаев — к полному решению экстремальной проблемы.

В. в. м. нашел успешное применение в задачах о неналегающих областях; он стал составной частью так наз. *вариационно-параметрического метода* (см. [3]).

Лит.: [1] Schiffer M., «Amer J. Math.», 1943, v. 65, № 2, p. 341—60; [2] Голузин Г. М., «Матем. сб.», 1946, т. 19 (61), в. 2, с. 203—36; [3] его же, Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

И. А. Александров.

ВНУТРЕННОСТЬ МНОЖЕСТВА в топологическом пространстве Y — совокупность *внутренних точек* множества X. Обозначается обычно $\mathrm{Int}\,X$. Всегда $\mathrm{Int}\,X=X\setminus[Y\setminus X]=X\setminus \mathrm{Fr}X$, где $\mathrm{Fr}X$ — граница множества X. В. м. равна также объединению всех подмножеств множества X, открытых во всем пространстве. В. м. наз. иногда ядром.

С. М. Сирота.

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии, изучающий те свойства поверхности и фигур на ней, к-рые зависят лишь от длин кривых, лежащих на поверхности, и тем самым могут быть определены без обращения к объемлющему пространству. К В. г. регулярных поверхностей относятся такие понятия, как, напр., угол между кривыми, площадь области, полная (или гауссова) кривизна поверхности, *геодезическая кривизна* кривой, *Леви-Чивита связность*. Термин «В. г.» употребляется и в более общей ситуации для обозначения структуры (обычно *метрики* или *связности*), индуцированной в топологич. пространстве его отображением в другое пространство, априори наделенное аналогичной структурой.

Возможность рассматривать объекты В. г. как свойства самой поверхности, безотносительно к погружению ее в пространство, привела к исследованию абстрактных пространств с *внутренней метрикой*, свойства к-рых сходны с В. г. поверхностей (см. *Риманово пространство*, *Выпуклая поверхность*, *Двумерное многообразие ограниченной кривизны*). Наряду с внутренним подходом возможно выделение классов погруженных поверхностей и подмногообразий по их внешнегеометрич. свойствам. Сравнение этих двух подходов составляет проблему *изометрических погружений* и вложений. В ряде важных случаев оба подхода приводят к одним

и тем же классам метрик. Напр., любая риманова метрика (класса C^r, $r>3$) может рассматриваться как В. г. нек-рого подмногообразия евклидова пространства достаточно большой размерности, любая полная двумерная внутренняя метрика неотрицательной кривизны — как В. г. выпуклой поверхности в E^3. Классич. пример противоположной ситуации представляет *Гильберта теорема* о несуществовании регулярного изометрич. погружения плоскости Лобачевского в E^3. Термин «В. г.», отнесенный к подобного рода абстрактным пространствам, обретает смысл только в противопоставлении внешней геометрии в рамках к.-л. определенной теории. Выяснение связей между В. г. поверхностей и ее внешней геометрии составляет одну из наиболее трудных и содержательных задач геометрии. Сюда наряду с проблемой изометрич. погружений относятся, напр., следующие вопросы: *изгибание* поверхностей, *бесконечно малые изгибания*, однозначная определенность поверхности ее метрикой, влияние гладкости метрики на гладкость поверхности. Рассматривались также соотношения между внешней и В. г. при суперпозиции погружений (кривые на поверхности, минимальные подмногообразия сфер).

Основы В. г. созданы К. Гауссом (C. Gauss) (см. [1]). Они развиты в многомерном случае Б. Риманом (B. Riemann) (см. [2]), а в нерегулярном случае А. Д. Александровым (см. [3]).

Лит.: [1] Гаусс К., Общие исследования о кривых поверхностях, пер. с лат., в сб.: Об основаниях геометрии, М., 1956; [2] Риман Б., О гипотезах, лежащих в основании геометрии, пер. с нем., там же, с. 309—11; [3] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.—Л., 1948.

Ю. Д. Бураго.

ВНУТРЕННЯЯ ГРАНИЦА области D в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ — множество $\partial D \setminus \partial(C\overline{D})$, где ∂D — граница D, $\partial(C\overline{D})$ — граница дополнения замкнутой области $\overline{D}$. *Е. Д. Соломенцев.*

ВНУТРЕННЯЯ МЕТРИКА — метрика ρ, при к-рой любые две точки x, y метрич. пространства соединимы спрямляемой кривой $\gamma(x, y)$ и

$$\rho(x, y) = \inf_{\gamma} s_\rho(\gamma(x, y)),$$

где s_ρ — длина кривой в метрике ρ. Риманова метрика всегда В. м. Если в пространстве с метрикой ρ любые две точки соединимы спрямляемой кривой, то равенство

$$\rho^*(x, y) = \inf_{\gamma} s_\rho(\gamma(x, y))$$

определяет В. м.; это равенство служит определением индуцированной В. м. ρ^* на многообразии, погруженном в метрич. пространство.

Лит.: [1] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.—Л., 1948.

Ю. Д. Бураго.

ВНУТРЕННЯЯ ТОЧКА множества в топологическом пространстве — точка, входящая в данное множество вместе с нек-рым открытым множеством, ее содержащим. Если x — В. т. множества A, то A наз. окрестностью точки x в широком смысле. *С. М. Сирота.*

ВОГНУТАЯ ФУНКЦИЯ — функция, противоположная по знаку *выпуклой функции*.

ВОГНУТЫЙ И ВЫПУКЛЫЙ ОПЕРАТОРЫ — нелинейные операторы в полуупорядоченных пространствах, являющиеся аналогами вогнутых и выпуклых функций действительного переменного.

Нелинейный оператор A, положительный на конусе K в банаховом пространстве, наз. вогнутым (точнее, u_0-вогнутым на K), если:

1) для каждого ненулевого $x \in K$ выполнены неравенства

$$\alpha(x)u_0 \leqslant Ax \leqslant \beta(x)u_0,$$

где u_0 — нек-рый фиксированный ненулевой элемент из K, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — положительные скалярные функции;

2) для каждого такого $x \in K$, что

$$\alpha_1(x)u_0 \leqslant x \leqslant \beta_1(x)u_0, \ \alpha_1 > 0, \ \beta_1 > 0,$$

справедливы соотношения

$$A(tx) \geqslant (1+\eta(x, t))tA(x), \ 0<t<1, \qquad (*)$$

где $\eta(x, t) > 0$.

Аналогично, оператор A наз. в ы п у к л ы м (точнее, u_0-выпуклым на K), если выполнены условия 1) и 2), но неравенство (*) заменено противоположным, и функция $\eta(x, t) < 0$.

Типичным примером является интегральный оператор Урысона

$$A[x(t)] = \int_G k(t, s, x(s))\, ds,$$

вогнутость и выпуклость к-рого обеспечивается соответственно вогнутостью и выпуклостью скалярной функции $k(t, s, u)$ по переменному u. Вогнутость оператора означает, что он содержит лишь «слабые» нелинейности — значения оператора на элементах конуса растут «медленно» при росте норм элементов. Выпуклость же оператора означает, как правило, что он содержит «сильные» нелинейности. В соответствии с этим уравнения с вогнутыми операторами и уравнения с выпуклыми операторами обладают рядом различий; так, первые близки по своим свойствам к соответствующим скалярным уравнениям, для вторых же такой близости нет: напр., для них, как правило, неверна теорема о единственности положительного решения.

Лит.: [1] К р а с н о с е л ь с к и й М. А., Геометрические методы нелинейного анализа, М., 1975.

М. И. Войцеховский.

ВОДОРОДОПОДОБНЫЙ АТОМ — квантовомеханическая система, состоящая из ядра массы M с зарядом $+Ze$ и одного электрона массы m с зарядом $-e$, взаимодействующих по закону Кулона, т. е. притягивающихся друг к другу с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ядром и электроном. В частном случае при $Z=1$, когда ядром является протон, В. а. — обычный атом водорода. К В. а. можно отнести мезоатом (μ-мезон в кулоновском поле ядра) и позитроний (система, состоящая из электрона и позитрона). Задача о В. а.— точно решаемый пример общей задачи двух тел в механике (как в классической, так и в квантовой) и является квантовомеханич. аналогом классич. проблемы Кеплера в теории движения двух масс под действием сил всемирного тяготения. После выделения движения центра инерции квантовомеханич. задача о В. а. сводится в нерелятивистском приближении к решению *Шрёдингера уравнения* для частицы с приведенной массой $m_0 = mM/(m+M)$, движущейся в поле центральных сил с кулоновским потенциалом:

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta_r + V(r) - E\right\}\psi(r) = 0; \qquad V(r) = -\frac{Ze^2}{r}. \quad (*)$$

Удовлетворяющие физич. условиям ограниченности волновых функций $\psi(r)$ решения (*) существуют: а) при $E_n = -Z^2e^4m/2\hbar^2n^2$ и целом $n \geqslant 1$ (дискретный спектр энергий E); б) при любом $E>0$ (непрерывный спектр энергий). Решения, принадлежащие дискретному спектру, соответствуют стационарным связанным состояниям электрона в В. а. и обладают так наз. «случайным вырождением», т. е. состояния с различными квантованными значениями орбитального момента $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, а не только его проекции $m_l (-l \leqslant m_l \leqslant l$; m_l — целое) на нек-рую ось (обычное вырождение), обладают одинаковой энергией E_n. «Случайное вырождение» является следствием того, что в частном случае кулоновского потенциала уравнение Шрёдингера (*) инвариантно не только относительно группы ортогональных преобразований O (3), что справедливо для

любого потенциала центральных сил, но и относительно преобразований более широкой группы O (4). Решения непрерывного спектра соответствуют ионизованным состояниям В. а., т. е. несвязанным состояниям электрона, и вырождены с бесконечной кратностью — возможны состояния со всеми целыми значениями $l \geqslant 0$ и всеми целыми значениями m_l при данном l, $-l \leqslant m_l \leqslant l$.

Релятивистские эффекты в В. а.: зависимость массы от скорости и спиновые свойства электрона и ядра, можно учесть при использовании вместо уравнения Шрёдингера (*) релятивистского *Дирака уравнения* для электрона в поле кулоновского потенциала ядра.

Учет релятивистских эффектов и спина электрона дает поправки к E_n, к-рые зависят от l и полного момента j электрона, определяемого через l и спин электрона, и тем самым снимает случайное вырождение уровней энергии В. а. и определяет так наз. тонкую структуру дискретного спектра уровней энергии В. а. Учет спина ядра и связанного с ним магнитного момента, взаимодействующего с движущимся вокруг ядра электроном, а также учет конечных размеров ядра и возможного квадрупольного момента и других высших мультипольных моментов ядра дает дополнительные поправки к E_n, определяющие так наз. сверхтонкую структуру уровней энергии В. а.

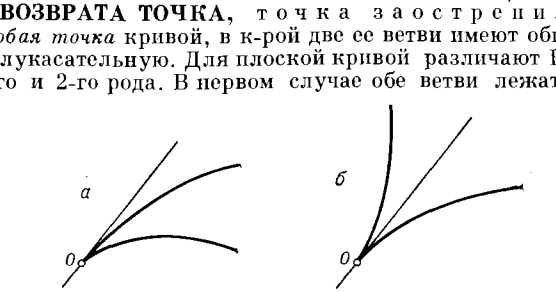
Лит.: [1] Соколов А. А., Лоскутов Ю. М., Тернов И. М., Квантовая механика, 2 изд., М., 1965.

В. Д. Кукин.

ВОЗВРАТА РЕБРО — один из типов *особенностей дифференцируемых отображений* многообразия в евклидово пространство. В простейшем случае отображения f поверхности M в трехмерное евклидово пространство E^3 В. р. характеризуется тем, что представляет собой гладкую кривую L, пересечение некоторой окрестности к-рой $f(L) \subset E^3$ с любой плоскостью π, перпендикулярной касательной к L, является кривой с *возврата точкой* $p \in f(L) \cap \pi$; таково, напр., В. р. на псевдосфере.

М. И. Войцеховский.

ВОЗВРАТА ТОЧКА, точка заострения,— *особая точка* кривой, в к-рой две ее ветви имеют общую полукасательную. Для плоской кривой различают В. т. 1-го и 2-го рода. В первом случае обе ветви лежат по



одну сторону от полукасательной (рис., *а*), а во втором случае — по разные стороны (рис., *б*).

А. Б. Иванов.

ВОЗВРАТНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ рекуррентная последовательность, — последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$, удовлетворяющая соотношению вида

$$a_{n+p} + c_1 a_{n+p-1} + \ldots + c_p a_n = 0,$$

где $c_1, \ldots, c_p$ — постоянные. Это соотношение позволяет вычислить один за другим члены последовательности, если известны первые p членов. Классич. примером В. п. является последовательность Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, $\ldots$ ($a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$). Возвратный ряд — степенной ряд $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ с коэффициентами, образующими В. п. Такой ряд изображает всегда рациональную функцию. *БСЭ-3*

ВОЗВРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

в к-ром коэффициенты, равноудаленные от начала и конца, равны между собой: $a_i = a_{n-i}$. В. у. степени $2n$

можно привести к уравнению n-й степени, положив $z=x\pm\frac{1}{x}$.

БСЭ-3

ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИНЦИП, в и р т у а л ь н ы х с к о р о с т е й п р и н ц и п,— дифференциальный *вариационный принцип классической механики*, выражающий наиболее общие условия равновесия механических систем, стесненных идеальными связями.

Согласно В. п. п. механич. система находится в равновесии в нек-ром положении тогда и только тогда, когда сумма элементарных работ заданных активных сил на всяком возможном перемещении, выводящем систему из рассматриваемого положения, равна нулю или меньше нуля:

$$\sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu \leqslant 0, \qquad (*)$$

в любой момент времени.

Возможными (виртуальными) перемещениями системы наз. элементарные (бесконечно малые) перемещения $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ точек системы, допускаемые в данный момент времени наложенными на систему связями. Если связи являются удерживающими (двусторонними), то возможные перемещения обратимы, и в условии (*) следует брать знак равенства; если же связи — неудерживающие (односторонние), то среди возможных перемещений имеются необратимые. При движении системы под действием активных сил связи действуют на точки системы с нек-рыми силами реакций $\boldsymbol{R}_\nu$ (пассивные силы), в определении к-рых предполагается полностью учтенным механич. действие связей на систему (в том смысле, что связи возможно заменять вызванными ими реакциями) (аксиома освобождаемости). Связи наз. идеальными, если сумма элементарных работ их реакций $\Sigma_\nu \boldsymbol{R}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место для обратимых возможных перемещений, а знаки равенства или больше нуля — для необратимых перемещений. Положения равновесия системы — такие положения $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t_0)$, в к-рых система будет оставаться все время, если она помещена в эти положения с нулевыми начальными скоростями $\boldsymbol{v}_\nu(t_0)=0$; при этом предполагается, что уравнения связей удовлетворяются при любом t значениями $\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t_0)$ и $\boldsymbol{v}_\nu = 0$. Активные силы в общем случае предполагаются заданными функциями $\boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\mu, \boldsymbol{r}_\mu) \in C^1$, а в условии (*) следует считать $\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\mu(t_0), 0)$.

В условии (*) содержатся все уравнения и законы равновесия систем с идеальными связями, благодаря чему можно сказать, что вся статика сводится к одной общей формуле (*).

Закон равновесия, выражаемый В. п. п., впервые был установлен Гвидо Убальди (Guido Ubaldi) на рычаге и на движущихся блоках или полиспастах. Г. Галилей (G. Galilei) установил его для наклонных плоскостей и рассматривал этот закон как общее свойство равновесия простых машин. Дж. Валлис (J. Wallis) положил его в основание статики и из него вывел теорию равновесия машин. Р. Декарт (R. Descartes) свел всю статику к единому принципу, к-рый, по существу, совпадает с принципом Галилея. И. Бернулли (J. Bernoulli) первый понял большую общность В. п. п. и его полезность при решении задач статики. Ж. Лагранж [1] выразил В. п. п. в общей форме и тем самым свел всю статику к единой общей формуле; он дал доказательство (не вполне строгое) В. п. п. для систем, стесненных двусторонними (удерживающими) связями. Общая формула статики для равновесия любой системы сил и разработанный Ж. Лагранжем метод применения этой формулы были систематически им использованы для вывода общих свойств равновесия системы тел и решения различных проблем статики, включая задачи равновесия несжимаемых, а также сжимаемых и упругих жидкостей. Ж. Лагранж считал В. п. п. основным принципом для всей механики. Строгое доказательство В. п. п., а также

распространение его на односторонние (неудерживающие) связи было дано Ж. Фурье [2], М. В. Остроградским [3].

Лит.: [1] Lagrange J., Mécanique analytique, P., 1788 (рус. пер.: Лагранж Ж., Аналитическая механика, М.—Л., 1950); [2] Fourier J., «J. de l'École Polytechnique», 1798, t. II, p. 20; [3] Остроградский М. В., Лекции по аналитической механике, Собр. соч., т. 1, ч. 2, М.—Л., 1946.

В. В. Румянцев.

ВОЗМУЩЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ — отображение f в системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)\,x + f(x,\ t). \tag{1}$$

Обычно возмущение предполагается малым в к.-л. смысле, напр.,

$$\frac{|f(x,\ t)|}{|x|} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Решение $\varphi(t)$ линейной системы с возмущением (1) и решение $\Psi(t)y_0$ линейной системы

$$\dot{y} = A(t)\,y \tag{3}$$

с одним и тем же начальным значением y_0 при $t=t_0$ связаны соотношением

$$\varphi(t) = \Psi(t)\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(\tau)\,f(\varphi(\tau),\ \tau)\,d\tau\right),$$

наз. формулой вариации постоянных, где $\Psi(t)$ — фундаментальная матрица линейной системы (3).

А. М. Ляпунов (см. [1]) доказал асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (1) (см. *Асимптотически устойчивое решение*), если соотношение (2) справедливо равномерно по t, а матрица $A(t)$ постоянна и все действительные части ее собственных значений отрицательны; если же хоть одна из них положительна, то тривиальное решение неустойчиво.

Исследование периодического решения φ системы $\dot{x}=P(x,\ t)$, описывающей колебательный процесс, преобразованием $x=\varphi(t)+y$ приводится в общем случае к исследованию линейной системы с возмущениями, правая часть к-рой периодична по t (см. [3]).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., 1950; [2] Былов Б. Ф. [и др.], Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [3] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974.

Л. Э. Рейзинь.

ВОЗМУЩЕНИЙ ТЕОРИЯ — комплекс методов исследования различных задач, используемый во многих разделах математики, механики, физики и техники. Здесь с общей точки зрения излагаются основные идеи В. т.

В. т. основана на возможности приближенного описания исследуемой системы с помощью нек-рой специальным образом выбираемой «идеальной» системы, допускающей корректное и полное изучение. Одним из признаков применимости В. т. в одной из ее форм, определяемой спецификой конкретной задачи, для к-рой В. т. разрабатывается, является условие того, что уравнения, описывающие исследуемый процесс, содержат в явной или неявной форме малый параметр (или несколько таких параметров). При этом требуется, чтобы при нулевом значении малого параметра уравнения допускали точное решение, и таким образом проблема сводится к нахождению асимптотики наилучшего приближения к истинному решению с точностью до $\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \ldots$.

1) В. т. впервые была предложена для решения проблем небесной механики, связанных с изучением движения планет в солнечной системе. Удаленность планет друг от друга и малая величина их массы в сравнении с массой Солнца позволяют пренебрегать гравитационным взаимодействием планет между собой и рассматривать их движение (в первом приближении) по орбитам Кеплера, определяемым из уравнений *двух тел задачи* — планеты и Солнца.

Существенное уточнение астрономич. данных сформулировало проблему учета влияния других планет на движение одной из них вокруг Солнца. Так возникла классическая *трех тел задача*, причем, напр., при изучении системы Луна — Земля — Солнце в качестве малого параметра выбиралось отношение масс Луны и Земли. Начиная с трудов Ж. Лагранжа (J. Lagrange), П. Лапласа (P. Laplace) было выдвинуто представление о том, что постоянные величины, характеризующие движение планеты вокруг Солнца, ввиду влияния движения других планет как бы «возмущаются» и претерпевают изменения, зависящие от времени; отсюда идет и наименование «теория возмущений».

В. т. занимала внимание классиков Ж. Лагранжа, П. Лапласа, С. Пуассона (S. Poisson), К. Гаусса (C. Gauss) и в результате их работ оказалось возможным проводить вычисления с чрезвычайно большой точностью. Триумфом В. т. явилось открытие планеты Нептун (1848) Дж. Адамсом (J. Adams) и У. Леверье (U. Le Verrier) из анализа отклонений в движении планеты Уран.

Трудности первоначально разработанных методов В. т. были обусловлены наличием в получающихся разложениях членов, содержащих время t вне знака синуса или косинуса. Вклад таких членов в ряд В. т. существен лишь за длительные промежутки времени (порядка столетий), но и в этом случае невозможно строгое описание планетных движений в схеме В. т. — приемлемым является только первое приближение. Появление так наз. секулярных членов обусловлено зависимостью частоты движения (обращения) исследуемой планеты от соответствующих частот других планет. Учет такого рода зависимости и приводит к возникновению в решениях как секулярных (вида At^n), так и смешанных (вида $Bt\cos(\omega t+\varphi)$) членов. Напр., соотношение

$$\omega=\omega_0+\varepsilon\omega_1 \qquad (1)$$

в схеме В. т. допускает следующее разложение по $\varepsilon(\varepsilon\ll 1)$:

$$\sin\omega t=\sin\omega_0 t+\varepsilon\omega_1 t\cos\omega_0 t+\ldots, \qquad (2)$$

смешанный член в к-ром появляется в результате разложения колебания с частотой (1) по колебаниям с частотой ω_0.

Создание специальных методов В. т., устраняющих секулярные члены, т. е. *позволяющих* представить решение в чисто тригонометрич. виде, связано с работами Линдштедта (Lindstedt), П. Гульдина (P. Guldin), Ш. Делоне (Ch. Delaunay), Б. Болина (B. Bohlin), С. Ньюкома (S. Newcomb). В предложенном ими подходе частоты уже не разлагаются по малым параметрам, т. е. в соответствующие разложения входят не частоты нулевого приближения, а нек-рым образом переопределенные (в терминах современной теоретич. физики — ренормированные) частоты. В результате каждый отдельный член ряда В. т. по степеням малого параметра представляет собой сходящееся выражение. Вопрос о сходимости ряда В. т. в целом остается открытым из-за появления так наз. малых знаменателей (малых делителей), образующихся при интегрировании в каждом приближении В. т. выражений вида $\exp\{i\Sigma_j\omega_j n_j t+\varphi\}$, где $\{\omega_j\}$ — набор частот, отвечающих различным движениям. В случае почти соизмеримых частот сумма в показателе экспоненты может быть малой и тогда после соответствующего интегрирования возникают члены ряда В. т., знаменатели к-рых малы, что и приводит к расходящимся выражениям ряда В. т. В частности, для двух частот ω_1 и ω_2, отношение к-рых является иррациональным числом, $(n_1\omega_1+n_2\omega_2)$ можно подобрать так, чтобы соответствующий ряд В. т. расходился.

При изучении с общей математич. точки зрения проблемы малых знаменателей А. Пуанкаре (H. Poincaré)

и А. М. Ляпуновым была предложена методика построения специального вида периодич. решений, эффективная не только в задачах небесной механики, но и в теории дифференциальных уравнений в целом.

Существенный вклад в решение проблемы малых делителей был сделан в работах [4], [5], [6]. Метод последовательных канонич. замен переменных позволяет «понизить» порядок возмущения и с помощью достигаемой усиленной сходимости (так наз. сверхсходимости) «преодолеть» расходимость ряда В. т. из-за малых знаменателей, возникающих в каждом порядке В. т., надлежащим выбором канонич. преобразования.

2) В В. т. для задач небесной механики развито асимптотич. интегрирование дифференциальных уравнений только в случае консервативных систем. Дальнейший прогресс В. т. связан с развитием теории колебаний, в особенности с созданием теории нелинейных колебаний.

Важную роль сыграли (выполненные в развитие работ Ж.Лагранжа) исследования Б. Ван дер Поля (B. Van der Pol) по уравнениям типа Рэлея с малым параметром ε:

$$\frac{d^2J}{dt^2}-\varepsilon\left(\frac{dJ}{dt}-\frac{1}{3}\left(\frac{dJ}{dt}\right)^3\right)+J=0. \qquad (3)$$

Частным случаем уравнения (3) является *Ван дер Поля уравнение*.

Для решения уравнения

$$\ddot{x}-\varepsilon(1-\dot{x}^2)\dot{x}+\omega^2x=0 \qquad (4)$$

в первом приближении Б. Ван дер Поль предложил без должного математич. обоснования метод «медленно меняющихся коэффициентов», аналогичный одному из методов, применявшихся еще Ж. Лагранжем в небесной механике. Этот метод основан на представлении решения уравнения (4) в виде функции гармонич. колебаний, амплитуда и фаза к-рых — медленно меняющиеся функции параметра t.

Общая теория нелинейных колебаний была разработана в работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. При этом были преодолены принципиальные математич. трудности и дано распространение В. т. на общие неконсервативные системы. Развитые в этих работах новые асимптотич. методы нелинейной механики позволяют получать решения в высших приближениях В. т. в математически обоснованной схеме, причем наряду с периодич. решениями допускали строгое рассмотрение квазипериодич. режима.

Идея асимптотич. методов теории возмущений Крылова — Боголюбова становится наглядной при рассмотрении уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\varepsilon f\left(x,\frac{dx}{dt},\varepsilon\right), \qquad (5)$$

описывающего нелинейные колебания системы с одной степенью свободы.

К правильной формулировке асимптотич. метода можно прийти, исходя из физич. соображений о характере колебательного процесса. Так, при полном отсутствии нелинейности, т. е. при $\varepsilon=0$, колебания, описываемые уравнением (5), будут чисто гармоническими с постоянной амплитудой и равномерно вращающейся фазой. В случае, если $\varepsilon\neq0$, т. е. в случае наличия нелинейного возмущения, естественно ожидать появления в решении уравнения (5) обертонов, зависимости мгновенной частоты от амплитуды и, наконец, систематич. увеличения или уменьшения амплитуды колебания в связи с притоком или поглощением энергии возмущающими силами.

Принимая во внимание все эти физич. соображения, естественно решение уравнения (5) искать в виде ряда

$$x=a\cos\psi+\varepsilon u_1(a,\psi)+\varepsilon^2u_2(a,\psi)+\ldots, \qquad (6)$$

в к-ром $u_i(a,\psi)$, $i=1,2,\ldots,$ — периодич. функции угла

ψ с периодом 2π, а величины a и ψ как функции времени определяются дифференциальными уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \dot{a} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \dot{\psi} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Таким образом, задача сводится к подбору соответствующих выражений для функций $u_i(a, \psi)$, $A_i(a)$, $B_i(a)$, $i=1, 2, \dots$, так, чтобы выражение (6), в к-рое вместо a и ψ будут подставлены функции времени, определенные из системы (7), являлось решением исходного уравнения (5). Причем накладываются нек-рые дополнительные условия, обеспечивающие отсутствие в решении (6) секулярных членов.

Ограничиваясь в формальном ряде (6) первыми членами, приходят к m-му приближению, обладающему свойством асимптотичности в том смысле, что при фиксированном m и $\varepsilon \to 0$ выражение (6) стремится к точному решению уравнения (5); уравнения первого приближения совпадают с уравнениями Ван дер Поля. Проблема оценки погрешности m-го приближения не вызывает особенных трудностей. Аналогичным образом решается задача в случае N степеней свободы.

Если интерпретировать формулу (6) не как решение уравнения (5), а как формулу замены переменных, то можно получить точные выражения для производных по времени от амплитуды a и фазы ψ.

Как известно (см. [8], [9]) во многих случаях дифференциальные уравнения, описывающие колебательные процессы и содержащие «малый» параметр, могут быть приведены к так наз. стандартной форме:

$$\frac{dX_s}{dt} = \varepsilon X_s(t, x_1, \dots, x_n); \quad s = 1, 2, \dots, n, \qquad (8)$$

где ε — малый положительный параметр. Большое число задач физики и техники приводится к этому виду. Для системы дифференциальных уравнений вида (8) разработан особый метод аппроксимации, названный м е т о д о м у с р е д н е н и я. Согласно методу усреднений, эти уравнения для достаточно малых значений ε на конечном интервале посредством замены переменных

$$x_i = \xi_i + \varepsilon X_i$$

приводятся к усредненным уравнениям:

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \varepsilon X_{s,0}(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

где $X_{s,0}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_s(t, \xi_1, \dots, \xi_n)$.

Применяя метод усреднения, можно получить, напр., ряд критериев о существовании и устойчивости автоколебательных режимов.

Были установлены [13] при весьма общих условиях оценки разности $|X_i - \varepsilon_i|$ на временном интервале длины L/ε. Кроме того, можно установить соответствие и в таких свойствах решений общих систем, к-рые зависят от их поведения на бесконечном интервале. Таким образом были доказаны теоремы о существовании и устойчивости квазипериодич. решений.

3) При изучении нелинейных колебательных систем можно не приводить соответствующую систему уравнений к «стандартной форме», а работать непосредственно с исходными дифференциальными уравнениями для системы гармонич. вибраторов, подверженных слабому нелинейному воздействию. При этом наряду с общими решениями для такой системы можно получить и частные решения с помощью замены переменных специального вида.

Такой подход был использован Н. Н. Боголюбовым для нек-рых задач статистич. механики, связанных с

вычислением функций распределения s частиц ($s=1, 2, \ldots, N$) для систем многих взаимодействующих частиц. Малым параметром в задачах статистич. механики может служить как малая константа взаимодействия, так и малая плотность частиц в системе. В одном из этих приближений можно выразить высшие s-частичные функции распределения через функции распределения одной частицы. При этом уже в первом приближении В. т. можно получить из системы кинетич. уравнений известные уравнения Больцмана, а также уравнения Ландау, Власова и Боголюбова — Ленарда — Балеску, широко применяемые в теории плазмы.

Следует отметить, что перечисленные методы развиты в применении к уравнениям с малым параметром, входящим в них регулярным образом (не при старшей производной). В то же время, напр., уравнение Ван дер Поля в форме Рэлея в случае больших ε автоматически сводится к уравнению, в к-ром малый параметр стоит перед старшей производной. Для задач такого типа, требующих особого подхода, развиты мощные методы исследования (см. [14], [15], [16], [17]).

Именно задачи с малым параметром при старшей производной типичны для проблем статистич. механики и гидродинамики. Примером может служить Навье — Стокса уравнение в предположении малых коэффициентов вязкости и теплопроводности, имеющее в качестве нулевого приближения уравнения идеальной жидкости Эйлера. Поиск наилучшего приближения в данной задаче усложнен указанным условием.

4) Большое значение методы В. т. имеют в области квантовой механики, где, такие как и в классической, точные решения получены лишь в задаче двух тел, формально сводимой к задаче одного тела во внешнем потенциальном поле. Здесь используются две формы В. т.: одна для стационарных состояний, другая для расчета вероятностей переходов из одного стационарного состояния в другое в схеме метода матрицы рассеяния. В. т. формулируется в квантовой механике как задача на собственные значения для линейного самосопряженного оператора вида:

$$H=H_0+\varepsilon H_1,$$

где ε — малый параметр, причем известно решение задачи на собственные значения для «невозмущенного» оператора H_0, т. е. задана полная система собственных функций $\{\psi_n^{(0)}\}$ и собственных значений E_n^0 и требуется найти спектр оператора H.

В предположении малости ε волновые функции

$$\psi_n=\sum\nolimits_m C_m\psi_m^{(0)}$$

и собственные значения энергии E_n могут быть найдены в виде рядов

$$C_m=C_m^{(0)}+C_m^{(1)}+C_m^{(2)}+\ldots,$$
$$E_n=E_n^{(0)}+E_n^{(1)}+E_n^{(2)}+\ldots$$

по степеням возмущения ε. Тогда для возмущения n-состояния В. т. дает следующий результат:

$$C_m^{(0)}=0,\quad m\neq n;\quad C_n^{(0)}=1;$$

$$C_m^{(1)}=\frac{V_{mn}}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}},\ m\neq n;\ C_n^{(1)}=0;$$

$$C_m^{(2)}=\sum\nolimits_{k\neq n}\frac{V_{mk}V_{kn}}{\left(E_n^{(0)}-E_k^{(0)}\right)\left(E_n^{(0)}-E_m^{(0)}\right)}-$$
$$-\frac{V_{nn}V_{mn}}{\left(E_n^{(0)}-E_m^{(0)}\right)^2},\quad m\neq n;$$

$$C_n^{(2)}=-\frac{1}{2}\sum\nolimits_{m\neq n}\frac{|V_{mn}|^2}{\left(E_n^{(0)}-E_m^{(0)}\right)^2};\ \ldots;$$

$$E_n^{(1)}=V_{nn};\quad E_n^{(2)}=\sum\nolimits_{m\neq n}\frac{|V_{mn}|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}};\ \ldots$$

Здесь V_{mn} — матричный элемент оператора возмущения, определяемый согласно правилу ($\hat{V}=\varepsilon H_1$):

$$V_{mn}=\int \overset{*}{\psi}{}_m^{(0)}\hat{V}\psi_n^{(0)}\,dq,$$

где dq — элемент объема.

Условие применимости В. т. к таким задачам:

$$|V_{mn}|\ll|E_n^{(0)}-E_m^{(0)}|$$

нарушается в случае вырождения уровня энергии невозмущенной системы: вырожденному уровню энергии $E_n^{(0)}$ отвечает s состояний $\{\psi_{nj}^{(0)}\}$, $j=1, 2, \ldots, s$ (s — кратность вырождения). В этом случае применяется нек-рая модификация В. т.: вначале учитывают влияние возмущения на вырожденные состояния, а влияние других уровней рассматривается как малое возмущение; строятся линейные комбинации s функций вырожденного состояния, причем для коэффициентов $C_r^{(0)}$ построенной комбинации получены уравнения вида

$$E_n^{(1)}C_r^{(0)}=\sum_{r'=1}^{s}V_{rr'}C_{r'}^{(0)}, \qquad (9)$$

где

$$V_{rr'}=\int \psi_{nr}^{(0)}\hat{V}\psi_{nr'}^{(0)}\,dq.$$

Поправка к энергии $E_n^{(1)}$ находится из секулярного уравнения системы (9). Решения $\{E_{n,p}^{(1)}\}$, $p=1, \ldots, s$ этого уравнения s-й степени представляют в (9) и находят $\{C_{r,p}^{(0)}\}$ и волновую функцию:

$$\psi_{n,\,p}=\sum_{r=1}^{s}C_{r,\,p}^{(0)}\psi_{n,\,r},$$

соответствующую энергии

$$E_n=E_n^{(0)}+E_n^{(1)}$$

после снятия вырождения. Поправки следующего порядка находят методами обычной В. т.

В нестационарном случае задача В. т. ставится в терминах вероятностей перехода из состояния $\psi_n^{(0)}$ в состояние $\psi_m^{(0)}$. В. т. может применяться в гейзенберговском, шрёдингеровском представлениях или же в представлении взаимодействия.

В квантовой механике есть также принципиально другого типа задачи о нахождении так наз. *рассеяния матрицы* двух или нескольких частиц. В особенности такие задачи важны для квантовой электродинамики, где имеется малый параметр — постоянная тонкой структуры.

Проблема вычисления вероятностей перехода сводится к исследованию гамильтониана вида:

$$H=H_0+H_1,$$

где H_0 — свободный гамильтониан, а H_1 — гамильтониан взаимодействия, к-рый по предположению включается в «отдаленном прошлом» ($t=-\infty$) и выключается в «отдаленном будущем» ($t=+\infty$).

В представлении взаимодействия Шрёдингера уравнение имеет вид:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=(H_0+H_1)\,\psi.$$

Посредством замены переменных

$$\psi=e^{-iH_0t}\varphi$$

можно получить для состояния φ уравнение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=H_1(t)\,\varphi,$$

где

$$H_1(t)=e^{iH_0t}H_1(0)\,e^{-iH_0t}.$$

Связь между начальными состояниями φ_{in}, описывающими «входящие» частицы, и конечными состояниями φ_{out}, описывающими «выходящие» частицы, формули-

руется в терминах так наз. оператора рассеяния S, определяемого соотношением вида:

$$\varphi_{out} = S\varphi_{in}.$$

Формально решение уравнения (10) можно построить методом последовательных приближений в виде разложения по степеням малости взаимодействия:

$$S = 1 - i\int_{-\infty}^{\infty} H_1(t)\,dt + \\ + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} H_1(t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} H_1(t')\,dt' + \ldots .$$

В квантовой теории поля справедлива аналогичная формула, в к-рую вместо $H_1(t)$ входит соответствующая плотность лагранжиана, причем используется представление S-оператора через T-произведение:

$$S(t) = T\left(e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} H_1(t)\,dt}\right) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T\{H(t_1)\ldots H(t_n)\}.$$

Действие оператора хронологического упорядочения T определяется правилами:

$$T\{H(t_1)H(t_2)\} = \begin{cases} H(t_1)H(t_2); & t_1 > t_2, \\ H(t_2)H(t_1); & t_2 > t_1, \end{cases}$$

причем это T-произведение формально не определено для совпадающих аргументов. Для преодоления такого рода трудностей, возникающих в методе В. т. в квантовой теории поля, созданы специальные методы регуляризации. Релятивистски инвариантная В. т. используется для вычисления так наз. S-матрицы, элементы к-рой определяют вероятности переходов между квантовыми состояниями различных полей под влиянием взаимодействия между ними.

Лит.: [1] Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, P., t. 1—3, 1892—97; Пуанкаре А., Избр. труды, т. 1—3, М., 1971—74; [2] Шарлье К., Небесная механика, пер. с нем., М., 1966; [3] Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, пер. с англ., М.—Л., 1941; [4] Колмогоров А. Н., О динамических системах с интегральным инвариантом на торе, «Докл. АН СССР», 1953, т. 93, № 5; [5] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [6] Мозер Ю., Лекции о гамильтоновых системах, пер. с англ., М., 1973; [7] Боголюбов Н. Н., Крылов Н. М., в кн.: Збірник праць з нелінійної механіки, К., 1937, с. 55—112; [8] их же, Введение в нелинейную механику, К., 1937; [9] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 5 изд., М., 1974; [10] Моисеев Н. Н., Асимптотические методы нелинейной механики, М., 1969; [11] Челомей В. Н., «Докл. АН СССР», 1956, т. 110, № 3; [12] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике, К., 1969; [13] Боголюбов Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, К., 1945; [14] Дородницын А. А. «Прикл. матем. и мех.», 1947, т. 11; [15] Тихонов А. Н., «Матем. сб.», 1948, т. 22, с. 193—204; [16] Понтрягин Л. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, с. 607; [17] Мищенко Е. Ф., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, с. 607; «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, с. 627; [18] Блохинцев Д. И., Основы квантовой механики, 5 изд., М., 1976; [19] Боголюбов Н. Н., Лекції з квантової статистики, К., 1949; [20] его же, Избранные труды, т. 2, К., 1970; [21] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 3 изд., М., 1976; [22] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969; [23] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, 3 изд., М., 1969; [24] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965.

Н. Н. Боголюбов (мл.).

ВОЗРАСТА ТЕОРИЯ — приближенное описание замедления нейтронов при упругом рассеянии их на ядрах среды. В. т. применима к определению пространственного распределения нейтронов различных энергий лишь в средах, не содержащих легких ядер (допустимы массовые числа $M \gg 2$, т. е. исключаются, напр., водород и дейтерий). В. т. предполагает, что в течение замедления нейтроны теряют энергию не дискретно, а непре-

рывно, и заменяет реальное поведение большого числа отдельных нейтронов нек-рыми средними, что верно лишь при малом разбросе энергий нейтронов в любой заданный момент после выхода их из источника. Это предположение позволяет ввести в качестве независимого переменного возрастную функцию и, используя возрастное приближение, получить возрастное уравнение

$$\nabla^2 q = \frac{\partial q}{\partial \tau}$$

в диффузионном приближении, совпадающее по форме с уравнением теплопроводности. Возрастное уравнение есть *параболического типа уравнение*, описывающее замедление нейтронов. При этом неизвестная функция q есть плотность замедления, т. е. число нейтронов в единице объема, пересекающих в единицу времени (при замедлении) данное значение энергии. Под возрастной функцией, играющей роль независимого переменного τ, понимается символический возраст нейтронов, равный времени замедления нейтронов (хронологич. возрасту), умноженному на средний за время замедления коэффициент диффузии. Корень квадратный из возраста тепловых нейтронов наз. длиной замедления теплового нейтрона. Физич. смысл возраста — это есть $^1/_6$ среднего квадрата расстояния, на к-рое смещается нейтрон за время от момента его выхода из точечного источника (возраст $\tau=0$) до рассматриваемого момента (соответствующего возрасту τ). Возрастное приближение, к-рое вместе с диффузионным приближением приводит к возрастному уравнению В. т., представляет собой переход от точных энергетич. операторов, описывающих замедление нейтронов, к приближенным.

Пространственное распределение нейтронов, обусловленное их диффузией в процессе замедления, определяет вероятность потери нейтронов для ядерного реактора и влияет на его критич. размеры.

Лит.: [1] Глесстон С. и Эдлунд М., Основы теории ядерных реакторов, пер. с англ., М., 1954.

В. А. Чуянов.

ВОЗРАСТАЮЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — такая последовательность x_n, что для всех $n=1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $x_n<x_{n+1}$. Иногда такие последовательности наз. строго возрастающими, а термин «В. п.» применяется к последовательностям, удовлетворяющим для всех n лишь условию $x_n \leqslant x_{n+1}$. Такие последовательности наз. также неубывающими. Всякая ограниченная сверху неубывающая последовательность имеет конечный предел, а всякая не ограниченная сверху имеет бесконечный предел, равный $+\infty$. *Л. Д. Кудрявцев.*

ВОЗРАСТАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ — такая функция $f(x)$, определенная на нек-ром числовом множестве E, что из условия

$$x'<x'',\ x'\in E,\ x''\in E$$

следует:

$$f(x')<f(x'').$$

Иногда такие функции наз. строго возрастающими, а термин «В. ф.» применяется к функциям, удовлетворяющим для указанных x' и x'' лишь условию

$$f(x') \leqslant f(x'')$$ (неубывающие функции).

У всякой строго В. ф. обратная функция является однозначной и также строго возрастающей. Если x_0 — правосторонняя (соответственно, левосторонняя) *предельная точка* множества E, $f(x)$ — неубывающая функция и множество $\{y : y=f(x),\ x>x_0,\ x\in E\}$ ограничено снизу (соответственно $\{y : y=f(x),\ x<x_0,\ x\in E\}$ ограничено сверху), то при $x\to x_0+0$ (соответственно, при $x\to x_0-0$), $x\in E$, у функции $f(x)$ существует конечный предел; если же указанное множество не ограничено снизу (со-

ответственно, сверху), то $f(x)$ имеет бесконечный предел, равный $-\infty$ (соответственно, $+\infty$).

Л. Д. Кудрявцев.

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение с частными производными вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0,$$

описывающее различные колебательные процессы и процессы распространения волн. Для В. у., являющегося уравнением гиперболич. типа, обычно ставятся две задачи: *Коши задача* и смешанная задача.

Классич. решением задачи Коши, описывающей распространение волн в n-мерном евклидовом пространстве E^n, наз. функцию $u(x, t)$, к-рая: непрерывно дифференцируема в $(n+1)$-мерном полупространстве $(x \in E^n, t \geqslant 0)$; дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет В. у. в полупространстве $(x \in E^n, t > 0)$; удовлетворяет начальным условиям

$$u(x, +0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, +0) = \psi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции.

Классич. решением смешанной задачи, описывающей колебания ограниченного объема $G \subset E^n$, наз. функцию $u(x, t)$, к-рая: непрерывно дифференцируема в замкнутом цилиндре $(x \in \bar{G}, t \geqslant 0)$; дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет В. у. в открытом цилиндре $(x \in G, t > 0)$; удовлетворяет для $x \in G$ начальным условиям

$$u(x, +0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, +0) = \psi(x)$$

и удовлетворяет к.-л. краевому условию на «боковой» поверхности указанного цилиндра.

Классич. решение задачи Коши для достаточно гладких $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дается так наз. *Пуассона формулой*, к-рая при $n=1$ переходит в *Д'Аламбера формулу*. В случае, когда в правой части В. у. вместо нуля стоит заданная функция $f(x, t)$, это уравнение наз. неоднородным В. у. и решение его дается так наз. *Кирхгофа формулой*. Смешанная задача для В. у. решается методом Фурье, методом конечных разностей и методом преобразования Лапласа.

Наряду с изучением указанных задач в приведенной выше классич. постановке рассматриваются вопросы существования и единственности классич. решений, понимаемых в более слабом смысле (см. [4]), а также обобщенных решений как задачи Коши, так и смешанной задачи (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966; [2] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; [3] Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953; [4] Ильин В. А., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 2 (92), с. 97—154; [5] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962. *Ш. А. Алимов.*

ВОЛНОВОЙ ВЕКТОР — вектор $k = (k_1, \ldots, k_m)$, входящий в выражение

$$a \exp\left(i \sum_{j=1}^{m} k_j x_j - i\omega t\right), \qquad (*)$$

где a и ω — постоянные, t — время.

Физически (*) обычно интерпретируется как плоская волна частоты ω, распространяющаяся в направлении вектора k с длиной волны $\lambda = 2\pi/|k|$. Многие линейные однородные уравнения и системы уравнений с частными производными (в число к-рых входят важнейшие уравнения математич. физики, напр. *Максвелла уравнения*, *Волновое уравнение*) допускают решения в виде (*).

В. М. Бабич.

ВОЛНЫ на поверхности жидкости — отклонения поверхности жидкости от равновесного состояния, распространяющиеся под действием сил, стремящихся восстановить это состояние. В зависимости от

природы восстанавливающих равновесие сил: поверхностного натяжения или тяжести, В. на поверхности жидкости подразделяются соответственно на капиллярные и гравитационные В.

Теория гравитационных В. наиболее полно развита для потенциальных движений жидкости и особенно для плоскопараллельных движений; объемные силы, приложенные к частицам жидкости, суть силы тяжести. Определение потенциала скорости волнового движения требует интегрирования уравнения Лапласа: $\Delta\varphi=0$ при граничных условиях особого вида. Вдоль всей поверхности жидкости, уравнение к-рой $\xi=f(x, y; t)$ может быть найдено после решения задачи, давление постоянно. Это приводит на основании известного интеграла уравнений гидродинамики к первому граничному условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}|\operatorname{grad}\varphi|^2-gz=\text{const}, \qquad (1)$$

к-рое должно соблюдаться при $z=\xi$. Второе граничное условие следует из того, что во все время движения поверхность жидкости состоит из одних и тех же частиц. Именно, при $z=\xi$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial t}. \qquad (2)$$

Кроме этих условий, должно быть удовлетворено требование обтекания поверхности твердых тел, находящихся в потоке. Одновременно с граничными условиями должны удовлетворяться начальные условия, к-рые состоят в том, что при $t=0$ частицы жидкости должны иметь предписываемые им начальные скорости, а поверхность жидкости — выбранную для нее начальную форму. Это равноценно заданию потенциала скоростей при $t=0$ как функции x, y, z и заданию функции $f(x, y; t)$ при $t=0$.

Главная трудность задачи состоит в том, что все перечисленные условия необходимо должны выполняться на поверхности $\xi=f(x, y; t)$, уравнение к-рой может быть найдено лишь после решения самой задачи. В этом отношении задачи теории В. имеют много общего с задачами теории струй и фигур равновесия вращающейся жидкости.

Почти полная невозможность решения задач теории В. с точным соблюдением указанных граничных условий привела к возникновению теории бесконечно малых В. В этой теории предполагается, что скорости частиц жидкости и отклонения поверхности жидкости от равновесного горизонтального уровня есть величины малые. В этом предположении граничные условия (1) и (2) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-g\xi=\text{const}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\xi}{\partial t}=0.$$

Вместе с тем допускается возможность заменить в частных производных потенциала скоростей переменное $z=\xi$ нулем. При таком допущении граничное условие для функции φ получает вид:

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0}=0,$$

уравнение волновой поверхности — вид:

$$\xi=\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=0}.$$

Основные результаты, полученные в теории бесконечно малых В., дали возможность разобрать многие важные задачи геофизики и выяснить, напр., законы распространения приливных В. на поверхности Мирового океана. Теория бесконечно малых В. нашла приложение к решению задач об образовании В. движущимися судами и дала возможность построить гидродинамич. теорию качки судов на волнении. Широкое применение методов теории функций комплексного переменного по-

зволило решить ряд весьма сложных задач о распространении В. в бассейнах переменной глубины и рассмотреть вопросы, связанные с дифракцией и отражением В. от плавающих тел.

Теория В. конечной амплитуды развита в работах А. И. Некрасова (см. [3]), к-рые дали возможность найти вид периодических В. в предположениях плоской задачи с точным удовлетворением граничных условий (1) и (2). Определение соответствующего потенциала скоростей было сведено к отысканию функции, устанавливающей конформное отображение области, занятой одной В., на круг или на область, ограниченную двумя концентрич. окружностями. Эта функция находится из решения нек-рого нелинейного интегрального уравнения.

С развитием теории нелинейных граничных задач и интегральных уравнений теория В. конечной амплитуды обогатилась новыми результатами. В частности, было дано доказательство существования одиночной В. и предельной волны Стокса с угловой точкой на ее профиле. В теории стоячих В. конечной амплитуды, то есть периодических собственных колебаний поверхности жидкости, существуют лишь приближенные решения, основанные на применении переменных Лагранжа.

Определение стоячих и установившихся В. на поверхности трехмерного потока представляет трудную задачу даже при отыскании ее приближенного решения.

Лит.: [1] Ламб Г., Гидродинамика, пер. с англ., М.—Л., 1947; [2] Милн-Томсон Л. М., Теоретическая гидродинамика, пер. с англ., М., 1964; [3] Некрасов А. И., Собр. соч., т. 1, М., 1961, с. 358—439; [4] Стокер Дж. Дж., Волны на воде, пер. с англ., М., 1959; [5] Теория поверхностных волн, сб. переводов, М., 1959. *Л. Н. Сретенский.*

ВОЛЬТЕРРА ОПЕРАТОР — линейный вполне непрерывный оператор V, действующий в банаховом пространстве, спектр к-рого состоит из нулевой точки. Напр., линейный интегральный оператор Вольтерра в пространстве функций, суммируемых с квадратом на $[a, b]$, имеет вид

$$Vy = \int_a^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds.$$

Нелинейным интегральным оператором Вольтерра наз. оператор вида

$$Vy = \int_a^x K(x, s, \varphi(s))\,ds.$$

Название по имени В. Вольтерра (V. Volterra), изучавшего соответствующие такому оператору интегральные *Вольтерра уравнения*. *А. Б. Бакушинский.*

ВОЛЬТЕРРА УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение вида

$$\int_a^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x) \qquad (1)$$

(линейное интегральное В. у. I рода) или вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x) \qquad (2)$$

(линейное интегральное В. у. II рода). Здесь x, s, a — действительные числа, λ (вообще говоря) — комплексный параметр, $\varphi(s)$ — неизвестная функция, $f(x)$, $K(x, s)$ — заданные функции, суммируемые с квадратом соответственно на отрезке $[a, b]$ и в области $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant x$. При этом функция $f(x)$ наз. свободным членом В. у., а функция $K(x, s)$ — ядром В. у.

В. у. могут рассматриваться как частный вид *Фредгольма уравнений*, когда ядро $K(x, s)$, задаваемое на квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$, обращается в нуль в треугольнике $a \leqslant x < s \leqslant b$. В. у. II рода без свободного члена наз. однородным В. у. Выражение

$$\int_a^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

определяет интегральный оператор, действующий в L_2; он наз. *Вольтерра оператором.*

Впервые уравнения вида (2) были систематически рассмотрены В. Вольтерра [1], [2]. Частный вид В. у. (1) — *Абеля интегральное уравнение*, был впервые рассмотрен Н. Х. Абелем (N. H. Abel). Основной результат теории В. у. II рода состоит в следующем. При любом комплексном $\lambda \neq \infty$ существует, и притом единственное, суммируемое с квадратом решение В. у. II рода. Это решение может быть получено методом последовательных приближений, т. е. как предел сходящейся в среднем квадратической последовательности:

$$\varphi_{n+1}(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)\, \varphi_n(s)\, ds + f(x), \qquad (3)$$

φ_0— производная, суммируемая с квадратом. В случае непрерывного ядра $K(x, s)$ и $f \in C([a, b])$ эта последовательность сходится равномерно на $[a, b]$ к единственному непрерывному решению.

Относительно В. у. I рода справедливы следующие утверждения. Если $f(s)$ и $K(x, s)$ дифференцируемы, $K(x, x) \neq 0$, $x \in [a, b]$, и если $K(x, x)$ и $K'_x(x, s)$ суммируемы с квадратом соответственно на $[a, b]$ и на $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$, то В. у. I рода эквивалентно В. у. II рода, полученному дифференцированием из В. у. I рода и имеющему вид

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K'_x(x, s)}{K(x, x)}\, \varphi(s)\, ds = \frac{f'(x)}{K(x, x)}.$$

Если $K(x, x) = 0$ по крайней мере в одной точке, решение В. у. I рода требует более сложного исследования. Если же $K(x, x) \equiv 0$, то (при нек-рых условиях) операцию дифференцирования можно повторить. В случае, когда дифференцирование невозможно или не приводит к В. у. II рода, можно, вообще говоря, указать только тривиальный критерий разрешимости. Именно, В. у. (1) разрешимо тогда и только тогда, когда f принадлежит области значений интегрального оператора Вольтерра левой части. Решение В. у. (1) в этом случае может быть получено, напр., при помощи регуляризующего алгоритма (см. *Регуляризация*).

Для практич. приложений В. у. II рода весьма важно уметь хотя бы приближенно вычислить его решение, напр., при помощи последовательных приближений. Однако обычно более удобны методы другого типа, один из к-рых заключается в следующем. Пусть f и K — непрерывные функции. Отрезок $[a, b]$ разбивается точками деления x_i на N равных частей, причем $x_0 = a$, $x_N = b$. Для того чтобы найти приближенно $\varphi(x_i)$, интеграл по отрезку заменяется квадратурной суммой, напр. при помощи формулы прямоугольников с узлами $x_0, \ldots, x_{i-1}$:

$$\int_a^{x_i} K(x_i, s)\, \varphi(s)\, ds \approx \sum_{j=0}^{i-1} K(x_i, x_j)\, \varphi(x_j)\, \frac{b-a}{N}.$$

Для получения $\varphi(x_i)$ используется рекуррентное соотношение:

$$\varphi(x_i) = \lambda \frac{b-a}{N} \sum_{j=0}^{i-1} K(x_i, x_j)\, \varphi(x_j) + f(x_i), \qquad (4)$$

$$\varphi(x_0) = f(a).$$

Значения приближенного решения в точках из $[a, b]$, лежащих между точками деления, могут быть найдены, напр., при помощи соотношения:

$$\varphi(x) \simeq \lambda \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^{i-1} K(x, x_j)\, \varphi(x_j) + f(x), \qquad (5)$$

$$x_{j-1} < x \leqslant x_j.$$

Это приближенное решение при $N \to \infty$ сходится равномерно к точному решению В. у. II рода.

Возможны многочисленные модификации приведенного метода.

Все сказанное выше справедливо также для В. у., у к-рых ядро $K(x, s)$ есть матрица размера $r\times r$, а φ и f суть r-мерные вектор-функции.

Уравнением Вольтерра, или обобщенным уравнением Вольтерра, наз. также более общее интегральное уравнение вида:

$$\varphi(P)-\lambda\int_{D(P)}K(P,\ Q)\varphi(Q)\,dQ=f(P), \qquad (6)$$

если последовательные приближения вида (3) сходятся в том или ином смысле (напр., равномерно или в среднем) на области определения функций φ и f при $\lambda\neq\infty$. Здесь P и Q — точки n-мерного евклидова пространства, $D(P)$ — область интегрирования, вообще говоря, зависящая от точки P, и $D(P)\subseteq D$ при любом P. Примером может служить уравнение:

$$\varphi(x,\ y)-\lambda\int_a^x\int_a^b K(x,\ y,\ \xi,\ \eta)\varphi(\xi,\ \eta)\,a\xi d\eta=f(x,\ y).$$

Если функция $K(x, y, \xi, \eta)$ суммируема с квадратом при $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$, $a\leqslant\xi\leqslant b$, $a\leqslant\eta\leqslant b$, а $f(x, y)$ суммируема с квадратом при $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$, то последовательность (3) сходится в среднем квадратическом при $\lambda\neq\infty$. Обобщенное В. у. I рода обычно не удается свести к В. у. II рода, хотя такие случаи возможны.

Дальнейшим обобщением В. у. вида (2) и (6) служит линейное операторное уравнение:

$$\varphi-\lambda A\varphi=f, \qquad (7)$$

где φ и f — элементы банахова пространства E, λ — комплексный параметр, A — линейный *вполне непрерывный оператор*. Это уравнение наз. операторным уравнением Вольтерра, а оператор A — оператором Вольтерра, или абстрактным оператором Вольтерра, если оператор $(I-\lambda A)$ обратим в E при любом $\lambda\neq\infty$. В этом случае последовательность вида: $\varphi_0\in E$ — произвольное, $\varphi_{n+1}=\lambda A\varphi_n+f$, сходится по норме пространства E к решению уравнения (7). В современной теории операторов Вольтерра и В. у. установлены глубокие связи между абстрактным и обычным интегральным операторами Вольтерра.

Нелинейными уравнениями Вольтерра наз. иногда В. у., в к-рых произведение $K(x, s)\varphi(s)$ заменено нек-рой нелинейной (относительно $\varphi(s)$) функцией $K(x, s, \varphi(s))$. Уравнения такого типа часто встречаются в теоретических и прикладных исследованиях. Так, задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения может быть легко сведена к задаче решения нелинейного В. у. Применение теории потенциала к краевым задачам для уравнений параболич. типа сводит эти краевые задачи к обобщенному В. у. Для нелинейных В. у. при тех или иных предположениях относительно $K(x, s, \varphi(s))$ может быть доказана сходимость последовательных приближений вида (3) на отрезке $[a, a+\Delta a]$, где Δa достаточно мало. Для приближенного решения нелинейных В. у. применяется рекуррентное соотношение (4); нужно только заменить $K(x_i, x_j)\varphi(x_j)$ на $K(x_i, x_j, \varphi(x_j))$. В случае, когда $K(x, s, \varphi(s))$ не зависит от x, этот метод совпадает с методом Эйлера.

Лит.: [1] Volterra V., «Rend. Accad. Lincei», 1896, t. 5, p. 177—185, 289—300; [2] его же, «Ann. di math.», 1897, (2), t. 25, p. 139—187; [3] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, 5 изд., М., 1958; [4] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, М., 1967; [5] Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 3 изд., М., 1965; [6] Тихонов А. Н., «Бюллетень Моск. ун-та» (А), 1938, т. 1, в. 8, с. 1—25. *А. Б. Бакушинский.*

ВОЛЬТЕРРА ЯДРО — функция (матрица-функция) $K(s, t)$ двух действительных переменных s, t такая, что или $K(s, t)\equiv 0$ при $a\leqslant s<t\leqslant b$ или $K(s, t)\equiv 0$ при $a\leqslant t<s\leqslant b$. Если такая функция является ядром линейного интегрального оператора, действующего в пространстве

$L_2(a, b)$ и сама квадратично суммируема в треугольнике, в к-ром она отлична от нуля, то порожденный ею оператор является интегральным *Вольтерра оператором*.

А. Б. Бакушинский.

ВОЛЬФОВИЦА НЕРАВЕНСТВО — неравенство, определяющее нижнюю границу для математич. ожидания квадрата отклонения статистич. оценки от истинного значения параметра, полученного методом *последовательного анализа*. В. н. является аналогом *Рао — Крамера неравенства* для выборок постоянного объема. Получено Дж. Вольфовицем (J. Wolfowitz).

И. В. Романовский.

ВОРОНОГО МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — *матричный метод суммирования* последовательности; определяется числовой последовательностью $\{p_n\}$ и обозначается символом (W, p_n). Последовательность $\{s_n\}$ суммируется методом (W, p_n) к числу S, если

$$\frac{s_0p_n + s_1p_{n-1} + \ldots + s_np_0}{p_0 + p_1 + \ldots + p_n} \longrightarrow S.$$

В частности, при $p_0=1$, $p_k=0$, $k\geqslant 1$, суммируемость последовательности методом (W, p_n) к числу S означает, что эта последовательность сходится к S. При $p_k=1$, $k\geqslant 0$ получается *Чезаро метод суммирования*. Если $p_0>0$, $p_k\geqslant 1$, $k\geqslant 1$, то метод (W, p_n) является *регулярным методом суммирования* тогда и только тогда, когда $p_n/(p_0+p_1+\ldots+p_n)\to 0$. Два любых регулярных метода (W, p_n) и (W, p''_n) совместны (см. *Совместность методов суммирования*).

В. м. с. был впервые введен Г. Ф. Вороным [1] и был переоткрыт в 1919 Н. Э. Нёрлундом (N. E. Nörlund). Поэтому иногда в зарубежных источниках методы (W, p_n) наз. методами Нёрлунда и обозначаются (N, p_n) или $N(p_n)$.

Лит.: [1] Вороной Г. Ф., в кн.: Дневник одиннадцатого съезда русских естествоиспытателей и врачей, СПБ, 1902, с. 60—61; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951, с. 88—121.

Ф. И. Харшиладзе.

ВОРОНОГО ТИПЫ РЕШЕТОК — типы *точечных решеток* n-мерного евклидова пространства E^n, введенные Г. Ф. Вороным в 1908 (см. [1]) в связи с задачей о параллелоэдрах.

Множество точек ε в E^n наз. (r, R)-системой, если в нем нет точек ближе чем на фиксированном расстоянии $r>0$ друг от друга, и всякий шар радиуса, большего чем фиксированное R, содержит хотя бы одну точку из ε. Пусть D — выпуклый многогранник области Дирихле точки из системы ε, т. е. области точек пространства, к-рые отстоят от какой-либо точки системы не дальше, чем от всех других ее точек. Области Дирихле точек (r, R)-системы ε попарно не имеют общих внутренних точек, покрывают все пространство (т. е. образуют разбиение) и смежны целыми гранями (т. е. составляют нормальное разбиение). С той же системой ε можно связать дуальное к $\{D\}$ тоже нормальное разбиение $\{L\}$ на многогранники L (вписанные в сферы), каждый из к-рых есть выпуклая оболочка точек системы ε, соответствующих всем D, сходящимся в вершине разбиения $\{D\}$.

Две n-мерные точечные решетки относятся к одному типу Вороного, когда их разбиения $\{L\}$ аффинны друг другу. Если репер таков, что при любых достаточно малых изменениях его метрич. параметров (скалярных квадратов a_{ii} и скалярных произведений a_{ik} $(i\neq k)$ его векторов) разбиение решетки, построенной на измененном репере, получается из разбиения $\{L\}$ решетки, построенной на исходном репере тем же аффинным преобразованием, к-рое переводит исходный репер в измененный репер, то репер наз. примитивным или общим. Для этого необходимо и достаточно, чтобы разбиение $\{L\}$ для исходного репера было симплициальным. Точка M пространства E^N параметров

a_{ik} (где $N=n(n+1)/2$), соответствующая такому реперу тоже наз. о б щ е й. Полная линейно связная область Δ, содержащая общую точку, в к-рой разбиения $\{L\}$ для всех ее точек получаются из разбиения $\{L\}$ для решетки, построенной на репере, соответствующем точке M, теми же аффинными преобразованиями, при помощи к-рых реперы, соответствующие этим точкам, получаются из репера, соответствующего точке M, наз. о б л а с т ь ю т и п а т о ч к и M. Г. Ф. Вороной доказал, что в E^N область Δ имеет вид выпуклого многогранного угла (гоноэдра) с вершиной в начале координат и с конечным числом граней и что для любого заданного n существует лишь конечное число ψ неэквивалентных областей Δ. Он дал также алгоритм для их нахождения (см. [1]). Для $n=1, 2, 3, 4$ число ψ равно соответственно 1, 1, 1, 3. Г. Ф. Вороной доказал также, что самое общее (т. е. не обязательно разбиение Дирихле) нормальное разбиение E^n на одинаковые выпуклые и параллельно расположенные многогранники, сходящиеся по $n+1$ в вершинах (примитивные параллелоэдры), есть аффинный образ разбиения $\{D\}$ для решетки, и свел, таким образом, изучение этих параллелоэдров к теории квадратичных форм. Для непримитивных параллелоэдров (т. е. в случае, когда в нек-рых вершинах сходится больше чем $n+1$ параллелоэдр) вопрос о возможности их аффинно преобразовать в область D решетки для произвольного n пока (1977) открыт. Известно только его положительное решение для $n=2, 3, 4$ (см. [2]).

Примитивная область D для двумерной решетки есть выпуклый шестиугольник с центром симметрии, вписанный в круг, и обратно. В случае трехмерной решетки это нек-рый 14-гранник, комбинаторно такой же, как кубооктаэдр с восемью шестиугольными и шестью четырехугольными гранями, грани к-рого имеют центры симметрии, и такой, что отрезки, идущие из его центра в центры граней, перпендикулярны к граням, и обратно. Непримитивная область D при $n=2$ — прямоугольник, а при $n=3$ — или додекаэдр с четырьмя шестиугольными и восьмью параллелограмматич. гранями, или параллелограмматич. додекаэдр, или прямая шестиугольная призма с основанием — примитивным двумерным D, или прямоугольный параллелепипед. Для $n=4$ имеется 3 примитивных D разных В. т. р. и 49 непримитивных. При переходе к $n=5$ происходит скачок — для $n=5$ уже 221 различных примитивных D (см. [4]). Этот результат был получен введением нового понятия C-т и п а р е ш е т к и: в один C-тип относят те решетки, у к-рых аффинны друг другу не сами разбиения $\{L\}$, а лишь их одномерные остовы.

Лит.: [1] В о р о н о й Г. Ф., Собр. соч., т. 2, К., 1952, с. 239—368; [2] Д е л о н е Б. Н., «Изв. АН СССР, 7 сер., Отд. физ.-матем. наук», 1929, № 1, с. 79—110; № 2, с. 147—64; [3] е г о ж е, «Успехи матем. наук», 1937, в. 3, с. 16—62; 1938, в. 4, с. 102—64; [4] Р ы ш к о в С. С., Б а р а н о в с к и й Е. П., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1975, т. 137, с. 1—133.

Б. Н. Делоне.

ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТЕОРИЯ — раздел теории вероятностей, описывающий широкий круг явлений, связанных с отказом и восстановлением элементов какой-либо системы. Основные понятия в В. т. — понятия процесса восстановления и уравнения восстановления. П р о ц е с с в о с с т а н о в л е н и я описывается с помощью классич. схемы сумм независимых случайных величин следующим образом. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых, неотрицательных, одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Пусть $\zeta_0=0$, $\zeta_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$, $n\geqslant 1$. Процесс восстановления N_t определяется следующим образом

$$N_t=\max\{n:\zeta_n\leqslant t\}. \qquad (1)$$

Если ξ_i интерпретировать как длительности работы к.-л. последовательно заменяемых элементов, то слу-

чайная величина N_t равна числу замен (или восстановлений) этих элементов за время t. При исследовании N_t большую роль играет ф у н к ц и я в о с с т а н о в л е н и я $H(t)=\mathsf{E}N_t$. Эта функция удовлетворяет у р а в н е н и ю в о с с т а н о в л е н и я:

$$H(t)=F(t)+\int_0^t H(t-u)\,dF(u). \qquad (2)$$

В случае, когда $F(t)=1-e^{-\rho t}$, $t\geqslant 0$, имеет место важный частный случай процесса восстановления — *пуассоновский процесс*, в к-ром

$$\mathsf{P}\{N(t)=k\}=\frac{(\rho t)^k}{k!}e^{-\rho t}, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

и $H(t)=\rho t$.

Процесс восстановления N_t и уравнение восстановления (2) имеют большое значение при исследовании различных задач как прикладного, так и теоретич. характера в теории массового обслуживания, в теории надежности, в теории запасов, в теории *ветвящихся процессов* и т. п. Значительное количество результатов в В. т. связано с изучением асимптотических при $t\to\infty$ свойств функции восстановления $H(t)$. В элементарной теореме восстановления утверждается, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t}=\frac{1}{m}, \qquad (3)$$

где $m=\mathsf{E}\xi_i$. Д. Блэкуэлл (D. Blackwell, 1948) доказал (см. [1]), что в случае, если распределение ξ_i не сосредоточено на к.-л. арифметич. решетке вида $\{0, d, 2d, \ldots\}$, $d>0$, то при любом $h>0$

$$\lim_{t\to\infty}[H(t+h)-H(t)]=\frac{h}{m}. \qquad (4)$$

Имеются многочисленные результаты, обобщающие и уточняющие (3) и (4) в различных направлениях. С помощью результатов типа (3) и (4) изучаются асимптотич. свойства решения $X(t)$ у р а в н е н и я т и п а в о с с т а н о в л е н и я

$$X(t)=K(t)+\int_0^t X(t-u)\,dF(u),$$

в к-ром свободный член $K(t)$ есть нек-рая функция, отличная от $F(t)$ и удовлетворяющая тем или иным условиям.

Из определения (1) вытекает соотношение

$$\mathsf{P}\{N_t\geqslant n\}=\mathsf{P}\{\zeta_n\leqslant t\}. \qquad (5)$$

Поскольку предельные теоремы для сумм ζ_n независимых слагаемых хорошо изучены, то соотношение (5) позволяет получать предельные теоремы для числа восстановлений N_t.

Имеется большое количество обобщений изложенной выше схемы. Одно из таких обобщений, связанное с полумарковскими процессами, дает так наз. м а р к о в с к и й п р о ц е с с в о с с т а н о в л е н и я, в к-ром система имеет какое-то количество состояний и времена работы отдельных элементов являются случайными величинами, зависящими от состояний системы до и после момента восстановления.

Лит.: [1] К о к с Д. Р., С м и т В. Л., Теория восстановления, пер. с англ., М., 1967. *Б. А. Севастьянов.*

ВПИСАННАЯ ЛОМАНАЯ — линия L, состоящая из конечного числа n прямолинейных отрезков A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$, концы к-рых A_i, $i=0, 1, \ldots, n$ расположены на данной плоской или пространственной линии Γ, причем точки A_i берутся в порядке возрастания параметра на кривой. Напр., частным случаем В. л. при $n=2$ является вписанный угол. См. также *Вписанные и описанные фигуры*. *М. И. Войцеховский.*

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ФИГУРЫ. Многоугольник наз. в п и с а н н ы м в выпуклую кривую, а кривая — о п и с а н н о й около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на кривой (рис. 1).

Многоугольник наз. о п и с а н н ы м вокруг выпуклой кривой, а кривая — в п и с а н н о й (в н е в п и с а н н о й) в многоугольник, если каждая сторона многоугольника (или ее продолжение) касается кривой. В ка-

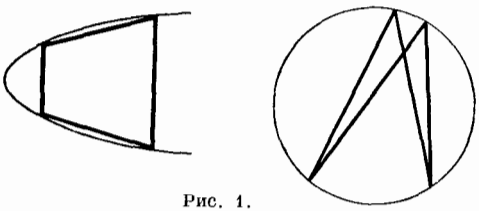


Рис. 1.

честве кривой чаще всего рассматривается окружность. Так, напр., всякий треугольник имеет одну описанную окружность и четыре вписанных, из к-рых три являются вневписанными (рис. 2).

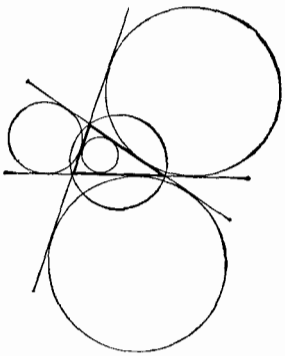


Рис. 2.

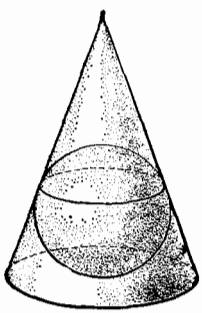


Рис. 3.

В. и о. ф. рассматриваются и в пространстве. В этом случае вместо многоугольника рассматривается многогранник, а вместо выпуклой линии — выпуклая поверхность, чаще всего сфера. Иногда говорят также о конусе, вписанном в сферу, о сфере, вписанной в конус (рис. 3) и т. п.

Лит.: [1] П е р е п е л к и н Д. И., Курс элементарной геометрии, ч. 1—2, М.—Л., 1948—49. *А. Б. Иванов.*

ВПИСАННЫЙ УГОЛ — угол, вершина к-рого лежит на плоской кривой, а стороны являются хордами этой кривой. Если кривая есть окружность, В. у. равен половине соответствующего центрального угла.

ВПОЛНЕ АДДИТИВНАЯ ФУНКЦИЯ м н о ж е с т в а (в анализе) — обычно *счетно аддитивная функция*.

ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — подмногообразие M^n риманова пространства V^N такое, что *геодезические линии* M^n являются одновременно геодезическими в V^N. В. г. м. характеризуется тем, что *вторая квадратичная форма*, соответствующая любому нормальному к M^n вектору, обращается в нуль (что равносильно равенству нулю всех нормальных кривизн M^n). *М. И. Войцеховский.*

ВПОЛНЕ ДЕДЕКИНДОВА РЕШЕТКА — полная решетка, в к-рой для любых ее элементов a_i, b_i, $i \in I$, таких, что $a_i \geqslant b_j$, при $i \neq j$ имеет место равенство

$$(\bigcap_{i \in I} a_i) \cap (\bigcup_{i \in I} b_i) = \bigcup_{i \in I} (a_i \cap b_i).$$

Всякая В. д. р. является дедекиндовой. Если в универсальной алгебре конгруэнции перестановочны, то решетка конгруэнций этой алгебры вполне дедекиндова [1].

Лит.: [1] D w i n g e r P h., «Proc. Neder. Ac.», 1958, ser. A, v. 61, p. 70—76. *О. А. Иванова.*

ВПОЛНЕ ЗАМКНУТОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — непрерывное отображение $f : X \to Y$, обладающее следующим свойством: для любой точки $y \in Y$ и всякого такого конечного семейства $\{O_1, \ldots, O_s\}$ открытых подмножеств пространства X, что $f^{-1}y \bigcup_{i=1}^{s} O_i$, множество

$\{y\} \cup (\cup_{i=1}^{s} f^{\#} O_i)$ открыто. При этом через $f^{\#} O_i$ обозначается *малый образ* множества O_i относительно отображения f. Всякое В. з. о. замкнуто. Для всякого В. з. о. $f : X \to Y$ нормального пространства X справедливо неравенство $\dim X \leqslant \max\{\dim Y, \dim f\}$. Поэтому с помощью В. з. о. удается выделить достаточно широкие классы бикомпактов с несовпадающими размерностями dim и ind. Кроме того, $\dim Y \leqslant \dim X + 1$ независимо от кратности отображения f. Пусть $y \in Y$, $f : X \to Y$ — В. з. о. и $R(f, y)$ — разбиение пространства X, элементами к-рого являются все прообразы $f^{-1}y'$ точек и все точки из $f^{-1}y$. Тогда для регулярного пространства X факторпространство X_f^y пространства X относительно разбиения $R(f, y)$ также является регулярным, это свойство — характеристическое для В. з. о. в классе замкнутых отображений.

В. В. Федорчук.

ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$\omega \equiv \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\, dx^i = 0, \qquad P_i \in \mathbb{C}^1, \qquad (*)$$

для к-рого через каждую точку нек-рой области в пространстве $\mathbb{R}^n$ проходит $(n-1)$-мерное интегральное многообразие. Необходимым и достаточным условием полной интегрируемости дифференциального уравнения $(*)$ является условие Фробениуса $\omega \wedge d\omega = 0$ ($\wedge$ — знак *внешнего произведения*, см. [1]). Для $n=3$ это условие принимает вид:

$$P_1\left(\frac{\partial P_3}{\partial x^2} - \frac{\partial P_2}{\partial x^3}\right) + P_2\left(\frac{\partial P_1}{\partial x^3} - \frac{\partial P_3}{\partial x^1}\right) + P_3\left(\frac{\partial P_2}{\partial x^1} - \frac{\partial P_1}{\partial x^2}\right) = 0.$$

Иногда вместо уравнения $(*)$ рассматривают систему уравнений (см. [2]):

$$dx^l = \sum_{j=1}^{n-1} a_j^i(x,\ t)\, dt^j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Условия полной интегрируемости в этом случае принимают вид:

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial a_j^i}{\partial x^l}(x,\ t)\, a_k^l(x,\ t) + \frac{\partial a_j^i}{\partial t^k}(x,\ t) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial a_k^i}{\partial x^l}(x,\ t)\, a_j^l(x,\ t) + \frac{\partial a_k^i}{\partial t^j}(x,\ t),$$

$$i,\ j,\ k = 1, \ldots, n.$$

Семейство интегральных многообразий В. и. д. у. представляет собой *слоение* (см. [3]).

Лит.: [1] Frobenius G., «J. reine und angew. Math.», 1877, Bd 82, S. 230—315; [2] Немыцкий В. В., «Матем. сб.», 1948, т. 23 (65), с. 161—86; [3] Новиков С. П., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1965, т. 14, с. 248—78. *Л. Э. Рейзинь.*

ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЙ ОПЕРАТОР, вполне непрерывное отображение,— непрерывный оператор f, действующий из одного *банахова пространства* X в другое пространство Y и переводящий слабо сходящуюся в X последовательность в последовательность, сходящуюся по норме в Y. При этом предполагается сепарабельность пространства X (для Y это требование необязательно; впрочем, область значений В. н. о. всегда сепарабельна). Другими словами, оператор f вполне непрерывен, если он отображает произвольное ограниченное подмножество X в компактное подмножество Y. Класс В. н. о. является важнейшим подклассом совокупности *компактных операторов*, содержащим, в частности, все компактные аддитивные операторы.

Определение (линейных) В. н. о. и простейшие их свойства были в 1904—06 высказаны Д. Гильбертом (см. [1]) для пространств l_2 и L_2 (см. *Гильбертово пространство*) и Ф. Риссом [2] (определение через компактность), а в общем случае — С. Банахом [3] (определение через последовательности). Термин «компактный оператор» становится более употребительным в связи с использова-

нием более общих, чем банаховы, топологических векторных пространств.

Лит.: [1] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen: Theorie der linearen Integralgleichungen, Lpz.—B., 1912; [2] Riesz F., «C. r. Acad. sci.», 1907, t. 149, p. 974—77; [3] Banach S., Théorie des opérations linéaires, Warsz., 1932.

М. И. Войцеховский.

ВПОЛНЕ НЕПРИВОДИМОЕ МНОЖЕСТВО — множество M линейных операторов в локально выпуклом топологическом векторном пространстве E, всюду плотное в алгебре $S(E)$ всех слабо непрерывных линейных операторов в E; при этом $S(E)$ рассматривается в слабой операторной топологии. Понятие В. н. м., введенное первоначально для случая банахова пространства, оказалось полезным в теории представлений групп, главным образом для полупростых групп Ли. Если M есть В. н. м., то оно также топологически неприводимо, т. е. всякое замкнутое подпространство в E, инвариантное относительно M, совпадает с нулем или со всем E. Если M есть В. н. м., то его коммутант в $S(E)$ состоит из операторов, кратных единице. Свойство полной неприводимости равносильно свойству топологич. неприводимости в следующих случаях: 1) $\dim E<\infty$, 2) M — полугруппа унитарных операторов в гильбертовом пространстве.

Лит.: [1] Желобенко Д. П., Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли, М., 1974.

Д. П. Желобенко.

ВПОЛНЕ НЕСВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО — пространство, в к-ром всякое подмножество, содержащее более одной точки, несвязно. Равносильное условие: компонента связности любой точки пространства состоит из одной этой точки. Топологич. произведение и топологич. сумма В. н. п., равно как и любое подпространство В. н. п., вполне несвязны. Любой вполне несвязный бикомпакт нульмерен (во всех смыслах). Такие бикомпакты важны, в частности, потому, что они являются стоуновскими пространствами булевых алгебр. Построено В. н. п. (веер Кнастера — Куратовского), лежащее на плоскости и превращающееся в связное пространство после присоединения к нему всего лишь одной точки. Это пространство не нульмерно. Подпространство гильбертова пространства, образованное точками, все координаты к-рых рациональны, вполне несвязно и одномерно. Если в пространстве каждая точка является пересечением всех открыто замкнутых множеств, его содержащих, то это В. н. п. (в частности, вполне несвязны все нульмерные пространства). Однако существует вполне несвязное метрич. пространство со счетной базой, в к-ром не всякая точка является пересечением содержащих ее открыто замкнутых множеств.

Лит.: [1] Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ., М., 1948; [2] Engelking R., Outline of General Topology, Amst., 1968; [3] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., М., 1968; [4] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968.

А. В. Архангельский, Б. А. Ефимов.

ВПОЛНЕ НЕСОВЕРШЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологич. пространство, не содержащее никакого подмножества, гомеоморфного канторову множеству. Напр., всякое полное сепарабельное несчетное пространство содержит несчетное подпространство, являющееся (вместе с его дополнением) В. н. п. *А. А. Мальцев.*

ВПОЛНЕ НОРМАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО — пространство, в к-ром для любых двух подмножеств A, B, удовлетворяющих условиям $[A]\cap B=\varnothing$, $A\cap[B]=\varnothing$, имеются дизъюнктные окрестности; здесь $[A]$ и $[B]$ — замыкания множеств A и B, а $\varnothing$ — пустое множество. В. н. п. и только они наследственно нормальны. *Совершенно нормальные пространства* являются В. н. п. Обратное неверно. Существуют также *нормальные пространства*, не являющиеся В. н. п. *В. И. Пономарев.*

ВПОЛНЕ ОГРАНИЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО в метрическом пространстве — то же, что вполн-

не ограниченное подпространство данного метрич. пространства. См. *Вполне ограниченное пространство.*

А. В. Архангельский.

ВПОЛНЕ ОГРАНИЧЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО — метрическое пространство X, к-рое при любом $\varepsilon>0$ может быть представлено как объединение конечного числа множеств диаметра меньше ε. Равносильное условие: для каждого $\varepsilon>0$ в пространстве X существует конечная ε-с е т ь, т. е. такое конечное множество A, что каждая точка множества X отстоит от нек-рой точки множества A на расстоянии, меньшем ε. В. о. п. являются те и только те метрич. пространства, к-рые могут быть представлены как подпространства метрич. *бикомпактных пространств.* Метрич. В. о. п., рассматриваемые как топологические, в точности исчерпывают все *регулярные пространства* со счетной базой. Подпространство евклидова пространства является В. о. п. в том и только в том случае, если оно ограничено. Обратное неверно: бесконечное множество, в к-ром расстояние между любыми двумя различными точками равно 1, а также сфера и шар гильбертова пространства являются ограниченными, но не вполне ограниченными метрич. пространствами. О значении понятия В. о. п. свидетельствует теорема: метрич. пространство является *компактом* в том и только в том случае, если оно вполне ограничено и полно. Метрич. пополнение метрич. В. о. п. есть компакт. Образ метрич. В. о. п. при равномерно непрерывном отображении есть В. о. п.

Лит.: [1] К е л л и Д ж. Л., Общая топология, пер. с англ., М., 1968; [2] Х а у с д о р ф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.—Л., 1937; [3] А л е к с а н д р о в П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., 1948; [4] К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В., Элементы функционального анализа, 4 изд., М., 1976. *А. В. Архангельский.*

ВПОЛНЕ ПРИВОДИМАЯ МАТРИЧНАЯ ГРУППА — матричная группа G над произвольным фиксированным полем P, все матрицы к-рой одновременным сопряжением посредством нек-рой матрицы над P можно привести к к л е т о ч н о - д и а г о н а л ь н о м у в и д у, т. е. к виду

$$x=\begin{Vmatrix} d_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & d_m(x) \end{Vmatrix},$$

где $d_i(x)$, $i=1, \ldots, m$, — квадратные матрицы, а на остальных местах стоят нули, причем каждая матричная группа $d_i(G)$ неприводима (см. *Неприводимая матричная группа*). На языке преобразований: группа G линейных преобразований конечномерного векторного пространства V над полем наз. вполне приводимой, если выполнено любое из трех следующих равносильных условий: 1) любое подпространство из V, инвариантное относительно G, имеет прямое дополнение, инвариантное относительно G (см. *Инвариантное подпространство*); 2) V разлагается в прямую сумму минимальных инвариантных относительно G подпространств; 3) V порождается минимальными инвариантными относительно G подпространствами. Всякая конечная матричная группа G над полем, характеристика к-рого не делит порядок G, вполне приводима. Всякая нормальная подгруппа вполне приводимой матричной группы сама вполне приводима.

Лит.: [1] М е р з л я к о в Ю. И., Рациональные группы, Новосибирск, 1967; [2] Х о л л М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962. *Ю. И. Мерзляков.*

ВПОЛНЕ ПРИВОДИМОЕ МНОЖЕСТВО — множество M линейных операторов в топологическом векторном пространстве E, обладающее тем свойством, что всякое замкнутое подпространство в E, инвариантное относительно M, имеет в E инвариантное дополнение. В гильбертовом пространстве E всякое множество M, симметричное относительно эрмитова сопряжения, есть В. п. м. (в частности, всякая группа унитарных операторов есть В. п. м.). Представление φ алгебры A (группы, кольца и т. д.) наз. в п о л н е п р и в о д и м ы м, если множе-

ство $M=\{\varphi(a),\ a\in A\}$ вполне приводимо. Если A — компактная группа или полупростая связная группа (алгебра) Ли, то всякое представление A в конечномерном векторном пространстве вполне приводимо (принцип полной приводимости).

Лит.: [1] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970. *Д. П. Желобенко.*

ВПОЛНЕ ПРИВОДИМЫЙ МОДУЛЬ — модуль A над ассоциативным кольцом R, представимый в виде суммы своих неприводимых R-подмодулей (см. *Неприводимый модуль*). Эквивалентные определения: A является суммой минимальных подмодулей; A изоморфен прямой сумме неприводимых модулей; A совпадает со своим цоколем. Подмодуль и фактормодуль В. п. м. также вполне приводимы. Решетка подмодулей модуля M является решеткой с дополнениями тогда и только тогда, когда модуль M вполне приводим.

Если всякий правый R-модуль над кольцом R вполне приводим, то и всякий левый R-модуль вполне приводим, и обратно; в этом случае R наз. вполне приводимым кольцом, или *классически полупростым кольцом*. Для того чтобы кольцо R было вполне приводимо, достаточно, чтобы оно, рассматриваемое как левый (правый) модуль над собой, было вполне приводимо.

Лит.: [1] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971; [2] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961. *О. А. Иванова.*

ВПОЛНЕ ПРОСТАЯ ПОЛУГРУППА — один из важнейших типов простых полугрупп. Полугруппа S наз. вполне простой (вполне 0-простой — в. 0-п. п), если она идеально проста (0-проста) и содержит примитивный идемпотент, т. е. ненулевой идемпотент, не являющийся единицей ни для какого ненулевого идемпотента из S. Присоединение нуля к В. п. п. дает в. 0-п. п., поэтому многие свойства В. п. п. можно непосредственно вывести из соответствующих свойств в. 0-п. п.

Полугруппа S будет в. 0-п. п. тогда и только тогда, когда она 0-проста и удовлетворяет одному из следующих условий: S обладает минимальными ненулевыми левыми и правыми идеалами; нек-рая степень любого элемента из S принадлежит подгруппе полугруппы S. В частности, любая периодическая (и, тем более, конечная) 0-простая полугруппа будет в. 0-п. п. Всякая в. 0-п. п. есть 0-бипростая *регулярная полугруппа* и является объединением своих минимальных ненулевых левых(правых) идеалов. Полугруппа S будет В. п. п. тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из следующих условий: S есть прямоугольная связка (см. *Связка полугрупп*) групп (которые необходимо изоморфны); S регулярная и все ее идемпотенты примитивны. Специальный тип В. п. п.— прямоугольная группа — прямое произведение группы на прямоугольную полугруппу (см. *Идемпотентов полугруппа*). В свою очередь, частным случаем последней является *правая группа* (левая группа). Важное представление в. 0-п. п. дает теорема Риса: полугруппа будет в. 0-п. п. тогда и только тогда, когда она изоморфна регулярной *рисовской полугруппе матричного типа* над группой с присоединенным нулем.

С рассмотрения конечных В. п. п. фактически началось развитие теории полугрупп (см. *Полугруппа*). В. 0-п. п. и В. п. п. часто возникают в различных теоретико-полугрупповых исследованиях и составляют один из наиболее изученных типов полугрупп.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, т. 1, 2, пер. с англ., М., 1972; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [3] Kapp K., Schneider H., Completely 0-simple semigroups, N. Y.—Amst., 1969. *Л. Н. Шеврин.*

ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНАЯ ПОЛУГРУППА — то же, что *клиффордова полугруппа*.

ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, в к-ром всякие два множест-

ва, из к-рых одно замкнуто, а другое состоит лишь из одной точки, функционально отделимы (см. *Отделимости аксиомы*). В. р. п., в к-рых все одноточечные множества замкнуты (т. е. вполне регулярные T_1-пространства), часто наз. тихоновскими пространствами. Они образуют один из важнейших классов топологич. пространств, выделяющийся многими замечательными свойствами и особенно часто встречающийся в приложениях топологии к другим областям математики. Так, напр., пространство всякой топологич. группы является В. р. п., но может не быть нормальным пространством. Все тихоновские пространства являются хаусдорфовыми и могут быть определены как пространства, имеющие (хаусдорфовы) бикомпактные расширения, т. е. как (даже всюду плотные) подпространства бикомпактов. Среди этих расширений данного пространства имеется единственное с точностью до гомеоморфизма максимальное или *Стоуна — Чеха бикомпактное расширение*, к-рое может быть непрерывно отображено на всякое (хаусдорфово) бикомпактное расширение данного пространства так, что каждая его точка отображается в себя.

Прямое определение тихоновских пространств без привлечения действительных чисел и функций основано (см. [3]) на рассмотрении двух сопряженных баз пространства — открытой $\mathfrak{B}$ и замкнутой $\mathfrak{A}$, причем сопряженность этих баз означает, что каждая база состоит из множества, дополнительных к множествам, составляющим другую базу. Такая пара $\{\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\}$ сопряженных баз наз. регулярной, если она удовлетворяет следующим условиям: 1) всякие два дизъюнктные замкнутые множества базы $\mathfrak{A}$ имеют дизъюнктные окрестности, принадлежащие $\mathfrak{B}$; 2) база $\mathfrak{A}$ является *сетью*, т. е. для произвольной точки $x \in X$ и ее произвольной окрестности Ox в базе $\mathfrak{B}$ найдется такой элемент B, что $X \setminus x \supset B \supset X \setminus O(x)$. Для того чтобы T_1-пространство было вполне регулярным, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало хотя бы одной регулярной парой сопряженных баз (теорема Зайцева).

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., 1948; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1970; [3] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., М., 1968; [4] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности, М., 1973; [5] Зайцев В. И., «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем.», 1967, № 3, с. 48—57.

П. С. Александров.

ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО — множество P с заданным на нем бинарным отношением $\leqslant$, удовлетворяющим условиям:

1) для любых $x, y \in P$ либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$;
2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$;
3) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$;
4) в любом непустом подмножестве $X \subset P$ существует такой элемент a, что $a \leqslant x$ для всех $x \in X$; таким образом В. у. м.—*линейно упорядоченное множество*, удовлетворяющее условию минимальности.

Понятие В. у. м. было введено Г. Кантором [1]. Примером В. у. м. служит естественным образом упорядоченное множество натуральных чисел. С другой стороны, отрезок действительных чисел $[0, 1]$ с естественным порядком не является В. у. м. Любое подмножество В. у. м. само вполне упорядоченное. Декартово произведение конечного числа В. у. м. вполне упорядочено отношением *лексикографического порядка*. Линейно упорядоченное множество является вполне упорядоченным тогда и только тогда, когда оно не содержит подмножества, антиизоморфного (см. *Антиизоморфизм* частично упорядоченных множеств) множеству натуральных чисел.

Наименьший элемент В. у. м. P наз. нулем (и обозначается 0). Для любого элемента $a \in P$ множество

$$[0, a) = \{x \mid x \in P,\ x < a\}$$

наз. начальным отрезком множества P. Для всякого элемента a, не являющегося наибольшим в P, существует элемент, непосредственно следующий за ним; его принято обозначать $a+1$. Элемент В. у. м., не имеющий непосредственно предшествующего, называется предельным.

Теорема о сравнении. Для любых двух В. у. м. P_1 и P_2 имеет место одна и только одна из следующих ситуаций: 1) P_1 изоморфно P_2, 2) P_1 изоморфно некоторому начальному отрезку множества P_2, 3) P_2 изоморфно начальному отрезку множества P_1.

Принимая в числе аксиом теории множеств *выбора аксиому*, можно доказать, что на всяком непустом множестве можно ввести отношение порядка, превращающее его во В. у. м. (т. е. всякое непустое множество можно вполне упорядочить). Эта теорема, называемая теоремой Цермело, на самом деле эквивалентна аксиоме выбора. Теорема Цермело и теорема о сравнении служат основанием для сравнения множеств по их мощности. *Порядковые типы* В. у. м. наз. трансфинитами, или *трансфинитными числами*.

Лит.: [1] Cantor G., «Math. Ann.», 1883, Bd 21, S. 51—8; [2] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., 1948; [3] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.—Л., 1937; [4] Бурбаки Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965; [5] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер с англ., М., 1970. *Б. А. Ефимов, Т. С. Фофанова.*

ВПОЛНЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ КОНГРУЭНЦИЯ — конгруэнция θ *алгебраической системы* $A=\langle A, \Omega\rangle$, к-рая выдерживает любой эндоморфизм σ этой системы, т. е. из $x\theta y$ следует $\sigma(x)\theta\sigma(y)$ $(x, y\in A)$. В. х. к. алгебраич. системы A образуют по включению полную подрешетку $C_v(A)$ решетки $C(A)$ всех конгруэнций системы A. Если $\mathfrak{M}$ — многообразие Ω-систем и F — свободная в $\mathfrak{M}$ система счетного ранга, то решетка $C_v(F)$ В. х. к. системы F инверсно изоморфна решетке $L_v(\mathfrak{M})$ всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}$. Всякая конгруэнция $\varkappa$ Ω-алгебры A с конечным числом порождающих, имеющая конечный индекс в A (т. е. конечное число смежных классов $a/\varkappa$, $a\in A$), содержит В. х. к. θ алгебры A, также имеющую конечный индекс в A.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970. *Д. М. Смирнов.*

ВПОЛНЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ПОДГРУППА — подгруппа группы G, инвариантная относительно всех эндоморфизмов группы G. Совокупность всех В. х. п. образует подрешетку в решетке всех подгрупп группы. Коммутант и члены нижнего центрального ряда являются В. х. п. в произвольной группе. Более того, любая *вербальная подгруппа* группы есть В. х. п. Для свободных групп верно и обратное: любая В. х. п. является вербальной.

Лит.: [1] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп, пер. с англ., М., 1974.
В. Н. Ремесленников.

ВРАЩЕНИЕ — частный случай *движения*, при к-ром по крайней мере одна точка пространства остается неподвижной. При В. плоскости неподвижная точка наз. центром вращения, при В. пространства неподвижная прямая — осью вращения. В. евклидова пространства наз. собственным (В. 1-го рода), или несобственным (В. 2-го рода) в зависимости от того, сохраняет оно или не сохраняет ориентацию пространства.

На плоскости собственное В. выражается аналитически в декартовых прямоугольных координатах (x, y) при помощи формул (начало координат в центре В.)

$$\tilde{x}=x\cos\varphi-y\sin\varphi,\quad \tilde{y}=x\sin\varphi+y\cos\varphi,$$

где φ — угол поворота. Собственное В. на угол φ может быть представлено как произведение двух осевых симметрий с осями, пересекающимися под углом $\varphi/2$. Несобственное В. на плоскости выражается аналитиче-

ски в декартовых прямоугольных координатах (x, y) при помощи формул (начало координат в центре В.):

$$\tilde{x}=x\cos\varphi+y\sin\varphi,$$
$$\tilde{y}=x\sin\varphi-y\cos\varphi,$$

где φ — угол поворота. Несобственное В. на плоскости может быть представлено как произведение собственного В. на осевую симметрию.

В случае n-мерного евклидова пространства В. аналитически выражается с помощью ортогональной матрицы, к-рая приводится к канонич. виду:

$$M=\begin{Vmatrix} u_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & u_k & & \\ & & & \varepsilon_p & \\ 0 & & & & -\varepsilon_q \end{Vmatrix},$$

где

$$u_i=\begin{Vmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{Vmatrix}.$$

ε_s — единичная матрица порядка $s(s=p,\ q)$. Возможны следующие случаи:

1) $p=n$ — тождественное преобразование;

2) $q=n$ — В. является центральной симметрией;

3) $p+q=n$ — В. является симметрией относительно p-плоскости (отражением от p-плоскости);

4) M не содержит подматриц ε_p и $-\varepsilon_q$ — В. наз. поворотом вокруг единственной неподвижной точки;

5) M содержит подматрицы u_i и ε_p, но не содержит подматрицу $-\varepsilon_q$ — В. наз. поворотом вокруг p-плоскости;

6) M содержит подматрицы u_i и $-\varepsilon_q$, но не содержит подматрицы ε_p — В. наз. поворотным отражением от $(n-q)$-плоскости.

В. евклидова пространства E_n вокруг данной точки образует группу относительно операции умножения В., изоморфную группе *ортогональных преобразований* векторного пространства R^n или группе ортогональных матриц порядка n над полем R. Группа В. пространства E_n является $n(n-1)/2$-мерной группой Ли и действует в E_n интранзитивно.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Многомерные пространства, М., 1966; [2] его же, Неевклидовы пространства, М., 1969; [3] Широков П. А., Тензорное исчисление. Алгебра тензоров, 2 изд., Казань, 1961. *В. Т. Базылев.*

ВРАЩЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ на плоскости — одна из его гомотопически инвариантных характеристик. Пусть X — векторное поле в области G евклидовой плоскости E^2, θ — угол между X и нек-рым фиксированным направлением; тогда вращением векторного поля X наз. деленное на 2π приращение угла θ при обходе замкнутой ориентированной кривой $L\in E^2$, вдоль к-рой $X\neq 0$. Так, напр., если L — гладкая класса C^2 кривая, то вращение касательного к L (или нормального к L) поля τ (или ν) вдоль L равно деленной на 2π полной *кривизне* L; если X — векторное поле (с возможными изолированными особыми точками) в G с жордановой границей ∂G то В. в. п. на ∂G равно сумме индексов особых точек X в замыкании G. (см. *Особой точки индекс*). При гомотопной деформации L, не проходящей через особые точки X, В. в. п. не изменяется.

Обобщением понятия В. в. п., заданного на n-мерном многообразии M, расположенном в E^N, является *степень отображения* его в $(N-n)$-мерную сферу; она связана с *эйлеровой характеристикой*. См. также *Пуанкаре теорема*, *Кронекера формула*. *М. И. Войцеховский.*

ВРАЩЕНИЙ ИНДИКАТРИСА, диаграмма вращений,— одна из 12 *Дарбу поверхностей*, ассоциированная с *бесконечно малым изгибанием* поверхности,— множество точек пространства, описываемое ра-

диус-вектором $\boldsymbol{y}$, параллельным вектору вращения (мгновенной угловой скорости), определяемому уравнением $d\boldsymbol{z}=[\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x}]$, где $\boldsymbol{z}$ — вектор скорости бесконечно малого изгибания поверхности с радиус-вектором $\boldsymbol{x}$. Аналогично вектором перемещений $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{z}-[\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}]$ определяется индикатриса (диаграмма) перемещений.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 2(24), с. 47—158; [2] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959.

М. И. Войцеховский.

ВРАЩЕНИЙ МЕТОД, метод Якоби,— метод решения полной проблемы собственных значений эрмитовой матрицы, основанный на подобном преобразовании эрмитовой матрицы к диагональному виду с помощью последовательности плоских вращений. В. м.— итерационный метод, он имеет простую вычислительную схему и всегда сходится, причем скорость сходимости асимптотически квадратичная. Наличие кратных и близких собственных значений у матрицы не вызывает осложнений. В. м. позволяет вычислить собственные значения как с нахождением собственных векторов, так и без них. Система собственных векторов, вычисленная по В. м., ортонормирована.

Идеи В. м. предложены в [1]. В современном виде это один из наиболее развитых и эффективных по реализации на ЭВМ методов решения полной проблемы собственных значений матрицы.

Классический В. м. состоит в построении последовательности матриц $A_0, A_1, A_2, \ldots$, где $A_0=A$ — исходная матрица, $A_k=U_k^*A_{k-1}U_k$, U_k — матрица плоского вращения, аннулирующего максимальный по модулю внедиагональный элемент матрицы A_{k-1}. При этом, если $A_k=\|a_{ij}^{(k)}\|$, $|a_{pq}^{(k-1)}|=\max\limits_{i\neq j}|a_{ij}^{(k-1)}|$, то матрица $U_k=\|u_{ij}^{(k)}\|$ отличается от единичной лишь элементами $u_{pp}^{(k)}$, $u_{qq}^{(k)}$, $u_{pq}^{(k)}$, $u_{qp}^{(k)}$. В действительном случае, когда A — симметрическая матрица,

$$\left.\begin{aligned} u_{pp}^{(k)}=u_{qq}^{(k)}=\cos\varphi;\quad u_{pq}^{(k)}=-u_{qp}^{(k)}=\sin\varphi,\\ \operatorname{tg}2\varphi=\frac{2a_{pq}^{(k-1)}}{a_{pp}^{(k-1)}-a_{qq}^{(k-1)}},\quad |\varphi|\leqslant\frac{\pi}{4}. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

В комплексном случае соотношения (*) незначительно усложняются.

Последовательность матриц A_k сходится к диагональной матрице Λ, скорость сходимости асимптотически квадратичная. Диагональные элементы матрицы Λ являются приближенными собственными значениями A, а столбцы матрицы $U^{(k)}=U_1U_2\ldots U_k$ — приближенными собственными векторами.

Реализация описанного варианта В. м. требует выбора максимального по модулю внедиагонального элемента матрицы на каждом шаге. Для выполнения этой операции на ЭВМ требуется значительный объем вычислительной работы.

Существуют другие варианты В. м., более эффективные в этом отношении: циклич. В. м., В. м. с барьером, В. м. с выбором оптимального элемента.

В циклическом В. м. пары индексов (p, q) аннулирующего элемента пробегают циклически все наддиагональные позиции. Недостатком этого процесса является возможность выполнения большого числа неэффективных вращений, аннулирующих малые внедиагональные элементы.

Этот недостаток частично устраняется в барьерном В. м., в к-ром вводится монотонно убывающая к нулю последовательность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, называемых барьерами, и при циклич. просмотре индексов (p, q) аннулируются лишь те внедиагональные элементы, к-рые по модулю меньше α_1. После того, как все внедиагональные элементы стали меньше α_1, барьер α_1

заменяется на барьер α_2 и процесс продолжается. Практич. использование этого варианта В. м. встречает ряд трудностей, связанных с выбором оптимального барьера.

Наиболее эффективным для использования в вычислительной практике является В. м. с выбором оптимального элемента [4]. В этом методе пары индексов (p, q) соответствуют почти максимальному элементу и выбираются так, что p — номер строки с максимальной евклидовой длиной, q — номер столбца максимального по модулю внедиагонального элемента p-й строки. Поскольку на каждом шаге процесса строки матрицы, за исключением p-й и q-й, не меняют длины, то выбор индексов (p, q) существенно не увеличивает общего объема вычислений. Вся теория классич. В. м. полностью переносится на описанную модификацию [2].

Расчетные формулы В. м., реализующие вычисление (*), обеспечивают сходимость процесса В. м. в реальных условиях машинной арифметики и высокую точность как собственных значений, так и собственных векторов [5].

Лит.: [1] Jacobi C. G. J., «J. reine und angew. Math.», 1846, Bd 30, S. 51—94; [2] Воеводин В. В., Численные методы алгебры, М., 1966; [3] Уилкинсон Дж. Х., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970; [4] Воеводин В. В., Ким Г. Д., Программа для нахождения собственных значений и собственных векторов симметрической матрицы методом вращений, в сб.: Вычислительные методы и программирование, М., 1962, с. 269—77; [5] Ким Г. Д., в сб.: Численный анализ на ФОРТРАН'е, в. 3, М., 1973, с. 97—113.

Г. Д. Ким.

ВРАЩЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, описываемая вращением плоской кривой L вокруг оси, лежащей в ее плоскости. Если L определяется уравнениями $\rho=\rho(u)$, $z=z(u)$, то радиус-вектор В. п. есть $r=\{\rho(u)\cos v,\ \rho(u)\sin v,\ z(u)\}$, где u — параметр кривой L, ρ — расстояние точки поверхности от оси вращения, v — угол поворота. Линейный элемент В. п.:

$$ds^2=(\rho'^2+z'^2)\,du^2+\rho^2\,dv^2.$$

Гауссова кривизна $K=-z'M/\rho N^4$, средняя кривизна $H=(z'N^2-\rho M)/2\rho N^3$, где $M=z'\rho''-z''\rho'$, $N=\sqrt{\rho'^2+z'^2}$. Линии $u=\text{const}$ наз. параллелями В. п. и представляют собой окружности, расположенные в плоскости, перпендикулярной оси вращения, с центрами на этой оси. Линии $v=\text{const}$ наз. меридианами; все они конгруэнтны вращаемой кривой и лежат в плоскостях, проходящих через ось вращения. Меридианы и параллели В. п. являются линиями кривизны и образуют *изотермическую сеть*.

В. п. допускает *изгибание* также в В. п., при к-ром сеть линий кривизны сохраняется и является потому главным основанием изгибания. *Омбилические точки* В. п. расположены на тех широтах, на к-рых центр кривизны меридиана лежит на оси вращения. Произведение радиуса параллели на косинус угла, под к-рым геодезич. линия В. п. пересекает параллель, постоянно вдоль геодезической (теорема Клеро).

Единственная минимальная В. п.— катеноид. Линейчатая В. п. есть однополостный гиперболоид или его вырождения: цилиндр, конус или плоскость. В. п., имеющая более одной оси вращения, есть сфера или плоскость.

И. Х. Сабитов.

ВРАЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ — теоремы, характеризующие изменение аргумента при конформном отображении. В. т. в классе S функций $f(z)=z+c_2z^2+\ldots$, регулярных и однолистных в круге $|z|<1$, дает точные оценки аргумента производной для функций этого класса:

$$|\arg f'(z)|\leqslant\begin{cases}4\arcsin|z| & \text{при } |z|\leqslant 2^{-1/2},\\ \pi+\ln\frac{|z|^2}{1-|z|^2} & \text{при } 2^{-1/2}\leqslant|z|<1.\end{cases}\qquad(*)$$

Здесь рассматривается та ветвь $\arg f'(z)$, к-рая равна нулю при $z=0$. Верхние и нижние границы для $\arg f'(z)$,

устанавливаемые неравенствами (*), являются точными при любом z из круга $|z|<1$. Эта В. т. получена Г. М. Голузиным (см. [1], [5]; точность неравенств (*) при $2^{-1/2}<|z|<1$ впервые доказана в [2]; полный анализ случаев равенства в этих оценках дается в [3]).

Т е о р е м а м и в р а щ е н и я в классе S наз. также оценки $\arg(f(z)/z)$ и оценки выражений вида

$$\lambda \arg f'(z)-(1-\lambda)\arg\frac{f(z)}{z}, \quad 0<\lambda<1.$$

Простейшими оценками такого рода в классе S являются точные неравенства (рассматриваются соответствующие ветви аргументов):

$$\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad \left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad |z|<1.$$

В. т. имеются и в других классах функций, реализующих однолистное конформное отображение круга или его внешности, и в классах функций, однолистных в многосвязной области (см. [5], [3], *Искажения теоремы*, *Однолистная функция*). В. т. распространены также на случай p-листных функций (см. Добавления в [5], а также *Многолистная функция*).

Лит.: [1] Г о л у з и н Г. М., «Матем. сб.», 1936, т. 1 (43), в. 1, с. 127—35; [2] Б а з и л е в и ч И. Е., «Матем. сб.», 1936, т. 1 (43), в. 3, с. 283—92; [3] Д ж е н к и н с Д ж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [4] G r u n s k y H., «Schr. Math. Sem. und Inst. für angew. Math. Univ. Berlin», 1932, Bd 1, S. 95—140; [5] Г о л у з и н Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966. *Г. В. Кузьмина.*

ВРЕМЕННО́Й РЯД — первоначально в статистич. литературе ряд наблюдений в различные моменты времени (напр., экономические В. р., метеорологические В. р.). В советской экономич. литературе наряду с термином В. р. употребляется термин р я д д и н а м и к и. С середины 20-х гг. 20 в. В. р. часто означает наблюденную реализацию анализируемого случайного процесса; анализ В. р.—статистич. анализ случайных процессов (см. *Статистические задачи* теории случайных процессов). *И. А. Ибрагимов.*

ВРОНСКИАН, о п р е д е л и т е л ь В р о н ь с к о г о,— определитель системы n вектор-функций размерности n

$$\varphi_i(t)=\{\varphi_i^1(t), \ \ldots, \ \varphi_i^n(t)\}, \quad i=1, \ \ldots, \ n, \qquad (1)$$

имеющий вид:

$$W(\varphi_1(t), \ \ldots, \ \varphi_n(t))=\begin{vmatrix}\varphi_1^1(t) & \ldots & \varphi_n^1(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_1^n(t) & \ldots & \varphi_n^n(t)\end{vmatrix}.$$

В. системы n скалярных функций

$$f_1(t), \ \ldots, \ f_n(t), \qquad (2)$$

имеющих производные до $(n-1)$-го порядка включительно, есть определитель

$$W(f_1(t), \ \ldots, \ f_n(t))=\begin{vmatrix}f_1(t) & \ldots & f_n(t)\\ f_1'(t) & \ldots & f_n'(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ f_1^{(n-1)}(t) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}.$$

Это понятие было введено Ю. Вроньским [1].

Если вектор-функции (1) линейно зависимы на множестве E, то

$$W(\varphi_1(t), \ \ldots, \ \varphi_n(t))\equiv 0, \quad t\in E;$$

если скалярные функции (2) линейно зависимы на множестве E, то

$$W(f_1(t), \ \ldots, \ f_n(t))\equiv 0, \quad t\in E.$$

Обратные утверждения, вообще говоря, неверны: тождественное обращение В. в нуль на нек-ром множестве не является достаточным условием линейной зависимости n функций на этом множестве.

Пусть вектор-функции (1) суть решения линейной однородной системы n-го порядка $x'=A(t)x$ с непрерывной на интервале I $(n\times n)$-матрицей $A(t)$. Если эти решения составляют фундаментальную систему, то

$$W(\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t))\neq 0,\quad t\in I.$$

Если В. этих решений равен нулю хотя бы в одной точке I, то он тождественно равен нулю на I, а функции (1) линейно зависимы. Имеет место формула Лиувилля:

$$W(\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t))=$$
$$=W(\varphi_1(\tau),\ \ldots,\ \varphi_n(\tau))\exp\int_\tau^t \operatorname{Sp}A(s)\,ds,\quad \tau,\ t\in I,$$

где $\operatorname{Sp}A(t)$ — след матрицы $A(t)$.

Пусть функции (2) суть решения линейного однородного уравнения n-го порядка

$$y^{(n)}+p_1(t)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(t)\,y'+p_n(t)\,y=0$$

с непрерывными на интервале I коэффициентами. Если эти решения составляют фундаментальную систему, то

$$W(f_1(t),\ \ldots,\ f_n(t))\neq 0,\quad t\in I.$$

Если В. этих решений равен нулю хотя бы в одной точке I, то он тождественно равен нулю на I, а функции (2) линейно зависимы. Имеет место формула Лиувилля:

$$W(f_1(t),\ \ldots,\ f_n(t))=$$
$$=W(f_1(\tau),\ \ldots,\ f_n(\tau))\exp\left[-\int_\tau^t p_1(s)\,ds\right],\ \tau,\ t\in I.$$

Лит.: [1] Hoëne-Wroński J., Réfutation de la théorie des fonctions analitiques de Lagrange, P., 1812; [2] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974.
Н. Х. Розов.

ВСЕОБЩНОСТИ КВАНТОР — логическая операция, служащая для образования высказываний с помощью оборота «для всех x». В формализованных языках В. к. чаще всего обозначается $\forall x$, $(\forall x)$, (x). Применяются также обозначения (Ax), $\bigwedge_x$, $\bigcap_x$, $\prod_x$. *В. Е. Плиско.*

ВСЮДУ ПЛОТНОЕ МНОЖЕСТВО A топологического пространства X — множество, определяемое свойством: $[A]=X$, где $[A]$ — замыкание множества A. Другими словами, в любом открытом в X множестве имеется хотя бы одна точка из множества A. Употребляется также термин «плотное множество». *А. А. Мальцев.*

ВТОРАЯ АКСИОМА СЧЕТНОСТИ — понятие теоретико-множественной топологии. Топологич. пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, если оно обладает счетной *базой*. Класс пространств, удовлетворяющих В. а. с., выделен Ф. Хаусдорфом (F. Hausdorff); к этому классу принадлежат все сепарабельные метрич. пространства. Всякое удовлетворяющее В. а. с. регулярное пространство со счетной базой топологически содержится в *гильбертовом кирпиче* и, следовательно, метризуемо и сепарабельно (П. С. Урысон). Исследование регулярных пространств, удовлетворяющих В. а.с., сводится к рассмотрению более конкретных объектов — подпространств гильбертова кирпича, к-рые тем самым получают прозрачную топологич. характеристику. Еще большую конкретизацию допускают конечномерные пространства со счетной базой. *Б. Э. Шапировский.*

ВТОРАЯ ВАРИАЦИЯ — частный случай n-той *вариации функционала* (см. также *Гато вариация*), обобщающий понятие второй производной функции нескольких переменных; используется в вариационном исчислении. Согласно общему определению В. в. в точке x_0 функционала $f(x)$, определенного в нормированном пространстве X, есть

$$\delta^2 f(x_0,\ h)=\frac{d^2}{dt^2}\,f(x_0+th)\Big|_{t=0}.$$

При равенстве нулю первой вариации неотрицательность В. в. является необходимым, а строгая положительность

$$\delta^2 f(x_0,\ h) \geqslant \alpha \| h \|^2, \quad \alpha > 0$$

при нек-рых допущениях — достаточным условием локального минимума $f(x)$ в точке x_0.

В простейшей (векторной) задаче классического вариационного исчисления В. в. функционала

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,\ x,\ \dot{x})\, dt; \quad L : [t_0,\ t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

(рассматриваемого на векторных функциях класса C^1 с закрепленными краевыми значениями $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$) имеет вид:

$$\delta^2 J(x_0,\ h) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle A(t)\, \dot{h}(t),\ \dot{h}(t) \rangle + 2 \langle B(t)\, \dot{h}(t),\ h(t) \rangle + \langle C(t)\, h(t), h(t) \rangle)\, dt, \qquad (*)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, а $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы с коэффициентами $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x}$ соответственно (производные вычисляются в точках кривой $x_0(t)$). Целесообразно рассматривать функционал от h, определяемый формулой (*), не только в пространстве C^1, но и на более широком пространстве W_2^1 абсолютно непрерывных векторных функций с интегрируемым квадратом модуля производной. В этом случае неотрицательность и строгая положительность В. в. формулируются в терминах неотрицательности и строгой положительности матрицы $A(t)$ (*Лежандра условие*) и отсутствия сопряженных точек (*Якоби условие*), что дает условия слабого минимума в вариационном исчислении.

Для вариационного исчисления в целом было проведено исследование В. в. для экстремалей, не обязательно доставляющих минимум (однако, по-прежнему, — при выполнении условия Лежандра, см. [1]). Важнейший результат — совпадение *Морса индекса* В. в. и числа точек, сопряженных с t_0, на интервале (t_0, t_1) (см. [2]).

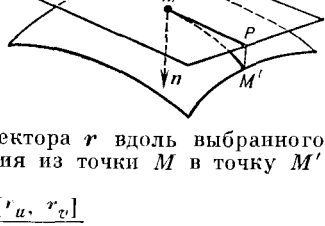
Лит.: [1] Morse M., The calculus of variations in the large, N. Y., 1934; [2] Милнор Дж., Теория Морса, пер. с англ., М., 1965.

В. М. Тихомиров.

ВТОРАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА поверхности — квадратичная форма от дифференциалов координат на поверхности, к-рая характеризует локальную структуру поверхности в окрестности обыкновенной точки. Пусть поверхность задана уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,\ v),$$

где u и v — внутренние координаты на поверхности;



$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv$$

— дифференциал радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ вдоль выбранного направления du/dv смещения из точки M в точку M' (см. рис.);

$$\boldsymbol{n} = \frac{\varepsilon [\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v]|}$$

— единичный вектор нормали к поверхности в точке M (здесь $\varepsilon = +1$, если тройка векторов $\{\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{n}\}$ правой ориентации, и $\varepsilon = -1$ в противоположном случае). Удвоенная главная линейная часть 2δ отклонения PM' точки M' поверхности от касательной плоскости в ее точке M равна

$$\mathrm{II} = 2\delta = (-d\boldsymbol{r},\ d\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{r}_{uu},\ \boldsymbol{n})\, du^2 + 2(\boldsymbol{r}_{uv},\ \boldsymbol{n})\, du\, dv + (\boldsymbol{r}_{vv},\ \boldsymbol{n})\, dv^2;$$

она и наз. второй основной квадратичной формой поверхности.

Коэффициенты В. к. ф. обычно обозначают через

$$L=(\boldsymbol{r}_{uu},\ \boldsymbol{n}),\ M=(\boldsymbol{r}_{uv},\ \boldsymbol{n}),\ N=(\boldsymbol{r}_{vv},\ \boldsymbol{n})$$

или в тензорных символах

$$(-d\boldsymbol{r},\ d\boldsymbol{n})=b_{11}\,du^2+2b_{12}\,du\,dv+b_{22}\,dv^2.$$

Тензор b_{ij} наз. вторым основным тензором поверхности.

О связи В. к. ф. с другими квадратичными формами поверхности и лит. см. *Квадратичные формы поверхности.*

А. Б. Иванов.

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА — одна из *краевых задач* для дифференциальных уравнений с частными производными. Пусть, напр., в ограниченной области Ω, в каждой точке границы Γ к-рой существует нормаль, задано эллиптич. уравнение 2-го порядка

$$Lu=\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}+ \quad (*)$$
$$+c(x)\,u(x)=f(x),$$

где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n\geqslant 2$. В. к. з. для уравнения (*) в области Ω наз. следующая задача: из множества всех решений уравнения (*) требуется выделить те, к-рые в каждой граничной точке имеют производные по внутренней конормали N и удовлетворяют условию

$$\left.\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial N(x)}\right|_{x\in\Gamma}=\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция. В. к. з. наз. также з а д а ч е й Н е й м а н а.

Лит.: [1] Б и ц а д з е А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [2] В л а д и м и р о в В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [3] М и р а н д а К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [4] П е т р о в с к и й И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961.

А. К. Гущин.

ВТОРОЕ СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО — пространство X'', сопряженное к пространству X', сопряженному к отделимому *локально выпуклому пространству* X, наделенному сильной топологией. Каждый элемент $x\in X$ порождает элемент $F\in X''$ по формуле $F(f)=f(x)$ $(f\in X')$. Если $X''=X$, то пространство X наз. р е ф л е к с и в н ы м. Если X — *бочечное пространство*, то линейное отображение $\pi: x\to F$ является изоморфным вложением пространства X в пространство X'', наделенное сильной топологией. Вложение π наз. к а н о н и ч е с к и м. Для нормированных пространств π есть изометрическое вложение.

М. И. Кадец.

ВУРФ — упорядоченная совокупность $n+2$ точек n-мерного проективного пространства при $n>1$ и четырех точек при $n=1$. В случае $n>1$ никакие $n+1$ точек В. не принадлежат $(n-1)$-мерному проективному пространству. Два В. на прямой или на коническом сечении равны, если образующие их четверки точек проективны. Над В. производятся операции сложения и умножения. При этом удобно пользоваться В. с тремя одинаковыми точками P_0, P_1, P_∞ — так наз. п р и в е д е н н ы м и В. Таким образом операции над В. сводятся к операциям над точками.

С у м м о й точек A и B (отличных от P_∞) наз. точка $A+B$, к-рая соответствует P_0 в гиперболич. *инволюции.* Операция сложения коммутативна и ассоциативна. Точка P_0 является нулевым элементом и для каждой точки A имеется противоположная $-A$: $A+(-A)=P_0$.

П р о и з в е д е н и е м точек A и B (отличных от P_0, P_∞) наз. точка $A\times B$, составляющая с P_1 пару в эллиптич. или гиперболич. инволюции. Операция умножения коммутативна и ассоциативна. Точка P_1 является единичным элементом и для каждой точки A имеется обратная ей A^{-1}: $A\times A^{-1}=P_1$.

Лит.: [1] V o n S t a u d t K., Beiträge zur Geometrie der Lage, Nurnberg, 1856, № 2, S. 132—283; [2] К о к с т е р Х. С. М., *Действительная проективная плоскость*, пер. с англ., М., 1959.

А. Б. Иванов.

ВХОЖДЕНИЕ — *слово* специального вида, несущее в себе полную информацию о расположении одного слова

внутри другого. Точнее, В. в *алфавите* A наз. слово вида $P*Q*R$, где P, Q, R — слова в нек-ром алфавите A, а $*$ не является буквой этого алфавита. В. $P*Q*R$ наз. В. с л о в а Q в слово PQR. Слово Q наз. о с н о в о й этого В., слова P и R наз. его л е в ы м и п р а в ы м к р ы л о м, соответственно. Понятие В. может быть положено в основу системы понятий, удобной для изучения синтаксической структуры слов того или иного типа.

Лит.: [1] М а р к о в А. А., *Теория алгорифмов*, «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1954, т. 42, с. 25—34. *Н. М. Нагорный.*

ВЫБОРА АКСИОМА — одна из аксиом теории множеств, гласящая: для всякого семейства F непустых множеств существует функция f такая, что для всякого множества S из F имеет место $f(S)\in S$ (при этом f наз. ф у н к ц и е й в ы б о р а на F). Для конечных семейств F В. а. выводима из остальных аксиом теории множеств (напр., в системе ZF).

В. а. была явно сформулирована Э. Цермело (E. Zermelo, 1904) и встретила отрицательное отношение со стороны многих математиков. Это объяснялось, во-первых, ее чисто экзистенциальным характером, отличающим ее от остальных аксиом теории множеств, а во-вторых, нек-рыми «неприятными» или даже противоречащими интуиции «здравого смысла» следствиями. Напр., из В. а. вытекает: существование неизмеримого по Лебегу множества действительных чисел; существование трех разбиений шара B:

$$B=U_1\cup\ldots\cup U_n,$$
$$B=V_1\cup\ldots\cup V_m,$$
$$B=X_1\cup\ldots\cup X_{n+m}$$

таких, что U_i конгруэнтно X_i, $1\leqslant i\leqslant n$, V_j конгруэнтно X_{n+j}, $1\leqslant j\leqslant m$. Таким образом, шар B разбивается на конечное число частей $X_1, \ldots, X_{n+m}$, из к-рых движениями в пространстве можно составить два таких же шара.

Впоследствии обнаружилось много содержательных утверждений, эквивалентных В. а. Таковы, напр., следующие. 1. П р и н ц и п в п о л н е у п о р я д о ч е н и я: на всяком множестве X существует отношение линейного порядка $R\subseteq X\times X$ такое, что любое непустое подмножество $U\subseteq X$ содержит наименьший в смысле отношения R элемент. 2. П р и н ц и п м а к с и м а л ь н о с т и (л е м м а Ц о р н а): если всякое линейно упорядоченное подмножество U частично упорядоченного множества X ограничено сверху, то X содержит максимальный элемент. 3. Всякая нетривиальная решетка с единицей имеет максимальный идеал. 4. Произведение компактных топологич. пространств компактно. 5. Всякое множество X равномощно $X\times X$.

В. а. не вступает в противоречие с остальными аксиомами теории множеств (напр., системы ZF) и логически не выводима из последних при условии их непротиворечивости. В. а. широко используется в классич. математике. Так, В. а. используют следующие утверждения. 1) Каждая подгруппа свободной группы свободна. 2) Существует, и притом единственное с точностью до изоморфизма, алгебраич. замыкание произвольного поля. 3) Каждое векторное пространство имеет базис. 4) Эквивалентность двух определений непрерывности функции в точке ($\varepsilon-\delta$-определение и определение через пределы последовательностей). 5) Счетная аддитивность меры Лебега. Причем последние два утверждения вытекают из счетной В. а. (в формулировке аксиомы добавляется условие счетности семейства F). Доказано, что без В. а. утверждения 1) — 5) не выводимы в системе ZF, если ZF непротиворечива.

Была построена модель теории множеств, в к-рой выполняется счетная В. а. и каждое множество чисел измеримо по Лебегу. Эта модель была построена в пред-

положении непротиворечивости системы ZF с аксиомой существования недостижимого кардинала.

Лит.: [1] Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [2] Йех Т., Теория множеств и метод форсинга, пер. с англ., М., 1973; [3] Jech T. J., The axiom of choise, Amst.—L., 1973.

В. Н. Гришин.

ВЫБОРА ТЕОРЕМЫ — группа теорем комбинаторики, связанных с выбором элементов из множества, тем или иным способом соответствующих семейству подмножеств этого множества. В. т. обычно используются в качестве теорем существования при решении различных комбинаторных задач. Ниже формулируются нек-рые наиболее важные из В. т. и указываются примеры их применения.

1) Пусть $S=\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ — некоторое семейство подмножеств данного множества $T=\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$. Набор $R=\{t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_n}\}$ различных элементов множества T наз. системой различных представителей (с. р. п.) семейства S, если $t_{i_j}\in S_j$, $j=1, 2, \ldots, n$; элемент t_{i_j} наз. представителем множества S_j. Напр., если $T=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и S состоит из $S_1=\{2, 4, 5\}$, $S_2=\{2, 5\}$, $S_3=\{3, 4\}$, $S_4=\{1, 3, 4\}$, то $R=\{5, 2, 3, 4\}$ есть с. р. п. для S, где элемент 5 представляет множество S_1, элемент 2 — множество S_2 и т. д. Если же S составить из множеств $S_1=\{2, 4, 5\}$, $S_2=\{2, 5\}$, $S_3=\{4, 5\}$, $S_4=\{2, 4\}$, то для S не существует с. р. п., так как S_1, S_2, S_3, S_4 вместе содержат только три элемента.

Теорема о системе различных представителей. Семейство $S=\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ тогда и только тогда имеет с. р. п., когда объединение каждых k множеств из S содержит по крайней мере k различных элементов, $k=1, 2, \ldots, n$.

Эта теорема доказана Ф. Холлом [3] (см. также [1], [2]). С ее помощью доказывается теорема о системе общих представителей, также относящаяся к В. т. Пусть

$$T=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_l, \qquad (1)$$

$$T=B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_l \qquad (2)$$

суть два разбиения множества T, в к-рых ни одно из составляющих не пусто. Множество $R=\{t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_l}\}$ наз. системой общих представителей (с. о. п.) разбиений (1) и (2), если R является с. р. п. как для семейства $A=\{A_1, A_2, \ldots, A_l\}$, так и для семейства $B=\{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$. Напр., если $T=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и

$$T=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4,$$
$$T=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4$$

— два разбиения множества T, где $A_1=\{0, 1, 2, 3\}$, $A_2=\{4, 5, 6\}$, $A_3=\{7\}$, $A_4=\{8, 9\}$, $B_1=\{4, 7, 8\}$, $B_2=\{0, 5\}$, $B_3=\{2, 3, 6\}$, $B_4=\{1, 9\}$, то $R=\{0, 6, 7, 9\}$ есть с. о. п. семейств $A=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ и $B=\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, так как является с. р. п. и для A, и для B; здесь элемент 0 представляет множества A_1 и B_2, элемент 6 — A_2 и B_3, элемент 7 — A_3 и B_1, элемент 9 — A_4 и B_4.

Теорема о системе общих представителей. Разбиения (1) и (2) имеют с. о. п. тогда и только тогда, когда объединение каждых k множеств из семейства A содержит не более k множеств из семейства B, $k=1, 2, \ldots, l$ (см. [1], [2]).

2) Пусть задана прямоугольная матрица. Линией в матрице наз. как строку, так и столбец этой матрицы.

Теорема Кёнига. Если элементы прямоугольной матрицы — нули и единицы, то минимальное число линий, содержащих все единицы, равно максимальному числу единиц, к-рые могут быть выбраны таким образом, чтобы среди них не нашлось двух, расположенных на одной и той же линии.

Эта теорема сформулирована и доказана Д. Кёнигом ([4], с. 240; см. также [1], [2]). Она эквивалентна теореме Холла о с. р. п. Используется, напр., при доказательстве того, что нек-рые матрицы являются линейными комбинациями перестановочных матриц (перестановочная матрица — такая прямоугольная матрица P размера $m\times n$, состоящая из нулей и единиц, что $PP'=I$, где P' — транспонированная матрица P, а I — единичная матрица порядка m; напр., перестановочная квадратная матрица порядка m состоит из m единиц, расположенных так, что никакие две из них не лежат на одной линии). Иными словами, если дана матрица A размера $m\times n$, $m\leqslant n$, элементами к-рой являются неотрицательные действительные числа, причем сумма элементов каждой строки в A равна m', а сумма элементов каждого столбца равна n', то

$$A=c_1P_1+c_2P_2+\ldots+c_tP_t,$$

где каждое P_i есть перестановочная матрица, а коэффициенты c_i — неотрицательные действительные числа (см. [1], [2]). В частности, если квадратная матрица A порядка n, состоящая из нулей и единиц, такова, что суммы элементов по любой строке или любому столбцу равны целому положительному числу k, то

$$A=P_1+P_2+\ldots+P_k,$$

где все P_i — перестановочные матрицы порядка n.

3) Пусть T — конечное множество и $P_r(T)$ — множество всех его подмножеств, содержащих точно r элементов. Пусть

$$P_r(T)=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_l \tag{3}$$

— произвольное упорядоченное разбиение $P_r(T)$ (на l составляющих $A_1, A_2, \ldots, A_l$). Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_l$ — такие целые числа, что

$$1\leqslant r\leqslant q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_l. \tag{4}$$

Если существует такое подмножество, содержащее q_i элементов множества T, что все его подмножества, содержащие точно r элементов, содержатся именно в A_i, то оно наз. (q_i, A_i)-подмножеством множества T.

Теорема Рамсея. Пусть заданы целые числа $q_1, q_2, \ldots, q_l$ и r, удовлетворяющие условию (4). Тогда существует натуральное число $N(q_1, q_2, \ldots, q_l, r)$, обладающее тем свойством, что для любого целого числа $n\geqslant N(q_1, q_2, \ldots, q_l, r)$ справедливо следующее: если даны множество T, состоящее из n элементов, и произвольное упорядоченное разбиение (3) множества $P_r(T)$ на l составляющих $A_1, A_2, \ldots, A_l$, то T содержит (q_i, A_i)-подмножество для некоторого $i=1, 2, \ldots, l$.

Эта теорема доказана Ф. Рамсеем ([5]; см. также [1], [2]). Примером приложения теоремы Рамсея служит следующий результат (см. [6], [1], [2]): для любого заданного целого числа $m\geqslant 3$ существует такое целое число N_m, что среди $n\geqslant N_m$ точек плоскости, расположенных так, что никакие три из них не лежат на одной прямой, найдутся m точек, образующих выпуклый m-угольник.

Лит.: [1] Холл М., Комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Райзер Г. Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [3] Hall Ph., «J. London Math. Soc.», 1935, v. 10, p. 26—30; [4] König D., Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen, Leipzig, 1936; [5] Ramsey F. P., «Proc. London Math. Soc.», (2), 1930, v. 30, p. 264—286; [6] Erdös P., Szekeres G., «Compositio Mathematica», 1935, v. 2, № 3, p. 463—70.

М. П. Минеев.

ВЫБОРКА в математической статистике — см. *Выборочный метод*, *Генеральная совокупность*.

ВЫБОРОЧНАЯ ГРОЗДЬ — совокупность *выборочных точек*, изображающих в выборочном пространстве все конкретные неразложимые исходы, наблюденные при реализации серии экспериментов.

ВЫБОРОЧНАЯ ДИСПЕРСИЯ — дисперсия *эмпирического распределения*.

ВЫБОРОЧНАЯ КВАНТИЛЬ — квантиль функции *эмпирического распределения*.

ВЫБОРОЧНАЯ МЕДИАНА — медиана *эмпирического распределения*.

ВЫБОРОЧНАЯ ТОЧКА — точка *выборочного пространства*, изображающая тот или иной конкретный неразложимый исход отдельного эксперимента.

ВЫБОРОЧНАЯ ФУНКЦИЯ — функция $X_t = X_t(\omega)$ аргумента t, однозначно соответствующая каждому наблюдению случайного процесса $X_t \in E$, $t \in T$; здесь $\{\omega\} = \Omega$ — *множество* элементарных событий. Часто используются эквивалентные В. ф. термины «реализация», «траектория». Случайный процесс X_t характеризуется вероятностной мерой в пространстве В. ф. При изучении локальных свойств В. ф. X_t (где $E = \mathbb{R}^1$, $T = \mathbb{R}^m$ — евклидово пространство размерности $m = 1, 2, \ldots$) предполагается, что X_t является сепарабельным или находится эквивалентный случайный процесс с заданными локальными свойствами В. ф. Наиболее полно исследованы локальные свойства В. ф. *гауссовских процессов*.

Для стационарных гауссовских случайных процессов (полей) X_t имеет место альтернатива: почти все В. ф. X_t либо непрерывны, либо неограничены на любом интервале. Для t, $s \in T$ определено «расстояние» $d(t, s) = [\mathsf{E}|X_t - X_s|^2]^{1/2}$, $B(t, \delta) = \{s : d(s, t) \leqslant \delta\}$ — «сфера», $N(\delta)$ — минимальное число таких «сфер», покрывающих $T \subset \mathbb{R}^n$, $\sup\limits_{s,\, t \in T} d(s, t) < \infty$. Необходимое и достаточное условие непрерывности В. ф. однородного гауссовского процесса имеет вид

$$\exists q > 1, \ \Sigma q^{-n} \sqrt{\ln N(q^{-n})} < \infty.$$

Если $R(t) = \mathsf{E} X_s X_{t+s} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda)$, $\mathsf{E} X_t = 0$,

выпукла вниз в нек-рой окрестности точки $+0$, то для непрерывности В. ф. X_t необходимо и достаточно, чтобы $\Sigma S_n^{1/2} < \infty$, где $S_n = F(2^{n+1}) - F(2^n)$. Если $R(t)$ выпукла вниз в окрестности $+0$ и

$$\mathsf{E}|X_t - X_s|^2 \geqslant C/|\ln|t - s||$$

для $|t - s| < \delta$, то почти все В. ф. гауссовского случайного процесса X_t неограничены. Если

$$\mathsf{E}|X_t - X_s|^2 \leqslant C/|\ln|t - s||^{1+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,$$

то почти все В. ф. гауссовского случайного процесса (поля) X_t непрерывны. Для непрерывности В. ф. гауссовского случайного процесса достаточно, чтобы

$$\int_0^{\infty} \omega_R(e^{-x^2})\, dx < \infty,$$

где $R(t, s) = \mathsf{E} X_t X_s$,

$$\omega_k(\delta) = \sup [R(t + h_1, s + h_2) - R(t, s)]^{1/2};$$

здесь sup берется по $|h_i| < \delta$, $|t| \leqslant C$, $|s| \leqslant C$. В. ф. X_t, $t \in \mathbb{R}^n$ относят к классу $H(C, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, если для всех достаточно малых h_i

$$|X_{t+h} - X_t| \leqslant C \sum_{i=1}^n |h_i|^{\alpha_i},$$

$$C > 0, \ 0 < \alpha_i \leqslant 1, \quad h = (h_1, \ \ldots, \ h_n).$$

Если ξ_t — гауссовское случайное поле на единичном кубе V_n^0 в $\mathbb{R}^n$ такое, что для достаточно малых h и $t \in V_n^0$

$$\mathsf{E}|X_{t+h} - X_t|^2 \leqslant C_1 \frac{|h|^{\gamma}}{|\ln|h||}, \quad C_1 > 0, \ 0 < \gamma \leqslant 2,$$

то с вероятностью, равной 1, равномерно по $t \in V_n^0$

$$X_t \in H(C, \beta_1, \ \ldots, \ \beta_n)$$

для любого $C > 0$ и $\beta_i < \gamma/2$.

Неубывающая непрерывная функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, наз. верхней, если для почти всех ω существует $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ такое, что

$$|X_t - X_s| \leqslant (\mathsf{E}|X_t - X_s|^2)^{1/2} \varphi(1/|t - s|)$$

при $|t-s|\leqslant\varepsilon$; $t, s\in\mathbb{R}^n$; $|t|=\left(\sum_{i=1}^n t_i^2\right)^{1/2}$. Если X_t — гауссовское случайное поле,

$$\mathsf{E}X_t=0,\quad \mathsf{E}X_tX_s=\frac{1}{2}\left(|t|^\alpha+|s|^\alpha-|t-s|^\alpha\right),\quad 0<\alpha\leqslant 1,$$

то $\varphi(x)$ является верхней тогда и только тогда, когда

$$\int_e^\infty t^{n-1}K\left[\varphi(t)\right]dt<\infty,$$

где $\quad K[x]=x^{(4n/\alpha)-1}\exp\left(-x^2/2\right)$.

Для того чтобы почти все В. ф. гауссовского случайного процесса были аналитическими в окрестности точки t_0, необходимо и достаточно, чтобы ковариационная функция $R(t, s)$ была аналитической по t и s в окрестности $|t-t_0|<\delta$, $|s-t_0|<\delta$, $\delta>0$.

Лит.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969; [3] Беляев Ю. К., в кн.: Proceeding of the 4 Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, v. 2, Berk.— Los Ang., 1961, p. 23—33; [4] Островский Е. И., «Докл. АН СССР», 1970, т. 195, № 1, с. 40—42; [5] Nisio Makiko, «Nagoya Math. J.», 1969, v. 34, p. 89—104; [6] Dudley R. M., «Ann. Math. Statistics», 1965, v. 36, № 3, p. 771—88; [7] Fernique X., «C. r. Acad. sci.», 1964, t. 258, p. 6058—60; [8] Ядренко М. Й., «Вісник Київського ун-ту. Сер. матем. та механ.», 1967, т. 9, с. 103—12; [9] Kawada Takayuki, «Nagoya Math. J.», 1969, v. 35, p. 109—32; [10] Беляев Ю. К., «Теория вероят. и ее примен.», 1959, т. 4, № 4, с. 437—44; [11] Слуцкий Е. Е., «Giorn. Inst. Ital. Attuari», 1937, v. 8, № 2, p. 3—19; [12] Fernique X., в кн.: Ecole d'Ete de Probabilités de Saint-Flour IV—1974, B.—Hdlb.—N. Y., 1975, p. 1—96 («Lecture Notes in Mathematics», № 480).

Ю. К. Беляев.

ВЫБОРОЧНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА — функционал от *эмпирического распределения*. В. х. используется в качестве статистич. оценок для аналогичных функционалов от теоретич. распределений.

ВЫБОРОЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО — множество всех элементарных событий, связанных с нек-рым экспериментом, причем любой неразложимый исход эксперимента представляется одной и только одной точкой В. п. (выборочной точкой). В. п. является абстрактным множеством, на σ-алгебре подмножеств к-рого задается вероятностная мера (см. *Вероятностное пространство*). В русской литературе более распространен термин «пространство элементарных событий».

А. В. Прохоров.

ВЫБОРОЧНОЕ СРЕДНЕЕ — математическое ожидание *эмпирического распределения*.

ВЫБОРОЧНЫЙ БЛОК, выборочный промежуток,— интервал, образованный двумя последовательными членами *вариационного ряда*.

ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД — статистический метод исследования общих свойств совокупности к.-л. объектов на основе изучения свойств лишь части этих объектов, взятых на выборку. Математич. теория В. м. опирается на два важных раздела математич. статистики — теорию выбора из конечной совокупности и теорию выбора из бесконечной совокупности. Основное отличие В. м. для конечной и бесконечной совокупностей заключается в том, что в первом случае В. м. применяется, как правило, к объектам неслучайной, детерминированной природы (напр., число дефектных изделий в данной партии готовой продукции не является случайной величиной: это число — неизвестная постоянная, к-рую и надлежит оценить по выборочным данным). Во втором случае В. м. обычно применяется для изучения свойств случайных объектов (напр., для исследования свойств непрерывно распределенных случайных ошибок измерений, каждое из к-рых теоретически может быть истолковано как реализация одного из бесконечного множества возможных результатов).

Выбор из конечной совокупности и его теория являются основой статистич. методов контроля качества и часто применяются в социологич. исследованиях.

Согласно теории вероятностей выборка будет правильно отражать свойства всей совокупности, если выбор производится случайно, т. е. так, что любая из возможных выборок заданного объема n из совокупности объема N (число таких выборок равно $N!/n!\,(N-n)!$) имеет одинаковую вероятность быть фактически выбранной.

На практике наиболее часто используется выбор без возвращения (бесповторная выборка), когда каждый отобранный объект перед выбором следующих объектов в исследуемую совокупность не возвращается (такой выбор применяется, напр., для определения выигрышных лотерейных билетов, при статистич. контроле качества, а также при демографич. исследованиях). Выбор с возвращением (выборка с повторением) рассматривается обычно лишь в теоретических исследованиях (примером выбора с возвращением их является регистрация числа частиц, коснувшихся в течение данного времени стенок сосуда, внутри которого совершается броуновское движение). Если $n \ll N$, то повторный и бесповторный выборы дают практически эквивалентные результаты.

Свойства совокупности, исследуемые В. м., могут быть качественными и количественными. В первом случае задача выборочного обследования заключается в определении количества M объектов совокупности, обладающих к.-л. признаками (напр., при статистич. контроле часто интересуются количеством M дефектных изделий в партии объема N). Оценкой для M служит отношение mN/n, где m — число объектов с данным признаком в выборке объема n. В случае количественного признака имеют дело с определением среднего значения совокупности $\bar{x}=(x_1+x_2+\ldots+x_N)/N$. Оценкой для $\bar{x}$ является выборочное среднее

$$\bar{X}=(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n,$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — те значения из исследуемой совокупности $x_1, x_2, \ldots, x_N$, к-рые принадлежат выборке. С математич. точки зрения первый случай — частная разновидность второго, к-рая имеет место, когда M величин x_i равны 1, а остальные $(N-M)$ равны 0; в этой ситуации $\bar{x}=M/N$ и $\bar{X}=m/n$.

В математич. теории В. м. оценка среднего значения занимает центральное место потому, что она служит основой количественного описания изменчивости признака внутри совокупности, т. к. за характеристику изменчивости обычно принимают дисперсию

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+\ldots+(x_N-\bar{x})^2}{N},$$

представляющую собой среднее значение квадратов отклонений x_i от их среднего значения $\bar{x}$. В случае изучения качественного признака

$$\sigma^2=M\,(N-M)/N^2.$$

О точности оценок m/n и $\bar{X}$ судят по их дисперсиям

$$\sigma^2_{m/n}=\mathsf{E}\left(\frac{m}{n}-\frac{M}{N}\right)^2 \quad \text{и} \quad \sigma^2_{\bar{X}}=\mathsf{E}\,(\bar{X}-\bar{x})^2,$$

к-рые в терминах дисперсии конечной совокупности σ^2 выражаются в виде отношений σ^2/n (в случае выборок с повторением) и $\sigma^2(N-n)/n\,(N-1)$ (в случае бесповторных выборок). Т. к. во многих практически интересных задачах случайные величины m/n и $\bar{X}$ при $n \geqslant 30$ приближенно подчиняются *нормальному распределению*, то отклонения m/n от M/N и $\bar{X}$ от $\bar{x}$, превышающие по абсолютной величине $2\sigma_{m/n}$ и $2\sigma_{\bar{x}}$ соответственно, могут при $n \geqslant 30$ осуществиться в среднем приблизительно в одном случае из двадцати.

Более полную информацию о распределении количественного признака в данной совокупности можно получить с помощью *эмпирического распределения* этого признака в выборке.

Выбор из бесконечной совокупности. В математич. статистике результаты к.-л. однородных наблюдений (чаще всего независимых) принято наз. выборкой даже в том случае, когда эти результаты не соответствуют понятию выборки с повторениями или без повторений из конечной совокупности. Напр., результаты измерений углов на местности, подверженные независимым непрерывно распределенным случайным ошибкам, часто наз. выборкой из бесконечной совокупности. Предполагается, что принципиально можно осуществить любое число таких наблюдений. Полученные фактически результаты считают выборкой из бесконечного множества возможных результатов, наз. *генеральной совокупностью*. Понятие генеральной совокупности не является логически безупречным и необходимым. Для решения практич. задач нужна не сама бесконечная генеральная совокупность, а лишь те или иные характеристики, к-рые ей ставятся в соответствие. Эти характеристики с точки зрения теории вероятностей являются числовыми или функциональными характеристиками нек-рого распределения вероятностей, а элементы выборки — случайными величинами, подчиняющимися этому распределению. Такое истолкование позволяет распространить на выборочные оценки общую теорию статистич. оценок (см. *Оценка статистическая*). По этой причине, напр., в вероятностной теории обработки наблюдений понятие бесконечной генеральной совокупности заменяется понятием распределения вероятностей, содержащего неизвестные параметры. Результаты наблюдений трактуются как экспериментально наблюдаемые значения случайных величин, подчиняющихся этому распределению. Цель обработки — вычисление по результатам наблюдений в том или ином смысле оптимальных статистич. оценок для неизвестных параметров распределения.

Выше речь шла о выборочном обследовании одной совокупности к.-л. объектов. Однако практическое применение В. м. часто осуществляется во многих однородных совокупностях (напр., при оценке доли бракованных изделий в нескольких партиях готовой продукции). В этой ситуации объектом изучения является не одно число M, а несколько неизвестных чисел M_1, M_2, ... Пусть, напр., все обследуемые партии готовой продукции содержат N изделий, причем M_1, M_2, ... — количества дефектных изделий в этих партиях, а m_1, m_2, ... — соответствующие количества дефектных изделий, обнаруженные в выборках объема n. Согласно условию так наз. бездефектной приемки партия с номером r передается потребителю, если $m_i=0$, в противном случае она бракуется. Предположим, что контроль изделий сопряжен с их уничтожением, и поэтому потребитель либо получает партию объема $R_i=0$ (при $m_i>0$), либо партию объема $R_i=N-n$ с количеством дефектных изделий $D_i=M_i$ (при $m_i=0$), причем значения R_1, R_2, ... (а, значит, и их сумма) известны, а значение $D_1+D_2+\ldots$ неизвестно. Отношение $(D_1+D_2+\ldots)/(R_1+R_2+\ldots)$ называют долей пропущенного брака, а его математич. ожидание q — средней долей пропущенного брака. Задача математич. статистики заключается в оценке q по значениям R_1, R_2, ..., зафиксированным в результате применения В. м. Если значения M_1, M_2, ... можно трактовать как реализации независимых одинаково распределенных случайных величин с известным законом распределения $\mathsf{P}\{M_i=r\}=p_r$, то согласно *Бейеса формуле* статистич. оценка среднего числа пропущенных дефектных изделий в принятых партиях выражается формулой

$$\tilde{D}=\mathsf{E}\{M \mid m=0\}=\left(\sum_{r=1}^{N-n} r\,\frac{C_{N-r}^{n}}{C_N^n}\,p_r\right)\Big/\,\mathsf{P}\{m=0\},$$

причем $\tilde{D}\leqslant[(N-n)\,\mathsf{P}\{m=1\}]/[n\mathsf{P}\{m=0\}]$,

где

$$\mathsf{P}\{m=k\} = \sum_{r=0}^{N-n} \frac{C_r^k C_{N-r}^n}{C_N^n} p_r, \quad k=0,1, \ldots, n.$$

Поэтому оценка

$$\tilde{q}=\tilde{D}/(N-n)$$

средней доли пропущенного брака в принятых партиях удовлетворяет неравенству

$$\tilde{q} \leqslant \mathsf{P}\{m=1\}/(n\mathsf{P}\{m=0\}) \approx s_1/ns_0),$$

где s_0 — число принятых партий, а s_1 — количество тех забракованных партий, в выборках из к-рых обнаружено ровно одно дефектное изделие.

Лит.: [1] Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика в технике (Общая часть), М., 1955, гл. 5; [2] Беляев Ю. К., Вероятностные мстоды выборочного контроля, М., 1975; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966. *Л. Н. Большев.*

ВЫБОРОЧНЫЙ МОМЕНТ — момент *эмпирического распределения*.

ВЫВОД логический — формальный вывод в *исчислении*, содержащем логические правила и имеющем в качестве основных выводимых объектов формулы (интерпретацией к-рых являются *суждения*; см. *Логические исчисления*, *Логико-математические исчисления*). Поскольку обычно такие исчисления снабжаются *семантикой*, то в некоторых случаях под логическим В. понимают содержательное рассуждение, позволяющее от сформулированных аксиом и гипотез (допущений) переходить к новым утверждениям, логически вытекающим из исходных.

При зафиксированных аксиомах и правилах логических переходов (см. *Вывода правило*) говорят, что последовательность формул является выводом (своего последнего члена A) из гипотез $A_1, \ldots, A_n$ ($n \geqslant 0$), если каждый член последовательности либо является аксиомой или одной из гипотез, либо получается из предыдущих формул последовательности по одному из правил. Это записывается в виде $A_1, \ldots, A_n \vdash A$; при этом формула A наз. выводимой из $A_1, \ldots, A_n$. В случае $n=0$ запись $\vdash A$ означает, что A выводимо в рассматриваемом исчислении без к.-л. допущений; применяется также запись $A_1, \ldots, A_n \vdash$, означающая, что «допущения $A_1, \ldots, A_n$ ведут к противоречию» (в большинстве изучавшихся систем $A_1, \ldots, A_n \vdash$ влечет выводимость из этих гипотез любой формулы). Напр., в исчислении, содержащем аксиому $A \supset (B \supset A)$ и правило модус поненс, последовательность A, $A \supset (B \supset A)$, $B \supset A$ является выводом $B \supset A$ из A (т. е. $A \vdash B \supset A$). Свойствами логической выводимости являются: $A \vdash A$; если $\Gamma \vdash \Delta$, то A, $\Gamma \vdash \Delta$; если A, A, $\Gamma \vdash \Delta$, то A, $\Gamma \vdash \Delta$; если Γ, A, B, $\Gamma' \vdash \Delta$, то Γ, B, A, $\Gamma' \vdash \Delta$; если $\Gamma \vdash A$ и A, $\Gamma' \vdash \Delta$, то Γ, $\Gamma' \vdash \Delta$ (здесь A и B — формулы, Γ и Γ' — списки формул, Δ — формула или пустое слово). Эти свойства позволяют существенно преобразовывать списки гипотез и, наряду с правилами введения и удаления логических символов (см. *Выводимое правило*), сближают системы со знаком $\vdash$ с *Генцена формальными системами*. Для исчислений, основанных на классич. логике, характерно свойство $\neg\neg A \vdash A$. Для интуиционистской логики (конструктивной логики) в широких предположениях удается доказывать принципы брауэровского понимания выводимости: 1) если $\Gamma \vdash A \vee B$, то имеет место одна из выводимостей $\Gamma \vdash A$ или $\Gamma \vdash B$; 2) если $\Gamma \vdash \exists x A(x)$, то, для некоторого терма t, $\Gamma \vdash A(t)$ (упомянутые предположения во всяком случае выполнены при пустом Γ). Возможности избавления от допущений, включая переход к выводам без гипотез, регулируются *дедукции теоремой*.

Формирование понятия В. (и систем, в терминах к-рых это понятие получает смысл) знаменовало собой возник-

новение современной математич. логики. Новое, более строгое понимание аксиоматич. метода, при к-ром формализации подлежат не только аксиомы, но и логические средства, открыло возможность математич. определения понятия доказательства и изучения доказательств математич. методами (см. *Доказательств теория*). Понятие формального В. оказалось хорошим приближением к понятию математич. истины (см. *Гёделя теорема о полноте*, *Гёделя теорема о неполноте*). Искусственная формализация понятия логической выводимости в дальнейшем существенно сблизилась с реальными способами содержательного математич. рассуждения (см. *Естественный логический вывод*).

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Математическая теория логического вывода, сб. переводов, М., 1967. *С. Ю. Маслов.*

ВЫВОДА ДЕРЕВО — способ записи *выводов* в *исчислении*, при к-ром над каждым элементом P пишутся те элементы вывода, из к-рых P получен за одно применение *вывода правила*. Напр., имея вывод $P_1, \ldots, P_6$, в к-ром P_1, P_2 и P_4 — аксиомы, P_3 получается за одно применение правила из P_1 и P_2, P_5 — из P_4 и P_3, P_6 — из P_3 и P_5, можно записать его в виде следующего В. д.:

$$\cfrac{\cfrac{P_1,\ P_2}{P_3},\ \cfrac{P_4,\ P_3}{P_5}}{P_6}.$$

Несмотря на большую громоздкость по сравнению с линейной записью, В. д. оказываются во многих случаях удобным аппаратом исследования выводов: по В. д. легко прослеживать зависимости элементов друг от друга; заключенная в В. д. информация полнее описывает ситуацию, чем при линейном упорядочении (и приближается по полноте к информации, заключенной в выводах с анализом). В случае необходимости В. д. тоже снабжается а н а л и з о м, т. е. рядом с каждой чертой пишется номер соответствующего правила (и рядом с аксиомой пишется ее номер). *С. Ю. Маслов.*

ВЫВОДА ПРАВИЛО — способ порождения объектов, называемых з а к л ю ч е н и е м В. п., по множеству объектов, называемых п о с ы л к а м и правила; формулирование В. п. играет решающую роль при описании *исчислений* (часто данное В. п. имеет смысл лишь в контексте данного исчисления). Для исчислений, снабженных *семантикой* (в частности, большинства *логико-математических исчислений*), В. п. сохраняет истинность, т. е. по истинным посылкам позволяет породить лишь истинное заключение; наиболее знаменитый пример такого В. п.— правило *модус поненс*. В большинстве изучавшихся исчислений всякое применение В. п. имеет лишь конечное число посылок (важнейшее исключение — *Карнапа правило*), обычно число посылок данного В. п. остается неизменным для всех его применений. Количество возможных применений данного В. п. бывает, как правило, неограниченным.

Способы формулирования В. п. весьма разнообразны, они зависят от языка исчисления и включают переменные различных типов. Подавляющее большинство используемых В. п. может быть порождено по следующей общей схеме: выбирая алфавит A, не содержащий буквы $\square$, и натуральное число l, называют l - п о с ы л о ч н ы м В. п. нек-рый алгоритм $\mathfrak{A}$ над алфавитом $A \cup \{\square\}$; если $\mathfrak{A}$ применимо к слову $P_0\square P_1\square \ldots \square P_l$ ($P_0, P_1, \ldots, P_l$ — слова в A, а символ $\square$ играет роль запятой), то $P_1, \ldots, P_l$ считаются посылками, а P_0 — заключением нек-рого применения этого В. п. Частным случаем таких В. п. являются нуль-посылочные В. п. (или *аксиом схемы*). В любом исчислении, содержащем лишь правила описанного типа, множество выводимых слов перечислимо. Обычно для В. п. выполнено и более жесткое требование: можно алгоритмически распознать, выводимо ли P_0 из $P_1, \ldots, P_l$ за одно применение правила. *С. Ю. Маслов.*

ВЫВОДИМОЕ ПРАВИЛО — метаматематическая теорема (см. *Метатеорема*), позволяющая по конечному числу *выводов* из гипотез $\Gamma_i \vdash \Delta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ n \geqslant 0)$ утверждать выводимость формулы Δ из гипотез Γ; выводы $\Gamma_i \vdash \Delta_i$ наз. вспомогательными выводами В. п., заключение $\Gamma \vdash \Delta$ наз. результирующим выводом. В. п. является частным случаем *допустимого правила*. Важнейшие примеры В. п. доставляются *дедукции теоремой*, правилом *приведения к абсурду* и другими правилами введения и удаления логических символов, такими, как правила введения дизъюнкции: $A \vdash A \vee B$ и $B \vdash A \vee B$ (для этих В. п. число вспомогательных выводов равно нулю) и удаления дизъюнкции: из Γ, $A \vdash C$ и Γ, $B \vdash C$ следует Γ, $A \vee B \vdash C$. В ряде случаев В. п. имеют такую структуру: исчисление расширяется и усиливается, и из выводимости в новом исчислении извлекаются следствия о выводимости в исходном. Такие В. п. возникают, в частности, при устранении описательных определений (определений, к-рые моделируют происходящее при построении математич. теорий расширение понятий и обозначений). Разработанный аппарат В. п. служит существенному приближению методов обращения с формальными выводами к содержательным математич. рассуждениям. *С. Ю. Маслов.*

ВЫВОДИМОСТЬ — см. *Вывод* логический, *Исчисление*.

ВЫДЕЛЕНИЕ СИГНАЛА на фоне помех — один из разделов статистической теории связи. Математически задачи В. с. суть статистич. задачи теории случайных процессов (см. также *Информации теория*). Ниже приведены нек-рые типичные задачи теории В. с.

Переданный сигнал $s(t)$, случайная или неслучайная функция известной структуры, превращается в принятый сигнал $x(t) = V(s, n)$, где $n(t)$ — случайный процесс (шум), а V (канал связи) — нек-рый оператор, преобразующий пару (s, n) в принятый сигнал x. Чаще всего предполагается, что шум действует на сигнал аддитивно: $x(t) = s(t) + n(t)$. В последней ситуации задачи В. с. следующие.

1) Обнаружение сигнала — проверка гипотезы $x(t) = s(t) + n(t)$ (наличие сигнала) против альтернативы $x(t) = n(t)$ (отсутствие сигнала). Рассматриваются также более сложные варианты исходной гипотезы: $x(t) = s(t) + n(t)$, начиная с нек-рого момента τ — момента появления сигнала. При этом возникает задача оценки τ.

2) Различение сигналов — проверка гипотезы $x(t) = s(t) + n(t)$, $s \in S_1$, против гипотезы $x(t) = s(t) + n(t)$, $s \in S_2$, где S_1 и S_2 — два различных множества сигналов.

3) Фильтрация (восстановление сигнала) — отыскание статистических оценок для значений сигнала $s(t)$ в точке t по реализации $x(t)$, $t \in T$.

См. также *Статистическая гипотеза*, *Случайных процессов фильтрация*.

Лит.: [1] Давенпорт В., Рут В., Введение в теорию случайных сигналов и шумов, пер. с англ., М., 1960; [2] Харкевич А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965.

И. А. Ибрагимов.

ВЫИГРЫША ФУНКЦИЯ — функция, к-рая определена на множестве ситуаций в игре (см. *Игр теория*) и значения к-рой численно характеризуют полезности ситуаций для игрока или коалиции. *Н. Н. Воробьев.*

ВЫМЕТАНИЯ МЕТОД — метод решения *Дирихле задачи* для *Лапласа уравнения*, развитый А. Пуанкаре (см. [1], [2], а также [4]) и состоящий в следующем. Пусть D — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\Gamma = \partial D$ — граница D. Пусть δ_y — мера Дирака, сосредоточенная в точке $y \in D$; $U(x; \delta_y)$ — *ньютонов потенциал* меры δ_y при $n \geqslant 3$ или *логарифмический потенциал* меры δ_y при $n = 2$. Выметанием меры δ_y из области D на границу Γ наз. такая мера β_y на Γ, потенциал к-рой $U(x; \beta_y)$ совпадает вне D с $U(x; \delta_y)$, а внутри D не превосходит $U(x; \delta_y)$; эта мера β_y единственна и совпадает с *гармонической мерой* на Γ

для точки $y \in D$. Аналогично определяется выметание произвольной положительной меры, сосредоточенной на D. Если D — шар, то плотность распределения масс β_y, т. е. производная меры β_y, есть не что иное, как ядро Пуассона (см. *Пуассона интеграл*). Вообще, если граница Γ достаточно гладкая, то мера β_y абсолютно непрерывна и плотность распределения масс β_y совпадает с нормальной производной *Грина функции* для D. При помощи меры β_y решение задачи Дирихле записывается в виде так наз. формулы Валле Пуссена:

$$U(y) = \int_\Gamma f(x)\, d\beta_y(x),$$

где $f(x)$ — заданная на Γ функция.

А. Пуанкаре в первоначальном изложении В. м. указывал сначала геометрич. конструкцию процесса выметания для шара; затем, опираясь на *Гарнака теоремы* и на возможность исчерпания области D последовательностью шаров $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$, он строил бесконечную последовательность потенциалов $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$, в к-рой каждый потенциал U_{n+1} получается из предыдущего U_n выметанием масс из области $\bigcup_{k=1}^{n} B_k$ на ее границу и к-рая сходится к решению задачи Дирихле для достаточно гладкой области D (подробное исследование условий применимости В. м. см. в [3]).

В современной теории потенциала (см. [5], [6]) проблема выметания трактуется как самостоятельная задача, близкая к задаче Дирихле, причем оказывается возможным рассматривать выметания мер на множества довольно общей природы. Таким образом, в простейшей постановке проблема выметания состоит в нахождении по заданному распределению масс μ внутри замкнутой области $\overline{D}$ такого распределения масс ν на $\Gamma = \partial D$, чтобы вне $\overline{D}$ потенциалы обоих распределений совпадали. Решением этой проблемы выметания меры μ в случае гладкой границы Γ будет абсолютно непрерывная мера ν. Ее плотность, или производная $\nu'(y)$, $y \in \Gamma$, записывается при помощи функции Грина $G(x, y)$ области D в виде

$$\nu'(y) = \int \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y}\, d\mu(x),\ \mu \geqq 0,\ y \in \Gamma, \qquad (*)$$

где $\partial G/\partial n_y$ — производная от $G(x, y)$ по направлению внутренней нормали к Γ в точке $y \in \Gamma$. Внутри области D для потенциалов имеет место неравенство $U(x; \nu) \leqslant U(x; \mu)$, т. е. при выметании внутри области потенциал может только убывать. Если $\mu = \delta_x$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $x \in D$, то формула $(*)$ дает $\nu'(y) = \partial G(x, y)/\partial n_y$, т. е. нормальная производная функции Грина есть плотность меры, полученной выметанием единичной массы, сосредоточенной в точке $x \in D$. Обобщая формулу $(*)$, получают выражение выметенной меры $\nu(E)$ любого борелевского множества $E \subset \Gamma$ в случае произвольной области D:

$$\nu(E) = \int \omega(x; E, D)\, d\mu(x),$$

где $\omega(x; E, D)$ — гармоническая мера множества E относительно области D в точке x.

Если K — произвольный компакт в $\mathbb{R}^n$, а μ — ограниченная положительная борелевская мера, то выметанием меры μ на компакт K наз. такая мера ν, сосредоточенная на K, что всюду $U(x; \nu) \leqslant U(x; \mu)$ и квазивсюду на K, т. е. за возможным исключением множества точек внешней емкости нуль, $U(x; \nu) = U(x; \mu)$. Эта постановка проблемы выметания, более общая по сравнению с выметанием из области, распространяется и на потенциалы других видов, напр. на *бесселевы потенциалы*, *Рисса потенциалы*. Рассматриваются также выметания мер на произвольные борелевские множества K.

Близкой к этой постановке является проблема выметания для *супергармонических функций*. Пусть v —

неотрицательная супергармонич. функция в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Выметанием для функции v на компакт $K \subset \overline{D}$ наз. наибольшая супергармонич. функция B_v^K такая, что: 1) ее ассоциированная мера сосредоточена на K; 2) всюду $B_v^K \leqslant v$; 3) $B_v^K = v$ квазивсюду на K.

В *потенциала теории абстрактной* проблема выметания в обеих постановках получает решение для множеств K в произвольных *гармонических пространствах* X, т. е. в таких локально компактных топологич. пространствах X, к-рые допускают выделение аксиоматически определенного пучка гармонич. функций. Этот аксиоматич. подход позволяет рассматривать проблему выметания для потенциалов, связанных с дифференциальными уравнениями с частными производными более общей природы (см. [7]).

Лит.: [1] Poincaré H., «Amer. J. Math.», 1890, v. 12, № 3, p. 211—94; [2] его же, Théorie du potentiel Newtonien, P., 1899; [3] La Vallée-Poussin Ch. J. de, Le potentiel logarithmique, balayage et représentation conforme, Louvain—P., 1949; [4] Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.—Л., 1946; [5] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [6] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [7] Constantinescu C., Cornea A., Potential theory on harmonic spaces, B., 1972. *Е. Д. Соломенцев.*

ВЫНУЖДЕНИЯ МЕТОД, форсинг-метод,— особый способ доказательства существования моделей аксиоматич. теорий, предложенный П. Коэном в 1963 для доказательства совместимости отрицания континуум-гипотезы $\neg$CH и других теоретико-множественных предложений с аксиомами системы Цермело — Френкеля ZF (см. [1]). В дальнейшем В. м. был упрощен и модернизирован (см. [2]—[6]); выявилась, в частности, связь этого метода с теорией *булевозначных моделей* (см. [2], [3]) и моделями Крипке (см. [6]).

Центральным понятием В. м. является отношение вынуждения

$$p \Vdash \varphi$$

(«условие p вынуждает формулу φ»).

Определению отношения вынуждения предшествует фиксирование нек-рого языка L и частично упорядоченного множества P вынуждающих условий p с отношением порядка $\leqslant$. Язык L может содержать переменные и константы разных сортов (или типов).

Построение модели ZF, предложенное П. Коэном, в к-рой нарушается континуум-гипотеза, выглядит следующим образом. Множество M наз. транзитивным, если

$$x \in M \longrightarrow x \subseteq M.$$

Пусть M — счетное транзитивное множество, являющееся моделью ZF, и $\lambda \in M$ — ординальное (по Нейману) число, т. е. $\lambda = \{\alpha : \alpha < \lambda\}$. Пусть $A \subseteq \lambda \times \omega_0$ — произвольное множество (возможно, что $A \notin M$), где ω_0 — первое бесконечное ординальное число. Если X — транзитивное множество, то пусть $\mathrm{Def}(X)$ обозначает множество всех X-определимых подмножеств (см. *Конструктивное по Гёделю множество*), т. е. $\mathrm{Def}(X) = \mathrm{Def}(X, \in | X)$. С помощью процесса, аналогичного построению конструктивных по Гёделю множеств, для каждого ординального числа α индуктивно определяется множество $M_\alpha[A]$:

$$M_\alpha[A] = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Def}\left(M_\beta[A]\right) \cup \left\{x \in M \cup \{A\} : x \subseteq M_\beta[A]\right\}.$$

Пусть $M[A] = M_{\alpha_0}[A]$, где $\alpha_0 = \sup\{\alpha \in M : \alpha$ — ординал$\}$. Модель ZF, в к-рой нарушается континуум-гипотеза, ищется среди моделей вида $M[A]$. Пусть λ — ординал такой, что в M истинно утверждение: λ есть второй несчетный ординал.

Множество вынуждающих условий P и отношение $\leqslant$ определяются эквивалентностями: а) $p \in P \Longleftrightarrow p$ — функция, определенная на нек-ром конечном подмножестве

множества $\lambda \times \omega_0$, со значениями в множестве $\{0, 1\}$, b) $p \leqslant q \Longleftrightarrow q$ есть продолжение p. В качестве языка L берется так наз. р а з в е т в л е н н ы й я з ы к, имеющий много типов переменных (для каждого $\alpha \leqslant \alpha_0$ свой тип переменных, пробегающих множество $M_\alpha[A]$) и содержащий имена (т. е. индивидные константы) для каждого множества из $M[A]$. Если $x \in M$, то имя x обозначается через $x^\smile$. Пусть a — имя множества A. Отношение вынуждения $p \Vdash \varphi$ вводится индуктивным определением, имеющим, в частности, следующие характерные пункты:

(1) $p \Vdash (\langle \delta n \rangle^\smile \in a) \Longleftrightarrow p(\langle \delta n \rangle) = 1$,

(2) $p \Vdash (\neg \varphi) \Longleftrightarrow \neg \exists q \geqslant p (q \Vdash \varphi)$,

(3) $p \Vdash (\varphi \vee \psi) \Longleftrightarrow p \Vdash \varphi \vee p \Vdash \psi$,

(4) $p \Vdash (\varphi \wedge \psi) \Longleftrightarrow p \Vdash \varphi \wedge p \Vdash \psi$.

Если α — тип переменной x, то

(5) $p \Vdash \exists x \varphi(x) \Longleftrightarrow \exists c \in C_\alpha p \Vdash \varphi(c)$,

где C_α — множество всех констант типа α.

Последовательность вынуждающих условий

$$p_0 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n \leqslant \ldots$$

наз. п о л н о й, если для всякой замкнутой формулы φ языка L имеет место

$$\exists n (p_n \Vdash \varphi \vee p_n \Vdash \neg \varphi).$$

Счетность множества всех замкнутых формул языка L и пункт (2) определения отношения вынуждения позволяют доказать существование полной последовательности, начиная с любого p_0.

Множество A, содержащееся в $\lambda \times \omega_0$, наз. г е н е р и ч е с к и м о т н о с и т е л ь н о м о д е л и M, если существует такая полная последовательность, что $\bigcup_{n \leqslant \omega_0} p_n$ есть характеристич. функция χ_A множества A. Фундаментальное значение имеют следующие два факта о генерических множествах и отношении вынуждения.

I. Если A — генерическое множество, то

$$M[A] \models \varphi \Longleftrightarrow \exists p \subseteq \chi_A (p \Vdash \varphi),$$

где $M[A] \models \varphi$ означает, что формула φ истинна в $M[A]$.

II. Отношение

$$p \Vdash \varphi(c_1, \ldots, c_n),$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — константы L, рассматриваемое как отношение между $p, c_1, \ldots, c_n$, выразимо в модели M.

В силу этих фактов, для доказательства того, что $M[A] \models \varphi$, достаточно показать истинность в модели M утверждения

$$\forall p (p \Vdash \neg\neg \varphi), \text{ т. е. } \forall p \exists q \geqslant p (q \Vdash \varphi).$$

На этом основана проверка справедливости в модели $M[A]$ аксиом ZF и $\neg$CH. При проверке $\neg$CH в $M[A]$ используется также специфика множества вынуждающих условий, позволяющая доказать, что:

1) если ординалы $\delta_1, \delta_2 < \lambda$ различны, то

$$\forall p \exists q \geqslant p \exists n < \omega_0 (q(\langle \delta_1 n \rangle) \neq q(\langle \delta_2 n \rangle)),$$

т. е.

$$A_{\delta_1} \neq A_{\delta_2}, \text{ где } A_\delta = \{n \mid \langle \delta n \rangle \in A\};$$

2) $M[A] \models (\lambda$ есть второй несчетный ординал).

Укажем, как отношение вынуждения связано с булевозначными моделями.

Если ввести обозначения

$$\|\varphi\| = \{p \in P : p \Vdash \neg\neg \varphi\},$$

$$\mathbb{B} = \{X \subseteq P : \forall p (p \in X \leftrightarrow \forall q \geqslant p \exists r \geqslant q (r \in X))\},$$

то $(\mathbb{B}, \subseteq)$ есть полная булева алгебра и $\|\varphi\| \in \mathbb{B}$ есть булево значение формулы φ. Таким образом, задание частично упорядоченного множества $(P, \leqslant)$ и определение отношения $p \Vdash \neg\neg \varphi$ оказываются равносильными по-

строению нек-рой булевозначной модели $\mathfrak{M}$. Анализ доказательства утверждений вида:

$$M[A] \models \varphi_0,$$

где φ_0 — аксиома ZF или $\neg$CH, позволяет заключить, что формулы ZF, выражающие утверждение:

$$\forall p\,(p \Vdash \neg\neg\,\varphi_0),$$

т. е. $\|\varphi\| = 1_B$, выводимы из аксиом ZF. Таким образом, $\mathfrak{M}$ есть B-модель для ZF+$\neg$CH, построенная средствами ZF. Предположение о существовании счетного транзитивного множества, являющегося моделью ZF, равно как и понятие генерического множества, оказываются несущественными для целей доказательства относительной непротиворечивости.

Выяснилось, что построение булевозначной модели можно упростить (см. [2], [3], [5]). В частности, введение разветвленного языка L не является обязательным. Возможен следующий способ построения генерической модели $M[A]$ (см. [4]).

Подмножество X частично упорядоченного множества $(P, \leqslant)$ наз. п л о т н ы м, если

$$\forall p\,\exists q \geqslant p\,(q \in X).$$

Пусть P и отношение $\leqslant$ суть элементы нек-рого счетного транзитивного множества M, являющегося моделью ZF. Подмножество $G \subseteq P$ наз. M-г е н е р и ч е с к и м ф и л ь т р о м, если:

1) $p \in G \wedge q \leqslant p \to q \in G$,
2) $p \in G \wedge q \in G \to \exists r \in G\,(p \leqslant r \wedge q \leqslant r)$,
3) $(X \in M \wedge X$ плотно на $P) \to X \cap G \neq \varnothing$.

Пусть G есть M-генерический фильтр на P. Так как M счетно, то G существует. Вообще говоря, $G \notin M$. Отношение $\in_G$ определяется эквивалентностью

$$x \in_G y \leftrightarrow \exists p \in G\,(\langle x, p\rangle \in y),$$

где x и y — произвольные элементы модели M.

Пусть функция F_G определена на M равенством

$$F_G(y) = \{F_G(x) : x \in_G y\}$$

и

$$N_G = \{F_G(x) : x \in M\}.$$

Если φ — замкнутая формула языка ZF, пополненного константами для обозначения каждого множества из M, то положим

$$p \Vdash \varphi \leftrightarrow \forall G \ni p\ (G \text{ есть } M\text{-генерический фильтр} \to N_G \models \varphi).$$

Можно показать, что

I. $N_G \models \varphi \leftrightarrow \exists p \in G\,(p \Vdash \varphi)$.

II. Отношение $p \Vdash \varphi(c_1, \ldots, c_n)$ определимо в модели M для каждой формулы φ.

Используя только I, II и тот факт, что M — модель ZF, можно установить, что N_G — модель ZF. Если P определено эквивалентностями (a) и (b), то $N_G \models \neg$CH и $\bigcup G$ есть характеристич. функция нек-рого множества $A \subseteq \lambda \times \omega_0$ и $M[A] = N_G$. Определимое в M отношение $p \Vdash \varphi$ не удовлетворяет пунктам (3) и (5) определения П. Коэна отношения вынуждения. Имеет место

$$p \Vdash \exists x \varphi(x) \leftrightarrow \forall p' \geqslant p\,\exists p'' \geqslant p'\,\exists a \in M\,(p'' \Vdash \varphi(a)).$$

Полагая

$$\|\varphi\| = \{p \Vdash \varphi\},$$

получим определимую в M булевозначную модель для ZF+$\neg$CH с той же булевой алгеброй $\mathbb{B}$, что и в случае П. Коэна.

Таким образом, В. м. состоит фактически в построении $\mathbb{B}$-модели и гомоморфизма, сохраняющего нек-рые бесконечные объединения и пересечения алгебры $\mathbb{B}$, в двухэлементную алгебру $\{0, 1\}$ (о применениях В. м. в теории множеств см., напр., [2]).

Лит.: [1] К о э н П. Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969; [2] Й е х Т., Теория множеств и метод форсинга, пер. с англ., М., 1973; [3] T a k e u t i G., Z a r i n g W. M., Axiomatic set theory, N. Y. — Hdlb. — B.,

1973; [4] Шенфилд Дж., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975; [5] Манин Ю. И., в кн.: «Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 5, М., 1975, с. 5—72; [6] Fitting M. C., Intuitionistic logic, model theory and forcing, Amst.— L., 1969. *В. Н. Гришин.*

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ — незатухающие колебания в к.-л. материальной системе, возникающие под действием внешней переменной во времени силы. В линейной *диссипативной системе* при действии на нее внешней силы, изменяющейся по гармоническому закону, В. к. имеют частоту внешней силы. Амплитуда В. к. определяется параметрами внешнего воздействия (амплитудой, частотой) и коэффициентами сопротивления среды, в к-рой происходят колебания материальной системы. Если частота внешней силы близка к одной из частот *собственных колебаний* системы, то амплитуда В. к. может иметь достаточно большую величину, тем большую, чем меньше сопротивление среды. В случае отсутствия сопротивления среды при совпадении частоты внешней силы с одной из частот собственных колебаний системы амплитуда В. к. неограниченно возрастает пропорционально времени. Это явление носит название *резонанса*.

При включении внешней силы в материальной системе возникают как В. к., так и собственные колебания. В диссипативной системе собственные колебания затухают, и в системе остаются только В. к. (установившийся режим). Режим перехода к установившимся колебаниям наз. переходным режимом. Время переходного режима тем меньше, чем больше сопротивление среды. Если внешняя сила является периодич. функцией времени с периодом $T=2\pi/p$, к-рая может быть представлена рядом Фурье, то в линейной системе возникают В. к., представляющие собой сумму гармоник с частотами np ($n=1, 2, 3, \ldots$). Амплитуды этих гармоник убывают с возрастанием n, но не равномерно. На практике часто ограничиваются конечным числом гармоник.

Если при к.-л. значении n частота np близка к одной из собственных частот системы, то амплитуда гармоники В. к. с частотой np может быть достаточно большой, а при отсутствии сопротивления среды будет расти пропорционально времени. Напр., для диссипативной системы с одной степенью свободы, уравнение движения к-рой имеет вид

$$\ddot{x}+2h\dot{x}+k^2x=\sum_{n=1}^{\infty}H_n\sin(npt+\delta_n)$$

(h, k^2, H_n, p, δ_n — постоянные коэффициенты), В. к. будут происходить по закону

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{\sqrt{(k^2-n^2p^2)^2+4h^2n^2p^2}}\sin(npt+\delta_n-\gamma_n),$$

где $\gamma_n=\operatorname{arctg}[2hnp/(k^2-n^2p^2)]$. Если же $h=0$ (среда без сопротивления) и $sp=k$, то

$$x=\sum_{n=1}^{(s)\ \infty}\frac{H_n}{k^2-n^2p^2}\sin(npt+\delta_n)-\frac{H_s t}{2sp}\cos(spt+\delta_s),$$

где значок (s) у суммы означает, что член при $n=s$ в сумму не входит.

При непериодическом внешнем возмущении возникающие в системе В. к. будут также непериодическими. При воздействии внешней гармонической силы на нелинейную диссипативную систему возможно возникновение В. к. не только с частотой внешней силы, но и с частотой, в целое число раз большей частоты внешней силы (субгармонические колебания).

В автоколебательной системе (см. *Автоколебания*) при действии на нее внешней гармонической силы возникает квазипериодический режим (режим биений), характеризующийся наличием периодич. колебания с частотой, близкой к частоте автоколебаний, и В. к. с частотой внешнего возмущения. При частоте внешнего возмущения, близкой к частоте

автоколебаний, система совершает колебания только с частотой внешней силы. Это явление носит назв. принудительной синхронизации (захватывание).

Лит.: [1] Андронов А. А., Собрание трудов, [М.], 1956; [2] Бабаков И. М., Теория колебаний, 2 изд., М., 1965; [3] Бутенин Н. В., Теория колебаний, 2 изд., М., 1963; [4] Коловский М. З., Нелинейная теория виброзащитных систем, М., 1966; [5] Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, пер. с англ., 2 изд., М., 1953; [6] Стрелков С. П., Введение в теорию колебаний, 2 изд., М., 1964; [7] Цзе Ф. С., Морзе И. Е., Хинкл Р. Т., Механические колебания, пер. с англ., М., 1966.

Н. В. Бутенин.

ВЫПУКЛАЯ ИГРА — *бескоалиционная игра* n лиц, в к-рой существует такое непустое множество игроков A, что для каждого игрока $i \in A$ множество его чистых стратегий X_i выпукло, а функция выигрыша $K_i(x_1, \ldots, x_n)$ вогнута по $x_i \in X_i$ при всех значениях x_k, $k \neq i$. Если функции выигрыша всех игроков в В. и. непрерывны, а множества чистых стратегий компактны, то существует ситуация равновесия, в к-рой игроки множества A используют чистые стратегии. В. и. наз. конечной, если каждое X_i компактно и содержится в нек-ром евклидовом пространстве E^{n_i}, а функции выигрыша K_i полилинейны. В частности, конечная антагонистическая В. и. задается тройкой $\langle R, S, K \rangle$, где $R \subset E^m$, $S \subset E^n$, а функция K имеет вид

$$K(r, s) = \sum a_{ij} r_i s_j, \quad r_i \in R, \ s_j \in S.$$

Если μ и ν — размерности множеств оптимальных стратегий игроков I и II соответственно, а ρ — ранг матрицы $\|a_{ij}\|$, то $\mu + \nu \leqslant m + n - \rho$. Поэтому если матрица $\|a_{ij}\|$ невырожденна, то $\mu + \nu \leqslant \max(m, n)$. Конечные В. и. тесно связаны с *вырожденными играми*.

Пусть $\Gamma = \langle X, Y, K \rangle$ — антагонистическая *игра на единичном квадрате*, функция выигрыша к-рой вогнута по $x \in X$ при каждом $y \in Y$ и непрерывна на квадрате $X \times Y$. Тогда игрок I имеет оптимальную чистую стратегию $x_0 \in X$, а игрок II — оптимальную меру (смешанную стратегию), носитель к-рой состоит не более чем из двух точек. Таким образом, можно получить нек-рую информацию о свойствах стратегий игроков в В. и., не принадлежащих множеству A. Естественным обобщением В. и. на единичном квадрате являются обобщенно-выпуклые игры, к-рые определяются тем, что для нек-рого n выполняется неравенство $\partial^n K(x, y)/\partial x^n \leqslant 0$ при $x \in X$, $y \in Y$. В этом случае, если условиться, что концевой точке отрезка приписывается вес $^1/_2$, игрок I имеет оптимальную меру, носитель к-рой состоит не более чем из $n/2$ точек, а игрок II — оптимальную меру, носитель к-рой состоит не более чем из n точек.

Лит.: [1] Никайдо Х., Исода К., в кн.: Бесконечные антагонистические игры, М., 1963, с. 449—58; [2] Дрешер М., Карлин С., там же, с. 180—94; [3] Бонненбласт Х. Ф., Карлин С., Шепли Л. С., там же, с. 337—52.

Г. Н. Дюбин.

ВЫПУКЛАЯ МЕТРИКА — *внутренняя метрика* на двумерном многообразии M, удовлетворяющая нек-рому условию выпуклости. Точнее, пусть l и m две кратчайшие, исходящие из нек-рой точки $O \in M$, X и Y — точки на них, x, y — расстояние от O до X, Y, z — расстояние между X, Y, $\gamma(x, y)$ — угол в плоском треугольнике со сторонами, равными x, y, z, лежащий против стороны, равной z. Условие выпуклости метрики (в точке O) состоит в том, что $\gamma(x, y)$ является невозрастающей функцией (т. е. $\gamma(x_1, y_1) \geqslant \gamma(x_2, y_2)$ при $x_1 \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y_2$) на всякой паре промежутков $0 < x \leqslant x_0$, $0 < y \leqslant y_0$ такой, что точки X и Y, соответствующие любым двум значениям из этих промежутков, можно соединить кратчайшей. Внутренняя метрика является В. м. тогда и только тогда, когда она есть метрика неотрицательной кривизны. Метрика выпуклой поверхности является В. м. Обратно, любое двумерное многообразие с В. м.

реализуется в виде выпуклой поверхности (теорема А. Д. Александрова).

Лит.: [1] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.—Л., 1948.

М. И. Войцеховский.

ВЫПУКЛАЯ ОБЛАСТЬ — *выпуклое множество*, имеющее внутренние точки.

ВЫПУКЛАЯ ОБОЛОЧКА множества M — минимальное *выпуклое множество*, содержащее M; то есть пересечение всех содержащих M выпуклых множеств. В. о. множества M обозначается $\mathrm{conv}M$. В евклидовом пространстве E^n В. о. есть множество возможных положений центра тяжести массы, различным образом распределяемой в M. Каждая точка В. о. есть центр тяжести массы, сосредоточенной не более чем в $n+1$ точках (теорема Каратеодори).

Замыкание В. о. наз. замкнутой В. о. Она представляет собой пересечение всех содержащих M замкнутых полупространств или совпадает со всем E^n. Часть границы В. о., не прилегающая к M, имеет локально строение развертывающейся гиперповерхности. В E^n В. о. ограниченного замкнутого множества M есть В. о. крайних точек M (крайней наз. точку множества M, не являющуюся внутренней ни для какого отрезка, принадлежащего M).

Кроме евклидова пространства, В. о. обычно рассматривают в локально выпуклых линейных топологич. пространствах L. В L В. о. компактного множества M есть замкнутая В. о. его крайних точек (теорема Крейна — Мильмана).

Лит.: [1] Эдвардс Р., Функциональный анализ. Теория и приложения, пер. с англ., М., 1969; [2] Фелпс Р., Лекции о теоремах Шоке, пер. с англ., М., 1968.

В. А. Залгаллер.

ВЫПУКЛАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — область (связное открытое множество) на границе *выпуклого тела* в евклидовом пространстве E^3. Вся граница выпуклого тела наз. полной В. п. Если тело конечно, то полная В. п. наз. замкнутой. Если тело бесконечно, то полная В. п. наз. бесконечной. Бесконечная В. п. гомеоморфна либо плоскости, либо круговому цилиндру. В последнем случае она сама является цилиндром. Простейшее выпуклое тело — выпуклый многогранник, т. е. пересечение конечного числа полупространств. Поверхность выпуклого многогранника составлена из выпуклых многоугольников и также наз. *выпуклым многогранником*.

Современная теория В. п. построена главным образом советскими геометрами — А. Д. Александровым и его школой. Однако отдельные результаты теории В. п. были известны значительно раньше. Так, еще О. Коши (A. Cauchy) доказал неизгибаемость замкнутого выпуклого многогранника. Г. Либман (H. Liebmann) и В. Бляшке (W. Blaschke) доказали жесткость замкнутых выпуклых поверхностей. Г. Минковский (H. Minkowski) — существование замкнутой В. п. с данной гауссовой кривизной. Г. Вейль (H. Weyl) наметил решение проблемы существования замкнутой В. п. с данной метрикой. Это решение было завершено Г. Леви (H. Lewy). С. Кон-Фоссен (S. Cohn-Vossen) доказал однозначную определенность регулярных замкнутых В. п.

С каждой точкой X В. п. F естественным образом связан конус $V(X)$ — предел поверхностей F_n при $n\to\infty$, получаемых преобразованием гомотетии из F относительно точки X с коэффициентом гомотетии n. Этот конус наз. касательным конусом. В зависимости от вида касательного конуса, точки В. п. подразделяются на конические, ребристые и гладкие. Точка В. п. наз. конической, если касательный конус в этой точке не вырождается. Если же касательный конус вырождается в двугранный угол или плоскость, точка наз. ребристой или, соответственно, гладкой. Негладкие точки на В. п. представляют собой в нек-ром смысле исключение. Именно, множество реб-

ристых точек имеет меру нуль, а множество конических точек не более чем счетно.

Для последовательности В. п. определяется понятие сходимости: последовательность В. п. F_n сходится к В. п. F, если любое открытое множество D одновременно пересекает или не пересекает F и все F_n при $n>N(D)$. Любую В. п. можно представить как предел выпуклых многогранников. Бесконечные совокупности В. п. обладают важным свойством компактности, состоящим в том, что из любой последовательности полных В. п., не удаляющихся в бесконечность, всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность с пределом в виде В. п., к-рая может быть вырожденной (в дважды покрытую плоскую область, прямую, полупрямую или отрезок).

Любые две точки В. п. можно соединить спрямляемой кривой на поверхности. Точная нижняя грань длин кривых, соединяющих две данные точки на В. п., наз. р а с с т о я н и е м м е ж д у э т и м и т о ч к а м и н а п о в е р х н о с т и. Кривая на В. п. наз. к р а т ч а й ш е й, если она имеет наименьшую длину среди всех кривых на поверхности, соединяющих ее концы. У каждой точки В. п. есть окрестность, любые две точки к-рой можно соединить кратчайшей на поверхности. На полной В. п. любые две точки соединяются кратчайшей. Кратчайшая на В. п. имеет в каждой точке правую и левую полукасательные. Важнейшим свойством кратчайших на В. п. является с в о й с т в о н е н а л е г а н и я. Оно состоит в том, что для взаимного расположения двух кратчайших могут быть только следующие возможности: кратчайшие не имеют общих точек; кратчайшие имеют одну общую точку; кратчайшие имеют две общие точки, являющиеся их концами; одна кратчайшая есть часть другой; кратчайшие совпадают на нек-ром отрезке, причем один конец этого отрезка является концом одной кратчайшей, а второй конец служит концом другой кратчайшей. Метрика В. п. обладает с в о й с т в о м в ы п у к л о с т и (см. *Выпуклая метрика*). У г л о м между кратчайшими γ и γ' в точке O наз. предел угла $\alpha(X, X')$ при $X, X'\to O$. Определяемый так угол существует для любых двух кратчайших, исходящих из общей точки. По свойству неналегания кратчайших, кратчайшие γ и γ', исходящие из точки O, разбивают окрестность этой точки на два сектора. Пусть V — один из этих секторов, ограниченный кратчайшими γ и γ'. Проведем в этом секторе кратчайшие $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, занумеровав их в порядке следования от γ к γ'. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — углы между соседними кратчайшими γ и γ_1, γ_1 и γ_2, ... У г л о м с е к т о р а V наз. точная верхняя грань суммы углов $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ по всем кратчайшим γ_i внутри сектора. Угол сектора равен углу между полукасательными к кратчайшим в точке O на развертке касательного конуса. Сумма углов взаимно дополняющих секторов с вершиной в точке O не зависит от взятых кратчайших и наз. п о л н ы м у г л о м п о в е р х н о с т и в т о ч к е O. Полный угол в любой точке В. п. не превышает 2π.

Для В. п. вводится понятие в н у т р е н н е й и в н е ш н е й к р и в и з н ы. Внутренняя кривизна ω определяется сначала для основных множеств — точек, открытых кратчайших и треугольников. Т р е у г о л ь н и к о м наз. гомеоморфная кругу область, ограниченная тремя кратчайшими. Если M — точка и θ — полный угол вокруг нее на поверхности, то $\omega(M)=2\pi-\theta$. Если M — открытая кратчайшая, т. е. кратчайшая с исключенными концами, то $\omega(M)=0$. Если M — открытый треугольник, т. е. треугольник с исключенными сторонами и вершинами, то $\omega(M)=\alpha+\beta+\gamma-\pi$, где α, β, γ — углы треугольника. Далее кривизна определяется для элементарных множеств, представляемых в виде теоретико-множественной суммы попарно не пересекающихся основных: $M=\sum_{k=1}^{n} B_k$. Для таких мно-

жеств $\omega(M)=\Sigma\omega(B_k)$. Внутренняя кривизна любого замкнутого множества определяется как точная нижняя грань внутренней кривизны элементарных множеств, содержащих данное замкнутое множество. Наконец, для любого множества внутренняя кривизна определяется как верхняя грань внутренней кривизны содержащихся в нем замкнутых множеств. Определяемая таким образом внутренняя кривизна на В. п. является вполне аддитивной функцией на кольце *борелевских множеств*. Внешняя кривизна множества на В. п. определяется как площадь (мера Лебега) *сферического изображения* этого множества. Она определена для всех борелевских множеств на В. п. и совпадает с внутренней кривизной.

Метрика ρ двумерного многообразия наз. в н у т р е н н е й, если расстояние $\rho(X_1, X_2)$ между любыми двумя точками X_1 и X_2 многообразия равно точной нижней грани длин кривых в этом многообразии, соединяющих точки X_1 и X_2. При этом длина кривой $X(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, соединяющей точки X_1 и X_2, определяется как точная верхняя грань сумм

$$\sum\rho(X(t_{k-1}),\quad X(t_k)),\quad 0\leqslant t_1<t_2<\ldots\leqslant 1.$$

Пусть γ и γ' — две кривые, исходящие из точки O в многообразии с внутренней метрикой. Возьмем на них точки X и X' и построим плоский треугольник со сторонами $\rho(O, X)$, $\rho(O, X')$, $\rho(X, X')$. Нижний предел угла $\alpha(X, X')$ этого треугольника, противолежащего стороне $\rho(X, X')$, наз. у г л о м м е ж д у к р и в ы м и γ и γ' в точке O. Очевидно, этот угол всегда существует. Метрика многообразия наз. в ы п у к л о й, если для любого треугольника, стороны к-рого являются кратчайшими, сумма его углов не меньше π. Метрика В. п.— в этом смысле выпуклая. Одним из основных результатов теории В. п. является теорема о реализуемости внутренней выпуклой метрики на нек-рой В. п. Именно, полное многообразие с внутренней выпуклой метрикой реализуется полной В. п.

Для кривых на В. п. вводится понятие п р а в о г о и л е в о г о п о в о р о т о в, обобщающее понятие интегральной *геодезической кривизны*. Пусть γ — произвольная кривая без самопересечений на В. п. с концами A и B. Задается направление на кривой γ и строится последовательность простых геодезических ломаных с концами A, B, сходящихся к γ и расположенных в правой полуокрестности кривой. Пусть α_n — углы секторов, образуемые звеньями ломаной со стороны области, ограниченной ломаной γ_n и кривой γ; α и β — углы секторов, образуемых ломаной γ_n и кривой γ в концевых точках. П р а в ы м п о в о р о т о м наз. предел $\alpha+\beta+\Sigma(\pi-\alpha_n)$ при $\gamma_n\to\gamma$. Этот предел всегда существует, если кривая γ имеет определенные направления на концах, т. е. полукасательные, и не зависит от взятой последовательности ломаных. Л е в ы й п о в о р о т определяется аналогично. Поворот замкнутой кривой определяется путем приближения к ней замкнутой ломаной с соответствующей стороны. Для В. п. имеет место теорема, обобщающая *Гаусса — Бонне теорему* для регулярных поверхностей. Именно, если замкнутая кривая на В. п. ограничивает гомеоморфную кругу область, то сумма кривизны области и поворота кривой, ограничивающей область со стороны этой области, равна 2π.

И з о м е т р и ч е с к и м п р е о б р а з о в а н и е м наз. такая деформация В. п., при к-рой поверхность остается выпуклой и ее метрика не меняется, т. е. не изменяются расстояния между точками на поверхности. Изометрич. преобразование наз. т р и в и а л ь н ы м, если оно сводится к перемещению поверхности как целого или к перемещению и зеркальному отражению. Поверхность, не допускающая нетривиальных изометрич. преобразований, наз. о д н о з н а ч н о-

определенной. Замкнутые В. п. и бесконечные В. п. с полной кривизной 2π являются однозначно-определенными. Бесконечные В. п. с полной кривизной, меньшей 2π, допускают нетривиальные изометрич. преобразования и притом с большим произволом. Всякая В. п. локально допускает нетривиальные изометрич. преобразования, т. е. каждая точка В. п. имеет окрестность, допускающую такие преобразования.

Важнейшим средством исследования изометрич. преобразований В. п. является теорема о склеивании. Согласно этой теореме, полное многообразие D, составленное из областей D_k, изометричных В. п., само изометрично В. п., если выполняются следующие условия: границы областей D_k имеют повороты ограниченной вариации, отождествляемые участки границ одинаковой длины, сумма поворотов на любом отрезке отождествляемых границ неотрицательна, а сумма углов секторов в любой общей точке границ областей D_k не превышает 2π. Теоремы о возможности нетривиальных изометрич. преобразований В. п. обычно получают «подклеиванием» к данной В. п. плоской области с соблюдением указанных выше условий.

Для общих В. п. вводится понятие площади для любого борелевского множества; сначала оно вводится для простейших множеств, ограниченных кратчайшими,— геодезич. многоугольников. Многоугольник подвергается мелкой триангуляции T_n так, чтобы стороны треугольников были меньше $1/n$. Для каждого треугольника этой триангуляции строится плоский треугольник со сторонами той же длины и берется сумма площадей S_n таких треугольников. Оказывается, независимо от выбора триангуляции многоугольника, сумма S_n при $n\to\infty$ стремится к определенному пределу. Этот предел и принимается за площадь многоугольника. Затем обычными приемами теории меры определяются площади замкнутых, открытых и вообще борелевских множеств. Площадь В. п. есть вполне аддитивная функция на кольце борелевских множеств.

Удельной кривизной В. п. в области D наз. отношение кривизны области к ее площади. Если удельная кривизна В. п. во всех областях заключена в положительных пределах, то поверхность является гладкой и строго выпуклой. Гауссовой кривизной В. п. в данной точке X наз. предел удельной кривизны области D при стягивании ее к точке X. Гауссова кривизна, если она существует, является непрерывной функцией точки на поверхности. Если на В. п. существует определенная гауссова кривизна, то на этой поверхности можно ввести полярные геодезич. координаты и представить линейный элемент поверхности в виде

$$ds^2=dr^2+G(r,\ \theta)d\theta^2.$$

При этом гауссова кривизна с помощью коэффициента G определяется по формуле

$$K=-\frac{(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}},$$

В. п. наз. регулярной, если в окрестности любой ее точки она допускает аналитич. задание $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v)$, где $\boldsymbol{r}(u,\ v)$ — регулярная (достаточное число раз дифференцируемая) вектор-функция, удовлетворяющая условию $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq 0$. Метрика В. п. наз. регулярной, если она допускает задание с помощью линейного элемента

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$

причем коэффициенты формы ds^2 — регулярные функции. Регулярная В. п. имеет, очевидно, регулярную метрику, так как

$$E=\boldsymbol{r}_u^2,\quad F=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v,\quad G=\boldsymbol{r}_v^2.$$

Обратное, вообще говоря, неверно. Напр., двугранный угол имеет регулярную, даже аналитич. метрику, так

как он изометричен плоскости, но не является регулярной поверхностью. Однако, если метрика В. п. регулярна, а гауссова кривизна положительна, то поверхность регулярна. Именно, если коэффициенты линейного элемента дифференцируемы n раз ($n \geqslant 2$), то поверхность дифференцируема по крайней мере $n-1$ раз.

Теория В. п. строится также и в пространствах постоянной кривизны. При этом, как и в евклидовом пространстве, В. п. наз. область на границе выпуклого тела. Многие результаты теории В. п. в пространствах постоянной кривизны формулируются и доказываются так же, как и для В. п. евклидова пространства. Однако нек-рые результаты существенно отличаются. Напр., в пространстве Лобачевского полная В. п. может быть гомеоморфна любому связному открытому множеству на сфере.

Лит.: [1] Minkowski H., «Math. Ann.», 1903, Bd 57, S. 447—95; [2] Вейль Г., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 2, с. 159—90; [3] Кон-Фоссен С. Э., «Успехи матем. наук», 1936, в. 1, с. 33—76; [4] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.—Л., 1948; [5] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.

А. В. Погорелов.

ВЫПУКЛАЯ ПОДГРУППА — подгруппа H (частично) *упорядоченной группы* G, являющаяся *выпуклым подмножеством* G относительно заданного отношения порядка. Инвариантные выпуклые подгруппы и только они являются ядрами гомоморфизмов частично упорядоченных групп, сохраняющих порядок. Подгруппа упорядочиваемой группы, выпуклая при всяком линейном упорядочении, наз. абсолютно выпуклой подгруппой, а выпуклая при нек-ром ее линейном порядке — относительно выпуклой подгруппой. Пересечение всех неединичных относительно выпуклых подгрупп упорядочиваемой группы есть абсолютно выпуклая подгруппа, объединение всех собственных относительно выпуклых подгрупп также есть абсолютно выпуклая подгруппа. Абелевы группы без кручения не имеют нетривиальных абсолютно выпуклых подгрупп. Подгруппа H доупорядочиваемой группы G абсолютно выпукла тогда и только тогда, когда для любых элементов $g \notin H$, $a \in H$ пересечение $S(g) \cap S(ga)$ не пусто, где $S(x)$ — минимальная инвариантная подполугруппа G, содержащая x. Выпуклая l-подгруппа H *структурно упорядоченной группы* изолирована, т. е. для любого натурального n из $x^n \in H$ следует $x \in H$.

Лит.: [1] Кокорин А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972; [2] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965.

А. И. Кокорин, В. М. Копытов.

ВЫПУКЛАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность действительных чисел $\{a_n\}$, $n=0, 1, \ldots$, удовлетворяющих условию

$$2a_n \leqslant a_{n-1} + a_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots . \qquad (*)$$

Если положить

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}, \quad \Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1},$$

то условие (*) запишется в виде

$$\Delta^2 a_n \geqslant 0, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Геометрически условие (*) означает, что ломаная на плоскости x, y с вершинами в точках $x=n$, $y=a_n$ является выпуклой. Если последовательность $\{a_n\}$ выпукла и ограничена, то:

1) она не возрастает и, следовательно, сходится к конечному пределу;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} n\Delta a_n = 0$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,\Delta^2 a_n = a_0 - \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Если $f(x)$ — *выпуклая функция* при $x \geqslant 0$, то последовательность $a_n = f(n)$, $n=0, 1, \ldots$, выпукла.

Л. Д. Кудрявцев.

ВЫПУКЛАЯ ФУНКЦИЯ действительного переменного — функция $f(x)$, определенная на нек-ром интервале, для любых двух точек x_1 и x_2 к-рого выполняется условие

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \qquad (1)$$

Геометрически это означает, что середина любой хорды графика функции f лежит либо над графиком, либо на нем. Если для любых x_1 и x_2 неравенство (1) является строгим неравенством, то функция f называется строго выпуклой. Примеры В. ф.: x^p, $p\geqslant 1$, $x\ln x$ для $x>0$ и $|x|$ для всех x. При обратном знаке неравенства (1) функцию f наз. вогнутой. Всякая измеримая В. ф. непрерывна. Существуют В. ф., не являющиеся непрерывными, но они очень нерегулярны: если функция f выпукла на интервале (a, b) и ограничена сверху в некотором интервале, лежащем внутри (a, b), то она непрерывна на (a, b). Таким образом разрывная В. ф. неограничена на каждом внутреннем интервале и неизмерима.

Если функция f непрерывна на интервале и на каждой хорде ее графика имеется по крайней мере одна точка, отличная от концов хорды и лежащая над графиком или на нем, то функция f выпукла. Из условия (1) для непрерывной функции f вытекает, что центр тяжести любого конечного числа материальных точек, лежащих на графике функции, находится либо над ее графиком, либо на нем: для любых чисел $p_k>0$, $k=1, 2, \ldots, n$ (n — произвольно) справедливо неравенство

$$f\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}p_kx_k}{\sum_{k=1}^{n}p_k}\right)\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}p_kf(x_k)}{\sum_{k=1}^{n}p_k}, \qquad (2)$$

называемое *Иенсена неравенством*.

Если для нек-рой функции f неравенство (2) выполняется для любых двух точек x_1 и x_2 нек-рого интервала и любых $p_1>0$ и $p_2>0$, то функция f непрерывна и, конечно, выпукла на этом интервале. Любая хорда графика непрерывной В. ф. либо совпадает с соответствующей его частью, либо, за исключением его концов, целиком лежит над графиком. Это означает, что если непрерывная В. ф. не является линейной ни на каком интервале, то в неравенствах (1) и (2) для любых попарно различных значений аргумента выполняется строгое неравенство, и значит f является строго В. ф.

Непрерывная функция выпукла тогда и только тогда, когда множество точек плоскости, лежащих над ее графиком, т. е. ее *надграфик* является *выпуклым множеством*. Для того чтобы непрерывная функция f, определенная на интервале (a, b), была выпукла, необходимо и достаточно, чтобы через каждую точку ее графика проходила по крайней мере одна прямая (наз. опорной прямой), лежащая либо под графиком [над интервалом (a, b)], либо частично на графике, т. е. чтобы для любой точки $x_0\in(a, b)$ существовало такое $k=k(x_0)$, что

$$f(x_0)+k(x-x_0)\leqslant f(x) \qquad (3)$$

для всех $x\in(a, b)$.

Непрерывная выпуклая на интервале функция не имеет строгого локального максимума. Если функция f непрерывна и выпукла на интервале (a, b), то в каждой его точке x_0 она имеет левую $D_-f(x_0)$ и правую $D_+f(x_0)$ конечные производные, причем $D_-f(x_0)\leqslant D_+f(x_0)$ и, более того, если число $k=k(x_0)$ удовлетворяет условию (3), то $D_-f(x)\leqslant k(x_0)\leqslant D_+f(x_0)$. Функции $D_-f(x)$ и $D_+f(x)$ не убывают и во всех точках, за исключением, быть может, счетного числа их, совпадают $D_-f(x)=D_+f(x)=f'(x)$, и тем самым функция f является дифференцируемой в этих точках. На каждом отрезке, лежащем внутри (a, b), функция f удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, является абсолютно непре-

рывной. Это позволяет установить следующий критерий выпуклости: непрерывная функция выпукла тогда и только тогда, когда она является неопределенным интегралом от неубывающей функции.

Если функция f дифференцируема на интервале, то для того чтобы она была (строго) выпуклой на нем, необходимо и достаточно, чтобы ее производная (возрастала) не убывала. В точке графика непрерывной В. ф., соответствующей точке, в к-рой функция дифференцируема, существует единственная опорная прямая — касательная в этой точке. С другой стороны, если у дифференцируемой на интервале функции для каждой точки ее графика касательная к графику в этой точке в нек-рой окрестности точки касания лежит (за исключением точки касания) под графиком, то функция строго выпукла, если же она лежит либо под графиком функции, либо частично на нем, то — просто выпукла.

Если функция f дважды дифференцируема на интервале, то для того чтобы она была выпукла на нем, необходимо и достаточно, чтобы ее вторая производная была неотрицательна на этом интервале (утверждение остается справедливым, если под второй производной понимать не обычную производную, а симметрическую производную). Если функция в каждой точке нек-рого интервала имеет положительную вторую производную, то функция строго выпукла на этом интервале.

Если функции f_i выпуклы на интервале $(a,\ b)$ и $p_i>0$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, то функция

$$f=\sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i f_i$$

также выпукла на том же интервале, причем если хотя бы одна из функций f_i строго выпукла, то и функция f строго выпукла. Определение и свойства В. ф. на интервале переносятся и на промежутки других видов: отрезки и полуинтервалы.

Имеются различные обобщения понятия выпуклости на функции многих переменных. Пусть, напр., функция $y=f(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n)$ определена на выпуклом множестве M n-мерного аффинного пространства E^n. Функция f наз. в ы п у к л о й, если для любых точек $x_1\in M$ и $x_2\in M$ выполняется неравенство (1), где под x_1+x_2 понимается сумма n-мерных векторов x_1 и x_2. Свойства В. ф. одного переменного соответствующим образом обобщаются на функции многих переменных: напр., для непрерывных В. ф. и в этом случае выполняется неравенство (2), непрерывная функция выпукла тогда и только тогда, когда множество точек $(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ y)$ пространства E^{n+1}, лежащих над ее графиком, выпукло.

Для того чтобы непрерывная функция f, определенная на выпуклой области G, была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $x\in G$ существовала такая линейная функция

$$l(y)=a_1y^1+\ldots+a_ny^n+b,$$

что

$$f(x)=l(x),\quad f(y)\geqq l(y),\quad y\in G. \tag{4}$$

Гиперплоскость, задаваемая уравнением $l(y)=0$, наз. о п о р н о й.

Если функция f непрерывно дифференцируема в G, то условие (4) эквивалентно условию

$$f(y)-f(x)-\sum\nolimits_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}(y^i-x^i)\geqq 0,\quad x\in G,\ y\in G.$$

Если функция f дважды непрерывно дифференцируема, то условие (4) эквивалентно условию неотрицательности второго дифференциала функции f, т. е. квадратичной формы

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n}\sum\nolimits_{j=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x^i\,\partial x^j}\xi^i\xi^j$$

для всех $x\in G$.

Другим важным обобщением понятия В. ф. для функций многих переменных является понятие *субгармониче-*

ской функции. Понятие В. ф. естественным образом обобщается на функции, определенные на соответствующих подмножествах бесконечномерных линейных пространств, см. *Выпуклый функционал*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Функции действительного переменного, пер. с франц., М., 1965, гл. 1, § 4; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., М., 1965, гл. 1; [3] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973, гл. 1; [4] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974, гл. 10; [5] Никольский С. М., Курс математического анализа, М., 1973, гл. 5; [6] Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948, гл. 3. *Л. Д. Кудрявцев.*

ВЫПУКЛАЯ ФУНКЦИЯ комплексного переменного z — регулярная *однолистная функция*

$$w=f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\dots$$

в единичном круге $E=\{z;\ |z|<1\}$, отображающая единичный круг на нек-рую *выпуклую область*. Регулярная однолистная функция $w=f(z)$ является В. ф. тогда и только тогда, когда при обходе любой окружности $|z|=r$, $0<r<1$, касательная к образу $|z|=r$ в точке $f(z)$ вращается в одном и том же направлении. Следующее неравенство выражает необходимое и достаточное условие выпуклости $f(z)$:

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0,\quad z\in E. \tag{1}$$

С другой стороны, для того чтобы $f(z)$ была В. ф., необходимо и достаточно, чтобы она допускала следующее параметрич. представление:

$$f(z)=c_0+c_1\int_0^z\exp\left[-2\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1-e^{-i\theta}\zeta\right)d\mu(\theta)\right]d\zeta, \tag{2}$$

где $\mu(\theta)$ — неубывающая действительная функция на отрезке $[-\pi,\pi]$ такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}d\mu(\theta)=1;$$

c_0, c_1 — комплексные постоянные, $c_1\neq0$. Формулу (2) можно рассматривать как обобщение *Кристоффеля — Шварца формулы* для отображения круга E на выпуклые многоугольники.

Пусть S^0 — класс всех В. ф. в E, нормированных условиями $c_0=f(0)=0$, $c_1=f'(0)=1$; S_p^0, $p=1,2,\dots$, суть подклассы класса S^0, состоящие из функций, отображающих E соответственно на выпуклые области плоскости w с p-кратной симметрией вращения относительно точки $w=0$, $S_1^0=S^0$. Классы S_p^0 компактны в себе относительно равномерной сходимости внутри E. Их интегральные представления, в частности формула (2) для S^0, позволяют развить вариационные методы решения экстремальных задач на классах S_p^0 (см. [2] — [5]).

Основные экстремальные свойства класса S^0 характеризуются следующими неулучшаемыми неравенствами:

$$|c_n|\leqslant1,\quad n=2,3,\dots,$$

$$|z|(1+|z|)^{-1}\leqslant|f(z)|\leqslant|z|(1-|z|)^{-1},$$

$$(1+|z|)^{-2}\leqslant|f'(z)|\leqslant(1-|z|)^{-2},$$

$$|\arg f'(z)|\leqslant2\arcsin|z|,\quad z\in E,$$

под аргументом функции понимается ветвь, обращающаяся в нуль при $z=0$. Во всех этих оценках знак равенства имеет место только для функции $f(z)=z/(1-\varepsilon z)$, $|\varepsilon|=1$. Для отношения K_r кривизны $K(r)$ границы $\partial B_r(f)$ области $B_r(f)=\{w=f(z);\ |z|<r\}$ на классе S_p^0, $p=1,2,\dots$, в точке $f(z)$ к кривизне $1/r$ прообраза $\partial B_r(f)$, т. е. окружности $|z|=r$, в точке z имеются также неулучшаемые оценки. Областям $B_1(f)$, $f\in S^0$, принадлежит круг $|w|<1/2$, причем радиус этого круга не может быть увеличен без дополнительных ограничений на класс функций. Если $f(z)\in S^0$, то однолистная функция $g(z)=zf'(z)$ звездообразна в круге E, т. е. отображает E на область, звездную относительно начала координат.

Примерами обобщения и видоизменения класса S^0 и его подклассов являются: класс Σ^0 однолистных в $|z|>1$ функций $F(z)=z+d_0+d_1z^{-1}+\ldots$, регулярных при $1<|z|<\infty$ и отображающих $|z|>1$ на области с выпуклыми дополнениями; класс $S^0(r, R)$ регулярных в кольце $r<|z|<R$ нормированных определенным образом функций $F(z)$, каждая из к-рых однолистно отображает это кольцо в такую область, что конечная компонента ее дополнения выпукла и ее объединение с этой компонентой также выпукло; класс S^0_{pr} функций из S^0_p с действительными коэффициентами разложений Тейлора в окрестности точки $z=0$. Понятие В. ф. распространяется и на многолистные функции (см. [2], добавление).

Самостоятельный интерес представляет следующее обобщение В. ф. (см. [6]): регулярная в круге E функция $w=f(z)=z+c_2z^2+\ldots$ наз. *близкой к выпуклой*, если существует в E В. ф. $\Phi(z)$, $\Phi(0)=0$, такая, что всюду в E

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{\Phi'(z)}\right\}>0, \quad z\in E.$$

Для класса K всех таких функций $f(z)$ доказана однолистность, найдены необходимые и достаточные условия принадлежности функции $f(z)$ классу K и параметрич. представление функций $f(z)\in K$ при помощи интегралов Стилтьеса:

$$f(z)=\int_0^z\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+e^{i\varphi}e^{-i\theta}\zeta}{1-e^{-i\theta}\zeta}\,d\alpha(\theta)\right]\times$$
$$\times\exp\left[-2\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-e^{-i\theta}\zeta)\,d\mu(\theta)\right]d\zeta,$$

где $|\varphi|<\pi$; $\alpha(\theta)$, $\mu(\theta)$ — неубывающие действительные функции,

$$\int_{-\pi}^{\pi}d\alpha(\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}d\mu(\theta)=1.$$

Класс K включает в себя выпуклые, звездные и другие функции. Для функций $f(z)\in K$ справедлива *Бибербаха гипотеза*: $|c_n|\leqslant n$; известны неулучшаемые оценки:

$$|z|(1+|z|)^{-2}\leqslant|f(z)|\leqslant|z|(1-|z|)^{-2},$$
$$(1-|z|)(1+|z|)^{-3}\leqslant|f'(z)|\leqslant(1+|z|)(1-|z|)^{-3},$$
$$|\arg f'(z)|\leqslant 4\arcsin|z|, \quad z\in E,$$

под аргументом функции понимается ветвь, обращающаяся в нуль при $z=0$. Во всех этих оценках знак равенства имеет место только для функции $f(z)=z/(1-\varepsilon z)^2$, $|\varepsilon|=1$. Геометрически функции $f(z)$ класса K характеризуются тем, что они отображают круг E на области $D(f)$, внешность к-рых $C\overline{D}(f)$ может быть заполнена лучами L, проведенными из точек границы области, $L\subset CD(f)$. Понятие функции, близкой к выпуклой, распространено на многолистные функции (см. [7]).

Лит.: [1] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 11 изд., М., 1967; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Зморович В. А., «Укр. матем. ж.», 1952, т. 4, с. 276—98; [4] Александров И. А., Черников В. В., «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 2, с. 261—67; [5] Зморович В. А., «Матем. сб.», 1953, т. 32, № 3, с. 633—52; [6] Kaplan W., «Michigan Math. J.», 1952, v. 1, № 2, p. 169—85; [7] Styer D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1972, v. 169, p. 105—12. *И. А. Александров, Ю. Д. Максимов.*

ВЫПУКЛОЕ МНОЖЕСТВО в евклидовом или другом векторном пространстве — множество, к-рое вместе с любыми двумя точками содержит все точки соединяющего их отрезка. Пересечение любой совокупности В. м. есть В. м.

Наименьшая размерность плоскости, содержащей данное В. м., наз. размерностью этого В. м. Замыкание В. м. (т. е. результат присоединения к В. м. всех его предельных точек) дает В. м. той же размерности. Центральное место в теории В. м. занимает изучение выпуклых тел (в. т.) — конечных (т. е. ограниченных) замкнутых В. м. размерности n. При отказе от

ограниченности говорят о бесконечных в. т., а при отказе от n-мерности — о вырожденных в. т. или в. т. более низких размерностей.

В. т. гомеоморфно замкнутому шару. Бесконечное в. т., не содержащее прямых, гомеоморфно полупространству, а содержащее прямую является цилиндром с выпуклым (возможно бесконечным) поперечным сечением.

Через каждую точку границы В. м. проходит хотя бы одна гиперплоскость, оставляющая это В. м. в одном замкнутом полупространстве. Такие гиперплоскости и полупространство наз. о п о р н ы м и для данного В. м. в данной точке границы. Замкнутое В. м. есть пересечение его опорных полупространств. Пересечение конечного числа замкнутых полупространств есть выпуклый многогранник. Г р а н я м и в. т. называют его пересечения с опорными гиперплоскостями. Это — в. т. более низких размерностей. Само в. т. считают его n-мерной гранью. Грань грани, в отличие от случая многогранника, может не быть гранью исходного в. т.

С каждой граничной точкой x в. т. связывают: открытый касательный конус, заполненный лучами, идущими из x через внутренние точки в. т.; замкнутый касательный конус — его замыкание; касательный конус поверхности — его границу. Первые два конуса выпуклые.

Точки границы в. т. классифицируют по минимальной размерности граней, к-рым они принадлежат, а также по размерности множества опорных гиперплоскостей в точке. Точки нульмерных граней наз. выступающими. Крайними наз. точки в. т., не внутренние ни для одного отрезка, лежащего в этом в. т. Изучается вопрос о возможном обилии точек и множества направлений граней разного типа. Напр., точки с неединственной опорной гиперплоскостью занимают на границе нулевую $(n-1)$-мерную площадь; направления лежащих на границе отрезков имеют нулевую меру среди всех направлений в пространстве.

Точка, не принадлежащая в. т., строго отделена от него гиперплоскостью, оставлнющей эту точку и в. т. в разных открытых полупространствах. Два непересекающихся В. м. отделены гиперплоскостью, оставляющей их в разных замкнутых полупространствах. Последнее свойство отделимости сохраняется для В. м. в бесконечномерных векторных пространствах.

С в. т. F связана его о п о р н а я ф у н к ц и я H: $E^n \to E^1$, определяемая равенством $H(u) = \sup\{ux : x \in F\}$, где ux — скалярное произведение. Функция $H(u)$ — положительно однородная 1-й степени: $H(\alpha u) = \alpha H u$ при $\alpha \geqslant 0$, и выпуклая:

$$H(u+v) \leqslant H(u) + H(v).$$

Любая функция с этими двумя свойствами есть опорная функция для некоторого (причем единственного) в. т. Задание опорной функции — один из основных способов задания в. т.

При размещении начала координат внутри в. т. вводят функцию расстояния D: $E^n \to E^1$, определяемую при $u \neq 0$ равенством

$$D(u) = \sup\{\alpha : u / \alpha \in F\},$$

и полагают $D(0) = 0$. Это — тоже положительно однородная 1-й степени выпуклая функция, определяющая F. Два в. т. наз. п о л я р н ы м и (или д в о й с т в е н н ы м и) друг другу, если опорная функция одного из них есть функция расстояния для другого. Существование двойственных в. т. связано с самосопряженностью E^n.

Если в. т. F симметрично относительно начала координат, то функция $\rho(u, v) = D(u-v)$ является метрикой. Это — метрика пространства Минковского (конечномерного банахова пространства), причем F играет роль единичного шара. Аналогично в бесконечномерном банахо-

вом пространстве единичный шар есть В. м. Свойства пространства связаны с геометрией этого шара, в частности с наличием на его границе точек разного типа [3].

В. т. можно задавать как *выпуклую оболочку* точек его границы или части этих точек.

Существует ряд достаточных признаков, позволяющих делать заключение о выпуклости множества (или каждого из множеств нек-рого семейства). Напр., если C^2-гладкая замкнутая поверхность в E^3 имеет в каждой точке неотрицательную гауссову кривизну, то эта поверхность — граница в. т.; если пересечение компактного множества F в E^3 с каждой плоскостью, оставляющей F в одном полупространстве, связно, то F выпукло [4].

На множестве в. т. (в том числе вырожденных, но не пустых) метрику можно ввести многими способами. Наиболее употребительна метрика Хаусдорфа (см. *Выпуклых множеств пространство* метрическое). В этой метрике каждое в. т. можно приближать выпуклыми многогранниками, а также такими в. т., к-рые допускают задание $P(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$, где P — многочлен, и к-рые имеют во всех точках границы положительные главные кривизны.

В. т. всегда имеют конечный объем (по Жордану), совпадающий с его n-мерной мерой Лебега. Граница в. т. имеет конечную $(n-1)$-мерную площадь, причем различные способы введения площади в этом случае эквивалентны. Объем и площадь границы непрерывно (по метрике Хаусдорфа) зависят от в. т.

С изучением зависимости объема линейной комбинации $\Sigma\lambda_i F_i$ в. т. F_i от коэффициентов λ_i связана теория *смешанных объемов*. Среди смешанных объемов находятся, кроме объема и площади границы, многие другие функционалы, связанные с в. т. [5]; напр. k-мерные объемы проекций на k-мерные плоскости разных направлений и их средние значения. Главным достижением этой теории являются разнообразные неравенства между смешанными объемами; среди них — *изопериметрическое неравенство классическое*.

С в. т. связывают ряд простых фигур, напр. для каждого в. т. единствен наибольший (по объему) вписанный и наименьший описанный эллипсоиды [6]. Развиты признаки, выделяющие среди всех в. т. шары, эллипсоиды, центрально-симметричные тела [1], [2]. Особое место в теории В. м. занимают теоремы о семействах В. м. [6].

Значение теории В. м. — в наглядности методов и результатов, их общности и независимости от аналитич. требований гладкости (решениями экстремальных задач часто служат негладкие в. т.).

Лит.: [1] Bonnesen T., Fenchel W., Theorie der konvexen Körper, B., 1934; [2] Valentine F., Convex sets, N. Y., 1964; [3] Дей М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [4] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А., Достаточные признаки выпуклости, в кн.: Вопросы глобальной геометрии, Л., 1974, с. 3—53 (Записки научных семинаров Ленинградского отделения матем. ин-та, т. 45); [5] Хадвигер Г., Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, пер. с нем., М., 1966; [6] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В., Теорема Хелли и ее применения, пер. с англ., М., 1968.

Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер.

ВЫПУКЛОЕ ПОДМНОЖЕСТВО частично упорядоченного множества — подмножество, содержащее вместе с любыми двумя элементами a и b весь интервал $[a, b]$ (см. *Интервал и сегмент*).

Л. А. Скорняков.

ВЫПУКЛОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — раздел *математического программирования*, посвященный теории и методам решения задач минимизации выпуклых функций на выпуклых множествах, задаваемых системами неравенств и равенств. Существует законченная теория В. п. и разработаны многочисленные методы решения задач В. п. Для многих итерационных методов в В. п. установлены априорные оценки скорости сходимости. Одним из разделов В. п. является *квадратичное программирование*.

Лит.: [1] Еремин И. И., Астафьев Н. Н., Введение в теорию линейного и выпуклого программирования, М., 1976; [2] Карманов В. Г., Математическое программирование, М., 1975; [3] Зангвилл У. И., Нелинейное программирование. Единый подход, пер. с англ., М., 1973; [4] Полак Э., Численные методы оптимизации. Единый подход, пер. с англ., М., 1974. *В. Г. Карманов.*

ВЫПУКЛОЕ ТЕЛО — замкнутое (конечное или бесконечное) *выпуклое множество* в евклидовом или другом топологическом векторном пространстве, имеющее внутренние точки.

ВЫПУКЛОСТИ РАДИУС, граница выпуклости $R(x_0, f)$ функции $f(x)$, — точная верхняя грань радиусов $r>0$ шаров $\{x;\ \rho(x, x_0)<r\}$, каждый из к-рых отображается на *выпуклую область*; при этом функция $f(x)$ определена в области D метрич. пространства с метрикой $\rho(x_1, x_2)$ и принимает значения в линейном пространстве. В. р. $R(x_0)$ в точке $x_0\in D$ относительно нек-рого класса $\mathfrak{M}$ отображений $f(x)$ области D есть, по определению, число

$$R(x_0)=\inf\{R(x_0, f);\ f\in\mathfrak{M}\}.$$

Если $f(x)$ — аффинное отображение евклидова пространства E^n, $n\geqslant 2$, то $R(x_0, f)=\infty$. Относительно класса $\mathfrak{M}$ всех нормированных однолистных конформных отображений $w=f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, единичного круга $E=\{z;\ |z|<1\}$ комплексной плоскости В. р. $R(z_0)=2-\sqrt{3+|z_0|}$, а при дополнительном условии выпуклости областей $\{w;\ w=f(z),\ z\in E\}$, т. е. для *выпуклых функций*, $R(z_0)=1-|z_0|$.

См. также *Однолистная функция.*

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Александров И. А., «Докл. АН СССР», 1957, т. 116, № 6, с. 903—05; [3] Magx A., «Math. Ann.», 1932, Bd 107, № 1, S. 40—67. *И. А. Александров.*

ВЫПУКЛОСТЬ — термин, используемый в разных разделах математики и указывающий на свойства, обобщающие отдельные свойства *выпуклых множеств* в евклидовых пространствах E^n. С термином «В.» ассоциируется применимость ряда приемов исследования.

В E^n эквивалентны следующие два основных определения. Множество выпукло: а) если оно есть пересечение открытых полупространств; б) если вместе с любыми двумя точками оно содержит соединяющий их отрезок. Оба определения В. переносятся на случай векторных пространств L.

Определение б) распространяют на множества в пространствах с геодезическими (пространства со связностью; локально компактные метрич. пространства, в частности римановы и финслеровы пространства). При этом роль отрезков играют геодезические; но если две точки соединимы не единственной геодезической или кратчайшей, то понятие «В.» разветвляется. В римановой геометрии употребительны, в частности, следующие варианты В. (см. [1]; [2]): 1) множество M выпукло, если каждые две точки из M соединимы единственной кратчайшей и она лежит в M; 2) множество M локально выпукло, если каждая точка из M имеет выпуклую в смысле 1) окрестность в M; 3) множество M слабо выпукло, если каждые две точки соединимы хотя бы одной кратчайшей, идущей в M; 4) множество M абсолютно выпукло, если для каждых двух точек в M лежат все соединяющие их геодезические.

В E^n границу (или часть границы) n-мерного *выпуклого тела* наз. выпуклой гиперповерхностью, при $n=3$ — выпуклой поверхностью, при $n=2$ — выпуклой кривой.

Для функции действительного переменного В. означает В. ее *надграфика* (см. *Выпуклая функция* действительного переменного). Аналогично определяют В. функционала f в L (см. *Выпуклый функционал*).

Для выпуклых множеств в L можно говорить о В. семейства $\mathfrak{A}$ множеств, требуя, чтобы из условия M_1, $M_2\in\mathfrak{A}$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ следовало $(1-\alpha)M_1+\alpha M_2\in\mathfrak{A}$.

На выпуклых семействах $\mathfrak{A}$ определяют выпуклые (и вогнутые) функционалы $\Phi(M)$. Выпуклость функционала определяется требованием

$$\Phi((1-\alpha)M_1+\alpha M_2)\leqslant(1-\alpha)\Phi(M_1)+\alpha\Phi(M_2).$$

Термин «В.» для однолистных функций комплексной переменной имеет особый смысл — свойство отображать единичный круг в выпуклую область (см. *Выпуклая функция* комплексного переменного).

Из обобщений В. в E^n рассматривалась R - выпуклость компакта M, означающая, что каждая точка, удаленная от M менее чем на R, имеет в M единственную ближайшую (см. [4], [5]).

В теории линейных дифференциальных операторов термин «В.» связывают с нек-рыми свойствами групп гомологий [6]. Это ассоциируется с возможностью коснуться границы изнутри области гиперповерхностью, у к-рой определенное число главных кривизн положительно. В теории функций многих комплексных переменных важную роль играет голоморфная выпуклость, связанная с невозможностью коснуться границы области изнутри аналитич. поверхностью [7]. Последнее понятие есть частный случай так наз. K-выпуклости (см. [7], с. 6). В схему K-выпуклости укладываются многие из перечисленных понятий В.

В выпуклом анализе используют понятие H - выпуклости, обобщающее представимость выпуклой функции как супремума семейства линейных функций [8].

В теории метрич. пространств выпуклость метрики (по Менгеру) определяется как существование для любых точек $x\neq y$ отличной от них точки, для к-рой $\rho(x, y)=\rho(x, z)+\rho(z, x)$ (см. [9]). Под d - выпуклостью множества M понимают принадлежность M любой такой точки z при x, $y\in M$. Весьма близки к этому определения В. в пространствах с упорядочением (см., напр., *Выпуклая подгруппа*).

Почти каждому определению В. соответствует связанное с ним понятие локальной В. Но при выделении класса локально выпуклых векторных топологич. пространств термин «локальная В.» имеет особый смысл, означая существование у каждой точки базисной системы выпуклых окрестностей.

Лит.: [1] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [2] Александров А. Д., Залгаллер В. А., Двумерные многообразия ограниченной кривизны [Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 63], М., 1962; [3] Хадвигер Г., Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, пер. с нем., М., 1966; [4] Federer H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1959, v. 93, № 3, p. 418—91; [5] Решетняк Ю. Г., «Матем. сб.», 1956, т. 40, с. 381—98; [6] Паламодов В. П., Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, М., 1967; [7] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [8] Кутателадзе С. С., Рубинов А. М., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, № 3, с. 127—176; [9] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В., Теорема Хелли и ее применения, пер. с англ., М., 1968.

Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер.

ВЫПУКЛОСТЬ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ — свойство неотрицательной функции $f(x)$, определенной на нек-ром промежутке, состоящее в следующем: если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка и любых $p_1>0$, $p_2>0$, $p_1+p_2=1$, выполняется неравенство

$$f(p_1x_1+p_2x_2)\leqslant f^{p_1}(x_1)\,f^{p_2}(x_2),$$

то функция $f(x)$ наз. логарифмически выпуклой. Если функция логарифмически выпукла, то она либо тождественно равна нулю, либо строго положительна и $\ln f(x)$ — *выпуклая функция*.

Л. Д. Кудрявцев.

ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ — раздел математики, занимающий промежуточное положение между анализом и геометрией, в к-ром изучаются *выпуклые функции*, *выпуклые функционалы* и *выпуклые множества*. Основания В. а. были заложены Г. Минковским [1], [2], создав-

шим выпуклую геометрию, т. е. геометрию выпуклых множеств в конечномерном пространстве. Многие понятия и концепции выпуклой геометрии нашли свое завершение в функциональном анализе. С работы В. Фенхеля [3] начался новый этап В. а., на к-ром детально исследовались свойства выпуклых функционалов. Формирование В. а. как самостоятельного раздела относится к 50—60-м гг. 20 в. Понятия и методы В. а. широко применяются в разных областях математики — в теории экстремальных задач, особенно — в выпуклом программировании и классическом вариационном исчислении, в математич. физике, теории целых функций, математич. статистике и т. д.

Основными в В. а. являются понятия *поляры, субдифференциала* и *сопряженной функции*. Теоремы В. а. связывают операции сопряжения, перехода к поляре и взятия субдифференциала с алгебраическими, теоретико-множественными и порядковыми операциями над выпуклыми множествами и функциями. Исследуются также всевозможные двойственные отношения между множествами и их полярами, функциями и сопряженными к ним, множествами и выпуклыми однородными функциями и т. п.

Лит.: [1] Minkowski H., Geometrie der Zahlen, B.— Lpz., 1910; [2] его же, Theorie der konvexen Körper, в кн.: Gesamm. Abh., Bd 2, Lpz., 1911; [3] Fenchel W., «Can. J. Math.», 1949, v. 1, p. 73—77; [4] Рокафеллар Р. Т., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973. *В. М. Тихомиров.*

ВЫПУКЛЫЙ КОНУС — *выпуклое тело* V, состоящее из полупрямых, исходящих из одной точки — вершины конуса. При этом исключается случай, когда V совпадает со всем пространством. Понятие В. к. включает в себя как частные случаи двугранный угол и полупространство. Иногда В. к. наз. поверхность В. к.

Е. В. Шихин.

ВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННИК — *выпуклая оболочка* конечного числа точек в евклидовом пространстве E^n. Такой В. м. есть ограниченное непустое пересечение конечного числа замкнутых полупространств. Бесконечным В. м. называют пересечение конечного числа замкнутых полупространств, содержащее по крайней мере один луч, причем уславливаются пространство E^n также считать В. м. В этом смысле В. м. есть замкнутая выпуклая оболочка конечного числа точек и лучей. Размерностью В. м. наз. минимальную размерность содержащего его пространства E^n.

В. м.— частный вид *выпуклого множества*. Как пересечение полупространств В. м. описывается системой линейных неравенств и может быть исследован алгебраическими средствами. Методы минимизации линейных форм на В. м. составляют предмет *линейного программирования*.

В. м. имеет конечное число граней (пересечений В. м. с опорными гиперплоскостями). Каждая грань В. м. есть В. м. меньшей размерности. Грани граней являются гранями исходного В. м. Одномерные грани наз. ребрами, нульмерные — вершинами. Ограниченный В. м. есть выпуклая оболочка своих вершин.

В теории *выпуклых поверхностей* В. м. наз. также границу В. м., а иногда (см. [1]) даже часть такой границы. В последнем случае говорят о выпуклом многограннике с краем. В элементарной геометрии принято первоначально определять многогранник как фигуру, специальным образом составленную из многоугольников (см. [2]), а затем выделять В. м. как лежащий по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Ограниченный n-мерный В. м. имеет не менее чем $n+1$ вершину. Наиболее просто устроен *симплекс*, имеющий $n+1$ вершину. Всякий ограниченный В. м. разбивается на симплексы, прилегающие по целым граням.

В евклидовом пространстве E^3 есть пять правильных В. м.: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр. Об их свойствах и аналогах см. *Правильные многогранники*, *Полуправильные многогранники*. О В. м. с частными особенностями строения см. *Изогоны и изоэдры*, *Зоноэдры*. С правильными разбиениями пространства связаны специальные типы В. м.: *стереоэдры*, *параллелоэдры*, *планигоны*.

Возможные типы строения сети граней В. м. изучены не полностью. Пусть f_k — число k-мерных граней ограниченного n-мерного В. м. Справедливо соотношение Эйлера

$$f_0-f_1+\ldots+(-1)^{n-1}f_{n-1}=1+(-1)^{n-1},$$

имеющее топологич. характер: оно верно для любого разбиения сферы S^{n-1} на простые ячейки. При $n=3$ для не образующей двуугольных и самокасающихся ячеек связной сети ребер на сфере S^2 найдется В. м. в евклидовом пространстве E^3 с таким строением сети (теорема Штейница). При $n>3$ строение сети граней В. м. менее произвольно, чем возможные разбиения сферы (см. [3]). В классе В. м. могут ставиться специфические экстремальные задачи, в условия к-рых входят строение сети граней, число или суммарная длина ребер и т. п. (см. [4]).

Приближение выпуклых тел посредством В. м. является универсальным приемом исследования. Приближением В. м. получены многие результаты теории *смешанных объемов*, теоремы существования, единственности, устойчивости выпуклых поверхностей с фиксированными данными, развиты геометрич. методы решения *Монжа — Ампера уравнения*. Эффективность этого метода связана с тем, что В. м. характеризуются конечным числом данных; для В. м. общие теоремы имеют простую формулировку; к В. м. применимы синтетич. приемы исследования.

В связи с теорией поверхностей сформировался большой раздел теории В. м. (см. [1]). В евклидовом пространстве E^3 два ограниченных В. м., имеющие одинаковые и в одинаковом порядке прилегающие грани, совместимы движением (теорема Коши). В E^n для нек-рых $\boldsymbol{n}_i$, $S_i>0$, удовлетворяющих соотношению

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{n}_iS_i=0,\qquad N\geqslant n+1,$$

существует и единствен с точностью до переноса В. м. с единичными внешними нормалями $\boldsymbol{n}_i$ граней и площадями граней S_i (теорема Минковского). Развертка из плоских многоугольников, склеиваемая так, что результат гомеоморфен сфере S^2 и вокруг каждой вершины склеиваются углы с суммой $\leqslant 2\pi$, изометрична В. м. в E^3, и этот В. м. единствен с точностью до движения (теорема А. Д. Александрова). Два В. м. в E^n совместимы переносом, если ни для одного направления нормали $\boldsymbol{n}$ грань одного В. м. нельзя переносом сделать строгой частью другого. Для выходящих из точки лучей l_i и чисел $\omega_i>0$ существует и единствен с точностью до гомотетии В. м. с вершинами на лучах l_i и кривизнами ω_i в этих вершинах.

Лит.: [1] Александров А. Д., Выпуклые многогранники, М.—Л., 1950; [2] Тот Л. Ф., Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, пер. с нем., М., 1958; [3] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963; [4] Grünbaum B., Convex polytopes, L.—N.Y.— Sydney, 1967.

В. А. Залгаллер.

ВЫПУКЛЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК — плоское *выпуклое множество*, граница к-рого — ломаная линия, состоящая из конечного числа прямолинейных отрезков. Иногда В. м. наз. только его границу. В. м. есть пересечение конечного числа (замкнутых) полуплоскостей.

М. И. Войцеховский.

ВЫПУКЛЫЙ ОПЕРАТОР — см. *Вогнутый и выпуклый операторы*.

ВЫПУКЛЫЙ ФУНКЦИОНАЛ — функционал, определенный на векторном линейном пространстве и обладающий тем свойством, что его *надграфик* является *выпуклым множеством*. Функционал f, не принимающий значений, равных $-\infty$ на выпуклом множестве A, будет выпуклым на A тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$f((1-\alpha)x+\alpha y)\leqslant(1-\alpha)f(x)+\alpha f(y),\ x,\ y\in A,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1.$$

При обратном знаке неравенства функционал f наз. в о г н у т ы м. Операциями, переводящими В. ф. в В. ф., являются, напр., *сложение* $(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$, умножение на положительное число, взятие верхней грани

$$(f_1\vee f_2)(x)=\max(f_1(x),\ f_2(x)),$$

инфимальная конволюция

$$(f_1\oplus f_2)(x)=\inf_{x_1+x_2=x}(f_1(x)+f_2(x)).$$

В. ф., ограниченный сверху в окрестности нек-рой точки x, является непрерывным в этой точке. Если В. ф. конечен в нек-рой точке x, то он имеет производную по любому направлению (конечную или бесконечную) в этой точке. Замкнутые В. ф. (т. е. функционалы с выпуклыми и замкнутыми надграфиками) в локально выпуклых линейных топологич. пространствах допускают двойственное описание: они являются верхними гранями аффинных функций, их не превосходящих. Такая двойственность позволяет связать с каждым В. ф. двойственный объект, сопряженный функционал:

$$f^*(x^*)=\sup_x(\langle x^*,\ x\rangle-f(x)).$$

Свойства В. ф., операции над ними, взаимосвязи В. ф. и их сопряженных и т. п. изучаются в *выпуклом анализе*.

Лит.: [1] Burnbaum Z., Orlicz W., «Stud. math.», 1931, v. 3, p. 1—67; [2] Харди Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; [3] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958; [4] Fenchel W., «Can. J. Math.», 1949, v. 1, p. 73—77; [5] Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973. *В. М. Тихомиров.*

ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ ПРОСТРАНСТВО л и н е й н о е — пространство, элементами к-рого служат классы эквивалентных пар (X, Y) *выпуклых множеств* в линейном локально выпуклом топологич. пространстве. Пара (X, Y) трактуется как «разность» $X-Y$, причем пары (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) по определению эквивалентны, если $X_1+Y_2=X_2+Y_1$, где сложение множеств понимают как замыкание векторной суммы. В линейном В. м. п. вводятся сложение, вычитание, умножение на число и топология, причем В. м. п. оказывается локально выпуклым топологическим пространством. Вводят, кроме того, отношение частичного упорядочения, аналогичное включению множеств. Линейные В. м. п. рассматривались также в нелокально выпуклых линейных пространствах.

Лит.: [1] Пинскер А. Г., «Тр. Ленингр. инж.-экон. ин-та», 1966, т. 63, с. 13—17. *В. А. Залгаллер.*

ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ ПРОСТРАНСТВО м е т р и ч е с к о е — совокупность компактных *выпуклых множеств* F в евклидовом пространстве E^n, снабженная метрикой Хаусдорфа:

$$\rho(F_1, F_2)=\sup_{x\in F_1,\ y\in F_2}\{\rho(x, F_2),\ \rho(y, F_1)\}.$$

Это пространство ограниченно компактно (см. *Бляшке теорема выбора*). Об аналогах метрических В. м. п. (другие метризации, некомпактные множества, классы множеств, другие исходные пространства) см. [1].

Лит.: [1] Грюнбаум Б., Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел, пер. с англ., М., 1971. *В. А. Залгаллер.*

ВЫРОЖДЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЬ — вероятность того, что в *ветвящемся процессе* не осталось частиц к мо-

менту времени t. Пусть $\mu(t)$ — число частиц в ветвящемся процессе с однотипными частицами. В. в.

$$P_0(t) = P\{\mu(t) = 0 \mid \mu(0) = 1\}$$

не убывает при увеличении t; **вероятностью вырождения за бесконечное время**, или просто **вероятностью вырождения**, наз. величину

$$q = \lim_{t \to \infty} P_0(t).$$

Если τ — время от начала процесса до момента исчезновения последней частицы, то $P\{\tau < t\} = P_0(t)$ и $P\{\tau < \infty\} = q$. Для различных моделей ветвящихся процессов изучена скорость сходимости $P_0(t)$ к q при $t \to \infty$.

В. П. Чистяков.

ВЫРОЖДЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, функция Куммера, функция Похгаммера, — решение *вырожденного гипергеометрического уравнения*

$$zw'' + (\gamma - z)w' - \alpha w = 0. \qquad (1)$$

В. г. ф. может быть определена с помощью так наз. ряда Куммера:

$$\Phi(\alpha; \gamma; z) = {}_1F_1(\alpha; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \dots, \qquad (2)$$

где α и γ — параметры, принимающие любые действительные или комплексные значения, кроме $\gamma = 0, -1, -2, \dots$, z — комплексное переменное. Функция $\Phi(\alpha; \gamma; z)$ наз. **вырожденной гипергеометрической функцией 1-го рода**. Второе линейно независимое решение уравнения (1)

$$\Psi(\alpha; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\alpha - \gamma + 1)\,\Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1 - \gamma)}\, z^{1-\gamma}\, \Phi(\alpha - \gamma + 1; 2 - \gamma; z),$$

$$\gamma \neq 0, -1, -2, \dots, \quad |\arg z| < \pi,$$

наз. **вырожденной гипергеометрической функцией 2-го рода**.

В. г. ф. $\Phi(\alpha; \gamma; z)$ — целая аналитич. функция во всей комплексной плоскости z; при фиксированном z — целая функция α и мероморфная функция γ с простыми полюсами в точках $\gamma = 0, -1, -2, \dots$. В. г. ф. $\Psi(\alpha; \gamma; z)$ — аналитич. функция в комплексной плоскости z с разрезом $(-\infty, 0)$ и целая функция α и γ.

В. г. ф. $\Phi(\alpha; \gamma; z)$ связана с *гипергеометрической функцией* $F(\alpha; \beta; \gamma; z)$ соотношением

$$\Phi(\alpha; \gamma; z) = \lim_{\beta \to \infty} F\left(\alpha; \beta; \gamma; \frac{z}{\beta}\right).$$

Элементарные соотношения. Четыре функции $\Phi(\alpha \pm 1; \gamma; z)$ и $\Phi(\alpha; \gamma \pm 1; z)$ наз. смежными с функцией $\Phi(\alpha; \gamma; z)$. Между $\Phi(\alpha; \gamma; z)$ и любыми двумя смежными с ней существует линейная зависимость. Напр.,

$$\gamma\Phi(\alpha; \gamma; z) - \gamma\Phi(\alpha - 1; \gamma; z) - z\Phi(\alpha; \gamma + 1; z) = 0.$$

Шесть формул такого типа могут быть получены из соотношений между смежными функциями для гипергеометрич. функций. Последовательное применение этих рекуррентных формул приводит к линейным соотношениям, связывающим функцию $\Phi(\alpha; \gamma; z)$ с ассоциированными функциями $\Phi(\alpha + m; \gamma + n; z)$, где m и n — целые числа.

Формула дифференцирования:

$$\frac{d^n}{dz^n}\Phi(\alpha; \gamma; z) = \Phi(\alpha + n; \gamma + n; z), \quad n = 1; 2, \dots.$$

Основные интегральные представления:

$$\Phi(\alpha; \gamma; z) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 e^{zt} t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1}\, dt, \quad \operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0;$$

$$\Psi(\alpha; \gamma; z) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha-1} (1+t)^{\gamma-\alpha-1}\, dt, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0, \ \operatorname{Re} z > 0.$$

Асимптотич. поведение В. г. ф. при $z\to\infty$ может быть изучено с помощью интегральных представлений (см. [1] — [3]). Если $\gamma\to\infty$, в то время как α и z ограничены, то поведение функции $\Phi(\alpha;\ \gamma;\ z)$ описывается формулой (2). В частности, при больших γ и ограниченных α и z:

$$\Phi(\alpha;\ \gamma;\ z)=1+O(|\gamma|^{-1}).$$

Представления функций через В. г. ф. Функции Бесселя:

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-iz}\,\Phi\left(\nu+\frac{1}{2};\ 2\nu+1;\ 2iz\right),$$

$$I_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-z}\Phi\left(\nu+\frac{1}{2};\ 2\nu+1;\ 2z\right),$$

$$K_\nu(z)=\sqrt{\pi}\,e^{-z}\,(2z)^\nu\Psi\left(\nu+\frac{1}{2};\ 2\nu+1;\ 2z\right).$$

Многочлены Лагерра:

$$L_n^{(\alpha)}(z)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,\Phi(-n;\ \alpha+1;\ z).$$

Интеграл вероятностей:

$$\operatorname{erf}(z)=\frac{2z}{\sqrt{\pi}}\,\Phi\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ -z^2\right),$$

$$\operatorname{erf}c(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}\,\Psi\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ z^2\right).$$

Интегральная показательная функция:

$$-\operatorname{Ei}(-z)=e^{-z}\,\Psi(1;\ 1;\ z).$$

Интегральная логарифмическая функция:

$$\operatorname{li}(z)=z\Psi(1;\ 1;\ -\ln z).$$

Гамма-функция:

$$\Gamma(\alpha,\ z)=e^{-z}\,\Psi(1-\alpha;\ 1-\alpha;\ z).$$

Элементарные функции:

$$e^z=\Phi(\alpha;\ \alpha;\ z),$$

$$\sin z=e^{iz}z\,\Phi(1;\ 2;\ -2iz).$$

См. также [1], [2], [3], [8].

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, [т. 2], пер. с англ., 2 изд., М., 1973; [2] Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 4 изд., М., 1963; [3] Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, N. Y., 1964; [4] Уиттекер Э.-Т., Ватсон Д.-Н., Курс современного анализа, ч. 2 — Трансцендентные функции, пер. с англ., 2 изд., М., 1963; [5] Лебедев А. В., Федорова Р. М., Справочник по математическим таблицам, М., 1956; [6] Бурунова Н. М., Справочник по математическим таблицам, М., 1959; [7] An index of Mathematical tables, 2 ed., v. 1, 2, Oxford, 1962; [8] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М.—Л., 1963. *Э. А. Чистова.*

ВЫРОЖДЕННАЯ ИГРА — *бескоалиционная игра* n лиц, в к-рой функция выигрыша $K_i(x_1,\ \dots,\ x_n)$ каждого игрока i вырождена, т. е. имеет вид

$$\sum_{j_1,\dots,j_n} a^{(i)}_{j_1,\dots,j_n}\,r^{(i)}_{j_1}(x_1)\,\dots\,r^{(i)}_{j_n}(x_n),$$

где $r^{(i)}_{j_k}(x_k)$, $1\leqslant j_k\leqslant n^{(k)}$ — функции, заданные на множестве чистых стратегий X_k игрока k, $k=1,\ \dots,\ n$. В случае антагонистических В. и. на единичном квадрате функция выигрыша $K(x,\ y)$ игрока I равна

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}r_i(x)\,s_j(y).$$

Такая игра сводится к конечной антагонистической *выпуклой игре* $\langle R,\ S,\ K\rangle$, где R — выпуклое множество, натянутое на расположенную в m-мерном пространстве кривую $r_i=r_i(x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $i=1,\ \dots,\ m$, а S — выпуклое множество, натянутое на кривую $s_j=s_j(y)$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $j=1,\ \dots,\ n$, лежащую в n-мерном пространстве; функция выигрыша $K(r,\ s)$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}r_is_j,\ \ r\in R,\ \ s\in S.$$

В частности, если $r_i(x)=x^i$, а $s_j(y)=y^j$, то В. и. наз. полиномиальной игрой. Во всякой анта-

гонистической В. и. на единичном квадрате игрок I имеет оптимальную смешанную стратегию, носитель к-рой состоит не более чем из m точек, если же игра полиномиальная, то не более чем из $m/2$ точек (при подсчете числа точек концевой точке отрезка приписывается вес $^1/_2$). Аналогично, игрок II имеет оптимальную смешанную стратегию, носитель к-рой состоит не более чем из n точек; в случае полиномиальной игры — не более чем из $n/2$ точек.

Лит.: [1] Дрешер М., Карлин С., Шепли Л. С., в кн.: Бесконечные антагонистические игры, М., 1963, с. 154—179.

Г. Н. Дюбин.

ВЫРОЖДЕННАЯ МАТРИЦА, особая матрица, сингулярная матрица,— квадратная матрица, определитель к-рой равен нулю.

ВЫРОЖДЕННАЯ СЕРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ — множество представлений полупростой группы Ли G, индуцированных характерами ее не минимальной параболич. подгруппы P. Пусть Π — фундаментальная система корней, по отношению к к-рой алгебра Ли борелевской подгруппы $B \in G$ натянута на корневые векторы e_α, $\alpha<0$. Множество всех параболич. подгрупп, содержащих B, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех подсистем $\Pi_0 \subset \Pi$, причем $P \neq B$, если Π_0 непусто, и алгебра Ли группы P порождается образующими e_α, $\alpha<0$, и e_α, $\alpha \in \Pi_0$. Пусть $\pi(\chi)$ — представление группы G, индуцированное характером χ подгруппы P в классе $C^\infty(G)$. Существуют характеры χ, при к-рых $\pi(\chi)$ продолжается до унитарного представления группы G в $L^2(Z)$, где Z — подгруппа в G, алгебра Ли к-рой натянута на векторы e_α, $\alpha>0$, $\alpha \notin \Delta_0$, Δ_0 — аддитивная оболочка Π_0. Такие представления наз. представлениями основной В. с. п. Дополнительная В. с. п. получается пополнением $\pi(\chi)$ (при нек-рых χ) относительно других скалярных произведений в $\pi(\chi)$. Для группы $G=SL(n, \mathbb{C})$ представления В. с. п. неприводимы.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Наймарк М. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1950, т.36; [2] Gross K., «Amer. J. Math.», 1971, v. 93, № 2, p. 398—428.

Д. П. Желобенко.

ВЫРОЖДЕННОЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными

$$F(t,\ x,\ Du)=0, \qquad (*)$$

где функция $F(t, x, q)$ удовлетворяет условию: корни многочлена

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F(t, x, Du)}{\partial q_\alpha} \lambda^{\alpha_0} \xi^{\alpha'}$$

действительны при всех действительных ξ и существуют $\xi \neq 0$, t, x и Du, при к-рых либо нек-рые корни совпадают, либо коэффициент при λ^m обращается в нуль. Здесь: t — независимая переменная, часто интерпретируемая как время; x есть n-мерный вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $u(t,x)$ — искомая функция; α и α' — мультииндексы $\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha'=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; Du — вектор с компонентами

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

причем в уравнение (*) входят производные порядка не выше m; q_α — компоненты вектора q; ξ есть n-мерный вектор $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $\xi^{\alpha'}=\xi_1^{\alpha_1}, \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$.

См. также ст. *Вырожденное уравнение* с частными производными и лит. при ней.

А. М. Ильин.

ВЫРОЖДЕННОЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, конфлюэнтное уравнение — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$zw'' + (\gamma - z)\, w' - \alpha w = 0, \quad \alpha,\ \gamma = \text{const}, \qquad (1)$$

или, в самосопряженной форме,

$$(e^{-z} z^\gamma w')' - \alpha e^{-z} z^{\gamma-1} w = 0.$$

Переменные z, w и параметры α, γ в общем случае могут принимать любые комплексные значения. Приведенной формой уравнения (1) является *Уиттекера уравнение*. Уравнение (1) тесно связано с *гипергеометрическим уравнением*. В. г. у. можно рассматривать как уравнение, получающееся из *Римана дифференциального уравнения* при слиянии двух особых точек. Точка $x=0$ является для уравнения (1) регулярной особой точкой, а точка $x=\infty$ — сильно особой (см. *Особая точка дифференциального уравнения*). Впервые систематич. изучение решений уравнения (1) предпринял Э. Куммер [1].

Решения уравнения (1) выражаются через *вырожденную гипергеометрическую функцию* $\Phi(\alpha, \gamma; z)$. Если γ не равно целому числу, то общее решение уравнения (1) можно записать в виде

$$w = C_1\Phi(\alpha, \gamma, z) + C_2 z^{1-\gamma}\Phi(\alpha+1-\gamma, 2-\gamma; z), \quad (2)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные; это представление справедливо в комплексной плоскости z с разрезом $(-\infty, 0)$. Для целых значений γ общее решение имеет более сложный вид (возможно существование членов, содержащих логарифмы). В качестве фундаментальной системы решений уравнения (1) можно выбирать и иные функции, отличные от указанных в (2) (напр., *Уиттекера функции*, см. [2], [3]). Решение уравнения (1) может быть представлено также через контурные интегралы в комплексной плоскости z.

Многие линейные обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка (напр., *Бесселя уравнение*) преобразованием неизвестной функции и независимой переменной приводятся к уравнению (1) (см. [4]). В частности, уравнение вида

$$(a_0z+b_0)w''+(a_1z+b_1)w'+(a_2z+b_2)w=0,$$
$$a_i,\ b_i = \text{const},$$

интегрируется с помощью вырожденной гипергеометрич. функции.

Лит.: [1] Kummer E., «J. reine und angew. Math.», 1836, Bd 15, S. 39—83, 127—72; [2] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, пер. с англ., М., 1965; [4] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

Н. Х. Розов.

ВЫРОЖДЕННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — линейное интегральное уравнение Фредгольма с *вырожденным ядром*. Общий вид В. и. у.:

$$\lambda x(P) - \int_D \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(P)\,\psi_i(Q)\,x(Q)\,dQ = f(P). \quad (1)$$

Интегрирование производят по области D (вообще n-мерного) евклидова пространства, P и Q — точки из D, λ — действительный или комплексный параметр, а функции, входящие в (1), суммируемы с квадратом на D. Решение В. и. у. (1) ищется в виде

$$x(P) = \frac{1}{\lambda} f(P) + \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i(P).$$

Коэффициенты c_i находятся из системы линейных алгебраич. уравнений

$$\lambda c_j - \sum_{i=1}^{N} c_i \int_D \psi_j(Q)\,\varphi_i(Q)\,dQ = \frac{1}{\lambda}\int_D f(P)\,\psi_j(P)\,dP. \quad (2)$$

Если система (2) при заданном λ имеет единственное решение, то уравнение (1) также однозначно разрешимо. Те значения $\lambda \neq 0$ (их не более N), при к-рых определитель системы (2) равен 0, являются собственными значениями. Условия разрешимости В. и. у. (1) даются *Фредгольма альтернативой*. При $\lambda=0$ В. и. у. (1) есть уравнение Фредгольма I рода; для его разрешимости необходимо и достаточно, чтобы функция f могла быть представлена в виде линейной комбинации функций

φ_i. Тогда В. и. у. (1) имеет решение, представимое в виде

$$x(P)=\sum_{j=1}^{N} d_j\psi_j(P)+\psi(P),$$

при этом коэффициенты d_j определяются однозначно, а ψ есть функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_D \psi(P)\,\psi_j(P)\,dP=0, \quad j=1, \ldots, N.$$

Важность В. и. у. для общей теории уравнений Фредгольма обусловлена тем, что решение любого уравнения Фредгольма II рода может быть с любой точностью в среднем квадратическом (и в нек-рых других метриках) приближено решениями В. и. у. Их вырожденные ядра в том или ином смысле аппроксимируют ядро исходного уравнения.

Абстрактным аналогом и обобщением В. и. у. служит линейное операторное уравнение вида

$$\lambda x-Ax=f,$$

где x и f принадлежат банахову пространству E, а оператор A имеет конечномерную область значений. Свойства таких уравнений аналогичны свойствам В. и. у. (1).

Лит.: [1] Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959. *А. Б. Бакушинский.*

ВЫРОЖДЕННОЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными

$$F(t,\ x,\ Du)=0,$$

где функция $F(t, x, q)$ обладает свойством: для нек-рого четного натурального числа p все корни λ многочлена

$$\sum\nolimits_{\alpha:\ p\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m} \frac{\partial F(t,\ x,\ Du)}{\partial q_\alpha}\,\lambda^{\alpha_0}(i\xi)^{\alpha'}$$

имеют неположительные действительные части для всех действительных ξ, причем при нек-рых $\xi\neq 0$, t, x и Du для к.-л. корня $\operatorname{Re}\lambda=0$, либо при нек-рых t, x и Du коэффициент при старшей степени $\lambda^{m/p}$ обращается в нуль. Здесь: t — независимая переменная, часто интерпретируемая как время; x есть n-мерный вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $u(t, x)$ — искомая функция; α — мультииндекс $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; Du — вектор с компонентами

$$D^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial t^{\alpha_0}\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

причем $p\alpha_0+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\leqslant m$; q — вектор с компонентами q_α; ξ есть n-мерный вектор $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $(i\xi)^{\alpha'}=(i\xi_1)^{\alpha_1}\ldots(i\xi_n)^{\alpha_n}$. См. также ст. *Вырожденное уравнение* с частными производными и лит. при ней. *А. М. Ильин.*

ВЫРОЖДЕННОЕ ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x}=f(x)$ — точка x_0, для к-рой $f(x_0)=0$ и матрица $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ имеет нулевые собственные значения. Наиболее изучены В. п. р. двумерных систем, для к-рых развит ряд методов исследования поведения траекторий в окрестности В. п. р., напр. методы Бендиксона (см. [1], [2], [4]), Фроммера (см. [3], [4]). В пространствах более двух измерений предлагались геометрич. методы исследования, состоявшие в основном из выделения главных членов в правых частях уравнений и из доказательства сохранения поведения траекторий при переходе от укороченного к полному уравнению (см. [5]). Если отображение f достаточное число раз дифференцируемо или аналитично, то можно рассматривать степень вырожденности (степень негрубости) положения равновесия в зависимости от того, на сколько невырожденных положений равновесия может распасться данное В. п. р. при изменении f, малом в смысле C^r-топологии.

Лит.: [1] Bendixson I., «Acta Math.», 1901, v. 24, p. 1—88; [2] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966; [3] Frommer M., «Math. Ann.», 1928, Bd 99, S. 222—72; [4] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1949; [5] Брюно А. Д., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1965, т. 29, № 2, с. 329—64. *Л. Э. Рейзинь.*

ВЫРОЖДЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ в *n*-мерном евклидовом пространстве — любое распределение, сосредоточенное с вероятностью 1 на нек-ром линейном многообразии размерности, меньшей *n*, рассматриваемого пространства. В противном случае распределение наз. невырожденным. В. р. в случае конечных вторых моментов характеризуется тем, что ранг соответствующей матрицы ковариаций (или корреляционной матрицы) *r* меньше *n*. При этом *r* совпадает с наименьшей размерностью линейных многообразий, на к-рых сосредоточено данное В. р. Понятие В. р. очевидным образом распространяется на распределения в линейных пространствах. Иногда В. р. наз. несобственными распределениями, а невырожденные — собственными распределениями. *А. В. Прохоров.*

ВЫРОЖДЕННОЕ УРАВНЕНИЕ с частными производными — дифференциальное уравнение с частными производными, тип к-рого вырождается в нек-рых точках области задания уравнения или на ее границе. Тип уравнения или системы уравнений в точке определяется одним или несколькими алгебраич. соотношениями между коэффициентами. Среди этих соотношений имеются, как правило, строгие неравенства. Если в нек-рых точках рассматриваемой области вместо строгих неравенств выполняются нестрогие, то говорят о вырождении типа, а уравнение (система уравнений) наз. вырождающимся, или вырожденным. Различают *вырожденные эллиптические уравнения*, *вырожденные гиперболические уравнения*, *вырожденные параболические уравнения* (системы уравнений).

Примеры:

$$xu_{x^4}+u_{y^4}+u_{z^4}+u_x=0$$

— вырожденное эллиптич. уравнение в полупространстве $x\geqslant 0$;

$$y^2u_{yy}-u_{xx}=0$$

— вырожденное гиперболич. уравнение во всей плоскости;

$$-u_t+u_{yy}+yu_x=0$$

— вырожденное параболич. уравнение в области $t\geqslant 0$;

$$yu_x-v_y=0,\quad u_y+v_x=0$$

— вырожденная эллиптич. система при $y\geqslant 0$.

В. у. встречаются в теории пограничного слоя, в безмоментной теории оболочек, в теории диффузионных процессов, в частности в теории броуновского движения, и во многих других задачах механики и физики.

Исследования В. у. ведутся по двум тесно связанным между собой направлениям: 1) доказывается разрешимость краевых задач с учетом тех изменений в постановке, к-рые происходят в силу вырождения типа; 2) устанавливаются свойства решений, аналогичные свойствам невырожденных уравнений (гладкость, неравенства Гарнака для эллиптич. и параболич. уравнений и т. п.).

Наиболее полно изучены В. у. 2-го порядка эллиптич. и параболич. типов (строго говоря, параболич. уравнение тоже можно считать вырожденным эллиптич. уравнением, удовлетворяющим дополнительным условиям). В случае, когда вырождение типа имеется не только на границе, но и во внутренних точках

(напр., во всех точках рассматриваемой области), такие уравнения называют еще уравнениями с неотрицательной характеристической формой, эллиптико-параболическими уравнениями, ультрапараболическими уравнениями.

Особенностью В. у. является специфич. постановка краевых задач. Граничные условия иногда приходится задавать не на всей границе, а на ее части. М. В. Келдыш впервые обратил внимание на зависимость постановки краевой задачи от характера вырождения эллиптич. уравнения на границе. Для общего эллипти-копараболич. уравнения 2-го порядка

$$a^{ik}(x)\,u_{x_i x_k}+b^i(x)\,u_{x_i}+c(x)\,u=f(x);\quad a^{ik}\xi_i\xi_k\geqslant 0,\ (*)$$

первая краевая задача ставится следующим образом. Пусть Γ — граница рассматриваемой области D, $n=(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ — внутренняя нормаль к Γ, а $\tilde{\Gamma}$ — та часть Γ, где $a^{ik}n_in_k=0$ и $(b^i-a^{ij}_{x_j})n_i\geqslant 0$. Требуется найти решение уравнения $(*)$ в области D так, чтобы $u|_{\Gamma\setminus\tilde{\Gamma}}=\varphi$. Были доказаны существование и единственность обобщенного решения этой задачи и указаны достаточные условия, при к-рых обобщенное решение будет гладким.

Так как частным случаем В. у. являются уравнения 1-го порядка, то ясно, что решения вырожденных эллиптич. уравнений, вообще говоря, не будут гладкими внутри области, если граничные условия недостаточно гладкие. Однако примеры показывают, что и при бесконечно дифференцируемых граничных условиях и коэффициентах В. у. его решения могут не быть бесконечно дифференцируемыми. Найдено условие гипоэллиптичности для общего вырожденного эллиптич. уравнения 2-го порядка.

Свойства решений вырожденных эллиптич. и параболич. уравнений 2-го порядка изучаются как с помощью геометрич. методов, так и с помощью методов теории вероятностей.

Большинство исследований вырожденных гиперболич. уравнений относится к уравнениям 2-го порядка с двумя независимыми переменными, вырождающимся на границе области. Эти работы стимулировались прежде всего изучением уравнений смешанного типа и связанных с ними задач газовой динамики. Для иллюстрации возникающих здесь вопросов рассмотрим задачу Коши $(u(x, 0)=\alpha(x),\ u_y(x,0)=\beta(x))$ для уравнения с главной частью $u_{yy}-y^m u_{xx}$. При $m<2$ эта задача имеет единственное решение, а при $m>2$ задача Коши, вообще говоря, некорректна. Для уравнения с главной частью $y^m u_{yy}-u_{xx}$ задача Коши с данными на линии вырождения поставлена корректно при $0<m<1$. Если $m\geqslant 1$, то так же, как и для эллиптич. уравнения, постановка задачи, вообще говоря, видоизменяется. Вместо $u_y(x, 0)$ задается $\lim\limits_{y\to 0}\rho(y)\,u_y(x, y)$, где $\rho(y)$ — нек-рая положительная функция, зависящая от коэффициентов уравнения.

Для гиперболич. уравнения с бо́льшим числом пространственных переменных

$$u_{tt}-\left(a^{ij}(t, x)\,u_{x_i}\right)_{x_j}+b^i(t, x)\,u_{x_i}+$$
$$+b^0(t, x)\,u_t+c(t, x)\,u=f,$$

вырождающегося как на начальной плоскости $t=0$, так и внутри области, доказана корректность задачи Коши при выполнении нек-рых условий. Наиболее существенным из этих условий является выполнение неравенства

$$\alpha t\,(b^i\xi_i)^2\leqslant A a^{ij}\xi_i\xi_j+a^{ij}_t\xi_i\xi_j,$$

где α и A — нек-рые положительные постоянные.

Ряд результатов для линейных В. у. переносится и на квазилинейные уравнения.

Лит.: [1] Олейник О. А., Радкевич Е. В., Итоги науки. Математический анализ. 1969, М., 1971, с. 7—252; [2] Смирнов М. М., Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, М., 1966.

А. М. Ильин.

ВЫРОЖДЕННОЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными

$$F(x,\ Du)=0, \tag{1}$$

где действительная функция $F(x,\ q)$ удовлетворяет условиям:

$$\sum_{|\ \alpha\ |=m} \frac{\partial F\ (x,\ Du)}{\partial q_\alpha}\,\xi^\alpha \geqslant 0 \tag{2}$$

для всех действительных ξ и существует $\xi\neq 0$, при к-ром в соотношении (2) достигается равенство. Здесь: x есть n-мерный вектор $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$; $u\,(x)$ — искомая функция, α — мультииндекс $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$; Du — вектор с компонентами

$$D^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

причем в уравнение (1) входят производные порядка не выше m; q_α — компоненты вектора q; ξ есть n-мерный вектор $(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$ и $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1},\ \xi_2^{\alpha_2}\ldots\xi_n^{\alpha_n}$. Если в соотношении (2) для к.-л. x и Du и для всех действительных $\xi\neq 0$ выполняется строгое неравенство, то уравнение (1) в точке $(x,\ Du)$ является эллиптическим. Уравнение (1) вырождается в тех точках $(x,\ Du)$, где соотношение (2) обращается в равенство для к.-л. действительного $\xi\neq 0$. Если равенство достигается лишь на границе рассматриваемой области, то уравнение наз. в ы р о ж д а ю щ и м с я н а г р а н и ц е о б л а с т и. Наиболее исследованы линейные В. э. у. 2-го порядка

$$\sum a^{ik}(x)\,u_{x_i x_k}+\sum b^i(x)\,u_{x_i}+c\,(x)\,u=f\,(x),$$

где матрица $\|(a^{ik}(x)\|$ неотрицательно определенная для всех рассматриваемых значений x.

См. также ст. *Вырожденное уравнение* с частными производными и лит. при ней.

А. М. Ильин.

ВЫРОЖДЕННОЕ ЯДРО — ядро линейного интегрального *Фредгольма оператора*, имеющее вид

$$\sum_{i=1}^{N}\varphi_i\,(P)\,\psi_i\,(Q),$$

где P и Q — точки евклидовых пространств.

А. Б. Бакушинский.

ВЫРОЖДЕННЫХ ЯДЕР МЕТОД — один из методов построения аппроксимирующего уравнения для приближенного (и численного) решения нек-рых видов линейных и нелинейных интегральных уравнений. Основным типом интегральных уравнений, пригодных для применения В. я. м., являются линейные одномерные интегральные уравнения Фредгольма II рода. Для таких уравнений В. я. м. состоит в приближенной замене ядра $K\,(x,\ s)$ интегрального уравнения

$$\lambda\varphi\,(x)+\int_a^b K\,(x,\ s)\,\varphi\,(s)\,ds=f\,(x) \tag{1}$$

на вырожденное ядро вида

$$K_N\,(x,\ s)=\sum_{n=1}^{N}a_n\,(x)\,b_n\,(s)$$

и в последующем решении *вырожденного интегрального уравнения* Фредгольма

$$\lambda\tilde{\varphi}\,(x)+\int_a^b K_N\,(x,\ s)\,\tilde{\varphi}\,(s)=f\,(x). \tag{2}$$

Решение (2) сводится к решению системы алгебраических линейных уравнений. Вырожденное ядро $K_N(x,\ s)$ можно искать по ядру $K\,(x,\ s)$ многими способами, напр. разложением ядра в ряд Тейлора или Фурье (о других методах см. *Бейтмена метод*, *Полос метод*).

В. я. м. переносится на системы интегральных уравнений типа (1), на многомерные уравнения с относительно простыми областями интегрирования и нек-рые специальные нелинейные уравнения типа Гаммерштейна (см. *Гаммерштейна уравнение*).

Лит.: [1] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.— Л., 1962.

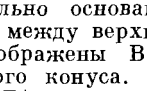
А. Б. Бакушинский.

ВЫСКАЗЫВАНИЙ ИСЧИСЛЕНИЕ, пропозициональное исчисление,— общее название дедуктивных систем, выводимые объекты к-рых интерпретируются как суждения, составленные из простейших (не анализируемых в рамках В. и.) суждений при помощи пропозициональных связок (таких, как «не», «и», «или», «если..., то...» и др.; см. *Логические исчисления*). Важнейшим примером является классич. В. и., в интерпретации к-рого суждения рассматриваются как принимающие два значения («истина» и «ложь») и выводимыми объектами оказываются все тождественно истинные суждения и только они. Интерес к В. и. определяется тем, что эти исчисления лежат в основе почти любой логико-математич. теории и обычно соединяют сравнительную простоту с высокой содержательностью. В частности, многие важные задачи как теоретического, так и прикладного характера сводятся к тем или иным проблемам для классич. В. и.

Лит. см. при ст. *Логические исчисления.*

С. Ю. Маслов.

ВЫСОТА в элементарной геометрии — отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины геометрич. фигуры (напр., треугольника, пирамиды, конуса) на ее основание или на продолжение основания, а также длина этого отрезка. В. трапеции, призмы, цилиндра, шарового слоя, усеченных параллельно основанию пирамиды и конуса,— расстояние между верхним и нижним основаниями. На рис. изображены В. (h) треугольников, трапеции и усеченного конуса.



БСЭ-3.

ВЫСОТА в диофантовой геометрии — некоторая численная функция на множестве решений *диофантова уравнения*. В простейшем случае целочисленного решения $(x_1, \ldots, x_n)$ диофантова уравнения высота есть функция решения, равная $\max |x_i|$. В таком виде она встречается уже в методе спуска Ферма. Пусть имеется проективное алгебраич. многообразие X, определенное над глобальным полем K. Высота представляет собой класс действительнозначных функций $h_L(P)$, определенных на множестве $X(K)$ рациональных точек P, и зависящий от морфизма $L: X \to P^n$ многообразия X в проективное пространство P^n. Каждая функция из этого класса тоже наз. высотой. Различие между функциями из этого класса с точки зрения оценки рациональных точек несущественно; для любых двух функций h'_L и h''_L существуют такие константы $c' > 0$ и $c'' > 0$, что $c' h'_L \leqslant h''_L \leqslant c'' h'_L$. Такие функции наз. эквивалентными; эта эквивалентность (здесь) обозначается $\asymp$.

Основные свойства В. Функция $h_L(P)$ функториальна по P, т. е. для любого морфизма $f: X \to Y$ и морфизма $L: Y \to P^n$

$$h_{f^*L}(P) \asymp h_L(f(P)), \quad P \in X(K).$$

Если морфизмы L, L_1 и L_2 определяются обратимыми пучками $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ и $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2$, то $h_L \asymp h_{L_1} h_{L_2}$. Множество точек $P \in X(K)$, имеющих ограниченную В., конечно в следующем смысле: если основное поле K есть поле алгебраич. чисел, то указанное множество конечно; если же K — поле алгебраич. функций с полем констант k, то элементы $X(K)$ зависят от конечного числа параметров из поля k и, в частности, K конечно, если поле k конечно. Пусть $|\cdot|_v$ пробегает множество всех

нормирований поля K. Тогда В. точки $(x_0:x_1:\ldots:x_n)$ проективного пространства P^n с координатами из K может быть определена как

$$\Pi_v \sup_i |x_i|_v. \qquad (*)$$

Корректность определения следует из формулы произведения $\Pi_v |x|_v = 1$, $x \in K$. Пусть X — произвольное проективное многообразие над K и L — замкнутое вложение многообразия X в проективное пространство, В. h_L можно получить, перенося фупкцию $(*)$ с помощью этого вложения на множество $X(K)$. Различные проективные вложения, соответствующие одному и тому же пучку $\mathscr{L}$, определяют на $X(K)$ эквивалентные функции. Распространение по линейности дает требуемую функцию h_L. Иногда вместо функции h_L используют ее логарифм — так наз. л о г а р и ф м и ч. в ы с о т у.

Приведенные выше оценки являются в нек-рых случаях следствием точных равенств (см. [3], [4], [5]). Существует вариант функции В.— высота Тейта – Нерона, к-рая определяется на абелевых многообразиях и ведет себя функториальным образом относительно морфизмов абелевых многообразий, сохраняющих нулевую точку. Локальный аспект развит в [6]. Построенные там локальные компоненты В. играют в арифметике роль индексов пересечения.

Лит.: [1] В е й л ь А., Теория чисел и алгебраическая геометрия, «Математика», 1958, т. 2, № 4; [2] L a n g S., Diophantine geometry, N. Y.—L., 1962; [3] М а н и н Ю. И., Теорема Морделла — Вейля, в кн.: М а м ф о р д Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971, с. 279—95; [4] М а н и н Ю. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, с. 1363—90; [5] M u m f o r d D., «Amer. J. Math.», 1965, v. 87, p. 1007—16; [6] N é r o n A., «Ann. Math.», 1965, v. 82, p. 249—331.
А. Н. Паршин.

ВЫСОТА ИДЕАЛА — минимум высот простых идеалов, содержащих данный идеал. В ы с о т а $\mathrm{ht}(\mathfrak{P})$ п р о с т о г о и д е а л а $\mathfrak{P}$ в кольце A — наибольшее число h (или ∞, если такого числа нет) такое, что существует цепочка различных простых идеалов

$$\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_h = \mathfrak{P}.$$

К о в ы с о т а $\mathrm{coht}(\mathfrak{P})$ п р о с т о г о и д е а л а $\mathfrak{P}$ определяется как наибольшее h, для к-рого существует цепочка простых идеалов

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_h \neq A.$$

Иначе говоря,

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{P}) = \dim(A_{\mathfrak{P}}), \quad \mathrm{coht}(\mathfrak{P}) = \dim(A/\mathfrak{P}),$$

где dim означает размерность соответствующего кольца по Круллю. Высота простого идеала равна коразмерности многообразия, определяемого идеалом, а ковысота — размерности этого многообразия. Высота и ковысота простого идеала связаны неравенством

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{P}) + \mathrm{coht}(\mathfrak{P}) \leqslant \dim A,$$

равенство достигается, напр., в случае, когда A — локальное *Коэна — Маколея кольцо*.

Простые идеалы высоты 0 — это минимальные простые идеалы. Существование в нётеровой области целостности простых идеалов высоты 1 устанавливает т е о р е м а о г л а в н о м и д е а л е: высота ненулевого главного идеала равна 1 (см. *Крулля кольцо*). Более общий результат — т е о р е м а К р у л л я — связывает высоту с числом образующих идеала: в нётеровом кольце В. и., порожденного r элементами, не превосходит r, и обратно: простой идеал высоты r является минимальным среди простых идеалов, содержащих некоторые r элементов. В частности, в нётеровом кольце любой идеал имеет конечную высоту; в отношении ковысоты это уже не так (см. [2]).

Лит.: [1] K r u l l W., Primidealketten in allgemeinen Ringbereichen, B.—Lpz., 1928; [2] N a g a t a M., Local rings, N. Y., 1962; [3] З а р и с с к и й О., С а м ю э л ь П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963; [4] С е р р Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5, с. 3—93.
В. И. Данилов.

ВЫЧЕТ целого числа a по модулю m — любое целое число b, сравнимое с a по модулю m (см. *Сравнение*). Пусть r — остаток от деления a на целое $m>0$, $0\leqslant r\leqslant m-1$, тогда В. b числа a по модулю m имеет вид $b=mq+r$, где q — некоторое целое число. В., соответствующий $q=0$, равен остатку r и наз. наименьшим неотрицательным вычетом числа a. Наименьший по абсолютной величине В. ρ наз. абсолютно наименьшим вычетом числа a. Если $r<m/2$, то $\rho=r$; если $r>m/2$, то $\rho=r-m$; наконец, если m четное и $r=m/2$, то за ρ можно принять любое из чисел $m/2$ и $-m/2$.

Система, состоящая из m целых чисел, каждое из к-рых является В. одного и только одного из чисел $0, 1, \ldots, m-1$, наз. полной системой вычетов по модулю m. Чаще всего в качестве полной системы В. употребляются наименьшие неотрицательные В. $0, 1, \ldots, m-1$ или же абсолютно наименьшие В.

Вычетом степени n по модулю m, $n\geqslant 2$ — целое, наз. всякое целое число a, взаимно простое с m, для к-рого сравнение

$$x^n \equiv a \pmod m$$

разрешимо. Если же данное сравнение не разрешимо, то a наз. невычетом степени n по модулю m. В частности, при $n=2$ вычеты или невычеты наз. квадратичными, при $n=3$ — кубическими, при $n=4$ — биквадратичными (см. также *Степенной вычет*).

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972.

С. А. Степанов.

ВЫЧЕТ аналитической функции $f(z)$ одного комплексного переменного в конечной изолированной особой точке a однозначного характера — коэффициент c_{-1} при $(z-a)^{-1}$ в разложении Лорана функции $f(z)$ (см. *Лорана ряд*) в окрестности точки a, или равный ему интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz,$$

где γ — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке a. В. обозначается $\operatorname*{res}_a [f(z)]$ (либо Выч. $_a[f(z)]$).

Теория вычетов опирается на *Коши интегральную теорему*. Основной в теории В. является следующая теорема о вычетах. Пусть $f(z)$ — однозначная аналитич. функция всюду в односвязной области G, кроме изолированных особых точек; тогда интеграл от $f(z)$ по любой простой замкнутой спрямляемой кривой γ, лежащей в области G и не проходящей через особые точки функции $f(z)$, вычисляется по формуле

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{res}_{a_k} [f(z)],$$

где a_k, $k=1, \ldots, N$, — особые точки функции $f(z)$, попавшие внутрь γ.

Вычет функции в бесконечно удаленной точке $a=\infty$ для функции $f(z)$, однозначной и аналитической в окрестности этой точки, определяется формулой

$$\operatorname*{res}_\infty [f(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -c_{-1},$$

где γ^- — окружность достаточно большого радиуса, ориентированная по часовой стрелке, а c_{-1} — коэффициент при z^{-1} в разложении Лорана функции $f(z)$ в окрестности этой точки. Из теоремы о В. вытекает теорема о полной сумме вычетов: если $f(z)$ — однозначная аналитич. функция в расширенной комплексной плоскости, кроме конечного числа особых точек,

то сумма всех В. функции $f(z)$, включая В. в бесконечно удаленной точке, равна нулю.

Таким образом, вычисление интегралов от аналитич. функций по замкнутым кривым (контурных интегралов) сводится к вычислению В., к-рые находятся особенно просто в случае конечных полюсов. Пусть $a\neq\infty$ — полюс порядка m функции $f(z)$, тогда

$$\operatorname*{res}_a [f(z)] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] \right\}.$$

При $m=1$ (простой полюс) эта формула принимает вид

$$\operatorname*{res}_a [f(z)] = \lim_{z\to a} [(z-a) f(z)];$$

если $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в окрестности точки a, причем для $\psi(z)$ точка a есть простой нуль, то

$$\operatorname*{res}_a \left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right] = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Применение теоремы о В. к логарифмич. производной приводит к важной теореме о логарифмическом вычете: если функция $f(z)$ мероморфна в односвязной области G, а простая замкнутая кривая γ лежит в G и не проходит через нули и полюсы функции $f(z)$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N - P,$$

где N — число нулей, P — число полюсов функции $f(z)$ внутри γ с учетом их кратностей. Выражение в левой части этой формулы наз. логарифмическим вычетом функции относительно кривой γ (см. также *Аргумента принцип*).

В. применяются к вычислению нек-рых определенных интегралов от действительных функций, таких, напр., как

$$J_1 = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt,$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx,$$

$$J_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} f(x)\, dx,$$

где $R(\sin t, \cos t)$—рациональная функция от $\sin t$, $\cos t$, непрерывная при $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, а $f(z)$ — непрерывная функция при $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, где $\operatorname{Im} z$ — мнимая часть z, и аналитическая при $\operatorname{Im} z>0$, кроме конечного числа особых точек. При этом J_1 подстановкой $e^{it}=z$ сводится к контурному интегралу

$$\int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{dz}{iz},$$

т. е. к вычислению В.;

$$J_2 = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{res}_a [f(z)],$$

если $f(z)z^{-r}\to 0$ при $z\to\infty$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, $r>1$;

$$J_3 = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{res}_a [e^{iz} f(z)],$$

если $f(z)$ удовлетворяет условиям *Жордана леммы*.

В. находят многочисленные и важные применения в вопросах аналитич. продолжения, разложения мероморфных функций на простейшие дроби, суммирования степенных рядов, асимптотич. оценок и во многих др. вопросах анализа и его приложений (см. [1] — [4]).

Теория В. одного переменного разработана в основном О. Коши (A. Cauchy) в 1825—29. Ряд результатов, относящихся к обобщениям теории В. и ее приложениям, был получен Ш. Эрмитом (Ch. Hermite, теорема о сумме В. двоякопериодической функции), П. Лораном (P. Laurent), Ю. В. Сохоцким, Э. Линделёфом (E. Lindelöf) и др.

На римановой поверхности рассматриваются В. не аналитич. функций, а аналитических дифференциалов (см. [5]). Вычет аналитического дифференциала dZ в окрестности его изолированной особой точки определяется как коэффициент c_{-1} при z^{-1} в разложении Лорана функции $g(z)=dZ/dz$, где z — униформизирующий параметр в окрестности этой точки. При этом интеграл от dZ по любой замкнутой кривой на римановой поверхности выражается через В. дифференциала dZ и через его циклические периоды (интегралы от dZ по *каноническим разрезам*). На римановы поверхности распространяется теорема о полной сумме В.: сумма всех В. мероморфного дифференциала на компактной римановой поверхности равна нулю.

Теория вычетов аналитических функций многих комплексных переменных базируется на интегральных теоремах Стокса и Коши — Пуанкаре, позволяющих заменять интеграл от замкнутой формы по одному циклу интегралом от этой формы по другому циклу, гомологичному первому. Начало теории В. функции многих переменных положил А. Пуанкаре [6], к-рый в 1887 впервые обобщил интегральную теорему Коши и понятие В. на функции двух комплексных переменных, показав, в частности, что интеграл от рациональной функции двух комплексных переменных по двумерному циклу, не проходящему через особенности подинтегральной функции, сводится к периодам *абелевых интегралов*, и применил двойные В. для обоснования двумерного аналога *Лагранжа ряда*.

Ж. Лере (J. Leray, см. [7], а также [4], [8]) разработал общую теорию В. на комплексном аналитич. многообразии X. Теория вычетов Лере, в частности, описывает метод вычисления интегралов по нек-рым циклам на X от замкнутых внешних дифференциальных форм, имеющих особенности на аналитич. подмногообразиях. Вводится понятие *вычет-формы*, обобщающее понятие В. аналитич. функции одного переменного; получаемая при этом формула В. позволяет свести вычисление интеграла от формы ω, имеющей на комплексном аналитич. подмногообразии S полярную особенность 1-го порядка, по нек-рому циклу в $X \setminus S$ к вычислению интеграла на 1 меньшей размерности от вычет-формы $\operatorname{res}[\omega]$ по циклу на S. Для вычисления интегралов от замкнутых форм, имеющих на S произвольные особенности, важны понятие вычет-класса (см. *Вычет-форма*) и теорема Лере, согласно к-рой для любой замкнутой формы $\omega \in C^\infty(X \setminus S)$ найдется когомологичная ей форма ω_0, имеющая на S полярную особенность 1-го порядка. Для формы ω, имеющей особенность на нескольких подмногообразиях ($S_1 \cup \ldots \cup S_m$), используются кратные вычет-форма

$$\operatorname{res}^m[\omega] \in C^\infty(S_1 \cap \ldots \cap S_m),$$

вычет-класс

$$\operatorname{Res}^m[\omega] \in H^*(S_1 \cap \ldots \cap S_m)$$

и формула В.

$$\int_{\delta^m \gamma} \omega = (2\pi i)^m \int_\gamma \operatorname{Res}^m[\omega],$$

где δ^m — кратный оператор δ, а γ — цикл в $S_1 \cap \ldots \cap S_m$.

Имеется другой подход к теории В. функций многих комплексных переменных — метод выделения базы гомологий, опирающийся на идею Э. Мартинелли (E. Martinelli) применения *Александера двойственности* (см. [9]). Пусть $f(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)$, — голоморфная функция в области $G \subset \mathbb{C}^n$, а σ есть n-мерный цикл в G. Если $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$ — база n-мерных гомологий области G и

$$\sigma \sim \sum_{\nu=1}^{p} k_\nu \sigma_\nu$$

— разложение σ по этой базе, то обобщение теоремы о В. имеет вид

$$\int_\sigma f(z)\,dz = (2\pi i)^n \sum_{\nu=1}^{p} k_\nu R_\nu,\quad dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n,$$

где

$$R_\nu = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\sigma_\nu} f(z)\,dz$$

есть n-мерный аналог В. и наз. вычетом функции $f(z)$ относительно базисного цикла σ_ν. В отличие от случая одной переменной, значительную трудность представляет отыскание как базы гомологий $\{\sigma_\nu\}$, так и коэффициентов $\{k_\nu\}$ разложения σ по базе. В ряде случаев (напр., когда $G = \mathbb{C}^2 \setminus \{P(z_1, z_2) = 0\}$, где P — многочлен) эти задачи позволяет решить двойственность Александера и Понтрягина. При этом коэффициенты k_ν находятся как коэффициенты зацепления цикла σ с циклами на множестве $\mathbb{C}^n \setminus G$ (компактифицированном определенным образом), двойственными циклам σ_ν. Вычеты R_ν в нек-рых случаях находятся как соответствующие коэффициенты разложения Лорана функции $f(z)$.

Многомерные аналоги логарифмич. В. (см. [4], [12]) выражают число общих нулей (с учетом их кратностей) системы голоморфных функций $f = (f_1, \ldots, f_n)$ в области $D \subset\subset G \subset \mathbb{C}^n$ через интегралы:

$$N(f, D) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} \frac{1}{|f|^{2n}} \sum_{\nu=1}^{n} \bar{f}_\nu df_\nu \wedge d\bar{f}_1 \wedge df_1 \wedge \ldots [\nu]$$

$$N(f, D) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\gamma \frac{df_1}{f_1} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n},$$

где γ — нек-рый цикл в $\partial D \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \{f_j(z) = 0\}$. В. функций многих переменных нашли применения при изучении фейнмановских интегралов, в комбинаторном анализе (см. [11]) и в теории неявных функций (см. [12]).

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [2] Евграфов М. А., Аналитические функции, 2 изд., М., 1968; [3] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 11 изд., М., 1967; [4] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, М., 1969; [5] Спрингер Д., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [6] Poincaré H., «Acta math.», 1887, t. 9, 321—380; [7] Лере Ж., Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии, пер. с франц., М., 1961; [8] Фукс Б. А., Введение в теорию аналитических функций многих переменных, М., 1962; [9] Южаков А. П., «Изв. ВУЗов. Матем.», 1964, № 5 (42), с. 149—61; [10] Griffits P. A., «Ann. Math.», 1969, v. 90, № 3, p. 460—95; [11] Егорычев Г. П., Южаков А. П., «Сиб. матем. ж.», 1974, т. 15, № 5, 1049—60; [12] Южаков А. П., Элементы теории многомерных вычетов, Красноярск, 1975.

А. П. Южаков.

ВЫЧЕТ-ФОРМА, форма-вычет,— обобщение понятия *вычета* аналитич. функции одного комплексного переменного на случай многих переменных. Пусть X — комплексное аналитич. многообразие, S — его аналитич. подмногообразие комплексной коразмерности 1 и пусть $\omega(x)$ — замкнутая внешняя дифференциальная форма класса C^∞ на $X \setminus S$, имеющая на S полярную особенность 1-го порядка. Последнее означает, что для функции $s(x, y)$, голоморфной от x в окрестности U_y точки $y \in S$ и такой, что

$$S \cap U_y = \{x:\ s(x, y) = 0\},\quad ds \not\equiv 0 \text{ при } x = y,$$

форма $\omega(x) \cdot s(x, y)$ принадлежит классу $C^\infty(U_y)$. При этих условиях в окрестности U любой точки $y \in S$ существуют такие формы $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$ класса C^∞, что

$$\omega(x) = \frac{ds(x, y)}{s(x, y)} \wedge \psi(x, y) + \theta(x, y),$$

причем $\psi(x, y)|_{S \cap U_y}$ есть замкнутая форма класса C^∞, зависящая только от ω. Замкнутая форма на S, определяемая в окрестности каждой точки $y \in S$, сужением

$\psi(x, y)|_{S\cap U_y}$, наз. в ы ч е т-ф о р м о й формы ω и обозначается

$$\operatorname{res}[\omega] = \frac{s\omega}{ds}\Big|_S.$$

Если форма ω голоморфна, то и ее В.-ф. голоморфна. Напр., для $X=\mathbb{C}^n$, $S=\{x\in\mathbb{C}^n : s(x)=0\}$ и формы

$$\omega(x) = \frac{f(x)}{s(x)}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

где f, s — голоморфные функции в $\mathbb{C}^n$, $\operatorname{grad} s\neq 0$ на S, В.-ф. равна

$$\operatorname{res}[\omega] = \left[f(x) \Big/ \frac{\partial S}{\partial x_j} \right]\Big|_S dx_1 \wedge \ldots \wedge [dx_j] \wedge \ldots \wedge dx_n$$

в точках, где $dS/dx_j\neq 0$.

Для В.-ф. имеет место ф о р м у л а в ы ч е т а:

$$\int_{\delta\gamma} \omega = 2\pi i \int_\gamma \operatorname{res}[\omega],$$

где γ — произвольный цикл в S размерности, равной степени $\operatorname{res}[\omega]$, $\delta\gamma$ — цикл в $X\setminus S$ — граница нек-рой цепи в X, находящейся в общем положении с S и пересекающейся с S по γ.

Кратная В.-ф. $\operatorname{res}^m[\omega]$ определяется по индукции.

В ы ч е т-к л а с с (или к л а с с-в ы ч е т) замкнутой в $X\setminus S$ формы ω есть класс *когомологий* подмногообразия S, образованный В.-ф. форм класса C^∞ в $X\setminus S$, когомологичных ω и имеющих на S полярную особенность 1-го порядка. Вычет-класс формы ω обозначается $\operatorname{Res}[\omega]$.

]$\ldots\wedge d\bar f_n \wedge df_n$,

Вычет-класс голоморфной формы может не содержать голоморфной формы, так что в общем случае нельзя ограничиться рассмотрением кольца голоморфных форм вместо кольца замкнутых форм. Однако это возможно, если X — *Штейна многообразие*. Вычет-класс $\operatorname{Res}[\omega]$ не зависит от выбора ω из одного и того же класса когомологий и осуществляет гомоморфизм группы классов когомологий многообразия $X\setminus S$ в группу классов когомологий многообразия S:

$$\operatorname{Res}\colon H^*(X\setminus S) \longrightarrow H^*(S).$$

Как и для В.-ф., справедлива ф о р м у л а в ы ч е т а:

$$\int_{\delta\gamma} \omega = 2\pi i \int_\gamma \operatorname{Res}[\omega],$$

причем интеграл в правой части берется от любой формы из вычет-класса $\operatorname{Res}[\omega]$ и не зависит от ее выбора.

Лит. см. при ст. *Вычет* аналитической функции [7], [8], [14].

А. П. Южаков.

ВЫЧИСЛИМАЯ ФУНКЦИЯ — функция, вычисление значений к-рой может быть проведено с помощью заранее заданной эффективной процедуры, или *алгоритма*. Характерная черта вычислительных процессов — вычисление искомых величин задач происходит последовательно из данных исходных величин по определенным, заранее заданным, правилам и инструкциям. На основании многочисленных примеров вычислительных процессов в математике оформилось интуитивное понятие вычислительной процедуры. В связи с общей программой обоснования математики в 20 в. возникла задача создания не интуитивного, а точного понятия алгоритма. Строгое определение В. ф., эффективных процедур и алгоритмов было дано в различных формах Д. Гильбертом (D. Hilbert), К. Гёделем (K. Gödel), А. Чёрчем (A. Church), С. Клини (S. Kleene), Э. Постом (E. Post), А. Тьюрингом (A. Turing) и А. А. Марковым.

Общая идея различных подходов к созданию строгих математич. определений рассматриваемых понятий такова: проводится детальный анализ уже известных или мыслимых вычислительных процессов, выявляются существенные особенности этих процессов, находятся подходящие математич. аналоги этих процессов и их особенностей. Реализация различных аспектов этой

идеи неоднозначна и приводит к разным вариантам математич. понятия алгоритма. Основными математич. моделями понятия алгоритма являются машины Тьюринга, частично рекурсивные функции, нормальные алгоритмы Маркова и др.

Машины Тьюринга. Алгоритмы, применяемые в математике, напоминают машину, работающую отдельными тактами и выдающую ответ через конечное число тактов. А. Тьюринг и Э. Пост описали понятия *вычислительных машин абстрактных*, на к-рых можно моделировать вычислительные процессы. Машина Тьюринга (иногда говорят машина Тьюринга — Поста) M состоит из:

конечного алфавита $\alpha=\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, где a_i произвольные символы; конечные упорядоченные последовательности символов алфавита α наз. словами в алфавите α; с помощью слов в алфавите α кодируются исходные данные задачи, промежуточные вычисления и получаемые ответы;

конечного списка $Q=\{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$ элементарных состояний, в к-рых машина M может находиться; при этом q_1 считается начальным состоянием, в к-ром находится M, когда начинает работу, а q_0 — конечным состоянием: если M приходит в состояние q_0, то она останавливает свою работу;

программы, составленной из отдельных команд T_{ij}, имеющих один из видов: $a_iq_j\to a_kDq_l$, где $0\leqslant i,\ k\leqslant n,\ 0\leqslant j\leqslant m,\ 0\leqslant l\leqslant m$, D — один из символов движения Л, П или С.

Конфигурация машины M в данный момент времени кодируется словом вида Aa_iq_jB, где A и B — нек-рые слова в алфавите α (вместо пустого слова A пишут a_0). Конфигурация машины M в следующий момент времени (после выполнения одного такта работы) также кодируется словом, к-рое зависит от команды T_{ij}:

если D=Л, то получается слово Aq_la_kB,

если D=С, то получается слово Aa_kq_lB,

если D=П и $B=a_pB'$, то получается слово $Aa_ka_pq_lB'$,

если D=П и B — пустое слово, то получается слово $Aa_ka_0q_lB$.

Работа машины M может быть описана следующим образом: кодируют исходные данные с помощью нек-рой начальной конфигурации (здесь $q_j=q_1$); согласно программе машины M получают следующую конфигурацию и т. д., если в какой-либо момент получают конфигурацию, содержащую конечное состояние q_0, то прекращают работу; заключительная конфигурация декодируется в ответ; если машина никогда не останавливается, то считают ответ в задаче неопределенным.

Всякая вычислительная процедура, к-рая может быть сведена к работе подходящей машины Тьюринга, является эффективной в интуитивном смысле. Обращение предыдущего высказывания получило название тезиса Тьюринга: всякая эффективная вычислительная процедура может быть реализована на соответствующей машине M. Этот тезис нельзя доказать, так как он объединяет два понятия — строгое математич. понятие машины Тьюринга и расплывчатое, интуитивное понятие эффективной процедуры. Если моделировать на машинах Тьюринга вычисление значений функции, области определения и значений к-рой суть множества натуральных чисел, то приходят к понятию вычислимой (на машинах Тьюринга) функции. См. также *Тьюринга машина*.

Частично рекурсивные функции. Все известные примеры алгоритмов можно свести к вопросу вычисления значений подходящей функции. Считая эту черту алгоритмов основной, А. Чёрч, К. Гёдель и С. Клини выделили широкий класс функций, названных частично рекурсивными. Пусть F — класс частичных функций, об-

ласти определения и значения к-рых суть множества натуральных чисел. На множестве F определяют следующие операции:

с у п е р п о з и ц и я ф у н к ц и й: если f, α_1, ..., $\alpha_m \in F$, то говорят, что функция

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = f(\alpha_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \alpha_n(x_1, \ldots, x_n))$$

получается из f, α_1, ..., α_n с помощью суперпозиции;

μ-о п е р а т о р: пусть f_1, $f_2 \in F$; говорят, что функция ψ получается из f_1 и f_2 с помощью μ-оператора, и записывают

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \mu y [f_1(x_1, \ldots, x_n, y) = f_2(x_1, \ldots, x_n, y)],$$

если $f_1(x_1, \ldots, x_n, z)$ и $f_2(x_1, \ldots, x_n, z)$ определены и неравны между собой при $z < y$, а

$$f_1(x_1, \ldots, x_n, y) = f_2(x_1, \ldots, x_n, y) \text{ и } \psi(x_1, \ldots, x_n) = y.$$

Ясно, что если эти операции применяются к функциям, значение к-рых мы умеем вычислять, то имеются алгоритмы, вычисляющие значения функций φ и ψ. Следующие функции считаются простейшими: $+$, $\times$, $I_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ и

$$k(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < y, \\ 1, & \text{если } x \geqslant y. \end{cases}$$

Имеются легкие алгоритмы, вычисляющие значения простейших функций.

Функция f наз. ч а с т и ч н о р е к у р с и в н о й, если она за конечное число шагов может быть получена из простейших с помощью суперпозиции и μ-оператора. Всюду определенная частично рекурсивная функция наз. о б щ е р е к у р с и в н о й. Значение всякой частично рекурсивной функции может быть вычислено эффективно в интуитивном смысле. Обращение этого высказывания получило название т е з и с а Ч ё р ч а: всякая функция, значение к-рой может вычисляться эффективно, является частично рекурсивной. Таким образом, согласно тезису Чёрча, в ы ч и с л и м ы м и ф у н к ц и я м и являются частично рекурсивные функции.

Нормальные алгорифмы Маркова. Всякий конкретный алгоритм имеет дело с нек-рым алфавитом, и решение конкретной задачи сводится к переработке слов данного алфавита по нек-рым заранее заданным правилам. Такой подход к теории алгоритмов развит А. А. Марковым, предложившим концепцию нормального алгорифма в качестве математич. модели понятия вычислительной процедуры.

Нормальный алгорифм φ состоит из нек-рого алфавита $\alpha = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ и конечного упорядоченного списка правил вида $A \to B$, где A и B — нек-рые слова в алфавите α. Часть правил выделена и названа заключительными. Правило $A \to B$ применяется к слову P следующим образом: слово P представляется в виде QAR, где Q и R — слова в алфавите α, возможно пустые, и из всех таких представлений выбирается то, в к-ром слово Q имеет наименьшую длину; тогда результатом применения данного правила к слову P наз. слово QBR. Нормальный алгорифм φ применяется к слову P следующим образом: применяют к слову P первое правило из тех, к-рые к P можно применить, получают слово P_1; применяют к P_1 первое правило из тех, к-рые к P_1 можно применить, получают слово P_2 и т. д. В результате получается последовательность слов, к-рая обрывается после применения какого-либо заключительного правила.

Кодируя соответствующим образом информацию, можно использовать нормальные алгорифмы для решения разнообразных алгоритмич. задач. Всякая вычислительная процедура, промоделированная с помощью нормального алгорифма, является эффективной в интуитивном смысле. Обращение этого высказывания носит

название тезиса Маркова: всякая эффективная вычислительная процедура может быть промоделирована с помощью подходящего нормального алгорифма. Если моделировать с помощью нормальных алгорифмов вычисление значений функций из класса F, то приходят к еще одному понятию вычислимой функции. Были предложены и другие уточнения понятия алгоритмов (см. *Алгоритм*, а также *Нормальный алгорифм*).

Доказан следующий результат о равносильности различных концепций понятия алгоритма: классы функций, вычислимых на машинах Тьюринга, частично рекурсивных функций, вычислимых с помощью нормальных алгорифмов Маркова (аналогичные классы функций при других концепциях понятия алгоритма), совпадают. По мнению большинства современных математиков, этот класс функций адекватен классу интуитивно В. ф. и отождествляется с ним. Такое отождествление позволяет придать математичность алгоритмическим проблемам.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [2] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [3] Turing A. M., «Proc. London Math. Soc.», 1937, v. 42, № 2, p. 230—65; [4] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [5] Марков А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 («Тр. матем. ин-та АН СССР», т. 42).

И. А. Лавров, А. Д. Тайманов.

ВЫЧИСЛИМОЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО — действительное число, для к-рого существует *алгоритм*, находящий сколь угодно точные рациональные приближения к этому числу. Близкое значение имеет термин «конструктивное действительное число», обычно употребляемый при рассмотрении В. д. ч. в рамках той или иной системы конструктивной математики (см. *Конструктивный анализ*).

Б. А. Кушнер.

ВЫЧИСЛИМЫЙ ИНВАРИАНТ бинарного отношения между словами данного вида — *алгоритм* (в к.-л. точном смысле; напр. — как это сделано в [1] — *нормальный алгорифм*), применимый ко всякому слову рассматриваемого вида и перерабатывающий в одно и то же слово всякие два слова, связанные этим отношением.

А. А. Марков называет два слова неотделимыми по инвариантам данного отношения, если всякий В. и. этого отношения перерабатывает упомянутые слова в один и тот же результат. Заметим, что если к.-л. бинарное отношение разрешимо (см. *Разрешимое множество*), то легко построить такой его В. и., к-рый будет принимать различные значения на любых двух словах, не связанных этим отношением. Если же для данного отношения удастся построить слова, им не связанные, но по его инвариантам неотделимые, то тем самым будет доказана также и неразрешимость рассматриваемого отношения.

Многие известные *алгоритмические проблемы* алгебры и топологии могут быть формулированы как задачи исследования разрешимости определенных классов отношений эквивалентности, и отрицательные решения таких проблем обычно получаются в виде утверждений о наличии неразрешимых отношений среди определенного типа отношений эквивалентности. А. А. Марковым была осуществлена программа усиления в духе сделанного в предыдущем абзаце замечания известных отрицательных решений многих алгоритмич. проблем математики (проблемы тождества в теории групп, проблемы гомеоморфии, проблемы распознавания инвариантных свойств ассоциативных исчислений и групповых исчислений). Был построен пример перечислимого (см. *Перечислимое множество*), но не разрешимого отношения эквивалентности слов, у которого тем не менее любые два слова, не связанные этим отношением, отделимы по его инвариантам (см. [2]). Вопрос о возможности получения аналогичного результата для

классов отношений, рассмотренных А. А. Марковым, остается открытым (1977).

Лит.: [1] Марков А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1963, т. 27, № 4, с. 907—36; [2] Нагорный Н. М., в сб.: Исследования по теории алгорифмов и математической логике, т. 1, М., 1973, с. 205—10. *Н. М. Нагорный.*

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА — раздел математики, включающий круг вопросов, связанных с использованием ЭВМ. Содержание термина «В. м.» нельзя считать установившимся, так как эта область математики интенсивно развивается в связи с быстро растущими применениями ЭВМ в новых направлениях. Часто термин «В. м.» понимается как теория численных методов и алгоритмов решения типовых математич. задач. Это толкование термина «В. м.» получило распространение на первоначальном этапе, когда использование ЭВМ предъявило новые требования к численным методам; основной задачей на этом этапе была разработка новых методов, «удобных» для ЭВМ. Ниже В. м. понимается в первом — широком смысле этого термина.

В В. м. можно выделить следующие три основных раздела. Первый связан с применением ЭВМ в различных областях научной и практич. деятельности и может быть охарактеризован как анализ матем. моделей. Второй — с разработкой методов и алгоритмов решения типовых математич. задач, возникающих при исследованиях математич. моделей. Третий раздел связан с вопросом об упрощении взаимоотношений человека с ЭВМ, включая теорию и практику *программирования* задач для ЭВМ, в том числе *автоматизацию программирования* задач для ЭВМ.

Анализ математич. моделей включает в себя изучение постановки задачи, выбор модели, анализ и обработку входной информации, численное решение математич. задач, возникающих при исследовании модели, анализ результатов вычислений и, наконец, вопросы, связанные с реализацией полученных результатов.

Задача выбора модели должна решаться с учетом следующего требования. Степень достоверности, с к-рой результаты анализа модели позволяют исследовать конкретное явление (или класс явлений), должна соответствовать точности исходной информации. При этом с появлением возможности получать более точную информацию обычно возникает необходимость совершенствования построенной модели, а в ряде случаев даже коренной ее замены. Для этих задач приобретает существенное значение обработка исходной информации, что в большинстве случаев требует привлечения методов математич. статистики.

Математич. модели сыграли важную роль в развитии естествознания; в настоящее время использование математич. моделей является существенным фактором в широком диапазоне человеческой деятельности (в том числе в вопросах планирования, управления, прогнозирования и т. д.).

Изучение реальных явлений на основе анализа построенных моделей, как правило, требует развития численных методов и привлечения ЭВМ. Таким образом, в В. м. важное место занимают численные методы решения поставленных математич. задач и в первую очередь типовых математич. задач (В. м. в узком смысле слова).

В качестве примера типовых математич. задач, часто встречающихся в приложениях, можно назвать задачи алгебры: здесь большое значение имеют численные методы решения систем линейных алгебраич. уравнений (в частности, больших систем), *обращение матриц*, нахождение собственных значений матриц (как нескольких первых значений, — *частичная проблема* собственных значений, так и нахождение всех собственных значений — *полная проблема собственных значений*). Другие примеры: *дифференцирование численное* и *интегрирование численное* функций одного или нескольких переменных; численные методы решения *дифферен-*

циальных уравнений обыкновенных, интегральных уравнений, а также изучение и сравнительный анализ численных методов различных типов, например *Адамса метод*, *Рунге—Кутта метод*. Значительное число исследований посвящено численным методам решения уравнений с частными производными (см. *Гиперболического типа уравнение*; численные методы решения, *Параболического типа уравнение*; численные методы решения, *Эллиптического типа уравнение*; численные методы решения). Здесь большое направление составляют «экономичные методы», т. е. методы, позволяющие получать результаты при относительно малом (экономном) числе операций.

Быстро развивающимся направлением В. м. являются численные методы оптимизации. Задача оптимизации состоит в изучении экстремальных (наибольших или наименьших) значений функционалов на множествах, как правило, весьма сложной структуры (см., напр., *Экстремальные задачи*; численные методы решения). В первую очередь следует упомянуть задачи *математического программирования* (в том числе линейного и динамического), к к-рым сводятся многие задачи экономики. К задачам оптимизации примыкают минимаксные задачи (и соответствующие численные методы), возникающие при решении задач исследования операций (см. *Исследование операций*) и теории игр (см. *Игр теория*). Особенно сложные задачи типа minmaxminmax возникают при решении многошаговых (динамически развивающихся) игр. Здесь даже математич. эксперимент (проигрывание вариантов поведения играющих) невозможен без использования мощных ЭВМ.

Применение ЭВМ к решению сложных задач, в особенности задач больших размеров, вызвало к жизни одно из главных направлений в теории численных методов — исследования устойчивости методов и алгоритмов к различного рода ошибкам (в том числе к ошибкам округления). См. *Устойчивость вычислительного алгоритма*, *Устойчивость вычислительных процессов*.

Обратные задачи, напр. задача определения элемента x из уравнения $Ax=b$ при известной информации об операторе A и элементе b, часто являются неустойчивыми (некорректно поставленными) задачами (малым погрешностям во входных данных могут соответствовать большие погрешности в x). Более того, обратные задачи часто имеют решение не для всех b, поэтому, задавая приближенное значение b, следует учитывать, что формально решение этой задачи может не существовать. Неустойчивые задачи потребовали специального определения понятия приближенных решений и развития соответствующих методов для их нахождения. К неустойчивым задачам относится широкий класс задач, связанных с проблемами автоматизации обработки результатов экспериментов (см. *Некорректные задачи*; численные методы решения).

В большинстве разделов В. м. важное место занимают вопросы *оптимизации методов* решения задач. Особенно это существенно для задач большого объема (напр., с большим числом переменных).

Применение ЭВМ непрерывно расширяет круг пользователей и поэтому возникает тенденция такой степени автоматизации, при к-рой становится менее существенным знакомство пользователей с численными методами. Это предъявляет новые требования к алгоритмам, их классификации и к стандартным программам решения типовых задач.

В настоящее время выделился ряд направлений прикладной науки, где современные темпы научно-технич. прогресса были бы немыслимы без развития численных методов и применения ЭВМ (см., напр., *Газовой динамики численные методы*).

Основной задачей теории программирования можно считать облегчение отношений человека с машиной, хо-

тя этот взгляд и конкретные направления исследований претерпевают радикальные изменения с развитием вычислительной техники. Смена ряда поколений вычислительных машин обусловила смену этапов в развитии программирования.

От составления программ на внутреннем языке машин программирование быстро перешло к составлению *стандартных программ* решения типовых задач и комплексов таких программ. При их употреблении для широкого класса задач отпадает необходимость в программировании метода решения; достаточно лишь ограничиться заданием исходной информации. Однако задание такой информации, а также написание нестандартных блоков все равно требуют существенного объема программирования на языке машины (см. *Машинно-ориентированный язык*).

Появление машин следующего поколения с бо́льшим быстродействием сопровождалось ростом числа задач, предъявляемых к решению; в результате этого возникло узкое место системы человек — машина: скорость программирования. Это вызвало к жизни новый этап программирования — создание *алгоритмических языков* с трансляторами для перевода с алгоритмич. языка на внутренний язык машины. Вследствие большой близости алгоритмич. языков к общечеловеческому, их внедрение упростило программирование и существенно расширило круг пользователей.

Наряду с созданием универсальных алгоритмич. языков (алгол, фортран) был разработан ряд *проблемно-ориентированных языков* для определенного круга пользователей, напр. связанных с задачами обработки экономич. информации (кобол). Создание специализированных языков вызвано следующим: универсальные языки и трансляторы, предназначенные для решения широкого класса задач, иногда слабо учитывают специфику отдельных важных классов задач, что снижает эффективность использования всех возможностей машины.

При дальнейшем повышении скорости ЭВМ узким местом системы человек — машина стали устройства для ввода и вывода информации; их медленная работа сводила на нет высокопроизводительную работу центрального устройства. Необходимость преодоления этого противоречия явилась одной из причин создания систем *одновременного решения на машине нескольких задач*. Другой причиной было требование одновременной работы на машине большого коллектива пользователей (в частности, последнее особенно существенно при применении ЭВМ в автоматизированных системах управления — АСУ). Все это вместе с рядом других причин обусловило появление нового этапа программирования — *системного программирования*. Основной задачей системного программирования является создание операционных систем, управляющих работой машины, программным путем расширяющих возможности машины и предоставляющих пользователю дополнительное обслуживание, не предусмотренное аппаратурой: возможность ввода и вывода одновременно с решением задач, автоматизация редактирования выдачи, вывод графиков, работа с экраном, диалог с машиной, возможность одновременного решения на машине многих задач (система разделения времени).

Развитие применения ЭВМ характерно также организацией работы комплексов, включающих большое число машин, в том числе машин различных типов, вводные устройства, каналы связи между машинами и пользователем, а зачастую и физич. установки. Такие высокопроизводительные системы создаются, напр., для решения задач экономики и обработки физич. экспериментов, требующих ввода и обработки большого количества информации.

Задача развития вычислительных систем, в частности информационных систем и автоматизированных систем

управления, является одной из наиболее актуальных научных проблем. *А. Н. Тихонов.*

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА АБСТРАКТНАЯ, а б с т р а к т н а я м а ш и н а,— математическое понятие, к-рое описывает модель вычислительной машины, абстрагируясь от ограниченности емкости запоминающих устройств и других технич. параметров вычислительных машин. В отличие от последних, В. м. а. может вычислять функции, определенные на бесконечной области *конструктивных объектов* (напр., целых чисел, слов в конечном алфавите, конечных графов, бесконечных деревьев и т. д.). В. м. а. употребляется как понятие, уточняющее интуитивное понятие *алгоритма*, для исследования вопросов существования алгоритма (т. е. разрешимости или неразрешимости *алгоритмических проблем*), качества алгоритма (т. е. оценок сложности различных параметров алгоритма), формализации семантики *алгоритмических языков*, моделирования одних классов В. м. а. другими (напр., с целью так наз. «распараллеливания» алгоритмов).

В. м. а. можно разделить на классы по уровню абстракции, а также по типу обрабатываемой информации. Ниже перечислены основные классы В. м. а.

1) В. м. а., обрабатывающие слова в конечном алфавите и относящиеся к наиболее высокому уровню абстракции в связи с подчинением структуры В. м. а. специфич. запросам теории. Типичные представители — *Тьюринга машина*, машины Минского, *нормальные алгорифмы* Маркова, *Поста каноническая система*. В. м. а. часто употребляются для доказательства неразрешимости алгоритмич. проблем, а также для оценок сложности алгоритмов (см. *Алгоритма сложность* вычисления).

2) В. м. а., относящиеся к тому же уровню абстракции, что и В. м. а. из 1-го класса, но обрабатывающие матрицы, конечные графы, произвольные комплексы. Типичные представители — алгоритмы Колмогорова, автоматы Неймана — Чёрча, растущие автоматы. Если в алгоритмах Колмогорова преобразование информации производится локально, то в автоматах Неймана — Чёрча и растущих оно протекает параллельно. Построены универсальные В. м. а. с хорошими характеристиками, способные моделировать произвольные В. м. а. данного типа. Изучались вычисления с максимальным быстродействием (т. е. в реальное время) на В. м. а. из данного класса.

3) В. м. а., к-рые обрабатывают, чаще всего, слова или целые числа и относятся к низкому уровню абстракции. Их структуры сформировались под влиянием запросов практики и имеют много общего со структурами вычислительных машин. Типичные представители — так наз. о п е р а т о р н ы е а л г о р и т м ы (см. [3]) и машины с произвольным доступом к памяти. Эти В. м. а. употребляются для оценки сложности алгоритмов, используемых на практике, и для моделирования двух типов В. м. а.

4) В. м. а., относящиеся к тому же уровню абстракции, что и В. м. а. из 3-го класса, но обрабатывающие произвольные графы (чаще всего бесконечные деревья). Эти В. м. а. образовались в результате развития В. м. а. из 3-го класса, направленного на приспособление к особенностям алгоритмич. языков. Такие В. м. а. используются для формализации семантики алгоритмич. языков, а также для доказательства правильности программ. Типичные представители — В. м. а., используемые для задания семантики языков *алгол-68* и *ПЛ/1*.

Лит.: [1] Б а р з д и н ь Я. М., «Докл. АН СССР», 1964, т. 157, № 3, с. 542—45; [2] В а н В е й н г а а р д е н А. и др., Сообщение об алгоритмическом языке АЛГОЛ-68, «Кибернетика», 1969, № 6, с. 23—144; 1970, № 1, с. 13—160; [3] Е р ш о в А. П., «Проблемы кибернетики», 1960, вып. 3, с. 5—48; [4] К о л м о-

горов А. П., Успенский В. А., «Успехи матем. наук», 1958, т. 13, № 4, с. 3—28; [5] Минский М., Вычисления и автоматы, пер. с англ., М., 1971; [6] Трахтенброт Б. А., Алгоритмы и вычислительные автоматы, М., 1974; [7] Hartmanis T., «Math. Syst. Theory», 1971, v. 5, № 3, p. 232—45; [8] Wegner P., «Computing Surveys», 1972, v. 4, № 1, p. 5—63.

В. А. Непомнящий.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ — точно определенное указание действий над данными, позволяющее с помощью цифровой вычислительной машины дискретного действия преобразовать за конечное количество операций нек-рый массив данных (входные данные) в другой массив данных (выходные данные). В. а. реализуется в виде вычислительного процесса, т. е. в виде дискретно распределенной во времени конечной последовательности состояний реальной ЭВМ, имеющей, в отличие от абстрактной вычислительной машины, ограниченные скорость выполнения операций, разрядность чисел и объем памяти.

При заданных ЭВМ и В. а. вычислительный процесс является строго детерминированным, т. е. заданным входным данным отвечают вполне определенным образом: последовательность операций ЭВМ; последовательность состояний ЭВМ; выходные данные. В. а. является линейным, если последовательность операций ЭВМ не зависит от входных данных, и нелинейным — в противном случае.

Объектом операций ЭВМ являются данные, представляемые в виде машинных слов, интерпретируемых как машинные числа, машинные команды и т. п. Машинные числа обычно составляют конечное ограниченное множество M чисел, размещенных в машинном интервале $[-A, A]$ и записанных в машинной разрядной сетке при заданном основании a; $a \geqslant 2$ — нек-рое натуральное число, A — наибольшое машинное число (машинная бесконечность). Как следствие, машинные числа имеют ограничение по числу значащих цифр и по абсолютной величине. Конкретная ЭВМ может оперировать с различными множествами M, соответствующими различным основаниям, разрядным сеткам и машинным интервалам.

Машинная команда есть машинное слово, к-рое содержит информацию об операции, напр. арифметической, и ее оперантах (объектах, над к-рыми производится операция, и результате операции). Арифметич. операция над парой машинных чисел может вывести результат из совокупности M по двум причинам: вследствие превышения допустимого числа значащих цифр; вследствие превышения допустимой величины машинного числа. В первом случае применяется операция округления, к-рая возвращает результат действия в множество M, но делает само действие приближенным и приводит к потере точности. Второй случай приводит к аварийной остановке ЭВМ (АВОСТ, или «аварийный останов»).

Композиция арифметич. операции, примененной к паре машинных чисел, и операции округления называется квазиоперацией. Множество M вместе с определенной над ним совокупностью квазиопераций образует замкнутую систему N, однако, в отличие от поля действительных чисел, N не образует поля. Система N зависит от выбора ЭВМ.

Реальный В. а. складывается из двух частей:

а) абстрактного (или собственно) В. а., к-рый применяется к математич. объектам (элементам конечномерных векторных пространств, полей, алгебраич. систем, функциональных пространств и т. д.), не связан с конкретной ЭВМ и может записываться в общепринятых математич. терминах или на каком-либо алгоритмич. языке;

б) программы, т. е. совокупности машинных команд, описывающих В. а., к-рая организует реализацию вычислительного процесса в конкретной ЭВМ.

Первая часть В. а. является исходной и переходит во вторую часть с помощью различных методов программирования. В. а. содержит ряд управляющих параметров, к-рые остаются неопределенными в первой части и фиксируются в программе, полностью определяя вычислительный процесс, обеспечивая адаптацию его первой части к конкретной ЭВМ.

В. а. осуществляет переработку числовой и символьной информации и, как правило, связан с потерей информации и точности. Потеря точности является следствием ряда погрешностей, появляющихся на различных этапах вычислений: погрешности модели, аппроксимации, входных данных, округления. Погрешность модели является следствием приближенности математич. описания реального процесса. Погрешность входных данных зависит от ошибок наблюдения, измерения и т. п., но также может включать в себя и ошибку округления входной информации. Иногда погрешность модели и погрешность входных данных объединяют одним названием неустранимая погрешность. Погрешность аппроксимации возникает, если рассматривать абстрактный В. а. как нек-рую дискретную модель, к-рая, как правило, аппроксимирует континуальную модель. В нек-рых случаях абстрактный В. а. является самостоятельной дискретной моделью, к-рая не сопоставляется ни с какой другой моделью; в этом случае нет смысла говорить о погрешности аппроксимации. Погрешности округления могут встречаться только в реальном вычислительном процессе и зависят от выбора ЭВМ. При заданных входных данных и абстрактном В. а. промежуточные и выходные данные, получаемые в ЭВМ, зависят от выбора ЭВМ и режима ее работы (вычисления с одинарной и двойной точностью). Абстрактный В. а. допускает эквивалентные преобразования, к-рые при заданных входных данных могут менять промежуточные данные, но оставляют неизменным окончательный результат. В. а., соответствующий двум различным эквивалентным представлениям абстрактного В. а., может при фиксированной ЭВМ и входных данных приводить к различным окончательным результатам.

Помимо свойства точности, В. а. должен обладать свойством устойчивости. Устойчивость В. а. определяется как свойство В. а., позволяющее судить о скорости накопления суммарной вычислительной погрешности. Имеется градация устойчивости (соответственно неустойчивости), основанная на измерении исходной ошибки округления и суммарной вычислительной погрешности в различных нормах. В тех случаях, когда В. а. сводится к последовательности линейных рекуррентных соотношений, устойчивость В. а. определяется в терминах норм конечномерных матриц в конечномерных векторных пространствах. Свойство устойчивости определяется как структурой абстрактного В. а., так и влиянием ошибок округления. Так, устойчивость итерационного процесса $x^{n+1}=A_n x^n+b_n$, где матрица A_n также вычисляется, будет зависеть от влияния ошибок округления в коэффициентах матрицы на ее норму. Ошибки округления, входя в коэффициенты различных уравнений и операторов, вносят возмущения в математич. модель абстрактного В. а. и в этом смысле могут интерпретироваться так же, как и ошибки модели. Чем лучше свойства устойчивости абстрактного В. а., тем меньше, при заданном абстрактном В. а., результаты вычислений зависят от выбора ЭВМ и эквивалентных представлений абстрактного В. а.

Другим условием, особенно важным в массовых вычислениях, является экономичность В. а., измеряемая затратой машинного времени, необходимой для достижения заданной точности вычисления. Экономичные В. а. получили широкое распространение в задачах

математич. физики (см., напр., *дробных шагов метод*). Важной задачей теории В. а. является оптимизация В. а.

При построении В. а. характерна тенденция к контролю точности. Контроль точности может косвенно осуществляться за счет увеличения устойчивости и порядка аппроксимации В. а., изменения параметров В. а. (внутренняя сходимость), сравнения двух численных решений одной и той же задачи, соответствующих различным В. а., применения тестов и т. д. Прямой контроль точности осуществляется в том случае, когда удается получить *двусторонние оценки* (или, по крайней мере, односторонние оценки) результата вычислений. Теоретич. оценки такого рода не всегда возможны и эффективны, т. к. не всегда дают достаточно точные границы отклонения численного решения от точного. Получил распространение интервальный анализ, к-рый дает возможность в процессе вычислений строить доверительные границы для вычисляемых величин.

Различия в результатах абстрактного и реального В. а. определяются довольно сложными связями между их параметрами. Так, в абстрактном В. а. для сходящегося итерационного процесса точность ε, вообще говоря, тем больше, чем больше число итераций n. В случае реального В. а. эта ситуация может измениться вследствие влияния ошибок округления и, начиная с нек-рого момента, разность между n-й итерацией и точным решением может потерять тенденцию к убыванию.

Вообще говоря, абстрактный В. а. строится независимо от выбора конкретной ЭВМ и только косвенно учитывает ее конфигурацию своими свойствами аппроксимации и устойчивости. Так, для машин с большим быстродействием, но при малой оперативной памяти при решении дифференциальных уравнений с частными производными целесообразно применение экономичных абсолютно устойчивых схем высокой точности. В связи с появлением ЭВМ с параллельно действующими процессорами получили развитие параллельные алгоритмы и параллельное программирование. Сущность параллельного программирования заключается в разбиении перерабатываемых численных массивов на части (подмассивы), независимо перерабатываемые соответствующими процессорами; производится обмен информацией между подмассивами, причем время, затрачиваемое на этот обмен, существенно меньше, чем выигрыш времени, достигаемый в результате распараллеливания счета. Это делает эффективным применение ЭВМ с параллельным действием, позволяя достигать резкого увеличения быстродействия, особенно при решении больших задач.

Многообразие ЭВМ приводит к многообразию программ, реализующих один и тот же абстрактный В. а. Составление программ является трудоемким процессом, и поэтому особое значение приобретает проблема адаптации, т. е. быстрого и по возможности автоматич. преобразования (при заданном абстрактном В. а.) программы с одной ЭВМ на другую (см. *Программирование*).

Н. Н. Яненко.

ВЫЧИТАНИЕ — арифметическое действие, обратное *сложению*, т. е. нахождение одного из слагаемых по сумме и другому слагаемому. При этом данная сумма наз. у м е н ь ш а е м ы м, данное слагаемое — в ы ч и т а е м ы м, искомое слагаемое — р а з н о с т ь ю. Обозначается знаком — (минус). Так, в выражении

$$a - b = c,$$

a — уменьшаемое, b — вычитаемое, c — разность.

ВЬЕТОРИСА ГОМОЛОГИИ — одна из первых теорий гомологий, определенных в неполиэдральном случае. Впервые их рассмотрел Л. Брауэр (L. Brouwer, 1911) (в плоском случае), а затем Л. Вьеторис (L. Vietoris, 1927) распространил его определение на произ-

вольные подмножества евклидова (и даже метрического) пространства.

Под (упорядоченным) n-мерным симплексом t^n подмножества A метрич. пространства X понимается упорядоченное подмножество $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ в A с условием $\operatorname{diam}\{e_0, \ldots, e_n\}<\varepsilon$. После этого определяются ε-цепи множества A по данной группе коэффициентов G как формальные конечные линейные комбинации $\Sigma g_i t_i$ ε-симплексов t_i^n с коэффициентами $g_i \in G$. Граница ε-симплекса $t^n(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ определяется так: $\Delta t^n = \sum_i (-1)^i (e_0, e_1, \ldots, \hat{e_i}, \ldots, e_n)$; это — ε-цепь. По линейности определяются граница любой ε-цепи, и ε-циклы как ε-цепи с нулевой границей. ε-цепь x^n множества η-гомологична нулю в A (в записи $x^n \sim 0$), если $x^n = \Delta y^{n+1}$ для нек-рой η-цепи y^{n+1} в A.

Истинным циклом множества A наз. последовательность $z^n = \{z_1^n, z_2^n, \ldots, z_k^n, \ldots\}$, в к-рой z_k^n есть ε_k-цикл в A, и $\varepsilon_k \to 0$ $(k \to \infty)$. Истинные циклы образуют группу $Z^n(A, G)$. Истинный цикл z гомологичен нулю в A, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое N, что все z_k^n при $k \geqslant N$ ε-гомологичны нулю в A. Обозначим $\Delta^n(A, G)$ факторгруппу группы $Z^n(A, G)$ по подгруппе $H^n(A, G)$ циклов, гомологичных нулю.

Цикл z наз. сходящимся, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое N, что любые два цикла z_k^n, z_m^n при $k, m \geqslant N$ ε-гомологичны между собою в A. Обозначим группу сходящихся циклов $Z_c^n(A, G)$, и пусть $\Delta_c^n(A, G) = Z_c^n(A, G)/H_c^n(A, G)$ — соответствующая факторгруппа.

Цикл z имеет компактный носитель, если существует такой компакт $F \subseteq A$, что все вершины всех симплексов всех циклов z_k^n лежат в F. Аналогично изменим понятие гомологичности нулю цикла, потребовав наличие компакта, на к-ром лежат все осуществляющие гомологию цепи; определяем сходящийся цикл с компактным носителем. Обозначая индексом k внизу переход к циклам и гомологиям с компактными носителями, прихо-

дим к группам $\Delta_k^n(A, G)$ и $\Delta_{ck}^n(A, G)$. Вторая из них наз. группой гомологии Вьеториса. В случае конечного полиэдра группы В. г. совпадают со стандартными.

Определяются также относительные группы гомологий $\Delta^n(A, B, G)$, $\Delta_c^n(A, B, G)$, $\Delta_k^n(A, B, G)$, $\Delta_{ck}^n A, B, G)$ по модулю подмножества $B \subseteq A$. Именно, ε-циклом множества A по модулю B наз. любая ε-цепь x^n в A, для к-рой цепь Δx^n лежит в B. Аналогично, ε-цикл x^n по модулю B η-гомологичен по модулю B нулю в A, если $x^n = \Delta y^{n+1} + w^n$, где y^{n+1} и w^n суть η-цепи в A, и цепь w^n лежит в B.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975.

А. А. Мальцев.

ВЯЛЫЙ ПУЧОК — пучок множеств F над топологич. пространством X такой, что для любого открытого в X множества U отображение ограничения $F(X) \to F(U)$ сюръективно. Таковы, напр., пучок ростков всех (необязательно непрерывных) сечений *расслоенного пространства* с базой X, пучок ростков *дивизоров* и простой пучок над неприводимым алгебраич. многообразием F. Вялость пучка F является локальным свойством (то есть В. п. индуцирует на любом открытом множестве снова В. п.). Факторпучок В. п. по вялому подпучку является В. п. Прямой образ В. п. при непрерывном отображении есть В. п. Если X паракомпактно, то В. п. является *мягким пучком* (т. е. всякое сечение F над замкнутым множеством продолжимо на все пространство X).

Пусть

$$0 \longrightarrow F^0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow \dots$$

— точная последовательность В. п. абелевых групп. Тогда для любого семейства Ф носителей соответствующая последовательность сечений (носители к-рых принадлежат Ф)

$$0 \longrightarrow \Gamma_\Phi(F^0) \longrightarrow \Gamma_\Phi(F^1) \longrightarrow \dots$$

является точной, т. е. $F \to \Gamma_\Phi(F)$ — точный слева функтор.

М. И. Войцеховский.

ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ УРАВНЕНИЯ — математическое выражение основных законов сохранения массы, импульса, энергии газа, описывающих состояние газа. Газ есть совокупность большого числа частиц (молекул, атомов, ионов), находящихся в непрерывном хаотич. движении. Учет взаимодействия и движения каждой частицы газа является чрезвычайно трудной проблемой, поэтому для описания состояния газа применяют статистический или континуальный подход. При таком подходе состояние ансамбля частиц газа характеризуется функцией распределения частиц, определенной или в 7-мерном фазовом пространстве x^i, u^i, t, $i=1, 2, 3$, или 4-мерном пространстве x^i, t, $i=1, 2, 3$. В первом случае рассматривается скалярная функция распределения

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = f(x^1, x^2, x^3, u^1, u^2, u^3, t),$$

в к-рой величины x^i, u^i, t — непрерывно меняющиеся аргументы, x^i и t меняются в конечных или бесконечных интервалах, $-\infty < u^i < +\infty$. Сама функция $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению Больцмана (см. *Больцмана уравнение*, *Кинетическое уравнение*) или же, в зависимости от физич. предпосылок, другим уравнениям (см. *Боголюбова цепочка уравнений*, *Власова кинетическое уравнение*). Во втором случае функция распределения, описывающая состояние газа, является векторной функцией

$$\boldsymbol{w} = \{\rho,\ \rho u^1,\ \rho u^2,\ \rho u^3\ \rho E\},$$

зависящей от четырех аргументов x^1, x^2, x^3, t, непрерывно и независимо меняющихся в интервалах $-\infty < x^i < +\infty$, $-\infty < t < +\infty$. В этом случае под частицей, строго говоря, следует понимать материальный элемент газа, занимающий бесконечно малый объем и обладающий определенной скоростью $\boldsymbol{u} = \{u^1, u^2, u^3\}$, к-рая является функцией аргументов x^1, x^2, x^3, t. Здесь $\rho = \rho(x^1, x^2, x^3, t)$ — плотность газа, т. е. масса газа, приходящаяся на единицу объема, $E = \varepsilon + \frac{\boldsymbol{u}^2}{2}$ — полная энергия единицы массы газа, ε — внутренняя энергия единицы массы газа.

В предположении локального термодинамич. равновесия из уравнений Больцмана следуют законы сохранения газовой динамики в интегральной форме. В инерциальной ортонормированной системе координат:

$$\oint_{l_m} w^i dx + \oint_{l_m} \frac{\partial \sum^{i\alpha}}{\partial x^\alpha}\, dt\, dx = \int_{L_{m+1}} F^i\, dt\, dx, \qquad (1)$$

где L_{m+1} — объем пространства, ограниченный поверхностью l_m, $m \geqslant 1$. Соотношения (1) справедливы для произвольного объема L_{m+1} с границей l_m в $(m+1)$-мерном фазовом пространстве $\{\boldsymbol{x}, t\} = \{x^1, \ldots, x^m, t\}$. Величины w^i, $\Sigma^{i\alpha}$, F^i в трехмерном случае имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \\ w^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u^1 \\ \rho u^2 \\ \rho u^3 \\ \rho E \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ F^1 \\ F^2 \\ F^3 \\ F^\alpha u^\alpha \end{pmatrix},$$

$$\sum^{i\alpha} = \sum^{1} {}^{i\alpha} + \sum^{2} {}^{i\alpha} + \sum^{3} {}^{i\alpha}, \qquad (2)$$

$$\sum^{r}{}^{i\alpha} = \left\| \overset{r}{\eta}_{kj} \right\|, \quad r = 1, 2, 3,$$

$$\overset{1}{\eta}_{kj} = w^k u^j,$$

$$\overset{2}{\eta}_{kj} = p\delta^{kj} + pu^j\delta^{4k},$$

$$\overset{3}{\eta}_{0j} = 0, \quad \overset{3}{\eta}_{1j} = -\sigma^{1j}, \quad \overset{3}{\eta}_{2j} = -\sigma^{2j}, \quad \overset{3}{\eta}_{3j} = -\sigma^{3j},$$

$$\overset{3}{\eta}_{4j} = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial x^j} - \sigma^j_\alpha u^\alpha,$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\lambda d^\gamma_\gamma \delta^{\alpha\beta} + \mu d^{\alpha\beta},$$

$$d^{\alpha\beta} = d^\alpha_\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha}\right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, 4; \ \alpha, \beta, \gamma, i, j = 1, 2, 3,$$

p — давление газа, T — температура газа, $\delta^{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, λ — коэффициент вязкости сжатия, μ — коэффициент вязкости сдвига, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности. При записи формул употребляются правила записи формул тензорного анализа.

Для гладких течений получается система дифференциальных уравнений в дивергентной форме:

$$\frac{\partial w^i}{\partial t} + \frac{\partial \sum^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = F^i. \tag{3}$$

Эта система уравнений становится замкнутой после присоединения уравнений состояния. В случае термодинамич. равновесия уравнения состояния принимают вид:

$$p = p(\rho, T), \ \varepsilon = \varepsilon(\rho, T), \ \varkappa = \varkappa(\rho, T), \ \lambda = \lambda(\rho, T), \ \mu = \mu(\rho, T). \tag{4}$$

В неравновесном случае эти величины могут зависеть от градиентов функции течения.

Представление (2) имеет определенный физич. смысл: $\sum^{1}{}^{i\alpha}$ соответствует конвективным потокам массы, импульса, энергии, $\sum^{2}{}^{i\alpha}$ — шаровой недиссипативной части тензора напряжений, т. е. давлению, $\sum^{3}{}^{i\alpha}$ — диссипативной части напряжений (вязкость, диффузия тепла) и используется в методе расщепления для получения эффективных схем интегрирования задач газовой динамики.

Для описания течения газа могут применяться различные системы координат. Кроме системы координат, неподвижно связанной с физич. пространством и являющейся галилеевой (эйлерова система координат), применяются различные подвижные, не обязательно декартовы и галилеевы системы координат. Очень распространенной является лагранжева система координат, связанная с частицами газа. В этой системе координат каждый материальный элемент имеет фиксированную координату. *Эйлеров способ состоит* в том, что в каждый момент времени t параметры состояния газа определяются как функции координат x^1, x^2, x^3 (эйлеровы координаты) точки в нек-рой неподвижной системе координат и вектор $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x^1, x^2, x^3, t)$ означает скорость

частицы газа, находящейся в момент времени t в точке x^1, x^2, x^3. Способ Лагранжа предполагает задание скорости $\boldsymbol{u}$ и термодинамич. величин для каждой частицы как функций времени t. Зафиксировав частицу газа с помощью параметров q^1, q^2, q^3, получают параметры течения газа как функции от времени t и q^1, q^2, q^3 (лагранжевы координаты). Связь между эйлеровыми и лагранжевыми координатами имеет вид:

$$x^i = q^i + \int_0^t u^i\,(q^1,\ q^2,\ q^3,\ \tau)\,d\tau,\quad i = 1,\ 2,\ 3,$$

где $x^i = x^i\,(q^1,\ q^2,\ q^3,\ t)$ — эйлеровы координаты частицы, находившейся в момент времени $t=0$ в точке $x^i = q^i$. В случае одной пространственной переменной при условии, что газодинамич. переменные являются непрерывно дифференцируемыми функциями, уравнения вязкого теплопроводного газа имеют вид:
в эйлеровых координатах

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial\,(\rho u)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial\,(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(p + \rho u^2 - \mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\left(E + \frac{p}{\rho}\right) - \mu u\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right);$$

в лагранжевых координатах

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}\left(p - \mu\rho\frac{\partial u}{\partial q}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}\left[u\left(p - \mu\rho\frac{\partial u}{\partial q}\right)\right] = \rho\frac{\partial}{\partial q}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial q}\right),$$

где $v = \frac{1}{\rho}$, $\frac{\partial x(q,\ t)}{\partial t} = u\,(q,\ t)$.

Для произвольной подвижной системы координат во многих случаях целесообразно одновременно преобразовывать компоненты скорости по тензорному закону. Если

$$x^i = x^i\,(y^1,\ y^2,\ y^3,\ t) \qquad (5)$$

есть преобразование пространственных координат, при к-ром временная координата не изменяется, то отображение (5) можно связать с самим течением газа и тогда оно будет определять поле локальных систем координат, зависящих от самого течения. Возможны и более общие преобразования, включающие изменение временной координаты.

Большую роль в теории Г. д. у. и в приложениях играет анализ малых параметров λ, μ, $\varkappa$, ω ($\omega = 1/c^2$ — коэффициент сжимаемости), входящих в уравнения (3). Если $\lambda = \mu = \varkappa = 0$, то (3) — уравнения идеальной газовой динамики; если $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\varkappa = \omega = 0$, то (3) — уравнения Навье — Стокса несжимаемой жидкости. Эти уравнения не принадлежат к типу Коши — Ковалевской. В случае $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\varkappa = 0$, $\omega = \text{const}$ получается система уравнений типа Коши — Ковалевской параболич. типа, не являющаяся сильно параболической. В теории турбулентности и неньютоновых жидкостей коэффициенты λ, μ могут зависеть от градиентов газодинамич. величин.

Определяющие соотношения (2) и, в частности, уравнения состояния (4) характеризуют тип системы Г. д. у. (3) и ряд ее качественных особенностей. Так, в случае идеального сжимаемого газа ($\lambda = \mu = \varkappa = 0$) система уравнений (3) является гиперболической, если

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \geqslant 0, \qquad (6)$$

где энтропия S определяется соотношением (второй закон термодинамики)

$$T\,dS = p\,d\frac{1}{\rho} + d\varepsilon.$$

Условие (6) является локальным, зависит от решения и в нек-рых случаях может нарушаться. Так, в случае уравнения состояния Ван-дер-Ваальса условие (6) может нарушаться, уравнения становятся эллиптическими, решение — неустойчивым.

Законы сохранения (1) позволяют сформулировать обобщенное решение Г. д. у., к-рое уже не обязательно является непрерывным и не удовлетворяет дифференциальным Г. д. у. (3). Полная теория обобщенных решений Г. д. у. не создана, однако хорошо изучены простейшие обобщенные решения, как, напр., ударная волна, центрированная волна разрежения, контактное течение и т. д. Существует гипотеза, согласно к-рой обобщенное решение уравнений идеального сжимаемого газа есть предел соответствующего решения вязкого газа при $\lambda \to 0$ и $\mu \to 0$. Это утверждение строго доказано для одномерных ударных волн и в нек-рых частных случаях для уравнений типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Особый интерес представляют собой стационарные Г. д. у., к-рые в основном связаны с задачами стационарного обтекания тел в бесконечном пространстве или стационарных течений в каналах. В этом случае решение системы уравнений (3) не зависит от t, и система принимает вид:

$$\frac{\partial \sum^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = F^i. \tag{7}$$

Для стационарной системы уравнений (7) ставится нек-рая краевая задача, к-рая может быть весьма сложной, а само уравнение (7) может быть как эллиптического, так и смешанного типов. Напр., для задачи обтекания идеального сжимаемого газа в предположении потенциальности течения получается следующее уравнение в двумерном случае:

$$\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}\right)^2 - c^2\right] \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^1)^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^1 \partial x^2} + \\ + \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^2}\right)^2 - c^2\right] \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x^2)^2} = 0, \tag{8}$$

где $u^1 = \partial\varphi/\partial x^1$, $u^2 = \partial\varphi/\partial x^2$, φ — потенциал скорости, квадрат скорости звука c^2 может быть определен из интеграла Бернулли:

$$\frac{1}{2}\left[(u^1)^2 + (u^2)^2\right] + \int c^2(\rho)\, d \ln \rho = \text{const}.$$

Для уравнения (8) может быть поставлена задача обтекания данного контура l:

$$u^1(\infty) = U_0^1, \quad u^2(\infty) = U_0^2, \quad u_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

где u_n — нормальная составляющая вектора скорости по нормали к контуру l. В случае $(u^1)^2 + (u^2)^2 - c^2 > 0$ уравнение (8) имеет гиперболич. тип, в случае $(u^1)^2 + (u^2)^2 - c^2 < 0$ — эллиптич. тип. Возможен переход от эллиптич. типа к гиперболическому (трансзвуковой поток). Можно показать, что краевая задача в случае трансзвукового обтекания является некорректной, так как сколь угодно малое изменение контура может сделать краевую задачу неразрешимой в классе непрерывных функций.

Большой интерес представляют задачи газодинамич. неустойчивости и турбулентности, к-рые описываются, как правило, в рамках теории несамосопряженных уравнений (уравнение Орра — Зоммерфельда, уравнение Рейнольдса). В связи с практич. приложениями приобрели большое значение Г. д. у., описывающие движение более сложных сред (многофазные среды, неньютоновы жидкости, магнитная гидродинамика). Большинство уравнений математич. физики представляют собой результат линеаризации Г. д. у. О численном

решении задач газовой динамики см. ст. *Газовой динамики численные методы*.

Лит.: [1] Серрин Дж., Математические основы классической механики жидкости, пер. с англ., М., 1963; [2] Седов Л. И., Механика сплошной среды, т. 1—2, М., 1970; [3] Лайдау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, 2 изд., М., 1954; [4] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 1—2, М., 1963; [5] Брановер Г. Г., Цинобер А. М., Магнитная гидродинамика несжимаемых сред, М., 1970; [6] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М., 1968.

Ю. И. Шокин, Н. Н. Яненко.

ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ — методы решения задач газовой динамики на основе вычислительных алгоритмов. Рассмотрим основные аспекты теории численных методов решения задач газовой динамики, записав *газовой динамики уравнения* в виде законов сохранения в инерциальной ортонормированной системе координат:

$$\frac{\partial w^i}{\partial t}+\frac{\partial \sum^{i\alpha}}{\partial x^\alpha}=F^i.$$

Здесь

$$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix} w^0\\ w^1\\ w^2\\ w^3\\ w^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u^1\\ \rho u^2\\ \rho u^3\\ \rho E\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}0\\ F^1\\ F^2\\ F^3\\ F^\alpha u^\alpha\end{pmatrix},$$

$$\sum^{i\alpha}=\overset{1}{\sum}{}^{i\alpha}+\overset{2}{\sum}{}^{i\alpha}+\overset{3}{\sum}{}^{i\alpha},$$

$$\overset{1}{\sum}{}^{i\alpha}=\begin{pmatrix}\rho u^1 & \rho u^2 & \rho u^3\\ \rho u^1u^1 & \rho u^1u^2 & \rho u^1u^3\\ \rho u^2u^1 & \rho u^2u^2 & \rho u^2u^3\\ \rho u^3u^1 & \rho u^3u^2 & \rho u^3u^3\\ \rho Eu^1 & \rho Eu^2 & \rho Eu^3\end{pmatrix},$$

$$\overset{2}{\sum}{}^{i\alpha}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ p & 0 & 0\\ 0 & p & 0\\ 0 & 0 & p\\ pu^1 & pu^2 & pu^3\end{pmatrix},$$

$$\overset{3}{\sum}{}^{i\alpha}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -\sigma^{11} & -\sigma^{12} & -\sigma^{13}\\ -\sigma^{21} & -\sigma^{22} & -\sigma^{23}\\ -\sigma^{31} & -\sigma^{32} & -\sigma^{33}\\ -\varkappa\frac{\partial T}{\partial x^1}-\sigma^1_\alpha u^\alpha & -\varkappa\frac{\partial T}{\partial x^2}-\sigma^2_\alpha u^\alpha & -\varkappa\frac{\partial T}{\partial x^3}-\sigma^3_\alpha u^\alpha\end{pmatrix},$$

$$\sigma^{\beta k}=\frac{1}{2}\lambda d^\gamma_\gamma\delta^{\beta k}+\mu d^{\beta k},$$

$$d^{\beta k}=d^\beta_k=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^\beta}{\partial x^k}+\frac{\partial u^k}{\partial x^\beta}\right),$$

$$i=0,\ 1,\ \ldots,\ m+1;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

$m=1$ — одномерный случай, $m=2$ — двумерный случай, $m=3$ — трехмерный случай, ρ — плотность газа, p — давление газа, $\boldsymbol{u}=\{u^1,\ u^2,\ u^3\}$ — скорость газа, T — температура газа, $E=\varepsilon+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2$ — полная энергия массы газа, ε — удельная внутренняя энергия, λ — коэффициент вязкости сжатия, μ — коэффициент вязкости сдвига, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, $\delta^{\beta k}$ — символ Кронекера.

Следует различать два основных класса задач газовой динамики:

задача Коши для ограниченной или бесконечной области (нестационарные задачи газовой динамики);

стационарные краевые задачи газовой динамики для конечной или бесконечной области.

В свою очередь эти задачи могут подразделяться на ряд классов в зависимости от физич. свойств течения газа. По этому принципу можно различать:

течения идеального газа ($\lambda=\mu=\varkappa=0$);

течения вязкого несжимаемого газа ($\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\varkappa=0$, $\omega=0$, ω – коэффициент сжимаемости, $\omega=1/c^2$, c – скорость звука), описываемые уравнениями Навье – Стокса;

течения вязкого сжимаемого теплопроводящего газа ($\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\varkappa\neq 0$, $\omega\neq 0$).

Численные методы решения задач газовой динамики развивались исторически почти независимо по указанным классам задач. Ныне создано большое количество разностных схем различного порядка аппроксимации. Наметились общие принципы построения численных методов, приемлемые для всех задач газовой динамики в целом, хотя и не доказанные математически строго. Эти принципы заключаются в следующем.

1) Представления обобщенного решения уравнений идеального газа как предела соответствующих решений с физическими ($\sum^{3} i\alpha\neq 0$) или искусственными диссипативными членами при стремлении последних к нулю. Искусственные диссипативные члены могут вводиться непосредственно в уравнения газовой динамики или же неявно определяться самой структурой разностной схемы (аппроксимационная вязкость).

2) Расщепления (декомпозиции) интегральных законов сохранения и самих дифференциальных уравнений геометрически, аналитически и по физич. процессам (метод слабой аппроксимации, см. *Дробных шагов метод*).

3) Представления стационарного решения как предела решений нестационарных задач (метод установления). При этом в качестве вспомогательных нестационарных задач используются уравнения как гиперболического, так и параболического типов.

4) Аппроксимация уравнений не типа Коши — Ковалевской уравнениями типа Коши — Ковалевской при стремлении соответствующего малого параметра к нулю (уравнения Навье – Стокса, уравнения фильтрации).

5) Построение подвижных разностных сеток как регулярного, так и нерегулярного типов.

6) Разделение в разностной схеме задач аппроксимации во внутренних регулярных и граничных точках.

7) Представление сложной системы линейных или нелинейных алгебраич. уравнений в виде рекуррентных соотношений (метод приближенной или точной факторизации).

8) Метод продолжения краевой задачи за границу и включения ее в краевую задачу с простой областью (метод фиктивных областей).

Совокупность этих представлений и методов позволяет в конечном итоге свести алгоритм решения сложных задач газовой динамики к алгоритмам решений простых задач стандартной структуры (модульный анализ алгоритмов). Такой подход пока строго не обоснован, однако практически он себя оправдал и находит все большее распространение.

Численные методы задач газовой динамики можно разделить на два больших класса: методы с явным выделением особенностей (ударные волны, контактные границы, центрированные волны разрежения) и так наз. методы сквозного счета, в к-рых особенности явно не выделяются.

Методы 1-го класса основаны на представлении обобщенного решения уравнений газовой динамики как совокупности классич. решений, определенных в некоторых областях, покрывающих фазовое пространство

$\{x^1, x^2, x^3, t\}$ и примыкающих друг к другу через общие границы (линии разрывов) с соблюдением условий примыкания (условия динамич. совместности). В каждой области можно применять разностную схему, пригодную для классич. решений, а условия примыкания должны разрешаться с помощью системы, вообще говоря, нелинейных алгебраич. уравнений. Одним из наиболее распространенных методов дискретного представления классич. решений является метод характеристик. Этот метод используется только для решения задач газовой динамики, описываемых гиперболич. уравнениями, и основан он на свойстве гиперболич. системы уравнений иметь, напр., в случае двух неизвестных функций и двух независимых переменных семейство характеристик, к-рые образуют характеристич. сетку, строящуюся в процессе счета. Метод характеристик появился в газовой динамике сравнительно давно и с успехом применялся для расчета одномерных нестационарных течений с небольшим количеством особенностей, а также расчета двумерных стационарных течений в области гиперболичности уравнений. В расчетах используются также и модификации метода характеристик, в к-рых расчет ведется по слоям, ограниченным фиксированными линиями. В случае двух независимых переменных (одномерные нестационарные задачи или двумерные стационарные задачи, сверхзвуковое обтекание) метод характеристик дает возможность избежать интерполяций и тем самым эффектов сглаживания и аппроксимационной вязкости. Он позволяет точно определять место возникновения ударных волн внутри поля течения как результат пересечения характеристик одного семейства. При большом количестве неизвестных и независимых переменных начинают появляться недостатки этого метода: возникает аппроксимационная вязкость, при наличии большого числа особенностей алгоритм становится логически сложным. Существенным недостатком метода характеристик является также ограничение на шаг сетки, связанное с критерием устойчивости Куранта, и нестрогое выполнение законов сохранения. Поэтому методом характеристик целесообразно рассчитывать задачи, в к-рых число разрывов невелико. Для метода характеристик доказана сходимость его решения к решению исходной дифференциальной задачи в случае достаточно гладких течений. С развитием ЭВМ, способных решать сложные логические задачи, метод характеристик будет использоваться более эффективно.

Наряду с методом характеристик для указанных задач газовой динамики широко используется метод интегральных соотношений, применимый к уравнениям различных типов. Метод интегральных соотношений строится на основе законов сохранения и сводится в конечном итоге к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основой для построения разностных схем задач газовой динамики является аппроксимация законов сохранения на заданной подвижной или неподвижной сетке, к-рая приводит к сложной системе нелинейных соотношений явного (явные разностные схемы) или неявного (неявные разностные схемы) типа (см. *Гиперболического типа уравнение*; численные методы решения).

Так, для уравнений одномерной газовой динамики в лагранжевых координатах можно построить общую разностную схему в виде:

$$\frac{\boldsymbol{w}_j^{n+1} - \boldsymbol{w}_j^n}{\tau} + \frac{\sum\nolimits^*_{j+1/2} - \sum\nolimits^*_{j-1/2}}{h} = 0, \qquad (*)$$

где $\boldsymbol{w}_j^n = \boldsymbol{w}(x_j, t_n) = \boldsymbol{w}(jh, n\tau)$. Для замыкания соотношений (*) следует связать величины $\sum^*_{j+1/2}$, $\sum^*_{j-1/2}$ с величинами $\boldsymbol{w}_j^n$, $\boldsymbol{w}_j^{n+1}$. Это делается различными способами, к-рые приводят или к явным разностным схемам,

если $\sum^*_{j+1/2}$, $\sum^*_{j-1/2}$ выражены через w^n_j, или к неявным разностным схемам, если $\sum^*_{j+1/2}$, $\sum^*_{j-1/2}$ выражены через w^n_j, w^{n+1}_j, и нелинейным соотношениям, если применяется один целый шаг, и линейным, если применяется два или несколько дробных шагов (метод предикатор-корректор).

Решение получающейся при этом системы уравнений может быть сильно упрощено, если применить методы расщепления либо аналитические (метод предикатор-корректор), либо по физич. процессам, либо геометрические. Последние применяются при сведении многомерных задач к задачам меньшей размерности (метод дробных шагов или метод расщепления). Метод расщепления позволяет получить экономичные абсолютно аппроксимирующие схемы, в к-рых число операций на вычисление искомых функций в одной точке не возрастает с числом точек (см. *Разностная схема*). Одной из модификаций метода расщепления является метод «частиц в ячейках», в к-ром расщепление не связано с понижением размерности операторов.

Указанная общая методика приводит к разностным схемам сквозного счета, как в случае идеального газа ($\sum^3 l^\alpha = 0$), так и в случае диссипативного процесса ($\sum^3 l^\alpha \neq 0$). Разностные схемы сквозного счета, вводя аппроксимационную вязкость, сглаживают особенности в переходных областях ширины $0\ (h)$ и преобразуют ударные волны в ударные переходы, контактные разрывы в контактные полосы. Аппроксимационная вязкость разностных схем объединяет в себе диссипативные свойства уравнений газовой динамики и диссипативные свойства самой разностной схемы. Структура аппроксимационной вязкости определяется дифференциальным приближением схем, к-рое отличается от исходной системы уравнений членами порядка $O(\tau^\gamma)$, где γ — порядок аппроксимации схемы. Во многих случаях представляется важным насколько разностная схема и ее дифференциальное приближение сохраняют групповые свойства исходной системы дифференциальных уравнений. Сохранение разностной схемой групповых свойств имеет большое значение в практич. счете, особенно в задачах газовой динамики, где, напр., неинвариантность первого дифференциального приближения относительно преобразования Галилея приводит к неприятным счетным эффектам (неустойчивость, немонотонность профилей и т. д.).

Известные разностные схемы сквозного счета имеют на гладких решениях локальную точность, как правило, не выше 3-го порядка и глобальную точность не выше 1-го порядка (учитывая невысокую точность разностной схемы вблизи особенностей). Разностные схемы для уравнений газовой динамики должны удовлетворять, кроме независимых требований аппроксимации и устойчивости, еще ряду практически необходимых требований — дивергентности, экономичности, полной консервативности и т. д. Для многомерных задач строить экономичные разностные схемы позволяет идея расщепления. Дивергентность или консервативность разностной схемы означает выполнение в разностных уравнениях разностных аналогов основных законов сохранения (массы, импульса, полной энергии). Свойство полной консервативности требует выполнения разностных аналогов законов сохранения не только массы, импульса и полной энергии, но и различных видов энергии (кинетической, потенциальной, магнитной).

Рассмотрим несколько конкретных разностных схем вида (*). Полагая в формуле (*)

$$\sum^*_{j+1/2} = \frac{1}{2}(f^n_{j+1} + f^n_j) - \frac{h}{2\tau}(w^n_{j+1} - w^n_j),$$

получим симмации:

$$\frac{\boldsymbol{w}_j^{n+1}-\boldsymbol{w}_j^n}{\tau}+\frac{\boldsymbol{f}_{j+1}^n-\boldsymbol{f}_{j-1}^n}{2h}=\frac{h^2}{2\tau}\frac{\boldsymbol{w}_{j+1}^n-2\boldsymbol{w}_j^n+\boldsymbol{w}_{j-1}^n}{h^2}.$$

Здесь

$$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix} u \\ v \\ E \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}=\begin{pmatrix} p \\ -u \\ up \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{f}_j^n=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w}_j^n)$. Указанная схема является условно аппроксимирующей при $\tau/h=\text{const}$ (при $\tau/h^2=\text{const}$ схема аппроксимирует систему уравнений $\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x}=\frac{h^2}{2\tau}\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial x^2}$), дивергентной и условно устойчивой. Условие устойчивости имеет вид: $c\tau/h\leqslant 1$, где c — скорость звука.

Полагая в формуле (*)

$$\sum\nolimits^{*}_{j+1/2}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{f}_{j+1}^n+\boldsymbol{f}_j^n)-\frac{\tau}{2h}A^2_{j+1/2}(\boldsymbol{w}_{j+1}^n-\boldsymbol{w}_j^n),$$

где

$$A^2_{j+1/2}=A^2\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{w}_{j+1}^n+\boldsymbol{w}_j^n)\right], \quad A=\frac{df}{d\boldsymbol{w}},$$

получим абсолютно аппроксимирующую явную разностную схему 2-го порядка аппроксимации:

$$\frac{\boldsymbol{w}_j^{n+1}-\boldsymbol{w}_j^n}{\tau}+\frac{\boldsymbol{f}_{j+1}^n-\boldsymbol{f}_{j-1}^n}{2h}=$$

$$=\frac{\tau}{2h^2}\left[A^2_{j+1/2}(\boldsymbol{w}_{j+1}^n-\boldsymbol{w}_j^n)-A^2_{j-1/2}(\boldsymbol{w}_j^n-\boldsymbol{w}_{j-1}^n)\right].$$

Это схема — дивергентная и устойчивая при условии $\frac{c\tau}{h}\leqslant 1$.

Разностная схема

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+\alpha\frac{p_{j+1/2}^{n+1}-p_{j-1/2}^{n+1}}{h}+(1-\alpha)\frac{p_{j+1/2}^n-p_{j-1/2}^n}{h}=0,$$

$$\frac{v_{j+1/2}^{n+1}-v_{j+1/2}^n}{\tau}+\alpha\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}}{h}+(1-\alpha)\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}=0,$$

$$\frac{\varepsilon_{j+1/2}^{n+1}-\varepsilon_{j+1/2}^n}{\tau}+\left[\alpha p_{j+1/2}^{n+1}+(1-\alpha)p_{j+1/2}^n\right]\times$$

$$\times\left[\alpha\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}}{h}+(1-\alpha)\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}\right]=0$$

является явной при $\alpha=0$, неявной при $\alpha\neq 0$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$; при $\alpha=\frac{1}{2}$ имеет 2-й порядок аппроксимации, при $\alpha\neq\frac{1}{2}$ — 1-й порядок аппроксимации; при $\alpha=\frac{1}{2}$ схема полностью консервативная.

Разностная схема

$$\frac{u_j^{n+1/2}-u_j^{n-1/2}}{\tau}+\frac{p_{j+1/2}^n-p_{j-1/2}^n}{h}=0,$$

$$\frac{v_{j+1/2}^{n+1}-v_{j+1/2}^n}{\tau}+\frac{u_{j+1}^{n+1/2}-u_j^{n+1/2}}{h}=0,$$

$$\frac{\varepsilon_{j+1/2}^{n+1}-\varepsilon_{j+1/2}^n}{\tau}+\frac{p_{j+1/2}^{n+1}+p_{j+1/2}^n}{2}\frac{v_{j+1/2}^{n+1}-v_{j+1/2}^n}{\tau}=0$$

имеет 2-й порядок аппроксимации, неявная, абсолютно аппроксимирующая и недивергентная. Здесь

$$\boldsymbol{p}_{j+1/2}^n=p_{j+1/2}^n+\omega_{j+1/2}^n,\ \varepsilon_{j+1/2}^n=\varepsilon\left(p_{j+1/2}^n,\ v_{j+1/2}^n\right),$$

$$\omega_{j+1/2}^n=-\mu_0 h^2\frac{1}{v_{j+1/2}^n}\frac{\left|u_{j+1}^{n-1/2}-u_j^{n-1/2}\right|}{h}\frac{u_{j+1}^{n-1/2}-u_j^{n-1/2}}{h},$$

$$\mu_0=\text{const}.$$

Успех разностных схем сквозного счета связан с тем обстоятельством, что, хотя аппроксимационная вяз-

кость схемы определяет структуру разностного ударного перехода, отличную от физического ударного перехода, консервативная аппроксимация сохраняет скорость ударной волны и воспроизводит условия динамич. совместности.

Однако эти хорошие качества разностных схем сквозного счета теряют свое значение в случаях, когда важно точно передать структуру ударного перехода (задачи радиационной газовой динамики), структуру контактной полосы или пограничного слоя. В случае контактного разрыва хорошая аппроксимация в рамках разностной схемы сквозного счета становится невозможной не только из-за сильного расширения контактной полосы, но и в результате развития неустойчивости Гельмгольца и Тейлора. В этом случае с успехом применяется схема метода частиц в ячейке, к-рая позволяет передать сильные искажения границы вследствие неустойчивости.

В задачах обтекания вязким газом при достаточно больших числах Рейнольдса эффект аппроксимационной вязкости превосходит эффект физич. вязкости, если разностная сетка недостаточно детальна. Для уменьшения эффекта аппроксимационной вязкости необходимо сильное измельчение сетки вблизи обтекаемого тела. Практически в этом случае отходят от единой трактовки течения, разбивая задачу интегрирования на две: задачу обтекания тела идеальным газом, в к-рой, в частности, определяется скорость u_l потока на границе l тела; задачу расчета вязкого течения вблизи тела, где градиенты величин велики (так наз. пограничный слой), с краевыми условиями на бесконечности, где задаются значения скорости $u_\infty = u_l$. Постановка задачи в рамках теории пограничного слоя является менее строгой, чем интегрирование уравнений Навье — Стокса; однако она является наиболее употребительной в инженерных расчетах при больших числах Рейнольдса.

Особо важный класс задач газовой динамики составляют задачи гидродинамич. неустойчивости и турбулентности. В этом случае необходимо решать задачи на собственные значения для уравнений гидродинамики вязкой жидкости в вариациях (уравнения Орра — Зоммерфельда) и строить сложные численные модели для описания нелинейной неустойчивости и турбулентности. Эти задачи принадлежат к классу наиболее трудных задач вычислительной математики и требуют разработки новых моделей и мощных ЭВМ.

Лит.: [1] Рихтмайер Р. Д., Мортон К., Разностные методы решения краевых задач, М., пер. с англ., 1972; [2] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, М., 1973; [3] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений ..., М., 1968; [4] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [5] Жуков А. И., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1960, т. 58, [6] Харлоу Ф. Х., в сб.: Вычислительные методы в гидродинамике, М., 1967, 316—42; [7] Дородницын А. А., в кн.: Труды 3 Всесоюзного матем. съезда, т. 3, М., 1958, 447—53; [8] Белоцерковский О. М., в сб.: Численные методы решения задач механики сплошной среды, М., 1969, 101—213; [9] Яненко Н. Н., Анучина Н. Н., Петренко В. Е., Шокин Ю. И., в сб.: Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск, 1970, т. 1, 40—62; [10] Яненко Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, 1967; [11] Самарский А. А., Попов Ю. П., Разностные схемы газовой динамики, М., 1975; [12] Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1961, т. 1, № 6, 1020—1050.

Ю. И. Шокин, Н. Н. Яненко.

ГАЗОВЫХ СТРУЙ ТЕОРИЯ — раздел газовой динамики, в к-ром исследуются течения газа в предположении, что газ частично обтекает встречаемое на пути своего распространения препятствие и стекает с него, образуя за препятствием застойную область. Решение задач о струйном течении газа достигается в предположении, что газ баротропный и движение его плоскопараллельное, потенциальное и установившееся. В этих

предположениях выводится из уравнений гидродинамики следующая основная формула:

$$d(x+iy)=\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2\alpha\tau}}\left(d\varphi+i\frac{\rho_0}{\rho}d\psi\right), \qquad (1)$$

в к-рой φ и ψ — соответственно потенциал скоростей и функция тока, ρ — плотность газа в произвольной точке, ρ_0 — плотность газа в точке нулевой скорости газа. Для адиабатич. движений постоянная α есть квадрат скорости звука в точке нулевой скорости газа, поделенный на $\gamma-1$ (γ — показатель адиабаты). Для решения задач Г. с. т. целесообразно рассматривать искомые функции не в зависимости от переменных x, y — координат в плоскости потока, а как функции переменных Чаплыгина: $\tau=|v|^2/2\alpha$ и угла θ наклона вектора скорости v к оси Ox. При таком выборе независимых переменных уравнение (1) приводит к системе двух уравнений с частными производными

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=-\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},$$

$$\beta=\frac{1}{\gamma-1},$$

к к-рой надо присоединить интеграл Бернулли

$$\rho=\rho_0(1-\tau)^\beta.$$

Исключение функции $\varphi(\theta,\tau)$ приводит к уравнению для функции тока:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right\}+\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0. \qquad (2)$$

Это — уравнение эллиптич. типа для дозвуковых течений и гиперболич. типа для сверхзвуковых течений. Решение уравнения (2) может быть получено для ряда препятствий, составленных из отрезков прямых линий; вдоль каждого такого отрезка переменное θ имеет соответствующее постоянное значение. Вдоль линий тока, срывающихся с концов отрезков и являющихся границей, отделяющей движущийся газ от спокойного газа в застойной области, переменное τ имеет постоянное значение. Функция тока $\psi(\theta,\tau)=\text{const}$ в точках границ $\theta=\text{const}$ и $\tau=\text{const}$. На плоскости переменных θ, τ образуется область, ограниченная отрезками прямых линий, параллельных осям координат; вдоль каждого такого отрезка функция тока имеет постоянное значение. Расположение этих отрезков и постоянные значения функции $\psi(\theta,\tau)$ на них зависят от вида и положения препятствия на плоскости течения газа. В определенном круге задач функция $\psi(\theta,\tau)$ может быть получена из уравнения (2) методом разделения переменных. Напр., если поток газа дебита Q и конечной ширины набегает на прямолинейную пластинку, поставленную перпендикулярно к скорости газа в удаленных частях потока, то функция $\psi(\theta,\tau)$ определяется рядом:

$$\frac{\pi\psi}{2Q}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^n\frac{y_n(\tau)}{y_n(\tau_0)}\sin 2n\theta\sin^2\mu n, \qquad (3)$$

где τ_0 — значение переменной τ на граничной линии тока, μ — угол скорости потока с осью Ox далеко за пластинкой. Угол μ может быть найден через длину, а сила давления потока на пластинку — с помощью формулы (1).

Функция $y_n(\tau)$ получается при разделении переменных в уравнении (2) и является интегралом гипергеометрич. уравнения:

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2y_n}{d\tau^2}+[(2n+1)+(\beta-2n-1)\tau]\frac{dy_n}{d\tau}+$$
$$+\beta n(2n+1)y_n=0,$$

голоморфным около точки $\tau=0$.

Функция $\psi(\theta, \tau)$ для газа, вытекающего из отверстия бесконечно широкого сосуда, определяется рядом

$$\frac{\pi\psi}{Q} = -\theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^n \frac{y_n(\tau)}{y_n(\tau_0)} \sin 2n\theta. \qquad (4)$$

Сходимость рядов вида (3) и (4) была установлена С. А. Чаплыгиным (см. [1]) для дозвуковых течений, т. е. при $\tau < 1/(2\beta+1)$.

Ряды, подобные рядам (3) и (4) для функции $\psi(\theta, \tau)$, могут быть составлены, если в потоке есть лишь одна характерная для него скорость, отличная от нуля. Если же имеются две или несколько характерных скоростей, как, напр., в задаче о вытекании газа из отверстия в поперечной стенке сосуда, ограниченного двумя бесконечными полупрямыми, то решение выражается с помощью определенных интегралов сложной структуры, содержащих θ и τ в виде параметров.

Для исследования рядов вида (3), (4) и определенных интегралов, дающих точное решение задач Г. с. т., С. А. Чаплыгин предложил приближенный метод решения задач о струйном движении газа. Этот метод приводит задачу о движении газа к задаче о плоскопараллельном потенциальном движении несжимаемой жидкости.

Лит.: [1] Чаплыгин С. А., Собр. соч., т. 2, М.—Л., 1948, с. 19—137; [2] Бай Ши-и, Теория струй, пер. с англ., М., 1960.

Л. Н. Сретенский.

ГАЛЕРКИНА МЕТОД, метод моментов,— метод нахождения приближенного решения операторного уравнения в виде линейной комбинации элементов заданной линейно независимой системы.

Пусть $F(x)$ — нелинейный оператор, область определения к-рого лежит в банаховом пространстве X, а область значений — в банаховом пространстве Y. Для решения уравнения

$$F(x) = h \qquad (1)$$

методом Галеркина выбираются линейно независимая система элементов из X (координатная система) $\{\varphi_i\}_1^\infty$ и линейно независимая система функционалов $\{\psi_j\}_1^\infty$ из пространства Y^*, сопряженного к Y (проекционная система). Приближенное решение x уравнения (1) разыскивается в виде

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i. \qquad (2)$$

Числовые коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ определяются из системы уравнений

$$\langle F\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i\right), \psi_j \rangle = \langle h, \psi_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (3)$$

В этой общей постановке задачи нельзя гарантировать, что система (3) имеет хотя бы одно решение. В случае если (3) имеет единственное решение при каждом $n = 1, 2, \ldots$, приближенное решение (2) может не сходиться при $n \to \infty$ даже слабо к точному решению уравнения (1). Тем не менее, Г. м. является мощным средством не только для нахождения приближенных решений, но и для доказательства теорем существования решений линейных и нелинейных уравнений, особенно в задачах для уравнений с частными производными.

В ряде случаев задача определения коэффициентов (2) из системы (3) эквивалентна задаче об отыскании минимума нек-рого функционала, и Г. м. превращается в вариационный (энергетический) метод. Наиболее важный из таких методов — *Ритца метод*. В нек-рых случаях эффективно применение для исследования системы (3) топологич. методов.

Если пространства X и Y гильбертовы, то Г. м. иногда наз. методом Галеркина — Петрова. Если, кроме того, координатная и проекционная системы совпадают: $X = Y = H$ и $\psi_i = \varphi_i$, то принято говорить о методе Бубнова — Галеркина. Если $X = Y = H$ — гильбертово пространство, а

$\psi_i = F(\varphi_i)$, то этот частный случай Г. м. наз. *наименьших квадратов методом*.

В линейном случае, когда $F(x) \equiv Ax$, A — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор с областью определения $D(A) \subseteq X$ и с областью значений $R(A) \subseteq Y$, а координатная система выбрана в $D(A)$, уравнение (1) принимает вид:

$$Ax = h. \qquad (4)$$

При этом система (3) представляет собой систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \langle A\varphi_i, \psi_j \rangle = \langle h, \psi_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (5)$$

Если в условиях метода наименьших квадратов на $R(A)$ существует и ограничен обратный оператор A^{-1}, $h \in R(A)$ и система $\{A\varphi_i\}_1^\infty$ полна в H, то приближенное решение (2) при $n \to \infty$ сходится к точному решению уравнения (4). Если в условиях метода Галеркина — Петрова оператор A симметричен, положительно определен, $h \in R(A)$ и система $\{\varphi_i\}_1^\infty$ полна в гильбертовом пространстве H_A — пополнении $D(A)$ в метрике, порожденной скалярным произведением

$$[x, y] = (Ax, y), \quad x, y \in D(A),$$

то приближенное решение (2) сходится к точному решению уравнения (4) как в H_A, так и в H.

Если A — самосопряженный положительно определенный оператор в H, а $\{\varphi_i\}_1^\infty$ — полная ортонормированная система его собственных элементов, то метод Бубнова — Галеркина и метод наименьших квадратов совпадают с *Фурье методом*.

Г. м. применяется также для приближенного решения задач на собственные значения и собственные элементы.

Г. м. получил широкое распространение после исследований Б. Г. Галеркина [1]; ранее он применялся для решения конкретных задач теории упругости И. Г. Бубновым. Существует общий подход к приближенным методам, охватывающий обобщающие Г. м. *проекционные методы*, *разностные методы* и другие приближенные методы.

Лит.: [1] Галеркин Б. Г., «Вестник инженеров», 1915, т. 1, № 19, с. 897—908; [2] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, М., 1957; [3] Вайнберг М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972. *В. А. Треногин.*

ГАЛИЛЕЕВА СИСТЕМА КООРДИНАТ — система координат в *псевдоевклидовом пространстве*, в к-рой линейный элемент имеет вид:

$$ds^2 = \sum e_i dx^{i^2},$$

где $e_i = \pm 1$. Г. с. к. аналогична декартовой системе координат в евклидовом пространстве. Происхождение названия связано с приложениями системы отсчета Галилея (см. *Инерциальная система отсчета*).

Д. Д. Соколов.

ГАЛИЛЕЕВО ПРОСТРАНСТВО — пространство-время классич. механики Галилея — Ньютона, в к-ром за расстояние между двумя событиями, происходящими в точках M_1 и M_2 в моменты времени t_1 и t_2, принимается временной интервал $|t_1 - t_2|$, а в том случае, когда эти события происходят одновременно, расстояние между событиями считается равным расстоянию между точками M_1 и M_2. В случае n-мерного Г. п. расстояние определяется следующим образом:

$$d(x, y) = |x^1 - y^1| \text{ при } x^1 \neq y^1,$$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=2}^{n} (x^i - y^i)^2} \text{ при } x^1 = y^1.$$

Г. п. является *полупсевдоевклидовым пространством* дефекта 1; может рассматриваться как предельный случай псевдоевклидова пространства, в к-ром изотропный конус вырождается в плоскость. Этот предельный

переход соответствует предельному переходу от специальной теории относительности к классич. механике.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969; [2] Пенроуз Р., Структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1972. *Д. Д. Соколов.*

ГАЛИЛЕЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование, определяющее в классич. механике переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой прямолинейно и равномерно. При этом система отсчета понимается как четырехмерная, позволяющая фиксировать три пространственные координаты и отсчет часов (время). Если задана инерциальная система отсчета (x, y, z, t), то во всякой другой инерциальной системе (x', y', z', t'), движущейся относительно нее прямолинейно и равномерно, координаты (x', y', z', t') связаны (с точностью до переноса начала и поворота осей) с координатами (x, y, z, t) преобразованиями Галилея

$$x' = x - v_x t,\ y' = y - v_y t,\ z' = z - v_z t,\ t' = t,$$

где v_x, v_y, v_z — компоненты скорости движения системы (x', y', z', t') относительно системы (x, y, z, t).

Основные законы классич. механики инвариантны относительно Г. п., но, напр., уравнение распространения фронта световой волны (электромагнитное явление) не инвариантно относительно Г. п. По этой причине Г. п. были обобщены Х. Лоренцом (H. Lorentz, см. *Лоренца преобразование*). Эти преобразования легли в основу специальной теории относительности. Преобразования Лоренца переходят в Г. п. при $v \ll c$.

Г. п. образуют группу, являющуюся подгруппой группы неоднородных преобразований Галилея, называемой группой Галилея, к-рая получается из группы Г. п. добавлением преобразований смещения начала координат в трехмерном пространстве и начала отсчета времени.

А. З. Петров.

ГАЛИЛЕЯ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ — основной принцип классич. механики, утверждающий инвариантность законов механич. движения относительно замены одних инерциальных систем другими. Существование инерциальных систем отсчета постулируется. Г. п. о. был подготовлен в результате развития классич. механики от античных времен до эпохи Возрождения; Г. Галилею (G. Galilei, 1636) принадлежит его окончательная формулировка. Математически Г. п. о. описываются *Галилея преобразованиями*, при введении к-рых предполагают существование абсолютного времени и абсолютного пространства безотносительно к материи и друг к другу, что допускает экспериментальную проверку. Такая проверка приводит к положительным результатам при малых сравнительно со скоростью света скоростях. Однако при скоростях, близких к скорости света, проверка приводит к отрицательным результатам. Этот факт, а также обобщение Г. п. о. на электромагнитные явления послужили основным стимулом для создания специальной теории относительности, в к-рой существование инерциальных систем отсчета также постулируется, но связаны они между собой группой *Лоренца преобразований*, относительно к-рых инвариантны релятивистские уравнения механики (обобщение уравнений классич. механики) и уравнения электродинамики. Дальнейшее развитие Г. п. о. содержится в общей теории относительности.

Лит.: [1] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961. *А. З. Петров.*

ГАЛИЛЕЯ СПИРАЛЬ — плоская кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид:

$$\rho = a\varphi^2 - l,\ l \geqslant 0.$$

Г. с. симметрична относительно полярной оси (см. рис.) и имеет двойную точку в полюсе с касательными, об-

разующими с полярной осью углы, равные $\pm\sqrt{l/a}$. На полярной оси у Г. с. бесконечно много двойных точек, для которых $\rho = ak^2\pi^2 - l$, где $k = 1, 2, \ldots$. Г. с. относятся к так называемым алгебраическим *спиралям*. Названа по имени Г. Галилея (G. Galilei, 1638) в связи с его работами по теории свободного падения тел.



Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

ГАЛУА ГРУППА — группа автоморфизмов *Галуа расширения* L поля k, т. е. группа, состоящая из всех автоморфизмов поля L, оставляющих все элементы подполя k неподвижными. Г. г. обозначается $G(L/k)$ или $\mathrm{Gal}(L/k)$. Поле инвариантов $L^{G(L/k)}$ совпадает с полем k. Если L — поле разложения многочлена f над полем k, то Г. г. $G(L/k)$ наз. также группой Галуа многочлена f. Эти группы играют важную роль в теории Галуа алгебраич. уравнений. Вычисление Г. г. для расширений полей алгебраич. чисел является одной из основных задач алгебраич. теории чисел. Задача нахождения расширений Галуа с абелевой Г.г. (абелевы расширения) относится к теории полей классов. Г. г. полей алгебраич. функций изучаются в алгебраич. геометрии.

Если L — поле и G — конечная подгруппа группы автоморфизмов поля L, то L является расширением Галуа поля инвариантов $k = L^G$, Г. г. этого расширения изоморфна G; при этом степень расширения $[L:k]$ равна порядку группы G.

Фундаментальным результатом о Г. г. является следующая теорема, иногда наз. основной теоремой о расширениях Галуа (или теоремой о соответствии Галуа). Если L — расширение Галуа конечной степени поля k, то существует взаимное однозначное соответствие между всеми подгруппами H Г. г. $G(L/k)$ и всеми подполями F поля L, содержащими k, причем соответствующие друг другу H и F таковы, что F — поле инвариантов H, а H — группа Галуа L/F (см. *Галуа соответствие*). Эта теорема имеет многочисленные аналоги во многих математич. теориях, так существует ее обобщение на случай расширений бесконечной степени (см. *Галуа топологическая группа*). Имеется обобщение понятия Г. г. на случай расширений произвольных коммутативных колец и даже схем (см. *Фундаментальная группа*), а также на случай расширений тел.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Постников М. М., Теория Галуа, М., 1963; [4] Джекобсон Н., Теория колец, пер. с англ., М., 1947. *И. В. Долгачев.*

ГАЛУА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГРУППА — группа всех автоморфизмов *дифференциального поля* P, перестановочных с *дифференцированиями* и оставляющих на месте все элементы нек-рого фиксированного дифференциального подполя P' поля P. *Л. А. Скорняков.*

ГАЛУА КОГОМОЛОГИИ — когомологии *Галуа группы*. Если M — абелева группа и $G(K/k)$ — группа Галуа расширения K/k, действующая на M, то когомологии Галуа есть группы когомологий

$$H^n(K/k, M) = H^n(G(K/k), M), \quad n \geqslant 0,$$

определяемые комплексом (C^n, d), где C^n состоит из всех отображений $G(K/k)^n \to M$, а d — кограничный оператор (см. *Когомологии групп*). Если K/k — расширение бесконечной степени, то дополнительно требуется, чтобы *Галуа топологическая группа* непрерывно действовала на дискретной группе M, а за коцепи C^n берутся непрерывные отображения.

Для неабелевой группы M содержательно определяются только нульмерные (H^0) и одномерные (H^1)

когомологии. А именно, $H^0(K/k, M)=M^{G(K/k)}$ — множество неподвижных точек группы $G(K/k)$ в M, а $H^1(K/k, M)$ — фактормножество множества одномерных коциклов, т. е. непрерывных отображений z: $G(K/k)\to M$, удовлетворяющих соотношению

$$z(g_1g_2)=z(g_1)g_1z(g_2)$$

для всех g_1, $g_2\in G(K/k)$, по отношению эквивалентности $\sim$ (где $z_1\sim z_2$ тогда и только тогда, когда $z_1(g)=m^{-1}z_2(g)g_m$ для некоторого $m\in M$ и всех $g\in G(K/k)$). В неабелевом случае $H^1(K/k, M)$ является множеством с отмеченной точкой, соответствующей тривиальному коциклу $G(K/k)\to(e)$ (где e — единица M), и структурой группы, вообще говоря, не обладает. Тем не менее и для таких когомологий можно развить стандартный когомологич. формализм (см. *Неабелевы когомологии*).

Если $K=k_s$ — сепарабельное замыкание поля k, то принято группу $G(k_s/k)$ обозначать G_k и вместо $H^n(k_s/k, M)$ писать $H^n(k, M)$.

Г. к. в форме, несколько отличной от современной, возникли еще в работах Д. Гильберта (D. Hilbert), Э. Артина (E. Artin), Р. Брауэра (R. Brauer), Х. Хассе (H. Hasse), К. Шевалле (C. Chevalley) по теории полей классов, конечномерным простым алгебрам и квадратичным формам. Развитие идей и методов гомологич. алгебры обусловили введение в начале 50-х гг. 20 в. Г. к. конечных расширений со значениями в абелевой группе в работах Э. Артина, А. Вейля (A. Weil), Г. Хохшильда (G. Hochschild), Дж. Тейта (J. Tate) в связи с потребностями теории полей классов. В общем случае теория абелевых Г. к. была затем развита Дж. Тейтом и Ж. П. Серром (см. [1], [3], [6]).

С помощью Г. к. Дж. Тейтом было введено понятие когомологич. размерности группы Галуа G_k поля k, к-рая обозначается $\mathrm{cd}G_k$. Она определяется через к о г о м о л о г и ч е с к у ю p-р а з м е р н о с т ь cd_pG_k — наименьшее целое число n такое, что для всякого периодического G_k-модуля A и всякого целого $q>n$ p-примарная компонента группы $H^q(G_k, A)$ равна нулю. К о г о м о л о г и ч е с к а я р а з м е р н о с т ь $\mathrm{cd}\,G_k$ есть

$$\sup_p \mathrm{cd}_p G_k.$$

Для всякого алгебраически замкнутого поля k $\mathrm{cd}G_k=0$; для всех полей таких, что *Брауэра группа* $B(K)$ их любого конечного расширения K/k тривиальна, $\mathrm{cd}\,G_k\leqslant 1$; для p-адического поля, поля алгебраич. функций одной переменной с конечным полем констант и для чисто мнимого числового поля $\mathrm{cd}\,G_k=2$ (см. [1]). Поля k, когомологич. размерность группы Галуа к-рых $\leqslant 1$, и группа Брауэра $B(k)=0$, наз. п о л я м и р а з м е р н о с т и $\leqslant 1$, и это обозначается $\dim k\leqslant 1$. К таким полям относятся все конечные поля, максимальные неразветвленные расширения p-адических полей, поле рациональных функций от одной переменной с алгебраически замкнутым полем констант. Если группа Галуа $G(K/k)$ является п р о-p-г р у п п о й, т. е. проективным пределом конечных p-групп, то размерность $H^1(G(K/k), Z/pZ)$ над Z/pZ равна минимальному числу топологических образующих группы $G(K/k)$, а размерность $H^2(G(K/k), Z/pZ)$ есть число определяющих соотношений между этими образующими. Если $\mathrm{cd}G(K/k)=1$, то $G(K/k)$ — свободная про-p-группа.

Неабелевы Г. к. появились в конце 50-х гг. 20 в., однако систематич. исследования начались лишь в 60-х гг. и стимулировались главным образом проблемой классификации алгебраич. групп над алгебраически незамкнутыми полями. Одной из основных задач, давших толчок развитию неабелевых Г. к., является задача классификации главных однородных про-

странств групповых схем. Особенно эффективными оказываются Г. к. для проблемы классификации форм алгебраич. многообразий.

Упомянутые выше задачи приводят к проблеме вычисления Г. к. алгебраич. групп. Общие теоремы о строении алгебраич. групп в существенном сводят изучение Г. к. к отдельному рассмотрению Г. к. конечных групп, унипотентных групп, торов, полупростых групп, абелевых многообразий.

Г. к. связной унипотентной группы U тривиальны, если U определена над совершенным полем k, т. е. $H^1(k, U)=0$ для произвольной унипотентной группы U, и $H^n(k, U)=0$ для всех $n\geqslant 1$, если U — абелева группа. В частности, для аддитивной группы произвольного поля G_a всегда $H^1(k, G_a)=0$. Для несовершенного поля k, вообще говоря, $H^1(k, G_a)\neq 0$.

Одним из первых существенных фактов о Г. к. была «теорема 90» Гильберта, одна из формулировок к-рой утверждает, что $H^1(k, G_m)=0$. Кроме того, и для любого k-разложимого алгебраич. тора T всегда $H^1(k, T)=0$. В общем случае вычисление $H^1(k, T)$ для произвольного k-определенного тора T сводится к вычислению $H^1(K/k, T)$, где K — минимальное поле разложения T, что пока (1977) сделано только для специальных полей. Особенно важен для приложений случай, когда k — поле алгебраич. чисел. Для этого случая получены теоремы двойственности, имеющие разнообразные применения.

Пусть K/k — расширение Галуа конечной степени, $C(K)$ — группа *аделей* мультипликативной K-группы G_m, $\hat{T}=\mathrm{Hom}_k(T, G_m)$ — группа характеров тора. Теорема двойственности утверждает, что $\cup$-произведение:

$$H^{2-r}(K/k, \hat{T})\times H^r(K/k, \mathrm{Hom}(\hat{T}, C(K))\to H^2(K/k, C(K)),$$

задает невырожденное спаривание при $r=0, 1, 2$. С помощью этой теоремы найдена формула, выражающая *Тамагавы числа* тора T через инварианты, связанные с его Г. к. Существуют и другие важные теоремы двойственности для Г. к. [1].

Доказана [11] тривиальность $H^1(k, G)$ над полями k размерности $\leqslant 1$. Выделен естественный класс полей, обладающих лишь конечным числом расширений фиксированной степени [так наз. п о л я т и п а (F)]; к ним относится, напр., поле p-адических чисел. Доказано, что для произвольной алгебраич. группы G над полем k типа (F) группа когомологий $H^1(k, G)$ является конечным множеством (см. [1]).

Теория Г. к. полупростых алгебраич. групп имеет глубокие арифметич. и аналитич. применения. Т е о р е м а К н е з е р а — Б р ю а — Т и т с а утверждает, что $H^1(k, G)=0$ для односвязных полупростых алгебраич. групп G над локальными полями k, поле вычетов к-рых имеет когомологич. размерность $\leqslant 1$. Эта теорема была доказана сначала для полей p-адических чисел [12], а затем в [7] было получено единообразное доказательство в общем случае. Доказана [13] тривиальность $H^1(k, G)$ для поля алгебраич. функций от одной переменной с конечным полем констант. Во всех этих случаях когомологич. размерность $\mathrm{cd}\, G_k\leqslant 2$, и это подтверждает общую гипотезу Ж. П. Серра о тривиальности $H^1(k, G)$ для односвязных полупростых G над полями k с $\mathrm{cd}\, G_k\leqslant 2$.

Пусть k — глобальное поле, V — множество всех неэквивалентных нормирований k, k_v — пополнение k. Вложения $k\to k_v$ индуцируют естественное отображение

$$i: H^1(k, G)\to \Pi_{v\in V} H^1(k_v, G)$$

для произвольной k-определенной алгебраич. группы G, ядро к-рого обозначается $Ш(G)$ и в случае абелевых многообразий наз. г р у п п о й Ш а ф а р е в и ч а — Т е й т а. Группа $Ш(G)$ показывает в какой мере Г. к.

над глобальным полем определяются Г. к. над локализациями. Для линейных алгебраич. групп основной результат о Ш(G) принадлежит А. Борелю (A. Borel), к-рый доказал конечность группы Ш(G). Существует гипотеза, что группа Ш(G) конечна и в случае абелевых многообразий. Выделяется случай, когда Ш(G)=0, т. е. отображение i инъективно. Тогда говорят, что для G справедлив *Хассе принцип*. Такое название объясняется тем, что для ортогональной группы инъективность i эквивалентна классич. теореме Минковского — Хассе о квадратичных формах, а для проективной группы — теореме Брауэра — Хассе — Нётер о расщеплении простых алгебр. Существует также гипотеза, принадлежащая Ж. П. Серру, что для односвязной или присоединенной полупростой группы всегда Ш(G)=0. Это утверждение доказано для большинства односвязных полупростых групп над числовыми глобальными полями (исключая группы, имеющие простые компоненты типа E_8) (см. [13]), а также для любых односвязных алгебраич. групп над функциональными глобальными полями.

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [2] его же, Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [3] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [4] Кох Х., Теория Галуа p-расширений, пер. с нем., М., 1973; [5] Artin E., Tate J., Class field theory, N. Y.— Amst., 1967; [6] Serre J.-P., Corps locaux, P., 1962; [7] Borel A., Serre J.-P., «Comm. Math. Helv.», 1964, v. 39, p. 111—64; [8] Artin M., Grothendieck A., Verdier J.-L., Théorie des topos et cohomologie etale des schémas, t. 1—3, B.— Hdlb. — N. Y., 1972; [9] Bruhat F., Tits J., «Publ. Math. IHES», 1972, № 41, p. 5—252; [10] Borel A., там же, 1963, № 16, p. 5—30; [11] Steinberg R., там же, 1965, № 25, p. 49—80; [12] Kneser M., «Math. Z.», 1965, Bd 88, S. 40—47; Bd 89, S. 250—72; [13] Harder G., «Math. Z.», 1965, Bd 90, S. 404—28; 1966, Bd 92, S. 396—415.

Е. А. Нисневич, В. П. Платонов.

ГАЛУА ПОЛЕ, конечное поле,— поле, число элементов к-рого конечно. Г. п. впервые рассматривалось Э. Галуа (E. Galois, см. [1], с. 35—47).

Число элементов любого Г. п. есть степень p^n нек-рого натурального простого числа p, являющегося характеристикой этого поля. Для любого натурального простого p и любого натурального n существует (и единственно, с точностью до изоморфизма) поле из p^n элементов. Оно обозначается $\mathrm{GF}(p^n)$ или F_{p^n}. Поле $\mathrm{GF}(p^m)$ содержит в качестве подполя поле $\mathrm{GF}(p^n)$ в том и только в том случае, когда m делится на n. В частности, в любом поле $\mathrm{GF}(p^n)$ содержится поле $\mathrm{GF}(p)$, наз. простым полем характеристики p. Поле $\mathrm{GF}(p)$ изоморфно полю $Z/(p)$ классов вычетов кольца целых чисел по простому модулю p. В любом фиксированном *алгебраическом замыкании* Ω поля $\mathrm{GF}(p)$ существует точно одно подполе $\mathrm{GF}(p^n)$ для каждого n. Соответствие $n \leftrightarrow \mathrm{GF}(p^n)$ является изоморфизмом между решеткой натуральных чисел относительно делимости и решеткой конечных алгебраич. расширений поля $\mathrm{GF}(p)$, лежащих в Ω, относительно включения. Такова же решетка множества конечных алгебраич. расширений любого Г. п., лежащих в его фиксированном алгебраич. замыкании.

Алгебраич. расширение $\mathrm{GF}(p^n)/\mathrm{GF}(p)$ является простым, т. е. существует примитивный элемент $\alpha \in \mathrm{GF}(p^n)$ такой, что $\mathrm{GF}(p^n)=\mathrm{GF}(p)(\alpha)$. Таким α будет любой корень каждого неприводимого многочлена степени n из кольца $\mathrm{GF}(p)[X]$. Число примитивных элементов расширения $\mathrm{GF}(p^n)/\mathrm{GF}(p)$ равно

$$\sum_{d|n} \mu(d) p^{n/d},$$

где μ — *Мёбиуса функция*. Аддитивная группа поля $\mathrm{GF}(p^n)$ естественным образом наделяется структурой n-мерного векторного пространства над $\mathrm{GF}(p)$. В качестве базиса можно взять $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$. Ненулевые элементы поля $\mathrm{GF}(p^n)$ образуют мультипликативную группу $\mathrm{GF}^*(p^n)$ порядка p^n-1, т. е. каждый элемент из $\mathrm{GF}^*(p^n)$ является корнем многочлена $X^{p^n-1}-1$.

Группа $GF^*(p^n)$ циклическая, ее образующие — первообразные корни из единицы степени p^n-1, число к-рых равно $\varphi(p^n-1)$, где φ — *Эйлера функция*. Каждый первообразный корень из единицы степени p^n-1 является примитивным элементом расширения $GF(p^n)/GF(p)$, но не наоборот. Точнее, среди

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)p^{n/d}$$

неприводимых унитарных многочленов степени n над $GF(p)$ имеется $\frac{1}{n}\varphi(p^n-1)$ таких, корни к-рых будут образующими для $GF^*(p^n)$.

Множество элементов поля $GF(p^n)$ в точности совпадает с множеством корней многочлена Xp^n-X в Ω, т. е. $GF(p^n)$ характеризуется как подполе элементов из Ω, инвариантных относительно автоморфизма $\tau: x\to x^{p^n}$, наз. автоморфизмом Фробениуса. Если $GF(p^m)\supset GF(p^n)$, то расширение $GF(p^m)/GF(p^n)$ нормально (см. *Расширение* поля), его *Галуа группа* $\mathrm{Gal}(GF(p^m)/GF(p^n))$ циклическая порядка m/n. В качестве образующей группы $\mathrm{Gal}(GF(p^m)/GF(p^n))$ может быть взят автоморфизм τ.

Лит.: [1] Галуа Э., Сочинения, пер. с франц., М.—Л., 1936; [2] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976, с. 158—62; [3] Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, М.—Л., 1934, ч. 1, с. 154—62; [4] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965, с. 185—203.
А. И. Скопин.

ГАЛУА РАСШИРЕНИЕ поля — нормальное и сепарабельное *расширение* поля. Изучение группы автоморфизмов таких расширений относится к *Галуа теории*.

ГАЛУА СООТВЕТСТВИЕ между частично упорядоченными множествами M и M' — пара отображений $\varphi: M\to M'$ и $\psi: M'\to M$, удовлетворяющих следующим условиям:

если $a\leqslant b$, то $a\varphi\geqslant b\varphi$;

если $a'\leqslant b'$, то $a'\psi\geqslant b'\psi$; $a\varphi\psi\geqslant a$ и $a'\psi\varphi\geqslant a'$.

Здесь $a,\ b\in M,\ a',\ b'\in M'$.

Понятие Г. с. тесно связано с понятием замыкания в частично упорядоченном множестве, а именно, если между M и M' установлено Г. с., то равенства $\bar{a}=a\varphi\psi$, $a\in M$, и $\bar{a'}=a'\psi\varphi$, $a'\in M'$, определяют *замыкания отношения* в множествах M и M' соответственно. Понятие Г. с. возникло из *Галуа теории*, где изучается Г. с. между всеми промежуточными подполями расширения $P\subseteq K$ и системой подгрупп группы Галуа этого расширения.

Лит.: [1] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, М., 1962.
О. А. Иванова.

ГАЛУА ТЕОРИИ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА — задача построения конечного нормального расширения для данного поля k с заданной *Галуа группой* (см. *Галуа теория*), а также выяснения условий, обеспечивающих существование или отсутствие такого расширения над полем k.

Если k есть поле рациональных чисел, то эта задача превращается в задачу построения нормального поля алгебраич. чисел с заданной группой Галуа и сводится к отысканию алгебраич. уравнения над k с данной группой Галуа. Такие уравнения существуют для любой симметрической группы, а также для знакопеременной группы. Конструктивно уравнения со знакопеременными группами построены И. Шуром (I. Schur), в частности показано, что уравнения вида

$$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+\frac{x}{1!}+1=0$$

(отрезки разложения показательной функции) имеют при $n\equiv 0 \pmod 4$ группой Галуа знакопеременную группу, а в остальных случаях — симметрическую группу.

Существование расширения поля алгебраич. чисел с любой разрешимой группой $\mathbf{G}$ в качестве группы Галуа доказано И. Р. Шафаревичем [2] с использованием арифметич. свойств полей алгебраич. чисел. В качестве решения K можно выбрать такое поле, что дискриминант K над полем алгебраич. чисел взаимно прост с любым наперед заданным целым числом, и, следовательно, решений данной задачи бесконечно много.

Рассмотрение групп Галуа бесконечных расширений данного поля (см. *Галуа топологическая группа*) дает возможность решать Г. т. о. з. сразу для множества однотипных полей: конечных, локальных, полей алгебраич. функций от одной переменной.

Лит.: [1] Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, ч. 1, М.—Л., 1934; [2] Шафаревич И. Р., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1954, т. 18, № 2, с. 261—96; № 3, с. 525—78.

С. П. Демушкин.

ГАЛУА ТЕОРИЯ — в наиболее общем смысле теория, изучающая те или иные математич. объекты на основе их групп автоморфизмов. Так, напр., возможны Г. т. полей, колец, топологич. пространств и т. п. В более узком смысле под Г. т. понимается Г. т. полей. Возникла эта теория из задачи решения в радикалах алгебраич. уравнений высших степеней. Общеизвестная формула для решения квадратного уравнения была установлена в глубокой древности. Методы решения уравнений 3-й (*Кардано формула*) и 4-й степеней (см. *Феррари метод*) найдены в 16 в. В течение трех последующих столетий велись безуспешные поиски формул для решения уравнений 5-й степени и выше. Наконец, в 1824 Н. Абель (N. Abel) доказал, что общее алгебраич. уравнение степени $\geqslant 5$ в радикалах не решается. После этого встал вопрос о необходимых и достаточных условиях, к-рым должны удовлетворять коэффициенты уравнения, чтобы оно решалось в радикалах, т. е. могло быть сведено к цепи двучленных уравнений вида $x^n - a = 0$. Ответ на этот вопрос был найден Э. Галуа (E. Galois); свои результаты он изложил в предсмертном письме (1832), опубликованном в 1846. В современном изложении Г. т. выглядит следующим образом.

Пусть k — произвольное поле. Расширением поля k наз. любое поле K, содержащее k в качестве подполя. Каждое расширение можно рассматривать как линейное пространство над полем k; если это пространство имеет конечную размерность n, то расширение наз. конечным, а размерность n — степенью расширения. Элемент α нек-рого расширения поля k наз. алгебраическим над k, если он является корнем уравнения $f=0$, где f — многочлен с коэффициентами из k (этот многочлен можно считать неприводимым). Наименьшее расширение поля k, содержащее алгебраический над k элемент α, обозначается обычно $k(\alpha)$. Конечное расширение K поля k наз. сепарабельным, если $K=k(\alpha)$, причем многочлен f, корнем к-рого является α, не имеет кратных корней. В случае, когда поле k имеет характеристику 0 (напр., если k — числовое поле), любое конечное расширение сепарабельно (теорема о примитивном элементе). Полем разложения неприводимого многочлена f наз. наименьшее расширение поля k, содержащее все корни этого многочлена. Степень такого расширения делится на степень многочлена f и равна этой степени, если все корни многочлена f выражаются через один из корней. Расширение K наз. нормальным, если оно является полем разложения нек-рого многочлена, и расширением Галуа, если оно нормально и сепарабельно. Группа всех автоморфизмов расширения Галуа K, оставляющих на месте все элементы поля k, наз. группой Галуа этого расширения и обозначается $\mathrm{Gal}(K/k)$. Ее порядок (число элементов) равен степени расширения K над k. Каждой подгруппе H группы $\mathrm{Gal}(K/k)$ соответствует подполе P поля K, состоящее

из всех элементов K, не меняющихся под воздействием автоморфизмов из H. Обратно, каждому подполю $P \subset K$ (содержащему поле k) соответствует подгруппа H группы $\mathrm{Gal}(K/k)$, состоящая из всех автоморфизмов, оставляющих на месте каждый элемент поля P. При этом поле K является расширением Галуа P и $\mathrm{Gal}(K/P)=H$. Основная теорема теории Галуа утверждает, что эти соответствия обратны друг к другу и, следовательно, являются взаимно однозначными соответствиями между всеми подгруппами группы $\mathrm{Gal}(K/k)$ и всеми подполями поля K, содержащими поле k. Таким образом, описание всех подполей поля K сводится к описанию всех подгрупп конечной группы $\mathrm{Gal}(K/k)$, что является значительно более простой задачей. Важно, что при этом соответствии «хорошим» свойствам подполей отвечают определенные свойства подгрупп и обратно. Так, подгруппа H будет нормальным делителем группы $\mathrm{Gal}(K/k)=G$ тогда и только тогда, когда соответствующее ей поле P является расширением Галуа поля k. При этом группа $\mathrm{Gal}(P/k)$ изоморфна G/H. Любой возрастающей последовательности

$$k=K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_r=K \qquad (1)$$

подполей поля K отвечает убывающая последовательность

$$G=H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_r=\{e\} \qquad (2)$$

подгрупп группы G, где $H_i=\mathrm{Gal}(K/K_i)$. Последовательность (2) является нормальным рядом (т. е. каждая группа H_{i+1} — нормальный делитель группы H_i при $1<i<r$) тогда и только тогда, когда в последовательности (1) каждое поле K_{i+1} есть расширение Галуа поля K_i, и в этом случае $H_i/H_{i+1} \approx \mathrm{Gal}(K_{i+1}/K_i)$.

К задаче решения алгебраич. уравнений эти результаты применяются следующим образом. Пусть f — неприводимый многочлен без кратных корней над полем k, а K — его поле разложения (оно будет расширением Галуа поля k). Группа Галуа этого расширения наз. группой Галуа уравнения $f=0$. Решение уравнения $f=0$ тогда и только тогда сводится к решению цепи уравнений $f=0, \ldots, f_r=0$, когда K содержится в поле $\overline{K}$, являющемся последним членом возрастающей последовательности полей

$$k=K_0 \subseteq K_1 \subset \ldots \subset K_r=\overline{K},$$

где K_i, $i=1, \ldots, r$ — поле разложения над полем K_{i-1}, многочлена f_i. Последнее условие равносильно тому, что группа $G=\mathrm{Gal}(K/k)$ является факторгруппой группы $\overline{G}=\mathrm{Gal}(\overline{K}/k)$, обладающей нормальным рядом, факторы H_i/H_{i+1} к-рого изоморфны группам Галуа уравнений $f_i=0$.

Пусть поле k содержит все корни из единицы степени n. Тогда для любого $a \in k$ полем разложения многочлена x^n-a служит поле $k(\alpha)$, где α — одно из значений радикала $\sqrt[n]{a}$. Группа $\mathrm{Gal}(k(\alpha)/k)$ является в этом случае циклич. группой порядка n, и обратно, если группа $\mathrm{Gal}(K/k)$ является циклич. группой порядка n, то $K=k(\alpha)$, где α — корень нек-рого двучленного уравнения $x^n-a=0$. Таким образом, если поле k содержит корни из единицы всех необходимых степеней, то уравнение $f=0$ решается в радикалах тогда и только тогда, когда его группа Галуа разрешима (т. е. обладает нормальным рядом с циклич. факторами H_i/H_{i+1}). Найденное условие разрешимости в радикалах справедливо и в случае, когда поле k не содержит всех нужных корней из единицы, поскольку группа Галуа $\mathrm{Gal}(k'/k)$ расширения k', получающегося присоединением этих корней, всегда разрешима.

Для практического применения условия разрешимости весьма важно, что группу Галуа уравнения можно вычислить, не решая этого уравнения. Идея вы-

числения следующая. Каждый автоморфизм поля разложения многочлена f индуцирует нек-рую перестановку его корней, причем этой перестановкой он вполне определяется. Поэтому группу Галуа уравнения в принципе можно трактовать как нек-рую подгруппу группы подстановок его корней (а именно, подгруппу, состоящую из подстановок, сохраняющих все алгебраич. зависимости между корнями). Зависимости между корнями многочлена дают нек-рые соотношения между его коэффициентами (в силу формул Виета); анализируя эти соотношения можно определить зависимости между корнями многочлена и тем самым вычислить группу Галуа уравнения. В общем случае группа Галуа алгебраич. уравнения может состоять из всех перестановок корней, т. е. являться симметрической группой n-й степени. Поскольку при $n \geqslant 5$ симметрическая группа неразрешима, то уравнение степени 5 и выше, вообще говоря, в радикалах не решается (теорема Абеля).

Соображения Г. т. позволяют, в частности, описать полностью класс задач на построение, разрешимых с помощью циркуля и линейки. Методами аналитической геометрии показывается, что любая такая задача на построение сводится к нек-рому алгебраич. уравнению над полем рациональных чисел, причем она разрешима с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда соответствующее уравнение решается в квадратных радикалах. А для этого необходимо и достаточно, чтобы группа Галуа уравнения обладала нормальным рядом, факторы к-рого являются группами 2-го порядка, что имеет место тогда и только тогда, когда ее порядок является степенью двух. Итак, задача на построение, разрешимая с помощью циркуля и линейки, сводится к решению уравнения, поле разложения к-рого имеет над полем рациональных чисел степень вида 2^s; если степень уравнения не имеет вида 2^s, то такое построение невозможно. Так обстоит дело с задачей об удвоении куба (сводящейся к кубическому уравнению $x^3-2=0$) и с задачей о трисекции угла (также сводящейся к кубическому уравнению). Задача о построении правильного p-угольника сводится при простом p к уравнению $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1=0$, обладающему тем свойством, что его поле разложения порождается любым из корней и поэтому имеет степень $p-1$, равную степени уравнения. В этом случае построение с помощью циркуля и линейки возможно, только если $p=2^s+1$ (напр., при $p=5$ и $p=17$ оно возможно, а при $p=7$ и при $p=13$ нет).

Идеи Галуа оказали решающее влияние на развитие алгебры в течении почти целого столетия. Г. т. развивалась и обобщалась во многих направлениях. В. Круллем (W. Krull) построена Г. т. для бесконечных расширений; доказано (теорема Кронекера—Вебера), что корни уравнения с рациональными коэффициентами с абелевой группой Галуа рационально выражаются через корни из единицы; дана классификация абелевых расширений заданного поля алгебраич. чисел (общая теория полей классов); доказано существование поля алгебраич. чисел с заданной разрешимой группой Галуа (см. *Галуа теории обратная задача*). Тем не менее в классич. Г. т. осталось еще много нерешенных задач. Напр., неизвестно, для любой ли группы G существует уравнение над полем рациональных чисел с этой группой Галуа.

Лит.: [1] Галуа Э., Сочинения, пер. с франц., М.—Л., 1936; [2] Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, ч. 1—2, М.—Л., 1934—37; [3] его же, Теория Галуа, М.—Л., 1936; [4] Постников М. М., Основы теории Галуа, М., 1960; [5] его же, Теория Галуа, М., 1963; [6] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [7] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [8] Бурбаки Н., Алгебра, Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [9] Кох Г., Теория Галуа p-расширений, пер. с нем., М., 1973; [10] Artin E., Galoische Theorie, Lpz., 1959.

М. М. Постников.

ГАЛУА ТЕОРИЯ КОЛЕЦ — обобщение результатов теории *Галуа полей* на случай ассоциативных колец с единицей. Пусть A — ассоциативное кольцо с единицей, H — некоторая подгруппа группы всех автоморфизмов кольца A, N — подгруппа группы H,

$$J(N)=\{a\in A \mid h(a)=a \quad \forall h\in N\},$$

$B=J(H)$. Тогда $J(N)$ — подкольцо кольца A. Пусть B_1 — подкольцо кольца A. Говорят, что автоморфизм h кольца A составляет кольцо B_1 поэлементно инвариантным, если $h(b)=b$ для всех $b\in B_1$. Множество всех таких автоморфизмов обозначается $G(B_1)$. Пусть

$$H(B_1)=G(B_1)\cap H \text{ и } B_1\supseteq B.$$

Основной объект изучения Г. к. т. — соответствия:

1) $N\to J(N)$; 2) $B_1\to G(B_1)$; 3) $B_1\to H(B_1)$.

В отличие от теории Галуа полей (даже в том случае, когда группа H конечна) здесь не всегда выполняется равенство $G(B_1)=H(B_1)$, а соответствия 1), 2) и 1), 3) не обязаны быть взаимно обратными. Поэтому представляет интерес выделение таких семейств подколец и семейств подгрупп, для к-рых справедлив аналог теоремы о соответствиях Галуа. В двух случаях эта задача получила удовлетворительное решение. Первый из них характеризуется требованием «близости» свойств кольца A к свойствам поля (напр., A — тело или полное кольцо линейных преобразований векторного пространства над телом), второй — требованием «близости» строения кольца A над подкольцом B к строению соответствующей пары в случае, когда A — поле (напр., B-модуль проективен).

Пусть c — обратимый элемент кольца A и $T_c: A\to A$ — автоморфизм кольца A, определяемый равенством $T_c(x)=cxc^{-1}$, $x\in A$, $R(H)$ — подалгебра алгебры A, порожденная обратимыми элементами $c\in A$, для которых $T_c\in H$. Группа H наз. N-группой, если $T_x\in H$ для всех обратимых $x\in R(H)$. Если A — тело, B — его подтело, причем $B=J(G(B))$, A — конечномерное левое векторное пространство над B, то соответствия Галуа $H\to J(H)$ и $D\to G(D)$ являются обратными друг к другу, где H принадлежит множеству всех N-подгрупп группы $G(B)$, а D — множеству всех подтел тела A, содержащих тело B.

Аналогичный результат справедлив и в том случае, когда A — полное кольцо линейных преобразований (однако соответствующая система условий, выделяющая семейства подгрупп и семейства подколец, формулируется несколько сложнее).

Пусть далее A — коммутативное кольцо без нетривиальных идемпотентов и $A\supseteq B$. Кольцо A наз. конечным нормальным расширением кольца B, если $B=J(G(B))$ и A — конечно порожденный B-модуль. Кольцо A можно рассматривать как $A\otimes_B A$-модуль, полагая

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\otimes b_i\right)a=\sum_{i=1}^n a_i b_i a,$$

где a_i, b_i, $a\in A$. Кольцо A наз. сепарабельной B-алгеброй, если A — проективный $A\otimes_B A$-модуль. Если A — конечное нормальное сепарабельное расширение кольца B, то A — конечно порожденный проективный B-модуль, группа $G(B)$ конечна ($[G(B):1]=\operatorname{rank}_B A$) и отображения $H\to J(H)$, $B_1\to G(B_1)$ задают взаимно обратные соответствия между множеством всех подгрупп группы $G(B)$ и множеством всех сепарабельных B-подалгебр алгебры A.

Всякое кольцо B обладает сепарабельным замыканием, являющимся аналогом сепарабельного замыкания поля. Группа всех автоморфизмов этого замыкания, оставляющих кольцо B поэлементно инвариантным, оказывается, в общем случае, проконечной группой. Соответствия 1) и 2) являются взаимно обратными

на множестве всех замкнутых подгрупп полученной группы и на множестве всех сепарабельных B-подалгебр сепарабельного замыкания кольца B.

Аналогичные результаты справедливы и в том случае, когда кольцо B содержит нетривиальные идемпотенты. При этом, однако, ряд основных понятий подвергается существенному изменению. Напр., роль группы Галуа $G(B)$ играет фундаментальный группоид.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Chase S. U., Swedler M. E., Hopf algebras and Galois theory, B.— Hdlb.— N. Y., 1969; [3] De Meyer F., Ingraham E., Separable algebras over commutative rings, B.— Hdlb.— N. Y., 1971; [4] Magid A. R., The separable Galois theory of commutative rings, N. Y., 1974.

К. И. Бейдар, А. В. Михалев.

ГАЛУА ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа Галуа, снабженная топологией Крулля; базис фильтра этой топологии состоит из нормальных делителей конечного индекса. Если L/K — конечное расширение Галуа, то топология его группы Галуа $G(L/K)$ дискретна. Если поле L — объединение конечных расширений Галуа K_i поля K, то Г. т. г. $G(L/K)$ есть проективный предел конечных групп $G(K_i/K)$ с дискретной топологией. В этом случае Г. т. г. является *проконечной группой* и тем самым вполне несвязной компактной топологич. группой. Если K' — поле инвариантов для группы $G(L/K)$, то подгруппа $G(L/K')$ всюду плотна в группе $G(L/K)$. Основная теорема о конечных расширениях Галуа может быть переформулирована для бесконечных расширений: существует взаимно однозначное соответствие между инвариантными открытыми подгруппами Г. т. г. расширения L/K и подполями L, являющимися конечными расширениями Галуа поля K.

И. В. Долгачев.

ГАЛЬТОНА — ВАТСОНА ПРОЦЕСС — *ветвящийся процесс* с одним типом частиц и с дискретным временем; назван по имени Ф. Гальтона (F. Galton) и Дж. Ватсона (G. Watson), впервые занимавшихся в 1873 задачей о вырождении фамилии. *Б. А. Севастьянов.*

ГАМИЛЬТОНА ОПЕРАТОР, набла-оператор, ∇-оператор, гамильтониан,— символический дифференциальный оператор 1-го порядка, применяемый для записи основных дифференциальных операций векторного анализа. В декартовой прямоугольной системе координат $x=(x_1, \ldots, x_n)$ с ортами $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ Г. о. имеет вид:

$$\nabla = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Применение Г. о. к скалярной функции $f(x)$, понимаемое как умножение «вектора» ∇ на скаляр $f(x)$, дает *градиент* функции $f(x)$:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{e}_j \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

т. е. вектор с координатами $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

Скалярное произведение ∇ на векторное поле $\boldsymbol{a}=(a_1, \ldots, a_n)$ дает *дивергенцию* поля $\boldsymbol{a}$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \nabla \boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

Векторное произведение ∇ на векторы $\boldsymbol{a}_j=(a_{j1}, \ldots, a_{jn})$, $j=1,2, \ldots, n-2$, дает *вихрь* (ротор) совокупности полей $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-2}$, т. е. вектор:

$$[\nabla, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-2}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \ldots & \boldsymbol{e}_n \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \ldots & a_{n-2,n} \end{vmatrix}.$$

При $n=3$

$$[\nabla, \boldsymbol{a}] = \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) \boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) \boldsymbol{e}_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) \boldsymbol{e}_3.$$

Скалярный квадрат Г. о. дает *Лапласа оператор:*

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Справедливы следующие соотношения:

$$[\nabla, \nabla\varphi] = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0,$$

$$\nabla \cdot \nabla \boldsymbol{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{a}, \quad \nabla [\nabla, \boldsymbol{a}] = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0,$$

$$[\nabla [\nabla, \boldsymbol{a}]] = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{a}, \quad \Delta\varphi = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi.$$

Г. о. был введен У. Гамильтоном [1].

Лит.: [1] Hamilton W. R., Lectures on quaternions..., Dublin, 1853.

Л. П. Купцов.

ГАМИЛЬТОНА УРАВНЕНИЯ — канонические обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка, описывающие движения голономных механич. систем под действием приложенных к ним сил, а также экстремали задач классического вариационного исчисления.

Г. у., установленные У. Гамильтоном [1], эквивалентны *Лагранжа уравнениям* 2-го рода (или *Эйлера уравнениям* в классическом вариационном исчислении), в к-рых неизвестными являются обобщенные координаты q_i, а также и $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$. Вместо обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ У. Гамильтон ввел в рассмотрение обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ — *Лагранжа функция*, n — число степеней свободы системы, и определил функцию

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L, \tag{2}$$

наз. ныне *Гамильтона функцией*. В правой части (2) переменные $\dot{q}_i$ заменяются их выражениями

$$\dot{q}_i = \varphi_i(q_s, p_s, t),$$

получаемыми разрешением уравнений (1). Для динамич. систем, у к-рых

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\| \neq 0,$$

такое разрешение всегда возможно.

Г. у. имеют вид канонич. уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^*, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Здесь Q_i^* обозначают непотенциальные обобщенные силы, если они действуют на систему. Число уравнений (3) равно числу $2n$ неизвестных q_i, p_i.

Порядок системы (3) как и системы уравнений Лагранжа 2-го рода, равен $2n$.

Переход от переменных q_i, $\dot{q}_i$, t и функции Лагранжа L к переменным q_i, p_i, t и функции Гамильтона H, согласно формулам (1) и (2), представляет собой *Лежандра преобразование*. Г. у. имеют определенные преимущества по сравнению с уравнениями Лагранжа, что обусловило их большую роль в аналитич. механике. См. также *Гамильтонова система*.

Лит.: [1] Hamilton W. R., «Philos. Trans. Roy. Soc. London», 1835, pt 1, p. 95—144.

В. В. Румянцев.

ГАМИЛЬТОНА ФУНКЦИЯ, гамильтониан,— функция, введенная У. Гамильтоном (W. Hamilton, 1834) для описания движений механических систем; начиная с работ К. Якоби (K. Jacobi, 1837), используется в классическом вариационном исчислении для представления *Эйлера уравнений* в канонической

форме. Пусть $L(t, x, \dot{x})$ — *Лагранжа функция* механич. системы или подинтегральная функция в задаче минимизации функционала

$$J(x)=\int L(t, x\dot{x})\,dt$$

классического вариационного исчисления, где $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $\det\|L_{\dot{x}\dot{x}}\|\neq 0$. Г. ф. представляет собой *Лежандра преобразование* функции L по переменным $\dot{x}$, иначе говоря,

$$H(t, x, p)=(p\mid\dot{x})-L(t, x, \dot{x}),$$

где $\dot{x}$ выражено через p соотношением $p=L_{\dot{x}}$; $(p\mid\dot{x})$— скалярное произведение векторов $p=(p_1, \ldots, p_n)$ и $\dot{x}$. С помощью Г. ф. уравнения Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}+L_x=0$$

(в задачах классич. механики называемые *Лагранжа уравнениями*) записываются в виде системы уравнений 1-го порядка:

$$-\dot{p}=\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Эти уравнения наз. *Гамильтона уравнениями*, *гамильтоновой системой*, а также канонической системой. Через Г. ф. пишутся уравнения Гамильтона—Якоби для функции действия (см. *Гамильтона — Якоби теория*).

Г. ф. в задаче оптимального управления определяется следующим образом. Пусть требуется найти минимум функционала

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, u)\,dt$$

при дифференциальных связях

$$\dot{x}^i=f^i(t, x, u),$$

при заданных граничных условиях и ограничении на управление $u\in U$. Здесь $x=(x^1, \ldots, x^n)$ есть n-мерный вектор фазовых координат, $u=(u', \ldots, u^m)$ — m-мерный вектор управления, U — замкнутое множество допустимых значений управления u. Г.ф. в этой задаче имеет вид

$$H(t, x, \psi, u)=\psi_0 f^0(t, x, u)+\sum_{i=1}^{n}\psi_i f^i(t, x, u),$$

где $\psi_0=\text{const}\leqslant 0$, $\psi_1, \ldots, \psi_n$— сопряженные переменные (множители Лагранжа, импульсы), аналогичные введенным выше канонич. переменным p_i. Если (x_0, u_0) есть минимум в поставленной задаче и $\psi_0\neq 0$ (тогда ψ_0 можно считать равным -1), то

$$H(t, x_0(t), p(t), u_0(t))=(p\mid f)\,|_{x_0, u_0}-f^0\,|_{x_0, u_0},$$

где

$$-\dot{p}=\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x_0, u_0}.$$

Полученное для Г. ф. выражение имеет ту же структуру, что и в классическом вариационном исчислении. Согласно *Понтрягина принципу максимума* уравнения Эйлера для задачи оптимального управления с помощью Г. ф. можно записать в виде

$$\dot{x}^i=\frac{\partial H}{\partial\psi_i}, \quad \dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i=1, \ldots, n.$$

Оптимальное управление u при каждом t должно доставлять максимум Г. ф.:

$$H(t, x, \psi, u)=\max_{v\in U} H(t, x, \psi, v).$$

Лит.: [1] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [2] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969.

И. Б. Вапнярский.

ГАМИЛЬТОНА — ОСТРОГРАДСКОГО ПРИНЦИП, стационарного действия принцип,— общий интегральный *вариационный принцип классической механики*, установленный У. Гамильтоном [1] для

голономных систем, стесненных идеальными стационарными связями, и обобщенный М. В. Остроградским [2] на нестационарные геометрич. связи. Согласно Г.—О.п., в действительном движении системы под действием потенциальных сил

$$S=\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}L\,dt$$

имеет стационарное значение по сравнению с близкими кинематически-возможными движениями, для которых начальное и конечное положения системы и время движения одинаковы с таковыми для действительного движения. Здесь T — кинетическая, U — потенциальная энергии, $L=T-U$ функция Лагранжа системы. В нек-рых случаях истинное движение соответствует не только стационарной точке функционала S, но и доставляет ему наименьшее значение. Поэтому Г.—О. п. часто наз. принципом наименьшего действия. В случае непотенциальных активных сил F_ν условие стационарности действия $\delta S=0$ заменяется условием

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\sum\nolimits_\nu F_\nu\cdot\delta r_\nu)\,dt=0.$$

Лит.: [1] Hamilton W., Report of the Fourth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, L., 1835, p. 513—18; [2] Ostrogradsky M., «Mém. de l'Acad. des Sci. de St-Petersbourg», 1850, t. 8, № 3, p. 33—48.

В. В. Румянцев.

ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ ТЕОРИЯ — раздел классического вариационного исчисления и аналитич. механики, в к-ром задача нахождения экстремалей (или задача интегрирования гамильтоновой системы уравнений) сводится к интегрированию нек-рого уравнения с частными производными 1-го порядка — так наз. уравнения Гамильтона — Якоби. Основы Г.— Я. т. были разработаны У. Гамильтоном (W. Hamilton) в 20-х гг. 19 в. в применении к задачам волновой и геометрич. оптики. В 1834 У. Гамильтон распространил свои идеи на задачи динамики, а в 1837 К. Якоби (C. Jacobi) применил этот метод для общих задач классического вариационного исчисления.

Исходные позиции Г.—Я.т. были заложены в 17 в. П. Ферма и Х. Гюйгенсом на материале геометрич. оптики (см. *Ферма принцип* и *Гюйгенса принцип*). Рассмотрим, следуя У. Гамильтону, задачу о распространении света в неоднородной (но для простоты — изотропной) среде, где $v(x)$ — локальная скорость света в точке x. В соответствии с принципом Ферма свет в неоднородной среде распространяется от точки к точке за кратчайшее время. Пусть $x_0\in E$ исходная точка, а $W(x)$ — минимальное время, требуемое свету для преодоления пути от x_0 к x. Функцию $W(x)$ называют эйконалом, или оптической длиной пути. Допустим, что за малое время dt свет распространился из точки x до точки $x+dx$. В соответствии с *Гюйгенса принципом* свет с точностью до малых более высокого порядка будет распространяться по нормали к поверхности уровня функции $W(x)$. Таким образом выполняется равенство

$$W\left(x+\frac{W'(x)}{|W'(x)|}v(x)\,dt\right)=W(x)+dt+o(dt),$$

из к-рого следует уравнение Гамильтона — Якоби для задач геометрич. оптики:

$$|W'(x)|^2=\frac{1}{v^2(x)}\Leftrightarrow\sum\nolimits_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial W(x)}{\partial x_i}\right)^2=\frac{1}{v^2(x)}.$$

В аналитич. механике роль принципа Ферма играет вариационный *Гамильтона—Остроградского принцип*, а роль эйконала играет функция действия, представляющая собой интеграл

$$S(t,\,x)=\int_\gamma L\,dt,\quad x=(x_1,\,\ldots,\,x_n),\qquad(1)$$

вдоль траектории γ, соединяющей фиксированную точку (t_0, x_0) с точкой (t, x), где L — функция Лагранжа механич. системы.

К. Якоби предложил рассматривать функцию действия, подобную (1), для любой задачи классического вариационного исчисления. Экстремали задачи $\int L dt \to \to \inf$, исходящие из точки (t_0, x_0), пересекают поверхность уровня функции действия трансверсально (см. *Трансверсальности условие*), из этого выводят вид дифференциала функции действия:

$$dS = (p \mid dx) - H\,dt,$$

где $p = L_{\dot{x}}$, а $H = p\dot{x} - L$ — *Гамильтона функция* (см. также *Лежандра преобразование*).

Последнее соотношение приводит к уравнению для функции S:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0. \qquad (2)$$

Это уравнение и наз. уравнением Гамильтона — Якоби.

Важнейшим результатом Г.—Я. т. является теорема Якоби, заключающаяся в том, что полный интеграл уравнения (2), т. е. решение $S(t, x, \alpha)$ этого уравнения, зависящее от параметров $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (с условием невырожденности $\det \left|\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha}\right| \neq 0$), позволяет получить общий интеграл уравнения Эйлера функционала (1), или, что то же самое,— гамильтоновой системы, связанной с этим функционалом, по формулам $\frac{\partial S}{\partial x} = p$, $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta$. Применение теоремы Якоби к интегрированию гамильтоновых систем основано, как правило, на методе разделения переменных в специально выбранных координатах.

Несмотря на то, что интегрирование уравнений с частными производными составляет, как правило, более сложную задачу, чем отыскание решений обыкновенных уравнений, Г.—Я. т. оказалась мощным орудием исследования задач оптики, механики и геометрии. Суть принципа Гюйгенса была применена Р. Беллманом (R. Bellmann) к задачам оптимального управления.

См. также *Гильберта инвариантный интеграл*.

Лит.: [1] Вариационные принципы механики, М., 1959; [2] Парс Л.-А., Аналитическая динамика, пер. с англ., М., 1971, с. 283—86; [3] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974, с. 219—24; [4] Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955, с. 92—96.

В. М. Тихомиров.

ГАМИЛЬТОНИАН — см. *Гамильтона функция*, *Гамильтона оператор*.

ГАМИЛЬТОНОВА ГРУППА — неабелева группа, все подгруппы к-рой инвариантны. Группы с таким свойством исследовались Р.Дедекиндом (R.Dedekind) и были названы им Г. г. в честь У. Гамильтона (W. Hamilton) — создателя алгебры кватернионов. Группа тогда и только тогда гамильтонова, когда она является прямым произведением группы кватернионов порядка 8, абелевой группы, каждый элемент к-рой имеет конечный нечетный порядок, и абелевой группы показателя 2. В частности, любая Г. г. периодична.

Лит.: [1] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

В. Д. Мазуров.

ГАМИЛЬТОНОВА СИСТЕМА — система обыкновенных дифференциальных уравнений для $2n$ неизвестных $p = (p_1, \ldots, p_n)$ («обобщенные импульсы») и $q = (q_1, \ldots, q_n)$ («обобщенные координаты»), имеющая вид:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

где H — нек-рая функция от (p, q, t), наз. *Гамильтона функцией*, или гамильтонианом, системы (1). Г. с. наз. также каноническими, а в автономном случае (когда H не зависит явно от t) иногда и

консервативными системами, поскольку в этом случае функция H (имеющая во многих примерах физич. смысл энергии) является первым интегралом (т. е. энергия сохраняется при движении).

В механике Г. с. описывают движение при голономных связях и силах, имеющих *потенциал* (см. *Гамильтона уравнения*). Многие задачи теоретич. физики также приводят к Г. с. или к таким уравнениям с частными производными, к-рые имеют близкие свойства и могут рассматриваться как бесконечномерные аналоги Г. с. Уравнениям квантовой механики можно придать вид Г. с., в к-рых, однако, $p_i(t)$ и $q_i(t)$ являются не числовыми функциями времени, а (зависящими от t) самосопряженными линейными операторами, удовлетворяющими определенным перестановочным соотношениям. Г. с. (в обычном смысле слова) играют важную роль при исследованиях нек-рых асимптотич. задач для уравнений с частными производными (коротковолновая асимптотика для волнового уравнения, квазиклассич. асимптотика в квантовой механике).

Тесно связаны с Г. с. различные вариационные принципы. Принцип Гельмгольца (см., напр., [3]) непосредственно приводит к Г. с., однако он употребляется редко. Наибольшее значение имеет *Гамильтона—Остроградского принцип* (стационарного действия принцип), к-рый непосредственно приводит к *Лагранжа уравнениям*; при выполнении нек-рых дополнительных условий типа невырожденности от последних можно перейти к Г. с. с помощью *Лежандра преобразования* (см. *Гамильтона функция*, *Гамильтона уравнения*), если в вариационный принцип входят производные только первого порядка. Несколько сложнее осуществляется предложенный М. В. Остроградским переход к Г. с. в том случае, когда вариационный принцип содержит производные порядка выше первого (см., напр., [4], § 110).

Если H не зависит явно от q_i, то $p_i = \text{const}$ — первый интеграл. В этом случае координату q_i наз. ц и к л и ч е с к о й (в нек-рых случаях она имеет физич. или геометрич. смысл угловой переменной), или и г н о р и р у е м о й. Такую координату q_i и соответствующий ей импульс p_i можно исключить и тем самым перейти к Г. с. с меньшим числом неизвестных. Более общо, при наличии k независимых первых *интегралов в инволюции* возможно понижение порядка Г. с. на $2k$ (по крайней мере в нек-рой области изменения переменных и с заменой времени), и при этом снова получается Г. с. Если все координаты циклические, то Г. с. наз. (в п о л н е) и н т е г р и р у е м о й; нахождение ее решений и качественное исследование их свойств уже не требует решения дифференциальных уравнений.

Первые интегралы Г. с. часто получаются из т е о р е м ы Н ё т е р: если функция Лагранжа (или л а г р а н ж и а н) инвариантна относительно некоторой непрерывной группы преобразований, то соответствующая Г. с. имеет первые интегралы определенного вида (см., напр., [2]). Другое общее соображение, позволяющее иногда проинтегрировать Г. с., состоит в переходе к вспомогательному уравнению с частными производными — так наз. уравнению Гамильтона — Якоби (см. *Гамильтона — Якоби теория*). Посредством разделения переменных в подходящих координатах иногда удается найти полный интеграл последнего, тогда теорема Якоби позволяет сравнительно легко проинтегрировать Г. с. [Связь между Г. с. и уравнением Гамильтона — Якоби является двусторонней: решение последнего сводится к интегрированию соответствующей Г. с. Исторически эта связь вместе с аналогией между механикой и геометрич. оптикой (см. [1], с. 548, [2] или [3], с. 421, 451) способствовала открытию Г. с. (принцип Гюйгенса в оптике сразу приводит к *эйконала уравнению* — уравнению типа уравнения Гамильтона — Якоби).]

Для Г. с., близких к интегрируемым, разработаны специфич. методы приближенного интегрирования и качественного исследования свойств решений. Родственные методы служат также для исследования поведения траекторий Г. с. в окрестности положений равновесия, периодич. или квазипериодич. решений. Могут использоваться и методы, не связанные специально с Г. с., однако и тогда специфика Г. с. может позволить упростить вычисления или, наоборот, усложнить задачу (поскольку с точки зрения общего метода Г. с. могут оказаться «исключительными» — так, напр., обстоит дело с *устойчивостью*). См. *Адиабатический инвариант*, *Малого параметра метод*, *Малые знаменатели*, *Осреднение*.

Пусть $\varphi_t(z)$ — решение Г. с. (1), проходящее при $t=0$ через точку $z=(p,\ q)\in\mathbb{R}^{2n}$. Г. с. однозначно характеризуется тем, что (локальные) диффеоморфизмы φ_t переводят внешнюю дифференциальную форму

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} dp_i\wedge dq_i \qquad (2)$$

(так наз. интегральный инвариант Пуанкаре) снова в ω; этот факт в других терминах отмечался еще М. В. Остроградским и Г. Гельмгольцем (H. Helmholtz); последний говорил о «свойстве взаимности» (см. [3]). Диффеоморфизмы, сохраняющие ω, наз. каноническими преобразованиями (или каноническими заменами переменных); они не только естественно возникают из Г. с., но и переводят любую Г. с. снова в Г. с. (Последним свойством обладают и обобщенные канонич. преобразования, переход к к-рым, впрочем, не является особенно существенным расширением рассматриваемого класса преобразований.) При этом гамильтониан новой системы легко выражается через исходный гамильтониан и производящую функцию S канонич. преобразования (которое удобно задавать именно с помощью S). Таким образом, имея дело с Г. с. и производя канонич. замену переменных, можно производить вычисления всего с двумя функциями H и S (тогда как в общем случае замены переменных в системе дифференциальных уравнений пришлось бы рассматривать гораздо больше функций); в этом состоит так наз. канонический формализм, существенно упрощающий вычисления в пределах своей применимости. Он широко используется в небесной механике и теоретич. физике.

Определение Г. с. в терминах интегрального инварианта приводит к естественному обобщению, когда вместо формы (2) в $\mathbb{R}^{2n}$ речь идет о заданной на нек-ром многообразии M четной размерности $2n$ внешней дифференциальной форме ω 2-го порядка, причем ω замкнута (внешний дифференциал $d\omega=0$) и всюду $\omega^n=\omega\wedge\ldots\wedge\omega\neq 0$ (тогда говорят, что на M задана симплектическая структура.) Еще более общей является трактовка Г. с. не как динамической системы, а как конгруэнции, когда траектории рассматривают просто как семейство линий с определенными свойствами и не обращают внимания на скорость движения по ним. (Систему (1) можно включить в эту схему, рассматривая графики решений $p=p(t)$, $q=q(t)$ в пространстве $(p,\ q,\ t)$; при этом вместо (2) большую роль играет интегральный инвариант Пуанкаре — Картана $\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H\,dt$.) Собственно, когда с помощью первых интегралов понижается порядок Г. с. (1), то получается Г. с. именно в этом обобщенном смысле (см. [2]).

О свойствах Г. с., не являющихся интегрируемыми или близкими к таковым, известно мало (не считая названных выше вопросов о локальном поведении траекторий). Сохранение ω влечет сохранение элемента объема ω^n (теорема Лиувилля; обратное неверно, исключая малые размерности). Поэтому Г. с. принадле-

жат к числу систем с инвариантной мерой, изучаемых в *эргодической теории*.

Лит.: [1] Парс Л.-А., Аналитическая динамика, пер. с англ., М., 1971; [2] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [3] Леви-Чивита Т., Амальди У., Курс теоретической механики, пер. с итал., М., 1951, т. 2, ч. 2; [4] Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, М.—Л., 1937.

Д. В. Аносов.

ГАМИЛЬТОНОВА СИСТЕМА ЛИНЕЙНАЯ — система вида

$$\frac{dp_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial q_j},\quad \frac{dq_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad j=1,\ \ldots,\ k, \tag{1}$$

где H — квадратичная форма с действительными коэффициентами от переменных $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k$ с коэффициентами, к-рые могут зависеть от времени t. Г. с. л. наз. также линейной канонической системой. Система (1) может быть записана в векторной форме:

$$J\frac{dx}{dt}=H(t)\,x, \tag{2}$$

где x — вектор-столбец $(p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k)$, $H(t)=H(t)^*$ — матрица квадратичной формы $2H$ и $J=\left\|\begin{matrix}0 & I_k\\ -I_k & 0\end{matrix}\right\|$ (I_k — единичная $(k\times k)$-матрица). Уравнение (2) с произвольной неособой действительной кососимметрической матрицей J может быть сведено подходящей заменой вида $x=Sx_1$, где S — неособая действительная матрица, к аналогичному виду:

$$J_1\frac{dx_1}{dt}=H_1(t)\,x,$$

здесь J_1 — любая заранее заданная действительная неособая кососимметрическая матрица. Ниже предполагается, что в (2) $|H(t)|\in L[t_1, t_2]$, $\forall -\infty<t_1<t_2<+\infty$. К канонич. уравнению (2) сводятся: векторное уравнение 2-го порядка

$$\frac{d}{dt}\left[R(t)\frac{dy}{dt}\right]+P(t)\,y=0, \tag{3}$$

в к-ром y — вектор порядка k, $R(t)=R(t)^*$, $P(t)=P(t)^*$ — действительные $(k\times k)$-матрицы функции, $\det R(t)\neq 0$; уравнение

$$\frac{d}{dt}\left[R(t)\frac{dy}{dt}\right]+Q\frac{dy}{dt}+P(t)\,y=0, \tag{3a}$$

где $Q=-Q^*$ — постоянная матрица, $R(t)=R(t)^*$, $P(t)=P(t)^*$, $\det R(t)\neq 0$ (матрицы $P(t)$, Q, $R(t)$ — действительные), скалярное уравнение

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}\left(\varphi_j(t)\frac{d^j\eta}{dt^j}\right)=0, \tag{4}$$

где $\varphi_j(t)$ — действительные функции, $\varphi_k(t)\neq 0$, и аналогичное векторное уравнение. [Для уравнения (3)

$$x=\left\|\begin{matrix}y\\ z\end{matrix}\right\|,\quad z=R\frac{dy}{dx};$$

для уравнения (3а)

$$x=\left\|\begin{matrix}p\\ q\end{matrix}\right\|,\ \text{где}\ \ p=R\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}Qy,\ q=y;$$

для уравнения (4) $x_j=\eta^{(j-1)}$, $j=1,\ \ldots,\ k$,

$$x_{j+k}=\varphi_j x_{j+1}-x_{k+j+1}',\ j=1,\ \ldots,\ k-1,\ x_{2k}=\varphi_k x_k'].$$

Скалярное уравнение (3) с $R(t)=1$, т. е. уравнение $\frac{d^2y}{dt^2}+P(t)y=0$, в к-ром $P(t)$ — периодич. функция, наз. уравнением Хилла.

Пусть $X(t)$ — матрицант уравнения (2) [матрица фундаментальной системы решений уравнения (2), нормированная условием $X(0)=I_n$]. Введем индефинитное скалярное произведение $\langle x, y\rangle=i(Jx, y)$, где $(x, y)=\sum_{j=0}^{2k}x_j\overline{y_j}$ — обычное скалярное произведение. Матрица U (вообще комплексная), унитарная в смысле этого произведения, т. е. такая, что $U^*JU=J$, наз. J-уни-

тарной; действительная J-унитарная матрица X наз. симплектической.

Известно (см. *Гамильтонова система*), что при сдвиге вдоль траектории Г. с. сохраняется интегральный инвариант Пуанкаре – внешняя дифференциальная форма $\sum_{j=1}^{k} dp_j \wedge dq_j$. В случае Г. с. л. это свойство означает, что для любых решений $x^{(1)}=x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}=x^{(2)}(t)$ уравнения (2) выполнено $\langle x^{(1)},\ x^{(2)}\rangle = \langle X(t)x^{(1)}(0),\ X(t)x^{(2)}(0)\rangle = \text{const}$, т. е. что матрицант $X(t)$ – симплектическая матрица для любого t. Из соотношения $X^*JX=J$ следует (теорема Ляпунова–Пуанкаре), что собственные значения симплектической матрицы X (с учетом их кратностей и порядков жордановых ящиков) располагаются симметрично (в смысле инверсии) относительно единичной окружности. Собственные значения симплектических (и J-унитарных) матриц, равные по модулю 1, подразделяются на собственные значения 1-го и 2-го рода по следующему правилу. Пусть ρ – собственное значение J-унитарной матрицы U и $|\rho|=1$. Тогда форма $\langle x, x\rangle$ на соответствующем корневом подпространстве не вырождается. Пусть p – число положительных и q – число отрицательных ее квадратов; говорят, что в точке ρ совпало p собственных значений 1-го рода и q собственных значений 2-го рода.

Аналогично определяется род чисто мнимых собственных значений матриц $K=J^{-1}L$, $L^*=L$ (для них $\langle Kx, y\rangle = -\langle x, Ky\rangle$, $\forall x, y$). Для J-унитарной матрицы X собственные значения ρ при $|\rho|\neq 1$ считаются собственными значениями 1-го рода, если $|\rho|<1$, и 2-го рода, если $|\rho|>1$. Любая симплектическая матрица X имеет (с учетом кратности) ровно k собственных значений $\rho_1, \ldots, \rho_k$ 1-го рода и k значений $\rho_1^{-1}, \ldots, \rho_k^{-1}$ 2-го рода. При соответствующей нумерации $\rho_1, \ldots, \rho_k$ являются непрерывными функциями матрицы X (см. [2], [3]).

1. Осцилляторные свойства решений Г. с. л. К изучению осцилляторных свойств решений уравнений (2)–(4) приводит ряд задач вариационного исчисления, оптимального управления, исследование свойств спектра соответствующего дифференциального оператора и др.

Определения. (I) Уравнение (3) наз. колебательным, если для любого $t_0>0$ найдутся числа $t_2>t_1>t_0$ и решение $y(t)\not\equiv 0$ такие, что $y(t_1)=y(t_2)=0$, и неколебательным – в противном случае. (II) Уравнение (4) наз. колебательным, если для любого $t_0>0$ найдется решение $\eta(t)\not\equiv 0$, имеющее по крайней мере два k-кратных нуля $t_2>t_1>t_0$, и неколебательным – в противном случае. (III) Уравнение (1) наз. колебательным, если на (t_0, ∞) функция

$$\Delta \operatorname{Arg} X(t) = \sum_{j=1}^{k} \Delta \operatorname{Arg} \rho_j(t) \qquad (5)$$

является неограниченной, и неколебательным в противном случае. [В(5) $\rho_j(t)$ суть собственные значения 1-го рода матрицы $X(t)$.] После сведения уравнения (3) или (4) к уравнению (2) получающееся уравнение (2) будет колебательным в смысле определения (III) тогда и только тогда, когда уравнение (3) [соответственно (4)] колебательно в смысле определения (I) [соответственно (II)]. Определению (III) можно придать следующую геометрич. интерпретацию. Группа $\mathrm{Sp}(k, R)$ симплектических матриц X гомеоморфна произведению связного и односвязного топологич. пространства на окружность. Соответствующее отображение можно выбрать так, что $\psi=\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Arg}\rho_j$ является проекцией матрицы $X\in\mathrm{Sp}(k, R)$ на окружность (числа ρ_j – собственные значения 1-го рода матрицы X). Таким образом, уравнение (2) колебательно, если при $t\to\infty$ матрица $X(t)$ неограниченно «закручивается» в

$\mathrm{Sp}(k, R)$. (При $n=1$ эта группа гомеоморфна «сплошному тору» и «закручивание» имеет очевидный наглядный смысл.) Известны другие разнообразные определения аргумента симплектической матрицы, соответствующие другим отображениям группы $\mathrm{Sp}(k, R)$ на окружность и эквивалентные (5) в том смысле, что *при любом из них выполнено неравенство:*

$$|\Delta \operatorname{Arg}' X(t) - \Delta \operatorname{Arg} X(t)| < c \qquad (6)$$

для любой кривой $X(t) \in \mathrm{Sp}(k, R)$. Такими аргументами являются, напр.,

$\operatorname{Arg}_1 X = \operatorname{Arg} \det(U_1 - iV_1)$; $\operatorname{Arg}_2 X = \operatorname{Arg} \det(U_2 - iV_2)$,

где U_j, V_j суть $(k \times k)$-подматрицы матрицы $X = \left\| \begin{smallmatrix} U_1 U_2 \\ V_1 V_2 \end{smallmatrix} \right\|$ (см. также [4]). Известны разнообразные эффективно проверяемые достаточные (а в нек-рых случаях необходимые и достаточные) условия колебательности и неколебательности уравнений (2), (3), (4) (см., напр., [5] и литературу в [6]).

2. Г. с. л. с периодическими коэффициентами. Пусть в (2) $H(t+T) = H(t)$ почти всюду. Матрица $X(T)$ наз. матрицей монодромии уравнения (2), а ее собственные значения — мультипликаторами уравнения (2). Уравнение (2) (или соответствующий гамильтониан $H(t)$) наз. сильно устойчивым, если все его решения ограничены на $(-\infty, +\infty)$, и это свойство не нарушается при малых деформациях гамильтониана в смысле нормы $\|H\| = \int_0^T |H(t)|\,dt$. Аналогично определяется сильная неустойчивость уравнения (2) (гамильтониана $H(t)$). Для сильной устойчивости уравнения (2) необходимо и достаточно чтобы все его мультипликаторы лежали на единичной окружности и среди них не было совпадающих разного рода (иначе, чтобы все корневые подпространства у $X(T)$ были дефинитны в смысле произведения $\langle x, y \rangle = i(Jx, y)$). Для сильной неустойчивости уравнения (2) необходимо и достаточно, чтобы нек-рые его мультипликаторы лежали вне единичной окружности. Два набора мультипликаторов (с учетом их рода), среди к-рых нет совпадающих разного рода, наз. эквивалентными, если один набор можно непрерывно перевести в другой без встречи мультипликаторов разного рода. Класс эквивалентных наборов мультипликаторов наз. мультипликаторным типом. В случае устойчивости имеется 2^k мультипликаторных типа. Их можно обозначить символами вида $\mu = (+, +, -, +, \ldots, -)$, в к-рых полюсы и минусы соответствуют роду мультипликаторов, последовательно встречающихся при прохождении верхней полуокружности $|\rho| = 1$ от точки $\rho = +1$ к точке $\rho = -1$. Пусть $L = \{H(t)\}$ — множество всех гамильтонианов указанного выше вида с нормой $\|H\| = \int_0^T |H(t)|\,dt$. Множество $O \subset L$ сильно устойчивых гамильтонианов распадается в L на счетное число областей $O_n^{(\mu)}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\mu = \mu_1, \ldots, \mu_{2k}$. Область $O_n^{(\mu)}$ является множеством всех гамильтонианов, к-рым отвечают мультипликаторный тип μ и целое число n, определяемое формулой

$$\Delta \operatorname{Arg} X(t)\Big|_0^T = 2n\pi + \sum_{j=1}^{k} \theta_j,$$

где $\theta_j = \arg \rho_j(T)$ — аргументы мультипликаторов 1-го рода (см. [4], [7]). Для $k=1$ множество сильно неустойчивых гамильтонианов распадается на счетное число областей; при $k>1$ это множество связно. Известны (см. [3], [7], [8]) разнообразные достаточные условия принадлежности $H(t) \in O_n^{(\mu)}$. При получении этих условий важную роль играет следующая теорема: пусть $H_1(t) \ll H_2(t)$, тогда из сильной устойчивости «отрезка» $H_s(t) = sH_1(t) + (1-s)H_2(t)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, следует сильная устойчивость любого гамильтониана $H(t)$ такого, что $H_1(t) \ll H(t) \ll H_2(t)$. Аналогичная теорема установ-

лена и для бесконечномерного случая ($k=\infty$), когда $\{x\}$ — гильбертово пространство и в (2) J, $H(t)$ суть операторы со специальными свойствами (см. [9]); при $\kappa=1$ эта теорема верна и для сильно неустойчивых гамильтонианов [3].

3. Параметрический резонанс. Рассмотрим уравнение

$$J\frac{dx}{dt}=H_0x \tag{8}$$

с постоянным гамильтонианом H_0 таким, что все решения уравнения (8) ограничены. Частота θ наз. критической, если для любого $\delta>1$ найдется «возмущенное» гамильтоново уравнение

$$J\frac{dx}{dt}=H(\theta t)\,x, \tag{9}$$

где $H(t+2\pi)=H(t)$, $\|H(t)-H_0\|<\delta$, такое, что уравнение (9) имеет неограниченные решения (знак у θ может быть любым). Явление возникновения неограниченно нарастающих колебаний системы при сколь угодно малом периодическом возмущении нек-рых ее параметров наз. параметрическим резонансом. Параметрич. резонанс имеет большое значение в технике и физике. Он «опаснее» (или «полезнее», в зависимости от задачи) обычного резонанса, поскольку в отличие от последнего при нем колебания нарастают по экспоненциальному закону (а не степенному), и частоты, при к-рых имеет место резонанс, заполняют малые интервалы. Длины этих интервалов зависят от амплитуды возбуждения, а сами интервалы стягиваются в точки (соответствующие критич. частотам), когда амплитуда возбуждения стремится к нулю. Пусть $i\omega_1, \ldots, i\omega_k$ — собственные значения 1-го рода матрицы $J^{-1}H_0$ (тогда $-i\omega_1, \ldots, -i\omega_k$ имеют 2-й род). Пусть $\omega_j+\omega_h\neq 0$ ($j, h=1, \ldots, k$). Критич. частотами являются числа $\theta_{jh}^{(N)}=(\omega_j+\omega_h)/N$ ($j, h=1, \ldots, k$, $N=\pm1, \pm2, \ldots$) и только они (см. [2]). Пусть в (9) $H(\theta t)=H_0+\varepsilon H_1(\theta t)$, ε — малый параметр;

$$J^{-1}H_0f_j=i\omega_jf_j \qquad (j=\pm1, \pm2, \ldots, \pm k), \qquad \omega_j=-\omega_j,$$
$$H_1(\tau)=\sum\nolimits_m H^{(m)}e^{im\tau}.$$

Систему векторов f_j можно выбрать нормированной условием $\langle f_j, f_h\rangle=\delta_{jh}\operatorname{sign} j$ ($j=\pm1, \ldots, \pm k$). На плоскости $\{\varepsilon, \theta\}$ вблизи оси θ точки $\{\varepsilon, \theta\}$, для к-рых уравнение (9) с $H(\theta t)=H_0+\varepsilon H_1(\theta t)$ сильно неустойчиво, заполняют области $\Omega_1(\varepsilon)<\theta-\theta_{jh}^{(N)}<\Omega_2(\varepsilon)$, примыкающие к точкам $(0, \theta_{jh}^{(N)})$, где $\Omega_{1,2}=\theta_{jh}^{(N)}+\varepsilon\mu_{1,2}+O(\varepsilon^{3/2})$ (имеется в виду «общий» случай, см. [3]). Числа μ_1, μ_2 просто выражаются через $H^{(m)}$ и f_j (см., напр., [3]). Величина $|\langle H^{(N)}f_j, f_{-h}\rangle|$ характеризует «степень опасности» критич. частоты $\theta_{jh}^{(N)}$: чем больше эта величина, тем шире «клинышек» неустойчивости, примыкающий к точке $(0, \theta_{jh}^{(N)})$, и тем ближе к оси θ подходит внутри этого клинышка область α — экспоненциального возрастания решения с малым $\alpha>0$ (подробнее см. в [3]). Другие сведения имеются в [10], [12], [13].

Результаты, аналогичные перечисленным, имеются для уравнений (1) с комплексными коэффициентами ($H(t)$ — эрмитова матрица функции, $J^*=-J$, $\det J\neq0$, см., напр., [11]). В работе [14] рассмотрена более общая система

$$Q(t)\frac{dy}{dt}=\left[S(t)-\frac{1}{2}\frac{dQ}{dt}\right]y,$$

где $Q(t)^*=-Q(t)$, $S(t)^*=S(t)$, $\det Q(t)\neq0$,
$Q(t+T)=Q(t)$, $S(t+T)=S(t)$.

Выяснено, что как в комплексном, так и в действительном случаях имеется конечное число областей устойчивости, получены их характеристики в терминах свойств решений соответствующих уравнений.

Ряд аналогичных результатов получен также для операторных уравнений (2) в гильбертовом пространстве с ограниченными и неограниченными операторными коэффициентами (см. [15], [16]).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Собр. соч., т. 2, 1956, с. 7—263; [2] Крейн М. Г., в сб.: Памяти А. А. Андронова, М., 1955, с. 413—98; [3] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972, гл. 3; [4] Гельфанд И. М., Лидский В. Б., «Успехи матем. наук», 1955, т. 10, № 1, с. 3—40; [5] Sternberg R. L., «Duke Math. J.», 1952, v. 19, № 2, p. 311—22; [6] Якубович В. А., «Матем. сб.», 1962, т. 56 (98), № 1, с. 3—42; [7] Крейн М. Г., Якубович В. А., в кн.: Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, т. 1, К., 1963, с. 277—305; [8] Лидский В. Б., «Докл. АН СССР», 1955, т. 102, № 5, с. 877—80; [9] Дергузов В. М., «Матем. сб.», 1964, т. 63 (105), № 4, с. 591—619; [10] Moser J., «Comm. Pure Appl. Math.», 1958, v. 11, № 1, p. 81—114; [11] Coppel W. A., Howe A., «J. Austral. Math. Soc.», 1965, v. 5, № 2, p. 169—95; [12] Митропольский Ю. А., Метод усреднения в нелинейной механике, К., 1971; [13] Еругин Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963; [14] Лидский В. Б., Фролов П. А., «Матем. сб.», 1966, т. 71 (113), № 1, с. 48—64; [15] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970, гл. 5; [16] Фомин В. Н., Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах, Л., 1972.

В. А. Якубович.

ГАММА-КОРРЕЛЯЦИЯ — двумерное распределение неотрицательных случайных зависимых величин X_1 и X_2, задаваемое плотностью

$$p(x_1, x_2) = p_1(x_1)\, p_2(x_2) \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k L_k^{\alpha_1}(x_1) L_k^{\alpha_2}(x_2),$$

где $0 \leqslant x_\nu < \infty$, $\alpha_\nu \geqslant \gamma > -1$, $\rho_\nu(x_\nu) = x_\nu^{\alpha_\nu} e^{-x_\nu} / \Gamma(\alpha_\nu + 1)$, $L_k^{\alpha_\nu}(x_\nu)$ — *Лагерра многочлены*, ортонормированные на положительной полуоси с весом $\rho_\nu(x_\nu)$, $\nu = 1, 2$;

$$a_k = \frac{\Gamma(\gamma + k + 1)}{\Gamma(\gamma + 1)} \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha_1 + 1)\,\Gamma(\alpha_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + k + 1)\,\Gamma(\alpha_2 + k + 1)}},$$

$$c_k = \int_0^1 \lambda^k\, dF(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$F(\lambda)$ — произвольная функция распределения на отрезке $[0, 1]$. Коэффициент корреляции между X_1 и X_2 равен $c_1 \frac{\gamma + 1}{\sqrt{(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)}}$. При $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma$ получается симметричная Г.-к., тогда $a_k = 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и соответствующая характеристич. функция имеет вид

$$\varphi(t_1, t_2) = \int_0^1 \frac{dF(\lambda)}{[1 - it_1 - it_2 - t_1 t_2 (1 - \lambda)]^{1 + \gamma}},$$

если $F(\lambda)$ такова, что $P(\lambda = R) = 1$, то $c_k = R^k$ и $\varphi(t_1, t_2) = [1 - it_1 - it_2 - t_1 t_2 (1 - R)]^{-1 - \gamma}$, причем R есть коэффициент корреляции между X_1 и X_2 ($0 \leqslant R \leqslant 1$). В последнем случае ряд для плотности суммируется с помощью формулы (см. [2]):

$$p(x_1, x_2) = \frac{(x_1 x_2)^\gamma e^{-x_1 - x_2}}{\Gamma^2(\gamma + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} R^k L_k^\gamma(x_1) L_k^\gamma(x_2) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x_1 + x_2}{1 - R}}}{(1 - R)\,\Gamma(\gamma + 1)} \left(\frac{x_1 x_2}{R}\right)^{\frac{\gamma}{2}} I_\gamma\left(\frac{2\sqrt{x_1 x_2 R}}{1 - R}\right),$$

где I_γ — функция Бесселя от мнимого аргумента [2].

Лит.: [1] Сарманов И. О., в кн.: Тр. Гидрологического ин-та, 1969, в. 162, с. 37—61; [2] Miller-Lebedeff W., «Math. Ann.», 1907, Bd 64, S. 388—416.

О. В. Сарманов.

ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное сосредоточенное на положительной полуоси $0 < x < \infty$ распределение вероятностей с плотностью

$$g_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda - 1} e^{-x},$$

где λ — параметр, принимающий положительные значения, и $\Gamma(\lambda)$ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty y^{\lambda - 1} e^{-y}\, dy.$$

Соответствующая функция распределения при $x \leqslant 0$ равна нулю, а при $x > 0$ выражается формулой

$$G_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x y^{\lambda-1} e^{-y}\, dy.$$

Интеграл в правой части наз. неполной гамма-функцией. Плотность $g_\lambda(x)$ унимодальна и при $\lambda > 1$ достигает максимума $(\lambda-1)^{\lambda-1}e^{-(\lambda-1)}/\Gamma(\lambda)$ в точке $x = \lambda - 1$. При $0 < \lambda < 1$ плотность $g_\lambda(x)$ с ростом x монотонно убывает, причем если $x \to +0$, то $g_\lambda(x)$ неограниченно возрастает. Характеристич. функция Г.-р. имеет вид

$$\varphi(t) = (1 - it)^{-\lambda}.$$

Моменты Г.-р. выражаются формулой

$$m_k = \int_0^\infty x^k g_\lambda(x)\, dx = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}, \quad k > -\lambda;$$

в частности, математич. ожидание и дисперсия равны λ. Г.-р. замкнуто относительно операции свертки:

$$g_{\lambda_1} * g_{\lambda_2} = g_{\lambda_1+\lambda_2}.$$

Г.-р. играют не всегда явную, но значительную роль в приложениях. В частном случае $\lambda = 1$ получается показательная плотность. В теории массового обслуживания Г.-р. при λ, принимающем целочисленные значения, наз. *Эрланга распределением*. В математич. статистике Г.-р. часто встречаются благодаря тесной связи с нормальным распределением, т. к. сумма квадратов $\chi^2 = X_1^2 + \ldots + X_n^2$ взаимно независимых (0,1) нормально распределенных случайных величин имеет плотность $0{,}5\, g_{n/2}(x/2)$ и наз. хи-квадрат плотностью с n степенями свободы. Ввиду этого с Г.-р. связаны многие важные распределения в задачах математич. статистики, где рассматриваются квадратичные формы от нормально распределенных случайных величин (напр., *Стьюдента распределение*, F-распределение и z-распределение Фишера). Если X_1 и X_2 независимы и распределены с плотностями g_{λ_1} и g_{λ_2}, то случайная величина $X_1/(X_1+X_2)$ имеет плотность

$$\frac{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1)\,\Gamma(\lambda_2)}\, x^{\lambda_1-1}(1-x)^{\lambda_2-1}, \quad 0 < x < 1,$$

к-рая наз. плотностью бета-распределения. Плотности линейных функций $aX+b$ от случайных величин X, подчиняющихся Г.-р., составляют специальный класс распределений — так наз. «тип III» семейства распределений К. Пирсона (K. Pearson). Плотность Г.-р. является весовой функцией системы ортогональных многочленов Лагерра. Значения функции Г.-р. можно вычислить по таблицам неполной гамма-функции (см. [1]).

Лит.: [1] Пагурова В. И., Таблицы неполной гамма-функции, М., 1963.

А. В. Прохоров.

ГАММА-ФУНКЦИЯ, Г-функция,— трансцендентная функция $\Gamma(z)$, распространяющая значения факториала $z!$ на случай любого комплексного $z \neq 0, -1, -2, \ldots$. Г.-ф. введена Л. Эйлером [(L. Euler), 1729, письмо к Х. Гольдбаху (Ch. Goldbach)] при помощи бесконечного произведения

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^z}{z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)},$$

из к-рого Л. Эйлер получил интегральное представление (*эйлеров интеграл* второго рода)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx,$$

верное для $\operatorname{Re} z>0$. Многозначность функции x^{z-1} устраняется формулой $x^{z-1}=e^{(z-1)\ln x}$ с действительным $\ln x$. Обозначение $\Gamma(z)$ и назв. Г.-ф. были предложены А. М. Лежандром (A. M. Legendre, 1814).

Если $\operatorname{Re} z<0$ и $-k-1<\operatorname{Re} z<-k$, $k=0, 1, 2, \ldots$, то Г.-ф. может быть представлена интегралом Коши—Зальшюца:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty x^{z-1}\left(e^{-x}-\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\frac{x^m}{m!}\right)dx.$$

На всей плоскости z с выброшенными точками $z=0, -1, -2, \ldots$ для Г.-ф. справедливо интегральное представление Ганкеля:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{e^{2\pi i z}-1}\int_C s^{z-1}e^{-s}\,ds,$$

где $s^{z-1}=e^{(z-1)\ln s}$, причем $\ln s$ есть ветвь логарифма, для к-рой $0<\arg\ln s\leqslant 2\pi$; контур C изображен на рис. 1. Из представления Ганкеля видно, что $\Gamma(z)$ — *мероморфная функция*. В точках $z_n=-n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, она имеет простые полюсы с вычетами $(-1)^n/n!$



Рис. 1.

Основные соотношения и свойства Г.-ф.

1) Функциональное уравнение Эйлера:

$$z\Gamma(z)=\Gamma(z+1),$$

или

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n)}\Gamma(z+n+1);$$

$\Gamma(1)=1$, $\Gamma(n+1)=n!$, если $n>0$ — целое, при этом считают $0!=\Gamma(1)=1$.

2) Формула дополнения Эйлера:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

В частности,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi};\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi},$$

если $n>0$— целое, то

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|^2=\frac{\pi}{\operatorname{ch}y\pi},\quad y\text{ — действительное.}$$

3) Формула умножения Гаусса:

$$\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right)=(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}m^{\frac{1}{2}-mz}\Gamma(mz),$$

$$m=2, 3, 4, \ldots.$$

При $m=2$ это есть формула удвоения Лежандра.

4) При $\operatorname{Re} z\geqslant\delta>0$ или $|\operatorname{Im} z|\geqslant\delta>0$ имеет место асимптотич. разложение $\ln\Gamma(z)$ в ряд Стирлинга:

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi+$$
$$+\sum_{n=1}^{m}\frac{B_{2n}}{2n(2n-1)z^{2n-1}}+O(z^{-2m-1}),$$
$$m=1,2, \ldots,$$

где B_{2n} — *Бернулли числа*. Из чего следует равенство

$$\Gamma(z)=\sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\left[1+\frac{z^{-1}}{12}+\frac{z^{-2}}{288}-\right.$$
$$\left.-\frac{139z^{-3}}{51\,840}-\frac{571z^{-4}}{2488320}+O(z^{-5})\right].$$

В частности,

$$\Gamma(1+x)=\sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{\theta}{12x}},\quad 0<\theta<1.$$

Более точной является формула Сонина [6]:

$$\Gamma(1+x)=\sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12(x+\theta)}},\quad 0<\theta<\frac{1}{2}.$$

5) В действительной области $\Gamma(x)>0$ для $x>0$ и принимает знак $(-1)^{k+1}$ на участках $-k-1<x<-k$,

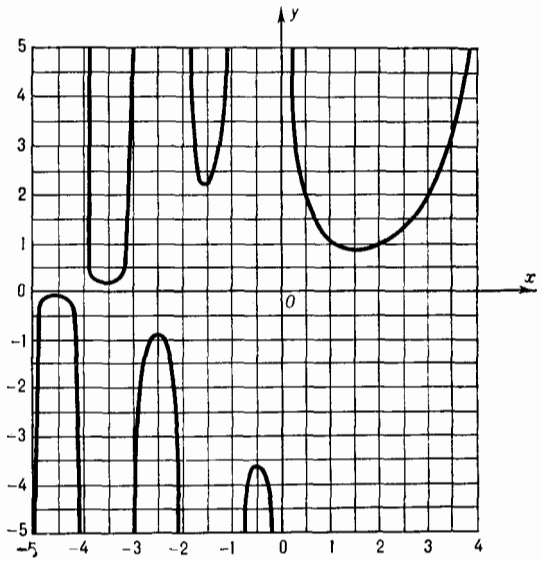


Рис. 2. График функции $y=\Gamma(x)$.

$k=0, 1, 2, \ldots$ (см. рис. 2). Для всех действительных x справедливо неравенство

$$\Gamma\Gamma''>\Gamma'^2\geqslant 0,$$

т. е. все ветви как $|\Gamma(x)|$, так и $\ln|\Gamma(x)|$ — выпуклые функции. Свойство логарифмич. выпуклости определяет Г.-ф. среди всех решений функционального уравнения

$$\Gamma(1+x)=x\Gamma(x)$$

с точностью до постоянного множителя.

Для положительных x Г.-ф. имеет единственный минимум при $x=1{,}4616321\ldots$, равный $0{,}885603\ldots$. Локальные минимумы функции $|\Gamma(x)|$ при $x\to-\infty$ образуют последовательность, стремящуюся к нулю.

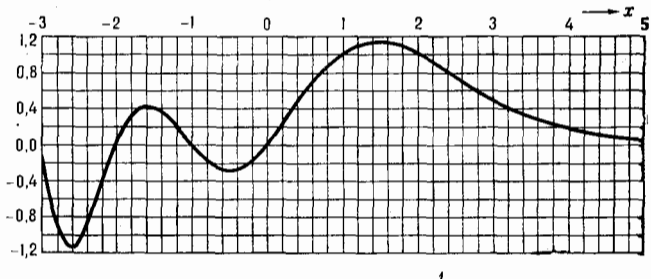


Рис. 3. График функции $\frac{1}{\Gamma(x)}$.

6) В комплексной области, при $\mathrm{Re}\ z>0$, Г.-ф. быстро убывает при $|\mathrm{Im}\ z|\to\infty$

$$\lim_{|\mathrm{Im}\ z|\to\infty}|\Gamma(z)|\,|\mathrm{Im}\ z|^{\frac{1}{2}-\mathrm{Re}\ z}e^{\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}\ z|}=\sqrt{2\pi}.$$

7) Функция $1/\Gamma(z)$ (см. рис. 3) является целой функцией 1-го порядка максимального типа, причем асимптотически при $r\to\infty$

$$\ln M(r)\sim r\ln r,$$

где

$$M(r) = \max_{|z|=r} \frac{1}{|\Gamma(z)|}.$$

Она представима бесконечным произведением Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{Cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right],$$

абсолютно и равномерно сходящимся на любом компактном множестве комплексной плоскости (здесь C — *Эйлера постоянная*). Справедливо интегральное представление Ганкеля:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} e^s s^{-z}\, ds,$$

где контур C^* изображен на рис. 4.

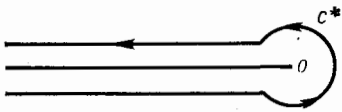


Рис. 4.

Интегральные представления для степеней Г.-ф. были получены Г. Ф. Вороным [7].

В приложениях большую роль играют так наз. полигамма-функции, являющиеся k-ми производными от $\ln \Gamma(z)$. Функция (ψ-функция Гаусса)

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} =$$

$$= -C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z-1}{(n+1)(z+n)} = -C + \int_0^1 \frac{1-(1-t)^{z-1}}{t}\, dt$$

мероморфна, имеет простые полюсы в точках $z=0, -1, -2, \ldots$ и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\psi(z+1) - \psi(z) = \frac{1}{z}.$$

Из представления $\psi(z)$ при $|z|<1$ следует формула

$$\ln \Gamma(1+z) = -Cz + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k S_k}{k} z^k,$$

где

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k};$$

эта формула полезна для вычисления $\Gamma(z)$ в окрестности точки $z=1$.

О других полигамма-функциях см. [2]. *Неполная гамма-функция* определяется равенством

$$I(x, y) = \int_0^y e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Функции $\Gamma(z)$, $\psi(z)$ суть трансцендентные функции, не удовлетворяющие никакому линейному дифференциальному уравнению с рациональными коэффициентами (теорема Гёльдера).

Исключительная роль Г.-ф. в математич. анализе определяется тем, что при помощи Г.-ф. выражается большое количество определенных интегралов, бесконечных произведений и сумм рядов (см., напр., *Бета-функция*). Кроме того, Г.-ф. находит широкие применения в теории специальных функций (*гипергеометрической функции*, для которой Г.-ф. является предельным случаем, *цилиндрических функций* и др.), в аналитич. теории чисел и т. д.

Лит.: [1] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., т. 2, 2 изд., М., 1963; [2] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, пер. с англ., М., 1965; [3] Бурбаки Н., Функции действительного переменного. Элементарная теория, пер. с франц., М., 1965; [4] Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби, (Справочная математическая библиотека), М., 1961; [5] Nielsen N., Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Lpz., 1906; [6] Сонин Н. Я., Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах, М., 1954;

[7] Вороной Г. Ф., Собр. соч., т. 2, К., 1952, с. 53—62; [8] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968; [9] Анго А., Математика для электро- и радиоинженеров, пер. с франц., 2 изд., М., 1967. *Л. П. Купцов.*

ГАММЕРШТЕЙНА УРАВНЕНИЕ — нелинейное интегральное уравнение вида

$$\varphi(x)+\int_a^b K(x,\ s)\ f[s,\ \varphi(s)]\ ds=0,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

где $K(x,\ s)$ и $f(x,\ s)$ — заданные функции, а $\varphi(x)$ — искомая функция. Названо по имени А. Гаммерштейна [1], рассмотревшего случай, когда $K(x,\ s)$ есть фредгольмово симметричное и положительное ядро, т. е. все его собственные значения положительны. Если, кроме того, функция $f(x,\ s)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$|f(x,\ s)|\leqslant C_1|s|+C_2,$$

где C_1 и C_2 — положительные постоянные, причем C_1 меньше первого собственного значения ядра $K(x,\ s)$, то Г. у. имеет по крайней мере одно непрерывное решение. Если же для любого фиксированного x из интервала $(a,\ b)$ функция $f(x,\ s)$ является неубывающей функцией от s, то Г. у. может иметь не более одного решения. Это последнее свойство сохраняется и в том случае, если функция $f(x,\ s)$ удовлетворяет условию

$$|f(x,\ s_1)-f(x,\ s_2)|\leqslant C|s_1-s_2|,$$

где положительная постоянная C меньше первого собственного значения ядра $K(x,\ s)$. Для построения решения Г. у. можно применять *последовательных приближений метод*.

Лит.: [1] Hammerstein A., «Acta math.», 1930, Bd 30, S. 117—76; [2] Трикоми Ф., Интегральные уравнения, пер. с англ., М., 1960; [3] Вайнберг М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956; [4] Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956; [5] Смирнов Н. С., Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений, М.—Л., 1936. *Б. В. Хведелидзе.*

ГАНКЕЛЯ ФУНКЦИИ, Ханкеля функции,— *цилиндрические функции* 3-го рода. Г. ф. могут быть следующим образом определены через Бесселя функции:

$$H_p^{(1)}(z)=\frac{J_{-p}(z)-e^{-ip\pi}J_p(z)}{i\sin p\pi},$$

$$H_p^{(2)}(z)=\frac{e^{ip\pi}J_p(z)-J_{-p}(z)}{i\sin p\pi}$$

(p-нецелое). Отсюда вытекают важные соотношения

$$H_{-p}^{(1)}(z)=e^{ip\pi}H_p^{(1)}(z),$$

$$H_{-p}^{(2)}(z)=e^{-ip\pi}H_p^{(2)}(z).$$

Г. ф. комплексны при действительных значениях z; однако

$$i^{p+1}H_p^{(1)}(iz)\ \text{ и }\ i^{-(p+1)}H_p^{(2)}(-iz)$$

действительны, если z действительно и положительно. Г. ф. обладают простыми асимптотич. представлениями при больших $|z|$:

$$H_p^{(1)}(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i\left(z-p\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)},$$

$$H_p^{(2)}(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i\left(z-p\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Г. ф. «полуцелого» аргумента $p=n+{}^1/_2$ выражаются через элементарные функции, в частности:

$$H_{1/2}^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{iz}}{i},$$

$$H_{1/2}^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{-iz}}{-i}.$$

Г. ф. введена Г. Ганкелем (H. Hankel, 1869).

Лит.: [1] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, 2 изд., пер. с нем., М., 1968.
П. И. Лизоркин.

ГАРМОНИЗУЕМАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — *поток*, траектории к-рого после нек-рой замены времени становятся почти периодическими. Обычно при этом еще требуют, чтобы каждая траектория была всюду плотна в фазовом пространстве (так что можно говорить о гармонизуемом минимальном множестве). *Д. В. Аносов.*

ГАРМОНИЗУЕМЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС — комплексозначная случайная функция $X=X(t)$ действительного параметра t, допускающая представление в виде *стохастического интеграла*

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,d\Phi(\lambda)=\lim\sum_k e^{i\lambda t}\,\Delta_k\Phi(\lambda), \qquad (*)$$

где $\Phi(\lambda), -\infty<\lambda<\infty,$ — случайный процесс. Приращения $\Delta_k\Phi(\lambda)=\Phi(\lambda_{k+1})-\Phi(\lambda_k)$ в (*) задают случайные «амплитуду» $A_k=|\Delta_k\Phi(\lambda)|$ и «фазу» $\theta_k=\arg\Delta_k\Phi(\lambda)$ элементарных колебаний вида

$$Ae^{i(\lambda t+\theta)}=e^{i\lambda t}\,\Delta_k\Phi(\lambda)$$

частоты λ, $\lambda_k\leqslant\lambda\leqslant\lambda_{k+1}$, суперпозиция к-рых в пределе дает случайный процесс $X=X(t)$. Переход к пределу (в среднем квадратичном) в представлении (*) осуществляется при все более мелком разбиении прямой $-\infty<\lambda<\infty$ на интервалы $\Delta_k=(\lambda_k,\lambda_{k+1})$, когда $\max\limits_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\to 0$. Обычно предполагают, что

$$F(\Delta_1\times\Delta_2)=\mathsf{E}(\Delta_1\Phi\cdot\Delta_1\overline{\Phi})$$

как функция множеств $\Delta_1\times\Delta_2$ на плоскости задает комплексную меру ограниченной вариации; в этом случае соответствующий процесс $\Phi(\lambda)$, $-\infty<\lambda<\infty$ [или точнее, соответствующая случайная мера $d\Phi(\lambda)$] однозначно определяется самим процессом $X(t)$, $-\infty<t<\infty$:

$$\Delta\Phi(\lambda)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-i\lambda_2 t}-e^{-i\lambda_1 t}}{-it}\,X(t)\,dt$$

для любого интервала $\Delta=(\lambda_1,\lambda_2)$ такого, что $d\Phi(\lambda_1)=d\Phi(\lambda_2)=0$ и

$$\Phi(\lambda)=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}e^{-i\lambda t}\,X(t)\,dt$$

для любой точки λ, $-\infty<\lambda<\infty$. Случайный процесс $X(t)$, $-\infty<t<\infty$, является Г. с. п. тогда и только тогда, когда его корреляционная функция представима в виде

$$B(s,\,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\lambda s-\mu t)}\,F(d\lambda\times d\mu).$$

Примеры Г. с. п. 1) Стационарный случайный процесс. Если

$$X_0(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\,d\Phi_0(t)$$

— стационарный случайный процесс, то процесс вида

$$X(t)=c(t)\,X_0(t),$$

где $c(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}m(d\lambda)$, $m(d\lambda)$ — некоторая мера на прямой, вообще говоря, уже не будет стационарным, но он будет гармонизуемым:

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}d\Phi(\lambda),$$

где случайная мера $d\Phi(\lambda)$ определена формулой

$$\Delta\Phi(\lambda)=\int_{\Delta}m(\Delta-\lambda)\,d\Phi_0(\lambda).$$

2) Процесс, определяемый с помощью скользящего суммирования

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}c(t-s)\,dZ(s),$$

где $dZ(t)$ — нек-рая случайная мера на прямой, а весовая функция $c(t)$ того же типа, что и выше:

$$c(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} m(d\lambda);$$

в этом случае

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda),$$

где

$$\Delta\Phi(\lambda)=\int_{\Delta}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\, dZ(t)\right] m(d\lambda).$$

Лит.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962, с. 486—511. *Ю. А. Розанов.*

ГАРМОНИКА — простейшая периодич. функция вида

$$A\sin(\omega x+\varphi).$$

Эта функция встречается при рассмотрении многих колебательных процессов. Число A наз. амплитудой, ω — частотой, φ — начальной фазой, $T=2\pi/\omega$ — периодом колебания. Функции $\sin(2\omega x+\varphi)$, $\sin(3\omega x+\varphi)$, ..., наз. соответственно второй, третьей и т. д. высшими Г. относительно основной Г. Помимо самих Г., рассматривают их суммы

$$a_0+a_1\sin(\omega x+\varphi)+a_2\sin(2\omega x+\varphi)+\ldots, \qquad (*)$$

так как очень широкий класс функций разлагается в ряды вида (*) для изучения различных процессов. *А. И. Барабанов.*

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ — термин, иногда применяемый для обозначения *емкости* множества в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, получаемой методом классической *потенциала теории* при помощи *ньютонова потенциала* при $n\geqslant 3$ или *логарифмического потенциала* при $n=2$, в отличие от *аналитической емкости* или емкостей, получаемых при помощи потенциалов других типов. *Е. Д. Соломенцев.*

ГАРМОНИЧЕСКАЯ МАЖОРАНТА, наименьшая гармоническая мажоранта $v(x)$ семейства $\{u_i\}$, — нижняя огибающая семейства $\mathfrak{V}=\{v_k\}$ всех супергармоних. мажорант v_k семейства $\{u_i\}$ субгармоних. функций на открытом множестве D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, т. е.

$$v(x)=\inf\{v_k(x);\ \ v_k\in\mathfrak{V}\},\quad x\in D.$$

Г. м. $v(x)$ либо является гармоних. функцией, либо $v(x)\equiv+\infty$. В случае семейства, состоящего из одной функции u, субгармонической на более широком множестве $D_0\supset D$, иногда используется также понятие наилучшей Г. м. v^* — решения обобщенной задачи Дирихле для D по значениям u на границе $\Gamma=\partial D$. Всегда $v^*-v\geqslant 0$, причем справедлива формула [1]

$$v^*(x)-v(x)=-\int_{\Gamma} G(x,\ y)\, d\mu(y),\quad x\in D,$$

где μ — ассоциированная с u мера, $\mu\leqslant 0$, $G(x,\ y)$ — (обобщенная) функция Грина задачи Дирихле для D. Наилучшая и наименьшая Г. м. совпадают тогда и только тогда, когда множество всех иррегулярных точек Γ имеет μ-меру нуль.

Соответственно, если $\{\tilde{u}_i\}$ — семейство супергармоних. функций на D, то наибольшая гармоническая миноранта $w(x)$ семейства $\{\tilde{u}_i\}$ определяется как верхняя огибающая семейства всех субгармоних. минорант семейства $\{\tilde{u}_i\}$; при этом $-w(x)$ есть наименьшая Г. м. для семейства $\{-\tilde{u}_i\}$.

Другую постановку вопроса о Г. м., связанную с задачей Коши для уравнения Лапласа, см. в ст. *Гармоническая функция.*

Лит.: [1] Frostman O., Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, Lund, 1935; [2] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964, гл. 2, 9. *Е. Д. Соломенцев.*

ГАРМОНИЧЕСКАЯ МЕРА — понятие теории *гармонических функций*, возникшее в связи с проблемами оценки модуля аналитич. функции внутри области, когда известны те или иные оценки модуля на границе области (см. [1], [2]). Пусть D — ограниченное открытое множество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $\Gamma=\partial D$ — граница D; $f=f(y)$ — конечная действительная непрерывная функция на Γ. Каждой такой функции f соответствует единственная гармонич. функция $H_f(x)$ на D, являющаяся для f обобщенным решением *Дирихле задачи*. Если считать точку $x\in D$ фиксированной, то функционал $H_f(x)$ определяет на компактном множестве Γ положительную борелевскую меру $\omega(x)=\omega(x;\ D)$, к-рая и называется гармонической мерой в точке x. Для всякой непрерывной на Γ функции f справедлива формула представления обобщенного решения задачи Дирихле

$$H_f(x)=\int f(y)\,d\omega(x;\ D),$$

полученная Ш.-Ж. Валле Пуссеном [3] *выметания методом*. Более того, если E — произвольное борелевское множество на Γ, то Г. м. $\omega(x;\ E,\ D)$, $x\in D$, множества E в точке x равна значению в x обобщенного решения задачи Дирихле для характеристич. функции $\chi_E(y)$, $y\in\Gamma$, множества E.

Основные свойства Г. м: $\omega(x;\ E,\ D)$ — гармонич. функция точки x на D;

$$0\leqslant\omega(x;\ E,\ D)\leqslant 1;$$

$$1-\omega(x;\ E,\ D)=\omega(x;\ \Gamma\setminus E,\ D);$$

если D — область и $\omega(x;\ E,\ D)=0$ хотя бы в одной точке $x\in D$, то $\omega(x;\ E,\ D)\equiv 0$.

В последнем случае E наз. множеством нулевой Г. м. Если компактное множество $K\subset\mathbb{R}^n$ имеет нулевую Г. м. относительно какой-либо одной области D, $K\subset D$, то есть $\omega(x;\ K,\ D\setminus K)=0$, то оно имеет нулевую Г. м. относительно любой другой области D, $K\subset D$, то есть K есть множество нулевой абсолютной Г. м. Множество K имеет нулевую абсолютную Г.м. тогда и только тогда, когда оно имеет нулевую (гармоническую) *емкость*.

С точки зрения приложений к теории функций комплексного переменного особенно важное значение имеет зависимость Г. м. от области D, выражаемая *гармонической меры принципом*, сущность к-рого состоит в том, что при отображениях области D, осуществляемых однозначными аналитич. функциями $w=w(z)$, $z\in D$, Г. м. не убывает. В частности, при взаимно однозначном конформном отображении Г. м. не изменяется.

Явное вычисление Г. м. удается провести лишь для простейших областей D (прежде всего, для круга и шара, полуплоскости, полупространства; см. *Пуассона интеграл*). Поэтому важное значение имеют различные методы оценки (см. [4]—[7]) Г. м., базирующиеся в основном на *расширения области принципе*. В простейшей форме при $n=2$ он состоит в следующем: пусть конечносвязная область D ограничена конечным числом жордановых кривых Γ, α — дуги, лежащие на Γ. Тогда, если область D расширяется каким-либо образом через дополнительную часть $\Gamma\setminus\alpha$ границы, то Г. м. $\omega(z;\ \alpha,\ D)$ может только увеличиться.

Лит.: [1] Carleman T., «Ark. mat.», 1921, Bd 15, № 10, p. 1—7; [2] Nevanlinna F., Nevanlinna R., «Acta Soc. scent. fennica», 1922, n. 50, № 5; [3] de la Vallée Poussin Ch.-J., «Ann. Inst. H. Poincaré», 1932, v. 2, p. 169—232; [4] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.— Л., 1941; [5] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [6] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [7] Haliste K., «Ark. mat.», 1965, Bd 6, № 1, p. 1—31.

Е. Д. Соломенцев.

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ФОРМА — внешняя *дифференциальная форма* α на римановом многообразии M,

удовлетворяющая уравнению $\Delta\alpha=0$, где $\Delta=d\delta+\delta d$ — *Лапласа оператор*, соответствующий римановой метрике на M, а δ — оператор, сопряженный к внешнему дифференциалу d. Если α имеет компактный носитель, то гармоничность формы α равносильна равенствам $d\alpha=\delta\alpha=0$. Г. ф. степени p на M образуют векторное пространство $H^p(M)$ над полем $\mathbb{R}$. Если риманово многообразие M компактно, то $H^p(M)$ конечномерно, как ядро эллиптич. оператора Δ. Поскольку Г. ф. замкнута, в силу теоремы де Рама возникает естественное отображение пространства $H^p(M)$ в пространство $H^p(M, \mathbb{R})$ вещественных когомологий степени p многообразия M. Из *Ходжа теоремы* следует, что это отображение является изоморфизмом. В частности, гармонич. функции, то есть Г. ф. степени 0, на связном компактном многообразии постоянны.

Г. ф. на компактном римановом многообразии инвариантны относительно любой связной группы изометрий этого многообразия, а для симметрического пространства M пространство $H^p(M)$ совпадает с пространством p-форм, инвариантных относительно наибольшей связной группы изометрий.

Параллельная теория Г. ф. существует для эрмитовых многообразий M. Г. ф. на эрмитовом многообразии M — это комплексная форма, лежащая в ядре оператора Бельтрами — Лапласа $\square$. Г. ф. типа (p, q) составляют пространство $H^{p,q}(M)$ над $\mathbb{C}$. Если M компактно, то $H^{p,q}(M)$ конечномерно и естественно изоморфно пространству когомологий Дольбо. В случае, когда M — *кэлерово многообразие*, эти два понятия Г. ф. фактически совпадают, поскольку $\square=\overline{\square}=\frac{1}{2}\Delta$. В этом случае

$$H^{p,\,q}(M)=\overline{H}^{q,\,p}(M)$$

и

$$H^k(M)\otimes\mathbb{C}=\sum\nolimits_{p+q=k}H^{p,\,q}(M).$$

Пусть ω — кэлерова форма на M, L — оператор внешнего умножения на ω, Λ — сопряженный к L оператор, $H_0^{p,q}(M)$ — пространство примитивных гармонических форм типа (p, q), т. е. форм $\alpha\in H^{p,q}(M)$, для которых $\Lambda\alpha=0$. Для $p\geqslant q$ и $p+q\leqslant\dim_{\mathbb{C}}M$ справедливо равенство

$$H^{p,\,q}(M)=\sum\nolimits_{s=0}^{q}L^s\,H_0^{p-s,\,q-s}(M)\cong$$

$$\cong\sum\nolimits_{s=0}^{q}H_0^{p-s,\,q-s}(M).$$

Для компактного кэлерова многообразия M пространство $H^{p,0}(M)$ совпадает с пространством $\Omega^p(M)$ *голоморфных форм* степени p. В частности,

$$H^1(M)\otimes\mathbb{C}=\Omega^1(M)\dotplus\overline{\Omega^1(M)}.$$

Изучение гармонич. функций и форм на римановых поверхностях восходит к Б. Риману (B. Riemann), сформулированные к-рым теоремы существования были полностью обоснованы к началу 20 в. Теория Г. ф. на компактных римановых многообразиях была впервые изложена У. Ходжем (см. [1]).

В дальнейшем были даны различные обобщения теории Г.ф. Пусть на римановом (соответственно эрмитовом) многообразии M задано локально плоское (соответственно аналитическое) векторное расслоение E и пусть на слоях расслоения E задана евклидова (соответственно эрмитова) метрика. При помощи надлежащего обобщения оператора Лапласа (соответственно Бельтрами — Лапласа) (см. [4], [8]) определяются пространства $H^p(E)$ (соответственно $H^{p,q}(E)$) гармонич. форм со значениями в E (см. *Дифференциальная форма*). Если M компактно, то эти пространства конечномерны и изоморфны соответствующим пространствам когомологий де Рама и Дольбо, допускающим в свою очередь интерпретацию в терминах когомологий пучков.

В случае локально плоского расслоения эти когомологии тесно связаны также с когомологиями группы $\pi_1(M)$. Если M не компактно, то пространство Г. ф. с интегрируемым квадратом изоморфно пространству когомологий комплекса форм с интегрируемым квадратом [2]. В случае, когда M — область с гладкой границей и компактным замыканием $\overline{M}$ в кэлеровом многообразии $\tilde{M}$, можно рассматривать также пространство Г. ф. типа (p, q) со значениями в векторном аналитич. расслоении E над $\tilde{M}$, гладких в M и непрерывных в $\overline{M}$. Если M строго псевдовыпукла, то это пространство конечномерно и изоморфно пространству когомологий Дольбо, соответствующему E над M [9].

Г. ф. являются мощным средством изучения когомологий вещественных и комплексных многообразий, а также когомологий дискретных групп. Из теории Г. ф. выводятся основные когомологич. свойства компактных кэлеровых многообразий и, в частности, проективных алгебраич. многообразий [1], [4], [5]. С помощью Г.ф. удается установить связь между кривизной компактного риманова многообразия и тривиальностью некоторых его групп когомологий [6], [7]. Аналогичные связи имеют место в комплексной аналитич. геометрии (см. [4], [5]) и в теории дискретных групп преобразований (см. [8]).

Лит.: [1] Hodge W. V. D., The theory and applications of harmonic integrals, 2 ed., Camb., 1952; [2] де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, пер. с франц., М., 1956; [3] Шварц Л., Комплексные аналитические многообразия. Эллиптические уравнения с частными производными, пер. с исп., М., 1964; [4] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [5] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [6] Goldberg S., Curvature and homology, N. Y.— L., 1962; [7] Яно К., Бохнер С., Кривизна и числа Бетти, пер. с англ., М., 1957; [8] Мацусима Й., Мураками С., «Математика», 1965, 9 : 5, с. 27—77; [9] Кон Дж. Дж., «Математика», 1964, 8 : 1, с. 108—41; 8 : 3, с. 80—101.

А. Л. Онищик.

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — действительная функция $u(x)$, заданная в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, имеющая в D непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков и являющаяся решением *Лапласа уравнения*

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

где x_1, x_2, ..., x_n — декартовы прямоугольные координаты точки x. Иногда это определение распространяется и на комплексные функции $w(x) = u(x) + iv(x)$ в том смысле, что их действительные и мнимые части $\operatorname{Re} w(x) = u(x)$ и $\operatorname{Im} w(x) = v(x)$ являются Г. ф. Требования непрерывности и, даже, наличия производных не являются априори необходимыми. Напр., справедлива одна из теорем Привалова: непрерывная в D функция $u(x)$ является Г. ф. тогда и только тогда, когда в любой точке $x \in D$ для всех достаточно малых $R > 0$ выполняется свойство среднего

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n(R)} \int_{B_n(x,\, R)} u(y)\, dy,$$

где $B_n(x, R)$ — шар радиуса R с центром x, $\omega_n(R)$ — объем шара $B_n(x, R)$, dy — элемент объема в $\mathbb{R}^n$.

В случае неограниченной области D с компактной границей ∂D Г. ф. может быть доопределена в бесконечно удаленной точке ∞, т. е. может быть доопределена в областях компактифицированного по Александрову пространства $\mathbb{R}^n$. Общий принцип такого доопределения состоит в том, чтобы при простейших преобразованиях, сохраняющих гармоничность (в случае $n = 2$ — *инверсия*, в случае $n \geqslant 3$ — *Кельвина преобразование*) и переводящих конечную точку x_0 в ∞, Г.ф. в окрестности x_0 переходила в Г. ф. в окрестности ∞. Исходя из этого, считают Г. ф. $u(x)$ регулярной в бес-

конечности при $n \geqslant 3$, если

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Таким образом, в случае регулярной в бесконечности Г.ф. $u(x)$ при $n \geqslant 3$ всегда $u(\infty) = 0$. При $n = 2$ должно выполняться условие

$$u(x) = O(1), \quad |x| \to \infty,$$

из к-рого вытекает существование конечного предела

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = u(\infty).$$

Под Г. ф. в неограниченных областях обычно понимаются регулярные в бесконечности Г. ф.

В теории Г. ф. важную роль играют главные фундаментальные решения уравнения Лапласа

$$h_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \text{ при } n = 2,$$

$$h_n(x) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} \text{ при } n \geqslant 3,$$

где σ_n — площадь единичной сферы пространства $\mathbb{R}^n$. При $|x| > 0$ это — Г. ф. С помощью фундаментальных решений записывается основная формула теории Г. ф., выражающая значения Г. ф. $u(x)$ внутри области D через ее значения $u(y)$ на границе $S = \partial D$ и через значения ее производной по направлению внешней нормали $\partial u(y)/\partial \nu$ к S в точке y:

$$\int_S \left[h_n(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y) \frac{\partial h_n(x-y)}{\partial \nu_y} \right] d\sigma(y) = \begin{cases} u(x), & x \in D, \\ 0, & x \notin \overline{D}. \end{cases}$$

Эта формула Грина справедлива, напр., при условии, что функция $u(x)$ и ее частные производные 1-го порядка непрерывны в замкнутой области $\overline{D}$, т. е. $u(x) \in C^1(\overline{D})$, граница S к-рой есть кусочно гладкая замкнутая поверхность или кривая. Она дает представление произвольной Г. ф. $u(x)$ в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя (см. *Потенциала теория*). Плотности этих потенциалов, т. е. соответственно граничные значения $\partial u(y)/\partial \nu$ и $u(y)$, не могут быть заданы произвольно. Между ними имеется интегральная зависимость, выражаемая тем, что левая часть последней формулы — интеграл Грина — должна обращаться в нуль для всех точек x, лежащих вне замкнутой области $\overline{D}$. Основная формула теории Г. ф. есть непосредственный аналог основной формулы теории аналитич. функций — интегральной формулы Коши (см. *Коши интеграл*). Эта формула справедлива также при замене в ней главного фундаментального решения h_n любым другим фундаментальным решением уравнения Лапласа, достаточно гладким в $\overline{D}$, напр. принадлежащим классу $C^1(\overline{D})$.

Основные свойства Г. ф. в предположении кусочной гладкости границы S области D (многие из них с соответствующими изменениями верны и для комплексных Г. ф.).

1) Если D — конечная область и Г.ф. $u(x) \in C^1(\overline{D})$, то

$$\int_S \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} d\sigma(y) = 0.$$

2) Теорема о среднем значении: если $u(x)$ — Г. ф. в шаре $B = B(x_0, R)$ радиуса R с центром x_0 и $u(x) \in C^1(\overline{B})$, то ее значение в центре шара равно среднему арифметическому ее значений на сфере $S(x_0, R)$, т. е.

$$u(x_0) = \frac{1}{\sigma_n(R)} \int_{S(x_0, R)} u(y)\, d\sigma(y),$$

где $\sigma_n(R)$ — площадь сферы радиуса R в $\mathbb{R}^n$. В предположении непрерывности $u(x)$ это свойство может быть принято за определение Г. ф.

3) Принцип экстремума: если D — область в $\mathbb{R}^n$, не содержащая внутри точки ∞, $u(x)$ — Г. ф. в D, $u(x)\neq\text{const}$, то ни в какой точке $x_0\in D$ функция $u(x)$ не может достигать локального экстремума, т. е. в любой окрестности $V(x_0)$ каждой точки $x_0\in D$ найдется точка $x^*\in V(x_0)$, в к-рой $u(x^*)>u(x_0)$, и найдется точка $x_*\in V(x_0)$, в к-рой $u(x_*)<u(x_0)$ (принцип экстремума в локальной форме). Если, кроме того, $u(x)\in C(\overline{D})$, то наибольшее и наименьшее значения $u(x)$ в замкнутой области $\overline{D}$ достигаются только в точках границы ∂D (принцип экстремума в глобальной форме). Следовательно, если $|u(x)|\leqslant M$ на ∂D, то $|u(x)|\leqslant M$ всюду в $\overline{D}$.

Этот принцип допускает обобщения в различных направлениях.

Например, если $u(x)$ — Г. ф. в области D, не содержащей ∞, и

$$\lim_{x\to y}\sup u(x)\leqslant M$$

для всех точек $y\in\partial D$, то $u(x)\leqslant M$ всюду в D.

4) Теорема о стирании особенностей: если $u(x)$ — Г. ф. в области $D\setminus\{x_0\}$, $x_0\in D$, удовлетворяющая условию

$$u(x)=o(|h_n(x-x_0)|),\quad x\to x_0,$$

то существует конечный предел

$$\lim_{x\to x_0}u(x)=u(x_0)$$

и $u(x)$, пополненная значением $u(x_0)$, есть Г. ф. в D.

5) Если $u(x)$ — Г.ф. во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, ограниченная сверху или снизу, то $u(x)=\text{const}$.

6) Если $u(x)$ — Г. ф. в окрестности точки $x_0=((x_1)_0, (x_2)_0, \ldots, (x_n)_0)$, то $u(x)$ разлагается в этой окрестности в степенной ряд по переменным $x_1-(x_1)_0, \ldots, x_n-(x_n)_0$, т. е. всякая Г. ф. есть аналитич. функция переменных $x_1, \ldots, x_n$; следовательно, Г. ф. $u(x)$ имеет производные всех порядков

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}},\quad k_1+\ldots+k_n=m,$$

к-рые в свою очередь являются Г. ф.

7) Свойство единственности: если $u(x)$ — Г. ф. в области $D\subset\mathbb{R}^n$ и $u(x)\equiv 0$ в нек-рой n-мерной окрестности какой-либо точки $x_0\in D$, то $u(x)\equiv 0$ в D. Если $u(x)$ — аналитическая функция действительных переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$ в области $D\subset\mathbb{R}^n$ и $u(x)$ — Г. ф. в нек-рой n-мерной окрестности какой-либо точки $x_0\in D$, то $u(x)$ — Г. ф. в D.

8) Принцип симметрии: пусть граница ∂D области $D\subset\mathbb{R}^n$ содержит открытое в плоскости $x_n=0$ множество G, $u(x)$ — Г. ф. в D и $u(x)=0$ всюду на G, $\tilde{D}$ — область, симметричная с D относительно плоскости $x_n=0$; тогда $u(x)$ гармонически продолжается в область $D\cup G\cup\tilde{D}$ по формуле

$$u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)=-u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n),$$
$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\in\tilde{D}.$$

9) Первая теорема Гарнака: если последовательность $\{u_n(x)\}$ Г. ф. в ограниченной области D, непрерывных в замкнутой области $\overline{D}$, сходится равномерно на границе ∂D, то она сходится равномерно в $\overline{D}$, причем предельная функция

$$u(x)=\lim_{n\to\infty}u_n(x)$$

есть Г. ф. в D.

10) Вторая теорема Гарнака: если последовательность $\{u_n(x)\}$ Г. ф. монотонна в области D и сходится по крайней мере в одной точке $x_0 \in D$, то она сходится всюду в D к Г. ф.

$$u(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x).$$

См. также *Гарнака неравенство*, *Гарнака теорема*.

Имеется тесная связь между Г. ф. двух переменных (x_1, x_2) и аналитич. функциями комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$. Действительная и мнимая части аналитич. функции являются, быть может, многозначными, сопряженными Г. ф., т. е. они связаны *Коши — Римана условиями*. Если в окрестности точки (x_1^0, x_2^0) задана Г. ф. $u(x_1, x_2)$, то простейшее решение задачи об отыскании аналитич. функции $f(z)$, $z = x_1 + ix_2$, для к-рой $u(x_1, x_2) = \operatorname{Re} f(z)$, дается формулой Гурса:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z+\overline{z^0}}{2}, \frac{z-\overline{z^0}}{2i}\right) - u(x_1^0, x_2^0) + iC_0,$$

где $\overline{z^0} = x_1^0 - ix_2^0$, C_0 — произвольная действительная постоянная. К многозначным Г. ф. в областях $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, приводят и нек-рые пространственные задачи математич. физики.

Важное значение Г.ф. в математич. физике обусловлено прежде всего тем, что часто встречаются потенциальные векторные поля вида $\boldsymbol{s} = -\operatorname{grad} u(x)$. Такие поля в областях, свободных от источников поля, должны удовлетворять уравнению сохранения $\operatorname{div} \boldsymbol{s} = -\Delta u(x) = 0$, т. е. уравнению Лапласа, а значит в таких областях потенциал $u(x)$ есть Г. ф.

Примеры: если $\boldsymbol{s}$ — силовой вектор гравитационного поля, то $u(x)$ — ньютонов потенциал сил тяготения; если $\boldsymbol{s}$ — поле скоростей установившегося движения несжимаемой однородной жидкости или газа, то $u(x)$ — потенциал скоростей; если $\boldsymbol{s}$ — напряженность электростатич. поля в однородной и изотропной среде, то $u(x)$ — потенциал электростатич. поля; если $\boldsymbol{s}$ — напряженность стационарного магнитного поля в однородной и изотропной среде, то $u(x)$ — скалярный, как правило, многозначный потенциал магнитного поля. В случае стационарного распределения тепла в однородной и изотропной среде или стационарного распределения диффундирующих частиц, Г. ф. $u(x)$ является непосредственно температура среды или соответственно плотность частиц в точке x. К решению задач на Г. ф. сводятся также многие важные вопросы теории упругости и теории электромагнитного поля.

В развитии теории Г. ф. и математич. физики особое место занимает краевая *Дирихле задача*, или первая краевая задача. Она состоит в отыскании гармонической в области D и непрерывной в $\overline{D}$ функции $u(x)$ по заданным ее непрерывным значениям $u(y)$ на границе области $S = \partial D$. В случае достаточно гладкой поверхности или линии S решение можно выразить при помощи *Грина функции* $G(x, y)$:

$$u(x) = -\int_S u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y} d\sigma(y).$$

При этом в случае простейших областей (шар, полупространство), когда нормальная производная $\partial G(x,y)/\partial \nu_y$ легко выражается в явном виде, получается *Пуассона интеграл*. Часто встречается также вторая краевая задача, или *Неймана задача*. Она состоит в определении Г. ф. $u(x)$ по заданным на границе S значениям ее нормальной производной. Решение этой задачи при помощи соответствующей функции Грина возможно, но явные выражения здесь значительно сложнее. Имеется еще целый ряд краевых задач теории Г. ф., более сложных по постановке и решению. См. также *Выметания метод*, *Робена задача*.

Особое место в современной теории Г. ф. занимают некорректные задачи, связанные в первую очередь с

задачей Коши для уравнения Лапласа. Сюда относится, напр., следующая проблема наилучшей мажоранты: если на границе $S=\partial D$ области D заданы функция $M=M(y)$ и условия $|u(y)|\leqslant M(y)$, $|\partial u(y)/\partial\nu|\leqslant M(y)$, то требуется оценить возможно точнее $\sup|u(x)|$ в классе Г. ф. $u(x)$ в D (см. [9], [10]).

Важное значение имеет исследование граничных свойств Г. ф., тесно связанное с субгармонич. функциями и *граничными свойствами аналитических функций*. Напр., в случае Г. ф. $u(x)$ в единичном шаре $B(0,\ 1)$ пространства $\mathbb{R}^n$, вообще говоря, $u(x)$ не имеет радиальных граничных значений

$$f(y)=\lim_{r\to 1} u(ry),\quad y\in S=\partial B(0,\ 1).$$

Однако для класса A Г. ф., определяемого условием

$$\int_S u^+(ry)\,d\sigma(y)\leqslant C(u)<\infty,$$

где $d\sigma(y)$ — элемент площади S, $u^+=\max\{0,\ u\}$, радиальные граничные значения существуют почти всюду на S по мере Лебега, и $u(x)\in A$ представима в виде интеграла Пуассона — Стилтьеса

$$u(x)=\int_S P_n(x,\ y)\,d\mu(y),$$

где

$$P_n(x,\ y)=\frac{1}{\sigma_n(1)}\,\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$$

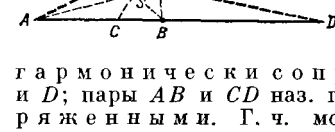
— ядро Пуассона, $d\mu$ — борелевская мера на S. Важное значение имеет также собственный подкласс B класса A, состоящий из всех Г.ф. $u(x)$, представимых в $B(0,\ 1)$ интегралом Пуассона — Лебега

$$u(x)=\int_S P_n(x,\ y)\,f(y)\,d\sigma(y).$$

Большое развитие получила аксиоматич. теория Г. ф. и потенциалов в топологич. пространствах (см. *Гармоническое пространство*, *Потенциала теория абстрактная*).

Лит.: [1] Тиман А. Ф., Трофимов В. Н., Введение в теорию гармонических функций, М., 1968; [2] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [3] Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.— Л., 1946; [4] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [5] Kellogg O. D., Foundations of potential theory, B., 1929; [6] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, М., 1967; [7] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд., М., 1965; [8] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [9] Лаврентьев М. М., О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосибирск, 1962; [10] Мергелян С. Н., «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, № 5, с. 3—26; [11] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [12] Соломенцев Е. Д., Гармонические и субгармонические функции и их обобщения, в кн.: Итоги науки. Серия математика. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование, 1962, М., 1964, с. 83—100. *Е. Д. Соломенцев.*

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЧЕТВЕРКА точек — четверка точек на прямой, обладающая тем свойством, что ее *двойное отношение* равно — 1. Если $(ABCD)$ — Г. ч., то говорят, что пара точек AB гармонически разделяет пару CD или что точки A и B гармонически сопряжены с точками C и D; пары AB и CD наз. гармонически сопряженными. Г. ч. может быть определена без привлечения метрич. понятий. Пусть $PQRS$ — четырехугольник (см. рис.), A и B — точки пересечения противоположных сторон, а C и D — точки пересечения диагоналей SQ и PR четырехугольника $PQRS$ с прямой AB. Тогда четверка точек $(ABCD)$ представляет собой Г. ч. Четверка прямых (или плоскостей), проходящих через одну точку (прямую), наз. гар-



монической четверкой прямых (плоскостей), если она проектирует Г. ч. *А. Б. Иванов.*

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — координаты, в к-рых *метрический тензор* g_{ik} удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{|g|}\,g^{ik}\right)=0,$$

где g — определитель, состоящий из компонент тензора g_{ik}. Использование Г. к. позволяет в ряде случаев (напр., при выводе уравнений движения в общей теории относительности) с помощью этих условий значительно упростить вычисления.

Лит.: [1] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, М., 1955. *А. Б. Иванов.*

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ — название раздела математики и математич. метода. В Г. а. как раздел математики обычно включают: теорию *тригонометрических рядов* (одномерных и многомерных), *Фурье преобразований* (функций одного и нескольких переменных), *почти периодических функций*, *Дирихле рядов*, *приближения теорию* (функций тригонометрическими полиномами), *гармонический анализ абстрактный* и нек-рые другие математич. дисциплины, близкие к указанным. Метод заключается в сведении нек-рых задач (из различных областей математики) к вопросам Г. а. и решаемых на его основе. Напр.: теория функций комплексного переменного в вопросах граничного поведения аналитических в единичном круге функций, по существу, сливается с теорией тригонометрич. рядов; изучение свойств случайных величин при помощи характеристич. функций — применение метода Г. а. в теории вероятностей; нек-рые объекты функционального анализа тесно связаны с тригонометрич. рядами, почти периодич. функциями и др. объектами Г. а.; в теории дифференциальных уравнений при помощи относящегося к Г. а. *Фурье метода* находятся решения различных уравнений математич. физики; наконец, многочисленные прикладные задачи вычислительной математики решаются на основе применения рядов и интегралов Фурье — объектов Г. а. *Е. М. Никишин.*

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АБСТРАКТНЫЙ — теория абстрактных *Фурье рядов* и *Фурье интегралов*. Классический гармонич. анализ — теория рядов Фурье и интегралов Фурье — интенсивно развивался под влиянием физич. задач в 18—19 вв., и в работах П. Дирихле (P. Dirichlet), Б. Римана (B. Riemann), А. Лебега (H. Lebesgue), М. Планшереля (M. Plancherel), Л. Фейера (L. Fejér), Ф. Рисса (F. Riesz) оформился в самостоятельную математич. дисциплину.

Дальнейшее развитие гармонич. анализа привело к установлению разнообразных связей гармонич. анализа с общими вопросами теории функций и функциональным анализом. Открытие *Хаара меры* и развитие теории *представлений бесконечных групп*, начиная с работ Г. Вейля и Ф. Петера (см. [1]) по теории *представлений бикомпактных групп* и работ Л. С. Понтрягина [2] по теории характеров локально бикомпактных абелевых групп, поставили вопрос о естественных границах основных результатов классического гармонического анализа. Эта задача основана на следующей интерпретации обычного ряда Фурье в комплексной форме. Пусть $f(x)$ — комплекснозначная суммируемая с квадратом функция на окружности единичной длины (или на отрезке $[0, 1]$), c_n — ее коэффициенты Фурье по системе $\{e^{2\pi inx},\ n$ — целое$\}$:

$$c_n=\int_0^1 f(x)\,e^{-2\pi inx}\,dx.$$

Тогда ряд Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi inx}$$

функции $f(x)$ сходится в среднем к $f(x)$ в L^2 $[0, 1]$.

Мера Лебега на [0, 1] порождает меру Хаара на окружности (единичной длины) G, рассматриваемой как группа вращений плоскости, а функции $x \to e^{2\pi i n x}$ представляют собой полный набор неприводимых *унитарных представлений* топологич. группы G. Поэтому все величины, входящие в определение ряда Фурье, получают теоретико-групповой смысл и появляется возможность обобщения понятия ряда Фурье, основанная на теории неприводимых унитарных представлений топологич. групп. При этом Г. а. а. не только позволяет найти естественную форму результатов классического гармонич. анализа на прямой или окружности, но и установить новые результаты, относящиеся к бо́льшим классам топологич. групп.

Г. а. а. как гармонический анализ на группах зародился в значительной мере на основе теории характеров локально бикомпактных абелевых групп, созданной Л. С. Понтрягиным [2] (см. также [7], [8], [9]). Г. а. а. является одной из естественных областей приложения методов теории банаховых алгебр и может до нек-рой степени рассматриваться как одна из ветвей этой теории. С другой стороны, рамки Г. а. а. являются естественными для ряда классических задач теории функций и функционального анализа.

Приложения Г. а. а. весьма многообразны. Результаты Г. а. а. применяются в общей теории локально бикомпактных групп (напр., в структурных теоремах), в теории динамич. систем, в теории представлений бесконечных групп (к-рая, в свою очередь, служит одним из основных инструментов Г. а. а.) и во многих других математич. теориях.

Наиболее разработанным разделом Г. а. а. является теория интеграла Фурье на локально бикомпактной абелевой группе. Среди некоммутативных групп особое положение занимают бикомпактные группы, теория представлений к-рых имеет сравнительно простой и законченный вид: для бикомпактных групп получен ответ на многие классич. вопросы гармонич. анализа. В случае небикомпактных некоммутативных групп общая теория далека от завершения (1977). Однако и в этом случае известны естественные границы ряда фундаментальных результатов классического гармонич. анализа.

Связь задач Г. а. а. с теорией банаховых алгебр основана на возможности построить по любой локально бикомпактной топологич. группе G две банаховы алгебры, играющие большую роль в теории представлений группы G: *групповую алгебру* и *алгебру мер* $M(G)$, к-рая определяется следующим образом. Пусть $C_0(G)$ — множество непрерывных функций f на G с бикомпактным носителем, $M(G)$ — банахово пространство ограниченных *регулярных мер* на G. Введение в $M(G)$ умножения — свертки $(\mu_1, \mu_2) \to \mu_1 * \mu_2$ и инволюции $\mu \to \mu^*$ посредством соотношений (для всех $f \in C_0$)

$$\int_G f(g)\, d(\mu_1 * \mu_2)(g) = \int_G \int_G f(gh)\, d\mu_1(g)\, d\mu_2(h),$$

$$\int_G f(g)\, d\mu^*(g) = \overline{\int_G f(g^{-1})\, d\mu(g)}$$

превращает $M(G)$ в банахову алгебру с инволюцией, называемую алгеброй мер группы G. Если dg — левоинвариантная мера Хаара на G, то сопоставление каждому элементу $f(g)$ групповой алгебры $L^1(G)$ меры $f(g)dg$ приводит к изометрич. отображению алгебры $L^1(G)$ на замкнутую подалгебру алгебры мер $M(G)$, сохраняющему инволюцию. В этом смысле $L^1(G)$ может рассматриваться как замкнутая подалгебра алгебры $M(G)$.

Г. а. а. на локально бикомпактной абелевой группе. Для построения интеграла Фурье на локально бикомпактной абелевой группе G необходимы следующие факты. Любое неприводимое

унитарное представление G одномерно и определяет непрерывный гомоморфизм G в мультипликативную группу U комплексных чисел с модулем 1. Такое отображение $\chi\colon G\to U$ наз. унитарным характером группы G. Пусть $\hat{G}$ — группа характеров группы G. Теорема двойственности Понтрягина утверждает, что отображение $\eta\colon G\to\hat{\hat{G}}$, определяемое формулой

$$(\eta(g))(\chi)=\chi(g),$$

где $\chi\in\hat{G}$, $g\in G$, есть топологич. изоморфизм группы G на $\hat{\hat{G}}$ (см. [2], [3], [4], [6]). При этом группа G бикомпактна тогда и только тогда, когда двойственная к ней группа $\hat{G}$ дискретна. Группа характеров аддитивной группы K недискретного локально бикомпактного поля изоморфна K; группа характеров группы U изоморфна группе целых чисел Z. Если H — замкнутая подгруппа группы G и $H^{\perp}$ — множество таких $\chi\in G$, что $\chi\equiv 1$ на H, то $H^{\perp}$ есть замкнутая подгруппа группы G, $(H^{\perp})^{\perp}=\eta(H)$, $\hat{G}/H^{\perp}\approx\hat{H}$, и любой унитарный характер подгруппы H продолжается до унитарного характера группы G.

Интегралом Фурье на группе G (или преобразованием Фурье на группе G) наз. отображение F, к-рое мере $\mu\in M(G)$ ставит в соответствие функцию $\hat{\mu}=F\mu$ на $\hat{G}$, определяемую равенством

$$(F\mu)(\chi)=\int_G\overline{\chi(g)}\,d\mu(g).$$

Копреобразованием Фурье наз. отображение $\overline{F}$, определяемое равенством

$$(\overline{F}\mu)(\chi)=\int_G\chi(g)\,d\mu(g),\quad\mu\in M(G).$$

Для $f\in L^1(G)$ функция $F(f(g)dg)$ обозначается $\hat{f}$ или Ff (соответственно $\overline{F}f$). Отображения F и $\overline{F}$ являются *мономорфизмами* $M(G)$ в $L^{\infty}(\hat{G})$; образом для $M(G)$ при этих отображениях служит алгебра $B(G)$ линейных комбинаций непрерывных положительно определенных функций на $\hat{G}$. Справедлива обобщенная теорема Бохнера (см. [4], [6]): функция $F\mu$ является положительно определенной функцией на G тогда и только тогда, когда μ — положительная мера, и в этом случае

$$\sup_{\chi\in\hat{G}}|F\mu(\chi)|=F\mu(\hat{e})=\|\mu\|,$$

где $\hat{e}$ — единица группы $\hat{G}$.

Топологич. пространство $\hat{G}$ канонически гомеоморфно спектру кольца $L^1(G)$ (или пространству максимальных идеалов алгебры $L^1(G)$). Именно, характеру $\chi\in\hat{G}$ ставится в соответствие характер коммутативной алгебры $L^1(G)$, определяемый формулой

$$f\longrightarrow\int_G f(g)\chi(g)\,dg,\quad f\in L^1(G);$$

при этом копреобразование Фурье $\overline{F}$ совпадает на $L^1(G)$ с *Гельфанда представлением* алгебры $L^1(G)$. Спектр кольца $M(G)$, вообще говоря, не гомеоморфен $\hat{G}$.

Пусть $d\chi$ — мера Хаара на $\hat{G}$, а $L^2(\hat{G})$ — соответствующее гильбертово пространство. Справедлива следующая теорема Планшереля (см. [4], [16]): если $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$, то $Ff\in L^2(\hat{G})$, и при нек-рой нормировке мер dg и $d\chi$ отображение $f\to Ff$ множества $L^1(G)\cap L^2(G)$ в $L^2(\hat{G})$ продолжается единственным образом до унитарного оператора F из $L^2(G)$ в $L^2(\hat{G})$. Этот оператор наз. преобразованием Фурье в $L^2(G)$. В этом случае меры dg и $d\chi$ наз. со-

гласованными. Пусть через $A(G)$ обозначено линейное подпространство пространства $L^1(G)$, порожденное функциями вида $f*g$, где $f,\ g\in L^1(G)\cap L^2(G)$. Справедлива следующая формула обращения Фурье (см. [4], [16]): если $f\in A(G)$, то $Ff\in L^1(\hat{G})$ и для всех $g\in G$ имеет место равенство

$$f(g)=\int_{\hat{G}}\chi(g)\,(Ff)(\chi)\,d\chi,$$

т. е. если η — каноническое отображение G в $\hat{\hat{G}}$, то $f=(\overline{F}Ff)\circ\eta$ для всех $f\in A(G)$. Пусть $\mathfrak{B}(G)$ — множество таких $f\in L^1(G)$, что $f\in L^1(\hat{G})$. Тогда сужение F на $\mathfrak{B}(G)$ есть взаимно однозначное отображение $\mathfrak{B}(G)$ на $\mathfrak{B}(\hat{G})$; обратное отображение есть сужение $\overline{F}$ на $\mathfrak{B}(\hat{G})$. Если $f,\ g\in L^2(G)$, то $F(fg)=(Ff)*(Fg)$.

Классическая *Пуассона формула суммирования* получает в Г. а. а. следующую естественную интерпретацию. Пусть H — замкнутая подгруппа группы G, dg — мера Хаара на G, dh — мера Хаара на H и dk — мера Хаара на $K=G/H$. Пусть $(G/H)\hat{}$ отождествляется с $H^\perp$ и $d\rho$ — мера Хаара на $H^\perp$, согласованная с dk. Наконец, пусть $f\in L^1(G)$ и пусть сужение на $H^\perp$ непрерывной функции Ff интегрируемо по мере $d\rho$. Тогда для почти всех $g\in G$ функция $h\to f(gh)$ на H интегрируема по мере dh, и

$$\int_H f(gh)\,dh=\int_{H^\perp}\rho(g)\,(Ff)(\rho)\,d\rho.$$

Эта формула наз. обобщенной формулой суммирования Пуассона.

Важной внутренней задачей Г. а. а. является изучение банаховых алгебр $L^1(G)$ и $M(G)$ с точки зрения преобразования Фурье на G. Алгебра $L^1(G)$ есть вполне симметричная алгебра. Равенство $M(G)=L^1(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда G дискретна. Если G не дискретна, то $M(G)$ содержит несимметричные максимальные идеалы. Пусть $A(\hat{G})$ (соответственно $B(\hat{G})$) — множество преобразований Фурье элементов алгебры $L^1(G)$ (соответственно $M(G)$). $A(\hat{G})$ и $B(\hat{G})$ являются алгебрами функций на $\hat{G}$; при этом $A(\hat{G})$ — регулярная алгебра, и $f\in A(\hat{G})$ тогда и только тогда, когда $f=f_1*f_2$ для нек-рых $f_1,\ f_2\in L^2(\hat{G})$. Множество тех $f\in L^1(G)$, для к-рых носитель функции Ff бикомпактен, есть плотное подмножество в $L^1(G)$.

Следующие результаты описывают функциональные свойства преобразования Фурье на G. Пусть F — функция, определенная на $[-1,1]$, и пусть $\hat{G}$ недискретна. Пусть F действует на $A(\hat{G})$, т. е. $F(\varphi)\in A(\hat{G})$ для любой функции $\varphi\in A(G)$, область значений к-рой лежит в $[-1,\ 1]$. Тогда F аналитична на $[-1,1]$, и если G недискретна, то $F(0)=0$. Обратно, аналитическая на $[-1,1]$ функция F ($F(0)=0$, если G недискретна) действует на $A(\hat{G})$. Функция F действует на $B(G)$ тогда и только тогда, когда F есть сужение на $[-1,\ 1]$ целой вещественной аналитич. функции. Пусть F определена на $[-1,1]$ и $\hat{G}$ есть бесконечная дискретная группа. F действует на $A(\hat{G})$ тогда и только тогда, когда $F(0)=0$ и F аналитична в некоторой окрестности начала (см. [12], [13], где имеется подробная библиография).

Традиционным вопросом теории банаховых алгебр является вопрос о структуре и свойствах замкнутых подалгебр. Следующие результаты относятся к замкнутым подалгебрам алгебры $L^1(G)$. Пусть S — борелевская полугруппа в локально бикомпактной абелевой группе G и $L^1(S)$ — максимальная подалгебра в $L^1(G)$. Тогда S содержится в замкнутой полугруппе

$P \subset G$, индуцирующей архимедов порядок на G. Коммутативная банахова алгебра A наз. алгеброй Стоуна — Вейерштрасса, если любая ее симметричная подалгебра $B \subset A$, отделяющая точки спектра M кольца A и не обращающаяся в нуль одновременно ни в одной точке из M, плотна в A. $L^1(G)$ есть алгебра Стоуна — Вейерштрасса в том и только в том случае, если G вполне несвязна.

Одним из направлений современных исследований в Г. а. а. является теория *тонких множеств* в локально бикомпактных абелевых группах, к-рая может рассматриваться как обобщение более специальных результатов классического гармонич. анализа (в частности, теории лакунарных тригонометрич. рядов). Пусть G — локально бикомпактная абелева группа, e — единица группы G. Множество $E \subset G$ наз. независимым, если для любых $g_1, \ldots, g_k \in E$ и целых $n_1, \ldots, n_k$ либо $g_1^{n_1} = g_2^{n_2} = \ldots = g_k^{n_k} = e$, либо $\prod_{i=1}^{k} g_i^{n_i} \neq e$. Любая недискретная локально бикомпактная абелева группа содержит независимое множество, гомеоморфное канторову множеству. Среди независимых множеств следует выделить два важных класса множеств, а именно, множества Кронекера и множества типа K_q в группах D_q. Множество E в локально бикомпактной абелевой группе наз. множеством Кронекера, если для любой непрерывной функции f на E с модулем 1 и для любого $\varepsilon > 0$ существует такой характер $\chi \in \hat{G}$, что $\sup_E |f(g) - \chi(g)| < \varepsilon$. Множество Кронекера независимо и не содержит элементов конечного порядка. Пусть $\mathbb{Z}_q$ — циклич. группа порядка $q \geqslant 2$ и D_q — прямое произведение счетного числа групп, изоморфных $\mathbb{Z}_q$. Множество E в D_q наз. множеством типа K_q, если любая непрерывная функция $f\colon E \to \mathbb{Z}_q$ ($\mathbb{Z}_q$ рассматривается как группа корней из единицы) совпадает на E с нек-рым унитарным характером группы D_q. Множества типа K_q независимы. Если в любой окрестности единичного элемента локально бикомпактной группы G содержится элемент бесконечного порядка, то G содержит множество Кронекера, гомеоморфное канторову множеству. Если G — недискретная локально бикомпактная абелева группа и если существует окрестность единичного элемента без элементов бесконечного порядка, то G содержит D_q (для нек-рого $q \geqslant 2$) как замкнутую подгруппу; любая группа D_q содержит множество типа K_q, гомеоморфное канторову множеству.

В конечномерных метрических локально бикомпактных абелевых группах независимое множество есть вполне несвязное множество. Бесконечномерный тор содержит множество Кронекера, гомеоморфное отрезку. Объединение двух множеств Кронекера на окружности может оказаться независимым множеством, не являющимся множеством Кронекера. На бесконечномерном торе добавлением одной точки к нек-рому множеству Кронекера можно получить независимое множество, не являющееся множеством Кронекера. Если E — бикомпактное множество Кронекера в G и μ — ограниченная мера, сосредоточенная на E, то

$$\max_{\chi \in \hat{G}} |F\mu(\chi)| = \|\mu\|.$$

Другой важный класс подмножеств локально бикомпактных абелевых групп образуют множества Хельсона — бикомпактные множества $P \subset G$, обладающие тем свойством, что любая непрерывная функция F на P есть сужение на P нек-рого элемента алгебры $A(\hat{G})$. Всякое бикомпактное множество Кронекера и всякое бикомпактное множество типа K_q в D_q являются множествами Хельсона. Не всякое счетное бикомпактное подмножество локально бикомпактной абеле-

вой группы G есть множество Хельсона; существуют независимые канторовы множества, не являющиеся таковыми. Бикомпактное подмножество $P \subset G$ будет множеством Хельсона тогда и только тогда, когда $\|\mu\|$ и $\sup_{\widehat{G}} |(F\mu)(\chi)|$ — эквивалентные нормы на банаховом пространстве $M(P)$ ограниченных мер на P. Пусть через $I(P)$ обозначено множество всех тех $f \in L^1(G)$, для которых $(\overline{Ff})(g)=0$ при всех $g \in P$. Тогда $I(P)$ есть замкнутый идеал в $L^1(\widehat{G})$. Сопряженное пространство к $L^1(\widehat{G})/I(P)$ изометрично пространству $\Phi(P)$, состоящему из всех тех $\varphi \in L^\infty(\widehat{G})$, для к-рых

$$\int_{\widehat{G}} f(\chi)\,\varphi(\chi^{-1})\,d\chi = 0$$

при любых $f \in I(P)$. Бикомпактное множество P является множеством Хельсона тогда и только тогда, когда любая функция $\varphi \in \Phi(P)$ равна почти всюду преобразованию Фурье нек-рой ограниченной меры, сосредоточенной на P. Если P — множество Хельсона в G и σ — ненулевая мера, сосредоточенная на P, то $F\sigma$ не стремится к нулю на бесконечности.

При изучении рядов Фурье на бикомпактных абелевых группах большую роль играет понятие м н о ж е с т в С и д о н а в дискретных абелевых группах. Пусть G — бикомпактная абелева группа, E — подмножество $\widehat{G}$. Функция $f \in L^1(G)$ наз. E-ф у н к ц и е й, если $\widehat{f}(\chi)=0$ для всех $\chi \in E$. Линейная комбинация f унитарных характеров на G наз. E-м н о г о ч л е н о м, если f есть E-функция. Множество E наз. м н о ж е с т в о м С и д о н а, если существует такая постоянная $B=B_E$, что

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} |\widehat{f}(\chi)| \leqslant B \max_{g \in G} |f(g)|$$

для любого E-многочлена на G. Следующие условия эквивалентны:

E есть множество Сидона в $\widehat{G}$;

для любой ограниченной E-функции f ряд $\sum_{\chi \in \widehat{G}} |\widehat{f}(\chi)|$ сходится;

для любой непрерывной E-функции f ряд $\sum_{\chi \in \widehat{G}} |\widehat{f}(\chi)|$ сходится;

любая ограниченная функция f на E совпадает с сужением на E нек-рого элемента $\widehat{f} \in B(G)$;

любая функция на E, стремящаяся к нулю на бесконечности, совпадает с сужением на E нек-рой функции $\widehat{f} \in A(G)$.

Любое бесконечное множество в $\widehat{G}$ содержит бесконечное множество Сидона. Любое независимое подмножество из $\widehat{G}$ есть множество Сидона.

Другим интенсивно развивающимся направлением Г. а. а., тесно связанным с теорией тонких множеств, является теория замкнутых идеалов в $L^1(G)$, и в частности теория спектрального синтеза. Общая постановка задачи спектрального синтеза такова. Пусть I есть замкнутый идеал в $L^1(G)$; требуется выяснить, при каких условиях I является пересечением максимальных идеалов в $L^1(G)$, содержащих I (при этом следует отметить, что любой максимальный идеал в $L^1(G)$ регулярен, т.е. замкнут). Одним из важнейших результатов теории спектрального синтеза — *Винера тауберова теорема*: если J — замкнутый идеал в $L^1(G)$, $J \neq L^1(G)$, то существует такой характер $\chi \in \widehat{G}$, что $(Ff)(\chi)=0$ для всех $f \in J$. Это утверждение может рассматриваться как положительное решение поставленной выше проблемы для случая $I=L^1(G)$. Если любой замкнутый идеал в $L^1(G)$ есть пересечение содержащих его максимальных идеалов, то говорят, что G допускает с п е к т р а л ь н ы й с и н т е з. Бикомпактная группа до-

пускает спектральный синтез. С другой стороны, справедлива т е о р е м а [15]: если группа $\hat{G}$ недискретна, то G не допускает спектрального синтеза. Отсюда следует, что если $\hat{G}$ недискретна, то алгебра $L^1(G)$ имеет несимметричные замкнутые идеалы.

Г. а. а. на бикомпактных группах может рассматриваться как часть теории представлений бикомпактных групп; эта теория тесно связана с теорией почти периодич. функций на группах; см. также *Бора компакт* и обзоры в [11], [4]. Задачи Г. а. а. на произвольной локально бикомпактной топологич. группе значительно сложнее ввиду недостаточной разработанности и сложности общей теории *бесконечномерных представлений* локально бикомпактной группы. Однако и в этом случае можно определить интеграл Фурье на локально бикомпактной группе (см. [5]) и получить аналог обобщенной теоремы Бохнера, формулу Планшереля и ряд других общих теорем (см. [8], [11]).

Лит.: [1] P e t e r F., W e y l H., «Math. Ann.», 1927, Bd 97, S. 737—55; [2] П о н т р я г и н Л. С., «Ann. Math.», 1934, v. 35, p. 361—88; [3] K a m p e n E. R. van, «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1934, v. 20, p. 434—36; [4] В е й л ь А., Интегрирование в топологических группах и его применения, пер. с франц., М., 1950; [5] Г е л ь ф а н д И. М., Р а й к о в Д. А., «Матем. сб.», 1943, т. 13, с. 301—16; [6] Р а й к о в Д. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1945, т. 14, с. 1—86; [7] Г е л ь ф а н д И. М., Р а й к о в Д. А., Ш и л о в Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, М., 1960; [8] Н а й м а р к М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [9] П о н т р я г и н Л. С., Непрерывные группы, 2 изд., М., 1954; [10] Б у р б а к и Н., Спектральная теория, пер. с франц., М., 1972; [11] Д и к с м ь е Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [12] H e l s o n H., (a. o.), «Acta Math.», 1959, v. 102, p. 135—57; [13] Х ь ю и т т Э., Р о с с К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 1—2, М., 1975; [14] Л ю м и с Л. Х., Введение в абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., М., 1956; [15] M a l l i a v i n P., «Publ. Math. IHES», 1959, № 2, p. 61—68; [16] К р е й н М. Г., «Докл. АН СССР», 1941, т. 30, с. 482—86.

Е. А. Горин, А. И. Штерн.

ГАРМОНИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН — 1) Г. м.— многочлен по переменным $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющий *Лапласа уравнению*. Любой Г. м. может быть представлен в виде суммы о д н о р о д н ы х Г. м. При $n=2$ среди однородных Г. м. степени m имеется только два линейно независимых, напр. действительная и мнимая части в выражении $(x_1+ix_2)^m$. При $n=3$ число линейно независимых однородных Г. м. степени m равно $2m+1$. В общем случае $n\geqslant 2$ число линейно независимых однородных Г. м. степени m равно

$$K_n^m - K_n^{m-2},\ m\geqslant 2,$$

где

$$K_n^m = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{m!}$$

— число размещений из n по m с m повторениями. Однородные Г. м. $V_m(x)$ наз. также ш а р о в ы м и ф у н к ц и я м и (в особенности при $n=3$). При $n=3$ введение сферич. координат позволяет записать:

$$V_m(x) = r^m Y_m(\theta, \varphi),$$

где $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, а $Y_m(\theta, \varphi)$ есть *сферическая функция* степени m.

Лит.: [1] С о б о л е в С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; [2] Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966; [3] Б р е л о М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

2) Г. м.— конечная линейная комбинация *гармоник*. Действительнозначные Г. м. представимы в виде

$$\sum_{k=1}^{N} A_k \sin(\omega_k x+\varphi_k)$$

при нек-ром натуральном N, неотрицательных A_k, действительных ω_k, φ_k, $k=1, 2, \ldots, N$. Комплекснозначные Г. м. представимы в виде

$$\sum_{k=-m}^{n} c_k e^{i\omega_k x}$$

при натуральных значениях m, n, действительных значениях ω_k и комплексных значениях c_k, $k=-m, -m+1, \ldots, n$. Г. м. являются простейшими *почти периодическими функциями*. *В. Ф. Емельянов.*

ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД — числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Каждый член Г. р. (начиная со второго) является *гармоническим средним* двух соседних (отсюда назв. Г. р.). Г. р. расходится (Г. Лейбниц, G. Leibniz, 1673), и его частные суммы

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

растут как $\ln n$ (Л. Эйлер, L. Euler, 1740): существует такая постоянная $c>0$, наз. *Эйлера постоянной*, что $s_n = \ln n + c + \varepsilon_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

наз. обобщенным Г. р., он сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leqslant 1$. *Л. Д. Кудрявцев.*

ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА МЕТОД — приближенный метод исследования нелинейных колебательных систем, описываемых нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Суть Г. б. м. состоит в замене в колебательных системах нелинейных сил специальным образом построенными линейными функциями, в силу чего он позволяет использовать теорию линейных дифференциальных уравнений для приближенного анализа нелинейных систем.

Линейные функции строятся с помощью специального приема, наз. гармонич. линеаризацией. Пусть задана нелинейная функция (сила)

$$F(x, \dot{x}) \equiv \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

где ε — малый параметр. Гармонической линеаризацией наз. замена $F(x, \dot{x})$ линейной функцией

$$F_l(x, \dot{x}) = kx + \lambda\dot{x},$$

где параметры k и λ вычисляются по формулам:

$$k(a) = \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi\, d\psi,$$

$$\lambda(a) = -\frac{\varepsilon}{\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi\, d\psi,$$

$$\psi = \omega t + \theta.$$

Если $x = a\cos(\omega t+\theta)$, $a=\text{const}$, $\omega=\text{const}$, $\theta=\text{const}$, то нелинейная сила $F(x, \dot{x})$ является периодич. функцией времени, и ее разложение в ряд Фурье содержит, вообще говоря, бесконечное число гармоник с частотами $n\omega$, $n=1,2\ldots$, т. е. оно имеет вид:

$$F(x, \dot{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(n\omega t + \theta_n). \qquad (1)$$

Слагаемое $F_1\cos(\omega t+\theta_1)$ наз. основной гармоникой разложения (1). Амплитуда и фаза линейной функции F_l совпадают с аналогичными характеристиками основной гармоники нелинейной силы.

Применительно к дифференциальному уравнению

$$\ddot{x} + \omega^2 x + F(x, \dot{x}) = 0, \qquad (2)$$

типичному для теории квазилинейных колебаний, Г. б. м. заключается в замене $F(x, \dot{x})$ линейной функцией F_l, и вместо уравнения (2) рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + k_1 x = 0, \qquad (3)$$

где $k_1=\omega^2+k$. Принято называть F_l **эквивалентной линейной силой**, λ — **эквивалентным коэффициентом затухания**, k_1 — **эквивалентным коэффициентом упругости**. Доказано, что если нелинейное уравнение (2) имеет решение вида

$$x=a\cos(\omega t+\theta),$$

причем

$$\dot{a}=O(\varepsilon),\quad \omega=O(\varepsilon),$$

то разность между решениями уравнений (2) и (3) имеет порядок ε^2. В Г. б. м. частота колебаний зависит от амплитуды a (посредством величин k и λ).

Г. б. м. применяется для отыскания периодич. и квазипериодич. колебаний, периодич. и квазипериодич. режимов в теории автоматич. регулирования, стационарных режимов и для исследования их устойчивости. Особенно большое распространение он получил в теории автоматич. регулирования.

Лит.: [1] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, К., 1937; [2] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974; [3] Попов Е. П., Пальтов И. П., Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, М., 1960.

Е. А. Гребеников.

ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ, синусоидальное колебание,— периодическое изменение во времени физич. величины, записываемое аналитически в виде

$$x=x(t)=A\cos(\omega t-\alpha)=\mathrm{Re}\left[Be^{i\omega t}\right],$$

где $x=x(t)$ — значение колеблющейся величины в момент времени t, $|A|=|B|$ — амплитуда, ω — циклическая (круговая) частота, α — начальная фаза колебаний. Продолжительность одного полного колебания, равная $T=2\pi/\omega$, наз. **периодом** Г. к., а величина $\nu=1/T$, равная числу полных колебаний в единицу времени, наз. **частотой** Г. к. ($\omega=2\pi\nu$). Период Г. к. не зависит от амплитуды. Скорость, ускорение и все высшие производные гармонически колеблющейся величины изменяются гармонически с той же частотой. На *фазовой плоскости* $(x, \dot{x})$ Г. к. изображается эллипсом. В природе из-за диссипации энергии абсолютно точные Г. к. не встречаются. Однако существует много важных процессов, близких к Г. к. Таковы малые колебания механич. систем относительно их устойчивого положения равновесия. Получающиеся при этом частоты (так наз. **собственные частоты**) колебаний не зависят от начальных условий движения, а определяются лишь самой колеблющейся системой как таковой. Напр., малые колебания (под действием силы тяжести) математич. маятника на нити длины l описываются дифференциальным уравнением

$$ml\ddot{x}=-mgx,$$

где g — ускорение силы тяжести, а $x(t)$ — угол между вертикалью и нитью маятника. Общее решение этого уравнения имеет вид $x=A\cos(\omega t-\alpha)$, где (собственная) частота колебаний $\omega=\sqrt{g/l}$ зависит только от g и l, а амплитуда A и фаза α являются постоянными интегрирования, выбираемыми на основе начальных условий.

Г. к. играют большую роль в изучении общих колебаний, так как сложные периодически и почти периодически меняющиеся величины могут быть с любой степенью точности представлены суммой различных Г. к. Математически это соответствует приближению функций тригонометрич. рядами и *Фурье интегралами*.

Классический ряд Фурье

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}a_ne^{int}$$

комплекснозначной функции $x(t)$, определенной на $[-\pi, \pi]$, может рассматриваться как разложение $x(t)$ на сумму Г. к. с целочисленными частотами $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Коэффициент Фурье

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\, e^{-int}\, dt$$

определяет амплитуду ($|a_n|$) и сдвиг фазы ($\arg a_n$) Г. к. частоты n. Совокупность всех коэффициентов Фурье определяет спектр $x(t)$ и показывает, какие Г. к. действительно входят в $x(t)$ и каковы амплитуды и начальные фазы этих колебаний. Знание спектра заменяет знание функции $x(t)$.

Функцию $x(t)$, определенную на $(-\infty, \infty)$, уже нельзя построить из Г. к. с целочисленными частотами. Для ее построения нужны колебания всех частот: функция $x(t)$ представляется в виде интеграла Фурье

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(n)\, e^{int}\, dn,$$

где

$$a(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-int}\, dt$$

— спектральная плотность функции $x(t)$.

Эти представления функций являются основой *Фурье методов* решения различных задач в теории дифференциальных и интегральных уравнений.

Лит.: [1] Горелик Г. С., Колебания и волны, 2 изд., М., 1959.

Л. П. Купцов.

ГАРМОНИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологич. пространство X с пучком $\mathfrak{H}$ непрерывных действительных функций с аксиоматически фиксируемыми в той или иной форме тремя основными свойствами классических *гармонических функций*: свойство сходимости, выражаемое второй *Гарнака теоремой*; принцип экстремума; разрешимость *Дирихле задачи* для достаточно широкого класса открытых множеств из X. Функции пучка $\mathfrak{H}$ получают наименование гармонич. функций; преимущество этого аксиоматич. подхода состоит в том, что с его помощью в теорию включаются решения не только *Лапласа уравнения*, но и нек-рых других уравнений эллиптич. и параболич. типов. Пусть X — локально компактное топологич. пространство. Под пучком функций на X здесь понимается отображение $\mathfrak{F}$, определенное на семействе всех открытых множеств $U, V, \ldots$ из X и такое, что: 1) $\mathfrak{F}(U)$ есть семейство функций на U; 2) если $U \subset V$, то сужение любой функции из $\mathfrak{F}(V)$ на U принадлежит $\mathfrak{F}(U)$; 3) для любого семейства $\{U_i\}_{i \in I}$ функция на $\bigcup_{i \in I} U_i$ принадлежит $\mathfrak{F}(\bigcup_{i \in I} U)$, если для всех $i \in I$ ее сужение на U_i принадлежит $\mathfrak{F}(\bigcup_{i \in I} U_i)$. Пучок функций $\mathfrak{U}$ наз. гипергармоническим, если $\mathfrak{U}(U)$ для любого U есть выпуклый конус полунепрерывных и конечных снизу действительных функций на U. Пучок функций $\mathfrak{H}$ наз. гармоническим, если $\mathfrak{H}(U)$ для любого U есть действительное векторное пространство непрерывных функций на U; в дальнейшем используется только гармонич. пучок

$$\mathfrak{H} : U \to \mathfrak{U}(U) \cap (-\mathfrak{U}(U)).$$

Локально компактное пространство X наз. Г.п., если выполняются следующие аксиомы (см. [3]).

Аксиома положительности: пучок $\mathfrak{H}$ невырожден во всех точках $x \in X$, т. е. для любого $x \in X$ существует функция $u \in \mathfrak{H}$, определенная в окрестности x, причем $u(x) \neq 0$.

Аксиома сходимости: если возрастающая последовательность функций из $\mathfrak{H}(U)$ локально ограничена, то она сходится к функции из $\mathfrak{H}(U)$.

Аксиома разрешимости: существует базис разрешимых открытых множеств U, т. е. таких,

что для любой непрерывной функции f с компактным носителем на ∂U существует обобщенное в смысле Винера — Перрона (см. *Перрона метод*) решение задачи Дирихле для U из $\mathfrak{H}(U)$.

Аксиома мажоранты: если полунепрерывная и конечная снизу функция u на U для любого относительно компактного множества V такого, что $\overline{V}\subset U$, удовлетворяет условию

$$\sup\{v\in\mathfrak{H}(U);\ v(x)\leqslant u(x),\ x\in\partial V\}=\mu^V u\leqslant u$$

на V, то $u\in\mathfrak{U}(U)$.

Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, с пучком классич. решений уравнения Лапласа или *теплопроводности уравнения* образует Г. п. Имеется ряд других вариантов аксиоматики гармонич. пространств. Г. п. локально связны, не содержат изолированных точек; они имеют базис из связных разрешимых множеств.

Гипергармонич. функция u на Г. п. X наз. супергармонической, если для любого относительно компактного разрешимого множества V наибольшая миноранта $\mu^V u$ есть гармонич. функция. Положительная супергармонич. функция, для к-рой любая гармонич. миноранта тождественно равна нулю, наз. потенциалом. Г. п. X наз. $\mathfrak{h}$-гармоническим (или $\mathfrak{p}$-гармоническим), если для любого $x\in X$ существует положительная супергармонич. функция u (или, соответственно, потенциал u) на X такая, что $u(x)>0$.

Любое Г. п. допускает покрытие такими открытыми множествами U, для к-рых выполняется принцип минимума в следующей форме: если гипергармоническая функция $u\in\mathfrak{U}(U)$ положительна вне пересечения U с любым компактом из X и

$$\lim_{x\to y}\inf u(x)\geqslant 0$$

для всех $y\in\partial U$, то $u\geqslant 0$. В случае $\mathfrak{p}$-гармонич. пространства этот принцип минимума выполняется для всех открытых множеств. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с пучком классич. решений уравнения Лапласа при $n\geqslant 2$ образует $\mathfrak{h}$-гармонич. пространство, а при $n\geqslant 3$ оно образует $\mathfrak{p}$-гармонич. пространство; пространство $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^1$, $n\geqslant 1$, с пучком решений уравнения теплопроводности образует $\mathfrak{p}$-гармонич. пространство.

Основными вопросами теории Г. п. являются: теория разрешимости задачи Дирихле, включающая исследование поведения обобщенного решения этой задачи в граничных точках; теория *емкости* множеств в Г. п.; изучение проблемы выметания (см. *Выметания метод*) и *Робена задачи*.

Лит.: [1] Brelot M., Lectures on potential theory, Bombay, 1960; [2] Bauer H., Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, B., 1966 (Lecture Notes in Mathematics, № 22); [3] Constantinescu C., Cornea A., Potential theory on harmonic spaces, B., 1972; [4] Брело М., О топологиях и границах в теории потенциала, пер. с англ., М., 1974.

Е. Д. Соломенцев.

ГАРМОНИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ — число, обратная величина к-рого является средним арифметическим обратных величин данных чисел, т. е. число

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Например, $\frac{1}{n}$ является Г. с. дробей $\frac{1}{n-1}$ и $\frac{1}{n+1}$, $n=2,3,\ \ldots$. Г. с. чисел не превосходит их арифметич. среднего.

Л. Д. Кудрявцев.

ГАРМОНИЧЕСКОЙ МЕРЫ ПРИНЦИП: при отображениях, осуществляемых однозначными аналитич. функциями, *гармоническая мера* не убывает. Если $\omega(z;\alpha,D)$ — гармонич. мера граничного множества α относительно области D на плоскости комплексного переменного z, то одна из конкретных формулировок Г. м. п. утверждает следующее. Пусть в области D_z

с границей Γ_z, состоящей из конечного числа жордановых дуг, задана однозначная аналитич. функция $w=w(z)$, удовлетворяющая условиям: значения $w=w(z)$, $z\in D_z$, попадают в область D_w с границей Γ_w, состоящей из конечного числа жордановых дуг; функция $w(z)$ непрерывно продолжается на нек-рое множество $\alpha_z\subset\Gamma_z$, состоящее из конечного числа дуг, и значения $w(z)$ на α_z принадлежат множеству $E\subset\overline{D}_w$ с границей ∂E, состоящей из конечного числа жордановых дуг. При этих условиях во всякой точке $z\in D_z$, в к-рой $w(z)\notin E$, имеет место соотношение

$$\omega(z;\ \alpha_z,\ D_z)\leqslant\omega(w(z);\ \partial E,\ D_w^*),\qquad(1)$$

где D_w^* обозначает подобласть D_w такую, что точка $w(z)\in D_w^*$ и $\partial D_w^*\subset\Gamma_w\cup\partial E$. Если в (1) имеет место равенство в какой-либо одной точке z, то оно будет иметь место всюду в D_z. В частности, при взаимно однозначном конформном отображении D_z на D_w выполняется тождество

$$\omega(z;\ \alpha_z,\ D_z)\equiv\omega(w(z);\ \alpha_w,\ D_w).$$

Г. м. п. был установлен Р. Неванлинной, давшим ему многочисленные применения (см. [1], [2]). Например, из Г. м. п. выводится *двух констант теорема*, из к-рой, в свою очередь, следует, что для функции $w(z)$, голоморфной в области D_z, максимальное значение функции $\ln|w(z)|$ на линии уровня $\{z;\ \omega(z;\ \alpha_z,\ D_z)=t\}$ является выпуклой функцией параметра $t\in(0,\ 1)$.

Г. м. п. обобщается для голоморфных функций $w=w(z)$, $z=(z_1,\ldots,\ z_n)$, нескольких комплексных переменных, $n\geqslant1$.

Лит.: [1] Nevanlinna F., Nevanlinna R., «Acta Soc. scient. fennica», 1922, n. 50, № 5, p. 1—46; [2] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941.

П. М. Тамразов.

ГАРНАКА ИНТЕГРАЛ — обобщение несобственного интеграла Римана на класс функций f, множество точек неограниченности к-рых E_f имеет нулевую жорданову меру и к-рые интегрируемы по Риману во всяком сегменте, не содержащем точек из E_f. Пусть Δ_i, $i=1,2,\ldots,\ n,$ — конечная система интервалов, содержащая E_f. Тогда Г. и. определяется равенством

$$(H)\int_a^b f(x)\,dx=\lim(R)\int_{(a,\ b)\setminus\bigcup_i\Delta_i}f(x)\,dx,$$

если последний предел при $\operatorname{mes}\bigcup_i\Delta_i\to0$ существует. Г. и. введен А. Гарнаком (Харнаком) [1]. Позднее к этому определению было добавлено требование, чтобы каждый интервал Δ_i имел непустое пересечение с E_f. При этом Г. и. становится, вообще говоря, условно сходящимся. Г. и. частично перекрывается с *Лебега интегралом* и покрывается *Перрона интегралом* и *Данжуа интегралом*. В настоящее время Г. и. представляет лишь методич. и истор. интерес.

Лит.: [1] Harnack A., «Math. Ann.», 1883, Bd 21, S. 305—26; [2] Песин И. Н., Развитие понятия интеграла, М., 1966.

В. А. Скворцов.

ГАРНАКА НЕРАВЕНСТВО (двойное) — неравенство, оценивающее сверху и снизу отношение $u(x)/u(y)$ двух значений положительной гармонич. функции; получено А. Гарнаком (Харнаком) [1]. Пусть $u(x)\geqslant0$ — гармоническая в области G n-мерного евклидова пространства функция, $E_r(y)$ — шар $\{x:|x-y|<r\}$ радиуса r с центром в точке y. Если замыкание $\overline{E_r(y)}\subset G$, то для всех $x\in E_\rho(y)$, $0\leqslant\rho<r$, справедливо неравенство Гарнака

$$\left(\frac{r}{r+\rho}\right)^{n-2}\frac{r-\rho}{r+\rho}\,u(y)\leqslant u(x)\leqslant\left(\frac{r}{r-\rho}\right)^{n-2}\frac{r+\rho}{r-\rho}\,u(y)\qquad(1)$$

или

$$\max_{x\in E_\rho(y)}u(x)\leqslant\left(\frac{r+\rho}{r-\rho}\right)^n\min_{x\in E_\rho(y)}u(x).$$

Если $g-$ компакт, $\overline{g}\subset G$, то существует число $M=M(G, g)$, такое, что

$$M^{-1}u(y)\leqslant u(x)\leqslant Mu(y) \qquad (2)$$

для любых $x,\ y\in\overline{g}$. В частности,

$$\max_{x\in g} u(x)\leqslant M\min_{x\in g} u(x).$$

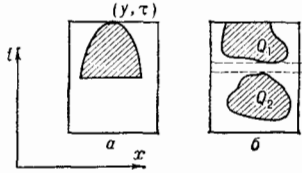
Из Г. н. следуют: сильный принцип максимума, *Гарнака теоремы* о последовательностях гармонич. функций теоремы о компактности семейств гармонич. функций, *Лиувилля теорема* и другие факты. Г. н. обобщается ([3], [4]) на неотрицательные решения широкого класса линейных эллиптич. уравнений вида

$$Lu\equiv-\sum_{i,\ j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}+c(x)u=0$$

с равномерно положительно определенной матрицей $\|a^{ij}\|$:

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\leqslant\sum_{i,\ j=1}^{n}a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,$$

где $\Lambda\geqslant\lambda>0$ – числа, $\xi=(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$ – любой n-мерный вектор, $x\in G$. При этом постоянная M неравенства (2) зависит только от λ, Λ, некоторых норм младших коэффициентов оператора L и расстояния между границами G и g.



Для неотрицательных решений $u(x,\ t)$ равномерно параболич. уравнений вида $u_t+Lu=0$ (коэффициенты оператора L могут зависеть и от t) аналог Г. н. также имеет место [5]. В этом случае возможно только одностороннее неравенство

$$u(x,\ t)\leqslant Mu(y,\tau)$$

для точек $(x,\ t)$, лежащих внутри параболоида

$$\{(x,t):|x-y|^2\leqslant\mu^2(\tau-t),\ \tau-\nu^2\leqslant t\leqslant\tau\}$$

с вершиной в точке $(y,\ \tau)$, обращенного полостью вниз (рис. *а*). При этом M зависит от величин y, τ, λ, Λ, μ, ν, нек-рых норм младших коэффициентов оператора L и от расстояний между границей параболоида и границей области, в к-рой $u(x,\ t)\geqslant0$. Если, например, $u(x,\ t)\geqslant0$ в цилиндре

$$Q=G\times(a,\ b],\quad \overline{g}\subset G,$$

расстояние между ∂G и ∂g больше или равно $d>0$ и d достаточно мало, то в $g\times(a-d^2,\ b]$ выполняется неравенство [5]:

$$\ln\frac{u(x,\ t)}{u(y,\ \tau)}\leqslant M\left(\frac{|x-y|^2}{\tau-t}+\frac{\tau-t}{d^2}+1\right).$$

В частности, если $u(x,\ t)\geqslant0$ в Q (рис. *б*) и компакты Q_1, Q_2 вложены в Q, причем

$$\delta=\min_{(x,\ t)\in Q_1,\ (y,\ \tau)\in Q_2}(t-\tau)>0,$$

то

$$\max_{(x,\ t)\in Q_2}u(x,\ t)\leqslant M\min_{(x,\ t)\in Q_1}u(x,\ t),$$
$$M=M(\delta,\ Q,\ Q_1,\ Q_2,\ L).$$

Пример функции

$$u(x,\ t)=\exp\left(\sum_{i=1}^{n}k_ix^i+t\sum_{i=1}^{n}k_i^2\right),$$

являющейся решением уравнения теплопроводности $u_t-\Delta u=0$ при любых $k_1,\ k_2,\ \ldots k_n$, показывает невозможность в параболич. случае двусторонних оценок.

Лит.: [1] Harnack A., Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und die eindeutiger Potentialfunction in der Ebene, Lpz., 1887; [2] Курант Р., Уравнения

с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [3] Серрин Дж., «Математика», 1958, т. 2, № 6, с. 49—62; [4] Moser J., «Communs Pure and Appl. Math.», 1961, v. 14, № 3, p. 577—91; [5] его же, там же, 1964, v. 17, № 1, p. 101—34; [6] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [7] Ландис Е. М., Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов, М., 1971. *Л. И. Камынин, Л. П. Купцов.*

ГАРНАКА ТЕОРЕМА — 1) Первая Г. т.: если последовательность функций, гармонических в ограниченной области G и непрерывных на $\overline{G}$, равномерно сходится на границе ∂G, то она равномерно сходится на G к гармонич. функции. Первая Г. т. имеет следующее обобщение для решений эллиптич. уравнения

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial y_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a(x)\,u=0, \quad (*)$$

имеющего единственное решение *Дирихле задачи* при любой непрерывной краевой функции (см. [1]). Если последовательность решений уравнения (*) равномерно сходится на ∂G, то она равномерно сходится на G к решению уравнения (*).

2) Вторая Г. т., принцип Гарнака: если монотонная последовательность функций, гармонических в ограниченной области G, сходится в некоторой точке из G, то она сходится во всех точках области G к гармонич. функции, и эта сходимость равномерна в любой замкнутой подобласти области G. Вторая Г. т. допускает обобщение и для монотонной последовательности решений эллиптич. уравнения (*).

Лит.: [1] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [2] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968. *Л. И. Камынин.*

ГАРТОГСА ОБЛАСТЬ, полукруговая область, с плоскостью симметрии $\{z_n=a_n\}$ — область в пространстве n комплексных переменных, к-рая вместе с каждой точкой $z=(z_1,\ \ldots,\ z_{n-1},\ z_n)\equiv('z,\ z_n)$ содержит окружность

$$\{('z,\ a_n+e^{i\theta}(z_n-a_n)):0\leqslant\theta<2\pi\}.$$

Названа по имени Ф. Гартогса (Хартогса, F. Hartogs). Г. о. наз. полной, если вместе с каждой точкой $('z,\ z_n)$ она содержит круг

$$\{('z,\ a_n+\lambda(z_n-a_n)):|\lambda|\leqslant 1\}.$$

Г. о. с плоскостью симметрии $\{z_n=0\}$ удобно изображать на диаграмме Гартогса, т. е. образом Г. о. при отображении $('z,\ z_n)\to('z,\ |z_n|)$.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [2] Бохнер С., Мартин У. Т., Функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1951. *Е. М. Чирка.*

ГАРТОГСА ТЕОРЕМА, Хартогса теорема,— 1) Основная (главная, или фундаментальная) Г. т.: если функция $f(z_1,\ \ldots,\ z_n)$, определенная в области $D\subset\mathbb{C}^n$, в любой точке $\zeta\in D$ голоморфна по каждому переменному z_k (при фиксированных $z_j=\zeta_j$, $j\neq k$), $k=1,\ \ldots,\ n$, то f голоморфна в D по совокупности переменных. Имеется много обобщений этой теоремы на случаи, когда часть переменных действительна или используются не все точки области D или когда допускаются нек-рые особенности f. Напр.: а) если функция $f(z,\ w)$, $z\in\mathbb{C}^k$, $w\in\mathbb{C}^l$, определенная в области $D=\{|z|<R_1,\ |w|<R_2\}$, голоморфна в области $\{|z|<r_1,\ |w|<R_2\}$, $r_1<R_1$, и при каждом фиксированном w, $|w|<R_2$, голоморфна в шаре $|z|<R_1$, то f голоморфна в области D; б) если функция f, определенная в $\mathbb{C}^n$ со значениями из расширенной комплексной плоскости, рациональна по каждому переменному, то f — рациональная функция.

2) Г. т. о продолжении: пусть область $D\subset\mathbb{C}^n$ имеет вид $D='D\times D'$, где $'D\subset\mathbb{C}^k$, $D'\subset\mathbb{C}^{n-k}$ и область D' ограничена. Любая функция f, голоморфная в окрестности множества $('\overline{D}\times\partial D')\cup(\{'a\}\times\overline{D'})$, $a'\in'D$, голоморфно продолжается в область D.

3) Иногда к Г. т. относят также теорему об устранении компактных особенностей (при $n>1$); она часто именуется теоремой Осгуда — Брауна (см. [3]).

4) Г. т. называют также теоремы о непрерывном расположении особых точек при $n>1$, об аналитичности множества особых точек и теорему о равномерной ограниченности последовательности поточечно ограниченных субгармонич. функций Теоремы 1), 1а), 2) и 4) впервые доказаны были Ф. Гартогсом (Хартогсом).

Лит.: [1] Hartogs F., «Math. Ann.», 1906, Bd 62, S. 1—88; [2] Бохнер С., Мартин У. Т., Функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1951; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, М., 1969. *Е. М. Чирка.*

ГАРТОГСА — ЛОРАНА РЯД — ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k('z)(z_n-a_n)^k, \qquad (*)$$

где $'z=(z_1, \ldots, z_{n-1})$, а $f_k('z)$ — функции, голоморфные в нек-рой не зависящей от k области $'D\subset\mathbb{C}^{n-1}$. Если $f_k=0$ для всех $k<0$, то ряд (*) наз. рядом Гартогса. Всякая функция, голоморфная в *Гартогса области* D вида

$$\{('z, z_n): 'z\in 'D,\ 0\leqslant r('z)<|z_n-a_n|<R('z)\leqslant+\infty\},$$

разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся внутри D Г.—Л. р. В полных областях Гартогса это будет разложение в ряд Гартогса. Областями сходимости Г.—Л. р. являются области того же вида со специальными $r('z)$ и $R('z)$, наз. радиусами Гартогса. При $n=1$, когда все f_k константы, Г.— Л. р. является *Лорана рядом*.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964. *Е. М. Чирка.*

ГАТО ВАРИАЦИЯ отображения $f(x)$ линейного пространства X в линейное топологического пространство Y — предел в топологии пространства Y:

$$\delta f(x_0, h)=\frac{d}{dt}f(x_0+th)\Big|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t} \qquad (*)$$

в предположении, что он существует для всех $h\in X$. Именно так ввел первую вариацию Р. Гато (R. Gateaux) в 1913—14. Для функционалов классического вариационного исчисления это определение было дано Ж. Лагранжем (см. *Вариация функционала*).

Выражение $\delta f(x_0, h)$ не обязательно является линейным функционалом по h, хотя оно всегда есть однородная функция по h первой степени. Отображение $h\to\delta f(x_0, h)$ называют иногда *Гато дифференциалом*. Начиная с работ П. Леви ([2], см. также [3]), обычно требуют линейность и непрерывность $\delta f(x_0, h)$ по h:

$$\delta f(x_0, h)=f'_\Gamma(x_0)h, \quad f'_\Gamma(x_0)\in L(X, Y).$$

В этом случае $f'_\Gamma(x_0)$ наз. *Гато производной*. Аналогично (*) определяются вторая и т. д. вариации. См. также *Вариация*, *Вторая вариация*, *Дифференцирование отображений*.

Лит.: [1] Gateaux R., «C. r. Acad. sci.», 1913, t. 157, p. 325—27; «Bull. soc. math. France», 1919, t. 47, p. 70—96; [2] Lévy P., Leçons d'analyse fonctionnelles, P., 1922; [3] Леви П., Конкретные проблемы функционального анализа, пер. с франц., М., 1967. *В. М. Тихомиров.*

ГАТО ГРАДИЕНТ функционала $f(x)$ в точке x_0 гильбертова пространства H — вектор из H, равный *Гато производной* $f'_\Gamma(x_0)$ функционала f в точке x_0. Иначе говоря, Г. г. определяется формулой

$$f(x_0+x)=f(x_0)+\left(f'_\Gamma(x_0), h\right)+\varepsilon(h),$$

где $\varepsilon(th)/t\to 0$ при $t\to 0$. В n-мерном евклидовом пространстве Г. г. $f'_\Gamma(x_0)$ есть вектор с координатами

$$\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\right)$$

и наз. обычно градиентом. Понятие Г. г. распространяется на случай, когда X — риманово многообразие (конечномерное или гильбертово бесконечномерное), а f — гладкая действительная функция на X. Направление вдоль Г. г. среди всех направлений, проходящих через точку x_0, выделяется наибольшим ростом функции f.

В. М. Тихомиров.

ГАТО ДИФФЕРЕНЦИАЛ отображения $f(x)$ линейного топологич. пространства X в линейное топологич. пространство Y — функция

$$h \to Df(x_0, h),$$

где предел

$$Df(x_0, h) = \frac{d}{dt} f(x_0 + th)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}$$

в предположении, что он существует для всех $h \in X$, а сходимость понимается в топологии пространства Y. Так определенный Г. д. однороден, но неаддитивен. Аналогично вводятся Г. д. высших порядков. Отображение $h \to Df(x_0, h)$ наз. иногда Гато вариацией, или слабым дифференциалом (см. также *Дифференцирование отображений*, *Вариация*).

Обычно накладывают дополнительное требование линейности и непрерывности. Г. д.: $Df(x, h) = f'_\Gamma(x_0)h$, $f'_\Gamma(x_0) \in L(X, Y)$. В этом случае $f'_\Gamma(x_0)$ наз. *Гато производной*. Если отображение $(x, h) \to Df(x, h)$ равномерно непрерывно по x и непрерывно по h в нек-рой области, то в этой области существует *Фреше производная* $f'(x)$ и при этом $f'(x)\,h = Df(x, h)$.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976.

В. М. Тихомиров.

ГАТО ПРОИЗВОДНАЯ, слабая производная,— наиболее распространенная в бесконечномерном анализе, наряду с *Фреше производной* (сильной производной), производная функционала или отображения. Производной Гато в точке x_0 отображения $f: X \to Y$ линейного топологич. пространства X в линейное топологич. пространство Y наз. непрерывное линейное отображение $f'_\Gamma(x_0): X \to Y$, удовлетворяющее условию

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'_\Gamma(x_0)\,h + \varepsilon(h),$$

где $\varepsilon(th)/t \to 0$ при $t \to 0$ в топологии пространства Y (см. также *Гато вариация*). Если отображение f имеет в точке x_0 Г. п., то оно наз. дифференцируемым по Гато. Для Г. п. теорема о дифференцировании сложной функции, вообще говоря, неверна. См. также *Дифференцирование отображений*.

Лит.: [1] Gateaux R., «C. r. Acad. sci.», 1913, t. 157, p. 325—27; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976; [3] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [4] Авербух В. И., Смолянов О. Г., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 6, с. 201—60.

В. М. Тихомиров.

ГАУССА ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА — вариационная задача, исследованная впервые К. Гауссом [1] и в современных терминах формулируемая следующим образом. Пусть μ — положительная мера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$), имеющая конечную энергию (см. *Энергия мер*), и пусть

$$U^\mu = U^\mu(x) = \int \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, d\mu(y)$$

— ньютонов потенциал меры μ. Требуется среди всех мер λ с компактным носителем $K \subset \mathbb{R}^n$ найти такую меру μ_0, к-рая дает минимум интегралу

$$\int (U^\lambda - 2U^\mu)\, d\lambda,$$

представляющему собой скалярное произведение $(\lambda - 2\mu, \lambda)$ в предгильбертовом пространстве мер.

Значение Г. в. з. определяется тем, что равновесная мера (см. *Робена задача*) может быть получена как решение Г. в. з. при определенном выборе меры μ; напр., можно принять за μ равномерное распределение массы на сфере с центром в начале координат, охватывающей множество K.

Лит.: [1] Gauss C. F., Werke, Bd 5, Gött., 1867, S. 195—242; [2] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966, гл. 2; [3] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964, гл. 11.

Е. Д. Соломенцев.

ГАУССА ЗАКОН — употребительное название *нормального распределения*. Название связано с той ролью, к-рую это распределение играет в *ошибок теории* К. Гаусса. Плотности

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}, \quad h > 0, \qquad (*)$$

(именно они первоначально назывались Г. з.) появились у К. Гаусса в соч. «Теория движения небесных тел» (1809). В книге 2, раздел 3, § 177 был сформулирован принцип: «Если какая-нибудь величина будет определена из многих непосредственных наблюдений, произведенных при одинаковых обстоятельствах и с одинаковой тщательностью, то среднее арифметическое из всех наблюдавшихся значений окажется наиболее вероятным значением...» [1]. Это положение интерпретируется следующим образом: пусть истинное значение наблюдаемой величины будет z и пусть плотность вероятности получить результат x равна $\varphi(x-z)$. Тогда при любом n и любых $x_1, \ldots, x_n$ совместная плотность $\varphi(x_1-z) \ldots \varphi(x_n-z)$ достигает максимума (как функция z) при

$$z = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Отсюда легко получить сначала, что отношение $\varphi'(x)/x\varphi(x)$ не зависит от x, а затем, что $\varphi(x)$ имеет вид $(*)$. Следует отметить, что указанный выше принцип неоднократно подвергался критике.

Лит.: [1] Гаусс К. Ф., Избранные геодезические сочинения, пер. с латин. и нем., т. 1, М., 1957, с. 89—109; [2] Poincaré H., Calcul des probabilités, 2 éd., P., 1912.

Ю. В. Прохоров.

ГАУССА ЗАКОН ВЗАИМНОСТИ — соотношение, связывающее значения *Лежандра символов* $\left(\frac{p}{q}\right)$ и $\left(\frac{q}{p}\right)$ для различных нечетных простых чисел p и q (см. *Квадратичный закон взаимности*). Кроме основного Г. з. в. для квадратичных вычетов, заключающегося в соотношении:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

имеются еще два дополнения к указанному закону, а именно:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Закон взаимности для квадратичных вычетов был впервые высказан Л. Эйлером (L. Euler, 1772). А. Лежандр (A. Legendre, 1785) дал формулировку закона в современной форме и доказал часть этого закона. Первое полное доказательство Г. з. в. было дано К. Гауссом (C. Gauss, 1801) (см. [1]). В течение жизни К. Гаусс дал восемь различных доказательств квадратичного закона взаимности, построенных на различных принципах.

Попытки установить закон взаимности для кубических и биквадратичных вычетов привели К. Гаусса к введению кольца целых комплексных чисел.

Лит.: [1] Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел, пер. с нем. и латин., М., 1959; [2] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [3] Хассе Г., Лекции по теории чиссл, пер. с нем., М., 1953.

С. А. Степанов.

ГАУССА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — формула, использующая в качестве узлов интерполяции ближайшие к точке интерполирования x узлы. Если $x=x_0+th$, то формула

$$G_{2n+1}(x_0+th)=f_0+f^1_{1/2}t+f^2_0\frac{t(t-1)}{2!}+\ldots+$$
$$+f^{2n}_0\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}, \qquad (1)$$

написанная по узлам x_0, x_0+h, x_0-h, ..., x_0+nh, x_0-nh, наз. формулой Гаусса для интерполирования вперед, а формула

$$G_{2n+1}(x_0+th)=f_0+f^1_{-1/2}t+f^2_0\frac{t(t+1)}{2!}+\ldots+$$
$$+f^{2n}_0\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t+n)}{(2n)!}, \qquad (2)$$

написанная по узлам x_0, $x-h$, x_0+h, ..., x_0-nh, x_0+nh, наз. формулой Гаусса для интерполирования назад (см. [1], [2]). В формулах (1) и (2) использованы конечные разности, определяемые следующим образом:

$$f^1_{i+1/2}=f_{i+1}-f_i, \qquad f^m_i=f^{m-1}_{i+1/2}-f^{m-1}_{i-1/2}.$$

Преимущество Г. и. ф. состоит в том, что указанный выбор узлов интерполяции обеспечивает наилучшую оценку остаточного члена по сравнению с любым другим выбором, а упорядоченность узлов по мере их близости к точке интерполяции уменьшает вычислительную погрешность интерполирования.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 1, 3 изд., М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, М., 1973.

М. К. Самарин.

ГАУССА КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — квадратурная формула вида

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx\approx\sum_{i=1}^n c_i f(x_i),$$

в к-рой *узлы* x_i и веса c_i подбираются так, чтобы формула была точна для функций

$$\sum_{k=0}^{2n-1}a_k\omega_k(x),$$

где $\omega_k(x)$ — заданные линейно независимые функции (пределы интегрирования могут быть и бесконечными). Г. к. ф. введены К. Гауссом (см. [1]) для $a=-1$, $b=1$, $p(x)\equiv 1$. Полученная им общая формула, точная для произвольного многочлена степени не выше $2n-1$, имеет вид

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=A^{(n)}_1 f(x_1)+A^{(n)}_2 f(x_2)+\ldots$$
$$\ldots+A^{(n)}_n f(x_n)+R_n,$$

где x_k — корни *Лежандра многочлена* $P_n(x)$, а $A^{(n)}_k$ и R_n определяются по формулам

$$A^{(n)}_k=\frac{2}{(1-x_k^2)\left[P'_n(x_k)\right]^2};$$

$$R_n=\frac{2^{2n+1}[n!]^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}f^{(2n)}(c), \quad -1<c<1.$$

Применяется в тех случаях, когда подинтегральная функция достаточно гладкая, а выигрыш в числе узлов крайне существен: напр., если $f(x)$ определяется из дорогостоящих экспериментов, или при вычислении кратных интегралов как повторных. При практическом применении в таких случаях очень важен удачный подбор *весовой функции* $p(x)$ и функций $\omega_j(x)$.

Для широких классов $p(x)$ и $\omega_j(x)$ составлены таблицы узлов Г. к. ф. (см. [1]), в частности в [5] при $p(x)\equiv 1$, $\omega_j(x)=x^j$ до $n=512$.

При $p(x)\equiv 1$, $\omega_j(x)=x^j$ Г. к. ф. применяется в стандартных программах интегрирования с автоматич. выбором шага как метод вычисления интегралов по подотрезкам разбиения (см. [6]).

Лит.: [1] Gauss C. F., Werke, Bd 3, Gött., 1866, S. 163—196; [2] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, М., 1959; [3] Крылов В. И., Шульгина Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию, М., 1966; [4] Бахвалов Н. С., Численные методы, М., 1973; [5] Stroud A. H., Secrest D., Gaussian Quadrature Formulas, N. Y., 1966; [6] Стандартная программа для вычисления однократных интегралов по квадратурам типа Гаусса, в. 26, М., 1967. *Н. С. Бахвалов, В. П. Моторный.*

ГАУССА МЕТОД — метод последовательного исключения неизвестных для нахождения решений системы линейных уравнений, впервые описанный К. Гауссом [1]. Пусть дана система

$$f_j(x)-a_j=a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n-a_j=0,\ j=1,\ \ldots,\ m,\ (S^0)$$

где a_{ji}, a_j — элементы произвольного поля P. Без ограничения общности можно считать, что $a_{11}\neq 0$. Г. м. состоит в следующем. Из второго уравнения системы S^0 вычитают первое ее уравнение, умноженное почленно на a_{21}/a_{11}, из третьего — первое, умноженное на a_{31}/a_{11}, . . ., из m-го — первое, умноженное на a_{m1}/a_{11}. Пусть S^1 — система полученных уравнений-разностей. При наличии ненулевого коэффициента в S^1 (после возможного изменения порядка уравнений и переменных) поступают с ней так же, как с системой S^0, и т. д. Если ранг r системы S^0 (т. е. ранг матрицы ее коэффициентов) меньше числа m, то на r-м шага появляется система S^r с нулевыми коэффициентами при всех неизвестных; при $r=m$ система S^r считается п у с т о й. Система S^0 тогда и только тогда совместна, когда система S^r либо совместна (т. е. не имеет отличных от нуля свободных членов), либо пуста.

Процесс получения одного из решений (совместной) системы S^0 может быть описан следующим образом. Берется к.-л. решение $(x_r^0, \ldots, x_n^0)$ системы S^{r-1}. Придавая значения $x_r^0, \ldots, x_n^0$ неизвестным $x_r, \ldots, x_n$ в к.-л. уравнении системы S^{r-2}, имеющем ненулевой коэффициент при x_{r-1} (напр., в первом ее уравнении), находят из него $x_{r-1}=x_{r-1}^0$ и получают решение $(x_{r-1}^0, x_r^0, \ldots, x_n^0)$ системы S^{r-2}. Иначе говоря, значение x_{r-1}^0 получается из системы S^{r-2} при замене в ней неизвестных $x_r, \ldots, x_n$ взятыми их значениями. Значения $x_{r-1}^0, x_r^0, \ldots, x_n^0$ подставляются затем в систему S^{r-3}, находится значение $x_{r-2}=x_{r-2}^0$, и получают решение $(x_{r-2}^0, \ldots, x_n^0)$ и т. д. Найденные так значения $x_1^0, \ldots, x_{r-1}^0$ составляют вместе со взятыми значениями $x_r^0, \ldots, x_n^0$ решение $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ системы S^0 (см. [2]).

Описанный метод допускает следующее обобщение (см. [4]). Пусть U — нек-рое подпространство векторного пространства P^n и $P^m(U)$ — множество всех решений $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ уравнения

$$p_1f_1(x)+p_2f_2(x)+\ldots+p_mf_m(x)=0, \qquad (*)$$

где x пробегает U. Для произвольной конечной системы

$$p^i=(p_1^i, p_2^i, \ldots, p_m^i), \qquad i=1, 2, \ldots, l$$

ненулевых образующих элементов пространства $P^m(U)$ составляется система

$$\sum_{j=1}^m p_j^i f_j(x)-\sum_{j=1}^m p_j^i a_j=0, \quad i=1, 2, \ldots, l,$$

(x — неизвестное), наз. U-с в е р т к о й системы S^0. Если пространство $P^m(U)$ не содержит ненулевых элементов, то считается, что система S^0 имеет п у с т у ю U-с в е р т к у. Если система S^0 совместна, то при любом U ее U-свертка совместна или пуста. Установлено, что для совместности системы S^0 достаточно, чтобы совместной или пустой была ее U-свертка хотя бы для одного U. Пусть, далее, $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — подпространства, порождаемые в пространстве P^n векторами $e_1=(1, 0, \ldots, 0)$, $e_2=(0, 1, \ldots, 0)$, . . ., $e_n=(0, 0, \ldots, 1)$.

Для $U=U_i$ уравнение (*) сводится к уравнению

$$a_{1i}p_1+a_{2i}p_2+\ldots+a_{mi}p_m=0.$$

Пусть, напр., $i=1$. Если при этом $a_{11}\neq 0$, то в качестве ненулевых образующих элементов пространства $P^m(U_1)$ можно взять векторы $(a_{21}/a_{11}, -1, 0, \ldots, 0)$, $(a_{31}/a_{11}, 0, -1, \ldots, 0), \ldots, (a_{m1}/a_{11}, 0, 0, \ldots, -1)$, и тогда U_1-свертывание системы S^0 совпадает с процедурой исключения неизвестного x_1 в Г. м.

U-свертывание системы S^0 при $U=U_i+U_k$ есть процедура одновременного исключения двух неизвестных x_i и x_k. Пусть, напр., $i=1$ и $k=2$. Если при этом

$$\Delta_{12}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0,$$

то для получения (U_1+U_2)-свертки системы S^0 можно взять строки матрицы

$$\begin{Vmatrix} -\Delta_{23} & \Delta_{13} & -\Delta_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ -\Delta_{24} & \Delta_{14} & 0 & -\Delta_{12} & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & & & \\ -\Delta_{2m} & \Delta_{1m} & 0 & 0 & \ldots & -\Delta_{12} \end{Vmatrix},$$

где

$$\Delta_{rs}=\begin{vmatrix} a_{r1} & a_{s1} \\ a_{r2} & a_{s2} \end{vmatrix}$$

Чередуя исключения отдельных неизвестных с исключением тех или иных пар (или в общем случае наборов) неизвестных, можно для нахождения решений системы S^0 строить те или иные алгоритмы, обобщающие Г. м.

Лит.: [1] Gauss C. F., Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen, Gött., 1849; [2] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 10 изд., М., 1971; [3] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.—Л., 1963; [4] Черников С. Н., Линейные неравенства, М., 1968.

С. Н. Черников.

ГАУССА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — линейное функциональное преобразование $W(\zeta)[x]$ функции $x(t)$, к-рое определяется интегралом:

$$W(\zeta)[x]=\frac{1}{\sqrt{\pi\zeta}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{u^2}{\zeta}\right)x(t+u)\,du,$$
$$\mathrm{Re}\,(\zeta)>0.$$

Если $x(t)\in L_2(-\infty, \infty)$, то $W(\zeta)[x]\in L_2(-\infty, \infty)$ для действительных значений $\zeta=\xi$ оператор $W(\zeta)$ является самосопряженным положительно определенным оператором [1]. Формула обращения для Г. п.:

$$x(t)=\exp\left\{-\frac{\zeta}{4}\frac{d^2}{dt^2}\right\}W(\zeta)[x(t)].$$

При $\zeta=4$ Г. п. наз. преобразованием Вейерштрасса.

Лит.: [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, 2 изд., пер. с англ., М., 1962; [2] Диткин В. А., Прудников А. П., в кн.: Итоги науки. Сер. Математика. Математический анализ. 1966, М., 1967, с. 7—82.

А. П. Прудников.

ГАУССА ПРИЗНАК — признак сходимости числовых рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

с положительными членами. Если отношение a_{n+1}/a_n представимо в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\gamma_n}{n^\beta}, \qquad (*)$$

где α и β — постоянные числа, $\beta>1$, а $\{\gamma_n\}$ — ограниченная последовательность, то ряд Σa_n сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leqslant 1$. Для того чтобы имело место представление (*), необходимо (но не достаточно), чтобы существовал конечный предел

$$\alpha=\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

или

$$\alpha=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Г. п.— один из первых по времени (1812) общих признаков сходимости числовых рядов. К. Гаусс (C. Gauss) применял свой признак для исследования сходимости *гипергеометрического ряда*. Г. п. представляет собой простейший частный случай одного из *логарифмических признаков сходимости*.

Л. П. Купцов.

ГАУССА ПРИНЦИП, наименьшего принуждения принцип,— один из основных, наиболее общих дифференциальных *вариационных принципов классической механики*, установленный К. Гауссом (см. [1]) и выражающий экстремальное свойство действительного движения системы из класса мыслимых по Гауссу движений, удовлетворяющих наложенным на систему идеальным связям и условиям постоянства положений и скоростей точек системы для рассматриваемого момента времени.

Согласно Г. п. «движение системы материальных точек, связанных между собой произвольным образом и подверженных любым влияниям, в каждое мгновение происходит в наиболее совершенном, какое только возможно, согласии с тем движением, каким обладали бы эти точки, если бы они стали свободными, т. е. оно происходит с наименьшим возможным принуждением, если в качестве меры принуждения за время dt принять величину, равную сумме произведений массы каждой точки на квадрат величины ее отклонения от того положения, которое она заняла бы, если бы была свободной» (см. [1]).

Г. п. равносилен *Д'Аламбера — Лагранжа принципу* и применим как к голономным, так и к неголономным системам. Г. п. обобщен на случай освобождения системы от части связей (см. [2], [3]), а также на случай систем, стесненных неидеальными связями, и на случай сплошных сред (см. [4]).

Лит.: [1] Gauss C., «J. reine und angew. Math.», 1829, Bd 4, S. 232—35; [2] Болотов Е. А., «Изв. Физ.-матем. об-ва при Казан. ун-те», 1916, т. 21, сер. 2, № 3, с. 99—152; [3] Четаев Н. Г., там же, 1932—33, т. 6, сер. 3, с. 68—71; [4] Румянцев В. В., «Прикл. матем. и механ.», 1973, т. 37, № 6, с. 963—73.

В. В. Румянцев.

ГАУССА РАЗЛОЖЕНИЕ топологической группы G — представление всюду плотного подмножества $G_0 \subset G$ в виде $G_0 = NHN^*$, где H — абелева подгруппа группы G, а N и N^* — нильпотентные подгруппы группы G, нормализуемые H. Если G — группа $GL(m, \mathbb{R})$ невырожденных вещественных матриц m-го порядка, H — подгруппа диагональных матриц, N (соответственно N^*) — подгруппа нижне (верхне)-треугольных матриц с единицами на главной диагонали, G_0 — подмножество матриц из G, все главные миноры к-рых отличны от нуля, то разложение $G_0 = NHN^*$ наз. разложением Гаусса полной линейной группы и непосредственно связано с *Гаусса методом* решения систем линейных уравнений: если $g_0 = nhn^*$, где $n \in N$, $h \in H$, $n^* \in N^*$, — невырожденная матрица коэффициентов системы линейных уравнений $g_0 x = b$, то приведение матрицы g_0 методом Гаусса к треугольному виду hn^*, можно осуществить умножением g_0 слева на нижнетреугольную матрицу n^{-1}, $n \in N$. Строгое определение разложения Гаусса требует введения следующих терминов. Пусть G — топологич. группа, H — ее подгруппа, N и N^* — нильпотентные подгруппы в G, нормализуемые H. Подгруппа H наз. треугольным усечением группы, если а) $N \in D(R)$, $N^* \subset D(R^*)$, где $D(X)$ — коммутант группы X, R и R^* — связные разрешимые подгруппы группы G; б) множество $G_0 = NHN^*$ всюду плотно в G, и разложение NHN^* однозначно. Разложение $G_0 = NHN^*$ наз. треугольным разложением в G. Если H — абелева группа, то это разложение наз. вполне треугольным разложением, или разложением Гаусса. В этом случае подгруппы $B = NH = HN$, $B^* = N^*H = HN^*$ раз-

решимы. Пусть π — неприводимое (непрерывное) представление группы G в конечномерном векторном пространстве V, V_0 — подпространство всех векторов из V, неподвижных относительно N^*; тогда V_0 инвариантно относительно H, и представление α группы H в V_0 неприводимо. Представление α определяет π однозначно с точностью до эквивалентности. Представление π содержится (как инвариантная часть) в представлении $e(\alpha)$ группы G, индуцированном представлением α подгруппы B в классе $C(G)$, где α — продолжение на B одноименного представления группы H, тривиальное на N. При этом пространство $\mathrm{Hom}_G(\pi, e(\alpha))$ одномерно. Если H — абелева подгруппа, то V_0 одномерно и α — характер группы H. Известны следующие примеры треугольных разложений групп Ли. 1) Пусть G — редуктивная связная комплексная группа Ли с картановской подалгеброй H_0, H — редуктивная связная подгруппа в G, содержащая H_0. Тогда подгруппа H является треугольным усечением группы G. 2) Пусть G — редуктивная связная линейная группа Ли; тогда группа G содержит треугольное усечение $H=MA$, где A — односвязная абелева подгруппа в G (порождаемая некомпактными корнями в алгебре Ли группы G), M — централизатор A в максимальной компактной подгруппе $K\subset G$. 3) В частности, всякая редуктивная связная комплексная группа Ли допускает Г. р. $G_0=NHN^*$, где H — картановская подгруппа в группе G; N соответственно N^* — аналитич. подгруппа в G, алгебра Ли к-рой натянута на все корневые векторы e_α, $\alpha<0$ (соответственно $\alpha>0$), α — корень относительно H, т. е. HN и HN^* являются противоположными *Бореля подгруппами*. В примерах 1) — 3) подгруппы N, N^* односвязны, G_0 открыто в G в топологии Зарискoго, а отображение $N\times H\times N^*$, $(n, h, n^*)\to nhn^*$ является изоморфизмом алгебраич. многообразий (и, в частности, гомеоморфизмом). Этот факт позволяет доказать, что алгебраич. многообразие G рационально.

Лит.: [1] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1968. *Д. П. Желобенко.*

ГАУССА СУММА — тригонометрическая сумма вида

$$\tau_a(\chi)=\sum_{m=0}^{q-1}\chi(m,\ q)\,e^{2\pi i\frac{am}{q}},$$

где $\chi(m, q)$ — числовой *характер* по модулю q. Г. с. вполне определяется заданием характера $\chi(m, q)$ и числа a. Г. с. были рассмотрены К. Гауссом (C. Gauss) в 1811 в случае простого нечетного $q=p$ и характера $\chi(m, q)=\left(\frac{m}{q}\right)$, где $\left(\frac{m}{q}\right)$ — *Лежандра символ*. В этом случае

$$\tau_a(\chi)=\sum_{m=0}^{p-1}e^{2\pi i\frac{am^2}{p}},\qquad (*)$$

где $(a, p)=1$. Исследуя свойства суммы (*) К. Гаусс нашел точное выражение для модуля этой суммы:

$$|\ \tau_a(\chi)\ |=\sqrt{p}.$$

Он также решил более трудную задачу определения знака $\tau_a(\chi)$ и показал, что

$$\tau_a(\chi)=\sqrt{p}\ \text{ при }\ p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$$

и

$$\tau_a(\chi)=i\sqrt{p}\ \text{ при }\ p\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4).$$

К. Гаусс использовал свойства сумм (*) для решения нек-рых задач теории чисел, в частности он применил их в одном из доказательств *квадратичного закона взаимности*.

Значение Г. с. для теории чисел было выявлено только в 20-е гг. 20 в. В это время Г. Вейль (H. Weyl) применил для исследования равномерных распределений

более общие тригонометрич. суммы, получившие назв. *Вейля сумм*. В то же время И. М. Виноградов использовал Г. с. для получения оценки сверху наименьшего квадратичного невычета по модулю p.

Г. с. позволяют установить связь между двумя важными объектами теории чисел: между мультипликативными характерами $\chi=\chi(m, p)$ и аддитивными характерами

$$f_a=f_a(m)=e^{2\pi i\frac{am}{p}}$$

(ради простоты берется только случай простого модуля p). Множество F всех комплекснозначных функций $f(x)$ периода p образует p-мерное векторное пространство над полем комплексных чисел. Если определить скалярное произведение в F, положив

$$(f,\ g)=\frac{1}{p}\sum_{x=0}^{p-1}f(x)\,\overline{g}(x),\quad f,\ g\in F,$$

то функции $f_a(m)$, $a=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1$, составят ортонормированный базис F. При этом

$$\chi=\sum_{a=0}^{p-1}\alpha_a f_a,$$

где $\alpha_a=\frac{1}{p}\tau_a(\chi)$. Таким образом, Г. с. $\tau_a(\chi)$ (с точностью до множителя $1/p$) являются координатами в разложении мультипликативного характера χ по аддитивным характерам f_a. Возможность линейного представления любого характера $\chi=\chi(m,\ q)$ в виде линейной комбинации экспонент $e^{2\pi i\frac{am}{q}}$, вытекающая из свойств Г. с. общего вида, лежит в основе вывода функционального уравнения для L-функции.

Эти же соображения существенно используются в методе *большого решета* при переходе от оценок сумм от аддитивных характеров к оценкам сумм от мультипликативных характеров. Г. с. применяются также для представления L-функций в виде конечных сумм. Такое представление используется в задаче о числе классов дивизоров кругового поля.

Вопрос о знаке Г. с. $\tau_a(\chi)$, принадлежащей квадратичному характеру, может быть поставлен в более общем виде для Г. с., принадлежащей характеру χ порядка $k\geqslant 3$. Так возникает *Куммера гипотеза* относительно кубических Г. с. по простому модулю $p\equiv 1 \pmod 3$ и обобщения этой гипотезы на случай $k>3$.

Лит.: [1] Карл Фридрих Гаусс. Сб. статей, М., 1956; [2] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [3] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971; [4] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [5] Хассе Г., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953.

Б. М. Бредихин.

ГАУССА ТЕОРЕМА (theorema egregium): *гауссова кривизна* (произведение главных кривизн) регулярной поверхности в евклидовом пространстве E^3 не меняется при изгибаниях поверхности. (Здесь регулярность означает C^3-гладкое погружение.) Г. т. следует из того, что гауссова кривизна K поверхности в точке $(u,\ v)$ может быть выражена через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

и их первые и вторые производные в этой точке. Такое выражение для K наз. уравнением Гаусса, оно допускает разные формы записи (см., напр., [2]). Запись уравнения Гаусса упрощается при специализации координат. Так в изотермич. координатах ($E=G=\lambda$, $F=0$):

$$K=-\frac{1}{2\lambda}\Delta\ln\lambda;$$

в полугеодезич. координатах ($E=1$, $F=0$):

$$K=-\frac{1}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.$$

Уравнение Гаусса вместе с *Петерсона — Кодацци уравнениями* образуют условия интегрируемости системы, к к-рой сводится задача восстановления поверхности по ее первой и второй квадратичным формам. Из Г. т. и *Гаусса — Бонне теоремы* следует, что отличие суммы углов геодезич. треугольника на регулярной поверхности от π равно ориентированной площади сферич. образа этого треугольника (см. [1]).

Г. т. установлена К. Гауссом (C. Gauss) в [1] и является первым и важнейшим результатом в исследовании связей между внутренней и внешней геометриями поверхностей.

Для регулярной m-мерной, $2 \leqslant m \leqslant n-1$, поверхности F^m в римановом пространстве V^n справедливо следующее обобщение Г. т. (см. [3], с. 125; [4], с. 195):

$$k(a,\ b) = \tilde{k}(a,\ b) + \sum_{i=1}^{n-m} (l_i(a,\ a)\, l_i(b,\ b) - l_i^2(a,\ b)), \quad (*)$$

где $k(a,\ b)$, $\tilde{k}(a,\ b)$ кривизны соответственно F^m и V^n в двумерном направлении, определяемом касательными к F^m в рассматриваемой точке векторами a, b, а l_i — вторая квадратичная форма F^m относительно i-й нормали из ортонормированного набора нормалей в этой точке. Из $(*)$ следует, что для гиперповерхности F^{n-1} в R^n все четные элементарные симметрические функции главных кривизн

$$K_{2p} = \sum_{i_1 < \ldots < i_{2p}} k_{i_1} \ldots k_{i_{2p}},$$

$2 \leqslant 2p \leqslant n-1$, определяются внутренней метрикой F^{n-1}. В четномерном E^{2m}, $m > 1$, гиперповерхность F^{2m-1} однозначно определяется ее внутренней метрикой и кривизной Гаусса — Кронекера:

$$K = k_1 \cdot \ldots \cdot k_{2m-1}$$

при условии, что последняя отлична от нуля (см. [5], с. 288).

Для широких классов двумерных нерегулярных поверхностей в E^3 удается определить «внешнюю кривизну» как борелевскую меру, связанную со сферич. отображением, и «внутреннюю кривизну» как меру, связанную с отличием суммы углов треугольников от π. Обобщение Г. т. состоит в утверждении, что внешняя и внутренняя кривизны совпадают. Такое обобщение Г. т. получено для общих выпуклых поверхностей (см. [6]) и для C^1-гладких поверхностей ограниченной внешней кривизны (см. [7]).

Лит.: [1] Гаусс К. Ф., Общие исследования о кривых поверхностях, пер. с лат., в сб.: Об основаниях геометрии, М., 1956; [2] Бляшке В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., М., 1957; [3] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [4] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [5] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [6] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.— Л., 1948; [7] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969. *Ю. Д. Бураго.*

ГАУССА — БОННЕ ТЕОРЕМА: полная кривизна ω двумерного компактного риманова многообразия V^2, замкнутого или с краем, и поворот τ его гладкого края (границы) ∂V^2 связаны с эйлеровой характеристикой χ многообразия V^2 соотношением

$$\omega + \tau = 2\pi\chi;$$

здесь

$$\omega = \int_{V^2} K dS,$$

где K — гауссова кривизна, а S — площадь;

$$\tau = \int_{\partial V^2} k_g\, dl,$$

где k_g — геодезич. кривизна, а l — длина границы. Г.— Б. т. справедлива и для многообразия с кусочно гладкой границей, в этом случае

$$\tau = \int k_g dl + \sum_i (\pi - \alpha_i),$$

где $\pi-\alpha_i$ есть поворот границы в угловой точке. В частности, теорема справедлива на регулярных поверхностях в E^3. К Г.—Б. т. близко подошел К. Гаусс (см. [1]), в отчетливой форме (для гомеоморфных кругу поверхностей) она опубликована О. Бонне (см. [2]).

Для некомпактного полного V^2 без края аналогом Г.— Б. т. является неравенство Кон-Фоссена (см. [3]):

$$\int_{V^2} K\,dS \leqslant 2\pi\chi.$$

Г.— Б. т. и приведенное неравенство верны также для выпуклых поверхностей и двумерных многообразий ограниченной кривизны.

Г.— Б. т. обобщается для четномерных компактных римановых многообразий V^{2p}, замкнутых или с краем:

$$\int_{V^{2p}} \Omega\,dS + \int_{\partial V^{2p}} \varphi\,dl = \frac{(2\pi)^p}{(2p-1)!!}\,\chi,$$

где S, l — объемы в V^{2p} и ∂V^{2p}, Ω — нек-рый полином от компонент тензора кривизны V^{2p}, φ — нек-рый полином от компонент тензора кривизны и коэффициентов второй квадратичной формы ∂V^{2p} (см. [4]). Г.— Б. т. распространена также на римановы полиэдры [5]. Другие обобщения Г.— Б. т. связаны с интегральными представлениями характеристич. классов через параметры римановой метрики (см. [4], [6], [7]).

Лит.: [1] Gauss C., Werke, Bd 8, Gött., 1900; [2] Bonnet O., «J. École polytech.», 1948, t. 19, p. 1—146; [3] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959; [4] Шарафутдинов В. А., «Сиб. матем. ж.», 1973, т. 14, № 6, с. 1321—35; [5] Allendoerfer C. B., Weil A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 53, № 1, p. 101—29; [6] Ells J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1959, v. 92, № 1, p. 142—53; [7] Понтрягин Л. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1949, т. 13, № 2. *Ю. Д. Бураго.*

ГАУССА — ЛАПЛАСА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — одно из названий *нормального распределения*, к-рое наряду с другими названиями (Гаусса закон, гауссовское распределение, второй закон Лапласа, Лапласа — Гаусса распределение и т. д.) связывает историю открытия и первых приложений распределения к различным задачам теории вероятностей с именами К. Гаусса (C. Gauss) и П. Лапласа (P. Laplace). Нормальное распределение появилось у К. Гаусса (1809) и П. Лапласа (1812) в связи с исследованиями по *ошибок теории* и *наименьших квадратов методу*. Так, в развитой К. Гауссом для задач астрономии и геодезии теории ошибок наблюдений плотность вероятностей случайных ошибок выражалась функцией

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\Delta^2}, \quad h > 0$$

(см. *Гаусса закон*). П. Лаплас, кроме того, получил интеграл (функцию Лапласа)

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau e^{-t^2}dt$$

как приближенное значение (при больших n) вероятности того, что число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p будет заключено в пределах $np-\tau\sqrt{2np(1-p)}$ и $np+\tau\sqrt{2np(1-p)}$ (так наз. предельная формула Лапласа). Однако соотношение, где нормальное распределение появляется как предельная форма биномиального с $p=q=1/2$, было найдено еще А. Муавром (A. Moivre, 1733).

Лит.: [1] Гаусс К. Ф., Избр. геодезические соч., пер. с лат. и нем., т. 1, М., 1957, с. 89—109; [2] Laplace P. S., Théorie analitique des probabilités, P., 1812; [3] Todhunter I., A history of the mathematical theory of probability, [N. Y.], 1949. *А. В. Прохоров.*

ГАУССОВА КРИВИЗНА, полная кривизна, поверхности — произведение *главных кривизн* регулярной поверхности в данной точке.

Если

$$\mathrm{I} = ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du dv + G\,dv^2$$

— *первая квадратичная форма* поверхности и

$$\mathrm{II} = L\,du^2 + 2\,M du dv + N\,dv^2$$

— *вторая квадратичная форма* поверхности, то Г. к. вычисляется по формуле

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

Г. к. совпадает с якобианом *сферического отображения*.

$$|K|_{P_0} = \lim_{d(s)\to 0} \frac{S}{s},$$

где P_0 — точка на поверхности, s — площадь области U, содержащей P_0, S — площадь сферич. изображения U, d — диаметр области. Г. к. положительна в *эллиптической точке*, отрицательна в *гиперболической точке* и равна нулю в *параболической точке* и в *уплощения точке*. Г. к. можно выразить только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные (см. *Гаусса теорема*). Именно,

$$K = -\frac{1}{4W^4}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} + \frac{1}{2W}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{F_v - G_u}{W} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{F_u - E_v}{W}\right\},$$

где

$$W^2 = EG - F^2.$$

Так как Г. к. зависит только от метрики, т. е. от коэффициентов первой квадратичной формы, то Г. к. — инвариант *изгибания*. Г. к. играет особую роль в теории поверхностей; существует много формул для ее вычисления (см., напр., [2]).

Г. к. наз. гауссовой кривизной по имени К. Гаусса, к-рый ввел это понятие (см. [1]).

Лит.: [1] Гаусс К. Ф., Общие исследования о кривых поверхностях, пер. с лат., в сб.: Об основаниях геометрии, М., 1956; [2] Бляшке В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., 1957, с. 95.

Е. В. Шикин.

ГАУССОВА ПОЛУГРУППА — коммутативная полугруппа с единицей, удовлетворяющая закону сокращения, в к-рой любой необратимый элемент a разложим в произведение неприводимых (т. е. не представавимых в виде произведения необратимых сомножителей) элементов, причем для любых двух таких разложений

$$a = b_1 \dots b_k \quad \text{и} \quad a = c_1 \dots c_l$$

имеет место $k = l$ и, быть может, после перенумерования сомножителей, справедливы равенства

$$b_1 = c_1\varepsilon_1,\ \dots,\ b_k = c_k\varepsilon_k,$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ — обратимые элементы. Типичные примеры Г. п. — мультипликативные полугруппы отличных от нуля целых чисел, отличных от нулевого многочленов от одного неизвестного над полем. Любые два элемента Г. п. обладают наибольшим общим делителем.

Лит.: [1] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973.

Л. Н. Шеврин.

ГАУССОВО ЧИСЛО — целое комплексное число $a + bi$, где a и b — любые целые рациональные числа. С геометрич. точки зрения Г. ч. образуют на плоскости решетку всех точек с целыми рациональными координатами. Г. ч. впервые были рассмотрены К. Гауссом (C. Gauss) в 1832 в работе о биквадратичных вычетах. Им же были найдены основные свойства множества Г — целых комплексных чисел.

Г является кольцом; единицами Г (т. е. делителями единичного элемента) будут $1, -1, i, -i$, других единиц нет. Простыми (неразложимыми в нетривиальное произведение) числами кольца Г — гауссовыми простыми числами будут числа вида

$$\alpha = a + bi,$$

нормы (модули) $N(\alpha)=a^2+b^2=p$ к-рых есть рациональные простые числа p вида $4n+1$ и $4n+3$. Примеры простых Г. ч.: $1+2i$, $3+4i$, 3, 7 и др.

Любое число из Г однозначно раскладывается в произведение простых Г. ч. Кольца, характеризующиеся этим свойством, наз. гауссовыми кольцами, или *факториальными кольцами*.

В теории биквадратичных вычетов Г. ч. явились первым простым и важным примером расширения поля рациональных чисел.

Лит.: [1] Карл Фридрих Гаусс. Сб. статей, М., 1956.

Б. М. Бредихин.

ГАУССОВСКИЙ ПРОЦЕСС — действительный случайный процесс $X=X(t)$, $t\in T$, любые конечномерные распределения к-рого являются гауссовскими, т. е. характеристич. функции совместных распределений вероятностей случайных величин $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ при любых $t_1, \ldots, t_n\in T$ имеют вид:

$$\varphi_{t_1,\ \ldots,\ t_n}(u_1,\ \ldots,\ u_n)=$$

$$=\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}A(t_k)\,u_k-\frac{1}{2}\sum_{k,\ j=1}^{n}B(t_k,\ t_j)\,u_k u_j\right\},$$

где $A(t)=\mathsf{E}X(t)$ — математич. ожидание и

$$B(t,\ s)=\mathsf{E}[X(t)-A(t)][X(s)-A(s)]$$

— корреляционная функция. Распределение вероятностей Г. п. $X=X(t)$ полностью задается его математич. ожиданием $A(t)$ и корреляционной функцией $B(t,\ s)$, $s,\ t\in T$. Для любой функции $A(t)$ и любой положительно определенной функции $B(t,\ s)$ существует Г. п. $X(t)$, у к-рого среднее значение и корреляционная функция суть именно $A(t)$ и $B(t,\ s)$. Многомерный случайный процесс с векторными значениями

$$X(t)=\{X_1(t),\ \ldots,\ X_m(t)\}$$

наз. гауссовским, если гауссовскими являются совместные распределения вероятностей любых величин

$$X_{i_1}(t_1),\ \ldots,\ X_{i_n}(t_n).$$

Комплексным Г. п. $X=X(t)$, $t\in T$, наз. случайный процесс вида

$$X(t)=X_1(t)+iX_2(t),$$

где действительные $X_1(t)$, $X_2(t)$ в совокупности образуют двумерный Г. п. Иногда, говоря о комплексном Г. п. $X(t)=X_1(t)+iX_2(t)$, считают, что выполняется одно дополнительное условие:

$$\mathsf{E}X(s)\,X(t)=A(s)\,A(t),$$

где

$$A(t)=\mathsf{E}X(t).$$

Это условие вводится для того, чтобы сохранить то свойство обычных гауссовских случайных величин, согласно к-рому некоррелированность равносильна независимости; его можно переписать следующим образом:

$$\mathsf{E}[X_1(t)-A_1(t)][X_1(s)-A_1(s)]=$$

$$=\mathsf{E}[X_2(t)-A_2(t)][X_2(s)-A_2(s)]=\frac{1}{2}\operatorname{Re}B(t,\ s),$$

$$\mathsf{E}[X_1(t)-A_1(t)][X_2(s)-A_2(s)]=-\frac{1}{2}\operatorname{Im}B(t,\ s),$$

где

$$B(t,\ s)=\mathsf{E}[X(t)-A(t)]\,\overline{[X(s)-A(s)]}$$

— корреляционная функция процесса $X(t)$ и

$$A_1(t)=\mathsf{E}X_1(t),\quad A_2(t)=\mathsf{E}X_2(t).$$

Действительный обобщенный случайный процесс $X=\langle u,\ X\rangle$, $u\in U$, на линейном пространстве U наз. обобщенным Г. п., если его характеристич. функционал $\varphi_X(u)$ имеет вид:

$$\varphi_X(u)=e^{iA(u)-\frac{1}{2}B(u,\ u)},\quad u\in U,$$

где $A(u)=\mathsf{E}\langle u,\ X\rangle$ — математич. ожидание обобщенного процесса $X=\langle u,\ X\rangle$,

$$B(u,\ v)=\mathsf{E}\,[\langle u,\ X\rangle-A(u)]\,[\langle v,\ X\rangle-A(v)]$$

— его корреляционный функционал.

Пусть U — гильбертово пространство со скалярным произведением $(u,\ v)$, $u,\ v\in U$. Случайная величина X со значениями в пространстве U наз. г а у с с о в с к о й, если случайный процесс вида $X=\langle u,\ X\rangle$, $u\in U$, — обобщенный Г. п. Математич. ожидание $A(u)$ является линейным непрерывным функционалом, а корреляционная функция $B(u,\ v)$ — билинейным непрерывным функционалом на гильбертовом пространстве U, причем

$$B(u,\ v)\ =\ (Bu,\ v),\quad u,\ v\in U,$$

где положительный оператор B — корреляционный оператор случайной величины $X\in U$, является ядерным. Для любых таких $A(u)$ и $B(u,\ v)$ существует гауссовская величина $X\in U$ такая, что обобщенный процесс $X=\langle u,\ X\rangle$, $u\in U$, имеет средним значением и корреляционной функцией именно $A(u)$ и $B(u,\ v)$.

П р и м е р. Пусть $X=X(t)$ — Г. п. на отрезке $T=[a,\ b]$ и пусть процесс $X(t)$ измерим, причем

$$\int_a^b \mathsf{E}\,[X(t)]^2\,dt<\infty.$$

Тогда почти все траектории $X(t)$, $t\in T$, будут принадлежать пространству интегрируемых в квадрате функций $u=u(t)$ на отрезке T со скалярным произведением

$$(u,\ v)=\int_a^b u(t)\,v(t)\,dt.$$

Формула

$$\langle u,\ X\rangle=\int_a^b u(t)\,X(t)\,dt,\quad u\in U,$$

задает обобщенный Г. п. на этом пространстве U. При этом математич. ожидание и корреляционный функционал обобщенного процесса $X=\langle u,\ X\rangle$ выражаются формулами:

$$A(u)=\int_a^b u(t)\,A(t)\,dt,$$

$$B(u,\ v)=\int_a^b\int_a^b B(t,\ s)\,u(t)\,v(s)\,dt\,ds,$$

где $A(t)$ и $B(t,\ s)$ — соответствующие математич. ожидание и корреляционная функция исходного процесса $X=X(t)$ на отрезке $T=[a,\ b]$.

Почти все основные свойства Г. п. $X=X(t)$ (параметр t пробегает произвольное множество T) могут быть выражены в геометрич. терминах при рассмотрении этого процесса как кривой в гильбертовом пространстве H всех случайных величин Y, $\mathsf{E}Y^2<\infty$, со скалярным произведением $(Y_1,\ Y_2)=\mathsf{E}Y_1Y_2$, для к-рой

$$(X(t),\ 1)=A(t)$$

и

$$(X(t)-A(t),\ X(s)-A(s))=B(t,\ s).$$

Ю. А. Розанов.

Стационарные в узком смысле Г. п. могут быть реализованы посредством нек-рых динамич. систем (сдвиг в пространстве траекторий, см. [1]). Полученные динамич. системы (их иногда наз. н о р м а л ь н ы м и, сравни с нормальным распределением вероятностей) представляют интерес как примеры динамич. систем с непрерывным спектром, свойства к-рых благодаря упомянутому разложению H могут быть изучены с большой полнотой. Так были построены первые конкретные примеры динамич. систем с «неклассическими» спектральными свойствами.

Д. В. Аносов.

Лит.: [1] Д у б Д ж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] И б р а г и м о в И. А., Р о з а н о в Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970; [3] К р а м е р Г., Л и д б е т т е р М., Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [4] I t ô K., «J. Math. Soc. Japan», 1951, v. 3, № 1, p. 157—69; [5] е г о ж е, «Japan. J. Math.», 1952, v. 22, p. 63—86.

ГЕГЕНБАУЭРА МНОГОЧЛЕНЫ — то же, что *ультрасферические многочлены*.

ГЕГЕНБАУЭРА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование $T\{F(t)\}$ функции $F(t)$:

$$T\{F(t)\} = \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\rho-1/2} C_n^{\rho}(t) F(t)\, dt = f_n^{\rho},$$

$$\rho > -1/2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $C_n^{\rho}(t)$ — многочлены Гегенбауэра. Если функция разлагается в обобщенный ряд Фурье по многочленам Гегенбауэра, то имеет место формула обращения

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,(n+\rho)\,\Gamma^2(\rho)\,2^{2\rho-1}}{\pi\Gamma(n+2\rho)} C_n^{\rho}(t) f_n^{\rho}, \quad -1 < t < 1,$$

Г. п. сводит дифференциальную операцию

$$R[F(t)] = (1-t^2)F'' - (2\rho+1)tF'$$

к алгебраической

$$T\{R[F(t)]\} = -n(n+2\rho) f_n^{\rho}.$$

Лит.: [1] Диткин В. А., Прудников А. П., в сб.: Итоги науки. Сер. Математика. Математический анализ. 1966, М., 1967, с. 7—82.

А. П. Прудников.

ГЁДЕЛЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ интуиционистской арифметики — специальная операция, переводящая формулы интуиционистской арифметики в формулы вида $\exists x \forall y\, A(x, y, z)$, где x, y и z — наборы переменных по вычислимым функциям специального вида. При этом выводимые формулы переводятся в истинные формулы в смысле нек-рой четко описанной семантики. Эта интерпретация, к-рая была использована К. Гёделем (K. Gödel) для нового доказательства непротиворечивости *арифметики формальной*, представляет также значительный интерес как нек-рая семантика для языка формальной арифметики.

Рассматривается бесквантор ная аксиоматич. теория T с бесконечным числом типов переменных. Класс переменных данного типа определяется индуктивно, а именно: 1) $x^0, y^0, z^0, \ldots$ — переменные типа 0, переменные для натуральных чисел; 2) пусть теория содержит переменные типов $t_0, t_1, \ldots, t_k$, тогда теория содержит и переменные типа t, где t есть $(t_0, \ldots, t_k)$. Переменные типа t обозначаются через $x^t, y^t, z^t, \ldots$ и рассматриваются как переменные для вычислимых в нек-ром смысле функций, перерабатывающих каждый набор функций типов $t_1, \ldots, t_k$ соответственно в функцию типа t_0. Язык T содержит термы различных типов: переменная x^t типа t является термом типа t, 0 есть терм типа 0, символ s, к-рый служит для обозначения функции прибавления единицы к натуральному числу, есть терм типа (0,0). Остальные термы образуются с помощью правил порождения: *Чёрча λ-абстракции* и примитивной рекурсии для функций произвольного типа. Атомарные формулы теории T суть равенства $(t=r)$, где t, r — термы типа 0. Формулы теории T получаются из атомарных с помощью логических связок исчисления высказываний $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$. Постулатами T являются аксиомы и правила вывода интуиционистского исчисления высказываний, аксиомы для равенства, аксиомы Пеано для 0 и S, уравнения примитивных рекурсий, аксиома применения функции, определенной λ-абстракцией, и, наконец, принцип математич. индукции, сформулированный в виде правила вывода без употребления кванторов. Через T^+ обозначим теорию T, пополненную кванторами по переменным произвольного типа и соответствующими логическими аксиомами и правилами вывода для кванторов.

Г. и. переводит всякую формулу F из T^+ (а следовательно, и всякую формулу интуиционистской арифметики) в формулу вида

$$\exists x \forall y A(x, y, z),$$

где $A(x, y, z)$ — формула без кванторов, а x, y, z — наборы переменных различных типов, z — совокупность всех свободных переменных формулы F.

Пусть F — формула интуиционистской арифметики и $\exists x \forall y\ A(x, y, z)$ — ее гёделевская интерпретация. Если F выводима в формальной интуиционистской арифметике, то может быть построен терм $t(z)$ теории T такой, что формула $A(t(z), y, z)$ выводима в T. Таким образом, непротиворечивость арифметики сводится к установлению непротиворечивости бесквантороной теории T.

Интуиционистская семантика на основе Г. и. определяется следующим образом: формула F считается истинной, если найдется вычислимый терм $t(z)$ такой, что бесквантороная формула $A(t(z), y, z)$ истинна при всяком вычислимом z.

Лит.: [1] Гёдель К., в сб.: Математическая теория логического вывода, М., 1967, с. 299—310. *А. Г. Драгалин.*

ГЁДЕЛЯ ТЕОРЕМА О НЕПОЛНОТЕ — общее название двух теорем, установленных К. Гёделем [1]. Первая Г. т. о н. утверждает, что в любой непротиворечивой *формальной системе*, содержащей минимум арифметики ($+$, $\cdot$, знаки $\forall$, $\exists$ и обычные правила обращения с ними), найдется формально неразрешимое суждение, т. е. такая замкнутая формула A, что ни A, ни $\neg A$ не являются выводимыми в системе. Вторая Г. т. о н. утверждает, что при выполнении естественных дополнительных условий в качестве A можно взять утверждение о непротиворечивости рассматриваемой системы. Эти теоремы знаменовали неудачу первоначального понимания программы Гильберта в области оснований математики, к-рая предусматривала полную формализацию всей существующей математики или значительной ее части (невозможность этого показала первая Г. т. о н.) и обоснование полученной формальной системы путем финитного доказательства ее непротиворечивости (вторая Г. т. о н. показала, что даже если финитными считаются все средства формализованной арифметики, этого не хватит уже для доказательства непротиворечивости арифметики).

Формально неразрешимое суждение строится методом арифметизации синтаксиса, к-рый стал одним из основных методов теории доказательств (метаматематики).

Фиксируется нумерация основных формальных объектов (формул, конечных последовательностей формул и т. д.) натуральными числами такая, что основные свойства этих объектов (быть *аксиомой*, быть *выводом* по правилам системы и т. д.) оказываются распознаваемыми по их номерам с помощью весьма простых алгоритмов. Столь же просто вычисляются по номерам исходных данных номера результатов комбинаторных преобразований (напр., подстановки терма в формулу вместо переменной). При этом оказывается возможным написать арифметич. формулу $B(a, b)$, имеющую вид $f(a, b)=0$ (f — примитивно рекурсивная функция) и выражающую условие: b есть номер формулы, к-рая получается из формулы с номером a путем подстановки натурального числа a вместо переменной x. Если p — номер формулы $\forall b \neg B(x, b)$, то формула $\forall b \neg B(p, b)$ выражает свою собственную невыводимость. Она и оказывается формально неразрешимой. Отсюда следует, что в любой непротиворечивой системе с минимальными выразительными арифметическими возможностями имеется истинное, но не выводимое суждение указанного вида.

Вторая Г. т. о н. получается путем формализации доказательства первой Г. т. о н. Ее доказательство существенно использует особенности арифметизации синтаксиса рассматриваемой системы, а именно — требуется выводимость в этой системе формул, выражающих суждения: 1) система замкнута относительно правила сокращения посылки (*modus ponens*); 2) система замкнута относительно подстановки термов вместо предметных переменных; 3) из истинности формулы вида

$f(N)=0$, где N — натуральное число, f — примитивно рекурсивная функция, следует ее выводимость. Эти условия выполняются для естественной арифметизации, но можно, не меняя алгорифмич. характеристик арифметизации (все функции и предикаты остаются примитивно рекурсивными), изменить ее так, что формула, выражающая непротиворечивость системы (применительно к новой арифметизации), будет выводима. При этом для новой арифметизации будет нарушено условие 1).

Вторая Г. т. о н. дает критерий сравнения формальных систем: если в системе S можно доказать непротиворечивость системы T, то S не погружается в T (см. *Погружающая операция*). Так, доказывается, что *формальный математический анализ* не погружается в арифметику, *типов теория* не погружается в анализ, теория множеств Z не погружается в теорию типов.

Лит.: [1] Gödel K., «Monatshefte für Math. und Phys.», 1931, Bd 38, S. 173—98; [2] Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, 2 Aufl., Bd 2, B., 1970; [3] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

Г. Е. Минц.

ГЁДЕЛЯ ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ — утверждение о полноте классического исчисления предикатов: всякая предикатная формула, истинная на всех моделях, выводима (по формальным правилам классич. исчисления предикатов). Г. т. о п. показывает, что множество выводимых формул этого исчисления в определенном смысле максимально: оно содержит все чисто логические законы теоретико-множественной математики. Доказательство К. Гёделя [1] дает способ построения контрмодели (т. е. модели для отрицания) всякой формулы A, невыводимой в *Генцена формальной системе* без сечения. Имеются также доказательства, основанные на расширениях систем формул до максимальных, а также доказательства, использующие алгебраич. методы. Теорема вместе с доказательством обобщается на исчисление с равенством. Другое направление — обобщение на произвольные множества формул: каждое непротиворечивое множество формул обладает моделью (множество M непротиворечиво, если для любых $A_1, \ldots, A_k \in M$ невыводимо $\neg(A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_k)$). Гёделевское доказательство дает для непротиворечивого множества формул модель, элементами к-рой являются термы. Такие модели составляют исходный пункт во многих исследованиях по метаматематике теории множеств. Другое приложение моделей из термов — теорема Лёвенхейма — Сколема: если счетное множество формул имеет какую-то модель, то оно имеет счетную модель. Само гёделевское доказательство проводится средствами теории множеств без аксиомы бесконечности, т. е. средствами арифметики. Отсюда получается конструктивная форма Г. т. о п. (лемма Бернайса): для каждой предикатной формулы A можно указать такую подстановку ξ арифметич. предикатов вместо предикатных переменных, что $\xi A \to \mathrm{Pr}(A)$ выводима в формальной арифметике; здесь $\mathrm{Pr}(A)$ — арифметич. формула, выражающая, что A выводима. Таким образом, для выводимости A достаточна ее истинность на той модели, к-рую задает подстановка ξ. Лемма Бернайса применяется для построения моделей формальной системы S в системе S', если в S' доказана непротиворечивость S.

Из Г. т. о п. можно извлечь также теорему об устранимости сечения (см. *Генцена формальная система*) и различные теоремы отделения, напр.: если формула, не содержащая знака равенства, выводима средствами исчисления предикатов с равенством, то она выводима в чистом исчислении предикатов; если предикатная формула выводима в арифметике со свободными предикатными переменными, то она выводима в исчислении предикатов.

Г. т. о п. допускает (при соответствующем обобщении понятия модели) обобщение на неклассич. исчисления: интуиционистские, модальные и т. п.

Лит.: [1] Gödel K., «Monatshefte für Math. und Phys.», 1930, Bd 37, S. 349—60; [2] Новиков П. С., Элементы математической логики, М., 1959; [3] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *Г. Е. Минц.*

ГЕЙЗЕНБЕРГА ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — одно из основных возможных (наряду с *Шрёдингера представлением* и *взаимодействия представлением*) эквивалентных представлений зависимости от времени t операторов A и волновых функций Ψ в квантовой механике и квантовой теории поля. В Г. п. операторы A_H зависят от t, а волновые функции ψ_H не зависят от t, и связаны с соответствующими не зависящими от t операторами A_S и зависящими от t волновыми функциями $\psi_S(t)$ в представлении Шрёдингера унитарным преобразованием

$$A_H(t) = e^{i\frac{H}{\hbar}t} A_S e^{-i\frac{H}{\hbar}t}; \quad \psi_H = e^{i\frac{H}{\hbar}t} \psi_S(t), \qquad (1)$$

где эрмитов оператор H есть полный гамильтониан системы, не зависящий от времени. Возможность введения Г. п., как и представления Шрёдингера и взаимодействия, и их эквивалентность основаны на том, что являются наблюдаемыми и имеют физич. смысл не сами по себе A или ψ, а лишь среднее значение операторов A в состоянии ψ, к-рое должно быть инвариантно относительно унитарных преобразований типа (1) и, следовательно, не должно зависеть от выбора представления. Дифференцирование (1) по t дает уравнение для операторов $A_H(t)$ в Г. п., к-рое содержит всю информацию об изменении состояния квантовой системы с течением времени t:

$$i\hbar \frac{\partial A_H(t)}{\partial t} = HA_S - A_S H,$$

где операторы H и A_S, вообще говоря, не коммутируют.

Г. п. названо по имени В. Гейзенберга (W. Heisenberg), к-рый ввел его в 1925 в матричной формулировке квантовой механики. *В. Д. Кукин.*

ГЕЙНЕ — БОРЕЛЯ ТЕОРЕМА об открытом покрытии — см. *Бореля — Лебега теорема.*

ГЕЙТИНГА ФОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА, Гейтинга исчисление,— название трех формальных систем конструктивной логики, предложенных А. Гейтингом [1]. Первая из них — гейтинговское, или интуиционистское, исчисление высказываний — формализация принципов конструктивной логики высказываний; вторая — гейтинговское, или интуиционистское, исчисление предикатов — формализация конструктивной логики предикатов; третья — гейтинговская, или интуиционистская, арифметика — формализация принципов элементарной конструктивной теории чисел. Задуманные первоначально как формализации соответствующих разделов интуиционистской логики и математики, эти системы не содержат, однако, никакой чисто интуиционистской специфики.

Логические Г. ф. с. (исчисление высказываний и исчисление предикатов) получаются из обычных вариантов соответствующих классич. систем с полным комплектом ($\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$) логических связок (см. *Логические исчисления*) путем замены «неконструктивного постулата» (обычно это *исключенного третьего закон* $A \vee \neg A$ или *двойного отрицания закон* $\neg\neg A \supset A$) на *противоречия закон* $(A \& \neg A) \supset B$. Гейтинговская арифметика получается тем же способом из классической *арифметики формальной*. Генценовские логистические (секвенциальные) системы (см. *Генцена формальная система*) для Г. ф. с. обычно отличаются от соответствующих классич. систем ограничением: все *секвенции*, входящие в вывод, односукцедентны.

Г. ф. с. корректны относительно (различных вариантов) конструктивного понимания математич. суждений: в частности, формулы, выводимые в этих системах, рекурсивно реализуемы и имеют истинные *Гёделя интерпретации*. Для Г. ф. с. допустимы интуиционистские (см. *Интуиционизм*) приемы оперирования с логическими связками, содержащими конструктивную задачу: из выводимости формулы вида $\exists x A(x)$ (формулы вида $A \vee B$) следует выводимость формулы $A(t)$ при нек-ром t (соответственно, одной из формул A, B). При этом в случае арифметики рассматриваемые формулы должны быть замкнутыми. Справедливо также п р а в и л о М а р к о в а: из выводимости замкнутой формулы $\neg\neg\exists x R(x)$, где R — примитивно рекурсивная бескванторная формула, следует выводимость $R(N)$ при нек-ром N.

Гейтинговская арифметика удовлетворяет условиям *Гёделя теоремы о неполноте*. В ней невыводим принцип Маркова $\neg\neg\exists x R \supset \exists x R$ для конкретной примитивно рекурсивной формулы R, хотя этот принцип истинен как при конструктивном понимании суждений в смысле Маркова — Шанина, так и при интерпретации Гёделя. Неполнота логических Г. ф. с. относительно интерпретации реализуемости следует из наличия невыводимой, но реализуемой, пропозициональной формулы. Вопрос о полноте гейтинговского исчисления высказываний относительно гёделевской интерпретации остается (1977) открытым.

Всякая формула, выводимая в Г. ф. с., выводима в соответствующей классич. системе. Обратное утверждение опровергается на примере (закон исключенного третьего), однако имеется погружение классич. систем в Г. ф. с., не меняющее формул (если рассматривать их с точностью до эквивалентности в классич. системе) и сохраняющее не только доказуемость формул, но и структуру доказательств: всякий вывод формулы A из списка Γ в классич. системе легко перестраивается в вывод формулы A^- из списка Γ^- в соответствующей Г. ф. с. Здесь A^- обозначает результат дописывания $\neg\neg$ перед всеми подформулами формулы A (в случае исчисления высказываний достаточно вставить $\neg\neg$ только перед самой формулой A). Таким образом, формулы вида A^- выводимы классически тогда и только тогда, когда они выводимы в Г. ф. с., что дает доказательство относительной непротиворечивости для классич. систем. Сохраняющее структуру выводов погружение Г. ф. с. в классич. системы невозможно, однако имеется погружение Г. ф. с. в классич. системы с дополнительной связкой $\Box$ («доказуемо»).

В исчислении предикатов все связки независимы. В арифметике $\neg$ выражается через $\supset$, а $\vee$ — через $\exists$, $\&$, $\supset$. Можно сконструировать логическую связку, через к-рую выражаются все остальные, напр. $(((p \vee q)\&r) \vee (\neg p\&(r \equiv \forall x \exists y s(x,y))))$. Теоретико-множественная теория моделей для Г. ф. с. использует и н т е н с и о н а л ь н ы е м о д е л и, в к-рых истинность высказывания не определяется раз и навсегда, а зависит от рассматриваемого «момента времени». Для изучения гейтинговского исчисления высказываний используются *псевдобулевы алгебры*.

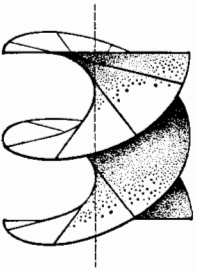
В современной теории доказательств Г. ф. с. изучаются в основном как части систем, включающих более мощные принципы конструктивной математики (принцип Маркова, реализуемость) или интуиционистской математики (брауэровский принцип непрерывности, *бар-индукция* и т. д.).

Лит.: [1] H e y t i n g A., «Sitzungsber. Dtsch. Akad. Wiss. Phys.-math. Klasse», 1930, Bd 16, № 1, S. 42—56, 57—71, № 10—12, S. 158—69; [2] К л и н и С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] К а р р и Х. Б., Основания математической логики, пер. с англ., М., 1969; [4] F i t t i n g M., Intuitionistic logic model theory and forcing, Amst.— L., 1969.

Г. Е. Минц.

ГЕКСАЭДР — шестигранник. Напр., пятиугольная пирамида. Правильный Г. есть куб.

ГЕЛИКОИД — *винтовая поверхность*, описываемая прямой, к-рая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси, пересекает ось движения под постоянным углом α и одновременно перемещается поступательно с постоянной скоростью вдоль этой оси. При $\alpha=\pi/2$ Г. наз. прямым или минимальным (см. рис.). При $\alpha\neq\pi/2$ Г. наз. косым.



Уравнение Г. в параметрич. форме имеет вид

$$x=\rho\cos t,\quad y=\rho\sin t,\quad z=f(\rho)+kt.$$

А. Б. Иванов.

ГЕЛЛЕРСТЕДТА ЗАДАЧА — краевая задача для уравнения типа Чаплыгина вида

$$K(y)\,z_{xx}+z_{yy}=0,$$

в к-ром функция $K(y)$ возрастает, $K(0)=0$, $yK(y)>0$ при $y\neq0$. Искомая функция $z(x, y)$ задается на границе, состоящей из достаточно гладкого контура и кусков характеристик. Рассматриваемое уравнение эллиптично в полуплоскости $y>0$, параболично на линии $y=0$ и гиперболично при $y<0$. Гиперболич. полуплоскость покрывается двумя семействами характеристик, удовлетворяющих уравнениям $y'=[-K(y)]^{-1/2}$ и $y'=-[-K(y)]^{-1/2}$. На линии $y=0$ характеристики одного семейства переходят в характеристики другого семейства.



Пусть E — односвязная область с границей, состоящей из достаточно гладкого контура Γ при $y\geqslant0$ и из кусков характеристик Γ_1, Γ_2, Γ_3 и Γ_4 при $y\leqslant0$, причем Γ_1, Γ_3 — характеристики одного семейства, а Γ_2, Γ_4 — другого (см. рис.). В E справедлива теорема существования и единственности решений следующих краевых задач: функция $z(x, y)$ задается на $\Gamma+\Gamma_1+\Gamma_4$; функция $z(x, y)$ задается на $\Gamma+\Gamma_2+\Gamma_3$.

Впервые эти задачи были изучены (для $K(y)=\operatorname{sgn} y\cdot|y|^{\alpha}$, $\alpha>0$) С. Геллерстедтом [1] методами, развитыми Ф. Трикоми [2] для *Трикоми задачи*, и представляют собой обобщение последней. Г. з. имеют важные приложения в околозвуковой газовой динамике. Г. з. и родственные им задачи исследовались для нек-рых многосвязных областей и для линейных уравнений, содержащих младшие члены (см. [3]).

Лит.: [1] Gellerstedt S., «Arkiv för mat., astr. och fysik», 1938, Bd 26A, № 3, p. 1—32; [2] Трикоми Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, пер. с итал., М., 1957; [3] Смирнов М. М., Уравнения смешанного типа, М., 1970.

Л. П. Купцов.

ГЁЛЬДЕРА МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ — совокупность методов суммирования числовых рядов; введены О. Гёльдером [1] как обобщение *средних арифметических метода суммирования*. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

суммируется методом Гёльдера (H, k) к сумме s, если

$$\lim_{n\to\infty}H_n^k=s,$$

где

$$H_n^0=s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,$$

$$H_n^k=\frac{H_0^{k-1}+H_1^{k-1}+\ldots+H_n^{k-1}}{n+1},$$

$k=1, 2, \ldots$ В частности, $(H, 0)$-суммируемость ряда означает его обычную сходимость; $(H, 1)$ есть метод средних арифметических. Методы (H, k) — вполне *регулярные методы суммирования* при любом k и совместны для всех k (см. *Совместность методов суммирования*). С увеличением k сила метода возрастает: если ряд суммируем методом (H, k) к сумме s, то он суммируем к той же сумме методом (H, k') при любом $k'>k$. Метод (H, k) при всех k равносилен и совместен с *Чезаро методом суммирования* того же порядка k. Если ряд суммируем методом (H, k), то его члены a_n необходимо удовлетворяют условию $a_n=o(n^k)$.

Лит.: [1] Hölder O., «Math. Ann.», 1882, Bd 20, S. 535—549; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951.

И. И. Волков.

ГЁЛЬДЕРА НЕРАВЕНСТВО — 1) Г. н. для сумм. Пусть $\{a_s\}$, $\{b_s\}$ — нек-рые множества комплексных чисел, $s\in S$, где S — конечное или бесконечное множество индексов. Справедливо Г. н.

$$\left|\sum_{s\in S} a_s b_s\right| \leqslant \left(\sum_{s\in S} |a_s|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{s\in S} |b_s|^q\right)^{1/q}, \quad (1)$$

где $p>1$, $1/p+1/q=1$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $|a_s|^p=C|b_s|^q$, а $\arg(a_s b_s)$ и C не зависят от $s\in S$. При $p=q=2$ Г. н. для сумм наз. *Коши неравенством*. В предельном случае при $p=1$, $q=+\infty$ Г. н. имеет вид

$$\left|\sum_{s\in S} a_s b_s\right| \leqslant \left(\sum_{s\in S} |a_s|\right) \sup_{s\in S} |b_s|.$$

При $0<p<1$ знак Г. н. меняется на обратный. Г. н. для сумм допускает обращение (М. Рисс, M. Riesz): если

$$\left|\sum_{s\in S} a_s b_s\right| \leqslant AB$$

при всех $\{a_s\}$ таких, что

$$\sum_{s\in S} |a_s|^p \leqslant A^p,$$

то

$$\sum_{s\in S} |b_s|^q \leqslant B^q.$$

Для сумм более общего вида Г. н. имеет вид

$$\left|\sum_{s\in S} \rho_s a_{1s} a_{2s} \ \ldots\ a_{ms}\right| \leqslant \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{s\in S} \rho_s |a_{ks}|^{p_k}\right)^{1/p_k}, \quad \rho_s \geqslant 0,$$

если

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_m}=1, \ p_k\geqslant 1, \ 1\leqslant k\leqslant m. \quad (2)$$

2) Г. н. для интегралов. Пусть S — измеримое по Лебегу множество n-мерного евклидова пространства R^n и функции

$$a_k(s)=a_k(s^1, s^2, \ldots, s^n), \quad 1\leqslant k\leqslant m,$$

принадлежат $L_{p_k}(S)$, причем выполнено условие (2). Тогда справедливо Г. н.

$$\left|\int_S a_1(s) \ \ldots\ a_m(s)\, ds\right| \leqslant \prod_{k=1}^{m} \left(\int_S |a_k(s)|^{p_k}\, ds\right)^{1/p_k}.$$

При $m=p=q=2$ это есть *Буняковского неравенство*. Для интегрального Г. н. справедливы замечания (о предельном случае и о знаках), аналогичные замечаниям для Г. н. (1).

В Г. н. множество S может быть любым множеством, на некоторой алгебре подмножеств которого задана конечно аддитивная функция μ (например, мера), а функции $a_k(s)$, $1\leqslant k\leqslant m$, μ-измеримы и μ-интегрируемы в степени p_k.

3) Обобщенное Г. н. Пусть S — произвольное множество и пусть на совокупности всех положительных числовых функций $a(s)$: $S\to R^1$ задан (конечный или бесконечный) функционал φ: $a(s)\to\varphi(a)$, удовлетворяющий условиям: а) $\varphi(0)=0$; б) $\varphi(\lambda a)=\lambda\varphi(a)$ для всех чисел $\lambda>0$; в) при $0<a(s)\leqslant b(s)$ выполняется неравенство $\varphi(a)\leqslant\varphi(b)$; г) $\varphi(a+b)\leqslant\varphi(a)+\varphi(b)$. Если

при этом выполняются условия (2), то справедливо обобщенное Г. н. для функционала:

$$\varphi(|a_1, \ldots, a_m|) \leqslant \prod_{k=1}^{m} \left[\varphi(|a_k|^{p_k})\right]^{1/p_k}.$$

Лит.: [1] Hölder O., «Nachr. Ges. Wiss. Göttingen», 1889, № 2, p. 38—47; [2] Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; [3] Беккенбах Э., Беллман Р., Неравенства, пер. с англ., М., 1965.
Л. П. Купцов.

ГЁЛЬДЕРА УСЛОВИЕ — неравенство, в к-ром приращение функции оценивается через приращение ее аргумента. Функция $f(x)$, определенная в области E n-мерного евклидова пространства, удовлетворяет в точке $y \in E$ Г. у. с показателем α (порядка α), где $0<\alpha\leqslant 1$, и коэффициентом $A(y)$, если

$$|f(x)-f(y)| \leqslant A(y)\,|x-y|^{\alpha} \qquad (1)$$

для всех $x \in E$, достаточно близких к y. Это Г. у. наз. иногда изотропным Г. у. Говорят, что $f(x)$ удовлетворяет на множестве $E' \subset E$ (изотропному) Г. у. с показателем α, если Г. у. (1) выполнено для всех $y \in E'$. В случае, когда

$$A = \sup_{y \in E} A(y) < \infty,$$

Г. у. наз. равномерным на E, а A — коэффициентом Гёльдера функции $f(x)$ на E. Г. у. наз. также непрерывностью по Гёльдеру. Величина

$$|f|_{\alpha} = |f,\ E|_{\alpha} = \sup_{x,\ y \in E} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

наз. α-полунормой Гёльдера ограниченной функции на множестве E. Полунорма Гёльдера, как функция от f, логарифмически выпукла:

$$|f|_{\alpha t+\beta(1-t)} \leqslant |f|_{\alpha}^{t}\ |f|_{\beta}^{1-t}.$$

Неизотропное Г. у. вводится аналогично Г. у. (1) и имеет вид:

$$|f(x)-f(y)| \leqslant A \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_j^i (x^j - y^j)\right|^{\alpha_i},$$

где $0<\alpha_i\leqslant 1$, а $\det(a_j^i)\neq 0$. Функции, удовлетворяющие неизотропному Г. у., непрерывны и имеют по направлению ковектора $a^i=(a_1^i, a_2^i, \ldots, a_n^i)$ показатель Гёльдера α_i, $1\leqslant i\leqslant n$.

Для числовых функций одного действительного переменного условие вида (1) было введено Р. Липшицем (R. Lipschitz, 1864) в связи с исследованиями по тригонометрич. рядам. В этом случае Г. у. часто наз. условием Липшица порядка α с константой Липшица A. Для числовых функций $n(\geqslant 2)$ действительных переменных Г. у. было введено О. Гёльдером (O. Hölder) при исследовании дифференциальных свойств ньютонова потенциала.

Г. у. естественным образом переносится на случай отображений метрич. пространств. Говорят, что отображение $f: X \to E$ метрич. пространства X в метрич. пространство E удовлетворяет в точке $x_0 \in X$ Г. у. с показателем α и коэффициентом $A(x_0)$, если существует такая окрестность $U(x_0) \subset X$ точки x_0, что для любого $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство

$$\rho_E(f(x),\ f(x_0)) \leqslant A(x_0)\,\rho_X^{\alpha}(x,\ x_0).$$

Здесь ρ_X и ρ_E — метрики пространств X и E. Аналогично вводится Г. у. на множестве $X' \subset X$, равномерное на X Г. у. и α — полунормы Гёльдера.

Векторные пространства функций, удовлетворяющих тому или иному Г. у., образуют *Гёльдерово пространство*.
Л. П. Купцов.

ГЁЛЬДЕРОВО ПРОСТРАНСТВО — *банахово пространство* ограниченных и непрерывных функций $f(x)=f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, определенных на множестве E

n-мерного евклидова пространства и удовлетворяющих на E *Гёльдера условию*.

Г. п. $C_m(E)$, $m \geqslant 0$ — целое, состоит из m раз непрерывно дифференцируемых на E функций (непрерывных при $m=0$).

Г. п. $C_{m+\alpha}(E)$, $0<\alpha \leqslant 1$, $m \geqslant 0$ — целое, состоит из функций, m раз непрерывно дифференцируемых (непрерывных при $m=0$), все m-е производные к-рых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α.

Норма в $C_m(E)$ и $C_{m+\alpha}(E)$ вводится следующим образом:

$$|f|_m = \|f, E\|_m = \sum_{|k|=0}^{m} \sup_{x \in E} |f^{(k)}(x)|,$$

$$|f|_{m+\alpha} = \|f, E\|_{m+\alpha} = |f|_m + \sum_{|k|=m} \|f^{(k)}, E\|_\alpha,$$

где $k=(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $k_j \geqslant 0$ — целые,

$$|k| = k_1 + \ldots + k_n, \quad f^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|} f(x)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}.$$

Основные свойства Г. п. для ограниченной связной области ($\overline{E}$ — замыкание E):

1) $C_{m+\beta}(\overline{E})$ вложено в $C_{k+\alpha}(\overline{E})$, если $0 \leqslant k+\alpha \leqslant m+\beta$, k, m — целые, $0<\alpha \leqslant 1$, $0<\beta \leqslant 1$. При этом $|f|_{k+\alpha} \leqslant A|f|_{m+\beta}$ и постоянная A не зависит от $f \in C_{m+\beta}(\overline{E})$.

2) Единичный шар пространства $C_{m+\beta}(\overline{E})$ компактен в $C_{m+\alpha}(\overline{E})$, если $0<\alpha<\beta$. Следовательно, любое ограниченное множество функций из $C_{m+\beta}(\overline{E})$ содержит последовательность функций, сходящихся в метрике $C_{m+\alpha}(\overline{E})$ к функции пространства $C_{m+\alpha}(\overline{E})$.

Лит.: [1] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957.

Л. П. Купцов.

ГЕЛЬМГОЛЬЦА УРАВНЕНИЕ — уравнение с частными производными вида

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + cu = 0,$$

где c — постоянное число. К Г. у. приводит изучение установившихся колебательных процессов. При $c=0$ Г. у. переходит в *Лапласа уравнение*. В случае, если в правой части Г. у. стоит функция $f(x)$, это уравнение наз. неоднородным Г. у.

Для Г. у., являющегося уравнением эллиптич. типа, в ограниченной области ставятся обычные краевые задачи (Дирихле, Неймана и др.). Те значения c, для к-рых существует не равное тождественно нулю решение однородного Г. у., удовлетворяющее соответствующему однородному краевому условию, наз. собственным значением оператора Лапласа (соответствующей краевой задачи). В частности, для задачи Дирихле все собственные значения положительны, а для задачи Неймана — неотрицательны. Для значений c, совпадающих с собственными значениями, решение краевой задачи для Г. у. заведомо неединственно. Если же значения c отличны от собственных, то теорема единственности справедлива.

При решении краевых задач для Г. у. применяются обычные методы теории эллиптич. уравнений (сведение к интегральному уравнению, вариационный метод, метод конечных разностей).

В случае неограниченной области с компактной границей для Г. у. ставятся внешние краевые задачи, к-рые при $c<0$ имеют единственное решение, стремящееся к нулю на бесконечности. При $c>0$ стремящееся к нулю на бесконечности решение Г. у., вообще говоря, не является единственным. В этом случае для выделения единственного решения ставят дополнительные условия (см. *Внешняя и внутренняя краевые задачи*, *Предельного поглощения принцип*).

Для регулярного в области G решения Г. у. справедлива следующая формула среднего значения

$$\frac{1}{\text{mes}\,\Omega}\int_{\Omega} u d\sigma = \\ = u(x_0)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}-1} (r\sqrt{c})^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(r\sqrt{c}),$$

где Ω — сфера радиуса r с центром в точке x_0, целиком лежащая в области G, $J_\nu(x)$ — *Бесселя функция* порядка ν.

Г. у. рассматривалось Г. Гельмгольцем (H. Helmholtz), к-рый получил первые теоремы о решении краевых задач для этого уравнения в 1860.

Лит.: [1] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., т. 1 (3 изд.), т. 2 (2 изд.), М.—Л., 1951; [2] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966.

Ш. А. Алимов, В. А. Ильин.

ГЕЛЬФАНДА ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — отображение, сопоставляющее элементу a коммутативной банаховой алгебры A функцию $\hat{a}$ на пространстве X максимальных идеалов алгебры A. Существует взаимно однозначное соответствие между точками пространства X и гомоморфизмами алгебры A в поле комплексных чисел. Если произвести соответствующее отождествление, то Г. п. осуществляется по формуле $\hat{a}(x)=x(a)$. В частном случае *групповой алгебры* локально компактной абелевой группы (со сверткой в качестве умножения на алгебре) Г. п. совпадает с преобразованием Фурье (подробнее см. *Банахова алгебра*). Г. п. введено И. М. Гельфандом [1].

Лит.: [1] Гельфанд И. М., «Матем. сб.», 1941, т. 9 [51], с. 3—24.

Е. А. Горин.

ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ — понятие теории статистического *выборочного метода*. В математич. статистике Г. с. наз. множество к.-л. однородных элементов, из к-рого по определенному правилу выделяется нек-рое подмножество, наз. в ы б о р к о й. Напр., при *статистическом контроле качества*, связанном с уничтожением контролируемых изделий, в роли Г. с. выступает множество всех изделий, подлежащее общей характеризации (в смысле долговечности, соответствия принятым нормам, допускам и т. д.); при этом в простейших случаях контролируемая выборка извлекается из Г. с. случайно (наугад). С точки зрения теории вероятностей выбор «наугад» означает, что если Г. с. содержит N элементов и отбирается выборка из n элементов ($n<N$), то выбор должен быть осуществлен таким образом, чтобы для любой группы из n элементов вероятность быть извлеченной равнялась $n!(N-n)!/N!$. Именно такое правило отбора осуществляется при определении выигравших лотерейных номеров из общего числа всех лотерейных билетов, рассматриваемого как Г. с., к-рая по своему смыслу необходимо является конечным множеством.

В математич. статистике принято результаты к.-л. однородных наблюдений наз. выборкой даже в том случае, когда эти результаты не соответствуют понятию Г. с., указанному выше. Напр., результаты измерения к.-л. физич. постоянной, подверженные случайным ошибкам, часто наз. выборкой из бесконечной Г. с. Предполагается, что принципиально можно произвести любое число таких измерений; полученные фактически результаты считают выборкой из бесконечного множества возможных результатов, называемого Г. с. При этом предполагают, что правило отбора задается функцией распределения $F(x)$, так что вероятность получить результат измерения, принадлежащий полуинтервалу $(a, b]$, выражается разностью $F(b)-F(a)$.

Понятие бесконечной Г. с. не является логически безупречным и необходимым. Для решения статистич. задач нужна не сама Г. с., а лишь те или иные характеристики соответствующей функции распределения $F(x)$. С точки зрения теории вероятностей выборка из

бесконечной Г. с. представляет собой наблюдаемые значения нескольких случайных величин, имеющих заданный закон распределения. В частности, если эти величины независимы и подчиняются одному и тому же распределению, то их наблюденные значения наз. простой выборкой. При таком истолковании термина «выборка» введение дополнительного понятия Г. с. оказывается излишним. *Л. Н. Большев.*

ГЕНЕРАТРИСА — см. *Производящая функция.*

ГЕНЗЕЛЕВО КОЛЬЦО — коммутативное локальное кольцо, для к-рого выполняется *Гензеля лемма*, или, в другом определении, для к-рого выполняется теорема о неявной функции. Для локального кольца A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ последнее означает, что для любого унитарного многочлена $P(X)\in A[X]$ и простого решения $a_0\in A$ уравнения $P(X)=0$ по модулю $\mathfrak{m}$(т. е. $P(a_0)\in\mathfrak{m}$ и $P'(a_0)\notin\mathfrak{m}$) существует $a\in A$, $P(a)=0$ и $a\equiv a_0 \pmod{\mathfrak{m}}$.

Примерами Г. к. являются полные локальные кольца, кольца сходящихся степенных рядов (и в более общем смысле, *аналитические кольца)*, кольцо алгебраических степенных рядов (т. е. рядов из $k[[X_1, \ldots, X_n]]$, алгебраических над $k[X_1, \ldots, X_n]$). Локальное кольцо, целое над Г. к., есть Г. к.; в частности, факторкольцо Г. к. есть Г. к. Для любого локального кольца A существует общая конструкция — такая локальная гензелева A-алгебра ${}^hA$, что для любой локальной гензелевой A-алгебры B существует единственный гомоморфизм A-алгебр ${}^hA\to B$. Алгебра ${}^hA$ локального кольца A является строго плоским A-модулем, $\mathfrak{m}{}^hA$ будет максимальным идеалом алгебры ${}^hA$, поля вычетов A и ${}^hA$ канонически изоморфны, пополнения A и ${}^hA$ (в топологиях локальных колец) совпадают. Так, гензелевой A-алгеброй для $k[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1, \ldots, X_n)}$ является кольцо алгебраических степенных рядов от $X_1, \ldots, X_n$. Если A — нётерово (соответственно приведенное, нормальное, регулярное, превосходное) кольцо, то таким же будет и ${}^hA$. Напротив, если A — целостное кольцо, то ${}^hA$ может не быть целостным; более точно, существует биективное соответствие между максимальными идеалами целого замыкания кольца A и минимальными простыми идеалами ${}^hA$.

Г. к. с сепарабельно замкнутым полем вычетов наз. строго локальным (или строго гензелевым) по причине локальности его спектра в этальной топологии схем; аналогично конструкции построения гензелевой A-алгебры ${}^hA$ имеется функтор строгой гензелевой A-алгебры ${}^{sh}A$. Понятие Г. к. можно вводить для полулокального кольца и даже в более общем смысле для пары кольцо — идеал.

Г. к. можно характеризовать как кольцо, над которым любая конечная алгебра есть прямая сумма локальных колец. Г. к. введены в [1]; общая теория Г. к. и конструкция гензелевой A-алгебры разработаны в [2].

В теории этальных морфизмов и этальной топологии гензелева A-алгебра понимается как индуктивный предел этальных расширений кольца. В коммутативной алгебре взятие гензелевой A-алгебры часто заменяет операцию пополнения, играющую важную роль при локальном исследовании объектов.

Лит.: [1] Azumaya G., «Nagoya Math. J.», 1951, v. 2, p. 119—50; [2] Nagata M., Local rings, N. Y.— L., 1962; [3] Grothendieck A., «Publ. math. IHES», 1967, № 32, ch. 4. *В. И. Данилов.*

ГЕНЗЕЛЯ ЛЕММА — утверждение, полученное К. Гензелем [1] при создании теории *р-адических чисел* и нашедшее затем большое применение в *коммутативной алгебре*. Говорят, что для локального кольца A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ выполняется лемма Гензеля, если для любого унитарного многочлена

$P(X)\in A[X]$ и разложения $\overline{P}(X)=q_1(X)\cdot q_2(X)$ его редукции по модулю $\mathfrak{m}$ в произведение двух взаимно простых многочленов

$$q_1(X)\in(A/\mathfrak{m})[X],\quad q_2(X)\in(A/\mathfrak{m})[X]$$

существуют такие многочлены

$$Q_1(X)\in A[X],\quad Q_2(X)\in A[X],$$

что

$$P(X)=Q_1(X)\cdot Q_2(X),\quad \overline{Q}_1(X)=q_1(X),\quad \overline{Q}_2(X)=q_2(X)$$

(здесь черта обозначает образ при редукции $A\to A/\mathfrak{m}$). В частности, для любого простого корня α редуцированного многочлена $\overline{P}(X)$ существует решение $a\in A$ уравнения $P(X)=0$, удовлетворяющее условию $\overline{a}=\alpha$. Г. л. выполняется, напр., для полного локального кольца. Г. л. позволяет сводить решение алгебраич. уравнения над полным локальным кольцом к решению соответствующего уравнения над его полем вычетов. Так в кольце Z_7 7-адических чисел из Г. л. следует разрешимость уравнения $X^2-2=0$, так как это уравнение имеет два простых корня в поле F_7 из семи элементов. Локальное кольцо, для к-рого выполняется Г. л., наз. *гензелевым кольцом*.

По поводу Г. л. в некоммутативном случае см. [3].

Лит.: [1] Hensel K., «J. reine und angew. Math.», 1904, Bd 27, S. 51—84; [2] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [3] Zassenhaus H., «Arch. Math.», 1954, Bd 5, № 4—6, S. 317—25.

В. И. Данилов.

ГЕНЦЕНА ФОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА — логико-математич. исчисление, служащее для формализации и исследования содержательных доказательств, оперирующих с допущениями (гипотезами). Введены Г. Генценом (G. Gentzen, [2]). Г. ф. с. делят на системы естественного вывода (или натуральные, имитирующие форму обычных математич. умозаключений и потому особенно подходящие для формализованной записи их) и секвенциальные (или логистические, направленные на анализ возможных доказательств данной формулы, на получение результатов о нормальной форме доказательств и их использование в *доказательств теории* и в теории доказательства теорем на ЭВМ). Иногда Г. ф. с. отождествляют с системами секвенциального типа; тем не менее натуральные Г. ф. с. могут использовать *секвенции*, а секвенциальные Г. ф. с. иногда оформляют в виде исчисления формул, а не секвенций; иногда все Г. ф. с. считают натуральными, т. к. все они в той или иной степени отражают обычные приемы оперирования с логич. связками и допущениями.

Натуральные Г. ф. с. содержат правила введения логич. символов и правила удаления символов. Логич. аксиомы немногочисленны (обычно одна — две). Напр., натуральный вариант классич. исчисления предикатов для языка $\{\forall, \supset, \neg\}$ задается аксиомой $A\to A$, правилами введения

$$\frac{A,\ \Gamma\to B}{\Gamma\to(A\supset B)}\ (\supset^+),\qquad \frac{A,\ \Gamma\to B\quad A,\ \Sigma\to\neg B}{\Gamma,\ \Sigma\to\neg A}\ (\neg^+),$$

$$\frac{\Gamma\to A\ (b)}{\Gamma\to\forall x\,A\ (x)}\ (\forall^+),$$

где b не входит в Γ и $\forall xA\,(x)$; правилами удаления

$$\frac{\Gamma\to A\quad \Sigma\to(A\supset B)}{\Gamma,\ \Sigma\to B}\ (\supset^-),\qquad \frac{\Gamma\to\forall x\,A\,(x)}{\Gamma\to A\,(t)}\ (\forall^-),$$

$$\frac{\Gamma\to B\quad \Sigma\to\neg B}{\Gamma,\ \Sigma\to\Delta}\ (\neg^-),\qquad \frac{\Gamma\to\neg\neg A}{\Gamma\to A}\ (\neg\neg^-),$$

где t — произвольный терм, и структурными правилами:

$$\frac{\Gamma\to C}{A,\ \Gamma\to C}\ (\text{утончение}),$$

$$\frac{A,\ A,\ \Gamma \to C}{A,\ \Gamma \to C}\ (\text{сокращение повторений}),$$

$$\frac{\Gamma,\ A,\ B,\ \Sigma \to C}{\Gamma,\ B,\ A,\ \Sigma \to C}\ (\text{перестановка}).$$

Секвенция, находящаяся под чертой, наз. заключением правила, а секвенции, находящиеся над чертой,— посылками. Аксиома $A \to A$ изображает введение допущения A; правило $(\supset^+)$ иллюстрирует освобождение от допущения: формула B верхней секвенции зависит от допущения A, формула $A \supset B$ нижней секвенции уже не зависит от A. Г. ф. с. натурального типа задается иногда в виде исчисления формул (а не секвенций) с неявной записью зависимости от допущений: вывод в таком исчислении — это древовидный граф, в вершинах к-рого могут находиться произвольные формулы (не обязательно аксиомы), а все переходы производятся по правилам вывода. Эти правила получаются вычеркиванием антецедентов из соответствующих правил натуральной системы, описанной с помощью секвенций, причем в случае, когда происходит освобождение от допущений, добавляются соответствующие условия, напр.

$$\frac{A \quad B}{A \,\&\, B}\ (\&^+), \qquad \frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \supset B}\ (\supset^+).$$

Считается, что вхождение V формулы в такой вывод зависит от допущения D, если D не является аксиомой, находится на вершине вывода над V, и в ветви, ведущей от рассматриваемого вхождения D к V, не происходит освобождения от допущения D. При истолковании такого вывода каждому вхождению формулы C сопоставляется секвенция $\Gamma \to C$, где Γ — полный список допущений, от которых зависит рассматриваемое вхождение формулы C. Связь натуральных Г. ф. с. с обычными (гильбертовскими) вариантами соответствующих систем устанавливается с помощью утверждения: $\Gamma \to C$ выводимо в натуральной системе тогда и только тогда, когда C выводимо из Γ с фиксированными переменными в обычной системе.

Натуральные Г. ф. с. в их первоначальной форме плохо приспособлены для поиска вывода путем анализа: при попытке выяснить, по какому правилу из каких посылок могла получиться данная формула (секвенция), возникает неоднозначность — в принципе это может быть правило введения соответствующей логич. связки или любое из правил удаления. При этом множество возможных посылок в правилах удаления потенциально неограничено (за счет варьирования формулы A в правиле $(\supset^-)$). Поэтому полезно иметь правила, обладающие свойством подформульности: в посылки входят только подформулы заключения; а бесконечность проявляется лишь за счет варьирования вида термов в правилах типа $(\forall^-)$. В секвенциальных Г. ф. с. либо все правила обладают свойством подформульности, либо это свойство нарушается лишь для одного правила — правила сечения:

$$\frac{\Gamma \to A \quad A,\ \Sigma \to \Delta}{\Gamma,\ \Sigma \to \Delta}$$

или другого правила близкого вида, напр. для правила $(\neg^-)$. Поэтому Г. ф. с., обладающие свойством подформульности, наз. также свободными от сечения или Г. ф. с. без сечения.

Пример. Свободный от сечения вариант классич. исчисления предикатов LK. Выводимые объекты — произвольные секвенции, составленные из $\{\supset, \neg, A\}$-формул. Аксиома $A \to A$.

Сукцедентные правила:

$$\frac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to (A \supset B)} (\to \supset), \qquad \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg A} (\to \neg),$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A(b)}{\Gamma \to \Delta, \forall x A(x)} (\to \forall),$$

где b не входит в Γ и $\forall x A(x)$.

Антецедентные правила:

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A}{\neg A, \Gamma \to \Delta} (\neg \to), \qquad \frac{A(t), \Gamma \to \Delta}{\forall x A(x), \Gamma \to \Delta} (\forall \to),$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \quad B, \Gamma \to \Delta}{A \supset B, \Gamma \to \Delta} (\supset \to).$$

Структурные правила: сечение, перестановка, утончение и сокращение повторений в антецеденте и сукцеденте (см. *Секвенция*).

При сравнении секвенциальных и натуральных Г. ф. с. правилам введения соответствуют сукцедентные правила, правилам удаления — антецедентные правила. При моделировании в секвенциальных Г. ф. с. правил удаления используется сечение. Свойство подформульности для LK обеспечивает основная теорема Генцена (теорема об устранимости сечения): по всякому выводу в LK можно построить вывод (той же секвенции) без сечения. Эта теорема позволяет устанавливать разрешимость бескванторных систем: из подформул данной бескванторной формулы можно составить лишь конечное число несходных секвенций (секвенции сходны, если они отличаются лишь порядком и повторениями членов в антецеденте и сукцеденте), из к-рых, в свою очередь, можно составить лишь конечное число «кандидатов» в выводы; данная формула доказуема, если среди этих кандидатов найдется вывод.

Г. ф. с. позволяют отражать содержательные особенности теории с помощью чисто структурных соображений; так, Г. ф. с. конструктивной математики часто отличаются от соответствующих классич. систем лишь использованием односукцедентных секвенций вместо произвольных. В свободных от сечения системах легко доказывается непротиворечивость (т. е. невыводимость пустой секвенции), а также выводимость одного из дизъюнктивных членов выводимой дизъюнкции.

Важным обобщением Г. ф. с. являются полуформальные системы, содержащие правила с бесконечным множеством посылок, напр. правило бесконечной индукции (ω-правило):

$$\frac{A(0), A(1), \ldots, A(N), \ldots}{\forall x A(x)}.$$

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Генцен Г., в кн.: Математическая теория логического вывода, Сб. переводов, М., 1967, с. 9—76; [3] Карри Х. Б., Основания математической логики, пер. с англ., М., 1969; [4] Prawitz D., Ideas and results in proof theory, в кн.: Proc. 2 Scand. logic symposium, Amst.— L., 1971.

Г. Е. Минц.

ГЕОДЕЗИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, связанные с определением гравитационного поля и фигуры Земли в единой системе координат. Используют декартову прямоугольную систему x, y, z, а также криволинейные ортогональные координаты B, L, H (см. [3]) или u, v, w, связанные с сжатым эллипсоидом вращения (из-за близости фигуры Земли к такому эллипсоиду). При этом

$$\left.\begin{aligned} x &= (N+H)\cos B \cos L, \quad y = (N+H)\cos B \sin L \\ z &= \left(\frac{b^2}{a^2}N+H\right)\sin B, \quad N = a\left(1-\frac{c^2}{a^2}\sin^2 B\right)^{-1/2}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где a, b — большая и малая полуоси эллипсоида, $2c$ — его фокусное расстояние

$$x = c \sin u \cos v \operatorname{ch} w, \quad y = c \sin u \sin v \operatorname{ch} w,$$
$$z = c \cos u \operatorname{sh} w. \quad (2)$$

Фигуру Земли и ее поле определяют по измерениям геометрич. характера (расстояний между точками, уг-

лов между направлениями), измерениям силы тяжести, локации Луны, наблюдениям искусственных спутников Земли и внегалактических радиоисточников. При развитии наземной сети геодезич. измерений необходимо определять элементы ориентировки местных систем координат.

В выводах с внеземными данными большое значение приобретают геодезич. построения без отвеса (см. [1]). Эти построения основаны на синхронном фотографировании с нескольких пунктов подвижной цели на фоне звезд. Если известны координаты части пунктов и известны склонения и прямые восхождения звезд, сфотографированных вместе с целью, то возможно вывести координаты как сфотографированных целей, так и неизвестные координаты пунктов.

В наземном варианте, из-за искажений углов в вертикальных плоскостях влиянием атмосферной рефракции для вывода высот H точек земной поверхности, разработаны методы, связанные с использованием силы тяжести. Этими же методами определяют земное гравитационное поле. Современная теория использования силы тяжести в геодезии принадлежит М. С. Молоденскому (см. [2]). Эта теория основана на решении краевой задачи с косой производной для уравнения Лапласа. Отсчетным может служить поле потенциала U притяжения

$$U = \frac{fmi}{c} Q_0 (i \operatorname{sh} w) + \frac{\omega^2 a^2}{3} \cdot \frac{Q_2 (i \operatorname{sh} w)}{Q_2 \left(i \frac{b}{c} \right)} P_2 (\cos u),$$

близкого к земному. Здесь f — гравитационная постоянная, m — масса, близкая к массе Земли, ω — угловая скорость ее вращения, P, Q — функции Лежандра соответственно 1-го и 2-го рода. Потенциал W силы тяжести выражается через его значение W_0 в начале счета высот (уровня моря) и приращение, выводимое из геометрич. нивелирования и измерений силы тяжести вдоль его линии:

$$W = W_0 - \int g \, dh,$$

где dh — элементарное нивелирное превышение. По приращению $\int g dh$ потенциала определяют приближенную координату w_0, полагая, что нивелирование выполнено в поле потенциала силы тяжести эллипсоида, уровенного относительно этого потенциала. Для уточнения координаты w_0 (вывода высоты H) и определения внешнего земного гравитационного поля достаточно найти потенциал T, наз. возмущающим:

$$T = W - \Omega - U. \qquad (3)$$

Здесь Ω — потенциал центробежной силы, возникающий из-за вращения Земли. Краевое условие на земной поверхности для вывода потенциала получают, используя связь $dw/dH = -g$ и вычисляя dU/dw в точке с координатой w_0. На бесконечности ($\operatorname{sh} w \to \operatorname{ch} w \to \infty$) потенциал T удовлетворяет условию $\lim T = 0$.

Решение задачи сводится к выводу плотности простого слоя также на земной поверхности, связанного с потенциалом T нек-рой зависимостью. Из этой зависимости и краевого условия выводится сингулярное интегральное уравнение 2-го рода. На это уравнение при определенных условиях распространяется альтернатива Фредгольма. Краевые условия допускают единственное решение при эллипсоидальном отсчетном поле. Если же отсчетное поле вырождается в сферическое, решением задачи становится произвольная сферич. функция 1-й степени. Из-за неизбежных ошибок измерений вводят дополнительные условия о совмещении центра инерции Земли и центра отсчетного эллипсоида, о параллельности полярной главной центральной оси инерции Земли и малой оси отсчетного эллипсоида.

Центр инерции Земли может не лежать на ее оси вращения. В частности, так будет,если из гравитационного поля Земли для уменьшения ошибок интерполяции силы тяжести выделено влияние топографич. масс. В горных районах, из-за сложности земной поверхности, численное решение представляет большие практич. затруднения.

Координаты B, L, H нек-рой точки, принимаемой за исходную при обработке измерений геометрич. характера, назначают заранее произвольно, но так, чтобы компоненты $\varphi - B$, $(\lambda - B)\cos B$ уклонения отвеса от нормали к эллипсоиду были малы. При этом вводят условия о параллельности осей вращения Земли и эллипсоида и плоскостей начальных астрономич. и геодезич. меридианов.

Величину W_0 и координаты центра инерции Земли определяют, сопоставляя решение упомянутого интегрального уравнения с наблюдениями астрономич. широт φ и долгот λ и с высотами H, выводимыми из геометрич. и астрономо-гравиметрич. нивелирования.

Из исследования орбит искусственных спутников Земли определяют отличия ее гравитационного поля от сферического, как правило, через вывод коэффициентов разложения потенциала по сферич. функциям. Традиционные методы небесной механики дополняет теория совместного определения гравитационного поля и координат станций наблюдения за спутниками.

Основы математич. теории фигуры Земли заложены И. Ньютоном (I. Newton, 1687), вычислившим сжатие земного эллипсоида при условии, что он однороден по плотности. А. Клеро (A. Clairaut, 1743) в первом приближении исследовал гравитационное поле неоднородной Земли, вращающейся в гидростатич. равновесии. Л. Эйлер (L. Euler, 1757) заложил основы теории уровенных поверхностей земного потенциала. Изучая притяжение небесных тел — сфероидов, в частности эллипсоидов вращения, П. Лаплас (P. Laplace, 1785) обобщил результаты А. Клеро о распределении силы тяжести на поверхности планеты, освободив их от предположения о гидростатич. равновесии и сохранив точность вывода А. Клеро (порядка земного сжатия — 1 : 300). При этом П. Лаплас развил теорию сферич. функций и рядов. Работы Дж. Стокса (G. Stokes), развитые и дополненные в дальнейшем многими геодезистами, служили теоретич. основой использования гравиметрич. измерений в геодезии до появления работ М. С. Молоденского. К определению фигуры Земли Дж. Стокс впервые подошел как к краевой задаче, приближенно решив первую краевую задачу для сфероида и обосновав результаты А. Клеро и П. Лапласа. Это решение Дж. Стокса опередило результаты П. Дирихле (P. Dirichlet, 1852) по решению такой задачи для сферы разложением по сферич. функциям. Дж. Стокс (1849) выразил также высоту внешней уровенной поверхности планеты над сфероидом через силу тяжести на поверхности планеты. Вывод о возможности замены притяжения тела притяжением простого слоя на поверхности тела сделан К. Гауссом (C. Gauss, 1840). Теория вращения неоднородной жидкости в гидростатич. равновесии имеет значение при совместном решении геофизич. и геодезич. задач. Основные результаты в этой области принадлежат А. М. Ляпунову.

Лит.: [1] Изотов А. А. и др., Основы спутниковой геодезии, М., 1974; [2] Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И., Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли, М., 1960; [3] Морозов В. П., Курс сфероидической геодезии, М., 1969.

В. Ф. Еремеев, М. И. Юркина.

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ КРИВИЗНА в точке кривой $\gamma = r(t)$ на поверхности F — скорость вращения касательной к γ вокруг нормали $\boldsymbol{n}$ к F, т. е. проекция на $\boldsymbol{n}$ вектора угловой скорости вращения касательной при движении вдоль γ. Предполагается, что γ и F

регулярны и ориентированы, скорость берется относительно длины s вдоль γ. Г. к. может быть определена как кривизна проекции γ на касательную плоскость к F в рассматриваемой точке. Г. к. равна

$$k_g = \frac{(r'r''n)}{|r'|^3},$$

где штрих означает дифференцирование по t.

Г. к. входит в выражение вариации длины $L(\gamma)$ при варьировании γ на F. При закрепленных концах:

$$\delta L = -\int k_g(\mathbf{v}, \delta r)\, ds, \text{ где } \mathbf{v} = \left[n, \frac{dr}{ds}\right],$$

δr — вектор вариации кривой. Кривые, на к-рых $k_g \equiv 0$ — *геодезические линии*.

Интегральной Г. к., или поворотом кривой γ, наз. интеграл $\int k_g ds$. Связь поворота замкнутого контура с интегральной кривизной охваченной им области на поверхности дает *Гаусса — Бонне теорема*.

Г. к. принадлежит *внутренней геометрии* поверхности и допускает выражение через метрич. тензор и производные внутренних координат поверхности по параметру t кривой. Если внутренняя геометрия риманова пространства изучается в отвлечении от возможных погружений, то Г. к. остается единственной кривизной кривой и слово «геодезическая» опускается. При рассмотрении кривых в подмногообразии риманова пространства кривизна кривой может определяться во внешнем пространстве и в подмногообразии, подобно тому, как на поверхности кривая имеет обычную кривизну и Г. к.

Можно ввести понятие Г. к. для кривой γ на общей выпуклой поверхности. Если кривая γ имеет длину и каждая ее дуга имеет определенный поворот, то правой (левой) Г. к. кривой γ в точке x наз. предел отношения правого (левого) поворота дуги кривой к ее длине, при условии, что дуга стягивается в точку x.

В финслеровом пространстве определяют два понятия Г. к., различающиеся способом измерения длины вектора, заменяющего $\mathbf{v}$. На геодезических эти Г. к. равны нулю.

Ю. С. Слободян.

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ, геодезическая,— геометрическое понятие, обобщающее понятие прямой (или отрезка прямой) евклидовой геометрии на случай пространств более общего вида. Определения Г. л. в различных пространствах зависят от того, какая из структур (метрика, линейный элемент, линейная связность) лежит в основе геометрии рассматриваемого пространства. В геометрии тех пространств, где метрика считается заданной априори, Г. л. определяют как локально кратчайшие. В пространствах со связностью Г. л. определяют как кривые, у к-рых касательный вектор остается касательным при параллельном перенесении вдоль кривой. В римановой и финслеровой геометриях, где первоначально задается линейный элемент (иначе говоря,— метрика в касательном пространстве в каждой точке рассматриваемого многообразия), а длины кривых получаются последующим интегрированием, Г. л. определяют как экстремали функционала длины кривой.

Впервые Г. л. изучались И. Бернулли (J. Bernoulli) и Л. Эйлером (L. Euler) при отыскании кратчайших на регулярных поверхностях в евклидовом пространстве. На таких линиях обращается в нуль *геодезическая кривизна;* главная нормаль этих кривых параллельна нормали к поверхности. При изгибаниях Г. л. сохраняются. Движение консервативной механич. системы с конечным числом степеней свободы описывается Г. л. в соответственно подобранном римановом пространстве.

В римановых пространствах Г. л. изучены наиболее полно. Пусть M^n есть n-мерное риманово пространство

с метрич. тензором g_{ij} класса C^k, $k\geqslant 2$. Определение Г. л. как экстремали позволяет написать ее дифференциальные уравнения в произвольных локальных координатах x^i, $i=1, 2, \ldots, n$, при любой параметризации $\gamma=\{x^i(t)\}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right)-\frac{\partial F}{\partial x^i}=0,$$

где

$$F=\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}, \quad \dot{x}^i=\frac{dx^i}{dt}.$$

Другая эквивалентная форма уравнений Г. л. выводится из требования параллельности переноса вдоль γ касательного вектора $\dot{\gamma}=\{\dot{x}^i\}$. Если t есть длина s дуги вдоль Г. л. или линейная функция от s, то

$$\frac{D}{dt}(\dot{\gamma})=0, \quad \text{или} \quad \ddot{x}^i+\Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k=0. \tag{1}$$

Определение Г. л. уравнением (1) включает и канонич. выбор параметра. При таком определении через каждую точку x_0 проходит Г. л. $\gamma=x(t, \xi)$ с начальным касательным вектором ξ, $x(0, \xi)=x_0$, $\dot{x}(0, \xi)=\xi$. Отображение $\xi\to x(1, \xi)$ касательного пространства в точке x_0 в изучаемое пространство есть экспоненциальное отображение с полюсом x_0. Вблизи начальной точки x_0 — диффеоморфизм, вводящий в изучаемом пространстве римановы координаты.

Ряд свойств Г. л. сохраняется у кривых, определяемых уравнениями 2-го порядка $\ddot{x}=F(x, \dot{x})$, если, подобно (1), функция F — однородная 2-й степени по $\{\dot{x}^i\}$. Определение таких уравнений в терминах касательных расслоений приводит к понятиям *пульверизаций* и их интегральных кривых. Частным случаем последних являются Г. л. (см. [2]).

Поведение Г. л. в малом похоже на поведение прямых в евклидовом пространстве. Достаточно малая дуга Г. л. является кратчайшей среди всех спрямляемых кривых с теми же концами. Через любую точку в любом направлении проходит единственная Г. л. У каждой точки есть окрестность U, в к-рой любые две точки соединимы единственной Г. л., не выходящей из U (см. [3]).

Вопрос о том, как далеко можно продолжить из точки x_0 дугу Г. л., чтобы она оставалась кратчайшей по сравнению с близкими к ней кривыми, составляет одну из задач вариационного исчисления. Сравнение Г. л. с близкими кривыми основано на изучении второй вариации длины, к-рая исследуется путем рассмотрения поля скоростей (*Якоби поле*) в точках Г. л. $\gamma(s)$ при варьировании $\gamma(s, t)$. При любом фиксированном t кривая $\gamma(s, t)$ остается геодезической, а параметр s на ней — каноническим. Если в начале кривой γ скорость равна нулю, то те точки кривой γ, где эта скорость при каком-либо ненулевом поле Якоби оказывается нулем, наз. сопряженными точками. Г. л. остается кратчайшей по сравнению с близкими кривыми до первой сопряженной точки. Для дуги Г. л., продолженной за сопряженную точку, существует сколь угодно близкая более короткая кривая с теми же концами. Поле Якоби $\eta(s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{D^2\eta}{ds^2}+R(\dot{\gamma}, \eta)\dot{\gamma}=0,$$

где $\dot{\gamma}$ — касательный вектор геодезической $\gamma(s)$, а $R(\dot{\gamma}, \eta)$ — *кривизны преобразование*, или, в координатах Ферми x^i, $x^1=s$:

$$\frac{d^2\eta^i}{ds^2}+R^i_{1\ k,1}\ \eta^k=0, \tag{2}$$

где $R^l_{ij,\ k}$ — тензор кривизны. Связь поля Якоби с кривизной обусловливает зависимость свойств геодезических от кривизны пространства. Напр., в пространст-

вах отрицательной кривизны сопряженных точек нет; если пространство еще и односвязно, то любая дуга Г. л.— кратчайшая, а выходящие из точки Г. л. экспоненциально расходятся. Эти свойства играют роль в теории динамич. систем (см. *Геодезический поток*). Монотонность влияния кривизны является предметом ряда так наз. теорем сравнения. В частности, расстояние до первой сопряженной точки и длины векторов поля Якоби на этом участке (нормированных требованием $\eta(0)=0$, $\left|\frac{D\eta}{ds}\right|=1$) убывают с ростом кривизны пространства. Здесь подразумевается сравнение двух Г. л., в соответствующих по длине точках к-рых все кривизны второго пространства мажорируют любую из кривизн первого пространства [4].

В общей теории относительности уравнение (2) служит источником физического истолкования кривизны пространства-времени через поведение Г. л. (см. [5]).

При отказе от сравнения только с близкими кривыми дуга Г. л. может перестать быть кратчайшей раньше, чем пройдет сопряженную точку. Это возможно даже в односвязном пространстве, т. е. причины этого могут быть топологическими и метрическими.

Вопрос о том, как влияет кривизна на протяженность дуги, на к-рой Г. л. остается кратчайшей, играет существенную роль в изучении связей кривизны с топологич. строением пространства. Зависимость количества замкнутых Г. л. или количества разных Г. л., соединяющих две точки, от топологич. строения пространства составляет предмет *вариационного исчисления в целом* (см. [6], [4], [7]).

Семейства Г. л., рассматриваемые как возможные траектории движения, являются предметом теории динамич. систем и эргодич. теории.

В пространствах аффинной связности Г. л. определяются уравнением (1). Для них сохраняются локальные теоремы существования и единственности Г. л., соединяющих две точки, и существования выпуклой окрестности.

Г. л. с аналогичными свойствами определяются и в пространствах проективной связности, а также в случае более общих связностей на многообразиях.

Геометризация задач вариационного исчисления для функционалов, отличных от длины кривой, привела к понятию *финслерова пространства* и Г. л. в нем. Выделение основных геометрических свойств подобных пространств привело к понятию *геодезических геометрий*, которое определяется наличием и продолжаемостью Г. л.

Из метрич. пространств с нерегулярной метрикой наиболее изучены Г. л. на выпуклых поверхностях и в *двумерных многообразиях ограниченной кривизны*. Здесь Г. л. не обязательно гладкая кривая; Г. л. может не иметь продолжения, а в двумерном многообразии ограниченной кривизны может также иметь неединственное продолжение. Г. л. на выпуклой поверхности всегда имеют полукасательную; если продолжается, то только единственным образом; из точки Г. л. исходят почти во всех направлениях. В таких пространствах более естественным, чем Г. л., оказался класс *квазигеодезических линий*, к-рые служат замыканием класса геодезических (см. [8]).

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [2] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967; [3] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [4] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [5] Синг Дж. Л., Общая теория относительности, пер. с англ., М., 1963; [6] Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г., Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930; [7] Милнор Дж., Теория Морса, пер. с англ., М., 1963; [8] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.— Л., 1948.

Ю. А. Волков.

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ОБЛАСТЬ — связное множество G точек поверхности F таких, что для каждой точки x существует круг $K(x)$ с центром в x, при этом $K_G = G \cap K(x)$ имеет один из следующих видов: 1) $K_G(x) = K(x)$; 2) $K_G(x)$ — полукруг круга; 3) $K_G(x)$ — сектор круга $K(x)$, отличный от полукруга; 4) $K_G(x)$ состоит из конечного числа секторов $u_i(x)$ круга $K(x)$, не имеющих никаких общих точек, кроме x.

Точка x в первом случае наз. регулярной внутренней точкой, во втором — регулярной граничной точкой, в третьем — угловой точкой и в четвертом — узловой точкой. Г. о., компактная в себе и не имеющая узловых точек, наз. нормальной областью. Нормальная область есть или замкнутая поверхность, или поверхность с границей, состоящей из конечного числа попарно непересекающихся жордановых полигонов.

Г. о. можно рассматривать как нек-рое метрич. пространство благодаря введению так наз. G-расстояния между точками a и b (нижняя грань всех спрямляемых кривых, соединяющих a и b и лежащих целиком в G). Спрямляемая дуга в G с концами a, b наз. G-отрезком, если она связывает a с b в G кратчайшим образом. Отдельные точки считаются за G-отрезки нулевой длины. Для всех точек G-отрезка справедливо равенство: $\rho_G(a, x) + \rho_G(x, b) = \rho_G(a, b)$. G-лучом наз. луч, лежащий в Г. о., у к-рого каждая частичная дуга есть G-отрезок. G-прямой наз. множество, состоящее из двух лучей, не имеющих никаких других общих точек, кроме начала, причем каждая дуга, содержащаяся в прямой, является G-отрезком.

Г. о. имеет тогда и только тогда полную кривизну, если для всякой последовательности нормальных областей, исчерпывающих Г. о., полные кривизны стремятся к одному и тому же значению. Если гауссова кривизна области нигде не отрицательна или нигде не положительна, то область имеет полную кривизну. Если область не имеет полной кривизны, то всегда можно указать исчерпывающую последовательность нормальных областей, полные кривизны к-рых стремятся к $\pm\infty$. Если граница полной Г. о., гомеоморфной замкнутой полуплоскости, имеет лишь конечное число угловых точек и $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — соответствующие углы, измеренные в Г. о., то для полной кривизны $C(G)$ справедливо неравенство

$$C(G) \leqslant \pi - \sum_{i=1}^{n} (\pi - \omega_i).$$

Лит.: [1] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы по дифференциальной геометрии в целом, М., 1959.

Ю. С. Слободян.

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ — множество точек метризованного двумерного многообразия, удаленных на расстояние r от фиксированной точки O. Частный случай сферы в метрич. пространстве.

На регулярной поверхности и вообще в двумерном римановом пространстве Г. о. при малых r есть простая замкнутая кривая (не обязательно постоянной *геодезической кривизны)*; в каждую ее точку идет из O единственная кратчайшая (радиус), к-рой Г. о. образует прямой угол; Г. о. ограничивает выпуклую область. При $r \to 0$ длина l Г. о. связана с *гауссовой кривизной* K в точке O соотношением

$$\frac{2\pi r - l}{r^3} \longrightarrow \frac{\pi}{3} K.$$

При больших r в точки Г. о. может идти более одного радиуса, она может ограничивать невыпуклую область, распадаться на отдельные компоненты. Г. о. часто используют в исследованиях по геометрии в целом. Свойства Г. о. изучались на общих выпуклых поверхностях и в нерегулярно метризованных многообразиях (см. [1]).

Г. о. в смысле Дарбу — замкнутая кривая постоянной геодезич. кривизны. Является стационарной кривой для изопериметрич. задачи. На поверхностях постоянной кривизны совпадает с Г. о. в обычном смысле (см. [2]).

Лит.: [1] Бураго Ю. Д., Стратилатова М. Б., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1965, т. 76, с. 88—114; [2] Бляшке В., Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна, пер. с нем., М.— Л., 1935.

В. А. Залгаллер.

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СЕТЬ — *сеть*, состоящая из двух однопараметрич. семейств *геодезических линий*.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ в точке P пространства аффинной связности с объектом связности Γ^k_{ij} — любые координаты, при к-рых в точке P все $\Gamma^k_{ij}=0$. Если равенства $\Gamma^k_{ij}=0$ выполняются во всех точках нек-рой кривой, то говорят о Г. к. вдоль кривой (см. *Ферми координаты*). В римановом пространстве с метрич. тензором g_{ij} Г. к. x^k часто определяют условиями $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=0$, эквивалентными в этом случае условию $\Gamma^k_{ij}=0$. Для симметрич. связности, в частности римановой, существуют Г. к. в любой точке и вдоль любой регулярной дуги кривой без самопересечений. Для поверхности F в евклидовом пространстве Г. к. есть декартовы прямоугольные координаты проекции на касательную к F плоскость; если проектирование вести на развертывающуюся поверхность Q, огибаемую касательными к F плоскостями вдоль кривой, то внутренние декартовы координаты на Q будут координатами Ферми на F.

В Г. к. у ковариантной производной поля тензора в точке P координаты равны обычным производным от координат тензора. Это можно принять за определение ковариантной производной, следуя идее Э. Картана (E. Cartan) о перенесении в более общие пространства геометрич. объектов или операций евклидовой геометрии с помощью специальных систем координат, в к-рых в наибольшей степени исключено влияние неевклидовости. На этой же идее основано использование Г. к. в пространстве-времени общей теории относительности, где они связаны с локально инерциальными системами отсчета; их рассмотрение играет заметную роль в физической интерпретации теории.

Геометрически условия $\Gamma^k_{ij}=0$ означают, что прямым $x^i=\xi^i t$ ($\xi^i=\text{const}$, t — параметр) в области изменения координат соответствуют в рассматриваемом пространстве кривые $\gamma(t)$, имеющие в точке P нулевой вектор

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)=\left\{\frac{d^2x^i}{dt^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right\}.$$

Если Г. к. таковы, что прямым всех направлений в точке P соответствуют геодезические, на к-рых повсюду $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)=0$, то x^i наз. р и м а н о в ы м и к о о р д и н а т а м и.

Ю. А. Волков.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК — поток $\{S_t\}$, фазовым пространством к-рого служит многообразие TM^n касательных векторов к риманову (более общо, к финслерову) многообразию M^n (так наз. к о н ф и г у р а ц и о н н о м у м н о г о о б р а з и ю потока), а движение определяется следующим образом. Пусть $v\in TM^n$ — касательный вектор к M^n в точке $x\in M^n$ и длина его $|v|\neq 0$. Пусть через x проведена геодезич. линия γ на M^n в направлении v и x_t есть точка на γ, отстоящая от x (по γ) на расстоянии $t|v|$ (считая положительным то направление на γ, к-рое в точке x совпадает с направлением вектора v). Тогда $S_tv=v_t=\frac{d}{dt}x_t$. Если же $|v|=0$, то $S_tv\equiv v$. При этом оказывается, что $|v_t|=\text{const}$, поэтому векторы единичной длины образу-

ют в TM^n инвариантное относительно $\{S_t\}$ подмногообразие W^{2n-1}; часто под Г. п. понимают ограничение потока $\{S_t\}$ на W^{2n-1}. В локальных координатах Г. п. описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, имеющей в римановом случае вид

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}\ (x_t)\ \frac{dx^j}{dt}\cdot\frac{dx^k}{dt}=0,$$

где x^i есть i-я координата точки x_t, а Γ^i_{jk} суть *Кристоффеля символы* 2-го рода. Г. п. сохраняет естественную *симплектическую структуру* на TM^n, а его ограничение на W^{2n-1} — соответствующую *контактную структуру*. Г. п. играют очевидную роль в геометрии (см. также *Вариационное исчисление в целом*); кроме того, к ним после нек-рой замены времени можно свести описание движения ряда механич. систем согласно *Мопертюи принципу*.

Д. В. Аносов.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК — фигура, состоящая из трех различных точек и попарно соединяющих их *геодезических линий*. Точки наз. вершинами, геодезические — сторонами. Г. т. может рассматриваться в любом пространстве, где есть геодезические.

Если стороны Г. т., лежащего в гомеоморфной открытому кругу области, составляют простой замкнутый контур, то к Г. т. присоединяют внутреннюю область. На регулярной поверхности сумма углов Г. т. минус π (и з б ы т о к т р е у г о л ь н и к а) равна интегральной кривизне внутренней области (см. [1]).

Для метрич. пространства часто рассматривают плоский треугольник с теми же длинами сторон, что у Г. т. Это позволяет вводить различные понятия угла между кратчайшими в метрич. пространствах. В двумерном случае после введения измерения углов можно через избытки Г. т. вводить интегральную кривизну как функцию множества. Сети из Г. т. служат источником аппроксимации метрик многогранными метриками (см. [2]).

Имеются оценки отличия угла Г. т. в изучаемом пространстве от соответствующего угла в треугольнике с теми же длинами сторон на плоскости или на поверхности постоянной кривизны (см. [1], [3], [4]).

Лит.: [1] Г а у с с К., Общие исследования о кривых поверхностях, пер. с лат., в кн.: Об обосновании геометрии, М., 1956; [2] А л е к с а н д р о в А. Д., З а л г а л л е р В. А., Двумерные многообразия ограниченной кривизны. (Основы внутренней геометрии поверхностей), М.—Л., 1962 («Тр. матем. ин-та АН СССР», т. 63); [3] А л е к с а н д р о в А. Д., Одна теорема о треугольниках в метрическом пространстве и некоторые ее приложения, «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 5—23; [4] Г р о м о л Д., К л и н г е н б е р г В., М е й е р В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971.

В. А. Залгаллер.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ГЕОМЕТРИЯ — геометрия метрического пространства (*G*-п р о с т р а н с т в а), к-рое характеризуется единственностью продолжения *геодезических линий*, определяемых как локально кратчайшие.

G-пространство определяется следующей системой аксиом:

1) G есть метрич. пространство; $\rho(x, y)$ — расстояние в нем.

2) G конечно компактно, т. е. в G ограниченные бесконечные множества имеют предельные точки.

3) G выпукло в смысле Менгера, т. е. для точек $x\neq y$ есть отличная от них точка z такая, что

$$\rho(x, z)+\rho(z, y)=\rho(x, y).$$

4) Для каждой точки a есть такое $r>0$, что в шаре $\rho(a, x)<r$ для точек $x\neq y$ найдется отличная от них точка z с $\rho(x, y)+\rho(y,z)=\rho(x, z)$ (аксиома локального продолжения).

5) Если в аксиоме 4) нашлось две точки z_1 и z_2 и $\rho(y, z_1)=\rho(y, z_2)$, то $z_1=z_2$ (аксиома единственности продолжения).

В класс G-пространств попадают, в частности, *римановы пространства* и *финслеровы пространства*. G-пространства, в к-рых продолжение геодезической возможно в целом и любой участок геодезической остается кратчайшей, наз. п р я м ы м и п р о с т р а н с т в а м и. К ним относятся, напр., пространства Евклида, Лобачевского, Минковского, любое односвязное риманово пространство неположительной кривизны. В прямом пространстве и в G-пространстве нек-рого специального типа (эллиптическом) геодезическая определяется двумя точками.

В общих G-пространствах, в отличие от пространства Минковского, сфера не всегда выпукла. Перпендикулярность, определяемая через кратчайшие до геодезических, в отличие от пространства Евклида, не обязательно симметрична. В терминах G-пространств формулируются признаки, выделяющие пространства Евклида, сферическое пространство, пространство Минковского.

Теория G-пространств показала, что многие результаты дифференциальной геометрии не связаны с условиями дифференцируемости. Эта теория углубила изучение финслеровых пространств; позволила исследовать метризации аффинного и проективного пространств, превращающих прямые в геодезические; рассмотреть свободу выбора сети геодезических за счет метризации. Ряд нерешенных вопросов связан с возможным топологич. строением G-пространств (см. [1]).

Лит.: [1] Б у з е м а н Г., Геометрия геодезических, пер. с англ., М., 1962.

В. А. Залгаллер.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗА — утверждение, определяющее движение пробной свободной частицы в теории гравитации Эйнштейна (т. е. в общей теории относительности). В ньютоновской физике частица наз. с в о б о д н о й, если на нее не действуют никакие силы (в том числе и гравитационные). В общей теории относительности понятие силы гравитации как четырехмерного вектора отсутствует и гравитационные свойства определяются римановой структурой пространства-времени. Соответственно, в общей теории относительности движение частицы в гравитационном поле (но без влияния каких-либо негравитационных сил) рассматривается как свободное. Точная формулировка Г. г. такова: мировая линия пробной свободной частицы с ненулевой массой покоя является неизотропной геодезической пространства-времени; мировая линия пробной свободной частицы с нулевой массой покоя (фотон, нейтрино) является изотропной геодезической пространства-времени.

Г. г. является естественным обобщением закона инерции классической механики. Дифференциальные уравнения геодезических (см. *Геодезическая линия)* являются уравнениями движения в общей теории относительности.

Входящее в формулировку Г. г. понятие пробной частицы означает, что не рассматриваются эффекты, связанные с конечными размерами частиц и их внутренним строением, а создаваемое частицей гравитационное поле считается пренебрежимо малым. Пробная частица является идеализированным, предельным случаем реальной частицы, и в весьма широком и естественном классе способов совершения этого предельного перехода удается получить Г. г. как следствие уравнений Эйнштейна [3]. Это обстоятельство существенно отличает общую теорию относительности от всех предшествовавших полевых физич. теорий, в к-рых, повидимому, уравнения движения принципиально не могут быть получены из уравнений поля.

Лит.: [1] Ф о к В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961, гл. 6; [2] С и н г Дж.-Л., Общая теория относительности, пер. с англ., М., 1963, гл. 3; [3] Э й н ш т е й н А., Работы по теории относительности. Собр. научн. трудов, т. 2, М., 1966, № 117.

Д. Д. Соколов.

ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ кривой γ на поверхности F в E^3 — скорость вращения касательной плоскости к F вокруг касательной к γ. Скорость считается относительно длины s дуги при движении точки касания вдоль γ. Кривая γ и поверхность F предполагаются регулярными и ориентированными. Г. к. на F определяется точкой и направлением кривой и равно кручению идущей в этом направлении геодезической. Г. к. равняется

$$\tau_g = \left(\frac{dr}{ds}\, \boldsymbol{n}\, \frac{dn}{ds}\right) = \tau + \frac{d\varphi}{ds} = (k_2 - k_1)\sin\alpha\cos\alpha,$$

где r — радиус-вектор кривой, $\boldsymbol{n}$ — единичная нормаль к F; τ — обычное кручение γ; φ — угол между соприкасающейся плоскостью кривой и касательной плоскостью к поверхности; k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности; α — угол кривой с главным направлением кривизны k_1. *Ю. С. Слободян.*

ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ в точке x — *подмногообразие* M^k *гладкого многообразия* M^n (риманова или с аффинной связностью) такое, что *геодезические линии* многообразия M^n, касающиеся M^k в точке x, имеют с M^k касание не ниже 2-го порядка. Это свойство выполнено во всех точках, если любая геодезическая в M^k является и геодезической в M^n. Такие Г. м. M^k наз. вполне геодезическими многообразиями. *Ю. А. Волков.*

ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, проективное отображение,— отображение f, переводящее геодезические линии пространства U в геодезические линии пространства V. Г. о. $f : U \to V$, где U и V — пространства, в к-рых определены геодезические, локально гомеоморфно (диффеоморфно, если U, V — гладкие многообразия).

Пространство, локально допускающее Г. о. на евклидово пространство, наз. проективно плоским. Г. о. одного риманова пространства на другое существует в исключительных случаях. Из римановых пространств проективно плоски только пространства постоянной кривизны (см. [1]). Описание всех римановых проективно плоских метрических пространств составляет четвертую проблему Гильберта (см. [2]).

В теории пространств аффинной связности вместо Г. о. говорят о геодезич. преобразовании связности, имея в виду переход к другой связности на том же многообразии с сохранением геодезических. Переход от связности $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ к связности $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ есть Г. о. при условии $\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_k\psi_j + \delta^i_j\psi_k$, где ψ_l — поле ковектора. Чтобы пространство с аффинной связностью было проективно плоским, необходимо и достаточно обращение в нуль тензора Вейля.

Лит.: [1] Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, пер. с нем., т. 2, М., 1948; [2] Погорелов А. В., Четвертая проблема Гильберта, М., 1974. *Ю. А. Волков.*

ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ РАССТОЯНИЕ — длина кратчайшей *геодезической линии*, соединяющей две точки (или два множества). В вариационном исчислении Г. р.— значение исследуемого функционала на экстремали, соединяющей две рассматриваемые точки.

ГЕОКРИОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — математич. задачи, возникающие при изучении процессов и явлений, происходящих в мерзлых почвах и горных породах, географич. распространения и условий формирования сезонномерзлых и многолетнемерзлых горных пород (вечной мерзлоты). Интересные Г. м. з. возникают при изучении проблемы взаимодействия температурных и влажностных полей в зонах с подвижными границами раздела фаз. Характерной особенностью Г. м. з. является то, что процессы тепло- и массообмена, происходящие при промерзании и оттаивании пород, тесно связаны между собой. Задача сводится к системе квазилинейных уравнений параболич. типа, поскольку

тепло- и влагообменные характеристики среды существенно зависят от искомых функций. Типичными примерами подобных задач являются исследование промерзания влагонасыщенных тонкодисперсных пород, к-рое сопровождается миграцией влаги к фронту промерзания и пучением, а также исследование оттаивания грубодисперсных пород, сопряженное с инфильтрацией и фильтрацией влаги. Особое значение для инженерной геологии имеет решение многомерной *Стефана задачи*, для областей со сложной конфигурацией, в частности о чаше протаивания при гражданском и промышленном строительстве. Решение вопросов историч. геокриологии приводит к необходимости исследования многофронтовой задачи Стефана с учетом образования зон и вырождения их в точку. Важное значение при этом имеет увязка процессов промерзания и оттаивания в верхних слоях литосферы с радиационно-тепловым балансом. *В. И. Дмитриев.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ — последовательность чисел, каждое из к-рых равно предыдущему, умноженному на нек-рое постоянное для данной прогрессии число $q \neq 0$ (знаменатель прогрессии). Г. п. наз. возрастающей, если $q>1$, убывающей, если $0<q<1$; если $q<0$, то Г. п. — знакочередующаяся. Любой член Г. п. a_j выражается через ее первый член a_1 и знаменатель q формулой

$$a_j = a_1 q^{j-1},$$

а сумма первых n членов Г. п. (знаменатель к-рой не равен 1) — формулой

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1}.$$

Если $|q|<1$, то при неограниченном возрастании числа n сумма S_n стремится к пределу $S=\frac{a_1}{1-q}$. Это число S наз. суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Выражение

$$a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^n + \ldots, \text{ при } |q|<1,$$

— простейший пример сходящегося ряда — геометрический ряд, число $a_1/(1-q)$ является суммой геометрич. ряда.

Термин «Г. п.» связан со свойством любого члена Г. п. с положительными членами: $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$, т. е. любой член есть *геометрическое среднее* между предыдущим и последующим ее членами. *О. А. Иванова.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ — вероятности событий, связанных со взаимным расположением геометрич. фигур, случайно размещенных на плоскости или в пространстве. Простейший пример: в область A на плоскости наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что она попадет в область B, лежащую внутри A? Принимая, что искомая вероятность зависит лишь от «формы» области, но не от ее «положения» внутри A, приходят к выводу, что она единственным образом определяется как отношение площади B к площади A.

Сделанное допущение об инвариантности рассматриваемых вероятностей относительно группы преобразований евклидова пространства, включающей сдвиги, вращения и отражения, типично для большинства задач о Г. в. Ответ обычно получается в форме отношения инвариантной меры множества «благоприятных случаев» к инвариантной мере множества «всех возможных случаев» (см. *Интегральная геометрия*); аналогия с классич. определением вероятности здесь очевидна. Можно отметить, что в связанном с Г. в. *Бертрана парадоксе* только один ответ удовлетворяет условию инвариантности.

Первым примером подсчета Г. в. была *Бюффона задача*, положившая начало идее случайности в геометрии. 200-летняя история развития этой идеи слагается из периодов энтузиазма и интенсивной разработки, сменяемых периодами недооценки и падения интереса к предмету. Наблюдающийся во 2-й пол. 20 в. подъем в этой области привел к значительному расширению круга рассматриваемых моделей (напр., к изучению случайных множеств, полей прямых, т. н. полей волокон и т. п.), и теория Г. в. стала частью нового раздела теории вероятностей — *стохастической геометрии*.

Лит.: [1] Кендалл М., Моран П., Геометрические вероятности, пер. с англ., М., 1972; [2] Stochastic Geometry, ed. E. E. Harding, D. G. Kendall, L., 1974. *Ю. В. Прохоров.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ — решение нек-рых геометрич. задач при помощи различных инструментов (линейки, циркуля и др.), к-рые предполагаются абсолютно точными. В зависимости от выбора инструментов определяется цикл задач, к-рые могут быть разрешены этими средствами. Основным набором инструментов для Г. п. являются циркуль и линейка. Задача на построение разрешима при помощи циркуля и линейки, если координаты искомой точки могут быть записаны в виде выражений, содержащих конечное число операций сложения, умножения, деления и извлечения квадратного корня, примененных к координатам заданных точек (см., напр., *Деления круга многочлен*). Если таких выражений не существует, то задача не может быть решена при помощи циркуля и линейки. К этим задачам относятся, напр., *удвоение куба*, *трисекция угла*, *квадратура круга*. Любая задача на построение, разрешимая при помощи циркуля и линейки, может быть решена при помощи и других наборов инструментов: одним циркулем — так наз. Мора—Маскерони построения (G. Mohr, 1672; L. Mascheroni, 1797); линейкой с двумя параллельными краями, к-рая может быть заменена угольником (A. Adler, 1890); линейкой и окружностью, заданной в плоскости чертежа с отмеченным центром,— Понселе — Штейнера построения (V. Poncelet, 1822; J. Steiner, 1833).

Лит.: [1] Адлер А., Теория геометрических построений, пер. с нем., 3 изд., Л., 1940; [2] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [3] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963.

П. С. Моденов, А. С. Пархоменко.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС — множество симплексов в евклидовом и гильбертовом пространствах, удовлетворяющее нек-рым условиям. Конечным геометрическим комплексом наз. конечный набор замкнутых симплексов в евклидовом пространстве, причем любые два симплекса либо не имеют общих точек, либо пересекаются по общей грани. Два Г. к. считаются изоморфными, если между их вершинами можно установить взаимно однозначное соответствие, обеспечивающее взаимно однозначное соответствие между всеми их симплексами. Подкомплексом Г. к. наз. любая часть его симплексов. Всякий Г. к. изоморфен подкомплексу нек-рого симплекса достаточно высокой размерности. Размерностью конечного Г. к. наз. наибольшая из размерностей составляющих его симплексов.

Бесконечный геометрический комплекс определяется с точностью до изоморфизма как набор симплексов нек-рого, не обязательно счетномерного, гильбертова пространства; при этом вершины симплексов являются концами векторов нек-рого ортонормированного базиса. Каждый Г. к. определяет топологич. пространство, состоящее из всех точек его симплексов и называемое полиэдром Г. к. Размерностью бесконечного Г. к. наз. верхняя грань размерностей его симплексов. В случае бесконечного Г. к. топология полиэдра, индуцированная его вложением в объемлющее гильбертово пространство,

не является единственной, совместимой с обычной топологией на всех его симплексах; примером служит слабая топология. *Е. Г. Скляренко.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ РОД — численный инвариант неособых алгебраич. многообразий. В случае алгебраич. кривых Г. р. совпадает с родом кривой. Для алгебраич. поверхностей Г. р. был впервые определен с различных точек зрения А. Клебшем (A. Clebsch) и М. Нётером (M. Noether) во 2-й пол. 19 в. Последним была доказана также бирациональная инвариантность Г. р. Геометрич. род неособого проективного алгебраич. многообразия X над алгебраически замкнутым полем k есть, по определению, размерность пространства регулярных дифференциальных форм степени $n=\dim X$. В этом случае Г. р. X обозначается $p_g(X)$. Согласно теореме двойственности Серра

$$p_g(X)=\dim_k H^n(X, \mathcal{O}_X),$$

где $\mathcal{O}_X$ — структурный пучок многообразия X. Число $p_g(X)-1$ совпадает с размерностью канонической системы многообразия X. Г. р. играет важную роль в критерии рациональности алгебраических поверхностей (см. *Рациональная поверхность*), а также в общей классификации алгебраических поверхностей. Г. р. бирационально изоморфных гладких проективных многообразий совпадают.

Лит.: [1] Бальдассари М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [2] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972. *И. В. Долгачев.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ТЕОРИЯ — раздел дифференциальной геометрии, основанный на теории представления групп. Применение метода внешних дифференциальных форм позволяет ввести дифференциальные критерии Г. о. т., превращающие ее в эффективный аппарат дифференциально-геометрич. исследования пространств с фундаментальными группами, а также обобщенных пространств (расслоенных пространств, пространств со связностью, дифференцируемых многообразий, снабженных различными дифференциально-геометрич. структурами).

Если каждому элементу S r-членов группы Ли G поставлено в соответствие преобразование каждой точки M, принадлежащей нек-рой области D топологич. пространства E, причем нулевому элементу группы S_0 соответствует тождественное преобразование (отображение) пространства в себя, а последовательное выполнение преобразований при помощи двух элементов S_u и S_v равносильно преобразованию, осуществляемому при помощи произведения этих элементов, и в данном пространстве введена надлежащим образом система координат, то говорят, что группа G локально представлена в пространстве E как группа преобразований. Пространство E называется *пространством представления группы G*, или *пространством с фундаментальной группой G*.

Геометрическим объектом (г. о.) с данной фундаментальной группой G, или г. о., присоединенным к группе G (кратко G-*объектом*), наз. точка пространства представления данной группы G. Само это пространство наз. пространством г. о. в широком смысле слова, или *обобщенным однородным пространством*. Группа преобразований пространства г. о., реализующая его фундаментальную группу, наз. фундаментальной группой этого г. о. Два г. о. в одном и том же пространстве представления группы G наз. эквивалентными, если один из них может быть преобразован в другой с помощью преобразования фундаментальной группы G. Система интранзитивности наз. пространством г. о. в собственном смысле. Пространство представления группы G наз. однородным пространством с фундаментальной группой G, если в нем реализовано истинное транзитивное представление

этой группы. Во всяком пространстве истинного представления конечной группы существует репер, состоящий из конечного числа точек.

Пусть в пространстве г. о. X реализовано истинное транзитивное представление. Подвергая пространство представления и с ним репер R всевозможным преобразованиям фундаментальной группы G, получают полное семейство (пространство) реперов, в к-ром осуществляется просто транзитивное представление группы G. Это пространство отождествляется с групповым или параметрич. пространством группы G. Если принять его произвольную точку (репер) за исходную и сопоставить ей единичный элемент группы G, то все точки этого пространства приводятся во взаимно однозначное соответствие с элементами группы G. Групповые параметры могут рассматриваться как параметры подвижного репера.

Между реперами семейства и элементами группы может быть установлено также и взаимно однозначное соответствие, при к-ром каждому элементу S_a группы приведен в соответствие репер R_a, получаемый из произвольно зафиксированного начального (абсолютного) репера R правым (левым) сдвигом при помощи элемента S_a: $R_a = RS_a$. Текущему элементу S_u будет соответствовать текущий «подвижной» репер R_u. Каждая точка X пространства представления группы G определяется относительно репера R своими координатами $\tilde{X}^K$, $K=1, \ldots, N$, наз. абсолютными координатами, или абсолютными компонентами, г. о. X. Относительными компонентами X_u^K г. о. по отношению к реперу $R_u = S_u^{-1}R$ наз. абсолютные компоненты г. о., в к-рый рассматриваемый объект X превращается при помощи преобразования, переводящего подвижный репер R_u в абсолютный репер R : $X^K = S_u\tilde{X}^K$ и $X^K = f^K(u^s, \tilde{X}^J)$ (где u^s — групповые параметры r-членной группы $s=1, \ldots, r$). Относительные компоненты X^K фиксированного г. о. удовлетворяют вполне интегрируемой системе дифференциальных уравнений

$$dX^K - \xi_s^K \omega^s = 0, \qquad (1)$$

где $\omega^s = \omega^s(u, du)$ — левоинвариантные формы группы G и $\xi_s^K = \xi_s^K(X^J)$. Система (1) наз. системой дифференциальных уравнений инвариантности г. о., а также системой дифференциальных уравнений представления группы G с инвариантными формами ω^s. Функции ξ_s^K наз. основными определяющими г. о. функциями (или определяющими представление функциями). Система вида (1) тогда и только тогда является системой дифференциальных уравнений инвариантности г. о. с относительными компонентами X^K и группой преобразований G, когда коэффициенты ξ_s^K являются функциями только от переменных X^K и данная система (1) вполне интегрируема (основная теорема Г. о. т.). Необходимыми и достаточными условиями полной интегрируемости системы дифференциальных уравнений инвариантности г. о. является выполнение структурных уравнений Ли для определяющих объект функций $\xi_s^J(X^K)$:

$$\frac{\partial \xi_p^J}{\partial X^K}\xi_q^K - \frac{\partial \xi_q^J}{\partial X^K}\xi_p^K = C_{pq}^s \xi_s^J, \quad p, q, s = 1, \ldots, r.$$

Дифференциальные формы

$$\Delta X^J \equiv dX^J - \xi_s^J(X)\,\omega^s$$

наз. структурными формами представления (или структурными формами г. о. с относительными компонентами X^J). Размерность N пространства представления г. о. наз. рангом объекта X. Необходимым условием истинного

транзитивного представления r-членной группы в пространстве объекта X является соотношение $N \leqslant r$. Число $\rho = N - R$, где R — ранг матрицы (ξ_s^K), наз. жанром г. о. Жанр ρ совпадает с числом независимых абсолютных инвариантов г. о.

Система форм

$$\Delta X^J,\ \Omega^J_{K_1},\ \ldots,\ \Omega^J_{K_1 \ldots K_a},\ \ldots,$$

где

$$\Omega^J_{K_1 \ldots K_a} = -\frac{\partial^a \xi_s^J}{\partial X^{K_1} \ldots \partial X^{K_a}}\,\omega^s, \quad a = 1, 2, \ldots,$$

вполне интегрируема. Для фиксированной точки X_0 пространства представления группы G

$$\Delta X_0^J \equiv -\xi_s^J(X_0)\,\omega^s = 0,$$

а возникающие формы

$$\overline{\Omega}^J_{K_1 \ldots K_a} = \Omega^J_{K_1 \ldots K_a}\Big|_{X^J = X_0^J = \text{const}}$$

удовлетворяют структурным уравнениям линейной группы.

Число r_m линейно независимых форм среди форм

$$\overline{\Omega}^J_{K_1},\ \ldots,\ \overline{\Omega}^J_{K_1 \ldots K_m}$$

является арифметич. инвариантом пространства представления группы G. Число $\rho_m = r - r_m$ наз. характером изотропии m-го порядка пространства представления группы G. Числа ρ_a образуют невозрастающую последовательность. Всегда существует такое наименьшее число q, что

$$\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_{q-1} \geqslant \rho_q = \rho_{q+1} = \ldots.$$

Число q также является арифметич. инвариантом пространства представления группы G и наз. порядком нелинейности г. о. X.

Если система дифференциальных уравнений инвариантности г. о.

$$dX^J - \xi_s^J(X^K)\,\omega^s = 0 \tag{2}$$

содержит подсистему

$$dX^\alpha - \xi_s^\alpha(X^\beta)\,\omega^s = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n_1 < N,$$

то система компонент X^α определяет г. о.— подобъект г. о. с относительными компонентами X^J.

Если два г. о. X и Y присоединены к одной и той же группе, причем все относительные компоненты Y^α одного объекта могут быть представлены как определенные аналитич. функции от относительных компонент X^J второго объекта:

$$Y^\alpha = Y^\alpha(X^K), \tag{3}$$

то говорят, что объект Y охватывается объектом X. Г. о. X наз. охватывающим г. о., а объект Y — охваченным г. о. Два г. о. X_1 и X_2 наз. подобными, если каждый из них охватывает другой. Ранги, жанры, характеристики и типы подобных г. о. совпадают. Частный случай подобных г. о. дают изомеры — г. о., компоненты к-рых отличаются только порядком следования. Если система дифференциальных уравнений инвариантности г. о. алгебраически разрешима относительно всех инвариантных форм ω^s группы G, то этим объектом можно охватить любой другой объект, присоединенный к группе G.

Система функций (3) тогда и только тогда будет системой относительных компонент г. о., когда в системе дифференциальных уравнений, к-рой удовлетворяют функции Y^α, коэффициенты разложения по формам ω^s будут функциями только от этих компонент Y^α, т. е.

$$dY^\alpha - \eta_s^\alpha(Y^\beta)\,\omega^s = 0. \tag{4}$$

Если в дифференциальных уравнениях

$$dX^a - \xi^a_s(X^J)\,\omega^s = 0,\ a = 1,\ \ldots,\ n_2 < N,$$

к-рым удовлетворяют компоненты X^a г. о. с относительными компонентами X^J, функции $\xi^a_s(X^J)$ однородны относительно компонент X^a, то система функций X^a наз. у с е ч е н н ы м г. о.

Пусть имеется г. о. X и охваченный им объект Y, т. е. $Y^\alpha = Y^\alpha(X^J)$; тогда

$$Y^\alpha_K \equiv \frac{\partial Y^\alpha}{\partial X^K} = F^\alpha_K(X^J).$$

Совокупность относительных компонент охватывающего г. о. X^J, охваченного г. о. Y^α и частных производных Y^α_K вторых по первым является системой относительных компонент нового охваченного г. о.:

$$\left\{X^J,\ Y^\alpha,\ \frac{\partial Y^\alpha}{\partial X^K}\right\}. \tag{5}$$

При этом, если для X^J и Y^α выполняются уравнения (2), (4) соответственно, то

$$dY^\alpha_K - \left(\frac{\partial \eta^\alpha_s}{\partial Y^\beta}\,Y^\beta_K - \frac{\partial \xi^J_s}{\partial X^K}\,Y^\alpha_J\right)\omega^s = 0.$$

Г. о. (5) наз. п р о и з в о д н ы м г. о.

Г. о. наз. л и н е й н ы м, или к в а з и т е н з о р н ы м о б ъ е к т о м, если группа преобразований его компонент линейна, т. е.

$$\tilde{X}^J = B^J_K(u)\,X^K + B^J(u).$$

Если $B^J = 0$, то г. о. наз. л и н е й н ы м о д н о р о д н ы м о б ъ е к т о м, или т е н з о р о м. Г. о. — линейный объект тогда и только тогда, когда основные определяющие его функции имеют вид:

$$\xi^J_s = K^J_{sK}X^K + K^J_s,$$

где K^J_{sK}, K^J_s — постоянное. Г. о. является линейным однородным объектом тогда и только тогда, когда $K^J_s = 0$, т. е.

$$\xi^J_s = K^J_{sK}X^K.$$

Однокомпонентный тензор X наз. и н в а р и а н т о м. Дифференциальные уравнения инварианта имеют вид $dX - XK_s\omega^s = 0$, где K_s — постоянные. Если не все K_s равны нулю, инвариант наз. о т н о с и т е л ь н ы м. При $K_s = 0$ инвариант наз. а б с о л ю т н ы м.

Если V_n n-мерное дифференцируемое многообразие и u^i — локальные координаты точки $u \in U \subset V_n$, где U — некоторая область этого многообразия, то всегда можно ввести вполне интегрируемую систему n линейных линейно независимых дифференциальных форм θ^i, первыми интегралами к-рой являются координаты u^i. Это означает, что

$$\theta^i = u^i_k du^k$$

и

$$D\theta^i = \theta^k \wedge \theta^i_k.$$

Рассмотрим систему r линейных линейно независимых форм ω^α, удовлетворяющих следующим структурным уравнениям

$$D\omega^\alpha = \tfrac{1}{2}\,C^\alpha_{\beta\gamma}(u)\,\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \theta^k \wedge \omega^\alpha_k,$$

$$\alpha,\ \beta,\ \ldots = n+1,\ \ldots,\ n+r.$$

Формы ω^α имеют р а с с л о е н н у ю с т р у к т у р у по отношению к формам θ^i и при $u^i = u^i_0$, т. е. при $\theta^k = 0$, становятся инвариантными формами r-членной группы Ли G со структурными константами $C^\alpha_{\beta\gamma}(u^i_0)$.

Говорят, что на V_n задано (локально) поле г. о. $\{X\}$, присоединенного к группе G (поле G-объекта), если в каждой точке $u \in U$ этого многообразия, определен г. о. $\{X\}$, присоединенный к нек-рой группе Ли G (G-объект). При этом

$$\tilde{\Phi}^J = \tilde{\Phi}^J(u^1, \ldots, u^n),$$

где $\tilde{\Phi}^J (J = 1, \ldots, N)$ — абсолютные координаты объекта $\{X\}$. Следовательно

$$d\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}^J_k \theta^k.$$

Иначе, система функций X^J, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$\Delta X^J \equiv dX^J - \Xi^J_\alpha (X^K)\, \omega^\alpha - X^J_k \theta^k = 0, \qquad (6)$$

наз. полем г. о., присоединенного к группе G, если система $\Delta X^J = 0$, $\theta^k = 0$ вполне интегрируема. Г. о. $\{X\}$ наз. образующим объектом поля, а функции X^J при $\theta^k = 0$ становятся относительными компонентами г. о. $\{X\}$. Уравнения наз. дифференциальными уравнениями поля г. о. $\{X\}$. Поле г. о. определяет сечение в присоединенном расслоенном пространстве, базой к-рого являются V_n, а слоями — пространства данного геометрич. объекта.

Функции $\Xi^J_s (X^K)$ наз. основными определяющими полефункциями, коэффициенты X^J_k — дополнительными определяющими функциями поля г. о. (или пфаффовыми производными поля). Совокупность функций X^J, X^J_k также является системой относительных компонент г. о., к-рый наз. продолжением г. о. $\{X\}$, или продолженным г. о. первого порядка г. о. $\{X\}$.

Система дифференциальных уравнений (6) поля г. о. правильно продолжаема по формам θ^k. Это означает, что в результате внешнего дифференцирования системы получается квадратичная система вида

$$\Delta X^J_i \wedge \theta^i = 0,$$

где

$$\Delta X^J_i \equiv dX^J_i - \Xi^J_{i\alpha} (X^K, X^K_k)\, \omega^\alpha.$$

Система

$$\Delta X^J_i = X^J_{ik} \theta^k \qquad (7)$$

вместе с системой (6) образует систему дифференциальных уравнений поля продолженного г. о. Система (6) — (7), в свою очередь, правильно продолжаема. После q-го продолжения получается система дифференциальных уравнений поля продолженного г. о. порядка q с относительными компонентами

$$\left\{X^J, X^J_k, \ldots, X^J_{k_1 \ldots k_q}\right\}.$$

Если группа G, к к-рой присоединен г. о., является дифференциальной группой $GL^p(n, R)$ порядка p, то г. о. наз. дифференциально-геометрическим объектом, а поле такого объекта — полем дифференциально-геометрического объекта.

Если образующий объект поля охватывает другой объект (охватывается другим объектом), то поле первого наз. охватывающим (охваченным), а поле второго — охваченным (охватывающим).

Если на дифференцируемом многообразии V_n задано поле г. о., то V_n наз. оснащенным, а заданное поле и образующий его объект — оснащающим полем и, соответственно, объектом.

Поле оснащающего г. о. индуцирует на V_n дифференциально-геометрич. структуру (G-структуру в широком смысле слова). Поэтому оснащающий объект

наз. также и структурным объектом. Тип структуры определяется типом структурного объекта.

Лит.: [1] Веблен О., Уайтхед Дж., Основания дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1949, с. 135—221; [2] Лаптев Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, М., 1953 («Тр. Моск. матем. об-ва», т. 2).

Н. М. Остиану.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ КОЛЬЦО — *локальное кольцо* алгебраич. многообразия или пополнение такого кольца. Коммутативное кольцо, получаемое из кольца многочленов над полем применением операций пополнения, локализации и факторизации по простому идеалу, наз. алгебро-геометрическим кольцом [3]. Локальное кольцо неприводимого алгебраич. многообразия после пополнения не приобретает нильпотентных элементов [2]. Такое свойство локального кольца наз. аналитической приведенностью. Имеет место аналогичный факт о локальных кольцах нормальных многообразий [1]: пополнение локального кольца нормального алгебраич. многообразия является нормальным кольцом (аналитическая нормальность). Известны примеры локальных нётеровых колец, не являющихся аналитически приведенными или аналитически нормальными [4]. Псевдогеометрическим кольцом наз. нётерово кольцо, любое факторкольцо к-рого по простому идеалу является японским кольцом. Область целостности A наз. японским кольцом, если ее целое замыкание в конечном расширении поля частных есть конечный A-модуль (см. [5]). Класс псевдогеометрических колец замкнут относительно локализаций и расширений конечного типа; к нему относятся кольцо целых чисел и все полные локальные кольца. См. также *Превосходное кольцо*.

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [2] Chevalley C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1945, v. 57; [3] Samuel P., Algèbre locale, P., 1953; [4] Nagata M., Local rings, N. Y.— L. 1962; [5] Grothendieck A., «Publ. math. IHES», 1967, № 32, ch. 4.

В. И. Данилов.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК — понятие, иногда используемое в геометрии. Обычно под Г. м. т. понимают множество точек (образующих кривую или поверхность), выделяемых из всех точек пространства к.-л. геометрич. требованием. Напр., эллипс может быть определен как Г. м. т. плоскости, для к-рых сумма расстояний до двух данных точек есть величина постоянная.

А. Б. Иванов.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ, геометро-оптическое приближение,— ряд вида

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s(x, y, z)}{(-i\omega)^s} e^{i\omega\tau(x, y, z)-i\omega t},$$

к-рый формально удовлетворяет уравнению, описывающему волновой процесс (или системе уравнений, тогда u_s — векторы).

Для решения краевых задач теории колебаний (см. *Дифракции математическая теория*) разработан так наз. *лучевой метод* [2], позволяющий строить Г. п. Существует гипотеза, что получающиеся в результате ряды представляют собой асимптотич. разложение искомых решений там, где члены Г. п. не имеют особенностей. В частных случаях эту гипотезу удалось доказать. Имеется и нестационарный аналог Г. п.

Построение функций u_s основано на рассмотрении поля лучей, т. е. экстремалей функционала (см. *Ферма принцип*)

$$\int \frac{ds}{c(x, y, z)},$$

где $c(x, y, z)$ — скорость в рассматриваемой изотропной физич. среде, ds — элемент длины дуги. Пусть пара

параметров α, β характеризует луч, параметр τ — точки на луче, причем

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{c(x, y, z)}.$$

Параметры α, β, τ можно взять за криволинейные координаты. Переход от криволинейных координат α, β, τ к декартовой прямоугольной дается формулой

$$\boldsymbol{r}(\alpha, \beta, \tau) = \boldsymbol{r}(x, y, z).$$

Поверхности $\tau = \text{const}$ ортогональны лучам. В тех точках, где поле лучей не имеет особенностей, отлична от нуля величина

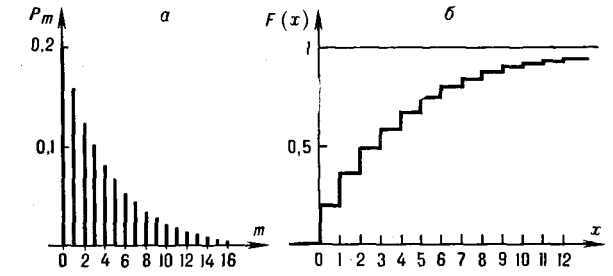
$$J = \left| \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} \right] \right|,$$

к-рая наз. геометрическим расхождением. Величина J входит в рекуррентные соотношения, связывающие функции u_s между собой, и играет фундаментальную роль во всех построениях Г. п.

Лит.: [1] Фридлендер Ф., Звуковые импульсы, пер. с англ., М., 1962; [2] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972.

В. М. Бабич.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение дискретной случайной величины, принимающей целые неотрицательные значения $m = 0, 1, \ldots$ с вероятностями $p_m = pq^m$, где параметр распределения $p = 1 - q$ есть нек-рое число из интервала $(0, 1)$. Характеристич. функция:



Геометрическое распределение: *а* — вероятности p_m, *б* — функция распределения ($p = 0{,}2$).

$$f(t) = \frac{p}{1 - qe^{it}},$$

математич. ожидание: q/p, дисперсия: q/p^2; производящая функция:

$$P(t) = \frac{p}{1 - qt}.$$

Г. р. имеет случайная величина, равная числу независимых испытаний до первого успеха, если вероятность успеха равна p, а неудачи q. Свое название Г. р. получило от порождающей его геометрич. прогрессии.

В. М. Калинин.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ — число, равное арифметич. корню n-й степени из их произведения, т. е.

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}.$$

Г. с. всегда меньше *арифметического среднего*, кроме случая, когда все взятые числа равны между собой; тогда их Г. с. равно их же арифметич. среднему. Г. с. двух чисел наз. средним пропорциональным.

ГЕОМЕТРИЯ — часть математики, первоначальным предметом к-рой являются пространственные отношения и формы тел. Г. изучает пространственные отношения и формы, отвлекаясь от прочих свойств реальных предметов (плотность, вес, цвет и т. д.). В последующем развитии предметом Г. становятся также и

другие отношения и формы действительности, сходные с пространственными. В современном общем смысле Г. объемлет любые отношения и формы, к-рые возникают при рассмотрении однородных объектов, явлений, событий вне их конкретного содержания и к-рые оказываются сходными с обычными пространственными отношениями и формами. Напр., рассматривают расстояния между функциями, отвлекаясь от того, каковы специальные свойства этих функций и какие реальные процессы эти функции описывают (см., напр., *Метрическое пространство*, *Функциональный анализ*).

Исторический очерк. Возникновение Г. относится к глубокой древности. Оно было обусловлено практич. потребностями (измерением земельных участков, объемов тел). Простейшие геометрич. сведения и понятия были известны еще древним египтянам (нач. 2-го тыс. до н. э.). Геометрич. утверждения формулировались тогда в виде правил, логич. доказательства к-рых либо отсутствовали, либо были примитивными. Начиная с 7 в. до н. э. и до 1 в. н. э., развитие Г. происходило в основном в Др. Греции. Здесь накапливались сведения о метрич. соотношениях в треугольниках, измерениях площадей и объемов, пропорциях и подобии фигур, конич. сечениях, задачах на построение. В то время появились уже сравнительно строгие логич. доказательства геометрич. утверждений. Собранием известных фактов Г. и их логической систематизацией явились «*Начала*» *Евклида* (ок. 300 до н. э.). В этом сочинении были сформулированы основные положения (аксиомы) Г., из к-рых при помощи логич. рассуждений выводились различные свойства простейших фигур на плоскости и в пространстве. Здесь впервые сложились основы аксиоматич. метода. Развитие астрономии и геодезии (1—2 вв. н. э.) привело к созданию плоской и сферич. *тригонометрии*.

Дальнейшее развитие Г., вплоть до 17 в., происходило не столь интенсивно. Возрождение наук и искусств в Европе способствовало развитию Г. Теория перспективы, задача к-рой состояла в изображении тел на плоскости (см. *Начертательная геометрия*), была в центре внимания художников и архитекторов. Эта потребность привела к зарождению *проективной геометрии* — раздела Г., в к-ром изучаются свойства фигур, инвариантные относительно так наз. проективных преобразований.

Совершенно новый подход к решению геометрич. вопросов был предложен в 1-й пол. 17 в. Р. Декартом (R. Descartes). Им был создан метод *координат*, позволивший привлечь в Г. методы алгебры, а в последующем и анализа. Начиная с этого момента Г. бурно развивается. Появляется *аналитическая геометрия*, в к-рой методами алгебры исследуются кривые и поверхности, задаваемые алгебраич. уравнениями. Применение в 18 в. Л. Эйлером (L. Euler) и Г. Монжем (G. Monge) методов математич. анализа в Г. заложило основы классической *дифференциальной геометрии*. Ее ведущие разделы: теория кривых и теория поверхностей — интенсивно развивались и обобщались в работах К. Гаусса (C. Gauss) и др. геометров. В результате взаимодействия Г. с алгеброй и анализом в дальнейшем возникли специальные исчисления, удобные для использования в Г. и др. разделах математики (*векторное исчисление*, *тензорное исчисление*, метод *дифференциальных форм*).

Разделы Г., не опирающиеся на методы алгебры и анализа и оперирующие непосредственно с геометрич. образами, получили назв. *синтетической геометрии*.

Предмет, основные разделы геометрии, связь с другими областями математики. Свои первоначальные шаги Г. делала как физич. наука, ее первые результаты описывали свойства физически наблюдаемых величин. Затем, до 2-й пол. 19 в., предметом Г. были

отношения и формы тел пространства, свойства к-рого определялись аксиомами, сформулированными Евклидом (см. *Евклидова геометрия*). Пространство Евклида столь хорошо отражает простейшие физич. наблюдения, что до 19 в. оно как бы отождествлялось с физич. пространством. В 1826 Н. И. Лобачевский построил Г. (см. *Лобачевского геометрия*), в основу к-рой была положена система аксиом, отличающаяся от системы аксиом Евклида только аксиомой о параллельных прямых. В результате появилась логически непротиворечивая Г., существенно отличная от евклидовой. Стало ясно, что в математике возможно построение разнообразных пространств с содержательной Г. (см., напр., *Неевклидовы геометрии*). Наряду с этим сложилась идея многомерного пространства. Следующим новым шагом в Г. была идея Б. Римана (B. Riemann), к-рый в 1854 сформулировал обобщенное понятие пространства как непрерывной совокупности любых однородных объектов или явлений и ввел пространства, измерение расстояний (метрика) в к-рых производится по нек-рому заданному закону «бесконечно малыми шагами». Иными словами, задается определенная функция, к-рая выражает длину пути точки через дифференциалы координат при малом ее смещении. Развитие идеи Римана привело к дальнейшим разнообразным обобщениям способов задания метрики и рассмотрению Г. соответствующих пространств (см. *Риманово пространство*, *Финслерово пространство*). При исследовании физич. пространства, различных механич. систем или вообще систем каких-либо однородных физич. объектов выбор подходящего математич. пространства и сопоставление его элементов объектам изучаемой системы зависят от характера этой системы. Качество такого математич. моделирования проверяется опытом. Разные объекты или одни и те же объекты при разной детальности исследования могут требовать разных пространств. В общей физич. теории пространства-времени-тяготения (см. *Относительности теория*) используется одна из разновидностей римановой Г.

Одним из стимулов развития и систематизации Г. явилась ее связь с теорией групп. Ф. Клейн (F. Klein) в *эрлангенской программе* (1872) так определил содержание Г.: дано многообразие и в нем группа преобразований. Требуется развить теорию инвариантов этой группы. Напр., теория инвариантов ортогональной группы определяет евклидову Г. В такую классификацию хорошо укладываются также *аффинная геометрия*, *конформная геометрия*, проективная геометрия. Но риманова Г. не может быть определена таким образом. В связи с этим Э. Картан (E. Cartan) ввел пространства, в к-рых соответствующая группа преобразований действует только локально, в бесконечно малой окрестности; таковы римановы пространства и пространства с различной *связностью*. Групповой подход с точки зрения непрерывных групп преобразований был предложен С. Ли (S. Lie).

Параллельно в конце 19 в. развивался логич. анализ основ Г. Выяснение непротиворечивости, минимальности и полноты систем аксиом Г. суммировано Д. Гильбертом (D. Hilbert) в книге «Основания геометрии» (1899) (см. *Основания геометрии*).

Современное понимание пространства как непрерывной совокупности однородных объектов (явлений, состояний, фигур, функций) обусловлено глубокой взаимосвязью Г. с другими областями математики. Наиболее отчетливо эта связь проявилась в развитии Г. в 20 в., когда Г. стала широко разветвленной, а ее границы в связи с усилением единства математики стали менее четкими. Теперь пространство в математике понимается как множество, снабженное нек-рой структурой, т. е. нек-рыми отношениями между его элементами или подмножествами. Изучение простейшей весьма

общей структуры, позволяющей говорить о непрерывности, привело к выделению из Г. большой самостоятельной части математики — *топологии*. Г. предполагает наличие более богатых структур. При использовании аналитич. аппарата дополнительные структуры (связности, метрики, конформные и симплектич. структуры и т. п.) задают обычно с помощью тензорных (в частности — векторных) или иных полей.

Исследование ряда геометрич. структур относится и к другим частям математики. Это связано с преобладающим методом исследования. Так, *алгебраическая геометрия* изучает алгебраич. многообразия и связанные с ними алгебраич. и арифметич. проблемы. Алгебраизация геометрич. закономерностей позволяет строить Г. над произвольными полями (в том числе над конечными — конечные Г.). Эти разделы — части алгебры. Бесконечномерные пространства изучаются в функциональном анализе. Однако во всех этих областях математики остается полезным геометрич. способ мышления, при к-ром непосредственно оперируют наглядными образами, без перехода к исчислениям.

Наиболее традиционным предметом Г. остаются пространства, являющиеся многообразиями с той или иной дополнительной структурой, многообразия различных фигур, в частности — подмногообразий в них и полей разного рода объектов на многообразиях. Многие разделы Г. можно характеризовать типом пространств и типом объектов в них, являющихся предметом исследования. Напр., глобальная Г. дифференцируемых многообразий изучает многообразия с гладкими структурами, гладкие многообразия и гладкие поля на них, причем изучает их в целом, на полных многообразиях. *Геометрия в целом* изучает сходные вопросы для кривых и поверхностей при допущении негладкости и особенностей; она ведет свое начало от теории *выпуклых тел*, основы к-рой были заложены Г. Минковским (H. Minkowski). В *интегральной геометрии* исследуются меры на совокупностях геометрич. объектов. *Комбинаторная геометрия* изучает расположения геометрич. фигур топологич. и метрич. средствами (напр., плотнейшие упаковки и редчайшие покрытия) в евклидовом, гиперболич. и эллиптич. пространствах разного числа измерений.

Развитие Г., ее приложения, развитие геометрич. восприятия абстрактных объектов в различных областях математики и естествознания свидетельствуют о важности Г. как одного из самых глубоких и плодотворных по идеям и методам средств познания действительности.

Лит.: [1] Александров А. Д., Геометрия, БСЭ, 3 изд., т. 6; [2] Математика, ее содержание, методы и значение, М., 1956, т. 1, с. 5—69, 180—245; т. 2, с. 97—144; [3] Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959; [4] Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины 19 столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966; [5] Клейн Ф., Лекции о развитии математики в 19 столетии, пер. с нем., М.— Л., 1937; [6] Стройк Д. Я., Краткий очерк истории математики, пер. с нем., 2 изд., М., 1969; [7] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [8] Об основаниях геометрии, М., 1956; [9] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 5 изд., М., 1971; [10] Клейн Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.—Л., 1939.

См. также лит. при статьях об отдельных геометрических дисциплинах.

Э. Г. Позняк.

ГЕОМЕТРИЯ В ЦЕЛОМ — геометрич. теории, предметом изучения к-рых является полный геометрич. образ (вся кривая, вся поверхность, все пространство, аналогично — все поле вектора, все поле тензора или другого геометрич. объекта, аналогично — все отображение одного геометрич. образа или всего поля геометрич. объекта на другое). Термин «Г. в ц.» (Geometrie im Grossen) возник в немецкой математич. литературе в нач. 20 в. в связи с противопоставлением Г. в ц. геометрии в малом — теориям, в к-рых геометрич. образ (аналогично — поле, отображение) изучается только

в достаточно малых областях, как это имело место в классической *дифференциальной геометрии*, методы к-рой были недостаточны для нужд Г. в ц. При отсутствии указанного противопоставления, когда рассматривают только объекты в целом (в элементарной геометрии, в топологии многообразий), термин «Г. в ц.» не употребляется.

Качественное отличие свойств в целом от свойств в малом проявилось прежде всего в вопросах жесткости, изгибаемости, изометричных погружений поверхностей (напр., малый кусок выпуклой поверхности изгибаем с сохранением выпуклости, а вся поверхность выпуклого тела уже так не изгибаема); в поведении геодезич. линий (напр., в малой области две точки гладкой поверхности соединимы единственной геодезической, а на всей замкнутой поверхности — бесконечным числом геодезических); в возможности задавать метрику с определенными свойствами на различных многообразиях (напр., метрику везде положительной кривизны можно задать на полной поверхности только гомеоморфной сфере, плоскости или проективной плоскости). Такие проблемы породили самостоятельные теории, см., напр., *вариационное исчисление в целом*. Развитие более приспособленных для Г. в ц. методов современной дифференциальной геометрии открыло возможность получения многих качественных результатов и количественных соотношений в целом для регулярных геометрических структур на многомерных лишенных особенностей многообразиях.

Особенности часто неминуемо возникают при продолжении гладких погруженных многообразий или полей на них. Кроме того, решение многих экстремальных задач достигается именно на нерегулярных объектах. Поэтому многие вопросы Г. в ц. более естественно ставятся в классах, включающих нерегулярные объекты. Это требует создания методов, отличных от дифференциально-геометрических. Такие подходы, объединяющие исследование в целом с исследованием особенностей, развиты для двумерных поверхностей геометрич. школой А. Д. Александрова, Н. В. Ефимова, А. В. Погорелова, в к-рой получены наиболее законченные результаты в теории поверхностей.

Лит.: [1] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959; [2] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.— Л., 1948; [3] Ефимов Н. В., Геометрия «в целом», в кн.: Математика в СССР за 40 лет. 1917—1957, т. 1, М., 1959; [4] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969; [5] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971.

А. Д. Александров, В. А. Залгаллер.

ГЕОМЕТРИЯ ЧИСЕЛ, геометрическая теория чисел,— раздел теории чисел, изучающий теоретико-числовые проблемы с применением геометрич. методов. Г. ч. в собственном смысле сформировалась с выходом основополагающей монографии Г. Минковского [1] в 1896. Исходным пунктом направления, развившегося в самостоятельный раздел теории чисел, явилось то обстоятельство (подмеченное Г. Минковским), что нек-рые предложения, почти очевидные при рассмотрении фигур в n-мерном евклидовом пространстве, имеют глубокие следствия в теории чисел.

Основной и типичной задачей Г. ч. является задача об арифметич. минимуме $m(F)$ нек-рой действительной функции

$$F(x) = F(x_1, \ldots, x_n);$$

при этом под $m(F)$ понимается точная нижняя граница значений функции $F(x)$, когда x пробегает все целые точки (т. е. точки с целочисленными координатами), удовлетворяющие нек-рому дополнительному условию (напр., условию $x \neq 0$). В важнейших частных случаях эта задача решается теоремой Минковского о выпуклом теле, к-рая может быть сформули-

рована так: пусть $F(x)<1$ есть n-мерное выпуклое тело объема V_F, причем $F(-x)=F(x)$; тогда

$$m(F)\leqslant 2V_F^{-1/n}.$$

Значение $m(F)$ позволяет судить об условиях существования решений диофантова неравенства (см. *Диофантовы приближения*)

$$|F(x)|\leqslant c;$$

к этому вопросу сводятся многие задачи теории чисел. Особым разделом Г. ч. является геометрия *квадратичных форм*.

В Г. ч. различают два общих типа проблем, наз. о д н о р о д н о й и н е о д н о р о д н о й п р о б л е м а м и.

О д н о р о д н а я п р о б л е м а, исследования по к-рой составляют большую часть Г. ч., посвящена изучению однородных минимумов $m(F, \Lambda)$ *лучевой функции* F в *точечной решетке* Λ. Понятие точечной решетки является основным понятием Г. ч. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — линейно независимые векторы n-мерного евклидова пространства. Множество точек

$$\{g_1a_1+\ldots+g_na_n\},$$

когда $g_1, \ldots, g_n$ пробегают независимо друг от друга все целые числа, наз. (т о ч е ч н о й) р е ш е т к о й Λ с базисом $a_1, \ldots, a_n$ и определителем

$$d(\Lambda)=|\det(a_1, \ldots, a_n)|.$$

Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы лучевая функция $F=F(x)$ и решетка Λ определителя $d(\Lambda)$. Точная нижняя граница

$$m(F, \Lambda)=\inf_{a\in\Lambda,\ a\neq 0} F(a)$$

значений функции F в точках $a\neq 0$ решетки Λ наз. м и н и м у м о м ф у н к ц и и F в р е ш е т к е Λ (точнее, о д н о р о д н ы м а р и ф м е т и ч е с к и м м и н и м у м о м). Точная нижняя граница $m(F, \Lambda)$, к-рая может и не достигаться, заведомо достигается для ограниченного *звездного тела*, определяемого неравенством

$$F(x)<1.$$

Для оценки $m(F, \Lambda)$ сверху важно уметь вычислять или оценивать п о с т о я н н у ю Э р м и т а $\gamma(F)$ лучевой функции F, определяемую равенством

$$\gamma(F)=\sup_{\Lambda} m(F, \Lambda)/\{d(\Lambda)\}^{1/n},$$

где точная верхняя граница берется по множеству $\mathbb{Z}_n$ всех n-мерных решеток Λ.

Центральным пунктом Г. ч. является установление связи между $\gamma(F)$, критич. определителем (см. ниже) $\Delta(\mathfrak{S}_F)$ множества $\mathfrak{S}_F=\{x\mid F(x)<1\}$ и (если F — симметричная выпуклая лучевая функция) плотностью $\theta(\mathfrak{S}_F)$ плотнейшей решетчатой *упаковки* тела $\mathfrak{S}_F$.

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы множество $\mathfrak{M}$ и решетка Λ определителя $d(\Lambda)$. Решетка Λ наз. д о п у с т и м о й для $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{M}$-д о п у с т и м о й, если $\mathfrak{M}$ не содержит точек из Λ, отличных от 0. Множество $\mathfrak{M}$, имеющее хотя бы одну допустимую решетку, наз. м н о ж е с т в о м к о н е ч н о г о т и п а; в противном случае $\mathfrak{M}$ наз. м н о ж е с т в о м б е с к о н е ч н о г о т и п а. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество конечного типа; точная нижняя граница

$$\Delta(\mathfrak{M})=\inf d(\Lambda)$$

множества определителей $d(\Lambda)$ всех $\mathfrak{M}$-допустимых решеток Λ наз. к р и т и ч е с к и м о п р е д е л и т е л е м $\Delta(\mathfrak{M})$ множества $\mathfrak{M}$. Всякая $\mathfrak{M}$-допустимая решетка Λ с условием

$$d(\Lambda)=\Delta(\mathfrak{M})$$

наз. к р и т и ч е с к о й р е ш е т к о й множества $\mathfrak{M}$. Для множества $\mathfrak{M}$ бесконечного типа, по определению, $\Delta(\mathfrak{M})=+\infty$.

Вычисление постоянной Эрмита $\gamma(F)$ лучевой функции F сводится к вычислению критич. определителя $\Delta(\mathfrak{C}_F)$ звездного тела $\mathfrak{C}_F$, определяемого условием $F(x)<1$:

$$\gamma(F)=\left\{\Delta(\mathfrak{C}_F)\right\}^{-1/n}.$$

Связь между критич. определителем и плотностью плотнейшей решетчатой упаковки устанавливается следующей теоремой Блихфельдта. Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольное множество, $D\mathfrak{R}$ — соответствующее ему разностное множество (т. е. совокупность точек $\xi-\eta$, где $\xi\in\mathfrak{R}$, $\eta\in\mathfrak{R}$) и пусть Λ — решетка. Для того чтобы расположение $\{\mathfrak{R}, \Lambda\}$, т. е. семейство множеств $\{\mathfrak{R}+a\}$, где $a\in\Lambda$, было упаковкой, необходимо и достаточно, чтобы решетка Λ была $D\mathfrak{R}$-допустимой.

Плотность $\theta(\mathfrak{R})$ плотнейшей решетчатой упаковки ограниченного измеримого по Лебегу множества $\mathfrak{R}$ меры $V(\mathfrak{R})$ выражается равенством

$$\theta(\mathfrak{R})=V(\mathfrak{R})/\Delta(D\mathfrak{R}).$$

Для произвольного множества $\mathfrak{M}$ и измеримого по Лебегу множества $\mathfrak{R}$ меры $V(\mathfrak{R})$, удовлетворяющего условию $D\mathfrak{R}\subset\mathfrak{M}$, справедливо неравенство (другая формулировка теоремы Блихфельдта):

$$\Delta(\mathfrak{M})\geqslant V(\mathfrak{R}).$$

Если $\mathfrak{K}$ — выпуклое тело, симметричное относительно точки O, то

$$\Delta(\mathfrak{K})=V(\mathfrak{K})/2^n\theta(\mathfrak{K}),$$

где $\theta(\mathfrak{K})$ — плотность плотнейшей решетчатой упаковки тела $\mathfrak{K}$. Так что в случае симметричной выпуклой лучевой функции $F(x)$ вычисление $\gamma(F)$ сводится к вычислению плотнейшей решетчатой упаковки тела $\mathfrak{C}_F$, определяемого условием $F(x)<1$.

Важнейшим предложением Г. ч. является теорема Минковского о выпуклом теле. Пусть $\mathfrak{K}$ — выпуклое тело, симметричное относительно начала координат и имеющее объем $V(\mathfrak{K})$. Тогда

$$\Delta(\mathfrak{K})\geqslant 2^{-n}V(\mathfrak{K}). \qquad (1)$$

Иными словами, решетка Λ, для к-рой

$$V(\mathfrak{K})>2^n d(\Lambda),$$

имеет в $\mathfrak{K}$ точку, отличную от 0.

Неравенство (1) наз. неравенством Минковского; оно дает оценку снизу для критич. определителя $\Delta(\mathfrak{K})$ выпуклого тела $\mathfrak{K}$, симметричного относительно 0. Эта оценка, вообще говоря, неулучшаема. Для достижения равенства необходимо и достаточно, чтобы $\theta(\mathfrak{K})=1$. Выпуклые тела $\mathfrak{P}$, удовлетворяющие условию $\theta(\mathfrak{P})=1$, наз. параллелоэдрами. Они играют важную роль в Г. ч. и *кристаллографии математической*.

Все приложения теоремы Минковского о выпуклом теле основаны на том, что для выпуклой симметричной лучевой функции $F(x)$ и произвольной решетки Λ определителя $d(\Lambda)$ справедливо неравенство

$$m(F,\ \Lambda)\leqslant 2\left\{d(\Lambda)/V(\mathfrak{C}_F)\right\}^{1/n},$$

где

$$\mathfrak{C}_F=\{x\mid F(x)<1\}.$$

В частности, для решетки Λ_0 целых точек и лучевой функции

$$F(x)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{1}{\beta_i}\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j\right|\right\}$$

справедлива теорема Минковского о линейных однородных формах. Пусть α_{ij}, β_i — действительные числа, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$; $\beta_i>0$, $|\det(\alpha_{ij})|=\Delta>0$. Если

$$\beta_1\beta_2\ldots\beta_n>\Delta,$$

то найдутся целые числа $x_1, \ldots, x_n$, не равные одновременно нулю и удовлетворяющие системе линейных неравенств

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right| < \beta_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В Г. ч. изучаются последовательные минимумы лучевой функции в решетке. Пусть $F(x)$ — лучевая функция, Λ — решетка и пусть зафиксирован индекс i, $1 \leqslant i \leqslant n$; i-м последовательным минимумом $m_i = m_i(F, \Lambda)$ функции F в решетке Λ наз. точная нижняя граница чисел μ, для к-рых множество $F(x) < \mu$ содержит не менее i линейно независимых точек решетки Λ. При этом

$$m_1(F, \Lambda) = m(F, \Lambda); \qquad 0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_n < +\infty.$$

Справедлива оценка

$$\{m_1(F, \Lambda)\}^n \Delta(\mathfrak{S}_F)/d(\Lambda) \leqslant 1.$$

Труднее оценить сверху величину

$$\delta(F, \Lambda) = \frac{\Delta(\mathfrak{S}_F) \prod_{i=1}^{n} m_i(F, \Lambda)}{d(\Lambda)}.$$

Для этого надо уметь вычислять или оценивать сверху величину

$$\alpha(F) = \sup_{\Lambda} \delta(F, \Lambda),$$

где точная верхняя граница берется по всем n-мерным решеткам Λ. Величина $\alpha(F)$ наз. аномалией лучевой функции F, или аномалией множества $\mathfrak{S}_F$. Имеет место неравенство $\alpha(F) \geqslant 1$. Оценку $\alpha(F)$ сверху дает (см. [4], с. 254—57) следующая теорема. Пусть F есть n-мерная лучевая функция с аномалией $\alpha(F)$; тогда

$$\alpha(F) \leqslant 2^{(n-1)/2}.$$

Построены примеры, показывающие, что эта оценка, вообще говоря, не улучшаема.

Если F — выпуклая симметричная лучевая функция, то предполагается (гипотеза об аномалии выпуклого тела), что

$$\alpha(F) = 1.$$

Справедлива вторая теорема Минковского о выпуклом теле, уточняющая первую теорему. Если $F(x)$ — симметричная выпуклая лучевая функция и Λ — решетка, то

$$V(\mathfrak{S}_F) \prod_{i=1}^{n} m_i(F, \Lambda) \leqslant 2^n d(\Lambda),$$

где выпуклое тело $\mathfrak{S}_F$ определяется условием $F(x) < 1$.

Понятие последовательных минимумов и основные относящиеся к ним результаты (исключая последнюю теорему) обобщаются со звездных тел $\mathfrak{S}_F$ на произвольные множества $\mathfrak{M}$ (см. [9], с. 44—46).

Следующее предложение оценивает критич. определитель данного множества сверху: для любого измеримого по Лебегу множества $\mathfrak{M}$ меры $V(\mathfrak{M})$

$$\Delta(\mathfrak{M}) \leqslant V(\mathfrak{M}); \tag{2}$$

при этом, если $\mathfrak{M}$ — симметричное относительно 0 звездное тело, то

$$\Delta(\mathfrak{M}) \leqslant \{2\zeta(n)\}^{-1} V(\mathfrak{M}),$$

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \ldots. \tag{3}$$

Все доказательства этой теоремы включают в себя то или иное усреднение нек-рой функции, заданной на пространстве решеток. Наиболее естественный вывод дает (см., напр., [12]) следующая теорема Зигеля о среднем. Пусть $f(x)$ — интегрируемая по Лебегу функция, заданная на n-мерном евклидовом пространстве R^n, а μ — инвариантная мера, заданная

на пространстве решеток Λ с определителем $=1$; $\mathcal{F}$ — фундаментальная область этого пространства. Тогда

$$\frac{1}{\mu(\mathcal{F})}\int_F\left\{\sum_{\substack{a\in\Lambda\\ a\neq 0}} f(a)\right\}d\mu(\Lambda)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

В отличие от оценки снизу (1), оценки (2) и (3) не являются окончательными (уточнение см. [13]).

Оценки критич. определителя $\Delta(\mathfrak{M})$ данного множества $\mathfrak{M}$ снизу и сверху приводят к оценкам $\gamma(F)$ сверху и снизу, т. е. к решению (в известном смысле) однородной задачи Г. ч. Однако часто бывает важно знать и точное значение $\gamma(F)$ или точное значение критич. определителя $\Delta(\mathfrak{M})$ для заданного множества $\mathfrak{M}$ (скажем, для норменного тела данного алгебраического числового поля). Если $\mathfrak{S}$ — заданное ограниченное звездное тело, то, в принципе, можно указать алгоритм, позволяющий свести задачу отыскания всех критич. решеток тела $\mathfrak{S}$ (а следовательно, и $\Delta(\mathfrak{S})$) к конечному числу обычных задач на экстремум нек-рых функций нескольких переменных. Однако этот алгоритм осуществим (при современном состоянии исследований) лишь для выпуклых тел $\mathfrak{S}$ при числе измерений $n\leqslant 4$ (см. [4], с. 185—86, 199—202).

Для неограниченных звездных тел $\mathfrak{S}$ нахождение $\Delta(\mathfrak{S})$, вообще говоря, значительно сложнее; это показывает явление изоляции однородных арифметич. минимумов, состоящее в следующем. Пусть F — лучевая функция в $\mathbb{R}^n$ и пусть на множестве $\mathscr{L}$ всех решеток Λ задана величина

$$\mu(\Lambda)=\mu(F,\ \Lambda)=m(F,\ \Lambda)/\{d(\Lambda)\}^{1/n}.$$

Множество $M(F)$ возможных значений $\mu(\Lambda)$ для всех $\Lambda\in\mathscr{L}$ наз. спектром Маркова лучевой функции F. Говорят, что для F имеет место явление изоляции, если множество $M(F)$ имеет изолированные точки. Множество $M(F)$ лежит на промежутке $(0,\ \gamma(F)]$. Если звездное тело $\mathfrak{S}_F$, $F(x)<1$, ограничено, то

$$M(F)=(0,\ \gamma(F)].$$

Поэтому явление изоляции возможно лишь для неограниченных звездных тел (см. [4], гл. 10). Наиболее исследован случай $n=2$

$$F_0(x)=|x_1x_2|^{1/2}. \tag{4}$$

То, что здесь возникает явление изоляции, впервые заметили (см. [14]) А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев (и это был вообще первый пример явления изоляции). А. А. Марковым (1879, см. [14]) доказано, что часть спектра $M(F_0)$, лежащая правее $\sqrt[4]{4/9}$, дискретна; она имеет вид

$$\left\{\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{Q_k}\right)^{-1/4},\ k=1,\ 2,\ \ldots\right\}, \tag{5}$$

где Q_k — возрастающая последовательность целых положительных чисел, обладающих тем свойством, что найдутся целые числа R_k, S_k, удовлетворяющие условию

$$Q_k^2+R_k^2+S_k^2=3Q_kR_kS_k;$$

каждой точке спектра (5) («спектр Маркова» в узком смысле) отвечает единственная, с точностью до автоморфизмов (4), решетка Λ_k. Неопределенная форма $\varphi_k=x_1x_2$, $(x_1,x_2)\in\Lambda_k$, иногда наз. формой Маркова, а последовательность $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots$ наз. цепочкой Маркова. Известно также, что левее нек-рого числа $\mu_0=\mu_0(F_0)$ спектр $M(F_0)$ совпадает с отрезком $[0,\ \mu_0]$. Явление изоляции можно описать в терминах допустимых решеток (см. [9], с. 50), что несколько обобщает это понятие.

Неоднородная проблема охватывает неоднородные диофантовы задачи, играющие большую роль в теории чисел, она составляет важный раздел Г. ч.

Пусть F — лучевая функция в $\mathbb{R}^n$, Λ — решетка определителя $d(\Lambda)$ в $\mathbb{R}^n$ и x_0 — действительная точка в $\mathbb{R}^n$. Рассматриваются величины

$$l(x_0) = l(F, \Lambda; x_0) = \inf_{x \equiv x_0 (\Lambda)} F(x),$$

$$l = l(F, \Lambda) = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} l(F, \Lambda; x_0),$$

где точная нижняя граница берется по всем точкам вида $x+a$, $a \in \Lambda$, а точная верхняя граница берется по всем точкам $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Величина $l(F, \Lambda)$ наз. неоднородным арифметическим минимумом функции F в решетке Λ; при этом «минимум» может и не достигаться. $l(F, \Lambda)$ есть точная нижняя граница действительных чисел $\lambda > 0$, обладающих следующим свойством: расположение $\{\lambda \mathfrak{S}_F, \Lambda\}$ множества $\lambda \mathfrak{S}_F$, где $\mathfrak{S}_F$ удовлетворяет условию $F(x) < 1$, по решетке Λ является *покрытием*, т. е.

$$\bigcup_{a \in \Lambda} (\lambda \mathfrak{S}_F + a) = \mathbb{R}^n.$$

Для лучевой функции F рассматриваются аналоги постоянной Эрмита:

$$\sigma(F) = \inf_{\Lambda} l(F, \Lambda) / \{d(\Lambda)\}^{1/n},$$

$$\Sigma(F) = \sup_{\Lambda} l(F, \Lambda) / \{d(\Lambda)\}^{1/n},$$

где точная нижняя (верхняя) граница берется по всем n-мерным решеткам Λ. Величина $\Sigma(F)$ обычно тривиальна (см. [4], с. 369—70): если множество $\mathfrak{S}_F$, $F(x) < 1$, имеет конечный объем, то

$$\Sigma(F) = +\infty.$$

Однако в одном, представляющем интерес, частном случае функции F, с величиной $\Sigma(F)$ связана неоднородная проблема Минковского.

Гипотеза Минковского о произведении неоднородных линейных форм. Пусть

$$F_n(x) = |x_1 x_2 \ldots x_n|^{1/n}.$$

Тогда

$$\Sigma(F_n) = \frac{1}{2}.$$

Исследования по этой гипотезе и ее аналогам составляют более половины всех исследований по неоднородной проблеме Г. ч. (см. *Минковского гипотеза*).

В общем случае величина $\sigma(F)$ носит характер более содержательный, чем $\Sigma(F)$. Она тесно связана со значением плотности $\tau(\mathfrak{S}_F)$ экономнейшего решетчатого покрытия телом $\mathfrak{S}_F$ (см. [7], [10]). Именно, если F — лучевая функция и множество $\mathfrak{S}_F$ ограничено, то

$$\tau(\mathfrak{S}_F) = \{\sigma(F)\}^n V(\mathfrak{S}_F).$$

Важный раздел неоднородной проблематики Г. ч. составляют так наз. теоремы переноса для данной лучевой функции F, под к-рыми понимаются неравенства, связывающие неоднородный минимум $l(F, \Lambda)$ с последовательными однородными минимумами $m_i(F, \Lambda)$ (или минимумами взаимной функции F^* относительно взаимной решетки Λ^*, и т. п.) (см. [4], с. 380—90).

Пример: пусть F — симметричная выпуклая лучевая функция и пусть $F(x) > 0$ для $x \neq 0$; тогда для любой решетки Λ

$$\frac{1}{2} m_n(F, \Lambda) \leqslant l(F, \Lambda) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k(F, \Lambda).$$

Имеются обобщения Г. ч. на пространства, более общие, чем $\mathbb{R}^n$, а также на дискретные множества, более общие, чем Λ (см. [15], [10]).

Лит.: [1] Minkowski H., Geometrie der Zahlen, Lpz.—B., 1953; [2] его же, Diophantische Approximationen, Lpz., 1907; [3] Hancock H., Development of the Minkowski geometry of numbers, N. Y., 1939; [4] Касселс Дж. В. С., Введение в геометрию чисел, пер. с англ., М., 1965; [5] Lek-

керкерker C. G., Geometry of numbers, Groningen, 1969; [6] Тот Л. Ф., Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, пер. с нем., М., 1958; [7] Роджерс К., Укладки и покрытия, пер. с англ., М., 1968; [8] Keller O.-H., Geometrie der Zahlen, Lpz., 1954; [9] Hlawka E., «Jahresber. Dtsch. Math.- Ver.», 1954, Bd 57, Abt. 1, S. 37—55; [10] Барановский Е. П., в кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969, с. 189—225; [11] Koksma J. F., Diophantische Approximationen, B., 1936; [12] Macbeath A. M., Rogers C. A., «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1958, v. 54, pt. 2, p. 139—51; [13] Schmidt W., «Ill. J. Math.», 1963, v. 7, № 1, p. 18—23; № 4, p. 714; [14] Марков А. А., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 5, с. 7—51; [15] Rogers K., Swinnerton-Dyer H. P. F., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1958, v. 88, № 1, p. 227—42.

А. В. Малышев.

ГЕОМЕТРОДИНАМИКА — вариант единой теории поля, последовательно сводящий все физич. объекты к геометрическим. Построение Г. осуществляется в несколько этапов.

На первом этапе строится единая теория гравитации и электромагнетизма на основе общей теории относительности. Основная задача Г. на этом этапе в упрощенной постановке состоит в следующем. Пусть задана метрика g_{ij} пространства-времени, к-рая является решением уравнений Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = T_{ik}(f_{\mu\sigma}, g),$$

где R_{ik} — тензор кривизны, T_{ik} — тензор энергии-импульса электромагнитного поля в вакууме, $f_{\mu\sigma}$ — тензор электромагнитного поля в вакууме, удовлетворяющий уравнениям Максвелла. Требуется выразить $f_{\mu\sigma}$ через g_{ik}. В такой упрощенной постановке задача принципиально решена [1], однако полное ее решение встречает непреодоленные трудности (напр., при учете неэлектромагнитных полей).

На втором этапе строится теория элементарных частиц. Моделью пары взаимодействующих частиц считается так наз. «ручка», простейшим видом к-рой является одна из топологич. интерпретаций (см. [2]) максимального аналитич. продолжения *Шварцшильда поля*. Характеристиками элементарной частицы (напр., заряда) в этом случае являются нек-рые интегральные инварианты «ручки». Пространство-время Г.— многосвязное, а первое *Бетти число* — порядка числа частиц. Вводится понятие геона — сгустка того или иного излучения концентрации достаточной, чтобы соответствующее искривление пространства сделало этот сгусток метастабильным (т. е. существующим долгое время). В Г. предсказываются электромагнитные, нейтринные и гравитационные геоны. Понятие геона является классическим. Считается, что квантовый аналог понятия Г. представляет собой геометродинамич. описание массы элементарных частиц (экспериментально геоны не наблюдались.)

На третьем этапе строится теория сплошных сред, приводящая в общих чертах к тем же результатам, что и в обычной общей теории относительности.

Предполагается, что в Г. должен нарушаться закон сохранения барионного заряда. В качестве конкретного механизма этого нарушения можно рассматривать процесс гравитационного коллапса и последующего испарения черных дыр.

На четвертом этапе делаются попытки построить последовательную квантовую Г. Рассматриваются квантовые флуктуации метрики, причем указывается, что на расстоянии порядка $(\hbar\varkappa/c^3)^{1/2} \approx 10^{-33}$ *см* ($\hbar$ — постоянная Планка, $\varkappa$ — постоянная тяготения Эйнштейна, c — скорость света) флуктуации могут существенно изменять топологию пространства и должны соответствовать квантовым элементарным частицам.

В настоящее время (70-е гг. 20 в.) Г. не является еще последовательно развитой теорией. Особенно затруднительно толкование спинорных полей (а не тензорных): в частности, нейтринных полей. Многие части Г. не имеют достаточного математич. обоснования.

Одной из попыток дать такое обоснование является теория суперпространства [4].

Лит.: [1] Rainich G., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1925, v. 27, № 106; [2] Уилер Дж., Гравитация, нейтрино и Вселенная, пер. с англ., М., 1962; [3] Уилер Дж., Гаррисон Б., Вакано М., Торн К., Теория гравитации и гравитационных коллапс, пер. с англ., М., 1967; [4] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Строение и эволюция Вселенной, М., 1975.

Д. Д. Соколов.

ГЕОТЕРМИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — математич. задачи, возникающие при исследовании тепловых процессов, происходящих в Земле. В геотермике различают поверхностные явления, связанные с колебаниями температуры в верхних слоях Земли вследствие воздействия солнечного излучения, и глубинные явления, связанные с распределением температуры внутри Земли, обусловленным радиоактивными источниками тепла.

Г. м. з. в основном связаны с решением квазилинейных уравнений параболич. типа, коэффициенты к-рых изменяются с глубиной погружения и зависят от температуры. При изучении промерзания в верхних слоях Земли или процессов плавления в глубинных слоях учитывается фазовый переход, т. е. изменение физич. состояния среды. При этом возникает так наз. *Стефана задача* или задача о фазовом переходе. Наиболее эффективным методом численного решения этих задач является метод конечных разностей, широко используемый на практике.

Ряд задач геотермики связан с исследованием взаимодействия температурного поля с другими физич. явлениями. При анализе задач промерзания грунта с учетом подтока воды решаются совместно уравнения теплопроводности и уравнения фильтрации. Исследование температурного распределения в водной толще приводит к необходимости совместного рассмотрения уравнения теплопроводности и уравнения конвекции. Анализ термоупругих напряжений в Земле и связанных с этим эффектов расширения и деформации Земли проводится на основе совместного решения уравнения теплопроводности и уравнения упругого равновесия в гравитационном поле.

Среди Г. м. з. имеется ряд специфических задач. Так, задача об определении историч. климата Земли привела к математич. постановке обратной задачи для уравнения теплопроводности, где надо определить температуры для моментов времени $t<t_0$ по заданному распределению температуры по глубине в момент времени $t=t_0$. Решение уравнения теплопроводности $u(x, t)$ в области $x>0$, $-\infty<t<t_0$ определяется однозначно по заданным значениям $u(x, t_0)=\varphi(x)$, если хотя бы одна производная решения по координате x равномерно ограничена $|\partial^n u/\partial x^n|<M$ (см. [1]).

Учет влияния излучения на температурный режим Земли и др. небесных тел приводит к задаче для уравнения теплопроводности при нелинейных краевых условиях, в частности при излучении по *Стефана — Больцмана закону*. Эти задачи могут быть сведены к нелинейным интегральным уравнениям типа Вольтерра (см. [1]).

Лит.: [1] Тихонов А. Н., «Докл. АН СССР», 1935, т. 1, № 5, с. 294—300; [2] его же, «Изв. АН СССР», Отд. матем. и естеств. наук. Сер. геогр., 1937, № 3, с. 461—79; [3] его же, «Матем. сб.», 1950, в. 26(68), с. 35—56; [4] Любимова Е. А., Термика Земли и Луны, М., 1968.

В. И. Дмитриев.

ГЕОФИЗИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, возникающие при анализе физич. явлений, изучаемых в связи с исследованиями строения Земли. В зависимости от природы изучаемых физич. явлений различают следующие виды геофизич. исследований: гравиразведку, основанную на изучении гравитационного поля; магниторазведку, основанную на изучении постоянного магнитного поля; сейсморазведку, основанную на изучении распространения упругих колебаний;

электроразведку, основанную на изучении электрич. поля постоянного тока или переменного электромагнитного поля; радиометрию, основанную на измерении интенсивности излучения естественной или вызванной радиоактивности горных пород. Измерение полей может производиться на поверхности Земли (наземные методы), в воздухе (аэроразведка) и в скважинах (каротаж скважин) (см. [1]).

Математич. задачи, возникающие в гравиразведке и в магниторазведке, схожи. В обоих случаях прямая задача сводится к решению уравнения Пуассона:

$$\Delta U = \rho(M),$$

где $U(M)$ — гравитационный или магнитный потенциал, а $\rho(M)$ — избыточная плотность или фиктивные магнитные заряды, определяемые через намагниченность горных пород. Измеряемой величиной является $\operatorname{grad} U(M)$, определяющий или изменение ускорения силы тяжести $\Delta\bar{g}$, или изменение постоянного магнитного поля Земли. Измерения производятся в различных точках земной поверхности. По этим экспериментальным данным необходимо определить распределение в Земле функции $\rho(M)$. Прямая задача проста и решение выписывается в квадратурах. Основная трудность — в решении обратной задачи. Здесь широко применяются методы теории гармонич. полей и аналитич. продолжения (см. [2]).

Несколько иной характер имеют задачи, возникающие в электроразведке на постоянном токе. Хотя поле в этом случае потенциально, т. е. электрич. поле $\bar{E}$ выражается через электрич. потенциал U, однако уравнение для потенциала имеет более сложный вид:

$$\operatorname{div}[\sigma(M) \operatorname{grad} U] = -\operatorname{div} \bar{j}_0,$$

где $\bar{j}_0$ — плотность тока заданного источника, а $\sigma(M)$ — распределение удельной проводимости в Земле. Прямая задача заключается в определении на поверхности Земли электрич. поля для различных моделей строения среды [распределения $\sigma(M)$]. В обратной задаче необходимо по измеренному электрич. полю в различных точках земной поверхности найти распределение удельной проводимости $\sigma(M)$.

Еще более сложные задачи возникают в теории электроразведки для методов, использующих переменные электромагнитные поля. В этих методах измеряемой величиной являются компоненты переменного электромагнитного поля, расчет к-рых связан с решением уравнений Максвелла для неоднородных сред, т. е. когда коэффициенты уравнений являются кусочно непрерывными функциями. Обратная задача заключается в определении коэффициентов уравнений по известному электромагнитному полю. Здесь возможно несколько различных вариантов измерений. Может измеряться нестационарное поле в одной точке в зависимости от времени (временное зондирование среды) или стационарное поле заданной частоты в зависимости от изменения частоты (частотное зондирование), а также в зависимости от положения точки наблюдения (геометрич. зондирование) (см. [3]).

В сейсморазведке полная постановка задачи заключается в решении уравнения распространения упругих колебаний с кусочно непрерывными коэффициентами при условии возбуждения точечным взрывом. Решения этой задачи проведены только для простейших моделей строения среды. Однако в связи с тем, что основной измеряемой величиной в сейсморазведке является время прихода отраженных сигналов, в теории ограничиваются приближением геометрич. оптики и решают уравнение эйконала для определения траектории луча и последующим вычислением времени прихода сигнала. Время запаздывания сигнала измеряется в различных точках земной поверхности. Обратная задача заключается в

определении отражающей границы по известной зависимости времени прихода сигнала от координаты точки наблюдения (см. [4]).

Основной целью всех геофизич. исследований является решение обратной задачи, т. е. определение строения среды по измеренным характеристикам поля. Параметры, определяющие строение среды, являются коэффициентами уравнения с частными производными или правыми частями этого уравнения, к-рому удовлетворяет поле. Задача отыскания коэффициентов уравнения или правой части уравнения по решению, известному только в нек-рой части пространства, является некорректно поставленной задачей. Поэтому при решении обратных задач геофизики необходимо применение метода регуляризации, развитого А. Н. Тихоновым (см. [5]).

Основой регуляризации решения обратных задач геофизики является выбор достаточно узкого класса решений, в к-ром задача становится корректной. Этот выбор достигается построением семейства математич. моделей строения среды, к-рое с одной стороны достаточно полно описывает практич. ситуации, с другой стороны определяется небольшим числом параметров модели. В построении таких семейств математич. моделей с учетом конкретных реализаций различных методов геофизич. исследований и в зависимости от целей, стоящих перед этими исследованиями, а также в разработке эффективных алгоритмов решения прямых задач для этих моделей и заключается основная математич. проблема при решении обратных задач геофизики.

Если семейство математич. моделей построено и алгоритм решения прямой задачи известен, то общая формулировка обратной задачи будет следующей. Пусть $\boldsymbol{p}=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ — параметры модели, причем $\boldsymbol{p}\in P$, где P — множество допустимых значений параметров модели. Измеряемая на практике характеристика поля $U(x, \boldsymbol{p})$ в зависимости от переменной x и параметров модели $\boldsymbol{p}$ может быть рассчитана с помощью известного алгоритма прямой задачи:

$$U(x, \boldsymbol{p}) = A_x[\boldsymbol{p}],$$

где A_x — в общем случае нелинейный оператор, зависящий от переменной x как от параметра. Если $U_э(x)$ — экспериментально полученная характеристика поля, то решением обратной задачи будет $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{\min}$, на к-ром реализуется минимум отклонения $U(x, \boldsymbol{p})$ от $U_э(x)$, т. е.

$$\min_{\boldsymbol{p}\in P} \| U(x, \boldsymbol{p}) - U_э(x) \|_U,$$

где U — пространство характеристик поля. Обычно берут среднеквадратич. норму (см. [6]).

В геофизич. исследованиях основными являются два типа моделей строения среды: полупространство с локальными неоднородностями (используется при анализе результатов методов разведочной геофизики, направленных на обнаружение неоднородностей в земной коре, напр. в рудной геофизике); слоистое полупространство, когда параметры среды изменяются только по глубине (используется при решении структурных задач геофизики).

Дальнейшее развитие математич. моделей в геофизике шло путем усложнения указанных двух типов с целью более полного описания практич. ситуаций. Напр., локальные неоднородности в слоистом полупространстве или слоистая среда с переменной толщиной слоев и т. п. Решение даже прямых задач для таких сложных моделей строения среды стало возможным только с внедрением ЭВМ. При этом широко используются конечноразностные методы, метод интегральных уравнений и проекционные методы.

Разработка эффективных алгоритмов решения прямых задач геофизики позволила проводить более точную количественную интерпретацию данных наблюдений. Проведен большой цикл расчетов прямых задач для различных семейств математич. моделей. На этой основе изданы альбомы палеток характеристик полей, с помощью к-рых решаются обратные задачи методом подбора (см. [7]). Все большее развитие получают системы автоматизированной обработки и интерпретации экспериментальных данных с помощью ЭВМ.

Лит.: [1] Федынский В. В., Разведочная геофизика, М., 1964; [2] Маловичко А. К., Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их приложения к задачам гравиразведки, М., 1956; [3] Дмитриев В. И., Электромагнитные поля в неоднородных средах, М., 1969; [4] Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, сб. 3, [Л.], 1959; [5] Тихонов А. Н., «Докл. АН СССР», 1963, т. 153, № 1, с. 49—52; [6] Лаврентьев М. М., О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосиб., 1962; [7] Тихонов А. Н., «Докл. АН СССР», 1943, т. 39, № 5, с. 195—98; [8] Новиков П. С., там же, 1938, т. 18, с. 165—68; [9] Тихонов А. Н., там же, 1949, т. 69, № 6, с. 797—800; [10] его же, «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1965, т. 5, № 3, с. 545—48.

В. И. Дмитриев.

ГЕРГЛОТЦА ФОРМУЛА — интегральное соотношение, устанавливающее связь между двумя замкнутыми изометричными ориентируемыми регулярными поверхностями. Пусть на поверхностях S_1 и S_2 введены локальные координаты u и v так, что по их равенству устанавливается отображение изометрин. Пусть:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

— общая для S_α, $\alpha = 1, 2$, первая квадратичная форма, K — гауссова кривизна, H_α — средние кривизны и

$$\sqrt{EG - F^2}\,(\lambda_\alpha\, du^2 + 2\mu_\alpha\, du\, dv + \nu_\alpha\, dv^2)$$

— вторые квадратичные формы поверхностей S_α. Тогда Г. ф. имеет вид:

$$\int_{S_1} \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \mu_2 - \mu_1 \\ \mu_2 - \mu_1 & \nu_2 - \nu_1 \end{vmatrix} (\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{x})\, d\tau = \int_{S_2} H_2 d\tau - \int_{S_1} H_1 d\tau,$$

где $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v)$ — радиус-вектор поверхности S_1, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к S_1, $d\tau$ — элемент площади. Получена Г. Герглотцем [1].

Лит.: [1] Herglotz G., «Abh. math. Semin. Univ. Hamburg», 1943, Bd 15, S. 127—29; [2] Ефимов Н. В., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 2(24), с. 47—158.

Е. В. Шикин.

ГЕРОНА ТРЕУГОЛЬНИК — треугольник, длины сторон и площадь к-рого выражаются целыми числами. Назван по имени Герона (ок. 1 в. н. э.), рассмотревшего треугольники со сторонами 13, 14, 15 и 5, 12, 13, площади к-рых соответственно равны 84 и 30. *А. Б. Иванов.*

ГЕРОНА ФОРМУЛА — формула, выражающая площадь треугольника через его стороны a, b, c:

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)},$$

где $p = (a+b+c)/2$. Названа по имени Герона (ок. 1 в. н. э.). *А. Б. Иванов.*

ГЕРЦА ПРИНЦИП. прямейшего пути принцип, наименьшей кривизны принцип, — дифференциальный *вариационный принцип классической механики*, постулированный Г. Герцем [1] в качестве основного закона разработанной им механики, в к-рой, в отличие от механики Ньютона, вместо понятия силы введены представления о скрытых связях и скрытых движениях. Согласно Г. п. «всякая свободная система пребывает в своем состоянии покоя или равномерного движения вдоль прямейшего пути». Свободной системой Г. Герц наз. систему, не подверженную действию активных сил и стесненную связями, накладывающими ограничения лишь на взаимные расположения точек системы; под прямейшим путем понимается траектория, каждый элемент к-рой имеет наименьшую кривизну по сравнению с любым элементом, имеющим с рассматриваемым об-

щие начальную точку и касательную в ней и удовлетворяющим уравнениям связей. Для систем, стесненных стационарными связями и не подверженных действию активных сил, Г. н. эквивалентен *Гаусса принципу* (см. [2]).

Лит.: [1] Hertz H., Gesammelte Werke, [Bd] 3 — Die Principien der Mechanik..., Lpz., 1894 (в рус. пер.— Герц Г., Принципы механики, изложенные в новой связи, М., 1959); [2] Розе Н. В., Лекции по аналитической механике, ч. I, Л., 1938.

В. В. Румянцев.

ГЕССИАН функции f — квадратичная форма

$$H(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

или

$$H(z)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}z_i\bar{z}_j,$$

где $a_{ij}=\partial^2 f(p)/\partial x_i\partial x_j$ (или $\partial^2 f(p)/\partial z_i\partial\bar{z}_j$) и $f(p)$ задана на n-мерном действительном пространстве $\mathbb{R}^n$ (или комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$) с координатами $x_1, \ldots, x_n$ (или $z_1, \ldots, z_n$). Введен О. Гессе (O. Hesse, 1844). С помощью локальной системы координат это определение переносится на функции, определенные на действительном многообразии класса C^2 (или на комплексном пространстве). В обоих случаях Г.— квадратичная форма, заданная на касательном пространстве, не зависящая от выбора системы координат. В теории Морса через Г. определяются понятия (не) вырожденной критич. точки, формы Морса и формы Ботта. В комплексном анализе Г. участвует в определении псевдовыпуклой области и плюрисубгармоних. функции.

Лит.: [1] Постников М. М., Введение в теорию Морса, М., 1971; [2] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969.

Л. Д. Иванов.

ГЕССИАН, гессиана, *алгебраической кривой* порядка n — множество точек, конические поляры к-рых распадаются на две прямые, а также множество двойных точек первых поляр. Г. неособой кривой порядка n есть кривая порядка $3(n-2)$ и класса $3(n-2)$ $(3n-7)$. Если $f=0$ есть уравнение кривой порядка n в однородных координатах и $f_{ik}=\partial^2 f/\partial x_i\partial x_k$, то

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}=0$$

есть уравнение Г. Гессиан кривой 3-го порядка пересекает кривую в девяти общих точках перегиба. Назв. по имени О. Гессе (O. Hesse, 1844).

А. Б. Иванов.

ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКАЯ ТОЧКА — такая точка ($p=p^*$, $q=q^*$), принадлежащая области определения функции Гамильтона $H=H(p, q)$ *гамильтоновой системы*

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q},\quad \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad p=(p_1, p_2),\ q=(q_1, q_2), \quad (*)$$

что решение системы (*), проходящее через эту точку, при $t\to\infty$ асимптотически приближается к нек-рому периодич. решению T_1, а при $t\to-\infty$ асимптотически приближается к другому периодич. решению T_1'. При этом само решение, проходящее через Г. т., наз. гетероклиническим.

Существует связь между гетероклинич. решениями системы (*) и двумерными инвариантными поверхностями этой системы. Если двумерная инвариантная поверхность разделяет периодич. решения T_1 и T_1', то не существует гетероклинич. решения, соединяющего эти периодич. решения. Во многих случаях справедливо и обратное. В невырожденном случае в окрестности гомоклинич. решения (см. *Гомоклиническая точка*) существует бесконечная последовательность периодич. решений, из к-рых любые два можно соединить гетероклинич. решением. Окрестность контура, составленного из конечного числа периодических и гетероклини-

нических решений системы (*) (так наз. гомоклинического контура), обладает структурой, во многом сходной со структурой гомоклинич. решения.

Сформулированное выше определение Г. т. почти дословно переносится на случай гамильтоновой системы с числом степеней свободы $n>2$, если периодич. решения T_1 и T_1' заменить инвариантными торами T_k и $T_{k'}'$ размерности k и k' соответственно, $0<k,\ k'<n$. Гетероклинич. решения играют важную роль в изучении неустойчивости в гамильтоновых системах с числом степеней свободы больше двух и в теории грубых динамич. систем (см. *Грубая система*).

Лит.: [1] Пуанкаре А., Новые методы небесной механики, гл. 33, Избр. тр., пер. с франц., т. 2, М., 1972; [2] Zehnder E., «Communs Pure and Appl. Math.», 1973, v. 26, № 2, p. 131—82; [3] Мельников В. К., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1963, т. 12, с. 3—52; [4] Смейл С., «Математика», 1967, т. 11, № 4, с. 69—78, 88—106; [5] Шильников Л. П., «Матем. сб.», 1967, т. 74(116), № 3, с. 378—97; [6] Алексеев В. М., «Матем. сб.», 1968, т. 76(118), № 1, с. 72—134; т. 77 (119), № 4, с. 545—601; 1969, т. 78 (120), № 1, с. 3—50.

В. К. Мельников.

ГИББСА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей обнаружения равновесной статистич. системы в любом из ее стационарных микроскопич. состояний. Последние обычно задаются как чистые квантовомеханич. состояния, определяемые решением ψ_n стационарного *Шрёдингера уравнения*

$$\hat{H}\psi_n(x)=E_n\psi_n(x),$$

где n — полный набор квантовых чисел, фиксирующих каждое из этих состояний. Сопоставление каждому состоянию n вероятности w_n обнаружения системы в этом состоянии (для непрерывного спектра величин n — плотности вероятности) полностью определяет, вместе с набором функций ψ_n, так наз. смешанное квантовомеханич. состояние. Для такого состояния наблюдаемые величины определяются как средние по распределению w_n от квантовомеханич. средних для каждого чистого состояния n. Смешанное состояние полностью характеризуется статистич. оператором Неймана (матрицей плотности), к-рый в x — представлении имеет вид

$$(x\,|\,\rho\,|\,x')=\sum\nolimits_n w_n\psi_n^*(x')\,\psi_n(x).$$

Наблюдаемые средние определяются как

$$\langle F\rangle=\sum\nolimits_n w_n\left(\psi_n^*,\ \hat{F}\psi_n\right)=Sp\,\hat{\rho}\hat{F}.$$

В случае Г. р. смешанное состояние соответствует равновесному термодинамич. состоянию системы. Так как Г. р. имеют структуру $w_n=w(E_n, A)$, где A — совокупность термодинамич. параметров, фиксирующих микроскопич. состояние системы, то соответствующие им операторы $\hat{\rho}$ выражаются непосредственно через оператор Гамильтона, $\hat{\rho}=w(\hat{H}, A)$, $Sp\,\hat{\rho}=1$. В зависимости от выбора параметров A возможны различные формы Г. р., из к-рых наиболее распространены следующие.

Микроканоническое Г. р. Параметры A характеризуют состояние изолированной системы и включают энергию $\mathscr{E}$, объем V, внешние поля a и число частиц N (в случае многокомпонентной системы — совокупность чисел N_i). В этом случае Г. р. имеет вид

$$w_n(\mathscr{E},\ V,\ a,\ N)=\Delta(\mathscr{E}-E_n)/\Gamma(\mathscr{E},\ V,\ a,\ N),$$

где Γ — статистический вес, определяющий нормировку распределения и равный

$$\Gamma(\mathscr{E},\ V,\ a,\ N)=\sum\nolimits_n\Delta(\mathscr{E}-E_n),$$

причем сумма (или интеграл) берется по всем различным состояниям системы вне зависимости от их вырожденности по E_n. Функция $\Delta(\mathscr{E}-E_n)$ равна единице, если значение E_n попадает в энергетич. слой $\delta\mathscr{E}$ около значения $\mathscr{E}$, и нулю в противном случае. Ширина $\delta\mathscr{E}$

должна быть значительно меньше макроскопических бесконечно малых изменений энергии $d\mathscr{E}$, но не меньше интервала между уровнями энергии ΔE_n. Статистич. вес Г определяет число микроскопич. способов, к-рыми может осуществляться данное макроскопич. состояние и к-рые предполагаются равновероятными; он связан с энтропией системы выражением

$$S(\mathscr{E},\ V,\ a,\ N)=\ln\Gamma(\mathscr{E},\ V,\ a,\ N).$$

К а н о н и ч е с к о е Г. р. Макроканонич. состояние системы фиксируется температурой θ и величинами V, a, N (система «в термостате»); с точки зрения приложений это наиболее удобный способ задания термодинамич. состояния. Канонич. Г. р. имеет вид

$$w_n(\theta,\ V,\ a,\ N)=e^{-E_n/\theta}/Z,$$

где Z — с т а т и с т и ч е с к а я с у м м а (или сумма состояний)

$$Z(\theta,\ V,\ a,\ N)=\sum\nolimits_n e^{-E_n/\theta},$$

непосредственно связана со свободной энергией системы выражением

$$F(\theta,\ V,\ a,\ N)=-\theta\ln Z.$$

Б о л ь ш о е к а н о н и ч е с к о е Г. р. Параметры A фиксируют состояние системы в термостате, ограниченном воображаемыми стенками, свободно пропускающими частицы. Это θ, V, a и химич. потенциал μ (в случае многокомпонентной системы — несколько химич. потенциалов). Г. р. по микроскопич. состояниям, определяемым числом частиц N и квантовыми числами $n=n(N)$ системы N тел, имеет вид

$$w_{Nn}(\theta,\ V,\ a,\ \mu)=e^{-(E_n-\mu N)/\theta}/Z_{\text{Б}},$$

где $Z_{\text{Б}}$ — большая сумма состояний

$$Z_{\text{Б}}(\theta,\ V,\ a,\ \mu)=\sum\nolimits_{Nn}e^{-(E_n-\mu N)/\theta}=$$
$$=\sum\nolimits_{N=0}^{\infty}e^{\mu N/\theta}Z(\theta,\ V,\ a,\ N),$$

определяющая нормировку этого распределения, связана с термодинамич. потенциалом $\Omega=-pV$ (p — давление) соотношением

$$\Omega(\theta,\ V,\ a,\ \mu)=-\theta\ln Z_{\text{Б}}.$$

Использование какого-либо Г. р. позволяет на основе микроскопич. задания статистич. системы рассчитать характерные для нее макроскопич. средние, дисперсии и т. д., а при помощи нормировочных сумм Γ, Z или $Z_{\text{Б}}$ — определить все термодинамич. характеристики равновесной системы. Выбор того или иного Г. р. производится из соображений удобства. В статистическом предельном случае $N\to\infty$, $V/N=\text{const}$, получаемые при помощи Г. р. результаты (выраженные в одних и тех же переменных) в главных асимптотиках по N одинаковы. А так как метод Гиббса гарантирует только такие асимптотики, то все варианты Г. р. оказываются идентичными. Микроканонич. Г. р. используется в основном применительно к общим вопросам статистич. механики (параметры A не включают специфичных термодинамич. величин типа θ, μ и т. п.), канонич. Г. р. — главным образом при рассмотрении классич. систем, большое канонич. Г. р. — при исследованиях квантовых систем, когда фиксация точного числа N по технич. соображениям неудобна.

При определенных значениях параметров A, связываемых обычно с повышением θ (при фиксированных остальных параметрах) сверх определенной температуры вырождения (имеющей разные значения для каждого вида микроскопич. движения), общие Г. р. переходят в квазиклассические (по отношению к переменным, для к-рых связанное с их изменением движение невырож-

дено). В случае невырожденной системы N частиц, когда микроскопич. движение представляется как классич. движение N материальных точек, микроскопич. состояние задается фазовой точкой $n=(q, p)=(r_1, \ldots, r_N, p_1, \ldots, p_N)$, энергия определяется классич. гамильтонианом $H=H(q, p)$, а канонич. Г. р. имеет вид

$$w_{qp}(\theta, V, a, N)\,dp\,dq=\frac{1}{Z}\,e^{-H(q,\ p)/\theta}\,dp\,dq/N!\,(2\pi\hbar)^{3N},$$

где классич. интеграл состояний (квазиклассич. предел статистич. суммы) равен

$$Z=\frac{1}{N!}\int\frac{e^{-H(p,\ q)/\theta}}{(2\pi\hbar)^{3N}}\,dp\,dq.$$

Г. р. введены Дж. Гиббсом (J. Gibbs, 1902).

Лит.: [1] Гиббс Дж. В., Основные принципы статистической механики..., пер. с англ., М., 1946; [2] Хуанг К., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1966; [3] Леонтович М. А., Статистическая физика, М.— Л., 1944.

И. А. Квасников.

ГИББСА СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ — совокупность большого числа одинаковых статистич. систем, к-рые характеризуются одними и теми же значениями термодинамич. параметров, но могут находиться в различных микроскопич. состояниях. Это формальное построение позволяет интерпретировать функцию распределения по микроскопич. состояниям статистич. системы как распределение числа систем ансамбля по этим состояниям. Напр., в статистич. механике классич. систем состояние ансамбля определяется плотностью точек в фазовом пространстве — $6n$-мерном пространстве импульсов и координат системы из n частиц, каждая из точек к-рого фиксирует микроскопич. состояние системы. В зависимости от способа фиксации макроскопич. состояния систем ансамбля различают: микроканонический Г. с. а.— ансамбль изолированных систем, если задаются значения энергии системы, ее внешних параметров (объем, внешние поля и т. д.) и числа частиц в ней; каноническ ий Г. с. а.— ансамбль систем с фиксированным числом частиц и находящихся в термостате, если вместо энергии задана температура системы; большой канонический Г. с. а.— ансамбль систем в общем термостате, но числа частиц в них не фиксированы, если заданы температура, объем, внешние поля и химич. потенциал систем. Возможны и иные варианты. Распределение по микроскопич. состояниям в различных Г. с. а. определяется соответствующим *Гиббса распределением*.

Понятие Г. с. а. используется при обсуждении общих вопросов статистич. механики, перехода от одного канонич. распределения к другому (см. *Дарвина — Фаулера метод*) и др.

И. А. Квасников.

ГИББСА ЯВЛЕНИЕ — особенность поведения частных сумм (или их средних) рядов Фурье. Впервые об-



наружена Г. Уилбрейамом [1] и значительно позже переоткрыта Дж. Гиббсом [2]. Пусть частные суммы $s_n(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ сходятся к $f(x)$ в нек-рой окрестности $\{x : 0<|x-x_0|<h\}$ точки x_0, в к-рой

$$a\equiv f(x_0-0)\leqslant f(x_0+0)\equiv b.$$

В точке x_0 имеет место Г. я. для $s_n(x)$, если $A<a\leqslant b<B$, где

$$A=\varliminf_{\substack{n\to\infty\\ x\to x_0-0}} s_n(x),$$

$$B=\varlimsup_{\substack{n\to\infty\\ x\to x_0+0}} s_n(x).$$

Геометрически это означает, что графики (рис.) частных сумм $s_n(x)$ при $x\to x_0$ и $n\to\infty$ приближаются не к «ожидаемому» отрезку $[a, b]$ по оси ординат, а к строго большему отрезку $[A, B]$. Аналогично определяется Г. я. для средних от частных сумм ряда Фурье при суммировании его тем или иным методом.

Для 2π-периодич. функций f с ограниченным изменением на $[-\pi, \pi]$ справедливы, напр., утверждения (см. [3]).

1) В точках неустранимого разрыва (и только в них) имеет место Г. я. для $s_n(x)$. В частности, если $f(x)=(\pi-x)/2$ при $0<x<2\pi$, то для точки x_0 отрезок $[a, b]=[-\pi/2, \pi/2]$, а отрезок $[A, B]=[-l, l]$, где

$$l=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\approx 1{,}85\ldots>\frac{\pi}{2}.$$

2) Существует такая абсолютная постоянная α_0, $0<\alpha_0<1$, что средние Чезаро $\sigma_n^{\alpha}(x)$ при $\alpha\geqslant\alpha_0$ не имеют Г. я., а при $\alpha<\alpha_0$ оно наблюдается в каждой точке неустранимого разрыва функции f.

Лит.: [1] Willbraham H., «Cambridge and Dublin Math. J.», 1848, v. 3, p. 198—201; [2] Gibbs J. W., «Nature», 1898, v. 59, p. 200; [3] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, 2, М., 1965. *П. Л. Ульянов.*

ГИДРОДИНАМИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи для систем уравнений, к-рыми описываются механич. модели течений жидкости и ее взаимодействия с ограничивающими поверхностями. Для теоретич. описания часто встречающихся турбулентных течений применяются модели частного характера (в большинстве случаев — полуэмпирического), пригодные для сравнительно узких классов течений. В теоретич. исследованиях движений жидкости, в к-рых турбулентность не является существенной, широко используется модель однородной несжимаемой жидкости. Эта модель описывается уравнениями Навье — Стокса:

$$v_t+v_k v_{x_k}-\nu\Delta v=-\operatorname{grad} p+f,$$
$$\operatorname{div} v=0,$$

где v — вектор скорости, p — давление, f — вектор внешней силы, действующей на единицу массы, ν — коэффициент кинематич. вязкости жидкости; плотность жидкости принята равной единице. Если коэффициент ν зависит от температуры, то к уравнениям Навье—Стокса добавляется следующее из закона сохранения энергии уравнение теплопроводности в движущейся среде, в к-ром учитывается выделение тепла в результате обусловленной действием вязкости диссипации механич. энергии.

Различные задачи механики жидкостей приводят к разным системам дополнительных условий (начальных, краевых), требующихся для решения уравнений Навье—Стокса. В связи со сложностью возникающих при этом математич. задач для многих классов задач механики жидкости создаются более простые механич. модели. В задачах какого-либо одного класса стремятся выделить основные факторы, от к-рых может зависеть движение, и соответственно этому в уравнениях и дополнительных условиях сохраняются лишь члены, учитывающие влияние этих факторов. В более сложных случаях в разных частях области движения и в разные отрезки времени основные определяющие факторы могут быть разными. В таких случаях описание движения в целом достигается путем склейки решений локальных

задач, осуществляемой применением к этим решениям дополнительных алгоритмов.

Весьма плодотворной для решения многих задач оказалась модель жидкости, в к-рой не учитывается наличие вязкости (т. е. $\nu=0$) — модель идеальной жидкости.

В случае потенциальных внешних сил $\boldsymbol{f}$ (напр., при учете лишь силы тяжести) особую роль играют в силу их сохраняемости потенциальные течения идеальной жидкости, для к-рых $\boldsymbol{v}=\operatorname{grad}\varphi$. Потенциал φ удовлетворяет при этом уравнению Лапласа $\Delta\varphi=0$.

Многие задачи механики жидкости сводятся в этом приближении к классич. задачам теории потенциала. Так, задача о движении тела в неограниченной покоящейся в бесконечности жидкости сводится к решению внешней задачи Неймана. Однако это решение лишь в очень немногих случаях позволяет приблизиться к описанию полей скорости и давления в реальной жидкости. Одним из таких важных случаев является плоское движение хорошо обтекаемого профиля с постоянной циркуляцией скорости вокруг него.

В вязкой жидкости благодаря действию вязкости в пограничном слое вблизи поверхности тела образуются вихри, так что за телом возникает вихревой след. В случае хорошо обтекаемых тел (напр., крыльев с острой задней кромкой, движущихся с малыми углами атаки) вихревой след при больших числах Рейнольдса очень тонок и в модельной постановке задачи в идеальной жидкости его можно заменить поверхностью разрыва потенциала (вихревой пеленой). Таким образом, возникают задачи о нахождении в области вне крыла потенциала скорости, имеющего разрыв на сходящей с задней кромки крыла поверхности, положение к-рой заранее неизвестно и определяется в процессе решения задачи. Аналитич. решение этой задачи получено лишь в линейном приближении для тонких крыльев простой формы в плане (круг, эллипс). В линейном приближении для крыльев иных форм при стационарных и нестационарных движениях разработаны методы численного решения задач. Разрабатываются численные методы расчета обтекания крыльев при нелинейных возмущениях потока.

Широкий круг проблем гидромеханики приводит к постановке задач об отыскании потенциального движения идеальной жидкости в области, ограниченной частично твердыми стенками, а частично — свободной поверхностью. Форма свободной поверхности заранее неизвестна, ее нужно определять в процессе решения задачи с помощью дополнительных условий на этой поверхности. В тех случаях, когда влиянием силы тяжести и поверхностного напряжения на движение можно пренебречь, в установившихся движениях, как следует из интеграла Бернулли, на свободной поверхности, вдоль к-рой жидкость соприкасается с областью постоянного давления, скорость жидкости постоянна. Типичными задачами с условиями такого типа являются задачи об истечении струй из отверстия в сосуде и о соударении струй, натекании на тело струи жидкости конечной толщины, глиссировании с большой скоростью тела по поверхности жидкости. К таким же задачам относятся задачи об обтекании тел неограниченным потоком со срывом струй и с образованием за телом застойных зон или кавитационных полостей с постоянным давлением. В случае плоских течений при решении всех этих задач используются техника конформных отображений, вариационный метод и метод интегральных уравнений. Решение пространственных задач значительно труднее и опирается на численные методы.

В случае нестационарных течений со свободными поверхностями, в том числе при учете силы тяжести и при учете капиллярных сил, интеграл Коши—Лагранжа дает нелинейное условие для потенциала скорости на

свободной поверхности. С этим условием связаны основные трудности решения подобных задач: вход тела в жидкость или выход тела из-под поверхности жидкости, глиссирование тела по поверхности тяжелой жидкости; движение тела, частично или полностью погруженного в тяжелую жидкость, волны на поверхности тяжелой жидкости.

При решении этих задач лишь немногие результаты получены с использованием точных методов. Значительные успехи связаны с применением приближенных асимптотич. методов. Один из основных подходов — линейная теория малых возмущений и ее уточнения. Применяемый при этом математич. аппарат охватывает почти весь линейный аппарат математич. физики.

При изучении волн на поверхности тяжелой жидкости важное значение имеет приближение «мелкой воды» — предположение о малой сравнительно с длиной рассматриваемых волн глубине бассейна. В этом приближении удается развить нелинейную теорию для волн конечной амплитуды. Эта теория сводится к системе гиперболич. уравнений с частными производными, аналогичной той, к-рая возникает в теории двумерных сверхзвуковых течений газа; многие важные результаты могут быть при этом получены методом характеристик. В квазиодномерном приближении теория мелкой воды составляет основу разделов современной гидравлики, изучающих волновые движения в реках и протяженных открытых каналах: распространение паводковых волн и волн, вызванных разрушением плотины; возникновение периодических стационарных волн в каналах с крутым дном и др.

В точной нелинейной теории волн на поверхности тяжелой жидкости методы теории функций и функционального анализа позволили решить многие вопросы существования и единственности волновых движений. В частности, доказано существование гладких двумерных периодических прогрессивных волн конечной амплитуды на поверхности жидкости бесконечной или конечной постоянной глубины.

Схема обтекания тела потенциальным потоком со срывом струй и с образованием за ним застойной области, в к-рой скорость жидкости равна нулю, представляет собой лишь одну из возможных схематизаций. Имеются схемы обтекания тел с областью в следе за ними, заполненной завихренной жидкостью. В связи с исследованием таких схем обтекания, а также в связи с рядом других приложений, возникла задача о склейке областей потенциального и вихревого течений жидкости, отделенных поверхностью тока, форма к-рой заранее неизвестна. В случае плоских симметричных движений при постоянной величине вихря в области завихренного течения получены нек-рые частные численные решения этой задачи.

Для изучения движений жидкости, в к-рых действие вязкости проявляется существенным образом, также разработан ряд упрощенных по сравнению с полными уравнениями Навье — Стокса математич. моделей. К числу наиболее важных и широко используемых относятся: теория медленных движений Стокса и ее уточнения; теория пограничного слоя Прандтля и ее уточнения; теория термических конвективных движений Буссинеска.

В ряде случаев движений жидкости, представляющих практич. интерес, сила инерции, действующая на элемент жидкости, мала по сравнению с силами давления или вязкости (при использовании критериев подобия этому соответствуют малые значения числа Рейнольдса), так что в первом приближении ею можно пренебречь (теория Стокса). В результате возникает задача об определении v и p в области, заполненной жидкостью, из системы линейных уравнений

$$\nu\Delta v = \operatorname{grad} p - f,$$
$$\operatorname{div} v = 0.$$

С использованием этой системы уравнений решены многие задачи о движении вязкой жидкости в жестких и деформируемых трубках и различной формы зазорах между неподвижными и подвижными поверхностями, задача о движении твердых тел и газовых пузырей в вязкой жидкости. Эти задачи служат основой гидродинамич. теории смазки и имеют важное значение в химич. технологии, в биологических и других приложениях.

Имеются успехи в строгом обосновании разрешимости уравнений Стокса при различных дополнительных условиях. В частности, доказано существование и единственность решения задачи об обтекании системы тел конечных размеров неограниченным потоком с заданной скоростью в бесконечности.

Для плоских течений уравнения Стокса сводятся к бигармонич. уравнению относительно функции тока. Граничное условие обтекания заданного контура сводится при этом к заданию на контуре самой функции тока и ее нормальной производной, так что решение задачи обтекания приводит в этом случае к хорошо изученной задаче математич. физики.

В отличие от случая пространственного обтекания в случае плоского течения (напр., при поперечном обтекании круглого цилиндра) не существует решения задачи, соответствующего заданной скорости в бесконечности. «Парадокс Стокса», а впоследствии и «парадокс Уайтхеда» (невозможность найти путем итерации следующее приближение по числу Рейнольдса и в задаче обтекания сферы) привели к развитию в гидромеханике асимптотич. методов для малых значений числа Рейнольдса, уточняющих теорию Стокса. Эти методы сращиваемых асимптотич. разложений, кроме задачи обтекания тел вязкой жидкостью при малых значениях числа Рейнольдса, нашли применение во многих других задачах механики жидкости. Идея метода в задаче обтекания тел состоит в следующем. Приближение Стокса рассматривается как главный член асимптотич. разложения при малых Re вблизи обтекаемого тела. Вдали от обтекаемого тела (на расстояниях r от тела порядка Re^{-1}) это разложение становится непригодным. Поэтому вдали от тела после введения сжатой радиальной координаты $r\mathrm{Re}$ строится другое асимптотич. разложение как возмущение равномерного потока (разложение Озеена). Устранение произвола в построенных таким образом разложениях достигается путем их «сращивания» в промежуточной области в соответствии со специально разработанной для этого процедурой.

Для решения задач обтекания тел при малых числах Рейнольдса с успехом применяются численные методы. Результаты асимптотич. вычислений в задаче обтекания сферы хорошо согласуются с численными результатами вплоть до $\mathrm{Re}\sim 60$, что близко к пределу, при к-ром в опытах еще наблюдается установившееся течение.

К движениям, в к-рых инерционные силы малы по сравнению с силами вязкости, относятся многие случаи движения жидкости сквозь пористую среду. Можно считать, что поток жидкости сквозь элемент поверхности, пересекающий достаточно большое количество пор, пропорционален градиенту давления и обратно пропорционален коэффициенту вязкости — как в случае, если бы среда состояла из ряда трубок малого диаметра. Тогда при статистически изотропной структуре среды

$$\boldsymbol{v} = -\frac{k}{\mu}\operatorname{grad} p$$

(закон Дарси). Если коэффициент проницаемости среды k не зависит от координат и коэффициент вязкости жидкости μ постоянен, то скорость есть потенциальный вектор, причем потенциал удовлетворяет уравнению Лап-

ласа. Это дает возможность успешного применения методов теории потенциала для решения разнообразных практич. задач, касающихся фильтрации воды под плотинами, движений грунтовых вод вблизи побережий в связи с приливами и отливами, фильтрации нефти к скважинам и т. п.

Решения, получаемые в задачах непрерывного потенциального обтекания тел неограниченным потоком несжимаемой идеальной жидкости, удовлетворяют и полной системе уравнений Навье — Стокса, но не удовлетворяют условиям прилипания жидкости на поверхности тела. При больших значениях числа Рейнольдса слой жидкости вблизи поверхности тела, в к-ром существенно проявляется действие вязкости и благодаря наличию к-рого удается удовлетворить условию прилипания вязкой жидкости к поверхности, имеет небольшую толщину. На этом основании путем сравнительной оценки порядка величин различных членов в уравнениях Навье — Стокса эти уравнения сводятся к более простому виду — к уравнениям теории пограничного слоя (уравнения Прандтля). В уравнениях Прандтля давление не изменяется по нормали к обтекаемой поверхности, а изменение давления вдоль поверхности определяется течением идеальной жидкости вне пограничного слоя. В простейшем случае двумерного установившегося течения вдоль плоского контура уравнения Прандтля имеют вид:

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = U \frac{\partial U}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2},$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0.$$

Здесь x_1, x_2 и v_1, v_2 — координаты и, соответственно, компоненты скорости в пограничном слое вдоль поверхности и по нормали к ней, U — скорость на внешней границе слоя.

Уравнения пограничного слоя дают главный член в соответствующим образом построенном асимптотич. разложении решения уравнений Навье — Стокса для больших чисел Рейнольдса.

Уравнения пограничного слоя имеют параболич. тип с линией вырождения на контуре обтекаемого тела (там, где $v_1=0$). Для интегрирования уравнений пограничного слоя и получения важных в прикладном отношении характеристик течения в нем разработаны различные эффективные приближенные методы, в частности методы интегральных соотношений, основанные на использовании различных аппроксимаций распределений продольной скорости v_1 в поперечном направлении внутри слоя. Численные методы позволяют сравнительно просто получать нужные для практики результаты, в том числе и для пространственных течений, непосредственным интегрированием уравнений пограничного слоя.

Общая теория (теорема существования и единственности) разработана для случаев, когда внутри пограничного слоя на каждой нормали к обтекаемой поверхности проекция скорости жидкости на направление скорости внешнего потока не меняет знак (т. е. нет «обратных токов»).

Усовершенствование теории пограничного слоя вычислением следующих членов асимптотич. разложения для больших чисел Рейнольдса связано с использованием метода сращиваемых асимптотич. разложений. Таким образом удалось, например, определить коэффициент сопротивления пластины с точностью порядка $\mathrm{Re}^{-3/2}\ \ln \mathrm{Re}$ (главный член имеет порядок $\mathrm{Re}^{-1/2}$).

В задачах термич. конвекции движение жидкости происходит в поле потенциальных массовых сил из-за возникающих вследствие неравномерного нагревания жидкости различий в плотности ее частиц. В приближении Буссинеска для изучения конвективных движений

используется модель вязкой жидкости с постоянной плотностью, но с учетом в уравнении движения избыточной массовой силы при температурной неоднородности:

$$\boldsymbol{v}_t + v_k \boldsymbol{v}_{x_k} - \nu\Delta\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} p - \alpha\Delta T \boldsymbol{f}.$$

Здесь p — превышение давления над гидростатическим, ΔT — превышение температуры над ее величиной, соответствующей невозмущенной плотности, α — коэффициент относительного объемного расширения жидкости при нагревании. Это уравнение дополняется уравнением сохранения массы и уравнением теплопроводности в движущейся среде (оба — для жидкости постоянной плотности; в уравнении теплопроводности во многих случаях не учитывается вязкая диссипация).

Нек-рые задачи о конвективных движениях рассматривались на основе полной системы уравнений Навье — Стокса с использованием численных методов для ее решения. До появления ЭВМ отсутствовала возможность решения задач механики жидкости с использованием полной системы уравнений Навье — Стокса в тех случаях, когда нелинейные члены этих уравнений не обращаются тождественно в нуль в силу особых условий течения. Имеется ряд численных алгоритмов решения уравнений Навье — Стокса, применимых для расчета течений при небольших значениях числа Рейнольдса. Трудности реализации численных алгоритмов при больших числах Рейнольдса отражают сами свойства решений уравнений Навье — Стокса в этих условиях. Так, напр., в случае стационарных краевых задач доказано существование решения при любом числе Рейнольдса, если полный поток жидкости сквозь каждую изолированную часть области, заполненной жидкостью, равен нулю. Если эта область простирается в бесконечность, то в бесконечности ставится дополнительное условие $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v}_\infty$. Для ограниченной области и малых чисел Рейнольдса решение краевой задачи единственно и устойчиво. При увеличении числа Рейнольдса это единственное решение теряет устойчивость, появляется новое стационарное устойчивое решение. Такая смена течений может происходить при росте Re неоднократно.

Для общего трехмерного случая доказана однозначная разрешимость начально-краевых задач вблизи гладких начальных данных; вопрос об однозначной разрешимости таких задач в целом, то есть для любого промежутка времени и любых размеров области движения, не решен (1977). По-видимому, решения нестационарной задачи могут становиться с течением времени все менее и менее регулярными, переходить в «турбулентные» режимы, могут ветвиться, причем продолжение решения вдоль той или иной ветви не определяется самой моделью Навье — Стокса.

Лит.: [1] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, т. 1—2, М.—Л., 1963; [2] Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 2 изд., М., 1966; [3] Стокер Дж. Дж., Волны на воде, пер. с англ., М., 1959; [4] Ладыженская О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2 изд., М., 1970; [5] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, М., 1973.

Г. Г. Черный.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ — метод описания эволюции системы и ее характерных свойств на основе макроскопич. уравнений гидродинамики. Г. п. соответствует рассмотрению системы типа газа или жидкости как непрерывной среды, когда в уравнениях гидродинамики, описывающих систему, любые приращения времени t (даже dt) всегда больше времени релаксации к локально равновесному распределению (для классич. системы — к локальному *Максвелла распределению*), т. е. всегда больше времени образования локальных термодинамич. характеристик, таких, как плотность, гидродинамич. скорость, температура и т. д., а изменения последних в

координатном пространстве настолько сглажены, что используемые в приближении приращения объемов dr не только содержат достаточное число частиц, но и образуют квазиоднородные статистические подсистемы.

С точки зрения статистич. механики, классич. уравнения гидродинамики могут быть получены из кинетич. уравнения в приближении медленных и сглаженных процессов в молекулярных масштабах (средний пробег) времени и длины. С этой целью на основе кинетич. уравнения составляются уравнения для локальной плотности (уравнения непрерывности), гидродинамич. скорости (уравнения движения) и локальной температуры (уравнения сохранения энергии), а затем в них подставляется решение для одночастичной функции распределения, соответствующее случаю малого отклонения ее от локального распределения Максвелла. В нулевом приближении это приводит к уравнениям идеальной жидкости, в первом приближении — к *Навье — Стокса уравнениям*. Этот процесс составляет основу *Чепмена — Энскога метода*.

Более общий метод основан на цепочке уравнений для временных корреляционных функций (см. *Боголюбова цепочка уравнений*) и ее решении в виде разложения по параметру, характеризующему степень неоднородности системы. Получающиеся разложения для коэффициентов переноса идентичны результатам метода Чепмена — Энскога только в тех частях, к-рые включают учет парных столкновений (эффекты тройных столкновений дают соизмеримые им вклады).

Аналогичный метод получения гидродинамич. уравнений может быть использован и для квантовых жидкостей, когда необходимо исходить из цепочки уравнений Боголюбова для квантовых корреляционных функций, или уравнений для квантовых *Грина функций*, или непосредственно из *Шрёдингера уравнения*.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избр. тр., т. 2, Киев, 1970; [2] Уленбек Д., Форд Дж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965. *И. А. Квасников.*

ГИЛЬБЕРТА ГЕОМЕТРИЯ — геометрия полного метрич. пространства H с метрикой $h(x, y)$, к-рое вместе с любыми двумя различными точками x и y содержит точки z и t такие, что $h(x, z)+h(z, y)=h(x, y)$, $h(x, y)+h(y, t)=h(x, t)$, и к-рое гомеоморфно выпуклому множеству n-мерного аффинного пространства A^n, причем геодезические $\gamma \in H$ отображаются в прямые A^n. Напр., пусть K — выпуклое тело пространства A^n, граница к-рого ∂K не содержит двух неколлинеарных отрезков, и пусть точки $x, y \in K$ расположены на прямой l, пересекающей в точках a, b границу ∂K, $R(x, y, a, b)$ — двойное отношение точек x, y, a, b (если $x=(1-\lambda)a+\lambda b$, $y=(1-\mu)a+\mu b$, то $R(x, y, a, b)=\frac{1-\lambda}{1-\mu}\cdot\frac{\mu}{\lambda}$). Тогда

$$h(x, y)=\frac{1}{2}|\ln R(x, y, a, b)|$$

— метрика Г. г. (метрика Гильберта). Если K центрально симметрично, то $h(x, y)$ является метрикой Минковского (см. *Минковского геометрия*), если K — эллипсоид, то $h(x,y)$ определяет геометрию Лобачевского.

Проблема определения всех метризаций K, при к-рых геодезическими являются прямые, составляет содержание 4-й проблемы Гильберта; решена полностью в [4].

Обобщением Г. г. является так наз. геометрия геодезических (см. *Геодезических геометрия*).

Г. г. впервые была упомянута Д. Гильбертом (D. Hilbert) в 1894 в письме к Ф. Клейну (F. Klein).

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, М.—Л., пер. с нем., 1948; [2] Проблемы Гильберта, М., 1969; [3] Буземан Г., Геометрия геодезических, пер. с англ., М., 1962; [4] Погорелов А. В., Четвертая проблема Гильберта, М., 1974. *М. И. Войцеховский.*

ГИЛЬБЕРТА ИНВАРИАНТНЫЙ ИНТЕГРАЛ—криволинейный интеграл от замкнутой дифференциальной формы, являющейся производной действия функционала вариационного исчисления. Для функционала

$$J(x)=\int L(t,\ x^i,\ \dot{x}^i)\,dt$$

ищется вектор-функция $U^i(t,\ x^i)$, наз. п о л е м, так, чтобы интеграл

$$J^*=\int_\gamma \Big(L(t,\ x^i,\ U^i(t,\ x^i))-$$
$$-\sum_{k=1}^n U^k(t,\ x^i)\,\frac{\partial L(t,\ x^i,\ U^i(t,\ x^i))}{\partial \dot{x}^k}\Big)\,dt+$$
$$+\sum_{k=1}^n \frac{\partial L(t,\ x^i,\ U^i(t,\ x^i))}{\partial \dot{x}^k}\,dx^k$$

не зависел от пути интегрирования. Если такая функция существует, то J^* наз. и н в а р и а н т н ы м и н т е г р а л о м Г и л ь б е р т а. Условие замкнутости подинтегральной дифференциальной формы порождает систему уравнений с частными производными 1-го порядка.

Г. и. и. наиболее естественным путем воссоединяет теорию Вейерштрасса и теорию Гамильтона—Якоби. Значение Г. и. и. на кривых, соединяющих точки $P_0=(t_0,\ x_0^i)$ и $P_1=(t_1,\ x_1^i)$, становится, в силу инвариантности J^*, функцией $S(P_1,\ P_2)$ этой пары точек и наз. д е й с т в и е м. Линия уровня $S=\text{const}$ наз. т р а н с в е р с а л ь м и поля $U^i(t,\ x^i)$. Решения уравнения $\dot{x}^i=U^i(t,\ x^i)$ являются *экстремалями* функционала $J(x)$. Обратно, если нек-рая область покрыта полем экстремалей, то интеграл J^*, построенный по функции $U^i(t,\ x^i)$, равной производной экстремали, проходящей через $(t,\ x^i)$, есть Г. и. и. Возможность подобного окружения, а значит, и построения Г. и. и., формулируется обычно в виде *Якоби условия*.

Если кривая $x^i(t)$ проходит в области, покрытой полем, через точки P_0 и P_1, соединенные также экстремалью $x_0^i(t)$, то инвариантность Г. и. и. и равенство $dx_0^i/dt=U^i(t,\ x_0^i(t))$ позволяют получить *Вейерштрасса формулу* для приращения функционала, а следовательно, и достаточное *Вейерштрасса условие* экстремума.

При закрепленной точке P_0 действие $S(P_0,\ P)$ есть функция $S(t,\ x^i)$ точки $P=(t,\ x^i)$ и $J^*=\int dS$. Переход к каноническим координатам

$$p_k(t,\ x^i)=\frac{\partial L(t,\ x^i,\ U^i(t,\ x^i))}{\partial \dot{x}^k}$$

позволяет записать Г. и. и. в виде

$$J^*=\int dS=\int -H(t,\ x^i,\ p_i(t,\ x^i))\,dt+$$
$$+\sum_{k=1}^n p_k(t,\ x^i)\,dx^i;$$

при этом

$$H=\sum_{k=1}^n p_k U^k-L,$$

$$\frac{\partial S(t,\ x^i)}{\partial t}+H(t,\ x^i,\ p_i(t,\ x^i))=0;\quad \frac{\partial S(t,\ x^i)}{\partial x^i}=p_i(t,\ x^i).$$

Эти соотношения эквивалентны **уравнению** Гамильтона — Якоби.

Интеграл J^* для поля геодезических был введен Э. Бельтрами [1] в 1868, а в общем случае — Д. Гильбертом [2] — [4] в 1900.

Лит.: [1] B e l t r a m i E., «Rend. Ist. Lombardo Sci. Let.», 1868, v. 1, № 2, p. 708—718; [2] H i l b e r t D., «Nachr. Ges. Wiss. Göttingen», 1900, S. 253—97; [3] Проблемы Гильберта, М., 1969, с. 57—63; [4] H i l b e r t D., «Math. Ann.», 1906, Bd 62, S. 351—70; [5] А х и е з е р Н. И., Лекции по вариаци-

онному исчислению, М., 1955, с. 55—6; [6] Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление, М., 1961, с. 135—146; [7] Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, B.— L., 1935; [8] Янг Л., Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления, пер. с англ., М., 1974.

В. М. Тихомиров.

ГИЛЬБЕРТА МНОГОЧЛЕН градуированного модуля $M=\bigoplus_n M_n$ — многочлен, выражающий при больших натуральных n размерности однородных слагаемых модуля как функцию от n. Более точно, справедлива теорема, доказанная по существу Д. Гильбертом. Пусть $A=K[X_0, \ldots, X_m]$ — кольцо многочленов над полем K, градуированное так, что X_i являются однородными элементами степени 1, и пусть $M=\bigoplus_n M_n$ — градуированный A-модуль конечного типа; тогда существует такой многочлен $P_M(t)$ с рациональными коэффициентами, что для достаточно больших n $\dim_K M_n=P_M(n)$. Этот многочлен наз. многочленом Гильберта.

Наибольший интерес представляет интерпретация Г. м. градуированного кольца R, являющегося факторкольцом кольца A по однородному идеалу I; в этом случае Г. м. доставляет проективные инварианты проективного многообразия $X=\mathrm{Proj}(R)\subset P^m$, определяемого идеалом I. В частности, степень многочлена $P_R(t)$ совпадает с размерностью многообразия X, а $p_a(X)=(-1)^{\dim X}(P_R(0)-1)$ наз. *арифметическим родом* многообразия X. Через Г. м. выражается также степень вложения $X\subset P^m$. Г. м. кольца R называют также Г. м. проективного многообразия X относительно вложения $X\subset P^m$. Если $O_X(1)$ — обратимый пучок, соответствующий этому вложению, то

$$P_R(n)=\dim_K H^0\left(X,\ O_X(1)^{\otimes n}\right)$$

для достаточно больших n.

Лит.: [1] Hilbert D., Gesammelte Abhandlungen, Bd 2, B., 1933; [2] Бальдассарри М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [3] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, т. 2, пер. с англ., М., 1963.

В. И. Данилов.

ГИЛЬБЕРТА НЕРАВЕНСТВО — теорема Гильберта о двойных рядах:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n b_m}{n+m}<$$

$$<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{\infty}b_m^{p'}\right)^{1/p'},\qquad (*)$$

где $p>1$, $p'=\frac{p}{p-1}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $a_n\geqslant 0$, $b_m\geqslant 0$, и ряды в правой части имеют конечные положительные суммы, причем константа $\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ — точная, т. е. не может быть уменьшена. Д. Гильберт (D. Hilbert) доказал (*) без точной константы в своих лекциях по интегральным уравнениям. Его доказательство было опубликовано Г. Вейлем [1]. Точная константа найдена И. Шуром [2], а неравенство (*) с произвольным $p>1$ впервые приводится в работах Г. Харди (G. Hardy) и М. Рисса (M. Riesz) в 1925. Имеются интегральные аналоги и обобщения неравенства (*), напр., неравенство

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}K^{\lambda}(x,\ y)\,f(x)\,g(y)\,dx\,dy\leqslant$$

$$\leqslant K^{\lambda}\left(\int_0^{\infty}f^p(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\int_0^{\infty}g^q(y)\,dy\right)^{1/q},$$

где $K(x,\ y)$ — неотрицательное ядро, однородное со степенью -1, $p>1$, $q>1$, $\lambda=1/p+1/q\leqslant 1$, $f(x)\leqslant 0$, $g(y)\geqslant 0$ и

$$K=\int_0^{\infty}u^{-1/\lambda p'}\,K(1,u)\,du$$

и полученный ранее [4] частный случай этого неравенства с ядром $K(x,\ y)=1/(x+y)$ (так наз. двупараметрическое Г. н.) и константой $K^{\lambda}=(\pi/\sin\ \lambda p')^{\lambda}$. Точность

этой константы доказана при $q'=p$. Она является также асимптотически точной при $p\to 1$ и произвольном допустимом фиксированном q. Вопрос об асимптотике константы в (*) для конечных сумм ($1\leqslant n,\ m\leqslant N$) не решен (1977); здесь известно только, что при $p=q=2$ константа равна

$$\pi-\frac{\pi^5}{2}\ (\ln N)^2+O\left(\ln\ln\left\{N\,(\ln N)^{-3}\right\}\right).$$

Лит.: [1] Weyl H., Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourielschen Integraltheorems, Inaugural Dissertation, Gött., 1908; [2] Schur I., «J. für Math.», Bd 140, 1911, S. 1—28; [3] Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; [4] Bonsall F. F., «Quart. J. Math.», 1951, v. 2, p. 135—50; [5] Levin V., «J. London Math. Soc.», 1936, v. 11, p. 119—24; [6] De Bruijn N. G., Wilf H. S., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1962, v. 68, p. 70—3; [7] Walker P. L., «Proc. Edinburgh Math. Soc.», 1973, v. 18, № 4, p. 293—94. *Е. К. Годунова.*

ГИЛЬБЕРТА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ функции f — несобственный интеграл

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt. \tag{1}$$

Если $f\in L(-\infty,\ \infty)$, то функция g существует почти для всех значений x. Если $f\in L_p(-\infty,\ \infty)$, $p\in(1,\ \infty)$, тогда функция g также принадлежит $L_p(-\infty,\ \infty)$ и почти всюду имеет место двойственная формула [обращение преобразования (1)]:

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{g(x+t)-g(x-t)}{t}\,dt, \tag{2}$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2\,dx\leqslant M_p\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx, \tag{3}$$

где константа M_p зависит только от p.

Формулы (1), (2) эквивалентны формулам

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-x}\,dt, \tag{4}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)}{t-x}\,dt, \tag{5}$$

в к-рых интегралы понимаются в смысле главного значения.

Г. п. функции f называется также рассмотренный в смысле главного значения интеграл

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}\,dt. \tag{6}$$

Этот интеграл часто наз. *Гильберта сингулярным интегралом*. В теории рядов Фурье функцию g, определяемую формулой (6), наз. сопряженной с f.

Если $f\in L(0,2\pi)$, то g существует почти всюду, а если f удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha\in(0,1)$, то g существует при любом x и удовлетворяет тому же условию. Если $f\in L_p(0,2\pi)$, $p\in(1,\ \infty)$, то g обладает тем же свойством и имеет место неравенство, аналогичное (3), в к-ром интегралы взяты на интервале $(0,2\pi)$. Таким образом, интегральные операторы, порождаемые Г. п., являются ограниченными (линейными) операторами в соответствующих пространствах L_p.

Когда f удовлетворяет условию Липшица или $f\in L_p(0,2\pi)$ и, кроме того,

$$\int_0^{2\pi}g(x)\,dx=0,$$

то имеет место двойственная формула

$$f(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t)\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}\,dt, \tag{7}$$

причем

$$\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=0.$$

В классе функций, удовлетворяющих условию Липшица, равенство (7) справедливо всюду, а в классе функций, суммируемых с p-й степенью, — почти всюду.

Каждую из выписанных выше двойственных формул [напр. (4), (5)] можно рассматривать как интегральное уравнение 1-го рода; тогда вторая формула даст решение этого уравнения.

Когда функции $\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}$ и $\frac{1}{t-x}$ рассматриваются как ядра интегральных операторов, то их часто наз. *Гильберта ядром* и *Коши ядром*. Между этими ядрами в случае единичной окружности существует простая связь:

$$\frac{d\tau}{\tau-\xi}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}+i\right)dt,$$

где $\xi=e^{ix}$, $\tau=e^{it}$.

Лит.: [1] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Lpz.— B., 1912 (2 Aufl., 1924); [2] Riesz M., «Math. Z.», 1927, Bd 27, № 2, S. 218—44; [3] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.—Л., 1948; [4] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [5] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961.

Б. В. Хведелидзе.

ГИЛЬБЕРТА СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ — несобственный (в смысле главного значения по Коши) интеграл

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2}\,dt,$$

где периодич. функция $f(t)$ наз. плотностью Г. с. и., а $\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2}$ — ядром Г. с. и. Если $f(t)$ суммируема, то $\tilde{f}(x)$ существует почти всюду, а если $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем α, $0<\alpha<1$, то $\tilde{f}(x)$ существует при любом s и удовлетворяет тому же условию. Если $f(x)$ суммируема с p-й степенью, $p>1$, то $\tilde{f}(x)$ обладает тем же свойством и

$$\left\{\int_0^{2\pi}|\tilde{f}(x)|^p dx\right\}^{1/p}\leqslant M_p\left\{\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right\}^{1/p},$$

где M_p — постоянная, не зависящая от $f(x)$. Кроме того, имеет место формула обращения Г. с. и.

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{f}(t)\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt.$$

Функция $\tilde{f}(x)$ наз. сопряженной с $f(x)$.

Лит.: [1] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Lpz.— B., 1912; [2] Riesz M., «Math. Z.», 1927, Bd 27, № 2, S. 218—44; [3] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [4] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968.

Б. В. Хведелидзе.

ГИЛЬБЕРТА СИСТЕМА АКСИОМ евклидовой геометрии — система аксиом, предложенная в 1899 Д. Гильбертом (см. [1]). Со времени первой публикации Г. с. а. Д. Гильберт внес в систему аксиом различные изменения и уточнения.

Основными (неопределяемыми) понятиями в Г. с. а. являются объекты: точки, прямые и плоскости и отношения между ними, выражаемые словами: «принадлежит», «между», «конгруэнтен». Природа основных объектов и отношений между ними может быть какой угодно, лишь бы эти объекты и отношения удовлетворяли указанным аксиомам.

Г. с. а. содержит 20 аксиом, к-рые разбиты на пять групп.

I группа состоит из восьми аксиом принадлежности (соединения), к-рые описывают отношение «принадлежит». I_1. Для любых двух точек существует прямая, проходящая через каждую из этих двух точек. I_2. Для двух различных точек существует не более одной прямой, проходящей через каждую из этих двух точек. I_3. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой. I_4. Для любых трех точек, не лежащих на одной прямой, существует плоскость, проходящая через каждую из этих трех точек. На каждой плоскости лежит по крайней мере одна точка. I_5. Для любых трех

точек, не лежащих на одной прямой, существует не более одной плоскости, проходящей через каждую из этих трех точек. I_6. Если две точки A, B прямой a лежат в плоскости α, то всякая точка прямой a лежит в плоскости α. I_7. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют еще по крайней мере одну общую точку. I_8. Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

II группа содержит четыре аксиомы порядка, описывающие отношение «между». II_1. Если точка B лежит между точкой A и точкой C, то A, B, C — различные точки одной прямой и B лежит также между C и A. II_2. Для любых двух точек A и B на прямой AB существует по крайней мере одна точка C такая, что точка B лежит между A и C. II_3. Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими. II_4 (аксиома Паша). Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — прямая в плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C. Тогда, если прямая a проходит через внутреннюю точку отрезка AB, то она проходит также через внутреннюю точку отрезка AC или через внутреннюю точку отрезка BC.

III группа содержит пять аксиом конгруэнтности, к-рые описывают отношение «конгруэнтен» (это отношение Гильберт обозначает знаком $\equiv$). III_1. Если даны отрезок AB и луч OX, то на луче OX существует точка B' такая, что отрезок AB конгруэнтен отрезку OB', то есть $AB \equiv OB'$. III_2. Если $A'B' \equiv AB$ и $A''B'' \equiv AB$, то $A'B' \equiv A''B''$. III_3. Пусть AB и BC — два отрезка на прямой, не имеющие общих внутренних точек, а $A'B'$ и $B'C'$ — два отрезка на той же или на другой прямой, тоже не имеющие общих внутренних точек. Тогда, если $AB \equiv A'B'$ и $BC \equiv B'C'$, то $AC \equiv A'C'$. III_4. Пусть даны угол AOB, луч $O'A'$ и полуплоскость Π', ограниченная прямой $O'A'$. Тогда в полуплоскости Π' существует один и только один луч $O'B'$ такой, что $\angle AOB \equiv \angle A'O'B'$. Кроме того, каждый угол конгруэнтен самому себе. III_5. Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеем: $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, то $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

IV группа состоит из двух аксиом непрерывности. IV_1 (аксиома Архимеда). Пусть AB и CD — два каких-нибудь отрезка. Тогда на прямой AB существует конечное множество точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таких, что точка A_1 лежит между A и A_2, точка A_2 лежит между A_1 и A_3 и т. д., причем отрезки $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку CD и B лежит между A и A_n. IV_2 (аксиома Кантора). Пусть на какой-либо прямой a дана бесконечная последовательность отрезков $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$, удовлетворяющая двум условиям: а) каждый последующий отрезок есть часть предыдущего, б) для любого наперед заданного отрезка CD найдется натуральное число n такое, что $A_nB_n < CD$. Тогда на прямой a существует точка M, принадлежащая каждому из отрезков этой последовательности.

V группа содержит одну аксиому о параллельных. Пусть даны прямая a и точка A, не лежащая на этой прямой. Тогда в плоскости, определяемой прямой a и точкой, существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не пересекающей прямую a.

(У Д. Гильберта IV группа — аксиома о параллельных, V группа — аксиомы непрерывности.)

Все остальные понятия евклидовой геометрии определяются с помощью основных понятий Г. с. а., а все предложения о свойствах геометрич. фигур, не содержащиеся в Г. с. а., должны быть доказаны чисто логич. выводом из этих аксиом (или предложений, полученных таким же путем).

Г. с. а. обладает свойством полноты; она непротиворечива, если непротиворечива арифметика действительных чисел. Если в Г. с. а. заменить аксиому о

параллельных ее отрицанием, то полученная новая система аксиом тоже непротиворечива (система аксиом геометрии Лобачевского), т. е. аксиома о параллельных не зависит от остальных аксиом Г. с. а. Можно установить независимость нек-рых других аксиом Г. с. а. от остальных аксиом этой системы.

Г. с. а. является первым достаточно строгим обоснованием *евклидовой геометрии*.

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 5 изд., М., 1971.
В. Т. Базылев.

ГИЛЬБЕРТА СХЕМА — конструкция в алгебраич. геометрии, позволяющая снабжать множество замкнутых подмногообразий проективного пространства с заданным *Гильберта многочленом* структурой алгебраич. многообразия. Более точно, пусть X — проективная схема над локально нётеровой схемой S и $\mathrm{Hilb}_{X/S}$ — функтор, сопоставляющий каждой S-схеме S' множество замкнутых подсхем схемы $X' = X \underset{S}{\times} S'$, плоских над S'. Функтор $\mathrm{Hilb}_{X/S}$ представим локально нётеровой схемой, к-рая наз. схемой Гильберта S-схемы X и обозначается через $\mathrm{Hilb}\,(X/S)$ (см. [4]). По определению *представимых функторов* в алгебраич. геометрии, для любой S-схемы S' имеет место биекция $\mathrm{Hilb}_{X/S}(S') = \mathrm{Hom}_S(S', \mathrm{Hilb}\,(X/S))$. В частности, если S — спектр поля k, а $X = P^n_k$ — проективное пространство над k, то множество рациональных k-точек схемы $\mathrm{Hilb}\,(P^n_k/k)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством замкнутых подмногообразий в P^n_k.

Для любого полинома $P(z) \in Q[x]$ с рациональными коэффициентами функтор $\mathrm{Hilb}_{X/S}$ содержит подфунктор $\mathrm{Hilb}^P_{X/S}$, выделяющий в множестве $\mathrm{Hilb}_{X/S}(S')$ подмножество подсхем $Z \subset X \underset{S}{\times} S'$ таких, что для любой точки $s' \in S'$ слой $Z_{s'}$ проекций Z на S' имеет $P(z)$ в качестве своего многочлена Гильберта. Функтор $\mathrm{Hilb}^P_{X/S}$ представим схемой $\mathrm{Hilb}^P\,(X/S)$, проективной над S. Схема $\mathrm{Hilb}\,(X/S)$ является прямой суммой схем $\mathrm{Hilb}^P\,(X/S)$ по всем $P \in Q(z)$. Для любой связной базисной схемы S схема $\mathrm{Hilb}^P(X/S)$ также связна [2].

Лит.: [1] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [2] Дьёдонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д., Геометрическая теория инвариантов, пер. с англ., М., 1974; [3] Grothendieck A., «Seminaire Bourbaki», ann. 13, N. Y.—Amst., 1966, p. 1—28; [4] Hartshorne R., «Publ. math. IHES», 1966, t. 29, p. 261—304; [5] Итоги науки. Алгебра. Геометрия. Топология, т. 10, 1972, с. 47—113.
И. В. Долгачев.

ГИЛЬБЕРТА ТЕОРЕМА — 1) Г. т. о базисе: если A — коммутативное *нётерово кольцо* и $A[X_1, \ldots, X_n]$ — кольцо многочленов от $X_1, \ldots, X_n$ с коэффициентами в A, то и $A[X_1, \ldots, X_n]$ — нётерово кольцо. В частности, в кольце многочленов от конечного числа переменных над полем или над кольцом целых чисел любой идеал порождается конечным числом элементов (имеет конечный базис). Именно в такой форме теорема была доказана Д. Гильбертом [1] и играла вспомогательную роль в доказательстве основной *Гильберта теоремы* об инвариантах. Впоследствии Г. т. о базисе получила широкое распространение в коммутативной алгебре.

Лит.: [1] Hilbert D., «Math. Ann.», 1890, Bd 36, S. 473—534.
В. И. Данилов.

2) Г. т. о неприводимости: пусть $f(t_1, \ldots, t_k, x_1, \ldots, x_k)$ — неприводимый многочлен над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$; тогда существует бесконечное множество значений $t^0_1, \ldots, t^0_k \in \mathbb{Q}$ переменных $t_1, \ldots, t_k$, при к-рых многочлен $f(t^0_1, \ldots, t^0_k, x_1, \ldots, x_n)$ неприводим над $\mathbb{Q}$. Так, многочлен $f(t, x) = t - x^2$ остается неприводимым для всех t^0 ($t^0 \neq a^2$, $a \in \mathbb{Q}$) и только для них. Полученная Д. Гильбертом (D. Hilbert) в 1892, эта теорема обобщалась затем на случай многочленов над

нек-рыми другими полями (напр., над полем конечного типа над своим простым подполем [2]).

Г. т. о неприводимости применяется в исследованиях, связанных с *Галуа теории обратной задачей* и *алгебраических многообразий арифметикой*. Пусть над полем $K=k(t_1, \ldots, t_n)$ рациональных функций от $t_1, \ldots, t_n$ существует такое расширение E/K с группой Галуа G, что поле k алгебраически замкнуто в E и к нему применима Г. т. о неприводимости. Тогда можно так выбрать значения переменных $t_1, \ldots, t_n$ в поле k, что получающееся расширение поля k будет иметь группой Галуа группу G. Используя это соображение, Д. Гильберт построил в [1] расширения поля $\mathbb{Q}$ с симметрической и знакопеременной группами. При этом, в случае симметрич. группы за E берется поле рациональных функции от n переменных, а в качестве K — подполе поля симметрич. функций, к-рое само будет полем рациональных функций. Обобщая этот подход, Э. Нётер (E. Noether) рассмотрела произвольную подгруппу $G \subset S_n$ и расширение E соответствующего поля инвариантов E относительно группы G (см. [3]). Г. т. о неприводимости дает возможность построить расширение поля k с группой Галуа G, если только поле E^G есть поле рациональных функций над $\mathbb{Q}$. Вопрос о выполнимости последнего условия (п р о б л е м а Н ё т е р), тесно связан с *Люрота проблемой*. Лишь в 1969 Р. Суон (R. Swan) показал, что в общем случае ответ на него отрицательный (см. [4], [6]).

Г. т. о неприводимости применяется также при построении рациональных точек абелевых многообразий A над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. В силу теоремы Морделла — Вейля группа рациональных точек A является конечно порожденной, и возникает вопрос о значении ее ранга r. Используя Г. т. о неприводимости, А. Перон (A. Neron) построил многообразия A размерности g и ранга больше или равного $3g+6$ (см. [2]).

Лит.: [1] H i l b e r t D., «J. reine und angew. Math.», 1892, Bd 110, S. 104—29; [2] L a n g S., Diophantine Geometry, N. Y., 1962; [3] Ч е б о т а р е в Н. Г., Теория Галуа, М.— Л., 1936, с. 18—32, 90—94; [4] M a r t i n e t J., «Seminaire Bourbaki», 1969/1970, B., 1971; [5] S c h i n z e l A., в кн: «Actes du Congrès International des Mathématiciens», t. 1, P., 1971; [6] В о с к р е с е н с к и й В. Е., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 82, с. 151—61.

А. Н. Паршин.

3) Г. т. о н у л я х (о к о р н я х): пусть k — поле, $k[X_1, \ldots, X_n]$ — кольцо многочленов над k, $\overline{k}$ — алгебраич. замыкание поля k и $F, F_1, \ldots, F_m$ — многочлены из $k[X_1, \ldots, X_n]$. К о р н е м многочлена $F(X_1, \ldots, X_n)$ наз. последовательность $(c_1, \ldots, c_n)$ элементов из $\overline{k}$, удовлетворяющая условию $F(c_1, \ldots, c_n)=0$. Если каждый общий корень многочленов $F_1, \ldots, F_m$ является корнем многочлена F, то существует такое целое число r, зависящее только от $F_1, \ldots, F_m$, что F^r принадлежит идеалу, порожденному $F_1, \ldots, F_m$, то есть

$$F^r = A_1F_1 + \ldots + A_mF_m,$$

где $A_1, \ldots, A_m$ — нек-рые многочлены. Получена Д. Гильбертом [1].

Г. т. эквивалентна утверждению, что для любого собственного идеала $\mathfrak{a}$ кольца $k[X_1, \ldots, X_n]$ существует корень, общий для всех многочленов из $\mathfrak{a}$. Таким образом, Г. т. может рассматриваться как далеко идущее обобщение основной теоремы алгебры. На Г. т. можно смотреть и как на утверждение о том, что любой простой идеал кольца $k[X_1, \ldots, X_n]$ является пересечением максимальных идеалов, его содержащих; это приводит к понятию *Джекобсона кольца*.

При геометрич. интерпретации корни идеала $\mathfrak{a} \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ соответствуют алгебраич. точкам аффинного многообразия, определяемого идеалом $\mathfrak{a}$. Из Г. т. следует, что на любом непустом аффинном многообразии имеется алгебраич. точка. Таким образом, множество алгебраич. точек всюду плотно на многообразии, и потому однозначно его определяет — при-

чина, по к-рой при изучении алгебраич. многообразий часто ограничиваются алгебраич. точками.

Лит.: [1] Hilbert D., «Math. Ann.», 1893, Bd 42, S. 313—73; [2] Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, пер. с нем., ч. 2, 2 изд., М.— Л., 1947; [3] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [4] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [5] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *В. И. Данилов.*

4) Г. т. о поверхностях отрицательной кривизны: в трехмерном евклидовом пространстве не существует полной регулярной поверхности постоянной отрицательной кривизны. Доказана Д. Гильбертом (D. Hilbert, 1901; см. [1]).

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948. *Е. В. Шикин.*

5) Г. т. о сизигиях — теорема о конечности цепи *сизигий* градуированного модуля над кольцом многочленов (в классич. формулировке см. [1]).

Пусть A — нётерово кольцо, M — нётеров A-модуль, и $x_1, \ldots, x_n$ — система образующих модуля M. Модулем сизигий (соотношений) $S(M)$ модуля M наз. модуль соотношений для $x_1, \ldots, x_n$, т. е. A-модуль векторов $(a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in A$, удовлетворяющих условию: $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0$. Индуктивно определяется i-й модуль сизигий $S_i(M)=S(S_{i-1}(M))$ модуля $M(S_1(M)=S(M))$. Иначе это можно описать с помощью точной последовательности, наз. цепью сизигий:

$$0 \longrightarrow S_i(M) \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

где $F_0, \ldots, F_{i-1}$ — свободные A-модули конечного типа. В современном изложении Г. т. о сизигиях допускает следующую формулировку: если A — локальное регулярное кольцо размерности m, то m-й модуль сизигий любого нётерова A-модуля является свободным модулем. Это эквивалентно тому, что любой A-модуль имеет свободную резольвенту длины m, или что A имеет глобальную проективную размерность m. Это свойство характеризует регулярные кольца [2].

Глобальный вариант Г. т. о сизигиях: над регулярным кольцом A (напр., над кольцом многочленов) любой A-модуль конечного типа имеет проективную (но уже не обязательно свободную) резольвенту конечной длины.

Лит.: [1] Hilbert D., «Math. Ann.», 1890, Bd 36, S. 473—534; [2] Serre J.-P., в кн.: Proceedings of the International — Symposium on Algebraic Number Theory, Tokyo, 1955, p. 175—89; [3] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5, с. 3—93; [4] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963. *В. И. Данилов.*

6) Г. т. о циклических расширениях (теорема Гильберта 90): пусть K — циклич. расширение с циклической группой Галуа $G(K/k)$ поля k и σ — образующая группы $G(K/k)$; тогда норма $N_{K/k}(\beta)$ элемента $\beta \in K$ равна единице в том и только в том случае, если существует ненулевой элемент $\alpha \in K$, удовлетворяющий условию $\beta=\alpha \cdot \sigma(\alpha)^{-1}$. Аналогично, след $\mathrm{Tr}_{K/k}(\beta)$ равен нулю тогда и только тогда, когда β может быть представлено в виде $\beta=\alpha-\sigma(\alpha)$, $\alpha \in K$ (см. [1], [2], [3]).

Г. т. может рассматриваться как следствие более общего утверждения о когомологиях групп Галуа (см. [4]). Именно: если K — расширение Галуа группы k с группой Галуа G, то мультипликативная группа K^* поля K превращается в G-модуль, и первая группа когомологий $H^1(G, K^*)$ равна нулю. Аналогично, $H^q(G, K)=0$ при $q \geqslant 1$ (см. *Галуа когомологии*).

Другим обобщением Г. т. является теория спуска Гротендика; одно из применений ее в *этальной топологии*, также известное под назв. «теорема Гильберта 90», утверждает, что этальные когомологии $H^1(X_{\text{et}}, G_m)$ схемы X со значениями в пучке мультипликативных групп G_m изоморфны группе Пикара $\mathrm{Pic}(X)$ классов обратимых пучков на X [5].

Лит.: [1] Hilbert D., «Jahresbericht der D. M. V.», 1897, Bd 4, S. 175—546; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [4] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [5] Artin M., Grothendieck A., Cohomologie étale des schemas, Seminaire IHES, 1963—64. *В. И. Данилов.*

7) Г. т. о существовании абсолютного экстремума: пусть

$$I=\int F\,dt$$

есть функционал вариационной задачи в параметрич. форме, где $F=F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ — положительно определенная функция 1-й степени по $(\dot{x}, \dot{y})$, трижды непрерывно дифференцируемая по всем аргументам для всех (x, y) из области G и всех $(\dot{x}, \dot{y})$, удовлетворяющих условию $\dot{x}^2+\dot{y}^2\neq 0$. Кроме того, предполагается, что $F(x, y, \xi, \eta)>0$ для всех $(x, y)\in G$ и $\xi^2+\eta^2=1$ (т. е. функционал I положительно определен), а также, что множества $\Phi(x, y)=\{(\xi, \eta) : F(x, y, \xi, \eta)\leqslant 1\}$ строго выпуклы по (ξ, η) для всех (x, y) из выпуклой замкнутой подобласти G_0 (т. е. функционал I регулярен, или эллиптичен).

При этих предположениях для любых двух точек (x_0, y_0) и (x_1, y_1) из G_0 найдется кривая, доставляющая функционалу I абсолютный минимум среди всех спрямляемых кривых.

Г. т. получена Д. Гильбертом (D. Hilbert, 1899).

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955. *В. М. Тихомиров.*

8) Г. т. об инвариантах — теорема, устанавливающая конечнопорожденность алгебры всех многочленов на комплексном векторном пространстве форм степени d от r переменных, инвариантных относительно действия полной линейной группы $GL(r, \mathbb{C})$, определяемого линейными заменами этих переменных. Первое доказательство теоремы, использующее *Гильберта теорему* о базисе и формальные процессы *инвариантов теории*, дано в [1]. Д. Гильберт [2] конструктивно доказал эту теорему и получил оценку сверху для степеней образующих указанной алгебры инвариантов (что, в принципе, дает возможность их выписать явно).

Г. т. является первой основной теоремой теории инвариантов для d-й симметрич. степени стандартного представления $GL(r, \mathbb{C})$. Доказательство Г. т. стимулировало постановку вопроса о конечнопорожденности алгебр инвариантов для подгрупп группы $GL(r, \mathbb{C})$, а также постановку 14-й проблемы Гильберта. Используя теорию интегрирования на группах, Г. Вейль (H. Weyl) доказал конечнопорожденность алгебры инвариантов для любых конечномерных представлений компактных групп Ли и комплексных полупростых групп Ли (см. [3]).

Г. т. принято называть также следующее ее обобщение: если R — алгебра конечного типа над полем k, G — геометрически *редуктивная группа* ее k-автоморфизмов и R^G — подалгебра всех G-инвариантных элементов в R, то R^G также имеет конечный тип над k (см. [4], [5]).

Лит.: [1] Hilbert D., «Math. Ann.», 1890, Bd 36, S. 473—534; [2] его же, «Math. Ann.», 1893, Bd 42, S. 313—73; [3] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [4] Mumford D., Geometric invariant theory, B.—Hdlb.—N.Y., 1965; [5] Nagata M., «J. Math. Kyoto Univ.», 1963/64, v. 3. *В. Л. Попов.*

ГИЛЬБЕРТА ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ — общая теория линейных интегральных уравнений II рода

$$\varphi(x)+\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds=f(x), \qquad (1)$$

построенная Д. Гильбертом [1] на базе созданной им теории линейных и билинейных форм с бесконечным числом переменных. Основная идея Г. т. и. у. состоит

в следующем. Пусть имеется полная ортонормированная система функций $\{\omega_n(x)\}$ на интервале (a, b) и пусть

$$\varphi_p = \int_a^b \varphi(t)\,\omega_p(t)\,dt,$$

$$f_p = \int_a^b f(t)\,\omega_p(t)\,dt,$$

$$a_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(x, t)\,\omega_p(t)\,\omega_q(t)\,dx\,dt.$$

Решение интегрального уравнения (1) эквивалентно решению бесконечной системы линейных алгебраич. уравнений:

$$\varphi_p + \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\varphi_q = f_p, \quad p = 1, 2, \ldots. \qquad (2)$$

При этом имеются в виду только те решения этой системы, для к-рых

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p^2 < +\infty,$$

т. е. система рассматривается в *гильбертовом пространстве*. Исследование системы (2) в гильбертовом пространстве позволяет изучить свойства уравнения (1).

В Г. т. и. у. были обоснованы экстремальные свойства собственных значений интегральных уравнений с *эрмитовыми ядрами*.

Лит.: [1] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 2 Aufl., Lpz.— B., 1924.

Б. В. Хведелидзе.

ГИЛЬБЕРТА ЯДРО — ядро *Гильберта сингулярного интеграла*, т. е. функция

$$\operatorname{ctg}\frac{x-s}{2}, \quad 0 \leqslant x,\ s \leqslant 2\pi.$$

Между Г. я. и *Коши ядром* в случае единичной окружности существует простая связь:

$$\frac{dt}{t-\tau} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{x-s}{2} + i\right)dx,$$

где $t = e^{ix}$, $\tau = e^{is}$.

Б. В. Хведелидзе.

ГИЛЬБЕРТА—КАМКЕ ПРОБЛЕМА — задача о совместности системы *диофантовых уравнений* варингова типа:

$$\left.\begin{aligned} &x_1^n + x_2^n + \ldots + x_s^n = N_n,\\ &x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_s^{n-1} = N_{n-1},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &x_1 + x_2 + \ldots + x_s = N_1, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

где переменные $x_1, \ldots, x_s$ принимают целые неотрицательные значения, на числа N_n, N_{n-1}, ..., N_1 наложены нек-рые дополнительные ограничения (см. [3]), s — достаточно большое число, зависящее только от заданного натурального числа n.

Г.— К. п., поставленная в 1900 Д. Гильбертом (см. [1]), решена Э. Камке, к-рый доказал существование решений системы (*). Асимптотич. формула для числа решений этой системы была получена К. К. Марджанишвили в 1937 с помощью *Виноградова метода* оценок тригонометрич. сумм.

Лит.: [1] Hilbert D., «Math. Ann.», 1909, Bd 67, S. 281—300; [2] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [3] Марджанишвили К. К., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1937, с. 609—31.

Б. М. Бредихин.

ГИЛЬБЕРТА — ШМИДТА ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — ограниченный линейный интегральный оператор T, действующий из пространства $L_2(X, \mu)$ в $L_2(X, \mu)$ и представимый в виде

$$(Tf)(x) = \int_X K(x, y)\,f(y)\,\mu(dy), \quad f \in L_2(X, \mu),$$

где $K(\cdot, \cdot) \in L_2(X \times X, \mu \times \mu)$ — ядро оператора (см. [1]).

Впервые такого рода операторы рассматривались Д. Гильбертом (D. Hilbert) и Э. Шмидтом (E. Schmidt)

в 1907. Г.— Ш. и. о. является вполне непрерывным оператором (см. [2]). Сопряженный к нему оператор также есть Г.— Ш. и. о. с ядром $\overline{K(y, x)}$ [3]. Г.— Ш. и. о. будет *самосопряженным оператором* тогда и только тогда, когда $K(x, y)=\overline{K(y, x)}$ для почти всех $(x, y)\in X\times X$ (относительно $(\mu\times\mu)$). Для самосопряженного Г.— Ш. и. о. и его ядра имеют место разложения

$$(Tf)(x)=\sum_n \lambda_n (f, \varphi_n)\varphi_n, \quad f\in L_2(X, \mu), \qquad (1)$$

$$K(x, y)=\sum_n \lambda_n \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)}, \qquad (2)$$

где $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система собственных функций оператора T, отвечающих собственным значениям $\lambda_n\neq 0$; ряд (1) сходится по норме $L_2(X, \mu)$, а ряд (2) сходится по норме $L_2(X\times X, \mu\times\mu)$ (см. [4]). В условиях *Мерсера теоремы* ряд (2) сходится абсолютно и равномерно (см. [5]).

Если

$$\int_X |K(x, y)|^2 \mu(dy)\leqslant C \text{ для всех } x\in X,$$

то ряд (1) сходится абсолютно и равномерно (см. [4]).

Линейный оператор

$$T: L_2(a, b)\to L_2(a, b)$$

является Г.— Ш. и. о. тогда и только тогда, когда T есть bo-линейный оператор (см. [6]). Если μ есть σ-конечная мера, то линейный оператор

$$T: L_2(X, \mu)\to L_2(X, \mu)$$

является Г.— Ш. и. о. тогда и только тогда, когда существует такая функция $M(\cdot)\in L_2(X, \mu)$, что для всех $f\in L_2(X, \mu)$ неравенство

$$|(Tf)(x)|\leqslant M(x)\|f\|$$

справедливо для почти всех $x\in X$ (относительно меры μ) [7]. Таким образом, Г.— Ш. и. о. образуют двусторонний идеал в банаховой алгебре всех линейных ограниченных операторов, действующих из $L_2(X, \mu)$ в $L_2(X, \mu)$.

Г.— Ш. и. о. играют важную роль в теории интегральных уравнений и в теории краевых задач (см. [8], [9]), так как операторы, возникающие во многих задачах математич. физики, либо сами являются Г.— Ш. и. о., либо их итерации нек-рого порядка обладают этим свойством. Естественным обобщением Г.— Ш. и. о. является *Гильберта — Шмидта оператор*.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, ч. 2, пер. с англ., М., 1966; [2] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [3] Stone M. H., Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis, N. Y., 1964; [4] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., М., 1954; [5] Дьедонне Ж., Основы современного анализа, пер. с англ., М., 1964; [6] Канторович Л. В. [и др.], Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.— Л., 1950; [7] Weidmann J., Manuscripta Math., 1970, v. 2, № 1, p. 1—38; [8] Морен К., Методы гильбертова пространства, пер. с польск., М., 1965; [9] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965.

В. Б. Коротков.

ГИЛЬБЕРТА — ШМИДТА НОРМА — норма линейного оператора T, действующего из гильбертова пространства H в гильбертово пространство H_1, имеющая вид $|T|=\left(\sum_{\alpha\in A}\|Te_\alpha\|^2\right)^{1/2}$, где $\{e_\alpha, \alpha\in A\}$ — ортонормированный базис в H. Г.— Ш. н. удовлетворяет всем аксиомам нормы и не зависит от выбора базиса; ее свойства: $\|T\|\leqslant|T|$, $|T|=|T^*|$, $|T_1T_2|\leqslant\|T_1\|\,|T_2|$; $\|T\|$ — норма оператора T в гильбертовом пространстве; если $H_1=H$, то

$$|T|=\left\{\sum_{\alpha, \beta\in A}|(Te_\alpha, e_\beta)|^2\right\}^{1/2}.$$

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, ч. 2, пер. с англ., М., 1966; [2] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961.

В. Б. Коротков.

ГИЛЬБЕРТА — ШМИДТА ОПЕРАТОР — оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H такой, что для любого ортонормированного базиса $\{x_i\}$ в H выполнено условие:

$$\| A \|^2 = \sum_i \| Ax_i \|^2 < \infty$$

(достаточно, однако, справедливости этого для нек-рого базиса). Г.— Ш. о. является *компактным оператором*, для s-чисел к-рого $s_i(A)$ и для собственных чисел $\lambda_i(A)$ имеет место:

$$\sum_i | \lambda_i(A) |^2 \leqslant \sum_i s_i^2(A) = \| A \|^2 = \operatorname{tr}(A^*A);$$

при этом A^*A оказывается *ядерным оператором* (здесь A^* — оператор, сопряженный к A, а $\operatorname{tr} C$ — след оператора C). Совокупность всех Г.— Ш. о. пространства A образует гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^*).$$

Если $R_\lambda(A) = (A - \lambda E)^{-1}$ — резольвента A, а

$$\det_2(E - zA) = \prod_i (1 - z\lambda_i(A)) e^{z\lambda_i(A)}$$

— его регуляризованный характеристический определитель, то выполнено неравенство Карлемана

$$\left\| \det_2\left(E - \frac{1}{\lambda} A\right) R_\lambda(A) \right\| \leqslant | \lambda | \exp\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\| A \|^2}{| \lambda |^2}\right)\right].$$

Типичный представитель Г.— Ш. о.— *Гильберта — Шмидта интегральный оператор* (откуда и название).

М. И. Войцеховский.

ГИЛЬБЕРТА — ШМИДТА РЯД — функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x), \qquad (*)$$

где $\{\lambda_n\}$ — последовательность всех собственных значений симметричного ядра $K(x, s)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$, $\{\varphi_n(x)\}$ — соответствующая последовательность ортонормированных собственных функций, а (f, φ_n) есть скалярное произведение произвольной суммируемой с квадратом функции $f(x)$ и функции $\varphi_n(x)$.

Теорема Гильберта — Шмидта. Если ядро $K(x, s)$ есть суммируемая с квадратом функция двух переменных, то ряд $(*)$ сходится в среднем к функции

$$\int_a^b K(x, s) f(s)\, ds.$$

Если существует такая постоянная C, что для всех x из (a, b) выполняется неравенство

$$\int_a^b | K(x, s) |^2 ds \leqslant C,$$

то Г.— Ш. р. сходится абсолютно и равномерно.

Б. В. Хведелидзе.

ГИЛЬБЕРТА — ЭЙЛЕРА ПРОБЛЕМА — обобщение проблемы Гольдбаха — Эйлера (см. *Гольдбаха проблема*) о представимости всякого натурального четного числа >2 в виде суммы двух простых.

Проблема Гильберта — Эйлера сформулирована Д. Гильбертом (D. Hilbert, см. [1], с. 38) как часть проблемы простых чисел (восьмой проблемы Гильберта). Именно, Д. Гильберт высказал гипотезу, что решение проблемы распределения простых чисел позволит решить как проблему Гольдбаха — Эйлера, так и более общую проблему о разрешимости в простых числах линейного диофантова уравнения

$$ax + by + c = 0$$

с данными целыми попарно взаимно простыми коэффициентами.

Частным случаем Г.— Э. п. является проблема близнецов. Во всех частных случаях, кроме тривиальных,

Г.— Э. п. (к 1977) не решена. См. *Аддитивные проблемы*.

Лит.: [1] Проблемы Гильберта, М., 1969. *С. М. Воронин.*

ГИЛЬБЕРТОВ КИРПИЧ — подпространство *гильбертова пространства* l_2, состоящее из всех точек $x=(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, для к-рых $0 \leqslant x_n \leqslant (1/2)^n$, $n=1,2, \ldots$. Г. к. является *компактом* и топологически эквивалентен (гомеоморфен) тихоновскому произведению счетной системы отрезков, т. е. *тихоновскому кубу* $I^{\aleph_0}$.

Г. к. является *универсальным пространством* в классе метризуемых пространств со счетной базой (т е о р е м а У р ы с о н а). *Б. А. Пасынков.*

ГИЛЬБЕРТОВА АЛГЕБРА — алгебра A с инволюцией над полем комплексных чисел, снабженная невырожденным скалярным произведением $(|)$, причем выполняются следующие аксиомы: 1) $(x|y)=(y^*|x^*)$ для всех $x, y \in A$; 2) $(xy|z)=(y|x^*z)$ для всех $x, y, z \in A$; 3) для всех $x \in A$ отображение $y \to xy$ пространства A в A непрерывно; 4) множество элементов вида xy, $x, y \in A$, всюду плотно в A. Примерами гильбертовых алгебр являются алгебры $L^2(G)$ (относительно свертки), где G — компактная топологич. группа,и алгебра операторов Гильберта — Шмидта в данном гильбертовом пространстве.

Пусть A — Г. а., H — гильбертово пространство — пополнение A, U_x и V_x — элементы алгебры ограниченных линейных операторов в H, являющиеся продолжениями по непрерывности умножений слева и справа на x в A. Отображение $x \to U_x$ (соответственно $x \to V_x$) есть невырожденное представление алгебры A (соответственно алгебры с инволюцией, противоположной A) в гильбертовом пространстве H. Слабое замыкание семейства операторов U_x (соответственно V) является а л г е б р о й Н е й м а н а в H; она наз. левой (соответственно правой) алгеброй Неймана данной Г. а. A и обозначается $U(A)$ (соответственно $V(A)$); $U(A)$ и $V(A)$ являются коммутантами друг друга; это — полуконечные алгебры Неймана. Любая Г. а. однозначно определяет нек-рый точный нормальный полуконечный след на алгебре Неймана $U(A)$; обратно, если дана алгебра Неймана $\mathfrak{A}$ и точный нормальный полуконечный след на $\mathfrak{A}$, то можно построить Г. а. такую, что левая алгебра Неймана этой Г. а. изоморфна $\mathfrak{A}$, и след, определяемый на $\mathfrak{A}$ Г. а., совпадает с исходным (см. [1]). Таким образом, Г. а. является средством изучения полуконечных алгебр Неймана и следов на них; нек-рое обобщение понятия Г. а. позволяет изучать аналогичными средствами не обязательно полуконечные алгебры Неймана (см. [2]).

Лит.: [1] D i x m i e r J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, 2 ed., P., 1969; [2] T a k e s a k i M., Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, B., 1970. *А. И. Штерн.*

ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО — *векторное пространство* H над полем комплексных (или действительных) чисел вместе с комплексной (действительной) функцией (x, y), определенной на $H \times H$ и обладающей следующими свойствами.

1) $(x, x)=0$ в том и только в том случае, если $x=0$;
2) $(x, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$;
3) $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$, $x, y, z \in H$;
4) $(\alpha x, y)=\alpha (x, y)$, $x, y \in H$, α — комплексное (действительное) число;
5) $(x, y)=\overline{(y, x)}$, $x, y \in H$;
6) если $x_n \in H$, $n=1, 2, \ldots$ и если

$$\lim_{n,\, m \to \infty} (x_n - x_m,\ x_n - x_m) = 0,$$

то существует такой элемент $x \in H$, что

$$\lim_{n \to \infty} (x - x_n,\ x - x_n) = 0;$$

элемент x наз. пределом последовательности (x_n);

7) H — бесконечномерное векторное пространство. Функция (x, y), удовлетворяющая аксиомам 1) — 5), наз. скалярным произведением, или внутренним произведением, элементов x и y. Величина $\|x\|=(x, x)^{1/2}$ наз. нормой (или длиной) элемента $x\in H$. Имеет место неравенство $|(x, y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$. Если ввести в H расстояние между элементами $x, y, \in H$ при помощи равенства $\rho(x, y)=\|x-y\|$, то H превращается в *метрическое пространство*.

Два Г. п. H и H_1 наз. изоморфными (или изометрически изоморфными), если существует взаимно однозначное соответствие $x\leftrightarrow x_1$, $x\in H$, $x_1\in H_1$, между H и H_1, сохраняющее линейные операции и скалярное произведение.

Г. п. составляют наиболее распространенный и важный для приложений класс бесконечномерных векторных пространств. Они представляют собой естественное обобщение понятия конечномерного векторного пространства со скалярным произведением (т. е. конечномерного евклидова пространства, или конечномерного унитарного пространства). Именно, если в конечномерном векторном пространстве (над полем действительных или комплексных чисел) задано скалярное произведение, то свойство 6), наз. полнотой Г. п., выполняется автоматически. Бесконечномерные векторные пространства H со скалярным произведением наз. предгильбертовыми пространствами; существуют предгильбертовы пространства, в к-рых свойство 6) не выполняется. Всякое предгильбертово пространство может быть дополнено до Г. п.

Иногда в определение Г. п. не включается условие бесконечномерности, т. е. предгильбертовым пространством наз. векторное пространство над полем комплексных (или действительных) чисел со скалярным произведением, а Г. п. наз. полное предгильбертово пространство.

Примеры Г. п. 1) Комплексное пространство l^2 (или l_2). Элементами этого Г. п. являются бесконечные последовательности комплексных чисел $x=\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$, $y=\{\eta_1, \eta_2, \dots\}$ со сходящейся суммой квадратов модулей:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2<+\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^2<+\infty;$$

скалярное произведение определяется равенством

$$(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta}_k.$$

2) Пространство $l^2(T)$ (обобщение примера 1)). Пусть T — произвольное множество. Элементами Г. п. $l^2(T)$ являются комплекснозначные функции $x(t)$ на T, отличные от нуля не более чем в счетном множестве точек $t\in T$ и такие, что ряд

$$\sum_{t\in T}|x(t)|^2$$

сходится. Скалярное произведение определяется равенством

$$(x, y)=\sum_{t\in T}x(t)\overline{y(t)}.$$

Всякое Г. п. изоморфно пространству $l^2(T)$ для нек-рого соответствующим образом подобранного T.

3) Пространство $L^2(S, \Sigma, \mu)$ (или $L_2(s, \Sigma, \mu)$) комплекснозначных функций $x(s)$, определенных на множестве S с вполне аддитивной положительной мерой μ (заданной на σ-алгебре Σ-подмножеств множества S), измеримых и имеющих интегрируемый квадрат модуля:

$$\int_S|x(s)|^2\,d\mu(s)<+\infty.$$

В этом Г. п. скалярное произведение определяется равенством

$$(x(s), y(s))=\int_S x(s)\overline{y(s)}\,d\mu(s).$$

4) *Соболева пространство* $W_l^2(\Omega)$, обозначаемое также $H_{(l)}$ (см. *Вложения теоремы*).

5) Г. п. функций со значениями в Г. п Пусть H — нек-рое Г. п. со скалярным произведением (x, y), $x, y \in H$. Пусть, далее, Ω — произвольная область в R_n, а $f(x)$, $x \in \Omega$ — функция со значениями в H, измеримая в смысле Бохнера (см. *Бохнера интеграл*) и такая, что

$$\int_\Omega \| f(x) \|_H^2 \, dx < \infty,$$

где dx — мера Лебега на Ω (вместо меры Лебега можно взять любую другую положительную счетно аддитивную меру). Если на этом множестве функций определить скалярное произведение

$$(f(x),\ g(x))_\perp = \int_\Omega (f(x),\ g(x))\, dx,$$

то получится новое Г. п. H_1.

6) Множество непрерывных *Бора почти периодических функций* на прямой образует предгильбертово пространство, если скалярное произведение определяется равенством

$$(x(t),\ y(t)) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, \overline{y(t)}\, dt.$$

Существование предела вытекает из теории почти периодич. функций. Это пространство пополняется *Безиковича почти периодическими функциями* класса B^2.

Пространства l^2 и L^2 были введены и изучены Д. Гильбертом [1] в основополагающих работах по теории интегральных уравнений и бесконечных квадратичных форм. Определение Г. п. было дано Дж. Нейманом [3], Ф. Риссом [4] и М. Стоуном [13], к-рые положили также начало его систематич. изучению.

Г. п. является естественным обобщением обычного трехмерного пространства евклидовой геометрии, и многие геометрич. понятия имеют интерпретацию в Г. п., что позволяет говорить о геометрии Г. п. Два вектора x, y из Г. п. H наз. ортогональными (обозначение $x \perp y$), если $(x, y) = 0$. Два линейных многообразия $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ из H наз. ортогональными ($\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$), если каждый элемент из $\mathfrak{M}$ ортогонален каждому элементу из $\mathfrak{N}$. Ортогональным дополнением множества $A \subset H$ называется множество $B = \{x \mid (x, A) = 0\}$, т. е. множество элементов $x \in H$, ортогональных ко всем элементам из A. Оно обозначается $H \ominus A$ или, если H подразумевается, $A^\perp$. Ортогональное дополнение $\mathfrak{N}$ произвольного множества $\mathfrak{M}$ из H есть замкнутое линейное многообразие. Если $\mathfrak{M}$ — замкнутое линейное многообразие в Г. п. (называемое также подпространством), то всякий элемент $x \in H$ единственным образом может быть представлен в виде суммы $x = y + z$, $y \in \mathfrak{M}$, $z \in \mathfrak{N}$. Это разложение наз. теоремой об ортогональном дополнении и записывается обычно в виде

$$H = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}.$$

При этом теорема справедлива также в случае, если H есть предгильбертово пространство, а $\mathfrak{M}$ — замкнутое линейное многообразие в H. В связи с этим уместно отметить, что нек-рые другие утверждения теории Г. п. справедливы полностью или частично и в предгильбертовых пространствах. Однако практически это обстоятельство не очень существенно, ибо встречающиеся в приложениях пространства либо полны, либо известно, как их пополнить.

Множество $A \subset H$ наз. ортонормированным множеством, или ортонормированной системой, если любые различные два вектора из A ортогональны и если норма каждого вектора $y \in A$ равна единице. Ортонормированное множество наз. полным ортонормированным множест-

в о м, если не существует ненулевого вектора из H, ортогонального ко всем векторам этого множества. Если $\{y_i\}$ — ортонормированная последовательность, а $\{\alpha_i\}$ — последовательность скаляров, то ряд

$$\sum_i \alpha_i y_i$$

сходится в том и только в том случае, когда

$$\sum_i |\alpha_i|^2 < \infty;$$

при этом

$$\left\| \sum_i \alpha_i y_i \right\|^2 = \sum_i |\alpha_i|^2$$

(т е о р е м а П и ф а г о р а в Г. п.).

Пусть A — ортонормированное множество в Г. п. H, а x — произвольный вектор из H. Тогда $(x, y)=0$ для всех $y \in A$, за исключением конечного или счетного множества векторов. Ряд

$$Px = \sum_{y \in A} (x, y)\, y$$

сходится, и его сумма не зависит от порядка расположения его ненулевых членов. Оператор P является о п е р а т о р о м о р т о г о н а л ь н о г о п р о е к т и р о в а н и я, или п р о е к т о р о м, на замкнутое линейное многообразие, порождаемое множеством A.

Множество $A \subset H$ наз. о р т о н о р м и р о в а н н ы м б а з и с о м л и н е й н о г о м н о г о о б р а з и я $\mathfrak{N} \subseteq H$, если A содержится в $\mathfrak{N}$ и если для любого $x \in \mathfrak{N}$ имеет место

$$x = \sum_{y \in A} (x, y)\, y,$$

т. е. любой вектор $x \in \mathfrak{N}$ разлагается по системе A, или может быть представлен при помощи векторов системы A. Набор чисел $\{(x, y) | y \in A\}$ наз. н а б о р о м к о э ф ф и ц и е н т о в Ф у р ь е элемента x по базису A. Каждое подпространство Г. п. H (в частности, само H) имеет ортонормированный базис.

В $l^2(T)$ ортонормированным базисом является набор функций $\{x_t,\ t \in T\}$, определяемых формулой $x_t(s)=1$ при $s=t$, $x_t(s)=0$ при $s \neq t$. В пространстве $L^2(s, \Sigma, \mu)$ разложение вектора по базису принимает вид разложения функции по системе ортогональных функций — важный метод решения задач математич. физики.

Для ортонормированного множества $A \subset H$ следующие утверждения эквивалентны: A полно; A является ортонормированным базисом для H; $\|x\|^2 = \Sigma_{y \in A} |(x, y)|^2$ для любого $x \in H$.

Все ортонормированные базисы данного Г. п. имеют одну и ту же мощность. Этот факт позволяет определить размерность Г. п. Именно, р а з м е р н о с т ь ю Г. п. наз. мощность произвольного ортонормированного базиса в нем. Иногда эта размерность наз. г и л ь б е р т о в о й р а з м е р н о с т ь ю (в отличие от л и н е й н о й р а з м е р н о с т и Г. п., т. е. мощности базиса Гамеля (Хамеля) — понятия, не учитывающего топологич. структуру Г. п.). Два Г. п. изоморфны в том и только в том случае, когда они имеют одну и ту же размерность. С понятием размерности связано понятие д е ф е к т а, или к о р а з м е р н о с т и, п о д п р о с т р а н с т в а. Именно, дефектом подпространства H_1 Г. п. H наз. размерность ортогонального дополнения $H_1^{\perp} = H \ominus H_1$. Подпространство, дефект к-рого равен 1, т. е. ортогональное дополнение к-рого одномерно, называется г и п е р п р о с т р а н с т в о м. Параллельное ему плоское множество называется г и п е р п л о с к о с т ь ю.

Некоторые из геометрич. понятий требуют использования терминологии линейных операторов в Г. п.; к ним относится, в частности, понятие р а с т в о р а линейных многообразий. Р а с т в о р о м м н о г о о б р а з и й M_1 и M_2 в Г. п. H наз. норма $\theta(M_1, M_2)$ разности операторов, проектирующих H на замыкание этих линейных многообразий.

Простейшие свойства раствора:

а) $\theta(M_1, M_2)=\theta(\bar{M}_1, \bar{M}_2)=\theta(H\ominus\bar{M}_1, H\ominus\bar{M}_2)$;

б) $\theta(M_1, M_2)\leqslant 1$,

причем в случае строгого неравенства $\dim M_1=\dim M_2$.

Во многих задачах, относящихся к Г. п., участвуют лишь конечные наборы векторов Г. п., т. е. элементы конечных линейных многообразий Г. п. Поэтому понятия и методы линейной алгебры играют в теории Г. п. большую роль. Векторы $g_1, g_2, \ldots, g_n$ в Г. п. наз. линейно независимыми, если равенство

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k g_k=0,$$

где α_k — скаляры, возможно лишь в том случае, когда все α_k равны нулю. Для линейной независимости векторов необходимо и достаточно, чтобы их *Грама определитель* был отличен от нуля. Счетная последовательность векторов $g_1, \ldots, g_n, \ldots$ наз. линейно независимой последовательностью, если линейно независима каждая ее конечная часть. Каждая линейно независимая последовательность может быть ортогонализирована, т. е. может быть построена такая ортонормированная система $e_1, e_2, \ldots$, что для каждого n *линейные оболочки* множеств $\{g_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ совпадают. Это построение наз. процессом ортогонализации (ортонормализации) Грама — Шмидта и осуществляется следующим образом:

$$e_1=\frac{g_1}{\|g_1\|}, \quad h_2=g_2-(g_2, e_1)\,e_1, \quad e_2=\frac{h_2}{\|h_2\|}, \ \ldots,$$

$$h_n=g_n-\sum_{k=1}^{n1-}(g_n, e_k), e_k, \ e_n=\frac{h_n}{\|h_n\|}, \ \ldots.$$

В множестве Г. п. определены операции прямой суммы и тензорного произведения Г. п. Прямой суммой Г. п. H_i, $i=1, 2, \ldots, n$, где каждое H_i обладает соответствующим скалярным произведением, наз. Г. п.

$$H=H_1\oplus H_2\oplus\ldots\oplus H_n,$$

определяемое следующим образом: в векторном пространстве $H_1\dotplus H_2\dotplus\ldots\dotplus H_n$ — прямой сумме векторных пространств $H_1, \ldots, H_n$ — задается скалярное произведение равенством

$$([x_1, \ldots, x_n], [y_1, \ldots, y_n])=\sum_{i=1}^{n}(x_i, y_i)_{H_i}.$$

При $i\neq j$ элементы из H_i и H_j в прямой сумме

$$H=\sum_{i=1}^{n}\oplus H_i$$

взаимно ортогональны, и проектирование H на H_i совпадает с ортогональным проектированием H на H_i. Понятие прямой суммы Г. п. обобщается на случай бесконечного множества прямых слагаемых. Пусть для каждого ν из нек-рого множества A индексов задано Г. п. H_ν. Прямой суммой Г. п. наз. (и обозначается $\Sigma_{\nu\in A}\oplus H_\nu$) совокупность H всех определенных на A функций $\{x_\nu\}$, обладающих тем свойством, что $x_\nu\in H_\nu$ для каждого $\nu\in A$, и $\sum_{\nu\in A}\|x_\nu\|^2<\infty$. При этом в H линейные операции определяются равенством

$$\{x_\nu\}+\{y_\nu\}=\{x_\nu+y_\nu\}, \quad \alpha\{x_\nu\}=\{\alpha x_\nu\},$$

и скалярное произведение — равенством

$$(\{x_\nu\}, \{y_\nu\})=\sum_{\nu\in A}(x_\nu, y_\nu)_{H_\nu}.$$

При таком способе введения линейных операций и скалярного произведения прямая сумма

$$H=\sum_{\nu\in A}\oplus H_\nu$$

становится Г. п.

Другой важной операцией в множестве Г. п. является тензорное произведение. Тензорным произведением Г. п. H_i, $i=1, 2, \ldots, n$, наз. Г. п., определяемое следующим образом. Пусть $H_1 \odot H_2 \odot \ldots \odot H_n$ — тензорное произведение векторных пространств $H_1, \ldots, H_n$. В векторном пространстве $H_1 \odot H_2 \odot \ldots \odot H_n$ существует единственное скалярное произведение такое, что

$$(x_1 \odot x_2 \odot \ldots \odot x_n, y_1 \odot y_2 \odot \ldots \odot y_n) = \prod_{i=1}^{n} (x_i, y_i)_{H_i}$$

для всех $x_i, y_i \in H_i$. Векторное пространство становится, таким образом, предгильбертовым пространством, пополнение к-рого есть Г. п., обозначаемое $H_1 \otimes H_2 \otimes \ldots \otimes H_n$ или $\prod_{i=1}^{n} \otimes H_i$ и наз. тензорным произведением Г. п. H_i.

Г. п. образуют важный класс *банаховых пространств*: любое Г. п. H есть банахово пространство относительно нормы $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, причем для любых двух векторов x, $y \in H$ имеет место равенство параллелограмма:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Равенство параллелограмма выделяет класс Г. п. среди банаховых пространств, т. е. если в действительном нормированном пространстве B для любой пары элементов x, $y \in B$ имеет место равенство параллелограмма, то функция

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

удовлетворяет аксиомам скалярного произведения и тем самым превращает B в предгильбертово пространство (а если B — банахово, то — в Г. п.). Из равенства параллелограмма следует, что Г. п. есть равномерно выпуклое пространство. Как в любом банаховом пространстве, в Г. п. можно определить две топологии — сильную (нормированную) и слабую. Эти топологии различны, но Г. п. сепарабельно в сильной топологии тогда и только тогда, когда оно сепарабельно в слабой топологии; выпуклое множество (в частности, линейное многообразие) в Г. п. сильно замкнуто тогда и только тогда, когда оно слабо замкнуто.

Как и в теории общих банаховых пространств, в теории Г. п. важную роль играет понятие сепарабельности. Г. п. сепарабельно тогда и только тогда, когда оно имеет счетную размерность. Г. п. l^2 и $H_{(l)}$ сепарабельны. Г. п. $l^2(T)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда T не более чем счетно; Г. п. $L^2(s, \Sigma, \mu)$ сепарабельно, если мера μ имеет счетный базис. Г. п. B^2 не сепарабельно.

Любой ортонормированный базис в сепарабельном Г. п. H является одновременно безусловным базисом Шаудера в H, рассматриваемом как банахово пространство. Однако в сепарабельных Г. п. существуют и не ортогональные базисы Шаудера. Так, справедлива теорема (см. [7]): пусть $\{f_k\}$ — полная система векторов в Г. п. H и пусть λ_n и Λ_n — наименьшее и наибольшее собственные значения *Грама матрицы*

$$\{\alpha_{jk}\}_{j,\ k=1}^{n}, \quad \alpha_{jk} = (f_k, f_j).$$

Если

$$\varliminf_{n \to \infty} \lambda_n > 0 \quad \text{и} \quad \varlimsup_{n \to \infty} \Lambda_n < \infty,$$

то 1) последовательность $\{f_k\}$ есть базис в H; 2) существует биортогональная к $\{f_k\}$ последовательность $\{g_k\}$, к-рая также является базисом в H.

Как и в любом банаховом пространстве, описание множества линейных функционалов на Г. п. и исследование свойств этих функционалов имеет большое значение. Линейные функционалы в Г. п. устроены особенно просто. Всякий линейный функционал f в Г. п. H однозначно записывается в виде $f(x) = (x, x^*)$ для всех

$x \in H$, где $x^* \in H$; при этом $\|f\| = \|x^*\|$. Пространство H^* линейных функционалов f на H, сопряженное к H, изометрически антиизоморфно H (т. е. соответствие $f \to x^*$ изометрично, аддитивно и антиоднородно: $\alpha f \to \bar{\alpha} x^*$). В частности, Г. п. рефлексивно; поэтому справедливы следующие утверждения: Г. п. слабо секвенциально полно; для того чтобы подмножество Г. п. было относительно слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным.

Основным содержанием теории Г. п. является теория линейных операторов в Г. п. Само понятие Г. п. сформировалось в работах Д. Гильберта [2] и Э. Шмидта [14] по теории интегральных уравнений, а абстрактное определение Г. п. было дано в работах Дж. Неймана [3], Ф. Рисса [4] и М. Стоуна [13] по теории эрмитовых операторов. Теория операторов в Г. п. представляет особый важный раздел общей теории операторов по двум причинам.

Во-первых, теория самосопряженных и унитарных операторов в Г. п. является не только самой разработанной частью общей теории линейных операторов, но и имеющей исключительно широкие приложения в других областях функционального анализа и в ряде других разделов математики и физики. Теория линейных операторов в Г. п. позволяет рассмотреть многие задачи математич. физики с единой общей точки зрения; прежде всего — вопросы, относящиеся к собственным значениям и собственным функциям. Кроме того, теория самосопряженных операторов в Г. п. служит математич. аппаратом квантовой механики: при описании квантовомеханич. системы наблюдаемые (энергия, импульс, координаты и т. п.) интерпретируются как самосопряженные операторы в нек-ром Г. п., а состояние системы задается элементом этого Г. п. В свою очередь, задачи квантовой механики до настоящего времени оказывают влияние на развитие теории самосопряженных операторов, а также теории алгебр операторов в Г. п.

Во-вторых, интенсивно развивающаяся теория *несамосопряженных операторов* в Г. п. (в частности, циклических, нильпотентных, одноклеточных, сжимающих, спектральных и скалярных операторов) является важной моделью теории линейных операторов в более общих пространствах.

Важный класс линейных операторов в Г. п. образуют всюду определенные непрерывные операторы, наз. также ограниченными операторами в Г. п. Если ввести в множестве $\mathfrak{B}(H)$ всех ограниченных линейных операторов в H операции сложения, умножения на число и умножения операторов, а также норму оператора, по обычным правилам (см. *Линейные операторы*) и определить *инволюцию* в $\mathfrak{B}(H)$ как переход к *сопряженному оператору*, то $\mathfrak{B}(H)$ становится *банаховой алгеброй* с инволюцией. Важнейшими классами ограниченных операторов в Г. п. являются *самосопряженные операторы*, *унитарные операторы* и *нормальные операторы*, так как они обладают специальными свойствами по отношению к скалярному произведению. Эти классы операторов хорошо изучены; основным инструментом в их изучении являются простейшие из ограниченных самосопряженных операторов, а именно: операторы ортогонального проектирования, или ортогональные проекторы, часто называемые просто *проекторами*. Способ, позволяющий строить любые ограниченные самосопряженные, унитарные и нормальные операторы в комплексном Г. п. с помощью проекторов, дается *спектральным разложением* соответствующих операторов, особенно простым в случае сепарабельного Г. п.

Более сложным разделом теории линейных операторов в Г. п. является теория неограниченных операторов. Важнейшими неограниченными операторами в Г. п. являются замкнутые линейные операторы с плотной областью определения; в частности, неограниченные

самосопряженные и нормальные операторы. Между самосопряженными и унитарными операторами в Г. п. существует взаимно однозначное соответствие, определяемое *Кэли преобразованием*. Большое значение имеет (в частности, в теории линейных дифференциальных операторов) класс *симметричных операторов* в Г. п. и теория самосопряженных расширений симметричных операторов.

Неограниченные самосопряженные и нормальные операторы в комплексном Г. п. H также допускают спектральное разложение. Спектральное разложение является большим достижением теории самосопряженных и нормальных операторов в Г. п. Оно соответствует классич. теории приведения эрмитовых и нормальных комплексных матриц в n-мерном унитарном пространстве. Именно спектральное разложение и связанное с ним операторное исчисление для самосопряженных и нормальных операторов обеспечивают теории операторов в Г. п. широкую область применения во многих разделах математики.

Для ограниченных самосопряженных операторов в l_2 спектральное разложение было найдено Д. Гильбертом [1], к-рый также ввел важное понятие *разложения единицы* для самосопряженного оператора. В современный период известно несколько подходов к спектральной теории самосопряженных и нормальных операторов. Один из наиболее глубоких дает теория банаховых алгебр. Спектральное разложение для неограниченного самосопряженного оператора было найдено Дж. Нейманом [3]. Его работе предшествовали важные исследования Т. Карлемана [8], к-рый получил спектральное разложение для случая симметрического интегрального оператора, а также впервые обнаружил, что между симметрическими ограниченными и неограниченными операторами полной аналогии нет. На важность понятия самосопряженного оператора впервые обратил внимание Э. Шмидт (см. [3], с. 62).

Следует отметить, что как для исследований Д. Гильберта, так и для более поздних исследований большое значение имели работы П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, Т. И. Стилтьеса по классической *моментов проблеме*, *Якоби матрицам* и *непрерывным дробям* (см. [9]).

Лит.: [1] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der lincaren Integralgleichungen, Lpz.— B., 1912; N. Y., 1953; [2] Besicovitch A. S., Almost periodic functions, Camb., 1932; [3] von Neumann J., «Math. Ann.», 1929, Bd 102, S. 49—131; [4] Riesz F., «Acta Sci. Math. Szeged», 1930, v. 5, № 1, p. 23—54; [5] Дьедонне Ж., Основы современного анализа, пер. с англ., М., 1964; [6] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [7] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [8] Carleman T., Sur les équations intégrales singulieres a noyau réel et symétrique, Uppsala, 1923; [9] Ахиезер Н. И., Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею, М., 1961; [10] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., М., 1962; [11] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., М., 1954; [12] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [13] Stone M., Linear transformation in Hilbert space and their applications to analisis, N. Y., 1932; [14] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 3 изд., М., 1972.

Б. М. Левитан.

ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ — *гильбертово пространство* E над полем комплексных чисел, снабженное непрерывной билинейной (точнее полуторалинейной) формой G, к-рая, вообще говоря, не является положительно определенной. Форму G часто наз. G-метрикой. Наиболее важным частным случаем Г. п. с и. м. является так наз. J-пространство: Г. п. с и. м., в к-ром форма G определяется нек-рой эрмитовой инволюцией J в E по формуле $G(x, y)=(Jx, y)$. В этом случае форма G обозначается также буквой J и наз. J-метри-

кой. Инволюция J допускает представление в виде $J=P_+-P_-$, где P_+, P_- — ортогональные проекторы в E, и $P_++P_-=I$; число $\varkappa=\min(\dim P_+, \dim P_-)$ наз. рангом индефинитности J-метрики или J-пространства. Если $\varkappa<+\infty$, то Г. п. с и. м. (E, J) наз. *Понтрягина пространством* $\Pi_\varkappa$; см. также *Пространство с индефинитной метрикой*.

Два Г. п. с и. м. (E, G) и (E_1, G_1) наз. метрически эквивалентными, если существует линейный гомеоморфизм U гильбертова пространства E на пространство E_1, переводящий форму G в форму G_1. G-метрика, порождаемая обратимым эрмитовым оператором G по формуле $G(x, y)=(Gx, y)$, наз. регулярной; после введения нового скалярного произведения, метрически эквивалентного старому, регулярная G-метрика становится J-метрикой. Каждое Г. п. с и. м. с эрмитовой формой G может быть G-изометрически (т. е. с сохранением формы G) погружено в нек-рое J-пространство [2], [3].

Главные направления в теории Г. п. с и. м.— те же, что и в общих пространствах с индефинитной метрикой, но со значительным уклоном в спектральную теорию. Геометрия Г. п. с и. м. существенно богаче, чем у общих пространств с индефинитной метрикой. Так, в случае J-пространств имеется эффективное описание максимальных подпространств L среди всех неотрицательных (неположительных, нейтральных): это те L, для к-рых $P_+L=P_+E$ (соответственно $P_-L=P_-E$; выполнено хотя бы одно из этих равенств). Отсюда — аналог закона инерции квадратичных форм: если $E=L_+\dotplus L_-$ — канонич. разложение J-пространства в сумму семидефинитных подпространств, то $\dim L_\pm=\dim P_\pm E$. Подпространство L является максимальным неотрицательным тогда и только тогда, когда L имеет угловой оператор K относительно E_+, т. е. $L=\{x+Kx : x\in E_+\}$, и $\|K\|\leqslant 1$.

В J-пространствах развита теория базисов, к-рая помогает изучать геометрию Г. п. с и. м., а также операторы в них. J-ортонормированный базис J-пространства (E, J) есть базис в гильбертовом пространстве E, удовлетворяющий условиям $(Je_k, e_n)=\pm\delta_{kn}$; $\varkappa$, $n=1, 2, \ldots$ Для того чтобы J-ортонормированная последовательность $\mathcal{E}$ была базисом Рисса пространства E, необходимо и достаточно, чтобы $E=M_+\dotplus M_-$, где $M_\pm$ — замкнутая линейная оболочка векторов $\{e_k : (Je_k, e_k)=\pm 1\}$. Если $\mathcal{E}$ — J-ортонормированный базис в E, то разложение $E=M_+\dotplus M_-$ есть канонич. разложение J-пространства E. Большую группу геометрич. задач в Г. п. с и. м., возникающих в теории операторов в этих пространствах, составляют вопросы, связанные со структурой и свойствами так наз. дуальных пар подпространств Г. п. с и. м. (E, J), т. е. таких пар N, P подпространств в E, что N и P взаимно J-ортогональны, причем N-неположительное, а P — неотрицательное подпространства. Дуальная пара наз. максимальной, если N и P — максимальные семидефинитные подпространства.

Теория операторов в Г. п. с и. м. Метрика G считается эрмитовой и невырожденной, а встречающиеся операторы — плотно заданными. Пусть для оператора T с областью определения D_T определен G-сопряженный оператор T^c равенством

$$G(Tx, y)=G(x, T^cy), \quad x\in D_T, \quad y\in D_{T^c}.$$

При этом $T^c=G^{-1}T^*G$ и

$$D_{T^c}=G^{-1}\{GE\cap T^{*-1}(TE\cap GE)\}.$$

Оператор T наз. G-самосопряженным, если $T=T^c$, и G-симметричным, если $G(Tx, y)=G(x, Ty)$; $x, y\in D_T$. Корневые подпространства

(линеалы) $L_\lambda(T)$ и $L_\mu(T)$, $\lambda \neq \bar{\mu}$, G-симметричного оператора T G-ортогональны; в частности, если $\lambda \neq \bar{\lambda}$, то $L_\lambda(T)$ — нейтральное подпространство (линеал).

Если G — регулярная метрика, то спектр $\sigma(T)$ G-самосопряженного оператора T симметричен относительно действительной оси; если — не регулярная, то это, вообще говоря, не так. J-самосопряженность оператора T равносильна самосопряженности JT. Если ζ, $\bar{\zeta} \in \sigma(T)$, то *Кэли преобразование* $U=(T-\zeta I)\times(T-\bar{\zeta}I)^{-1}$ есть J-унитарный оператор, т. е. такой, что $UJU^*=U^*JU=J$. Спектр U симметричен относительно окружности $S=\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda|=1\}$.

Начиная с работы Л. С. Понтрягина [1], основным вопросом теории является вопрос о существовании семидефинитных инвариантных подпространств. Пусть T — ограниченный оператор в J-пространстве E и $(JTx, Tx) \geqslant 0$ при $(Jx, x) \geqslant 0$, $x \in E$ (так наз. плюс-оператор); если P_+TP_- — вполне непрерывный оператор, то существует максимальное неотрицательное T-инвариантное подпространство L. Этот результат приложим, в частности, к J-унитарным операторам U в пространствах $\Pi_\varkappa$, где он служит основой так наз. метода дефинизации — построения операторного полинома $p(U)$, переводящего E в семидефинитное подпространство. Этот прием позволяет получать, напр., аналоги обычного спектрального разложения для J-унитарных и J-самосопряженных операторов в пространствах $\Pi_\varkappa$.

Теория операторов в Г. п. с и. м. существенно используется в теории канонич. систем обыкновенных дифференциальных уравнений; напр., критерий устойчивости для таких уравнений следующим образом записывается в терминах оператора монодромии U: для этого необходимо и достаточно, чтобы существовала максимальная U-инвариантная дуальная пара подпространств. Другой основной потребитель описанной теории — спектральная теория квадратичных операторных пучков, важная во многих задачах математич. физики.

О теории представлений в Г. п. с п. м. см. [4].

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1944, т. 8, с. 243—80; [2] Гинзбург Ю. П., Иохвидов И. С., «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, в. 4, с. 3—56; [3] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С., там же, 1971, т. 26, в. 4, с. 43—92; [4] Наймарк М. А., Исмагилов Р. С., Итоги науки. Математический анализ. 1968, М., 1969, с. 73—105; [5] Функциональный анализ, 2 изд., М., 1972 (Справочная математическая библиотека).

Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.

ГИПЕРБОЛА — плоская кривая, получающаяся в пересечении кругового конуса с плоскостью, не проходящей через вершину конуса и пересекающей обе его полости. Г. есть множество точек M плоскости (см.

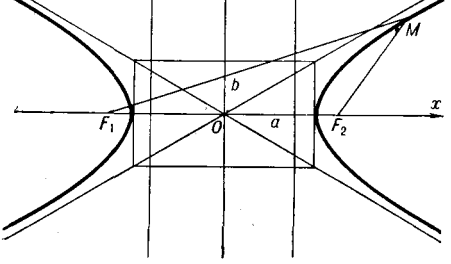


рис.), модуль разности расстояний к-рых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов Г.) постоянен и равен $2a < F_1F_2$. Расстояние между фокусами Г. наз. фокусным расстоянием его принято обозначать через $2c$. Середина отрезка F_1F_2 наз. центром

Г. Прямая, на к-рой лежат фокусы Г., наз. действительной (или фокальной) осью Г. Прямая, проходящая через центр Г. перпендикулярно к действительной оси Г., наз. мнимой осью Г. Мнимая и действительная оси Г. являются ее осями симметрии. Число $e=c/a<1$ наз. эксцентриситетом Г. Диаметром Г. наз. любая прямая, проходящая через центр Г. Середины параллельных хорд Г. лежат на диаметре. Директрисой Г., соответствующей данному фокусу F, наз. прямая d, перпендикулярная к действительной оси Г., отстоящая от центра на расстояние a/e и лежащая от центра по одну сторону с фокусом F. У Г.— две директрисы. Г. имеет две асимптоты:

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

Г. есть центральная *линия второго порядка*. Ее канонич. уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a и $b=\sqrt{c^2-a^2}$ — полуоси Г., а x, y — текущие координаты. Уравнение касательной к Г. в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Фокальный параметр Г. (половина длины хорды, проходящей через фокус перпендикулярно фокальной оси Г.) равен b^2/a. При помощи фокального параметра p можно записать уравнение Г. в виде

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

где ρ, φ — полярные координаты, $\pi-\varphi_0<\varphi<\pi+\varphi_0$, $2\varphi_0$ — угол между асимптотами.

При $a=b$ Г. наз. равнобочной, или равносторонней, Г. Асимптоты равнобочной Г. взаимно перпендикулярны; если их принять за оси координат, то уравнение равнобочной Г. примет вид

$$y=\frac{k}{x},$$

т. е. равнобочная Г. представляет собой график обратно пропорциональной зависимости. *А. Б. Иванов.*

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — *Лобачевского геометрия.*

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МЕТРИКА, гиперболическая мера,— метрика в области комплексной плоскости, обладающей по крайней мере тремя граничными точками, инвариантная относительно автоморфизмов этой области.

Гиперболическая метрика в круге $E: |z|<1$ определяется линейным элементом

$$d\sigma_z=\frac{|dz|}{1-|z|^2},$$

где $|dz|$ — линейный элемент евклидовой длины. Введение Г. м. в круге E приводит к модели *Лобачевского геометрии.* Роль прямых в данной модели играют дуги евклидовых окружностей, ортогональных к $|z|=1$, лежащие в E; роль бесконечно удаленной точки играет окружность $|z|=1$. Движениями в ней служат дробно-линейные преобразования круга E на себя. Гиперболическая длина кривой L, лежащей в круге E, определяется формулой

$$\mu_E(L)=\int_L\frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

Гиперболическое расстояние между точками z_1 и z_2 круга E равно

$$r_E(z_1, z_2)=\frac{1}{2}\ln\frac{|1-z_1\bar{z}_2|+|z_1-z_2|}{|1-z_1\bar{z}_2|-|z_1-z_2|}.$$

Множество точек круга E, гиперболич. расстояние к-рых от данной точки z_0, $z_0 \in E$, не превосходит заданного числа R, $R>0$, т. е. гиперболический круг в E с гиперболич. центром в точке z_0 и гиперболич. радиусом R, является евклидовым кругом с центром, отличным от z_0 при $z_0 \neq 0$.

Гиперболическая площадь области B, лежащей в E, определяется формулой

$$\Delta_E(B) = \int\int_B \frac{dx\,dy}{(1-|z|^2)^2}, \quad z = x+iy.$$

Величины $\mu_E(L)$, $r_E(z_1, z_2)$ и $\Delta_E(B)$ инвариантны относительно дробно-линейных преобразований круга E на себя.

Гиперболическая метрика в любой области D плоскости z, имеющей не менее трех граничных точек, определяется как перенесенная в D при конформном отображении $\zeta = \zeta(z)$ области D на круг E: $|\zeta|<1$ гиперболич. метрика круга E: ее линейный элемент определяется формулой

$$d\sigma_z = \frac{|\zeta'(z)|\,|dz|}{1-|\zeta(z)|^2}.$$

Область, имеющую не более двух граничных точек, уже нельзя конформно отобразить на круг. Величина

$$\rho_D(z) = \frac{|\zeta'(z)|}{1-|\zeta(z)|^2}$$

наз. плотностью Г. м. области D. Гиперболич. метрика области D не зависит ни от выбора отображающей функции, ни от выбора ее ветви и вполне определяется областью D и положением точек в D. Гиперболич. длина кривой L, лежащей в D, находится по формуле

$$\mu_D(L) = \int_L \rho_D(z)\,|dz|.$$

Гиперболическое расстояние между точками z_1 и z_2 области D равно

$$r_D(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\ln\frac{|1-\zeta(z_1)\overline{\zeta(z_2)}| + |\zeta(z_1)-\zeta(z_2)|}{|1-\zeta(z_1)\overline{\zeta(z_2)}| - |\zeta(z_1)-\zeta(z_2)|},$$

где $\zeta(z)$ — любая функция, конформно отображающая D на круг E. Гиперболическим кругом в области D, как и в случае круга $|z|<1$, наз. множество точек области D, гиперболич. расстояние к-рых от данной точки области D (гиперболич. центра) не превосходит заданного положительного числа (гиперболич. радиуса). Если область D многосвязна, гиперболич. круг в D есть, вообще говоря, многосвязная область. Гиперболическая площадь области B, лежащей в D, находится по формуле

$$\Delta_D(B) = \int\int_B \rho_D^2(z)\,dx\,dy.$$

Величины $\mu_D(L)$, $r_D(z_1, z_2)$ и $\Delta_D(B)$ являются инвариантами относительно конформных отображений области D (одно из основных свойств Г. м. в D).

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1—2, М., 1962.

Г. В. Кузьмина.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ — плоская трансцендентная кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид:

$$\rho = \frac{a}{\varphi}.$$

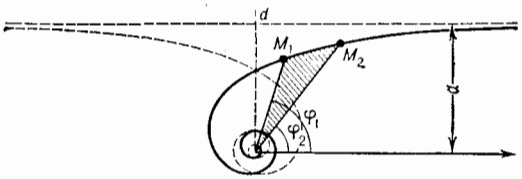
Состоит из двух ветвей, симметричных относительно прямой d (см. рис.). Полюс является асимптотич. точкой. Асимптота — прямая, параллельная полярной оси и отстоящая от нее на расстоянии a. Длина дуги между точками $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $M_2(\rho_2, \varphi_2)$:

$$l = a\left[-\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi} + \ln\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Площадь сектора, ограниченного дугой Г. с. и двумя радиус-векторами ρ_1 и ρ_2, соответствующими углам φ_1 и φ_2:

$$S = \frac{a^2(\rho_1 - \rho_2)}{2}.$$

Г. с. и *архимедова спираль* могут быть получены друг из друга инверсией относительно полюса O. Г. с. — частный случай так наз. алгебраич. спиралей (см. *Спирали*).



Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ТОЧКА — 1) Г. т. поверхности — точка, в к-рой соприкасающийся параболоид является гиперболич. параболоидом. В Г. т. индикатриса кривизны представляет собой пару сопряженных гипербол.

Е. В. Шикин.

2) Г. т. динамической системы — такая точка $x=x^*$, принадлежащая области определения системы вида

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \qquad (*)$$

что $f(x^*)=0$, а матрица A, равная значению $\partial f/\partial x$ в точке $x=x^*$, имеет k собственных значений с положительной действительной частью и $n-k$ собственных значений с отрицательной действительной частью, $0<k<n$. В окрестности Г. т. существует $(n-k)$-мерная инвариантная поверхность S_+, образованная решениями системы $(*)$, к-рые при $t\to\infty$ асимптотически приближаются к точке $x=x^*$, и k-мерная инвариантная поверхность S_-, образованная решениями системы $(*)$, к-рые асимптотически приближаются к точке $x=x^*$ при $t\to-\infty$. Поведение траекторий системы $(*)$ в достаточно малой окрестности Г. т. характеризуется следующей теоремой [4]: существует гомеоморфизм нек-рой окрестности Г. т. в нек-рую окрестность точки $u=0$, $u=(u_1, \ldots, u_n)$, переводящий траектории системы $(*)$ в траектории линейной системы $\dot{u}=Au$.

Г. т. для диффеоморфизма, обладающего неподвижной точкой, определяется требованием отсутствия равных по модулю единице собственных значений у линейной части диффеоморфизма в рассматриваемой неподвижной точке. Таким образом, Г. т. системы $(*)$ остаются Г. т. диффеоморфизма, порождаемого сдвигом вдоль траекторий системы $(*)$.

Лит.: [1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М.—Л., 1947; [2] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., 1950; [3] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [4] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970.

В. К. Мельников.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ — тригонометрия на плоскости Лобачевского (см. *Лобачевского геометрия*). Пусть a_i, $i=1, 2, 3$, — длины сторон треугольника на плоскости Лобачевского, а α_i — углы этого треугольника. Справедливо следующее основное соотношение (теорема косинусов), связывающее a_i и α_i:

$$\operatorname{ch} a_1 = \operatorname{ch} a_2 \operatorname{ch} a_2 - \operatorname{sh} a_2 \operatorname{sh} a_3 \cos\alpha_1.$$

Из него вытекают все остальные соотношения Г. т.; напр., так наз. теорема синусов:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\operatorname{sh} a_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\operatorname{sh} a_2} = \frac{\sin\alpha_3}{\operatorname{sh} a_3}.$$

А. Б. Иванов.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — функции, определяемые формулами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ — гиперболический синус,}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ — гиперболический косинус.}$$

Иногда рассматривается также гиперболический тангенс:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

Другие обозначения: $\sinh x$, $\operatorname{Sh} x$, $\cosh x$, $\operatorname{Ch} x$, $\operatorname{tgh} x$, $\tanh x$, $\operatorname{Th} x$. Графики см. на рис. 1.

Основные соотношения:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y},$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

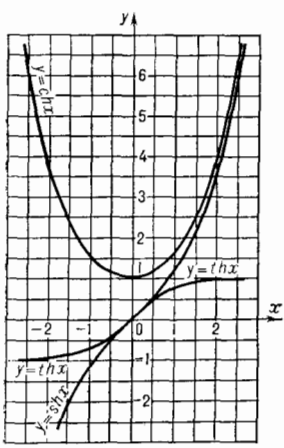


Рис. 1.

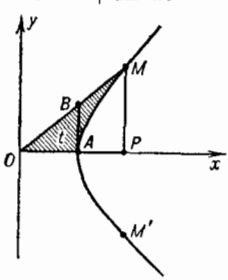


Рис. 2.

Геометрическая интерпретация Г. ф. аналогична интерпретации тригонометрических функций (рис. 2). Параметрич. уравнения гиперболы

$$x = \operatorname{ch} t, \qquad y = \operatorname{sh} t$$

позволяют истолковать абсциссу $x = OP$ и ординату $y = PM$ точки M равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ как гиперболич. косинус и синус; гиперболич. тангенс — отрезок AB. Параметр t равен удвоенной площади сектора OAM, где AM — дуга гиперболы. Для точки M' (при $y < 0$) параметр t отрицателен.

Обратные гиперболические функции определяются формулами:

$$\operatorname{Ar\,sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right),$$

$$\operatorname{Ar\,ch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geqslant 1,$$

$$\operatorname{Ar\,th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \quad |x| < 1.$$

Производные и основные интегралы от Г. ф.:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{th} x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C, \quad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$\int \operatorname{th} x \, dx = \ln \operatorname{ch} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{th} x} + C.$$

Во всей плоскости комплексного переменного z Г. ф. $\mathrm{sh}\, z$ и $\mathrm{ch}\, z$ могут быть определены рядами:

$$\mathrm{sh}\, z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots,$$

$$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

таким образом,

$$\mathrm{ch}\, z = \cos(iz), \quad i\,\mathrm{sh}\, z = \sin(iz).$$

Имеются обширные таблицы для Г. ф. Значения Г. ф. можно получить также из таблиц для e^x и e^{-x}.

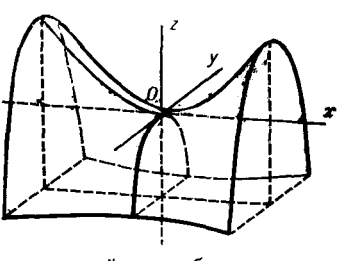
Лит.: [1] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, 2 изд., пер. с нем., М., 1968; [2] Таблицы круговых и гиперболических синусов и косинусов в радианной мере угла, М., 1958; [3] Таблицы e^x и e^{-x}, М., 1955.

В. И. Битюцков.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД — незамкнутая нецентральная *поверхность второго порядка*. В надлежащей системе координат (см. рис.) уравнение Г. п. имеет вид:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \text{где} \quad p,\ q > 0.$$

Сечения Г. п. плоскостями, параллельными плоскостям xOz и yOz, являются параболами, а сечения плоскостями, параллельными плоскости xOy, — гиперболами (плоскостью xOy — двумя прямыми). Ось симметрии Г. п. наз. его о с ь ю; точка пересечения Г. п. с осью наз. в е р ш и н о й Г. п. Если $p=q$, то Г. п. имеет две оси симметрии. Г. п. — *линейчатая поверхность*;



уравнения прямолинейных образующих, проходящих через данную точку (x_0, y_0, z_0) Г. п., имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{\sqrt{p}} = \frac{y-y_0}{\sqrt{q}} = \frac{z-z_0}{\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}},$$

$$\frac{x-x_0}{\sqrt{p}} = \frac{y-y_0}{-\sqrt{q}} = \frac{z-z_0}{\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}}.$$

А. Б. Иванов.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР — цилиндрическая *поверхность второго порядка*, для к-рой направляющей служит *гипербола*. Канонич. уравнение Г. ц. имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

А. Б. Иванов.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА УРАВНЕНИЕ в д а н н о й т о ч к е $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — дифференциальное уравнение с частными производными, для к-рого однозначно разрешима задача Коши при начальных данных, заданных в окрестности точки M на любой нехарактеристич. поверхности. В частности, дифференциальное уравнение с частными производными, для к-рого конус нормалей не имеет мнимых полостей, будет Г. т. у. Дифференциальное уравнение

$$L(u) = H(D_1, D_2, \ldots, D_n)\, u + F(D_1, D_2, \ldots, D_n)\, u + G(x) = 0, \qquad (*)$$

где $D_i = \partial/\partial x_i$, $i=1, \ldots, n$, $H(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ — однородный многочлен степени m, а многочлен F имеет

степень, меньшую чем m, наз. Г. т. у., если его характеристич. уравнение

$$Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = H(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0$$

имеет n различных и действительных решений относительно одной из величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ при заданных остальных. Любое уравнение (*) 1-го порядка ($m=1$) с действительными коэффициентами есть Г. т. у. Для уравнений 2-го порядка

$$L(u) = u_{tt} - \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} D_i D_j u + Fu + G = 0$$

гиперболичность гарантируется положительной определенностью квадратичной формы

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j.$$

Б. Л. Рождественский.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА УРАВНЕНИЯ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ — методы решения уравнений гиперболич. типа на основе вычислительных алгоритмов.

Различные математич. модели во многих случаях приводят к дифференциальным уравнениям гиперболич. типа. Такие уравнения имеют точные аналитич. решения только в редких случаях. Наиболее распространенными являются численные методы. Они находят широкое применение при решениях задач механики сплошной среды и, в частности, уравнений газовой динамики (см. *Газовой динамики численные методы*), к-рые по своей структуре являются квазилинейными.

Численные методы решения уравнений гиперболического типа можно разделить на две группы: 1) методы с явным выделением особенностей решения; 2) методы сквозного счета, в к-рых особенности решения явно не выделяются, а получаются в процессе счета как области с резким изменением решений.

К первой группе относится, напр., метод характеристик, к-рый используется только для решения уравнений гиперболич. типа (он нашел широкое применение при решении задач газовой динамики).

Методы второй группы дают собственно разностные схемы. Пусть, напр., имеется гиперболич. уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad (1)$$

где A есть $(m \times m)$-матрица, имеющая m различных действительных собственных значений, $w = w(x, t)$ — вектор-функция с m компонентами. Матрица A может быть либо функцией от x, t, и тогда (1) есть линейная гиперболич. система, либо зависеть также от $w = w(x, t)$ (квазилинейная система). Пусть, в последнем случае, система уравнений (1) приводима к дивергентному виду

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} + \psi,$$

где F есть вектор-функция от w, x, t такая, что $A = dF/dw$, ψ — вектор-функция от w, x, t. В наиболее важном случае A, F и ψ зависят только от w. Для системы уравнений (1) может быть поставлена задача Коши:

$$w(x, 0) = w_0(x)$$

с соответствующими краевыми условиями.

Как правило, основой построения разностных схем является аппроксимация соответствующего дифференциальному уравнению интегрального закона сохранения с помощью некоторых квадратурных формул на контуре интегрирования разностной ячейки. В случае гладких решений аппроксимация интегрального закона сохранения равносильна прямой аппроксимации соответствующего дифференциального уравнения. Разностные схемы должны удовлетворять требованиям аппроксимации и устойчивости. Эти требования независимы и в определенном смысле вступают в противо-

речие одно с другим. Для случая дивергентных систем дифференциальных уравнений существенным является условие дивергентности (или консервативности) разностной схемы. Кроме того, разностные схемы должны удовлетворять еще ряду необходимых требований — диссипативности, экономичности и т. д. Двухслойная явная разностная схема для линейного уравнения типа (1) имеет вид:

$$w_j^{n+1} = \Lambda w_j^n,$$

где Λ — финитный оператор, т. е. представляется в виде:

$$\Lambda = \sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} B_\alpha T_1^\alpha,$$

B_α есть $(m \times m)$-матрицы с коэффициентами, зависящими от τ, h, x, t; $t = n\tau$, $x = jh$; τ, h — шаги разностной сетки по осям t и x соответственно; числа q_1 и q_2 не зависят от τ, h; $\varkappa = \tau/h$, T_1 — оператор сдвига по x.

Условия аппроксимации приводят к соотношениям:

$$\sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} B_\alpha = I,$$

$$\sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} \alpha B_\alpha = \varkappa A,$$

I — единичная матрица.

Неявная разностная схема может быть записана в виде:

$$\Lambda_1 w_j^{n+1} = \Lambda_0 w_j^n,$$

где Λ_1 и Λ_0 — финитные операторы:

$$\Lambda_k = \sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} B_\alpha^k T_1^\alpha, \quad k = 0, 1,$$

B_α^k есть $(m \times m)$-матрицы, зависящие от τ, h, x, t, причем оператор Λ_1 содержит по крайней мере две ненулевые матрицы B_α^1. Оператор Λ_1 предполагается обратимым, но его обратный не является финитным.

По свойствам аппроксимации разностные схемы можно подразделить на два класса: условно аппроксимирующие и абсолютно аппроксимирующие. Условно аппроксимирующие разностные схемы аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение при τ, h, стремящихся к нулю при нек-рой зависимости между τ и h: $\tau = \varphi(h)$. Абсолютно аппроксимирующие разностные схемы аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение при стремлении τ, h к нулю по любому закону.

В случае условной аппроксимации разностное уравнение может аппроксимировать различные дифференциальные уравнения при различных законах предельного перехода. Так, напр., для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const} > 0, \tag{2}$$

рассмотрим две разностные схемы:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \\ &\bar{u}_j^n = \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0. \tag{4}$$

При законе предельного перехода

$$\frac{\tau}{h} = \text{const}$$

разностная схема (3) аппроксимирует уравнение (2), а при законе предельного перехода

$$\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$$

— уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \mu = \frac{h^2}{2\tau}.$$

Разностная схема (4) аппроксимирует уравнение (2) абсолютно.

Аналогично, разностные схемы подразделяются на условно устойчивые и абсолютно устойчивые. Так, разностная схема (4) устойчива, если выполнено следующее условие (условие Куранта):

$$\frac{\tau a}{h} \leqslant 1,$$

т. е. условно устойчива. С другой стороны, неявная разностная схема

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0$$

устойчива при любых соотношениях между τ и h, т. е. абсолютно устойчива.

Явные разностные схемы просты в реализации, но являются или условно устойчивыми или условно аппроксимирующими. В случае абсолютно аппроксимирующей разностной схемы условие устойчивости явной схемы имеет, как правило, вид

$$\tau \leqslant \text{const} \cdot h^{\beta} (\beta \geqslant 1),$$

что приводит к излишне мелкому шагу τ и неоправданному увеличению объема вычислений. Абсолютно устойчивые и абсолютно аппроксимирующие схемы находятся только в классе неявных схем.

Неявные разностные схемы более сложны в реализации при переходе с одного временного слоя на другой, но зато шаг τ может быть выбран сколь угодно большим и тем самым может определяться исключительно требованием точности.

Теоремы сходимости для разностных схем, аппроксимирующих линейные дифференциальные уравнения, позволяют сводить исследование сходимости разностной схемы к исследованию ее устойчивости.

Исследование аппроксимации разностной схемы соответствующего гиперболич. уравнения сравнительно просто в случае гладких решений, носит локальный характер и по существу сводится к разложению в ряд Тейлора; в случае же разрывных решений это — сложная задача, сводящаяся к проверке интегральных законов сохранения. Исследование устойчивости является значительно более сложной задачей.

Для разностных схем, аппроксимирующих гиперболич. уравнения с постоянными коэффициентами, устойчивость исследуется методом Фурье, а именно, оценивается норма образа Фурье оператора шага разностной схемы. Так как спектральный радиус матрицы образа Фурье оператора шага не превосходит нормы матрицы, то отсюда следует необходимый критерий устойчивости: для устойчивости разностной схемы необходимо, чтобы спектральный радиус образа Фурье оператора шага не превосходил величины $1+O(\tau)$, где τ — шаг разностной схемы по оси t. Это условие является необходимым и для разностных схем с переменными коэффициентами и при ряде дополнительных ограничений является достаточным условием устойчивости разностной схемы. Для исследования устойчивости разностных схем с переменными коэффициентами, а также для нек-рых нелинейных уравнений применяются: метод мажорантных или априорных оценок; локальный алгебраич. метод.

Метод априорных оценок аналогичен соответствующему методу для дифференциальных уравнений, но в разностном случае его реализация встречает большие трудности, что связано со спецификой разностного анализа, в к-ром, в отличие от априорных оценок в теории дифференциальных уравнений, многие соотношения принимают громоздкий вид.

Простейшей мажорантной оценкой является оценка для разностных схем с положительными коэффициентами.

Напр., пусть для уравнения (2) с $a=a(x)$ рассматривается разностная схема:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a_j\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=0, \quad a_i=a(jh). \tag{5}$$

Тогда при условии

$$0\leqslant 1-\varkappa_j\leqslant 1, \quad \varkappa_j=\frac{\tau a_j}{h},$$

справедлива оценка

$$\| u^{n+1}\| \leqslant \| u^n\|,$$

где

$$\| u^n\| = \max_j |u_j^n|.$$

Отсюда следует равномерная устойчивость схемы (5) в пространстве C. Оценка переносится на разностные схемы, аппроксимирующие гиперболич. системы уравнений в инвариантах.

Весьма важный, хотя и ограниченный класс разностных схем составляют разностные схемы с положительными коэффициентами и матрицами (так наз. м а ж о р а н т н ы е с х е м ы). Если коэффициенты таких разностных схем есть симметричные, положительные матрицы, липшиц-непрерывные по x, то такие схемы устойчивы в пространстве L_2. Как правило, это разностные схемы первого порядка аппроксимации, в к-рых производные аппроксимируются односторонними разностями. При аппроксимациях более высокого порядка, когда берутся центральные разности, как правило, положительные коэффициенты не получаются. В этом случае используют априорные оценки более общего типа в пространствах W_2^p.

Пусть, напр., (1) — система уравнений акустики, где

$$w=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

причем функции $a(x, t)$, $u(x, t)$, $v(x, t)$ периодичны по x с периодом 2π. Априорная оценка для разностной схемы

$$\left.\begin{aligned} \frac{u^{n+1}(x)-u^n(x)}{\tau} &= a\frac{v^{n+1}(x+h)-v^{n+1}(x)}{h}, \\ \frac{v^{n+1}(x)-v^n(x)}{\tau} &= \frac{u^{n+1}(x)-u^{n+1}(x-h)}{h} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

имеет вид

$$\| E^{n+1}\|^2 \leqslant \frac{1+b_1\tau}{1+b_2\tau}\| E^n\|^2,$$

где

$$\| E\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}(u^2+av^2)\,dx,$$

$$b_1 = \sup_{x,\,n,\,\tau}\left|\frac{a^{n+1}(x)-a^n(x)}{\tau a^n(x)}\right|,$$

$$b_2 = \sup_{x,\,n,\,h}\left(\frac{1}{\sqrt{a^{n+1}(x+h)}}\left|\frac{a^{n+1}(x+h)-a^{n+1}(x)}{h}\right|\right).$$

Приведенная оценка доказывает устойчивость разностной схемы (6) и аналогична энергетич. неравенству для системы уравнений акустики.

В основе локально алгебраич. метода лежит изучение свойств локального разностного оператора, получаемого из соответствующего разностного оператора с переменными коэффициентами «замораживанием» коэффициентов. Тем самым анализ устойчивости разностного оператора с переменными коэффициентами заменяется анализом целого семейства операторов с постоянными коэффициентами. Локальный критерий устойчивости является обобщением метода «замораживания» коэффициентов, используемого в теории дифференциальных уравнений.

К локальному критерию устойчивости примыкает диссипативный критерий устойчивости. Разностная схема наз. диссипативной порядка ν (ν — четное число), если существует такое $\delta>0$, что

$$|\rho| \leqslant 1-\delta\,|\xi|^{\nu},$$
$$|\xi| = |kh| \leqslant \pi,$$

где ρ — максимальное по модулю собственное число матрицы перехода (образ Фурье оператора шага) разностной схемы, k — дуальное переменное. Тогда, если разностная схема имеет порядок аппроксимации $2r+1$ ($2r+2$), $r=0, 1, 2, \ldots$, и является диссипативной порядка $2r+2$ ($2r+4$), то для гиперболических систем дифференциальных уравнений 1-го порядка с эрмитовыми матрицами разностная схема будет устойчива в L_2.

При исследовании устойчивости разностных схем для нелинейных гиперболич. уравнений (в частности, уравнений газовой динамики) применяется метод дифференциального приближения, к-рый заменяет анализ разностной схемы анализом ее дифференциального приближения.

Например, дифференциальное приближение разностной схемы (4) для уравнения (2) строится следующим образом: разложение в (4) функции

$$u_j^{n+1} = u(jh,\ (n+1)\tau),$$
$$u_{j-1}^{n} = u((j-1)h,\ n\tau)$$

в ряды Тейлора относительно точки $x=jh$, $t=n\tau$ по параметрам τ и h приводит к Г-форме дифференциального представления разностной схемы:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\tau^{l-1}}{l!} \frac{\partial^l u}{\partial t^l} + \\ + a\frac{\partial u}{\partial x} + a\sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1} h^l}{l!} \frac{\partial^l u}{\partial x^l} = 0. \qquad (7)$$

Исключение в (7) производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^3},\ \ldots$$

приводит к П-форме дифференциального представления разностной схемы (4):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{l=2}^{\infty} C_l \frac{\partial^l u}{\partial x^l}, \qquad (8)$$

где C_l — некоторые коэффициенты, зависящие от τ, h, a; причем $C_l = O(\tau^{l-1}, h^{l-1})$. Исключение в (7) и (8) членов порядка $O(\tau^2, h^2)$ приводит соответственно к Г-форме первого дифференциального приближения разностной схемы (4):

$$\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{ah}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

и к П-форме первого дифференциального приближения разностной схемы (4):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = C_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ C_2 = \frac{ah}{2}\left(1 - \frac{a\tau}{h}\right). \qquad (9)$$

В линейном случае для ряда разностных схем показано, что из корректности первого дифференциального приближения следует устойчивость соответствующей разностной схемы. Так, в рассмотренном выше случае разностной схемы (4) корректность уравнения (9) означает, что $C_2 \geqslant 0$, т. е. выполнено необходимое и достаточное условие $a\tau/h \leqslant 1$ устойчивости схемы (4). Члены с четными производными в уравнении (8) ответственны за диссипативные свойства разностной схемы, а с нечетными производными — за дисперсионные свойства разностной схемы.

Под диссипацией разностной схемы (4) понимается величина

$$d=1-|\rho|^2=1-e^{\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{\tau}{h^{2l}}C_{2l}\xi^{2l}}$$

где

$$\rho=1-\frac{a\tau}{h}(1-e^{-i\xi})$$

— множитель усиления схемы; под дисперсией разностной схемы (4) — величина

$$\chi=\varkappa a\xi-\arg\rho=\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{\tau}{h^{2l+1}}C_{2l+1}\xi^{2l+1}.$$

Диссипативные члены в (8) определяют свойства аппроксимационной вязкости схемы (т. е. некоторого механизма сглаживания в разностной схеме). На вид диссипативных членов влияют как искусственные диссипативные члены, вводимые в исходное дифференциальное уравнение, так и структура самой разностной схемы. Первое дифференциальное приближение дает главный член аппроксимационной вязкости. Метод дифференциального приближения широко используется при исследовании разностных схем для нелинейных уравнений и позволяет объяснить эффекты неустойчивости разностных схем, наблюдаемые в конкретных расчетах и не улавливаемые локально методом Фурье.

Основой построения разностных схем в многомерных случаях являются методы расщепления (слабой аппроксимации) и дробных шагов, позволяющие сводить интегрирование исходного многомерного уравнения к интегрированию уравнений более простой структуры (см. *Дробных шагов метод*).

Получают развитие методы решения гиперболич. уравнений, основанные на методе конечных элементов, к-рый можно рассматривать как разностный метод на специальной нерегулярной сетке.

Лит.: [1] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, М., 1973; [2] Рихтмайер Р., Мортон К., Разностные методы решения краевых задач, пер. с англ., М., 1972; [3] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений..., М., 1968; [4] Самарский А. А., Гулин А. В., Устойчивость разностных схем, М., 1973; [5] Яненко Н. Н., Шокин Ю. И., «Сиб. матем. ж.», 1969, т. 10, № 5, с. 1173—87; [6] Сердюкова С. И., «Докл. АН СССР», 1973, т. 208, № 1, с. 52—55.

Ю. И. Шокин, Н. Н. Яненко.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО гладкой динамической системы $\{S^t\}$ — компактное подмножество F фазового многообразия M, целиком состоящее из траекторий, в окрестности каждой из к-рых поведение (по отношению к ней) всех соседних траекторий (включая и те, к-рые не лежат в F) напоминает поведение траекторий возле *седла*. Точнее, Г. м. гладкой динамич. системы $\{S^t\}$ — это такое компактное инвариантное подмножество F фазового многообразия M, что в каждой точке $x\in F$ в касательном пространстве T_xM к M имеются подпространства E^s_x и E^u_x, для к-рых выполняются следующие два условия. 1) Действие дифференциалов $\tilde{S}^t_x: T_xM\to T_{S^tx}M$ отображений $S^t: M\to M$ в точке x на векторы $\xi\in E^s_x$, $\eta\in E^u_x$ удовлетворяет неравенствам (см. *Дифференцирование отображений*):

$$|\tilde{S}^t_x\xi|\leqslant a|\xi|e^{-ct}\text{ при }t\geqslant 0,$$
$$|\tilde{S}^t_x\xi|\geqslant b|\xi|e^{-ct}\text{ при }t\leqslant 0,$$
$$|\tilde{S}^t_x\eta|\leqslant a|\eta|e^{ct}\text{ при }t\leqslant 0,$$
$$|\tilde{S}^t_x\eta|\geqslant b|\eta|e^{ct}\text{ при }t\geqslant 0$$

с нек-рыми константами a, b, $c>0$, не зависящими от x. 2) Если $\{S^t\}$ — каскад (т. е. время t принимает целочисленные значения), то

$$T_xM=E^s_x\oplus E^u_x,$$

а если $\{S^t\}$ — поток, то

$$T_xM = E^s_x \oplus E^u_x \oplus E^n_x,$$

где E^n_x — одномерное подпространство, натянутое на вектор фазовой скорости (тем самым предполагается, что последний нигде на F не обращается в нуль). Кроме того, для удобства нек-рых формулировок бывает целесообразно причислить к Г. м. такие положения равновесия потоков, для к-рых собственные значения матрицы линеаризованной системы расположены вне мнимой оси.

Подпространство E^s_x наз. *устойчивым*, E^u_x — *неустойчивым*, E^n_x — *нейтральным*. Точки $y \in M$, для к-рых $S^t y$ неограниченно сближается с $S^t x$ при $t \to \infty$, образуют нек-рое гладкое многообразие W^s_x, касающееся E^s_x в точке x; оно наз. *устойчивым многообразием точки* x. Объединение W^s_x для всех x, лежащих на одной траектории, наз. *устойчивым многообразием* этой *траектории*. Аналогично вводятся неустойчивые многообразия точки и траектории.

Классич. пример Г. м. потока — периодич. траектория, для к-рой лишь один мультипликатор уравнения в вариациях равен по модулю единице. У нек-рых систем все фазовое пространство является Г. м. (см. *У-система*). Много примеров Г. м. было обнаружено при изучении динамич. систем классич. происхождения (напр., в небесной механике, см. [1]). В общем виде Г. м. были введены С. Смейлом (S. Smale) в 1965 (см. [2]), и с тех пор они играют важную роль в теории гладких динамич. систем, будучи как объектом исследования, так и составной частью многих примеров (см. также [3]).

Лит.: [1] Кушниренко А. Г., Каток А. Б., Алексеев В. М., Гладкие динамические системы, в кн.: Девятая летняя матем. школа, К., 1972, с. 50—341; [2] Смейл С., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 1, с. 113—85; [3] Ньютецки З., Введение в дифференциальную динамику, пер. с англ., М., 1975.

Д. В. Аносов.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МЕТРИКИ ПРИНЦИП: пусть области D и G лежат соответственно в плоскостях z и w и имеют каждая не менее чем по три граничные точки, пусть $w = f(z)$ — функция, регулярная в D и принимающая значения в G, и пусть $d\sigma_z$ и $d\sigma_w$ — линейные элементы в гиперболич. метрике областей D и G в точках соответственно z и $w = f(z)$; тогда справедливо неравенство

$$d\sigma_w \leqslant d\sigma_z.$$

Равенство в какой-либо точке $z_0 \in D$ имеет место только в том случае, если $f(z) \equiv w[\zeta(z)]$ в D, где функция $\zeta = \zeta(z)$ конформно отображает область D на круг $E: |\zeta| < 1$, а функция $w = w(\zeta)$ конформно отображает круг E на область G. Г. м. п. обобщает *Шварца лемму* на многосвязные области, в к-рых может быть определена гиперболич. метрика.

В формулировке Г. м. п. предположение регулярности функции $f(z)$ в D может быть заменено более общим предположением: $f(z)$ — аналитич. функция, определенная в D каким-либо своим элементом и продолжимая в D по любому пути.

Этот же принцип можно сформулировать также относительно поведения гиперболич. длины кривых, гиперболич. расстояния или гиперболич. площади при указанном отображении. Именно, если L — спрямляемая кривая в D, то (в обозначениях статьи *Гиперболическая метрика*)

$$\mu_G(f(L)) \leqslant \mu_D(L).$$

Если z_1 и z_2 — две точки области D, то

$$r_G(f(z_1),\ f(z_2)) \leqslant r_D(z_1,\ z_2).$$

Если B — область в D, то

$$\Delta_G(f(B)) \leqslant \Delta_D(B).$$

В каждом из этих неравенств равенство достигается только в указанном выше случае.

Приведенный выше результат относительно гиперболич. расстояния показывает, что при отображении $w=f(z)$ образ гиперболич. круга с центром в точке $z_0 \in D$ содержится в гиперболич. круге с центром в точке $w_0=f(z_0)$ того же гиперболич. радиуса.

Этот результат распространяет на случай многосвязных областей следующий факт теории конформного отображения (инвариантная форма леммы Шварца): при отображении круга $E: |z|<1$ регулярной в нем функцией

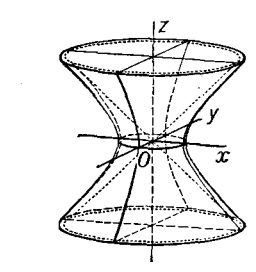
$$w=f(z),\ |f(z)|<1$$

в E, гиперболич. расстояние между образами точек z_1 и z_2 круга E не превосходит гиперболич. расстояния между самими точками z_1 и z_2 и равно этому расстоянию только в случае дробно-линейного преобразования круга E на себя.

Г. м. п. следующим образом связан с *Линделёфа принципом*. Если области D и G обладают функциями Грина и односвязны, то оба принципа совпадают. Если же D односвязна, а G многосвязна, то Г. м. п. дает более точную оценку области, в к-рой содержится образ гиперболич. круга в D, определяемого неравенством $g_D(z,\ z_0)>\lambda$ при отображении $w=f(z)$ (где через $g_D(z,\ z_0)$ обозначена функция Грина области D с логарифмич. полюсом в точке $z_0 \in D$). Кроме того, Г. м. п. применим и тогда, когда нельзя говорить о принципе Линделёфа, напр., в случае области, обладающей по крайней мере тремя граничными точками, но не имеющей функции Грина.

Г. В. Кузьмина.

ГИПЕРБОЛОИД — незамкнутая центральная *поверхность второго порядка*. Существуют два вида Г.: однополостный Г. и двуполостный Г.



В надлежащей системе координат (см. рис.) уравнение однополостного Г. имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

а двуполостного — вид:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Числа a, b и c (и отрезки такой длины) наз. полуосями Г. В сечении Г. плоскостями, проходящими через ось Oz, получаются гиперболы. Сечения Г. плоскостями, перпендикулярными оси Oz, являются эллипсами. Сечение однополостного Г. плоскостью $z=0$ наз. горловым эллипсом. Г. имеет три плоскости симметрии. Конус, определяемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

наз. асимптотическим конусом. Если $a=b=c$, то Г. наз. правильным. Г., у к-рого две полуоси равны, наз. Г. вращения. Однополостный Г. есть линейчатая поверхность; уравнения прямолинейных образующих, проходящих через данную точку

(x_0, y_0, z_0) однополостного Г., имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{\frac{ay_0}{b}}=\frac{y-y_0}{-\frac{bx_0}{a}}=\frac{z-z_0}{c},$$

$$\frac{x-x_0}{-\frac{ay_0}{b}}=\frac{y-y_0}{\frac{bx_0}{a}}=\frac{z-z_0}{c}.$$

А. Б. Иванов.

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — решение *гипергеометрического уравнения*

$$z(1-z)w''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]w'-\alpha\beta w=0. \qquad (1)$$

Г. ф. может быть определена с помощью так наз. ряда Гаусса:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z)={}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)=F(\beta, \alpha; \gamma; z)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!}=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{z^n}{n!}, \qquad (2)$$

где α, β, γ — параметры, принимающие любые действительные или комплексные значения, кроме $\gamma=0, -1, -2, \ldots$, z — комплексное переменное, $(x)_n\equiv x(x+1)\ldots(x+n-1)$. Функция $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ наз. гипергеометрической функцией 1-го рода. Второе линейно независимое решение гипергеометрич. уравнения (1)

$$\Phi(\alpha, \beta; \gamma; z)=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(1-\gamma)}z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\gamma; z)$$

наз. гипергеометрической функцией 2-го рода.

Ряд (2) сходится абсолютно и равномерно при $|z|<1$; сходимость распространяется и на единичную окружность, если $\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma)<0$; при $0\leqslant\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma)<1$ сходится во всех точках единичной окружности, кроме $z=1$. Однако существует аналитич. продолжение Г. ф. (2) во внешность единичной окружности $|z|>1$ с разрезом $(1, \infty)$ (см. [1]). Функция $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — однозначная аналитическая в комплексной плоскости z с разрезом $(1, \infty)$. Если α или β — нуль или целое отрицательное число, то ряд (2) обрывается на конечном числе членов и Г. ф. представляет собой полином относительно z.

При $\gamma=-n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, Г. ф. не определена, однако

$$\lim_{\gamma\to-n}\frac{F(\alpha, \beta; \gamma; z)}{F(\gamma)}=$$

$$=\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!}z^{n+1}F(\alpha+n+1, \beta+n+1; n+2; z).$$

Элементарные соотношения. Шесть функций

$$F(\alpha\pm1; \beta; \gamma; z),\quad F(\alpha, \beta\pm1; \gamma; z)\quad F(\alpha, \beta; \gamma\pm1; z)$$

наз. смежными с Г. ф. $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$. Между функцией $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ и любыми двумя смежными с ней существует линейная зависимость. Напр.,

$$\gamma F(\alpha, \beta-1; \gamma; z)+(\alpha-\beta)zF(\alpha, \beta; \gamma+1; z)=$$
$$=\gamma F(\alpha-1, \beta; \gamma; z).$$

15 формул такого типа впервые были найдены К. Гауссом (C. Gauss, см. [2], [3]). Ассоциированные функции $F(\alpha+m, \beta+n; \gamma+l; z)$, где m, n, l — целые числа, могут быть получены повторными применениями соотношений Гаусса. Имеют место формулы дифференцирования

$$\frac{d^n}{dz^n}F(\alpha, \beta; \gamma; z)=\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}F(\alpha+n, \beta+n; \gamma+n; z).$$

Уравнение (1) имеет 24 решения вида

$$z^{\rho}(1-z)^{\sigma}F(\alpha', \beta'; \gamma'; z'),$$

где ρ, σ, α', β' и γ' — линейные функции α, β и γ, z и z' связаны дробно-линейным преобразованием. Любые три решения линейно зависимы (см. [2]). Существуют квадратичные, кубичные и более высокого порядка преобразования (см. [2] — [5]).

Основные интегральные представления. Если $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\beta > 0$ и $|\arg(1-z)| < \pi$, то имеет место формула Эйлера:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}\,dt. \qquad (3)$$

Разлагая $(1-tz)^{-\alpha}$ в биномиальный ряд и применяя контурные интегралы для бета-функции, можно получить другие интегральные представления (см. [2]). Интеграл (3) и другие аналогичные формулы, определяющие аналитич. функцию от z, однозначную во всей плоскости z, также могут служить для аналитич. продолжения функции $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ в область $|\arg(-z)| < \pi$. Существуют и другие аналитич. продолжения (см. [1], [2]).

Асимптотическое поведение Г. ф. при больших значениях $|z|$ полностью описывается с помощью формул, дающих аналитич. продолжение в окрестность точки $z=\infty$ (см. [1] — [3]). Если α, β, z — фиксированные числа и $|\gamma|$ достаточно велико, $|\arg\gamma| < \pi-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, то при $|z|<1$:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{z^k}{k!} + O(|\gamma|^{-n+1}).$$

При $|z|>1$ имеется аналогичное выражение.

Для фиксированных α, γ и z, $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$, $0<|z|<1$, и $\beta\to\infty$, $-\frac{3\pi}{2} < \arg\beta z < \frac{\pi}{2}$,

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{\beta z}{\beta}\right) =$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta z)_n}{(\gamma)_n n!}\right][1 + O(|\beta|^{-1})].$$

См. также [2], [5], [6].

Представления функций через Г. ф. Элементарные функции:

$$(1+z)^n = F(-n, 1; 1, -z),$$

$$\ln\frac{1+z}{1-z} = 2zF\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right),$$

$$\ln(1+z) = zF(1, 1; 2; -z),$$

$$e^z = \lim_{b\to\infty} F\left(1, b; 1; \frac{z}{b}\right),$$

$$\arcsin z = zF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right),$$

$$\operatorname{arctg} z = zF\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right),$$

$$\sin nz = n\sin zF\left(\frac{1+n}{2}, \frac{1-n}{2}; \frac{3}{2}; \sin^2 z\right);$$

$$\cos nz = F\left(\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n; \frac{1}{2}; \sin^2 z\right);$$

полные эллиптич. интегралы 1-го и 2-го рода:

$$K(z) = \frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; z^2\right),$$

$$E(z) = \frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z^2\right);$$

присоединенные функции Лежандра:

$$P_n^m(z) = \frac{(z+1)^{m/2}}{(z-1)^{m/2}}\frac{1}{\Gamma(1-m)}F\left(-n, n+1; 1-m; \frac{1-z}{2}\right);$$

многочлены Чебышева:

$$T_n(z) = F\left(-n,\ n;\ \frac{1}{2};\ \frac{1-z}{2}\right);$$

многочлены Лежандра:

$$P_n(z) = F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1-z}{2}\right);$$

ультрасферические многочлены:

$$\frac{n!}{(2a)_n} C_n^{(a)}(z) = F\left(-n,\ n+2a;\ a+\frac{1}{2};\ \frac{1-z}{2}\right);$$

многочлены Якоби:

$$\frac{n!}{(a+1)_n} P_n^{(a,\,b)}(z) = F\left(-n,\ a+1+b+n;\ a+1;\ \frac{1-z}{2}\right).$$

Обобщения Г. ф. Обобщенной Г. ф.

$$pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \cdots (\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n (\gamma_2)_n \cdots (\gamma_q)_n} z^n$$

наз. решение гипергеометрич. уравнения $(q+1)$-го порядка (см. [2]). Имеются и другие обобщения Г. ф., напр., на случай многих переменных (см. [2]).

Лит.: [1] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М.—Л., 1963; [2] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, [т. 1], пер. с англ., 2 изд., М., 1973; [3] Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 5 изд., М., 1971; [4] Kummer E. E., «J. reine und angew. Math.», 1835, Bd 15, S. 39—83, 127—72; [5] Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, N. Y., 1964; [6] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, ч. 2, Трансцендентные функции, пер. с англ., 2 изд., М., 1963; [7] Лебедев А. В., Федорова Р. М., Справочник по математическим таблицам, М., 1956; [8] Бурунова Н. М., Справочник по математическим таблицам, М., 1959, доп. 1; [9] An index of mathematical tables, 2 ed., v. 1, 2, Oxford, 1962.

Э. А. Чистова.

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД, ряд Гаусса,— ряд вида

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} z^n. \quad (*)$$

Г. р. имеет смысл, если γ не равно нулю или целому отрицательному числу; он сходится при $|z|<1$. Если, кроме того, $\mathrm{Re}\,(\gamma-\alpha-\beta)>0$, то Г. р. сходится и при $z=1$. В этом случае справедлива формула Гаусса

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Аналитич. функция, определяемая с помощью Г. р., наз. *гипергеометрической функцией.*

Обобщенным гипергеометрическим рядом наз. ряд вида

$$pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \cdots (\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n (\gamma_2)_n \cdots (\gamma_q)_n} z^n,$$

где $(x)_n \equiv x(x+1)\ldots(x+n-1)$. В этих обозначениях ряд $(*)$ записывается как ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$. *Э. А. Чистова.*

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей, заданное формулой

$$p_m = \frac{C_M^m\, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \qquad m = 0, 1 \ldots, \qquad (*)$$

где M, N и n — целые неотрицательные числа и $M \leqslant N$, $n \leqslant N$ (здесь C_a^b — биномиальный коэффициент). Г. р. обычно связано с выбором без возвращения, а именно: формула $(*)$ указывает вероятность получения ровно m «отмеченных» элементов в случайной выборке объема n из генеральной совокупности, содержащей N

элементов, среди к-рых M «отмеченных» и $N-M$ «неотмеченных» элементов. При этом вероятность (*) определена лишь для

$$\max(0,\ M+n-N) \leqslant m \leqslant \min(n,\ M).$$

Однако определение (*) можно использовать при всех $m \geqslant 0$, т. к. можно считать, что $C_a^b=0$ при $b>a$, поэтому равенство $P_m=0$ нужно понимать как невозможность получить в выборке m «отмеченных» элементов. Сумма значений p_m, распространенная на все выборочное пространство, равна 1. Если обозначить $M/N=p$, то (*) можно переписать в иной форме:

$$p_m = C_n^m \frac{A_{Np}^m A_{Nq}^{n-m}}{A_N^n},$$

где

$$A_a^b = C_a^b b! \quad \text{и} \quad p+q=1.$$

Если p постоянна и $N \to \infty$, то имеет место биномиальное приближение

$$p_m \sim C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Среднее значение Г. р. не зависит от N и совпадает со средним *пр.* соответствующего *биномиального распределения* Дисперсия Г. р.

$$\sigma^2 = npq\,\frac{N-n}{N-1}$$

не превосходит дисперсии биномиального закона $\sigma^2 = npq$. При $N \to \infty$ моменты любого порядка Г. р. стремятся к соответствующим значениям моментов биномиального распределения. Производящая функция Г. р. имеет вид:

$$P(x) = \frac{A_{N-M}^n}{A_N^n} \sum_{j=0}^{n} \frac{A_M^j A_n^j}{A_{N-M-n+j}^j} \frac{x^j}{j!}.$$

Ряд в правой части представляет собой *гипергеометрическую функцию* $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, где $\alpha=-n$, $\beta=-M$, $\gamma=N-M-n+1$ (этому обстоятельству распределение обязано своим названием). Вероятность (*) и соответствующая функция распределения табулированы в широких пределах.

Лит.: [1] Lieberman G. I., Owen D. B., Tables of the Hypergeometric Probability Distribution, Stanford, 1961; [2] Оуэн Д. Б., Сборник статистических таблиц. Обработка таблиц, пер. с англ., М., 1966; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

А. В. Прохоров.

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, уравнение Гаусса,— линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$z(z-1)w'' + [(\alpha+\beta+1)z-\gamma]w' + \alpha\beta w = 0, \qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma = \text{const}, \tag{1}$$

или, в самосопряженной форме,

$$[z^\gamma (z-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma} w']' + \alpha\beta z^{\gamma-1}(z-1)^{\alpha+\beta-\gamma} w = 0.$$

Переменные z, w и параметры α, β, γ в общем случае могут принимать любые комплексные значения. После подстановки

$$w = z^{-\gamma/2}(z-1)^{(\gamma-\alpha-\beta-1)/2} u$$

получается приведенная форма уравнения (1):

$$u'' + \left[\frac{1-\lambda^2}{4z^2} + \frac{1-\nu^2}{4(z-1)^2} - \frac{1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2}{4z(z-1)}\right] u = 0, \tag{2}$$

где $\lambda=1-\gamma$, $\mu=\alpha-\beta$, $\nu=\gamma-\alpha-\beta$.

Уравнение (1) подробно изучал К. Гаусс [1] в связи с развитой им теорией *гипергеометрических рядов*, но еще раньше это уравнение (и его решение) рассматривал Л. Эйлер (L. Euler).

Решения уравнения (1) выражаются через *гипергеометрическую функцию* $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$. Если γ не равно

целому числу, то общее решение уравнения (1) можно записать в виде

$$w = C_1 F(\alpha, \beta, \gamma; z) + C_2 z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; z), \quad (3)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные; представление (3) справедливо в комплексной плоскости z с разрезами $(-\infty, 0)$ и $(1, \infty)$. В частности, в действительном случае формула (3) дает общее решение уравнения (1) на интервале $0<z<1$. Для целых значений γ общее решение имеет более сложный вид (возможно существование членов, содержащих логарифмы).

В качестве фундаментальной системы решений уравнения (1) можно выбирать и иные функции, отличные от указанных в (3). Напр., если $\alpha-\beta$ не равно целому числу, то

$$w = C_1 (-z)^{-\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1; z^{-1}) + C_2 (-z)^{-\beta} F(\beta-\gamma+1, \beta, \beta-\alpha+1; z^{-1})$$

есть общее решение уравнения (1) в комплексной плоскости z с разрезом $(0, \infty)$ (см. [2], [3]).

Г. у. включает как частные случаи ряд дифференциальных уравнений, встречающихся в приложениях; многие линейные обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка преобразованием неизвестной функции и независимой переменной приводятся к уравнению (1) (см. [4]). Особенно большое значение имеет близкое уравнению (1) *вырожденное гипергеометрическое уравнение*. Отношение $s(z)$ двух линейно независимых решений уравнения (2) удовлетворяет *Шварца уравнению*, тесно связанному с задачей конформного отображения полуплоскости на треугольник, ограниченный тремя дугами окружностей. Изучение обратной функции $z(s)$ приводит к понятию *автоморфной функции* (см. [5]).

Имеются линейные уравнения высших порядков, свойства решений к-рых аналогичны свойствам гипергеометрич. функции: решение уравнения $(q+1)$-го порядка

$$\left[z \frac{d}{dz} \prod_{j=1}^{q} \left(z \frac{d}{dz} + \gamma_j - 1 \right) - z \prod_{i=1}^{p} \left(z \frac{d}{dz} + \alpha_i \right) \right] w = 0$$

есть обобщенная гипергеометрическая функция ${}_pF_q(\alpha_i, \gamma_j, z)$, содержащая $p+q$ параметров. В частности, обобщенное Г. у. 3-го порядка, имеющее решение ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2; z)$, можно представить в форме

$$z^2(1-z)w''' + [1+\gamma_1+\gamma_2-(3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)z]zw'' + [\gamma_1\gamma_2-(1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)z]w' - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 w = 0.$$

Лит.: [1] Gauss C., «Comm. recentiores Soc. Göttingen», 1812, Bd 2; [2] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, пер. с англ., 2 изд., М., 1973; [4] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [5] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1950. *Н. Х. Розов.*

ГИПЕРГОМОЛОГИЙ ФУНКТОР — набор функторов $\mathcal{L}_n F$ на категории комплексов, связанный с нек-рым функтором F. Именно, пусть $F: A \to B$ — ковариантный аддитивный функтор из абелевой категории A с достаточным числом проективных объектов в абелеву категорию B. Пусть далее $K.$ — цепной комплекс со значениями в A и $L..$ — резольвента Картана — Эйленберга комплекса $K.$, состоящая из проективных объектов. Тогда бикомплекс $F(L..)$ определяет гомологии $H_n(F(L..)) = \mathcal{L}_n F(K.)$ и две сходящиеся к ним спект-

ральные последовательности с начальными членами

$$'E^2_{p,\,q} = H_p\,(L_q F\,(K.)) \quad \text{и} \quad ''E^2_{p,\,q} = L_p F\,(H_q\,(K.)).$$

Эти гомологии и спектральные последовательности функториально зависят от $K.$ и наз. соответственно функторами гипергомологий для F и спектральными функторами гипергомологий для F. Г. ф. $\mathbb{Z}$. F является гомологич. функтором на категории комплексов в следующих важных случаях: когда F перестановочен с индуктивными пределами; когда объекты категории A имеют проективные резольвенты длины $\leqslant n$; если рассматривать его на категории комплексов с положительными степенями.

Двойственным образом определяются функторы гиперкогомологий.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961.

В. И. Данилов.

ГИПЕРГРАФ — обобщение понятия *графа*. Г. задается множеством V, элементы к-рого наз. вершинами, и семейством $\mathscr{E}$ подмножеств множества V, называемых ребрами Г.; Г. обозначается $(V, \mathscr{E})$. Понятие Г. является вариантом давно известных понятий *комплекса*, *блок-схемы*, а также понятия *сети*.

Две вершины u и v Г. наз. смежными, если существует ребро, содержащее эти вершины. Вершина v и ребро E Г. наз. инцидентными, если $v \in E$. Г. H с n вершинами и m ребрами можно задать матрицей инцидентности, т. е. матрицей $\|a_{ij}\|$ размера $n \times m$, в к-рой столбцы соответствуют ребрам, а строки — вершинам Г. и

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \in E_j, \\ 0, & \text{если } v_i \notin E_i, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, m.$$

Всякой прямоугольной матрице M из нулей и единиц можно сопоставить Г., для к-рого M является матрицей инцидентности. Г. H^* наз. двойственным по отношению к Г. H, если матрица инцидентности Г. H^* получается транспонированием матрицы инцидентности Г. H. Число ребер Г., инцидентных данной вершине, наз. степенью вершины. Степенью ребра наз. число вершин Г., инцидентных этому ребру. Г. $(V', \mathscr{E}')$ наз. подграфом Г. $(V, \mathscr{E})$, если $V' \subseteq V$, $\mathscr{E}' \subseteq \mathscr{E}$ и вершина v из V' и ребро E из $\mathscr{E}'$ инцидентны в Г. $(V', \mathscr{E}')$ тогда и только тогда, когда они инцидентны в Г. $(V, \mathscr{E})$.



Г. можно изобразить на плоскости, сопоставляя вершинам Г. точки плоскости, а ребрам — связные области, охватывающие вершины, инцидентные этим ребрам. Напр., Г. H с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$ и семейством ребер

$$\mathscr{E} = \{E_1 = \{v_1\},\ E_2 = \{v_1, v_3\},\ E_3 = \{v_1, v_2, v_3\},$$
$$E_4 = E_5 = \{v_2, v_4\},\ E_6 = \{v_3, v_4, v_5\},\ E_7 = \varnothing\}$$

можно изобразить на плоскости, как показано на рис.

Г. H можно представлять *графом двудольным* $K\,(H)$, в к-ром вершины одной доли U_1 соответствуют вершинам Г., а вершины другой доли U_2 — ребрам Г. H. При этом две вершины u' из U_1 и u'' из U_2 соединены в графе $K\,(H)$ ребром, если вершина Г., соответствующая вершине u', инцидентна ребру Г., соответствующему вершине u''. Г. является графом, если каждое ребро его имеет степень, равную 2. Важным частным случаем понятия «Г.» является *матроид*. Многие понятия тео-

рии графов, такие, как связность, планарность, хроматич. число, числа внутренней и внешней устойчивости, переносятся и на Г. На Г. переносятся также многие утверждения, справедливые для графов.

Лит.: [1] Зыков А. А., «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, в. 6, с. 89—154; [2] Berge C., Graphes et hypergraphes, P., 1970.

А. А. Сапоженко.

ГИПЕРКОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО ФУНКЦИЯ — функция $w(z)$ гиперкомплексного переменного z (см. *Гиперкомплексное число*) над полем действительных чисел, т. е. функция на конечномерной ассоциативной алгебре $\mathfrak{A}$. В более узком смысле под Г. п. ф. понимается функция $w(z)$ со значениями в той же алгебре $\mathfrak{A}$, т. е. функция $w(z)$ может быть представлена в виде

$$w(z)=\sum_{k=0}^{n-1} e_k u_k,$$

где e_k, $k=0, 1, \ldots, n-1$,— базис алгебры $\mathfrak{A}$, а $u_k=u_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, $k=0, 1, \ldots, n-1$,— система n действительных функций от n действительных переменных. Теория Г. п. ф. наиболее развита в случае, когда $\mathfrak{A}$ есть алгебра *кватернионов*.

Аналитические (регулярные) Г. п. ф. представляют собой обобщения в различных направлениях аналитич. функций одного комплексного переменного. При этом, в силу неэквивалентности различных определений аналитичности в случае произвольной алгебры, существуют различные понятия аналитической Г. п. ф.

В современных исследованиях наибольшее внимание привлекают регулярные Г. п. ф. в смысле Фютера, или F-аналитические Г. п. ф. (см. [1]). Г. п. ф. $w(z)$ наз. праворегулярной Г. п. ф. в точке z_0, если в этой точке справедливо дифференциальное уравнение (условие Фютера)

$$\sum_{k=0}^{n-1} w^{(k)} e_k=0,$$

где

$$w^{(k)}=\sum_{h=0}^{n-1}\frac{\partial u_h}{\partial x_k}e_h$$

— частная производная функции w по x_k, причем все производные предполагаются непрерывными. Функция $w(z)$ наз. леворегулярной Г. п. ф., если

$$\sum_{k=0}^{n-1} e_k w^{(k)}=0.$$

В случае некоммутативной алгебры $\mathfrak{A}$ эти понятия не равносильны. Сумма и разность праворегулярных Г. п. ф. праворегулярны, но для произведения и частного это неверно. Степени переменного z не праворегулярны. Имеются ряды Тейлора и Лорана по специально построенным аналогам степеней. Условие Фютера равносильно обращению в нуль дифференциала $\delta\omega=0$ гиперкомплексной дифференциальной формы $\omega=wdz$ (для леворегулярных Г. п. ф.— формы $\omega=dzw$); отсюда получается специфическая интегральная теорема.

Аналитической по Шефферсу Г. п. ф. [2] в точке z_0 для случая коммутативной алгебры $\mathfrak{A}$ наз. Г. п. ф., у к-рой дифференциал в этой точке может быть записан в виде

$$dw=\varphi(z)dz,$$

где производная $\varphi(z)=dw/dz$ не зависит от dz. Это условие для коммутативной алгебры $\mathfrak{A}$ равносильно тому, что $d\omega=0$, и интеграл $\int wdz$ не зависит от пути; Г. п. ф., аналитические по Шефферсу, F-регулярны тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{n-1} e_k^2=0.$$

Г. п. ф. $w(z)$ наз. аналитической по Хаусдорфу [3] в точке z_0, если ее дифференциал dw есть линейная функция от dz, то есть

$$dw = \sum_{i,\ k=0}^{n-1} \varphi_{ik} e_i\, dz\, e_k,$$

где φ_{ik} — действительные функции от $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Аналог степенных рядов здесь строится проще, но интеграл зависит от пути. Для коммутативной алгебры $\mathfrak{A}$ определения Хаусдорфа и Шефферса эквивалентны.

Лит.: [1] Fueter K. R., «Elem. Math.», 1948, Bd 3, S. 89—94; [2] Scheffers G., «Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig Math.-phys. Kl.», 1893, Bd 45, S. 828—48; [3] Hausdorff F., там же, 1900, Bd 52, S. 43—61; [4] Кристалинский Р. Х., «Уч. зап. Смоленского пед. ин-та», 1965, вып. 14, с. 91—95. *Е. Д. Соломенцев.*

ГИПЕРКОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО — элемент конечномерной алгебры с единицей над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ (ранее называвшейся гиперкомплексной системой). Исторически Г. ч. возникли как обобщение *комплексных чисел*. Действия над комплексными числами соответствуют простейшим геометрич. преобразованиям плоскости (сдвигу, вращению, растяжению и их комбинациям). При попытках построить числа, к-рые играли бы для трехмерного пространства роль комплексных чисел для плоскости, выяснилось, что здесь не может быть полной аналогии; это привело к созданию и развитию теории систем Г. ч.

Гиперкомплексная система ранга n получается введением умножения в n-мерном действительном пространстве $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющего аксиомам алгебры над полем. Пусть 1 — единица гиперкомплексной системы и $1, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ — некоторый базис пространства $\mathbb{R}^n$. Г. ч.

$$\bar{\alpha} = a_0 - a_1 i_1 - \ldots - a_n i_n$$

из гиперкомплексной системы U наз. сопряженным Г. ч.

$$\alpha = a_0 + a_1 i_1 + \ldots + a_n i_n.$$

Пусть $U^{(2)} = \{u_1 + u_2 e\}$, где $u_1, u_2 \in U$, а e — некоторый новый символ. Множество $U^{(2)}$ можно превратить в гиперкомплексную систему, определяя сложение формулой

$$(u_1 + u_2 e) + (v_1 + v_2 e) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)\, e$$

и умножение формулой

$$(u_1 + u_2 e)\,(v_1 + v_2 e) = (u_1 v_1 - \bar{v}_2 u_2) + (v_2 u_1 + u_2 \bar{v}_1)\, e.$$

Гиперкомплексная система $U^{(2)}$ наз. удвоением гиперкомплексной системы U.

Примеры гиперкомплексных систем: действительные числа, комплексные числа, *кватернионы*, *Кэли числа* (в этом перечне каждая следующая система получается из предыдущей удвоением). Другие примеры — системы *двойных и дуальных чисел*, Г. ч. вида

$$A = a_0 \cdot 1 + \sum_{\gamma=1}^{2^{n-1}} a_\gamma\, i_\gamma,$$

при $n=4$, наз. числами Клиффорда — Липшица (эти Г. ч. являются элементами *Клиффорда алгебр* ранга 2^n). Важным примером гиперкомплексных систем являются полные матричные алгебры над $\mathbb{R}$.

Иногда в определение системы Г. ч. включают требование ассоциативности умножения или отождествляют понятие алгебры и гиперкомплексной системы.

Лит.: [1] Кантор И. Л., Солодовников А. С., Гиперкомплексные числа, М., 1973; [2] Калужнин Л. А., Введение в общую алгебру, М., 1973. *Н. Н. Вильямс.*

ГИПЕРПЛОСКОСТЬ в векторном пространстве X над полем K — образ (при сдвиге) векторного подпространства M, дополнение к к-рому одномерно, т. е. множество π вида $x_0 + M$ при нек-ром $x_0 \in X$. Г. при $x_0 = 0$ иногда наз. однородной. Подмно-

жество $\pi \subset X$ является Г. в том и только в том случае, когда

$$\pi = \{x : f(x) = \alpha\} \qquad (*)$$

для $\alpha \in K$ и нек-рого ненулевого линейного функционала $f \in X^*$. При этом f и α определяются M с точностью до общего множителя $\beta \neq 0$.

В топологич. векторном пространстве любая Г. либо замкнута, либо всюду плотна; для замкнутости π, определяемой формулой (*), необходима и достаточна непрерывность функционала f. *М. И. Войцеховский.*

ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ — 1) Обобщение понятия обычной поверхности трехмерного пространства на случай n-мерного пространства. Размерность Г. на единицу меньше размерности объемлющего пространства.

2) Если M и N — дифференцируемые многообразия, $\dim N - \dim M = 1$ и определено погружение $f : M \to N$, то $f(M)$ — Г. в N. Здесь f — дифференцируемое отображение, дифференциал к-рого df в любой точке $x \in M$ является инъективным отображением пространства M_x, касательного к M в точке x, в пространство $N_{f(x)}$, касательное к N в точке $f(x)$. *В. Т. Базылев.*

3) Г. а л г е б р а и ч е с к а я — подмногообразие алгебраич. многообразия, локально задаваемое одним уравнением. Г. а. в аффинном пространстве A_k^n над полем k задается глобально одним уравнением

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Г. а. W в проективном пространстве P_k^n задается уравнением

$$F(x_0, \ldots, x_n) = 0,$$

где F — однородная форма от $n+1$ переменных. Степень m этой формы наз. с т е п е н ь ю (п о р я д к о м) г и п е р п о в е р х н о с т и. Замкнутая подсхема W схемы V наз. г и п е р п о в е р х н о с т ь ю, если соответствующий пучок идеалов $I_W \subset O_V$ является пучком главных идеалов. Для связных неособых алгебраич. многообразий это условие означает, что коразмерность W в V равна единице. Для каждой неособой Г. а. $W \subset P_k^n$ порядка m (обозначаемой часто через V_n^m) имеют место следующие факты:

канонич. класс K_W равен $(m-n-1)H_W$, где H_W — класс гиперплоского сечения W;

группы когомологий $H^i(W, O_W) = 0$ для $i \neq 0$, $n-1$, а

$$\dim_k H^{n-1}(W, O_W) = \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{n!};$$

при $n \geqslant 3$ фундаментальная группа (алгебраическая или топологическая, если $k = \mathbb{C}$) $\pi_1(W) = 0$;

при $n \geqslant 4$ группа Пикара $\mathrm{Pic}(W) \simeq Z$ и порождается классом гиперплоского сечения. *И. В. Долгачев.*

4) Г. а н а л и т и ч е с к а я (Г. а.) — множество S в комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$, к-рое в окрестности каждой своей точки $\zeta \in S$ задается уравнением $f_\zeta(z, t) = 0$, где функция $f_\zeta(z, t)$ непрерывна по параметру $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, и при каждом фиксированном t голоморфна по z в независящей от t окрестности $U_\zeta \ni \zeta$, причем $\Sigma |\partial f / \partial z_j| \neq 0$ для всех $(z, t) \in U_\zeta \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Другими словами, Г. а. есть множество в $\mathbb{C}^n$, к-рое локально является объединением непрерывного однопараметрич. семейства комплексноаналитич. поверхностей комплексной коразмерности 1. Напр., если функция f голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}^n$ и $\mathrm{grad}\, f \neq 0$ в D, то множества $|f| = 1$, $\mathrm{Re} f = 0$ и т. п. являются Г. а.

Дважды гладкая гиперповерхность S в $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ является Г. а. тогда и только тогда, когда ее форма Леви тождественно на S равна нулю или когда S локально псевдовыпукла с обеих сторон. *Е. М. Чирка.*

ГИПЕРПРОСТРАНСТВО н а д т о п о л о г и ч е с к и м п р о с т р а н с т в о м X — пространство, точками к-рого являются элементы нек-рого семейства $\mathfrak{M}$

подмножеств пространства X с той или иной топологией. Обычно $\mathfrak{M}$ — кольцо множеств, хотя априори это не предполагается.

Пример. $P(X)$ — Г. всех подмножеств пространства X; базу топологии образуют множества $\{M,\ F\subset M\subset G\}$ при условии, что F замкнуто в X, G открыто в X и $F\subset G$.

Наиболее распространенным является Г. 2^X, состоящее из всех замкнутых подмножеств топологич. пространства X; предбазу *экспоненциальной топологии* на 2^X образуют множества $\{F,\ F\subset G\}$ и $\{F,\ F\cap H\neq\varnothing\}$, где G и H открыты в X, а F пробегает 2^X. Аналогично определяется топология в следующих Г.: во множестве $\mathfrak{S}(X)$ всех бикомпактных подмножеств пространства X, во множестве $\mathrm{Exp}_\omega(X)$ всех конечных подмножеств пространства X, во множестве $K(X)$ всех подконтинуумов (связных бикомпактов) континуума X и т. п. Эти пространства могут рассматриваться как подпространства Г. 2^X, взятого с экспоненциальной топологией. Если X — *равномерное пространство*, то множество 2^X наделяется естественной равномерной структурой; получающееся при этом равномерное пространство обозначается через $H(X)$. Если X — бикомпакт, то Г. 2^X, $\mathfrak{S}(X)$ и $H(X)$ гомеоморфны между собой и являются бикомпактами. Если X — компактное метризуемое пространство, то таково же и 2^X. Если X — континуум, то 2^X и $K(X)$ — тоже континуумы.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 1—2, М., 1966—69; [2] Michael E., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1951, v. 71, № 1, p. 152—82; [3] Пономарев В. И., «Матем. сб.», 1959, т. 48(90), № 2, с. 191—212.

Б. А. Ефимов.

ГИПЕРЦЕНТР — член Z_α верхнего центрального ряда группы G. Первый Г. Z_1 есть *центр группы*; если определены все Z_β, $\beta<\alpha$, то $Z_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}Z_\beta$, если α — предельное порядковое число; Z_α есть полный прообраз центра факторгруппы $G/Z_{\alpha-1}$, если α непредельное. Г. группы локально нильпотентны.

В. М. Копытов.

ГИПЕРЦИКЛ в геометрии Лобачевского — то же, что *эквидистанта*.

ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ КРИВАЯ — неособая проективная модель аффинной кривой $y^2=f(x)$, где $f(x)$ — многочлен без кратных корней, нечетной степени n (случай четной степени $2k$ сводится к случаю нечетной — $(2k-1)$). Поле функций на Г. к. (поле гиперэллиптич. функций) есть квадратичное расширение поля рациональных функций; в этом смысле оно является простейшим полем алгебраич. функций после поля рациональных функций. Г. к. характеризуются условием существования одномерного линейного ряда g^1_2 дивизоров степени 2, определяющего морфизм Г. к. на проективную прямую степени 2. Род Г. к. равен $(n-1)/2$, поэтому для различных нечетных n Г. к. бирационально неэквивалентны между собой. При $n=1$ получается проективная прямая, при $n=3$ — эллиптич. кривая. По традиции кривые рода 0 или 1 к Г. к. не причисляются. На Г. к. рода $g>1$ отношения регулярных дифференциальных форм порождают подполе рода 0 и это свойство вполне характеризует Г.к.

Лит.: [1] Шевалле К., Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной, пер. с англ., М., 1959; [2] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

В. Е. Воскресенский.

ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ — частный случай *абелева интеграла*

$$\int R(z,\ w)\,dz, \tag{1}$$

где R — рациональная функция от переменных z, w, связанных алгебраич. уравнением частного вида

$$w^2=P(z), \tag{2}$$

здесь $P(z)$ — многочлен степени $m \geqslant 5$ без кратных корней; при $m=3$, 4 получаются *эллиптические интегралы*, случай $m=5,6$ иногда наз. ультраэллиптическим.

Уравнению (2) соответствует двулистная компактная риманова поверхность F рода $g=(m-2)/2$, если m — четно, и рода $g=(m-1)/2$, если m — нечетно; таким образом, в случае Г. и. $g \geqslant 2$. На F функции z, w, а следовательно и $R(z, w)$, однозначны. Интеграл (1), рассматриваемый как определенный, задается на F как криволинейный интеграл от аналитич. функции, взятый вдоль нек-рого спрямляемого пути L, причем, вообще говоря, задание только начальной и конечной точек пути L не вполне определяет значение интеграла (1).

Как и в общем случае абелевых интегралов, любой Г. и. можно выразить в виде линейной комбинации элементарных функций и канонических Г. и. I, II, III родов, имеющих свой специфич. вид. Так, нормальные Г. и. I рода являются линейными комбинациями Г. и. I рода вида

$$\int \frac{z^{\nu-1}\,dz}{w}, \quad \nu=1, 2, \ldots, g,$$

где $(z^{\nu-1}/w)dz$, $\nu=1, 2, \ldots, g$,— простейший базис абелевых дифференциалов I рода для случая гиперэллиптич. поверхности F. Явные выражения для абелевых дифференциалов II и III родов и для соответствующих Г. и. также легко выписываются (см. [2]). В основных чертах теория Г. и. совпадает с общей теорией абелевых интегралов.

Все рациональные функции $R(z, w)$ от z и w образуют гиперэллиптическое поле алгебраич. функций, соответствующее данному уравнению (2) и имеющее род g. Всякая компактная риманова поверхность рода $g=1$ или $g=2$ допускает эллиптическое или гиперэллиптич. поле, соответственно. Однако уже при $g=3$ существуют компактные римановы поверхности F более сложной структуры, не обладающие этим свойством.

Лит.: [1] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960, гл. 10; [2] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955, гл. 5; [3] Neumann K., Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, Lpz., 1884. *Е. Д. Соломенцев.*

ГИПОТЕНУЗА — сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла.

ГИПОЦИКЛОИДА — плоская кривая, траектория точки окружности, катящейся по другой окружности и имеющей с ней внутреннее касание. Параметрич. уравнения:

$$x=(R-r)\cos\theta+r\cos\left[(R-r)\frac{\theta}{r}\right],$$

$$y=(R-r)\sin\theta-r\sin\left[(R-r)\frac{\theta}{r}\right],$$

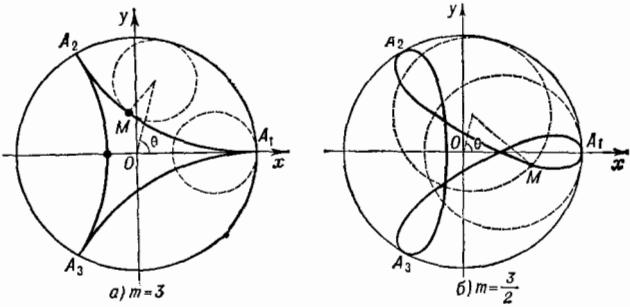
где r — радиус катящейся окружности, R — радиус неподвижной окружности, θ — угол, стягиваемый дугой между точками касания окружностей. В зависимости от величины модуля $m=R/r$ получаются Г. различной формы. При m целом кривая состоит из m непересекающихся ветвей (см. рис. *а*). Точки возврата $A_1, \ldots, A_m$ имеют полярные координаты $\rho=R$, $\varphi=2k\pi/m$, $k=0, 1, \ldots, m-1$. При m иррациональном число ветвей бесконечно, точка M в исходное положение не возвращается; при m рациональном Г. (см. рис., *б*) — замкнутая алгебраич. кривая. Длина дуги от точки $\theta=0$:

$$l=\frac{8R(m-1)}{m^2}\sin^2\frac{\theta}{4}.$$

Радиус кривизны:

$$r_k=\frac{4R(m-1)}{m^2(m-2)}\sin\frac{\theta}{2}.$$

Если точка находится не на катящейся окружности, а лежит вне (внутри) ее, то кривая наз. удлиненной (укороченной) гипоциклоидой или гипотрохоидой (см. *Трохоида*). При $m=2$

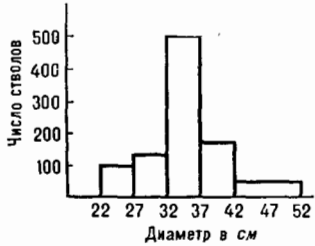


Г. — отрезок прямой, при $m=3$ — *Штейнера кривая*, при $m=4$ — *астроида*. Г. относится к так наз. *циклоидальным кривым*.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ГИСТОГРАММА — один из видов графич. представления экспериментальных данных. Г. строится следующим образом. Весь диапазон наблюденных значений $X_1, \ldots, X_n$ нек-рой случайной величины X делится на k интервалов группировки (обычно равных) точками $x_1, \ldots, x_{k+1}$; подсчитывается число наблюдений m_i, приходящихся на интервал $[x_i, x_{i+1})$ и определяется частота $h_i = m_i/n$. На оси абсцисс отмечаются точки $x_1, \ldots, x_{k+1}$, и отрезки $x_i x_{i+1} (i=1, \ldots, k)$ принимаются за основания прямоугольников с высотами, равными $h_i/(x_{i+1}-x_i)$. В случае равных интервалов $[x_i, x_{i+1})$ высоты прямоугольников принимаются равными либо h_i, либо m_i. Пусть, напр., измерение стволов 1000 елей дало результаты:



Гистограмма распределения диаметров стволов 1000 елей. Длина интервала группировки 5 *см*.

диаметр в *см* . .	22—27	27—32	32—37	37—42	42—52
число стволов .	100	130	500	170	100

Г. для этого примера изображена на рисунке.

В. Н. Чугуева.

ГИШАРА КОНГРУЭНЦИЯ, конгруэнция Г,— конгруэнция прямых, у к-рых фокальные сети образованы линиями кривизны фокальных поверхностей. Одна из поверхностей центров каждой фокальной поверхности несет фокальную сеть из геодезич. линий. Сферич. отображение развертывающихся поверхностей Г. к. является чебышевской сетью. Фокальные поверхности Г. к. наз. поверхностями Гишара. Г. к. наз. по имени К. Гишара (C. Guichard, 1889), к-рый впервые ее рассмотрел.

Лит.: [1] Фиников С. П., Теория конгруэнций, М.—Л., 1950; [2] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. Т. Базылев.

ГЛАВНАЯ КРИВИЗНА — *нормальная кривизна* поверхности в главном направлении, т. е. в направлении, где она достигает своего экстремального значения. Г. к. k_1 и k_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{vmatrix} = 0, \qquad (*)$$

где E, F и G — коэффициенты *первой квадратичной*

формы, а L, M и N — *второй квадратичной формы* поверхности, вычисленные в данной точке.

Полусумма Г. к. k_1 и k_2 поверхности равна *средней кривизне*, а произведение — *гауссовой кривизне* поверхности. Уравнение (*) может быть записано в виде

$$k^2-2Hk+K=0,$$

где H — средняя, K — полная кривизны поверхности в данной точке.

Г. к. k_1 и k_2 связаны с нормальной кривизной $\tilde{k}$ в произвольно выбранном направлении ф о р м у л о й Э й л е р а:

$$\tilde{k}=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi,$$

где φ — угол, образуемый выбранным направлением с главным направлением для кривизны k_1. *Е. В. Шикин.*

ГЛАВНАЯ НОРМАЛЬ — нормаль к кривой, проходящая через точку M_0 кривой L и лежащая в соприкасающейся плоскости к L в точке M_0. Если $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ — параметрич. уравнение кривой и значение параметра t_0 соответствует точке M_0, то уравнение Г. н. в векторной форме имеет вид:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_0)+\lambda\boldsymbol{r}''(t_0).$$

Е. В. Шикин.

ГЛАВНАЯ ТРАНСЛЯЦИЯ — отображение φ *алгебраической системы* $\boldsymbol{A}=\langle A,\ \Omega\rangle$ в себя, имеющее вид

$$\varphi\colon\ x\to F\ (a_1,\ \ldots,\ a_{k-1},\ x,\ a_{k+1},\ \ldots,\ a_n),$$

где F — символ основной операции из Ω и $a_1,\ldots,a_n$ — фиксированные элементы множества A. *Д. М. Смирнов.*

ГЛАВНАЯ ЧАСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА — однородный дифференциальный оператор, образуемый из данного отбрасыванием всех членов, не содержащих производных максимального порядка. Для дифференциального оператора

$$L=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha D^\alpha,$$

главная часть есть $\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha D^\alpha$. Иногда Г. ч. д. о. определяется с введением дополнительных весов, приписываемых дифференцированиям по различным аргументам. Например, в дифференциальном операторе $D_1-D_2^2+aD_2$ главная часть определяется иногда как $D_1-D_2^2$. *А. А. Дезин.*

ГЛАВНОГО ТИПА ОПЕРАТОР С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ и п о с т о я н н ы м и к о э ф ф и ц и е н т а м и — оператор $A(D)$, главная часть к-рого $P(D)$ (см. *Главная часть дифференциального оператора*) удовлетворяет условию:

$$\sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial P(x)}{\partial x_j}\right|^2\neq 0 \qquad (*)$$

для любого вектора $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)\in\mathbb{R}^n$. Другая формулировка условия: всякая действительная характеристическая относительно $P(D)$ плоскость должна быть простой характеристикой. Условие (*) является необходимым и достаточным для *доминирования* $A(D)$ по отношению к произвольному оператору меньшего порядка. Операторы с совпадающей главной частью $P(D)$ имеют одинаковую силу тогда и только тогда, когда выполнено условие (*). В случае переменных коэффициентов условие принадлежности $A(D)$ к главному типу формулируется обычно с помощью специальных неравенств, оценивающих производные функций с компактным носителем через значения оператора. Поточечное выполнение условия (*) и дополнительное условие на порядок *коммутатора* $[P(x,\ D)\overline{P}(x,\ D)]$ достаточны для принадлежности $A(D)$ к главному типу. *А. А. Дезин.*

ГЛАВНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РАССЛОЕНИЕ — локально тривиальное аналитич. расслоение, на слоях

к-рого просто транзитивно и аналитически действует структурная группа Ли; то есть Г. а. р. есть четверка (P, B, G, π), где P, B — *аналитические пространства* над полем k, $\pi : P \to B$ аналитич. отображение, G — группа Ли над k, аналитически действующая справа на P, причем для каждого элемента базы B существуют окрестность U и аналитич. изоморфизм

$$\varphi : U \times G \to \pi^{-1}(U)$$

такой, что

$$\varphi(x, gh) = \varphi(x, g)\, h, \quad x \in U,\ g,\ h \in G.$$

Каждое *векторное аналитическое расслоение* p: $V \to B$ с n-мерным слоем определяет Г. а. р. с базой B и группой $GL(n, k)$, слоем к-рого над точкой $b \in B$ является многообразие всех базисов слоя $p^{-1}(b)$. Это частный случай взаимно однозначного соответствия между аналитич. расслоениями с заданным слоем и структурной группой G и ассоциированными с ними Г. а. р. Другие примеры Г. а. р.: расслоение $H \to H/G$, слоями к-рого служат левые смежные классы группы Ли H по ее подгруппе Ли G; аналитич. *накрытие* (здесь структурная группа — группа накрытия).

Г. а. р. можно задать при помощи открытого покрытия $\{U_i\}_{i \in I}$ его базы B и *функций перехода*, т. е. аналитич. отображений

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to G, \quad i, j \in I, \quad U_i \cap U_j \neq \varnothing,$$

удовлетворяющих условиям

$$g_{ij}(x)\, g_{jk}(x) = g_{ik}(x), \quad x \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Функции перехода образуют одномерный коцикл со значениями в пучке $\mathcal{O}^G$ ростков аналитич. отображений $B \to G$, что дает взаимно однозначное соответствие между множеством Г. а. р. с базой B и группой G и множеством когомологий $H^1(B, \mathcal{O}^G)$. Классификация Г. а. р. с базой B и структурной группой G представляет собой (для неабелевой группы G) проблему, решенную лишь в нек-рых специальных случаях (по поводу соответствующей проблемы локальных модулей см. *Деформация* аналитической структуры). Связь между этой классификацией и классификацией топологических главных расслоений выражается естественным отображением

$$\alpha : H^1(B, \mathcal{O}^G) \to H^1(B, C^G),$$

где C^G — пучок ростков непрерывных отображений $B \to G$.

Пусть $k = \mathbb{C}$, а B — приведенное *Штейна пространство*, тогда отображение α биективно, и проблема классификации сводится к задаче гомотопич. топологии [4]. В частности, всякое Г. а. р., базой к-рого является некомпактная риманова поверхность, а структурная группа связна, тривиально. Результат работы [4] получен на самом деле для более широкого класса E-главных расслоений, в определении к-рых группа G заменяется некоторым аналитическим локально тривиальным расслоением $E \to B$ на комплексные группы Ли, послойно действующим на P. Существует обобщение приведенного результата на случай, когда структурная группа есть банахова комплексная группа Ли [2]. Если же B — компактная риманова поверхность, то α сюръективно, но не инъективно. В общем случае α не обязано быть ни инъективным, ни сюръективным. Для связной разрешимой группы G известны когомологич. достаточные условия инъективности или биективности отображения α [3].

Изучен также случай, когда B — компактная риманова поверхность рода p, а G — связная редуктивная алгебраич. группа. Для $p = 0$ соответствующая классификация дана в [5], для $p = 1$ при $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ — в [1]. В случае $p \geqslant 2$, $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (см. *Векторное алгебраическое расслоение*) существенную роль играет понятие стабильного векторного расслоения. Это понятие

обобщается [6] на случай произвольной связной редуктивной группы G. Множество всех стабильных главных расслоений данного топологич. типа на компактной римановой поверхности обладает естественной структурой связного нормального комплексного пространства. Получена также частичная классификация векторных расслоений над комплексным проективным пространством $B=P^m(\mathbb{C})$ и над алгебраическими поверхностями.

О вещественных Г. а. р. (случай $k=\mathbb{R}$) см. *Вещественное аналитическое пространство*.

Лит.: [1] Atiyah M., «Proc. London Math. Soc.», 1957, v. 11, № 27, p. 417—52; [2] Bungart L., «Topology», 1968, v. 7, № 1, p. 55—68; [3] Frenkel J., «Bull. Soc. Math. France», 1957, t. 85, № 2, p. 135—220; [4] Grauert H., «Math. Ann.», 1958, Bd 135, № 3, S. 263—73; [5] Grothendieck A., «Amer. J. Math.», 1957, v. 79, № 1, p. 121—38; [6] Ramanathan A., «Math. Ann.», 1975, Bd 213, № 2, S. 129—52.

А. Л. Онищик.

ГЛАВНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ — направление в точке регулярной поверхности, в к-ром *нормальная кривизна* поверхности в этой точке достигает экстремального значения. В каждой точке поверхности может быть либо два Г. н., либо любое направление является Г. н. (в *уплощения точках* и в *округления точках*). В первом случае Г. н. ортогональны, сопряжены и совпадают с направлением осей индикатрисы кривизны (см. *Дюпена индикатриса*). Если направление (d) является Г. н., то справедливо соотношение (формула Родрига):

$$d\boldsymbol{n} = -k\,d\boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной нормали к поверхности, k — нормальная кривизна поверхности $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ в этом направлении. Обратно, если в нек-ром направлении (d) выполняется равенство $d\boldsymbol{n}=\lambda d\boldsymbol{r}$, то (d) является Г. н. Нормальная кривизна в Г. н. наз. *главной кривизной*.

Е. В. Шикин.

ГЛАВНОЕ ОДНОРОДНОЕ ПРОСТРАНСТВО — *главный G-объект* в категории алгебраич. многообразий или схем. Если S — схема, а Γ — схема групп над S, то главный G-объект в категории схем над Γ наз. Г. о. п. над S. В случае, когда S — спектр поля k и Γ — алгебраическая k-группа, Г. о. п. над Γ есть алгебраическое k-многообразие V, на к-ром Γ действует (слева), и при замене k на его сепарабельное алгебраич. замыкание $\bar{k}$, каждая точка $v\in V(\bar{k})$ определяет изоморфное отображение $g\to gv$ многообразий $V_{\bar{k}}$ и $F_{\bar{k}}$. Г. о. п. V тривиально тогда и только тогда, когда $V(k)$ не пусто. Множество классов, изоморфных Г. о. п., над гладкой алгебраич. группой Γ может быть отождествлено с множеством *Галуа когомологий* $H^1(k, \Gamma)$. В общем случае множество классов Г. о. п. над S-схемой групп Γ совпадает с множеством одномерных неабелевых когомологий $H^1(S_T, \Gamma)$, где S_T — некоторая топология Гротендика на схеме S [2].

В ряде случаев Г. о. п. вычислено. Если k — конечное поле, то каждое Г. о. п. над связной алгебраической k-группой является тривиальным (теорема Ленга). Это же утверждение верно, если k — поле p-адических чисел, а Γ — односвязная и полупростая группа (теорема Кнезера). Если $\Gamma=\Gamma_{m,S}$ — мультипликативная S-схема групп, то множество классов Г. о. п. над Γ совпадает с *Пикара группой* $\mathrm{Pic}(S)$ схемы S. В частности, если S — спектр поля, то эта группа тривиальна. Если $\Gamma=\Gamma_{a,S}$ — аддитивная S-схема групп, то множество классов Г. о. п. над Γ совпадает с группой $H^1(S, \mathcal{O})$ одномерных когомологий структурного пучка $\mathcal{O}_S$ схемы S. В частности, это множество тривиально, если S — аффинная схема. В случае, когда k — глобальное поле (т. е. поле алгебраич. чисел или поле алгебраич. функций от одного переменного), изучение множества классов Г. о. п. над алгебраической k-группой Γ основано на исследо-

вании множества Тейта — Шафаревича Ш(Г), состоящего из Г. о. п. над Г, имеющих рациональные точки во всех пополнениях k_V относительно нормирований поля k. В случае, когда Г — *абелева группа над полем* k, множество классов Г. о. п. над Г образует группу (см. *Вейля — Шатле группа*).

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [2] Demazure M., Gabriel P., Groupes algebriques, t. 1, P.—Amst., 1970; [3] Lang S., Tate J., «Amer. J. Math.», 1958, v. 80, p. 659—84.

В. Е. Воскресенский, И. В. Долгачев.

ГЛАВНОЕ РАССЛОЕНИЕ — *G-расслоение* $\pi_G : X \to B$ такое, что группа G действует свободно и совершенно на пространстве X. Значение Г. р. состоит в том, что оно позволяет строить ассоциированные (с ним) расслоения со слоем F, если задано представление G в группе гомеоморфизмов F. Дифференцируемые Г. р. с группами Ли играют важную роль в теории связностей и групп голономии. Пусть, напр., H — топологич. группа, имеющая G своей замкнутой подгруппой, H/G — однородное пространство левых смежных классов H по G, тогда расслоение π_G: $H \to H/G$ является Г. р. Пусть, далее, X_G — конструкция Милнора, т. е. соединение бесконечного числа экземпляров группы G, каждая точка к-рого имеет вид:

$$\langle g, t\rangle = \langle g_0 t_0,\ g_1 t_1, \dots\rangle,$$

где $g_i \in G$, $t_i \in [0, 1]$, причем только конечное число t_i отлично от нуля и $\Sigma t_i = 1$. Действие группы G на X_G, определенное формулой $h\langle g, t\rangle = \langle hg, t\rangle$, свободно, и расслоение $\omega_G : X_G \to X_G \bmod G$ является нумерируемым Г. р.

Каждый слой Г. р. гомеоморфен группе G.

Морфизм Г. р. — это морфизм расслоений $f : \pi_G \to \pi_{G'}$, для к-рого отображение слоев $f\pi_G^{-1}(b)$ индуцирует гомоморфизм групп

$$\theta_b = \xi'^{-1}_b f\pi_G^{-1}(b)\,\xi_b : \quad G \to G',$$

где $\xi_b(g) = gx$, $\pi_G(x) = b$. В частности, морфизм наз. эквивариантным, если $\theta_b = \theta$ не зависит от b, так что $gf(x) = \theta(g) f(x)$ для любых $x \in X$, $g \in G$; если $G = G'$ и $\theta = id$, то эквивариантный морфизм наз. G-морфизмом. Любой G, B-морфизм (т. е. G-морфизм Г. р. над B) является G-изоморфизмом.

Для любого отображения $u : B' \to B$ и Г. р. π_G: $X \to B$ *индуцированное расслоение* $u^*(\pi_G)$ является Г. р. с той же группой G, причем отображение $U : u^*(\pi_G) \to \pi_G$ является G-морфизмом, однозначно определяющим действие G на пространстве $u^*(x)$. Напр., если Г. р. π_G тривиально, то оно изоморфно Г. р. $\varphi^*(\eta)$, где η есть G-расстояние над одной точкой, φ — постоянное отображение. Обратное также верно, и потому Г. р., обладающее сечением, тривиально. Для каждого нумерируемого Г. р. $\pi_G : X \to B$ существует такое отображение $f : B \to X_G \bmod G$, что $f^*(\omega_G)$ является G-изоморфным π_G; при этом для изоморфности Г. р. $f_0^*(\omega_G)$ и $f_1^*(\omega_G)$ необходима и достаточна гомотопность f_0 и f_1. Это — основная теорема гомотопической классификации Г. р., выражающая универсальность Г. р. ω_G (полученного с помощью конструкции Милнора) по отношению к классифицирующему отображению f.

Лит.: [1] Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Дж., Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967; [2] Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, пер. с англ., М., 1960; [3] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [4] Расслоенные пространства и их приложения, сб. переводов, М., 1958; [5] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [6] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970.

А. Ф. Щекутьев.

ГЛАВНОЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ — *фундаментальное решение* $G(x, y)$ определенного во

всем пространстве E^n эллиптич. уравнения 2-го порядка

$$Au=\sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}+ \\ +\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)\,u=0, \qquad (*)$$

удовлетворяющее условиям

$$G(x,\ y)=o\left(e^{-a|x-y|}\right), \quad \frac{\partial G}{\partial x_i}=o\left(e^{-a|x-y|}\right)$$

для нек-рых положительных постоянных a и R при $|x-y|>R$.

Если коэффициенты $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$ и $c(x)$ удовлетворяют в E^n условию Гёльдера и для $\gamma>0$ выполняется неравенство $c(x)<-\gamma$, то Г. ф. р. существует. В случае, когда коэффициенты оператора A определены в нек-рой ограниченной области с достаточно гладкой границей, их можно продолжить на все пространство E^n так, что у продолженного оператора Г. ф. р. будет существовать.

Лит.: [1] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957.

Ш. А. Алимов.

ГЛАВНЫЙ ИДЕАЛ — идеал (кольца, алгебры, полугруппы или решетки), порождаемый нек-рым одним элементом a, т. е. наименьший идеал, содержащий элемент a.

Левый Г. и. $L(a)$ кольца K, кроме самого элемента a, содержит все элементы вида

$$ka+na;$$

соответственно, правый Г. и. $R(a)$ содержит все элементы вида

$$ak+na,$$

а двусторонний Г. и. $L(a)$ — все элементы вида

$$na+ta+as+\sum_i[(k_i a)\,l_i+k_i'(a,\ l_i')],$$

где k, t, s, k_i, k_i', l_i, l_i' — произвольные элементы кольца K, а $na=a+\ldots+a$ (n слагаемых). В случае, когда K — кольцо с единицей, слагаемое na может быть опущено. В частности, для алгебры A над полем

$$L(a)=aA,\ R(a)=Aa,\ J(a)=AaA.$$

В полугруппе S левый, правый и двусторонний идеалы, порожденные элементом a, равны соответственно

$$L(a)=S^1a,\ R(a)=aS^1,\ J(a)=S^1aS^1,$$

где S^1 — полугруппа, совпадающая с S, если S содержит единицу, и полученная из S внешним присоединением единицы — в противном случае.

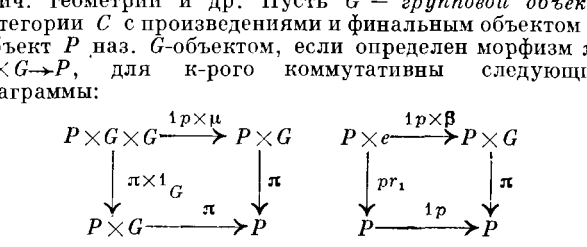
Г. и. решетки L, порожденный элементом a, совпадает с множеством таких x, что $x\leqslant a$; он обозначается обычно a^{∇}, $[a]$ или $[0,\ a]$, если решетка с нулем. Таким образом,

$$a^{\nabla}=aL=\{ax\mid x\in L\}.$$

В решетке конечной длины все идеалы главные.

В. Н. Ремесленников, Т. С. Фофанова, Л. Н. Шеврин.

ГЛАВНЫЙ G-ОБЪЕКТ в топологизированной категории — понятие теории категорий, частные случаи которого — *главное расслоение* в топологии, *главное однородное пространство* в алгебраич. геометрии и др. Пусть G — *групповой объект* категории C с произведениями и финальным объектом e. Объект P наз. G-объектом, если определен морфизм π: $P\times G\to P$, для к-рого коммутативны следующие диаграммы:



Здесь $\mu : G\times G\to G$ — морфизм группового закона на G, а $\beta : e\to G$ — морфизм единичного элемента G. Более точно, введенные выше G-объекты наз. п р а в ы м и G-о б ъ е к т а м и, аналогично дается определение л е в ы х G-о б ъ е к т о в. Примером G-объекта может служить сам групповой объект G, для к-рого отображение μ совпадает с отображением π. Такой объект наз. т р и в и а л ь н ы м G-о б ъ е к т о м. G-объекты категории C образуют подкатегорию C^G, морфизмами в к-рой служат морфизмы, перестановочные с морфизмами π. G-объект наз. ф о р м а л ь н о г л а в н ы м G-о б ъ е к т о м, если морфизмы $P\times G\xrightarrow{pr_1}P$ и $P\times G\xrightarrow{\pi}P$ индуцируют изоморфизм $\varphi=\pi pr_1 : P\times G\to P\times P$. Если T — некоторая топология Гротендика на категории C, то формально главный G-объект P наз. главным G-объектом (относительно топологии T), если существует покрытие $(U_i\to e)i\in I$ финального объекта такое, что для любого $i\in I$ произведение $G\underset{e}{\times} U_i$ изоморфно тривиальному $G\underset{e}{\times} U_i$-объекту.

П р и м е р ы. 1) Если C — категория множеств, а G — группа, то непустые G-объекты наз. G-множествами. Это множества P, для к-рых задано такое отображение $P\times G\to P$ $((p, g)\to pg)$, что для любых $g, g'\in G$ имеет место $p(gg')=(pg)g'$ и для любого $p\in P$ верно $p\cdot 1=p$. Главный G-объект есть G-множество, в к-ром для любых $p, p'\in P$ существует единственный элемент $g\in G$ такой, что $pg=p'$ (г л а в н о е о д н о р о д н о е G-м н о ж е с т в о). Если P не пусто, то выбор $p_0\in P$ определяет отображение $g\to p_0 g$, к-рое устанавливает изоморфизм P и тривиального G-множества G. Тем самым в любой топологии формально главный G-объект является главным G-объектом.

2) Если X — дифференцируемое многообразие, H — группа Ли, то, взяв за C категорию расслоений над X, за групповой объект G проекцию $H\times X\to X$ и определив топологию в C с помощью семейств открытых покрытий, можно получить определение главного G-расслоения.

Если P — формально главный G-объект категории C, то для любого объекта X категории $Ob(C)$ множество $P(X)=\mathrm{Hom}_C(X, P)$ либо пусто, либо является главным однородным $G(X)$-множеством.

G-объект P изоморфен тривиальному G-объекту тогда и только тогда, когда существует сечение $e\to P$. Множество классов G-объектов (относительно отношения изоморфизма между ними) обозначается через $H^1(C, G)$. В случае, когда G — абелев групповой объект, множество $H^1(C, G)$ с отмеченной точкой, соответствующей классу тривиальных G-объектов, является группой и вычисляется стандартными средствами гомологич. алгебры. В общем случае вычисления $H^1(C, G)$ используют конструкции когомологий Чеха (см. *Неабелевы когомологии*).

Лит.: [1] Revêtements etales et groupe fondamental, B., 1971.

И. В. Долгачев.

ГЛАВНЫЙ РЯД д л и н ы m — такая конечная последовательность

$$G=G_0>G_1>\ldots>G_m=1$$

вложенных друг в друга нормальных подгрупп группы G, что ее нельзя включить (без повторения членов) ни в какую другую последовательность с теми же свойствами, т. е. G_{i+1} — максимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в G_i в качестве собственной подгруппы, $i=0, 1, \ldots, m-1$. Группа тогда и только тогда обладает хотя бы одним Г. р., когда в ней обрываются все убывающие по включению и все возрастающие по включению последовательности нормальных подгрупп. Если группа обладает Г. р., то любые два таких ряда изоморфны, т. е. имеют одинаковую

длину и между множеством факторов G_i/G_{i+1} одного ряда и множеством факторов другого ряда существует взаимно однозначное соответствие, при к-ром соответственные факторы изоморфны. *Ю. И. Мерзляков.*

ГЛАВНЫЙ ФАКТОР полугруппы — всякая факторполугруппа Риса (см. *Полугруппа*) вида $J(x)/N(x)$, где $J(x)$ — двусторонний *главный идеал* данной полугруппы, порожденный элементом x, а $N(x)=J(x)\setminus J_x$, где J_x есть $\mathcal{Y}$-класс (см. *Грина отношения эквивалентности*), содержащий x; если множество $N(x)$ не пусто, то оно является идеалом, а в случае, когда $N(x)=\varnothing$, считается $J(x)/N(x)=J(x)$. Г. ф. полугруппы наз. также идеальным фактором. Произвольный Г. ф. полугруппы есть либо полугруппа с нулевым умножением, либо 0-простая полугруппа, либо идеально простая полугруппа (см. *Простая полугруппа*); последнее имеет место тогда и только тогда, когда полугруппа обладает ядром и данный Г. ф. совпадает с ядром. Полугруппа, не имеющая Г. ф. с нулевым умножением, наз. полупростой; полупростота полугруппы эквивалентна, напр., тому, что для любого ее двустороннего идеала A выполняется равенство $A^2=A$. Всякая *регулярная полугруппа* полупроста. Если каждый Г. ф. полугруппы либо вполне 0-прост, либо вполне прост (см. *Вполне простая полугруппа*), то полугруппа наз. вполне полупростой. Полугруппа вполне полупроста тогда и только тогда, когда она регулярна и удовлетворяет любому из следующих двойственных друг другу условий: для каждого $\mathcal{Y}$-класса частично упорядоченное множество содержащихся в нем $\mathcal{L}$-классов (соответственно $\mathcal{R}$-классов) обладает минимальным элементом; при этом $\mathcal{Y}=\mathcal{D}$.

Произвольная полугруппа как бы собрана из своих Г. ф., это объясняет, в частности, особую роль, к-рую играют в теории полугрупп идеально простые и 0-простые полугруппы.

Лит.: [1] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [2] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., тт. 1—2, М., 1972. *Л. Н. Шеврин.*

ГЛАВНЫЙ ХАРАКТЕР, главный характер Дирихле,— арифметический характер χ_0, определяемый условием

$$\chi_0(n)=\begin{cases}1, & \text{если } (n, D)=1,\\ 0, & \text{если } (n, D)\neq 1,\end{cases}$$

где D — любое заданное натуральное число. Через Г. х. определяются понятия первообразного и производного характеров (см. *Дирихле характер*). *Н. Г. Чудаков.*

ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ КОЛЬЦО — ассоциативное кольцо R с единицей, в к-ром все левые и правые идеалы являются главными, т. е. имеют вид Ra и aR, соответственно, где $a\in R$. Примеры Г. и. к.: кольцо целых чисел, кольцо многочленов $F(x)$ над полем F, кольцо косых многочленов $F(x, S)$ над полем F с автоморфизмом $S: F\to F$ (элементы $F(x, S)$ имеют вид $\sum_{i=0}^{n} x^i a_i$, $a_i\in F$, сложение этих элементов обычное, а умножение определяется законами дистрибутивности и равенством $ax=xa^S$, где $a\in F$), кольцо дифференциальных многочленов $F(x, ')$ над полем F с дифференцированием $': F\to F$ (это кольцо также состоит из элементов $\sum_{i=0}^{n} x^i a_i$, $a_i\in F$, причем сложение обычное, а умножение определяется равенством $ax=xa+a'$, где $a\in F$). Г. и. к. без делителей нуля наз. областью главных идеалов. Коммутативное Г. и. к. является прямой суммой областей главных идеалов и Г. и. к., обладающих единственным простым идеалом, к-рый нильпотентен (см. [2], с. 282). Если R — область главных идеалов, то два ненулевые элемента a, b кольца R имеют наибольший общий левый делитель (a, b) и наименьшее общее правое кратное

$[a, b]$, к-рые определяются как элементы, удовлетворяющие равенствам:

$$aR+bR=(a, b)R; \qquad aR\cap bR=[a, b]R.$$

Элементы (a, b) и $[a, b]$ единственны с точностью до обратимого правого множителя. Область главных идеалов является областью с однозначным разложением на множители. Двусторонние идеалы области главных идеалов образуют относительно умножения свободную коммутативную полугруппу с нулем и единицей (свободными порождающими этой полугруппы будут максимальные идеалы кольца).

Подмодуль N свободного модуля M конечного ранга n над R является свободным модулем ранга $k\leqslant n$ над R, и в модулях M и N можно так выбрать базисы $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_k$, что $b_i=e_ia_i$, $1\leqslant i\leqslant k$, где $e_i\in R$ и e_i является полным (т. е. $e_iR\cap Re_i\supseteq Re_jR$) делителем элементов e_j при $i<j$. Каждый конечно порожденный модуль K над R является прямой суммой циклич. модулей R/e_iR, $1\leqslant i\leqslant m$, где $e_i\in R$ и e_i — полный делитель e_j при $i<j$, $e_i\neq 0$. Эта теорема обобщает основную теорему о конечно порожденных *абелевых группах*. Элементы e_i, $1\leqslant i\leqslant m$, из предыдущей теоремы определены однозначно с точностью до подобия (см. *Ассоциативные кольца и алгебры*). Эти элементы наз. инвариантными множителями модуля K. Кроме того, модуль K можно представить в виде прямой суммы далее неразложимых циклич. модулей R/q_iR, где $q_i\in R$, $1\leqslant i\leqslant k$. Элементы q_i, $1\leqslant i\leqslant k$, определены однозначно с точностью до подобия и наз. элементарными делителями модуля K. Если область R главных идеалов коммутативна, то $q_iR=0$ или $q_iR=p_i^{n_i}R$, $1\leqslant i\leqslant k$, где p_i — неприводимые (простые) элементы кольца R. Из предыдущих утверждений вытекают обычные свойства элементарных делителей и инвариантных множителей линейных преобразований конечномерных векторных пространств [3].

Лит.: [1] Джекобсон Н., Теория колец, пер. с англ., М., 1947; [2] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963; [3] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966.

Л. А. Бокуть.

ГЛАДКАЯ СХЕМА — обобщение понятия неособого *алгебраического многообразия*. Схема X (локально) конечного типа над полем k наз. гладкой схемой (над k), если схема, полученная из X с помощью замены поля констант k на его алгебраич. замыкание $\overline{k}$, является регулярной схемой, т. е. все ее локальные кольца регулярны. Для совершенного поля k понятия Г. с. над k и регулярной схемы над k совпадают. В частности, Г. с. конечного типа над алгебраически замкнутым полем есть неособое алгебраич. многообразие. В случае поля комплексных чисел неособое алгебраич. многообразие обладает структурой комплексного *аналитического многообразия*.

Схема является Г. с. тогда и только тогда, когда она может быть покрыта гладкими окрестностями. Точка схемы X наз. простой точкой схемы, если в нек-рой ее окрестности схема X есть Г. с.; в противном случае точка наз. особой точкой схемы. Связная Г. с. неприводима. Произведение Г. с. снова есть Г. с.; вообще, если Y есть Г. с. над k, а $f: X\to Y$ — *гладкий морфизм*, то X есть Г. с. над k.

Аффинное пространство A_k^n и проективное пространство $\mathbb{P}_k^n$ являются Г. с. над k; над совершенным полем любая алгебраич. группа (т. е. приведенная алгебраич. схема групп) есть Г. с. Приведенная схема над алгебраич. замкнутым полем является Г. с. на всюду плотном открытом множестве.

Если схема X задается уравнениями

$$F_i(X_1, \ldots, X_m)=0, \quad i=1, \ldots, n,$$

в аффинном пространстве A_k^m, то точка $x\in X$ будет про-

стой тогда и только тогда, когда ранг матрицы Якоби $\left\|\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(x)\right\|$ равен $m-d$, где d — размерность X в точке x (якобиевый критерий). В более общем случае, замкнутая подсхема X Г. с. Y, задаваемая пучком идеалов I, будет Г. с. в окрестности точки x в том и только в том случае, если существует система образующих $g_1, \ldots, g_n$ идеала I_x в кольце $O_{X,x}$, удовлетворяющая тому условию, что $dg_1, \ldots, dg_n$ составляют часть базиса свободного $O_{X,x}$-модуля пучка дифференциалов $\Omega_{X/k,x}$.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Grothendieck A., «Publ. math. IHES», 1967, t. 32; [3] Zariski O., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 62, № 1, p. 1—52.

В. И. Данилов, И. В. Долгачев.

ГЛАДКАЯ ТОЧКА функции — значение аргумента x функции f, при к-ром выполнено условие:

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)|}{|h|}=0.$$

Точка дифференцируемости функции является Г. т., обратное, вообще говоря, не верно. Если в Г. т. существует односторонняя производная, то существует и обычная производная.

В. Ф. Емельянов.

ГЛАДКАЯ ФУНКЦИЯ — функция, у к-рой каждое значение аргумента является *гладкой точкой*. Г. ф. может быть разрывной. Если Г. ф. непрерывна на интервале, то множество точек ее дифференцируемости плотно на нем и имеет мощность континуума. Существуют непрерывные, гладкие на числовой прямой функции, не дифференцируемые почти всюду. Г. ф. имеет производную в каждой точке локального экстремума и, в силу этого, для гладких непрерывных функций остаются справедливыми основные теоремы дифференциального исчисления — теоремы Ролля, Лагранжа, Коши, Дарбу и др.

В. Ф. Емельянов.

ГЛАДКИЙ КОНТИНУУМ в точке p — континуум X такой, что для каждой последовательности $x_1, \ldots, x_n \ldots$ точек из X, сходящейся к точке x, и каждого подконтинуума $K\subset X$, содержащего точки p и x, существует сходящаяся к K последовательность подконтинуумов $\{K_n\}$ в X. Континуум, гладкий в каждой своей точке, наз. гладким.

А. А. Мальцев.

ГЛАДКИЙ МОРФИЗМ схем — обобщение на случай схем понятия семейства неособых *алгебраических многообразий*. В классич. случае морфизма комплексных алгебраич. многообразий это понятие сводится к понятию регулярного отображения (субмерсии) комплексных многообразий. Конечно представленный (локально) морфизм схем $f: X\to Y$ наз. гладким морфизмом, если f есть *плоский морфизм* и если для любой точки $y\in Y$ слой $f^{-1}(y)$ будет *гладкой схемой* (над полем $k(y)$). Схема X наз. гладкой схемой над схемой Y, или гладкой Y-схемой, если структурный морфизм $f: X\to Y$ является Г. м.

Примером гладкой Y-схемы служит аффинное пространство A^n_Y. Частный случай понятия Г. м. — *этальный морфизм*. Обратно, всякий Г. м. $f: X\to Y$ разлагается локально по X в композицию этального морфизма $X\to A^n_Y$ и проекции $A^n_Y\to Y$.

Композиция Г. м. снова есть Г. м.; аналогично обстоит дело с произвольной заменой базы. Г. м. характеризуется своим дифференциальным свойством: плоский конечно представленный морфизм $f: X\to Y$ будет Г. м. тогда и только тогда, когда пучок относительных дифференциалов есть локально свободный пучок ранга $\dim_x f$ в точке x.

Понятие Г. м. аналогично понятию *расслоения* в смысле Серра в топологии. Напр., Г. м. комплексных алгебраич. многообразий является локально тривиальным дифференцируемым расслоением. В общем случае

выполняется следующий аналог аксиомы о накрывающей гомотопии: для любой *аффинной схемы* Y', ее замкнутой подсхемы Y'_0, определяемой нильпотентным идеалом, и любого морфизма $Y' \to Y$ канонич. отображение $\mathrm{Hom}_Y(Y', X) \to \mathrm{Hom}_Y(Y'_0, X)$ сюръективно.

Если $f: X \to Y$ есть Г. м., а *локальное кольцо* $\mathcal{O}_{Y,y}$ точки $y \in Y$ является регулярным (соответственно нормальным, приведенным), то таким же будет и локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ любой точки $x \in X$ с $f(x) = y$.

Лит.: [1] Grothendieck A., «Publ. math. IHES», 1967, t. 32; [2] Revêtements etales et groupe fondamental, B., 1971.

В. И. Данилов, И. В. Долгачев.

ГЛАДКОЕ ПРОСТРАНСТВО — нормированное пространство X, в к-ром для каждой точки x с $\|x\| = 1$ существует единственный функционал $f \in X^*$ такой, что $f(x) = \|f\| = 1$. Пространство X гладко тогда и только тогда, когда его норма обладает *Гато дифференциалом* в каждой точке x с $\|x\| = 1$.

Л. П. Власов.

ГЛАДКОСТИ МОДУЛЬ — модуль непрерывности производной порядка $m \geqslant 1$ функции $f(x)$, определенной на банаховом пространстве X, т. е. выражение

$$\omega_m(f, \delta, X) = \sup_{\|h\|_X \leqslant \delta; x} \left\| \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i f\left(x + (m-2i)\frac{h}{2}\right) \right\|_{X^2},$$

где $(x \pm mh/2) \subset X$. При $m=1$ Г. м.— обычный *непрерывности модуль* функции $f(x)$. Основные свойства Г. м. (для случая $X = \mathbb{C}$ — пространство непрерывных функций):

$$\omega_m(f, 0, \mathbb{C}) = 0;$$

$\omega_m(f, \delta, \mathbb{C})$ не убывает вместе с δ;

если k — целое $\geqslant 1$, то

$$\omega_m(f, k\delta, \mathbb{C}) \leqslant k^m \omega_m(f, \delta, \mathbb{C});$$

для любого $\lambda > 0$

$$\omega_m(f, \lambda\delta, \mathbb{C}) \leqslant (\lambda+1)^m \omega_m(f, \delta, \mathbb{C});$$

если $\nu > m$, то

$$\omega_\nu(f, \delta, \mathbb{C}) \leqslant 2^{\nu-m} \omega_m(f, \delta, \mathbb{C});$$

если $\nu > m$, то

$$\omega_m(f, \delta, \mathbb{C}) \leqslant A_{\nu,m} \delta^\nu \int_\delta^a (\omega_m(f, u, \mathbb{C})/u^{\nu+1})\, du + O(\delta^\nu),$$

где $A_{\nu,m}$ и a — постоянные, не зависящие от f.

Нек-рые вопросы теории приближения функций могут получить окончательное решение только в терминах Г. м. порядка $m \geqslant 2$. В теории приближения функций важен класс непрерывных периода 2π функций, Г. м. 2-го порядка к-рых удовлетворяет условию

$$\omega_2(f, \delta, C_{2\pi}) \leqslant \delta.$$

Модуль непрерывности таких функций удовлетворяет условию

$$\omega_1(f, \delta, C_{2\pi}) \leqslant \left[\frac{1}{\ln(\sqrt{2}+1)}\right] \delta \ln\frac{\pi}{\delta} + O(\delta),$$

$0 < \delta \leqslant \pi$, причем постоянная $1/\ln(\sqrt{2}+1)$ не может быть улучшена (см. [4]).

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Собр. сочинений, т. 1, с. 37, М., 1952; [2] Marchaud A., «J. math. pures et appl.», 1927, t. 6, p. 337—425; [3] Zygmund A., «Duke Math. J.», 1945, v. 12, p. 47—76; [4] Ефимов А. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, № 2, с. 283—88.

А. В. Ефимов.

ГЛОБАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ТРАЕКТОРИЙ квадратичного дифференциала — описание поведения в целом траекторий положительного *квадратичного дифференциала* на конечной ориентированной римановой поверхности. Пусть R — конечная ориентированная риманова поверхность, $Q(z)dz^2$ — положительный квадратичный дифференциал на R; пусть C — множество всех нулей и простых полюсов $Q(z)dz^2$, а H — множество всех полюсов $Q(z)dz^2$ порядка $\geqslant 2$,

Траектории $Q(z)dz^2$ образуют семейство F, обладающее многими свойствами регулярных семейств кривых. Это семейство кривых покрывает R, за исключением точек множества $C \cup H$, т. е. через каждую точку из $R \setminus (C \cup H)$ проходит единственный элемент F. Поведение траекторий $Q(z)dz^2$ в окрестности любой точки R описывается *локальной структурой траекторий* квадратичного дифференциала. При рассмотрении глобальной структуры кривых семейства F в точках $R \setminus H$ существенную роль играют следующие объединения траекторий. Пусть Φ — объединение всех траекторий $Q(z)dz^2$, имеющих предельную концевую точку в нек-рой точке множества C; Λ — подмножество Φ, являющееся объединением всех траекторий $Q(z)dz^2$, к-рые имеют одну предельную концевую точку в точке множества C и вторую предельную концевую точку в точке множества $C \cup H$.

Множество K на R наз. F-множеством относительно $Q(z)dz^2$, если каждая траектория дифференциала $Q(z)dz^2$, пересекающаяся с K, полностью лежит в K. Внутреннее замыкание множества K определяется как внутренность замыкания $\bar{K}$ и обозначается $\hat{K}$. Внутреннее замыкание F-множества снова является F-множеством. Концевой областью E относительно $Q(z)dz^2$ наз. наибольшее связное открытое F-множество на R, обладающее следующими свойствами: 1) E не содержит точек множества $C \cup H$; 2) E заполнено траекториями дифференциала $Q(z)dz^2$, каждая из к-рых имеет предельную концевую точку в каждом из двух возможных направлений в данной точке $A \in H$; 3) E конформно отображается функцией

$$\zeta = \int [Q(z)]^{1/2}\, dz$$

на верхнюю или нижнюю полуплоскость плоскости ζ (в зависимости от выбора ветви корня). Из локальной структуры траекторий $Q(z)dz^2$ следует, что точка A должна быть полюсом дифференциала $Q(z)dz^2$ не ниже 3-го порядка.

Полосообразной областью S относительно $Q(z)dz^2$ наз. наибольшее связное открытое F-множество на R, обладающее следующими свойствами: 1) S не содержит точек множества $C \cup H$; 2) S заполнено траекториями дифференциала $Q(z)dz^2$, каждая из к-рых имеет в одной точке $A \in H$ предельную концевую точку в одном направлении, а в другой (возможно, совпадающей с A) точке $B \in H$ — предельную концевую точку в другом направлении; 3) S конформно отображается функцией

$$\zeta = \int [Q(z)]^{1/2}\, dz$$

на полосу $a < \operatorname{Im}\zeta < b$, где a, b — конечные действительные числа, $a < b$. Точки A и B могут быть полюсами $Q(z)dz^2$ порядка 2 и более.

Круговой областью $\mathcal{C}$ относительно $Q(z)dz^2$ наз. наибольшее связное открытое F-множество на R, обладающее следующими свойствами: 1) $\mathcal{C}$ содержит единственный двойной полюс A дифференциала $Q(z)dz^2$; 2) $\mathcal{C} \setminus A$ заполнено траекториями дифференциала $Q(z)dz^2$, каждая из к-рых является замкнутой жордановой кривой, отделяющей A от границы $\mathcal{C}$; 3) при надлежащем выборе чисто мнимой постоянной c функция

$$w = \exp\left\{ c \int [Q(z)]^{1/2}\, dz \right\},$$

дополненная значением нуль в точке A, отображает $\mathcal{C}$ конформно на круг $|w| < R$, причем точка A переходит в точку $w = 0$.

Кольцевой областью D относительно $Q(z)dz^2$ наз. наибольшее связное открытое F-множество на R, обладающее следующими свойствами: 1) D не содержит точек множества $C \cup H$; 2) D заполнено тра-

екториями дифференциала $Q(z)dz^2$, каждая из к-рых является замкнутой жордановой кривой; 3) при надлежащем выборе чисто мнимой постоянной c функция

$$w = \exp\left\{ c \int [Q(z)]^{1/2}\, dz \right\}$$

отображает D конформно на круговое кольцо $r_1 < |w| < r_2$, $0 < r_1 < r_2$.

Полностной областью $\mathcal{F}$ относительно $Q(z)dz^2$ наз. наибольшее связное открытое F-множество на R, обладающее свойствами: 1) $\mathcal{F}$ не содержит точек множества H; 2) $\mathcal{F} \setminus C$ заполнено траекториями $Q(z)dz^2$, каждая из к-рых всюду плотна в $\mathcal{F}$.

Справедлива основная структурная теорема (см. [2]). Пусть R — конечная ориентированная риманова поверхность, $Q(z)dz^2$ — положительный квадратичный дифференциал на R, причем исключаются следующие возможные случаи и все конфигурации, получающиеся из них посредством *конформного отображения*: I. R есть z-сфера, $Q(z)dz^2 = dz^2$; II. R есть z-сфера, $Q(z)dz^2 = Ke^{i\alpha} dz/z^2$, K — положительное, α — действительное числа; III. R есть тор, $Q(z)dz^2$ регулярен на R. Тогда: 1) $R \setminus \overline{\Lambda}$ состоит из конечного числа концевых, полосообразных, кольцевых, круговых и плотностных областей; 2) каждая такая область ограничена конечным числом траекторий вместе с точками, в к-рых последние встречаются; каждая граничная компонента такой области содержит точку множества C, за исключением граничных компонент круговой или кольцевой области, к-рые могут совпадать с граничными компонентами R; для полосообразной области два граничных элемента, выходящие из точек множества H, разделяют границу на две части, на каждой из к-рых имеется точка множества C; 3) каждый полюс $Q(z)dz^2$ порядка $m > 2$ имеет окрестность, покрываемую внутренним замыканием объединения $m-2$ концевых областей и конечного числа (возможно, равного нулю) полосообразных областей; 4) каждый полюс $Q(z)dz^2$ порядка $m = 2$ имеет окрестность, покрываемую внутренним замыканием объединения конечного числа полосообразных областей, или окрестность, содержащуюся в круговой области.

Из этой теоремы непосредственно следует утверждение основной структурной теоремы Дж. Дженкинса (J. Jenkins) в первоначальной формулировке (см. [1]): в условиях сформулированной теоремы множество $R \setminus \overline{\Phi}$ состоит из конечного числа концевых, полосообразных, круговых и кольцевых областей. Большое внимание в ряде исследований теории однолистных функций уделяется доказательству того факта, что для рассматриваемого квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$ множество Φ пусто. Нахождение условий, обеспечивающих пустоту множества Φ, представляет и самостоятельный интерес. Пример квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$ на z-сфере, для к-рого множество Φ пусто, дает следующая теорема о трех полюсах: если R есть z-сфера, $Q(z)dz^2$ — квадратичный дифференциал на R, имеющий не более трех различных полюсов, то множество Φ пусто.

Лит.: [1] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [2] Jenkins J. A., «Illinois Math. J.», 1960, v. 4, № 3, p. 405—12.

Г. В. Кузьмина.

ГЛОБАЛЬНО СИММЕТРИЧЕСКОЕ РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО — риманово многообразие M, каждая точка p к-рого является изолированной неподвижной точкой нек-рой инволютивной изометрии S_p многообразия M, т. е. S_p^2 есть тождественное преобразование. Пусть G — компонента единицы группы изометрий пространства M и K — стационарная подгруппа точки p. Тогда M является *однородным пространством* G/K, и отображение $\Phi : g \to S_p g S_p$ есть инволютивный авто-

морфизм группы G, причем K содержится в замкнутой подгруппе G^{Φ} всех неподвижных точек автоморфизма Φ и содержит компоненту единицы группы G^{Φ}.

Пусть g — вещественная алгебра Ли, φ — ее инволютивный автоморфизм и k — подалгебра в g, состоящая из всех φ-неподвижных элементов. Рассмотрим связную подгруппу K присоединенной группы Int (g), соответствующую подалгебре k. Если группа K компактна, то k наз. компактно вложенной подалгеброй алгебры g, а пара (g, φ) наз. ортогональной симметрической алгеброй Ли. Пусть $g=k+m$ — разложение на собственные подпространства автоморфизма φ, отвечающие собственным значениям 1 и -1. Пара (g, φ) наз.: а) алгеброй компактного типа, если g компактна и полупроста; б) алгеброй некомпактного типа, если $g=k+m$ есть *Картана разложение*; в) алгеброй евклидова типа, если m — абелев идеал в g. Пусть (g, φ) — ортогональная симметрич. алгебра Ли и $g=k+m$ — указанное разложение. Обозначим через g^* подмножество $k+im$ комплексной оболочки g^C алгебры g. Отображение

$$\varphi^*: T+iX \longrightarrow T-iX, \qquad T \in k,\ X \in m,$$

есть инволютивный автоморфизм алгебры g^* и (g^*, φ^*) есть ортогональная симметрич. алгебра Ли, к-рая наз. двойственной к алгебре (g, φ). Если (g, φ) — алгебра компактного типа, то (g^*, φ^*) — алгебра некомпактного типа, и наоборот.

Каждое Г. с. р. п. G/K порождает ортогональную симметрич. алгебру Ли (g, φ), где g — алгебра Ли группы G, а $\varphi=(d\Phi)_e$ (e — единица группы). G/K наз. пространством компактного или некомпактного типа в соответствии с типом порождаемой им пары (g, φ). Каждое односвязное Г. с. р. п. M является прямым произведением: $M=M_0\times M_-\times M_+$, где M_0 — евклидово пространство, M_- и M_+ — Г. с. р. п. компактного и некомпактного типа соответственно. Для всякого пространства некомпактного типа кривизна в любом двумерном направлении неположительна, а для пространств компактного типа такая кривизна всюду неотрицательна. Любое пространство некомпактного типа диффеоморфно евклидову пространству.

Пусть $M=G/K$ — Г. с. р. п. компактного или некомпактного типа. Рангом l пространства M наз. максимальная размерность плоского вполне геодезич. подмногообразия в M. Пусть A и A' — два плоских вполне геодезич. подмногообразия пространства M размерности l, $q\in A$, $q'\in A'$ и X — касательный вектор к M в точке q. Тогда: 1) существует такой элемент $x\in G$, что $xA=A'$ и $xq=q'$; 2) существует такой элемент $y\in G$, что $yq=q$ и $dy(X)$ — касательный вектор к A в точке q.

Пусть (g, φ) — ортогональная симметрич. алгебра Ли, а k и m — собственные подпространства автоморфизма φ, отвечающие собственным значениям 1 и -1. Алгебра (g, φ) наз. неприводимой, если выполняются условия: 1) g полупроста и k не содержит ненулевых идеалов алгебры g; 2) алгебра $\mathrm{ad}_g(k)$ неприводимым образом действует на m. Г. с. р. п. G/K наз. неприводимым, если порождаемая им ортогональная симметрич. алгебра Ли (g, φ) неприводима. Две ортогональные симметрич. алгебры Ли (g, φ) и (g', φ') наз. изоморфными, если существует такой изоморфизм ψ алгебры g на g', что $\psi\circ\varphi=\varphi'\circ\psi$. Классификация односвязных неприводимых Г. с. р. п. с точностью до изометрии эквивалентна классификации неприводимых ортогональных симметрич. алгебр Ли с точностью до изоморфизма.

Неприводимые ортогональные симметрич. алгебры Ли компактного типа суть: I. (g, φ), где g — компакт-

ная простая алгебра Ли и φ — любой ее инволютивный автоморфизм; II. (g, φ), где компактная алгебра g является прямой суммой двух простых идеалов, к-рые переставляются при помощи автоморфизма φ.

Неприводимые ортогональные симметрич. алгебры Ли некомпактного типа суть: III. (g, φ), где g — простая некомпактная алгебра Ли над $\mathbb{R}$, комплексная оболочка g^C к-рой является простой алгеброй Ли над $\mathbb{C}$, а φ — такой инволютивный автоморфизм алгебры g, что его неподвижные точки составляют максимальную компактно вложенную подалгебру; IV. (g, φ), где g — простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, рассматриваемая как вещественная алгебра Ли, а φ — сопряжение алгебры g по отношению к максимальной компактно вложенной подалгебре k, т. е. отображение $X+iY \to X-iY$, $X, Y \in k$. Кроме того, если обозначить через (g^*, φ^*) алгебру, двойственную к (g, φ), то (g, φ) типа III и IV, если (g^*, φ^*) типа I и II соответственно, и наоборот.

С каждой неприводимой ортогональной симметрич. алгеброй некомпактного типа связано в точности одно Г. с. р. п., причем это пространство односвязно. Для компактных алгебр решение соответствующей задачи значительно сложнее. Достаточно рассмотреть типы I и II. Г. с. р. п., связанные с алгебрами типа II, — это в точности компактные связные простые группы Ли, снабженные римановой структурой, инвариантной относительно левых и правых сдвигов. Задача классификации Г. с. р. п., связанных с алгебрами типа I, с точностью до локальных изометрий равносильна задаче классификации инволютивных автоморфизмов простых компактных алгебр Ли. Глобальная классификация симметрических римановых пространств, связанных с данной ортогональной симметрич. алгеброй (g, φ) компактного типа, решается следующей теоремой.

Пусть (g, φ) — ортогональная симметрич. алгебра компактного типа, причем подалгебра k неподвижных точек автоморфизма φ не содержит идеалов алгебры g, отличных от $\{o\}$. Пусть $\tilde{G}$ — односвязная группа Ли с алгеброй Ли g, $\tilde{Z}$ — центр группы $\tilde{G}$, $\tilde{\Phi}$ — такой автоморфизм группы $\tilde{G}$, что $d\tilde{\Phi}=\varphi$ и $\tilde{K}$ — множество всех неподвижных точек автоморфизма $\tilde{\Phi}$. Для произвольной подгруппы S группы $\tilde{Z}$ положим $K_S = \{g \in \tilde{G} \mid g^{-1}\tilde{\Phi}(g) \in S\}$. Г. с. р. п. M, связанные с (g, φ), совпадают с пространствами вида G/K, где $G=\tilde{G}/S$, $K=K^*/K^* \cap S$, снабженными любой G-инвариантной метрикой. Здесь S пробегает все подгруппы группы $\tilde{Z}$, а K^* пробегает все такие подгруппы в $\tilde{G}$, что $K \subset K^* \subset K_S$.

Лит.: [1] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [2] Loos O., Symmetric spaces, v. 1—2, N.Y.— Amst., 1969.

А. С. Феденко.

ГЛОБАЛЬНОЕ ПОЛЕ — поле, являющееся либо конечным расширением поля рациональных функций одной переменной над конечным полем констант, либо конечным расширением поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Лит.: [1] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969.

В. Л. Попов.

ГЛУБИНА МОДУЛЯ — одна из когомологич. характеристик модуля над коммутативным кольцом. Пусть A — нётерово кольцо, I — его идеал и пусть M есть A-модуль конечного типа. Тогда I-г л у б и н о й м о д у л я M наз. наименьшее целое число n, при к-ром

$$\operatorname{Ext}_A^n(A/I, M) \neq 0.$$

Г. м. обозначают $\operatorname{depth}_I(M)$, или $\operatorname{prof}_I(M)$. Другое определение может быть дано в терминах M-р е г у л я р н о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т и, т. е. последовательности таких элементов $a_1, \ldots, a_k$ из A, что a_i не является делителем нуля в модуле

$$M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M.$$

I-глубина модуля M равна длине наибольшей M-регулярной последовательности, составленной из элементов идеала I. В случае локального кольца A за I принимают обычно максимальный идеал. Верна следующая формула:

$$\operatorname{prof}_I(M) = \inf_{\mathfrak{p} \supset I} (\operatorname{prof}(M_{\mathfrak{p}})),$$

где $\mathfrak{p}$ означает простой идеал A, а $M_{\mathfrak{p}}$ рассматривается как модуль над локальным кольцом $A_{\mathfrak{p}}$.

Понятие Г. м. было введено в [1] под назв. гомологической коразмерности. Если проективная размерность $dh(M)$ модуля M над локальным кольцом A конечна, то

$$dh(M) + \operatorname{prof}(M) = \operatorname{prof}(A).$$

В общем случае $\operatorname{prof}(M)$ не превосходит размерности модуля M.

Концепция Г. м. является одним из основных инструментов исследования модулей. Так, в терминах Г. м. определяются модули и кольца Коэна — Маколея; удобным часто оказывается условие Серра (S_k) на A-модуль M:

$$\operatorname{prof} M_{\mathfrak{p}} \geqslant \inf(k, \dim M_{\mathfrak{p}})$$

для всех простых идеалов $\mathfrak{p}$ в A. Наконец, Г. м. тесно связана с локальными когомологиями: утверждение

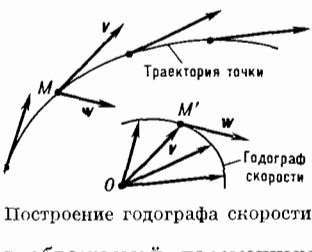
$$\operatorname{prof}_I(M) \geqslant n$$

равносильно тому, что модули локальных когомологий $H^i_I(M)$ равны нулю при $i<n$.

Лит.: [1] Auslander M., Buchsbaum D. A., «Proc., Nat. Acad. Sci. USA», 1956, v. 42, p. 36—38; [2] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5, с. 3—93; [3] Grothendieck A., Cohomologie locale des faisceaux cohcrents, et theoremes de Lefschetz locaux et globaux, B., 1971.

В. И. Данилов.

ГОДОГРАФ вектор-функции $x(t)$ — кривая, представляющая собой множество концов переменного вектора $x(t)$ (t — действительная переменная, напр. время), начало к-рого для всех t есть произвольная фиксированная точка О. Г. дает наглядное геометрич. представление об изменении (с изменением t) величины, изображаемой переменным вектором, и о скорости этого изменения, имеющей направление касательной к Г. Напр., если скорость точки является величиной, изображаемой переменным вектором v, то отложив значения, к-рые имеет вектор v в разные моменты времени, от начала O, получают Г. скорости. При этом величина, характеризующая быстроту изменения скорости в нек-рой точке M, т. е. ускорение w в этой точке, имеет для любого момента времени направление касательной к Г. скорости в соответствующей его точке.



Построение годографа скорости.

ГОДОГРАФА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование нек-рых дифференциальных уравнений математич. физики к линейному виду.

Бернулли интеграл и уравнение неразрывности плоскопараллельного потенциального установившегося движения баротропного газа ($\rho = F(p)$)

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{u^2+v^2}{2\alpha}\right)^{\beta}, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{c^2}{\gamma - 1}, \quad \beta = \frac{1}{\gamma - 1} \quad (c — \text{скорость звука для } \rho = \rho_0)$$

приводят к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{v^2}{2\alpha}\right)^{\beta}u\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1-\frac{v^2}{2\alpha}\right)^{\beta}v\right]=0, \quad (*)$$

к-рое служит для определения потенциала скоростей

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

(u, v — компоненты скорости). Введением новых независимых переменных $\tau=v^2/2\alpha$ и θ, равной углу наклона вектора скорости к оси Ox, уравнение (*) приводится к линейному виду:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}{1-(2\beta+1)\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right]+\frac{(1-\tau)^{\beta}}{2\tau}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0.$$

Это есть первое Г. п., или Чаплыгина преобразование. Второе Г. п. получается применением *Лежандра преобразования* прикосновения. В качестве новой неизвестной выбирается функция

$$\Phi=x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\varphi,$$

выраженная через u, v, к-рые вводятся вместо x, y как новые независимые переменные по формулам:

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Уравнение (*) принимает линейный вид:

$$\left[1-\frac{v^2}{2\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}v^2\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{2\beta}{\alpha}uv\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}+$$
$$+\left[1-\frac{v^2}{2\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}u^2\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}=0.$$

Г. п. применяются при решении задач теории струй и струйного обтекания криволинейных контуров газовым потоком.

Лит.: [1] Чаплыгин С. А., О газовых струях, М.—Л., 1949; [2] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, 4 изд., М., 1963.

Л. Н. Сретенский.

ГОЛОМОРФ ГРУППЫ — понятие теории групп, возникшее в связи с решением следующей задачи. Можно ли включить любую данную группу G в качестве нормальной подгруппы в нек-рую другую группу так, чтобы все автоморфизмы группы G были следствиями внутренних автоморфизмов этой большей группы? Для решения такой задачи строят по группе G и ее группе автоморфизмов $\Phi(G)$ новую группу Γ, элементами к-рой являются пары (g, φ), где $g\in G$, $\varphi\in\Phi(G)$, и в к-рой определяется композиция пар по следующей формуле:

$$(g_1, \varphi_1)(g_2, \varphi_2)=(g_1g_2^{\varphi_1^{-1}}, \varphi_1\varphi_2);$$

здесь $g_2^{\varphi_1^{-1}}$ — образ элемента g_2 при автоморфизме φ_1^{-1}. Группа Γ (или изоморфная ей группа) наз. голоморфом группы G. Множество пар вида (g, ε), где ε — единица группы $\Phi(G)$, составляет подгруппу, изоморфную исходной группе G. Аналогично, пары вида (e, φ), где e — единица группы G, составляют подгруппу, изоморфную группе $\Phi(G)$. Формула показывает, что группа Γ в действительности является решением поставленной задачи.

$$(e, \varphi^{-1})(g, \varepsilon)(e, \varphi)=(g^{\varphi}, \varepsilon)$$

В. Н. Ремесленников.

ГОЛОМОРФНАЯ ФОРМА степени p на комплексном многообразии M — *дифференциальная форма* α типа $(p, 0)$, удовлетворяющая условию $d''\alpha=0$, т. е. форма, к-рая в локальных координатах $z_1, \ldots, z_n$ на M записывается в виде

$$\alpha=\sum\nolimits_{i_1, \ldots, i_p} a_{i_1\ldots i_p}\,dz^{i_1}\wedge\ldots\wedge dz^{i_p},$$

где $a_{i_1\ldots i_p}$ — *голоморфные функции*. Г. ф. степени p образуют векторное пространство $\Omega^p(M)$ над полем $\mathbb{C}$; $\Omega^0(M)$ — это пространство голоморфных функций на M.

На компактном *кэлеровом многообразии* M пространство $\Omega^p(M)$ совпадает с пространством $H^{p,0}(M)$ *гармонических форм* типа $(p, 0)$, откуда следует, что $2\dim\Omega^1(M)$ есть первое число Бетти многообразия [1]. Г. ф. на римановой поверхности M наз. также дифференциалами первого рода; если поверхность M компактна, то $\dim\Omega^1(M)$ равна ее роду.

Пространства $\Omega^p(M)$, $p=0, 1, \ldots, \dim_{\mathbb{C}} M$, образуют локально точный комплекс относительно оператора d, наз. голоморфным комплексом де Рама. Если M — многообразие Штейна (см. *Штейна пространство*), то когомологии этого комплекса изоморфны комплексным когомологиям $H^p(M, \mathbb{C})$ и $H^p(M, \mathbb{C})=0$ при $p>\dim_{\mathbb{C}} M$[2].

Аналогично определяются Г. ф. со значениями в нек-ром *векторном аналитическом расслоении* E над M (голоморфные 0-формы здесь — голоморфные сечения расслоения). Ростки Г. ф. степени p со значениями в E образуют локально свободный аналитич. пучок Ω^p_E. Комплекс Дольбо форм типа (p, q), $q=0, 1, \ldots, \dim_{\mathbb{C}} M$, со значениями в E есть тонкая резольвента этого пучка, откуда

$$H^{p,q}(M, E) \cong H^q(M, \Omega^p_E)$$

(теорема Дольбо — Серра [1], [4]).

Определение Г. ф. можно распространить также на комплексные аналитич. пространства. Достаточно сделать это для локальных моделей, т. е. в случае, когда пространство X является аналитич. подпространством в области $G\subset\mathbb{C}^n$. Пучок ростков голоморфных p-форм Ω^p_X на X определяется как

$$\Omega^p_G/K^p|X,$$

где Ω^p_G — пучок ростков голоморфных p-форм в G, а K^p состоит из ростков форм вида

$$\sum_{k=1}^{r} f_k\alpha_k + \sum_{l=1}^{s} dg_l\wedge\beta_l,$$

$$f_k,\ g_l\in I,\ \alpha_k\in\Omega^p_G,\ \beta_l\in\Omega^{p-1}_G,$$

где I — пучок идеалов, задающий X. Определяется также голоморфный комплекс де Рама пространства X, к-рый, однако, не является локально точным. Для того чтобы этот комплекс был локально точен в точке $x\in X$, начиная с k-й степени, достаточно, чтобы X в окрестности точки x допускало голоморфное стягивание на локальное аналитич. множество $Y\subset X$, для к-рого $\operatorname{emdim}_x Y=k$ (см. [3]).

Лит.: [1] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [2] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [3] Reiffen H.-J., «Math. Z.», 1967, Bd 101, H. 4, S. 269—84; [4] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976.

А. Л. Онищик.

ГОЛОМОРФНАЯ ФУНКЦИЯ — см. *Аналитическая функция.*

ГОЛОМОРФНО ВЫПУКЛОЕ КОМПЛЕКСНОЕ ПРОСТРАНСТВО — комплексное пространство X, удовлетворяющее следующему условию: для любого компакта $K\subset X$ множество

$$\{x\in X: |f(x)| \leqslant \sup_K |f|\ \ (f\in A)\},$$

где A — алгебра голоморфных функций на X, компактно. Пространство X голоморфно выпукло тогда и только тогда, когда оно допускает собственное сюръективное голоморфное отображение φ на нек-рое *Штейна пространство* (голоморфно полное пространство) $\tilde{X}$, индуцирующее изоморфизм между алгебрами голоморфных функций этих пространств. При этом отображение $\varphi: X\to\tilde{X}$ (голоморфная редукция пространства X) определено однозначно и имеет связные слои [1]. Для любого *когерентного аналитиче-*

ского пучка F на Г. в. к. п. X пространства когомологий $H^p(X, F)$ и $H_c^p(X, F)$, $p \geqslant 0$, являются отделимыми векторными топологич. пространствами [2].

Специальный класс Г. в. к. п. составляют комплексные пространства конечного типа, т. е. пространства X, для к-рых отображение голоморфной редукции биективно вне нек-рого компактного аналитич. множества (такое пространство получается из пространства Штейна путем собственной модификации, «раздувающей» конечное число точек). Комплексное пространство является пространством конечного типа тогда и только тогда, когда

$$\dim H^p(X, F) < \infty, \quad p > 0,$$

для любого когерентного аналитич. пучка F на X (см. [3]). Класс пространств конечного типа совпадает также с классом сильно 1-выпуклых комплексных пространств (см. *Псевдовыпуклость и псевдовогнутость*).

Лит.: [1] Комплексные пространства, М., 1965, с. 29—44; [2] Ramis J. P., «Ann. Sc. norm. super. Pisa», 1973, v. 27, p. 933—97; [3] Narasimhan R., «Math. Ann.», 1962, Bd 146, № 3, S. 195—216.

А. Л. Онищик.

ГОЛОМОРФНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение $f: D \to D'$ области $D \subset \mathbb{C}^n$ в область $D' \subset \mathbb{C}^m$, при к-ром

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \longrightarrow (f_1(z), \ldots, f_m(z)),$$

где все координатные функции $f_1, \ldots, f_m$ голоморфны в D. При $m=1$ Г. о. совпадает с голоморфной функцией (см. *Аналитическая функция*).

Г. о. f наз. невырожденным в точке $z \in D$, если ранг якобиевой матрицы $\|\partial f/\partial z\|$ в точке z максимален ($=\min(n, m)$). Г. о. наз. невырожденным в области D, если оно невырождено во всех точках $z \in D$. При $m=n$ невырожденность f эквивалентна условию

$$\det \left\| \frac{\partial f}{\partial z} \right\| \neq 0.$$

При $n=m=1$ невырожденное Г. о. есть конформное отображение. При $n=m \geqslant 2$ невырожденное Г. о., вообще говоря, не сохраняет углов между направлениями. Если Г. о. f невырождено в точке $a \in D$ и $m=n$, то f локально обратимо, т. е. существуют окрестности U, U', $a \in U \subset D$, $f(a) \in U' \subset D'$ и Г. о. $f^{-1}: U' \to U$ такие, что $f^{-1} \cdot f(z) = z$ для всех $z \in U$. Если Г. о. f взаимно однозначно отображает D на $f(D)$ и $m=n$, то f невырождено в D; при $m>n$ это неверно, напр. $z \to (z^2, z^3)$, $D=\mathbb{C}$, $D'=\mathbb{C}^2$. Если $m \leqslant n$ и f невырождено в D, то образ области D тоже является областью в $\mathbb{C}^m$; при $m>1$ принцип сохранения области не выполняется для отображений, вырожденных в нек-рых точках, напр. $(z_1, z_2) \to (z_1, z_1 z_2)$, $D=D'=\mathbb{C}^2$.

Если M и M' — комплексные многообразия, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и $\{(U'_\beta, \varphi'_\beta)\}$ — атласы их локальных систем координат ($\varphi_\alpha : U_\alpha \to D_\alpha \subset \mathbb{C}^n$, $\varphi'_\beta : U'_\beta \to D'_\beta \subset \mathbb{C}^m$ — гомеоморфизмы; см. *Многообразие*), то отображение $f: M \to M'$ наз. голоморфным, если $\varphi'_\beta \cdot f \cdot \varphi_\alpha^{-1}: D_\alpha \to D'_\beta$ есть Г. о. для всех α и β. Аналогично определяются Г. о. комплексных пространств (см. *Аналитическое отображение*). См. также *Биголоморфное отображение*.

Лит.: [1] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969.

Е. Д. Соломенцев, Е. М. Чирка.

ГОЛОМОРФНОСТИ ОБЛАСТЬ — область D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, для к-рой существует функция $f(z)$, голоморфная в D и не продолжаемая голоморфно в бо́льшую область; при этом D наз. естественной областью определения функции $f(z)$. Напр., естественной областью определения функции

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^{k!}$$

служит единичный круг, к-рый поэтому является Г. о.

в $\mathbb{C}^1$. В $\mathbb{C}^1$ всякая область есть Г. о. Напротив, в $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 2$, не всякая область есть Г. о. Так, никакая область вида $D\setminus K$, где K — компакт, содержащийся в D, не будет Г. о.

Область $D\subset\mathbb{C}^n$ наз. голоморфно выпуклой, если для каждого множества $A\Subset D$ существует такое содержащее A множество $F_A\Subset D$, что для любой точки $z_0\in D\setminus F_A$ существует функция $f(z)$, голоморфная в D и такая, что

$$\sup_{z\in A}|f(z)|<|f(z_0)|.$$

Для того чтобы область D была Г. о., необходимо и достаточно, чтобы она была голоморфно выпуклой (теорема Картана — Туллена). Для того чтобы область D была Г. о., необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $z_0\in\partial D$ существовал барьер — функция $f_{z_0}(z)$, голоморфная в D и не продолжимая голоморфно в точку z_0. Напр., если D — произвольная область в $\mathbb{C}^1$, то функция $(z-z_0)^{-1}$ есть барьер в любой точке $z_0\in\partial D$, так что D есть Г. о.; если D — выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ и

$$\operatorname{Re}(a,\ z-z_0)=\operatorname{Re}\sum_{i=1}^n a_i(z_i-z_{0i})=0$$

— опорная плоскость в точке $z_0\in\partial D$, то функция $(a,\ z-z_0)^{-1}$ есть барьер в z_0, и поэтому всякая выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ есть Г. о.

Пересечение Г. о. есть Г. о.; всякое *биголоморфное отображение* переводит Г. о. в Г. о.; сумма возрастающей последовательности Г. о. есть Г. о. (теорема Бенке — Штейна).

Область $D\subset\mathbb{C}^n$ наз. псевдовыпуклой, если функция $-\ln\Delta_D(z)$ есть *плюрисубгармоническая функция* в D, где $\Delta_D(z)$ есть расстояние от точки $z\in D$ до ∂D. Для того чтобы область была Г. о., необходимо и достаточно, чтобы она была псевдовыпуклой (теорема Ока). Достаточность условия в теореме Ока составляет содержание проблемы Леви, поставленной Э. Леви (E. Levi, в 1911). Для $n=2$ она была решена К. Ока (K. Oka, 1942); для $n\geqslant 2$ эта проблема решена независимо К. Ока, Ф. Норгэ, Г. Бремерманом (F. Norguet, H. Bremermann, 1953—1954).

Г. о. с достаточно гладкой границей допускают локальное описание. Область $D\subset\mathbb{C}^n$ наз. псевдовыпуклой в точке $z_0\in\partial D$, если существует такая окрестность V точки z_0 и такая определенная в V действительная функция $\varphi(z)$ класса $\mathbb{C}^2$, что: а) $D\cap V=[z:\varphi(z)<0,\ z\in V]$ и б) на плоскости

$$\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial\varphi(z_0)}{\partial z_i}=0$$

форма Гессе

$$\sum_{i,k=1}^n\frac{\partial^2\varphi(z_0)}{\partial z_i\partial\bar{z}_k}a_i\bar{a}_k\geqslant 0.$$

Если в условии б) имеет место строгое неравенство для всех рассматриваемых векторов $a\neq 0$, то область D наз. строго псевдовыпуклой в точке z_0. Область D наз. (строго) псевдовыпуклой в смысле Леви, если она (строго) псевдовыпукла в каждой точке $z_0\in\partial D$.

Если область строго псевдовыпукла в смысле Леви, то она псевдовыпукла (теорема Леви).

Г. о. функции $f(z)$, заданной в первоначальной окрестности V, может быть построена при помощи разложений в ряды Тейлора с использованием принципа голоморфного продолжения; при этом может оказаться, что в построенной области голоморфно продолженная функция $f(z)$ неоднозначна. Чтобы сделать функцию однозначной, необходимо расширить понятие области. Это достигается путем введения римановых областей (*наложения областей*, неоднолистных областей) над $\mathbb{C}^n$ (римановы области над $\mathbb{C}^1$

наз. *римановыми поверхностями*). Понятие Г. о. распространяется и на римановы области и даже на объекты более общей структуры — комплексные многообразия и комплексные пространства. Обобщение понятия Г. о. приводит к *Штейна пространствам*.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [3] Хёрмандер Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968.

В. С. Владимиров.

ГОЛОМОРФНОСТИ ОБОЛОЧКА (римановой) области D — наибольшая область $H(D)$, обладающая тем свойством, что всякая функция, голоморфная в D, голоморфно продолжается в $H(D)$. Задача построения для данной области D ее Г. о. возникает в связи с тем, что в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, не всякая область есть *голоморфности область*, т. е. существуют такие области, что любая функция, голоморфная в этой области, допускает голоморфное продолжение в более широкую (вообще говоря, неоднолистную) область. Оболочка $H(D)$ есть область голоморфности и если D — область голоморфности, то $H(D)=D$.

В приложениях, в аксиоматической квантовой теории поля, возникает нетривиальная задача о построении Г. о. областей специального вида, отражающих физические требования спектральности, локальной коммутативности и лоренцовой ковариантности. При этом особенно полезными оказываются *Боголюбова теорема* «острие клина» и *непрерывности теоремы*.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1, 2, М., 1976.

В. С. Владимиров.

ГОЛОНОМИИ ГРУППА — одна из характеристик связности в расслоенном пространстве. Г. г. определяется для главного расслоенного многообразия P со структурной группой Ли G и базой B (обладающей счетным базисом), в к-ром задана инфинитезимальная связность Г. Одновременно она определяется для любого присоединенного к P расслоенного многообразия E, слоями к-рого являются экземпляры нек-рого пространства F представления группы Ли G.

Связность Г в P (соответственно в E) определяет для любой кусочно гладкой кривой L базы B изоморфное отображение ΓL друг на друга слоев, соответствующих началу и концу кривой L. Каждой кусочно гладкой замкнутой кривой L базы B, начинающейся и оканчивающейся в точке $x \in B$, соответствует автоморфизм слоя G_x (соответственно F_x) над точкой x. Множество этих автоморфизмов образует группу Ли Φ_x, которая наз. группой голономии связности Г в точке x.

Если база (линейно) связна, то Φ_x и $\Phi_{x'}$ изоморфны между собой для любых x и x' в B. Поэтому можно говорить о группе голономии Φ линейно связного многообразия P (или E) со связностью Г.

Г. г. Φ_x является подгруппой структурной группы G. В случае линейной связности в P эту подгруппу можно определить непосредственно. Пусть задана точка $p \in P$ в слое G_x над точкой x. Совокупность элементов $g \in G$ таких, что точки p и pg^{-1} соединимы горизонтальными кривыми в P, образует подгруппу Φ_p группы G, изоморфную Φ_x.

Ограниченной (суженной) Г. г. Φ_x^0 наз. подгруппа Г. г. Φ_x, порожденная замкнутыми кривыми, гомотопными нулю. Она совпадает с линейно связной компонентой единичного элемента Г. г. Φ_x, при этом Φ/Φ^0 не более чем счетно.

Роль Г. г. в дифференциальной геометрии расслоенных пространств выясняют следующие теоремы о линейных связностях в P.

Теорема о приведении связности. Пусть $P(B, G)$ — главное расслоенное пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности; Ф — Г. г. заданной в P связности Г. Тогда структурная группа G приводима к своей подгруппе Ф, а связность Г приводима к связности в приведенном расслоении $P'(B, Ф)$, Г. г. к-рого совпадает с Ф.

Теорема о голономии. Алгебра голономии (алгебра ограниченной Г. г.) является подалгеброй алгебры G, порожденной всеми векторами $\Omega_y(Y, Y')$, где Ω_y — форма кривизны в точке y, y пробегает множество, каждая точка к-рого может быть соединена с исходной точкой y_0 горизонтальным путем, Y и Y' — произвольные горизонтальные векторы.

Лит.: [1] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [2] Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967; [3] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970.

Г. Ф. Лаптев.

ГОЛОНОМНАЯ СИСТЕМА — система материальных точек, либо не стесненная никакими связями, либо стесненная только геометрич. связями, накладывающими ограничения на положения точек системы и могущими быть представленными в форме конечных соотношений вида

$$f_s(x_1, \ldots, x_{3N}, t) = 0, \; s = 1, \ldots, k; \; f_s(x, t) \in C^2. \quad (1)$$

Здесь t обозначает время, x_i — декартовы координаты точек, N — число точек системы. Если $\partial f_s/\partial t \equiv 0$, то связи наз. стационарными, в противном случае — нестационарными. Всякое положение системы, для к-рого координаты точек удовлетворяют уравнениям (1), наз. возможным для данного момента t. Связи (1) налагают ограничения не только на положения x_ν, но и на скорости v_ν и ускорения w_ν точек вида

$$\frac{df_s}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \operatorname{grad} f_s \cdot v_\nu + \frac{\partial f_s}{\partial t} = 0,$$
$$\frac{d^2 f_s}{dt^2} = \sum_{\nu=1}^{N} \operatorname{grad} f_s \cdot w_\nu + \ldots = 0. \quad (2)$$

Скорости и ускорения, удовлетворяющие уравнениям (2), наз. кинематически возможными в данном положении x_ν системы для данного момента t. Бесконечно малые перемещения δr_ν, удовлетворяющие условиям вида

$$\sum_{\nu=1}^{N} \operatorname{grad} f_s \cdot \delta r_\nu = 0, \quad s = 1, \ldots, k, \quad (3)$$

представляют собою возможные (виртуальные) перемещения системы, в отличие от действительных перемещений dr_ν, совершаемых системой за время dt под действием приложенных к ней сил и удовлетворяющих условиям вида

$$\sum_{\nu=1}^{N} \operatorname{grad} f_s \cdot dr_\nu + \frac{\partial f_s}{\partial t} dt = 0, \quad s = 1, \ldots, k. \quad (4)$$

Для стационарных связей действительные перемещения находятся среди возможных, для нестационарных — вообще говоря, не находятся. Возможные перемещения способны перевести голономную систему из одного возможного для данного t положения системы в любое другое бесконечно близкое положение, возможное для того же момента t.

Число независимых вариаций координат точек системы наз. числом ее степеней свободы, для голономной системы оно совпадает с числом $n = 3N - k$ независимых произвольных параметров q_i, с помощью к-рых уравнения (1) связей можно представить в форме конечных соотношений вида

$$x_\nu = x_\nu(q_1, \ldots, q_n, t), \; \nu = 1, \ldots, 3N, \; x_\nu(q, t) \in C^2. \quad (5)$$

Параметры q_i носят название о б о б щ е н н ы х, или л а г р а н ж е в ы х к о о р д и н а т системы; их называют также г о л о н о м н ы м и к о о р д и н а т а м и, в отличие от н е г о л о н о м н ы х к о о р д и н а т, или к в а з и к о о р д и н а т π_s, вводимых неинтегрируемыми соотношениями вида

$$d\pi_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si}\,dq_i, \quad a_{si}(q_i,\ t) \in C^1. \tag{6}$$

Связи, аналитически выражаемые уравнениями (1), носят название у д е р ж и в а ю щ и х, или д в у с т о р о н н и х с в я з е й, в отличие от н е у д е р ж и в а ю щ и х, или о д н о с т о р о н н и х с в я з е й, выражаемых неравенствами вида

$$f(x,\ t) \geqslant 0,$$

и накладывающих следующие условия на возможные перемещения

$$\sum_{\nu=1}^{N} \operatorname{grad} f_s \cdot \delta r_\nu \geqslant 0.$$

Возможные перемещения системы с двусторонними связями обратимы, среди возможных перемещений систем с односторонними связями имеются необратимые (см. [1]).

Движения голономных систем описываются *Лагранжа уравнениями* (1-го и 2-го рода), *Гамильтона уравнениями* в лагранжевых координатах и импульсах, *Аппеля уравнениями*, *Пуанкаре уравнениями* или *Четаева уравнениями* в лагранжевых координатах и квазикоординатах.

Лит.: [1] С у с л о в Г. К., Теоретическая механика, 3 изд., М., 1944.

В. В. Румянцев.

ГОЛУБЕВА — ПРИВАЛОВА ТЕОРЕМА: если $f(z)$ — комплексная суммируемая функция на замкнутой спрямляемой жордановой кривой L, расположенной в плоскости комплексного переменного z, то для существования регулярной во внутренней области D, ограниченной кривой L, функции $F(z)$, угловые граничные значения к-рой совпадают с $f(z)$ почти всюду на L, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_L z^n f(z)\,dz = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Эти условия наз. у с л о в и я м и Г о л у б е в а — П р и в а л о в а. В. В. Голубевым [1] доказана их достаточность, а И. И. Приваловым [2] — необходимость. Иначе говоря, условия (1) необходимы и достаточны для того, чтобы интеграл типа Коши — Лебега (см. *Коши интеграл*) $F(z)$, построенный для функции $f(z)$ и кривой L:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D,$$

обращался в интеграл Коши — Лебега.

В более общей постановке, пусть μ — комплексная борелевская мера на L. Тогда, для того чтобы интеграл типа Коши — Стилтьеса

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}, \quad z \in D,$$

обращался в интеграл Коши — Стилтьеса, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись о б о б щ е н н ы е у с л о в и я Г о л у б е в а — П р и в а л о в а

$$\int z^n\,d\mu(z) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Иначе говоря, условия (2) необходимы и достаточны для существования регулярной в D функции $F(z)$ такой, что ее угловые граничные значения почти всюду по мере Лебега на L совпадают с

$$e^{-i\varphi(z)}\mu'(z),$$

где $\varphi(z)$ — угол между положительным направлением оси абсцисс и касательной к L в точке $z \in L$, $\mu'(z)$ — производная меры μ по мере Лебега s (длина дуги) на L.

Г.— П. т. имеет важное значение в теории *граничных свойств аналитических функций.*

Лит.: [1] Голубев В. В., Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек, М., 1916 (см. также его кн.: Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции, М., 1961); [2] Привалов И. И., Интеграл Cauchy, Саратов, 1918; [3] его же, Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950.

Е. Д. Соломенцев.

ГОЛЬДБАХА ПРОБЛЕМА — одна из известных проблем теории чисел; заключается в доказательстве того, что всякое целое число, большее или равное шести, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел. Эту проблему выдвинул в 1742 Х. Гольдбах (Ch. Goldbach) в письме к Л. Эйлеру (L. Euler). В ответ Л. Эйлер заметил, что для решения проблемы достаточно доказать, что каждое четное число есть сумма двух простых. В течение долгого времени не удавалось найти никаких путей исследования Г. п. В 1923 Г. Харди и Дж. Литлвуду (G. Hardy, J. Littlewood) удалось показать, что если верны нек-рые теоремы (не доказанные и ныне) относительно L-рядов Дирихле, то всякое достаточно большое нечетное число есть сумма трех простых чисел. В 1937 И. М. Виноградов создал новый метод в аналитич. теории чисел — метод оценок тригонометрич. сумм с простыми числами, с помощью к-рого доказал асимптотич. формулу для количества представлений нечетного числа суммой трех простых чисел. Из этой формулы следует, что каждое достаточно большое нечетное число есть сумма трех простых чисел. Это — одно из крупнейших достижений современной математики. Метод И. М. Виноградова позволил решить и ряд существенно более общих задач. Задача о разбиении четного числа на сумму двух простых еще (1977) не решена.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [2] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, М., 1975. *А. А. Карацуба.*

ГОЛЬДБАХА — ВАРИНГА ПРОБЛЕМА — задача о поведении числа $I_k(N)$ решений уравнения

$$p_1^n + \ldots + p_k^n = N,$$

где $p_1, \ldots, p_k$ — простые числа, $n \geqslant 1$ (см. *Варинга проблема*, *Гольдбаха проблема*). В этой проблеме получены (к 1977) примерно те же результаты, что и в проблеме Варинга: разрешимость этого уравнения (т. е. неравенство $I_k(N) > 0$) доказана при $k = O(n \log n)$, а асимптотич. формула для $I_k(N)$ получена при $k = O(n^2 \log n)$. Указанные решения получены *Виноградова методом.*

Лит.: [1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [2] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964. *А. А. Карацуба.*

ГОМЕОМОРФИЗМ — взаимно однозначное соответствие между двумя топологич. пространствами, при к-ром оба взаимно обратных отображения, определяемые этим соответствием, непрерывны. Эти отображения наз. гомеоморфными, или топологическими, отображениями, а также гомеоморфизмами, а о пространствах говорят, что они принадлежат одному топологическому типу или наз. гомеоморфными, или топологически эквивалентными. Они являются изоморфными объектами в категории топологич. пространств и непрерывных отображений. Следует отличать Г. от уплотнения (в к-ром непрерывность обязательна только в одну сторону); однако уплотнение бикомпакта на хаусдорфово пространство является Г.

Примеры. 1) Функция $1/(e^x+1)$ устанавливает Г. между числовой прямой $\mathbb{R}$ и интервалом $(0, 1)$; 2) замкнутый круг гомеоморфен любому замкнутому выпуклому многоугольнику; 3) трехмерное проективное пространство гомеоморфно группе вращений про-

странства $\mathbb{R}^3$ вокруг начала и также пространству единичных касательных векторов к сфере S^2; 4) все бикомпактные нульмерные группы со счетной базой гомеоморфны канторову множеству; 5) бесконечномерные и сепарабельные банаховы пространства и даже пространства Фреше гомеоморфны между собой; 6) сфера и тор негомеоморфны.

Термин «Г.» был введен А. Пуанкаре (H. Poincaré) в 1895 (см. [3]) в применении к (кусочно) дифференцируемым отображениям областей и подмногообразий пространства $\mathbb{R}^n$; однако понятие было известно и ранее, напр. Ф. Клейну (F. Klein; 1872) и в рудиментарной форме А. Мёбиусу (A. Möbius — элементарное сродство, 1863). В начале 20 в. под влиянием развития теории множеств и аксиоматич. метода началось изучение Г. без предположений дифференцируемости. Такая задача, в явной форме впервые поставленная Д. Гильбертом (D. Hilbert) (см. [7], с. 31), составляет содержание пятой проблемы Гильберта. Особое значение имело установление Л. Брауэром (L. Brouwer) негомеоморфности $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ при $n \neq m$. Этим была восстановлена вера математиков в геометрич. интуицию, поколебленная результатами Г. Кантора (G. Kantor) о равномощности $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ и Дж. Пеано (G. Peano) о возможности непрерывного отображения $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^m$, $n < m$. Введенные М. Фреше (M. Fréchet) и Ф. Хаусдорфом (F. Hausdorf) понятия метрического (соответственно топологического) пространства поставили на прочный фундамент понятие Г. и позволили сформулировать понятия *топологического свойства* (свойства, не меняющегося при Г.), *топологической инвариантности* и т. п. и сформулировать задачу классификации топологич. пространств тех или иных типов с точностью до Г. В такой постановке эта задача, однако, чрезвычайно сложна уже для очень узких классов пространств. Кроме классич. случая двумерных многообразий, классификация указана лишь для нек-рых видов графов, для двумерных полиэдров, для нек-рых классов многообразий. Алгоритмически проблема классификации в общем виде вообще неразрешима, так как невозможен алгоритм для различения, напр., многообразий размерности больше 3. Поэтому обычно задача о классификации ставится в рамках более слабого отношения эквивалентности, напр. в алгебраич. топологии для *гомотопического типа* или, наоборот, для классификации пространств, снабженных какой-либо структурой. В этом случае вопрос о Г. остается все же очень важным. В топологии многообразий лишь в конце 60-х гг. разработаны методы, позволяющие изучать многообразия с точностью до Г. При этом изучение проводится здесь в тесной связи гомотопической, топологической, кусочно линейной и гладкой структур.

Другая проблема состоит в *топологической характеризации* отдельных пространств и классов пространств (т. е. их указания характеристических топологич. свойств, формулируемых на языке аксиом топологии). Она решена, напр., для одномерных многообразий, двумерных многообразий, канторова множества, кривой Серпинского, кривой Менгера, псевдодуги, пространства Бэра и др. Универсальный метод для топологич. характеризации пространств дают спектры. С их помощью получена теорема Александрова о Г. (см. [4]). Последовательностью измельчающихся подразделений охарактеризована сфера и вообще класс локально евклидовых пространств (см. [5]). Посредством спектров дано описание локально бикомпактных групп (см. [6]). Другой метод состоит в рассмотрении различных алгебраич. структур, связанных с отображениями. Так, бикомпактное пространство совпадает с пространством максимальных идеалов алгебры действительных функций, заданных на нем.

Многие пространства характеризуются полугруппой непрерывных отображений в себя (см. *Гомеоморфизмов группа*). В общей топологии дается топологич. описание многих классов топологич. пространств. Представляет интерес также характеризация пространств внутри данного класса. Напр., очень полезно описание сферы как компактного многообразия, покрытого двумя открытыми клетками. Мало разработан вопрос об алгоритмич. распознавании пространств. Напр., он не решен (к 1977) для сферы S^n при $n \geqslant 3$.

Вообще, если два топологич. пространства негомеоморфны, то этот факт устанавливается указанием топологич. свойства, к-рым обладает лишь одно из них (компактность, связность и т. д.; напр., отрезок отличается от окружности тем, что он может быть разбит точкой); особое значение имеет здесь метод инвариантов. Инварианты определяются или аксиоматич. путем сразу для целого класса пространств, или алгоритмически, по конкретному представлению пространства, напр. по *триангуляции*, *Хегора диаграмме*, разложению на *ручки* и т. д. В первом случае возникает задача вычисления инварианта, во втором — доказательства топологич. инвариантности. Возможен и промежуточный случай, напр. *характеристические классы* гладких многообразий определялись сначала как препятствия к построению векторных и реперных полей, а затем стали определяться как образ касательного расслоения при преобразовании *KO*-функтора в когомологич. функтор, но в обоих случаях обе указанные задачи не решаются определением. Исторически первый пример доказательства топологич. инвариантности, именно, линейной размерности $\mathbb{R}^n$, дал Л. Брауэр (1912). Классический идущий от А. Пуанкаре метод состоит в том, чтобы дать сразу два определения: «вычислимое» и «инвариантное», и затем доказывать их совпадение. Этот прием оказался особенно успешным в теории *гомологий полиэдров*. Другой метод состоит в том, чтобы доказать, что инвариант не меняется при элементарных преобразованиях представления пространства (напр., подразделениях триангуляций). Он достигает цели, если известно, что таким образом можно получить все представления данного типа. В связи с этим, напр., в топологии полиэдра возникла т.н. основная гипотеза комбинаторной топологии. Этот метод (также идущий от А. Пуанкаре) оказался очень полезным в топологии двух и трех измерений, в частности в *узлов теории*, но он выходит из употребления (если не считать конструктивного направления) не столько в связи с тем, что указанная гипотеза оказалась неверной, сколько потому, что развитие теории категорий позволило давать определения, более отвечающие существу дела с более четкой постановкой задачи о вычислении и топологич. инвариантности. Так, инвариантность гомологий, определенных функториальным, но вычислимым образом для комплексов, следует из сравнения категорий комплексов и гомотопич. классов симплициальных отображений с категорией гомотопич. классов непрерывных отображений, что позволяет не давать отдельного определения для большей категории, а распространить его с меньшей. (Истоки этой идеи содержатся в теории степени Брауэра.) Особенно ярко преимущество нового метода проявилось в связи с указанным выше вторым определением характеристич. классов как преобразований функторов. Так, напр., вопрос о топологич. инвариантности естественным образом оказался частью вопроса о соотношении между K-функтором и его топологич. обобщением.

Если два пространства гомеоморфны, то для установления Г. общее значение имеет лишь метод спектров (и измельчающихся подразделений). С другой стороны, в том случае, когда построена классификация, вопрос решается сравнением инвариантов. На практике установление Г. часто оказывается очень трудной геометрич.

задачей, к-рую приходится решать специальными средствами. Так, Г. евклидова пространства и нек-рых его факторпространств устанавливается с помощью псевдоизотопии.

Лит.: [1] Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, пер. с нем., 2 изд., М.—Л., 1951; [2] Болтянский В. Г., Ефремович В. А., «Матем. просвещение», 1957, вып. 2; [3] Пуанкаре А., Собр. соч., пер. с франц., т. 2, М., 1972; [4] Александров П. С., «Тр. Матем. ин-та. АН СССР», 1959, т. 54, с. 1—136; [5] Harrold O. G., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 118, № 6, p. 1—16; [6] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [7] Проблемы Гильберта, М., 1969. *А. В. Чернавский.*

ГОМЕОМОРФИЗМОВ ГРУППА — группа $\mathfrak{M}(X)$ гомеоморфных отображений топологич. пространства X на себя. Если X — компактное многообразие, то алгебраич. свойства группы $\mathfrak{M}(X)$, а именно, структура ее нормальных делителей, определяют X с точностью до гомеоморфизма (см. [1]). В частности, при $n\neq 4$ известно, что группа $\mathfrak{M}(S^n)$ есть простая группа. Это верно также для канторова множества, кривой Менгера, кривой Серпинского, множеств рациональных и иррациональных точек на прямой [2]. Для многообразия M минимальным нормальным делителем в $\mathfrak{M}(M)$ служит подгруппа, порожденная гомеоморфизмами, тождественными вне областей M.

Группа $\mathfrak{M}(X)$ может быть топологизирована различным образом (см. *Пространства отображений*). Основное значение имеют *бикомпактно открытая топология* и (если X метризуемо) тонкая C^0-топология, в к-рой окрестности тождества O_f задаются строго положительными функциями $f: X\to(0, \infty)$, причем $h\in\mathfrak{M}(X)$ входит в O_f, если $\rho(hx, x)<f(x)$ для всех x, где ρ — метрика в X. Однако группа $\mathfrak{M}(X)$ не обязана быть топологической группой в этих топологиях, так как отображение $h\to h^{-1}$ не всегда непрерывно, и даже если это так, то $\mathfrak{M}(X)$ может не быть топологич. группой преобразований, т. е. отображение $(h, x)\to hx$ может быть разрывным (см. [3]). Но если X — многообразие, то $\mathfrak{M}(X)$ является топологич. группой преобразований в обеих указанных топологиях. Изучение топологич. свойств группы $\mathfrak{M}(X)$ представляет интерес, в первую очередь, для однородного пространства X, т. е. такого, что действие группы $\mathfrak{M}(X)$ на X транзитивно. Однако такое изучение проведено далеко не полностью даже для простых многообразий. Неизвестно, напр. (к 1977), будет ли $\mathfrak{M}(X)$ бесконечномерным многообразием, хотя оно будет (для метризуемого многообразия) локально стягиваемым в тонкой C^0-топологии (см. [4]). В частности, два достаточно близких гомеоморфизма соединимы *изотопией*. Для открытых многообразий, к-рые являются внутренностью компактных многообразий, это верно также и в бикомпактно открытой топологии.

Факторгруппа $\Gamma(X)$ группы $\mathfrak{M}(X)$ по компоненте тождества $\mathfrak{M}_0(X)$ наз. группой гомеотопий пространства X. Вообще говоря, $\mathfrak{M}_0(X)$ не совпадает с Г. г., гомотопных тождеству, но это так для двумерных и нек-рых трехмерных многообразий (напр., для S^3, $S^2\times S^1$ и др.). Гомотопич. свойства $\mathfrak{M}_0$ изучены для двумерных многообразий, что оказалось полезным для установления гомологич. свойств групп кос (см. *Кос теория*).

Особое значение в топологии многообразий имеет изучение нек-рых подгрупп группы $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$, напр. подгруппы диффеоморфизмов. Это изучение затруднено тем, что подгруппы оказываются незамкнутыми, и топология факторпространств неудовлетворительна. Ввиду этого рассматривают полусимплициальные группы (*ss*-группы) Top_n, в к-рых k-мерными симплексами служат послойные гомеоморфизмы $\Delta^k\times\mathbb{R}^n$, неподвижные на нулевом сечении (где Δ^k — стандартный k-симплекс). Граничные гомеоморфизмы и вырождения определяются с помощью стандартных отображений

$\Delta^l \times \mathbb{R}^n \to \Delta^l \times \mathbb{R}^n$. Аналогично определяются *ss*-**моноид** G_n *ss*-группы PL_n, Diff_n, O_n (гомотопич. эквивалентностей S^{n-1} кусочно линейных, гладких и ортогональных отображений $\mathbb{R}^n$), причем

$$G_n \supset \mathrm{Top}_n \supset PL_n \supset \mathrm{Diff}_n \supset O_n,$$

и факторы G_n/Top_n и т. д. обладают естественными структурами *ss*-комплексов, что позволяет проводить изучение гомотопич. свойств этих вложений.

Изучение различных подгрупп $\mathfrak{M}(M)$ для многообразий M составляет предмет ряда дисциплин. В частности, изучение Г. г., сохраняющих определенные структуры, относится к соответствующим разделам математики. Большой интерес представляют алгебраич. задачи, связанные с группами автоморфизмов деревьев и других графов.

Лит.: [1] Whittaker J. V., «Ann. Math.», 1963, v. 78, № 1, p. 74—91; [2] Anderson R. D., «Amer. J. Math.», 1958, v. 80, № 4, p. 955—63; [3] Arens R. F., «Amer. J. Math.», 1946, v. 68, № 4, p. 593—610; [4] Чернавский А. В., «Матем. сб.», 1969, т. 79, № 3, с. 307—56.

А. В. Чернавский.

ГОМОКЛИНИЧЕСКАЯ ТОЧКА — такая точка ($p=p^*$, $q=q^*$), принадлежащая области определения функции Гамильтона $H=H(p, q)$ *гамильтоновой системы*

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p=(p_1, p_2), \ q=(q_1, q_2), \quad (*)$$

что решение системы (*), проходящее через эту точку, при $t \to \pm\infty$ асимптотически приближается к нек-рому периодич. решению T_1. При этом само решение, проходящее через Г. т., наз. гомоклиническим.

Пусть S_+ — поверхность, образованная решениями системы (*), к-рые при $t \to \infty$ асимптотически приближаются к периодич. решению T_1, а S_- — поверхность, образованная решениями системы (*), к-рые асимптотически приближаются к этому же периодич. решению при $t \to -\infty$. Тогда множество $S_0 = S_+ \cap S_-$ состоит из гомоклинич. решений. Если хотя бы вдоль одного гомоклинич. решения поверхности S_+ и S_- пересекаются (или имеют касание нечетного порядка), то множество S_0 содержит бесконечно много различных решений. Случай, когда множество S_0 состоит из счетного числа решений, является грубым, т. е. сохраняется при малом изменении функции H. Случай, когда S_0 содержит несчетное число различных решений, является негрубым, или вырожденным. При этом предполагается, что само периодич. решение T_1 и поверхности S_+, S_- сохраняются при малом изменении функции H. Это будет иметь место, напр., если периодич. решение T_1 принадлежит к гиперболич. типу (см. *Гиперболическая точка*).

Нахождение гомоклинич. решений системы (*) с произвольной функцией Гамильтона H представляет собой трудную задачу. Однако в случае, когда переменные (p, q) можно выбрать так, что справедливо равенство

$$H = H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q),$$

где ε — малый параметр, а функция H_1 является 2π-периодической по переменным q, гомоклинич. решения системы (*) могут быть найдены в виде сходящихся рядов (см. [3] при ст. *Гетероклиническая точка*). Доказательства существования гомоклинич. решений у системы (*) получены при менее ограничительных предположениях о функции Гамильтона системы (*).

Данное выше определение Г. т. почти дословно переносится на случай гамильтоновой системы с числом степеней свободы $n>2$, если периодич. решение T_1 заменить k-мерным инвариантным тором T_k, $0<k<n$. Известно, что $(n-1)$-мерные инвариантные торы обладают гомоклинич. решениями, если эти торы принадлежат к гиперболич. типу.

Окрестность гомоклинич. решения имеет сложное строение. Так, напр., в случае системы (*) доказано,

что в окрестности гомоклинич. решения существует счетное число периодич. решений со сколь угодно большими периодами. При этом любые два из них можно соединить гетероклинич. решением. Гомоклинич. решения играют важную роль в общей теории гладких динамич. систем.

Лит.: [1] Пуанкаре А., Новые методы небесной механики, Избр. тр., т. 1, 2, М., 1971; [2] Takens F., «Inventions math.», 1972, v. 18, p. 267—92; [3] Мельников В. К., «Докл. АН СССР», 1973, т. 211, № 5, с. 1053—56; [4] Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику, пер. с англ., М., 1975.

См. также лит. при ст. *Гетероклиническая точка.*

В. К. Мельников.

ГОМОЛОГИИ БАЗА (комплекса или топологического пространства) по данной группе коэффициентов — система *циклов* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, удовлетворяющая свойствам: никакая нетривиальная линейная комбинация их не гомологична нулю; всякий цикл гомологичен их нек-рой линейной комбинации.

А. А. Мальцев.

ГОМОЛОГИИ ГРУППА топологического пространства — группа, которая ставится в соответствие топологич. пространству с целью алгебраич. исследования его топологич. свойств; это соответствие должно удовлетворять определенным условиям, важнейшими из к-рых являются *Стинрода — Эйленберга аксиомы* (см. также *Гомологии теория*). Первоначально Г. г. были построены исходя из идей А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1895) для полиэдров на основе их триангуляции — представления в виде симплициального комплекса (см. *Гомологии полиэдра*). Впоследствии для обобщения понятия гомологии и расширения области ее применения были созданы несколько теорий гомологии произвольных пространств, в к-рых понятие комплекса всегда используется, но в более сложной ситуации, чем в случае триангуляции. Из этих теорий две являются основными: сингулярная и спектральная. Первая строится исходя из отображений полиэдров в данные пространства и преимущественно приложима к вопросам, в к-рых полиэдры отображаются в произвольные пространства, а вторая основана на отображении любых пространств в полиэдры и особенно полезна в приложениях, в которых встречаются такие отображения.

Идея *сингулярных гомологий* восходит к О. Веблену (O. Veblen, 1921), к-рый в основу определения гомологии пространства положил системы, состоящие из полиэдров, их непрерывных отображений в данное пространство и их гомологий. Эта идея породила две теории. Непосредственное ее развитие привело к группе непрерывных классов гомологии. Более удобной, из-за того что Г. г. определяются из групп цепей, оказалась собственно сингулярная Г. г., определенная С. Лефшецем (S. Lefschetz, 1933) и сводящаяся к отображениям ориентированных симплексов в данное пространство; дальнейшее развитие этой теории привело к рассмотрению упорядоченных симплексов вместо ориентированных (С. Эйленберг, S. Eilenberg, 1944) и к кубич. гомологиям вместо симплексов, использующих кубы (Ж. П. Серр, J. P. Serre, 1951). Все указанные разновидности сингулярных Г. г. изоморфны между собой при очень общих условиях.

Спектральные гомологии, основанные на гомологиях нервов покрытий пространства, связанных в спектр естественными симплициальными отображениями нервов, введены П. С. Александровым (1925—28), рассматривавшим сначала компактные метрич. пространства и последовательности нервов конечных покрытий. Эта теория была распространена на произвольные пространства при помощи произвольных систем нервов открытых покрытий Э. Чехом (E. Čech, 1932), к-рый также опирался на конечные покрытия, что в случае некомпактных пространств не всегда пригодно. Поэто-

му с середины 40-х гг. стали пользоваться бесконечными покрытиями. Введенная Г. г. наз. группой Александрова — Чеха (см. *Александрова — Чеха гомологии и когомологии*). Другое определение Г. г. для компактных метрич. пространств, основанное на предельных процессах, дано Л. Вьеторисом (L. Vietoris, 1927) (см. *Вьеториса гомологии*). Для произвольных пространств определение группы гомологий Вьеториса опирается на рассмотрение вложенных друг в друга комплексов покрытий (так наз. в ь е т о р и с и а н о в), симплексами к-рых являются конечные системы точек пространства, принадлежащие одному и тому же элементу покрытия. В 1935 А. Н. Колмогоровым и Дж. Александером (J. Alexander) независимо было дано построение групп когомологии, основанное на коцепях, являющихся функциями упорядоченных совокупностей точек пространства. А. Н. Колмогоровым было дано и построение Г. г., основанное на функциях множеств и двойственное предыдущему; эта Г. г. при любой группе коэффициентов изоморфна группе гомологий Стинрода (см. *Стинрода двойственность*), а при компактной группе коэффициентов — группе гомологий Александрова — Чеха. Группа гомологий Александрова — Чеха и группа гомологий Вьеториса изоморфны. Группа гомологий Вьеториса и группа когомологий Александера — Колмогорова, являясь обратным и прямым пределами соответственно двойственных спектров, заданных на одном и том же спектре вьеторисианов, двойственны одна другой. Смотря по тому, какие берутся Г. г. на нервах и вьеторисианах при построении соответствующих спектральных Г. г., получают две их разновидности — проекционную и спектровую. В проекционном случае за указанные группы берутся Г. г. цепного комплекса, являющегося пределом цепных комплексов конечных подкомплексов нервов и, соответственно, вьеторисианов, в спектровом случае — пределы Г. г. указанных подкомплексов; в случае дискретной группы коэффициентов эти группы изоморфны; для групп когомологии — двойственно.

Сингулярная и спектральная теории изоморфны в случае паракомпактных, хаусдорфовых, гомологически локально связных пространств; последнее означает, что для данной окрестности каждой точки найдется меньшая окрестность, образ сингулярной Г. г. к-рой в Г. г. данной окрестности при гомоморфизме вложения тривиален (для целочисленных Г. г. всех размерностей; в случае размерности 0 имеются в виду приведенные группы); иначе говоря, это означает, что каждая точка жестко вложена в пространство. Такими являются, напр., локально стягиваемые пространства, в частности полиэдры.

Свойства, отличающие эти теории друг от друга следующие. Сингулярная (но не спектральная) теория обладает свойством точности гомологич. последовательности и является *гомологией с компактными носителями*. Спектральная теория гомологии — точна в случае, когда она задана на категории компактных пар пространств и когда группа коэффициентов компактна. Она и была разработана впервые именно в этом случае. Спектральная (но не сингулярная) теория обладает с в о й с т в о м н е п р е р ы в н о с т и, т. е. если данная компактная пара является обратным пределом спектра нек-рых компактных пар, то Г. г. данной пары есть предел спектра Г. г. этих пар, и с в о й с т в о м ж е с т к о с т и, т. е. Г. г. подпространства — предел спектра Г. г. его окрестностей. Эти теории отличаются также по свойствам вырезания. Сингулярная теория является единственной гомологич. теорией с данной группой коэффициентов на категории CW-комплексов со с в о й с т в о м а д д и т и в н о с т и, состоящем в том, что Г. г. топологич. суммы пространств есть прямая сумма Г. г. слагаемых. Спектральная теория —

единственная частично точная теория гомологии на категории компактных пар со свойством непрерывности.

Из многочисленных других Г. г. и групп когомологий и их обобщений следует указать на экстраординарные теории Г. г., к-рые строятся методами гомологич. алгебры, Г. г. и когомологий с коэффициентами в пучках, гомологии с локальными коэффициентами, Г. г. спектрального типа, обладающие точной гомологич. последовательностью, Г. г. по модулю различных особых подпространств.

Лит.: [1] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [2] Хилтон П.-Дж., Уайли С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, пер. с англ., М., 1966; [3] Александров П. С., «Матем. сб.», 1947, т. 21, в. 2, с. 161—232; [4] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1942, т. 6, с. 227—82; [5] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [6] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [7] Bredon G., Theory of sheaves, N.—Y., 1970; [8] Телеман К., Элементы топологии и дифференцируемые многообразия, пер. с нем., М., 1967; [9] Switzer R., Algebraic Topology — Homotopy and Homology, B., 1975.

Г. С. Чогошвили.

ГОМОЛОГИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, когомологии динамической системы, — один из инвариантов в *эргодической теории*, построение к-рого напоминает построение когомологий группы (см. [1]). В простейшем случае одномерных (ко)гомологий $H^1(T, X)$ каскада, получающегося итерированием автоморфизма T пространства с мерой X, определение эквивалентно следующему. Пусть $Z(X)$ — группа по сложению всех измеримых функций на X (соответственно группа по умножению измеримых функций f, для к-рых $|f(x)|=1$ почти всюду). Аддитивной (соответственно мультипликативной) (ко)границей функции f наз. функция $g(x)=f(Tx)-f(x)$ (соответственно $g(x)=f(Tx)/f(x)$). Обозначая совокупность всех (ко)границ через $B(T, X)$, можно определить аддитивную (соответственно мультипликативную) группу (ко)гомологий $H^1(T, X)$ как факторгруппу $Z(X)/B(T, X)$. Вместо всех измеримых функций могут рассматриваться и более узкие классы функций. Г. д. с. являются инвариантами траекторного изоморфизма (подробности для H^1 см. в [2]).

Пока (к 1977) Г. д. с. не вычислены ни в одном нетривиальном примере. Использование «гомологических» понятий в эргодич. теории определяется тем, что в различных конкретных случаях бывает важно знать (и иногда действительно удается выяснить), является ли та или иная определенная функция кограницей.

Лит.: [1] Кириллов А. А., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, № 5, с. 67—80; [2] Степин А. М., «Функциональн. анализ и его приложения», 1971, т. 5, № 2, с. 91—2.

Д. В. Аносов.

ГОМОЛОГИИ КОМПЛЕКСА — исходное понятие для различных гомологич. конструкций. Пусть A — абелева категория и $K.=(K_n, d_n)$ — цепной комплекс в категории A, т. е. семейство объектов $(K_n)_{n\in Z}$ категории A и таких морфизмов $d_n: K_n\to K_{n-1}$, что $d_{n-1}\circ d_n=0$ для всех $n\in Z$. Факторобъекты $\mathrm{Ker}d_n/\mathrm{Im}d_{n+1}$ наз. n-ми гомологиями комплекса $K.$ и обозначаются $H_n(K.)$. Семейство $(H_n(K.))_{n\in Z}$ обозначается также через $H.(K.)$. Понятие Г. к. является основой для ряда важных конструкций в гомологич. алгебре, коммутативной алгебре, алгебраич. геометрии, топологии. Так, в топологии каждое топологич. пространство X определяет цепной комплекс в категории (Ab) абелевых групп: $(C_n(X), \partial_n)$. Здесь $C_n(X)$ — группа n-мерных сингулярных цепей пространства X, а ∂_n — граничный гомоморфизм. n-е гомологии этого комплекса наз. n-ми группами сингулярных гомологий пространства X и обозначаются $H_n(X)$. Двойственным образом определяется понятие когомологий коцепного комплекса.

Лит.: [1] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966.

И. В. Долгачев.

ГОМОЛОГИИ ПОЛИЭДРА — *гомологии теория* топологич. пространства, являющегося полиэдром. Г. п. возникли в трудах А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1895) при изучении многообразий в евклидовых пространствах. Он рассматривал r-мерные замкнутые подмногообразия данного многообразия, наз. r-мерными циклами. Если в многообразии существует ограниченное $(r+1)$-мерное подмногообразие, границей к-рого является данный r-мерный цикл, то этот цикл наз. гомологичным нулю в данном многообразии. Напр., окружность, концентрическая с ограничивающими кольцо окружностями, не гомологична нулю, в то время как окружность, являющаяся границей круга, содержащегося в кольце, гомологична нулю в этом кольце. Аналитическое вначале задание многообразия было заменено А. Пуанкаре представлением его, разложенным на симплексы, приложенные друг к другу по граням так, чтобы они образовывали комплекс. Такой метод исследования гомологии приложим к любым пространствам, триангулируемым в виде симплициального комплекса, то есть к прямолинейным полиэдрам и их гомеоморфным образам — криволинейным полиэдрам. Геометрич. смысл циклов и их гомологии при этом сохраняются. Так, 1-мерным циклом будет замкнутая ломаная, звеньями к-рой являются 1-мерные симплексы. Он гомологичен нулю, если служит границей 2-мерного подкомплекса данного комплекса. Два цикла одной и той же размерности гомологичны один другому, если вместе они ограничивают подкомплекс данного комплекса. Это есть отношение эквивалентности, что вызывает разбиение множества циклов одной и той же размерности данного комплекса на классы. Во множестве классов вводится алгебраическая структура, если за сумму двух классов принять класс, содержащий сумму циклов, произвольно выбранных из складываемых классов. Введение направления обхода, т. е. рассмотрение ориентированных симплексов приводит к понятию обратного класса. Строгое изложение этих наглядных представлений позволяет определить понятие группы Г. п.

Пусть имеется триангуляция K полиэдра P и абелева группа G. r-мерной цепью комплекса K над группой G коэффициентов наз. произвольная функция c_r, ставящая в соответствие каждому ориентированному r-мерному симплексу t^r из K определенный элемент из G, и отличная от нуля лишь для конечного числа симплексов, причем $c_r(-t^r)=-c_r(t^r)$. Складывая r-мерные цепи как линейные формы, получаем абелеву группу $C_r(K, G)$ — группу всех r-мерных цепей комплекса K над группой G коэффициентов. Исходя из понятия границы симплекса и определяя по аддитивности границу цепи, приходим к гомоморфизму

$$\partial_r : C_r(K, G) \longrightarrow C_{r-1}(K, G)$$

со свойством $\partial_{r-1}\partial_r=0$ и цепному комплексу

$$\{C_r(K, G),\ \partial_r\}.$$

Цепь c_r наз. циклом, если ее граница есть нулевая цепь: $\partial_r c_r=0$. Цикл z_r наз. ограничивающим, если в K существует такая $(r+1)$-мерная цепь c_{r+1}, что $z_r=\partial_{r+1}c_{r+1}$. Ядро гомоморфизма ∂_r, т. е. группа $Z_r(K, G)$ всех r-мерных циклов, содержит образ при гомоморфизме ∂_{r+1}, т. е. подгруппу $B_r(K, G)$ всех ограничивающих r-мерных циклов. Факторгруппа $H_r(K, G)$ группы $Z_r(K, G)$ по $B_r(K, G)$ есть r-мерная группа гомологии комплекса K над группой G коэффициентов. Она принимается за r-мерную группу гомологии $H_r(P, G)$ полиэдра P над G, так как доказывается, что все триангуляции полиэдра P имеют изоморфные r-мерные группы гомологии над G. Группа $H_r(P, G)$ при произвольном G, в силу теоремы об универсальных коэффициентах, определяется целочисленными группами $H_s(P, \mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}$ — группа целых чисел. В свою

очередь если полиэдр конечный, целочисленная группа, к-рая является абелевой группой с конечным числом образующих, имеет полную систему числовых инвариантов — число Бетти и коэффициенты кручения, т. е. ранг и коэффициенты кручения группы $H_r(P, \mathbb{Z})$.

Лит.: [1] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.—Л., 1947; [2] Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, 2 изд., М., 1976; [3] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.—Л., 1938; [4] Хилтон П.-Дж., Уайли С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, пер. с англ., М., 1966.

Г. С. Чогошвили.

ГОМОЛОГИИ С КОМПАКТНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ — теория частично точных гомологий (см. *Гомологии теория*), удовлетворяющая следующей аксиоме о компактных носителях: для каждого элемента h из r-мерной группы $H_r(X, A)$ произвольной пары пространств (X, A) в теории H существует такая компактная пара $(X', A') \subset (X, A)$, что h содержится в образе индуцированного вложением гомоморфизма

$$\mu: H_r(X', A') \longrightarrow H_r(X, A).$$

Если теория H точна и имеет компактные носители, то справедлива следующая теорема: для любого элемента $h \in H_r(X', A')$, принадлежащего ядру гомоморфизма μ, существует такая компактная пара (X'', A''), что

$$(X', A') \subset (X'', A'') \subset (X, A)$$

и h принадлежит ядру гомоморфизма

$$H_r(X', A') \longrightarrow H_r(X'', A'').$$

Точная теория обладает компактными носителями тогда и только тогда, когда для любой пары (X, A) группа $H_r(X, A)$ есть прямой предел $\varinjlim \{H_r(X', A')\}$, где (X', A') пробегает компактные пары, содержащиеся в (X, A). Точная теория гомологии с компактными носителями единственна на категории произвольных (некомпактных) полиэдральных пар при данной группе коэффициентов и она эквивалентна сингулярной теории. Наряду с группой $H_r(X, A)$ имеется группа

$$H_r^c(X, A) = \varinjlim \{H_r(X', A')\},$$

где (X', A') — компактные подпары из (X, A). Сингулярная группа гомологии обладает компактными носителями и изоморфна группе $H_r^c(X, A)$. В спектральной теории, кроме групп $H_r(X, A)$ гомологий Александрова — Чеха и групп $H_r^c(X, A)$ рассматривается также группа, являющаяся образом при естественном гомоморфизме

$$H_r^c(X, A) \longrightarrow H_r(X, A);$$

эта группа, как и группа $H_r^c(X, A)$, удовлетворяет аксиоме о компактных носителях, но в спектральной теории группой Г. с к. н. обычно называют именно группу $H_r^c(X, A)$. Указанные три группы спектральной теории отличны друг от друга и каждая из них является объектом теоремы двойственности как при дискретной, так и при компактной группе коэффициентов (см. *Двойственность в топологии*).

Лит.: [1] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [2] Александров П. С., «Матем. сб.», 1947, т. 21, вып. 2, с. 161—232; [3] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971.

Г. С. Чогошвили.

ГОМОЛОГИИ ТЕОРИЯ топологических пространств — часть алгебраич. топологии, осуществляющая связь между топологич. и алгебраич. понятиями: приводя в соответствие каждому пространству определенную последовательность групп, а непрерывному отображению пространств — гомоморфизмы соответствующих групп, Г. т. по свойствам групп и их

гомоморфизмов позволяет судить о свойствах пространств и отображений. К таким свойствам относятся, напр., связности различных размерностей, для исследования к-рых Г. т. опирается на понятие ограничивания, в отличие от другой части алгебраич. топологии — теории гомотопии, к-рая для той же цели применяет деформации. Г. т. зародилась в конце 19 в. в трудах А. Пуанкаре (H. Poincaré) (см. *Гомологии полиэдра*), но аксиоматич. построение (а вместе с ним и точные границы этого долгое время расплывчатого понятия) Г. т. получила лишь в работах Н. Стинрода и С. Эйленберга (см. [3], а также *Алгебраическая топология*, *Гомологии группа*, *Стинрода — Эйленберга аксиомы*).

По этому построению теория гомологии $\{H, \partial\}$ есть совокупность трех функций: 1) относительной r-мерной группы гомологии $H_r(X, A)$ пары топологич. пространств (X, A), $A \subset X$, к-рая каждой паре (X, A) и каждому целому числу r ставит в соответствие абелеву группу $H_r(X, A)$; 2) гомоморфизма

$$H_r(f) = f_*: H_r(X, A) \longrightarrow H_r(Y, B),$$

к-рый ставится в соответствие непрерывному отображению f: $(X, A) \to (Y, B)$ и числу r и наз. гомоморфизмом, индуцированным отображением f; 3) граничного оператора ∂, к-рый каждой паре (X, A) и каждому r ставит в соответствие гомоморфизм ∂ группы $H_r(X, A)$ в группу $H_{r-1}(A)$ (так наз. а б с о л ю т н у ю г р у п п у п р о с т р а н с т в а A, являющуюся группой пары $(A, \varnothing)$). При этом указанные функции должны удовлетворять следующим аксиомам.

1. Если f — тождественное отображение, то таковым является и f_*.
2. $(gf)_* = g_* f_*$.
3. $\partial f_* = (f|A)_* \partial$.
4. А к с и о м а т о ч н о с т и. Если

$$i : A \to X \text{ и } j : X \to (X, A)$$

— отображения вложения, то последовательность

$$\ldots \longrightarrow H_r(A) \xrightarrow{i_*} H_r(X) \xrightarrow{j_*} H_r(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{r-1}(A) \longrightarrow \ldots,$$

наз. г о м о л о г и ч е с к о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю, п а р ы (X, A), является точной последовательностью, т. е. везде образ входящего гомоморфизма совпадает с ядром исходящего.

5. А к с и о м а г о м о т о п и и. Если отображения

$$f, g : (X, A) \to (Y, B)$$

гомотопны, то $f_* = g_*$.

6. А к с и о м а в ы р е з а н и я. Если U — открытое подмножество пространства X и его замыкание содержится во внутренности подпространства A, то отображение вложения

$$e : (X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow (X, A)$$

индуцирует изоморфизм e_*.

7. А к с и о м а р а з м е р н о с т и. Если X — одноточечное пространство, то $H_r(X) = 0$ для всех $r \neq 0$.

Вместо категории всех пар пространств за область определения функции H_r можно взять произвольную *категорию* пар пространств, напр. категорию пар компактных пространств или категорию пар, состоящих из полиэдров и их подполиэдров. Однако требуется, чтобы такая категория вместе с (X, A) содержала пары $(\varnothing, \varnothing)$, $(X, \varnothing) = X$, $(A, \varnothing) = A$, (A, A), (X, X), цилиндр $(X, A) \times I$, $I = [0, 1]$, и какое-либо одноточечное пространство P_0, со всеми их отображениями вложения. Кроме того, требуется, чтобы категория содержала все пары и отображения, к-рые встречаются в аксиомах или теоремах. С другой стороны, за область значений функции H_r вместо категории всех абелевых групп можно принимать и другие категории, напр. категорию топологических, в частности, компактных групп с непрерывными гомоморфизмами или категорию модулей

над нек-рым кольцом с линейными гомоморфизмами.

Аксиомы 1 и 2 означают, что H_r есть ковариантный *функтор* из нек-рой категории пар пространств в категорию групп. Аксиома 3 означает, что граничный оператор ∂ согласован с функтором H_r. Аксиома 4, связывающая функторы всех размерностей r, иногда заменяется более слабым требованием: чтобы последовательность была лишь полуточной, т. е. образ входил в ядро (см. *Точная последовательность*); важным примером частично полуточной теории гомологии является теория гомологий Александрова — Чеха. Аксиома 5 имеет эквивалентную форму: если

$$f_0, f_1 : (X, A) \to (X, A) \times I$$

— отображения, определяемые формулами $f_0(x) = (x, 0)$, $f_1(x) = (x, 1)$, то $f_{0*} = f_{1*}$. Аксиома 6, требующая инвариантность при вырезании и имеющая несколько разновидностей, указывает то свойство Г. т., к-рое отличает ее от теории гомотопии. Аксиома 7, обеспечивающая геометрич. значимость размерностного индекса r, в современных исследованиях часто пренебрегается, что порождает так наз. обобщенные теории гомологии, важным примером к-рых служит теория *бордизмов*.

Для Г. т. существует двойственная ей теория когомологии (см. *Двойственность* в топологии). Она задается: относительной r-мерной группой когомологии $H^r(X, A)$, являющейся контравариантным функтором из категории пар топологич. пространств в категорию абелевых групп с индуцированным гомоморфизмом

$$H^r(f) = f^* : H^r(Y, B) \longrightarrow H^r(X, A)$$

и кограничным оператором

$$\delta : H^r(A) \longrightarrow H^{r+1}(X, A).$$

Аксиомы формулируются так же, как и в случае гомологии, с очевидным изменением в направлении гомоморфизмов, происходящим от контравариантности; напр., аксиома точности требует, чтобы была точной когомологическая последовательность

$$\ldots \longrightarrow H^{r-1}(A) \xrightarrow{\delta} H^r(X, A) \xrightarrow{j^*} H^r(X) \xrightarrow{i^*} H^r(A) \longrightarrow \ldots .$$

Здесь возникают также обобщенные когомологич. теории, важными примерами к-рых служат *K-теории* и *кобордизмы*. Приводимые ниже факты Г. т. имеют когомологич. параллели.

Группой коэффициентов Г. т. или теории когомологии наз. группа $H_0(P_0)$ или соответственно $H^0(P_0)$. Группы $\tilde{H}_r(X, A)$ иногда удобно заменять так наз. приведенными группами $\tilde{H}_r(X, A)$: приведенная нульмерная группа гомологии $\tilde{H}_0(X)$ есть ядро гомоморфизма

$$l_* : H_0(X) \longrightarrow H_0(P_0),$$

индуцированного отображением $l : X \to P_0$, а приведенная нульмерная группа когомологии $\tilde{H}^0(X)$ есть факторгруппа группы $H^0(X)$ по образу $f^*(H^0(P_0))$; приведенные группы других размерностей совпадают с исходными: $\tilde{H}_r(X) = H_r(X)$, $r \neq 0$. Так, $H_0(X) \sim \tilde{H}_0(X) \oplus G$. Если $A \neq \varnothing$, то $\tilde{H}_r(X, A) = H_r(X, A)$ при всех r. Замена обычных групп приведенными позволяет получить из гомологич. последовательности приведенную гомологическую последовательность.

Аксиомы Г. т. не являются независимыми. Так, аксиома 1 есть следствие аксиом 2, 3, 4. Система аксиом совместна, как показывает пример тривиальной теории $H_r(X, A) = 0$; нетривиальными примерами являются когомологич. теория Александрова — Чеха, *сингулярн-*

ные гомологии и др. В вопросе полноты имеет место следующее: гомоморфизмом Г. т. $\{H, \partial\}$ в Г. т. $\{H', \partial'\}$ наз. такая система гомоморфизмов

$$h(X, A; r): H_r(X, A) \longrightarrow H'_r(X, A),$$

что

$$H'(f) \cdot h(X, A; r) = h(Y, B; r) \cdot H(f)$$

и

$$\partial' \cdot h(X, A; r) = h(A; r-1) \cdot \partial;$$

если все $h(X, A; r)$ — изоморфизмы, то Г. т. $\{H, \partial\}$ и $\{H', \partial'\}$ наз. изоморфными Г. т. На конечных полиэдрах Г. т. является единственной. Точнее, если $h_0 : G \to G'$ — произвольный гомоморфизм группы коэффициентов G теории $\{H, \partial\}$ в группу коэффициентов G' теории $\{H', \partial'\}$, то для каждой полиэдральной пары (X, A) существует единственный гомоморфизм

$$h(X, A; r): H_r(X, A) \longrightarrow H'_r(X, A),$$

обладающий тем свойством, что $h(P_0; 0) = h_0$, причем, если h_0 — изоморфизм, то изоморфизмами являются и все $h(X, A; r)$. Так как группы гомологии отрицательной размерности триангулируемой пары тривиальны, то для таких пар равенство $H_r(X, A) = 0$, $r < 0$, имеет место и при любой Г. т. $\{H, \partial\}$. Теорема единственности справедлива и для более широких категорий пространств в случае, когда Г. т. удовлетворяет соответствующим дополнительным аксиомам.

Группы гомологии являются топологическими, а также гомотопич. инвариантами: если f есть гомотопич. эквивалентность, то f_* есть изоморфизм. Если X — стягиваемое пространство, в частности, клетка, то $H_r(X) = 0$, $r \neq 0$, и $H_0(X) \sim G$. Если $i : A \subset X$ есть гомотопич. эквивалентность, то $H_r(X, A) = 0$, и, при любом X, $H_r(X, X) = 0$. Если A — ретракт пространства X, то i_* есть мономорфизм, j_* — эпиморфизм, оператор ∂ тривиален и

$$H_r(X) \sim H_r(A) \oplus H_r(X, A).$$

Если X деформируемо в A, то i_* есть эпиморфизм, j_* тривиален, ∂ есть мономорфизм и

$$H_r(A) \sim H_r(X) \oplus H_{r+1}(X, A).$$

Пусть через $S(X)$ обозначена *надстройка* над X; имеет место изоморфизм

$$\tilde{H}_r(X) \sim \tilde{H}_{r+1}(S(X)).$$

Это дает возможность вычислить группы гомологий сфер S^n; именно: $\tilde{H}_r(S^n) = 0$ при $r \neq n$ и $\tilde{H}_n(S^n) \sim G$; следовательно, $H_r(S^n) = 0$ при $n \neq r \neq 0$, $H_r(S^n) \sim G$ при $n \neq r = 0$ или $n = r \neq 0$ и $H_0(S^0) \sim G \oplus G$.

Важную роль в Г. т. играют гомологические последовательности троек и триад. Для тройки (X, A, B), $X \supset A \supset B$, пространств граничный оператор $\partial' = k_* \partial$ определяется как композиция $k'_* \cdot \partial$, где $k' : A \to (A, B)$ есть вложение. Тогда возникает так наз. гомологическая последовательность тройки (X, A, B) (сводящаяся при $B = \varnothing$ к гомологич. последовательности пары (X, A))

$$\ldots \longrightarrow H_r(A, B) \xrightarrow{i'_*} H_r(X, B) \xrightarrow{j'_*} H_r(X, A) \xrightarrow{\partial'} H_{r-1}(A, B) \longrightarrow \ldots,$$

где $i' : (A, B) \to (X, B)$ и $j' : (X, B) \to (X, A)$ — вложения. Эта последовательность точна. Если группы $H_r(X, A)$, $H_r(X, B)$, $H_r(A, B)$ тривиальны для всех r, то i'_*, ∂', j'_* являются соответственно изоморфизмами, и наоборот. Если X есть объединение непересекающихся замкнутых множеств X_i, $i = 1, \ldots, n$, и $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, где $A_i \subset X_i$, то $H_r(X, A)$ изоморфна прямой сумме

групп $H_r(X_i, A_i)$, $i=1, \ldots, n$. Триада $(X; A, B)$ есть пространство X с упорядоченной парой A, B подпространств. Она является собственной триадой, если вложения

$$k:(A,\ A\cap B)\longrightarrow(A\cup B.\ B),\quad l:(B,\ A\cap B)\longrightarrow(A\cup B,\ A)$$

индуцируют изоморфизмы или имеется разложение

$$H_r(A\cup B,\ A\cap B)\sim H_r(A,\ A\cap B)\oplus H_r(B,\ A\cap B).$$

Далее, для них определяется граничный оператор

$$\overline{\partial}: H_r(X,\ A\cup B)\longrightarrow H_{r-1}(A,\ A\cap B)$$

как $k_*^{-1}\cdot m_*\cdot\partial$, где $m: A\cup B\subset(A\cup B, B)$. Это порождает точную гомологическую последовательность триады

$$\ldots\longrightarrow H_r(A,\ A\cap B)\xrightarrow{p_*} H_r(X,\ B)\xrightarrow{q_*} H_r(X,\ A\cup B)\xrightarrow{\overline{\partial}}$$
$$\xrightarrow{\overline{\partial}} H_{r-1}(A,\ A\cap B)\longrightarrow\ldots,$$

где $p:(A, A\cap B)\to(X, B)$, $q:(X, B)\to(X, A\cup B)$ — вложения [при $B\subset A$ эта последовательность сводится к гомологич. последовательности тройки (X, A, B)].

Пусть $X=A\cup B$, $A\cap B=C$ и пусть для отображений h, h_1, $h_2: (X, C)\to(Y, D)$ имеют место соотношения $h_1|A=h|A$, $h_2|B=h|B$, $h_1(B)\subset D$, $h_2(A)\subset D$. Тогда справедливы следующие аддитивные теоремы.

1. $h_*=h_{1*}+h_{2*}$.

2. Если D стягиваемо и $f, f_1, f_2: X\to Y$ определены соответственно посредством h, h_1, h_2, то для индуцированных гомоморфизмов приведенных групп f_*, f_{1*}, $f_{2*}: \tilde{H}_r(X)\to\tilde{H}_r(Y)$ имеет место равенство $f_*=f_{1*}+f_{2*}$.

Пусть определен гомоморфизм

$$s: H_r(C)\longrightarrow H_r(A)\oplus H_r(B),$$

где $s(c)=(s_{1*}(c), -s_{2*}(c))$, $c\in H_r(C)$ и где $s_1: C\to A$, $s_2: C\to B$ — вложения, и гомоморфизм

$$t: H_r(A)\oplus H_r(B)\longrightarrow H_r(X),$$

где $t(a, b)=t_{1*}(a)+t_{2*}(b)$, $(a, b)\in H_r(A)\oplus H_r(B)$, и $t_1: A\to X$, $t_2: B\to X$ — вложения. Пусть, наконец, определен гомоморфизм

$$\Delta: H_r(X)\longrightarrow H_r(C),$$

где $\Delta=\partial u_*^{-1}v_*$ и

$$v: X\longrightarrow(X,\ B),\quad u:(A,\ C)\longrightarrow(X,\ B)$$

— вложения. Тогда получается так наз. последовательность Мейера — Вьеториса собственной триады:

$$\ldots\longrightarrow H_r(C)\xrightarrow{s} H_r(A)\oplus H_r(B)\xrightarrow{t} H_r(X)\xrightarrow{\Delta}$$
$$\xrightarrow{\Delta} H_{r-1}(C)\longrightarrow\ldots,$$

к-рая является точной и к-рая связывает гомологии пространств с гомологиями их объединения и пересечения. Отсюда, в случае $C\neq\varnothing$, можно перейти к аналогичной последовательности для приведенных групп. Из нее следует:

1. Если $A\cap B$ стягиваемо, то

$$\tilde{H}_r(A\cup B)\sim\tilde{H}_r(A)\oplus\tilde{H}_r(B).$$

2. Если $A\cup B$ стягиваемо, то

$$\tilde{H}_r(A\cup B)\sim\tilde{H}_r(A)\oplus\tilde{H}_r(B).$$

3. Если A и B стягиваемы, то Δ устанавливает изоморфизм

$$\tilde{H}_r(A\cup B)\sim\tilde{H}_{r-1}(A\cap B).$$

Использование предыдущих результатов позволяет вычислить группы гомологии различных пространств. Напр., если X — замкнутая ориентируемая поверх-

ность рода n, то $H_r(X)$ изоморфна группе коэффициентов G при $r=0,2$, прямой сумме G^{2n} $2n$ экземпляров группы G при $r=1$ и 0 — в остальных случаях. Если X — замкнутая неориентируемая поверхность рода n, то $H_r(X)$ изоморфна G при $r=0$, группе $G^{n-1}\oplus G_2$, где G_2 есть факторгруппа $G/2G$, $2G=\{2g|g\in G\}$, при $r=1$, подгруппе $T_2(G)$ группы G, состоящей из всех элементов $g\in G$ с $2g=0$ при $r=2$ и 0—в остальных случаях. Таким образом, Г. т. дает топологич. классификацию замкнутых поверхностей. Для n-мерного действительного проективного пространства P^n группа $H_r(P^n)$ изоморфна группе G при $r=0$ или $r=n$ и нечетном, группе G_2 при r нечетном и $0<r<n$, группе $T_2(G)$ при r четном и $0<r\leqslant n$ и 0 — в остальных случаях. Группа гомологии $H_r(CP^n)$ комплексного проективного пространства CP^n размерности $2n$ изоморфна группе G при r четном и $0\leqslant r\leqslant 2n$ и 0 — в остальных случаях. Гомологич. группа $H_r(L_{p,q})$ *линзового пространства* $L_{p,q}$ изоморфна группе G при $r=0,3$, группе $G_p=G/pG$, где $pG=\{pg|g\in G\}$ при $r=1$, группе $T_p(G)$, где $T_p(G)=\{g\in G|pg=0\}$ при $r=2$ и 0— в остальных случаях.

Из разнообразных приложений предыдущих результатов следует выделить нек-рые фундаментальные предложения. Прежде всего — инвариантность размерности: сферы, а также евклидовы пространства различных размерностей не гомеоморфны; более того, если два полиэдра гомеоморфны, то они имеют одинаковую размерность. Далее, из равенства $f_*i_*=g_*$, где $f: X\to Y$ есть распространение данного отображения $g: A\to Y$, $A\subset X$, получаются различные признаки распространяемости и ретрагируемости отображений; напр., отображение ненулевой степени сферы S^{n-1}, $n>1$, в себя не распространимо на n-мерный шар E^n, границей к-рого является S^{n-1}, а сфера S^{n-1} не является ретрактом шара E^n ни для какого натурального n. Из этого, в свою очередь, следует т е о р е м а Б р а у э р а о неподвижной точке: любое отображение $E^n\to E^n$ имеет неподвижную точку. Наконец, доказывается, что на S^n существует единичное касательное векторное поле тогда и только тогда, когда n нечетно, а из теории триад получается ряд теорем о степенях отображений, что, в частности, позволяет по-новому доказать основную теорему алгебры.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., Комбинаторная топология, М.—Л., 1947; [2] Л е ф ш е ц С., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1949; [3] С т и н р о д Н., Э й л е н б е р г С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [4] С п е н ь е р Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [5] H u S z e-T s e n, Homology Theory; 3 ed., N.— L., 1965; [6] H u S z.-T z., Cohomology Theory, L., 1970; [7] Д о л ь д А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976.

Г. С. Чогошвили.

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА — раздел алгебры, основным объектом изучения к-рого являются производные функторы на различных категориях алгебраич. объектов (модулей над данным кольцом, пучков и т. д.).

Одним из истоков Г. а. явилась теория гомологий топологич. пространств, в к-рой каждому топологич. пространству X сопоставляется последовательность абелевых групп $H_n(X)$ (групп гомологий), а непрерывному отображению $f: X\to Y$ пространств — набор гомоморфизмов $f_n: H_n(X)\to H_n(Y)$ групп гомологий. Каждый n-мерный сингулярный симплекс T топологич. пространства X имеет границу, состоящую из сингулярных симплексов размерности $n-1$. Если K_n — свободная абелева группа, порожденная всеми этими n-мерными симплексами, то функция ∂, к-рая сопоставляет каждому T альтернированную сумму ∂T его граничных симплексов, определяет гомоморфизм $\partial: K_n\to K_{n-1}$, так что $\ldots\xrightarrow{\partial} K_n\xrightarrow{\partial} K_{n-1}\xrightarrow{\partial} K_{n-2}\xrightarrow{\partial}\ldots$, причем непрерывное отображение пространств индуцирует гомоморфизм соответствующих им комплексов. Некоторые свойства пространства X или отображения

$f: X \to Y$ могут быть найдены по свойствам группы H_n гомологий этого комплекса или соответствующих гомоморфизмов f_n этих групп гомологий, что в ряде случаев позволяет свести изучение топологич. объектов к изучению нек-рых алгебраич. объектов, подобно тому, как это делается в аналитич. геометрии (но с той разницей, что переход от геомстрии к алгебре в теории гомологий необратим).

В свою очередь, в алгебре в связи с изучением *расширений* групп фактически рассматривались первая и вторая группы гомологий и когомологий. Значительный подготовительный материал был разработан в теории ассоциативных алгебр, алгебр Ли, теории конечномерных алгебр, теории колец, теории квадратичных форм.

В процессе изучения групп гомологий сложился прежде всего язык Г. а. Появились обозначения отображений с помощью стрелок и коммутативные диаграммы (если в графе отображений два пути, имеющие общие начало и конец, приводят к одному и тому же результату, то такую диаграмму наз. коммутативной). Часто встречались последовательности гомоморфизмов, в к-рых ядро исходящего гомоморфизма совпадало с образом входящего, такие последовательности назвали точными. Стало обычаем задавать математич. объекты одновременно с их отображениями, а наиболее предпочтительными считались соответствия между объектами, сохраняющие отображения, названные *функторами*. Основные достоинства этого языка — информативность, естественность и наглядность, быстро получили признание. Напр., в [5] язык Г. а. был использован для аксиоматич. изложения оснований алгебраич. топологии. В настоящее время язык Г. а. присутствует во многих работах, даже не использующих ее методов.

К середине 40-х гг. 20 в. Г. а. выделяется в самостоятельную область алгебры. Основная сфера применения Г. а.— категория модулей над кольцом. Большинство результатов, известных для модулей, переносится на абелевы категории с нек-рыми дополнительными ограничениями (это объясняется тем, что такие категории вкладываются в категорию модулей). Наиболее содержательное расширение области применения Г. а. было осуществлено в [4], где Г. а. была перенесена на произвольные абелевы категории с достаточным запасом инъективных объектов и стала приложимой к арифметической алгебраич. геометрии и теории функций многих переменных (см. *Гротендика категория*).

Основные функторы Г. а.— $\mathrm{Hom}(A, B)$ (группа гомоморфизмов модуля A в модуль B) и *тензорное произведение* модулей $A \otimes B$. Основа теории — изучение *производных функторов*, к-рые строятся, напр., следующим образом. Произвольный модуль A может быть представлен как фактормодуль свободного модуля F_0, затем рассматривается такое же представление F_1 для ядра предыдущего представления и т. д. В результате возникает точная последовательность

$$\ldots \longrightarrow F_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Последовательность

$$\ldots \longrightarrow P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0,$$

где все модули P_i — проективны, наз. проективной резольвентой модуля A. Применение к ней ковариантного аддитивного функтора T дает комплекс, группы гомологий к-рого наз. левыми производными функтора T и обозначаются $L_n T$. Двойственно (для контравариантного функтора) или, используя инъективные модули и инъективные резольвенты (для ковариантного функтора), строятся правые производные функторы $R^n T$. Производные функторы измеряют в нек-ром смысле отклонение функтора от точности. Они не зависят от произвола построения резольвенты. Каждой точной последовательности

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

соответствуют две бесконечные точные последовательности производных функторов:

$$\ldots \longrightarrow L_{n+1}T\ (C) \longrightarrow L_nT\ (A) \longrightarrow L_nT\ (B) \longrightarrow L_nT\ (C) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow L_{n-1}T\ (C) \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow R^{n-1}T\ (C) \longrightarrow R^nT\ (A) \longrightarrow R^nT\ (B) \longrightarrow R^nT\ (C) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow R^{n+1}T\ (A) \longrightarrow \ldots$$

Для производных функторов основных функторов приняты следующие обозначения:

$$L_n\ (A \otimes_R B) = \mathrm{Tor}_n^R\ (A,\ B),$$
$$R^n\ \mathrm{Hom}_R(A,\ B) = \mathrm{Ext}_R^n(A, B).$$

Оба эти функтора являются функторами двух аргументов A и B, поэтому изложенная конструкция построения производного функтора к ним непосредственно неприменима. В данном случае можно фиксировать один из аргументов и строить резольвенту для другого или, взяв резольвенты для обоих аргументов, можно построить нек-рый двойной комплекс. Все эти построения приводят к одному и тому же результату. Группа $\mathrm{Ext}_R^1(A, B)$ изоморфна группе расширений модуля B с помощью модуля A (и в этом виде давно изучалась). Установление новых связей значительно расширило и продвинуло теорию расширений модулей. Группа $\mathrm{Tor}_1^R(A, Q/\mathbb{Z})$ сопоставляет каждой группе A ее периодич. часть. Обобщение этого наблюдения привело к общей теории кручения.

В общую схему производных функторов укладывается теория гомологий алгебраич. систем. Напр., пусть $\Lambda = \mathbb{Z}G$ — групповое кольцо мультипликативной группы G над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел, A — левый, а B — правый Λ-модули. Изучение групп

$$H^n\ (G,\ A) = \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n\ (\mathbb{Z},\ A),$$
$$H^n\ (G,\ B) = \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}\ (B,\ \mathbb{Z}),$$

где $\mathbb{Z}$ рассматривается как тривиальный левый $\mathbb{Z}G$-модуль, составляет теорию гомологий и когомологий групп. Пусть L — алгебра Ли над полем k, UL — ее универсальная обертывающая алгебра, A есть UL-модуль. Изучение групп

$$H^n\ (L,\ A) = \mathrm{Ext}_{UL}^n\ (k,\ A),$$

где k рассматривается как тривиальный UL-модуль, составляет теорию когомологий алгебр Ли. Аналогично определяются подходящие группы когомологий и гомологий моноидов, абелевых групп, алгебр, градуированных алгебр, колец и т. д. Руководящей идеей в каждом случае служит то, что вторая группа когомологий представляет группу расширений для рассматриваемого типа алгебраич. систем.

В свою очередь, гомологии алгебраич. систем являются предметом изучения *относительной гомологической алгебры*.

В конкретных случаях вычисление производных функторов обычно достигается с помощью удачно построенной *резольвенты*. Иногда резольвента оказывается конечной (напр., длина резольвенты произвольной абелевой группы не превосходит 1). Существует давний и вполне оправданный интерес к длине самой короткой резольвенты (эта длина наз. *гомологической размерностью*). Первый значительный результат в этом направлении — *Гильберта теорема* о сизигиях (конец 19 в.). Теория гомологич. размерности — одна из активно развивающихся ветвей Г. а. Переход от модулей с различными ограничениями конечности к общему случаю часто осуществляется с помощью функторов *индуктивных пределов* ($\varinjlim$) и *проективных пределов* ($\varprojlim$). Напр., всякая группа является индуктивным пределом своих конечно порожденных подгрупп. Всякая компактная

вполне несвязная группа представима в виде проективного предела своих конечных факторгрупп. Интерес к этим группам вызван их связями с теорией Галуа. Производные этих функторов применяются в теории гомологич. размерности.

Изучаются производные функторы для неаддитивных функторов (напр., функтора, сопоставляющего абелевой группе ее групповое кольцо или симметрическую алгебру).

К основным средствам вычисления Г. а., кроме уже отмеченных резольвент, следует отнести *спектральные последовательности* и *гомологические умножения*. Спектральные последовательности, являясь наиболее мощным аппаратом исследования производных функторов, аппроксимируют группы гомологий группы группами гомологий ее подгруппы и факторгруппы. Гомологич. умножения изучают гомоморфизмы типа

$$L_nT \oplus L_mT \longrightarrow L_{n+m}T,$$

комбинирующие между собой производные функторы.

Методы Г. а. широко используются в настоящее время в самых различных разделах математики — в функциональном анализе, теории функций комплексного переменного, дифференциальных уравнениях и др. Без Г. а. немыслимы такие разделы алгебры, как алгебраич. K-теория, алгебраич. геометрия, алгебраич. теория чисел.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [3] Басс Х., Алгебраическая K-теория, пер. с англ., М., 1973; [4] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [5] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [6] Итоги науки. Сер. Математика. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 203—36; [7] Steenrod N. E., Reviews of papers in algebraic and differential topology, topological and homological algebra, pt. 2, Princeton, p. 1174—364. *В. Е. Говоров, А. В. Михалев.*

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КОЛЕЦ — общее название для результатов, описывающих свойства кольца (обычно, ассоциативного и с единицей) по свойствам тех или иных *модулей* над ним и, в частности, по свойствам категории всех левых (или правых) модулей над этим кольцом (см. *Мориты эквивалентность*).

Важнейшие примеры таких результатов следующие.

1) Классич. полупростота кольца равносильна как инъективности всех левых модулей над ним, так и их проективности, а также инъективности всех левых идеалов кольца (см. [1]).

2) Коммутативное локальное нётерово кольцо регулярно тогда и только тогда, когда оно имеет конечную глобальную гомологич. размерность.

3) Регулярность (в смысле Неймана) кольца имеет место в том и только в том случае, когда все модули над ним плоские, т. е. когда кольцо имеет нулевую слабую гомологич. размерность (см. [2]).

4) Проективность всякого плоского левого модуля равносильна условию минимальности для главных правых идеалов (см. *Совершенное кольцо*).

5) Кольцо нётерово слева тогда и только тогда, когда класс инъективных левых модулей над ним описывается формулами узкого исчисления предикатов на языке теории модулей (см. [4]).

См. также *Артиново кольцо*, *Квазифробениусово кольцо*, *Когерентное кольцо*, *Полусовершенное кольцо*, *Самоинъективное кольцо*.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971; [3] Скорняков Л. А., «Математички весник», 1967, т. 4, № 4, с. 415—34; [4] Eklof P., Sabbagh G., «Ann. Math. Log.», 1971, v. 2, № 3, p. 251—95; [5] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966. *А. В. Михалев, Л. А. Скорняков.*

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — бесконечная в обе стороны точная последовательность гомологий трех комплексов, связанных короткой точ-

ной последовательностью. Пусть $0 \to K. \to L. \to M. \to 0$ — точная последовательность цепных комплексов в абелевой категории. Тогда для любого n определены морфизмы гомологий

$$\partial_n : H_n(M.) \longrightarrow H_{n-1}(K.),$$

наз. связывающими (или граничными) морфизмами. В категории модулей они определяются особенно просто: для $h \in H_n(M.)$ выбирается прообраз $x \in L_n$; тогда dx является образом нек-рого элемента $z \in Z_{n-1}(K.)$, класс гомологий к-рого есть $\partial_n(h)$. Построенная с помощью связывающих морфизмов последовательность гомологий

$$\ldots \longrightarrow H_n(K.) \longrightarrow H_n(L.) \longrightarrow H_n(M.) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(K.) \longrightarrow \ldots$$

является точной и наз. гомологической последовательностью. Таким образом, гомологии являются *гомологическим функтором* на категории комплексов.

Двойственным образом определяется когомологическая последовательность.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960. *В. И. Данилов.*

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ — числовая характеристика объекта категории относительно некоторого выделенного класса объектов этой категории. Основная область применения этого понятия — категории модулей над кольцом.

Пусть $\mathfrak{B}$ — фиксированный класс объектов *абелевой категории* $\mathfrak{A}$ и A объект из $\mathfrak{B}$, тогда (проективной) гомологической размерностью объекта A относительно класса $\mathfrak{B}$ наз. наименьшее число n, для к-рого существует точная последовательность вида

$$0 \longrightarrow B_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow B_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

где все B_i из $\mathfrak{B}$. Если такого n не существует, то говорят, что Г. р. равна ∞.

Пусть ${}_R\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}_R$) — категория левых (правых) модулей над ассоциативным кольцом R с единицей. Тогда: а) если $\mathfrak{B}$ — класс всех проективных левых R-модулей, то соответствующая Г. р. модуля A наз. проективной размерностью и обозначается $\mathrm{p.d}_R(A)$; б) если $\mathfrak{B}$ — класс всех плоских левых R-модулей, то соответствующая Г. р. модуля A наз. слабой размерностью и обозначается $\mathrm{w.d}_R(A)$. Если $\mathfrak{A}$ — категория левых *градуированных модулей* над градуированным кольцом R, а $\mathfrak{B}$ — класс всех левых проективных градуированных R-модулей, то соответствующая Г. р. градуированного R-модуля A наз. градуированной проективной размерностью и обозначается $\mathrm{gr.p.d}_R(A)$.

Рассматривается также двойственная конструкция. Если $A \in {}_R\mathfrak{M}$, то наименьшее число n такое, что существует точная последовательность

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow Q_0 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow Q_n \longrightarrow 0,$$

где все модули Q_i инъективны, наз. инъективной размерностью модуля A и обозначается $\mathrm{i.d}_R(A)$.

Пусть $A \in {}_R\mathfrak{M}$, тогда следующие условия равносильны:

а) $\mathrm{i.d}_R(A) \leqslant n$;

б) $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(B, A) = 0$ для всех $B \in {}_R\mathfrak{M}$ (см. *Функтор* Ext);

б′) $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(B, A) = 0$ для всех циклических модулей B;

в) $\mathrm{Ext}^n_R(B, A)$ — точный функтор относительно аргумента B;

г) если

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow Y_0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow Y_{n-1} \longrightarrow Y_n \longrightarrow 0$$

— точная последовательность и модули Y_k при $0 \leqslant k < n$ инъективны, то Y_n — инъективный модуль.

Эквивалентны между собой также условия:

а) $\mathrm{p.d}_R(A) \leqslant n$;

б) $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A, C) = 0$ для всех $C \in {}_R\mathfrak{M}$;

в) $\mathrm{Ext}_R^n(A, C)$ — точный справа функтор аргумента C;

г) если

$$0 \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_0 \longrightarrow 0$$

— точная последовательность и модули X_k при $0 \leqslant k < n$ проективны, то и X_n — проективный модуль.

Если последовательность

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

— точна, где $A', A, A'' \in {}_R\mathfrak{M}$, и

$$d' = \mathrm{p.d}_R(A'), \quad d = p.d._R(A), \quad d'' = \mathrm{p.d}_R(A''),$$

то

$$d' \leqslant \sup(d, d''-1),$$
$$d'' \leqslant \sup(d'+1, d),$$
$$d \leqslant \sup(d', d'').$$

Если $d < \sup(d', d'')$, то $d'' = d'+1$.

Число

$$\mathrm{l.gl.d.}(R) = \sup\{\mathrm{p.d}_R(A) \mid A \in {}_R\mathfrak{M}\}$$

наз. левой глобальной размерностью кольца R.

$$\mathrm{l.gl.d.(R)} =$$
$$= \sup\{\mathrm{p.d}_R(A) \mid A \text{ — циклический левый } R\text{-модуль}\}$$
$$= \sup\{\mathrm{i.d}_R(A) \mid A \in {}_R\mathfrak{M}\}.$$

Если кольцо R обладает композиционным рядом левых идеалов, то

$$\mathrm{l.gl.d.}(R) = \sup\{\mathrm{p.d.}(S) \mid S \in {}_R\mathfrak{M}, S \text{ — простой } R\text{-модуль}\}.$$

Число

$$\mathrm{gl.w.d.}(R) = \sup\{\mathrm{w.d.}(A) \mid A \in {}_R\mathfrak{M}\}$$

наз. слабой глобальной размерностью кольца R, при этом

$$\mathrm{gl.w.d.}(R) = \sup\{\mathrm{w.d}_R(A) \mid A \in \mathfrak{M}_R\}.$$

Число

$$\mathrm{l.f.gl.d.}(R) = \sup\{\mathrm{p.d.}(A) \mid A \in \mathfrak{M}_R,\ \mathrm{p.d}_R(A) < \infty\}$$

наз. левой ограниченной глобальной размерностью кольца R.

Сюда же примыкают следующие размерности: если R — алгебра над коммутативным кольцом K, то проективная размерность R-бимодуля R (т. е. левого $R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$-модуля, где R^{op} — противоположное R кольцо) наз. биразмерностью алгебры R и обозначается $\mathrm{bid}\ R$; если G — группа, K — коммутативное кольцо, то (ко)гомологической размерностью группы G наз. плоская (проективная) размерность модуля K над групповым кольцом KG с тривиальным действием группы G на K и обозначается $(\mathrm{hd}_{.K}(G))\ \mathrm{cd}\,(G)$.

Ряд хорошо известных теорем можно переформулировать в терминах Г. р. Напр., теорема Веддерберна — Артина будет иметь вид: кольцо R классически полупросто тогда и только тогда, когда $\mathrm{gl.\,d.}\,(R) = 0$. Кольцо R регулярно (в смысле Неймана) тогда и только тогда, когда $\mathrm{w.\,gl.\,d.}(R) = 0$. Равенство $\mathrm{bid}_K R = 0$ для алгебры R над полем K равносильно ее сепарабельности над K. Утверждение о том, что подгруппа свободной абелевой группы свободна, эквивалентно тому, что $\mathrm{gl.\,d.}\,(\mathbb{Z}) = 1$, где $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел. Кольцо R, для к-рого $\mathrm{l.\,gl.\,d.}\,(R) \leqslant 1$ наз. наследственным слева кольцом.

Левая и правая глобальные размерности кольца R могут не совпадать. Если же R нётерово слева и справа, то

$$\text{l.gl.d.}(R) = \text{r.gl.d.}(R) = \text{w.gl.d.}(R).$$

Если $R \to S$ — гомоморфизм колец, то любой S-модуль $_S(A)$ можно рассматривать и как R-модуль, при этом:

$$\text{p.d.}_R(A) \leqslant \text{p.d.}_S(A) + \text{p.d.}_R(S),$$
$$\text{w.d.}_R(A) \leqslant \text{w.d.}_S(A) + \text{w.d.}_R({}_RS),$$
$$\text{i.d.}_R(A) \leqslant \text{i.d.}_S(A) + \text{w.d.}_R(S_R).$$

Если кольцо R — фильтрованное, то

$$\text{l.gl.d.}(R) \leqslant \text{l.gr.gl.d.}\, G(R),$$

где $G(R)$ — ассоциированное градуированное кольцо.

В ряде случаев изучение Г. р. связано с мощностью рассматриваемых модулей. Это позволяет, в частности, оценивать разность между слабой и проективной размерностями модуля, а также разность между левой и правой глобальными размерностями кольца. Континуум-гипотеза равносильна утверждению о том, что

$$\text{p.d.}_{\mathbb{R}[x,\ y,\ z]}(\mathbb{R}(x,\ y,\ z)) = 2,$$

где $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, $\mathbb{R}(x, y, z)$ — поле рациональных функций, а $\mathbb{R}[x, y, z]$ — кольцо многочленов над R.

Большая часть исследований по Г. р. посвящена выявлению связей Г. р. с другими характеристиками модулей и колец. Так, Гильберта теорема о сизигиях утверждает, что

$$\text{gl.d.}K[x_1, \ldots, x_n] = n,$$

где K — поле, а $K[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$ над K. К настоящему времени эта теорема значительно обобщена. Г. р. групповых алгебр разрешимых групп тесно связана с длиной разрешимого ряда группы и рангами ее факторов. Из равенства $\text{cd}(G) = 1$ следует, что G — свободная группа (т е о р е м а С т о л л и н г с а). Исследуются связи между Г. р. и другими размерностями модулей и колец. Напр., размерность по Круллю коммутативного кольца R совпадает с $\text{gl. d.}(R)$ тогда и только тогда, когда все локализации кольца R по простым идеалам имеют конечную размерность Крулля. Всякое коммутативное нётерово кольцо R, для которого $\text{gl. d.}(R) < \infty$, раскладывается в конечную прямую сумму областей целостности. Локальное кольцо регулярной точки наз. в алгебраич. геометрии л о к а л ь н ы м р е г у л я р н ы м к о л ь ц о м. Глобальная размерность такого кольца совпадает с его размерностью Крулля, а также с минимальным числом образующих его максимального идеала (регулярные локальные кольца являются областями целостности с однозначным разложением на простые множители, они остаются регулярными при локализациях по простым идеалам).

Лит.: [1] К а р т а н А., Э й л е н б е р г С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] O s o f s k y B. L., Homological dimensions of modules, Providence, 1973.

В. Е. Говоров, А. В. Михалев.

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ п р о с т р а н с т в а X п о г р у п п е к о э ф ф и ц и е н т о в G — наибольшее целое число n, при к-ром для нек-рого замкнутого множества $A \subset X$ отлична от нуля группа $H_n(X, A; G)$ гомологий Александрова — Чеха. Г. р. обозначается $\dim_G X$. Аналогично определяется к о г о м о л о г и ч е с к а я р а з м е р н о с т ь — наименьшее целое n, для которого отображение $H^n(X; G) \to H^n(A; G)$ эпиморфно для всех замкнутых $A \subset X$. Под г о м о л о г и ч е с к о й т е о р и е й р а з м е р н о с т и обычно подразумевается ее когомологический вариант, значительно глубже разработанный. Это объясняется тем, что когомологии Александрова — Чеха удовлетворяют всем *Стинрода — Эйленберга аксиомам*, включая точность, и потому применение когомологий оказалось бо-

лее эффективным. На категории метризуемых компактов, где между группами $H_p(X, A; G)$ и $H^p(X, A; G^*)$ имеет место *Понтрягина двойственность*, гомологический подход с коэффициентами в компактной группе G эквивалентен когомологическому подходу с коэффициентами в двойственной группе G^*; аналогично, оба подхода эквивалентны, если в качестве коэффициентов берутся элементы одного и того же поля G.

Гомологическая теория размерности берет свое начало с утверждения, полученного П. С. Александровым: соотношение $\dim X \leqslant n$, где $\dim$ — лебегова размерность, эквивалентно тому, что любое непрерывное отображение в n-мерную сферу S^n произвольного замкнутого множества $A \subset X$ может быть продолжено до отображения в S^n всего X. Отсюда было получено, что $\dim X = \dim_Z X$, если $\dim X < \infty$, а Z есть группа целых чисел. Затем Л. С. Понтрягиным было замечено, что Г. р. по разным областям коэффициентов не совпадают (вообще же, как это вытекает из формул универсальных коэффициентов, $\dim_G X \leqslant \dim X$ для любого компакта X); таким образом, Г. р. являются вместе с лебеговой размерностью нек-рыми топологич. инвариантами пространства X.

Г. р. $\dim_G X$ обладает многими свойствами обычной размерности $\dim$. Именно, если A — замкнутое подмножество из X, то $\dim_G A \leqslant \dim_G X$; если $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где каждое X замкнуто в X, то

$$\dim_G X = \max_i \dim_G X_i,$$

и т. п. Справедлива теорема Александрова о препятствии: подмножества евклидова пространства E^n, имеющие Г. р. r, (локально) зацепляются $(n-r-1)$-мерными циклами. См. также *Размерность*.

Центральное место в гомологич. размерности занимают исследования соотношений между Г. р. по различным областям коэффициентов. Возникающие в этом направлении задачи имеют много непосредственных приложений в теории размерности и тесно переплетаются с нек-рыми важнейшими задачами теории групп преобразований. Большую роль играет анализ размерности произведения; напр.,

$$\dim_G (X \times Y) = \dim_G X + \dim_G Y,$$

если G — поле рациональных чисел или поле вычетов по простому модулю, а

$$\dim (X \times Y) = \dim X + \dim Y$$

для любого компакта Y ($\dim X < \infty$) тогда и только тогда, когда все размерности $\dim_G X$ совпадают с $\dim X$.

Внешний облик гомологич. теории размерности существенно изменился в связи с применением аппарата *пучков теории*, получила самостоятельное развитие когомологич. теория размерности с коэффициентами в пучках (основное определение такое же). Новые методы оказались применимыми к решению ряда задач, связанных с поведением размерности при непрерывных отображениях, а также позволили расширить область применимости теории до категории *паракомпактных пространств*.

Лит.: [1] Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ., М., 1948; [2] Кузьминов В. И., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 5(143), с. 3—49.

Е. Г. Скляренко.

ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ УМНОЖЕНИЯ — операции, определенные на группах Tor и Ext. Над коммутативным кольцом K рассматриваются K-алгебры R, S и $T = R \otimes_K S$. *Производные функторы* Tor и Ext над ними можно комбинировать между собой посредством четырех гомоморфизмов, наз. гомологическими

умножениями:

$$T:\mathrm{Tor}_p^R(A,\ A')\otimes\mathrm{Tor}_q^S(C,\ C')\longrightarrow\mathrm{Tor}_{p+q}^T(A\otimes C,\ A'\otimes C'),$$

$$\perp:\mathrm{Ext}_T^{p+q}(A\otimes C,\ \mathrm{Hom}(A',\ C'))\longrightarrow$$
$$\longrightarrow\mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}_p^R(A',A),\ \mathrm{Ext}_s^q(C,\ C')),$$

$$\vee:\mathrm{Ext}_R^p(A,\ A')\otimes\mathrm{Ext}_s^q(C,\ C')\longrightarrow\mathrm{Ext}_T^{p+q}(A\otimes C,\ A'\otimes C'),$$

$$\wedge:\mathrm{Tor}_{p+q}^T(\mathrm{Hom}(A,\ C),\ A'\otimes C')\longrightarrow$$
$$\longrightarrow\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}_R^p(A,\ A'),\ \mathrm{Tor}_q^S(C,\ C')).$$

Здесь A и A' правые или левые R-модули, C и C' правые или левые S-модули, а символ K опущен при всех функторах. Последние два гомоморфизма определены только, если алгебры R и S проективны над K и $\mathrm{Tor}_n^K(A,\ C)=0$ для всех $n>0$. При нек-рых дополнительных ограничениях можно определить внутренние умножения, связывающие Tor и Ext над одним и тем же кольцом.

Все четыре умножения могут быть получены из формул, переставляющих функторы $\otimes$ и Hom с помощью замены аргументов соответствующими резольвентами (см. [1]). Умножение $\vee$ допускает следующую интерпретацию в терминах умножений Ионеда. Пусть

$$0\longrightarrow A'\longrightarrow X_1\longrightarrow\ldots\longrightarrow X_p\longrightarrow A\longrightarrow 0,$$
$$0\longrightarrow C'\longrightarrow Y_1\longrightarrow\ldots\longrightarrow Y_q\longrightarrow C\longrightarrow 0$$

— точные последовательности R- и S-модулей, соответственно, являющиеся представителями классов конгруэнтности в $\mathrm{Ext}_R^p(A,\ A')$ и $\mathrm{Ext}_S^q(C,\ C')$. Умножая первую из них тензорно справа на C', а вторую — слева на A, получают точные последовательности

$$0\longrightarrow A'\otimes C'\longrightarrow X_1\otimes C'\longrightarrow\ldots\longrightarrow X_p\otimes C'\longrightarrow A\otimes C'\longrightarrow 0,$$
$$\longrightarrow A\otimes C'\longrightarrow 0,$$
$$0\longrightarrow A\otimes C'\longrightarrow A\otimes Y_1\longrightarrow\ldots\longrightarrow A\otimes Y_q\longrightarrow A\otimes C\longrightarrow 0,$$

объединяемые в точную последовательность

$$0\longrightarrow A'\otimes C'\longrightarrow X_1\otimes C'\longrightarrow\ldots\longrightarrow A\otimes Y_q\longrightarrow A\otimes C\longrightarrow 0,$$

к-рую можно рассматривать в качестве представителя класса конгруэнтности в группе

$$\mathrm{Exp}_{R\otimes S}^{p+q}(A\otimes C,\ A'\otimes C').$$

Умножение $\vee$ в когомологии $H(X,\mathbb{Z})$ топологич. пространства X с коэффициентами в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ носит название умножения Колмогорова — Александера или U-умножения.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966. *В. Е. Говоров.*

ГОМОЛОГИЧЕСКИЙ ФУНКТОР — функтор на *абелевой категории*, определяющий нек-рую гомологич. конструкцию на этой категории. Система $H=(H_i)_i\in\mathbb{Z}$ ковариантных аддитивных функторов из абелевой категории $\mathcal{A}$ в абелеву категорию $\mathcal{A}'$ наз. гомологическим функтором, если выполняются следующие аксиомы.

1) Для всякой точной последовательности

$$0\to A'\to A\to A''\to 0$$

в категории $\mathcal{A}$ задан морфизм $\partial_i:H_{i+1}(A'')\to H_i(A')$, к-рый наз. связывающим, или граничным, морфизмом.

2) Последовательность

$$\ldots\longrightarrow H_{i+1}(A')\longrightarrow H_{i+1}(A)\longrightarrow H_{i+1}(A'')\xrightarrow{\partial_i}$$
$$\xrightarrow{\partial_i}H_i(A')\longrightarrow\ldots,$$

наз. гомологической последовательностью, является точной.

Пусть, напр., $\mathcal{A}=K(A\,b)$ — категория цепных комплексов абелевых групп, $(A\,b)$ — категория абелевых групп. Функторы $H_i: K(A\,b)\to(A\,b)$, ставящие в соответствие комплексу $K.$ соответствующие группы гомологий $H_i(K.)$, определяют Г. ф.

Пусть $F: \mathcal{A}\mapsto\mathcal{A}'$ — нек-рый аддитивный ковариантный функтор, для к-рого определены левые производные функторы R_iF ($R_iF=0$, $i<0$). Тогда система $(R_iF)_{i\in I}$ определяет Г. ф. из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$.

Еще одним примером Г. ф. может служить *гипергомологий функтор*.

Двойственным образом определяется когомологический функтор.

Лит.: [1] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961. *И. В. Долгачев.*

ГОМОЛОГИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ, обобщенное многообразие,— локально компактное топологич. пространство, локальная гомологич. структура к-рого аналогична локальной структуре обычных топологич. многообразий, в том числе многообразий с краем. Более точно, гомологическим n-многообразием (обобщенным n-многообразием) над группой или модулем G коэффициентов наз. локально компактное топологич. пространство X, имеющее конечную *гомологическую размерность* над G и такое, что все его локальные *гомологий группы* H_p^x при $p\neq n$ тривиальны, а при $p=n$ либо изоморфны G, либо равны нулю. Здесь H_p^x есть прямой предел групп $H_p(X,\ X\setminus U;\ G)$, взятый по всем окрестностям U точки $x\in X$, причем под H понимается теория гомологий, удовлетворяющая всем *Стинрода — Эйленберга аксиомам*, включая аксиому точности; в категории локально стягиваемых пространств теория H, рассматриваемая с компактными носителями, изоморфна сингулярной (см. *Сингулярные гомологии*). Группы H_n^x автоматически оказываются слоями нек-рого пучка $\mathcal{H}_n$ (см. *Пучков теория*), называемого ориентирующим пучком многообразия X. Г. м. X наз. ориентируемым, если пучок $\mathcal{H}_n$ изоморфен постоянному пучку $X\times G$, и локально ориентируемым, если $\mathcal{H}_n$ является локально постоянным в точках, где $H_n^x\neq 0$. Если G — кольцо главных идеалов и все H_n^x отличны от нуля, то Г. м. над G всегда локально ориентируемо. Если Г. м. над группой G локально ориентируемо, то множество всех $x\in X$, в к-рых $H_n^x=0$, замкнуто, нигде не плотно и образует край Г. м. X. Локально ориентируемое Г. м. X имеет те же гомологич. свойства, что и обычные многообразия.

Например, для X верна теорема об инвариантности области, если $h\dim_G X=n$, множество A' нигде не плотно в X в том и только в том случае, если $h\dim_G A\leqslant n-1$, и т. д.

Для всякого Г. м. над G имеют место естественные изоморфизмы (*Пуанкаре двойственность*)

$$H_p(X;\ G)=H^{n-p}(X;\ \mathcal{H}_n)$$

(когомологии с коэффициентами в пучке). Здесь p — любое целое число, но гомологич. размерность Г. м. X над G равна n, и потому изоморфизмы имеют нетривиальное содержание только при $0\leqslant p\leqslant n$. Аналогичные изоморфизмы имеют место для гомологий и когомологий с носителями в любом паракомпактифицирующем семействе (в частности, для гомологий и когомологий с компактными носителями). Условие изоморфизма между ненулевыми слоями H_n^x пучка $\mathcal{H}_n$ и группой G не является существенным. Можно также вместо группы G рассматривать любой локально постоянный пучок коэффициентов $\mathcal{G}$ со слоем G (при этом $\mathcal{H}_n$ изменится). Лю-

бое открытое подмножество $U \subset X$ является Г. м.; поэтому использование равенств

$$H_p(U;\ G) = H_p(X,\ X \setminus U;\ G),$$
$$H^q_c(U;\ G) = H^q(X,\ X \setminus U;\ G),$$

из к-рых во втором U имеет компактное замыкание, а индекс c указывает на компактность носителей, позволяет получать как частные случаи двойственности Пуанкаре изоморфизмы

$$H_p(X, X \setminus U;\ G) = H^{n-p}(U,\ \mathcal{H}_n),$$
$$H^c_p(U;\ G) = H^{n-p}(X,\ X \setminus U;\ \mathcal{H}_n).$$

Сопоставление точных гомологич. и когомологич. последовательностей соответствующих пар позволяет в качестве частных случаев двойственности Пуанкаре рассматривать также изоморфизмы

$$H_p(X \setminus U;\ G) = H^{n-p}(X,\ U;\ \mathcal{H}_n)$$

и

$$H_p(X,\ U;\ G) = H^{n-p}(X \setminus U;\ \mathcal{H}_n),$$

последний из к-рых является обобщением *Александера двойственности*. Аналогичные соотношения имеют место для гомологий и когомологий с носителями в нек-ром фиксированном семействе.

Пусть

$$H_p(X;\ G) = H_{p+1}(X;\ G) = 0$$

и пусть X компактно, а Y — замкнутое или открытое подмножество. Следствием предыдущих изоморфизмов и точности гомологий и когомологий является изоморфизм

$$H^c_p(X \setminus Y;\ G) = H^{n-p-1}(Y;\ \mathcal{H}_n),$$

представляющий собой *Понтрягина двойственность* при замкнутом Y и *Стинрода двойственность* при открытом Y. Отсюда и из свойства непрерывности когомологий вытекает, что изоморфизм

$$H^c_p(X \setminus Y;\ G) = H^{n-p-1}(Y;\ \mathcal{H}_n)$$

имеет место для любого подмножества $Y \subset X$ (двойственность Ситникова). В случае некомпактного X вместо гомологий с компактными носителями следует рассматривать гомологии с носителями, замкнутыми во всем X. Если X компактно, то при $p=0$ следует использовать приведенные гомологии.

Нетривиальными примерами Г. м. являются «сомножители» обычных многообразий, напр. евклидовых пространств: если для топологич. пространства X существует такое Y, что декартово произведение $X \times Y$ есть Г. м., то X и Y — тоже Г. м. Известны примеры Г. м., не являющихся локально евклидовыми ни в одной своей точке. Г. м. играют существенную роль в нек-рых вопросах теории *преобразований групп*, где они появляются в качестве пространств *орбит* или множества неподвижных точек.

Имеется когомологич. вариант определения обобщенных многообразий. Всякое когомологическое многообразие над кольцом главных идеалов G является Г. м. над G, а если G не более чем счетно, то верно и обратное.

Лит.: [1] Čech E., «Ann. Math.», 1933, v. 34, p. 621—730; [2] Lefschetz S., «Amer. J. Math.», 1933, v. 35, p. 469—573; [3] Александров П. С., «Ann. Math.», 1935, v. 36, p. 1—35; [4] Александров П. С., Понтрягин Л. С., «C. r. Acad. sci.», 1936, t. 202, p. 1327—329; [5] Smith P. A., «Ann. Math.», 1939, v. 40, p. 690—712; [6] Begle E., «Amer. J. Math.», 1942, v. 64, p. 553—73; [7] Wilder R., Topology of manifolds, N. Y., 1949; [8] Borel A., «Mich. Math. J.», 1957, v. 4, p. 227—39; [9] Yang C. T., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1958, v. 87, p. 261—83; [10] Conner P. E., Floyd E. E., «Mich. Math. J.», 1959, v. 6, p. 33—43; [11] Raymond F., там же, 1960, v. 7, p. 7—21; [12] Bredon G. E., там же, p. 35—64; [13] Borel A., «Ann. Math. studies», 1960, № 46, p. 23—33; [14] Bredon G. E., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1969, v. 63, № 4, p. 1079—81.

Е. Г. Скляренко.

ГОМОЛОГИЧЕСКОЕ ОПОЯСЫВАНИЕ — метод, позволяющий характеризовать размерность компакта, лежащего в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, в терминах метрич. свойств дополнительного пространства. Назовем мерой существенности цикла z компакта $\Phi\subset\mathbb{R}^n$ верхнюю грань тех $\varepsilon>0$, для к-рых можно подобрать такой компактный носитель $\Phi_1\subseteq\Phi$ цикла z, что цикл не гомологичен нулю в $O(\Phi_1, \varepsilon)$. Назовем p-мерным г о м о л о г и ч е с к и м п о п е р е ч н и к о м $\alpha_\Gamma^p z$ цикла z открытого множества $\Gamma=\mathbb{R}^n\setminus\Phi$ нижнюю грань p-мерных поперечников тел всех циклов, гомологичных в Γ циклу z. Здесь под p-м е р н ы м п о п е р е ч н и к о м $\alpha^p X$ компакта $X\subset\mathbb{R}^n$ понимается нижняя грань тех $\varepsilon>0$, для к-рых существует непрерывный ε-сдвиг компакта X в p-мерный компакт (и потому полиэдр).

Всякий $(n-1)$-мерный цикл открытого множества $\Gamma=\mathbb{R}^n\setminus\Phi$, зацепленный с каждой точкой компакта Φ, наз. м е ш к о м в о к р у г к о м п а к т а Φ.

Т е о р е м а о м е ш к а х. Пусть $r=\dim\Phi\leqslant n-1$. Тогда существует такое $\alpha>0$, что всякий мешок вокруг компакта Φ имеет $(r-1)$-мерный гомологич. поперечник, больший α, тогда как r-мерный гомологич. поперечник любого цикла в Γ равен нулю. При этом всегда имеются мешки вокруг Φ со сколь угодно малой мерой существенности. Если же $\dim\Phi=n$, то существует такое $\alpha>0$, что для всякого мешка z^{n-1} вокруг Φ выполняется $\mu z^{n-1}>\alpha$ (при этом $\alpha_\Gamma^{n-2} z^{n-1}>0$ и $\alpha_\Gamma^{n-1} z^{n-1}=0$ для всех мешков z^{n-1}).

Теорема о мешках может быть еще более усилена с помощью понятия п о я с а в о к р у г к о м п а к т а.

Т е о р е м а о п о я с а х. Пусть $\Phi\subset\mathbb{R}^n$ — компакт размерности r. Существует такое $\gamma>0$, что для любого $k=1, 2, \ldots, r+1$ и любого $\varepsilon>0$ в $\Gamma=\mathbb{R}^n\setminus\Phi$ имеется $(n-k)$-мерный цикл v (пояс размерности $n-k$ вокруг Φ), при $k>1$ ограничивающий в Γ, для к-рого $\beta^{r-k+1}v<\varepsilon$, $\tau v<\varepsilon$ и, кроме того, для всякого цикла w, гомологичного циклу v в γ-окрестности последнего относительно Γ имеет место $\beta^{r-n+1}x>\gamma$; для всякой цепи x, ограниченной циклом v в Γ, имеет место $\beta^{r-n+1}x>\gamma$.

С другой стороны, если $s>r$ и $k=1, \ldots, s+1$, то при любом $\gamma>0$ всякий $(n-k)$-мерный цикл z в Γ, для к-рого $\tau z<\gamma$, гомологичен в своей γ-окрестности (относительно Γ) нек-рому циклу z' со сколь угодно малым $\beta^{s-k}z'$. Далее, если $s>r$ и $k=2, 3, \ldots, s+1$, то при произвольном $\gamma>0$ всякий $(n-k)$-мерный цикл z, ограничивающий в Γ, для к-рого $\beta^{s-k+1}z<\gamma$ (и $\tau z<\gamma$ при $s=n-1$), ограничивает в Γ цепь x с $\beta^{s-n+1}x<\gamma$. Здесь через $\beta^p x$, $p\geqslant 0$, обозначена нижняя грань тех $\varepsilon>0$, для к-рых существует ε-сдвиг вершин цепи x, посредством к-рого цепь x вырождается до размерности p; через τx обозначена нижняя грань тех $\varepsilon>0$, для к-рых существует ε-сдвиг вершин x, переводящий x в нулевую цепь.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975.

А. А. Мальцев.

ГОМОЛОГИЯ в п р о е к т и в н о й г е о м е т р и и — автоморфизм проективной плоскости, переводящий все точки нек-рой прямой (о с и Г.) в себя и имеющий точно одну неподвижную точку (ц е н т р Г.). Если центр Г. не лежит на оси Г., то Г. наз. н е о с о б е н н о й (или г и п е р б о л и ч е с к о й); если центр Г. лежит на оси Г. то — о с о б е н н о й (или п а р а б о л и ч е с к о й). Обычно Г. задается центром, осью и парой точек в соответствии Г. Г. аффинной плоскости с собственным (конечным) центром и несобственной (бесконечно удаленной) осью есть гомотетия; с несобственным центром и собственной осью — растяжение и сжатие к оси; с несобственным центром и несобственной осью — параллельный перенос; особая Г. с несобственным центром и с собственной осью есть сдвиг.

Лит.: [1] Х а р т с х о р н Р., Основы проективной геометрии, пер. с англ., М., 1970.

А. Б. Иванов.

ГОМОМОРФИЗМ — морфизм в категории *алгебраических систем*. Г.— отображение алгебраич. системы $\boldsymbol{A}$, сохраняющее основные операции и основные отношения; точнее, пусть $\boldsymbol{A}=\langle A,\ \{o_i : i\in I\},\ \{r_j : j\in J\}\rangle$ — алгебраич. система с основными операциями $o_i, i\in I$ и основными отношениями r_j, $j\in J$. Г. системы $\boldsymbol{A}$ в однотипную ей систему $\boldsymbol{A}'=\langle A',\ \{o_i' : i\in I\},\ \{r_j' : j\in J\}\rangle$ наз. отображение $\varphi : A\to A'$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$\varphi(o_i(a_1,\ \ldots,\ a_{n_i})) = o_i'(\varphi(a_1),\ \ldots,\ \varphi(a_{n_i})), \qquad (1)$$

$$(a_1,\ \ldots,\ a_m)\in r_j \Rightarrow (\varphi(a_1),\ \ldots,\ \varphi(a_m))\in r_j', \qquad (2)$$

для всех элементов $a_1, a_2, \ldots$ из A и всех $i\in I$, $j\in J$.

Если каждому элементу i из I сопоставлен некоторый n_i-арный функциональный символ F_i, а каждому элементу j из J — m_j-местный предикатный символ P_j и в каждой системе $\boldsymbol{A}'$, однотипной системе $\boldsymbol{A}$, результат i-й основной операции o_i', примененной к элементам $x_1, \ldots, x_{n_i}$ из A', записан в виде $F(x_1, \ldots, x_{n_i})$, а вместо $(x_1, \ldots, x_{m_j})\in r_j'$ пишут $P(x_1, \ldots, x_{m_j})$. Условия (1), (2) при этом упрощаются и принимают вид

$$\varphi(F_i(a_1,\ \ldots,\ a_{n_i})) = F_i(\varphi(a_1),\ \ldots,\ \varphi(a_{n_i})),$$

$$P_j(a_1,\ \ldots,\ a_{m_j}) \Rightarrow P_j(\varphi(a_1),\ \ldots,\ \varphi(a_{m_j})).$$

Г. $\varphi : \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}'$ наз. с и л ь н ы м, если для любых элементов $a_1', \ldots, a_{m_j}'$ из A' и для любого предикатного символа P_j, $j\in J$, условие $P_j(a_1', \ldots, a_{m_j}')$ влечет существование в A таких элементов $a_1, \ldots, a_{m_j}$, что $a_1'=\varphi(a_1)$, $\ldots$, $a_{m_j}'=\varphi(a_{m_j})$, и выполняется соотношение $P_j(a_1, \ldots, a_{m_j})$.

Для алгебр понятия Г. и сильного Г. совпадают. Для моделей существуют Г., к-рые не являются сильными, и взаимно однозначные Г., к-рые не являются изоморфизмами.

Если φ — Г. алгебраич. системы $\boldsymbol{A}$ на алгебраич. систему $\boldsymbol{A}'$ и θ — *ядерная конгруэнция* для Г. φ, то отображение $\psi : (A/\theta)\to A'$, определяемое формулой $\psi(a/\theta)=\varphi(a)$, является Г. факторсистемы $\boldsymbol{A}/\theta$ на алгебраич. систему $\boldsymbol{A}'$. Если при этом φ — сильный Г., то ψ есть изоморфизм. Это — одна из самых общих формулировок теоремы о Г.

Следует отметить, что иногда Г. наз. также морфизмы в категориях, отличных от категорий алгебраич. систем. (Напр., Г. графов, Г. пучков, Г. групп Ли).

Лит.: [1] М а л ь ц е в А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [2] C h a n g C. C., K e i s l e r H. J., Model theory, Amsterdam, 1973.

Д. М. Смирнов.

ГОМОСКЕДАСТИЧНОСТЬ — свойство корреляции, состоящее в постоянстве условной дисперсии (в противном случае корреляция наз. г е т е р о с к е д а с т и ч н о й); этим свойством обладает, напр., нормальная корреляция.

О. В. Сарманов.

ГОМОТЕТИЯ — преобразование евклидова пространства относительно нек-рой точки O, ставящее в соответствие каждой точке M точку M', лежащую на прямой OM, по правилу

$$OM' = kOM,$$

где k — постоянное, отличное от нуля число, наз. к о э ф ф и ц и е н т о м Г. Точка O наз. ц е н т р о м Г. При $k>0$ точки M и M' лежат на одном луче, при $k<0$ — по разные стороны от центра. Точке O соответствует сама эта точка. Г. есть частный случай *подобия*. Две фигуры наз. г о м о т е т и ч н ы м и (а также п о д о б н ы м и и п о д о б н о р а с п о л о ж е н н ы м и, или п е р с п е к т и в н о - п о д о б н ы м и), если каждая состоит из точек, получаемых преобразованием Г. из другой фигуры относительно нек-рого центра Г.

Простейшие свойства Г.: Г. есть взаимно однозначное отображение евклидова пространства в себя с одной неподвижной точкой. При $k=1$ Г. есть тождественное преобразование. Г. переводит прямую (плоскость), проходящую через центр Г., в себя, прямую (плоскость), не проходящую через центр,— в прямую (плоскость), ей параллельную; углы между прямыми (плоскостями) при Г. сохраняются. Отрезки при Г. переходят в параллельные им отрезки с длиной, уменьшенной или увеличенной в $|k|$ раз, т. е. Г. есть сжатие (растяжение) евклидова пространства к точке O. Всякая сфера при Г. преобразуется в сферу, причем центр одной переходит в центр другой.

Г. задается чаще всего (геометрически) центром Г. и парой соответственных точек или двумя парами соответственных точек. Г. есть *аффинное преобразование*, имеющее одну (и только одну) двойную точку.

В n-мерных евклидовых пространствах Г. оставляет инвариантными каждую из совокупностей S_k ($k=1,2, \ldots, n-1$) k-мерных плоскостей пространства.

Аналогично определяется Г. в псевдоевклидовых пространствах. Г. в римановых пространствах и в псевдоримановых пространствах определяется как преобразование, переводящее метрику пространства в себя с точностью до постоянного множителя. Совокупность Г. составляет группу преобразований Ли, причем r-членная группа Г. риманова пространства содержит $(r-1)$-членную нормальную подгруппу движений. *И. П. Егоров.*

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ГРУППА — обобщение *фундаментальной группы*, предложенное В. Гуревичем [1] в связи с задачей о классификации непрерывных отображений. Г. г. определены для любого $n\geqslant 1$. При $n=1$ Г. г. совпадает с фундаментальной группой. Определение Г. г. не конструктивно, и поэтому их вычисление является трудной задачей, общие методы решения к-рой были выработаны только в 50-х гг. 20 в. Значение Г. г. определяется тем, что все задачи теории гомотопий более или менее сводятся (см. *Гомотопический тип*) к задаче вычисления тех или иных Г. г.

Пусть

$$I^n=\{(t_1, \ \ldots, \ t_n);\ 0\leqslant t_1\leqslant 1, \ \ldots, \ 0\leqslant t_n\leqslant 1\}$$

— единичный n-мерный куб, I^{n-1} — его грань $t_n=0$ и J^{n-1} — объединение всех остальных его граней. Для любой пунктированной пары (X, A, x_0) (см. *Пунктированный объект*) символом $\pi_n(X, A, x_0)$ (или просто $\pi_n(X, A)$) обозначается пунктированное множество всех гомотопич. классов $[u]$ (см. *Гомотопия*) отображений

$$u:(I^n, \ I^{n-1}, \ J^{n-1})\longrightarrow(X, \ A, \ x_0);$$

отмеченным элементом (нулем) этого множества служит класс постоянного отображения, переводящего весь куб I_n в точку x_0. Каждое непрерывное отображение

$$f:(X, A, x_0)\to(Y, B, y_0)$$

индуцирует нек-рый *морфизм*

$$f_*:\pi_n(X, \ A, \ x_0)\longrightarrow\pi_n(Y, \ B, \ y_0)$$

пунктированных множеств. Для любого $n\geqslant 1$ множества $\pi_n(X, A, x_0)$ и морфизмы f^* составляют нек-рый *функтор* π_n из *категории* пунктированных пар в категорию пунктированных множеств. Этот функтор гомотопически инвариантен, то есть $f_*=g_*$, когда f и g гомотопны (как отображения пунктированных пар). Кроме того, он нормирован, в том смысле, что если $X=A=x_0$, то $\pi_n(X, A, x_0)=0$.

При $n\geqslant 2$ в множество $\pi_n(X, A, x_0)$ можно ввести операцию сложения, относительно к-рой оно будет группой (при $n>2$ даже абелевой): по определению, если $x=[u]$ и $y=[v]$, то $x+y=[w]$, где w — отображение

$$(I^n, \ I^{n-1}, \ J^{n-1})\longrightarrow(X, \ A, \ x_0),$$

определенное формулой

$$w(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} u(2t_1, t_2, \ldots, t_n), \text{ если } 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ v(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), \text{ если } 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases} \quad (1)$$

Получающаяся группа $\pi_n(X, A, x_0)$ наз. n-й гомотопической группой (или n-мерной Г. г.) пунктированной пары (X, A, x_0); говорят также о Г. г. пары (X, A) в точке x_0 или о Г. г. пространства X относительно подпространства A в точке x_0. Отображения f_* являются гомоморфизмами этих групп. Таким образом, при $n \geqslant 2$ можно считать, что функтор π_n принимает значения в категории групп (при $n > 2$ даже абелевых).

При $A = x_0$ группа $\pi_n(X, A, x_0)$ обозначается $\pi_n(X, x_0)$, или просто $\pi_n(X)$, и наз. абсолютной гомотопической группой пунктированного пространства (X, x_0) (или пространства X в точке x_0). Ее элементами являются гомотопич. классы отображений $(I^n, \dot{I}^n) \to (X, x_0)$, где $\dot{I}^n = I^{n-1} \cup \cup J^{n-1}$ — граница куба I^n. Для таких отображений формула (1) имеет смысл и при $n = 1$, так что множество $\pi_1(X, x_0)$ оказывается группой. Эта группа совпадает с классической фундаментальной группой. Обычно групповая операция в $\pi_1(X, x_0)$ наз. умножением. Эта группа, вообще говоря, неабелева, тогда как группа $\pi_2(X, x_0)$ — абелева. Для любого $n \geqslant 1$ группы $\pi_n(X, x_0)$ и соответствующие гомоморфизмы составляют нек-рый функтор из категории пунктированных пространств в категорию групп (при $n > 1$ — в категорию абелевых групп). Этот функтор является композицией $\pi_n \circ \iota$ функтора вложения $\iota : (X, x_0) \to (X, x_0, x_0)$ и построенного выше функтора π_n.

Функтор $\pi_n \circ \iota$ распространяется и на случай $n = 0$, если понимать под $\pi_0(X, x_0)$ пунктированное множество компонент линейной *связности* пространства X; нулем этого множества является компонента, содержащая точку x_0. Множество $\pi_0(X, A, x_0)$ при $A \neq x_0$ не определяется. Для упрощения формулировок множества $\pi_0(X, x_0)$ и $\pi_1(X, A, x_0)$ обычно также наз. Г. г., хотя они, вообще говоря, являются лишь пунктированными множествами.

Для любого элемента $x = [u] \in \pi_n(X, A, x_0)$ отображение $u|I^{n-1}$ представляет собой отображение $(I^{n-1}, I^{n-1}) \to (A, x_0)$ и потому определяет нек-рый элемент Г. г. $\pi_{n-1}(A, x_0)$. Этот элемент зависит только от x и обозначается символом ∂x. Получающееся отображение $\partial : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$ является морфизмом пунктированных множеств (при $n > 1$ — гомоморфизмом групп) и наз. граничным гомоморфизмом, или граничным оператором. Граничный гомоморфизм вместе с гомоморфизмами i_* и j_*, индуцированными вложениями $i : (A, x_0) \to (X, x_0)$ и $j : (X, x_0) \to (X, A, x_0)$, позволяет написать бесконечную слева последовательность групп и гомоморфизмов:

$$\ldots \xrightarrow{j_*} \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*}$$
$$\xrightarrow{i_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{j_*} \pi_2(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{j_*}$$
$$\xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0).$$

Это — *точная последовательность*; она наз. точной гомотопической последовательностью пары (X, A, x_0) и обозначается обычно $\pi(X, A, x_0)$. Если $\pi_n(X, x_0) = 0$ для всех $n \geqslant 0$, то гомоморфизм $\partial : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$ является изоморфизмом (также для всех n).

Граничный гомоморфизм ∂ обладает свойством естественности, т. е. является морфизмом функтора π_n в функ-

тор $\pi_n \circ \iota$ [точнее, в функтор $\pi_n \circ \iota'$, где $\iota' : (X, A, x_0) \mapsto (A, x_0, x_0)$]. Это позволяет определить $\pi_n(X, A, x_0)$ как функтор, принимающий значения в категории точных последовательностей пунктированных множеств, являющихся, за исключением последних шести множеств, абелевыми группами, а за исключением последних трех множеств, — группами.

Пусть $p : E \to B$ — произвольное *расслоение* в смысле Серра и пусть $A \subset B$, $E' = p^{-1}(A)$, $e_0 \in E'$ и $b_0 = p(e_0)$. Отображение p определяет нек-рое отображение $p' : (E, E', e_0) \to (B, A, b_0)$ пунктированных пар. Для любого $n \geqslant 1$ индуцированный этим отображением гомоморфизм $p'_* : \pi_n(E, E', e_0) \to \pi_n(B, A, b_0)$ является изоморфизмом. В частности, это верно при $A = b_0$. В этом случае формула $\tau = \partial \circ (p'_*)^{-1}$ однозначно определяет нек-рый гомоморфизм $\tau : \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, e_0)$, где $F = p^{-1}(b_0)$ — слой расслоения p над точкой b_0. Этот гомоморфизм наз. гомотопической трансгрессией. Он входит в точную последовательность

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_n) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\tau} \longrightarrow \pi_{n-1}(F, e_0) \longrightarrow \ldots$$

Эта последовательность наз. гомотопической последовательностью расслоения $p : E \mapsto B$. Сопоставление расслоению его гомотопич. последовательности приводит к нек-рому функтору на категории всех (пунктированных) расслоений.

В частном случае, когда p есть стандартное *Серра расслоение* путей над пространством X, для любого $n \geqslant 0$ имеет место изоморфизм $\pi_n(\Omega X) \approx \pi_{n+1}(X)$, где ΩX — *петель пространство* пространства X. Этот изоморфизм наз. изоморфизмом Гуревича.

Перечисленные свойства по существу однозначно определяют Г. г. $\pi_n(X, A, x_0)$, т. е. могут быть приняты за аксиомы, описывающие эти Г. г. Именно, пусть $\pi_1, \ldots, \pi_n, \ldots$ — произвольная последовательность гомотопически инвариантных нормированных функторов, заданных на категории пунктированных пространств, принимающих значения в категории пунктированных множеств и обладающих тем свойством, что для любого расслоения в смысле Серра $p : E \to B$ любого подмножества $A \subset B$ и любой точки $e_0 \in p^{-1}(A)$ индуцированный гомоморфизм $\pi_n(E, p^{-1}(A), e_0) \to \pi_n(B, A, p(e_0))$ является изоморфизмом. Такая последовательность наз. гомотопической системой, если для любого $n \geqslant 1$ задан морфизм ∂ функтора π_n в функтор $\pi_n \circ \iota'$ (при $n = 1$ — в $\pi_0(X, x_0)$), являющийся изоморфизмом для любой пунктированной пары (X, A, x_0), для которой $\pi_n(X, x_0) = 0$ при всех $n \geqslant 0$. Любая гомотопич. система изоморфна построенной выше гомотопич. системе, состоящей из Г. г. Более того, при $n \geqslant 3$ в пунктированные множества $\pi_n(X, A, x_0)$ (а также в множества $\pi_2(X, x_0)$) можно единственным образом ввести групповое строение (структуру группы) так, чтобы все морфизмы f_* были гомоморфизмами [это строение совпадает, стало быть, с тем, к-рое определяется формулой (1)]. В группах же $\pi_2(X, A, x_0)$ при $A \neq x_0$ и $\pi_1(X, x_0)$ можно только ввести еще инверсную групповую операцию. Все это и означает, что перечисленные выше свойства однозначно определяют Г. г. (с точностью до порядка сомножителей в некоммутативных группах).

Для любого отображения $u : (I^n, \dot{I}^n) \to (X, x_2)$ и любого пути $v : I \to X$, соединяющего точку x_1 с точкой x_2, формула $g_t(x) = v(1-t)$, $x \in \dot{I}^n$, определяет нек-рую гомотопию отображения $u|\dot{I}^n$. По аксиоме о распространении гомотопии (см. *Корасслоение*) эта гомотопия может быть распространена до нек-рой гомотопии $u_t : I^n \to X$, обладающей тем свойством, что $u_0 = u$. Конечное отображение u_1 этой гомотопии переводит $\dot{I}^n$ в x_1, то есть представляет собой отображение $(I^n, \dot{I}^n) \to (X, x_1)$. Со-

ответствующий элемент Г. г. $\pi_n(X, x_1)$ зависит только от класса $[u]\in\pi_n(X, x_2)$ отображения u и гомотопич. класса $\alpha=[v]$ пути v и обозначается символом αx (при $n=1$ — символом x^α). Семейство $G_x=\pi_n(X, x)$ определяется тем самым как локальное семейство на пространстве X, т. е. на фундаментальном группоиде этого пространства. В частности, для любой точки $x_0\in X$ группа $\pi_1(X, x_0)$ оказывается группой операторов группы $\pi_n(X, x_n)$. При $n=1$ эти операторы действуют как внутренние автоморфизмы: $x^\alpha=\alpha x\alpha^{-1}$, а при $n>1$ определяют группу $\pi_n(X, x_0)$ как $\pi_1(X, x_0)$-модуль. Для любого непрерывного отображения $f : (X, x_0)\to(Y, y_0)$ индуцированные гомоморфизмы $f_* : \pi_n(X, x_0)\to\pi_n(Y, y_0)$ являются операторными гомоморфизмами (гомоморфизмами модулей): $f_*(\alpha x)=f_*(\alpha)\,f_*(x)$.

Аналогичным образом группы $G_x=\pi_n(X, A, x)$, $x\in A$ составляют локальное семейство Г. г. на подпространстве A. В частности, $\pi_1(A, x_0)$ является группой операторов Г. г. $\pi_n(X, A, x_0)$, так что при $n>2$ группа $\pi_n(X, A, x_0)$ будет $\pi_1(A, x_0)$-модулем. Группа $\pi_2(X, A, x_0)$ является скрещенным $(\pi_1(A, x_0), \partial)$-модулем (см. *Скрещенные модули*), где $\partial : \pi_2(X, A, x_0)\to\pi_1(A, x_0)$ — граничный гомоморфизм.

Группа $\pi_1(A, x_0)$ служит группой операторов не только групп $\pi_n(X, A, x_0)$, но и групп $\pi_n(A, x_0)$, а также, в силу естественного гомоморфизма $\pi_1(A, x_0)\to\pi_1(X, x_0)$, — группой операторов групп $\pi_n(X, x_0)$. Относительно этого действия группы $\pi_1(A, x_0)$ все гомоморфизмы точной последовательности $\pi(X, A, x_0)$ являются операторными гомоморфизмами, так что группа $\pi_1(A, x_0)$ может рассматриваться как группа операторов последовательности $\pi(X, A, x_0)$. Это равносильно тому, что последовательности $\pi(X, A, x)$, $x\in A$ составляют локальное семейство точных последовательностей на подпространстве A.

В случае, когда дополнение $X\setminus A$ представляет собой объединение непересекающихся открытых n-мерных клеток, $\pi_1(A, x_0)$-модуль $\pi_n(X, A, x_0)$ является свободным модулем (при $n=2$ — свободным скрещенным модулем) и обладает системой свободных образующих — базисом, находящимся в биективном (не обязательно естественном) соответствии с клетками из $X\setminus A$ (теорема Уайтхеда).

Отображения $(I^n, \dot I^n)\to(X, x_0)$ находятся в биективном соответствии с отображениями $(S^n, s_0)\to(X, x_0)$, где S^n — произвольная n-мерная сфера, а s_0 — нек-рая ее точка; поэтому элементы группы $\pi_n(X, x_0)$ можно рассматривать как гомотопич. классы отображений $(S^n, s_0)\to(X, x_0)$. Это верно и при $n=0$. Указанное отождествление зависит от выбора нек-рого относительного гомеоморфизма $\varphi : (I^n, \dot I^n)\to(S^n, s_0)$. Обычно сфера S^n и гомеоморфизм φ предполагаются раз навсегда выбранными и фиксированными. В первоначальном, ставшем малоупотребительным определении Гуревича, сфера S^n не фиксировалась, а гомеоморфизм φ задавался с точностью до гомотопии. Такое задание гомеоморфизма φ равносильно заданию нек-рой ориентации сферы S^n. Таким образом, по Гуревичу, элементами группы $\pi_n(X, x_0)$ являются пунктированные гомотопич. классы отображений ориентированной n-мерной сферы в пространстве X. Множество $[S^n, X]$ непунктированных гомотопич. классов отображений $S^n\to X$ находится в биективном соответствии с *орбитами* действия группы $\pi_1(X, x_0)$ в группе $\pi_n(X, x_0)$. Если $\pi_1(X, x_0)=0$ (или, более общим образом, если группа $\pi_1(X, x_0)$ тривиально действует на группе $\pi_n(X, x_0)$, — в этом случае пространство X наз. гомотопически n-простым), то $\pi_n(X, x_0)$ не зависит от точки x_0 (так что в этом случае обозначение $\pi_n(X)$ полностью оправдано). Эта группа естественным образом отождествляется с множеством $[S^n, X]$, к-рое является, стало быть, в этом случае

группой. Пространство, гомотопически n-простое для всех n, наз. а б е л е в ы м.

Пусть s_n — ориентирующий класс гомологий сферы S^n и пусть $h([f])=f_*(s_n)$, $[f]\in\pi_n(X, x_0)$. Тем самым определяется нек-рый гомоморфизм $h:\pi_n(X, x_0)\to H_n(X)$, наз. г о м о м о р ф и з м о м Г у р е в и ч а. Его ядро содержит все элементы вида $\alpha x-x$, $x\in\pi_n(X, x_0)$, $\alpha\in\pi_1(X, x_0)$ (при $n=1$ — все элементы вида $x\alpha x^{-1}=\alpha x\alpha^{-1}x^{-1}$, т. е. содержит коммутант $[\pi_1, \pi_1]$ группы $\pi_1(X, x_0)$). Классич. теорема Пуанкаре утверждает, что при $n=1$ ядро гомоморфизма h совпадает с коммутантом $[\pi_1, \pi_1]$, так что группа $H_1(X)$ изоморфна прокоммутированной фундаментальной группе $\pi_1(X, x_0)$. Обобщением теоремы Пуанкаре на случай $n>1$ является т е о р е м а Г у р е в и ч а, утверждающая, что если $\pi_i(X)=0$ при $i<n$, то гомоморфизм $h:\pi_n(X)\to H_n(X)$ является изоморфизмом (а гомоморфизм $h:\pi_{n+1}(X)\to H_{n+1}(X)$ — эпиморфизмом).

Аналогичным образом элементы группы $\pi_n(X, A, x_0)$ можно рассматривать как (пунктированные) гомотопич. классы отображений $(E, S)\to(X, A)$, где E — (ориентированный) n-мерный шар, а S — его граница. Если пара (X, A) гомотопически n-проста [т. е. группа $\pi_1(A, x_0)$ тривиально действует на группе $\pi_n(X, A, x_0)$], то в этом определении пунктированность можно игнорировать. Формула

$$h([f])=f_*(e_n),$$

где e_n — ориентирующий класс гомологий пары (E, S), а $[f]\in\pi_n(X, A, x_0)$, определяет г о м о м о р ф и з м Г у р е в и ч а

$$h:\pi_n(X, A, x_0)\to H_n(X, A).$$

Если $\pi_1(A, x_0)=0$ и $\pi_n(X, A, x_0)=0$ при $i<n$, то этот гомоморфизм является изоморфизмом (т е о р е м а Г у р е в и ч а д л я о т н о с и т е л ь н ы х г р у п п).

Для вычисления Г. г. конкретных пространств известны два основных метода: метод *убивающих пространств* и метод гомотопич. резольвент (см. *Гомотопический тип*, *Постникова системы*). Первый метод основывается на изоморфизме $\pi_{n+1}(X)\approx H_{n+1}(X, n)$, вытекающем из теоремы Гуревича, и определении убивающего пространства (X, n). Этот изоморфизм сводит задачу вычисления группы $\pi_{n+1}(X)$ к задаче вычисления групп гомологий $H_{n+1}(X, n)$. Пространство (X, n) расслаивается над пространством $(X, n-1)$ со слоем $K(\pi_n(X), n-1)$, а группы гомологий пространств $K(\pi, n)$ известны. Поэтому индукцией можно пытаться найти нужные группы гомологий убивающих пространств. Задача вычисления группы гомологий расслоенного пространства по группам гомологий его базы и слоя в общем виде полностью не решена (и, по-видимому, общего удовлетворительного решения не имеет), однако обширную информацию о группах гомологий пространств (X, n) можно извлечь из соответствующих спектральных последовательностей Серра. Во многих случаях этой информации достаточно для вычисления групп $H_{n+1}(X, n)\approx\pi_{n+1}(X)$, по крайней мере для нек-рых n. Существенное технич. упрощение задачи достигается на основе серровской теории классов абелевых групп и вытекающей из этой теории теоремы G_p-аппроксимации, позволяющей проводить все вычисления во-первых для когомологий, а во-вторых лишь для групп коэффициентов $\mathbb{Z}/p$. Геометрич. принципы, лежащие в основе этой техники, были недавно вскрыты Дж. Адамсом (J. Adams) и Д. Салливаном (D. Sullivan) [8] на основе понятия локализации топологич. пространств по данному простому p.

Второй (также индуктивный) метод вычисления Г. г. состоит в постепенном построении гомотопич. резольвенты пространства X. Пусть уже известен n-й член этой резольвенты [напр., если $X=S^n$, то $X_n=K(\mathbb{Z}, n)$].

Следующий член X_{n+1} должен быть расслоенным пространством над X_n со слоем $K(\pi_{n+1}(X),\ n+1)$, причем группа $H_{n+1}(X_{n+1})$ должна быть изоморфна известной группе $H_{n+1}(X)$. Это дает (на основе соответствующей спектральной последовательности) определенную информацию о группе $\pi_{n+1}(X)$, позволяющую во многих случаях полностью ее вычислить. Напр., при $X=S^n$ этим методом можно найти группы $\pi_{n+k}(S^n)$ для всех $k\leqslant 13$. В современной своей форме эти вычисления также основываются на понятии локализации.

Метод гомотопич. резольвент был доведен (см. [5]) до алгоритма, применимого к любому односвязному конечному клеточному разбиению и дающего все его Г. г. Однако этот алгоритм для практич. применения слишком сложен.

Поскольку гомотопич. теория пространств полностью эквивалентна гомотопич. теории симплициальных множеств, определение Г. г. может быть перенесено на любые (полные) симплициальные множества. Получающееся «комбинаторное» определение Г. г. (принадлежащее Д. Кану) легко может быть доведено до алгоритма. Однако и этот алгоритм для практич. вычислений слишком сложен.

Любой из описанных методов без труда устанавливает, что Г. г. произвольного односвязного пространства, имеющего конечно порожденные группы гомологий, также конечно порождены. Аналогичное утверждение для неодносвязных пространств (Г. г. конечно порождены как $\pi_1(X)$-модули), вообще говоря, неверно.

Пусть S — функтор (приведенной) *надстройки*, а Ω — функтор петель. Так как эти функторы сопряжены, то для любого X тождественное отображение $SX\to SX$ определяет нек-рое вложение $X\subset\Omega SX$. Поскольку $\pi_n(\Omega SX)\approx\pi_{n+1}(SX)$, это вложение определяет нек-рый гомоморфизм

$$E:\pi_n(X)\to\pi_{n+1}(SX),$$

известный как г о м о м о р ф и з м н а д с т р о й к и. Он совпадает с гомоморфизмом, получающимся при сопоставлении произвольному (пунктированному) отображению $f:S^n\to X$ его надстройки $Sf:S^{n+1}\to SX$. Этот гомоморфизм входит в точную последовательность

$$\ldots\longrightarrow\pi_n(X)\xrightarrow{E}\pi_{n+1}(SX)\xrightarrow{H}\pi_n(\Omega SX,\ X)\xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial}\pi_{n-1}(X)\longrightarrow\ldots$$

Эта последовательность наз. н а д с т р о е ч н о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю п р о с т р а н с т в а X. Фигурирующий в ней гомоморфизм H является обобщением классического *Хопфа инварианта*.

В случае, когда X — счетное одновершинное клеточное разбиение, пространство ΩSX может быть заменено (см. [7]) приведенной степенью X_∞ разбиения X. Это показывает, что если $\pi_i(X)=0$ при $i<m$, то гомоморфизм E является изоморфизмом для всех $n<2m-1$ и эпиморфизмом при $n=2m-1$. Эта теорема известна как т е о р е м а Ф р е й д е н т а л я о н а д с т р о й к е [Г. Фрейденталь (H. Freudenthal) первым опубликовал доказательство для случая $X=S^n$, хотя теорема была известна и ранее].

Теорема Фрейденталя показывает, что при $k<2n-1$ группа $\pi_{n+k}(S^n)$ не зависит от n. Она наз. k-й с т а ц и о н а р н о й Г. г. (с т а б и л ь н о й Г. г.) с ф е р. Аналогичное явление стабилизации наблюдается для Г. г. ортогональных групп, Г. г. *Тома пространств MSO* и во многих других случаях. Общее изучение этого явления наиболее удобно проводить в рамках так наз. т е о р и и с п е к т р о в. В этой теории стационарные Г. г. появляются как Г. г. спектров. Эти группы устроены существенно проще Г. г. пространства и их изучение (и вычисление) оказывается значительно более легкой задачей. Напр., для вычисления этих групп

имеется специальный аппарат: *спектральная последовательность* Адамса.

Г. г. обобщались в самых различных направлениях. Напр., делались попытки заменить сферы другими пространствами. Здесь можно отметить торусные Г. г., позволившие проинтерпретировать *Уайтхеда произведения* как нек-рые коммутанты. Показано также, что в множество гомотопич. классов отображений $X \to Y$ тогда и только тогда можно ввести естественную по Y групповую операцию, когда X является *ко-Н-пространством*. Были определены Г. г. с коэффициентами, получающиеся при замене сфер S^n *Мура пространствами* $M(G, n)$. Это определение Г. г. с коэффициентами оказалось не очень удачным. Более удовлетворительное определение (согласующееся с общим принципом двойственности Экмана — Хилтона) было получено при замене M-пространств Мура ко-M-пространствами. Однако эти Г. г. определены не для всех G (напр., при G, являющейся аддитивной группой действительных чисел, эти группы не определены).

Детально изучен также вопрос о построении Г. г. в категориях, отличных от категории пунктированных пар. Здесь в первую очередь следует отметить построение Г. г. *триад* (см., напр., [3]), оказавшихся очень полезными при изучении гомоморфизма E. Весьма общие конструкции Г. г. были предложены в связи с исследованиями по двойственности. На основе понятия стандартной конструкции (см. [6]) построение Г. г. было перенесено на произвольные категории. Существенную роль в этом построении играют уже упоминавшиеся Г. г. симплициальных множеств.

Лит.: [1] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [2] Болтянский В. Г., Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей, М., 1955; [3] Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, пер. с англ., М., 1964; [4] Браун Э. Х., «Математика», 1958, т. 2 : 2, с. 3—24; [5] Кан Д., там же, 1962, т. 6, № 1, с. 3—32; [6] Столлингс Дж., там же, 1964, 8 : 4, с. 155—57; [7] Экман Б., Хилтон П., там же, 1960, 4 : 3, с. 3—27; [8] Салливан Д., Геометрическая топология, пер. с англ., М., 1975. *М. М. Постников*

ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП — класс гомотопически эквивалентных топологич. пространств. Отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ наз. взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями, если $fg \sim 1_Y$ и $gf \sim 1_X$. Если выполнено только первое из этих соотношений, то g наз. гомотопически мономорфным отображением, а f — гомотопически эпиморфным отображением. Отображение тогда и только тогда является гомотопич. эквивалентностью, когда оно гомотопически мономорфно и эпиморфно. Если существует гомотопически эпиморфное отображение $f : X \to Y$, то говорят, что пространство Y доминирует над пространством X. Если существует гомотопич. эквивалентность $f : X \to Y$, то пространства X и Y наз. гомотопически эквивалентными, или пространствами одного гомотопического типа.

Проблема гомотопического типа состоит в нахождении необходимых и достаточных условий гомотопич. эквивалентности любых пространств. Оказывается удобным эту постановку несколько ослабить. Отображение $f : X \to Y$ наз. слабой гомотопической эквивалентностью, если оно индуцирует изоморфизм *гомотопических групп* всех размерностей. Соответственно, пространства X и Y наз. слабо гомотопически эквивалентными, если существует либо слабая гомотопич. эквивалентность $X \to Y$, либо слабая гомотопич. эквивалентность $Y \to X$. Поскольку любая гомотопич. эквивалентность является слабой гомотопич. эквивалентностью, то гомотопически эквивалентные пространства слабо гомотопически эквивалентны. Обратное верно, если про-

странства являются *клеточными разбиениями* (теорема Уайтхеда). Эта теорема основана на том, что: 1) отображение $f : X \to Y$ тогда и только тогда является гомотопич. эквивалентностью, когда X есть *деформационный ретракт* цилиндра M_f отображения f; 2) отображение $f : X \to Y$ тогда и только тогда является слабой гомотопич. эквивалентностью, когда подпространство X цилиндра M_f гомотопически репрезентативно (см. *Репрезентативное подпространство*); 3) подразбиение клеточного разбиения тогда и только тогда репрезентативно, когда оно является деформационным ретрактом.

Таким образом, проблема Г. т. на категории клеточных разбиений равносильна проблеме слабого Г. т. С другой стороны, любое пространство X слабо гомотопически эквивалентно геометрич. реализации его сингулярного симплициального множества $S(X)$. Поэтому в проблеме слабого Г. т. без ограничения общности можно рассматривать лишь клеточные разбиения.

Отображения $f, g : X \to Y$ наз. n-гомотопными, если для любого клеточного разбиения K размерности $\leqslant n$ и любого отображения $\varphi : K \to X$ отображения $f\circ\varphi$ и $g\circ\varphi$ гомотопны. Если X — клеточное разбиение, это имеет место тогда и только тогда, когда $f|X^n \sim g|X^n$. Пространства, эквивалентные по отношению n-гомотопности, наз. пространствами одного n-гомотопического типа. Клеточные разбиения K и L наз. разбиениями одного n-типа (обозначение $K \underset{n}{\sim} L$), если их n-е остовы K^n и L^n имеют один и тот же $(n-1)$-гомотопический тип. Если $K \underset{n}{\sim} L$, то $K \underset{m}{\sim} L$ при любом $m \leqslant n$. Это остается справедливым и при $n = \infty$, если под ∞-типом понимать Г. т. Другими словами, понятие n-типа гомотопически инвариантно. Важность понятия n-типа для проблемы Г. т. определяется тем, что два n-мерных клеточных разбиения тогда и только тогда гомотопически эквивалентны, когда они имеют один и тот же $(n+1)$-тип.

Пусть X — произвольное пространство (для простоты — линейно связное). Симплициальное подмножество $M(X)$ симплициального множества $S(X)$ наз. минимальным, если оно содержит все сингулярные симплексы, являющиеся отображениями в нек-рую фиксированную точку $x_0 \in X$, и если для любого симплекса $\sigma \in S(X)$, все грани к-рого принадлежат подмножеству $M(X)$, в $M(X)$ существует единственный симплекс, гомотопный σ (относительно границы стандартного симплекса). Минимальные подмножества существуют и, с точностью до изоморфизма, однозначно определяются пространством X. При этом два пространства тогда и только тогда слабо гомотопически эквивалентны, когда их минимальные симплициальные множества изоморфны. Таким образом, для решения проблемы слабого Г. т. остается лишь найти достаточно удовлетворительное описание симплициальных множеств $M(X)$.

Пусть Δ_q есть q-мерный *стандартный симплекс*, рассматриваемый как симплициальное разбиение (относительно его стандартной триангуляции) и пусть $C^n(\Delta_q, \pi)$ — группа его n-мерных *коцепей* над абелевой группой π (точнее, группа нормализованных n-мерных коцепей симплициального множества $O(\Delta_q)$). Пусть $E(\pi, n)$ — симплициальное множество, в к-ром симплексами размерности q являются коцепи из $C^n(\Delta_q, \pi)$, а операторы грани ∂_i и вырождения s_i являются коцепными отображениями, индуцированными стандартными симплициальными отображениями $e_i : O(\Delta_{q-1}) \to O(\Delta_q)$ и $f : O(\Delta_{q+1}) \to O(\Delta_q)$ (отображение e_i «выпускает» i-ю вершину, а отображение f_i «склеивает» i-ю и $(i+1)$-ю вершины). Симплексы, являющиеся коциклами, образуют в $E(\pi, n)$ некоторое симплициальное подмножество $K(\pi, n)$. Кограничный оператор $\delta : C^n(\Delta_q, \pi) \to C^{n+1}(\Delta_q, \pi)$ определяет симплициальное отображе-

ние $\delta : E(\pi, n) \to K(\pi, n+1)$, ядром к-рого служит подмножество $K(\pi, n)$. Отображение δ является *расслоением* (в смысле Кана) со слоем $K(\pi, n)$. Кроме того, симплициальное множество $K(\pi, n)$ является в категории симплициальных множеств объектом типа $K(\pi, n)$ (по отношению к гомотопич. группам в смысле Кана, см. *Эйленберга — Маклейна пространство*), а симплициальное множество $E(\pi, n)$ гомотопически тривиально (гомотопически эквивалентно «точке»). Таким образом, расслоение δ является симплициальным аналогом *Серра расслоения* путей над пространством типа $K(\pi, n+1)$.

Симплициальное множество $K(\pi, n)$ при $n=1$ имеет смысл и для любой (не обязательно абелевой) группы π. Получающееся симплициальное множество $K(\pi, 1)$ есть не что иное, как стандартная симплициальная *резольвента* группы π.

Пусть π_1 — мультипликативная группа операторов аддитивной группы π. Для любого коцикла a произвольного симплициального множества N над группой π_1 в группе коцепей этого множества над группой π определен кограничный оператор δ_a относительно коцикла a. Пусть σ — произвольный q-мерный симплекс из N и пусть $t_\sigma : O(\Delta_q) \to N$ — его характеристическое отображение (см. *Симплициальное множество*). Тогда в $O(\Delta_q)$ определен коцикл $t_\sigma^*(a)$. Пусть кограничный оператор относительно этого коцикла обозначен символом $\delta_{a,\sigma}$. Пусть k^{n+1} — произвольный $(n+1)$-мерный коцикл симплициального множества N над группой π относительно коцикла a. Если в прямом произведении симплициальных множеств N и $E(\pi, n)$ рассмотреть подмножество $P = P(N, k^{n+1})$, состоящее из всевозможных пар (σ, u), $\sigma \in N$, $u \in E(\pi, n)$, для к-рых $t_\sigma^*(k^{n+1}) = \delta_{a,\sigma} u$, то P будет симплициальным подмножеством. Формула $p(\sigma, u) = \sigma$ определяет надъективное (сюръективное) отображение $p : P \to N$, являющееся расслоением (в смысле Кана). Это расслоение будет обозначаться $p(N, k^{n+1})$. В случае, когда коцикл a тривиален, это есть не что иное как расслоение, индуцированное симплициальным отображением $N \to K(\pi, n+1)$, отвечающим коциклу k^{n+1}, из расслоения $E(\pi, n) \mapsto K(\pi, n+1)$. Над n-мерным остовом N^n симплициального множества N расслоение p обладает *сечением* $\sigma \to (\sigma, 0)$, и коцикл k^{n+1} является *препятствием* к распространению этого сечения на N^{n+1}. После отождествления симплексов σ и $(\sigma, 0)$ можно считать, что $N^n \subset P^n$. При этом $N^{n-1} = P^{n-1}$.

Пусть теперь имеется последовательность расслоений симплициальных множеств

$$\ldots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{p_n} P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{p_1} P_1, \qquad (1)$$

начальный член P_1 к-рой является симплициальным множеством $K(\pi_1, 1)$, построенным для мультипликативной группы π_1. По определению, одномерные симплексы из P_1 находятся в естественном биективном соответствии с элементами группы π_1. Сопоставление каждому такому симплексу соответствующего элемента группы π_1 приводит в P_1 к нек-рому одномерному коциклу a_1 над группой π_1. Пусть коцикл a_n определяется в P_n индуктивной формулой $a_n = p_{n-1}^*(a_{n-1})$. Последовательность (1) наз. гомотопической резольвентой, или *Постникова системой* (первоначальное название — натуральная система), если для любого $n \geqslant 1$ симплициальное множество P_{n+1} есть множество вида $P(P_n, k_n^{n+2})$, где k_n^{n+2} — коцикл размерности $n+2$ в P_n над нек-рой π_1-группой π_{n+1} относительно коцикла a_n [и расслоение p_n есть расслоение $p(P_n, k_n^{n+2})$]. Эта последовательность наз. резольвентой симплициального множества M, если для любого $n \geqslant 1$ задано симплициальное отображение $q_n : M \to P_n$, являющееся изоморфизмом

на M^n и такое, что $p_n \circ q_{n+1} = q_n$. Резольвента определяет симплициальное множество M однозначно с точностью до изоморфизма. С другой стороны, сама резольвента однозначно определяется группами $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots$ и коциклами $k_1^3, k_2^4, \ldots, k_n^{n+2}, \ldots$ Поэтому р е з о л ь в е н т о й можно называть также и объект $\{\pi_n, k_n^{n+2}\}$, состоящий из групп π_n и коциклов k_n^{n+2}.

Не всякое симплициальное множество M обладает резольвентой. Основная теорема теории гомотопич. резольвент утверждает, что симплициальное множество M тогда и только тогда обладает резольвентой, когда оно изоморфно минимальному симплициальному множеству $M(X)$ нек-рого топологич. пространства X. При этом $\pi_n = \pi_n(X)$.

Резольвента минимального множества $M = M(X)$ строится следующим образом. Пусть σ — произвольный q-мерный симплекс из $M(X)$. Этот симплекс представляет собой отображение $\sigma : \Delta_q \to X$, переводящее все вершины симплекса Δ_q в точку x_0. Поэтому на любой одномерной грани (ребре) симплекса Δ_q оно определяет нек-рый элемент группы $\pi_1 = \pi_1(X, x_0)$. Таким образом на Δ_q возникает нек-рый одномерный коцикл над группой π_1, т. е. q-мерный симплекс из $P_1 = K(\pi_1, 1)$; он будет обозначаться $q_1(\sigma)$. Тем самым получено нек-рое (симплициальное) отображение $q_1 : M \to P_1$. Это отображение является изоморфизмом на M^1 и эпиморфизмом на M^2. Далее проводится индукция: пусть для нек-рого $n \geqslant 1$ уже построено симплициальное множество P_n и симплициальное отображение $q_n : M \to P_n$, являющееся изоморфизмом на M^n и эпиморфизмом на M^{n+1}. Для отображения $q_n | M^{n+1}$ существует обратное справа отображение $q_n' : P_n^{n+1} \to M^{n+1}$. Пусть k_n^{n+2} — препятствие к распространению этого отображения на M^{n+2}. Препятствие k_n^{n+2} является $(n+2)$-мерным коциклом в P_n над группой $\pi_{n+1} = \pi_{n+1}(X)$, относительно коцикла a_n. Для любого $(n+1)$-мерного симплекса τ из M симплекс $q_n' q_n(\tau) = \tau'$ сравним с τ, и потому определен различающий элемент $d(\tau, \tau') \in \pi_{n+1}$ (см. *Различающая*). Пусть σ — произвольный q-мерный симплекс из M. На каждой $(n+1)$-мерной грани симплекса Δ_q он определяет некоторый $(n+1)$-мерный симплекс τ. Сопоставление этой грани элемента $d(\tau, \tau')$ приводит к некоторой $(n+1)$-мерной коцепи в Δ_q над π_{n+1}, то есть к некоторому q-мерному симплексу $r_n(\sigma)$ симплициального множества $E(\pi_{n+1}, n+1)$. Пара $q_{n+1}(\sigma) = (q_n(\sigma), r_n(\sigma))$ принадлежит симплициальному множеству $P_{n+1} = P(P_n, k_n^{n+2})$. Для завершения индукции остается заметить, что построенное отображение $q_{n+1} : M \to P_{n+1}$ симплициально, является изоморфизмом на M^{n+1} и эпиморфизмом на M^{n+2}.

Резольвента $\{\pi_n, k_n^{n+2}\}$ строится по симплициальному множеству $M(X)$ неоднозначно: имеется произвол в выборе обратных отображений q_n'. Проще всего описать эту неоднозначность, понимая резольвенты в смысле (1). Именно, две такие резольвенты $\{\overline{P}_n, \overline{p}_n\}$ и $\{P_n, p_n\}$ тогда и только тогда возникают из одного минимального симплициального множества $M(X)$, когда они изоморфны как последовательности отображений, т. е. когда для любого $n \geqslant 1$ существует такой изоморфизм $\overline{\theta}_n : P_n \to \overline{P}_n$, что $\theta_n \circ p_n = \overline{p}_n \circ \theta_{n+1}$. Чтобы описать этот изоморфизм в терминах резольвент $\{\pi_n, k_n^{n+2}\}$ и $\{\pi_n, \overline{k}_n^{n+2}\}$, следует заметить, что существование изоморфизма $\theta_1 : P_1 \to \overline{P}_1$ равносильно существованию изоморфизма групп $\vartheta_1 : \pi_1 \to \overline{\pi}_1$. При этом $\theta_1^*(\overline{a}_1) = \vartheta_1(a_1)$. Далее, для изоморфизма $\theta_n : P_n \to \overline{P}_n$ тогда и только тогда существует следующий изоморфизм $\theta_{n+1} : P_{n+1} \to \overline{P}_{n+1}$, когда существует такой ϑ_1-изоморфизм $\vartheta_{n+1} : \pi_{n+1} \to \overline{\pi}_{n+1}$ (см.

Операторный гомоморфизм) и такая коцепь $l^{n+1} \in C^{n+1}(P_n, \overline{\pi}_{n+1})$, что

$$\theta_n^*(\overline{k}_n^{n+2}) - \vartheta_{n+1}(k_n^{n+2}) = \delta_{\theta_n^*(a_n)}\, l^{n+1}. \qquad (2)$$

При этом изоморфизм θ_{n+1} определяется формулой

$$\theta_{n+1}(\sigma, u) = (\sigma, u - t_\sigma^*(l^{n+1})). \qquad (2')$$

Резольвенты $\{\pi_n, k_n^{n+2}\}$ и $\{\pi_n, \overline{k}_n^{n+2}\}$ тогда и только тогда возникают из одного минимального симплициального множества, когда существуют такие изоморфизмы $\vartheta_n : \pi_n \to \overline{\pi}_n$, являющиеся при $n>1$ ϑ_1-изоморфизмами, что для любого $n \geqslant 1$ выполнены соотношения (2), где θ_n — изоморфизм, последовательно определяемый при $n>1$ формулой (2'), а при $n=1$ являющийся изоморфизмом, индуцированным изоморфизмом ϑ_1. В этом случае резольвенты $\{\pi_n, k_n^{n+2}\}$ и $\{\overline{\pi}_n, \overline{k}_n^{n+2}\}$ наз. изоморфными. Гомотопической резольвентой пространства X наз. резольвента симплициального множества $M(X)$. Резюмируя, получаем, что два пространства тогда и только тогда слабо гомотопически эквивалентны, когда их гомотопич. резольвенты изоморфны; в частности, два клеточных разбиения тогда и только тогда гомотопически эквивалентны, когда их гомотопические резольвенты изоморфны.

Если условия (2) выполнены только при $n<m$, то изоморфизмы θ_n существуют только при $n \leqslant m$. В этом случае говорят, что данные резольвенты m-изоморфны. Два клеточных разбиения тогда и только тогда имеют один и тот же n-тип, когда их гомотопич. резольвенты $(n-1)$-изоморфны.

Изложенное решение проблемы Г. т. (и n-типа) позволяет доказывать целый ряд общих теорем и существенно проясняет принципиальную сторону дела (но явное вычисление резольвент возможно лишь в немногих случаях). Из него вытекает, что для любого односвязного пространства с конечными группами гомологий гомотопич. группы могут быть эффективно вычислены. Аналогичное утверждение справедливо и для пространств, группы гомологий к-рых лишь конечно порождены (см. [2]). Тот факт, что Г. т. полностью определяется резольвентой, показывает, что любая задача теории гомотопий сводится к нек-рому утверждению о резольвентах соответствующих пространств. Это позволяет классифицировать задачи по числу коциклов k_n^{n+2}, участвующих в их решении. Если рассматриваемое пространство $(n-1)$-связно, то его резольвента начинается фактически с члена $P_n = K(\pi_n, n)$. Если решение данной задачи может быть сформулировано лишь с использованием первой нетривиальной группы π_n, то эта задача наз. задачей нулевой ступени [напр., задача Хопфа — Уитни о классификации отображений n-мерного полиэдра в $(n-1)$-связное пространство]. Если для этого требуются группы π_n, π_{n+1} и коцикл k_n^{n+2}, то задача наз. задачей первой ступени [напр., задача о классификации отображений $(n+1)$-мерного полиэдра в $(n-1)$-связное пространство]. Аналогично определяются задачи второй, третьей и т. д. ступеней. Известны эффективные решения любых задач нулевой и первой ступеней. Это связано с тем, что для любого $(n-1)$-связного пространства можно вполне эффективно вычислить класс когомологий коцикла k_n^{n+2}; именно, он имеет вид $Sq^2_{\eta}\iota$, где ι — *фундаментальный класс* пространства $K(\pi_n, n)$, а Sq^2_{η} — при $n>2$ — *Стинрода операция*, соответствующая естественному *спариванию* $\eta : \pi_n \otimes \pi_n \to \pi_{n+1}$, а при $n=2$ — некоторый ее вариант, известный как *Понтрягина квадрат*. Для задач высших ступеней необходимо аналогичное эффективное вычисление следующих коциклов k_{n+1}^{n+3}, k_{n+2}^{n+4}, ... Каждый из этих коциклов получается из

фундаментального класса с применением нек-рой *когомологической операции* соответствующего порядка. Это, в частности, показывает, что решение любой задачи теории гомотопий может быть сформулировано в терминах определенных когомологич. операций. Однако ввиду большой сложности операций высших порядков получены лишь решения отдельных задач высших ступеней, использующие соображения специального характера. Нек-рый общий прогресс достигнут в предположении стационарности: продвинутое в этих предположениях уже довольно далеко вычисление дифференциалов спектральной последовательности Адамса равносильно вычислению нек-рых стационарных операций высоких порядков.

Теория гомотопич. резольвент может быть переформулирована в следующей, «геометризованной» форме. Р е з о л ь в е н т о й наз. произвольная последовательность расслоений в смысле Серра

$$X_{n+1} \xrightarrow{p_n} X_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_2 \xrightarrow{p_1} X_1, \qquad (3)$$

в к-рой каждое пространство X_n обладает тем свойством, что $\pi_m(X_n)=0$ при $m>n$. Эта последовательность наз. р е з о л ь в е н т о й п р о с т р а н с т в а X, если для любого $n\geqslant 1$ заданы отображения $q_n : X\to X_n$, индуцирующие изоморфизм гомотопич. групп до размерности n и такие, что $p_n\circ q_n=q_n$. Эта резольвента с точностью до изоморфизма [понимаемого как изоморфизм последовательностей (см. *Последовательностей категория*)] определяется однозначно группами $\pi_n=\pi_n(X)$ и характеристич. классами k_n^{n+2} расслоений p_n. Резольвента существует для любого линейно связного пространства X [таковой будет, напр., геометрическая реализация «алгебраической» резольвенты (1)] и определяет это пространство с точностью до слабой гомотопич. эквивалентности. Слоем расслоения $p_n : X_{n+1}\to X_n$ является пространство типа $K(\pi_{n+1}, n+1)$, и в случае, когда X гомотопически n-просто (см. *Гомотопическая группа*), напр., односвязно, это расслоение индуцировано из *Серра расслоения* путей над пространством $K(\pi_{n+1}, n+2)$ посредством нек-рого отображения $X_n\to$ $\to K(\pi_{n+1}, n+2)$, представляющего (см. *Эйленберга — Маклейна пространство*, *Представимый функтор*) класс когомологий k_n^{n+2}.

Если пространство X $(n-1)$-связно, то его резольвента фактически начинается с члена $X_n=K(\pi_n, n)$. При $n>1$ удобно наряду с «абсолютными» резольвентами (3) рассматривать также так наз. р е з о л ь в е н т ы п о м о д у л ю простого числа p, определение к-рых отличается от определения резольвент (3) только тем, что гомотопич. группы заменяются их p-компонентами. Если для X найдены резольвенты по любому простому модулю p, нахождение «абсолютной» резольвенты, как правило, не представляет труда. Поэтому в задаче вычисления резольвент (включающей задачу вычисления гомотопич. групп) обычно ограничиваются «модульными» резольвентами, в вычислении к-рых могут быть использованы мощные методы теории *спектральных последовательностей* и теории когомологич. операций. Для нек-рых пространств вычисление резольвент далеко продвинуто.

Например, для сферы S^n (при n достаточно большом, чтобы выполнялись условия стационарности) известно уже довольно много первых членов ее резольвенты по модулю 2. Достаточно описать соответствующие группы π_{n+r} [то есть 2-компоненты групп $\pi_{n+r}(S^n)$] и классы когомологий k_{n+r}^{n+r+2}. Первые группы π_{n+r} имеют следующий вид

r	0	1	2	3	4	5	6	7
π_{n+r}	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_8$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{16}$

Класс k_n^{n+2} имеет вид $Sq^2\iota \in H^{n+2}(\mathbb{Z}, n; \mathbb{Z}_2)$, где $\iota \in H^n(\mathbb{Z}, n; \mathbb{Z}_2)$ — фундаментальный класс. Следующий класс $k_{n+1}^{n+3} \in H^{n+3}(X_1; \mathbb{Z}_2)$ обладает тем свойством, что на слое $K(\mathbb{Z}_2, n+1)$ расслоения p_n он высекает класс $Sq^2\iota_{n+1} \in H^{n+3}(\mathbb{Z}_2, n+1; \mathbb{Z}_2)$ и однозначно этим свойством характеризуется. Аналогично, класс $k_{n+2}^{n+4} \in H^{n+4}(X_2; \mathbb{Z}_8)$ однозначно характеризуется тем, что после приведения по модулю 2 он переходит в класс $Sq^4\iota \in H^{n+4}(X_2; \mathbb{Z}_2)$. Классы k_{n+3}^{n+5} и k_{n+4}^{n+6} равны нулю, а класс $k_{n+5}^{n+7} \in H^{n+7}(X_{n+5}; \mathbb{Z}_2)$ однозначно характеризуется тем, что на слое $K(\mathbb{Z}_8, n+3)$ расслоения p_{n+2} он высекает класс $Sq^4\iota_{n+3} \in H^{n+7}(\mathbb{Z}_8, n+3; \mathbb{Z}_2)$. Наконец, класс $k_{n+6}^{n+8} \in H^{n+8}(X_{n+6}; \mathbb{Z}_{16})$ характеризуется тем, что после приведения по модулю 2 он переходит в класс $Sq^8\iota \in H^{n+8}(X_{n+6}; \mathbb{Z}_2)$.

Лит.: [1] Постников М. М., Исследования по гомотопической теории непрерывных отображений, ч. 1, Алгебраическая теория систем, ч. 2, Натуральная система и гомотопический тип, М., 1955; [2] Браун Э. Х., «Математика», 1958, 2 : 2, с. 3—24; [3] Мошер Р., Тангора М., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970, гл. 13.
М. М. Постников.

ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП топологизированной категории — проективная система топологич. пространств, ассоциированная с *топологизированной категорией* и позволяющая определять гомотопические группы этой категории, группы гомологий и когомологий со значениями в абелевой группе и т. д.

Рассматриваются только локально связные топологизированные категории (C, τ), т. е. такие категории C, снабженные топологией Гротендика τ, любой объект к-рых представим в виде копроизведения $\sqcup_{i \in I} X_i$ неразложимых объектов X_i; I играет роль множества связных компонент топологич. пространства. Множество индексов I определено однозначно с точностью до биекции; оно обозначается $\pi_0(X)$. Сопоставление $X \mapsto \pi_0(X)$ определяет функтор из категории C в категорию множеств. Произвольное покрытие $U \to X$ объекта X в топологии (C, τ) определяет симплициальный объект $U.$ в категории C, для к-рого

$$U_n = \underbrace{U_X \times U_X \times \ldots \times U_X}_{n \text{ раз}},$$

и симплициальное множество $\pi_0(U.)$. Геометрич. реализация симплициального множества $\pi_0(U.)$ дает топологич. пространство $|U| = |\pi_0(U.)|$. Для любого измельчения $W \to X$ — покрытия U ($W \to X$ пропускается через $U \to X$) определено (с точностью до гомотопии) непрерывное отображение $|W| \to |U|$. Таким образом, объекту X сопоставляется проективная система топологич. пространств $\{|U|\}_{U \in \mathrm{Cov}(X)}$, где $\mathrm{Cov}(X)$ — семейство всех покрытий объекта X.

Это определение аналогично определению когомологий Чеха; известно, однако, что в общем случае когомологии Чеха дают «правильные» когомологии только в размерностях 0 и 1. Поэтому приведенная выше конструкция не может считаться удовлетворительной. В [1] введено понятие гиперпокрытия, обобщающее симплициальные объекты $U.$, построенные выше для покрытий $U \to X$. Это — снова симплициальный объект $K.$ в топологизированной категории (C, τ) с финальным объектом X, удовлетворяющий условиям: $K_0 \to X$ — покрытие объекта X; для любого n канонич. морфизм $K_{n+1} \to (\mathrm{cosk}_n(K.))_{n+1}$ является покрытием, где cosk_n — функтор n-го коскелета.

Сопоставление каждому гиперпокрытию $K.$ топологич. пространства $|\pi_0(K.)|$ приводит к проективной системе пространств, параметризованной гиперпокрытиями. Это и определяет гомотопический тип (а точнее — прогомотопический тип) то-

пологизированной категории (C, τ) с финальным объектом X. Группы гомотопий, гомологий и когомологий вводятся стандартным способом.

Г. т. топологизированной категории, ассоциированной со схемой, позволяет определить Г. т. схемы. Наиболее часто рассматривают случай этальной топологии X_{et} на схеме X. В этом случае Г. т. схемы X представляет собой прообъект категории пунктированных симплициальных множеств или категории конечных клеточных комплексов. Определяемые для таких объектов гомотопические группы $\pi_i(X)$ являются проконечными группами и наз. i-ми гомотопическими группами схемы X (см. [2]). Если X — нормальная схема, то $\pi_1(X)$ совпадает с фундаментальной группой схемы, определяемой по Гротендику [3]. Г. т. точки $X=\mathrm{Spec}\, k$, где k — поле, совпадает с проективным пределом пространств Эйленберга — Маклейна $K(G_i, 1)$, где G_i — группа Галуа конечного расширения Галуа K_i поля k. В случае алгебраич. многообразий над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ имеет место теорема сравнения: группы $\pi_i(X)$ являются проконечным пополнением обычных гомотопич. групп $\pi_i(X^{an})$ комплексного пространства X^{an}, ассоциированного с X.

Лит.: [1] Труды международного конгресса математиков (Москва. 1966), М., 1968, с. 44—56; [2] Theorie des Toposes et cohomologie etale des schimas, t. 1—3, B.—Hdlb.—N.Y.,1974; [3] Artin M., Mazur B., Etale homotopy, B.—Hdlb.—N. Y., 1969; [4] Сулливан Д., Геометрическая топология, пер. с англ., М., 1975; [5] Revêtements etales et groupe fondamental (S6A1), B.— Hdlb.—N.Y., 1971.

В. И. Данилов, И. В. Долгачев.

ГОМОТОПИЯ, гомотопность двух непрерывных отображений $f, g : X \to Y$, — формализация интуитивного представления о деформируемости одного отображения в другое. Точнее, отображения f и g наз. гомотопными (обозначение $f \sim g$), если существует такое семейство непрерывных отображений $f_t : X \to Y$, непрерывно зависящих от параметра $t \in [0, 1]$, что $f_0 = f$, $f_1 = g$ (фиксация отрезка $[0, 1]$ произведена здесь лишь по соображениям технич. удобства; ясно, что вместо него можно взять любой другой отрезок действительной оси). Это семейство (называемое гомотопией, связывающей f с g) является путем в пространстве $F(X, Y)$ всех непрерывных отображений $X \to Y$, связывающим точку f с точкой g, так что гомотопность отображений является специализацией на случай пространств отображений общего отношения «быть связанным непрерывным путем». Поэтому, в частности, отношение гомотопности является отношением эквивалентности, а соответствующие классы (они называются гомотопич. классами) представляют собой компоненты линейной связности пространства $F(X, Y)$. Для придания сказанному точного смысла необходимо уточнить, что означает выражение «отображения f_t непрерывно зависят от t». Самый естественный путь состоит во введении в $F(X, Y)$ топологии (или хотя бы псевдотопологии). Однако по традиции принято поступать иначе. Именно, по определению, считается, что f_t непрерывно зависит от t, если функция $f_t(t)$ непрерывна по совокупности переменных, т. е. если непрерывно отображение $F : X \times [0, 1] \to Y$, определенное формулой $F(x, t) = f_t(x)$ (это отображение также часто наз. гомотопией, связывающей f с g).

Описанные Г. иногда наз. свободными, чтобы отличить их от «связанных» Г., возникающих, когда фиксирован нек-рый класс $\mathfrak{A}$ непрерывных отображений $X \to Y$ и наложено требование, чтобы $f_t \in \mathfrak{A}$ для любого $t \in [0, 1]$. Напр., если задано подпространство $A \subset X$, то можно рассматривать связанные на A гомотопии, отличающиеся тем, что $f_t = f_0$ на A для всех t. В этом случае говорят, что отображение $f = f_0$ гомотопно отображению $g = f_1$ относительно A и пишут $f \sim g$ rel A.

Другой тип «связанных» Г. возникает, когда в X и Y выбраны подпространства $A \subset X$ и $B \subset Y$ и рассматриваются лишь отображения $f : X \to Y$, удовлетворяющие условию $f(A) \subset B$. Такие отображения наз. отображениями пары (X, A) в пару (Y, B) [обозначение $f : (X, A) \to (Y, B)$], а соответствующие Г. [т. е. гомотопии, для к-рых $f_t(A) \subset B$ для всех t] — гомотопиями отображений пар. Вместо пар можно рассматривать тройки (X, A, B) (с условием $B \subset A \subset X$ или без этого условия), четверки и т. п. Можно рассматривать, напр., Г. отображений пар относительно третьего подпространства и т. д. Возможны и принципиально другие типы «связанных» Г.

Задача установления гомотопичности («связанной» или нет) двух данных отображений $f, g : X \to Y$ равносильна задаче распространения на все $X \times [0, 1]$ непрерывного отображения в Y, заданного на $X \times 0 \cup X \times 1$ (а в задаче гомотопности rel A — на $X \times 0 \cup A \times [0, 1] \cup \cup X \times 1$). В этом смысле задача гомотопности является частным случаем задачи распространения. Вместе с тем в широком классе случаев (а именно, для так наз. *корасслоений*) возможность распространения на все X непрерывного отображения $A \to Y$, заданного на подпространстве $A \subset X$, зависит только от его гомотопич. класса. Эта тесная связь задачи гомотопности и задачи распространения обусловливает их совместное рассмотрение в рамках так наз. теории гомотопии. См. *Гомотопический тип*.

М. М. Постников.

ГОНИОМЕТРИЯ — часть тригонометрии, определяющая тригонометрич. функции и соотношения между ними.

ГОРДИНГА НЕРАВЕНСТВО — неравенство, имеющее вид:

$$\| u \|_m^2 \leqslant c_1 \operatorname{Re} B[u, u] = c_2 \| u \|_0^2,$$

где $u \in \mathbb{C}_0^\infty(G)$ — комплексная функция с компактным (в G) носителем, $G \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область и

$$B[u, u] = \sum_{|s|, |t| \leqslant m} \int_G a_{st} D^s u \bar{D}^t u \, dx$$

— интегральная квадратичная форма с непрерывными в $\overline{G}$ комплексными коэффициентами a_{st}. Достаточным условием справедливости Г. н. для любой функции $u \in \in \mathbb{C}_0^\infty(G)$ является существование такой положительной постоянной c_0, что

$$\operatorname{Re} \sum_{|s|, |t| \leqslant m} a_{st} \xi^s \xi^t \geqslant c_0 |\xi|^{2m}$$

для любого $x \in G$ и всех действительных векторов $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$. Г. н. сформулировано и доказано Л. Гордингом [1].

Лит.: [1] Gårding L., «Math. scand.», 1953, bd. 1, № 1, s. 55—72; [2] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967.

А. А. Дезин.

ГОРЕНШТЕЙНА КОЛЬЦО — коммутативное нётерово локальное кольцо, имеющее конечную инъективную размерность (см. *Гомологическая размерность*). Кольцо A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем вычетов k размерности n является Г. к. тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1) $\operatorname{Ext}_A^i(k, A) = 0$ для $i \neq n$ и $\operatorname{Ext}_A^n(k, A) \simeq k$.

2) Для любой максимальной A-последовательности $x_1, \ldots, x_n$ (см. *Глубина модуля*) идеал $(x_1, \ldots, x_n)$ неприводим.

3) Функтор $M \mapsto \operatorname{Ext}_A^n(M, A)$, определенный на категории A-модулей конечной длины, изоморфен функтору $M \mapsto \operatorname{Hom}_A(M, I)$, где I — инъективная оболочка поля k.

4) Кольцо A является *Коэна — Маколея кольцом* (в частности, все локальные когомологии $H_m^i(A) = 0$ для $i \neq n$) и $H_m^n(A)$ совпадает с инъективной оболочкой поля k.

5) Для любого A-модуля M конечного типа существует канонич. изоморфизм

$$H^i_m(M) \simeq \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Ext}^{n-i}(M, A), H^n_m(A))$$

(л о к а л ь н а я д в о й с т в е н н о с т ь).

Примерами Г. к. являются регулярные кольца, а также их факторкольца по идеалу, порожденному регулярной последовательностью элементов (п о л н ы е п е р е с е ч е н и я).

В случае, когда Г. к. A — одномерная область целостности, Г. к. допускают следующую численную характеризацию. Пусть $\overline{A}$ — целое замыкание A в поле частных, F — *кондуктор* A в $\overline{A}$, $C=\dim_k \overline{A}/F$ и $\delta=\dim_k \overline{A}/A$. Тогда кольцо A есть Г. к. тогда и только тогда, когда $C=2\delta$. Это равенство впервые доказано для локального кольца неприводимой плоской алгебраической кривой Д. Гореншейном [1]. Локализация Г. к. является Г. к. В связи с этим возникло расширение понятия Г. к.: нётерово кольцо (или схема) наз. к о л ь ц о м (с х е м о й) Г о р е н ш т е й н а, если все локализации этого кольца по простым идеалам (соответственно все локальные кольца схемы) являются локальными кольцами Гореншейна (в первом определении).

Лит.: [1] G o r e n s t e i n D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1952, v. 72, p. 414—36; [2] С е р р Ж., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [3] А в р а м о в Л. Л., Г о л о д Е. С., «Матем. заметки», 1971, т. 9, № 1, с. 53—8; [4] G r o t h e n d i e c k A., Seminaire Bourbaki, 2 ed., P., 1959; [5] е г о ж е, Local cohomology, B.—Hdlb.—N.Y., 1967; [6] H a r t s h o r n e R., Residues and duality, B.—Hdlb.—N.Y., 1966; [7] B a s s H., «Math. Z.», 1963, Bd 82, № 1, S. 8—28.

В. И. Данилов, И. В. Долгачев.

ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — гладкое распределение на гладком расслоенном пространстве E со структурной группой Ли G (т. е. гладкое поле линейных подпространств в касательных к E пространствах), к-рое определяет связность в E в том смысле, что все горизонтальные поднятия всех кривых базы являются его интегральными кривыми. Г. р. Δ должно быть трансверсально к слоям, т. е. в любой точке $y\in E$ имеет место прямое разложение $T_y(E)=\Delta_y\oplus T_y(F_y)$, где F_y — слой, содержащий y. Эффективные условия на трансверсальное распределение, достаточные, чтобы оно было Г. р., в общем случае весьма сложны. В частном случае, когда E является главным расслоенным пространством P, они должны гарантировать инвариантность распределения относительно действия группы G на P. В этом случае условия даются с помощью формы связности, аннулятором к-рой является Г. р., и находят свое выражение в теореме Картана — Лаптева. Из соответствующих структурных уравнений следует, что если гладкие векторные поля X и Y на P таковы, что $X_y, Y_y\in\Delta y$ в любой $y\in P$, то $[XY]_y$ имеет на $T_y(E_y)$ компоненту $\Omega_y(X, Y)$, где Ω — форма кривизны. Следовательно, Г. р. инволютивно тогда и только тогда, когда определяемая им связность в P плоская.

Г. р. на пространстве E, присоединенном к P, является всегда образом нек-рого Г. р. Δ на P при канонич. проекциях тех факторизаций, с помощью к-рых строится E, исходя из P. В общем случае, когда E получается факторизацией из $P\times F$ по действию G согласно формуле $(y, f)\cdot g=(y\cdot g, g^{-1}\cdot f)$ и следовательно возникает канонич. проекция $\pi: P\times F\to E$, каждое Г. р. на E получается как образ $\pi^*\overline{\Delta}$, где $\overline{\Delta}$ — естественное поднятие Δ с P на $P\times F$. В более частном случае, когда F является однородным пространством G/H, пространство E отождествляется с P/H и каждое Г. р. на E получается как образ $\pi^*\Delta$ при канонич. проекции $\pi: P\to P/H$.

Лит.: [1] Н о м и д з у К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, пер. с англ., М., 1960; [2] Б и ш о п Р., К р и т т е н д е н Р., Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967; [3] Л у м и с т е Ю. Г., «Матем. сб.», 1966, т. 69, № 3, с. 434—69.

Ю. Г. Лумисте.

ГОРЛОВОЙ ЭЛЛИПС — эллипс наименьшей площади, получающийся в пересечении однополостного *гиперболоида* плоскостью, перпендикулярной его оси.

Е. В. Шикин.

ГОРНЕРА СХЕМА — прием для нахождения неполного частного и остатка при делении многочлена

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

на двучлен $x-a$, где все коэффициенты a, a_0, ..., a_n лежат в нек-ром поле, напр., в поле комплексных чисел. Всякий многочлен $f(x)$ единственным способом представим в виде

$$f(x)=(x-a)g(x)+r,$$

где $g(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0$ есть неполное частное, а r — остаток, равный по *Безу теореме* $f(a)$. Коэффициенты $g(x)$ и r вычисляются по рекуррентным формулам

$$\left.\begin{array}{l} b_{n-1}=a_n,\ b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1},\ \ldots,\ b_0=a_1+ab_1,\\ r=a_0+ab_0. \end{array}\right\} \quad (*)$$

При вычислениях применяют таблицу

	a_n	a_{n-1}	...	a_1	a_0
a	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_0	r

верхняя строка к-рой задана, а нижняя заполняется по формулам (*). Этот способ по существу совпадает с методом Тянь-юань, применявшимся в средневековом Китае. В начале 19 в. он был заново открыт почти одновременно У. Горнером [1] и П. Руффини [2].

Лит.: [1] Horner W. G., «Philos. Trans. Roy. Soc. London A», 1819, v. 1, p. 308—35; [2] Ruffini P., «Mem. coronata della Societá Italiana delle Scienze», 1802, v. 9, p. 444—526.

В. Н. Ремесленников.

ГРАВИТАЦИЯ, тяготение, — универсальное свойство притяжения между любыми телами. Изучение Г. положило начало ньютоновской классич. механике. Так, Г. Галилей, изучая квазиоднородное поле Г. у поверхности земли, сформулировал закон инерции и установил, что сила, действующая на тело, измеряется ускорением; И. Кеплер (J. Kepler) и И. Ньютон (I. Newton) изучали действие тяжелой точки с большой массой на другую точку, значительно меньшей массы, что привело И. Ньютона к открытию закона всемирного тяготения

$$f_{12}=\gamma\frac{m_1m_2}{r^3}r_{12}, \qquad (1)$$

где f_{12} — сила тяготения, действующая на точку с массой m_1, r_{12} — радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку с массой m_2, $r=|r_{12}|$ — расстояние между точками, γ — гравитационная постоянная ($\gamma\approx(6{,}67\pm\pm0{,}01)\cdot10^{-8}$ *см*^{3}/*г*·*сек*^{2}); при этом $f_{12}=-f_{21}$. Таким образом, модуль f вектора силы тяготения равен $\gamma m_1m_2/r^2$.

При переходе от точечных масс к объемам закон тяготения Ньютона приводит к теории *ньютонова потенциала*, описывающего явление Г. в рамках нерелятивистской классич. физики. Основы этой теории заложены в формуле (1), представленное в виде

$$f_{12}=-m_2\operatorname{grad}\varphi,\quad \varphi=-\frac{\gamma m_1}{r},$$

где φ — потенциал поля Г., создаваемого точкой массы m_1, и следовательно, grad φ может рассматриваться как напряженность поля Г. Отсюда, при нек-рых условиях, следует, что массы, распределенные с плотностью $\rho(r)$, создают поле, определяемое уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi=4\pi\gamma\rho.$$

При этом потенциал, вне центрально-симметрически распределенных масс, совпадает с потенциалом матери-

альной точки, помещенной в центре и имеющей массу, равную сумме всех масс (теорема Ньютона). Поле ньютоновского потенциала, выполняя функции описания Г., предполагает принцип дальнодействия — распространения гравитационного воздействия с бесконечной скоростью — и существование абсолютных пространства и времени, однако при этом является очень точным приближением к действительности. На теории ньютоновского потенциала базируются небесная механика, ряд вопросов астрофизики, гравиметрия, аэронавтика и космонавтика.

В заданном поле Г. тело приобретает ускорение

$$\frac{dv}{dt} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

т. е. все тела в данном поле Г. движутся с одинаковым ускорением.

Уравнение Пуассона классич. теории Г. не раскрывает внутренней структуры механизма Г. Существует много нерелятивистских гипотез о природе Г. Первые попытки объяснить причину падения тел на Земле возникли еще в древности (Платон, Аристотель); их продолжили Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci), затем Н. Коперник (N. Copernicus), Ж. Роберваль (G. Roberval), Р. Гук (R. Hooke). После И. Ньютона проблемой природы Г. занимались: И. Кант (I. Kant) (теория двух сил материи — отталкивания и притяжения), Р. Бошкович (R. Boščović) (сводивший все виды взаимодействия к одной универсальной силе), М. В. Ломоносов и Ж. Л. Лесаж (G. L. Lesage) (оперирующие особой «тяготительной материей»). Были созданы «эфирно-ударные» гипотезы Г., «кинетическая» гипотеза, «волновые», «ударные», «гидродинамические» и т. д. [8]. Все эти теории имеют главным образом лишь историч. интерес; современное же решение проблемы требует построения *квантовой теории поля* Г.— задача поставленная, но еще не решенная в современной теоретич. физике.

Ньютоновская теория Г., при высокой точности соответствия с опытом, обладает следующими недостатками: поле ньютоновского потенциала не удовлетворяет принципу близкодействия — конечной скорости распространения гравитационных возмущений; классич. теория Г. не лоренц-инвариантна (см. *Лоренца преобразование*), как это имеет место, напр., для электромагнитного поля; существуют по крайней мере два астрономич. эффекта, необъяснимых количественно в классич. теории Г. (смещение перигелия Меркурия, отклонение луча света около Солнца). Эти и нек-рые другие соображения привели к созданию теории гравитации Эйнштейна — общей теории относительности, к-рая исторически строилась как дедуктивная теория, следующая из принципа эквивалентности (неотличимости поля Г. и неинерциальной системы отсчета) и принципа общей ковариантности (геометрия пространства инвариантна относительно группы непрерывно дифференцируемых невырожденных преобразований систем координат). Однако современное рассмотрение показывает, что для построения такой теории требуется более сложная система аксиом.

Общая теория относительности является ведущей современной теорией Г. С математич. точки зрения эта теория основывается на следующих положениях: геометрия физич. пространства-времени четырехмерна. Это есть геометрия *риманова пространства* V_4 с сигнатурой метрики $(---+)$. Не существует гравитационных сил (как 4-векторов), а уравнения движения пробных тел в гравитационном поле определяют геодезич. линии в V_4. Для пробных тел с ненулевой массой покоя эти геодезические — неизотропные кривые, для частиц типа фотона — изотропные. Уравнения движения являются четырехмерным ковариантным анало-

гом закона инерции Ньютона; ковариантного же аналога второго закона Ньютона для гравитационных сил не существует. Роль «потенциала» поля Г. играют компоненты метрич. тензора $g_{\alpha\beta}(x)$, для к-рых постулируются уравнения поля Г.

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}=T_{\alpha\beta}.$$

В общей теории относительности, в отличие от всех остальных физич. теорий, уравнения движения пробных тел вытекают из уравнений поля.

Общая теория относительности с большой точностью предсказывает эффект смещения перигелия Меркурия, эффект отклонения луча света вблизи диска Солнца, а также эффект космологического красного смещения. Получение новых экспериментальных данных позволило приблизиться к конкретному рассмотрению различных физич. задач. В частности, в значительной степени выяснен вопрос о гравитационных волнах [13], [14]; делаются попытки построения квантовой теории Г., общая теория относительности применяется и при описании ряда астрономич. объектов.

В современной науке имеются также иные теории Г., основанные на более общем формализме (пространствах аффинной связности и др.); релятивистская теория тяготения в плоском пространстве, аналогичная классической электродинамике.

Лит.: [1] Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.—Л., 1946; [2] Дубошин Г. Н., Теория притяжения, М., 1961; [3] Эйнштейн А., Собр. научных трудов, т. 1—2, М., 1966; [4] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961; [5] Вебер Дж., Общая теория относительности и гравитационные волны, пер. с англ., М., 1962; [6] Синг Дж., Общая теория относительности, пер. с англ., М., 1963; [7] Петров А. З., Новые методы в общей теории относительности, М., 1966; [8] Кагальникова И. И., История развития нерелятивистских представлений о природе гравитации, «Уч. зап. Ярославского пед. ин-та. Кафедра астрономии и теоретической физики», 1963, в. 56; [9] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Релятивистская астрофизика, М., 1967; [10] Петров А. З., Общая теория относительности, в сб.: Развитие физики в СССР, кн. 1, М., 1967; [11] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Теория тяготения и эволюция звезд, М., 1971; [12] их же, Строение и эволюция Вселенной, М., 1975; [13] Hanson R. A., «Phys. Rev.», 1968, № 166, p. 1263; [14] его же, там же, p. 1272.

А. З. Петров.

ГРАДИЕНТ — одно из основных понятий векторного анализа и теории нелинейных отображений.

Градиентом скалярной функции $f(t)$ векторного аргумента $t=(t^1, \ldots, t^n)$ из евклидова пространства E^n наз. производная функции $f(t)$ по векторному аргументу t, то есть n-мерный вектор с компонентами $\partial f/\partial t^i$, $1\leqslant i\leqslant n$. Существуют следующие обозначения Г. функции $f(t)$ в точке t_0:

$$\operatorname{grad} f(t_0),\quad \nabla f(t_0),\quad \frac{\partial f(t_0)}{\partial t},\quad f'(t_0).$$

Г. представляет собой ковариантный вектор: компоненты Г., вычисленные в двух различных координатных системах $t=(t^1, \ldots, t^n)$ и $\tau=(\tau^1, \ldots, \tau^n)$, связаны соотношениями:

$$\frac{\partial f}{\partial t^i}(\tau(t))=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau^j}\frac{\partial \tau_j}{\partial t^i}.$$

Вектор $f'(t_0)$, начало к-рого помещено в точку t_0, указывает направление наискорейшего роста функции $f(t)$, ортогональное линии или поверхности уровня функции $f(t)$, проходящей через точку t_0.

Производная функции в точке t_0 в направлении произвольного единичного вектора $N=(N^1, \ldots, N^n)$ равна проекции Г. функции на это направление:

$$\frac{\partial f(t_0)}{\partial N}=(f'(t_0),\ N)\equiv\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(t_0)}{\partial t^j}N^j=|f'(t_0)|\cos\varphi, \quad (1)$$

где φ — угол между N и $f'(t_0)$. Максимум производной достигается при $\varphi=0$, т. е. в направлении Г., и равен длине Г.

Понятие Г. тесно связано с понятием дифференциала функции. В случае дифференцируемости $f(t)$ в точке t_0 вблизи t_0

$$f(t)=f(t_0)+(f'(t_0),\ t-t_0)+o(|t-t_0|), \qquad (2)$$

то есть $df=(f'(t_0),\ dt)$. Существование в точке t_0 Г. функции $f(t)$ не достаточно для справедливости формулы (2).

Точка t_0, в к-рой $f'(t_0)=0$, наз. стационарной (критической или экстремальной) точкой функции $f(t)$. Такой точкой является, напр., точка локального экстремума функции $f(t)$ и система $\partial f(t_0)/\partial t^i=0$, $1\leqslant i\leqslant n$, используется для нахождения экстремальной точки t_0.

При вычислении значения Г. справедливы формулы:

$$\operatorname{grad}(\lambda f)=\lambda \operatorname{grad} f,\ \lambda=\text{const},$$

$$\operatorname{grad}(f+g)=\operatorname{grad} f+\operatorname{grad} g,$$

$$\operatorname{grad}(fg)=g\operatorname{grad} f+f\operatorname{grad} g,$$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{1}{g^2}(g\operatorname{grad} f-f\operatorname{grad} g).$$

Г. $f'(t_0)$ есть производная в точке t_0 по объему векторной функции объема

$$\Phi(E)=\int_{t\in\partial E} f(t)\,\boldsymbol{M}\,ds,$$

где E — область с границей ∂E, $t_0\in E$, ds — элемент площади ∂E, а $\boldsymbol{M}$ — единичный вектор внешней нормали к ∂E. Другими словами

$$f'(t_0)=\lim\frac{\Phi(E)}{\text{объем } E}\quad \text{при } E\longrightarrow t_0.$$

Формулы (1), (2) и перечисленные выше свойства Г. указывают на инвариантный относительно выбора системы координат характер понятия Г.

В криволинейной системе координат $x=(x^1,\ \ldots,\ x^n)$, в к-рой квадрат длины элемента

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\,dx^i\,dx^j,$$

компоненты Г. функции $f(x)$, отнесенного к ортам, касающимся координатных линий в точке x, равны

$$\sum_{j=1}^{n} g^{ij}(x)\,\frac{\partial f}{\partial x^j},\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

где матрица $\|g^{ij}\|$ — обратная к матрице $\|g_{ij}\|$.

Понятие Г. для более общих векторных функций векторного аргумента вводится при помощи равенства (2), означающего, что Г. есть линейный оператор, действием к-рого на приращение $t-t_0$ аргумента получается главная линейная часть приращения $f(t)-f(t_0)$ вектор-функции $f(t)$. Напр., если $f(t)=(f^1(t),\ \ldots,\ f^m(t))$ есть m-мерная вектор-функция аргумента $t=(t^1,\ \ldots,\ t^n)$, то ее Г. в точке t_0 — *Якоби матрица* $J=J\ (t_0)$ с компонентами $\dfrac{\partial f^i}{\partial t^j}\ (t_0)$, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$, причем

$$f(t)=f(t_0)+J(t-t_0)+o(t-t_0),$$

где $o(t-t_0)$ — m-мерный вектор, длина к-рого есть $o(|t-t_0|)$. Матрица J определяется при помощи предельного перехода

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(t_0+\rho\tau)-f(t_0)}{\rho}=J\tau \qquad (3)$$

с любым фиксированным n-мерным вектором τ.

В бесконечномерном гильбертовом пространстве определение (3) равносильно определению дифференцируемости по Фреше и Г. при этом совпадает с производной Фреше.

В случае, когда $f(t)$ лежит в бесконечномерном векторном пространстве, возможны различные типы предельного перехода в (3) (см., напр., *Гато производная*).

В теории тензорных полей, заданных в области n-мерного аффинного пространства связности, при помощи Г. описывается главная линейная часть приращения компонент тензора при соответствующем связности па-

раллельном перенесении. Г. тензорного поля

$$f(t)=\left\{ f^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(t),\quad 1\leqslant i_\alpha,\ j_\beta\leqslant n \right\}$$

типа (p, q) есть тензор типа $(p, q+1)$ с компонентами

$$\left\{ \nabla_k f^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(t),\quad 1\leqslant k,\ i_\alpha,\ j_\beta\leqslant n \right\},$$

где ∇_k — оператор абсолютного (ковариантного) дифференцирования.

Понятие Г. широко применяется в различных задачах математики, механики и физики. Многие физич. поля могут быть рассматриваемы как градиентные поля (см. *Потенциальное поле*).

Лит.: [1] Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 9 изд., М., 1965; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.

Л. П. Купцов.

ГРАДИЕНТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — *поток*, задаваемый градиентом гладкой функции f на гладком многообразии. При дифференцировании f непосредственно получается *ковариантный вектор* (напр., в конечномерном случае в координатной окрестности U с локальными координатами $x^1, \dots, x^n$ это будет вектор с компонентами $\partial f/\partial x^1, \dots, \partial f/\partial x^n$), тогда как вектор фазовой скорости является *контравариантным вектором*. Переход от одного к другому осуществляется с помощью к.-л. римановой метрики, от выбора к-рой (наряду с f) зависит, таким образом, определение Г. д. с.; часто у вектора фазовой скорости еще меняют знак. В приведенном примере Г. д. с. в области U описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt}=\pm\sum\nolimits_j g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j},\quad j=1,\ \dots,\ n,$$

где коэффициенты g^{ij} образуют матрицу, обратную по отношению к матрице коэффициентов $\|g_{ij}\|$ метрич. тензора; подразумевается, что во всех n уравнениях правая часть берется с одним и тем же знаком «плюс» или «минус». Часто под Г. д. с. понимают системы несколько более общего типа (см. [1]).

Лит.: [1] Smale S., «Ann. Math.», 1961, v. 74, p. 199—206.

Д. В. Аносов.

ГРАДИЕНТНОЕ ПОЛЕ — то же, что *потенциальное поле*.

ГРАДИЕНТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование в классической и квантовой теории поля, к-рое изменяет характеристики поля, не являющиеся наблюдаемыми (напр., потенциалы поля), и не меняет при этом имеющие физич. смысл наблюдаемые величины (напр., напряженности поля). Название «Г. п.» возникло в классич. теории электромагнитного поля, где 4-мерный вектор электромагнитного потенциала $A_n(x)$, $n=0, 1, 2, 3$, вводится в теорию неоднозначным образом, поскольку так наз. Г. п. 2-го рода:

$$A_n(x)\longrightarrow A'_n(x)=A_n(x)+\frac{\partial f(x)}{\partial x^n} \qquad (1)$$

с произвольной функцией $f(x)$, обладающей частными производными 1-го и 2-го порядков, не сказываются на значениях компонент антисимметричного тензора электромагнитного поля

$$F_{kl}=\frac{\partial A_l}{\partial x^k}-\frac{\partial A_k}{\partial x^l},\quad k,\ l=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

к-рые равны физически наблюдаемым компонентам векторов напряженности электрич. поля $E_\alpha=F_{\alpha 0}$, $\alpha=1,2,3$, и магнитного поля $H_1=F_{23}$; $H_2=F_{31}$; $H_3=F_{12}$. При Г. п. 2-го рода остаются неизменными уравнения поля

$$\sum\nolimits_k g^{kk}\left\{\frac{\partial^2 A_n}{\partial x^k\,\partial x^k}-\frac{\partial^2 A_k}{\partial x^k\,\partial x^n}\right\}=0,$$

$$g^{11}=g^{22}=g^{33}=-g^{00}=-1.$$

т. е. имеет место свойство так наз. градиентной инвариантности теории поля. С помощью соответствующего выбора функции $f(x)$ можно добиться выполнения для A к.-л. дополнительного условия, к-рое наз. условием калибровки, что позволяет упростить вид уравнений поля. Напр., линейное относительно потенциала A условие Лоренца — равенство нулю 4-мерной дивергенции

$$\sum_k g^{kk} \frac{\partial A_k(x)}{\partial x^k} = 0, \qquad (2)$$

приводит к уравнению Д'Аламбера для $A_n(x)$ (см. *Д'Аламбера оператор*)

$$-\sum_k g^{kk} \frac{\partial^2 A_n}{\partial x^k \partial x^k} = \Box A_n(x) = 0. \qquad (3)$$

Условие Лоренца не определяет полностью потенциал A, так как в теории остается инвариантность относительно так наз. специализированного Г. п. 2-го рода (1) с функцией $f_0(x)$, удовлетворяющей уравнению Д'Аламбера: $\Box f_0(x) = 0$. Однако при определенном выборе $f_0(x)$ (так наз. лоренцева система отсчета) можно добиться выполнения условия $A_0 = 0$. При этом условие Лоренца (2) сводится к условию $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$ для 3-мерного вектор-потенциала, т. е. к условию поперечности электромагнитного поля. В случае комплексных полей должна иметь место также инвариантность теории относительно Г. п. 1-го рода для волновых функций поля и их производных

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi'(x) = e^{i\alpha} \Phi(x);$$
$$\Phi^*(x) \longrightarrow \Phi^{*\prime}(x) = e^{-i\alpha} \Phi^*(x), \qquad (4)$$

так как все наблюдаемые динамич. величины в силу условия действительности (эрмитовости) должны выражаться только через действительные билинейные относительно Φ^* и Φ формы. Условие инвариантности теории поля относительно Г. п. 1-го рода в силу общих принципов механики означает существование нек-рых сохраняющихся наблюдаемых физич. величин — зарядов, к-рые выражаются через функции поля, или, иначе говоря, существование законов сохранения этих зарядов. Соответствующие лагранжианы и уравнения поля должны быть инвариантны относительно Г. п., иначе называемых калибровочными преобразованиями. Напр., в случае взаимодействующих с электромагнитным полем $A_n(x)$ комплексных полей $\psi(x)$, соответствующих частицам, обладающим электрич. зарядом, лагранжианы свободных полей и лагранжиан взаимодействия и уравнения поля должны быть инвариантны относительно калибровочных преобразований вида

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) \longrightarrow e^{if(x)} \psi(x); \quad \psi^*(x) \longrightarrow e^{-if(x)} \psi^*(x); \\ A_n(x) \longrightarrow A_n(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x^n}, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

т. е. относительно Г. п. (1) и (4), где фазовый множитель в (4) может зависеть от 4-мерных координат пространства-времени и должен совпадать с произвольной скалярной функцией, входящей в (1). В этом случае в системе полей $A_n(x)$ и $\psi(x)$ выполняется закон сохранения электрич. заряда. Калибровочные преобразования (5) образуют *абелеву группу* преобразований в том смысле, что калибровочная функция $f(x) = g(x) + h(x)$ описывает калибровочное преобразование, представляющее собой два калибровочных преобразования с функциями $g(x)$ и $h(x)$, произведенных в любой последовательности. При построении более общих, чем рассмотренный пример, теорий взаимодействующих полей для выполнения соответствующих законов сохранения тех или иных зарядов необходимо требовать инвариантности лагранжианов и уравнений поля относительно не-

абелевых калибровочных преобразований, в к-рых калибровочные функции $f(x)$ должны быть операторами.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957. *В. Л. Кукин.*

ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД — метод минимизации функций многих переменных. Г. м. состоит в том, что последующее приближение функции $F(x)$ получается из предыдущего смещением в направлении градиента функции:

$$x^{n+1} = x^n - \delta_n \operatorname{grad} F(x^n).$$

Параметр δ_n может быть определен, напр., из условия минимума величины

$$F(x^n - \delta_n \operatorname{grad} F(x^n)).$$

См. *Спуска метод*, *Наискорейшего спуска метод*.

ГРАДУИРОВАННАЯ АЛГЕБРА — алгебра A, аддитивная группа к-рой представлена в виде (слабой) прямой суммы групп A_i, $i=0, 1, 2, \ldots$, причем $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$ для любых i, j. Таким образом аддитивная группа Г. а. (рассматриваемая как модуль над кольцом целых чисел) есть положительно *градуированный модуль*. Примером Г. а. может служить алгебра $A=F[x]$ многочленов над полем F, где A_i — подпространство, порожденное одночленами степени i ($A_0=F$). Возможно более общее определение Г. а. A как такой алгебры, аддитивная группа к-рой представляется в виде прямой суммы групп A_α, где α пробегает нек-рую коммутативную полугруппу G и $A_\alpha A_\beta \subseteq A_{\alpha+\beta}$ для любых $\alpha, \beta \in G$. С понятием Г. а. тесно связано понятие *фильтрованной алгебры*. Действительно, на каждой Г. а. $A=\sum_{i\geqslant 0} A_i$ естественным образом определяется возрастающая фильтрация:

$$A = \bigcup_{k\geqslant 0} \mathfrak{A}_k, \quad \mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \ldots, \quad \mathfrak{A}_k = \sum_{i=0}^{k} A_i.$$

Обратно, если $A=\bigcup_{k\geqslant 0}\mathfrak{A}_k$ — фильтрованная алгебра ($\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \ldots$, $\mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_j \subset \mathfrak{A}_{i+j}$), то определяют Г. а. $GA=\sum_{i\geqslant 0} A_i$ ($A_i=\mathfrak{A}_i/\mathfrak{A}_{i-1}$, $A_0=\mathfrak{A}_0$), к-рую наз. Г. а., а с с о ц и р о в а н н о й с A. Аналогично определяется г р а д у и р о в а н н о е к о л ь ц о.

Е. Н. Кузьмин.

ГРАДУИРОВАННЫЙ МОДУЛЬ — модуль A, представленный в виде прямой суммы своих подмодулей A_n (индекс n пробегает все целые числа; нек-рые из подмодулей A_n могут быть тривиальными). Модуль A наз. п о л о ж и т е л ь н о г р а д у и р о в а н н ы м, если $A_n=0$ для всех $n<0$, и о т р и ц а т е л ь н о г р а д у и р о в а н н ы м, если $A_n=0$ для всех $n>0$. Элементы из A_n, отличные от нуля, наз. о д н о р о д н ы м и с т е п е н и n. Подмодуль B Г. м. A наз. о д н о р о д н ы м, если он разлагается в прямую сумму подмодулей B_n таких, что $B_n \subseteq A_n$ для любого целого n. Тем самым B также оказывается Г. м. Если B — однородный подмодуль Г. м. A, то фактормодуль $\overline{A}=A/B$ также является Г. м.: $\overline{A}=\sum\overline{A}_n$, где $\overline{A}_n$ — образ подмодуля A_n при естественном гомоморфизме $A \to A/B$, $\overline{A}_n \simeq A_n/B_n$. Г. м. находят широкое применение в гомологич. алгебре.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960. *Е. Н. Кузьмин.*

ГРАДУС — единица измерения плоских углов, равная 1/90 части прямого угла, обозначается знаком °. Г. делится на 60 минут (60′) или 3600 секунд (3600″). Прямой угол составляет 90°, развернутый 180°. Г. употребляется также для измерения дуг окружности (полная окружность равна 360°). *Е. В. Шикин.*

ГРАМА МАТРИЦА — квадратная матрица

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \| g_{\alpha\beta} \|,$$

составленная из попарных скалярных произведений $g_{\alpha\beta}=(a_\alpha, a_\beta)$ элементов (векторов) (пред)гильбертова

пространства. Г. м. всегда неотрицательна. Она положительно определена, если $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независимы. Справедливо обратное: любая неотрицательная (положительно определенная) $(k\times k)$-матрица есть нек-рая Г. м. (с линейно независимыми определяющими векторами).

Если $a_1, a_2, \ldots, a_k$ суть n-мерные векторы (столбцы) n-мерного евклидова (эрмитова) пространства с обычным скалярным произведением

$$(a,\ b)=\sum_{i=1}^{n}a^i\overline{b^i}\ \left(=\sum_{i=1}^{n}a^i\overline{b^i}\right),$$

то

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_k)=\overline{A}^{\,T}A,$$

где A есть $(n\times k)$-матрица, составленная из столбцов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, знак ^{T} означает операцию транспонирования матриц, а черта сверху — взятие комплексно сопряженной величины. См. также *Грама определитель*.

Л. П. Купцов

ГРАМА ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ — определитель вида

$$\Gamma=\Gamma(a_1, \ldots, a_n)=\det|(a_i, a_k)|,\quad i,\ k=1,\ \ldots,\ n,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — элементы (пред)гильбертова пространства, а (a_i, a_k) — их скалярные произведения. Г. о. равен квадрату n-мерного объема *параллелотопа*, построенного на векторах $a_1, \ldots, a_n$.

Г. о. является определителем неотрицательной эрмитовой формы

$$\sum_{i,\ k=1}^{n}(a_i,\ a_k)\,\xi_i\overline{\xi}_k=\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i\right\|^2,$$

откуда и вытекают его основные свойства:

1) Г. о. неотрицателен, т. е. $\Gamma\geqslant 0$. Равенство $\Gamma=0$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы линейно зависимы. Это свойство может рассматриваться как обобщение *Коши неравенства*:

$$\Gamma(a_1, a_2)\geqslant 0\quad\text{или}\quad(a_1, a_1)(a_2, a_2)\geqslant$$
$$\geqslant(a_1, a_2)(a_2, a_1)=|(a_1, a_2)|^2.$$

В частности, Г. о. равен нулю, если какой-либо его главный минор (также являющийся Г. о.) равен нулю.

2) $$\Gamma(a_1, \ldots, a_n)\leqslant\Gamma(a_1, \ldots, a_p)\,\Gamma(a_{p+1}, \ldots, a_n),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда подпространства $L(a_1, \ldots, a_p)$ и $L(a_{p+1}, \ldots, a_n)$ ортогональны или один из определителей $\Gamma(a_1, \ldots, a_p)$, $\Gamma(a_{p+1}, \ldots, a_n)$ равен нулю. Геометрически это неравенство означает, что объем параллелотопа не превосходит произведения объемов дополнительных граней. В частности,

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_n)\leqslant\Gamma(a_1)\ \ldots\ \Gamma(a_n).$$

3) $$\Gamma(a_1, \ldots, a_n)=\Gamma(a_1, \ldots, a_{n-1})\,h^2,$$

где

$$h=\min_{x^1, \ldots, x^{n-1}}\left\|a_n-\sum_{i=1}^{n-1}x^ia_i\right\|$$

есть расстояние от элемента a_n до подпространства $L(a_1, \ldots, a_{n-1})$, т. е. наилучшее квадратическое приближение элемента a_n полиномами вида $\sum_{i=1}^{n-1}x^ia_i$.

Если $a_1, \ldots, a_n$ суть n-мерные векторы $a_i=(a_i^1, \ldots, a_i^n)$, то

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_n)=(\det|a_i^j|)^2,\quad i,\ j=1,\ \ldots,\ n.$$

Г. о. введены И. П. Грамом [1] и независимо К. А. Андреевым (см. [2]) в связи с задачами разложения функций в ортогональные ряды и наилучшего квадратического приближения функций.

Г. о. применяются при решении многих задач линейной алгебры и теории функций: исследовании линейной зависимости системы векторов или функций, ортогона-

лизации системы функций, построение проекторов, а также при изучении свойств систем функций. См. также *Грама матрица*.

Г. о. являются частным случаем определителей вида

$$\Gamma\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{pmatrix} = \det |(a_i, b_j)|, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

к-рые эрмитово билинейны по отношению к векторам a_i и b_j. Если $a_i(x)$ принадлежат классу $L_2(E)$, то справедлива формула

$$\det(a_i, b_j) =$$

$$= \frac{1}{n!}\int_E \cdots \int_E \det |a_i(x_j)| \det |\bar{b_i}(x_j)| \, dx_1 \ldots dx_n.$$

Лит.: [1] Gram J. P., On Rækkeudviklinger bestemte ved Hjælp of de mindste Kvadraters Methode, Kopenh., 1879; [2] Андреев К. А., Избр. работы, Харьков, 1955; [3] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967.

Л. П. Купцов.

ГРАМА — ШАРЛЬЕ РЯД — ряд, определяемый выражением

$$f_A(x) = f(x) + \sum_{k=3}^{n} a_k f^{(k)}(x) \qquad (1)$$

или

$$f_B(x) = \psi(x) \sum_{m=0}^{n} b_m g_m(x), \qquad (2)$$

где x — нормированное значение случайной величины.

Ряд (1) наз. Г.— Ш. р. типа A; здесь

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

$f^{(k)}(x)$ есть k-я производная от $f(x)$, к-рую можно представить в виде

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k H_k(x) f(x),$$

где $H_k(x)$ — многочлены Чебышева — Эрмита. Производные $f^{(k)}(x)$ и многочлены $H_k(x)$ обладают свойствами ортогональности, благодаря чему коэффициенты a_k можно определить при помощи основных моментов r_k данного ряда распределения. Ограничиваясь первыми членами ряда (1), получают

$$f_A(x) = f(x) + \frac{r_3}{3!} f^{(3)}(x) +$$

$$+ \frac{r_4 - 3}{4!} f^{(4)}(x) - \frac{r_5 - 10r_3}{5!} f^{(3)}(x) + \frac{r_6 - 15r_4 + 30}{6!} f^{(6)}(x).$$

Ряд (2) наз. Г.— Ш. р. типа B; здесь

$$\psi(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

а $g_m(x)$ — многочлены, аналогичные многочленам $H_k(x)$.

Ограничиваясь первыми членами ряда (2), получают

$$f_B(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \left\{ 1 + \frac{\mu_2 - \lambda}{\lambda^2} \left[\frac{x^{[2]}}{2} - \lambda x^{[1]} + \frac{\lambda^2}{2} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_3 - 3\mu_2 + 2\lambda}{\lambda^3} \left[\frac{x^{[3]}}{6} - \frac{\lambda}{2} x^{[2]} + \frac{\lambda^2}{2} x^{[1]} - \frac{\lambda^3}{6} \right] \right\},$$

где μ_i — центральные моменты распределения, а $x^{[i]} = x(x-1)\ldots(x-i+1)$.

Г.— Ш. р. были получены Дж. Грамом [1] и К. Шарлье [2] при исследовании функции вида

$$B_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-itx} \varphi(t) \, dt,$$

принятой для интерполирования между значениями $B(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$ — общего члена биномиального распределения, где

$$\varphi(t) = (pe^{it} + q)^n = \sum_{m=0}^{n} B(m) e^{itm}$$

— характеристическая функция биномиального распределения. Разложение $\ln \varphi(t)$ по степеням t приводит

к Г.— Ш. р. типа A для $B_0(x)$, а разложение $\ln \varphi(t)$ по степеням p приводит к Г.— Ш. р. типа B.

Лит.: [1] Gram J. P., «J. reine und angew. Math.», 1883, Bd 94, S. 41—73; [2] Charlier C. V. L., «Arkiv Mat., Astr., Fys.», 1914, b. 2, № 25, s. 1—17; [3] Митропольский А. К., Кривые распределения, Л., 1960.

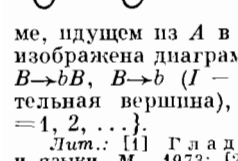
А. К. Митропольский.

ГРАММАТИКА формальная — общее название нескольких типов *исчислений*, используемых в *математической лингвистике* для описания строения естественных языков (а также нек-рых искусственных языков, в частности языков программирования). См. *Грамматика порождающая*, *Грамматика доминационная*, *Грамматика категориальная*, *Грамматика трансформационная*.

А. В. Гладкий.

ГРАММАТИКА АВТОМАТНАЯ, грамматика конечно-автоматная, грамматика с конечным числом состояний,— *грамматика бесконтекстная*, каждое правило к-рой имеет вид $A \to aB$ или $A \to a$, где A, B — вспомогательные символы, a — один из основных символов. (Иногда допускаются также правила вида $A \to \Lambda$, где Λ — пустая цепочка; класс порождаемых языков при этом расширяется только за счет языков, получаемых из прежних добавлением цепочки Λ.) Для каждой Г. а. можно построить эквивалентный ей *автомат конечный*. Класс языков, порождаемых Г. а. (автоматных языков), совпадает (при допущении правил с пустой правой частью) с классом регулярных множеств. Автоматные языки образуют собственный подкласс класса линейных языков (см. *Грамматика линейная*); так, линейный язык $\{a^n b^n | n = 1, 2, \ldots\}$ — не автоматный. Класс автоматных языков замкнут относительно объединения, пересечения, умножения, подстановки и усеченной итерации (а при наличии правил с пустой правой частью также и относительно итерации). Пересечение бесконтекстного языка с автоматным есть бесконтекстный язык.

Для наглядного изображения Г. а. используется диаграмма — ориентированный мультиграф, вершинами к-рого служат вспомогательные символы, и из вершины A в вершину B идет дуга, помеченная (основным) *символом* a, если в грамматике есть правило $A \to aB$; кроме того, в диаграмме имеется еще одна вершина — заключительная, в к-рую из вершины — вспомогательного символа A — идет дуга, помеченная символом a, если в Г. а. есть правило $A \to a$. (При наличии правил вида $A \to \Lambda$ каждый символ A, для к-рого имеется такое правило, также считается заключительной вершиной.) Цепочка в основном словаре выводима в грамматике из вспомогательного символа A тогда и только тогда, когда она «записана» на нек-ром пути в диаграмме, идущем из A в заключительную вершину. На рис. изображена диаграмма Г. а. с правилами $I \to aI$, $I \to aB$, $B \to bB$, $B \to b$ (I — начальный символ, K — заключительная вершина), порождающей язык $\{a^n b^m | n, m = 1, 2, \ldots\}$.



Лит.: [1] Гладкий А. В., Формальные грамматики и языки, М., 1973; [2] Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М., Конечные автоматы (Поведение и синтез), М., 1970.

А. В. Гладкий.

ГРАММАТИКА БЕСКОНТЕКСТНАЯ, грамматика контекстно-свободная, КС-грамматика,— *грамматика составляющих*, все правила к-рой имеют вид $A \to \theta$, где A — вспомогательный символ и θ — непустая цепочка (так наз. бесконтекстные правила). Языки, порождаемые такими грамматиками, наз. бесконтекстными языками. Напр., язык $\{a^n b^n | n = 1, 2, \ldots\}$ порождается Г. б. с правилами $I \to aIb$, $I \to ab$ (I — начальный символ).

В определении Г. б. условие непустоты θ можно отбросить без существенного изменения класса языков

(добавляются лишь языки, получаемые из бесконтекстных присоединением пустой цепочки). Г. б.— наиболее употребительный в приложениях класс формальных *грамматик*; они широко используются для построения математич. моделей естественных языков (см. *Математическая лингвистика*) и для описания языков программирования. Класс бесконтекстных языков является собственным подклассом класса НС-языков (см. *Грамматика составляющих*; напр., НС-язык $\{a^n b^n c^n | n=1, 2, \ldots\}$ не бесконтекстный) и совпадает с классом языков, допускаемых так наз. автоматами с магазинной памятью (МП-автоматами).

Каждая Г. б. может быть эквивалентным образом приведена к стандартной бинарной форме — Г. б., все правила к-рой имеют вид $A \to BC$ и $A \to a$, а также к нормальной форме Грейбах — Г. б., все правила к-рой имеют вид $A \to aBC$, $A \to aB$ и $A \to a$ (в обоих случаях A, B, C — вспомогательные символы, a — основной символ). Бесконтекстные языки определяются также *грамматиками категориальными*, *грамматиками доминационными*, грамматиками зависимостей. Иногда для определения бесконтекстных языков используются так наз. нормальные системы уравнений в языках, представляющие собой другую форму записи Г. б. Класс бесконтекстных языков замкнут относительно объединения, умножения, подстановки и усеченной итерации (а при наличии правил с пустой правой частью и относительно итерации) и не замкнут относительно пересечения и дополнения. Г. б. Г наз. однозначной, если для каждой цепочки языка $L(\Gamma)$ имеется единственное дерево вывода в Г. Бесконтекстный язык наз. однозначным, если он порождается нек-рой однозначной Г. б.; в противном случае он наз. неоднозначным (или существенно неоднозначным, существенно неопределенным). Пример неоднозначного бесконтекстного языка —

$$\{a^n b^n c^m | n,\ m=1, 2, \ldots\} \cup \{a^m b^n c^n | n,\ m=1, 2, \ldots\}.$$

Если для любой Г. б., порождающей бесконтекстный язык L, и любого натурального n в L найдется цепочка, имеющая более n деревьев вывода в данной грамматике, говорят, что L имеет бесконечную степень неоднозначности; пример — язык $\{x\hat{x}y\hat{y} | x, y \in \{a_1, a_2\}^+\}$, где $\hat{}$ означает обращение (т. е. если $x = a_{i_1} \ldots a_{i_k}$, то $\hat{x} = a_{i_k} \ldots a_{i_1}$).

Бесконтекстный язык наз. детерминированным, если он допускается нек-рым детерминированным МП-автоматом. Всякий детерминированный язык однозначен, обратное неверно: напр., однозначный язык $\{x\hat{x} | x \in \{a_1, a_2\}^+\}$ не является детерминированным.

Сложность вывода. Для любой Г. б. временна́я сложность и емкость вывода (см. *Грамматика порождающая*) ограничены сверху и снизу линейными функциями. Поэтому для классификации Г. б. по сложности вывода вводятся нек-рые специфич. характеристики сложности. Эти характеристики разделяются на два типа: одни из них («древесные») строятся на основе представления вывода в виде дерева (см. *Грамматика составляющих*), другие («цепочечные») основаны на учете числа или расположения вхождений вспомогательных символов в промежуточные цепочки вывода; в ряде важных случаев с «древесными» характеристиками можно связать «цепочечные», имеющие тот же порядок роста. Из «древесных» характеристик наиболее тонкую классификацию дает густота, определяемая следующим образом. 1) Каждой вершине α конечного дерева с корнем сопоставляется густота α — число $\mu(\alpha)$ такое, что: если α — концевой узел, то $\mu(\alpha)=0$; если $\beta_1, \ldots, \beta_s$ — все узлы, в к-рые из α идут дуги, $s>0$ и

$m=\max(\mu(\beta_1), \ldots, \mu(\beta_s))$, то: а) если $m=\mu(\beta_i)$ только для одного $i=1, \ldots, s$, то $\mu(\alpha)=m$; б) в противном случае $\mu(\alpha)=m+1$. 2) Густота корня дерева наз. г у с т о т о й д е р е в а. 3) Если Г есть Г. б., ее густота $\mu_\Gamma(n)$ определяется аналогично временно́й сложности с заменой длины вывода густотой дерева вывода. Одинаковый с густотой порядок роста имеет (для Г. б.) а к т и в н а я е м к о с т ь $I_\Gamma(n)$, определяемая аналогично емкости с заменой длины цепочки ω_i числом вхождений в ω_i вспомогательных символов. Густота всякой Г. б. ограничена сверху логарифмич. функцией. Существуют бесконтекстные языки, для к-рых густоты любых порождающих их Г. б. имеют логарифмич. порядок роста, напр. множество всевозможных «правильных скобочных последовательностей» (т. е. последовательностей левых и правых круглых скобок, расставленных так, как это делается, напр., в арифметич. выражениях). В то же время языки, порождаемые Г. б., густоты к-рых ограничены константами, составляют обширный класс, совпадающий с замыканием класса линейных языков (см. *Грамматика линейная*) относительно подстановки. Имеются бесконечные последовательности функций, промежуточных по порядку роста между константой и логарифмом, такие, что для любых двух соседних членов последовательности найдется бесконтекстный язык, для к-рого наименьшая по порядку густота порождающей его Г. б. заключена между этими функциями. Употребляются и другие характеристики сложности вывода в Г. б.

Предметом интенсивных исследований является и у п р а в л е н и е в ы в о д о м в Г. б. Предложено много различных концепций управления выводом в Г. б. (из к-рых значительная часть переносится и на более широкие классы грамматик). Так, м а т р и ч н а я г р а м м а т и к а получается, если задано нек-рое множество конечных последовательностей правил грамматики — «матриц» и допустимыми выводами считаются те, для к-рых последовательности применяемых правил могут быть разбиты на матрицы (т. е. правила применяются только «группами»). В г р а м м а т и к е с п о р я д к о м на множестве правил задается частичный порядок и на каждом шаге разрешается применять только такие правила, для к-рых никакие предшествующие в смысле этого порядка правила не применимы к полученной к данному моменту цепочке. В п р о г р а м м и р о в а н н о й г р а м м а т и к е каждому правилу сопоставляются два множества правил — «успешное» и «безуспешное»; применение каждого правила распадается на два этапа: на первом этапе проверяется, входит ли левая часть правила в полученную к данному моменту цепочку; если да, то второй этап состоит в замене левой части правила правой и выборе из «успешного» множества правила для применения на следующем шаге; если нет, то второй этап сводится к выбору из «безуспешного» множества правила для применения на следующем шаге. Класс языков, порождаемых программированными Г. б. без правил с пустой правой частью, является собственным подклассом класса НС-языков и содержит классы языков, порождаемых матричными Г. б. и Г. б. с порядком; в то же время оба эти класса шире класса бесконтекстных языков. При наличии правил с пустой правой частью программированные Г. б. порождают произвольные рекурсивно перечислимые языки.

Алгоритмические проблемы. Существуют алгоритмы, позволяющие по любой Г. б. распознавать, является ли порождаемый ею язык пустым, соответственно конечным. В классе Г. б. нераспознаваемы, в частности, следующие свойства языков и отношения между языками: иметь пустое, соответственно конечное или бесконтекстное дополнение; быть однозначным, соответственно де-

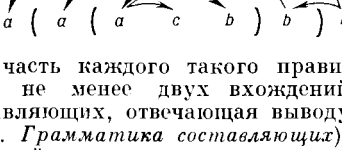
терминированным, линейным или автоматным языком; $L_1 = L_2$; $L_1 \subseteq L_2$. Существуют такие Г. б. Γ_1 и Γ_2, для к-рых нет алгоритмов, позволяющих по произвольным цепочкам x и y в основном алфавите V_1 грамматики Γ_1 (соответственно в основном алфавите V_2 грамматики Γ_2) распознавать, замещаема ли x на y относительно V_1 и $L(\Gamma_1)$ (соответственно взаимозамещаемы ли x и y относительно V_2 и $L(\Gamma_2)$; см. *Аналитическая модель языка*).

Сложность распознавания. Принадлежность цепочки языку, порождаемому заданной Г. б., может быть распознана алгоритмом Кока, допускающим реализацию на машине Тьюринга с одной лентой и одной головкой, время работы к-рой пропорционально четвертой степени длины цепочки; при увеличении числа лент или головок до трех четвертая степень может быть заменена третьей.

См. также *Грамматика автоматная*, *Грамматика линейная*.

Лит.: [1] Гинзбург С., Математическая теория контекстно-свободных языков, пер. с англ., М., 1970. *А. В. Гладкий.*

ГРАММАТИКА ДОМИНАЦИОННАЯ — один из видов формальной *грамматики*, служащий для порождения цепочек вместе с деревьями подчинения (см. *Синтаксическая структура*). Формально Г. д. может быть определена как *грамматика бесконтекстная*, у к-рой в каждом правиле, за исключением правил вида $I \to a$, где I — начальный и a — основной символы, одно из вхождений символов в правую часть снабжено специальной меткой; при этом правая часть каждого такого правила должна содержать не менее двух вхождений символов. Система составляющих, отвечающая выводу в такой грамматике (см. *Грамматика составляющих*), становится иерархизованной, если считать главными те составляющие, к-рые «происходят» от помеченных вхождений символов в правые части правил. Каждой цепочке порождаемого грамматикой языка сопоставляется дерево подчинения, связанное с указанной иерархизованной системой составляющих (к-рая не обязана, вообще говоря, быть единственной). На рис. показано одно из деревьев подчинения, к-рое сопоставляет цепочке *aaacbbb* Г. д. с правилами $I \to a'Ib$, $I \to aIb'$, $I \to c$ (I — начальный символ, штрих служит меткой); это дерево отвечает выводу



$$(I,\ aIb',\ aaIb'b',\ aaa'Ibb'b',\ aaa'cbb'b'),$$

здесь скобками выделены нетривиальные составляющие.

Важнейший частный класс Г. д.— так наз. простые Г. д., у к-рых в правых частях правил помечаются только основные символы (грамматика рассмотренного примера — простая). Для всякой простой Г. д. существует такое натуральное число k, что в каждом дереве подчинения, к-рое эта Г. д. сопоставляет к.-л. цепочке, ни из одной вершины не выходит более k дуг. Обратно, для всякой Г. д., обладающей указанным свойством, существует эквивалентная ей простая Г. д. такая, что для каждой цепочки множества деревьев подчинения, приписываемых ей обеими грамматиками, совпадают.

Простая Г. д. наз. также грамматикой зависимостей.

Лит.: [1] Белецкий М. П., «Кибернетика», 1967, № 4, с. 90—7; [2] Гладкий А. В., Формальные грамматики и языки, М., 1973. *А. В. Гладкий.*

ГРАММАТИКА КАТЕГОРИАЛЬНАЯ — один из видов формальной *грамматики*. Г. к. может быть определена как упорядоченная четверка $G = \langle V, W, \Phi_0, f \rangle$, где V и W — конечные множества, элементы к-рых наз. основными символами и элементарными категориями соответственно; Φ_0 —

элемент W, называемый г л а в н о й к а т е г о р и е й; f — п р и п и с ы в а ю щ а я ф у н к ц и я, сопоставляющая каждому основному символу конечное множество к а т е г о р и й — выражений, образованных из элементарных категорий и синтаксич. символов [,], $\backslash$, $/$ по следующему правилу: 1) всякая элементарная категория есть категория; 2) если Φ и Ψ — категории, то $[\Phi\backslash\Psi]$ («Φ под Ψ») и $[\Phi/\Psi]$ («Φ над Ψ») суть категории; 3) всякая категория является таковой либо в силу 1), либо в силу 2).

Если $x=a_1\ldots a_k$, где $a_i\in V$, и $\Phi_i\in f(a_i)$, $i=1, \ldots, k$, то говорят, что цепочка $\Phi_1\ldots\Phi_k$ с о п о с т а в л я е т с я грамматикой G цепочке x. Над цепочкой категорий можно производить (вообще говоря, неоднозначную) операцию с о к р а щ е н и я, состоящую в последовательной замене вхождений подцепочек вида $\Phi\,[\Phi\backslash\Psi]$ или $[\Psi/\Phi]\Phi$ вхождениями Ψ. Если нек-рая цепочка категорий ξ, сопоставляемая цепочке x, сокращается до одной категории Θ, а также если $\xi=\Theta$, то говорят, что G п р и п и с ы в а е т цепочке x категорию Θ. Я з ы к, о п р е д е л я е м ы й г р а м м а т и к о й G (обозначается через $L(G)$), есть множество тех цепочек основных символов, к-рым G приписывает главную категорию. Категория $[\Phi\backslash\Psi]$ (соответственно $[\Psi/\Phi]$) может интерпретироваться как оператор, действующий справа (слева) на Φ и дающий в результате Ψ. На этом основано использование Г. к. в лингвистике. Так, если элементарными категориями являются П — «предложение» и S — «существительное», то категория $[S/S]$ может интерпретироваться как «прилагательное» (это значит, что прилагательное рассматривается как оператор, действующий на существительное слева, причем получается снова существительное, точнее группа существительного), $[S\backslash\text{П}]$ — как «непереходный глагол» и т. п. Если при этом П — главная категория, то определяемый грамматикой язык состоит из «правильных предложений».

Г. к. может быть превращена в *грамматику бесконтекстную*; для этого нужно: а) составить вспомогательный словарь W' из тех категорий, к-рые являются элементами или частями элементов значений приписывающей функции f; б) сделать Φ_0 начальным символом; в) взять в качестве правил всевозможные выражения вида $\Psi\to\Phi\,[\Phi\backslash\Psi]$ и $\Psi\to[\Psi/\Phi]\Phi$, где $[\Phi\backslash\Psi]\in W'$ (соответственно $[\Psi/\Phi]\in W'$) и вида $\Phi\to a$, где $\Phi\in f(a)$. Это позволяет сопоставлять цепочкам определяемого грамматикой языка системы составляющих стандартным способом (см. *Грамматика составляющих*). Получаемый таким образом подкласс класса бесконтекстных грамматик с лингвистич. точки зрения характеризуется тем, что в них вся «грамматическая информация» содержится в словаре. Однако для любой бесконтекстной грамматики Γ можно построить эквивалентную ей Г. к. G (т. е. такую, что $L(G)=L(\Gamma)$); при этом можно добиться, чтобы значения приписывающей функции G содержали лишь категории вида A, $[A\backslash B]$ и $[A\backslash[B\backslash C]]$, где A, B, C — элементарные категории. Имеются также простые и содержательно естественные способы получения из Г. к. *грамматики доминационной*.

Лит.: [1] Bar-Hillel L., Gaifman C., Shamir E., «Bull. Res. Council Israel», 1960, sec. F, v. 9, № 1, p. 155—66; [2] Б е л е ц к и й М. И., «Кибернетика», 1969, № 4, с. 129—35; № 5, с. 10—14; [3] Г л а д к и й А. В., Формальные грамматики и языки, М., 1973. *А. В. Гладкий.*

ГРАММАТИКА ЛИНЕЙНАЯ — *грамматика бесконтекстная*, у к-рой правая часть каждого правила содержит не более одного вхождения вспомогательного символа. Класс порождаемых такими грамматиками языков (л и н е й н ы х я з ы к о в) является собственным подклассом класса бесконтекстных языков (так, бесконтекстный язык $\{a^nb^na^mb^m|n, m=1, 2,\ldots\}$ не является линейным). См. также *Грамматика автоматная*. *А. В. Гладкий.*

ГРАММАТИКА ПОРОЖДАЮЩАЯ, грамматика Хомского,— один из видов формальной *грамматики*; представляет собой, по существу, частный случай исчисления Поста (см. *Поста каноническая система*). Систематич. изучение Г. п. было начато в 50-х гг. 20 в. Н. Хомским (N. Chomsky), к-рый указал пути ее приложения в лингвистике и выделил наиболее важные для этих приложений классы Г. п.— *грамматики составляющих*, *грамматики бесконтекстные*, *грамматики автоматные*; те же классы оказались особенно интересными и с чисто математич. точки зрения.

Г. п. есть упорядоченная четверка $\Gamma=\langle V, W, I, R\rangle$, где V и W — непересекающиеся конечные множества, наз. соответственно основным и вспомогательным алфавитами, или словарями (их элементы наз. соответственно основными, или терминальными, и вспомогательными, или нетерминальными, символами), I — элемент W, наз. начальным символом, и R — конечное множество правил, имеющих вид $\varphi\to\psi$, где φ и ψ — цепочки (*слова*) в алфавите $V\bigcup W$ и $\to$ не принадлежит $V\bigcup W$; R наз. схемой грамматики. Если цепочки ξ и η представимы соответственно в виде $\xi=\chi_1\varphi\chi_2$, $\eta=\chi_1\psi\chi_2$, где $\varphi\to\psi$ — одно из правил грамматики Г, то говорят, что η непосредственно выводима из ξ в Г (обозначение: $\xi|\underset{\Gamma}{=}\eta$ или $\xi|=\eta$). Последовательность цепочек $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ наз. выводом ω_n из ω_1 в Г, если $\forall i,\ 1\leqslant i\leqslant n$, $(\omega_{i-1}|\underset{\Gamma}{=}\omega_i)$; число n есть длина вывода. Вывод наз. полным, если $\omega_0=I$ и ω_n не содержит вспомогательных символов. Если существует вывод цепочки η из цепочки ξ в Г, то говорят, что η выводима из ξ в Г. Множество цепочек в основном алфавите, выводимых в Г из I, наз. языком, порождаемым грамматикой Г (обозначается через $L(\Gamma)$). Две Г. п. эквивалентны, если они порождают один и тот же язык. Класс языков, порождаемых всевозможными Г. п., совпадает с классом рекурсивно перечислимых множеств цепочек.

Для оценки сложности вывода в Г. п. используются так наз. сигнализирующие функции, важнейшими из к-рых являются временна́я сложность и емкость. Временна́я сложность грамматики Г — это функция натурального аргумента $\tau_\Gamma(n)$, значение к-рой для каждого n равно наименьшему из чисел k, обладающих тем свойством, что для любой цепочки $x\in L(\Gamma)$ такой, что $|x|\leqslant n$ ($|x|$ — длина x), существует вывод D этой цепочки из начального символа Г, длина к-рого не превосходит k; если не существует цепочек x таких, что $x\in L(\Gamma)$ и $|x|\leqslant n$, то $\tau_\Gamma(n)=0$. Емкость $\sigma_\Gamma(n)$ грамматики Г определяется аналогично с заменой длины вывода $D=(\omega_0, \ldots, \omega_s)$ наибольшей из длин цепочек ω_i, $i=0,1,\ldots,s$.

Если M' — нек-рое множество полных выводов в грамматике Г и L' — множество заключительных цепочек выводов, принадлежащих M', то $L'\subseteq L(\Gamma)$. Если при этом M' задано эффективно, то говорят, что задан нек-рый способ управления выводом в Г. Изучение способов управления выводом существенно для приложений, так как возможность использовать не произвольные, а лишь нек-рые определенные выводы лучше отвечает ситуации, имеющей место в естественном языке. Управление выводом может задаваться, в частности, наложением ограничений на последовательности применяемых в выводе правил (напр., множество таких «допустимых» последовательностей правил может само порождаться нек-рой Г. п. Г'; в этом случае язык определяется упорядоченной парой Г. п. (Г, Г'), к-рую наз. обобщенной грам-

м а т и к о й), или на вид входящих в выводы цепочек, или к.-л. более сложным способом (напр., применяемое на очередном шаге правило может зависеть от вида цепочки, полученной на предыдущем шаге).

При изучении Г. п. естественно возникают алгоритмич. проблемы. Если α — свойство языков, $\mathscr{T}$ — нек-рый класс грамматик, и если существует алгоритм, позволяющий по любой грамматике $\Gamma \in \mathscr{T}$ распознать, обладает ли язык $L(\Gamma)$ свойством α, то говорят, что α р а с п о з н а в а е м о в классе $\mathscr{T}$. В классе всех Г. п. ни одно нетривиальное свойство (т. е. такое, что в соответствующем классе языков есть как языки, обладающие этим свойством, так и не обладающие им) не распознаваемо. Аналогичным образом можно говорить о распознаваемых в нек-ром классе грамматик отношениях. Возникают также проблемы иного типа, напр. о существовании для данной грамматики Γ алгоритма, позволяющего по любым n цепочкам $x_1, \ldots, x_n$ в ее основном алфавите найти значение заданного предиката $P(L, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ для $L=L(\Gamma)$, $\omega_1=x_1, \ldots, \omega_n=x_n$. В частности, если $P(L, \omega)$ означает $\omega \in L$, то речь идет об алгоритме для распознавания принадлежности произвольной цепочки языку $L(\Gamma)$. Если для грамматики Γ такой алгоритм есть, существенное значение имеет вопрос о сложности его работы, или, как говорят, о сложности распознавания языка $L(\Gamma)$.

См. также *Грамматика составляющих*, *Грамматика бесконтекстная*, *Грамматика линейная*, *Грамматика автоматная*, *Математическая лингвистика*.

Лит.: [1] Г р о с с М., Л а н т е н А., Теория формальных грамматик, пер. с франц., М., 1971; [2] Г л а д к и й А. В., Формальные грамматики и языки, М., 1973; [3] H o p c r o f t J. E., U l l m a n J. D., Formal languages and their relation to automata, Reading (Mass.), 1969; [4] Г л а д к и й А. В., Д и к о в с к и й А. Я., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, 1972, т. 10, с. 107—42; [5] М а с л о в А. Н., С т о ц к и й Э. Д., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, 1975, т. 12, с. 155—87; [6] С т о ц к и й Э. Д., «Проблемы передачи информации», 1971, т. 7, № 1, с. 87—101; № 3, с. 87—102.

А. В. Гладкий.

ГРАММАТИКА СОСТАВЛЯЮЩИХ, г р а м м а т и к а н е п о с р е д с т в е н н о с о с т а в л я ю щ и х, НС-грамматика, г р а м м а т и к а к о н т е к с т н а я, — частный случай *грамматики порождающей*, $\Gamma=\langle V, W, I, R\rangle$, когда каждое ее правило имеет вид $\xi_1 A \xi_2 \to \xi_1 \theta \xi_2$, где ξ_1, ξ_2, θ — цепочки в алфавите $V \cup W$, $A \in W$ и θ непуста. Каждый шаг вывода в Г. с. состоит в замене одного вхождения символа A вхождением цепочки θ, причем возможность замены обусловлена наличием «контекста» ξ_1, ξ_2. Вхождения символов в θ потом также могут заменяться и т. д. Таким образом, вхождение символа «развертывается» в нек-рый отрезок возникающей в результате вывода цепочки. Это дает возможность представить вывод в Г. с. с помощью дерева (д е р е в а в ы в о д а): напр., если грамматика имеет правила $I \to AAB$, $AB \to DBB$, $aBB \to abB$, $A \to a$, $D \to a$, $B \to C$, $C \to c$ (a, b, c — основные символы, I, A, B, C, D — вспомогательные символы, I — начальный символ), то вывод (I, AAB, aAB, $aDBB$, $aaBB$, $aabB$, $aabC$, $aabc$) имеет дерево, изображенное на рис. Множество всех отрезков последней цепочки вывода, получающихся «развертыванием» вхождений вспомогательных символов — иначе говоря, «происходящих» от (неконцевых) вершин дерева вывода — при добавлении всех одноточечных отрезков образует систему составляющих указанной цепочки (см. *Синтаксическая структура*); отсюда и название «Г. с.». Если все одноточечные отрезки также получаются заменой вхождений вспомогательных символов, то можно получить размеченную систему составляющих, приписывая каждой составляющей в качестве

меток те вспомогательные символы, от вхождений к-рых она «происходит»; так, в приведенном выше примере для цепочки *aabc* получается размеченная система составляющих

$$((a)A\ ((a)D\ (b)B)A\ (c)B,C)I$$

(здесь границы составляющих указаны скобками, после правых скобок записаны метки). Приписывание цепочкам размеченных систем составляющих лежит в основе лингвистич. приложений Г. с. Так, грамматика, имеющая (в числе прочих) правила

ПРЕДЛ$\to S_{\text{муж, ед, им}}\tilde{V}^3$, $\tilde{V}^3\to V^{t3}S_{\text{жен, ед, вин}}$,
$S_{\text{муж, ед, им}}\to$«*эллипс*», $S_{\text{жен, ед, вин}}\to$«параболу»,
$V^{t3}\to$«*пересекает*»,

где ПРЕДЛ, S_{xyz}, $\tilde{V}^3$, V^{t3} — вспомогательные символы, означающие, соответственно, «предложение», «существительное рода x в числе y и падеже z», «группа глагола в 3-м лице», «переходный глагол в 3-м лице», а символ ПРЕДЛ — начальный, приписывает предложению «*Эллипс пересекает параболу*» размеченную систему составляющих

$((\text{Эллипс})\quad S_{\text{муж, ед, им}}((\text{пересекает})V^{t3}\quad(\text{параболу})$
$S_{\text{жен, ед, вин}})\tilde{V}^3)$ ПРЕДЛ.

Математич. значение Г. с. определяется прежде всего тем, что порождаемые ими языки (так наз. НС-я з ы к и) представляют собой простой подкласс класса примитивно рекурсивных множеств: класс НС-языков совпадает с классом языков, допускаемых недетерминированными линейно ограниченными *Тьюринга машинами* с одной лентой и одной головкой. «Конкретные» числовые множества при обычных способах кодирования натуральных чисел весьма часто оказываются НС-языками (таковы, напр., множество полных квадратов, множество простых чисел, множество десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ и т. п.).

Для каждой Г. с. может быть построена эквивалентная ей л е в о к о н т е к с т н а я (соответственно п р а в о к о н т е к с т н а я) Г. с., то есть Г. с., все правила к-рой имеют вид $\xi A\to\xi\theta$ (соответственно $A\xi\to\theta\xi$). В то же время всякая Г. с., все правила к-рой имеют вид $xAy\to x\theta y$, где x, y — цепочки в основном алфавите, эквивалентна нек-рой *грамматике бесконтекстной*.

Класс НС-языков замкнут относительно объединения, пересечения, умножения, усеченной итерации, подстановки; неизвестно, замкнут ли он относительно дополнения.

Сложность вывода. Временна́я сложность вывода в Г. с. ограничена сверху показательной функцией. Существуют языки, порождаемые Г. с. с временно́й сложностью порядка n^2 и не порождаемые никакими Г. с с меньшей по порядку временно́й сложностью (например, язык $\{xbx|x\in\{a_1,\ a_2\}^*\}$); примеров более высоких нижних оценок временной сложности неизвестно. Емкость всякой Г. с. очевидным образом равна n; для произвольной порождающей грамматики, емкость к-рой ограничена сверху линейной функцией

$$f(n)=kn,$$

существует эквивалентная ей Г. с. (эта Г. с. может быть построена эффективно, если известно k).

Алгоритмические проблемы. Если нек-рый класс языков содержит хотя бы один НС-язык и хотя бы для одного НС-языка L_0 содержит разве лишь конечное число «почти совпадающих» с L_0 языков (языки L_1 и L_2 «почти совпадают», если их симметрич. разность $(L_1-L_2)\cup(L_2-L_1)$ конечна), то свойство принадлежать данному классу нераспознаваемо в классе Г. с. В частности, нераспознаваемы свойства быть пустым, конечным, автоматным, линейным, бесконтекстным языком, иметь пустое или конечное дополнение, совпадать

с (любым) фиксированным НС-языком. Примером свойства языков, распознаваемого в классе Г. с., может служить свойство содержать (любую) фиксированную цепочку.

См. также *Грамматика бесконтекстная*.

А. В. Гладкий.

ГРАММАТИКА ТРАНСФОРМАЦИОННАЯ — один из видов формальной *грамматики*. Г. т. предназначаются для преобразования *синтаксических структур*, что делает их более адекватными для описания естественного языка, чем формальные грамматики других типов, осуществляющие порождение или распознавание синтаксич. структур лишь вместе с порождением (распознаванием) цепочек, поскольку раздельное рассмотрение синтаксических и линейных отношений между речевыми единицами больше соответствует природе языка.

Г. т. значительно более громоздки, чем грамматики, предназначенные для преобразования «цепочек», в связи с чем разработка формальных концепций Г. т. началась только в конце 60-х гг. 20 в., хотя содержательная база для этого была построена Н. Хомским (N. Chomsky) примерно на 10 лет раньше. Имеется несколько концепций Г. т.; нек-рые из них предназначаются для переработки систем составляющих, другие — для переработки деревьев подчинения. Примером могут служить так наз. Δ-грамматики, представляющие собой конечные системы элементарных преобразований, имеющих вид $t_1 \Rightarrow t_2 | f$, где t_1 и t_2 — (конечные) ориентированные деревья с помеченными вершинами и дугами, а f — отображение множества вершин t_1 в множество вершин t_2. Применить такое преобразование к дереву T (интерпретируемому как дерево подчинения) с помеченными вершинами и дугами означает заменить в нем нек-рое поддерево, изоморфное t_1, поддеревом, изоморфным t_2, «перевесив» при этом «внешние связи» каждой вершины A заменяемого поддерева на вершину $f(A)$ заменяющего. Δ-грамматики применяются для перехода от синтаксич. структур одного уровня к структурам другого уровня (см. *Математическая лингвистика*) и для осуществления синонимич. преобразований глубинных синтаксич. структур.

Лит.: [1] Хомский Н., в кн.: Новое в лингвистике, 1962, вып. 2, с. 412—527; [2] Ginsburg S., Partee B., «Inform. and Control», 1969, v. 15, № 4, p. 297—334; [3] Гладкий А. В., Мельчук И. А., в кн.: Информационные вопросы семиотики, лингвистики и автоматического перевода, М., 1971, в. 1, с. 16—41.

А. В. Гладкий.

ГРАНИЦА — 1) Множество точек подпространства A данного топологич. пространства X, обладающих тем свойством, что любая окрестность каждой из них содержит как точки из A, так и точки из $X \setminus A$. Общепринятые обозначения: $\mathrm{гр}A$, ∂A, $\mathrm{Fr}A$, $\mathrm{Fr}_X A$.

2) Синоним понятия край *многообразия*, например Г. симплекса.

А. В. Чернавский.

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ — задачи нахождения аналитической в нек-рой области функции по заданному соотношению между граничными значениями ее действительной и мнимой частей. Впервые такая задача была поставлена в 1857 Б. Риманом (см. [1]). Д. Гильберт [2] исследовал граничную задачу в следующей постановке (задача Римана — Гильберта): найти функцию $\Phi(z)=u+iv$, аналитическую в односвязной области S^+ с контуром L, непрерывную в $S^+ \cup L$, по граничному условию

$$\mathrm{Re}\,(a+ib)\Phi = au - bv = c, \qquad (1)$$

где a, b, c — заданные на L действительные непрерывные функции. Первоначально Д. Гильберт привел эту задачу к сингулярному интегральному уравнению с целью дать пример приложения такого уравнения.

Задача (1) может быть сведена к последовательному решению двух задач Дирихле. Полное исследование задачи, проведенное таким способом, имеется в [3].

Близкой к задаче (1) является задача, к к-рой пришел А. Пуанкаре [4] при разработке математич. теории приливов. Задача Пуанкаре состоит в определении гармонической в области S^+ функции $u(x, y)$ по условию на границе L этой области:

$$A(s)\frac{\partial u}{\partial n}+B(s)\frac{\partial u}{\partial s}+C(s)u=f(s), \qquad (2)$$

где $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $f(s)$ — заданные на L действительные функции, s — дуговая абсцисса, n — нормаль к L.

Под обобщенной задачей Римана — Гильберта — Пуанкаре (задача Р.—Г.—П.) понимается следующая линейная граничная задача: найти функцию $\Phi(z)$, аналитическую в S^+, по граничному условию

$$\operatorname{Re}\{\lambda\Phi\}=f(t_0), \quad t_0\in S^+, \qquad (3)$$

где λ — интегро-дифференциальный оператор, определяемый формулой

$$\lambda\Phi=\sum_{j=0}^{m}\left\{a_j(t_0)\,\Phi_i^{(j)}(t_0)+\int_L h_j(t_0, t)\,\Phi^{(j)}(t)\,ds\right\}, \qquad (4)$$

в к-рой $a_0(t_0)$, ..., $a_m(t)$ — заданные на L, вообще комплексные, функции класса H (т. е. удовлетворяющие условию Гельдера), $f(t)$ — заданная действительная функция класса H, $h_j(t_0, t)$ — заданные на L, вообще комплексные, функции вида

$$h_j(t_0, t)=\frac{h_j^0(t_0, t)}{|t-t_0|^{\alpha}}, \quad 0\leqslant\alpha<1,$$

причем $h_j^0(t_0, t)$ — функции класса H по обеим переменным. В правой части (4) под $\Phi^{(j)}(t_0)$ подразумевается граничное значение на L изнутри области S^+ производной j-го порядка функции $\Phi(z)$.

Частным случаем задачи Р.— Г.— П. при $m=0$, $h_j(t_0, t)=0$ является задача Римана — Гильберта; задача Пуанкаре также является частным случаем сформулированной задачи. К задаче Р.— Г.— П. приводятся многие важные граничные задачи, напр. граничные задачи для уравнений с частными производными эллиптич. типа с двумя независимыми переменными.

Задача Р.— Г.— П. была поставлена и в предположении, что $a_m(t_0)\neq 0$, $t_0\in L$, и решена И. Н. Векуа [3].

В теории граничных задач важную роль играет понятие индекса задачи — целого числа, определяемого формулой

$$\varkappa=2(m+n),$$

где $2\pi n$ — приращение $\arg\overline{a_m(t)}$ при однократном обходе контура L в направлении, составляющем область S^+ слева.

Задача Р.— Г.— П. редуцируется к сингулярному интегральному уравнению вида

$$N\mu\equiv A(t_0)\,\mu(t_0)+\int_L N(t_0, t)\,\mu(t)\,ds=f(t_0)-c\sigma(t_0), \qquad (5)$$

где μ — искомая действительная функция класса H, c — искомая действительная постоянная, а

$$N(t_0, t)=\frac{K(t_0, t)}{t-t_0};$$

функции $A(t_0)$, $K(t_0, t)$, $\sigma(t_0)$ выражаются через $a_j(t)$ и $h_j(t_0, t)$, $j=0,\ldots, m$.

Пусть k и k' — числа линейно независимых решений соответствующего (5) однородного интегрального уравнения $N\mu=0$ и союзного с ним однородного интегрального уравнения

$$N'\nu\equiv A(t_0)\,\nu(t_0)+\int_L N(t, t_0)\,\nu(t)\,ds=0. \qquad (6)$$

Числа k и k' связаны с индексом $\varkappa$ задачи Р.— Г.— П. равенством

$$\varkappa = k - k'.$$

Особый интерес представляет тот случай, когда задача разрешима при всякой правой части $f(t_0)$. Для того чтобы задача Р.— Г.— П. была разрешима при любой правой части $f(t_0)$, необходимо и достаточно, чтобы $k'=0$ или $k'=1$, причем в последнем случае решение $\nu(t)$ уравнения (6) должно удовлетворять условию

$$\int_L \nu(t)\,\sigma(t)\,ds \neq 0;$$

в обоих случаях $\varkappa \geqslant 0$ и однородная задача $\operatorname{Re}\{\lambda\Phi\}=0$ имеет ровно $\varkappa+1$ линейно независимых решений. При $\sigma(t)=0$ задача Р.— Г.— П. разрешима при любой правой части тогда и только тогда, когда $k'=0$.

В случае задачи Римана — Гильберта имеют место следующие утверждения: 1) при $\varkappa \geqslant 0$ неоднородная задача (1) разрешима при любой правой части и 2) при $\varkappa < -2$ эта задача разрешима тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{2\pi} e^{i\left(\frac{\varkappa}{2}+k\right)\varphi}\,\Omega(\varphi)\,c(\varphi)\,d\varphi = 0, \quad k = 1, \ldots, -\varkappa-1,$$

где

$$\Omega(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{a^2(\varphi)+b^2(\varphi)}} \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \theta(\varphi_1)\operatorname{ctg}\frac{\varphi_1-\varphi}{2}\,d\varphi_1\right\},$$

$$\theta(t) = \arg\left[-t^{-\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib}\right], \quad a^2+b^2 \neq 0.$$

Задача Римана — Гильберта тесно связана с так наз. задачей линейного сопряжения. Если L — простая гладкая или кусочно гладкая линия, состоящая из замкнутых контуров, ограничивающих нек-рую область S^+ плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, остающуюся слева при обходе L, то дополнение $S^+ \cup L$ до плоскости z обозначается через S^-. Пусть функция $\Phi(z)$ задана и непрерывна в окрестности линии L всюду, кроме, быть может, самой L. Говорят, что функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на точку $t \in L$ слева (или справа), если $\Phi(z)$ стремится к определенному пределу $\Phi^+(t)$ [или $\Phi^-(t)$], когда z стремится к t по любому пути, оставаясь слева (или справа) от L.

Функцию $\Phi(z)$ наз. кусочно аналитической с линией скачка L, если она аналитична в S^+ и S^- и непрерывно продолжима на каждую точку $t \in L$ как слева так и справа.

В задаче линейного сопряжения требуется определить кусочно аналитич. функцию $\Phi(z)$ с линией скачка L, имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L,$$

где $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на L функции класса H. В предположении, что $G(t) \neq 0$ всюду на L, целое число

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L$$

наз. индексом задачи линейного сопряжения.

Когда $\Phi(z)=(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ — кусочно аналитический вектор, $G(t)$ — квадратная $(n\times n)$-матрица и $g(t)=(g_1, \ldots, g_n)$ — вектор, причем $\det G(t) \neq 0$, целое число

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}[\arg \det G(t)]_L$$

наз. суммарным индексом задачи линейного сопряжения. Понятия индекса и суммарного индекса играют важную роль в теории задачи линейного сопряжения (см. [5], [6], [7], [8]).

На базе теории задачи линейного сопряжения построена теория одномерных сингулярных интегральных уравнений вида (5).

Лит.: [1] Риман Б., Сочинения, пер. с нем., М.—Л., 1948; [2] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Lpz.—B., 1912; [3] Векуа И.Н., «Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР», 1942, т. 11, с. 109—39; [4] Poincaré H., Leçons de mécanique céleste, t. 3, P., 1910, ch. 10; [5] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [6] Векуа Н. П., Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, 2 изд., М., 1970; [7] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 2 изд., М., 1963; [8] Хведелидзе Б. В., «Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР», 1956, т. 23, с. 3—158.

А. В. Бицадзе.

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ — свойства аналитич. функций, проявляющиеся при приближении к границе области определения.

Можно считать, что понимаемое в самом широком смысле изучение Г. с. а. ф. началось с *Сохоцкого теоремы* и *Пикара теоремы* о поведении аналитич. функций в окрестности изолированной *существенно особой точки*, полученных во 2-й пол. 19 в. В лекциях П. Пенлеве (P. Painlevé, 1895) впервые появляются термины того подхода к изучению Г. с. а. ф., к-рый теперь носит назв. теории *предельных множеств*. В диссертации П. Фату (P. Fatou, 1906) впервые систематически изучаются нек-рые Г. с. а. ф. вблизи непрерывной границы области определения. Примерно в 1-й трети 20 в. теория Г. с. а. ф. получила существенное развитие в трудах многих ученых. После середины 20 в. теория Г. с. а. ф. снова развивается очень бурно, в ней возникают новые идеи и методы, новые направления и объекты исследования. В своем развитии теория Г. с. а. ф. тесно взаимодействует с различными областями математического анализа и математики вообще, в первую очередь с такими, как теория вероятностей, теория гармонических функций, теории конформных отображений, граничных задач аналитических функций, потенциала, распределения значений, римановых поверхностей, субгармонических функций, функциональных алгебр. Через граничные задачи теория Г. с. а. ф. тесно связана с различными областями применения математики.

В связи с тем, что изучение Г. с. а. ф. связано прежде всего с геометрией границы Γ области определения D аналитич. функции $f(z)$ одного комплексного переменного z, в теории Г. с. а. ф. выделились три основных направления.

а) Изучение поведения $f(z)$ в окрестности изолированной граничной точки $a \in \Gamma$. Наибольшее значение имеет случай существенно особой точки a, к к-рому относятся *Сохоцкого теорема*, *Пикара теорема*, *Жюлиа теорема*, *Иверсена теорема*.

б) Изучение поведения $f(z)$ в том случае, когда граница Γ есть всюду разрывное множество. Большое значение здесь имела диссертация В. В. Голубева «Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек» (1916, см. [1]).

в) Изучение поведения $f(z)$ в том случае, когда область D ограничена непрерывной замкнутой кривой Γ. В частности, наиболее важен случай единичного круга.

Случаи а) и в) — в нек-ром смысле крайние, случай б) — промежуточный. Наибольшее внимание исследователей привлек случай в), о к-ром говорится ниже.

Пусть аналитич. функция $f(z)$ определена в конечной односвязной области D комплексной плоскости z, ограниченной жордановой спрямляемой кривой Γ. Основными проблемами, характерными для классич. направления изучения Г. с. а. ф., являются следующие.

1) Проблема существования граничных значений, т. е. вопрос о том, при каких условиях и в каком смысле существуют граничные значения $f(z)$ при приближении точки z к Γ. Эта проблема, как и последующие, иначе может быть сформулирована как задача о выделении достаточно обширных классов аналитич. функций в D, имеющих в том или

ином смысле граничные значения на достаточно массивных множествах точек Г.

2) Проблема граничного представления $f(z)$, т. е. вопрос о том, при каких условиях и при помощи какого аналитич. аппарата может быть выражена зависимость функции $f(z)$ от ее граничных значений на Г. Здесь, очевидно, для различных классов аналитич. функций аналитич. аппарат будет варьироваться.

3) Проблема единственности, или вопрос о том, какими свойствами должно обладать множество $E \subset \Gamma$, чтобы две аналитич. функции того или иного класса совпадали всюду в D, если их граничные значения на E совпадают.

Первым результатом в решении проблемы существования явилась теорема Фату (1906): если аналитич. функция $f(z)$ ограничена в единичном круге $D=\{z;|z|<1\}$, $|f(z)|\leqslant M$, то почти всюду по мере Лебега на единичной окружности $\Gamma=\{z;\ |z|=1\}$ существуют радиальные граничные, или предельные, значения $f(e^{i\theta})=\lim\limits_{r\to 1-0} f(re^{i\theta})$. При высказанных условиях можно показать, что почти всюду на Г существуют не только радиальные, но и угловые граничные значения, или граничные значения по всем некасательным путям. Это означает, что $f(z)$ почти для всех точек $e^{i\theta}\in\Gamma$ стремится к определенному пределу $f(e^{i\theta})$, когда z стремится к точке $e^{i\theta}$, оставаясь внутри любого фиксированного угла

$$\Delta(e^{i\theta},\varepsilon)=\{|z|<1\}\cap\left\{|\arg(e^{i\theta}-z)|<\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right\},\ \varepsilon>0,$$

раствора $\pi-2\varepsilon$, меньшего π, с вершиной в точке $e^{i\theta}$, биссектрисой к-рого служит радиус, проведенный в точку $e^{i\theta}$. В определенном смысле теорема Фату неулучшаема; как показал Н. Н. Лузин (1919), для любого множества $E\subset\Gamma$ меры нуль на Г существует ограниченная аналитич. функция $f(z)$ такая, что $f(z)$ не имеет радиальных пределов на E.

Класс ограниченных аналитич. функций в области D обозначается $B(D)$ или $H_\infty(D)$. После результатов Фату первоочередной задачей выглядело распространение его теорем на более широкие классы функций. Различают следующие основные классы аналитич. функций в единичном круге D, связанные строгими включениями:

$$A(D)\subset B(D)=H_\infty(D)\subset H_p(D)\subset N^*(D)\subset N(D). \quad (1)$$

Класс $A(D)$ — это класс однозначных аналитических в D и непрерывных в замкнутой области $D\cup\Gamma=\overline{D}$ функций.

Классы $H_p(D)$ для всех положительных чисел p определяются условием

$$\|f\|_p=\sup_{0<r<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^p\,d\varphi\right\}^{1/p}=$$
$$=C(f,p)<+\infty. \quad (2)$$

Для любых $0<p_1<p_2<+\infty$ имеют место строгие включения $H_\infty\subset H_{p_2}\subset H_{p_1}$. Классы H_p впервые встречаются у Г. Харди (1915), и их часто наз. классами Харди. При $1\leqslant p<\infty$ в H_p можно ввести норму по формуле (2), а в H_∞ — по формуле

$$\|f\|_\infty=\|f\|_B=\sup_{z\in D}|f(z)|,$$

и при этом классы H_p, $1\leqslant p\leqslant+\infty$, наделенные, кроме того, естественной структурой векторного пространства, превращаются в банаховы пространства Харди. При $0<p<1$ на H_p можно только ввести метрику $\rho_p(f,g)=\|f-g\|_p^p$, превращающую H_p в полное метри-

ческое ненормируемое пространство. Класс ограниченных аналитич. функций $B=H_\infty$ содержится в любом классе H_p, $p>0$.

Класс $N(D)$ мероморфных функций $f(z)$ в единичном круге D наз. классом функций ограниченного вида; он был введен Р. Неванлинной в 1924. Класс $N(D)$ можно охарактеризовать как совокупность всех мероморфных функций $f(z)$ в D, представимых в виде отношения двух ограниченных регулярных функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в D, $f(z)=f_1(z)/f_2(z)$.

Все регулярные функции $f(z)\in N(D)$ образуют подкласс $N^*(D)$, причем $f(z)\in N^*(D)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi=C(f)<+\infty, \quad (3)$$

где $\ln^+x=\ln x$ при $\ln x\geqslant 0$ и $\ln^+x=0$ при $\ln x<0$. В классе $N^*(D)$ содержатся все классы H_p, $0<p\leqslant+\infty$.

Классы H_p имеют следующее обобщение. Пусть $\psi(t)$ — сильно выпуклая функция при $-\infty<t<+\infty$, т. е. неотрицательная выпуклая неубывающая функция такая, что $\psi(t)/t\to+\infty$ при $t\to+\infty$. Тогда класс $H_\psi(D)$ определяется условием

$$\sup_{0<r<1}\psi^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\ln|f(re^{i\varphi})|)\,d\varphi\right\}=$$
$$=C(f,\psi)<+\infty \quad (2')$$

[ср. с условием (2), где $\psi(t)=e^{pt}$].

Основной результат по проблеме существования граничных значений для случая единичного круга D гласит: каждая мероморфная функция $f(z)$ ограниченного вида в D почти всюду на Γ имеет угловые граничные значения $f(e^{i\theta})$; эти граничные значения таковы, что функция $\ln|f(e^{i\theta})|$ суммируема по Лебегу на Γ. Для классов H_p, $0<p<+\infty$, или H_ψ сюда добавляется свойство: функция $|f(e^{i\theta})|^p$ или, соответственно, $\psi(\ln|f(e^{i\theta})|)$ суммируема по Лебегу на Γ. Для ограниченных функций $f(z)$, $|f(z)|\leqslant M$, вместо этого имеем vrai $\max|f(e^{i\theta})|\leqslant M$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. Таким образом, условие (3) можно охарактеризовать как наиболее широкое достаточное условие на средний рост аналитич. функции $f(z)$ при $|z|\to 1$, обеспечивающее существование почти всюду на Γ угловых граничных значений.

Было доказано, что условие (3) нельзя существенно ослабить. Напр., А. Зигмунд (A. Zygmund) доказал, что для произвольной возрастающей функции $\psi(t)$, $\psi(t)/t\to 0$ при $0<t\uparrow+\infty$, существует аналитическая в D функция $f(z)$ такая, что

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\psi(\ln^+|f(re^{i\varphi})|)\,d\varphi<+\infty,$$

но не имеющая нигде на Γ граничных значений. Также и при произвольно медленном росте максимума $M(r;f)=\max\{|f(z)|;\ |z|=r\}$ существуют аналитич. функции без радиальных граничных значений.

Граничное представление функций $f(z)$ класса $N(D)$, характеризующее функции этого класса, имеет вид:

$$f(z)=z^m e^{i\lambda}\frac{B_1(z;a_\mu)}{B_2(z;b_\nu)}\times$$
$$\times\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(e^{i\theta})|\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta\times$$
$$\times\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\Phi(\theta), \quad (4)$$

где m — целое число, $m=k$, если точка $z=0$ — нуль кратности k, и $m=-k$, если $z=0$ — полюс кратности k; λ — действительное число;

$$B_1(z;a_\mu)=\prod_{\mu=1}^{\infty}\frac{|a_\mu|}{a_\mu}\frac{a_\mu-z}{1-\bar{a}_\mu z} \quad (5)$$

— *Бляшке произведение*, составленное по всем нулям $a_\mu \neq 0$ функции $f(z)$ внутри D с учетом их кратности; $B_2(z;\ b_\nu)$ — произведение Бляшке вида (5), составленное по всем полюсам $b_\nu \neq 0$ функции $f(z)$ в D; $\Phi(\theta)$ — сингулярная функция ограниченной вариации на $[0,\ 2\pi]$ с производной, равной нулю почти всюду. Последний интеграл в (4) — типа Лебега — Стилтьеса, первый — типа Лебега.

Как показал М. М. Джрбашян (см. [10]), теория мероморфных функций ограниченного вида допускает существенное расширение. Именно, можно ввести семейство классов мероморфных функций N_α, зависящее от непрерывного параметра α, $-1<\alpha<+\infty$, причем классы N_α характеризуются такими параметрич. представлениями, из к-рых при $\alpha=0$ получается представление (4). При возрастании α классы N_α расширяются, и класс N_0 совпадает с классом Неванлинны N.

Для аналитич. функций $f(z)\in N^*(D)$ в представлении (4) следует положить $B_2(z;\ b_\nu)\equiv 1$. Для функций $f(z)\in H_p$, $0<p\leqslant+\infty$, или H_ψ в представлении (4) имеем: $B_2(z;\ b_\nu)\equiv 1$ и $\Phi(\theta)$ есть невозрастающая функция указанного типа. См. также *Коши интеграл*.

В проблеме единственности первый результат был получен братьями Ф. и М. Рис (1916): если функция $f(z)\in H_\infty$ на множестве $E\subset\Gamma$ положительной меры Лебега на Γ имеет радиальные граничные значения $f(e^{i\theta})=0$, то $f(z)\equiv 0$ в D. Представление (4) позволяет распространить эту теорему на мероморфные *ограниченного вида функции*. В то же время Н. Н. Лузин построил (1919) для любого множества $E\subset\Gamma$ меры нуль аналитич. функцию $f(z)$ такую, что $f(e^{i\theta})=0$ всюду на E, когда $z\to e^{i\theta}$ любым способом, но $f(z)$ не равна тождественно нулю. Наиболее глубокие и общие граничные теоремы единственности для мероморфных функций общего вида были получены Н. Н. Лузиным и И. И. Приваловым в 1925 (см. *Единственности свойства*, *Лузина — Привалова теоремы*).

Рассмотрим случай произвольной плоской области D, ограничившись, однако, для краткости, односвязными областями D со спрямляемой границей Γ. Условия (2), (3) и (2′) равносильны требованию, чтобы субгармонич. функции $|f(z)|^p$, $\ln^+|f(z)|$ и $\psi(\ln|f(z)|)$, соответственно, имели *гармоническую мажоранту* в D. В такой форме эти условия вполне пригодны и естественны для определения классов H_p, N^* и H_ψ в произвольных областях. Известно, что спрямляемая кривая Γ почти во всех точках имеет определенную касательную и нормаль. Включения (1) остаются в силе, равно как и теорема Фату о существовании почти всюду на Γ угловых граничных значений для класса N^*. При этом биссектрисой угловых областей $\Delta(\zeta,\ \varepsilon)$ следует считать нормаль к Γ в точке $\zeta\in\Gamma$. Переносится также теорема единственности Ф. и М. Рисов для класса N^*.

В случае произвольной области D В. И. Смирнов ввел также часто употребляемые к л а с с ы E_p, $p>0$, со следующим определением: $f(z)\in E_p(D)$, если существует последовательность контуров $\{\Gamma_j\}\subset D$, $\Gamma_j\to\Gamma$, такая, что

$$\sup_{\{\Gamma_j\}}\int_{\Gamma_j}|f(z)|^p\,|dz|=C(f,\ p)<+\infty.$$

Классы E_p особенно удобны при изучении вопросов представимости функций интегралом Коши.

Значительный интерес вызывает изучение Г. с. а. ф., осуществляющих конформное отображение. Пусть функция $z=F(w)$ осуществляет конформное отображение единичного круга $|w|<1$ на область D плоскости z со спрямляемой границей Γ. Доказано, напр., что при этом производная $F'(w)$ принадлежит классу Харди H_1 в круге $|w|<1$, а следовательно, она представима в форме (4) с $B_2\equiv 1$ и невозрастающей сингулярной

функцией $\Phi(\theta)$. В. И. Смирнов указал на важность класса S таких областей D, для к-рых эта сингулярная функция $\Phi(\theta)\equiv 0$. В 1937 М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев построили пример области со спрямляемой границей, не входящей в этот класс S Смирнова, что еще более подчеркивает важность характеризации областей типа Смирнова.

Усилия многих исследователей направлены также на изучение Г. с. а. ф. $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Пусть $D=U^n=\{z\in\mathbb{C}^n;\ |z_j|<1,\ j=1, 2, \ldots, n\}$ — единичный *поликруг*, $T^n=\{z\in\mathbb{C}^n;\ |z_j|=1,\ j=1, 2, \ldots, n\}$ — его остов. Класс $N^*(D)$ аналитич. функций $f(z)$ в D можно определить условием:

$$\sup_{0<r<1}\int_{T^n}\ln^+|f(rz)|\,dm_n(z)=C(f)<+\infty,$$

аналогичным (3), а классы $H_p(D)$ или $H_\psi(D)$ — условием типа ($\psi(t)=e^{pt}$ для случая $H_p(D)$, $p>0$):

$$\sup_{0<r<1}\psi^{-1}\left\{\int_{T^n}\psi(\ln|f(rz)|)\,dm_n(z)\right\}=C(f,\psi)<+\infty,$$

где m_n — нормированная *Хаара мера* на T^n, $m_n(T^n)=1$. Включения типа $B=H_\infty\subset H_\psi\subset N^*$ сохраняются. Аналитич. функции $f(z)\in N^*(D)$ почти всюду на T^n по мере Хаара m_n имеют «радиальные» граничные значения $f^*(z)=\lim\limits_{r\to 1-0}f(rz)$, $z\in T^n$, причем $\ln^+|f^*(z)|$ суммируем на T^n по мере m_n. Для граничных представлений и свойств единственности функций $f(z)$ в U^n при $n>1$ достаточно простых и общих адекватных характеристик пока (1977) не найдено.

Многие граничные свойства переносятся на различные обобщения аналитич. функций, в частности на абстрактные аналитич. функции $f: D\to X$ со значениями, напр., в отделимом локально выпуклом топологич. пространстве X над полем $\mathbb{C}$.

Лит.: [1] Голубев В. В., Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции, М., 1961; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950; [4] Хавинсон С. Я., в сб.: Итоги науки. Математический анализ. 1963, М., 1965, с. 5—80; [5] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941; [6] Носиро К., Предельные множества, пер. с англ., М., 1963; [7] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [8] Мак-Лейн Г., Асимптотические значения голоморфных функций, пер. с англ., М., 1966; [9] Ловатер А., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259; [10] Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966, гл. 9; [11] Рудин У., Теория функций в поликруге, пер. с англ., М., 1974; [12] Хенкин Г. М., Чирка Е. М., в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 13—142.

Е. Д. Соломенцев.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ — см. *Краевые условия*.

ГРАНИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ области, простые концы области, — элементы области B комплексной плоскости, определяемые следующим образом. Пусть B — односвязная область расширенной комплексной плоскости, ∂B — граница области B. Сечением c области B наз. всякая простая замкнутая в сферической метрике жорданова дуга $c=\overline{ab}$ с концами a и b (случаи $a=b$, a или $b=\infty$ не исключаются) такая, что a, b принадлежат ∂B; неконцевые точки c принадлежат B; дуга c разбивает B на две подобласти, такие, что на границе каждой из них найдется точка, принадлежащая ∂B и отличная от a и b. Последовательность K сечений c_n области B наз. цепью, если: диаметр c_n стремится к 0 при $n\to\infty$; для каждого n пересечение $c_n\cap c_{n+1}$ пусто; любой путь, соединяющий фиксированную точку $O\in B$ в B с сечением c_n ($n>1$), пересекает сечение c_{n-1}. Две цепи $K=\{c_n\}$ и $K'=\{c_n'\}$ в B эквивалентны, если каждое сечение c_n разделяет в B точку O от всех сечений c_n'

за исключением конечного числа их. Класс эквивалентности цепей в B наз. граничным элементом, или простым концом, области B.

Пусть P — Г. э. области B, определяемый цепью $K=\{c_n\}$, и пусть B_n — такая из двух подобластей, на к-рые c_n разбивает область B, что она не содержит точку O. Множество $I(P)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B}_n$ наз. телом (или носителем) Г. э. Тело Г. э. состоит из точек границы и не зависит от выбора цепи K в классе эквивалентности. Главной точкой Г. э. наз. точка Г. э., к к-рой стягиваются (сходятся) сечения по крайней мере одной из цепей, определяющих рассматриваемый Г. э. Смежной (или дополнительной) точкой Г. э. наз. всякая его точка, не являющаяся главной. Всякий Г. э. содержит по крайней мере одну главную точку. Главные точки Г. э. образуют замкнутое множество. Г. э. следующим образом классифицируются по К. Каратеодори [1]: Г. э. 1-го рода содержит единственную главную точку и не содержит смежных точек; Г. э. 2-го рода — единственную главную точку и бесконечное множество смежных точек; Г. э. 3-го рода — континуум главных точек и не содержит смежных точек; Г. э. 4-го рода — континуум главных точек и бесконечное множество смежных точек.

Другое равносильное определение Г. э. дал П. Кёбе [2]. Оно основано на классах эквивалентности путей. Основной в теории Г. э. является теорема Каратеодори: при однолистном конформном отображении области B на единичный круг $|\zeta|<1$ между точками окружности $|\zeta|=1$ и Г. э. области B существует взаимно однозначное соответствие. При этом каждая последовательность точек области B, сходящаяся к Г. э. P, преобразуется в последовательность точек единичного круга, сходящуюся к точке ζ_0, $|\zeta_0|=1$, являющейся образом Г. э. P.

Лит.: [1] Carathéodory C., «Math. Ann.», 1913, Bd 73, S. 323—70; [2] Koebe P., «J. reine und angew. Math.», 1915, Bd 145, S. 177—223; [3] Суворов Г. Д., Семейства плоских топологических отображений, Новосиб., 1965; [4] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [5] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971, гл. 9.

Е. Г. Голузина.

ГРАНИЧНЫХ ВАРИАЦИЙ МЕТОД — метод исследования *однолистных функций*, основывающийся на рассмотрении *вариаций функции* $w=f(z)$, однолистной в области плоскости z, причем вариации функции определяются надлежащими вариациями границы образа этой области.

Основная лемма Г. в. м. Пусть D — область плоскости w и дополнение Δ области D до расширенной плоскости состоит из нек-рого числа континуумов. Пусть Γ — континуум в Δ и на Γ существует аналитич. функция $s(w)\neq 0$ такая, что для любой точки $w_0\in\Gamma$ и для любой однолистной в области D функции $F(w)$, представимой в виде

$$F(w)=w+A_0+\frac{A_1\rho^2}{w-w_0}+O(\rho^3), \qquad (*)$$

справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\{A_1 s(w_0)\}+O(\rho)\geqslant 0,$$

причем оценка остаточного члена в (*) является равномерной в каждой замкнутой подобласти области D. Тогда Γ — аналитическая кривая и представляется параметрически посредством функции $w=w(t)$ от действительного параметра t. Этот параметр можно выбрать таким образом, что Γ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 s(w)+1=0.$$

Этот результат обнаруживает существенную роль *квадратичных дифференциалов* в решении экстремаль-

ных задач теории однолистных функций, так как во многих приложениях $s(w)$ оказывается мероморфной функцией. В нек-рых случаях из условий задачи следует, что соответствующие полюсы функции $s(w)$ принадлежат границе экстремальной области, и основная лемма Г. в. м. показывает, что граница этой области принадлежит объединению замыканий критич. траекторий квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -s(w)dw^2.$$

Для ряда экстремальных задач основная лемма Г. в. м. не только дает качественный результат, но и оказывается достаточной информацией для определения границы экстремальной области, что приводит к полному решению данной задачи.

Посредством Г. в. м. были получены: качественные результаты в *коэффициентов проблеме* для класса S и в задаче о максимуме n-го диаметра в семействе континуумов данной емкости, решение ряда экстремальных задач однолистных конформных отображений двусвязных областей, *искажения теоремы* для многосвязных областей, дающие одновременно доказательство теорем существования однолистных конформных отображений данной многосвязной области на канонические области, и др.

Лит.: [1] Schiffer M., «Proc. London Math. Soc.», 1938, ser. 2, v. 44, p. 432—49; [2] Шиффер М., Некоторые новые результаты в теории конформных отображений, пер. с англ., в кн.: Р. Курант, Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, М., 1953; [3] Schiffer M., в сб.: Calculus of variations and its applications, N. Y.—Toronto—L., 1958, p. 93—113. *Г. В. Кузьмина.*

ГРАНЬ многогранника — плоский многоугольник, являющийся частью поверхности многогранника и ограниченный его ребрами.

ГРАССМАНА МНОГООБРАЗИЕ — множество $G_{n,m}(k)$, $m \leqslant n$, всех m-мерных подпространств в n-мерном векторном пространстве V над телом k. Если k — поле, то $G_{n,m}(k)$ с помощью грассмановых координат (см. *Внешняя алгебра*) вкладывается в $(C_n^m - 1)$-мерное проективное пространство над k в виде компактного алгебраич. многообразия. В изучении геометрич. свойств Г. м. большую роль играют так наз. многообразия Шуберта $S_{a_0 a_1 \dots a_m}$, $0 \leqslant a_0 < a_1 < \dots < a_m \leqslant n$, определяемые следующим образом: если $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$ — флаг подпространств, т. е. набор таких подпространств, что $\dim V_k = k$, то

$$S_{a_0 a_1 \dots a_m} = \{W \in G_{n,m}(k), \dim(W \cap V_{a_r}) \geqslant r, 0 \leqslant r \leqslant m\}.$$

Любое ρ-мерное алгебраич. подмногообразие в Г. м. $G_{n,m}(k)$ эквивалентно единственной целочисленной линейной комбинации многообразий $S_{a_0 a_1 \dots a_m}$, где $\sum_{i=0}^{m} a_i - \frac{1}{2} m(m+1) = \rho$ (см. [1]).

В случаях, когда k — поле действительных чисел $\mathbb{R}$, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{H}$, Г. м. над k можно рассматривать как компактное аналитич. многообразие (действительное при $k = \mathbb{R}$ и $\mathbb{H}$ и комплексное при $k = \mathbb{C}$). Эти многообразия замечательны тем, что являются классифицирующими пространствами для *классических групп* $O(m)$, $U(m)$, $\mathrm{Sp}(m)$ соответственно. Точнее, для любого клеточного комплекса X размерности $\leqslant c(n+1) - 2$, где $c = 1, 2, 4$ соответственно, множество классов изоморфных m-мерных векторных расслоений над k с базой X находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством гомотопич. классов непрерывных отображений $X \to G_{n+m,m}(k)$ (см. [2]). Аналогичная теория для групп $SO(m)$ и $SU(m)$ приводит к рассмотрению Г. м. $G^0_{n,m}(k)$ ($k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) ориентированных m-мерных подпространств в k^n. Перечисленные Г. м. тесно связаны, в частности, с теорией *характеристических классов*.

Роль, к-рую играют Г. м. в топологии, потребовала детального изучения их топологич. инвариантов. Старейший метод этого изучения основан на многообразиях Шуберта, с помощью к-рых легко построить клеточное разбиение для $G_{n,m}(k)$ ($k=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$). Оказывается, в частности, что циклы $S_{a_0 a_1 \dots a_m}$ порождают базисы групп гомологий $H_*(G_{n,m}(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$, $H_*(G_{n,m}(\mathbb{R}),\ \mathbb{Z}_2)$, $H_*(G_{n,m}(\mathbb{H}),\mathbb{Z})$. Хорошо изучены также алгебры когомологий Г. м. и действие степеней Стинрода на них [3].

Другой аспект теории Г. м. состоит в том, что они являются однородными пространствами линейной группы над соответствующим телом и представляют собой основные примеры неприводимых *симметрических пространств*.

Многообразия, аналогичные Г. м., можно конструировать также из подпространств бесконечномерных векторных пространств. В частности, в теории деформаций аналитич. структур существенную роль играет банахово аналитич. многообразие G_B, элементами к-рого являются замкнутые подпространства банахова пространства B над $\mathbb{C}$, допускающие замкнутое прямое дополнение.

Лит.: [1] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 2, М., 1954; [2] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [3] Расслоенные пространства и их приложения, М., 1958; [4] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961.

А. Л. Онищик.

ГРАФ — множество V вершин и набор E неупорядоченных и упорядоченных пар вершин; обозначается Г. через $G(V, E)$. Неупорядоченная пара вершин наз. р е б р о м, упорядоченная пара — д у г о й. Г., содержащий только ребра, наз. н е о р и е н т и р о в а н н ы м; Г., содержащий только дуги,— о р и е н т и р о в а н н ы м. Пара вершин может соединяться двумя или более ребрами (дугами одного направления), такие ребра (дуги) наз. кратными. Дуга (или ребро) может начинаться и кончаться в одной и той же вершине, такая дуга (ребро) наз. п е т л е й. (Иногда под Г. понимают Г. без петель и кратных ребер; тогда Г., в к-ром допускаются кратные ребра, наз. м у л ь т и г р а ф о м, а Г., в к-ром допускаются кратные ребра и петли, наз. п с е в д о г р а ф о м.)

Вершины, соединенные ребром или дугой, наз. с м е ж н ы м и. Ребра, имеющие общую вершину, также наз. с м е ж н ы м и. Ребро (дуга) и любая из его двух вершин наз. и н ц и д е н т н ы м и. Говорят, что ребро (u, v) соединяет вершины u и v, а дуга (u, v) начинается в вершине u и кончается в вершине v.

Каждый Г. можно представить в евклидовом пространстве множеством точек, соответствующих вершинам, к-рые соединены линиями, соответствующими ребрам (или дугам) Г. В трехмерном пространстве любой Г. можно представить таким образом, что линии, соответствующие ребрам (дугам), не пересекаются во внутренних точках.

Существуют различные способы задания Г. Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n$ — вершины графа $G(V, E)$, а $e_1, e_2, \dots, e_m$ — его ребра. М а т р и ц е й с м е ж н о с т и, соответствующей графу G, наз. матрица $A=\|a_{ij}\|$, у к-рой элемент a_{ij} равен числу ребер (дуг), соединяющих вершины u_i и u_j (идущих из u_i в u_j), и $a_{ij}=0$, если соответствующие вершины не смежны. В м а т р и ц е и н ц и д е н т н о с т и $B=\|b_{ij}\|$ графа G элемент $b_{ij}=1$, если вершина u_i инцидентна ребру e_j, и $b_{ij}=0$, если вершина u_i и ребро e_j не инцидентны. Г. можно задать посредством списков, напр., указанием пар вершин, соединенных ребрами (дугами), или заданием для каждой вершины множества смежных с ней вершин. Два графа $G(V, E)$ и $H(W, I)$ наз. и з о м о р ф н ы м и, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами вершин V, W и множест-

вами ребер E, I, сохраняющее отношение инцидентности (см. также *Графов изоморфизм*).

Подграфом $G'(V', E')$ графа $G(V, E)$ наз. Г. с множеством вершин $V' \subseteq V$ и множеством ребер (дуг) $E' \subseteq E$, каждое из к-рых инцидентно только вершинам из V'. Подграфом $G'(V', E')$, порожденным подмножеством $V' \subseteq V$, наз. Г. с множеством вершин V' и набором ребер (дуг) E', состоящим из всех ребер (дуг) графа G, к-рые соединяют вершины из V'. Остовный подграф $G'(V, E')$ содержит все вершины графа G и нек-рый поднабор его ребер (дуг) $E' \subseteq E$. Последовательность ребер (u_0, u_1), (u_1, u_2), ..., (u_{i-1}, u_i), (u_i, u_{i+1}), ..., (u_{r-1}, u_r) наз. маршрутом, соединяющим вершины u_0 и u_r. Маршрут замкнут, если $u_0 = u_r$. Маршрут наз. цепью, если все его ребра различны, и простой цепью, если все его вершины различны. Замкнутая (простая) цепь наз. (простым) циклом. Г. наз. связным, если любая пара его вершин соединена маршрутом. Максимальный связный подграф графа G наз. компонентой связности. Несвязный Г. имеет по крайней мере две компоненты связности (см. также *Графа связность*).

Длина маршрута (цепи, простой цепи) равна количеству ребер в порядке их прохождения. Длина кратчайшей простой цепи, соединяющей вершины u_i и u_j в графе G, наз. расстоянием $d(u_i, u_j)$ между u_i и u_j. В связном неориентированном Г. расстояние удовлетворяет аксиомам метрики. Диаметр Г. — это его наибольшее расстояние. Величина $\min\limits_{u_i} \max\limits_{u_j} d(u_i, u_j)$ наз. радиусом, а вершина u_0, для к-рой $\max\limits_{u_j} d(u_i, u_j)$ принимает наименьшее значение, наз. центром графа G. В Г. может быть много центров и ни одного.

Степенью вершины u_i графа G, обозначаемой d_i, наз. число ребер, инцидентных этой вершине. Если граф G (без петель) имеет n вершин и m ребер, то $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$. Вершина u_i наз. изолированной, если $d_i = 0$, и концевой, если $d_i = 1$. Г., у к-рого все вершины имеют одинаковые степени (равные k), наз. регулярным (степени k). В полном Г. нет петель и каждая пара вершин соединена в точности одним ребром. Для графа $G(V, E)$, не имеющего петель и кратных ребер, дополнительным Г. к G наз. граф $\overline{G}(\overline{V}, \overline{E})$, у к-рого $\overline{V} = V$ и вершины смежны в $\overline{G}$ только в том случае, когда они не смежны в G. Г., дополнительный к полному, состоит из изолированных вершин и наз. пустым. Многие характеристики для графа G и его дополнения $\overline{G}$ оказываются зависимыми. В ориентированном графе G для каждой вершины u_i определяются полустепень исхода и полустепень захода как количества дуг, выходящих из этой вершины и входящих в нее соответственно. Полный ориентированный Г. наз. *турниром*.

Каждому графу G можно отнести ряд Г., являющихся производными от G. Так, реберным графом $L(G)$ графа G наз. Г., вершины к-рого соответствуют ребрам графа G и две вершины смежны в $L(G)$ в том и только в том случае, когда соответствующие им ребра графа G смежны. В тотальном графе $T(G)$ графа G вершины соответствуют элементам графа G, т. е. вершинам и ребрам, и две вершины в $T(G)$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие элементы в G смежны или инцидентны. Многие свойства графа G переносятся на графы $L(G)$ и $T(G)$. Известно много обобщений понятия «Г.»; одними из них являются понятия *гиперграфа* и *сети*.

С помощью различных операций можно строить Г. из более простых, переходить от одного Г. к более простому, разбивать Г. на более простые, в заданном

классе Г. переходить от одного Г. к другому и т. д. Наиболее употребительными одноместными операциями являются: удаление ребра (вершины ребра сохраняются), добавление ребра между двумя вершинами Г., удаление вершины вместе с инцидентными ей ребрами (Г., полученный в результате удаления вершины v из графа G, часто обозначают $G-v$), добавление вершины (к-рую можно соединить ребрами с нек-рыми вершинами Г.), стягивание ребра — отождествление пары смежных вершин, т. е. удаление пары смежных вершин и добавление новой вершины, смежной с теми вершинами Г., к-рые были смежны хотя бы с одной из удаленных вершин; подразбиение ребра — удаление ребра и добавление новой вершины, к-рая соединяется ребром с каждой вершиной удаленного ребра.

В ряде задач теории Г. используются двуместные операции над Г. Пусть $G_1=G(V_1, E_1)$ и $G_2=G(V_2, E_2)$ — Г. такие, что $V_1 \cap V_2=\phi$ и $E_1 \cap E_2=\phi$. Объединением графов G_1 и G_2 наз. граф $G=G_1 \cup G_2$ с множеством вершин $V=V_1 \cup V_2$ и множеством ребер $E=E_1 \cup E_2$. Произведением графов G_1 и G_2 наз. граф $G=G_1 \times G_2$, множеством вершин к-рого являются элементы декартова произведения $V=V_1 \times V_2$, причем две из этих вершин (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны в том и только в том случае, если либо $u_1=v_1$ и вершина u_2 смежна с вершиной v_2, либо $u_2=v_2$ и вершина u_1 смежна с вершиной v_1. Напр., любой Г. является объединением своих компонент связности; Г., известный как n-мерный единичный куб Q_n, может быть определен рекуррентно с помощью операции произведения:

$$Q_n=K_2 \times Q_{n-2},$$

где $Q_1=K_2$ — граф, состоящий из пары вершин, соединенных одним ребром. Эти операции можно определить также для пересекающихся Г., в частности для подграфов одного Г. Сложением по модулю 2 графов G_1 и G_2 наз. граф G с множеством вершин $V=V_1 \cup V_2$ и множеством ребер $E=(E_1 \cup E_2) \setminus (E_1 \cap E_2)$.

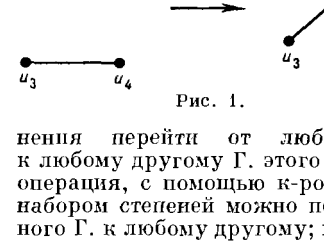


Рис. 1.

Употребляются и другие многоместные операции над Г.

Для некоторых классов Г. удается найти простые операции, позволяющие с помощью многократного их применения перейти от любого Г. изучаемого класса к любому другому Г. этого класса. На рис. 1 приведена операция, с помощью к-рой в классе Г. с одинаковым набором степеней можно перейти от одного произвольного Г. к любому другому; на рис. 2 показана операция, позволяющая в классе плоских триангуляций (см. *Граф плоский*) с одинаковым числом вершин перейти от произвольной триангуляции к любой другой.

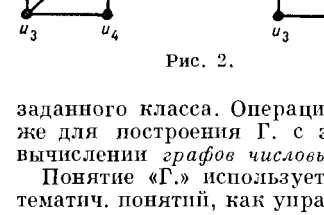


Рис. 2.

Для описания и изучения нек-рых классов Г. отыскиваются такие операции и множества Г., из к-рых с помощью данных операций можно получить любой Г. заданного класса. Операции над Г. используются также для построения Г. с заданными свойствами, при вычислении *графов числовых характеристик* и т. д.

Понятие «Г.» используется в определении таких математич. понятий, как управляющая система, в нек-рых определениях алгоритма, грамматики и др. Изложение ряда математич. теорий становится более наглядным при использовании геометрич. представления Г., напр.

теории марковских цепей. Понятие «Г.» широко используется при создании и описании различных математич. моделей в экономике, биологии и т. д.

Лит.: [1] Берж К., Теория графов и ее применения, пер. с франц., М., 1962; [2] Оре О., Теория графов, пер. с англ., М., 1968; [3] Зыков А. А., Теория конечных графов, [в. 1], Новосиб., 1969; [4] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973.

В. П. Козырев.

ГРАФ ДВУДОЛЬНЫЙ, бихроматический граф,— граф, множество вершин к-рого V можно разбить на два непересекающихся подмножества V' и V'' (т. е. $V=V'\cup V''$, $V'\cap V''=\phi$) так, что каждое ребро соединяет нек-рую вершину из V' с нек-рой вершиной из V''. Граф является Г. д. тогда и только тогда, когда все его простые циклы имеют четную длину. Под Г. д. часто понимают также граф, в к-ром заранее заданы подмножества вершин V' и V'' (доли). Г. д. удобны для представления бинарных отношений между элементами двух разных типов, напр.: взяв элементы данного множества и его подмножества, имеем отношение «вхождение элемента в подмножество»; для исполнителей и видов работ имеем отношение «данный исполнитель может выполнять данную работу» и т. д.

Среди задач о Г. д. важное место занимает изучение паросочетаний, т. е. семейств попарно несмежных ребер. Такие задачи возникают, напр., в теории расписаний (разбиение ребер Г. д. на минимальное число непересекающихся паросочетаний), в задаче о назначениях (нахождение максимального паросочетания) и т. д. Мощность максимального паросочетания в Г. д. равна

$$|V'|-\max_{A'\subseteq V'}(|A'|-|V''(A')|),$$

где $V''(A')$ — число вершин из V'', смежных хотя бы с одной вершиной из A'. Полный Г. д.— это Г. д., в к-ром *любые* две вершины из различных подмножеств соединены ребром (напр., граф $K_{3,3}$, см. *Граф плоский*, рис. 1). Обобщением понятия «Г. д.» является понятие «k-дольного графа», т. е. графа, в к-ром вершины разбиты на k подмножеств так, что каждое ребро соединяет вершины из разных подмножеств.

Лит.: [1] Оре О., Теория графов, пер. с англ., М., 1968.

В. Б. Алексеев.

ГРАФ ОРИЕНТИРОВАННЫЙ — граф, каждому ребру к-рого приписана ориентация. Г. о. G задается множеством вершин V и набором E упорядоченных пар вершин, наз. дугами. Говорят, что дуга (u, v) исходит из вершины u и входит в вершину v. Число дуг, исходящих из v, наз. полустепенью исхода вершины v, а число дуг, входящих в v, наз. полустепенью захода вершины v. Чередующаяся последовательность вершин и дуг v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_n, v_n, в к-рой $e_i=(v_{i-1}, v_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$, наз. маршрутом (ориентированным). Маршрут наз. замкнутым, если его первая и последняя вершины совпадают. Путь — это маршрут, в к-ром все вершины различны. Контур — это нетривиальный (содержащий хотя бы одну дугу) замкнутый маршрут, у к-рого все вершины различны, кроме первой и последней. Если существует путь из вершины u в вершину v, то говорят, что v достижима из u.

Г. о. G с нумерованными вершинами v_1, ..., v_n и дугами e_1, ..., e_m можно задать матрицей инцидентности, т. е. матрицей $\|b_{ij}\|$ размера $n\times m$, в к-рой

$$b_{ij}=\begin{cases}+1, & \text{если дуга } e_j \text{ исходит из } v_i,\\ -1, & \text{если дуга } e_j \text{ заходит в } v_i,\\ 0, & \text{если дуга } e_j \text{ не инцидентна } v_i.\end{cases}$$

Матрицей смежности $A(G)$ вершин Г. о. G наз. матрица $\|a_{ij}\|$ размера $n\times n$, в к-рой элемент a_{ij} равен числу дуг, идущих из v_i в v_j. Суммы элементов

по строкам матрицы $A(G)$ равны полустепеням исхода вершин Г. о. G, а суммы элементов по столбцам — полустепеням захода. Элемент (i, j) матрицы $A^k(G)$ (т. е. k-й степени матрицы смежности графа G) равен числу маршрутов длины k, идущих из v_i в v_j.

В Г. о. можно определить несколько типов связности (см. *Графа связность*). Г. о. наз. с и л ь н о с в я з н ы м, или с и л ь н ы м, если любые две его вершины взаимно достижимы; о д н о с т о р о н н е с в я з н ы м, если для любых двух его вершин по крайней мере одна достижима из другой; с л а б о с в я з н ы м, или с л а б ы м, если любые две его вершины соединены цепью в графе, полученном из исходного Г. о. заменой каждой дуги (неорпентированным) ребром.

Г. о. используются: в теории вероятностей для представления *Маркова цепей*; в теории игр при описании множества игровых ситуаций и результатов состязаний; в математич. экономике при решении транспортных задач; в теории автоматов для задания диаграмм переходов и т. п. В самой теории графов при решении нек-рых задач относительно неориентированных графов иногда вводят ориентацию, сводя исходную задачу к задаче над Г. о. Основное отличие Г. о. от неориентированного графа проявляется при определении таких понятий, как путь, связность, достижимость, расстояние и др. Наиболее интересными типами Г. о. являются *турниры*, транзитивные графы, графы частичных порядков, растущие деревья, графы однозначных отображений, бесконтурные графы.

Лит.: [1] З ы к о в А. А., Теория конечных графов, [в. 1], Новосиб., 1969; [2] Х а р а р и Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [3] P i c a r d C. F., Graphes et questionnaires, v. 1—2, P., 1972.

А. А. Сапоженко.

ГРАФ ПЛОСКИЙ, п л а н а р н ы й г р а ф,— граф, допускающий правильную укладку на плоскости (см. *Графа укладка*). Иными словами, граф G наз. п л о с к и м, если он может быть изображен на плоскости так, что вершинам соответствуют различные точки плоскости, а линии, соответствующие ребрам (исключая их концевые точки), не проходят через точки, соответствующие вершинам, и не пересекаются. К рассмотрению Г. п. сводятся такие задачи, как задача о раскраске карт, задачи о проектировании коммуникаций, задачи из радиоэлектроники, связанные с реализацией схемы с помощью плоских печатных подсхем, и др. Любая правильная (без пересечения ребер) укладка связного Г. п. порождает разбиение плоскости на отдельные области (грани). Такое разбиение плоскости наз. п л о с к о й к а р т о й. Для любой плоской карты имеет место ф о р м у л а Э й л е р а

$$n-m+r=2,$$

где n — число вершин, m — число ребер и r — число областей карты (включая внешнюю область). Отсюда графы K_5 (полный граф с $n=5$) и $K_{3,3}$ (полный *граф двудольный*, имеющий по 3 вершины в каждой доле, см. рис. 1) не являются плоскими. Эти графы являются в нек-ром смысле минимальными неплоскими графами в силу т е о р е м ы П о н т р я г и н а — К у р а т о в с к о г о: граф плоский тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу K_5 или $K_{3,3}$ (см. *Графов гомеоморфизм*).

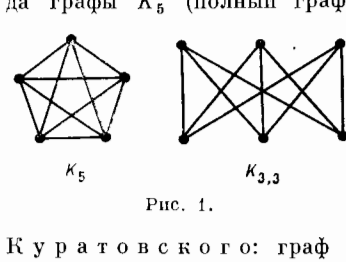


Рис. 1.

Существуют и другие критерии планарности (т. е. свойства графа быть плоским). В частности, граф G является плоским тогда и только тогда, когда каждая нетривиальная двусвязная компонента графа G обладает таким базисом циклов $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ и таким

дополнительным циклом Z_0, что любое ребро G принадлежит точно двум из этих $m+1$ циклов (б а з и с ц и к л о в — это подмножество циклов данного графа, независимое и полное во множестве всех циклов графа относительно операции сложения по модулю 2, см. *Граф*).

Любой Г. п. можно изобразить на плоскости так, чтобы все его ребра являлись отрезками прямых. Любой трехсвязный Г. п. (см. *Графа связность*) единственным образом укладывается на сфере (с точностью до гомеоморфизма сферы). Каждой укладке Г. п. на плоскости, а следовательно и плоской карте, можно поставить в соответствие геометрически д в о й с т в е н н ы й ей граф, получаемый следующим образом. В каждую область карты помещается по вершине Г. п., и если две области имеют общее ребро e, то помещенные в них вершины соединяются ребром e^*, пересекающим только ребро e (на рис. 2 сплошными линиями изображена укладка Г. п., а штриховыми — двойственный ей граф). Плоская карта, каждая грань к-рой ограничена тремя ребрами, наз. п л о с к о й т р и а н г у л я ц и е й. Число ребер плоской триангуляции с n вершинами равно $3n-6$.

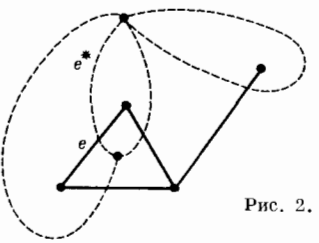


Рис. 2.

В теории графов большое внимание уделяется раскраскам Г. п. (см. *Графа раскраска*); для неплоских графов изучаются различные числовые характеристики, показывающие степень непланарности, напр. род, толщина, крупность графа, число скрещиваний и др. (см. *Графа укладка*).

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973.
В. Б. Алексеев.

ГРАФ СЛУЧАЙНЫЙ — вероятностная модель, предназначенная для изучения частотных характеристик различных параметров графов. Под Г. с. обычно понимается нек-рый класс графов $\mathcal{G}=\{G\}$, на к-ром задано распределение вероятностей. Произвольный конкретный граф G из $\mathcal{G}$ наз. р е а л и з а ц и е й Г. с. Всякая числовая характеристика графа (см. *Графов числовые характеристики*) может рассматриваться как случайная величина. Понятие Г. с. оказывается весьма полезным при моделировании сетей связи, подверженных нек-рым случайным изменениям, или логических сетей, элементы к-рых могут приходить в неисправные состояния; при рассмотрении картины фазовых превращений в статистич. физике; при изучении различных биологич. процессов; при решении задач минимизации *булевых функций* и др. В ряде случаев понятие Г. с. позволяет использовать аппарат теории вероятностей для получения асимптотич. решений перечислительных задач.

Одной из типичных является такая конструкция Г. с., при к-рой все реализации получаются в результате применения к заданному неслучайному графу G (чаще всего полному) нек-рой процедуры уничтожения его ребер; при этом обычно предполагается, что уничтожение различных ребер — события независимые и уничтожение ребра e происходит с вероятностью $q(e)$. Такую конструкцию Г. с. обозначают $\mathcal{G}_G(\{q(e)\})$. Наибольший интерес представляет изучение различных числовых характеристик связности Г. с. $\mathcal{G}_G(\{q(e)\})$ таких, как число компонент связности, диаметр, радиус, число связности и т. п., к-рые можно интерпретировать как характеристику надежности соответствующей сети связи или логической сети. В этом случае число $1-q(e)$ характеризует надежность связи e, а $q(e)$ — вероятность выхода ее из строя.

Если G — полный граф с n вершинами, $q(e)\equiv q$, $0<q<1$, то с вероятностью, стремящейся к 1 при $n\to\infty$, Г. с. $\mathcal{G}_G(\{q(e)\})$ связен, имеет диаметр и радиус, равные 2, содержит гамильтонов цикл (см. *Графа обход*). Если $q(e)$ — функция числа вершин n, то вероятность связности Г. с. $\mathcal{G}_n(q)=\mathcal{G}_G(\{q(e)\})$ зависит от близости величины $1-q(e)$ к $\ln n/n$. Точнее, пусть

$$x_n = n\,(1-q\,(e)) - \ln n;$$

тогда $\mathcal{G}_n(q)$ стремится к 1 при $n\to\infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$; стремится к 0, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$; стремится к $e^{-e^{-c}}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$ (c — нек-рая константа). В последнем случае число ребер Г. с. асимптотически равно $\frac{n\ln n}{2}$.

Этот же Г. с. $\mathcal{G}_n(q)$ может рассматриваться как граф, получаемый из неслучайного пустого n-вершинного графа путем случайного соединения его вершин ребрами так, что любая пара вершин соединяется независимо от остальных с вероятностью $p=1-q$. Этому способу образования графа $\mathcal{G}_n(q)$ можно придать динамику, если положить $q=e^{-t}$, $t>0$, и смотреть на t как на время. При этом наблюдается следующая картина. В начальный момент времени $t=0$ имеется n изолированных вершин. Затем с ростом t появляются нетривиальные компоненты связности, представляющие собой деревья или связные графы с одним циклом и малым числом вершин. Затем появляется одна «главная» компонента, содержащая число вершин, асимптотически равное n (при больших n). Дальнейший процесс характеризуется ростом главной компоненты и уменьшением числа малых компонент. Наконец, наступает момент, когда граф становится связным. Эту эволюцию Г. с. можно рассматривать как модель картины фазовых превращений, где роль жидкой фазы играет главная компонента, а роль разреженной фазы играют компоненты с малым числом вершин.

Существует много других видов Г. с., напр. Г. с., связанные с деревьями (случайные деревья), с однозначными отображениями конечного множества в себя (случайные отображения), с подграфами единичного n-мерного куба (случайные булевы функции).

Лит.: [1] Мур Э. Ф., Шеннон К. Э., «Кибернетический сборник», 1960, в. 1, с. 109—48; [2] Степанов В. Е., в кн.: Вопросы кибернетики. Труды семинара по комбинаторной математике, М., 1973, с. 164—85; [3] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1, М., 1974; [4] Сапоженко А. А., «Проблемы кибернетики», 1975, в. 30, с. 227—61.

А. А. Сапоженко.

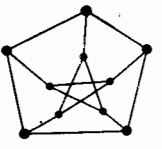
ГРАФ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ — граф, на к-ром та или иная числовая характеристика принимает свое минимальное или максимальное значение. Обычно отыскиваются экстремальные значения нек-рой одной числовой характеристики при ограничениях на другие числовые характеристики и свойства. Часто задача состоит в описании множества соответствующих Г. э. Пусть, напр., зафиксированы целые положительные числа n и k и отыскивается наибольшее число ребер n-вершинного графа, не имеющего полных подграфов с $k+1$ вершинами. Установлено, что это число равно

$$\frac{k-1}{2k}\,(n^2-r^2)+\frac{r\,(r-1)}{2},$$

где $n=k\left[\frac{n}{k}\right]+r$. При этом единственным с точностью до изоморфизма Г. э. является полный k-дольный граф, мощности долей к-рого отличаются не более чем на единицу (см. [3]).

На Г. э. изучаемые числовые характеристики достигают своего глобального экстремума. Так наз. критические графы могут рассматриваться как локально оптимальные. Пусть заданы нек-рое свойство

A и набор одноместных операций O_1, ..., O_s над графами. Граф G, обладающий свойством A, наз. критическим по свойству A относительно операций O_1, ..., O_s, если после применения любой из этих операций получается граф, не обладающий свойством A. При этом предполагается, что множество графов, не обладающих свойством A, замкнуто относительно рассматриваемых операций. В качестве свойства A рассматриваются такие свойства графа, как быть связным, плоским, k-хроматическим и т. п., а в качестве операций — операции удаления и добавления вершины или ребра, стягивания ребра и др. Напр., граф Петерсена (см. рис.) является критическим по свойству иметь реберное хроматическое число, равное 4, относительно операции удаления ребра. Полный пятивершинный граф K_5 и полный двудольный граф $K_{3,3}$ (см. *Граф плоский*, рис. 1), каждая доля к-рого имеет три вершины, являются критическими по свойству не быть плоским относительно операций удаления ребра, стягивания ребра, удаления вершины.



При изучении свойств и характеристик графов оказывается полезным изучение их критических подграфов, т. е. подграфов, обладающих теми или иными свойствами и являющихся минимальными (максимальными) по включению. Примеры таких подграфов — компоненты связности (k-связности), остовные деревья. Экстремальные и критич. графы служат: для описания классов графов, обладающих заданными свойствами и числовыми характеристиками; для установления взаимосвязи между различными свойствами и числовыми характеристиками; для проверки наличия того или иного свойства графа.

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [2] Зыков А. А., Теория конечных графов, [в. 1], Новосиб., 1969; [3] Turán P., «Mat. Fiz. Lapok», 1941, v. 48, p. 436—52.

А. А. Сапоженко.

ГРАФА АВТОМОРФИЗМ — изоморфное отображение графа на себя (см. *Графов изоморфизм*). Множество всех автоморфизмов данного графа образует группу относительно операции композиции автоморфизмов. Автоморфизмы графа G порождают группу подстановок вершин $\Gamma(G)$, наз. группой (или иногда вершинной группой) графа G, и группу подстановок ребер $\Gamma_1(G)$, наз. реберной группой графа G. Реберная и вершинная группы графа G без петель и кратных ребер изоморфны тогда и только тогда, когда граф G имеет не более одной изолированной вершины и никакая его компонента связности не является изолированным ребром. Для каждой конечной группы F существует граф, группа автоморфизмов к-рого изоморфна F. В то же время существуют группы подстановок на множестве из n элементов, не являющиеся вершинной группой никакого графа с n вершинами. С Г. а. можно связать различные типы и меры симметрии графа. Асимметричным называется граф, не имеющий автоморфизмов, отличных от тождественного. При $n\to\infty$ почти все графы с n вершинами являются асимметричными.

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973.

В. Б. Алексеев.

ГРАФА ОБХОД — маршрут, содержащий все вершины или ребра графа и обладающий определенными свойствами. Наиболее известными Г. о. являются эйлеровы и гамильтоновы цепи и циклы. Маршрут (замкнутый маршрут) наз. эйлеровой цепью (эйлеровым циклом), если он содержит все ребра графа и проходит через каждое ребро по одному разу. Имеется эффективный критерий существования эйлеровых циклов (теорема Эйлера): связный граф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда каждая его вершина имеет четную степень.

Маршрут (замкнутый маршрут) наз. гамильтоновой цепью (гамильтоновым циклом), если он содержит все вершины графа и через каждую проходит по одному разу. Известен ряд достаточных условий существования гамильтоновых циклов, напр.: граф не имеет петель и кратных ребер и для любых двух его несмежных вершин сумма степеней не меньше числа вершин этого графа; граф является плоским и 4-связным; граф не имеет петель и кратных ребер, а число n его вершин и число m его ребер удовлетворяют условиям $n \geqslant 3$ и $m \geqslant \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$. Граф наз. гамильтоновым (эйлеровым), если он имеет гамильтонов (эйлеров) цикл. Граф наз. гамильтоново связным, если любые две его вершины соединены гамильтоновой цепью, и k-гамильтоновым, если любая простая цепь длины k входит в нек-рый гамильтонов цикл. Известная задача о коммивояжере состоит в том, чтобы найти в графе, ребрам к-рого приписаны неотрицательные числа (длины ребер), гамильтонов цикл, имеющий наименьшую сумму длин ребер. Эта и другие задачи о Г. о. имеют различные технич. и экономич. приложения.

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [2] Зыков А. А., Теория конечных графов, [в. 1], Новосиб., 1969. *В. П. Козырев.*

ГРАФА РАСКРАСКА — приписывание цветов вершинам и (или) ребрам графа, обладающее определенными свойствами. Правильная вершинная (реберная) раскраска — это раскраска вершин (ребер) графа, при к-рой любые смежные вершины (ребра) окрашены в разные цвета. Правильную вершинную раскраску часто наз. просто раскраской графа. Граф наз. k-раскрашиваемым, если существует правильная вершинная Г. р. k цветами. Наименьшее число цветов, достаточное для правильной вершинной раскраски графа G, наз. хроматическим числом $\chi(G)$ графа G. Если $\chi(G)=k$, то граф G наз. k-хроматическим. Граф является 2-хроматическим тогда и только тогда, когда он не содержит простых циклов нечетной длины. Если максимальная степень вершин графа G равна r, то граф G всегда r-раскрашиваем, за исключением двух случаев: 1) $r=2$ и G имеет компоненту связности, являющуюся циклом нечетной длины; 2) $r>2$ и полный граф с $r+1$ вершинами является компонентой связности графа G.

Для объединения двух графов G_1 и G_2 справедливо неравенство

$$\chi(G_1 \cup G_2) \leqslant \chi(G_1)\,\chi(G_2),$$

причем равенство здесь достигается. Более того, если граф G такой, что $\chi(G)=k=ab$, то найдутся подграфы G_1 и G_2 в G такие, что $G=G_1 \cup G_2$, $\chi(G_1)=a$, $\chi(G_2)=b$. Если G — граф с n вершинами и $\overline{G}$ — граф, дополнительный к G, то

$$2\sqrt{n} \leqslant \chi(G)+\chi(\overline{G}) \leqslant n+1,$$

$$n \leqslant \chi(G)\,\chi(\overline{G}) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2,$$

причем все границы достигаются. Хроматическим числом $\chi(S)$ двумерной поверхности S наз. максимум хроматич. чисел графов, допускающих правильную укладку на S (см. *Графа укладка*). Для ориентируемой поверхности S_γ рода $\gamma>0$ справедливо равенство

$$\chi(S_\gamma) = \left[\frac{7+\sqrt{1+48\gamma}}{2}\right].$$

При $\gamma=0$ это равенство принимает вид $\chi(S_0)=4$, что составляет утверждение *четырех красок задачи*. Пусть $f(G, t)$ — число различных правильных раскрасок графа G с нумерованными вершинами в t или меньше цветов, тогда для любого графа G функция $f(G, t)$ есть

многочлен от переменной t, наз. хроматическим многочленом графа G. Напр., хроматич. многочлен любого дерева с n вершинами имеет вид $f(G, t) = t(t-1)^{n-1}$. Реберное хроматич. число (хроматический класс) $\chi'(G)$ графа G — это наименьшее число цветов, достаточное для правильной раскраски ребер графа G. Если максимальная степень вершин графа G равна k (допускаются кратные ребра), то

$$k \leqslant \chi'(G) \leqslant \left[\frac{3}{2}k\right].$$

Если при этом кратность каждого ребра не более r, то $\chi'(G) \leqslant k+r$. В частности, для графов без петель и кратных ребер $k \leqslant \chi'(G) \leqslant k+1$.

Задачи на Г. р. возникают при проектировании коммуникаций, в радиоэлектронике, в планировании эксперимента и других областях.

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [2] Оре О., Теория графов, пер. с англ., М., 1968; [3] Шеннон К. Э., «Кибернетический сборник», 1960, в. 2, с. 249—53.

В. Б. Алексеев.

ГРАФА СВЯЗНОСТЬ — одна из топологических характеристик графа. Граф наз. связным, если для любых его вершин u и v существует цепь, соединяющая эти вершины. Числом вершинной связности графа G [обозначение $\varkappa(G)$] наз. наименьшее число вершин, удаление к-рых (вместе с инцидентными им ребрами) приводит к несвязному графу или к графу, состоящему из одной изолированной вершины. Числом реберной связности [обозначение $\lambda(G)$] наз. наименьшее число ребер графа G, удаление к-рых приводит к несвязному графу. Граф G наз. k-связным, если $\varkappa(G) \geqslant k$, и k-реберно связным, если $\lambda(G) \geqslant k$. Максимальный по включению k-связный подграф графа G наз. его k-связной компонентой; 1-связная компонента наз. компонентой связности. При исследовании коммуникационных и логических сетей числа связности соответствующих графов можно интерпретировать как степень надежности этих сетей.

В теории графов изучаются способы установления Г. с., условия, при к-рых граф является k-связным или k-реберно связным, соотношения между различными видами связности, зависимость чисел связности от других параметров графа и т. п. Так, если $\delta(G)$ — минимальная степень вершин графа G, то справедливы следующие неравенства: $\varkappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$.

Для любых целых a, b, c $(0 < a \leqslant b \leqslant c)$ существует граф G, у к-рого $\varkappa(G) = a$, $\lambda(G) = b$, $\delta(G) = c$. Если граф G имеет n вершин и $\delta(G) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, то $\lambda(G) = \delta(G)$. Говорят, что множество S вершин, ребер или вершин и ребер разделяет вершины u и v, если u и v принадлежат разным компонентам связности графа $G - S$, полученного из G удалением элементов множества S. Справедливы следующие утверждения.

Наименьшее число вершин, разделяющих две несмежные вершины u и v, равно наибольшему числу простых цепей, не имеющих общих вершин, соединяющих u и v. Граф G является k-связным тогда и только тогда, когда любая пара его вершин соединена по крайней мере k вершинно непересекающимися цепями. Аналогичные теоремы справедливы и для реберной связности. Граф k-реберно связен тогда и только тогда, когда любая пара его вершин соединена по крайней мере k реберно непересекающимися цепями. Множество ребер, удаление к-рых приводит к несвязному графу, наз. разрезом. В каждом графе наибольшее число реберно непересекающихся разрезов, разделяющих вершины u и v, равно наименьшему числу ребер простой цепи, соединяющей u и v, т. е. расстоянию $d(u, v)$ между u и v.

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [2] Форд Л., Фалкерсон Д., Потоки в сетях, пер. с англ., М., 1966. *А. А. Сапоженко.*

ГРАФА УКЛАДКА, графа вложение,— отображение вершин и ребер графа соответственно в точки и непрерывные кривые нек-рого пространства такое, что вершины, инцидентные ребру, отображаются в концы кривой, соответствующей этому ребру. Правильной укладкой наз. укладка, при к-рой разным вершинам соответствуют различные точки, а кривые, соответствующие ребрам (исключая их концевые точки), не проходят через точки, соответствующие вершинам, и не пересекаются. Любой граф допускает правильную укладку в трехмерное пространство. Граф, допускающий правильную укладку на плоскости, наз. плоским. Существуют неплоские графы, напр. графы K_5 и $K_{3,3}$ (см. *Граф плоский*, рис. 1). Наименьший род двумерной ориентируемой поверхности, на к-рой граф G допускает правильную укладку, наз. родом $\gamma(G)$ графа G. Установлено, в частности, что

$$\gamma(K_n) = \left]\frac{(n-3)(n-4)}{12}\right[,$$

где K_n — полный граф с n вершинами, $]a[$ — наименьшее целое число, не меньшее a;

$$\gamma(K_{m,n}) = \left]\frac{(m-2)(n-2)}{4}\right[,$$

где $K_{m,n}$ — полный *граф двудольный*;

$$\gamma(Q_n) = 1 + (n-4)\cdot 2^{n-3},$$

где Q_n есть n-мерный куб. Толщиной $\theta(G)$ графа G наз. наименьшее число его плоских подграфов, объединение к-рых дает граф G. Установлено, в частности, что

$$Q(K_p) = \left[\frac{p+7}{6}\right] \text{ при } p \neq 9,\ 10;\ \theta(K_9) = \theta(K_{10}) = 3,$$

$$\theta(Q_n) = \left]\frac{n+1}{4}\right[,$$

$$\theta(K_{m,n}) = \left]\frac{mn}{2(m+n-2)}\right[$$

(возможно с несколькими исключениями).

Изучаются также другие числовые характеристики, связанные с Г. у., напр. число скрещиваний — наименьшее число пересечений ребер, с к-рым можно уложить данный граф на данной поверхности; крупность — наибольшее число непересекающихся по ребрам неплоских подграфов в данном графе и др. Рассматриваются также укладки на неориентируемых поверхностях. Вложение графа в n-мерную целочисленную решетку — это отображение в данную решетку, при к-ром вершины отображаются в различные узлы решетки, а ребра идут по линиям решетки.

Задачи об укладках графов на поверхностях и вложениях их в решетки возникают при автоматизированном проектировании ЭВМ, при проектировании коммуникаций и т. д.

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [2] Теория графов. Покрытия, укладки, турниры, сб. переводов, М., 1974, с. 82—159. *В. Б. Алексеев.*

ГРАФИК отображения $f: X \to Y$ множества X во множество Y — подмножество Γ произведения $X \times Y$, состоящее из точек вида $(x, f(x))$, $x \in X$. Если X и Y — топологич. пространства, f — непрерывное отображение и $p: X \times Y \to X$ — проекция топологич. произведения $X \times Y$ на сомножитель X, то на подпространстве Γ произведения $X \times Y$ отображение p является гомеоморфизмом. Если пространство Y хаусдорфово, то множество Γ замкнуто в произведении $X \times Y$. *Б. А. Пасынков.*

В случае действительной функции f с n действительными аргументами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и областью определе-

ния E^n г р а ф и к есть множество всех упорядоченных пар $((x_1, \ldots, x_n), f(x_1, \ldots, x_n))$, где $(x_1, \ldots, x_n)$ — любая точка из E^n; иначе — множество всех точек $(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$ пространства E^{n+1}. Если выбрать систему координат (прямоугольную декартову, полярную или какую-либо другую), то числовые точки $(x, f(x))$, $(x, y, f(x, y))$ можно изобразить точками плоскости или пространства. Для действительных функций $f(x)$ одного действительного переменного, имеющих $f'(x)$, $f''(x)$, в более или менее сложных примерах эскиз Г. строится при помощи исследования знака $f'(x)$ и $f''(x)$. По знаку $f'(x)$ судят о монотонности функции f, по знаку $f''(x)$ — о направлении *выпуклости* Г. функции. Для получения представления о графике действительной функции $z(x, y)$ двух действительных переменных может применяться метод сечений: рассматриваются сечения Г. нек-рыми плоскостями, в частности, плоскостями $z=c$; проекция этого сечения на плоскость Oxy наз. множеством уровня функции $z(x, y)$. Аналогично, для функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ с областью определения E^n множеством уровня функции f с $w=c$ (c — любое число) наз. множество всех решений уравнения $c=f(x_1, \ldots, x_n)$; решения $(x_1, \ldots, x_n)$ нужно искать в E^n. Множество уровня может оказаться пустым множеством. Если множество уровня есть линия или поверхность, то она наз. линией или поверхностью уровня функции.

А. А. Конюшков.

ГРАФИЧЕСКОЕ РАВЕНСТВО — отношение между двумя *конструктивными объектами*, заключающееся в том, что эти объекты одинаковым образом составлены из одинаковых элементарных знаков. Г. р. двух *слов* означает, что они составлены из одних и тех же букв, одинаково следующих друг за другом. Точнее Г. р. с л о в можно охарактеризовать следующим образом: а) пустое слово считается графически равным только самому себе; б) два непустых слова $P\xi$ и $Q\eta$ (здесь ξ и η означают последние буквы этих слов) считаются графически равными тогда и только тогда, когда P и Q графически равны, а буквы ξ и η одинаковы. Обычно Г. р. обозначается знаками $=$, $\equiv$.

Лит.: [1] М а р к о в А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 (Тр. матем. ин-та АН СССР, т. 42), с. 13—14.

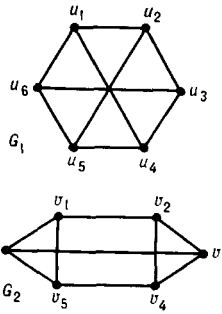
Н. М. Нагорный.

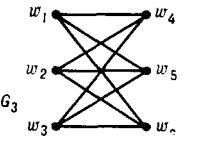
ГРАФОВ ГОМЕОМОРФИЗМ — отношение эквивалентности на множестве графов, характеризующее их геометрич. свойства. Г. г. определяется следующим образом. П о д р а з б и е н и е м ребра (a, b) графа G наз. операция, состоящая в добавлении новой вершины v, удалении ребра (a, b) и добавлении двух ребер (a, v) и (b, v). Геометрически эта операция состоит в выделении на линии (a, b) нек-рой (внутренней) точки v, к-рая объявляется новой вершиной. Граф G' наз. подразбиением графа G, если он может быть получен из G путем применения нек-рого числа раз операции подразбиения ребер. Графы G_1 и G_2 наз. г о м е о м о р ф н ы м и, если существуют такие их подразбиения, к-рые изоморфны (см. *Графов изоморфизм*).

В. Б. Алексеев.

ГРАФОВ ИЗОМОРФИЗМ — отношение эквивалентности на множестве графов. И з о м о р ф н ы м о т о б р а ж е н и е м одного неориентированного графа на другой наз. взаимно однозначное отображение вершин и ребер одного графа соответственно на вершины и ребра другого графа, при к-ром сохраняется отношение инцидентности. Два графа наз. и з о м о р ф н ы м и, если существует изоморфное отображение одного из этих графов на другой. Графы G_1 и G_2, представленные на рис., не изоморфны, а G_1 и G_3 изоморфны. Обычно изоморфные графы не различают. Число попарно неизоморфных графов с данным числом вершин и данным числом ребер конечно. Подобным образом можно определить изоморфизм ориентированных графов, гиперграфов и сетей.

Проблема установления Г. и. является важной проблемой теории графов. Для нек-рых классов графов имеются алгоритмы, позволяющие установить изоморфизм достаточно эффективно (напр., для *деревьев* или плоских графов, см. [1]). Для нек-рых классов графов с n вершинами доказана однозначная (с точностью





до изоморфизма) восстанавливаемость графа по набору всех его $(n-1)$-вершинных подграфов $G-v$, получаемых удалением всевозможных вершин v. Это установлено, в частности, для деревьев и *турниров* (при $n \neq 5,6$).

Лит.: [1] Хопкрофт Дж., Тарьян Р., «Кибернетический сборник», 1975, в. 12, с. 39—61; [2] Kelly P. J., «Pacific J. Math.», 1957, v. 7, p. 961—68. *В. Б. Алексеев.*

ГРАФОВ ТЕОРИЯ — область дискретной математики, особенностью к-рой является геометрич. подход к изучению объектов. Основной объект Г. т.— граф и его обобщения. Первые задачи Г. т. были связаны с решением математических развлекательных задач и головоломок (задача о Кенигсбергских мостах, задача о расстановке ферзей на шахматной доске, задачи о перевозках, задача о кругосветном путешествии и др.). Одним из первых результатов в Г. т. явился критерий существования обхода всех ребер графа без повторений, полученный Л. Эйлером (1736) при решении задачи о Кенигсбергских мостах. Сформулированная в сер. 19 в. проблема четырех красок (см. *Четырех красок задача*) также выглядит как развлекательная задача, однако попытки ее решения привели к появлению нек-рых исследований графов, имеющих теоретическое и прикладное значение. В сер. 19 в. появились работы, в к-рых при решении практич. задач были получены результаты, относящиеся к Г. т. Так, напр., Г. Кирхгоф [2] при составлении полной системы уравнений для токов и напряжений в электрич. схеме предложил по существу представлять такую схему графом и находить в этом графе остовные деревья, с помощью к-рых выделяются линейно независимые системы контуров. А. Кэли [3], исходя из задач подсчета числа изомеров предельных углеводородов, пришел к задачам перечисления и описания деревьев, обладающих заданными свойствами, и решил нек-рые из них. В 20 в. задачи, связанные с графами, начали возникать не только в физике, химии, электротехнике, биологии, экономике, социологии и т. д., но и внутри математики, в таких разделах, как топология, алгебра, теория вероятностей, теория чисел. В нач. 20 в. графы стали использоваться для представления нек-рых математич. объектов и формальной постановки различных дискретных задач; при этом наряду с термином «граф» употреблялись и другие термины, напр. карта, комплекс, диаграмма, сеть, лабиринт. После выхода в свет в 1936 монографии Д. Кёнига [4] термин «граф» стал более употребительным, чем другие. В этой работе были систематизированы известные к тому времени факты. В 20—30-х гг. 20 в. появились первые результаты, относящиеся к изучению свойств связности, планарности, симметрии графов, к-рые привели к формированию ряда новых направлений в Г. т. Значительно расширились исследования по Г. т. в конце 40-х — начале 50-х гг., прежде всего в силу развития *кибер-*

нетики и вычислительной техники. Благодаря развитию вычислительной техники, изучению сложных кибернетич. систем, интерес к Г. т. возрос, а проблематика Г. т. существенным образом обогатилась. Кроме того, использование ЭВМ позволило решать возникающие на практике конкретные задачи, связанные с большим объемом вычислений, прежде не поддававшиеся решению. Для ряда экстремальных задач Г. т. были разработаны методы их решения, напр., один из таких методов позволяет решать задачи о построении максимального потока через сеть (см. *Поток в сети*). Для отдельных классов графов (деревья, плоские графы и т. д.), к-рые изучались и ранее, было показано, что решения нек-рых задач для графов из этих классов находятся проще, чем для произвольных графов (нахождение условий существования графов с заданными свойствами, установление изоморфизма графов и др.).

Характеризуя проблематику Г. т., можно отметить, что нек-рые направления носят более комбинаторный характер, другие — более геометрический. К первым относятся, напр., задачи о подсчете и перечислении графов с фиксированными свойствами, задачи о построении графов с заданными свойствами. Геометрический (топологический) характер носят многие циклы задач Г. т., напр. *графов обходы*, *графов укладки*. Существуют направления, связанные с различными классификациями графов, напр. по свойствам их разложения. Примером результата о существовании графов с фиксированными свойствами может служить критерий реализуемости чисел степенями вершин нек-рого графа: набор целых чисел $0 \leqslant d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$, сумма к-рых четна, можно реализовать степенями вершин графа без петель и кратных ребер тогда и только тогда, когда для любого $r\,(1 \leqslant r \leqslant n-1)$ выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{r} d_i \leqslant r\,(r-1) + \sum_{i=r+1}^{n} \min\,(r,\ d_i).$$

Примерами задач о подсчете графов с заданными свойствами являются задачи о нахождении количеств неизоморфных графов с одинаковым числом вершин и (или) ребер. Для числа неизоморфных деревьев с n вершинами была получена асимптотич. формула

$$t_n = C\,\frac{\theta^n}{n^{5/2}} + O\left(\frac{\theta^n}{n^{7/2}}\right),$$

где $C = 0{,}534948\ldots$, $\theta = 2{,}95576\ldots$. Для числа g_n неизоморфных графов без петель и кратных ребер с n вершинами было показано, что

$$g_n = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!}\left(1 + \frac{2n\,(n-1)}{2^n} + \frac{8\,(3n-7)\,n!}{3\,(n-3)!\cdot 2^{2n}} + O\left(\frac{n^5}{2^{5n/2}}\right)\right).$$

Наряду с проблемами, носящими общий характер, в Г. т. имеются специфич. циклы задач. В одном из них изучаются различные свойства связности графов, исследуется строение графов по свойствам связности (см. *Графа связность*). При анализе надежности сетей связи, электронных схем, коммуникационных сетей возникает задача о нахождении количеств непересекающихся цепей, соединяющих различные вершины графа. Здесь получен ряд результатов. Напр., наименьшее число вершин, разделяющих две несмежные вершины графа, равно наибольшему числу непересекающихся (по вершинам) простых цепей, соединяющих эту пару вершин. Найдены критерии и построены эффективные алгоритмы установления меры связности графа (наименьшего числа вершин или ребер, удаление к-рых нарушает связность графа).

В другом направлении исследований Г. т. изучаются маршруты, содержащие все вершины или ребра графа (см. *Графа обход*). Известен простой критерий существования маршрута, содержащего все ребра графа:

в связном графе цикл, содержащий все ребра и проходящий по каждому ребру один раз, существует тогда и только тогда, когда все вершины графа имеют четные степени. В случае обхода множества вершин графа имеется только ряд достаточных условий существования цикла, проходящего по всем вершинам графа по одному разу.

Характерным специфическим направлением Г. т. является цикл задач, связанный с раскрасками графов, в к-ром изучаются разбиения множества вершин (ребер), обладающие определенными свойствами, напр. смежные вершины (ребра) должны принадлежать различным множествам (вершины или ребра из одного множества окрашиваются одним цветом; см. *Графа раскраска*). Было доказано, что наименьшее число цветов, достаточное для раскраски ребер любого графа без петель с максимальной степенью σ, равно $[3\sigma/2]$, а для раскраски вершин любого графа без петель и кратных ребер достаточно $\sigma+1$ цветов.

Существуют и другие циклы задач (см. *Покрытия и упаковки*, *Графа укладка*, *Графов числовые характеристики*); нек-рые из них сложились под влиянием различных разделов математики. Так, под влиянием топологии производится изучение вложений графов в различные поверхности. Напр., было получено необходимое и достаточное условие вложения графа в плоскость (критерий Понтрягина — Куратовского): граф является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, получаемых с помощью подразбиения ребер из полного 5-вершинного графа и полного двудольного графа с тремя вершинами в каждой доле. Под влиянием алгебры стали изучаться группы автоморфизмов графов (см. *Графа автоморфизм*). В частности, было доказано, что каждая конечная группа изоморфна группе автоморфизмов нек-рого графа. Влияние теории вероятностей сказалось на исследовании *графов случайных*. Многие свойства были изучены для «почти всех» графов; напр. было показано, что почти все графы с n вершинами связаны, имеют диаметр 2, обладают гамильтоновым циклом (циклом, проходящим через все вершины графа по одному разу).

В Г. т. существуют специфич. методы решения экстремальных задач. Один из них основан на теореме о максимальном потоке и минимальном разрезе, утверждающей, что максимальный поток, к-рый можно пропустить через сеть из вершины u в вершину v, равен минимальной пропускной способности разрезов, разделяющих вершины u и v (см. *Поток в сети*). Были построены различные эффективные алгоритмы нахождения максимального потока.

Большое значение в Г. т. имеют алгоритмические вопросы. Для конечных графов, т. е. для графов с конечным множеством вершин и ребер, как правило, проблема существования алгоритма решения задач, в том числе экстремальных, решается положительно. Решение многих задач, связанных с конечными графами, может быть выполнено с помощью полного перебора всех допустимых вариантов. Однако таким способом удается решить задачу только для графов с небольшим числом вершин и ребер. Поэтому существенное значение для Г. т. имеет построение эффективных алгоритмов, находящих точное или приближенное решение. Для нек-рых задач такие алгоритмы построены, напр., для установления планарности графов, определения изоморфизма деревьев, нахождения максимального потока.

Результаты и методы Г. т. применяются при решении транспортных задач о перевозках, для нахождения оптимальных решений задачи о назначениях, для выделения «узких мест» при планировании и управлении разработок проектов, при составлении опти-

мальных маршрутов доставки грузов, а также при моделировании сложных технологич. процессов, в построении различных дискретных устройств, в программировании и т. д.

Лит.: [1] Euler L., в кн.: Commentationes Arithmetical Collectae, St. Peterburg, 1766, c. 66—70; [2] Kirchhoff G., «Poggendorf Annalen», 1847, Bd 72, S. 497—508; [3] Cayley A., «Collected Mathematical papers», Camb., 1854, v. 3, p. 242; [4] König D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, 2 ed., N. Y., 1950; [5] Берж К., Теория графов и ее применение, пер. с франц., М., 1962; [6] Зыков А. А., Теория конечных графов, [в. 1], Новосиб., 1969; [7] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [8] Козырев В. П., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 10, 1972, с. 25—74; [9] Harary F., Palmer E., Graphical enumeration, N. Y. — L., 1973.

В. Б. Алексеев, В. П. Козырев, А. А. Сапоженко.

ГРАФОВ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ — функции, заданные на множестве графов и принимающие значения из нек-рого множества чисел. Ниже приведен ряд Г. ч. х. и их наиболее употребительные обозначения. Наиболее простыми Г. ч. х. являются число вершин и число ребер (дуг) графа G. Цикломатическим числом $\nu(G)$ графа G наз. наименьшее число ребер, удаление к-рых приводит к графу без циклов;

$$\nu(G)=m-n+k,$$

где m — число ребер, n — число вершин, k — число компонент связности графа G. Числом вершинной связности $\varkappa(G)$ [числом реберной связности $\lambda(G)$] наз. наименьшее количество вершин (ребер) графа G, удаление к-рых приводит к несвязному графу или тривиальному графу (т. е. графу, состоящему из одной вершины). Плотность $\varphi(G)$ есть наибольшее число вершин в полном подграфе графа G; число независимости, или число внутренней устойчивости, $\varepsilon(G)$ есть наибольшее число попарно несмежных вершин графа G (при этом попарно несмежные вершины графа G образуют внутренне устойчивое множество). Хроматическим числом $\chi(G)$ [реберным хроматическим числом $\chi'(G)$] наз. наименьшее количество цветов, к-рыми можно раскрасить вершины (ребра) графа G так, чтобы любые смежные вершины (ребра) были окрашены разными цветами (см. также *Графа раскраска*). Числом внешней устойчивости $\beta(G)$ наз. наименьшее количество вершин такого подмножества W множества вершин графа G, что любая вершина, не принадлежащая W, смежна по крайней мере с одной вершиной из W. Древесность $\Upsilon(G)$ есть наименьшее число непересекающихся по ребрам остовных лесов графа G, объединение к-рых есть граф G. Кручность $\xi(G)$ — это наибольшее число непересекающихся по ребрам неплоских подграфов графа G. Толщина $\theta(G)$ — это наименьшее число плоских подграфов, объединение к-рых есть G. Число скрещиваний — это наименьшее число попарных пересечений ребер графа G при расположении его на плоскости. Род $\gamma(G)$ графа G есть наименьший род двумерной ориентируемой поверхности, на к-рой можно уложить граф G без пересечения его ребер (см. *Графа укладка*).

Нек-рые числовые характеристики относят данному графу количества подграфов определенного типа, напр. число остовных деревьев, число гамильтоновых циклов и т. д. Существуют характеристики, зависящие от параметра $f_k(G)$ (напр., число полных подграфов с k вершинами), совокупность этих характеристик может быть задана многочленом $\Sigma_k f_k(G)x^k$ — аналогом производящей функции. Многие из таких многочленов можно находить рекуррентно, применяя операции над графами — удаление вершины или ребра, стягивание ребра и др. При решении задач теории графов часто

возникает необходимость изучения взаимосвязи различных Г. ч. х. На нек-рых множествах Г. ч. х. достигают своих экстремальных значений, при нахождении к-рых часто удается описать графы, на к-рых они достигаются. Тогда нахождение экстремальных значений сводится к исследованию таких графов. Для изучения графов, у к-рых рассматриваемая характеристика принимает заданное значение, оказывается полезным исследование свойств критических графов (см. *Граф экстремальный*).

Лит.: [1] Зыков А. А., Теория конечных графов, [в. 1], Новосиб., 1969; [2] Козырев В. П., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 10, М., 1972, с. 25—75; [3] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973.

В. П. Козырев.

ГРЕГОРИ ФОРМУЛА приближенного интегрирования для функции $y=f(x)$ — формула, имеющая вид:

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = \frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n + \\ + A_2(\Delta^1 y_{n-1} - \Delta^1 y_0) - A_3(\Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_0) + \\ + A_4(\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0) - A_5(\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0) + \ldots + R,$$

где $y_j = f(a+jh)$, $\Delta^l y_j$ — разности функции y порядка $l = 1, 2, \ldots$ в точках $a+jh$, $j=0, 1, \ldots, n$

$$A_k = \int_0^1 t(t-1)\ldots(t-k+1)(k!)^{-1}\,dt, \quad k=2, 3, \ldots,$$

в частности

$$A_2 = -\frac{1}{12}, \quad A_3 = \frac{1}{24}, \quad A_4 = -\frac{19}{720}, \quad A_5 = \frac{3}{160}, \ldots$$

Г. ф. получается при интегрировании интерполяционного многочлена с узлами в точках a, $a+h$, ..., $a+nh$. Если в Г. ф. взяты разности до порядка n включительно, то она может быть получена из формулы Ньютона — Котеса (см. *Котеса формулы*) замкнутого типа и потому остаточные члены у этих формул одинаковы. Простейший вариант Г. ф. был предложен Дж. Грегори (J. Gregory, 1668).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 1, 3 изд., М., 1966.

Л. Д. Кудрявцев.

ГРЁТША ПРИНЦИП — теорема в теории *конформных отображений*, предложенная в 1928 Х. Грётшем [1] и используемая при доказательстве неравенств для длин кривых нек-рых семейств и площади занимаемой ими области; им же в дальнейшем были разработаны многочисленные применения развитого на этой основе *полос метода* в теории однолистных функций, заданных в конечносвязных или в бесконечносвязных областях.

Г. п. состоит в следующем. Пусть в кольце $K(r, R) = \{z : r<|z|<R\}$, $0<r<R<\infty$, имеется конечное число попарно непересекающихся односвязных областей B_k, $k=1, \ldots, n$, с жордановыми границами, содержащими невырождающиеся в точки дуги γ_k и Γ_k соответствующих окружностей $|z|=r$, $|z|=R$ [B_k образуют полосы, соединяющие граничные компоненты кольца $K(r, R)$]. Если B_k отображается на нек-рый прямоугольник $\{w : 0<\mathrm{Re}\, w<a_k,\ 0<\mathrm{Im}\, w<b_k\}$ так, что γ_k и Γ_k переходят в стороны длины a_k, то $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k} \leqslant \frac{2\pi}{\ln R - \ln r}$, и равенство достигается только в том случае, если $B_k = \{z : r<|z|<R,\ \alpha_k<\arg z<\beta_k\}$, α_k, β_k — постоянные, $k=1, \ldots, n$, и объединение $\bigcup_{k=1}^{n} B_k$ покрывает кольцо $K(r, R)$, за исключением принадлежащих ему интервалов лучей $\arg z=\alpha_k$, $\arg z=\beta_k$.

Г. п. и метод полос входят как составные части в *экстремальной метрики метод* и применяются не только в конформных, но и в более общих, напр., *квазиконформных отображениях*.

Лит.: [1] Grötzsch H., «Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-naturwiss. Kl.», 1928, Bd 80, S. 367—76, 497—502; 1929, Bd 81, S. 217—21; 1930, Bd 82, S. 69—80; 1931, Bd 83, S. 185—200; 1932, Bd 84, S. 114—20; [2] Голузин

Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [5] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962.

И. А. Александров.

ГРЁТША ТЕОРЕМЫ — различные результаты о конформных и квазиконформных отображениях Х. Грётша (см. [1]). На основе разработанного им *полос метода*, представляющего первую общую форму метода конформных модулей (см. *Экстремальной метрики метод*), Х. Грётш систематически исследовал и решил большое количество экстремальных задач конформного отображения многосвязных (в том числе бесконечносвязных) областей, включая вопросы существования, единственности и геометрич. свойств экстремальных отображений. Ниже приведены нек-рые из простейших Г. т.

Среди всех однолистных конформных отображений $w=f(z)$ фиксированного кругового кольца $K_R=\{z: R<|z|<1\}$, при к-рых единичная окружность $\Gamma=\{z: |z|=1\}$ переходит в себя, максимум диаметра образа окружности $\Gamma_R=\{z: |z|=R\}$ достигается в том и только в том случае, когда граничной компонентой $f(\Gamma_R)$ служит прямолинейный отрезок с серединой в точке $w=0$. Аналогичный результат установлен для многосвязных областей.

Среди всех однолистных конформных отображений $w=f(z)$ фиксированной многосвязной области $B\ni\infty$ с разложением в бесконечности $f(z)=z+O(1)$ $(z\to\infty)$ и с нормировкой $f(z_0)=0$ в фиксированной точке $z_0\in B$ максимум $|f'(z_0)|$, максимум $|f(z_1)|$ и минимум $|f(z_1)|$ в фиксированной точке $z_1\in B$, $z_1\neq z_0$, достигаются только на отображениях, переводящих каждую граничную компоненту B соответственно в дугу окружности с центром в точке $w=0$; в дугу эллипса с фокусами в точках $w=0$ и $w=w'=f(z_1)$; в дугу гиперболы с фокусами в точках $w=0$ и $w=w''=f(z_1)$. В каждой из указанных задач экстремальное отображение существует и единственно. В том же классе отображений для фиксированного $z_1\in B$ областью значений функционала $\Phi(f)=\ln(f(z_1)/z_1)$ является круг

$$\left\{w: \left|w-\frac{1}{2}(w'+w'')\right|\leqslant\frac{1}{2}|w'-w''|\right\}.$$

Каждая граничная точка этого круга является значением функционала Φ на единственном отображении из рассматриваемого класса, обладающем определенными геометрич. свойствами.

Х. Грётш впервые предложил одну из форм представления *квазиконформных отображений* и перенес на эти отображения многие экстремальные результаты, установленные им ранее для конформных отображений.

Лит.: [1] Grötzsch H., «Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Naturwiss. Kl.», 1929, Bd 81, № 1, S. 38—47; № 4, S. 217—21; 1930, Bd 82, № 1, S. 69—80; 1932, Bd 84, № 4, S. 269—78; [2] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962.

П. М. Тамразов.

ГРИНА ЛИНИИ — ортогональные траектории семейства поверхностей уровня $G_y(x)=r$, $0\leqslant r<+\infty$, где $G_y(x)=G(x, y)$ есть *Грина функция* (задачи Дирихле для уравнения Лапласа) для области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, с фиксированным полюсом $y\in D$. Иными словами, Г. л.— это интегральные кривые поля градиента $\operatorname{grad} G_y(x)$. Имеются также обобщения (см. [2]).

Лит.: [1] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966, гл. 1; [2] Brelot M., Choquet G., «Ann. Inst. Fourier», 1952, t. 3, p. 199—263.

Е. Д. Соломенцев.

ГРИНА ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ на полугруппе — бинарные отношения $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{H}$, заданные следующим образом: $x\mathscr{L}y$ означает, что x и y порождают совпадающие левые *главные идеалы*; $x\mathscr{R}y$ и $x\mathscr{J}y$ имеют аналогичный смысл с заменой «левые» на «правые» и «двусторонние» соответственно; $\mathscr{D}=\mathscr{L}\vee\mathscr{R}$ (объединение в решетке отношений эквива-

лентности); $\mathcal{H}=\mathcal{L}\cap\mathcal{R}$. Отношения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ перестановочны в смысле умножения бинарных отношений, так что $\mathcal{D}$ совпадает с их произведением. Отношение $\mathcal{L}$ является правой конгруэнцией, т. е. стабильно справа: $a\mathcal{L}b$ влечет $ac\mathcal{L}bc$ для любого c; отношение $\mathcal{R}$ есть левая конгруэнция (стабильно слева). $\mathcal{L}$-класс и $\mathcal{R}$-класс пересекаются тогда и только тогда, когда они лежат в одном и том же $\mathcal{D}$-классе. Все $\mathcal{H}$-классы, лежащие в одном $\mathcal{D}$-классе, равномощны. Если $\mathcal{D}$-класс D содержит *регулярный элемент*, то все элементы из D регулярны, причем вместе с любым своим элементом D содержит и все инверсные к нему; такой $\mathcal{D}$-класс наз. регулярным. В регулярном $\mathcal{D}$-классе каждый $\mathcal{L}$-класс и каждый $\mathcal{R}$-класс содержит идемпотент. Если H — произвольный $\mathcal{H}$-класс, то либо H является группой (это имеет место тогда и только тогда, когда H есть максимальная подгруппа данной полугруппы), либо $H\bigcap H^2=\varnothing$. Все групповые $\mathcal{H}$-классы из одного и того же $\mathcal{D}$-класса суть изоморфные группы. В общем случае $\mathcal{D}\neq\mathcal{J}$, но, напр., если нек-рая степень каждого элемента полугруппы S лежит в подгруппе (в частности, если S — *периодическая полугруппа*), то $\mathcal{D}=\mathcal{J}$. Отношение включения главных левых идеалов естественным образом определяет отношение частичного порядка на множестве $\mathcal{L}$-классов; аналогично, для $\mathcal{R}$-классов и $\mathcal{J}$-классов. Рассматриваемые отношения были введены Дж. Грином [1].

Лит.: [1] Green J., «Ann. Math.», 1951, v. 54, p. 163—172; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [3] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., тт. 1 и 2, М., 1972; [4] Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп, пер. с англ., М., 1975; [5] Hofmann K., Mostert P., Elements of compact semigroups, Columbus (Ohio), 1966. *Л. Н. Шеврин.*

ГРИНА ПРОСТРАНСТВО — топологич. пространство X, на к-ром определены гармонич. и супергармонич. функции и существует *Грина функция* (для *Дирихле задачи* в классе гармонич. функций), или, что равносильно, существует отличная от константы положительная супергармонич. функция. Точнее, пусть X является E-пространством, т. е. связным отделимым топологич. пространством, в к-ром: 1) каждая точка $x\in X$ имеет открытую окрестность V_x, гомеоморфную нек-рому открытому множеству V_x' евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (или его компактификации $\overline{\mathbb{R}^n}$ по Александрову; см. *Александрова бикомпактное расширение*); 2) образы всякого непустого пересечения $V_x\bigcap V_y$ двух окрестностей в V_x' и V_y' изометричны, а при $n=2$ конформно эквивалентны. Гармонич. и супергармонич. функции на E-пространстве X определяются локально посредством перехода к образам V_x'. Если, кроме того, на E-пространстве X существует отличная от константы положительная супергармонич. функция, или, что равносильно, положительный потенциал, то X наз. Грина пространством. Напр., евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, его компактификация $\overline{\mathbb{R}^n}$ ($n\geqslant 2$), римановы поверхности являются E-пространствами. При этом $\mathbb{R}^n$ при $n\geqslant 3$ и римановы поверхности гиперболич. типа являются Г. п., а $\mathbb{R}^2$ и римановы поверхности параболич. типа не являются Г. п. Всякая область в Г. п. X снова есть Г. п.

В рамках аксиоматич. теории потенциала (см. *Потенциала теория абстрактная*) в качестве обобщения Г. п. можно рассматривать такие *гармонические пространства* X, на к-рых существует положительный потенциал.

Лит.: [1] Брело М., О топологиях и границах в теории потенциала, пер. с англ., М., 1974; [2] Brelot M., Choquet G., «Ann. Inst. Fourier», 1952, t. 3, p. 199—263. *Е. Д. Соломенцев.*

ГРИНА ФОРМУЛЫ — формулы интегрального исчисления функций многих переменных, связывающие значения n-кратного интеграла по области D n-мерного евклидова пространства E^n и $(n-1)$-кратного интеграла

по кусочно гладкой границе $\partial D = \Gamma$ этой области. Г. ф. получаются интегрированием по частям интегралов от дивергенции векторного поля, непрерывного в $\overline{D} = D + \Gamma$ и непрерывно дифференцируемого в D.

В простейшей Г. ф.

$$\int_\Gamma [P\,dx + Q\,dy] = \int\int_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dx\,dy \qquad (1)$$

криволинейный интеграл по контуру Γ выражается через двойной интеграл по области $D \subset E^2$. При этом область D ориентируется естественным образом, а на границе Γ берется индуцированная ориентация, известная как обход против часовой стрелки. Формула (1) имеет простой гидродинамич. смысл: поток через границу области Γ жидкости, текущей по плоскости со скоростью $v = (Q, -P)$, равен интегралу по области D от интенсивности (дивергенции) $\operatorname{div} v = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ распределенных в D источников и стоков. В этом смысле Г. ф. (1) подобна *Остроградского формуле* (см. также *Стокса формула*).

Формула (1) иногда наз. именами К. Гаусса (C. Gauss) и Б. Римана (B. Riemann). Ни одно из употребляемых названий не является исторически верным: формула (1) встречалась еще в работах по анализу 18 в. — у Л. Эйлера (L. Euler) и др.

Дж. Грину [1] принадлежат следующие Г. ф. *потенциала теории*

$$\int_D \left[v\Delta u + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^i}\right] dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial N}\,ds. \qquad (2)$$

— **подготовительная Г. ф.** и

$$\int_D [u\Delta v - v\Delta u]\,dx = \int_\Gamma \left[u\frac{\partial v}{\partial N} - v\frac{\partial u}{\partial N}\right] ds, \qquad (3)$$

где D — область E^3, $x = (x^1, x^2, x^3)$, $dx = dx^1 dx^2 dx^3$ — элемент объема G, ds — элемент площади Γ, $N = (N_1, N_2, N_3)$ — единичная внешняя (ко)нормаль к Γ,

$$\frac{\partial}{\partial N} = \sum_{i=1}^3 N_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

— оператор дифференцирования в направлении (ко)вектора N, а

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2$$

— оператор Лапласа.

Формулы (2), (3) справедливы и в случае, когда D есть область E^n, $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $dx = dx^1 \ldots dx^n$ — элемент объема D, ds — элемент $(n-1)$-мерного объема Γ, а

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2$$

— оператор Лапласа с n независимыми переменными.

Обобщения Г. ф. (2) и (3) для линейных дифференциальных операторов с частными производными с достаточно гладкими коэффициентами имеют вид:

1) если

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}\left[a^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}\right] + \sum_{i=1}^n b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i} + c(x)\,u,$$

$$L^*v = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}\left[a^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^j}\right] - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}[b^i(x)\,v] + c(x)\,v$$

— (вещественно) сопряженные дифференциальные операторы второго порядка, $a^{ij}=a^{ji}$, то

$$\int_D \left[vLu + \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial v}{\partial x^j} - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + cu \right) v \right] dx = \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial M} ds,$$

$$\int_D [uL^*v - vLu]\, dx = \int_\Gamma \left[u \frac{\partial v}{\partial M} - v \frac{\partial u}{\partial M} - B uv \right] ds,$$

где $N=(N_1, \ldots, N_n)$ — единичный (ко)вектор внешней нормали к Γ,

$$B = \sum_{i=1}^n N_i b^i, \quad \frac{\partial}{\partial M} = \sum_{i,j=1}^n a^{ij} N_j \frac{\partial}{\partial x^i}$$

— оператор дифференцирования по направлению так наз. конормали

$$M = \left(\sum_{j=1}^n a^{1j} \frac{\partial}{\partial x^j}, \ \ldots, \ \sum_{j=1}^n a^{nj} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

оператора L;

2) если

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} + c(x) u,$$

$$L^*v = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} [a^{ij}(x) v] - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} [b^i(x) v] + c(x) v,$$

то

$$\int_D \left[vLu + \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial v}{\partial x^j} - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + cu \right) v \right] = \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial M} ds,$$

$$\int_D [uL^*v - vLu]\, dx = \int_\Gamma \left[u \frac{\partial v}{\partial M} - v \frac{\partial u}{\partial M} - Cuv \right] ds,$$

где M — конормаль оператора L, а

$$C = \sum_{i=1}^n \left[b^i - \sum_{j=1}^n \frac{\partial a^{ij}}{\partial x^j} \right] N_i;$$

3) если

$$Lu = \sum_{p=1}^m \sum_{|\alpha|=p} a^\alpha(x) D_\alpha u + a(x) u,$$

$$L^*v = \sum_{p=1}^m (-1)^p D_\alpha [a^\alpha(x) v] + a(x) v$$

— (вещественно) сопряженные дифференциальные операторы порядка m, $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ — целочисленный мультииндекс длины $|\alpha|=p$, $1 \leqslant \alpha_i \leqslant n$, $D_\alpha = \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_p}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, то

$$\int_D [uL^*v - vLu]\, dx =$$

$$= \sum_{p=1}^m \sum_{|\alpha|=p} \sum_{k=1}^p \int_\Gamma (-1)^k \left[\partial_{\alpha_1} \ldots \partial_{\alpha_{k-1}} (a^\alpha v) \right] \times$$

$$\times N_{\alpha_k} \left[\partial_{\alpha_{k+1}} \ldots \partial_{\alpha_p} u \right] ds. \qquad (4)$$

Здесь граничный интеграл можно записать в виде билинейной суммы

$$\sum_{ij} \int_\Gamma B^{ij} (S_i u) (T_j v)\, ds,$$

где S_i, T_j — нек-рые линейные дифференциальные операторы порядков s_i, t_j, $0 \leqslant s_i + t_j \leqslant m-1$.

Г. ф. играют важную роль в анализе и особенно в теории краевых задач для дифференциальных операторов (обыкновенных и с частными производными) второго и более высоких порядков. Для достаточно гладких в $\overline{D}$ функций $u(x)$, $v(x)$ Г. ф. (2), (4) служат

источником ряда соотношений, полезных для изучения свойств решения краевых задач, выяснения вида краевых задач, получения решения в явном виде и т. п. Напр., для гармонической в D функции $u(x)$ из (2) при $v(x)=1$ следует *Гаусса теорема*:

$$\int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial N}\, ds = 0.$$

Для достаточно гладких в $\overline{D}$ функций $u(x)$, $w(x)$ и функции

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{n-2} \mid x-y \mid^{2-n} + w(x), & \text{если } n \geqslant 3, \\ -\ln \mid x-y \mid + w(x), & \text{если } n = 2, \end{cases}$$

имеющей при $x=y$ такую же особенность, как и фундаментальное решение оператора Лапласа, верны следующие Г. ф.:

$$\int_D \left[u\Delta w + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial v}{\partial x^j} \right] dx = cu(y) + \int_D u \frac{\partial v}{\partial N}\, ds, \quad (5)$$

$$\int_D [u\Delta w - v\Delta u]\, dx = cu(y) + \int_D \left[u \frac{\partial v}{\partial N} - v \frac{\partial u}{\partial N} \right] ds. \quad (6)$$

Здесь число

$$c = \begin{cases} \omega_n, & \text{если } y \in D, \\ \frac{1}{2}\omega_n, & \text{если } y \in \Gamma, \\ 0, & \text{если } y \notin \overline{D}, \end{cases}$$

а $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ есть площадь $(n-1)$-мерной единичной сферы пространства E^n. При этом для $y \in \Gamma$ предполагается, что граница Γ имеет непрерывную касательную плоскость в нек-рой окрестности y.

Формулы (5) и (6) служат основой получения интегральных представлений решений основных краевых задач *потенциала теории* (см. *Гармоническая функция*, *Грина функция*, *Пуассона формула*). Напр., отсюда для гармонической в D функции $u(x)$ получаем ф о р м у л у, или и н т е г р а л Г р и н а

$$u(y) = \frac{1}{c} \int_\Gamma \left[v(x) \frac{\partial u}{\partial N} - u(x) \frac{\partial v}{\partial N} \right] ds, \quad (7)$$

играющую важную роль в теории *гармонических функций*.

Формулы, подобные формулам (5), (6), дающие интегральные представления решения задачи Коши или смешанной задачи, имеют место и для нормально гиперболич. оператора второго порядка. См. *Кирхгофа формула*, *Римана метод*, *Римана функция*.

О Г. ф. в теории краевых задач см. также [4]–[9].

Лит.: [1] G r e e n G., An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism, Nottingham, [1828]; [2] М а к с в е л л Д., Избранные сочинения по теории электромагнитного поля, пер. с англ., М., 1954; [3] С м и р н о в В. И., Курс высшей математики, т. 2, 20 изд., М., 1966; [4] К у р а н т Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] В л а д и м и р о в В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [6] С о б о л е в С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; [7] М и р а н д а К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [8] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д ж. Т., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 2, М., 1966; [9] Л и о н с Ж.-Л., М а д ж е н е с Э., Неоднородные граничные задачи и их приложения, пер. с франц., М., 1971.

А. К. Гущин, Л. П. Купцов.

ГРИНА ФУНКЦИЯ — функция, связанная с интегральным представлением решений краевых задач для дифференциальных уравнений.

Г. ф. краевой задачи для линейного дифференциального уравнения – фундаментальное решение уравнения, удовлетворяющее однородным краевым условиям. Г. ф. является ядром интегрального оператора, обратного к дифференциальному оператору, порожденному данным дифференциальным уравнением и однородными краевыми условиями. Г. ф. позволяет найти решения неоднородного уравнения, удовлетворяющие однородным краевым условиям. Нахождение Г. ф. сводит исследование свойств дифференциального

оператора к изучению аналогичных свойств соответствующего интегрального оператора.

Функция Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть L — дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным полиномом

$$l[y]=\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\frac{d^k y}{dx^k}, \quad a<x<b,$$

и краевыми условиями $U_j[y]=0$, $j=1, 2, \ldots, n$, где

$$U_j[y]=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{jk}y^{(k)}(a)+\beta_{jk}y^{(k)}(b).$$

Г. ф. оператора L наз. функция $G(x, \xi)$, удовлетворяющая условиям:

1) $G(x, \xi)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x до $(n-2)$-го порядка включительно для всех значений x и ξ из сегмента $[a, b]$;

2) при любом фиксированном ξ из интервала (a, b) функция $G(x, \xi)$ имеет равномерно непрерывные производные n-го порядка по x в каждом из полусегментов $[a, \xi)$ и $(\xi, b]$, причем производная $(n-1)$-го порядка при $x=\xi$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi+0, \xi)-\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi-0, \xi)=\frac{1}{p_n(\xi)};$$

3) в каждом из полусегментов $[a, \xi)$ и $(\xi, b]$ функция $G(x, \xi)$, рассматриваемая как функция от x, удовлетворяет уравнению $l_x[G]=0$ и краевым условиям $U_{jx}[G]=0$, $j=1, 2, \ldots, n$.

Если краевая задача $Ly=0$ имеет лишь тривиальные решения, то оператор L имеет и притом только одну Г. ф. (см. [1]). При этом для любой функции $f(x)$, непрерывной на сегменте $[a, b]$, существует решение краевой задачи $Ly=f$, и это решение задается формулой

$$y(x)=\int_a^b G(x, \xi)f(\xi)\,d\xi.$$

Если оператор L имеет Г. ф. $G(x, \xi)$, то сопряженный оператор L^* также имеет Г. ф., к-рая равна $\overline{G(\xi, x)}$. Если, в частности, оператор L самосопряженный ($L=L^*$), то $G(x, \xi)=\overline{G(\xi, x)}$, то есть Г. ф. в этом случае является эрмитовым ядром. Напр., Г. ф. самосопряженного оператора L 2-го порядка, порожденного дифференциальной операцией с действительными коэффициентами

$$l[y]=\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y, \quad a<x<b,$$

и краевыми условиями $y(a)=0$, $y(b)=0$, имеет вид:

$$G(x, \xi)=\begin{cases} Cy_1(x)y_2(\xi), & \text{если } x\leqslant\xi,\\ Cy_1(\xi)y_2(x), & \text{если } x>\xi.\end{cases}$$

Здесь $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — произвольные решения уравнения $l[y]=0$, удовлетворяющие соответственно условиям $y_1(a)=0$, $y_2(b)=0$; $C=[p(\xi)W(\xi)]^{-1}$, где W — определитель Вронского (*вронскиан*) решений y_1 и y_2, причем можно показать, что C не зависит от ξ.

Если оператор L имеет Г. ф., то краевая задача на собственные значения $Ly=\lambda y$ эквивалентна интегральному уравнению $y(x)=\lambda\int_a^b G(x, \xi)y(\xi)\,d\xi$, к которому применима теория Фредгольма. Поэтому краевая задача $Ly=\lambda y$ может иметь не более счетного числа собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, у которых отсутствуют конечные предельные точки. Сопряженная задача имеет комплексно сопряженные собственные значения той же кратности. Для каждого λ, не являющегося собственным значением оператора L, можно построить Г. ф. $G(x, \xi, \lambda)$ оператора $L-\lambda I$, где I — тождественный оператор. Функция $G_1(x, \xi, \lambda)$ является мероморфной функцией параметра λ; ее полюсами могут быть лишь собственные значения оператора L. Если крат-

ность собственного значения λ_0 равна единице, то

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{u_0(x)\overline{v_0(\xi)}}{\lambda - \lambda_0} + G_1(x, \xi, \lambda),$$

где $G(x, \xi, \lambda)$ регулярна в окрестности точки λ_0, а $u_0(x)$ и $v_0(x)$ — собственные функции операторов L и L^*, отвечающие собственным значениям λ_0 и $\overline{\lambda_0}$ и нормированные так, что

$$\int_a^b u_0(x)\,\overline{v_0(x)}\,dx = 1.$$

Если $G(x, \xi, \lambda)$ имеет бесконечно много полюсов и при том только 1-го порядка, то существует полная биортогональная система

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots;\ v_1(x),\ v_2(x), \ldots$$

собственных функций операторов L и L^*. Если занумеровать собственные значения в порядке возрастания их абсолютных величин, то интеграл

$$I_R(x, f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=R} d\lambda \int_a^b G(x, \xi, \lambda)\, f(\xi)\, d\xi$$

равен частичной сумме

$$S_k(x, f) = \sum_{|\lambda_n|<R} u_n(x) \int_a^b f(\xi)\,\overline{v_n(\xi)}\,d\xi$$

разложения функции f по собственным функциям оператора L. Положительное число R выбирается так, чтобы на окружности $|\lambda| = R$ функция $G(x, \xi, \lambda)$ была регулярной по λ. Для регулярной краевой задачи и для любой кусочно гладкой функции $f(x)$ в интервале $a<x<b$ выполняется равенство

$$\lim_{R\to\infty} I_R(x, f) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

т. е. имеет место разложимость в сходящийся ряд (см. [1]).

Если Г. ф. $G(x, \xi, \lambda)$ оператора $L - \lambda I$ имеет кратные полюсы, то ее главная часть выражается через канонич. системы собственных и присоединенных функций операторов L и L^* (см. [2]).

Выше рассматривался случай, когда краевая задача $Ly = 0$ не имела нетривиальных решений. Если же эта краевая задача имеет нетривиальные решения, то вводят так наз. о б о б щ е н н у ю Г р и н а ф у н к ц и ю. Пусть, напр., имеется ровно m линейно независимых решений задачи $Ly = 0$. Тогда существует обобщенная Г. ф. $\tilde{G}(x, \xi)$, к-рая обладает свойствами 1) и 2) обычной Г. ф., при $a<\xi<b$ удовлетворяет как функция x краевым условиям и, кроме того, является решением уравнения

$$l_x[y] = -\sum_{k=1}^m \varphi_k(x)\,\overline{v_k(\xi)};$$

здесь $\{v_k(x)\}_{k=1}^m$ — система линейно независимых решений сопряженной задачи $L^*y = 0$, а $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^m$ — произвольная биортогональная ей система непрерывных функций. Тогда

$$y(x) = \int_a^b \tilde{G}(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

есть решение краевой задачи $Ly = f$, если функция $f(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию разрешимости, т. е. ортогональна всем $v_k(x)$.

Если $\tilde{G}_0(x, \xi)$ — одна из обобщенных Г. ф. оператора L, то любая другая обобщенная Г. ф. может быть представлена в виде

$$\tilde{G}(x, \xi) = \tilde{G}_0(x, \xi) + \sum_{k=1}^m u_k(x)\,\psi_k(\xi),$$

где $\{u_k(x)\}$ — полная система линейно независимых решений задачи $Ly = 0$, а $\psi_k(\xi)$ — произвольные непрерывные функции (см. [3]).

Функция Грина для дифференциальных уравнений с частными производными. 1) Эллиптические уравнения. Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор порядка m, порожденный дифференциальным полиномом

$$a(x, D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

в ограниченной области $\Omega\subset R^N$ и однородными краевыми условиями $B_j u=0$, где B_j — граничные операторы с коэффициентами, определенными на границе $\partial\Omega$ области Ω, к-рая предполагается достаточно гладкой. Функция $G(x, y)$ наз. Г. ф. оператора A, если при любом $y\in\Omega$ она удовлетворяет однородным краевым условиям $B_{jx}G(x, y)=0$ и, рассматриваемая как обобщенная функция, удовлетворяет уравнению

$$a(x, D)G(x, y)=\delta(x-y).$$

В случае операторов с гладкими коэффициентами и нормальных граничных условий, обеспечивающих единственность решения однородной краевой задачи, Г. ф. существует и решение краевой задачи $Au=f$ представляется в виде (см. [4])

$$u(x)=\int_\Omega G(x, y) f(y)\, dy.$$

В этом случае для Г. ф. справедливы равномерные при $x\in\overline{\Omega}$, $y\in\overline{\Omega}$ оценки

$$|G(x, y)|\leqslant C|x-y|^{m-n}, \text{ если } m<n,$$
$$|G(x, y)|\leqslant C+C|\ln|x-y||, \text{ если } m=n,$$

и Г. ф. равномерно ограничена, если $m>n$.

Краевая задача на собственные значения $Au=\lambda u$ эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x)=\lambda\int_\Omega G(x, y) u(y)\, dy,$$

для к-рого применима теория Фредгольма (см. [5]). При этом Г. ф. сопряженной краевой задачи равна $\overline{G(y, x)}$. Отсюда, в частности, следует, что может существовать не более чем счетное число собственных значений и что они не имеют конечных предельных точек, а сопряженная краевая задача имеет комплексно сопряженные собственные значения той же кратности.

Для уравнений 2-го порядка Г. ф. изучена полнее, поскольку явно выписывается вид особенности фундаментального решения. Так, для оператора Лапласа Г. ф. имеет вид

$$G(x, y)=-\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)}|x-y|^{2-n}+\gamma(x, y), \text{ при } n>2,$$

$$G(x, y)=+\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|+\gamma(x, y), \quad \text{при} \quad n=2,$$

где $\gamma(x, y)$ — гармоническая в области Ω функция, выбранная таким образом, чтобы Г. ф. удовлетворяла краевому условию.

Г. ф. $G(x, y)$ первой краевой задачи для эллиптич. оператора 2-го порядка $a(x, D)$ с гладкими коэффициентами в области Ω с границей $\partial\Omega$ типа Ляпунова позволяет выразить решение задачи

$$a(x, D)u(x)=f(x) \quad \text{при} \quad x\in\Omega, \quad u\Big|_{\partial\Omega}=\varphi,$$

в виде

$$u(x)=\int_\Omega G(x, y) f(y)\, dy+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\nu_y}G(x, y)\varphi(y)\, d\sigma_y,$$

где $\frac{\partial}{\partial\nu_y}$ — производная по внешней конормали для оператора $a(x, D)$.

В случае, если однородная краевая задача $Au=0$ имеет нетривиальные решения, то, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, вводится обоб-

щенная Г. ф. Так, напр., в случае второй краевой задачи для оператора Лапласа существует обобщенная Г. ф., наз. *Неймана функцией* (см. [3]).

2) Параболические уравнения. Пусть P — параболический дифференциальный оператор порядка m, порожденный дифференциальным полиномом

$$p\left(x,\ t,\ D_x,\ \frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}-\sum\nolimits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,\ t)\,D_x^\alpha,$$

$$x\in\Omega,\quad t>0,$$

и однородными начальным и краевыми условиями

$$u(x,\ 0)=0,\qquad B_j u(x,\ t)=0,$$

где B_j — граничные операторы с коэффициентами, определенными при $x\in\partial\Omega$ и $t\geqslant 0$. Г. ф. оператора P наз. функция $G(x,\ t,\ y,\ \tau)$, к-рая для любых $t>\tau\geqslant 0$ и $y\in\Omega$ удовлетворяет по x однородным краевым условиям, является при $(x,\ t)\neq(y,\ \tau)$ решением уравнения

$$p\left(x,\ t,\ D_x,\ \frac{\partial}{\partial t}\right)G(x,\ t,\ y,\ \tau)=0$$

и для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t\to\tau+0}\int_\Omega G(x,\ t,\ y,\ \tau)\,\varphi(y)\,dy=\varphi(x).$$

В случае операторов с гладкими коэффициентами и нормальных граничных условий, обеспечивающих единственность решения задачи $pu=0$, Г. ф. существует, и решение уравнения

$$p\left(x,\ t,\ D_x,\ \frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,\ t)=f(x,\ t),$$

удовлетворяющее однородным краевым условиям и начальному условию $u(x,\ 0)=\varphi(x)$, имеет вид

$$u(x,\ t)=\int_0^t d\tau\int_\Omega G(x,\ t,\ y,\ \tau)\,f(y,\ \tau)\,dy+$$
$$+\int_\Omega G(x,\ t,\ y,\ 0)\,\varphi(y)\,dy.$$

При изучении эллиптич. или параболич. систем вместо Г. ф. вводится понятие матрицы Грина, к-рая позволяет выразить решения однородных краевых задач для указанных систем в виде интегралов от произведений матрицы Грина на векторы правых частей и начальных условий (см. [7]).

Г. ф. наз. по имени Дж. Грина (G. Green), впервые рассмотревшего один ее частный случай в своем исследовании по теории потенциала (1828).

Лит.: [1] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [2] Келдыш М. В., «Докл. АН СССР», 1951, т. 77, № 1, с. 11—14; [3] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; [4] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [5] Gårding L., «Math. scand.», 1953, v. 1, № 1, S. 55—72; [6] Фридман А., Уравнения с частными производными, параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [7] Эйдельман С. Д., Параболические системы, М., 1964. *Ш. А. Алимов, В. А. Ильин.*

Функция Грина в теории функций. В теории функций комплексного переменного под (действительной) Г. ф. понимается Г. ф. первой краевой задачи для оператора Лапласа, т. е. функция вида

$$G(z,\ z_0)=\ln\frac{1}{|z-z_0|}+\gamma(z,\ z_0),\quad z,\in\Omega,\qquad(1)$$

где $z=x+iy$ — комплексное переменное, $z_0=x_0+iy_0$ — полюс Г. ф., $z_0\in\Omega$, $\gamma(z,\ z_0)$ — гармонич. функция z, принимающая на границе области $\partial\Omega$ значения $-\ln(1/|z-z_0|)$. Пусть область Ω односвязная и $w=f(z,\ z_0)$ — аналитич. функция, реализующая конформное отображение области Ω на единичный круг в плоскости w так, что точка z_0 переходит в центр круга, $f(z_0,z_0)=0$, $f'(z_0,\ z_0)>0$.

Тогда

$$G(z,\ z_0)=\ln\frac{1}{|f(z,\ z_0)|}. \qquad (2)$$

Если $H(z,\ z_0)$ — сопряженная гармоническая для $G(z,\ z_0)$ функция, $H(z_0,z_0)=0$, то аналитич. функция $F(z,\ z_0)=G(z,\ z_0)+iH(z,\ z_0)$ наз. комплексной функцией Грина области Ω с полюсом z_0. Обращение формулы (2) дает

$$f(z,\ z_0)=e^{-F(z,\ z_0)}. \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) показывают, что задачи построения конформного отображения области Ω на круг и отыскания Г. ф. эквивалентны. Г. ф. $G(z,\ z_0)$, $F(z,\ z_0)$ инвариантны относительно конформных отображений, что облегчает иногда их отыскание (см. *Отображений метод*).

В теории римановых поверхностей Г. ф. удобнее определить при помощи минимального свойства, справедливого для функции (1): среди всех положительных гармонических при $z\neq z_0$ функций $U(z,\ z_0)$ на римановой поверхности Ω, имеющих в окрестности точки z_0 вид

$$U(z,\ z_0)=\ln\frac{1}{|z-z_0|}+\gamma(z,\ z_0), \qquad (4)$$

где $\gamma(z,\ z_0)$ — регулярная на всей поверхности Ω гармонич. функция, Г. ф. $G(z,\ z_0)$, если она существует, является наименьшей, т. е. $G(z,\ z_0)\leqslant U(z,\ z_0)$. При этом существование Г. ф. характерно для римановых поверхностей гиперболич. типа. Так определенная Г. ф. на (идеальной) границе римановой поверхности, вообще говоря, уже не везде обращается в нуль. Аналогично обстоит дело и в *потенциала теории* (см. также *Потенциала теория абстрактная*). Для произвольного открытого множества Ω, напр. в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, Г. ф. $G(x,\ x_0)$ также можно определить при помощи указанного минимального свойства, причем при $n\geqslant 3$ в (4) вместо $\ln\frac{1}{|x-x_0|}$ следует писать $|x-x_0|^{2-n}$. Вообще говоря, при приближении к границе $\partial\Omega$ такая Г. ф. не обязательно стремится к нулю. Для римановых поверхностей параболич. типа и для нек-рых областей в $\mathbb{R}^2$ (напр., для $\Omega=\mathbb{R}^2$) Г. ф. не существует.

Лит.: [1] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 2, М., 1962; [2] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955; [3] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

Грина функция в статистической механике — упорядоченная по времени линейная комбинация *корреляционных функций*, удобная промежуточная величина при расчетах физич. характеристик систем большого числа взаимодействующих частиц.

1) Г. ф. в квантовой статистической механике. Наиболее часто применяются двувременные коммутаторные температурные Г. ф.: запаздывающие (ret, +), опережающие (adv, −) и причинные (c), определяемые соотношениями:

$$G_{AB}^{(\mathrm{ret})}(t-t')=\ll A(t)\mid B(t')\gg^{(\mathrm{ret})}=$$
$$=\theta(t-t')\langle[A(t),\ B(t')]_\eta\rangle,$$

$$G_{AB}^{(\mathrm{adv})}(t-t')=\ll A(t)\mid B(t')\gg^{(\mathrm{adv})}=$$
$$=-\theta(t'-t)\langle[A(t),\ B(t')]_\eta\rangle,$$

$$G_{AB}^{(\mathrm{c})}(t-t')=\ll A(t)\mid B(t')\gg^{(\mathrm{c})}=\langle T_\eta A(t)\,B(t')\rangle,$$

где

$$[A(t),\ B(t')]_\eta=A(t)\,B(t')-\eta B(t')\,A(t),$$

$$T_\eta A(t)B(t')=\theta(t-t')A(t)\,B(t')+\eta\theta(t'-t)B(t')A(t),$$

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases},\qquad \eta=\pm 1.$$

Здесь $A(t)$ и $B(t')$ — зависящие от времени динамич. величины (операторы в пространстве состояний системы в *Гейзенберга представлении*), через $\langle\cdots\rangle$ обозначено среднее по *Гиббса статистическому ансамблю*; значение $\eta=\pm 1$ выбирается из соображений удобства. Эффективность применения Г. ф. в значительной степени обусловлена использованием спектральных представлений для их фурье-образов $G^{(n)}_{AB}(E)$, $n=$ret, adv, с. Так, напр., в случае ненулевой температуры для запаздывающих и опережающих Г. ф. справедливо представление:

$$G^{(n)}_{AB}(E)=\ll A\mid B\gg^{(n)}_{E}=$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(e^{\omega/\theta}-\eta\right)J_{AB}(\omega)}{E-\omega+i\varepsilon\alpha_n}\,d\omega,$$

$$\varepsilon\longrightarrow+0,\quad \alpha_n=\begin{cases}1, & n=\text{ret},\\ -1, & n=\text{adv}.\end{cases}$$

Здесь $J_{AB}(\omega)$ — спектральная плотность; $\theta=kT$, где T — абсолютная температура, $T\neq 0$, k — постоянная Больцмана; использована система единиц, в которой $\hbar=h/2\pi=1$, где h — постоянная Планка. Справедлива, в частности, формула:

$$G^{(\text{ret})}_{AB}(\omega)-G^{(\text{adv})}_{AB}(\omega)=\left(e^{\omega/\theta}-1\right)J_{AB}(\omega),$$

позволяющая вычислять спектральную плотность (а следовательно, и ряд физич. характеристик системы) через Г. ф. Аналогичные спектральные формулы существуют и для нуля температуры. Особенности (полюса на комплексной плоскости) фурье-образа Г. ф. характеризуют спектр и затухание элементарных возбуждений в системе. Основные источники вычисления Г. ф.: а) приближенное решение бесконечной цепочки зацепляющихся уравнений, к-рая выводится непосредственно из определения Г. ф. путем «расцепления» ее, исходя из тех или иных физич. соображений; б) суммирование «основных» с физич. точки зрения членов рядов теории возмущений (суммирование диаграмм); этот способ применяется в основном при вычислении причинных Г. ф. и имеет много общего с методикой расчета Г. ф. в квантовой теории поля.

2) Г. ф. в классической статистической механике. Вводятся опережающие (ret) и запаздывающие (adv) двувременные Г. ф. путем замены в соответствующих формулах для квантового случая (при $\eta=+1$) операторов $A(t)$ и $B(t')$ на функции динамич. состояния изучаемой классич. системы и коммутатора $A(t)B(t')-B(t')A(t)$ (квантовые скобки Пуассона) — на классические (обычные) скобки Пуассона; соответственно под $\langle\cdots\rangle$ понимается усреднение по классическому ансамблю Гиббса. Введение причинной Г. ф. здесь теряет смысл из-за коммутативности произведения динамич. величин. Аналогично квантовому случаю, существуют и могут быть эффективно использованы спектральные представления для фурье-образа Г. ф. Основным источником для вычисления классич. Г. ф. служат системы уравнений, получающиеся варьированием по бесконечно малому изменению гамильтониана той или иной системы уравнений для корреляционных функций: *Боголюбова цепочки уравнений*, системы уравнений гидродинамики и т. д.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Тябликов С. В., «Докл. АН СССР», 1959, т. 126, с. 53; [2] Зубарев Д. Н., «Успехи физ. наук», 1960, т. 71, с. 71; [3] Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И., «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1962, т. 43, в. 8, с. 677; [4] их же, Некоторые вопросы статистической механики, М., 1975; [5] Статистическая физика и квантовая теория поля, М., 1973.

В. Н. Плечко.

ГРОНУОЛЛА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования числовых и функциональных рядов, определяется заданием двух функций $f(w)$ и $g(w)$, удовлетворяющих определенным условиям. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$

суммируется методом Гронуолла (f, g) к сумме s, если

$$\lim_{n\to\infty} U_n = s,$$

где U_n, $n=0, 1, 2, \ldots$ определяются из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \frac{1}{g(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n w^n,$$

$$z = f(w),\ g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n.$$

Метод был введен Т. Гронуоллом [1] как обобщение *Валле Пуссена метода суммирования*, в к-рый он обращается при

$$z = f(w) = \frac{1-\sqrt{1-w}}{1+\sqrt{1+w}},\quad w = \frac{4z}{(1+z)^2},\quad g(w) = \frac{1}{\sqrt{1-w}}.$$

При

$$f(w) = w,\quad g(w) = (1-w)^{-k-1}.$$

Г. м. с. обращается в *Чезаро метод суммирования*.

Лит.: [1] Cronwall T. H., «Ann. Math.», 1932, v. 33, № 1, p. 101—17.

И. И. Волков.

ГРОТЕНДИКА ГРУППА аддитивной категории — абелева группа, сопоставляемая аддитивной категории универсальным аддитивным отображением. Точнее, пусть C — малая аддитивная категория и G — абелева группа. Отображение $\varphi : C \to G$ наз. аддитивным, если для любой точной последовательности $0 \to L \to M \to N \to 0$ объектов из C выполняется $\varphi(L)+\varphi(N)=\varphi(M)$. Существует группа $K(C)$, наз. Г. г., и такое аддитивное отображение $k : C \to K(C)$, наз. универсальным отображением, что для любого аддитивного отображения $\varphi : C \to G$ существует единственный гомоморфизм $\chi : K(C) \to G$, удовлетворяющий условию $\varphi = \chi \cdot k$.

Впервые эта конструкция была рассмотрена А. Гротендиком (A. Grothendieck) для категорий когерентных и локально свободных пучков на схемах при доказательстве теоремы Римана — Роха. См. *К-функтор* в алгебраич. геометрии. Группа $K(C)$ определена однозначно с точностью до изоморфизма и может быть задана образующими — каждому объекту $L \in C$ соответствует образующая $[L]$ — и соотношениями $[M]-[L]-[N]=0$ для всякой точной последовательности

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Частным случаем этого понятия является Г. г. коммутативного моноида M (который можно рассматривать как категорию). Тогда универсальное отображение k является гомоморфизмом M в группу $K(M)$, а если в M выполняется закон сокращения, то k — инъективный гомоморфизм.

Если X — топологич. пространство, то Г. г. аддитивной категории векторных расслоений над X является инвариантом пространства, изучаемым в *К-теории*. Если C — категория невырожденных симметрических билинейных форм на векторных пространствах над полем k, то $K(C)$ есть группа Витта — Гротендика над k (см. *Витта кольцо*).

Лит.: [1] Swan R., «Topology», 1963, v. 2, p. 85—110; [2] Борель А., Серр Ж.-П., «Математика», 1961, т. 5, № 5, с. 17—54; [3] Атья М., Лекции по К-теории, пер. с англ., М., 1967; [4] Bass H., Topics to algebraic K-theory, Bombay, 1966; [5] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

В. И. Данилов.

ГРОТЕНДИКА КАТЕГОРИЯ — *абелева категория*, обладающая семейством образующих и удовлетворяющая аксиоме: в категории $\mathfrak{A}$ существуют копроизведения (суммы) любых семейств объектов и для каждого направленного по возрастанию семейства подобъектов $(U_i, \mu_i]$, $i \in I$, и произвольного объекта A и каждого подобъекта (V, σ) выполнено равенство

$$(\bigcup_{i\in I} (U_i, \mu_i]) \cap (V, \sigma] = \bigcup_{i\in I} (U_i \mu_i] \cap (V, \sigma]).$$

Категория левых (правых) Λ-модулей над произвольным ассоциативным кольцом Λ с единицей и категории пучков Λ-модулей над произвольным топологич. пространством есть Г. к. Полная подкатегория $\mathfrak{S}$ категории ${}_{\Lambda}\mathfrak{M}$ левых Λ-модулей наз. подкатегорией локализации, если она замкнута относительно копределов и если в точной последовательности

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0,$$

объект A принадлежит $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда и A' и A'' принадлежат $\mathfrak{S}$. Каждая подкатегория локализации позволяет построить факторкатегорию ${}_{\Lambda}\mathfrak{M}/\mathfrak{S}$. Абелева категория тогда и только тогда является Г. к., когда она эквивалентна нек-рой факторкатегории вида ${}_{\Lambda}\mathfrak{M}/\mathfrak{S}$.

В Г. к. каждый объект обладает инъективной оболочкой, поэтому Г. к. хорошо приспособлены для гомологич. приложений.

Лит.: [1] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [2] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [3] Popescu N., Gabriel P., «C. r. Acad. sci.», 1964, t. 258, № 17, p. 4188—90. *М. Ш. Цаленко.*

ГРОТЕНДИКА ТОПОЛОГИЯ — см. *Топологизированная категория.*

ГРОТЕНДИКА ФУНКТОР— функтор вложения (см. *Вложение категорий*) из категории C в категорию $\hat{C}$ контравариантных функторов, определенных на C и принимающих значения в категории множеств (Ens). Пусть X — объект U-категории C (где U — фиксированное универсальное множество); сопоставление $Y \to \mathrm{Hom}_C(Y, X)$ определяет контравариантный функтор $h_X : C \to (\mathrm{Ens})$ в категорию множеств. Для любого объекта F категории $\hat{C}$ контравариантных функторов из C в категорию (Ens) имеет место естественная биекция $F(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(h_X, F)$. При этом

$$\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(h_X, h_Y) \simeq \mathrm{Hom}_C(X, Y)$$

(лемма Ионеда). Поэтому сопоставление $X \to h_X$ определяет полное изоморфное вложение $h : C \to \hat{C}$, к-рое и наз. Г. ф. С помощью Г. ф. можно вводить алгебраич. структуры на объектах категории (см. *Групповой объект* категории, *Групповая схема*).

Лит.: [1] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [2] Grothendieck A., Seminaire Bourbaki. 1959/1960, № 195.

И. В. Долгачев.

ГРУБАЯ СИСТЕМА, структурно устойчивая (динамическая) система,— гладкая *динамическая система*, обладающая свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любом ее возмущении, отстоящем от нее в C^1-метрике не более чем на δ, существует *гомеоморфизм* фазового пространства, к-рый сдвигает точки не более чем на ε и переводит траектории невозмущенной системы в траектории возмущенной. Формально определение предполагает заданной нек-рую риманову метрику на фазовом многообразии. Фактически о Г. с. обычно говорят либо когда фазовое многообразие замкнуто, либо когда траектории входят в нек-рую компактную область G с гладкой границей, не касаясь последней, причем возмущение и гомеоморфизм рассматривают только на G. Ввиду компактности выбор метрики не играет роли.

Таким образом, при малом (в смысле C^1) возмущении Г. с. получается система, эквивалентная исходной по всем своим топологич. свойствам (однако приведенное определение содержит еще дополнительное требование, чтобы эта эквивалентность осуществлялась посредством гомеоморфизма, близкого к тождественному). Иногда термины «грубость» и «(структурная) устойчивость» употребляют в более широком смысле, напр. имея в виду

только сохранение при малых возмущениях того или иного свойства системы (в этом случае лучше говорить о грубости данного свойства). См. также *Локальная грубость*.

Г. с. были введены А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным [1]. При малой размерности фазового многообразия (единица для дискретного времени и единица или два для непрерывного) Г. с. допускают простую характеристику в терминах качественных свойств поведения траекторий (это — так наз. *Морса — Смейла системы*) и образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех динамич. систем, снабженном C^1-топологией (см. [1], [2]; таким образом, системы с более сложным и более чувствительным к малым возмущениям поведением траекторий можно в этом случае рассматривать как исключительные). В бо́льших размерностях ни один из этих фактов не имеет места, как установил С. Смейл (S. Smale, [3]). Он высказал гипотезу, что, несмотря на все эти усложнения, можно и в общем случае сформулировать необходимые и достаточные условия грубости в терминах качественной картины поведения траекторий, а именно: 1) неблуждающие точки должны образовывать *гиперболическое множество* Ω, в к-ром всюду плотны периодич. траектории (так наз. аксиома А Смейла); 2) устойчивое и неустойчивое многообразия любых двух траекторий из Ω должны пересекаться трансверсально (строгое условие трансверсальности). Достаточность этих условий доказана почти в полной общности, необходимость пока что (70-е гг. 20 в.) удается доказать лишь при нек-ром видоизменении определения грубости (см., напр., [4] или [5]).

Лит.: [1] Андронов А. А., Понтрягин Л. С., «Докл. АН СССР», 1937, т. 14, № 5, с. 247—50; [2] Peixoto M. M., «Topology», 1962, v. 1, № 2, p. 101—20; 1963, v. 2, № 2, p. 179—80; [3] Смейл С., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, № 1, с. 113—85; [4] Кушниренко А. Г., Каток А. Б., Алексеев В. М., Гладкие динамические системы, «Девятая летняя матем. школа. Ин-т матем. АН УССР», К., 1972, с. 50—341; [5] Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику, пер. с англ., М., 1975. *Д. В. Аносов.*

ГРУДЫ И ПОЛУГРУДЫ — алгебры с одной тернарной операцией, удовлетворяющей нек-рым тождествам. Груды (г.) определяются тождествами:

$$[[x_1x_2x_3]x_4x_5]=[x_1x_2[x_3x_4x_5]],$$
$$[x_1x_1x_2]=x_2,\quad [x_1x_2x_2]=x_1,$$

а полугруды (п.) — тождествами:

$$[[x_1x_2x_3]x_4x_5]=[x_1[x_4x_3x_2]x_5]=[x_1x_2[x_3x_4x_5]].$$

Всякая груда является полугрудой.

Если в множестве $\Phi(A, B)$ всех взаимно однозначных отображений множества A на множество B определить тернарную операцию, ставя в соответствие упорядоченной тройке отображений φ_1, φ_2, φ_3 отображение, являющееся суперпозицией φ_1, φ_2^{-1}, φ_3, то $\Phi(A, B)$ становится г. Любая г. изоморфна нек-рой г. взаимно однозначных отображений. Если в произвольной группе G ввести тернарную операцию, полагая $[g_1g_2g_3]=g_1g_2^{-1}g_3$, то также получится г. (груда, ассоциированная с данной группой). Понятие г. было введено при рассмотрении вышеуказанной тернарной операции в абелевой группе (см. [1]). Г. изучались и с абстрактной точки зрения (см. [2], [3]). В частности, Р. Бэр доказал [2], что если в г. S фиксировать произвольный элемент s_0, то операции, определяемые равенствами $s_1s_2=[s_1s_0s_2]$, $s^{-1}=[s_0ss_0]$, задают на S структуру группы, в к-рой s_0 является единицей; при этом г., ассоциированная с этой группой, совпадает с исходной г., а группы, получаемые из данной г. фиксированием различных ее элементов, изоморфны. Другими словами, многообразие всех г. эквивалентно многообразию всех групп.

Совокупность $\mathfrak{P}(A, B)$ всех *бинарных отношений* между элементами множеств A и B является п. относитель-

но тройного умножения: $[\rho_1\rho_2\rho_3]=\rho_1\rho_2^{-1}\rho_3$. Множество всех обратимых частичных отображений A в B также замкнуто относительно тройного умножения и является обобщенной грудой (см. [4]), то есть п. с тождествами:

$$[x_1x_1[x_2x_2x_3]]=[x_2x_2[x_1x_1x_3]],$$
$$[[x_1x_2x_2]x_3x_3]=[[x_1x_3x_3]x_2x_2].$$

Обобщенные г. находят приложение в основаниях дифференциальной геометрии при рассмотрении координатных атласов (см. [5]).

П. тесно связаны с полугруппами с инволюцией. Если на полугруппе S задана инволюция θ, являющаяся антиавтоморфизмом, то тернарная операция $[s_1s_2s_3]=s_1\theta(s_2)s_3$ превращает S в п. Всякая п. изоморфна подполугруде нек-рой полугруппы с инволюцией (см. [4]).

Лит.: [1] Prüfer H., «Math. Z.», 1924, Bd 20, S. 165—87; [2] Baer R., «J. reine und angew. Math.», 1929, Bd 160, S. 199—207; [3] Certaine J., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 49, p. 869—77; [4] Вагнер В. В., «Матем. сб.», 1953, т. 32, № 3, с. 545—632; [5] его же, Основания дифференциальной геометрии и современная алгебра, в кн.: Тр. 4 Всесоюзного матем. съезда, т. 1, Л., 1963, с. 17—29; [6] Глускин Л. М., в сб.: Теория полугрупп и ее приложения, т. 1, Саратов, 1965, с. 179—97, 198—228.

В. Н. Салий.

ГРУПП КАТЕГОРИЯ — категория Gr, объектами к-рой являются всевозможные группы, а морфизмами — все гомоморфизмы групп. Иногда предполагают,что все рассматриваемые группы принадлежат фиксированному *универсальному множеству*. Г. к. является локально малой биполной категорией с нулевыми морфизмами. Она обладает единственной структурой *бикатегории*, в к-рой допустимыми эпиморфизмами являются *нормальные эпиморфизмы* и допустимыми мономорфизмами — все *мономорфизмы*. Причем нормальные эпиморфизмы — это в точности сюръективные гомоморфизмы, а мономорфизмы — в точности инъективные гомоморфизмы. *Проективными объектами* Г. к. являются свободные группы и только они, *инъективными объектами* — только единичные группы, к-рые будут одновременно и *нулевыми объектами*. Аксиоматич. описание Г. к. дано П. Леру [3].

Г. к. является частным случаем общего определения Г. к. над произвольной категорией K. Категория GrK состоит из всех *групповых объектов* из K и гомоморфизмов между ними; эта категория наследует ряд свойств категории K, она, в частности, полна, если полна категория K.

Лит.: [1] Курош А. Г., Лившиц А. Х., Шульгейфер Е. Г., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 6, с. 3—52; [2] Eckmann B., Hilton P. J., «Math. Ann.», 1962, Bd 145, № 3, S. 227—55; 1963, Bd 151, № 2, S. 150—86; 1963, Bd 150, № 2, S. 165—87; [3] Leroux P., «Canad. Math. Bull.», 1972, v. 15, № 3, p. 375—80.

М. Ш. Цаленко.

ГРУПП МНОГООБРАЗИЕ — класс всех групп, удовлетворяющих фиксированной системе тождественных соотношений

$$v(x_1, \ldots, x_n)=1,$$

где v пробегает нек-рое множество V групповых слов, т. е. элементов *свободной группы* X со свободными образующими $x_1, \ldots, x_n, \ldots$. Как и всякое *алгебраических систем многообразие* Г. м. может быть определено также замкнутостью относительно подсистем (подгрупп), гомоморфных образов и декартовых произведений. Наименьшее многообразие, содержащее данный класс $\mathfrak{S}$ групп, обозначается $\mathrm{var}\,\mathfrak{S}$. Относительно операций пересечения многообразий и объединения многообразий, определяемого формулой

$$\mathfrak{U}\vee\mathfrak{V}=\mathrm{var}(\mathfrak{U}\cup\mathfrak{V}),$$

Г. м. образуют полную модулярную, но не дистрибутивную решетку. Произведение $\mathfrak{UV}$ многообразий $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ определяется как Г. м., состоящее из всех групп G, обладающих нормальной подгруппой $N\in\mathfrak{U}$ такой, что $G/N\in\mathfrak{V}$. Каждое Г. м., отличное от многообразия единичных групп и многообразия всех групп, однозначно

представимо в виде произведения далее неразложимых Г. м.

Примеры Г. м.: многообразие $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп, бернсайдово многообразие $\mathfrak{B}_n$ всех групп экспоненты (показателя) n, определяемое тождеством $x^n=1$, многообразие $\mathfrak{A}_n=\mathfrak{B}_n\wedge\mathfrak{A}$, многообразие $\mathfrak{N}_c$ всех нильпотентных групп класса $\leqslant c$, многообразие $\mathfrak{A}^l$ всех разрешимых групп длины $\leqslant l$, в частности при $l=2$, $\mathfrak{A}^2$ — многообразие метабелевых групп.

Пусть $\mathcal{P}$ — нек-рое свойство групп. Говорят, что Г. м. $\mathfrak{V}$ обладает свойством $\mathcal{P}$ (локально обладает свойством $\mathcal{P}$), если каждая группа из $\mathfrak{V}$ (каждая конечно порожденная группа из $\mathfrak{V}$) обладает свойством $\mathcal{P}$. Именно в этом смысле говорят, что многообразие нильпотентное, локально нильпотентное, локально конечное и т. д.

Свойства разрешимого Г. м. $\mathfrak{V}$ зависят от $\mathfrak{V}\wedge\mathfrak{A}^2$. Так, если $\mathfrak{V}\not\supseteq\mathfrak{A}^2$, то $\mathfrak{V}\subseteq\mathfrak{B}_n\mathfrak{N}_c\mathfrak{B}_n$ при нек-рых подходящих n и c (см. [2], [3]). Описание метабелевых Г. м. в значительной степени сводится к описанию локально конечных Г. м.: если метабелево многообразие $\mathfrak{V}$ не локально конечно, то

$$\mathfrak{V}=\mathfrak{V}_1\vee\mathfrak{V}_2\vee\mathfrak{V}_3,$$

где $\mathfrak{V}_1=\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}$, $\mathfrak{V}_2$ однозначно представимо в виде объединения конечного числа Г. м. вида $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}_k\wedge\mathfrak{A}^2,\mathfrak{V}_3$, локально конечно [4]. Некоторые локально конечные метабелевые многообразия описаны, напр. многообразия p-групп класса $\leqslant p+1$ (см. [5]).

Г. м. наз. кроссовым, если оно порождается конечной группой. Кроссовы Г. м. локально конечны. Г. м. наз. почти кроссовым, если оно не кроссово, но всякое его собственное подмногообразие кроссово. Разрешимые почти кроссовы многообразия исчерпываются многообразиями $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_p^2$, $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_q\mathfrak{A}_r$, $\mathfrak{A}_p\mathfrak{T}_q$, где p, q, r — различные простые числа, $\mathfrak{T}_q=\mathfrak{B}_q\wedge\mathfrak{N}_2$ при нечетном q и $\mathfrak{T}_2=\mathfrak{B}_4\wedge\mathfrak{N}_2$ (см. [6]). Существуют, однако, другие почти кроссовы многообразия; такие, напр., содержатся во всяком многообразии $\mathfrak{R}$ всех локально конечных групп экспоненты $p\geqslant 5$ (см. [7]). В изучении локально конечных Г. м. важную роль играют критические группы — конечные группы, не лежащие в многообразии, порожденном всеми их собственными подгруппами и факторгруппами. В кроссовом многообразии может содержаться лишь конечное число неизоморфных критич. групп. Всякое локально конечное многообразие порождается своими критич. группами.

Г. м. наз. конечно базируемым, если оно может быть задано конечным числом тождеств. Таковы, напр., все кроссовы, нильпотентные и метабелевы многообразия. Доказано [8] существование не конечно базируемых Г. м. и континуальность количества всех Г. м. Примеры бесконечных независимых систем тождеств приведены в [9]. Произведение конечно базируемых Г. м. не обязано быть конечно базируемым, в частности $\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_2$ не имеет конечного базиса.

Г. м. наз. многообразием лиевского типа, если оно порождается своими нильпотентными группами без кручения. Если, кроме того, факторы нижнего центрального ряда свободных групп многообразия — группы без кручения, то многообразие наз. магнусовым. Класс многообразий лиевского типа не совпадает с классом магнусовых многообразий; каждый из них замкнут относительно операции умножения многообразий [10]. Магнусовыми являются, напр., многообразие всех групп, многообразия $\mathfrak{N}_c$, $\mathfrak{A}^n$ и многообразия, получающиеся из многообразий $\mathfrak{N}_c$ с помощью применения в конечном числе операций пересечения и умножения [11].

Лит.: [1] Нейман Х., Многообразия групп, пер. с англ., М., 1969; [2] Каргаполов М. И., Чуркин В. А., «Алгебра и логика», 1971, т. 10, вып. 6, с. 651—57; [3] Groves J. R. F., «Bull. Austr. Math. Soc.», 1972, v. 7, № 3, p. 437—

41; [4] Brayce R. A., «Philos. Trans. Roy. Soc. London», ser. A 266, 1970, № 1176, p. 281—355; [5] Brisley W., «J. Austr. Math. Soc.», 1971, v. 12, № 1, p. 53—63; [6] Ольшанский А. Ю., «Матем. сб.», 1971, т. 85, № 1, с. 115—31; [7] Размыслов Ю. П., «Алгебра и логика», 1971, т. 10, в. 1, с. 33—44; [8] Ольшанский А. Ю., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1970, т. 34, № 2, с. 376—84; [9] Адян С. И., Проблема Бернсайда и тождества в группах, М., 1975; [10] Шмелькин А. Л., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1973, т. 29, с. 247—60; [11] Горчаков Ю. М., «Сиб. матем. журнал», 1969, т. 10, № 5, с. 1023—33.

А. Л. Шмелькин.

ГРУППА — один из основных типов *алгебраических систем*. Теория Г. изучает в самой общей форме свойства алгебраич. операций, наиболее часто встречающихся в математике и ее приложениях (примеры таких операций — умножение чисел, сложение векторов, последовательное выполнение преобразований и т. д.). Понятие Г. явилось исторически одним из первых примеров абстрактных алгебраич. систем и послужило во многих отношениях образцом при перестройке других математич. дисциплин на рубеже 19—20 вв., в результате к-рой понятие математич. системы (=структуры) стало основным в математике.

Определение. Группой наз. произвольное множество G с одной бинарной операцией, удовлетворяющей следующим аксиомам (если операцию записывать как умножение):

1) операция ассоциативна, т. е. $(ab)c=a(bc)$ для любых a, b, c из G;

2) операция гарантирует единицу, т. е. в G существует такой элемент e, наз. единицей, что $ae=ea=a$ для любого a из G;

3) операция гарантирует обратные элементы, т. е. для любого a из G существует в G такой элемент x, наз. обратным к a, что $ax=xa=e$.

Иногда вместо системы аксиом 1) — 3) пользуются равносильной системой из двух аксиом: 1) и 4) операция гарантирует левые и правые частные, т. е. для любых двух элементов a, b из G существуют в G такие элементы x, y, наз. левым частным и правым частным от деления b на a, что $ax=b$, $ya=b$.

Из определений следует, что единица в любой Г. единственна, для любого элемента из Г. обратный к нему элемент единствен и для любых элементов a, b из Г. оба частных от деления b на a единственны.

Исторические замечания. Истоки понятия Г. обнаруживаются в нескольких дисциплинах, главная из к-рых — теория решения алгебраич. уравнений в радикалах. В «Мемуаре об алгебраическом решении уравнений» Ж. Лагранжа (J. Lagrange, 1771) и одной работе А. Вандермонда (A. Vandermonde, 1771) впервые для нужд этой теории были применены подстановки. Особо важен для теории Г. «Мемуар» Ж. Лагранжа, где в терминах многочленов по существу получено разложение симметрической Г. подстановок на смежные классы по подгруппе. Глубокие связи между свойствами Г. подстановок и свойствами уравнений были указаны Н. Абелем (N. Abel, 1824) и Э. Галуа (E. Galois, 1830). Вместе с тем Э. Галуа принадлежат конкретные достижения в теории Г.: открытие роли нормальных подгрупп в связи с задачей о разрешимости уравнений в радикалах, установление простоты знакопеременных Г. степени $n\geqslant 5$ и пр. Важную роль в систематизации и развитии этого направления алгебры сыграл трактат К. Жордана (C. Jordan, 1870) о Г. подстановок.

Независимо идея Г. возникла в геометрии, когда в середине 19 в. на смену единой античной геометрии пришли многочисленные «геометрии» и остро встал вопрос об установлении связей и родства между ними. Выход из создавшегося положения был намечен исследованиями по проективной геометрии, посвященными изучению поведения фигур при различных преобразованиях. Постепенно интерес в этих исследованиях перешел на изучение самих преобразований и поиск их классифи-

кации. Таким «изучением геометрического родства» много занимался А. Мёбиус (A. Möbius), исследовавший конгруэнтность, подобие, аффинность, коллинеацию и, наконец, «элементарные виды родства» геометрич. фигур, т. е. по существу топологич. эквивалентность. На более сознательном уровне классификация геометрий была дана А. Кэли (A. Cayley, 1854 и далее) и другими представителями английской школы теории инвариантов: А. Кэли явно пользовался термином «Г.», систематически использовал таблицы умножения, наз. теперь его именем (см. *Кэли таблица*), он доказал представимость всякой конечной Г. подстановками, пришел к пониманию Г. как системы, заданной порождающими элементами и определяющими соотношениями. Заключительным этапом на этом пути явилась «Эрлангенская программа» Ф. Клейна (F. Klein, 1872), положившая в основу классификации геометрий понятие Г. преобразований.

Третий источник понятия Г.— теория чисел. Уже Л. Эйлер (L. Euler, 1761), изучая «вычеты, остающиеся при делении степеней», по существу пользовался сравнениями и разбиениями на классы вычетов, что на теоретико-групповом языке означает разложение Г. на смежные классы по подгруппе. К. Гаусс (C. Gauss, 1801) в «Арифметических исследованиях», занимаясь уравнением деления круга, фактически определил подгруппы его группы Галуа. Там же, изучая «композицию двоичных квадратичных форм», К. Гаусс по существу доказал, что классы эквивалентных форм образуют относительно композиции конечную абелеву Г.

Осознание в конце 19 в. принципиального единства теоретико-групповых идей, использовавшихся долгое время независимо в разных областях математики, привело к выработке современного абстрактного понятия Г. Так, С. Ли (S. Lie, 1895) уже определял Г. как совокупность преобразований, замкнутую относительно операции, к-рая ассоциативна и гарантирует единицу и обратные элементы. Изучение Г. без предположения их конечности и без каких бы то ни было предположений о природе элементов впервые оформилось в самостоятельную область математики с выходом в 1916 книги О. Ю. Шмидта «Абстрактная теория групп».

Примеры групп. Ниже приводятся примеры, иллюстрирующие роль Г. в алгебре, в других разделах математики и в естествознании.

а) Группы Галуа. Пусть K — конечное, сепарабельное и нормальное расширение поля k. Автоморфизмы поля K, оставляющие элементы подполя k неподвижными, образуют Г. $\mathrm{Gal}(K/k)$ относительно их последовательного выполнения, наз. *Галуа группой* расширения K/k. Основная теорема *Галуа теории* гласит: отображение, сопоставляющее каждой подгруппе Г. $\mathrm{Gal}\,(K/k)$ ее неподвижное подполе, является антиизоморфизмом решетки подгрупп Г. $\mathrm{Gal}(K/k)$ на решетку промежуточных подполей, заключенных между k и K.

Приложение к вопросу о разрешимости уравнений в радикалах осуществляется следующим образом. Пусть f — многочлен от x над полем k, K — поле разложения f. Группа $\mathrm{Gal}(K/k)$ наз. группой Галуа многочлена f над полем k (ее элементы естественным образом изображаются подстановками корней уравнения $f(x)=0$). Оказывается, уравнение $f(x)=0$ тогда и только тогда решается в радикалах, когда группа Галуа многочлена f разрешима (см. *Разрешимая группа*).

В этом и других аналогичных примерах Г. возникают в форме Г. автоморфизмов математич. структур. Это не только одна из важнейших форм, но и вообще присущая только Г. форма применения, обеспечивающая им особое положение в алгебре. Дело в том, что автоморфизмы произвольных структур, говоря словами Галуа, всегда можно «группировать», тогда как определить на множе-

ство автоморфизмов строение кольца или какой-нибудь другой полезной структуры удается лишь в специальных случаях.

б) Гомологические группы. Ведущей идеей теории гомологий является применение теории (абелевых) Г. к изучению категории топологич. пространств. Каждому пространству X сопоставляется семейство абелевых Г. $H_0(X)$, $H_1(X)$, ... и каждому непрерывному отображению $f: X \to Y$ — семейство гомоморфизмов $f_n: H_n(X) \to H_n(Y)$, $n=0, 1, 2, \ldots$. Изучение гомологич. Г. $H_n(X)$ (см. *Гомологии группа*) и их гомоморфизмов средствами теории Г. часто позволяет решить исходную топологич. задачу. Типичный пример — задача распространения: можно ли отображение $g: A \to Y$, определенное на подпространстве A пространства X, распространить на все X, т. е. представить g как суперпозицию вложения $h: A \to X$ и нек-рого непрерывного отображения $f: X \to Y$? Если да, то в гомологиях должно быть $g_n = f_n \cdot h_n$, т. е. каждый гомоморфизм $g_n: H_n(A) \to H_n(Y)$ можно пропустить через $H_n(X)$ с заданным множителем h_n. Если эта алгебраич. задача неразрешима, то и исходная топологич. задача неразрешима. Этим способом можно получать важные положительные результаты.

Гомологич. Г. иллюстрируют другой типичный путь применения Г. — путь изучения неалгебраич. объектов с помощью алгебраич. систем, отражающих их поведение. Именно таков основной метод алгебраич. топологии. Аналогичный метод и, в частности, гомологич. Г. успешно используются и для изучения самих алгебраич. систем — Г., колец и пр. (напр., в теории расширений Г.).

в) Группы симметрий. Понятие Г. позволяет в точных терминах охарактеризовать симметричность той или иной геометрич. фигуры. Именно, каждой фигуре можно сопоставить совокупность всех преобразований пространства, совмещающих данную фигуру с нею самой. Эта совокупность будет Г. относительно последовательного выполнения преобразований. Она и характеризует симметричность фигуры. Именно с таких позиций Е. С. Федоров в 1890 решил задачу классификации правильных пространственных систем точек, являющуюся одной из основных задач кристаллографии. Существует всего 17 плоских федоровских Г., они были найдены непосредственно; пространственных федоровских Г. — 230, и только теория Г. позволила провести их исчерпывающую классификацию. Это был исторически первый случай применения теории Г. непосредственно в естествознании.

Аналогичную роль играет теория Г. в физике. Так, в квантовой механике состояние физич. системы изображается точкой бесконечномерного векторного пространства. Если физич. система переходит из одного состояния в другое, то изображающая ее точка подвергается нек-рому линейному преобразованию. Соображения симметрии и теория представлений Г. линейными преобразованиями имеют здесь первостепенное значение.

Указанные примеры иллюстрируют классифицирующую роль теории Г. всюду, где речь идет о симметрии. Изучая симметрию, по существу имеют дело с автоморфизмами систем (не обязательно математических), поэтому теория Г. незаменима в этих вопросах.

Важнейшие классы групп. «Конечная цель» теории Г. — описать все групповые операции или, иначе, все Г. с точностью до изоморфизма. Теория Г. распадается на ряд разделов, выделяемых чаще всего дополнительными условиями на групповую операцию или внесением в Г. дополнительных структур, связанных определенным образом с групповой операцией.

Старейшей и интенсивно развивающейся ветвью теории Г. является теория *конечных групп*. Важное место

в ней занимает отыскание конечных простых Г., к к-рым относятся многие классические Г. матриц над конечными полями, а также «спорадические» простые конечные Г. (группы Матьё и др.). На другом полюсе находятся конечные разрешимые Г., в них обычно интересуются специфическими системами подгрупп (холловых, картеровых и пр.), во многом определяющих строение самой Г. Часто конечные Г. возникают в форме Г. подстановок или матриц над конечными полями; изучению представлений матрицами и подстановками посвящено большое самостоятельное направление теории конечных Г.

Типичным методом исследования бесконечных Г. является наложение на них того или иного условия конечности. Здесь наибольшее внимание привлекают *периодические группы*, локально конечные Г., Г. с условием максимальности для подгрупп (*нётеровы группы*), Г. с условием минимальности для подгрупп (*артиновы группы*), *конечно порожденные группы*, Г. конечного ранга (см. *Ранг группы*), *финитно аппроксимируемые группы*.

При изучении *абелевых групп* важную роль играют полные абелевы Г., абелевы Г. без кручения и периодические абелевы Г., а в них — сервантные подгруппы и примарные подгруппы. Исследование произвольной абелевой Г. во многом сводится к теориям указанных классов с помощью теории расширений абелевых Г., развиваемой в основном гомологич. методами (см. *Расширение* группы).

Более широкими по отношению к классу абелевых Г. являются классы *нильпотентных групп* и *разрешимых групп*, теория к-рых также достаточно развита. Из обобщений нильпотентности и разрешимости наиболее употребительны локальная нильпотентность, локальная разрешимость, нормализаторное условие, а также многочисленные свойства, определяемые наличием в Г. субнормальных систем (см. *Подгрупп система*) того или иного типа. Заметную роль играют специальные классы разрешимых и нильпотентных Г.: *сверхразрешимые группы*, *полициклические группы*.

Важной частью теории Г. является теория Г. преобразований (см. *Преобразований группа*), в том числе теория Г. подстановок (см. *Подстановок группа*) и теория *линейных групп*. Ряд важных классов Г. определяется внесением в Г. дополнительных структур, согласованных с групповой операцией; сюда относятся *топологические группы*, *Ли группы*, *алгебраические группы*, *упорядоченные группы*. Из других классов Г. следует отметить Г., свободные в том или ином многообразии (см. *Свободная группа*), *полные группы*, Г., аппроксимируемые в том или ином смысле, Г., определяемые условиями в терминах порождающих элементов и определяющих соотношений, Г., выделяемые условиями на решетку подгрупп.

Лит.: [1] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И., Основы теории групп, М., 1972; [2] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [3] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962; [4] Шмидт О. Ю., Избр. тр. Математика, М., 1959, с. 17—70; [5] Wussing H., Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes, B., 1969; [6] Федоров Е. С., Симметрия и структура кристаллов, М., 1949, с. 111—258; [7] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969. *М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков.*

n-ГРУППА — обобщение понятия группы на случай n-арной операции. n-группой наз. универсальная алгебра с одной n-арной ассоциативной операцией, однозначно обратимой на каждом месте (см. *Алгебраическая операция*). Теория n-Г. при $n \geqslant 3$ существенно отличается от теории групп (т. е. 2-групп). Напр., при $n \geqslant 3$ у n-Г. нет аналога единицы.

Пусть Г $(\circ)$ группа с операцией умножения $\circ$, $n \geqslant 3$ — произвольное целое число, тогда на множестве Г можно следующим образом определить n-арную операцию ω:

$$a_1 a_2 \ \ldots \ a_n \omega = a_1 \circ a_2 \circ \ \ldots \ \circ a_n.$$

Получаемая n-Г. наз. n-группой, определяемой группой $\Gamma(\circ)$. Известны необходимые и достаточные условия, при к-рых n-Г. определяется нек-рой группой (см. [1]). Всякая n-Г. вкладывается в n-Г., определяемую группой (теорема Поста).

Лит.: [1] Курош А. Г., Общая алгебра, М., 1974.

В. Д. Белоусов.

p-ГРУППА — группа, каждый неединичный элемент к-рой есть p-элемент, т. е. элемент, удовлетворяющий уравнению $x^{p^n}=1$; здесь p — фиксированное одно и то же для всех элементов группы простое число, а n — натуральное число, вообще говоря, свое для каждого элемента группы. В том же смысле вместо буквы p употребляют другие буквы, напр. q, r, s, но в таком случае их употребление особо оговаривают. Если p — конкретное простое число, напр. 2, 3, 5, ..., то говорят о 2-группах, 3-группах и т. д. Иногда p-Г. наз. примарными группами. Обобщением p-Г. является π-группа (π — заданное множество простых чисел), определяемая как группа, каждый неединичный элемент к-рой есть π-элемент, т. е. элемент, удовлетворяющий условию $x^m=1$, где m — натуральное число, все простые делители к-рого принадлежат π. Реже в том же смысле пишут Π-группа, σ-группа, τ-группа. Если N — множество всех простых чисел, то часто обозначают $p'=N\setminus p$, $\pi'=N\setminus\pi$ и говорят о p'- и π'-группах, о p'- и π'-элементах. Подгруппа данной группы, являющаяся p-Г. (π-группой), наз. p-подгруппой (π-подгруппой).

Значительная часть работ в теории конечных групп связана с задачей описания произвольных конечных групп через конечные p-Г. и простых конечных групп через 2-группы (см. [1], гл. IV и VI и [2]). Поэтому наиболее интенсивно развиваются направления, связанные с описанием конечных p-Г. по их абелевым подгруппам, либо с их описанием посредством p-автоморфизмов.

Бесконечные (неабелевы) p-Г. менее изучены. Ниже приводится небольшое число наиболее важных результатов, грубо разделенных на три части.

1) О результатах, относящихся к решению проблем Бернсайда, см. *Бернсайда проблема.*

2) Локально конечная p-Г. непроста (см. [3], с. 290).

3) Примеры, показывающие отличие теории конечных p-Г. от общей теории p-Г. а) Существует локально конечная p-Г., к-рая не имеет неединичных абелевых нормальных подгрупп (см. [3], с. 294). б) Существует локально конечная p-Г., совпадающая со своим коммутантом (см. [3], с. 296).

См. также *Группа с условием конечности.*

Лит.: [1] Huppert B., Endliche Gruppen, B., 1967; [2] Gorenstein D., Finite Groups, N. Y., 1968; [3] Шмидт О. Ю., Избр. тр. Математика, М., 1959; [4] Черников С. Н., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 5, с. 45—96; [5] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 123—60; [6] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968.

Ю. М. Горчаков.

ГРУППА БЕЗ КРУЧЕНИЯ — группа, не имеющая элементов конечного порядка. Свободная, свободная разрешимая, свободная нильпотентная и свободная абелева группы суть Г. б. к. Прямое, полное прямое и свободное произведения Г. б. к. суть Г. б. к. Факторгруппа Г. б. к. G по ее нормальной подгруппе H есть Г. б. к. тогда и только тогда, когда из того, что $x^n\in H$, следует $x\in H$ для всех $x\in G$ и для любого натурального n. Расширение Г. б. к. с помощью Г. б. к. есть Г. б. к. Если группа аппроксимируется p-группами по двум различным простым числам p, то она есть Г. б. к.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

В. М. Копытов.

ГРУППА С ОДНОЗНАЧНЫМ ИЗВЛЕЧЕНИЕМ КОРНЯ, R-группа — группа, у к-рой из равенства $x^n=y^n$ следует $x=y$, где x, y — любые элементы груп-

пы, n — любое натуральное число. Группа G тогда и только тогда является R-группой, когда она без кручения и такова, что из $x^n y = yx^n$ следует $xy = yx$ для любых x, $y \in G$ и натурального числа n. R-группа распадается в теоретико-множественное объединение пересекающихся по единице абелевых групп ранга 1. Группа тогда и только тогда есть R-группа, когда она без кручения и ее факторгруппа по центру есть R-группа. Подгруппа R-группы, прямое и полное прямое произведения R-групп суть R-группы. Для класса R-групп справедлива локальная теорема: если всякая конечно порожденная подгруппа группы G есть R-группа, то и сама группа G является R-группой. Свободные группы, свободные разрешимые группы, а также локально нильпотентные группы без кручения являются R-группами. Класс всех полных R-групп образует многообразие алгебр с операциями умножения и извлечения корня (D-г р у п п ы).

Лит.: [1] К у р о ш А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

В. М. Копытов.

ГРУППА С УСЛОВИЕМ КОНЕЧНОСТИ — группа, элементы или подгруппы к-рой удовлетворяют тому или иному условию конечности. Под у с л о в и е м к о н е ч н о с т и в теории групп понимается любое такое свойство, присущее всем конечным группам, что существуют бесконечные группы, к-рые им не обладают. Наиболее важными в теоретико-групповых исследованиях являются следующие условия конечности: конечность убывающих цепей подгрупп (условие минимальности для подгрупп, см. *Артинова группа*), конечность возрастающих цепей подгрупп (условие максимальности для подгрупп, см. *Нётерова группа*), конечная порожденность, конечность порядков элементов (периодичность), конечность конечно порожденных подгрупп (локальная конечность, см. *Локально конечная группа*), конечность ранга, конечность классов сопряженных элементов.

Систематич. изучение Г. с у. к. началось в 1939—40 (см. [1]) с исследования локально нильпотентных и локально разрешимых групп с условием минимальности для подгрупп, в результате к-рого было установлено, что бесконечные группы такого рода являются конечными расширениями прямых произведений конечного числа квазициклич. групп. Вопрос о справедливости утверждения этой теоремы для произвольной бесконечной группы с условием минимальности для подгрупп в общем случае пока (1977) не решен. В предположении локальной конечности он решен положительно [5]. Изучение групп с условием минимальности обогатило теорию групп важными результатами. Само условие минимальности подвергалось при этом существенным ограничениям: налагалось не на все подгруппы, а лишь на подгруппы, удовлетворяющие тем или иным дополнительным требованиям (инвариантность, абелевость, конечность индекса, примарность и пр.). Исследование групп с условием максимальности оказалось менее продуктивным, чем исследование групп с условием минимальности. Разрешимые группы с условием максимальности — это полициклич. группы. В разрешимых группах условие максимальности для подгрупп эквивалентно условию максимальности для абелевых подгрупп [4]. Аналогичный результат установлен и для условия минимальности в локально разрешимых группах. Условие максимальности для подгрупп эквивалентно условию конечной порожденности группы и всех ее подгрупп. Для нильпотентных групп оно эквивалентно конечной порожденности самой группы.

Группа имеет к о н е ч н ы й р а н г, если минимальное число образующих элементов в каждой ее конечно порожденной подгруппе не превосходит нек-рого фиксированного числа. Это условие конечности было широко использовано при изучении разрешимых групп и локально нильпотентных групп. Было установлено, в

частности, что если все абелевы подгруппы локально нильпотентной группы без кручения имеют конечный ранг, то конечный ранг имеет и вся группа [4].

Ряд существенных результатов дало исследование групп с конечными классами сопряженных элементов. Наиболее изученными среди них оказались слойно конечные группы, т. е. группы с конечными множествами элементов каждого порядка. Их изучение доведено по существу до полного описания их строения. Из этого описания вытекает, в частности, что класс слойно конечных групп совпадает с классом локально нормальных групп, удовлетворяющих условию минимальности для примарных подгрупп.

Лит.: [1] Черников С. Н., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, № 5(89), с. 45—96; [2] Robinson D. J. S., Finitenessconditions and generalized soluble groups, p. 1, 2, B.—Heid.—N. Y., 1972; [3] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [4] Мальцев А. И., «Матем. сб.», 1951, т. 28 (70), № 3, с. 567—88; [5] Шунков В. П., «Алгебра и логика», 1970, т. 9, № 5, с. 579—615. *С. Н. Черников.*

ГРУППА С УСЛОВИЕМ МАКСИМАЛЬНОСТИ для подгрупп — см. *Нётерова группа.*

ГРУППА С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ для подгрупп — см. *Артинова группа.*

ГРУППА ТИПА p^∞ — см. *Квазициклическая группа.*

ГРУППОВАЯ АЛГЕБРА группы G над полем K — ассоциативная алгебра над полем K, элементами к-рой являются всевозможные формальные конечные суммы вида $\sum_{g\in G}\alpha_g g$, $g\in G$, $\alpha_g\in K$, а операции определяются формулами:

$$\sum_{g\in G}\alpha_g g+\sum_{g\in G}\beta_g g=\sum_{g\in G}(\alpha_g+\beta_g)\,g,$$

$$\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right)\left(\sum_{g\in G}\beta_g g\right)=\sum_{h\in G}\left(\sum_{xy=h,\ x,\ y\in G}(\alpha_x\beta_y)h\right)$$

(в правой части второй формулы сумма также конечна). Эта алгебра обозначается KG; элементы группы G образуют базис алгебры KG; умножение базисных элементов в Г. а. индуцируется групповым умножением. Алгебра KG изоморфна алгебре функций, определяемых на группе G со значениями в поле K и принимающих лишь конечное число ненулевых значений; умножение в этой алгебре — свертка функций.

Эту же конструкцию можно рассмотреть и для случая, когда K — ассоциативное кольцо. Таким образом приходят к понятию группового кольца группы G над кольцом K; в случае, когда K коммутативно и с единицей, групповое кольцо наз. часто также групповой алгеброй группы над кольцом.

Г. а. были введены Г. Фробениусом (G. Frobenius) и И. Шуром [1] в связи с изучением представлений групп, поскольку рассмотрение представлений группы G над полем K равносильно изучению модулей над Г. а. KG. Так, теорема Машке на языке групповых алгебр формулируется следующим образом: если G — конечная группа, а K — поле, то Г. а. KG полупроста тогда и только тогда, когда порядок группы G не делится на характеристику поля K.

В начале 50-х гг. 20 в. появились исследования по Г. а. бесконечных групп в связи с применением целочисленных Г. а. в алгебраич. топологии, а также с использованием методов теории Г. а. при изучении строения группы. Этому способствовал также ряд проблем, поставленных для Г. а., наиболее известная из них: содержит ли делители нуля Г. а. группы без кручения? (проблема Капланского).

Некоторые направления исследований по групповым кольцам и алгебрам.

Радикал и полупростота. Групповое кольцо обладает ненулевым нильпотентным идеалом тогда и только тогда, когда либо K имеет ненулевой нильпотентный идеал, либо порядок нек-рой конечной

нормальной подгруппы из G делится на порядок элемента из аддитивной группы кольца K. Если K — кольцо без нильидеалов и порядок любого элемента из G не делится на порядок ни одного элемента из аддитивной группы K, то KG без нильидеалов. Г. а. KG над полем характеристики 0 полупроста в смысле *Джекобсона радикала*, если K содержит трансцендентный элемент над полем рациональных чисел.

В л о ж е н и е Г. а. в т е л а. Г. а. упорядоченной группы вложима в тело (т е о р е м а М а л ь ц е в а — Н е й м а н а). Существует предположение, что это же верно для Г. а. всякой правоупорядоченной группы.

С в я з ь т е о р е т и к о - к о л ь ц е в ы х с в о й с т в г р у п п о в о г о к о л ь ц а KG со с т р о е н и е м г р у п п ы G и к о л ь ц а K. Напр., KG первично тогда и только тогда, когда кольцо K первично и группа G не имеет конечных нормальных подгрупп.

П р о б л е м а и з о м о р ф и з м а: если групповые кольца KG и KH изоморфны как K-алгебры, то какая связь существует между строением групп G и H, в частности, когда G и H изоморфны? Выяснилось, что однозначно определяет группу групповое кольцо периодической разрешимой группы класса 2 над кольцом целых чисел и групповое кольцо счетной абелевой p-группы над кольцом характеристики p.

Рассматривались различные обобщения понятия Г. а., напр. понятие *скрещенного произведения* группы и кольца, для к-рого остаются справедливыми многие свойства Г. а.

Лит.: [1] S c h u r I., «Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.», 1905, S. 406—32; [2] К э р т и с Ч., Р а й н е р И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [3] P a s s m a n D. S., Infinite group rings, N. Y., 1971; [4] Современные проблемы математики, т. 2, М., 1973, с. 5—118; [5] Б о в д и А. А., Групповые кольца, Ужгород, 1974; см. также лит. при статье *Представления групп*.

А. А. Бовди.

ГРУППОВАЯ АЛГЕБРА л о к а л ь н о б и к о м п а к т н о й г р у п п ы — топологическая алгебра с *инволюцией*, образованная функциями на группе и такая, что в ней умножение определяется как свертка. Пусть банахово пространство $L^1(G)$ построено с помощью левоинвариантной *Хаара меры* dg на локально бикомпактной топологич. группе G и пусть в $L^1(G)$ умножение определяется как свертка $(f_1, f_2) \to f_1 * f_2$, а инволюция $f \to f^*$ — по формуле $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}\Delta(g)$, где Δ — модуль группы G. Полученная *банахова алгебра* с инволюцией наз. г р у п п о в о й а л г е б р о й группы G и обозначается также через $L^1(G)$. Если G — конечная группа, то определение Г. а. совпадает с обычным алгебраич. определением Г. а. над полем комплексных чисел.

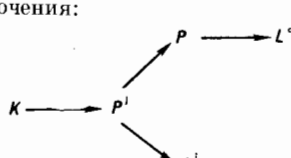
Понятие Г. а. позволяет применять общие методы теории банаховых алгебр в задачах теории групп и, в частности, в абстрактном гармонич. анализе. Свойства Г. а. как банаховой алгебры отражают свойства топологич. группы: так, Г. а. содержит единичный элемент тогда и только тогда, когда группа дискретна; Г. а. является прямой суммой (топологической) своих конечномерных минимальных двусторонних идеалов тогда и только тогда, когда группа бикомпактна. Исключительно важную роль играет понятие Г. а. в теории *унитарных представлений* группы: между непрерывными унитарными представлениями топологич. группы G и невырожденными *симметричными представлениями* Г. а. $L^1(G)$ существует взаимно однозначное соответствие, сопоставляющее непрерывному унитарному представлению π группы G в гильбертовом пространстве H представление Г. а. $L^1(G)$, определяемое формулой

$$f \longrightarrow \int_G f(g)\,\pi(g)\,dg, \quad f \in L^1(G).$$

Г. а. локально бикомпактных групп обладают рядом общих свойств. Именно, любая Г. а. содержит аппроксимативную единицу (см. *Банахова алгебра*), образован-

ную семейством характеристич. функций окрестностей единичного элемента, упорядоченных по включению (в сторону убывания); поэтому для Г. а. можно установить соответствие между положительными функционалами на Г. а. и ее симметричными представлениями. Любая Г. а. является полупростой алгеброй и имеет симметричное *точное представление*. В частности, представление Г. а., определяемое *регулярным представлением* группы, является точным. Замкнутые левые идеалы $L^1(G)$ суть замкнутые векторные подпространства $L^1(G)$, инвариантные относительно левого сдвига.

Иногда групповой алгеброй наз. банахова алгебра с инволюцией, полученная из Г. а. $L^1(G)$ присоединением единицы. Существует ряд других алгебр с инволюцией, к-рые иногда наз. групповыми алгебрами. К их числу относятся, в частности: алгебра мер $M(G)$ относительно свертки; алгебры относительно обычного умножения, напр. алгебра $L^\infty(G)$ существенно ограниченных измеримых по мере Хаара функций, алгебра $P(G)$ комплексных линейных комбинаций непрерывных положительно определенных функций. Множество $P^1(G)=P(G)\cap L^1(G)$ и совокупность $K(G)$ непрерывных финитных функций образуют алгебру и относительно свертки, и относительно обычного умножения. Имеет место следующая таблица, в к-рой стрелки означают включения:



Лит.: [1] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [2] Guichardet A., Analyse harmonique commutative, P., 1968.
А. И. Штерн.

ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ — величина, характеризующая скорость распространения волнового процесса в диспергирующих средах. Пусть волновой процесс описывается волновым уравнением с переменным коэффициентом

$$\frac{1}{c^2(z)}u_{tt}-u_{xx}-u_{zz}=0,$$

$$0\leqslant z<\infty,\quad -\infty<x<\infty,\quad c(z)>0.$$

Ищутся решения, удовлетворяющие условиям

$$u\Big|_{z=0}=0,\quad u_{z\to\infty}\longrightarrow 0$$

и имеющие вид

$$u=e^{i\omega(k)t-ikx}v(z).$$

Функция $v(z)$ должна быть ненулевым решением одномерной краевой задачи

$$v''+\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2(z)}\right)v=0;\quad v\Big|_{z=0}=0;\quad v_{z\to\infty}\longrightarrow 0.$$

Если в нек-ром промежутке изменения k существует конечный набор $\omega_j(k)$, $k=1, 2, \ldots$, при к-рых эта задача имеет ненулевое решение v_j, то величины $V=\omega_j(k)/k$ и $U=d\omega_j/dk$ наз. соответственно фазовой и групповой скоростями волны

$$u_j=e^{i\omega(k)-ikx}v_j(z).$$

Фазовая скорость и Г. с. связаны следующим соотношением (формула Рэлея):

$$U=V-\lambda\,dV/d\lambda,$$

где λ — длина волны.

Лит.: [1] Мандельштам Л. И., Полное собрание трудов, т. 5, Л., 1950, с. 315—19, 419—25, 439—67; [2] Горелик Г. С., Колебания и волны, 2 изд., М., 1959.
В. М. Бабич.

ГРУППОВАЯ СХЕМА, схема групп,— обобщение понятия алгебраич. группы. Пусть (Sch/S) — категория схем над базисной схемой S; *групповой объект* этой категории наз. групповой схемой над схемой S (а также групповой S-схемой,

или S-с х е м о й г р у п п). Для Г. с. G над S функтор точек $h_G: X \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/S}(X, G) = G(X)$ является контравариантным функтором из категории (Sch/S) в категорию групп (Gr). Категория $(S - \mathrm{Gr})$ групповых схем над S определяется как полная подкатегория категории таких функторов, образованная представимыми функторами.

П р и м е р ы. 1) Алгебраич. группа над полем k есть приведенная Г. с. конечного типа над полем k. (Иногда алгебраич. группой наз. произвольную Г. с. конечного типа над полем.)

2) Функтор, сопоставляющий S-схеме X аддитивную (соответственно мультипликативную) группу кольца сечений структурного пучка $\Gamma(X, O_X)$ представим. Соответствующая Г. с. над S наз. а д д и т и в н о й (соответственно м у л ь т и п л и к а т и в н о й) группой и обозначается $G_{a,S}$ (соответственно $G_{m,S}$). Для любой S-схемы S'

$$G_{a,S} \times S' \simeq G_{a,S'}, \quad G_{m,S} \times_S S' \simeq G_{m,S'}.$$

3) Каждая абстрактная группа Γ определяет Г. с. $(\Gamma)_S$ — прямую сумму семейства схем $(S_g)_{g \in G}$, каждая из к-рых изоморфна S. Соответствующий функтор сопоставляет S-схеме X прямую сумму $\Gamma^{\pi_0(X)}$, где $\pi_0(X)$ — множество связных компонент схемы X.

Если G — Г. с. над S, то для любой точки $s \in S$ слой $G_s = G \underset{S}{\otimes} k(s)$ является Г. с. над полем вычетов $k(s)$ этой точки. В частности, каждую Г. с. конечного типа над схемой S можно рассматривать как семейство алгебраич. групп, параметризованное базой S. На Г. с. распространяется терминология теории схем; так, говорят о гладких, плоских, конечных, собственных Г. с.

Для любой Г. с. G соответствующая приведенная схема G_{red} также есть Г. с., для к-рой каноническое замкнутое вложение $G_{\mathrm{red}} \to G$ есть морфизм Г. с. Каждая приведенная Г. с. локально конечного типа над полем является гладкой. Каждая Г. с. локально конечного типа над полем нулевой характеристики приведена (т е о р е м а К а р т ь е).

Многие понятия и результаты теории алгебраич. групп имеют свои аналоги для Г. с. Напр., имеется аналог структурной теории Бореля — Шевалле для аффинных алгебраич. групп [5], развита когомологич. теория расширений Г. с. и однородных пространств над Г. с. (см. [2], [5]). С другой стороны, многие проблемы и результаты специфичны для теории Г. с. и связаны с наличием нильпотентных элементов в структурном пучке как базисной, так и самой Г. с. Так, изучаются инфинитезимальные и формальные деформации Г. с. [4], вопросы подъема в нулевую характеристику, формальные пополнения Г. с. (см. *Формальная группа*). Г. с. естественным образом возникают при изучении алгебраич. групп над полем положительной характеристики (см. *р-делимая группа*).

Понятие аффинной Г. с. над базисной аффинной схемой $S = \mathrm{Spec}(B)$ двойственно понятию коммутативной *Хопфа алгебры*, именно, если $G = \mathrm{Spec}(A)$ такая Г. с., то A является коммутативной алгеброй Хопфа.

См. также *Коммутативная групповая схема*, *Конечная групповая схема*.

Лит.: [1] Т е й т Д ж., О о р т Ф., «Математика», 1972, т. 16, № 1, с. 165—83; [2] D e m a z u r e M., G a b r i e l P., Groupes algébriques, t. 1, P.— Amst., 1970; [3] O o r t F., Commutative group schemes, B.— Hdlb.— N.Y., 1966; [4] е г о ж е, «Compositio math.», 1971, v. 23, p. 265—96; [5] Schémas en groupes, t. 1—3, B.— Hdlb.— N.Y., 1970. *И. В. Долгачев.*

ГРУППОВОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — *ассоциативное исчисление*, в к-ром эффективным образом выполнено естественное групповое требование существования обратной операции. Именно, ассоциативное исчисление $\mathfrak{A}$ наз. Г. и. (см. [1], с. 341), если для него может быть построен и н в е р т и р у ю щ и й а л г о р и т м, т. е.

такой *алгоритм* $\mathfrak{S}$, что для всякого слова P в алфавите A исчисления $\mathfrak{A}$ выполняются следующие условия: 1) $\mathfrak{S}(P)$ определено и также является словом в A; 2) слова $P\mathfrak{S}(P)$ и $\mathfrak{S}(P)P$ эквивалентны в $\mathfrak{A}$ пустому слову (алгоритм здесь следует понимать в к.-л. точном смысле слова, напр. как *нормальный алгорифм*).

Наиболее употребительными являются Г. и. специального типа (так наз. инверсивные исчисления, см. [2]), у к-рых существование инвертирующего алгоритма обеспечивается надлежащим подбором их алфавитов и списков соотношений: алфавит инверсивного исчисления имеет четную длину, для каждой его буквы ξ явно указывается обратная ей буква ξ^{-1}, а в список соотношений включается полный набор так наз. тривиальных соотношений, т. е. соотношений, правые части к-рых суть пустые слова, а левые имеют вид $\xi\xi^{-1}$.

Роль Г. и. определяется тем, что они являются представлениями конечно определенных групп. Г. и. $\mathfrak{A}$, как и всякое ассоциативное исчисление, стандартным образом (см. *Ассоциативное исчисление*) порождает конечно определенную ассоциативную систему $K_{\mathfrak{A}}$, к-рая вследствие наличия у $\mathfrak{A}$ инвертирующего алгоритма оказывается группой. *Алгоритмическая проблема* распознавания эквивалентности слов в Г. и. $\mathfrak{A}$ представляет собой формулированную в терминах Г. и. проблему тождества для конечно определенной группы $K_{\mathfrak{A}}$. Это — первая из числа фундаментальных проблем разрешимости, сформулированных в 1911 М. Деном [3] для конечно определенных групп. Рядом авторов было найдено положительное решение этой проблемы для групп, определяемых частными типами Г. и. В частности, оно было получено для групп, определяемых инверсивными исчислениями с одним нетривиальным соотношением (см. [4]). В 1952 П. С. Новиков (см. [5], а также [6]) впервые построил пример конечно определенной группы с неразрешимой проблемой тождества, т. е. группы, порожденной таким Г. и., для к-рого невозможен никакой алгоритм в уточненном смысле слова (напр., *Тьюринга машина* или *нормальный алгорифм*), решающий проблему эквивалентности слов в этом Г. и. Этот пример дает отрицательное решение проблемы тождества для конкретной конечно определенной группы с учетом современного уточнения этой проблемы, даваемого теорией алгоритмов (см. *Чёрча тезис*). Впоследствии были приведены др. примеры таких Г. и. (см., напр., [7], [8]).

Упомянутый пример П. С. Новикова дает отрицательное решение и второй фундаментальной проблемы Дэна — проблемы распознавания пар слов, сопряженных в данном Г. и. Позднее П. С. Новиков [9] дал более простое и независимое от указанного примера отрицательное решение проблемы сопряженности.

Большой интерес с алгебраич. точки зрения представляет изучение тех свойств Г. и., к-рые оказываются инвариантными относительно изоморфизмов Г. и., — это свойства абстрактных конечно определенных групп. В 1955 С. И. Адян [10]—[12] получил весьма общий результат, аналогичный результату А. А. Маркова для ассоциативных исчислений, давший отрицательное решение практически всех известных в то время алгоритмич. проблем, связанных с основными классификациями Г. и. В частности, им было получено отрицательное решение третьей проблемы Дена — проблемы изоморфии любой фиксированной конечно определенной группе. Впоследствии аналогичные результаты получил М. Рабин [13].

Неразрешимость упомянутых алгоритмич. проблем, касающихся Г. и., повлекла за собой отрицательное решение ряда алгоритмич. проблем топологии. Так, по Г. и. с неразрешимой проблемой сопряженности можно построить двумерный полиэдр, для к-рого неразрешима

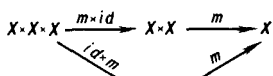
проблема гомотопии путей. Опираясь на результаты С. И. Адяна, А. А. Марков получил в 1958 отрицательное решение проблемы гомеоморфии (см. [14]).

Лит.: [1] Марков А. А., Теория алгорифмов, М., 1954; [2] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1963, т. 27, № 4, с. 907—36; [3] Dehn M., «Math. Ann.», 1911, Bd 71, S. 116; [4] Magnus W., «J. reine und angew. Math.», 1931, Bd 163, № 2, S. 141—65; [5] Новиков П. С., «Докл. АН СССР», 1952, т. 85, с. 709—12; [6] его же, Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп, М., 1955; [7] Boone W. W., «Indagat. math.», 1954, v. 16, p. 231, 492; 1955, v. 17, p. 252—56; 1957, v. 19, p. 22—7, 227—32; [8] Britton J. L., «Proc. London Math. Soc.», 3 ser., 1958, v. 8, № 32, p. 493—506; [9] Новиков П. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1954, т. 18, № 6, с. 485—524; [10] Адян С. И., «Докл. АН СССР», 1955, т. 103, с. 533—35; [11] его же, там же, 1957, т. 117, № 1, с. 9—12; [12] его же, «Тр. Моск. матем. об-ва», 1957, т. 6, с. 231—98; [13] Rabin M. O., «Ann. Math.», 1958, v. 67, p. 172—94; [14] Марков А. А., «Докл. АН СССР», 1958, т. 121, № 2, с. 218—20. *Н. М. Нагорный.*

ГРУППОВОЙ ОБЪЕКТ категории — объект X категории C такой, что для любого $Y \in \mathrm{Ob}(C)$ множество морфизмов $\mathrm{Hom}_C(Y, X)$ является группой, а соответствие $Y \to \mathrm{Hom}_C(Y, X)$ — функтором из категории C в категорию групп (Gr). Гомоморфизмом Г. о. X в Г. о. Y наз. такой морфизм $f : X \to X'$ категории C, что для любого $Y \in \mathrm{Ob}(C)$ соответствующее отображение $\mathrm{Hom}_C(Y, X) \to \mathrm{Hom}_C(Y, X')$ является гомоморфизмом групп. Г.о.категории C образуют подкатегорию $(\mathrm{Gr} - C)$ категории C; морфизмами в этой категории служат гомоморфизмы. Функтор $X \to h_X = \mathrm{Hom}_C(\cdot, X)$ устанавливает эквивалентность категории $(\mathrm{Gr} - C)$ и категории представимых предпучков групп на категории C. В случае, когда значения функтора $h_X : Y \to \mathrm{Hom}_C(Y, X)$ принадлежат подкатегории (Ab) абелевых групп, Г. о. X наз. коммутативным, или абелевым. Если категория C обладает конечными произведениями и финальным объектом e, то Г. о. X категории C определяются следующими свойствами.

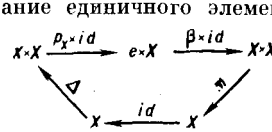
Существуют морфизмы $m : X \times X \to X$ (умножение), $r : X \to X$ (обращение) и $\beta : e \to X$ (единица), к-рые удовлетворяют следующим аксиомам.

а) Ассоциативность. Диаграмма



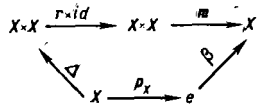
коммутативна.

б) Существование единичного элемента. Диаграмма



коммутативна.

в) Существование обратного элемента. Диаграмма



коммутативна. Здесь всюду $p_X : X \to e$ — канонический морфизм объекта X в финальный объект e, а $\Delta : X \to X \times X$ — диагональный морфизм.

В случае, когда C есть категория множеств (Ens), Г. о. X суть в точности группы. Финальным объектом категории (Ens) является множество $\{e\}$, состоящее из одного элемента e. Аксиома а) означает ассоциативность бинарной операции, задаваемой морфизмом $m : X \times X \to X$. Морфизм $r : X \to X$ есть отображение обращения, а морфизм $\beta : \{e\} \to X$ есть отображение множества $\{e\}$ в X, образ к-рого равен единичному элементу в X.

Аналогичным способом можно определить кольцевой объект категории и вообще задать алгебраическую структуру на объекте категории (см. [2]).

Лит.: [1] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 6; [2] Demazure M., Grothendieck A., Schemas en groupes, t. 1, B.—Hdlb.—N.Y., 1970. *И. В. Долгачев.*

ГРУППОИД — *универсальная алгебра* с одной бинарной операцией. Г.— самый широкий класс таких алгебр; группы, полугруппы, квазигруппы — все это Г. специального вида. Важным понятием для Г. является понятие изотопии операций. Пусть на множестве G определены две бинарные операции, обозначаемые $(\cdot)$ и $(\circ)$, они изотопны, если существуют такие три взаимно однозначных отображения α, β и γ множества G на себя, что $a\cdot b=\gamma^{-1}(\alpha a\circ\beta b)$ для любых a, $b\in G$. Г., изотопный квазигруппе, сам является квазигруппой; Г. с единицей, изотопный группе, изоморфен этой группе. Поэтому понятием изотопии в теории групп не пользуются, для групп изотопия совпадает с изоморфизмом.

Группоид с сокращением — это Г., в к-ром любое из равенств $ab=ac$, $ba=ca$ влечет $b=c$ (a, b, c — элементы Г.). Каждый Г. с сокращением вложим в квазигруппу. Гомоморфный образ квазигруппы — группоид с делением, т. е. Г., в к-ром уравнения $ax=b$ и $ya=b$ разрешимы (но не обязательно однозначно).

Множество с одной частичной (т. е. определенной не для всяких пар элементов) бинарной операцией наз. частичным группоидом. Каждый частичный подгруппоид свободного частичного Г. свободен.

Вместо термина «Г.» употребляется иногда термин «оператив».

Лит.: [1] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [2] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Borůvka O., Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie, B., 1960; [4] Bruck R. H., A survey of binary systems, B., [a. o.], 1971. *В. Д. Белоусов.*

ГУКА ЗАКОН — закон, устанавливающий в известных пределах зависимость между напряженным состоянием и деформацией упругого тела. Г. з. заключается в том, что малая деформация пропорциональна приложенным к телу силам, т. е. тензор деформации u_{ik} является линейной функцией тензора напряжений σ_{ik}:

$$u_{ik}=\frac{1}{9K}\,\delta_{ik}\sigma_{ll}+\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik}-\frac{1}{3}\,\delta_{ik}\sigma_{ll}\right),$$

где δ — символ Кронекера, K — модуль всестороннего сжатия, μ — модуль сдвига (см. *Упругости математическая теория*).

В простейшей форме Г. з. был экспериментально установлен Р. Гуком (R. Hooke) в 1660.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория упругости, 3 изд., М., 1965, § 4. *А. Б. Иванов.*

ГУРВИЦА КРИТЕРИЙ — см. *Рауса — Гурвица критерий.*

ГУРВИЦА ТЕОРЕМА: если $\{f_n(z)\}$ — последовательность голоморфных функций в области $D\subset\mathbb{C}$, равномерно сходящаяся внутри D к функции $f(z)\not\equiv 0$, то для любой замкнутой спрямляемой жордановой кривой Γ, лежащей в D вместе с областью, ограниченной Γ, и не проходящей через нули функции $f(z)$, можно указать такое число $N=N(\Gamma)$, что при $n>N$ каждая из функций $f_n(z)$ имеет внутри Γ одно и то же число нулей, равное числу нулей функции $f(z)$ внутри Γ. Получена А. Гурвицем [1].

Лит.: [1] Hurwitz A., «Math. Ann.», 1895, Bd 46, S. 273—84; то же: Math. Werke, Bd 2, Basel, 1933, S. 533—45; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967. *Е. Д. Соломенцев.*

ГУРВИЦА ФОРМУЛА — см. *Римана — Гурвица формула.*

ГУРСА ЗАДАЧА — решение гиперболич. уравнения и системы 2-го порядка с двумя независимыми переменными по заданным его значениям на двух характеристич. кривых, выходящих из одной точки.

Для гиперболич. уравнения

$$u_{xy}=F(x,\ y,\ u,\ p,\ q),\quad p=u_x,\quad q=u_y, \qquad (1)$$

заданного, напр., в области $\Omega=\{(x, y) : 0<x<y<1\}$, Г. з. ставится следующим образом: найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1) и непрерывное в замыкании $\overline{\Omega}$ по краевому условию

$$u(0, t)=\varphi(t),\ u(t, 1)=\psi(t),\ \varphi(1)=\psi(0),\ 0\leqslant t\leqslant 1, \quad (2)$$

где φ и ψ — заданные непрерывно дифференцируемые функции. Если функция F непрерывна для всех $(x, y)\in\overline{\Omega}$ и для любой системы действительных значений переменных u, p, q и допускает производные F_u, F_p и F_q, к-рые при тех же условиях по абсолютной величине меньше нек-рого числа, то в области Ω существует единственное и устойчивое решение задачи (1), (2).

При исследовании Г. з. в линейном случае

$$Lu\equiv u_{xy}+au_x+bu_y+cu=f \quad (3)$$

фундаментальную роль играет ф у н к ц и я Р и м а н а $R(x, y; \xi, \eta)$, к-рая однозначно определяется как решение уравнения

$$R_{xy}-(aR)_x-(bR)_y+cR=0,$$

удовлетворяющее на характеристиках $x=\xi$ и $y=\eta$ условию

$$R(\xi, y; \xi, \eta)=\exp\int_\eta^y a(\xi, t)\,dt,$$

$$R(x, \eta; \xi, \eta)=\exp\int_\xi^x b(t, \eta)\,dt,$$

где (ξ, η) — произвольная точка из области Ω задания уравнения (3). Если функции a_x, b_y и c непрерывны, то функция Римана существует и по переменным ξ, η является решением уравнения $LR=0$.

Решение Г. з. (2) для уравнения (3) дается так наз. ф о р м у л о й Р и м а н а. При $\varphi=\psi\equiv 0$ она имеет вид:

$$u(x, y)=\int_0^x d\xi\int_1^y R(\xi, \eta; x, y)\,f(\xi, \eta)\,d\eta.$$

Из формулы Римана следует, что значение $u(x_0, y_0)$ решения Г. з. в точке $(x_0, y_0)\in\Omega$ зависит лишь от значения заданных функций в характеристич. четырехугольнике $0\leqslant x\leqslant x_0$, $0\leqslant y\leqslant y_0$. При $f\equiv 0$ это значение зависит лишь от значения функции $\psi(x)$ и $\varphi(y)$ в промежутках $0\leqslant x\leqslant x_0$ и $0\leqslant y\leqslant y_0$ соответственно, а при $a=b=c=f\equiv 0$ функция

$$u(x_0, y_0)=\varphi(y_0)+\psi(x_0)-\varphi(0).$$

Метод получения явных формул решения Г. з. с помощью функции Римана известен под названием м е т о д а Р и м а н а. Этот метод распространен на довольно широкий класс гиперболич. систем 1-го и 2-го порядков. В частности, на систему вида (3), где a, b и c — квадратные симметрич. матрицы порядка n, а f и u — векторы с n компонентами.

Непосредственным обобщением Г. з. является з а д а ч а Д а р б у — П и к а р а, к-рая состоит в определении решения гиперболич. уравнения и системы 2-го порядка с двумя независимыми переменными по заданным его значениям на двух гладких монотонных кривых γ и δ, выходящих из одной точки A и расположенных в характеристич. угле с вершиной в точке A. В частности, γ и δ могут частично или полностью совпадать со сторонами этого угла. Эта задача исследована для уравнения вида (1).

Г. з. иногда наз. з а д а ч е й Д а р б у. Под Г. з. для гиперболич. уравнений 2-го порядка с несколькими независимыми переменными часто понимают характеристич. задачу, т. е. задачу отыскания решения по заданным его значениям на характеристич. коноиде (см. *Дифференциальные уравнения с частными производными*; задача с данными на характеристиках).

Г. з. названа по имени Э. Гурса (E. Goursat), подробно ее исследовавшего.

Лит.: [1] Гурса Э., Курс математического анализа, пер. с франц., т. 3, ч. 1, М.—Л., 1933; [2] Бицадзе А. В., Уравнения смешанного типа, М., 1959; [3] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [4] Трикоми Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, пер. с итал., М., 1957.

А. М. Нахушев.

ГУРСА КОНГРУЭНЦИЯ — конгруэнция прямых, у к-рой первый точечный инвариант фокальной сети одной фокальной поверхности (M_1) равен второму точечному инварианту другой фокальной поверхности (M_2). Пусть (M_3), (M_4) — преобразования Лапласа (см. *Лапласа преобразование* в геометрии) фокальных поверхностей (M_1) и (M_2). Тогда для каждой прямой M_1M_2 Г. к. существует поверхность 2-го порядка, проходящая через точки M_i ($i=1, 2, 3, 4$) и имеющая касание 3-го порядка с линией u на поверхности (M_3) и с линией v на поверхности (M_4) (см. [1]). Если две соседние конгруэнции в последовательности Лапласа (см. *Лапласа последовательность*) являются Г. к., то вся последовательность состоит из Г. к.

Г. к. наз. по имени Э. Гурса (E. Goursat), к-рый рассматривал конгруэнции такого типа.

Лит.: [1] Titeica (Tzitzeica) G., «J. math. pures et appl.», 1928, ser. 9, t. 7, p. 189—208; [2] Фиников С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М.—Л., 1937.

В. Т. Базылев.

ГЮЙГЕНСА ПРИНЦИП — утверждение, в силу к-рого при распространении колебаний, описываемом волновым уравнением в пространстве нечетного числа измерений, резко локализованное начальное состояние наблюдается позднее в другой точке, как явление, столь же резко ограниченное. В случае четного числа пространственных переменных Г. п. не имеет места — сигнал от локализованного начального возмущения, принятый в точке наблюдения, будет размытым. Г. п. был впервые сформулирован Х. Гюйгенсом (Ch. Huygens) в 1678 (см. [1]), а затем развит А. Френелем (A. Fresnel) в 1818 при исследовании проблем дифракции.

Г. п. является следствием математич. факта, что решение волнового уравнения в точке M трехмерного пространства в момент t выражается через значения решения и его производных на произвольной замкнутой поверхности, содержащей точку M внутри, в предшествующие моменты времени. В частности, решение в точке (M, t) задачи Коши для волнового уравнения определяется начальными данными только на пересечении начального многообразия с характеристич. конусом точки (M, t) и не зависит от начальных данных внутри характеристич. конуса. Впервые строгая математич. формулировка Г. п. была дана Г. Гельмгольцем (H. Helmholtz) в 1859 для стационарного и Г. Кирхгофом (G. Kirchhoff) в 1882 для нестационарного случаев.

Обобщением Г. п. на линейные гиперболич. уравнения 2-го порядка

$$\sum_{i,\,j}^{n-1} g^{ij}(x)\,u_{ij}+\sum_{i=1}^{n} b^{i}(x)\,u_i+c(x)u=0 \qquad (*)$$

являются результаты Ж. Адамара (см. [2]), в силу к-рых решение задачи Коши для уравнения (*) при четных $n\geqslant 4$ зависит лишь от начальных данных на пересечении начального многообразия с характеристич. коноидом тогда и только тогда, когда в фундаментальном решении (*) отсутствуют логарифмич. члены. Об описании всего класса уравнений вида (*), для к-рых справедлив Г. п., см. [4].

Лит.: [1] Гюйгенс Х., Трактат о свете, пер. с франц., М.—Л., 1935; [2] Hadamard J., Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, New Haven—L., 1923; [3] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [4] Ибрагимов Н. Х., Принцип Гюйгенса, в кн.: Некоторые проблемы математики и механики, Л., 1970.

А. Г. Свешников.

Д'АЛАМБЕРА ОПЕРАТОР, волновой оператор, даламбертиан,— дифференциальный оператор 2-го порядка, имеющий в декартовых координатах вид

$$\Box u \equiv \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где Δ — оператор Лапласа, c — постоянная. Д. о. в сферич. координатах:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

в цилиндрич. координатах:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

в общих криволинейных координатах:

$$\Box u \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\right),$$

где g — определитель матрицы $\|g_{\mu\nu}\|$, составленной из коэффициентов метрич. тензора $g_{\mu\nu}$.

Назван по имени Ж. Д'Аламбера (J. D'Alembert, 1747), к-рый рассматривал его простейший вид при решении одномерного волнового уравнения.

А. Б. Иванов.

Д'АЛАМБЕРА ПРИЗНАК сходимости ряда: если для числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

существует такое число q, $0<q<1$, что начиная с нек-рого номера выполняется неравенство

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < q,$$

то данный ряд абсолютно сходится; если же начиная с нек-рого номера

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geqslant 1,$$

то ряд расходится. В частности, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1,$$

то рассматриваемый ряд абсолютно сходится, а если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > 1,$$

то он расходится. Напр., ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

абсолютно сходится для всех комплексных z, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{z^n}{n!}\right|}=0,$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$ расходится при всех $z \neq 0$, так как

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|(n+1)!\, z^{n+1}|}{|n!\, z^n|} = +\infty.$$

Если

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 1,$$

то ряд может как сходиться, так и расходиться: ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

удовлетворяют этому условию, причем первый ряд сходится, а второй расходится.

Установлен Ж. Д'Аламбером (J. D'Alembert, 1768).

Л. Д. Кудрявцев.

Д'АЛАМБЕРА ПРИНЦИП — один из основных принципов динамики несвободных механич. систем; он содержит общий метод, с помощью к-рого уравнения движения любой механич. системы можно вывести в виде уравнений равновесия сил (и в этом смысле Д. п. сводит динамику к статике), а также определить реакции связей. Принцип сформулирован Ж. Д'Аламбером [1] в виде правила для определения движений (под к-рыми понимаются векторы скоростей) нескольких тел, действующих одно на другое при помощи нитей или жестких стержней: движения, передаваемые телам, раскладывают каждое на два движения — на движение, фактически воспринятое телами, и на нек-рое другое, причем эти два движения должны быть таковыми, что если телам будет передано лишь первое движение, то тела могут совершать это движение, не мешая одно другому, если же телам передано лишь второе движение, то тела будут оставаться в покое.

Д. п. был успешно применен Ж. Д'Аламбером и другими учеными при решении ряда задач. Однако разложение движений, требуемое принципом, и определение тех сил, к-рые должны уничтожаться, представляют трудную задачу. Это побудило Ж. Лагранжа [2] предложить иную формулировку Д. п., основанную на установлении равновесия между силами и вызванными ими движениями, но направленными противоположно, к-рая близка к современной. Если обозначить через F_ν и R_ν заданную активную силу и реакцию связей, действующие на движущуюся с ускорением w_ν материальную точку с массой m_ν, то, согласно Д. п.,

$$F_\nu + R_\nu - m_\nu w_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \qquad (*)$$

т. е. в каждый момент времени заданная активная сила и реакция связей, приложенные к движущейся материальной точке, уравновешиваются силой инерции — $m_\nu w_\nu$ точки. Или, если разложить силу F_ν на две составляющие силы:

$$F_\nu = m_\nu w_\nu + P_\nu,$$

то равенства (*) примут вид:

$$P_\nu + R_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

т. е. в каждый момент времени «потерянная сила» $P_\nu = F_\nu - m_\nu w_\nu$ уравновешивается силой реакции связей (см. [3]).

Лит.: [1] D'Alembert J., Traité de dynamique, P., 1743 (рус. пер.: Даламбер Ж., Динамика, М.—Л., 1950); [2] Lagrange J., Mécanique analytique, P., 1788 (рус. пер.: Лагранж Ж., Аналитическая механика, т. 1, 2 изд., М.—Л., 1950); [3] Суслов Г. К., Теоретическая механика, 3 изд., М.—Л., 1946. *В. В. Румянцев.*

Д'АЛАМБЕРА УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение вида

$$y=x\varphi(y')+f(y'),$$

где φ и f — дифференцируемые функции; впервые исследовалось Ж. Д'Аламбером (J. D'Alembert, 1748). Известно также под назв. уравнения Лагранжа. *БСЭ-2.*

Д'АЛАМБЕРА ФОРМУЛА — формула, выражающая решение задачи Коши для волнового уравнения с одной пространственной переменной. Пусть заданные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат соответственно пространствам $C^2(-\infty, +\infty)$ и $C^1(-\infty, +\infty)$, а $f(t, x)$ непрерывна вместе с первой производной по x в полуплоскости $\{t\geqslant 0,\ -\infty<x<+\infty\}$. Тогда классич. решение $u(t, x)$ в $\{t>0,\ -\infty<x<\infty\}$ *Коши задачи*

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=f(t,x), \qquad (1)$$

$$u(t,x)\Big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x), \qquad (2)$$

выражается Д. ф.:

$$u(t,x)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right].$$

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы и удовлетворяют указанным условиям гладкости на интервале $\{|x-x_0|<aT\}$, а $f(t, x)$ — в треугольнике

$$Q^T_{x_0}=\left\{|x-x_0|<a(T-t),\quad t\geqslant 0\right\},$$

то Д. ф. дает единственное решение задачи (1), (2) в $Q^T_{x_0}$. Требования на заданные функции могут быть ослаблены, если интересоваться решениями в нек-ром обобщенном смысле. Напр., из Д. ф. следует, что при f, интегрируемой по любому треугольнику $Q^T_{x_0}$, локально интегрируемой ψ и непрерывной φ можно определить слабое решение задачи Коши (1),(2) как равномерный (в любом $Q^T_{x_0}$) предел классич. решений (с гладкими данными) и оно также выражается Д. ф.

Формула названа по имени Ж. Д'Аламбера (J. D'Alembert, 1747).

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [2] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966. *А. К. Гущин.*

Д'АЛАМБЕРА — ЛАГРАНЖА ПРИНЦИП — один из основных, наиболее общих дифференциальных *вариационных принципов классической механики*, выражающий необходимое и достаточное условие соответствия заданным активным силам действительного движения системы материальных точек, стесненной идеальными связями. В Д.— Л. п. сравниваются положения системы в ее действительном движении с бесконечно близкими положениями, допускаемыми связями в рассматриваемый момент времени.

Согласно Д.— Л. п. в действительном движении системы сумма элементарных работ заданных активных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях меньше или равна нулю:

$$\sum_\nu (F_\nu-m_\nu w_\nu)\,\delta r_\nu\leqslant 0 \qquad (*)$$

в любой момент времени. Знак $=$ имеет место для обратимых возможных перемещений, знак $\leqslant$ для необратимых возможных перемещений δr_ν; F_ν — заданные активные силы, m_ν и w_ν — массы и ускорения точек.

Уравнение (*) — общее уравнение динамики систем с идеальными связями; в нем содержатся все уравнения и законы движения, благодаря чему можно сказать, что вся динамика сводится к одной общей формуле (*).

Принцип установлен Ж. Лагранжем [1] путем обобщения *возможных перемещений принципа* с помощью *Д'Аламбера принципа*. Из формулы (*) для систем, стесненных удерживающими связями, Ж. Лагранж вывел общие свойства и законы движения тел, а также уравнения движения и применил их к решению ряда задач динамики, включая задачи движения несжимаемых, сжимаемых и упругих жидкостей, объединив тем самым «динамику и гидродинамику как ветви единого принципа и как выводы из единой общей формулы».

Лит.: [1] Lagrange J., Mécanique analytique, P., 1788 (рус. пер.: Лагранж Ж., Аналитическая механика, т. 1, 2 изд., М.—Л., 1950).

В. В. Румянцев.

Д'АЛАМБЕРА — ЭЙЛЕРА УСЛОВИЯ — см. *Коши — Римана условия.*

ДАНДЕЛЕНА ШАРЫ — сферы, участвующие в геометрич. построении, к-рое связывает планиметрич. определение эллипса, гиперболы или параболы со стереометрич. определением. Пусть, напр., в круговой конус вписаны две сферы (их и называют шарами Данделена), к-рые касаются поверхности конуса по окружности c и c' (см. рис.) и некоторой плоскости π в точках F и F'. Если взять на линии пересечения конуса и плоскости π произвольную точку M и провести через нее образующую SM, к-рая пересекается с окружностями c и c' в точках T и T', то при перемещении точки M, точки T и T' будут перемещаться по окружностям c и c' с сохранением расстояния TT', т. е. линия пересечения — эллипс. Для случая гиперболы Д. ш. находятся в разных полостях.



Предложены Ж. Данделеном (G. Dandelin) в 1822.

Лит.: [1] Моденов П. С., Аналитическая геометрия, М., 1969.

А. Б. Иванов.

ДАНЖУА ИНТЕГРАЛ — 1) Данжуа узкий (специальный) интеграл — обобщение понятия интеграла Лебега. Функция $f(x)$ наз. интегрируемой в смысле узкого (специального, D^*) интеграла Данжуа на $[a, b]$, если существует такая непрерывная функция $F(x)$ на $[a, b]$, что $F'(x)=f(x)$ почти всюду, и каково бы ни было совершенное множество P, существует порция P, на к-рой $F(x)$ абсолютно непрерывна и

$$\sum_n \omega(F; (\alpha_n, \beta_n)) < \infty,$$

где $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$ — совокупность смежных интервалов к порции P, $\omega(F; (\alpha, \beta))$ — колебание $F(x)$ на (α, β); при этом

$$(D^*) \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Такое обобщение интеграла Лебега ввел А. Данжуа [1]; он показал, что этот интеграл восстанавливает функцию по ее точной конечной производной. Интеграл D^* эквивалентен *Перрона интегралу*.

2) Данжуа широкий (общий) интеграл — обобщение понятия узкого Д. и. Функция $f(x)$ наз. интегрируемой в смысле широкого (общего, D) интеграла Данжуа на $[a, b]$, если существует такая

непрерывная функция $F(x)$ на $[a, b]$, что ее *аппроксимативная производная* почти всюду равна $f(x)$ и каково бы ни было совершенное множество P, существует порция P, на к-рой $F(x)$ абсолютно непрерывна; при этом

$$(D)\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Введен независимо и почти одновременно А. Данжуа [2] и А. Я. Хинчиным [3], [4]. Интеграл D восстанавливает непрерывную функцию по ее точной конечной аппроксимативной производной.

3) Тотализация $(T_{2s})_0$ представляет собой конструктивно определенный интеграл для решения задачи построения такого обобщения интеграла Лебега, к-рое позволило бы всякий всюду сходящийся тригонометрич. ряд рассматривать в качестве ряда Фурье (по этому интегралу). Введена А. Данжуа [5].

4) Тотализация (T_{2s}) отличается от тотализации $(T_{2s})_0$ тем, что при определении тотализации $(T_{2s})_0$ обычный предел заменен на аппроксимативный. Для тотализации (T_{2s}) А. Данжуа [5] дал и дескриптивное определение.

О взаимосвязях тотализаций $(T_{2s})_0$ и (T_{2s}) с другими интегралами см. [6].

Лит.: [1] Denjoy A., «C. r. Acad. sci.», 1912, t. 154, p. 859—62, 1075—78; [2] его же, там же, 1916, t. 162, p. 377—80; [3] Khintchine A., там же, 1916, t. 162, p. 287—91; [4] Хинчин А. Я., «Матем. сб.», 1918, т. 30, с. 543—57; [5] Denjoy A., Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique, pt 1—4, P., 1941—49; [6] Виноградова И. А., Скворцов В. А., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1970, М., 1971, с. 65—107; [7] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949.
Т. П. Лукашенко.

ДАНЖУА ТЕОРЕМА о производных числах: *производные числа* каждой конечной функции $F(x)$ почти в каждой точке x удовлетворяют одному из следующих соотношений:

$$\overline{F}^+(x) = \overline{F}^-(x) = +\infty, \qquad \underline{F}^+(x) = \underline{F}^-(x) = -\infty;$$

$$\overline{F}^+(x) = \underline{F}^-(x) \neq \infty, \quad \underline{F}^+(x) = -\infty, \quad \overline{F}^-(x) = +\infty,$$

$$\underline{F}^+(x) = \overline{F}^-(x) \neq \infty, \quad \overline{F}^+(x) = +\infty, \quad \underline{F}^-(x) = -\infty;$$

$$\overline{F}^+(x) = \underline{F}^+(x) = \overline{F}^-(x) = \underline{F}^-(x) \neq \infty.$$

Доказана для непрерывных функций А. Данжуа [1]. Обобщением утверждения Данжуа является теорема [2]: для почти каждого x *континтенция* графика $F(x)$ в точке $(x, F(x))$ является одной из следующих фигур: плоскость, полуплоскость (с невертикальной граничной прямой), прямая (невертикальная).

Лит.: [1] Denjoy A., «J. math. pures et appl.», 1915, Ser. 7, t. 1, p. 105—240; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949.
Т. П. Лукашенко.

ДАНЖУА — ЛУЗИНА ТЕОРЕМА об абсолютно сходящихся тригонометрич. рядах: если тригонометрич. ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (1)$$

сходится на множестве положительной меры Лебега, то ряд, составленный из абсолютных величин его коэффициентов

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| \qquad (2)$$

сходится и, следовательно, исходный ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на всей числовой оси. Свойство положительности меры множества сходимости ряда (1), будучи, согласно Д.— Л. т., достаточным для сходимости ряда (2), не является, однако, необходимым. Существуют, напр., совершенные множества меры нуль, из сходимости на к-рых ряда (1) следует сходимость ряда (2).

Теорема установлена независимо А. Данжуа [1] и Н. Н. Лузиным [2]; имеются различные ее обобщения (см. [3]).

Лит.: [1] Denjoy A., «C. r. Acad. sci.», 1912, t. 155, p. 135—6; [2] Лузин Н. Н., «Матем. сб.», 1912, т. 28, с. 461—72; [3] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961.

Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин.

ДАНИЕЛЯ ИНТЕГРАЛ — расширение понятия интеграла, предложенное П. Даниелем [1]. Схема построения этого интеграла наз. схемой Даниеля, представляет собой продолжение на более широкий класс функций интеграла, определенного первоначально для нек-рой совокупности функций, называемых элементарными функциями. При сохранении способа продолжения изменение объема исходной совокупности элементарных функций приводит к разным расширениям понятия интеграла. В этой схеме аксиоматизируется понятие элементарного интеграла, в отличие от схемы Лебега (см. *Лебега интеграл*), аксиоматизирующей понятие меры.

Пусть X — произвольное множество и L_0 — некоторая совокупность определенных на X действительных ограниченных функций; эти функции наз. элементарными. Предполагается, что L_0 — векторная решетка, т. е. из $f, g \in L_0$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in L_0$,

$$f,\ g \in L_0 \Rightarrow \sup(f,\ g) \quad \text{и} \quad \inf(f,\ g) \in L_0.$$

Пусть на L_0 определен функционал $I(f)$, принимающий действительные значения и такой, что

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g) \ \text{(дистрибутивность)};$$

$$f(x) \geqslant 0 \Rightarrow I(f) \geqslant 0 \ \text{(неотрицательность)};$$

если $f_n(x) \downarrow 0$ для любого x, то $I(f_n) \to 0$ (непрерывность относительно монотонной сходимости).

Такой функционал наз. интегралом от элементарных функций, или элементарным интегралом. Множество $M \subset X$ наз. множеством меры нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая неубывающая последовательность $\{g_n\} \subset L_0$, что $\sup\limits_n g_n(x) \geqslant \chi_M(x)$, где $\chi_M(x)$ — характеристич. функция множества M:

$$\sup I(g_n) \leqslant \varepsilon.$$

Функция $f(x)$, определенная на X, принадлежит классу L^+, если существует такая последовательность $\{f_n\} \subset L_0$, что $f_n(x) \uparrow f(x)$ почти всюду и $I(f_n) \leqslant c < +\infty$. Число

$$I(f) = \lim_n I(f_n)$$

наз. интегралом от f. Интеграл $I(f)$ не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{f_n\}$.

Классом L наз. совокупность функций f, определенных на X и представимых в виде $f = f_1 - f_2$, где $f_1, f_2 \in L^+$. Функции класса L наз. суммируемыми, а число

$$I(f) = I(f_1) - I(f_2)$$

— интегралом Даниеля от функции f.

Класс L с точностью до множества меры нуль является векторной решеткой конечных функций, замкнутой относительно сходимости почти всюду с ограниченными интегралами, и Д. и. от суммируемых функций обладает свойствами дистрибутивности, неотрицательности, непрерывности (относительно сходимости почти всюду), мажорированной суммируемой функцией (теорема Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла), а также рядом других естественных свойств интеграла.

В том случае, когда $X = [a, b]$ и L_0 есть совокупность ступенчатых функций

$$f(x) = c_i,\ a_i \leqslant x < b_i,\ \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i) = [a, b),\ b_i = a_{i+1},$$

Д. и. совпадает с интегралом Лебега от функций, суммируемых на $[a, b]$. Схема Даниеля применима для построения интеграла от функций со значениями в σ-полной решетке.

Лит.: [1] Daniell P., «Ann. Math.», 1917, v. 19, p. 279—94; [2] Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л., Интеграл, мера и производная, 2 изд., М., 1967; [3] Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., М., 1956.

В. И. Соболев.

ДАНТОВО ПРОСТРАНСТВО — один из типов топологич. пространств. Пусть X — топологич. пространство, Y — его подпространство, τ и λ — бесконечные кардиналы. Пространство Y наз. τ-монолитным в X, если для каждого $A \subset Y$ такого, что $\mathrm{card} A \leqslant \tau$ замыкание $[A]$ в X является бикомпактом веса $\leqslant \tau$. Пространство X τ-подавляет подпространство Y, если из $\lambda \geqslant \tau$, $A \subset Y$ и $\mathrm{card} A \leqslant \exp\lambda$ следует, что существует $A' \subset X$, для к-рого $[A'] \supset A$ и $\mathrm{card} A' \leqslant \lambda$. Пространство X наз. д а н т о в ы м, если для каждого бесконечного кардинала τ существует всюду плотное в X подпространство Y, к-рое одновременно τ-монолитно в себе и τ-подавляется пространством X. Класс Д. п. содержит класс *диадических бикомпактов.*

Б. А. Ефимов.

ДАРБУ ВЕКТОР — направляющий вектор $\boldsymbol{\delta}$ мгновенной оси вращения, вокруг к-рой сопровождающий триэдр кривой L поворачивается при равномерном движении точки M по кривой L. Д. в. лежит в спрямляющей плоскости кривой L и выражается через единичные векторы главной нормали $\boldsymbol{n}$ и касательной $\boldsymbol{t}$ к кривой L:

$$\boldsymbol{\delta} = \sqrt{\tau^2 + \sigma^2}\,(\boldsymbol{t}\cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta),$$

где τ и σ — кривизна и кручение L, θ — угол между Д. в. и касательной к L. С помощью вектора Дарбу *Френе формулы* могут быть записаны в виде:

$$\dot{\boldsymbol{t}} = [\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{t}], \quad \dot{\boldsymbol{n}} = [\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{n}], \quad \dot{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{b}],$$

где $\boldsymbol{b}$ — бинормаль L.

Применительно к сопровождающему триэдру пространственной кривой Д. в. в его геометрич. значении впервые указан Г. Дарбу [1].

Лит.: [1] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces..., pt 1, P., 1887—96, livre 1, ch. 1, p. 1—18; [2] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1, М.—Л., 1947.

Е. В. Шикин.

ДАРБУ ИНВАРИАНТЫ СЕТИ — выражения h и k.

$$h = c + ab - \frac{\partial a}{\partial u}, \quad k = c + ab - \frac{\partial b}{\partial v},$$

составленные из коэффициентов уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = a\frac{\partial\theta}{\partial u} + b\frac{\partial\theta}{\partial v} + c\theta. \qquad (*)$$

Уравнению (*) удовлетворяет каждая из однородных координат точки x, описывающей *сопряженную сеть* из линий u и v на двумерной поверхности проективного n-мерного пространства ($n \geqslant 3$). Г. Дарбу [1] показал, что Д. и. с. h и k не меняют своего значения при изменении нормирования координат точки x. Накладывая то или иное условие на Д. и. с., получают частные виды сопряженных сетей.

Лит.: [1] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces..., pt 2, P., 1889, [2] Tzitzeica G., Geométrie différentielle projective des réseaux, P.—Bucarest, 1924; [3] Фиников С. П., Теория конгруэнций, М.—Л., 1950.

В. Т. Базылев.

ДАРБУ КВАДРИКА — поверхность 2-го порядка, имеющая с поверхностью S трехмерного проективного пространства P_3 касание 2-го порядка в точке x, и у к-рой линия пересечения с поверхностью S имеет точку x особой точкой специального типа. Из множества квадрик, имеющих с поверхностью S касание 2-го порядка в точке x, можно выделить такие квадрики, у к-рых линия пересечения с поверхностью S имеет

точку x особой точкой с тремя совпадающими касательными. На поверхности S существуют три направления (направления Дарбу) для этих трех совпавших касательных. В точке $x \in S$ существует однопараметрич. семейство Д. к.— пучок Дарбу. Обобщение пучка Дарбу — пучок гиперквадрик, соприкасающихся в точке x с гиперповерхностью S_n проективного пространства P_{n+1}. Гиперповерхность S_n (неразвертывающаяся) вырождается в гиперквадрику тогда и только тогда, когда равен нулю обобщенный *Дарбу тензор* гиперповерхности (см. [2]).

Лит.: [1] Фиников С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М.—Л., 1937; [2] Лаптев Г. Ф., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1953, т. 2, с. 275—382.

В. Т. Базылев.

ДАРБУ ПОВЕРХНОСТИ — поверхности, ассоциированные с *бесконечно малым изгибанием* одной из них; открыты Г. Дарбу [1]. Д. п. образуют «венок» из 12 поверхностей с радиус-векторами $x_1, \ldots, x_6, z_1, \ldots, z_6$, удовлетворяющими уравнениям

$$dz_i = [z_{i+1}, dx_i],\ dx_i = [x_{i-1}, dz_i],\ z_i - x_{i+1} = [z_{i+1}, x_i],$$
$$i = 1, \ldots, 6,$$
$$x_{i+6} = x_i, \quad z_{i+6} = z_i;$$

при этом z_{i+1} и x_i находятся в *Петерсона соответствии*, z_{i+1} и x_{i-1} — в *полярном соответствии*, z_i и x_{i+1} являются полостями конгруэнции W. Аналогичный «венок» образуется парами изометричных поверхностей эллиптич. пространства.

Лит.: [1] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces..., pt 4, P., 1896, 3 ed., 1946; [2] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

М. И. Войцеховский.

ДАРБУ СУММА — сумма специального вида. Пусть действительная функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$, $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ — его разбиение:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_k = b,$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ m_i = \inf_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x),\ M_i = \sup_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x),$$
$$i = 1, 2, \ldots, k.$$

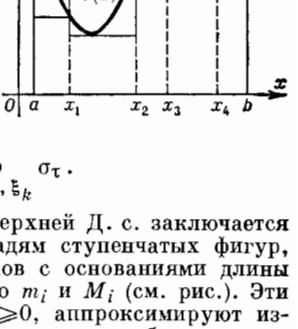
Суммы

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i \quad \text{и} \quad S_\tau = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i$$

наз. соответственно нижней и верхней интегральной Д. с. Для любых двух разбиений τ и τ' отрезка $[a, b]$ справедливо неравенство $s_\tau \leqslant S_{\tau'}$, т. е. любая нижняя Д. с. меньше верхней. Если

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \Delta x_i,$$
$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

— интегральная сумма Римана, то



$$s_\tau = \inf_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau,$$

$$S_\tau = \sup_{\xi_1, \ldots, \xi_k} \sigma_\tau.$$

Геометрич. смысл нижней и верхней Д. с. заключается в том, что они равны площадям ступенчатых фигур, состоящих из прямоугольников с основаниями длины Δx_i и высотами соответственно m_i и M_i (см. рис.). Эти фигуры в случае, когда $f(x) \geqslant 0$, аппроксимируют изнутри и извне криволинейную трапецию, образованную графиком функции $f(x)$, осью абсцисс и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ (которые могут вырождаться в точки).

Величины

$$I_* = \sup_\tau s_\tau \quad \text{и} \quad I^* = \inf_\tau S_\tau \qquad (1)$$

наз. соответственно нижним и верхним интегралом Дарбу. Они являются пределами нижних и верхних Д. с.:

$$I_* = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau, \quad I^* = \lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau,$$

где

$$\delta_\tau = \max_{i=1, 2, \ldots, k} \Delta x_i$$

— мелкость разбиения τ. Условие

$$I_* = I^* \tag{2}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$. При этом в случае выполнения условия (2) значение нижнего и верхнего интегралов Дарбу совпадает с интегралом Римана

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Условие (2) с помощью Д. с. может быть сформулировано в следующей эквивалентной форме: для любого $\varepsilon>0$ существует такое разбиение τ, что

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

Условие

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$$

также является необходимым и достаточным для интегрируемости по Риману функции на отрезке $[a, b]$. При этом

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^k \omega_i(f)\, \Delta x_i,$$

где $\omega_i(f)$ — *колебание функции* $f(x)$ на отрезке

$$[x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Понятие нижних и верхних Д. с. обобщается на случай функций многих переменных, измеримых в смысле нек-рой положительной меры μ. Пусть E — измеримое (напр., по Жордану или по Лебегу) множество n-мерного пространства $n=1, 2, \ldots$, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$ — разбиение множества E, т. е. система таких измеримых множеств E, что

$$\bigcup_{i=1}^k E_i = E, \tag{3}$$

$$\mu(E_i \cap E_{i'}) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq i'. \tag{4}$$

Пусть функция f ограничена на множестве E,

$$m_i = \inf_{x \in E_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in E_i} f(x), \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{5}$$

Суммы

$$s_\tau = \sum_{i=1}^k m_i \mu(E_i), \quad S_\tau = \sum_{i=1}^k M_i \mu(E_i) \tag{6}$$

также наз. нижней и, соответственно, верхней Д. с. Нижний I_* и верхний I^* интегралы определяются по формулам (1). В случае меры Жордана их равенство является необходимым и достаточным условием интегрируемости функции по Риману, причем их общее значение совпадает с интегралом Римана. В случае же меры Лебега для ограниченных измеримых по Лебегу функций всегда

$$I_* = I^* = \int_E f(x)\, dx.$$

Вообще, если μ — полная σ-аддитивная мера, определенная на σ-алгебре $\mathfrak{S}_\mu = \{E\}$, f — ограниченная μ-измеримая на E действительная функция, $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$ — разбиение множества $E \in \mathfrak{S}_\mu$ на μ-измеримые множества

E_i, удовлетворяющие условиям (3), (4), Д. с. s_τ и S_τ определяются по формулам (5) — (6), а интегралы I_* и I^* — по формулам (1), в к-рых везде под μ понимают рассматриваемую меру, то

$$I_* = I^* = \int_E f(x)\, d\mu.$$

Обобщением Д. с. для неограниченных μ-измеримых функций f, определенных на множествах $E \in \mathfrak{S}_\mu$, являются ряды (если они абсолютно сходятся)

$$\begin{aligned} s_\tau &= \sum_{i=1}^{\infty} m_i \mu(E_i), \\ S_\tau &= \sum_{i=1}^{\infty} M_i \mu(E_i), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ — разбиение множества $E \in \mathfrak{S}_\mu$ (это разбиение состоит, вообще говоря, из бесконечного числа μ-измеримых множеств E_i, удовлетворяющих условию (4) и, конечно, таких, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E$), а m_i и M_i определяются по формулам (5), при этом в формулах (7) (как и выше в формулах (6)) считается, что $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$. Если снова определить I_* и I^* по (1), понимая теперь s_τ и S_τ в смысле (7), то $I_* = I^*$, причем в случае, когда величина $I = I_* = I^*$ является конечной, функция f интегрируема по мере μ и $I = \int_E f(x) d\mu$.

Названы по имени Г. Дарбу [1].

Лит.: [1] Darboux G., «Ann. sci. Ecole Norm. supér.», 1875, ser. 2, t. 4, p. 57—112; [2] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., т. 1—2, М., 1971—73; [3] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1—2, М., 1973; [4] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев.

ДАРБУ ТЕНЗОР — симметрический тензор третьей валентности

$$\theta_{\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\beta\gamma} - \frac{b_{\alpha\beta}K_\gamma + b_{\beta\gamma}K_\alpha + b_{\gamma\alpha}K_\beta}{4K},$$

где $b_{\alpha\beta}$ — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности, K — гауссова кривизна, а $b_{\alpha\beta\gamma}$ и K_α — их ковариантные производные. К этому тензору в специальных координатах впервые пришел Г. Дарбу [1].

С Д. т. связана кубическая дифференциальная форма:

$$\theta_{\alpha\beta\gamma}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma = b_{\alpha\beta\gamma}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma - \frac{3}{4}\frac{K_\gamma}{K} b_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma.$$

Эта форма, отнесенная к кривой на поверхности, наз. инвариантом Дарбу. На поверхности постоянной отрицательной кривизны инвариант Дарбу совпадает с *дифференциальным параметром* на любой ее кривой. Кривая, в каждой точке к-рой инвариант Дарбу равен нулю, наз. линией Дарбу. На нелинейчатой поверхности отрицательной кривизны существует одно действительное семейство линий Дарбу. На поверхности положительной кривизны существуют три действительных семейства линий Дарбу. Поверхность, в каждой точке к-рой Д. т. определен и тождественно равен нулю, наз. поверхностью Дарбу. Поверхности Дарбу являются поверхностями 2-го порядка, не развертывающимися на плоскость.

Лит.: [1] Darboux G., «Bull. sci. math.», 1880, ser. 2, t. 4, p. 348—84; [2] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 2, М.—Л., 1948, стр. 210—33.

Е. В. Шикин.

ДАРБУ ТЕОРЕМА: если функция в каждой точке некоторого промежутка оси действительных чисел имеет конечную производную, то, принимая два каких-либо значения на этом промежутке, производная принимает на нем и любое промежуточное.

Л. Д. Кудрявцев.

ДАРБУ ТРЕХГРАННИК, Дарбу триэдр,— трехгранник, связанный с точкой поверхности и определяемый тройкой векторов, составленной из орта

нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности и двух взаимно ортогональных ортов $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$, касательных к поверхности

$$\boldsymbol{r}_1=\frac{\partial r}{\partial u};\quad \boldsymbol{r}_2=\frac{\partial r}{\partial v};\quad \boldsymbol{n}=\frac{r_1\times r_2}{|r_1\times r_2|}.$$

Свойства поверхности отражаются в законах перемещения Д. т., когда его вершина описывает поверхность. Систематич. применение Д. т. к изучению поверхностей привело Г. Дарбу [1] к *подвижного репера методу*.

Лит.: [1] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces..., pt. 1, P., 1887. *А. Б. Иванов.*

ДАРБУ УРАВНЕНИЕ — 1) Д. у.— обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,\ y)+yR(x,\ y)}{Q(x,\ y)+xR(x,\ y)},$$

где P, Q, R — целые многочлены относительно x и y. Это уравнение впервые исследовал Г. Дарбу [1]. Частный случай Д. у.— *Якоби уравнение*. Пусть n — высшая степень многочленов P, Q, R; если Д. у. имеет s известных частных алгебраических решений, то при $s\geqslant\frac{1}{2}n(n+1)+2$ его общее решение отыскивается без квадратур, а при $s=\frac{1}{2}n(n+1)+1$ можно найти интегрирующий множитель (см. [2]). Если P и Q — однородные функции степени m, а R — однородная функция степени k, то при $k=m-1$ Д. у. является однородным дифференциальным уравнением, а при $k\neq m-1$ подстановкой $y=zx$ Д. у. приводится к *Бернулли уравнению*.

Лит.: [1] Darboux G., «Bull. sci. math.», 1878, t. 2, p. 66—96; [2] Айнс Э. Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, пер. с англ., Хар., 1939. *Н. Х. Розов.*

2) Д. у.— гиперболическое уравнение

$$u_{tt}-\Delta u+\frac{\lambda(t,\ x)}{t}u_t=0,\quad t\neq 0,$$

где $\lambda(t,\ x)$ — неотрицательная, непрерывно дифференцируемая функция, $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$. Для решений Д. у., как и для решений волнового уравнения, справедлива следующая теорема единственности. Если какое-нибудь дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(x,\ t)$ Д. у. обращается вместе со своей производной по t в нуль на основании, лежащем в плоскости $t=0$, характеристич. конуса, то оно равно нулю внутри всей области, ограниченной этим конусом. Характеристич. конус имеет тот же вид, что и для *волнового уравнения*.

При $\lambda(t,\ x)=n-1>0$ решением Д. у., удовлетворяющим начальным условиям

$$u(t,\ x)\,|_{t=0}=\varphi(x),$$
$$u_t(t,\ x)\,|_{t=0}=0$$

с дважды непрерывно дифференцируемой функцией $\varphi(x)$, является функция

$$u(x,\ t)=\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}t^{n-1}}\int_{|x-y|=t}\varphi(y)\,dS_y,$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Это решение Д. у. и решение $v(x,\ t)$ волнового уравнения, удовлетворяющее условиям

$$v(t,\ x)\,|_{t=0}=\varphi(x),\quad v_t(t,\ x)\,|_{t=0}=0,$$

связаны соотношением

$$u(t,\ x)=2\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)\sqrt{\pi}}\int_0^1 v(t\beta,\ x)\,(1-\beta^2)^{(n-3)/2}\,d\beta.$$

Д. у. названо по имени Г. Дарбу (G. Darboux).

Лит.: [1] Йон Ф., Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, пер. с англ., М., 1958. *А. К. Гущин.*

ДАРВИНА — ФАУЛЕРА МЕТОД — метод вывода канонического и большого канонич. распределений из микроканонического (см. *Гиббса распределение*). Для этого рассматривается ансамбль одинаковых статистич. систем, образующий в целом замкнутую систему, и характеризующая его функция распределения суммируется по микроскопич. состояниям всех систем ансамбля, кроме одной. Предполагается, что число систем в ансамбле стремится к бесконечности (при большом, но фиксированном числе частиц в каждой из систем ансамбля), что позволяет при расчете применять метод перевала. Использование указанной процедуры для установления ряда общих особенностей статистич. систем и расчета конкретных их характеристик приводит к тем же результатам, что и метод, основанный на канонич. распределениях Гиббса. Метод разработан Ч. Дарвиным (Ch. Darwin) и Р. Фаулером (R. Fowler) в 1923.

Лит.: [1] Фаулер Р., Гуггенгейм Э., Статистическая термодинамика, пер. с англ., М., 1949; [2] Хуанг К., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1966.

И. А. Квасников.

ДВЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, в к-ром любое подмножество либо открыто, либо замкнуто. *А. А. Мальцев.*

ДВИЖЕНИЕ — преобразование пространства, сохраняющее геометрич. свойства фигур (размеры, форму и др.). Понятие Д. сформировалось путем абстракции реальных перемещений твердых тел в евклидовом пространстве. Д. принимается иногда в качестве основного понятия при аксиоматическом построении геометрии.

Д. евклидова пространства — преобразование пространства, сохраняющее расстояние между точками. Д. наз. собственным (Д. первого рода) или несобственным (Д. второго рода) в зависимости от того, сохраняет оно или не сохраняет *ориентацию* пространства.

На плоскости собственные Д. выражаются аналитически в прямоугольной системе координат (x, y) при помощи следующих формул

$$\tilde{x} = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a,$$

$$\tilde{y} = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b,$$

показывающих, что совокупность всех собственных Д. на плоскости зависит от трех параметров a, b, φ. Первые два параметра характеризуют *параллельный перенос* плоскости на вектор (a, b), а параметр φ — *вращение* (поворот) плоскости вокруг начала координат. Собственное Д. представляет собой произведение (композицию) вращения вокруг начала на угол φ и параллельного переноса на вектор (a, b). Всякое собственное Д. может быть представлено либо как параллельный перенос, либо как вращение вокруг некоторой точки.

Несобственные Д. выражаются при помощи формул

$$\tilde{x} = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a,$$

$$\tilde{y} = x\sin\varphi - y\cos\varphi + b,$$

показывающих, что несобственное Д. есть произведение собственного Д. на преобразование *симметрии* относительно нек-рой прямой. Всякое несобственное Д. представляет собой произведение параллельного переноса вдоль нек-рого направления и симметрии относительно прямой, имеющей то же направление.

В пространстве собственное Д. есть или вращение вокруг оси, или параллельный перенос, или может быть представлено в виде произведения вращения вокруг оси и параллельного переноса в направлении этой оси (винтовое Д.). Несобственное Д. есть либо симметрия относительно плоскости, либо может быть представ-

лено в виде произведения симметрии относительно плоскости на вращение вокруг оси, перпендикулярной к этой плоскости, либо — в виде произведения симметрии относительно плоскости на перенос в направлении вектора, параллельного этой плоскости.

В прямоугольной системе координат (x, y, z) в пространстве Д. выражается аналитически при помощи формул

$$\tilde{x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a,$$
$$\tilde{y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b,$$
$$\tilde{z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + c,$$

где элементы матрицы $\|a_{ij}\|$ удовлетворяют следующим условиям ортогональности

$$a_{1r}a_{1s} + a_{2r}a_{2s} + a_{3r}a_{3s} = \delta_{rs}$$

($\delta_{rs}=1$ при $r=s$, $\delta_{rs}=0$ при $r\neq s$). Д. является собственным или несобственным в зависимости от того, равняется ли определитель этой матрицы 1 или -1. См. *Ортогональное преобразование*.

Аналогично в случае n-мерных евклидовых пространств Д. выражается аналитически в прямоугольных координатах при помощи ортогональной матрицы $A = \|a_{ij}\|$:

$$a_{1r}a_{1s} + a_{2r}a_{2s} + \ldots + a_{nr}a_{ns} = \delta_{rs}.$$

Д. римановa пространства — взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение класса C^s, $s\geqslant 2$, при к-ром сохраняются длины соответствующих линий. Линейный элемент пространства

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, \ldots, x^n)\, dx^\alpha dx^\beta,$$

где по индексам α, β производится суммирование, инвариантен относительно Д. Аналитически Д. определяется формулами, выражающими координаты преобразованной точки $\tilde{M}(\tilde{x}^i)$ через координаты исходной точки $M(x^i)$ при помощи функций $f^i(x)$ класса C^s:

$$\tilde{x}^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n), \qquad (*)$$
$$\alpha = 1, 2, \ldots, n.$$

Условие инвариантности линейного элемента означает, что

$$g_{\alpha\beta}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \ldots, \tilde{x}^n)\frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\tilde{x}^\beta}{\partial x^j} = g_{ij}(x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

Важное значение имеет понятие Д. в римановых пространствах общей теории относительности: в сильных асимметрических гравитационных полях твердые тела могут иметь лишь весьма ограниченные движения. Возможны также случаи, когда они не будут вовсе допускать никаких Д. В последней ситуации при любом преобразовании пространства метрика не остается инвариантной. Другими словами, любое перемещение сопровождается деформацией тела.

Д. пространства аффинной связности — взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение класса C^s, $s\geqslant 2$, при к-ром всякое поле параллельных векторов вдоль любой гладкой линии переходит в поле параллельных векторов преобразованной кривой. При Д. объект аффинной связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)$ переходит в себя. Обратно, всякое отображение $(*)$, переводящее объект аффинной связности в себя, есть Д.

Д. составляют группу преобразований (см. *Движений группа*). Они являются простейшими преобразованиями пространства.

Лит.: [1] Егоров И. П., Лекции по аксиоматике Вейля и неевклидовым геометриям, Рязань, 1973; [2] его же, Дви-

жения в пространствах аффинной связности, Казань, 1965; [3] Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П., Геометрия, т. 1, М., 1974. *И. П. Егоров.*

ДВИЖЕНИЙ ГРУППА — непрерывная группа преобразований пространства, элементами к-рой являются *движения* этого пространства, а групповой операцией — последовательное выполнение в указанном порядке двух движений. В широком смысле, любая группа непрерывных преобразований пространства может быть сделана Д. г. этого пространства. А именно, введение для заданной группы понятия равенства фигур приводит к нек-рой новой геометрии, в к-рой эта группа служит Д. г. (см. *Эрлангенская программа*).

Д. г. наз. транзитивной Д. г., если для любых двух точек пространства можно указать в данной группе движение, к-рое переводит одну точку в другую, и интранзитивной Д. г., если существуют пары точек, для к-рых такого движения указать нельзя.

Пространство, в к-ром можно ввести заданную Д. г., наз. пространством, допускающим эту Д. г. Если Д. г. пространства имеет максимальный порядок, то она наз. полной Д. г. Напр., полная транзитивная Д. г. n-мерного евклидова пространства есть группа порядка $n(n+1)/2$, т. е. группа, зависящая от $n(n+1)/2$ параметров. В частном случае евклидовой плоскости в качестве параметров полной Д. г. можно взять координаты точки, в к-рую переходит начало координат, и угол поворота, т. е. эта Д. г.— трехпараметрическая. Д. г. G евклидовой плоскости есть некоммутативная разрешимая группа. Ее подгруппа вращений H коммутативна и интранзитивна, а подгруппа N параллельных переносов коммутативна и транзитивна и является нормальным делителем Д. г. Пересечение этих двух подгрупп — единица Д. г. Факторгруппа G/N изоморфна H, коммутант Д. г. G содержится в N. В качестве параметров полной Д. г. трехмерного евклидова пространства можно взять координаты точки $O(a, b, c)$, в к-рую переходит начало, и *эйлеровы углы*, т. е. эта Д. г.— шестипараметрическая.

Исследования по Д. г. в обобщенных дифференциально-геометрич. пространствах ведутся одновременно по нескольким направлениям, важнейшими из к-рых являются следующие.

1) Направление теоретико-группового характера [3]. Это — построение в пространстве, в к-ром действует группа преобразований, инвариантной метрики или связности.

2) Изучение Д. г. в заданных пространствах, т. е. групп, к-рые допускает пространство с заданной метрикой или связностью (см. [1], [2]).

3) Направление, пограничное с первыми двумя и состоящее в изучении лакун и *лакунарных пространств*, т. е. либо построение пространств, допускающих полную Д. г. заданного порядка, либо доказательство несуществования пространств определенного типа, допускающих ту или иную заданную Д. г.

Напр., n-мерное аффинное пространство допускает Д. г. максимального порядка $r=n^2+n$. Порядки Д. г. других пространств аффинной связности принадлежат отрезку натурального ряда $[1, n^2+n]$, но не каждое число из этого отрезка может быть порядком полной Д. г.

Интервалы наибольшей длины, составленные из чисел, не являющихся порядками полных Д. г., наз. лакунами, а дополнения к ним до указанного отрезка натурального ряда — отрезками конденсации. Пространство наз. пространством k-й лакунарности, если порядок его полной Д. г. принадлежит отрезку конденсации, имеющему номер k. Основная проблема состоит в распределении лакун и отрезков конденсации возможных по-

рядков полных Д. г., определении для последних самих Д. г. и соответствующих им лакунарных пространств. Этот вопрос тесно связан с исследованием степеней подвижности твердых тел.

Полную Д. г. порядка $n(n+1)/2$ допускает лишь риманово пространство постоянной кривизны. Во всяком другом случае Д. г. пространства имеет меньшее число параметров. Многообразие аффинной связности допускает полную Д. г. (порядка $n(n+1)$) тогда и только тогда, когда связность симметрична, а кривизна равна нулю; при этом Д. г. является общей *линейной группой*.

Лит.: [1] Егоров И. П., в кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 375—428; [2] его же, Движения в пространствах аффинной связности, Казань, 1965; [3] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967. *И. П. Егоров.*

ДВОЕТОЧИЕ — топологич. пространство F, состоящее из двух точек. Если в F открыты оба одноточечных подмножества (и тогда оба замкнуты), то F наз. простым двоеточием. Если в F открыто лишь одно из двух одноточечных подмножеств, то F наз. связным двоеточием. Наконец, если в F открыты лишь пустое подмножество и все F, то F называется слипшимся двоеточием. Последнее пространство, в отличие от очень важных при всей их простоте первых двух, применений не находит.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977. *А. А. Мальцев.*

ДВОИЧНАЯ ЕДИНИЦА в теории информации — то же, что *бит*.

ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ — позиционная система *счисления* с основанием, равным двум. Арифметич. операции в ней выполняются особенно просто, так как в этой системе счисления нетривиальные действия с однозначными числами сводятся к следующим двум: $1+1=10$, $1\cdot 1=1$. *В. И. Нечаев.*

ДВОИЧНЫЙ ДИСКОНТИНУУМ — топологическое произведение простых двоеточий — дискретных пространств, состоящих из двух точек.

ДВОЙНАЯ ПЛОСКОСТЬ — алгебраическая поверхность, представляющая собой двумерный аналог *гиперэллиптической кривой*. Неособая алгебраическая проективная поверхность X над алгебраически замкнутым полем k наз. двойной плоскостью, если ее поле рациональных функций $k(X)$ является квадратичным расширением поля рациональных функций от двух переменных. Если характеристика поля отлична от 2 (в дальнейшем это условие предполагается выполненным), то каждая Д. п. бирационально изоморфна аффинной поверхности, задаваемой в трехмерном аффинном пространстве уравнением

$$z^2+F(x,\ y)=0.$$

Иногда именно поверхности такого типа наз. Д. п. Для каждой Д. п. X существует морфизм f в проективную плоскость $P^2(k)$, разлагающийся в композицию бирационального морфизма

$$\varphi:\ X\to X'$$

на некоторую нормальную поверхность X' и конечного морфизма степени два

$$\varphi':X'\longrightarrow P^2(k).$$

Кривая ветвления W морфизма φ' наз. кривой ветвления Д. п. (и определяется, вообще говоря, не однозначно по X). Кривая ветвления Д. п. играет основную роль в их изучении. Напр., по ней вычисляются численные инварианты Д. п. Если W неприводима, то иррегулярность Д. п. X равна нулю. Если степень W (всегда четная) равна $2k$ и все особенности W только двойные обыкновенные или каспидаль-

ные (см. *Особая точка* алгебраической кривой), то арифметич. род $p_a(X)$ и эйлерова характеристика $\chi(X)$ (топологическая или l-адическая) вычисляются по формулам:

$$p_a(X)=\frac{(k-1)(k-2)}{2}, \quad \chi(X)=4k^2-6k+6.$$

В общем случае существует бирациональный морфизм $F\to P^2(k)$ такой, что проекция на F нормализации X расслоенного произведения X и F над $P^2(k)$ на F является конечным накрытием степени 2 с неособой (быть может, приводимой) кривой ветвления W. В этом случае имеют место формулы:

$$p_a(X)=p_a(\overline{X})=1-\frac{\chi(\overline{W})}{4}-\frac{(\overline{W})^2}{8},$$

$$\chi(\overline{X})=2\chi(F)-\chi(\overline{W}).$$

Для любой кривой W четной степени на проективной плоскости всегда существует Д. п., имеющая W в качестве своей кривой ветвления. Выбор подходящей кривой W позволяет во многих случаях решать задачу построения алгебраич. поверхности с заданными инвариантами (см. [1], [3]).

Классификация Д. п. проводится отдельно в каждом классе алгебраич. поверхностей. Описаны [5] рациональные и линейчатые Д. п.; перечислены [3] Д. п., являющиеся *эллиптическими поверхностями* или *К3-поверхностями*. Рассмотрено (см. [3], [4]) много примеров Д. п. основного типа.

Лит.: [1] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, с. 77—170; [2] Zariski O., Algebraic surfaces, B., 1971; [3] Enriques F., Le superficie algebriche, Bologna, 1949; [4] Campedelli L., «Atti Accad. naz. Lincei Rend.», ser. 6, 1932, v. 15, p. 203—8, 358—62, 536—42; [5] Jung H. W. E., «J. reine und angew. Math.», 1942, Bd 184, № 4, S. 199—237.

И. В. Долгачев.

ДВОЙНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность нек-рых элементов, занумерованных двумя индексами:

$$a_{mn},\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ n=1,\ 2,\ \ldots$$

Д. п. по сравнению с обычными последовательностями (т. е. такими, у к-рых нумерация производится одним индексом) имеют ряд специфич. особенностей: существует, напр., несколько определений пределов Д. п., не эквивалентных между собой.

Понятие двойной числовой последовательности тесно связано с понятием двойного числового ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn},$$

у к-рого как его члены, так и частичные суммы

$$S_{mn}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}u_{kl}$$

составляют Д. п. При этом для всякой двойной числовой последовательности существует ряд, для к-рого она является последовательностью его частичных сумм. См. также *Двойной ряд.*

Л. Д. Кудрявцев.

ДВОЙНАЯ ТОЧКА — один из видов *особых точек* кривой $F(x,\ y)=0$, в к-рой первые частные производные равны нулю и по крайней мере одна из вторых частных производных функции $F(x,\ y)$ не равна нулю. При исследовании строения кривой вблизи Д. т. рассматривают знак выражения

$$\Delta=\left(\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\right)_0-\left(\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}\right)_0^2.$$

Если $\Delta>0$, то Д. т. наз. изолированной точкой; напр., у кривой

$$y^2-x^4+4x^2=0$$

начало координат есть изолированная Д. т. (см. рис. 1). Если $\Delta<0$, то Д. т. наз. у з л о в о й, или т о ч к о й с а м о п е р е с е ч е н и я; напр., у кривой

$$(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2-a^4=0$$

начало координат есть узловая точка (см. рис. 2). Если $\Delta=0$, то Д. т. кривой является либо изолированной, либо характеризуется тем, что различные ветви кривой имеют в этой точке общую касательную: например, а) т о ч к а в о з в р а т а 1-г о р о д а — ветви кривой расположены по разные стороны от общей касательной и по одну сторону от общей нормали (см., напр., рис. 3; $y^2-x^3=0$); б) т о ч к а в о з в р а т а 2-г о р о д а — ветви кривой расположены по одну сторону от общей касательной и по одну сторону от общей нормали (см., напр., рис. 4; $(y-x^2)^2-x^5=0$); в) т о ч к а с а м о п р и к о с н о в е н и я — ветви кривой соприкасаются (см., напр., рис. 5; $y^2-x^4=0$).

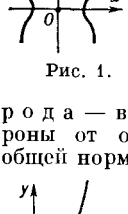


Рис. 1.

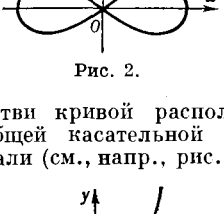


Рис. 2.

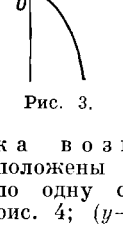


Рис. 3.

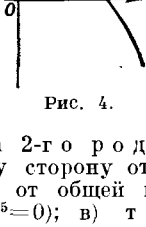


Рис. 4.

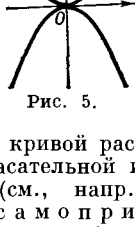


Рис. 5.

А. Б. Иванов.

ДВОЙНОГО ОТРИЦАНИЯ ЗАКОН — логический принцип, согласно к-рому «если неверно, что неверно A, то верно A». Д. о. з. наз. также з а к о н о м с н я т и я д в о й н о г о о т р и ц а н и я. В формализованном языке логики высказываний Д. о. з. выражается формулой $\neg\neg p\supset p$ и в таком виде (или в виде соответствующей *аксиом схемы*) фигурирует обычно в перечне логич. аксиом формальных теорий. В традиционной содержательной математике Д. о. з. служит логич. основанием для проведения так наз. д о к а з а т е л ь с т в о т п р о т и в н о г о в непротиворечивых теориях по следующей схеме: из предположения, что суждение A данной математич. теории неверно, выводится противоречие в этой теории, затем на основании непротиворечивости теории делается вывод, что неверно «не A», и тогда по Д. о. з. заключают, что верно A. В рамках конструктивных рассмотрений, когда действует требование алгоритмич. эффективности обоснования математич. суждений, Д. о. з. оказывается, вообще говоря, неприемлемым. Типичным тому примером служит всякое доказательство от противного суждения A, имеющего вид «при всяком x существует y такой, что верно $B(x, y)$», когда последний шаг, состоящий в применении Д. о. з., оказывается невозможным из-за того, что конструктивное понимание суждения требует для его обоснования построения алгоритма, к-рый по каждому x давал бы конструкцию y такого, что верно $B(x, y)$. Между тем рассуждение с применением Д. о. з. не приводит к построению какого бы то ни было алгоритма; более того, искомого в этом случае алгоритма может вообще не существовать (см. также *Конструктивного подбора принцип*).

Д. о. з. тесно связан с *исключенного третьего законом*, в определенном смысле он даже эквивалентен последнему. Так, в интуиционистском исчислении высказываний каждый из этих двух законов выводим из другого.

Лит.: [1] К л и н и С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

Ф. А. Кабаков.

ДВОЙНОГО СЛОЯ ПОТЕНЦИАЛ — выражение вида

$$u(x)=\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y}(h(r_{xy}))\,\mu(y)\,ds_y, \qquad (1)$$

где Γ — граница произвольной ограниченной N-мерной области $g\subset E^N$, $N\geqslant 2$, n_y — внешняя по отношению к области g нормаль к границе Γ в точке y, $\mu(y)$ — плотность потенциала — функция, заданная на Γ, $h(r_{xy})$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа

$$h(r_{xy})=\begin{cases}\frac{1}{(N-2)\,\omega_N}\,r_{xy}^{2-N}, & N>2,\\ \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{xy}}, & N=2,\end{cases} \qquad (2)$$

$\omega_N=2(\sqrt{\pi})^N/\Gamma(N/2)$ — площадь поверхности единичной $(N-1)$-мерной сферы, $r_{xy}=\sqrt{\sum_{i=1}^N(x_i-y_i)^2}$ — расстояние между точками x и $y\in E^N$. Граница Γ принадлежит классу $C^{(1,\,\lambda)}$; она является поверхностью или дугой Ляпунова.

Выражение (1) может быть истолковано как потенциал, создаваемый диполями, помещенными на Γ, направление к-рых в каждой точке $y\in\Gamma$ совпадает с направлением внешней нормали n_y, а интенсивность равна $\mu(y)$.

Если $\mu(y)\in C^{(0)}(\Gamma)$, то $u(x)$ определено для всех $x\in E^N$ (в частности и для $x\in\Gamma$) и обладает следующими свойствами.

1) Всюду в $E^N\setminus\Gamma$ функция $u(x)$ имеет производные всех порядков $(\in C^{(\infty)})$ и удовлетворяет уравнению Лапласа, причем производные по координатам точки x можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла.

2) При переходе через границу Γ функция $u(x)$ испытывает разрыв. Пусть x_0 — произвольная точка на Γ, $u^+(x_0)$ и $u^-(x_0)$ — предельные значения изнутри и извне, тогда $u^\pm(x_0)$ существуют и равны

$$u^\pm(x_0)=\pm\frac{\mu(x_0)}{2}+\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial n_y}(h(r_{x_0y}))\,\mu(y)\,ds_y, \qquad (3)$$

причем интеграл в формуле (3) как функция $x_0\in\Gamma$ принадлежит $C^{(0,\,\alpha)}$ при любом $0\leqslant\alpha<1$, кроме того, функция, равная u в g и u^+ на Γ, непрерывна в $g+\Gamma$, а функция, равная u в $E^N-(g+\Gamma)$ и u^- на Γ, непрерывна в E^N-g.

3) Если плотность $\mu(y)\in C^{(0,\,\alpha)}$ и $\alpha\leqslant\lambda$, то $u(x)$, продолженная так же, как в 2) на $g+\Gamma$ или E^N-g, принадлежит классу $C^{(0,\,\alpha)}$ в $g+\Gamma$ или в E^N-g.

4) Если $\alpha>1-\lambda$, а x_1 и x_2 — две точки, принадлежащие нормали, выходящей из точки x_0, симметричные относительно точки x_0, то

$$\lim_{x_1\to x_0}\left(\frac{\partial u(x_2)}{\partial n}-\frac{\partial u(x_1)}{\partial n}\right)=0. \qquad (4)$$

В частности, если существует одна из производных $\partial u^+(x_0)/\partial n$, $\partial u^-(x_0)/\partial n$, то существует и другая и $\partial u^+(x_0)/\partial n=\partial u^-(x_0)/\partial n$. Это свойство справедливо также, если $\mu(y)\in C^{(0)}(\Gamma)$, а $\Gamma\in C^{(2)}$.

Перечисленные выше свойства обобщаются во многих направлениях. Плотность $\mu(x)$ может принадлежать $L_p(\Gamma)$, $p\geqslant 1$. Тогда $u(x)\in L_p(g+\Gamma)$, $u(x)\in C^{(\infty)}$ вне Γ и удовлетворяет уравнению Лапласа, формулы (3) и (4) имеют место для почти всех $x_0\in\Gamma$ и интеграл в (3) принадлежит $L_p(\Gamma)$.

Изучены также свойства Д. с. п., понимаемых как интегралы по произвольной мере ν, определенной на Γ:

$$u(x)=\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial n_y}(h(r_{xy}))\,d\nu(y);$$

здесь также $u(x) \in C^{(\infty)}$ вне Γ и удовлетворяет уравнению Лапласа, формулы (3) и (4) имеют место для почти всех $x_0 \in \Gamma$ по мере Лебега $\nu(x)$ с заменой $\mu(x_0)$ на производную меры $\nu'(x_0)$. В определении (1) фундаментальное решение уравнения Лапласа может быть заменено на произвольную функцию Леви для общего эллиптич. оператора 2-го порядка с переменными коэффициентами, а $\partial/\partial n_y$ — на производную по конормали. При этом остаются справедливыми свойства, перечисленные выше (см. [2]).

Д. с. п. играет важную роль в решении краевых задач для эллиптич. уравнений. Представление искомого решения (первой) краевой задачи в виде Д. с. п. с неизвестной плотностью $\mu(y)$ и использование свойства 2) приводит к интегральному *Фредгольма уравнению* второго рода на Γ для определения функции $\mu(y)$ (см. [1], [2]).

При решении краевых задач для параболич. уравнений используется понятие т е п л о в о г о п о т е н ц и а л а д в о й н о г о с л о я, т. е. интеграл вида

$$v(x,\ t) = \int_0^t d\tau \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} (G(x,\ t;\ y,\ \tau))\, \sigma(y,\ \tau)\, dy,$$

где $G(x,\ t;\ y,\ \tau)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности в N-мерном пространстве:

$$G(x,\ t;\ y,\ \tau) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^N\ (t-\tau)^{N/2}}\ e^{-r_{xy}^2/4\,(t-\tau)},$$

$\sigma(y,\ \tau)$ — плотность потенциала. Функция $v(x,\ t)$ и ее обобщение на случай произвольного параболич. уравнения 2-го порядка обладают свойствами, аналогичными указанным выше для $u(x)$ (см. [3], [4], [5]).

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [2] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [3] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966; [4] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958; [5] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968.

И. А. Шишмарев.

ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ, с л о ж н о е (или а н г а р м о н и ч е с к о е) о т н о ш е н и е, четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 на прямой — число, обозначаемое символом $(M_1M_2M_3M_4)$ и равное

$$\frac{M_1M_3}{M_3M_2} : \frac{M_1M_4}{M_4M_2}.$$

При этом отношение M_1M_3/M_3M_2 считается положительным, если направления отрезков M_1M_3 и M_3M_2 совпадают, и — отрицательным при различных направлениях. Д. о. зависит от порядка нумерации точек, к-рый может отличаться от порядка следования точек на прямой. Наряду с Д. о. четырех точек, рассматривается Д. о. четырех прямых m_1, m_2, m_3, m_4, проходящих через точку. Это отношение обозначается символом $(m_1m_2m_3m_4)$. Оно равно

$$\frac{\sin(m_1m_3)}{\sin(m_3m_2)} : \frac{\sin(m_1m_4)}{\sin(m_4m_2)},$$

причем угол (m_im_j) между прямыми m_i и m_j рассматривается со знаком.

Если точки M_1, M_2, M_3, M_4 лежат на прямых m_1, m_2, m_3, m_4, то

$$(M_1M_2M_3M_4) = (m_1m_2m_3m_4).$$

Если точки M_1, M_2, M_3, M_4 и M_1', M_2', M_3', M_4' получены пересечением одной четверки прямых m_1, m_2, m_3, m_4, то $(M_1, M_2M_3M_4) = (M_1'M_2'M_3'M_4')$.

Д. о. является инвариантом проективных преобразований. Д. о., равное -1, наз. г а р м о н и ч е с к и м о т н о ш е н и е м (см. *Гармоническая четверка* точек).

Э. Г. Позняк.

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ — см. *Кратный интеграл.*

ДВОЙНОЙ МОДУЛЬ — 1) То же, что *бимодуль.* 2) Пара подгрупп H и F группы G, участвующая в разложении группы G на двойные смежные классы, т. е. в разбиении G на непересекающиеся подмножества вида HxF, где x — элемент из G. Подмножество HxF наз. смежным классом группы G по Д. м. (H, F), или двойным смежным классом группы G по модулю (H, F). Напр., разложение группы порядка 24 на двойные смежные классы по модулю (H, F), где H и F — ее силовские 2- и 3-подгруппы, состоит из одного смежного класса по Д. м. (H, F). Любой двойной смежный класс HxF состоит из $|H:H\cap xFx^{-1}|$ смежных классов группы G по подгруппе F и одновременно из $|F:F\cap x^{-1}Hx|$ смежных классов группы G по подгруппе H, где $|U:V|$ означает индекс подгруппы V в группе U.

Лит.: [1] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

В. Д. Мазуров.

ДВОЙНОЙ ПРЕДЕЛ — 1) Д. п. последовательности, предел двойной последовательности $\{x_{mn}\}$, $m, n=1, 2, \ldots$,— число a, определяемое следующим образом: для любого $\varepsilon>0$ существует такое N_ε, что для всех $m>N_\varepsilon$ и $n>N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$|x_{mn}-a|<\varepsilon.$$

Обозначение:

$$a=\lim_{m,\ n\to\infty} x_{mn}.$$

Если для любого $\varepsilon>0$ существует такое N_ε, что для всех $m>N_\varepsilon$ и $n>N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_{mn}|>\varepsilon$, то последовательность x_{mn} имеет своим пределом бесконечность:

$$\lim_{m,\ n\to\infty} x_{mn}=\infty.$$

Аналогично определяются бесконечные пределы

$$\lim_{m,\ n\to\infty} x_{mn}=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{m,\ n\to\infty} x_{mn}=-\infty.$$

Д. п. последовательности является частным случаем Д. п. функции по множеству, а именно в случае, когда это множество состоит из точек плоскости с целочисленными координатами m и n. Поэтому между Д. п. последовательности и ее повторными пределами существует та же связь, что и в общем случае.

2) Д. п. функции — предел функции двух переменных, определяемый следующим образом. Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве E, расположенном в плоскости XOY, а (x_0, y_0) — его *предельная точка.* Число A наз. Д. п. функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), или при $(x, y)\to(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех точек $(x, y)\in E$, координаты к-рых удовлетворяют неравенствам

$$0<|x-x_0|<\delta, \quad 0<|y-y_0|<\delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon.$$

В этом случае пишут

$$\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x, y)=A.$$

Используя понятие предела последовательности, определение Д. п. функции можно сформулировать следующим образом:

$$A=\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x, y),$$

если для любой последовательности $(x_n, y_n)\longrightarrow(x_0, y_0)$, $(x_0, y_0)\neq(x_n, y_n)\in E$, $n=1, 2, \ldots$,

выполняется условие

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = A.$$

Аналогично формулируются определения Д. п. функции при стремлении аргумента к бесконечности, а также определения бесконечных Д. п. функции.

Существует связь между Д. п. функции и *повторным пределом* функции в точке (x_0, y_0) или в ∞: пусть x_0 и y_0 — предельные точки (конечные или бесконечные) для числовых множеств X и Y, $E = X \times Y$. Если существует конечный или бесконечный Д. п. функции

$$\lim_{(x,\ y) \to (x_0,\ y_0)} f(x, y)$$

и при любом $y \in Y$ существует конечный предел

$$\varphi(y) = \lim_{x \to x_0} f(x, y),$$

то существует и повторный предел

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \varphi(y),$$

и он равен Д. п. функции.

Используя понятие окрестности, определению Д. п. функции можно придать следующий вид: пусть a — предельная точка (x_0, y_0) множества E или символ ∞, причем в последнем случае множество E неограничено, A — число или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$, тогда

$$A = \lim_{(x,\ y) \to (x_0,\ y_0)} f(x, y),$$

если для любой окрестности O_A точки или символа A существует такая окрестность O_a числа или символа a, что для всех $(x, y) \in E \cap O_a$, $(x, y) \neq a$, выполняется условие $f(x, y) \in O_A$. В этом виде определение Д. п. функции переносится на случай, когда функция f определена на произведении топологич. пространств X и Y, $x \in X$, $y \in Y$, а значения $f(x, y)$ также принадлежат нек-рому топологич. пространству. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДВОЙНОЙ РЯД — ряд

$$\sum_{m,\ n=1}^{\infty} u_{mn}, \qquad (1)$$

члены u_{mn}, $m, n = 1, 2, \ldots$, к-рого образуют двойную числовую последовательность. Конечные суммы

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_{mn}$$

наз. частичными суммами Д. р. (1), или прямоугольными частичными суммами. Они также образуют двойную последовательность. Если у этой последовательности $\{S_{mn}\}$ существует конечный *двойной предел*

$$S = \lim_{m,\ n \to \infty} S_{mn}, \qquad (2)$$

то ряд (1) наз. сходящимся, а число S — его суммой:

$$S = \sum_{m,\ n=1}^{\infty} u_{mn}.$$

Если конечного предела (2) не существует, то ряд (1) наз. расходящимся. На Д. р. переносятся многие свойства обычных (однократных) рядов. Напр., если Д. р.

$$\sum_{m,\ n=1}^{\infty} a_{mn} \quad \text{и} \quad \sum_{m,\ n=1}^{\infty} b_{mn}$$

сходятся, то при любых числах λ и μ Д. р.

$$\sum_{m,\ n=1}^{\infty} (\lambda a_{mn} + \mu b_{mn})$$

также сходится и

$$\sum_{m,\,n=1}^{\infty}(\lambda a_{mn}+\mu b_{mn})=\lambda\sum_{m,\,n=1}^{\infty}a_{mn}+\mu\sum_{m,\,n=1}^{\infty}b_{mn}.$$

Если Д. р. сходится, то

$$\lim_{m,\,n\to\infty}u_{mn}=0$$

(необходимое условие сходимости ряда (1)). Для того чтобы Д. р. (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало такое число N_ε, что

$$|S_{m+k,\,n+l}-S|<\varepsilon,$$

если только $m>N_\varepsilon$, $n>N_\varepsilon$, а k и l — любые неотрицательные целые. Если все члены ряда (1) неотрицательны, то последовательность его частичных сумм S_{mn} всегда имеет конечный или бесконечный предел, причем

$$\lim_{m,\,n\to+\infty}S_{mn}=\sup_{m,\,n=1,\,2,\,\ldots}S_{mn}.$$

Д. р. обладают свойствами, обусловленными наличием у его членов двух индексов, к-рые являются специфич. особенностью Д. р. Если сходится Д. р. (1) и для всех $n=1, 2, \ldots$ сходятся ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty}u_{mn},$$

то повторный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}u_{mn}\right)$$

также сходится и его сумма равна сумме данного ряда.

Д. р. наз. а б с о л ю т н о с х о д я щ и м с я, если сходится ряд

$$\sum_{m,\,n=1}^{\infty}|u_{mn}|.$$

Если Д. р. абсолютно сходится, то он и просто сходится; более того, сходится любой ряд, полученный перестановкой членов данного Д. р. При этом сумма любого такого ряда совпадает с суммой исходного ряда.

На Д. р., члены к-рых являются функциями, переносятся многие понятия и свойства, присущие обычным функциональным рядам, напр., понятие равномерной сходимости, критерий Коши равномерной сходимости ряда, признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Вместе с тем, далеко не все теоремы об однократных рядах непосредственно переносятся на Д. р. Так, прямой аналог *Абеля теоремы* для степенных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

не справедлив для двойных степенных рядов, т. е. рядов вида

$$\sum_{m,\,n=0}^{\infty}c_{mn}x^my^n. \qquad (3)$$

Существуют, напр., Д. р. (3), к-рые сходятся только в двух точках плоскости: ряд (3) с коэффициентами

$$c_{0n}=c_{n0}=-c_{1n}=-c_{n1}=n!,$$
$$n=1,\,2,\,\ldots,\ c_{mn}=0,\ m\geqslant 2,\ n\geqslant 2,$$

сходится только в двух точках (0, 0) и (1, 1).

Кроме определения (2) для Д. р. (1) существуют другие определения его сходимости и суммы, связанные также с наличием у его членов двух индексов. Напр., пусть

$$S_p=\sum_{m+n\leqslant p}u_{mn},\quad p=1,\,2,\,\ldots$$

(S_p наз. треугольной частичной суммой Д. р. (1)), то Д. р. (1) наз. сходящимся, если последовательность $\{S_p\}$ сходится; ее предел

$$S = \lim_{p \to \infty} S_p,$$

наз. треугольной суммой ряда (1).

Если положить

$$S_r = \sum_{m^2+n^2 \leqslant r^2} u_{mn}, \quad r > 0$$

(S_r наз. круговой частичной суммой), то Д. р. (1) наз. сходящимся, если функция S_r параметра r имеет предел при $r \to +\infty$, этот предел

$$S = \lim_{r \to +\infty} S_r,$$

наз. круговой суммой ряда (1).

Если через $\mathfrak{N}$ обозначить произвольное конечное множество пар индексов (m, n) и положить

$$S_{\mathfrak{N}} = \sum_{(m,\ n) \in \mathfrak{N}} u_{mn},$$

то число S наз. суммой ряда (1), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное множество $\mathfrak{N}_\varepsilon$ пар индексов (m, n), что для любого $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}_\varepsilon$ выполняется неравенство $|S - S_{\mathfrak{N}}| < \varepsilon$. Если такое число S существует, то ряд (1) наз. сходящимся.

Все эти определения сходимости Д. р. (1) не эквивалентны между собой. Однако, если члены Д. р. неотрицательны, то из сходимости в одном из указанных смыслов следует сходимость во всех остальных, причем все значения сумм Д. р. (1) в этом случае совпадают. Имеются и другие определения сходимости Д. р. Для Д. р. существуют различные методы суммирования.

Понятие Д. р. обобщается на случай, когда его члены являются не числами, а, напр., элементами линейного нормированного пространства.

Лит.: [1] Pringsheim A., «Münchener Sitzungsber. der Math.», 1897, Bd 27, S. 101—53; [2] его же, «Math. Ann.», 1900, Bd 53, S. 289—321; [3] его же, Vorlesungen über Zahlenlehre, Bd 2, Lpz.— B., 1923; [4] Bromwich T. J., Theory of infinite series, 2 ed., L., 1926; [5] Салехов Г. С., Вычисление рядов, М., 1955; [6] Уиттекер Э.-Т., Ватсон Д.-Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1963. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДВОЙНЫЕ И ДУАЛЬНЫЕ ЧИСЛА — *гиперкомплексные числа* вида $a+be$, где a и b — действительные числа, и для двойных чисел $e^2=+1$, а для дуальных чисел $e^2=0$. Сложение Д. и д. ч. определяется формулой

$$(a_1+b_1e)+(a_2+b_2e)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)e.$$

Умножение двойных чисел производится по формуле

$$(a_1+b_1e)(a_2+b_2e)=(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)e,$$

а дуальных чисел — по формуле

$$(a_1+b_1e)(a_2+b_2e)=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)e.$$

Комплексные числа, двойные числа и дуальные числа наз. также комплексными числами гиперболического, эллиптического и параболического типов соответственно. Иногда при помощи этих чисел изображают движения трехмерных пространств Лобачевского, Римана и Евклида (см., напр., *Винтовое исчисление*).

Как двойные, так и дуальные числа образуют двумерные (с базой 1 и e) ассоциативно-коммутативные алгебры над полем действительных чисел. В отличие от поля комплексных чисел эти алгебры содержат делители нуля, причем в алгебре двойных чисел все делители нуля имеют вид $a \neq ae$. Алгебра двойных чисел может быть разложена в прямую сумму двух полей действительных чисел. С этим свойством связано еще

одно название двойных чисел — расщепляемые комплексные числа. Встречается и другое наименование двойных чисел — паракомплексные числа. Алгебра дуальных чисел рассматривается не только над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел, но и над произвольным полем или коммутативным кольцом. Пусть A — коммутативное кольцо с единицей и M есть A-модуль. Прямая сумма A-модулей $A \oplus M$ относительно умножения

$$(a,\ m)(a',\ m') = (aa',\ am' + a'm)$$

является коммутативной A-алгеброй и обозначается $I_A(M)$. Она наз. алгеброй дуальных чисел относительно модуля M. A-модуль M отождествляется с идеалом алгебры $I_A(M)$, служащим ядром пополняющего гомоморфизма

$$\varepsilon: I_A(M) \longrightarrow A \quad ((a,\ m) \longrightarrow a).$$

При этом квадрат M^2 данного идеала равен нулю, а $I_A(M)/M \simeq A$. Если A — регулярное кольцо, то верно и обратное: если B есть A-алгебра и M — идеал в B такой, что $M^2 = 0$ и $B/M \simeq A$, то $B \simeq I_A(M)$, где M рассматривается как A-модуль (см. [4]).

При $M = A$ алгебра $I_A(M)$ (обозначаемая в этом случае I_A) изоморфна факторалгебре алгебры многочленов $A(T)$ по идеалу T^2. Многие свойства A-модуля M можно переформулировать как свойства алгебры $I_A(M)$, что позволяет сводить многие вопросы об A-модулях к соответствующим вопросам в теории колец (см. [2]).

Если B — произвольная A-алгебра, φ: $B \to A$ — гомоморфизм и ∂: $B \to M$ — *дифференцирование* B со значением в A-модуле M, рассматриваемом как B-модуль относительно гомоморфизма φ, то отображение $\overline{\partial}: B \to I_A(M)$ $(b \to (\varphi(b), \partial(b)))$ является гомоморфизмом A-алгебры. Обратно, для любого гомоморфизма A-алгебр $f: B \to I_A(M)$ композиция $\varepsilon' \circ f: B \to M$, где $\varepsilon': I_A(M) \to M$ — проекция A на M, является A-дифференцированием B со значением в M, рассматриваемом как B-модуль относительно гомоморфизма $\varepsilon \circ f: B \to A$. Это свойство Д. и д. ч. используется для определения касательного пространства к произвольному функтору на категории схем [1], [3].

Лит.: [1] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [2] Fossum R., Trivial extensions of abelian categories, B., 1975; [3] Schémas en groupes, I, B., 1970; [4] Lichtenbaum S., Schlessinger M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1967, v. 128, № 1, p. 41—70.

И. В. Долгачев.

ДВОЙСТВЕННАЯ КАТЕГОРИЯ, дуальная категория, к категории C — категория C° с теми же объектами, что и C и с множествами морфизмов $\mathrm{Hom}_{C^\circ}(A,\ B) = \mathrm{Hom}_C(B,\ A)$ («обращение стрелок»). Композиция морфизмов u с v в категории C° определяется как композиция v с u в C. Понятия и утверждения, относящиеся к категории C, заменяются двойственными понятиями и утверждениями в C°. Так, понятие эпиморфизма двойственно понятию мономорфизма, понятие проективного объекта — понятию инъективного объекта, прямое произведение — прямой сумме и т. д. Контравариантный функтор на C становится ковариантным на C°.

Иногда двойственная категория имеет непосредственную реализацию: так, категория дискретных абелевых групп эквивалентна Д. к. к категории компактных абелевых групп *(Понтрягина двойственность)*, а категория афинных схем эквивалентна Д. к. к категории коммутативных колец с единицей.

В. И. Данилов.

ДВОЙСТВЕННОСТИ ПРИНЦИП — 1) Д. п. в математической логике — теорема о взаимозаменяемости в определенном смысле логич. операций в формулах формальных логических и логико-пред-

метных языков. Пусть A — формула языка логики высказываний или логики предикатов, не содержащая знака импликации $\supset$: формула A^* наз. двойственной формуле A, если она может быть получена из A заменой в A каждого *вхождения* символов $\&$, $\vee$, $\forall$, $\exists$ двойственными им операциями, т. е. соответственно символами $\vee$, $\&$, $\exists$, $\forall$. Д. п. гласит, что если $A \supset B$ истинно, то истинно $B^* \supset A^*$. В частности, если формулы A и B эквивалентны, то эквивалентны и двойственные им формулы A^* и B^*. Д. п. справедлив для классич. систем, при этом эквивалентность и истинность формул в его формулировке могут пониматься как в терминах интерпретаций, так и в смысле выводимости в соответствующем классич. исчислении. При конструктивном понимании формул Д. п. перестает действовать. Так, напр., в языке логики высказываний импликация $\neg A \& \neg B \supset \neg (A \vee B)$ конструктивно верна и даже выводима в *Гейтинга формальной системе*, однако обратная импликация двойственных формул $\neg (A \& B) \supset \neg A \vee \neg B$ конструктивно неверна (напр., нереализуема по Клини — Роузу).

С Д. п. тесно связана следующая теорема: если $F^*(A_1, \ldots, A_n)$ — формула, двойственная пропозициональной или предикатной формуле $F(A_1, \ldots, A_n)$, построенной без употребления импликации из элементарных высказываний $A_1, \ldots, A_n$, то формула $\neg F(A_1, \ldots, A_n)$ эквивалентна формуле $F^*(\neg A_1, \ldots, \neg A_n)$ в классич. исчислении высказываний или предикатов, соответственно.

Лит.: [1] Новиков П. С., Элементы математической логики, М., 1959; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *Ф. А. Кабаков.*

2) Д. п. в геометрии — принцип, формулируемый в нек-рых разделах геометрии и заключающийся в том, что, заменяя в любом верном предложении все входящие в него понятия на двойственные им, получают верное (двойственное первому) предложение.

Справедливость Д. п. в проективной геометрии вытекает из того, что каждой аксиоме проективной геометрии соответствует двойственное предложение, являющееся либо аксиомой, либо теоремой.

В проективной геометрии на плоскости двойственными являются понятия:

точка	прямая
точка, инцидентная прямой	прямая, инцидентная точке
алгебраическая линия порядка n	алгебраический пучок прямых класса n
касательная прямая к линии	характеристическая точка пучка

Если считать отношением инцидентности между точкой и линией второго порядка принадлежность точки линии второго порядка, а отношением инцидентности прямой с линией второго порядка — касание прямой к линии второго порядка, то понятием, двойственным линии второго порядка, является линия второго порядка. Примером пары двойственных утверждений могут служить *Брианшона теорема* и *Паскаля теорема*. В проективной геометрии в пространстве двойственны понятия точки и плоскости; понятие прямой само себе двойственно.

Д. п. имеет место и в эллиптич. геометрии, где, кроме понятий проективной геометрии, двойственными являются понятия отрезка и угла. Так, напр., в эллиптич. геометрии справедливы следующие два двойственных утверждения:

два треугольника равны, если три стороны одного соответственно равны трем сторонам другого	два треугольника равны, если три угла одного соответственно равны трем углам другого

Лит.: [1] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 5 изд., М., 1971. *А. С. Пархоменко.*

3) Д. п. в проективной геометрии состоит в том, что любой теореме относительно подпространств S_a, S_b, ... *проективного пространства* Π_n их пересечений и сумм соответствует теорема относительно подпространств S_{n-a-1}, S_{n-b-1}, ... их сумм и пересечений. Д. п. определяется двойственным характером аксиом проективной геометрии и вытекающих из них теорем. Для проективного пространства $\Pi_n(X)$ над телом K Д. п. справедлив тогда и только тогда, когда K допускает инверсный автоморфизм. В общем случае имеет место двойственность между проективными пространствами $\Pi_n(X)$ и $\Pi_n(K^*)$, тела K и K^* к-рых инверсно изоморфны: таковы, напр., левое и правое проективные пространства $P_n^l(K)$ и $P_n^r(K)$ над K (см. *Проективная алгебра*, *Корреляция*), причем соответствие между ними, т. е. соответствие между S_k и S_{n-k-1} определяется выбором пары координатных систем в $\Pi_n(K)$ и $\Pi_n(K^*)$. Д. п. можно обосновать также с помощью дуальных отображений линейных пространств $\theta_{n+1}(K)$ над телом, к-рые используются для интерпретации проективных пространств. *М. И. Войцеховский.*

4) Д. п. в частично упорядоченных множествах: если верна какая-либо теорема о частично упорядоченных множествах, сформулированная в общелогич. терминах и терминах порядка, то верна и двойственная ей теорема. Для получения теоремы, двойственной к данной, все высказывания и понятия, относящиеся к порядку, заменяются на двойственные (т. е. все знаки порядка $\leqslant$ заменяются на $\geqslant$, и обратно), а общелогич. термины остаются без изменений. Из справедливости нек-рого утверждения для конкретного частично упорядоченного множества (или для конкретного класса частично упорядоченных множеств) еще не вытекает справедливость двойственного утверждения для этого множества. Так, частично упорядоченное множество может иметь наименьший элемент, но не иметь наибольшего, оно может удовлетворять условию минимальности, но не удовлетворять условию максимальности. Справедливость Д. п. вытекает из того, что отношение, обратное к частичному порядку, само является частичным порядком. Иногда под Д. п. понимают именно это утверждение. *Т. С. Фофанова.*

ДВОЙСТВЕННОСТЬ — 1) Д. в алгебраической геометрии — двойственность между различными пространствами когомологий на алгебраич. многообразиях.

Когомологии когерентных пучков. Пусть X — неособое проективное алгебраич. многообразие размерности n над алгебраически замкнутым полем k, а $\mathscr{L}$ — локально свободный пучок на X. Теорема двойственности Серра утверждает, что конечномерные линейные векторные пространства когомологий $H^i(X, \mathscr{L})$ и $H^{n-i}(X, \check{\mathscr{L}} \otimes \omega_X)$ двойственны друг другу. Здесь $\omega_X = \Omega_X^n$ — пучок ростков регулярных дифференциальных форм n-й степени на X, а $\check{\mathscr{L}} = \mathrm{Hom}(\mathscr{L}, \mathcal{O}_X)$ — двойственный к $\mathscr{L}$ локально свободный пучок. В случае, когда $\mathscr{L} = \mathcal{O}_X(D)$ — обратимый пучок, соответствующий дивизору D на X, эта теорема устанавливает равенство

$$\dim H^i(X, \mathcal{O}_X(D)) = \dim H^{n-i}(X, \mathcal{O}_X(K-D)),$$

где K — канонич. дивизор на X. При $n=1$ эквивалентное этому равенство было найдено еще в 19 в. Существует обобщение теоремы Серра на случай когомологий произвольных когерентных пучков на полных алгебраич. многообразиях (см. [1], [4]). В частности, когда многообразие X есть подмногообразие Коэна — Маколея (напр., локально полное пересечение) коразмерности d в неособом проективном многообразии Y,

имеет место Д. между k-пространством $H^i(X, \mathcal{F})$ и пространством глобальных Ext'ов

$$\mathrm{Ext}^{n-i}(X; \mathcal{F}, \tilde{\omega}_X),$$

где $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X, $\tilde{\omega}_X = \mathrm{Ext}^d_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \omega_Y)$ (дуализирующий пучок Гротендика), а $n = \dim X$. При этом пучок $\tilde{\omega}_X$ является обратимым в том и только в том случае, когда X есть схема Горенштейна (см. *Горенштейна кольцо*).

Этальные когомологии. Пусть X — полное связное неособое алгебраич. многообразие размерности d над алгебраически замкнутым полем k, n — целое число, взаимно простое с характеристикой поля k, $\mathcal{F}$ — локально свободный (в этальной топологии) пучок $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-модулей на X, μ_n — пучок корней n-й степени из единицы. Существует невырожденное спаривание $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-модулей [6]:

$$H^i(X, \mathcal{F}) \times H^{2d-i}(X, \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mu_n^{\otimes d})) \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Более общая теорема Д. относится к гладким, но необязательно полным многообразиям [5]. Существует невырожденное спаривание $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-модулей

$$H^i_c(X, \mathcal{F}) \times H^{2d-i}\left(X, \mathrm{Hom}\left(F, \mu_n^{\otimes d}\right)\right) \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

где слева стоят когомологии с компактными носителями. Если поле k есть алгебраич. замыкание поля k', $X = X' \otimes_k k$ и $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \otimes_k k$, то группа Галуа $\mathrm{Gal}(k/k')$ действует на $H^i(X, \mathcal{F})$ и предыдущее спаривание есть спаривание $\mathrm{Gal}(k/k')$-модулей.

Аналогом первой из приведенных теорем Д. для l-адических когомологий является теорема двойственности Пуанкаре: существует невырожденное спаривание $\mathbb{Z}_l$-модулей

$$H^i(X, \mathbb{Z}_l) \times H^{2d-i}(X, \mathbb{Z}_l[d]) \longrightarrow \mathbb{Z}_l,$$

где $\mathbb{Z}_l[d]$ — пучок Тейта, неканонически изоморфный пучку $\mathbb{Z}_l$ (см. *l-адические когомологии*). Отсюда следует изоморфизм $\mathbb{Q}_l$-пространств

$$H^i(X, \mathbb{Q}_l) \cong \mathrm{Hom}(H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}_l)(d), \mathbb{Z}_l)$$

и, в частности, равенство чисел Бетти

$$b_i(X; l) = b_{2d-i}(X; l).$$

Так же, как и в случае когомологий когерентных пучков, имеется обобщение предыдущих результатов на относительный случай собственного морфизма схем, формулируемый на языке производных категорий [6].

Другие теории когомологий. Аналоги теоремы Пуанкаре имеют место для теории кристальных когомологий [7], когомологий де Рама над полем нулевой характеристики [8]. В теоретико-числовых приложениях важную роль играют когомологии пучков на плоской топологии Гротендика числовых схем. В отдельных частных случаях для таких когомологий также имеются теоремы Д. [9].

Лит.: [1] Гротендик А., в сб.: Международный математический конгресс в Эдинбурге, М., 1962, с. 116—37; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 47—112; [3] Серр Ж.-П., в сб. переводов: Расслоенные пространства и их приложения, М., 1958, 372—450; [4] Hartshorne R., Residues and duality, B., 1966; [5] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, t. 3, B., 1973; [6] Verdier J. L., в кн.: Proceedings of a Conference on Local Fields, B., 1967, S. 184—98; [7] Berthelot P., Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$, B., 1974; [8] Hartshorne R., Ample subvarieties of algebraic varieties, B., 1970; [9] Mazur B., «Amer. J. Math.», 1970, v. 92, p. 343—61; [10] Altman A., Kleiman S., Introduction to Grothendieck duality theory, B., 1970.

И. В. Долгачев.

2) Д. в алгебраической топологии — положение, когда значения одних топологич. инвариантов определяют значения других. Д. в алгебраич.

топологии выражается: в Д. (в смысле теории характеров) между группами гомологии и когомологии одной и той же размерности при двойственных группах коэффициентов; в изоморфизме между группами гомологии и когомологии дополнительных размерностей многообразия (*Пуанкаре двойственность*); в изоморфизме между группами гомологии и когомологии взаимно дополнительных множеств пространства (*Александера двойственность*); во взаимозаменяемости в определенных ситуациях гомотопических и когомотопических, а также гомологич. и когомологич. групп, к-рая без дополнительных ограничений на размерность пространства имеет место не для обычных, а для *S*-гомотопич. и *S*-когомотопич. групп (см. *S-двойственность*).

Д. между гомологиями и когомологиями состоит в следующем. Пусть $\{H_r(X, A), f_*, \partial\}$ — произвольная *гомологии теория* над нек-рой допустимой категорией пар пространств и их отображений, т. е. система, удовлетворяющая *Стинрода — Эйленберга аксиомам* теории гомологий с дискретной или компактной абелевой группой $H_r(X, A)$. Тогда система $\{H^r(X, A), f^*, \delta\}$, где $H^r(X, A)$ — группа характеров группы $H_r(X, A)$, а f^* и δ — гомоморфизмы, сопряженные соответственно гомоморфизмам f_* и ∂, удовлетворяет аксиомам Стинрода — Эйленберга теории гомологий и стало быть представляет собой теорию когомологии над той же категорией с компактной или, соответственно, дискретной группой $H^r(X, A)$. Подобным же образом для каждой теории когомологии может быть построена двойственная теория гомологии. Следовательно, теории гомологии и когомологии составляют двойственные пары; при этом, преобразование одной теории в другую, с точностью до естественных эквивалентностей, является инволюцией. Для любой теоремы теории гомологии, т. е. теоремы относительно системы $\{H_r(X, A), f, \partial\}$, существует двойственное утверждение относительно системы $\{H^r(X, A), f^*, \delta\}$, т. е. теорема теории когомологии, и наоборот. При переходе к двойственному утверждению группы заменяются их группами характеров, гомоморфизмы меняют направление, подгруппы заменяются факторгруппами, и наоборот. Примерами могут служить сами аксиомы Стинрода — Эйленберга. В случае конкретных категорий или теорий построение этой Д. осуществляется, напр., следующим образом. Пусть $K=\{t^r\}$ (конечный) комплекс. За произведение r-мерной цепи c_r комплекса K над дискретной или компактной группой X коэффициентов и r-мерной коцепи c^r комплекса K над группой X^* коэффициентов, двойственной X в смысле теории характеров, принимается число mod 1

$$(c_r,\ c^r)=\sum_{t^r\ \in\ K} c_r\,(t^r)\,c^r\ (t^r).$$

Это произведение определяет умножение класса гомологии с классом когомологии и превращает r-мерные группы гомологии и когомологии в группы характеров одна другой. На бесконечных комплексах имеются группы двух видов — проекционные и спектровые. Спектровые группы гомологии являются пределами прямых спектров групп гомологии замкнутых подкомплексов, упорядоченных по возрастанию, а проекционные группы гомологии — гомологич. группами пределов прямых спектров из групп цепей указанных подкомплексов. Группы когомологии получаются аналогично, как пределы соответствующих обратных спектров. При дискретной группе коэффициентов обе гомологич. группы совпадают и дают группу гомологии конечных циклов, а при компактной группе совпадают когомологич. группы и дают группу когомологии бесконечных коциклов. Д. в случае конечных комплексов порож-

дает Д. проекционных групп между собой и спектровых групп между собой, а эти последние Д. (посредством сингулярных комплексов, нервов покрытий и т. п.) — Д. r-мерной проекционной (соответственно спектровой) группы гомологии $H_r(R,\ X)$ пространства R над дискретной или компактной группой X коэффициентов в какой-либо теории (*сингулярных гомологий, Александрова — Чеха гомологий и когомологий, Вьеториса гомологий* и т. п.) с r-мерной проекционной (соответственно спектровой) группой когомологии $H^r(R,\ X^*)$ в той же теории над группой X^*, двойственной X (см. [1], [3], [6], [9]):

$$H_r(R,\ X) \mid H^r(R,\ X^*) \text{ при } X \mid X^*.$$

Соотношения между инвариантами, выражающими связности дополнительных размерностей многообразия, были установлены в первой же работе по алгебраич. топологии — в статье А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1895), где было показано, что для n-мерного ориентируемого многообразия его p-мерное и $(n-p)$-мерное числа Бетти равны друг другу, равно как и p-мерный и $(n-p-1)$-мерный коэффициенты кручения. Эта теорема была усилена О. Вебленом (O. Veblen, 1923), сформулировавшим ее для баз гомологии, а применение групп когомологии придало ей форму, полнее выражающую содержание этой Д. Для получения этой формы следует поставить в соответствие каждой r-мерной цепи c_r, заданной на какой-либо триангуляции K гомологического n-мерного ориентированного многообразия M^n и принимающей значения из дискретной или компактной группы X коэффициентов $(n-p)$-мерную коцепь c^{n-p} клеточного комплекса K^* из барицентрических звезд K, принимающую на какой-либо звезде то значение, которое c_p имеет на соответствующем этой звезде симплексе. Указанное соответствие, в силу совпадения групп комплексов K и K^*, определяет изоморфизм групп гомологии и когомологии дополнительных размерностей многообразия M^n:

$$H_r(M^n,\ X) \sim H^{n-r}(M^n,\ X).$$

При этом X может быть и модулем, а в случае неориентируемого многообразия теорема верна по модулю 2. Замена группы $H^{n-r}(M^n,\ X)$ двойственной ей группой $H_{n-r}(M^n,\ X^*)$ приводит к Д. [1]:

$$H_r(M^n,\ X) \mid H_{n-r}(M^n,\ X^*), \text{ при } X \mid X^*,$$

представляющей интерес еще и тем, что при ней произведением оказывается индекс пересечения циклов, произвольно выбранных из перемножаемых классов (см. [1], [11], [12], [13], [15], [16]).

Большой этап, вначале теоретико-множественный, по отысканию топологич. свойств множества, к-рые определялись бы топологич. свойствами его дополнения, завершился теоремой, полученной Дж. Александером (J. Alexander, 1922) и утверждающей, что r-мерное число Бетти mod 2 полиэдра, лежащего в n-мерной сфере, равно $(n-r-1)$-мерному числу Бетти mod 2 дополнения (см. *Александера двойственность*).

В свою очередь, эта теорема положила начало ряду исследований, в сильной мере повлиявших на развитие всей алгебраич. топологии. Исследования велись в направлении обобщения классов пространств (плоскость, евклидовы пространства, сферы и многообразия любых размерностей, локально компактные пространства и т. д.), их подмножеств (полиэдры, замкнутые подмножества, произвольные подмножества) и областей коэффициентов (целые числа по модулю 2, группа целых чисел, поле рациональных чисел, другие конкретные группы и поля, произвольная абелева группа, топологич., в основном компактные, абелевы группы и т. п.), для к-рых имеет место двойственность Александера, а также усиления тех соотношений, к-рые связывают

инварианты взаимно дополнительных множеств (равенство чисел Бетти, изоморфизм групп, Д. топологических групп, естественные и связывающие гомоморфизмы и т. п.). Ряд полученных результатов может быть представлен в виде диаграммы (см. [1], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [11]):

$$\frac{H_r(A,X)}{H^r(A,X^*)} \times \frac{H_{n-r-1}(B,X^*)}{H^{n-r-1}(B,X)},$$

где X — дискретная или компактная группа коэффициентов, $X^*|X$, A и B — взаимно дополнительные множества n-мерного сферич. многообразия M^n, $H_r(A, X)$ и $H^r(A, X^*)$ — r-мерные группы гомологии и когомологии (с компактными носителями) Александрова — Чеха множества A над X и соответственно X^*, а $H_{n-r-1}(B, X^*)$ и $H^{n-r-1}(B, X)$ суть $(n-r-1)$-мерные спектровые группы гомологии и когомологии Александрова — Чеха множества B над X^* и соответственно над X. Указанные в диаграмме соотношения, полученные различными автогами и различными способами, согласованы в том смысле, что соответствующие при изоморфизмах элементы представляют собой один и тот же характер остальных групп при вертикальных и горизонтальных Д. Таким образом, они являются различными формами одной и той же теоремы двойственности. Верхняя двойственность есть Д. зацепления, т. е. при ней произведением элементов является *зацепления коэффициент* циклов, произвольно выбранных из перемножаемых классов или, в случае компактной группы X^*, определяется по непрерывности зацеплением циклов. В приведенной диаграмме группы первого столбца могут быть заменены $(r+1)$-мерными группами гомологии и когомологии Стинрода с компактными носителями, а группы второго столбца — $(n-r-1)$-мерными проекционными группами гомологии и когомологии Александрова — Чеха; тогда, в случае компактного A изоморфизм главной диагонали даст теорему двойственности Стинрода в ее первоначальном виде, если когомологич. группу множества B заменить, по теореме Пуанкаре, $(r+1)$-мерной группой гомологии бесконечных циклов. Если группа X компактна, то диаграммы изоморфны; если, кроме того, и множество A компактно, то двойственность верхней строки диаграммы представляет собой теорему, полученную Л. С. Понтрягиным в 1934 ([1], см. *Понтрягина двойственность*). О дальнейших обобщениях и направлениях см. [10], [14], [15], [16].

Важным видом двойственности Александера, касающимся связывающего гомоморфизма и аксиомы точности, является изоморфизм между группами гомологии, а также между группами когомологии соседних размерностей. Эти изоморфизмы, установленные П. С. Александровым и А. Н. Колмогоровым, утверждают, что r-мерная группа гомологии (соответственно когомологии) замкнутого множества A нормального локально бикомпактного пространства R, ациклично в размерностях r и $r+1$, над компактной (соответственно дискретной) группой X изоморфна $(r+1)$-мерной группе гомологии (соответственно когомологии) дополнения:

$$H_r(A, X) \sim H_{r+1}(R \setminus A, X)$$

и

$$H^r(A, X) \sim H^{r+1}(R \setminus A, X).$$

Из этих изоморфизмов выводится теорема Понтрягина. П. С. Александров [2] получил эти изоморфизмы из общих соотношений Д., связывающих группы гомологии и когомологии взаимно дополнительных множеств и пространства, а также ядра, образы и факторгруппы этих групп при их естественных гомоморфизмах вло-

жения и высечения. Эти соотношения несут также много другой важной информации о расположении множеств в пространстве. П. С. Александров [2] получил их с помощью спектровых групп гомологий и когомологий относительно так называемых особых подкомплексов нервов, состоящих из симплексов, замыкания вершин которых некомпактны. А. Н. Колмогоров доказал вышеуказанные изоморфизмы Д. посредством так называемых функциональных групп гомологий и когомологий (см. *Колмогорова двойственность*). Указанные выше и другие Д. (напр., *Лефшеца двойственность*) связаны между собой различными соотношениями. Они могут быть рассмотрены и как следствия нек-рой общей Д., в к-рой участвуют так называемые внешние группы множества, являющиеся прямым пределом групп когомологии окрестностей этого множества, упорядоченных по вложению (см. [3], [4], [5], [6], [7], [12], [13]). Связи между различными Д. приобретают новый вид при их рассмотрении с помощью *пучков теории*.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 2, с. 21—44; [2] Александров П. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1942, т. 6, с. 227—82; [3] его же, «Матем. сб.», 1947, т. 21, № 2, с. 161—232; [4] его же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1955, т. 48, с. 1—108; 1959, т. 54, с. 1—136; [5] Чогошвили Г. С., «Докл. АН СССР», 1946 т. 51, № 2, с. 87—90; [6] его же, «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4, с. 23—34; [7] Kaplan S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 62, p. 248—71; [8] Ситников К. А., «Матем. сб.», 1954, т. 34, с. 3—54; 1955, т. 37, с. 385—434; 1959, т. 48, с. 213—26; [9] Берикашвили Н. А., «Тр. Тбил. матем. ин-та», 1957, т. 24, с. 409—84; [10] Баладзе Д. С., там же, 1972, т. 41, с. 41—83; [11] Bourgin D., Modern Algebraic Topology, N. Y.—L., 1963; [12] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [13] Switzer R. M., Algebraic Topology Homotopy and Homology, B.—Heid.—N. Y., 1975; [14] Скляренко Е. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 4, с. 831—43; [15] Borel A., Moore J. C., «Michig. Math. J.», 1960, v. 7, p. 137—60; [16] Bredon G. E., Sheaf Theory, N. Y., [1967].

Г. С. Чогошвили.

3) Д. в теории аналитических пространств — двойственность между различными векторными топологич. пространствами когомологий комплексных пространств. Имеются три типа теорем Д., соответствующие двойственностям Пуанкаре, Лефшеца и Александера — Понтрягина в топологии, но относящиеся к пространствам когомологий $H^p_\Phi(X, \mathcal{F})$ комплексного пространства X со значениями в когерентном аналитич. пучке $\mathcal{F}$ и носителями в семействе Φ или их факторпространствам (см. *Когомологии со значениями в пучке*).

Первому типу принадлежит теорема двойственности Серра [1]. Пусть X — комплексное многообразие размерности n со счетной базой, Ω — пучок голоморфных дифференциальных форм степени n, а $\mathcal{F}$ — локально свободный аналитич. пучок на X. Для каждого целого p, $0 \leqslant p \leqslant n$, определено билинейное отображение

$$H^p(X, \mathcal{F}) \times H_c^{n-p}(X, \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \Omega)) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (*)$$

которое можно записать как композицию $\cup$-умножения

$$H^p(X, \mathcal{F}) \times H_c^{n-p}(X, \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \Omega)) \longrightarrow H_c^n(X, \Omega)$$

(с означает семейство компактных носителей) и линейной формы s на $H_c^n(X, \Omega)$, называемой следом и имеющей вид

$$s(\widehat{\omega}) = (-1)^n \int_X \omega,$$

где ω — форма типа (n, n) с компактным носителем, отвечающая классу $\widehat{\omega}$ в силу теоремы Дольбо (см. *Дифференциальная форма*). Теорема двойственности Серра утверждает, что если наделить пространства когомологий канонической локально выпуклой топо-

логией (см. *Когерентный аналитический пучок*), то отображение (*) непрерывно по первому аргументу и, при условии отделимости пространства $H^{p+1}(X, \mathcal{F})$, устанавливает изоморфизм векторных пространств:

$$(H^p(X, \mathcal{F}))' \cong H_c^{n-p}(X, \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \Omega)).$$

Пучки $\mathcal{F}$ и $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \Omega)$ можно поменять ролями, поскольку операция $\mathrm{Hom}(\cdot, \Omega)$ на локально свободных пучках инволютивна.

В частности, если многообразие X компактно, K канонический, а D — любой *дивизор* на X, то из теоремы Серра вытекает равенство размерностей пространств $H^p(X, \mathcal{O}_X(D))$ и $H^{n-p}(X, \mathcal{O}_X(K-D))$, к-рое часто используется при вычислениях с когомологиями. Известна аналогичная теорема Д. для неособых проективных алгебраич. многообразий над произвольным полем (см. *Двойственность* в алгебраич. геометрии).

В случае, когда $\mathcal{F}$ — произвольный когерентный аналитич. пучок на многообразии X, имеет место естественная топологич. Д. между отделимыми пространствами, ассоциированными с векторными топологич. пространствами $H_\Phi^p(X, \mathcal{F})$ и $\mathrm{Ext}_\Psi^{n-p}(X; \mathcal{F}, \Omega)$, где Φ — семейство замкнутых носителей, Ψ — семейство компактных носителей или наоборот, а через $\mathrm{Ext}_\Psi^{n-p}(X; \mathcal{F})$ обозначены производные функтора $\mathrm{Hom}_\Psi(X; \mathcal{F}, \cdot)$. При этом пространство $H_\Phi^p(X, \mathcal{F})$ отделимо одновременно с $\mathrm{Ext}_\Psi^{n-p+1}(X; \mathcal{F}, \Omega)$ (см. [2], [3]). Для компактного X отсюда следует изоморфизм конечномерных пространств

$$(H^p(X, \mathcal{F}))' \cong \mathrm{Ext}^{n-p}(X; \mathcal{F}, \Omega).$$

Если X — многообразие Штейна, то получается топологич. Д. между $H^0(X, \mathcal{F})$ и $\mathrm{Ext}_c^n(X; \mathcal{F}, \Omega)$ и между $H_c^p(X, \mathcal{F})$ и $\mathrm{Ext}^{n-p}(X; \mathcal{F}, \Omega)$.

Имеется также обобщение этих результатов на случай комплексных пространств с особенностями [4] и на относительный случай [5], аналогичное соответствующим теоремам Д. в алгебраич. геометрии.

Аналогом теоремы Лефшеца является следующая теорема Д. [3]: пусть X — комплексное многообразие со счетной базой размерности n, K — штейнов компакт в X. Для любого когерентного аналитич. пучка $\mathcal{F}$ на X и любого целого $p \geqslant 0$ пространство $\mathrm{Ext}^{n-p}(K; \mathcal{F}, \Omega)$ имеет топологию типа DFS (сильно сопряженное к пространству Фреше — Шварца), а его сопряженное пространство алгебраически изоморфно $H_K^p(X, \mathcal{F})$. Другая теорема того же типа [6]: в тех же предположениях, если $Y \subset X$ открыто, то пространство $H_Y^p(X, \mathcal{F})$ имеет топологию типа QFS (факторпространства Фреше — Шварца), $\mathrm{Ext}_c^{n-p}(Y; \mathcal{F}, \Omega)$ имеет топологию типа QDFS (факторпространства типа DFS), а ассоциированные с ними отделимые пространства находятся в топологич. Д. Пространство $H_Y^p(X, \mathcal{F})$ отделимо одновременно с $\mathrm{Ext}_c^{n-p+1}(Y; \mathcal{F}, \Omega)$.

Третий тип теорем Д. представлен следующей теоремой [8]: для любого открытого подмножества $Y \subset X = \mathbb{C}P^1$ — сильное сопряженное к пространству $\Gamma(Y, \mathcal{O}_X/\Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ изоморфно $\Gamma(X \setminus Y, \mathcal{O}_X)$. Эта теорема допускает следующее обобщение [7]: пусть X — n-мерное комплексное многообразие, счетное на бесконечности, $Y \subset X$ открыто, $\mathcal{F}$ — когерентный аналитич. пучок на X, $p \geqslant 0$ — целое число. Рассматриваются канонич. отображения векторных топологич. пространств

$$\alpha: H^p(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^p(Y, \mathcal{F}),$$

$$\gamma: H_{X \setminus Y}^{p+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{F}),$$

$$\beta: \mathrm{Ext}_c^{n-p-1}(X; \mathcal{F}, \Omega) \longrightarrow \mathrm{Ext}_c^{n-p-1}(X \setminus Y; \mathcal{F}, \Omega).$$

Для того чтобы отделимое пространство, ассоциированное с Coker β, было изоморфно сильному сопряженному к Coker α, необходимо и достаточно, чтобы Ker γ было замкнуто. (Известен пример, когда Ker γ не замкнуто.) В частности, если пучок $\mathcal{F}$ локально свободен и

$$H^p(X, \mathcal{F}) = H^{p+1}(X, \mathcal{F}) = 0,$$

то отделимые пространства, ассоциированные с $H^p(Y, \mathcal{F})$ и $H_c^{n-p-1}(X \setminus Y, \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \Omega))$, находятся в Д.

Лит.: [1] Serre J.-P., «Comm. math. helv.», 1955, t. 29, p. 9—26; [2] Malgrange B., Séminaire Bourbaki, 1962/63, p. 246; [3] Banica C., Stanasila O., Metode algebrice în teoria globala a spatiilor complexe, București, 1974; [4] Ramis J. P., Ruget G., «Publ. IHES», 1970, t. 38, p. 77—91; [5] их же, «Invent. math.», 1974, Bd 26, № 2, S. 89—131; [6] Головин В. Д., «Функциональный анализ», 1971, т. 5, № 4, с. 66; [7] его же, «Матем. заметки», 1973, т. 13, № 4, с. 561; [8] Grothendieck A., «J. reine und angew. Math.», 1953, Bd 122, № 1, S. 35.

В. П. Паламодов.

4) Д. в теории аналитических функций.

а) Преобразование Бореля. Э. Борелю (E. Borel, 1895) принадлежит идея преобразования каждого ряда вида:

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$$

в ряд

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n,$$

и обратно, при условии

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \sigma < +\infty.$$

Так устанавливается отношение Д. между функциями, аналитическими в окрестности бесконечно удаленной точки $|z| > \sigma$ и целыми функциями экспоненциального типа σ. На этом пути, напр., получается теорема Пойа: пусть $k(\varphi)$ — опорная функция выпуклой оболочки множества особенностей функции $a(z)$ (при аналитическом продолжении на полуплоскость вида $\mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) > c$, а

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln |A(re^{i\varphi})|}{r}$$

— индикатор роста целой функции $A(z)$; тогда

$$h(\varphi) = k(-\varphi), \quad \sigma \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

В силу этого отношения двойственности задача аналитич. продолжения функции $a(z)$ в круг $|z| < \sigma$ эквивалентна изучению роста соответствующей целой функции $A(z)$ по различным направлениям.

б) Д. в пространствах аналитич. функций. Пусть G — открытое множество расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $A(G)$ — пространство всех аналитических в G функций с топологией, задаваемой системой норм

$$p_n(f) = \max_{z \in K_n} |f(z)|, \quad f \in A(G),$$

где $\{K_n\}$ — возрастающая система компактных множеств, содержащихся в G и исчерпывающих G; таким образом, сходимость $f_n \to f$ в $A(G)$ означает равномерную сходимость $f_n(z) \to f(z)$ на всех компактных подмножествах G. Пусть $\infty \in G$, $A_0(G)$ — подпространство $A(G)$, для функций к-рого $f(\infty) = 0$, и F — компактное подмножество $\overline{\mathbb{C}}$. Рассматривается система $\mathcal{O}^F$ всех открытых множеств $G \supset F$ и множество функций $\bigcup_{G \in \mathcal{O}^F} A(G)$.

Две функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ из этого множества считаются эквивалентными, если совпадают их сужения на нек-рое множество $G \in \mathcal{O}^F$. Введенное отношение эквивалент-

ности разбивает всю рассматриваемую совокупность на классы $\overline{f}$. Каждый класс наз. локально аналитической на F функцией, и совокупность таких функций обозначается $A(F)$. Класс $A(F)$ естественным образом превращается в линейное пространство, и в нем вводится топология индуктивного предела последовательности нормированных пространств B_n. Последние строятся следующим образом. Пусть $\{G_n\}$ — убывающая последовательность множеств из $\mathcal{O}^F$ такая, что $G_{n+1}\subset G_n$ и $\forall G\in\mathcal{O}^F$

$$\exists n_0 : n \geqslant n_0 \Rightarrow G_n \subset G.$$

Тогда B_n — пространство ограниченных в G_n аналитич. функций с нормой

$$\|f\| = \max_{z\in G_n} |f(z)|.$$

Простейший факт о Д. пространств аналитических функций состоит в следующем. Пусть G — открытое множество и (для определенности) $\infty\in G$, а $F=\overline{\mathbb{C}}\setminus G$. Двойственным (сопряженным) к пространству $A_0(G)$ (в смысле теории линейных топологич. пространств) является пространство $A(F)$. Эта Д. устанавливается следующим образом: если $\Lambda(f)$ — непрерывный линейный функционал над $A_0(G)$, то существует единственный элемент $\overline{g}\in A(F)$ такой, что

$$\Lambda(f) = \int_\gamma f(z)\, g(z)\, dz,$$

где γ — некоторый (сложный) контур, идущий в G и охватывающий F, а $g\in\overline{g}$ ($\Lambda(f)$ не зависит от $g(z)\in\overline{g}$). Пространства $A(E)$ могут быть определены для произвольных множеств $E\subseteq\mathbb{C}$, а не только для рассмотренных здесь случаев, когда $E=G$ — открытое множество и $E=F$ — компакт. Дальнейшие обобщения: рассмотрение множеств на римановых поверхностях, пространств функций многих комплексных переменных, пространств векторнозначных аналитич. функций (со значениями в линейных топологич. пространствах).

Развитие теории Д. пространств аналитич. функций, с одной стороны, стимулировалось развитием общей теории Д. линейных топологич. пространств, а с другой стороны, само стимулировало развитие общей теории выявлением глубоких конкретных закономерностей. Применения Д. пространств аналитич. функций многообразны: вопросы интерполяции и аппроксимации (см. ниже), аналитическое продолжение, разделение и устранение множеств особенностей, интегральные представления различных классов функций.

в) Д. между теоремами полноты и единственности. Полнота системы элементов $\{f_n\}$ какого-либо локально выпуклого пространства X имеет место в том и только том случае, когда для произвольного линейного непрерывного в X функционала Λ из $\Lambda(f_n)=0$, $n=1, 2, \ldots$, следует $\Lambda=0$. Этот факт приводит к установлению связи между проблемами полноты в пространствах аналитич. функций и разного рода теоремами единственности для аналитич. функций. С функционалом Λ связывается (ср. п. 1) нек-рая аналитич. функция $F(z)$. Условие $\Lambda(f_n)=0$, $n=1, 2, \ldots$, приводит к равенству нулю $F(z)$ в нек-рых точках или к равенству нулю коэффициентов $F(z)$. Теоремы единственности позволяют заключить, что $F(z)\equiv 0$, а затем и что функционал $\Lambda\equiv 0$. Для пространств аналитич. функций в круге был сформулирован следующий принцип двойственности проблем единственности и полноты. Пусть A_R и A_P — соответственно пространства функций, аналитических в кругах: $|z|<R$ и $|\zeta|<P$, где $0<R$, $P\leqslant\infty$ и $F(z, \zeta)$ — функция, аналитическая в бицилиндре: $|z|<R$, $|\zeta|<P$. Пусть L

и $\underset{\zeta}{\Lambda}$ — линейные функционалы, определенные в A_R и A_P, и пусть $\mathcal{G} \subset A_R$ и $\Omega \subset A_P$ — подмножества функций, представимых соответственно в виде $\underset{\zeta}{\Lambda} F(z, \zeta)$ и $\underset{z}{L} F(z, \zeta)$. Последовательность функций $\underset{\zeta}{\Lambda}_n F(z, \zeta)$ будет полной в $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда для каждой $\varphi(\zeta) \in \Omega$ из $\underset{\zeta}{\Lambda}_n \varphi = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, следует: $\varphi(\zeta) \equiv 0$. В частности, когда $R = P = \infty$ и $F(z, \zeta) = e^{z\zeta}$, оба множества $\mathcal{G}$ и Ω совпадают с совокупностью всех целых функций экспоненциального типа.

г) Д. в экстремальных задачах теории функций. Известно, что задачи наилучшего приближения в нормированных пространствах двойственно связаны с нек-рыми линейными экстремальными задачами. Так, если E — подпространство в нормированном пространстве X и ω — произвольный элемент X, то

$$\sup_{l \in E^{\perp},\ \|l\| \leqslant 1} |l(\omega)| = \inf_{x \in E} \|\omega - x\|, \qquad (1)$$

где $E^{\perp}$ — аннулятор E, т. е. совокупность линейных функционалов l, обращающихся в нуль на элементах E. Соотношение (1), устанавливаемое на основании теоремы Хана — Банаха, оказалось впоследствии частным случаем двойственных связей экстремальных задач математич. программирования. Пусть G есть n-связная область, граница ∂G к-рой состоит из спрямляемых контуров, B^1 — класс аналитических в G функций $f(z)$, $|f(z)| \leqslant 1$, E^1 — класс аналитических в G функций, представимых интегралом Коши через свои граничные значения, $\omega(\zeta)$ — какая-либо интегрируемая функция на ∂G. Имеет место равенство:

$$\sup_{f \in B^1} \left| \int_{\partial G} f(\zeta)\, \omega(\zeta)\, d\zeta \right| = \inf_{\varphi \in E^1} \int_{\partial G} |\omega(\zeta) - \varphi(\zeta)|\, |d\zeta|. \qquad (2)$$

Слева в этом соотношении стоит линейная экстремальная задача для ограниченных функций (напр., при $\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i (\zeta - z_0)^2}$ получают задачу о $\sup_{f \in B^1} |f'(z_0)|$ — задачу о «лемме Шварца» — в многосвязной области); справа — задача наилучшего приближения произвольной функции $\omega(\zeta)$ на ∂G граничными значениями аналитич. функций в интегральной метрике. Соотношение (2) служит отправным пунктом для проникновения в каждую из двух экстремальных задач, содержащихся в нем: с его помощью устанавливаются характеристич. свойства экстремальных функций $f^*(z) \in B^1$ и $\varphi^*(z) \in E^1$, исследуется вопрос об их единственности и т. д. Функция $f^*(z)$ оказывается наделенной важными геометрич. свойствами: в задаче о лемме Шварца она отображает G на n-листный круг; в других задачах с $\omega(\zeta)$, аналитической на ∂G, функция $f^*(z)$ отображает G на $m \geqslant n$-листный круг (см. [2] — [4]).

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Избранные главы теории аналитических функций, М., 1976; [2] Итоги науки. Математический анализ. 1964, М., 1966, с. 76—164; [3] Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 75—132; [4] Итоги науки. Математический анализ. 1963, М., 1965, с. 5—80; [5] Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, М., 1960, с. 77—95.

А. И. Маркушевич, С. Я. Хавинсон.

5) Д. в теории топологических векторных пространств — тройка $\{F, G, f\}$, в к-рой F, G — векторные пространства над полем K, f — билинейный функционал (форма) в $F \times G$, обладающий свойством отделимости: если $f(x, y) = 0$ для каждого y, $y \in G$, то $x = \theta$; если $f(x, y) = 0$ для каждого x, $x \in F$, то $y = \theta$. Говорят также, что форма f

осуществляет Д., а пространства F, G находятся в Д., или образуют дуальную пару; если f фиксирована, то пишут $f(x, y)=(x, y)$. Важнейшим примером является естественная двойственность: $F=(F, \tau)$ — локально выпуклое топологическое векторное пространство с топологией τ, $G=(F, \tau)'$ — сопряженное пространство всех линейных τ-непрерывных функционалов в F и $(x, x')=x'(x)$ при $x\in F$, $x'\in G$; свойство отделимости для этой формы $(.,.)$ вытекает, напр., из локальной выпуклости топологии τ (теорема о достаточном числе функционалов — следствие теоремы Хана — Банаха). Теория Д. изучает в основном способы построения объектов в F или G, дуальных (двойственных) заданным относительно формы $(.,.)$; соответствия между свойствами взаимно дуальных объектов; топологии, порождаемые Д. Основным инструментом этого изучения является аппарат поляр (при $K=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ полярой множества A, $A\subset F$ наз. множество

$$A^\circ=\{y\in G: \operatorname{Re}(x, y)\leqslant 1,\ \forall x\in A\}).$$

Д. порождает различные локально выпуклые топологии на F (и равным образом на G); такие, напр., как слабая топология $\sigma(F, G)$ (порожденная заданной Д.), задаваемая семейством полунорм $|(\cdot, y)|$, $y\in G$, это — слабейшая топология, при к-рой все отображения $(\cdot, y)$ непрерывны; топология Макки $\mu(F, G)$ с базой окрестностей нуля, образованной полярами A° абсолютно выпуклых $\sigma(G, F)$-компактных подмножеств A в G; сильная топология $\tau^*(F, G)$, база к-рой образована полярами A^0 ограниченных подмножеств A в $(G, \sigma(G, F))$. Для любого A, $A\subset F$ множество A^{00} является выпуклой $\sigma(F, G)$-замкнутой оболочкой множества $A\cup\{0\}$ (теорема о биполяре). Пространство G совпадает с $(F, \sigma(F, G))'$ (основная теорема теории Д., показывающая, что любую Д. можно интерпретировать как естественную). Пространство $(F', \sigma(F', F))$ наз. слабым сопряженным с F.

Пусть F — локально выпуклое пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Для ограниченности множества A, $A\subset F$, необходимо и достаточно каждое из условий: а) A ограниченно в слабой топологии; б) A^0 — поглощающее множество. Если A — окрестность, то A^0 является $\sigma(F', F)$-компактом. Метризуемое пространство F полно в том и только в том случае, когда замкнутость множества A, $A\subset F'$, в топологии $\sigma(F', F)$ равносильна замкнутости в той же топологии всех пересечений $A\cap U^\circ$, где U — окрестность нуля в F (теорема Крейна — Шмульяна). Если F — полное сепарабельное пространство и f — линейный функционал в F', то $f\in(F', \sigma(F', F))'$ тогда и только тогда, когда из условия $\lim\limits_n x_n=0$ в топологии $\sigma(F', F)$ следует $\lim\limits_n f(x_n)=0$ (теорема Гротендика). Подмножество A полного пространства F относительно $\sigma(F, F')$-компактно, если оно относительно $\sigma(F, F')$-секвенциально компактно (теорема Эберлейна). Выпуклое подмножество A пространства Фреше над $\mathbb{R}$ $\sigma(F, F')$-компактно тогда и только тогда, когда для любого f, $f\in F'$, существует a, $a\in A$ такое, что $\sup\limits_A f=f(a)$ (теорема Джеймса). Для того чтобы $(F, \tau)'=G$, необходимо и достаточно условие: топология τ не слабее топологии $\sigma(F, G)$ и не сильнее топологии $\mu(F, G)$ (теорема Макки — Аренса, дающая важное в приложениях описание топологий, сохраняющих Д.). Каждое из следующих условий на пространство (F, τ) достаточно для совпадения τ с топологией Макки: а) F — *бочечное пространство*, б) F — *борнологическое пространство* (в частности, метризуемое). Сильная топология $\tau^*(F, G)$, вообще говоря, не сохраняет Д.; если $X=G$ локально

выпукло и $X'=F$, то пространство $X^*=(X', \tau^*(X', X))$ наз. сильным сопряженным с X, и в случае, когда $\tau^*(X', X)$ сохраняет Д. (т. е. $X^{*\prime}=X$), пространство X наз. полурефлексивным (X — *рефлексивное пространство*, если $X^{**}=X$).

Если H — подпространство F, то $\{H, G/H^0\}$ и $\{F/H, H^0\}$ — дуальные пары относительно естественных факторизаций формы $(\cdot, \cdot)$. Если задано семейство Д. $\{F_\alpha, G_\alpha, (\cdot, \cdot)_\alpha\}$, то Д. произведения пространств $F=\Pi_\alpha F_\alpha$ и подпространства $G=\Pi_\alpha^* G_\alpha$ всех финитных семейств из $\Pi_\alpha G_\alpha$ осуществляет форма

$$(f, g)=\sum\nolimits_\alpha (f_\alpha, g_\alpha)_\alpha,$$

где

$$f=\{f_\alpha\} \in \prod\nolimits_\alpha F_\alpha, \quad g=\{g_\alpha\} \in \prod\nolimits_\alpha^* G_\alpha.$$

Подобным же образом описывается Д. индуктивного и проективного пределов $\varinjlim_\alpha \operatorname{ind} F_\alpha$, $\varprojlim_\alpha \operatorname{pr} F_\alpha$. Наличие в пространствах F, F_α топологий, сохраняющих Д., позволяет истолковать эти утверждения как описание естественных Д. для $\Pi_\alpha F_\alpha$ (тихоновская топология), F/H (фактортопология), H (индуцированная топология), $\varinjlim_\alpha \operatorname{ind} F_\alpha$ и $\varprojlim_\alpha \operatorname{pr} F_\alpha$, соответственно. В случае нормированного пространства F естественный изоморфизм H^* и F^*/H^0 является изометрией:

$$\|f \mid H\|=\operatorname{dist}(f, H^0), \quad f \in F^*.$$

Использование Д. в конкретных задачах линейного анализа пропорционально той роли, какую играют в этих задачах линейные (непрерывные) функционалы. Особенно заметными (если не определяющими) являются идеи теории Д. в следующих разделах анализа: в исследовании линейно топологических (метрических) свойств локально выпуклых пространств и, в частности, описании естественной Д. для данного пространства [1]—[3], [5], в теории обобщенных функций [4], в теории экстремальных задач [6]—[7], в спектральной и структурной теории линейных операторов [1], [2] в теоремах полноты и единственности в теории аналитических функций, в теории аналитических функционалов Фантапье [8], см. также Двойственность в теории аналитических функций.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [2] Робертсон А. П., Робертсон В.-Дж., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967; [3] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [4] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., т. 1, М., 1962, т. 2, М., 1966; [5] Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [6] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М., Теория экстремальных задач, М., 1974; [7] Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973; [8] Хавин В. П., Итоги науки. Математический анализ. 1964, М., 1966, с. 76—164; [9] Хавинсон С. Я., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 2, с. 25—98; [10] Diestel J., Geometry of Banach spaces-selected topics, B.— N.Y., 1975.

Н. К. Никольский.

6) Д. в экстремальных задачах и выпуклом анализе — особенность выпуклых множеств, выпуклых функций и выпуклых экстремальных задач, состоящая в возможности задавать их двояким образом — в основном и сопряженном пространствах. Замкнутые выпуклые множества в локально выпуклом топологич. векторном пространстве допускают двойственное описание: они совпадают с пересечением замкнутых полупространств, их содержащих. Это позволяет связать с каждым выпуклым множеством A в векторном пространстве X двойственный объект в сопряженном пространстве — его поляру $A^0=\{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle \leqslant 1, x \in A\}$. Замкнутые выпуклые функции (т. е. функции с выпуклыми и замкнутыми надграфиками) в локально выпуклом топологич. векторном пространстве также допускают двойственное опи-

сание: они являются поточечными верхними гранями аффинных функций, их не превосходящих. Такая Д. позволяет связать с каждой выпуклой функцией $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ двойственный объект — сопряженную функцию, заданную на сопряженном пространстве X^* и определяемую формулой

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} (\langle x^*, x\rangle - f(x)).$$

Поточечные верхние грани линейных функций в локально выпуклом топологич. векторном пространстве суть выпуклые замкнутые однородные функции, и в этом факте заложена Д. между выпуклыми множествами и выпуклыми однородными функциями. В основании описанных Д. лежат теоремы Хана — Банаха о продолжении линейных функционалов и теоремы отделимости выпуклых множеств.

Сущность двойственного задания выпуклых множеств и выпуклых функций находит свое отражение в инволютивности оператора полярности $A^{00}=A$ и сопряжения $f^{**}=f$, имеющей место для выпуклых замкнутых множеств, содержащих нуль, и выпуклых замкнутых функций, всюду больших $-\infty$. Последний результат, касающийся функций (наз. теоремой Фенхеля — Моро), порождает многочисленные теоремы Д. для экстремальных задач линейного и выпуклого программирования. Примером пары двойственных задач являются следующие две задачи линейного программирования

$$\text{I. } (c, x) \longrightarrow \inf; \quad \text{II. } (b, y) \longrightarrow \sup \qquad (1)$$
$$Ax \geqslant b, \ x \geqslant 0 \qquad A^*y \leqslant c, \ y \geqslant 0.$$

Здесь

$$x, c \in \mathbb{R}^n, (c, x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i, \ y, b \in \mathbb{R}^m,$$
$$(b, y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i, \quad A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Для пары двойственных задач линейного программирования имеет место следующая альтернатива: либо значения задач конечны и равны и в обеих задачах существует решение, либо в одной из задач множество допустимых значений пусто или значение задачи бесконечно.

Обычный прием построения двойственной задачи состоит в следующем. Задача минимизации

$$f(x) \longrightarrow \inf, \quad x \in X, \qquad (2)$$

где X — линейное пространство, $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, включается в класс подобных ей задач, зависящих от параметра:

$$F(x, y) \longrightarrow \inf, \quad x \in X,$$

где Y — некоторое другое линейное пространство, $F: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $F(x, 0)=f(x)$ (функцию F наз. возмущением f). Обычно F предполагается выпуклой. Двойственной к задаче по отношению к данному возмущению наз. задача

$$-F^*(0, y^*) \longrightarrow \sup, \quad y^* \in Y^*, \qquad (2^*)$$

где F^* — функция, двойственная (сопряженная) с F в смысле Лежандра — Юнга — Фенхеля. Для простейших задач выпуклого программирования типа

$$f_0(x) \longrightarrow \inf, \quad f_i(x) \leqslant 0, \ i=1, \ldots, m, \ x \in B, \qquad (3)$$

где X — линейное пространство, $f_i: X \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклые функции на X, B — выпуклое множество в X (частными случаями (3) являются задачи линейного программирования), обычно применяются следующие стандартные возмущения, зависящие от параметров $y \in \overline{\mathbb{R}}^m$, $y=(y_1, \ldots, y_m)$, $f_0(x) \to \inf$, $f_i(x) \leqslant y_i$, $i=1, \ldots, m$, $x \in B$. Теоремы двойственности для

общих классов задач выпуклого программирования утверждают, что при нек-рых допущениях на возмущение F значения задач (2) и (2*) совпадают, и более того, решение одной из задач является множителем Лагранжа для другой.

Лит.: [1] Minkowski H., Geometrie der Zahlen, Lpz.—B., 1910; [2] его же, Gesammelte Abhandlungen, Bd 1—2, Lpz.—B., 1911; [3] Fenchel W., «Canad. J. Math.», 1949, v. 1, p. 73—77; [4] Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973; [5] Ekeland I., Teman R., Convex Analysis and Variational Problem, N. Y., 1976; [6] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М., Теория экстремальных задач, М., 1974. *В. М. Тихомиров.*

7) Д. конечных абелевых групп — классический прототип общей *Понтрягина двойственности* и различных более поздних ее модификаций. Относится к свойствам изоморфного соответствия между конечной абелевой группой A и группой $\hat{A}=\mathrm{Hom}(A, k^*)$ ее характеров со значениями в мультипликативной группе k^* алгебраически замкнутого поля k характеристики, не делящей порядок группы A (см. *Характеров группа*). Естественное отображение $f: A \to \hat{\hat{A}}$, определенное правилом

$$f(a)(\chi)=\chi(a)$$

для всех $a\in A$, $\chi\in\hat{A}$, также является изоморфизмом, причем для любой подгруппы $B\subseteq A$ имеет место равенство $f(B)=(B^{\perp})^{\perp}$, где

$$B^{\perp}=\{\chi\in\hat{A}\mid \chi(b)=1 \text{ для всех } b\in B\}\cong\widehat{A/B}.$$

Соответствие $B\to B^{\perp}$ устанавливает двойственность между решетками подгрупп групп A и $\hat{A}$. Это соответствие взаимно однозначно и обладает свойствами

$$(BC)^{\perp}=B^{\perp}\cap C^{\perp},\quad (B\cap C)^{\perp}=B^{\perp}C^{\perp}.$$

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973, гл. 6; [2] Huppert B., Endliche Gruppen I, B., 1967, S. 688—96. *А. И. Кострикин.*

S-ДВОЙСТВЕННОСТЬ, стационарная двойственность, Спеньера двойственность, — двойственность в теории гомотопии, имеющая место (при отсутствии ограничений на размерность пространств) для аналогов обычных гомотопич. и когомотопич. групп в надстроечной категории — для S-гомотопич. и S-когомотопич. групп или стационарных групп гомотопий и когомотопий, образующих экстраординарные (обобщенные) теории гомологий и когомологий. Надстроечной категорией, или S-категорией, наз. категория, объектами к-рой являются топологич. пространства X, а морфизмами — классы $\{f\}$ S-гомотопных отображений f p-кратной *надстройки* S^pX_1 в S^pX_2, причем f и $g: S^qX_1\to S^qX_2$ считаются S-гомотопными, если существует такое $r\geqslant\max(p, q)$, что надстройки $S^{r-p}f$ и $S^{r-q}g$ гомотопны в обычном смысле. Множество $\{X_1, X_2\}$ таких классов, наз. S-отображениями, составляет абелеву группу (относительно так наз. колейного сложения, см. [1], [2], [4], [5]). Группа $\{X_1, X_2\}$ есть предел прямого спектра множеств $[S^kX_1, S^kX_2]$ обычных гомотопич. классов с надстроечными отображениями в качестве проекций, являющегося при достаточно больших k спектром групп с гомоморфизмами. Имеет место изоморфизм $S: \{X_1, X_2\}\to\{SX_1, SX_2\}$, при к-ром соответствующие друг другу элементы представляются одним и тем же отображением $S^pX_1\to S^pX_2$, $p\geqslant 1$. Полиэдром, n-двойственным к полиэдру X сферы S^n, наз. произвольный полиэдр D_nX в S^n, являющийся S-деформационным ретрактом дополнения $S^n\setminus X$, т. е. если морфизм, соответствующий вложению $D_nX\subset S^n\setminus X$, есть S-эквивалентность. Полиэдр D_nX существует для каждого X, и можно рассматривать X как D_n^2X.

Для любых полиэдров X_1, X_2 и любых n-двойственных им полиэдров D_nX_1 и D_nX_2 существует единственное отображение

$$D_n: \{X_1,\ X_2\} \longrightarrow \{D_nX_2,\ D_nX_1\},$$

удовлетворяющее следующим условиям:

а) Оно является инволютивным контравариантным функториальным изоморфизмом, т. е. D_n есть такой гомоморфизм, что если

$$i : X_1 \subset X_2 \text{ и } i' : D_nX_2 \subset D_nX_1,$$

то

$$D_n\{i\} = \{i'\};$$

если

$$\{f_1\} \in \{X_1,\ X_2\} \text{ и } \{f_2\} \in \{X_2,\ X_3\},$$

то

$$D_n(\{f_2\} \cdot \{f_1\}) = D_n\{f_1\} \cdot D_n\{f_2\};$$

если θ — элемент из $\{X_1,\ X_2\}$ или из $\{D_nX_2,\ D_nX_1\}$, то $D_nD_n\theta = \theta$.

б) Оно удовлетворяет соотношениям

$$SD_n = D_{n+1} \text{ и } D_{n+1}S = D_n,$$

где SD_nX_i и D_nX_i рассматриваются как полиэдры, $(n+1)$-двойственные к полиэдрам X_i и, соответственно, SX_i, $i=1, 2$; это значит, что оно не зависит от n и стационарно относительно надстройки.

в) Оно удовлетворяет равенству

$$D_a^n\theta_* = (D_n\theta)^*\, D_a^n,$$

где

$$\theta_* : H_p(X_1) \longrightarrow H_p(X_2)$$

и

$$(D_n\theta)^* : H^{n-p-1}(D_nX_1) \longrightarrow H^{n-p-1}(D_nX_2)$$

— гомоморфизмы указанных групп гомологии и когомологии, индуцированные S-отображениями $\theta \in \{X_1,\ X_2\}$ и $D_n\theta$, а

$$D_a : H_p(X_i) \to H^{n-p-1}(D_nX_i),\ i=1, 2,$$

есть изоморфизм, к-рый получается из изоморфизма *Александера двойственности* заменой множества $S^n \setminus X_i$ его S-деформационным ретрактом D_nX_i.

Построение D_n опирается на представление данного отображения как композиции вложения и S-деформационной ретракции.

S-гомотопической группой $\Sigma_p(X)$ пространства X наз. группа $\{S^p,\ X\}$, а S-когомотопической группой $\Sigma^p(X)$ пространства X — группа $\{X,\ S^p\}$. Как и в обычной теории гомотопий, определяются гомоморфизмы

$$\varphi_p : \sum_p(X) \longrightarrow H_p(X),$$

$$\varphi^p : \sum^p(X) \longrightarrow H^p(X).$$

Рассмотрение сфер S^p и S^{n-p-1} как n-двойственных приводит к изоморфизму

$$D_n : \sum_p(X) \longrightarrow \sum^{n-p-1}(D_nX)$$

и к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \sum_p(X) & \xrightarrow{\varphi_p} & H_p(X) \\ \downarrow{\scriptstyle D_n} & & \downarrow{\scriptstyle D_a^n} \\ \sum^{n-p-1}(D_nX) & \xrightarrow{\varphi^{n-p-1}} & H^{n-p-1}(D_nX). \end{array}$$

Таким образом, изоморфизм D_n связывает S-гомотопич. и S-когомотопич. группы подобно тому, как изоморфизм двойственности Александера D_a^n связывает группы гомологии и когомологии. Какая-либо двойственность в S-категории приводит к двойственности в случае обычных гомотопич. классов, если на пространство наложить требования, из к-рых следует нали-

чие взаимно однозначного соответствия множества указанных классов с множеством S-гомотопических классов.

Примерами двойственных предложений в этой теории являются теорема Гуревича об изоморфизме и теорема классификации Хопфа. D_n переводит одну из этих теорем в другую, что означает замену S-гомотопич. групп S-когомотопическими, групп гомологий — группами когомологии, отображения φ_p — отображениями φ^{n-p-1}, наименьшей размерности с нетривиальной гомологич. группой — наивысшей размерностью с нетривиальной группой когомологии, и наоборот. В обычной теории гомотопии для определения n-когомотопич. группы требуется, чтобы размерность пространства не превышала $2n-2$ (или, более общо, чтобы пространство было $(2n-1)$-косвязным, $n>1$), что нарушает полную общность двойственности.

Теория обобщается в различных направлениях: напр., рассматриваются пространства, имеющие S-гомотопический тип полиэдров, относительный случай, теория с носителями и др. (см. [3], [5], [6], [7]). Она послужила одним из источников стационарной гомотопической теории [8].

Лит.: [1] Спаньер Э. Г., «Математика», 1959, т. 3, № 1, с. 17—25; [2] Spanier E. H., Whitehead J. H. C., «Mathematica», 1955, v. 2, № 3, p. 56—80; [3] их же, «Ann. Math.», 1958, v. 67, № 2, p. 203—38; [4] Barratt M. G., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1955, v. 5, p. 71—106, 285—329; [5] Спаньер Э. Г., Уайтхед Дж. Г., «Математика», 1959, т. 3, № 1, с. 27—56; [6] Экман Б., Хилтон П., там же, 1960, т. 4, № 3, с. 3—27; [7] Спаньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [8] Уайтхед Дж., Новейшие достижения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1974.

Г. С. Чогошвили.

ДВОЙСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ — дополнительные по Юнгу функции, т. е. строго *выпуклые функции*, связанные *Лежандра преобразованием*.

ДВОЙСТВЕННЫЙ БАЗИС, дуальный базис, к базису $\{e_1, \ldots, e_n\}$ модуля E относительно формы f — такой базис $\{c_1, \ldots, c_n\}$ модуля E, что

$$f(e_i, c_i)=1, \quad f(e_i, c_j)=0,$$
$$i \neq j, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

где E — свободный K-модуль над коммутативным кольцом K с единицей, а f — неособая билинейная форма на E.

Пусть E^* — модуль, сопряженный к E, а $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ — базис E^*, сопряженный к исходному базису E : $e_i^*(e_i)=1$, $e_i^*(e_j)=0$, $i \neq j$. Тогда каждой билинейной форме f на E отвечают отображения $\varphi_f, \psi_f : E \to E^*$, определяемые равенствами

$$\varphi_f(x)(y)=f(x, y), \quad \psi_f(x)(y)=f(y, x).$$

Если форма f неособая, то каждое из отображений φ_f, ψ_f является изоморфизмом, и обратно. При этом двойственный к $\{e_1, \ldots, e_n\}$ базис $\{c_1, \ldots, c_n\}$ характеризуется тем свойством, что

$$\psi_f(c_i)=e_i^* \quad (i=1, \ldots, n).$$

Е. Н. Кузьмин.

ДВОЯКОКРУГОВАЯ ОБЛАСТЬ — область D двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$, обладающая свойством: существует такая точка (a_1, a_2), что вместе с каждой точкой (z_1^0, z_2^0) области D принадлежат все точки (z_1, z_2) с координатами

$$z_j=\{a_j+(z_j^0-a_j)e^{i\varphi_j}\},$$
$$0 \leqslant \varphi_j \leqslant 2\pi, \quad j=1, 2.$$

Точка (a_1, a_2) наз. центром Д. о. Если Д. о. содержит свой центр, то она наз. полной Д. о., в противном случае — неполной Д. о. Примеры полной Д. о.— шар или бикруг, неполной — декарто-

во произведение круговых колец. Аналогично определяется и n-круговая область, или область Рейнхардта.

М. Ширинбеков.

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — однозначная аналитич. функция $f(z)$, имеющая только изолированные особенности на всей конечной плоскости комплексного переменного z и такая, что существуют два числа p_1, p_2, отношение к-рых не является действительным числом и к-рые являются периодами $f(z)$, т. е. p_1, p_2 таковы, что имеет место тождество

$$f(z+p_1)=f(z+p_2)=f(z).$$

(Если отношение p_1/p_2 действительно и рационально, то $f(z)$ — однопериодич. функция; если оно — иррационально, то $f(z)\equiv\text{const}$.) Все числа вида mp_1+np_2, где m, n — целые, также являются периодами $f(z)$. Все периоды данной Д. ф. образуют дискретную абелеву группу по сложению, наз. группой периодов (или модулем периодов), базис к-рой (базис периодов) состоит из двух примитивных периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$, $\operatorname{Im}(\omega_1/\omega_3)\neq 0$. Все остальные периоды этой Д. ф. представимы в виде $2m\omega_1+2n\omega_3$, где m, n — целые. Не существует аналитич. функций одного комплексного переменного, кроме констант, имеющих более двух примитивных периодов.

Точки вида $2m\omega_1+2n\omega_3$, где m, n — целые, образуют решетку периодов, разбивающую всю плоскость z на параллелограммы периодов. Точки (числа) z_1, z_2, для к-рых

$$z_1-z_2=2m\omega_1+2n\omega_3,$$

наз. конгруэнтными (сравнимыми по модулю периодов). В конгруэнтных точках Д. ф. $f(z)$ принимает одно и то же значение, поэтому достаточно изучить поведение $f(z)$ в к.-л. основном параллелограмме периодов. Обычно в качестве такового принимается множество точек

$$\{z=z_0+2t_1\omega_1+2t_3\omega_3;\ 0\leqslant t_1<1,\ 0\leqslant t_3<1\},$$

т. е. параллелограмм с вершинами

$$0,\ z_0+2\omega_1,\ z_0+2\omega_2=z_0+2\omega_1+2\omega_3,\ z_0+2\omega_3.$$

Не существует отличной от константы Д. ф., регулярной во всем основном параллелограмме периодов. Мероморфные Д. ф. наз. *эллиптическими функциями*. Обобщение понятия эллиптич. функций на случай функций $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ от $n\geqslant 1$ комплексных переменных носит название *абелевых функций*.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 2, 2 изд., М., 1968, гл. 7; [2] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968, ч. 2; [3] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963, гл. 20; [4] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970.

Е. Д. Соломенцев.

ДВУГРАННЫЙ УГОЛ — фигура в пространстве, образованная двумя полуплоскостями, исходящими из одной прямой, а также часть пространства, ограниченная этими полуплоскостями. Полуплоскости наз. гранями Д. у., а их общая прямая — ребром. Д. у. измеряется линейным углом, т. е. углом между двумя перпендикулярами к ребру, выходящими из одной точки и лежащими в разных гранях, или, иначе, углом, образованным пересечением Д. у. плоскостью, перпендикулярной к ребру.

БСЭ.

ДВУЖИДКОСТНАЯ МОДЕЛЬ ПЛАЗМЫ — гидродинамическая модель, в к-рой плазма рассматривается как совокупность двух «жидкостей» (электронной и ионной), движущихся одна сквозь другую. Электрич. сопротивление плазмы рассматривается как результат взаимного трения этих жидкостей.

Система уравнений движения в предположении, что на электроны действует только электронное давление p_e, а на ионы — лишь ионное давление p_i, имеет вид

$$\frac{dm\boldsymbol{V}_e}{dt} = -e\left(\boldsymbol{E} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{V}_e \times \boldsymbol{H}]\right) - \frac{\nabla p_e}{n_e} - Rn_i(\boldsymbol{V}_e - \boldsymbol{V}_i), \quad (1)$$

$$\frac{dM\boldsymbol{V}_i}{dt} = Ze\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{V}_i \times \boldsymbol{H}]\right) - \frac{\nabla p_i}{n_i} - Rn_e(\boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_e). \quad (2)$$

Взаимодействие электронов и ионов учтено посредством силы трения, пропорциональной произведению разности скоростей на концентрацию тормозящих частиц. Величина R наз. коэффициентом взаимного трения, или коэффициентом диффузионного сопротивления. Учитывая условие квазинейтральности плазмы ($n_e = zn_i = n$), уравнение движения Д. м. п. приводится к виду

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho c}[\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}],$$

где

$$\boldsymbol{V} = \frac{n_i M \boldsymbol{V}_i + n_e m \boldsymbol{V}_e}{M n_i + m n_e}$$

— средняя массовая скорость, $p = p_i + p_e$ — суммарное давление, а $\boldsymbol{j} = e(Zn_i\boldsymbol{Z}_i - n_e\boldsymbol{Z}_e)$ — ионный ток. Если $m/M \ll 1$, то $\boldsymbol{V}_i \approx \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}_e \approx \boldsymbol{V} - \boldsymbol{j}/ne$.

Уравнения (1), (2) могут быть использованы для получения обобщенного закона Ома, связывающего плотность тока $\boldsymbol{j}$ с другими величинами. Если можно пренебречь членами вида $(\boldsymbol{V}\nabla)\boldsymbol{V}$ (а также при $m/M \ll 1$), обобщенный закон Ома записывается в виде:

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \frac{ne^2}{m}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{H}]\right) - \frac{e}{mc}[\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}] + \frac{e}{m}\nabla p_e - \frac{\boldsymbol{j}}{\tau},$$

где $\tau = 1/\nu_{ei}$ — так наз. время передачи импульса, ν_{ei} — эффективная частота передачи импульса, определяемая выражением:

$$R = \frac{m}{n_i}\nu_{ei} = \frac{m}{n_e}\nu_{ie}.$$

Лит.: [1] Франк-Каменецкий Д. А., Лекции по физике плазмы, 2 изд., М., 1968; [2] Куликовский А. Г., Любимов Г. А., Магнитная гидродинамика, М., 1962.

В. А. Бородницын.

ДВУЗНАЧНАЯ ЛОГИКА — то же, что *алгебра логики*.

ДВУМЕРНАЯ КЛЕТКА — топологический образ *диска*.

А. В. Чернавский.

ДВУМЕРНОЕ КОЛЬЦО в топологии — топологический образ замкнутой части плоскости, заключенной между несовпадающими концентрическими окружностями. Д. к. есть ориентируемое *двумерное многообразие* рода нуль с двумя компонентами края.

А. В. Чернавский.

ДВУМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — топологическое пространство, каждая точка к-рого обладает окрестностью, гомеоморфной плоскости или полуплоскости. Д. м. — наиболее наглядный класс многообразий: к ним относятся сфера, круг, лист Мёбиуса, проективная плоскость, бутылка Клейна и др.

Точки, имеющие лишь такие окрестности, к-рые гомеоморфны полуплоскости (если они есть), образуют край многообразия.



Рис. 1.

Важнейший класс Д. м. составляют замкнутые ориентируемые Д. м., или замкнутые поверхности. Простейшая из них — сфера S^2 — поверхность рода 0. Поверхность рода g получается из S^2 удалением $2g$ пар непересекающихся дисков и отождествлением с каждой парой граничных окружностей границ изогнутого цилиндра (рис. 1). Этот процесс наз. при-

клеиванием ручек, а замкнутая поверхность рода g — сферой с g ручками (рис. 2).

Более широкий класс Д. м. составляют компактные ориентируемые Д. м., или поверхности с краем, получаемые из к.-л. замкнутой поверхности удалением внутренних точек конечного числа непересекающихся дисков. Их границы образуют край возникающего Д. м. Родом этого Д. м. считается род исходной поверхности (рис. 3). Д. м. рода 0 — диск или диск с дырами.



Рис. 2.

В другой класс Д. м. входят компактные неориентируемые Д. м. Они также могут быть замкнутыми и с краем. Простейшее среди них — *Мёбиуса лист* (рис. 4). Он не может быть ориентирован, т. е. на нем нельзя выбрать одновременно для каждой точки направления вращения вокруг нее так, чтобы эти направления переходили друг в друга непрерывно. Другой пример — *проективная плоскость* $\mathbb{R}P^2$; любая окрестность каждой проективной прямой на $\mathbb{R}P^2$ содержит лист Мёбиуса и поэтому $\mathbb{R}P^2$ также неориентируема. В общем случае компактные неориентируемые Д. м. получаются из замкнутых поверхностей удалением внутренних точек непересекающихся дисков и заклейкой их (не обязательно каждого) листами Мёбиуса (на рис. 5 лист Мёбиуса представлен в виде скрещенной крышки, т. е. с самопересечением по отрезку). Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ получается из сферы заменой одного диска на лист Мёбиуса. Если заменить листами Мёбиуса два диска, то получится *Клейна поверхность* (рис. 6), ее удобно изображать также как сферу с неориентируемой ручкой. Вообще, приклейку двух листов Мёбиуса можно заменить приклейкой одной неориентируемой ручки, и наоборот. С другой стороны, если обвести один конец обычной ручки по средней ли-



Рис. 3.

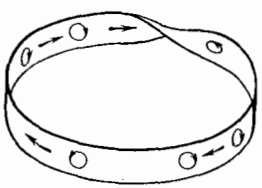


Рис. 4.

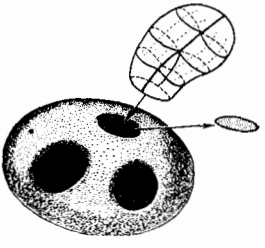


Рис. 5.

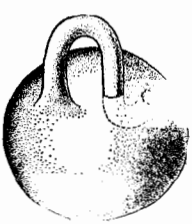


Рис. 6.

нии листа Мёбиуса, то эта ручка станет неориентируемой (рис. 7). Таким образом, в неориентируемом Д. м. любую ручку можно заменить на два листа Мёбиуса, и наоборот.

Сферами с ручками или с листами Мёбиуса и, возможно, с удаленными дисками исчерпываются все компактные связные (состоящие из одного куска) Д. м. Некомпактные Д. м., напр. плоскость $\mathbb{R}^2$, полуплоскость $\mathbb{R}^2_+$ и вообще любое открытое подмножество любо-

го компактного Д. м., могут быть очень сложно устроены. Напр., если на $\mathbb{R}^2$ взять бесконечное число дисков, уходящих на бесконечность, и заменить их на ручки или листы Мёбиуса, то получится Д. м., к-рое не является открытым подмножеством никакого компактного Д. м. (рис. 8). Некомпактные Д. м. без края наз. о т к р ы т ы м и.

Одним из подходов к изучению Д. м. является комбинаторный подход, при к-ром Д. м. рассматривается состоящим из выпуклых многоугольников (граней), примыкающих друг к другу по общим ребрам. Особенно важны *триангуляции* Д. м., где гранями являются треугольники. Если два Д. м. триангулированы, то их триангуляции наз. к о м б и н а т о р н о э к в и в а л е н т н ы м и, когда они имеют изоморфные подразделения, между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее примыкание соответствующих граней. Из произвольных двумерных *комплексов* триангулированные Д. м. выделяются тем, что к каждому ребру примыкают одна (для ребер на краю) или две грани и вокруг каждой вершины триангуляции грани образуют один цикл (звезду)

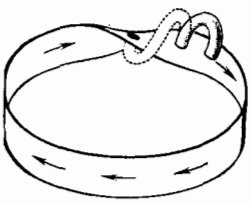


Рис. 7.

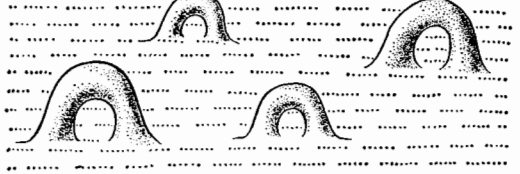


Рис. 8.

последовательно примыкающих друг к другу граней (рис. 9). Цикл замкнут, если вершина не лежит на краю (a), и незамкнут, если она лежит там (b). Компактность Д. м. равносильна конечности числа граней любой триангуляции, а связность — возможности соединить любые две вершины цепочкой ребер. В связном Д. м. любые две грани соединимы цепочкой граней, в к-рой две соседние имеют общее ребро. Неориентируемость равносильна существованию такой цепочки, к-рая содержит в себе лист Мёбиуса.

С помощью триангуляций удобно вводить и н в а р и а н т ы, т. е. характеристики, одинаковые у комбинаторно эквивалентных Д. м. Важнейшим инвариантом является *эйлерова характеристика* $\chi(M)$, равная для данной триангуляции числу $B-P+\Gamma$, где B, P, Γ — числа вершин, ребер и граней триангуляции соответственно. χ не меняется при подразделениях, и поэтому если $\chi(M_1)\neq\chi(M_2)$, то M_1 и M_2 комбинаторно неэквивалентны. Для сферы с g ручками $\chi(M)=2-2g$, в частности для сферы она равна 2, для тора 0, для проективной плоскости 1, для бутылки Клейна 0, для сферы с k листами Мёбиуса $2-k$. Если из Д. м. выбросить внутренности k дисков, то $\chi(M)$ уменьшится на k. Сопоставляя компактному связному Д. м. три числа

$$\{\varepsilon,\ \chi,\ k\},$$

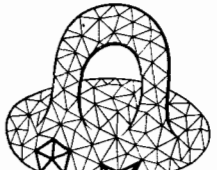


Рис. 9.

где $\varepsilon=\pm 1$ в зависимости от ориентируемости, $\chi=\chi(M)$, а k — число компонент края, получаем тем самым полное описание Д. м. с точностью до комбинаторной эквивалентности, поскольку эти тройки чисел различны для описанных выше Д. м. (сфер с ручками, сфер с листами Мёбиуса и, возможно, еще с дырами), и в то же время любое компактное связное Д. м. комбинаторно эквивалентно одному из этих Д. м. (см. [1], [3]). Для открытых Д. м. классификация также проведена, но она здесь гораздо сложнее, так как имеется несчетно много различных поверхностей [5].

Для чисто топологич. изучения Д. м. основную роль играет *Жордана теорема*. Пусть C — кривая без самопересечений, соединяющая две точки края многообразия M или замкнутая; она называется с е ч е н и е м M.

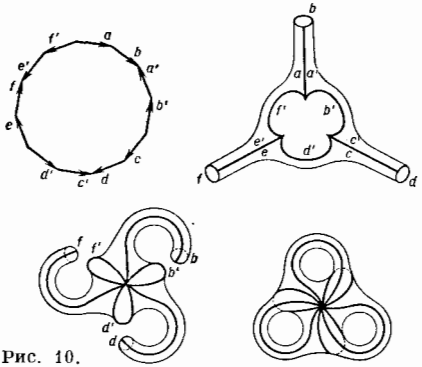


Рис. 10.

Сечение C не разбивает M, если любые две точки M соединимы дугой, не пересекающей C. Максимальное число сечений, к-рые вместе не разбивают M, увеличенное на единицу, наз. ч и с л о м с в я з н о с т и M. Так, согласно теореме Жордана, сфера и диск односвязны. Связность замкнутой поверхности рода g равна $2g+1=3-\chi$. Для такой поверхности имеется набор из $2g$ сечений, к-рые все выходят из одной точки и разбиваются на пары так, что каждая пара осуществляет разрез одной ручки. Такой набор наз. к а н о н и ч е с к и м р а з р е з о м M: в результате разрезания по всем сечениям M превращается в диск. Аналогично имеются канонич. разрезы неориентируемых Д. м. (по средним линиям листов Мёбиуса). Для Д. м. с краем нужно провести еще сечения из базисной точки к каждой компоненте края. Обратно, Д. м. возникает из диска, край к-рого разбит на сегменты, склеиванием этих сегментов попарно между собой. Если склеивание осуществляется по схеме рис. 10, то получается ориентируемое Д. м., если по схеме рис. 11, то — неориентируемое. (Сегмент x надо склеить с сегментом x' так, чтобы совпали направления стрелок.) Край возникает, если имеется несколько сегментов, по к-рым не производится склейки.

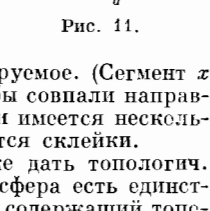


Рис. 11.

Теорема Жордана позволяет также дать топологич. характеризацию Д. м. В частности, сфера есть единственный *локально связный континуум*, содержащий топологич. образ окружности, разбиваемый каждым образом окружности и не разбиваемый никакой парой точек. Вообще, Д. м. выделяются в классе локально связных континуумов тем, что они не разбиваются никакой парой точек и разбиваются достаточно малой окружностью (т е о р е м а У а й л д е р а, 1949).

Поскольку у гомеоморфных Д. м. любые две триангуляции комбинаторно эквивалентны, комбинаторная

классификация Д. м. имеет чисто топологич. смысл. Хотя набором ε, χ, k компактные Д. м. характеризуются однозначно, для изучения свойств Д. м. имеют значение и другие топологич. инварианты. В первую очередь это — одномерных *гомологий группа* $H_1(M)$ и *фундаментальная группа* $\pi_1(M)$. Для замкнутой поверхности рода g $H_1(M)$ равна прямой сумме $2g$ экземпляров группы $\mathbb{Z}$ целых чисел. В качестве образующих обычно берутся g пар окружностей канонич. разреза. Для неориентируемого замкнутого Д. м. с числом связности s $H_1(M)$ есть сумма $s-1$ экземпляров группы $\mathbb{Z}$ и одного экземпляра группы $\mathbb{Z}_2$. За образующие берутся сечения канонич. разреза (за вычетом одного) и еще дезориентирующий путь (после разреза по которому Д. м. становится ориентируемым). Для $\pi_1(M)$ *копредставление* удобнее всего получается с помощью канонического разреза: его сечения берутся за образующие, а соотношение получается при обходе края диска, возникшего после разреза. В ориентируемом случае получается копредставление

$$\{a_1,\ b_1;\ \ldots,\ a_g,\ b_g;\ a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ \ldots\ a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}=1\},$$

а в неориентируемом

$$\{a_1,\ \ldots,\ a_s;\ a_1^2a_2^2\ \ldots\ a_s^2=1\}.$$

Имеет значение тот факт, что *универсальным накрытием* любого связного Д. м. без края (кроме S^2 и $\mathbb{R}P^2$) является плоскость $\mathbb{R}^2$, а соответствующая *монодромии группа* реализуется движениями евклидовой плоскости или плоскости Лобачевского. Напр., тор получается отождествлением всех точек плоскости, отличающихся друг от друга на $m\vec{e}_1+n\vec{e}_2$, где $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — два данных вектора, а m и n — целые числа. Для применений важны также и накрытия с ветвлением. Пусть отображение $f: M_1 \to M_2$, где M_1 и M_2 — замкнутые и триангулированные Д. м., линейно отображают каждую грань M_1 на некоторую грань M_2, причем для каждого ребра l в M_1 примыкающие к нему две грани отображаются на разные грани, примыкающие к ребру $f(l)$ в M_2. Для каждой точки $x\in M_1$, отличной от вершин, найдется в M_1 окрестность, к-рую f переводит взаимно однозначно на окрестность точки $f(x)$ в M_2. Если для вершины v из M_1 обойти в циклич. порядке примыкающие к ней грани, то соответствующие грани в M_2 обойдут в циклич. порядке вершину $f(v)$ в M_2 целое число k раз. Если $k=1$, то v — о б ы к н о в е н н а я т о ч к а, если же $k>1$, то v — т о ч к а в е т в л е н и я, а k — к р а т н о с т ь в е т в л е н и я в т о ч к е v. Если $f^{-1}(w)$ для $w\in M_2$ не содержит точек ветвления, то w также наз. обыкновенной. Поскольку прообразы близких обыкновенных точек из M_2 состоят из равного числа точек, по соображениям непрерывности получается, что это число — одно и то же для всех обыкновенных точек. Оно наз. ч и с л о м л и с т о в н а к р ы т и я. Это число d равно для ориентируемого Д. м. *степени отображения* f (в случае неориентируемости его следует привести по модулю два). Если $f^{-1}(w)$ содержит точки ветвления с кратностями $k_1,\ \ldots,\ k_t$, то $f^{-1}(w)$ содержит на $\sum(k_i-1)$ меньше точек, чем обыкновенная точка (здесь суммирование по всем точкам ветвления в M_1). Поскольку число вершин $B(M_1)$ на $\sum(k_i-1)$ меньше $d\cdot B(M_2)$, а для числа ребер и граней: $P(M_1)=d\cdot P(M_2)$ и $\Gamma(M_1)=d\cdot\Gamma(M_2)$, то

$$\chi(M_1)=d\cdot\chi(M_2)-\sum(k_i-1).$$

Это — ф о р м у л а Р и м а н а — Г у р в и ц а.

С точки зрения дифференциальной геометрии Д. м. рассматриваются как гладкие многообразия, к-рые снабжаются дополнительными структурами (напр., мет-

рикой, связностью и т. д.) или рассматриваются вложенными (с возможными самопересечениями) в евклидовы пространства. Гладкое Д. м. можно триангулировать так, что ребра будут гладкими дугами, а все углы отличны от нуля (теорема Кернса, 1934). Оказывается, что при этом диффеоморфным Д. м. отвечают комбинаторно эквивалентные триангуляции, и обратно. Таким образом, классификация Д. м. сохраняет силу и для гладких Д. м. Примером теоремы, связывающей топологич. характеристики Д. м. с его дифференциально-геометрич. свойствами, является теорема Гаусса—Бонне [3]: интеграл от кривизны замкнутой поверхности (точнее, от гауссовой кривизны, определяемой нек-рой *римановой связностью*, к-рую всегда можно определить на гладком Д. м.) равен $2\pi\chi(M)$. Этот факт, а также его интерпретация с помощью так наз. гауссова отображения (в частности, сферического отображения) в многообразие Грассмана, если рассматриваемое многообразие погружено в евклидово пространство, находит обобщение в теории *характеристических классов*. Другая теорема, также послужившая одним из истоков этой теории: сумма *индексов* особых точек любого векторного поля на замкнутой поверхности равна $\chi(M)$.

Важную роль Д. м. играют в теории функций комплексного переменного. Здесь Д. м. наделяются комплексными структурами, т. е. локальными параметризациями окрестностей точек, связанными между собой аналитич. функциями, и наз. *римановыми поверхностями* [4]. Они обязательно ориентируемы. Замкнутые римановы поверхности являются геометрич. моделями комплексных *алгебраических кривых*. Комплексное строение на Д. м. не определяется однозначно его дифференциально-топологич. строением: напр., на поверхности рода g комплексные структуры образуют континуум размерности $6g-6$ (теорема Тейхмюллера, 1940).

К определению Д. м. иногда добавляются требования, чтобы оно как топологич. пространство было хаусдорфовым или имело счетную базу (последнее, в частности, необходимо для триангулируемости Д. м.: существуют хаусдорфовы нетриангулируемые Д. м., см. *Прюфера поверхность*).

Лит.: [1] Александров П. С., Ефремович В. А., Очерк основных понятий топологии, М.—Л., 1936; [2] Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, пер. с нем., 2 изд., М.—Л., 1951; [3] Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е., Введение в дифференциальную геометрию «в целом», М., 1973; [4] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [5] Стоилов С., Лекции о топологических принципах теории аналитических функций, пер. с франц., М., 1964.

А. В. Чернавский.

ДВУМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНЫ — метрическое пространство, являющееся двумерным многообразием с внутренней метрикой, для к-рого определены аналоги таких понятий двумерной римановой геометрии, как длина и интегральная кривизна кривой, площадь и интегральная гауссова кривизна множества.

Частным случаем Д. м. о. к. являются двумерные римановы пространства и поверхности многогранников в трехмерном евклидовом пространстве. В общем случае класс Д. м. о. к. может рассматриваться как замыкание класса двумерных римановых многообразий относительно надлежащих предельных переходов.

Пусть M — двумерное риманово многообразие, $K(x)$ — гауссова кривизна M в точке x; $\sigma(E)$ — площадь множества $E\subset M$; для $E\subset M$ кривизна:

$$\omega(E)=\int\int_E K(x)\,d\sigma(x),$$

абсолютная кривизна:

$$|\omega|(E)=\int\int_E |K(x)|\,d\sigma(x);$$

положительная часть кривизны множества E:

$$\omega^+(E) = \int\int_E K^+(x)\, d\sigma(x),$$

где $K^+(x) = \max\{0, K(x)\}$. Если x и y — две точки риманова пространства M, то $\rho(x, y)$ — нижняя грань длин кривых на M, соединяющих точки x и y. Функция ρ является *внутренней метрикой*. Она наз. естественной метрикой риманова пространства M.

Пусть M — произвольное двумерное многообразие с метрикой ρ. Говорят, что метрика ρ — риманова, если многообразие M, наделенное метрикой ρ, изометрично нек-рому двумерному риманову пространству, снабженному его естественной метрикой.

Двумерное многообразие M с внутренней метрикой ρ есть Д. м. о. к., если выполнено следующее условие. Существует последовательность римановых метрик ρ_n, $n=1, 2, \ldots$, определенных на многообразии M, такая, что для всякого компактного множества $A \subset M$ будет $\rho_n \to \rho$ равномерно (т. е. функции $\rho_n(x, y)$ сходятся к функции $\rho(x, y)$ равномерно на множестве $A \times A$) и последовательность $|\omega_n|(A)$, $n=1, 2, \ldots$, ограничена, где $|\omega_n|$ — абсолютная кривизна римановой метрики ρ_n. Д. м. о. к. может быть определено аксиоматически.

В части достаточности условия данного здесь определения Д. м. о. к. могут быть ослаблены. Именно, двумерное многообразие M с внутренней метрикой ρ будет Д. м. о. к., если для всякой его точки можно указать окрестности U и V, где $V \subset U$ и последовательность римановых метрик ρ_n, $n=1, 2, \ldots$, определенных на U таким образом, что $\rho_n \to \rho$ равномерно на V, и последовательность $\{\omega_n \div (V)\}$ ограничена.

Для всякого Д. м. о. к. определены вполне аддитивные функции множества $\sigma(E)$ и $\omega(E)$ — площадь и, соответственно, кривизна множества. В отличие от риманова случая, $\omega(E)$ может и не быть абсолютно непрерывна относительно $\sigma(E)$. В Д. м. о. к. определено понятие поворота кривой — аналог понятия интегральной геодезич. кривизны кривой.

Всякая выпуклая поверхность в трехмерном евклидовом пространстве есть Д. м. о. к. В этом случае кривизна множества всегда неотрицательна.

Д. м. о. к. допускают особенности типа конич. точек p (для таких точек $\omega(\{p\})$ отлично от нуля), ребер, границы основания цилиндра и т. д.

Лит.: [1] Александров А. Д., Залгаллер В. А., Двумерные многообразия ограниченной кривизны, М.—Л., 1962; [2] Двумерные многообразия ограниченной кривизны, ч. 2, М.—Л., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 76).

Ю. Г. Решетняк.

ДВУМЕРНЫЙ УЗЕЛ — класс изотопных вложений двумерной сферы S^2 в четырехмерную S^4. Чисто топологич. теория не развита, ибо еще не выяснено (1978) соотношение чистой и кусочно линейной топологии в размерности 4. Обычно накладывается условие локальной плоскостности. Метод изучения — рассмотрение сечений S^2 пучком параллельных трехмерных плоскостей. Основным является вопрос о том, будет ли узел тривиален, если его группа $\pi_1(S^4 \setminus S^2)$ изоморфна $\mathbb{Z}$. Известно, что в этом случае дополнение $S^4 \setminus S^2$ имеет гомотопич. тип S^1.

3-лентой в S^4 наз. образ D^3 такой иммерсии $\varphi : \Delta^3 \to S^4$, где Δ^3 — трехмерный диск, что $\varphi|_{\partial\Delta^3}$ — вложение; самопересечения φ состоят из конечного числа попарно непересекающихся двумерных дисков $D_1, \ldots, D_n$; прообраз $\varphi^{-1}(D_i)$ каждого диска D_i является объединением двух таких дисков D_i' и D_i'', что $D_i' \cap D_i'' = \varnothing$, $D_i' \subset \operatorname{int}\Delta^3$, $\partial D_i'' = D_i'' \cap \partial\Delta^3$. Образ края $\partial\Delta^3$ является двумерным узлом в S^4. Так получаемые узлы наз. ленточными узлами. Это — один из наиболее изученных классов Д. у. Всякий ленточ-

ный Д. у. является границей нек-рого трехмерного подмногообразия сферы S^4, гомеоморфного либо диску Δ^3, либо связной сумме нек-рого числа $(S^1\times S^2)\setminus\Delta^3$. Ленточный Д. у. тривиален тогда и только тогда, когда фундаментальная группа его дополнения изоморфна $\mathbb{Z}$. Группа G тогда и только тогда является группой нек-рого ленточного Д. у. в S^4, когда она имеет к о п р е д с т а в л е н и е З и р т и н г е р а, т. е. копредставление $|x_1, \ldots, x_n : r_1, \ldots, r_m|$, где каждое соотношение имеет вид $x_i=\omega_{i,j}x_j\omega_{i,j}^{-1}$, в к-ром число соотношений на единицу меньше числа образующих в $G/[G, G]=\mathbb{Z}$.

Класс групп всех Д. у. полностью не описан. Известно, что этот класс шире класса групп k-мерных узлов в S^{k+2}, $k\geqslant 3$. Последний класс полностью охарактеризован (см. *Многомерный узел*). Свойства групп Д. у., к-рыми, вообще говоря, не обладают группы трехмерных узлов в S^5, таковы:

$$\dim H_2(G', \mathbb{Q})\leqslant\dim H_1(G', \mathbb{Q}),$$

где $G'=[G, G]$ — коммутант; на конечной группе $T=\mathrm{Tors}(G'/G'')$ существует такая невырожденная симметричная форма $L: T\otimes T\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, что для любых $m\in G$, $x, y\in T$ имеет место $L(x, y)=L(\tau x, \tau y)$, где $\tau: T\to T$ — автоморфизм, индуцированный сопряжением в группе G на элемент m.

Задача вычисления $\pi_2(S^4\setminus S^2)$ решена лишь для частных типов Д. у., напр. полученных конструкцией Артина, ленточных и расслоенных.

А. В. Чернавский, М. Ш. Фарбер.

ДВУПОЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛОИД — см. *Гиперболоид*.

ДВУСТОРОННЕЕ БОРЕЛЕВСКОЕ МНОЖЕСТВО к л а с с а α — борелевское подмножество метрического или (более широко) совершенно нормального топологич. пространства, являющееся одновременно множеством аддитивного класса α и мультипликативного класса α, т. е. принадлежащее одновременно классам F_α и G_α. Д. б. м. класса 0 — открыто замкнутые множества. Д. б. м. класса 1 — множества типов F_σ и G_δ одновременно. Любое борелевское множество класса α есть Д. б. м. класса β при всяком $\beta>\alpha$. Д. б. м. класса α образуют поле множеств.

Лит.: [1] К у р а т о в с к и й К., Топология, т. 1, пер. М. Я. Антоновского, М., 1966; [2] Х а у с д о р ф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.—Л., 1937.

А. Г. Елькин.

ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА — совокупность оценок некоторой величины a сверху и снизу. О ц е н к о й с в е р х у наз. неравенство вида $a\leqslant A_1$; о ц е н к о й с н и з у — неравенство противоположного смысла $a\geqslant A_0$. Величины A_0, A_1, с помощью к-рых оценивается величина a, как правило, имеют или более простой вид или значительно легче вычисляются чем a.

П р и м е р ы. 1) Пусть m, M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$; тогда для интеграла $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ справедлива Д. о.:

$$m(\beta-\alpha)\leqslant\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\leqslant M(\beta-\alpha),$$

где

$$A_0=m(\beta-\alpha),\quad a=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx,\quad A_1=M(\beta-\alpha).$$

2) Д. о. констант Лебега L_n при всех $n=0, 1, 2, \ldots$:

$$0{,}9897\ldots<L_n-\frac{4}{\pi^2}\ln(2n+1)\leqslant 1.$$

3) Д. о. собственных значений. Пусть поставлена задача на собственные значения линейного самосопряженного оператора $T: Tu=\lambda u$ в гильбертовом пространстве H. Строится следующий итерационный процесс: $Tf_{n+1}=f_n$, где $f_0\neq 0$. В силу самосопряженности оператора T скалярные произведения (f_m, f_k) зависят лишь от

суммы индексов $m+k$. Числа $a_n=(f_0,\ f_n)=(f_m,\ f_{n-m})$ наз. постоянными Шварца, а числа $\mu_{n+1}=a_n/a_{n+1}$ — частными Рэлея — Шварца. Если оператор T положительный, то μ_n образуют монотонную невозрастающую сходящуюся последовательность.

Если λ_0 — собственное значение оператора T, $a<\lambda_0<b$, $a<\mu_{2k}<b$, и на интервале $(a,\ b)$ нет других точек спектра оператора T, то

$$\mu_{2k}-\frac{\rho^2}{b-\mu_{2k}}\leqslant\lambda_0\leqslant\mu_{2k}+\frac{\rho^2}{\mu_{2k}-a},\quad \rho^2=\frac{\mu_{2k-1}-\mu_{2k}}{\mu_{2k}}$$

(теорема Темпля [3]). При определенных условиях частные Рэлея — Шварца сходятся к нек-рому собственному значению оператора T.

Численные методы получения Д. о. (двусторонних приближений) наз. двусторонними методами [4]. Рассмотренный выше способ построения частных Рэлея — Шварца является примером двустороннего метода. Нек-рые двусторонние методы основаны на использовании пары приближенных формул, имеющих остаточные члены противоположных знаков. Пусть, напр., функция $f(x)$, заданная в точках (узлах интерполяции) $x_0<x_1<\ldots<x_n$, интерполируется многочленом Лагранжа $L_0(x)$ с узлами $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}$, $L_1(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа с узлами $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$. Тогда для остаточных членов справедливы соотношения:

$$R_0(x)=f(x)-L_0(x)=\frac{f^{(n)}(\xi_0)}{n!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}),$$

$$R_1(x)=f(x)-L_1(x)=\frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

где $\xi_0,\ \xi_1\in[x_0,\ x_n]$. Если производная $f^{(n)}(x)$ не меняет знака на отрезке $[x_0,\ x_n]$, то $R_0(x)$ и $R_1(x)$ имеют разные знаки. Справедлива Д. о.:

$$\min(L_0(x),\ L_1(x))\leqslant f(x)\leqslant\max(L_0(x),\ L_1(x)).$$

Наиболее разработаны двусторонние методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений [5] — [9].

Двусторонние методы дают возможность указать границы области, в к-рой заведомо лежит решение задачи. При этом приходится согласиться с усложнением алгоритма. Более того, чтобы обеспечить двусторонность в реальных вычислениях (при наличии ошибок округлений), приходится еще более усложнять алгоритм. Двусторонние методы применяются в основном в тех случаях, когда необходимо иметь гарантированную оценку погрешности.

Лит.: [1] Галкин П. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 109, с. 3—5; [2] Коллатц Л., Задачи на собственные значения с техническими приложениями, пер. с нем., М., 1968; [3] его же, Функциональный анализ и вычислительная математика, пер. с нем., М., 1969; [4] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [5] Волков Е. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 112, с. 141—51; [6] Ремез Е. Я., «Зап. природниго-технічного відділу» АН УССР, 1931, № 1, с. 1—38; [7] Горбунов А. Д., Шахов Ю. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1963, т. 3, № 2, 239—53; 1964, т. 6, № 3, 426—33; [8] Девятко В. И., там же, 1963, т. 3, № 2, 254—65; [9] Салихов Н. П., там же, 1962, т. 2, № 4, 515—28.

В. В. Поспелов.

ДВУСТОРОННЯЯ ПОВЕРХНОСТЬ — см. *Односторонние и двусторонние поверхности.*

ДВУУГОЛЬНИК сферический — фигура, образованная двумя полуокружностями больших кругов сферы, исходящими из диаметрально противоположных точек. См. *Сферическая геометрия.*

А. Б. Иванов.

ДВУХ КОНСТАНТ ТЕОРЕМА — пусть D — конечносвязная жорданова область на плоскости комплексного переменного z, $w(z)$ — регулярная аналитич. функция в D, удовлетворяющая неравенству $|w(z)|\leqslant M$, при-

чем на нек-рой дуге α границы ∂D выполняется соотношение

$$\lim_{z \to \zeta} \sup |w(z)| \leqslant m < M, \quad z \in D, \quad \zeta \in \alpha;$$

тогда в каждой точке z множества

$$\{z \in D; \quad 0 < \lambda \leqslant \omega(z; \alpha, D) < 1\},$$

где $\omega(z; \alpha, D)$ — *гармоническая мера* дуги α относительно D в точке z, выполняется неравенство

$$|w(z)| \leqslant m^{\lambda} \cdot M^{1-\lambda}.$$

Если для нек-рого z (удовлетворяющего условию $\omega(z; \alpha, D) = \lambda$) достигается равенство, то оно сохраняется и для всех $z \in D$ и всех λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, а функция $w(z)$ в этом случае имеет вид

$$w(z) = e^{ia} m^{\varphi(z)} M^{1-\varphi(z)},$$

где a — действительное число, $\varphi(z)$ — аналитич. функция в D, для к-рой $\operatorname{Re}\varphi(z) = \omega(z; \alpha, D)$ (см. [1], [2]).

Д. к. т. дает количественное выражение граничного свойства единственности аналитич. функций и имеет важные применения в теории функций [3]. *Адамара теорема* о трех кругах получается из нее как частный случай. О возможных аналогах Д. к. т. для гармонич. функций в пространстве см. [4], [5].

Лит.: [1] Nevanlinna F. und R., «Acta Soc. scient. fennica», 1922, Bd 50, № 5; [2] Ostrowski A., «Jahresber. Dtsch. Math. Ver.», 1923, Bd 32, H. 9—12; [3] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941; [4] Мергелян С. Н., «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, в. 5, с. 3—26; [5] Соломенцев Е. Д., «Докл. АН Арм. ССР», 1966, т. 42, № 5, 274—78.

Е. Д. Соломенцев.

ДВУХ ТЕЛ ЗАДАЧА — задача о движении в трехмерном евклидовом пространстве E^3 двух материальных точек P_1 и P_2 с массами m_1 и m_2 под действием ньютонова притяжения. Д. т. з. является частным случаем задачи n тел, к-рая описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $6n$ и имеет 10 независимых интегралов: 6 — движения центра инерции, 3 — площадей и 1 — энергии (см. [1]). Д. т. з. имеет, кроме того, еще три интеграла Лапласа (из них один независим от предыдущих) и является полностью интегрируемой (см. [2]).

Интегрирование Д. т. з. удобнее производить в специальных системах координат, использующих указанные интегралы. Если начало декартовых координат x, y, z поместить в точку P_1 (при этом используются все 6 интегралов движения центра инерции) и ось z направить по вектору, составленному из интегралов площадей (при этом используются два интеграла площадей), то движение точки P_2 происходит в плоскости $z = 0$ и удовлетворяет системе

$$\ddot{x} = -\mu x r^{-3}, \quad \ddot{y} = -\mu y r^{-3}, \tag{1}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\mu = f(m_1 + m_2)$, f — гравитационная постоянная. Система (1) имеет 4 интеграла:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c \text{ (площадей)},$$

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \mu r^{-1} = h \text{ (энергии)},$$

$$c\dot{y} - \mu x r^{-1} = \lambda_1 \quad \text{и} \quad c\dot{x} + \mu y r^{-1} = -\lambda_2 \text{ (Лапласа)},$$

связанных соотношением

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1 + 2hc^2.$$

При этом

$$c^2 = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \mu r, \tag{2}$$

т. е. орбиты точки P_2 суть конич. сечения с параметром $p = c^2/\mu$, большой полуосью $a = -\mu/(2h)$, эксцентриситетом $e = \mu^{-1}\sqrt{1 + 2hc^2}$, долготой перицентра ω

$$(\lambda_1 = \mu e \cos \omega, \ \lambda_2 = \mu e \sin \omega)$$

и с фокусом в начале координат. Положение точки P_2 на орбите определяют истинной аномалией v, отсчитываемой от направления на перицентр; тогда (2) дает $r=p/(1+e\cos v)$. Если $c\neq 0$, то возможны три типа орбит

(I) при $h<0$ это — эллипсы, тогда

$$t-\tau=\sqrt{a^3}\,(u-e\sin u),$$
$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2};$$

(II) при $h>0$ это — гиперболы, тогда

$$t-\tau=\sqrt{-a^3}\,(e\operatorname{sh}u-u),$$
$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\operatorname{th}\frac{u}{2};$$

(III) при $h=0$ это — параболы, тогда

$$t-\tau=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^3}{\mu}}\left(\operatorname{tg}\frac{v}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2}\right).$$

Здесь τ — момент прохождения через перицентр, u — эксцентрическая аномалия. Если $c=0$, то движение происходит по прямой линии. Д. т. з. описывает невозмущенное кеплерово движение планеты относительно Солнца либо спутника относительно планеты и т. п.

Лит.: [1] Зигель К. Л., Лекции по небесной механике, пер. с нем., М., 1959; [2] Абалакин В. К. (и др.), Справочник по небесной механике и астродинамике, М., 1971.

А. Д. Брюно.

ДВУХТОЧЕЧНЫЙ ТЕНЗОР — тензор T, зависящий от пар точек x, x' многообразия X, т. е. тензорное поле $T(x, x')$, определенное на произведении $X\times X$. Напр., Д. т. являются ковариантные производные *мировой функции* $\Omega(x, x')$ и вообще произвольного двухточечного инварианта. Свойства Д. т., в частности пределы совпадения T и его производных при $x'\to x$, напр.

$$[T_{ij'}]=\lim_{x'\to x}\nabla_i\nabla_{j'}T\,(x,\,x'),$$

используются в вариационном исчислении и теории относительности.

Лит.: [1] Синг Дж.-Л., *Общая теория относительности*, пер. с англ., М., 1963.

М. И. Войцеховский.

ДВУЧЛЕННОЕ СРАВНЕНИЕ — алгебраическое сравнение вида

$$x^n\equiv a\pmod m,\qquad(1)$$

где a, m — взаимно простые целые числа, а $n\geqslant 2$ — натуральное число. Если сравнение (1) разрешимо, то a наз. вычетом степени n по модулю m. В противном случае a наз. невычетом степени n по модулю m.

Вопрос о разрешимости Д. с. по составному модулю m сводится к изучению аналогичного вопроса для случая простого модуля p (см. *Сравнение*). Для простого модуля имеется критерий разрешимости, доказанный Л. Эйлером (L. Euler): для разрешимости сравнения

$$x^n\equiv a\pmod p$$

необходимо, чтобы выполнялось условие

$$a^{\frac{p-1}{\delta}}\equiv 1\pmod p,$$

где δ — наибольший общий делитель чисел n и $p-1$; при выполнении этого условия данное сравнение имеет ровно δ решений.

Из критерия Эйлера непосредственно следует, что среди чисел $1, 2, \ldots, p-1$ имеется в точности $(p-1)/\delta$ вычетов и $(\delta-1)(p-1)/\delta$ невычетов степени n по модулю p.

Значительно сложнее обратная задача: найти все модули p, по к-рым заданное число a является вычетом (или невычетом) степени $n\geqslant 2$. Л. Эйлером установлено, что разрешимость или неразрешимость сравнения $x^2\equiv$

$\equiv a \pmod p$ зависит от того, принадлежит или нет простой модуль p некоторым арифметич. прогрессиям. Полное доказательство этого результата впервые получил К. Гаусс (C. Gauss, 1801; см. [4], а также *Гаусса закон взаимности*, *Квадратичный закон взаимности*). Более того, К. Гаусс заметил, что полное решение указанной задачи при $n \geqslant 3$ возможно только в нек-ром расширении кольца целых рациональных чисел. Так, для установления закона взаимности для биквадратичных вычетов он вынужден был расширить кольцо целых рациональных чисел до кольца целых комплексных чисел $Z[i]$. Разрешимость или неразрешимость биквадратичного сравнения $x^4 \equiv \omega \pmod p$ в кольце $Z[i]$ при заданном $\omega \in Z[i]$ зависит от того, каков вычет числа p по нек-рому постоянному модулю D кольца $Z[i]$.

Новый этап в изучении Д. с. и их применений к другим задачам теории чисел был начат работами И. М. Виноградова, к-рый в 1914 доказал, что количество R квадратичных вычетов по простому модулю p среди чисел $1, 2, \ldots, Q$, $Q \leqslant p-1$, выражается формулой

$$R = \frac{1}{2} Q + \theta \sqrt{p} \ln p,$$

где $|\theta| \leqslant 1$. Аналогичный результат был впоследствии получен И. М. Виноградовым и для более общей задачи о числе решений сравнения

$$x^n \equiv y \pmod p, \quad n \geqslant 2,$$

когда y пробегает неполную систему вычетов $1 \leqslant y \leqslant Q$.

Лит.: [1] Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.—Л., 1937; [2] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [3] его же, Избр. труды, М., 1952; [4] Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел, [пер.], М., 1959.

С. А. Степанов.

ДВУЧЛЕННОЕ УРАВНЕНИЕ — алгебраическое уравнение вида $ax^n + b = 0$, где a и b — комплексные числа, и $ab \neq 0$. Д. у. имеют n различных комплексных корней

$$x_k = \sqrt[n]{\left|\frac{b}{a}\right|} \exp\left(\frac{2\pi k + \varphi}{n} i\right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \varphi = \arg\left(-\frac{b}{a}\right).$$

Корни Д. у. на комплексной плоскости расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|b/a|}$ с центром в начале координат в вершинах правильного вписанного n-угольника.

А. И. Галочкин.

ДЕБАЕВСКАЯ ДЛИНА, дебаевский радиус,— расстояние, на к-рое распространяется действие электрического поля отдельного заряда в нейтральной среде, состоящей из положительно и отрицательно заряженных частиц (плазма, электролиты). Вне сферы радиуса Д. д. электрич. поле заряда экранируется в результате поляризации окружающей среды.

Д. д. определяется формулой:

$$d = \left\{\sum_j \frac{4\pi e_j^2 N_j}{kT_j}\right\}^{-1/2},$$

где e_j, N_j, T_j — заряд, плотность и температура частиц сорта j, k — постоянная Больцмана. Суммирование идет по всем сортам частиц, при этом должно выполняться условие нейтральности: $\sum_j e_j N_j = 0$. Важным параметром среды является число частиц в сфере радиуса Д. д.:

$$n_D = \frac{4\pi}{3} d^3 \sum_j N_j.$$

Оно характеризует отношение средней кинетич. энергии частиц к средней энергии их кулоновского взаимодействия:

$$n_D \sim (E_{\text{кин}}/E_{\text{кул}})^{3/2}.$$

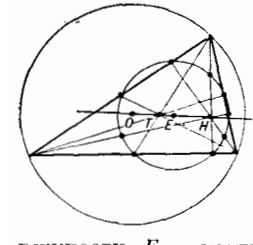
Для электролитов это число мало: $n_D \sim 10^{-4}$; для плазмы, находящейся в самых различных физич. условиях,—

велико. Это позволяет использовать методы кинетич. теории для описания плазмы.

Понятие Д. д. введено П. Дебаем (P. Debye) в связи с изучением явлений электролиза. *Д. П. Костомаров.*

ДЕВИАТОР — тензор напряжений (или деформаций) с равным нулю первым инвариантом, т. е. с равной нулю суммой членов главной диагонали матрицы тензора. См. *Деформаций тензор*, *Напряжений тензор*.

ДЕВЯТИ ТОЧЕК ОКРУЖНОСТЬ, окружность Эйлера,— окружность, на к-рой расположены середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр треугольника с вершинами. Ее радиус равен половине радиуса окружности, описанной около треугольника. Д. т. о. треугольника касается вписанной в него окружности и трех вневписанных окружностей. Пусть H — ортоцентр неравностороннего треугольника, T — центр тяжести, O — центр описанной окружности, E — центр Д. т. о. Точки H, T, O, E лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем E — середина отрезка HO и пара точек H, T гармонически разделяет пару точек O, E.



Лит.: [1] Зетель С. И., Новая геометрия треугольника, 2 изд., М., 1962; [2] Перепелкин Д. И., Курс элементарной геометрии, ч. 1, М.—Л., 1948. *В. Т. Базылев.*

ДЕДЕКИНДА ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ — см. *Дзета-функция* в теории чисел.

ДЕДЕКИНДА ПРИЗНАК сходимости ряда: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, где a_n и b_n — комплексные числа, сходится, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ абсолютно сходится, $a_n \to 0$ и частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДЕДЕКИНДА ТЕОРЕМА о непрерывности числовой прямой: для всякого сечения $A|B$ множества действительных чисел (см. *Дедекиндово сечение*) существует действительное число α, являющееся либо наибольшим в классе A, либо наименьшим в классе B. Это утверждение наз. также принципом (или аксиомой) Дедекинда непрерывности числовой прямой (см. *Действительное число*). Число α является верхней гранью множества A и нижней гранью множества B. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДЕДЕКИНДОВА РЕШЕТКА, дедекиндова структура, модулярная решетка (структура),— решетка, в к-рой справедлив модулярный закон, т. е. $a \leqslant c$ влечет $(a+b)c = a+bc$ для всякого b. Высказанное требование равносильно справедливости тождества $(ac+b)c = ac+bc$. Примерами Д. р. служат решетки подпространств линейного пространства, нормальных делителей (но не подгрупп) группы, идеалов кольца и др. Решетка, имеющая *композиционный ряд*, является Д. р. тогда и только тогда, когда на ней существует функция размерности d, т. е. такая целочисленная функция, что $d(x+y)+d(xy) = d(x)+d(y)$ и что из простоты интервала $[a, b]$ вытекает $d(b) = d(a)+1$. Если $w = a_1^{(1)} \dots a_{m_1}^{(1)} = a_1^{(2)} \dots a_{m_2}^{(2)}$, каждый из элементов $a_i^{(k)}$ не представим в виде произведения отличных от него элементов и

$$a_1^{(k)} \dots a_{i-1}^{(k)} a_{i+1}^{(k)} \dots a_{m_k}^{(k)} \not\leqslant a_i^{(k)},$$

то $m_1 = m_2$ и для всякого $a_i^{(1)}$ найдется такой элемент $a_j^{(2)}$, что

$$w = a_1^{(1)} \dots a_{i-1}^{(1)} a_j^{(2)} a_{i+1}^{(1)} \dots a_{m_1}^{(1)}$$

(см. [3], [6]). Ненулевые элементы $a_1, \dots, a_n$ из Д. р. с нулем 0 называются независимыми, если $(a_1 + \dots$

$\ldots+a_{i-1}+a_{i+1}+\ \ldots\ +a_n)a_i=0$ для всех i. Это определение позволяет обобщить многие свойства линейно независимых систем векторов (см. [3], [5], [6]). Если $a_1, \ldots, a_n$ независимы, то их сумма обозначается как $a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$. Теорема Оре: если Д. р. имеет композиционный ряд и

$$1 = a_1^{(1)} \oplus \ldots \oplus a_{m_1}^{(1)} = a_1^{(2)} \oplus \ldots \oplus a_{m_2}^{(2)},$$

причем каждый из элементов $a_i^{(k)}$ не представляется в виде суммы двух независимых элементов, то $m_1=m_2$ и для всякого $a_i^{(1)}$ найдется такой элемент $a_j^{(2)}$, что

$$1 = a_1^{(1)} \oplus \ldots \oplus a_{i-1}^{(1)} \oplus a_j^{(2)} \oplus a_{i+1}^{(1)} \oplus \ldots \oplus a_{m_1}^{(1)}$$

(см. [3], [6]). В случае полных Д. р., подчиненных нек-рым дополнительным требованиям, теоремы о независимых элементах и прямых разложениях можно распространить на бесконечные множества (см. [4], [5]). Исследовались Д. р. с дополнениями, то есть Д. р. с 0 и 1, для каждого элемента x к-рых существует хотя бы один такой элемент y (наз. дополнением элемента x), что $x+y=1$, $xy=0$. Д. р. с дополнениями, обладающая композиционным рядом, изоморфна Д. р. всех подпространств конечномерного линейного пространства над нек-рым телом. Полная Д. р. L с дополнениями изоморфна Д. р. всех подпространств линейного пространства (не обязательно конечномерного) над нек-рым телом тогда и только тогда, когда: а) если $0 \neq a \in L$, то найдется *атом* $p \leqslant a$; б) если p — атом и $p \leqslant \sup A$, где $A \subseteq L$, то $p \leqslant \sup F$ для нек-рого конечного множества $F \subseteq A$; в) если p, q — атомы, то найдется атом $r \leqslant p+q$, причем $r \neq p$, q; г) существует не менее трех независимых атомов. Условие г) можно заменить требованием справедливости *Дезарга предложения* (см. [2]). Дальнейшее обобщение этого результата, приводящее к регулярным кольцам (см. [7], [5]), смыкается с теорией алгебр Неймана. Для Д. р. с композиционным рядом наличие дополнений равносильно представимости единицы в виде суммы атомов.

Д. р. названы в честь Р. Дедекинда, к-рый первым сформулировал модулярный закон и установил ряд его следствий [1].

Лит.: [1] Dedekind R., Gesammelte mathematische Werke, Bd 2, Braunschweig, 1931, S. 236—71; [2] Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, пер. с англ., М., 1955; [3] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [4] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [5] Скорняков Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961; [6] его же, Элементы теории структур, М., 1970; [7] Neumann J. von, Continuous geometry, N. Y., 1960.

Л. А. Скорняков.

ДЕДЕКИНДОВО КОЛЬЦО — ассоциативное коммутативное кольцо R с единицей, не содержащее делителей нуля (т. е. коммутативная область целостности), в к-ром каждый собственный идеал представим в виде произведения простых идеалов (идеал P кольца R наз. простым, если факторкольцо R/P не содержит делителей нуля). Свое название эти кольца получили по имени Р. Дедекинда (R. Dedekind), к-рый в числе первых изучал такие кольца в 70-х гг. 19 в.

Каждая область главных идеалов является Д. к. Если R есть Д. к., L — конечное алгебраич. расширение его поля частных, то целое замыкание R' кольца R в L (т. е. совокупность элементов из L, являющихся корнями уравнений вида $x^n+a_1x^{n-1}+\ \ldots\ +a_n=0$, $a_i \in R$) снова будет Д. к. В частности, дедекиндовыми являются кольцо целых алгебраич. чисел и максимальные порядки полей алгебраич. чисел, т. е. целые замыкания кольца целых чисел в конечных алгебраич. расширениях поля рациональных чисел.

В Д. к. R каждый собственный идеал обладает единственным представлением в виде произведения простых идеалов. Эта теорема возникла из задачи о разложении элементов на простые множители в максимальных по-

рядках полей алгебранч. чисел. Такое разложение, вообще говоря, не единственно.

Кольцо R дедекиндово тогда и только тогда, когда полугруппа *дробных идеалов* этого кольца является группой. Каждый дробный идеал Д. к. R обладает единственным представлением в виде произведения степеней (положительных или отрицательных) простых идеалов кольца R. Д. к. обладает следующей характеризацией: коммутативная область целостности является Д. к. тогда и только тогда, когда R есть нётерово кольцо, каждый собственный простой идеал кольца R максимален и R целозамкнуто, т. е. совпадает *со своим* целым замыканием в поле частных. Другими словами, Д. к. есть нётерово нормальное кольцо размерности один по Круллю. Для Д. к. R выполняется так наз. «китайская теорема об остатках»: для данного конечного набора идеалов I_i и элементов x_i кольца R, $i=1, 2, \ldots, n$, система сравнений $x \equiv x_i (\mathrm{mod}\, I_i)$ имеет решение $x \in R$ тогда и только тогда, когда $x_i \equiv x_j (\mathrm{mod} I_i + I_j)$ для $i \neq j$. Д. к. R можно охарактеризовать также как *Крулля кольцо* размерности один. Каждое Д. к. является регулярным коммутативным кольцом и все его локализации по максимальным идеалам есть *дискретного нормирования кольцо*. Полугруппа ненулевых идеалов Д. к. R изоморфна полугруппе P *дивизоров* этого кольца.

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963; [2] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [3] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, М., 2 изд., 1972; [4] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

Л. А. Бокутъ.

ДЕДЕКИНДОВО СЕЧЕНИЕ, сечение,— разбиение множества действительных (или только одних рациональных) чисел R на два такие непустые множества A и B, в сумме дающие R, что для каждого $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a < b$. Д. с. обозначается символом $A|B$. Множество A наз. нижним, а множество B — верхним классом сечения $A|B$. Д. с. множества рациональных чисел применяются для построения теории *действительных чисел*. В терминах Д. с. действительных чисел формулируется *понятие непрерывности* числовой прямой.

Л. Д. Кудрявцев.

ДЕДУКЦИИ ТЕОРЕМА — общее название ряда теорем, позволяющих устанавливать доказуемость импликации $A \supset B$ в случае, когда дан логический вывод формулы B из формулы A. В простейшем случае классического, интуиционистского и т. п. исчислений высказываний Д. т. утверждает: если $\Gamma, A \vdash B$ (из допущений Γ, A выводимо B), то

$$\Gamma \vdash (A \supset B) \qquad (*)$$

(Γ может быть пусто). При наличии кванторов аналогичное утверждение неверно:

$$A(x) \vdash \forall x A(x),$$

но не

$$\vdash A(x) \supset \forall x A(x).$$

Одна из формулировок Д. т. для традиционных исчислений предикатов (классического, интуиционистского и т. п.): если $\Gamma, A \vdash B$, то

$$\Gamma \vdash (\forall A \supset B),$$

где $\forall A$ означает результат приписывания $\forall$ -кванторов (см. *Квантор*) по всем свободным переменным формулы A. В частности, если A — замкнутая формула, Д. т. принимает форму (*). Эта формулировка Д. т. дает возможность сводить поиск вывода в аксиоматич. теориях к поиску вывода в исчислении предикатов: формула B выводима из аксиом $A_1, \ldots, A_n$ тогда и

только тогда, когда в исчислении предикатов выводима формула

$$\forall A_1 \supset (\forall A_2 \supset \ldots \supset (\forall A_n \supset B)\ldots).$$

Похожим образом формулируется Д. т. для логик, где имеются связки, «похожие» на кванторы. Так, для *модальных логик* $S4$ и $S5$ Д. т. имеет вид: если $\Gamma, A \vdash B$, то

$$\Gamma \vdash (\Box A \supset B).$$

Более тонкие формулы Д. т. получаются, если вводить $\forall$-кванторы не по всем свободным переменным, а лишь по тем, к-рые связываются кванторами в процессе вывода. Говорят, что переменная y варьируется для формулы A в данном выводе, если y входит свободно в A и в рассматриваемом выводе имеется применение правила введения $\forall$ в заключение импликации (или введения $\exists$ в посылку), при к-ром вводится квантор по y, причем посылка этого применения зависит в данном выводе от A. Теперь Д. т. для традиционных исчислений предикатов уточняется так: если $\Gamma, A \vdash B$, то

$$\Gamma \vdash (\forall y_1 \ldots y_n A \supset B),$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — полный список переменных, к-рые варьируются для A в данном выводе. В частности, если никакая свободная переменная из A не варьируется, то Д. т. принимает форму (*). При формулировке соответствующего уточнения Д. т. для модальных логик следует считать, что варьирование происходит в правилах введения $\Box$ в заключение импликации и $\Diamond$ — в посылку.

При установлении Д. т. для исчислений релевантной импликации (т. е. для систем, согласованных с истолкованием $A \supset B$ как «B выводимо с существенным использованием допущения A») приходится либо модифицировать само понятие вывода, либо считать, что варьирование происходит при всяком использовании «постороннего» допущения; напр., при переходе от пары $A, \Gamma \vdash C$, $\Gamma \vdash D$ к $A, \Gamma \vdash (C \& D)$ варьируется формула A, т. к. она не входит во второй член пары.

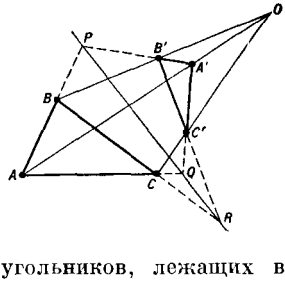
Если A не варьируется в данном выводе, то Д. т. принимает форму (*), а если A варьируется, то Д. т. принимает вид: если $A, \Gamma \vdash B$, то

$$\Gamma \vdash ((A \,\&\, t) \supset B),$$

где t — константа «истина» (*или* конъюнкция формул $(p \supset p)$ для всех пропозициональных переменных p, выходящих в A, Γ, B).

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Карри Х. Б., Основания математической логики, пер. с англ., М., 1969. *Г. Е. Минц.*

ДЕЗАРГА ПРЕДЛОЖЕНИЕ, теорема Дезарга: если соответствующие стороны двух треугольников ABC и $A'B'C'$ пересекаются в точках P, Q, R, лежащих на одной прямой, то прямые, соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной точке; обратно: если прямые, соединяющие соответствующие вершины треугольников ABC и $A'B'C'$, сходятся в одной точке, то соответствующие стороны этих треугольников пересекаются в точках, лежащих на одной прямой. Обратное утверждение для треугольников, лежащих в одной плоскости, двойственно прямому по малому принципу двойственности. В обоих случаях точки и прямые составляют конфигурацию Дезарга (конфигурацию 10_3), расположенную в нек-ром двумерном или трехмерном проективном пространстве.



Если оба треугольника принадлежат одной *проективной плоскости*, то Д. п. нельзя доказать лишь на основе аксиом инцидентности плоскости (см. *Недезаргова геометрия*), однако оно справедливо на любой проективной плоскости, к-рую можно вложить в проективное пространство большей размерности. Пространственный случай Д. п. следует из аксиом инцидентности пространства.

Выполнение Д. п. необходимо и достаточно для построения проективной алгебры точек проективной прямой и введения синтетическим путем *проективных координат*. Д. п. установлено Ж. Дезаргом [1]. *М. И. Войцеховский.*

В теоретико-структурных терминах (см. *Решетка*) Д. п. может быть сформулировано в виде тождества (см. [4])

$$[(x+z)(y+u)+(x+u)(y+z)](x+y) \leqslant$$
$$\leqslant [(y+x)(z+u)+(y+u)(z+x)](y+z)+$$
$$+[(z+y)(x+u)+(z+u)(x+y)](z+x).$$

Л. А. Скорняков.

Лит.: [1] Bosse A., Manière universelle de m-r Desargues, pour pratiquer la perspective par petit-pied comme le géométral, P., 1648; [2] Гильберт Д., *Основания геометрии*, пер. с нем., М.—Л., 1948; [3] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 5 изд., М., 1971; [4] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952.

ДЕЗАРГОВА ГЕОМЕТРИЯ, геометрия дезаргова пространства, — *геодезических геометрия*, в к-рой роль геодезических играют обыкновенные прямые. Точнее, дезарговым пространством R наз. G-пространство, допускающее такое топологич. отображение в проективное пространство P^n, что каждая геодезическая R отображается в прямую P^n.

Для того чтобы R было дезарговым пространством, необходимо и достаточно, чтобы:

1) геодезическая, проходящая через две различные точки, была единственна;

2) при $\dim R=2$ выполнялось *Дезарга предложение*, и обратное ему, если только существуют все пересечения, имеющиеся там;

3) при $\dim R>2$ любые три точки R лежали в одной плоскости.

При этом R, отображенное в P^n, либо покрывает все P^n, и в этом случае геодезические R являются окружностями одной и той же длины, либо R не содержит ни одной точки нек-рой гиперплоскости и может рассматриваться как открытая выпуклая область аффинного пространства.

В римановом случае единственными Д. г. являются евклидова, гиперболич. и эллиптич. геометрии, т.е. из дезаргова характера пространства следуют весьма сильные свойства подвижности (теорема Бельтрами). Это — пример поразительной теоремы римановой геометрии, не имеющей аналога в более общих пространствах. При достаточно сильных условиях дифференцируемости был дан метод построения Д. г., однако окончательное и общее решение этой, так наз. 4-й проблемы Гильберта о метризации проективного пространства или его выпуклых подобластей без какого-то ни было предположения регулярности, дал А. В. Погорелов [2]. Другой пример Д. г., ценный для изучения пространств неположительной кривизны, доставляет *Гильберта геометрия*.

Важным примером римановых Д. г. является *Минковского геометрия*, к-рую можно рассматривать как прототип всех римановых геометрий (в т. ч. *финслеровой геометрии*).

Лит.: [1] Бузсман Г., Геометрия геодезических, пер. с англ., М., 1962; [2] Погорелов А. В., Четвертая проблема Гильберта, М., 1974. *М. И. Войцеховский.*

ДЕЗОРИЕНТИРУЮЩИЙ ПУТЬ — замкнутый путь в многообразии, обладающий тем свойством, что при его обходе локальная ориентация меняет знак (см. *Ориентация* многообразия). Д. п. имеется только в неориентируемом многообразии M, причем однозначно определен гомоморфизм фундаментальной группы $\pi_1 M$ на $\mathbb{Z}_2$ с ядром, состоящим из классов петель, не являющихся Д. п. *А. В. Чернавский.*

ДЕЙСТВИЕ — функционал, выражаемый определенным интегралом от функции, стационарные значения к-рого определяют действительное движение механич. системы под действием заданных активных сил в классе кинематически возможных движений, удовлетворяющих определенным условиям, между нек-рыми двумя конечными положениями P_0 и P_1 в пространстве.

Различают Д. по Гамильтону, Лагранжу и Якоби, фигурирующие в соответствующих принципах стационарного действия.

Д. по Гамильтону:

$$\int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt,$$

определено в классе кинематически возможных движений голономной системы, для к-рых начальное и конечное положения системы и время движения между ними одинаковы с таковыми для действительного движения.

Д. по Лагранжу:

$$\int_{t_0}^{t} 2T\,dt,$$

Д. по Якоби:

$$\int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2\,(U+h)}\,ds,$$

$$ds^2 = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\,dq_i\,dq_j,$$

определены в классе кинематически возможных движений голономной консервативной системы, для к-рых начальное и конечное положения системы и постоянная энергия h одинаковы с таковыми для действительного движения. Здесь T — кинетич. энергия системы, причем для консервативной системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где $\dot{q}_i$ — обобщенные лагранжевы координаты, $U(q)$ силовая функция активных сил.

Подробнее см. *Вариационные принципы классической механики*, а также *Гамильтона — Остроградского принцип*, *Лагранжа принцип*, *Якоби принцип*.

В. В. Румянцев.

ДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ на многообразии — наиболее изученный случай общего понятия действия группы на пространстве. Топологич. группа G действует на пространстве X, если каждому $g \in G$ поставлен в соответствие гомеоморфизм φ_g пространства X (на себя), удовлетворяющий условиям: 1) $\varphi_g \cdot \varphi_h = \varphi_{gh}$; 2) для единицы $e \in G$ отображение φ_e есть тождественный гомеоморфизм; 3) отображение φ: $G \times X \to X$, $\varphi(g, x) = \varphi_g(x)$ непрерывно. В случае, когда X и G обладают дополнительными структурами, особый интерес представляют Д. г. G, учитывающие эти структуры; напр., если X — дифференцируемое многообразие, G — группа Ли, то отображение φ обычно предполагается дифференцируемым.

Множество $\{\varphi_g(x_0)\}_{g \in G}$ наз. орбитой (траекторией) точки $x_0 \in X$ относительно группы G; пространство орбит обозначается X/G и наз. также факторпространством пространства X по группе G. Важным примером является случай, когда X есть группа Ли, а G — ее подгруппа; тогда X/G есть соответствующее

однородное пространство. Классические примеры: сферы $S^{n-1}=O(n)/O(n-1)$, *Грассмана многообразия* $O(n)/O(m)\times O(n-m)$, *Штифеля многообразия* $O(n)/O(m)$. Здесь пространство орбит есть многообразие. Обычно же это не так, если действие группы не является свободным, напр., если множество X^G неподвижных точек непусто. При этом под с в о б о д н ы м д е й с т в и е м г р у п п ы понимается действие, при к-ром из $gx=x$, $x\in X$, $g\in G$ следует $g=e$. В противоположность этому, X^G будет многообразием, если X — дифференцируемое многообразие, а действие группы G дифференцируемо; это утверждение верно и для когомологич. многообразий над $\mathbb{Z}_p$ для $G=\mathbb{Z}_p$ (т е о р е м а С м и т а).

Если G — некомпактная группа, то пространство X/G, вообще говоря, неотделимо, и поэтому интерес представляет индивидуальное изучение траекторий и их взаимного расположения. Классическим является пример группы $G=\mathbb{R}$ действительных чисел, действующей дифференцируемым образом на дифференцируемом многообразии X. Изучение таких динамич. систем, эквивалентных заданию систем обыкновенных дифференциальных уравнений в локальных координатах, проводится в основном аналитич. методами.

В случае компактной группы G существует предположение, что если X — многообразие, а каждое $g\in G$, $g\neq e$ действует на X нетривиально (т. е. не является действием по закону $(g, x)\to x$), то G есть группа Ли (см. [8]). Поэтому интерес к случаю действия компактной группы концентрируется вокруг действия группы Ли.

Пусть G — компактная группа Ли, X — компактное когомологич. многообразие. Типичными являются следующие результаты. В X существует конечное число типов орбит, окрестности орбиты устроены как прямое произведение (т е о р е м а о с р е з е), имеют место представляющие интерес связи между когомологич. строением пространств X, X/G, X^G.

Если G — компактная группа Ли, X — дифференцируемое многообразие, а действие

$$\varphi: G\times X\to X$$

дифференцируемо, то естественным является отношение эквивалентности: $(X, \varphi)\sim(X', \varphi')\iff$ найдутся такие (X'', φ''), что граница $\partial X''$ имеет вид $\partial X''=X\cup X'$ и что $\varphi''|X=\varphi$, $\varphi''|X'=\varphi'$. В случае свободного действия группы G классы эквивалентности находятся во взаимно однозначном соответствии с *бордизмами* $\Omega_*(B_G)$ классифицирующего пространства B_G.

Результаты последних лет (сер. 70-х гг.) концентрируются в основном вокруг: 1) определения типов орбит при различных дополнительных предположениях о группе G и многообразии X (см., напр., [6]), 2) классификации Д. г., 3) отыскания связей между глобальными инвариантами многообразия X и локальными свойствами Д. г. G в окрестности неподвижных точек X^G. В решении этих вопросов важную роль играют методы современной дифференциальной топологии (напр., перестройки), аналог K-теории для векторных G-расслоений — K_G-теория [1], теории бордизмов и кобордизмов [3], аналитич. метод исследования Д. г. G, основанный на изучении псевдодифференциальных операторов в G-расслоениях (см. [2], [7]).

Лит.: [1] А т ь я М., Лекции по K-теории, пер. с англ., М., 1967; [2] А т ь я М., З и н г е р И., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, № 1, с. 127—82; [3] Б у х ш т а б е р В. М., М и щ е н к о А. С., Н о в и к о в С. П., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 2, с. 131—54; [4] К о н н е р П., Ф л о й д Э., Гладкие периодические отображения, пер. с англ., М., 1969; [5] B r e d o n G., Introduction to Compact Transformation Groups, N. Y., 1972; [6] W u Y i H s i a n g, Cohomology Theory of Topological Transformation Groups, N. Y., 1975; [7] Z a g i e r d o n B., Equivariant Pontrjagin Classes and Applications to orbit Spaces, 1972; [8] Proceedings of the Conference in Transformation Groups, N. Y. — Hdlb. — L., 1968; [9] Proceedings of the Second Conference on Compact Transformation Groups, B.—Hdlb.—N. Y., 1972.

А. В. Зарелуа.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, у к-рой как множество ее определения, так и множество ее значений являются нек-рыми подмножествами множества действительных чисел. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — множество $A=X(\mathbb{R})$ действительных точек алгебраич. многообразия X, определенного над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Д. а. м. наз. неособым, если X — неособое алгебраич. многообразие. В этом случае A является гладким многообразием, а его размерность $\dim A$ равна размерности комплексного многообразия $\mathbb{C}A=X(\mathbb{C})$, называемого комплексификацией многообразия A.

Наиболее изучены неособые регулярные полные пересечения, т. е. многообразия X в проективном пространстве $\mathbb{R}P^q$, являющиеся неособыми регулярными пересечениями гиперповерхностей $p_i(z)=0, 1\leqslant i\leqslant s$, где $p_i(z)$ — однородный действительный многочлен от q переменных степени m_i. В этом случае матрица

$$\left\| \frac{\partial p_i}{\partial z_j} \right\|$$

имеет ранг s в каждой точке $z\in\mathbb{C}A$; $\dim A=n=q-s$.

Пусть B обозначает Д. а. м., определяемое усеченной системой

$$p_i(z)=0,\ 1\leqslant i\leqslant s-1,\ p(z)=p_s(z) \text{ и } m=m_s.$$

Примеры регулярных полных пересечений:

1) Плоская действительная алгебраич. кривая; при этом $q=2$, $s=1$, $\mathbb{C}B=\mathbb{C}P^2$, $B=\mathbb{R}P^2$.

2) Действительная алгебраич. гиперповерхность; при этом $s=1$, $\mathbb{C}B=\mathbb{C}P^q$, $B=\mathbb{R}P^q$. В частности, при $q=3$ получается действительная алгебраич. поверхность.

3) Действительная алгебраическая пространственная кривая; при этом $q=3$, $s=2$. Поверхность B задается уравнением $p_1(z)=0$, а кривая A высекается на B поверхностью $p_2(z)=0$.

Плоская действительная алгебраич. кривая A порядка m_1 состоит в плоскости $\mathbb{R}P^2$ из конечного числа компонент, диффеоморфных окружности. При m_1 четном все они вложены в $\mathbb{R}P^2$ двусторонне, а при m_1 нечетном одна компонента вложена односторонне, а остальные — двусторонне. Двусторонне вложенная компонента кривой A наз. овалом кривой A. Овал, лежащий внутри нечетного числа других овалов кривой A, наз. нечетным, остальные овалы наз. четными.

Число компонент плоской действительной алгебраич. кривой порядка m_1 не превосходит $\frac{1}{2}(m_1-1)(m_1-2)+1$ (теорема Гарнака), [1]. Для каждого m_1 существует плоская действительная алгебраич. кривая с этим наибольшим числом компонент — M-кривая (о способах построения M-кривых см. [1], [2], [3], об обобщении этих результатов на пространственные кривые см. [2]).

Д. Гильберт (D. Hilbert) в 1900 поставил задачу изучения топологии Д. а.м., а также вложений Д. а. м. в $\mathbb{R}P^q$ и одного Д. а. м. в другое Д. а. м. (16-я проблема Гильберта). Он указал также трудные частные задачи: изучить взаимное расположение овалов кривой 6-го порядка, топологию и вложение в $\mathbb{R}P^3$ действительной алгебраич. поверхности 4-го порядка. Эти частные задачи решены (см. [12], [13]).

Для плоской действительной алгебраич. кривой A четного порядка m_1 выполняется точное неравенство

$$-\frac{1}{8}(3m_1^2-6m_1)\leqslant P-N\leqslant\frac{1}{8}(3m_1^2-6m_1)+1,$$

где P — число четных овалов кривой A, а N — число ее нечетных овалов (теорема Петровского).

Если m_1 нечетно, то аналогичное неравенство выполнено для $A \cup L$, где L — прямая в общем положении [4]. При обобщении этих результатов на случай действительной алгебраич. гиперповерхности четного порядка роль разности $P-N$ играет эйлерова характеристика $\chi(B_+)$, где $B_+ = \{z \in B | p(z) \geqslant 0\}$, если же q нечетно, то роль $P-N$ играет $\chi(A)$. Так, для действительной алгебраич. гиперповерхности A четного порядка m_1

$$|\chi(B_+)| \leqslant \tfrac{1}{2}(m_1-1)^q - s(q;\ m_1) + \tfrac{1}{2},$$

где $s(q;\ m_1)$ — число членов многочлена

$$\prod_{i=1}^{q} (1 + x_i + \ldots + x_i^{m-2}),$$

степень которых не превосходит $^1/_2(qm_1-2q-m_1)$; при нечетном q и любом m_1

$$|\chi(A)| \leqslant (m_1-1)^q - 2s(q;\ m_1) + 1$$

(см. [5]). Для действительной алгебраической пространственной кривой (в $\mathbb{R}P^3$) при четном m_1 выполняется неравенство

$$|\chi(B_+)| \leqslant \tfrac{1}{3}m_1^3 + \tfrac{3}{8}m_1m_2^2 + \tfrac{1}{4}m_1^2m_2 - m_1^2 - m_1m_2 + \tfrac{7}{6}m_1 + \frac{|\chi(B)|}{2}$$

(в случае $m_1=2$ эта оценка точная) (см. [6]). Имеются обобщения теорем Петровского на произвольные Д. а. м. (см. [10]).

Для плоской действительной алгебраич. M-кривой четного порядка m_1 выполняется сравнение

$$P - N \equiv \left(\frac{m_1}{2}\right)^2 \bmod 8$$

(см. [8], [9], [13]). При доказательстве этого сравнения (см. [8], [9]) были применены для изучения Д. а. м. методы дифференциальной топологии, в форме стимулирующей дальнейшие исследования. Пусть плоская действительная алгебраич. кривая A имеет четный порядок $m=2k$, знак перед $p(z)$ выбран так, что B_+ ориентируемо, а P_+, P_0, P_- обозначают соответственно число овалов кривой A, ограничивающих внешним образом компоненту множества B_+ с положительной, нулевой и отрицательной эйлеровыми характеристиками. Аналогично, N_+, N_0, N_- — числа таких же нечетных овалов для $B_- = \{z \in B | p(z) \leqslant 0\}$. Тогда (см. [8], [13])

$$P_- + P_0 \leqslant \tfrac{1}{2}(k-1)(k-2) + E(k),$$

$$N_- + N_0 \leqslant \tfrac{1}{2}(k-1)(k-2),$$

$$P_- \geqslant N - \tfrac{3}{2}k(k-1),$$

$$N_- \geqslant P - \tfrac{3}{2}k(k-1),$$

где

$$E(k) = \tfrac{1}{2}(1 + (-1)^k).$$

Для произвольного Д. а. м. в q-мерном проективном пространстве выполнено неравенство

$$\dim H_*(A;\ \mathbb{Z}_2) \leqslant \dim H_*(\mathbb{C}A;\ \mathbb{Z}_2),$$

где $H_*(A;\ \mathbb{Z}_2) = \Sigma H_i(A,\ \mathbb{Z}_2)$ — пространство гомологий многообразия A с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ (см. [9]). Это неравенство является обобщением теоремы Гарнака. Если

$$\dim H_*(\mathbb{C}A;\ \mathbb{Z}_2) - \dim H_*(A,\ \mathbb{Z}_2) = 2t$$

(t всегда целое), то A наз. $(M-t)$-многообразием. При $t=0$ A есть M-многообразие.

Доказаны следующие сравнения:

A) Для M-многообразия A при четном n

$$\chi(A) \equiv \sigma(\mathbb{C}A) \bmod 16,$$

где $\sigma(\mathbb{C}A)$ — сигнатура многообразия $\mathbb{C}A$ (см. [9]).

B) Для $(M-1)$-многообразия A при четном n

$$\chi(A) \equiv \sigma(\mathbb{C}A) \pm 2 \bmod 16$$

(см. обзор [13]).

C) В случае регулярного полного пересечения, если n четно, A есть $(M-1)$-многообразие и гомоморфизм включения

$$i_*: H_{\frac{n}{2}}(A, \mathbb{Z}_2) \to N_{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}P^q; \mathbb{Z}_2)$$

нулевой, то

$$d = m_1 m_2 \ldots m_s \equiv 2 \bmod 4$$

и

$$\chi(A) \equiv -\sigma(\mathbb{C}A) + \begin{cases} 2 \bmod 16, & \text{при } d \equiv 2 \bmod 8, \\ -2 \bmod 16, & \text{при } d \equiv -2 \bmod 8. \end{cases}$$

В этом же случае, если n четно, A есть $(M-2)$-многообразие и i_* — нулевой, то

при $d \equiv 0 \bmod 8$, $\chi(A) \equiv \pm \sigma(\mathbb{C}A) \bmod 16$,

при $d \equiv 2 \bmod 8$, $\chi(A) \equiv -\sigma(\mathbb{C}A) + 4 \bmod 16$,
или $\chi(A) \equiv \pm \sigma(\mathbb{C}A) \bmod 16$,

при $d - 2 \bmod 8$, $\chi(A) \equiv -\sigma(\mathbb{C}A) - 4 \bmod 16$,
или $\chi(A) \equiv \pm \sigma(\mathbb{C}A) \bmod 16$

(см. [11]).

В частности, для действительной алгебраич. поверхности A порядка m_1

$$\dim H_*(\mathbb{C}A; \mathbb{Z}_2) = m_1^3 - 4m_1^2 + 6m_1,$$

если A есть M-поверхность, то

$$\chi(A) \equiv \frac{1}{3}(4m_1 - m_1^3) \bmod 16;$$

если A есть $(M-1)$-поверхность, то

$$\chi(A) \equiv \frac{1}{3}(4m_1 - m_1^3) \pm 2 \bmod 16;$$

если A есть $(M-1)$-поверхность и стягивается в $\mathbb{R}P^3$ в точку, то $m_1 = 2 \bmod 4$ и

$$\chi(A) = \begin{cases} 2 \bmod 16 \text{ при } m_1 \equiv 2 \bmod 8, \\ -2 \bmod 16 \text{ при } m_1 \equiv -2 \bmod 8. \end{cases}$$

Если A есть $(M-2)$-поверхность и стягивается в $\mathbb{R}P^3$ в точку, то

$$\chi(A) \equiv \begin{cases} 0 \bmod 16, \text{ при } m_1 \equiv 0 \bmod 8, \\ 0,4 \bmod 16, \text{ при } m_1 \equiv 2 \bmod 8, \\ 0, -4 \bmod 16, \text{ при } m_1 \equiv -2 \bmod 8. \end{cases}$$

Доказаны также нек-рые сравнения при нечетном n (см. [9], [13]). В частности, для плоской действительной алгебраич. кривой A, являющейся $(M-1)$-кривой четного порядка m_1:

$$P - N \equiv \left(\frac{m_1}{2}\right)^2 \pm 1 \bmod 8.$$

Имеются некоторые результаты о Д. а. м. с особенностями (см. обзор [13]). Интересный подход к изучению Д. а. м. предложен в [14].

Лит.: [1] Harnack A., «Math. Ann.», 1876, Bd 10, S. 189—99; [2] Hilbert D., там же, 1891, Bd 38, S. 115—38; [3] Его же, «Arch. Math. Phys.» (3), 1901, Bd 1, S. 213—37; [4] Петровский И. Г., «Ann. Math.», 1938, v. 39, № 1, p. 189—209; [5] Олейник О. А., Петровский И. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1949, т. 13, с. 389—402; [6] Олейник О. А., «Матем. сб.», 1951, т. 29, с. 133—56; [7] Проблемы Гильберта, М., 1969; [8] Арнольд В. И., «Функциональный анализ», 1971, т. 5, № 3, с. 1—9; [9] Рохлин В. А., там же,

1972, т. 6, № 4, с. 58—64; 1973, т. 7, № 2, с. 91—92; [10] Харламов В. М., «Функциональный анализ», 1974; т. 8, № 2, с. 50—56; 1975, т. 9, № 3, с. 93—94; [11] его же, там же, 1975, т. 9, № 2, с. 51—60; [12] его же, там же, 1976, т. 10, № 4, с. 55—68; [13] Гудков Д. А., «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, в. 4, с. 3—79; [14] Сулливан Д., Геометрическая топология, пер. с англ., М., 1975. *Д. А. Гудков.*

ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО, вещественное число, — положительное число, отрицательное число или нуль. Понятие Д. ч. возникло путем расширения понятия *рационального числа*. Необходимость этого расширения обусловлена как практическим использованием математики при выражении значения любой величины с помощью вполне определенного числа, так и внутренним развитием самой математики, в частности стремлением расширить область применимости ряда операций над числами (извлечение корня, вычисление логарифмов, решение уравнений и т. п.). К общему понятию Д. ч. подошли еще древнегреческие математики в своей теории несоизмеримых отрезков, однако как самостоятельное понятие оно было сформулировано впервые лишь в 17 в. И. Ньютоном (I. Newton) в «Arithmetica Universales»: «Число есть не столько совокупность нескольких единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой, однородной с ней принятой за единицу». Строгие теории Д. ч. были построены в конце 19 в. Г. Кантором (G. Cantor), Р. Дедекиндом (R. Dedekind) и К. Вейерштрассом (K. Weierstrass).

Действительные числа образуют совокупность элементов, обладающую следующими свойствами.

I. Свойство упорядоченности. Для любых двух чисел a и b определено соотношение порядка, т. е. два любых Д. ч. a и b удовлетворяют одному и только одному из следующих соотношений: $a<b$, $a=b$ или $a>b$; при этом, если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$ (транзитивность упорядоченности).

II. Свойство операции сложения. Для любой упорядоченной пары чисел a и b определено такое единственное число, наз. их суммой и обозначаемое через $a+b$, что выполняются следующие свойства: II_1) $a+b=b+a$ (коммутативность); II_2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ для любых чисел a, b и c (ассоциативность); II_3) существует такое число, наз. нулем и обозначаемое 0, что $a+0=a$ для любого числа a; II_4) для любого числа a существует такое число, наз. противоположным a и обозначаемое через $-a$, что $a+(-a)=0$; II_5) если $a<b$, то $a+c<b+c$ для любого числа c. Нуль единствен, и для каждого числа единственно противоположное ему число. Для любой упорядоченной пары чисел a и b число $a+(-b)$ наз. разностью чисел a и b и обозначается $a-b$.

III. Свойство операции умножения. Для любой упорядоченной пары чисел a и b определено такое единственное число, наз. их произведением и обозначаемое через ab, что: III_1) $ab=ba$ (коммутативность); III_2) $a(bc)=(ab)c$ для любых чисел a, b и c (ассоциативность); III_3) существует такое число, наз. единицей и обозначаемое через 1, что $a1=a$ для любого числа a; III_4) для любого числа a, не равного нулю, существует такое число, наз. обратным данному и обозначаемое через $1/a$, что $a(1/a)=1$; III_5) если $a<b$ и $c>0$, то $ac<bc$. Эти свойства гарантируют единственность единицы и единственность обратного каждому элементу. Для любой упорядоченной пары чисел a и b, $b\neq 0$, число $a(1/b)$ наз. частным от деления a на b и обозначается a/b.

Число $1+1$ обозначается 2, число $2+1$ обозначается 3 и т. д. Эти числа 1, 2, 3... наз. натуральными числами. Числа, бо́льшие нуля, наз. положительными, а числа, меньшие нуля,— отрицательными. Числа 0, ± 1, ± 2, ... наз. целыми числами (считается, что $+a=a$). Числа вида m/n,

где m — целое, а n — натуральное, наз. р а ц и о н а л ь н ы м и ч и с л а м и. Они включают в себя все целые числа. Д. ч., не являющиеся рациональными, наз. и р р а ц и о н а л ь н ы м и.

IV. С в о й с т в о д и с т р и б у т и в н о с т и у м н о ж е н и я о т н о с и т е л ь н о с л о ж е н и я. Для любой тройки чисел a, b и c $(a+b)c=ac+bc$.

Совокупность элементов, удовлетворяющих всем перечисленным свойствам, образует линейно *упорядоченное поле*. Д. ч. обладают еще двумя важными свойствами.

V. А р х и м е д о в о с в о й с т в о. Каково бы ни было число a, существует такое целое число n, что $n>a$. Совокупность элементов, удовлетворяющих свойствам I — V, образует упорядоченное архимедово поле. Таковым является не только совокупность Д. ч., но и множество рациональных чисел.

Существенным свойством Д. ч. является свойство их непрерывности, к-рым рациональные числа не обладают.

VI. С в о й с т в о н е п р е р ы в н о с т и. Для всякой системы вложенных отрезков

$$\{[a_n,\ b_n]\},\ a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant\ldots\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n,\ n=1,\ 2,\ \ldots,$$

существует хотя бы одно число, к-рое принадлежит всем отрезкам данной системы. Это свойство наз. также п р и н ц и п о м в л о ж е н н ы х о т р е з к о в К а н т о р а. Если длины b_n-a_n вложенных отрезков стремятся к нулю при $n\to\infty$, то существует единственная точка, принадлежащая всем этим отрезкам.

Из перечисленных свойств Д. ч. следуют многие другие; так, из свойств I — V можно получить, что $1>0$, правила действий с рациональными дробями, правила знаков при умножении и делении Д. ч., свойства абсолютной величины Д. ч., правила преобразования равенств и неравенств и т. п. Свойства I — VI полностью описывают свойства множества Д. ч. и только их, иначе говоря, если эти свойства назвать аксиомами, то окажется, что Д. ч. — совокупность элементов, удовлетворяющая аксиомам I — VI. Это означает, что аксиомы I — VI определяют множество Д. ч. с точностью до изоморфизма: если имеются две совокупности X и Y, удовлетворяющие свойствам I — VI, то всегда существует изоморфное относительно упорядоченности и операций сложения и умножения отображение X на Y, т. е. указанное отображение, обозначим его через $x\to y$ (здесь $y\in Y$ является элементом, соответствующим элементу $x\in X$), взаимно однозначно отображает X на Y так, что если

$$x_1<x_2,\ x_1\in X,\ x_2\in X\ \text{ и }\ x_1\longrightarrow y_1,\ x_2\longrightarrow y_2,$$

то

$$y_1<y_2,\ x_1+x_2\longrightarrow y_1+y_2,\quad x_1x_2\longrightarrow y_1y_2.$$

Отсюда следует, что множество Д. ч. (в отличие, напр., от множества рациональных чисел) невозможно расширить с сохранением свойств I — V, т. е. не существует множества, в к-ром было бы введено соотношение порядка, операции сложения и умножения, удовлетворяющие свойствам I — V, и к-рое содержало бы подмножество, изоморфное множеству Д. ч., и не совпадало бы с ним. Д. ч. существенно больше, чем рациональных чисел, именно рациональные числа составляют счетное подмножество множества Д. ч., которое само несчетно.

Как рациональные, так и иррациональные числа обладают свойством плотности во множестве всех Д. ч.: каковы бы ни были два Д. ч. a и b, $a<b$, найдутся такое рациональное r, что $a<r<b$, и такое иррациональное ξ, что $a<\xi<b$.

Со свойством непрерывности Д. ч. тесно связано свойство их п о л н о т ы, состоящее в том, что всякая

фундаментальная последовательность Д. ч. является сходящейся. Следует отметить, что множество одних только рациональных чисел уже не обладает свойством полноты: в нем существуют фундаментальные последовательности, не сходящиеся ни к какому рациональному числу. Свойство непрерывности множества Д. ч. (их полнота) связано с их применением для измерения тех или иных непрерывных величин, например для измерения длин геометрических отрезков: если выбрать отрезок единичной длины, то в силу непрерывности множества Д. ч. каждому отрезку сопоставляется определенное положительное Д. ч.— его длина. Образно говоря, непрерывность множества Д. ч. означает, что в нем нет «пустых мест». Из непрерывности множества Д. ч. следует, что из всякого положительного числа можно извлечь корень n-и степени (n — натуральное число) и что всякое положительное число имеет логарифм по любому основанию $a>0$, $a\neq 1$.

Свойство непрерывности Д. ч. можно сформулировать иначе.

VI′. Всякое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань (см. *Верхняя и нижняя грани*).

Можно использовать также понятие сечения $A|B$ в области Д. ч. (см. *Дедекиндово сечение*). Говорят, что сечение $A|B$ производится числом α, если $a\leqslant\alpha\leqslant b$ для всех $a\in A$, $b\in B$ (при этом либо $\alpha\in A$, либо $\alpha\in B$). Всякое число производит сечение.

Свойство непрерывности, наз. непрерывностью Д. ч. по Дедекинду, состоит в справедливости обратного утверждения.

VI″. Всякое сечение Д. ч. производится нек-рым числом. Такое число единственно и является либо наибольшим в нижнем классе, либо наименьшим в верхнем.

Каждое из утверждений VI, VI′ и VI″ равносильно каждому из остальных в том смысле, что из каждого из них, принятого за аксиому (и остальных свойств I—V), вытекают два других. Более того, как из свойства VI′, так и из свойства VI″ (и свойств I—IV) вытекает не только VI, но и архимедово свойство V. Определение Д. ч. как совокупности элементов, обладающих свойствами I—VI, является аксиоматич. построением теории Д. ч. Существует несколько методов построения этой теории на основе рациональных чисел.

Первая такая теория была построена Р. Дедекиндом на основе понятия сечения $R_1|R_2$ в области рациональных чисел. Если для данного сечения $R_1|R_2$ рациональных чисел в R_1 есть наибольшее рациональное число или в R_2 наименьшее, то говорят, что сечение $R_1|R_2$ производится этим числом. Всякое рациональное число производит сечение. Сечение, у к-рого в нижнем классе нет наибольшего, а в верхнем нет наименьшего, наз. иррациональным числом. Рациональные и иррациональные числа наз. действительными числами, при этом для единообразия рациональные числа рассматриваются как сечения, к-рые они производят.

Пусть $x=R_1|R_2$ и $x'=R_1'|R_2'$. Д. ч. x наз. меньшим Д. ч. x' (или, что то же самое, x' наз. большим x), если $R_1\subset R_1'$, $R_1\neq R_2$. Обычным образом вводятся понятия положительных, отрицательных Д. ч. (см. выше) и абсолютной величины $|x|$ Д. ч. x. Суммой Д. ч. x и x' наз. такое число $x+x'$, что для всех $r_1\in R_1$, $r_1'\in R_1'$, $r_2\in R_2$, $r_2'\in R_2'$ выполняются неравенства

$$r_1+r_1'\leqslant x+x'\leqslant r_2+r_2'.$$

Произведением положительных Д. ч. x и x' наз. такое число xx', что для всех положительных r_1, r_1', r_2, r_2' выполняются неравенства $r_1r_1'\leqslant xx'\leqslant r_2r_2'$. Для произвольных Д. ч. x и x', не равных нулю, их произведение оп-

ределяется как Д. ч., абсолютная величина к-рого равна $|x||x'|$ и к-рое положительно, если x и x' одного знака, и отрицательно, если x и x' разных знаков. Наконец, для любого Д. ч. x полагается $0x=x0=0$.

Сумма и произведение Д. ч. всегда существуют, единственны и вся совокупность таким образом определенных Д. ч. с введенным в них отношением порядка и операциями сложения и умножения обладает свойствами I — VI.

Другая теория была построена Г. Кантором с помощью понятия фундаментальной последовательности рациональных чисел, т. е. такой последовательности $\{r_n\}$ рациональных чисел, что для любого рационального числа $\varepsilon>0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n\geqslant n_\varepsilon$ и $m\geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|r_n-r_m|<\varepsilon$. Последовательность $\{r_n\}$ рациональных чисел наз. нульпоследовательностью, если для любого рационального $\varepsilon>0$ найдется такой номер n_ε, что для всех $n\geqslant n_\varepsilon$ справедливо неравенство $|r_n|<\varepsilon$. Две фундаментальные последовательности рациональных чисел $\{r_n\}$ и $\{r'_n\}$ наз. эквивалентными, если последовательность $\{r_n-r'_n\}$ является нульпоследовательностью. Это определение эквивалентности обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, и потому все множество фундаментальных последовательностей рациональных чисел распадается на классы эквивалентности. Совокупность всех этих классов эквивалентности и наз. в этом случае множеством действительных чисел. В силу этого определения, всякое Д. ч. представляет собой класс эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Каждая из этих последовательностей наз. представителем данного Д. ч. Фундаментальная последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$ наз. положительной (соответственно отрицательной), если существует такое рациональное число $r>0$, что все члены этой последовательности, начиная с нек-рого, больше, чем r (соответственно, меньше, чем r). Всякая фундаментальная последовательность рациональных чисел является либо нульпоследовательностью, либо положительной, либо отрицательной. Если фундаментальная последовательность рациональных чисел положительна (отрицательна), то и любая ей эквивалентная фундаментальная последовательность рациональных чисел также положительна (отрицательна). Д. ч. наз. положительным (отрицательным), если какой-то, а, следовательно, и любой его представитель положителен (отрицателен). Д. ч. наз. нулем, если нек-рый, а следовательно, и любой его представитель является нульпоследовательностью. Каждое Д. ч. либо положительно, либо отрицательно, либо нуль. Для того, чтобы сложить или умножить два Д. ч. x и x', надо сложить, соответственно умножить, два любых их представителя $\{r_n\}\in x$, $\{r'_n\}\in x'$, тогда получатся снова фундаментальные последовательности рациональных чисел $\{r_n+r'_n\}$ и $\{r_nr'_n\}$. Классы эквивалентности, представителями к-рых они являются, и наз. в этом случае суммой $x+x'$ и произведением xx' данных чисел. Эти операции определены однозначно, т. е. не зависят от выбора представителей данных чисел. Вычитание и деление Д. ч. определяются как действия, обратные сложению и умножению. Если для двух Д. ч. x и y имеется $x-y>0$, то Д. ч. x наз. большим Д. ч. y. Таким образом определенная совокупность Д. ч. с указанным соотношением порядка и операциями сложения и умножения снова удовлетворяет свойствам I — VI.

Еще одна теория Д. ч. была построена К. Вейерштрассом на основе бесконечных десятичных дробей. В этой

теории действительным числом наз. всякая бесконечная десятичная дробь со знаком плюс или минус:

$$\pm\, \alpha_0,\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots,$$

где α_0 — неотрицательное целое число (целые числа считаются известными), а α_n, $n=1, 2, \ldots$,— одна из цифр 0, 1, 2, ..., 9. При этом бесконечная десятичная дробь с периодом из 9:

$$\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\,(9), \quad \alpha_n \neq 9,$$

считается равной бесконечной десятичной дроби

$$\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}\,(\alpha_n+1)\,000 \ldots 0 \ldots$$

(в случае $n=0$ равной бесконечной десятичной дроби (α_0+1), $000 \ldots 0\ldots$). Эта дробь записывается также как конечная десятичная дробь

$$\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots (\alpha_n+1),$$

и говорится, что она имеет n значащих цифр после запятой. Бесконечная десятичная дробь, не имеющая периода (9), наз. допустимой бесконечной десятичной дробью. Очевидно, что всякое Д. ч. уже единственным образом записывается в виде допустимой бесконечной десятичной дроби. Если Д. ч. x записывается с помощью допустимой бесконечной десятичной дробью со знаком плюс (минус) и среди цифр α_n имеется хоть одна отличная от нуля, то x наз. положительным (отрицательным) Д. ч. и пишется $x>0$ $(x<0)$, а если все $\alpha_n=0$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, то — нулем: $x=0$. Для числа

$$x = \pm\ \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

число $\alpha_0,\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n\ldots$ наз. его абсолютной величиной и обозначается $|x|$, а число, у к-рого знак плюс (соответственно минус) заменен на минус (на плюс), наз. противоположным данному и обозначается $-x$. Если

$$x = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

— допустимая бесконечная десятичная дробь, то число

$$\underline{x}_n = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n,$$

соответственно число

$$\overline{x}_n = \alpha_0,\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n + 10^{-n},$$

наз. нижним, соответственно верхним, десятичным приближением порядка n числа x. Пусть x и y — два положительных числа, записанных с помощью допустимых бесконечных десятичных дробей

$$x = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

и

$$y = \beta_0,\ \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots$$

По определению, полагают $x<y$, если либо $\alpha_0<\beta_0$, либо существует такой номер n_0, $n_0=0,\ 1,\ \ldots$, что $\alpha_k=\beta_k$, $k=0, 1, \ldots, n_0$, а $\alpha_{n_0+1}<\beta_{n_0+1}$. Каждое отрицательное число и нуль считаются меньше всякого положительного числа. Если x и y оба отрицательны и $|y|<|x|$, то полагают, что $x<y$.

Последовательность целых чисел n_k, $k=1,\ 2,\ \ldots$, наз. стабилизирующейся к числу m, если существует такой номер k_0, что $n_k=m$ при всех $k\geqslant k_0$. Последовательность бесконечных десятичных дробей

$$x^{(k)} = \alpha_0^{(k)},\ \alpha_1^{(k)}\alpha_2^{(k)} \ldots \alpha_n^{(k)} \ldots$$

наз. стабилизирующейся к числу

$$x = \alpha_0,\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots,$$

если i-й столбец бесконечной матрицы $\|\alpha_i^k\|$, i — номер столбца, k — строчки, стабилизируется для любого

$i=0, 1, 2$ к числу α_i. Если $x>0$ и $y>0$, то конечные десятичные дроби

$$\underline{x}_n+\underline{y}_n,\ \underline{x}_n-\underline{y}_n,\ (\underline{x}_n\underline{y}_n)_n \text{ и } \left(\frac{\underline{x}_n}{\underline{y}_n}\right)_n$$

имеют n значащих цифр после запятой и образуют последовательности, стабилизирующиеся к нек-рым числам. Эти числа и наз. соответственно с у м м о й $x+y$, р а з н о с т ь ю $x-y$, п р о и з в е д е н и е м xy и ч а с т н ы м $\frac{x}{y}$ Д. ч. x и y. Эти определения распространяются на Д. ч. произвольных знаков. Напр., если $x\leqslant 0$ и $y\leqslant 0$, то $x+y=-(|x|+|y|)$, если x и y разных знаков, то $x+y=\pm\|x|-|y\|$, где выбирается знак, одинаковый со знаком того из чисел x или y, абсолютная величина к-рого наибольшая. Для любых чисел x и y полагают $x-y=x+(-y)$ (в случае $x>0$, $y>0$ это определение совпадает с выше сформулированным) и т. д. Совокупность допустимых бесконечных десятичных дробей с таким образом определенными соотношениями порядка, операциями сложения, вычитания, умножения и деления удовлетворяет аксиомам I—VI.

При построении теории Д. ч. можно пользоваться не только десятичной системой счисления, но и другими: двоичной, троичной и т. д. Существенно, что ни при одном из приведенных выше построений теории Д. ч. (аксиоматическом, с помощью сечений рациональных чисел, на базе фундаментальных последовательностей рациональных чисел или на основе бесконечных десятичных дробей) не доказывается существование (непротиворечивость) множества Д. ч. С этой точки зрения все эти методы равноправны.

Геометрически множество Д. ч. изображается направленной (ориентированной) прямой, а отдельные числа — точками этой прямой. Поэтому совокупность Д. ч. часто наз. ч и с л о в о й п р я м о й, а отдельные числа — точками. Имея в виду такое изображение Д. ч., иногда вместо a меньше b (соответственно b больше a) говорят, что число a лежит левее числа b (соответственно, что b лежит правее a). Между точками геометрической (евклидовой) прямой, упорядоченными по их положению, и элементами числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок. Это обстоятельство и является оправданием изображения множества Д. ч. в виде прямой.

Лит.: [1] D e d e k i n d R., Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig, 1872 (рус. пер.— Д е д е к и н д Р., Непрерывность и иррациональные числа, 3 изд., Одесса, 1914); [2] D a n t s c h e r V., Vorlesungen über die Weierstrass'sche Theorie der irrationalen Zahlen, Lpz., 1908; [3] C a n t o r G., «Math. Ann.», 1872, Bd 5, S. 123—30; [4] Н е м ы ц к и й В. В., С л у д с к а я М. И., Ч е р к а с о в А. Н., Курс математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1957; [5] И л ь и н В. А., П о з н я к Э. Г., Основы математического анализа, т. 1, 3 изд., М., 1971; [6] К у д р я в ц е в Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973; [7] Н и к о л ь с к и й С. М., Курс математического анализа, т. 1, М., 1973; [8] Ф и х т е н г о л ь ц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., т. 2, М., 1969; [9] Б у р б а к и Н., Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства, пер. с франц., М., 1969, гл. 4. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДЕКАРТА ТЕОРЕМА, п р а в и л о з н а к о в Д е к а р т а,— теорема, утверждающая, что число положительных корней многочлена с действительными коэффициентами равно или на четное число меньше числа перемен знаков в ряду его коэффициентов (причем каждый корень считается столько раз, какова его кратность) и нулевые коэффициенты при подсчете числа перемен знаков не учитываются. Если известно, что все корни данного многочлена действительны (как, например, для характеристич. многочлена симметрич. матрицы), то Д. т. дает точное число корней. Рассматривая многочлен $f(-x)$ можно с помощью этой же теоремы найти число отрицательных корней $f(x)$.

Лит.: [1] К у р о ш А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975. *И. В. Проскуряков.*

ДЕКАРТОВ КВАДРАТ, коуниверсальный квадрат (в категории) — диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A \underset{S}{\frown} B & \xrightarrow{p_A} & A \\ {\scriptstyle p_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & S \end{array}$$

Здесь $A \underset{S}{\frown} B$ — расслоенное произведение объектов A и B, ассоциированное со схемой

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & S \end{array},$$

а p_A и p_B — канонические проекции. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{S} & A \\ {\scriptstyle \nu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & S \end{array}$$

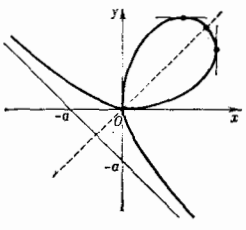
является Д. к. тогда и только тогда, когда она коммутативна и для всякой пары морфизмов $\mu: V \to A$, $\nu: V \to B$ такой, что $\alpha\mu = \beta\nu$, существует единственный морфизм $\lambda: V \to P$, удовлетворяющий условиям $\mu = \delta\lambda$, $\nu = \gamma\lambda$.

Лит.: [1] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972. *О. А. Иванова.*

ДЕКАРТОВ ЛИСТ — плоская алгебраич. кривая 3-го порядка, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид: $x^3+y^3-3axy=0$, параметрические уравнения

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3},$$

где t — тангенс угла между радиус-вектором кривой и осью Ox. Д. л. симметричен относительно биссектрисы $y=x$ (см. рис.). В точках с координатами $\left(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}\right)$ и $\left(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2}\right)$ касательные параллельны координатным осям. Начало координат — узловая точка с касательными, по к-рым проходят оси координат. Асимптота: $y=-x-a$. Площадь между кривой и асимптотой: $S = {}^3/_2 a^2$. Площадь петли: $S = {}^3/_2 a^2$. Д. л. назван по имени Р. Декарта (R. Descartes), впервые его рассмотревшего в 1638.

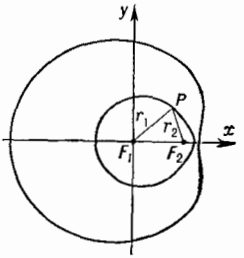


Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960; [2] Смогоржевский А. С., Столова Е. С., Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, М., 1961.

Д. Д. Соколов.

ДЕКАРТОВ ОВАЛ — плоская кривая, расстояния r_1 и r_2 каждой точки P к-рой до двух фиксированных точек F_1 и F_2 (фокусов) связаны неоднородным линейным уравнением

$$r_1 + mr_2 = a.$$



Д. о. можно определить при помощи однородного линейного уравнения

$$r_1 + mr_2 + nr_3 = 0,$$

где r_3 — расстояние до третьего фокуса F_3, лежащего на прямой F_1F_2. Д. о. в общем случае состоит из двух замкнутых линий, одна из к-рых объемлет другую (см. рис.). В прямоугольных декартовых координатах уравнение Д. о. имеет вид:

$$\sqrt{x^2+y^2} + m\sqrt{(x-d)^2+y^2} = a,$$

где d — длина отрезка F_1F_2. При $m=1$ и $a>d$ Д. о. представляет собой эллипс, при $m=-1$ и $a<d$ — гиперболу и, если $m=a/d$,— *Паскаля улитку*. Впервые Д. о. исследован Р. Декартом (R. Descartes) в связи с задачами оптики (см. [1]).

Лит.: [1] Декарт Р., Геометрия, пер. [с франц. и латин.], М.—Л., 1938; [2] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.
Е. В. Шикин.

ДЕКАРТОВА ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ ортонормированная — прямолинейная система координат в евклидовом пространстве.

Д. п. с. к. на плоскости задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми — осями координат, на каждой из к-рых выбрано положительное направление и задан отрезок единичной длины. Точка пересечения осей координат (O) наз. началом координат. Одна из осей (Ox) координат наз. осью абсцисс, другая — осью ординат (Oy). Оси координат делят плоскость на четыре равные области — четверти, или квадранты.

Прямоугольными декартовыми координатами точки M наз. упорядоченная пара чисел (x, y), первое из к-рых (абсцисса) равно величине ортогональной проекции направленного отрезка OM на ось абсцисс, второе (ордината) — величине ортогональной проекции направленного отрезка OM на ось ординат.

Д. п. с. к. в трехмерном пространстве задается аналогично случаю плоскости: осью абсцисс, осью ординат, осью аппликат и началом координат O. Плоскости, проходящие через оси координат, наз. координатными плоскостями. Они делят пространство на 8 областей — октантов.

Иногда пользуются косоугольной (общей) декартовой системой координат, к-рая отличается от Д. п. с. к. тем, что углы между осями координат не обязательно прямые.

Д. п. с. к. названа по имени Р. Декарта (R. Descartes), к-рый ввел метод прямолинейных координат (см. [1]).

Лит.: [1] Декарт Р., Геометрия, пер. [с франц. и латин.], М.—Л., 1938.
А. Б. Иванов.

ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ — то же, что полное *прямое произведение*.

ДЕКАРТОВО РАЗЛОЖЕНИЕ (в топологии) — разложение пространства в топологич. произведение. Важна задача о нетривиальных Д. р. кубов I^n и евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$. Напр., если пространство M получено из $\mathbb{R}^m$, $3\leqslant m<n$, отождествлением точек дуги $l\subset\mathbb{R}^m$, для к-рой $\pi_1(\mathbb{R}^m\setminus l)\neq 1$ (см. *Дикое вложение*), то $M\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^{m+1}$ и $M\times M=\mathbb{R}^{2m}$. Любое гладкое компактное стягиваемое многообразие M^m есть сомножитель I^n, $n>m$. Любой сомножитель I^n, $n\leqslant 4$, есть I^m, $m<n$.

Лит.: [1] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 227, 243.
А. В. Чернавский.

ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ — способ определения положения точек на плоскости их расстояниями до двух фиксированных перпендикулярных прямых — осей. Это понятие усматривается уже у Архимеда и Аполлония Пергского более двух тысяч лет назад и даже у древних египтян. Впервые эта идея была систематически развита П. Ферма (P. Fermat) и Р. Декартом (R. Descartes); в их формулировках расстояния могли быть только положительными числами или нулем. Мысль о том, что одно или оба эти расстояния можно считать также и отрицательными, принадлежит И. Ньютону (I. Newton). Г. Лейбниц (G. Leibniz) первым назвал эти расстояния «координатами». См. *Декартова прямоугольная система координат*.
М. И. Войцеховский.

ДЕКОДИРОВАНИЕ — см. *Кодирование и декодирование*.

ДЕЛЁЖ (в теории игр) — удовлетворяющее условиям рациональности распределение в *кооперативной игре*

общего выигрыша всех игроков между отдельными игроками. Формально, если игра с множеством игроков $J=\{1, .., n\}$ задана характеристической функцией $v(J)$, то Д. есть такой вектор $x=(x_1, \ldots, x_n)$, что $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(J)$; $x_i \geqq v(i)$, $i=1, \ldots, n$. *Г. Н. Дюбин.*

ДЕЛЕНИЕ — действие, обратное к *умножению;* заключается в нахождении такого x, что $bx=a$ или $xb=a$ при заданных a и b. Результат Д. x наз. ч а с т н ы м, или о т н о ш е н и е м a и b; при этом a наз. д е л и м ы м, а b — д е л и т е л е м. Для обозначения Д. употребляются знаки двоеточия $(a : b)$, горизонтальной или косой черты $\left(\frac{a}{b}\right.$ или $a/b)$.

В поле рациональных чисел Д. возможно всегда, кроме деления на нуль, при этом результат Д. определен однозначно. В кольце целых чисел Д. не всегда возможно. Напр., 10 делится на 5, но не делится на 3. Если при Д. (в поле рациональных чисел) целого числа a на целое число b в частном получается целое число, то говорят, что a д е л и т с я н а ц е л о (или без остатка) на b, и записывают это следующим образом: $b|a$. Д. комплексных чисел производится по формуле

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\,i}{c^2+d^2},$$

а Д. комплексных чисел, записанных в тригонометрич. форме,— по формуле

$$\frac{r\,(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{\rho\,(\cos\beta+i\sin\beta)}=\frac{r}{\rho}\,(\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)).$$

Д е л е н и е с о с т а т к о м — это, по существу, совершенно особая операция, отличная от Д. в определенном выше смысле. Если a и $b\neq 0$ — целые числа, то операция Д. с остатком числа a на число b состоит в определении таких целых чисел x и y, что

$$a=bx+y, \quad \text{где } 0\leqslant y<|b|.$$

При этом a наз. д е л и м ы м, b — д е л и т е л е м, x — ч а с т н ы м, а y — о с т а т к о м. Эта операция всегда осуществима и однозначна. Если $y=0$, то говорят, что a делится на b без остатка. В этом случае частное получается то же самое, что и частное при обычном Д.

Аналогично определяется Д. с остатком для многочленов с коэффициентами из некоторого поля. Она состоит в нахождении по двум заданным многочленам $A(x)$ и $B(x)$ многочленов $Q(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющих условиям

$$A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$$

и степень $R(x)$ меньше степени $Q(x)$. Эта операция также всегда осуществима и однозначна. Если $R(x)\equiv 0$, то говорят, что многочлен $A(x)$ делится на многочлен $B(x)$ без остатка. *С. А. Степанов.*

ДЕЛЕНИЯ КРУГА МНОГОЧЛЕН, к р у г о в о й м н о г о ч л е н,— многочлен, имеющий вид

$$\Phi_n(x)=\prod_k (x-\varphi_k),$$

где φ_k — *первообразные корни* степени n из единицы и произведение берется по всем числам k, взаимно простым с n и взятым из ряда $1, 2, \ldots, n$. Степень многочлена $\Phi_n(x)$ — число натуральных чисел, меньших, чем n, и взаимно простых с n. Д. к. м. удовлетворяют соотношению

$$x^n-1=\prod_{d|n}\Phi_d(x),$$

где произведение берется по всем положительным делителям d числа n, включая и само n. Это соотношение позволяет рекурсивно вычислять многочлены $\Phi_n(x)$ путем деления многочлена x^n-1 на произведение всех $\Phi_d(x)$, $d<n$, $d|n$. При этом коэффициенты многочлена оказываются лежащими в исходном простом поле P, а в случае поля рациональных чисел — целыми числами. Так,

$$\Phi_1(x)=x-1, \quad \Phi_2(x)=x+1, \quad \Phi_3(x)=x^2+x+1.$$

Если $n=p$ — простое и поле P имеет характеристику 0, то

$$\Phi_p(x)=\frac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1.$$

Для многочлена $\Phi_n(x)$ можно указать явное выражение через *Мёбиуса функцию* $\mu(k)$:

$$\Phi_n(x)=\prod_{d\mid n}(x^d-1)^{\mu(n/d)}.$$

Напр.,

$$\Phi_{12}(x)=(x^{12}-1)(x^6-1)^{-1}(x^4-1)^{-1}(x^3-1)^0(x^2-1)\times$$
$$\times(x-1)^0=\frac{x^6+1}{x^2+1}=x^4-x^2+1.$$

Над полем рациональных чисел все многочлены $\Phi_n(x)$ неприводимы, но над конечными простыми полями эти многочлены могут быть приводимы. Так, над полем вычетов по модулю 11 имеет место соотношение:

$$\Phi_{12}(x)=x^4-x^2+1=(x^2+5x+1)(x^2-5x+1).$$

Уравнение $\Phi_n(x)=0$, дающее все первообразные корни n-й степени из единицы, наз. уравнением деления круга (окружности). Решение этого уравнения в тригонометрич. форме имеет вид:

$$r_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=e^{2k\pi i/n},$$

где дробь k/n несократима, т. е. k и n взаимно просты. Решение в радикалах уравнения деления круга тесно связано с задачей построения правильного n-угольника или с эквивалентной ей задачей деления окружности на n равных частей, а именно, задача деления окружности на n частей решается с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда уравнение $\Phi_n(x)=0$ решается в квадратных радикалах. Последнее, как доказал К. Гаусс (C. Gauss, 1801), имеет место в том и только в том случае, когда

$$n=2^m p_1 p_2\ldots p_s,$$

где m — целое неотрицательное число и $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — попарно различные простые числа, представимые в виде $2^{2^k}+1$ с целым неотрицательным k.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [2] Сушкевич А. К., Основы высшей алгебры, 4 изд., М.—Л., 1941.

И. В. Проскуряков.

ДЕЛЕНИЯ КРУГА ПОЛЕ — то же, что *круговое поле*.

p-ДЕЛИМАЯ ГРУППА, группа Барсотти — Тейта,— обобщение понятия коммутативной формальной группы. Гомоморфизм, индуцируемый умножением на простое число p, является эпиморфизмом для p-Д. г.

Пусть S — схема, p — простое число; p-делимой группой высоты h наз. индуктивная система $G=(G_n, i_n)$ коммутативных конечных групповых схем G_n порядка p^{nh} такая, что последовательности

$$0\longrightarrow G_n\xrightarrow{i_n}G_{n+1}\xrightarrow{\varphi_n}G_{n+1}$$

являются точными (здесь φ_n — гомоморфизм умножения на p^n). Морфизм p-Д. г. есть морфизм индуктивных систем. p-Д. г. наз. связной (соответственно этальной), если все G_n — связные (этальные) групповые схемы. Связная p-Д. г. над полем характеристики p есть коммутативная формальная группа (рассматриваемая как индуктивный предел ядер φ_n — умножения на p^n), для к-рой умножение на p является изогенией [6]. Этот факт обобщается на случай произвольной базисной схемы S, на к-рой гомоморфизм, индуцируемый умножением на p, локально нильпотентен [4]. Категория этальных p-Д. г. эквивалентна категории p-адических представлений фундаментальной группы схемы S. Каждая p-Д. г. G над артиновой схемой S

содержит максимальную связную подгруппу G^0, называемую связной компонентой единицы, фактор по к-рой является этальной p-Д. г. Размерность алгебры Ли для любой $(G^0)_n$ наз. размерностью p-Д. г. G.

Пусть A — абелево многообразие над полем k размерности d, $A(n)$ — ядро гомоморфизма умножения на p^n в A, $i_n : A(n) \to A(n+1)$ — естественное вложение. Индуктивная система $A(\infty)=(A(n), i_n)$ является p-Д. г. высоты $2d$. Ее связная компонента единицы $A(\infty)^0$ совпадает с формальным пополнением A вдоль единичного сечения, а высота $A(\infty)^0$ представляет важный инвариант абелевой схемы.

Пусть $G=(G_n, i_n)$ — p-Д. г. высоты h, $\check{G}_n$ — двойственные по Картье конечные групповые схемы, $\check{i}_n : \check{G}_n \to \check{G}_{n+1}$ — отображение, двойственное к отображению умножения на $p : G_{n+1} \to G_n$. Система $\hat{G}=(\check{G}_n, \check{i}_n)$ является p-Д. г. высоты h и наз. двойственной к p-Д. г. G. Сумма размерностей G и $\hat{G}$ равна h.

Как и для формальных групп, для p-Д. г. вводится понятие модуля Дьедонне, играющее важную роль в теории деформации p-Д. г. (см. [2], [3], [4]).

В случае, когда S есть спектр разнохарактеристического кольца дискретного нормирования A с полем вычетов характеристики p, структура p-Д. г. тесно связана со структурой пополнения алгебраич. замыкания поля частных K кольца A, рассматриваемого как модуль над группой Галуа поля K (см. [6]).

Лит.: [1] Barsotti I., в кн.: Coloque sur la théorie des groupes algébriques tenu à Bruxelles, P., 1962, p. 77—85; [2] Grothendieck A., в кн.: Actes du Congrès international des mathématiciens. 1970, t. 1, P., 1971, p. 431—36; [3] Mazur B., Messing W., Universal Extensions and one Dimensional Crystalline Cohomology, B., 1974; [4] Messing W., The Crystals Associated to Barsotti — Tate Groups: with Applications to Abelian Schemas, B., 1972; [5] Serre J.-P., «Sem. Bourbaki», exposé 318, 1966—67, N. Y., 1968; [6] Тейт Дж., «Математика», 1969, т. 13, № 2, с. 3—25. *И. В. Долгачев.*

ДЕЛИМОСТИ ПРИЗНАК на натуральное число d — условие, к-рому удовлетворяет натуральное число A в том и только в том случае, если оно делится на d. Желательно, чтобы это условие можно было легко проверить и чтобы эта проверка была не сложнее непосредственного деления числа A на d.

Если разность чисел A и B делится на d, то число A делится на d тогда и только тогда, когда число B делится на d. На этом свойстве основан вывод многих Д. п. Пусть запись числа A в десятичной системе счисления имеет вид:

$$A=(a_n \dots a_2a_1a_0)_{10}=a_0+10a_1+10^2a_2+\dots+10^na_n,$$

тогда

$$A=a_0+10A_1, \text{ где } A_1=a_1+10a_2+\dots+10^{n-1}a_n;$$
$$A=a_0+10a_1+100A_2, \text{ где } A_2=a_2+10a_3+\dots+10^{n-2}a_n;$$
$$A=a_0+10a_1+100a_2+1000A_3, \text{ где } A_3=a_3+10a_4+\dots$$
$$\dots+10^{n-3}a_n;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Из этих равенств сразу получаются Д. п. на делители чисел 10, 100, 1000,... В частности, для того чтобы число A делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра, т. е. число a_0, делилось на 2; для того чтобы число A делилось на 4 (и на 8), необходимо и достаточно, чтобы число, изображаемое двумя (соответственно тремя) последними цифрами числа A, т. е. число a_0+10a_1, делилось на 4 (соответственно $a_0+10a_1+100a_2$ делилось на 8). Так как разность $(a_0+10a_1)-(a_0+2a_1)$ кратна 4, то Д. п. на 4 можно дать и в такой форме: число A делится на 4 тогда и только тогда, когда число a_0+2a_1 делится на 4.

Каждый Д. п. на число d позволяет сопоставить с числом A, если оно не слишком мало, нек-рое неотрица-

тельное целое число, меньшее A, к-рое делится на d в том и только в том случае, когда само число A делится на d. Другими словами, каждый Д. п. на число d определяется нек-рой функцией f, принимающей целые значения и удовлетворяющей условиям: $|f(A)|<A$ для каждого натурального A, начиная с некоторого; $f(A)$ делится на d тогда и только тогда, когда число A делится на d. Любая целозначная функция, удовлетворяющая перечисленным условиям, наз. ф у н к ц и е й д е л и м о с т и н а ч и с л о d; множество всех таких функций обозначается $\Omega(d)$. Ясно, что

$$f_1(A)=a_0\in\Omega(2)\bigcap\Omega(5),$$
$$f_2(A)=a_0+10a_1\in\Omega(4)\bigcap\Omega(25),$$
$$f_3(A)=a_0+10a_1+100a_2\in\Omega(8)\bigcap\Omega(125),$$
$$f_4(A)=a_0+2a_1\in\Omega(4).$$

Поскольку

$$A=(a_0+A_1)+9A_1=(a_0+a_1+A_2)+9(A_1+A_2)=$$
$$=\ldots=(a_0+a_1+\ldots+a_n)+9(A_1+A_2+\ldots+A_{n-1}),$$

то

$$f_5(A)=a_0+a_1+\ldots+a_n\in\Omega(9)\subset\Omega(3).$$

Итак, число A д е л и т с я н а 3 (н а 9) тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа делится на 3 (соответственно на 9). Аналогично,

$$A=(a_0-A_1)+11A_1=(a_0-a_1+A_2)+11(A_1-A_2)=$$
$$=\ldots=(a_0-a_1+\ldots+(-1)^n a_n)+$$
$$+11(A_1-A_2+\ldots+(-1)^{n-2}A_{n-1}).$$

Следовательно,

$$f_6(A)=a_0-a_1+\ldots+(-1)^n a_n\in\Omega(11).$$

Используя представления чисел в системе счисления с основанием 10^k, где $k=2, 3,\ldots$, можно найти Д. п. на делители чисел вида 10^k+1. Так, при $k=2$ получаются следующие функции делимости на 11 и 101:

$$f_7(A)=(a_1a_0)_{10}+(a_3a_2)_{10}+(a_5a_4)_{10}+\ldots\in\Omega(11),$$
$$f_8(A)=(a_1a_0)_{10}-(a_3a_2)_{10}+(a_5a_4)_{10}-\ldots\in\Omega(101).$$

Поскольку $10^3+1=7\cdot11\cdot13$, получается объединенный Д. п. на числа 7, 11, 13: чтобы узнать, делится ли данное число на какое-нибудь из чисел 7, 11 или 13, достаточно разбить цифры этого числа на грани, начиная справа, по три в каждой, а затем соединить попеременно знаками + и — числа, образованные этими гранями. Полученное число д е л и т с я н а 7, 11 и л и 13 тогда и только тогда, когда данное число делится соответственно на 7, 11 или 13. Таким образом,

$$f_9(A)=(a_2a_1a_0)_{10}-(a_5a_4a_3)_{10}+(a_8a_7a_6)_{10}-\ldots$$
$$\ldots\in\Omega(7)\bigcap\Omega(11)\bigcap\Omega(13).$$

Если целые числа c и d взаимно просты, то число Ac делится на d тогда и только тогда, когда число A делится на d. Это соображение также часто используется при построении Д. п. Пусть d — какой-нибудь делитель разности $10c-1$, тогда числа c и d взаимно просты, и из равенства

$$Ac=(ca_0+A_1)+(10c-1)A_1$$

следует, что число A делится на d в том и только в том случае, если число A_1+ca_0 делится на d. Напр., при $d=19$, $c=2$ разность $10c-1$ делится на 19. Поэтому

$$f_{10}(A)=A_1+2a_0\in\Omega(19).$$

Чтобы узнать, делится ли число на 19, можно последовательно применять этот признак. Пусть d — какой-нибудь делитель суммы $10c+1$. Из равенства

$$Ac=(ca_0-A_1)+(10c+1)A_1$$

следует, что число A делится на d тогда и только тогда, когда число $A_1 - ca_0$ делится на d. Так, при $c=11$ число $10c+1$ делится на 37. Поэтому

$$f_{11}(A) = A_1 - 11a_0 \in \Omega(37).$$

Соответствующий Д. п. можно сформулировать так: чтобы узнать, делится ли число A на 37 или нет, достаточно вычеркнуть последнюю цифру числа A и из числа, образуемого невычеркнутыми цифрами, вычесть произведение 11 на число, изображаемое вычеркнутой цифрой. Число A делится на 37 в том и только в том случае, если полученное число делится на 37. Подобным образом можно вывести Д. п. и на делители чисел вида $10^k c \pm 1$.

Лит.: [1] Воробьев Н. Н., Признаки делимости, 2 изд., М., 1974.

В. И. Нечаев.

ДЕЛИМОСТЬ в кольце — обобщение понятия делимости целых чисел нацело (см. *Деление*).

Элемент a кольца A делится на другой элемент $b \in A$, если существует такой $c \in A$, что $a=bc$. При этом говорят также, что b делит a, и a наз. кратным элемента b, а b — делителем элемента a. Для обозначения Д. a на b употребляют символ $b \mid a$.

В любом ассоциативно-коммутативном кольце имеют место следующие свойства Д.:

если $b \mid a$ и $c \mid b$, то $c \mid a$;

если $b \mid a$, $c \neq 0$, то $cb \mid ca$;

если $c \mid a$ и $c \mid b$, то $c \mid (a \pm b)$.

Последние два свойства равносильны тому, что множество элементов, делящихся на b, образует идеал bA кольца A (главный идеал, порожденный элементом b), к-рый содержит b, если A — кольцо с единицей.

В области целостности элементы a и b делятся друг на друга одновременно ($a \mid b$ и $b \mid a$) тогда и только тогда, когда они ассоциированы, т. е. $a=\varepsilon b$, где ε — обратимый элемент. Два ассоциированных элемента порождают один и тот же главный идеал. Делители единицы совпадают, по определению, с обратимыми элементами. Простым элементом в кольце наз. ненулевой элемент, не имеющий собственных делителей, кроме делителей единицы. В кольце целых чисел такие элементы наз. простыми числами, в кольце многочленов — неприводимыми многочленами. Кольца, в к-рых подобно кольцу целых чисел или кольцу многочленов имеет место однозначное разложение на простые множители (с точностью до делителей единицы и порядка следования), наз. *факториальными кольцами*. В таком кольце для всякой конечной совокупности элементов существуют наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное, оба определенные однозначно с точностью до делителей единицы.

Лит.: [1] Kummer E., «J. reine und angew. Math.», 1847, Bd 35, S. 319—26; [2] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [3] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972.

О. А. Иванова, С. А. Степанов.

ДЕЛИТЕЛЕЙ ПРОБЛЕМЫ — проблемы теории чисел, касающиеся асимптотич. поведения сумматорных функций

$$D(x) = \sum_{n \leqslant x} \tau(n), \quad D_k(x) = \sum_{n \leqslant x} \tau_k(n),$$

(где $\tau(n)$ — число делителей n, а $\tau_k(n)$, $k \geqslant 2$,— число представлений n в виде произведения k натуральных чисел), а также модификаций этих функций.

Проблема делителей Дирихле — проблема наилучшей оценки остаточного члена $\Delta(x)$ в асимптотич. формуле

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n) = x \ln x + (2C-1)x + \Delta x,$$

где C — *Эйлера постоянная*. Асимптотика суммы

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(n) = D(x)$$

впервые рассмотрена П. Дирихле (P. Dirichlet) в 1849. Он исходил из того, что данная сумма равна числу точек (u, v) с целыми положительными координатами под гиперболой $uv=x$, и доказал, что

$$D(x)=x\ln x+(2C-1)\,x+O\left(\sqrt{x}\right).$$

Эта формула наз. формулой Дирихле числа делителей.

Д. п. явилась одной из тех моделей, на к-рых развивались методы оценок числа целых точек в разного рода расширяющихся областях. Пусть θ — нижняя грань чисел α в соотношении $\Delta(x)\ll x^{\alpha}$. Согласно П. Дирихле, $\theta\leqslant 1/2$. Г. Ф. Вороной доказал, что $\theta\leqslant 1/3$. Далее последовательно были получены оценки

$$\theta\leqslant\frac{33}{100},\ \theta\leqslant\frac{27}{82},\ \theta\leqslant\frac{15}{46},\ \theta\leqslant\frac{13}{40}.$$

Истинный порядок величины $\Delta(x)$ (к 1978) неизвестен. Существует гипотеза, что

$$\Delta(x)\ll x^{1/4}\ln^2 x.$$

С другой стороны, Х. Харди (H. Hardy) доказал, что $\theta\geqslant 1/4$, или, точнее,

$$\varliminf_{x\to 0}\frac{\Delta(x)}{(x\ln x)^{1/4}\ln\ln x}<0<\varlimsup_{x\to 0}\frac{\Delta(x)}{(x\ln x)^{1/4}\ln\ln x}.$$

Кроме того, известна формула

$$\int_0^x\Delta^2(y)\,dy=Ax^{3/2}+O(x\ln^5 x)$$

(A — постоянная), показывающая справедливость «в среднем» гипотезы о порядке $\Delta(x)$.

Обобщенная проблема делителей — проблема наилучшего асимптотич. выражения при $x\to\infty$ суммы

$$\sum_{n\leqslant x}\tau_k(n)=D_k(x),$$

в частности, при $k=2$

$$\tau_2(n)=\tau(n),\quad D_2(x)=D(x).$$

Обобщенная Д. п. тесно связана с поведением *дзета-функции* Римана $\zeta(s)$ в критич. полосе значений s. Именно, для нецелого $x>0$, $c>1$ имеет место формула

$$D_k(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\zeta^k(s)\,\frac{x^s}{s}\,ds.$$

Здесь подинтегральная функция имеет в точке $s=1$ полюс порядка k с вычетом вида $xP_k(\ln x)$, где P_k — многочлен степени $k-1$.

Пусть

$$D_k(x)=xP_k(\ln x)+\Delta_k(x)$$

и пусть $\gamma_k<\gamma<1$, где γ_k — нижняя грань чисел σ, для к-рых

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\zeta(\sigma+it)|^{2k}}{|\sigma+it|^2}\,dt<\infty.$$

Тогда справедливы формула

$$\Delta_k(x)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT}\zeta^k(s)\,\frac{x^s}{s}\,ds$$

и обратная формула Меллина:

$$\frac{\zeta^k(s)}{s}=\int_0^{\infty}\Delta_k(x)\,x^{-s-1}\,dx,\quad s=\sigma+it,$$

где интеграл существует в смысле среднего квадратичного для $\gamma_k<\sigma<1$.

Оценки остаточного члена $\Delta_k(x)$ в формуле $D_k(x)$ еще далеки (к 1978) от ожидаемых. Пусть α_k — наименьшее из чисел α, для к-рых

$$\Delta_k(x) \ll x^{\alpha+\varepsilon}$$

при любом $\varepsilon>0$. Известны оценки:

$$\alpha_k \leqslant \frac{k-1}{k+1},$$

$$\alpha_k \leqslant \frac{k-1}{k+2} \text{ для } k \geqslant 4.$$

Имеются уточнения этих оценок для частных значений k:

$$\alpha_3 \leqslant \frac{37}{75},\ \alpha_7 \leqslant \frac{71}{107},\ \alpha_8 \leqslant \frac{41}{59},\ \alpha_9 \leqslant \frac{26}{35},\ \alpha_{11} \leqslant \frac{19}{25}.$$

Последний результат оценки сверху α_k получен в [3] на основе развития идей *Виноградова метода:* доказано существование такой абсолютной постоянной $c>0$, что

$$\alpha_k \leqslant 1 - \frac{c}{k^{2/3}},\ k=2,\ 3,\ \ldots$$

Эта оценка есть следствие оценки $\zeta(s)$ в критич. полосе: *для* $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \geqslant 2$ *существует такая постоянная* $a>1$, что

$$\zeta(\sigma+it) \ll |t|^{a(1-\sigma)^{3/2}} \ln|t|.$$

С другой стороны, Х. Харди (G. Hardy) доказал, что

$$\alpha_k \geqslant \frac{k-1}{2k}.$$

Относительно величины $\Delta_k(x)$ существует гипотеза:

$$\alpha_k = \frac{k-1}{2k}$$

при всех $k \geqslant 2$. Однако для ее обоснования недостаточно даже решения *Линделёфа гипотезы*:

$$\zeta(\sigma+it) \ll |t|^{\varepsilon}$$

при любых $\varepsilon>0$, $\sigma > 1/2$.

Дальнейшее обобщение Д. п. [4]: равномерно относительно целых $k \geqslant 2$, $m \geqslant 1$ при $x \geqslant 1$

$$\frac{1}{x}\sum_{n \leqslant x} \tau_k^m(n) < A_k^{(m)} (\ln x + k^m - 1)^{k^m-1},$$

где

$$A_k^{(m)} = \frac{k^{m}}{(k!)^{(k^m-1)/(k-1)}}.$$

Проблема делителей в арифметических прогрессиях — проблема равномерных относительно x, d, $0 \leqslant l \leqslant d$, $(l, d)=1$, оценок сумм

$$\sum_{n \leqslant x,\ n \equiv l \pmod d} \tau_k^m(n) = D_k^{(m)}(x;\ d,\ l).$$

Эти суммы изучались на основе аналитич. методов теории L-функций и важны для многих проблем теории чисел (см. [7]). В простейшем случае ($m=1$) для них получены асимптотич. выражения:

при $k=2$ для $d \leqslant x^{2/3}$ (см. [5]),
при $k=4$ для $d \leqslant x^{1/2}$ (см. [6]),
при $k \geqslant 4$ для $d \leqslant x^{2/k}/\ln^c x$ [см. [8]).

При любом $m \geqslant 1$ и $k=2$ найден (см. [9]) истинный порядок роста ($\asymp$) для $d \leqslant x^{1-\alpha}$, $0<\alpha<1/2$:

$$D_2^{(m)}(x;\ d,\ l) \asymp \frac{x}{d}\left[\ln\frac{x}{d}\prod_{p \mid d}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^m-1}\right].$$

В общем случае доказано [10], что

$$\sum_{d \leqslant x^{1/2-\varepsilon}} \max_{l} \left| D_k^{(m)}(x;\ d,\ l) - A_k^{(m)}(x;\ d) \right| < x(\ln x)^{-M},$$

где $A_k^{(m)}(x;\ d)$ — ожидаемый главный член роста, M — положительная сколь угодно большая постоянная, $\varepsilon>0$ — любое число.

Последнее неравенство, в частности, показывает, что суммы $D_k^{(m)}(x;\ d,\ l)$ при любых целых $k\geqslant 2$, $m\geqslant 1$ «в среднем» имеют один и тот же главный член роста для всех примитивных арифметич. прогрессий разности $d\leqslant x^{1/2-\varepsilon}$.

Лит.: [1] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., 1953; [2] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [3] Карацуба А. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 112, с. 241—55; [4] Марджанишвили К. К., «Докл. АН СССР», 1939, т. 22, с. 391—93; [5] Hooley C., «Proc. London Math. Soc.», ser. 3, 1957, v. 7, № 27, p. 396—413; [6] Линник Ю. В., «Матем. сб.», 1961, т. 53, № 1, с. 3—38; [7] его же, Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [8] Лаврик А. Ф., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30, № 2, с. 433—48; [9] Виноградов А. И., Линник Ю. В., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 4, с. 277—80; [10] Виноградов А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1965, т. 29, № 4, с. 903—34. *А. Ф. Лаврик.*

ДЕЛИТЕЛЕЙ ЧИСЛО — функция натурального аргумента n, равная количеству натуральных делителей числа n. Эта арифметич. функция обозначается $\tau(n)$, либо $d(n)$. Известна формула:

$$\tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1),$$

где

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$$

— канонич. разложение n на простые сомножители. Для простых p $\tau(p)=2$, но существует бесконечная последовательность n, для к-рых

$$\tau(n)>2^{(1-\varepsilon)\frac{\ln n}{\ln\ln n}},\ \varepsilon>0.$$

Однако всегда

$$\tau(n)=O\left(n^{\varepsilon}\right);$$

$\tau(n)$ — *мультипликативная арифметическая функция*; $\tau(n)$ равно числу точек с натуральными координатами на гиперболе $xy=n$. Для среднего значения $\tau(n)$ имеется асимптотич. формула Дирихле (см. *Делителей проблемы*). Обобщением функции $\tau(n)$ является функция $\tau_k(n)$ — число решений уравнения $n=x_1x_2\ldots x_k$ в натуральных числах $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_k$.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972. *Н. И. Климов.*

ДЕЛИТЕЛЬ целого числа a — целое число b, делящее без остатка число a. Другими словами, Д. целого числа a — это такое целое число b, для к-рого справедливо равенство $a=bc$ при нек-ром целом c. Делителем многочлена $A(x)$ наз. многочлен $B(x)$, делящий без остатка $A(x)$ (см. *Деление*). Более общо, в произвольном кольце A делителем элемента $a\in A$ наз. такой элемент $b\in A$, что $a=bc$ для нек-рого $c\in A$. *С. А. Степанов.*

ДЕЛИТЕЛЬ ЕДИНИЦЫ — элемент a кольца (коммутативного с единицей 1), для к-рого существует обратный, т. е. такой элемент b, что $ab=1$. В теории алгебраических чисел и алгебраических функций Д. е. наз. также единицами. *О. А. Иванова.*

ДЕЛИТЕЛЬ НУЛЯ в кольце или полугруппе с нулем — ненулевой элемент, произведение к-рого на некоторый ненулевой элемент равно нулю. Элемент a наз. левым (соответственно правым) Д. н., если $ab=0$ (соответственно $ba=0$) хотя бы для одного $b\neq 0$. *О. А. Иванова.*

ДЕЛЬТА АМПЛИТУДЫ — одна из трех основных *Якоби эллиптических функций*. Обозначается

$$\operatorname{dn} u=\operatorname{dn}(u,\ k)=\Delta\operatorname{am} u.$$

Д. а. следующим образом выражается через сигма-функции Вейерштрасса, тета-функции Якоби или при помощи ряда

$$\mathrm{dn}\, u = \mathrm{dn}\,(u,\ k) = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\vartheta_0(0)\,\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)\,\vartheta_0(v)} =$$

$$= 1 - k^2\frac{u^2}{2!} - k^2(4+k^2)\frac{u^4}{4!} - k^2(16+44k^2+k^4)\frac{u^6}{6!} - \dots,$$

где k — модуль Д. а., $0 \leqslant k \leqslant 1$; $v = u/2\omega$, $2\omega = \pi\vartheta_3^2(0)$. При $k=0$, 1 соответственно

$$\mathrm{dn}\, u = 1, \quad \mathrm{dn}\, u = \frac{1}{\mathrm{ch}\, u}.$$

См. также *Вейерштрасса эллиптические функции*, *Эллиптические функции*.

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968, ч. 2, гл. 3. *Е. Д. Соломенцев.*

ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ МЕТОД — метод нахождения *Грина функции* линейных дифференциальных уравнений математич. физики (т. е. метод определения функции влияния точечного источника) с помощью *дельта-функции* $\delta(x)$. Функция Грина $G(x,\ x')$ линейного дифференциального оператора $L(x)$ определяется из уравнения

$$L(x)G(x,\ x') = -\delta(x-x'),$$

как $G(x,\ x') = -L^{-1}(x)\delta(x-x')$, т. е. выражает влияние точечного источника, расположенного в точке x' на значение возмущения в точке x. Наиболее просто вид обратного оператора $L^{-1}(x)$ определяется в часто встречающемся случае, когда $L(x)$ является дифференциальным оператором с постоянными (не зависящими от x) коэффициентами. Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения общего вида для возмущения $\varphi(x)$ с источником $\rho(x)$:

$$L(x)\varphi(x) = -\rho(x),$$

с помощью функции Грина $G(x,\ x')$ записывается в виде свертки:

$$\varphi(x) = \int G(x,\ x')\rho(x')dx',$$

где интегрирование производится по всей области, в к-рой действует источник $\rho(x)$.

Лит.: [1] Иваненко Д., Соколов А., Классическая теория поля, М.—Л., 1951. *В. Д. Кукин.*

ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ, δ-функция, δ-функция Дирака, $\delta(x)$,— функция, позволяющая записать пространственную плотность физич. величины (масса, заряд, интенсивность источника тепла, сила и т. п.), сосредоточенной или приложенной в точке a пространства R_n. Напр., плотность точечной массы m, находящейся в точке a, записывается с помощью Д.-ф. в виде $m\delta(x-a)$. Д.-ф. может быть определена формальным соотношением

$$\int_{R_n} \delta(x-a)\, f(x)\, dx = f(a)$$

для любой непрерывной функции $f(x)$. Аналогично можно определить производные $\delta^{(k)}(x)$ для Д.-ф.:

$$\int_{R_n} \delta^k(x-a)\, f(x)\, dx = (-1)^k f^{(k)}(a)$$

для класса функций $f(x)$, непрерывных в R_n со своими производными $f^{(k)}(x)$ до порядка k включительно. Часто используемые формальные операторные соотношения, выражающие свойства Д.-ф.:

$$\delta(-x) = \delta(x);\ \ \delta(cx) = |c|^{-1}\delta(x),\ \ c = \mathrm{const};$$

$$x\delta(x) = 0;\ \ \delta(x) + x\delta'(x) = 0$$

и т. п., следует понимать в смысле данных выше определений, т. е. эти соотношения приобретают смысл

лишь после интегрирования их с достаточно гладкими функциями. Таким образом, Д.-ф. не является обычной функцией в смысле классич. теории функций и определяется в теории обобщенных функций как сингулярная *обобщенная функция*, т. е. как непрерывный линейный функционал в пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций $f(x)$, который сопоставляет $f(x)$ ее значение в нуле: $(\delta, f)=f(0)$.

В. Д. Кукин.

ДЕМИКВАДРИКА — линейная система ∞' прямолинейных образующих какой-либо *квадрики*.

ДЕМУЛЕНА ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, обладающая сопряженной сетью линий, касательные к к-рым образуют две конгруэнции W,— так наз. особой сопряженной системой. Д. п. и только они допускают *проективное изгибание*. Введена А. Демуленом [1].

Лит.: [1] Demoulin A., «C. r. Acad. sci.», 1911, t. 153, p. 590—93, 705—07, 797—99, 927—29. *М. И. Войцеховский.*

ДЕМУЛЕНА ТЕОРЕМА: геликоид имеет бесконечное число (а именно ∞^2) систем сопряженных сетей линий, сохраняющихся в непрерывном изгибании этой поверхности — ее главных оснований (см. *Изгибание на главном основании*). Установлена А. Демуленом [1]. При этом оказывается, что указанные главные основания являются *Фосса сетями*. Обратное утверждение (теорема Фиников а): единственная поверхность с бесконечным числом главных оснований есть прямой геликоид (см. [2]).

Лит.: [1] Demoulin A., «C. r. Acad. sci.», 1901, t. 133, p. 986—90; [2] Фиников С. П., Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи, М.—Л., 1937. *М. И. Войцеховский.*

ДЕМУЛЕНА ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК — четырехугольник, образованный двумя парами l_1, l_1' и l_2, l_2' прямолинейных образующих соприкасающейся квадрики Ли в гиперболич. точке M поверхности трехмерного (проективного) пространства. Прямые l_1, l_1', l_2, l_2' наз. прямыми Демулена, они параллельны ребрам M_1M_3 и M_2M_3 соответственно канонического тетраэдра $T(M, M_1, M_2, M_3)$, ассоциированного с квадрикой Ли и называемого тетраэдром Демулена. Д. ч. невырожден тогда и только тогда, когда невырождена 3-я *Фубини форма*. Рассмотрен А. Демуленом [1].

Лит.: [1] Demoulin A., «C. r. Acad. sci.», 1908, t. 147, p. 493—96. *М. И. Войцеховский.*

ДЕНА ЛЕММА: пусть в трехмерном многообразии M расположена двумерная клетка D с самопересечениями, имеющая границей простую замкнутую полигональную кривую C без особых точек; тогда существует двумерная клетка D_0 с границей C, кусочно линейно вложенная в M. Д. л. приведена в [1], однако доказательство ее содержало пробелы; полное обоснование дано в [2]. С Д. л. связан результат, наз. теоремой о петле: пусть M — компактное трехмерное многообразие и N — одна из компонент его края; если ядро гомоморфизма $\pi_1(N) \to \pi_1(M)$ нетривиально, то существует простая петля на N, к-рая не гомотопна нулю на N и гомотопна нулю в M. Теорема о петле и Д. л. обычно применяются совместно. Они могут быть объединены в следующую теорему: если M — трехмерное многообразие с краем N и ядро гомоморфизма включения $\pi_1(N) \to \pi_1(M)$ нетривиально, то в M существует кусочно линейно вложенный двумерный диск D, край к-рого лежит на N и не стягиваем на N. К этим теоремам примыкает теорема о сфере, являющаяся вместе с Д. л. и теоремой о петле одним из основных средств топологии трехмерных многообразий: если M — ориентируемое трехмерное многообразие с $\pi_2(M)\neq 0$, то в M существует подмногообразие Σ, гомеоморфное двумерной сфере, к-рое не гомотопно нулю в M.

Эти результаты имеют многочисленные применения в топологии трехмерных многообразий и, в частности, в теории узлов. Так, если K — узел, то $\pi_1(S^3 \setminus K)$ изоморфно $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда K — тривиальный узел. Для n-компонентного зацепления L в S^3 следующие условия равносильны: 1) $\pi_2(S^3 \setminus L) \neq 0$; 2) $\pi_1(S^3 \setminus L)$ есть свободное произведение двух нетривиальных групп; 3) в $S^3 \setminus L$ существует такое подмногообразие N, гомеоморфное двумерной сфере, что обе компоненты $S^3 \setminus N$ содержат точки из L. В частности, если L — узел (т. е. $n=1$), то $\pi_2(S^3 \setminus L) = 0$ (теорема об асферичности узлов).

Лит.: [1] Dehn M., «Math. Ann.», 1910, Bd 69, S. 137—168; [2] Папакирьякопулос С. Д., «Математика», 1958, т. 2, № 4, с. 23—47; [3] Массиу., Столлингс Дж., Алгебраическая топология. Введение, пер. с англ., М., 1977.

М. И. Войцеховский, М. Ш. Фарбер.

ДЕНДРИТ — локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых кривых. Континуум, каждая точка к-рого имеет окрестность, являющуюся Д., наз. локальным дендритом.

А. А. Мальцев.

ДЕНОТАТ данного имени — объект, обозначением к-рого является это *имя*.

В. Е. Плиско.

ДЕНУМЕРАНТ — число $D(n;\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_m)$ разбиений целого числа n на части, равные $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_m$, т. е. число решений в целых неотрицательных числах уравнения

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m = n.$$

Производящая функция для Д. имеет вид:

$$D(t;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m) = \sum D(n;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m)\ t^n = \\ = 1/(1-t^{a_1})(1-t^{a_2}) \ldots (1-t^{a_m}).$$

Наиболее просто Д. вычисляется по рекуррентному соотношению Эйлера:

$$D(n;\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k) - D(n-k;\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k) = \\ = D(n;\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1).$$

Формулы в явном виде для нек-рых Д. могут быть получены из следующей теоремы: если a является наименьшим общим кратным чисел $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_m$, то Д.

$$D(an+b;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m),$$

$$b = 0,\ 1,\ \ldots,\ a-1,$$

оказывается многочленом степени $m-1$ относительно n.

Лит.: [1] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963.

В. Е. Тараканов.

ДЕ РАМА КОГОМОЛОГИИ — см. *Рама когомологии.*

ДЕ РАМА КРУЧЕНИЕ — см. *Рама кручение.*

ДЕ РАМА ТЕОРЕМА — см. *Рама теорема.*

ДЕРЕВО в теории графов — связный неориентированный *граф* G, не содержащий циклов. Д. не имеет кратных ребер и петель. Являясь простейшими связными графами, Д. служат хорошими моделями для рассмотрения различных вопросов теории графов. Любое Д. с n вершинами содержит $n-1$ ребер. Число различных Д., к-рые можно построить на n нумерованных вершинах, равно n^{n-2}. Д. с одной выделенной вершиной наз. корневым деревом.

Перечисляющий ряд

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n$$

для числа T_n неизоморфных корневых Д. с n вершинами удовлетворяет функциональному уравнению

$$T(x) = x \exp \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} T(x^r).$$

Перечисляющий ряд

$$t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n$$

для числа t_n неизоморфных Д. с n вершинами можно представить с помощью перечисляющего ряда для корневых Д.:

$$t(x) = T(x) - \frac{1}{2}[T^2(x) - T(x^2)].$$

Функциональные уравнения для $T(x)$ и $t(x)$ позволяют вычислять значения T_n и t_n для конкретных значений n (см., напр., [1]).

Доказано, что при $n \to \infty$

$$t_n \sim C\,\alpha^n / n^{5/2},$$

где $C = 0{,}534948\ldots$, $\alpha = 2{,}95576\ldots$ (см. [2]). Задачи перечисления Д. определенного вида возникают, напр., в химии при изучении изомеров.

Д. можно достаточно просто кодировать наборами из нулей и единиц. Рассмотрим, напр., к.-л. правильную (без пересечения ребер) укладку Д. D на плоскости (см. *Графа укладка*). Начиная с к.-л. вершины, будем двигаться по ребрам Д. D, сворачивая в каждой вершине на ближайшее справа ребро и поворачивая назад в концевых вершинах Д. Проходя по нек-рому ребру, записываем 0 при движении по ребру в первый раз и 1 при движении по ребру второй раз (в обратном направлении). Если m — число ребер Д. D, то через $2m$ шагов мы вернемся в исходную вершину, пройдя по каждому ребру дважды. Полученная при этом последовательность из 0 и 1 (код Д.) длины $2m$ позволяет однозначно восстанавливать не только само Д. D, но и его укладку на плоскости. Произвольному Д. соответствуют несколько кодов. Из этого способа кодирования вытекает оценка: $t_n < T_n < 4^n$.

Д. G с n вершинами однозначно восстанавливается (с точностью до изоморфизма) по набору всех его $(n-1)$-вершинных подграфов $G-v$, получаемых из G удалением каждой из его вершин v.

Любое Д. однозначно определяется также расстояниями (длиной наименьшей цепи) между его концевыми (степени 1) вершинами.

Остовное дерево (остов) — это подграф данного графа, содержащий все его вершины и являющийся Д. Число остовных Д. произвольного связного графа G без петель и кратных ребер можно вычислить следующим образом. Пусть M — матрица, полученная из матрицы смежности графа G изменением знаков всех элементов на противоположный и заменой i-го элемента главной диагонали степенью вершины v_i. Тогда алгебраич. дополнения всех элементов главной диагонали матрицы M равны между собой и их общее значение есть число остовов графа G. Остовные Д. используются, напр., для нахождения независимых циклов в электрич. схеме.

Важное значение для приложений имеет задача нахождения в связном графе, ребрам к-рого приписаны веса, остовного Д. с наименьшей суммой весов ребер. Такая задача возникает, напр., при проектировании коммуникационных сетей. Известен алгоритм для решения этой задачи о кратчайшем связывающем дереве (см. [3]). Д., растущим (или выходящим) из вершины v_0, наз. ориентированный граф, к-рый является (без учета ориентации) корневым Д. с корнем v_0 и в к-ром для любой вершины v_1 (единственная) цепь, соединяющая v_0 с v_1, является ориентированным путем из v_0 в v_1. Такие Д. используются, напр., для описания детерминированных функций, для представления информации в информационно-поисковых системах и т. д.

Обобщением понятия «Д.» является понятие «леса»; лес — это граф без циклов (не обязательно связный).

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973 (лит.); [2] Otter R., «Ann. Math.», 1948, v. 49, № 3, p. 583—99; [3] Прим Р. К., «Кибернетический сборник», 1961, в. 2, с. 95—107.

В. Б. Алексеев.

ДЕСКРИПТИВНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ — раздел теории множеств, изучающий внутреннее строение множеств в зависимости от тех операций, при помощи к-рых эти множества могут быть построены из множеств сравнительно простой природы (напр., замкнутых или открытых подмножеств данного евклидова, метрич. или топологич. пространства). К указанным операциям относятся объединение, пересечение, взятие дополнения, проектирование и т. д. Д. т. м. зародилась в начале 20 в. в трудах Э. Бореля (E. Borel), Р. Бэра (R. Baire) и А. Лебега (H. Lebesgue) в связи с проблемой измеримости множеств. Множества, измеримые по Борелю, получили название *борелевских множеств*, или *B*-множеств. С другой стороны, Р. Бэр дал классификацию функций, названных впоследствии бэровскими функциями, и доказал ряд теорем об этих функциях (см. *Бэра классы*, *Бэра теорема*). А. Лебег доказал, что *B*-множества тождественны *Лебега множествам* бэровских функций, дал первую классификацию *B*-множеств и доказал непустоту каждого ее класса.

Изучение *B*-множеств стало важной задачей Д. т. м., причем в первую очередь надлежало выяснить вопрос о мощности *B*-множеств. После введения *Лебега меры* оказалось, что класс измеримых множеств значительно шире класса *B*-множеств, и возник вопрос об отыскании средств установления измеримости того или иного множества. Решение этого вопроса в каждом конкретном случае связано, как правило, с выяснением того процесса, при помощи к-рого это множество может быть построено, т. е. его дескриптивной структуры. Так определился еще один важный круг задач Д. т. м.— отыскание возможно более широкого класса (сохраняющих измеримость) операций над множествами и исследование свойств результатов этих операций. Решение этих вопросов, возникших в работах французских математиков, было дано преимущественно русскими математиками — Н. Н. Лузиным и его школой.

Один из наиболее важных вопросов — вопрос о мощности *B*-множеств — был решен П. С. Александровым [1] в 1916, построившим для этого *A-операцию*. Им было показано, что посредством *A*-операции, отправляясь от интервалов, можно построить любое *B*-множество и что всякое несчетное множество, полученное путем *A*-операции (и называемое *A*-м н о ж е с т в о м), содержит совершенное множество и, значит, имеет мощность континуума. Этот результат был независимо получен Ф. Хаусдорфом (F. Hausdorff). М. Я. Суслин [2] показал, что существует *A*-множество, не являющееся борелевским. Он же ввел и название *A*-множества, равно как и *A*-операции (в честь П. С. Александрова). *A*-множества наз. также с у с л и н с к и м и м н о ж е с т в а м и или, реже, а н а л и т и ч е с к и м и м н о ж е с т в а м и. Для того чтобы *A*-множество было *B*-множеством, необходимо и достаточно, чтобы: 1) дополнение к нему снова было *A*-множеством (*Суслина критерий*); 2) оно являлось результатом *A*-операции с непересекающимися слагаемыми (*Лузина критерий*). Все *A*-множества измеримы и обладают *Бэра свойством*. Были найдены следующие новые способы получения *A*-множеств, эквивалентные *A*-операции: *A*-множества суть проекции *B*-множеств (и даже G_δ); *A*-множества суть непрерывные образы пространства *I* иррациональных чисел; и, значит, *A*-множества суть непрерывные образы *B*-множеств [3]. В то же время, непрерывный взаимно однозначный (и даже счетнократный [4]) образ *B*-множества есть *B*-множество и всякое несчетное *B*-множество есть объединение не более чем счетного множества и непрерывного взаимно однозначного образа пространства *I* (см. [3]). Наконец, Н. Н. Лузиным был найден еще один важный способ задания *A*-множеств при помощи введенной им операции решета (см. *Лузина решето*).

Трансфинитные индексы решета и конституанты стали мощным орудием исследования свойств A-множеств и их дополнений — *CA-множеств*.

При исследовании проблемы о мощности CA-множеств Н. Н. Лузин вводит *проективные множества*. Каждый класс α проективных множеств содержит множества, не принадлежащие классам $<\alpha$ (см. [3], [5]). Важным инструментом при доказательстве этой и других теорем о непустоте тех или иных классов множеств является понятие *универсального множества* (см. [3], [6], [5]). Изучение проективных множеств даже второго класса наталкивается на непреодолимые трудности. Так, не решен полностью вопрос об измеримости множеств (B_2), их мощности и о наличии у них свойства Бэра. Важные результаты в этом направлении получены П. С. Новиковым [4]: существует несчетное CA-множество, относительно к-рого непротиворечиво предположение, что оно не содержит совершенного подмножества; существует множество (B_2), относительно к-рого непротиворечиво утверждение, что оно неизмеримо.

Введение П. С. Александровым [7] Г-операции, дополнительной к A-операции, явилось первым шагом в направлении построенной А. Н. Колмогоровым [8] и Ф. Хаусдорфом [9] общей теории теоретико-множественных операций; однако основной класс операций составляют положительные теоретико-множественные операции, или δs-операции. Для каждой δs-операции Φ была определена дополнительная δs-операция Φ^c и дана формула

$$\Phi^c(\{E_n\}) = C[\Phi(\{CE_n\})],$$

к-рая может рассматриваться как определение Φ^c. Было введено также понятие нормальной δs-операции (для любого семейства M множеств $\Phi(\Phi(M)) = \Phi(M)$, см. [8]). A-операция и Г-операция являются взаимно дополнительными нормальными δs-операциями. То же самое справедливо относительно операций счетного объединения и счетного пересечения. Одной из ключевых теорем общей теории операций над множествами, лежащими в топологич. пространствах, является теорема Колмогорова о дополнениях: если пространство содержит дисконтинуум, M — система всех замкнутых подмножеств этого пространства и Φ — произвольная теоретико-множественная операция, то дополнение хотя бы одного множества семейства $\Phi(M)$ ему не принадлежит (см. [8], [5], [9]). Применение к данному семейству M множеств попеременно δs-операции Φ и Φ^c позволяет построить возрастающую трансфинитную последовательность классов $M_0 = M$, $M_1, \ldots, M_\alpha, \ldots$, $\alpha < \omega_1$, относительно к-рой верна теорема Колмогорова о непустоте классов: если Φ есть нормальная δs-операция более мощная, чем операции счетного объединения (или счетного пересечения), а M есть семейство всех замкнутых подмножеств метрич. пространства, содержащего дисконтинуум, то все классы M_α, $\alpha < \omega_1$, порождаемые операцией Φ из семейства M, попарно различны. При этом δs-операция Φ считается более мощной, чем δs-операция ψ, если $\Phi(M) \supseteq \psi(M)$ для любого семейства M множеств (см. [8], [5]). Если $\Phi = \bigcup_1^\infty$ (или $\bigcap_1^\infty$), то классы M_α, $\alpha < \omega_1$, порожденные операцией Φ из семейства M, представляют собой классы B-множеств, порожденных семейством M (классификация Хаусдорфа). Аналогичным образом A-операция порождает из семейства M борелевских множеств классы M_α, $\alpha < \omega_1$, C-множеств (*Лузина множеств*). Каждое C-множество измеримо и обладает свойством Бэра. Все C-множества входят в класс (B_2), но не исчерпывают его.

Исключительно важную роль в Д. т. м. играет введенное Н. Н. Лузиным понятие отделимости [4]. Первый принцип отделимости: всякие

два непересекающиеся A-множества отделимы (B). Второй принцип отделимости: если E и P — два A-множества (или CA-множества), то множества $E \setminus P$ и $P \setminus E$ отделимы (CA). Существуют два CA-множества, неотделимые (B). Проблема отделимости проективных множеств второго класса была решена П. С. Новиковым [4]; при этом принципы отделимости оказались обращенными: они получаются из соответствующих теорем для проективных множеств первого класса заменой (A) на (CA_2), (CA) на (A_2) и (B) на (B_2). Проблема отделимости в классе C-множеств была также решена П. С. Новиковым [4] (см. также [3]). Им же введено обобщение понятия отделимости множеств — понятие одновременной или кратной отделимости множеств, равно как и основной инструмент при доказательстве теорем кратной отделимости — принцип сравнения индексов [4].

Важная глава в развитии Д. т. м. связана с решением проблемы униформизации. Множество P униформизует множество $E \subset X \times Y$, если $P \subset E$ и если P имеет ту же, что и E, проекцию на X и проектируется на X взаимно однозначно. Всякое B-множество униформизуется CA-множеством. Процесс эффективного выбора точки [4] в непустом CA-множестве позволил получить более сильный результат: всякое CA-множество униформизуется CA-множеством. Всякое A-множество униформизуется множеством типа $A_{\rho\sigma\delta}$ [3] (см. также [10]). Существует A-множество в евклидовой плоскости, не униформизуемое ни A-множеством, ни CA-множеством (см., напр., [11], с. 57). В вопросе о том, в каких случаях B-множество может быть униформизовано B-множеством, наиболее общий результат имеет вид: всякое плоское B-множество, пересекающееся с прямыми $x = \text{const}$ по множествам типа F_σ, униформизуется B-множеством. Проблема униформизации возникла при решении проблемы о неявных B-функциях (см. [3]). При этом возникли и другие задачи: о природе проекций B-множеств, о расщеплении множеств, о накрытии множеств, о природе множества всех тех точек проекции данного B-множества E, прообразы к-рых (в пересечении с E) обладают нек-рым фиксированным свойством. Представление о второй и третьей задачах дают следующие теоремы [3]: B-множество, имеющее счетнократную проекцию, является объединением счетного числа униформных B-множеств, причем, каковы бы ни были два таких множества, одно из них лежит под другим (теорема о расщеплении B-множества); всякое A-множество, имеющее счетнократную проекцию, содержится в нек-ром B-множестве, обладающем этим свойством (теорема о накрытии A-множества).

Помимо классификаций B-множеств, принадлежащих А. Лебегу и Ф. Хаусдорфу, существует классификация Лузина — Валле Пуссена. В этой классификации в качестве инструмента для исследования строения множеств данного класса K_α, $\alpha < \omega_1$, выбраны множества, представимые в виде пересечения и не представимые в виде объединения счетного числа множеств классов $< \alpha$; эти множества наз. элементами класса α. Всякое множество класса K_α есть объединение счетного числа попарно непересекающихся элементов классов $\leqslant \alpha$. Каждый класс K_α разбивается на подклассы K_α^β, $\beta < \omega_1$, причем в каждом классе существуют подклассы со сколь угодно большими номерами $\beta < \omega_1$. Поскольку каждое множество класса α строится из элементов, то возник вопрос об исследовании строения самих элементов, в частности о существовании в каждом классе K_α такого основного топологич. типа элементов, названных каноническими, чтобы каждый элемент класса α мог быть представлен в виде объединения счетного числа

канонич. элементов классов $\leqslant\alpha$ (все рассматривается в пространстве I иррациональных чисел). В первом классе имеются канонич. элементы двух типов — одноточечное множество и топологич. образ канторова совершенного множества. Во втором классе [12] каждый элемент есть объединение канонич. элемента класса 2, каковым является множество, гомеоморфное пространству I, и множества класса $\leqslant 1$. Были найдены и канонич. элементы третьего класса: ими оказались элементы третьего класса, построенные Р. Бэром, к-рые являются каноническими (см. [3]). Проблема существования канонич. элементов высших классов, оказавшаяся исключительно трудной, была решена Л. В. Келдыш [13], установившей существование канонич. элементов в каждом классе $\alpha<\omega_1$ и выяснившей их строение. Каждый элемент класса $\alpha>2$ является объединением одного канонич. элемента класса α и не более чем счетного числа множеств классов $<\alpha$. Еще одна трудная задача из этого круга связана с построением арифметич. примеров B-множеств низших классов. Такой пример для класса 3 построен Р. Бэром (см. [3]). Арифметич. примеры элементов всех конечных классов даны Л. В. Келдыш [13] (см. также [3]), указавшей на принципиальную возможность построения таких примеров для классов $\alpha\geqslant\omega_0$.

Важную роль в Д. т. м. играет *Лаврентьева теорема* о продолжении гомеоморфизма (см. [9]): пусть X и Y полные метрич. пространства, $A\subset X$, $B\subset Y$ и $f\colon A\xrightarrow{\text{на}}B$ есть гомеоморфизм; тогда существует продолжение отображения f до гомеоморфизма двух C_δ-множеств, лежащих в этих пространствах. Из этой теоремы легко следует т е о р е м а о т о п о л о г и ч е с к о й и н в а р и а н т н о с т и (см. [9]): пусть $\mathfrak{B}$ — система замкнутых множеств и Φ — такая δs-операция, что пересечение $\Phi(\mathfrak{B})$-множества (т. е. множества семейства $\Phi(\mathfrak{B})$ с G_δ-множеством есть снова $\Phi(\mathfrak{B})$-множество; тогда каждое $\Phi(\mathfrak{B})$-множество, лежащее в полном метрич. пространстве, является $\Phi(\mathfrak{B})$-множеством в любом метрич. пространстве, в к-ром оно топологически содержится. Система $\mathfrak{B}$ в этой теореме может быть заменена системой $\mathfrak{A}$ открытых множеств. Таким образом, $\Phi(\mathfrak{B})$-множества, где Φ удовлетворяет указанному выше условию, лежащие в полных метрич. пространствах, являются абсолютными $\Phi(\mathfrak{B})$-множествами, и то же самое верно для $\Phi(\mathfrak{A})$-множеств (при этом имеется в виду абсолютность в классе метрич. пространств). Для ряда частных случаев, напр. CA-множеств [7] (Φ есть Γ-операция), этот результат был установлен без применения теоремы Лаврентьева. Всякое полное метрич. пространство есть абсолютное G_δ. Всякое (метризуемое) абсолютное G_δ гомеоморфно нек-рому полному метрич. пространству (т е о р е м а А л е к с а н д р о в а — Х а у с д о р ф а, см. [9]).

Справедлива следующая т е о р е м а А л е к с а н д р о в а — У р ы с о н а [12] о топологич. характеристике пространства иррациональных чисел: каждое нульмерное метрич. пространство X со счетной базой, не имеющее ни одной точки локальной компактности и являющееся абсолютным G_δ, гомеоморфно пространству I. А так как I есть абсолютное G_δ и обладает всеми остальными свойствами пространства X, то перечисленные в теореме свойства пространства X полностью характеризуют пространство I с топологич. точки зрения. Эта характеризация позволила доказать следующий результат [14]: каждое метрич. пространство, являющееся непрерывным образом пространства I (и, значит, абсолютным A-множеством), есть также факторный образ пространства I. К этому кругу результатов принадлежат также следующие: непустое сепарабельное метрич. пространство есть непрерывный открытый образ пространства I тогда и только тогда,

когда оно есть абсолютное $G\delta$ (см. [15]); здесь «открытый» можно заменить на «замкнутый». Обобщением непрерывного отображения является понятие B-измеримого отображения, или B-функции, в частности, B-измеримого отображения класса α; обобщениями гомеоморфизма являются понятия обобщенного гомеоморфизма класса (α, β) и B-изоморфизма. Об этих отображениях см. [6].

При формулировке результатов, как правило, не указывался тот класс пространств, для к-рого они справедливы. Это объясняется тем, что большинство классич. результатов было получено для подмножеств пространства I, но почти все они (исключения всегда оговаривались) справедливы при замене I любым сепарабельным абсолютным G_δ (в частности, полным метрич. пространством со счетной базой). Дальнейшее развитие Д. т. м. проходило по линии обобщения классич. результатов для случая: 1) полных метрич. пространств (не обязательно сепарабельных); 2) совершенно нормальных топологич. пространств, в частности, бикомпактов; 3) общих топологич. пространств. Даже в первом случае обобщение классич. теории связано с серьезными трудностями, а часто и вовсе не имеет места. Обобщение теории B-множеств и A-множеств для этого случая рассмотрено А. Стоуном [16].

Класс совершенно нормальных пространств есть класс, за пределами к-рого уже не имеет места тот немаловажный факт, что система B-множеств (соответственно A-множеств), порожденных замкнутыми множествами данного пространства, совпадает с системой B-множеств (соответственно A-множеств), порожденных открытыми множествами этого пространства. Справедлива важная теорема о непустоте классов [11]: во всяком несчетном совершенно нормальном бикомпакте для каждого класса $\alpha < \omega_1$ существует B-множество класса α, не являющееся B-множеством класса $< \alpha$.

Проблема униформизации стала частным случаем общей проблемы о сечении многозначного отображения (см. *Сечение отображения*).

Современная разработка Д. т. м. в общих топологич. пространствах (третий случай) имеет связь с потребностями других областей математики (напр., с теорией потенциала). Подробнее см. [17] (имеется обширная библиография).

Идеи и методы Д. т. м. оказали большое влияние на развитие целого ряда областей математики: анализа, теории функций, топологии, математической логики и др.

Лит.: [1] Александров П. С., «С.г. Acad. sci.», 1916, t. 162, p. 323—25; [2] Суслин М. Я., там же, 1917, t. 164, p. 88—90; [3] Лузин Н. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1958; [4] Ляпунов А. А., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 133, с. 11—22; [5] Очан Ю. С., «Успехи матем. наук», 1955, т. 10, в. 3, с. 71—128; [6] Куратовский К., Топология, т. 1, М., 1966; [7] Александров П. С., «Fundam. math.», 1924, t. 5, p. 160—65; [8] Колмогоров А. Н., «Матем. сб.», 1928, т. 35, № 3—4, с. 415—22; [9] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.—Л., 1937; [10] Арсенин В. Я., Ляпунов А. А., «Успехи матем. наук», 1950, т. 5, в. 5, с. 45—108; [11] Пономарев В. И., «Докл. АН СССР», 1966, т. 170, № 3, с. 520—23; [12] Александров П. С., Урысон П. С., «Math. Ann.», 1927, Bd 98, S. 89—106 (рус. пер. в кн.: Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 2, М.—Л., 1951, с. 973—92); [13] Келдыш Л. В., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1945, т. 17, с. 1—76; [14] Michael E., Stone A. H., «Pacif. J. Math.», 1969, v. 28, № 3, p. 629—33; [15] Архангельский А. В., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1966, т. 15, с. 181—223; [16] Stone A. H., «General Topology and its Application», 1972, v. 2, p. 249—70; [17] Frolik Z., «Czechoslovak Mathematical Journal», 1970, v. 20, p. 406—67.

А. Г. Елькин, В. И. Пономарев.

ДЕСЯТИЧНАЯ ДРОБЬ — дробь (арифметическая), знаменателем к-рой является целая степень числа 10. Для Д. д. принята запись

$$a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0, \; b_1 b_2 \dots b_l, \qquad (1)$$

где $0 \leqslant a_i, \; b_j < 10$ — целые числа, причем, если $k \neq 0$, то и $a_k \neq 0$.

Под (1) понимается число, равное

$$a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_l}{10^l}.$$

Напр.,

$$\frac{3}{10} = 0{,}3;\ \frac{3524}{100} = 35{,}24;\ \frac{15}{1000} = 0{,}015.$$

Цифры, стоящие после запятой, наз. десятичными знаками. Если Д. д. не содержит целой части, т. е. меньше единицы по абсолютной величине, то перед запятой ставится нуль.

Бесконечной десятичной дробью наз. бесконечный ряд чисел вида:

$$a_0,\ b_1 b_2 \ldots b_n \ldots, \qquad (2)$$

где a_0 — целое число, а каждое из чисел b_j ($j=1, 2, \ldots$) принимает одно из значений 0, 1, 2..., 9. Любое действительное число α является суммой некоторого такого ряда, т. е.

$$\alpha = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}.$$

Частные суммы ряда (2) — конечные Д. д. $a_0,\ b_1 \ldots b_n$, являются приближенными значениями числа α с недостатком, а числа

$$a_0,\ b_1 \ldots b_n + \frac{1}{10^n}$$

— приближенными значениями с избытком. Если существуют такие целые числа n и m, что для всех $i > n$ имеют место равенства

$$b_i = b_{i+m},$$

то бесконечная Д. д. наз. периодической. Всякую конечную Д. д. можно рассматривать как бесконечную периодическую с $b_i = 0$ для $i > n$. Если α — рациональное число, то соответствующая ему дробь (2) будет периодической. Для иррационального числа α дробь (2) периодической быть не может. *С. А. Степанов.*

ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ — позиционная система счисления с основанием, равным 10. Современная Д. с. с. возникла на основе нумерации, зародившейся около 5 в. н. э. в Индии. Система получила название арабской, т. к. в Европе с ней впервые познакомились по латинским переводам с арабского. Запись числа в Д. с. с. компактна и удобна для производства арифметич. операций. Очевидные преимущества Д. с. с. в сравнении с алфавитными системами или римской системой счисления содействовали ее повсеместному распространению. *В. И. Нечаев.*

ДЕСЯТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ действительного числа — приближенное изображение действительного числа конечной *десятичной дробью*. Всякое действительное число a может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби:

$$a = \pm\, \alpha_0,\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots,$$

где α_0 — неотрицательное число, α_n — одна из цифр 0, 1, 2..., 9, $n=1, 2, \ldots$. Если исключить из рассмотрения бесконечные периодические десятичные дроби с периодами, состоящими только из одних девяток, то всякое действительное число будет записываться в виде бесконечной десятичной дроби однозначным образом. Пусть выбрана такая запись чисел и $a \geqslant 0$, тогда конечная десятичная дробь

$$\underline{a}_n = \alpha_0,\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$$

(соответственно $\overline{a}_n = \alpha_0,\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n + 10^{-n}$) наз. нижним (соответственно верхним) десятичным приближением порядка n числа a. Если

$a<0$ и $a'=-a$, то нижнее $\underline{a}_n$ и верхнее $\overline{a}_n$ Д. п. порядка n числа a определяются равенствами

$$\underline{a}_n=-\overline{a'}_n,\quad \overline{a}_n=-\underline{a'}_n.$$

Для Д. п. действительного числа выполняются следующие соотношения:

$$\underline{a}_n\leqslant\underline{a}_{n+1}\leqslant a\leqslant\overline{a}_{n+1}\leqslant\overline{a}_n,$$

$$\overline{a}_n-\underline{a}_n=10^{-n}.$$

Из них следует, что

$$\lim_{n\to\infty}(\underline{a}_n\pm\underline{b}_n)=a\pm b,\quad \lim_{n\to\infty}\underline{a}_n\underline{b}_n=ab,$$

а если $b\neq0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{a}_n/\underline{b}_n=a/b$, при этом вместо нижних Д. п. можно брать верхние.

Д. п. используются на практике для приближенных вычислений. В качестве приближенных значений сумм $a+b$, разностей $a-b$, произведений ab и частных a/b берутся, соответственно, $\underline{a}_n+\underline{b}_n$, $\underline{a}_n-\underline{b}_n$, $(\underline{a}_n\underline{b}_n)_n$ и $(\underline{a}_n/\underline{b}_n)_n$. В результате указанных действий над конечными десятичными дробями $\underline{a}_n$ и $\underline{b}_n$, имеющими не более n значащих цифр после запятой, получаются снова десятичные дроби с не более чем n значащими цифрами после запятой. С помощью этих дробей искомый результат можно получить с любой степенью точности. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДЕТЕРМИНАНТ — то же, что *определитель*.

ДЕТЕРМИНАНТНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — множество матриц $D_t(d,\ n)$ порядка $d\times n$ и ранга меньше t, снабженное структурой алгебраич. многообразия. Пусть $J_t(d,\ n)$ — идеал кольца многочленов

$$k\left[(T_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant d\\ 1\leqslant j\leqslant n}}\right]$$

с коэффициентами в поле k, порожденный минорами порядка t матрицы порядка $d\times n$, составленной из переменных T_{ij} (д е т е р м и н а н т н ы й и д е а л). Множество нулей идеала $J_t(d,\ n)$ в аффинном пространстве $A^{dn}=\mathrm{Spec}\,(k[(T_{ij})])$ наз. д е т е р м и н а н т н ы м м н о г о о б р а з и е м и обозначается $D_t(d,\ n)$. Для любой коммутативной k-алгебры k' множество k'-точек Д. м. $D_t(d,\ n)$ естественным образом отождествляется с множеством матриц порядка $d\times n$ и ранга $<t$ с коэффициентами в k'.

Частные случаи Д. м.: $D_d\,(d,\ d)$ есть гиперповерхность в A^{d^2}, задаваемая обращением в нуль определителя квадратной матрицы порядка d, составленной из независимых переменных (д е т е р м и н а н т н а я г и п е р п о в е р х н о с т ь); $D_2(d,\ n)$ есть аффинный конус для образа вложения Сегре

$$P^{d-1}\times P^{n-1}\longrightarrow P^{dn-1}$$

произведения проективных пространств [2].

Д. м. обладают следующими свойствами: $D_t(d,\ n)$ неприводимо, приведено (т. е. идеал $J_t(d,\ n)$ прост), является многообразием Коэна — Маколея (см. *Коэна — Маколея кольцо*), нормально, и размерность $D_t(d,\ n)$ равна $(t-1)(n+d-1)$ (см. [1], [2]). При $t=1$ или $d=n$ (и только в этих случаях) $D_t\,(d,\ n)$ является схемой Горенштейна (см. *Горенштейна кольцо*) [5]. Д. м. тесно связаны с подмногообразиями Шуберта грассманова многообразия (см. *Шуберта многообразие*).

Лит.: [1] H o c h s t e r M., E a g o n J., «Amer. J. Math.», 1971, v. 93, № 4, p. 1020—58; [2] K l e i m a n S., L a n d o l f i J., «Compositio math.», 1971, v. 23, p. 407—34; [3] L a k s o v D., «Comp. math.», 1975, v. 30, p. 273—92; [4] M u s i l i C., «J. Indian Math. Soc.», 1974, v. 38, p. 131—45; [5] S v a n e s T., «Advances Math.», 1974, v. 14, p. 369—453. *И. В. Долгачев.*

ДЕФЕКТ, д е ф е к т н о е ч и с л о о п е р а т о р а,— размерность $\dim D_\lambda$ *дефектного подпространства*

линейного оператора. Иногда, в более широком смысле, дефектом линейного многообразия гильбертова пространства наз. размерность ортогонального дополнения этого многообразия. *В. И. Соболев.*

ДЕФЕКТ треугольника — недостаток до двух прямых углов суммы внутренних углов треугольника на плоскости Лобачевского. Д. треугольника пропорционален площади треугольника. Максимальное значение Д. треугольника равно двум прямым углам, когда все вершины треугольника являются бесконечно удаленными точками. *А. Б. Иванов.*

ДЕФЕКТНОЕ ЗНАЧЕНИЕ мероморфной функции f — комплексное число a (конечное или бесконечное), дефект к-рого (см. ниже) $\delta(a, f)$ положителен. Функция f определена в круге $|z|<R\leqslant\infty$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Дефект значения a:

$$\delta(a, f)=1-\overline{\lim_{r\to R}}\frac{N(r, a, f)}{T(r, f)},$$

где $T(r, f)$ — характеристическая функция Неванлинны, отражающая рост f при $r\to R$, и

$$N(r, a, f)=\int_0^r [n(t, a)-n(0, a)]\, d\ln t+n(0, a)\ln r$$

— считающая функция; здесь $n(t, a)$ — число решений уравнения $f(z)=a$ в круге $|z|\leqslant t$ (с учетом кратностей). Если $T(r)\to\infty$ при $r\to R$, то $0\leqslant\delta(a, f)\leqslant 1$ для всех $a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Если $f(z)\neq a$ ни для какого z, то $\delta(a, f)=1$ и a есть Д. з.; это равенство возможно и в более общем случае (напр., $f(z)=ze^z$, $R=\infty$ и $a=0$).

Если

$$\overline{\lim}\frac{T(r, f)}{\ln(1/(R-r))}=\infty$$

(или $f\not\equiv$const мероморфна во всей плоскости), то $\sum_a\delta(a,f)\leqslant 2$ (соотношение дефектов), и число Д. з. для такой f не более чем счетно. В остальном множество Д. з. может быть произвольным; напр., для любых последовательностей $\{a_\nu\}\subset\mathbb{C}$ и $\{\delta_\nu\}\subset\mathbb{R}^+$, $\sum_\nu\delta_\nu\leqslant 1$, найдется целая функция f такая, что $\delta(a_\nu, f)=\delta_\nu$ для всех ν и других Д. з. у f нет. Ограничения на рост f влекут за собой ограничения на Д. з. и их дефекты. Напр., мероморфная функция нулевого порядка или целая функция порядка $<1/2$ не могут иметь более одного Д. з.

Число

$$\Delta(a, f)=1-\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r, a, f)}{T(r, f)}$$

(f мероморфна в $\mathbb{C}$) наз. дефектом в смысле Валирона. Множество чисел a, для к-рых $\Delta(a, f)>0$, может иметь мощность континуума, но всегда имеет нулевую логарифмич. емкость.

См. также *Исключительное значение*, *Распределения значений теория*.

Лит.: [1] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941; [2] Хейман У., Мероморфные функции, пер. с англ., М., 1966; [3] Гольдберг А. А., Островский И. В., Распределение значений мероморфных функций, М., 1970. *Е. М. Чирка.*

ДЕФЕКТНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО оператора — ортогональное дополнение D_λ области значений $T_\lambda=\{y=(A-\lambda I)x,\ x\in D_A\}$ оператора $A_\lambda=A-\lambda I$, где A — линейный оператор, определенный на линейном многообразии D_A гильбертова пространства H, а λ — регулярное значение (регулярная точка) оператора A. При этом под регулярным значением оператора A понимается такое значение параметра λ, при к-ром уравнение $(A-\lambda I)x=y$ имеет единственное решение для любого y, а оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ ограничен, т. е. *резольвента* оператора A ограничена. При изменении λ Д. п. D_λ меняется, но его размер-

ность остается одна и та же для всех λ, принадлежащих связной компоненте открытого множества всех регулярных значений оператора A.

Если A — симметрич. оператор с плотной областью определения D_A, то его связными компонентами регулярности будут верхняя и нижняя полуплоскости. В этом случае $D_\lambda = \{x \in D_{A^*},\ A^*x = \bar{\lambda}x\}$, а дефектные числа $n_+ = \dim D_i$ и $n_- = \dim D_{-i}$, где A^* — сопряженный оператор, наз. (положительным и отрицательным) индексами дефекта оператора A. Кроме того,

$$D_{A^*} = D_A \oplus D_i \oplus D_{-i},$$

т. е. D_{A^*} есть прямая сумма D_A, D_i и D_{-i}. Таким образом, если $n_+ = n_- = 0$, то оператор A является самосопряженным; в противном случае Д. п. симметрич. оператора характеризуют степень его отклонения от самосопряженного оператора.

Д. п. играют важную роль в построении расширений симметрич. оператора до максимального оператора или до самосопряженного (гипермаксимального) оператора.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [3] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 1—2, М., 1962—66; [4] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., М., 1954.

В. И. Соболев.

ДЕФИНИЗИРУЮЩИЙ ОПЕРАТОР для последовательности $x = \{\xi_p\}$ — оператор M в пространстве последовательностей, имеющий вид

$$(Mx)_p = \sum_{-l}^{+l} m_j x_{p+j};\quad m_j = \bar{m}_{-j},$$

$$\sum_{-l}^{+l} m_j \lambda^j \leqslant 0,\quad |\lambda| = 1;$$

и переводящий последовательность x в нек-рую *позитивную последовательность.*

Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.

ДЕФИНИТНОЕ ЯДРО, определенное ядро,— ядро $K(P, Q)$ линейного интегрального *Фредгольма оператора*, удовлетворяющее соотношению

$$\int_P \int_Q K(P, Q)\, \varphi(P)\, \overline{\varphi(Q)}\, dP\, dQ \geqslant 0 \quad (\leqslant 0),$$

где P, Q — точки евклидова пространства, φ — произвольная суммируемая с квадратом функция, $\bar{\varphi}$ — комплексно сопряженная функция. В зависимости от знака неравенства ядро наз. соответственно неотрицательным (или, иногда, неотрицательно определенным) или неположительным (соответственно неположительно определенным).

Иногда неотрицательным (неположительным) наз. (непрерывное) ядро, удовлетворяющее в области интегрирования неравенству $K(P, Q) \geqslant 0 (\leqslant 0)$.

А. Б. Бакушинский.

ДЕФОРМАЦИЙ ТЕНЗОР — тензор, определяющий положение точек тела после деформации по отношению к их положению до деформации. Д. т. представляет собой симметричный тензор второго ранга

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right), \qquad (*)$$

где x_i — декартовы прямоугольные координаты точки тела до деформации, u_i — координаты вектора перемещения $\boldsymbol{u}$. В теории пластичности Д. т. разлагают на два составляющих тензора:

$$u_{ik} = u'_{ik} + u''_{ik}.$$

Тензор u'_{ik} описывает объемную деформацию и наз. сферическим тензором деформации:

$$u'_{ik} = \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}.$$

Тензор u''_{ik} описывает только изменение формы и сумма его диагональных элементов равна нулю:

$$u''_{ik} = u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}.$$

Тензор u''_{ik} наз. девиатором тензора деформации.

В случае малой деформации пренебрегают величинами 2-го порядка и Д. т. (*) определяется выражением:

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right).$$

В сферич. координатах r, θ, φ Д. т. (*) имеет вид:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r},\quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r},$$

$$u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta + \frac{u_r}{r},$$

$$2u_{\theta\varphi} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg}\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi},$$

$$2u_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta},$$

$$2u_{\varphi r} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}.$$

В цилиндрич. координатах r, φ, z Д. т. (*) имеет вид:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r},\quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r},\quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$2u_{\varphi z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z},\quad 2u_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r},$$

$$2u_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}.$$

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория упругости, 3 изд., М., 1965; [2] Физический энциклопедический словарь, т. 1, М., 1960, с. 553.

ДЕФОРМАЦИОННЫЙ РЕТРАКТ топологического пространства X — подмножество $A \subset X$, обладающее тем свойством, что существует гомотопия тождественного отображения пространства X в нек-рое отображение $X \to A$, при к-рой все точки множества A остаются неподвижными. Если при гомотопии точки из $X \setminus A$ перемещаются по $X \setminus A$, то A наз. строгим деформационным ретрактом. Д. р. пространства X имеет одинаковый с X *гомотопический тип*. См. также *Ретракт*.

Е. Г. Скляренко.

ДЕФОРМАЦИЯ — 1) Д. аналитической структуры — семейство аналитич. пространств (или связанных с ними аналитич. объектов), зависящее от параметров. Теория Д. возникла из задачи классификации всевозможных попарно не изоморфных комплексных структур на данном вещественном дифференцируемом многообразии. Основная идея, восходящая к Б. Риману (B. Riemann), состояла здесь в том, чтобы ввести аналитич. структуру на множестве всех таких структур. Уточнением этой идеи являются следующие понятия. Аналитическим семейством комплексных многообразий, параметризованным комплексным пространством S, наз. любое гладкое (т. е. локально устроенное как проекция прямого произведения с гладким слоем) аналитич. отображение $\pi : X \to S$. Если S связно, то все слои X_s, $s \in S$, отображения π диффеоморфны фиксированному слою X_o, где $o \in S$, и могут рассматриваться как семейство комплексных структур на X_o, аналитически зависящее от

параметра $s \in S$. Если семейство X содержит в качестве слоев все комплексные многообразия, диффеоморфные X_o, причем все слои попарно не изоморфны, то S наз. *пространством модулей* вещественного многообразия X_o. Можно определить также пространство модулей для многообразий, принадлежащих определенному классу. Проблема построения пространства модулей (или *проблема модулей*) была решена вначале для компактных римановых поверхностей (см. *Римановых поверхностей конформные классы*). Результаты такого рода, хотя и неполные, получены и для компактных многообразий комплексной размерности 2 (см. *Аналитическая поверхность*).

Для многообразий бо́льших размерностей исследование проблемы модулей встречает значительные трудности. В связи с этим К. Кодаира и Д. Спенсер [6], [7], [8] предприняли локальное изучение проблемы модулей, заложив тем самым основы теории Д. комплексных многообразий и аналитич. расслоений. *Аналитической деформацией* комплексного многообразия X_o наз. аналитич. семейство $\pi : X \to S$, причем S — комплексное пространство с отмеченной точкой o, слой над к-рой совпадает с X_o. Деформация $X = X_o \times S$ наз. тривиальной. Д. $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to S$ многообразия X_o наз. изоморфной Д. $\pi : X \to S$, если существует аналитич. изоморфизм $\varphi : \tilde{X} \to X$, тождественный на X_o и такой, что $\pi \circ \varphi = \tilde{\pi}$. Если $\pi : X \to S$ — аналитич. Д., то всякое аналитич. отображение $f : S' \to S$, где o' — пространство с отмеченной точкой o' и $f(o') = o$, определяет при помощи *замены базы* Д. $X \times_S S' \to S'$ — *обратный образ* данной Д. при отображении f. Деформация $\pi : X \to S$ наз. *локально полной* (в точке o), если любая аналитич. Д. $\pi' : X' \to S'$ многообразия X_o изоморфна в нек-рой окрестности отмеченной точки ее обратному образу при нек-ром локальном аналитич. отображении $f : S' \to S$. Если при этом $df_{o'}$ определено однозначно, то Д. наз. версальной в точке o, а если однозначно определен росток отображения f,— то *универсальной*. Важную роль в теории играет *линейное отображение* $T_o(S) \to H^1(X_o, \Theta)$, где $\Theta = \Theta_{X_o}$ — пучок ростков голоморфных векторных полей на X_o, к-рое сопоставляется аналитич. Д. и наз. соответствующей *инфинитезимальной деформацией*.

Основная теорема локальной теории Д., доказанная М. Кураниси [9], утверждает, что для каждого компактного комплексного многообразия X_o существует версальная в точке o Д., параметризованная (не обязательно гладким) аналитич. подпространством S в окрестности нуля пространства $H^1(X_o, \Theta)$. При этом S — слой в точке o нек-рого локального аналитич. отображения $\gamma : H^1(X_o, \Theta) \to H^2(X_o, \Theta)$, имеющего вид $\gamma(\xi) = [\xi, \xi] + \ldots$, где $[,]$ — операция в градуированной алгебре Ли $H^*(X_o, \Theta)$, индуцированная скобкой Ли в пучке Θ, а точки означают члены порядка $\geqslant 3$. Если $H^1(X_o, \Theta) = 0$, то многообразие X_o является *жестким*, т. е. любая его Д. локально тривиальна (*теорема жесткости* Фрёлихера — Нейенхёйса). Если $H^2(X, \Theta) = 0$, то S — окрестность нуля в $H^1(X_o, \Theta)$. Касательное пространство $T_o(S)$ всегда совпадает с $H^1(X_o, \Theta)$. Д. является полной в точке o тогда и только тогда, когда соответствующая инфинитезимальная Д. сюръективна, а версальность равносильна биективности инфинитезимальной Д. Если $\dim H^0(X_s, \Theta_{X_s})$, $s \in S$, постоянна в *окрестности нуля*, то деформация Кураниси является универсальной.

Локальная теория Д. компактных комплексных многообразий обобщается на случай компактных комплексных пространств. При этом вместо гладкости отображения $\pi : X \to S$ и компактности слоя требуют, чтобы π было *плоским* и *собственным отображением*. Здесь

также можно доказать существование версальной в точке o Д. (см. [3], [5], [11]).

Изучаются также Д. ростков аналитич. пространств (или, что равносильно, аналитич. алгебр). Справедлива теорема о существовании версальной Д. для изолированной особой точки комплексного пространства [4].

Наряду с теорией Д. комплексных пространств существуют теории Д. различных «аналитических объектов» — аналитич. расслоений, подпространств, отображений, классов когомологий, аналитич. пространств с дополнительной структурой (напр., с поляризацией) и др. Основные определения и проблематика этих теорий аналогичны описанным выше. Результаты, полученные для главных аналитич. расслоений, также аналогичны перечисленным выше. В частности, для любого *главного аналитического расслоения* E с компактной базой X и комплексной группой Ли G в качестве структурной группы существует версальная в точке o Д. расслоения E, параметризованная аналитич. подпространством в окрестности нуля пространства $H^1(X, \mathcal{O}_{\mathrm{Ad}E})$, где $\mathcal{O}_{\mathrm{Ad}E}$ — пучок ростков голоморфных сечений векторного расслоения над X, ассоциированного с E при помощи присоединенного представления [1]. Если X — компактная риманова поверхность, а G — редуктивная алгебраич. группа, то можно построить пространство модулей для стабильных главных аналитич. расслоений. В теории Д. подпространств, напротив, получены весьма общие результаты глобального характера. А именно, если X — произвольное комплексное пространство ограниченной размерности, то построено [2] плоское аналитич. семейство компактных аналитич. подпространств в X (т. е. аналитич. подпространство $Y \subset X \times S$, где S — комплексное пространство и проекция $Y \to S$ есть собственное плоское отображение), *являющееся универсальной (в глобальном смысле)* Д. для любого компактного аналитич. подпространства в X. В частности, S является пространством модулей для рассматриваемой задачи. Аналогичная проблема модулей решена в относительном случае, а также для компактных аналитич. циклов заданного комплексного пространства. Из решения проблемы модулей для компактных подпространств следует решение проблемы модулей и для аналитич. отображений заданного компактного комплексного пространства в другое заданное комплексное пространство.

Существуют попытки унификации упомянутых выше теорий Д. С каждой из этих теорий можно связать контравариантный функтор D из категории аналитич. пространств (или ростков аналитич. пространств) в категорию множеств. Напр., в теории локальных Д. комплексного *пространства* X_o *множество* $D(S)$ состоит из классов локально изоморфных Д. пространства X_o, параметризованных ростком аналитич. пространства S. Если фиксировать S и элемент $\delta \in D(S)$, то возникает морфизм функторов $\mathrm{Mor}(\cdot, S) \to D$. Сюръективность этого морфизма (пара (S, δ) наз. в этом случае п о л н о й) соответствует свойству полноты Д. δ, а биективность — свойству ее универсальности. Проблема модулей связана, таким образом, с вопросом о представимости функтора D. В связи с этим было предпринято изучение ковариантных функторов из категории артиновых колец в категорию множеств, удовлетворяющих нек-рым естественным условиям [12]. Существование полной пары доказывается, однако, лишь в категории формальных алгебр, что соответствует существованию формальной полной Д. (см. *Деформация* алгебраического многообразия).

Обобщением теории Д. комплексных структур на многообразии является теория Д. *псевдогрупповых структур*, в к-рой рассматриваются семейства псевдогрупповых структур, гладко зависящие от параметра,

принимающего значения в вещественном аналитич. пространстве. В частности, для псевдогрупповой структуры на компактном гладком многообразии, соответствующей эллиптич. транзитивной псевдогруппе преобразований, доказано существование версального ростка деформации [10].

Лит.: [1] Донин И. Ф., «Матем. сб.», 1974, т. 94, № 3, с. 430—43; [2] Douady A., «Ann. Inst. Fourier», 1966, t. 16, p. 1—95; [3] его же, «Ann. sci. Ecole norm. sup.», 1974, т. 7, № 4, p. 569—602; [4] Grauert H., «Invent. math.», 1972, Bd 15, № 3, S. 171—98; [5] его же, там же, 1974, Bd 25, № 2, S. 107—42; [6] Kodaira K., Spencer D. C., «Ann. Math.», 1958, v. 67, № 2, p. 328—401; [7] их же, там же, 1958, v. 67, № 3, p. 403—66; [8] их же, там же, 1960, v. 71, № 1, p. 43—76; [9] Kuranishi M., в кн.: Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Minneapolis. 1964, N. Y.—B., 1965, p. 142—54; [10] Moolgavkar S. H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1975, v. 212, № 485, p. 173—97; [11] Пламодов В. П., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, № 3, с. 129—194; [12] Шлезингер М., «Математика», 1971, т. 15, № 4, с. 115—29. *А. Л. Онищик, Д. А. Пономарев.*

2) Д. алгебраического многообразия — включение алгебраич. многообразия в семейство алгебраич. многообразий. Теория Д. алгебраич. многообразий и схем представляет собой алгебраич. аналог теории Д. аналитич. структур. Ее основными вопросами являются следующие:

Существование подъема. Дана схема X_0 над полем k, схема S, точка $s_0 \in S$ с полем вычетов $k(s_0)=k$. Существует ли плоская S-схема X, для к-рой слой X_{s_0} над точкой s_0 изоморфен X_0? (S-схема X наз. деформацией, или подъемом, схемы X_0 над S).

Проблема универсальности. Существует ли версальная (соответственно универсальная) Д. схемы X_0, т. е. такая Д. M над схемой X_0, что для любой другой Д. $X \to S$ найдется (соответственно единственный) морфизм $S \to M$, для которого $X \cong M \times_M S$?

Каждая Д. $X \to S$ схемы X_0 с помощью операции формального пополнения вдоль слоя X_{s_0} определяет формальную деформацию $\varkappa$ над пополнением локального кольца $\mathcal{O}_{S, s_0}$ схемы S в точке s_0, т. е. плоскую формальную схему над $\hat{\mathcal{O}}_{S, s_0}$ с топологич. пространством X_0. Формальные аналоги перечисленных выше вопросов формулируются следующим образом:

Существование формальной Д. Дано полное локальное кольцо Λ с полем вычетов k. Существует ли плоская формальная схема над Λ с топологическим пространством X_0?

Существование формальной схемы модулей. Существует ли формальная версальная (соответственно универсальная) Д., т. е. плоская формальная схема $p : \varkappa \to \mathcal{O}$ над полным локальным кольцом $\mathcal{O}$ с полем вычетов k такая, что для любой формальной Д. $\varkappa' \to \operatorname{Spec}\Lambda$ имеется (соответственно единственный) гомоморфизм колец $\mathcal{O} \to \Lambda$, для которого $\varkappa' \simeq \varkappa \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda$?

Универсальная формальная Д. гладкого многообразия представляет собой алгебраич. аналог локального пространства модулей в теории Д. аналитич. структур.

Если $S=\operatorname{Spec} R$, где R — локальное артиново (соответственно полное) кольцо с полем вычетов k, то Д. X_0 над S наз. инфинитезимальной (соответственно эффективной формальной). В случае, когда R — полное локальное кольцо характеристики нуль (напр., кольцо *Витта векторов*), эффективная формальная Д. X_0 наз. подъемом X_0 в характеристику нуль.

Если X_0 — гладкая k-схема и $H^2(X_0, T_{X_0})=0$, где T_{X_0} — касательный пучок на X_0, то для любого артинова (соответственно полного) локального кольца существует инфинитезимальная (соответственно формаль-

ная) Д. X_0. При этом, если $H^1(X_0,\ T_{X_0})=0$, то такая Д. единственна с точностью до изоморфизма (см. [4]). Аналогичные утверждения для необязательно гладких схем даются в терминах кокасательного комплекса (см. [5], [6]). *Вопрос о существовании* эффективной формальной Д. изучается с помощью рассмотрения функтора D_{X_0} из категории C_k артиновых локальных колец с полем вычетов k в категорию множеств, к-рый сопоставляет каждому объекту R из C_k множество всех инфинитезимальных Д. X_0 над R. Универсальная формальная Д. X_0 существует в том и только в том случае, когда функтор является пропредставимым функтором. При этом пропредставляющий объект — полное локальное кольцо M_{X_0} с полем вычетов k — наз. ф о р м а л ь н о й с х е м о й модулей k-схемы X_0. Формальная версальная Д. $\tilde{\rho}:\tilde{\varkappa}\to\tilde{M}_{X_0}$ существует, если X_0 собственна над k или X_0 есть аффинная схема конечного типа над k с изолированными особыми точками (см. [2], [6]). Версальная формальная Д. является универсальной, если для любого сюръективного гомоморфизма $R'\to R$ локальных артиновых колец и Д. $X'\to R'$ из $D_{X_0}(R')$ естественное отображение групп автоморфизмов

$$\mathrm{Aut}_{R'}(X'\mid X_0)\longrightarrow \mathrm{Aut}_R(X'_{R'}\otimes R\mid X_0)$$

является сюръективным. Это условие выполняется, напр., если X_0 — гладкая схема и $H^0(X_0,\ T_{X_0})=0$. При этом, если $H^2(X_0,\ T_{X_0})=0$, то формальная схема модулей M_{X_0} является полным регулярным локальным кольцом, изоморфным кольцу $k[[t_1,\ldots,\ t_m]]$ формальных степенных рядов от m переменных. Число m равно в этом случае $\dim_k H^1(X_0,\ T_{X_0})$ и наз. ч и с л о м л о к а л ь н ы х м о д у л е й схемы X_0. В общем случае $\dim_k H^1(X_0,\ T_{X_0})$ равна размерности касательного пространства к M_{X_0} и $\tilde{M}_{X_0}$, т. е. размерности $\dim_k m/m^2$, где m — максимальный идеал соответствующего локального кольца, а

$$\dim_k H^1(X_0,\ T_{X_0})-\dim M_{X_0}\leqslant \dim_k H^2(X_0,\ T_{X_0}).$$

Наличие нильпотентных элементов в формальной схеме модулей представляет довольно частое явление.

Если версальная (соответственно универсальная) формальная Д. $\varkappa\to M_{X_0}$ а л г е б р а и з у е м а, т. е. существует плоская схема над M_{X_0}, формальное пополнение которой вдоль замкнутого слоя изоморфно $\varkappa$, то соответствующая алгебраизация наз. л о к а л ь н о й в е р с а л ь н о й (соответственно у н и в е р с а л ь н о й) Д. k-схемы X_0. Если X_0 проективна и $H^2(X_0, T_{X_0})=0$,то алгебраизация существует. Напр., для полной гладкой кривой рода $g>1$ существует локальная универсальная Д. над кольцом $k\,[[t_1,\ldots,\ t_{3g-3}]]$. В общем случае, для каждой поляризации α многообразия X_0 существует максимальная замкнутая подсхема в формальной схеме модулей $M_{X_0,\,\alpha}\subset M_{X_0}$ такая, что $p^{-1}(M_{X_0,\,\alpha})$ алгебраизуема. Коразмерность $M_{X_0,\,\alpha}$ в M_{X_0} не превышает $\dim_k H^2(X_0,\ \mathcal{O}_{X_0})$. Напр., если X_0 — алгебраическая *К3-поверхность*, M_{X_0} регулярна размерности 20, а для любой поляризации α подсхема $M_{X_0,\,\alpha}$ регулярна размерности 19.

Теорема Артина об аппроксимации применяется для алгебраизации формальной схемы модулей. Существует схема S конечного типа над k и точка $s_0\in S$ с полем вычетов k такая, что пополнение $\hat{\mathcal{O}}_{S,\,s_0}\simeq\tilde{M}_{X_0}$, и существует Д. X_0 над S, индуцирующая версальную локальную Д. $\tilde{\rho}:\tilde{\varkappa}\to\tilde{M}_{X_0}$. Схема S определена однозначно с точностью до локального изоморфизма в этальной топологии [1]. Относительно Д. особых многообразий и особых точек см. *Особая точка* алгебраического многообразия. Относительно Д. групповых схем см. *Групповая схема*.

Лит.: [1] Артин М., «Математика», 1970, т. 14, № 4, с. 3—47; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, с. 77—170; [3] Шлезингер М., «Математика», 1971, т. 15, № 4, с. 115—29; [4] Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1), B.— Hdlb.—N. Y., 1971; [5] Rim D. S., в кн.: Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA71), B.—Hdlb.—N. Y., 1972, p. 32—132; [6] Mumford D., в кн.: Zariski O., Algebraic surfaces, 2 ed., B.—Hdlb.—N. Y., 1971, p. 118—28. *И. В. Долгачев.*

3) Д. алгебры — семейство алгебр, зависящее от параметров. Всевозможные билинейные операции или алгебры $\mathfrak{A}$ в пространстве V над полем k образуют векторное пространство $A(V)$. Два элемента этого пространства представляют изоморфные алгебры тогда и только тогда, когда они лежат на одной орбите линейной группы $\mathrm{GL}(V)$, естественным образом действующей в $A(V)$. Теория Д. алгебр позволяет исследовать локальное строение фактормножества $A(V)/\mathrm{GL}(V)$, т. е. множества классов изоморфных алгебр в пространстве V, прямое описание к-рого связано с большими трудностями. Если выделен нек-рый класс алгебр $K \subseteq A(V)$, то можно рассматривать Д. алгебр из класса K, не выводящие за пределы этого класса. В частности, рассматриваются Д. ассоциативных, ассоциативно-коммутативных алгебр и алгебр Ли, образующие классы $K=\mathrm{Ass}(V)$, $K=\mathrm{Comm}(V)$, $K=\mathrm{Lie}(V)$, соответственно, инвариантные относительно действия группы $\mathrm{GL}(V)$. Если $\dim V=n$, то эти классы являются алгебраич. многообразиями в n^3-мерном пространстве $A(V)$.

Теория Д. алгебр в конечномерном пространстве V над полем $k=\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ действительных или комплексных чисел во многом аналогична теории *деформаций* аналитич. структур. Каждая конечномерная алгебра $\mathfrak{A}$ над $k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ обладает полной Д., параметризованной ростком аналитич. подпространства в нуле пространства $H^2(\mathfrak{A}, V)$ [если $H^3(\mathfrak{A}, V)=0$, то это подпространство совпадает с $H^2(\mathfrak{A}, V)$]. Из этого основного результата непосредственно следует теорема жесткости: если $H^2(\mathfrak{A}, V)=0$, то алгебра $\mathfrak{A}$ является жесткой в K, т. е. орбита элемента $\mathfrak{A}$ относительно $\mathrm{GL}(V)$ открыта в K. Напр., жесткими в классе алгебр Ли являются полупростые алгебры Ли, а также их подалгебры Бореля. Утверждение, обратное к теореме жесткости, неверно. Аналогичные утверждения справедливы для конечномерных алгебр над произвольным алгебраически замкнутым полем k. Например, если $H^2(G, V)=0$, то орбита алгебры $\mathfrak{A}$ в $\tilde{K}$ открыта по Зарискому.

Аналогично может быть развита теория Д. гомоморфизмов одной конечномерной алгебры в другую. На самом деле, описанные выше теории включаются в общую схему, использующую аппарат градуированных алгебр Ли. Сходные результаты получены также для Д. подалгебр.

Наряду с указанной выше теорией существует теория формальных Д. алгебр и их гомоморфизмов над произвольным полем k. Формальной Д. алгебры, заданной в векторном пространстве V над k, наз. алгебра на пространстве $V \otimes k((t))$ над полем $k((t))$ формальных степенных рядов над k с операцией $\circ$, к-рая полностью определяется условием

$$a \circ b = ab + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(a, b)\, t^i, \quad a, b \in V,$$

где $\varphi_i \in A(V)$. Требуя, чтобы Д. принадлежала данному классу алгебр, можно говорить о формальных Д. ассоциативных, ассоциативно-коммутативных, лиевых и других алгебр.

Две формальные Д. алгебры $\mathfrak{A}$ с умножениями $\times$ и $\circ$ соответственно наз. эквивалентными, если существует линейный автоморфизм Φ пространства $V \otimes k((t))$ со свойством

$$\Phi(a) = a + \sum_{i=1}^{\infty} t^i \varphi_i(a), \quad a \in V,$$

где $\varphi_i : V \to V$ — линейное отображение такое, что

$$a \circ b = \Phi^{-1}(\Phi(a) \times \Phi(b)).$$

Д., эквивалентная алгебре $\mathfrak{A}$ с исходным умножением, наз. тривиальной. Алгебра, не имеющая нетривиальных формальных Д. в данном классе алгебр, наз. формально жесткой в этом классе. Напр., свободная алгебра в классе всех алгебр будет формально жесткой. В классах $\mathrm{Ass}(V)$, $\mathrm{Comm}(V)$, $\mathrm{Lie}(V)$ достаточным условием формальной жесткости алгебры $\mathfrak{A}$ является равенство $H^2(\mathfrak{A}, V)=0$. В классе $\mathrm{Ass}(V)$ это условие является также и необходимым [3].

В случаях $k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ формальные Д. алгебр служат аппаратом для изучения аналитич. Д.

Важной областью приложений и источником примеров Д. алгебр является теоретич. физика, где, в частности, возник следующий класс Д. алгебр (см. [4], [5]). Стягиванием конечномерной алгебры $\mathfrak{A}$ над $k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ наз. непрерывная кривая $\mathfrak{A}_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, в пространстве $A(V)$ такая, что $\mathfrak{A}_t = \mathfrak{A}$ при $0 \leqslant t < 1$. Алгебра $\mathfrak{A}_1$, полученная из $\mathfrak{A}$ в результате стягивания, наз. предельной и может не быть изоморфной алгебре $\mathfrak{A}$. Напр., любую алгебру можно стянуть в алгебру с нулевым умножением; любую полупростую алгебру Ли можно стянуть в неабелеву неполупростую.

Лит.: [1] Nijenhuis A., Richardson R.W.Jr., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1966, v. 72, № 1, p. 1—29, 1967, v. 73, № 1, p. 175—79; [2] Gerstenhaber M., «Ann. Math.», 1964, v. 79, p. 59—103; [3] Knudson D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 140, p. 55—70; [4] Inönü E., Wigner E. P., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1953, v. 39, № 6, p. 510—24; [5] Hermann R., Lie groups for physicists, N. Y.— Amsterd., 1966. *А. А. Бояркин, А. В. Михалев, А. Л. Онищик.*

4) Д. подмножества A пространства X — *гомотопия*:

$$D: A \times I \longrightarrow X,$$

для к-рой $D(a, 0)=a$ при $a \in A$. Если, более того, множество $D(A \times I)$ принадлежит нек-рому подпространству X' пространства X, то D наз. Д. A в X', а A наз. деформируемым в X' в пространстве X. Пространство X наз. деформируемым в подпространство X', если оно деформируемо по себе в X'. В частности, X стягиваемо тогда и только тогда, когда оно деформируемо в одну из своих точек. Пространство X деформируемо в подпространство X' тогда и только тогда, когда для вложения $i : X' \to X$ существует правое гомотопически обратное отображение $r : X \to X'$, т. е. $i \circ r \sim 1$. Понятие Д. всего пространства по себе на подпространство родственно понятию слабой *ретракции*. *М. И. Войцеховский.*

ДЕЦИЛЬ — значение x, при котором непрерывная строго монотонная функция распределения $F(x)$ принимает для $j=1, 2, \ldots, 9$ значения, равные $j/10$. Когда Д. существуют, они дают хорошее представление о форме кривой распределения. Расстояние между девятой и первой Д. наз. интердецильной широтой, она дает представление о рассеянии распределения. Д.— частный случай *квантили*. *Н. М. Халфина.*

ДЖЕКОБСОНА КОЛЬЦО — коммутативное кольцо с единицей, любой простой идеал к-рого является пересечением максимальных идеалов, его содержащих, т. е. кольцо, любое целостное факторкольцо к-рого имеет нулевой *Джекобсона радикал*. Напр., любое артиново кольцо, кольцо целых чисел (вообще, любое дедекиндово кольцо, не являющееся полулокальным) или абсолютно плоское кольцо являются Д. к. Напротив, локальное не артиново кольцо не будет Д. к.

Если A есть Д. к., а B — целая A-алгебра или A-алгебра конечного типа, то B есть Д. к.; в частности, факторкольцо Д. к. есть Д. к. Кольцо многочленов от конечного числа переменных над полем K является Д. к.; в случае бесконечного числа переменных ответ

зависит от соотношения числа переменных и мощности поля K. Кольцо A является Д. к., когда пространство максимальных идеалов кольца A квазигомеоморфно спектру $\mathrm{Spec}(A)$; это определение приводит к понятию схемы Джекобсона.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

В. И. Данилов.

ДЖЕКОБСОНА РАДИКАЛ кольца A — идеал $J(A)$ ассоциативного кольца A, удовлетворяющий следующим двум условиям: 1) $J(A)$ — наибольший квазирегулярный идеал в A (кольцо R наз. квазирегулярным, если для любого его элемента a разрешимо уравнение $a+x+ax=0$); 2) в факторкольце $\overline{A}=A/J(A)$ нет квазирегулярных идеалов, кроме нулевого. Д. р. был введен и детально исследован Н. Джекобсоном (N. Jacobson) в 1945 (см. [1]).

Д. р. всегда существует и может быть охарактеризован весьма многими способами: $J(A)$ есть пересечение ядер всех неприводимых представлений кольца A, пересечение всех модулярных максимальных правых идеалов, пересечение всех модулярных максимальных левых идеалов; он содержит все квазирегулярные односторонние идеалы, все односторонние нильидеалы и т. д. Если I — идеал A, то $J(I)=I\bigcap J(A)$, если A_n — кольцо всех матриц порядка n над A, то

$$J(A_n)=(J(A))_n.$$

Если на ассоциативном кольце A ввести композицию $\circ$:

$$a\circ b=a+b+ab,$$

то в полугруппе $<A, \circ>$ радикал $J(A)$ относительно композиции $\circ$ будет подгруппой.

Над квазирегулярным (т. е. совпадающим со своим Д. р.) ассоциативным кольцом не существует ненулевых неприводимых конечно порожденных модулей; однако простые ассоциативные квазирегулярные кольца существуют. Для того чтобы в ассоциативном кольце A Д. р. был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы A было подпрямой суммой примитивных колец.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961.

К. А. Жевлаков.

ДЖЕКСОНА НЕРАВЕНСТВО — неравенство, дающее оценку скорости убывания *наилучшего приближения* функции тригонометрич. полиномами или алгебраич. многочленами в зависимости от ее дифференциально-разностных свойств. Пусть $f(x)$ — непрерывная на всей оси 2π-периодич. функция, $E_n(f)$ — наилучшее равномерное приближение $f(x)$ тригонометрич. полиномами $T_n(x)$ порядка n, т. е.

$$E_n(f)=\inf_{T_n}\max_x |f(x)-T_n(x)|,$$

и

$$\omega(f;\ \delta)=\max_{|t_1-t_2|\leqslant\delta}|f(t_1)-f(t_2)|$$

— модуль непрерывности функции $f(x)$. Д. Джексон [1] показал, что

$$E_n(f)\leqslant C\omega\left(f;\ \frac{1}{n}\right) \qquad (*)$$

(C — абсолютная константа), а если $f(x)$ имеет r-ю непрерывную производную $f^{(r)}(x)$, $r\geqslant 1$, то

$$E_n(f)\leqslant\frac{C_r}{n^r}\,\omega\left(f^{(r)};\ \frac{1}{n}\right),$$

где постоянная C_r зависит только от r. В случае

$$\omega(f;\ t)\leqslant Kt^{\alpha},\quad 0<\alpha<1,$$

неравенство $(*)$ было независимо получено С. Н. Бернштейном [3].

Если $f(x)$ непрерывна или r раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, $r=1,2\ldots$, и $E_n(f;\ a,\ b)$ —

наилучшее равномерное приближение функции $f(x)$ на $[a, b]$ алгебраич. многочленами степени n, то для $n>r$ имеет место соотношение ($f^0(x)=f(x)$)

$$E_n(f;\ a,\ b)\leqslant\frac{A_r\,(b-a)^r}{n^r}\,\omega\left(f^{(r)};\ \frac{b-a}{n}\right),$$

где постоянная A_r зависит только от r.

Д. н. известны также как теоремы Джексона, или прямые теоремы теории приближения функций. Они обобщались в различных направлениях: приближение в интегральной метрике, приближение целыми функциями конечной степени, оценка приближения через модуль гладкости k-го порядка, функции многих переменных. В ряде случаев в Д. н. найдены точные значения констант.

Лит.: [1] Jackson D., Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen, Dissertation, Gött., 1911; [2] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969; [3] Бернштейн С. Н., «Сооб. Харьк. матем. общества», сер. 2, 1912, т. 13, с. 49—194; [4] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

ДЖЕКСОНА СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ, Джексона оператор,— интеграл вида

$$U_n(f,\ x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x+u)\,K_n(u)\,du,$$

в к-ром выражение

$$K_n(u)=\frac{3}{2n(2n^2+1)}\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^n,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

называют ядром Джексона; впервые был применен Д. Джексоном [1] для оценки наилучших приближений функции $f(x)$ через ее модуль непрерывности $\omega\left(f,\ \frac{1}{n}\right)$ или через модуль непрерывности ее производной порядка $k\geqslant 1$. Д. с. и.— положительный оператор, являющийся тригонометрич. полиномом порядка $2n-2$, его ядро $K_n(u)$ представляется в форме

$$K_n(u)=A+\rho_1^{2n-2}\cos t+\ldots+\rho_{2n-2}^{2n-2}\cos(2n-2)\,t,$$

где $A=\frac{1}{2}$ и $\rho_1^{2n-2}=1-\frac{3}{2n^2}$, $n=1,\ 2,\ldots$. Имеет место оценка

$$|U_n(f,\ x)-f(x)|\leqslant 6\omega\left(f,\ \frac{1}{n}\right).$$

Лит.: [1] Jackson D., The theory of approximation, N. Y., 1930; [2] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М., 1949, с. 116—22.

А. В. Ефимов.

ДЖЕКСОНА ТЕОРЕМА — теорема теории приближения функций, дающая оценку сверху для наилучшего приближения функции многочленами (или периодической функции тригонометрич. полиномами). Д. т. дает возможность исследовать свойства наилучших приближений в зависимости от дифференциальных свойств функции. См. *Джексона неравенство.*

В. И. Бердышев.

ДЖЕНКИНСА ТЕОРЕМА, общая теорема о коэффициентах,— теорема теории однолистных конформных отображений семейств областей на римановой поверхности, содержащая неравенство для коэффициентов отображающих функций, а также условия на функции, для к-рых это неравенство обращается в равенство. Д. т. является точным выражением и развитием (высказанного без доказательства) принципа Тейхмюллера (см. [1], с. 83), согласно к-рому решение нек-рого класса экстремальных проблем для однолистных функций определяется *квадратичными дифференциалами* соответствующего вида. Получена Дж. Дженкинсом (1954, см. [1] — [4]).

У с л о в и я Д. т. Пусть $\mathcal{R}$ — конечная ориентированная риманова поверхность, $Q(z)dz^2$ — положительный квадратичный дифференциал на $\mathcal{R}$, имеющий хотя бы один полюс порядка $\geqslant 2$, и пусть $P_1, \ldots, P_r$ — все полюсы порядка 2, а $P_{r+1}, \ldots, P_p$ — все полюсы порядка >2. Пусть открытое всюду плотное на $\mathcal{R}$ множество Δ представляет собой дополнение к объединению конечного числа замыканий траекторий и замыканий дуг траекторий, причем $P_j \in \Delta$, $j=1, \ldots, p$. Пусть функция $f_0(P)$ отображает Δ конформно и однолистно в $\mathcal{R}$ и пусть существует гомотопия

$$f_t(P): (\Delta \times [0,1]) \to \mathcal{R}$$

отображения $f_0(P)$ в тождественное отображение $f_1(P) \equiv P$, оставляющая неподвижными все полюсы из Δ и удовлетворяющая условию $f_t(P) \neq R$ для каждого полюса $R \in \mathcal{R}$, $t \in [0, 1]$, и всякой точки $P \neq R$. Пусть $z_j = z_j(P)$ — такой локальный параметр для полюса P_j, что $z_j(P_j) = \infty$, $j=1, \ldots, p$. Пусть, при $j=1, \ldots, p$ в окрестности полюса P_j,

$$Q(z_j) = \begin{cases} \alpha^{(j)} z_j^{-2} + \text{более высокие степени } z_j^{-1}, & \text{если } j \leqslant r; \\ \alpha^{(j)} \left[z_j^{m_j - 4} + \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s^{(j)} z_j^{m_j - s - 4} \right], & \text{если } j > r; \end{cases}$$

$$f_0(z_j) = \begin{cases} a^{(j)} z_j + \text{неположительные степени } z_j, & \text{если } j \leqslant r; \\ z_j + \sum_{s=n_j}^{\infty} a_s^{(j)} z_j^{-s}, & \text{если } j > r, \end{cases}$$

где n_j — целая часть числа $\frac{1}{2}(m_j - 3)$. Пусть

$$d(P_j) = \lim_{P \to P_j} \left(\operatorname{Arg} z_j [f_t(P)] \Big|_{t=0}^{t=1} \right), \quad j = 1, \ldots, p,$$

и пусть $d(P_j) = 0$ для всех $j > r$, для которых P_j лежит на границе полосообразной области относительно $Q(z)dz^2$. Пусть, наконец,

$$T_j = \alpha^{(j)} \left[a_{m_j - 3}^{(j)} + \sum_{s=1}^{n_j} \beta_s^{(j)} a_{m_j - s - 3}^{(j)} \right] + \begin{cases} 0, & \text{если } m_j \text{ нечетно}; \\ \alpha^{(j)} \left(\frac{1}{4} m_j - 1 \right) \left(a_{n_j}^{(j)} \right)^2, & \text{если } m_j \text{ четно}. \end{cases}$$

У т в е р ж д е н и е Д. т. При этих условиях

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{r} \alpha^{(j)} \ln a^{(j)} + \sum_{j=r+1}^{p} \alpha^{(j)} T_j \right\} \leqslant 0, \qquad (*)$$

где $\ln a^{(j)} = \ln |a^{(j)}| - i d(P_j)$, $j \leqslant r$.

Д. т. д л я с л у ч а я р а в е н с т в а. Если в $(*)$ имеет место знак равенства, то: а) в каждой области $\Delta_l \subset \Delta$ отображение f_0 является изометрией в Q-метрике $|d\zeta| = |Q(z)|^{1/2} |dz|$, каждая траектория $Q(z)dz^2$ в Δ переходит в траекторию, и множество $f_0(\Delta)$ всюду плотно в $\mathcal{R}$; б) для того чтобы f_0 было тождественным отображением в нек-рой области $\Delta_l \subset \Delta$, достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих дополнительных условий:

1) в Δ_l имеется такой полюс P_j, $j > r$, порядка m_j, что $a_s^{(j)} = 0$ для $s < \min\{n_j + 1, m_j - 3\}$;

2) в Δ_l имеется полюс P_j, для к-рого $j \leqslant r$ и $a^{(j)} = 1$;

3) в Δ_l имеется точка траектории, оканчивающейся в простом полюсе.

Если в $(*)$ имеет место равенство и если $|a^{(j)}| \neq 1$ при нек-ром $j \leqslant r$, то $\mathcal{R}$ конформно эквивалентно сфере, а $Q(z)dz^2$ не имеет нулей и простых полюсов, и $r = p = 2$. Если, к тому же, Δ есть область, то отображение f_0 конформно эквивалентно линейному преобразованию, неподвижными точками к-рого служат образы обоих полюсов.

Экстремальной метрики метод, лежащий в основе доказательства Д. т., был с надлежащими модифика-

циями использован Дж. Дженкинсом также для получения ряда других результатов, в частности так наз. специальной теоремы о коэффициентах (см. [4]). Дополнение и развитие Д. т. см. в [5].

Лит.: [1] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [2] Jenkins J. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1960, v. 95, № 3, p. 387—407; [3] его же, «Bull. Amer. Math. Soc.», 1962, v. 68, № 1, p. 1—9; [4] его же, «Ill. J. Math.», 1964, v. 8, № 1, p. 80—99; [5] Тамразов П. М., «Матем. сб.», 1967, т. 72, № 1, с. 59—71.

П. М. Тамразов.

ДЖЕТ — см. *Струя.*

ДЖИНИ СРЕДНЯЯ РАЗНОСТЬ — величина, характеризующая разброс значений случайной величины X. Введена К. Джини (C. Gini, 1912). Д. с. р. определяется по формуле

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x-y|\, dF(x)\, dF(y),$$

где $F(\cdot)$ — функция распределения случайной величины. Рассматривают также коэффициент рассеяния Джини

$$G = \frac{\Delta}{2\mu},$$

где μ — математич. ожидание случайной величины X.

Лит.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., *Теория распределений*, пер. с англ., М., 1966.

К. П. Латышев.

ДЖОЙН — см. *Соединение.*

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ, ζ-функция, — 1) Д.-ф. в теории чисел — класс аналитич. функций комплексного переменного, состоящий из ζ-функции Римана, ее обобщений и аналогов. Д.-ф. и их обобщения в виде L-функций (см. *Дирихле L-функции*) лежат в основе современной аналитич. теории чисел. Кроме ζ-функции Римана выделяются обобщенная Д.-ф. $\zeta(s, a)$, дзета-функция Дедекинда, конгруэнц Д.-ф. и др.

Дзета-функция Римана определяется рядом Дирихле

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

абсолютно и равномерно сходящимся в любой конечной области комплексной s-плоскости, для к-рой $\sigma \geqslant 1+\delta$, $\delta > 0$. При $\sigma > 1$ справедливо представление в виде произведения Эйлера

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{2}$$

где p пробегает все простые числа.

Тождественность ряда (1) и произведения (2) представляет собой одно из основных свойств функции $\zeta(s)$. Оно позволяет получить многочисленные соотношения, связывающие $\zeta(s)$ с важнейшими теоретико-числовыми функциями. Так, при $\sigma > 1$

$$\ln \zeta(s) = s \int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}\, dx,$$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad \zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s},$$

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s}, \quad \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s},$$

где $\pi(x)$ — число простых чисел $\leqslant x$, $\Lambda(n)$ — *Мангольдта функция*, $\mu(n)$ — *Мёбиуса функция*, $\tau(n)$ — число делителей числа n, $\nu(n)$ — число простых делителей числа n, $\lambda(n)$ — *Лиувилля функция*. Отсюда та исключительная роль, к-рую играет $\zeta(s)$ в теории чисел. Как функция действительного переменного, $\zeta(s)$ была введена в 1737 Л. Эйлером (L. Euler, см. [1]), к-рый указал и ее разложение в произведение (2). Затем эта функция рассматривалась П. Дирихле (P. Dirichlet)

и, особенно успешно, П. Л. Чебышевым (см. [2]) в связи с изучением закона распределения простых чисел. Однако наиболее глубокие свойства функции $\zeta(s)$ были обнаружены позднее, когда ее стали рассматривать как функцию комплексного переменного. Первым это сделал в 1876 Б. Риман (B. Riemann, см. [3]), к-рый показал следующее.

а) $\zeta(s)$ допускает аналитич. продолжение на всю комплексную s-плоскость в виде

$$\pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\frac{1}{s(s-1)}+$$
$$+\int_1^\infty\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{\frac{1-s}{2}-1}\right)\theta(x)\,dx, \qquad (3)$$

где $\Gamma(\omega)$ — гамма-функция,

$$\theta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\pi n^2x).$$

б) $\zeta(s)$ является регулярной функцией для всех значений s, кроме $s=1$, где она имеет простой полюс с вычетом, равным 1, и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s). \qquad (4)$$

Это уравнение наз. функциональным уравнением Римана. Для функции

$$\xi(s)=\frac{s(s-1)}{2}\,\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

введенной Б. Риманом для исследования Д.-ф. и называемой кси-функцией Римана, это уравнение принимает вид

$$\xi(s)=\xi(1-s),$$

а если положить

$$\Xi(t)=\xi\left(\frac{1}{2}+it\right),$$

то оно принимает вид

$$\Xi(t)=\Xi(-t).$$

Последняя функция Ξ замечательна тем, что она является четной целой функцией, действительной для действительных t, и ее нули на действительной оси соответствуют нулям функции $\zeta(s)$ на прямой $\sigma=1/2$.

в) Поскольку $\zeta(s)\neq0$ для $\sigma>1$, то в силу (4) в полуплоскости $\sigma>0$ эта функция имеет лишь простые нули в точках $s=2\nu$, $\nu=1, 2,\ldots$. Эти нули наз. тривиальными нулями Д.-ф. $\zeta(s)$. Далее $\zeta(s)\neq0$ для $0<s<1$. Таким образом, все нетривиальные нули Д.-ф. $\zeta(s)$ являются комплексными числами, обладают свойством симметрии относительно действительной оси $t=0$ и относительно вертикали $\sigma=1/2$ и лежат в полосе $0\leqslant\sigma\leqslant1$, к-рая наз. критической полосой.

Б. Риман высказал также следующие гипотезы.

1. Число $N(T)$ нулей функции $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0\leqslant\sigma\leqslant1$, $0<t<T$, выражается формулой

$$N(T)=\frac{1}{2\pi}\,T\ln T+\frac{1+\ln 2\pi}{2\pi}\,T+O(\ln T).$$

2. Пусть ρ пробегает нетривиальные нули $\zeta(s)$. Тогда ряд $\sum|\rho|^{-2}$ сходится, а ряд $\sum|\rho|^{-1}$ расходится.

3. Функция $\xi(s)$ представима в виде

$$ae^{bs}\prod_\rho\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}.$$

4. Пусть

$$P(x)=\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{\ln n},\qquad P_0(x)=\frac{1}{2}\,[P(x+0)+P(x-0)].$$

Тогда при $x \geqslant 1$

$$P_0(x) = \operatorname{li} x - \sum_\rho \operatorname{li} x^\rho + \int_x^\infty \frac{du}{(u^2-1)\ln u} - \ln 2, \quad (5)$$

где $\operatorname{li} x$ — интегральный логарифм,

$$\operatorname{li} e^w = \int_{-\infty+iv}^{u+iv} \frac{e^z}{z}\, dz, \quad w = u+iv, \quad v \gtrless 0.$$

5. Все нетривиальные нули Д.-ф. $\zeta(s)$ лежат на прямой $\sigma = 1/2$.

После Б. Римана проблема значений и, в частности, нулей Д.-ф. приобрела широкую известность и ей посвящено большое число исследований. Гипотезы Римана 2 и 3 были доказаны Ж. Адамаром (J. Hadamard, 1893), причем оказалось, что в гипотезе 3 $a = 1/2$, $b = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\pi - 1 - \frac{C}{2}$, где C — *Эйлера постоянная;* гипотезы 1 и 4 доказаны Х. Мангольдтом (H. Mangoldt, 1894), к-рый, кроме того, получил, для простых чисел, следующий важный аналог формулы 5. Если

$$\Psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n), \quad \Psi_0(x) = \frac{1}{2}\,[\Psi(x+0) + \Psi(x-0)],$$

то при $x \geqslant 1$

$$\Psi_0(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ пробегает нетривиальные нули $\zeta(s)$, а символ $\sum_\rho x^\rho/\rho$ означает предел суммы $\sum_{|\gamma| \leqslant T} x^\rho/\rho$ при $T \to \infty$. Эта формула, как и формула (5), показывает, что проблема распределения простых чисел в натуральном ряду тесно связана с расположением нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$.

Последняя гипотеза 5 не доказана и не опровергнута. Это — знаменитая *Римана гипотеза* о нулях Д.-ф.

Функция $\zeta(s)$ однозначно определяется своим функциональным уравнением. Точнее (см. [4]), любая функция, представимая обыкновенным рядом Дирихле и удовлетворяющая уравнению (4), при довольно широких условиях относительно ее регулярности, совпадает с $\zeta(s)$ с точностью до постоянного множителя.

При

$$\chi(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

и постоянном $h > 0$ для $0 < \sigma < 1$, $x > h$, $y > h$, $2\pi xy = |t|$ имеет место приближенное функциональное уравнение

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n^s} + \chi(s) \sum_{n \leqslant y} \frac{1}{n^{1-s}} + O(x^{-\sigma}) + O(|t|^{1/2-\sigma} y^{\sigma-1}), \quad (6)$$

полученное Х. Харди (H. Hardy) и Дж. Литлвудом (J. Littlewood) в 1920 (см. [4]). Это уравнение играет значительную роль в современной теории Д.-ф. и ее приложениях. Существуют общие методы получения такого рода результатов не только для класса Д.-ф., но и вообще функций Дирихле, обладающих функциональным уравнением риманова типа (3). Наиболее совершенный из них указан в [5]; в случае $\zeta(s)$ он приводит, при любом τ с $|\arg\tau| < \pi/2$, к соотношению

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}, \pi n^2 \tau\right)}{n^s} +$$

$$+ \pi^{-\frac{1-s}{2}} \sum_{n=1}^{x} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}, \frac{\pi n^2}{\tau}\right)}{n^{1-s}} - \frac{\tau^{\frac{s-1}{2}}}{1-s} - \frac{\tau^{\frac{s}{2}}}{s},$$

где $\Gamma(z,\ x)$ — *неполная гамма-функция*; при

$$\tau=\Delta^2\exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{|t|}\right)\operatorname{sign} t\right],\ \Delta>0,$$

получается приближенное уравнение (6); при $\tau=1$ это соотношение совпадает с исходной формулой (3).

Главной проблемой в теории Д.-ф. является проблема расположения ее нетривиальных нулей и вообще значений в области $^1/_2\leqslant\sigma\leqslant1$. К числу основных направлений в исследованиях Д.-ф. относятся: определение возможно более широкой области слева от прямой $\sigma=1$, где $\zeta(s)\neq0$; проблема порядка и средних значений Д.-ф. в критич. полосе; оценки числа нулей Д.-ф. на прямой $\sigma=^1/_2$ и вне этой прямой и т. д.

Первый нетривиальный результат о границе нулей Д.-ф. был получен Ш. Ж. Валле Пуссеном (Ch. J. La Vallée-Poussin) в 1896; он показал, что существует такая постоянная $A>0$, что

$$\zeta(s)\neq0 \text{ при } \sigma\geqslant1-\frac{A}{\ln^{\alpha}(|t|+2)} \text{ с } \alpha\geqslant1. \qquad (7)$$

Дальнейшие продвижения в этом направлении связаны с приближенным уравнением (6) и развитием методов оценок тригонометрич. сумм.

Самый мощный метод оценок такого рода принадлежит И. М. Виноградову (см. *Виноградова метод*). Последняя (к 1978) граница области, свободной от нулей Д.-ф., получена И. М. Виноградовым в 1958 (см. [7]). Она имеет вид (7) с $\alpha>^2/_3$. Для простых чисел ей соответствует формула

$$\pi(x)=\operatorname{li}x+O\left(xe^{-B\ln^{3/5}x}\right).$$

Существует определенная связь между ростом модуля функции $\zeta(s)$ и отсутствием нулей в окрестности прямой $\sigma=1$. Так, результат (7) с $\alpha>^2/_3$ является следствием оценок

$$\zeta(1+it)=O(\ln^{2/3}|t|),\ \frac{1}{\zeta(1+it)}=O(\ln^{2/3}|t|),\ |t|>2.$$

С другой стороны, известно (см. [4]), что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|\zeta(1+it)|}{\ln\ln t}\geqslant e^C,\ \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|\zeta(1+it)|^{-1}}{\ln\ln t}\geqslant\frac{6}{\pi^2}e^C,$$

и, если верна гипотеза Римана, то эти пределы, соответственно, не больше, чем $2e^C$ и $\frac{12}{\pi^2}e^C$.

Порядок дзета-функции в критической полосе есть число $\eta(\sigma)$, означающее нижнюю границу таких чисел ν, что $\zeta(\sigma+it)=O(|t|^{\nu})$. При $\sigma>1$, $\eta(\sigma)=0$, а при $\sigma<0$ имеет место $\eta(\sigma)=\frac{1}{2}-\sigma$. Точные значения функции $\eta(\sigma)$ для $0\leqslant\sigma\leqslant1$ неизвестны. Простейшее предположение — *Линделёфа гипотеза* — состоит в том, что

$$\eta(\sigma)=\frac{1}{2}-\sigma \text{ при } \sigma\leqslant\frac{1}{2} \text{ и } \eta(\sigma)=0 \text{ при } \sigma>\frac{1}{2}.$$

Это эквивалентно утверждению, что

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O(|t|^{\varepsilon}) \text{ для любого } \varepsilon>0. \qquad (8)$$

При $\sigma>^1/_2$ справедлива оценка $\zeta(\sigma+it)=O(|t|^{(1-\sigma)/2})$.

Последняя известная (к 1978) оценка $\zeta(s)$ на прямой $\sigma=^1/_2$ (см. [4]) далека от ожидаемой оценки (8); она имеет вид

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O\left(|t|^{\frac{15}{32}+\varepsilon}\right).$$

Проблема среднего значения дзета-функции состоит в определении

свойств функции

$$\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k}\,dt$$

при $T\to\infty$ для любого заданного σ и $k=1, 2, \ldots$ Результаты имеют приложения при изучении проблемы нулей Д.-ф. и непосредственно в теории чисел.

Доказано, что (см. [4])

$$\frac{1}{T}\int_1^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt = \ln T + 2C - 1 - \ln 2\pi + O\left(\frac{\ln T}{\sqrt{T}}\right),$$

$$\frac{1}{T}\int_1^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4 dt = \frac{\ln^4 T}{2\pi^2} + O(\ln^3 T).$$

При $\sigma>1/2$ (см. [4])

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^2\,dt = \zeta(2\sigma),$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^4\,dt = \frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}.$$

В случаях $k>2$ известно только, что при $\sigma>1-\frac{1}{k}$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k^2(n)}{n^{2\sigma}},$$

где $\tau_k(n)$ — число представлений n в виде k целых положительных сомножителей, и что асимптотич. соотношение

$$\frac{1}{T}\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k}\,dt \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k^2(n)}{n^{2\sigma}}$$

для $\sigma>1/2$ является эквивалентом гипотезы Линделёфа.

Важное место в теории Д.-ф. занимает проблема оценки функции $N(\sigma, T)$, означающей число нулей $\beta+i\gamma$ функции $\zeta(s)$ при $\beta>\sigma$, $0<\gamma\leqslant T$. В основе современных оценок $N(\sigma, T)$ лежат теоремы о выпуклости средних значений аналитич. функций, применяемые к функции

$$f_X(s) = \zeta(s)\sum_{n\leqslant X}\frac{\mu(n)}{n^s} - 1.$$

Если для нек-рого $X=X(\sigma, T)$, $T^{1-l(\sigma)}\leqslant X\leqslant T^A$,

$$\int_T^{2T} |f_X(s)|^2\,dt = O(T^{l(\sigma)}\ln^m T)$$

при $T\to\infty$ равномерно для $\sigma\geqslant\alpha$, где $l(\sigma)$ — положительная невозрастающая функция с ограниченной производной, а $m\geqslant 0$ — постоянная, то

$$N(\sigma, T) = O(T^{l(\sigma)}\ln^{m+1} T)$$

равномерно для $\sigma\geqslant\alpha+1/\ln T$.

Известно также, что если при $r_1\leqslant 3/2$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = O(t^r \ln^{r_1} t),$$

то равномерно для $1/2\leqslant\sigma\leqslant 1$,

$$N(\sigma, T) = O(T^{2(1+2r)(1-\sigma)}\ln^5 T).$$

Эти два предложения позволили получить (см. [4]) следующие плотностные теоремы о нулях дзета-функции:

равномерно для $\sigma\geqslant 1/2$

$$N(\sigma, T) = O(T^{3(1-\sigma)/(2-\sigma)}\ln^5 T),$$

$$N(\sigma, T) = O\left(T^{1-\frac{1}{4}\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)}\right),$$

с привлечением иных соображений в [8] получена плотностная теорема:

$$N(\sigma, T) = O\left(T^{\frac{5}{2}(1-\sigma)}\ln^{13} T\right);$$

если справедлива гипотеза Линделёфа, то

$$N(\sigma,\ T)=O\left(T^{2(1-\sigma)+\varepsilon}\right).$$

О нулях дзета-функции на прямой $\sigma=1/2$. По гипотезе Римана, все нетривиальные нули Д.-ф. лежат на прямой $\sigma=1/2$. Тот факт, что на этой прямой Д.-ф. имеет бесконечно много нулей, впервые был доказан Х. Харди в 1914 (см. [4]) на основе формулы Рамануджана

$$\int_0^{\infty}\frac{\Xi(t)}{t^2+\frac{1}{2}}\cos xt\,dt=\frac{\pi}{2}\left[e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\theta\left(e^{-2x}\right)\right].$$

Последний результат принадлежит А. Сельбергу (A. Selberg, 1942; см. [4]): число $N_0(T)$ нулей $\zeta(s)$, имеющих вид $1/2+it$, удовлетворяет неравенству

$$N_0(T)>AT\ln T,\ A>0.$$

Это означает, что число нулей Д.-ф. на прямой $\sigma=1/2$ имеет тот же порядок роста, что и число всех ее нетривиальных нулей:

$$N(T)\sim\frac{1}{2\pi}T\ln T.$$

Относительно нулей Д.-ф. на этой прямой известны и другого рода результаты. Приближенное функциональное уравнение позволяет фактически вычислить (с нек-рой степенью точности) значения ближайших к действительной оси нулей $\zeta(s)$. На основе этого метода на ЭВМ вычислены нули $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0\leqslant\sigma\leqslant1,\ 0\leqslant t\leqslant1{,}6\cdot10^6$. Их число равно $3{,}5\cdot10^6$, и все они лежат на прямой $\sigma=1/2$. Ординаты первых шести нулей с точностью до второго десятичного знака равны 14,13; 21,02; 25,01; 30,42; 32,93; 37,58.

Вообще, расстояние между соседними нулями $\zeta(s)$ оценивается теоремой Литлвуда (1924): для любого достаточно большого T функция $\zeta(s)$ имеет такой нуль $\beta+i\gamma$, что

$$|\gamma-T|<A/\ln\ln\ln T.$$

Обобщенная дзета-функция определяется для $0<a<1$ рядом

$$\zeta(s,\ a)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+a)^{-s}.$$

При $a=1$ она обращается в дзета-функцию Римана. Аналитическое продолжение на всю плоскость осуществляется формулой

$$\zeta(s,\ a)=\frac{e^{-\pi is}\,\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_L\frac{z^{s-1}e^{-az}}{1-e^{-z}}\,dz,$$

где интеграл берется по контуру L, представляющему собой путь из бесконечности по верхнему краю разреза положительной действительной оси до нек-рого фиксированного $0<r<2\pi$, затем вдоль окружности радиуса r против часовой стрелки и снова в бесконечность по нижнему краю разреза. Функция $\zeta(s,\ a)$ регулярна всюду, кроме точки $s=1$, где она имеет простой полюс с вычетом, равным 1. Она играет важную роль в теории L-функций Дирихле (см. [9], [10]).

Дзета-функция Дедекинда — аналог дзета-функции Римана для полей алгебраич. чисел, введенный Р. Дедекиндом (см. [11]).

Пусть K — поле алгебраических чисел степени $n=r_1+2r_2>1$, где r_1 — число действительных, r_2 — число пар комплексно сопряженных полей в k; пусть далее Δ — дискриминант, h — число классов дивизоров, R — регулятор поля k, g — число содержащихся в k корней из 1.

Дзета-функция Дедекинда $\zeta_k(s)$ поля k определяется рядом

$$\zeta_k(s)=\sum_{\mathfrak{A}}\frac{1}{N\mathfrak{A}^s},$$

где $\mathfrak{A}$ пробегает все целые отличные от нуля дивизоры поля k, $N\mathfrak{A}$ — норма дивизора $\mathfrak{A}$. Этот ряд абсолютно и равномерно сходится при $\sigma \geqslant 1+\delta$, $\delta>0$, определяя аналитич. функцию, регулярную в полуплоскости $\sigma>1$.

При $\sigma>1$ будет

$$\zeta_k(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(m)}{m^s},$$

где $f(m)$ — число целых дивизоров поля k с нормой m, $f(m) \leqslant \tau_n(m)$, $\tau_n(m)$ — число представлений m в виде n натуральных сомножителей.

При $\sigma>1$ имеет место тождество Эйлера

$$\zeta_k(s) = \prod_{\mathfrak{P}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{P}^s}\right)^{-1},$$

где $\mathfrak{P}$ пробегает все простые дивизоры поля k.

Основные свойства дзета-функции Дедекинда (см. [11]).

1) $\zeta_k(s)$ регулярна на всей комплексной плоскости, кроме точки $s=1$, где она имеет простой полюс с вычетом

$$2^{r_1+r_2}\pi^{r_2} hR/g\sqrt{\Delta}.$$

2) $\zeta_k(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\xi_k(s) = \xi_k(1-s),$$

где

$$\xi_k(s) = \left(\frac{|\Delta|}{4^{r_2}\pi^n}\right)^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s)\, \zeta_k(s).$$

3) При $r=r_1+r_2-1>0$ в точке $s=0$ функция $\zeta_k(s)$ имеет нуль порядка r; $\zeta_k(0) \neq 0$ при $r=0$; в точках $s=-2\nu$, $\nu=1, 2, \ldots$, дзета-функция Дедекинда $\zeta_k(s)$ имеет нули порядка $r+1$, в точках $s=-2\nu-1$ при $r_2>0$ — нули порядка r_2, а при $r_2=0$ не равна нулю. Это — тривиальные нули функции $\zeta_k(s)$.

4) Все остальные нули функции $\zeta_k(s)$ лежат в критич. полосе $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.

Основная гипотеза состоит в том, что все нетривиальные нули функции $\zeta_k(s)$ находятся на прямой $\sigma=1/2$. Установлено, что $\zeta_k(s)$ не имеет нулей на прямой $\sigma=1$. Более того, существует абсолютная положительная постоянная A и зависящая от параметров поля k постоянная λ, обладающие тем свойством, что

$$\zeta_k(s) \neq 0 \text{ при } \sigma \geqslant 1 - \frac{A}{n \ln |t|}, \quad |t| > \lambda.$$

Вообще, в случае фиксированных параметров поля k для $\zeta_k(s)$ имеют место многие результаты, аналогичные результатам для дзета-функции Римана. Однако в общем случае теория дзета-функции Дедекинда сложнее, поскольку она включает в себя и теорию Дирихле L-функций. Так, неизвестно (1978), имеют ли дзета-функции Дедекинда действительные нули между 0 и 1. Точная зависимость между дзета-функцией Дедекинда и L-рядами рационального поля имеет следующий вид. Пусть k^* — минимальное поле Галуа, к-рому принадлежит k, Q — группа Галуа поля k^*, h — число классов группы Q, χ_i — простые характеры группы Q, $1 \leqslant i \leqslant h$. Тогда

$$\zeta_k(s) = \zeta(s) \prod_{i=2}^{h} L^{c_i}(s;\ \chi_i,\ k^*),$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, L суть L-ряды Артина, $c_i=c_i(k)$ — целые положительные числа, к-рые определяются свойствами относительной группы Галуа поля k^*. В частности, если k — круговое расширение, то $k^*=k$, $h=\varphi(n)$, $c_i=1$, и L-ряды Артина становятся обычными L-рядами Дирихле.

Наряду с дзета-функцией Дедекинда $\zeta_k(s)$ рассматриваются и $\zeta_k(s;\ H_j)$ — дзета-функции Де-

декинда класса дивизоров H_j поля k. Эти функции определяются теми же рядами, что и $\zeta_k(s)$, но только $\mathfrak{A}$ пробегает не все, а лишь целые дивизоры, к-рые принадлежат заданному классу H_j. Функции $\zeta_k(s; H_j)$ обладают свойствами, близкими свойствам $\zeta_k(s)$. Справедлива формула

$$\zeta_k(s) = \sum_{j=1}^{h} \zeta_k(s; H_j).$$

Дзета-функции Дедекинда лежат в основе современной аналитич. теории дивизоров полей алгебраич. чисел. Здесь они играют такую же роль, какую играет дзета-функция Римана в теории чисел рационального поля.

Аналогом дзета-функции Дедекинда для полей алгебраич. функций от одного переменного с конечным полем констант является конгруэнц дзета-функция, или дзета-функция Артина—Шмидта (см. ниже Дзета-функция в алгебраической геометрии).

Лит.: [1] Эйлер Л., Введение в анализ бесконечно малых, 2 изд., т. 1, пер. с латин., М., 1961; [2] Чебышев П.Л., Избр. математические труды, М.—Л., 1946; [3] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.—Л., 1948; [4] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М., 1953; [5] Лаврик А. Ф., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1968, т. 32, № 1, с. 134—85; [6] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [7] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1958, т. 22, с. 161—64; [8] Монтгомери Х. Л., «Математика», 1970, т. 14, № 5, с. 133—40; [9] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [10] Чудаков Н. Г., Введение в теорию L-функций Дирихле, М.—Л., 1947; [11] Неске Е., Mathematische Werke, Gött., 1959.
А. Ф. Лаврик.

2) Д.-ф. в алгебраической геометрии — аналитическая функция комплексного переменного s, описывающая арифметику алгебраич. многообразий над конечными полями и схем конечного типа над Spec $\mathbb{Z}$. Если X — такая схема, $\overline{X}$ — множество ее замкнутых точек, а $N(x)$ — число элементов поля вычетов $k(x)$ точки $x \in \overline{X}$, то Д.-ф. $\zeta_X(s)$ задается эйлеровым произведением

$$\zeta_X(s) = \prod_{x \in \overline{X}} (1 - N(x)^{-s})^{-1}.$$

Это произведение абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > \dim X$, допускает мероморфное продолжение в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \dim X - \frac{1}{2}$ и имеет полюс в точке $s = \dim X$ (см. [10]). В случае если $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, то $\zeta_X(s)$ есть *дзета-функция* Римана, а если X конечна над Spec $\mathbb{Z}$, то $\zeta_X(s)$ есть дзета-функция Дедекинда числового поля.

Наиболее изучена ситуация, когда X является алгебраич. многообразием, определенным над конечным полем F_q. В этом случае

$$N(x) = q^{\deg x},$$

где $\deg x$ — степень поля $k(x)$ над полем F_q и вместо функции $\zeta_X(s)$ обычно рассматривают функцию $Z_X(t)$ такую, что

$$Z_X(q^s) = \zeta_X(s).$$

Если ν_n — число рациональных точек многообразия X в поле F_{q^n}, то оказывается (см. [14]), что

$$\ln Z_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n \frac{t^n}{n}.$$

Такие Д.-ф. были введены впервые для случая алгебраич. кривых (по аналогии с полями алгебраич. чисел) в 1924 Э. Артином [1], к-рый заметил, что они являются рациональными функциями от t и для них в нек-рых случаях верен аналог гипотезы Римана о нулях. Этот аналог получил название гипотезы Артина. Для кривых рода 1 она была доказана

Х. Хассе (H. Hasse) в 1933 (в случае рода 0 ситуация тривиальна), а для кривых произвольного рода — А. Вейлем (A. Weil) в 1940 при помощи результатов теории *абелевых многообразий*, созданной им в значительной мере для этой цели (см. [2], [14]).

А. Вейль [2] рассмотрел Д.-ф. произвольных алгебраич. многообразий и высказал гипотезы, обобщающие результаты, полученные к тому времени для кривых. Его исследования основаны на следующем замечании — множество точек многообразия X, рациональных над F_{q^a}, является множеством неподвижных точек a-й степени *Фробениуса эндоморфизма* этого многообразия. П е р в а я г и п о т е з а В е й л я состоит в том, что в категории алгебраич. многообразий над конечными полями существует теория когомологий, удовлетворяющая всем формальным свойствам, необходимым для получения *Лефшеца формулы*. Если $\{H^i(X)\}$ — группы когомологий такой теории, то из формулы Лефшеца следует, что

$$\zeta_X(t) = \frac{P_1(t)\dots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)\dots P_{2n}(t)},$$

где $n = \dim X$, а $P_i(t)$ — характеристич. многочлены отображений, индуцированных эндоморфизмом Фробениуса на *Вейля когомологиях* $H^i(X)$. В частности, функция $\zeta_X(t)$ рациональна.

В т о р а я г и п о т е з а В е й л я состоит в том, что функция $\zeta_X(t)$ должна удовлетворять функциональному уравнению, имеющему в случае гладкого проективного многообразия X вид

$$\zeta_X(q^{-n}t^{-1}) = (-1)^\chi q^{n\chi/2} t^\chi \zeta_X(t),$$

где χ — эйлерова характеристика, равная $\Sigma(-1)^i \dim H^i(X)$. (Эта гипотеза является формальным следствием существования теории когомологий.) Рациональность ζ-функции для любых X доказана Б. Дворком [6] методом, не использующим когомологии. Теория когомологий, предсказанная А. Вейлем, была создана А. Гротендиком (A. Grothendieck) в 1958 (см. *Вейля когомологии*, *Топологизированная категория*, *l-адические когомологии*). А. Гротендик вместе с М. Артином (M. Artin) доказал обе гипотезы Вейля для гладких проективных многообразий, причем многочлены $P_i(t)$ имели, вообще говоря, целые l-адические коэффициенты, зависящие от выбора простого l, положенного в основу теории. Предполагается, что на самом деле коэффициенты являются целыми числами, не зависящими от l и вообще от выбора теории когомологий. Это высказывание обычно наз. т р е т ь е й г и п о т е з о й В е й л я. Наконец, последняя — ч е т в е р т а я г и п о т е з а В е й л я относится к нулям α_i многочленов $P_i(t)$, рассматриваемым как целые алгебраич. числа (г и п о т е з а Р и м а н а):

$$|\alpha_i| = q^{i/2}.$$

Все эти гипотезы доказаны П. Делинем [4].

Основные применения гипотез Вейля в теории чисел относятся к изучению сравнений. Уже в случае кривых из теоремы Вейля вытекала наилучшая оценка для рациональной тригонометрич. суммы от одной переменной (см. [14]). Эти оценки были обобщены на суммы от любого числа переменных. Другим важным приложением этой теории являются оценки коэффициентов Фурье *модулярных форм* (проблема Рамануджана — Петерсона, см. [4], [15]).

Приведенные результаты являются на самом деле частными случаями гораздо более общих теорем, относящихся к произвольным L-функциям, к-рые связаны с представлениями групп Галуа накрытий многообразия X или, более общо, с нек-рым l-адическим пучком на X (см. [5], [10]). Эти функции служат на произвольных схемах аналогом известных в теории алгебраич. чисел L-функций.

Пусть теперь X — схема конечного типа над $Spec\ Z$ такая, что ее общий слой $X \otimes_Z Q$ является непустым алгебраич. многообразием над полем рациональных чисел Q. Существует предположение, что Д.-ф. $\zeta_X(s)$ имеют мероморфные продолжения на всю s-плоскость и удовлетворяют функциональному уравнению. Гипотетич. вид этого уравнения предложен в [11]. Доказать эту гипотезу удалось пока (1978) лишь в очень специальных случаях (рациональные поверхности, алгебраич. кривые, униформизуемые модулярными функциями, абелевы многообразия с комплексным умножением, см. [15]). Что касается аналога гипотезы Римана, то он в этой ситуации даже не сформулирован.

Новый круг идей в изучении Д.-ф. принесли работы Дж. Берча (J. Birch), П. Суиннертон-Дайера [12] и Дж. Тейта [13]. Чтобы сформулировать принадлежащие им гипотезы, следует заметить, что функция $\zeta_X(s)$ является произведением Д.-ф. $\zeta_{X_p}(s)$ слоев X_p отображения $X \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}$. Для последних, являющихся многообразиями над конечными полями, имеется, согласно первой гипотезе Вейля, разложение на многочлены. После перемножения этих разложений получается аналогичное представление для Д.-ф.

$$\cdot\ \zeta_X(s) = \prod_i \zeta_X^{(i)}(s)^{(-1)^{i+1}}.$$

Гипотеза Берча и Суиннертон-Дайера предполагает, что порядок нуля функции $\zeta_X^{(i)}(s)$ в точке $s = \dim X - 1$ равен рангу группы рациональных точек многообразия Пикара $\mathrm{Pic}\ X$ (конечному, в силу теоремы Морделла — Вейля). Эта гипотеза, тем самым, предполагает справедливость гипотезы о мероморфном продолжении Д.-ф.

В первоначальной форме гипотеза Берча и Суиннертон-Дайера была высказана для эллиптич. кривых над полем Q в результате изучения обширных таблиц для кривых с комплексным умножением [12]. В дальнейшем было высказано предположение о значении коэффициента при соответствующей степени переменной s в разложении функции $\zeta_X^{(i)}(s)$ в окрестности точки $s = \dim X - 1$. Предполагается, что он равен

$$\frac{[Ш]\ |\det(a_i, a_j)|}{[\mathrm{Pic}\ X_{\mathrm{tors}}]\ [\mathrm{Pic}'\ X_{\mathrm{tors}}]},$$

где $[Ш]$ — предполагаемый конечным порядок группы Шафаревича — Тейта локально тривиальных *главных однородных пространств* многообразия $\mathrm{Pic}\ X$, $|\det(a_i, a_j)|$ — определитель билинейной формы на группе рациональных точек многообразия $\mathrm{Pic}\ X$, получающийся из *высоты* точки, $[\mathrm{Pic}\ X_{\mathrm{tors}}]$ и $[\mathrm{Pic}'\ X_{\mathrm{tors}}]$ — порядки *подгрупп кручения* в группе рациональных точек на $\mathrm{Pic}\ X$ и двойственном абелевом многообразии. Это выражение обобщает хорошо известное в теории алгебраич. чисел выражение для вычета дзета-функции Дедекинда в точке $s = 1$. Одной из трудностей на пути к доказательству гипотезы Берча и Суиннертон-Дайера является тот факт, что группа Ш полностью не вычислена (1978) ни для одной кривой. Доказан аналог этой гипотезы для кривых, определенных над полем функций, однако и в этом случае пришлось предположить конечность *Брауэра группы*, играющей здесь роль группы Ш (см. [5]).

Дж. Тейт [13], изучая действие группы Галуа на алгебраич. циклы многообразий, выдвинул гипотезы о полюсах функций $\zeta_X^{(i)}(s)$ при четных значениях i, а именно, что функция $\zeta_X^{(2i)}(s)$ имеет в точке $s = i+1$ полюс порядка, равного рангу группы алгебраич. циклов коразмерности i. Это утверждение тесно связано с гипотезой Тейта об алгебраич. циклах. По поводу имеющихся подходов к доказательству этих гипотез, а также различных аргументов в их пользу см. [5], [7], [12], [13], [17].

Независимо от описываемого здесь понятия Д.-ф. в теории алгебраич. групп и автоморфных функций возникли и изучались Д.-ф., являющиеся преобразованиями Меллина модулярных форм. В 1967 А. Вейль заметил, что из общих гипотез о функции $\zeta_X^{(1)}(s)$ для эллиптич. кривой X над Q вытекает, что кривая X униформизуется модулярными функциями, а функция $\zeta_X^{(1)}(s)$ есть преобразование Меллина модулярной формы, отвечающей дифференциалу рода 1 на X. Это замечание привело к предположению о том, что функции $\zeta_X^{(i)}(s)$ любой схемы X являются преобразованиями Меллина подходящих модулярных форм. Основные результаты в этом направлении были получены Э. Жаке и Р. Ленглендсом (см. [7], [9]). В частности, они построили широкий класс рядов Дирихле, удовлетворяющих нек-рому функциональному уравнению и разлагающихся в эйлерово произведение, к-рые можно представить в виде преобразования Меллина модулярных форм на группе $GL(2)$. Выполнимость условий их теоремы непосредственно связана с приведенными выше гипотезами об общих свойствах Д.-ф. Пока их удается проверить лишь для кривых, определенных над полем функций.

Начиная с 1970 под влиянием работ о p-адических Д.-ф. полей алгебраич. чисел (см. [14]) возникает аналогичный подход и к Д.-ф. схем, главным образом эллиптич. кривых. Имеющиеся здесь проблемы, во многом похожие на рассмотренные выше, отражены в [9]. Д.-ф. эллиптич. кривой над Q тесно связана с одномерной формальной группой кривой и они полностью друг друга определяют [16].

Лит.: [1] Artin E., «Math. Z.», 1924, Bd 19, S. 153—246; [2] Weil A., Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, P., 1948; [3] его же, «Bull. Amer. Math. Soc.», 1949, v. 55, № 5, p. 497—508; [4] Deligne P., «Publ. Math. IHES», 1974, t. 43, p. 273—307; [5] Dix exposès sur la cohomologie des schémas, Amst.—P., 1968; [6] Dwork B., в кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Djursholm, 1963, p. 247—59; [7] Жаке Э., Ленглендс Р., Автоморфные формы на GL (2), пер. с англ., М., 1973; [8] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 6, с. 7—71; [9] Modular functions of one variable, B., 1973; [10] Серр Ж.-П., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, № 6, с. 19—26; [11] его же, «Математика», 1971, т. 15, № 1, с. 3—13; [12] Свиннертон-Дайер П., «Математика», 1969, т. 13, № 5, с. 3—25; [13] Тэйт Д., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, № 6, с. 27—40; [14] Шафаревич И. Р., Дзета-функция, М., 1969; [15] Шимура Г., Введение в арифметическую теорию автоморфных функций, пер. с англ., М., 1973; [16] Хонда Т., «Математика», 1969, т. 13, № 6, с. 3—17; [17] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1970, М., 1971, с. 111—51.

А. Н. Паршин.

ДИАГОНАЛИЗИРУЕМАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГРУППА — аффинная алгебраич. группа G, изоморфная замкнутой подгруппе *алгебраического тора*. Таким образом, G изоморфна замкнутой подгруппе мультипликативной группы всех диагональных матриц нек-рого фиксированного порядка. Если G определена над полем k и указанный изоморфизм определен над k, то Д. а. г. G наз. разложимой (или расщепимой) над k.

Всякая замкнутая подгруппа H в Д. а. г. G, а также образ G при любом рациональном гомоморфизме φ являются Д. а. г. Если к тому же группа G определена и разложима над полем k, а φ определен над k, то и H и $\varphi(G)$ определены и разложимы над k.

Д. а. г. G разложима над k тогда и только тогда, когда каждый элемент из группы $\hat{G}$ всех ее рациональных характеров является рациональным над k. В случае, если в $\hat{G}$ нет неединичных рациональных над k элементов, Д. а. г. G наз. анизотропной над k. Всякая Д. а. г. G, определенная над полем k, разложима над нек-рым конечным сепарабельным расширением поля k.

Д. а. г. G связна тогда и только тогда, когда она является алгебраич. тором. Связность G эквивалентна также отсутствию кручения в группе $\hat{G}$. Для произвольной Д. а. г. G, определенной над k, группа $\hat{G}$ является

конечно порожденной абелевой группой, не имеющей p-кручения, где p — характеристика поля k.

Произвольная определенная и разложимая над полем k Д. а. г. G является прямым произведением конечной абелевой группы и алгебраич. тора, определенного и разложимого над k. В любой связной определенной над полем k Д. а. г. G имеется наибольший анизотропный подтор G_a и наибольший разложимый над k подтор G_d, для которых $G=G_aG_d$ и $G_a\cap G_d$ — конечное множество.

Если Д. а. г. G определена над полем k и Γ — группа Галуа сепарабельного замыкания поля k, то $\hat{G}$ снабжается непрерывным действием группы Γ. Если при этом $\varphi\colon G\to H$ — рациональный гомоморфизм двух Д. а. г., причем G, H и φ определены над полем k, то индуцированный φ гомоморфизм $\hat{\varphi}\colon \hat{H}\to\hat{G}$ является Γ-эквивариантным (т. е. является гомоморфизмом Γ-модулей). Возникающий таким образом контравариантный функтор из категории диагонализируемых k-групп и их k-морфизмов в категорию конечно порожденных абелевых групп без p-кручения с непрерывным действием группы Γ и их Γ-эквивариантных гомоморфизмов оказывается эквивалентностью указанных категорий.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Олот., «Ann. Math.», 1961, v. 74, № 1, p. 101—39.

В. Л. Попов.

ДИАГОНАЛЬ — отрезок прямой, соединяющий две вершины многоугольника (многогранника), не лежащие на одной стороне (на одной грани). Если число вершин многоугольника равно n, то число его Д. равно $n(n-3)/2$.

Е. В. Шикин.

ДИАГОНАЛЬНАЯ ГРУППА — группа невырожденных диагональных матриц. Группа матриц, сопряженная с Д. г., наз. диагонализируемой линейной группой.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977.

Ю. И. Мерзляков.

ДИАГОНАЛЬНАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица, у к-рой все элементы, кроме, быть может, элементов главной диагонали, равны нулю.

О. А. Иванова.

ДИАГОНАЛЬНАЯ ПОДГРУППА — подгруппа декартовой степени данной группы G, состоящая из всех элементов с одинаковыми компонентами. Напр., Д. п. произведения $G\times G$ — это группа пар (g, g), $g\in G$.

Ю. И. Мерзляков.

ДИАГОНАЛЬНАЯ ЦЕПНАЯ ДРОБЬ — цепная дробь

$$a_0+\frac{b_1|}{|a_1}+\ldots+\frac{b_n|}{|a_n}+\ldots,$$

у к-рой последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\omega}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\omega}$ должны удовлетворять следующим условиям:

1) числа a_n и b_n целые; $|b_n|=1$; $a_n\geqslant 1$, если $n\geqslant 1$; $a_\omega\geqslant 2$, если $0<\omega<\infty$;

2) $b_n+a_n\geqslant 1$ для всех n; если $\omega=\infty$, то $b_n+a_n\geqslant 2$ для бесконечного множества n;

3) $Q_n<Q_{n+1}$ для всех n;

4) все подходящие дроби цепной дроби суть все несократимые дроби $\frac{A}{B}$ такие, что $|r-\frac{A}{B}|<\frac{1}{2B^2}$ и $B>0$, где r — значение цепной дроби.

Для каждого действительного числа r существует одна и только одна Д. ц. д., значение к-рой равно r; эта дробь периодична, если r — квадратическая иррациональность.

В. И. Нечаев.

ДИАГОНАЛЬНО КЛЕТОЧНЫЙ ОПЕРАТОР относительно данного ортогонального разложения $H=\sum_{k\geqslant 1}\oplus H_k$ гильбертова пространства H — линейный оператор A в H, оставляющий инвариантными каждое из подпространств H_k, $k\geqslant 1$. Спектр оператора A есть замыкание объединения спектров «клеток» $A|H_k=A_k$, $k\geqslant 1$, $\|A\|=\sup\limits_{k\geqslant 1}\|A_k\|$. Д. к. о. в широком смысле — это

оператор A умножения на функцию λ в прямом интеграле гильбертовых пространств

$$H=\int_M \oplus H(t)\,d\mu(t), \quad (Af)(t)=\lambda(t)f(t), \quad t\in M.$$

При этом $\lambda(t)$ — линейный оператор, действующий в пространстве $H(t)$. Каждый оператор, перестановочный с нормальным оператором, есть Д. к. о. относительно спектрального разложения этого оператора. См. также *Диагональный оператор*.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968, § 41. *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.*

ДИАГОНАЛЬНОЕ КОЛЬЦО замкнутого симметричного кольца R ограниченных линейных операторов гильбертова пространства H — коммутативное банахово симметричное кольцо E операторов в H такое, что $(R\cup E)'=E$. Д. к. используется для разложения кольца операторов на неприводимые.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968. *М. И. Войцеховский.*

ДИАГОНАЛЬНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЙ $f_\alpha: X\to Y_\alpha$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, — отображение $f: X\to Y=\pi\{Y_\alpha,\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$, определяемое равенством $f(x)=\{f_\alpha(x)\}\in Y$. Д. п. о. f_α удовлетворяет для любого α соотношению $f_\alpha=\pi_\alpha f$, где π_α обозначает проектирование произведения Y на сомножитель Y_α. Диагональное произведение непрерывных отображений непрерывно. Семейство отображений $f_\alpha: X\to Y_\alpha$ наз. расчленяющим, если для любой точки $x\in X$ и всякой ее окрестности Ox существует такой индекс α и такое открытое подмножество $U_\alpha\subset Y_\alpha$, что $x\in f_\alpha^{-1}U_\alpha\subset Ox$. Если $\{f_\alpha: X\to Y_\alpha\}$ — расчленяющее семейство отображений и f есть Д. п. о. f_α, то f является вложением пространства X в произведение πY_α, т. е. $f: X\to fX$ — гомеоморфизм. Д. п. о. было применено А. Н. Тихоновым для вложения вполне регулярного пространства веса τ в куб I^τ. *В. В. Федорчук.*

ДИАГОНАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — оператор D, определенный на линейной оболочке базиса $\{e_k\}_{k\geqslant 1}$ в нормированном (или только локально выпуклом) пространстве X равенствами $De_k=\lambda_k e_k$, $k\geqslant 1, \lambda_k$ — комплексные числа. Если D — непрерывный оператор, то

$$\sup_{k\geqslant 1}|\lambda_k|<+\infty;$$

если X — банахово пространство, то это условие в том и только в том случае равносильно непрерывности D, когда $\{e_k\}_{k\geqslant 1}$ — безусловный базис в X. Если $\{e_k\}_{k\geqslant 1}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H, то D — нормальный оператор, причем $\|D\|=\sup\limits_{k\geqslant 1}|\lambda_k|$, а спектр D совпадает с замыканием множества $\{\lambda_k: k=1, 2, \ldots\}$. Нормальный и вполне непрерывный оператор N является Д. о. в базисе своих собственных векторов; сужение (даже нормального) Д. о. на его инвариантное подпространство не обязательно, вообще говоря, будет Д. о.; любой нормальный оператор N в сепарабельном пространстве H при любом $\varepsilon>0$ может быть представлен в виде $N=D+C$, где D — Д. о., C — вполне непрерывный оператор и $\|C\|<\varepsilon$.

Д. о. в широком смысле слова — это оператор D умножения на комплексную функцию λ в прямом интеграле гильбертовых пространств

$$H=\int_M \oplus H(t)\,d\mu(t),$$

т. е.

$$(Df)(t)=\lambda(t)f(t), \quad t\in M; \quad f\in H.$$

См. *Диагонально клеточный оператор*.

Лит.: [1] Singer I., Bases in Banach spaces, v. I, B., 1970; [2] Wermer J., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1952, v. 3, № 2, p. 270—77; [3] Berg I. D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1971, v. 160, p. 365—71. *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.*

ДИАГОНАЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС — метод построения по последовательности, состоящей из последовательностей

$$\alpha_i=(a_{i1},\ a_{i2},\ a_{i3},\ \ldots),\quad i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

последовательности $\alpha=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots)$, где $a_i\neq a_{ii}$ для любых $i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, либо $a_i=a_{ii}$ для всех i. Д. п. в первой форме в 1874 применил Г. Кантор (см. [1]) при доказательстве несчетности множества действительных чисел из отрезка $[0,\ 1]$, поэтому его часто наз. к а н т о р о в ы м Д. п. Вторая форма Д. п. применяется в теории функций действительного и комплексного переменного для выделения из ограниченного на множестве E семейства функций последовательности функций, сходящейся на счетном подмножестве из E.

Д. п. перенумерации ставит в соответствие кратной последовательности $\{a_{ik}\}$, $i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$; $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, последовательность $a_{11},\ a_{12},\ a_{21};\ \ldots;\ a_{k1},\ a_{k-1,\,2},\ \ldots,\ a_{k-i,\,i+1},\ \ldots,\ a_{1k};\ \ldots$ и применяется, напр., для доказательства счетности счетного множества счетных множеств (см. [2]).

Лит.: [1] C a n t o r G., Gesammelte Abhandlungen, B., 1932 («J. reine und angew. Math.», 1874, Bd 77, S. 258—62); [2] К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976; [3] П е т е р Р., Рекурсивные функции, пер. с нем., М., 1954, §§ 11, 19; [4] К л и н и С. К., Математическая логика, пер. с англ., М., 1973, §§ 33, 34; [5] Ш ё н ф и л д Д ж. Р., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975, §§ 6.8, 7.5—7.9, 9.2—9.4.

Ю. Н. Субботин.

ДИАГРАММА в к а т е г о р и и C — отображение D ориентированного графа Γ с множеством вершин I и с множеством дуг U в категорию C, при котором

$$D(I)\subset \mathrm{Ob}(b),\quad D(U)\subset \mathrm{Mor}(b),$$

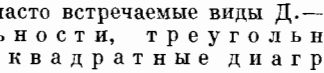
причем $D(u)\in \mathrm{Hom}(D(i),\ D(j))$, если дуга $u\in U$ имеет начало i и конец j. Иногда под диаграммой в C понимается образ отображения D, что позволяет использовать наглядное изображение диаграммы.

Пусть $\varphi=(u_1,\ \ldots,\ u_n)$ — ориентированная цепь графа Γ с началом i и концом j, т. е. непустая конечная последовательность дуг, в к-рой началом каждой дуги служит конец предыдущей; и пусть $D(\varphi)$: $D(i)\to D(j)$ означает композицию морфизмов:

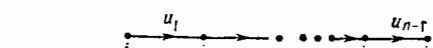
$$D(u_n)\circ\ldots\circ D(u_1).$$

Диаграмма D называется к о м м у т а т и в н о й, если $D(\varphi)=D(\varphi')$ всякий раз, как φ и φ', являются ориентированными цепями с одним и тем же началом и концом.

Наиболее часто встречаемые виды Д.— это п о с л е д о в а т е л ь н о с т и, т р е у г о л ь н ы е д и а г р а м м ы и к в а д р а т н ы е д и а г р а м м ы. Для определения п о с л е д о в а т е л ь н о с т и за определяющий граф берется граф вида



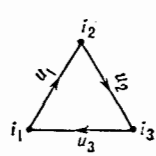
Соответствующая Д. изображается следующим образом:



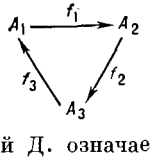
;

здесь $A_k=D(i_k)$ — объекты категории C, а $f_k=D(u_k)$ — морфизмы этой категории.

Т р е у г о л ь н а я Д. в категории C соответствует графу

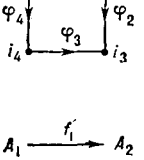


и изображается:

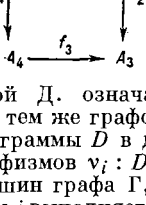


Коммутативность этой Д. означает, что $f_3 = f_2 \circ f_1$.

К в а д р а т н а я Д. соответствует графу



и изображается:



Коммутативность этой Д. означает, что $f_2 \circ f_1 = f_3 \circ f_4$.

Класс Д. с одним и тем же графом Г образует категорию. За морфизм диаграммы D в диаграмму D' принимается семейство морфизмов $\nu_i : D(i) \to D'(i)$, где i пробегает множество вершин графа Г, что для любой дуги u с началом i и концом j выполняется условие $D'(u) \circ \nu_i = \nu_j \circ D(u)$. В частности, можно говорить об и з о м о р ф н ы х Д. Любую категорию можно представить как категорию диаграмм с нек-рым графом. Иногда граф Г наз. схемой диаграмм в C.

Лит.: [1] Г р о т е н д и к А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961. *И. В. Долгачев.*

ДИАДА — *аффинор* в гильбертовом пространстве

$$x \to (a, x)b,$$

где a, b — некоторые постоянные векторы, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение. Значение Д. состоит в том, что, напр., в n-мерном пространстве всякий аффинор A представляется в виде суммы не более чем n Д.:

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} (a_i, x)\, b^i$$

(в произвольном гильбертовом пространстве подобное разложение имеет место для частных классов линейных операторов, напр. для самосопряженных операторов, причем a_i и b^i образуют *биортогональную систему*). В 19 в. делались попытки положить понятие Д. в основу теории аффиноров — так называемое «диадное исчисление», в настоящее время термин Д. малоупотребителен.

Лит.: [1] Д у б н о в Я. С., Основы векторного исчисления, 4 изд., ч. 1,2, М.—Л., 1950—52; [2] Л а г а л л и М., Векторное исчисление, пер. с нем., М.—Л., 1936; [3] Ч е п м е н С., К а у л и н г Т., Математическая теория неоднородных газов, пер. с англ., М., 1960. *М. И. Войцеховский.*

ДИАДИЧЕСКИЙ БИКОМПАКТ — бикомпакт, являющийся непрерывным образом обобщенного канторова дисконтинуума. Д. б. были введены П. С. Александровым в связи с естественной попыткой обобщить на произвольные бикомпакты теорему о том, что каждый компакт является непрерывным образом канторова множества. Класс Д. б.— наименьший класс бикомпактов, содержащий все метрич. компакты и замкнутый относительно тихоновского произведения и непрерывного отображения. С в о й с т в а Д. б. Всякая бикомпактная топологич. группа диадична. Д. б. удовлетворяет *Суслина условию* и, более того, всякое регулярное *кардинальное число* $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ является калибром Д. б. (см. *Ка-*

либр пространства). Отсюда вытекает существование недиадич. бикомпактов. Таковы, напр., все бикомпакты Александрова *несчетной мощности* (бикомпактификация одной точкой бесконечных дискретных пространств). В Д. б. всякое канонич. замкнутое множество и всякое замкнутое множество типа G_δ являются Д. б. Всякая неизолированная точка Д. б. есть x-точка. Более того, если характер точки $x \in X$ равен $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, то в X содержится бикомпакт Александрова мощности $\mathfrak{m}$, вершина к-рого совпадает с x. Вес бесконечного Д. б. равен верхней грани характеров его точек, а π-вес Д. б. равен его весу. Всякий экстремально несвязный Д. б. состоит из конечного множества точек. Существуют разнообразные критерии метризуемости Д. б. В частности, Д. б. X метризуем, если выполнено одно из следующих условий: X удовлетворяет первой аксиоме счетности; X является непрерывным образом упорядоченного бикомпакта; X наследственно нормален; X наследственно диадичен; X является пространством Фреше — Урысона; X наследственно сепарабелен; X является факторпространством метрич. пространства.

Лит.: [1] Engelking R., An Outline of General Topology, Amst., 1968; [2] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., М., 1968; [3] Ефимов Б. А., «Тр. Моск. матем. о-ва», 1965, т. 14, с. 211—47.

А. В. Архангельский, Б. А. Ефимов.

ДИАДИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — тихоновское пространство, для к-рого существует бикомпактное расширение, являющееся *диадическим бикомпактом*. Класс Д. п. содержит все сепарабельные метрич. пространства и замкнут относительно тихоновских произведений. На Д. п. переносится ряд свойств диадич. бикомпактов. Напр., всякая псевдокомпактная группа диадична, но существуют недиадические финально компактные группы. Д. п. удовлетворяет *Суслина условию*, но не всякое регулярное кардинальное число $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$ является калибром Д. п. В Д. п. диадично всякое канонич. замкнутое множество, но не всякое замкнутое G_δ. Д. п., удовлетворяющее первой аксиоме счетности, метризуемо, но существуют неметризуемые наследственно нормальные Д. п., наследственно сепарабельные Д. п.

Лит.: [1] Пономарев В. И., «Fundam. math.», 1963, t. 52, № 3, p. 351—54; [2] Ефимов Б. А., «Докл. АН СССР», 1963, т. 151, № 5, с. 1021—4.

Б. А. Ефимов.

ДИАМЕТР — 1) Д. линии второго порядка — прямая, проходящая через середины параллельных хорд. Д. наз. сопряженным относительно хорд (а также направленной хорд), к-рые он делит пополам. Д. центральных линий второго порядка пересекаются в центре линии; у нецентральных линий второго порядка Д. параллельны или совпадают. Д. эллипса и гиперболы — прямые, проходящие через их центр, Д. параболы — ось параболы и прямые, параллельные оси.

2) Д. множества в метрич. пространстве — точная верхняя грань расстояний между парами точек множества.

А. Б. Иванов.

ДИВЕРГЕНЦИЯ, расхождение, векторного поля $\boldsymbol{a}(x)$ в точке $(x^1, \ldots, x^n)$ — скалярная величина

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} a^i(x),$$

где $a^i(x)$ — компоненты вектора $\boldsymbol{a}(x)$.

Д. обозначается $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(x)$ или в виде скалярного произведения $(\nabla, \boldsymbol{a})$ *Гамильтона оператора* $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$ на вектор $\boldsymbol{a}(x)$.

Если векторное поле $\boldsymbol{a}(x)$ есть поле скоростей установившегося течения несжимаемой жидкости, то $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(x)$ совпадает с интенсивностью источников ($\operatorname{div} \boldsymbol{a} > 0$) или стоков ($\operatorname{div} \boldsymbol{a} < 0$) в точке x.

Интеграл

$$\int_E \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{a})\, dx,$$

где ρ — плотность жидкости, вычисленный для n-мерной области E, равен количеству жидкости, «расходящейся» в единицу времени из E. Это количество (см. *Остроградского формула*) совпадает с величиной

$$\int_{y \in \partial E} \Big(\boldsymbol{N}(y),\ \rho \boldsymbol{a}(y) \Big)\, ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial E} N_i(y)\, \rho a^i(y)\, ds,$$

где $\boldsymbol{N}=(N_1, \ldots, N_n)$ — единичный вектор внешней нормали к ∂E, ds — элемент площади ∂E. Д. $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(x)$ является производной по объему потока поля $\boldsymbol{a}(x)$ через замкнутую поверхность:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(x) = \lim \frac{1}{\text{объем } E} \int_{\partial E} (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{a})\, ds \quad \text{при } E \longrightarrow x.$$

Таким образом, Д. носит инвариантный относительно выбора системы координат характер.

В криволинейных координатах $y=(y^1, \ldots, y^n)$, $y^j = y^j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a}(y)) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \Big(\sqrt{g}\, a^i \Big),$$

где

$$g = \det(g_{ij}), \quad g_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j},$$

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} a^i(y)\, \boldsymbol{s}_i(y),$$

а $\boldsymbol{s}_i(y)$ — орт, касающийся i-й координатной линии в точке y:

$$\boldsymbol{s}_i(y) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial y}{\partial x^i}.$$

Д. тензорного поля

$$a(x) = \left\{ a^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x), \quad 1 \leqslant i_\alpha,\ i_\beta \leqslant n \right\}$$

типа (p, q), заданного в области n-мерного аффинного пространства связности, определяется с помощью абсолютных (ковариантных) производных компонент $a(x)$ с последующей сверткой и является тензором типа $(p-1, q)$ с компонентами

$$b^{i_1 \ldots i_{s-1}\, i_{s+1} \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \sum_{k=1}^{n} \nabla_k a^{i_1 \ldots i_{s-1} k i_{s+1} \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q},$$

$$1 \leqslant k,\ i_\alpha,\ j_\beta \leqslant n.$$

В тензорном анализе и дифференциальной геометрии Д. называется также дифференциальный оператор, действующий в пространстве дифференциальных форм и связанный с оператором внешнего дифференцирования.

Лит.: [1] Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 9 изд., М., 1965; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.

Л. П. Купцов.

ДИВИЗОР — обобщение понятия делителя элемента коммутативного кольца. Впервые (под назв. «идеальный делитель») это понятие возникло в работах Э. Куммера [1] об арифметике круговых полей.

Теория Д. для коммутативного кольца A с единицей без делителей нуля состоит в построении гомоморфизма φ из мультипликативной полугруппы A^* ненулевых элементов A в нек-рую полугруппу D_0 с однозначным разложением на множители, элементы к-рой наз. (целыми) дивизорами кольца A. Теория Д. позволяет свести ряд вопросов, связанных с разложением на простые множители в кольце A, где это разложение может быть неоднозначно, к рассмотрению разложени

на простые множители в D_0. Образ $\varphi(a)\in D_0$ элемента $a\in A^*$ обозначается (a) и наз. главным дивизором элемента a. Говорят, что $a\in A^*$ делится на Д. $\mathfrak{a}\in D_0$, если $\mathfrak{a}$ делит (a) в D_0.

Точнее, пусть D_0 — свободная абелева полугруппа с единицей, свободные образующие к-рой наз. простыми дивизорами, и пусть задан гомоморфизм $\varphi\colon A^*\to D_0$. Гомоморфизм φ определяет теорию Д. кольца A, если он удовлетворяет следующим условиям.

1) Для $a, b\in A^*$ элемент a делит b в кольце A тогда и только тогда, когда (a) делит (b) в D_0.

2) Для любого $\mathfrak{a}\in D_0$

$$\{0,\ a\in A\mid \mathfrak{a} \text{ делит } (a)\}$$

является идеалом кольца A.

3) Если $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'\in D_0$ и для любого $a\in A^*$ (a) делится на $\mathfrak{a}$ тогда и только тогда, когда (a) делится на $\mathfrak{a}'$, то $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}'$.

Этими условиями гомоморфизм φ, если он существует, определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Ядро $\ker\varphi$ совпадает с группой единиц кольца A. Элементы из D_0 наз. положительными Д. кольца A. Пусть K — поле частных кольца A и $D\supset D_0$ — свободная абелева группа, порожденная множеством простых Д. Тогда для любого $c\in K^*$, $K^*=K\setminus 0$, можно определить главный дивизор $(c)\in D$. Если $c=a/b$, где $a, b\in A^*$, то $(c)=(a)/(b)$. Элементы группы D наз. дробными дивизорами (или просто дивизорами) кольца A (или поля K). Каждый Д. $\mathfrak{a}\in D$ может быть записан в виде

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1^{n_1}\dots\mathfrak{p}_r^{n_r},$$

где $\mathfrak{p}_i$ — простые Д. Либо (в аддитивной записи):

$$\mathfrak{a}=n_1\mathfrak{p}_1+\dots+n_r\mathfrak{p}_r.$$

Если $a\in K^*$ и $(a)=\Sigma n_i\mathfrak{p}_i$, то отображение $a\to\Sigma n_i$ является дискретным нормированием на поле K, наз. существенным нормированием поля K. Гомоморфизм φ продолжается до гомоморфизма $\psi\colon K^*\to D$, где $\psi(c)=(c)$, содержащегося в точной последовательности

$$1\longrightarrow U(A)\longrightarrow K^*\xrightarrow{\psi} D\longrightarrow \mathrm{C(A)}\longrightarrow 1.$$

Здесь $U(A)$ — группа единиц кольца A, а группа C(A) наз. группой классов дивизоров кольца A (или поля K). Два Д., принадлежащие одному смежному классу по подгруппе главных Д., наз. эквивалентными (в алгебраической геометрии, где рассматривается целый ряд других эквивалентностей для Д., эта эквивалентность называется линейной).

Теория Д. существует для всякого дедекиндова кольца, в частности, для колец целых элементов в полях алгебраич. чисел, причем в этом случае элементы D_0 находятся во взаимно однозначном соответствии с ненулевыми идеалами кольца A (Д. $\mathfrak{a}$ при этом соответствует идеал всех элементов A, делящихся на $\mathfrak{a}$). По этой причине в дедекиндовых кольцах группу Д. наз. также группой идеалов, а группу классов Д.— группой классов идеалов.

Группа классов Д. поля алгебраич. чисел конечна, и с вычислением ее порядка (числа классов) и структуры связаны многие задачи алгебраической теории чисел (см. [2]).

Более общо, теория Д. существует для *Крулля колец* (см. [11]). В этом случае роль D_0 играет полугруппа *дивизориальных идеалов* кольца, а роль D играет группа дробных дивизориальных идеалов.

Обобщением понятия дробного дивизориального идеала коммутативного кольца на случай алгебраич. многообразия или аналитич. пространства служит понятие

дивизора Вейля. Так называется целочисленная формальная конечная линейная комбинация $\Sigma n_W W$ неприводимых замкнутых подпространств W в X коразмерности 1. Дивизор Вейля наз. положительным, или эффективным, если все $n_W \geqslant 0$. Все дивизоры Вейля образуют группу $Z^1(X)$ (группа дивизоров Вейля). В случае, когда X — гладкое алгебраич. многообразие, понятие дивизора Вейля совпадает с понятием *алгебраического цикла* коразмерности 1.

Если A — нётерово кольцо Крулля, то каждый простой дивизориальный идеал $\mathfrak{p}$ в A определяет подпространство $V(\mathfrak{p})$ коразмерности 1 в схеме $X=\operatorname{Spec}(A)$, а каждый Д. $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1^{n_1}, \ldots, \mathfrak{p}_k^{n_k}$ может быть отождествлен тем самым с дивизором Вейля $\Sigma n_i V(\mathfrak{p})$.

Пусть X — нормальная схема, а f — мероморфная функция на X. Каноническим образом определяется главный дивизор Вейля:

$$(f) = \sum n_W W .$$

Здесь n_W есть значение дискретного нормирования кольца $O_{X,W}$ общей точки подмногообразия W на представителе f в $O_{X,W}$. Если

$$(f) = \sum n_W^+ W + \sum n_W^- W,$$

где $n_W^+ > 0$, а $n_W^- < 0$, то дивизор Вейля $(f)_0 = \Sigma n_W^+ W$ наз. дивизором нулей, а $\Sigma n_W^- W$ — дивизором полюсов функции f. Множество главных дивизоров Вейля является подгруппой $Z_p^1(X)$ группы $Z^1(X)$. Факторгруппа $Z^1(X)/Z_p^1(X)$ обозначается $C(X)$ и наз. группой классов дивизоров схемы X. Если $X=\operatorname{Spec} A$, где A — нётерово кольцо Крулля, то $C(X)$ совпадает с группой классов Д. кольца A.

Пусть K — поле алгебраич. функций. Д. поля K наз. иногда формальные конечные целочисленные комбинации дискретных нормирований ранга 1 поля K. Если K есть поле алгебраич. функций от одной переменной, то каждый такой Д. может быть отождествлен с дивизором Вейля его полной неособой модели.

Пусть X — регулярная схема или комплексное многообразие и $D=\Sigma n_W W$ — дивизор Вейля. Для любой точки $x \in X$ существует такая открытая окрестность U, что ограничение D на U

$$D\,|_U = \sum n_W (W \cap U)$$

является главным Д. (f_U) для нек-рой мероморфной функции f_U на U. Функция f_U определена однозначно с точностью до обратимой функции на U и наз. локальным уравнением Д. D в окрестности U, а соответствие $U \to f_U$ определяет сечение пучка $M_X^*/\mathcal{O}_X^*$. Вообще, дивизором Картье на окольцованном пространстве $(X, \mathcal{O}_X)$ называется глобальное сечение пучка $M_X^*/\mathcal{O}_X^*$ (пучка ростков дивизоров). Здесь M_X обозначает пучок ростков мероморфных (или рациональных) функций на X, т. е. пучок, сопоставляющий каждому открытому $U \subset X$ полное кольцо частных кольца $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, а M_X^* и $\mathcal{O}_X^*$ — пучки обратимых элементов в M_X и $\mathcal{O}_X$ соответственно. Дивизор Картье можно задавать набором локальных уравнений

$$f_i \in \Gamma\left(U_i, M_X^*\right),$$

где $\{U_i\}$ — открытое покрытие X, причем на $U_i \cap U_j$ функция f_i/f_j должна быть сечением пучка $\mathcal{O}_X^*$. В частности, мероморфная функция f определяет Д. $\operatorname{div}(f)$, наз. главным. Множество $x \in M$ таких, что $(f_i)_x \notin \mathcal{O}_{X,x}^*$, наз. носителем дивизора. Дивизоры Картье образуют абелеву группу $\operatorname{Div}(X)$, а главные Д.— ее подгруппу $\operatorname{Div}_l(X)$. Каждый Д. $D \in \operatorname{Div}(X)$ определяет обратимый пучок $\mathcal{O}_X(D)$, содержащийся в

M_X: если D представлен локальными уравнениями f_i на покрытии $\{U_i\}$, то

$$\mathcal{O}_X(D)|_{U_i} = f_i^{-1}\mathcal{O}|_{U_i} \subset M_X|_{U_i}.$$

Сопоставление $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ является гомоморфизмом группы $\mathrm{Div}(X)$ в *Пикара группу* $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. Этот гомоморфизм включается в точную последовательность

$$\Gamma(X, M_X^*) \longrightarrow \mathrm{Div}(X) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow H^1(X, M_X^*),$$

получающуюся из точной последовательности пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow M_X^* \longrightarrow M_X^*/\mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0.$$

Таким образом, $\ker \delta = \mathrm{Div}_l(X)$. Если $D - D'$ есть главный Д., то D и D' наз. л и н е й н о э к в и в а л е н т н ы м и. Если X — квазипроективное алгебраич. многообразие или комплексное пространство Штейна, то гомоморфизм δ: $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ сюръективен и индуцирует изоморфизм группы классов линейно эквивалентных Д. $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}_l(X)$ на группу Пикара $\mathrm{Pic}(X)$.

Если X — комплексное пространство, то вопрос о том, когда данный Д. является главным, есть вторая *Кузена проблема*. Напр., на комплексном пространстве Штейна $(X, \mathcal{O})$ группа классов Д. тривиальна тогда и только тогда, когда $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$.

Д. D наз. э ф ф е к т и в н ы м (или п о л о ж и т е л ь н ы м), если $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_X(D)$. В этом случае $\mathcal{O}_X(-D)$ является пучком идеалов в $\mathcal{O}_X$; носитель Д. D со структурным пучком $\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-D)$ образует подпространство в X, обозначаемое также D.

Для нормальной нётеровой схемы или нормального аналитич. пространства X имеется естественный гомоморфизм

$$\mathrm{cyc}\colon \mathrm{Div}(X) \longrightarrow Z^1(X),$$

переводящий $D \in \mathrm{Div}(X)$ в $\sum n_W W$, где $n_W = \nu_W(f)$, f — локальное уравнение D в окрестности W, а ν_W — соответствующее W дискретное нормирование (см. [3]). Гомоморфизм cyc инъективен и переводит эффективные Д. в эффективные; cyc биективен тогда и только тогда, когда X локально факториально (напр., когда X — неособая схема или аналитич. многообразие). В случае, когда cyc биективен, дивизоры Вейля и Картье отождествляются.

Пусть $f: X' \to X$ — морфизм схем, плоский в коразмерности 1. Тогда для *любого* дивизора Картье или Вейля D на X определен его обратный образ $f^*(D)$. При этом $\mathrm{cyc}(f^*(D)) = f^*(\mathrm{cyc}(D))$. Отображение $D \to f^*(D)$ является гомоморфизмом групп, переводит главные Д. в главные и тем самым определяет гомоморфизм групп

$$f^*\colon \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X')$$

(соответственно $f^*\colon C(X) \longrightarrow C(X')$).

Если X' — открытое множество в X, дополнение к к-рому имеет коразмерность $\geqslant 2$ и f — вложение X' в X, то $f^*\colon C(X) \to C(X')$ — изоморфизм, а $f\colon \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X')$ является изоморфизмом при условии, что схема X локально факториальна.

Пусть X — гладкое проективное многообразие над $\mathbb{C}$. Каждый Д. D на X определяет класс гомологий

$$[D] \in H_{2\dim X - 2}(X, \mathbb{Z});$$

двойственный по Пуанкаре к $[D]$ класс когомологий совпадает с *Чжэня классом* $c_1(\mathcal{O}_X(D)) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ обратимого пучка $\mathcal{O}_X(D)$. Так на $\mathrm{Div}(X)$ возникает гомологич. эквивалентность. Имеется теория пересечения Д. (см. [7]), приводящая к понятию численной эквивалентности, тесно связанной с понятием алгебраич. эквивалентности Д. (см. *Алгебраический цикл*). Группа

$$\mathrm{Pic}^0(X) = \mathrm{Div}_a(X)/\mathrm{Div}_l(X),$$

где $\mathrm{Div}_a(X)$ обозначает группу Д., алгебраически эквивалентных нулю, естественным образом снабжается структурой абелева многообразия (*Пикара многообразие*; если X — кривая, то оно также наз. *Якоби многообразием* кривой X). Группа $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}_a(X)$, наз. группой Нерона — Севери, имеет конечное число образующих. Последние два факта верны и для алгебраич. многообразий над произвольным полем.

Если X — одномерное комплексное многообразие (риманова поверхность), то Д. на X можно понимать как конечные линейные комбинации

$$D=\sum_i k_i x_i,$$

где $k_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in X$. Число $\sum k_i$ наз. степенью Д. D. Для компактной римановой поверхности X рода g группа классов Д. степени 0 есть g-мерное абелево многообразие и совпадает с многообразием Пикара (или с многообразием Якоби). Если f — мероморфная функция на X, то главный Д.

$$\mathrm{div}(f)=\sum_i m_i x_i - \sum_j n_j y_j,$$

где x_i — нули, y_j — полюсы функции f, а m_i, n_j — их кратности. Тогда $\sum_i m_i = \sum_j n_j$, т. е. главный Д. имеет степень 0. Д. D степени 0 на X является главным тогда и только тогда, когда существует такая сингулярная одномерная цепь C, что

$$\partial C = D \quad \text{и} \quad \int_C \omega = 0$$

для всех голоморфных форм ω степени 1 на X (теорема Абеля). См. также *Абелев дифференциал*.

Лит.: [1] Kummer E. E., «J. reine und angew. Math.», 1847, Bd 35, S. 327—67; [2] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [3] Вейль А., Введение в теорию кэлеровых многообразий, пер. с франц., М., 1961; [4] Cartier P., «Bull. Soc. math. France», 1958, t. 86, p. 177—251; [5] Grothendieck A., «Publ. Math. IHES», 1967, № 32, ch. 4, pt. 4; [6] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [7] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [8] Шевалле К., Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной, пер. с англ., М., 1959; [9] Таннинг Р., Россих., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [10] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [11] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [12] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960.

В. И. Данилов, Л. В. Кузьмин, А. Л. Онищик.

ДИВИЗОРИАЛЬНЫЙ ИДЕАЛ — дробный идеал $\mathfrak{a}$ целостного коммутативного кольца A такой, что $\mathfrak{a} = A : (A : \mathfrak{a})$ (здесь $A : \mathfrak{a}$ обозначает множество элементов x из поля частных кольца A, для к-рых $x\mathfrak{a} \subset A$). Иногда Д. и. наз. дивизором кольца. Для любого дробного идеала $\mathfrak{a}$ идеал $\tilde{\mathfrak{a}} = A : (A : \mathfrak{a})$ дивизориален. Множество $D(A)$ Д. и. кольца A является решеточно упорядоченным коммутативным моноидом (полугруппой), если произведением двух Д. и. $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ считать $\widetilde{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}$, а положительными (или эффективными) считать целые Д. и. $\mathfrak{a} \subset A$. Моноид $D(A)$ является группой тогда и только тогда, когда кольцо A вполне целозамкнуто; при этом обратным к дивизору $\mathfrak{a}$ будет $A : \mathfrak{a}$.

Обычно Д. и. рассматривают в кольце Крулля (напр., в нётеровом целозамкнутом кольце); в этом случае простые идеалы высоты 1 дивизориальны и образуют базис абелевой группы дивизоров $D(A)$. Этот результат, по существу, был установлен Э. Артином (E. Artin) и Б. Л. Ван дер Варденом (B. L. Van der Waerden) (см. [1]) в их теории квазиравенства идеалов (идеалы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ квазиравны, если $\tilde{\mathfrak{a}} = \tilde{\mathfrak{b}}$) и завершил одну из центральных тем алгебры того времени — изучение разложения идеалов.

Главные дробные идеалы, а также обратимые дробные идеалы являются дивизориальными и образуют соответственно подгруппы $F(A)$ и $J(A)$ в $D(A)$. Фактор-

группы $D(A)/F(A)=C(A)$ и $J(A)/F(A)=\mathrm{Pic}(A)$ наз. соответственно *классов дивизоров группой* и *Пикара группой* кольца A.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [2] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *В. И. Данилов.*

ДИЕЗНАЯ НОРМА в пространстве r-мерных полиэдральных цепей $C_r(E^n)$ — наибольшая из полунорм $|\cdot|'$, удовлетворяющих для любой клетки σ^r объема $|\sigma^r|$ неравенствам:

$$|\sigma^r|' \leqslant |\sigma^r|,$$

$$|\partial\sigma^{r+1}|' \leqslant |\sigma^{r+1}|,$$

$$|T_v\sigma^r - \sigma^r|' \leqslant \frac{|\sigma|^r |v|}{r+1},$$

где $T_v\sigma^r$ — клетка, полученная сдвигом на вектор v длины $|v|$.

Если $A=\Sigma a_i\sigma_i^r$, то Д. н. $|A|^*$ выражается так:

$$|A|^\# = \inf\left\{\frac{\sum |a_i||\sigma_i^r||v_i|}{r+1} + \left|\sum a_i T v_i \sigma_i^r\right|^\flat\right\},$$

где $|C|^\flat$ — *бемольная норма* цепи C.

Имеет место:

$$|aA|^\# = |a||A|^\#,$$

$$|A+B|^\# \leqslant |A|^\# + |B|^\#,$$

$$|A|^\# = 0 \Leftrightarrow A = 0,$$

$$|A|^\# \leqslant |A|^\flat;$$

если $r=0$, то $|A|^\# = |A|^\flat$.

Пополнение пространства $C_r(E^n)$ является сепарабельным банаховым пространством $C_r^\#(E^n)$, элементы к-рого наз. r-мерными диезными цепями. Для любой r-мерной полиэдральной цепи A и любого вектора v имеет место

$$|T_vA - A|^\# \leqslant \frac{|A||v|}{r+1},$$

где T_vA — цепь, полученная сдвигом A на вектор v длины $|v|$. Бемольная цепь конечной массы является диезной цепью; вообще любую бемольную цепь можно рассматривать и как диезную цепь в таком смысле: если $A=\lim^\flat A_i$, где A_i — полиэдральные цепи, и $\psi A=\lim^\# A_i$, где ψ — линейное биективное отображение пространства $C_r^\flat(E^n)$ в пространство $C_r^\#(E^n)$, и $\psi C_r^\flat$ плотно в $C_r^\#$ при Д. н.

Дать корректное определение границы ∂A диезной цепи невозможно (см. [1], с. 242, пример (*c*)); r-мерная диезная коцепь $X=XA$ есть элемент пространства $C^{\#r}(E^n)$, сопряженного к $C_r^\#(E^n)$, она является бемольной коцепью, причем

$$|X| \leqslant |X|^\flat \leqslant |X|^\#,$$

где $|X|$ — комасса X, а диезная конорма $|X|^\#$ определяется аналогично бемольной норме $|X|^\flat$. Кограница dX диезной коцепи не обязана быть диезной ([1], с. 241, пример (*a*)), однако

$$|dX| \leqslant |X|^\flat \leqslant |X|^\#.$$

Константа Липшица $\mathscr{L}(X)$ коцепи X определяется следующим образом:

$$\mathscr{L}(X) = \sup\left\{\frac{|X\cdot(T_vA-A)|}{|A||v|}\right\},$$

где A — полиэдральные цепи. Для диезных коцепей эта верхняя грань конечна и

$$(r+1)\,\mathscr{L}(X) \leqslant |X|^{\#}.$$

Любая бемольная коцепь с конечной константой Липшица является диезной, причем

$$|X|^{\#} = \sup\{|X|^{\flat},\ (r+1)\,\mathscr{L}(X)\},$$

и, кроме того,

$$|dX| \leqslant (r+1)\,\mathscr{L}(X).$$

Аналогичные понятия вводятся для r-мерных полиэдральных цепей в открытых подмножествах $R \subset E^n$. См. также *Диезная форма*.

Диезная норма в пространстве аддитивных функций γ, значениями к-рых являются r-векторы,— наибольшая из полунорм $|\cdot|'$, удовлетворяющих условиям:

$|\gamma|' \leqslant |\gamma|$, где $|\gamma|$ — полная вариация γ;

$$|T_v\gamma - \gamma|' \leqslant \frac{|v|\,|\gamma|}{r+1},$$

где $T_v\gamma(Q) = \gamma T_{-v}(Q)$ — сдвиг функции γ на вектор v длины $|v|$:

$$T_{-v}(Q) = \{q - v,\ q \in Q \subset E^n\};$$

для каждой точки p и любого ε существует $\eta > 0$ такое, что $|\gamma|' \leqslant \varepsilon|\gamma|$, если носитель $\operatorname{sp} t\gamma \subset U_\eta(p)$ и $\gamma(E^n) = 0$.

Д. н. $|\gamma|^{\#}$ имеет представление

$$|\gamma|^{\#} = \sup_{\omega} \int_{E^n} \omega\, d\gamma,$$

где ω — r-мерные диезные формы, для к-рых $|\omega|^{\#} \leqslant 1$.

Лит. см. при статье *Бемольная норма*.

М. И. Войцеховский.

ДИЕЗНАЯ ФОРМА — r-мерная *дифференциальная форма* ω в открытом подмножестве $R \subset E^n$ такая, что конечны комасса $|\omega|_0$ и комассовая константа Липшица

$$\mathscr{L}_0(\omega) = \sup \frac{|\omega(p) - \omega(q)|}{|p-q|},$$

где $p,\ q \in R$ и $|p-q|$ — длина вектора $p-q$. Диезной нормой формы ω наз. число

$$|\omega|^{\#} = \sup\{|\omega|_0,\ (r+1)\,\mathscr{L}_0(\omega)\}.$$

Теорема Уитни. Каждой r-мерной диезной коцепи X в R соответствует единственная r-мерная Д. ф. ω_X, для которой

$$X\sigma^r = \int_{\sigma^r} \omega_X$$

для всех r-мерных ориентированных симплексов σ^r; $\omega_X(p)$ определяется формулой

$$\omega_X(p) = \lim \frac{X\sigma_i}{|\sigma_i|},$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ — последовательность расположенных в одной и той же плоскости симплексов, содержащих точку p, диаметры к-рых $\to 0$. Это соответствие является взаимно однозначным линейным отображением пространства коцепей $C^{\#r}(R)$ в пространство $\Omega^{\#r}$ Д. ф., причем:

$|\omega_X|_0 = |X|$, т. е. комассе X;

$\mathscr{L}_0(\omega_X) = \mathscr{L}(X)$, т. е. константе Липшица X;

$|\omega_X)^{\#} = |X|^{\#}$, т. е. *диезной норме* X;

$\Omega^{\#r}$ является банаховым пространством.

В частности, нульмерным диезным коцепям соответствуют диезные функции — ограниченные функции, удовлетворяющие условию Липшица.

Пространство $C_r^{\#}(R)$ r-мерных диезных цепей A конечной *массы* $|A|$ с диезной нормой $|A|^{\#}$ изоморфно пространству $\Gamma_r^{\#}(E^n)$ аддитивных функций множества, значениями к-рых являются r-векторы γ, наделенному диезной нормой $|\gamma|^{\#}$; это соответствие определяется формулой:

$$XA = \int_{E^n} \omega_X \, d\gamma_A = [\omega \cdot \gamma] \ (E^n) \qquad (*)$$

для любой коцепи X, где ω_X есть r-мерная Д. ф., соответствующая коцепи X, и имеет место:

$\gamma_A(E^n) = \{A\}$, т. е. ковектору цепи A,

$|A| = |\gamma A|$, т. е. полной вариации γ_A,

$|\gamma_A|^{\#} = |A|^{\#}$, т. е. диезной норме цепи A.

Таким образом, $(*)$ является обобщением обычного интеграла Лебега — Стилтьеса. В частности, для A тогда и только тогда существует измеримая по Лебегу суммируемая функция $\alpha(p)$, ассоциированная с A (см. *Бемольная форма*), то есть

$$X \cdot A = \int_{E^n} \omega_X \cdot \alpha(p) \, dp$$

для любой коцепи X, если γ_A абсолютно непрерывна.

Если ω_A — регулярная форма, X — диезная коцепь, то существует форма $\omega_{dX} = d\omega_X$ и имеет место формула Стокса

$$\int_{\partial\sigma} \omega_X = \int_{\sigma} d\omega.$$

Аналогично обобщаются и другие результаты, установленные для регулярных форм.

Лит. см. при статье *Бемольная форма*.

М. И. Войцеховский.

ДИЗЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА — пропозициональная формула, имеющая вид

$$\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} C_{ij}, \qquad (*)$$

где каждое C_{ij} $(i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, m_i)$ есть либо переменная, либо отрицание переменной. Д. н. ф. $(*)$ выполнима тогда и только тогда, когда при нек-ром i среди $C_{i1}, \ldots, C_{im_i}$ не встречаются одновременно формулы вида p и $\neg p$, где p — переменная. Для всякой пропозициональной формулы A можно построить эквивалентную ей Д. н. ф. B, содержащую те же переменные, что и A. Такая формула B наз. Д. н. ф. формулы A.

С. К. Соболев.

ДИЗЪЮНКТНАЯ СУММА топологических пространств X_α, $\alpha \in A$, — пространство $Y = U_{\alpha \in A} Y_\alpha$, где каждое Y_α есть копия X_α, и $Y_{\alpha_1} \cap Y_{\alpha_2} = \phi$ при $\alpha_1 \neq \alpha_2$, а топология на Y определяется условием, что множество U открыто в Y тогда и только тогда, когда открыто его пересечение с каждым Y_α. Иначе говоря, каждое Y_α открыто и замкнуто в Y.

А. А. Мальцев.

ДИЗЪЮНКТНОЕ ДОПОЛНЕНИЕ множества A — множество $A^d = \{x \in X;\ x \perp A\}$ всех элементов x *векторной решетки* (векторной структуры) X, дизъюнктных множеству $A \subset X$ (см. *Дизъюнктные элементы*). $A \subset A^{dd} = (A^d)^d$; кроме того, если X — векторная *условно полная решетка*, то A^{dd} является наименьшей компонентой пространства X, содержащей A.

В. И. Соболев.

ДИЗЪЮНКТНОЕ СЕМЕЙСТВО МНОЖЕСТВ — семейство, состоящее из попарно не пересекающихся множеств.

Б. А. Ефимов.

ДИЗЪЮНКТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ — унитарные представления π_1, π_2 нек-рой группы или, соответственно, симметричные представления нек-рой а л г е б р ы с и н в о л ю ц и е й, удовлетворяющие следующим эквивалентным условиям: 1) единственный ограниченный линейный оператор из пространства представления π_1 в пространство представления π_2 равен нулю; 2) любые ненулевые подпредставления представлений π_1 и π_2 не эквивалентны. Понятие Д. п. плодотворно при изучении факторпредставлений; в частности, представление π является факторпредставлением тогда и только тогда, когда π нельзя представить в виде прямой суммы двух ненулевых Д. п. Любые два факторпредставления либо дизъюнктны, либо одно из них эквивалентно подпредставлению другого (и в последнем случае представления квазиэквивалентны). Понятие Д. п. играет важную роль в разложении представлений в прямой интеграл: если π — представление в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $\mathfrak{A}$ — *Неймана алгебра* в H, порожденная операторами представления, Z — центр $\mathfrak{A}$,

$$H=\int^{\oplus} H(l)d\mu(l)$$

— разложение пространства H в прямой интеграл гильбертовых пространств, соответствующее разложению

$$\pi=\int^{\oplus} \pi(l)d\mu(l),$$

и если при этом алгебра Z соответствует алгебре диагонализуемых операторов, то $\pi(l)$ является факторпредставлением для почти всех l, и представления $\pi(l)$ попарно дизъюнктны для почти всех l. Существует простая связь между дизъюнктностью представлений сепарабельной локально компактной группы (соответственно сепарабельной алгебры с инволюцией) и взаимной сингулярностью представителей канонических классов мер на квазиспектре группы (алгебры), соответствующих этим представлениям.

Лит.: [1] Д и к с м ь е Ж., С*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974. *А. И. Штерн.*

ДИЗЪЮНКТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ, н е з а в и с и м ы е э л е м е н т ы,—элементы $x\in X$ и $y\in X$ векторной решетки X, обладающие тем свойством, что

$$|x|\wedge|y|=0,$$

где

$$|z|=x\vee(-x),$$

что равносильно

$$|z|=\sup(x,-x).$$

Соответственно,

$$|x|=x\wedge(y),$$

что равносильно

$$|x|=\inf(x,y).$$

Символы $\wedge$ и $\vee$ являются, соответственно, *дизъюнкцией* и *конъюнкцией*. Множества $A\subset X$ и $B\subset X$ наз. д и з ъ ю н к т н ы м и, если дизъюнктна любая пара элементов $x\in A$, $y\in B$. Элемент $x\in X$ наз. д и з ъ ю н к т н ы м м н о ж е с т в у $A\subset X$, если дизъюнктны множества $\{x\}$ и A. Дизъюнктная пара элементов обозначается $x\perp y$ или xdy, а дизъюнктная пара множеств — соответственно $A\perp B$ или AdB.

П р и м е р Д. э.: положительная $x_+=x\vee 0$ и отрицательная $x_-=(-x)\vee 0$ части элемента x.

Если элементы x_i, $i=1,2,\ldots,n$ попарно дизъюнктны, то они линейно независимы; если A и B — Д. э., то порождаемые ими линейные многообразия тоже дизъюнктны; если $x_\alpha\perp y$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, причем

$$\sup_\alpha x_\alpha=x$$

существует, то $x \perp y$. Для Д. э. упрощается ряд структурных соотношений; напр., если $x \perp y$, то

$$|x+y|=|x|+|y|,$$

$$(x+y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z$$

для $z>0$, и т. д.

Понятие Д. э. может быть введено и в более общих частично упорядоченных множествах, напр. в булевых алгебрах.

Лит.: [1] Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., 1950; [2] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961; [3] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры, интегрирование мер, пер. с франц., М., 1967.

В. И. Соболев.

ДИЗЪЮНКЦИЯ — логическая операция, служащая для образования высказывания «A или B» из высказываний A и B. В формализованных языках Д. высказываний A и B обозначается посредством $A \vee B$. Высказывания A и B наз. дизъюнктивными членами высказывания $A \vee B$. Употреблению Д. в математич. логике соответствует следующая *истинностная таблица*:

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

В. Е. Плиско.

ДИКАЯ СФЕРА — замкнутое многообразие в евклидовом пространстве E^3, получающееся *диким вложением* сферы S^2 в E^3. Так, Д. с. является сумма двух дисков с общим краем, являющимся *диким узлом*. Первый пример Д. с.— так наз. «рогатая сфера», или сфера Александера (рис. 1),— ограничивает область, не гомеоморфную E^3 (на рис. это — внутренность цилиндра без всех зацепленных ручек и предельных точек к ним). На рис. 2 изображена Д. с., у к-рой только внешняя область не гомеоморфна E^3.

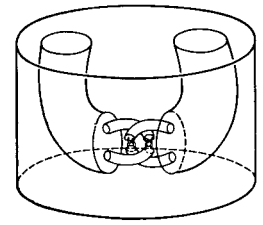


Рис. 1.

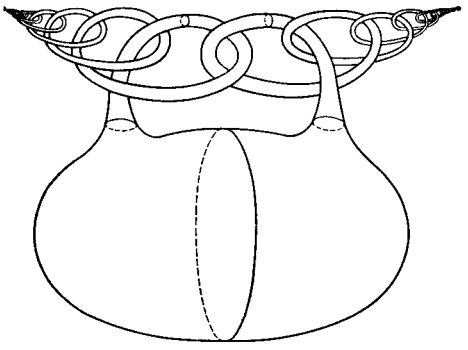


Рис. 2.

Лит.: [1] Келдыш Л. В., Топологические вложения в евклидово пространство, М., 1966 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 81).

М. И. Войцеховский.

ДИКИЙ УЗЕЛ — узел L в евклидовом пространстве E^3 такой, что не существует гомеоморфизма E^3 на себя, при к-ром L переходит в замкнутую ломаную линию, состоящую из конечного числа отрезков.

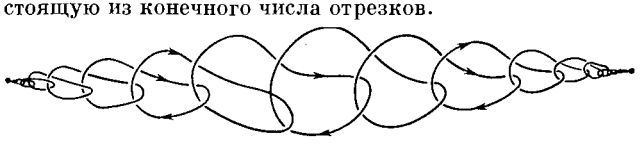


Рис. 1.

Так, дикими являются узлы, содержащие так наз. дуги Фокса — Артина — некоторые простые дуги, полученные *диким вложением* в E^3. Напр., для дуги L_1 (рис. 1) фундаментальная группа $\pi_1(E^3 \setminus L)$ не-

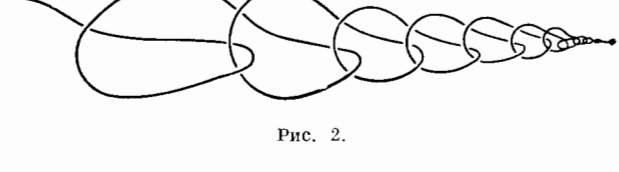


Рис. 2.

тривиальна, для дуги L_2 (рис. 2) группа $\pi_1(E^3 \setminus L)$ тривиальна, но само $E^3 \setminus L$ не гомеоморфно дополнению в E^3 к точке.

Лит. см. при ст. *Дикая сфера*. *М. И. Войцеховский.*

ДИКОЕ ВЛОЖЕНИЕ топологического пространства X в топологическое пространство Y — вложение, к-рое топологически не эквивалентно вложению из нек-рого класса выделенных вложений, наз. правильными, или ручными, вложениями. Наиболее употребительными являются следующие случаи; в качестве Y в них берется n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

1) Пусть M есть k-мерное топологич. многообразие. Топологич. вложение $g: M \to \mathbb{R}^n$ наз. диким, если не существует гомеоморфизма $\mathbb{R}^n$ на себя, переводящего $g(M)$ в локально плоское подмногообразие $\mathbb{R}^n$.

2) Пусть P есть k-мерный полиэдр. Топологич. вложение $g: P \to \mathbb{R}^n$ наз. диким, если не существует гомеоморфизма $\mathbb{R}^n$ на себя, переводящего $g(P)$ в полиэдр (т. е. в тело нек-рой триангуляции) $\mathbb{R}^n$.

3) Пусть K есть k-мерное локально компактное пространство. Топологич. вложение $g: K \to \mathbb{R}^n$ наз. диким, если не существует гомеоморфизма $\mathbb{R}^n$ на себя, переводящего $g(K)$ в подмножество k-мерного Менгера компакта M^k_n.

Если размерность $k \leqslant n-3$ и $n \geqslant 5$, то введенные свойства во всех трех случаях характеризуются локально гомотопич. свойством: вложение является диким тогда и только тогда, когда $g(X)$ не удовлетворяет свойству $1\text{—}ULC$ (см. *Топология вложений*). Положение вещей для коразмерностей $n-k=1$ и 2 значительно сложнее: вопрос решен здесь для многообразий коразмерности 1 при $n \geqslant 6$ и не решен полностью для вложений коразмерности 2 как для многообразий, так и для полиэдров. Все сказанное имеет смысл и тогда, когда в качестве Y берется n-мерное многообразие, топологическое или кусочно линейное. *М. А. Штанько.*

ДИКСОНА ГРУППА — группа экспоненциальных автоморфизмов классической простой алгебры Ли типа G_2 над конечным полем F. Если порядок F равен q, то порядок Д. г. равен $q^6(q^2-1)(q^6-1)$. При $q>2$ Д. г. является простой группой. Д. г. были открыты Л. Диксоном [1]. После этого в течение 50 лет не было найдено ни одной новой конечной простой группы, пока в 1955 К. Шевалле (C. Chevalley) не указал общий способ получения простых групп как групп автоморфизмов простых алгебр Ли (см. [2]). Метод Шевалле позволяет получить, в частности, и Д. г. (см. [3]).

Лит.: [1] Dickson L. E., «Math. Ann.», 1905, Bd 60, S. 137—50; [2] Шевалле К., «Математика», 1958, т. 2, № 1, с. 3—53; [3] Картер Р., там же, 1966, т. 10, № 5, с. 3—47. *В. Д. Мазуров.*

ДИКСОНА ИНВАРИАНТ — конструкция, используемая при изучении квадратичных форм над полями характеристики 2, позволяющая, в частности, вводить аналоги специальной ортогональной группы над такими полями. А именно, Д. и. есть элемент $D(u)$ произволь-

ного поля k характеристики 2, сопоставляемый всякому *подобию* u четномерного векторного пространства E над k относительно симметрической билинейной формы f, ассоциированной с невырожденной квадратичной формой Q на E. Д. и. введен Л. Диксоном [1].

В силу условия на характеристику поля форма f является знакопеременной, и в E существует базис $e_1, \ldots, e_{2s}$, для к-рого

$$f(e_i, e_j) = f(e_{s+i}, e_{s+j}) = 0,$$

$$f(e_i, e_{s+j}) = \delta_{ij}$$

при $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant s$ (см. *Витта разложение*). Пусть

$$f(u(x), u(y)) = \alpha(u) f(x, y)$$

для любых векторов x и y из E, и пусть для каждого $i = 1, \ldots, s$

$$u(e_i) = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} e_j + \sum_{j=1}^{s} b_{ij} e_{s+j},$$

$$u(e_{s+i}) = \sum_{j=1}^{s} c_{ij} e_j + \sum_{j=1}^{s} d_{ij} e_{s+j}.$$

Тогда элемент из k вида

$$D(u) = \sum_{i,j} (Q(e_i) a_{ij} c_{ij} + Q(e_{s+i}) b_{ij} d_{ij} + b_{ij} c_{ij})$$

наз. инвариантом Диксона подобия u относительно базиса $e_1, \ldots, e_{2s}$. Для того чтобы u было подобием относительно Q с коэффициентом подобия $\alpha(u)$ [т. е. $Q(u(x)) = \alpha(u) Q(x)$ для любого вектора $x \in E$], необходимо и достаточно, чтобы $D(u) = 0$ или $D(u) = \alpha(u)$. Подобия u относительно Q, для к-рых $D(u) = 0$, наз. прямыми подобиями. Прямые подобия образуют в группе всех подобий относительно Q нормальный делитель индекса 2.

Если Q_1 — форма, определяемая равенством $Q_1(x) = Q(u(x))$ для любого вектора $x \in E$, а $\Delta(Q)$ и $\Delta(Q_1)$ — псевдодискриминанты этих форм относительно базиса $e_1, \ldots, e_{2s}$, т. е.

$$\Delta(Q) = Q(e_1) Q(e_{s+1}) + \ldots + Q(e_s) Q(e_{2s}),$$

$$\Delta(Q_1) = Q_1(e_1) Q_1(e_{s+1}) + \ldots + Q_1(e_s) Q_1(e_{2s}),$$

то

$$\Delta(Q_1) = (\alpha(u))^2 \Delta(Q) + (D(u))^2 + \alpha(u) D(u).$$

Лит.: [1] Dickson L. E., Linear Groups..., Lpz., 1901; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [3] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974. *В. Л. Попов.*

ДИЛАТАЦИЯ — устаревший термин для обозначения специальных бирациональных преобразований, называемых теперь *моноидальными преобразованиями*. *В. А. Исковских.*

ДИНАМИКА — раздел механики, в к-ром изучается движение материальных тел, происходящее под действием приложенных к ним сил, вызывающих или изменяющих это движение,— так называемых ускоряющих сил.

Основы Д. заложены в нач. 17 в. Г. Галилеем (G. Galilei), к-рый первый рассмотрел движение тел под действием силы тяжести и установил закон инерции. Основные принципы Д. были четко сформулированы И. Ньютоном (I. Newton) в виде трех основных законов механики и следствий из них. Дальнейшее развитие и совершенствование законов Д. содержится в трудах Л. Эйлера (L. Euler), Ж. Д'Аламбера (J. D'Alembert), Ж. Лагранжа (J. Lagrange), где были даны общие методы составления уравнений Д. Начало аналитич. методам исследования уравнений Д. положили Ж. Лагранж, У. Гамильтон (W. Hamilton) и К. Якоби (C. Jacobi). Позднейшим развитием этих методов занимались К. Гаусс (C. Gauss), М. В. Остроградский, А. Пуанкаре (H. Poincaré), С. А. Чаплыгин, Н. Г. Четаев и др.

Д., основывающаяся на принципах Г. Галилея и И. Ньютона, наз. классической или ньютоновской Д., в отличие от направлений, исходящих из иных принципов (квантовая механика, релятивистская Д. и др.). Классич. Д. состоит из совокупности математич. выводов и заключений, являющихся следствиями основных законов Галилея и Ньютона. В ней аксиоматически вводятся понятия неподвижного пространства (абсолютной неподвижной системы отсчета или инерциальной системы отсчета) и абсолютного времени, одинакового для всех точек пространства. Абсолютному пространству приписываются геометрич. свойства евклидова пространства. Законы Ньютона формулируются по отношению к абсолютному пространству и абсолютному времени. Они остаются справедливыми по отношению к инерциальным системам отсчета. Заключения о движении материальных тел Д. получает с помощью построения моделей (материальной точки, абсолютно твердого тела, континуума и др.).

По характеру решаемых задач Д. может быть разделена на Д. материальной точки и Д. системы материальных точек. Понятие материальной точки является основным понятием классической Д. Материальной точкой наз. такое тело, геометрич. размерами к-рого можно пренебрегать при изучении его движения, но к-рое обладает конечной массой. Первый и второй законы Ньютона формулируются в Д. только для одной материальной точки. Кроме материальной точки в Д. рассматривают еще модель абсолютно твердого тела, расстояния между точками к-рого не изменяются во время движения. Эти основные модели Д. позволяют успешно решать ряд конкретных задач о движении реальных тел.

В Д. системы материальных точек рассматриваются движения таких тел, к-рые находятся во взаимосвязи друг с другом. Д. системы включает в себя Д. твердого тела, Д. систем с переменной массой, Д. упругого и пластически деформируемого тела, Д. жидкости и газа и др.

Характер движения материальной системы определяется действующими на нее силами (активными силами), а также связями, наложенными на точки системы, действие к-рых может быть заменено действием сил реакций связи (пассивными силами). Действующие на систему материальных точек силы являются результатом взаимодействия отдельных материальных точек, как входящих, так и не входящих в рассматриваемую систему. В соответствии с этим различают силы внутренние и внешние. Силы могут быть представлены как функции положений материальных точек, их скоростей и времени.

В Д. решаются две основные задачи: 1) определение силы, производящей данное движение материальной точки или системы; 2) определение движения материальной точки или системы, происходящее под действием заданных сил. Задачи Д. решаются при помощи дифференциальных уравнений движения. Для одной материальной точки эти уравнения выражают второй закон Ньютона и могут быть записаны в виде

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N},$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор материальной точки в рассматриваемой системе отсчета, $d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ — ее ускорение, $\boldsymbol{F}$ — действующая на точку активная сила, $\boldsymbol{N}$ — сила реакций связи. Для определения закона движения материальной точки нужно найти значение $\boldsymbol{r}$ для каждого момента времени. Задача интегрирования уравнений Д. решается с помощью общих теорем Д. (теорем об изменении количества движения, момента количества движения и живых сил). Эти теоремы обусловливают важные физич. зависимости между основными динамич. ха-

рактеристиками движения и взаимодействия материальных тел; в ряде случаев они значительно упрощают процесс интегрирования уравнений Д. Кроме того, общие теоремы дают возможность изучать отдельные стороны рассматриваемого движения. Общие теоремы для системы материальных точек могут быть получены непосредственным обобщением общих теорем для одной материальной точки. При выводе из *Д'Аламбера — Лагранжа принципа* они становятся более совершенными и не содержат реакций связи, а устанавливают непосредственную зависимость между динамич. величинами, характеризующими движение системы, и действующими на систему активными силами. Наиболее распространенными являются системы с голономными идеальными связями. Движение таких систем полностью описывается *Лагранжа уравнениями* 2-го рода, получающимися из принципа Д'Аламбера — Лагранжа. Эти уравнения наиболее удобны при исследовании движения системы материальных точек. Для материальных систем с неголономными идеальными связями наиболее общими уравнениями движения, не содержащими реакций связей, являются *Аппеля уравнения*.

Изучением свойств уравнений движения механич. систем, обусловленных специфич. формой этих уравнений, занимается аналитич. Д. Она рассматривает общие принципы Д., вывод из этих принципов дифференциальных уравнений движения и методов их интегрирования. Методы аналитич. Д. широко применяются как для решения различных задач Д., так и в различных областях физики. Большое значение для исследования свойств движения механич. систем получили канонические *Гамильтона уравнения*, к-рые дают возможность сформулировать ряд эффективных методов решения задач Д.

Помимо установления общих методов составления и интегрирования уравнений движения материальных тел, движущихся под действием ускоряющих сил, в Д. рассматривается ряд специальных задач: Д. твердого тела, Д. гироскопич. систем, теория колебаний механич. систем, теория устойчивости движения, теория удара и др.

Лит.: [1] Галилей Г., Соч., т. 1 — Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению..., пер. с итал., М.—Л., 1934; [2] его же, Диалог о двух главнейших системах мира, птолемеевой и коперниковой, пер. с итал., М.—Л., 1948; [3] Ньютон И., Математические начала натуральной философии, пер. с латин., в кн.: Крылов А. Н., Собр. трудов, т. 7, М.—Л., 1936; [4] Эйлер Л., Основы динамики точки, пер. с латин., М.—Л., 1938; [5] Д'Аламбер Ж., Динамика, пер. с франц., М.—Л., 1950; [6] Лагранж Ж., Аналитическая механика, пер. с франц., т. 1—2, М.—Л., 1950; [7] Якоби К., Лекции по динамике, пер. с нем., М.—Л., 1936; [8] Гамильтон У., Об общем методе в динамике ..., пер. с англ., в кн.: Вариационные принципы механики, М., 1959; [9] Герц Г., Принципы механики, изложенные в новой связи, пер. с нем., М., 1959; [10] Остроградский М. В., Лекции по аналитической механике, в кн.: Остроградский М. В., Полн. собр. трудов, т. 2, К., 1961; [11] Жуковский Н. Е., Теоретическая механика, 2 изд., М.—Л., 1952; [12] Чаплыгин С. А., Курсы лекций по теоретической механике, Собр. соч., т. 4, М.—Л., 1949; [13] Четаев Н. Г., Устойчивость движения.—Работы по аналитической механике, М., 1962.

Е. Н. Березкин.

ДИНАМИКА СОРБЦИИ — процесс поглощения адсорбата (паров, газов или растворенного вещества) твердым телом, сопровождающийся адсорбцией и абсорбцией, т. е. соответственно поверхностным и объемным поглощением. Д. с. определяется скоростями адсорбции, внешней и внутренней диффузией адсорбата, и описывается системой дифференциальных уравнений диффузионного переноса вещества с учетом кинетики адсорбции. В большинстве случаев процесс сорбции происходит в неизотермических условиях — при выделении теплоты адсорбции и при капиллярной конденсации —так что процессы переноса массы вещества (диффузия) сопровождаются переносом тепла (теплообме-

ном), т. е. описываются системой дифференциальных уравнений массо- и теплопереноса. Если адсорбентом является смесь газов и паров или смесь растворенных веществ, то молекулярный перенос массы вещества и тепла описывается системой уравнений Онсагера (см. [2]).

В случае бинарной смеси система дифференциальных уравнений тепло- и массопереноса, решение к-рой, при соответствующих краевых условиях, определяет Д. с., имеет вид

$$\rho \frac{d\rho_{10}}{d\tau} = \operatorname{div}\left[D\rho \nabla\rho_{10} + \frac{k_T}{T}\nabla T\right] + I_1(\rho_{10}, T) \qquad (1)$$

$$c_p\rho \frac{dT}{d\tau} = \operatorname{div}(\lambda\nabla T) + \operatorname{div}(D\rho Q^*\nabla\rho_{10}) + (h_1 - h_2) I_1 + (c_{p_1} + c_{p_2}) j_1 \nabla T, \qquad (2)$$

где ρ_{10} — относительная плотность компоненты «1», $\rho_{10}=\rho_1/\rho$; $\rho=\rho_1+\rho_2$, D — коэффициент диффузии, T — температура, τ — время, c_p — удельная изобарная теплоемкость, λ — коэффициент теплопроводности, Q^* — изотермич. теплота переноса, k_T — термодиффузионная постоянная, h — удельная энтальпия, j_1 — диффузионный поток массы компоненты «1», $d/d\tau$ — полная или субстанциональная производная, равная

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau} + v\nabla\rho$$

(где v — скорость движения центра тяжести потока адсорбата), $I_1(\rho_{10}, T)$ — мощность источника массы вещества, обусловленная кинетикой адсорбции и фазовыми превращениями, к-рые в общем случае являются функциями концентрации ρ_{10} и температуры T.

Скорость v движения потока адсорбата получается из решений *Навье — Стокса уравнений*. Краевые условия определяются характером и физич. механизмом взаимодействия поверхности твердого тела с окружающей средой (адсорбатом). При этом скорость массообмена определяется внешней диффузией адсорбата к поверхности тела и кинетикой адсорбции. Обычно рассматривают два крайних случая:

1) массообмен определяется диффузией;

2) концентрация на поверхности тела зависит только от скорости адсорбции.

Для случая сорбции пара капиллярнопористыми телами получены решения системы дифференциальных уравнений (1), (2) применительно к телам простейшей формы (см. [1]).

Процесс десорбции водяного пара пористыми телами составляет часть процесса сушки. Д. с. в этом случае рассчитывается приближенно по следующим уравнениям массо- и теплообмена

$$q(\tau) = \rho_0 R_v r \frac{d\bar{u}}{d\tau}(1 + \mathrm{Rb}),$$

$$-\frac{d\bar{u}}{d\tau} = \varkappa N(\bar{u} - \bar{u}_p),$$

где $d\bar{u}/d\tau$ — скорость десорбции, r — удельная теплота сорбции, ρ_0 — плотность сухого тела, $q(\tau)$ — удельный поток тепла на поверхности тела, R_v — гидравлич. радиус тела, $\bar{u}$ — среднее влагосодержание (относительная концентрация) тела, $\bar{u}_p$ — равновесное влагосодержание, $\varkappa$ — относительный коэффициент сушки, N — скорость сушки в первом периоде — периоде постоянной скорости, Rb — число Ребиндера.

Лит.: [1] Лыков А. В., Михайлов Ю. А., Теория тепло- и массопереноса, М.—Л., 1963; [2] Де Гроот С., Мазур П., Неравновесная термодинамика, пер. с англ., М., 1964; [3] Лыков А. В., Теория сушки, 2 изд., М., 1968; [4] Франк-Каменецкий Д. А., Диффузия и теплопередача в химической кинематике, 2 изд., М., 1967; [5] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966.

А. В. Лыков.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ИГРА — разновидность *позиционных игр*, характеризующаяся тем, что в такой игре игроки управляют «движением точки» в пространстве состояний X. Пусть $I=\{i\}$ — множество игроков. Каждой точке $x\in X$ соответствует множество $S_i^{(x)}$ элементарных стратегий игрока $i\in I$ в этой точке и тем самым — множество $S^{(x)}=\prod_i S_i^{(x)}$ элементарных ситуаций в x. На X заданы переходные функции распределения $F(x_k\,|\,x_1, s^{(x_1)}, \ldots, x_{k-1}, s^{(x_{k-1})})$, $x_i\in X, s^{(x_i)}\in S^{(x_i)}$, представляющие собой закон движения управляемой точки, известный каждому из игроков. Функция F при фиксированном x_k измерима по всем остальным аргументам. Последовательность P чередующихся состояний и элементарных ситуаций $x_1, s^{(x_1)}, \ldots, x_k, s^{(x_k)}, \ldots$ наз. партией общей Д. и.; она определяется индуктивно по следующей схеме: пусть уже определен отрезок партии (дебют) $x_1, s^{(x_1)}, \ldots, x_{k-1}$ $(k\geqslant 2)$, и каждый игрок i выбирает свою элементарную стратегию $s_i^{(x_{k-1})}\in S_i^{(x_{k-1})}$, так что складывается элементарная ситуация $s^{(x_{k-1})}$; тогда игра переходит случайно, в соответствии с распределением $F(\cdot\,|x_1, s^{(x_1)}, \ldots, x_{k-1}, s^{(x_{k-1})})$, в состояние x_k. На каждой партии P определен выигрыш $h_i(P)$ игрока i. Если множество всех партий обозначить $\mathfrak{P}$, то Д. и. задается системой

$$\Gamma=\langle I,\ X,\ \{S_i^{(x)}\}_{i\in I,\ x\in X},\ F,\ \{h_i,\ (P)\}_{i\in I,\ P\in\mathfrak{P}}\rangle.$$

Обычно в Д. и. считается, что к очередному моменту выбора элементарной стратегии игроки знают предшествующий дебют. В этом случае чистая стратегия s_i игрока i есть набор функций $s_i^{(x)}(x_1, s^{(x_1)}, \ldots, s^{(x_{k-1})}, x)$, ставящих в соответствие заканчивающемуся в x дебюту элементарную стратегию $s_i^{(x)}\in S_i^{(x)}$. Рассматривались также Д. и., в к-рых игрокам известен не весь предшествующий дебют, напр. игры с «запаздыванием информации».

Для того чтобы игра была определена, необходимо, чтобы каждая ситуация $s=\{s_i\}$ индуцировала вероятностную меру μ_s на множестве всех партий и чтобы для каждого i существовало математич. ожидание $\mathsf{E}h_i(P)$ по мере μ_s. Это математич. ожидание и представляет собой выигрыш игрока i в ситуации s.

Функции $h_i(P)$, вообще говоря, произвольны; однако более других изучались Д. и. либо с терминальным выигрышем (игра заканчивается, как только x_k оказывается в терминальном множестве $X^T\subset X$ и $h_i(P)=h_i(x_k)$, где x_k — последнее состояние в игре), либо с интегральным выигрышем $(h_i(P)=\sum_{k=1}^{\infty}h_i(x_k, s^{(x_k)}))$.

Д. и. могут рассматриваться как игровой вариант задачи оптимального управления с дискретным временем, к каковой они и сводятся, если число игроков равно одному. Если в Д. и. $X\subset\mathbb{R}^n$, дискретное время заменяется на непрерывное, а случайные факторы устраняются, то получают *дифференциальную игру*, к-рая, таким образом, может рассматриваться как разновидность Д. и.

Частными классами Д. и. являются *стохастические игры*, *рекурсивные игры* и игры на выживание.

Лит.: [1] Воробьев Н. Н., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 2, с. 81—140.

В. К. Доманский.

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — в первоначальном значении термина механич. система с конечным числом степеней свободы. Состояние такой системы обычно характеризуется ее расположением (конфигурацией) и скоростью изменения последнего, а закон движения указывает, с какой скоростью изменяется состояние системы.

В простейших случаях состояние можно охарактеризовать посредством величин $w_1, \ldots, w_m$, к-рые могут принимать произвольные (действительные) значения, причем двум различным наборам величин $w_1, \ldots, w_m$ и и $w_1', \ldots, w_m'$ отвечают различные состояния, и обратно, а близость всех w_i' к w_i означает близость соответствующих состояний системы. Закон движения тогда записывается в виде *автономной системы* обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{w}_i = f_i(w_1, \ldots, w_m), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

Рассматривая значения $w_1, \ldots, w_m$ как координаты точки w в m-мерном пространстве, можно геометрически представить соответствующее состояние Д. с. посредством этой точки w. Последнюю наз. ф а з о в о й (иногда также и з о б р а ж а ю щ е й, или п р е д с т а в л я ю щ е й) т о ч к о й, а пространство — ф а з о в ы м п р о с т р а н с т в о м системы. (Прилагательное «фазовый» связано с тем, что в прошлом состояния системы нередко называли ее фазами.) Изменение состояния со временем изображается как движение фазовой точки по нек-рой линии (так наз. ф а з о в о й т р а е к т о р и и; часто, впрочем, ее наз. просто траекторией) в фазовом пространстве. В последнем определено векторное поле, сопоставляющее каждой точке w выходящий из нее вектор $f(w)$ с компонентами

$$(f_1(w_1, \ldots, w_m), \ldots, f_m(w_1, \ldots, w_m)). \tag{2}$$

Дифференциальные уравнения (1), к-рые с помощью введенных обозначений можно сокращенно записать в виде

$$\dot{w} = f(w), \tag{3}$$

означают, что в каждый момент времени векторная скорость движения фазовой точки (или, как часто говорят, в е к т о р ф а з о в о й с к о р о с т и; не путать с употреблением того же термина в оптике и вообще при рассмотрении различных волновых процессов) равна вектору $f(w)$, исходящему из той точки w фазового пространства, где в данный момент находится движущаяся фазовая точка. В этом состоит так наз. к и н е м а т и ч е с к а я и н т е р п р е т а ц и я системы дифференциальных уравнений (1).

Напр., состояние частицы без внутренних степеней свободы (как говорят в механике, материальной точки), движущейся в потенциальном поле с потенциалом $U(x_1, x_2, x_3)$, характеризуется ее положением $x = (x_1, x_2, x_3)$ и скоростью $\dot{x}$; вместо последней можно использовать импульс $p = m\dot{x}$, где m — масса частицы. Закон движения можно записать в виде

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p, \quad \dot{p} = -\operatorname{grad} U(x). \tag{4}$$

Формулы (4) представляют собой сокращенную запись системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Фазовым пространством здесь служит 6-мерное евклидово пространство, шесть компонент вектора фазовой скорости суть компоненты обычной скорости и силы, а проекция фазовой траектории на пространство x_i (параллельно пространству импульсов) есть траектория частицы в обычном смысле слова.

В ряде случаев оказывается, что невозможно установить такое соответствие между всеми состояниями Д. с. и точками евклидова пространства, к-рое обладало бы желаемыми свойствами, однако такое соответствие можно установить локально, т. е. для состояний, к-рые достаточно близки друг к другу. Сохраняя термин «фазовое пространство» для совокупности всех состояний Д. с., можно сказать, что в общем случае фазовое пространство является не евклидовым пространством, а нек-рым *дифференцируемым многообразием* W^m. Ло-

кально, т. е. в любой карте (локальной системе координат) многообразия W^m, движение Д. с. описывается системой дифференциальных уравнений вида (1). Глобальное же (т. е. пригодное для всех состояний Д. с.) и инвариантное (т. е. не зависящее от выбора карты) описание движения дается уравнением (3), в к-ром f является заданным на W^m векторным полем, сопоставляющим каждой точке w вектор $f(w)$, лежащий в касательном пространстве к многообразию в этой точке; уравнение (3) означает, что в процессе движения фазовая точка, совпадающая в данный момент времени с точкой $w \in W^m$, имеет в этот момент скорость $f(w)$. В локальных координатах вектор $f(w)$ представляется посредством своих компонент (2), и (3) сводится к (1).

Даже во многих случаях, когда фазовое пространство является евклидовым, часть движений рассматриваемой Д. с. может описываться посредством векторного поля на нек-ром инвариантном многообразии W, т. е. подмногообразии фазового пространства, обладающем тем свойством, что траектория, проходящая через к.-н. точку $w \in W$, целиком лежит в W. Так, уже в предыдущем примере, если ограничиться движениями с определенным значением энергии E, нужно рассматривать систему (4) не во всем 6-мерном евклидовом пространстве переменных (x, p), а на его 5-мерном подмногообразии, выделяемом уравнением

$$\frac{p^2}{2m} + U(x) = E,$$

где $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$. Инвариантность этого многообразия отражает тот факт, что при движении частицы в потенциальном поле ее энергия сохраняется, т. е. $p^2/2m + U(x)$ является первым интегралом системы (4) (так наз. интеграл энергии). Много аналогичных примеров связано с *циклическими координатами*.

Примером Д. с. с неевклидовым фазовым пространством является твердое тело с неподвижной точкой O. Если ввести две ортогональные системы координат с началом в O — одну неподвижную, а другую жестко связанную с телом, то очевидно, что положение твердого тела будет характеризоваться расположением второй системы координат относительно первой, т. е. ортогональной матрицей 3-го порядка с определителем 1 (или к.-н. эквивалентным способом, см. *Эйлеровы углы, Кэли — Клейна параметры*). Поэтому совокупность всевозможных положений данной механич. системы (или, как говорят, ее конфигурационное пространство) есть специальная ортогональная группа 3-го порядка SO (3). Фазовым же пространством W^6 является *касательное расслоение* группы SO (3), ибо скорость изменения положения характеризуется касательным вектором к SO (3). В качестве локальных координат в SO (3) (выбор таковых автоматически определяет и нек-рые локальные координаты в W^6) обычно принимают углы Эйлера; тогда уравнения движения записываются как *Эйлера уравнения* (движения твердого тела).

Изложенная выше кинематич. интерпретация автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) [или картина движения фазовых точек в фазовом многообразии согласно уравнению (3)] никак не связана с тем, описывают ли эти уравнения к.-л. механич. систему. Поэтому термин «Д. с.» стал применяться в более широком смысле, означая произвольную физич. (скажем, радиотехнич.) систему, описываемую дифференциальными уравнениями вида (1) или (3), а затем — и просто систему дифференциальных уравнений такого вида, безотносительно к ее происхождению. Среди всех Д. с. в этом расширенном смысле слова Д. с. механики выделяются нек-рыми специфич. свойствами; большинство из них относится к специальному классу *гамильтоновых систем*. (Однако в механике рассматриваются и системы, не входящие в этот класс,— тако-

во, напр., большинство *неголономных систем*. В то же время гамильтоновы системы встречаются и в ряде вопросов физики.)

В этом смысле понятие Д. с. эквивалентно понятию автономной системы дифференциальных уравнений вида (1) или (3). Однако практически о Д. с. говорят тогда, когда речь идет о качественной картине поведения всех траекторий во всем фазовом пространстве (глобальная теория) или по крайней мере в нек-рой его части (локальная теория); в теории Д. с. особенно большое внимание уделяется поведению фазовых траекторий при неограниченном возрастании времени. Из отдельных же траекторий в теории Д. с. интересуются обычно теми, свойства к-рых могут в значительной степени влиять на качественную картину, хотя бы локальную. Сюда относятся *равновесия положения* (или особые точки), *периодические траектории* (см. также *Предельный цикл*), *сепаратрисы*.

Для системы двух уравнений вида (1) ($m=2$) кинематич. интерпретация дает весьма наглядный и эффективный способ исследования, поскольку векторное поле $f(w)$ и фазовые траектории могут быть практически изображены на фазовой плоскости. Уже в случае трех уравнений ($m=3$) пришлось бы производить соответствующие построения в 3-мерном пространстве, что довольно затруднительно, а при $m>3$ подобные практич. возможности вообще отпадают. Поэтому при $m\geqslant 3$ (а в ряде случаев и при $m=2$) роль кинематич. интерпретации состоит в использовании при исследовании дифференциальных уравнений геометрич. понятий, методов и языка, в той или иной степени обобщающих привычные из повседневной жизни геометрич. представления.

Уже сравнительно слабые предположения о векторном поле $f(w)$ (напр., его дифференцируемость) гарантируют то, что для каждой точки $w_0\in W^m$ существует ровно одно решение $w(t)$ уравнения (3), имеющее w_0 своим начальным значением: $w(0)=w_0$. Физически это соответствует тому, что при заданном законе движения (3) состояние системы в любой момент времени полностью определяется ее начальным состоянием. Вообще говоря, это решение может быть определено не для всех t, а лишь на нек-ром отрезке времени. В глобальной теории Д. с. делается дополнительное предположение, что при любом начальном значении соответствующее решение определено при всех t, тогда как в локальных вопросах обычно нецелесообразно делать к.-л. предположения о дальнейшем поведении тех траекторий, к-рые покидают рассматриваемую область фазового пространства.

При выполнении указанного предположения, если каждому $w_0\in W^m$ сопоставить то состояние, куда перейдет за время t фазовая точка, движущаяся согласно (3) и вышедшая при $t=0$ из w_0, то получится нек-рое отображение S_t фазового пространства W^m в себя:

$$S_t w_0 = w(t),$$

где $w(t)$ — решение (3) и $w(0)=w_0$. Отображения S_t образуют непрерывную однопараметрич. группу *диффеоморфизмов* фазового многообразия W^m [групповое свойство $S_t S_s = S_{t+s}$ является следствием автономности системы (3)]. В порядке иллюстрации в литературе нередко проводят аналогию с известным из повседневной жизни и ранее всего изученным в науке примером, где возникает подобное семейство преобразований пространства,— стационарным течением жидкости или газа: за время t частица жидкости перетекает из точки w_0 в $S_t w_0$. (Впрочем, эта аналогия довольно поверхностна, ибо воображаемая «фазовая жидкость», «текущая» в фазовом пространстве, отличается от реальных сплошных сред отсутствием взаимодействия между соседними частицами.) В связи с этим в качестве синонима термина «Д. с.» употребляется термин *поток*.

В физич. литературе принято говорить об а н с а м б л е д и н а м и ч е с к и х с и с т е м. Это означает, что каждому из возможных состояний данной физич. системы (т. е. каждой точке фазового пространства) мысленно сопоставляется нек-рая физич. система, описываемая уравнением (3) и находящаяся в этом состоянии; полученную совокупность однотипных систем (никак не взаимодействующих друг с другом), различающихся только состояниями, к-рыми они обладают в данный момент, и называют «ансамблем». На этом языке преобразованиям S_t фазового пространства соответствует эволюция «ансамбля», заключающаяся в изменении состояния входящих в него систем.

При разработке глобальных аспектов теории Д. с. понятие Д. с. подверглось дальнейшему обобщению. В наиболее широком смысле под д и н а м и ч е с к о й с и с т е м о й понимают произвольное д е й с т в и е г р у п п ы (или даже полугруппы) G на нек-ром множестве W, именуемом фазовым пространством. Это значит, что для любого $g\in G$ определено отображение $S_g\colon W\to W$, причем $S_{g_1}S_{g_2}=S_{g_1g_2}$, и если e — единица G, то S_e — тождественное преобразование (т. е. $S_e(w)=w$ для всех w). Совокупность точек $S_g(w_0)$, где w_0 фиксировано, а g пробегает G, наз. т р а е к т о р и е й (или о р б и т о й), проходящей через точку w_0, или, короче, траекторией этой точки. Группа G обычно считается топологической группой, фазовое пространство — топологическим пространством, или пространством с мерой, а отображение

$$G\times W\longrightarrow W,\quad (g,\ w)\longrightarrow S_g(w) \tag{5}$$

предполагается, соответственно, непрерывным или измеримым, причем в последнем случае обычно предполагается, что отображения S_g сохраняют меру (т. е. прообраз измеримого подмножества фазового пространства измерим и имеет ту же меру). Соответствующие направления в теории Д. с. наз. *топологической динамикой* (см. [6], [11]) и *эргодической теорией* (см. [4], [5], [7], [12]). Если G—группа Ли, W — гладкое многообразие, а отображение (5) гладкое, то говорят о г л а д к о й д и н а м и ч е с к о й с и с т е м е.

Впрочем, во всех трех направлениях основными являются случаи, когда G — либо группа $\mathbb{R}$ действительных чисел, и тогда Д. с. наз. потоком (хотя иногда этот термин употребляют как синоним термина «Д. с.» в наиболее общем его значении), либо G — группа $\mathbb{Z}$ целых чисел (вариант: аддитивная полугруппа неотрицательных целых чисел), и тогда для таких Д. с. был предложен термин к а с к а д (говорят также о д и н а м и ч е с к о й с и с т е м е с д и с к р е т н ы м в р е м е н е м, но этот термин может означать также и только то, что в G берется дискретная топология). Гладкий поток, для к-рого отображение (5) — класса C^2, определяется гладким векторным полем

$$f(w)=\frac{d}{dt}\,S_t(w)\Big|_{t=0}$$

— при изменении t точка $w=S_t(w_0)$ движется согласно (3). В случае каскада отображения S_n получаются итерированием преобразования S_1 и обратного к нему (вариант: итерированием одного только отображения S_1); для гладкого каскада все S_n суть диффеоморфизмы (вариант: непрерывно дифференцируемые отображения).

Среди названных трех направлений в теории Д. с. топологич. динамика имеет ярко выраженный теоретико-множественный характер, а ее роль вначале была как бы вспомогательной. Дело в том, что обсуждение ряда понятий (*неблуждающая точка*, *предельное множество* траекторий, *минимальное множество*, почти периодичность, дистальность, *устойчивость по Лагранжу*, *устойчивость по Пуассону* и др.) и связей между ними, важных для трактовки более конкретных объектов — гладких Д. с.,— целесообразно провести в более аб-

страктной обстановке, отвлекаясь от задания Д. с. при помощи диффеоморфизма или уравнения (3). Это и делается в топологич. динамике. Позднее она получила значительное развитие, главным образом, в направлении изучения пек-рых минимальных множеств и их расширений (см. [13] — [15]; а также *Дистальная динамическая система*).

Зарождение эргодич. теории связано с классич. (доквантовой) статистич. физикой. При обосновании последней возник вопрос, можно ли, не решая гамильтонову систему дифференциальных уравнений, к-рая описывает движение частиц, образующих рассматриваемое макроскопич. тело, и даже не зная начальные значения для ее решения (что означало бы задание мгновенных положений и скоростей всех этих частиц), указать свойства статистич. характера, проявляющиеся в поведении при $t \to \infty$ всех или почти всех ее фазовых траекторий. Напр., существует ли при почти всех w предел переменного среднего

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(S_t w)\, dt, \qquad (6)$$

где $g(w)$ есть функция, заданная на фазовом пространстве, и зависит ли этот предел от w? Приведенное выше определение Д. с., принятое в эргодич. теории, является результатом абстрагирования от конкретного происхождения систем статистич. физики, в частности от их гамильтоновой структуры; от последней удерживается лишь одно из ее следствий — сохранение меры при преобразованиях S_t. В данном случае такое абстрагирование служит не только для логич. анализа понятий, но и приводит к значительному увеличению общности теории, позволяя включить в нее разнообразный материал, связанный с теорией вероятностей, функциональным анализом, теорией чисел, топологич. алгеброй. Наличие связей с рядом разделов математики делает содержание эргодич. теории достаточно богатым, чтобы обеспечить ее успешное развитие в качестве самостоятельной научной дисциплины. Наряду с изучением статистики решений при $t \to \infty$, включающим как доказательство существования предела (6) при почти всех w и вывод условий, необходимых при его независимости от w, так и ряд других свойств (например, *перемешивание*), большую роль в эргодической теории играет проблема изоморфизма Д. с., исследование которой привело к построению ряда инвариантов Д. с. и выделению некоторых классов Д. с. с интересными свойствами.

Теория гладких Д. с. (см. [7], [8], [10]) в значительной степени сливается с *качественной теорией дифференциальных уравнений*, в особенности когда речь идет о конкретно заданной системе (1) или когда (независимо от способа задания изучаемой Д. с.) существенно используются соображения, относящиеся к выписанным в более или менее явном виде дифференциальным уравнениям. Гладкие Д. с. исследуются и локально, и глобально. К числу локальных свойств относятся: исследование положений равновесия и других упомянутых выше специальных типов траекторий для потоков и их аналогов для каскадов, *квазипериодических движений* и инвариантных многообразий для тех и других, а также и нек-рых классов *инвариантных множеств*. Исследование этих объектов включает в себя их обнаружение и локализацию, а также изучение в их окрестности поведения других траекторий Д. с. При исследовании неподвижных точек каскадов, положений равновесия и периодич. решений потоков применяются как аналитические, так и топологич. методы (см. [2], [3], [9]); для других объектов — только аналитические. Многие из этих методов связаны со следующей постановкой вопроса (или в равной степени применимы при ней): что происходит с потоком или каскадом, имеющим определенные свойства (локальные или глобальные) при малом изменении определяющего его векторного поля или диффео-

морфизма? К такому подходу примыкают также и некрые из результатов и понятий глобальной теории, в особенности связанные со стремлением выделить такие свойства или классы Д. с., к-рые были бы в нек-ром смысле «типичными» (см., напр., *Грубая система*). Другие результаты глобального характера относятся к определенным классам Д. с., зачастую возникшим из смежных дисциплин.

В специальном случае потоков на двумерных поверхностях можно получить более или менее удовлетворительную информацию о могущих здесь представиться различных вариантах поведения фазовых траекторий; это особенно относится к системам (1) с $m=2$ (два уравнения) (теория Пуанкаре — Бендиксона, см. [1]—[3], [9]) и потокам без неподвижных точек на торе (см. [2], [9], [10]). Однако при этом остается открытым вопрос, как именно ведут себя траектории той или иной конкретной системы. Большое число работ посвящено исследованию последнего вопроса для различных классов уравнений. Особое положение потоков на двумерных поверхностях связано с тем, что в этом случае траектория локально разбивает фазовое пространство. Поэтому естественное многомерное обобщение соответствующей теории относится не к Д. с., а к слоениям коразмерности 1.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1949; [2] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958, гл. 13—17; [3] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961; [4] Халмош П. Р., Лекции по эргодической теории, пер. с англ., М., 1959; [5] «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3—172; [6] Gottschalk W. H., Hedlund G. A., Topological dynamics, Providence, 1955; [7] Arnold V. I., Avez A., Problèmes ergodiques de la mécanique classique, P., 1967; [8] Смейл С., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 1, с. 113—85; [9] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [10] Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику, пер. с англ., М., 1975; [11] Сибирский К. С., Введение в топологическую динамику, Кишинев, 1970; [12] Синай Я. Г., Введение в эргодическую теорию, Ер., 1973; [13] Бронштейн И. У., Расширения минимальных групп преобразований, Кишинев, 1975; [14] Ellis R., Lectures on topological dynamics, N. Y., 1969; [15] Veech W. A., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1977, v. 83, № 5, p. 775—830.

Д. В. Аносов.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ — круг вопросов теории упругости, относящихся к изучению распространения колебаний или состояния установившихся колебаний в упругих средах. В простейшем и наиболее важном для приложений случае линейной теории однородных изотропных упругих тел Д. з. т. у. сводятся к разысканию решений уравнения Ламе:

$$\mu\Delta u(x,\ t)+(\lambda+\mu)\ \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ u(x,\ t)+F(x,\ t)=$$
$$=\rho\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

удовлетворяющих в нек-рой области заданным начальным и граничным условиям, здесь $u(x,\ t)\equiv(u_1,\ u_2,\ u_3)$ — вектор смещения в точке $x\equiv(x_1,\ x_2,\ x_3)$ в момент t, $F(x,\ t)$ — объемные силы, λ, μ — *Ламе постоянные*, ρ — плотность.

Как уравнение гиперболич. типа уравнение (1) допускает действительные характеристич. поверхности $\omega(x_1,\ x_2,\ x_3;\ t)=0$, вдоль к-рых производные решения, вообще говоря, выше 1-го порядка терпят разрывы (слабый разрыв). Поверхность разрыва распространяется в пространстве со скоростью

$$v=-\frac{\partial\omega}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right)^2\right]^{-1/2},$$

разделяя в каждый момент времени два решения. Уравнение этой поверхности получается из условия невозможности однозначного определения в ее точках всех производных, исходя из знания первых производных и

пользуясь уравнением (1). Из уравнения поверхности разрыва:

$$\left[\mu\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2-\rho\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2\right]\times$$
$$\times\left[(\lambda+2\mu)\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2-\rho\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2\right]=0$$

следует существование двух скоростей перемещения этой поверхности

$$a=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\quad\text{и}\quad b=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Эти скорости являются скоростями перемещения двух видов деформации в линейном упругом изотропном теле: a — скорость распространения продольных возмущений, b — поперечных возмущений. Можно также показать, что в нек-рых случаях вдоль границ раздела могут распространяться поверхностные волны, имеющие свои характерные скорости распространения (волны Рэлея на свободной поверхности, волны Стоунли на границе упругих сред).

Изучаются случаи, когда вдоль характеристик терпят разрывы первые производные смещения (с и л ь н ы й р а з р ы в). Если скачки вдоль характеристик терпит лишь нормальная составляющая вектора grad u, а касательные составляющие этого вектора и сами смещения остаются непрерывными, разрыв наз. п р а в и л ь н ы м с и л ь н ы м р а з р ы в о м. В этом случае на поверхности характеристик соблюдаются условия кинематич. и динамич. совместности, играющие большую роль при решении динамич. задач методом характеристик.

Явление динамич. деформаций упругого тела усложняется, если тело имеет конечную границу. Каждая точка границы, как только ее коснется любой из фронтов распространяющихся возмущений, к-рые сами являются сложными, изменяющимися во времени образованиями, начинает генерировать, по крайней мере, два типа новых деформаций.

Важными частными случаями уравнения (1) являются случаи, когда поле не зависит от времени (статика) и, когда поле зависит от времени по закону

$$u(x,\ t)=\operatorname{Re}\left[u(x)\,e^{-i\omega t}\right],$$

где $u(x)$ — комплексный вектор (амплитуда колебаний), не зависящий от времени, ω — частота установившихся колебаний. В последнем случае уравнение (1) приводится к эллиптич. системе уравнений относительно амплитуды

$$\left.\begin{aligned}\mu\Delta u(x)+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}u(x)+\omega^2u(x)=F(x),\\ F(x,\ t)=\operatorname{Re}\left[F(x)\,e^{-i\omega t}\right].\end{aligned}\right\}\quad(1')$$

Если область D, в к-рой исследуется распространение колебаний, занимает все бесконечное пространство E_3, для уравнения (1) корректна задача Коши с начальными условиями:

$$u(x,\ t)\Big|_{t=0}=\varphi^0(x),\quad\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi^{(1)}(x).\qquad(2)$$

Основную роль играют специальные решения уравнения (1), представляющие смещения бесконечного упругого пространства под влиянием силы, сосредоточенной в единственной точке $x^0\equiv(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0)$ и равной по величине $\delta(t)$ (где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака) (ф у н д а м е н т а л ь н ы е р е ш е н и я).

Если сила действует в направлении оси x_k, $k=1,\ 2,\ 3$, то составляющие смещения $u_j^{(k)}(x,\ t)=\Gamma_{kj}$, $k,\ j=1,\ 2,\ 3$ имеют следующие значения:

$$\Gamma_{kj}(x-x^0,\ t)=\frac{1}{4\pi\rho}\left[\frac{1}{a^2r}\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{\partial r}{\partial x_j}\delta(\gamma_a)+\left(\frac{r}{a}\varepsilon(\gamma_a)-\right.\right.$$
$$-\frac{r}{b}\varepsilon(\gamma_b)+\gamma_a\varepsilon(\gamma_a)-\gamma_b\varepsilon(\gamma_b)\Big)+$$
$$\left.+\left(\delta_{kj}-\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right)\frac{\delta(\gamma_b)}{b^2r}\right],$$

где

$$r=|x-x_0|,\quad \gamma_a=t-\frac{r}{a},\quad \gamma_b=t-\frac{r}{b},$$

$$\varepsilon(c)=\begin{cases}1, & c\geqslant 0,\\ 0, & c<0,\end{cases}\qquad \delta_{ij}=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j.\end{cases}$$

Матрица фундаментальных решений $\Gamma(x-x^0,\ t)=\|\Gamma_{kj}(x-x^0,\ t)\|$ размера 3×3, представляет симметричный тензор; решение задачи Коши для уравнения (1) выражается формулой Вольтерра:

$$u(x_0,\ t_0)=\frac{\partial}{\partial t_0}\int_{r\leqslant at_0}\Gamma(x^0-x,\ t_0)\,\varphi^{(0)}(x)\,dx+$$

$$+\int_{r\leqslant at_0}\Gamma(x^0-x,\ t_0)\,\varphi^{(1)}(x)\,dx+$$

$$+\int_0^{t_0}\int_{r\leqslant a(t_0-t)}\Gamma(x^0-x,\ t-t_0)\,F(x,\ t)\,dx\,dt. \quad (3)$$

Для однородной системы (1′), Γ_{kj} принимает следующий вид:

$$\Gamma_{kj}(x-x^0)=\frac{1}{2\pi\mu}\,\delta_{kj}\,\frac{e^{ik_2r}}{r}-\frac{1}{2\pi\rho\omega^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}\,\frac{e^{ik_1r}-e^{ik_2r}}{r};$$

$$k_1^2=\frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu},\quad k_2^2=\frac{\rho\omega^2}{\mu}. \quad (4)$$

Кроме задачи Коши для уравнения (1) корректны смешанные задачи, к-рые приходится рассматривать, когда область D имеет границу S в конечной части пространства. При этом существенную роль играют граничные условия на S, к-рые должны быть удовлетворены вместе с условиями (2).

Основными считаются следующие типы граничных задач: первая — заданы смещения, вторая — заданы напряжения, третья — задана линейная комбинация смещений и напряжений, четвертая — заданы нормальная составляющая смещения и касательные составляющие напряжения, пятая — заданы касательные составляющие смещения и нормальная составляющая напряжения, шестая — на одной части S заданы смещения и на дополнении — напряжения.

В отличие от задачи Коши, к-рая формулой (3) решается до конца в общем виде, решения смешанных задач были получены только в частных случаях. Важнейшими являются: решения в замкнутом виде первой и второй основных смешанных задач для полуплоскости и полупространства, полученные методом комплексных волн и развитием метода характеристик; решения для волнового уравнения в случае шара, полученные методом функционально-инвариантных интегралов; решения нек-рых задач теории упругости развитием этого же метода, решения ряда задач дифракции. В общем случае получить решения в замкнутом виде не удается; если, однако, от этого требования отказаться, весьма общие результаты устанавливаются методами теории потенциалов и теории сингулярных интегральных уравнений.

С помощью фундаментальных решений (4), по аналогии с теорией гармонич. потенциалов, вводятся понятия эластопотенциалов простого и двойного слоев и объемных масс, к-рые позволяют выразить регулярные решения уравнения (1′) формулой:

$$\varepsilon(x)\,u(x)=\int_S (T\Gamma(x-y))^*\,u(y)\,d_yS-$$

$$-\int_S \Gamma(x-y)\,Tu(y)\,d_yS-\int_D \Gamma(x-y)\,F(y)\,dy, \quad (5)$$

где T — оператор напряжения, * — знак транспонирования матрицы, $\varepsilon(x)=1$, если $x\in D$, и $\varepsilon(x)=0$, если $x\notin\overline{D}$. Первые пять граничных условий, указанных выше, позволяют записать с помощью потенциалов соответствующие задачи в виде двумерных сингулярных

интегральных уравнений на замкнутой поверхности S. Доказана разрешимость всех задач для произвольной частоты колебаний ω в случае внешней области и существование дискретного действительного неотрицательного спектра собственных частот для внутренних задач. Решения выражаются рядами Фурье по нек-рой полной системе векторов, к-рые строятся с помощью (4), и коэффициенты Фурье определяются явно.

Пусть на границе S в области D задано смещение $u|_S = f(y)$, S_1 — произвольная гладкая замкнутая поверхность, окружающая S и не имеющая с ней общих точек, и $\{x^k\}_1^\infty$ — счетное множество точек на S_1, распределенное всюду плотно. Через $\Gamma^i(x-x_0)$, $i=1, 2, 3$, обозначены столбцы матрицы $\Gamma(x-x^0)$. Доказывается, что совокупность векторов $\{\Gamma^i(x^k-y)\}_1^\infty$, $i=1, 2, 3$; $y \in S$ линейно независима и полна в $L_2(S)$.

Элементы этой совокупности пронумерованы следующим образом:

$$\overset{k}{\psi}(y) = \Gamma^{e_k}\left(x^{\left[\frac{k+2}{3}\right]} - y\right), \quad e_k = k - 3\left[\frac{k-1}{3}\right], \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $[n]$ — наибольшая целая часть числа n, и введена ортонормированная совокупность

$$\overset{k}{\varphi}(y) = \sum_{s=1}^{k} a_{ks} \overset{s}{\psi}(y),$$

где a_{ks} — известные числа. Тогда решение задачи во всякой внутренней точке выражается равномерно сходящимся рядом:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{k} h_k a_{ks} \Gamma^{e_s}\left(x^{\left[\frac{s+2}{s}\right]} - x\right), \qquad (6)$$

где

$$h(y) = f(y) - \int_D \Gamma(y-x) F(x)\, dx,$$

$$h_k = \int_S h(y) \overset{k}{\varphi}(y)\, dS.$$

Конечный отрезок ряда может служить для вычисления приближенных значений решения.

Результаты, установленные для уравнения (1′), позволяют получить решения смешанных задач для уравнения (1) с помощью преобразования Лапласа.

При исследовании решений уравнения Ламе для слоистых сред рассматривают распространение отдельных волн или интерференцию всех образующихся волн. При первом подходе используется конечность скорости распространения упругих волн и последовательно изучаются распространение волн внутри слоев и процессы отражения и преломления на границах. Для построения интерференционных решений уравнения Ламе краевые условия на границах должны удовлетворяться совместно, что приводит к алгебраич. системе уравнений. Для определения собственных процессов в слоистой системе необходимо найти корни определителя этой системы, при этом нахождение корней может быть сведено к определению собственных значений нек-рых операторов. Собственные числа (корни) могут быть как действительными, так и комплексными в зависимости от характера оператора. Действительным собственным числам соответствуют интерференционные волны Рэлея и Лява, распространяющиеся вдоль слоя без экспоненциального затухания. Расчет различных характеристик этих волн в случае кусочно непрерывной скорости проводится с помощью ЭВМ. Результаты этих вычислений используются для построения теоретич. сейсмограмм.

Затухающие интерференционные волны связаны с комплексными собственными числами несамосопряженных операторов. Оба вида интерференционных волн рассматриваются в сейсмике для объяснения наблюдаемых на практике сейсмич. волн.

Для решения ряда задач о колебаниях однородной среды применялся метод функционально-инвариантных решений. В частности, исследовано волновое поле, порожденное точечным источником, в двух упругих полупространствах с плоской границей раздела; из точных решений получены асимптотич. формулы, описывающие волновое поле в прифронтовых зонах.

В теории упругих волн большое значение имеет геометрич. приближение, применяемое как в стационарном, так и в нестационарном вариантах. Вектор смещения $\boldsymbol{u}$ ищется в виде ряда:

$$\boldsymbol{u}(M, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{u}_j(M) f_j(t - \tau(M)), \quad f_j' = f_{j-1}, \quad (7)$$

где f_j — в нестационарном случае функции, имеющие особенность в нуле, в стационарном случае

$$f_j(s) = \frac{e^{-i\omega s}}{(-i\omega)^{j+\gamma}}, \quad \gamma = \text{const}.$$

В отличие от скалярного случая, возможны два типа рядов вида (7), формально удовлетворяющих уравнениям теории упругости. Случай продольных волн, когда

$$(\nabla\tau)^2 = \frac{1}{a^2}, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \boldsymbol{u}_0 \| \nabla\tau,$$

где a — скорость продольных волн, и случай поперечных волн, когда

$$(\nabla\tau)^2 = \frac{1}{b^2}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \boldsymbol{u}_0 \perp \nabla\tau,$$

где b — скорость поперечных волн.

Векторы $\boldsymbol{u}_j$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям. Решения многих физически интересных задач допускают разложения вида (7), и «волны» такого вида можно отражать и преломлять, в результате опять получаются «волны», представимые рядами вида (7).

Геометрооптич. методы приложимы и в случае поверхностных волн. Наложением продольной и поперечной волн вида (7) с комплексными эйконалами можно удовлетворить краевым условиям отсутствия напряжений на поверхности. Такого рода построения приводят к широкому классу поверхностных волн, частным случаем к-рых являются волны Рэлея.

Геометрооптич. теорию можно также развить для поверхностных волн иного типа: для волн, аналогичных волнам Лява, и для так наз. волн, удерживаемых поверхностью. Аналог волн Лява, о к-рых идет речь,— это стационарные высокочастотные волны, фазовая скорость к-рых близка к скорости поперечных волн, а направление вектора смещения в первом приближении по частоте перпендикулярно нормали к поверхности и направлению распространения волны. Волны, удерживаемые поверхностью, тоже имеют поверхностную скорость, близкую к скорости поперечных волн. Однако их поляризация другая — вектор смещений лежит в плоскости, образованной нормалью к поверхности и направлением распространения волны.

Лит.: [1] Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, пер. с нем., ч. 2, Л.—М., 1937, гл. 12; [2] Огурцов К. И., Петрашень Г. И., «Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем. наук», 1951, № 149, в. 24, с. 3—249; [3] Бабич В. М. и др., Линейные уравнения математической физики, М., 1964, гл. 1, 2; [4] Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953; [5] Ильин В. А., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 2, с. 97—154; [6] Купрадзе В. Д. и др., Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости, М., 1976; [7] Петрашень Г. И., «Уч. зап. ЛГУ», 1956, № 208, в. 30, с. 5—57; [8] Алексеев А. С., Бабич В. М., Гельчинский Б. Я., в кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, сб. 5, Л., 1961, с. 3—24; [9] Бабич В. М., «Докл. АН СССР», 1961, т. 137, № 6, с. 1263—66; [10] Бабич В. М., Молотков И. А., «Изв. АН СССР. Физика Земли», 1966, № 6, с. 34—38; [11] Мухина И. В., Молотков И. А., там же, 1967, № 4, с. 3—8; [12] Зволинский Н. В., «Изв. АН

СССР. Сер. геофиз.», 1957, № 10, с. 1201—18; 1958, № 1, с. 3—16; № 2, с. 165—74; [13] Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел, т. 10, М., 1977, с. 5—62.
В. Д. Купрадзе, В. М. Бабич, И. А. Молотков.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — раздел математики, посвященный теории и методам решения многошаговых задач оптимального управления.

В Д. п. для управляемых процессов среди всевозможных управлений ищется то, к-рое доставляет экстремальное (наименьшее или наибольшее) значение целевой функции — нек-рой числовой характеристики процесса. Под многошаговостью понимают либо многоступенчатую структуру процесса, либо что управление разбивается на ряд последовательных этапов (шагов), соответствующих, как правило, различным моментам времени. В ряде задач многошаговость проистекает из существа процесса (напр., в задаче определения оптимальных размеров ступеней многоступенчатой ракеты или при нахождении наиболее экономичного режима полета самолетов), но она может вводиться искусственно для того, чтобы обеспечить возможность применения метода Д. п. Таким образом, в названии Д. п. под программированием понимают принятие решений, планирование, а слово динамическое указывает на существенную роль времени и порядка выполнения операций в рассматриваемых процессах и методах.

Методы Д. п. являются составной частью методов, используемых в исследовании операций, и применяются в задачах оптимального планирования (напр., в задачах об оптимальных распределениях ресурсов, в теории управления запасами, в задачах замены оборудования и т. д.) и при решении многих технических проблем (напр., в задачах управления последовательными химическими процессами, в задачах оптимального проектирования прокладки дорог и др.).

Проиллюстрируем основную идею. Пусть процесс управления нек-рой системой X состоит из m шагов (этапов); на i-м шаге управление y_i переводит систему из состояния x_{i-1}, достигнутого в результате $(i-1)$-го шага, в новое состояние x_i. Этот процесс перехода осуществляет заданная функция $f_i(x, y)$, и новое состояние определяется значениями x_{i-1}, y_i:

$$x_i = f_i(x_{i-1}, y_i).$$

Таким образом, управления $y_1, y_2, \ldots, y_m$ переводят систему из начального состояния $x_0 \in X_0$ в конечное — $x_m \in X_m$, где X_0 и X_m — совокупности допустимых начальных и конечных состояний системы X. Опишем одну из возможных постановок экстремальной задачи. Начальное состояние x_0 задано. Требуется выбрать управления $y_1, y_2, \ldots, y_m$ таким образом, чтобы система X перешла в допустимое конечное состояние и при этом заданная целевая функция $F(x_0, y_1, x_1, y_2, \ldots, y_m, x_m)$ достигла максимального значения F^*, т. е.

$$F^* = \max_{y_1, y_2, \ldots, y_m} F(x_0, y_1, x_1, y_2, \ldots, y_m, x_m).$$

Важной особенностью метода Д. п. является то, что он применим лишь для аддитивной целевой функции. В рассмотренном примере это означает, что

$$F = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_{i-1}, y_i).$$

Кроме того, в методе Д. п. требуется, чтобы задача характеризовалась отсутствием «последействия»: решения (управления), принимаемые на шаге, оказывают влияние только на состояние x_i системы в момент i. Другими словами, процессы, описываемые функциями вида

$$x_i = f_i(x_{i-1}, y_i, x_{i-2}, y_{i-1}, \ldots, y_1, x_0),$$

не рассматриваются. Оба упомянутых ограничительных условия можно ослабить, но только за счет существенного усложнения метода.

Для решения задач Д. п. обычные методы математического анализа либо вообще неприменимы, либо приводят к огромному числу вычислений. В основе метода Д. п. лежит принцип оптимальности, сформулированный Р. Беллманом (R. Bellman): предположим, что осуществляя управление дискретной системой X, мы уже выбрали некоторые управления дискретной системой $y_1, y_2, \ldots, y_k$ и тем самым траекторию состояний $x_0, x_1, \ldots, x_k$, и хотим завершить процесс, т. е. выбрать $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_m$ (а значит и $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_m$); тогда, если завершающая часть процесса не будет оптимальной в смысле достижения максимума функции

$$F_k = \sum_{i=k+1}^{m} \varphi_i(x_{i-1}, y_i),$$

то и весь процесс не будет оптимальным.

Пользуясь принципом оптимальности, легко получить основное функциональное соотношение. Определим последовательность функций переменной x:

$$\omega_m(x) = 0, \quad \omega_{k-1}(x) = \max_y [\varphi_k(x, y) + \omega_k(f_k(x, y))],$$

$k = 1, 2, \ldots, m$. Здесь максимум берется по всем управлениям, допустимым на шаге k. Соотношение, определяющее зависимость ω_{k-1} от ω_k, принято называть *Беллмана уравнением*. Смысл функций $\omega_{k-1}(x)$ нагляден: если система на шаге $k-1$ оказалась в состоянии x, то $\omega_{k-1}(x)$ есть максимально возможное значение функции F. Одновременно с построением функций $\omega_{k-1}(x)$ находятся условные оптимальные управления $y_k(x)$ на каждом шаге (т. е. значения оптимального управления при всевозможных предположениях о состоянии x системы на шаге $k-1$). Окончательно оптимальные управления находятся последовательным вычислением величин

$$\omega_0(x_0) = F^*, \; y_1, \; x_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_m, \; x_m.$$

Из сказанного очевидна следующая особенность метода Д. п.— с его помощью решается не одна конкретная задача при определенном x_0, а сразу все подобные однотипные задачи при любом начальном состоянии. Поскольку численная реализация метода Д. п. весьма сложна, т. к. требует большого объема памяти ЭВМ, то его целесообразно применять в тех случаях, когда необходимо многократно решать типовые задачи (скажем, определение оптимального режима полета самолета при меняющихся погодных условиях). Несмотря на то, что задача Д. п. формулируется для дискретных процессов, в ряде случаев метод Д. п. с успехом применяется для решения динамических задач с непрерывными параметрами.

Д. п. дало новый подход ко многим задачам *вариационного исчисления*.

Важным разделом Д. п. являются стохастические задачи Д. п.— задачи, в к-рых на состояние системы и на целевую функцию влияют случайные факторы. К таким задачам относятся, напр., задачи оптимального регулирования запасов с учетом возможностей случайного пополнения запасов. Здесь наиболее естественной областью применения Д. п. являются управляемые марковские процессы.

Метод Д. п. был предложен Р. Беллманом. Строгое обоснование метода Д. п. было получено в результате работ Л. С. Понтрягина и его учеников по математической теории управляемых процессов (см. *Оптимального управления математическая теория*).

Хотя метод Д. п. существенно упрощает исходные задачи, однако явное его применение, как правило, весьма громоздко. Для преодоления этих трудностей разрабатываются приближенные методы Д. п.

Лит.: [1] Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960; [2] Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, М., 1966; [3] Хедли Дж., Нелинейное и динамическое программирование, пер. с англ., М., 1967; [4] Хедли Дж., Уайтин Т., Анализ систем управления запасами, пер. с англ., М., 1969; [5] Ховард Р. А., Динамическое программирование и марковские процессы, пер. с англ., М., 1964.

С. А. Ашманов, В. Г. Карманов.

ДИНИ ПРИЗНАК: если 2π-периодическая интегрируемая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$ в точке x_0 удовлетворяет условию

$$\int_0^{\delta} \frac{1}{x} | f(x_0+x)+f(x_0-x)-2S | \, dx < \infty$$

при фиксированном числе S, $-\infty<S<+\infty$, и каком-либо $\delta>0$, то ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к числу S. Д. п. доказан У. Дини [1]. Его утверждение окончательно в следующем смысле. Если $\mu(t)\geqslant 0$ — такая непрерывная функция, что функция $\mu(t)/t$ не интегрируема в окрестности точки $t=0$, то можно найти непрерывную функцию $f(t)$, ряд Фурье к-рой расходится в точке $t=0$, причем

$$|f(t)-f(0)| \leqslant \mu(t)$$

для малых t.

Лит.: [1] Dini U., Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzione di una variable reale, Pisa, 1880; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965.

Б. И. Голубов.

ДИНИ ТЕОРЕМА о равномерной сходимости ряда: если функции $u_n(x)$, $n=1,2, \ldots$, непрерывны и неотрицательны на отрезке $[a, b]$ и сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ является непрерывной на этом отрезке функцией, то указанный ряд сходится на $[a, b]$ равномерно. Д. т. обобщается на случай, когда областью определения функций $u_n(x)$ является произвольный *компакт*.

Л. Д. Кудрявцев.

ДИНИ — ЛИПШИЦА ПРИЗНАК: если непрерывная 2π-периодич. функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta, f) \ln \frac{1}{\delta} = 0,$$

где $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$, то ее ряд Фурье равномерно сходится к ней на всей числовой оси. Д.— Л. п. доказан У. Дини [1], а в частном случае, когда $\omega(\delta, f)=O(\delta^{\alpha})$, $\delta \to +0$, при каком-либо $0<\alpha\leqslant 1$, он установлен Р. Липшицем [2]. Утверждение Д.— Л. п. окончательно в следующем смысле. Если $\omega(\delta)$ — произвольный модуль непрерывности, удовлетворяющий условию

$$\overline{\lim_{\delta \to +0}} \, \omega(\delta) \ln \frac{1}{\delta} > 0,$$

то существует непрерывная 2π-периодич. функция $f_0(x)$, ряд Фурье которой расходится в некоторой точке, а модуль непрерывности $\omega(\delta, f_0)$ удовлетворяет условию $\omega(\delta, f_0)=O(\omega(\delta))$.

Лит.: [1] Dini U., Sopra la serie di Fourier, Pisa, 1872; [2] Lipschitz R., «J. reine und angew. Math.», 1864, Bd 63, № 2, S. 296—308; [3] Lebesgue H., «Bull. Soc. math. France» 1910, t. 38, p. 184—210; [4] Никольский С. М., «Докл. АН СССР», 1950, т. 73, № 3, с. 457—60; [5] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961.

Б. И. Голубов.

ДИНОСТРАТА КВАДРАТРИСА — трансцендентная плоская кривая, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид:

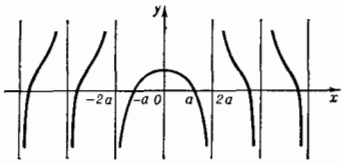
$$y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a}.$$

В полярных координатах:

$$\rho = \frac{a(\pi - 2\varphi)}{\pi \cos \varphi}.$$

У Д. к. бесконечное число ветвей (рис.), пересекающих ось абсцисс в точках $x=\pm a, \pm 3a, \pm 5a, \ldots$ и имеющих

асимптоты $x=\pm 2a, \pm 4a, \pm 6a, \ldots$. Точки пересечения с прямой $y=2a/\pi$ — точки перегиба.



Открытие Д. к. приписывают Гиппию из Элиды (420 до н. э.). Возможность графич. решения задачи о *квадратуре круга* при помощи квадратрисы показал Динострат (2-я пол. 4 в. до н. э.).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ДИОФАНТОВ АНАЛИЗ — см. *Диофантова геометрия.*

ДИОФАНТОВ ПРЕДИКАТ — всякий предикат $\mathcal{P}$, определенный на множестве упорядоченных наборов из n целых (или целых неотрицательных, или целых положительных) чисел, для к-рого можно указать многочлен $P(a_1, \ldots, a_n, z_1, \ldots, z_k)$ с целыми коэффициентами такой, что набор $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ удовлетворяет предикату $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда *диофантово уравнение*

$$P(a_1, \ldots, a_n, z_1, \ldots, z_k)=0$$

разрешимо относительно $z_1, \ldots, z_k$. Область истинности Д. п. является *диофантовым множеством.* Класс Д. п. совпадает с классом перечислимых предикатов (см. *Диофантовых уравнений проблема разрешимости*).

Ю. В. Матиясевич.

ДИОФАНТОВА ГЕОМЕТРИЯ, диофантов анализ,— область математики, посвященная изучению целочисленных и рациональных решений систем алгебраич. уравнений, или, иначе, изучению *диофантовых уравнений*, методами алгебраич. геометрии. Появление во 2-й пол. 19 в. теории алгебраич. чисел сделало естественным изучение диофантовых уравнений с коэффициентами из произвольного поля алгебраич. чисел, причем решения ищутся или в этом поле, или же в его кольце целых элементов. Параллельно с теорией алгебраич. чисел развивалась и теория алгебраических функций. Глубокая аналогия между ними, подчеркивавшаяся Д. Гильбертом (D. Hilbert) и особенно Л. Кронекером (L. Kronecker), привела к единообразному построению различных арифметич. теорий для этих двух типов полей (см. [3]), называемых обычно глобальными полями. Особенно отчетливо эта аналогия проступает в том случае, когда в качестве алгебраич. функций рассматриваются функции одного переменного и с конечным полем констант. Хорошей иллюстрацией тому служат такие понятия как *дивизоры*, ветвление и такие результаты как теория полей классов. Проникновение этой точки зрения в теорию диофантовых уравнений произошло позднее, и систематич. рассмотрение диофантовых уравнений не только с числовыми, но и с функциональными коэффициентами началось только в 50-х гг. 20 в. Решающее влияние оказало на это развитие алгебраич. геометрии. Одновременное рассмотрение числовых и функциональных полей, выступающих как две равноправные стороны одного и того же предмета, не только приводит к красоте и законченности результатов, но и взаимно обогащает оба аспекта (см. [3]).

В алгебраич. геометрии неинвариантное понятие системы уравнений заменяется понятием *алгебраического многообразия* над заданным полем K, а место решений занимают рациональные точки со значениями в поле K или его конечном расширении. Поэтому можно сказать, что основная задача диофантовой геометрии состоит в изучении множества $X(K)$ рациональных точек алгебраич. многообразия X, определенного над полем K указанного выше вида. Целочислен-

ные решения диофантовых уравнений также имеют геометрич. смысл.

При изучении рациональных (или целых) точек на алгебраич. многообразиях прежде всего возникает вопрос о существовании хотя бы одной такой точки. Д е с я т а я п р о б л е м а Г и л ь б е р т а сформулирована как задача нахождения общего метода, позволяющего решать этот вопрос для любого алгебраич. многообразия. После появления точного понятия алгоритма и доказательства алгоритмич. неразрешимости целого ряда задач стало ясно, что проблема Гильберта может иметь и отрицательное решение (см. *Диофантовых уравнений проблема разрешимости*), и наиболее интересным является вопрос о том, для каких классов диофантовых уравнений такой алгоритм существует. Известно несколько общих подходов к этой задаче. Наиболее естественным с алгебраич. точки зрения является так наз. п р и н ц и п Х а с с е. Он состоит в рассмотрении наряду с исходным полем K его пополнений K_v по всевозможным нормированиям. Поскольку $X(K)\subset X(K_v)$, то необходимым условием существования K-рациональной точки является непустота множеств $X(K_v)$ для всех v. Значение принципа Хассе состоит в том, что он сводит вопрос о существовании точки к аналогичному вопросу над локальным полем. Последняя задача существенно проще — для нее известен алгоритм, а в частном важном случае, когда многообразие X проективно и неособо, *Гензеля лемма* и ее обобщения позволяют произвести дальнейшую редукцию и свести все к изучению рациональных точек над конечным полем, где задача решается или последовательным перебором, или более совершенными средствами (см. *Алгебраических многообразий арифметика*; см. также [2], [12]). Последнее существенное обстоятельство, связанное с принципом Хассе, состоит в том, что для всех v, кроме конечного числа, множества $X(K_v)$ непусты, так что число условий всегда конечно, и они могут быть эффективно проверены (см. [2]). Но уже для кривых 3-й степени принцип Хассе неприменим. Так, кривая $3x^3+4y^3=5$ имеет точки во всех полях *р-адических чисел* и в поле действительных чисел, но не имеет рациональной точки (см. [2], [7]). Этот пример послужил отправным пунктом для создания теории, описывающей «отклонение» от принципа Хассе в классе главных однородных пространств абелевых многообразий (см. [7], [10]). Это отклонение описывается в терминах специальной группы Ш, сопоставляемой каждому абелеву многообразию (группа Тейта — Шафаревича). Основную трудность теории составляет отсутствие способов вычисления группы Ш, к-рая (к 1978) не вычислена ни для одного многообразия. Эта теория распространена и на другие классы алгебраич. многообразий (см. [11]).

Другое эвристическое соображение, используемое при изучении диофантовых уравнений, состоит в том, что если число переменных, входящих в систему уравнений, велико по сравнению со степенью, то система, как правило, имеет решение. Однако доказать это в тех или иных случаях бывает очень трудно. Единственный общий подход к задачам такого типа принадлежит аналитич. теории чисел и основан на применении оценок тригонометрич. сумм (см. *Тригонометрических сумм метод*, *Виноградова метод*; см. также [4]). Первоначально этот метод применялся к уравнениям довольно частного вида (напр., к *Варинга проблеме*). Но в дальнейшем с его помощью было доказано, что если F — форма нечетной степени d от n переменных и с рациональными коэффициентами, то при n, достаточно большом по сравнению с d, проективная гиперповерхность $F=0$ имеет рациональную точку (см. [2]). Имеется гипотеза Артина, утверждающая, что этот результат справедлив уже при $n>d^2$ (см. [2], [10]). Она доказана (к 1978) только для квадратичных форм. Аналогичные вопросы можно ста-

вить и для других полей. В частности, о результатах, полученных для локальных полей, см. *Алгебраических многообразий арифметика*; см. также [5]. Центральной проблемой Д. г. является изучение структуры множества рациональных или целых точек и прежде всего выяснение вопроса о том, конечно оно или нет. В этой последней задаче основное эвристическое предположение состоит в том, что если степень системы намного больше числа переменных, то система имеет, как правило, конечное число решений (см. [10]). В отличие от рассмотренной выше задачи о разрешимости, никаких общих результатов (к 1978) в этом направлении нет. Наибольшее число исследований посвящено случаю алгебраич. кривых. Оказалось, что строение множества рациональных точек $X(K)$ кривой X, определенной над полем K, сильно зависит от ее рода g. Если $g=0$, то либо множество $X(K)$ пусто, либо кривая X бирационально эквивалентна над полем K проективной прямой. Последнее означает, что множество $X(K)$ бесконечно, и существует параметризация его рациональными функциями нек-рой переменной со значениями из поля K (см. [7], [13], [1]). Кривые рода $g=1$ с непустым множеством $X(K)$ рассматривались в 1901 А. Пуанкаре (H. Poincaré), к-рый показал, что они бирационально эквивалентны плоским кубич. кривым, и ввел на множестве $X(K)$ структуру абелевой группы (см. *Эллиптическая кривая*; см. также [1], [7]). Гипотеза Пуанкаре о том, что при $K=Q$ группа имеет конечное число образующих, доказана К. Морделлом (K. Mordell, 1922) (см. [15]). Это было обобщено А. Вейлем (A. Weil, 1928) на произвольные поля алгебраических чисел и А. Нероном (A. Neron, 1952) на любые глобальные поля (см. [8]).

Группу $X(K)$ можно представить в виде прямой суммы свободной группы ранга r и конечной группы порядка n. Вопрос о том, ограничены ли эти числа на множестве всех эллиптич. кривых над данным полем K, привлекал внимание начиная с 30-х гг. (см. [7]). Ограниченность кручения n доказана в 1971. В функциональном случае существуют кривые сколь угодно большого ранга (см. [12]). В числовом случае ответ (к 1978) неизвестен.

Наконец, в случае кривой рода $g>1$ имеется гипотеза Морделла о конечности числа рациональных точек (высказанная для $K=Q$; точную формулировку см. в [9]). В функциональном случае эта гипотеза доказана Ю. И. Маниным в 1963 (см. [12]). Если же основное поле — числовое, то гипотеза доказана для *модулярных кривых*. Все имеющиеся результаты дают конечность числа точек в не слишком больших расширениях основного поля (см. [12]).

Гораздо большие успехи достигнуты в изучении целых точек. Здесь имеется весьма общий метод *диофантовых приближений*, предложенный в 1909 А. Туэ (A. Thue) (см. [6], [8], [9], [13]). Он основан на следующем. Пусть $F(x, y)=\prod_i (x-a_i y)$ — форма с рациональными коэффициентами и пусть имеется целочисленное решение (x_0, y_0) уравнения $F(x, y)=c$, $c\neq 0$. Тогда для нек-рого i

$$\left| a_i - \frac{x_0}{y_0} \right| < \frac{b}{y_0^n}, \quad b = \text{const}.$$

Если α — алгебраич. число степени $n\geqslant 3$, то неравенство $|\alpha - p/q| < 1/q^{\varepsilon}$ имеет конечное число решений в целых p и q при $\varepsilon \geqslant n/2+1$. Отсюда следует конечность числа целых точек на кривых вида $F(x, y)=c$. С тех пор каждое продвижение в проблеме диофантовых приближений алгебраич. чисел давало соответствующие результаты для целых точек. Так была доказана в 1929 К. Зигелем (C. Siegel) теорема о конечности числа целых точек на любой кривой рода $g>0$. О дальнейших обобщениях этой теоремы на случай целых точек в произвольных глобальных полях см. также [9].

Основным технич. средством, используемым в доказательстве этих и других теорем конечности в Д. г., является высота (см. *Высота* в диофантовой геометрии).

Среди алгебраич. многообразий размерности >1 наиболее изучены *абелевы многообразия*, представляющие собой многомерный аналог эллиптических кривых. Обобщая теорему Морделла, А. Вейль перенес ее утверждение о конечности числа образующих группы рациональных точек на абелевы многообразия любой размерности (теорема Морделла — Вейля). В 60-х гг. появилась гипотеза Берча и Суиннертон-Дайера, связывающая ранг этой группы с порядком полюса *дзета-функции* многообразия X в точке $\dim X$ (см. [7], [12]). Несмотря на многочисленные аргументы в пользу этой гипотезы, никаких подходов к ее доказательству (к 1978) пока нет. Нет никакого продвижения (к 1978) и в гипотезах конечности для рациональных точек замкнутых подмногообразий и целых точек аффинных открытых подмножеств абелевых многообразий (см. [9], [10]).

Другой класс алгебраич. многообразий, для изучения к-рого имеются общие методы и подходы, состоит из многообразий вида

$$F(x_1, \ldots, x_n) = c, \quad c \neq 0, \quad \deg F = m, \qquad (*)$$

где F — форма, разложимая в нек-ром расширении основного поля на линейные множители. Для изучения целых точек на таких многообразиях имеются два метода. Первый — это отмеченный выше метод диофантовых приближений, созданный А. Туэ именно для уравнений такого вида, но с двумя переменными. Только в 1970 этот метод получил новое развитие: при помощи теоремы Шмидта о совместных приближениях было доказано, что число целых точек на многообразии (*) всегда конечно, если выполняется нек-рое легко проверяемое условие на форму F (его необходимость была известна ранее, см. [2]). Совсем другой метод, основанный на рассмотрении уравнения (*) в области целых p-адических чисел, был предложен в 1935 Т. Сколемом (см. [13]). Этим методом была доказана теорема конечности для уравнения (*) для небольших значений n или m (см. [2]).

Интенсивно исследуется еще один класс алгебраич. многообразий — рациональные и близкие к ним многообразия, являющиеся аналогом кривых рода 0. Получены многочисленные результаты об их классификации и о строении множества рациональных точек (см. [12]). В отличие от рассмотренных выше примеров, здесь все обстоит сложнее, и никаких общих теорем типа теорем Шмидта, Зигеля или Морделла — Вейля не найдено (к 1978).

Отличительной чертой почти всех отмеченных выше результатов является то, что они, раскрывая качественную картину множества рациональных или целых точек, не дают никаких количественных оценок, с помощью к-рых можно явно описать это множество. Получение подобных результатов, или, как говорят, эффективизация качественных теорем, принадлежит к труднейшим задачам Д. г. и вообще теории чисел. Для случая теоремы Туэ такая эффективизация, полученная А. Бейкером (A. Baker) в 1968, состоит в явных оценках высот целых точек в зависимости от коэффициентов уравнения кривой (см. *Диофантовых приближений проблемы эффективизации*). Затем такая оценка была получена для широкого класса гиперэллиптич. кривых и, в частности, всех кривых рода 1 (см. [12]). Это дает для таких кривых алгоритм, позволяющий найти все целые точки, и тем самым выяснить, есть ли такая точка вообще. Как уже было отмечено, для любого диофантова уравнения такого алгоритма не существует.

Другим чрезвычайно интересным подходом к количественному описанию множества целых точек явля-

ется развитие *кругового метода* Харди — Литлвуда. Распространение этого подхода на абелевы многообразия привело к появлению гипотез Берча и Суиннертон-Дайера (см. [15]), использование к-рых привело к построению алгоритма, дающего эффективизацию теоремы Морделла — Вейля. Есть все основания полагать, что дальнейшее развитие этого метода, а также установление его связи с теорией высоты будет иметь большое значение для решения основных проблем диофантовой геометрии.

Лит.: [1] Башмакова И. Г., Диофант и диофантовы уравнения, М., 1972; [2] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [3] Вейль А., «Математика», 1958, т. 2, № 4, с. 49—58; [4] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [5] Greenberg M., Lectures on forms in many variables, N. Y.—Amst., 1969; [6] Дэвенпорт Г., Высшая арифметика, пер. с англ., М., 1965; [7] Кассельс Дж., «Математика», 1968, т. 12, № 1, с. 113—60; № 2, с. 1—48; [8] Koksma J. F., Diophantische Approximationen, B., 1936; [9] Lang S., Diophantine geometry, N. Y.—L., 1962; [10] Ленг С., «Математика», 1961, т. 5, № 6, с. 3—12; [11] Манин Ю. И., Кубические формы, М., 1972; [12] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1970, М., 1971, с. 111—51; [13] Skolem Th., Diophantische Gleichungen, B., 1938; [14] Swinnerton-Dyer H. P. F., в кн.: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, v. 20. 1969. Number theory institute, Providence, 1971, p. 1—52; [15] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969, гл. XII.

А. Н. Паршин.

ДИОФАНТОВО МНОЖЕСТВО — множество $\mathfrak{M}$, состоящее из упорядоченных наборов из n целых (целых неотрицательных, целых положительных) чисел, для к-рого можно указать *диофантово уравнение*

$$P(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_l) = 0, \qquad (*)$$

зависящее от n параметров $a_1, \ldots, a_n$, допустимыми значениями к-рых являются целые (соответственно целые неотрицательные или целые положительные) числа, и разрешимое относительно $x_1, \ldots, x_l$ тогда и только тогда, когда $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathfrak{M}$. Здесь несущественно, понимается ли под разрешимостью существование решения в целых, целых неотрицательных или целых положительных числах, поскольку уравнение (*) разрешимо в целых (целых неотрицательных, целых положительных) числах тогда и только тогда, когда уравнение

$$P(a_1, \ldots, a_n, y_1 - z_1, \ldots, y_l - z_l) = 0$$

разрешимо в целых положительных числах (соответственно тогда и только тогда, когда уравнение

$$P(a_1, \ldots, a_n, z_1 + 1, \ldots, z_l + 1) = 0$$

разрешимо в целых неотрицательных числах, или соответственно тогда и только тогда, когда уравнение

$$P(a_1, \ldots, a_n, p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 + s_1^2, \ldots, p_l^2 + q_l^2 + r_l^2 + s_l^2) = 0$$

разрешимо в целых числах, ибо по теореме Лагранжа каждое целое неотрицательное число представимо в виде суммы четырех квадратов).

Для любого Д. м. можно указать соответствующее уравнение (*), в к-ром степень многочлена P не больше 4 (это достигается ценой увеличения числа неизвестных). Для каждого Д. м. целых неотрицательных чисел, помимо уравнения общего вида (*), можно указать уравнение вида $P(x_1, \ldots, x_l) = a_1$; иными словами, каждое Д. м. целых неотрицательных чисел является множеством всех неотрицательных значений, принимаемых некоторым многочленом с целочисленными коэффициентами при произвольных значениях переменных. В качестве P всегда можно взять многочлен степени не выше 5, если допустимыми значениями переменных являются целые неотрицательные или целые положительные числа, и многочлен степени не выше 6, если переменные принимают произвольные целочисленные значения.

Класс Д. м. замкнут относительно операций перестановки и отождествления аргументов, объединения,

пересечения, прямого произведения и проектирования (п р о е к ц и е й м н о ж е с т в а $\mathfrak{M}$, состоящего из упорядоченных наборов из n чисел, наз. множество $\{\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle : \exists b\,[\langle a_1, \ldots, a_{n-1}, b\rangle \in \mathfrak{M}]\}$), а также относительно операции, ставящей множеству $\mathfrak{M}$ в соответствие множество

$$\{\langle a_1, \ldots, a_{n-1}, b\rangle : \forall c\,[c \leqslant b \Rightarrow \langle a_1, \ldots, a_{n-1}, c\rangle \in \mathfrak{M}]\}.$$

Класс Д. м. совпадает с классом *перечислимых множеств* (см. *Диофантовых уравнений проблема разрешимости*), и все результаты о перечислимых множествах переносятся на Д. м. В частности, из теоремы о существовании универсального перечислимого множества следует, что существует такое число l, что для каждого n существует многочлен $U_n(a_1, \ldots, a_n, m, x_1, \ldots, x_l)$ с целочисленными коэффициентами, универсальный в следующем смысле: для каждого диофантова (перечислимого) множества $\mathfrak{M}$, состоящего из упорядоченных наборов из n чисел, можно указать такое значение параметра m (номер множества $\mathfrak{M}$), что уравнение

$$U_n(a_1, \ldots, a_n, m, x_1, \ldots, x_l) = 0$$

разрешимо относительно $x_1, \ldots, x_l$ тогда и только тогда, когда $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \mathfrak{M}$. Существуют многочлены, универсальные в других смыслах (см., напр., [1]).

Диофантовыми являются многие интересные с теоретико-числовой точки зрения множества, напр. множество всех простых чисел, множество всех совершенных чисел, множество всех тех n, для к-рых разрешимо у р а в н е н и е Ф е р м а

$$x^n + y^n = z^n.$$

Доказательство теоремы о том, что перечислимые множества диофантовы, является эффективным, т. е. для стандартно заданного перечислимого множества можно явно указать соответствующее диофантово уравнение. Этот универсальный метод, не использующий специфики рассматриваемых множеств, приводит к довольно громоздким многочленам, однако для нек-рых конкретных множеств удается найти их сравнительно простые диофантовы представления, опираясь, кроме перечислимости, на другие свойства этих множеств.

Можно рассматривать и называть диофантовыми множества, представимые как множества всех тех упорядоченных наборов из n элементов нек-рого кольца K, для к-рых в этом кольце разрешимо относительно $x_1, \ldots, x_l$ уравнение вида (*), где P — многочлен либо с целочисленными коэффициентами, либо с коэффициентами из K.

Лит.: [1] М а т и я с е в и ч Ю. В., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 5, с. 185—222.

Ю. В. Матиясевич.

ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ — раздел теории чисел, в к-ром изучаются приближения нуля значениями функций от конечного числа целочисленных аргументов. Первоначальные задачи Д. п. касались рациональных приближений к действительным числам, но развитие теории привело к задачам, в к-рых некоторым действительным функциям необходимо придать «малые» значения при целочисленных значениях аргументов. В силу этого Д. п. тесно связаны с решением неравенств в целых числах — диофантовых неравенств, а также с решением уравнений в целых числах (см. *Диофантовы уравнения*).

Если рассматриваемая (аппроксимирующая) функция

$$F = F(x_1, \ldots, x_n)$$

линейна относительно целочисленных аргументов $x_1, \ldots, x_n$, то Д. п. с функцией F наз. л и н е й н ы м и, в противном случае — н е л и н е й н ы м и. Если F — однородный многочлен от $x_1, \ldots, x_n$, то Д. п. с функцией F наз. о д н о р о д н ы м и, а если F — неоднородный многочлен, то — н е о д н о р о д н ы м и. Иног-

да рассматривается одновременно несколько функций F, имеющих хотя бы один общий целочисленный аргумент. В этом случае Д. п. наз. с о в м е с т н ы м и. Совместные Д. п. могут быть линейными или нелинейными, однородными или неоднородными в указанном выше смысле.

Численные значения F могут считаться близкими к нулю не обязательно при

$$|F(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon$$

с некоторым $\varepsilon>0$, но и при

$$0 \leqslant F(x_1, \ldots, x_n) < \varepsilon$$

(односторонние приближения). Функции F могут зависеть от параметров, непрерывно меняющихся в некоторой области,— это параметрич. Д. п. Наконец, область определения и область значений аппроксимирующих функций могут быть не только подмножествами евклидова пространства, а существенно иных топологич. пространств (см. ниже Д. п. в поле p-адических чисел и Д. п. в поле степенных рядов).

Наиболее старая («простейшая») задача Д. п. — приближения нуля линейной формой $\alpha x-y$, где $\alpha>0$ — фиксированное действительное число, x, y — переменные целые (линейные однородные Д. п.), т. е. задача о рациональных приближениях к α. Для специальных α ($\alpha=\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, π) эта задача рассматривалась еще в древности (Архимед, Диофант, Евклид), а ее тесная связь с теорией цепных дробей была вполне выяснена Л. Эйлером (L. Euler) и Ж. Лагранжем (J. Lagrange). В частности, если $x_1>0$, $y_1>0$ таковы, что

$$|\alpha x_1-y_1| = \min|\alpha x-y|,$$

где минимум берется по всем целым x в к.-л. интервале $0<x\leqslant X$ и по всем целым y, то дробь y_1/x_1 является подходящей дробью разложения α в цепную дробь. Если неполные частные разложения α в цепную дробь ограничены, то существует $C=C(\alpha)>0$ с условием $x|\alpha x-y|>C$ для всех целых $x>0$, $y>0$. Это верно, напр., для квадратичных иррациональностей α, так как тогда разложение в цепную дробь периодично. С другой стороны, при любом иррациональном α неравенство $x|\alpha x-y|<1/\sqrt{5}$ имеет бесконечное число целых решений $x>0$, $y>0$, а если $\alpha=(\sqrt{5}-1)/2$, то постоянную $1/\sqrt{5}$ нельзя заменить меньшим числом. Исследование А. А. Маркова о минимумах неопределенных бинарных квадратичных форм позволило продолжить последнее утверждение: если α не эквивалентно (в смысле теории цепных дробей) $(\sqrt{5}-1)/2$, то неравенство $x|\alpha x-y|<2^{-3/2}$ имеет бесконечное число решений; постоянная $2^{-3/2}$ не может быть улучшена, если α эквивалентно $\sqrt{2}$; если α не эквивалентно ни $(\sqrt{5}-1)/2$, ни $\sqrt{2}$, то неравенство $x|\alpha x-y|<5\,(221)^{-1/2}$ имеет бесконечное число решений, и т. д. (см. [1]). Постоянные $5^{-1/2}$, $2^{-3/2}$, $5\,(221)^{-1/2}$, ... монотонно убывают и имеют предел $1/3$.

Приближения нуля линейным неоднородным многочленом $\alpha x+y+\beta$ (α, β — действительные числа, x, y — переменные целые) — простейший пример линейных неоднородных диофантовых приближений. П. Л. Чебышев доказал, что при любом иррациональном α и любом β неравенство $x|\alpha x+y+\beta|<2$ имеет бесконечное число решений в целых $x>0$, y. Постоянная 2 здесь не является наилучшей: Г. Минковский (H. Minkowski) доказал, что если $\beta\neq a\alpha+b$ (a, b — целые), то 2 можно заменить на $1/4$, что является наилучшей постоянной. Это утверждение есть следствие доказанного самим Г. Минковским простейшего случая гипотезы о произведении неоднородных линейных форм (см. *Минковского гипотеза*).

Более сложные задачи общей теории Д. п. касаются аппроксимирующих функций от большего числа целочисленных аргументов (см. *Дирихле теорема*, *Минковского теорема*, *Кронекера теорема*). Удобно ввести функцию $\|\alpha\|=\min|\alpha-n|$, где минимум берется по всем целым n (расстояние от α до ближайшего целого). Напр., вместо рассмотренных выше линейных многочленов $\alpha x-y$ и $\alpha x+y+\beta$ можно брать $\|\alpha x\|$ и $\|\alpha x+\beta\|$ для целых $x>0$. Из теоремы Дирихле следует, что для любых действительных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ существует бесконечное число решений системы неравенств

$$x^{1/n}\max(\|\alpha_1 x\|, \ldots, \|\alpha_n x\|)<1$$

в целых $x>0$. Единицу можно заменить меньшим числом (напр., $n/(n+1)$), но ни для какого $n\geqslant 2$ наилучшая постоянная неизвестна. Она не может быть сколь угодно малым числом, как показывает пример $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, являющийся базисом действительного алгебраич. поля (см. [1]). Если $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ линейно независимы над полем рациональных чисел, то при любых $\beta_1, \ldots, \beta_n$ и любом $\varepsilon>0$ существует бесконечное число решений системы неравенств

$$\max(\|\alpha_1 x+\beta_1\|, \ldots, \|\alpha_n x+\beta_n\|)<\varepsilon$$

в целых $x>0$ (теорема Кронекера). Существенная особенность этой теоремы о совместных неоднородных Д. п. состоит в том, что в принципе невозможно (без специальной информации об однородных приближениях к $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$) указать скорость убывания ε при возрастании x: для того чтобы линейные формы $\alpha_1 x+y_1, \ldots, \alpha_n x+y_n$ «хорошо» аппроксимировали любые числа $\beta_1, \ldots, \beta_n$, необходимо и достаточно, чтобы эти формы не могли «хорошо» аппроксимировать специальный набор чисел $\beta_1=0, \ldots, \beta_n=0$.

Различные на первый взгляд задачи Д. п. иногда оказываются тесно связанными. Напр., принцип переноса Хинчина (см. [1]) связывает разрешимость неравенства

$$\|\alpha_1 x+\ldots+\alpha_n x_n\|<X^{-n-\lambda},\quad X=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|\neq 0 \tag{1}$$

в целых числах $x_1, \ldots, x_n$ с разрешимостью системы

$$\max(\|\alpha_1 x\|, \ldots, \|\alpha_n x\|)<x^{-(1+\mu)/n} \tag{2}$$

в целых $x>0$, и обратно: если λ_1 и μ_1 соответственно точные верхние грани тех $\lambda>0$ и $\mu>0$, для к-рых (1) и (2) имеют бесконечное число решений, то

$$\lambda_1\geqslant\mu_1\geqslant[n^2+(n-1)\lambda_1]^{-1}\lambda_1.$$

В частности, равенства $\lambda_1=0$ и $\mu_1=0$ равносильны (тогда $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ соответствуют «наихудшей» аппроксимации, так как (1) при $\lambda=0$ и (2) при $\mu=0$ имеют бесконечное число решений какими бы ни были $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$). Подобные связи существуют между однородной и неоднородной задачами (см. [1], [5]) и не только в случае линейных Д. п. Если, напр., $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ таковы, что при любом $\varepsilon>0$ для всех целых $x>0$

$$\|\alpha_1 x\|\ldots\|\alpha_n x\|>C_1 x^{-1-\varepsilon}, \tag{3}$$

где $C_1>0$ зависит только от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и ε, то каковы бы ни были действительные числа $\beta_1, \ldots, \beta_n$, при любом $\varepsilon_1>0$ система неравенств

$$\max(\|\alpha_1 x+\beta_1\|, \ldots, \|\alpha_n x+\beta_n\|)<X^{-1/n+\varepsilon_1}$$

имеет целое решение x с условием $0<x\leqslant X$, если $X>X_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varepsilon_1)$. Более того, неравенство (3) обеспечивает «сильную» равномерную распределенность дробных долей $(\{\alpha_1 q\}, \ldots, \{\alpha_n q\})$, где $q=1, 2, \ldots, Q$; число этих дробей, попадающих в систему интервалов $I_1\times\ldots\times I_n$, каждый из к-рых лежит внутри единичного интервала, равно $|I_1|\ldots|I_n|Q+O(Q^{\varepsilon_2})$, $|I|=$

длина интервала I, $\varepsilon_2>0$ — произвольно. Выполнение неравенства (3) для всех целых $x>0$ равносильно выполнению неравенства

$$\|\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n\|>C_2\prod_{i=1}^{n}(1+|x_i|)^{-1-\varepsilon_3} \quad (4)$$

для всех целых $x_1, \ldots, x_n\neq(0)$ при любом $\varepsilon_3>0$, где $C_2>0$ зависит только от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и ε_3.

Доказательство разрешимости или неразрешимости диофантовых неравенств, параметры к-рых определены арифметич. или аналитич. условиями, часто является весьма сложной задачей. Так, задача о приближениях алгебраич. чисел рациональными, систематически изучаемая со времени доказательства неравенства Лиувилля (1844) (см. *Лиувилля число*), до сих пор не получила полного решения (см. *Туэ — Зигеля — Рота теорема*, *Диофантовых приближений проблемы эффективизации*). Доказано [11], что для алгебраич. чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, вместе с 1 линейно независимых над полем рациональных чисел, выполняются неравенства (3), (4) при любых $\varepsilon>0$, $\varepsilon_3>0$. Из этого следует, что система неравенств (1) при любом $\lambda>0$ и система неравенств (2) при любом $\mu>0$ имеют лишь конечное число решений. Существует тесная связь между подобными теоремами о Д. п. к алгебраич. числам и представлением целых чисел неполными разложимыми формами. В частности, задача о границах для решений x, y диофантова уравнения Туэ $f(x, y)=A$ при фиксированной целочисленной неприводимой бинарной форме $f(x, y)$ не менее чем 3-й степени и переменном целом A равносильна изучению рациональных приближений к корню α многочлена $f(x, 1)$. Таким путем А. Туэ (A. Thue) доказал конечность числа решений уравнения $f(x, y)=A$, предварительно получив нетривиальную оценку рациональных приближений к α. Этот подход, обобщенный и развитый К. Зигелем (C. Siegel), привел его к теореме о конечности числа целых точек на алгебраич. кривых рода больше нуля (см. *Диофантова геометрия*). В. Шмидт [11] использовал подобные идеи для полного решения задачи о представлении чисел разложимыми формами, основываясь на своих аппроксимационных теоремах. В нек-рых случаях связи между теорией Д. п. и теорией диофантовых уравнений не столь непосредственны, хотя законы аппроксимации чисел могут играть главную роль в доказательствах существования решений, асимптотики числа решений и т. п. (задачи типа *Варинга проблемы* и метод Харди — Литлвуда — Виноградова).

Д. п. к специальным числам, заданным как значения трансцендентных функций в рациональных или алгебраич. точках, изучаются методами теории *трансцендентных чисел*. Как правило, доказательство иррациональности или трансцендентности к.-л. числа позволяет дать оценку аппроксимации его рациональными или алгебраич. числами. Для трансцендентного α величину $w_n(\alpha, H)=\min|P(\alpha)|$, где минимум берется по всем ненулевым целочисленным многочленам степени не более n и высоты не более H, наз. мерой трансцендентности числа α. Оценка снизу величины $w_n(\alpha, H)$, главным образом при фиксированном n и переменном H, составляет содержание многих теорем теории трансцендентных чисел (см. [12]). Напр., К. Малер ([7], [12]) доказал, что

$$w_n(e, H)>H^{-n-\frac{C_3 n^2\ln(n+1)}{\ln\ln H}},$$

где $C_3>0$ — абсолютная постоянная, $H>H_0(n)$. Другим методом А. Бейкер [3] доказал (4) для различных не равных нулю рациональных степеней e с $\varepsilon_3=C_4(\ln\ln x)^{-1/2}$, где

$$x=\max|x_i|, \quad i=1, 2, \ldots, n; \ C_4>0$$

зависит только от n, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Так как величина $w_n(\alpha, H)$ будет «малой» лишь тогда, когда хотя бы одно алгебраич. число степени не более n и высоты не более H «близко» к α, то существует связь между оценкой величины $w_n(\alpha, H)$ и оценкой аппроксимации α алгебраич. числами степени не более n. Пусть $w_n^*(\alpha, H) = \min |\alpha - x|$, где минимум берется по всем алгебраич. числам $\varkappa$ степени не более n и высоты не более H, и пусть

$$w_n(\alpha) = \overline{\lim_{H \to \infty}} \frac{-\ln w_n(\alpha, H)}{\ln H},$$

$$w_n^*(\alpha) + 1 = \lim_{H \to \infty} \frac{-\ln w_n^*(\alpha, H)}{\ln H}.$$

Э. Вирзинг [13] нашел соотношения между величинами $w_n(\alpha, H)$ и $w^*(\alpha, H)$ (α — действительное)

$$w_n^*(\alpha) \geqslant \max\left(\frac{w_n(\alpha)+1}{2}, \frac{w_n(\alpha)}{w_n(\alpha)-n+1}\right), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

В частности, если $w_n(\alpha) = n$, то $w_n^*(\alpha) = n$, и так как $w_n(\alpha) \geqslant n$ для всех трансцендентных α, то $w_n^*(\alpha) \geqslant (n+1)/2$. Из последнего следует, что для всякого трансцендентного α существует бесконечное число алгебраич. $\varkappa$ степени не более n, удовлетворяющих неравенству

$$|\alpha - \varkappa| < h_\varkappa^{-(n+3)/2+\varepsilon_4},$$

где $h_\varkappa$ — высота $\varkappa$, $\varepsilon_4 > 0$ — произвольно. Э. Вирзинг высказал предположение, что $w_n^*(\alpha) \geqslant n$ для всех трансцендентных α и всех $n = 1, 2, \ldots$. Кроме очевидного случая $n = 1$ эта гипотеза доказана для $n = 2$ (см. [4]). Известно также, что для почти всех (в смысле меры Лебега) действительных α верны равенства

$$w_n(\alpha) = w_n^*(\alpha) = n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(см. [2], *Метрическая теория чисел*, *Диофантовых приближений метрическая теория*).

Изучение диофантовых уравнений методами p-адического анализа стимулировало развитие теории Д. п. в поле *p-адических чисел* Q_p, к-рая строится во многом параллельно теории Д. п. в поле действительных чисел, но с учетом неархимедовой топологии поля Q_p. Напр., пусть $\omega \neq 0$ — p-адическое число. Рассматривая приближения нуля (в p-адической метрике) значениями целочисленной линейной формы $\omega x + y$, приходят к рациональным приближениям ω, к-рые, подобно случаю действительных чисел, тесно связаны с разложением ω в цепную (p-адическую) дробь [10]. Справедливы аналоги теорем Дирихле, Кронекера, Минковского и т. п., метрич. теорем, теорем о приближениях алгебраич. числами и т. д. [2], [6], [8]. Диофантовы неравенства в Q_p можно интерпретировать как сравнения по «высокой» степени p, что дает иногда возможность получать чисто арифметич теоремы аналитич. методом. Глубокое развитие Д. п. в поле Q_p и его конечных расширениях позволяет использовать метод Туэ — Зигеля — Рота для доказательства теорем об арифметич. структуре чисел, представимых бинарными формами, об оценке дробных долей степеней рациональных чисел и т. п. (см. [10]).

Так как разложение функций в непрерывные дроби осуществляется аналогично разложению чисел в цепные дроби, то естественно возникает дальнейшая аналогия: приближение функций рациональными функциями в метрике поля степенных рядов. Этот подход имеет далекое развитие и приводит к теории Д. п. в поле степенных рядов. Пусть K — произвольное алгебраич. поле, $K[x]$ — кольцо многочленов от x над K, $K\langle x^{-1}\rangle$ — поле степенных рядов вида

$$\omega = \alpha_{-m} x^m + \alpha_{-m+1} x^{m-1} + \ldots + \alpha_0 + \alpha_1 x^{-1} + \ldots,$$

$$\alpha_i \in K, \quad i = -m, -m+1, \ldots.$$

В поле $K\langle x^{-1}\rangle$ вводится неархимедово нормирование

$$|\omega| = \begin{cases} l^m, & \text{если } \omega \neq 0, \quad \alpha_{-m} \neq 0, \\ 0, & \text{если } \omega = 0, \end{cases}$$

где $l>1$ — произвольное фиксированное число. Поле $K\langle x^{-1}\rangle$ с нормированием $|\omega|$ становится метрич. пространством. Изучение «диофантовых» приближений осуществляется по обычной схеме, где $K[x]$ играет роль кольца целых чисел: рассматриваются аппроксимирующие функции со значениями в $K\langle x^{-1}\rangle$ от конечного числа переменных со значениями в $K[x]$, а близость к нулю оценивается с помощью введенного нормирования. Есть определенное сходство получаемых таким путем результатов со случаем Д. п. в поле действительных чисел, но если $K\langle x^{-1}\rangle$ заменить полем $K\langle x\rangle$ рядов вида

$$\alpha_{-m}x^{-m} + \alpha_{-m+1}x^{-m+1} + \ldots + \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots,$$

$$\alpha_i \in K, \quad i = -m, \ -m+1, \ \ldots,$$

то результаты будут аналогичны приближениям в поле p-адических чисел (см. [2], [9]).

Д. п. в поле степенных рядов в несколько более конкретной форме (специализации K, явная оценка точности приближения и т. п.) составляют основу нек-рых аналитич. методов теории трансцендентных чисел.

В развитии теории Д. п. выделяются три подхода: глобальный, метрический и индивидуальный. При глобальном подходе изучаются общие законы аппроксимации, справедливые для всех чисел или для всех за «редким» исключением. Сюда относятся теорема Дирихле об однородных приближениях, теорема Кронекера о неоднородных приближениях, общие теоремы о приближении чисел алгебраическими, классификации чисел по аппроксимационным свойствам и т. п. Соответственно применяемые методы носят «глобальный» характер (непрерывные дроби, применения теоремы Минковского и методы геометрии чисел и т. п.). Метрич. подход требует описания аппроксимационных свойств чисел на основе понятий теории меры (см. *Диофантовых приближений метрическая теория*, *Метрическая теория чисел*). Получаемые результаты касаются не всех, а почти всех (в смысле определенной меры) чисел из рассматриваемых множеств или описываются с помощью нек-рой метрич. характеристики (размерность Хаусдорфа, емкость и т. п.). Применяемые методы тесно связаны с теорией меры, теорией вероятностей и смежными дисциплинами. Индивидуальный подход касается аппроксимационных свойств специальных чисел (алгебраич. числа, e, π, $\ln 2$ и т. п.) или требует построения чисел с определенными аппроксимационными свойствами (числа Лиувилля, T-числа Малера и т. п.). Методы решения таких задач специфичны и часто создаются специально для анализа конкретной задачи.

Лит.: [1] Касселс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1961; [2] Спринджук В. Г., Проблема Малера в метрической теории чисел, Минск, 1967; [3] Baker A., «Canad. J. Math.», 1965, v. 17, p. 616—26; [4] Davenport H., Schmidt W., «Acta Arithm.», 1967, v. 13, p. 169—76; [5] Koksma J. F., Diophantische Approximationen, B., 1936; [6] Lutz E., Sur les approximations diophantiennes linéaires p-adiques, P., 1955; [7] Mahler K., «Math. Z.», 1930, Bd 31, S. 729—32; [8] его же, «Jahresber. DMV», 1934, Bd 44, S. 250—55; [9] его же, «Ann. Math.», 1941, v. 42, p. 488—522; [10] его же, Lectures on Diophantine approximations [s. l.], pt 1, 1961; [11] Schmidt W., «L'enseignment Math. Revue intern., ser. 2», 1971, v. 17, № 3—4, p. 187—253; [12] Schneider Th., Einführung in die transzendenten Zahlen, B., 1957; [13] Wirsing E., «J. reine und angew. Math.», 1961, Bd 206, № 1—2, S. 67—77.

В. Г. Спринджук.

ДИОФАНТОВЫ ПРОБЛЕМЫ АДДИТИВНОГО ТИПА — *диофантовы уравнения*, для к-рых ставится задача нахождения целочисленных решений и к-рые могут одновременно рассматриваться как *аддитивные*

проблемы, т. е. как задачи о разбиении целого числа n (произвольного или подчиненного дополнительным условиям) на слагаемые заданного типа. К Д. п. а. т. можно отнести, напр., решение в целых числах следующих уравнений:

$n = x^2 + y^2$ (см. *Гауссово число*),

$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ (см. *Лагранжа теорема* о сумме четырех квадратов),

$n = x^2 + y^2 + z^2$ (см. *Целая точка*),

а также *Варинга проблему* и др. Д. п. а. т. можно трактовать и как задачу нахождения пересечения арифметич. сумм множеств. Напр., множество M целочисленных решений уравнения $x^2+4y^2=z^2$ представляется в виде $M=A \cap B$, где

$$A = \left\{ x_1 \,\middle|\, x_1 = x^2 \right\} + \left\{ y_1 \,\middle|\, y_1 = 4y^2 \right\}, \quad B = \left\{ z_1 \,\middle|\, z_1 = z^2 \right\}.$$

Лит.: [1] Виноградов И. М., Особые варианты метода тригонометрических сумм, М., 1976; [2] Гельфонд А. О., Линник Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962; [3] Ostmann H. H., Additive Zahlentheorie, Bd 1, B., 1956. *Б. М. Бредихин.*

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ — алгебраич. уравнения или системы алгебраич. уравнений с рациональными коэффициентами, решения к-рых отыскиваются в целых или рациональных числах. Обычно предполагается, что Д. у. имеют число неизвестных, превосходящее число уравнений, в связи с чем они наз. также неопределенными уравнениями. Понятие Д. у. в современной математике часто относят также к алгебраич. уравнениям, решения к-рых отыскиваются среди целых алгебранч. чисел какого-либо алгебраич. расширения поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, среди p-адических чисел и т. п.

Исследование Д. у. относится к области пограничной между теорией чисел и алгебраич. геометрией (см. *Диофантова геометрия*).

Решение уравнений в целых числах является одной из древнейших математич. задач. Уже в начале 2-го тысячелетия до н. э. вавилоняне умели решать системы таких уравнений с двумя неизвестными. Наибольшего расцвета эта область математики достигла в Древней Греции. Основным источником для нас является «Арифметика» Диофанта (вероятно, 3 в. н. э.), содержащая различные типы уравнений и систем. В ней Диофант (по его имени — название «Д. у.») предвосхищает ряд методов исследования уравнений 2-й и 3-й степеней, развившихся только в 19 в. (см. [1]). Создание древнегреческими учеными теории рациональных чисел привело к рассмотрению рациональных решений неопределенных уравнений. Эта точка зрения последовательно проводится в книге Диофанта. Хотя сочинение Диофанта содержит лишь решения конкретных Д. у., однако есть основания считать, что он владел некоторыми общими приемами.

Исследование Д. у. обычно связано с большими трудностями. Более того, можно явно указать *многочлен*

$$F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

с целыми коэффициентами такой, что не существует алгоритма, позволяющего по любому целому x узнавать, разрешимо ли уравнение

$$F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

относительно $y_1, \ldots, y$ (см. *Диофантовых уравнений проблема разрешимости*). Примеры таких многочленов можно выписать явно. Для них невозможно дать исчерпывающего описания решений (если принимать *Чёрча тезис*).

Простейшее Д. у.

$$ax + by = 1,$$

где a и b — целые взаимно простые числа, имеет бесконечно много решений (если x_0 и y_0 — решение, то числа $x=x_0+bn$, $y=y_0-an$, где n — любое целое, тоже будут решениями). Другим примером Д. у. является

$$x^2+y^2=z^2.$$

Целые положительные решения этого уравнения представляют длины катетов x, y и гипотенузы z прямоугольных треугольников с целочисленными длинами сторон и наз. пифагоровыми числами. Все тройки взаимно простых пифагоровых чисел можно получить по формулам:

$$x=m^2-n^2,\ y=2mn,\ z=m^2+n^2,$$

где m и n — целые взаимно простые числа ($m>n>0$).

Диофант в соч. «Арифметика» занимался разысканием рациональных (не обязательно целых) решений специальных видов Д. у. Общая теория решения Д. у. 1-й степени была создана в 17 в. К. Г. Баше (C. G. Bachet); о решении систем Д. у. 1-й степени подробнее см. в статье *Линейное уравнение*. К началу 19 в. трудами П. Ферма (P. Fermat), Дж. Валлиса (J. Wallis), Л. Эйлера (L. Euler), Ж. Лагранжа (J. Lagrange) и К. Гаусса (C. Gauss) в основном было исследовано Д. у. вида

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$

где a, b, c, d, e, f — целые числа, т. е. общее неоднородное уравнение 2-й степени с двумя неизвестными. С помощью цепных дробей Ж. Лагранж исследовал общее неоднородное Д. у. 2-й степени с двумя неизвестными. К. Гаусс построил общую теорию квадратичных форм, являющуюся основой решения нек-рых типов Д. у.

В исследованиях Д. у. выше 2-й степени с двумя неизвестными серьезные успехи достигнуты лишь в 20 в. А. Туэ (A. Thue) установил, что Д. у.

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_ny^n=c,$$

где $n\geqslant 3$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$, c — целые, а многочлен $a_0t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_n$ неприводим в поле рациональных чисел, не может иметь бесконечного числа целых решений. Однако метод Туэ не дает возможности вычислять ни границы решений, ни число решений. А. Бейкером (A. Baker) получены эффективные теоремы о границах решений нек-рых таких уравнений. Б. Н. Делоне создал другой метод исследования, охватывающий более узкий класс Д. у., но позволяющий определять границы числа решений. В частности, его методом полностью решается Д. у. вида

$$ax^3+y^3=1.$$

Существует много направлений теории Д. у. Так, известной задачей теории Д. у. является проблема Ферма — гипотеза об отсутствии при $n\geqslant 3$ нетривиальных решений Д. у.

$$x^n+y^n=z^n. \qquad (1)$$

Исследование целых решений уравнения (1) является естественным обобщением задачи о пифагоровых тройках. Положительное решение проблемы Ферма для $n=4$ получено Л. Эйлером. Благодаря этому результату проблема Ферма сводится к доказательству отсутствия ненулевых целых решений уравнения (1) при нечетном простом n. Полное исследование решений уравнения (1) не завершено (1978). Трудности, возникающие при его решении, связаны с отсутствием единственности разложения на простые множители в кольце целых алгебраич. чисел. Теория дивизоров в кольцах целых алгебраич. чисел дает возможность установить справедливость теоремы Ферма для многих классов простых показателей n.

Арифметика колец целых алгебраич. чисел используется также в ряде других задач Д. у. Так, напр., ее методами подробно исследованы уравнения вида

$$N(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) = m, \qquad (2)$$

где $N(\alpha)$ — норма алгебраич. числа α, и отыскиваются целые рациональные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие уравнению (2). К уравнениям этого класса относится, в частности, *Пелля уравнение* $x^2 - dy^2 = 1$. В зависимости от значений $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, входящих в (2), эти уравнения делятся на два типа. К первому типу — так наз. полных форм — относятся те уравнения, у к-рых среди α_i найдется m линейно независимых чисел над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, где $m = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \mathbb{Q}]$ — степень поля алгебраич. чисел $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ над $\mathbb{Q}$. К неполным формам относятся формы, у к-рых максимальное число линейно независимых α_i меньше m. Случай полных форм проще и в основном его исследование доведено до конца. Можно, напр., для всякой полной формы описать все ее решения (см. [2], гл. 2).

Второй тип — так наз. неполных форм, сложнее и теория его далека от завершенности (1978). При изучении таких уравнений применяются *диофантовы приближения*. К уравнениям этого типа относится уравнение

$$F(x, y) = C,$$

где $F(x, y)$ — неприводимый однородный многочлен степени $n \geqslant 3$. Это уравнение может быть записано в виде

$$\prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i y) = C, \qquad (3)$$

где α_i — все корни многочлена $F(z, 1) = 0$. Существование бесконечной последовательности целых решений уравнения (3) привело бы к соотношениям вида

$$\left| \frac{x_i}{y_i} - \alpha_j \right| \leqslant \frac{C_1(F)}{y_i^n} \qquad (4)$$

для какого-либо α_j. Без ограничения общности можно считать, что $y_j \to \infty$. Поэтому при достаточно большом i неравенство (4) будет противоречить *Туэ — Зигеля — Рота теореме*, откуда следует, что уравнение $F(x, y) = C$, где F — неприводимая форма степени, большей или равной 3, не может иметь бесконечного числа решений.

Уравнения вида (2) представляют собой достаточно узкий класс среди всех Д. у. Напр., несмотря на простой вид, уравнения

$$x^3 + y^3 + z^3 = N \qquad (5)$$

и

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = N \qquad (6)$$

не входят в этот класс. Исследование решений второго из приведенных уравнений относится к сравнительно хорошо изученному разделу Д. у.— представлению чисел квадратичными формами. Теорема Лагранжа утверждает разрешимость уравнения (6) при всяком натуральном N. Суммой трех квадратов представляется любое натуральное число, отличное от чисел вида $4^a(8k-1)$, где a и k — целые неотрицательные (теорема Гаусса). Известны критерии существования рациональных или целых решений уравнений вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a,$$

где $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма с целыми коэффициентами. Так, теорема Минковского — Хассе утверждает, что уравнение

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = b,$$

где a_{ij} и b рациональны, допускает рациональное ре-

шение тогда и только тогда, когда оно разрешимо в действительных числах, а также в p-адических числах для каждого простого числа p.

Представление чисел произвольными формами 3-й степени и формами более высоких степеней изучено меньше из-за возникающих здесь часто принципиальных трудностей. Одним из основных методов исследования представления чисел формами высших степеней является *тригонометрических сумм метод*. Этот метод состоит в явной записи через интеграл Фурье числа решений уравнения, затем с помощью *кругового метода* осуществляется, в сущности, выражение числа решений уравнения через число решений соответствующих сравнений. Метод тригонометрических сумм меньше, чем другие методы, зависит от алгебраической специфики уравнения.

Существует большое число конкретных Д. у., решаемых элементарными методами (см. [5]).

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [2] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [3] Dickson L. E., History of the theory of numbers, v. 1, N. Y., 1934; [4] Башмакова И. Г., Диофант и диофантовы уравнения, М., 1972; [5] Серпинский В., О решении уравнений в целых числах, пер. с польск., М., 1961. *С. М. Воронин.*

ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — раздел теории чисел, изучающий метрич. свойства чисел, обладающих определенными свойствами аппроксимации (см. *Диофантовы приближения*, *Метрическая теория чисел*). Одной из первых теорем Д. п. м. т. является теорема Хинчина (см. [1], [2]), в современной форме утверждающая (см. [3]): пусть $\varphi(q)>0$ — монотонно убывающая функция, определенная для целых $q>0$. Тогда неравенства $\|\alpha q\|<\varphi(q)$ для почти всех действительных α имеют бесконечное число решений в целых $q>0$, если расходится ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} \varphi(q), \tag{1}$$

и имеют лишь конечное число решений, если этот ряд сходится (здесь и в дальнейшем $\|x\|$ есть расстояние от x до ближайшего целого, т. е.

$$\|x\| = \min |x-a|,$$

где min берется по всем целым a; выражение «почти все» относится к мере Лебега в соответствующем пространстве). Эта теорема характеризует точность приближения почти всех действительных чисел рациональными дробями. Напр., для почти всех α существует бесконечное число рациональных приближений a/q, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < q^{-2}(\ln q)^{-1},$$

в то время как неравенство

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < q^{-2}(\ln q)^{-1-\varepsilon}$$

при любом $\varepsilon>0$ имеет бесконечное число решений лишь для множества чисел α нулевой меры.

Обобщение этой теоремы на случай совместных приближений (см. [3]): система неравенств

$$\max(\|\alpha_1 q\|, \ldots, \|\alpha_n q\|) < \varphi(q) \tag{2}$$

имеет конечное или бесконечное число решений для почти всех $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ в зависимости от того, сходится или расходится ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} \varphi^n(q). \tag{3}$$

Более далекие обобщения относятся к системам неравенств от многих целочисленных переменных (см. [5]).

Характерной особенностью теоремы Хинчина и различных ее обобщений является то, что свойство «сходимости — расходимости» рядов типа (1), (3) разграничивает те случаи, когда соответствующий порядок аппроксимации имеет место для множества чисел нулевой меры или для почти всех чисел. Это своего рода закон «нуля — единицы» Д. п. м. т. Еще одной особенностью указанных обобщений является то, что утверждаемое в них метрич. свойство чисел относится к мере, определенной во всем пространстве, к-рому принадлежат числа, участвующие в аппроксимации, а мера пространства определяется как произведение мер в координатных пространствах. Напр., в случае системы (2) речь идет о приближении n «независимых» чисел и о мере Лебега в $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}$ (n раз). В связи с этим рассмотренная часть Д. п. м. т. стала наз. Д. п. м. т. независимых величин. Эта часть Д. п. м. т. разработана достаточно хорошо, хотя остается ряд нерешеных (к 1978) вопросов. Одним из них является вопрос о том, какие условия нужно наложить на последовательность измеримых множеств $A(q)$, $q=1, 2, \ldots$, интервала $[0,1]$, чтобы сходимость или расходимость ряда $\sum_q |A(q)|$ соответствовала конечному или бесконечному числу выполнений условия $\alpha q\in A(q) \bmod 1$ для почти всех α. Аналогичная задача возникает в случае системы чисел $(\alpha_1 q, \alpha_2 q, \ldots, \alpha_n q)$ (см. [4]).

Д. п. м. т. зависимых величин, возникшая позднее, сразу выдвинула ряд глубоких и своеобразных проблем (см. [5]). Первая из них происходила из теории трансцендентных чисел (гипотеза Малера) и касалась совместных рациональных приближений к системе чисел $t, t^2, \ldots, t^n$ для почти всех t при любом фиксированном натуральном n. Один из последних результатов, полученных в этом направлении, состоит в следующем: пусть $\varphi(q)>0$ — монотонно убывающая функция, для к-рой ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} q^{-1}\varphi(q)$$

сходится. Тогда система неравенств

$$\max(\|tq\|, \|t^2q\|, \ldots, \|t^nq\|) < q^{1/n}\varphi^n(q)$$

для почти всех t имеет лишь конечное число решений в целых $q>0$ (см. [7]).

Эта теорема утверждает определенное свойство аппроксимации рациональными числами почти всех точек кривой $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$. Можно рассматривать более общие многообразия в $\mathbb{R}^n$ и получать подобные результаты.

Если почти все (в смысле меры на Γ) точки $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ многообразия Γ таковы, что система (2) с $\varphi(q)=q^{-1/n-\varepsilon}$ имеет конечное число решений в целых $q>0$ при любом $\varepsilon>0$, то Γ наз. экстремальным, т. е. почти все точки допускают лишь наихудшую совместную аппроксимацию рациональными числами. Известна теорема Шмидта: если Γ — кривая в $\mathbb{R}^2$, имеющая почти во всех своих точках отличную от нуля кривизну, то она экстремальна [8].

Тригонометрических сумм метод (см. также *Виноградова метод*) позволяет обнаружить свойство экстремальности у многообразий Γ весьма широкого класса в $\mathbb{R}^n$, но при условии, что топологическая размерность $\dim\Gamma\geqslant n/2$. Если же $\dim\Gamma<n/2$, то экстремальное многообразие не может быть слишком общим, и его структура должна указываться достаточно определенно [9].

Лит.: [1] Хинчин А. Я., «Math. Z.», 1926, Bd 24, S. 706—14; [2] его же, Цепные дроби, 4 изд., М., 1978; [3] Кассельс Дж., Введение в теорию диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1961; [4] Cassels J. W. S., «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1950, v. 46, № 2, p. 209—18; [5] Спринджук В. Г., Проблема Малера в метрической теории чисел, Минск, 1967; [6] его же, в кн.: Международный

конгресс математиков в Ницце. 1970, М., 1972, с. 301—06; [7] Baker A., «Proc. Roy. Soc.», Ser. A, 1966, v. 292, № 1428, p. 92—104; [8] Schmidt W., «Monatsh. Math.», 1964, Bd 68, № 2, S. 154—66; [9] Спринджук В. Г., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1972, т. 128, в. 2, с. 212—28; [10] его же, в сб.: Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974, с. 178—98. *В. Г. Спринджук.*

ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПРОБЛЕМЫ ЭФФЕКТИВИЗАЦИИ — получение эффективных решений задач диофантовых приближений, для к-рых известно решение, полученное неэффективными методами, т. е. методами, не допускающими принципиальной возможности численного выражения результата. Таковы, например, теоремы А. Туэ (A. Thue), К. Зигеля (C. Siegel), К. Рота (K. Roth), В. Шмидта (W. Schmidt), их обобщения, аналоги и следствия (см. *Туэ — Зигеля — Рота теорема*, *Диофантовы приближения*). Неэффективность этих теорем объясняется логич. структурой метода, основанного на предположении о существовании объектов, не определяемых конструктивно. Так, в случае рациональных приближений к алгебраич. числам граница для знаменателей «хороших» приближений, устанавливаемая в процессе рассуждений, зависит от одного из этих «хороших» приближений, существование к-рого не доказывается.

Эффективное решение задачи часто представляет большие трудности. Лишь недавно удалось получить эффективное усиление неравенства Лиувилля (см. *Лиувилля число*). Метод доказательства существенно отличается от метода Туэ — Зигеля — Рота и связан с привлечением эффективных методов теории трансцендентных чисел (см. *Линейная форма от логарифмов* алгебраич. чисел). Наилучший известный результат (1978) имеет вид

$$|\alpha x - y| > cx^{-n+1+\delta},$$

где α — алгебраич. число степени $n \geqslant 3$, $x > 0$, y — целые рациональные, $c > 0$ и $\delta > 0$ определяются в явном виде через α (см. [3]). Это неравенство далеко от своего неэффективного аналога: вместо показателя $n+1+\delta$ неэффективные методы дают $-1-\varepsilon$ с любым $\varepsilon > 0$, но с неизвестной функцией c от α и ε. Доказательство эффективного неравенства

$$|\alpha x - y| > Cx^{-\varphi(n)}$$

с функцией $\varphi(n)$, растущей, напр., как n^{ε}, представляет большой интерес в связи с нахождением границ решений диофантова уравнения

$$f(x, y) = 0,$$

где многочлен $f(x, y)$ определяет кривую рода $\geqslant 1$ (конечность числа решений доказана в 1929 К. Зигелем, использовавшим неэффективные оценки, см. *Диофантова геометрия*).

Несмотря на то, что эффективные оценки получаются значительно хуже неэффективных, знание их зависимости от параметров задачи позволяет устанавливать новые результаты, недоступные неэффективным методам. Так, эффективные оценки линейных форм от логарифмов алгебраических чисел позволили Туэ найти оценки решений многих диофантовых уравнений, в частности уравнения Туэ и уравнений, задающих кривые рода 1, а также дать еще одно решение проблемы десятого дискриминанта, установить границу для дискриминантов двухклассных мнимых квадратичных полей, оценить снизу наибольший простой делитель значений бинарной формы степени $\geqslant 3$ и величину свободного от квадратов ядра целочисленного многочлена (см. [2]).

Лит.: [1] Спринджук В. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 5, с. 991—1007; 1972, т. 36, № 4, с. 712—741; [2] его же, в сб.: Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974, с. 178—98; [3] Фельдман Н. И., там же, с. 244—68; [4] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 5, с. 973—90; [5] Baker A., «Phil. Trans. Royal Soc. London», Ser. A., 1968, v. 263, p. 173—91, 193—208; [6] его же, в кн.: Actes du Congrès International des Mathématiciens. 1970, t. 1, P., 1971, p. 19—26. *В. Г. Спринджук.*

ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОБЛЕМА РАЗРЕШИМОСТИ — проблема отыскания алгоритма для распознавания по любому *диофантову уравнению*, имеет ли оно решение.

Существенным в постановке проблемы является требование найти универсальный метод, к-рый должен быть пригоден для любого уравнения (все известные способы для распознавания наличия решений у диофантовых уравнений применимы лишь к уравнениям из отдельных более или менее широких классов). Такой метод позволял бы решать и системы диофантовых уравнений, ибо система $P_1=0, \ldots, P_k=0$ эквивалентна уравнению

$$P_1^2+\ldots+P_k^2=0.$$

Задача нахождения такого универсального метода для распознавания наличия решений в целых числах была поставлена Д. Гильбертом (D. Hilbert, см. [1]).

В начале 50-х гг. 20 в. появились первые работы, нацеленные на доказательство невозможности алгоритма, требуемого в Д. у. п. р. В это время была высказана гипотеза (г и п о т е з а Д е й в и с а, см. [2]) о том, что каждое *перечислимое множество* является *диофантовым множеством*. Поскольку известны примеры перечислимых, но алгоритмически неразрешимых множеств, то из справедливости этой гипотезы немедленно следует отрицательное решение Д. у. п. р.

В 1961 было доказано (см. [3]) более слабое утверждение: каждое перечислимое множество является п о к а з а т е л ь н о - д и о ф а н т о в ы м м н о ж е с т в о м, т. е. для каждого перечислимого множества $\mathfrak{M}$ существуют такие выражения K и L, построенные из натуральных чисел и переменных $a, z_1, \ldots, z_n$ с помощью сложения, умножения и возведения в степень, что $a\in\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда показательно-диофантово уравнение $K=L$ разрешимо относительно $z_1, \ldots, z_n$. После этого для доказательства гипотезы Дейвиса осталось указать способ, позволяющий преобразовать произвольное показательно-диофантово уравнение в нек-рое диофантово уравнение, имеющее или не имеющее решения одновременно с ним. Было доказано [4], что такое преобразование возможно, если существует диофантово уравнение

$$G(u, v, z_1, \ldots, z_k)=0,$$

обладающее следующими двумя свойствами: 1) в любом решении этого уравнения $v\leqslant u^n$; 2) для любого k существует решение, в к-ром $v>u^k$ (про такое уравнение говорят, что оно имеет э к с п о н е н ц и а л ь н ы й р о с т). Пример диофантова уравнения, имеющего экспоненциальный рост, к-рый впервые был построен в [5], завершил доказательство гипотезы о диофантовости перечислимых множеств (полностью доказательство гипотезы Дейвиса изложено в [6], [7]). Обратное утверждение о перечислимости диофантовых множеств доказывается легко. Таким образом, класс перечислимых множеств совпадает с классом диофантовых множеств.

Из этого результата следует возможность указать конкретный многочлен $W(a, z_1, \ldots, z_n)$ с целыми коэффициентами такой, что не существует алгоритма, позволяющего по значению параметра a узнавать, разрешимо ли уравнение $W(a, z_1, \ldots, z_n)=0$ относительно $z_1, \ldots, z_n$, и, тем более, не существует требуемого в Д. у. п. р. алгоритма для распознавания наличия решений у произвольного диофантова уравнения.

Вопрос о существовании алгоритма, позволяющего распознавать разрешимость диофантовых уравнений в рациональных числах, эквивалентен вопросу о существовании алгоритма, позволяющего распознавать разрешимость однородных диофантовых уравнений в целых числах. Эта важная проблема пока (1978) остается открытой и малоисследованной.

Лит.: [1] Гильберт Д., в кн.: Проблемы Гильберта, М., 1969, с. 11—64; [2] Дэвис М., «Математика», 1964, т. 8, № 5, с. 15—22; [3] Дэвис М., Путнам Х., Робинсон Дж., там же, с. 69—79; [4] Робинсон Дж., там же, с. 3—14; [5] Матиясевич Ю. В., «Докл. АН СССР», 1970, т. 191, № 2, с. 279—82; [6] его же, «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 5, с. 185—222; [7] Манин Ю. И., в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, 1973, т. 1, с. 5—37; [8] Davis M., Матиясевич Ю. В., Robinson J., «Proc. Symp. Pure Math.», 1976, v. 28, p. 323—75.

Ю. В. Матиясевич.

ДИРАКА ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ — см. *Дельта-функция.*

ДИРАКА МАТРИЦЫ — четыре эрмитовы матрицы α_k, $k=1, 2, 3$, и β размера 4×4, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_k\alpha_j+\alpha_j\alpha_k=2\delta_{kj}E,$$

$$\alpha_k\beta+\beta\alpha_k=0, \quad \alpha_k\alpha_k=\beta^2=E,$$

где E — единичная матрица размера 4×4. Вместо матриц α_k, β используются также эрмитовы матрицы $\gamma^k=-i\beta\alpha_k$, $k=1, 2, 3$, и антиэрмитова матрица $\gamma^0=i\beta$, удовлетворяющие условиям

$$\gamma^\varkappa\gamma^\lambda+\gamma^\lambda\gamma^\varkappa=-2g_{\varkappa\lambda}E, \quad \varkappa, \lambda=0, 1, 2, 3,$$

где $g_{00}=-g_{kk}=1$, $g^{\varkappa\lambda}=0$ при $\varkappa\neq\lambda$, что позволяет записать *Дирака уравнение* в форме, ковариантной относительно группы преобразований Лоренца. Матрицы α_k, β и $\gamma^\varkappa$ определены с точностью до произвольного унитарного преобразования и представление этих матриц может быть выбрано различными способами. Напр.,

$$\gamma^0=-i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}; \quad \gamma^k=-i\begin{pmatrix}0 & \sigma_k\\ -\sigma_k & 0\end{pmatrix},$$

где σ_k— двухрядные *Паули матрицы*, а 1 и 0 — двухрядные единичная и нулевая матрицы соответственно. С помощью Д. м. можно факторизовать *Клейна— Гордона уравнение:*

$$(\Box-m^2)E\psi=$$

$$=\left(\sum\nolimits_{\varkappa=0}^{3}\gamma^\varkappa\frac{\partial}{\partial x^\varkappa}-mE\right)\left(\sum\nolimits_{\lambda=0}^{3}\gamma^\lambda\frac{\partial}{\partial x^\lambda}+mE\right)\psi=0,$$

где $\Box$ — оператор Д'Аламбера.

Д. м. введены П. Дираком (P. Dirac) в 1928 при выводе уравнения Дирака.

В. Д. Кукин.

ДИРАКА СПИНОР — четырехкомпонентная комплексная функция в четырехмерном пространстве-времени, удовлетворяющая *Дирака уравнению.* В спинорном анализе Д. с. определяется как биспинор 1-го ранга, реализующий неприводимое линейное представление общей группы Лоренца на $\mathbb{R}^4$ с псевдоевклидовой метрикой

$$(x,\ y)\equiv\sum\nolimits_{\varkappa,\ \lambda=0}^{3}g_{\varkappa\lambda}x^\varkappa y^\lambda\equiv x^0y^0-\sum\nolimits_{k=1}^{3}x^ky^k,$$

$$x=(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3).$$

Дирака матрицы, входящие в уравнение Дирака, определены с точностью до произвольного унитарного преобразования, поэтому Д. с. определен с точностью до того же унитарного преобразования. Это свойство позволяет выбирать наиболее удобное из физических соображений представление матриц Дирака и, соответственно, Д. с.

В. Д. Кукин.

ДИРАКА УРАВНЕНИЕ — релятивистское волновое уравнение, играющее фундаментальную роль в релятивистской квантовой механике и квантовой теории поля. Д. у. применяется для описания частиц со спином $^1/_2$ (в единицах $\hbar$), то есть электронов, нейтрино, мюонов, протонов, нейтронов и др., а также позитронов и всех др. античастиц и гипотетических субчастиц — кварков. Д. у. является основой теории частиц полуцелого спина ($^1/_2$, $^3/_2$, $^5/_2$ и т. д.), то есть фермионов, к-рые подчиня-

ются Ферми статистике. Напр., обобщением Д. у. для частиц спина $^3/_2$ является Рарита — Швингера уравнение.

Д. у. есть система четырех линейных однородных дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка с постоянными комплексными коэффициентами, инвариантная относительно общей группы преобразований Лоренца:

$$\gamma^\alpha \frac{\partial x}{\partial x^\alpha} - \mu\psi = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3,$$

где $\mu = mc/\hbar$, m — масса покоя, $x^\alpha = x^0, x^1, x^2, x^3 \in R^4$ с псевдоевклидовой метрикой $(x, y) = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dy^\beta$, а

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

— метрический тензор пространства Минковского с сигнатурой $+2$; ψ — *Дирака спинор* (биспинор):

$$\psi = \begin{Vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{Vmatrix},$$

$\gamma^\alpha = \gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ — *Дирака матрицы*.

При преобразованиях переменных из общей группы Лоренца — Пуанкаре $x'^\alpha = L(x^\alpha)$ (см. [2]) биспинор ψ преобразуется по формуле $\psi'(x') = S(L)\psi(x)$, где $S(L)$ — неособенная комплексная матрица размерности 4×4. S-матрицы образуют специальное двузначное представление группы L. Д. у. относительно новых переменных $\psi'(x'^\alpha)$ не изменяет своего вида (релятивистская инвариантность):

$$\gamma^\alpha \frac{\partial \psi'}{\partial x'^\alpha} - \mu\psi' = 0.$$

Случай $\mu = 0$ дает уравнение Вейля, описывающее нейтрино. При этом Д. у. разбивается на два независимых уравнения для спинорных функций (спиноров Ван дер Вардена) $\varphi = (\psi_1, \psi_2)$ и $\chi = (\psi_3, \psi_4)$. Каждое из них будет не инвариантным относительно отражений (теория с несохранением четности).

Любое решение Д. у. удовлетворяет *Клейна — Гордона уравнению*, описывающему бесспиновые скалярные частицы

$$\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \mu^2\psi = 0, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3,$$

но не всякое решение этого уравнения удовлетворяет Д. у., к-рое получается факторизацией уравнения Клейна — Гордона.

Из Д. у. следует факт наличия у электрона собственного механического спинового момента $\hbar/2$. Д. у. полностью описывает движение атомных электронов в поле ядра и в других электромагнитных полях, а также взаимодействие электрона с известными элементарными частицами.

Любое релятивистски инвариантное уравнение можно представить в форме Д. у.:

$$\Gamma^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} - \mu\psi = 0,$$

где Γ^α — обобщение γ^α. Для уравнения Клейна — Гордона функция ψ имеет 5 компонент, а Γ^α — 4 пятирядные матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho + \Gamma_\rho\Gamma_\nu\Gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\Gamma_\rho + \eta_{\rho\nu}\Gamma_\mu, \quad \Gamma_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\Gamma^\beta$$

(Дуффина — Кеммера матрицы).

Подобно тому как взаимодействие фермионов с электромагнитным полем учитывается в Д. у. заменой производной $\partial/\partial x^\alpha$ на компенсирующую производную $\partial/\partial x^\alpha - iA_\alpha$ (A_α — 4-потенциал электромагнитного поля), учет взаимодействия фермионов с гравитационным полем в соответствии с общей теорией относительности приводит к обобщению Д. у. на риманово пространство введением соответствующей компенсирующей (ковариантной) производной (см. [3]):

$$\gamma^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - C_\alpha \right) \psi - \mu\psi = 0,$$

где C_α — спинорные коэффициенты связности, определенные сначала с помощью тетрадного формализма, удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{\partial \gamma_\beta}{\partial x_\alpha} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\gamma_\rho + \gamma_\beta C_\alpha - C_\alpha \gamma_\beta = 0,$$

$\Gamma^\rho_{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля. Общерелятивистское обобщение Д. у. необходимо при исследовании гравитационного коллапса, при описании предсказываемого эффекта рождения частиц в сильных гравитационных полях и др.

В пространстве с кручением в Д. у. возникает нелинейный добавок кубического типа (см. [4]) и оно переходит в нелинейное уравнение

$$\gamma^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - C_\alpha \right) \psi - l^2 (\bar\psi \gamma\gamma^\beta \psi)\, \gamma\gamma_\beta \psi - \mu\psi = 0,$$

где $\gamma = i\gamma_5$, $l^2 = 3\pi G h/c^3$, G — гравитационная постоянная. Уравнение установлено П. Дираком (P. Dirac, 1928).

Лит.: [1] Дирак П. А. М., Принципы квантовой механики, пер. с англ., М., 1960; [2] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 2 изд., М., 1976; [3] Новейшие проблемы гравитации, пер. с англ., М., 1961; [4] Родичев В. И., «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1969, т. 40.

В. Г. Кречет.

ДИРЕКТРИСА — прямая, лежащая в плоскости *конического сечения* (эллипса, гиперболы или параболы) и обладающая тем свойством, что отношение расстояния от любой точки кривой до фокуса кривой к расстоянию от той же точки до этой прямой есть величина постоянная, равная *эксцентриситету*.

Е. В. Шикин.

ДИРИХЛЕ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА — задача отыскания минимума *Дирихле интеграла*

$$D(u) = \int \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dG, \quad u = u(x_1, \ldots, x_n),$$

при заданных граничных условиях $u|_{\partial G} = \varphi$, где функция φ задана на границе ∂G n-мерной области G. Решение этой задачи является и решением первой краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0, \quad u\Big|_{\partial G} = \varphi.$$

Д. в. з.— первая задача на минимизацию функционала, к к-рой было сведено решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными.

Д. в. з. естественно рассматривать в классе функций, имеющих первые обобщенные производные, суммируемые с квадратом. В случае ограниченной области это множество функций совпадает с *Соболева пространством* $W_2^1(G)$, и потому обладает свойством полноты в соответствующей метрике. Кроме того, каждая функция этого пространства имеет на ∂G граничные значения в смысле сходимости почти всюду, к-рые в случае достаточной гладкости границы совпадают с граничными значениями в смысле сходимости в среднем или в смысле предела граничных значений непрерывных в замкнутой области функций, аппроксимирующих в метрике пространства $W_2^1(G)$ заданную функцию. Если

G — ограниченная область и если существует хоть одна функция u, для к-рой $|D(u)|<\infty$ и $u|_{\partial G}=\varphi$ (такие функции наз. д о п у с т и м ы м и), то решение u_0 Д. в. з. существует и единственно. Это решение u_0 является гармонической в G функцией (см. *Дирихле принцип*). Если граница ∂G области G гладкая, то для того чтобы класс допустимых функций был не пуст, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi\in B_2^{1/2}(\partial G)$. Решение u_0 Д. в. з. может быть найдено прямым вариационным методом. Эти результаты обобщаются как на случай квадратичных эллиптич. функционалов, содержащих производные высших порядков, так и на случай неограниченных областей.

Лит.: [1] К у р а н т Р., Г и л ь б е р т Д., Методы математической физики, пер. с нем., т. 2, 2 изд., М.— Л., 1951; [2] С о б о л е в С. Л., Некоторые применения функционального анализа к математической физике, Новосиб., 1962; [3] Н и к о л ь с к и й С. М., «Матем. сб.», 1954, т. 35, № 2, с. 247—66; [4] К у д р я в ц е в Л. Д., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1959, т. 55, с. 1—181.

Л. Д. Кудрявцев.

ДИРИХЛЕ ЗАДАЧА — задача отыскания регулярной в области D гармонич. функции u, к-рая на границе Г области D совпадает с наперед заданной непрерывной функцией φ. Задачу отыскания регулярного в области решения эллиптич. уравнения 2-го порядка, принимающего наперед заданные значения на границе области, также наз. Д. з., или первой краевой задачей. Вопросы, связанные с этой задачей, рассматривались еще К. Гауссом (C. Gauss, 1840), а затем П. Дирихле [1].

Для областей D с достаточно гладкой границей Г решение $u(x)$ Д. з. можно представить интегральной формулой

$$u(x)=\int_\Gamma \varphi(x_0)\frac{\partial G(x,\ x_0)}{\partial n_0}\,d\sigma, \qquad (1)$$

где $\partial G(x, x_0)/\partial n_0$ — производная по направлению внутренней нормали в точке $x_0\in\Gamma$ *Грина функции* $G(x, x_0)$, характеризуемой следующими свойствами:

1) $G(x,\ x_0)=s_n^{-1}r^{2-n}+\gamma(x,\ x_0)$ при $n\geqslant 3$

или

$$G(x, x_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}+\gamma(x,\ x_0) \quad \text{при } n=2,$$

где $r=|x-x_0|$ — расстояние между точками x и x_0, s_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $\gamma(x, x_0)$ — регулярная в D гармонич. функция как относительно координат x, так и относительно координат x_0;

2) $G(x, x_0)=0$, когда $x_0\in D$, $x\in\Gamma$.

Для шара, полупространства и нек-рых других простейших областей функция Грина строится явно и формула (1) дает эффективное решение Д. з. Получаемые при этом для шара и полупространства формулы носят название *Пуассона формул*.

Д. з. является одной из основных проблем *потенциала теории*. Она служила и служит как бы пробным камнем для разрабатываемых новых методов, к-рые затем, в той или иной мере, становятся достоянием общей теории уравнений с частными производными.

Для исследования Д. з. применяются следующие методы.

Вариационный метод основан на том, что среди всех функций u, заданных в D и принимающих наперед заданные значения на Г, минимизирует *Дирихле интеграл*

$$D(u)=\int_D\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\omega$$

— гармоническая функция. Для $D(u)$ строится специальная минимизирующая последовательность и доказывается сходимость этой последовательности. Поскольку от искомого решения u Д. з. требуется, чтобы сущест-

вовал интеграл $D(u)$, то вариационный метод применим лишь для таких функций φ, к-рые являются следами на Γ функций F, заданных в $\overline{D}$, и таких, что $D(F)$ существует и ограничен.

В методе потенциалов решение Д. з. ищется в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью, определенной на Γ. При помощи формул скачка относительно этой плотности получается интегральное уравнение Фредгольма, из к-рого следует существование решения Д. з. с учетом того, что единственность этого решения следует из принципа максимума. Предполагается, что $\Gamma \in A^{(\lambda,\ \lambda)}$.

В альтернирующем методе Шварца рассматриваются две области D_1 и D_2 с непустым пересечением D_0 такие, что для D_1 и D_2 в отдельности известен способ решения Д. з. Затем строится процесс, позволяющий найти решение Д. з. для области $D=D_1 \cup D_2$. Границы Γ_1 и Γ_2 областей D_1 и D_2 предполагаются кусочно гладкими, причем во всех точках пересечения Γ_1 с Γ_2 как Γ_1, так и Γ_2 являются гладкими и пересекаются под ненулевым углом. Строятся последовательности регулярных в областях D_1 и D_2 гармонич. функций, удовлетворяющих специальным граничным условиям. Затем доказывается, что эти последовательности равномерно сходятся и в D_0 их пределы совпадают. Предельная гармонич. функция регулярна в D и является искомым решением Д. з. Метод Шварца можно применять для объединения или пересечения любого конечного числа областей.

Метод выметания в той форме, в к-рой он первоначально был введен А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1890), применяется к таким областям, к-рые допускают исчерпание счетным множеством шаров. Исходным в этом методе является построение ньютонова потенциала, принимающего на границе Γ заданные значения φ, а задача затем сводится к замене этого потенциала потенциалом масс, расположенных на Γ, без изменения значений φ на Γ, т. е. к выметанию масс. При помощи формулы Пуассона такой процесс выметания для шара D легко осуществить в явном виде. Счетное число выметаний из шаров, объединение к-рых исчерпывает область D общего вида, приводит к нек-рому потенциалу масс, расположенных на границе Γ, к-рый и дает решение Д. з.

Близким к методу выметания является *Перрона метод* (или метод верхних и нижних функций), применимый к областям D весьма общего вида. В этом методе строятся последовательности верхних (супергармонических) и нижних (субгармонических) функций, общим пределом к-рых является искомое решение Д. з. Для того чтобы это решение принимало заданное значение в точке $Q \in \Gamma$, необходимо и достаточно существование локального барьера ω_Q. Функция ω_Q непрерывна, супергармонична в пересечении $\overline{D} \cap \Sigma$ (Σ — шар с центром в точке Q); $\omega_Q > 0$ всюду в $\overline{D} \cap \Sigma$, кроме точки Q, где она обращается в нуль.

Точки Γ, для к-рых существует локальный барьер, наз. регулярными точками. Если Γ состоит только из регулярных точек, то полученное решение Д. з. непрерывно в D и принимает заданные значения на Γ. Однако на Γ могут существовать и иррегулярные точки. Напр., в $\mathbb{R}^2$ иррегулярными являются изолированные точки Γ, а в $\mathbb{R}^3$ иррегулярной будет вершина достаточно тонкого острия, входящего внутрь D. Наличие иррегулярных точек приводит к тому, что Д. з. не является разрешимой для всех непрерывных на Γ функций φ, либо же решение является неустойчивым по отношению к изменению граничных данных (см. [6]).

Обобщенное решение Д. з., введенное Н. Винером (N. Wiener, 1924), удовлетворяет условиям: а) оно применимо для любых областей; б) оно приводит к

классич. решению Д. з., если таковое существует. Пусть область D — предел монотонно возрастающей последовательности регулярных областей $\{D_n\}$ такой, что $D_n \subset D_{n+1} \subset D$, и любой компакт $K \subset D$ содержится в D_n при $n > n(K)$. Обобщенное решение Д. з. u получается как предел последовательности $\{u_n\}$ решений Д. з. для областей D_n и непрерывно продолженной граничной функции φ внутрь D. Решение u не зависит ни от выбора исчерпывающей последовательности $\{D_n\}$, ни от способа непрерывного продолжения φ внутрь D.

Имеется трактовка обобщенного решения Д. з. на основе метода Перрона. Пусть $\overline{H}_\varphi$ — нижняя огибающая семейства всех верхних супергармонич. функций v, удовлетворяющих на Γ условию

$$\liminf v(x) \geqslant \varphi(x_0), \quad x \in D, \ x \to x_0; \quad \underline{H}_\varphi = \overline{H}_{-\varphi}.$$

Для любых области D и функции φ имеет место неравенство $\underline{H}_\varphi \leqslant \overline{H}_\varphi$. В случае равенства $\underline{H}_\varphi = \overline{H} = u$ эта функция u является гармонической. Она наз. обобщенным решением Д. з., а граничная функция φ — разрешимой. Любая непрерывная функция φ разрешима, поведение же обобщенного решения u в точке $x_0 \in \Gamma$ определяется регулярностью или иррегулярностью x_0.

Для обобщенного по Винеру решения Д. з. справедливо интегральное представление в виде формулы Валле Пуссена

$$u(x) = \int_\Gamma \varphi(x_0)\, d\omega\left(x, D \,\middle|\, x_0\right), \qquad (2)$$

являющейся обобщением формулы (1). Здесь $d\omega(x, E)$ — гармонич. мера множества $E \subset \Gamma$ в точке x_0 (см. [5]).

Отсюда возникает возможность рассмотрения обобщенной Д. з. для произвольных граничных функций φ, при этом можно требовать удовлетворения граничного условия лишь в нек-рой ослабленной форме. Напр., если D — область $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей Γ, а граничная функция φ имеет только точки разрыва 1-го рода, то можно требовать удовлетворения граничного условия лишь в точках непрерывности φ, для обеспечения единственности решения в точках разрыва требуется ограниченность решения. В постановке Н. Н. Лузина обобщенная Д. з. ставится для произвольной измеримой и конечной почти всюду на Γ граничной функции φ. Граничное условие может состоять в том, чтобы граничные значения решения по нормали к Γ существовали и совпадали с φ почти всюду на Γ.

Для общего эллиптич. уравнения 2-го порядка

$$\sum_{i,\,j=0}^{n} a_{ij}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=0}^{n} b_i(X) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(X)u = f(X) \qquad (3)$$

Д. з. фредгольмова. При этом ищется регулярное в области решение, принимающее на границе наперед заданные значения. Приведенные выше методы исследования Д. з. для гармонич. функций обобщаются и на уравнение (3).

Для равномерно эллиптич. систем Д. з. может оказаться не только нефредгольмовой, но даже иметь бесконечно много линейно независимых решений (см. [8]).

Д. з. рассматривается и для нек-рых неэллиптич. уравнений или вырождающихся уравнений. В этих случаях Д. з. иногда оказывается некорректной.

Лит.: [1] Dirichlet P. G. L., «Abh. der Königlich. Preus. Acad. der Wiss.», 1850, S. 99—116; [2] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [3] Курант Р., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, пер. с англ., М., 1953; [4] его же, Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [6] Келдыш М. В., «Успехи матем. наук», 1941, в. 8, с. 171—232; [7] его же, «Докл. АН СССР», 1951, т. 77, с. 181—83; [8] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966.

А. Янушаускас.

ДИРИХЛЕ ИНТЕГРАЛ — функционал, связанный с решением *Дирихле задачи* для уравнения Лапласа вариационным методом. Пусть Ω — ограниченная область в R_n с границей Γ класса C^1, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, а функция $u(x)\in W_2^1(\Omega)$ (см. *Соболева пространство*). Д. и. для функции $u(x)$ наз. выражение

$$D[u]=\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx.$$

Для некоторой заданной на Γ функции $\varphi(x)$ рассматривается множество π_φ функций из $W_2^1(\Omega)$, к-рые удовлетворяют граничному условию $u|_{x\in\Gamma}=\varphi$. Если множество π_φ не пусто, то существует единственная функция $u_0(x)\in\pi_\varphi$, для которой

$$D[u_0]=\inf_{u\in\pi_\varphi} D[u],$$

и эта функция является гармонической в области Ω. Верно и обратное утверждение: если гармонич. функция $u_0(x)$ принадлежит множеству π_φ, то на ней достигается $\inf D[u]$. Таким образом, $u_0(x)$ является обобщенным из $W_2^1(\Omega)$ решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Однако не для всякой функции φ можно найти такую функцию $u_0(x)$. Существуют даже непрерывные на Γ функции, для к-рых множество π_φ пусто, т. е. в пространстве $W_2^1(\Omega)$ не существует ни одной функции $u(x)$, удовлетворяющей условию $u|_{x\in\Gamma}=\varphi$. Классич. решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа с такой граничной функцией φ не может иметь конечного Д. и. и не является обобщенным решением из пространства $W_2^1(\Omega)$.

Лит.: [1] Михайлов В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных, М., 1976. *А. К. Гущин.*

ДИРИХЛЕ ПРИЗНАК сходимости числовых рядов: если последовательность действительных чисел d_n монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^\infty b_n$ ограничена (члены этого ряда могут быть комплексными), то ряд $\sum_{n=1}^\infty d_n b_n$ сходится. Установлен П. Дирихле [1].

Лит.: [1] Dirichlet P., «J. de math.», (2) 1862, t. 7, p. 253—55. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДИРИХЛЕ ПРИНЦИП — метод решения краевых задач для эллиптич. уравнений с частными производными сведением их к вариационным задачам отыскания минимумов нек-рых функционалов в определенных классах функций. В узком смысле Д. п. означает решение 1-й краевой задачи

$$u\Big|_{\partial G}=\varphi \qquad (1)$$

в области G с границей ∂G для уравнения Лапласа

$$\Delta u=0 \qquad (2)$$

сведением ее к отысканию минимума *Дирихле интеграла*

$$D(u)=\int \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dG, \quad u=u(x_1, \ldots, x_n)$$

в классе функций, удовлетворяющих условию

$$D(u)<+\infty \qquad (3)$$

и условию (1) (см. *Дирихле вариационная задача*).

Д. п. возник и получил широкое распространение в нач. 19 в. Он применялся как с чисто теоретическими целями для доказательства существования и единственности решений краевых задач, так и при решении практически важных задач. Наиболее четкая и полная формулировка Д. п. для класса функций непрерывных вместе со своими частными производными, по-видимому,

была дана в лекциях П. Дирихле (P. Dirichlet), опубликованных в 1876 одним из его учеников. Доказательства, данные Дирихле, были неполны, в частности, у него даже не ставился вопрос о необходимости доказательства существования минимума рассматриваемого функционала в классе допустимых функций, т. е. функций, удовлетворяющих условиям (1) и (3). В конце 60-х гг. 19 в. Д. п. был подвергнут критике К. Вейерштрассом (K. Weierstrass), показавшим на примере, что дифференциальная краевая задача (1), (2) при некрой граничной непрерывной функции φ может иметь решение, а соответствующая вариационная задача — нет, за счет того, что в этом случае интеграл Дирихле для решения задачи (1), (2) обращается в бесконечность. Обосновать Д. п. в предположении, что существует хоть одна допустимая функция, удалось лишь Д. Гильберту (D. Hilbert) на рубеже 19 и 20 вв. Дальнейшее существенное развитие Д. п. содержится в работах С. Л. Соболева, показавшего, что всякая функция, определенная на n-мерной области и имеющая в ней обобщенные частные производные достаточно высокого порядка, принадлежащие пространству L_p, $p \geqslant 1$, принимает на всяком достаточно гладком m-мерном многообразии, $0 \leqslant m < n$, естественные устойчивые граничные значения. Это позволило С. Л. Соболеву сформулировать и обосновать Д. п. для полигармонич. уравнения, причем и в случае, когда граница области состояла из многообразий различной размерности.

Возникновение Д. п. явилось существенным этапом в развитии теории краевых задач уравнений с частными производными, так как оно означало создание принципиально новой точки зрения на эту теорию. Д. п. и его всевозможные модификации, основанные, в конце концов, на сведении рассматриваемой задачи к той или иной вариационной задаче, получили широкое распространение как в различных разделах самой математики, так и в ее приложениях. Это связано с тем, что этот метод позволяет как доказывать общие теоремы о решениях уравнений, так и получать их конкретные решения в виде пределов так наз. минимизирующих последовательностей (т. е. последовательностей допустимых функций, значения минимизирующего функционала на к-рых стремятся к его минимуму), при этом численные методы, основанные на построении минимизирующих последовательностей, удобны для отыскания приближенных решений на ЭВМ. *Л. Д. Кудрявцев.*

ДИРИХЛЕ ПРИНЦИП «я щ и к о в» — утверждение, согласно к-рому в любой совокупности из n множеств, содержащих в общей сложности более n элементов, есть хотя бы одно множество, содержащее не менее двух элементов. Наиболее популярная форма Д. п.: если в n «ящиках» лежит $n+1$ «предмет», то хотя бы в одном из «ящиков» лежит не меньше двух «предметов». Д. п. часто применяется в теории диофантовых приближений и в теории трансцендентных чисел для доказательства разрешимости в целых числах систем линейных неравенств (см. *Дирихле теорема* в теории диофантовых приближений). *В. Г. Спрынджук.*

ДИРИХЛЕ РАЗРЫВНЫЙ МНОЖИТЕЛЬ — интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x \, dx = \begin{cases} \pi/2 & \text{при } \beta < \alpha, \\ \pi/4 & \text{при } \beta = \alpha, \\ 0 & \text{при } \beta > \alpha, \end{cases}$$

являющийся разрывной функцией от параметров $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. П. Дирихле использовал его в своих исследованиях о притяжении эллипсоидов (см. [1]). Д. р. м. встречался ранее у Ж. Фурье (J. Fourier), С. Пуассона (S. Poisson) и А. Лежандра (A. Legendre).

Лит.: [1] Dirichlet P., Werke, Bd 1, B., 1889; [2] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, 7 изд., М., 1969, т. 3, 5 изд., М., 1970.

Т. П. Лукашенко.

ДИРИХЛЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей в симплексе $S_k=\{(x_1, \ldots, x_k): x_1\geqslant 0, \ldots, x_k\geqslant 0, x_1+\ldots+x_k=1\}$, $k=2, 3, \ldots$, определяемое плотностью вероятности

$$p(x_1, \ldots, x_k)=\begin{cases} C_k \prod_{i=1}^{k} x_i^{\nu_i-1}, & \text{если } (x_1, \ldots, x_k)\in S_k, \\ 0, & \text{если } (x_1, \ldots, x_k)\notin S_k, \end{cases}$$

причем $\nu_1>0, \ldots, \nu_k>0$ и

$$C_k=\Gamma(\nu_1+\ldots+\nu_k)\prod_{i=1}^{k}[1/\Gamma(\nu_i)],$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Частный случай Д. р.— *бета-распределение* — возникает при $k=2$. Д. р. играет важную роль в теории порядковых статистик. Напр., если $X_1, \ldots, X_n$— независимые случайные величины, подчиняющиеся равномерному распределению на отрезке [0, 1], и $X^{(1)}\leqslant\ldots\leqslant X^{(n)}$ — соответствующий *вариационный ряд*, то совместное распределение k разностей вида

$$X^{(m_1)}, X^{(m_2)}-X^{(m_1)}, \ldots, X^{(m_{k-1})}-X^{(m_{k-2})}, 1-X^{(m_k)}$$

(предполагается, что $1\leqslant m_1<m_2<\ldots<m_{k-1}$) подчиняется Д. р., причем $\nu_1=m_1$, $\nu_2=m_2-m_1$, $\ldots$, $\nu_{k-1}=m_{k-1}-m_{k-2}$, $\nu_k=n-m_{k-1}$.

Лит.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967, с. 192—96. *Л. Н. Большев.*

ДИРИХЛЕ РЯД — функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \qquad (1)$$

где a_n— комплексные коэффициенты; λ_n, $0<|\lambda_n|\uparrow\infty$,— показатели Д. р., $s=\sigma+it$ — комплексное переменное. При $\lambda_n=\ln n$ получается так наз. обыкновенный ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

представляет для $\sigma>1$ *дзета-функцию* Римана. Ряды

$$L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},$$

где $\chi(n)$ — функция, наз. *Дирихле характером*, изучались П. Дирихле (см. *Дирихле L-функция*). Ряды (1) с произвольными показателями λ_n наз. общими рядами Дирихле.

Общие ряды Дирихле с положительными показателями. Пусть сначала λ_n— положительные числа. Имеет место аналог *Абеля теоремы* для степенных рядов: если ряд (1) сходится в точке $s_0=\sigma_0+it_0$, то он сходится в полуплоскости $\sigma>\sigma_0$, причем внутри любого угла $|\arg(s-s_0)|<\varphi_0<\pi/2$ сходится равномерно. Открытая область сходимости ряда есть нек-рая полуплоскость $\sigma>c$. Число c наз. абсциссой сходимости Д. р., прямая $\sigma=c$ — прямой сходимости Д. р., полуплоскость $\sigma>c$ — полуплоскостью сходимости Д. р. Наряду с полуплоскостью сходимости рассматривается полуплоскость абсолютной сходимости Д. р.: $\sigma>a$ — открытая область, в к-рой ряд сходится абсолютно (при этом a — абсцисса абсолютной сходимости). Абсциссы сходимости и абсолютной сходимости, вообще говоря, различны; всегда

$$0\leqslant a-c\leqslant d, \quad \text{где } d=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\lambda_n},$$

причем имеются Д. р., для к-рых $a-c=d$. В случае $d=0$ для вычисления абсциссы сходимости (абсциссы абсолютной сходимости) имеется формула

$$a=c=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n},$$

представляющая собой аналог формулы Коши — Адамара. Случай $d>0$ сложнее: если величина

$$\beta=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\lambda_n}\ln\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|$$

положительна, то $c=\beta$; если $\beta\leqslant 0$ и ряд (1) в точке $s=0$ расходится, то $c=0$; если $\beta<0$ и ряд (1) в точке $s=0$ сходится, то

$$c=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\lambda_n}\ln\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_i\right|.$$

Сумма ряда $F(s)$ в полуплоскости сходимости есть аналитич. функция. При $\sigma\to+\infty$ функция $F(\sigma)$ ведет себя асимптотически как первый член ряда: $a_1e^{-\lambda_1\sigma}$ (если $a_1\neq 0$). Если сумма ряда равна нулю, то и все коэффициенты ряда равны нулю. Максимальная полуплоскость $\sigma>h$, в к-рой $F(s)$ является аналитич. функцией, наз. полуплоскостью голоморфности функции $F(s)$, прямая $\sigma=h$ наз. прямой голоморфности. Справедливо неравенство $h\leqslant c$, причем возможны случаи, когда $h<c$. Пусть q — нижняя грань таких чисел β, что в полуплоскости $\sigma>\beta$ функция $F(s)$ по модулю ограничена ($q\leqslant a$). Имеет место формула

$$a_n=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{p-iT}^{p+iT}F(s)\,e^{\lambda_n s}\,ds,\quad n=1,2,\ldots;\ p>q,$$

из к-рой вытекают неравенства

$$|a_n|\leqslant\frac{M(\sigma)}{e^{-\lambda_n\sigma}},\quad M(\sigma)=\sup_{-\infty<t<\infty}|F(\sigma+it)|,$$

представляющие собой аналог неравенств Коши для коэффициентов степенного ряда.

Сумма Д. р. не может быть произвольной функцией, аналитической в какой-либо полуплоскости $\sigma>h$: она, напр., должна стремиться к нулю при $\sigma\to+\infty$. Однако имеет место следующий факт: какова бы ни была функция $\varphi(s)$, аналитическая в полуплоскости $\sigma>h$, найдется такой Д. р. (1), что его сумма $F(s)$ будет отличаться от $\varphi(s)$ на целую функцию.

Если последовательность показателей имеет плотность

$$\tau=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}<\infty,$$

то разность между абсциссой сходимости (абсциссы сходимости и абсолютной сходимости совпадают) и абсциссой голоморфности не превосходит величины

$$\delta=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\lambda_n}\ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_n)}\right|,\quad L(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right),$$

причем имеются ряды, для к-рых эта разность равна δ. Величина δ может быть любой из $[0,\infty]$; в частности, если $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geqslant q>0$, $n=1,2,\ldots$, то $\delta=0$. Прямая голоморфности обладает тем свойством, что на ней в любом отрезке длины 2π у суммы ряда имеется хотя бы одна особенность.

Если Д. р. (1) сходится во всей плоскости, то его сумма $F(s)$ есть целая функция. Пусть

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\lambda_n}<\infty;$$

R-порядком целой функции $F(s)$ (порядком по Ритту) наз. величина

$$\rho = \overline{\lim_{\sigma \to -\infty}} \frac{\ln \ln M(\sigma)}{-\sigma}.$$

Через коэффициенты ряда она выражается по формуле

$$-\frac{1}{\rho} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n \ln \lambda_n}.$$

Можно также ввести понятие R-типа функции $F(s)$. Если

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{n}{\lambda_n} = \tau < \infty$$

и если в горизонтальной полосе ширины, большей $2\pi\tau$, функция $F(s)$ по модулю ограничена, то $F(s) \equiv 0$ (аналог *Лиувилля теоремы*).

Ряды Дирихле с комплексными показателями. У Д. р.

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (2)$$

с комплексными показателями $0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$, открытая область абсолютной сходимости выпукла. Если

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0,$$

то открытые области сходимости и абсолютной сходимости совпадают. Сумма $F(s)$ ряда (2) в области сходимости есть аналитич. функция. Область регулярности функции $F(s)$, вообще говоря, шире области сходимости Д. р. (2). При условии

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$$

область регулярности выпукла.

Пусть

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} = \tau < \infty,$$

$L(\lambda)$ — какая-нибудь целая функция экспоненциального типа, к-рая в точках λ_n, $n \geqslant 1$, имеет простые нули, $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$ (см. *Бореля преобразование*), $\bar{D}$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности функции $\gamma(t)$, и

$$\psi_n(t) = \frac{1}{L'(\lambda_n)} \int_0^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} e^{-\lambda t}\, d\lambda, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Тогда функции $\psi_n(t)$ регулярны вне $\bar{D}$, $\psi_n(\infty) = 0$, и они обладают свойством биортогональности к системе $\{e^{\lambda_n s}\}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda_m t} \psi_n(t)\, dt = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

где C — замкнутый контур, охватывающий $\bar{D}$. В том случае, когда $\psi_n(t)$ непрерывны вплоть до границы области $\bar{D}$, в качестве C можно взять границу $\partial \bar{D}$. Произвольной функции $F(s)$, аналитической в D (открытой части области $\bar{D}$) и непрерывной в $\bar{D}$, отнесем ряд

$$F(s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \qquad (3)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} F(t)\, \psi_n(t)\, dt, \quad n \geqslant 1.$$

Для данной конечной выпуклой области $\bar{D}$ можно построить такую целую функцию $L(\lambda)$ с простыми нуля-

ми $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, что для любой функции $F(s)$, аналитической в D и непрерывной в $\bar{D}$, ряд (3) равномерно сходится внутри D и сходится к $F(s)$. Для функции $\varphi(s)$, аналитической в D (не обязательно непрерывной в $\bar{D}$), можно найти целую функцию нулевого экспоненциального типа

$$M(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$$

и функцию $F(s)$, аналитическую в D и непрерывную в $\bar{D}$, такие, что

$$\varphi(s) = M(D) F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{(n)}(s).$$

Тогда

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n M(\lambda_n) e^{\lambda_n s}, \quad s \in D.$$

Представление произвольных аналитич. функций Д. р. в области D установлено также в случаях, когда D — вся плоскость или D — выпуклая бесконечная многоугольная область (ограниченная конечным числом прямолинейных отрезков).

Лит.: [1] Леонтьев А. Ф., Ряды экспонент, М., 1976; [2] Мандельбройт С., Ряды Дирихле, принципы и методы, пер. с англ., М., 1973. *А. Ф. Леонтьев.*

ДИРИХЛЕ РЯД для аналитической почти периодической функции — ряд вида

$$f(s) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda_n \tau} e^{iA_n t} = \sum_n A_n e^{\Lambda_n s}, \quad \alpha < \tau < \beta, \qquad (*)$$

представляющий собой все ряды Фурье аналитической регулярной почти периодической в полосе (α, β), $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, функции $f(s) = f(\tau + it)$ на континуальной совокупности прямых $R(s) = \tau$ (см. *Почти периодическая функция аналитическая*).

Двум различным почти периодическим в одной и той же полосе функциям соответствуют два различных Д. р. В случае 2π-периодич. функции ряд (*) переходит в ряд Лорана. Числа A_n и Λ_n наз., соответственно, коэффициентами и показателями Дирихле. В отличие от классического Д. р. множество действительных показателей Λ_n в (*) может иметь конечные предельные точки, и, даже, быть всюду плотным. Если все показатели Дирихле имеют один и тот же знак, напр., если $f(s)$ — почти периодич. функция в полосе (α, β) и в (*) $\Lambda_n < 0$, то $f(s)$ — почти периодич. функция в полосе $(\alpha, +\infty)$, и $\lim\limits_{\tau \to +\infty} f(s) = 0$ равномерно по t. Аналогичная теорема имеет место для положительных показателей Дирихле (см. [2]). Если $f(s)$ — почти периодич. функция в полосе $[\alpha, \beta]$ и неопределенный интеграл функции $f(s)$ в полосе $[\alpha, \beta]$ ограничен, то ряды

$$\sum_{\Lambda_n < 0} A_n e^{\Lambda_n s}, \quad \sum_{\Lambda_n \geqslant 0} A_n e^{\Lambda_n s}$$

являются рядами Дирихле двух функций $f_1(s)$ и $f_2(s)$, почти периодических в любой полосе $[\alpha_1, +\infty)$, $\alpha_1 > \alpha$, соответственно $(-\infty, \beta_1]$, $\beta_1 < \beta$.

Лит.: [1] Бор Г., Почти периодические функции, пер. с нем., М.—Л., 1934; [2] Левитан Б. М., Почти периодические функции, М., 1953. *Е. А. Бредихина.*

ДИРИХЛЕ ТЕОРЕМА — 1) Д. т. в теории диофантовых приближений: для любого действительного числа α и натурального Q существуют целые a и q, удовлетворяющие условию

$$|\alpha q - a| < Q^{-1}, \quad 0 < q \leqslant Q.$$

Дирихле принцип «ящиков» позволяет доказать и более общую теорему: для любых действительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и натурального $Q > 1$ существуют такие целые $q > 0$, $a_1, \ldots, a_n$, что

$$\max(|\alpha_1 q - a_1|, \ldots, |\alpha_n q - a_n|) < Q^{-1/n}, \quad 0 < q \leqslant Q.$$

Лит.: [1] Касселс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1961.

В. И. Берник.

2) Д. т. о единицах — теорема, описывающая структуру мультипликативной группы единиц в порядках полей алгебраич. чисел; получена П. Г. Л. Дирихле (см. [1]).

Каждое поле алгебраич. чисел K степени n над полем рациональных чисел Q имеет n различных изоморфизмов в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Если при изоморфизме $\sigma : K \to \mathbb{C}$ образ поля содержится в поле действительных чисел, то этот изоморфизм наз. вещественным; в противном случае он наз. комплексным. Наряду с каждым комплексным изоморфизмом σ имеется сопряженный к нему комплексный изоморфизм $\bar{\sigma} : K \to \mathbb{C}$, определяемый равенством $\bar{\sigma}(\alpha) = \overline{\sigma(\alpha)}$, $\alpha \in K$. Таким образом число n можно представить в виде $n = s + 2t$, где s — число вещественных, а $2t$ — число комплексных изоморфизмов поля K в поле $\mathbb{C}$.

Теорема Дирихле: в произвольном порядке A поля алгебраич. чисел K степени $n = s + 2t$ существует $r = s + t - 1$ единиц $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ таких, что всякая единица $\varepsilon \in A$ однозначно представима в виде произведения

$$\varepsilon = \zeta \varepsilon_1^{s_1} \ldots \varepsilon_r^{s_r},$$

где $s_1, \ldots, s_r$ — целые числа, а ζ — некоторый корень из 1, содержащийся в A. Единицы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$, существование к-рых устанавливается Д. т. наз. основными единицами порядка A. В частности, основные единицы максимального порядка D поля K, совпадающего с кольцом всех целых чисел поля K, наз. обычно основными единицами поля алгебраических чисел K.

Лит.: [1] Dirichlet P. G. L., Werke, Bd 1, B., 1889; [2] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972.

С. А. Степанов.

3) Д. т. о простых числах арифметической прогрессии: каждая арифметич. прогрессия, первый член и разность которой — натуральные взаимно простые числа, содержит бесконечное число простых чисел. Фактически П. Дирихле доказал (см. [1]), что при любых фиксированных натуральных взаимно простых числах l, k

$$\lim_{s \to 1+0} \sum\nolimits_p \frac{1}{p^s} : \ln \frac{1}{s-1} = \frac{1}{\varphi(k)},$$

где суммирование ведется по всем простым числам p с условием $p \equiv l \pmod k$, а $\varphi(k)$ — функция Эйлера. Это соотношение можно интерпретировать как закон равномерного распределения простых чисел по классам вычетов $l \pmod k$, поскольку

$$\lim_{s \to 1+0} \sum\nolimits_p \frac{1}{p^s} : \ln \frac{1}{s-1} = 1,$$

где суммирование ведется по всем простым числам.

Пусть $x > 1$ — целое, $\pi(x; l, k)$ — число простых $p \leqslant x$ с условием $p \equiv l \pmod k$, где $0 < l < k$, l и k — взаимно просты. Тогда

$$\pi(x; l, k) = \frac{\int_2^x \frac{d\varphi}{\ln u}}{\varphi(k)} + O\left(x e^{-c\sqrt{\ln x}}\right),$$

где оценка остаточного члена равномерна по всем $k \leqslant (\ln x)^A$ при любом фиксированном $A > 0$, $c = c(A) > 0$ — величина, зависящая только от A (неэффективно). Это современная форма Д. т., непосредственно показывающая характер распределения простых чисел $p \equiv l \pmod k$ в натуральном ряде чисел. Существует предположение (расширенная гипотеза Римана), что при фиксированных взаимно простых

l и k и любых целых $x>1$

$$\pi(x; l, k) = \frac{\int_2^x \frac{du}{\ln u}}{\varphi(k)} + O(x^{1/2+\varepsilon}),$$

где $\varepsilon>0$ — произвольно, а O — величина, зависящая от k и ε.

Лит.: [1] Дирихле П. Г. Л., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М.—Л., 1936; [2] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [3] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, М., 1975.

В. Г. Спринджук.

4) Д. т. о рядах Фурье: если функция $f(x)$ периода 2π кусочно монотонна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеет на нем не более, чем конечное число точек разрыва, т. е. выполнены так называемые условия Дирихле, то ее тригонометрич. ряд Фурье сходится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности и к $[f(x+0)+f(x-0)]/2$ в каждой точке разрыва. Доказана впервые П. Дирихле [1]. На функции ограниченной вариации Д. т. обобщил К. Жордан [3].

Лит.: [1] Dirichlet P. G. L., «J. Math.», 1829, Bd 4, S. 157—69; [2] его же, Werke, Bd 1, B., 1889; [3] Jordan C., «C. r. Acad. sci.», 1881, t. 92, № 5, p. 228—30; [4] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [5] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., 2 изд., М., 1965.

Т. П. Лукашенко.

ДИРИХЛЕ ФОРМУЛА числа делителей — асимптотическая формула

$$\sum_{n\leqslant N} \tau(n) = N \ln N + (2C-1) N + O(\sqrt{N}),$$

где $\tau(n)$ — число делителей n, C — *Эйлера постоянная*. Д. ф. получил П. Дирихле (P. Dirichlet) в 1849, заметив, что указанная сумма равна числу точек (x, y) с целыми положительными координатами в области, ограниченной гиперболой $y=N/x$ и осями координат, т. е. равна

$$2\sum_{x\leqslant\sqrt{N}} \left[\frac{N}{x}\right] - [\sqrt{N}]^2,$$

где $[\alpha]$ — целая часть α.

Лит.: [1] Титчмарш Е., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М., 1953.

А. Ф. Лаврик.

ДИРИХЛЕ ФУНКЦИЯ — функция, равная единице в рациональных точках и нулю в иррациональных точках. Д. ф. задается формулой:

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n};$$

она принадлежит второму *Бэра классу*. Д. ф. не интегрируема по Риману на любом отрезке, но, будучи почти всюду равной нулю, интегрируема по Лебегу.

Лит.: [1] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974.

Л. Д. Кудрявцев.

ДИРИХЛЕ L-ФУНКЦИЯ, Дирихле L-ряд, L-ряд, — функция комплексного переменного $s=\sigma+it$, определяемая для всех *Дирихле характеров* χ mod d рядом

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}. \qquad (1)$$

Д. L-ф. mod d как функции действительного переменного s введены в 1837 П. Дирихле (P. Dirichlet, см. [1]) в связи с доказательством бесконечности простых чисел в арифметич. прогрессии $dm+l$, разность d и первый член l к-рой взаимно простые числа. Они представляют собой естественное обобщение — *дзета-функции* Римана $\zeta(s)$ на арифметич. прогрессии и служат мощным средством исследований в аналитич. теории чисел (см. [2] — [4]).

Ряды (1), наз. *Дирихле рядами*, абсолютно и равномерно сходятся в любой конечной области комплексной s — плоскости, для к-рой $\sigma\geqslant 1+\gamma$, $\gamma>0$. Если χ — неглавный характер, то

$$L(s, \chi) = s\int_1^{\infty} \sum_{n\leqslant u} \chi(n)\, u^{-s-1}\, du. \qquad (2)$$

В силу ограниченности суммы под знаком интеграла эта формула осуществляет аналитическое продолжение $L(s, \chi)$ как регулярной функции в полуплоскость $\sigma>0$.

Для любого $\chi \bmod d$ справедливо представление $L(s, \chi)$ в виде произведения Эйлера по простым числам p:

$$L(s, \chi)=\prod_p \left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad \sigma>1. \tag{3}$$

Отсюда, если $\chi=\chi_0$— главный характер $\bmod d$, то при $d=1$

$$L(s, \chi_0)=\zeta(s),$$

а для $d>1$

$$L(s, \chi_0)=\zeta(s) \prod_{p \nmid d} \left(1-\frac{1}{p^s}\right).$$

Поэтому свойства $L(s, \chi_0)$ на всей комплексной плоскости в основном определяются свойствами $\zeta(s)$. В частности, функция $L(s, \chi_0)$ регулярна для всех s, кроме $s=1$, где она имеет простой полюс с вычетом $d^{-1}\varphi(d)$, φ — функция Эйлера. Если же $\chi \neq \chi_0$ и χ^*— примитивный характер, к-рый индуцирует характер $\chi \bmod d$, то

$$L(s, \chi)=L(s, \chi^*) \prod_{p \nmid d} \left(1-\frac{\chi^*(p)}{p^s}\right). \tag{4}$$

Тем самым в главном Д. L-ф. с характерами $\chi \neq \chi_0$ сводятся к таковым для примитивных характеров. Это свойство Д. L-ф. играет существенную роль, так как многие результаты, касающиеся $L(s, \chi)$, имеют простой вид *лишь для примитивных характеров*. В случае примитивного характера $\chi \bmod d$ аналитич. продолжение на всю плоскость и функциональное уравнение функции $L(s, \chi)$ получаются прямым обобщением метода Римана для $\zeta(s)$. Результат, если положить

$$\xi(s, \chi)=\left(\frac{d}{\pi}\right)^{\frac{s+\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s, \chi), \quad \delta=\frac{1-\chi(-1)}{2},$$

имеет вид

$$\xi(1-s, \overline{\chi})=\varepsilon(\chi)\, \xi(s, \chi), \tag{5}$$

где Γ — гамма-функция, $\varepsilon(\chi)=i^{\delta} d^{1/2}/\tau(\chi)$, $|\varepsilon(\chi)|=1$, $\tau(\chi)$ — *Гаусса сумма*, $\overline{\chi}$ — характер, комплексно сопряженный с χ. Это равенство наз. функциональным уравнением функции $L(s, \chi)$. Из него и формул (2) и (4) следует, что функции $L(s, \chi)$, $\xi(s, \chi)$ являются целыми функциями для всех $\chi \neq \chi_0$. Причем, при $\sigma \leqslant 0$ $L(s, \chi)=0$ лишь в точках $s=-2\nu-\delta$, $\nu=0, 1, 2, \ldots$, и в точках s, где произведение из (4) обращается в нуль; эти точки наз. тривиальными нулями $L(s, \chi)$. Остальные нули $L(s, \chi)$ наз. нетривиальными нулями. Для $\sigma>1$ функция $L(s, \chi) \neq 0$; Ш. Ж. Валле Пуссен (Ch. J. Vallée-Poussin) показал, что $L(1+it, \chi) \neq 0$; так что все нетривиальные нули Д. L-ф. лежат в области $0<\sigma<1$, к-рая наз. критической полосой.

Распределение нетривиальных нулей, вообще значений $L(s, \chi)$ в критич. полосе, является важнейшей проблемой теории Д. L-ф., имеющей фундаментальное значение для теории чисел.

То, что каждая из функций $L(s, \chi)$ имеет бесконечно много нетривиальных нулей и что законы распределения простых чисел в арифметич. прогрессиях находятся в прямой зависимости от расположения этих нулей, показывают соответствующие аналоги формул Римана. Именно, пусть $N(T, \chi)$ — число нулей функции $L(s, \chi)$ с примитивным $\chi \bmod d$ в прямоугольнике $0<\sigma<1$ $|t|<T$, $T \geqslant 2$. Тогда

$$\frac{1}{2} N(T, \chi)=\frac{T}{2\pi} \ln \frac{Td}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\ln Td).$$

Пусть $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, $1 \leqslant l \leqslant d$, $(l, d)=1$,

$$\psi(x; d, l) = \sum\nolimits_{n \leqslant x,\ n \equiv l \pmod d} \Lambda(n),$$

$$\psi(x; \chi) = \sum\nolimits_{n \leqslant x} \chi(n) \Lambda(n).$$

Тогда по свойству ортогональности характеров

$$\psi(x; d, l) = \frac{1}{\varphi(d)} \sum\nolimits_{\chi \bmod d} \overline{\chi}(l) \psi(x; \chi), \qquad (6)$$

где суммирование производится по всем характерам $\chi \bmod d$, и для χ-примитивного характера χ, $\alpha=1-\delta$:

$$\psi(x; \chi) = -\sum\nolimits_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum\nolimits_{m=1}^{\infty} \frac{x^{\delta-2m}}{2m-\delta} - \lim_{s \to 0} \left\{ \frac{L'(\alpha s, \chi)}{L(\alpha s, \chi)} - \frac{\alpha}{s} \right\} - \alpha \ln x,$$

где $\rho=\beta+i\gamma$ пробегает нетривиальные нули $L(s, \chi)$, L' — производная L по s.

Практически более полезны приближенные формулы для $\psi(x; \alpha)$: для произвольного $\chi \neq \chi_0$, $2 \leqslant T \leqslant x$,

$$\psi(x; \chi) = -\sum\nolimits_{|\gamma| < T} \frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum\nolimits_{|\gamma| < 1} \frac{1}{\rho} + O\left(\frac{x}{T} \ln^2 xd \right), \qquad (7)$$

а для $\chi=\chi_0$

$$\psi(x; \chi_0) = \sum\nolimits_{n \leqslant x} \Lambda(n) + O(\ln x \ln d). \qquad (8)$$

Последняя функция вносит в сумму (6) величину, представляющую главный член.

Существует гипотеза, наз. р а с ш и р е н н о й г и п о т е з о й Р и м а н а, о том, что все нетривиальные нули Д. L-ф. лежат на прямой $\sigma={}^1/_2$. Если эта гипотеза справедлива, то для $d \leqslant x$

$$\psi(x; d, l) = \frac{x}{\varphi(d)} + O\left(\sqrt{x} \ln^2 x \right),$$

и многие другие важные проблемы теории чисел получили бы свое окончательное решение. Однако вопросы, касающиеся расположения нетривиальных нулей Д. L-ф. исключительно трудны и в настоящее время (1978) в этом отношении известно сравнительно немного, причем для комплексных характеров получены более сильные результаты, чем для действительных.

Обобщением метода, указанного в 1899 Ш. Ж. Валле Пуссеном для функции $\zeta(s)$, получена граница нетривиальных нулей $L(s, \chi)$: для комплексного характера $\chi \bmod d$ существует абсолютная постоянная C такая, что $L(s, \chi)$ не имеет нулей в области

$$\sigma > 1 - C/\ln d\,(|t|+2);$$

если же χ — действительный неглавный характер $\bmod d$, то $L(s, \chi)$ может иметь в этой области самое большое один простой действительный ($t=0$) нуль, к-рый наз. и с к л ю ч и т е л ь н ы м н у л е м $L(s, \chi)$. Для исключительного нуля β, из формул числа классов квадратичных полей, выведено неравенство

$$\beta \leqslant 1 - C/d^{1/2} \ln^2 d.$$

Последняя известная граница для β указана в 1935 К. Зигелем (C. Siegel): при любом $\varepsilon>0$ существует положительное число $C(\varepsilon)$ такое, что

$$\beta \leqslant 1 - C(\varepsilon)\, d^{-\varepsilon}.$$

Эта оценка имеет однако существенный недостаток, она является неэффективной в том смысле, что по заданному ε нельзя оценить численное значение постоянной $C(\varepsilon)$. Таким же недостатком страдают и теоретико-числовые результаты, вывод к-рых опирается на оценку Зигеля.

Вследствие указанных границ для нетривиальных нулей Д. L-ф. и формул (6) — (8) справедлив асимптотич. закон распределения простых чисел в виде:

$$\psi(x; d, l) = \frac{x}{\varphi(d)} + O\left(x \exp\left[-C_1 \sqrt{\ln x} \right] \right),$$

где C_1— абсолютная постоянная для $d \leqslant (\ln x)^{1-\gamma}$ при нек-ром фиксировании $\gamma > 0$ и $C_1 = C_1(N)$ — «неэффективная» постоянная для $d \leqslant (\ln d)^N$ при любом фиксированном $N > 1-\gamma$.

Эти результаты являются лучшими в проблеме равномерного распределения простых чисел в арифметич. прогрессиях растущей разности d. Для фиксированных значений d известно несколько больше. В таком случае теория Д. L-ф. при $t \neq 0$ во многом аналогична теории дзета-функции Римана (см. [5]) и последняя граница нулей $L(s, \chi)$, полученная по *Виноградова методу* оценки тригонометрич. сумм, имеет вид:

$$L(s, \chi) \neq 0$$

$$\text{для } \sigma > 1 - C/\ln^{2/3}(|t|+2) \ln^{1/3} \ln(|t|+2),$$

где C — положительная постоянная, зависящая от d.

Этой границе нетривиальных нулей Д. L-ф. фиксированного $\bmod d$ отвечает лучший (1977) остаточный член в асимптотич. формуле для $\psi(x; d, l)$ в виде:

$$\ll x \exp\left[-C \ln^{3/5} x \,|\, \ln^{1/5} \ln x\right].$$

Все формулы относительно асимптотики функции $\psi(x; d, l)$ имеют аналоги для функции $\pi(x; d, l)$ — числа простых чисел $p \leqslant x$, $p \equiv l \pmod d$, с главным членом $\operatorname{li} x/\varphi(d)$ вместо $x/\varphi(d)$ и остаточным членом, меньшим на множитель $\ln x$.

К числу основных направлений исследований в современной теории Д. L-ф. относятся также исследования плотности распределения нетривиальных нулей Д. L-ф., содержание к-рых составляют оценки величин:

$$N(\sigma, T, \chi), \quad \sum_{\chi \bmod d} N(\sigma, T, \chi),$$

$$\sum_{d \leqslant D} \sum_{\chi^* \bmod d} N(\sigma, T, \chi),$$

где $N(\sigma, T, \chi)$ обозначает число нулей $L(s, \chi)$ в прямоугольнике $0 < \alpha \leqslant \sigma < 1$, $|t| < T$, χ^* — примитивный характер $\bmod d$.

Лит.: [1] Дирихле П. Г. Л., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М.—Л., 1936; [2] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971; [3] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [4] Чудаков Н. Г., Введение в теории L-функций Дирихле, М.—Л., 1947; [5] Walfisz A., Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie, B., 1963; [6] Монтгомери Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., 1974; [7] Лаврик А. Ф., «Матем. заметки», 1975, т. 17, в. 5, с. 809—17.

А. Ф. Лаврик.

ДИРИХЛЕ ХАРАКТЕР $(\bmod k)$ — функция $\chi(n) = \chi(n; k)$ на множестве целых чисел, удовлетворяющая условиям:

$$\chi(n) \not\equiv 0,$$

$$\chi(n)\chi(l) = \chi(nl),$$

$$\chi(n) = \chi(n+k).$$

Иными словами, Д. х. $(\bmod k)$ — это арифметич. функции, к-рые не равны тождественно нулю, вполне мультипликативны и периодичны с периодом k.

Понятие Д. х. ввел П. Дирихле (P. Dirichlet, см. [1]) в связи с изучением закона распределения простых чисел в арифметич. прогрессиях. Он же разработал основы теории Д. х. (см. [2] — [8]), исходя из прямого конструктивного построения их.

Пусть

$$k = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$$

— канонич. разложение k, n — целое взаимно простое с k, $(n, k) = 1$; $C = C_0 = 1$, если $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$; $C = 2$, $C_0 = 2^{\alpha-2}$, если $\alpha \geqslant 2$; $C_1 = \varphi(p_1^{\alpha_1})$, . . ., $C_r = \varphi(p_r^{\alpha_r})$, где φ — функция Эйлера. Пусть, далее, γ, γ_0, γ_1, . . ., γ_r — система индексов числа n по $\bmod k$, т. е. система наи-

меньших неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих сравнениям

$$n \equiv (-1)^{\nu}5^{\nu_0} \pmod{2^{\alpha}},\quad n \equiv g_j^{\nu_j} \pmod{p_j^{\alpha_j}},\quad j=1, \ldots, r,$$

где g_j — наименьший первообразный корень по mod $p_j^{\alpha_j}$; ε, ε_0, ε_1, . . ., ε_r — система каких-либо корней из 1 соответственно порядков C, C_0, C_1, . . ., C_r. Функция

$$\chi(n) = \begin{cases} \varepsilon^{\nu}\varepsilon_0^{\nu_0}\varepsilon_1^{\nu_1}\ldots\varepsilon_r^{\nu_r}, & \text{если } (n, k)=1, \\ 0, & \text{если } (n, k)\neq 1, \end{cases}$$

определенная на множестве всех натуральных чисел, наз. характером Дирихле (mod k). Перебирая все возможные значения ε, ε_0, ε_1, . . ., ε_r получают

$$\varphi(2^{\alpha})\,\varphi(p_1^{\alpha_1})\ldots\varphi(p_r^{\alpha_r}) = \varphi(k)$$

различных функций χ — Д. х. mod k. Характер с $\varepsilon=\varepsilon_0=\varepsilon_1=\ldots=\varepsilon_r=1$ наз. главным характером; он обозначается χ_0:

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } (n, k)=1, \\ 0, & \text{если } (n, k)\neq 1. \end{cases}$$

Для любых натуральных чисел n, l и k:

$$\chi(n)\,\chi(l)=\chi(nl);$$

$$\chi(n)=\chi(l), \text{ если } n\equiv l \pmod{k};$$

$$\chi(1)=1,$$

$$\chi(n, k)=\chi(n; 2^{\alpha})\,\chi(n, p_1^{\alpha_1})\ldots\chi(n; p_r^{\alpha_r});$$

если $\chi(n)$ — Д. х. (mod k), то комплексно сопряженная функция $\overline{\chi}(n)$ — также Д. х. (mod k);

$$\chi^{\varphi(k)}(n) = \chi_0(n).$$

Наименьшее из чисел ν, удовлетворяющее равенству $\chi^{\nu}(n)=\chi_0(n)$ наз. степенью Д. х. Для $\nu=1$ существует один такой характер χ_0. Если $\nu=2$, то $\chi(n)$ может принимать лишь значения 0; ± 1; такие Д. х. наз. действительными, или квадратичными. Если $\nu\geqslant 3$, до Д. х. наз. комплексным. $\chi(n)$ наз. четным или нечетным соответственно тому, будет $\chi(-1)=1$ или $\chi(-1)=-1$. Главные свойства сумм Д. х. выражаются формулами

$$\sum\nolimits_{n \bmod k}\chi(n) = \begin{cases} \varphi(k), & \text{если } \chi=\chi_0, \\ 0, & \text{если } \chi\neq\chi_0; \end{cases}$$

$$\sum\nolimits_{\chi \bmod k}\chi(l) = \begin{cases} \varphi(k), & \text{если } l\equiv 1 \pmod{k}, \\ 0, & \text{если } l\not\equiv 1 \pmod{k}, \end{cases}$$

где в 1-й формуле n пробегает полную систему вычетов (mod k), а χ во 2-й формуле — все $\varphi(k)$ характеров (mod k).

При $(l, k)=1$ справедлива формула

$$\frac{1}{\varphi(k)}\sum\nolimits_{\chi \bmod k}\chi(n)\,\overline{\chi}(l) = \begin{cases} 1, & \text{если } n\equiv l \pmod{k}, \\ 0, & \text{если } n\not\equiv l \pmod{k}, \end{cases}$$

наз. свойством ортогональности Д. х. Она является одной из основных формул Д. х., применяемых в разного рода исследованиях арифметич. прогрессий: $k\nu+l$, $\nu=0, 1, 2, \ldots$. В теории и приложениях Д. х. важны также понятия ведущего модуля характера и примитивного характера. Пусть $\chi(n; k)$ — произвольный неглавный характер (mod k). Если для значений n, удовлетворяющих условию $(n, k)=1$, число k является наименьшим периодом $\chi(n; k)$, то k наз. ведущим, или основным, модулем характера χ, а сам характер χ — примитивным, или первообразным, характером (mod k). В противном случае существуют единственные число

$k_1>1$, делящее k, $k_1<k$ и примитивный характер $\chi_1 \pmod{k_1}$ такие, что

$$\chi(n; k) = \begin{cases} \chi_1(n; k_1), & \text{если } (n, k)=1, \\ 0, & \text{если } (n, k)\neq 1. \end{cases}$$

В этом случае $\chi(n; k)$ наз. непримитивным, или производным, характером $\chi \pmod d$ и говорят, что χ_1 индуцирует χ. Тем самым многие вопросы о характерах сводятся к таковым для примитивных характеров.

Характер $\chi(n; k)$ является примитивным тогда и только тогда, когда для любого d, делящего k, $d<k$, существует a с условиями:

$$a \equiv 1 \pmod d, \quad \chi(a; k) \neq 0; 1.$$

В аналитич. теории широко используются суммы Гаусса, определяемые для $\chi \pmod k$ равенством

$$\tau(\chi) = \sum_{m=1}^{k} \chi(m) e^{2\pi i m/k}.$$

Для примитивного характера $\chi \bmod k$

$$|\tau(\chi)| = k^{1/2}.$$

При этом справедливо разложение $\chi(n)$ в виде:

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\bar\chi)} \sum_{m=1}^{k} \bar\chi(m) e^{2\pi i n m/k}.$$

Одной из основных проблем в теории Д. х. является проблема оценки сумм Д. х. $\chi \pmod k$, $\chi\neq\chi_0$:

$$S(N; M) = \sum_{M<n\leqslant N} \chi(n).$$

Имеет место оценка Виноградова:

$$S(N; M) \ll \sqrt{k} \ln k.$$

Установлено [7], что

$$S(N; M) \ll k^{(r+1)/4r^2} (N-M)^{1-(1/r)} \ln k, \quad r=1, 2, \ldots,$$

k — простое число. При $M=1$, $N=k/2$ существует (см. [8]) бесконечная последовательность чисел k, являющихся модулями примитивного действительного характера χ, для к-рой

$$|S(N; M)| \sim \frac{2e^{\gamma}}{\pi} \sqrt{k} \ln\ln k,$$

γ — *Эйлера постоянная*. Это асимптотич. равенство показывает, что предыдущие оценки, вообще говоря, существенно усилить нельзя. Однако существует гипотеза Виноградова, согласно к-рой для любого $\varepsilon>0$, $1\leqslant M<N$,

$$|S(N; M)| \ll k^{\varepsilon} (N-M)^{1/2}.$$

Доказательство этой гипотезы позволило бы решить ряд крупных проблем теории чисел.

Теория Д. х. лежит в основе теории *Дирихле L-функций* и является частным случаем общей теории *характеров* абелевых групп.

Лит.: [1] Дирихле П. Г. Л., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М.—Л., 1936; [2] Виноградов И. М., Избр. тр., М., 1952; [3] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, М., 1975; [4] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [5] Чудаков Н. Г., Введение в теорию L-функций Дирихле, М., 1947; [6] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971; [7] Burgess D. A., «Тр. Матем. ин-та», 1973, т. 132, с. 203—205; [8] Лаврик А. Ф., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 6, с. 1189—207. *А. Ф. Лаврик.*

ДИРИХЛЕ ЯДРО — выражение

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

П. Дирихле [1] доказал, что частная сумма $S_n(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ выражается через Д. я.:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx+b_k\sin kx=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(t-x)\,dt;$$

интеграл справа наз. с и н г у л я р н ы м и н т е г р а л о м Д и р и х л е.

По аналогии с Д. я. (см. [3]) выражение

$$\overline{D}_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

наз. с о п р я ж е н н ы м я д р о м Д и р и х л е. Частная сумма ряда, сопряженного к ряду Фурье функции $f(x)$, выражается через сопряженное Д. я.:

$$\overline{S}_n(x)=\sum_{k=1}^{n} b_k\cos kx-a_k\sin kx=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{D}_n(t-x)\,dt.$$

Лит.: [1] D i r i c h l e t P., «J. für Math.», 1829, Bd 4, S. 157—69; [2] е г о ж е, Werke, Bd 1, B., 1889; [3] T a u b e r A., «Monatsh. Math.», 1891, Bd 2, S. 79—118; [4] Б а р и Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [5] З и г м у н д А., Тригонометрические ряды, т. 1—2, пер. с англ., М., 1965.

Т. П. Лукашенко.

ДИСК в т о п о л о г и и — поверхность, гомеоморфная кругу, т. е. ориентируемое *двумерное многообразие* рода 0 с одной компонентой края. Локально связный континуум без локально разбивающих точек в точности тогда гомеоморфен Д., когда любая окружность вне нек-рой точки этого континуума разбивает его и имеется окружность, к-рая его не разбивает. *А. В. Чернавский.*

ДИСКРЕПАНС последовательности точек $\omega=(x_1,\ldots,x_N)$ из единичного s-мерного куба $K_s=\{x: 0\leqslant x_\nu\leqslant 1,\ \nu=\overline{1,s}\}$ — норма функционала

$$\varphi(\alpha,\omega)=v-\frac{N(V)}{N},\qquad(1)$$

вычисленная в той или иной метрике. Здесь v и $N(V)$ соответственно объем области $V=\{x: 0\leqslant x_\nu\leqslant\alpha_\nu\leqslant 1,\ \nu=\overline{1,s}\}$ и число точек последовательности ω, принадлежащих области V. Если рассматривается распределение точек последовательности ω по областям вида $V=\{x: 0\leqslant\alpha_\nu\leqslant x_\nu\leqslant\beta_\nu\leqslant 1,\ \nu=\overline{1,s}\}$, то в (1) принято вместо $\varphi(\alpha,\omega)$ писать $\varphi(\alpha,\beta,\omega)$.

Наиболее употребительны нормы функционала (1):

$$D_N(\omega)=\sup_{\alpha\in K_s,\,\beta\in K_s}|\varphi(\alpha,\beta,\omega)|,$$

$$D_N^*(\omega)=\sup_{\alpha\in K_s}|\varphi(\alpha,\omega)|,$$

$$D_N(\omega,L_p)=\left(\int_0^1\cdots\int_0^1|\varphi(\alpha,\omega)|^p\,d\alpha_1,\ldots,d\alpha_s\right)^{1/p}.$$

Последовательность точек $\omega=(x_1,\ldots,x_N,\ldots)$ из единичного s-мерного куба K_s равномерно распределена тогда и только тогда, когда (см. [1]):

$$\lim_{N\to\infty} D_N(\omega)=0.$$

Для любой бесконечной последовательности одномерных точек $\omega=\{x_n: 0\leqslant x_n\leqslant 1,\ n=\overline{1,\infty}\}$ справедлива теорема (см. [3]):

$$\overline{\lim}\,ND_N(\omega)=\infty.$$

Какова бы ни была последовательность $\omega=\{x_n: 0\leqslant x_n\leqslant 1,\ n=\overline{1,\infty}\}$ можно указать последовательность $N_1, \ldots, N_k \ldots$ такую, что при $N=N_k$ (см. [4]):

$$ND_N(\omega)\geqslant C_1\sqrt{\ln N}.$$

Окончательный результат для бесконечных последовательностей одномерных точек состоит в том, что при $N=N_k$ (см. [5]):

$$ND_N(\omega)\geqslant C_2\ln N.$$

Исследовался Д. различных конкретных последовательностей (см. [6]—[8]) и получены оценки сверху

$$ND_N(\omega, L_2)\leqslant C_3(s)\ln^{s+1}N,$$

$$ND_N(\omega)\leqslant C_4(s)\ln^s N,$$

соответственно для конечных и бесконечных последовательностей; и оценки снизу (см. [4]): *для любой последовательности* из N точек имеет место неравенство

$$ND_N(\omega, L_2)\geqslant C_5(s)\ln^{(s+1)/2}N;$$

какова бы ни была бесконечная последовательность $\omega=\{x_n: x_n\in K_s,\ n=\overline{1,\infty}\}$ можно указать последовательность номеров $N_1, \ldots, N_k, \ldots$, таких, что при $N=N_k$:

$$ND_N(\omega, L_2)\geqslant C_6(s)\ln^{s/2}N.$$

При этом

$$D_N(\omega)\geqslant D_N(\omega, L_2).$$

Лит.: [1] Weyl H., «Math. Ann.», 1916, Bd 77, S. 313—52; [2] Van der Corput J. G., «Proc. Koninkl. ned. akad. wet. A», 1935, dl 38, № 8, p. 813—21; № 10, p. 1058—66; [3] Van Aordenne-Ehrenfert T., «Indagat. math.», 1949, dl 11, p. 264—69; [4] Roth K. F., «Mathematika», 1954, v. 1, p. 73—79; [5] Schmidt W. M., «Acta arithm.», 1972, t. 21, p. 45—50; [6] Halton J. H., «Numer. Math.», 1960, Bd 2, № 2, S. 84—90; [7] Соболь И. М., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1967, т. 7, № 4, с. 784—802; [8] Коробов Н. М., Теорикочисловые методы в приближенном анализе, М., 1963; [9] Kuipers L., Niederreiter H., Uniform distribution of sequences, N. Y., 1974.

В. М. Солодов.

ДИСКРЕТНАЯ ГРУППА преобразований — группа Γ гомеоморфизмов хаусдорфова топологич. пространства X, удовлетворяющая следующему условию: *для любых точек* $x, y\in X$ *найдутся такие их окрестности* U, V соответственно, что множество

$$\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma(U)\cap V\neq\varnothing\}$$

конечно. Стабилизатор

$$\Gamma_x=\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma(x)=x\}$$

точки $x\in X$ относительно Д. г. преобразований конечен, а орбита любой точки $x\in X$ дискретна. В случае, когда X — метрическое пространство и преобразования из Γ являются изометриями, этих двух условий достаточно для того, чтобы группа Γ была Д. г. преобразований.

Примеры. 1) Группа параллельных переносов действительной плоскости $\mathbb{R}^2$ на всевозможные целочисленные векторы:

$$(x, y)\longrightarrow(x+n,\ y+m),\quad\text{где}\quad(x, y)\in\mathbb{R}^2;\quad n,\quad m\in\mathbb{Z}.$$

2) Пусть X — верхняя комплексная полуплоскость

$$\mathbb{C}^+=\{z\in\mathbb{C}\mid\operatorname{Im}z>0\},$$

рассматриваемая в обычной хаусдорфовой топологии, а Γ — группа дробно-линейных преобразований вида

$$z\longrightarrow\frac{az+b}{cz+d},$$

где a, b, c, d — целые числа и $ad-bc=1$ (модулярная группа Клейна).

3) Любая конечная группа Γ гомеоморфизмов хаусдорфова топологич. пространства X. Если X отделимо, то Γ будет собственно разрывной группой преобразований (пример неприводимого алгебраич. многообразия с топологией Зариского показывает, что условие отделимости X является существенным).

4) *Скольжений группа* произвольного регулярного накрытия $p: X \to Y$, где X — связное и локально линейно связное, а Y — хаусдорфово топологич. пространство, является Д. г. преобразований д е й с т в у ю щ е й с в о б о д н о (т. е. $\Gamma_x = \{1\}$ для любой $x \in X$), причем само накрытие p совпадает с отображением факторизации по этой группе. Обратно, если Γ — свободно действующая Д. г. преобразований связного топологич. пространства X, то факторпространство X/Γ хаусдорфово и отображение факторизации $p: X \to X/\Gamma$ — регулярное накрытие пространства X/Γ с группой скольжения Γ. В частности, в силу теоремы униформизации Пуанкаре — Кёбе, всякая риманова поверхность, за несколькими тривиальными исключениями, может быть получена факторизацией верхней комплексной полуплоскости $\mathbb{C}^+$ по свободно действующей Д. г. дробно-линейных преобразований с действительными коэффициентами (так наз. *фуксовой группе*).

5) В теории модулей римановых поверхностей (и, более общо, модулей комплексных многообразий того или иного типа) Д. г. преобразований появляются как *модулярные группы*. Простейшая из этих групп рассмотрена в примере 2.

6) К числу Д. г. преобразований относятся *кристаллографические группы*. Весьма широкий класс Д. г. преобразований, включающий фуксовы и кристаллографич. группы, составляют *дискретные подгруппы* топологич. групп (в частности, групп Ли), рассматриваемые как группы преобразований однородных пространств.

Замкнутое подмножество D топологич. пространства X с Д. г. Γ преобразований наз. ф у н д а м е н т а л ь н о й о б л а с т ь ю г р у п п ы Γ, если оно является замыканием открытого подмножества и если множества $\gamma(D)$, где $\gamma \in \Gamma$, не имеют попарно общих внутренних точек и образуют локально конечное покрытие пространства X. Так, напр., для группы параллельных переносов из примера 1 в качестве фундаментальной области можно взять квадрат

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\} \qquad (*)$$

или, более общо, любой параллелограмм с вершинами в целых точках, не имеющий целых точек внутри и на сторонах, а для модулярной группы Клейна (пример 2)) — так наз. м о д у л я р н у ю ф и г у р у

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C}^+ \;\middle|\; -\tfrac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \tfrac{1}{2},\ |z| \geqslant 1 \right\}.$$

Фундаментальная область может быть построена во многих случаях. Напр., если X — полное риманово многообразие, Γ — Д. г. преобразований пространства X, состоящая из изометрий этого пространства, и $x_0 \in X$ — какая-либо точка, для к-рой стабилизатор Γ_{x_0} тривиален, то в качестве фундаментальной области может быть взята о б л а с т ь Д и р и х л е

$$D = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leqslant d(x, \gamma(x_0)) \text{ для всех нетождественных преобразований } \gamma \in \Gamma\}.$$

(Здесь через $d(x, y)$ обозначено расстояние между точками x и y из X.) Если X — односвязное полное пространство постоянной кривизны, т. е. сфера, евклидово пространство или пространство Лобачевского, то область Дирихле является выпуклым многогранником.

Построение фундаментальной области и исследование ее свойств доставляют важную информацию о Д. г. преобразований. Так, факторпространство X/Γ получается из фундаментальной области путем «склеивания» нек-рых граничных точек. Напр., для группы параллельных переносов (пример 1)) факторпространство получается из квадрата (*) склеиванием противоположных сторон и гомеоморфно двумерному тору. Понятие фундаментальной области лежит в основе к о м б и н а-

торно-геометрического метода в теории Д. г. преобразований, восходящего к работам А. Пуанкаре по фуксовым [1] и клейновым [2] группам. Этот метод позволяет, с одной стороны, выяснить строение Д. г. преобразований как абстрактной группы (т. е. найти ее образующие и определяющие соотношения) и, с другой стороны, доказать дискретность и найти фундаментальную область группы преобразований с данными образующими. Суть этого метода состоит в следующем. Пусть Γ — Д. г. изометрий n-мерного односвязного полного пространства X постоянной кривизны и Φ — выпуклый многогранник, являющийся ее фундаментальной областью. Тогда группа Γ порождается множеством

$$M=\{\gamma\in\Gamma \mid \dim(\Phi\cap\gamma(\Phi))=n-1\}.$$

При этом в качестве определяющих соотношений могут быть взяты всевозможные соотношения следующих двух типов: $\gamma_1\gamma_2=1$, где $\gamma_1, \gamma_2\in M$ и $\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_k=1$, где $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\in M$,

$$\dim(\Phi\cap\gamma_1(\Phi)\cap\gamma_1\gamma_2(\Phi)\cap\dots\cap\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_{k-1}(\Phi))=n-2,$$

$\gamma_i\gamma_{i+1}\neq 1$ при $i=1, 2, \dots, k-1$ и $\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_l\neq 1$ при $l<k$ (см. [7], [3], [6]). Обратно, пусть Φ — выпуклый многогранник в n-мерном односвязном полном пространстве X постоянной кривизны (не исключается вырожденный случай, когда некоторые двугранные углы многогранника Φ равны π), и для каждой $(n-1)$-мерной грани F многогранника Φ задана изометрия γ_F пространства X такая, что $\Phi\cap\gamma_F(\Phi)=F$. И пусть: (1) для каждой $(n-1)$-мерной грани F многогранника Φ существует такая грань F', что $\gamma_F\gamma_{F'}=1$; (2) для каждой $(n-2)$-мерной грани E многогранника Φ существует такая последовательность $F_1, F_2, \dots, F_k$ его $(n-1)$-мерных граней, что $\gamma_{F_1}\gamma_{F_2}\dots\gamma_{F_k}=1$,

$$\Phi\cap\gamma_{F_1}(\Phi)\cap\gamma_{F_1}\gamma_{F_2}(\Phi)\cap\dots\cap\gamma_{F_1}\gamma_{F_2}\dots\gamma_{F_{k-1}}(\Phi)=E$$

и многогранники Φ, $\gamma_{F_1}(\Phi)$, $\gamma_{F_1}\gamma_{F_2}(\Phi)$, $\dots$, $\gamma_{F_1}\gamma_{F_2}\dots\gamma_{F_{k-1}}(\Phi)$ не имеют попарно общих внутренних точек. Тогда группа изометрий пространства X, порожденная преобразованиями γ_F, дискретна и многогранник Φ является ее фундаментальной областью. Это вытекает из более общего результата А. Д. Александрова [4] о заполнении пространства выпуклыми многогранниками (см. также [8]). Следующее описание свободно действующих фуксовых групп с компактным факторпространством, принадлежащее А. Пуанкаре (H. Poincaré), служит примером сказанного выше. При этом считается, что верхняя комплексная полуплоскость $\mathbb{C}^+$ наделена стандартным образом геометрией Лобачевского (модель Пуанкаре плоскости Лобачевского). Фундаментальная область любой из фуксовых групп рассматриваемого типа может быть выбрана в виде выпуклого ограниченного $4g$-угольника Φ, обладающего свойствами: а) сумма его внутренних углов равна 2π; б) если при фиксированном направлении обхода границы $\partial\Phi$ многоугольника Φ обозначить его стороны через $b_1, b_2, d_1, d_2, b_3, b_4, d_3, d_4, \dots, b_{2g-1}, b_{2g}, d_{2g-1}, d_{2g}$, то длина b_i равна длине d_i при всех $i=1, 2, \dots, 2g$. На рисунке изображена такая область Дирихле для $g=3$. Если при этом обозначить через γ_i, $i=1, \dots, 2g$, изометрию плоскости $\mathbb{C}^+$, сохраняющую ориентацию и



переводящую с изменением направления b_i в d_i при i четном и d_i в b_i при i нечетном (считается, что стороны Ф имеют направления, индуцированные выбранным направлением обхода $\partial\Phi$), то набор $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2g}\}$ является системой образующих группы Г. Единственное соотношение между этими образующими имеет вид

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\cdots\gamma_{2g-1}\gamma_{2g}\gamma_{2g-1}^{-1}\gamma_{2g}^{-1}=1.$$

Обратно, если Ф — произвольный выпуклый ограниченный многоугольник, удовлетворяющий условиям а) и б), то группа Г, порожденная изометриями $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2g}$, есть свободно действующая фуксова группа, причем Ф — ее фундаментальная область, а комплексное многообразие $\mathbb{C}^+/\Gamma$ является компактной римановой поверхностью рода g.

Когомологич. теория Д. г. преобразований состоит в изучении связи между когомологиями пространства X, пространства X/Γ и группы Г. В частности (пример 4)) если Г — Д. г. преобразований, являющаяся группой скольжений регулярного накрытия $p: X \to X/\Gamma$, где X — а ц и к л и ч е с к о е топологич. пространство (т. е. $H_n(X)=0$ при $n\geqslant 1$ и $H_0(X)=\mathbb{Z}$), то сингулярные когомологии пространства X/Γ и когомологии Г как абстрактной группы с коэффициентами в абелевой группе A (с тривиальной Г-модульной структурой) связаны некоторыми изоморфизмами

$$H^n(X/\Gamma, A)\cong H^n(\Gamma, A), \qquad n=0, 1, \ldots,$$

естественными по A (см. [10]). В общем случае связь между упомянутыми выше группами когомологий выражается при помощи некоторых спектральных последовательностей (см. [9], [10]).

См. также *Автоморфная форма*, *Автоморфная функция*, *Арифметическая группа*.

Лит.: [1] П у а н к а р е А., Избр. тр., т. 3, М., 1974, с. 9—62; [2] P o i n c a r é H., «Acta math.», 1883, t. 3, p. 49—92; [3] G e r s t e n h a b e r M., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1953; v. 4, p. 745—50; [4] А л е к с а н д р о в А. Д., «Вестник ЛГУ», 1954, № 2, с. 34—43; [5] C o x e t e r H. S. M., M o s e r W. O. J., Generators and relations for discrete groups, B.—Hdlb.—N. Y., 1972; [6] В е й л ь А., «Математика», 1963, т. 7, № 1, с. 3—12; [7] M a c b e a t h A. M., «Ann. Math.», 1964, v. 79, p. 473—88; [8] A b e l s H., Geometrische Erzeugung von diskontinuierlichen Gruppen, Münster, 1966; [9] Г р о т е н д и к А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [10] М а к л е й н С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [11] L e h n e r J., Discontinuous groups and automorphic functions, Providence, 1964; [12] С е р р Ж.-П., «Математика», 1971, т. 15, № 5, с. 3—6. *Э. Б. Винберг, В. Л. Попов.*

ДИСКРЕТНАЯ МЕРА — мера, сосредоточенная на не более чем счетном множестве. Точнее, пусть λ и μ — меры (вообще говоря, знакопеременные), определенные на одном полукольце множеств (со своим σ-кольцом измеримых множеств). Мера λ наз. д и с к р е т н о й м е р о й относительно меры μ, если λ сосредоточена на не более чем счетном μ-меры нуль множестве, всякое одноточечное подмножество к-рого λ-измеримо. Так, напр., дискретная мера Лебега — Стилтьеса линейных множеств λ равна на полуинтервалах приращению нек-рой функции скачков, имеющей ограниченную вариацию, когда λ ограничена, и неубывающей, когда λ положительна.

Лит.: [1] К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976. *А. П. Терехин.*

ДИСКРЕТНАЯ ПОДГРУППА — подгруппа Г топологич. группы G (в частности, подгруппа группы Ли), являющаяся дискретным подмножеством топологич. пространства G. В локально компактных топологич. группах (в частности, в группах Ли) выделяют р е ш е т к и — Д. п., для к-рых факторпространство $\Gamma\backslash G$ имеет конечный объем в смысле меры, индуцированной левоинвариантной *Хаара мерой* на группе G. К числу решеток относятся р а в н о м е р н ы е Д. п., для к-рых факторпространство $\Gamma\backslash G$ компактно.

Если K — компактная подгруппа локально компактной топологич. группы G, то подгруппа $\Gamma\subset G$ дискретна

тогда и только тогда, когда она является *дискретной группой* преобразований пространства $X=G/K$ (в смысле действия, индуцированного естественным действием группы G на X). При этом Г является решеткой (соответственно равномерной Д. п.) тогда и только тогда, когда факторпространство $\Gamma\backslash X$ имеет конечный объем в смысле меры, индуцированной G-инвариантной мерой на X (соответственно компактно). Это дает возможность использовать при изучении Д. п. групп Ли геометрич. методы.

Одна из основных задач теории Д. п. групп Ли — классификация таких подгрупп с точностью до соизмеримости. Подгруппы Γ_1, Γ_2 группы G наз. с о и з м е р и м ы м и, если $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ имеет конечный индекс как в Γ_1, так и в Γ_2. Если одна из соизмеримых подгрупп локально компактной топологич. группы является Д. п. (соответственно решеткой, равномерной Д. п.), то и другая обладает этим свойством.

До середины 20 в. рассматривались в основном отдельные классы Д. п. групп Ли, обязанные своим происхождением арифметике, теории функций и физике. Исторически первая нетривиальная Д. п.— подгруппа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, названная впоследствии *модулярной группой* Клейна — фактически рассматривалась Ж. Лагранжем (J. Lagrange) и К. Гауссом (C. Gauss) в их исследованиях по арифметике квадратичных форм от двух переменных. Ее естественным обобщением является подгруппа $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Исследование этой группы как дискретной группы преобразований пространства положительно определенных квадратичных форм от n переменных составило предмет теории приведения, разработанной А. Н. Коркиным, Е. И. Золотаревым, Ш. Эрмитом (Ch. Hermite), Г. Минковским (H. Minkowski) и др. во 2-й пол. 19 — начале 20 вв. Ряд арифметически определяемых Д. п. классич. групп Ли: группы единиц квадратичных форм с рациональными коэффициентами, группы единиц простых алгебр над $\mathbb{Q}$, группу целочисленных симплектич. матриц — исследовал в 40-х гг. 20 в. К. Зигель (C. Siegel). Он, в частности, доказал, что все эти группы являются решетками в соответствующих группах Ли.

В теории функций комплексного переменного интегрирование алгебраич. функций и, более общо, решение дифференциальных уравнений с алгебраич. коэффициентами привело к рассмотрению нек-рых специальных функций (названных впоследствии *автоморфными функциями*), инвариантных относительно различных дискретных групп, состоящих из преобразований вида

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in S\mathrm{L}_2(\mathbb{R}). \qquad (1)$$

Некоторые возникающие таким образом Д. п. группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ были рассмотрены примерно в середине 19 в. в работах Ш. Эрмита, Р. Дедекинда (R. Dedekind) и И. Л. Фукса (I. L. Fuchs). Среди них была и группа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (но представленная другим образом, чем у Ж. Лагранжа и К. Гаусса). Обширный класс таких групп, в том числе группа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ и нек-рые соизмеримые с ней подгруппы группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, был изучен Ф. Клейном (F. Klein). Почти одновременно, в 1881—82 А. Пуанкаре (H. Poincaré) дал геометрич. описание всех дискретных групп, состоящих из преобразований вида (1). Эти группы были им названы *фуксовыми группами*.

В 1-й половине 20 в. рассматривались отдельные классы автоморфных функций многих переменных. Эти функции были связаны с некоторыми арифметически определяемыми Д. п. групп $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))^k$ (модулярные функции Гильберта), $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ (модулярные функции Зигеля) и других полупростых групп Ли.

В кристаллографии начиная с конца 19 в. рассматривались группы симметрии кристаллич. структур, являющиеся не чем иным, как равномерными Д. п.

группы движений трехмерного евклидова пространства. Эти и подобные им группы движений n-мерного евклидова пространства — так наз. *кристаллографические группы* — были изучены с алгебраич. точки зрения Л. Бибербахом (L. Bieberbach) в 1911. Он доказал, в частности, теорему о том, что всякая кристаллографич. группа содержит равномерную Д. п. группы параллельных переносов.

Все эти исследования послужили исходным материалом для общей теории Д. п. групп Ли, основы к-рой были заложены в 50—60-е гг. 20 в.

Построена исчерпывающая теория Д. п. нильпотентных групп Ли [9]. Ее основные утверждения: 1) Если H — унипотентная алгебраич. группа, определенная над $\mathbb{Q}$, то группа $H_{\mathbb{Z}}$ ее целых точек является равномерной Д. п. в группе $H_{\mathbb{R}}$ ее действительных точек. (При этом $H_{\mathbb{R}}$ — односвязная нильпотентная группа Ли.) 2) Всякая равномерная Д. п. Γ односвязной нильпотентной группы Ли G а р и ф м е т и ч н а в том смысле, что существуют унипотентная алгебраич. группа H, определенная над $\mathbb{Q}$, и изоморфизм $\varphi\colon H_{\mathbb{R}} \to G$ такие, что подгруппа Γ соизмерима с $\varphi(H_{\mathbb{Z}})$. 3) Если Γ_1, Γ_2 — равномерные Д. п. односвязных нильпотентных групп Ли G_1, G_2 соответственно, то всякий изоморфизм $\Gamma_1 \to \Gamma_2$ однозначно продолжается до изоморфизма $G_1 \to G_2$. 4) Абстрактная группа Γ вкладывается в виде равномерной Д. п. в односвязную нильпотентную группу Ли тогда и только тогда, когда Γ — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения.

Д. п. разрешимых групп Ли изучены достаточно хорошо, но результаты здесь не отличаются таким совершенством, как для нильпотентных групп. Всякая решетка в разрешимой группе Ли является равномерной Д. п. Если Γ — решетка в односвязной разрешимой группе Ли G, то группа G допускает точное матричное представление, при к-ром элементы группы Γ представляются целочисленными матрицами [13]. Это утверждение можно рассматривать как обобщение теоремы 2) Мальцева. Аналогом теоремы 4) является следующее утверждение. Всякая решетка в односвязной разрешимой группе Ли есть строго *полициклическая группа*; и обратно, всякая строго полициклич. группа обладает подгруппой конечного индекса, изоморфной решетке в односвязной разрешимой группе Ли.

Наиболее тонкие результаты теории Д. п. групп Ли относятся к Д. п. неразрешимых и, в частности, полупростых групп Ли. В [4] доказана следующая теорема, включающая в себя в виде частных случаев теорему 1) Мальцева, *Дирихле теорему* о единицах поля алгебраич. чисел и упомянутые выше результаты Зигеля о нек-рых арифметич. Д. п. полупростых групп Ли. Пусть H — линейная алгебраич. группа, определенная над $\mathbb{Q}$. Для того чтобы подгруппа $H_{\mathbb{Z}}$ была решеткой в $H_{\mathbb{R}}$, необходимо и достаточно, чтобы группа H не допускала рациональных гомоморфизмов на группу $\mathbb{C}^*$, определенных над $\mathbb{Q}$ (это условие, в частности, выполняется, если группа H полупроста или унипотентна). Для того чтобы подгруппа $H_{\mathbb{Z}}$ была равномерной Д. п. в $H_{\mathbb{R}}$, необходимо и достаточно, сверх этого, чтобы все унипотентные элементы группы $H_{\mathbb{Q}}$ лежали в $U_{\mathbb{Q}}$, где U — унипотентный радикал группы H.

Аналогом теоремы 2) для Д. п. полупростых групп Ли является следующая теорема арифметичности [11]. Пусть Γ — решетка в связной полупростой группе Ли G, не имеющей компактных множителей, и пусть (для удобства формулировки) центр группы G тривиален. Пусть, кроме того, решетка Γ неприводима в том смысле, что группа G не может быть разложена нетривиальным образом в прямое произведение $G_1 \times G_2$ так, чтобы

Γ была соизмерима с подгруппой вида $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, где $\Gamma_1 \subset G_1$, $\Gamma_2 \subset G_2$. Тогда, если вещественный ранг группы G больше единицы, подгруппа Γ арифметична в том смысле, что существуют полупростая алгебраич. группа H, определенная над $\mathbb{Q}$, и гомоморфизм φ: $H^0_{\mathbb{R}} \to G$ (где $H^0_{\mathbb{R}}$ — связная компонента единицы группы $H_{\mathbb{R}}$) такие, что ядро гомоморфизма φ компактно и подгруппа Γ соизмерима с $\varphi(H_{\mathbb{Z}})$. Предположение о том, что вещественный ранг группы G больше единицы, существенно. Известно, что теорема неверна для группы $PSL_2(\mathbb{R})$ (группы движений плоскости Лобачевского), к-рая вообще играет особую роль в теории Д. п. групп Ли, а также [6], [8] для групп движений пространств Лобачевского размерностей 3, 4 и 5.

Аналогом теоремы 3) для Д. п. полупростых групп Ли является следующая с и л ь н а я т е о р е м а ж е с т к о с т и. Пусть Γ_1, Γ_2 — неприводимые решетки в связных полупростых группах Ли G_1, G_2, не имеющих компактных множителей, и пусть центры групп G_1, G_2 *тривиальны. Тогда если группы* G_1, G_2 *не изоморфны* $PSL_2(\mathbb{R})$, *то всякий изоморфизм* $\Gamma_1 \to \Gamma_2$ однозначно продолжается до изоморфизма $G_1 \to G_2$ (см. [10], [14]). Исторически доказательству этой теоремы предшествовало доказательство слабой теоремы жесткости [5] о продолжении изоморфизмов, достаточно близких к тождественному (в случае, когда $G_1 = G_2$). Из слабой теоремы жесткости вытекает, в частности, существование базиса, в к-ром элементы Д. п. записываются алгебраич. числами. Это обстоятельство сыграло важную роль в развитии теории Д. п. полупростых групп Ли.

О Д. п. группы $PSL_2(\mathbb{R})$ см. *Фуксова группа*.

Из других общих теорем о Д. п. полупростых групп Ли следует отметить т е о р е м у п л о т н о с т и Б о р е л я и т е о р е м у м а к с и м а л ь н о с т и В а н а. Пусть Γ — решетка в связной полупростой группе Ли, не имеющей компактных множителей. Тогда Γ плотна в G в топологии Зарисского [3] и содержится лишь в конечном числе решеток в группе G [17].

Описание решеток в произвольных группах Ли в известной степени сводится к описанию решеток в полупростых группах Ли благодаря теоремам, аналогичным упомянутой выше теореме Бибербаха о кристаллографич. группах. Говорят, что нормальная подгруппа N группы Ли G обладает с в о й с т в о м Б и б е р б а х а, если для любой решетки Γ в группе G подгруппа $N\Gamma$ замкнута (и тогда автоматически $N \cap \Gamma$ — решетка в N, а $\Gamma/N \cap \Gamma$ — решетка в G/N). Теорема Бибербаха состоит в том, что в группе движений евклидова пространства подгруппа параллельных переносов обладает свойством Бибербаха. Существует обобщение этой теоремы на группы Ли, являющиеся расширением односвязной нильпотентной группы Ли при помощи компактной [1]. Другая теорема такого типа заключается в следующем. Пусть G — связная группа Ли, R — ее радикал, S — максимальная связная полупростая подгруппа, C — максимальная связная компактная нормальная подгруппа группы S; тогда подгруппа RC обладает свойством Бибербаха в G [2]. Известно также, что свойством Бибербаха обладают нильпотентный радикал связной разрешимой группы Ли [12] и коммутант односвязной нильпотентной группы Ли [9].

Топологич. методами (см. *Дискретная группа* преобразований) доказывается, что всякая равномерная Д. п. связной группы Ли является конечно представимой группой [5]. В действительности всякая решетка в связной группе Ли конечно представима [17], [18].

Лит.: [1] A u s l a n d e r L., «Amer. J. Math.», 1961, v. 83, p. 276—80; [2] е г о ж е, там же, 1963, v. 85, p. 145—50; [3] B o r e l A., «Ann. Math.», 1960, v. 72, p. 179—88; [4] Б о р е л ь А., Х а р и ш - Ч а н д р а, «Математика», 1964, т. 8, № 2, с. 19—71; [5] В е й л ь А., там же, 1963, т. 7, № 1, с. 3—41; [6] В и н б е р г Э. Б., «Матем. сб.», 1967, т. 72, № 3, с. 471—88;

[7] Garland H., Raghunathan M. S., «Ann. Math.», 1970, v. 92, p. 279—326; [8] Макаров В. С., «Докл. АН СССР», 1966, т. 167, № 1, с. 30—33; [9] Мальцев А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1949, т. 13, № 1, с. 9—32; [10] Маргулис Г. А., «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, № 1, с. 49—98; [11] Margulis G. A., Discrete groups of motions of manifolds of non-positive curvature, в кн.: Congrès International des Mathématiques, Vancouver, 1974; [12] Mostow G. D., «Ann. Math.», 1954, v. 60, p. 1—27; [13] его же, «Amer. J. Math.», 1970, v. 92, p. 1—32; [14] его же, Strong rigidity of locally symmetric spaces, N.Y., 1973; [15] Рагунатан М., Дискретные подгруппы групп Ли, пер. с англ., М., 1977; [16] Сельберг А., «Математика», 1962, т. 6, № 3, с. 3—15; [17] Wang H.-C., «Amer. J. Math.», 1967, v. 89, p. 124—32; [18] его же, в кн.: Symmetric Spaces, N. Y., 1972, p. 459—87.

Э. Б. Винберг.

ДИСКРЕТНАЯ СЕРИЯ представлений — семейство неприводимых унитарных представлений локально компактной группы G, эквивалентных представлениям регулярного представления этой группы. Если группа G унимодулярна, то непрерывное неприводимое унитарное представление π группы G тогда и только тогда принадлежит Д. с., когда матричные элементы представления π лежат в $L^2(G)$. В этом случае существует такое положительное число d_π, называемое формальной размерностью представления π, что соотношения

$$\int_G (\pi(g)\xi, \eta)\,\overline{(\pi(g)\xi', \eta')}\,dg = d_\pi^{-1}(\xi, \xi')\,\overline{(\eta, \eta')}; \quad (1)$$

$$(\pi(g)\xi, \eta) * (\pi(g)\xi', \eta') = d_\pi^{-1}(\xi, \eta')(\pi(g)\xi', \eta) \quad (2)$$

выполняются для всех векторов ξ, η, ξ', η' из пространства H_π представления π. Если π_1, π_2 — два неэквивалентных представления группы G в пространствах $H_1 H_2$, соответственно, принадлежащие Д. с., то для любых $\xi_1, \eta_1 \in H_1$, $\xi_2, \eta_2 \in H_2$ выполняются соотношения

$$\int_G (\pi_1(g)\xi_1\eta_1)\,\overline{(\pi_2(g)\xi_2\eta_2)}\,dg = 0, \quad (3)$$

$$(\pi_1(g)\xi_1, \eta_1) * (\pi_2(g)\xi_2, \eta_2) = 0. \quad (4)$$

Соотношения (1)—(4) являются обобщениями соотношений ортогональности для матричных элементов представлений компактных топологич. групп (см. *Представления компактных групп*); группа G компактна тогда и только тогда, когда все непрерывные неприводимые унитарные представления группы G принадлежат Д. с., и если G компактна и мера Хаара dg удовлетворяет условию $\int_G dg = 1$, то число d_π совпадает с размерностью представления π. Односвязные нильпотентные вещественные группы Ли и комплексные полупростые группы Ли не имеют Д. с.

Класс эквивалентности представления π, входящего в Д. с., является замкнутой точкой в дуальном пространстве $\hat{G}$ группы G, и мера Планшереля этой точки совпадает с формальной размерностью d_π; если при этом нек-рый ненулевой матричный элемент представления π суммируем, то представление π является открытой точкой в носителе регулярного представления группы G, но открытые точки в $\hat{G}$ могут не соответствовать представлениям Д. с. Свойства представлений Д. с. частично распространяются на случай неунимодулярных локально компактных групп.

Лит.: [1] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [2] Harish-Chandra, «Acta Math.», 1965, v. 113, p. 241—318; 1966, v. 116, p. 1—111; [3] Schmid W., «Ann. Math.», 1976, v. 103, p. 375—94; [4] Kleppner A., Lipsman R., «Ann. sci. Ecole norm. sup.», 1972, t. 5, p. 459—516; 1973, t. 6, p. 103—32.

А. И. Штерн.

ДИСКРЕТНАЯ ТОПОЛОГИЯ на множестве X — топология, в к-рой любое множество открыто (и потому любое множество замкнуто). Д. т. в решетке всех топологий на данном множестве есть наибольший элемент. Иногда термин «Д. т.» понимается несколько

шире: топология, в к-рой пересечения любого числа открытых множеств открыты. Для T_1-пространств оба определения совпадают. В этом понимании теория дискретных пространств эквивалентна теории частично упорядоченных множеств.

Лит.: [1] Александров П. С., «Матем. сб.», 1937, т. 2, с. 501—20. *А. А. Мальцев.*

ДИСКРЕТНОГО НОРМИРОВАНИЯ КОЛЬЦО, дискретно нормированное кольцо,— кольцо с дискретным нормированием, т. е. область целостности с единицей, в к-рой существует такой элемент π, что любой ненулевой идеал порождается нек-рой степенью элемента π; такой элемент наз. униформизирующим и определен с точностью до умножения на обратимый элемент. Каждый ненулевой элемент Д. н. к. единственным способом записывается в виде $u\pi^n$, где u — обратимый элемент, а $n\geqslant 0$ — целое. Примерами Д. н. к. являются кольцо $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел, кольцо $k[[T]]$ формальных степенных рядов от одной переменной T над полем k, кольцо *Витта векторов* $W(k)$ для совершенного поля k.

Д. н. к. может быть определено также как: локальное кольцо главных идеалов; локальное дедекиндово кольцо; локальное одномерное кольцо Крулля; локальное нётерово кольцо с главным максимальным идеалом; нётерово кольцо нормирования; кольцо нормирования с группой значений $\mathbb{Z}$.

Пополнение (в естественной топологии локального кольца) Д. н. к. снова есть Д. н. к. Дискретно нормированное кольцо компактно тогда и только тогда, когда оно полно, а его поле вычетов конечно; любое такое кольцо либо изоморфно $k[[T]]$, где k — конечное поле, либо является конечным расширением $\mathbb{Z}_p$.

Если $A\subset B$ — локальный гомоморфизм Д. н. к. с униформизирующими π и Π, то $\pi=u\Pi^e$, где u — обратимый элемент в B. Целое число $e=e(B/A)$ наз. индексом ветвления расширения $A\subset B$, а

$$[B/\Pi B : A/\pi A] = f(B/A)$$

наз. степенью вычетов. Такая ситуация возникает, когда рассматривают целое замыкание B кольца дискретного нормирования A с полем частных K в конечном расширении L поля K. В этом случае B есть полулокальное кольцо главных идеалов, и если $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_s$ — его максимальные идеалы, то $B_i=B_{\mathfrak{n}_i}$ являются Д. н. к. Если предположить, что L — сепарабельное расширение K степени n, то верна формула

$$\sum_{i=1}^{s} e(B_i/A) f(B_i/A) = n.$$

Если L/K есть расширение Галуа, то все $e(B_i/A)$ и все $f(B_i/A)$ равны между собой, и $n=sef$. Если же A — полное Д. н. к., то уже само B будет Д. н. к., и $e(B/A) f(B/A)=n$. В этих предположениях расширение $A\subset B$ (а также L над K) наз. неразветвленным расширением, если $e(B/A)=1$, а поле $B/\mathfrak{n}$ сепарабельно над $A/\mathfrak{m}$; слабо разветвленным, если $e(B/A)$ взаимно просто с характеристикой поля $A/\mathfrak{m}$, а $B/\mathfrak{n}$ сепарабельно над $A/\mathfrak{m}$; вполне разветвленным, если $f(B/A)=1$.

Теория модулей над Д. н. к. имеет большое сходство с теорией абелевых групп (см. [3]). Любой модуль конечного типа есть прямая сумма циклич. модулей; модуль без кручения является плоским модулем; любой проективный модуль или подмодуль свободного модуля свободен. Однако прямое произведение бесконечного числа свободных модулей не свободно. Модуль без кручения счетного ранга над полным Д. н. к. является прямой суммой модулей ранга 1.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] *Алгебраическая теория чисел*, пер. с англ., М., 1969; [3] Kaplansky J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1952, v. 72, p. 327—40. *В. И. Данилов.*

ДИСКРЕТНОЕ НОРМИРОВАНИЕ — нормирование тела, группа значений к-рого изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$. В этом случае кольцо нормирования является *дискретного нормирования кольцом*. Иногда Д. н., точнее Д. н. в ы с о т ы (или р а н г а) r, наз. нормирование, имеющее группой значений r-ю прямую степень группы $\mathbb{Z}$ с лексикографич. порядком. *В. И. Данилов.*

ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — область математики, занимающаяся исследованием и решением экстремальных задач на конечных множествах. Пусть $M=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и f — числовая функция, определенная на элементах множества M. Требуется найти элемент $a_j \in M$, на к-ром достигается абсолютный минимум (или абсолютный максимум) f на M. Сокращенно такие задачи записываются:

$$\min_{x \in M} f(x) \quad \left(\text{или } \max_{x \in M} f(x)\right).$$

Из указанного класса задач Д. п. исследует только нетривиальные задачи, выделяемые следующими дополнительными условиями.

1. Число $n=|M|$ должно быть достаточно большим настолько, чтобы задача не решалась непосредственным просмотром значений $f(a_i)$ вручную или на ЭВМ. Так, в задаче коммивояжера, к-рая является типичной задачей Д. п., число вариантов Q при обходе m пунктов равно

$$(m-1)! \sim cV\overline{m}\left(\frac{m-1}{e}\right)^{m-1}.$$

В задачах минимизации булевых функций (см. *Булевых функций минимизация*, *Булевых функций метрическая теория*) $|M|>2^{2^n}$.

2. Задача не должна быть регулярной. Задача наз. р е г у л я р н о й, если: а) для каждого $a_i \in M$ определена непустая окрестность $S(a_i, M)$, и $|S(a_i, M)| \ll |M|$; б) локальный экстремум f, т. е. точка a_i такая, что $f(a_i)=\operatorname{extr} f(x)$, $x \in S(a_i, M)$, определяется при помощи простого алгоритма, в) локальный экстремум совпадает хотя бы с одним глобальным.

Таким образом, Д. п. рассматривает задачи, имеющие, вообще говоря, несколько локальных экстремумов. В типичных случаях число локальных экстремумов весьма велико. Напр., в задачах целочисленного *линейного программирования* с булевыми переменными, в к-рых функционал и ограничения зависят от переменных $x_1, \ldots, x_k$, число элементов в M не больше 2^k, а число локальных экстремумов может быть равным $\text{const}\cdot\frac{2^k}{V\overline{k}}$ (см. [2]). Трудность решения задач Д. п. и определяется наличием большого числа локальных экстремумов. Универсальных эффективных методов решения задач Д. п. не создано (1978). Как показывают исследования по минимизации булевых функций — хорошо исследованной модельной задаче Д. п. (см. также *Алгоритм локальный*), создание таких методов, по-видимому, невозможно. Методы, в достаточной степени универсальные, такие, как м е т о д в е т в е й и г р а н и ц (см. [1]) и его различные модификации, являются методами направленного перебора. Они эффективно применяются для решения специализированных задач Д. п. Однако для каждого из таких методов существуют обширные классы задач, для к-рых методы направленного перебора мало отличаются по сложности от методов полного перебора. Другой источник математич. трудностей в задачах Д. п. состоит в том, что множество M, на к-ром ищется экстремум f, часто задается в неявной форме. Так, в задачах целочисленного линейного программирования множество M определяется как со-

вокупность целочисленных решений системы линейных неравенств. При таком и более сложных способах задания M нетривиальной становится не только задача полного перечисления M, но и указания хотя бы одного элемента из M. В силу изложенного, основные результаты Д. п. получены при решении и исследовании более узких классов задач. К таким классам относятся *транспортная задача*, задача о коммивояжере и нескольких коммивояжерах, линейное целочисленное программирование, задача о расписаниях (см. *Расписаний теория*), экстремальные задачи на графах (см. *Графов теория*), задачи минимального представления булевых функций и функций k-значной логики и т. д.

Другое направление в теории дискретных экстремальных задач состоит в развитии приближенных методов, обычно применяемых при решении практич. задач большой размерности. Принципиально эти методы не отличаются от соответствующих методов поиска экстремумов непрерывных функций и функционалов. В Д. п. используются аналоги алгоритмов локальной оптимизации, алгоритмов спуска, случайного поиска и т. п. (см. обзор приближенных методов решения задач Д. п. в [3]).

Интересным как с теоретич. точки зрения, так и в решении прикладных задач является статистический подход к задачам Д. п. Пусть совокупность задач $\{Z\}$ можно представить в виде $\{Z\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{Z\}_n$, где $|\{Z\}_i|>|\{Z\}_j|$ при $i>j$ и $|\{Z\}_n|\to\infty$ при $n\to\infty$. Говорят, что подмножество

$$\{Z'\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{Z'\}_n,\quad \{Z'\}_n\subset\{Z\}_n,$$

составляет почти все задачи Z, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\{Z'\}_n|}{|\{Z\}|}=1.$$

Для различных классов задач Д. п. имеет место следующий факт: существует (а часто и эффективно описывается) совокупность $\{Z'\}$ почти всех задач $\{Z\}$, для к-рых нахождение экстремума или хорошего приближения к экстремуму возможно в классе простых алгоритмов. Это было замечено впервые при решении задач синтеза оптимальных управляющих систем, напр. в минимизации булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм, см. *Булевых функций нормальные формы*, а также [4]. Напр., задача выделения экстремальных конъюнкций, входящих хотя бы в одну минимальную дизъюнктивную нормальную форму булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, неразрешима в классе локальных алгоритмов при $k\cdot l<\mathrm{const}\cdot 2^n$, где k — индекс локального алгоритма, l — величина памяти. В то же время задача выделения элементарных конъюнкций, входящих хотя бы в одну «почти минимальную» дизъюнктивную нормальную форму для почти всех булевых функций, разрешима в классе локальных алгоритмов при $k=2$, $l=1$ (см. [5]). Столь же значительное сокращение трудоемкости при переходе к почти всем задачам получается для экстремальных задач на графах, в задаче о построении оптимальных покрытий и т. д.

Лит.: [1] Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю., Дискретное программирование, М., 1969; [2] Коробков В. К., «Проблемы кибернетики», 1965, в. 14, с. 297—99; [3] Финкельштейн Ю. Ю., Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования, М., 1976; [4] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1, М., 1974; [5] Журавлев Ю. И., «Дискретный анализ», 1964, № 3, с. 41—77.

Ю. И. Журавлев.

ДИСКРЕТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — пространство, наделенное *дискретной топологией*.

С. М. Сирота.

ДИСКРЕТНОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ — одна из гипотез возможной структуры пространства в микромире, характеризуемая представлением об элементарных попарно несвязных компонентах пространства, точки к-рых не разделяются наблюдаемыми величинами. Приемлемой формализацией Д. п.-в. могут быть

топологические пространства Y, в к-рых связной компонентой точки $y \in Y$ является ее замыкание $\bar{y}$, а в отделимых Y — сама эта точка (вполне несвязные пространства). Примерами Y являются дискретное топологическое пространство, рациональная прямая, аналитич. многообразия и группы Ли над полями с ультраметрическими абсолютными значениями.

Первоначально гипотеза Д. п.-в. разрабатывалась в варианте конечного вполне несвязного пространства, в моделях конечных геометрий на полях Галуа, а в теории поля впервые (в варианте кубического решетчатого пространства) в работах В. А. Амбарцумяна и Д. Д. Иваненко (1930). В квантовой теории гипотеза Д. п.-в. возникла в моделях, в к-рых координатное (импульсное и др.) пространство как спектр C^*-алгебры соответствующих операторов является вполне несвязным (как, напр., спектр C^*-алгебры вероятностных мер). Серьезное обоснование она находит в концепции «фундаментальных длин», возникающих в нелинейных обобщениях электродинамики, мезодинамики и спинорного уравнения Дирака, в которых константы самодействия полей имеют размерность длины, и в квантовой теории поля в связи с необходимостью введения всевозможных обрезающих факторов. На базе этой концепции, а затем нелокальных моделей, сформировалось представление о минимальных областях пространства, в к-рых, по-видимому, уже невозможно принятое в квантовой теории описание микрообъектов через их взаимодействие с макроприбором, следствием чего является неприменимость пространственно-временного континуума для параметризации пространственно-эволюционных отношений в этих областях (например, гамильтонова формализма — в нелокальных теориях) и неразделимость их точек наблюдаемыми величинами (в пространствах Y это можно представить как наличие неотделимой равномерной структуры). Гипотеза Д. п.-в. получает свое развитие в концепции нелинейного вакуума, согласно которой в экстремальных условиях внутри частиц, а возможно в астрофизических и космологических сингулярностях, пространственные характеристики могут выступать как динамические характеристики физической системы и в моделях к-рого элементы пространства наделяются некоммутативной бинарной операцией.

Лит.: [1] Соколов А., Иваненко Д., Квантовая теория поля, М.—Л., 1952; [2] Вяльцев А. Н., Дискретное пространство-время, М., 1965; [3] Блохинцев Д. И., Пространство и время в микромире, М., 1970; [4] Марков М. А., О природе материи, М., 1976; [5] Finkelstein D., «Phys. Rev.», 1974, v. 9, № 8, p. 2219. *Г. А. Сарданашвили.*

ДИСКРЕТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей, сосредоточенное на конечном или счетном множестве точек *выборочного пространства* Ω. Точнее, пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots$ — выборочные точки и

$$p_i = p(\omega_i), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

суть нек-рые числа, удовлетворяющие условиям

$$p_i \geqslant 0, \qquad \sum_i p_i = 1. \tag{2}$$

Соотношения (1) и (2) полностью определяют Д. р. в пространстве Ω, так как вероятностная мера любого множества $A \subset \Omega$ определяется равенством

$$P(A) = \sum_{\{i:\omega_i \in A\}} p_i.$$

В соответствии с этим распределение случайной величины $X(\omega)$ наз. дискретным, если с вероятностью 1 она принимает конечное или счетное число различных значений x_i с вероятностями $p_i = \mathsf{P}\{\omega : X(\omega) = x_i\}$. Для Д. р. на прямой функция распределения $F(x) = \sum_{\{i\,:\,x_i < x\}} p_i$ имеет скачки в точках x_i, равные $p_i = F(x_i + 0) - F(x_i)$, и постоянна в интервалах $[x_i, x_{i+1})$. Наиболее распространены следующие Д. р.:

биномиальное распределение, геометрическое распределение, гипергеометрическое распределение, отрицательное биномиальное распределение, полиномиальное распределение, Пуассона распределение. *А. В. Прохоров.*

ДИСКРЕТНОЕ СЕМЕЙСТВО МНОЖЕСТВ — семейство подмножеств A топологич. пространства такое, что каждая точка пространства имеет окрестность, к-рая пересекает самое большее один элемент семейства A. *Б. А. Ефимов.*

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ в статистической механике — системы, микроскопич. состояния к-рых определяются заданием состояний в каждом из узлов фиксированной пространственной решетки. С точки зрения приложений — это модели твердого тела, в к-рых одно из микроскопич. движений, связанное с изменением состояний в узлах решетки, выделено и считается независимым от других. Одна из наиболее простых Д. с.— модель Изинга (1925) — характеризуется гамильтонианом

$$H = -h \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \sigma_i - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} J(i, j)\, \sigma_i \sigma_j,$$

где $i = \boldsymbol{r}_i$ — координаты узлов решетки, $\sigma_i = \pm 1$.

Эта модель используется для исследования сплавов типа замещения, магнетиков, решетчатого газа и др. Для Д. с. такого типа характерно наличие в них при температуре ниже λ-точки дальнего порядка — общей регулярности в направлении спинов σ_i магнетиков или регулярности в чередовании атомов различного сорта в бинарных сплавах, к-рая при повышении температуры пропадает в точке θ_λ (точке λ-перехода) с характерным выбросом теплоемкости c_v, в то время как ближний порядок — корреляция отдельного узла с окружающими его узлами — такого резкого изменения не претерпевает. Качественное описание явлений упорядочения укладывается в теорию типа теории молекулярного поля. Несмотря на математич. простоту модели, точное решение в общем виде получено только для одномерной модели и для плоской ферромагнитной решетки ($J(i, j) > 0$) с взаимодействием только ближайших соседей и в случае $h = 0$. Одномерная модель фазового перехода не претерпевает, а двухмерная имеет особенность теплоемкости логарифмич. типа (принципиально в случае $N \to \infty$). Для общего случая разработаны приближенные методы в области низких и высоких температур.

Из других моделей распространена модель магнетиков Гейзенберга, гамильтониан к-рой отличен от гамильтониана модели Изинга тем, что числа σ_i заменены на σ_i^z, а произведение $\sigma_i \sigma_j$ — на (σ_i, σ_j), где σ_i — спиновые *Паули матрицы*.

Целый класс Д. с. с определенным типом взаимодействия узлов решетки допускает асимптотически точное при $N \to \infty$ рассмотрение с помощью метода аппроксимирующих гамильтонианов [3].

Лит.: [1] Хуанг К., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1966; [2] Займан Дж., Принципы теории твердого тела, пер. с англ., М., 1966; [3] Боголюбов Н. Н. (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, М., 1974. *И. А. Квасников.*

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ — область математики, занимающаяся изучением свойств структур финитного (конечного) характера, к-рые возникают как в самой математике, так и в области ее приложений. К числу таких конечных структур могут быть отнесены, напр., *конечные группы*, конечные *графы*, а также нек-рые математич. модели преобразователей дискретной информации, такие как *автоматы конечные*, *Тьюринга машины* и др. Иногда допускают расширение предмета Д. а. до произвольных дискретных структур и приходят к дискретной математике, отождествляя последнюю с Д. а. К числу таких структур могут быть отнесены неко-

торые алгебраич. системы, бесконечные графы, нек-рые виды вычислительных сред (напр., однородные структуры) и т. п. В качестве синонима понятий Д. а. и дискретной математики иногда употребляется термин к о н е ч н а я м а т е м а т и к а. Ниже Д. а. понимается в широком смысле, включающем дискретную математику.

В отличие от Д. а. классич. математика в основном занимается изучением свойств объектов непрерывного характера. Использование классической или дискретной математики как аппаратов исследования связано с тем, какие задачи ставит перед собой исследователь, и, в связи с этим, какую модель изучаемого явления он рассматривает — дискретную или непрерывную. Само деление математики на классическую и дискретную в значительной мере условно, поскольку, с одной стороны, происходит активная циркуляция идей и методов между ними, а с другой — часто возникает необходимость исследования моделей, обладающих одновременно как дискретными, так и непрерывными свойствами. Кроме того, в математике существуют подразделы, использующие средства дискретной математики для изучения непрерывных моделей, и, наоборот, часто средства и постановки задач классич. анализа используются при исследовании дискретных структур. Это указывает на известное слияние рассматриваемых областей.

Д. а. представляет собой важное направление в математике, имеющее характерные для него предмет исследования, методы и задачи, специфика к-рых обусловлена, в первую очередь, необходимостью отказа в Д. а. от основополагающих понятий классич. математики — предела и непрерывности — и (в связи с этим) тем, что для многих задач Д. а. сильные средства классич. математики оказываются, как правило, мало приемлемыми. Наряду с выделением Д. а. путем указания его предмета, методов и задач можно также охарактеризовать Д. а. посредством перечисления подразделов, составляющих его. К ним, в первую очередь, относятся *комбинаторный анализ*, *графов теория*, теория *кодирования и декодирования*, теория *функциональных систем* и нек-рые другие. Часто под термином «Д. а.» (в предположении, что его предмет исчерпывается конечными структурами) понимается именно совокупность перечисленных дисциплин. За счет расширения понимания его круга вопросов возможно и более широкое толкование Д. а. С этой точки зрения, к Д. а. могут быть отнесены также как целые разделы математики, напр. математич. логика, так и части таких разделов, как теория чисел, алгебра, вычислительная математика, теория вероятностей и некоторые другие, в к-рых изучаемый объект носит дискретный характер.

Элементы Д. а. возникли в глубокой древности и, развиваясь параллельно с другими разделами математики, в значительной мере являлись их составной частью. Типичными для того периода были задачи, связанные со свойствами целых чисел, приведшие затем к созданию теории чисел. Позже, в основном в связи с игровыми задачами, появились элементы комбинаторного анализа и дискретной теории вероятностей, а в связи с общими проблемами теории чисел, алгебры и геометрии возникли важнейшие понятия алгебры такие, как группа, поле, кольцо и др., определившие развитие и содержание алгебры на много лет вперед и имевшие по существу дискретную природу. Стремление к строгости математич. рассуждений и анализ рабочего инструмента математики — логики — привели к выделению еще одного важного раздела математики — математич. логики. Однако наибольшего развития Д. а. достиг в связи с появлением кибернетики и ее теоретич. части — математич. кибернетики. Математич. кибернетика, непосредственно изучающая с позиций математики самые разнообразные проблемы, к-рые ставит перед кибернетикой прак-

тика, является важным поставщиком идей и задач для Д. а., вызывая в нем целые новые направления. Так, прикладные вопросы, требующие большой числовой обработки, стимулировали появление сильных численных методов решения задач, оформившихся затем в вычислительную математику, а анализ понятий вычислимости и алгоритма привел к появлению важного раздела математич. логики — *алгоритмов теории*. Растущий поток информации и связанные с ним задачи хранения, обработки и передачи информации привели к возникновению теории кодирования; экономич. задачи, задачи электротехники, равно как и внутренние задачи математики, потребовали разработки теории графов; задачи конструирования и описания работы сложных управляющих систем привели к теории функциональных систем и т. д. В то же время математич. кибернетика использует результаты Д. а. при решении своих задач.

Наряду с отмеченными, Д. а. обладает рядом и других особенностей. Так, вместе с задачами типа существования, имеющими общематематич. характер, важное место в Д. а. занимают задачи, связанные с алгоритмич. разрешимостью и построением конкретных решающих алгоритмов, что характерно именно для Д. а. Особенностью Д. а. является и то, что он по существу первым столкнулся с необходимостью глубокого исследования так наз. дискретных многоэкстремальных задач, часто возникающих в математич. кибернетике. Соответствующие методы классич. математики для поиска экстремумов, существенно использующие гладкость функций, в этих случаях оказываются мало эффективными. Типичными задачами такого рода в Д. а. являются, напр., задачи об отыскании в нек-ром смысле оптимальных стратегий в шахматной партии при ограниченном числе ходов, а также важный вопрос математич. кибернетики о построении минимальных дизъюнктивных нормальных форм для булевых функций, т. е. так наз. проблема *булевых функций минимизации*. Особенностью Д. а., связанной уже с задачами для конечных структур, является и то, что для многих из этих задач, как правило, существует алгоритм решения, в то время как в классич. математике полное решение задачи часто возможно лишь при весьма жестких ограничениях. Примером такого алгоритма может служить алгоритм просмотра всех возможных вариантов, т. е. алгоритм типа «полного перебора». К числу задач указанного вида можно отнести, напр., упомянутые задачи о стратегиях в шахматной партии, о минимизации булевых функций и др. Вместе с тем решения типа «полного перебора» очень трудоемки и практически мало приемлемы, в связи с чем возникает ряд новых задач, связанных с условиями, ограничивающими перебор и приводящими к сведению индивидуальных задач, характеризующихся конкретными значениями параметров, к *массовой проблеме*, характеризующейся бесконечным множеством значений параметров; возникают задачи наложения ограничений на средства решения, естественных для этого класса задач, и др. Постановка такого рода вопросов и разработка методик осуществляется на конкретных моделях, доставляемых различными разделами математики, напр. на моделях минимизации булевых функций и синтеза *управляющих систем* из математич. кибернетики.

Лит.: [1] Яблонский С. В., Обзор некоторых результатов в области дискретной математики, «Информационные материалы», 1970, 5, с. 5—15; [2] Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж., Введение в конечную математику, пер. с англ., 2 изд., М., 1965. См. сб. «Проблемы кибернетики» и «Дискретный анализ», ж. «Кибернетика». *В. Б. Кудрявцев.*

ДИСКРИМИНАНТ — 1) Д. многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, с $a_0\neq 0$, корни к-рого равны $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,— произведение

$$D(f)=a_0^{2n-2}\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\alpha_i-\alpha_j)^2.$$

Д. равен нулю тогда и только тогда, когда многочлен имеет кратные корни. Д. симметричен относительно корней многочлена и поэтому может быть выражен через его коэффициенты.

Д. квадратного трехчлена ax^2+bx+c равен b^2-4ac; Д. многочлена x^3+px+q (корни к-рого вычисляются по *Кардано формуле*) равен $-27q^2-4p^3$. Если $f(x)$ — многочлен над полем характеристики 0, то

$$D(f)=(-1)^{n(n-1)/2}a_0^{-1}R(f, f'),$$

где $R(f, f')$ — результант многочлена $f(x)$ и его производной $f'(x)$. Производной многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ с коэффициентами из любого поля наз. многочлен $na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}$.

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975.

И. В. Проскуряков.

2) Д. полуторалинейной формы f в базисе $(v)=\{v_1, \ldots, v_n\}$ — элемент из кольца A, равный

$$D_f(v_1, \ldots, v_n)=\det\begin{Vmatrix} f(v_1, v_1)\ldots f(v_1, v_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(v_n, v_1)\ldots f(v_n, v_n)\end{Vmatrix}, \qquad (*)$$

где (v) — фиксированный базис конечномерного свободного A-модуля E над коммутативным кольцом A с единицей, снабженным автоморфизмом σ. Если $(w)=\{w_1, \ldots, w_n\}$ — другой базис в E, а

$$C=\begin{Vmatrix} c_{11}\ldots c_{1n} \\ \ldots\ldots \\ c_{n1}\ldots c_{nn}\end{Vmatrix}$$

— матрица перехода от (v) к (w), то

$$D_f(w_1, \ldots, w_n)=(\det C)(\det C)^{\sigma}D_f(v_1, \ldots, v_n).$$

Если кольцо A не имеет делителей нуля, то для невырожденности f необходимо и достаточно, чтобы

$$D_f(v_1, \ldots, v_n)\neq 0.$$

Если $v_1, \ldots, v_n$ — произвольный набор n элементов из E, то элемент $D_f(v_1, \ldots, v_n)$ кольца A, определяемый формулой (*), наз. дискриминантом f относительно системы $v_1, \ldots, v_n$. Пусть A без делителей нуля и f — невырожденная полуторалинейная форма. Тогда для того, чтобы система элементов $v_1, \ldots, v_n$ из E была свободной, необходимо и достаточно, чтобы $D_f(v_1, \ldots, v_n)\neq 0$. При этом $v_1, \ldots, v_n$ будет базисом в E тогда и только тогда, когда $D_f(v_1, \ldots, v_n)$ и $D_f(u_1, \ldots, u_n)$ ассоциированы в A для некоторого базиса $u_1, \ldots, u_n$ в A.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974.

В. Л. Попов.

3) Д. системы элементов поля — одна из важных конструкций в теории расширений полей. Пусть K — конечное расширение поля k степени n. Отображение $K\times K$ в k:

$$(x, y)\mapsto \mathrm{Tr}(xy),$$

где $x, y\in K$, а $\mathrm{Tr}\,\alpha$ — след элемента $\alpha\in K$, является симметрической билинейной формой на поле K, рассматриваемом как линейное пространство над k. Д. этой билинейной формы (см. *Дискриминант* полуторалинейной формы) относительно системы элементов $w_1, \ldots, w_m$ из K наз. дискриминантом системы $w_1, \ldots, w_m$ и обозначается $D(w_1, \ldots, w_m)$. В частности, если указанная система есть базис K над k, то ее Д. наз. дискриминантом базиса K над k. Д. двух базисов отличаются множителем, являющимся квадратом нек-рого ненулевого элемента поля k. Д. всякого базиса K над k не равен нулю тогда и только тогда, когда расширение K/k сепарабельно. Если $f_x(t)$ — многочлен степени m, являющийся минимальным много-

членом элемента x из сепарабельного расширения K/k, то $D(1, x, x^2, \ldots, x^m)$ совпадает с Д. многочлена $f_x(t)$. Приведенные определения могут быть перенесены также на случай произвольной конечномерной ассоциативной алгебры над полем (см. ниже п. 4).

В случае сепарабельного расширения K/k Д. базиса $w_1, \ldots, w_n$ может быть вычислен по формуле

$$D(w_1, \ldots, w_n) = (\det(\sigma_i(w_j)))^2,$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — все различные вложения K в фиксированное алгебраич. замыкание поля k, оставляющие неподвижным k.

Пусть $k=\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, K — поле алгебраич. чисел и M — некоторый *модуль* ранга n в K. Тогда для любых двух базисов модуля M значения Д. совпадают и это общее значение Д. наз. дискриминантом модуля M. Если M совпадает с кольцом целых чисел поля K, то Д. модуля M наз. просто дискриминантом поля K и обозначается D_k. Число D_k является важной числовой характеристикой поля K. Напр., если K допускает s вещественных и $2t$ комплексных вложений в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, то

$$\lim_{q \to 1+0} (q-1)\zeta_k(q) = \frac{2^{s+t}\pi^t R}{m\sqrt{|D_k|}} h,$$

где $\zeta_k(q)$ — *дзета-функция* Дедекинда, h — число классов *дивизоров*, R — *регулятор* поля K и m — число корней из единицы в поле K. Имеется оценка

$$|D_k| > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2t} \frac{1}{2\pi n} e^{2n - \frac{1}{6n}},$$

которая показывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} |D_k| = \infty$. Для квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где d — свободное от квадратов целое рациональное число, $d \neq 1$, имеют место формулы:

$$D_k = d, \text{ если } d \equiv 1 \pmod 4,$$
$$D_k = 4d, \text{ если } d \equiv 2 \text{ или } 3 \pmod 4.$$

Для *кругового поля* $K=\mathbb{Q}(\varepsilon)$, где ε — примитивный корень p^r-й степени из единицы

$$D_k = \pm p^{p^{r-1}(pr-r-1)}$$

(знак минус берется при $p^r=4$ или $p \equiv 3 \pmod 4$, а плюс — в остальных случаях).

Указанное определение Д. модуля в поле алгебраич. чисел может быть обобщено на тот случай, когда k — поле частных дедекиндова кольца A, а K — конечное сепарабельное расширение поля k степени n. Пусть B — целое замыкание кольца A в K и $\mathfrak{b}$ — произвольный дробный идеал кольца B. Тогда дискриминантом идеала $\mathfrak{b}$ наз. A-модуль $D(\mathfrak{b})$, порожденный всеми Д. вида $D(w_1, \ldots, w_n)$, где $\{w_1, \ldots, w_n\}$ пробегает всевозможные базисы поля K над k, лежащие в $\mathfrak{b}$. $D(\mathfrak{b})$ оказывается *дробным идеалом* кольца A, причем имеет место равенство $D(\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{b})^2 D(B)$, где $N(\mathfrak{b})$ — норма идеала $\mathfrak{b}$. Д. $D(B)$ совпадает с нормой дифферента кольца B над A.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Ленг С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966; [3] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963; [4] Джекобсон Н., Теория колец, пер. с англ., М., 1947.

В. Л. Попов.

4) Д. алгебры — Д. симметричной билинейной формы $(x, y) = T(xy)$, где x, y — элементы конечномерной ассоциативной алгебры A над полем F, а $T(a)$ — главный след элемента $a \in A$, определяемый следующим образом. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — к.-л. базис алгебры A, $\Phi = F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — чисто трансцендентное расширение поля F с помощью алгебраически независимых элементов $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $A\Phi = A \otimes_F \Phi$ — соответствующее скалярное расширение алгебры A, тогда элемент $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n \in A\Phi$ наз. общим элемен-

т о м а л г е б р ы A, а минимальный многочлен (над Ф) элемента x — м и н и м а л ь н ы м м н о г о ч л е н о м а л г е б р ы A. Пусть

$$g(t; \xi) = t^r - m_1(\xi)\, t^{r-1} + \ldots + (-1)^r m_r(\xi)$$

— минимальный многочлен алгебры A; коэффициенты $m_i(\xi)$ оказываются на самом деле многочленами из $F[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. Если $a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n (\alpha_i \in F)$ — произвольный элемент из A, то $m_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = T(a)$ наз. г л а в н ы м с л е д о м э л е м е н т а a, $m_r(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = N(a)$ — г л а в н о й н о р м о й, а многочлен $g(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — г л а в н ы м м н о г о ч л е н о м. Коэффициенты главного многочлена для данного элемента $a \in A$ не зависят от выбора базиса, поэтому упомянутая выше билинейная форма (x, y) на A определена инвариантно, в то время как ее Д. определен с точностью до мультипликативного множителя, являющегося квадратом ненулевого элемента из F. Алгебра A сепарабельна (см. *Сепарабельная алгебра*) тогда и только тогда, когда ее Д. отличен от нуля.

Лит.: [1] Д ж е к о б с о н Н., Теория колец, пер. с англ., М., 1947.

Е. Н. Кузьмин.

ДИСКРИМИНАНТНАЯ КРИВАЯ обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка $F(x, y, y') = 0$ — множество точек (x, y) плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $\varphi(x, y) = 0$, получающемуся исключением y' из соотношений $F = 0$ и $F'_{y'} = 0$ или исключением x' из соотношений $G = 0$ и $G'_{x'} = 0$, где $G(y, x, x') \equiv F(x, y, 1/x')$ (в предположении, что $F'_{y'}$ существует). Если Д. к. для уравнения $F = 0$ — непустое множество и не вырождается в отдельные точки, то она (или каждая ее ветвь) может:

1) являться решением уравнения $F = 0$, в каждой точ-

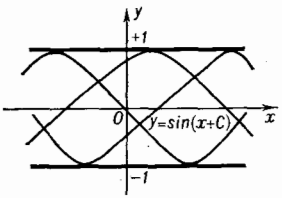


Рис. 1.

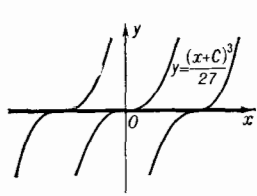


Рис. 2.

ке которого нарушается единственность,— в таком случае Д. к. есть огибающая семейства интегральных кривых (напр., $y = 1$ и $y = -1$ для уравнения $y'^2 + y^2 - 1 = 0$, рис. 1; $y = 0$ для уравнения $y'^3 - y^2 = 0$, рис. 2); 2) являться решением уравнения $F = 0$, в каждой точке к-рого имеет место единственность (напр., $y = 0$ для уравнения $y'^2 - y^2 = 0$, рис. 3); 3) не являться решением уравнения $F = 0$, в таком случае Д. к. есть множество либо точек возврата интегральных кривых (например, $x = 0$ для уравнения $y'^2 - x = 0$, рис. 4), либо точек прикосновения различных интегральных

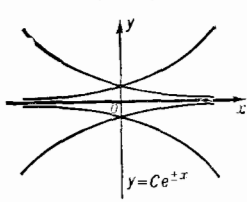


Рис. 3.

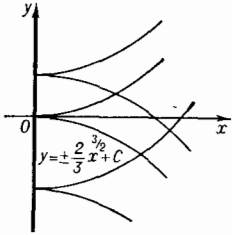


Рис. 4.

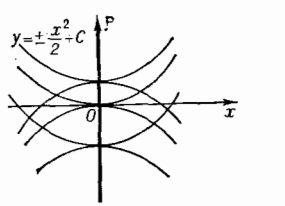


Рис. 5.

кривых (например, $x=0$ для уравнения $y'^2-x^2=0$, рис. 5).

Рассматривается также уравнение $F=0$ в комплексной области, когда F — многочлен от y' (см., напр., [2], гл. II).

Лит.: [1] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 2, М., 1954; [2] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1950. *Н. Х. Розов.*

ДИСКРИМИНАНТНАЯ ФУНКЦИЯ — статистика, служащая для построения правила различения в задачах *дискриминантного анализа* с двумя распределениями. Задача различения (дискриминации) для двух распределений состоит в следующем. Пусть наблюденный объект с вектором измерений $x=(x_1, \ldots, x_p)$ принадлежит одной из совокупностей π_i, $i=1, 2$, причем неизвестно какой. Требуется построить правило, согласно к-рому по значению наблюденного вектора x объект относят к π_i (правило различения). Построение такого правила основывается на разбиении выборочного пространства вектора x на такие области R_i, $i=1, 2$, чтобы при попадании x в R_i было разумно (с точки зрения выбранного принципа оптимальности решения) отнести x к π_i. Если правило дискриминации основывается на разбиении: $R_1=\{x : T(x)<a\}$, $R_2=\{x : T(x)\geqslant b\}$, где a и b — константы, $a<b$, то статистику $T(x)$ наз. Д. ф., а область, где $a\leqslant T(x)<b$,— зоной сомнения. Особую роль, из-за простоты применений, играют линейные Д. ф. В частном случае, когда распределения нормальны и имеют одинаковые матрицы ковариаций, Д. ф. оказывается линейной при разумных требованиях оптимальности к указанному правилу. В задачах дискриминантного анализа со многими распределениями при бейесовском подходе (см. *Бейесовский подход* к статистическим задачам) вводится понятие *дискриминантного информанта.* *Н. М. Митрофанова, А. П. Хусу.*

ДИСКРИМИНАНТНЫЙ АНАЛИЗ — раздел математич. статистики, содержанием к-рого является разработка и исследование статистич. методов решения следующей задачи различения (дискриминации): основываясь на результатах наблюдений, определить, какой из нескольких возможных совокупностей принадлежит объект, случайно извлеченный из одной из них. На практике задача различения возникает, напр., в тех случаях, когда наблюдение признака, полностью определяющего принадлежность объекта к той или иной совокупности, невозможно или требует чрезмерных затрат средств или времени; в случаях, когда информация о таком признаке утеряна, и ее нужно восстановить, а также, когда речь идет о предсказании будущих событий на основе имеющихся данных. Ситуации первого типа встречаются в медицинской практике, напр. при установлении диагноза по комплексу неспецифических проявлений заболевания. Пример ситуации второго типа — определение пола давно умершего человека по останкам, найденным при археологич. раскопках. Ситуация третьего типа возникает, напр., при статистич. прогнозе отдаленных результатов лечения. Методом Д. а. является *многомерный статистический анализ*, служащий для количественного выражения и обработки имеющейся информации в соответствии с выбранным критерием оптимальности решения.

В общем виде задача различения ставится следующим образом. Пусть результатом наблюдения над случайным объектом является реализация p-мерного случайного вектора $x'=(x_1, \ldots, x_p)$ (штрих означает транспонирование) значений p признаков объекта. Требуется установить правило, согласно к-рому по значению вектора x объект относят к одной из возможных совокупностей π_i, $i=1, \ldots, k$. Построение правила дискриминации состоит в том, что все *выборочное пространство* R значений вектора x разбивается на области R_i, $i=1, \ldots, k$, так что при попадании x в R_i объект

относят к совокупности π_i. Выбор правила дискриминации среди всех возможных производится в соответствии с установленным принципом оптимальности на основе априорной информации о совокупностях π_i и вероятностях q_i извлечения объекта из π_i. При этом учитывается размер убытка от неправильной дискриминации. Априорная информация о совокупностях π_i может состоять в том, что известны функции распределения вектора признаков объекта в каждой из этих совокупностей, она может быть представлена также и в виде выборок из каждой из этих совокупностей, при этом априорные вероятности q_i совокупностей могут быть либо известны, либо нет. Очевидно, чем полнее исходная информация, тем точнее могут быть рекомендации.

Пусть рассматривается случай двух совокупностей π_1 и π_2 в ситуации, когда имеется полная исходная информация: известны функции распределения вектора признаков в каждой из совокупностей и априорные вероятности (бейесовский подход). Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — функции распределения вектора признаков соответственно в π_1 и π_2, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — плотности распределения, а $C(i|j)$, $i, j=1, 2,$-- убыток вследствие отнесения объекта из j-й совокупности к i-й. Тогда вероятности неправильной дискриминации объектов из π_1 и π_2 соответственно равны:

$$P(2\,|\,1;\ R)=\int_{R_2} p_1(x)\,dx,\quad P(1\,|\,2;\ R)=\int_{R_1} p_2(x)\,dx$$

(символом $P(i|j;\ R)$ обозначена вероятность приписывания объекта из π_j к совокупности π_i при использовании правила R), а математич. ожидание потерь, связанных с неверной дискриминацией, равно

$$C(2|1)P(2|1;\ R)q_1+C(1|2)P(1|2;\ R)q_2.$$

Естественным в рассматриваемой ситуации принципом оптимальности является принцип минимизации этой величины, к-рый приводит в этом случае к следующему разбиению пространства выборок [1]:

$$\left.\begin{aligned} R_1:&\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\geqslant\frac{C(1\,|\,2)\,q_2}{C(2\,|\,1)\,q_1},\\ R_2:&\frac{p_1(x)}{p_2(x)}<\frac{C(1\,|\,2)\,q_2}{C(2\,|\,1)\,q_1}. \end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Если выполнены условия

$$\mathsf{P}\left\{\frac{p_1(x)}{p_2(x)}=\frac{C(1\,|\,2)\,q_2}{C(2\,|\,1)\,q_1}\,\middle|\,\pi_i\right\}=0,\qquad i=1,\ 2,$$

то такое разбиение единственно с точностью до множества нулевой вероятности. К аналогичному правилу различения в рассмотренном случае можно прийти и другими путями, напр. с помощью *Неймана — Пирсона леммы* из теории проверки статистич. гипотез.

При выбранном критерии оптимальности о качестве правила различения судят по величине математич. ожидания потерь, и из двух правил лучшим считается то, к-рое приводит к меньшему значению этой величины.

Если в задаче различения априорные вероятности q_i неизвестны, то естественно искать решение в классе допустимых правил, выбирая среди них правило, минимизирующее максимум по всем q_i математич. ожидания потерь (такое правило наз. м и н и м а к с н ы м). Математич. ожидания потерь при условии, что наблюдения производились соответственно над объектами из π_1 или π_2, равны

$$C(2|1)P(2|1;\ R)=r(1,\ R),\ C(1|2)P(1|2;\ R)=r(2,\ R).$$

Справедливо утверждение (см. [1]): если выполнены условия

$$\mathsf{P}\left\{\frac{p_1(x)}{p_2(x)}=k\,\middle|\,\pi_i\right\}=0,\quad i=1,\ 2,\quad 0\leqslant k\leqslant\infty,$$

то класс бейесовских методов является минимальным полным классом. Минимаксное правило R^* из этого

класса получается при значении q_1, для к-рого выполнено условие $P(2|1;\ R^*)=P(1|2;\ R^*)$. В важном случае, когда P_1 и P_2 — многомерные нормальные распределения с векторами средних $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ и общей ковариационной матрицей Σ, правило дискриминации (1) принимает вид:

$$\left.\begin{array}{c} R_1: x'\sum^{-1}(\mu^{(1)}-\mu^{(2)})- \\ -\frac{1}{2}(\mu^{(1)}+\mu^{(2)})'\sum^{-1}(\mu^{(1)}-\mu^{(2)})\geqslant \ln k, \\ R_2: x'\sum^{-1}(\mu^{(1)}-\mu^{(2)})- \\ -\frac{1}{2}(\mu^{(1)}+\mu^{(2)})'\sum^{-1}(\mu^{(1)}-\mu^{(2)})<\ln k, \end{array}\right\} \quad (2)$$

где $k=\frac{q_2 C(1|2)}{q_1 C(2|1)}$. Если $C(1|2)=C(2|1)$ и $q_2=q_1$, то $\ln k=0$ и

$$R_1: D(x)=x'\sum^{-1}(\mu^{(1)}-\mu^{(2)})\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(\mu^{(1)}+\mu^{(2)})'\sum^{-1}(\mu^{(1)}-\mu^{(2)}). \quad (3)$$

Если априорные вероятности неизвестны, то можно выбрать $\ln k=c$, напр. из условия минимальности ошибки неверной дискриминации или из условия обращения в нуль математич. ожидания потерь от неверной дискриминации. Вообще говоря, выбор критерия оптимальности, как правило, определяется характером самой задачи. Выражение в левой части (3) наз. *дискриминантной функцией* данной задачи; ее можно толковать как поверхность в выборочном пространстве, разделяющую совокупности π_1 и π_2. В приведенном примере дискриминантная функция линейна, т. е. такая поверхность есть гиперплоскость. Если в приведенном примере матрицы ковариации неодинаковы, то дискриминантная функция будет квадратичной функцией от x. В целях упрощения вычислений найден минимальный полный класс линейных процедур различения для этого случая (см. [3]).

С точки зрения применений Д. а. наиболее важной является ситуация, когда исходная информация о распределениях представлена выборками из них. В этом случае задача дискриминации ставится следующим образом. Пусть $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}$ — выборка из совокупности π_i, $i=1, \ldots, k$; $x_j^{(i)}=(x_{j_1}^{(i)}, \ldots, x_{j_p}^{(i)})$ — вектор признаков j-го объекта выборки из i-й совокупности, и произведено дополнительное наблюдение $x'=(x_1, \ldots, x_p)$ над объектом, принадлежащим одной из совокупностей π_i. Требуется построить правило приписывания наблюдения x к одной из этих совокупностей. Первый подход к решению этой задачи в случае двух совокупностей принадлежит Р. А. Фишеру — основоположнику Д. а. [4]. Используя в задаче различения вместо вектора признаков, характеризующих объект, их линейную комбинацию — гиперплоскость, в нек-ром смысле наилучшим образом разделяющую совокупность выборочных точек,— он пришел к дискриминантной функции (3).

Наиболее изученным является случай, когда известно, что распределения векторов признаков в каждой совокупности нормальны, но нет информации о параметрах этих распределений. Здесь самым естественным является подход, состоящий в замене неизвестных параметров распределений в дискриминантной функции (3) их наилучшими оценками (см. [5], [6]). Как и в случае известных распределений, правило дискриминации можно основывать на отношении правдоподобия (см. [7], [8]).

Подавляющая часть результатов Д. а. получена в предположении нормальности распределений. Изучаются вопросы применимости оптимальных в нормальном случае методов в ситуациях, где предположение о нормальности носит лишь приближенный характер [9]. В этих работах задачи Д. а. рассматриваются в рамках

общей теории решающих функций и изучаются свойства правил дискриминации по отношению к так наз. принципу Q-оптимальности, естественным образом охватывающему как бейесовский, так и минимаксный подходы. Именно, пусть $R(\xi, \delta)$ — вероятность ошибки при применении правила дискриминации δ, когда вектор априорных вероятностей есть ξ. Пусть известно, что $\xi \in Q$, где Q — некоторое множество в пространстве векторов ξ. Правило δ^* наз. Q - о п т и м а л ь н ы м, если

$$\sup_{\xi \in Q} R(\xi, \delta^*) = \inf_{\delta \in D} \sup_{\xi \in Q} R(\xi, \delta) = R_Q, \qquad (4)$$

где D — множество всех возможных правил дискриминации. Пусть известен функциональный вид $P_i(x, \lambda_i)$, зависящих от параметра распределений вектора признаков в каждой из совокупностей, $i=1, 2$, но параметр λ неизвестен и оценивается по выборке. Тогда если $P_i(x, \lambda_i)$ таковы, что существует Q-оптимальное правило $\delta^*(\lambda_1, \lambda_2)$ дискриминации для распределений $P_i(x, \lambda_i)$, $i=1, 2$, когда значение параметра $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2)$ известно, и $\{\lambda_i^{(n_i)}\}$ — сильно состоятельная оценка параметра λ_i по выборке объема n_i, то при нек-рых дополнительных условиях последовательность правил $\{\delta^*(\lambda_1^{(n_1)}, \lambda_2^{(n_2)})\}$ при $n_1, n_2 \to \infty$ является асимптотически Q-оптимальной, то есть с вероятностью 1

$$\lim_{n_1, n_2 \to \infty} \sup_{\xi \in Q} R\left(\xi, \delta^*\left(\lambda_1^{(n_1)}, \lambda_2^{(n_2)}\right)\right) = R_Q, \qquad (5)$$

где риск R в левой части (5) может быть вычислен как при истинном значении параметров, так и при замене истинных значений их оценками $\lambda_i^{(n_i)}$. Если потребовать лишь состоятельности оценки, то имеет место несколько более слабое утверждение.

Непараметрич. методы дискриминации, не требующие знаний о точном функциональном виде распределений и позволяющие решать задачи дискриминации на основе малой априорной информации о совокупностях, являются особо ценными для практических применений [2], [10].

В задачах Д. а. приходится иметь дело со случайными наблюдениями как над количественными, так и над качественными признаками (возможен и смешанный случай). Между этими случаями нет принципиальной разницы. Если признаки качественные, то вводится понятие многомерного состояния объекта и рассматривается распределение по нему. От природы наблюдений зависит способ оценки функции распределений вектора признаков. В соответствующих ситуациях снова применимы бейесовский и минимаксный подходы и можно строить процедуру различения, основываясь на отношении правдоподобия. Иногда целесообразно переходить от количественных величин к качественным путем разбиения функции частот, и наоборот, от качественных к количественным, вводя фиктивные переменные, преобразующие качественную информацию в количественную. При этом, разумеется, нужно исследовать вопрос о том, не происходит ли существенного ухудшения качества правила.

Выше рассматривались задачи Д. а. при фиксированной размерности пространства значений вектора признаков. Однако практич. ситуации чаще всего таковы, что выбор размерности осуществляется исследователем. На первый взгляд кажется, что добавление каждого нового признака в дискриминантной функции по крайней мере не ухудшит ее качества. Однако многие факторы могут при этом вести к потере эффективности различения (достаточно вспомнить, что вместо истинных значений параметров распределений часто используются их оценки). К тому же увеличение числа признаков ведет к быстрому возрастанию трудностей счета. Имеет-

ся много рекомендаций для выбора признаков, диктуемых часто здравым смыслом. Теоретически наиболее обоснованным методом выбора признаков является метод, основанный на вычислении расстояния Махаланобиса между двумя распределениями [11]. Особый интерес представляют последовательные методы выбора признаков.

Долгое время задачи отнесения объекта к одной из нескольких возможных совокупностей носили общее название задач классификации. Здесь приведена терминология Кендалла [2], разделившего все задачи, связанные с выбором одной из нескольких равноправных возможностей на три класса. Он назвал задачи рассматриваемого здесь вида задачами различения (дискриминации), оставив термин «классификация» для задач разбиения данной выборки или всей совокупности на группы, по возможности однородные. Если в задачах различения существование групп оговорено в условиях, то здесь это — предмет исследования. Выше были рассмотрены задачи различения, когда исследуемый объект есть результат случайного выбора из нек-рого конечномерного распределения. Возможна более общая ситуация, когда исследуемый объект представляет собой реализацию нек-рого случайного процесса с непрерывным временем.

Д. а. тесно связан также с теорией *распознавания образов*.

Лит.: [1] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Kendall M. G., Stuart A., The advanced theory of statistics, v. 3, L., 1966; [3] Anderson T. W., Bahadur R. R., «Ann. Math. Statistics», 1962, v. 33, № 2, p. 420—31; [4] Fischer R. A., «Ann. Eugenics», 1936, v. 7, № 11, p. 179—188; [5] Wald A., «Ann. Math. Statistics», 1944, v. 15, № 2, p. 145—62; [6] John S., «Sankhya», 1960, v. 22, pt. 3—4, p. 301—16; [7] Welch B. L., «Biometrika», 1939, v. 31, pt. 1—2, p. 218—220; [8] Gupta S. D., «Ann. Math. Statistics», 1965, v. 36, № 4, p. 1174—84; [9] Bunke O., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.», 1967, Bd 7, № 2, S. 131—46; [10] Ryzin J. van, «Sankhya», ser. A, 1966, v. 28, pt. 2—3, p. 261—70; [11] Kudô A., «Memoirs of the Faculty of Science. Kyushu Univ.», ser. A, 1963, v. 17, № 1, p. 63—75; [12] Урбах В. Ю., в сб.: Статистические методы классификации, в. 1, М., 1969, с. 79—173 (лит.).

Н. М. Митрофанова, А. П. Хусу.

ДИСКРИМИНАНТНЫЙ ИНФОРМАНТ — термин *дискриминантного анализа*, означающий величину, служащую для построения правила приписывания объекта с измерениями $x=(x_1, \ldots, x_p)$, извлеченного из смеси k совокупностей с плотностями распределений $p_1(x), \ldots, p_k(x)$ и априорными вероятностями $q_1, \ldots, q_k$, к одной из этих совокупностей. При этом i-й Д. и. объекта с измерениями x определяется как

$$S_i = -[q_1 p_1(x) r_{1i} + \ldots + q_k p_k(x) r_{ki}], \quad i=1, \ldots, k,$$

где r_{ij} — убыток, обусловленный отнесением объекта из i-го распределения к j-му. Правило, состоящее в отнесении объекта к распределению с наибольшим значением Д. и., имеет минимальное математич. ожидание потерь. В частности, если все k распределений нормальны и имеют одинаковые матрицы ковариаций, то все Д. и. линейны. Тогда в случае $k=2$ разность S_1-S_2 есть линейная *дискриминантная функция* Фишера.

Лит.: [1] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968.

Н. М. Митрофанова, А. П. Хусу.

ДИСКРИМИНАНТНЫЙ ТЕНЗОР — кососимметрический тензор $\varepsilon_{i_1, \ldots, i_n}$ в n-мерном аффинном пространстве, (единственный) коэффициент внешней n-формы, или монома максимального порядка.

ДИСПЕРСИИ ТОЧКА — точка топологич. пространства, в дополнении к к-рой нет неодноточечных связных множеств.

А. А. Мальцев.

ДИСПЕРСИОННОЕ ОТНОШЕНИЕ — см. *Дисперсионный анализ.*

ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ — соотношение, связывающее нек-рые величины, характеризующие рассеяние частиц, с величинами, характеризующими их по-

глощение. Более точно, Д. с.— это соотношение, связывающее эрмитову часть амплитуды рассеяния (в более общем случае — *Грина функции*) с определенного рода интегралами от ее антиэрмитовой части. Пусть функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на оси и удовлетворяет условию причинности $f(t)=0$, $t<0$. Тогда ее преобразование Фурье — Лапласа

$$\tilde{f}(\zeta)=\int f(t)\,e^{i\zeta t}dt, \qquad \zeta=p+iq,$$

есть голоморфная функция в верхней полуплоскости $q>0$, а действительная и мнимая части граничного значения $\tilde{f}(p)$ удовлетворяют Д. с.

$$\operatorname{Re}\tilde{f}(p)=\frac{1}{\pi}v_p\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\tilde{f}(p')\,dp'}{p'-p}. \qquad (*)$$

При описании реальных физич. процессов Д. с. типа (*) усложняются, так как функция $\tilde{f}(\zeta)$ может расти на ∞ как многочлен (в этом случае получают Д. с. с вычитаниями), граничное значение $\tilde{f}(p)$ может быть обобщенной функцией медленного роста, а число переменных — больше одного (многомерные Д. с.).

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., 1958; [2] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976.

В. С. Владимиров.

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, связывающее частоту колебаний ω и *волновой вектор* $\boldsymbol{k}$ плоской волны, зависящей от времени и координат по закону

$$\exp\{i(\omega t-\boldsymbol{kr})\}.$$

Д. у. выводится из уравнений, описывающих рассматриваемый процесс, и определяет дисперсию волн (см., напр., случай электродинамич. процессов в [1], [2]). В зависимости от характера задачи оно может быть использовано для определения частот колебаний по волновому вектору $\omega_n=\omega_n(\boldsymbol{k})$ или величин волновых векторов по их направлению и частоте колебаний.

Первый случай тесно связан с решением задачи Коши и исследованием устойчивости положения равновесия, соответствующего тривиальному решению уравнений рассматриваемого волнового процесса. С помощью разложения начальных условий в интеграл Фурье решение задачи Коши может быть записано в виде суперпозиции плоских волн с частотами $\omega_n(\boldsymbol{k})$. Если при нек-ром действительном $\boldsymbol{k}$ среди этих частот имеется хотя бы одна с отрицательной мнимой частью, то это означает существование ограниченных начальных возмущений, к-рым соответствуют экспоненциально нарастающие решения, т. е. неустойчивость.

Второй случай решения Д. у. связан с задачами возбуждения монохроматич. колебаний внешними источниками, гармонически зависящими от времени.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лившиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, М., 1957; [2] Силин В. П., Рухадзе А. А., Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, М., 1961.

Д. П. Костомаров.

ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ в математической статистике — статистический метод, предназначенный для выявления влияния отдельных факторов на результат эксперимента, а также для последующего планирования аналогичных экспериментов. Первоначально Д. а. был предложен Р. Фишером [1] для обработки результатов агрономич. опытов по выявлению условий, при к-рых испытываемый сорт сельскохозяйственной культуры дает максимальный урожай. Современные приложения Д. а. охватывают широкий круг задач экономики, социологии, биологии и техники и трактуются обычно в терминах статистич. теории выявления систематич. различий между результатами непосредственных измерений, выполненных при тех или иных меняющихся условиях.

Если значения неизвестных постоянных $a_1, \ldots, a_I$ могут быть измерены с помощью различных методов или измерительных средств $M_1, \ldots, M_J$, и в каждом случае систематич. ошибка b_{ij} может, вообще говоря, зависеть как от выбранного метода M_j, так и от неизвестного измеряемого значения a_i, то результаты таких измерений представляют собой суммы вида

$$x_{ijk} = a_i + b_{ij} + y_{ijk},$$

$$i = 1, \ldots, I; \quad j = 1, \ldots, J, \quad k = 1, \ldots, K,$$

где K — количество независимых измерений неизвестной величины a_i методом M_j, а y_{ijk} — случайная ошибка k-го измерения величины a_i методом M_j (предполагается, что все y_{ijk} — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие нулевое математич. ожидание: $\mathrm{E}y_{ijk} = 0$). Такая линейная модель наз. двухфакторной схемой Д. а.; первый фактор — истинное значение измеряемой величины, второй — метод измерения, причем в данном случае для каждой возможной комбинации значений первого и второго факторов осуществляется одинаковое количество K независимых измерений (это допущение для целей Д. а. не является существенным и введено здесь лишь ради простоты изложения).

Примером подобной ситуации могут служить спортивные соревнования I спортсменов, мастерство к-рых оценивается J судьями, причем каждый участник соревнований выступает K раз (имеет K «попыток»). В этом случае a_i — истинное значение показателя мастерства спортсмена с номером i, b_{ij} — систематич. ошибка, вносимая в оценку мастерства i-го спортсмена судьей с номером j, x_{ijk} — оценка, выставленная j-м судьей i-му спортсмену после выполнений последним k-й попытки, а y_{ijk} — соответствующая случайная погрешность. Подобная схема типична для так наз. субъективной экспертизы качества нескольких объектов, осуществляемой группой независимых экспертов. Другой пример — статистич. исследование урожайности сельскохозяйственной культуры в зависимости от одного из I сортов почвы и J методов ее обработки, причем для каждого сорта i почвы и каждого метода обработки с номером j осуществляется k независимых экспериментов (в этом примере b_{ij} — истинное значение урожайности для i-го сорта почвы при j-м способе обработки, x_{ijk} — соответствующая экспериментально наблюдаемая урожайность в k-м опыте, а y_{ijk} — ее случайная ошибка, возникающая из-за тех или иных случайных причин; что же касается величин a_i, то в агрономич. опытах их разумно считать равными нулю).

Положим $c_{ij} = a_i + b_{ij}$, и пусть c_{i*}, c_{*j} и c_{**} — результаты осреднений c_{ij} по соответствующим индексам, т. е.

$$c_{i*} = \frac{1}{J}\sum_j c_{ij}, \qquad c_{*j} = \frac{1}{I}\sum_i c_{ij},$$

$$c_{**} = \frac{1}{IJ}\sum_{ij} c_{ij} = \frac{1}{I}\sum_i c_{i*} = \frac{1}{J}\sum_j c_{*j}.$$

Пусть, кроме того, $\alpha = c_{**}$, $\beta_i = c_{i*} - c_{**}$, $\gamma_j = c_{*j} - c_{**}$ и $\delta_{ij} = c_{ij} - c_{i*} - c_{*j} + c_{**}$. Идея Д. а. основана на очевидном тождестве

$$c_{ij} = \alpha + \beta_i + \gamma_j + \delta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, I, \quad j = 1, \ldots, J. \quad (1)$$

Если символом (c_{ij}) обозначить вектор размерности IJ, получаемый из матрицы $\|c_{ij}\|$ порядка $I \times J$ с помощью какого-либо заранее фиксированного способа упорядочивания ее элементов, то (1) можно записать в виде равенства

$$(c_{ij}) = (\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) + (\gamma_{ij}) + (\delta_{ij}), \quad (2)$$

где все векторы имеют размерность IJ, причем $\alpha_{ij} = \alpha$, $\beta_{ij} = \beta_i$, $\gamma_{ij} = \gamma_j$. Так как четыре вектора в правой части (2) ортогональны, то $\alpha_{ij} = \alpha$ — наилучшее приближение

функции c_{ij} от аргументов i и j постоянной величиной [в смысле минимальности суммы квадратов отклонений $\sum_{ij}(c_{ij}-\alpha)^2$]. В том же смысле $\alpha_{ij}+\beta_{ij}=\alpha+\beta_i$ — наилучшее приближение c_{ij} функцией, зависящей лишь от i, $\alpha_{ij}+\gamma_{ij}=\alpha+\gamma_j$ — наилучшее приближение c_{ij} функцией, зависящей лишь от j, а $\alpha_{ij}+\beta_{ij}+\gamma_{ij}=\alpha+\beta_i+\gamma_j$ — наилучшее приближение c_{ij} суммой функций, из к-рых одна (напр., $\alpha+\beta_i$) зависит лишь от i, а другая — лишь от j. Этот факт, установленный Р. Фишером (см. [1]) в 1918, позднее послужил основой теории квадратичных приближений функций.

В примере, связанном со спортивными соревнованиями, функция δ_{ij} выражает «взаимодействие» i-го спортсмена и j-го судьи (положительное значение δ_{ij} означает «подсуживание», т. е. систематич. завышение j-м судьей оценки мастерства i-го спортсмена, а отрицательное значение δ_{ij} означает «засуживание», т. е. систематич. снижение оценки). Равенство всех δ_{ij} нулю — необходимое требование, к-рое надлежит предъявлять к работе группы экспертов. В случае же агрономич. опытов такое равенство рассматривается как гипотеза, подлежащая проверке по результатам экспериментов, поскольку основная цель здесь — отыскание таких значений i и j, при к-рых функция (1) достигает максимального значения. Если эта гипотеза верна, то

$$\max c_{ij}=\alpha+\max \beta_i+\max \gamma_j,$$

и значит, выявление наилучших «почвы» и «обработки» может быть осуществлено раздельно, что приводит к существенному сокращению числа экспериментов (напр., можно при каком-либо одном способе обработки испытать все I сортов «почвы» и определить наилучший сорт, а затем на этом сорте опробовать все J способов «обработки» и найти наилучший способ; общее количество экспериментов с повторениями будет равно $(I+J)K$). Если же гипотеза {все $\delta_{ij}=0$} неверна, то для определения $\max c_{ij}$ необходим описанный выше «полный план», требующий при K повторениях IJK экспериментов.

В ситуации спортивных соревнований функция $\gamma_{ij}=\gamma_j$ может трактоваться как систематич. ошибка, допускаемая j-м судьей по отношению ко всем спортсменам. В конечном счете γ_j — характеристика «строгости» или «либеральности» j-го судьи. В идеале хотелось бы, чтобы все γ_j были нулевыми, но в реальных условиях приходится мириться с наличием ненулевых значений γ_j и учитывать это обстоятельство при подведении итогов экспертизы (напр., за основу сравнения мастерства спортсменов можно принять не последовательности истинных значений $\alpha+\beta_1+\gamma_j, \ldots, \alpha+\beta_I+\gamma_j$, а лишь результаты упорядочиваний этих чисел по их величине, поскольку при всех $j=1, \ldots, J$ такие упорядочивания будут одинаковыми). Наконец, сумма двух оставшихся функций $\alpha_{ij}+\beta_{ij}=\alpha+\beta_i$ зависит лишь от i и поэтому может быть использована для характеризации мастерства i-го спортсмена. Однако здесь нужно помнить, что $\alpha+\beta_i=a_i+b_{i*}\neq a_i$. Поэтому упорядочивание всех спортсменов по значениям $\alpha+\beta_i$ (или по $\alpha+\beta_i+\gamma_j$ при каждом фиксированном j) может не совпадать с упорядочиванием по значениям a_i. При практической обработке экспертных оценок этим обстоятельством приходится пренебрегать, так как упомянутый полный план экспериментов не позволяет оценивать отдельно a_i и b_{i*}. Таким образом, число $\alpha+\beta_i=a_i+b_{i*}$ характеризует не только мастерство i-го спортсмена, но и в той или иной мере отношение экспертов к этому мастерству. Поэтому, напр., результаты субъективных экспертных оценок, осуществленных в разное время (в частности, на нескольких Олимпийских играх), едва ли можно считать сопоставимыми. В случае же агрономич. опытов подобные трудности не возникают, поскольку все $a_i=0$ и значит, $\alpha+\beta_i=b_{i*}$.

Истинные значения функций α, β_i, γ_j и δ_{ij} неизвестны и выражаются в терминах неизвестных функций c_{ij}. Поэтому первый этап Д. а. заключается в отыскании статистич. оценок для c_{ij} по результатам наблюдений x_{ijk}. Несмещенная и имеющая минимальную дисперсию линейная оценка для c_{ij} выражается формулой

$$\hat{c}_{ij}=x_{ij*}=\frac{1}{K}\sum_k X_{ijk}.$$

Так как α, β_i, γ_j и δ_{ij} — линейные функции от элементов матрицы $\|c_{ij}\|$, то несмещенные линейные оценки для этих функций, имеющие минимальную дисперсию, получаются в результате замены аргументов c_{ij} соответствующими оценками, $\hat{c}_{ij}$, т. е.

$$\hat{\alpha}=x_{***},\quad \hat{\beta}_i=x_{i**}-x_{***},\quad \hat{\gamma}_j=x_{*j*}-x_{***},$$
$$\hat{\delta}_{ij}=x_{ij*}-x_{i**}-x_{*j*}+x_{***},$$

причем случайные векторы $(\hat{\alpha}_{ij})$, $(\hat{\beta}_{ij})$, $(\hat{\gamma}_{ij})$ и $(\hat{\delta}_{ij})$, определенные так же, как введенные выше (α_{ij}), (β_{ij}), (γ_{ij}) и (δ_{ij}), обладают свойством ортогональности, и значит, они представляют собой некоррелированные случайные векторы (иными словами, любые две компоненты, принадлежащие разным векторам, имеют нулевой коэффициент корреляции). Кроме того, любая разность вида

$$x_{ijk}-x_{ij*}=x_{ijk}-\hat{c}_{ij}$$

некоррелирована с любой из компонент этих четырех векторов. Рассмотрим пять совокупностей случайных величин $\{x_{ijk}\}$, $\{x_{ijk}-x_{ij*}\}$, $\{\hat{\beta}_i\}$, $\{\hat{\gamma}_j\}$ и $\{\hat{\delta}_{ij}\}$. Так как

$$x_{ijk}-x_{ij*}=y_{ijk}-y_{ij*},\quad \hat{\beta}_i=\beta_i+(y_{i**}-y_{***}),$$
$$\hat{\gamma}_j=\gamma_j+(y_{*j*}-y_{***}),$$
$$\hat{\delta}_{ij}=\delta_{ij}+(y_{ij*}-y_{i**}-y_{*j*}+y_{***}),$$

то дисперсии эмпирич. распределений, соответствующих указанным совокупностям, выражаются формулами

$$S^2=\frac{1}{IJK}\sum_{ijk}(x_{ijk}-x_{***})^2,$$

$$S_0^2=\frac{1}{IJK}\sum_{ijk}(x_{ijk}-x_{ij*})^2=\frac{1}{IJK}\sum_{ijk}(y_{ijk}-y_{ij*})^2,$$

$$S_1^2=\frac{1}{I}\sum_i\hat{\beta}_i^2=\frac{1}{I}\sum_i[\beta_i+(y_{i**}-y_{***})]^2,$$

$$S_2^2=\frac{1}{J}\sum_j\hat{\gamma}_j^2=\frac{1}{J}\sum_j[\gamma_j+(y_{*j*}-y_{***})]^2,$$

$$S_3^2=\frac{1}{IJ}\sum_{ij}\hat{\delta}_{ij}^2=\frac{1}{IJ}\sum_{ij}[\delta_{ij}+(y_{ij*}-y_{i**}-y_{*j*}+y_{***})]^2.$$

Эти эмпирич. дисперсии представляют собой суммы квадратов случайных величин, любые две из к-рых некоррелированы, если только они принадлежат разным суммам; при этом относительно всех y_{ijk} справедливо тождество

$$S^2=S_0^2+S_1^2+S_2^2+S_3^2,$$

объясняющее происхождение термина «Д. а.».

Пусть I, J, $K\geqslant 2$ и пусть

$$s_0^2=\frac{K}{K-1}S_0^2,\quad s_1^2=\frac{IJK}{I-1}S_1^2,\quad s_2^2=\frac{IJK}{J-1}S_2^2,$$
$$s_3^2=\frac{IJK}{(I-1)(J-1)}S_3^2,$$

в таком случае

$$\mathsf{E}s_0^2=\sigma^2,\quad \mathsf{E}s_1^2=\sigma^2+\frac{JK}{I-1}\sum_i\beta_i^2,\quad \mathsf{E}s_2^2=\sigma^2+\frac{IK}{J-1}\sum_j\gamma_j^2,$$
$$\mathsf{E}s_3^2=\sigma^2+\frac{K}{(I-1)(J-1)}\sum_{ij}\delta_{ij}^2,$$

где σ^2 — дисперсия случайных ошибок y_{ijk}.

На основе этих формул и строится второй этап Д. а., посвященный выявлению влияния первого и второго факторов на результаты эксперимента (в агрономич. опытах первый фактор — сорт «почвы», второй — способ «обработки»). Напр., если требуется проверить гипотезу отсутствия «взаимодействия» факторов, к-рая выражается равенством $\sum_{ij}\delta_{ij}^2=0$, то разумно вычислить дисперсионное отношение $s_3^2/s_0^2=F_3$. Если это отношение значимо отличается от единицы, то проверяемая гипотеза отвергается. Точно так же для проверки гипотезы $\sum_j\gamma_j^2=0$ полезно отношение $s_2^2/s_0^2=F_2$, к-рое надлежит также сравнить с единицей; если при этом известно, что $\sum_{ij}\delta_{ij}^2=0$, то вместо F_2 целесообразно сравнить с единицей отношение

$$\frac{(IJK-I-J-1)\,s_2^2}{IJ\,(K-1)\,s_0^2+(I-1)\,(J-1)\,s_3^2}=F_2^*.$$

Аналогичным образом можно построить статистику, позволяющую дать заключение о справедливости или ложности гипотезы $\sum_i\beta_i^2=0$.

Точный смысл понятия значимого отличия указанных отношений от единицы может быть определен лишь с учетом закона распределения случайных ошибок y_{ijk}. В Д. а. наиболее обстоятельно изучена ситуация, в к-рой все y_{ijk} распределены нормально. В этом случае $(\widehat{\alpha}_{ij})$, $(\widehat{\beta}_{ij})$, $(\widehat{\gamma}_{ij})$, $(\widehat{\delta}_{ij})$ — независимые случайные векторы, а s_0^2, s_1^2, s_2^2, s_3^2 — независимые случайные величины, причем отношения

$$IJ\,(K-1)\,\frac{s_0^2}{\sigma^2},\quad (I-1)\,\frac{s_1^2}{\sigma^2},\quad (J-1)\frac{s_2^2}{\sigma^2},$$

$$(I-1)\,(J-1)\,\frac{s_3^2}{\sigma^2}$$

подчиняются нецентральным распределениям хи-квадрат с f_m степенями свободы и параметрами нецентральности λ_m, $m=0,\ 1,\ 2,\ 3$, где

$$f_0=IJ\,(K-1),\ f_1=I-1,\ f_2=J-1,\ f_3=(I-1)\,(J-1);$$

$$\lambda_0=0,\quad \lambda_1=JK\sum_i\beta_i^2/\sigma^2,\quad \lambda_2=IK\sum_j\gamma_j^2/\sigma^2,$$

$$\lambda_3=K\sum_{ij}\delta_{ij}^2/\sigma^2.$$

Если параметр нецентральности равен нулю, то нецентральное распределение хи-квадрат совпадает с обычным распределением хи-квадрат. Поэтому в случае справедливости гипотезы $\lambda_3=0$ отношение $s_3^2/s_0^2=F_3$ подчиняется F-распределению (распределению дисперсионного отношения) с параметрами f_3 и f_0. Пусть x — такое число, для к-рого вероятность события $\{F_3>x\}$ равна заданному значению ε, называемому уровнем значимости (таблицы функции $x=x(\varepsilon;\ f_3,\ f_0)$ имеются в большинстве пособий по математич. статистике). Критерием для проверки гипотезы $\lambda_3=0$ служит правило, согласно к-рому эта гипотеза отвергается, если наблюдаемое значение F_3 превышает x; в противном случае гипотеза считается не противоречащей результатам наблюдений. Аналогичным образом конструируются критерии, основанные на статистиках F_2 и F_2^*.

Дальнейшие этапы Д. а. существенно зависят не только от реального содержания конкретной задачи, но также и от результатов статистич. проверки гипотез на втором этапе. Напр., в условиях агрономич. опытов справедливость гипотезы $\lambda_3=0$, как указано выше, позволяет более экономно спланировать аналогичные дальнейшие эксперименты (если помимо гипотезы $\lambda_3=0$ справедлива также и гипотеза $\lambda_2=0$, то это означает, что урожайность зависит лишь от сорта «почвы», и поэтому в дальнейших опытах можно воспользоваться схемой

однофакторного Д. а.); если же гипотеза $\lambda_3=0$ отвергается, то разумно проверить, нет ли в данной задаче неучтенного третьего фактора? Если сорта «почвы» и способы ее «обработки» варьировались не в одном и том же месте, а в различных географич. зонах, то таким фактором могут быть климатич. или географич. условия, и «обработка» наблюдений потребует применения трехфакторного Д. а.

В случае экспертных оценок статистически подтвержденная справедливость гипотезы $\lambda_3=0$ дает основание для упорядочивания сравниваемых объектов (напр., спортсменов) по значениям величин $\hat{\alpha}+\hat{\beta}_i$, $i=1, \ldots, I$. Если же гипотеза $\lambda_3=0$ отвергается (в задаче о спортивных соревнованиях это означает статистич. обнаружение «взаимодействия» нек-рых спортсменов и судей), то естественно попытаться перевычислить все результаты заново, предварительно исключив из рассмотрения x_{ijk} с такими парами индексов (i, j), для к-рых абсолютные значения статистич. оценок δ_{ij} превышают нек-рый заранее установленный допустимый уровень. Это означает, что из матрицы $\|x_{ij*}\|$ вычеркиваются нек-рые элементы, и значит, план Д. а. становится неполным.

Модели современного Д. а. охватывают широкий круг реальных экспериментальных схем (напр., схемы неполных планов, со случайно или неслучайно отобранными элементами x_{ij*}). Соответствующие этим схемам статистич. выводы во многих случаях находятся в стадии разработки. В частности, еще (к 1978) далеки от окончательного решения те задачи, в к-рых результаты наблюдений $x_{ijk}=c_{ij}+y_{ijk}$ не являются одинаково распределенными случайными величинами; еще более трудная задача возникает в случае зависимости величин x_{ijk}. Неизвестно решение проблемы выбора факторов (даже в линейном случае). Суть этой проблемы заключается в следующем: пусть $c=c(u, v)$ — непрерывная функция и пусть $u=u(z, w)$ и $v=v(z, w)$ — какие-либо линейные функции от переменных z и w. Фиксируя значения $z_1, \ldots, z_I$ и $w_1, \ldots, w_J$, можно при каждом заданном выборе линейных функций u и v определить c_{ij} формулой

$$c_{ij}=c\,[u\,(z_i, w_j),\quad v\,(z_i, w_j)]$$

и построить Д. а. этих величин по результатам соответствующих наблюдений x_{ijk}. Проблема заключается в отыскании таких линейных функций u и v, к-рым соответствует минимальное значение суммы квадратов $\sum_{ij}\delta_{ij}^2$, где

$$\delta_{ij}=c_{ij}-c_{i*}-c_{*j}+c_{**}$$

(предполагается, что функция $c(u, v)$ неизвестна). В терминах Д. а. эта проблема сводится к статистич. отысканию таких факторов $z=z(u, v)$ и $w=w(u, v)$, к-рым соответствует «наименьшее взаимодействие».

Лит.: [1] Fisher R. A., Statistical methods for research workers, Edinburgh, 1925; [2] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1963; [3] Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями, пер. с англ., М., 1956; [4] Снедекор Дж. У., Статистические методы в применении к исследованиям в сельском хозяйстве и биологии, пер. с англ., М., 1961.

Л. Н. Большев.

ДИСПЕРСИОННЫЙ МЕТОД в теории чисел — метод для решения нек-рых бинарных уравнений (бинарных *аддитивных проблем*) вида

$$\alpha+\beta=n, \qquad (1)$$

где α и β принадлежат к достаточно густым и хорошо распределенным в арифметич. прогрессиях последовательностям натуральных чисел.

Д. м., разработанный Ю. В. Линником в 1958—61 и поэтому называемый также дисперсионным методом Линника, соединяет в себе элементарные теоретико-вероятностные понятия (в частности, понятие дисперсии и неравенства типа Чебышева) с

аналитич. и алгебраич. идеями И. М. Виноградова и А. Вейля (A. Weil). Сущность Д. м. состоит в следующем (см. также *Аддитивная теория чисел*).

Уравнение (1) сводится к уравнениям вида

$$\nu D' + \beta = n; \qquad (2)$$

здесь ν, D' независимо пробегают нек-рые значения из прямоугольной области $\nu \in (\nu)$, $D' \in (D)$, где (ν) и (D) — некоторые интервалы; при этом числа ν — простые, а на D' могут быть наложены различные дополнительные условия. Пусть через F обозначено число решений этого уравнения.

Пусть теперь имеется уравнение

$$\nu D + \beta = n$$

при произвольном $D \in (D)$, и через $A(n, D)$ обозначено число его решений, найденных из каких-либо эвристических соображений. Тогда (гипотетически) число ожидаемых решений уравнения (2) записывается в виде

$$S = \sum_{D' \in (D)} A(n, D').$$

Оценка разности $F - S = V$ имеет вид

$$V = \sum_{D' \in (D)} \Big(\sum_{\nu D' + \beta = n} 1 - A(n, D') \Big). \qquad (3)$$

Применение неравенства Коши приводит к неравенству

$$V^2 \leqslant D_0 V', \qquad (4)$$

где D_0 — длина интервала (D), а

$$V' = \sum_{D' \in (D)} \Big(\sum_{\nu D' + \beta = n} 1 - A(n, D') \Big)^2 \qquad (5)$$

есть дисперсия числа решений уравнения (2).

Если распространить суммирование в (5) на все $D \in (D)$, то будут сняты все дополнительные условия, наложенные на D' в (2). В то же время величина дисперсии может только возрасти. Поэтому

$$V' \leqslant \sum_{D \in (D)} \Big(\sum_{\nu D + \beta = n} 1 - A(n, D) \Big)^2 = \Sigma_1 - 2\Sigma_2 + \Sigma_3.$$

Суммы Σ_1, Σ_2 и Σ_3 в нек-рых случаях удается вычислить асимптотически. Главную трудность представляет вычисление Σ_1 — основной суммы Д. м. Асимптотич. расчет суммы Σ_1 осуществляется при помощи *Виноградова метода* по подсчету для нек-рых функций количества их дробных частей, попадающих в заданный сегмент, а также с использованием новейших оценок тригонометрич. сумм, полученных средствами алгебраич. геометрии. Асимптотика для сумм Σ_2 и Σ_3 находится путем элементарного суммирования. Если, в результате, дисперсия оказывается не слишком большой, то из (3) и (4) получается асимптотика для числа решений уравнения (2).

Объединение числа решений всех уравнений вида (2) приводит к асимптотич. формуле для числа решений уравнения (1).

Рассмотренная схема Д. м. применима и для решения уравнений вида

$$\alpha - \beta = l,$$

где l — заданное целое число, отличное от нуля.

При помощи этого метода Ю. В. Линником и др. (см. [3]) был решен ряд классических бинарных аддитивных проблем, к-рые до создания Д. м. могли быть решены только на основе эвристических или гипотетических соображений. К числу таких проблем относятся: *аддитивная проблема делителей* ($\alpha = x_1, x_2 \dots x_k$, $k = \text{const}$, $\beta = xy$); *Титчмарша проблема* делителей ($\alpha = p$ — простое, $\beta = xy$); *Харди — Литтлвуда проблема* ($\alpha = p$ — простое, $\beta = x^2 + y^2$).

При помощи Д. м. решены также нек-рые аналоги и обобщения этих проблем, в частности найдена асимп-

тотика для числа решений общего уравнения Харди — Литлвуда:

$$p+\varphi(\xi,\ \eta)=n,$$

где p — простое, а $\varphi(\xi,\ \eta)$ — заданная примитивная положительно определенная квадратичная форма. Доказано существование бесконечного множества простых чисел вида

$$p=\varphi(\xi,\ \eta)+l,$$

где $l\neq 0$ — любое фиксированное целое число.

Область применения Д. м. пересекается с областью применения метода *большого решета* Ю. В. Линника.

Лит.: [1] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [2] Приложение 1 в кн.: Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [3] Бредихин Б. М., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 2, с. 89—130; [4] Бредихин Б. М., Линник Ю. В., в сб.: Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974, с. 5—22. *Б. М. Бредихин.*

ДИСПЕРСИЯ в теории вероятностей — мера $\mathsf{D}X$ отклонения случайной величины X от ее математич. ожидания $\mathsf{E}X$, определяемая равенством:

$$\mathsf{D}X=\mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)^2. \qquad (1)$$

Свойства Д.:

$$\mathsf{D}X=\mathsf{E}X^2-(\mathsf{E}X)^2;$$

если c — действительное число, то

$$\mathsf{D}(cX)=c^2\mathsf{D}X,$$

в частности $\mathsf{D}(-X)=\mathsf{D}(X)$.

Когда говорят о Д. случайной величины X, всегда предполагают, что существует математич. ожидание $\mathsf{E}X$; при этом Д. $\mathsf{D}X$ может существовать (т. е. быть конечной) или не существовать (т. е. быть бесконечной). В современной теории вероятностей математич. ожидание случайной величины определяется через интеграл Лебега по пространству элементарных событий. Однако важную роль играют формулы, выражающие математич. ожидание различных функций от случайной величины X через распределение этой случайной величины на множестве действительных чисел (см. *Математическое ожидание*). Для Д. $\mathsf{D}X$ эти формулы имеют вид:

а) $\mathsf{D}X=\sum_i (a_i-\mathsf{E}X)^2\ p_i$

для дискретной случайной величины X, принимающей не более чем счетное число различных значений a_i с вероятностями $p_i=\mathsf{P}\{X=a_i\}$;

б) $\mathsf{D}X=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mathsf{E}X)^2\ p\ (x)\ dx$

для случайной величины X, имеющей плотность распределения вероятностей $p(x)$;

в) $\mathsf{D}X=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mathsf{E}X)^2\ dF\ (x)$

в общем случае, где $F(x)$ — функция распределения случайной величины X и интеграл понимается в смысле Лебега — Стилтьеса или Римана — Стилтьеса.

Д. не является единственной мыслимой мерой отклонения случайной величины от ее математич. ожидания. Возможны другие меры отклонения, устроенные по тому же принципу, напр. $\mathsf{E}|X-\mathsf{E}X|$, $\mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)^4$ и т. д., а также меры отклонения, основанные на *квантилях*. Особая важность Д. объясняется главным образом той ролью, к-рую играет это понятие для *предельных теорем*. Грубо говоря, оказывается, что если знать математич. ожидание и Д. суммы большого числа случайных величин, то можно полностью определить закон распределения этой суммы: он оказывается нормальным (приблизительно) с соответствующими параметрами (см. *Нормальное распределение*).

Таким образом, важнейшие свойства Д. связаны с выражением для Д. $\mathsf{D}(X_1+\ldots+X_n)$ суммы случайных величин $X_1, \ldots, X_n$:

$$\mathsf{D}(X_1+\ldots+X_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{D}X_i+2\sum_{i<j}\operatorname{cov}(X_i, X_j),$$

где

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j)=\mathsf{E}\{(X_i-\mathsf{E}X_i)(X_j-\mathsf{E}X_j)\}$$

обозначает *ковариацию* случайных величин X_i и X_j. Если случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ попарно независимы, то $\operatorname{cov}(X_i, X_j)=0$. Поэтому для попарно независимых случайных величин

$$\mathsf{D}(X_1+\ldots+X_n)=\mathsf{D}X_1+\ldots+\mathsf{D}X_n. \qquad (2)$$

Обратное утверждение неверно: из (2) не следует независимость. Однако, как правило, применение формулы (2) базируется на независимости случайных величин. Строго говоря, для справедливости (2) достаточно лишь, чтобы $\operatorname{cov}(X_i, X_j)=0$, т. е. чтобы случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ были попарно некоррелированы.

Применения понятия Д. развиваются по следующим двум направлениям. Во-первых, применения в области предельных теорем теории вероятностей. Если последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ обладает тем свойством, что $\mathsf{D}X_n\to 0$ при $n\to\infty$, то для любого $\varepsilon>0$ при $n\to\infty$

$$\mathsf{P}\{|X_n-\mathsf{E}X_n|>\varepsilon\}\to 0$$

(см. *Чебышева неравенство*), т. е. практически при больших n случайная величина X_n совпадает с неслучайной величиной $\mathsf{E}X_n$. Развитие этих соображений приводит к доказательству закона больших чисел (см. *Больших чисел закон*), к доказательству состоятельности оценок (см. *Состоятельная оценка*) в математич. статистике, а также к иным применениям, в к-рых устанавливается сходимость по вероятности случайных величин. Другое применение в области предельных теорем связано с понятием нормировки. Нормировка случайной величины X производится путем вычитания математич. ожидания и деления на среднее квадратичное отклонение $\sqrt{\mathsf{D}X}$, иными словами, рассматривается величина $Y=(X-\mathsf{E}X)/\sqrt{\mathsf{D}X}$. Нормировка последовательности случайных величин обычно необходима для получения сходящейся последовательности законов распределения, в частности сходимости к нормальному закону с параметрами 0 и 1. Во-вторых, применение понятия Д. в математич. статистике при обработке выборок. Если смотреть на случайную величину как на реализацию случайного эксперимента, то произвольное изменение шкалы отсчета приведет к преобразованию случайной величины X в величину $Y=\sigma X+a$, где a — любое действительное число, σ — положительное число. Поэтому часто имеет смысл рассматривать не один теоретич. закон распределения $F(x)$ случайной величины X, а тип законов, т. е. семейство законов распределения вида $F\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, зависящих по крайней мере от двух параметров a и σ. Если $\mathsf{E}X=0$, $\mathsf{D}X=1$, то $\mathsf{E}Y=a$, $\mathsf{D}Y=\sigma^2$. Поэтому параметры теоретич. закона имеют следующий смысл $a=\mathsf{E}Y$ и $\sigma=\sqrt{\mathsf{D}Y}$. Отсюда вытекает способ определения этих параметров по выборке.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1—2, М., 1964—67; [3] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

В. Н. Тутубалин.

ДИСПЕРСНОЕ ПРОСТРАНСТВО, наследственно несвязное пространство,— топологическое пространство, не содержащее неодноточечных связных множеств.

А. А. Мальцев.

ДИССИПАТИВНАЯ СИСТЕМА, D-система, предельно ограниченная система,— система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t,\ x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

с непрерывной правой частью, решения $x(t;\ t_0,\ x_0)$ к-рой удовлетворяют свойству единственности и бесконечной продолжимости вправо и для к-рой существует такое число $\rho > 0$, что для любого решения $x(t;\ t_0,\ x_0)$ найдется такой момент $T(t_0,\ x_0) \geqslant t_0$, что

$$\| x(t;\ t_0,\ x_0) \| < \rho \quad \text{при всех} \quad t \geqslant T(t_0,\ x_0).$$

Иными словами, каждое решение рано или поздно погружается в фиксированный шар $\|x\| < \rho$. Важным частным случаем Д. с. являются так наз. системы с конвергенцией, у которых все решения $x(t;\ t_0,\ x_0)$ определены при $t_0 \leqslant t < \infty$ и, кроме того, существует единственное определенное и ограниченное на всей оси решение, и оно асимптотически устойчиво в целом. Такие системы изучены наиболее полно (см., напр., [1]).

Лит.: [1] Плисс В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, М.—Л., 1964; [2] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967.

К. С. Сибирский.

ДИССИПАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ, функция рассеяния,— функция, вводимая для учета влияния сил вязкого трения на движение механич. системы. Д. ф. характеризует степень убывания механич. энергии этой системы; вводится также вообще для учета перехода энергии упорядоченного движения в энергию неупорядоченного движения (в конечном счете — в тепловую).

Для изотропной среды Д. ф., отнесенная к единице объема, имеет вид:

$$\Phi = \frac{M}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\eta - \frac{2}{3} \mu \right) \sum_{m=2}^{3} \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_m} \right)^2,$$

где $\partial v_i / \partial x_k$ — компоненты тензора скоростей деформаций, μ и η — коэффициенты вязкости, характеризующие соответственно вязкость при сдвиге и вязкость при объемном расширении.

Уравнение изменения энтропии в вязкой среде имеет вид:

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \Phi,$$

где S — удельная энтропия, ρ — плотность жидкости, T — ее температура.

Д. ф. характеризует силы вязкого трения при движении сплошной среды. Уравнение движения вязкой среды имеет вид:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k},$$

где σ_{ik} — компоненты тензора напряжений,

$$\sigma'_{ik} = \mu \left\{ \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \delta_{ik} \right\} + \eta \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \delta_{ik}$$

— компоненты «вязкого» тензора напряжений, причем

$$\Phi = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Д. ф. используется: для учета влияния сопротивлений на малые колебания системы около ее положения равновесия; исследования затухания колебаний в упругой среде; учета тепловых потерь при затухании колебаний электрич. тока в системе контуров и др.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, 2 изд., М., 1954, ч. 1, § 16.

В. А. Дородницын.

ДИССИПАТИВНЫЙ ОПЕРАТОР — линейный оператор A с областью определения D_A, плотной в гильбертовом пространстве H, и такой, что

$$\operatorname{Im}(Ax,\ x)\geqslant 0 \quad \text{при} \quad x\in D_A.$$

Иногда это требование заменяется условием $\operatorname{Re}(Ax, x)\leqslant 0$ при $x\in D_A$, т. е. диссипативность A в этом смысле эквивалентна диссипативности оператора $(-iA)$.

Д. о. наз. максимальным, если он не имеет собственных диссипативных расширений. Д. о. всегда допускает замыкание, к-рое также будет Д. о., в частности максимальный Д. о.— замкнутый оператор. Всякий Д. о. допускает расширение до максимального. Для Д. о. все точки λ с $\operatorname{Im}\lambda<0$ есть точки регулярного типа, при этом

$$\|Ax-\lambda x\|>|\operatorname{Im}\lambda|\,\|x\|, \qquad x\in D_A.$$

Д. о. является максимальным тогда и только тогда, когда при всех λ с $\operatorname{Im}\lambda<0$ имеет место $(A-\lambda I)D_A=H$. Эквивалентное условие максимальности Д. о. A — его замкнутость и выполнение условия

$$\operatorname{Im}(A^*y,\ y)\leqslant 0, \qquad y\in D_{A^*}.$$

Если A_0 — максимальный *симметрический оператор*, то либо A_0, либо $(-A_0)$ является максимальным Д. о. Для произвольного симметрич. оператора A_0 можно рассматривать диссипативные и, в частности, максимальные диссипативные расширения; задача их описания эквивалентна задаче описания всех максимальных диссипативных расширений консервативного оператора $B_0=iA_0$: $\operatorname{Re}(B_0x,\ x)=0$, $x\in D_B$.

Д. о. тесно связаны со *сжатиями* и с так наз. аккретивными операторами, т. е. такими операторами A, для к-рых iA есть Д. о. В частности, аккретивный оператор A максимален тогда и только тогда, когда $(-A)$ является порождающим оператором (генератором) непрерывной однопараметрич. полугруппы сжатий $\{T_s\}_{s\geqslant 0}$ в H. С помощью преобразований Кэли

$$T=(A-I)(A+I)^{-1}, \qquad A=(I+T)(I-T)^{-1},$$

где A — максимальный аккретивный оператор, а T — сжатие, не имеющее $\lambda=1$ собственным значением, строится функциональное исчисление и, в частности, теория дробных степеней максимальных Д. о.

Для ограниченных линейных операторов A определение Д. о. эквивалентно требованию $A_J\geqslant 0$, где $A_J=\frac{1}{2i}(A^*-A)$ — мнимая компонента оператора A. Для вполне непрерывного Д. о. в сепарабельном гильбертовом пространстве H с ядерной мнимой компонентой A_J имеются многочисленные критерии (т. е. необходимые и достаточные условия) полноты системы их корневых векторов. Напр.,

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)}\operatorname{Im}\lambda_j(A)=\operatorname{Sp}A_J,$$

где $\lambda_j(A)$ — все собственные значения оператора A, $j=1, \ldots, \nu(A)\leqslant\infty$, а $\operatorname{Sp}A_J$ — след оператора A_J (критерий Лившица);

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{n_+(\rho,\ A_R)}{\rho}=0 \quad \text{или} \quad \lim_{\rho\to\infty}\frac{n_-(\rho,\ A_R)}{\rho}=0,$$

где $A_R=\frac{1}{2}(A+A^*)$ — действительная компонента оператора A, а $n_\pm$ — количество характеристич. чисел оператора A_R в отрезках $[0, \rho]$ и $[-\rho, 0]$ (критерий Крейна). Система $\{\psi_j\}$ собственных векторов, отвечающих различным собственным числам λ_j, $j=1, 2, \ldots$ Д. о., образует базис своей замкнутой

линейной оболочки, эквивалентный ортонормированному, если

$$\sum_{j,\ k=1,\ j\neq k}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\lambda_j \operatorname{Im}\lambda_k}{|\lambda_j-\overline{\lambda}_k|}<\infty.$$

Понятие Д. о. введено и для нелинейных и даже многозначных операторов A. Такой оператор в гильбертовом пространстве наз. Д. о., если для любых двух его значений выполнено неравенство

$$\operatorname{Re}(Ax_1-Ax_2,\ x_1-x_2)\leqslant 0.$$

Это понятие лежит в основе теории однопараметрических нелинейных сжимающих полугрупп и связанных с ними дифференциальных уравнений. Другое обобщение понятия Д. о. относится к операторам, действующим в банаховых пространствах с так называемым полувнутренним произведением. Наконец, имеется обобщение, связанное с операторами, действующими в *гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой*.

Лит.: [1] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970; [2] Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967; [3] Лившиц М. С., «Матем. сб.», 1954, т. 34, № 1, с. 145—99; [4] Филлипс Р. С., «Математика», 1962, т. 6, № 4, с. 11—70; [5] Crandall M., Pazy A., «J. Funct. Analys.», 1969, v. 3, p. 376—418; [6] Lumer G., Phillips R., «Pacific J. Math.», 1961, v. 11, p. 679—98. *И. С. Иохвидов.*

ДИСТАЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — такая динамическая система $\{T^t\}$ с метрич. фазовым пространством X, что для любых точек $x\neq y$ нижняя грань расстояний

$$\inf_t \rho(T^t x,\ T^t y)>0.$$

Если в нек-рой динамич. системе какая-либо пара точек $x\neq y$ обладает последним свойством, то говорят, что эта пара точек д и с т а л ь н а; таким образом, Д. д. с.— это динамич. система, для к-рой все пары точек $x\neq y$ дистальны.

Приведенное определение годится для «общих» динамич. систем, когда «время» t пробегает произвольную группу G. Содержательные результаты получаются, если G локально компактна (основными являются «классические» случаи каскада или потока, т. е. когда $G=\mathbb{Z}$ или $G=\mathbb{R}$, но рассуждения при этом почти не упрощаются), а X компактно. Особый интерес при этом представляет тот случай, когда X является *минимальным множеством* (общий случай в известном смысле сводится к этому, а именно, при указанных ограничениях на G и X замыкание каждой траектории оказывается минимальным множеством). Важнейший пример Д. д. с.— система, возникающая в замыкании почти периодич. траектории какой-нибудь динамич. системы. Другой пример — нильпотоки (см. [1]). Как и в этих примерах, строение Д. д. с. с минимальным X при указанных условиях допускает довольно детальное описание алгебраич. характера (см. [2]; изложение теории Д. д. с. и их обобщений и библиографию см. в [3]).

Лит.: [1] Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф., Потоки на однородных пространствах, пер. с англ., М., 1966; [2] Furstenberg H., «Amer. J. Math.», 1963, v. 85, № 3, p. 477—515; [3] Бронштейн И. У., Расширения минимальных групп преобразований, Кишинев, 1975. *Д. В. Аносов.*

ДИСТРИБУТИВНАЯ КВАЗИГРУППА — квазигруппа, в к-рой выполняются левый и правый дистрибутивные законы: $x\cdot yz=xy\cdot xz$, $yz\cdot x=yx\cdot zx$. Эти два закона в квазигруппах не зависят друг от друга (существуют леводистрибутивные квазигруппы, не являющиеся праводистрибутивными, [1]). Примером Д. к. служит множество Q рациональных чисел с операцией $(x+y)/2$. Всякая идемпотентная медиальная квазигруппа (т. е. квазигруппа Q, в к-рой

выполняются соотношения $x^2=x$ и $xy\cdot uv=xu\cdot yv$ для всех x, y, u, $v\in Q$) дистрибутивна. В общем случае всякая Д. к. $Q(\cdot)$ изотопна коммутативной *Муфанг лупе* [3]. Парастрофы (квазигруппы относительно обратных операций, см. *Квазигруппа*) Д. к. тоже дистрибутивны и изотопны той же коммутативной лупе Муфанг. Если четыре элемента a, b, c, d в Д. к. связаны медиальным законом: $ab\cdot cd=ac\cdot bd$, то они порождают медиальную подквазигруппу. В частности, всякие три элемента Д. к. порождают медиальную подквазигруппу. В Д. к. трансляции являются автоморфизмами, поэтому в определенном смысле Д. к. однородна: ни один элемент, ни одна подквазигруппа не выделяются. Группа, порожденная x всеми правыми трансляциями Д. к., разрешима [4].

Лит.: [1] Stein Sh., «Publ. Math. Debrecen», 1959, v. 6, № 1—2, p. 10—14; [2] Белоусов В. Д., «Матем. сб.», 1960, т. 50, № 3, с. 267—98; [3] его же, Основы теории квазигрупп и луп, М., 1967; [4] Fischer B., «Math. Z.», 1964, Bd 83, № 4, S. 267—303. *В. Д. Белоусов.*

ДИСТРИБУТИВНАЯ РЕШЕТКА, дистрибутивная структура,— решетка, в к-рой справедливо тождество

$$(a+b)c=ac+bc,$$

равносильное как

$$ab+c=(a+c)(b+c),$$

так и

$$(a+b)(a+c)(b+c)=ab+ac+bc.$$

Д. р. характеризуются тем, что все их выпуклые подрешетки служат смежными классами конгруэнций. Всякая Д. р. изоморфна решетке подмножеств (но не обязательно всех) нек-рого множества. Важнейшим частным случаем Д. р. являются *булевы алгебры*. В Д. р. для любого конечного множества I выполняются равенства

$$a\sum_{i\in I}b_i=\sum_{i\in I}ab_i$$

и

$$a+\prod_{i\in I}b_i=\prod_{i\in I}(a+b_i),$$

а также

$$\prod_{i\in I}\sum_{j\in J(i)}a_{ij}=\sum_{\varphi\in\Phi}\prod_{i\in I}a_{i\varphi(i)}$$

и

$$\sum_{i\in I}\prod_{j\in J(i)}a_{ij}=\prod_{\varphi\in\Phi}\sum_{i\in I}a_{i\varphi(i)},$$

где $J(i)$ — конечные множества, а Φ — множество всех однозначных функций φ, ставящих в соответствие элементу i из I элемент $\varphi(i)$ из $J(i)$. В полной Д. р. указанные равенства имеют смысл и в случае бесконечных множеств I и $J(i)$. Однако справедливы они не всегда. Полные Д. р. (см. *Полная решетка*), удовлетворяющие последним двум тождествам для любых множеств I и $J(i)$, наз. вполне дистрибутивными.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] Скорняков Л. А., Элементы теории структур, М., 1970; [3] Grätzer G., Lattice theory. First concepts and distributive lattices, S. F., 1971. *Л. А. Скорняков.*

ДИСТРИБУТИВНОСТЬ, дистрибутивности закон, распределительность, некоторой операции относительно другой — свойство пары бинарных *алгебраических операций*, выражающееся одним из тождеств:

Д1. $(\forall xyz)\ x*(y\oplus z)=(x*y)\oplus(x*z)$,

Д2. $(\forall xyz)\ (x\oplus y)*z=(x*z)\oplus(y*z)$,

где $\oplus$, $*$ — символы бинарных операций, а x, y, z — предметные переменные. Если в множестве A опре-

делены две конкретные бинарные операции $x+y$, $x\circ y$, т. е. заданы два отображения

$$+\colon\ A\times A\longrightarrow A,\qquad \circ\colon\ A\times A\longrightarrow A,$$

то, интерпретируя символы $\oplus$, $*$ как знаки операций $+$, $\circ$ в A, соответственно, можно говорить об истинности или ложности в A каждой из формул Д1, Д2. Если при этом обе формулы Д1, Д2 истинны в A, то операция $\circ$ наз. дистрибутивной относительно операции $+$ в A. *Д. М. Смирнов.*

ДИФРАКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — раздел математич. физики, в к-ром изучаются задачи, возникающие при математич. описании волновых явлений. Такое определение Д. м. т. включает и геометрич. оптику, к-рую, однако, по традиции считают самостоятельным разделом математич. физики. Основные уравнения с частными производными, описывающие волновые процессы,— это *Максвелла уравнения*, уравнения *динамических задач теории упругости*, *волновое уравнение* (к-рое в случае двух пространственных переменных описывает колебания мембраны, а в случае трех пространственных переменных — распространение звука), уравнения гидродинамики и ряд других.

Постановка задач Д. м. т. может быть рассмотрена на примере волнового уравнения; задачи для других уравнений, описывающих волновые процессы, ставятся аналогично.

Нестационарные задачи дифракции — это, по существу, *смешанные задачи*, т. е. задачи с начальными и краевыми условиями для волнового уравнения

$$\frac{1}{c^2(M)}U_{tt}-\Delta U=F(M,\ t) \tag{1}$$

в области $(0<t<+\infty)\times\Omega$, где Ω — область на плоскости или в трехмерном пространстве; при этом

$$U\big|_{t=0}=U_0(M);\qquad \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0}=U_1(M); \tag{2}$$

на границе S области Ω в простейших случаях

$$U\big|_S=\Phi(M,\ t)\ \text{ или }\ \frac{\partial U}{\partial n}\Big|_S=\Psi(M,\ t);\ M\in S,\ t>0. \tag{3}$$

Здесь F, U_0, U_1, Φ, ψ — заданные функции. Иногда коэффициент $c(M)$ на нек-рых поверхностях (в трехмерном случае) или линиях (в плоском случае) имеет скачки; тогда для U должны быть заданы еще и «условия сопряжения», связывающие значения функции U и ее производных по разные стороны поверхности, на к-рой $c(M)$ имеет скачок. Корректность постановки задач такого рода доказывается при помощи априорных оценок искомого решения в различных нормах с использованием соображений компактности. Тонкие вопросы описания сингулярности решений, поведения решений при $t\to\infty$, разработки практически применимых алгоритмов численного решения еще далеки от своего окончательного решения.

Стационарные задачи дифракции. Важную роль в Д. м. т. играют решения, гармонически зависящие от времени, т. е. решения уравнения (1), имеющие вид

$$U(M,\ t)=e^{-i\omega t}u(M),\quad \omega=\text{const}. \tag{4}$$

Параметр ω соответствует частоте колебаний. Функции $F(M,\ t)$, $\Phi(M,\ t)$ и $\psi(M,\ t)$ [см. формулы (1) и (3)] тоже должны гармонически зависеть от времени:

$$F(M,\ t)=f(M)\,e^{-i\omega t};$$
$$\Phi(M,\ t)=\varphi(M)\,e^{-i\omega t};$$
$$\Psi(M,\ t)=\psi(M)\,e^{-i\omega t}.$$

Уравнение (1) и краевые условия (3) дают

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2(M)} u = -f(M), \quad M \in \Omega, \tag{5}$$

$$u|_S = \varphi(M) \text{ или } \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \psi(M). \tag{6}$$

Для ограниченной области Ω большое значение имеет задача на отыскание нетривиальных решений уравнения (5) при $f=0$ в случае однородных краевых условий $\varphi(M)=0$ или $\psi(M)=0$. Это — так наз. задача нахождения собственных функций. Однако основной интерес в Д. м. т. представляет решение уравнений (5) в случае краевых условий (6) при неограниченной области Ω. При этом условий (5) и (6) уже недостаточно для определения функции u: нужно задать еще «условия на бесконечности».

Наиболее часто задача дифракции ставится физически следующим образом: предполагается, что решение u уравнения (5) задается в виде суммы u_i+u_s двух функций, где u_i — известная функция («падающая волна»), а u_s — «отраженная» или возникшая в результате дифракции волна. Волна u_s не должна содержать в себе волн, идущих из бесконечности. Это физич. условие и приводит к вышеуказанным условиям на бесконечности. Соответствующие условия для случая, когда Ω есть внешность ограниченной области, $\omega>0$, $c(M)$ вне сферы достаточно большого радиуса есть константа, а $f(M)$ — финитная функция, наз. условиями излучения (см. *Излучения условия*). Задача (5), (6), при выполнении условий излучения, поставлена корректно, что доказывается путем сведения задачи к интегральным уравнениям или с помощью априорных оценок. Имеются также способы отбора единственного решения задачи (5), (6) с помощью принципа предельной амплитуды и принципа предельного поглощения. В случае, когда Ω — внешность ограниченной области,— оба эти принципа выделяют те же решения, что и условия излучения. Сколько-нибудь общей теории задач для уравнения Гельмгольца в случае неограниченных областей не создано. Во всех практически важных случаях решения, представляющие физич. интерес, могут быть выделены при помощи принципа предельного поглощения.

В случае $c(M)=\text{const}$ представление решений задач Дирихле ($u|_S=\varphi(M)$) и Неймана $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=\psi\right)$ может быть получено в виде потенциалов соответственно двойного и простого слоев:

$$\iint_S \mu(N) \frac{\partial}{\partial n_N} \frac{e^{ikr}}{r} dS,$$

$$\iint_S \mu(N) \frac{e^{ikr}}{r} dS.$$

Для искомой плотности $\mu(N)$ получается интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода. При проведении соответствующего доказательства разрешимости задач Дирихле и Неймана приходится преодолевать трудности, вполне аналогичные классич. трудности, возникающей при исследовании методами теории потенциала внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Методы решения задач Д. м. т. Большое значение в задачах Д. м. т. имеет соотношение между длиной волны и характерными размерами тела, в окрестности к-рого изучается волновой процесс. Если длина волны велика (соответственно мала) по сравнению с характерными размерами тела, то говорят о дифракции длинных (соответственно коротких) волн. В случае дифракции длинных волн величина ω в уравнении (5) может рассматри-

ваться как малый параметр. Это позволяет применять в длинноволновом случае различные варианты теории возмущений. В качестве первого приближения можно взять решение уравнения Лапласа. Кроме того, в длинноволновом случае для решения задач Д. м. т. применимы обычные численные методы математич. физики, напр., вариационный метод, численное решение интегральных уравнений теории потенциала. Для областей частного вида задачи Д. м. т. могут быть решены в явном виде, т. е. их решение представимо в виде рядов или интегралов, содержащих специальные функции. Наиболее важными приемами, позволяющими сделать это, являются метод разделения переменных, или *Фурье метод*, и *Винера — Хопфа метод*.

«Доведение до числа» явных решений задач Д. м. т. удавалось ранее лишь в длинноволновом случае (чем меньше длина волны, тем хуже сходятся ряды и интегралы). С развитием вычислительной техники стали поддаваться расчету многие задачи и в области, когда длина волны сравнима с характерными размерами неоднородности. Наиболее эффективными здесь являются методы сведений задач дифракции к интегральным и интегродифференциальным уравнениям и различные варианты проекционных методов.

Асимптотические методы Д. м. т. При малой длине волны численное решение дифракционной задачи весьма затруднительно, даже с использованием ЭВМ. Здесь на первый план выступают асимптотич. методы, к-рые представляют интерес еще и тем, что позволяют делать нек-рые общие заключения о рассматриваемой задаче. Под асимптотическими методами Д. м. т. понимаются нек-рые приемы нахождения приближенного выражения для искомых функций. Приемы эти базируются на физич. соображениях и формальных преобразованиях, чаще всего строго не обоснованных. Одним из первых приемов, позволяющих находить в виде нек-рой квадратуры приближенные решения коротковолновых задач дифракции, был *Кирхгофа метод*, широко применяющийся и теперь при решении прикладных задач. Не менее важное значение имеет *лучевой метод*, породивший целую серию приемов, позволяющих находить асимптотику многих дифракционных задач. Построения лучевого метода, как правило, бывает нетрудно провести, если соответствующее поле лучей регулярно. Если же оно имеет какие-либо особенности, то возникает ситуация, характерная для *пограничного слоя теории*: везде, кроме нек-рой весьма малой окрестности тех точек, где поле лучей теряет регулярность, асимптотика решений известна. Нужно найти ее только в этой малой области, т. е. в пограничном слое. Соответствующий аналог методики пограничного слоя получил название *параболического уравнения метода*. Он часто используется как для численного решения задач Д. м. т., так и для вывода асимптотич. формул.

Важные асимптотич. формулы для решения задач Д. м. т. могут быть получены в тех случаях, когда известно явное выражение для решения. Это явное решение по хорошо разработанной уже методике (так наз. метод Ватсона) преобразуют в контурный интеграл, асимптотика к-рого ищется либо применением *перевала метода*, либо теоремы о вычетах. Представляет интерес тот факт, что полученные на этом пути асимптотич. выражения иногда могут быть использованы как образец («эталон»), при помощи к-рого можно «угадывать» вид асимптотич. разложения в дифракционных задачах, явное решение к-рых неизвестно. Именно такие построения характерны для «метода эталонных задач», к-рый является дальнейшим развитием метода параболич. уравнения.

Лит.: [1] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [2] Вайнштейн Л. А., Теория дифракции и метод

факторизации, М., 1966; [3] Никольский В. В., Вариационные методы для решения внутренних задач электродинамики, М., 1967; [4] Купрадзе В. Д., Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, М.—Л., 1950; [5] Купрадзе В. Д. и др., Трехмерные задачи математической теории упругости, 2 изд., М., 1976; [6] Фридлендер Ф., Звуковые импульсы, пер. с англ., М., 1962; [7] Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К., Теория дифракции, пер. с нем., М., 1964; [8] Свешников А. Г., в кн.: International congress of mathematicians, Vancouver, 1974, p. 29—30.

В. М. Бабич.

ДИФФЕОМОРФИЗМ, дифференцируемый гомеоморфизм, гладкий гомеоморфизм,— взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое отображение $f\colon M\to N$ дифференцируемого многообразия M (напр., области в евклидовом пространстве) в дифференцируемое многообразие N, обратное к к-рому тоже является непрерывно дифференцируемым. Если $f(M)=N$, то говорят, что M и N диффеоморфны. С точки зрения дифференциальной топологии, диффеоморфные многообразия имеют одинаковые свойства, и она интересуется классификацией многообразий с точностью до Д. (последняя не совпадает с более грубой классификацией с точностью до *гомеоморфизма*, исключая случаи малых размерностей).

Хотя сам термин «Д.» был введен сравнительно недавно, фактически многочисленные преобразования и замены переменных, давно используемые в математике, являются Д., а многие семейства преобразований — группами Д. В частности, это относится к Д., сохраняющим ту или иную дополнительную структуру на многообразии (напр., контактную, симплектическую, конформную или комплексную). Исторически такие Д. в ряде случаев получили особые названия (в указанных примерах — контактные преобразования и канонические отображения, конформные отображения и биголоморфные отображения), вместо к-рых в последнее время (70-е гг. 20 в.) нередко употребляют термин «Д.» с добавлением прилагательного, характеризующего сохраняемую структуру (напр., «симплектический Д.» вместо «канонического преобразования»).

Изучались и топологические (точнее, гомотопические) свойства группы $\mathrm{Diff}M$ всех Д. многообразия M на себя, в к-рой надлежащим образом введена топология. Они могут быть неожиданно сложными (см., напр., [1], где имеются также обзор и библиография). Этот вопрос связан с рядом важных задач гомотопич. топологии (напр., с гомотопич. группами сфер). В принципе знание свойств $\mathrm{Diff}M$ помогло бы в решении этих задач, однако в настоящее время (1978) ситуация является скорее обратной: продвижение в изучении $\mathrm{Diff}M$ связано как раз с использованием того, что уже известно об этих задачах, или, в лучшем случае, осуществляется параллельно с их решением и при помощи тех же методов. Относительно алгебраич. свойств группы Д. класса C^r (случай $r=\infty$ не исключается) замкнутого n-мерного многообразия доказано, что при $r\neq n+1$ ее связная компонента единицы является простой группой, т. е. не имеет нетривиальных *нормальных делителей* (см. [2], [3]; при $r=n+1$ ситуация не выяснена). Для незамкнутого n-мерного многообразия M доказана простота группы всех тех Д. f класса C^r ($r\neq n+1$), к-рые можно соединить с тождественным отображением 1_M посредством непрерывного семейства Д. f_t ($0\leqslant t\leqslant 1$, $f_0=1_M$; $f_1=f$), не сдвигающего точек вне нек-рого компакта (зависящего от этого семейства).

Лит.: [1] Antoncelli P. L., Burghelea D., Kahn P. J., «Topology», 1972, v. 11, № 1, p. 1—49; [2] Thurston W., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1974, v. 80, № 2, p. 304—307; [3] Mather J. N., «Comment. math. helf.», 1974, v. 49, № 4, p. 512—28; 1975, v. 50, № 1, p. 33—40.

Д. В. Аносов.

Y-ДИФФЕОМОРФИЗМ — диффеоморфизм, порождающий *Y-систему*.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ — главная линейная часть приращения функции.

1) Действительная функция $y=f(x)$ действительного переменного наз. дифференцируемой в точке x, если она определена в нек-рой окрестности этой точки и если существует такое число A, что приращение

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

(при условии, что точка $x+\Delta x$ лежит в упомянутой окрестности) может быть представлено в виде

$$\Delta y=A\,\Delta x+\alpha,$$

где $\alpha/\Delta x\to 0$ при $\Delta x\to 0$. При этом $A\,\Delta x$ обозначается через dy и наз. дифференциалом функции $f(x)$ в точке x. Д. dy при фиксированном x пропорционален Δx, т. е. является линейной функцией от Δx. Дополнительный член α при $\Delta x\to 0$ является, в силу определения, бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с Δx (и по сравнению с dy, если $A\neq 0$). Именно в этом смысле Д. и наз. главной частью приращения функции.

Для функции, дифференцируемой в точке x, $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$, т. е. функция, дифференцируемая в некоторой точке, непрерывна в ней. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x в том и только в том случае, если она имеет в этой точке конечную производную

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A;$$

при этом

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

Существуют непрерывные, но не дифференцируемые функции.

Кроме обозначения dy используется обозначение $df(x)$; тогда предыдущее равенство принимает вид

$$df(x)=f'(x)\Delta x.$$

Приращение аргумента Δx обозначается также через dx и наз. дифференциалом независимого переменного. Поэтому можно писать

$$dy=f'(x)dx.$$

Отсюда $f'(x)=dy/dx$, т. е. производная равна отношению Д. dy и dx. Если $A=0$, то $\Delta y/dy\to 1$ при $\Delta x\to 0$, т. е. Δy и dy при $\Delta x\to 0$ являются в случае $A\neq 0$ эквивалентными бесконечно малыми; этим, равно как и простой структурой Д. (линейностью по Δx), часто пользуются в приближенных вычислениях, полагая $\Delta y\approx dy$ при малых Δx. Если хотят, напр., вычислить $f(x+\Delta x)$, зная $f(x)$ (Δx мало), то полагают

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+dy.$$

Конечно, такое рассуждение имеет ценность, если можно оценить соответствующую погрешность.



Рис. 1.

Геометрическое истолкование Д. Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0,\ y_0)$ имеет вид $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. Если положить $x=x_0+\Delta x$, то $y-y_0=f'(x_0)\Delta x$. Правая часть есть значение Д. функции $f(x)$ в точке x_0, отвечающее рассматриваемому значению Δx. Таким образом, Д. совпадает с соответствующим приращением ординаты касательной к кривой $y=f(x)$ (см. отрезок NT на рис. 1). При этом $\alpha=\Delta y-dy$, т. е. значение $|\alpha|$ совпадает с длиной отрезка TS.

2) Определение дифференцируемости и Д. естественным образом обобщается на действительные функции от n действительных переменных. Напр., в случае $n=2$ действительная функция $z=f(x, y)$ наз. дифференцируемой в точке (x, y) по совокупности переменных x и y, если она определена в нек-рой окрестности этой точки и ее полное приращение

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$$

может быть представлено в виде

$$\Delta z=A\,\Delta x+B\,\Delta y+\alpha,$$

где A и B — некоторые числа, $\alpha/\rho\to 0$ при $\rho\to 0$, $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$; предполагается, что точка $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ принадлежит упомянутой окрестности (см. рис. 2). При этом вводится обозначение

$$dz=df(x,\ y)=A\,\Delta x+B\,\Delta y$$

и dz наз. полным дифференциалом, или просто дифференциалом, функции $f(x,\ y)$ в точке $(x,\ y)$ (иногда с добавлением: «по совокупности переменных x и y»). Для фиксированной точки (x,y) Д. dz есть линейная функция от Δx и Δy; разность $\alpha=\Delta z-dz$ есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с ρ. В этом смысле dz есть главная линейная часть приращения Δz.

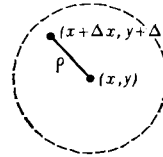


Рис. 2.

Если $f(x,\ y)$ дифференцируема в точке $(x,\ y)$, то она непрерывна в этой точке и имеет в ней конечные частные *производные*

$$f'_x(x,\ y)=A,\qquad f'_y(x,\ y)=B.$$

Таким образом

$$dz=df(x,\ y)=f'_x(x,\ y)\,\Delta x+f'_y(x,\ y)\,\Delta y.$$

Приращения Δx и Δy независимых переменных, как и в случае одного переменного, обозначаются dx и dy. По этой причине можно написать

$$dz=df(x,\ y)=f'_x(x,\ y)\,dx+f'_y(x,\ y)\,dy.$$

Существование конечных частных производных, вообще говоря, не влечет дифференцируемости функции (даже если предполагать заранее ее непрерывность)— здесь нарушается аналогия с функциями одного переменного.

Если функция $f(x,\ y)$ имеет в точке $(x,\ y)$ частную производную по x, то произведение $f'_x(x,\ y)dx$ наз. ее частным дифференциалом по x; аналогично, $f'_y(x,\ y)dy$ есть частный Д. по y. Если функция дифференцируема, то ее полный Д. равен сумме частных Д. Геометрически полный Д. $df(x_0,\ y_0)$ есть приращение аппликаты касательной плоскости к поверхности $z=f(x,\ y)$ в точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, где $z_0=f(x_0,\ y_0)$ (см. рис. 3).

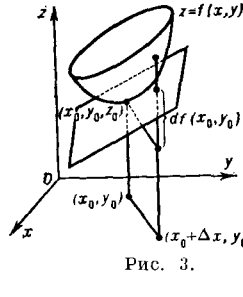


Рис. 3.

Достаточный признак дифференцируемости функции: если в некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ функция $f(x,\ y)$ имеет частную производную f'_x, непрерывную в точке $(x_0,\ y_0)$, и, кроме того, имеет в точке $(x_0,\ y_0)$ частную производную f'_y, то $f(x,\ y)$ дифференцируема в этой точке.

Если функция $f(x,\ y)$ дифференцируема в каждой точке открытой области D, то в любой точке этой области

$$dz=A\,(x,\ y)dx+B\,(x,\ y)dy,$$

причем $A(x, y)=f'_x(x, y)$, $B(x, y)=f'_y(x, y)$. Если при этом существуют непрерывные в D частные производные A'_y и B'_x, то всюду

$$A'_y=B'_x.$$

Это показывает, в частности, что не всякое выражение

$$A(x, y)dx+B(x, y)dy$$

с непрерывными A и B (в области D) является в этой области полным Д. нек-рой функции двух переменных. В этом состоит еще одно нарушение аналогии с функциями одного переменного, где любое выражение $A(x)dx$ с непрерывной в нек-ром промежутке функцией $A(x)$ служит Д. для нек-рой функции.

Выражение $Adx+Bdy$ является полным Д. нек-рой функции $z=f(x, y)$, в односвязной открытой области D, если $A(x, y)$ и $B(x, y)$ непрерывны в этой области и удовлетворяют условию $A'_y=B'_x$ и при этом а) A'_y и B'_x непрерывны или б) $A(x, y)$ и $B(x, y)$ дифференцируемы по совокупности переменных x и y всюду в D (см. [7], [8]).

О Д. действительных функций одного и нескольких действительных переменных и о Д. высших порядков см. также *Дифференциальное исчисление*.

3) Пусть функция $f(x)$ определена на нек-ром множестве E действительных чисел, x — предельная точка этого множества, $x\in E$, $x+\Delta x\in E$, $\Delta y=A\Delta x+\alpha$, где $\alpha/\Delta x\to 0$ при $\Delta x\to 0$; тогда функция $f(x)$ наз. д и ф ф е р е н ц и р у е м о й п о м н о ж е с т в у E в точке x, а $dy=A\Delta x$ наз. ее д и ф ф е р е н ц и а л о м п о м н о ж е с т в у E в точке x. Это есть обобщение Д. действительной функции одного действительного переменного. Разновидностями этого обобщения являются Д. в концах промежутка, на котором определена функция, и аппроксимативный Д. (см. *Аппроксимативная дифференцируемость*).

Подобным же образом вводится Д. п о м н о ж е с т в у для действительных функций многих действительных переменных.

4) Все эти определения дифференцируемости и Д. почти без изменений распространяются соответственно на комплексные функции одного или нескольких действительных переменных, на действительные и комплексные вектор-функции одного или нескольких действительных переменных, на комплексные функции и вектор-функции одного или нескольких комплексных переменных. В функциональном анализе они распространяются на функции точки абстрактного пространства. Можно говорить о дифференцируемости и Д. функции множества по отношению к нек-рой мере.

Лит.: [1] Т о л с т о в Г. П., Элементы математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1974; [2] Ф и х т е н г о л ь ц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., т. 1, М., 1969; [3] К у д р я в ц е в Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973; [4] Н и к о л ь с к и й С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975; [5] Р у д и н У., Основы математического анализа, пер. с англ., М., 1966; [6] К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976; [7] Т о л с т о в Г. П., О криволинейном и повторном интеграле, М.—Л., 1950 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 35); [8] е г о ж е, «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 5, с. 167—70.

Г. П. Толстов.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ — *дифференциальная форма* на римановой поверхности S, инвариантная относительно конформного преобразования локального униформизирующего параметра $z=x+iy$. Чаще всего встречаются дифференциалы (д.) п е р в о г о п о р я д к а — это дифференциальные формы размерности 1, линейные относительно дифференциалов каждой из переменных (x, y), вида

$$\omega=pdx+qdy\equiv p(x, y)dx+q(x, y)dy,$$

$$\pi=rdx+sdy,$$

инвариантные относительно замены параметра, с достаточно гладкими коэффициентами p, q, ...; д. н у л е в о г о п о р я д к а — это достаточно гладкие комплексные функции $f=f(x, y)$, $g=g(x, y)$, ..., инвариантные относительно замены параметра, т. е. функции точки $P\in S$; д. в т о р о г о п о р я д к а имеют вид

$$\Omega=A\,dx\,dy\equiv A(x, y)\,dx\,dy,\quad \Pi=B\,dx\,dy.$$

Все д. на римановых поверхностях порядков $k>2$ тождественно равны 0.

Сложение д. на римановых поверхностях одного и того же порядка определяется естественным путем:

$$f+g,\quad \omega+\pi=(p+r)\,dx+(q+s)\,dy,\quad \Omega+\Pi=(A+B)\,dx\,dy;$$

оно коммутативно и ассоциативно. В н е ш н е е у м н о ж е н и е д. на римановых поверхностях дистрибутивно относительно сложения, обозначается знаком $\wedge$ и определяется правилами:

$$f\wedge g=fg;\quad f\wedge\omega=(fp)\,dx+(fg)\,dy,$$

$$dx\wedge dx=dy\wedge dy=0,\quad dy\wedge dx=-dx\wedge dy=-dx\,dy;$$

отсюда

$$\omega\wedge\pi=(ps-qr)\,dx\,dy,\quad \pi\wedge\omega=-\omega\wedge\pi;\quad f\wedge\Omega=(fA)\,dx\,dy.$$

Вообще, при внешнем умножении д. порядка k на д. порядка l при $k+l\leqslant 2$ получается д. порядка $k+l$, а при $k+l>2$ — тождественный нуль. Линейный оператор дифференцирования $d=\frac{\partial}{\partial x}\,dx+\frac{\partial}{\partial y}\,dy$ переводит д. порядка k в д. порядка $k+1$:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy,$$

$$d\omega=(dp)\,dx+(dq)\,dy=\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dx\,dy,\quad d\Omega=0.$$

Кроме того,

$$d(fg)=f\,dg+g\,df,$$

$$d(f\omega)=(df)\,\omega+f(d\omega)=-\omega(df)+f(d\omega)$$

и всегда $dd=0$. Для д. на римановых поверхностях важен также линейный о п е р а т о р з в е з д н о г о с о п р я ж е н и я

$$*\omega=-q\,dx+p\,dy.$$

При этом

$$*(f\wedge\omega)=f\wedge(*\omega),\quad \omega\wedge(*\pi)=\pi\wedge(*\omega)=(pr+qs)\,dx\,dy,$$

$$\omega\wedge(*\omega)=(p^2+q^2)\,dx\,dy,\quad *d=-\frac{\partial}{\partial y}\,dx+\frac{\partial}{\partial x}\,dy,$$

$$*(df)=(*d)\,f,\quad (*d)\,\omega=*d\omega=-d*\omega.$$

Оператор звездного сопряжения не совпадает с оператором комплексного сопряжения. Последний обозначается чертой: если $f=g+ih$, то $\overline{f}=g-ih$, $\overline{\omega}=\overline{p}dx+\overline{q}dy$, $\overline{\Omega}=\overline{A}\,dx\,dy$; далее, $d\overline{\omega}=\overline{d\omega}$, $*\overline{\omega}=\overline{*\omega}$. Оператор Лапласа $\Delta=d*d$ определен на д. нулевого порядка:

$$\Delta f=d*df=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dx\,dy.$$

Дифференциал ω наз. т о ч н ы м, если существует функция f на S такая, что всюду $\omega=df$, если $\omega=*df$, то ω наз. к о т о ч н ы м; д. ω наз. з а м к н у т ы м, если $d\omega=0$ на S, если $d*\omega=0$, то ω — к о з а м к н у т ы й д. Из точности вытекает замкнутость, но обратное неверно. Пусть c_1, c_2, ... — циклы на S. Интегралы $\int_{c_1}\omega$, $\int_{c_2}\omega$, ..., называемые п е р и о д а м и д и ф ф е р е н ц и а л а ω, определяются обычным образом при помощи локальных униформизирующих. Если c_1 и c_2 гомологичны на S и ω — замкнутый

д., то $\int_{c_1}\omega=\int_{c_2}\omega$, т. е. периоды замкнутого д. зависят только от класса гомологий. Все периоды точного д. равны нулю. Обратно, замкнутый д. является точным тогда и только тогда, когда все его периоды равны 0.

Функция $f\in C^2$ наз. гармонической на S, если $\Delta f=0$. Дифференциал $\omega\in C^1$ наз. гармоническим дифференциалом на S, если ω замкнут и козамкнут, $d\omega=d*\omega=0$. Гармонич. д. ω является полным дифференциалом гармонич. функции в окрестности каждой точки $P_0\in S$. Если действительные функции u, $v\in C^1$ на S связаны соотношением $dv=*du$, то они суть сопряженные гармонич. функции, удовлетворяющие условиям Коши — Римана. Следовательно, функция $f=u+iv\in C^1$ является регулярной аналитической, или голоморфной, на S, если $*df=-idf$. Дифференциал $\omega\in C^1$ наз. регулярным аналитическим, или голоморфным, дифференциалом на S, если $d\omega=0$ и $*\omega=-i\omega$. Голоморфный д. ω является полным дифференциалом голоморфной функции в окрестности каждой точки $P_0\in S$. Голоморфный д. ω представим локально в виде $\omega=fdz$, где $dz=dx+idy$, а f — голоморфная функция от z.

Классы эквивалентности измеримых комплексных дифференциалов на римановой поверхности, для к-рых интеграл $\iint_S\omega\wedge(*\bar{\omega})$ конечен, образуют гильбертово пространство $L^2(S)$ с обычным сложением, умножением на комплексные скаляры и скалярным произведением $(\omega,\pi)=\iint_S\omega\wedge(*\bar{\pi})$. Каждый д. ω класса $L^2(S)\cap C^3(S)$ единственным образом представим в виде суммы $\omega=\omega_h+df+*dg$, где f, $g\in C^2(S)$ и ω_h — гармонический д. на римановой поверхности.

Рассмотренные выше гармонические и голоморфные функции или д. класса C^1 на S наз. регулярными на S. Пусть в проколотой окрестности U точки $P_0\in S$ определен д. θ, к-рый, напр., гармоничен в U. Тогда говорят, что гармонич. д. ω имеет особенность θ в P_0, если разность $\omega-\theta$ является регулярным гармонич. д.

Аналогичные определения применяются для гармонич. и аналитич. функций, аналитич. д. и т. п. В частности, в случае аналитического д. $\omega=fdz$ обычно предполагается, что функция f либо регулярная аналитическая в окрестности каждой точки $P_0\in S$, либо имеет на S лишь изолированные особые точки однозначного характера. Аналитич. д. ω, имеющий на S только особенности в виде полюсов

$$\theta=(a_{-n}z^{-n}+a_{-n+1}z^{-n+1}+\ldots+a_{-1}z^{-1})\,dz,$$

наз. мероморфным дифференциалом; при этом $a_{-n}\neq 0$, n — порядок полюса, при $n=1$ полюс наз. простым, a_{-1} — вычет д. ω в полюсе P_0. Мероморфные д. на компактной римановой поверхности S наз. *абелевыми дифференциалами*. Гармонич. функции на S или на нек-рой области $D\subset S$, имеющие заданные особенности, иногда наз. абелевыми потенциалами.

Интегрирование абелевых д. приводит к *абелевым интегралам*, исчерпывающим в сущности все интегралы от алгебраич. функций. При изучении аналитич. д. на произвольной, вообще говоря, некомпактной римановой поверхности S естественное требование сохранения основных черт классич. теории д. на компактных римановых поверхностях приводит к необходимости наложить на рассматриваемые регулярные д. дополнительные конформно инвариантные ограничения, наиболее употребительным из к-рых является условие интегрируемости, напр., аналитич. д. $\omega=fdz$

с квадратом, т. е. условие конечности интеграла Дирихле:

$$\iint_S |f|^2\,dx\,dy < +\infty.$$

В теории д. на римановых поверхностях основное значение имеет проблема существования гармонич. и аналитич. д. с заданными особенностями на произвольной римановой поверхности S. С этим вопросом непосредственно связана проблема глобальной униформизации римановых поверхностей, т. к. построение глобальной униформизирующей требует именно умения строить д. с заданными особенностями.

Ниже приведены основные результаты по проблеме существования.

Если на S существует цикл c, не гомологичный нулю, то на S существует всюду регулярный гармонич. д. ω с периодом $\int_c \omega \neq 0$ и всюду регулярный аналитич. д. $\omega + i*\omega$. Эти д. не являются точными, и поэтому при их интегрировании нельзя получить однозначных на S гармонич. или аналитич. функций. На компактной римановой поверхности S всякий гармонический и точный д. тождественно равен нулю. Напротив, на некомпактных римановых поверхностях существуют отличные от тождественного нуля всюду регулярные точные гармонические и голоморфные д.

Пусть P_0 — любая фиксированная точка произвольной римановой поверхности S, n — любое натуральное число. Тогда существуют: точный гармонич. д. с особенностью $d(1/z^n)$ в P_0; точный действительный гармонич. д. с особенностью $\operatorname{Re} d(1/z^n)$ или $\operatorname{Im} d(1/z^n)$ в P_0; гармонич. функция с особенностью $1/z^n$ в P_0; аналитич. д. с особенностью $d(1/z^n)$ в P_0, у к-рого действительная часть есть точный д.

Пусть P_0 и P_1 — любые различные точки S. Тогда существуют: гармонич. или аналитич. д. на S с особенностями $-dz/z$ в P_0 и dz/z в P_1; действительная гармонич. функция на S с особенностями $-\ln|z|$ в P_0 и $\ln|z|$ в P_1.

Пусть $P_0, P_1, \ldots, P_n$ — любые попарно различные точки на S и $c_0, c_1, \ldots, c_n$ — любые отличные от нуля комплексные числа такие, что $c_0+c_1+\ldots+c_n=0$. Существует гармонический или аналитический д. на S, всюду регулярный, кроме $P_0, P_1, \ldots, P_n$, а в точках P_j имеющий простые полюсы соответственно с вычетами c_j, $j=0, 1, \ldots, n$.

Для жордановых областей $D \subset S$, т. е. таких областей, граница к-рых ∂D состоит из n непересекающихся жордановых кривых $c_1, c_2, \ldots, c_n$, возможно также решение *Дирихле задачи*.

Наиболее законченной является теория д. для компактных римановых поверхностей S. Пусть род S равен g. Векторное пространство $\mathfrak{H}$ регулярных гармонич. д. ω над полем комплексных чисел имеет размерность $2g$. Если $a_1b_1a_2b_2\ldots a_gb_g$ — циклы канонич. базиса гомологий S, то в качестве канонич. базиса д. $\mathfrak{H}$ можно выбрать д. ω_i, $i=1, 2, \ldots, g$, с периодом 1 вдоль a_i, а вдоль a_j, $j\neq i$, и вдоль всех b_i — с периодом 0; далее, ω_{g+i}, $i=1, 2, \ldots, g$, имеют период 1 вдоль b_i, а вдоль b_j, $j\neq i$, и вдоль всех a_i — период 0. Любой гармонич. д. ω представляется в виде линейной комбинации

$$\omega = \sum_{i=1}^{g} A_i\omega_i + \sum_{i=1}^{g} B_i\omega_{g+i},$$

где A_i — так наз. A-периоды ω вдоль циклов a_i, а B_i суть B-периоды ω вдоль циклов b_i.

Голоморфные д. на компактной римановой поверхности наз. абелевыми дифференциалами первого рода. Размерность векторного пространства голоморфных д. равна g.

Все введенные выше д. на римановой поверхности можно выразить через переменные z и $\bar{z}$, напр.:

$$f=f(z,\ \bar{z}),\quad \omega=pdz+qd\bar{z}=p(z,\ \bar{z})\,dz+q(z,\ \bar{z})\,d\bar{z},$$
$$\Omega=A\,dz\wedge d\bar{z}=A(z,\ \bar{z})\,dz\wedge d\bar{z}$$

и т. д. В отличие от комплексных многообразий высших размерностей, на римановых поверхностях нетривиальны только внешние дифференциальные формы типов (0, 0), (1, 0), (0, 1) и (1, 1), имеющие соответственно вид f, pdz, $qd\bar{z}$, $Adz\wedge d\bar{z}$. При этом аналитич. д. зависят только от z:

$$f=f(z),\quad \omega=p(z)dz.$$

Применяются также нелинейные дифференциальные формы вида $p(z,\bar{z})dz^m d\bar{z}^n$, где m и n — целые числа. Они также наз. дифференциалами типа $(m,\ n)$, или размерности $(m,\ n)$. При этом д. типа (0, 0) наз. функциями, типа (1, 0) — линейными дифференциалами, типа (—1, 0) — обратными дифференциалами, типа (2, 0) — квадратичными дифференциалами. Наибольшие применения получили *квадратичные дифференциалы*. См. также *Глобальная структура траекторий*, *Локальная структура траекторий*, *Риманова поверхность*, *Униформизация*.

Лит.: [1] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [2] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955; [3] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957; [4] Behnke H., Sommer F., Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen veränderlichen, B., 1955.

Е. Д. Соломенцев.

ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ МОДУЛЬ, модуль кэлеровых дифференциалов,— алгебраический аналог понятия дифференциала функции. Пусть A — коммутативное кольцо, рассматриваемое как алгебра над своим подкольцом B. Д. м. B-алгебры A определяется как фактормодуль $\Omega^1_{A/B}$ свободного A-модуля с базисом $(dx)_{x\in A}$ по подмодулю, порожденному элементами вида

$$d(x+y)-dx-dy,\ d(xy)-xdy-ydx,\ db,$$

где $x,\ y\in A$, $b\in B$. Канонич. гомоморфизм A-модулей $d\colon A\to\Omega^1_{A/B}$ является B-дифференцированием кольца A (см. *Дифференцирование* кольца) со значением в A-модуле $\Omega^1_{A/B}$, обладающим следующим свойством универсальности: для любого B-дифференцирования $\partial\colon A\to M$ со значением в A-модуле M существует однозначно определенный гомоморфизм A-модулей $\bar{\partial}:\Omega^1_{A/B}\to M$ такой, что $\bar{\partial}\circ d=\partial$. Соответствие $\partial\to\bar{\partial}$ определяет изоморфизм A-модулей

$$\mathrm{Der}_B(A,\ M)\simeq \mathrm{Hom}_A\left(\Omega^1_{A/B},\ M\right).$$

В частности, модуль дифференцирований кольца A в себя изоморфен двойственному A-модулю к модулю $\Omega^1_{A/B}$.

Если $A\otimes_B A$ рассматривать как A-алгебру относительно гомоморфизма

$$A\longrightarrow A\otimes_B A\qquad (a\longrightarrow a\otimes 1)$$

и I — идеал, порожденный элементами вида

$$a\otimes 1-1\otimes a,$$

то A-модуль $\Omega^1_{A/B}$ изоморфен A-модулю I/I^2.

Д. м. Ω^1 обладает следующими свойствами:

1) Если S — мультипликативно замкнутое множество в A и $T=S\cap B$, то существует канонич. изоморфизм

локализации

$$\left(\Omega^1_{A/B}\right)_S \cong \Omega^1_{A_S/B_T}.$$

2) Если $\varphi\colon A\to A'$ — гомоморфизм B-алгебр, то определена каноническая точная последовательность A'-модулей:

$$\Omega^1_{A/B}\otimes_A A^1 \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{A'/B} \longrightarrow \Omega^1_{A'/A} \longrightarrow 0.$$

3) Если I — идеал кольца A и $A'=A/I$, то существует каноническая точная последовательность A'-модулей:

$$I/I^2 \xrightarrow{d'} \Omega^1_{A/B}\otimes_A A' \longrightarrow \Omega^1_{A'/B} \longrightarrow 0,$$

где гомоморфизм d' индуцирован дифференцированием $d\colon A\to\Omega^1_{A/B}$.

4) Поле K является сепарабельным расширением поля k конечной степени трансцендентности n в том и только в том случае, когда существует изоморфизм K-пространств $\Omega^1_{K/k}\cong K^n$.

5) Если $A=B[T_1, \ldots, T_n]$ — алгебра многочленов, то $\Omega^1_{A/B}$ свободный A-модуль с базисом $dT_1, \ldots, dT_n$.

6) Алгебра A конечного типа над совершенным полем k является регулярным кольцом тогда и только тогда, когда A-модуль $\Omega^1_{A/k}$ проективен.

7) В свойстве 2) A-алгебра A' конечного типа является гладкой над A тогда и только тогда, когда гомоморфизм α инъективен, а Д. м. $\Omega^1_{A'/A}$ проективен и его ранг равен относительной размерности A' над A.

Внешняя степень $\overset{i}{\wedge}\Omega^1_{A/B}$ Д. м. $\Omega^1_{A/B}$ наз. модулем дифференциальных i-форм B-алгебры A и обозначается $\Omega^i_{A/B}$.

Свойство 1) позволяет для любого морфизма схем $X\to Y$ определить пучок относительных (или кэлеровых) дифференциалов $\Omega^1_{X/Y}$ и их внешние степени $\Omega^i_{X/Y}$.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Grothendieck A., Revêtements étales et groupe fondamentale, B.—Hdlb.—N. Y., 1971; [3] его же, «Publ. math. IHES», 1964, № 20; [4] Kähler E., Algebra und Differentialrechnung, B., 1958. *И. В. Долгачев.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА — алгебра A над полем (кольцом) K, являющаяся *дифференциальным кольцом*; при этом каждое дифференцирование ∂ должно коммутировать с умножениями на элементы из K, т. е. $\partial(\alpha x)=\alpha\partial(x)$, где $\alpha\in K$, $x\in A$. *О. А. Иванова.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА — раздел алгебры, изучающий объекты, в к-рых, наряду с операциями сложения и умножения, имеются операции дифференцирования: дифференциальные кольца, дифференциальные модули, дифференциальные поля, дифференциальные алгебраич. многообразия.

Один из основных объектов Д. а.— алгебра дифференциальных полиномов $\mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, являющаяся аналогом кольца многочленов в коммутативной алгебре (см. *Расширение* дифференциального поля). Каждой системе дифференциальных уравнений

$$F_1=0, \ \ldots, \ F_k=0$$

ставится в соответствие совершенный дифференциальный идеал $\{F_1, \ldots, F_k\}$, порожденный этой системой в алгебре дифференциальных полиномов. Теорема Ритта — Рауденбаха о базисе утверждает, что таким образом получаются все совершенные дифференциальные идеалы (дифференциальный идеал I наз. совершенным, если из $a^n\in I$ для нек-рого

$n>0$ следует, что $a\in I$), т. е. в любом из них можно выбрать конечное число дифференциальных полиномов таких, что совершенный дифференциальный идеал, порожденный этими полиномами, совпадает с данным. В отличие от теоремы Гильберта о базисе в кольце многочленов, в теореме Ритта — Рауденбаха существенна совершенность идеалов, т. е. дифференциальный идеал (даже совершенный) может не являться конечно порожденным дифференциальным модулем.

Совершенному дифференциальному идеалу ставится в соответствие дифференциальное алгебраич. многообразие — множество точек в аффинном пространстве над нек-рым универсальным расширением поля коэффициентов, аннулирующих любой полином из данного идеала. Имеет место аналог теоремы Гильберта о нулях. Пусть $F_1, \ldots, F_p$ — конечная система дифференциальных полиномов и пусть G — дифференциальный полином, обращающийся в нуль во всех решениях данной системы. Тогда некоторая степень полинома G является линейной комбинацией полиномов F и их производных разного порядка с коэффициентами из алгебры дифференциальных полиномов. В частности, если система $F_1, \ldots, F_p$ не имеет нулей, то нек-рая линейная комбинация полиномов F и их производных разного порядка равна единице.

Совершенный дифференциальный идеал допускает представление в виде пересечения конечного числа простых дифференциальных идеалов. Этому представлению соответствует разложение многообразия на конечное число неприводимых компонент. Для простых дифференциальных идеалов вводится понятие общего нуля и его размерности, как и в алгебраич. геометрии. Для неприводимого замкнутого множества V в дифференциальном аффинном пространстве, т. е. в аффинном пространстве над универсальным расширением U поля коэффициентов, определяется дифференциальный размерностный полином

$$\omega_V=\sum\nolimits_{0\leqslant i\leqslant m} a_i \binom{x+i}{i},$$

где m — количество дифференцирований в поле F. Коэффициент a_m наз. дифференциальной размерностью множества V, степень полинома $\tau=\deg\omega_V$ — дифференциальным типом множества V, а коэффициент a_τ — его типичной дифференциальной размерностью. Полином ω_V *является бирациональным инвариантом, но не является* дифференциальным бирациональным инвариантом. Таковыми будут $a_m(V)$, $\tau(V)$ и $a_{\tau(V)}(V)$. Нахождение дифференциальных бирациональных инвариантов представляет значительный интерес. Другая проблема — оценить возможные значения полученных инвариантов. Пусть Σ — подмножество в $\mathscr{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Если элементы из Σ имеют ограниченный порядок, то дифференциальные размерностные полиномы компонент $\{\Sigma\}$ подчинены некоторым ограничениям. В частности, если для каждого Y_j порядок относительно Y_j любого элемента из Σ не превосходит e_j, то для любой компоненты многообразия $\{\Sigma\}$ из условия $a_m(\mathfrak{p})=0$ следует, что $a_{m-1}(\mathfrak{p})\leqslant\Sigma e_j$. В общем случае имеется гипотеза, что

$$a_{\tau(p)}(p)\leqslant\sum\nolimits_{1\leqslant j\leqslant n}\binom{e_j+m-\tau(p)-1}{m-\tau(p)}.$$

Если множество $\Sigma\subset\mathscr{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ состоит из n дифференциальных полиномов $F_1, \ldots, F_n$, то выдвигаются еще две гипотезы. Пусть

$$e_{ij}=\operatorname{ord}_{Y_j}F_i,\qquad 1\leqslant i\leqslant n,\quad i\leqslant j\leqslant n,$$

и

$$h=\max_{\pi}\left(l_{1\pi(1)}+\ldots+l_{n\pi(n)}\right),$$

где π пробегает симметрич. группу S_n. Первая гипотеза утверждает, что для любой компоненты $\mathfrak{p}$ многообразия $\{F_1, \ldots, F_n\}$ из $a_m(\mathfrak{p})=0$ следует, что $a_{m-1}(\mathfrak{p})\leqslant h$. Это предположение доказано в нек-рых частных случаях. Вторая гипотеза состоит в том, что для любой компоненты $\mathfrak{p}$ многообразия $\{F_1, \ldots, F_n\}$ из $a_m(\mathfrak{p})=a_{m-1}(\mathfrak{p})=0$ следует, что $\omega_{\mathfrak{p}}=0$.

Одной из сложных проблем, исследуемых Д. а., является проблема разложения дифференциально алгебраич. многообразия на неприводимые компоненты. Даже если система Σ состоит из одного неприводимого дифференциального полинома σ, то соответствующее многообразие состоит, в общем случае, из нескольких компонент, одна из к-рых содержит все неособые решения уравнения $\sigma=0$ (хотя может содержать и особые решения), а все остальные компоненты состоят из решений, обращающих в 0 любую сепаранту дифференциального полинома σ. Случай гиперповерхности (система Σ из одного уравнения) особенно важен, т. к. всякое дифференциально алгебраич. многообразие над обыкновенным дифференциальным полем дифференциально бирационально изоморфно гиперповерхности.

Поскольку всякий простой дифференциальный идеал полностью определяется своим характеристич. множеством, проблему разложения дифференциально алгебраического многообразия $\{\mathfrak{p}\}$ можно разделить на две: 1) найти конечное множество $\mathfrak{A}$ авторедуцированных подмножеств в $\mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, каждое из к-рых является характеристич. множеством простого дифференциального идеала, содержащего Φ, такое, что $\mathfrak{A}$ включает в себя характеристич. множество каждой компоненты $\{\Phi\}$; 2) для данного авторедуцированного множества в $\mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ определить, является ли оно характеристич. множеством какой-нибудь компоненты $\{\Phi\}$.

Решение проблемы 2) в общем случае не известно (1978), но в важном специальном случае, когда Φ состоит из одного дифференциального полинома, полное решение дается двумя теоремами Ритта: теоремой о компонентах и теоремой о низких степенях (см. ниже).

Задача нахождения компонент многообразия $\{\Phi\}$ может быть также редуцирована к проблеме 1) и следующей проблеме: 3) для данных характеристич. множеств A и B простых дифференциальных идеалов $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ соответственно определить, имеет ли место включение $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}$.

Проблема 3) также далека от решения. В частном случае, когда A состоит из одного неприводимого дифференциального полинома A и $\mathfrak{q}$ является дифференциальным идеалом $[Y_1, \ldots, Y_n]$, это — задача о том, лежит ли точка $(0, \ldots, 0)$ в общем решении дифференциального уравнения $A=0$.

Проблема 1) решена для конечного множества $\Phi\subset\mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ «в принципе»: при помощи индуктивной процедуры (теории исключения для систем алгебраических дифференциальных уравнений) она сводится к некоторым «более легким» задачам о многочленах от конечного числа неизвестных над $\mathcal{F}$, т. е. задача об алгебраических дифференциальных уравнениях сводится к задаче об алгебраич. уравнениях.

Теорема о компонентах утверждает, что особые компоненты являются в свою очередь общими компонентами других дифференциальных полиномов, точнее: пусть $\mathcal{F}$ — дифференциальное поле и F — ненулевой дифференциальный полином в $\mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Если $\mathfrak{p}$ — какая-либо компонента идеала $\{F\}$ кольца $\mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, то существует неприводимый дифференциальный полином $B\in\mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ такой, что $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_{\mathcal{F}}(B)$ — общая компонента многообразия $\{B\}$.

Теорема о низких степенях дает критерий для определения того, является ли общая

компонента неприводимого дифференциального полинома $A \in \mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ компонентой для $\{F\}$. Точнее, пусть F, $A \in \mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, порядки F и A относительно Y_n равны m и l соответственно, A_j есть j-я производная от A и S — сепаранта для A. Существуют $t \geqslant 0$ и $r > 0$ такие, что

$$S^t F = \sum_{j=1}^{r} c_j A^{p_j} A_1^{i_{1j}} A_2^{i_{2j}} \ldots A_{m-l}^{i_{m-l,j}},$$

где $p_j \geqslant 0$, $i_{kj} \geqslant 0$, никакие два множества $i_{1j}, \ldots, i_{m-l,j}$ не совпадают, порядок c_j относительно Y_n не превосходит l и c_j не делится на A. Если найдено такое разложение, то теорема о низких степенях гласит: общая компонента многообразия $\{A\}$ является компонентой многообразия $\{F\}$ тогда и только тогда, когда выписанное разложение содержит член $c_k A^{p_k}$, свободный от производных A, и степень к-рого ниже степени любого другого слагаемого в выписанном разложении, рассматриваемом как полином от A, A_1, ..., A_{m-l} (в ненулевой характеристике это условие не является ни необходимым, ни достаточным).

Другое направление исследований в Д. а. представляет вопрос о расширении специализаций. Пусть $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ и $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ — точки в U^n, где U — универсальное расширение дифференциального поля $\mathcal{F}$. Точка $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ наз. дифференциальной специализацией точки $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ над $\mathcal{F}$ (что обозначается $(\eta_1, \ldots, \eta_n) \underset{\mathcal{F}}{\to} (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$), если любой дифференциальный полином, обращающийся в нуль в $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, обращается в нуль и в $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Если $(\eta_1, \ldots, \eta_n) \underset{\mathcal{F}}{\to} (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ и $1 \leqslant k \leqslant n$, то очевидно, что $(\eta_1, \ldots, \eta_t) \underset{\mathcal{F}}{\to} (\zeta_1, \ldots, \zeta_t)$. Говорят, что первая специализация является расширением второй.

Пусть даны $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ и k и пусть $B \in \mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ таков, что $B(\eta_1, \ldots, \eta_n) \neq 0$. Доказано, что существует ненулевой дифференциальный полином $B_0 \in \mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_k\}$, удовлетворяющий условию $B_0(\eta_1, \ldots, \eta_k) \neq 0$, и такой, что любая дифференциальная специализация $(\eta_1, \ldots, \eta_k) \underset{\mathcal{F}}{\to} (\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$, для которой $B_0(\zeta_1, \ldots, \zeta_t) \neq 0$, может быть расширена до дифференциальной специализации $(\eta_1, \ldots, \eta_n) \underset{\mathcal{F}}{\to} (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, где $B(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \neq 0$. Однако, в отличие от ситуации в алгебраич. геометрии, дифференциальная специализация $(\eta_1, \ldots, \eta_k) \underset{\mathcal{F}}{\to} (\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ не всегда может быть расширена до дифференциальной специализации $(\eta_1, \ldots, \eta_n) \underset{\mathcal{F}}{\to} (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ даже если элементы $\zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n$ будут принимать значение ∞. Таким образом возникает задача: найти критерий, когда дифференциальная специализация $(\eta_1, \ldots, \eta_k) \underset{\mathcal{F}}{\to} (\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ может быть расширена до дифференциальной специализации $(\eta_1, \ldots, \eta_n) \underset{\mathcal{F}}{\to} (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$.

Частный случай этой проблемы встречается в проблеме неопределенных форм. Пусть полиномы F, $G \in \mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ взаимно простые, $G \neq 0$, и F и G обращаются в нуль в точке $(0, \ldots, 0)$. Проблема состоит в том, чтобы отношению F/G приписать значение в точке $(0, \ldots, 0)$. Пусть элементы $t_1, \ldots, t_n \in U$ дифференциально алгебраически независимы над $\mathcal{F}$ и

$$u = F(t_1, \ldots, t_n)/G(t_1, \ldots, t_n).$$

Естественно сказать, что F/G допускает значение α в точке $(0, \ldots, 0)$, если $(t_1, \ldots, t_n, u) \underset{\mathcal{F}}{\to} (0, \ldots, 0, \alpha)$. Таким образом проблема сводится к нахождению расширений $(t_1, \ldots, t_n) \underset{\mathcal{F}}{\to} (0, \ldots, 0)$ до $(t_1, \ldots, t_n, u)$. Это

эквивалентно определению элементов $\alpha \in U$ таких, что $(0, \ldots, 0, \alpha)$ является нулем общей компоненты дифференциального полинома $Y_{n+1}G - F \in \mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_{n+1}\}$. Дж. Ритт (J. Ritt) предположил, что α либо определено однозначно (возможно, равно ∞), либо полностью произвольно; он доказал это предположение для обыкновенных дифференциальных полей при $n=1$, $\operatorname{ord}(FG)=1$. Изучаются свойства конкретных дифференциальных идеалов в кольце $\mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Для бесконечной последовательности $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_p, \ldots$ простых дифференциальных идеалов в $\mathcal{F}\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, где каждый Σ_i — собственный делитель идеала Σ_{i+1}, пересечение всех Σ_i является простым дифференциальным идеалом и размерность соответствующего многообразия $\mathfrak{M}$ больше размерности многообразия $\mathfrak{M}_i$, соответствующего Σ_i для любого i.

Из других результатов о дифференциально алгебраич. многообразиях следует отметить аналог теоремы Люрота: если $\mathfrak{S}$ расширение дифференциального поля $\mathcal{F}$, к-рое содержится в $\mathcal{F}\langle u\rangle$, то $\mathfrak{S}$ содержит элемент v такой, что $\mathcal{F}\langle v\rangle = \mathfrak{S}$.

Однако теория дифференциально алгебраич. кривых (многообразий дифференциальной размерности 1) находится в начальной стадии развития; даже для таких инвариантов, как род кривой в алгебраич. геометрии, дифференциально алгебраич. аналоги не найдены. Значительный интерес представляет теория пересечений дифференциально алгебраич. многообразий. Для них неверно утверждение, что пересечение двух неприводимых многообразий размерности p и q в n-мерном аффинном пространстве имеет размерность не менее $p+q-n$. Однако дифференциально алгебраич. многообразия, кроме размерности, характеризуются также порядком относительно выбранного базиса дифференциальной трансцендентности. Для порядка пересечения многообразий относительно специальным образом выбираемого базиса получены нек-рые оценки сверху. В аналитическом случае доказана следующая теорема о пересечении компонент одного дифференциального полинома: если F — дифференциальный полином от неизвестных $Y_1, \ldots, Y_n$, то нуль полинома F, содержащийся более чем в одной компоненте F, аннулирует $\partial F/\partial Y_{ij}$ для $i=1, \ldots, n$ и любого j. Понятия дифференциально алгебраич. многообразия можно обобщить (уже не предполагая его аффинным). В частности, можно ввести понятия дифференциально однородных полиномов и проективных дифференциально алгебраич. многообразий.

Для дифференциального поля F не существует дифференциально алгебраич. замыкания, не существует дифференциально алгебраич. замкнутых полей. Заменой их, в нек-ром смысле, являются так наз. «степенные» расширения.

Одним из направлений в Д. а. является теория Галуа дифференциальных полей. Для дифференциального поля $\mathcal{F}$ строится универсальное дифференциальное расширение U и рассматривается множество дифференциальных изоморфизмов конечно порожденного дифференциально алгебраич. расширения $\mathfrak{S}$ поля $\mathcal{F}$ в U, тождественных на $\mathcal{F}$. Если $\mathfrak{S}$ является сильно нормальным расширением $\mathcal{F}$, то на множестве G дифференциальных изоморфизмов $\mathfrak{S}$ в U можно ввести структуру алгебраич. группы над полем констант K поля U. Частным случаем сильно нормальных расширений являются расширения Пикара — Вессио, получающиеся присоединением к полю $\mathcal{F}$ решений линейного однородного дифференциального уравнения с коэффициентами в поле $\mathcal{F}$. Группа Галуа расширения Пикара — Вессио является алгебраической матричной группой. Связь между промежуточными полями и подгруппами группы G описывается следующей теоремой.

Пусть $\mathfrak{G}$ — сильно нормальное расширение дифференциального поля $\mathcal{F}$ с полем констант C. а) Если $\mathcal{F}_1$ — дифференциальное поле такое, что $\mathcal{F}\subset\mathcal{F}_1\subset\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ сильно нормально над $\mathcal{F}_1$, группа Галуа $G(\mathfrak{G}/\mathcal{F}_1)$ является C-подгруппой в $G(\mathfrak{G}/\mathcal{F})$ и поле инвариантов группы $G(\mathfrak{G}/\mathcal{F}_1)$ в $\mathfrak{G}$ совпадает с $\mathcal{F}_1$. б) Если G_1 является C-подгруппой группы $G(\mathfrak{G}/\mathcal{F})$ и $\mathcal{F}_1$ обозначает множество инвариантов группы G_1 в $\mathfrak{G}$, то $\mathcal{F}_1$ — дифференциальное поле, $\mathcal{F}\subset\mathcal{F}_1\subset\mathfrak{G}$ и $G(\mathfrak{G}/\mathcal{F}_1)=G_1$.

Нормальным делителям G_1 группы $G(\mathfrak{G}/F_1)$ соответствуют при этом сильно нормальные расширения $\mathcal{F}_1$ поля $\mathcal{F}$, и наоборот. Для связных разрешимых групп решена обратная задача Галуа, т. е. вопрос о существовании у поля $\mathcal{F}$ сильно нормального расширения $\mathfrak{G}$, группа Галуа к-рого $G(\mathfrak{G}/\mathcal{F})$ изоморфна заданной группе. Эта задача сведена к оценке размерности нек-рого векторного пространства над полем констант C поля $\mathcal{F}$ и ранга некоторой абелевой группы. Имеются результаты по теории Галуа бесконечных расширений. Смежными с теорией Галуа вопросами занимается теория интегрирования в конечном виде.

Разрабатывается теория дифференциальных алгебраич. групп, существенно отличающаяся от своего алгебраич. аналога. В частности, дифференциальное кольцо всюду определенных дифференциальных рациональных функций на аффинном дифференциальном алгебраич. многообразии не является дифференциальным координатным кольцом, и в общем случае не конечно порождено как дифференциальная алгебра.

Среди результатов о приближении дифференциально алгебраич. функций рациональными может быть отмечен аналог теоремы Лиувилля о приближении алгебраич. чисел рациональными. Однако доказательство аналога теоремы Туэ — Зигеля — Рота остается (1978) проблемой.

Развивается теория колец с высшими дифференцированиями. При изучении объектов ненулевой характеристики высшие дифференцирования представляют более сильное средство. Если характеристика дифференциального кольца A равна p, то p-я степень любого элемента является константой, в то время как для колец с высшими дифференцированиями это не так. Для колец с высшими дифференцированиями получены аналоги многих перечисленных выше результатов, касающихся как теории пересечения идеалов, так и теории Галуа.

Лит.: [1] Капланский И., Введение в дифференциальную алгебру, пер. с англ., М., 1959; [2] Ritt J. F., Differential algebra, N. Y., 1950; [3] Kolchin E. R., Differential algebra and algebraic groups, N. Y.—L., 1973; [4] его же, Some problems in differential algebra, в сб.: Тр. международного конгресса математиков. Москва 1966, М., 1968.

А. В. Михалев, Е. В. Панкратьев.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии, в к-ром изучаются геометрич. образы, в первую очередь кривые и поверхности, методами математич. анализа. Обычно в Д. г. изучаются свойства кривых и поверхностей в малом, т. е. свойства сколь угодно малых их кусков. Кроме того, в Д. г. изучаются свойства семейств линий и поверхностей (см., напр., *Конгруэнция*, *Сеть*).

Д. г. возникла и развивалась в тесной связи с математич. анализом, к-рый сам в значительной степени вырос из задач геометрии. Многие геометрич. понятия предшествовали соответствующим понятиям анализа. Так, напр., понятие касательной предшествовало понятию производной, понятие площади и объема — понятию интеграла.

Возникновение Д. г. относится к 18 в. и связано с именами Л. Эйлера (L. Euler) и Г. Монжа (G. Monge). Первое сводное сочинение по теории поверхностей написано Г. Монжем (Приложение анализа к геомет-

рии, 1795). В 1827 К. Гаусс (C. Gauss) опубликовал работу «Общее исследование о кривых поверхностях», в к-рой заложил основы теории поверхностей в ее современном виде. С тех пор Д. г. перестала быть только приложением анализа и заняла самостоятельное место в математике.

Открытие в 1826 Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии сыграло огромную роль в развитии всей геометрии, в том числе и Д. г. Фактически Н. И. Лобачевским было отвергнуто априорное представление о пространстве, господствовавшее ранее в математике и философии. Он открыл, что возможны пространства, отличные от евклидова. Эта идея Н. И. Лобачевского нашла отражение в различных математич. исследованиях. Так, в 1854 Б. Риман (B. Riemann) своей лекцией «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» заложил основы *римановой геометрии*, к-рая в применении к многомерным многообразиям находится в таком же отношении к геометрии n-мерного пространства, как *внутренняя геометрия* поверхности к евклидовой геометрии на плоскости.

Теоретико-групповая точка зрения Ф. Клейна (F. Klein), изложенная в его «Эрлангенской программе» (1872), т. е.: геометрия — учение об инвариантах групп преобразований, в применении к Д. г. была развита Э. Картаном (E. Cartan), к-рый построил теорию пространств *проективной связности* и *аффинной связности*.

В России школу Д. г. создали Ф. Миндинг и К. М. Петерсон. Их исследования посвящены в значительной степени вопросам *изгибания* поверхностей, т. е. таким непрерывным деформациям поверхностей, при которых внутренняя геометрия все время остается неизменной. Эти исследования были продолжены в работах многих русских и советских геометров.

Теория кривых. В теории кривых обычно рассматривают так наз. регулярные кривые. Это — кривые, допускающие локальное задание уравнениями вида

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \tag{1}$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — достаточно регулярные функции параметра t. В зависимости от свойств дифференцируемости функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, задающих кривую, говорят о степени регулярности кривой. Кривая допускает бесчисленное множество различных способов параметрич. задания уравнениями вида (1). Среди них особое значение имеют так наз. естественная параметризация, когда параметром служит длина дуги кривой, отсчитываемая от нек-рой фиксированной точки. Точка кривой наз. обыкновенной, если при подходящем выборе прямоугольной декартовой системы координат x, y, z она допускает в окрестности этой точки задание уравнениями вида



Рис. 1.

$$y=y(x), \quad z=z(x),$$

где $y(x)$ и $z(x)$ — дифференцируемые функции. В противном случае точка наз. особой (см. *Особая точка*). В Д. г. основное изучение кривой относится к окрестности обыкновенной точки. Для того чтобы точка кривой, заданной общим уравнением (1), была обыкновенной, достаточно, чтобы в этой точке было

$$x'^2+y'^2+z'^2\neq 0.$$

Ряд основных понятий теории кривых вводится с помощью понятия соприкосновения множеств, к-рое состоит в следующем. Пусть M и m — два множества с общей точкой O. Говорят, что множе-

ство M имеет с m в точке O соприкосновение порядка $\alpha \geqslant 1$, если

$$\frac{\delta(X)}{|XO|^{\alpha}} \longrightarrow 0$$

при $X \to O$, где $\delta(X)$ — расстояние точки X множества M от m. Если в качестве M взять кривую, а в качестве m прямую, проходящую через точку O кривой, то при $\alpha \geqslant 1$ условие соприкосновения определяет *касательную* к кривой в точке O (рис. 1). Гладкая (дифференцируемая) кривая в каждой точке имеет определенную касательную. Направление касательной в точке t_0 кривой, задаваемой уравнениями (1), совпадает с направлением вектора $[x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)]$. В Д. г. выводятся уравнения касательной для различных способов аналитич. задания кривой. В частности, для кривой, задаваемой уравнениями (1), уравнения касательной в точке, отвечающей значению параметра t_0, будут

$$\frac{X-x_0}{x'_0} = \frac{Y-y_0}{y'_0} = \frac{Z-z_0}{z'_0},$$

где индекс $_0$ указывает на значение функций x, y, z и их производных в точке t_0. Если взять в качестве m плоскость, проходящую через точку O кривой M, то условие соприкосновения при $\alpha \geqslant 2$ определяет *соприкасающуюся плоскость* кривой (рис. 2). Дважды дифференцируемая кривая в каждой точке имеет соприкасающуюся плоскость. Она либо единственная, либо любая плоскость, проходящая через касательную кривой, является соприкасающейся.

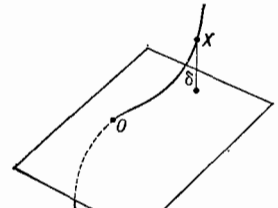


Рис. 2.

При движении вдоль кривой ее касательная вращается. Скорость этого вращения при равномерном, с единичной скоростью, движении вдоль кривой наз. *кривизной* кривой. В случае параметрич. задания кривой уравнениями (1) кривизна кривой определяется по формуле

$$k_1 = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^{3/2}},$$

где $r(t)$ — вектор-функция с координатами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Прямые и только прямые имеют всюду равную нулю кривизну. Дважды дифференцируемая кривая в каждой точке, где кривизна отлична от нуля, имеет единственную соприкасающуюся плоскость. При движении вдоль кривой в окрестности такой точки соприкасающаяся плоскость вращается, причем касательная кривой является мгновенной осью этого вращения. Скорость вращения соприкасающейся плоскости при равномерном, с единичной скоростью, движении вдоль кривой наз. *кручением* кривой. В зависимости от направления вращения определяется знак кручения. Трижды дифференцируемая кривая в каждой точке с отличной от нуля кривизной имеет определенное кручение. В случае параметрич. задания кривой уравнениями (1) кручение кривой определяется по формуле

$$k_2 = \frac{(r', r'', r''')}{|r' \times r''|^2}.$$

Плоская кривая в каждой точке имеет кручение, равное нулю. Обратно, кривая с тождественно равным нулю кручением — плоская.

Прямая, перпендикулярная касательной, проходящая через точку касания, наз. *нормалью* к кривой. Нормаль, лежащую в соприкасающейся плоскости, наз. *главной нормалью*, а нормаль, перпендикулярную

соприкасающейся плоскости, наз. *бинормалью*. Фигура, составленная из касательной, главной нормали и бинормали, а также из трех плоскостей, попарно содержащих эти прямые, наз. естественным трехгранником (трехгранником Френе). Если ребра естественного трехгранника в данной точке кривой принять за оси прямоугольной декартовой системы координат, то уравнение кривой в естественной параметризации имеет в окрестности этой точки вид

$$x = s + \ldots, \quad y = \frac{k_1}{2}s^2 + \ldots, \quad z = -\frac{k_1 k_2}{6}s^3 + \ldots,$$

где k_1 и k_2 — кривизна и кручение кривой в указанной точке. На рис. 3 изображены проекции кривой на

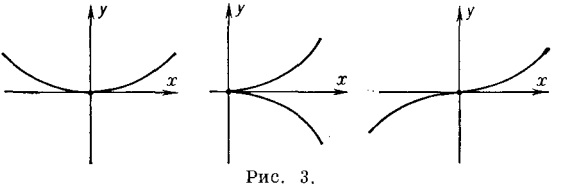


Рис. 3.

грани естественного трехгранника вблизи точки с отличными от нуля кривизной и кручением.

Единичные векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ касательной, главной нормали и бинормали кривой при движении вдоль кривой изменяются. При соответствующем выборе направления этих векторов из определения кривизны и кручения получаются формулы

$$\boldsymbol{\tau}' = k_1\boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\beta}' = k_2\boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\nu}' = -k_1\boldsymbol{\tau} - k_2\boldsymbol{\beta}, \qquad (2)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по дуге кривой. Формулы (2) наз. *Френе формулами*. Кривая с отличной от нуля кривизной определяется с точностью до положения в пространстве заданием ее кривизны и кручения в функции дуги s кривой. В связи с этим систему уравнений

$$k_1 = k_1(s), \quad k_2 = k_2(s)$$

наз. *натуральными уравнениями* кривой.

Важный класс кривых представляют п л о с к и е к р и в ы е, т. е. кривые, лежащие в плоскости. Для плоских кривых можно различать направление вращения касательной при движении вдоль кривой, поэтому кривизне можно приписывать знак в зависимости от направления этого вращения. Кривизна плоской кривой, задаваемой уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, определяется по формуле

$$k = \pm \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Знак + или — берется по соглашению, но сохраняется вдоль всей кривой. Для кривых вводится важное понятие *соприкасающейся окружности*. Это — окружность, имеющая с кривой соприкосновение порядка $\alpha \geqslant 2$ (рис. 4). Она существует в каждой точке дважды дифференцируемой кривой с отличной от нуля кривизной. Центр соприкасающейся окружности наз. ц е н т р о м к р и в и з н ы, а радиус — р а д и у с о м к р и в и з н ы. Радиус кривизны является величиной, обратной кривизне. Геометрич. место центров кривизны кривой наз. *эволютой*. Кривая, ортогонально пересекающая касательные кривой, наз. *эвольвентой* (рис. 5). Для эвольвенты данной кривой эволютой является сама кривая.

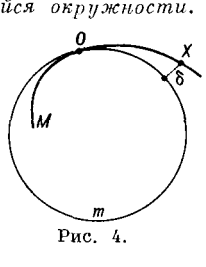


Рис. 4.

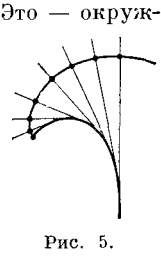


Рис. 5.

Кривая γ наз. *огибающей* семейства кривых γ_α, зависящих от параметра α, если она в каждой своей точке касается хотя бы одной кривой семейства и каждым своим отрезком касается бесконечного множества этих кривых.

Теория поверхностей и ее обобщения. В теории поверхностей обычно рассматриваются регулярные поверхности. Это — поверхности, допускающие локальное задание уравнениями вида

$$x=x(u,\ v),\quad y=y(u,\ v),\quad z=z(u,\ v), \tag{3}$$

где $x(u,\ v)$, $y(u,\ v)$, $z(u,\ v)$ — регулярные функции параметров u, v. В зависимости от степени регулярности функций, входящих в уравнения поверхности, говорят о степени регулярности поверхности. Поверхность допускает бесчисленное множество способов параметрич. задания уравнениями вида (3). Точка поверхности наз. обыкновенной, если в ее окрестности при подходящем выборе системы координат x, y, z поверхность допускает задание вида

$$z=z(x,\ y),$$

где $z(x,\ y)$ — гладкая функция. В противном случае точка поверхности наз. особой. В Д. г. основное изучение поверхности ведется в окрестности обыкновенных точек. Для того чтобы точка $(u_0,\ v_0)$ поверхности, задаваемой уравнениями (3), была обыкновенной, достаточно, чтобы в этой точке ранг матрицы $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ был равен двум. Когда поверхность задается уравнениями вида (3), это условие обычно предполагается выполненным и специально не оговаривается. Уравнения (3) при фиксированном u или v задают кривые, лежащие на поверхности. Эти кривые наз. координатными линиями на поверхности. Параметры u, v наз. координатами на поверхности или гауссовыми криволинейными координатами.

Через понятие соприкосновения определяется *касательная плоскость* к поверхности. Это — плоскость, проходящая через точку поверхности и имеющая в этой точке с поверхностью соприкосновение порядка $\alpha \geqslant 1$. Гладкая (дифференцируемая) поверхность имеет в каждой точке единственную касательную плоскость. Касательная плоскость поверхности, задаваемой уравнениями (3), при условии (4) в точке $(u_0,\ v_0)$ определяется уравнением

$$\begin{vmatrix} X-x^0 & Y-y^0 & Z-z^0 \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}=0,$$

где индекс 0 указывает на значение функций $x(u,\ v)$, $y(u,\ v)$, $z(u,\ v)$ и их производных в точке $(u_0,\ v_0)$. Прямая, проходящая через точку поверхности перпендикулярно касательной плоскости в этой точке, наз. *нормалью* к поверхности. Если $\boldsymbol{r}(u,\ v)$ — вектор с координатами $x(u,\ v)$, $y(u,\ v)$, $z(u,\ v)$, то

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$$

имеет направление нормали поверхности.

Для поверхностей вводится важное понятие *соприкасающегося параболоида*. Это — параболоид, для к-рого нормаль к поверхности в данной точке является его осью и к-рый имеет соприкосновение порядка $\alpha \geqslant 2$ с поверхностью в этой точке. В каждой точке дважды дифференцируемой поверхности существует единственный соприкасающийся параболоид, к-рый может вырождаться в параболич. цилиндр или плоскость. Если поверхность отнести к прямоугольным декартовым координатам, приняв данную точку поверхности за начало координат, а касательную плоскость в ней за

плоскость xy, то уравнение поверхности в окрестности точки касания будет

$$z=f(x,\ y),$$

а уравнение соприкасающегося параболоида в этой точке

$$z=\frac{1}{2}\,(f_{xx}x^2+2f_{xy}xy+f_{yy}y^2)$$

(производные функции f берутся в точке касания). В зависимости от вида соприкасающегося параболоида точки поверхности подразделяются на *эллиптические точки*, *гиперболические точки*, *параболические точки* и *уплощения точки*. Значение соприкасающегося параболоида состоит в том, что он воспроизводит форму поверхности с точностью до бесконечно малых 2-го порядка (касательная плоскость воспроизводит ее форму с точностью до бесконечно малых 1-го порядка).

С помощью соприкасающегося параболоида вводится понятие *сопряженных направлений* на поверхности. Именно два направления на поверхности в данной точке наз. с о п р я ж е н н ы м и, если содержащие их прямые сопряжены относительно соприкасающегося параболоида в этой точке. Ортогональные сопряженные направления наз. г л а в н ы м и. В данной точке поверхности, как правило, два главных направления. Исключение составляют точки уплощения и специальные эллиптич. точки (*округления точки*), в к-рых каждое направление главное. Линия, у к-рой в каждой точке направление является главным, наз. *кривизны линией*. В точках поверхности, не являющихся эллиптическими, существуют самосопряженные направления. Они наз. *асимптотическими направлениями*. Линия на поверхности, направление к-рой в каждой точке асимптотическое, наз. *асимптотической линией*.

Подобно тому, как для семейства кривых на плоскости, вводится понятие огибающей семейства поверхностей. При этом семейство поверхностей может быть однопараметрическим или двухпараметрическим. В теории поверхностей особое значение имеет огибающая однопараметрич. семейства плоскостей.

В теории поверхностей важную роль играют две дифференциальные *квадратичные формы поверхности*, связанные с поверхностью. Если через $\boldsymbol{r}(u,\ v)$ обозначить вектор точки на поверхности, а через $\boldsymbol{n}(u,\ v)$ единичный вектор нормали к поверхности, то эти квадратичные формы записываются в виде

$$I=d\boldsymbol{r}^2,\quad II=-d\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{n}.$$

Коэффициенты первой и второй квадратичных форм обычно обозначаются E, $2F$, G и L, $2M$, N соответственно. Первая из этих форм дает расстояние на поверхности между точкой $(u,\ v)$ и бесконечно близкой точкой $(u+du,\ v+dv)$:

$$ds=\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}.$$

Длина кривой, задаваемой на поверхности уравнениями $u=u(t)$, $v=v(t)$, вычисляется при помощи первой квадратичной формы

$$L=\int_{t_0}^{t}\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}\,dt.$$

Первая квадратичная форма поверхности определяет углы между кривыми на поверхности. В частности, для угла ϑ между координатными линиями $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ в точке их пересечения имеет место формула

$$\cos\vartheta=\frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Отсюда видно, что координатная сеть на поверхности ортогональна, если $F=0$. Площадь поверхности также определяется первой квадратичной формой и для

области Ω на поверхности вычисляется по формуле

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Вторая квадратичная форма характеризует искривленность поверхности в пространстве. Именно, отношение второй квадратичной формы к первой

$$k = \frac{L\,du^2 + 2M du\,dv + N dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G dv^2}$$

представляет собой кривизну плоского сечения, нормального к поверхности, проведенного в направлении $du : dv$ (см. *Нормальная кривизна* поверхности). Существует простая связь между кривизной кривой, лежащей на поверхности, и кривизной нормального сечения поверхности, проведенного через касательную кривой (*Менье теорема*). Экстремальные значения нормальной кривизны поверхности в данной точке наз. *главными кривизнами*. Они достигаются по главным направлениям. Нормальная кривизна поверхности в произвольном направлении выражается через главные кривизны и углы, к-рые это направление образует с главными (*Эйлера формула*). Главные кривизны k_1 и k_2 определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} Ek - L & Fk - M \\ Fk - M & Gk - N \end{vmatrix} = 0.$$

Их полусумма называется *средней кривизной* поверхности. Важный класс поверхностей составляют поверхности нулевой средней кривизны — так называемые *минимальные поверхности*. Они отличаются тем, что достаточно малый кусок такой поверхности имеет наименьшую площадь среди поверхностей с той же границей. Произведение $K = k_1 k_2$ главных кривизн наз. *гауссовой кривизной* поверхности

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Из этой формулы видно, что гауссова кривизна поверхности выражается через коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Однако гауссову кривизну можно выразить через коэффициенты только первой формы и их производные (*Гаусса теорема*).

Две поверхности, между к-рыми может быть установлен гомеоморфизм, сохраняющий длины кривых, наз. *изометричными поверхностями*.

Коэффициенты первой и второй квадратичных форм независимы. Одно из соотношений между этими коэффициентами дает теорема Гаусса. Существуют еще два соотношения, открытые К. М. Петерсоном и Д. Кодацци (D. Codazzi) (см. *Петерсона — Кодацци уравнения*). Эти три соотношения составляют полную систему независимых соотношений между коэффициентами первой и второй квадратичных форм поверхности. Согласно *Бонне теореме*, если для двух дифференциальных квадратичных форм, из к-рых первая положительно определенная, выполнены соотношения Гаусса, Петерсона, Кодацци, то существует, и притом единственная, с точностью до положения в пространстве, поверхность, имеющая эти формы первой и соответственно второй квадратичными формами.

Раздел теории поверхностей, в к-ром изучаются свойства фигур на поверхности, зависящие только от измерения длин кривых на поверхности, наз. *внутренней геометрией* поверхностей. Так как длины кривых определяются первой квадратичной формой, то речь идет о таких свойствах, к-рые связаны только с первой квадратичной формой. В частности, объектами внутренней геометрии поверхностей являются длины кривых, углы между кривыми, площадь и гауссова кривизна. Важным понятием внутренней геометрии поверхности является понятие *геодезической линии*. Так

называется линия, к-рая на достаточно малом участке является кратчайшей среди всех кривых на поверхности, соединяющих ее концы. Следующее важное понятие внутренней геометрии поверхности — понятие *геодезической кривизны* кривой. *Гаусса — Бонне теорема* связывает интеграл от гауссовой кривизны поверхности по площади, интеграл от геодезич. кривизны края по его длине и эйлерову характеристику.

Внутренняя геометрия поверхности может быть построена как геометрия двумерного метрич. многообразия, в к-ром расстояние между бесконечно близкими точками (u, v) и $(u+du, v+dv)$ определяется с помощью заданной дифференциальной формы ds^2. При таком подходе к внутренней геометрии поверхности она допускает естественное обобщение, при к-ром заданное многообразие имеет любую размерность n, а метрика задается дифференциальной положительно определенной квадратичной формой n переменных $ds^2 = g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$. Дальнейшее обобщение состоит в отказе от положительной определенности формы ds^2. Это приводит к теории пространств общей теории относительности, в частности к *Минковского пространствам*. Если, наконец, отказаться и от квадратичной формы линейного элемента ds^2, а рассматривать общую положительную однородную форму первой степени от du^α, то получим *Финслерово пространство*. Еще более далеким обобщением внутренней геометрии поверхности является геометрия пространств со связностью данной группы, в частности геометрия пространств с *аффинной связностью*, *проективной связностью* и *конформной связностью*.

Лит.: [1] Bianchi L., Lezioni di geometria differenziale, t. 1—2, 3 ed., Bologna, 1927—30; [2] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applicatons géométriques du calcul infinitésimal, p. 1—4, 2 éd., P., 1894—1925; [3] Стройк Д. Дж., Очерк истории дифференциальной геометрии до XX столетия, пер. с англ., М.—Л., 1941; [4] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956; [5] Погорелов А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969; [6] Бляшке В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., М., 1957; [7] его же, Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна, пер. с нем., т. 1, М.—Л., 1935; [8] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [9] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1—2, М.—Л., 1947—48; [10] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963; [11] Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 1—2, М.—Л., 1939—1948; [12] Фиников С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М.—Л., 1937; [13] его же, Теория конгруэнций, М.—Л., 1950; [14] Широков П. А., Широкова А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1959; [15] Норден А. П., Пространства аффинной связности, М.—Л., 1950.

А. В. Погорелов.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ — раздел дифференциальной геометрии, изучающий различные *инфинитезимальные структуры* на многообразии и их связи со структурой многообразия и его топологией.

К середине 19 в. в результате возникновения неевклидовой геометрии Лобачевского, многомерной геометрии Грассмана, а также развития проективной геометрии и геометрии в комплексной области стало ясно, что привычная евклидова геометрия не является единственно возможной, и в математике с пользой можно развивать другие неевклидовы геометрии, независимо от их отношения к геометрии физического пространства.

В 1854 Б. Риман (B. Riemann) в лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» предложил новую, весьма плодотворную концепцию «многообразия» (см. *Риманово пространство*). Тем самым он положил начало *римановой геометрии*, являющейся важнейшей и наиболее разработанной частью Д. г. м. Концепция Римана не только позволила единообразно описать широкий класс геометрий (включая евклидову геомет-

рию и неевклидову геометрию Лобачевского), но и дала математич. аппарат, в рамках к-рого разнообразные задачи математич. физики и анализа, связанные с дифференциальными уравнениями, получили геометрич. трактовку, что позволило применять для их решения различные геометрич. и топологич. соображения, открыв новые возможности для применения геометрии к анализу. Именно в рамках римановой геометрии А. Эйнштейну (A. Einstein) удалось реализовать идеи о физич. пространстве как о континууме, свойства к-рого определяются распределением материи. Римановым пространством наз. *дифференцируемое многообразие* M, у к-рого в каждом касательном пространстве T_pM задана евклидова метрика g_p (т. е. положительно определенное скалярное произведение), гладко зависящая от точки $p \in M$. Наличие в касательном пространстве T_pM риманова пространства M скалярного произведения позволяет по формулам евклидовой геометрии определить угол между инфинитезимальными кривыми (т. е. векторами из T_pM), длину инфинитезимальной кривой, а также объем k-мерного параллелепипеда в T_pM, а затем, с помощью интегрирования, длину гладкой кривой на M и объем k-мерного подмногообразия в M. Это, в свою очередь, позволяет рассматривать в рамках римановой геометрии различные вариационные задачи и, в частности, определить в римановом пространстве понятие геодезической (или *геодезической линии*) как кривой экстремальной длины и *минимальной поверхности*, как подмногообразия экстремального объема.

Изучение геодезических риманова пространства представляет собой одну из основных задач современной (глобальной) римановой геометрии. Важность ее для приложений определяется тем, что разнообразные динамич. системы физики интерпретируются как равномерное движение по геодезическим того или иного псевдориманова пространства. К таким системам относятся, напр., движения пробных тел (см. *Геодезических гипотеза*) в общей теории относительности, распространение света в неоднородной среде в приближении геометрической оптики, различные системы классической механики. Было обнаружено, что нек-рые важные уравнения с частными производными (уравнение движения идеальной жидкости и уравнение Эйнштейна общей теории относительности) интерпретируются как уравнения геодезических для нек-рых бесконечномерных римановых пространств, называемых также гильбертовыми многообразиями (см. [5], [12]). Эти открытия стимулировали развитие геометрии бесконечномерных многообразий — глобальный анализ.

Уравнения геодезических удается полностью проинтегрировать только в редких случаях. В связи с этим важную роль приобретают геометрич. и топологич. методы качественного исследования поведения геодезических. Важнейшим среди них является созданная М. Морсом (M. Morse) вариационная теория геодезических (см. *Морса теория*).

Обобщение теории Морса на псевдоримановы пространства привело к доказательству теорем сингулярности, утверждающих, что в рамках общей теории относительности физическое пространство-время, как правило, должно обладать сингулярностью (неполными геодезическими). Физически сингулярности интерпретируются, напр., как «черные дыры» (см. [7]).

Поведение геодезических риманова пространства в значительной степени определяется его *кривизны тензором* — тензором Римана — геометрическим объектом, характеризующим отклонение риманова пространства от евклидова. Подобно *гауссовой кривизне* поверхности, обобщением к-рой он является, тензор кривизны риманова пространства M в точке x определяет свойства пространства M в окрестности точки x. Более

того, тензор кривизны несет богатую информацию о глобальных свойствах риманова пространства и о его топологии, напр. о *фундаментальной группе*, о *Бетти числах* и о *характеристических классах*. Изучение связи между локальными свойствами тензора кривизны и глобальными свойствами риманова пространства составляет одну из главных задач современной глобальной римановой геометрии.

Любое подмногообразие N риманова пространства M наследует от M структуру риманова пространства. Изучение подмногообразий риманова пространства, а также выяснение вопроса о реализации данного риманова пространства N в виде подмногообразия данного риманова пространства M составляют основное содержание геометрии подмногообразий (см. также *Изометрическое погружение*).

Важным направлением исследования римановых пространств, начатым работами С. Ли (S. Lie) и В. Киллинга (W. Killing), является изучение его группы движений (т. е. преобразований, сохраняющих длины кривых), к-рая всегда есть группа Ли. Многие римановы пространства M обладают достаточно богатой группой движений, причем наличие такой группы оказывается очень полезным при изучении целого ряда геометрич. вопросов. Наличие транзитивной группы движений G позволяет свести изучение геометрии и топологии пространства M к вопросам теории групп Ли (см. *Однородное пространство*).

Описание (связной) группы G движений риманова пространства (M, g) сводится к описанию алгебры Ли инфинитезимальных движений (или, иначе, *Киллинга векторов*), определяемых как поля скоростей однопараметрич. подгрупп группы G. Важную роль играют качественные геометрич. методы изучения киллинговых полей и выяснение связи между киллинговыми полями и геометрич. свойствами пространства, прежде всего свойствами его тензора кривизны. Так, напр., доказывается, что в компактном римановом пространстве с отрицательной кривизной Риччи не существует киллинговых полей; интегральная кривая киллингова поля, проходящая через точку экстремума его длины, является геодезической [16]; поведение киллингова поля X вблизи его неподвижных точек (точек, где $X=0$) определяет важный топологич. инвариант риманова пространства — его *Понтрягина числа* [19].

Особый интерес представляют римановы пространства, обладающие достаточно большой группой движений. Как обнаружил еще в 1868 Г. Гельмгольц (H. Helmholtz) и строго доказал С. Ли, n-мерное риманово пространство M, обладающее для данного n максимальной (в смысле размерности) группой движений является *постоянной кривизны пространством* (а именно, евклидовым пространством E^n, пространством Лобачевского Λ^n или сферич. пространством Римана S^n). Наиболее близкими к пространствам постоянной кривизны по своим свойствам являются *симметрические пространства*, т. е. римановы пространства, в к-рых геодезич. симметрия относительно произвольной точки является движением. Эти пространства всегда имеют транзитивную группу движений и допускают классификацию с помощью теории полупростых алгебр Ли (см. [8]).

Важную роль в дифференциальной геометрии играет понятие ковариантной производной $\nabla_X T$ тензорного поля T на M по направлению вектора $X \in T_p M$, к-рое ввел Г. Риччи (G. Ricci), развивший на основе этого понятия «абсолютное дифференциальное исчисление» (см. *Тензорный анализ*). Аппарат ковариантного дифференцирования оказался удобным для получения инвариантов геометрических объектов. Так, найденная Э. Кристоффелем (E. Christoffel) и Р. Липшицем (R. Liepschitz) полная система инвариантов римановой

метрики состоит из тензора кривизны и его последовательных ковариантных производных.

Понятие ковариантной производной позволяет канонич. образом определить в римановом пространстве ряд дифференциальных операторов, свойства к-рых тесно связаны с геометрией пространства. Важнейшими из них являются оператор Бельтрами—Лапласа Δ, введенный Э.Бельтрами (E. Beltrami) и совпадающий для евклидова пространства с *Лапласа оператором*. Широкий класс линейных уравнений с частными производными 2-го порядка получает интерпретацию в рамках псевдоримановых пространств как уравнений, соответствующих оператору Бельтрами — Лапласа. Это позволяет использовать риманову геометрию для изучения уравнений. Первый пример такого подхода (для уравнений теплопроводности) был дан Б. Риманом [1]. К настоящему времени получены результаты, устанавливающие связь между свойствами оператора Бельтрами — Лапласа риманова пространства, в частности его спектром, и геометрией пространства — его кривизной, числом замкнутых геодезических и т. п. (см. [19]).

Геометрическую интерпретацию понятия ковариантной производной дал Т. Леви-Чивита (T. Levi-Civita). Он показал, что в римановом пространстве можно каноническим образом определить параллельный перенос касательных векторов (тензоров) вдоль кривых, а оператор ковариантной производной Риччи является оператором инфинитезимального параллельного переноса (см. *Леви-Чивита связность*).

В 1926 Э. Картан (E. Cartan) ввел понятие *голономии группы*, как группы Γ_p линейных преобразований касательного пространства T_pM риманова пространства M, порожденной операторами τ_γ параллельного обноса вдоль всевозможных петель γ. Оказалось, что группа голономии тесно связана с тензором кривизны пространства и для односвязного аналитич. пространства полностью определяется тензором кривизны в точке и всеми его ковариантными производными, — с другой стороны, она содержит нек-рую информацию о геометрии и топологии пространства. Так, зная группу голономии, можно найти все параллельные поля, а также решить вопрос о возможности разложения риманова пространства в прямое произведение двух других римановых пространств. По группе голономии симметрич. пространства можно восстановить само пространство и описать его группу движений.

В 1919 Г. Вейль (H. Weyl), развивая идею параллельного переноса Т. Леви-Чивита и обобщая риманову концепцию пространства, рассмотрел пространство *линейной связности* — многообразие, в к-ром задан закон параллельного переноса касательных векторов вдоль кривых. В пространстве линейной связности определяются понятия геодезической, тензора кривизны, группы голономии. Риманово пространство является частным случаем пространства линейной связности, для к-рого группа голономии содержится в ортогональной группе. Если группа голономии содержится в линейной группе гомотетий $\mathbb{R}^* \cdot SO(n)$, то связность наз. к о н ф о р м н о й. В этом случае на многообразии возникает *конформная структура*.

Развитие идей Г. Вейля привело к созданию современной теории *связности*, изучающей связность (т. е. закон параллельного перенесения слоев вдоль кривых на базе) в данном расслоении. В рамках теории связностей развивается, в частности, теория характеристич. классов [11], [14]. Важную роль играет понятие связности в современной физике. Различные физич. поля (в частности, электромагнитное и гравитационное) могут быть интерпретированы как поля кривизны связности в том или ином расслоении в рамках теории Янга — Миллса. Наличие связности в любом физич. расслоении, т. е. расслоении, сечениями к-рого явля-

ются физич. поля, вытекает из физич. возможности сравнения характеристик поля в разных точках пространства — времени.

Другим обобщением риманова пространства является *финслерово пространство*, определяемое как многообразие с финслеровой метрикой. Примером такой метрики является лагранжиан механич. системы. Финслеровы многообразия естественным образом появляются также и в оптике.

Новый групповой подход к обоснованию геометрии, известный под названием «эрлангенской программы», был предложен Ф. Клейном (F. Klein) в 1872. В качестве основного объекта изучения геометрии Ф. Клейн предложил рассматривать G-пространство — множество M вместе с заданной группой G его преобразований.

Основной задачей геометрии по Клейну является изучение инвариантов группы преобразований (см. *Эрлангенская программа*). Несмотря на то, что подход Ф. Клейна оказался слишком узким — многие важные римановы пространства обладают тривиальной группой движений,— этот подход сыграл важную роль в развитии Д. г. м. Он привлек внимание к важному классу — однородным пространствам (т. е. G-пространствам с транзитивной группой G), изучение геометрии к-рых сводится в рамках эрлангенской программы к вопросам теории групп Ли, и способствовал дальнейшему обобщению концепции Римана. Это обобщение состояло в рассмотрении геометрии других (неримановых) инфинитезимальных структур на многообразии, задаваемых полем тех или иных геометрич. величин. Многие из этих структур впервые появились как инварианты группы движений того или иного однородного пространства.

Примерами неримановых инфинитезимальных геометрич. структур являются абсолютный параллелизм (поле реперов), *конформная связность*, *проективная связность*, *линейная связность*, распределение (или, более общо, *флаговая структура*), *почти комплексная структура*, *почти симплектическая структура*, поле *аффиноров* и т. п. Геометрия этих структур развивается по аналогии с римановой геометрией. Ее основными вопросами являются следующие: 1) Построение по данной геометрической структуре других (производных от нее) структур и, в частности, инвариантов. Иными словами, построение функторов из категории геометрич. структур данного типа в другие категории. 2) Изучение группы автоморфизмов геометрич. структуры, изучение геометрич. структур с достаточно большой группой автоморфизмов, описание структур данного типа с максимальной группой автоморфизмов, классификация структур данного типа на однородных пространствах. 3) Проблема эквивалентности, т. е. нахождение необходимых и достаточных условий для того, чтобы две геометрич. структуры были эквивалентны. 4) Изучение связи между топологией и структурой гладкого многообразия, с одной стороны, и свойствами заданной на нем геометрич. структуры — с другой. 5) Изучение отображений многообразий с геометрич. структурами, в частности изучение расслоений и подмногообразий.

Наиболее важным классом геометрических структур являются транзитивные структуры или G-структуры (см. [10]). Все перечисленные выше примеры структур (кроме поля аффиноров) являются G-структурами. Общая теория G-структур основана на двух фундаментальных идеях Э. Картана: понятии продолжения и понятии структурной функции. В частности, для римановой метрики эти понятия приводят к параллельному перенесению Леви-Чивиты и тензору кривизны. Теория G-структур конечного типа развивается во многом аналогично римановой геометрии. В геометрии

G-структур бесконечного типа наиболее изученные вопросы относятся к случаю локально плоских (интегрируемых) структур. Важнейшими из них являются комплексная структура (см. *Аналитическое многообразие*) и *симплектическая структура*, лежащая в основе гамильтоновой механики.

Э. Картан, развивая геометрич. методы решения систем уравнений с частными производными (систем Пфаффа), создал теорию внешних дифференциальных форм, оказавшую исключительно большое влияние на развитие дифференциальной геометрии. Оператор внешнего дифференцирования d оказался полезным для выражения условия интегрируемости систем уравнений с частными производными. Так, напр., необходимым и достаточным условием полной интегрируемости систем уравнений Пфаффа $\omega_1 = \ldots = \omega_k = 0$ является замкнутость идеала J, порожденного линейными дифференциальными формами $\omega_1, \ldots, \omega_k$ относительно d ($dJ \subset J$) (*Фробениуса теорема*). Теория дифференциальных форм была успешно применена Э. Картаном для решения разнообразных задач дифференциальной геометрии и теории групп Ли *подвижного репера методом*. Теория интегрирования устанавливает связь между исчислением дифференциальных форм и гомологиями многообразия (см. *Рама когомологии*, *Дифференциальная форма*).

В римановом пространстве оператор внешнего дифференцирования d выражается через оператор ковариантного дифференцирования ∇. Более того, теория Ходжа устанавливает глубокую связь между оператором d и оператором Бельтрами — Лапласа Δ, действующим в пространстве дифференциальных форм, к-рый можно выразить через оператор ∇. Теорема Ходжа утверждает, что пространство когомологий компактного многообразия изоморфно пространству гармонических (т. е. аннулируемых оператором Δ) дифференциальных форм (см. *Гармоническая форма*). Это и ряд других утверждений теории Ходжа дает информацию о строении кольца когомологий H^*M риманова пространства, обладающего нетривиальными параллельными дифференциальными формами (см. *Параллельное поле*) и, тем самым, имеющего нестандартную группу голономии $\Gamma \neq SO(n)$, $O(n)$. Примерами таких пространств являются *кэлеровы многообразия* и *симметрические пространства*.

Важным направлением исследований современной дифференциальной геометрии является изучение естественных расслоений над произвольным многообразием M (касательных и кокасательных расслоений порядка k, тензорных расслоений, расслоений реперов порядка k, расслоений струй и др.) и выявление имеющихся там естественных (т. е. инвариантных относительно диффеоморфизмов многообразия M) геометрических структур. Примерами таких структур являются канонические симплектическая структура в кокасательном расслоении T^*M и контактная структура в расслоении $J^1(M, \mathbb{R})$ 1-струй функций на M, играющие важную роль в теории дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка и в гамильтоновой механике, а также оператор внешнего дифференцирования в расслоении $\Lambda^*(M)$ внешних дифференциальных форм на M.

Успешно развивается алгебраич. подход к дифференциальной геометрии. В качестве исходного понятия рассматривается не многообразие M, а коммутативное кольцо F (кольцо функций на многообразии), а само многообразие M определяется в терминах кольца F как пространство максимальных идеалов (см. *Схема*). Векторные поля на M определяются как дифференцирования кольца (см. *Дифференциальный оператор* модуля). Такой подход позволяет обобщить различные результаты дифференциальной геометрии и упростить

их доказательство, применить идеи дифференциальной геометрии к другим математич. теориям (напр., теории колец и модулей) и, наоборот, использовать различные алгебраич. результаты в дифференциальной геометрии (см. [17]).

Лит.: [1] Риман Б., Избранные произведения, пер. с нем., М.—Л., 1948; [2] Картан Э., Геометрия римановых пространств, пер. с франц., М.—Л., 1936; [3] Каган В. Ф., Очерки по геометрии, М., 1963, с. 437—519; [4] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [5] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [6] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [7] Хокинг С., Эллис Дж., Крупномасштабная структура пространства — времени, пер. с англ., М., 1977; [8] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [9] Бишоп Р.-Л., Криттенден Р.-Дж., Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967; [10] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [11] Шварц Дж., Дифференциальная геометрия и топология, пер. с англ., М., 1970; [12] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967; [13] Зуланке Й., Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения, пер. с нем., М., 1975; [14] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [15] Lichnérowicz A., Géométrie des groupes de transformations, P., 1958; [16] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry, v. 1—2, N. Y., 1963—69; [17] Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В., Применения нелинейных дифференциальных уравнений, М., 1977; [18] Чжень С. С., «Успехи матем. наук», 1973, т. 33, в. 3, с. 15—111; [19] Молчанов С. А., там же, 1975, т. 30, в. 1, с. 3—59.

Д. В. Алексеевский.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГРУППА — абелева группа C, в к-рой задан такой эндоморфизм $d\colon C\to C$, что $d^2=0$. Этот эндоморфизм наз. дифференциалом. Элементы Д. г. наз. цепями, элементы ядра $\operatorname{Ker} d$ — циклами, элементы образа $\operatorname{Im} d$ — границами.

А. В. Михалев.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ОКРЕСТНОСТЬ $2k$-го порядка многообразия M класса C^p, $p\geqslant k+1$,— локальная *карта* k-го итерированного *касательного расслоения* $T^k(M)$.

А. Б. Иванов.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ — раздел топологии, изучающий топологич. проблемы теории дифференцируемых многообразий и дифференцируемых отображений, в частности диффеоморфизмов, погружений и расслоений. Попытки последовательного построения топологии на базе многообразий, отображений и дифференциальных форм предпринимались еще А. Пуанкаре (H. Poincaré) в конце 19 в., но в то время полная реализация этой программы оказалась невозможной. Систематическое построение Д. т. удалось осуществить лишь в 30-х гг. 20 в. благодаря усилиям ряда крупных математиков.

В Д. т. были выработаны важные общематематич. понятия — такие, как расслоенные пространства и связанные с ними дифференциально-геометрич. и топологич. понятия: связности, G-структуры, характеристич. классы, а также оснащенные многообразия. Большое значение в развитии Д. т. имела теория (ко)бордизмов, получившая ряд приложений в алгебраич. и аналитич. геометрии (теорема Римана — Роха), теории эллиптич. операторов (теорема об индексе), а также в самой топологии. В 50-х гг. были открыты различные гладкие структуры на сферах, затем была найдена классификация многообразий гомотопического типа сферы и доказана обобщенная гипотеза Пуанкаре, решена задача нахождения полной системы инвариантов всех односвязных многообразий (размерности не менее 5) относительно диффеоморфизмов. В 60-х гг. методами Д. т. был решен ряд основных топологич. проблем: установлена топологическая инвариантность характеристич. классов действительных многообразий, затем выяснено взаимоотношение между категориями дифференцируемых, кусочно линейных и топологических многообразий, были обобщены на неодно-

связные многообразия (правда, недостаточно эффективно) методы классификации гладких многообразий, возникла алгебраич. K-теория и эрмитова K-теория. Для неодносвязных многообразий были открыты глубокие связи между характеристич. классами и эрмитовыми формами над фундаментальной группой многообразия и ее гомологиями. В дальнейшем в проблеме гомотопич. инвариантности классов и теории эрмитовых форм над коцепями с инволюцией были получены глубокие результаты методами функционального анализа и алгебраич. методами. Важное значение имеют методы, связанные с задачей классификации погружений одного многообразия в другое и ее различных обобщений.

Особым направлением Д. т., пограничным с вариационным исчислением, является глобальная теория экстремалей различных функционалов на многообразиях геодезических, к-рая оказала большое влияние на развитие самой топологии, позволив дать классификацию векторных расслоений и в дальнейшем создать метод исследования топологич. инвариантов, именуемый K-теорией. Многомерные глобальные задачи вариационного исчисления на многообразиях оказались более трудными, рассматривалась в основном проблема минимальных поверхностей, как экстремалей функционала типа Дирихле. Ряд принципиально новых топологических проблем многомерного вариационного исчисления возник в 70-х гг. из теории элементарных частиц.

Другим особым направлением Д. т., пограничным с дифференциальной геометрией и теорией динамич. систем, является теория слоений (вполне интегрируемых локально систем Пфаффа). Так, было установлено существование замкнутого слоя у любого двумерного гладкого слоения на многих трехмерных многообразиях (напр., сфере). Ряд результатов качественной теории слоений был направлен на выяснение вопроса о существовании на многообразиях важного класса гиперболических динамич. систем. В дальнейшем возникло другое — дифференциально-геометрич. направление теории слоений, где был построен своеобразный аналог теории характеристич. классов для слоений, основанный на теории гомологий алгебр Ли векторных полей.

Значительным успехом методов Д. т. является теория «типичных» особенностей отображений и функций. Методы Д. т. нашли применение в классических задачах алгебраической геометрии; ранее результаты этой области (в частности, теоремы об овалах алгебраич. кривых) стояли изолированно, в стороне от основного развития топологии и геометрии. Развитие Д. т. вызвало к жизни ряд новых проблем и методов в алгебре — напр., так наз. стабильная алгебра, метод формальных групп и др., а также в теории дифференциальных уравнений с частными производными и динамич. систем, функциональном анализе и геометрии.

В 70-х гг. резко усилился интерес современных областей физики к методам Д. т., связанный с увеличением роли так называемых калибровочных полей (связностей в расслоениях с базой пространство — время) в теории элементарных частиц, сложной топологией решений в теории жидких кристаллов, теории фазовых переходов, в частности в низкотемпературном жидком гелии.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976; [2] Whitney H., «Ann. Math.», 1936, v. 37, p. 645—80; [3] Том Р., в сб.: Расслоенные пространства и их приложения, М., 1958, с. 293—351; [4] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 365—474; [5] Милнор Дж., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 6, с. 41—54; [6] Смейл С., там же, 1964, т. 19, в. 1, с. 125—38; [7] Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология. Начальный курс, пер. с англ., М., 1972; [8] Munkres J., Elementary differential topology, N. Y., 1963; [9] Милнор Дж., Теорема об h-кобор-

дизме, пер. с англ., М., 1969; [10] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [11] Рурк К., Сандерсон Б., Введение в кусочно линейную топологию, пер. с англ., М., 1974; [12] Wall C., Surgery on compact manifolds, N. Y.— L., 1970; [13] Browder W., Surgery on simply connected-manifolds, N. Y., 1972; [14] Коннер Л., Флойд Э., Гладкие периодические отображения, пер. с англ., М., 1969; [15] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [16] Новиков С. П., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1965, т. 14, с. 248—78; [17] Целочисленные потоки и минимальные поверхности, пер. с англ. и итал., М., 1973; [18] Мищенко А. С., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 69—134; [19] Гладкие динамические системы, пер. с англ., М., 1977. *С. П. Новиков.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА — 1) Д. ф. степени p, p-форма на дифференцируемом многообразии M — p раз ковариантное тензорное поле на M. Ее можно интерпретировать также как p-линейное (над алгеброй $F(M)$ гладких вещественных функций на M) отображение $\mathcal{X}(M)^p \to F(M)$, где $\mathcal{X}(M)$ есть $F(M)$-модуль гладких векторных полей на M. Формы степени 1 наз. также пфаффовыми формами. Примером такой формы является дифференциал df гладкой функции f на M, определяемый следующим образом: $(df)(X)$, $X \in \mathcal{X}(M)$, есть производная Xf функции f по направлению поля X. Римановы метрики на многообразии M служат примерами симметрических Д. ф. степени 2. Часто, однако, термин «Д. ф.» относят к кососимметрическим, или внешним Д. ф., имеющим наибольшее число приложений.

Если $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальная система координат в области $U \subset M$, то формы $dx^1, \ldots, dx^n$ составляют базис в кокасательном пространстве $T_x(M)^*$, $x \in U$. Поэтому (см. *Внешняя алгебра*) любая внешняя p-форма α записывается в U в виде

$$\alpha = \sum_{i_1, \ldots, i_p} a_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}, \qquad (1)$$

где $a_{i_1 \ldots i_p}$ — функции в U. В частности,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Пусть $E^p = E^p(M)$ — пространство всех внешних p-форм класса C^∞, причем $E^0(M) = F(M)$. Внешнее умножение $\alpha \wedge \beta$ превращает $E^*(M) = \sum_{p=0}^n E^p(M)$ (где $n = \dim M$) в ассоциативную градуированную алгебру над $F(M)$, удовлетворяющую условию градуированной коммутативности

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha, \qquad \alpha \in E^p, \ \beta \in E^q. \qquad (2)$$

Гладкое отображение многообразий $f: M \to N$ порождает гомоморфизм $f^*: E^*(N) \to E^*(M)$ алгебр над $\mathbb{R}$.

Понятие дифференциала функции обобщается следующим образом. Для всякого $p \geqslant 0$ существует единственное линейное отображение $d: E^p \to E^{p+1}$ (внешний дифференциал), совпадающее при $p = 0$ с введенным выше дифференциалом и обладающее свойствами:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta,$$
$$\alpha \in E^p, \quad \beta \in E^q, \quad d(d\alpha) = 0.$$

Внешний дифференциал формы α, записанной в локальных координатах в виде (1), выражается формулой

$$d\alpha = \sum_{i_1, \ldots, i_p} da_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Его бескоординатная запись:

$$d\alpha(X_1, \ldots, X_{p+1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i \alpha(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{p+1}) -$$
$$- \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \times$$
$$\times \alpha([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{p+1}),$$

где $X_1, \ldots, X_{p+1} \in \mathscr{X}(M)$. Оператор взятия *Ли производной* L_X, $X \in \mathscr{X}(M)$, на Д. ф. связан с внешним дифференциалом соотношением

$$L_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d,$$

где $\iota_X : E^p \to E^{p-1}$ — оператор внутреннего умножения на X:

$$(\iota_X \alpha)(X_1, \ldots, X_{p-1}) = \alpha(X, X_1, \ldots, X_{p-1}),$$
$$\alpha \in E^p(M), \; X_1, \ldots, X_{p-1} \in \mathscr{X}(M).$$

Оператор d превращает $E^*(M)$ в коцепной комплекс (комплекс де Рама). Коциклы этого комплекса наз. замкнутыми формами, кограницы — точными формами. Согласно де *Рама теореме*, алгебра когомологий

$$H^*(M) = \sum_{p=0}^{n} H^p(M)$$

комплекса де Рама изоморфна алгебре $H^*(M, \mathbb{R})$ вещественных когомологий многообразия M. В частности, $H^p(\mathbb{R}^n) = 0$ при $p > 0$ (лемма Пуанкаре).

С теоремой де Рама тесно связана другая операция — интегрирование Д. ф. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^p$, s — гладкое отображение $\mathbb{R}^p \to M$, определенное в окрестности замыкания $\bar{D}$. Если $\alpha \in E^p(M)$, то $s^*\alpha = a\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p$, где a — гладкая функция в $\bar{D}$. Интеграл формы α по поверхности s определяется формулой

$$\int_s \alpha = \int_D a(x_1, \ldots, x_p)\, dx^1 \ldots dx^p.$$

Если D имеет кусочно гладкую границу, то справедлива формула

$$\int_s d\alpha = \int_{\partial s} \alpha, \quad \alpha \in E^{p-1}(M), \tag{3}$$

где $\int_{\partial s} \alpha$ определяется как сумма интегралов формы α по гладким кускам границы, снабженных естественными параметризациями. Частными случаями этой формулы являются классич. формулы Ньютона — Лейбница, Грина, Гаусса — Остроградского, Стокса (см. также *Стокса теорема*). В силу формулы (3) каждая замкнутая p-форма α определяет p-мерный сингулярный коцикл, значение к-рого на симплексе s равно $\int_s \alpha$. Это соответствие как раз и реализует изоморфизм из теоремы де Рама.

Формула (3) была опубликована в 1899 А. Пуанкаре (см. [2]), к-рый рассматривал внешние формы как подинтегральные выражения для образования интегральных инвариантов. Одновременно Э. Картан (см. [3]) дал близкое к современному определение внешних форм и внешнего дифференциала (вначале на пфаффовых формах), подчеркнув связь своей конструкции с внешней алгеброй.

Наряду с определенными выше скалярными внешними формами можно рассматривать внешние Д. ф. со значениями в векторном пространстве V над $\mathbb{R}$. Если V является алгеброй, то в пространстве $E(M, V)$ форм со значениями в V определено естественное умножение (обобщение внешнего умножения). Если при этом алгебра V ассоциативна, то и $E(M, V)$ ассоциативна; если V коммутативна, то $E(M, V)$ градуированно-коммутативна (формула (2)); если V — алгебра Ли, то $E(M, V)$ — градуированная алгебра Ли. Часто рассматривается также следующее, еще более общее понятие. Пусть F — гладкое векторное расслоенное пространство с базой M. Если сопоставить каждой точке $x \in M$ кососимметрическую p-линейную функцию на $T_x(M)$ со значениями в слое F_x расслоения F, то

получится так наз. F-значная p-форма. F-значную p-форму можно интерпретировать также как p-линейное (над $F(M)$) отображение модуля $\mathscr{X}(M)^p$ в модуль гладких сечений расслоения F. Пространство таких форм обозначается $E^p(F)$. Если F задано локально постоянными функциями перехода или, что то же, в F задана плоская связность, то можно корректно определить комплекс де Рама и обобщить теорему де Рама на этот случай.

Формы со значениями в касательном расслоении $T(M)$ наз. также векторными Д. ф.; векторные p-формы можно отождествить с p раз ковариантными и 1 раз контравариантными тензорными полями на M, кососимметричными по ковариантным индексам. С помощью векторных Д. ф. описываются дифференцирования алгебры внешних форм $E(M)$ [4]. Векторные формы (а также их обобщение — струйные формы) находят применение в теории деформаций комплексных и других дифференциально-геометрич. структур на многообразиях.

Аналоги Д. ф. можно построить также в симплициальной теории. Одна из таких конструкций, восходящая к Х. Уитни [5], может быть использована для вычисления рациональных когомологий симплициального комплекса K. Кусочно линейной формой (или PL-формой) на K наз. согласованный набор Д. ф., заданных на симплексах комплекса K и имеющих в качестве коэффициентов при записи в барицентрич. координатах многочлены с рациональными коэффициентами. PL-формы на K образуют градуированно-коммутативную дифференциальную алгебру $E^*_{PL}(K)$ над $\mathbb{Q}$. Интегрирование форм определяет изоморфизм алгебры когомологий этой алгебры на алгебру $H^*(|K|, \mathbb{Q})$, где $|K|$ — полиэдр, отвечающий комплексу K. Алгебра $E^*_{PL}(K)$ полностью определяет также рациональный гомотопич. тип (в частности, ранги гомотопич. групп) пространства $|K|$. Аналогично алгебра $E^*(M)$ на дифференцируемом многообразии M определяет его вещественный гомотопич. тип [9].

Исчисление внешних форм на комплексном аналитич. многообразии имеет ряд особенностей [6]. В этой ситуации обычно рассматриваются пространства $E^p(M, \mathbb{C})$ комплекснозначных форм или пространства $E^p(F)$, где F — голоморфное векторное расслоение на M. Имеет место разложение

$$E^p(M, \mathbb{C}) = \sum\nolimits_{r+s=p} E^{r,s}(M),$$

где $E^{r,s}(M)$ — пространство форм типа (r, s), т. е. форм α, локально представимых в виде

$$\sum a_{i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s}\, dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_r} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_s},$$

где $(z^1, \ldots, z^n)$ — локальная аналитич. система координат на M. Аналогично

$$E^p(F) = \sum\nolimits_{r+s=p} E^{r,s}(F).$$

Далее, $d = d' + d''$, где

$$d' : E^{r,s}(M) \longrightarrow E^{r+1,s}(M), \quad d'' : E^{r,s}(M) \longrightarrow E^{r,s+1}(M).$$

При этом $d'^2 = d''^2 = 0$, так что d' и d'' определяют коцепные комплексы. Наиболее известен комплекс оператора d'' (комплекс Дольбо), когомологии к-рого обозначаются через $H^{r,s}(M)$. d''-коциклы типа $(p, 0)$ суть голоморфные p-формы (см. *Голоморфная форма*). Для d'' справедлива следующая лемма Гротендика: если α — форма типа (r, s) с $s>0$ в окрестности нуля пространства $\mathbb{C}^n$ и $d''\alpha = 0$, то в меньшей окрестности нуля существует такая форма β типа $(r, s-1)$, что $\alpha = d''\beta$. Комплекс Дольбо можно определить также и для F-значных форм, где F — го-

ломорфное векторное расслоение. Это приводит к пространствам когомологий $H^{r,s}(F)$. Из леммы Гротендика вытекает следующий изоморфизм:

$$H^{r,s}(F) \cong H^s(M,\ \Omega^r(F)),$$

где $\Omega^r(F)$ — пучок ростков голоморфных F-значных r-форм (теорема Дольбо). В частности,

$$H^{r,s}(M) \cong H^s(M,\ \Omega^r(M)),$$

где $\Omega^r(M)$ — пучок ростков голоморфных r-форм на M. Существует спектральная последовательность с первым членом $\Sigma_{r,s}H^{r,s}(M)$, сходящаяся к $H^*(M, \mathbb{C})$. Эйлерова характеристика $\chi(M)$ компактного комплексного многообразия M выражается через когомологии Дольбо по формуле

$$\chi(M) = \sum\nolimits_{r,\,s} (-1)^{r+s} \dim H^{r,s}(M).$$

Д. ф. являются важной составной частью аппарата дифференциальной геометрии (см. [7], [8]). Они систематически используются также в топологии, теории дифференциальных уравнений, механике, теории комплексных многообразий и функций многих комплексных переменных. Обобщением Д. ф., аналогичным обобщенным функциям, являются *потоки*. Алгебраич. аналог теории Д. ф. (см. *Дифференциалов модуль*) позволяет определить *дифференциальные формы* на алгебраических многообразиях и на аналитических пространствах (см. *Дифференциальное исчисление* на аналитических пространствах). См. также *Рама когомологии*, *Дифференциал на римановой поверхности*, *Гармоническая форма*, *Голоморфная форма*, *Лапласа оператор*.

Лит.: [1] де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, пер. с франц., М., 1956; [2] Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 3, P., 1899; [3] Cartan E., Œuvres complètes, pt. 2, t. 1, p. 303—96; [4] Frölicher A., Nijenhuis A., «Proc. Koninkl. ned. akad. wet.», Ser. A, 1956, v. 59, № 3, p. 338—59; [5] Уитни Х., Геометрическая теория интегрирования, пер. с англ., М., 1960; [6] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [7] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [8] Картан А., Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы, пер. с франц., М., 1971; [9] Гриффитс Ф. [и др.], «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 3, с. 119—52. *А. Л. Онищик.*

2) Д. ф. на алгебраическом многообразии — аналог понятия дифференциальной формы на дифференцируемом многообразии. Пусть X — неприводимое алгебраич. многообразие размерности d над алгебраически замкнутым полем k, K — его поле рациональных функций. Дифференциальной формой степени r на X наз. элемент K-пространства

$$\Omega^r(X) = \overset{r}{\wedge}\, \Omega^1_{K/k},$$

где $\Omega_{K/k}$ — *дифференциалов модуль* поля K над полем k. Если $x_1, \ldots, x_d$ — сепарабельный базис трансцендентности расширения K/k, то каждая Д. ф. $\omega \in \Omega^r(X)$ записывается в виде

$$\omega = \sum a_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r},$$

где $a_{i_1}, \ldots i_r \in K$. Д. ф. ω наз. регулярной на открытом множестве $U \subset X$, если ω принадлежит подмодулю $\Omega^r_{k[U]/k}$ пространства $\Omega^r(X)$, рассматриваемого как модуль над кольцом $k[U]$ регулярных функций на подмножестве U. Д. ф. ω наз. регулярной, если любая точка $x \in X$ имеет такую окрестность U, что ω регулярна на U. Регулярные Д. ф. на X образуют модуль над $k[X]$, обозначаемый $\Omega^r[X]$. Его элементы отождествляются с сечениями пучка $\Omega^r_{X/k}$ на многообразии X. В окрестности

любой точки $x \in X$ регулярная Д. ф. $\omega \in \Omega^r[X]$ записывается в виде

$$\omega = \sum \alpha_{i_1 \dots i_r} df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_r},$$

где функции $\alpha_{i_1 \dots i_r}, f_{i_1}, \dots, f_{i_r}$ регулярны в точке x. Если X — полное многообразие, то пространства $\Omega^r[X]$ конечномерны, а в случае, когда X неособое, размерность $p_g(X) = \dim_k \Omega^d[X]$ наз. геометрическим родом многообразия X. В случае, когда X — полное многообразие над полем комплексных чисел, пространство $\Omega^r[X]$ совпадает с пространством голоморфных Д. ф. степени r на соответствующем аналитич. пространстве X^{an}.

Пусть X — нормальное многообразие и $\omega \in \Omega^d[X]$; для любой точки $x \in X^{(1)}$ коразмерности 1 Д. ф. ω может быть записана в виде

$$\omega = a\, dt \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{d-1}, \qquad (*)$$

где a принадлежит полю частных K_x локального кольца $\mathcal{O}_{X,x}$, t — образующая его максимального идеала, $t_1, \dots, t_{d-1}$ — сепарабельный базис трансцендентности над k поля вычетов кольца $\mathcal{O}_{X,x}$. Значение нормирования на элементе a, определяемое кольцом $\mathcal{O}_{X,x}$, не зависит от выбора представления ω в виде $(*)$ и обозначается $\nu_x(\omega)$. Дивизор

$$D = \sum_{x \in X^{(1)}} \nu_x(\omega)\, \{\overline{x}\}$$

определен и наз. дивизором дифференциальной формы ω. Д. ф. ω регулярна тогда и только тогда, когда ее дивизор $D \geqslant 0$, т. е. $\nu_x(\omega) \geqslant 0$ для всех $x \in X^{(1)}$. Дивизоры любых двух Д. ф. эквивалентны, более того, дивизоры всех Д. ф. на данном алгебраич. многообразии образуют класс дивизоров относительно линейной эквивалентности. Этот класс наз. каноническим классом многообразия X и обозначается через K_X. Для неособого многообразия X класс K_X совпадает с первым классом Чженя обратимого пучка $\Omega^d_{X/k}$, в частности

$$\Omega^d_{X/k} \simeq \mathcal{O}_X(D)$$

для любого $D \in K_X$.

Для любого доминантного рационального отображения алгебраич. многообразий $f: X' \to X$ определен канонич. гомоморфизм

$$f^*: \Omega^r(X) \longrightarrow \Omega^r(X').$$

При этом, если X и X' — неособые, а X — полное, то f^* переводит регулярные Д. ф. в регулярные. В частности, если неособые полные многообразия X и X' бирационально изоморфны, то векторные пространства $\Omega^r[X]$ и $\Omega^r[X']$ изоморфны над полем k.

Для любого $i > 1$ элементы i-й симметрич. степени $S^i(\Omega^r(X))$ K-пространства $\Omega^r(X)$ наз. i-кратными дифференциальными формами степени r на X. Каждую такую Д. ф. можно рассматривать как рациональное сечение пучка $S^i(\Omega^r_{X/k})$. Регулярные сечения

$$\omega \in \Gamma\left(X,\ S^i\left(\Omega^r_{X/k}\right)\right)$$

наз. регулярными i-кратными дифференциальными формами степени r на X. Для неособого полного многообразия X размерность

$$P_i(X) = \dim_k \Gamma\left(X,\ S^i\left(\Omega^d_{X/k}\right)\right)$$

наз. i-родом многообразия X. Для бирационально изоморфных многообразий их i-роды совпадают.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Бальдассарри М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961. *И. В. Долгачев.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНТРОПИЯ — формальный аналог понятия энтропии для случайных величин, имеющих плотность распределения. Д. э. $h(\xi)$ случайной величины ξ, определенной на нек-ром вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, принимающей значения в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и имеющей плотность распределения $p(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, дается формулой

$$h(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x) \log p(x)\, dx$$

(здесь $0 \log 0$ считается равным 0). Таким образом, Д. э. совпадает с энтропией меры $P(\cdot)$ относительно меры Лебега $\lambda(\cdot)$, где $P(\cdot)$ — распределение ξ.

Понятие Д. э. оказывается полезным при вычислении различных теоретико-информационных характеристик, в первую очередь *информации количества* $J(\xi, \eta)$ случайных векторов ξ и η. В случае, когда $h(\xi)$, $h(\eta)$ и $h(\xi, \eta)$ (Д. э. пары (ξ, η)) конечны, справедлива формула:

$$J(\xi, \eta) = -h(\xi, \eta) + h(\xi) + h(\eta).$$

Среди свойств Д. э. можно отметить следующие два: 1) в отличие от обычной энтропии, Д. э. не ковариантна относительно изменения системы координат и может принимать отрицательные значения; 2) пусть $\varphi(\xi)$ — дискретизация с шагом Δx n-мерной случайной величины ξ, обладающей плотностью, тогда для энтропии $H(\varphi(\xi))$ справедлива формула

$$H(\varphi(\xi)) = -n \log \Delta x + h(\xi) + o(1)$$

при $\Delta x \to 0$. Таким образом, $H(\varphi(x)) \to +\infty$ при $\Delta x \to 0$, главный член асимптотики $H(\varphi(\xi))$ зависит от размерности пространства значений ξ, Д. э. задает следующий по порядку член асимптотич. разложения, не зависящий от Δx, причем это первый член, в к-ром проявляется зависимость от конкретного вида распределения ξ.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н., Яглом А. М., в кн.: Тр. 3-го Всесоюзного математического съезда, т. 3, М., 1958, с. 300—320; [2] Rényi A., Wahrscheinlichkeitsrechnung, B., 1962. *Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА — одно из основных понятий современной дифференциальной геометрии, включающее конкретные изучаемые в ней структуры. Д.-г. с. определяется для данного дифференцируемого многообразия M^n как дифференцируемое сечение в *расслоенном пространстве* (X_F, p_F, M^n) с базой M^n, ассоциированном с нек-рым главным расслоением (X, p, M^n), или, в другой терминологии, как дифференцируемое поле нек-рого геометрич. объекта на M^n. Здесь F является нек-рым дифференцируемым $\mathfrak{G}$-пространством, где $\mathfrak{G}$ — структурная группа Ли главного расслоения (X, p, M^n), или, в другой терминологии, пространством представления группы Ли $\mathfrak{G}$.

Если (X, p, M^n) — главное расслоение реперов в касательных к M^n пространствах, G — нек-рая замкнутая подгруппа в $\mathfrak{G} = GL(n, \mathbb{R})$, а F — однородное пространство $\mathfrak{G}/G$, то соответствующая Д.-г. с. на M^n наз. G-структурой, или инфинитезимальной структурой 1-го порядка. Напр., если G состоит из всех таких линейных преобразований (элементов из $GL(n, \mathbb{R})$), к-рые оставляют инвариантным m-мерное пространство в $\mathbb{R}^n$, то соответствующая G-структура определяет на M^n распределение m-мерных подпространств. Если G является ортогональной группой $\mathfrak{O}(n, \mathbb{R})$ — подгруппой элементов из $GL(n, \mathbb{R})$, сохраняющих скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, то G-структура есть риманова метрика на M^n, т. е. поле положительно определенного симметрич. тензора g_{ij}. Аналогично, частными случаями G-структуры на M^n являются почти комплексная и комплексная структуры. Обобщением G-структуры является инфините-

зимальная структура r-го порядка, $r>1$ (или G-структура высшего порядка); здесь (X, p, M^n) является главным расслоением реперов r-го порядка на M^n, а G — замкнутой подгруппой его структурной группы D_n^r.

Важными частными случаями Д.-г. с. являются *связности*. Напр., связность в главном расслоении получается, если в роли M^n выступает пространство P нек-рого главного расслоения (P, p, B), а G-структурой на P является такое распределение m-мерных, $m=\dim P-\dim B$, подпространств, дополнительных к касательным пространствам слоев, к-рое инвариантно относительно действия в P структурной группы расслоения. Связности на многообразии M^n являются частными случаями Д.-г. с. на M^n, но более общими, чем G-структуры на M^n. Напр., аффинная связность на M^n, к-рую можно определить полем объекта связности $\Gamma_{ij}^k(x)$, получается как Д.-г. с. на M^n, при к-рой (X, p, M^n) является главным расслоением реперов 2-го порядка, $\mathfrak{G}$ — его структурной группой D_n^2, а пространство F представления группы D_n^2 — пространством $\mathbb{R}^{3n}$ с координатами Γ_{ij}^k, где представление определяется формулами

$$\Gamma_{i'j'}^{k'}=\left(A_{i'}^{i}A_{j'}^{j}\Gamma_{ij}^{k}+A_{i'j'}^{k}\right)A_{k}^{k'};$$

здесь

$$A_{i'}^{i}=\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)_0, \qquad A_{i'j'}^{k}=\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\,\partial x^{j'}}\right)_0$$

— координаты элемента группы D_n^2, и $A_{k'}^{j}A_{i}^{k'}=\delta_i^j$. В случае проективной связности на M^n имеют дело с нек-рым представлением группы D_n^3 в пространстве $\mathbb{R}^{3(n+1)}$, а в случае связностей высшего порядка — с представлениями группы D_n^r. При таком подходе теория Д.-г. с. имеет самый тесный контакт с геометрических объектов теорией.

Лит.: [1] Вагнер В. В., [Дополнение], в кн.: Веблен О., Уайтхед Дж., Основания дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1949, с. 135—223; [2] Лаптев Г. Ф., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1953, т. 2, с. 275—382; [3] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [4] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970.

Ю. Г. Лумисте.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ, многозначное дифференциальное уравнение, дифференциальное уравнение с многозначной правой частью,— соотношение

$$\frac{dx}{dt}\in F(t, x), \tag{1}$$

где $x=x(t)$ — неизвестная вектор-функция на нек-ром интервале, $F(t, x)$ — множество в n-мерном пространстве, зависящее от числа t и вектора $x=(x_1, \ldots, x_n)$. Решением Д. в. (1) обычно называется абсолютно непрерывная вектор-функция $x(t)$, почти всюду на рассматриваемом интервале изменения t удовлетворяющая соотношению

$$\frac{dx(t)}{dt}\in F(t, x(t)).$$

В частности, если множество $F(t, x)$ состоит из одной точки, то Д. в. превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение $dx/dt=F(t, x)$. Уравнения вида $Dx(t)\in F(t, x(t))$, где $Dx(t)$ — *контингенция* [1], в широком классе случаев равносильны Д. в.

К Д. в. приводят, напр., задача о функциях, удовлетворяющих дифференциальному уравнению с заданной точностью

$$\left|\frac{dx(t)}{dt}-f(t, x(t))\right|\leqslant\varepsilon;$$

дифференциальные неравенства

$$f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)\geqslant 0;$$

дифференциальные уравнения с разрывной правой частью (см. [1], [2]); задачи теории оптимального управления (см. [3], [4]). В задачах управления обычно рассматривается уравнение

$$\frac{dx}{dt}=f\ (t,\ x,\ u), \tag{2}$$

где $x=x(t)$ — искомая вектор-функция, а $u=u(t)$ — управление, т. е. вектор-функция, к-рую можно выбирать произвольно среди всех допустимых управлений (таких, что $u(t)\in U$ при каждом t, где U — заданное множество, могущее зависеть от t и от $x=x(t)$). Множество решений уравнения (2) при всевозможных допустимых управлениях $u=u(t)$ удовлетворяет Д. в. (1), где $F(t,\ x)$ — множество всех значений функции $f(t,\ x,\ u)$, когда u пробегает множество U.

В теории Д. в. обычно предполагается, что при любых t, x из рассматриваемой области G множество $F(t,\ x)$ есть непустое замкнутое ограниченное множество n-мерного пространства. Если множество $F(t,\ x)$ всегда выпукло, при каждом t оно является полунепрерывной сверху функцией от x (т. е. для любых t, x и любого $\varepsilon>0$ при всех достаточно малых $|x'-x|$ множество $F(t,\ x')$ содержится в ε-окрестности множества $F(t,\ x)$), а при каждом x — измеримой функцией от t (т. е. для любого x и любого шара B в n-мерном пространстве множество значений t, при к-рых множество $F(t,\ x)\cap B$ не пусто, является измеримым по Лебегу), и если $F(t,\ x)$ всегда содержится в шаре $|x|\leqslant m(t)$, где функция $m(t)$ интегрируема по Лебегу, то при любых начальных условиях $x(t_0)=x_0$, $(t_0,\ x_0)\in G$, решение Д. в. существует (см. [5]) и *интегральная воронка*, состоящая из таких решений, обладает обычными свойствами [5]. От требования выпуклости множества $F(t,\ x)$ можно отказаться, если оно непрерывно зависит от x. При этом существование решения сохраняется [6], а свойства интегральных воронок — нет.

Обзор работ по теоремам существования решений для Д. в. и связи Д. в. с задачами управления см. в [7]. Для Д. в. рассматривается понятие устойчивости [8]; изучаются существование ограниченных и периодич. решений и другие свойства Д. в. [9].

Лит.: [1] Барбашин Е. А., Алимов Ю. И., «Изв. вузов. Математика», 1962, № 1, с. 3—13; [2] Филиппов А. Ф., «Матем. сб.», 1960, т. 51, № 1, с. 99—128; [3] Wazewski T., «Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math.», 1961, t. 9, № 3, p. 151—55; [4] Филиппов А. Ф., «Вестн. МГУ. Сер. матем.», 1959, № 2, с. 25—32; [5] Davy J. L., «Bull. Austral. Math. Soc.», 1972, v. 6, № 3, p. 379—98; [6] Olech C., «Boll. Unione mat. ital.», 1975, t. 11, № 3, p. 189—97; [7] Благодатских В. И., Summer School on ord. dif. eq, «Difford 74» (Czechosl.), 1974, p. 29—67; [8] Roxin E., «J. Dif. Equat.», 1965, v. 1, № 2, p. 115—50; [9] Поволоцкий А. И., Гайго Е. А., «Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та», 1970, т. 464, ч. 1, с. 235—42.

А. Ф. Филиппов.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — раздел математики, в к-ром изучаются понятия производной и дифференциала и способы их применения к исследованию функций. Развитие Д. и. тесно связано с развитием *интегрального исчисления*. Неразрывно и их содержание. Вместе они составляют основу математич. анализа, имеющего чрезвычайное значение для естествознания и техники. Основной предпосылкой для создания Д. и. явилось введение в математику переменных величин (Р. Декарт, R. Descartes). В общих чертах построение дифференциального и интегрального исчислений было завершено в трудах И. Ньютона (I. Newton) и Г. Лейбница (G. Leibniz) к концу 17 в., однако вопросы обоснования с помощью понятия пре-

дела были разработаны О. Коши (A. Couchy) лишь в начале 19 в. Создание дифференциального и интегрального исчисления явилось началом периода бурного развития математики и связанных с ней прикладных наук. Под Д. и. обычно понимают классич. Д. и., в к-ром рассматриваются действительные функции одного или нескольких действительных переменных, хотя в современном толковании может идти речь и о Д. и. в абстрактных пространствах. Д. и. основано на понятиях *действительного числа*, *функции*, *предела* и *непрерывности* — важнейших понятий математики, сформировавшихся и получивших современное содержание в процессе развития математич. анализа и работы над его обоснованием. Центральные понятия Д. и.— *производная* и *дифференциал* — и разработанный в Д. и. аппарат, связанный с ними, доставляют средства для исследований функций, локально сходных с линейной функцией или многочленом, а именно такие функции в первую очередь интересны для приложений.

П р о и з в о д н а я. Пусть функция $y=f(x)$ определена в нек-рой окрестности точки x_0, $\Delta x\neq 0$ есть приращение аргумента, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ — соответствующее приращение функции. Если существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то он наз. п р о и з в о д н о й функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$. Итак, по определению,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Операция вычисления производной наз. д и ф ф е р е н ц и р о в а н и е м. Если $f'(x_0)$ — конечна, функция $f(x)$ наз. д и ф ф е р е н ц и р у е м о й в т о ч к е x_0. Функция, дифференцируемая в каждой точке нек-рого промежутка, наз. д и ф ф е р е н ц и р у е м о й в п р о м е ж у т к е.

Г е о м е т р и ч е с к о е и с т о л к о в а н и е п р о и з в о д н о й. Пусть C — плоская кривая, заданная в прямоугольной системе координат уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ определена и непрерывна в нек-ром интервале, $M(x_0,\ y_0)$ — фиксированная точка на C, $P(x,\ y)$ — произвольная точка кривой C, MP — секущая (см. рис. 1). Прямая MT наз. к а с а т е л ь н о й к кривой C в точке M, если угол φ между секущей MP и этой прямой стремится к нулю, когда $x\to x_0$ (иными словами, когда точка $P\in C$ произвольным образом стремится к точке M). Если упомянутая касательная существует, то она — единственна. Если положить $x=x_0+\Delta x$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, то для угла β между MP и положительным направлением оси Ox будет иметь место равенство $\operatorname{tg}\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (см. рис. 1). Кривая C имеет в точке M касательную в том и только в том случае, если существует $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. существует $f'(x_0)$. При этом для угла α между касательной и положительным направлением оси Ox справедливо равенство $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$. В случае конечной производной $f'(x_0)$ касательная образует с Ox острый угол, т. е.

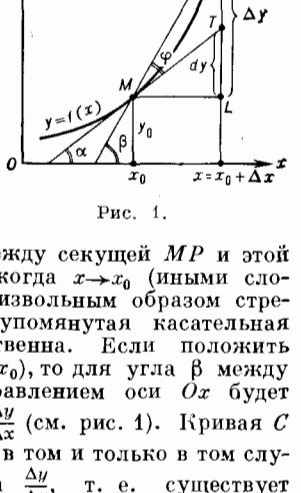


Рис. 1.

$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$; в случае $f'(x_0)=\infty$ касательная образует с Ox прямой угол (см. рис. 2). Таким образом, производная непрерывной функции $f(x)$ в точке x_0 совпадает с угловым коэффициентом $\operatorname{tg}\alpha$ касательной к кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, в ее точке с абсциссой x_0.

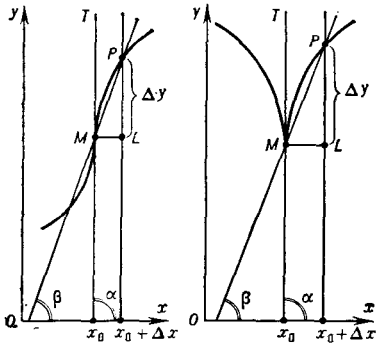


Рис. 2.

Механическое истолкование производной. Пусть точка M движется прямолинейно по закону $s=f(t)$. За время Δt точка M сместится на $\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t)$. Отношение $\Delta s/\Delta t$ представляет собой среднюю скорость $v_{ср}$ точки за время Δt. При неравномерном движении $v_{ср}$ не постоянна. Мгновенной скоростью в момент t наз. предел средней скорости при $\Delta t\to 0$, т. е. $v=f'(t)$ (в предположении, что эта производная существует).

Таким образом, понятие производной доставляет общее решение задачи о построении касательной к плоской кривой и задачи о вычислении скорости прямолинейного движения. Эти две задачи явились основными предпосылками в формировании понятия производной.

Функция, имеющая в точке x_0 конечную производную, непрерывна в этой точке. В случае бесконечной производной этого может не быть. Непрерывная функция может не иметь ни конечной, ни бесконечной производной. Существуют непрерывные функции, не имеющие производной ни в одной точке области определения.

Для производных основных элементарных функций справедливы следующие формулы (в любой точке области определения; исключения оговариваются):

1) если $f(x)=C=\text{const}$, то $f'(x)=C'=0$;
2) если $f(x)=x$, то $f'(x)=1$;
3) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha=\text{const}$ ($x\neq 0$, если $\alpha\leqslant 1$);
4) $(a^x)'=a^x\ln a$, $a=\text{const}>0$, $a\neq 1$, в частности, $(e^x)'=e^x$;
5) $(\log_a x)'=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\ln a}$, $a=\text{const}>0$, $a\neq 1$, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$;
6) $(\sin x)'=\cos x$;
7) $(\cos x)'=-\sin x$;
8) $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$;
9) $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$;
10) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\neq\pm 1$;
11) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\neq\pm 1$;
12) $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$;
13) $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$;
14) $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$;
15) $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$;
16) $(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
17) $(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Имеют место также следующие правила дифференцирования;

1) Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функции

$$cu \text{ (где } c=\text{const)},\ u \pm v,\ uv,\ u/v\ (v \neq 0)$$

также дифференцируемы в этой точке, причем

$$(cu)' = cu',$$
$$(u \pm v)' = u' \pm v',$$
$$(uv)' = u'v + uv',$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

2) Теорема о производной сложной функции: если функция $y=f(u)$ дифференцируема в точке u_0, а функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, причем $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $y'_x=f'(u_0)\varphi'(x_0)$ или, в другой записи, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

3) Теорема о производной обратной функции: если $y=f(x)$ и $x=g(y)$ — две взаимно обратные возрастающие (или убывающие) функции, заданные на нек-рых интервалах, и существует конечная производная $f'(x_0)\neq 0$, то в точке $y_0=f(x_0)$ существует конечная производная $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$, или, в другой записи, $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$. Эта теорема допускает обобщение: если, при выполнении прочих условий, $f'(x_0)=0 (f'(x_0)=\infty)$, то $g'(y_0)=\infty$ (соответственно $g'(y_0)=0$).

Односторонние производные. Если в точке x_0 существует предел

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то он наз. правой производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 (в этом случае нет необходимости требовать, чтобы функция была определена всюду в нек-рой окрестности точки x_0; достаточно потребовать этого лишь для $x \geqslant x_0$). Аналогично определяется левая производная — как предел

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 в том и только в том случае, если в этой точке существуют равные между собой правая и левая производные. Для непрерывной функции существование в точке правой (соответственно левой) производной равносильно существованию в соответствующей точке ее графика правой (соответственно левой) односторонней полукасательной с угловым коэффициентом, равным значению этой односторонней производной. Точки, в к-рых полукасательные не образуют одну прямую, называются угловыми точками (см. рис. 3).

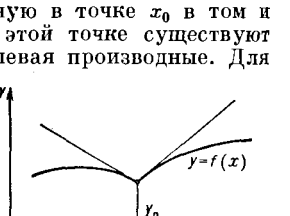


Рис. 3

Производные высших порядков. Пусть функция $y=f(x)$ имеет конечную производную $y'=f'(x)$ в каждой точке нек-рого интервала; эта производная наз. также первой производной, или производной первого порядка, к-рая, будучи функцией от x, может, в свою очередь, иметь производную $y''=f''(x)$, называемую второй

производной, или производной второго порядка, функции $f(x)$, и т. д. Вообще n-я производная, или производная порядка n, определяется по индукции равенством $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$, в предположении, что $y^{(n-1)}$ определена на нек-ром интервале. При этом, наряду с $y^{(n)}$, используются также обозначения $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, а для $n=2, 3$ еще y'', $f''(x)$, y''', $f'''(x)$.

Вторая производная имеет механич. истолкование: это есть ускорение $w=\frac{d^2s}{dt^2}=f''(t)$ в момент t точки, движущейся прямолинейно по закону $s=f(t)$.

Дифференциал. Пусть функция $y=f(x)$ определена в нек-рой окрестности точки x и существует такое число A, что приращение Δy может быть представлено в виде $\Delta y=A\Delta x+\omega$, где $\omega/\Delta x\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Член $A\Delta x$ в этой сумме обычно обозначается символом dy, или $df(x)$, и наз. дифференциалом функции $f(x)$ (по переменному x) в точке x. Дифференциал есть главная линейная часть приращения функции (геометрически изображается отрезком LT на рис. 1, где MT — касательная к кривой $y=f(x)$ в рассматриваемой точке (x_0, y_0)).

Функция $y=f(x)$ имеет в точке x дифференциал в том и только в том случае, если она имеет в этой точке конечную производную

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A.$$

Функция, для к-рой существует дифференциал, наз. дифференцируемой в рассматриваемой точке. Таким образом, дифференцируемость функции и означает одновременно и существование дифференциала, и существование конечной производной. При этом $dy=df(x)=f'(x)\Delta x$. Для независимого переменного x полагают $dx=\Delta x$ и поэтому можно писать $dy=f'(x)dx$, т. е. производная равна отношению дифференциалов:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

См. также *Дифференциал*.

Формулы и правила вычисления для производных приводят к соответствующим формулам и правилам вычисления для дифференциалов. В частности, справедлива теорема о дифференциале сложной функции: если функция $y=f(u)$ дифференцируема в точке u_0, а функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, причем $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $dy=f'(u_0)du$, где $du=\varphi'(x_0)dx$. Дифференциал сложной функции имеет точно такой же вид, как если бы переменное u было независимым. Это свойство наз. инвариантностью формы дифференциала. Однако, если u — независимое переменное, $du=\Delta u$ есть произвольное приращение, а если u — функция, то du есть дифференциал этой функции, вообще говоря, не совпадающий с ее приращением.

Дифференциалы высших порядков. Дифференциал dy наз. также первым дифференциалом, или дифференциалом первого порядка. Пусть $y=f(x)$ имеет дифференциал $dy=f'(x)dx$ в каждой точке нек-рого интервала. Здесь $dx=\Delta x$ — некоторое число, не зависящее от x, и поэтому можно считать $dx=\text{const}$. При этом dy оказывается функцией только от x и, в свою очередь, может иметь дифференциал, к-рый наз. вторым дифференциалом, или дифференциалом второго порядка функции $f(x)$, и т. д. Вообще, n-й дифференциал, или дифференциал n-го

порядка, определяется по индукции равенством $d^n y = d(d^{n-1}y)$ в предположении, что дифференциал $d^{n-1}y$ определен в нек-ром интервале и что значение dx одно и то же на всех шагах. Свойство инвариантности для d^2y, d^3y, ..., вообще говоря, не имеет места (исключение составляет $y=f(u)$, где u — линейная функция).

Повторный дифференциал от dy имеет вид

$$\delta(dy) = f''(x)dx\delta x$$

и вторым дифференциалом является значение $\delta(dy)$ при $dx=\delta x$.

Основные теоремы и приложения Д. и. К основным теоремам Д. и. для функций одного переменного обычно относят *Ролля теорему*, *Лагранжа теорему* (о конечном приращении), *Коши теорему* и *Тейлора формулу*. Эти теоремы лежат в основе наиболее важных приложений Д. и. к исследованию свойств функций — таких, как возрастание и убывание функции, выпуклость и вогнутость графика, к отысканию *экстремумов*, *перегиба точек*, *асимптот* графика. Д. и. позволяет вычислять пределы функций во многих случаях, когда простейшие теоремы о пределах не позволяют сделать этого (см. *Неопределенностей раскрытие*). Д. и. находит широкие приложения во многих разделах математики, в частности в геометрии.

Д. и. функций многих переменных. Для простоты рассматривается случай функций двух переменных (за нек-рым исключением), хотя все понятия легко распространяются на случай трех и большего числа переменных. Пусть функция $z=f(x, y)$ задана в нек-рой окрестности точки (x_0, y_0) и пусть зафиксировано значение $y=y_0$. Тогда $f(x, y_0)$ есть функция только от x. Если она имеет в x_0 производную по x, то эта производная наз. частной производной функции $f(x, y)$ по x в точке (x_0, y_0) и обозначается $f'_x(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, z'_x, $\frac{\partial z}{\partial x}$. Итак, по определению,

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

где $\Delta_x z = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ — частное приращение функции по x ($\partial z/\partial x$ в общем случае нельзя рассматривать как дробь; $\partial/\partial x$ есть символ операции).

Аналогично определяется частная производная по y:

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

где $\Delta_y z$ — частное приращение функции по y. Другие обозначения: $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, z'_y, $\frac{\partial z}{\partial y}$. Частные производные вычисляются по правилам дифференцирования функций одного переменного (при вычислении z'_x нужно считать $y=\text{const}$, а при вычислении z'_y — считать $x=\text{const}$).

Частными дифференциалами функции $z=f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) наз. (соответственно) выражения

$$d_x z = f'_x(x_0, y_0)\,dx; \quad d_y z = f'_y(x_0, y_0)\,dy$$

(где, как и в случае одного переменного, $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$ означают приращения независимых переменных).

Первые частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$, или частные произ-

водные первого порядка, являясь функциями от x и y, могут в свою очередь иметь частные производные по x и y, к-рые называются, по отношению к функции $z=f(x, y)$, частными производными второго порядка, или вторыми частными производными. При этом полагают

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Вместо $\partial^2 z/\partial x^2$ употребляют также обозначения

$$z''_{xx}, \ z''_{x^2}, \ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ f''_{xx}(x, y), \ f''_{x^2}(x, y);$$

вместо $\partial^2 z/\partial x \partial y$ — обозначения

$$z''_{xy}, \ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ f''_{xy}(x, y)$$

и т. д. Подобным образом вводятся частные производные третьего порядка и выше, и соответствующая символика: $\partial^n z/\partial x^n$ — функция z дифференцируется n раз по x; $\partial^n z/\partial x^p \partial y^q$, где $n=p+q$,— функция z дифференцируется p раз по x и q раз по y. Частные производные второго и высших порядков, являющиеся результатом дифференцирования по разным переменным, наз. смешанными частными производными.

Каждой частной производной отвечает нек-рый частный дифференциал, получаемый умножением ее на дифференциалы независимых переменных, взятые в степенях, равных числу дифференцирований по соответствующему переменному. Так получаются n-е частные дифференциалы, или частные дифференциалы n-го порядка:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^q} dx^p dy^q.$$

Справедлива следующая важная теорема о смешанных производных: если в нек-рой окрестности точки (x_0, y_0) функция $z=f(x, y)$ имеет смешанные частные производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ и эти производные непрерывны в точке (x_0, y_0), то $f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Функция $z=f(x, y)$ наз. дифференцируемой в точке (x_0, y_0) по совокупности переменных x и y, если она определена в нек-рой окрестности этой точки и ее полное приращение

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, \ y_0+\Delta y)-f(x_0, \ y_0)$$

может быть представлено в виде

$$\Delta z=A\,\Delta x+B\,\Delta y+\omega,$$

где A и B — некоторые числа, $\omega/\rho \to 0$ при $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \to 0$ (при условии, что точка $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ принадлежит упомянутой окрестности). При этом выражение

$$dz=df(x_0, \ y_0)=A\,\Delta x+B\,\Delta y$$

наз. полным дифференциалом (первого порядка) функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0); это есть главная линейная часть приращения. Функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в этой точке (обратное не всегда верно!). Более того, дифференцируемость влечет существование конечных частных производных

$$f'_x(x_0, \ y_0)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A, \ f'_y(x_0, y_0)=\lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=B.$$

Таким образом, для функции, дифференцируемой в $(x_0,\ y_0)$,

$$dz = df\,(x_0,\ y_0) = f'_x\,(x_0,\ y_0)\,\Delta x + f'_y\,(x_0,\ y_0)\,\Delta y,$$

или

$$dz = df\,(x_0,\ y_0) = f'_x\,(x_0,\ y_0)\,dx + f'_y\,(x_0,\ y_0)\,dy,$$

если, подобно случаю одного переменного, положить для независимых переменных $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Существование конечных частных производных в общем случае не влечет ее дифференцируемости (здесь нарушается аналогия с функциями одного переменного). Достаточный признак дифференцируемости функции двух переменных: если в нек-рой окрестности точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет конечные частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, непрерывные в точке (x_0, y_0), то f дифференцируема в этой точке. Геометрически полный дифференциал $df(x_0,\ y_0)$ есть приращение аппликаты касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0), где $z_0 = f(x_0,\ y_0)$ (см. рис. 4).

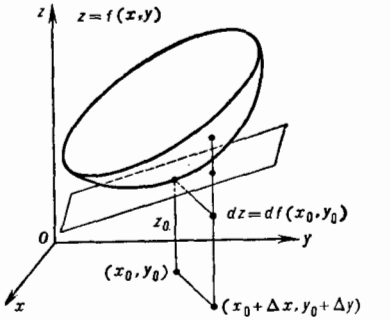


Рис. 4.

Полные дифференциалы высших порядков, подобно случаю функций одного переменного, вводятся по индукции равенством

$$d^n z = d\,(d^{n-1} z)$$

в предположении, что дифференциал $d^{n-1}z$ определен в нек-рой окрестности рассматриваемой точки и что приращения аргументов dx, dy берутся одни и те же на всех шагах. Аналогично определяются и повторные дифференциалы.

Производные и дифференциалы сложных функций. Пусть $w = f(u_1, \ldots, u_m)$ — функция m переменных, дифференцируемая в каждой точке открытой области D m-мерного евклидова пространства R^m, и пусть m функций $u_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $u_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$ — от n переменных заданы в открытой области G n-мерного евклидова пространства R^n. Пусть, наконец, точка $(u_1, \ldots, u_m)$, соответствующая точке $(x_1, \ldots, x_n) \in G$, не выходит из области D. Тогда справедливы следующие теоремы:

1) Если функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ имеют конечные частные производные по $x_1, \ldots, x_n$, то сложная функция $w = f(u_1, \ldots, u_m)$ от $x_1, \ldots, x_n$ также имеет конечные частные производные по $x_1, \ldots, x_n$ и

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n}.$$

2) Если функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ дифференцируемы по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_n$ в точке $(x_1, \ldots, x_n) \in G$, то и сложная функция $w = f(u_1, \ldots, u_m)$ дифференцируема в этой точке и

$$dw = \frac{\partial f}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}du_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}du_n,$$

где $du_1, \ldots, du_m$ — дифференциалы функций $u_1, \ldots, u_m$. Таким образом, свойство инвариантности первого

дифференциала имеет место и для функций нескольких переменных. Для дифференциалов второго и высших порядков это свойство, вообще говоря, нарушается.

Д. и. применяется к изучению свойств функций многих переменных: к отысканию экстремумов, к исследованию функций, задаваемых одним или несколькими неявными уравнениями, к теории поверхностей и т. д. Одним из главных инструментов при этом является *Тейлора формула*.

Понятия производной и дифференциала и их простейшие свойства, связанные с арифметич. действиями над функциями и суперпозицией функций, включая свойство инвариантности первого дифференциала, почти без изменений распространяются на комплексные функции одного или нескольких действительных переменных, на действительные и комплексные вектор-функции одного или нескольких действительных переменных, на комплексные функции и вектор-функции одного или нескольких комплексных переменных. В функциональном анализе понятия производной и дифференциала распространяются на функции точки абстрактного пространства.

Лит.: История дифференциального и интегрального исчисления — [1] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. 1—3, М., 1970—72; [2] Рыбников К. А., История математики, т. 1—2, М., 1960—63; [3] Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966; [4] Стройк Д. Я., Краткий курс истории математики, пер. с нем., 2 изд., М., 1969; [5] Бурбаки Н., Очерки по истории математики, пер. с франц., М., 1963; [6] Cantor M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2 Aufl., Bd 1—4, Lpz., 1900—08.

Работы основоположников и классиков дифференциального и интегрального исчисления — [7] Ньютон И., Математические работы, пер. с латин., М.— Л., 1937; [8] Лейбниц Г., Избранные отрывки из математических сочинений, пер. с латин., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 1; [9] Л'Опиталь Г. Ф. де, Анализ бесконечно малых, пер. с франц., М.— Л., 1935; [10] Эйлер Л., Введение в анализ бесконечных, пер. с латин., 2 изд., т. 1, М., 1961; [11] его же, Дифференциальное исчисление, пер. с латин., М.—Л., 1949; [12] Коши О. Л., Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении, пер. с франц., СПБ, 1831; [13] его же, Алгебраический анализ, пер. с франц., Лейпциг, 1864.

Учебники и учебные пособия по дифференциальному и интегральному исчислению — [14] Гурса Э., Курс математического анализа, пер. с франц., 3 изд., т. 1, М.—Л., 1936; [15] Ла Валле Пуссен Ш. Ж. де, Курс анализа бесконечно малых, пер. с франц., т. 1, Л.—М., 1933; [16] Курант Р., Курс дифференциального и интегрального исчисления, пер. с нем. и англ., 4 изд., т. 1, М., 1967; [17] Рудин Р., Основы математического анализа, пер. с англ., М., 1966; [18] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, т. 1, 3 изд., М., 1971; т. 2, 1973; [19] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., М., 1973; [20] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., М., 1975; [21] Толстов Г. П., Элементы математического анализа, т. 1—2, 2 изд., М., 1974; [22] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 22 изд., т. 1, М., 1967; [23] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., М., 1969; [24] Хинчин А. Я., Восемь лекций по математическому анализу, 3 изд., М.— Л., 1948.

Г. П. Толстов.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ на аналитических пространствах — обобщение классич. исчисления дифференциальных форм и дифференциальных операторов на случай аналитич. пространств. Об исчислении дифференциальных форм на комплексных многообразиях см. *Дифференциальная форма*. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — аналитич. пространство над полем k, Δ — диагональ в $X \times X$, J — пучок идеалов, определяющий Δ и порожденный всеми ростками вида $\pi_1^* f - \pi_2^* f$, где f — произвольный росток из $\mathcal{O}_X$, π_i: $X \times X \to X$ — проекция на i-й сомножитель.

Аналитич. пучок $\pi_1 (J/J^2) = \Omega^1_X$ наз. пучком аналитических дифференциальных форм первой степени на X. Если f — росток аналитич. функции на X, то росток $\pi_1^* f - \pi_2^* f$ принадлежит J и определяет элемент df пучка Ω^1_X, $\pi_1 (J/J^2)$, называ-

емый дифференциалом ростка f. Тем самым определяется гомоморфизм пучков векторных пространств $d: \mathcal{O}_X \to \Omega^1_X$. Если $X = k^n$, то Ω^1_X — свободный пучок, порожденный $dx_1, \ldots, dx_n$, где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в k^n. Если X — аналитич. подпространство в k^n, определяемое пучком идеалов J, то

$$\Omega^1_X \cong \Omega^1_{k^n} / (J\Omega^1_{k^n} + dJ)\,|_X.$$

С каждым аналитич. отображением $f: X \to Y$ можно связать пучок относительных дифференциалов Ω^1_X. Это — аналитич. пучок $\Omega^1_{X/Y}$, индуцирующий $\Omega^1_{X_s}$ на каждом слое X_s ($s \in Y$) отображения f; он определяется из точной последовательности

$$f^*\Omega^1_Y \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

Пучок $\Theta_X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)$ наз. пучком ростков аналитических векторных полей на X. Если X — многообразие, то Ω^1_X и Θ_X — локально свободные пучки, естественно изоморфные пучкам ростков аналитич. сечений кокасательного и касательного расслоений над X соответственно.

Аналитич. пучки $\Omega^p_X = \bigwedge^p_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$ наз. пучками аналитических внешних дифференциальных форм степени p на X (при $k = \mathbb{C}$ их наз. также *голоморфными формами*). Для всякого $p \geqslant 0$ определяется гомоморфизм пучков векторных пространств $d^p: \Omega^p_X \to \Omega^{p+1}_X$, совпадающий при $p = 0$ с введенным выше и удовлетворяющий условию $d^{p+1} d^p = 0$. Комплекс пучков (Ω^*_X, d) наз. комплексом де Рама пространства X. Если X — многообразие и $k = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, то комплекс де Рама является точным комплексом пучков. Если X многообразие Штейна или вещественное аналитич. многообразие, то когомологии комплекса сечений $\Gamma(\Omega^*_X)$, часто также называемого комплексом де Рама, изоморфны $H^p(X, k)$.

Если X имеет особые точки, то комплекс де Рама не обязан быть точным. В случае, когда $k = \mathbb{C}$, достаточным условием точности комплекса де Рама в точке $x \in X$ является наличие у x комплексно аналитически стягиваемой окрестности. Гипергомологии комплекса $\Gamma(\Omega^*_X)$ при $k = \mathbb{C}$ содержат когомологии пространства X с коэффициентами в $\mathbb{C}$ в качестве прямого слагаемого и совпадают с ними, если X гладко. Сечения пучка Θ_X наз. аналитическими (а при $k = \mathbb{C}$ также голоморфными) векторными полями на X. Поле $Z \in \Gamma(X, \Theta_X)$ определяет для любого открытого $U \subset X$ дифференцирование алгебры аналитич. функций $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, действующее по формуле $\varphi \to Z\varphi = Z(d\varphi)$. Если $k = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, то Z задает локальную однопараметрич. группу $\exp tZ$ автоморфизмов пространства X. Если при этом X компактно, то группа $\exp tZ$ определима глобально.

Пространство $\Gamma(X, \Theta_X)$, снабженное скобкой Ли, является алгеброй Ли над k. Если X — компактное комплексное пространство, то $\Gamma(X, \Theta_X)$ — алгебра Ли группы $\mathrm{Aut}\, X$.

Дифференциальные операторы на аналитич. пространстве $(X, \mathcal{O}_X)$ определяются аналогично *дифференциальным операторам* модуля. Если F, G — аналитич. пучки на X, то линейным дифференциальным оператором порядка $\leqslant l$, действующим из F в G, наз. гомоморфизм пучков векторных пространств $F \to G$, продолжающийся до аналитич. гомоморфизма $F \otimes \pi_1(\mathcal{O}_{X \times X}/I^{l+1}) \to G$. Если X гладко, а F и G локально свободны, то это определение приводит

к обычному понятию дифференциального оператора на векторном расслоении [3], [4].

Ростки линейных дифференциальных операторов $F \to G$ образуют аналитич. пучок $\mathrm{Diff}(F, G)$ с фильтрацией

$$\mathrm{Diff}^0(F, G) \subset \mathrm{Diff}^1(F, G) \subset \ldots \subset \mathrm{Diff}^l(F, G) \subset \ldots,$$

где $\mathrm{Diff}^l(F, G)$ — пучок ростков операторов порядка $\leq l$. В частности, $\mathrm{Diff}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ — фильтрованный пучок ассоциативных алгебр над k относительно композиции отображений. Имеем

$$\mathrm{Diff}^0(F, G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G),$$

$$\mathrm{Diff}^1(\mathcal{O}, \mathcal{O})/\mathrm{Diff}^0(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \cong \Theta_X.$$

Изучение пучка $\mathrm{Diff}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ проведено (в негладком случае) лишь для нек-рых специальных типов особых точек. В частности, в случае неприводимого одномерного комплексного пространства X доказано, что пучок алгебр $\mathrm{Diff}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ и соответствующий пучок градуированных алгебр допускают конечные системы образующих [5].

Лит.: [1] Malgrange B., «Enseign. math.», 1968, ser. 2, t. 14, № 1, p. 1—20; [2] Koup W., «Math. Ann.», 1965, Bd 160, № 1, S. 72—92; [3] Шварц Л., Комплексные многообразия. Эллиптические уравнения с частными производными, пер. с нем., М., 1964; [4] Уэллс Р., *Дифференциальное исчисление на* комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [5] Bloom T h., «Rice Univ. Stud.», 1973, v. 59, № 2, p. 13—19; [6] Berger R., [u. a.], Differentialrechnung in der anaytilschen Geometrie, B.— Hdlb.—N. Y., 1967; [7] Fischer G., Complex analytic geometry, B.— Hdlb.— N. Y., 1976. *Д. А. Пономарев.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ КОЛЬЦО — кольцо, в к-ром отмечено одно или несколько дифференцирований (см. *Дифференцирование* кольца). Если $d(a)=0$ для всех этих дифференцирований, то a наз. константой. *Л. А. Скорняков.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО — неравенство, связывающее аргумент, неизвестную функцию и ее производные, напр.,

$$y'(x) > f(x, y(x)), \qquad (1)$$

где $y(x)$ — неизвестная функция аргумента x. Основная проблема теории Д. н.— по заданному Д. н. и дополнительным (начальным или граничным) условиям описать совокупность всех его решений.

Большую группу составляют Д. н., получающиеся из дифференциальных уравнений хорошо изученных классов заменой знака равенства на знак неравенства, что равносильно добавлению к одной из частей уравнения заранее не уточняемой функции определенного знака. Представляет интерес сравнение решений таких Д. н. с решениями соответствующих дифференциальных уравнений. Так, для *любого решения* Д. н. (1) справедливы оценки [1]:

$$\begin{aligned} y(x) &< z(x) \quad \text{при} \quad x_1 \leqslant x < x_0, \\ y(x) &> z(x) \quad \text{при} \quad x_0 < x \leqslant x_2, \end{aligned} \qquad (2)$$

где

$$z' = f(x, z), \qquad z(x_0) = y(x_0),$$

на любом интервале $[x_1, x_2]$ существования обоих решений. Это простое утверждение широко применяется для оценок решений дифференциальных уравнений (путем перехода к соответствующему Д. н. с легко указываемым частным решением), области продолжимости решений, разности между двумя решениями, для вывода условий единственности решения и т. д. Справедливо аналогичное утверждение [2] и для Д. н. (неравенство Чаплыгина)

$$y^{(m)} + a_1(x)\, y^{(m-1)} + \ldots + a_m(x)\, y > f(x).$$

Здесь оценки типа (2) для решений, удовлетворяющих при $x = x_0$ одинаковым начальным условиям, гарантир-

руются лишь на интервале, определяемом коэффициентами $a_1, \ldots, a_m$: напр., для Д. н. $y''+y>f(x)$ это интервал $[x_0-\pi, x_0+\pi]$.

Для системы Д. н.

$$y_i'(x) > f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

было указано [3], что если каждая функция f_i не убывает по аргументам $y_j\,(\forall j\neq i)$, то имеет место оценка

$$y_i(x) > z_i(x) \text{ при } x_0 < x \leqslant x_2;\ i=1, \ldots, n,$$

подобная (2). Развитие этих рассмотрений приводит к теории Д. н. в пространствах с конусом.

Разновидностью Д. н. является требование знакопостоянства полной производной от заданной функции:

$$\frac{d}{dx}F(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1}y_1' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y_n}y_n' \leqslant 0,$$

применяемое в теории устойчивости.

Представителем другой группы является Д. н.

$$\max_{i=1, \ldots, n} |\, y_i' - f_i(x, y_1, \ldots, y_n)\,| \leqslant \varepsilon \qquad (3)$$

($\varepsilon>0$ задано), исследованное впервые в связи с общей концепцией о приближенном описании реальной задачи дифференциальными уравнениями [4]. Здесь интересно описание интегральной воронки, т. е. совокупности всех точек всех решений, удовлетворяющих заданным начальным условиям, в частности поведение воронки при $x\to\infty$. Естественным обобщением Д. н. (3) является дифференциальное уравнение в контингенциях, к-рое задается с помощью поля конусов, обобщающего понятие поля направлений.

Для Д. н. изучалась и теория краевых задач. Д. н. $\Delta u\geqslant 0$ (Δ — оператор Лапласа) определяет субгармонические функции, Д. н. $\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u\leqslant 0$ определяет субпараболические функции. Рассматривались и более общего вида Д. н. (обеих упомянутых выше групп) с частными производными для дифференциальных операторов различных типов.

Лит.: [1] Petrovitsch M., «Math. Ann.», 1901, Bd 54, № 3, S. 417—36; [2] Чаплыгин С. А., Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, М., 1919; [3] Ważewski T., «Ann. Soc. polon. math.», 1950, t. 23, p. 112—66; [4] Bohl P., «J. reine und angew. Math.», 1914, Bd 144, S. 284—313; [5] Haar A., в кн.: «Atti del Congresso Internazionale dei Mathematici. Bologna». 1928, t. 3, Bologna, 1930, p. 5—10; [6] Walter W., Differential- und Integral-Ungleichungen und ihre Anwendung bei Abschätzungs- und Eindeutigkeitsproblemen, B., 1964; [7] Szarski J., Differential inequalities, Wars., 1965; [8] Lakshmikantham V., Leela S., Differential and integral inequalities, v. 1—2, N. Y., 1969.

А. Д. Мышкис.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ПОЛЕ — *дифференциальное кольцо*, являющееся полем. Множество констант Д. п. является подполем, оно наз. полем констант.

Л. А. Скорняков.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ АБСТРАКТНОЕ — дифференциальное уравнение в том или ином абстрактном пространстве (гильбертовом, банаховом и т. п.) или дифференциальное уравнение с операторными коэффициентами. Классическим и наиболее часто встречающимся Д. у. а. является уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - Au = f, \qquad (1)$$

где неизвестная функция $u=u(t)$ принадлежит нек-рому функциональному пространству X, $0\leqslant t\leqslant T\leqslant\infty$, и $A: X\to X$ — оператор (как правило — линейный), действующий в этом пространстве. Если оператор A ограничен и постоянен (не зависит от t), то формула

$$u(t) + e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}f(\tau)\,d\tau$$

дает единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(0)=u_0$. Для переменного $A(t)$

оператор $e^{(t-\tau)A}$ заменяется эволюционным оператором $u(t, \tau)$. В случае неограниченного оператора A решения задачи Коши $u(0)=u_0$ могут: не существовать при нек-рых u_0, быть не единственными, обрываться при $t<T$. Исчерпывающее изучение однородного ($f\equiv 0$) уравнения (1) с постоянным оператором дается теорией полугрупп, а вопросы существования и единственности решаются в терминах свойств резольвенты A (см. [1], [5]). Этот же метод применим и для переменного оператора при условиях его гладкой зависимости от t (см. [5]). Другим методом изучения уравнения (1), дающим, как правило, более грубые результаты, но применимым к более широким классам уравнений (в некоторых случаях — даже к нелинейным), является использование энергетич. неравенств: $\|u\|\leqslant c\|Lu\|$, получаемых также за счет тех или иных предположений относительно A. Для гильбертова пространства X постулируются, как правило, различные свойства положительности скалярного произведения (Au, u) (см. [2]). Все сказанное в значительной степени распространяется и на более общее Д. у. а.

$$\frac{d^2u}{dt^2}+A_1\frac{du}{dt}+A_2u=f, \qquad (2)$$

рассматриваемое при условиях $u(0)=u_0$, $u'_t(0)=u_1$. Зачастую, изучение уравнения (2) тем или иным приемом (сведением к системе уравнений 1-го порядка, заменой $u=\int_0^t v(\tau)d\tau$, расщеплением левой части на произведение двух операторов 1-го порядка и т. п.) сводится к изучению уравнения (1). Основным источником интереса к Д. у. а. является возможность сведения к уравнениям вида (1) или (2) так наз. смешанных задач в цилиндрич. областях для классических параболич. и гиперболич. уравнений 2-го порядка: функция $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ рассматривается как функция t со значениями в соответствующем пространстве функций от x, а дифференцирования по x, вместе с граничными условиями на боковых поверхностях цилиндра (образующие к-рого параллельны оси t), порождают операторы A, A_k. Уравнения (1), (2), в к-рых постулируемые свойства операторов A, A_k совпадают с получающимися в описанной выше ситуации, наз. абстрактными параболическими или гиперболическими. Реже рассматриваются абстрактные эллиптич. операторы.

Часто формулируются в терминах полугрупп и уравнения (1) задачи в теории рассеяния [3], рассматривающей интервал $-\infty<t<+\infty$. Сведение задач для дифференциальных уравнений с частными производными к задачам для Д. у. а. (1) и (2) оказывается весьма удобным при разработке приближенных (напр., разностных [4]) методов решения и при рассмотрении асимптотич. методов («малый» и «большой» параметры). Общие Д. у. а. с оператором

$$\sum_{k=0}^{m} A_k\frac{d^k}{dt^k}$$

и граничными условиями на обоих концах интервала $(0, T)$ при неограниченных операторах A_k поддаются содержательному изучению лишь при весьма специальных предположениях относительно A_k. Для ограниченных A_k соответствующее обобщение теории обыкновенных дифференциальных уравнений не вызывает затруднений.

Лит.: [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., [2 изд.], М., 1962; [2] Lions J., Equations differenticlles operationnelles et problèmes aux limites, B., 1961; [3] Лакс П., Филлипс Р., Теория рассеяния, пер. с англ., М., 1971; [4] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [5] Крейн С. Г., Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971.

А. А. Дезин.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ — обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)})=0, \qquad (1)$$

левая часть к-рого может быть записана в виде полной производной:

$$\frac{d}{dx}\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})=0.$$

Другими словами, уравнение (1) является Д. у. в п. д., если существует такая дифференцируемая функция $\Phi(x,\ u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_{n-1})$, что

$$F(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)\equiv\Phi'_x+u_1\Phi'_{u_0}+u_2\Phi'_{u_1}+\ldots+u_n\Phi'_{u_{n-1}}$$

тождественно по всем аргументам. Решение уравнения n-го порядка в полных дифференциалах сводится к решению уравнения $(n-1)$-го порядка

$$\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})=C,\quad C=\text{const}.$$

Пусть $F(x,\ u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_n)$ есть n раз непрерывно дифференцируемая функция, а $\Phi(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ — функция, имеющая непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно. Пусть

$$\Delta\Phi=\Phi'_x+u_1\Phi'_{u_0}+u_2\Phi'_{u_1}+\ldots+u_n\Phi'_{u_{n-1}},$$

$$\Delta_0F=F'_{u_n},\quad \Delta_\nu F=F'_{u_{n-\nu}}-\Delta(\Delta_{\nu-1}F),\quad \nu=1,\ \ldots,\ n.$$

Для того чтобы уравнение (1) было Д. у. в п. д., достаточно, чтобы функции $\Delta_\nu F$, $\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, не зависели от u_n и $\Delta_nF=0$ (см. [1]). В частности, u_n может входить в F только линейно.

Уравнение 1-го порядка

$$M(x,\ y)+N(x,\ y)\,y'=0, \qquad (2)$$

где функции M, N, M'_y, N'_x определены и непрерывны в открытой односвязной области D плоскости $(x,\ y)$ и $M^2+N^2>0$ в D, будет Д. у. в п. д. в том и только в том случае, когда

$$M'_y(x,\ y)\equiv N'_x(x,\ y)\ \text{в}\ D.$$

Общее решение уравнения (2) в полных дифференциалах имеет вид $\Phi(x,\ y)=0$, где

$$\Phi(x,\ y)=\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)}M(x,\ y)\,dx+N(x,\ y)\,dy$$

и интеграл берется по любой спрямляемой кривой, лежащей в области D и соединяющей произвольную фиксированную точку $(x_0,\ y_0)\in D$ с точкой $(x,\ y)$ (см. [2]). Уравнение (2) (в общем случае уравнение (1), линейное по $y^{(n)}$) может быть приведено (при нек-рых предположениях) к Д. у. в п. д. умножением на *интегрирующий множитель*.

Лит.: [1] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [2] Еругин Н. П., Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, 2 изд., Минск, 1972. *Н. Х. Розов.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОЕ — уравнение, в к-ром неизвестной является функция от одного независимого переменного, причем в это уравнение входят не только сама неизвестная функция, но и ее производные различных порядков.

Термин «дифференциальные уравнения» был предложен Г. Лейбницем (G. Leibniz, 1676). Первые исследования Д. у. о. были проведены в конце 17 в. в связи с изучением проблем механики и нек-рых геометрич. задач.

Д. у. о. имеют большое прикладное значение, являясь мощным орудием исследования многих задач естествознания и техники: они широко используются в механике, астрономии, физике, во многих задачах

химии, биологии. Это объясняется тем, что весьма часто объективные законы, к-рым подчиняются те или иные явления (процессы), записываются в форме Д. у. о., а сами эти уравнения, таким образом, являются средством для количественного выражения этих законов. Напр., законы механики Ньютона позволяют механич. задачу описания движения системы материальных точек или твердого тела свести к математич. задаче нахождения решений Д. у. о. Расчет радиотехнич. схем и вычисление траекторий спутников, исследование устойчивости самолета в полете и выяснение течения химич. реакций — все это производится путем изучения и решения Д. у. о. Наиболее важные и интересные технич. приложения Д. у. о. находят в *колебаний теории* и в *автоматического управления теории*. В свою очередь прикладные вопросы служат источником новых постановок задач в теории Д. у. о.; именно так возникла, напр., *оптимального управления математическая теория*.

В дальнейшем независимое переменное будет обозначаться через t, неизвестные функции — через x, y, z и др., а производные этих функций по t — через $\dot{x}$, $\ddot{x}$, ..., $x^{(n)}$ и т. д.

Простейшее Д. у. о. встречается уже в анализе: нахождение первообразной для данной непрерывной функции $f(t)$ является по существу задачей об определении такой неизвестной функции $x=x(t)$, к-рая удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}=f(t). \tag{1}$$

Для доказательства разрешимости этого уравнения необходимо было построить специальный аппарат — теорию интеграла Римана.

Естественным обобщением уравнения (1) является Д. у. о. 1-го порядка, разрешенное относительно производной:

$$\dot{x}=f(t,\ x), \tag{2}$$

где $f(t, x)$ — известная функция, определенная в нек-рой области D плоскости t, x. Многие практич. задачи сводятся к задаче решения (или, как часто говорят, интегрирования) этого уравнения. Р е ш е н и е м Д. у. о. (2) наз. функция $x=x(t)$, определенная и дифференцируемая на нек-ром интервале I и удовлетворяющая условиям:

$$(t,\ x(t)) \in D,\quad t \in I,$$
$$\dot{x}(t)=f(t,\ x(t)),\quad t \in I.$$

Решение Д. у. о. (2) геометрически можно изобразить на плоскости t, x в виде кривой с уравнением $x=x(t)$, $t \in I$. Эта кривая наз. *интегральной кривой*, в каждой своей точке она имеет касательную и целиком лежит в области D. Геометрич. интерпретацию самого уравнения (2) дает п о л е н а п р а в л е н и й в области D, к-рое получается, если через каждую точку $(t, x) \in D$ провести отрезок $l_{t,x}$ малой длины с угловым коэффициентом $f(t, x)$. Любая интегральная кривая $x=x(t)$ в каждой своей точке $(t, x(t))$ касается отрезка $l_{t,x(t)}$.

Ответ на вопрос о том, когда уравнение (2) имеет решение, дает т е о р е м а с у щ е с т в о в а н и я: если $f(t, x) \in C(D)$ (т. е. непрерывна в D), то через любую точку $(t_0, x_0) \in D$ проходит по крайней мере одна непрерывно дифференцируемая интегральная кривая уравнения (2), и каждая из этих кривых может быть продолжена в обе стороны вплоть до границы любой замкнутой подобласти, целиком лежащей в D и содержащей точку (t_0, x_0). Другими словами, для всякой точки $(t_0, x_0) \in D$ найдется хотя бы одно непродолжаемое решение $x=x(t)$, $t \in I$, такое, что $x(t) \in C^1(I)$ (т. е. непрерывна в I вместе с производной $\dot{x}(t)$),

$$x(t_0)=x_0 \tag{3}$$

и $x(t)$ стремится к границе области D, когда t стремится к правому или левому концам интервала I.

Важнейшим теоретич. вопросом является выяснение того, какие предположения о правой части Д. у. о. надо сделать и какие дополнительные условия можно присоединить к уравнению, чтобы выделить одно единственное его решение. Справедлива следующая т е о р е м а с у щ е с т в о в а н и я и е д и н с т в е н н о с т и: если $f(t, x) \in C(D)$ и удовлетворяет в D *Липшица условию* по x, а $(t_0, x_0) \in D$, то уравнение (2) имеет единственное непродолжаемое решение, удовлетворяющее условию (3). В частности, если два решения $x = x_1(t)$, $t \in I_1$, и $x = x_2(t)$, $t \in I_2$, такого уравнения (2) совпадают хотя бы для одного значения $t = t_0$, т. е. $x_1(t_0) = x_2(t_0)$, то

$$x_1(t) = x_2(t), \quad t \in I_1 \cap I_2.$$

Геометрич. содержание этой теоремы заключается в том, что вся область D покрыта интегральными кривыми уравнения (2), к-рые нигде не пересекаются между собой. Единственность решений имеет место и при нек-рых более слабых предположениях относительно функции $f(t, x)$ (см., напр., [6]).

Соотношение (3) наз. начальным условием. Числа t_0 и x_0 наз. начальными значениями для решения уравнения (2), а точка (t_0, x_0) — н а ч а л ь н о й т о ч к о й соответствующей интегральной кривой. Задача отыскания решения этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию (3) (или, как еще говорят, имеющего начальные значения t_0, x_0), наз. *Коши задачей*, или начальной задачей. Сформулированная только что теорема дает достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши (2), (3).

Часто прикладные вопросы приводят к с и с т е м а м Д. у. о., в к-рые входят несколько неизвестных функций от одного и того же независимого переменного и их производные. Естественным обобщением уравнения (2) является н о р м а л ь н а я ф о р м а системы дифференциальных уравнений n-го порядка:

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где $x^1, x^2, \ldots, x^n$ — неизвестные функции от переменного t, а f^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, суть заданные функции от $n+1$ переменных. Полагая

$$\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n),$$
$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = (f^1(t, \boldsymbol{x}), \ldots, f^n(t, \boldsymbol{x})),$$

можно переписать систему (4) в векторной форме:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}). \tag{5}$$

Решением системы (4) или в е к т о р н о г о у р а в н е н и я (5) является вектор-функция

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t)), \quad t \in I. \tag{6}$$

Каждое решение можно представлять себе в $(n+1)$-мерном пространстве $t, x^1, x^2, \ldots, x^n$ в виде интегральной кривой — графика вектор-функции (6).

Задача Коши для уравнения (5) состоит в отыскании решения, удовлетворяющего начальным условиям

$$x^1(t_0) = x_0^1, \ \ldots, \ x^n(t_0) = x_0^n,$$

или

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0. \tag{7}$$

Решение задачи Коши (5), (7) удобно записывать в виде

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0), \quad t \in I. \tag{8}$$

Теорема существования и единственности для уравнения (5) формулируется так же, как и для уравнения (2).

Весьма общие системы Д. у. о. (разрешенные относительно старших производных всех неизвестных функ-

ций) сводятся к нормальным системам. Важным частным классом систем (5) являются линейные системы Д. у. о. n-го порядка:

$$\dot{x} = A(t)\,x + F(t),$$

где $A(t)$ — матрица типа $n \times n$.

Большое значение в приложениях и в теории Д. у. о. имеют *автономные системы* Д. у. о.:

$$\dot{x} = f(x), \tag{9}$$

т. е. нормальные системы, правая часть к-рых явно не зависит от переменного t. В этом случае уравнение (6) удобно рассматривать как параметрич. представление кривой, сопоставляя решению фазовую траекторию в n-мерном фазовом пространстве $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Если $x = x(t)$ есть решение системы (9), то ей удовлетворяет также функция $x = x(t+c)$, где c — произвольная постоянная.

Другим обобщением уравнения (2) является Д. у. о. n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(t,\ y,\ \dot{y},\ \ldots,\ y^{(n-1)}). \tag{10}$$

Важный частный класс таких уравнений — линейные Д. у. о.:

$$y^{(n)} + a_1(t)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\,\dot{y} + a_n(t)\,y = F(t).$$

Уравнение (10) сводится к нормальной системе n-го порядка, если ввести новые неизвестные функции переменного t по формулам

$$x^1 = y,\ x^2 = \dot{y},\ \ldots,\ x^{n-1} = y^{(n-2)},\ x^n = y^{(n-1)}.$$

Если, напр., уравнение (10) описывает динамику нек-рого объекта и нужно исследовать движение этого объекта, начинающееся в определенный момент $t = t_0$ из определенного начального состояния, то к уравнению (10) добавляются дополнительные условия:

$$y(t_0) = y_0,\ \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{11}$$

Задача отыскания такой n раз дифференцируемой функции $y = y(t)$, $t \in I$, к-рая обращает уравнение (10) в тождество при всех $t \in I$ и удовлетворяет начальным условиям (11), наз. з а д а ч е й К о ш и.

Т е о р е м а с у щ е с т в о в а н и я и е д и н с т в е н н о с т и: если

$$f(t,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n) \in C(D)$$

и удовлетворяет условию Липшица по $u_1, u_2, \ldots, u_n$, а

$$(t_0,\ y_0,\ \dot{y}_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}) \in D,$$

то задача Коши (10), (11) имеет единственное решение.

Задача Коши далеко не исчерпывает тех задач, к-рые изучаются для уравнений (10) высших порядков [как и систем (5)]. Конкретные физич. и технич. проблемы часто приводят не к начальным условиям, а к дополнительным условиям иного вида (так наз. к р а е в ы м у с л о в и я м), когда значения искомой функции $y(t)$ и ее производных (или соотношения между ними) задаются для нескольких различных значений независимого переменного. Напр., в задаче о *брахистохроне* требуется проинтегрировать уравнение

$$2y\ddot{y} + \dot{y}^2 + 1 = 0$$

при краевых условиях $y(a) = A$, $y(b) = B$; отыскание 2π-периодич. решения для *Дуффинга уравнения* сводится к выделению такого его решения, к-рое удовлетворяет условиям периодичности: $y(0) = y(2\pi)$, $\dot{y}(0) =$

$= \dot{y}(2\pi)$; при изучении обтекания пластинки ламинарным потоком встречается задача:

$$\dddot{y} + y\ddot{y} = 0, \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0, \quad \dot{y}(t) \longrightarrow 2 \text{ при } t \longrightarrow \infty.$$

Задача отыскания для Д. у. о. высшего порядка или системы Д. у. о. решения, удовлетворяющего условиям, отличным от начальных условий (11), наз. *краевой задачей*. Теоретич. анализ существования и единственности решения краевой задачи имеет существенное значение для прикладной проблемы, приводящей к этой краевой задаче, поскольку он показывает взаимную согласованность допущений, принятых при математич. описании проблемы, и известную полноту этого описания. Одной из важных краевых задач является *Штурма — Лиувилля задача*. Краевые задачи для линейных уравнений и систем тесно связаны с задачами о *собственных значениях* и *собственных функциях*, а также со *спектральным анализом* обыкновенных дифференциальных операторов.

Главной задачей теории Д. у. о. является изучение решений таких уравнений. Однако вопрос о том, что значит изучить решения Д. у. о., в разное время понимали по-разному. Первоначально стремились осуществить интегрирование уравнений в квадратурах, т. е. получить замкнутую формулу, дающую (в явной, неявной или параметрич. форме) выражение зависимости того или иного решения от t через элементарные функции и интегралы от них. Такие формулы, если они найдены, оказывают существенную помощь в вычислениях и при исследовании свойств решений. Особый интерес представляет описание всей совокупности решений данного уравнения. При весьма общих предположениях уравнению (5) удовлетворяет семейство вектор-функций, зависящее от n произвольных независимых параметров. Если уравнение этого семейства имеет вид

$$x = \varphi(t, c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

то функция φ наз. о б щ и м р е ш е н и е м уравнения (5).

Однако в середине 19 в. были указаны первые примеры Д. у. о., к-рые нельзя проинтегрировать в квадратурах. Оказалось, что решение в замкнутой форме удается найти лишь для небольшого числа классов уравнений (см., напр., *Бернулли уравнение*, *Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах*, *Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами*). Не выражающиеся в квадратурах решения отдельных, наиболее важных и часто встречающихся уравнений (напр., *Бесселя уравнение*) стали изучать подробно, ввели для них специальные обозначения, исследовали их свойства и составили таблицы значений. Так появились многие *специальные функции*.

В связи с потребностями практики постоянно разрабатывались и способы приближенного интегрирования Д. у. о., напр. *последовательных приближений метод*, *Адамса метод* и др. Были предложены также разнообразные приемы графич. и механич. интегрирования этих уравнений. Математика располагает богатым набором численных методов решения многих задач для Д. у. о. (см. *Дифференциальное уравнение обыкновенное*; п р и б л и ж е н н ы е м е т о д ы р е ш е н и я). Эти методы представляют собой удобные алгоритмы вычислений с эффективными оценками точности, а современная вычислительная техника дает возможность экономно и быстро довести решение каждой такой задачи до числового результата.

Однако численные методы для конкретного уравнения дают лишь конечное число частных решений на конечном отрезке изменения независимого пере-

менного. Они не могут ответить на вопросы о том, каково асимптотическое поведение решений, есть ли у данного уравнения периодическое решение имеет ли это уравнение *колеблющееся решение*. Между тем во многих прикладных задачах важно установить характер решения на бесконечном промежутке изменения независимого переменного, изучить полную картину интегральных кривых. В связи с этим центр тяжести в теории Д. у. о. был перенесен на исследование общих закономерностей поведения решений Д. у. о., разработку методов, к-рые позволяли бы получать представление о глобальных свойствах решений по самому дифференциальному уравнению, без его интегрирования.

Все это составило предмет *качественной теории дифференциальных уравнений*, возникшей в конце 19 в. и интенсивно развивающейся.

Принципиальное значение имеет выяснение того, является ли задача Коши для Д. у. о. корректно поставленной задачей. Поскольку в конкретных задачах начальные значения не могут быть указаны абсолютно точно, то важно выяснить, когда малые изменения начальных значений влекут за собой также малые изменения решений. Справедлива теорема о непрерывной зависимости решений от начальных значений: пусть (8) есть решение уравнения (5), где $f(t, x) \in C(D)$ и удовлетворяет условию Липшица по x; тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого замкнутого $J \subset I$, $t_0 \in J$, найдется такое $\delta > 0$, что решение $x(t, t_0, x_0^*)$ этого уравнения, где $|x_0^* - x_0| < \delta$, определено на J и при всех $t \in J$

$$|x(t, t_0, x_0^*) - x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon. \qquad (12)$$

Другими словами, если задаться определенным замкнутым отрезком изменения независимого переменного, то при достаточно малом изменении начальных значений решение мало изменится на всем выбранном промежутке. Этот результат может быть обобщен в сторону получения условий, обеспечивающих *дифференцируемость решений* Д. у. о. по начальным значениям.

Однако сформулированная теорема не исчерпывает актуальную для приложений проблему, поскольку в ней речь идет лишь о замкнутом отрезке изменения независимого переменного. Между тем часто (напр., в теории управления движением) рассматривается решение задачи Коши (5), (7), определенное при всех $t \geqslant t_0$, и необходимо выяснить устойчивость этого решения по отношению к малым возмущениям начальных значений на всем бесконечном промежутке $t \geqslant t_0$, т. е. получить условия, обеспечивающие справедливость неравенства (12) при всех $t \geqslant t_0$. Именно к этой задаче сводится исследование устойчивости положения равновесия или стационарного режима конкретной системы. Решение, мало изменяющееся на бесконечном промежутке $[t_0, \infty)$ при достаточно малых отклонениях начальных значений, называется устойчивым по Ляпунову (см. *Устойчивость по Ляпунову*).

При выводе Д. у. о., описывающего реальный процесс, всегда приходится чем-то пренебрегать, что-то идеализировать. Иначе говоря, Д. у. о. описывают процесс приближенно. Напр., изучение работы лампового генератора приводит к *Ван дер Поля уравнению* при нек-рых предположениях, к-рые не вполне точно соответствуют действительному положению вещей. Далее, на ход процесса часто оказывают влияние возмущающие факторы, учесть к-рые при составлении уравнений практически невозможно; известно лишь, что их влияние «мало». Поэтому важно выяснить, как меняется решение при малых изменениях самой системы

уравнений, т. е. при переходе от уравнения (5) к возмущенному уравнению

$$\dot{x} = f(t, x) + R(t, x),$$

учитывающему малые поправочные члены. Оказывается, что на замкнутом отрезке изменения независимого переменного (при тех же предположениях, что и в теореме о непрерывной зависимости решений от начальных значений) решение мало меняется, если возмущение $R(t, x)$ достаточно мало. Если это свойство имеет место на бесконечном промежутке $t \geqslant t_0$, то решение наз. устойчивым при постоянно действующих возмущениях.

Исследование устойчивости по Ляпунову, устойчивости при постоянно действующих возмущениях и их модификаций составляют предмет важнейшего раздела качественной теории — *устойчивости теории*. Для практики в первую очередь представляют интерес такие системы Д. у. о., решения к-рых мало изменяются при всех малых изменениях этих уравнений; такие системы наз. *грубыми системами*.

Другой важной задачей качественной теории является получение схемы поведения семейства решений во всей области определения уравнения. Применительно к автономной системе (9) речь идет о построении фазовой картины, т. е. о качественном описании в целом всей совокупности фазовых траекторий в фазовом пространстве. Такая геометрич. картина дает полное представление о характере всех движений, к-рые могут происходить в рассматриваемой системе. Для этого существенно прежде всего выяснить поведение траекторий в окрестности положений равновесия, отыскать *сепаратрисы* и *предельные циклы*. Особо актуальной задачей является нахождение устойчивых предельных циклов, ибо им соответствуют *автоколебания* в реальных системах.

Любой реальный объект характеризуется различными параметрами, к-рые часто входят в виде нек-рых величин $(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^k) = \varepsilon$ в правую часть системы Д. у. о., описывающей поведение объекта:

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon). \qquad (13)$$

Значения этих параметров не могут быть известны абсолютно точно, и потому важно выяснить условия, обеспечивающие устойчивость решений уравнения (13) по отношению к малым возмущениям параметра ε. Если задаться определенным замкнутым отрезком изменения независимого переменного, то при естественных предположениях о правой части уравнения (13) имеет место непрерывная (и даже дифференцируемая) зависимость решений от параметров.

Выяснение зависимости решений от параметра имеет прямое отношение к вопросу о том, насколько хороша идеализация, приводящая к математич. модели поведения объекта — системе Д. у. о. Одним из типичных примеров идеализации является пренебрежение малым параметром. Если учет этого малого параметра приводит к системе (13), то непрерывная зависимость решений от параметра позволяет при изучении поведения объекта на конечном отрезке времени безболезненно пренебречь этим параметром, т. е. в первом приближении рассматривать более простую систему

$$\dot{x} = f(t, x, 0).$$

Этот результат лежит в основе имеющих широкие приложения *малого параметра метода*, *Крылова — Боголюбова метода усреднения* и других асимптотических методов решения Д. у. о. Однако исследование ряда явлений приводит к системе *дифференциальных уравнений с малым параметром при производных*:

$$\varepsilon \dot{x} = f(t, x, y), \qquad \dot{y} = g(t, x, y).$$

Здесь уже нельзя, вообще говоря, принимать $\varepsilon=0$, даже если пытаться составить грубое представление о явлении на конечном отрезке времени.

В теории Д. у. о. рассматриваются нек-рые плодотворные и важные обобщения перечисленных выше задач. Прежде всего, можно расширить класс функций, в к-ром ищется решение задачи Коши (2), (3): определить решение в классе абсолютно непрерывных функций и доказать существование таких решений. Особый интерес для приложений представляет определение решения уравнения (2) в случае, когда функция $f(t, x)$ разрывна или многозначна по x. Наиболее общей в этом направлении является задача о решении *дифференциального включения*.

Рассматривается и более общее, чем (10), неразрешенное относительно старшей производной Д. у. о. n-го порядка

$$F(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0;$$

исследования этого уравнения тесно связаны с теорией неявных функций.

Уравнение (2) связывает производную решения в точке t со значением решения в этой же точке: $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. Но нек-рые прикладные задачи (напр., требующие учета эффекта запаздывания исполнительного устройства) приводят к *дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом*:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t-\tau));$$

здесь производная решения в точке t связывается со значением решения в точке $t-\tau$. Изучению таких уравнений, а также более общих *дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом* посвящен специальный раздел теории Д. у. о.

Изучение фазового пространства автономной системы (9) позволяет подойти к еще одному обобщению Д. у. о. Траекторию этой системы, проходящую через точку x_0, будем записывать в виде $x = x(t, x_0)$. Если точке x_0 поставить в соответствие точку $x(t, x_0)$, то получится преобразование фазового пространства, зависящее от параметра t, к-рое определяет движение в фазовом пространстве. Свойства этих движений исследуются в теории динамич. систем. Такие движения можно рассматривать не только в евклидовом пространстве, но и на многообразиях, изучая, напр., *дифференциальные уравнения на торе*.

Выше речь шла о Д. у. о. в поле действительных чисел [напр., отыскивалась действительная функция $x(t)$ действительного переменного t, удовлетворяющая уравнению (2)]. Однако нек-рые вопросы теории таких уравнений удобнее изучать с привлечением комплексных чисел. Естественным дальнейшим обобщением является изучение Д. у. о. в поле комплексных чисел. Так, можно рассмотреть уравнение

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w),$$

где $f(z, w)$ — аналитич. функция своих переменных, и поставить задачу о нахождении аналитич. функции $w(z)$ комплексного переменного z, к-рая удовлетворяла бы этому уравнению. Исследование таких уравнений, уравнений высших порядков и систем составляет предмет *аналитической теории дифференциальных уравнений*; в частности, она содержит важные для приложений к математич. физике результаты, касающиеся *линейных дифференциальных уравнений второго порядка*.

Можно также рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad (14)$$

считая, что x принадлежит бесконечномерному банахову пространству B, t — действительное или комплексное независимое переменное, а $f(t, x)$ — оператор, отображающий произведение $(-\infty, +\infty)\times B$ в B. В виде уравнения (14) можно трактовать, напр., системы Д. у. о. бесконечного порядка (см. *Дифференциальные уравнения* системы бесконечного порядка). Уравнения вида (14) изучает теория *дифференциальных уравнений абстрактных*, лежащая на стыке Д. у. о. и функционального анализа. В частности, большой интерес представляют линейные дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F(t)$$

с ограниченными или неограниченными операторами; в форме такого уравнения удается записать нек-рые классы *дифференциальных уравнений с частными производными*.

Лит.: [1] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [2] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [3] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961; [4] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970; [5] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970; [6] Сансоне Д ж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 1—2, М., 1953—54; [7] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970.

Е. Ф. Мищенко.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОЕ; приближенные методы решения — методы получения аналитич. выражений (формул), либо численных значений, приближающих с той или иной степенью точности искомое частное решение дифференциального уравнения (д. у.) или системы для одного или нескольких значений аргумента. Важность приближенных методов решения д. у. обусловливается тем, что точные решения в виде аналитич. выражений получаются лишь для немногих типов д. у.

Одним из старейших методов приближенного решения обыкновенных д. у. является метод разложения в ряд Тейлора. Согласно этому методу решение уравнения

$$y' = f(x, y)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0$$

приближается отрезком ряда Тейлора

$$y(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Производные $y^{(k)}(x_0)$ выражаются через $f(x, y)$ и ее частные производные:

$$y' = f(x, y), \quad y'' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)\, y',$$

$$y''' = f''_{xx}(x, y) + 2f''_{xy}(x, y)\, y' + f''_{yy}(x, y)\, y'^2 + f'_y(x, y)\, y''$$

и т. д. Погрешность метода пропорциональна $(x - x_0)^{n+1}$. При больших значениях $x - x_0$ погрешность медленно стремится к нулю при $n \to \infty$, а если значение $x - x_0$ превосходит значение радиуса сходимости ряда Тейлора, то погрешность вообще не стремится к нулю при $n \to \infty$. Это обстоятельство, а также необходимость вычисления большого числа частных производных резко ограничивают область применения метода. Обычно метод разложения в ряд Тейлора, так же как и методы разложения в ряды более общего вида, применяют для нахождения приближенного решения в виде аналитич. выражения. К методам, применяемым для этой же цели, относятся *Чаплыгина метод*, использующий дифференциальные неравенства, и *последовательных прибли-*

жений метод. Эти методы применяются в основном в теоретич. исследованиях и редко используются для получения численных решений д. у. в практич. расчетах.

В приложениях часто используются асимптотич. методы приближенного решения Д. у., основанные на выделении в решаемом уравнении главных членов и членов, малых по сравнению с главными. Примером может служить *малого параметра метод* для уравнения $y'=f(x,\ y;\ \mu)$. Асимптотич. методы используются как для получения аналитич. выражений, приближающих решение, так и для исследований качественного поведения решений.

Наиболее распространенными методами численного решения д. у. являются методы, в к-рых решение ищется в виде таблицы приближенных значений искомой функции $y(x)$ для ряда значений аргумента x из отрезка $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+X$. Напр., пусть ищется решение уравнения $y=f(x,\ y)$ с начальным условием $y(x_0)=y_0$ на отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+X$ в предположении, что решение вычисляется для значений аргумента

$$x_p=x_0+ph,\ p=0,\ 1,\ \ldots,\ N,\ h=X/N;$$

значения x_p наз. у з л а м и, а величина h — ш а г о м; через y_p обозначено значение приближенного решения в узле x_p.

Один из простейших численных методов — *Эйлера метод* основан на приближенном вычислении в тождестве

$$y_{p+1}=y_p+\int_{x_p}^{x_{p+1}} f(x,\ y)\,dx,$$

квадратуру по формуле прямоугольников:

$$y_{p+1}=y_p+hf(x_p,\ y_p).$$

Погрешность метода Эйлера пропорциональна h^2. Приближая интеграл

$$\int_{x_p}^{x_{p+1}} f(x,\ y)\,dx \qquad (1)$$

более точными квадратурными формулами, можно получить более точные численные методы. Напр., если воспользоваться для приближения (1) формулой трапеций, то

$$y_{p+1}=y_p+\frac{h}{2}\left(f(x_p,\ y_p)+f(x_{p+1},\ y_{n+1})\right).$$

Обычно это уравнение неразрешимо относительно y_{p+1}. Для его решения можно воспользоваться *итерационными методами*, взяв в качестве начального приближения значение y_{p+1}, полученное по методу Эйлера. Одна итерация приводит к следующим формулам:

$$y_{p+1}=y_p+\frac{h}{2}\left(k_1(x_p,\ y_p)+k_2(x_p,\ y_p)\right),$$

где

$$k_1(x_p,\ y_p)=f(x_p,\ y_p)$$

и

$$k_2(x_p,\ y_p)=f(x_p+h,\ y_p+hk_1(x_p,\ y_p)).$$

Эти формулы имеют погрешность порядка h^3. Они относятся к семейству *Рунге — Кутта методов.* Один из наиболее распространенных методов этого семейства имеет порядок погрешности h^5. Методы Рунге — Кутта наз. одношаговыми, так как для вычисления y_{p+1} достаточно знать лишь y_p — значения приближенного решения на предыдущем шаге. Это обстоятельство позволяет применять формулы метода Рунге — Кутта для неравноотстоящих узлов, то есть в случае, когда разность $x_{p+1}-x_p$ непостоянна. При выборе шага интегрирования полезно иметь в распоряжении нек-рую

характеристику погрешности метода на шаге. Для оценки погрешности на шаге часто используется прием, называемый экстраполяцией по Ричардсону: y_{p+2} вычисляется дважды — при помощи двух шагов h и одного шага $2h$; полученные значения обозначаются через $y^{(1)}_{p+2}$ и $y^{(2)}_{p+2}$ соответственно; погрешность на шаге

$$r_{p+2} \approx \frac{\left| y^{(2)}_{p+2} - y^{(1)}_{p+2} \right|}{2^s - 1},$$

где $s+1$ — порядок r_{p+2} по h (для метода Эйлера $s=1$, для формулы трапеций $s=2$ и т. д.). Другой способ оценки погрешности на шаге состоит в получении формул метода Рунге — Кутта с контрольным членом, к-рый с точностью до малых более высокого порядка приближает главный член погрешности метода на шаге. Разработаны так наз. неявные одношаговые методы, к-рые оказались весьма эффективными для нек-рых классов задач.

Помимо семейства одношаговых методов для численного решения д. у. используются также и многошаговые методы (или конечноразностные). В этих методах для определения y_{p+1} требуются не только y_p, но и значения y_{p-i} в нек-рых нескольких предыдущих узлах. Формулы k-шаговых методов имеют вид:

$$\sum_{q=0}^{k} a_{-q} y_{p-q} - h \sum_{q=0}^{k} b_{-q} f(x_{p-q}, y_{p-q}) = 0,$$

где a_{-i}, b_{-i} — постоянные, $a_0 \neq 0$. Если $b_0 = 0$, соответствующий метод наз. экстраполяционным, или явным; если $b_0 \neq 0$, — интерполяционным, или неявным, методом. Частным случаем многошаговых методов являются методы типа Адамса (см. *Адамса метод*):

$$y_p - y_{p-1} = h \sum_{q=0}^{k} b_{-q} f(x_{p-q}, y_{p-q}).$$

Обычно вычисления ведут по паре k-шаговых формул, одна из к-рых явная, а другая неявная. Такие пары формул наз. методами прогноза и коррекции. В качестве примера формул прогноза и коррекции можно привести формулы Хемминга:

$$y^{*}_{p+1} = \frac{2y_{p-1} + y_{p-2}}{3} + \frac{h}{72}(191 f(x_p, y_p) - 107 f(x_{p-1}, y_{p-1}) + 109 f(x_{p-2}, y_{p-2}) - 25 f(x_{p-3}, y_{p-3})),$$

$$\tilde{y}_{p+1} = y^{*}_{p+1} - \frac{707}{750}(y^{*}_{p} - y^{**}_{p}),$$

$$y^{**}_{p+1} \frac{2y_{p-1} + y_{p-2}}{3} + \frac{h}{72}(25 f(x_{p+1}, \tilde{y}_{p+1}) + 91 f(x_p, y_p) + 43 f(x_{p-1}, y_{p-1}) + 9 f(x_{p-2}, y_{p-2})).$$

$$y_{p+1} = y^{**}_{p+1} + \frac{43}{750}(y^{*}_{p+1} - y^{**}_{p+1}),$$

имеющие на шаге погрешность порядка h^6. При счете по формулам Хемминга сначала вычисляется «прогноз» y^{*}_{p+1}, затем — «поправка» $\tilde{y}_{p+1}$, затем — «коррекция» y^{**}_{p+1} и, наконец,— приближенное решение y_{p+1}.

В небесной механике широко используются формулы Штермера (см. *Штермера метод*), особенно удобные для уравнений вида

$$y'' = f(x, y);$$

они имеют вид:

$$\Delta^2 y_{p+1} = h^2 f(x_p, y_p) + \frac{h^2}{12} \sum_{q=2}^{k} b_{-q} \Delta^q f(x_{p-q}, y_{p-q})$$

(явная формула Штермера) и

$$\Delta^2 y_{p-1} = h^2 f(x_p, y_p) + \frac{h^2}{2} \sum_{q=1}^{k} c_{-q-1} \Delta^{q+1} f(x_{p-q}, y_{p-q})$$

(неявная формула Штермера). В формулах Штермера

$$b_{-2} = 1,\ b_{-3} = 1,\ b_{-4} = \frac{19}{20},\ \ldots;\ c_{-2} = 1,\ c_{-3} = 0,$$

$$c_{-4} = -\frac{1}{120},\ \ldots;$$

$\Delta^q(f)$ — конечная разность порядка q.

Применение многошаговых методов возможно лишь в случае, если известны значения решения в k первых узлах. Для нахождения этих значений обычно пользуются одношаговыми методами, погрешность к-рых пропорциональна соответствующей степени h.

Иногда для вычисления y_{p-q} используется несколько предшествующих значений y_{p-q}, как в многошаговых методах, но в то же время на каждом шаге производится несколько вычислений правой части, как в методах Рунге — Кутта.

Решение краевых задач для обыкновенных д. у. обычно сводится к решению нескольких задач с начальными условиями. Простейшим методом такого рода является *стрельбы метод*, применяемый как к линейным, так и к нелинейным краевым задачам. Пусть, напр., требуется решить краевую задачу для одного уравнения 2-го порядка:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(0) = a, \quad y(l) = b.$$

Полагая $y'(0) = c$, можно решить задачу с начальным условием

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(0) = a, \quad y'(0) = c, \qquad (2)$$

на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ и вычислить значение $y(l, c)$. Из условия $y(l, c_0) = b$ определяется c_0. Тогда решение краевой задачи будет совпадать с решением задачи с начальными условиями $y(0) = a$, $y'(0) = c_0$. Корень c_0 уравнения $y(l, c) = b$ обычно ищется каким-либо приближенным методом и его нахождение связано с многократным решением задачи с начальными условиями (2). Метод стрельбы часто неустойчив к вычислительной погрешности.

Для линейных краевых задач часто применяют *прогонки метод*, при к-ром решение краевой задачи для уравнения 2-го порядка сводится к решению трех задач с начальным условием для уравнений 1-го порядка. Напр., пусть решается краевая задача

$$y'' = p(x)y + f, \quad y'(0) = a_0 y(0) + b_0, \quad y'(l) = a_1 y(l) + b_1.$$

Подбираются функции $a(x)$ и $b(x)$ такие, что $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ при всех $0 \leqslant x \leqslant l$. Эти функции могут быть получены как решения задач с начальными условиями

$$a'(x) + a^2(x) = p(x), \quad a(0) = a_0$$

и

$$b'(x) + a(x)b(x) = f(x), \quad b(0) = b_0.$$

Решение этих задач наз. прямой прогонкой. В результате прямой прогонки получаются два условия для определения $y(l)$ и $y'(l)$:

$$y'(l) = a_1 y(l) + b_1 \quad \text{и} \quad y'(l) = a(l)y(l) + b(l).$$

Из этих условий находится $y(l) = y_l$, после чего решение $y(k)$ исходной краевой задачи получается как решение задачи с начальным условием

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x), \quad y(l) = y_l$$

на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ — так наз. обратная прогонка. Методы стрельбы и прогонки применимы для решения краевых задач в случае систем д. у. В вы-

числительной практике широко используются разностные аналоги этих методов.

Для решения нелинейных краевых задач, кроме метода стрельбы, используют методы линеаризации в сочетании с методом прогонки. Наиболее распространенным методом этого класса является *Ньютона метод.*

При решении краевых задач применяются также и различные вариационные методы: *Ритца метод*, *Галеркина метод* и др. Вариационные методы сводят решение краевых задач к минимизации нек-рого функционала; приближение к решению ищется в задаваемом виде

$$y(x) = g(a_1, \ldots, a_n, x);$$

параметры $a_1, \ldots, a_n$ определяются из условия минимума функционала.

Большинство численных методов решения обыкновенных д. у. реализовано в виде библиотечных программ ЭВМ.

Кроме аналитических и численных методов для приближенного решения обыкновенных д. у. применяются графич. методы, напр. метод *изоклин*, связанный с построением поля направлений, определяемого д. у. Применяются также аналоговые вычислительные машины и другие моделирующие устройства.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, М., 1973; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 2, 2 изд., М., 1962; [3] Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М., 1965; [4] Моисеев Н. Н., Численные методы в теории оптимальных систем, М., 1971; [5] Милн В. Э., Численное решение дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1955; [6] Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, пер. с нем., М., 1953; [7] Хемминг Р. В., Численные методы..., пер. с англ., 2 изд., М., 1972; [8] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы. Введение в теорию, М., 1973; [9] Коллатц Л., Задачи на собственные значения..., пер. с нем., М., 1968.

С. С. Гайсарян.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ — *дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом* запаздывающего типа, т. е. уравнение, в к-ром старшая производная от искомой функции при каком-либо значении аргумента определяется через саму эту функцию и младшие производные, взятые при меньших либо равных значениях аргумента. Эти уравнения и их системы, если аргументом служит время, описывают процессы с последействием, скорость к-рых в любой момент определяется их состоянием не только в тот же момент (как для обыкновенных дифференциальных уравнений), но и в предшествующие моменты. Такая ситуация возникает, в частности, в системах автоматич. управления (см. *Автоматического управления теория*) при наличии запаздывания в органе регулирования.

А. Д. Мышкис.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ — дифференциальное уравнение, связывающее аргумент, искомую функцию и ее производные, взятые, вообще говоря, при различных значениях этого аргумента. Примеры:

$$x'(t) = ax(t-\tau), \qquad (1)$$

$$x'(t) = ax(kt), \qquad (2)$$

где постоянные a, τ, k заданы; τ в уравнении (1) и $t-kt$ в уравнении (2) — отклонения аргумента. Встречаются и более сложные Д. у. с о. а., включающие большее число отклонений аргумента, могущих представлять собой заданные функции (в частности, если они постоянны, то уравнение часто наз. дифференциально-разностным) или даже зависеть от искомого решения. Эпизодически рассматривались также Д. у. с о. а., в к-рых искомая функция зависит более чем от одного аргумента. Д. у. с о. а. впервые появились в связи с формальным решением уравнений с частными производными и затем неоднократно рас-

сматривались как сами по себе, так и в связи с задачами геометрии, а позднее — в связи с различными приложениями, прежде всего к теории автоматич. управления. Построение систематич. теории Д. у. с о. а. было начато в 1949.

Определение Д. у. с о. а. допускает любые суперпозиции искомого решения [типа $x(x(t))$] и интегралы от него, поэтому формально класс Д. у. с о. а. включает в себя все уравнения математич. анализа. Все же обычно, говоря о Д. у. с о. а., имеют в виду тот или иной естественный класс дифференциальных уравнений, в к-рых введено отклонение аргумента, допускающее построение содержательной теории. При этом ряд свойств Д. у. с о. а. имеет непосредственную аналогию со свойствами обычных дифференциальных уравнений, тогда как иные свойства являются принципиально новыми.

Уравнение (или система уравнений)

$$x^{(n)}(t)=f(t;\ x^{(m_1)}(t-\tau_1),\ \ldots,\ x^{(m_s)}(t-\tau_s)) \qquad (3)$$

(для системы x и f — векторы), где все $\tau_j\geqslant 0$, наз. уравнением (системой) запаздывающего, нейтрального или опережающего типа, если $\max_j m_j<n$, $=n$, $>n$, соответственно. Для уравнений иных видов такая классификация проводится на основе преобразования к виду (3) с помощью замены $t\to\chi(t)$, χ — возрастающая функция; напр., уравнение (1) запаздывающего типа при $\tau\geqslant 0$ и опережающего (замена $t\to t+\tau$) — при $\tau<0$. Если отклонения τ_j зависят от t, то уравнение (3) может менять тип; напр., уравнение (2) для $k\leqslant 1$ запаздывающего типа при $t\geqslant 0$ и опережающего — при $t\leqslant 0$. Если τ_j зависят от искомого решения, то уравнение (3) может иметь различный тип для различных его решений. Наиболее подробно разработана теория Д. у. с о. а. запаздывающего типа, менее — нейтрального типа и почти не изучена теория уравнений опережающего типа.

Один из простейших классов Д. у. с о. а. следующий:

$$x'(t)=f(t,\ x(t),\quad x(t-\tau)),\quad \tau>0. \qquad (4)$$

Для этого класса Д. у. с о. а. ставится основная начальная задача: заданы начальная точка t_0, начальная функция $\varphi(t)$, $t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0$, и значение $x(t_0+0)$; под решением задачи для уравнения (4) понимается функция $x(t)$, $t>t_0$, обращающая уравнение (4) в тождество, причем при $t>t_0$, $t-\tau\leqslant t_0$ в правую часть вместо $x(t-\tau)$ надо подставлять $\varphi(t-\tau)$. Для решения поставленной задачи можно применить метод шагов: при $t_0<t\leqslant t_0+\tau$ решают начальную задачу для уравнения (4), в к-ром вместо $x(t-\tau)$ подставлено $\varphi(t-\tau)$; при $t_0+\tau<t\leqslant t_0+2\tau$ будет $t_0<t-\tau\leqslant t_0+\tau$, т. е. $x(t-\tau)$ уже построено, и т. д.; таким образом, на каждом шаге приходится решать задачу Коши для уравнения без отклонения аргумента. Если функции f и φ непрерывны и $x(t_0+0)=\varphi(t_0)$, то решение задачи существует на нек-ром интервале $t_0<t\leqslant t_0+h$ и может быть продолжено обычным образом, а если функция $f(t,\ x,\ y)$ удовлетворяет по x условию Липшица, то это решение единственно и непрерывно зависит от f, φ, τ. Если при этом функция f достаточно гладкая, то $x'(t)$ непрерывна при $t>t_0$, $x''(t)$ непрерывна при $t>t_0+\tau$ и т. д. (свойство сглаживания).

Аналогично ставится начальная задача и строится решение для систем уравнений вида (4) и для уравнений высших порядков. В случае нескольких запаздываний за шаг принимают наименьшее из них. Если $\tau=\tau(t)$, то $\varphi(t)$ должна быть задана на всем начальном множестве значений $t-\tau(t)\leqslant t_0$, $t>t_0$. Наличие у $\tau(t)$ нулей препятствует применению метода шагов, однако с помощью простых аппроксимационных

или итерационных методов можно доказать теорему о разрешимости начальной задачи, аналогичную приведенной выше. Численные методы ее решения в принципе те же, что для $\tau=0$. Если заданные функции разрывны или $x(t_0+0)\neq\varphi(t_0)$, то понятие решения должно быть естественно обобщено.

Решение сформулированной начальной задачи строится только в направлении возрастания t. Другая ее особенность состоит в том, что многообразие решений при произвольной $\varphi(t)$, вообще говоря, бесконечномерное. (Исключением служат уравнения без предыстории, для к-рых $t_0\leqslant t-\tau(t)\leqslant t$ при $t\geqslant t_0$; напр., уравнение (2) при $0\leqslant k\leqslant 1$, $t_0=0$.) Это существенно отличает теорию Д. у. с о. а. от теории уравнений без отклонения аргумента.

В уравнении (4) запаздывание сосредоточенное. Рассматриваются также уравнения с распределенным запаздыванием, правая часть к-рых включает интегралы

$$\int_{-\tau}^{0} x(t+s)\, r(t,\ s)\, ds=\int_{t-\tau}^{t} x(s)\, r_1(t,\ s)\ ds$$

(это — интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра) или, комбинированный случай,

$$\int_{-\tau}^{0} x(t+s)\, d_s r(t,\ s)$$

и т. п. Наиболее общим видом Д. у. с о. а. запаздывающего типа 1-го порядка служит дифференциально-функциональное уравнение типа Вольтерра

$$x'(t)=F[x(t+s);\ t],\quad -\tau\leqslant s\leqslant 0,$$

где правая часть при каждом $t>t_0$ представляет собой функционал. И для таких уравнений начальная задача разрешима.

Для Д. у. с о. а. нейтрального типа, напр.

$$x'(t)=f(t,\ x(t),\ x(t-\tau_1),\ x'(t-\tau_2)),\ \tau_1,\ \tau_2\geqslant 0,$$

постановка и свойства начальной задачи аналогичны указанным выше, однако свойство сглаживания отсутствует; кроме того, возможны осложнения, если переменное запаздывание $\tau_2(t)$ имеет нули. Начальная задача для Д. у. с о. а. опережающего типа является некорректной.

Лучше других изучены линейные автономные (т. е. с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента) Д. у. с о. а. Уравнение (без подобных членов)

$$x^{(n)}(t)=\sum_{j=1}^{N} a_j x^{(m_j)}(t-\tau_j) \tag{5}$$

(все $a_j\neq 0$) имеет частные решения $x=e^{pt}$, где p удовлетворяет характеристическому уравнению

$$P(p)\equiv p^n-\sum a_j p^{m_j} e^{-\tau_j p}=0. \tag{6}$$

Здесь $P(p)$ — квазиполином; k-кратному корню уравнения (6) отвечают решения e^{pt}, ..., $t^{k-1}e^{pt}$ уравнения (5). Если хотя бы одно $\tau_j\neq 0$, то уравнение (6) имеет бесконечное число корней p_1, p_2, ... Чтобы уравнение (5) имело запаздывающий (нейтральный) тип, необходимо и достаточно условие

$$\operatorname{Re} p_r\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}-\infty\quad\left(-\infty<\varlimsup_{r\to\infty}\operatorname{Re} p_r<\infty\right).$$

В этих случаях каждое решение уравнения (5) разлагается в ряд по указанным частным решениям, а при решении начальной задачи для уравнения (5) и соответствующего неоднородного уравнения можно пользоваться обычными методами операционного исчисления. Аналогичными свойствами обладают системы уравнений и уравнения с распределенным запаздыванием.

Обычные определения устойчивости решения непосредственно распространяются на Д. у. с о. а. запаздывающего и нейтрального типов. Для асимптотич. устойчивости решений уравнения (5) необходимо и достаточно условие:

$$\sup_r \operatorname{Re} p_r < 0.$$

При выполнении этого условия асимптотически устойчиво и нулевое решение нелинейных автономных уравнений, для к-рых (5) служит линейным приближением.

Метод функций Ляпунова на исследование устойчивости Д. у. с о. а. распространил Н. Н. Красовский [5]. Он предложил пользоваться функционалами $V[\psi(s); t]$ в $C[-\tau, 0]\times[0, \infty)$; полную производную такого функционала «вдоль решения» заданного уравнения вида (4) можно вычислить в силу этого уравнения, и она представляет собой функционал того же типа, т. е.

$$\frac{d}{dt} V[x(t+s); t] = V_1[x(t+s); t].$$

Аналог теоремы Ляпунова об устойчивости: если

$$f(t, 0, 0) \equiv 0; \quad (\forall h > 0) \inf_{\|\psi\| > h,\ t > t_0} V[\psi(s); t] > 0;$$

$$V[\psi(s); t_0] \underset{\|\psi\| \to 0}{\longrightarrow} 0; \ V_1 \leqslant 0,$$

то тривиальное решение уравнения (4) устойчиво. Основные теоремы об устойчивости, выраженные в таких терминах, допускают обращение.

Ряд результатов получен для периодических Д. у. с о. а. Так, если

$$f(+T, x, y) \equiv f(t, x, y), \ T > 0,$$

то неподвижные точки оператора

$$U_k[\varphi(s)] \equiv x(kT+s)$$

($t_0-\tau \leqslant s \leqslant t_0$; $x(t)$ — решение уравнения (4) при начальной функции φ; k — натуральное) определяют kT-периодич. решения уравнения (4). Этот и другие аналогичные факты дают возможность применить к отысканию периодич. решений и к выяснению их устойчивости методы теории нелинейных операторов. Для линейных однородных T-периодич. Д. у. с о. а. запаздывающего типа доказана возможность аппроксимации каждого решения с любой степенью точности по шкале экспонент линейной комбинацией решений вида

$$t^k e^{q_r t} \alpha(t), \ \alpha(t+T) \equiv \alpha(t); \ k = 0, 1, \ldots, k_r.$$

Из других направлений исследования Д. у. с о. а. выделяются: детальное изучение асимптотических и осцилляционных свойств уравнений

$$x'(t) = \pm M(t) x(t-\tau(t)), \quad M(t) \geqslant 0,$$

и аналогичных уравнений 2-го порядка; получение асимптотич. выражений для решений систем с малыми отклонениями аргумента или с малой нелинейностью; распространение на Д. у. с о. а. асимптотич. методов Крылова — Боголюбова (см. *Крылова — Боголюбова метод усреднения*); распространение на Д. у. с о. а. теории оптимального управления Л. С. Понтрягина (см. *Оптимального управления математическая теория*); исследование краевых задач; исследование *эволюционных уравнений* с частными производными и запаздыванием во времени; исследование стохастич. Д. у. с о. а. (см. *Стохастическое дифференциальное уравнение*) и т. д.

Лит.: [1] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б., Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, М., 1971; [2] Иинни Э., Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения, пер. с англ., М., 1961; [3] Беллман Р., Кук К. Л., Дифференциально-разностные урав-

нения, пер. с англ., М., 1967; [4] Мышкис А. Д., Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, 2 изд., М., 1972; [5] Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959; [6] Норкин С. Б., Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, М., 1965; [7] Рубаник В. П., Колебания квазилинейных систем с запаздыванием, М., 1969; [8] Ogu-töreli M. N., Time-Lag control systems, N. Y.— L., 1966; [9] Halanay A., Differential equations, N.Y.— L., 1966; [10] Hale J. K., Functional differential equations, N. Y., 1971.

А. Д. Мышкис.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ — уравнение вида

$$F(x,\ \ldots,\ p_{i_1\ \ldots\ i_n},\ \ldots)=0, \qquad (1)$$

где F — заданная действительная функция точки $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ области D евклидова пространства E_n, $n\geqslant 2$, и действительных переменных

$$p_{i_1\ \ldots\ i_n}\equiv\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}\ \ldots\ \partial x_n^{i_n}}$$

($u(x)$ — неизвестная функция) с неотрицательными целочисленными индексами $i_1,\ \ldots,\ i_n$, $\sum_{j=1}^n i_j=k$, $k=0,\ \ldots,\ m$, $m\geqslant 1$, по крайней мере одна из производных

$$\frac{\partial F}{\partial p_{i_1\ \ldots\ i_n}},\quad \sum_{j=1}^n i_j=m,$$

функции F отлична от нуля; натуральное число m наз. порядком уравнения (1).

Определенная в области D задания уравнения (1) функция $u(x)$, непрерывная вместе со своими частными производными, входящими в это уравнение и обращающая его в тождество, наз. регулярным решением. Наряду с регулярными решениями в теории Д. у. с ч. п. важное значение имеют решения, перестающие быть регулярными вблизи изолированных точек или многообразий особого вида: к ним относятся, в частности, элементарные (фундаментальные) решения. Они позволяют строить широкие классы регулярных решений (так наз. потенциалов) и устанавливать их структурные и качественные свойства.

В предположении непрерывности частных производных 1-го порядка функции F относительно переменных

$$p_{i_1\ \ldots\ i_n},\quad \sum_{j=1}^n i_j=m,$$

в теории уравнений вида (1) фундаментальную роль играет форма порядка m:

$$k(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)=\sum\frac{\partial F}{\partial p_{i_1\ \ldots\ i_n}}\lambda_1^{i_1}\ \ldots\ \lambda_n^{i_n}, \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n i_j=m,$$

относительно действительных параметров $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$, к-рая наз. характеристической формой, соответствующей уравнению (1).

Когда F — линейная функция переменных $p_{i_1\ \ldots\ i_n}$, уравнение (1) наз. линейным. Линейное уравнение с частными производными 2-го порядка можно записать в виде:

$$\sum_{i,\ j=1}^n A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{j=1}^n B_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+Cu=f, \qquad (3)$$

где A_{ij}, B_j, C и f — заданные в области D действительные функции точки x. Уравнение (3) наз. однородным, если $f(x)=0$ для всех $x\in D$. В случае уравнения (3) форма (2) является квадратичной:

$$Q(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)=\sum_{i,\ j=1}^n A_{ij}\lambda_i\lambda_j$$

с коэффициентами A_{ij}, зависящими только от точки $x \in D$. В каждой точке $x \in D$ квадратичная форма Q при помощи неособого аффинного преобразования переменных $\lambda_i = \lambda_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $i=1, \ldots, n$, может быть приведена к канонич. виду

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2,$$

где коэффициенты α_i, $i=1, \ldots, n$, принимают значения $1, -1, 0$, причем число отрицательных коэффициентов (индекс инерции) и число нулевых коэффициентов (дефект формы) являются аффинными инвариантами. Когда все $\alpha_i=1$ или все $\alpha_i=-1$, т. е. когда форма Q соответственно положительно или отрицательно определена (дефинитна), уравнение (3) наз. эллиптическим в точке $x \in D$. Если один из коэффициентов α_i отрицателен, а все остальные положительны (или наоборот), то уравнение (3) наз. гиперболическим в точке x. В случае, когда l, $1<l<n-1$, коэффициентов α_i положительны, а остальные $n-l$ отрицательны, уравнение (3) наз. ультрагиперболическим. Если же хотя бы один из этих коэффициентов (но не все) равен нулю, то уравнение (3) наз. параболическим в точке x. Говорят, что в области D своего задания уравнение (3) является уравнением эллиптического, гиперболического или параболического типа, если оно соответственно эллиптично, гиперболично или параболично в каждой точке этой области. Эллиптическое в области D уравнение (3) наз. равномерно эллиптическим, если существуют действительные числа k_0 и k_1 одинакового знака такие, что

$$k_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leqslant Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant k_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

для всех $x \in D$. Когда в разных частях области D уравнение (3) принадлежит к различным типам, то говорят, что оно является уравнением смешанного типа в этой области.

Лапласа уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0,$$

теплопроводности уравнение

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

и *волновое уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

являются типичными примерами линейных эллиптич., параболич. и гиперболич. уравнений 2-го порядка соответственно (подробнее см. *Линейное гиперболическое уравнение и система*, *Линейное параболическое уравнение и система*, *Линейное эллиптическое уравнение и система*).

Трикоми уравнение

$$x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

относится к уравнениям смешанного типа в любой области плоскости переменных x_1, x_2, пересечение к-рой с осью $x_2=0$ не пусто (подробнее см. *Смешанного типа уравнение* с частными производными).

В случае линейного уравнения с частными производными порядка m

$$\sum \alpha_{i_1 \ldots i_n}(x) \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} + L_1 u = f, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = m, \quad (4)$$

где L_1 — линейный дифференциальный оператор с

частными производными порядка ниже m, форма (2) имеет вид

$$k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_n}(x)\, \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}. \qquad (5)$$

Если при фиксированном значении $x \in D$ можно найти такое аффинное преобразование $\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $i = 1, \ldots, n$, в результате к-рого полученная из (5) форма содержит лишь l, $0 < l < n$, переменных μ, то говорят, что уравнение (4) в точке x п а р а б о л и ч е с к и в ы р о ж д а е т с я. При отсутствии параболич. вырождения и если конич. многообразие

$$k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0 \qquad (6)$$

не имеет действительных точек, кроме $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$, то уравнение (4) в точке x наз. э л л и п т и ч е с к и м. Уравнение (4) наз. г и п е р б о л и ч е с к и м в точке x, если в пространстве переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ существует прямая δ такая, что если принять ее за координатную прямую в новых переменных $\mu_1, \ldots, \mu_n$, полученных аффинным преобразованием $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то относительно координаты, изменяющейся вдоль δ, преобразованное уравнение (6) имеет ровно m действительных корней (простых или кратных) при любом выборе остальных координат μ.

Аналогичным образом по характеру формы (2) происходит классификация по типам уравнения (1) и в нелинейном случае. Поскольку в этом случае коэффициенты формы (2) зависят, наряду с точкой x, от искомого решения и от его производных, классификация по типам имеет смысл лишь для этого решения. См. также *Нелинейное уравнение с частными производными*.

Когда F представляет собой N-мерный вектор $F = (F_1, \ldots, F_N)$ с компонентами

$$F_i(x, \ldots, p_{i_1 \ldots i_n}, \ldots), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

зависящими от $x \in D$ и от M-мерных векторов

$$p_{i_1 \ldots i_n} = \left(p^1_{i_1 \ldots i_n}, \ldots, p^M_{i_1 \ldots i_n}\right) = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}},$$

векторное равенство (1) наз. с и с т е м о й д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы х у р а в н е н и й с ч а с т н ы м и п р о и з в о д н ы м и относительно неизвестных функций $u_1, \ldots, u_M$ или относительно неизвестного вектора $u = (u_1, \ldots, u_M)$. Максимальный порядок производных от искомых функций, входящих в данное уравнение системы, наз. п о р я д к о м этой системы (уравнения). Когда $M = N$ и порядок каждого уравнения системы (1) равен m, определитель

$$k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \det \sum_{i_1 \ldots i_n} \left\| \frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1 \ldots i_n}} \right\| \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}, \qquad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = m,$$

где

$$\left\| \frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1 \ldots i_n}} \right\|, \quad i, j = 1, \ldots, N, \quad \sum_{k=1}^{n} i_k = m,$$

— квадратная матрица, представляет собой форму порядка Nm относительно действительных скалярных параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и наз. х а р а к т е р и с т и ч е с к и м д е т е р м и н а н т о м с и с т е м ы (1). Классификация по типам системы (1) происходит по характеру формы (7) точно так же, как при рассмотрении одного уравнения порядка m. Фигурирующие в левой части уравнения (1) величины могут быть комплекс-

ными. Комплексное Д. у. с ч. п. очевидным образом заменяется системой Д. у. с ч. п.

Д. у. с ч. п. может вовсе не иметь решения. Однако встречающиеся в приложениях Д. у. с ч. п., как правило, имеют целые семейства решений. При выводе этих уравнений из общих законов, к-рым подчинены изучаемые явления природы, естественно возникают дополнительные условия, налагаемые на искомые решения. Центральное место в теории Д. у. с ч. п. занимают задачи отыскания именно таких регулярных решений, к-рые удовлетворяют этим условиям. Условия задач, к-рым должно удовлетворять искомое решение, существенно зависят от типа рассматриваемого уравнения.

Для эллиптич. уравнений обычно рассматриваются так наз. *краевые задачи*, к-рые, напр., в случае уравнения 2-го порядка в основном охватываются следующей постановкой: ищется регулярное в области D решение $u(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$f\left(x,\ u,\ \ldots,\ \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}},\ \ldots\right)+$$

$$+\int_S H\left(x,\ t,\ u(t),\ \ldots,\ \frac{\partial^l u(t)}{\partial t_1^{i_1}\ldots\partial t_n^{i_n}},\ \ldots\right)ds_t=0, \quad (8)$$

где S — граница области D, f и H — заданные действительные функции, ds_t — элемент площади поверхности S, а под

$$\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}},\quad \sum_{j=1}^n i_j=l,$$

при $x\in S$ понимаются пределы соответствующих производных функции $u(x)$, когда точка x изнутри области D стремится к S.

В такой общей постановке задача (8) далека от своего сколько-нибудь полного решения. Сравнительно хорошо исследованы такие частные случаи этой задачи, какими являются так наз. первая и вторая краевые задачи (см. *Дирихле задача* и *Неймана задача*) для линейных уравнений, удовлетворяющих условию равномерной эллиптичности.

В отличие от краевых задач для эллиптич. уравнений, в к-рых носителем данных является вся граница области, где ищется решение, для широких классов уравнений гиперболич. и параболич. типов носителями дополнительных данных могут служить определенным образом ориентированные незамкнутые поверхности пространства E^n, причем от них существенно зависит область определения искомого решения. К таким задачам относятся, напр., *Коши задача* с начальными данными, характеристическая задача Коши. Особо ставятся краевые задачи для уравнений смешанного типа. В теории Д. у. с ч. п. значительное внимание уделяется обширному классу смешанных задач. См. *Смешанная задача для гиперболического уравнения и системы*, *Смешанная и краевая задачи для параболического уравнения и системы*.

Задача считается в классич. смысле корректно (правильно) поставленной, если она имеет и притом единственное устойчивое решение. Задачи, не удовлетворяющие этим требованиям, до недавнего времени считались лишенными смысла. Начиная с 40-х гг. 20 в. широта диапазона математич. проблем физики, механики и техники заставила расширить не только понятие корректности постановок задач для Д. у. с ч. п., но и понятие самого решения. Были введены так наз. обобщенные решения. Наряду с вопросами существования и единственности точных решений тех или иных задач для Д. у. с ч. п. в приложениях значительную важность приобрели понятия в определенном смысле

приближенных решений и фактическое построение таких решений.

Исторически одним из первых методов, позволяющих строить решения ряда задач для важных классов Д. у. с ч. п., является метод разделения переменных, или *Фурье метод*, к к-рому тесно примыкает метод интегральных преобразований (см. *Фурье интеграл*). От применения этого метода берет свое начало *спектральная теория дифференциальных операторов*.

Сравнительно позже был создан *параметрикса метод*, на основе к-рого построен *потенциалов метод*. Этот метод позволяет привлекать к исследованию краевых задач для эллиптич. уравнений аппарат интегральных уравнений. Далеко идущим развитием метода параметрикса являются методы теории функций комплексного переменного, успешно применяющиеся при исследовании эллиптич. уравнений с двумя независимыми переменными. См. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; методы комплексного переменного.

Когда изучаемое Д. у. с ч. п. представляет собой уравнение Эйлера для многомерной задачи вариационного исчисления, часто пользуются вариационным методом. Вариационный метод весьма удобен в тех случаях, когда уравнение Эйлера является уравнением эллиптич. типа. См. также *Дифференциальное уравнение с частными производными*; вариационные методы решения.

Начиная с 30-х гг. 20 в. при исследовании Д. у. с ч. п. широко используются методы функционального анализа, среди к-рых центральное место занимают *Шаудера метод* и его дальнейшее развитие — метод априорных оценок. Эти методы позволяют сравнительно легко установить существование *слабых решений* и *сильных решений* как для линейных, так и для нек-рых классов нелинейных Д. у. с ч. п. См. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; функциональные методы решения.

Среди методов, успешно приводящих к цели при построении приближенных решений Д. у. с ч. п., чаще всего применяются методы *конечных разностей исчисления*. См. также *Гиперболического типа уравнение*, численные методы решения; *Параболического типа уравнение*, численные методы решения; *Эллиптического типа уравнение*, численные методы решения.

Лит.: [1] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [2] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [3] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [4] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972.

А. В. Бицадзе.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; вариационные методы решения — методы решения краевых задач для Д. у. с ч. п. при помощи сведения этих задач (когда это возможно) к соответствующим образом подобранным вариационным задачам (т. е. к задачам на отыскание минимума или максимума нек-рого функционала) и решения последних.

Вариационные методы широко применяются как в теоретич. исследованиях (для доказательства теорем существования, единственности и устойчивости решений, при исследовании дифференциальных свойств решений, в спектральной теории, при изучении разнообразных вопросов оптимизации и т. д.), так и в вопросах, связанных с нахождением приближенных решений уравнений. Приближенные решения вариационных задач можно находить при помощи решения конечных систем алгебраич. уравнений, при этом алгоритмы нахождения приближенных решений вариационных задач часто оказываются проще и удобнее, чем имеющиеся алгоритмы решения соответствующих задач для Д. у. с ч. п.

Вариационный метод исследования краевых задач возник в сер. 19 в. в виде так наз. *Дирихле принципа* отыскания в области G гармонич. функции, принимающей на границе ∂G области G данное значение $\varphi(x)$, $x \in \partial G$, как функции, дающей в рассматриваемом классе функций минимум интегралу Дирихле. Первоначально принцип Дирихле применялся лишь в теории линейных эллиптич. уравнений 2-го порядка (впоследствии и более высоких порядков), а затем и в теории уравнений других типов, причем не только линейных, но и нелинейных. Разработке вариационных методов были посвящены работы Б. Римана (B. Riemann), К. Вейерштрасса (K. Weierstrass), Д. Гильберта (D. Hilbert). Большую роль в развитии вариационных методов, в частности в вопросе их обоснования, сыграли *вложения теоремы* и их обобщения.

Одним из простых и типичных примеров использования вариационных методов является решение *Дирихле задачи* для эллиптического самосопряженного уравнения 2-го порядка

$$Au + cu = 0, \tag{1}$$

где $c = c(x) \geqslant 0$,

$$u|_{\partial G} = \varphi, \tag{2}$$

$$Au = -\sum_{i,\ j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right], \tag{3}$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in G,$$

(G — область конечномерного евклидова пространства, ∂G — ее граница, φ — заданная на ∂G функция), и существует постоянная $\varkappa > 0$ такая, что для всех точек $x \in G$ и всех чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ выполняется неравенство (условие эллиптичности)

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geqslant \varkappa \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

В этом случае вариационный метод решения задачи (1) — (2) состоит в отыскании функции $u(x)$, для к-рой функционал

$$K(u) = \int_G \left[\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + cu^2\right] dx$$

(уравнение (1) является Эйлера уравнением для функционала $K(u)$) принимает наименьшее значение в классе допустимых функций, т. е. таких функций $u(x)$, для к-рых $K(u) < +\infty$, и выполняется граничное условие (2). Вариационный метод применим только тогда, когда класс допустимых функций не пуст. Условия, к-рым должна удовлетворять заданная на границе функция φ для того, чтобы класс допустимых функций был не пуст, даются теоремами вложения. Функция $u(x)$, для к-рой функционал $K(u)$ принимает наименьшее значение в классе допустимых функций, является обобщенным решением задачи (1) — (2) (см. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; функциональные методы решения) и, напр., в классическом случае непрерывной дифференцируемости коэффициентов $a_{ij}(x)$ оператора (3) — обычным решением этой задачи.

Другим типичным примером использования вариационных методов является их применение к отысканию собственных значений и собственных функций оператора (3).

Функция, дающая минимум нек-рому функционалу, может быть получена как предел так наз. минимизирующей последовательности, т. е. последовательности функций, значения функционала на членах к-рой стремятся к указанному минимуму. Для построения минимизирующих последовательностей и установления скорости их сходимости разработаны специальные методы (напр., *Ритца метод*).

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [2] его же, Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, пер. с англ., М., 1953; [3] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962; [4] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3—5, М., 1958—59; [5] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, 2 изд., М., 1970; [6] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 2 изд., М., 1973; [7] Михайлов В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных, М., 1976.

Л. Д. Кудрявцев.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; задача с данными на характеристиках — задача, состоящая в решении дифференциального уравнения или системы уравнений с частными производными по заданным условиям на *характеристических многообразиях.* Основными задачами такого типа являются характеристическая задача Коши и *Гурса задача.*

В случае характеристич. задачи Коши, когда начальное многообразие является характеристич. в каждой точке, начальные данные не могут быть заданы произвольным образом. Они должны удовлетворять определенным условиям, к-рые диктуются дифференциальным уравнением. Поэтому характеристич. задача Коши, вообще говоря, не является корректно поставленной, если на класс искомых решений и на заданные функции не наложены дополнительные условия (особенно вдоль многообразия, не касательного к начальному). Напр., для *теплопроводности уравнения*

$$u_t = u_{xx}$$

характеристич. задача Коши

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

корректна в классе функций, растущих на бесконечности не быстрее $\exp(cx^2)$; если же показатель 2 при x заменить на $2+\varepsilon$, то единственности уже не будет. Существует широкий класс уравнений, для к-рых характеристич. задача Коши корректна.

Если начальное многообразие S одновременно является многообразием вырождения типа или порядка уравнения, то характеристич. задача может оказаться правильно поставленной. Напр., для уравнения

$$u_{xx} - y^m u_{yy} = 0, \quad y > 0, \quad 0 < m = \text{const} < 1,$$

с достаточно гладкими начальными данными на любом интервале S характеристики $y=0$ задача разрешима и притом единственным образом.

К задачам с данными на характеристиках относятся задачи с неполными и видоизмененными начальными данными, к-рые возникают в теории вырождающихся гиперболич. и параболич. уравнений и систем. Эти задачи для уравнений вида

$$u_{xx} - y^m u_{yy} + a u_x + b u_y + cu = 0, \quad y > 0, \quad m > 0,$$

ставятся следующим образом. Требуется отыскать решение $u(x,y)$ уравнения, удовлетворяющее видоизмененным начальным данным

$$\lim \varphi(x, y)\, u = \tau(x), \quad \lim \psi(x, y)\, u_y = \nu(x),$$

где $\alpha < x < \beta$, φ, τ, ψ и ν — заданные функции, или неполным начальным данным, т. е. одному из этих условий.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения смешанного типа, М., 1959; [2] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [3] Тихонов А. Н., «Матем. сб.», 1935, т. 42, с. 199—216; [4] Хермандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965; [5] его же, «Математика», 1968, т. 12, № 2, с. 88—109.

А. М. Нахушев.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; задача с косой (наклонной) производной — линейная краевая задача для эллиптич. уравнений 2-го порядка.

Пусть D — область действительного евклидова пространства с декартовыми координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, граница ∂D к-рой представляет собой $(n-1)$-мерную гиперповерхность Ляпунова. Пусть в области D задано линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\mathcal{E}(u) = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = F(x) \quad (1)$$

с действительными коэффициентами a_{ij}, b_i, c, F, удовлетворяющими условию Гёльдера в $D \cup \partial D$, и, кроме того, в D соблюдено условие равномерной эллиптичности уравнения. Пусть $l = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ — заданный на ∂D непрерывный действительный вектор, к-рый нигде не обращается в нуль. Задача с косой производной состоит в следующем: найти регулярное в области D решение $u(x)$ уравнения (1), непрерывное в $D \cup \partial D$, для к-рого в каждой точке $y \in \partial D$ существует предел

$$\lim_{\substack{x \to y \\ x \in D}} [l(y) \operatorname{grad}_x u] = \lambda(u),$$

совпадающий с заданной непрерывной на ∂D функцией $f(y)$:

$$\lambda(u) = f(y), \quad y \in \partial D. \quad (2)$$

В краевом условии (2) без ограничения общности можно считать, что l — единичный вектор. *Неймана задача* является частным случаем задачи с косой производной, когда левая часть в краевом условии (2) совпадает с производной от искомого решения по конормали ν:

$$\frac{du}{d\nu} = f(y), \quad y \in \partial D.$$

Если соблюдены условия

$$c(x) \leqslant 0 \quad (3)$$

и

$$\inf_{y \in \partial D} (Nl) > 0, \quad (4)$$

где N — внешняя нормаль ∂D в точке y, то соответствующая задаче (1), (2) однородная краевая задача

$$\mathcal{E}(u) = 0, \quad \lambda(u) = 0, \quad (5)$$

в силу принципов Хопфа и Зарембы — Жиро (см., напр., [1]), не может иметь решения, отличного от постоянной. В частности, когда в условии (3) по крайней мере в одной точке выполняется строгое неравенство, задача (1), (2) не может иметь более одного решения. При исследовании вопроса о существовании решений задачи (1), (2) обычно пользуются методом интегральных уравнений, априорными оценками или методами *конечных разностей исчисления*.

Выполнение условия (4) гарантирует ф р е д г о л ь м о в о с т ь задачи (1), (2), то есть: а) размерность $\varkappa_1$ пространства решений однородной задачи (5) конечна; б) если $\varkappa_1 = 0$, то задача (1), (2) всегда разрешима и притом однозначно; если $\varkappa_1 > 0$, то существует пространство линейных функционалов, обращение в нуль к-рых над F и f является условием, необходимым и достаточным для существования решений задачи (1), (2); причем размерность этого пространства также равна $\varkappa_1$. Фредгольмовость задачи (1), (2) может нарушиться лишь тогда, когда множество M точек y, для к-рых $(Nl) = 0$, не пусто. В частности, при $n = 2$ в предположении, что

$$\sum_{i,\ j=1}^{2} a_{ij} u_{x_i x_j} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u(x)$$

(а это не ограничивает общность), задача (1), (2) редуцируется к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши, откуда следует н ё-

терость задачи, то есть: а) размерность $\varkappa_1$ пространства решений однородной задачи (5) конечна; б) размерность $\varkappa_2$ пространства линейных функционалов, обращение в нуль к-рых над F и f является условием, необходимым и достаточным для разрешимости задачи (1), (2), также конечна; в) разность $\varkappa_1 - \varkappa_2 = \varkappa$ (индекс задачи (1), (2)) дается формулой

$$\varkappa = 2(p+1),$$

где $2\pi p$ — приращение $\arg(l_1 - il_2)$ при однократном обходе контура ∂D области D в положительном направлении. В рассматриваемом случае задача (1), (2) будет фредгольмовой лишь при $p = -1$. Число p характеризует вращение векторного поля (l_1, l_2). Когда (1) представляет собой равномерно эллиптич. систему, т. е. когда F и u являются m компонентными векторами, а a_{ij}, b_i и c — квадратными матрицами порядка m, причем матрицы a_{ij} удовлетворяют условию

$$k_0\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2\Big)^m \leqslant \Big|\det\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j\Big| \leqslant k_1\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2\Big)^m,$$

при определении оператора $\lambda(u)$ в краевом условии (2) задачи с косой производной под $l_1, l_2, \ldots, l_n$ следует понимать квадратные матрицы порядка m, а под f — вектор с m компонентами.

Нётеровость задачи с косой производной имеет место для широких классов равномерно эллиптич. систем и операторов $\lambda(u)$. Так, напр., когда $n=2$ и $a_{ij}=0$, $i \neq j$, $a_{ii}=E$, где E — единичная (диагональная) матрица, выполнение условия $\det(l_1 + il_2) \neq 0$ всюду на ∂D гарантирует нётеровость задачи (1), (2). При соблюдении этого условия индекс задачи (1), (2) вычисляется по формуле $\varkappa = 2(p+m)$, где $2\pi p$ — приращение $\arg\det(l - il_2)$ при однократном обходе контура ∂D области D в положительном направлении.

С 60-х гг. 20 в. ведется интенсивное исследование задачи с косой производной при $n \geqslant 3$ (см. [1]).

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [2] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959; [3] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [4] Bouligand G., Giraud G., Delens P., Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel, P., 1935. *А. В. Бицадзе.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; задача с разрывными коэффициентами — задача для Д. у. с ч. п., в к-рой коэффициенты дифференциальных операторов испытывают разрывы 1-го рода (или скачки) при переходе через нек-рые поверхности и на этих поверхностях заданы условия сопряжения.

Задача с разрывными коэффициентами в случае эллиптич. операторов 2-го порядка (задача трансмиссии) состоит в следующем. В произвольной ограниченной открытой N-мерной области g с границей Γ задана $(N-1)$-мерная поверхность Γ_1, разбивающая область g на подобласти g_1 и g_2; в области $(g+\Gamma)$ ставится задача:

$$\left.\begin{aligned} L_l u = f_l(x) \text{ в } g_l,\ l = 1, 2, \\ [u]\big|_{\Gamma_1} = \varphi(x),\ \left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]\Big|_{\Gamma_1} = \psi(x), \\ u\big|_{\Gamma} = \chi(x), \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

где

$$L_l u = \sum_{i,\ j=1}^{N} a_{ij}^{(l)}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i^{(l)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c^{(l)}(x)u$$

— определенный в области g_l линейный дифференциальный оператор эллиптич. типа;

$$[u]\big|_{\Gamma_1} \equiv u\big|_{x\to\Gamma_1-0} - u\big|_{x\to\Gamma_1+0},$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu_1}\right]\Big|_{\Gamma_1} \equiv \frac{\partial u}{\partial \nu_1}\Big|_{x\to\Gamma_1-0} - \frac{\partial u}{\partial \nu_2}\Big|_{x\to\Gamma_2+0},$$

где $\partial/\partial v_l$ — производная по конормали, равная

$$\sum_{i,\ j} a_{ij}^{(l)} \cos(\boldsymbol{n},\ x_j) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

n — внешняя нормаль к Γ_1, а символы Γ_1-0 и Γ_1+0 означают, что берутся предельные значения соответственно с внутренней и с внешней сторон поверхности Γ_1 по отношению к области g_1, f_l, φ, ψ, χ — заданные функции.

Здесь для простоты считается, что имеется лишь одна поверхность разрыва коэффициентов — поверхность Γ_1.

Задача (*) является математич. описанием стационарных физич. процессов, происходящих в области, составленной из различных сред, напр. рассеяния электромагнитной волны на каком-либо препятствии или распространения тепла в слоистой среде.

У задачи (*) существует классич. решение при условиях, к-рые в случае отсутствия разрыва у коэффициентов и при $\varphi=\psi\equiv 0$ переходят в *Жиро условия* разрешимости задачи Дирихле (см. [3], [4], [5]). Для задачи (*) изучались: обобщенные из W_2^l решения (см. [1], [2]); задача на собственные значения и оценки собственных функций для самосопряженных операторов L_l (см. [6], [8]); случаи вырождения в связи с марковскими процессами (см. [9], [10]); случаи с квазилинейными операторами L_l (см. [13]). Для задачи (*) могут быть установлены оценки Шаудера (см. [6], [7]); разработаны численные методы ее решения [11], [12]. Построена теория разрешимости задач с разрывными коэффициентами для эллиптич. уравнений и систем порядка $2m$ (см. [18], [19], [20]).

Задача с разрывными коэффициентами для параболич. и гиперболич. операторов 2-го порядка столь же подробно изучена (см. [2], [9], [14], [15], [16], [17]).

Лит.: [1] Ладыженская О. А., «Докл. АН СССР», 1954, т. 96, № 3, с. 433—36; [2] Олейник О. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1961, т. 25, № 1, с. 3—20; [3] Ильин В. А., Шишмарев И. А., «Сиб. матем. ж.», 1961, т. 2, № 1, с. 46—58; [4] Ильин В. А., «Докл. АН СССР», 1961, т. 137, № 1, с. 28—30; [5] Ладыженская О. А., Уральцева Н. И., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., 1964; [6] Шишмарев И. А., «Докл. АН СССР», 1961, т. 137, № 1, с. 45—47; [7] Ван Тун, «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1964, т. 4, № 3, с. 577—80; [8] Ильин В. А., «Докл. АН СССР», 1961, т. 137, № 2, с. 272—75; [9] Гирсанов И. В., «Докл. АН СССР», 1960, т. 135, № 6, с. 1311—13; [10] Фрейдлин М. И., «Докл. АН СССР», 1962, т. 144, № 3, с. 501—04; [11] Самарский А. А., в кн.: Тр. 4-го Всесоюзного матем. съезда. Ленинград, 1961, т. 2, Л., 1964; [12] его же, «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1961, т. 1, № 3, с. 441—460; [13] Борсук М. В., «Докл. АН СССР», 1967, т. 177, № 5, с. 991—94; [14] Камынин Л. И., в кн.: Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными, Новосиб., 1963, с. 3—6; [15] Камынин Л. И., Масленникова В. Н., «Сиб. матем. ж.», 1961, т. 2, № 3, с. 384—99; [16] Ильин В. А., «Докл. АН СССР», 1962, т. 142, № 1, с. 21—4; [17] Егоров Ю. В., «Докл. АН СССР», 1960, т. 134, № 3, с. 514—17; [18] Schechter M., «Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat.», 1960, v. 14, p. 207—36; [19] Ройтберг Я. А., Шертель З. Г., «Докл. АН СССР», 1963, т. 148, № 5, с. 1034—37; [20] их же, «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 181—82.

И. А. Шишмарев.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; задача с разрывными начальными (краевыми) условиями — задача для Д. у. с ч. п., в к-рой функции, задающие (начальные) краевые условия, не являются непрерывными.

Пусть, например, для гиперболического уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad 0 < x < 1, \quad t > t_0,$$

поставлена смешанная задача с начальными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \varphi_1, \quad u\Big|_{t=t_0} = \varphi_0,$$

и краевыми условиями

$$u\,|_{x=0}=\psi_1,\quad u\,|_{x=1}=\psi_2;$$

в этом смысле разрывы начальных функций φ_0 и φ_1 влекут за собой разрывы u и $\partial u/\partial t$ вдоль характеристических лучей $x-at=\text{const}$ и $x+at=\text{const}$, причем мера разрыва

$$\chi=u\,(c\pm at+0,\ t)-u\,(c\pm at-0,\ t),$$

или

$$\chi=u_t\,(c\pm at+0,\ t)-u_t\,(c\pm at-0,\ t),$$

где $c\in[0,\ 1]$ — точка разрыва функций φ_0 или φ_1, удовлетворяет вдоль характеристического луча уравнению

$$\frac{d\chi}{dt}+0\cdot\lambda=0,$$

т. е. $\chi=\text{const}$. Аналогичные результаты справедливы для гиперболических уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами:

$$u_{tt}=\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}\,(x)\,\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\,(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}+c\,(x)u+f,$$

$$u\,|_{t=t_0}=\varphi_0\,(x),\quad u_t\,|_{t=t_0}=\varphi_1\,(x),\quad u\,|_{\partial D}=\psi.$$

В этом случае разрывы начальных функций и краевых условий также влекут за собой разрывы u и $\partial u/\partial t$ вдоль характеристических лучей, определяемых из системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,(x)\,\psi_j,\quad \sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}\,(x)\,\varphi_i\varphi_j=1;$$

мера разрыва χ удовлетворяет уравнению:

$$2\,\frac{d\chi}{dt}+A\chi=0,\quad A=\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},$$

где функция $\varphi(x)$ определяет характеристическую поверхность в виде уравнения $\varphi(x)=C$.

Для уравнения эллиптического типа разрывы краевых условий внутрь области D не распространяются, т. к. в этом случае характеристические лучи комплексны. Для таких уравнений эллиптического типа изучен вопрос о существовании и единственности решения и об удовлетворении решения граничным условиям. Так, для эллиптических уравнений 2-го порядка в произвольной области

$$\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}\,(x)\,\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\,(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}+c\,(x)\,u=f,$$

$$u\,|_{\partial D}=\psi,\quad \text{или}\quad \frac{\partial u}{\partial n}+k\,(x)\,u\,|_{\partial D}=\psi$$

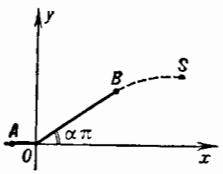
доказано, что если граничная функция $\psi\in W_2^{1/2}\,(\partial D)$ для первой краевой задачи и $\psi\in L_2(\partial D)$ для второй краевой задачи, то существует обобщенное решение из $W_2^1(D)$, к-рое удовлетворяет граничному условию в среднем, т. е. $\|u-\psi\|_{L_2(\partial D_n)}\to 0$, где поверхности ∂D_n аппроксимируют поверхность ∂D. В случае параболических уравнений (также как и для эллиптических уравнений) разрывы внутрь области D не распространяются, если разрывны начальные данные или краевые условия. Для этих задач изучены также вопросы о существовании и единственности обобщенного решения граничному условию.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, М., 1976; [3] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [4] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [6] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа,

2 изд., М., 1973; [7] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., 1967; [8] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [9] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [10] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы ..., пер. с англ., М., 1962.

Е. И. Моисеев.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; задача со свободными границами — задача, в к-рой требуется найти решение системы Д. у. с ч. п. с соответствующими начальными и граничными условиями в области, граница к-рой частично или полностью неизвестна и подлежит определению. К такого типа задачам приводят многие проблемы фильтрации, диффузии, теплопроводности и др. разделов механики сплошных сред. Так, напр., задача Гельмгольца — Кирхгофа о симметричном струйном обтекании равнобочного клина с углом раствора $2\alpha\pi$ неограниченным потоком идеальной жидкости заключается в отыскании компонент скорости $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$, являющихся решением системы уравнений Коши — Римана:



$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

и удовлетворяющих на известной границе условиям (см. рис.):

$$v\,|_{AO}=0, \quad v\,|_{OB}=\operatorname{tg}\alpha u\,|_{OB}.$$

Неизвестная граница BS является линией тока, и на ней задано дополнительное условие

$$u^2+v^2=v_\infty^2, \quad \lim_{r\to\infty} u=v_\infty, \quad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

(на рис. приведена верхняя половина течения $y\geqslant 0$, при $y\leqslant 0$ течение симметрично).

При изучении плоских задач со свободными границами большую роль играют методы теории функций комплексного переменного.

См. также *Стефана задача.*

Лит.: [1] Монахов В. Н., Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем, Новосиб., 1977; [2] Кружков С. Н., «Прикл. матем. и механ.», 1967, т. 31, в. 6, с. 1009—20; [3] Шишкин Г. И., «Докл. АН СССР», 1971, т. 197, № 6, 1276—79.

Ф. П. Васильев.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; метод уравнений Фишера — Рисса, метод Пиконе,— метод решения краевых задач для Д. у. с ч. п., основанный на применении формулы Грина и приводящий к системе интегральных уравнений (Фишера — Рисса) для нек-рого подходящим образом подобранного неизвестного вектора. Метод дает возможность находить численные значения решений, но может быть применен и для доказательства теорем существования.

Пусть L^* и L — сопряженные линейные эллиптические операторы 2-го порядка в пространстве точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с действительными коэффициентами

$$a_{ik}\in C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(D\cup S),$$

$$b_i\in C^{(1)}(D\cup S), \quad c,\ f\in C^{(0)}(D\cup S),$$

D — конечная область, ограниченная замкнутой поверхностью S. Пусть в классе функций, допускающих интегральные представления по формулам Грина, ищется решение $u(x)$ задачи Дирихле:

$$Lu(x)=f(x), \quad x\in D, \quad \lim_{x\to y\in S} u(x)=\varphi(y).$$

Пусть, далее, $v(x)$ — произвольная функция из того же класса. Применение формулы Грина к $u(x)$ и $v(x)$ приводит к соотношению

$$-\int_D u(x)\,L^*v(x)\,dx = \int_S \left[\varphi(y)\left(\frac{\partial v}{\partial \nu} - Av\right) - v\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\right] dy - \int_D f(x)\,v(x)\,dx, \tag{1}$$

где

$$A = \sum_i \cos nx_i \left(b_i - \sum_k \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}\right),$$

ν — внутренняя конормаль. Пусть $U=(u_1,\ u_2)$ —двухкомпонентный вектор, составляющие к-рого — действительные функции с суммируемым квадратом, причем первая составляющая определена в D, а вторая — на S. Пусть $L_2(D,\ S)$ — множество этих векторов; норма вводится через скалярное произведение U и V из $L_2(D,\ S)$:

$$(U,\ V) = \int_D u_1 v_1\,dx + \int_S u_2 v_2\,dy.$$

Пусть $\{v_k\}$ — множество, выбранное так, что совокупность двухкомпонентных векторов

$$V_k = (-L^*v_k(x),\ v_k(y)),\quad x\in D,\quad y\in S,$$

полна в гильбертовом пространстве $L_2(D,\ S)$. Тогда, обозначив через $U=(u_1,\ u_2)$ вектор с первой составляющей $u_1(x)$, равной $u(x)$, и второй составляющей $u_2(y)$, совпадающей с $\partial u/\partial \nu$, можно записать (1) в виде системы интегральных уравнений Фишера — Рисса:

$$(U,\ V_k) = \int_S \varphi(y)\left(\frac{\partial v_k}{\partial \nu} - Av_k\right) dy - \int_D f v_k\,dx. \tag{2}$$

Если совокупность $\{V_k\}$ ортонормирована и выполняются условия *Рисса — Фишера теоремы*, то система (2) определит в $L_2(D,\ S)$ коэффициенты Фурье c_k вектора $U=(u_1,\ u_2)$ относительно полной системы базисных векторов $\{V_k\}$. Если известно, что решение рассматриваемой задачи существует и единственно, то ряд Фурье $\sum_k c_k V_k$ сходится в среднем к искомому решению и только к нему. В противном случае выбор функций $\{v_k\}$ связан с необходимостью дополнительного исследования. Так, если допускаются собственные решения $u_0(x)$ (нарушена единственность), совокупность $\{V_k\}$ должна удовлетворять равенствам

$$(U_0,\ V_k) = 0,$$

где $U_0=(u_0(x),\ \partial u_0/\partial \nu)$. Если в качестве $\{v_k\}$ взята последовательность одночленов $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_m^{\alpha_m}$ с целыми неотрицательными показателями $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$, то значения $u(x)$ и $\partial u/\partial \nu$, найденные из (2), вместе с заданным на S значением $u(x)$, удовлетворяют функциональным соотношениям Грина:

$$\delta(x)\,k_m u(x) = \int_S \left[u(y)\left(\frac{\partial w(y,\ x)}{\partial \nu} - A(y)\,w(y,\ x)\right) - w(y,\ x)\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\right] dy - \int_D f w(y,\ x)\,dy,$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x\in D, \\ 0, & x\notin D\cup S, \end{cases}$$

где k_m — отличная от нуля постоянная, зависящая от m, и $w(y,\ x)$ — фундаментальное решение уравнения $L^*v=0$. В этом случае все решения системы уравнений Фишера — Рисса (2) и только они являются решениями рассматриваемой краевой задачи. Центральным

пунктом этого метода является построение подходящим образом выбранной совокупности функций $\{v_n\}$, удовлетворяющих условию $L^*v_n=0$ либо нек-рым условиям полноты [4].

Этот способ не требует задания явного выражения фундаментального решения, но если последнее известно, то, в силу того, что совокупность $\{w(y, x^{(k)})\}$, где $x^{(k)}$ — счетная бесконечная последовательность произвольных точек, не принадлежащих $D \cup S$, линейно независима и полна в $L_2(S)$ [4], можно значительно упростить вычисления; эта теорема позволяет также распространить метод уравнений Фишера — Рисса на задачи с косыми производными (см. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; задача с косой производной) и другие типы уравнений.

Лит.: [1] Picone M., «Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur.», 1940, v. 75, p. 413—26; [2] Amerio L., «Amer. J. Math.», 1947, v. 69, № 3, p. 447—89; [3] Fichera G., «Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat.», 1950, t. 4, fasc. 1—2, p. 35—99; [4] Купрадзе В. Д., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 2, с. 59—107; [5] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957.

В. Д. Купрадзе.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; методы комплексного переменного — методы решения эллиптических Д. у. с ч. п., в к-рых используется представление решений через аналитич. функции комплексного переменного.

Теория аналитич. функций

$$w(z)=u(x, y)+iv(x, y)$$

комплексного переменного $z=x+iy$ представляет собой теорию двух действительных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющих системе уравнений Коши — Римана: $u_x-v_y=0$, $u_y+v_x=0$, к-рая по существу эквивалентна уравнению Лапласа

$$\Delta u \equiv u_{xx}+u_{yy}=0.$$

Начиная с 30-х гг. 20 в. методы аналитич. функций интенсивно стали проникать в общую теорию уравнений эллиптич. типа. Это привело к созданию нового раздела анализа, существенно расширяющего рамки классич. теории аналитич. функций и ее применений. В этой области фундаментальную роль играют различные формулы представления всех решений весьма широкого класса эллиптич. уравнений через аналитич. функции одного комплексного переменного. Для линейных уравнений эти представления осуществляются с помощью нек-рых линейных операторов, выражающихся посредством коэффициентов. Эти формулы дают возможность распространить свойства аналитич. функций на решения уравнений эллиптич. типа, причем, в ряде случаев в дословной формулировке сохраняются такие важные свойства, как теорема единственности, принцип аргумента, теорема Лиувилля и др. В естественной форме обобщаются ряды Тейлора и Лорана, интегральная формула Коши, принцип компактности, принцип аналитич. продолжения и др.

Формулы комплексного представления позволяют строить разнообразные семейства частных решений уравнения, обладающие теми или иными заданными свойствами. Напр., можно строить различные классы так наз. элементарных решений, имеющих точечные особенности, к-рые используются для получения различных интегральных формул, а также так наз. полные системы частных решений; последние обладают тем свойством, что при помощи их линейных комбинаций можно приближать любые решения. Формулы комплексного представления позволяют также редуцировать широкий круг граничных задач к эквивалентным краевым задачам для аналитич. функций, а также строить эквивалентные задаче интегральные уравнения (типа Фредгольма или сингулярные). Этот метод по-

зволяет исследовать краевые задачи нефредгольмового типа, получить условие нормальной разрешимости и явную формулу индекса. См. *Краевая задача*; методы комплексного переменного.

Эллиптические уравнения с аналитическими коэффициентами. Пусть дано уравнение 2-го порядка эллиптич. типа

$$\Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\,u = 0, \qquad (1)$$

где a, b и c — аналитич. функции действительных переменных x, y в нек-рой области плоскости $z = x + iy$. Аналитическое продолжение коэффициентов в область независимых комплексных переменных $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$ приводит уравнение (1) к виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \zeta} + A(z, \zeta)\frac{\partial u}{\partial z} + B(z, \zeta)\frac{\partial u}{\partial \zeta} + C(z, \zeta)\,u = 0. \qquad (2)$$

Односвязная область D_0 наз. основной областью уравнения (1), если A, B и C — аналитич. функции двух независимых переменных в цилиндрич. области $(D_0, \overline{D}_0)$, где D_0 обозначает зеркальное изображение D_0 относительно действительной оси.

Если $D \subset D_0$ — односвязная область, то все регулярные в области D решения уравнения (1) выражаются по формуле

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left\{ G(z, z_0; z, \overline{z})\,\Phi(z) - \int_{z_1}^{z} \Phi(t)\frac{\partial}{\partial t} G(t, \overline{z}_0, z, \overline{z})\,dt \right\}, \qquad (3)$$

где $\Phi(z)$ — произвольная голоморфная функция в области D, z_1, $z_0 \in D$ — произвольные фиксированные точки; аналитич. функция $G(z, \zeta, t, \tau)$ четырех независимых комплексных аргументов в цилиндрич. области $(D_0, \overline{D}_0, D_0, \overline{D}_0)$ наз. функцией Римана уравнения (1). Она является решением интегрального уравнения типа Вольтерра:

$$G(z, \zeta, t, \tau) - \int_{\tau}^{\zeta} A(z, \eta)\,G(z, \eta, t, \tau)\,d\eta - \int_{t}^{z} B(\xi, \zeta)\,G(\xi, \zeta, t, \tau)\,d\xi + \int_{t}^{z} d\xi \int_{\tau}^{\zeta} C(\xi, \eta)\,G(\xi, \eta, t, \tau)\,d\eta = 1. \qquad (4)$$

Осуществляемое формулой (3) соответствие между семейством решений $\{u\}$ уравнения (1) и семейством голоморфных функций $\{\Phi\}$ взаимно однозначно, если зафиксировать значения мнимой части Φ в фиксированной точке z_1 области D. При $z_1 = z_0 = 0$ имеет место формула обращения:

$$\Phi(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0)\,G(0, 0, z, 0).$$

Уравнение (4) можно решить методом последовательных приближений. Таким путем можно найти приближенные выражения для функции Римана.

В случае многосвязной области D формула (3) дает, вообще говоря, многозначные решения. Чтобы получить в этом случае все однозначные решения уравнения (1), в качестве Φ в (3) надо брать многозначные функции определенного вида.

Пусть D — двухсвязная область $(D \subset D_0)$, D' — ограниченный континуум, дополняющий D до односвязной области. Тогда все однозначные в области D решения уравнения (1) даются формулой

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left\{ G(z, \overline{z}_0, z, \overline{z})\,\Phi(z) - \int_{z_1}^{z} \Phi(t)\,H(t, \overline{z}_0, z, \overline{z})\,dt \right\}, \qquad (5)$$

где $z_1 \in D$, $z_0 \in D'$ — фиксированные точки, $\Phi(z)$ — многозначная аналитич. функция вида

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \left[\alpha G(z_0, \overline{z_0}, z, \overline{z}) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\Phi_0(t)}\, H^*(z_0, t, z, \overline{z_0})\, dt \right] \ln(z - z_0).$$

Здесь α — произвольная действительная постоянная, $\Phi_0(z)$ — произвольная голоморфная функция в области D, L — любая простая замкнутая кусочно гладкая кривая, лежащая в D и окружающая D'. Функции H и H^* выражаются по формулам

$$H(t, \tau, z, \zeta) = \frac{\partial}{\partial t} G(t, \tau, z, \zeta) - B(t, \tau)\, G(t, \tau, z, \zeta),$$

$$H^*(t, \tau, z, \zeta) = \frac{\partial}{\partial \tau} G(t, \tau, z, \zeta) - A(t, \tau)\, G(t, \tau, z, \zeta).$$

Комплексные представления вида (3) распространяются также и на системы уравнений, записываемых в векторной форме в виде (1), где u — вектор с компонентами $u_1, \ldots, u_n$, a, b, c — квадратичные матрицы порядка n, элементы которых — аналитич. функции переменных x, y.

В той области, где уравнение (1) имеет хотя бы одно положительное решение $u_0 > 0$, подстановкой $u = u_0 v$ его можно привести к виду

$$\Delta v + a v_x + b v_y = 0$$

(такое решение всегда существует в малой окрестности любой фиксированной точки, а также в любой области, где $c \leqslant 0$). В этом случае уравнение (1) эквивалентно системе уравнений, к-рая представляет собой частный случай обобщенной системы Коши — Римана вида

$$u_x - v_y + au + bv = 0, \quad u_y + v_x + cu + dv = 0. \qquad (6)$$

Вводя в рассмотрение комплексную функцию $w = u + iv$, эту систему можно записать в виде

$$\partial_{\overline{z}} w + A(z)\, w + B(z)\, \overline{w} = 0, \quad 2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y. \qquad (7)$$

Если коэффициенты A и B — аналитич. функции комплексных аргументов z и ζ ($z = x + iy$, $\zeta = x - iy$) в нек-рой цилиндрич. области $(D_0, \overline{D_0})$, где D_0 — односвязная область, то решение уравнения (6) в односвязной области $D \subset D_0$ выражается формулой

$$W(z) = \exp\left\{ \int_{z_0}^{z} A(z, \tau)\, d\tau \right\} \times$$

$$\times \left\{ \Phi(z) + \int_{z_0}^{z} \tilde{\Gamma}_1(z, \overline{z}, t)\, \Phi(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{z_0}^{\overline{z}} \tilde{\Gamma}_2(z, \overline{z}, t)\, \Phi(t)\, dt \right\}, \qquad (8)$$

в к-рой $\tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{\Gamma}_2$ — аналитич. функции своих аргументов, выражающиеся через A и B; они строятся по методу последовательных приближений, Φ — произвольная аналитич. функция переменного z.

В случае, когда A и B — целые функции переменных x и y, представление (8) имеет место для любой односвязной области плоскости z без ограничений на поведение коэффициентов A и B вблизи бесконечности.

Пусть дано эллиптич. уравнение вида

$$\Delta^n u + \sum_{k=1}^{n} \sum_{0 \leqslant p+q \leqslant k} a_{p,q}^{(k)} \frac{\partial^{p+q} \Delta^{n-k} u}{\partial x^p \partial y^q} = 0, \qquad (9)$$

где $a_{p,q}^{(k)}$ — аналитич. функции x, y. Если D_0 — основная область уравнения (9), то всякое регулярное

решение этого уравнения в односвязной области $D \subset D_0$ выражается формулой

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left\{ G(z, \bar{z_0}, z, \bar{z})\, \Phi_0(z) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{z_1}^{z} \Phi_k(t)\, \frac{\partial}{\partial t} G_k(t, \bar{z_0}, z, \bar{z})\, dt \right\}, \qquad (10)$$

где $\Phi_0, \ldots, \Phi_{n-1}$ — произвольные голоморфные в области D функции

$$G_k(t, \tau, z, \zeta) = \frac{\partial^{2(n-k-1)} G(t, \tau, z, \zeta)}{\partial t^{n-k-1} \partial \tau^{n-k-1}}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Здесь G — комплексная функция Римана уравнения (9), к-рая аналитически зависит от комплексных аргументов (t, τ, z, ζ) в цилиндрич. области $(D_0, \bar{D}_0, D_0, \bar{D}_0)$. При выполнении условий

$$\Phi_k(z_1) = \overline{\Phi_k(z_1)}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

формула (10) осуществляет взаимно однозначное соответствие между семейством решений $\{u\}$ уравнения (9) и семейством голоморфных функций $\{(\Phi_0, \ldots, \Phi_{n-1})\}$. Если D — многосвязная область, то формула (10) дает, вообще говоря, многозначные решения. Но, как и в случае уравнения 2-го порядка, можно видоизменить эту формулу так, чтобы она давала все однозначные решения уравнения (9) и в многосвязной области. Формула (10) распространяется также на систему уравнений вида (9), где u — вектор, а коэффициенты — матрицы.

Для ряда уравнений математич. физики функция Римана выражается в явной форме при помощи элементарных или специальных функций.

В случае уравнения колебаний мембраны

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0, \qquad \lambda = \text{const},$$

$$G(z, \zeta, t, \tau) = J_0\left(\lambda \sqrt{(z-t)(\zeta-\tau)}\right),$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка; в качестве основной области можно взять всю комплексную плоскость. Случай $\lambda = 0$ дает уравнение Лапласа $\Delta u = 0$; тогда $G = 1$ и формула (3) принимает вид

$$u = \operatorname{Re}[\Phi(z)].$$

Для уравнения сферич. функций

$$\Delta u + n(n+1)(1 + x^2 + y^2)^{-2} u = 0, \; n = \text{const},$$

$$G(z, \zeta, t, \tau) = P_n\left(\frac{(1 - z\zeta)(1 - t\tau) + 2z\tau + 2\zeta t}{(1 + z\zeta)(1 + t\tau)}\right),$$

где P_n — функция Лежандра первого рода; в качестве основной области можно взять любую односвязную область D_0, для к-рой выполняется условие: если $z \in D_0$, $\zeta \in D_0$, то $z\zeta \neq 1$ (напр., круг $|z| < 1$). Для уравнения Эйлера — Дарбу

$$\Delta u + y^{-1}(\alpha u_x + \alpha' u_y) = 0, \quad \alpha, \alpha' = \text{const},$$

$$G(z, \zeta, t, \tau) = (\tau - z)^{-\beta'} (\zeta - t)^{-\beta} (\zeta - z)^{\beta + \beta'} \times$$

$$\times F\left(\beta', \beta, 1, \frac{(z-t)(\zeta-\tau)}{(z-\tau)(\zeta-t)}\right),$$

где $2\beta = \alpha' + i\alpha$, $2\beta' = \alpha' - i\alpha$, F — гипергеометрич. ряд; в качестве основной области можно взять полуплоскости $y > 0$ или $y < 0$.

Для уравнения

$$\Delta^n u = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$G(z, \zeta, t, \tau) = \frac{(z-1)^{n-1} (\zeta - t)^{n-1}}{(n-1)!\,(n-1)!},$$

и имеет место формула Гурса

$$u = \operatorname{Re}\left[(z\bar{z})^{n-1} \Phi_{n-1} + (z\bar{z})^{n-2} \Phi_{n-2} + \ldots + \Phi_0\right].$$

Метод комплексных представлений решений применим также к нек-рому классу нелинейных уравнений. Пусть, напр., дано известное в дифференциальной геометрии уравнение Гаусса

$$\Delta u = -2ke^u,$$

где $k(x, y)$ — заданная функция. Если $v_0(z)$ — какое-либо частное решение этого уравнения, то его же решениями являются функции вида

$$u(z) = v_0[\Phi(z)]\,|\Phi'(z)|^2,$$

где $\Phi(z)$ — произвольная аналитич. функция. Если $k = \text{const}$, то $v_0 = 4(1-kz\bar{z})^{-2}$ и все решения уравнения Гаусса выражаются формулой:

$$u(x, y) = 4\,|\Phi'(z)|^2(1+k\,|\Phi(z)|^2)^{-2}.$$

Если $k<0$, то надо предполагать, что $|\Phi(z)| < -k^{-1}$.

Эллиптические уравнения с неаналитическими коэффициентами. Пусть дана обобщенная система уравнений Коши — Римана (7) с коэффициентами A и B, заданными на всей плоскости E комплексного переменного z и принадлежащими классу $L_{p,2}(E)$, т. е.

$$A(z),\ B(z) \in L_p,\ |z|^{-2}A\left(\frac{1}{z}\right),\ |z|^{-2}B\left(\frac{1}{z}\right) \in L_p,$$

$$p > 2,\ |z| \leqslant 1.$$

Если коэффициенты заданы в ограниченной области S и принадлежат классу $L_p(S)$, $p>2$, то они будут удовлетворять предыдущим условиям при продолжении их вне S нулем. При этих предположениях уравнение (7), вообще говоря, не имеет решения в классическом смысле. Поэтому рассматриваются так наз. обобщенные решения: функция $w(z) \in L_1(S)$ наз. решением уравнения (7) в области S, если она обладает производной в смысле С. Л. Соболева $\partial_{\bar{z}} W \in L_1(S)$ и удовлетворяет уравнению почти везде в S.

Теория функций, удовлетворяющих уравнению (7), представляет собой далеко идущее обобщение классич. теории аналитич. функций ($A \equiv B \equiv 0$) и сохраняет существенные черты последней. Поэтому решения уравнения вида (7) наз. *обобщенными аналитическими функциями*.

Всякое решение уравнения (7) (в S) удовлетворяет интегральному уравнению

$$w(z) - \frac{1}{\pi}\iint_S \frac{A(\zeta)\,w(\zeta) + B(\zeta)\,\overline{w(\zeta)}}{-z}\,d\xi\,d\eta = 0, \qquad (11)$$

где $\zeta = \xi + i\eta$, $\Phi(z)$ — голоморфная функция в S. Если $\Phi \in L_q(\bar{S})$, $q \geqslant \frac{p}{p-1}$, $p>2$, то уравнение (11) имеет единственное решение, к-рое выражается формулой вида

$$w(z) = \Phi(z) + \iint_S \Gamma_1(z, \zeta)\,\Phi(\zeta)\,d\xi\,d\eta + \iint_S \Gamma_2(z, \zeta)\,\overline{\Phi(\zeta)}\,d\xi\,d\eta. \qquad (12)$$

Резольвенты Γ_1 и Γ_2 зависят от коэффициентов уравнения (7) и строятся при помощи процесса последовательных приближений.

Формула (12) дает общее (линейное) представление решений уравнения (7) через аналитич. функции $\Phi(z)$. Она, в частности, позволяет построить так наз. основные ядра

$$\Omega_1(z, t) = X_1(z, t) + iX_2(z, t),\ \Omega_2(z, t) = X_1(z, t) - iX_2(z, t),$$

где t — некоторая фиксированная точка, а X_1 и X_2 — решения интегрального уравнения (11), соответствующие функциям

$$2\Phi_1 = (t-z)^{-1},\quad 2i\Phi_2 = (t-z)^{-1}.$$

Эти ядра позволяют написать обобщенную формулу Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S}\Omega_1(z,\zeta)\,w(\zeta)\,d\zeta-\Omega_2(z,\zeta)\,\overline{w(\zeta)}\,d\bar{\zeta}=$$

$$=\begin{cases}w(z), & z\in S,\\ \frac{1}{2}\,w(z), & z\in\partial S,\\ 0, & z\notin\bar{S}.\end{cases}\qquad(13)$$

При $A\equiv B\equiv 0$ она обращается в классич. формулу Коши. При помощи формулы (13) на обобщенные аналитич. функции распространяются многие из тех свойств аналитич. функций, к-рые доказываются обычно с помощью формулы Коши. В частности, можно обобщить классич. теоремы об аналитич. продолжении, построить теорию обобщенных интегралов типа Коши, получить представления обобщенных аналитич. функций в виде контурных интегралов с действительной плотностью и др.

Основными ядрами сопряженного уравнения

$$\partial_{\bar{z}}w_*-Aw_*-\overline{B}\,\overline{w}_*=0\qquad(14)$$

являются функции

$$\Omega_1^*(z,t)=-\Omega_1(t,z),\quad \Omega_2^*(z,t)=-\overline{\Omega_2(t,z)}.$$

Если w и w_* удовлетворяют в S уравнениям (7) и (14), соответственно, и непрерывны в $\bar{S}$, то имеет место тождество (аналог классической теоремы Коши):

$$\operatorname{Re}\left[i\int_{\partial S}w(z)\,w_*(z)\,dz\right]=0.$$

Если $w(z)$ — решение уравнения (7) в области S, то существует такая аналитическая в S функция $\Phi(z)$, что имеет место равенство

$$w(z)=\Phi(z)\,e^{\omega(z)},\qquad(15)$$

где

$$\omega(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_S\frac{A(\zeta)+B(\zeta)\,\frac{\overline{w}(\zeta)}{w(\zeta)}}{\zeta}\,d\xi\,d\eta\qquad(16)$$

и принадлежит классу $C_\alpha(E)$, $\alpha=p/(p-2)$, причем $\omega(z)\to 0$, если $z\to\infty$.

Эта формула, в частности, позволяет распространить на решения уравнений вида (7) основные теоремы классич. теории аналитич. функций: теорему единственности, теорему Лиувилля, принцип аргумента, принцип компактности и др. Формула (15) допускает обращение: задавая аналитич. функцию Φ, можно найти функцию $w(z)$, удовлетворяющую нелинейному интегральному уравнению (15).

Пусть $\Phi(z)$ — аналитическая в области S функция, к-рая может иметь любые особенности, и t — фиксированная точка. Тогда существует решение $w(z)$ уравнения (7) такое, что функция $w_0=w/\Phi$ непрерывно продолжима на всю плоскость E, принадлежит классу $C_\alpha(E)$, $\alpha=(p-2)/p$, не обращается в нуль нигде на плоскости E и $w_0(t)=1$. Функция w_0 удовлетворяет интегральному уравнению

$$w_0(z)-\frac{z-t}{\pi}\iint_S\frac{A(\zeta)\,w_0(\zeta)+B_0(\zeta)\,\overline{w_0(\zeta)}}{(\zeta-z)(\zeta-t)}\,d\xi\,d\eta=1,\qquad(17)$$

$$B_0=B=\overline{\Phi}/\Phi,$$

к-рое имеет единственное решение, а функция $w=\Phi(z)w_0$ удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$w(z)=\Phi(z)\exp\left\{\frac{z-t}{\pi}\iint_S\frac{A(\zeta)\,w(\zeta)+B(\zeta)\,\overline{w(\zeta)}}{(\zeta-z)(\zeta-t)\,w}\,d\xi\,d\eta\right\},\qquad(18)$$

из к-рого при $t\to\infty$ получается представление (15).

Проблема приведения эллиптич. уравнения 2-го порядка общего вида

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+f(u)=0 \quad (19)$$

к виду (1) эквивалентна задаче редукции к канонич. виду положительной квадратичной формы

$$adx^2+2bdxdy+cdy^2, \quad a>0, \quad \Delta\equiv ac-b^2>0.$$

Последняя проблема эквивалентна отысканию гомеоморфизмов уравнения Бельтрами

$$\partial_{\bar z}w-q(z)\,\partial_z w=0, \quad w=u+iv, \quad (20)$$

где

$$q(z)=\left(a-\sqrt{\Delta}-ib\right)\left(a+\sqrt{\Delta}+ib\right)^{-1}, \quad |q(z)|<1.$$

Если (19) — равномерно эллиптич. уравнение

$$(\Delta\geqslant\Delta_0=\text{const}>0), \text{ то } |q(z)|\leqslant q_0=\text{const}<1.$$

При изучении уравнения Бельтрами основным вопросом является построение нек-рого его гомеоморфизма для данной области S; если $\omega(z)$ — гомеоморфизм уравнения Бельтрами, реализующий топологич. отображение области S на область $\omega(S)$, то всякое другое его решение в S имеет вид

$$w(z)=\Phi[\omega(z)], \quad (21)$$

где Φ — произвольная аналитич. функция в области $\omega(S)$.

Если $q(z)$ — измерима, $q(z)\equiv 0$ вне S и $|q(z)|\leqslant q_0<1$, то уравнение Бельтрами (20) имеет решение вида

$$w(z)=z-\frac{1}{\pi}\iint_E\frac{\rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta}{\zeta-z}, \quad (22)$$

где ρ удовлетворяет сингулярному интегральному уравнению (интеграл понимается в смысле главного значения по Коши):

$$\rho(z)-\frac{q(z)}{\pi}\iint_E\frac{\rho(\zeta)\,d\xi\,d\eta}{(\zeta-z)^2}=q(z). \quad (23)$$

Это уравнение имеет единственное решение в нек-ром классе $L_p(E)$, $p>2$; его можно получить методом последовательных приближений. Функция (22) принадлежит классу $C_\alpha(E)$, $\alpha=p/(p-2)$, реализует топологич. отображение плоскости на себя, причем $w(\infty)=\infty$, $z^{-1}w(z)\to 1$ при $z\to\infty$. Если $q\in C_\alpha^m(E)$, $0<\alpha<1$, $m\geqslant 0$, то $w(z)\in C_\alpha^{m+1}(E)$.

Равномерно эллиптич. система 1-го порядка общего вида в комплексной записи имеет вид

$$\begin{gathered}\partial_{\bar z}w-q_1(z)\,\partial_z w-q_2(z)\,\partial_{\bar z}\overline{w}+Aw+B\overline{w}=0,\\ |q_1|+|q_2|\leqslant q_0=\text{const}<1.\end{gathered} \quad (24)$$

С помощью гомеоморфизма нек-рого уравнения вида (20) ее можно привести к виду (7).

Всякое решение уравнения (24) в нек-рой ограниченной области S при условии, что A, $B\in L_p(S)$, $p>2$, представлено в виде

$$w(z)=\Phi[\omega(z)]\,e^{\varphi(z)}, \quad (25)$$

где $\omega(z)$ — некоторый гомеоморфизм уравнения Бельтрами (20) с коэффициентом

$$q(z)=q_1(z)+q_2(z)\frac{\partial_{\bar z}\overline{w}}{\partial_z w},$$

$\Phi(\omega)$ — аналитич. функция в области $\omega(S)$, функция $\varphi(z)\in G_\alpha(E)$, $\alpha=(p-2)/p$ голоморфна вне S и исчезает на бесконечности. Представление (25) имеет место и тогда, когда коэффициенты левой части уравнения (24)

зависят от w и ее производных любого порядка, лишь бы на рассматриваемых решениях выполнялись указанные выше условия. Как и (15), формула (25) допускает обращение.

Формула (25) позволяет перенести целый ряд свойств классич. теории аналитич. функций на решения уравнения (24); теорему единственности, принцип аргумента, принцип максимума и др.

Общее квазиконформное отображение Q является решением нек-рой равномерно эллиптич. системы вида (24) (при $A \equiv B \equiv 0$). Справедливо и обратное утверждение. Поэтому указанные выше результаты позволяют решить чисто аналитич. путем основные проблемы *квазиконформных отображений*.

Системы уравнений 1-го порядка эллиптич. типа с $2n$, $n>1$, неизвестными функциями двух независимых переменных, при нек-рых естественных ограничениях, приводятся к канонич. виду:

$$\partial_{\bar{z}} w - Q(z)\,\partial_z w + Aw + B\bar{w} = 0, \qquad (26)$$

где w — искомый вектор с n комплексно значными компонентами, Q, A, B — квадратные матрицы порядка n. Теория уравнений вида (26) имеет много сходства со случаем $n=1$, но она имеет и свои особенности.

Лит.: [1] Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М.— Л., 1948; [2] его же, Обобщенные аналитические функции, М., 1959; [3] его же, «Матем. сб.», 1952, т. 31, № 2, с. 217—314; [4] Бергман С., Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Bers L., Theory of pseudo-analytic functions, N. Y., 1953; [6] Боярский Б. В., «Докл. АН СССР», 1958, т. 122, № 4, с. 543—46; [7] его же, там же, 1959, т. 124, № 1, с. 15—18; [8] Carleman T., «C. r. Acad. sci», 1933, t. 197, p. 471; [9] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [10] Халилов З. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1947, т. 11, с. 345—62; [11] Courant R., Hilbert D., Methods of mathematical physics, v. 2, 2 ed., N. Y.— L., 1962.

И. Н. Векуа.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ; функциональные методы решения — методы, основанные на рассмотрении левой части уравнения как оператора, действующего в функциональном пространстве, определенном соответствующим образом. Наибольшее развитие функциональные методы получили в применении к линейным уравнениям с частными производными. В этом случае функциональные методы условно могут быть разбиты на две группы: а) относящиеся к спектральной теории дифференциальных операторов и б) используемые при выяснении общего характера разрешимости уравнений, краевых задач и свойств решений. Внутри группы б) удобно, в свою очередь, выделить, с одной стороны, методы, опирающиеся лишь на общие теоремы функционального анализа (теории операторов), а с другой — методы, существенно использующие технику преобразования Фурье. Для первых характерно непосредственное рассмотрение краевых задач для общих уравнений с переменными коэффициентами; для вторых отправной точкой является изучение дифференциального оператора с постоянными коэффициентами, часто безотносительно к краевым условиям, а переход к переменным коэффициентам (когда это возможно) осуществляется при помощи соответствующей «теории возмущений». Получаемые в обоих направлениях результаты дополняют друг друга.

Функциональные методы возникли при использовании связи между задачей минимизации функционала

$$J(u) = \int_V \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2fu \right\} dV \qquad (1)$$

в классе действительных функций $u(x, y)$, удовлетво-

ряющих на границе S области V (для простоты — двумерной) условию

$$u|_S = 0, \tag{2}$$

и задачей решения уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f \tag{3}$$

в V [являющегося уравнением Эйлера для (1)] при тех же краевых условиях (2). Если f не является гладкой (напр., $f \in H(V)$ — гильбертову пространству функций с суммируемым в V квадратом), то минимум для (1) достигается на функциях, не имеющих, вообще говоря, вторых производных, входящих в уравнение (3), т. е. эти функции дают лишь обобщенное решение задачи (3), (2). Для исчерпывающего описания возникающей ситуации (см. [1], [2]) вводится гильбертово пространство $\dot{W}^1$, получаемое пополнением линейного многообразия гладких функций, удовлетворяющих (2), в норме, порождаемой скалярным произведением

$$\{u, v\} = \int_V \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right\} dV.$$

Тогда под решением задачи (3), (2) понимается элемент $u \in \dot{W}^1$ такой, что для любого элемента $v \in \dot{W}^1$ выполняется равенство

$$\{u, v\} = (f, v), \tag{4}$$

где круглые скобки означают скалярное произведение в $H(V)$. Минимум для (1) при любой $f \in H$ также достигается в $\dot{W}^1$ и дает решение задачи (3), (2) в смысле (4), являющееся единственным. Всякое классическое (имеющее вторые производные) решение задачи (3), (2) удовлетворяет равенству (4) при любой допустимой функции v и, значит, является обобщенным. Отсюда, в частности, следует определение, с помощью обобщенного решения, нек-рого расширения классич. оператора $-\Delta$, заданного первоначально на гладких функциях, удовлетворяющих условию (2). Вопрос «при каких условиях на f и границу S обобщенное решение будет классическим?» значительно более сложен (это — вопрос о так наз. дифференциальных свойствах обобщенного решения).

В рассмотренной схеме существование обобщенного решения следовало из существования в $\dot{W}^1$ элемента, реализующего минимум функционала (1). В дальнейшем было замечено, что теорема существования может быть получена непосредственно из определения (4) при помощи так наз. теоремы Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала (см. [1]). Последующее развитие теории идет в нескольких направлениях. Приведенные построения немедленно обобщаются на случай, когда $-\Delta$ заменяется на общий самосопряженный положительный эллиптич. оператор порядка $2m$ с переменными коэффициентами. При этом, естественно, в скалярное произведение будут входить производные порядка m. Свойство полной непрерывности обратного оператора позволяет установить характер спектра соответствующих задач и установить справедливость для них *Фредгольма альтернативы*. Можно получить теорему существования решения и в случае, когда в уравнении присутствует подчиненный главной эллиптич. части кососимметрич. оператор (напр., вместе с $-\Delta$ имеются члены $a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}$), т. е. и при отсутствии связи с вариационными задачами [3].

Обобщения иного характера возникают из замечания о сохранении теоремы существования и единственности обобщенного решения задачи (3), (2) и в том случае, когда f — произвольный ограниченный линейный функ-

ционал над $\dot{W}^1$. Пространство всех таких функционалов может быть получено пополнением H по новой норме

$$|f,\ \dot{W}^{-1}| = \sup_{w \in \dot{W}^1} \frac{|(f,\ w)|}{|w,\ \dot{W}^1|}. \qquad (5)$$

Получаемое пространство $\dot{W}^{-1}$ оказывается существенно шире H. Напр., в одномерном случае (V — интервал $(-1,\ 1)$) последовательность функций

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases} \quad \varepsilon = 1,\ 2^{-1},\ 2^{-2},\ \ldots,$$

сходится в $\dot{W}^{-1}$, но расходится в H. Предел этой последовательности не является функцией в обычном смысле, т. е. пространство $\dot{W}^{-1}$ содержит обобщенные функции. В то же время неравенство

$$|\langle f,\ w\rangle| \leqslant |f,\ \dot{W}^{-1}|\,|w,\ \dot{W}^1|$$

(скобки $\langle\ ,\ \rangle$ обозначают действие функционала f на элемент $w \in \dot{W}^1$) обеспечивает справедливость теоремы существования и единственности в случае $f \in \dot{W}^{-1}$. Этот результат интересен еще и в том отношении, что теперь оператор $-\Delta$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\dot{W}^1$ и $\dot{W}^{-1}$. При $f \in H$ и гладкой S обобщенное решение задачи (3), (2) не только принадлежит $\dot{W}^1$, но всегда имеет и вторые обобщенные производные ($u \in W^2$), причем

$$|u,\ W^2| \leqslant c\,|f,\ H|.$$

При $n = 2$ (n — размерность V) пространство W^{-2} (функционалов над W^2) содержит δ-функцию, т. е. функционал, определяемый равенством $\langle \delta_{x_0},\ u\rangle = u(x_0)$. Существует принадлежащее пространству H обобщенное решение уравнения

$$-\Delta v_{x_0} = \delta_{x_0}$$

такое, что для u-обобщенного решения задачи (3), (2) верна формула

$$(-\Delta u,\ v_{x_0}) = \langle u,\ -\Delta v_{x_0}\rangle = \langle u,\ \delta_{x_0}\rangle = u(x_0),$$

или

$$u(x_0) = (f,\ v_{x_0}).$$

Это составляет абстрактную теорему существования функции Грина задачи (3), (2). Соответствующие построения осуществимы и в пространстве произвольного числа измерений для общих эллиптич. операторов [4].

Следующим (после эллиптич. операторов) объектом, к к-рому успешно были применены общие функциональные методы, явились уравнения с выделенным переменным — «временем», непосредственно обобщающие классические параболич. и гиперболич. уравнения математич. физики. Здесь основные результаты условно могут быть разбиты на 3 группы: относящиеся к операторным уравнениям с 1-й и 2-й производной по времени [5], к симметричным положительным системам с частными производными 1-го порядка [3], [6] и к задаче Коши для гиперболич. уравнения произвольного порядка. Первая группа результатов излагается обычно либо в контексте обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве и теории полугрупп операторов, либо, вместе со второй и третьей группами, в рамках так наз. техники энергетич. неравенств. Последняя, в общих чертах, заключается в следующем. Для гладких решений уравнения со временем, записанного в операторной форме

$$Lu = f, \qquad (6)$$

подчиненных соответствующим начальным и краевым условиям, устанавливается неравенство вида

$$|u,\ H_1| \leqslant c|Lu,\ H_2|, \tag{7}$$

где H_1, H_2 — соответствующим образом определенные функциональные пространства. Для простоты их считают гильбертовыми. Напр., для $u \in C^2$, удовлетворяющих в единичном квадрате V уравнению

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

и условиям

$$u\Big|_{t=0} = u'_t\Big|_{t=0} = u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=1} = 0,$$

умножением на $\partial u/\partial t$, интегрированием по V и элементарными преобразованиями можно получить неравенство вида

$$\int_{t=T}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dx \leqslant 4\int_V f^2\,dx\,dt,\ 0 \leqslant T \leqslant 1, \tag{8}$$

(являющееся математич. выражением нек-рого закона сохранения, откуда и термин «энергетическое неравенство»), соответствующее неравенству (7) при надлежащем определении норм в H_1, H_2. Определив обобщенное решение уравнения (6) как элемент $u \in H_1$, для к-рого существует последовательность гладких функций u_i, удовлетворяющих описанным краевым условиям, такая, что $u_i \to u$ в H_1 и $Lu_i \to f$ в H_2, одновременно получают определение оператора L: $H_1 \to H_2$ (снова являющегося расширением классического), для к-рого существует ограниченный обратный оператор, что эквивалентно теореме единственности обобщенного решения. Следующим шагом исследования уравнения (6) является доказательство существования такого решения при любой допустимой правой части $f \in H_2$. Так как область изменения R_L оператора L является замкнутым подпространством в H_2, доказательство единственности эквивалентно доказательству пустоты ортогонального дополнения к R_L: из равенства

$$(Lu,\ v)_2 = 0 \text{ для любого } u \in \mathfrak{U}_L \tag{9}$$

(скалярное произведение в H_2) следует $v=0$. Равенство (9), с точки зрения теории операторов, означает, что $v \in \mathfrak{U}_L$ и $L^*v = 0$, т. е. требуемый результат немедленно следовал бы из теоремы о единственности решения уравнения $L^*v = g$. Однако доказательство такой теоремы требует специальных построений, часто весьма сложных, поскольку для L^* (определенного с точки зрения классич. анализа с помощью нек-рого интегрального тождества) наличие неравенства, аналогичного (7) (так же, как и наличие для v последовательности сходящихся к ней гладких функций, удовлетворяющих нужным граничным условиям), отнюдь не очевидно. Возникающие трудности являются отражением несамосопряженности задач со «временем». При исследовании гиперболич. уравнений 2-го и высшего порядков использование (9) для доказательства равенства $v=0$ проводится обычно следующим образом: подбирается оператор P^* такой, что $P^*v \in \mathfrak{U}_L$ и

$$(LP^*v,\ v)_2 \geqslant c\,|v,\ H_2|^2. \tag{10}$$

Если заметить еще, что получение (7) основано обычно на рассмотрении выражения вида $(Lu,\ Qu)_2$, где Q — оператор, подобранный так, что

$$(Lu,\ Qu)_2 \geqslant c|u,\ H_1|^2,$$

и записать теперь (10) в виде

$$(L^*v,\ P^*v)_1 \geqslant c\,|v,\ H_2|^2,$$

то можно считать, что исследование (6) основывается на этой паре неравенств (называемых иногда д у а л ь н ы м и). Сказанное относится главным образом к ги-

перболич. уравнениям. Параболич. уравнения допускают трактовку, более близкую к эллиптич. случаю.

Преобразование Фурье позволяет провести, в известном смысле, исчерпывающее изучение задачи Коши для уравнений с постоянными коэффициентами [10]. Кроме того, преобразование Фурье, вместе с так наз. «замораживанием коэффициентов» (т. е. заменой оператора с переменными коэффициентами оператором с постоянными коэффициентами, равными значениям соответствующих коэффициентов в нек-рой фиксированной точке), часто используется для получения энергетич. неравенств при использовании схем рассмотренного выше типа, а также играет важную роль в локальной характеризации операторов и краевых условий при исследовании краевых задач для эллиптич. уравнений [10]. Дальнейшее развитие этих идей привело к введению и изучению *псевдодифференциальных операторов*. Кроме того, с помощью преобразования Фурье было установлено, что для дифференциальной операции L с постоянными коэффициентами, рассматриваемой в компактной области V евклидова пространства на функциях $u \in C^\infty(V)$, т. е. равных нулю на границе вместе со всеми производными, всегда имеет место неравенство

$$|u,\ H(V)| \leqslant c|Lu,\ H(V)|. \qquad (11)$$

Взяв для L замыкание $\dot{L}$ в $H(V)$ (областью определения для L считают $\dot{C}^\infty(V)$) и определив $\tilde{L}$ как сопряженный к $\dot{L}$ (в $H(V)$), получают, что $R_{\tilde{L}} = H(V)$. Наличие неравенства (11) для решений уравнения (6), обеспечивающее единственность решения, автоматически влечет и разрешимость при любой правой части уравнения $L^*v = g$, содержащего сопряженный оператор. Используя теорему Банаха, можно заключить, что существует оператор $\hat{L}$, $\dot{L} \subset \hat{L} \subset \tilde{L}$ (т. е. $\hat{L}$ является расширением минимального оператора $\dot{L}$ и сужением максимального $\tilde{L}$), такой, что $R_{\hat{L}} = H(V)$, причем существует ограниченный (в H) обратный оператор $\hat{L}^{-1}$ (см. [10]). Можно считать, что $\hat{L}$ соответствует нек-рой краевой задаче (определяется нек-рой системой условий, «сосредоточенной» на границе и находящейся «между» тождественно нулевыми условиями и полным отсутствием условий). О характере условий, определяющих оператор $\hat{L}$, в общем случае известно мало.

Использование преобразования Фурье лежит также в основе исследования широкого круга вопросов теории дифференциальных операторов, связанных с изучением структуры фундаментального решения и так наз. локальных свойств решений уравнений (в отличие от исследования свойств решений краевых задач). Сюда относятся теорема о существовании фундаментального решения для общего оператора с постоянными коэффициентами, теорема о локальной (в окрестности данной точки) разрешимости уравнения с правой частью и о характере гладкости этого решения (см. [9], [11]). В связи с тем, что в случае переменных (комплексных) коэффициентов локальная разрешимость неоднородного уравнения (6) не всегда имеет место (для уравнения

$$-i\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} - 2(x_1 + ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3} = f$$

имеется такая $f \in C^\infty$, что не существует решения, даже в классе обобщенных функций, ни в каком открытом непустом подмножестве R^3, см. [9]), исследуются условия, обеспечивающие локальную разрешимость.

Использование функциональных методов весьма плодотворно и при изучении нелинейных уравнений с частными производными. Это прежде всего относится

к вариационным методам (если вместо функционала (1) рассматривать более общий, то связанное с ним уравнение Эйлера оказывается нелинейным) (см. [12]), различным вариантам метода неподвижной точки (см. *Шаудера метод*), к методу продолжения по параметру (см. [3], [13]), и другим, применяемым главным образом к эллиптич. и параболич. уравнениям. Метод энергетич. неравенств успешно используется при изучении квазилинейных гиперболич. уравнений.

Лит.: [1] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962; [2] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., 3 изд., т. 1—2, М.— Л., 1951; [3] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [4] Lions J., Equations differentielles opérationelles et problèmes aux limites, B., 1961; [5] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962; [6] Нагумо М., Лекции по современной теории дифференциальных уравнений в частных производных, пер. с япон., М.,1967; [7] Гординг Л., Задачи Коши для гиперболических уравнений, пер. с англ., М., 1961; [8] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, М., 1958; [9] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965; [10] его же, К теории общих дифференциальных операторов в частных производных, пер. с англ., М., 1959; [11] Трев Ж., Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами, пер. с англ., М., 1965; [12] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., 1964; [13] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957.

А. А. Дезин.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА — уравнение, к-рое содержит хотя бы одну производную 2-го порядка от неизвестной функции $u(x)$ и не содержит производных более высокого порядка. Напр., линейное уравнение 2-го порядка имеет вид

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}+ \\ +c(x)\,u(x)+f(x)=0, \qquad (1)$$

где точка $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит нек-рой области $\Omega\subset R_n$, в к-рой определены действительнозначные функции $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$, и в каждой точке $x\in\Omega$ хотя бы один из коэффициентов $a_{ij}(x)$ отличен от нуля. Для любой точки $x_0\in\Omega$ существует такое неособое преобразование независимых переменных $\xi=\xi(x)$, что уравнение (1) в новых координатах $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ примет вид

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a^*_{ij}(\xi)\frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}+\sum_{i=1}^{n} b^*_i(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_i}+ \\ +c^*(\xi)\,u(\xi)+f^*(\xi)=0, \qquad (2)$$

где коэффициенты $a^*_{ij}(\xi)$ в точке $\xi_0=\xi(x_0)$ равны нулю при $i\neq j$, и равны ± 1 или 0 при $i=j$. Уравнение (2) наз. канонич. видом уравнения (1) в точке x_0.

Число k положительных и число l отрицательных в точке ξ_0 коэффициентов $a^*_{ii}(\xi)$ в уравнении (2) зависит только от коэффициентов $a_{ij}(x)$ уравнения (1). Это обстоятельство позволяет классифицировать дифференциальные уравнения (1) следующим образом. Если $k=n$ или $l=n$, то уравнение (1) наз. эллиптическим в точке x_0; если $k=n-1$, а $l=1$, или $k=1$, а $l=n-1$, то — гиперболическим; если $k+l=n$ и $1<k<n-1$, то — ультрагиперболическим. Уравнение наз. параболическим в широком смысле в точке x_0, если хотя бы один из коэффициентов $a^*_{ii}(\xi)$ равен нулю в точке $\xi_0=\xi(x_0)$, $k+l<n$; уравнение наз. параболическим в точке x_0, если только один из коэффициентов $a^*_{ii}(\xi)$ равен нулю в точке ξ_0 (пусть $a^*_{11}(\xi_0)=0$), а все остальные коэффициенты $a^*_{ii}(\xi)$ одного знака и коэффициент $b^*_1(\xi_0)\neq 0$.

В случае двух независимых переменных ($n=2$) тип уравнения удобнее определять с помощью функции

$$\Delta(x)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Так, уравнение (1) является эллиптическим в точке x_0, если $\Delta(x_0)>0$; гиперболическим, если $\Delta(x_0)<0$, и параболическим в широком смысле, если $\Delta(x_0)=0$.

Уравнение наз. эллиптическим, гиперболическим и т. д. в области, если оно эллиптично, соответственно, гиперболично и т. д. в каждой точке этой области. Так, напр., уравнение Трикоми $yu_{xx}+u_{yy}=0$ эллиптично при $y>0$, гиперболично при $y<0$ и параболично в широком смысле при $y=0$.

Преобразование переменных $\xi=\xi(x)$, к-рое приводит уравнение (1) к канонич. виду в точке x_0, зависит от этой точки. В случае трех и более независимых переменных, вообще говоря, не существует неособого преобразования, приводящего уравнение (1) к канонич. виду одновременно во всех точках нек-рой окрестности точки x_0, т. е. к виду

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial\xi_i^2}-\sum_{i=k+1}^{k+l}\frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial\xi_i^2}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}b_i^*(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_i}+c^*(\xi)\,u(\xi)+f^*(\xi)=0.$$

В случае же двух независимых переменных ($n=2$) такое приведение уравнения (1) к канонич. виду возможно при нек-рых условиях на коэффициенты $a_{ij}(x)$; напр., если функции $a_{ij}(x)$ непрерывно дифференцируемы до 2-го порядка включительно и уравнение (1) одного типа в нек-рой окрестности точки x_0.

Пусть

$$\Phi\left(x,\ u,\ u_{x_1},\ \ldots,\ u_{x_n},\ u_{x_1x_1},\ u_{x_1x_2},\ \ldots,\ u_{x_nx_n}\right)=0 \quad (3)$$

— нелинейное уравнение 2-го порядка, где $u_{x_i}=\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$, $u_{x_ix_j}=\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j}$, и пусть в каждой точке из области определения действительнозначной функции Φ существуют производные $\frac{\partial\Phi}{\partial u_{x_ix_j}}$ и выполнено условие

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_{x_ix_j}}\right)^2\neq 0.$$

Для классификации нелинейных уравнений вида (3) фиксируют некоторое решение $u^*(x)$ этого уравнения и рассматривают линейное уравнение

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j}=0 \quad (4)$$

с коэффициентами

$$a_{ij}(x)=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial u_{x_ix_j}}\right|_{u=u^*(x)}$$

Уравнение (3) для данного решения $u^*(x)$ наз. эллиптическим, гиперболическим и т. д. в точке x_0 (или в области), если эллиптично, гиперболично и т. д. в этой точке (соответственно в области) уравнение (4).

К решению дифференциальных уравнений 2-го порядка сводится весьма широкий класс физических задач. См., напр., *Волновое уравнение*, *Телеграфное уравнение*, *Теплопроводности уравнение*, *Лапласа уравнение*, *Пуассона уравнение*, *Гельмгольца уравнение*, *Трикоми уравнение*.

А. К. Гущин.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА — уравнение, связывающее искомую функцию $u(x)$, ее первые производные $D_iu=u_{x_i}$, $i=1,\ \ldots,\ n$, и независимые

переменные $x=(x_1, \ldots, x_n)$. Всякая система дифференциальных уравнений с частными производными может быть приведена к нек-рой системе Д. у. с ч.п.п.п. Для этого достаточно ввести в качестве новых искомых функций все частные производные от каждой функции $u_i(x)$ до порядка l_i-1 включительно, если хотя бы одна производная порядка l_i входит в к.-л. уравнение рассматриваемой системы. При этом систему следует пополнить новыми уравнениями, выражающими равенство различных смешанных производных. Напр., уравнение

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})=0$$

после введения вспомогательных искомых функций $v=u_x$, $w=u_y$ приводится к следующей системе уравнений 1-го порядка:

$$F(x, y, u, v, w, v_x, v_y, w_y)=0,$$
$$u_x-v=0,$$
$$u_y-w=0,$$
$$v_y-w_x=0$$

(последние три уравнения не независимы).

Одно Д. у. с ч. п. п. п. с одной искомой функцией задается соотношением:

$$F(x, u, p)=0, \qquad (1)$$

где $p=(p_1, p_2, \ldots, p_n)=(D_1u, D_2u, \ldots, D_nu)$. Всякое решение $u=u(x)$ уравнения (1) при определенных требованиях определяет нек-рую поверхность (интегральную поверхность) в пространстве E_{n+1} переменных $(x_1, \ldots, x_n, u)$, причем p_i являются компонентами вектора нормали к этой поверхности. Поэтому уравнение (1) задает связь между составляющими p_i вектора нормали к интегральной поверхности и в каждой точке (x, u) определяет $(n-1)$-параметрич. семейство касательных к интегральной поверхности плоскостей [или несколько таких семейств, соответствующих различным решениям уравнения (1) относительно p]. Огибающая этого семейства плоскостей наз. конусом Монжа [в данной точке (x, u)], а направления его образующих — характеристическими направлениями. В каждой точке (x, u) эти направления определяются уравнениями

$$\frac{dx_1}{F_{p_1}}=\frac{dx_2}{F_{p_2}}=\ldots=\frac{dx_n}{F_{p_n}}=\frac{du}{\sum_{i=1}^{n} p_iF_{p_i}}, \qquad (2)$$

где $p=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — любой вектор, удовлетворяющий уравнению (1). Кривая с непрерывно изменяющейся касательной, имеющая в каждой своей точке характеристич. направление, наз. кривой Монжа, или фокальной кривой. Фокальная кривая является интегральной кривой системы (2) при произвольно заданном непрерывно дифференцируемом векторе $p=p(x, u)$ таком, что $F(x, u, p)=0$.

Поскольку каждой точке фокальной кривой сопоставлен вектор p, определяющий направление плоскости, касательной к кривой в этой точке, то фокальная кривая задается одновременно со своими касательными плоскостями и наз. поэтому фокальной полосой. Если σ — параметр на фокальной кривой, то уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}=\sum p_iF_{p_i}$$

системы (2) наз. уравнением (или условием) полосы.

Если фокальная кривая принадлежит интегральной поверхности $u=u(x)$ уравнения (1) и в каждой ее точке выполнены равенства $p_i=D_iu(x)$, то она наз. характеристической кривой (бихарактеристикой), а соответствующая фокальная

полоса — характеристической полосой. Характеристич. полоса определяется системой уравнений:

$$\frac{dx_i}{F_{p_i}} = \frac{du}{\sum p_j F_{p_j}} = \frac{dp_i}{F_{x_i} + p_i F_u}, \qquad (3)$$

к-рая наз. характеристической системой уравнения (1). Функция $F(x, u, p)$ является интегралом системы уравнений (3), поэтому условие $F=0$ выполнено на всей характеристич. кривой, если оно выполнено в к.-л. ее точке. Интегральная поверхность уравнения (1), касаясь в каждой своей точке конуса Монжа, является огибающей семейства конусов Монжа и тем самым — огибающей семейства характеристич. полос. Последнее означает, что интегральная поверхность состоит из характеристич. кривых, так что ее нахождение сводится к интегрированию характеристич. системы (3). Фокальные кривые, не сводящиеся к характеристическим (если они существуют), являются огибающими последних на интегральной поверхности $u=u(x)$. Их проекции на пространство $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ состоят из точек сингулярности решения $u(x)$.

Уравнение (1) наз. квазилинейным, если

$$F(x, u, p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x, u)\, p_i + f_{n+1}(x, u).$$

Уравнения (2) в этом случае имеют вид:

$$\frac{dx_i}{f_i(x, u)} = -\frac{du}{f_{n+1}(x, u)} \qquad (4)$$

и не содержат p; конус Монжа вырождается в прямую (ось Монжа), и все фокальные кривые являются характеристическими.

Задача Коши для уравнения (1) состоит в нахождении интегральной поверхности, проходящей через заданное $(n-1)$-мерное (начальное) многообразие:

$$x_i = x_i^0(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}), \quad u = u^0(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}). \qquad (5)$$

Эта интегральная поверхность состоит из характеристич. кривых, проведенных через точки начального многообразия. В случае квазилинейного уравнения последние получаются интегрированием характеристич. системы (4) с начальными условиями (5). В общем случае для построения характеристич. кривых условия (5) нужно дополнить заданием начальных значений $p_i = p_i^0(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$, к-рые определяются из уравнений:

$$\frac{\partial u^0}{\partial \lambda_j} = \sum p_i^0 \frac{\partial x_i^0}{\partial \lambda_j}, \quad j = 1, \ldots, n-1, \qquad (6)$$

получающихся дифференцированием условий (5), и уравнения

$$F(x^0, u^0, p^0) = 0. \qquad (7)$$

Ввиду нелинейности, уравнения (6) и (7) определяют $p_i^0(\lambda)$ и, соответственно, решение задачи Коши (1), (5), вообще говоря, неоднозначно. Пусть

$$x_i = X_i(\sigma, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}), \quad u = U(\sigma, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \qquad (8)$$

— уравнения характеристич. кривых, проходящих через точки начального многообразия. Если начальное многообразие (5) не является характеристическим (см. *Характеристическое многообразие*), то эти уравнения — параметрические уравнения искомой интегральной поверхности, они определяют решение $u=u(x)$ задачи Коши, если эта поверхность однозначно проектируется на пространство независимых переменных

$(x_1, \ldots, x_n)$. В случаях, когда уравнения (8) определяют поверхность, не представимую, однако, уравнением $u=u(x)$, т. е. не проектирующуюся однозначно на пространство $(x_1, \ldots, x_n)$, вводят понятие обобщенного решения задачи Коши (1), (5).

Решение нелинейного уравнения (1), по существу, сводится к решению системы квазилинейных уравнений с одинаковой главной частью:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + F_k p_k + F_{x_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i} = 0,$$

получающейся дифференцированием уравнения (1).

Примеры. $(D_1 u)^2 + (D_2 u)^2 = 1$; характеристич. полосы задаются уравнениями:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{p_1^0} = \frac{x_2 - x_2^0}{p_2^0} = u - u^0,$$

$$p_1 = p_1^0, \quad p_2 = p_2^0, \quad (p_1^0)^2 + (p_2^0)^2 = 1.$$

$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$; характеристич. система (3) имеет вид $\frac{\partial x}{u} = \frac{\partial u}{0} = \frac{\partial t}{1}$, уравнения характеристик: $\frac{x - x_0}{t - t_0} = u_0$, $u = u_0$, решение задачи Коши с начальным условием $u(x, 0) = u^0(x)$ задается параметрич. уравнениями

$$x = \lambda + t u^0(\lambda), \quad u = u^0(\lambda).$$

Полным интегралом уравнения (1) наз. решение

$$u = \varphi(x, a) \tag{9}$$

уравнения (1), существенно зависящее от n параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Решение вида (9) есть полный интеграл, если ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} \varphi_{a_1} & \varphi_{x_1 a_1} & \cdots & \varphi_{x_n a_1} \\ \varphi_{a_2} & \varphi_{x_1 a_2} & \cdots & \varphi_{x_n a_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{a_n} & \varphi_{x_1 a_n} & \cdots & \varphi_{x_n a_n} \end{Vmatrix}$$

равен n (в нек-рой области изменения переменных). Путем образования огибающих из полного интеграла строятся решения уравнения (1), зависящие от произвольных функций.

Если из n-параметрич. семейства поверхностей (9) выделить $(n-k)$-параметрич. семейство, предполагая параметры a связанными k соотношениями $\omega_i(a) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то огибающая этого семейства зависит от k произвольных функций $n-k$ переменных; соответствующие решения, зависящие от произвольных функций, наз. общими интегралами. Огибающая n-параметрич. семейства (9) (если она существует) не содержит никакого произвола и дает особый интеграл, к-рый может быть также найден исключением p из соотношений $F = F_p = 0$.

Многообразие касания поверхности семейства (9) с огибающей этого семейства является характеристич. многообразием k измерений. В частности, при $k=1$ это многообразие является характеристич. кривой. На этом основан способ построения общего решения характеристич. системы уравнений (3) по полному интегралу уравнения (1) (метод Якоби), часто применяемый при интегрировании канонич. уравнений.

Переопределенные системы Д. у. с ч. п. п. п.— это системы уравнений вида (1), в к-рых число независимых уравнений больше числа искомых функций. Такие системы, вообще говоря, противоре-

чивы, и выделение классов непротиворечивых (совместных) систем составляет предмет теории совместности дифференциальных уравнений с частными производными.

Пусть имеется переопределенная система

$$F_i(x,\ p) \equiv \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x)\, p_j = 0, \quad i = 1,\ \ldots,\ m, \qquad (10)$$

для одной искомой функции $u(x)$. Пусть все уравнения системы (10) независимы, так что $m \leqslant n$. Эта система наз. замкнутой, если все уравнения вида

$$\{F_i,\ F_j\} \equiv \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_{is}}{\partial x_l} f_{jl} - f_{il} \frac{\partial f_{js}}{\partial x_l} \right) p_s = 0 \qquad (11)$$

($\{\ ,\ \}$ — скобки Пуассона) являются следствиями исходных уравнений, и незамкнутой — в противном случае. Незамкнутую систему с помощью присоединения независимых уравнений вида (11) можно расширить до замкнутой. При $m = n$ замкнутая система имеет только тривиальное решение, а при $m < n$ количество ее независимых решений равно $n - m$.

Лит.: [1] Goursat E., Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, 2 éd., P., 1921; [2] Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Lpz.— B., 1935; [3] Гюнтер Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, Л.— М., 1934; [4] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970; [6] его же, Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [7] Картан Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения, пер. с франц., 1962; [8] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.— Л., 1947; [9] Фиников С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.— Л., 1948; [10] Яненко Н. Н., Рождественский Б. Л., Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М., 1968. *Н. Н. Кузнецов, Б. Л. Рождественский.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С ОСОБЕННОСТЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ — уравнение с частными производными, коэффициенты и свободный член к-рого на некоторых многообразиях из замыкания области их задания имеют разрывы первого рода или обращаются в бесконечность.

Типичными уравнениями такого типа являются, например, уравнение Лаврентьева — Бицадзе

$$\operatorname{sign} y \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0$$

и уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу

$$u_{xy} + \frac{\beta'}{y-x} u_x - \frac{\beta}{y-x} u_y = 0, \quad \beta \text{ и } \beta' = \text{const}$$

или

$$\Delta u - u_{x_0 x_0} = \frac{\lambda}{x_0} u_{x_0},$$

$$\Delta u - u_{x_0 x_0} = \frac{\lambda}{x_0} u_{x_0}, \quad \lambda = \text{const},$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_n$.

К уравнениям с особенностями в коэффициентах относятся многие вырожденные уравнения с частными производными.

Центральное место в теории дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах занимает исследование разрешимости начальных краевых и смешанных задач в их классической и обобщенной постановках, а также поиск новых корректно поставленных задач. Сравнительно полно исследованы краевые задачи для линейных эллиптич., гиперболич. и параболич. уравнений 2-го порядка со слабыми особенностями в коэффициентах, к-рые, как правило, суммируемы со степенью, большей размерности области их

задания. В случае, когда коэффициенты этих уравнений претерпевают лишь разрывы первого рода на нек-рых достаточно гладких поверхностях, лежащих внутри области задания, создана весьма полная теория основных краевых задач. См. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; задача с разрывными коэффициентами, а также [3], [5], [6].

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения смешанного типа, М., 1959; [2] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959; [3] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., 1964; [4] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [5] Олейник О. А., «Докл. АН СССР», 1959, т. 124, № 6, с. 1219—22; [6] Самарский А. А., «Докл. АН СССР», 1958, т. 121, № 2, с. 225—28.

А. М. Нахушев.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ — см. *Разностное уравнение.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, связывающее аргумент, а также искомую функцию и ее производные, взятые, вообще говоря, от функционально преобразованного аргумента; при этом выражение функционального преобразования может включать искомую функцию, в результате чего в уравнении могут встречаться комбинации вида $y'(y(x))$ и т. п. Понятия Д.-ф. у. и *дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом* часто отождествляются.

Лит.: [1] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

А. Д. Мышкис.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ — раздел математич. теории управления (см. *Автоматического управления теория*), в к-ром изучается управление в конфликтных ситуациях. Теория Д. и. примыкает также к общей *игр теории*. Первые работы по теории Д. и. появились в сер. 50-х гг. 20 в.

Постановка задач теории дифференциальных игр. Различают Д. и. двух игроков и нескольких игроков. Основные результаты получены для задач с двумя игроками. Содержательное описание этих задач укладывается в следующую схему. Имеется *динамическая система*, в к-рой часть управляющих воздействий подчинена игроку I, а другая часть — игроку II. При постановке задачи, стоящей перед игроком I или II, предполагается, что выбор управлений этого игрока, гарантирующий ему достижение определенной цели при любом неизвестном заранее управлении противника, может опираться лишь на нек-рую информацию о текущих состояниях системы. В теории Д. и. рассматриваются также задачи управления в условиях неопределенности, когда помехи, действующие на систему, трактуются как управления противника. Напр., постановка задачи игрока I описывается следующим образом. Обычно предполагается, что движение управляемой системы задается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \qquad (1)$$

где x — фазовый вектор системы, u и v — управляющие векторы игроков I и II соответственно. Определен класс стратегий $\mathcal{U}$ игрока I, и для каждой стратегии $U \in \mathcal{U}$ определен пучок движений $X(U)$, к-рый порожден этой стратегией в паре со всевозможными управлениями противника и выходит из начального состояния системы (1). Эти понятия выбираются так, чтобы они соответствовали заданным ограничениям на управления игроков и характеру информации о текущих состояниях системы, предоставленной игроку I. На движениях $x(t)$, $t \geqslant t_0$, системы (1) задан функционал $\gamma(x(\cdot))$ (плата игры), значение к-рого игрок I стремится минимизировать (иногда функционал γ зависит также от реализаций $u(t)$, $v(t)$, $t \geqslant t_0$, управлений игроков). Учитывая самую неблагоприятную реализацию движения $x(\cdot) \in X(U)$, выбор к-рой

в этой задаче предоставляется противнику, качество стратегий $U \in \mathcal{U}$ оценивается величиной

$$\varkappa_1(U) = \sup\{\gamma(x(\cdot)) : x(\cdot) \in X(U)\}.$$

Задача игрока I состоит в определении стратегии $U_0 \in \mathcal{U}$, на к-рой достигается минимум функционала $\varkappa_1$ (эта задача наз. задачей степени). Иногда рассматривается так наз. задача качества, в к-рой требуется определить условия существования стратегии $U_c \in \mathcal{U}$, удовлетворяющей неравенству $\varkappa_1(U_c) \leqslant c$, где c — нек-рое заданное число.

Аналогичным образом формулируются задачи игрока II, к-рый максимизирует плату игры. Стратегии игрока II $V \in \mathcal{V}$ оцениваются величиной

$$\varkappa_2(V) = \inf\{\gamma(x(\cdot)) : x(\cdot) \in X(V)\}.$$

Задача степени здесь состоит в выборе стратегии $V_0 \in \mathcal{V}$, максимизирующей значение функционала $\varkappa_2$, а задача качества — в определении условий, при к-рых $\varkappa_2(V_c) \geqslant c$ для нек-рой стратегии $V_c \in \mathcal{V}$.

Если в задачах игроков I и II классы стратегий $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ таковы, что для всякой пары $(U, V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ можно определить хотя бы одно движение

$$x(\cdot) \in X(U) \cap X(V),$$

порожденное этой парой, то говорят, что эти две задачи составляют дифференциальную игру, определенную на классе стратегий $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Если в Д. и. выполняется равенство

$$\inf_{U \in \mathcal{U}} \sup_{x(\cdot) \in X(U)} \gamma(x(\cdot)) = \sup_{V \in \mathcal{V}} \inf_{x(\cdot) \in X(V)} \gamma(x(\cdot)) = c_0,$$

то величина c_0 наз. ценой дифференциальной игры.

Типичным примером Д. и. является игра преследования — уклонения. В этой игре $x = (x_1, \ldots, x_{k+l}) = (y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l)$, где y и z — фазовые векторы преследователя и преследуемого соответственно, движение к-рых описывается уравнениями

$$\dot{y} = g(t, y, u), \quad \dot{z} = h(t, z, v).$$

Наиболее часто рассматривается случай, когда выбор управлений стеснен ограничениями вида

$$u \in P, \quad v \in Q, \tag{2}$$

где P и Q — некоторые компакты. Платой в этой игре является время до встречи, т. е.

$$\gamma(x(\cdot)) = T(x(\cdot)) = \inf\{t - t_0 : \|\{y(t)\}_m - \{z(t)\}_m\| \leqslant \varepsilon\},$$

где $\{y\}_m$ и $\{z\}_m$ — векторы, составленные из первых m компонент векторов y и z. Таким образом, сближение точек $\{y(t)\}_m$ и $\{z(t)\}_m$ на заданное расстояние ε трактуется как встреча объектов. В случае, когда игроки располагают информацией о текущей позиции игры $(t, x(t))$, т. е. в *позиционной игре* преследования-уклонения, существует цена игры.

Формализации дифференциальных игр. Для математич. формализации Д. и. необходимы строгие определения перечисленных выше понятий. Основное внимание в теории Д. и. было уделено задачам, в к-рых игрокам известна позиция игры, а управления удовлетворяют ограничениям (2). В этом случае естественно было определить стратегии игроков как функции $u = u(t, x)$, $v = v(t, x)$ со значениями в компактах P и Q соответственно. Оказалось, однако, что при таком подходе нередки случаи, когда приходится рассматривать разрывные стратегии, а порожденные ими движения нельзя определить известными в теории диффе-

ренциальных уравнений понятиями. Трудности, возникшие сначала на этом пути, привели к созданию иных постановок Д. и. Ниже рассмотрены такие формализации, где не используются позиционные стратегии. Затем дана формализация позиционных Д. и., к-рая охватывает разрывные позиционные стратегии и базируется на специальном определении движений.

Среди сложившихся направлений в теории Д. и. прежде всего следует отметить цикл исследований (см., напр., [2] — [4]), восходящих к работе У. Флеминга [1]. Здесь рассматривается аппроксимация Д. и. многошаговыми играми, где игроки последовательно (по шагам) выбирают свои управления на заданных промежутках времени $[t_i, t_{i+1})$, $i=0, 1, \ldots, N$. Причем обычно выделяется игрок, выбирающий каждый раз свое управление первым и сообщающий этот выбор противнику. В зависимости от того, минимизирует или максимизирует этот игрок плату игры, различают мажорантную и минорантную многошаговые игры. Применение этого подхода сводится к доказательству теорем существования цены Д. и., определенной здесь как общее значение, к к-рому сходятся цены мажорантной и минорантной игр при измельчении разбиений $[t_i, t_{i+1})$, $i=0, 1, \ldots, N$ (увеличении числа шагов). Однако построение позиционных стратегий, не зависящих от дискретизации времени, при таком подходе, как правило, не рассматривается.

Л. С. Понтрягин предложил постановку игровых задач управления (см., напр., [5] — [8]), где допускается информационная дискриминация противника, т. е. при постановке задачи игрока I (или II) предполагается, что кроме реализовавшейся позиции игры $(t, x(t))$ этому игроку известно управление противника $v(\tau)$ (соответственно $u(\tau)$), к-рое будет выбрано на промежутке $[t, t+\delta]$ ($\delta>0$ — малое число). При таком подходе достигается удобное описание игрового процесса, что позволяет построить строгую математич. теорию для широкого круга задач конфликтного управления. Однако введение информационной дискриминации дает одному из игроков I информационное превосходство над противником и вместе с тем накладывает ограничения на поведение противника, в частности не позволяет ему формировать управление по принципу обратной связи

$$v[t]=v(t, x(t))$$

(соответственно $u[t]=u(t, x(t))$). При переходе к содержательной трактовке результатов, полученных в условиях дискриминации противника, вместо информации об управлении противника, к-рое будет выбрано им на промежутке $[t, t+\delta)$, можно использовать информацию об управлении, реализованном на промежутке $[t-\delta, t)$. Такую замену нетрудно обосновать для систем, где

$$f(t, x, u, v)=f_1(t, x, u)+f_2(t, x, v).$$

Содержательное использование глубоких теоретич. результатов, полученных в условиях дискриминации противника, достигается при рассмотрении позиционных Д. и. (см. ниже описание процедуры управления с поводырем).

Формализация позиционных Д. и. разработана Н. Н. Красовским и его сотрудниками (см., напр., [9]). Здесь рассматриваются позиционные стратегии U и V — функции $u=u(t, x)$ и $v=v(t, x)$, значения к-рых содержатся в компактах P и Q соответственно. Относительно этих функций не предполагается к.-л. условий непрерывности. Движения $x(t, t_0, x_0, U)$ $(t\geqslant t_0, x(t_0)=x_0)$, порожденные стратегией $U\div u(t, x)$ игрока I, определяются как равномерные на любом отрезке $[t_0, T]$ пределы последовательностей аппроксимацион-

ных движений $x_k(t)$, $k=1, 2, \ldots$, абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих уравнению

$$\dot{x}_k(t) = f(t, x_k(t), u_k[t], v_k[t]), \qquad (3)$$

где $v_k[t] \in Q\ (t \geqslant t_0)$ — произвольные измеримые функции,

$$u_k[t] = u(t_i^{(k)}, x_k(t_i^{(k)})), \quad t_i^{(k)} \leqslant t < t_{i+1}^{(k)}, \quad i = 0, 1, \ldots$$

причем

$$\sup_i (t_{i+1}^{(k)} - t_i^{(k)}) \longrightarrow 0 \text{ при } k \longrightarrow \infty.$$

Аналогичным образом вводятся движения $x(t, t_0, x_0, V)$, $t \geqslant t_0$, $x(t_0) = x_0$. При таком определении стратегий и движений справедливо следующее положение.

А л ь т е р н а т и в а 1. Пусть для любых векторов $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и $s \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} s'f(t, x, u, v) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} s'f(t, x, u, v), \qquad (4)$$

где $s'f$ — скалярное произведение векторов s и f. Тогда, каковы бы ни были замкнутые множества $M_c \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и $N_c \subset \mathbb{R}^{n+1}$, начальная позиция (t_0, x_0) и момент $\vartheta \geqslant t_0$, всегда либо существует стратегия U_* такая, что для любого движения $x(t) = x(t, t_0, x_0, U_*)$ точка $(t, x(t))$ попадет на M_c к моменту $t = \vartheta$, оставаясь в N_c вплоть до ее встречи с M_c; либо существует стратегия V_*, к-рая для любого движения $x(t) = x(t, t_0, x_0, V_*)$ гарантирует или уклонение точки $(t, x(t))$ от попадания на M_c при $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, или нарушение фазового ограничения $(t, x(t)) \in N_c$ раньше, чем точка $(t, x(t))$ попадет на M_c.

К решению такой игры сближения-уклонения сводится исследование многих типов Д. и., для к-рых из альтернативы 1 следует существование цены игры. При постановке позиционных Д. и. возможны и другие определения стратегий и движений. Напр., при рассмотрении разрывных стратегий иногда удобно либо заменять разрывную правую часть дифференциального уравнения неоднозначной и использовать аппарат теории дифференциальных уравнений в контингенциях, либо аппроксимировать разрывные стратегии непрерывными (см., напр., [10]). Однако такие подходы могут оказаться неудачными. Известны примеры, в к-рых оптимальное решение Д. и., полученное в рамках описанной здесь формализации, не удается достичь и даже аппроксимировать в рамках других формализаций, опирающихся на уравнения в контингенциях или непрерывные стратегии.

Если условие (4) нарушается, то различают постановку Д. и. в классе стратегий одного и контрстратегий другого игроков, к-рой отвечает детерминированное решение Д. и., и постановку Д. и. в классе смешанных стратегий обоих игроков, содержание к-рой раскрывается при аппроксимации смешанных стратегий соответствующими стохастическими процедурами управления. К о н т р с т р а т е г и и U_v, V_u отождествляются с функциями $u = u(t, x, v) \in P$, $v = v(t, x, u) \in Q$, борелевскими по переменным v, u соответственно. Движения $x(t, t_0, x_0, U_v)$, $t \geqslant t_0$, $x(t_0) = x_0$, определяются как пределы аппроксимационных движений $x_k(t)$ (3), где

$$u_k[t] = u(t_i^{(k)}, x_k(t_i^{(k)}), v_k[t]), \; t_i^{(k)} \leqslant t < t_{i+1}^{(k)}, \; i = 0, 1, \ldots.$$

Аналогично определяются движения $x(t, t_0, x_0, V_u)$. С м е ш а н н ы е с т р а т е г и и $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ отождествляются с функциями $\mu = \mu(t, x)$, $\nu = \nu(t, x)$, значениями к-рых являются вероятностные меры, заданные на компактах P, Q соответственно. Движения $x(t, t_0, x_0, \tilde{U})$, $t \geqslant t_0$, $x(t_0) = x_0$, определяются как пределы аппроксси-

мационных движений $x_k(t)$, $t \geqslant t_0$, удовлетворяющих уравнению

$$\dot{x}_k(t) = \int_P \int_Q f(t, x_k(t), u, v)\, d\mu_k[t]\, d\nu_k[t],$$

где

$\mu_k[t] = \mu(t_i^{(k)}, x_k(t_i^{(k)}))$, $t_i^{(k)} \leqslant t < t_{i+1}^{(k)}$, $i = 0, 1, \ldots$, $\nu_k[t]$ — некоторая слабо измеримая функция. Аналогичным образом вводятся движения $x(t, t_0, x_0, \tilde{V})$.

Для Д. и. сближения-уклонения всегда справедлива альтернатива 2 (альтернатива 3), формулировка к-рой получается из формулировки альтернативы 1 заменой стратегии одного из игроков на соответствующую контрстратегию (соответственно, заменой стратегий U_* и V_* смешанными стратегиями $\tilde{U}_*$ и $\tilde{V}_*$). Для Д. н., сводящихся к игре сближения-уклонения и рассматриваемых в классе позиционных стратегий одного из игроков и контрстратегий противника (в классе смешанных стратегий $\{\tilde{U}\}$ и $\{\tilde{V}\}$), устанавливается существование цены Д. и., причем здесь не предполагается условие (4). Решения Д. и. в указанных классах стратегий могут оказаться неустойчивыми по отношению к информационным помехам.

Для стабилизации этих решений вводится процедура управления с поводырем (см. [9]). Здесь наряду с реальной системой рассматривается эталонная система — поводырь, движение к-рой моделируется в вычислительной машине и известно с любой требуемой точностью. Управление игрока в реальной системе и движение поводыря формируются так, чтобы движения исходной и моделируемой систем взаимно отслеживались, причем поводырь сохраняется на нек-ром мосту, соединяющем начальную позицию с целевым множеством. Такая процедура управления оказывается устойчивой к ошибкам измерения и помехам, действующим на систему. При моделировании движения поводыря можно использовать конструкции, допускающие дискриминацию противника.

Методы теории дифференциальных игр. Один из методов решения Д. и. был предложен Р. Айзексом [11]. Этот подход примыкает к методу *динамического программирования* и основан на интегрировании специального уравнения с частными производными, решение к-рого определяет цену игры $c_0(t, x)$ как функцию исходной позиции игры. Оптимальные стратегии игрока I (или II) выбираются здесь так, чтобы обеспечить невозрастание (неубывание) цены игры вдоль порожденных ими движений системы. Однако нередки случаи, когда цена игры является разрывной функцией позиции игры, поэтому применение данного подхода требует специального анализа решений вблизи поверхностей разрыва функции $c_0(t, x)$ или ее частных производных. Полное исследование сингулярностей и обоснование этого метода оказываются весьма сложными и их удается осуществить лишь в немногих примерах.

Наиболее полно изучены линейные Д. и., т. е. случай, когда

$$f(t, x, u, v) = A(t)x + B(t)u + C(t)v,$$

где A, B, C — непрерывные матрицы соответствующих размерностей. Для линейных задач преследования и уклонения Н. Н. Красовский сформулировал правило экстремального прицеливания (см., напр., [12]), к-рое позволило решить эти задачи (без дискриминации противника) при условии регулярности и, в частности, в случае однотипных объектов. Элементы этого решения описываются следующим образом. Пусть $W(t_*, \vartheta, G)$ — множество программного поглощения, т. е. совокупность точек $x_* \in \mathbb{R}^n$, для к-рых для всякого управления

$v(t) \in Q$ существует управление $u\ (t) \in P, t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$, такое, что пара этих управлений переводит систему из состояния $x(t_*) = x_*$ на множество $G \subset \mathbb{R}^n$ в момент времени $t = \vartheta$. Вводится функция

$$\varepsilon_0\,(t,\ x,\ \vartheta) = \inf\{\varepsilon : x \in W\ (t,\ \vartheta,\ M_\varepsilon)\},$$

где M_ε — евклидова ε-окрестность целевого множества M. В области $\Gamma_\vartheta = \{(t,\ x) : \varepsilon_0(t,\ x,\ \vartheta) > 0\}$ величина $\varepsilon_0(t,\ x,\ \vartheta)$ определяется соотношением

$$\varepsilon_0\,(t,\ x,\ \vartheta,\ ) = \max_l \varkappa\,(l,\ t,\ x,\ \vartheta),\ l \in \mathbb{R}^n,\ \|l\| \leqslant 1, \qquad (5)$$

где для функции $\varkappa$ известно простое выражение через опорные функции множеств P, Q и выпуклого множества M (см. [12]). При условии выпуклости функции $\varkappa$ по переменной l (сильное условие регулярности) в области Γ_ϑ максимум в (5) достигается на единственном векторе $l_0(t,\ x,\ \vartheta)$, к-рый выбирается в качестве краевого условия в принципе максимума, определяющем выбор экстремального управления u_0. Построенная таким образом стратегия $U_0 \div u_0(t,\ x)$ обеспечивает встречу с множеством M к моменту $t = \vartheta$ из любой позиции $(t_0,\ x_0)$, где $\varepsilon_0(t_0,\ x_0,\ \vartheta) = 0$. [Указанные построения опираются лишь на информацию о позиции игры и эффективно реализуются на ЭВМ.] Решение задачи сближения с помощью программной конструкции можно получить и при ослабленных условиях регулярности.

Исследование линейных задач преследования при различных предположениях регулярности проводилось Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягиным, Б. Н. Пшеничным (см., напр., [13], [14], в частности, описано [13] решение линейной задачи преследования при так наз. условиях локальной выпуклости, при к-рых имеет место указанное выше сильное условие регулярности).

Одним из наиболее удобных способов решения игровых задач управления является п р я м о й м е т о д. В тех задачах, где возможно применение этого метода, управление игрока выбирается так, чтобы при любом противодействии противника осуществлялось отслеживание нек-рого вспомогательного процесса, приводящее к успешному окончанию игры. В случае однотипных объектов ($C = -B$, $Q = \lambda P$, $\lambda \leqslant 1$) и при условии дискриминации противника прямой метод решения задачи преследования назначает выбор управления игрока I в виде суммы двух слагаемых, одно из к-рых копирует управление противника, а другое совпадает с решением программной задачи на быстродействие перевода системы

$$\dot{x} = A\ (t)\ x + B\ (t)\ w, \quad w \in (1 - \lambda)\ P,$$

на целевое множество M. Впервые прямой метод был описан Л. С. Понтрягиным [5] для линейной задачи преследования. Позднее были указаны условия, при к-рых прямой метод дает оптимальный результат [15]. Затем прямой метод был развит для решения нелинейных задач и для задач с интегральными ограничениями (см., напр., [16], [17]). Во всех этих исследованиях прямой метод использовался при условии дискриминации противника; он был развит также и для решения позиционных игр (см., напр., [9]).

З а д а ч а о б у б е г а н и и. В этой задаче требуется определить условия, при к-рых преследуемый объект может обеспечить уклонение от встречи с преследователем при всех $t \geqslant t_0$. Исследование этого вопроса было начато Л. С. Понтрягиным и Е. Ф. Мищенко (см. [7], [8]), к-рые указали условия разрешимости линейной задачи об убегании и получили оценку гарантируемого расстояния между преследующей и преследуемой точками. Подход, предложенный ими, был обобщен затем для исследования других случаев задачи об убегании.

Предложенное Л. С. Понтрягиным [6] понятие альтернированного интеграла позволило описать структуру множества начальных позиций, из к-рых возможно окончание линейной игры преследования в заданный момент времени $t=\vartheta$. Альтернированный интеграл определяется как предел рекуррентной процедуры, в к-рой исходное множество A_0 совпадает с целевым множеством $M\subset\mathbb{R}^n$, а каждое последующее множество A_{i+1} определяется по предыдущему операцией программного поглощения, т. е. $A_{i+1}=W(\tau_{i+1},\ \tau_i,\ A_i)$, где $\tau_{i+1}=\tau_i-\Delta$, $\tau_0=\vartheta$, $\Delta>0$ — шаг рекуррентной процедуры. Б. Н. Пшеничный [18] при исследовании структуры Д. и. преследования в качестве элементарной операции также использовал программное поглощение, где в отличие от предыдущего случая требовалось лишь, чтобы продолжительность перехода из точек $x\in A_{i+1}$ на A_i не превосходила числа Δ, но, вообще говоря, не равнялась этому числу. Такая рекуррентная процедура позволила в общем случае нелинейной системы описать структуру множества позиций, из к-рых игру преследования можно окончить к заданному моменту времени.

Была также предложена экстремальная конструкция для решения позиционных Д. и. (см., напр., [9]). Этот подход используется как для решения конкретных примеров, так и при доказательстве общих положений, в частности альтернатив 1—3, указанных выше. Напр., при решении задачи сближения с $M_c\subset\mathbb{R}^{n+1}$ в классе стратегий $U\div u(t,\ x)$ при условии (4), согласно экстремальной конструкции, в пространстве позиций выделяется множество $W_u\subset\mathbb{R}^{n+1}$, образующее мост, к-рый соединяет начальную позицию с целевым множеством M_c и лежит целиком во множестве N_c. Мост обладает так наз. свойством u-стабильности, т. е. для любых $(t_*,\ x_*)\in W_u$, $v_*\in Q$ и $t^*\geqslant t_*$ существует решение $x(t)$ уравнения в контингенциях

$$\dot{x}(t)\in\omega\{f(t,\ x(t),\ u,\ v_*):u\in P\},$$

$$x(t_*)=x_*,$$

для к-рого либо $(t^*,\ x(t^*))\in W_u$, либо $(\tau,\ x(\tau))\in M_c$ при нек-ром $\tau\in[t_*,\ t^*]$. Вводится экстремальная к мосту W_u стратегия $U^{(e)}\div u^{(e)}(t,\ x)$, определяемая соотношением

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}(x-w)'f(t,\ x,\ u,\ v)=$$

$$=\max_{v\in Q}(x-w)'f(t,\ x,\ u^{(e)}(t,\ x),\ v),$$

где w — вектор, для к-рого $(t,\ w)$ — точка множества W_u, ближайшая к позиции $(t,\ x)$. Экстремальная стратегия удерживает движения на мосту W_u и тем самым доставляет решение задачи о сближении.

В этой конструкции основным моментом является определение подходящих стабильных мостов, после чего построение экстремальных стратегий не доставляет больших трудностей. Использование известных рекуррентных процедур для определения таких мостов ограничивается значительными трудностями вычислительного характера, поэтому важным является исследование эффективных способов построения стабильных мостов. Один из таких способов доставляет прямой метод. Другой способ — построение стабильных мостов в форме множеств регулярного программного поглощения. В нелинейном случае программное поглощение определяется с помощью специальных программных управлений-мер (см., напр., [9]). В регулярных случаях программного поглощения решение задач конфликтного управления можно довести до алгоритмов, реализуемых на ЭВМ.

Основные направления исследований дифференциальных игр. Изложенные выше результаты относились в основном к Д. и., в к-рых движение описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (1), где управляющие векторы удовлетворяют ограничениям (2). Аналогичные результаты получены для игровых задач управления, в к-рых движение описывается *дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом*, а также для задач с интегральными ограничениями на управления игроков (см., напр., [17]).

Для исследования структуры Д. и. представляет интерес изучение задач конфликтного управления, где движение задается обобщенной динамич. системой (см., напр., [19], [20]). Рассмотрено решение Д. и. в классе квазистратегий, к-рые формируют управление игрока по реализовавшемуся управлению противника; предложены также итерационные процедуры для определения функции цены и стабильных мостов (см., напр., [21]).

Кроме Д. и. с двумя игроками, рассматриваются также Д. и. N лиц. Постановка Д. и. N лиц обычно предполагает, что каждый из игроков, распоряжающийся выбором своего управления, стремится минимизировать нек-рый функционал, определенный на траекториях управляемой системы. При этом допускается использование ими лишь информации о текущих позициях игры. Задача заключается, напр., в определении условий, при к-рых в таких играх имеется точка равновесия по Нэшу в заданном классе стратегий игроков.

Важный раздел теории Д. и. составляют игровые задачи управления с неполной информацией. В этих задачах предполагается, что неполнота информации заключается либо в незнании части компонент фазового вектора $x(t)$, либо в измерении текущей позиции игры с нек-рым запаздыванием, либо в неточном измерении положения фазовой точки $x(t)$, причем возможен случай, когда для погрешности измерения указаны лишь допустимая область, и случай, когда задано нек-рое статистич. описание этой погрешности.

Лит.: [1] Fleming W. H., «Contributions to the theory of games», 1957, v. 3, p. 407—12; [2] Varaiya P., Lin Jiguan G., «SIAM J. Contr.», 1969, v. 7, № 1, p. 141—57; [3] Петров Н. Н., «Докл. АН СССР», 1970, т. 190, № 6, с. 1289—91; [4] Friedman A., «J. Different. equat.», 1970, v. 7, № 1, p. 111—25; [5] Понтрягин Л. С., «Докл. АН СССР», 1967, т. 174, № 6, с. 1278—80; [6] его же, там же, т. 175, № 4, с. 764—66; [7] его же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 112, с. 30—63; [8] Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф., «Дифференц. уравнения», 1971, т. 7, № 3, с. 436—45; [9] Красовский Н. Н., Субботин А. И., Позиционные дифференциальные игры, М., 1974; [10] Кротов В. Ф., Гурман В. И., Методы и задачи оптимального управления, М., 1973; [11] Айзекс Р., Дифференциальные игры, пер. с англ., М., 1967; [12] Красовский Н.Н., Игровые задачи о встрече движений, М., 1970; [13] Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., «Докл. АН СССР», 1967, т. 174, № 1, с. 27—29; [14] Пшеничный Б. Н., «Кибернетика», 1967, № 6, с. 54—64; [15] Гусятников П. Б., Никольский М. С., «Докл. АН СССР», 1969, т. 184, № 3, с. 518—21; [16] Чикрий А. А., сб. «Теория оптимальных решений. Тр. семинара», в. 3, К., 1969, с. 17—25; [17] Никольский М. С., «Дифференц. уравнения», 1972, т. 8, № 6, с. 964—71; [18] Пшеничный Б. Н., «Докл. АН СССР», 1969, т. 184, № 2, с. 285—87; [19] Nardzewski C. R., «Adv. in game theory. Ann. of Math. Studies», 1964, p. 113—26; [20] Roxin E., «J. Optimiz. theory and appl.», 1969, v. 3, № 3, p. 153—63; [21] Ченцов А. Г., «Матем. сб.», 1976, т. 99, № 3, с. 394—420.

М. С. Никольский, А. И. Субботин.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: система бесконечного порядка — бесконечная совокупность дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots), \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

содержащая бесконечное множество неизвестных функций $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, и их производные. Решением такой системы наз. множество функций $\{x_k(t)\}$, обращающих все уравнения системы в тождества.

Система (1) наз. счетной, в отличие от несчетной системы

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = f_\alpha\,(t,\ \ldots,\ x_\alpha,\ \ldots), \qquad (2)$$

где α пробегает нек-рое несчетное множество значений. Система вида (2) содержит в себе несчетное множество функций $\{x_\alpha(t)\}$, подлежащих определению, и их производные. Рассматриваются также Д. у., содержащие бесконечное множество неизвестных функций двух и более аргументов и их частные производные.

Начало развитию теории систем Д. у. вида (1) положила работа А. Н. Тихонова [1]. Основным ее результатом является доказательство теоремы существования решения системы (1) в предположении, что ее правые части определены при произвольных значениях $x_1,\ x_2,\ \ldots$ $(0 \leqslant t - t_0 \leqslant a)$, непрерывны по отношению к $x_1,\ x_2,\ \ldots$ при фиксированном значении t, измеримы по t при фиксированных $x_1,\ x_2,\ \ldots$ и ограничены некоторыми суммируемыми на сегменте $[t_0,\ t_0+a^2]$ функциями $M_i(t)$, $i=1, 2, \ldots$ При дополнительных предположениях о выполнении обобщенных условий Липшица

$$|f_n(t, x_1', x_2', \ldots) - f_n(t, x_1'', x_2'', \ldots)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} K_{n_i} |x_i' - x_i''|,$$

и о сходимости и равномерной ограниченности рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_{n_i} = A_i < A$$

доказана теорема единственности решения $x_i(t)$, $i=1, 2, \ldots$, системы (1) при заданных начальных условиях такого, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t)|$$

сходится.

Дальнейшее развитие теория счетных систем получила в направлении исследований условий ограниченности решений (см. [2]), аналитической зависимости от параметра, устойчивости по Ляпунову и других свойств решений (см. [2]). Особенно глубоко изучены линейные и квазилинейные счетные системы дифференциальных уравнений.

К изучению систем бесконечного порядка плодотворно применяются операторные методы. Так, например, вместо системы (1) рассматривается операторное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f\,(t, x), \qquad (3)$$

где $x(t)$ — бесконечномерный вектор нек-рого банахова пространства B, $f(t,\ x)$ — бесконечномерная вектор-функция со значениями в том же пространстве, производная рассматривается в смысле Фреше. В частности, для уравнения (3) были получены следующие результаты (см. [3]).

Если $f(t,\ x)$ — ограниченный оператор, то из выполнения локальной теоремы существования и отрицательности генерального показателя (см. [3]) следует неограниченная продолжимость решений с достаточно близкими к нулю начальными значениями.

Если

$$f(t, x) \equiv Ax$$

(где A — бесконечномерная постоянная матрица) — ограниченный оператор, то в гильбертовом пространстве ограниченность всех решений при $-\infty < t < \infty$ имеет место тогда и только тогда, когда оператор A подобен косоэрмитову. В этом же случае найдено явное выра-

жение решения задачи Коши с начальными условиями $x(t_0)=x_0$ в виде

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x_0,$$

где e^{At}— операторная экспонента.

Если

$$f(t,\ x)\equiv Ax+f(t),$$

где A имеет прежнее значение, а $f(t)$ — непрерывная T-периодическая вектор-функция, то существует единственное периодическое решение, когда спектр $\sigma(A)$ оператора A не содержит точек мнимой оси $2k\pi i/T$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

Для случая

$$f(t,\ x)\equiv Ax+F(t,\ x)$$

найдены условия устойчивости по Ляпунову в нуле в виде требования

$$\|F(t,\ x)\|<q\|x\|,\quad t>0,\ \|x\|<\rho,$$

при достаточно малом $q>0$ и расположении спектра оператора A в левой открытой полуплоскости.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., «Матем. сб.», 1934, т. 41, в. 4, с. 551—60; [2] Валеев К. Г., Жаутыков О. А., Бесконечные системы дифференциальных уравнений, А.-А., 1974; [3] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970.

И. П. Макаров.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ТОРЕ, потоки на торе,— класс *динамических систем*. Примером может служить поток, порожденный групповыми сдвигами тора (как *Ли группы*) на элементы к.-л. однопараметрич. подгруппы тора. В терминах «угловых», или «циклических», координат на торе, отсчитываемых по модулю 1 (их можно рассматривать как обычные координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, из к-рого тор T^n получается как факторгруппа по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n$), этот поток описывается так: за время t точка $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ переходит в точку

$$T^tx=x+t\omega, \qquad (1)$$

где $\omega=(\omega_1,\ \ldots,\ \omega_n)$ — набор так наз. базисных частот. Все траектории этого потока являются *квазипериодическими функциями* времени; их свойства определяются арифметич. свойствами базисных частот. Так, траектории периодичны, если все ω_i кратны одному и тому же числу. В другом крайнем случае, когда ω_i линейно независимы над $\mathbb{Z}$ (т. е. никакая нетривиальная линейная комбинация $\sum k_i\omega_i$ с целыми k_i не равна нулю), каждая траектория всюду плотно заполняет тор (говорят об иррациональной обмотке тора), а поток эргодичен (по отношению к *Хаара мере* на T^n; мера Хаара естественным образом получается из меры Лебега в $\mathbb{R}^n$ при факторизации по $\mathbb{Z}^n$ и сохраняется при сдвигах T^t) и даже строго эргодичен; его спектр дискретен.

Подобные потоки часто возникают в различных вопросах. Напр., для интегрируемых *гамильтоновых систем* «типичные» финитные (т. е. остающиеся в конечной области фазового пространства) движения приводят как раз к ним (соответствующие торы суть многообразия уровня системы первых интегралов, см. [8]). Обычно такие инвариантные торы с иррациональными обмотками имеются также и у гамильтоновых систем, достаточно близких к интегрируемым (этот вопрос тесно связан с *малыми знаменателями*).

Для двумерного тора T^2 А. Пуанкаре (H. Poincaré, [1]), А. Данжуа [2] (см. также [3]) и Х. Кнезером ([4], модифицированное изложение см. в [5], [6]) полностью выяснены возможные типы качественного поведения траекторий потоков без положений равновесия. (Из всех замкнутых поверхностей только на торе и *Клейна поверхности* возможны такие потоки, причем изучение потоков на последней в основном сводится к изучению

потоков на торе, являющемся ее двулистной накрывающей поверхностью). Об этих потоках известно следующее. Если на поверхности имеется двусвязная область («кольцо Кнезера»,) к-рая ограничена двумя замкнутыми траекториями и внутри к-рой траектории свиваются с одной из них и навиваются на другую в противоположном направлении (см. рис.), то качественное поведение траекторий на поверхности напоминает поведение траекторий в ограниченной области на плоскости. В частности, все непериодич. траектории в обе стороны по времени стремятся к периодическим. Более интересен случай (возможный лишь на торе), когда колец Кнезера нет; это эквивалентно существованию замкнутой трансверсали L (т. е. замкнутой кривой, нигде не касающейся векторного поля), к-рую каждая траектория пересекает бесконечное число раз. На L определено отображение последования S — гомеоморфизм, переводящий точку $x \in L$ в первую по времени точку пересечения проходящей через x положительной полутраектории с L. Характеристикой каскада $\{S^n\}$ на L служит число вращения Пуанкаре α (см., например, [3]. Оно отчасти зависит от конкретного выбора L; совершенно инвариантной характеристикой исходного потока является асимптотический цикл [14]). Согласно теореме Данжуа, если S — класса C^2 (что гарантировано при соответствующей гладкости трансверсали и исходного потока на торе) и α иррационально, то S топологически сопряжен с поворотом окружности на угол $2\pi\alpha$, т. е. на L можно так ввести циклич. координату x, что S представится в виде $x \to x+\alpha \bmod 1$. (Если S — класса C^1, то это не обязательно так, см. [2].) Тогда разбиение тора на траектории с точностью до гомеоморфизма является таким же, как и в случае (1) (однако это не относится к скорости движения по ним). Гладкость замены координат, гарантируемая теоремой Данжуа, зависит (помимо гладкости S) от арифметических свойств числа вращения α. При почти всех α из $S \subset C^n$, $n \geqslant 3$, следует, что замена координат принадлежит классу C^{n-2} [9], но для чисел вращения, очень быстро приближающихся рациональными числами, замена координат, вообще говоря, не гладкая, даже если преобразование S аналитическое (см. [7]).



Если исходный поток на T^2 имеет *интегральный инвариант*, то колец Кнезера быть не может, а S (независимо от рациональности или иррациональности α) гладко сопряжено с поворотом окружности; таким образом, при отсутствии положений равновесия на торе существуют циклич. координаты x, y того же класса гладкости, что и сам поток, в к-рых последний принимает вид:

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = \alpha f(x, y), \quad f(x, y) > 0 \qquad (2)$$

(здесь α — число вращения, отвечающее замкнутой трансверсали $x = \text{const}$). При достаточной гладкости f и надлежащих свойствах α поток (2) можно привести к (1) (с $n=2$ и $\omega=(1, \alpha)$) посредством нек-рого диффеоморфизма, в общем же случае это не всегда возможно, и даже эргодические свойства потока (2) могут отличаться от свойств потоков (1) (возможен непрерывный спектр, хотя перемешивание в гладком случае невозможно). См. [10] (опущенные доказательства восстановлены в [11], [12]) и [13].

Лит.: [1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М.— Л., 1947; [2] Denjoy A., «J. math. pures et appl.», sér. 9, 1932, t. 11, № 4, p. 333—75; [3] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [4] Knesser H., «Math. Ann.», 1924, Bd 91,

№ 1—2, S. 135—54; [5] Reinhart B. L., «Amer. J. Math.», 1959, v. 81, № 3, p. 617—31; [6] Aepply A., Markus L., «Amer. J. Math.», 1963, v. 85, № 4, p. 633—54; [7] Арнольд В. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1961, т. 25, № 1, с. 21—86; [8] его же, «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 2, с. 471—74; [9] Herman M. R., «C. r. Acad. sci.», 1976, t. 283, № 8, p. 579—82; [10] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1953, т. 93, № 5, с. 763—66; [11] Sternberg S., «Amer. J. Math.», 1957, v. 79, № 2, p. 397—402; [12] Шкловер М. Д., «Изв. ВУЗов. Математика», 1967, № 10, с. 113—24; [13] Кочергин А. В., «Докл. АН СССР», 1972, т. 205, № 3, с. 515—18; [14] Schwartzman S., «Ann. Math.», 1957, v. 66, № 2, p. 270—84.

Д. В. Аносов.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ — система вида

$$\mu \frac{dz}{dt} = F(z, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = f(z, y, t), \tag{1}$$

где z и y суть, соответственно, M- и m-мерные векторы, $\mu > 0$ — малый параметр. Полагая в (1) формально $\mu = 0$, получим так наз. вырожденную систему

$$0 = F(z, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = f(z, y, t). \tag{2}$$

Пусть решение $x(t, \mu)$ системы (1) (x означает z и y в совокупности) определяется нек-рыми дополнительными условиями. При выяснении возможности использования уравнений (2) для построения асимптотического при малых μ приближения к $x(t, \mu)$ возникают трудности, связанные с тем, что система (2) более низкого порядка, чем (1), и поэтому ее решение не может удовлетворить всем условиям, поставленным для (1). Априори не ясно, какие из дополнительных условий, поставленных для (1), следует оставить для определения решения (2), а какие — отбросить. Кроме того, уравнение $F(z, y, t) = 0$ имеет относительно z, вообще говоря, несколько корней, и снова априори не ясно, какой из этих корней нужно выбрать при решении системы (2), чтобы получить правильное приближение. Эти моменты отличают постановку задачи об асимптотике решения системы (1) от регулярного случая, когда μ входит не в качестве множителя при производных, а в правые части и притом регулярно.

Первые работы, относящиеся к системе вида (1), были посвящены начальной задаче

$$z\big|_{t=0} = z^0, \quad y\big|_{t=0} = y^0. \tag{3}$$

В наиболее законченной форме результат был дан А. Н. Тихоновым [1]. В общих чертах он состоит в следующем. Пусть уравнение $F(z, y, t) = 0$ определяет в нек-рой замкнутой ограниченной области D несколько изолированных корней

$$z = \varphi_i(y, t).$$

Введем так называемую присоединенную систему

$$\frac{dz}{d\tau} = F(z, y^*, t^*), \tag{4}$$

в к-рой y^* и t^* рассматриваются как параметры. Возьмем один из корней $z = \varphi_i$ и обозначим его $z = \varphi(y, t)$. Корень $z = \varphi(y, t)$ наз. устойчивым в D, если для каждой точки $(y^*, t^*) \in D$ соответствующая точка покоя $z = \varphi(y^*, t^*)$ присоединенной системы (4) является асимптотически устойчивой. Областью влияния устойчивого корня $z = \varphi(y, t)$ наз. множество точек (z^*, y^*, t^*) таких, что решение системы (4), определяемое начальным условием $z|_{\tau=0} = z^*$, стремится к $\varphi(y^*, t^*)$ при $\tau \to \infty$. Оказывается, что если $z = \varphi(y, t)$ — устойчивый корень, а точка $(z^0, y^0, 0)$, являющаяся начальной для рассматриваемого решения $x(t, \mu)$ начальной задачи (3), принадлежит его области влияния, то это решение при $\mu \to 0$ стремится к решению вырожденной системы (2), причем в качестве решения первого уравнения в (2) берется

$z=\varphi(y,\ t)$, а в качестве начального условия — условие (3) для y (условие (3) для z отбрасывается). Другими словами,

$$\lim_{\mu\to 0} y\ (t,\ \mu) = y_0\ (t),\quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

$$\lim_{\mu\to 0} z\ (t,\ \mu) = z_0\ (t) \equiv \varphi\ (y_0\ (t),\ t),\quad 0 < t \leqslant T, \tag{6}$$

где $y_0(t)$ находится из системы

$$\frac{dy}{dt} = f\ (\varphi\ (y,\ t),\ y,\ t) \tag{7}$$

при начальном условии $y_0|_{t=0}=y^0$; T связано с размерами области D. Таким образом, в отличие от регулярного случая близость при малых μ решения $x(t,\ \mu)$ системы (1) к решению системы, в к-рой положено $\mu=0$, т. е. системы (2), имеет место только при специальных условиях.

Предельный переход (6) не является равномерным в связи с тем, что, вообще говоря, $z^0\neq\varphi(y^0,\ 0)$. Иными словами, в связи с «потерей» начальных условий для z, и в окрестности $t=0$ имеется (правда, бесконечно сужающаяся при $\mu\to 0$) область, где $z(t,\ \mu)$ и $z_0(t)$ не близки. Это явление получило название явления *пограничного слоя* (название заимствовано из гидродинамики).

Понятие устойчивости корня $z=\varphi(y,\ t)$ играет большую роль при исследовании системы (1). Различным критериям устойчивости точки покоя по Ляпунову (см. *Устойчивость по Ляпунову*) соответствуют различные критерии устойчивости корня $z=\varphi(y,\ t)$. Наиболее употребителен к р и т е р и й п е р в о г о п р и б л и ж е н и я, состоящий в требовании, чтобы собственные значения λ матрицы

$$\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{z=\varphi\ (y,\ t)} \tag{8}$$

удовлетворяли неравенству $\operatorname{Re}\lambda<0$ в D. Если $\operatorname{Re}\lambda>0$, то для задачи (1), (3) имеет место результат, аналогичный описанному выше, но для $t<0$. Если матрица (8) имеет собственные значения с действительными частями разных знаков, т. е.

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0,\ i=1,\ \ldots,\ k,\ \operatorname{Re}\lambda_i > 0,\ i=k+1,\ \ldots,\ M, \tag{9}$$

то решение начальной задачи (1), (3), вообще говоря, предела при $\mu\to 0$ не имеет. Однако если для (1) поставить не начальную, а краевую задачу, причем при $t=0$ задать k компонент вектора z (компоненты будем обозначать нижними индексами), а при $t=T$ задать $M-k$ компонент вектора z (значение y можно задавать как при $t=0$, так и при $t=T$):

$$z_i|_{t=0} = z_i^0,\ i=1,\ \ldots,\ k,\ z_i|_{t=T} = z_i^0,\ i=k+1,\ \ldots,\ M, \tag{10}$$

$$y|_{t=0} = y^0, \tag{11}$$

то для решения $x(t,\ \mu)$ задачи (1), (10), (11) при выполнении нек-рых условий (аналогичных требованию принадлежности начальной точки области влияния устойчивого корня в случае начальной задачи) будет справедлив предельный переход (5), (6), где $y_0(t)$ определяется по-прежнему системой (7). При этом предельный переход (6) справедлив для $0<t<T$, и пограничный слой появляется как в окрестности $t=0$, так и в окрестности $t=T$, поскольку при $\mu=0$ происходит «потеря» дополнительных условий (10), заданных и при $t=0$, и при $t=T$. Случай (9) получил название у с л о в н о у с т о й ч и в о г о с л у ч а я (см. [2]).

После того как был установлен предельный переход (5), (6), исследование задачи (1), (3) развивалось в направлении построения асимптотич. разложения ее

решения. В регулярном случае решение начальной задачи представляется степенным рядом по μ

$$x(t, \mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\ldots, \qquad (12)$$

к-рый при условии достаточной гладкости правых частей является асимптотич. рядом. В случае (1), благодаря наличию пограничного слоя, асимптотич. разложение решения носит более сложный характер, а именно: к степенному разложению типа (12) следует добавить еще так наз. пограничный ряд

$$x(t, \mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\ldots$$
$$\ldots+\Pi_0 x\left(\frac{t}{\mu}\right)+\mu\Pi_1 x\left(\frac{t}{\mu}\right)+\ldots. \qquad (13)$$

Члены $\Pi_\mu x(t/\mu)$ наз. пограничными членами. Они играют роль вблизи $t=0$, а далее быстро убывают по закону $\exp(\alpha t/\mu)$, где $\alpha>0$. (Подробное описание алгоритма построения асимптотич. разложения решения задачи (1), (3) дано в [2]; там же доказано, что остаточный член асимптотич. разложения (13) при достаточной гладкости правых частей (1) имеет порядок $O(\mu^{n+1})$ равномерно относительно $t\in[0, T]$.) Подобного же рода асимптотич. разложение имеет место для решения задачи (1), (10), (11). Отличие заключается в том, что в этом случае к степенному разложению типа (12) добавляются уже два пограничных ряда в связи с наличием пограничного слоя в окрестности и $t=0$, и $t=T$.

Асимптотич. представление (13) (при наличии устойчивого корня) или аналогичное ему представление с двумя пограничными слоями (при наличии условно устойчивого корня) дает возможность доказать существование и получить асимптотику решения задач с более сложными дополнительными условиями, чем (3) или (10), (11) (см. [2]):

$$R(x(0), x(T))=0. \qquad (14)$$

Во всех описанных выше задачах в построении функции, к к-рой при $\mu\to0$ стремится рассматриваемое решение, участвовал один корень $z=\varphi(y, t)$ уравнения $F(z, y, t)=0$. Однако при наличии нескольких корней уравнения $F(z, y, t)=0$ часто наблюдается явление перехода (или срыва), когда решение уравнения (1), удовлетворяющее нек-рым дополнительным (вообще говоря, краевым) условиям, имеет в качестве предельной кривую (вообще говоря, разрывную), состоящую из нескольких кусков, каждый из к-рых на соответствующем участке определяется вырожденной системой (2), причем в качестве решения уравнения $F(z, y, t)=0$ выбирается надлежащим образом один из корней $z=\varphi_i(y, t)$. При переходе от участка к участку корень, вообще говоря, меняется. Границы участков наз. точками срыва. В окрестности каждой точки срыва возникает пограничный слой, называемый внутренним пограничным слоем. Причины срыва весьма разнообразны. В одних случаях асимптотика решения с точками срыва может быть описана разложением типа (13) (см. [2]), в других — носит более сложный характер (см., напр., [3], [4]).

Существует много работ, посвященных отдельным весьма разнообразным задачам, напр., таким, как исследование случаев обращения $\mathrm{Re}\,\lambda$ в нуль, исследование (1) на бесконечном промежутке, изучение решения начальной задачи с сингулярными по μ начальными значениями z, изучение (1) в абстрактной форме и др. (см. обзор [4]). Большое количество исследований посвящено линейным уравнениям типа (1). Для линейных уравнений одной из характерных задач является задача исследования асимптотики собственных значений и собственных функций (см., напр., [5]), построение асимптотики фундаментальной системы решений в це-

лом. Исследование последнего вопроса сильно затрудняется, если в системе имеются так наз. точки поворота (подробный обзор этого рода проблем см. в [4]).

Ряд результатов, полученных для дифференциальных уравнений типа (1), был перенесен на интегро-дифференциальные уравнения с малым параметром при производных (см., напр., [6]). Имеется также значительный круг работ, посвященных уравнениям с частными производными, содержащими при старшей производной малый параметр (см., напр., [5], [7]). Совершенно аналогичные асимптотич. закономерности наблюдаются для дифференциально-разностных уравнений в случае малого отклонения аргумента (см. [4]).

Дифференциальные уравнения вида (1), а также другие, сходные с ними в отношении асимптотич. поведения решений, получили, в отличие от регулярного случая, название сингулярно возмущенных уравнений. Для исследования сингулярно возмущенных систем с успехом применяется метод усреднения Крылова — Боголюбова, к-рый особенно эффективен при исследовании колебательных процессов и резонансных явлений; был предложен также так наз. метод подъема, или метод регуляризации (см. [8]). Сингулярно возмущенные уравнения встречаются в самых различных областях физики и техники: в теории нелинейных колебаний, гидродинамике, небесной механике, квантовой механике, кинетике и др.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., «Матем. сб.», 1952, т. 31, № 3, с. 575—86; [2] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., 1973; [3] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975; [4] Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Федорюк М. В., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 5—75; [5] Вишик М. И., Люстерник Л. А., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 5, с. 3—122; 1960, т. 15, в. 3, с. 3—80; [6] Иманалиев М. И., Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем, Фр., 1972; [7] Треногин В. А., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 4, с. 123—56; [8] Ломов С. А., Теория возмущений сингулярных краевых задач, А.-А., 1976.

А. Б. Васильева.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ БИНОМ — выражение вида

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

где a и b — действительные, а m, n и p — рациональные числа. Неопределенный интеграл от Д. б.

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx$$

в случае, когда хоть одно из чисел p, $(m+1)/n$ и $(m+1)/n+p$ целое, сводится к интегралу от рациональных функций. Во всех остальных случаях, как это было показано П. Л. Чебышевым (1853), интеграл от Д. б. не выражается через элементарные функции.

Л. Д. Кудрявцев.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ — выражение, составленное из одной или нескольких функций, их частных производных по независимым переменным различных порядков, а иногда и дифференциалов этих переменных, инвариантных относительно того или иного преобразования.

Пусть в дифференцируемом многообразии X_n, элементом к-рого является точка $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, задан геометрический объект Ω (см. *Геометрических объектов теория*). Геометрич. объект ω того же многообразия наз. дифференциальным инвариантом порядка r относительно объекта Ω, если его координаты ω_A, $A=1, 2, \ldots, N$, являются функциями координат Ω_α, $\alpha=1, 2, \ldots, M$, объекта Ω и их частных производных по координатам u^i, $i=1, 2, \ldots, n$, до порядка r:

$$\omega_A = f_A (\Omega_\alpha, \partial_i \Omega_\alpha, \ldots, \partial^r_{i_1 i_2 \ldots i_r} \Omega_\alpha)$$

и обладают следующим свойством инвариантности относительно нек-рого преобразования координат. Именно, при замене координат

$$u^i = u^i\,(u^{1'},\ u^{2'},\ \ldots,\ u^{n'})$$

новые координаты ω'_A объекта ω выражаются через новые координаты Ω'_A объекта Ω и их частные производные по новым координатам — теми же самыми функциями f_A:

$$\omega'_A = f_A\,(\Omega'_A,\ \partial_i\Omega_\alpha,\ \ldots,\ \partial^r_{i'_1 i'_2\ \ldots\ i'_n}\Omega_\alpha).$$

Пусть, напр., Ω — объект линейной аффинной связности (без кручения). Объект ω (тензор кривизны):

$$R^l_{ijk} = \partial_i\Gamma^l_{jk} - \partial_j\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{is}\Gamma^s_{jk} - \Gamma^l_{js}\Gamma^s_{ik}$$

есть тензорный Д. и. порядка 1 относительно *Кристоффеля символов* Γ^k_{ij}.

Пусть в X_n задана группа (псевдогруппа) G точечных преобразований

$$u^i = f^i\,(\bar{u}^1,\ \bar{u}^2,\ \ldots,\ \bar{u}^n) \qquad (1)$$

и M_h — подмногообразие X_n размерности h:

$$u^i = \varphi^i\,(t^1,\ t^2,\ \ldots,\ t^n), \qquad (2)$$

параметры к-рого подвергаются преобразованиям бесконечной группы G_∞:

$$t^\alpha = \psi^\alpha\,(\bar{t}^{1*},\ \bar{t}^{2*},\ \ldots,\ \bar{t}^{n*}).$$

Геометрическим дифференциальным инвариантом порядка r многообразия M_h относительно группы (псевдогруппы) G наз. функцию координат u^i точки M_h и их частных производных до порядка r по параметрам t^α:

$$F\left(u^i,\ \frac{\partial u^i}{\partial t^\alpha},\ \ldots,\ \frac{\partial^r u^i}{\partial t^{\alpha_1}\ldots\partial t^{\alpha_r}}\right), \qquad (3)$$

обладающую свойством инвариантности относительно преобразований (1) и (2). Именно, если в (3) заменить u^i по формулам (1), а частные производные от u^i по t^α — их выражениями через частные производные от $\bar{u}^i$ по $\bar{t}^{\alpha*}$, то получается та же функция F от $\bar{u}^i$ и их производных по $\bar{t}^{\alpha*}$:

$$F\left(u^i,\ \frac{\partial\bar{u}^i}{\partial\bar{t}^{\alpha*}},\ \ldots,\ \frac{\partial^r\bar{u}^i}{\partial\bar{t}^{\alpha*}_1\ldots\partial\bar{t}^{\alpha*}}\right).$$

Если координаты u^i однородны, то функция F должна быть также инвариантна относительно преобразований

$$u^{*i} = \lambda\,(t^1,\ \ldots,\ t^n)\,u^i,\quad \lambda \neq 0.$$

В определении геометрич. Д. и. функцию F можно заменить геометрич. объектом. Если этот объект — ковариантный (контравариантный) вектор, то его наз. ковариантом (контравариантом).

Если инвариантно обращение в нуль нек-рого объекта, то его наз. относительным дифференциальным инвариантом.

Лит.: [1] Thomas T. Y., The differential invariants of generalized spaces, Camb., 1934; [2] Weitzenböch R., Invarianten-theorie, Groningen, 1923. *В. И. Шуликовский.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ КОМИТАНТ — дифференцируемое отображение φ тензорного пучка T на многообразии M в тензорный пучок T' на том же многообразии такое, что если $p' : T \to M$ и $p' : T' \to M$ — проекции пучков T и T' на M, то

$$p'\varphi = p.$$

Компоненты тензора $T'=\varphi(T)$ в локальной карте ξ на M зависят от ξ только через посредство компонент тензора T.

В частности, когда T' сводится к пучку относительных скаляров веса g, Д. к. является дифференциальным инвариантом веса g. *М. И. Войцеховский.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — обобщение оператора дифференцирования. Д. о. (вообще говоря, не непрерывный, не ограниченный и не линейный) — оператор, определенный нек-рым дифференциальным выражением и действующий в пространствах (вообще говоря, векторнозначных) функций (или сечений дифференцируемых расслоений) на дифференцируемых многообразиях, или в пространствах, сопряженных к пространствам этого типа. Дифференциальное выражение — это такое отображение λ множества $\mathfrak{Q}$ в пространстве сечений расслоения ξ с базой M в пространство сечений расслоения η с той же базой, что для любой точки $p\in M$ и любых сечений $f, g\in\mathfrak{Q}$ из совпадений их k-струй в точке p следует совпадение λf и g в той же точке; наименьшее из чисел k, удовлетворяющих этому условию для всех $p\in M$, наз. порядком дифференциального выражения и порядком Д. о., определенного этим выражением.

На многообразии M без края Д. о. часто является расширением оператора, естественно определяемого фиксированным дифференциальным выражением на нек-ром (открытом в подходящей топологии) множестве бесконечно (или достаточно много раз) дифференцируемых сечений данного векторного расслоения ξ с базой M и, таким образом, допускает естественное обобщение на случай пучков ростков сечений дифференцируемых расслоений. На многообразии M с краем ∂M Д. о. L часто определяется как расширение аналогичного оператора, естественно определенного дифференциальным выражением на множестве тех дифференцируемых функций (или сечений расслоения), ограничения к-рых на ∂M лежат в ядре нек-рого Д. о. l на ∂M (или удовлетворяет каким-либо др. условиям, определяемым теми или иными требованиями к области значений оператора l на ограничениях функций из области определения оператора L, напр., неравенствами); Д. о. l наз. определяющим граничные условия для Д. о. L. Линейные Д. о. в пространствах, сопряженных к пространствам функций (или сечений), определяются как операторы, сопряженные к Д. о. указанного выше вида в этих пространствах.

Примеры. 1) Пусть F — действительная функция $k+2$ переменных x, y_0, y_1, ..., y_k, определенная в нек-ром прямоугольнике $\Delta=I\times J_0\times J_1\times\ldots\times J_k$; дифференциальное выражение

$$Du\overset{\text{def}}{=}F\left(x,\ u,\ \frac{du}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^ku}{dx^k}\right)$$

(где функция F обычно удовлетворяет нек-рым условиям регулярности — измеримости, непрерывности, дифференцируемости и т. п.) определяет Д. о. D на многообразии Δ, область определения которого Ω состоит из всех функций $u\in C^k(\Delta)$, удовлетворяющих условию $u^{(i)}(x)\in J_i$ для $i=0,\ 1,\ \ldots,\ k$; если F непрерывна, то D может рассматриваться как оператор в $C(I)$ с областью определения Ω; Д. о. D наз. общим обыкновенным Д. о. Если F зависит от y_k, то порядок D равен k. Д. о. D наз. квазилинейным, если F линейно зависит от y_k; линейным, если F линейно зависит от y_0, y_1, ..., y_k; линейным с постоянными коэффициентами, если F не зависит от x и D является линейным Д. о. Остальные Д. о. наз. нелинейными. Квазилинейный Д. о. при нек-рых условиях регулярности

функции F может быть расширен до Д. о. из одного *Соболева пространства* в другое.

2) Пусть $x=(x^1, \ldots, x^N)$ пробегает область $\mathcal{G}$ в $\mathbb{R}^N$, $F=F(x, u, D^{(n)}(u))$ — дифференциальное выражение, определяемое действительной функцией F на произведении области $\mathcal{G}$ на нек-рый открытый прямоугольник ω, здесь $D^{(n)}(u)$ — набор частных производных вида $D^{\alpha}u=\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_N}}{(\partial x^1)^{\alpha_1}\ldots(\partial x^N)^{\alpha_N}}$, где $\alpha_1+\ldots+\alpha_N\leqslant n$, а функция F (как и в 1) удовлетворяет нек-рым условиям регулярности. Определенный этим выражением Д. о. на пространстве достаточно дифференцируемых функций на $\mathcal{G}\times\omega$ наз. общим Д. о. с частными производными. Аналогично 1) определяются нелинейные, квазилинейные и линейные Д. о. с частными производными и порядок Д. о.; Д. о. наз. эллиптическим, гиперболическим или параболическим, если он определяется дифференциальным выражением соответствующего типа. Иногда рассматриваются функции F, зависящие от производных всех порядков (напр., в виде формальной линейной комбинации их); таким дифференциальным выражениям, не определяющим Д. о. в обычном смысле, тем не менее могут быть сопоставлены нек-рые операторы (напр., в пространствах ростков аналитич. функций), наз. Д. о. бесконечного порядка.

3) Предыдущие примеры могут быть перенесены на случай комплексного поля, локально компактного вполне несвязного поля и (по крайней мере в случае линейных Д. о.) даже в более общую ситуацию, см. *Дифференциальная алгебра*.

4) Системы дифференциальных выражений определяют Д. о. в пространствах вектор-функций. Напр., Д. о. Коши—Римана, определенный дифференциальным выражением $\left\{\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right\}$, преобразует пространство пар гармонических функций на плоскости в себя.

В определении Д. о. и его обобщений (кроме обычных производных) часто используются не только обобщенные производные (естественно возникающие при рассмотрении расширений Д. о., заданных на дифференцируемых функциях) и слабые производные (связанные с переходом к сопряженному оператору), но и производные дробного и отрицательного порядков. Более того, само дифференцирование заменяется преобразованием Фурье (или другим интегральным преобразованием), применяемым к области определения и значения такого обобщенного Д. о. (см. *Псевдодифференциальный оператор*) так, чтобы получить возможно более простое представление соответствующей Д. о. функции F и достичь разумной общности постановки задач и хороших свойств рассматриваемых объектов, а также построить функциональное или операционное исчисление (продолжающее соответствие между оператором дифференцирования и оператором умножения на независимую переменную, осуществляемое преобразованием Фурье).

Такие вопросы теории дифференциальных уравнений, как существование, единственность, регулярность, непрерывная зависимость решений от начальных данных или правой части, явный вид решения дифференциального уравнения, определенного данным дифференциальным выражением, естественно интерпретируются в терминах теории операторов как задачи Д. о., определенного данным дифференциальным выражением в подходящих функциональных пространствах, а именно — как задачи о ядре, образе, изучении структуры области определения данного Д. о. L или его расширения, непрерывности обратного оператора к данному Д. о. и явного построения этого обратного опе-

ратора. Вопросы аппроксимации решений и построения приближенных решений дифференциальных уравнений также находят естественное обобщение и усовершенствование в задачах о соответствующих Д. о., а именно — о подборе таких естественных топологий в области определения и области значений, чтобы оператор L (при условии единственности решений) осуществлял гомеоморфизм области определения и области значений в этих топологиях (эта теория связана с теорией интерполяции и шкал функциональных пространств, особенно в случаях линейных и квазилинейных Д. о.), или в подборе Д. о., близких к данному в том или ином смысле (что позволяет, используя различные топологии в множестве Д. о., обосновывать методы аппроксимации уравнений, в том числе метод регуляризации, метод штрафа и нек-рые итерационные методы регуляризации). Теория Д. о. позволяет применить классич. методы теории операторов, напр. теорию вполне непрерывных операторов, и метод сжатых отображений в различных теоремах существования и единственности решений дифференциальных уравнений, в теории бифуркации решений и в нелинейных задачах о собственных значениях. Часто оказывается возможным использовать наличие в функциональных пространствах, где определен Д. о., естественной структуры порядка (в частности, применить теорию монотонных операторов), использовать методы линейного анализа (теорию двойственности, теорию выпуклых множеств, теорию сопряженных операторов, теорию диссипативных операторов), вариационные методы и теорию экстремальных задач, а также наличие нек-рых дополнительных структур в области определения области значений (напр., комплексной, симплектической и т. д.) для выяснения структуры области значений и ядра Д. о., т. е. получения информации о классе решений соответствующих уравнений. Ряд задач, связанных с дифференциальными выражениями, приводит к необходимости изучения дифференциальных неравенств, естественно связанных с многозначными Д. о.

Таким образом, теория Д. о. позволяет разрешить ряд трудностей классич. теории дифференциальных уравнений. Использование различных расширений обычных Д. о. приводит к понятию обобщенного решения соответствующего дифференциального уравнения (к-рое в ряде случаев, связанных, напр., с эллиптич. задачами, оказывается необходимо классическим), а использование линейной структуры позволяет вводить понятие слабых решений дифференциальных уравнений. При выборе подходящего расширения Д. о., определенного дифференциальным выражением, важную роль играют связанные с конкретным видом последнего априорные оценки для решений, к-рые позволяют указать такие функциональные пространства, что в этих пространствах Д. о. непрерывен или ограничен.

Но теория Д. о. дает возможность поставить и решить и ряд принципиально новых задач по сравнению с классич. задачами теории дифференциальных уравнений. Так, для нелинейных операторов представляют интерес изучение структуры множества его неподвижных точек и действие оператора в их окрестности, а также классификация этих особых точек и вопрос об устойчивости типа особой точки при возмущении данного Д. о.; для линейных Д. о., кроме указанных выше задач, представляют интерес задачи об описании и изучении спектра Д. о., построения его резольвенты, вычислений индекса, описание структуры инвариантных подпространств данного Д. о., построение связанного с данным Д. о. гармонич. анализа (в частности, разложения по собственным функциям, что требует предварительного изучения вопросов полноты системы собст-

венных и присоединенных функций), изучения линейных и нелинейных возмущений данного Д. о. Эти задачи представляют особый интерес для эллиптич. Д. о., порожденных симметричными дифференциальными выражениями, в связи с теорией самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (в частности, со спектральной теоремой для таких операторов и теорией расширений симметрич. операторов). Теория ряда задач гиперболических и параболических (не обязательно линейных) Д. о. связана с теорией групп и полугрупп преобразований локально выпуклых пространств.

Пожалуй, наиболее исследованный (помимо линейных) класс Д. о., к тому же имеющий широкое практич. применение, — Д. о., не изменяющиеся вообще или меняющиеся по вполне определенному закону при действии на область их определения и соответствующим образом на дифференциальное выражение нек-рых преобразований, составляющих группу G (или полугруппу). Таковы, напр., инвариантные дифференциальные операторы, тесно связанные с представлениями группы G; ковариантная производная или, более общо, пульверизация — Д. о. на пространствах дифференцируемых тензорных полей (здесь G группа всех диффеморфизмов), длинный ряд операторов теоретич. физики и т. п. Функционально-геометрич. методы полезны и при исследовании Д. о. с так наз. скрытой симметрией (см., напр., *Кортевега — де-Фриза уравнение*).

Теория Д. о., являющаяся составной частью общей теории операторов, играет в последнее время все более значительную роль не только в теории дифференциальных уравнений, но и вообще в современном анализе, причем не только как важный конкретный пример неограниченных операторов (это в особенности касается теории линейных Д. о.), но и как аппарат представления и средство изучения объектов различной природы: так, напр., любая обобщенная функция (и даже гиперфункция) получается действием нек-рого обобщенного Д. о. на непрерывную функцию. Наконец, непрерывно возрастает роль и влияние теории Д. о. в других разделах математики — напр., одно из решений так наз. проблемы индекса (см. *Индекса формулы*) связывает топологич. характеристики многообразия с наличием на нем определенного класса Д. о., что позволяет сделать заключение о свойствах эллиптич. комплексов на этом многообразии.

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [2] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [3] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965; [4] Бурбаки Н., Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов, пер. с франц., М., 1975; [5] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [6] Пале Р., Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе, пер. с англ., М., 1970; [7] Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р., Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений, пер. с нем., М., 1974; [8] Фиников С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.— Л., 1948; [9] Скрыпник И. В., *Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка*, К., 1973; [10] Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения, М., 1958; [11] Схоутен Я.-А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., М., 1965; [12] Лионс Ж. П., Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, пер. с франц., М., 1972; [13] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений и их *приложения к газовой динамике*, М., 1968.

М. И. Войцеховский, А. И. Штерн.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР модуля — отображение модулей над коммутативным кольцом, являющееся аналогом понятия дифференциального оператора. Пусть R — коммутативное кольцо, S — подкольцо кольца R, N и M — два R-модуля. Гомоморфизм S-модулей D: $N \to M$ наз. дифферен-

циальным оператором порядка $\leqslant m$ (m — неотрицательное целое), если для любого $x \in R$ отображение D_x: $N \to M$, определяемое формулой

$$D_x(n) = D(xn) - xD(n),$$

является Д. о. порядка $\leqslant m-1$. При этом Д. о. порядка 0 наз. гомоморфизм R-модулей $N \to M$. Множество всех таких Д. о. образует подмодуль $\mathrm{Diff}^m_S(N, M)$ R-модуля всех гомоморфизмов S-модулей $\mathrm{Hom}_S(N, M)$. В частности,

$$\mathrm{Diff}^0_S(N, M) \simeq \mathrm{Hom}_R(N, M),$$

а фактормодуль

$$\mathrm{Diff}^1_S(N, M)/\mathrm{Diff}^0_S(N, M)$$

изоморфен модулю S-дифференцирований $\mathrm{Der}_S(R, M)$ кольца R со значениями в M. Объединение $\mathrm{Diff}_S(M)$ возрастающего семейства подмодулей

$$\mathrm{Diff}^0_S(M, M) \subset \mathrm{Diff}^1_S(M, M) \subset \ldots$$

является фильтрованным ассоциативным кольцом относительно операции композиции отображений. Это кольцо наз. кольцом дифференциальных операторов R-модуля M над подкольцом S, а соответствующее градуированное кольцо

$$\mathrm{Symb}_S(M) = \oplus_{i \geqslant 0} \mathrm{Symb}^i_S(M),$$

где

$$\mathrm{Symb}^i_S(M) = \mathrm{Diff}^i_S(M, M)/\mathrm{Diff}^{i-1}_S(M, M),$$

наз. кольцом символов. Образ Д. о. $D \in \mathrm{Diff}^i_S(M, M)$ в кольце $\mathrm{Symb}^i_S(M)$ наз. символом Д. о.

Если R является алгеброй над полем рациональных чисел и модуль дифференциалов $\Omega^1_{R/S}$ проективен, то существует изоморфизм S-алгебры $\mathrm{Diff}_S(R)$ и обертывающей алгебры алгебры Ли S-дифференцирований $\mathrm{Der}_S(R, R)$. В этом случае кольцо $\mathrm{Symb}_S(R)$ изоморфно симметрич. алгебре R-модуля $\mathrm{Der}(R, R)$.

Напр., пусть $R = k[T]$ — кольцо многочленов над полем k; отображения $\partial/\partial T^i$: $R \to R$, определяемые формулой

$$\frac{\partial}{\partial T^i}(T^r) = \binom{r}{i} T^{r-i},$$

являются Д. о. кольца R над k порядка i. Кольцо Д. о. $\mathrm{Diff}_k(R)$ — свободный модуль над R с базой $\partial/\partial T^0$, $\partial/\partial T^1$, ..., $\partial/\partial T^i$. Умножение задается формулой

$$\frac{\partial}{\partial T^i} \circ \frac{\partial}{\partial T^j} = \binom{i+j}{i} \frac{\partial}{\partial T^{i+j}}.$$

В частности,

$$\left(\frac{\partial}{\partial T^1}\right)^n = n! \frac{\partial}{\partial T^n}$$

(формула Тейлора), что в случае, когда характеристика поля k равна 0, дает

$$\mathrm{Diff}_k(R) \cong R\left[\frac{\partial}{\partial T^1}\right].$$

Если $\mathrm{Spec}(R)$ является аффинной групповой S-схемой, то можно рассматривать также инвариантные Д. о. кольца R (см. [2]).

Лит.: [1] Виноградов А. М., Красильщиков И. С., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 1, с. 173—98; [2] Grothendieck A., Eléments de géométrie algébrique, P., 1967, ch. 4; [3] Demazure M., Gabriel P., Groupes algébriques, t.1, P.—Amst., 1970; [4] Björk J.-E., «Invent. Math.», 1972, v. 17, № 1, p. 67—78. *И. В. Долгачев.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР, дифференциатор,— совместный *дифференциальный инвариант* одной или нескольких функций и метрич. тензора g_{ij} римановой геометрии.

Д. п. 1-го порядка (первый Д. п.) функции V есть квадрат ее градиента:

$$\Delta_1 V = g^{ij} V_i V_j.$$

Смешанный Д. п. 1-го порядка функций V и W есть скалярное произведение градиентов этих функций

$$\Delta_1 (V, W) = g^{ij} V_i W_j.$$

В трехмерном евклидовом пространстве в декартовой прямоугольной системе координат эти Д. п. выражаются формулами:

$$\Delta_1 (V) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

$$\Delta_1 (V, W) = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}.$$

Д. п. 2-го порядка (второй Д. п.) функции есть дивергенция ее градиента:

$$\Delta_2 (V) = g^{ij} \nabla_i V_j = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g}\, g^{ij} V_j),$$

где g — определитель матрицы $\|g_{ij}\|$. В трехмерном евклидовом пространстве в декартовой прямоугольной системе координат второй Д. п. выражается формулой

$$\Delta_2 (V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Первоначально Д. п. были введены Г. Ламе [1] в евклидовой геометрии. Обобщение этого понятия для римановой геометрии принадлежит Э. Бельтрами [2]. Поэтому Д. п. иногда наз. дифференциальными параметрами Ламе, или дифференциальными параметрами Бельтрами.

Лит.: [1] Lamé G., Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, P., 1859; [2] Beltrami E., Ricerche di analisi applicata alla geometria, «G. mat. Battaglini», 1864, v. 2, 1865, v. 3; [3] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1—2, М.— Л., 1947—48; [4] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. И. Шуликовский.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ — операция, к-рая относит функции ее производную или дифференциал. При этом речь может идти о производной или дифференциале в точке или на нек-ром множестве, о частных производных, о производной по направлению, о частных и полных дифференциалах, а сами функции могут быть не только числовыми, но и функциями более общей природы.

Г. П. Толстов.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ кольца — отображение ∂ кольца R в себя, являющееся эндоморфизмом аддитивной группы кольца R и удовлетворяющее соотношению

$$\partial (x \cdot y) = x\partial (y) + \partial (x) y.$$

Пусть M — левый R-модуль. Дифференцированием кольца R со значениями в M наз. гомоморфизм соответствующих аддитивных групп, удовлетворяющий условию

$$\partial (x \cdot y) = x\partial (y) + y\partial (x)$$

для всех x, y из R. Для любого элемента c из центра C кольца R отображение $x \to c\partial (x)$, где ∂ — дифференцирование, является Д. Сумма двух дифференцирований также является Д. Это определяет на множестве всех Д. кольца R со значениями в M структуру C-модуля, обозначаемого $\mathrm{Der}(R, M)$. Если S подкольцо в R, то Д. ∂ такое, что $\partial (s) = 0$ для всех $s \in S$ наз. S-дифференцированием. Множество всех S-дифференцирований образует подмодуль в $\mathrm{Der}(R, M)$, обозначаемый $\mathrm{Der}_S (R, M)$. Операция

$$[\partial, \partial'] = \partial \circ \partial' - \partial' \circ \partial$$

определяет в S-модуле $\mathrm{Der}_S (R, M)$ структуру S-алгебры Ли. Если φ: $R \to M$ — гомоморфизм R-модулей,

то для любого $\partial \in \mathrm{Der}(R, R)$ композиция $\varphi\partial \in \in \mathrm{Der}(R, M)$.

Пусть R — кольцо полиномов $A[T_1, \ldots, T_n]$ с коэффициентами в коммутативном кольце A. Отображение

$$\frac{\partial}{\partial T_j}: F(T_1, \ldots, T_n) =$$

$$= \sum a_{i_1 \ldots i_n} T_1^{i_1} \ldots T_n^{i_n} \longrightarrow \sum a_{i_1 \ldots i_n} i_j T_1^{i_1} \ldots T_j^{i_j - 1} \ldots T_n^{i_n}$$

является A-дифференцированием кольца R, а R-модуль $\mathrm{Der}_A(R, R)$ — свободным модулем с базисом $\partial/\partial T_1, \ldots, \partial/\partial T_n$.

Для любого элемента a ассоциативного (соответственно лиева) кольца R отображение $x \to ax - xa$ (соответственно $x \to ax$) будет Д. кольца R, наз. внутренним дифференцированием. Д., не являющееся внутренним, наз. внешним.

Если R — подкольцо кольца R' и $\partial \in \mathrm{Der}(R, R)$, то говорят, что $\bar{\partial} \in \mathrm{Der}(R', R')$ продолжает ∂, когда ограничение $\bar{\partial}$ на R совпадает с ∂. В случае, когда R — коммутативное целостное кольцо, а R' — его поле частных, а также в случаях, когда R' — сепарабельное алгебраич. расширение поля R или R — алгебра Ли над полем k, а R' — ее обертывающая алгебра, существует единственное продолжение любого Д. $\partial : R \to R$ на R'.

Имеется тесная связь между Д. и изоморфизмами колец. Напр., если ∂ — нильпотентное Д., т. е. $\partial^n = 0$, и R — алгебра над полем характеристики нуль, то отображение

$$\exp(\partial) = 1 + \partial + \frac{\partial^2}{2!} + \ldots + \frac{\partial^{n-1}}{(n-1)!}$$

является автоморфизмом k-алгебры R. Если R — локальное коммутативное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, то имеет место биекция между множеством Д. $\mathrm{Der}(R, R/\mathfrak{m})$ и множеством автоморфизмов кольца $R/\mathfrak{m}^2$, индуцирующих тождественный автоморфизм поля вычетов $R/\mathfrak{m}$. Д. несепарабельных расширений полей играют роль элементов группы Галуа сепарабельных расширений в теории Галуа таких расширений [4].

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [2] Джекобсон Н., Теория колец, пер. с англ., М., 1947; [3] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [4] Mordeson J., Vinograde B., Structure of arbitrary purely inseparable extension fields, B., 1970.

И. В. Долгачев.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ В СИЛУ СИСТЕМЫ — оператор, к-рый определяется следующим образом. Пусть

$$\dot{x} = f(x) \qquad (*)$$

— *автономная система*, $x \in \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ и $f_j : G \to \to R$ — гладкие отображения, где G — область в $\mathbb{R}^n$. Пусть дано гладкое отображение $\varphi : G \to R$. Производная $\theta_f\varphi$ в силу системы $(*)$ функции φ в точке $x^0 \in G$ определяется выражением

$$(\theta_f\varphi)x^0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi(x^0)}{\partial x_j} f_j(x^0) \equiv \frac{d}{dt}(\varphi(x(t, x^0)))\Big|_{t=t^0},$$

где $x(t, x^0)$ — решение системы $(*)$ такое, что $x(t^0, x^0) = = x^0$. Свойства оператора θ_f: 1) линейность по φ, 2) $\theta_f(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_1\theta_f\varphi_2 + \varphi_2\theta_f\varphi_1$. Функция $(\theta_f\varphi)(x)$ совпадает с производной φ по векторному полю f.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970.

М. В. Федорюк.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ — нахождение дифференциала или, иначе, главной линейной части отображения. Нахождение дифференциала, т. е. аппроксимация отображения в окрестности нек-рой точки линейными отображениями, является важнейшей операцией дифференциального исчисления. Дифферен-

циальное исчисление наиболее разработано в топологич. линейных пространствах.

Пусть X и Y—линейные топологич. пространства. Пусть отображение f определено на открытом множестве V пространства X и принимает значения в пространстве Y. Если разность $f(x_0+h)-f(x_0)$, где $x_0\in V$ и $x_0+h\in V$, может быть аппроксимирована линейной относительно приращения h функцией $l_{x_0}: X\to Y$, то f наз. дифференцируемым отображением в точке x_0. При этом аппроксимирующая линейная функция l_{x_0} наз. производной или дифференциалом отображения в точке x_0 и обозначается символом $f'(x_0)$ или $df(x_0)$. Отображения, имеющие в данной точке одинаковые производные, наз. касательными отображениями друг к другу в этой точке. Значение аппроксимирующей функции на элементе $h\in X$ (обозначаемое символом $f'(x_0)h$ или $d_hf(x_0)$) наз. дифференциалом отображения f в точке x_0 при приращении h.

В зависимости от того, что понимается под аппроксимацией приращения $f(x_0+h)-f(x_0)$ линейным по h выражением, приходят к различным понятиям дифференцируемости и производной. Все важнейшие существующие определения см. в [1], [2].

Пусть F—совокупность всех отображений из X в Y и τ — нек-рая топология или псевдотопология в F. Отображение $r\in F$ является малым в нуле, если кривая

$$r_t: r(tx)/t,$$

понимаемая как отображение

$$t\to\left[x\to\frac{r(tx)}{t}\right]$$

прямой $-\infty<t<\infty$ в F, непрерывна в нуле в псевдотопологии τ. Далее, отображение $f\in F$ дифференцируемо в точке x_0, если существует такое линейное (непрерывное) отображение l_{x_0}, что отображение

$$r: h\to f(x_0+h)-f(x_0)-l_{x_0}(h)$$

является малым в нуле. В зависимости от выбора τ в F получаются различные определения производных. Напр., в случае, если в качестве топологии τ выбирается топология поточечной сходимости, получается дифференцируемость по Гато (см. *Гато производная*). В случае, если X и Y — банаховы пространства, а топология в F есть топология равномерной сходимости на ограниченных множествах в X, приходят к дифференцируемости по Фреше (см. *Фреше производная*).

Если $X=R^n$, а $Y=R^m$, то производная $f'(x_0)$ дифференцируемого отображения $f(x)=(f_1(x), \ldots, f_m(x))$, где $x=(x_1, \ldots, x_n)$, задается *Якоби матрицей* $\|\partial f_i(x_0)/\partial x_j\|$ и является непрерывным линейным отображением из R^n в R^m.

Производные отображений обладают многими свойствами производных функций одного переменного. Напр., для них в самых широких предположениях имеет место свойство линейности:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0),$$
$$(\alpha f)'(x_0)=\alpha f'(x_0);$$

во многих случаях для них верна формула

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\circ g'(x_0)$$

дифференцирования сложной функции; для отображений в локально выпуклые пространства справедливо обобщение теоремы Лагранжа о среднем значении.

Понятие дифференцируемого отображения распространяется на случай, когда X и Y — гладкие дифференцируемые многообразия, как конечномерные, так

и бесконечномерные [4], [5], [6]. Дифференцируемые отображения бесконечномерных пространств и их производные были определены впервые В. Вольтерра (V. Volterra, 1887), М. Фреше (M. Frechet, 1911), Р. Гато (R. Gateau, 1913). Подробнее об истории развития понятия производной в многомерных пространствах см. [2].

Лит.: [1] Фрёлихер А., Бухер В., Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы, пер. с англ., М., 1970; [2] Авербух В. И., Смолянов О. Г., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 6, с. 201—60; 1968, т. 23, в. 4, с. 67—116; [3] Дьедонне Ж., Основы современного анализа, пер. с англ., М., 1964; [4] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967; [5] Бурбаки Н., Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов, пер. с франц., М., 1975; [6] Спивак М., Математический анализ на многообразиях, пер. с англ., М., 1968.

О. Г. Смолянов, В. И. Соболев, В. М. Тихомиров.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПО СЕТИ — специальное понятие дифференцирования функций множеств $\psi(E)$. Сеть N — совокупность разбиений $\{A_j^i\}$ основного пространства X с мерой μ, при этом

$$\bigcup_j A_j^i = X, \quad A_{j_1}^i \bigcap A_{j_2}^i = \varnothing,$$
$$j_1 \neq j_2, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

и для каждого $A_{j_1}^{i+1}$ найдется содержащее его множество $A_{j_2}^i$. Все A_j^i измеримы и их совокупность в определенном смысле (см. [1]) аппроксимирует все измеримые множества. Множества A_j^i при фиксированном i наз. множествами i-го ранга. Для каждой точки x_0 и любого n имеется одно и только одно множество $A_n(x_0)$ n-го ранга, содержащее точку x_0.

Производной функции $\psi(E)$ по данной сети N в точке x_0 наз. выражение

$$D_N(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{\psi[A_n(x_0)]}{\mu[A_n(x_0)]},$$

если этот предел существует. Можно также определить понятие производных чисел по сети N.

Простейшим примером Д. по с. служит дифференцирование приращения функции одного действительного переменного по двоично-рациональным интервалам вида $\left(\frac{j}{2^i}, \frac{j+1}{2^i}\right]$.

Производная по сети для каждой счетно аддитивной функции $\psi(E)$ существует почти всюду и совпадает с плотностью абсолютно непрерывной составляющей функции $\psi(E)$. В n-мерном пространстве обычно рассматривается Д. по с. полуоткрытых сегментов, диаметр к-рых стремится к нулю с ростом ранга (см. [2]).

Понятие сети и дифференцирования по ней может быть обобщено на случай абстрактных пространств без меры (см. [3]).

Лит.: [1] Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л., Интеграл, мера и производная, 2 изд., М., 1967; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [3] Kenyon H., Morse A. P., Web derivatives, N. Y., 1973 («Mem. Amer. Math. Soc.», № 132).

В. А. Скворцов.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЕ — нахождение производной функции численными методами. Д. ч. используется в случаях, когда методы дифференциального исчисления неприменимы (функция задана таблично), или их применение вызывает значительные трудности (функция имеет сложное аналитическое выражение).

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $u = u(x)$ и заданы узловые точки x_i, $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Совокупность точек $(x_i, u_i = u(x_i))$, $i = 1, \ldots, n$, наз. таблицей. Результатом Д. ч. таблицы является функция $u_n^k(x)$, в каком-либо смысле приближающая k-ю про-

изводную $\frac{d^k u(x)}{dx^k}$ функции на нек-ром множестве X_n^k точек x. Применение Д. ч. целесообразно, когда получение функции $u_n^k(x)$ для каждого $x \in X_n^k$ требует незначительной затраты вычислительных средств. Обычно используются линейные методы Д. ч., где результат Д. ч. записывается в виде

$$u_n^k(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i a_i^k(x), \qquad (1)$$

$a_i^k(x)$ — функции, определенные на X_n^k. Наиболее распространенный метод получения формул (1) состоит в следующем: строят функцию

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i a_i(x),$$

интерполирующую $u(x)$, и полагают

$$u_n^k(x) \equiv \frac{d^k u_n(x)}{dx^k} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{d^k a_i(x)}{dx^k}.$$

Точность алгоритмов, основанных на интерполяционных формулах Лагранжа, Ньютона и др., существенным образом определяется выбором способа интерполяции и может быть иногда весьма низкой даже для достаточно гладких функций $u=u(x)$ и при большом числе узловых точек (см. [1]). От этого недостатка часто свободны алгоритмы Д. ч., использующие сплайн-интерполяцию (см. [2]). Если требуется вычисление приближенных значений производной только в узловых точках x_i, то формула (1) принимает вид

$$u_n^k(x_j) = \sum_{i=1}^{n} u_i a_{ij}^k \qquad (2)$$

и $u_n^k(x_j)$ полностью определяется заданием для данного k матрицы коэффициентов a_{ij}^k. Формулы типа (2) наз. разностными формулами Д. ч. Коэффициенты a_{ij}^k этих формул определяют из условия наивысшего порядка малости по $h_n = \max\limits_{ij} |x_{i+1} - x_i|$ разности

$$\frac{d^k u(x_j)}{dx^k} - \sum_{i=1}^{n} u_i a_{ij}^k = \xi_j^n.$$

Формулы (2), как правило, весьма просты и удобны на практике. Напр., при $h=h_n=(x_2-x_1)=(x_3-x_2)=\ldots=(x_n-x_{n-1})$ они имеют вид:

$$\frac{du(x_j)}{dx} = \frac{u_{j+1}-u_j}{h} + O(h_n) = \frac{u_j-u_{j-1}}{h} + O(h_n),$$

$$\frac{du(x_j)}{dx} = \frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2h} + O(h^2),$$

$$\frac{d^2u(x_j)}{dx^2} = \frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{h^2} + O(h^2).$$

Алгоритмы Д. ч. часто применяются к таким таблицам, в к-рых значения $u(x_i)$ заданы (или получены) неточно. В этом случае требуется их предварительное сглаживание, так как непосредственное применение Д. ч. может привести к большим погрешностям в результатах (см. [3]).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Альберг Д ж., Нильсон Э., Уолш Д ж., Теория сплайнов и ее приложения, пер. с англ., М., 1972; [3] Морозов В. А., в кн.: Вычислительные методы и программирование, в. 14, М., 1970, с. 46—62.

В. А. Морозов.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ — функция, имеющая *дифференциал*.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ МНОГООБРАЗИЕ — локально евклидово пространство, наделенное дифференциальной структурой.

Пусть X — хаусдорфово топологич. пространство. Если для каждой точки $x \in X$ найдется ее окрестность U, гомеоморфная открытому множеству пространства $\mathbb{R}^n$, то X наз. локально евклидовым пространством, или топологическим многообразием размерности n. Пара (U, φ), где φ — указанный гомеоморфизм, называется локальной картой X в точке x. Таким образом, каждой точке соответствует набор n действительных чисел $(x^1, \ldots, x^n)$, называемых координатами x в карте (U, φ).

Семейство карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $\alpha \in A$, наз. n-мерным C^k-атласом $(0 \leqslant k \leqslant \infty, a)$ многообразия X, если: а) совокупность всех U_α покрывает X, $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$; б) для любых α, $\beta \in A$ таких, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, отображение

$$\varphi_\beta^\alpha = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

принадлежит *дифференцируемости классу* C^k; φ_β^α является дифференцируемым отображением с отличным от нуля якобианом и наз. преобразованием координат точки x из карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ в карту (U_β, φ_β).

Два C^k-атласа наз. эквивалентными, если их объединение снова является C^k-атласом. Совокупность C^k-атласов разбивается на классы эквивалентности, к-рые наз. C^k-структурами, при $1 \leqslant k \leqslant \infty$ — дифференциальными (или гладкими) структурами, при $k = a$ — аналитическими структурами. Топологич. многообразие X, наделенное C^k-структурой, называется C^k-многообразием, или дифференцируемым многообразием класса C^k.

Понятие дифференциальной структуры можно ввести для произвольного множества X, заменив гомеоморфизмы φ_α биективными отображениями на открытые множества $\mathbb{R}^n$; при этом топология C^k-многообразия описывается как топология объединения, построенная по любому атласу соответствующей структуры. В этом случае n-мерные многообразия обладают очевидной n-мерной C^0-структурой.

Задачи аналитич. и алгебраич. геометрии приводят к необходимости рассматривать в определении дифференциальной структуры вместо пространства $\mathbb{R}^n$ более общие пространства $\mathbb{C}^n$ или даже K^n, где K — полное недискретное нормированное поле. Так, в случае $K = \mathbb{C}$ соответствующая C^k-структура, $k \geqslant 1$, непременно оказывается C^a-структурой, она наз. комплексно аналитической, или просто комплексной, а соответствующее Д. м.— комплексным многообразием. При этом на любом таком многообразии есть и естественная действительная C^a-структура.

На любом C^a-многообразии есть согласованная с ней C^∞-структура, и на C^k-многообразии, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, — C^r-структура, если $0 \leqslant r \leqslant k$. Обратно, любое паракомпактное C^r-многообразие, $r \geqslant 1$, можно наделить C^a-структурой, совместимой с заданной, причем эта структура (с точностью до изоморфизма, см. ниже) единственна. Может, однако, случиться, что C^0-многообразие нельзя снабдить C^1-структурой (т. е. существуют *несглаживаемые многообразия*), а если это удается, то такая структура неединственна. Например, число $\theta(n)$ C^1-неизоморфных C^∞-структур на n-мерной сфере таково:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\theta(n)$	1	1	1	?	1	1	28	2	8	6	992	1

Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение C^r-многообразий X, Y; оно наз. C^k-морфизмом (или C^k-отображением, $k \leqslant r$, или отображением класса C^k) Д. м., если для любой пары

карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ на X и (V_β, ψ_β) на Y такой, что $f(U_\alpha) \subset V_\beta$, отображение

$$\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \psi_\beta(V_\beta)$$

принадлежит классу C^k. Биективное отображение f такое, что оно и f^{-1} суть C^n-отображения, наз. C^n- и з о м о р ф и з м о м (или д и ф ф е о м о р ф и з м о м) к л а с с а C^n. В этом случае X и Y и определяющие их C^l-структуры наз. C^n-изоморфными.

Подпространство Y n-мерного C^k-многообразия X наз. C^k- п о д м н о г о о б р а з и е м размерности m в X, если для всякой точки $y \in Y$ существуют ее окрестность $V \subset Y$ и карта (U, φ) C^k-структуры X такие, что $V \subset U$ и φ индуцирует гомеоморфизм V на пересечение $\varphi(U \cap Y)$ с (замкнутым) подпространством $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$; другими словами, существует карта с координатами $x^1, \ldots, x^n$ такая, что $U \cap Y$ определяется соотношениями $x^{m+1} = \ldots = x^n = 0$.

Отображение $f : X \to Y$ наз. C^k- в л о ж е н и е м, если $f(X)$ есть C^k-подмногообразие в Y, а $X \to f(X)$ — C^k-диффеоморфизм. Всякое n-мерное C^k-многообразие допускает вложение в $\mathbb{R}^{2n+1}$ и даже в $\mathbb{R}^{2n}$. Более того, множество таких вложений является всюду плотным в пространстве отображений $C^k(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ относительно компактно-открытой топологии. Тем самым, рассмотрение Д. м. как подмногообразий евклидова пространства дает один из способов изложения их теории, на этом пути устанавливаются, напр., указанные выше теоремы о C^a-структурах.

В топологии Д. м., иначе наз. *дифференциальной топологией*,— две основные проблемы. Первая — задача классификации Д. м. Существуют три основных класса Д. м.— замкнутые, компактные многообразия с краем и открытые. Важными инвариантами, различающими Д. м., являются *гомотопический тип* и *касательное расслоение*, в частности *характеристические классы*. С их помощью проведена классификация гладких структур для односвязных многообразий данного гомотопич. типа. С помощью другого инварианта — класса *бордизма* Д. м.— решена обобщенная *Пуанкаре гипотеза*, изучены неподвижные точки при действии группы на многообразии и т. д. При этом потребовалось введение дифференциальных структур на многообразиях с краем и аппарата сглаживания. Наконец, полезными здесь оказываются методы алгебраич. топологии, поскольку, напр., установлена триангулируемость произвольного C^l-многообразия.

Вторая — задача к л а с с и ф и к а ц и и о т о б р а ж е н и й Д. м. Прежде всего здесь выделяются классы иммерсий, или погружений, обобщающих вложения; их классификация сведена к гомотопич. задаче в отличие от вложений, полная классификация к-рых не получена (1978) (см. *Топология вложений*), и субмерсий, или расслоений, одного Д. м. в (на) другое. Важную роль, в частности, в вопросах *устойчивости* (стабильности) и в исследовании типичных особенностей отображений играет понятие трансверсальности отображения вдоль подмногообразия. Существование трансверсальных отображений обеспечивается теоремами типа *Сарда теоремы*. Все это, а также задачи дифференциальной динамики, изучающей строение различных групп *диффеоморфизмов*, в частности интегральных траекторий и особых точек векторных полей на Д. м. (динамических систем), и различные отношения эквивалентности: изотопия, топологическая и C^k-сопряженность и т. п.,— диктует необходимость рассмотрения, наряду с конечномерными пространствами $\mathbb{R}^n$, произвольных банаховых (или гильбертовых) пространств и определения соответствующих дифференциальных структур. При этом требуется выполнение разумных в отношении приложений дополнительных условий, напр. Д. м. отде-

лимо тогда и только тогда, когда преобразования координат имеют замкнутый график. Получающиеся наделением такой структурой, вообще говоря, бесконечномерные многообразия, соответственно именуемые банаховыми (или гильбертовыми) многообразиями, типичным примером к-рых служат многообразия отображений конечномерных Д. м., оказываются полезным средством исследования и геометрич. интерпретацией задач аппроксимации отображений (как в указанной выше теореме вложения), анализа *петель пространства* — надлежащей области для построения теории Морса и т. д.

Д. м. являются естественной базой для построения дифференциальной геометрии. Там на Д. м. вводятся дополнительные инфинитезимальные структуры — ориентации, метрика, связность и т. д., и изучаются те свойства, связанные с этими объектами, к-рые инвариантны относительно группы диффеоморфизмов, сохраняющих дополнительную структуру. С другой стороны, использование той или иной структуры позволяет исследовать строение самого Д. м. Простейший пример — выражение характеристич. классов через кривизну Д. м., наделенного линейной связностью.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976; [2] Бурбаки Н., Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов, пер. с франц., М., 1975; [3] де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, пер. с франц., М., 1956; [4] Ленг С., *Введение в теорию дифференцируемых многообразий*, пер. с англ., М., 1967; [5] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [6] Уитни Х., Геометрическая теория интегрирования, пер. с англ., М., 1960; [7] Постников М. М., Введение в теорию Морса, М., 1971; [8] Нарасимхан Р., Анализ на действительных и комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1971; [9] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [10] Голубицкий М., Гийемин В., Устойчивые отображения и их особенности, пер. с англ., М., 1977; [11] Брекер Т., Ландер Л., Дифференцируемые ростки и катастрофы, пер. с англ., М., 1977; [12] Нитецки З., Введение в дифференциальную динамику, пер. с англ., М., 1975; [13] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [14] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973; [15] Зуланке Р., Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения, пер. с нем., М., 1975.

См. также лит. при статье *Дифференциальная топология.*

М. И. Войцеховский.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ КЛАСС, гладкости класс C^k, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, a — понятие, характеризующее дифференцируемые отображения (в частности, функции). Класс C^0 состоит из всех непрерывных функций, класс C^k — из функций, имеющих непрерывные производные всех порядков, не превосходящих k (в частности, C^∞ — из функций с непрерывными производными всех порядков), класс C^a — из всех действительных аналитических функций.

М. И. Войцеховский.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ РЕШЕНИЙ дифференциальных уравнений — свойство решений дифференциальных уравнений, состоящее в существовании у решений определенного числа непрерывных производных по независимому переменному t и параметру μ, входящему в уравнение. В теории дифференциальных уравнений вопрос ставится так: какими свойствами должна обладать правая часть уравнения, чтобы решение имело столько-то непрерывных производных по t и μ? Вопрос о Д. р. наиболее систематически исследован для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть имеется уравнение вида (x может быть также и вектором):

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\ x,\ \mu), \tag{1}$$

где μ — параметр (тоже, вообще говоря, вектор), и пусть $x(t,\ \mu)$ — его решение, определяемое начальным условием

$$x\,|_{t=t_0} = x_0. \tag{2}$$

Пусть рассматривается сначала Д. р. по t. В случае непрерывности f по t и x в нек-рой области справедлива теорема существования непрерывного решения задачи (1) — (2), и тогда из тождества, получаемого после подстановки $x(t, \mu)$ в (1), последует также существование непрерывной производной x'_t. Наличие n непрерывных производных f по t и x обеспечивает существование $n+1$ непрерывных производных от решения по t; $x_t^{(n)}$ можно найти (выразить через $x(t, \mu)$), последовательным дифференцированием тождества, получаемого в результате подстановки $x(t, \mu)$ в (1).

В ряде вопросов, напр. для построения асимптотики решения по параметру μ, необходимо исследовать производные по μ от $x(t, \mu)$. Для определенности рассмотрим задачу о существовании производных по μ при $\mu=0$. Когда $f(t, x, \mu)$ непрерывна и обладает непрерывными частными производными по x и μ в нек-рой области, то $\eta_1 = x'_\mu$ существует и определяется из так наз. уравнения в вариациях (линейного относительно η_1), получаемого из (1), если обе части продифференцировать по μ и положить $\mu=0$:

$$\frac{d\eta_1}{dt} = f'_x(t,\ x\ (t,\ 0),\ 0)\ \eta_1 + f'_\mu\ (t,\ x\ (t,\ 0),\ 0), \qquad (3)$$

и при помощи начального условия

$$\eta_1\ |_{t=t_0} = 0 \qquad (4)$$

в случае, если x_0 от μ не зависит; если же $x_0 = x_0(\mu)$, то $\eta_1|_{t=t_0} = x_0(0)$.

Производная η_k от $x(t, \mu)$ по μ порядка k (при условии, что f обладает непрерывными частными производными до k-го порядка) определяется из уравнения в вариациях порядка k, к-рое отличается от (3) только неоднородностью, зависящей от t, $x(t, 0)$, η_1, ..., η_{k-1}. При наличии $k+1$ непрерывных производных от $x(t, \mu)$ по μ можно воспользоваться формулой Тейлора в качестве асимптотич. формулы для $x(t, \mu)$ по μ:

$$x\ (t,\ \mu) = x\ (t,\ 0) + \mu\eta_1\ (t) + \ldots + \mu^k\eta_k\ (t) + O\ (\mu^{k+1}). \qquad (5)$$

Это имеет важное значение, так как $x(t, 0)$ и η_i находятся из более простых уравнений, чем (1).

В случае аналитич. зависимости правой части от своих аргументов решение является аналитич. функцией параметра μ (см., напр., [2]).

Вопрос о Д. р. по μ сохраняет смысл также в ряде случаев, когда правая часть не является регулярно зависящей от μ. Один из таких случаев имеет место, когда μ входит множителем при производных:

$$\begin{aligned} \mu\frac{dy}{dt} &= F\ (y,\ x,\ t), \quad y\ |_{t=t_0} = y_0, \\ \frac{dx}{dt} &= f\ (y,\ x,\ t), \quad x\ |_{t=t_0} = x_0. \end{aligned} \qquad (6)$$

Если (6) переписать в виде (1), т. е. разрешить относительно производных, то в правой части при $\mu \to 0$ появляется особенность типа полюса. Оказывается, что и в этом случае при наличии $k+1$ непрерывных производных от правых частей и при нек-рых специальных условиях, так наз. условиях устойчивости, справедливо разложение (5), где η_i — предельные значения производных по μ от решения (6) при $\mu \to 0$, определяемые из уравнений в вариациях, строящихся по тому же правилу: нужно продифференцировать (6) по μ и положить $\mu=0$. Но при этом в отличие от регулярного случая система уравнений в вариациях будет более низкого порядка, чем (6), и начальные значения для η_i, несмотря на то, что y_0, x_0 от μ не зависят, уже не будут нулевыми, а будут равны нек-рым, вообще говоря, отличным от

нуля, постоянным, получаемым по определенному правилу [3].

Лит.: [1] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970; [2] Тихонов А. Н., «Матем. сб.», 1948, т. 22, № 2, с. 193—204; [3] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., 1973.

А. Б. Васильева.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЙ ВЕКТОР в пространстве V представления T группы Ли G — вектор $\xi \in V$, для к-рого отображение

$$g \to T(g)\xi$$

является бесконечно дифференцируемой (класса C^∞) вектор-функцией на G со значениями в V. Для дифференцируемости вектор-функции $f : G \to V$ необходимо (а в случае локально выпуклого квазиполного пространства V и достаточно), чтобы были дифференцируемы все скалярные функции вида $F \circ f$, где F — линейный непрерывный функционал на V (см. [1]). Теорема Гельфанда — Гординга: если T — непрерывное представление группы Ли G в банаховом пространстве V, то множество V^∞ дифференцируемых векторов плотно в V. Для однопараметрич. групп эта теорема доказана в [2], на общий случай доказательство перенесено в [3]. Обобщение этого результата на широкий класс представлений в локально выпуклых пространствах получено в [4], см. также [5].

Наличие дифференцируемых векторов в пространстве представления группы Ли позволяет построить представление соответствующей алгебры Ли и тем самым связать теорию представлений групп Ли с теорией представлений алгебр Ли (см. [6] § 10).

Лит.: [1] Grothendieck A., Espaces vectoriels topologiques, São Paulo, 1954; [2] Гельфанд И. М., «Докл. АН СССР», 1939, т. 25, с. 711—16; [3] Gårding L., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1947, v. 33, p. 331—32; [4] Moore R. T., Measurable, continuos and smooth vectors for semigroups and group representations, Providence, 1968; [5] Желобенко Д. П., «Вестн. МГУ. Сер. матем.», 1965, т. 1, с. 3—10; [6] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978.

А. А. Кириллов.

ДИФФУЗИИ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными 2-го порядка, описывающее процесс диффузии, т. е. процесс выравнивания концентрации в среде с неравномерным распределением вещества. Д. у. имеет вид

$$Lu \equiv c\,\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) = 0, \qquad (1)$$

где c — коэффициент пористости, D — коэффициент диффузии, $u(x, t)$ — концентрация вещества в точке x среды в момент времени t. Вывод Д. у. проводится путем подсчета баланса массы вещества с использованием закона диффузии Нернста. При этом подразумевается, что в рассматриваемой области отсутствуют источники вещества и диффузия во внешнюю среду. Такое Д. у. наз. однородным Д. у. Если в рассматриваемой области имеются источники вещества с объемной плотностью распределения $F(x, t)$, то процесс диффузии описывается неоднородным Д. у. с правой частью $F(x, t)$. Учет распада или размножения вещества со скоростью, пропорциональной наличной концентрации, приводит к члену $\pm\lambda\partial u/\partial x$ в правой части Д. у.

Д. у. есть уравнение параболического типа. Для выделения единственного решения ставятся начальное и краевые условия. Начальное условие для Д. у. состоит в задании концентрации $u_0(x)$ вещества в начальный момент

$$u(x, 0) = u_0(x). \qquad (2)$$

Если при этом вещество заполняет все пространство, то получают задачу Коши (1), (2). Если же диффунди-

рующее вещество заполняет объем V, ограниченный боковой поверхностью S, то, наряду с начальным условием (2), на S задается граничное условие. Основными являются следующие три линейных граничных условия для Д. у.

1) На S задана концентрация $\theta(x, t)$ вещества; тогда

$$u(x, t)=\theta(x, t)$$

есть граничное условие I рода.

2) Задана плотность потока $q(x, t)$ вещества, входящего в V через S; тогда

$$-D\frac{\partial u(x, t)}{\partial n}=q(x, t), \quad x\in S,$$

где n — внутренняя нормаль к поверхности S, есть граничное условие II рода (если S непроницаема, то $q(x, t)\equiv 0$).

3) S полупроницаема и диффузия во внешнюю среду с заданной концентрацией $\theta(x, t)$ через S происходит по линейному закону; тогда

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial n}=-h(u(x, t)-\theta(x, t)), \quad x\in S,$$

есть граничное условие III рода.

Возможны и другие, в том числе и нелинейные граничные условия на S, а также условия, содержащие производные более высокого порядка, чем входящие в Д. у. Являясь частным случаем дифференциального уравнения, описывающего физич. процессы выравнивания, Д. у. аналогично *теплопроводности уравнению*, *Навье — Стокса уравнению* для ламинарного потока несжимаемой жидкости, уравнению чистой электропроводности и т. д.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966. *Л. И. Камынин.*

ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ — метод решения кинетич. уравнения переноса нейтронов (или других частиц, квантов). Д. п. основано на представлении плотности потока нейтронов (неизвестной функции координат точки наблюдения, компонент вектора скорости и времени) в виде двух первых членов разложения по сферическим функциям, зависящим от угловых координат вектора скорости нейтронов. В односкоростной стационарной задаче это приводит к *диффузии уравнению*.

Д. п. применимо вдали от источников, границ областей с различными свойствами и дает решения, совпадающие по форме с асимптотич. частью решений уравнения переноса. Об усовершенствованиях Д. п. см. *Диффузионные методы*.

Лит.: [1] Глесстон С., Эдлунд М., Основы теории ядерных реакторов, пер. с англ., М., 1954; [2] Марчук Г. И., Методы расчета ядерных реакторов, М., 1961. *В. А. Чуянов.*

ДИФФУЗИОННЫЕ МЕТОДЫ — методы решения кинетич. уравнения переноса нейтронов (или других частиц), модифицирующие уравнения *диффузионного приближения*. Поскольку диффузионное приближение дает правильную форму асимптотич. решения уравнения переноса (вдали от источников и границ раздела сред с различными свойствами), то его усовершенствования заключаются в правильном выборе констант (напр., коэффициента диффузии) и разумной постановке граничных условий с вакуумом и между областями с различными физич. характеристиками.

Усовершенствованный Д. м. использует в односкоростной задаче трансцендентное уравнение для бесконечной среды,

$$p\frac{\operatorname{Ar}\operatorname{th} k}{k}=1,$$

чтобы определить коэффициент диффузии

$$D_0=(1-p)/k^2,$$

где p — отношение сечения рассеяния к полному сечению, k — корень характеристического уравнения. На границах сред в экстраполированных точках ставятся граничные условия, полученные из точного решения задачи для двух сред с постоянным полным сечением (равенство логарифмич. производных и скачок асимптотич. плотности).

Другой путь улучшения диффузионного приближения — использование P_2-приближения метода сферич. гармоник (см. *Сферических гармоник метод*). Обычное диффузионное приближение исходит из P_1-приближения метода сферич. гармоник. Переход к P_2-приближению приводит к уравнению диффузии с исправленными параметрами и улучшенными граничными условиями, причем плотность нейтронов на границе терпит разрыв.

Кроме того, возможно применение решения уравнения диффузии для ускорения сходимости последовательных приближений кинетич. уравнения переноса с использованием в следующей итерации приближенного решения кинетич. уравнения для вычисления поправок к коэффициенту диффузии.

Возможно также, в рамках одной задачи, такое сопряжение диффузионного решения с точным решением, при к-ром диффузионное приближение используется вдали от областей, занятых поглотителями, источниками и т. п., а в этих областях решается точное уравнение переноса.

Лит.: [1] Романов Ю. А., в кн.: Исследования критических параметров реакторных систем, М., 1960, с. 3—26; [2] Теория и методы расчета ядерных реакторов, М., 1962; [3] Вычислительные методы в теории переноса, М., 1969. *В. А. Чуянов.*

ДИФФУЗИОННЫЙ ПРОЦЕСС — непрерывный *марковский процесс* $X=X(t)$ с переходной плотностью $p(s, x, t, y)$, удовлетворяющей следующим условиям: существуют функции $a(t, x)$ и $\sigma^2(t, x)$, называемые соответственно коэффициентами сноса и диффузии, такие, что для любого $\varepsilon>0$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{|y-x|>\varepsilon} p(t, x, t+\Delta t, y)\,dy = o(\Delta t),\\
&\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (y-x)\,p(t, x, t+\Delta t, y)\,dy = \\
&\qquad = a(t, x)+o(\Delta t),\\
&\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (y-x)^2\,p(t, x, t+\Delta t, y)\,dy = \\
&\qquad = \sigma^2(t, x)+o(\Delta t)
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(причем обычно предполагается, что эти предельные соотношения выполняются равномерно по t в каждом конечном интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ и по x, $-\infty<x<\infty$). Важнейшим представителем этого класса процессов является процесс броуновского движения, впервые рассмотренный как математич. модель процессов диффузии (отсюда и название «Д. п.»).

Если переходная плотность $p(s, x, t, y)$ непрерывна по s и x вместе со своими производными $\frac{\partial}{\partial x}\,p(s, x, t, y)$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,p(s, x, t, y)$, то она является фундаментальным решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s}\,p(s, x, t, y) = -a(s, x)\,\frac{\partial}{\partial x}\,p(s, x, t, y) - \\ -\frac{1}{2}\,\sigma^2(s, x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,p(s, x, t, y), \qquad (2)$$

к-рое наз. обратным уравнением Колмогорова.

В однородном случае, когда коэффициенты сноса $a(t, x)=a(x)$ и диффузии $\sigma^2(t, x)=\sigma^2(x)$ не зависят от времени t, обратное уравнение Колмогорова для

соответствующей переходной плотности $p(s, x, t, y) = p(t-s, x, y)$ имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x, y) = a(x) \frac{\partial}{\partial x} p(t, x, y) + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t, x, y).$$

Если переходная плотность $p(s, x, t, y)$ имеет непрерывную по t и y производную $\frac{\partial}{\partial t} p(s, x, t, y)$ такую, что функции $\frac{\partial}{\partial y}[a(t, y)p(s, x, t, y)]$ и $\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma^2(t, y)p(s, x, t, y)]$ непрерывны по y, то она является фундаментальным решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} p(s, x, t, y) = -\frac{\partial}{\partial y}[a(t, y) p(s, x, t, y)] + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma^2(t, y) p(s, x, t, y)], \quad (3)$$

к-рое наз. уравнением Фоккера — Планка, или прямым уравнением Колмогорова. Дифференциальные уравнения (2) и (3) для плотности вероятности являются основой аналитич. методов изучения Д. п. Существует и другой, чисто «вероятностный», подход к Д. п., основанный на представлении процесса $X(t)$ как решения стохастического дифференциального уравнения Ито

$$dX(t) = a(t, X(t))\, dt + \sigma(t, X(t))\, dY(t),$$

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, X(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, X(s))\, dY(s),$$

где $Y(t)$ — стандартный процесс броуновского движения. Грубо говоря, при таком подходе считают $X(t)$ связанным с нек-рым процессом броуновского движения $Y(t)$ таким образом, что при условии $X(t)=x$ за последующее время Δt приращение $\Delta X(t) = X(t+\Delta t) - X(t)$ есть

$$\Delta X(t) \sim a(t, x)\, \Delta t + \sigma(t, x)\, \Delta Y(t).$$

Если понимать это асимптотич. соотношение в том смысле, что

$$\mathsf{E}\{\Delta X(t) - (a(t, x)\, \Delta t + \sigma(t, x)\, \Delta Y(t)) \mid X(t) = x\} = o(\Delta t),$$

$$\mathsf{E}\{\Delta X(t) - (a(t, x)\, \Delta t + \sigma(t, x)\, \Delta Y(t))^2 \mid X(t) = x\} = \\ = o(\Delta t),$$

где $o(\Delta t)$ — величины того же типа, что и в равенствах (1), то рассматриваемый процесс $X(t)$ будет диффузионным и в смысле этого определения.

Многомерным Д. п. обычно наз. непрерывный марковский процесс $X(t) = \{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ в n-мерном векторном пространстве E^n, переходная плотность $p(s, x, t, y)$ к-рого удовлетворяет следующим условиям: для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_{|y-x|>\varepsilon} p(t, x, t+\Delta t, y)\, dy = o(\Delta t),$$

$$\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (y_k - x_k)\, p(t, x, t+\Delta t, y)\, dy = \\ = a_k(t, x)\, \Delta t + o(\Delta t),$$

$$\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (y_k - x_k)(y_j - x_j)\, p(t, x, t+\Delta t, y)\, dy = \\ = 2b_{kj}(t, x)\, \Delta t + o(\Delta t),$$

$$k, j = 1, \ldots, n, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Вектор $a = \{a_1(t, x), \ldots, a_n(t, x)\}$ характеризует локальный снос процесса $\xi(t)$, матрица $\sigma^2 = \|2b_{kj}(t, x)\|$, $k, j = 1, \ldots, n$, характеризует среднеквадратичное отклонение случайного процесса $\xi(t)$ от исходного положения x за малый промежуток времени от t до $t+\Delta t$.

При нек-рых дополнительных ограничениях переходная плотность $p(s, x, t, y)$ многомерного Д. п.

удовлетворяет обратному и прямому дифференциальным уравнениям Колмогорова:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\sum_{k=1}^{n} a_k(s, x)\frac{\partial p}{\partial x_k} - \sum_{k,j=1}^{n} b_{kj}(s, x)\frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_j},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_k}[a_k(t, y)\, p] + \sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j}[b_{kj}(t, y)\, p].$$

Многомерный Д. п. $X(t)$ может быть описан также при помощи стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$dX_k(t) = a_k(t, X(t))\, dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{kj}(t, X(t))\, dY_j(t),$$

где $Y_1(t), \ldots, Y_n(t)$ — взаимно независимые процессы броуновского движения, а

$$\sigma_j = \{\sigma_{1j}(t, x), \ldots, \sigma_{nj}(t, x)\}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

суть собственные векторы матрицы $\sigma^2 = \|2b_{kj}(t, x)\|$.

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, М., 1965; [2] их же, Стохастические дифференциальные уравнения, К., 1968.

Ю. А. Розанов.

ДИХОТОМИЯ — свойство линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)\, x, \quad x \in E^n, \quad t \geqslant 0,$$

с ограниченными непрерывными коэффициентами обладать такими положительными постоянными K, L, α, β, что существует разложение $E^n = E^m + E^{n-m}$, для к-рого

$$x(0) \in E^m \Rightarrow \|x(t)\| \leqslant K\|x(\tau)\| \exp[-\alpha(t-\tau)], \quad t \geqslant \tau \geqslant 0;$$

$$x(0) \in E^{n-m} \Rightarrow \|x(t)\| \leqslant L\|x(\tau)\| \exp[-\beta(\tau - t)], \quad \tau \geqslant t \geqslant 0$$

(экспоненциальная Д.; при $\alpha = \beta = 0$ — обыкновенная Д.). Наличие экспоненциальной Д. эквивалентно тому, что неоднородная система

$$\dot{x} = A(t)\, x + f(t)$$

при любой ограниченной непрерывной функции $f(t)$, $t \geqslant 0$, имеет хотя бы одно ограниченное на $[0, \infty)$ решение (см. [1]). Теория Д. (см. [2]) перенесена на уравнения в банаховых пространствах, используется также для изучения потоков и каскадов на гладких многообразиях [4].

Лит.: [1] Perron O., «Math. Z.», 1930, Bd 32, № 5, S. 703—728; [2] Массера Х.-Л., Шеффер Х.-Х., Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства, пер. с англ., М., 1970; [3] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970; [4] Аносов Д. В., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1967, т. 90.

Р. А. Прохорова.

ДИЭДРА ГРУППА, диэдральная группа, — группа, изоморфная группе вращений диэдра, т. е. правильной удвоенной пирамиды. Если в основании пирамиды лежит n-угольник, то соответствующая Д. г. имеет порядок $2n$ и порождается двумя вращениями φ и ψ порядков n и 2, соответственно, с определяющим отношением $\varphi\psi\varphi\psi = 1$. Иногда под Д. г. подразумевают только Д. г. порядка 8. Два различных элемента порядка 2 в любой конечной группе порождают Д. г.

Лит.: [1] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

В. Д. Мазуров.

ДЛИНА — числовая характеристика протяженности линий в метрич. пространстве. Д. отрезка прямой — расстояние между его концами, измеренное каким-либо отрезком, принятым за единицу Д. Длина ломаной — сумма Д. ее звеньев. Д. простой дуги — точная верхняя грань длин

ломаных, вписанных в эту дугу. Всякая непрерывная кривая имеет Д.— конечную или бесконечную. Если ее Д. конечна, то кривая наз. спрямляемой. Д. плоской кривой, заданной в прямоугольных координатах уравнением $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ ($f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$), выражается интегралом

$$s=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Если кривая задана в параметрич. форме

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad t_1\leqslant t\leqslant t_2,$$

то Д. кривой равна

$$s=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$$

Д. спрямляемой кривой не зависит от параметризации. Д. пространственной кривой, заданной в параметрич. форме $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, выражается формулой

$$s=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt;$$

в случае n-мерного пространства

$$s=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[x_i'(t)]^2}\,dt.$$

Пусть γ — непрерывно дифференцируемая кривая, заданная функциями $u=u(t)$, $v=v(t)$, на непрерывно дифференцируемой поверхности $r=r(u, v)$. Тогда длина дуги кривой от точки, соответствующей значению параметра $t=t_0$, равна

$$s(t, t_0)=\int_{t_0}^{t}|r'(t)|\,dt=\int_{\gamma(P_0,\ P)}|dr(u,\ v)|=\int_{t_0}^{t}\sqrt{I},$$

где I — первая квадратичная форма поверхности. Д. непрерывно дифференцируемой кривой, заданной функциями $x^i=x^i(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, в римановом пространстве с метрич. тензором g_{ik}, равна

$$s=\int_{t_1}^{t_2} ds=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}}\,dt.$$

А. Б. Иванов.

ДЛИНА частично упорядоченного множества — наибольшая из длин *цепей* этого множества. Существуют бесконечные множества конечной длины. *Т. С. Фофанова.*

ДЛИНЫ И ПЛОЩАДИ ПРИНЦИП — принцип, выражающий зависимость между длинами кривых, принадлежащих нек-рому специальному семейству, и площадью, покрываемой этим семейством кривых.

Пусть $w=f(z)$ — регулярная в открытом множестве G функция. Пусть $n(w)$ — число корней уравнения $f(z)=w$, лежащих в G; $l(\rho)$ — суммарная длина кривых в G, на к-рых $|f(z)|=\rho$; A — площадь G и

$$p(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n\left(\rho e^{i\theta}\right)d\theta,\quad \rho>0;$$

тогда Д. и п. п. выражается неравенством (см. [2]):

$$\int_0^{\infty}\frac{l(\rho)^2\,d\rho}{\rho p(\rho)}\leqslant 2\pi A.$$

Д. и п. п. получил широкое применение в теории функций комплексного переменного (см. [1] — [4]).

Д. и п. п. используется, напр., при изучении свойств функций, регулярных в круге $|z|<1$. В частности, с помощью Д. и п. п. доказывается следующая теорема (см. [2]): если функция $w=f(z)=a_0+a_1z+\ldots$, $\mu_q=\max_{0\leqslant\nu\leqslant q}|a_\nu|$, регулярна в $|z|<1$ и имеет в нем не более

q нулей, из которых не более h лежит в $|z|<1/2$, то

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho p(\rho)} < 2\log\frac{1}{1-r} + A(q),$$

где

$$R_1 = (h+2)\,2^{h-1}\mu_h, \quad R_2 = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0<r<1,$$

$A(q)$ — константа, зависящая от q.

Д. и п. п. и различные его обобщения (напр., д л и н ы и о б ъ е м а п р и н ц и п) применяются и в случае n-мерных пространств к квазиконформным отображениям, а также к отображениям с ограниченным *Дирихле интегралом* (см. [4] — [7]).

При выводе Д. и п. п. существенным образом используется неравенство Буняковского. Дальнейшее рассмотрение связи между длинами кривых и площадью, покрываемой ими, привело к важному методу изучения однолистных конформных и квазиконформных отображений — *экстремальной метрики методу* (см., напр., [8]). В конце 20-х — начале 30-х гг. метод экстремальной метрики в менее совершенной форме (метод полос) успешно применялся для исследования свойств указанных выше отображений односвязных и многосвязных областей.

Лит.: [1] A h l f o r s L. W., «Acta Soc. scient. fennica», 1930, A. 1, № 9; [2] Х е й м а н В. К., Многолистные функции, пер. с англ., М., 1960; [3] Н е в а н л и н н а Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941; [4] С у в о р о в Г. Д., Семейства плоских топологических отображений, Новосиб., 1965; [5] К р е й н е с М. А., «Матем. сб.», 1941, т. 9, № 3, с. 713—19; [6] О в ч и н н и к о в И. С., «Метрические вопросы теории функций и отображений», 1971, в. 3, с. 98—115; [7] L e l o n g-F e r r a n d J., *Représentation conforme et transformations à intégral de Dirichlet bornées*, P., 1955; [8] Д ж е н к и н с Д ж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962.

И. П. Митюк.

ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ — см. *Доверительное оценивание.*

ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ГРАНИЦА — см. *Доверительное оценивание.*

ДОВЕРИТЕЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО — см. *Доверительное оценивание.*

ДОВЕРИТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ — метод математич. статистики, предназначенный для построения множества приближенных значений неизвестных параметров вероятностных распределений.

Пусть X — случайный вектор, принимающий значения на множестве $\mathcal{X}$ в евклидовом пространстве, причем распределение вероятностей этого вектора принадлежит параметрич. семейству распределений, заданному плотностями $p(x|\theta)$, $x\in\mathcal{X}$, $\theta\in\Theta$, относительно нек-рой меры $\mu(x)$. Предполагается, что истинное значение параметрич. точки θ, соответствующей результату наблюдений X, неизвестно. Суть Д. о. заключается в построении такого множества $C(X)$, зависящего от X, к-рое содержит значение заданной функции $u(\theta)$, соответствующее неизвестному истинному значению параметрич. точки θ.

Пусть U — множество значений функции $u(\theta)$, $\theta\in\Theta$, и пусть $C(x)$, $x\in\mathcal{X}$,— какая-либо совокупность множеств, принадлежащих U при всех x из $\mathcal{X}$, причем предполагается, что для произвольного элемента $u\in U$ и любого значения $\theta\in\Theta$ определена вероятность события $\{C(X)\ni u\}$. Эта вероятность выражается интегралом

$$P_C(u,\theta) = \int_{C(x)\ni u} p(x|\theta)\,d\mu(x), \quad u\in U,\ \theta\in\Theta,$$

и наз. в е р о я т н о с т ь ю н а к р ы т и я множеством $C(X)$ значения u при заданном значении θ.

Если истинное значение θ неизвестно, то множество $C(X)$ (из совокупности множеств $C(x)$, $x\in\mathcal{X}$), соответствующее результату наблюдений X, наз. д о в е -

рительным множеством, или *интервальной оценкой*, для неизвестного истинного значения функции $u(\theta)$. В качестве вероятностной характеристики интервальной оценки $C(X)$, построенной по указанному правилу, используется доверительная вероятность $P_C(\theta)$, выражающаяся в терминах вероятности накрытия равенством

$$P_C(\theta) = P_C[u(\theta), \theta], \ \theta \in \Theta.$$

Иными словами, $P_C(\theta)$ — вероятность накрытия множеством $C(X)$ значения заданной функции $u(\theta)$, соответствующего неизвестной истинной параметрич. точке θ.

В тех случаях, когда доверительная вероятность $P_C(\theta)$ от θ не зависит, интервальную оценку $C(X)$ наз. подобной пространству выборок. Это название обусловлено аналогией формул

$$P_C(\theta) = \mathsf{P}\{C(X) \ni u(\theta) \mid \theta\} = \text{const}$$

и

$$\mathsf{P}\{X \in \mathscr{X} \mid \theta\} = \text{const} = 1.$$

В более общей ситуации $P_C(\theta)$ зависит от неизвестного θ, и поэтому в практич. работе принято характеризовать качество интервальной оценки коэффициентом доверия

$$P_C = \inf P_C(\theta),$$

где нижняя грань вычисляется на множестве Θ (иногда коэффициент доверия наз. доверительным уровнем).

Оптимизация Д. о. определяется теми требованиями, к-рые предъявляются к интервальным оценкам. Напр., если цель заключается в построении доверительных множеств, подобных пространству выборок и имеющих заданный коэффициент доверия ω $(0{,}5 \leqslant \omega < 1)$, то первое требование выражается тождеством

$$P_C[u(\theta), \theta] \equiv \omega, \ \theta \in \Theta.$$

При этом естественно искать такие интервальные оценки, к-рые накрывают истинное значение $u(\theta)$ с вероятностью, не меньшей вероятности накрытия любого произвольного значения $u \in U$. Иными словами, второе требование, называемое требованием несмещенности, выражается неравенством

$$P_C(u, \theta) \leqslant \omega, \ u \in U, \ \theta \in \Theta.$$

В этих условиях «наилучшей» разумно считать ту интервальную оценку C, к-рая с меньшей вероятностью накрывает любое значение u, отличное от истинного $u(\theta)$. Отсюда возникает третье требование «наибольшей селективности»: для всякого другого доверительного множества C', отличного от C и удовлетворяющего условию

$$P_{C'}[u(\theta), \theta] \geqslant \omega, \ \theta \in \Theta,$$

должно выполняться неравенство

$$P_C(u, \theta) \leqslant P_{C'}(u, \theta), \ u \in U, \ \theta \in \Theta.$$

Задача отыскания интервальных оценок C, удовлетворяющих указанным трем требованиям, эквивалентна задаче построения несмещенных, наиболее мощных статистич. критериев, подобных пространству выборок и имеющих уровень значимости $1 - \omega$. Вопросы существования решения такой задачи и его конструктивного описания составляют основу общей теории статистич. проверки гипотез.

Наиболее часто применяется Д. о. в ситуации, когда $u(\theta)$ — скалярная функция. Пусть $X_1, \ldots, X_n$, $n \geqslant 2$, — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же *нормальному распределению* с неизвестными параметрами $\mathsf{E}X_i = \theta_1$ и $\mathsf{D}X_i = \theta_2$, причем

требуе
Пусть

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \text{ и } s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

Поскольку случайная величина $T=\sqrt{n}(\overline{X}-\theta_1)/s$ подчиняется *Стьюдента распределению* с $n-1$ степенями свободы и это распределение не зависит от неизвестных параметров θ_1 и θ_2 ($|\theta_1|<\infty$, $\theta_2>0$), то при любом положительном t вероятность события

$$\{\overline{X}-ts/\sqrt{n}<\theta_1<\overline{X}+ts/\sqrt{n}\}$$

зависит лишь от t. Если указанный интервал принять за интервальную оценку C для θ_1, то ему будет соответствовать доверительная вероятность

$$P_C(\theta_1,\theta_2)=\mathsf{P}\{|T|<t\},$$

не зависящая от $\theta=(\theta_1,\theta_2)$. Такую интервальную оценку наз. доверительным интервалом, а ее концевые точки — доверительными границами, или доверительными пределами, причем в данном случае доверительный интервал представляет собой интервальную оценку, подобную пространству выборок. В приведенном примере интервальная оценка является несмещенной и наиболее селективной.

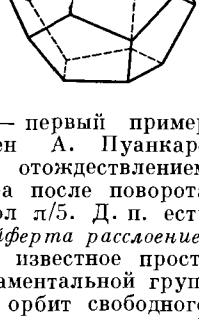
Лит.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [2] Шметтерер Л., Введение в математическую статистику, пер. с нем., М., 1976; [3] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964; [4] Большев Л. Н., «Теория вероят. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 1, с. 187—92. *Ю. В. Линник, Н. М. Халфина.*

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ — см. *Доверительное оценивание.*

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ — см. *Доверительное оценивание.*

ДОДЕКАЭДР — один из пяти типов правильных многогранников. Д. имеет 12 граней (пятиугольных), 30 ребер, 20 вершин (в каждой вершине сходятся 3 ребра). Если a — длина ребра Д., то его объем

$$v=\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})\approx 7{,}6631a^3.$$



БСЭ-3.

ДОДЕКАЭДРА ПРОСТРАНСТВО — первый пример *Пуанкаре пространства.* Построен А. Пуанкаре (H. Poincaré) в 1904. Получается отождествлением противоположных граней додекаэдра после поворота их друг относительно друга на угол $\pi/5$. Д. п. есть многообразие рода 2, имеющее *Зейферта расслоение*, и представляет собой единственное известное пространство Пуанкаре с конечной фундаментальной группой. Д. п. является пространством орбит свободного действия бинарной группы икосаэдра на трехмерной сфере.

Лит.: [1] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.—Л., 1938. *А. В. Чернавский.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРИЯ — раздел математич. логики, посвященный исследованию понятия доказательства в математике, приложениям этого понятия в различных разделах науки и техники.

Доказательство в широком смысле этого слова есть способ обоснования истинности того или иного суждения. Степень убедительности доказательства решающим образом зависит от средств, используемых для обоснования истинности. Напр., в точных науках выработаны определенные условия, при выполнении к-рых сообщаемый экспериментальный факт может считаться доказанным (необходима устойчивая воспроизводимость эксперимента, отчетливое описание методики эксперимента, его точности, применяемого оборудования и т. п.). В математике, для к-рой ха-

рактерен *аксиоматический метод* исследования, средства доказательства достаточно четко определились уже на раннем этапе ее развития. Доказательство фигурирует в математике как последовательное выведение одних суждений из других, причем способы этого выведения допускают точный анализ.

Истоки Д. т. можно проследить со времен античности (дедуктивный метод рассуждения в элементарной геометрии, силлогистика Аристотеля и др.), но современный этап ее развития начинается в конце 19 в.— начале 20 в. под влиянием работ Г. Фреге (G. Frege), Б. Рассела (B. Russell) и А. Уайтхеда (A. Whitehead), Э. Цермело (E. Zermelo) и, в особенности, Д. Гильберта (D. Hilbert). В это время в теории множеств Г. Кантора (G. Cantor) были обнаружены *антиномии*, поставившие под сомнение достоверность даже простейших рассуждений с произвольными множествами. Л. Брауэр (L. Brouwer) подверг весьма серьезной критике нек-рые классич. способы доказательства существования объектов в математике и предложил радикальную перестройку математики в духе *интуиционизма*. Вопросы оснований математики приобрели особую актуальность. Д. Гильберт предложил выделить часть практич. математики, так наз. финитную математику, не вызывающую возражений как с точки зрения появления антиномий, так и с точки зрения интуиционистской критики. В рамках финитной математики к рассмотрению допускаются лишь *конструктивные объекты*, напр. натуральные числа, и лишь такие способы рассуждений, к-рые согласуются с *абстракцией потенциальной осуществимости* и не привлекают *абстракции актуальной бесконечности*. В частности, ограничивается использование закона исключенного третьего. В финитной математике никаких антиномий не обнаружено и нет оснований их ожидать. С философской точки зрения способы рассуждения в финитной математике значительно более удовлетворительным образом отражают конструктивные процессы реальной действительности, чем в общей теоретико-множественной математике. Идея Д. Гильберта состояла в том, чтобы обосновать все основные разделы классич. математики, оставаясь на твердой почве финитной математики. С этой целью Д. Гильберт предложил метод формализации, являющийся одним из основных методов Д. т.

В общих чертах метод формализации состоит в следующем: формулируется логико-математич. язык (предметный язык) L, в терминах к-рого суждения данной математич. теории T записываются в виде формул. Далее описывается нек-рый класс A формул L, называемых аксиомами теории, и описываются *вывода правила*, с помощью к-рых можно переходить от одних формул к другим. Для аксиом и правил вывода употребляется общий термин — постулаты. Заданием постулатов определяется формальная теория (в другой терминологии — *исчисление*) T^*. Формулы, получаемые из аксиом формальной теории по ее правилам вывода, наз. выводимыми, или доказуемыми, в данной теории. Сам процесс вывода может быть при этом оформлен в виде дерева вывода (см. *Вывода дерево*). Исчисление T^* представляет особенный интерес по отношению к содержательной математич. теории T, если аксиомы T^* являются записями истинных суждений T, а правила вывода ведут от истинных суждений к истинным. В этом случае T^* можно рассматривать как уточненный фрагмент теории T, а понятие вывода в T^* можно рассматривать как уточнение неформальной идеи доказательства в теории T, по крайней мере в рамках, формализованных исчислением T^*. Таким образом, при построении исчисления T^* нужно предварительно уметь определять, какие постулаты считать пригодными с точки зрения тео-

рии T. Это, однако, не означает, что необходимо уже иметь развитую семантику теории T: здесь можно использовать практич. навыки, включать в число постулатов наиболее часто употребляющиеся или наиболее интересные в теоретич. отношении факты и т. п. Точный характер описания выводов исчисления T^* позволяет применять для их исследования математич. методы и таким образом судить о содержании и свойствах теории T.

В Д. т. выработаны стандартные приемы формализации содержательных математич. теорий. Аксиомы и правила вывода исчислений обычно делятся на логические и прикладные. Логич. постулаты служат для получения высказываний, истинных независимо от формализуемой теории уже в силу своей формы. Такие постулаты определяют логику формальной теории и оформляются в виде *высказываний исчисления* или *предикатов исчисления* (см. также *Логические исчисления*, *Математическая логика*, *Интуиционизм*, *Конструктивная логика*, *Строгой импликации исчисление*). Прикладные постулаты служат для описания истин, относящихся к особенностям данной математич. теории. Напр., в аксиоматич. теории множеств — это *выбора аксиома*, в элементарной арифметике — схема аксиом индукции (см. *Математическая индукция*), в интуиционистском анализе — *бар-индукция*.

Гильбертову программу обоснования математики можно описать следующим образом. Можно надеяться, что всякую, даже весьма сложную и абстрактную математич. теорию T (такую, напр., как теория множеств), можно в ее существенных частях формализовать в виде исчисления T^*, причем формулировка самого исчисления требует лишь финитной математики. Далее, анализируя выводы T^* чисто финитными средствами, можно пытаться установить непротиворечивость T^* и, следовательно, установить отсутствие антиномий в T, по крайней мере в той ее части, к-рая отражена в постулатах T^*. Для обычных методов формализации отсюда непосредственно следует, что нек-рые простейшие суждения (в терминологии Гильберта — р е а л ь н ы е с у ж д е н и я) выводимы в T^*, только если они истинны в финитном смысле. Первоначально надежда состояла в том, что в виде исчисления, формулируемого финитным образом, удастся описать практически всю классич. математику, а затем финитно же доказать ее непротиворечивость. Невыполнимость этой программы в целом была установлена в 1931 К. Гёделем (K. Gödel), к-рый показал, что при нек-рых естественных предположениях непротиворечивость исчисления T^* невозможно доказать даже мощными средствами, формализуемыми в T^*. Тем не менее исследование различных формальных исчислений остается важнейшим методом в основаниях математики. Во-первых, представляет интерес построение исчислений, отражающих существенные разделы современной математики и построенных в расчете на непротиворечивость, даже если непротиворечивость таких исчислений и нельзя доказать в настоящее время убедительным для всех математиков способом. Примером такого рода исчисления является система теории множеств Цермело — Френкеля, в к-рой могут быть выведены практически все результаты, полученные в современной теоретико-множественной математике. Доказательства невыводимости в этой теории ряда фундаментальных гипотез, полученные в предположении непротиворечивости теории (см. *Аксиоматическая теория множеств*, *Вынуждения метод*), свидетельствуют о независимости этих гипотез от применяемых в математике теоретико-множественных принципов. Это, в свою очередь, можно рассматривать как подтверждение той точки зрения, что существующих представлений недостаточно для доказательства или опровержения рассматриваемых

гипотез. Именно в этом смысле П. Коэн (P. Cohen) установил независимость континуум-гипотезы Г. Кантора.

Во-вторых, широко изучается класс исчислений, непротиворечивость к-рых можно установить финитными средствами. Так, К. Гёдель в 1932 предложил погружающую операцию, перерабатывающую формулы, доказуемые в классическом арифметич. исчислении, в формулы, доказуемые в интуиционистском арифметич. исчислении. Если последнее считать непротиворечивым (напр., в силу его естественной финитной интерпретации), то отсюда следует непротиворечивость и классического арифметич. исчисления.

Наконец, перспективным является исследование средств более широких, чем традиционный финитизм Д. Гильберта, но в то же время достаточно удовлетворительных с нек-рой точки зрения. Так, оставаясь в рамках потенциальной осуществимости, можно использовать так наз. общие индуктивные определения. Это позволяет применять полуформальные теории, в к-рых некоторые из правил вывода имеют бесконечное (но конструктивно порожденное) множество посылок, и перенести в финитную математику многие семантические результаты. К этому направлению относятся результаты П. С. Новикова (1943), установившего непротиворечивость классич. арифметики с использованием эффективных функционалов конечного типа, К. Спектора (C. Spector, 1961), доказавшего непротиворечивость классич. анализа с помощью расширения естественных интуиционистских средств доказательства на интуиционистские эффективные функционалы конечного типа, А. А. Маркова (1971) по конструктивной семантике, использующие общие индуктивные определения. Кроме того, ряд важных проблем, относящихся к исчислениям, можно рассматривать и вне связи с основаниями математики. Сюда относятся вопросы о полноте и разрешимости формальных теорий, вопрос о независимости нек-рых утверждений от данной формальной теории и др. В такой ситуации нет необходимости ограничиваться в рассуждениях определенными средствами и можно развивать Д. т. как обычную математич. теорию, пользуясь любыми математич. средствами доказательства, убедительными для исследователя.

Инструментом для исследования исчислений, а также часто и мотивировкой для самого введения ряда исчислений служит точно определенная *семантика* для формул рассматриваемого языка, т. е. точное определение смысла суждений, выразимых в данном языке. Напр., для классич. исчисления высказываний такая семантика хорошо известна: в этом исчислении выводимы тавтологии и только они. В общем случае, чтобы показать, что нек-рая формула A не выводится в рассматриваемом исчислении T^*, достаточно построить семантику для формул языка этой теории таким образом, чтобы все формулы, выводимые в T^*, были истинны в этой семантике, в то время как A не истинна. Семантика может быть классической, интуиционистской или иного типа в зависимости от того, с какими логич. постулатами она согласована. В исследовании классич. исчислений с успехом применяются неклассич. семантики, напр. отношение вынуждения П. Коэна при естественном уточнении задает интуиционистскую семантику. В другом известном варианте теории П. Коэна используются многозначные семантики — модели с истинностными значениями в полной булевой алгебре. С другой стороны, семантики типа *Крипке моделей*, определенные классическим теоретико-множественным способом, позволяют выяснить многие свойства модальных и нестандартных логик (включая интуиционистскую логику).

Алгебраич. методы получили широкое развитие в Д. т. в виде *моделей теории*. Алгебраич. система, сопоставляющая каждому начальному символу языка нек-рый алгебраич. объект, естественно определяет нек-рую классич. семантику языка. Алгебраич. система паз. моделью формальной теории T^*, если все формулы, выводимые в T^*, истинны в семантике, порожденной алгебраич. системой. К. Гёдель в 1931 показал, что всякое непротиворечивое исчисление (с классич. логикой) имеет модель. Несколько позже А. И. Мальцев независимо от результата К. Гёделя установил, что если каждый конечный фрагмент исчисления имеет модель, то и все исчисление в целом имеет модель (так наз. теорема о компактности логики первого порядка). Эти две теоремы легли в основу целого направления в математич. логике.

Рассмотрение нестандартных моделей арифметики позволило установить неаксиоматизируемость понятия натурального ряда в рамках теорий 1-го порядка, доказать независимость принципа математич. индукции от других аксиом арифметич. исчисления. Относительность понятия мощности множества в классич. математике выявилась при изучении счетных моделей для формальных теорий, стандартная интерпретация к-рых предполагает лишь заведомо несчетные модели (так наз. парадокс Сколема). Многие синтаксич. результаты были получены вначале из теоретико-модельных соображений. В терминах конструкций теории моделей можно дать простые критерии для многих понятий, интересных с точки зрения Д. т. Так, критерий Скотта гласит, что класс K алгебраич. систем данного языка тогда и только тогда является аксиоматизируемым, когда он замкнут относительно ультрапроизведений, изоморфизмов и взятия элементарных подсистем.

Формальная теория наз. разрешимой, если существует алгоритм, позволяющий по произвольной формуле A выяснять, выводима ли A в этой теории или нет. Известно, что всякая формальная теория, содержащая нек-рый фрагмент теории *рекурсивных функций*, необходимо неразрешима. Отсюда следует неразрешимость элементарной арифметики, системы Цермело — Френкеля и многих других теорий. В Д. т. разработаны тонкие методы интерпретации одних теорий в других; с помощью таких интерпретаций можно установить неразрешимость и ряда очень простых исчислений, в к-рых не интерпретируются непосредственно рекурсивные вычисления. Примерами могут служить элементарная теория групп, теория двух отношений эквивалентности, элементарная теория частичного порядка. С другой стороны, имеются примеры интересных разрешимых теорий, таких, как элементарная геометрия, элементарная теория действительных чисел, теория множеств натуральных чисел с единственной операцией следования. Разрешимость теорий доказывается теоретико-модельными и синтаксич. методами. Синтаксические методы часто дают более простые разрешающие алгоритмы. Так, например, для элементарной теории p-адических чисел разрешимость была установлена сначала теоретико-модельными методами. Позднее был найден примитивно-рекурсивный алгоритм распознавания выводимости для этой теории с помощью нек-рой модификации синтаксич. метода элиминации кванторов. Существенной является оценка сложности алгоритмов разрешения теорий. Как правило, для разрешимых теорий имеется примитивно-рекурсивный разрешающий алгоритм, и проблема состоит в том, чтобы указать более точные границы сложности. Перспективным направлением исследований является изучение разрешимости естественных фрагментов известных формальных теорий. В этом отношении особенно подробно изучено классич. исчисление

предикатов, где эффективно описаны все разрешимые и неразрешимые классы формул, заданные в терминах расположения кванторов в формуле и вида предикатных символов, встречающихся в формуле. Описан ряд разрешимых фрагментов арифметич. исчисления, элементарной теории множеств.

Внимание исследователей привлекают и методы оценки сложности выводов. Сюда относятся такие проблемы, как отыскание сравнительно коротких формул, необходимо имеющих сложные доказательства, или формул, из к-рых уже сравнительно несложно можно получить большое количество результатов. Такие формулы можно рассматривать как выражающие в нек-ром смысле «глубокие» факты теории. Рассматриваются естественные меры сложности вывода: длина доказательства; время, требуемое для поиска вывода; сложность формул, фигурирующих в выводе, и др. В этой области методы Д. т. смыкаются с методами теоретич. кибернетики.

Лит.: [1] Клини С. К., Математическая логика, пер. с англ., М., 1973; [2] Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [3] Ершов Ю. Л. и др., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 4, с. 37—108.

А. Г. Драгалин.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО — рассуждение по определенным правилам, обосновывающее какое-либо предложение (утверждение, теорему); основанием Д. служат исходные утверждения (аксиомы). Конкретное Д. не обязательно начинается с аксиом, оно может опираться на ранее доказанные предложения. Всякое Д.— относительно, поскольку базируется на нек-рых недоказываемых положениях. Правила, по к-рым ведутся рассуждения, а также методы Д. изучает логика. См. *Доказательств теория.*

А. С. Кузичев.

ДОМИНАНТА топологического пространства X — любое топологич. пространство, для к-рого X служит *ретрактом.*

А. В. Чернавский.

ДОМИНИРОВАНИЕ — 1) Какое-либо из возможных соотношений порядка для дифференциальных операторов, формулируемое в терминах *характеристического многочлена* $P(\xi)$. Напр., если

$$\tilde{P}^2(\xi) = \sum_{\alpha \geqslant 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2,$$

$$P^{(\alpha)}(\xi) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \dots \partial \xi_n^{\alpha_n}} P(\xi) \equiv i^{|\alpha|} D^\alpha P(\xi);\ \xi \in R^n,$$

то $P(D)$ сильнее $Q(D)$, когда для любого $\xi \in R^n$

$$\tilde{Q}(\xi)/\tilde{P}(\xi) < \text{const}.$$

Существуют и другие определения Д. (см. [1], с. 99, 103).

Лит.: [1] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965.

А. А. Дезин.

2) Д. в теории игр — отношение, выражающее превосходство одного объекта (*стратегии*, *дележа*) над другим. Д. стратегий: стратегия s игрока i доминирует (строго доминирует) его стратегию t, если его выигрыш в каждой ситуации, содержащей s, не меньше (соответственно больше), чем его выигрыш в ситуации, состоящей из тех же стратегий остальных игроков и стратегии t. Д. дележей (в *кооперативных играх*): дележ x доминирует дележ y (обозначение $x \succ y$), если существует такая непустая коалиция $P \subset N$, что

$$\sum_{i \in P} x_i \leqslant v(P)$$

и $x_i > y_i$ для $i \in P$ (v — характеристическая функция игры).

И. Н. Врублевская.

3) Д. в теории потенциала — отношение порядка $v_1 \geqslant v_2$ между функциями, в частности потенциалами определенных классов, т. е. выполнение неравенства $v_1(x) \geqslant v_2(x)$ для всех x в общей области определения v_1 и v_2. В различных принципах

доминирования отношение $v_1 \geqslant v_2$ устанавливается как следствие выполнения неравенства $v_1(x) \geqslant v_2(x)$ на нек-рых собственных подмножествах области определения. Простейший принцип доминирования Картана: пусть $v = v(x)$ — неотрицательная супергармоническая функция (см. *Субгармоническая функция*) на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, и $U_\mu = U_\mu(x)$ — ньютонов потенциал меры $\mu \geqslant 0$ конечной энергии (см. *Энергия мер*). Тогда, если $v(x) \geqslant U_\mu(x)$ на нек-ром множестве $A \subset \mathbb{R}^n$ таком, что $\mu(CA) = 0$, то имеет место Д. $v \geqslant U_\mu$. См. также *Потенциала теория абстрактная*.

Лит.: [1] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [2] его же, О топологиях и границах в теории потенциала, пер. с англ., М., 1974.

Е. Д. Соломенцев.

ДОПЛЕРА ЭФФЕКТ — изменение воспринимаемой частоты колебаний в зависимости от скорости движения источника колебаний и наблюдателя относительно друг друга. При сближении источника и наблюдателя частота повышается, при удалении — понижается. Д. э. возникает при распространении волн любой природы: акустических, упругих, электромагнитных.

Пусть $\bar{x}^j$ и x^j, где $j = 0, 1, 2, 3$, $x^0 = t$, $\bar{x}^0 = \bar{t}$ — время, являются инерциальными системами отсчета источника электромагнитных волн в вакууме и наблюдателя. И пусть фазовый множитель плоской волны имеет вид $\exp(i\omega_j x^j)$ в первой и соответственно $\exp(i\bar{\omega}_j \bar{x}^j)$ во второй системах отсчета. Д. э. выражается формулой, связывающей временные компоненты (частоты) ω_0 и $\bar{\omega}_0$ четырехмерных волновых векторов $\{\omega_j\}$ и $\{\bar{\omega}_j\}$:

$$\bar{\omega}_0 = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}.$$

Здесь v — относительная скорость источника и наблюдателя, φ — угол между скоростью v и линией наблюдения, измеренный в системе наблюдателя, c — скорость света в вакууме.

Д. э. назван по имени К. Доплера (Ch. Doppler), к-рый впервые обосновал этот эффект в 1842.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 5 изд., М., 1967, гл. 6; [2] Фриш С. Э., Тиморева А. В., Курс общей физики, 10 изд., М., 1962, т. 1, гл. 12.

В. М. Бабич, М. М. Попов.

ДОПОЛНЕНИЕ — операция, к-рая ставит в соответствие подмножеству M данного множества X другое подмножество $N \subset X$ так, что если известны M и N, то тем или иным способом может быть восстановлено множество X. В зависимости от того, какой структурой наделено множество X, получаются различные определения Д. и разные способы восстановления X по M и N.

В общей теории множеств дополнением подмножества (или дополнительным подмножеством) до множества X наз. подмножество $C_X M$ (или CM, а также $X \setminus M$), состоящее из всех элементов в $x \in X$, не принадлежащих M; одним из важных его свойств является принцип двойственности:

$$C_X\left(\bigcup_\xi M_\xi\right) = \bigcap_\xi \left(C_X M_\xi\right).$$

Пусть X наделено структурой линейного пространства и L — подпространство X. Подпространство $N \subset X$ наз. прямым алгебраическим дополнением (или короче алгебраич. дополнением) подпространства X, если $\forall x \in X$ однозначно представим в виде $x = y + z$, $y \in L$, $z \in N$. Это эквивалентно условиям: $X = L + N$; $L \cap N = \{0\}$. Алгебраич. Д. любого подпространства X всегда существует, но определяется неоднозначно.

Пусть (X, τ) — линейное топологич. пространство и X — прямая алгебраич. сумма $X = L + N$ своих

подпространств L и N, рассматриваемых как линейное топологич. пространство с индуцированной топологией. Если $x=y+z$, $y\in L$, $z\in N$, то взаимно однозначное отображение $(x, y)\to x+y$ декартова произведения $L\times N$ на X, непрерывное в силу линейности топологии τ, вообще, не взаимно непрерывно. Если же это отображение есть гомеоморфизм, т. е. если X является топологич. прямой суммой пространств L и N, то подпространство N наз. прямым топологическим дополнением подпространства L, к-рое наз. в этом случае дополняемым. В произвольном линейном топологич. пространстве не всякое подпространство, даже конечномерное, дополняемо. Имеют место следующие необходимые и достаточные условия дополняемости: существует непрерывный проектор P пространства X на подпространство L; подпространство L топологически изоморфно X/N, где N — алгебраическое Д. L. Из этих критериев вытекают следующие достаточные условия дополняемости: L замкнуто и имеет конечную коразмерность; X — локально выпукло, L — конечномерно, N — замкнуто и др.

Специальным случаем топологич. Д. является ортогональное Д. подпространства L гильбертова пространства H. Это — множество

$$L^{\perp}=\{x\in H\mid \langle x, y\rangle=0,\ \forall y\in L\},$$

являющееся замкнутым подпространством пространства H. Важнейшим для теории гильбертовых пространств является тот факт, что всякое замкнутое подпространство L гильбертова пространства имеет ортогональное Д. и $H=L\oplus L^{\perp}$.

Пусть, наконец, X — условно полная векторная решетка (K-пространство). Дизъюнктным дополнением множества $M\subset X$ называется совокупность элементов вида

$$M^{d}=\{x\in X\mid |x|\wedge |y|=0,\ \forall y\in M\},$$

являющаяся линейным подпространством X. Если M — линейное подпространство, то в общем случае $X\neq M+M^{d}$, но если M компонента (по другой терминологии полоса, замкнутый идеал), т. е. линейное подпространство такое, что: из $x\in M$ и $|y|\leqslant|x|$ следует $y\in M$; M замкнуто относительно операций перехода к точным верхним и нижним границам, то $X=M+M^{d}$ (для любого M множество M^{d} есть компонента; $M^{dd}=(M^{d})^{d}$ есть наименьшая компонента, содержащая множество $M\subset X$).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965; [2] его же, Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [3] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [4] Робертсон А., Робертсон В., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967; [5] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [6] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961. *В. И. Соболев.*

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ СЕРИЯ представлений — семейство неприводимых непрерывных унитарных представлений локально компактной группы G, ненулевые матричные элементы к-рых не могут быть аппроксимированы конечными линейными комбинациями матричных элементов регулярного представления группы G в топологии равномерной сходимости на компактах в G. Д. с. группы G непуста в том и только в том случае, если G не аменабельна, т. е. если на пространстве $L^{\infty}(G)$ не существует нетривиального левоинвариантного среднего (см. [2]). Связная группа Ли G тогда и только тогда имеет непустую Д. с., когда полупростая факторгруппа группы G по максимальному связному разрешимому нормальному делителю группы G некомпактна (см. *Леви — Мальцева разложение*). Д. с. впервые обнаружена для комплексных классич. групп [1]. Д. с. полностью описана (к 1978) лишь для нек-рых локально компактных групп. Нек-

рые задачи теории чисел (см., напр., [5]) равносильны задачам теории представлений, связанных с Д. с. групп аделей линейных алгебраич. групп.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Унитарные представления классических групп, М., 1950; [2] Гринлиф Ф., Инвариантные средние на топологических группах и их приложения, пер. с англ., М., 1973; [3] Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, М., 1958; [4] Костант Б., «Математика», 1970, т. 14, № 2, с. 102—16; [5] Petersson H., «Math. Ann.», 1937/1938, Bd 115, S. 23—67.

А. И. Штерн.

ДОПУСТИМОЕ ПРАВИЛО — *вывода правило*, добавление к-рого в *исчисление* не меняет объема выводимых в этом исчислении слов. Введение в исчисление Д. п. является мощным и часто применяемым средством сокращения выводов, во многих случаях полезно для совершенствования алгоритмов установления выводимости. Одним из важнейших результатов математич. логики является теорема о допустимости правила сечения (см. *Генцена формальная система*). См. *Выводимое правило*, *Производное правило*.

С. Ю. Маслов.

ДОСТАТОЧНАЯ СТАТИСТИКА для семейства распределений вероятностей $\{P_\theta;\ \theta\in\Theta\}$ или для параметра $\theta\in\Theta$ — статистика (векторная случайная величина) такая, что для любого события A существует вариант условной вероятности $P_\theta(A|X=x)$, не зависящий от θ. Это эквивалентно требованию, что условное распределение любой другой статистики Y при условии $X=x$ не зависит от θ.

Знание Д. с. X дает исчерпывающий материал для статистич. выводов о параметре θ, поскольку любые дополнительные статистич. данные ничего не добавляют к той информации о параметре, к-рая содержится в распределении X. Математич. выражением этого свойства является один из результатов теории статистич. решений, утверждающий, что множество решающих правил, основанных на Д. с., образует существенно полный класс. Переход от исходного семейства распределений к семейству распределений Д. с. наз. редукцией статистической задачи. Смысл редукции заключается в уменьшении (часто весьма значительном) размерности пространства наблюдений.

Практический способ нахождения Д. с. основан на следующей теореме факторизации. Пусть семейство $\{P_\theta\}$ доминировано σ-конечной мерой μ и пусть $p_\theta = dP_\theta/d\mu$ — плотность распределения P_θ относительно меры μ. Статистика X достаточна для семейства $\{P_\theta\}$ в том и только в том случае, когда

$$p_\theta(\omega) = g_\theta(X(\omega))\,h(\omega), \qquad (*)$$

где g_θ, h — неотрицательные измеримые функции (h не зависит от θ). Для дискретных распределений в качестве μ можно взять «считающую» меру: в этом случае $p_\theta(\omega)$ в соотношении $(*)$ имеет смысл вероятности элементарного события $\{\omega\}$.

Пусть, напр., $X_1, \ldots, X_n$ — последовательность независимых случайных величин, принимающих значение 1 с неизвестной вероятностью ν и значение 0 с вероятностью $1-\nu$ (схема Бернулли). Тогда

$$p_\nu(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^n \nu^{x_i}(1-\nu)^{1-x_i} = \nu^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\nu)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}.$$

Равенство $(*)$ выполняется, если положить

$$X = \sum_{i=1}^n X_i, \quad g_\theta = p_\theta, \quad h = 1.$$

Таким образом, эмпирическая частота

$$\hat{\nu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

является Д. с. для неизвестной вероятности ν в схеме Бернулли.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — последовательность независимых нормально распределенных величин с неизвестными средним значением μ и дисперсией σ^2. Совместная плотность распределения $X_1, \ldots, X_n$ по мере Лебега дается выражением

$$p_{\mu,\sigma^2}(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right] =$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i\right),$$

зависящим от $x_1, \ldots, x_n$ только через величины

$$\sum_{i=1}^{n}x_i, \quad \sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

Поэтому векторная статистика

$$X = \left(\sum_{i=1}^{n}X_i, \quad \sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)$$

является Д. с. для двумерного параметра $\theta=(\mu, \sigma^2)$. Д. с. здесь будет и совокупность выборочного среднего

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

и выборочной дисперсии

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})^2,$$

поскольку величины

$$\sum_{i=1}^{n}X_i, \quad \sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

могут быть выражены через $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}^2$.

Для одного и того же семейства распределений может существовать много Д. с. В частности, тривиальной Д. с. является совокупность всех наблюдений [в рассмотренных выше примерах $(X_1, \ldots, X_n)$]. Однако основной интерес представляют статистики, позволяющие осуществить действительную редукцию статистич. задачи. Д. с. наз. м и н и м а л ь н о й, или н е о б х о д и м о й, если она есть функция от любой другой Д. с. Необходимая Д. с. осуществляет максимально возможную редукцию статистич. задачи. В рассмотренных примерах найденные Д. с. являются необходимыми.

Важное применение понятия достаточности — метод улучшения несмещенных оценок, основанный на т е о р е м е Р а о — Б л э к у э л л а — К о л м о г о р о в а: если X — Д. с. для семейства $\{P_\theta\}$, X_1 — произвольная статистика, принимающая значения в векторном пространстве $\mathbb{R}^d$, то для действительной непрерывной выпуклой функции g на $\mathbb{R}^d$

$$\mathsf{E}_\theta g(X_1 - \mathsf{E}_\theta(X_1)) \geqslant \mathsf{E}_\theta g(\hat{X}_1 - \mathsf{E}_\theta(\hat{X}_1)), \quad \theta\in\Theta,$$

где $\hat{X}_1 = \mathsf{E}_\theta(X_1|X)$ — условное математич. ожидание статистики X_1 относительно X (к-рое фактически не зависит от θ в силу достаточности X). В качестве функции потерь g здесь часто берется положительно определенная квадратичная форма на $\mathbb{R}^d$.

Статистика X наз. п о л н о й, если равенство $\mathsf{E}_\theta f(X)\equiv 0$, $\theta\in\Theta$, влечет $f(X)=0$ почти наверное относительно P_θ, $\theta\in\Theta$. Одно из следствий теоремы Рао — Блэкуэлла — Колмогорова утверждает, что если существует полная Д. с. X, то она является равномерно по θ наилучшей несмещенной оценкой своего математич. ожидания $e(\theta)=\mathsf{E}_\theta X$. Подобная ситуация имеет место в приведенных примерах. Так, эмпирическая частота $\hat{\nu}$ является равномерно наилучшей не-

смещенной оценкой вероятности ν в схеме Бернулли, а выборочные среднее $\hat{\mu}$ и дисперсия $\hat{\sigma}^2$ — равномерно наилучшие несмещенные оценки параметров нормального распределения μ и σ^2.

В теоретическом плане иногда удобнее иметь дело не с Д. с., а с достаточными σ-алгебрами. Если $\{P_\theta;\ \theta\in\Theta\}$ — семейство распределений на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$, то σ-подалгебра $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ наз. достаточной для $\{P_\theta\}$, если для любого события $A\in\mathcal{A}$ существует вариант условной вероятности $P_\theta(A|\mathcal{B})$, не зависящий от θ. Статистика X достаточна тогда и только тогда, когда достаточна порождаемая ею σ-подалгебра $\mathcal{A}=X^{-1}(\mathcal{B})$.

Лит.: [1] Halmos P. R., Savage L. I., «Ann. Math. Statistics», 1949, v. 20, p. 225—41; [2] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 4, с. 303—26; [3] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968.

А. С. Холево.

ДОСТАТОЧНОЕ МНОЖЕСТВО ФУНКЦИОНАЛОВ, тотальное множество функционалов,— множество Γ непрерывных линейных функционалов $f(X)$, определенных на линейном топологич. пространстве X и обладающих тем свойством, что не существует элемента $x\in X$, $x\neq 0$, на к-ром равенство $f(x)=0$ выполнялось бы для всех $f\in\Gamma$. Каждое локально выпуклое пространство обладает Д. м. ф.

М. И. Кадец.

ДОСТИЖИМАЯ ГРАНИЧНАЯ ТОЧКА — совокупность точки границы области и класса эквивалентных путей, ведущих изнутри области в эту точку. Пусть ξ — точка границы ∂G области G на плоскости комплексного переменного z и пусть существует путь с уравнением $z=z(t)$, где функция $z(t)$ определена и непрерывна на нек-ром отрезке $[\alpha, \beta]$, $z(t)\in G$ при $\alpha\leqslant t<\beta$, $z(\beta)=\xi$. Тогда говорят, что этот путь ведет в точку ξ (изнутри G) и определяет Д. г. т., изображаемую точкой ξ. Два пути, ведущие в ξ, наз. эквивалентными (или определяющими одну и ту же Д. г. т.), если существует третий путь, также ведущий в ξ изнутри G и имеющий с каждым из рассматриваемых двух путей непустые пересечения внутри G в любой близости от ξ. Совокупность точки $\xi\in\partial G$ и класса эквивалентных путей, ведущих в ξ изнутри G, наз. Д. г. т. области G. Не всякая точка $\xi\in\partial G$ изображает Д. г. т.; с другой стороны, одна и та же точка $\xi\in\partial G$ может изображать несколько, и даже бесконечное множество, различных Д. г. т.

Д. г. т. является единственной точкой *граничного элемента* 1-го рода; (многоточечный) граничный элемент 2-го рода содержит ровно одну Д. г. т., а граничные элементы 3-го и 4-го родов не содержат Д. г. т. Каждая точка границы жордановой области является Д. г. т.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [2] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971, гл. 9.

Е. П. Долженко.

ДОСТИЖИМАЯ ДУГА ГРАНИЦЫ области G на плоскости z — жорданова дуга, входящая в состав границы области G и одновременно входящая в состав границы нек-рой жордановой области $g\subset G$. Каждая точка Д. д. г. является достижимой (изнутри g) граничной точкой области G (см. *Достижимая граничная точка*). Конформное отображение односвязной области G на единичный круг $D:|z|<1$ непрерывно продолжимо на неконцевые точки Д. д. г. до гомеоморфизма открытой Д. д. г. на нек-рую открытую дугу окружности $|z|=1$.

Е. П. Долженко.

ДОСТИЖИМАЯ ПОДГРУППА — подгруппа H, к-рую можно включить в конечный нормальный ряд группы G, т. е. ряд

$$E\subset H=H_0\subset H_1\subset\ldots\subset H_n=G,$$

в к-ром каждая подгруппа H_i инвариантна в H_{i+1}. Свойство подгруппы быть Д. п. транзитивно. Пересечение Д. п. есть Д. п. Подгруппа, порожденная двумя Д. п., может не быть Д. п. Группа G, у к-рой каждая подгруппа является Д. п., удовлетворяет нормализаторному условию, т. е. всякая подгруппа отлична от своего *нормализатора* и, следовательно, локально нильпотентна.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

В. М. Копытов.

ДОСТИЖИМОЕ ПРОСТРАНСТВО, T_1-пространство,— топологич. пространство X, в к-ром замыкание любого одноточечного множества совпадает с ним самим. Это условие равносильно тому, что пересечение всех окрестностей точки $x \in X$ совпадает с x или что каковы бы ни были две различные точки $x, y \in X$, существуют их окрестности U_x и U_y такие, что $U_x \not\ni y$ и $U_y \not\ni x$, т. е. выполняется *отделимости аксиома* T_1.

Достижимость, т. е. выполнение T_1,— наследственное свойство: всякое подпространство Д. п. есть Д. п., и топология, мажорирующая топологию Д. п., является достижимой топологией. Всякое отделимое пространство (T_2-пространство) является Д. п., обратное неверно: существуют T_1-пространства, не являющиеся T_2-пространствами, таково, напр., бесконечное множество β, наделенное топологией, в к-рой открытыми считаются те множества, дополнения к к-рым конечны.

М. И. Войцеховский.

ДОСТОВЕРНОЕ СОБЫТИЕ — событие, которое априори должно обязательно произойти. Точнее, если $\Omega = \{\omega\}$ — пространство элементарных исходов, то событие A, наступающее вместе с любым из элементарных исходов ω, наз. Д. с. и, очевидно, должно совпадать со всем пространством Ω. Поэтому естественно приписать Д. с. вероятность, равную 1:

$$P(A) = \text{мера}\,\{\omega : \omega \in A\} = P(\Omega) = 1.$$

Дополнительным к A является *невозможное событие.*

А. В. Прохоров.

ДОСТОВЕРНОСТЬ — априорное убеждение в осуществимости нек-рого явления, исключающее всякое сомнение. Д. характеризует реализуемость нек-рого события, отмечая его наивысшим значением вероятности. В теории вероятностей понятие Д. связано с *достоверными событиями* и с событиями, происходящими с вероятностью 1. На практике говорят о Д. уже тогда, когда вероятность нек-рого события достаточно близка к 1.

А. В. Прохоров.

ДОУПОРЯДОЧИВАЕМАЯ ГРУППА — группа, всякий частичный порядок в к-рой может быть продолжен до линейного (см. *Упорядочиваемая группа*). Д. г. наз. также O^*-группами. Существует следующий критерий доупорядочиваемости группы. Пусть $S(g)$ — минимальная инвариантная подполугруппа группы G, содержащая элемент g. Группа G доупорядочиваема тогда и только тогда, когда для всякого $g \neq e$ подполугруппа $S(g)$ не содержит единицы группы G и для любых $x, y \in S(g)$ пересечение $S(x) \cap S(y)$ не пусто.

Д. г. являются все нильпотентные группы без кручения и все упорядочиваемые двуступенно разрешимые группы. Свободные группы ранга большего 2 и свободные разрешимые группы класса разрешимости большего 2 дают примеры упорядочиваемых групп, к-рые не доупорядочиваемы. Для Д. г. справедлива локальная теорема (см. *Мальцева локальные теоремы*), т. е. если все конечно порожденные подгруппы группы G доупорядочиваемы, то и G — Д. г. Однако подгруппа Д. г. не обязана быть Д. г. Если факторгруппа Д. г. упорядочиваема, то она есть Д. г. Имеются упорядочиваемые, но недоупорядочиваемые группы, факторгруппа по центру к-рых есть Д. г. Класс Д. г. замкнут отно-

сительно прямых произведений, но не замкнут относительно полных прямых произведений и, следовательно, неаксиоматизируем (см. *Аксиоматизируемый класс*). Сплетение Д. г. не всегда доупорядочиваемо.

Подгруппа H группы G наз. Г-доупорядочиваемой, если всякий максимальный частичный порядок группы G индуцирует на H линейный порядок.

Лит.: [1] Кокорин А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972; [2] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965.

А. И. Кокорин, В. М. Копытов.

ДРЕВОВИДНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — гладкое нечетномерное многообразие специального вида, являющееся краем четномерного многообразия, строящегося из расслоений над сферами с помощью склеек по схеме, задаваемой нек-рым графом (деревом).

Пусть $p_i: E_i^{2n} \to S_i^n$, $i=1, 2, \ldots$ — расслоение над n-сферами со слоем n-шар D^n и структурной группой SO_n и пусть B_i^n — замкнутый стандартный n-шар в n-сфере S_i^n; тогда

$$p_i^{-1}(B_i^n) \approx B_i^n \times D_i^n,$$

где D_i^n — слой расслоения p_i. Пусть

$$\gamma_{ij}: B_i^n \times D_i^n \longrightarrow B_j^n \times D_j^n, \ i=1, 2,$$

— гомеоморфизм, осуществляющий склейку двух расслоений p_i, p_j и переводящий каждый n-шар $B^n \times x$ из $B_i^n \times D_i^n$ в некоторый шар $y \times D^n$ из $B_j^n \times D_j^n$ (склейка меняет сомножители прямого произведения $B^n \times D^n$). Результатом склейки двух расслоений p_i, p_j является $2n$-мерное многообразие $E_i^{2n} \bigcup_{\gamma_{ij}} E_j^{2n}$, к-рое превращается в гладкое многообразие с помощью операции «сглаживания углов».

Расслоения E_i^{2n} рассматриваются как «строительные блоки», из к-рых с помощью попарных склеек результирующее гладкое многообразие строится следующим образом. Пусть T — одномерный конечный комплекс (граф). Каждой вершине графа T сопоставляется блок E_i^{2n}, выбираются в S_i^n непересекающиеся n-шары $B_{i_k}^n$ в количестве $k=1, 2, \ldots$, равном индексу ветвления соответствующей вершины, и производится склейка по схеме, указанной графом T. Полученное таким образом многообразие с краем обозначается (опуская зависимость от выбора расслоений E_i^{2n}) через $W^{2n}(T)$. В случае, если T есть дерево, то есть граф без циклов, то край $\partial W^{2n}(T) = M^{2n-1}$ наз. древовидным многообразием.

Если T — дерево, то $W^{2n}(T)$ имеет гомотопич. тип букета n-сфер в количестве, равным числу вершин дерева T.

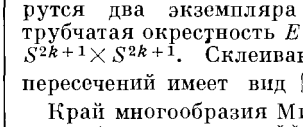
Д. м. $M^{2n-1} = \partial W^{2n}(T)$ является целочисленной гомологич. $(2n-1)$-сферой тогда и только тогда, когда определитель матрицы целочисленной билинейной $(-1)^n$-формы пересечений, определенной на решетке n-мерных гомологий $H_n(W^{2n}, \mathbb{Z})$, равен ± 1. Если это условие выполнено, то многообразие $W^{2n}(T)$ наз. плюмбингом.

Если T — произвольный граф и $n \geqslant 2$, то $W^{2n}(T)$ тогда и только тогда односвязно, когда T — дерево. Если T — дерево и $n \geqslant 3$, то $\partial W^{2n}(T)$ односвязно; если W^{2n} — плюмбинг, то край ∂W^{2n} является гомотопич. сферой, $n \geqslant 3$.

Если плюмбинг W^{4k} — *параллелизуем*, то на главной диагонали матрицы пересечений $2k$-мерных циклов стоят четные числа; в этом случае сигнатура матрицы пересечений делится на 8. Плюмбинг W^{4k} тогда и только тогда параллелизуем, когда все расслоения над S^{2k}, использованные при построении W^{4k}, явля-

ются стабильно тривиальными; напр., если все расслоения, используемые при построении W^{4k}, являются касательными расслоениями на диски над $2k$-мерными сферами, то плюмбинг W^{4k} параллелизуем. Плюмбинг W^{4k+2} тогда и только тогда параллелизуем, когда каждое расслоение E_i^{4k+2}, используемое в качестве блоков при построении плюмбинга W^{4k+2}, принадлежит к одному из двух типов: оно либо тривиально, либо является трубчатой окрестностью диагонали в произведении $S^{2k+1}\times S^{2k+1}$, то есть касательным расслоением на диски над S^{2k+1}. Если плюмбинг W^{4k+2} параллелизуем, то его матрица пересечений приводится к симплектическому виду, состоящему из блоков $\|{}_{-1}{}^{0}{}_{0}{}^{1}\|$, расположенных вдоль главной диагонали.

Среди плюмбингов особо выделяются многообразия Милнора размерности $4k$, $k>1$ и многообразия Кервера размерности $4k+2$, $k\geqslant 0$. Многообразия Милнора строятся следующим образом: в качестве блоков берутся несколько экземпляров трубчатой окрестности E^{4k} диагонали в произведении $S^{2k}\times S^{2k}$; в качестве графа T берется граф следующего вида:



При этих условиях многообразие $W^{4k}(\Gamma)$ реализует квадратичную форму 8-го порядка, у которой на главной диагонали стоят двойки, а сигнатура равна 8.

Для построения многообразий Кервера K^{4k+2} берутся два экземпляра блока, получающегося как трубчатая окрестность E^{4k+2} диагонали в произведении $S^{2k+1}\times S^{2k+1}$. Склеиваются они так, что матрица пересечений имеет вид $\|{}_{-1}{}^{0}{}_{0}{}^{1}\|$.

Край многообразия Милнора ∂M^{4k} (сферы Милнора) всегда недиффеоморфен стандартной сфере S^{4k-1}; относительно многообразий Кервера этот вопрос до конца не решен (1978). Если $2k+1\neq 2^i-1$, то край многообразия Кервера ∂K^{4k+2} (сферы Кервера) всегда нетривиален, если же $2k+1=2^i-1$, то для $1\leqslant i\leqslant b$ получится стандартная сфера S^{4k+1}, для остальных i решение неизвестно (см. *Кервера инвариант*).

Многообразия Кервера K^{4k+2} размерности 2, 6, 14 представляют собой произведения сфер $S^{2k+1}\times S^{2k+1}$, $k=0, 1, 3$, с выкинутой открытой клеткой, а все другие многообразия Кервера не гомеоморфны произведениям сфер с выкинутой клеткой.

В топологии многообразий часто используются PL-многообразия $\hat{M}^{4k}$ и $\hat{K}^{4k}$, полученные добавлением конуса над краем, соответственно, многообразий Милнора M^{4k} и многообразий Кервера K^{4k+2}, а также два 4-мерных гладких многообразия — одно из них $W^4(T)$ (T не обязательно дерево) является параллелизуемым односвязным многообразием, край к-рого диффеоморфен 3-сфере, а сигнатура равна 16. Такое многообразие $P^4=W^4(T)$ наз. многообразием (или плюмбингом) Рохлина. В известных примерах многообразий Рохлина минимальное значение двумерного числа Бетти равно 22. Другое многообразие есть $W^4(\Gamma)$, где Γ — граф, указанный выше, в качестве блока берется трубчатая окрестность диагонали в произведении $S^2\times S^2$. Край получающегося многообразия $Q^4=W^4(\Gamma)$ есть неодносвязное *додекаэдра пространство*.

Трехмерные Д. м. $M^3=\partial W^4(T)$ принадлежат к так называемым многообразиям Зейферта. Не всякое 3-мерное многообразие является Д. м., и для Д. м. справедлива гипотеза Пуанкаре. В частности, 3-мерные *линзовые пространства* получаются от склейки только двух блоков.

Лит.: [1] Kervaire M., «Comment. math. helv.», 1960, v. 34, p. 257—70; [2] Kervaire M., Milnor J., «Ann. Math.», 1963, v. 77, № 3, p. 504—37; [3] Милнор Дж., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 6, с. 41—54; [4] Hirzebruch F., Neumann W. D., Koh S. S., Differentiable manifolds and quadratic forms, N. Y., 1971; [5] Browder W., Surgery on simply-conuected manifolds, B., 1972.

М. А. Штанько.

ДРЕЙФОВЫЕ УРАВНЕНИЯ — приближенные уравнения движения заряженной частицы в электрическом и магнитном полях, полученные с помощью усреднения по быстрому вращению частицы под действием магнитного поля. Д. у. справедливы в том случае, когда магнитное поле $\vec{B}$ медленно меняется в пространстве и во времени, а электрич. поле $\vec{E}$ мало по сравнению с магнитным:

$$\frac{1}{\omega_B B}\frac{\partial B}{\partial t} \sim \varepsilon, \quad \frac{\rho_B}{B}|\nabla B| \sim \varepsilon, \quad \frac{cE}{vB} \sim \varepsilon. \tag{1}$$

Здесь ε — малый параметр, $\omega_B = eB/mc$ — ларморовская частота, $\rho_B = v_\perp/|\omega_B|$ — ларморовский радиус, v — величина скорости частицы, $v_\perp$ — составляющая скорости в направлении, перпендикулярном магнитному полю. Д. у. получаются из полных уравнений движения разложением по степеням ε при помощи метода усреднения [1]. Они имеют следующий вид:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = V_\parallel \frac{\vec{B}}{B} + \vec{V}_{\text{др.}}, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(V_\perp^2 + V_\parallel^2\right)\right) = e\vec{E}\frac{d\vec{R}}{dt} - \frac{mcV_\perp^2}{2B^2}\vec{B}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V_\perp^2}{B}\right) = 0, \tag{4}$$

где

$$\vec{V}_{\text{др.}} = \frac{c}{B^2}[\vec{E}\times\vec{B}] + \frac{mcV_\parallel^2}{eB^4}[\vec{B}\times(\vec{B}\nabla)\vec{B}] + \frac{mcV_\perp^2}{2eB^3}[\vec{B}\times\nabla B].$$

Система (2) — (4), называемая дрейфовой системой, записана относительно вспомогательных усредненных переменных $\vec{R}$, $V_\perp$, $V_\parallel$, связанных с исходными переменными $\vec{r}$, $\vec{v}$ определенными соотношениями. Дрейфовая скорость $\vec{V}_{\text{др.}}$ в уравнении (2) описывает медленное движение по усредненной траектории в направлении, перпендикулярном магнитному полю:

$$V_{\text{др.}} \sim \varepsilon v, \quad \vec{V}_{\text{др.}}\vec{B} = 0.$$

Уравнения (3), (4) имеют второй порядок точности по ε и определяют величины $V_\perp$ и $V_\parallel$ с точностью до членов первого порядка в течение промежутка времени t, содержащего много ларморовских периодов $t \sim 1/\varepsilon|\omega_B|$. Уравнение (2) имеет первый порядок точности по ε.

Величина $\mu = V_\perp^2/B$, к-рая представляет собой интеграл дрейфовой системы (2) — (4), является приближенным интегралом истинного движения. Она наз. адиабатическим инвариантом. В статическом случае, когда $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$ и $\vec{E} = -\nabla\varphi$, уравнение (3) допускает интеграл энергии

$$\frac{1}{2}m\left(V_\perp^2 + V_\parallel^2\right) + e\varphi = \mathrm{const}$$

для усредненного движения.

Возможно обобщение дрейфовой системы на релятивистский случай (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 3 изд., М., 1963; [2] Сивухин Д. В., в кн.: Вопросы

теории плазмы, в. 1, М., 1963, с. 7—97; [3] Морозов А. И., Соловьев Л. С., там же, в. 2, М., 1963, с. 177—261.

Д. П. Костомаров.

ДРОБНАЯ ДОЛЯ ЧИСЛА — функция, определенная для всех действительных чисел x и равная разности между x и целой частью (антье) $[x]$ числа x. Дробная доля числа x обычно обозначается знаком $\{x\}$. Напр., $\{1{,}03\}=0{,}03$; $\{-1{,}25\}=0{,}75$; $\{\pi\}=\{3{,}14\ldots\}=0{,}14\ldots$

С. А. Степанов.

ДРОБНАЯ КОНГРУЭНЦИЯ — конгруэнция η/θ факторсистемы A/θ, определяемая формулой

$$[x]_\theta\,(\eta/\theta)\,[y]_\theta \Leftrightarrow x\eta y,$$

где η — некоторая конгруэнция *алгебраической системы* A, содержащая данную конгруэнцию θ, и $[a]_\theta = \{x\in A \mid x\theta a\}$. Факторсистема $(A/\theta)/(\eta/\theta)$ изоморфна системе A/η.

Д. М. Смирнов.

ДРОБНАЯ СТЕПЕНЬ линейного оператора A в комплексном банаховом пространстве E — функция $f(A)$ от этого оператора такая, что $f(z)=z^\alpha$. Если оператор A ограничен, и спектр его не содержит и не окружает нуля, то A^α определяется *Коши интегралом* по контуру, окружающему спектр A и не содержащему внутри себя нуль. Если A неограничен, то контур приходится брать бесконечным, и возникают вопросы об условиях сходимости интеграла. Если A имеет плотную в E область определения $D(A)$ и при $\lambda<0$ имеет резольвенту

$$R(\lambda,\ A)=(A-\lambda I)^{-1}$$

с оценкой

$$\|R(-s,\ A)\|\leqslant M(1+s)^{-1},\quad s>0, \tag{1}$$

то

$$A^{-\alpha}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^{-\alpha}R(\lambda,\ A)\,d\lambda,$$

где Γ состоит из сторон угла, строящегося по M. Операторы $A^{-\alpha}$ ограничены и $A^{-\alpha}x\to x$ при любом $x\in E$ и $\alpha\to 0$. Положительные степени определяются так: $A^\alpha=(A^{-\alpha})^{-1}$; они уже являются неограниченными. При любых действительных α и β выполнено основное свойство степеней

$$A^\alpha A^\beta x=A^\beta A^\alpha x=A^{\alpha+\beta}x$$

для $x\in D(A^\gamma)$ и $\gamma=\max\{\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\}$. При $0<\alpha<1$ $(A^\alpha)^\beta=A^{\alpha\beta}$. При любых $\alpha<\beta<\gamma$ и $x\in D(A^\gamma)$

$$\|A^\beta x\|\leqslant C(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\,\|A^\alpha x\|^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}\,\|A^\gamma x\|^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}$$

(неравенство моментов). Полугруппа степеней $A^{-\alpha}$ допускает расширение до полугруппы A^{-z}, аналитической в правой полуплоскости.

Ряд приведенных свойств Д. с. обобщается на случай, когда A не имеет ограниченного обратного и справедлива оценка $\|R(-s,\ A)\|\leqslant Ms^{-1}$, $s>0$. При условии (1) и при $0<\alpha<1$

$$A^{-\alpha}=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty s^{-\alpha}R(-s,\ A)\,ds.$$

Если оператор B — производящий оператор сжимающей полугруппы $U(t)$, то

$$(-B)^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}U(t)\,dt.$$

Из условия (1) не вытекает, что $-A$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы, но оператор $-A^\alpha$ при $\alpha\leqslant 1/2$ является производящим оператором аналитич. полугруппы.

Оператор B подчинен оператору A, если $D(B)\supset D(A)$ и $\|Bx\|\leqslant c\|Ax\|$, $x\in D(A)$. Если B подчинен A и резольвенты обоих операторов обладают свойством (1), то B^α подчинен A^β при $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1$.

Если A — положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, то его Д. с. определяется через спектральное разложение

$$A^\alpha = \int_0^\infty \lambda^\alpha \, dE_\lambda.$$

В неравенстве моментов для такого оператора константа $c(\alpha, \beta, \gamma)=1$. Пусть A и B — два самосопряженных положительных оператора, действующие в гильбертовых пространствах H и H_1 соответственно. Если T — такой ограниченный линейный оператор из H в H_1 с нормой M, что $TD(A)\subset D(B)$ и $\|BTx\|\leqslant M_1\|Ax\|$, $x\in D(A)$, то $TD(A^\alpha)\subset D(B^\alpha)$ и

$$\|B^\alpha Tx\| \leqslant M^{1-\alpha}M_1^\alpha \|A^\alpha x\|, \quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

(неравенство Хайнца). В частности, при $H=H_1$ и $T=I$ из подчиненности B оператору A следует подчиненность B^α оператору A^α при $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Д. с. операторов применяются при исследовании нелинейных уравнений. Они детально изучены для операторов, порожденных эллиптич. краевыми задачами.

Лит.: [1] Функциональный анализ. [Справочная математическая библиотека], 2 изд., М., 1972; [2] Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967; [3] Сили Р., «Математика», 1968, т. 12, № 1, с. 96—112.

С. Г. Крейн.

ДРОБНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ — распространение операций интегрирования и дифференцирования на случай дробных порядков. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, $I_1^a f(x)$ — интеграл от f по $[a, x]$, а $I_\alpha^a f(x)$ — интеграл от $I_{\alpha-1}^a f(x)$ по $[a, x]$, $\alpha=2, 3, \ldots$. Имеет место соотношение

$$I_\alpha^a f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \quad a\leqslant x\leqslant b, \qquad (1)$$

где $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$ — гамма-функция. Правая часть в (1) имеет смысл при всех $\alpha>0$. Соотношение (1) определяет дробный интеграл (или интеграл Римана — Лиувилля) порядка α от f с началом в точке a. Оператор I_z^a при комплексных значениях параметра z изучался Б. Риманом (B. Riemann, 1847). Оператор I_α^a линеен и обладает полугрупповым свойством:

$$I_\alpha^a \left[I_\beta^a f(x)\right] = I_{\alpha+\beta}^a f(x).$$

Операция, обратная дробному интегрированию, носит название дробного дифференцирования: если $I_\alpha f = F$, то f есть дробная производная порядка α от F. При $0<\alpha<1$ имеет место формула Маршо:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \left\{ \frac{F(x)-F(x-t)}{t^{1+\alpha}} \right\} dt.$$

Понятие Д. и. и д. впервые ввел Ж. Лиувилль (J. Liouville, 1832), в частности он рассмотрел оператор $I_\alpha^{-\infty} = I_\alpha$, $\alpha>0$:

$$I_\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt$$

(при соответствующих ограничениях на функцию f; см. [1], где приведены также оценки оператора I_α в L_p).

Для интегрируемой 2π-периодической функции $f(x)$ с нулевым средним значением по периоду удобно (см. [2]) определение, предложенное Г. Вейлем (H. Weyl, 1917): если

$$f(x) \sim \sum\nolimits_{|n|>0} c_n e^{inx} = \sum\nolimits' c_n e^{inx},$$

то интеграл Вейля $f_\alpha(x)$ порядка $\alpha>0$ функции f определяется формулой

$$f_\alpha(x) \sim \sum{}' \frac{c_n e^{inx}}{(in)^\alpha}; \qquad (2)$$

производная f^β порядка $\beta>0$ определяется при этом равенством

$$f^\beta(x) = \frac{d^n}{dx^n} f_{n-\beta}(x),$$

где n — наименьшее целое, большее β (отметим, что $f_\alpha(x)$ совпадает с $I_\alpha f(x)$).

Перечисленные определения получили дальнейшее развитие в рамках теории обобщенных функций. Для периодических обобщенных функций

$$f \sim \sum{}' c_n e^{inx}$$

операция дробного интегрирования $I_\alpha f = f_\alpha$ выполнима по формуле (2) для любых действительных α (при отрицательных α $I_\alpha f$ совпадает с дробной производной порядка α) и обладает групповым свойством по параметру α.

В n-мерном пространстве X аналогом оператора дробного интегрирования является риссов потенциал (или интеграл типа потенциала)

$$R_\alpha f(x) = \pi^{\alpha-n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_X \frac{f(t)}{|x-t|^{n-\alpha}}\, dt.$$

Обратная к R_α операция наз. риссовой производной порядка α.

Лит.: [1] Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965; [3] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962; [4] Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966. *П. И. Лизоркин.*

ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ — функция вида

$$w = L(z) = \frac{a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n + b}{c_1 z_1 + \ldots + c_n z_n + d},$$

где $z=(z_1, \ldots, z_n)$ — комплексные или действительные переменные, a_j, b, c_j, d — комплексные или действительные коэффициенты, $|c_1|+\ldots+|c_n|+|d|>0$. Если $|c_1|=\ldots=|c_n|=0$, то Д.-л. ф. является целой линейной функцией; если ранг матрицы $A=\left\|\begin{matrix} a_1 & \ldots & a_n & b \\ c_1 & \ldots & c_n & d \end{matrix}\right\|$ равен единице, то $L(z)$ — постоянная. Собственно Д.-л. ф. получается, если $|c_1|+\ldots+|c_n|>0$ и ранг A равен двум; ниже эти условия предполагаются выполненными.

В случае $n=1$ и действительных $a_1=a$, $c_1=c$, $z_1=z$ график Д.-л. ф. есть равнобочная гипербола с асимптотами $z=-d/c$ и $w=a/c$. В случае $n=2$ и действительных a_1, a_2, b, c_1, c_2, d, z_1, z_2 график Д.-л. ф. есть гиперболич. параболоид.

В случае $n=1$ Д.-л. ф. $L(z)$ есть аналитич. функция комплексного переменного z всюду в расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$, за исключением точки $z=-d/c$, в к-рой $L(z)$ имеет простой полюс. При $n\geqslant 1$ Д.-л. ф. $L(z)$ есть мероморфная функция в пространстве $\mathbb{C}^n$ комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, имеющая полярным множеством множество

$$\{z\in\mathbb{C}^n;\ c_1 z_1+\ldots+c_n z_n+d=0\}.$$

См. также *Дробно-линейное отображение.*

Е. П. Долженко, Е. Д. Соломенцев.

ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, дробно-линейное преобразование,— отображе-

ние комплексного пространства $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, осуществляемое *дробно-линейными функциями*.

В случае комплексной плоскости $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$ — это отличное от константы отображение вида

$$z \longrightarrow w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad (1)$$

где $ad - bc \neq 0$; часто применяется унимодулярная нормировка $ad - bc = 1$. Всякое Д.-л. о. доопределяется соответствиями $\infty \to a/c$ и $-d/c \to \infty$ до взаимно однозначного отображения расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя. Простейшими среди Д.-л. о. являются линейные: $z \to w = \tilde{a}z + \tilde{b}$, получающиеся при $c = 0$. Всякое нелинейное Д.-л. о. представимо в виде суперпозиции двух линейных отображений и отображения L_0: $z \to w = 1/z$. Свойства Д.-л. о. L_0 становятся наглядными на *Римана сфере*, так как при стереографич. проекции ему соответствует поворот сферы на 180° вокруг диаметра, проходящего через образы точек $\pm 1 \in \mathbb{C}$.

Основные свойства. Д.-л. о. отображает взаимно однозначно и конформно $\overline{\mathbb{C}}$ на себя. Круговое свойство: при Д.-л. о. любая окружность на $\overline{\mathbb{C}}$ (т. е. окружность на $\mathbb{C}$ или прямая, пополненная точкой ∞) переходит в окружность на $\overline{\mathbb{C}}$. Инвариантность отношения симметрии двух точек: пара точек z, z^*, симметричных относительно какой-либо окружности на $\overline{\mathbb{C}}$, при Д.-л. о. переходит в пару точек w, w^*, симметричных относительно образа этой окружности. Двойное отношение четырех точек на $\overline{\mathbb{C}}$ инвариантно относительно Д.-л. о., т. е. если точки ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 при Д.-л. о. переходят соответственно в ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4, то

$$\frac{\xi_3-\xi_1}{\xi_3-\xi_2} : \frac{\xi_4-\xi_1}{\xi_4-\xi_2} = \frac{\zeta_3-\zeta_1}{\zeta_3-\zeta_2} : \frac{\zeta_4-\zeta_1}{\zeta_4-\zeta_2}. \qquad (2)$$

Для любых заданных троек ξ_1, ξ_2, ξ_3 и ζ_1, ζ_2, ζ_3, попарно различных точек на $\overline{\mathbb{C}}$, существует и притом только одно Д.-л. о., переводящее соответственно $\xi_k \to \zeta_k$, $k = 1, 2, 3$. Это Д.-л. о. можно найти из уравнения (2), подставляя в него z и w соответственно вместо ξ_4 и ζ_4. Групповое свойство: совокупность всех Д.-л. о. образует некоммутативную группу относительно суперпозиции $(L_1 L_2)(z) = L_1(L_2(z))$ с единицей $E(z) = z$. Свойство универсальности: всякий конформный автоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$ есть Д.-л. о., и, таким образом, группа всех Д.-л. о. совпадает с группой $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{C}}$ всех конформных автоморфизмов $\overline{\mathbb{C}}$.

Все конформные автоморфизмы единичного круга $B = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ образуют подгруппу $\mathrm{Aut}\,B$ группы $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{C}}$, состоящую из Д.-л. о. вида:

$$z \longrightarrow w = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}, \qquad |\alpha| < 1, \quad \mathrm{Im}\,\theta = 0.$$

Так же обстоит дело с конформными автоморфизмами верхней полуплоскости $\{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\,z > 0\}$, имеющими вид:

$$z \longrightarrow w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \mathrm{Im}\,(a,\ b,\ c,\ d) = 0, \quad ad - bc > 0.$$

Все конформные гомеоморфизмы верхней полуплоскости на единичный круг имеют вид:

$$z \longrightarrow w = e^{i\theta}\frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}}, \quad \mathrm{Im}\,\beta > 0, \quad \mathrm{Im}\,\theta = 0.$$

Исключив тождественное Д.-л. о. $E(z)$, можно сказать, что Д.-л. о. имеет не более двух различных неподвижных точек ξ_1, ξ_2 на $\overline{\mathbb{C}}$. В случае двух различных неподвижных точек $\xi_1 \neq \xi_2$ семейство окружностей Σ, проходящих через ξ_1 и ξ_2, переводится Д.-л. о. (1) само в себя. При этом семейство Σ' всех окружностей,

ортогональных к окружностям Σ, также переходит само в себя. Здесь возможны в свою очередь три случая.

1) Каждая окружность Σ переходит сама в себя; такое Д.-л. о. наз. гиперболическим, и оно представимо в нормальной форме:

$$\frac{w-\xi_1}{w-\xi_2}=\mu\,\frac{z-\xi_1}{z-\xi_2}, \qquad (3)$$

где множитель Д.-л. о. $\mu>0$, $\mu\neq 1$, ∞. Унимодулярное Д.-л. о. (1) является гиперболическим тогда и только тогда, когда $a+d\in\mathbb{R}$ и $|a+d|>2$.

2) Каждая окружность Σ' переходит сама в себя; такое Д.-л. о. наз. эллиптическим и в нормальной форме (3) характеризуется множителем μ таким, что $|\mu|=1$, $\mu\neq 1$. Унимодулярное Д.-л. о. (1) является эллиптическим тогда и только тогда, когда $a+d\in\mathbb{R}$, $|a+d|<2$.

3) Ни одна из окружностей семейств Σ и Σ' не переходит сама в себя; такое Д.-л. о. называется локсодромическим и в нормальной форме (3) характеризуется множителем $\mu\in\mathbb{C}$, $|\mu|\neq 1$, таким, что либо $\operatorname{Im}\mu\neq 0$, либо $\mu<0$. Унимодулярное Д.-л. о. (1) является локсодромическим тогда и только тогда, когда $a+d\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Если же две неподвижные точки сливаются в одну ξ_1, то Д.-л. о. наз. параболическим. Семейство Σ состоит при этом из всех окружностей, имеющих в ξ_1 общую касательную; каждая окружность Σ переходит сама в себя. Нормальная форма параболич. Д.-л. о. имеет вид либо

$$\frac{1}{w-\xi_1}=\frac{1}{z-\xi_1}+\alpha, \quad \alpha\in\mathbb{C}, \quad \alpha\neq 0,$$

при $\xi_1\neq\infty$, либо

$$w=z+\alpha, \quad \alpha\in\mathbb{C}, \quad \alpha\neq 0,$$

при $\xi_1=\infty$. Унимодулярное Д.-л. о. (1) является параболическим тогда и только тогда, когда $a+d=\pm 2$.

Благодаря перечисленным богатым элементарным свойствам, Д.-л. о. находят самое широкое применение во всех разделах теории функций комплексного переменного и в различных прикладных дисциплинах. В частности, Д.-л. о. позволяют построить модель *Лобачевского геометрии*.

Среди подгрупп общей группы всех Д.-л. о. наиболее важны, с точки зрения их применений для аналитич. теории дифференциальных уравнений, теории автоморфных функций и других вопросов анализа, дискретные группы Г Д.-л. о. Элементарные дискретные группы Д.-л. о.— это конечные группы; они изоморфны либо циклическим группам вращений сферы Римана, либо группам вращений правильных многогранников. Дискретные группы Д.-л. о. Г, имеющие инвариантную окружность γ на $\overline{\mathbb{C}}$, общую для всех преобразований Г, причем внутренность γ при всех преобразованиях Г переходит сама в себя, наз. *фуксовыми группами*. Локсодромич. Д.-л. о. не может быть фуксовым. Исторически первым примером фуксовой группы была *модулярная группа*, возникшая в теории эллиптич. функций (см. также *Модулярная функция*). Модулярная группа состоит из всех унимодулярных Д.-л. о. (1), у к-рых коэффициенты a, b, c, d — целые действительные числа; действительная ось инвариантна относительно модулярных Д.-л. о. Более сложны и менее изучены неэлементарные группы Д.-л. о., не являющиеся фуксовыми,— *клейновы группы*.

Д.-л. о. комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, наз. невырожденное отображение

$$z=(z_1,\ \ldots,\ z_n)\longrightarrow w=(w_1,\ \ldots,\ w_n)=(L_1(z),\ \ldots,\ L_n(z)),$$

осуществляемое дробно-линейными функциями

$$L_k(z)=\frac{a_{1k}z_1+\ldots+a_{nk}z_n+b_k}{c_{1k}z_1+\ldots+c_{nk}z_n+d_k},\quad k=1,\ \ldots,\ n.$$

Наиболее важны те Д.-л. о. $\mathbb{C}^n$, к-рые продолжаются в какую-либо компактификацию $\mathbb{C}^n$. Так, в пространство теории функций $\overline{\mathbb{C}^n}$ продолжаются все линейные преобразования, переставляющие координаты, а также Д.-л. о. вида

$$z=(z_1,\ \ldots,\ z_n)\longrightarrow w=(L_1(z_1),\ \ldots,\ L_n(z_n)),$$

где $L_k(z_k)$ — Д.- л. о. вида (1) на плоскости z_k. Порождаемая перечисленными отображениями группа Д.-л. о. совпадает с группой $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbb{C}^n}$ всех биголоморфных автоморфизмов компактификации $\overline{\mathbb{C}^n}$. Соответствующая подгруппа $\mathrm{Aut}\,U^n$ с

$$L_k(z_k)=e^{i\vartheta_k}\frac{z_k-\alpha_k}{1-\overline{\alpha}_k z_k},\quad |\alpha_k|<1,\quad \mathrm{Im}\,\vartheta_k=0,$$

исчерпывает все автоморфизмы единичного поликруга $U^n=\{z\in\mathbb{C}^n;\ |z_j|<1,\ j=1,\ \ldots,\ n\}$. В проективное замыкание $\mathbb{C}P^n$ пространства $\mathbb{C}^n$ продолжаются Д.-л. о., у к-рых

$$L_k(z)=\frac{a_{1k}z_1+\ldots+a_{nk}z_n+b_k}{c_1z_1+\ldots+c_nz_n+d}=\frac{l_k(z)}{l(z)},\qquad(4)$$

в однородных координатах это продолжение имеет вид

$$(z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_n)\longrightarrow\left(z_0l\left(\frac{z}{z_0}\right),\ z_0l_1\left(\frac{z}{z_0}\right),\ \ldots,\ z_0l_n\left(\frac{z}{z_0}\right)\right).$$

Этими отображениями исчерпывается группа $\mathrm{Aut}\,\mathbb{C}P^n$ всех биголоморфных автоморфизмов $\mathbb{C}P^n$. Автоморфизмы единичного шара $B^n=\{z\in\mathbb{C}^n;\ |z|<1\}$ образуют подгруппу $\mathrm{Aut}\,B^n$ группы $\mathrm{Aut}\,\mathbb{C}P^n$, состоящую из всех Д.-л. о. вида (4), у к-рых коэффициенты подчинены известным дополнительным условиям (см. [2], ч. 2).

Лит.: [1] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 11 изд., М., 1967; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [3] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1, М., 1962; [4] Форд Л. Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.— Л., 1936.

Е. П. Долженко, Е. Д. Соломенцев, Е. М. Чирка.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ — см. *Рациональная функция.*

ДРОБНЫЙ ИДЕАЛ — подмножество Q поля частных K коммутативной области целостности R, имеющее вид $Q=a^{-1}I$, где $a\in R$, $a\neq0$, I — идеал кольца R. В других терминах Q есть R-подмодуль поля K, все элементы к-рого допускают общий знаменатель, т. е. существует элемент $a\in R$, $a\neq0$, такой, что $ax\in R$ для всех $x\in Q$. Д. и. образуют относительно умножения полугруппу $\mathfrak{A}$ с единицей R. Для *дедекиндовых колец* и только для них эта полугруппа является группой. Обратимые элементы полугруппы $\mathfrak{A}$ наз. обратимыми идеалами. Каждый обратимый идеал имеет конечный базис над R.

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963; [2] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

Л. А. Бокуть.

ДРОБНЫХ ШАГОВ МЕТОД — метод построения экономичных (в смысле числа операций) устойчивых разностных схем для решения дифференциальных уравнений математич. физики.

При увеличении размерности задачи число операций для получения численного решения растет как вследствие роста числа точек, так и вследствие логич. трудностей составления программы расчета. Для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu,\qquad(1)$$

где $L = L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — дифференциальный оператор, $u = u(x, t)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, абсолютно устойчивые неявные схемы простой аппроксимации

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_0 u^n, \qquad (2)$$

$$\Lambda_0 \sim L_0, \ \Lambda_1 \sim L_2, \ L_0 + L_1 = L,$$

становятся неэффективными в случае многомерных задач. В одних случаях требуется использовать слишком мелкий шаг по времени, в других нахождение каждого u^{n+1} требует $\mathrm{const} \cdot N^{\alpha(m)}$ операций, где N — число точек на одно измерение, m — число пространственных измерений, а $\alpha(m)$ сильно растет с увеличением m.

Для получения экономичных устойчивых разностных схем предложены методы, основанные на следующих идеях:

1) расщепления разностных схем;
2) приближенной факторизации;
3) расщепления (слабой аппроксимации) дифференциальных уравнений.

В случае уравнения (1) соответствующие разностные схемы имеют вид (для простоты взяты два дробных шага и рассматривается периодич. задача Коши):

схема расщепления:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2}-u^n}{\tau} &= \Lambda_{11} u^{n+1/2} + \Lambda_{01} u^n, \\ \frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_{12} u^{n+1} + \Lambda_{02} u^{n+1/2}; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

схема приближенной факторизации:

$$(E - \tau\Lambda_{11})(E - \tau\Lambda_{12})\, u^{n+1} = (E + \tau\Omega)\, u^n, \qquad (4)$$

$$\Lambda_{11} + \Lambda_{12} = \Lambda_1, \quad \Omega \sim \Lambda_0$$

схема слабой аппроксимации:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)\, u = Lu, \quad L = L_0 + L_1, \qquad (5)$$

$\alpha_1(t, \tau) = 2$, $\alpha_2(t, \tau) = 0$ при $t \in \left[n\tau, \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau\right]$,

$\alpha_1(t, \tau) = 0$, $\alpha_2(t, \tau) = 2$ при $t \in \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau, (n+1)\tau\right]$.

В случае схем (3) и (4) обращение оператора $E - \tau\Lambda_1$ заменяется обращением оператора $(E - \tau\Lambda_{11})(E - \tau\Lambda_{12})$, т. е. последовательным обращением операторов $E - \tau\Lambda_{11}$, $E - \tau\Lambda_{12}$, вообще говоря, более простой структуры.

Трактовка (5) позволяет рассматривать схему расщепления

$$\frac{u^{n+1/2}-u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1/2}, \quad \frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 u^{n+1}$$

как простую аппроксимацию уравнения (5), слабо аппроксимирующего уравнение (1).

Таким образом, в основе этих методов лежит представление сложных операторов через простейшие, при этом интегрирование исходного уравнения сводится к интегрированию уравнений более простой структуры, а методы дробных шагов обязаны удовлетворять условиям аппроксимации и устойчивости только в окончательном итоге (при записи их в «целых» шагах). Методом расщепления решаются многие сложные задачи математич. физики.

Большое развитие получили схемы расщепления повышенного порядка точности. К одной из модификаций метода расщепления принадлежит метод «частиц в ячейках»: здесь расщепление производится по физическим процессам и не связано с понижением размерности операторов.

Лит.: [1] Яненко Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967; [2] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971. *Н. Н. Яненко.*

ДРОБОВОЙ ЭФФЕКТ — математическое описание флуктуаций напряжений на выходе линейной системы, на входе к-рой действуют случайные возмущения, возникающие в случайные моменты времени. Если $W(t,\ \tau)$ — выходная реакция системы в момент времени t на единичный импульс, приложенный в момент времени $\tau \leqslant t$, то Д. э. может быть описан случайным процессом

$$X(t) = \sum_{\{k:\tau_k \leqslant t\}} \alpha_k W(t,\ \tau_k),$$

где $\ldots < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < \ldots$ — моменты поступления импульсов, а α_k — случайные величины, характеризующие величину интенсивностей импульсов. В частном случае, когда $W(t,\ \tau) = W(t-\tau)$, $W(s) = 0$, $s \leqslant 0$, величины α_k суть независимые одинаково распределенные случайные величины с конечной дисперсией, а $\ldots < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \ldots$ образуют *пуассоновский поток* событий с параметром λ, процесс $X(t)$ является стационарным в узком смысле процессом с

$$\mathsf{E}X(t) = \lambda \mathsf{E}\alpha_1 \int_0^\infty W(s)\, ds,$$

$$\mathsf{D}X(t) = \lambda \mathsf{E}\alpha_1^2 \int_0^\infty W^2(s)\, ds.$$

Лит.: [1] Лэнинг Дж. Х., Бэттин Р. Г., Случайные процессы в задачах автоматического управления, пер. с англ., М., 1958. *А. Н. Ширяев.*

ДРОБЬ арифметическая — число, состоящее из одной или из нескольких равных частей (долей) единицы. Д. изображается символом $\frac{a}{b}$ (или a/b), где a и b — целые числа. Числитель a Д. $\frac{a}{b}$ показывает число взятых долей единицы, разделенной на столько долей, какова величина знаменателя b. Д. можно рассматривать также, как частное от деления a на b.

Д. $\frac{a}{b}$ не меняется, если ее числитель и знаменатель умножить на одно и то же отличное от нуля целое число. Благодаря этому любые две Д. $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ можно привести к общему знаменателю, т. е. заменить $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ на равные им Д., имеющие один и тот же знаменатель. Кроме того, Д. можно сокращать, поделив ее числитель и знаменатель на одно и то же число, вследствие чего, всякую Д. можно представить в виде несократимой, т. е. такой, у к-рой числитель и знаменатель не имеют общих множителей.

Сумма и разность Д. $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$ с одинаковыми знаменателями определяются по правилу:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}.$$

Чтобы сложить или вычесть Д. с разными знаменателями, надо предварительно привести их к общему знаменателю. Обычно в качестве общего знаменателя дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ берется наименьшее общее кратное чисел b и d. Умножение и деление Д. производятся по правилам:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Д. $\frac{a}{b}$ наз. правильной, если ее числитель меньше знаменателя, и неправильной — в противном случае. Д. наз. десятичной, если ее знаменатель является степенью числа 10 (см. *Десятичная дробь*).

Формальное определение дробей. Д. могут быть определены как упорядоченные пары целых чисел (a, b), где $b \neq 0$, для к-рых задано отношение эквивалентности (отношение равенства Д.), а именно, считается, что $(a, b) = (c, d)$, если $ad = bc$. Кроме того, во множестве Д. определены операции сложения, вычитания, умножения и деления, подчиненные следующим правилам:

$$(a, b) \pm (c, d) = (ad \pm bc, bd),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd),$$

$$(a, b) : (c, d) = (ad, bc)$$

(таким образом, деление определено только в том случае, когда $c \neq 0$).

Подобное определение Д. удобно для обобщений и принято в современной алгебре (см. *Частных кольцо*).

С. А. Степанов.

ДРУЖЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА — пара натуральных чисел, каждое из к-рых равно сумме собственных делителей другого, т. е. делителей, отличных от самого числа. Определение Д. ч. имеется уже в «Началах» Евклида, а также в трудах Платона. Древним грекам была известна одна пара Д. ч.: 220 и 284; суммы их делителей соответственно равны

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$$

$$1+2+4+71+142=220.$$

Л. Эйлер (L. Euler) отыскал около 60 пар Д. ч. Несколько сот Д. ч. удалось найти с использованием ЭВМ. Неизвестно, однако, существует ли пара Д. ч., одно из которых четное, а другое нечетное.

А. И. Галочкин.

ДУАЛЬНАЯ АЛГЕБРА — топологическая алгебра, в к-рой для любого замкнутого левого (соответственно правого) идеала I левый аннулятор правого (соответственно правый аннулятор левого) аннулятора идеала I совпадает с I. Наибольший интерес представляют вопросы реализации Д. а. в виде алгебр операторов и установление связей между свойствами аннуляторности и дуальности топологич. алгебр различных классов, в частности комплексных *банаховых алгебр* с инволюцией, в том числе *гильбертовых алгебр* и *C^*-алгебр*.

C^*-алгебра вполне непрерывных линейных операторов в гильбертовом пространстве и гильбертова алгебра операторов Гильберта — Шмидта в гильбертовом пространстве — Д. а. Всякая дуальная банахова алгебра, являющаяся *C^*-алгеброй*, изоморфна пополнению алгебраической прямой суммы алгебр вполне непрерывных операторов в нек-рых гильбертовых пространствах. Всякая полная гильбертова алгебра дуальна; она изоморфна прямой ортогональной сумме гильбертовых алгебр операторов Гильберта — Шмидта в нек-рых гильбертовых пространствах. Всякая полупростая Д. а. с непрерывным квазиобратным — пополнение прямой суммы всех своих минимальных замкнутых двусторонних идеалов, к-рые являются топологически простыми Д. а.; топологически простая Д. а. A может быть реализована как алгебра непрерывных линейных операторов в нек-ром топологическом векторном пространстве E, содержащая множество $K(E)$ конечномерных непрерывных линейных операторов в E; если A — банахова алгебра, то образ A при этой реализации содержится в равномерном замыкании $F(E)$ алгебры $K(E)$. С другой стороны, существует рефлексивное банахово пространство E такое, что (топологически простая, аннуляторная) банахова алгебра $F(E)$ не является дуальной.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [2] Davie A. M., «Bull. London Math. Soc.», 1973, v. 5, № 1, p. 79—80.

А. И. Штерн.

ДУАЛЬНАЯ ПАРА — пара (E, E') векторных пространств над одним и тем же полем вместе с невырожденной билинейной формой (x, x') на $E \times E'$. См. *Двойственность* в теории топологических векторных пространств. *М. И. Войцеховский.*

ДУБЛЕТ — упорядоченная пара гиперплоскостей n-мерного аффинного пространства. Задание Д. равносильно заданию *ковариантного вектора*. В центроаффинной геометрии Д. определяется единственной гиперплоскостью — краем Д. *М. И. Войцеховский.*

ДУБЛЬ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ — двулистная *накрывающая поверхность* W конечной римановой поверхности R. Каждой внутренней точке $p \in R$ ставится в соответствие пара точек p и $\tilde{p}$ Д. р. п. W; иными словами, над p расположены две сопряженные точки Д. р. п. p и $\tilde{p}$. Каждой точке q края R ставится в соответствие одна точка $q \in W$. При этом над каждой окрестностью внутренней точки $p \in R$ расположены две непересекающиеся окрестности точек p, $\tilde{p} \in W$. Если z — локальная униформизирующая в окрестности внутренней точки $p \in R$, то она же будет локальной униформизирующей в W-окрестности одной из двух сопряженных точек W, лежащих над p, скажем в W-окрестности точки $p \in W$; тогда в W-окрестности сопряженной точки $\tilde{p}$ униформизирующей является комплексно сопряженная $\bar{z}$ переменной z. Если z — локальная униформизирующая в точке q края R, то униформизирующей в лежащей над ней точке $q \in W$ является переменная, равная z на одном листе W и $\bar{z}$ — на другом.

Для случая компактной ориентируемой римановой поверхности R Д. р. п. W состоит просто из двух компактных ориентируемых римановых поверхностей, и поэтому в этом случае его рассмотрение интереса не представляет. Во всех остальных случаях Д. р. п. W — компактная ориентируемая риманова поверхность, что и позволяет упростить исследование нек-рых вопросов теории функций на R путем сведения их к исследованию функций на W. Род W равен $g+m-1$, где g — род R, m — число компонентов края R, предполагаемых невырожденными. Например, дублем односвязной плоской области является сфера, а дублем m-связной плоской области — сфера с $m-1$ ручками.

Аналитические *дифференциалы* на римановой поверхности R среди аналитич. дифференциалов на Д. р. п. W характеризуются тем, что они принимают сопряженные значения в сопряженных точках W и действительных значениях в точках $q \in W$, лежащих над точками края R.

Лит.: [1] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957; [2] Picard E., Traité d'analyse, t. 2, P., 1893.

Е. Д. Соломенцев.

ДУГА, простая дуга, жорданова дуга,— часть кривой, заключенная между двумя ее точками (и не содержащая кратных точек). Д. на плоскости определяют, задавая координаты ее точек как непрерывные функции $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ некоторого параметра t, $a \leqslant t \leqslant b$; при этом предполагают, что различным значениям t соответствуют различные точки.

ДУГА БЕЗ КОНТАКТА — гладкая кривая без самопересечений на фазовой плоскости двумерной *автономной системы* дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \qquad (*)$$

обладающая тем свойством, что в каждой точке этой кривой вектор фазовой скорости системы (см. *Фазовой скорости вектор*) определен, отличен от нуля и не является касательным вектором к кривой. Это понятие

было введено А. Пуанкаре (H. Poincaré, [1]); оно широко используется в качественной теории дифференциальных уравнений (см. [2]). Через любую обыкновенную точку произвольной траектории системы (*) можно провести, напр., отрезок без контакта достаточно малой длины. Д. б. к. характеризуется тем, что все траектории системы (*), пересекающие эту кривую, пересекают ее в одном направлении. Если производная в силу системы (*) (см. *Дифференцирование в силу системы*) в каждой точке гладкой кривой не обращается в нуль, то эта кривая есть Д. б. к. Замкнутая Д. б. к. наз. циклом без контакта.

Лит.: [1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М.— Л., 1947; [2] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961. *Н. Х. Розов.*

ДУГЛАСА ЗАДАЧА — см. *Плато задача.*

ДУФФИНГА УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$x''+kx'+\omega_0^2x+\alpha x^3=F\cos\omega t, \qquad (*)$$

где $k>0$, ω_0, α, F, ω — постоянные. Это уравнение представляет собой важный пример системы (с одной степенью свободы) с нелинейной восстанавливающей силой $f(x)=-\omega_0^2x-\alpha x^3$ и затуханием, совершающей вынужденные колебания при гармоническом внешнем воздействии $F(t)=F\cos\omega t$. При $\alpha>0$ говорят о жесткой упругой силе, а при $\alpha<0$ — о мягкой. Впервые исследование решений уравнения (*) предпринял Г. Дуффинг (G. Duffing, [1]).

Решения Д. у. в замкнутой форме получить не удается. Доказано, что оно имеет большое число разнообразных периодич. решений. В уравнении (*) возможны гармонич. колебания $x=A\cos\omega t$ с амплитудой $A=A(\omega)$, к-рая является функцией частоты (амплитудная кривая); для нек-рых значений частоты ω могут иметь место несколько видов колебаний, отличающихся по амплитуде. При определенных условиях в Д. у. возникают субгармонич. колебания с частотами ω/n, где n — целое число. Для изучения решений уравнения (*) часто применяются методы малого параметра.

Лит.: [1] Duffing G., Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung, Braunschweig, 1918; [2] Стокер Д., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, пер. с англ., 2 изд., М., 1953; [3] Хаяси Т., Нелинейные колебания в физических системах, пер. с англ., М., 1968. *Н. Х. Розов.*

ДУЭЛЬ — *игра с выбором момента времени*, описывающая конфликт следующего типа. Два противника могут стрелять друг в друга в течение нек-рого отрезка времени, располагая при этом оружием, имеющим ограниченное количество боеприпасов. Стратегиями игроков являются выборы моментов стрельбы. Функция выигрыша определяется как математич. ожидание нек-рой заданной случайной величины, принимающей конечное число значений, соответствующих возможным исходам Д. В зависимости от информации о действиях противника Д. делятся на шумные и бесшумные (тихие). Напр., если каждый из противников имеет по одному выстрелу, к-рые они могут произвести в интервале $[0, 1]$, функции меткости (т. е. вероятности попадания игроков I и II) соответственно равны $p(x)$ и $q(y)$, и если игрок I получает 1, когда он убивает II, теряет 1, когда гибнет сам, и выигрыш равен 0 в остальных случаях, то функции выигрыша $K(x, y)$ в шумной и бесшумной Д. равны:

шумная Д.

$$K(x,y)=\begin{cases} p(x)-(1-p(x))\sup\limits_{y>x}q(y), & x<y,\\ p(x)-q(x), & x=y,\\ -q(y)+(1-q(y))\sup\limits_{x>y}p(x), & x>y; \end{cases}$$

бесшумная Д.

$$K(x,\ y)=\begin{cases} p(x)-(1-p(x))\,q(y), & x<y,\\ p(x)-q(x), & x=y,\\ -q(y)+(1-q(y))\,p(x), & x>y.\end{cases}$$

Рассматриваются Д., в к-рых противники располагают несколькими выстрелами или же могут расходовать имеющиеся ресурсы непрерывно.

Лит.: [1] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, пер. с англ., М., 1964.

Е. Б. Яновская.

ДЬЁДОННЕ МОДУЛЬ — модуль M над кольцом Витта векторов $W(k)$, где k — совершенное поле характеристики $p>0$, снабженный двумя эндоморфизмами F_M и V_M, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$F_M(\omega m)=\omega^{(p)}F_M(m),$$

$$\omega V_M(m)=V_M(\omega^{(p)}m),$$

$$F_M(V_M(m))=V_M(F_M(m))=pm.$$

Здесь $m\in M$, $\omega=(a_0,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots)\in W(k)$, $\omega^{(p)}=(a_0^p,\ \ldots,\ a_n^p,\ \ldots)$. Эквивалентное определение состоит в том, что M есть левый модуль над кольцом D_k (кольцом Дьёдонне), порожденным $W(k)$ и двумя переменными F и V связанными соотношениями

$$F\omega=\omega^{(p)}F,\quad \omega V=V\omega^{(p)},$$

$$FV=VF=p,\quad \omega\in W(k).$$

Для любого целого $n>0$ существует изоморфизм

$$D_k/D_kV^n\simeq \mathrm{End}_k(W_{nk}),$$

где D_kV^n — левый идеал, порожденный V^n, а W_{nk} — усеченная k-схема Витта. Д. м. играют важную роль в классификации унипотентных коммутативных алгебраических групп (см. [1]). Д. м. наз. также левые модули над пополнением $\hat{D}_k$ кольца D_k относительно топологии, порождаемой степенями двустороннего идеала $(F,\ V)$ кольца D_k.

Лит.: [1] Dieudonné J., «Amer. J. Math.», 1957, v. 79, № 2, p. 331—88; [2] Demazure M., Gabriel P., Groupes algébriques, t.1, P.— Amst., 1970; [3] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 6, с. 3—90.

И. В. Долгачев.

ДЮАМЕЛЯ ИНТЕГРАЛ — представление решения *Коши задачи* или смешанной задачи с однородными граничными условиями для неоднородного линейного уравнения с частными производными через решение соответствующей задачи для однородного уравнения. Пусть для уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t,\ x)}{\partial t^2}+L[u(t,\ x)]=f(t,\ x);\quad t>0,\ x\in R_n, \qquad (1)$$

где L — линейный дифференциальный оператор с независящими от t коэффициентами, содержащий производные по t не выше 1-го порядка, поставлена задача Коши с начальными условиями:

$$u(t,\ x)\Big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial u(t,\ x)}{\partial t}\Big|_{t=0}=0. \qquad (2)$$

И пусть достаточно гладкая функция $v(t,\ x;\ \tau)$, $t\geqslant\tau$, $\tau\geqslant 0$, $x\in R_n$, является при $t>\tau$ решением однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v(t,\ x;\ \tau)}{\partial t^2}+L[v(t,\ x;\ \tau)]=0,$$

удовлетворяющим при $t=\tau$ начальным условиям:

$$v(t,\ x;\ \tau)\Big|_{t=\tau}=0,\quad \frac{\partial v(t,\ x;\ \tau)}{\partial t}\Big|_{t=\tau}=f(\tau,\ x).$$

Тогда решение задачи Коши (1), (2) выражается Д. и.:

$$u(t,\ x)=\int_0^t v(t,\ x;\ \tau)\,d\tau.$$

Сформулированное утверждение носит название п р и н-

ципа Дюамеля и является аналогом метода вариации постоянных.

Аналогичное построение можно провести и в случае задачи Коши с однородным начальным условием для уравнения

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + M[u(t, x)] = f(t, x); \quad t > 0; \; x \in R_n,$$

где M — линейный дифференциальный оператор с независящими от t коэффициентами, содержащий производные только по переменным x.

Решение задачи Коши с однородными начальными условиями для неоднородного уравнения теплопроводности выражается Д. и.

$$u(t, x) = \int_0^t \int_{R_n} [4\pi(t-\tau)]^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} f(\tau, \xi)\, d\xi\, d\tau,$$

а для волнового уравнения в случае $n=1$

$$u(t, x) = \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau, \xi)\, d\xi.$$

Д. и. наз. по имени Ж. Дюамеля (J. Duhamel).

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1966; [2] Йон Ф., Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, пер. с англ., М., 1958.

А. К. Гущин.

ДЮБУА-РЕЙМОНА ЛЕММА, Дю-Буа-Реймонда лемма: если $N(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[x_1, x_2]$ и если для всех дифференцируемых функций $\eta(x)$, обращающихся в нуль при $x=x_1$, $x=x_2$, справедливо соотношение:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta'(x)\, N(x)\, dx = 0,$$

то $N(x)=\text{const}$ на отрезке $[x_1, x_2]$; сформулирована П. Дюбуа-Реймоном [1].

Д.-Р. л. применяется в вариационном исчислении для вывода *Эйлера уравнения* в интегральной форме и при этом позволяет не предполагать заранее, что экстремум функционала достигается на дважды дифференцируемой кривой — достаточно предположения о непрерывной дифференцируемости.

Лит.: [1] Du Bois-Reymond P., «Math. Ann.», 1879, Bd 15, S. 313; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950.

И. Б. Вапнярский.

ДЮБУА-РЕЙМОНА ПРИЗНАК сходимости ряда: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, где a_n и b_n — комплексные числа, сходится, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ абсолютно сходится. Установлен П. Дюбуа-Реймоном (P. Du Bois Reymond).

Л. Д. Кудрявцев.

ДЮБУА-РЕЙМОНА ТЕОРЕМА о единственности разложения функции в ряд: если сумма всюду сходящегося тригонометрич. ряда интегрируема по Риману, то этот ряд является ее рядом Фурье; доказана П. Дюбуа-Реймоном [1]. Важный частный случай сходимости тригонометрич. ряда к нулю несколько ранее рассмотрел Г. Кантор [2].

Д.-Р. т. обобщалась в различных направлениях. Для интеграла Лебега с условием ограниченности суммы аналогичную теорему доказал А. Лебег (H. Lebesgue), без этого условия — Ш. Ж. Валле Пуссен (Ch. J. de la Vallée-Poussin) (см. [3], с. 200, 789). Имеются аналоги этой теоремы для интегралов Данжуа (см. [5]).

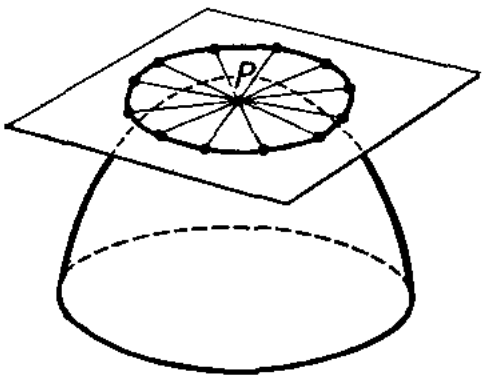
Другое направление обобщений заключается в ослаблении условия сходимости всюду. У. Юнг (W. Young) доказал, что можно пренебрегать счетным множеством (см. [3], с. 792), Д. Е. Меньшов показал, что нельзя пренебрегать любым множеством меры нуль (см. *Меньшова пример нуль-ряда* или [3], с. 804). О дальнейших

работах в этом направлении см. [3], [4]. Еще одно направление обобщений получается при замене требования сходимости требованием суммируемости. Впервые этим стал заниматься М. Рисс (M. Riesz, [4]).

Лит.: [1] Du Bois-Reymond P., «Abh. Akad. Wiss. Math.-Phys. Kl.», 1876, Bd 12, Tl 1, S. 117—66; [2] Cantor G., «Math. Ann.», 1872, Bd 5, S. 123—32; [3] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [4] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1—2, пер. с англ., М., 1965; [5] Виноградова И. А., Скворцов В. А., в сб.: Итоги науки. Математический анализ. 1970, М., 1971, с. 65—107.

Т. П. Лукашенко.

ДЮПЕНА ИНДИКАТРИСА, индикатриса кривизны,— плоская кривая, к-рая дает наглядное представление об искривленности поверхности в данной ее точке. Д. и. лежит в плоскости, касательной к поверхности S в точке P, и является совокупностью концов отрезков, отложенных от точки P в направлении l в касательной плоскости и имеющих длину, равную $1/\sqrt{|K_l|}$, где $|K_l|$ — абсолютная величина нормальной кривизны поверхности S в точке P в направлении l. Пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ — параметрич. уравнение поверхности S в окрестности точки P. Введем декартову систему координат на плоскости, касательной к S в точке P, принимая точку P за начало координат, векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ за базисные векторы этой координатной системы. Тогда уравнение Д. и. имеет вид



$$|Lx^2+2Mxy+Ny^2|=1,$$

где x и y — координаты точки Д. и., а L, M и N — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S, вычисленные в точке P. Д. и. представляет собой: а) эллипс, если P — *эллиптическая точка* (окружность, если P — *округления точка*); б) пару сопряженных гипербол, если P — *гиперболическая точка*; в) пару параллельных прямых, если P — *параболическая точка*. Д. и. названа по имени Ш. Дюпена (Ch. Dupin), впервые применившего эту кривую к исследованию поверхностей (1813).

Лит.: [1] К а г а н В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 2, М.— Л., 1948. *Е. В. Шикин.*

ДЮПЕНА ТЕОРЕМА: если даны три семейства поверхностей, образующих *триортогональную систему*, то линия пересечения каждых двух поверхностей различных семейств будет линией кривизны для каждой из этих поверхностей. Напр., софокусные центральные поверхности 2-го порядка пересекаются по линиям кривизны. Д. т. названа по имени Ш. Дюпена, к-рому принадлежит ее первое доказательство [1].

Лит.: [1] D u p i n C h., Développements de géométrie, P., 1813; [2] К а г а н В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1, М.— Л., 1947. *Е. В. Шикин.*

ДЮПЕНА ЦИКЛИДА — поверхность, оба семейства линий кривизны к-рой состоят из окружностей, так что она является частным случаем *каналовой поверхности*. Обе полости эволюты Д. ц. вырождаются в кривые Γ_1 и Γ_2, являющиеся фокальными кривыми 2-го порядка. Различают Д. ц. трех типов.

1) Эволюты — эллипс и гипербола, радиус-вектор соответствующей Д. ц.:

$$x=\frac{Vb\sin u}{U+V},\quad y=\frac{Ub\,\mathrm{sh}\,v}{U+V},\quad z=\frac{Va\cos u+Uc\,\mathrm{ch}\,v}{U+V},$$

где

$$U=c\cos u+d,\quad V=-a\,\mathrm{ch}\,v-d,\quad d=\mathrm{const}.$$

2) Эволюты — фокальные параболы, радиус-вектор:

$$x=\frac{Vu}{U+V},\quad y=\frac{Uv}{U+V},\quad z=\frac{V(2u^2-p^2)-U(2v^2-p^2)}{Up(U+V)},$$

где

$$U=\frac{2u^2+p+q}{up},\quad V=\frac{2v^2+p^2-q^2}{up},\quad q=\mathrm{const}.$$

3) Эволюты — окружность и прямая, соответствующая Д. ц.— *тор*.

Д. ц. являются алгебраическими поверхностями 4-го порядка в случаях 1) и 3) и 3-го порядка — в случае 2).

Лит.: [1] D u p i n C h., Développements de géométrie, P., 1813; [2] К л е й н Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.— Л., 1939. *И. Х. Сабитов.*

e, число *e*, — обозначение предела, к к-рому стремится выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при неограниченном возрастании n:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}718\,281\,828\,459\,045\ldots;$$

служит основанием натуральных логарифмов; *e* — трансцендентное число, что впервые доказано в 1873 Ш. Эрмитом (Ch. Hermite). Иногда число *e* малообоснованно называют непе́ровым числом.

С. А. Степанов.

ЕВКЛИДА АЛГОРИТМ — способ нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел, двух многочленов (и вообще, двух элементов *евклидова кольца*) или общей меры двух отрезков. Описан в геометрич. форме в «Началах» Евклида (3 в. до н. э.).

Для случая положительных целых чисел $a\geqslant b$ этот способ состоит в следующем. Деление с остатком числа a на число b всегда приводит к результату $a=nb+b_1$, где частное n — целое положительное число, а остаток b_1 либо 0, либо положительное число, меньшее b, $0\leqslant b_1<b$. Производится последовательное деление:

$$\left.\begin{aligned} a&=nb+b_1,\\ b&=n_1b_1+b_2,\\ b_1&=n_2b_2+b_3,\end{aligned}\right\}\qquad(*)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

где все n_i — положительные целые числа и $0\leqslant b_i<b_{i+1}$, до тех пор, пока не получится остаток, равный 0. Ряд равенств (*) закончится так:

$$b_{k-2}=n_{k-1}b_{k-1}+b_k,$$
$$b_{k-1}=n_kb_k.$$

Последний положительный остаток b_k в этом процессе и является наибольшим общим делителем чисел *a* и *b*.

Е. а. для многочленов или отрезков аналогичны Е. а. для целых чисел. В случае несоизмеримых отрезков применение Е. а. приводит к бесконечному процессу.

БСЭ-3.

ЕВКЛИДА ТЕОРЕМА о простых числах: множество простых чисел является бесконечным («Начала» Евклида, книга IX, теорема 20). Более точную количественную информацию о множестве простых чисел в натуральном ряде содержит *Чебышева теорема* о простых числах и асимптотич. закон *распределения простых чисел*.

С. М. Воронин.

ЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ — геометрия пространства, описываемого системой аксиом, первое систематическое (но не достаточно строгое) изложение к-рой было дано в «*Началах*» *Евклида*. Обычно пространство Е. г. описывается как совокупность объектов трех родов, называемых «точками», «прямыми», «плоскостями»; отношениями между ними: принадлежности, порядка («лежать между»), конгруэнтности (или понятием движения); непрерывностью. Особое место в аксиоматике Е. г. занимает аксиома о параллельных (*пятый постулат*). Первая достаточно строгая аксиоматика Е. г. была предложена Д. Гильбертом (D. Hilbert, см. *Гильберта система аксиом*). Существуют модификации системы аксиом Гильберта и другие ва-

рианты аксиоматики Е. г. Напр., в *векторно-точечной аксиоматике* за одно из основных понятий принято понятие вектора; в основу аксиоматики Е. г. может быть положено отношение симметрии (см. [5]).

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.— Л., 1949; [3] Погорелов А. В., Основания геометрии, 3 изд., М., 1968; [4] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963; [5] Бахман Ф., Построение геометрии на основе понятия симметрии, пер. с нем., М., 1969.

А. Б. Иванов.

ЕВКЛИДОВА СВЯЗНОСТЬ — дифференциально-геометрическая структура на евклидовом векторном расслоении, обобщающая *Леви-Чивита связность* и *риманову связность* в римановой геометрии. Гладкое векторное расслоение наз. евклидовым, если каждый его слой обладает структурой евклидова векторного пространства со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$, так что для любых гладких сечений X и Y функция $\langle X, Y\rangle$ является гладкой функцией на базе. Линейная связность в евклидовом векторном расслоении наз. евклидовой связностью, если при произвольном параллельном перенесении любых двух векторов их скалярное произведение остается постоянным. Это равносильно тому, что метрич. тензор, определяющий скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$ в каждом слое, ковариантно постоянен. Е. с. в касательном векторном расслоении риманова пространства является римановой связностью. Иногда термин «Е. с.» применяется только в этом смысле, и тогда «риманова связность» означает связность Леви-Чивита.

Ю. Г. Лумисте.

ЕВКЛИДОВО КОЛЬЦО — область целостности с единицей такая, что всякому ее элементу a, отличному от нуля, поставлено в соответствие неотрицательное целое число $n(a)$, причем выполняется следующее требование: для любых двух элементов a, b, если $b\neq 0$, можно так подобрать элементы q и r, что

$$a = bq + r,$$

причем или $r=0$, или $n(r)<n(b)$.

Всякое Е. к. является *главных идеалов кольцом* и, следовательно, *факториальным кольцом*, однако, существуют кольца главных идеалов, не являющиеся евклидовыми. К числу Е. к. принадлежат кольцо целых чисел (роль $n(a)$ в нем играет абсолютная величина $|a|$), а также кольцо многочленов от одного переменного над полем ($n(a)$ — степень многочлена). Во всяком Е. к. для разыскания наибольшего общего делителя двух элементов можно применять *Евклида алгоритм*.

Лит.: [1] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973.

О. А. Иванова.

ЕВКЛИДОВО ПОЛЕ — упорядоченное поле, в к-ром каждый положительный элемент является квадратом. Напр., поле $\mathbb{R}$ действительных чисел — Е. п. Поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не является Е. п.

В. Л. Попов.

ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — пространство, свойства к-рого описываются аксиомами *евклидовой геометрии*. В более общем смысле Е. п.— конечномерное действительное *векторное пространство* $\mathbb{R}^n$ со *скалярным произведением* (x, y), $x, y\in\mathbb{R}^n$, к-рое в надлежащим образом выбранных координатах (декартовых)

$$x=(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{и} \quad y=(y_1, \ldots, y_n)$$

выражается формулой

$$(x,\ y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Е. Д. Соломенцев.

ЕГОРОВА СИСТЕМА поверхностей — триортогональная система Σ, состоящая из потенциальных поверхностей; названа по имени Д. Ф. Егорова, подробно рассмотревшего (под названием потенциальных систем) в 1901 (см. [1]) общую теорию и многочисленные примеры систем указанного вида. Е. с. Σ может быть определена как система, допускающая (однопараметрическую) группу преобразований, переводящих Σ саму в себя таким образом, что нормали в соответственных точках Σ остаются параллельными. Механическим истолкованием этой группы служит переносящее поверхности Е. с. стационарное течение жидкости, имеющее потенциал скоростей.

Пусть

$$u^i(x,\ y,\ z) = \text{const}, \quad i = 1,\ 2,\ 3,$$

— уравнения поверхностей, образующих Е. с. Σ, H_i — коэффициенты Ламе, фигурирующие в выражении квадрата линейного элемента пространства в криволинейных координатах $\{u^i\}$:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} H_1^2 (du^i)^2,$$

P_i — расстояние начала координат от трех касательных плоскостей Σ, R_{ik} — главные радиусы кривизны поверхности $u^i = \text{const}$, соответствующие элементу дуги $H_k du^k$, $\beta_{ik} = -H_k/R_{ik}$ — величины, через к-рые выражаются линейные элементы $d\sigma_i$ сферич. изображений поверхностей:

$$(d\sigma_i)^2 = \beta_{ik}^2 (du^k)^2 + \beta_{il}^2 (du^l)^2, \quad i \neq k \neq l.$$

Функции P_i и H_i удовлетворяют одной и той же системе уравнений:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial u^k} = \beta_{ik} \theta_k.$$

Решения этих уравнений определяют еще две Е. с. Σ_1 и Σ_{-1} того же сферич. изображения, для к-рых

$$P_i^{(1)} = H_i, \quad H_i^{(-1)} = P_i.$$

Продолжение этого преобразования в ту и другую стороны дает ряд Е. с. (ряд Егорова)

$$\ldots,\ \Sigma_{-2},\ \Sigma_{-1},\ \Sigma,\ \Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \ldots$$

одного сферич. изображения, из к-рых каждая следующая Σ_{k+1} получается из предыдущей Σ_k с помощью формул:

$$P_i^{(k+1)} = H_i^{(k)}.$$

И вообще, изыскание сферич. изображения Е. с. Σ приводится к изысканию потенциальной системы на сфере: любую такую систему можно принять за сферич. изображение одного из трех семейств, составляющих Σ.

Е. с. Σ характеризуется тем, что

$$H_i^2 = \frac{\partial \omega}{\partial u^i},$$

где ω — некоторая функция, имеющая смысл потенциала скоростей соответствующего течения, т. е. $u^i = \text{const}$ — потенциальные поверхности. При этом, для любой потенциальной поверхности S определяется Е. с. Σ, в состав к-рой входит S. Касательная к линии пересечения какой-либо поверхности $\omega = \text{const}$ с поверхностью $u^i = \text{const}$ в любой точке параллельна лучу l^i, соединяющему центры геодезич. кривизн линий кривизны поверхности $u^i = \text{const}$; во всякой точке пространства три луча l^1, l^2, l^3 параллельны одной и той же плоскости — касательной плоскости поверхности $\omega = \text{const}$, а соприкасающиеся плоскости коор-

динатных линий проходят через одну прямую. Величины β_{ik} и R_{ik} для Е. с. удовлетворяют соотношениям:

$$R_{12}R_{23}R_{31}=R_{13}R_{32}R_{21},$$

$$\beta_{ik}=\beta_{ki},$$

(симметричность β_{ik} также необходима и достаточна для того, чтобы триортогональная система была Е. с.).

Лит.: [1] Егоров Д. Ф., Работы по дифференциальной геометрии, М., 1970.

М. И. Войцеховский.

ЕГОРОВА ТЕОРЕМА о связи между понятиями сходимости почти всюду и равномерной сходимости последовательности функций: пусть μ есть σ-аддитивная мера, определенная на σ-алгебре $\mathfrak{S}_\mu$, $E\in\mathfrak{S}_\mu$ и последовательность μ-измеримых почти везде конечных функций $f_k(x)$, $x\in E$, $k=1, 2, \ldots$, сходится почти всюду к функции $f(x)$; тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое измеримое множество $E_\varepsilon\subset E$, что $\mu(E\setminus E_\varepsilon)<\varepsilon$, и на множестве E_ε последовательность $f_k(x)$ сходится к функции $f(x)$ равномерно. В случае, когда μ — мера Лебега на прямой, это утверждение доказано Д. Ф. Егоровым [1].

Е. т. допускает различные обобщенные формулировки, расширяющие ее возможности. Пусть, напр., $f_k(x)$ — последовательность измеримых отображений локально компактного пространства X в метризуемое пространство Y, причем предел

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$$

существует локально почти всюду на X по *Радона мере* $\mu\geqslant 0$. Тогда функция $f\colon X\to Y$ измерима по мере μ и для любых компакта $K\subset X$ и числа $\varepsilon>0$ найдется компакт $K_1\subset K$ такой, что $\mu(K\setminus K_1)<\varepsilon$, а сужения f_k на K_1 непрерывны и равномерно сходятся на K_1 к f. Заключения Е. т. могут не выполняться, если Y не метризуемо.

Лит.: [1] Егоров Д. Ф., «C.r. Acad. sci», 1911, t. 152, p. 244—6; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976.

Л. Д. Кудрявцев.

ЕДИНИЦА —1) Наименьшее из натуральных чисел:1. При умножении любого числа на 1 получается то же самое число.

2) Элемент e множества M наз. л е в о й (п р а в о й) е д и н и ц е й по отношению к бинарной алгебраической операции $*$, определенной на множестве M, если для любого элемента $a\in M$ выполняется равенство

$$e*a=a \quad (a*e=a).$$

Если существуют хотя бы одна левая Е. и хотя бы одна правая Е., то они совпадают и других Е. нет. Если на множестве M определено несколько бинарных операций (напр., сложение и умножение в кольце), то Е. наз. только Е. по отношению к одной из этих операций, обычно по отношению к умножению. Е. по отношению к сложению наз. тогда нулем.

3) Е д и н и ц е й р е ш е т к и (структуры) наз. ее наибольший элемент, т. е. Е. относительно операции объединения.

4) Е д и н и ц е й, и л и д е л и т е л е м е д и н и ц ы, области целостности K наз. всякий ее обратимый элемент, т. е. такой элемент ε, для к-рого существует обратный ε^{-1} и $\varepsilon\varepsilon^{-1}=1$. Все Е. области целостности образуют группу по умножению. Эта же терминология иногда сохраняется и при переходе к полю частных кольца K (т. е. е д и н и ц а м и п о л я ч а с т н ы х наз. Е. самого кольца K). Напр., Е. поля алгебраич. чисел k наз. единицы кольца целых алгебраич. чисел поля k, p-адическими Е. наз. единицы кольца целых *p-адических чисел* и т. д.

5) Единичный морфизм объекта в категории иногда наз. просто е д и н и ц е й.

О. А. Иванова.

ЕДИНИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — одномерное представление группы G, сопоставляющее любому элементу из группы G число 1. Е. п. иногда наз. также тривиальным представлением. Е. п. группы G в векторном пространстве E наз. представление группы G, сопоставляющее любому элементу из группы G единичный оператор в пространстве E.

А. И. Штерн.

ЕДИНСТВЕННОСТИ МНОЖЕСТВО, U**-множество,** — множество $E \subset [0, 2\pi]$ такое, что тригонометрич. ряд, сходящийся к нулю во всякой точке $(0, 2\pi) \setminus E$, есть ряд нулей. Множество, не являющееся U-множеством, наз. множеством неединственности, или M-множеством. Эти понятия связаны с проблемой единственности представления функции сходящимся к ней тригонометрич. рядом всюду, за исключением, быть может, заданного множества E. Г. Кантор (G. Kantor, 1872) показал, что конечное (а также пустое) множество является Е. м., и распространение этого результата на бесконечные множества привело его к созданию *множеств теории*.

Множества положительной меры Лебега всегда являются M-множествами. Всякое счетное множество есть U-множество. Существуют совершенные множества меры нуль, к-рые являются как M-множествами (Д. Е. Меньшов, 1916), так и U-множествами (Н. К. Бари, 1921); напр., *канторово множество* с постоянным рациональным отношением θ является U-множеством тогда и только тогда, когда $1/\theta$ есть целое число, т. е. свойство числового множества быть U- или M-множеством зависит от арифметич. природы составляющих его чисел. Существуют, однако, такие множества $E \subset [0, 2\pi]$ (так наз. $U(\varepsilon)$-множества) полной меры, что каждый тригонометрич. ряд, сходящийся к нулю в каждой точке $[0, 2\pi] \setminus E$ и имеющий коэффициенты вида $O(\varepsilon_n)$, где $\varepsilon_n \downarrow 0$, есть ряд нулей.

Понятия U- и M-множества обобщаются и на ряды Фурье — Стилтьеса.

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1—2, пер. с англ., [2 изд.], М., 1965; [3] Бари Н. К., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 3, с. 3—68.

В. Ф. Емельянов.

ЕДИНСТВЕННОСТИ СВОЙСТВА аналитических функций — свойства аналитич. функций, состоящие в том, что они вполне определяются своими значениями на нек-рых подмножествах точек их области определения или границы этой области, в связи с чем различают внутренние Е. с. и граничные Е. с.

Внутренние свойства единственности. Пусть D — некоторая область плоскости $\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ комплексного переменного z. Классическая внутренняя теорема единственности для голоморфных, т. е. однозначных аналитич., функций в D утверждает: если голоморфные в D функции $f(z)$ и $g(z)$ совпадают на нек-ром множестве $E \subset D$, имеющем хотя бы одну предельную точку в D, то $f(z) \equiv g(z)$ всюду в D. Иначе говоря, если голоморфная в D функция $f(z)$ принимает нулевые значения на множестве $E \subset D$, имеющем хотя бы одну предельную точку в D, то $f(z) \equiv 0$. Доказательство этого внутреннего Е. с. аналитич. функций показывает, что оно, в сущности, является Е. с. степенных рядов по одному комплексному переменному z. Е. с. полностью сохраняется и для мероморфных в D функций $f(z)$ и $g(z)$, если рассматривать полюсы $f(z)$ и $g(z)$ как точки, в к-рых функции принимают значение ∞.

В частности, если две аналитич. функции $f(z)$ и $g(z)$ совпадают на сколь угодно малой окрестности нек-рой точки или на сколь угодно малой дуге нек-рой непрерывной кривой, то $f(z) \equiv g(z)$. Другое следствие: множество A-точек аналитич. функции $f(z)$, т. е. таких точек z, в к-рых $f(z) = A$, не может иметь предельных точек внутри области определения D, если только $f(z) \not\equiv A$.

Полные аналитические функции $F(z)$, $G(z)$ в смысле Вейерштрасса, вообще говоря, многозначные, обладают следующим внутренним Е. с.: пусть $f(z)$ и $g(z)$ — однозначные элементы, или ветви полных аналитич. функций $F(z)$ и $G(z)$, определенные соответственно в областях D_1 и D_2, $D_1 \bigcap D_2 \neq \varnothing$. Тогда, если $f(z)$ и $g(z)$ совпадают на нек-ром множестве точек $E \subset D_1 \bigcap D_2$, имеющем хотя бы одну предельную точку $z_0 \in D_1 \bigcap D_2$, то функции $F(z)$ и $G(z)$ имеют одну и ту же область существования и всюду совпадают как полные аналитич. функции.

На случай аналитич. функций $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $n>1$, Е. с. в приведенных формулировках не переносится. Напр., аналитич. функция $f(z)=z_1 z_2$ не равна тождественно нулю, но обращается в нуль на комплексно $(n-1)$-мерных аналитич. плоскостях $z_1=0$ и $z_2=0$. Для таких функций имеют место следующие Е. с.:

1) Если $f(z)$ — аналитич. функция в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, обращающаяся в нуль во всех точках нек-рого непустого открытого подмножества $U \subset D$, то $f(z) \equiv 0$ в D.

2) Если $f(z)$ — аналитич. функция в области $D \subset \mathbb{C}^n$, обращающаяся в нуль в нек-рой точке $z^0 \in D$ вместе со всеми частными производными $\partial^k f / \partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \ldots \partial z_n^{k_n}$, $k=k_1+k_2+\ldots+k_n$; $k_j=0, 1, 2, \ldots$; $j=1, 2, \ldots, n$, то $f(z) \equiv 0$ в D.

3) Если $f(z)$ — аналитич. функция в области $D \subset \mathbb{C}^n$, обращающаяся в нуль в действительной окрестности U_∂ точки $z^0=x^0+iy^0 \in D$, т. е. на множестве $U_\partial = \{z = x+iy \in \mathbb{C}^n;\ |x-x^0|<r,\ y=y^0\}$, то $f(z) \equiv 0$ в D.

Различие во внутренних Е. с. для случаев $n=1$ и $n>1$ обусловлено различием в поведении кратных степенных рядов по сравнению со степенными рядами по одному переменному.

Граничные свойства единственности. Сформулированная выше внутренняя теорема единственности аналитич. функций $f(z)$ одного комплексного переменного допускает ряд обобщений на тот случай, когда нули $f(z)$ лежат не внутри области аналитичности D, а на ее границе Г. Так, напр., если Г содержит жорданову дугу σ, причем всюду на σ существуют и равны нулю граничные значения $f(z)$ изнутри области D, то $f(z) \equiv 0$ в D. Наиболее общие и глубокие граничные теоремы единственности получены Н. Н. Лузиным и И. И. Привало вым в 1925. Пусть D — область плоскости z, ограниченная спрямляемой кривой Г, и $f(z)$ — мероморфная в D функция. Пусть ζ_0 — точка Г, в к-рой существует касательная к Г; таким свойством обладают почти все точки спрямляемой кривой. Говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке ζ_0 угловое граничное значение A, если $f(z)$ стремится к A, когда точка z стремится к ζ_0, оставаясь внутри пересечения области D с внутренностью любого угла раствора меньше π с вершиной ζ_0 и нормалью к Г в ζ_0 в качестве биссектрисы.

Справедлива граничная теорема единственности Лузина — Привалова в случае угловых граничных значений: если мероморфная в области D, ограниченной спрямляемой кривой Г, функция $f(z)$ принимает угловые граничные значения нуль на множестве $E \subset \Gamma$ положительной лебеговой меры, то $f(z) \equiv 0$. Вообще говоря, мероморфная функция может и не иметь граничных значений на Г, но для довольно широких классов мероморфных функций, напр. для функций ограниченного вида, установлено существование угловых граничных значений почти всюду на Г.

Наряду с этим имеются примеры ограниченных аналитич. функций в единичном круге D, стремящихся к нулю во всех смыслах по заданном множестве E точек

единичной окружности Г меры нуль. Кроме того, Н. Н. Лузин и И. И. Привалов построили примеры аналитических в единичном круге D функций, имеющих нулевые радиальные граничные значения, т. е. стремящихся к нулю по радиусам, всюду на нек-ром множестве $E \subset \Gamma$ полной меры 2π. Оказалось, что в вопросах единственности весьма важно также понятие категории множества по Бэру. Именно, справедлива граничная теорема единственности Лузина — Привалова в случае радиальных граничных значений: если мероморфная в единичном круге D функция $f(z)$ имеет радиальные граничные значения нуль на множестве E, расположенном на дуге σ единичной окружности Г, метрически плотном и второй категории по Бэру на σ, то $f(z) \equiv 0$. (Множество E наз. метрически плотным на σ, если каждая порция E на σ имеет положительную меру.)

См. также *Граничные свойства аналитических функций*, *Предельное множество*.

Исследование граничных Е. с. аналитич. функций многих комплексных переменных еще (к 1978) не достигло такой степени полноты, как для функций одного переменного (см. [5], [6]).

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 3; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, М., 1969, ч. 1, гл. 2, ч. 2, гл. 1 и сл.; [3] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950; [4] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [5] Рудин У., Теория функций в поликруге, пер. с англ., М., 1974; [6] Хенкин Г. М., Чирка Е. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 13—142.

Е. Д. Соломенцев.

ЕДИНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ — собирательное название для попыток представить все или нек-рые (чаще всего — гравитационное и электромагнитное) физич. поля в виде проявлений одного фундаментального поля подобно тому, как электрическое и магнитное поля — проявления электромагнитного поля. Е. т. п. условно можно разбить на два типа: в первом фундаментальным полем является поле нек-рого геометрического объекта в пространстве событий (напр., различные варианты Е. т. п. А. Эйнштейна [1], *геометродинамика*); во втором — фундаментальное поле не имеет геометрич. природы (напр., нелинейные спинорные теории поля [3], [4]). В нек-рых Е. т. п. удается получить удачные оценки основных физич. констант.

Лит.: [1] Эйнштейн А., Собр. научных трудов, т. 2, М., 1966; [2] Уилер Дж. А., Гравитация, нейтрино и Вселенная, пер. с англ., М., 1962; [3] Гейзенберг В., Введение в единую полевую теорию элементарных частиц, пер. с англ., М., 1968; [4] Нелинейная квантовая теория поля. Сб. статей, М., 1959.

Д. Д. Соколов.

ЕМКОСТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ, равновесный потенциал,— см. *Емкость*, *Робена задача*.

Е. Д. Соломенцев.

ЕМКОСТЬ множества — функция множества, возникшая в *потенциала теории* как аналог физич. понятия электростатич. емкости.

Пусть S и S^* — две гладкие замкнутые гиперповерхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, причем S^* охватывает S. Такую систему наз. конденсатором (S, S^*). Пусть $u(x)$ — гармонич. функция в области D между S и S^*, принимающая значения 1 на S и 0 на S^*. Емкостью конденсатора $C(S, S^*)$ наз. число

$$C(S, S^*) = -\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n} \int_{S'} \frac{\partial u(x)}{\partial n}\, d\sigma = \frac{1}{(n-2)\,\sigma_n} \int_D |\operatorname{grad} u(x)|^2\, d\omega, \qquad (1)$$

где $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $\partial u/\partial n$ — производная по направлению внешней нормали к любой промежуточной гиперповерхности

S', лежащей между S и S^* и охватывающей S, $d\sigma$ — элемент площади S', $d\omega$ — элемент объема. Иначе Е. конденсатора $C(S, S^*)$ можно определить как нижнюю грань интегралов

$$\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n}\int_D |\operatorname{grad} v(x)|^2\, d\omega$$

в классе всех непрерывно дифференцируемых в D функций $v(x)$, к-рые на S и S^* принимают значения, соответственно, 1 и 0. Если гиперповерхность $S^*=S(0, R)$ есть сфера достаточно большого радиуса R с центром в начале координат, то, переходя в (1) к пределу при $R\to\infty$, получают емкость компакта K, ограниченного гиперповерхностью S, называемую также гармонической емкостью K, или ньютоновой емкостью K:

$$C(K)=\lim_{R\to\infty} C(S, S(0, R)),$$

при этом $0\leqslant C(K)<\infty$. Е. $C(K)$ есть аналог электростатич. Е. уединенного проводника K.

В случае плоскости $\mathbb{R}^2$ конденсатор (L, L^*) есть система двух гладких замкнутых непересекающихся простых кривых L и L^*, причем L^* охватывает L. Пусть $u(x)$ — гармонич. функция в области D между L и L^*, принимающая значения 1 на L и 0 на L^*. Емкостью конденсатора $C(L, L^*)$ наз. число

$$C(L, L^*)=-\frac{1}{2\pi}\int_{L'}\frac{\partial u(x)}{\partial n}\,ds=\frac{1}{2\pi}\int_D |\operatorname{grad} u(x)|^2\, d\omega,$$

где ds — элемент длины дуги линии L', лежащей между L и L^* и охватывающей L. Пусть кривая $L^*=S(0, R)$ есть окружность достаточно большого радиуса R с центром в начале, тогда предельный переход при $R\to\infty$ в формуле

$$W(K)=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{C(L, S(0, R))}-\ln R\right]$$

дает винеровскую емкость, или постоянную Робена, компакта K, ограниченного линией L; винеровская Е. может принимать любые значения, $-\infty<W(K)<\infty$. Чаще используется логарифмическая емкость, называемая также гармонической или конформной:

$$C(K)=e^{-W(K)}=\lim_{R\to\infty} Re^{-\frac{1}{C(L, S(0, R))}}, \qquad (2)$$

к-рая изменяется в пределах $0\leqslant C(K)<\infty$.

Е. компакта K, ограниченного гиперповерхностью S, при $n\geqslant 3$ можно определить и несколько иначе. Пусть $v_K(x)$ — емкостный, или равновесный, потенциал этого компакта, т. е. гармоническая всюду вне K, регулярная на бесконечности функция, принимающая на S значение 1. Тогда

$$C(K)=-\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n}\int_S\frac{\partial v_K(x)}{\partial n}\,d\sigma=$$

$$=\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n}\int_{D'}|\operatorname{grad} v_K(x)|^2\, d\omega, \qquad (3)$$

где D' — внешность S. Формула (3) показывает, что Е. $C(K)$ есть совокупная положительная мера $\mu(S)$, распределенная на S и такая, что ньютонов потенциал простого слоя, порождаемый этой мерой, в точности совпадает с емкостным потенциалом $v_K(x)$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} v_K(x)&=\int_S\frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-2}}, \quad x\in D';\\ C(K)&=\int_S d\mu(y)=\mu(S). \end{aligned}\right\}$$

Мера μ наз. емкостной, или равновесной, мерой.

В классе всех положительных борелевских мер λ на K таких, что $\lambda(K)=\mu(S)=C(K)$, емкостная мера μ дает минимум интегралу энергии

$$E(\lambda)=\int\int_{K\times K}\frac{d\lambda(x)\,d\lambda(y)}{|x-y|^{n-2}}. \qquad (4)$$

Иначе говоря, Е. $C(K)$ можно определить формулой $C(K)=1/\inf E(\lambda)$, где нижняя грань берется в классе всех положительных мер λ, сосредоточенных на K и нормированных условием $\lambda(K)=1$.

При $n=2$, вследствие особого поведения логарифмич. потенциала на бесконечности, вышеуказанное построение емкостного потенциала возможно только для конденсатора, напр. для $(L,\ S(0,\ R))$ при помощи *Грина функции* $G(x,\ y)$ для внутренности D'' окружности $S(0,\ R)$ в виде

$$\left.\begin{aligned} u_K(x;\ S(0,\ R))&=\int_L G(x,\ y)\,d\mu(y),\quad x\in D,\\ C(L,\ S(0,\ R))&=\int_L d\mu(y)=\mu(\ ),\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где емкостный потенциал $u_K(x;\ S(0,R))$ совпадает в D с ранее введенной для конденсатора $(L,\ S(0,\ R))$ гармонич. функцией $u(x)$. Е., определяемая по формулам (5), иногда наз. гриновой емкостью; эта конструкция возможна при любом $n\geqslant 2$. Формула $W(K)=1/\inf E(\lambda)$, $\lambda(K)=1$, при $n=2$ дает винеровскую Е. компакта K, так как интеграл энергии

$$E(\lambda)=\int\int_{K\times K}\ln\frac{1}{x-y}\,d\lambda(x)\,d\lambda(y) \qquad (6)$$

теперь не всегда положителен.

Емкость произвольного компакта $K\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, можно определить при помощи описанного свойства минимума энергии:

$$C(K)=\frac{1}{\inf E(\lambda)},\quad \lambda(K)=1,\ \lambda\geqslant 0,$$

где интегралы $E(\lambda)$ вычисляются по формуле (4). При $n=2$ такой путь приводит к определению винеровской емкости произвольного компакта:

$$W(K)=\frac{1}{\inf E(\lambda)},\quad \lambda(K)=1,\ \lambda\geqslant 0,$$

где энергия $E(\lambda)$ вычисляется по формуле (6). Переход к логарифмич. Е. осуществляется по формуле $C(K)=e^{-W(K)}$.

Равносильный способ состоит в построении емкостного потенциала $v_K(x)$ для произвольного компакта K. При $n\geqslant 3$ его можно определить как наибольший из потенциалов $U_\lambda(x)$ положительных мер λ, сосредоточенных на K и таких, что $U_\lambda(x)\leqslant 1$. Порождающая $v_K(x)$ мера μ является емкостной, $\mu(K)=C(K)$. При $n=2$ построение емкостного потенциала, как и выше, ведется для конденсатора $(K,\ S(0,\ R))$ при помощи функции Грина для круга D''. Е. компакта $C(K)$ получается далее предельным переходом, как в формуле (2).

Если $v_K(x)=0$, то $C(K)=0$. При $n=2$ равенства $C(K)=0$ и $W(K)=+\infty$ равносильны. Компакты нулевой Е. играют в теории потенциала ту же роль, что и множества меры нуль в теории интегрирования. Напр., равенство $v_K(x)=1$ на K имеет место всюду, за возможным исключением множества точек, принадлежащего некрому компакту нулевой Е. Потенциал любой положительной меры, сосредоточенной на компакте K нулевой Е., неограничен. Более того, для любого компакта K нулевой Е. существует сосредоточенная на K положительная мера ν такая, что $U_\nu(x)=+\infty$ при

$x \in K$ и $U_\nu(x) < +\infty$ при $x \notin K$, т. е. любой компакт нулевой Е. является *полярным множеством*.

Свойства емкостных потенциалов и емкостей компактов: 1) отображения $K \to v_K(x)$ и $K \to C(K)$ возрастающие, т. е. из включения $K_1 \subset K_2$ вытекает, что всюду $v_{K_1}(x) \leqslant v_{K_2}(x)$, $C(K_1) \leqslant C(K_2)$; 2) эти отображения непрерывны справа, т. е. для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество ω такое, что если компакт K' подчинен условиям $K \subset K' \subset \omega$, то всюду $v_{K'}(x) - v_K(x) < \varepsilon$, $C(K') - C(K) < \varepsilon$; 3) $v_K(x)$ и $C(K)$, как функции K, сильно субаддитивны, т. е.

$$v_{K_1 \cup K_2}(x) + v_{K_1 \cap K_2}(x) \leqslant v_{K_1}(x) + v_{K_2}(x),$$
$$C(K_1 \cup K_2) + C(K_1 \cap K_2) \leqslant C(K_1) + C(K_2).$$

Если G — открытое множество, лежащее в шаре $B = B(0, R)$, то, по определению, Е. $C(G) = C(B) - C(B \setminus G)$. Для произвольного множества E внутренняя Е. $\underline{C}(E)$ определяется как верхняя грань $\underline{C}(E) = \sup C(K)$ по всем компактам $K \subset E$. Внешняя Е. $\overline{C}(E)$ определяется как нижняя грань $\overline{C}(E) = \inf C(G)$ по всем открытым множествам $G \supset E$. Множество E наз. C-измеримым, если $\underline{C}(E) = \overline{C}(E) = C(E)$. Все борелевские и даже аналитич. множества в $\mathbb{R}^n$ являются C-измеримыми. Таким образом, Е. $C(E)$ представляет собой функцию множества, инвариантную относительно движений, но не являющуюся, однако, аддитивной. Особенно важна характеристика множества E, даваемая условием, что его Е. $C(E)$ равна нулю. Во многих вопросах теории потенциала множествами нулевой Е. в определенном смысле можно пренебрегать. Так, напр., справедливо следующее усиление принципа максимума. Пусть $w(x)$ — ограниченная сверху субгармонич. функция в области $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\infty \notin G$; пусть неравенство $\limsup_{x \to y} w(x) \leqslant M$ имеет место для всех точек $y \in \partial G$, за возможным исключением множества E, $C(E) = 0$, $\infty \notin E$. Тогда всюду в G имеем $w(x) \leqslant M$, причем знак равенства хотя бы в одной точке возможен только в случае $w(x) \equiv M$.

Понятие Е. обобщается в различных направлениях. Исходя из понятия емкостного потенциала и емкостной меры или энергии, теорию Е. строят для неньютоновых потенциалов таких, как *бесселевы потенциалы*, *нелинейные потенциалы*, *Рисса потенциалы* и др. Эти построения позволяют, в частности, варьировать понятие множества нулевой Е. применительно к различным проблемам математич. физики и анализа (см. [6]).

По Г. Шоке (G. Choquet), Е. компактов K в абстрактном отделимом топологич. пространстве X определяется аксиоматически как числовая функция множества $K \to C(K)$, удовлетворяющая аксиомам возрастания, непрерывности справа и сильной субаддитивности. Несколько иной подход к теории Е. в абстрактных пространствах X получается в рамках общей аксиоматики *потенциала теории абстрактной* или теории *гармонических пространств*. В абстрактной теории Е. основной является теорема Шоке, утверждающая, что C-измеримыми являются K-аналитические множества, т. е. непрерывные образы множеств типа $K_{\sigma\delta}$ из нек-рого компактного пространства.

Вообще, в различных задачах теории функций, связанных главным образом с аппроксимацией в определенных классах функций, весьма полезным оказалось введение своих специфич. понятий Е. Так, напр., большое значение в вопросах приближения аналитич. функциями имеет понятие *аналитической емкости*. Пусть K — компакт на комплексной плоскости z,

$f(z)$ — аналитич. функция вне K, $|f(z)|\leqslant 1$, $f(\infty)=0$; аналитической Е. $\gamma(K)$ наз. число

$$\gamma(K)=\sup\left|\frac{1}{2\pi}\int_{L'} f(z)\,dz\right|,$$

где L' — контур, охватывающий K, и верхняя грань берется по всем $f(z)$, удовлетворяющим выписанным условиям.

Лит.: [1] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [2] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [3] Полиа Г., Сёге Г., Изопериметрические неравенства в математической физике, [пер. с англ.], М., 1962; [4] Brelot M., Lectures on potential theory, Bombay, 1960; [5] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [6] Карлесон Л., Избранные проблемы теории исключительных множеств, пер. с англ., М., 1971; [7] Витушкина А. Г., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 5—12.

Е. Д. Соломенцев.

ЕРМАКОВА ПРИЗНАК сходимости числовых рядов с положительными членами: пусть $f(x)$ — положительная убывающая при $x\geqslant 1$ функция. Если при указанных x для $\lambda<1$ выполняется неравенство

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}\leqslant\lambda,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

сходится; если выполняется неравенство

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}\geqslant 1,$$

то ряд расходится. В частности, если существует предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}<1\quad(\text{или }>1),$$

то ряд сходится (расходится). Установлен В. П. Ермаковым [1].

Лит.: [1] Ермаков В. П., Новый признак сходимости и расходимости бесконечных знакопостоянных рядов, К., 1872.

Л. Д. Кудрявцев.

ЕСТЕСТВЕННО УПОРЯДОЧЕННЫЙ ГРУППОИД — частично упорядоченный группоид H, в к-ром все элементы положительны (т. е. $a\leqslant ab$ и $b\leqslant ab$ для любых $a,\ b\in H$) и больший из двух элементов всегда делится (и справа и слева) на меньший, т. е. из $a<b$ следует $ax=ya=b$ для некоторых $x,\ y\in H$. Положительный конус любой частично *упорядоченной группы* является естественно упорядоченной полугруппой.

О. А. Иванова.

ЕСТЕСТВЕННЫЙ ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД — формальный вывод, по возможности приближенный к содержательному рассуждению, привычному для мате-

матика и логика. Критерии естественности и качества вывода не уточняются полностью, но обычно имеются в виду выводы, осуществляемые по общеупотребительным правилам логических переходов, компактные (в частности, не содержащие излишних применений правил вывода), «склеенные» (повторяющиеся участки выводов должны устраняться, напр., при помощи вычленения вспомогательных лемм) и др.

Первоначально формализации логических и математич. теорий не преследовали целей естественности (см. *Логические исчисления*); решающее продвижение в этом направлении составило исчисление натуральных выводов (см. *Генцена формальная система*), имитирующее форму обычных математич. умозаключений и позволяющее вводить и использовать допущения привычным образом. Довольно естественно выглядят и приемы обращения с допущениями в секвенциальных исчислениях, к-рые обладают дополнительным преимуществом — *подформульности свойством* и поэтому лежат в основе дальнейших продвижений в проблеме построения Е. л. в.

Для автоматизации поиска Е. л. в. были предложены [2] вспомогательные секвенциальные исчисления, обладающие свойством подформульности, но запрещающие переход допущений в сукцедент (см. *Секвенция*). По выводу в таком исчислении легче строить Е. л. в. На этой основе была разработана методика поиска Е. л. в., включающая учет «родственностей» (т. е. равных подформул в составе испытуемых формул) для сокращения выводов и их «склеивания», «прополку» излишних формул и применений правил, возможность варьирования тактик установления выводимости и др. В рамках логических средств классического *высказываний исчисления* эта методика была доведена до машинного алгорифма (программа находила Е. л. в. данного утверждения из данного списка гипотез и записывала этот вывод в виде логико-математич. текста на русском языке). К проблеме поиска Е. л. в. примыкают задачи корректирования гипотез и усиления теорем (речь идет о методах, позволяющих вводить в заданную формулу небольшие исправления так, чтобы она стала теоремой или превратилась в более сильную теорему, и об исследовании критериев качества таких исправлений).

Разработки в области Е. л. в. в основном посвящены классич. логикам, но возникшие методы носят более общий характер.

Лит.: [1] Математическая теория логического вывода, сб. переводов, М., 1967; [2] Ш а н и н Н. А. и др., Алгорифм машинного поиска естественного логического вывода в исчислении высказываний, М.— Л., 1965; [3] P r a w i t z D., Natural deduction, Stockh., 1965.

С. Ю. Маслов.

ЖАНЕ ТЕОРЕМА: во всяком аналитическом *римановом многообразии* размерности n с отмеченной точкой существует окрестность этой точки, допускающая изометрическое аналитич. вложение в евклидово пространство E^{s_n}, где размерность $s_n = n(n+1)/2$. Ж. т. сохраняет силу при замене пространства E^{s_n} произвольным аналитическим римановым многообразием размерности s_n с отмеченной точкой (в к-рую должна переходить отмеченная точка вкладываемого многообразия). Ж. т. справедлива в случае псевдоримановых многообразий при условиях

$$q \geqslant s_n, \quad q_+ \geqslant n_+, \quad q_- \geqslant n_-,$$

где n_+ и $n_- = n - n_+$ — размерности положительной и отрицательной частей метрического тензора на погружаемом многообразии, q_+ и $q_- = q - q_+$ — соответствующие размерности объемлющего многообразия (см. [3]). Ж. т. — первая общая теорема вложения в римановой геометрии (см. *Изометрическое погружение*).

Ж. т. впервые была высказана как гипотеза Л. Шлефли [1], доказана М. Жане [2].

Лит.: [1] Schläfli L., «Ann. mat. pura ed appl.», 1873, ser. 2, t. 5, p. 178—93; [2] Janet M., «Ann. polon. math.», 1926, t. 5, s. 38—43; [3] Фридман А., в сб.: Гравитация и топология, М., 1966, с. 182—88. *А. Б. Иванов.*

ЖЕГАЛКИНА АЛГЕБРА — специальная алгебра $A = \langle A, \Omega \rangle$, где

$$A = \{0, 1\}, \quad \Omega = \{x \cdot y, \ x + y \pmod 2, 0, 1\},$$

$x \cdot y$ — операция умножения. Интерес представляет *клон* F действия Ω на A. Каждая операция из F представляется в виде полинома по mod 2, к-рый наз. полиномом Жегалкина по имени И. И. Жегалкина, начавшего изучение этого клона [1]. Им было показано, что всякая конечноместная операция на A содержится в F. Таким образом, изучение свойств клона F включает в себя, в частности, изучение всех алгебр $A = \langle A, \Omega' \rangle$ при произвольном Ω'.

Лит.: [1] Жегалкин И. И., «Матем. сб.», 1927, т. 34, № 1, с. 9—28; [2] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста, М., 1966. *В. Б. Кудрявцев.*

ЖЕЗЛ — плоская трансцендентная кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид:

$$\rho = a/\sqrt{\varphi}.$$

Каждому значению φ соответствуют два значения ρ — положительное и отрицательное. Кривая состоит из двух ветвей, каждая из к-рых асимптотически приближается к полюсу (см. рис.). Прямая $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ при $\rho = \pm\infty$ является асимптотой, $(1/2, \ a\sqrt{2})$ и $(-1/2, -a\sqrt{2})$ — точки перегиба. Ж. относится к так наз. алгебраич. *спиралям*.



Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

ЖЕЛОБ — двусвязная поверхность S типа кольца, содержащая внутри себя плоскую замкнутую кривую L, плоскость P к-рой во всех точках L касается S. Вдоль L гауссова кривизна K Ж. S обращается в нуль. Если при этом L разделяет Ж. S на две части, на каж-

дой из к-рых K знакопостоянна, то соответствующие части S наз. положительным и отрицательным полужелобами. Примером Ж. является узкая полоска тора вдоль одной из его замкнутых параболических параллелей.

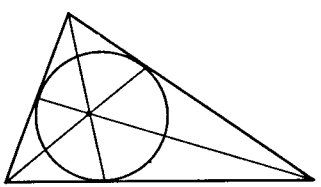
Ж. занимает промежуточное положение между объектами геометрии «в целом» и геометрии «в малом», так как он, заключая в себе определенную замкнутую кривую L, не может быть сколь угодно малым, и в то же время размеры его в трансверсальных к L направлениях могут быть сколь угодно малыми. Интерес к изучению Ж. вызывается тем, что достаточно узкая полоска поверхностей знакопеременной кривизны вдоль замкнутой параболич. линии часто представляет собой Ж., и поэтому знание свойств Ж. при различных деформациях позволяет иногда получать информацию о соответствующих свойствах всей поверхности «в целом».

Наиболее подробно исследованы так наз. плоский Ж. (для к-рого кривая L является выпуклой, а сам Ж. S располагается по одну сторону от P, имея с P касание 1-го порядка) и Ж. вращения (когда L является параллелью поверхности вращения). Для аналитич. плоских Ж. доказана их жесткость относительно аналитических бесконечно малых изгибаний 2-го порядка, а для Ж. вращения изучение их бесконечно малых изгибаний 1-го и 2-го порядков распространено до класса регулярности C^1 [3]. С точки зрения дифференциальных уравнений исследование Ж. сводится к изучению уравнений смешанного типа.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., «Успехи матем. наук», т. 3, в. 2, 1948, с. 47—158; [2] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959; [3] Сабитов И. Х., «Матем. сб.», 1975, т. 98, № 1, с. 113—29; 1976, т. 99, № 1, с. 49—57.

И. Х. Сабитов.

ЖЕРГОННА ТОЧКА — точка пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с точками касания вписанной окружности с противоположными этим вершинам сторонами. Названа по имени Ж. Жергонна (J. Gergonne, 19 в.).



А. Б. Иванов.

ЖЕСТКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА — система обыкновенных дифференциальных уравнений, при численном решении к-рой явными методами типа Рунге — Кутта или Адамса, несмотря на медленное изменение искомых переменных, шаг интегрирования обязан оставаться малым. Попытки уменьшить время вычисления решения Ж. д. с. за счет увеличения шага интегрирования приводят к резкому возрастанию погрешности (взрыв погрешности).

Автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz(t)}{dt} = f(z(t)), \quad f(z) \in C^p(G), \quad G \subset R^m, \qquad (1)$$

наз. Ж. д. с., если для любых начальных значений $z(0) = z^\circ \in G$ на заданном отрезке $[0, T]$, принадлежащем интервалу существования решения (1), выполнены условия:

а) максимальный модуль собственных значений матрицы Якоби (спектральный радиус) ограничен вдоль решения $z(t)$:

$$0 < L \leqslant \rho\left(\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right) \leqslant \left\| \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right\| = \left\| \frac{\partial K(t+\tau, t)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} \right\| < \infty,$$
$$0 \leqslant t \leqslant T;$$

б) существуют такие числа $\tau_п$, N, ν, что при

$$0 < \tau_п \ll T,\ 1 \ll N,\ 1 \leqslant \nu \leqslant p,\ 0 < \tau_п \leqslant t + \tau_п \leqslant t + \tau \leqslant T$$

справедливо неравенство

$$\left\| \frac{\partial^\nu K(t+\tau, t)}{\partial \tau^\nu} \right\| \leqslant \left(\frac{L}{N}\right)^\nu,$$

здесь

$$K(t+\tau, t) = X(t+\tau) X^{-1}(t),$$

$X(t)$ — фундаментальная матрица уравнения в вариациях для системы (1),

$$\| A \| = \max_i \sum_{k=1}^m |a_{ik}|,$$

$\tau_п$ — длина пограничного слоя. К Ж. д. с. относятся все системы вида (1), для к-рых условия а) и б) выполняются совместно после масштабирования компонент вектора $z(t)$ на каждом решении.

Неавтономная нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений порядка m наз. Ж. д. с., если жесткой является равносильная ей автономная система порядка $m+1$. Примером жесткого неавтономного уравнения может служить скалярное уравнение:

$$\frac{dz(x)}{dx} = q\,[z(x) - \varphi(x)] + \frac{d\varphi(x)}{dx}, \quad z(0) = z^0, \qquad (2)$$

$\varphi(x) \in C^p$, $0 \leqslant x < \infty$, — заданная функция. Другой пример Ж. д. с.— линейная однородная система

$$\frac{dz(t)}{dt} = A z(t), \quad z(0) = z^0, \qquad (3)$$

с постоянной $(m \times m)$-матрицей A, имеющей различные собственные значения, разделенные на две группы:

$$\left.\begin{array}{l} |\lambda_i| \leqslant \beta, \quad \max\limits_i \operatorname{Re}\lambda_i \leqslant \alpha, \quad \alpha \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant S; \\ \max\limits_i \operatorname{Re}\lambda_i < -\Lambda \ll -\beta, \quad \max\limits_i |\lambda_i| = L, \quad 1 \ll \frac{L}{\beta}, \\ S+1 \leqslant i \leqslant m. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Условие а) для системы (3) очевидно выполняется. Норма

$$\left\| \frac{\partial K(t+\tau, t)}{\partial \tau} \right\| = \| A e^{A\tau} \|$$

ограничена сверху величиной $C_1 \beta e^{\alpha\tau}$ при $\tau \geqslant \tau_п = C_2/\Lambda$, где C_1, C_2 — некоторые постоянные. При $C_1 \beta e^{\alpha T} \ll L$, $N = L/(C_1 \beta e^{\alpha T})$ выполняется условие б). Вектор $d^2 z(t)/dt^2$ при $t \geqslant \tau_п$ ограничен сверху:

$$\left\| \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \right\| \leqslant \left\| \frac{\partial K(t, 0)}{dt} \right\| \cdot \left\| \frac{dz(t)}{dt}\Big|_{t=0} \right\| \leqslant C_1 \beta e^{\alpha T} \left\| \frac{dz(t)}{dt}\Big|_{t=0} \right\|.$$

Поэтому для вектора $dz(t)/dt$ при $t \geqslant \tau_п$ можно построить интерполяционный алгебраич. многочлен нулевой степени с равномерно распределенными узлами и выбрать шаг интерполяции в виде $H = C_3/C_1 \beta e^{\alpha T}$, где C_3 — некоторая постоянная (см. [1]), зависящая от заданной погрешности. С другой стороны, использование метода ломаных Эйлера для системы (3) требует ограничения сверху на шаг интегрирования на всем отрезке решения системы (см. [1]):

$$|1 + h\lambda_i| < 1, \quad h < -\max_i \frac{2 \operatorname{Re}\lambda_i}{|\lambda_i|^2} \leqslant \frac{2}{L}, \quad i = s+1, \ldots, m. \qquad (5)$$

При этом составляющие приближенного решения системы (3) методом ломаных Эйлера, соответствующие

первой группе собственных значений (4), будут представлены с достаточной точностью (см. [1]):

$$h\beta \leqslant 2\beta/L \ll 1, \quad 1 \ll NC_3/2 \leqslant H/h.$$

Ограничение вида (5) на шаг интегрирования характерно для экстраполяционных методов типа Рунге — Кутта и Адамса. Отношение H/h, к-рое может рассматриваться как качественная мера жесткости системы (3), достигает во многих случаях величин порядка 10^4—10^{10}. Математич. описание динамич. процессов и явлений в физике, химии, биологии, технике и экономике, связанное с учетом все большего числа факторов, повышающих порядок дифференциальных систем, приводит к увеличению жесткости. Ж. д. с. требуют специальных методов решения.

В некоторых случаях исходную систему (1) можно преобразовать, используя теорию и асимптотич. методы для дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, поведение решения к-рых в пограничном слое описывается экспоненциально затухающими функциями (см. [2]). Однако Ж. д. с. обычно трудно привести к подобному виду, и, кроме того, после асимптотич. преобразования жесткость не всегда существенно уменьшается. Поэтому для решения систем общего вида используются численные методы, основным свойством к-рых является обеспечение подавления быстро затухающих составляющих решения системы (1) вне пограничного слоя при величине применяемого шага интегрирования, близкой к величине шага алгебраич. интерполяции.

Для решения Ж. д. с. целесообразно использование неявных методов (см. [9], [17]). Для построения неявных схем можно использовать способ неопределенных коэффициентов на основе формулы Тейлора, записанной в виде:

$$z(t_{n+1}) = z(t_n) + \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu+1} \frac{d^\nu z(t)}{dt^\nu}\Big|_{t=t_{n+1}} \cdot H^\nu + \\ + \int_0^H (-1)^{p+1} \frac{\tau^p}{p!} \frac{d^{p+1} z(t)}{dt^{p+1}}\Big|_{t=t_n+\tau} d\tau, \qquad (6)$$

где n — целое положительное число, $H>0$, $nH=t_n$. Напр., такие методы описаны в [9]:

$$\sum_{\chi=0}^{r} a_\chi y_{n+1-\chi} = Hf(y_{n+1}), \quad y_n = y(t_n), \qquad (7)$$

$r=1$, $a_0=1$, $a_1=-1$ — неявный метод ломаных;

$r=2$, $a_0=\frac{3}{2}$, $a_1=-2$, $a_2=\frac{1}{2}$ — неявный метод 2-й степени;

$r=3$, $a_0=\frac{11}{6}$, $a_1=-3$, $a_2=\frac{3}{2}$, $a_3=-\frac{1}{3}$ — неявный метод 3-й степени;

$r=4$, $a_0=\frac{25}{12}$, $a_1=-4$, $a_2=3$, $a_3=-\frac{4}{3}$, $a_4=\frac{1}{4}$ — неявный метод 4-й степени.

Под степенью метода понимается наибольшая степень H^k в разложении (7) по степеням H, множитель при к-рой совпадает с соответствующим множителем в (6).

Применение неявного метода ломаных к системе (3) приводит к разностным уравнениям

$$(E - HA)\, y_{n+1} = y_n, \quad y_0 = z^0. \qquad (8)$$

Пусть система (3) асимптотически устойчива по Ляпунову. Тогда матрица $\|E-HA\|$ — неособенная при любом H. При использовании формулы Лагранжа — Сильвестра решение (8) представляется в виде

$$y_n = \sum_{i=1}^{m} P_i(A, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \frac{z^0}{(1-H\lambda_i)^n}. \qquad (9)$$

Для неявного метода ломаных (8) условие асимптотич. устойчивости

$$\left|\frac{1}{1-H\lambda_i}\right| < 1$$

выполняется при любом H, и в (9), с ростом n составляющие решения, соответствующие второй группе собственных значений (4), будут быстро убывать по модулю. Величина H ограничивается только условиями требуемой точности приближенных решений. Стремление повысить степень линейных многошаговых методов вступает в определенное противоречие с их устойчивостью (см. [11]).

r-Шаговый метод

$$\sum_{\chi=0}^{r} \alpha_\chi y_{n+1-\chi} = H \sum_{\chi=0}^{r} b_\chi f(y_{n+1-\chi}) \qquad (10)$$

наз. A - у с т о й ч и в ы м, если все решения (10) стремятся к нулю при $n\to\infty$ с фиксированным положительным H в случае применения (10) к скалярному уравнению

$$\frac{dz}{dt} = qz, \qquad (11)$$

где q — комплексная постоянная с отрицательной действительной частью. Явный r-шаговый метод не может быть A-устойчивым. Степень линейного многошагового A-устойчивого метода не может превышать двух. Наименьшая константа ошибки $c_8 = {}^1/_{12}$ получается для неявного метода трапеций (см. [11]):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{H}{2}[f(y_{n+1}) + f(y_n)]. \qquad (12)$$

Требование $A(\alpha)$-устойчивости накладывает менее жесткие ограничения на методы в отличие от A-устойчивости. r-Шаговый метод (10) при фиксированном $H>0$ наз. $A(\alpha)$ - у с т о й ч и в ы м, если все решения (10) стремятся к нулю при $n\to\infty$ в случае применения (10) к уравнению (11), q — комплексная постоянная, к-рая принадлежит множеству

$$s_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg(-z)| < \alpha,\ z \neq 0\},$$

$\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. Явный r-шаговый метод не может быть $A(0)$-устойчивым. Существует только один $A(0)$-устойчивый r-шаговый метод со степенью равной $r+1$ — метод (12). Для всех $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ существуют $A(\alpha)$-устойчивые методы со степенью, равной r при $r=3, 4$ (см. [13]).

Следующее ослабление требований A-устойчивости содержится в так наз. о п р е д е л е н и и Г и р а (см. [14]): метод (10) наз. ж е с т к о у с т о й ч и в ы м, если все решения (10) стремятся к нулю при $n\to\infty$ в случае применения (10) к уравнению (11). Hq — комплексная постоянная, принадлежащая множеству $R_1 \cup R_2$, где

$$R_1 = \{Hq \in C \mid -a \leqslant \operatorname{Re} Hq \leqslant b,\ \ -d \leqslant \operatorname{Im} Hq \leqslant d\},$$

$$R_2 = \{Hq \in C \mid \operatorname{Re} Hq < -a\},$$

причем для $Hq \in R_1$ обеспечивается заданная точность.

Методы (7) жестко устойчивы и, следовательно, $A(\alpha)$-устойчивы. Для них $a \leqslant 0{,}7$.

Можно построить согласно (6) неявные аналоги явных методов Рунге — Кутта любой степени, обладающие A-устойчивостью и жесткой устойчивостью. Напр., метод 2-й степени

$$y_{n+1} = y_n + Hf\left(y_{n+1} - \frac{H}{2} f(y_{n+1})\right). \qquad (13)$$

Применение метода (13) к системе (3) приводит к разностным уравнениям

$$\left(E - HA + \frac{H^2A^2}{2}\right) y_{n+1} = y_n,$$

которые доказывают его A-устойчивость. Для метода 3-й степени:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3), \qquad (14)$$

$$K_1 = Hf(y_{n+1}),\ K_2 = Hf\left(y_{n+1} - \frac{K_1}{2}\right),$$

$$K_3 = Hf(y_{n+1} - 2K_2 + K_1)$$

аналогично получаются разностные уравнения:

$$\left(E - HA + \frac{H^2A^2}{2} - \frac{H^3A^3}{6}\right) y_{n+1} = y_n.$$

Так же строятся A-устойчивые и жестко устойчивые методы более высоких степеней. Методы (13) и (14) и методы, опубликованные в [5], принципиально отличаются от так наз. неявных методов Рунге — Кутта (см. [16]), не получивших распространения из-за большой вычислительной трудоемкости. Применение неявных методов требует большей вычислительной работы на одном шаге, чем применение явных методов, но это оправдывается в Ж. д. с. за счет резкого увеличения шага интегрирования. При решении задачи (3) необходимо обращать матрицу или решать систему линейных уравнений. Здесь может возникнуть проблема плохой обусловленности, так как число обусловленности матрицы $\|E - HA\|$ увеличивается с увеличением H. В общем случае (1) на каждом шаге интегрирования необходимо решать нелинейную систему уравнений относительно вектора y_{n+1}. Обычно при этом пользуются модифицированным методом Ньютона с начальным условием, вычисленным по любой экстраполяционной формуле, использующей вектор y_n. Метод экстраполирования при этом наз. п р е д и к т о р о м, а неявный метод — к о р р е к т о р о м. Метод простой итерации в Ж. д. с. неприменим из-за больших значений LH. Поскольку в неявных схемах применяется метод Ньютона для решения уравнений $F(y_{n+1}) = 0$ и, следовательно, необходимо вычислить матрицу Якоби системы (1), то иногда включают эту матрицу непосредственно в формулы методов, к-рые при решении линейных систем также обладают свойством A-устойчивости (см. [12], [15]). Для решения Ж. д. с. широко применяется п р о ц е д у р а Г и р а (м е т о д Г и р а) с автоматич. контролем погрешности на шаге и изменением по этому критерию как степени методов, так и шага интегрирования [14]. В процедуре Гира в качестве корректора используются и методы (7) (см. [9]).

Другой подход к созданию методов интегрирования жестких систем уравнений связан с учетом в формулах методов решений соответствующих линейных систем (см. [4] — [8], [10]). В первых работах этого направления рассмотрены жесткие системы уравнений с известными собственными значениями матрицы $\partial f(z)/\partial z$, по к-рым строились матричные коэффициенты методов. В связи с трудностью решения проблемы собственных значений это направление длительное время не развивалось. В [6], [7], [8] предложены способы построения матричных коэффициентов без решения проблемы собственных значений для матрицы $\partial f(z)/\partial z$ системы (1). Методы этого направления можно строить на основе равенства (см. [7]):

$$z(t_{n+1}) - z(t_n) -$$

$$- \left[\int_0^H \varphi^{-1}(t_n + \tau)\, d\tau + C\right] \varphi(t_{n+1}) \frac{dz}{dt}\Big|_{t=t_n} +$$

$$+ C\varphi(t_n) \frac{dz(t)}{dt}\Big|_{t=t_{n+1}} = \int_0^H \left[\int_0^\tau \varphi^{-1}(t_n + \rho)\, d\rho + C\right] \times$$

$$\times \left[\varphi(t_n + \tau) \frac{d^2z(t)}{dt^2} - \frac{d\varphi(t_n + \tau)}{d\tau} \frac{dz(t)}{dt}\right]_{t=t_{n+1}-\tau} d\tau, \qquad (15)$$

где $\varphi(t_n+\tau)\in C^1$, $0\leqslant\tau\leqslant H$,— неособенная $(m\times m)$-матрица, C — матрица, не зависящая от τ.

Различный выбор матриц $\varphi(t_n+\tau)$ и C приводит к разностным уравнениям, соответствующим тем или иным методам численного интегрирования, если пренебречь правой частью в (15). При $C=0$ получаются явные методы, а при $C\neq 0$ — неявные. Пусть $\varphi(t_n+\tau)=E$. Тогда неявный метод ломаных (7) соответствует $C=-HE$; метод трапеций (12) $C=-\frac{H}{2}E$; явный метод ломаных $C=0$. При $\varphi(t_n+\tau)=e^{A\tau}$, где A — постоянная $(m\times m)$-матрица, получается обобщенный метод ломаных (см. [7]):

$$y(t_{n+1})=y(t_n)+\int_0^H e^{A\tau}\,d\tau\, f(y(t_n)). \tag{16}$$

Формула (16) переходит в явный метод ломаных при $A=0$. Метод (16) дает точное решение системы уравнений

$$\frac{dz(t)}{dt}=Az(t)+M,\quad z(0)=z^0,\quad M\in R^m, \tag{17}$$

для дискретных значений $t_n=nH$. Если известна матрица

$$\Phi(A,\,h)=\int_0^h e^{A\tau}\,d\tau,$$

то использование k раз рекуррентной формулы

$$\Phi(A,\,2^{q+1}h)=\Phi(A,\,2^qh)\,[2E+A\Phi(A,\,2^qh)] \tag{18}$$

приводит к матрице

$$\Phi(A,\,2^kh)=\int_0^{2^kh} e^{A\tau}\,d\tau,$$

применяемой в (16). В качестве начального приближения для (18) при достаточно малом $h\leqslant 1/\|A\|$ целесообразно употреблять приближенную формулу:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^h e^{A\tau}\,d\tau\cong h\left(E-\frac{hA}{2}\right)^{-1}=\Phi_0,\\ &e^{Ah}\cong\left(E-\frac{Ah}{2}\right)^{-1}\left(E+\frac{Ah}{2}\right)=E+A\Phi_0,\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

или, если собственные значения матрицы действительные, то

$$\int_0^h e^{A\tau}\,d\tau\cong h\sum\nolimits_{\gamma=0}^{s}\frac{A^\gamma h^\gamma}{(\gamma+1)!}=\Phi_0. \tag{20}$$

Формула (19) дает соответствие по устойчивости в смысле Ляпунова решений системы дифференциальных (17) и разностных (16) уравнений в случае комплексных собственных значений A с малой действительной частью. Если область существования решений $\bar G\subset G$ является замкнутой, выпуклой по z, и приближенные решения принадлежат той же области, то погрешность метода (16) удовлетворяет разностному уравнению (см. [7]):

$$\varepsilon_{n+1}=\left\{e^{AH}+\int_0^H e^{A\tau}\,d\tau\left[\int_0^1\frac{\partial f(y_n+\rho\varepsilon_n)}{\partial y_n}\,d\rho-A\right]\right\}\varepsilon_n+$$
$$+\int_0^H\int_0^\tau e^{A\xi}\,d\xi\left[\frac{d^2z(t)}{dt^2}-A\frac{dz(t)}{dt}\right]_{t=t_{n+1}-\tau}d\tau,$$

где $\varepsilon_n=z_n-y_n$, а $z_n=z(t_n)$, $y_n=y(t_n)$ — решения (1) и (16) соответственно. Пусть $\|y\|=\max\limits_i|y_i|$ — норма вектора (норма матриц подчинена принятой норме вектора) и в области $\bar G$:

$$\left\|\int_0^1\frac{\partial f(y_n+\rho\varepsilon_n)}{\partial y_n}\,d\rho-A\right\|\leqslant\mu_1,$$

$$\left\|\frac{\partial f(z)}{\partial z}-A\right\|\leqslant\mu_2,\quad\left\|\frac{dz(t)}{dt}\right\|\leqslant l.$$

По матрице A с действительными элементами вычисляется число

$$R=\max_i\left(a_{ii}+\sum_{k=1,\ k\neq i}^{m}|a_{ik}|\right),\quad \|e^{At}\|\leqslant e^{Rt}.$$

Тогда справедлива оценка

$$\|\varepsilon_{n+1}\|\leqslant\left(e^{RH}+\int_0^H e^{R\tau}\,d\tau\cdot\mu_1\right)\|\varepsilon_n\|+$$

$$+\int_0^H\int_0^\tau e^{R\xi}\,d\xi\,d\tau\cdot\mu_2 l,\quad \|\varepsilon_0\|=\|\varepsilon(0)\|;$$

$$R=0,\ \|\varepsilon_{n+1}\|\leqslant(1+\mu_1 H)\|\varepsilon_n\|+\frac{H^2}{2}\mu_2 l;$$

$$0<\mu_1\leqslant -R=\alpha,\ \|\varepsilon_{n+1}\|\leqslant\|\varepsilon_n\|+\frac{\alpha H+e^{-\alpha H}-1}{\alpha^2}\mu_2 l;$$

$$0\leqslant\mu_1\leqslant R,\ \|\varepsilon_{n+1}\|\leqslant e^{2RH}\|\varepsilon_n\|+\frac{e^{RH}-1-RH}{R^2}\mu_2 l;$$

$$0<R\leqslant\mu_1,\ \|\varepsilon_{n+1}\|\leqslant e^{2\mu_1 H}\|\varepsilon_n\|+\frac{e^{\mu_1 H}-1-\mu_1 H}{\mu_1^2}\mu_2 l.$$

Если $0\leqslant\alpha=-R\leqslant\mu_1$, погрешность ε_n можно оценивать, считая $R=0$. В оценках возможны другие нормы векторов, соответствующие им нормы матриц и логарифмич. нормы (см. [3]). Приведенные оценки показывают, что при решении системы (1) шаг интегрирования H можно использовать значительно большим, чем в классич. методах. Матрицу A следует выбирать близкой по всем элементам к матрице Якоби системы (1). В пограничном слое, когда переменные изменяются быстро, грубо оценивая μ_1, μ_2, l, R по приближенному решению, можно менять матрицу A, добиваясь необходимой точности. Так как за пограничным слоем переменные системы (1) меняются медленно, на практике часто оказывается достаточно одной матрицы A, чтобы вычислить все решение при $\tau_\text{п}\leqslant t\leqslant T$. Проверку точности можно производить по правилу Рунге (см. [1]).

С целью увеличения точности на основе метода (16) в [7] предложен класс системных методов численного интегрирования. Для методов этого класса выполняются требования: 1) системный метод s-й степени должен быть точным при интегрировании алгебраич. многочленов степени $s-1$ при $A=0$; 2) системный метод любой степени должен быть точным при решении уравнений (17).

Одношаговый метод 2-й степени имеет вид:

$$y_{n+1}=y_n+\int_0^{H/2}e^{A\tau}\,d\tau\times$$

$$\times\left[2f\left(y_n+\int_0^{H/2}e^{A\tau}\,d\tau f(y_n)\right)-A\int_0^{H/2}e^{A\tau}\,d\tau\ f(y_n)\right].$$

Там же построены явный одношаговый метод 3-й степени и многошаговые системные методы. Даны асимптотич. оценки их погрешностей. При $A=0$ эти методы переходят в формулы типа Рунге — Кутта или Адамса. При аппроксимации интегралов от $e^{A\tau}$ дробно рациональными матричными полиномами от A с учетом неособенности соответствующих матриц системные методы переходят в явную форму соответствующих неявных методов, получающихся после итераций по методу Ньютона. Неявным системным методом 1-й степени является метод

$$y_{n+1}=y_n+\int_0^H e^{A\tau}d\tau f(y_n)+$$

$$+\int_0^H e^{A\tau}\,d\tau\,[f(y_{n+1})-f(y_n)-A(y_{n+1}-y_n)]. \quad (21)$$

Он получается из (15), если выбрать

$$\varphi(t_n+\tau)=e^{A\tau},\ C=-\int_0^H e^{-A\tau}\,d\tau.$$

Уравнения (21) получаются способом приведения дифференциальных уравнений к интегральным (см. [8]). Интеграл от $e^{A\tau}$ в методе (21) вычисляется по формулам (18) с начальным условием (20). Исследован способ коррекции этого интеграла по ходу решения (см. [8]).

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Васильева А. Б., «Матем. сб.», 1960, т. 50, в. 1, с. 43—58; [3] Былов Б. Ф. и др., Теория показателей Ляпунова..., М., 1966; [4] Гавурин М. К., в сб.: Методы вычислений, 1963, в. 1, с. 45—51; [5] Ракитский Ю. В., «Докл. АН СССР», 1970, т. 193, № 1, с. 40—42; [6] его же, там же, 1972, т. 207, № 4, с. 793—95; [7] его же, «Тр. Ленингр. политехн. ин-та», 1973, № 332, с. 88—97; [8] Павлов Б. В., Повзнер А. Я., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1973, т. 13, № 4, с. 1056—59; [9] Curtiss C. F., Hirschfelder J. O., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1952, v. 38, p. 235—43; [10] Mah R. S. H., Michaelson S., Sargent R. W., «Chem. Engng Sci.», 1962, v. 17, p. 619—39; [11] Dahlquist G., «Nord. tidskr. Informationsbehandling», 1963, b. 3, s. 27—43; [12] Rosenbrock H. H., «Comput. J.», 1963, v. 5, p. 329—30; [13] Widlund O. B., «Nord. tidskr. Informationsbehandling», 1967, b. 7, s. 65—70; [14] Gear C. W., в кн.: Information Processing 68, v. 1, Amst., 1969, p. 187—93; [15] Lambert J. D., Sigurdsson S. T., «SIAM J.Numer Anal.», 1972, v. 9, p. 715—33; [16] Lambert J. D., Computational methods in ordinary differential equations, N.Y., 1973; [17] Stiff differential systems, [The IBM research simposia series], N.Y.— L., 1974.

Ю. В. Ракитский.

ЖЕСТКОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — вариант понятия аналитич. пространства, относящийся к случаю, когда основное поле K является полным неархимедово нормированным полем.

Аналитич. функции p-адического переменного рассматривались еще в конце 19 в. в теории алгебраич. чисел, однако соответствующий глобальный объект — Ж. а. п.— был введен Дж. Тейтом (J. Tate) лишь в начале 60-х гг. 20 в. (см. [1]). Этой конструкции предшествовало более прямолинейное построение по образцу теории комплексно аналитич. многообразий. Главный недостаток последнего подхода связан с тем, что обычное локальное определение аналитич. функции, как разлагающейся в степенной ряд в окрестности каждой точки, неудобно в силу полной несвязности основного поля K. Определенных таким образом аналитич. функций оказывалось «слишком много» (а аналитич. многообразий, соответственно, «слишком мало»). Напр., всякое компактное аналитич. многообразие над K является объединением конечного множества замкнутых шаров (см. [3], с. 168). Конструкция Тейта начинается с выбора локальных объектов — а ф ф и н о и д н ы х пространств, аналогичных аффинным многообразиям в алгебраич. геометрии. Пусть T_n — алгебра степенных рядов от n переменных $t_1, \ldots, t_n$ над K, сходящихся в полидиске $|t_1| \leqslant 1, \ldots, |t_n| \leqslant 1$. Факторалгебры алгебры T_n наз. а ф ф и н о и д н ы м и а л г е б р а м и. Эти алгебры нётеровы и в них имеется естественная банахова топология, в к-рой все идеалы замкнуты, а гомоморфизмы непрерывны. Оказывается, что любой максимальный идеал такой алгебры имеет конечную коразмерность и пространство Max$A$ максимальных идеалов состоит, с точностью до сопряжения, из геометрич. точек, определенных над конечными расширениями поля K. В частности, MaxT_n есть полидиск единичного радиуса, а вообще, для произвольного A пространство Max$A$ представляет собой аналитическое подмножество в полидиске. Гомоморфизмы φ: $A \to B$ определяют морфизмы φ^*: Max$B \to$ Max$A$, так что аффиноидные пространства образуют категорию.

Ж е с т к о с т ь ю на топологич. пространстве X наз. набор T, Cov$U$, $\mathcal{O}_X$, где T есть семейство открытых множеств из X, называемых д о п у с т и м ы м и, Cov$U$ для каждого $U \in T$ — семейства покрытий множества U допустимыми множествами (д о п у с т и м ы е п о к р ы т и я), а $\mathcal{O}_X$ — предпучок колец на T. Для допустимых покрытий требуется выполнимость естественных аксиом, в частности допустимые покры-

тия можно измельчать, а предпучок $\mathcal{O}_X$ должен быть пучком относительно всех допустимых покрытий допустимых множеств. Морфизмы пространств с жесткостью, а также понятие индуцированной на подпространстве жесткости определяются по аналогии с такими же понятиями для окольцованных пространств. Каждое аффиноидное пространство можно наделить канонической жесткостью, сохраняющейся при любых морфизмах. Жесткое аналитическое пространство есть, по определению, топологич. пространство с жесткостью, на к-ром существует допустимое покрытие $X=\bigcup X_i$ такое, что каждое X_i с индуцированной жесткостью изоморфно аффиноидному пространству, наделенному канонич. жесткостью.

Для Ж. а. п. получен ряд результатов, аналогичных известным теоремам теории комплексных пространств. Так, имеют место аналоги теорем A и B Картана (см. *Картана теорема* [4]). Точнее, когерентные пучки $\mathcal{O}_X$-модулей на аффиноидных пространствах однозначно определяются модулем своих сечений, а их когомологии в размерностях $\geqslant 1$ обращаются в нуль. Верен также аналог теоремы Грауэрта о когерентности прямого образа когерентного пучка при собственном отображении (однако определение собственного отображения здесь сильно отличается от обычного). Построен p-адический аналог *униформизации* алгебраических кривых и абелевых многообразий (см. [5]). Обнаружена связь между понятием Ж. а. п. и понятием формальной схемы в алгебраич. геометрии (см. [5]).

Лит.: [1] Тэйт Дж., «Математика», 1969, т. 13, № 3, с. 3—37; [2] Бурбаки Н., Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов, пер. с франц., М., 1975; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Узель К., «Математика», 1969, т. 13, № 3, с. 38—49; [5] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 3, М., 1974, с. 5—92.

А. Н. Паршин.

ЖЕСТКОСТЬ — свойство подмногообразия M в *римановом пространстве* V, заключающееся в том, что любая его изометрич. вариация (*бесконечно малое изгибание*) является тривиальной, т. е. соответствующее поле скоростей z на M индуцируется полем *Киллинга вектора* ζ на M: $z=\zeta \circ i$, где $i\colon M \to V$ — *изометрическое погружение* M в V. Вопрос о Ж. подмногообразий — по существу вопрос о единственности решения системы дифференциальных уравнений, являющихся линеаризацией основной системы уравнений теории поверхностей — почти не исследован в случае, когда $\dim M>2$ и $\dim V>3$, однако и в простейшей ситуации ($\dim M=\dim V-1=2$) более или менее законченную теорию удается построить лишь для поверхностей положительной кривизны, расположенных в пространствах постоянной кривизны (см. *Векуа метод*). О Ж. поверхностей неположительной и переменной кривизны известны лишь отдельные результаты, причем на Ж. поверхности, помимо ее пространственной формы, оказывает влияние степень регулярности рассматриваемых деформаций.

Как правило, незамкнутая поверхность нежесткая, однако: 1) построены примеры поверхностей с *уплощения точкой* m, любая окрестность к-рой является жесткой или допускает бесконечно малые изгибания ограниченной регулярности; 2) существуют жесткие незамкнутые выпуклые поверхности с полной кривизной, равной 4π, окаймленные плоскими параболич. кривыми (части поверхностей типа T).

На Ж. поверхности влияет то, насколько ограничена подвижность края поверхности или линий внутри ее; так, напр., 1) сферич. сегмент S, скользящий по плоскости, будет жестким или нет в зависимости от того, меньше или больше S полусферы; 2) кусок гиперболич. параболоида с двумя пересекающимися неподвижными образующими — жесткий; 3) кусок плоскости с закрепленным краем — нежесткий.

Замкнутые поверхности изучены с точки зрения Ж. более детально; так, напр., 1) замкнутая выпуклая поверхность — жесткая (см. *Бляшке — Вейля формула*, а также [2]); 2) в то же время есть и нежесткие замкнутые поверхности вращения знакопеременной кривизны; 3) тор — жесткий; 4) замкнутый *цилиндроид* жесткий тогда и только тогда, когда площадь среднего сечения

$$S_{\text{ср}}=\frac{1}{4}(S_1+S_2),$$

где S_1 и S_2 — площади верхнего и нижнего оснований; 5) метрич. произведение k двумерных сфер является жестким в евклидовом пространстве E^{3k} и нежестким в E^{3k+l}, $l>0$.

Так определенное понятие Ж. иногда наз. Ж. 1-го порядка, вводится также Ж. 2-го и высших порядков. Понятие Ж. переносится на нерегулярные поверхности, напр. многогранники, однако и там основные результаты касаются лишь выпуклых многогранников (см. *Коши теорема* о многогранниках), и на поверхности в римановом пространстве, напр. замкнутые поверхности любого рода с положительной внешней кривизной — жесткие.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, № 2, с. 47—158; [2] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969; [3] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959; [4] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959; [5] Александров А. Д., Выпуклые многогранники, М.— Л., 1950; [6] Фоменко В. Т., «Матем. заметки», 1974, т. 16, в. 3, с. 441—45.

М. И. Войцеховский.

ЖИРО УСЛОВИЯ — условия разрешимости в классич. смысле основных краевых задач для линейного эллиптич. уравнения 2-го порядка. Пусть в ограниченной N-мерной ($N\geqslant 2$) области D с границей Γ задано эллиптич. уравнение

$$Lu\equiv\sum_{i,\,j=1}^{N}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)\,u=f(x). \qquad (*)$$

Требуется найти функцию $u(x)$, к-рая: 1) принадлежит классу $C^{(2)}(D)\bigcap C^{(0)}(D+\Gamma)$; 2) удовлетворяет в области D уравнению (*); 3) на границе Γ удовлетворяет условию $u(x)=\varphi(x)$ (первая краевая задача, или задача Дирихле), или условию

$$\frac{\partial u(x)^+}{\partial\nu}+\beta(x)\,u(x)=\varphi(x)$$

(вторая краевая задача, или задача Неймана), или условию

$$\frac{\partial u(x)^+}{\partial l}+\beta(x)\,u(x)=\varphi(x)$$

(третья краевая задача). Здесь ν — направление конормали, его направляющие косинусы равны

$$\cos(\nu,\,x_i)=\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(x)\cos(n,\,x_j),$$

$$a=\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\cos(n,\,x_j)\right)^2\right]^{1/2},\ i=1,2,\ldots,N,$$

n — внешняя нормаль к границе Γ, l — произвольное направление, для к-рого $\cos(l,\,n)\geqslant\delta>0$ для всех $x\in\Gamma$, знак $^+$ показывает, что берется предельное значение изнутри области D.

Жиро условия разрешимости указанных краевых задач состоят в следующем. Если коэффициенты $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ оператора L принадлежат в области $(D+\Gamma)$ классу $C^{(0,\mu)}$, правая часть уравнения $f(x)\in C^{(0,\mu)}(D)\bigcap C^{(0)}(D+\Gamma)$, краевое условие $\varphi(x)\in C^{(0)}(\Gamma)$ и $\beta(x)\in C^{(0)}(\Gamma)$ (для второй и третьей краевых задач), $\cos(l,\,x_i)\in C^{(0,\mu)}(\Gamma)$ (для третьей краевой задачи), а граница Γ области D принадлежит классу $A^{(1,\mu)}$, то для первой, второй и третьей краевых задач справед-

лива альтернатива Фредгольма, т. е. либо соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение и тогда неоднородная задача имеет единственное решение при любых f и φ, либо однородная задача имеет p, $0<p<\infty$, линейно независимых решений $u_1, \ldots, u_p$ и тогда неоднородная задача разрешима лишь в случае, если p определенных линейных функционалов от f и φ обращаются в нуль, причем при выполнении этого последнего условия неоднородная задача имеет бесконечно много решений, и если u_0 — одно из этих решений, то общее решение представимо в виде $u_0+\sum_{i=1}^{p} c_i u_i$, где c_i — произвольные постоянные. В случае, когда коэффициенты оператора L являются более гладкими ($a_{ij}\in C^{(2,\mu)}$, $b_i\in C^{(1,\mu)}$), так что можно рассматривать сопряженный оператор L^*, требование обращения в нуль линейных функционалов от f и φ сводится к ортогональности f и φ ко всем p линейно независимым решениям однородной сопряженной задачи. Ж. у. получены Ж. Жиро [1] — [3].

Лит.: [1] Giraud G., «C. r. Acad. sci.», 1936, t. 202, p. 380—82; [2] его же, «Bull. soc. math. France», 1932, t. 56, p. 248—72, 281—312, 316—52; [3] его же, «J. math. pures et appl.», 1939, t. 18, p. 111—43; [4] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957.

И. А. Шишмарев.

ЖОРДАНА КРИВАЯ — гомеоморфный образ окружности. Назв. по имени К. Жордана (C. Jordan), предложившего это определение. См. также *Линия*.

ЖОРДАНА ЛЕММА: пусть $f(z)$ — регулярная аналитич. функция комплексного переменного z при $|z|>c\geqslant 0$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, за исключением дискретного множества особых точек. Если существует последовательность полуокружностей

$$\gamma(R_n)=\{z:\ |z|=R_n,\quad \operatorname{Im} z\geqslant 0\},\quad R_n\uparrow+\infty,$$

такая, что максимум $M(R_n)=\max|f(z)|$ на полуокружности $\gamma(R_n)$ стремится к нулю, когда $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma(R_n)} e^{iaz} f(z)\,dz=0,$$

где a — любое положительное число. Ж. л. позволяет применять вычеты не только при условии $zf(z)\to 0$, но уже при равномерном стремлении $f(z)\to 0$ на последовательности полуокружностей в верхней или нижней полуплоскости для вычисления, напр., интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx.$$

Получена К. Жорданом [1].

Лит.: [1] Jordan C., Cours d'analyse, t. 2, 2 ed., P., 1894, p. 285—86; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976; [3] Уиттекер Э. Т., Ватсон Д.-Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 1, М., 1963, гл. 6.

Е. Д. Соломенцев.

ЖОРДАНА МЕРА параллелепипеда

$$\Delta=\{a_i\leqslant x_i\leqslant b_i;\quad a_i<b_i,\quad i=1,2,\ldots,n\}\qquad (*)$$

в $\mathbb{R}^n$ объем $m\Delta=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$ этого параллелепипеда.

Для ограниченного множества $E\subset\mathbb{R}^n$ определяются: внешняя мера Жордана

$$m_e E=\inf\sum_{j=1}^{k} m\Delta_j,\quad \bigcup_{j=1}^{k}\Delta_j\supset E,\quad k=1,2,\ldots$$

и внутренняя мера Жордана

$$m_i E=\sup\sum_{j=1}^{k} m\Delta_j,\quad E\supset\Delta_j,$$

где Δ_j попарно не пересекаются (здесь Δ_j — параллелепипеды вида (*)). Множество E наз. измеримым по Жордану (квадрируемым при $n=2$, кубируемым при $n\geqslant 3$), если $m_e E=m_i E$ или, что равносильно,

$$m_e E+m_e(\Delta\setminus E)=m\Delta,$$

где $\Delta \supset E$. В этом случае Ж. м. равна $mE = m_e E = m_i E$. Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда его граница имеет Ж. м. нуль (или, что равносильно, когда его граница имеет *Лебега меру* нуль).

Приведенное понятие меры ввели Дж. Пеано [1] и К. Жордан [2]. Внешняя Ж. м. одна и та же для E и E (*замыкания множества* E) и равна *Бореля мере* $\overline{E}$. Измеримые по Жордану множества образуют кольцо множеств, на к-ром Ж. м. конечно аддитивная функция. См. также *Квадрируемость*.

Лит.: [1] Peano G., Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, Torino, 1887; [2] Jordan C., «J. math. pures et appl.», 1892, t. 8, p. 69—99; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, т. 2, М., 1973; [4] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976. *А. П. Терехин.*

ЖОРДАНА ПРИЗНАК сходимости рядов Фурье: если 2π-периодическая функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in (a, b)$ к числу $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$; если при этом функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то ее ряд Фурье сходится к ней равномерно на всяком отрезке $[a', b']$, строго внутреннем к $[a, b]$. Ж. п. установлен К. Жорданом [1]; он обобщает *Дирихле теорему* о сходимости рядов Фурье кусочно монотонных функций.

Лит.: [1] Jordan C., «C. r. Acad. sci.», 1881, t. 92, p. 228—30; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, с. 121. *Б. И. Голубов.*

ЖОРДАНА РАЗЛОЖЕНИЕ — 1) Ж. р. функции ограниченной вариации — представление функции f в виде

$$f = f_1 - f_2,$$

где f_1 и f_2 — монотонно возрастающие функции. Ж. р. наз. также представление обобщенной меры, или *заряда* $\mu(E)$ измеримого множества E в виде разности мер

$$\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E),$$

где хотя бы одна из *мер* μ^+ или μ^- конечна. Установлено К. Жорданом.

Лит.: [1] Jordan C., Cours d'analyse, t. 1, P., 1893; [2] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [3] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974. *М. И. Войцеховский.*

2) Ж. р. эндоморфизма g конечномерного векторного пространства — представление этого эндоморфизма в виде суммы полупростого и нильпотентного эндоморфизмов, коммутирующих между собой: $g = g_s + g_n$. Эндоморфизмы g_s и g_n наз. соответственно полупростой и нильпотентной компонентами Ж. р. эндоморфизма g. Такое представление наз. аддитивным Ж. р. (Полупростой эндоморфизм — эндоморфизм, обладающий при нек-ром расширении основного поля базисом из собственных векторов, нильпотентный — равный в некоторой степени нулю.) Если в нек-ром базисе пространства матрица $\|a_{ij}\|$ эндоморфизма g является *жордановой матрицей*, а t — такой эндоморфизм, что в том же базисе его матрица имеет вид $\|b_{ij}\|$, где $b_{ij} = 0$ при всех $i \neq j$ и $b_{ii} = a_{ii}$ для всех i, то

$$g = t + (g - t)$$

будет Ж. р. эндоморфизма g с $g_s = t$ и $g_n = g - t$.

Ж. р. существует и единственно для любого эндоморфизма g векторного пространства V над алгебраически замкнутым полем K. Более того, $g_s = P(g)$ и $g_n = Q(g)$ для некоторых многочленов P и Q над полем K (зависящих от g) с нулевыми свободными членами. Если W инвариантное относительно g подпространство в V, то W инвариантно относительно g_s и g_n, причем

$$g|_W = g_s|_W + g_n|_W$$

является Ж. р. для $g|_W$ (здесь $|_W$ обозначает сужение эндоморфизма на подпространство W). Если k — подполе в K и g рационально над k (относительно некоторой k-структуры на V), то g_s и g_n не будут, вообще говоря, рациональными над k; можно лишь утверждать, что g_s и g_n рациональны над полем $k^{p^{-\infty}}$, где p — характеристическая экспонента поля k (при $p=1$ $k^{p^{-\infty}}$ совпадает с k, а при $p>1$ это — множество всех элементов из K, чисто несепарабельных над k).

Если g — автоморфизм пространства V, то g_s — также автоморфизм V и

$$g=g_sg_u=g_ug_s,$$

где $g_u=1_V+g_s^{-1}g_n$, 1_V — тождественный автоморфизм пространства V. Автоморфизм g_u является у н и п о т е н т н ы м, т. е. все его собственные значения равны единице. Всякое представление автоморфизма g в виде произведения коммутирующих полупростого и унипотентного автоморфизмов совпадает с описанным представлением $g=g_sg_u=g_ug_s$. Это представление наз. м у л ь т и п л и к а т и в н ы м Ж. р. а в т о м о р ф и з м а g, а g_s и g_n — полупростой и унипотентной компонентой автоморфизма g. Если g рационален над k, то g_s и g_u рациональны над $k^{p^{-\infty}}$. Если W — инвариантное относительно g подпространство в V, то W инвариантно относительно g_s и g_u, а

$$g|_W=g_s|_Wg_u|_W$$

— мультипликативное Ж. р. автоморфизма $g|_W$.

Понятие Ж. р. может быть обобщено на локально конечные эндоморфизмы бесконечномерного векторного пространства V, т. е. такие эндоморфизмы g, что V порождается конечномерными g-инвариантными подпространствами. Для g имеют место существование и единственность представления в виде суммы g_s+g_n, а в случае автоморфизма — в виде произведения g_sg_u, коммутирующих локально конечных полупростого и нильпотентного эндоморфизмов (соответственно полупростого и унипотентного автоморфизмов), т. е. таких эндоморфизмов, что любое конечномерное g-инвариантное подпространство W в V инвариантно относительно g_s и g_n (соответственно g_s и g_u) и $g|_W=g_s|_W+g_n|_W$ (соответственно $g|_W=g_s|_W\cdot g_u|_W$ есть Ж. р. для $g|_W$).

Указанное распространение понятия Ж. р. на локально конечные эндоморфизмы позволяет ввести определение Ж. р. в алгебраич. группах и алгебраич. алгебрах Ли. Пусть G — аффинная алгебраич. группа над K, $\mathfrak{G}$ — ее алгебра Ли, ρ — представление G в группу автоморфизмов алгебры $K[G]$ регулярных функций на G, определенное правыми сдвигами, и $d\rho$ — его дифференциал. Для любых g из G и X из $\mathfrak{G}$ эндоморфизмы $\rho(g)$ и $d\rho(X)$ векторного пространства $K[G]$ являются локально конечными, поэтому можно говорить об их Ж. р.:

$$\rho(g)=\rho(g)_s\rho(g)_u$$

и

$$d\rho(X)=d\rho(X)_s+d\rho(X)_n.$$

Один из важных результатов теории алгебраич. групп состоит в том, что указанные Ж. р. реализуются с помощью элементов из G и $\mathfrak{G}$ соответственно. Точнее, существуют однозначно определенные элементы g_s, $g_u\in G$ и X_s, $X_n\in\mathfrak{G}$ такие, что

$$g=g_sg_u=g_ug_s, \tag{1}$$

$$X=X_s+X_n,\quad [X_s,\ X_n]=0, \tag{2}$$

и

$$\rho(g_s)=\rho(g)_s,\quad \rho(g_u)=\rho(g)_u,$$
$$d\rho(X_s)=(d\rho(X))_s,\quad d\rho(X_n)=(d\rho(X))_n.$$

Разложение (1) наз. Ж. р. в а л г е б р а и ч е с к о й г р у п п е G, а разложение (2) — Ж. р. в а л г е-

браической алгебре Ли $\mathcal{G}$. Если G определена над подполем k поля K и элемент $g \in G$ (соответственно $X \in \mathcal{G}$) рационален над k, то g_s, g_u (соответственно X_s, X_n) рациональны над $k^{p^{-\infty}}$. Более того, если G реализована как замкнутая подгруппа полной линейной группы $GL(V)$ автоморфизмов некоторого конечномерного векторного пространства V [и, следовательно, $\mathcal{G}$ реализуется как подалгебра в алгебре Ли группы $GL(V)$], то Ж. р. (1) для элемента $g \in G$ совпадает с введенным выше мультипликативным Ж. р. для g, а разложение (2) для $X \in \mathcal{G}$ — с аддитивным Ж. р. для X (рассматриваемых как эндоморфизмы пространства V). Если $\varphi\colon G_1 \to G_2$ — рациональный гомоморфизм аффинных алгебраич. групп и $d\varphi\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ — соответствующий гомоморфизм их алгебр Ли, то

$$\varphi(g_s) = \varphi(g)_s, \quad \varphi(g_u) = \varphi(g)_u,$$
$$d\varphi(X_s) = (d\varphi(X))_s \text{ и } d\varphi(X_n) = (d\varphi(X))_n$$

для любых $g \in G_1$, $X \in \mathcal{G}_1$.

Понятие Ж. р. в алгебраич. группах и алгебрах Ли позволяет ввести определение полупростого, унипотентного (соответственно нильпотентного) элементов в произвольной аффинной алгебраич. группе (соответственно алгебраич. алгебре Ли). Элемент $g \in G$ наз. полупростым, если $g = g_s$, и унипотентным, если $g = g_u$; элемент $X \in \mathcal{G}$ наз. полупростым, если $X = X_S$, и нильпотентным, если $X = X_n$. Пусть G определена над k, тогда

$$G_u = \{g \in G \mid g = g_u\}$$

является k-замкнутым подмножеством в G, а

$$\mathcal{G}_n = \{X \in \mathcal{G} \mid X = X_n\}$$

— k-замкнутым подмножеством в $\mathcal{G}$. В общем случае

$$G_S = \{g \in G \mid g = g_s\}$$

не является замкнутым множеством, но если G коммутативна, то G_s и G_u являются замкнутыми подгруппами и $G = G_s \times G_u$. Множества G_s и G_u в произвольной аффинной алгебраич. группе инвариантны относительно внутренних автоморфизмов, и изучение разбиения этих множеств на классы сопряженных элементов составляет предмет специальных исследований [3].

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Kolchin E. R., «Ann. Math.», 1948, v. 49, p. 1—42; [3] Семинар по алгебраическим группам, пер. с англ., М., 1973.

В. Л. Попов.

ЖОРДАНА ТЕОРЕМА: плоская простая замкнутая кривая Γ разбивает плоскость $\mathbb{R}^2$ на две связные компоненты и является их общей границей. Установлена К. Жорданом [1]. Вместе с примыкающим к ней утверждением: простая дуга не разбивает плоскость, это — старейшая теорема теоретико-множественной топологии.

Из двух компонент одна (внутренность Γ) — ограниченная; характеризуется тем, что порядок любой точки, ей принадлежащей, относительно Γ равен ± 1; другая (внешность Γ) — неограниченная, и порядок ее точек относительно Γ равен нулю. Для любой точки x ограниченной компоненты A и любой точки $x_0 \in \Gamma$ существует простая дуга с концами x_0 и x, все точки к-рой, отличные от x_0, содержатся в A (теорема Шёнфлиса).

Ж. т. обобщается по размерности: любое $(N-1)$-мерное подмногообразие в $\mathbb{R}^N$, гомеоморфное сфере, разбивает пространство на две компоненты и является их общей границей; при $N=3$ это доказано А. Лебегом (H. Lebesgue), в общем случае — Л. Брауэром (L. Brouwer), отчего N-мерная Ж. т. иногда наз. Жордана—Брауэра теоремой.

Лит.: [1] Jordan C., Cours d'analyse, t. I, P., 1893; [2] Валле-Пуссен Ш. Ж. де, Курс анализа бесконечно малых, пер. с франц., т. 2, Л.—М., 1933; [3] Александ-

дров П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947; [4] Дьедонне Ж., Основы современного анализа, пер. с англ., М., 1964; [5] Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ., М., 1948; [6] Филиппов А. Ф., «Успехи матем. наук», 1950, т. 5, в. 5, с. 173—76. *М. И. Войцеховский.*

ЖОРДАНА — ГЁЛЬДЕРА ТЕОРЕМА: если группа обладает *композиционными рядами*, то любые два ее композиционных ряда изоморфны. К. Жордан [1], [2] и О. Гёльдер [3], занимаясь вопросом о разрешимости уравнений в радикалах (см. *Галуа теория*), исследовали группы подстановок. Для этих групп К. Жордан ввел понятие композиционного и *главного рядов* и доказал, что индексы двух одноименных рядов (т. е. индексы подгруппы G_i в G_{i+1}), с точностью до расположения, одинаковы. Иными словами, было доказано совпадение последовательностей порядков факторов двух композиционных (главных) рядов с точностью до расположения. О. Гёльдер доказал изоморфизм соответствующих факторов. О. Шрейером [4] было доказано еще более общее утверждение: любые два нормальных ряда произвольной группы обладают изоморфными уплотнениями (теорема Шрейера). Ж.— Г. т. была доказана также для групп с произвольной областью операторов (Э. Нётер, E. Noether, В. Крулль, W. Krull), откуда, в частности, вытекали аналогичные теоремы для характеристических и вполне характеристич. рядов.

В дальнейшем обобщения Ж.— Г. т. пошли по следующим направлениям. 1) Были получены обобщения теорем Шрейера и Жордана — Гёльдера для бесконечных нормальных систем и, в частности, вполне упорядоченных нормальных и композиционных рядов, а также доказано, что все возрастающие нормальные ряды группы с простыми факторами изоморфны (эти ряды могут и не быть композиционными) (см. [5]). 2) Ж.— Г. т. была перенесена на ряды идеалов колец и других алгебраич. образований. Эти направления объединились рядом результатов для Ω-групп (мультиоператорных групп), Ω-алгебр и для универсальных алгебр с одноэлементной подалгеброй и перестановочными конгруэнциями (см. [5] — [8]). 3) Рассматривались различные способы обобщения Ж.— Г. т. на языке теории решеток и частично упорядоченных множеств. Получено обобщение теоремы Шрейера для цепочек элементов дедекиндовых решеток. В ряде работ для определения нормального ряда элементов решетки вводилось дополнительное отношение нормальности или операция умножения (см. [5], [6], [9] — [11]). 4) Были получены обобщения Ж.— Г. т. и теоремы Шрейера для нормальных категорий (см. [8]).

Лит.: [1] Jordan C., «C. r. Acad. sci.», 1869, t. 68, p. 257; [2] его же, Traité des substitutions et des équations algébriques, P., 1870 (2 ed., 1957); [3] Hölder O., «Math. Ann.», 1889, Bd 34, S. 26—56; [4] Schreier O., «Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg», 1928, Bd 6, № 3—4, S. 300—02; [5] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [6] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [7] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [8] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974; [9] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 237—74; [10] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1966, М., 1968, с. 109—136; 1968, М., 1970, с. 101—54; [11] Фофанова Т. С., в сб.: Упорядоченные множества и решетки, в. 3, Саратов, 1974, с. 99—108. *И. В. Стеллецкий.*

ЖОРДАНОВА ДУГА, простая дуга,— топологическое пространство, гомеоморфное отрезку [0, 1] числовой прямой. *А. А. Мальцев.*

ЖОРДАНОВА МАТРИЦА — квадратная блочно-диагональная матрица J над полем k, имеющая вид

$$J = \begin{Vmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_s}(\lambda_s) \end{Vmatrix},$$

где $J_m(\lambda)$ — квадратная матрица порядка m вида

$$J_m(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & 0 & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{Vmatrix},$$

$\lambda \in k$. Матрица $J_m(\lambda)$ называется жордановой клеткой порядка m с собственным числом λ. Каждая клетка определяется *элементарным делителем* (см. [5]).

Для произвольной квадратной матрицы A над алгебраически замкнутым полем k всегда существует такая квадратная невырожденная матрица C над k, что $C^{-1}AC$ является Ж. м. (иначе говоря, A подобна над k некоторой Ж. м.). Это утверждение справедливо и при более слабых ограничениях на поле k: для того чтобы матрица A была подобна над k нек-рой Ж. м., необходимо и достаточно, чтобы поле k содержало все корни минимального многочлена матрицы A. Матрица $C^{-1}AC$, указанная выше, наз. жордановой формой (или жордановой нормальной формой) матрицы A. Такая нормальная форма рассматривалась одним из первых К. Жорданом [1] (см. также историч. очерк к гл. VI и VII книги [2]).

Жорданова форма матрицы определена не однозначно, а с точностью до порядка жордановых клеток. Точнее, две Ж. м. подобны над k в том и только в том случае, когда они составлены из одних и тех же жордановых клеток и отличаются друг от друга лишь расположением этих клеток на главной диагонали. Количество $C_m(\lambda)$ жордановых клеток порядка m с собственным числом λ в жордановой форме матрицы A определяется формулой

$$C_m(\lambda) = rk\,(A-\lambda E)^{m-1} - 2rk\,(A-\lambda E)^m + rk\,(A-\lambda E)^{m+1},$$

где E — единичная матрица того же порядка n, что и A, $rk\,B$ — ранг матрицы B, а $rk\,(A-\lambda E)^0$, по определению, равен n.

Помимо жордановой нормальной формы, имеется и ряд других типов нормальных форм матрицы. К их рассмотрению прибегают, напр., когда хотят исключить неоднозначность приведения к жордановой форме или когда основное поле не содержит всех корней минимального многочлена матрицы (см. [2] — [5]).

С точки зрения теории инвариантов Ж. м.— это канонич. представители в орбитах присоединенного представления для полной линейной группы. Нахождение аналогичных представителей для произвольной редуктивной алгебраич. группы является пока (1978) нерешенной до конца задачей (см. [6], [7]).

Лит.: [1] Jordan C., Traité des substitutions et des équations algébriques, P., 1870, p. 114—25; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [3] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966; [4] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [5] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 4 изд., М., 1975; [6] Семинар по алгебраическим группам. Сб. статей, пер. с англ., М., 1973; [7] Steinberg R., в кн.: Тр. Международного конгресса математиков. Москва. 1966, М., 1968, с. 277—83.

В. Л. Попов.

ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА матрицы— см. *Жорданова матрица.*

ЖУКОВСКОГО ТЕОРЕМА — одна из основных теорем гидромеханики несжимаемой идеальной жидкости, полученная Н. Е. Жуковским в 1906 методами теории функций комплексного переменного: подъемная сила крыла (на единицу длины крыла), обтекаемого установившимся плоскопараллельным потоком жидкости (га-

за), ортогональна к скорости потока на бесконечности и по величине равна произведению этой скорости на циркуляцию скорости и на плотность жидкости. При применении Ж. т. следует иметь в виду, что величина циркуляции скорости однозначно определяется из условия Жуковского конечности скорости жидкости у задней острой кромки крыла (см. рис. 2 и лит. в ст. *Жуковского функция*). *Е. Д. Соломенцев.*

ЖУКОВСКОГО ФУНКЦИЯ — рациональная функция комплексного переменного z:

$$w=\lambda(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

Важна своими применениями в гидромеханике, открытыми Н. Е. Жуковским (см. [1], [2]) в основном для построения и изучения профиля Жуковского (крыла Жуковского). Пусть в плоскости z заданы окружность K, проходящая через точки $z=\pm 1$ (рис. 1), и окружность K', касающаяся K извне в точке $z=1$, с центром α и радиусом ρ. При отображении $w=\lambda(z)$ образом окружности K' является нек-рая замкнутая кривая L' с острием в точке $w=1$, касающаяся в этой точке дуги окружности L (образа K)



Рис. 1.

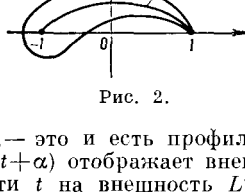


Рис. 2.

и изображенная на рис. 2,— это и есть профиль Жуковского. Функция $w=\lambda(\rho t+\alpha)$ отображает внешность единичного круга плоскости t на внешность L'. Для получения профилей Жуковского более общего вида и расположения применяется обобщенная Ж. ф. (см. [3], [4], [5]):

$$w=\frac{1}{2}(a-b)z+\frac{1}{2}(a+b)\frac{1}{z},\quad a>b>0.$$

Лит.: [1] Жуковский Н. Е., Гидродинамика, Собр. соч., М.—Л., т. 2, 1949; [2] его же, Теоретические основы воздухоплавания, Собр. соч., т. 6, 1950; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [4] Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 2 изд., М., 1966; [5] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. 1, 6 изд., М., 1963. *Е. Д. Соломенцев.*

ЖУРДЕНА ПРИНЦИП — дифференциальный вариационный принцип механики, установленный Ф. Журденом [1] и выделяющий действительные движения системы из класса кинематически возможных движений, удовлетворяющих условиям наложенных на систему идеальных связей и условиям постоянства положений точек системы для рассматриваемого момента времени. Согласно Ж. п., для действительного движения системы, стесненной идеальными двусторонними (удерживающими) связями, сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любых вариациях кинематически возможных скоростей равна нулю в любой момент времени. См. также *Вариационные принципы классической механики.*

Лит.: [1] Jourdain P. E. B., «Quart. J. Pure and Appl. Math.», 1908, v. 39, p. 375—84. *В. В. Румянцев.*

ЖУЛИА ТЕОРЕМА: если a — изолированная существенно особая точка аналитич. функции $f(z)$ комплексного переменного z, то существует по крайней мере один выходящий из a луч $S=\{z;\ \arg(z-a)=\theta_0\}$ такой, что в любом угле

$$V=\{z;\ |\arg(z-a)-\theta_0|<\varepsilon\},\ \varepsilon>0,$$

симметричном относительно этого луча, функция $f(z)$ принимает каждое конечное значение, за исключением,

быть может, одного, в бесконечной последовательности точек $\{z_k\} \subset V$, сходящейся к a. Этот результат Г. Жюлиа (см. [1]) дополняет большую *Пикара теорему* о поведении аналитич. функции в окрестности существенно особой точки.

Фигурирующие в Ж. т. лучи наз. л у ч а м и Ж ю л и а. Так, для функции $f(z)=e^z$ и $a=\infty$ лучами Жюлиа являются положительная и отрицательная части мнимой оси. В связи с Ж. т. для мероморфной, напр. в единичном круге $D=\{z;\ |z|<1\}$, функции $w=f(z)$ хорда S с конечной точкой $e^{i\theta_0}$ на окружности $|z|=1$ наз. о т р е з к о м, или х о р д о й, Ж ю л и а, если в любом открытом угле V с вершиной $e^{i\theta_0}$, содержащем S,

функция $w=f(z)$ принимает все значения на римановой сфере w, за исключением, быть может, двух. Точка $e^{i\theta_0}$ наз. точкой Жюлиа для $f(z)$, если любая хорда S с концом $e^{i\theta_0}$ является хордой Жюлиа для $f(z)$. Существуют мероморфные функции ограниченного вида, для к-рых каждая точка окружности $|z|=1$ является точкой Жюлиа.

См. также *Асимптотическое значение*, *Иверсена теорема*, *Предельное множество*.

Лит.: [1] Julia G., Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé, P., 1924; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 8.

Е. Д. Соломенцев.

ЗАВИСЯЩИЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ ИНТЕГРАЛ — интеграл вида

$$J(y)=\int f(x,\ y)\,dx,$$

в к-ром точка $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пробегает пространство $\mathbb{R}^n$ (в случае, если эта точка пробегает только нек-рую область D в пространстве $\mathbb{R}^n$, то функцию $f(x, y)$ можно считать равной нулю при $x\in\mathbb{R}^n\setminus D$), а точка $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, образующая совокупность параметров $y_1, y_2, \ldots, y_m$, изменяется в пределах нек-рой области G пространства $\mathbb{R}^m$.

Основные вопросы теории таких интегралов — это выяснение условий непрерывности и дифференцируемости функции $J(y)$ по параметрам $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Менее стеснительные условия непрерывности и дифференцируемости $J(y)$ получают при понимании интеграла в смысле Лебега. Справедливы следующие утверждения.

1) Если функция $f(x, y)$ для почти всех $x\in\mathbb{R}^n$ непрерывна по y в области $G\subset\mathbb{R}^m$ и если существует интегрируемая в $\mathbb{R}^n$ функция $g(x)$ такая, что для каждого $y\in G$ и для почти всех $x\in\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $|f(x, y)|\leqslant g(x)$, то интеграл $J(y)$ является непрерывной функцией y в области G.

2) Если функция $f(x,\ t)$, определенная при $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in(a,\ b)$, для почти всех $x\in\mathbb{R}^n$ и каждого $t\in(a,\ b)$ имеет производную $\frac{df}{dt}\ (x,\ t)$, к-рая для почти каждого $x\in\mathbb{R}^n$ является непрерывной функцией t на интервале $(a,\ b)$, и если существует интегрируемая в $\mathbb{R}^n$ функция $g(x)$ такая, что для каждого $t\in(a,\ b)$ и для почти всех $x\in\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $|\frac{df}{dt}(x,\ t)|\leqslant g(x)$, то из существования при нек-ром $t_0\in(a,\ b)$ интеграла

$$\int f(x,\ t_0)\,dx$$

следует дифференцируемость по t на интервале $(a,\ b)$ функции

$$J(t)=\int f(x,\ t)\,dx$$

и возможность вычисления производной $J'(t)$ дифференцированием под знаком интеграла:

$$J'(t)=\int \frac{\partial f}{\partial t}\,(x,\ t)\,dx.$$

Из 1) — 2) получают ряд более простых утверждений о непрерывности и дифференцируемости интегралов по параметрам, относящихся к трактовке интеграла в смысле Римана и более частным случаям (см. [2] — [4]).

Несобственные интегралы, зависящие от параметров. Для простейшего несобственного интеграла 1-го рода

$$J(t)=\int_a^\infty f(x,\ t)\,dx \qquad (*)$$

вводят понятие равномерной сходимости по параметру t на нек-ром сегменте $c\leqslant t\leqslant d$. Этот интеграл наз. рав-

номерно сходящимся по t на сегменте $[c, d]$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $A(\varepsilon)>0$ такое, что

$$\left|\int_R^{\infty} f(x, t)\, dx\right| < \varepsilon$$

для всех $\mathbb{R}\geqslant A(\varepsilon)$.

Справедливы следующие утверждения:

а) Если функция $f(x, t)$ непрерывна в полуполосе $[a\leqslant x<\infty,\ c\leqslant t\leqslant d]$ и интеграл (*) сходится равномерно по t на сегменте $[c, d]$, то функция $J(t)$ непрерывна на сегменте $c\leqslant t\leqslant d$.

б) Если $f(x, t)$ и производная $\frac{df}{dt}(x, t)$ непрерывны в полуполосе $[a\leqslant x<\infty,\ c\leqslant t\leqslant d]$, интеграл (1) сходится для нек-рого $t\in[c, d]$, а интеграл

$$\int_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, dx$$

сходится равномерно относительно t на сегменте $[c, d]$, то функция $J(t)$ дифференцируема на сегменте $[c, d]$ и ее производная может быть найдена по формуле

$$J'(t)=\int_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, dx.$$

Аналогичные утверждения справедливы и для несобственного интеграла 2-го рода.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [2] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 2, М., 1973; [3] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, т. 2, М., 1970; [4] Никольский С. М., Курс математического анализа, т. 2, М., 1973; [5] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972.

В. А. Ильин.

ЗАМЕНА БАЗЫ — теоретико-категорная конструкция, частными случаями которой являются понятие индуцированного расслоения в топологии, а также понятие расширения кольца скаляров в теории модулей.

Пусть C — категория с расслоенными произведениями и g: $S'\to S$ — морфизм этой категории. З. б. при помощи морфизма g есть функтор из категории S-объектов (т. е. из категории морфизмов f: $X\to S$, где X — объект из C) в категорию S'-объектов, сопоставляющий S-объекту f: $X\to S$ S'-объект f': $X'\to S'$, где $X'=X\times_S S'$, а морфизм f' есть проекция на второй сомножитель. Морфизм g при этом наз. морфизмом замены базы. Говорят также, что объект X' получен З. б. из объекта X.

Частным случаем понятия З. б. является понятие слоя морфизма f: $X\to S$ схемы S. А именно, слой морфизма f над точкой $s\in S$ есть схема

$$X_s=X\times_S s,$$

т. е. схема, получаемая из X З. б. при помощи естественного морфизма $s\to S$. Аналогично определяется геометрический слой $X_{\bar{s}}$, он получается З. б. при помощи морфизма $\operatorname{Spec} K\to S$, связанного с точкой $\bar{s}$, где K — алгебраически замкнутое поле. Многие свойства S-схемы X сохраняются при З. б. Обратная задача — восстановление свойств схемы X по свойствам схемы, полученной из X З. б., рассматривается в теории спуска (см. также [3]).

Пусть морфизм $f'\colon X'\to S'$ получен З. б. при помощи $g\colon S'\to S$ из морфизма $f\colon X\to S$, т. е. задан декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow[g]{} & S \end{array}$$

И пусть F — пучок множеств на X. Тогда существует естественное отображение пучков $\psi\colon g^*f_*(F)\longrightarrow f'_*g'^*(F)$. Если F — пучок абелевых групп, то для каждого $q\geqslant 0$ существует естественный гомоморфизм пучков

$$\psi_q\colon g^*(R^qf_*(F))\longrightarrow R^qf'_*(g'^*(F)).$$

При этом ψ и ψ_q также наз. морфизмами замены базы. Принято говорить, что справедлива теорема о замене базы, если ψ или, соответственно, ψ_q являются изоморфизмами. Иначе говоря, теорема о З. б. это — утверждение о согласованности (коммутировании) функторов R^qf_* с функтором замены базы. В частности, если g есть вложение точки $s\in S$, то теорема о З. б. означает существование естественного изоморфизма: $(R^qf_*(F))_x\xrightarrow{\sim} H^q(X_x, F\mid X_x)$ между слоем q-го прямого образа пучка F и q-мерной группой когомологий слоя морфизма f. Теорема о З. б. справедлива в следующих ситуациях: 1) f — собственное отображение паракомпактных топологич. пространств, S — локально компактное пространство [1]; 2) f — отделимый квазикомпактный морфизм схем, g — плоский морфизм, F — квазикогерентный пучок O_X-модулей (теорему о сравнении когомологий обычных и формальных схем (см. [2]) также можно интерпретировать как теорему о З. б.); 3) f — собственный морфизм схем, F — пучок кручения в этальной топологии. Некоторые другие случаи, в к-рых справедлива теорема о З. б., рассмотрены в [3].

Лит.: [1] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [2] Grothendieck A., Dieudonné J., Éléments de géométrie algébrique, P., 1961, (Publ. math. IHES, № 11); [3] Théorie des topos et cohomologie etale des schémas, B., 1973.

В. И. Данилов.

ЗАМКНУТАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ — замкнутая гладкая кривая на *римановом многообразии* M, к-рая является *геодезической линией*. Более общее понятие — геодезическая петля, т. е. геодезическая $\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$, проходящая при $t=a$ и $t=b$ через одну и ту же точку p; рассматриваемая как замкнутая линия, она может иметь «излом» в точке p. Геодезич. петля является З. г. только в том случае, когда такого излома нет, т. е. когда $\gamma(t)$ при $t=a$ и при $t=b$ имеет одну и ту же касательную. Замкнутые траектории *геодезического потока* в пространстве TM касательных векторов к M проектируются в З. г. при естественной проекции $TM\to M$. Кривая, получающаяся, когда одна и та же З. г. обходится несколько раз, наз. кратной. Если З. г. не является кратной, то она наз. простой З. г.

Определение З. г. и геодезич. петли дословно переносится на тот случай, когда M снабжено *финслеровой метрикой* или *аффинной связностью*. Если же M — метрич. пространство (в этом случае геодезич. линия определяется как локально кратчайшая линия), то определение геодезич. петли сохраняется дословно, тогда как определение З. г. нужно несколько изменить, поскольку нельзя говорить о гладкости или изломе. Геодезич. петля $\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$, где $\gamma(a)=\gamma(b)=p$ и γ не постоянна ни на каком отрезке, будет З. г., если при достаточно малом $\varepsilon>0$ линия

$$\overline{\gamma}(s)=\begin{cases}\gamma(b+s), & -\varepsilon\leqslant s\leqslant 0,\\ \gamma(a+s), & 0\leqslant s\leqslant\varepsilon,\end{cases}$$

(состоящая из двух дуг линии γ: первая дуга соединяет $\gamma(b-\varepsilon)$ с $\gamma(b)=p$, вторая соединяет $p=\gamma(a)$ с $\gamma(a+\varepsilon)$)

является кратчайшей линией между своими концами $\gamma(b-\varepsilon)$ и $\gamma(a+\varepsilon)$.

Исследования З. г. проводились главным образом для З. г. на замкнутых римановых многообразиях; имеется также ряд результатов для финслеровых многообразий; нек-рые результаты получены и в более общем случае метрич. пространств с нек-рыми специальными свойствами (так наз. G-пространства Буземана, см. *Геодезических геометрия*) [1]. Эти исследования были начаты Ж. Адамаром [2], А. Пуанкаре (H. Poincaré [3]) и Дж. Биркгофом [4].

Ж. Адамар положил начало исследованиям геодезич. линий (не обязательно замкнутых) на многообразиях отрицательной кривизны. Основные современные результаты относятся к случаю замкнутых многообразий M, кривизна к-рых отрицательна по всем двумерным направлениям во всех точках. Относительно З. г. на таком M доказано, что замкнутые траектории геодезич. потока всюду плотны в TM (см. [5]) (аналогичное явление наблюдается и в ряде примеров с положительной кривизной, но не всегда [6]); имеется оценка роста числа З. г., длина к-рых не превосходит l, с увеличением l (см. [7]). Ж. Адамар аппроксимировал длинные отрезки незамкнутых геодезических с помощью З. г., что можно считать началом *символической динамики*.

К Ж. Адамару восходит также теорема, дающая нек-рую информацию о З. г. на замкнутом многообразии M (уже без каких-либо предположений о кривизне) в терминах свойств *фундаментальной группы* $\pi_1(M)$. Ориентированная замкнутая кривая γ определяет некоторый класс сопряженных элементов $[\gamma]$ группы $\pi_1(M)$; все такие кривые, отвечающие одному классу, получаются друг из друга посредством *свободной гомотопии*. Оказывается, что для каждого класса K сопряженных элементов $\pi_1(M)$, кроме класса, состоящего из единицы этой группы, среди всех замкнутых кривых γ с $[\gamma]=K$ существуют кратчайшие, и они являются З. г. Эта теорема (справедливая не только для римановых или финслеровых метрик, но и в общем случае G-пространств Буземана) является простейшим и исторически первым результатом *вариационного исчисления в целом*. Однако возникновение последнего как самостоятельного направления связано с более сложным применением вариационных методов к исследованию З. г. на многообразиях, гомеоморфных сфере, для к-рых (как и вообще для односвязных многообразий) предыдущая теорема бессодержательна.

Вопрос о З. г. на таких многообразиях поставил А. Пуанкаре (точнее, у него речь шла об о в а л о и д е, т. е. двумерной замкнутой выпуклой поверхности). Он предположил, что в «общем» случае на овалоиде имеются три З. г. без самопересечений, причем две из них устойчивы в линейном приближении, а одна неустойчива. Такая связь вопроса о существовании З. г. и оценке их числа с вопросом об их свойствах устойчивости составляет существенную особенность эвристических рассуждений А. Пуанкаре, связанных преимущественно с теорией динамич. систем. Эти рассуждения могут быть проведены вполне строго, однако только для метрик, достаточно близких к «стандартной» (обычной метрике на сфере $x^2+y^2+z^2=1$ в евклидовом пространстве, см. [8]). Для метрик, далеких от стандартной, предполагавшиеся А. Пуанкаре свойства устойчивости З. г. могут не иметь места [9].

Открытие вариационного подхода к вопросу о З. г. на односвязных многообразиях принадлежит Дж. Биркгофу [4]. Он доказал, что на многообразии, гомеоморфном сфере, существует хотя бы одна З. г.; в частности, предположение о существовании на двумерной сфере трех З. г. без самопересечений было доказано Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом (см. [10]).

Имеются работы о свойствах З. г. для «типичных» римановых (или финслеровых) метрик (т. е. образующих множество второй категории в пространстве всех метрик данного класса гладкости) (см. [11] — [13]).

Стандартная метрика на сфере обладает тем свойством, что все ее геодезические замкнуты и имеют одинаковую длину; на сфере имеются и другие метрики с тем же свойством [14]. Исследовался также вопрос о топологич. свойствах многообразия и о метрике на нем, если последняя обладает указанным свойством или каким-нибудь вариантом такового.

Подробное изложение теории З. г. см. в [15].

Лит.: [1] Буземан Г., Геометрия геодезических, пер. с англ., М., 1962; [2] Hadamard J., «J. math pure appl.», 1898, t. 4, p. 27—75; [3] Пуанкаре А., Избр. труды, М., 1972, т. 2, с. 735—74; [4] Birkhoff G. D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1917, v. 18, p. 199—300; [5] Аносов Д. В., Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, М., 1967; [6] Weinstein A., «C. r. Acad. sci.», 1970, t. 271, A504; [7] Синай Я. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30, в. 6, с. 1275—96; [8] Грюнталь А. И., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 4, с. 244—45; [9] его же, там же, в. 5, с. 166; [10] Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г., там же, 1947, т. 2, в. 1, с. 166—217; [11] Abraham R., в кн.: «Global Analysis, N. Y., 1970 (Proc. Symp. Pure Math., v. 14), p. 1—3; [12] Klingenberg W., Takens F., «Math. Ann.», 1972, Bd 197, № 4, S. 323—34; [13] Klingenberg W., «J. differential geometry», 1976, v. 11, p. 299—308; [14] Zoll O., «Math. Ann.», 1903, Bd 57, S. 108—33; [15] Klingenberg W., Lectures on closed geodesics, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, № 230, B.— Hdlb.— N. Y., 1978.

Д. В. Аносов.

ЗАМКНУТАЯ КАТЕГОРИЯ — категория с дополнительной структурой, позволяющей использовать внутренний Hom-функтор как сопряженный справа функтор к абстрактному тензорному произведению.

Категория $\mathfrak{M}$ наз. з а м к н у т о й, если в ней задан бифунктор $\otimes: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ (см. *Функтор*), выделен объект I, заданы естественные изоморфизмы

α_{ABC}: $(A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$ (ассоциативность),

λ_A: $I \otimes A \to A$ (левая единица),

ρ_A: $A \otimes I \to A$ (правая единица),

$\varkappa_{AB}$: $A \otimes B \to B \otimes A$ (коммутативность)

и выполнены следующие условия: 1) естественные изоморфизмы α, λ, ρ, $\varkappa$ когерентны; 2) каждый функтор

$$H_{AB}(X) = H_{\mathfrak{M}}(A \otimes X, B): \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{S},$$

где $\mathfrak{S}$ — категория множеств, представим. Представляющие объекты обычно обозначаются $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(A, B)$, и их можно рассматривать как значения на объектах бифунктора $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}$: $\mathfrak{M}^* \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ (внутренний Hom-функтор). Если бифунктор $\otimes$ совпадает с произведением, а объект I является правым нулем (терминальным объектом) категории $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ наз. д е к а р т о в о з а м к н у т о й.

Декартово замкнутыми являются: категория множеств, категория малых категорий, категория пучков множеств над топологич. пространством; замкнутыми — категория модулей над коммутативным кольцом с единицей, категория действительных (или комплексных) банаховых пространств и линейных отображений с нормой, не превосходящей единицы.

Лит.: [1] Бунге М., «Математика», 1972, т. 16, № 2, с. 11—46; [2] Toposes, Algebraic Geometry and Logic, B.— Hdlb.— N.Y., 1972; [3] Dubuc E., Kan extensions in enriched category theory, B.— Hdlb.— N.Y., 1970.

М. Ш. Цаленко.

ЗАМКНУТАЯ ПОДСХЕМА — подсхема схемы X, задаваемая квазикогерентным пучком идеалов J структурного пучка $\mathcal{O}_X$ следующим образом: топологич. пространство подсхемы $V(J)$ является носителем факторпучка $\mathcal{O}_X/J$, а структурный пучок — ограничением $\mathcal{O}_X/J$ на свой носитель. Морфизм схем $f: Y \to X$ наз. з а м к н у т ы м в л о ж е н и е м, если f осуществляет изоморфизм Y с нек-рой З. п. в X; замкнутое вложение является мономорфизмом в категории схем. Для любого замкнутого подмножества $Y \subset X$ существует минимальная З. п. в X с пространством Y — так

наз. приведенная З. п. с пространством Y, Если Y — подсхема X, то наименьшая З. п. Y' в X, содержащая Y, наз. (схемным) замыканием подсхемы Y в X. *В. И. Данилов.*

ЗАМКНУТАЯ СИСТЕМА элементов, замкнутая система функций,— система элементов φ_n некоторого линейного нормированного пространства H такая, что любой элемент $f \in H$ можно сколь угодно точно приблизить в метрике пространства H конечной линейной комбинацией элементов из этой системы, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$, что выполняется неравенство

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k \right\| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Напр., система степеней $\{x^n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, замкнута в пространстве $L_p[a, b, d\mu(x)]$ функций, суммируемых в степени $p \geqslant 1$ на конечном отрезке $[a, b]$ с интегральным весом $\mu(x)$, причем неравенство (1) в этом случае имеет вид

$$\int_a^b |f(x) - Q_n(x)|^p \, d\mu(x) < \varepsilon^p, \qquad (2)$$

где $Q_n(x)$ — многочлен степени n. Обычно рассматривается случай, когда $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная последовательность элементов в гильбертовом пространстве H. Тогда условие замкнутости (1) эквивалентно выполнению для всех элементов $f \in H$ равенств

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2, \qquad (3)$$

где $\{a_n\}$ — коэффициенты Фурье элемента f по системе $\{\varphi_n\}$. В случае тригонометрич. системы функций условие (3) наз. равенством Парсеваля; оно имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Это равенство рассматривали М. Парсеваль (M. Parseval, 1806), Ш. Валле Пуссен (Ch. La Vallée Poussin, 1890), А. Гурвиц (A. Hurwitz, 1901—03); строгое его доказательство дал (в случае, когда $f(x)$ ограничена) А. М. Ляпунов (1896).

Общий случай условия замкнутости (3) впервые подробно исследовал В. А. Стеклов (1898) в связи с решением нек-рых задач математич. физики. Введя термин «замкнутость», В. А. Стеклов рассмотрел с этой точки зрения различные конкретные системы ортогональных функций, и в частности фундаментальные решения уравнения Штурма — Лиувилля (см. *Штурма — Лиувилля задача*). Поэтому равенство (3) часто наз. условием замкнутости Парсеваля — Стеклова.

Понятие замкнутости широко применяется в теории *ортогональных многочленов*. Если отрезок ортогональности конечен, то система ортогональных многочленов замкнута при любом весе. В случае бесконечного интервала ортогональности В. А. Стеклов установил ряд условий на весовую функцию, достаточных для замкнутости соответствующей системы ортогональных многочленов; в частности, он доказал замкнутость систем многочленов Эрмита и Лагерра. Одно из достаточных условий Стеклова в случае интервала (a, ∞) заключается в том, что существует такая последовательность положительных чисел $\{a_n\}$, для к-рой выполняются соотношения

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^2} = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \left(\frac{4}{a_n} \right)^n \int_{a_n}^{\infty} h(x) \, x^n \, dx \right\} = 0,$$

где $h(x)$ — дифференциальный вес на интервале (a, ∞) (т. е. $d\mu(x)=h(x)dx$). Для всего интервала $(-\infty, +\infty)$ достаточное условие состоит в том, чтобы дифференциальный вес $h(x)$ был почти всюду положителен и удовлетворял неравенству

$$h(x) \leqslant c \exp(-\alpha|x|),\ \alpha>0,\ x \in (-\infty, \infty).$$

Это условие в нек-ром смысле близко к необходимому, ибо, как показал еще В. А. Стеклов, система многочленов незамкнута в случае весовой функции вида

$$h(x)=\exp(-|x|^{\beta}),\quad \beta=\frac{2m}{2m+1},\quad m=1, 2, \ldots.$$

Полное решение вопроса об условиях замкнутости системы многочленов в пространстве $L_2[a, b, d\mu(x)]$ в случае бесконечного интервала дал М. Рис (M. Riesz, 1922). Он доказал, что для замкнутости системы многочленов в $L_2[a, b, d\mu(x)]$ необходимо и достаточно, чтобы либо соответствующая *моментов проблема* была определенной, либо в случае неопределенности функция $\mu(x)$ была так наз. N-экстремальным решением проблемы моментов.

С понятием замкнутости тесно связано понятие полноты системы функций, к-рое заключается в том, что из равенства нулю линейного ограниченного функционала f на всех элементах системы $\{\varphi_n\}$ следует условие $f=0$. В гильбертовом пространстве эти два понятия эквивалентны. Полнота системы $\{\varphi_n(x)\}$ в пространстве L_p эквивалентна замкнутости этой же системы в L_q, где $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

В комплексной области подробно изучены аналоги неравенств типа (1) или (2) для систем многочленов и более общих систем функций (см. *Ортогональные многочлены* в комплексной области).

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [2] Геронимус Я. Л., Теория ортогональных многочленов. Обзор достижений отечественной математики, М.— Л., 1950; [3] Сегё Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [4] Стеклов В. А., «Зап. Акад. наук» (физ.-матем. сер.), 1911, т. 30, № 4, с. 1—86; 1914, т. 33, № 8, с. 1—59; [5] его же, Основные задачи математической физики, ч. 1—2, П., 1922—23; [6] Riesz M., в кн.: Acta litterarum ac Scientiarum regial Universitatis Hungaricae. Sec. scient. mathemat., 1922—1923, köt. 1, old. 209—25; [7] Hewitt E., «Amer. Math. Monthly», 1954, v. 61, p. 249—50.

П. К. Суетин.

ЗАМКНУТАЯ ФОРМУЛА — см. *Арифметика формальная.*

ЗАМКНУТОЕ МНОГООБРАЗИЕ — компактное многообразие без *края.* Например, совокупность всех краевых точек k-мерного компактного многообразия есть $(k-1)$-мерное З. м.

ЗАМКНУТОЕ МНОЖЕСТВО в топологическом пространстве — множество, содержащее все свои *предельные точки.* Таким образом, все точки дополнения к З. м.— внутренние, и потому З. м. можно определить как дополнение к открытому. Понятие З. м. лежит в основе определения топологич. пространства как непустого множества X с заданной системой множеств (называемых замкнутыми), удовлетворяющей аксиомам: все X и пустое множество ϕ замкнуты; пересечение любого числа З. м. замкнуто; объединение конечного числа З. м. замкнуто.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, [пер. с англ.], т. 1, М., 1966.

А. А. Мальцев.

ЗАМКНУТОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение одного топологич. пространства на другое, при к-ром образ всякого замкнутого множества есть замкнутое множество. Класс непрерывных З. о. играет важную роль в общей топологии и ее приложениях. Непрерывные замкнутые бикомпактные отображения наз. совершенными. Непрерывное отображение $f: X \to Y$, $f(X)=Y$ T_1-пространств замкнуто тогда и только тогда, когда разбиение $\{f^{-1}y:\ y \in Y\}$ непрерывно в смысле Александрова (непрерывно сверху) или когда для каж-

дого открытого в X множества U множество $f^{\#}U = \{y \in Y,\ f^{-1}y \subset U\}$ открыто в U. Последнее свойство лежит в основе определения полунепрерывных сверху многозначных отображений. Т. о., f замкнуто тогда и только тогда, когда обратное (многозначное) отображение непрерывно сверху. Каждое непрерывное отображение бикомпакта на хаусдорфово пространство — З. о. Каждое непрерывное З. о. T_1-пространств *факторно*; обратное неверно. Ортогональное проектирование плоскости на прямую непрерывно и открыто, но не замкнуто. Также не всякое непрерывное З. о. открыто. Если $f\colon X \to Y$ непрерывно и замкнуто, а X и Y вполне регулярны, то $\bar{f}^{-1}y = [f^{-1}y]\beta X$ для любой точки $y \in Y$ (здесь βX — *Стоуна — Чеха бикомпактное расширение*, а $\bar{f}\colon \beta X \to \beta Y$ — непрерывное продолжение отображения на расширения Стоуна — Чеха пространств X и Y); в классе нормальных пространств справедливо и обратное. Для непрерывных З. о. при переходе к образу сохраняются следующие топологич. свойства: нормальность; коллективная нормальность; совершенная нормальность; паракомпактность; слабая паракомпактность. Полная регулярность и сильная паракомпактность могут для непрерывных замкнутых и даже совершенных отображений не сохраняться. При переходе к прообразу для непрерывных З. о. перечисленные выше свойства могут не сохраняться. Это объясняется тем, что для непрерывного З. о. прообразы точек могут быть небикомпактными, хотя во многих случаях непрерывные З. о. мало отличаются от совершенных. Если f — непрерывное З. о. метрич. пространства X на пространство Y с первой аксиомой счетности, то Y метризуемо, а граница полного прообраза $f^{-1}y$ бикомпактна для любого $y \in Y$. Если f — непрерывное З. о. метрич. пространства X на T_1-пространство Y, то множество всех точек $y \in Y$, при к-рых $f^{-1}y$ небикомпактно, σ-дискретно.

Лит.: [1] Архангельский А. В., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4, с. 133—84; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [3] Engelking R., Outline of General Topology, Amst., 1968.

В. И. Пономарев.

H-ЗАМКНУТОЕ ПРОСТРАНСТВО, абсолютно замкнутое пространство,— хаусдорфово пространство, к-рое при любом топологич. вложении в какое бы то ни было хаусдорфово пространство Y является в Y замкнутым множеством. H-З. п. характеризуются тем, что из каждого их открытого покрытия можно выделить конечную подсистему, замыкания элементов к-рой покрывают это пространство. Регулярное H-З. п.— бикомпакт. Если каждое замкнутое подпространство пространства H-замкнуто, то само пространство — бикомпакт. Разработана теория H-замкнутых расширений хаусдорфовых пространств.

Лит.: [1] Александров П. С., Урысон П. С., Мемуар о компактных топологических пространствах, 3 изд., М., 1971; [2] Илиадис С. Д., Фомин С. В., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4, с. 47—76; [3] Малыхин В. И., Пономарев В. И., в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 13, с. 149—230.

В. И. Пономарев.

ЗАМКНУТЫЙ ГРАФИК, теорема о замкнутом графике: пусть X и Y — полные линейные метрические пространства с метриками, инвариантными относительно сдвига, т. е. $\rho(x, y) = \rho(x+a, y+a)$, $x, y, a \in X$ (соответственно для Y) и A — линейный оператор из X в Y. Если график $\mathrm{Gr}\, A = \{(x, Ax) \mid x \in X\}$ этого оператора есть замкнутое подмножество декартова произведения $X \times Y$, то оператор A непрерывен. Теорема о З. г. допускает ряд обобщений, напр.: линейное отображение с замкнутым графиком отделимого бочечного пространства в совершенно полное пространство непрерывно. К теореме о З. г. тесно примыкают теорема об открытом отображении и теорема Банаха о гомеоморфизме.

Лит.: [1] Рудин У., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1975; [2] Робертсон А.-П., Робертсон В.-Дж., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967. *В. И. Соболев.*

ЗАМКНУТЫЙ ОПЕРАТОР — оператор $A\colon D_A \to Y$ такой, что из $x_n \in D_A$, $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$ следует $x \in D_A$ и $Ax = y$ (здесь X, Y — банаховы пространства над одним и тем же полем скаляров и $D_A \subset X$ — область определения оператора A). Понятие З. о. распространяется и на операторы, действующие в отделимых линейных топологич. пространствах, только вместо последовательностей $\{x_n\}$ надо рассматривать произвольные направления (сети) $\{x_\xi\}$. Если $\mathrm{Gr}A$ — график оператора A, то A замкнут тогда и только тогда, когда $\mathrm{Gr}A$ есть замкнутое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Это свойство часто принимается за определение З. о.

Понятие З. о. есть обобщение понятия оператора, определенного и непрерывного на замкнутом подмножестве банахова пространства. Примером замкнутого, но не непрерывного оператора является оператор $A = \frac{d}{dt}$, определенный на множестве $C_1[a, b]$ непрерывно дифференцируемых функций пространства $C[a, b]$. Замкнутыми, но не непрерывными являются многие операторы математич. физики.

Оператор A допускает замыкание (т. е.— замыкаем), если существует замкнутое расширение этого оператора. Для того чтобы оператор был замыкаем, необходимо и достаточно, чтобы из x_n, $x_n' \in D_A$,

$$\lim x_n = \lim x_n', \ \lim Ax_n = y, \ \lim Ax_n' = y'$$

следовало $y = y'$. Наименьшее замкнутое расширение оператора наз. его **замыканием**. Симметрический оператор в гильбертовом пространстве с плотной областью определения всегда допускает замыкание.

Линейный ограниченный оператор $A\colon X \to Y$ замкнут. Обратно, если A определен на всем X и замкнут, то он ограничен. Если A замкнут и A^{-1} существует, то A^{-1} также замкнут. Так как $A\colon X \to X$ замкнут тогда и только тогда, когда $A - \lambda I$ замкнут, то A замкнут, если резольвента $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ существует и ограничена хотя бы для одного значения параметра $\lambda \in \mathbb{C}$.

Если D_A всюду плотно в X и, следовательно, однозначно определен сопряженный оператор $A^*\colon D_{A^*} \to X^*$, $D_{A^*} \subset Y^*$, то A^* — З. о. Если, кроме того, $D_{A^*} = Y$ и X, Y рефлексивны, то A — замыкаемый оператор и A^{**} является замыканием A.

З. о. A с помощью введения новой нормы в области его определения можно сделать ограниченным. Пусть

$$\|x\|_0 = \|x\|_X + \|Ax\|_Y.$$

Тогда D_A с новой нормой будет банаховым пространством и A, как оператор из $(D_A \| \cdot \|_0)$ в Y, будет ограниченным.

Лит.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Като Т., Теория возмущений линейных операторов, пер. с англ., М., 1972. *В. И. Соболев.*

ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ СИСТЕМА — система классов функций, замкнутых относительно операций рассматриваемой *функциональной системы*. Важнейшими примерами З. к. с. являются системы подалгебр алгебры логики, конечнозначных логик, автоматных отображений, алгебр рекурсивных функций и нек-рые другие. *В. Б. Кудрявцев.*

ЗАМЫКАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА — система уравнений

$$L_z u = f_z, \ 0 \leqslant z \leqslant Z, \tag{1}$$

предельная при $h \to 0$, $z(m, h) \to z$ для системы частично разрешенных уравнений

$$L_m^h u^h = f_m^h, \quad m = 0, 1, \ldots, M, \tag{2}$$

описывающих последовательные этапы вычислительного алгоритма решения уравнения

$$L^h u^h = f^h \qquad (3)$$

(напр., сеточного уравнения, тогда h — шаг сетки), аппроксимирующего при $h \to 0$ уравнение

$$Lu = f. \qquad (4)$$

При этом $L_0^h = L^h$, $f_0^h = f^h$, L_M^h — тождественный оператор, $f_M^h = (L^h)^{-1} f^h = u^h$, т. е. на M-м этапе алгоритма получается окончательное решение аппроксимирующего уравнения (3). Функция $z(m, h)$ предполагается возрастающей вместе с m (напр., линейной возрастающей) и удовлетворяющей граничным условиям $z(0, h) = 0$, $z(M, h) = Z$. Не исключается возможность $M = \infty$; в этом случае L_∞^h, f_∞^h, $z(\infty, h)$ понимаются как пределы переменных L_m^h, f_m^h, $z(m, h)$ при $m \to \infty$. Случай $M = \infty$ соответствует итерационным методам решения уравнения (3).

Если операторы L_z в уравнении (1) ограничены равномерно по z, то говорят, что алгоритм (2) имеет регулярное замыкание. Хотя множества алгоритмов с регулярным замыканием и реально устойчивых алгоритмов не совпадают, построение З. в. а. часто помогает при исследовании устойчивости алгоритма к различным возмущениям, в частности к вычислительной погрешности (см. [3], [4]).

Понятие З. в. а. введено в [1]. Там же получено и исследовано замыкание алгоритма последовательного исключения неизвестных решения сеточного уравнения, аппроксимирующего уравнение (4), где $Lu = u - Au$, A — интегральный оператор Фредгольма.

Построение З. в. а. и обратная операция — построение по непрерывному процессу дискретного алгоритма, имеющего этот процесс своим замыканием,— бывают полезными при конструировании новых методов решения задач. В частности, большое число итерационных методов имеет своими замыканиями устанавливающиеся процессы. Напр., методу простой итерации решения сеточного уравнения Лапласа соответствует процесс установления $u_t = \Delta u$, трехслойному итерационному методу — процесс установления $u_{tt} + \alpha u_t = \Delta u$ (см. [5]).

Лит.: [1] Соболев С. Л., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1956, т. 20, № 4, с. 413—36; [2] Бабушка И., Прагер М., Витасек Э., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1964, т. 4, № 2, с. 351—53; [3] Бахвалов Н. С., Вычислительные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, К., 1970; [4] его же, Численные методы, 2 изд., М., 1975; [5] Саульев В. К., Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, М., 1960; [6] Шапкин А. Ф., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1967, т. 7, № 2, с. 411—16.

А. Ф. Шапкин.

ЗАМЫКАНИЕ МНОЖЕСТВА в топологическом пространстве — пересечение всех *замкнутых множеств*, содержащих данное множество.

А. А. Мальцев.

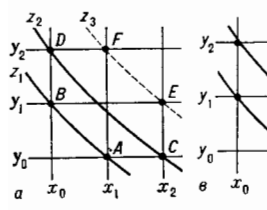
ЗАМЫКАНИЯ ОТНОШЕНИЕ в частично упорядоченном множестве M — однозначное отображение множества M в себя, сопоставляющее каждому элементу $a \in M$ некоторый элемент $\bar{a} \in M$, наз. замыканием элемента a, и удовлетворяющее следующим аксиомам: 1) $a \leqslant \bar{a}$; 2) если $a \leqslant b$, то $\bar{a} \leqslant \bar{b}$; 3) $\bar{\bar{a}} = \bar{a}$. Элемент a наз. замкнутым, если он совпадает со своим замыканием. З. о. в множестве M однозначно определяется заданием системы всех замкнутых элементов. З. о. может быть введено, в частности, в системе всех подмножеств произвольного множества M, частично упорядоченной по теоретико-множественному включению. В этом случае также принято говорить, что З. о. задано в самом множестве M. Во всяком множестве M можно задать З. о., беря в качестве системы замкнутых подмножеств любую систему подмножеств, содержащую как само M, так

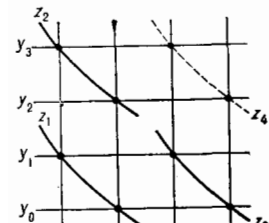
и пересечение любой своей подсистемы. Два частично упорядоченных множества с З. о. наз. изоморфными, если существует такой изоморфизм этих частично упорядоченных множеств, при к-ром образы и прообразы замкнутых элементов замкнуты. Важную роль в математике играют З. о. на множестве всех подмножеств M, обладающие следующим дополнительным свойством: замыкание объединения двух подмножеств множества M равно объединению замыканий этих подмножеств. Такое З. о. наз. топологией в множестве M.

Лит.: [1] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, М., 1962.

О. А. Иванова.

ЗАМЫКАНИЯ УСЛОВИЕ — условие в *тканей геометрии*, при выполнении к-рого из некоторых инциденций точек и линий ткани вытекает новая инциденция. Примером З. у. может служить условие замыкания Томсена (см. рис. *а*): первое и второе семейства линий ткани изображены параллельными прямыми, третье — кривыми линиями; З. у. означает, что из принадлежности A и B и C и D линиям третьего семейства следует принадлежность такой же линии точек E и F. Если x, y и z — параметры, определяющие линии трех семейств, то З. у. можно придать абстрактную форму системы условных тождеств, если рассматривать z как результат «умножения» x и y: $z=xy$,





$$x_0y_1=x_1\ y_0,\ \ x_0y_2=x_2y_0 \Longrightarrow x_1y_2=x_2y_1.$$

Если $z=xy$ рассматривать как квазигрупповую операцию, то условие замыкания Томсена равносильно изотопности квазигруппы абелевой группе.

На рис. *б* и *в* изображены условие замыкания Рейдемейстера и условие шестиугольности (все три условия равносильны для плоской три-ткани даже без предположения дифференцируемости). В абстрактной форме они ведут к разным классам квазигрупп и луп, в многомерной геометрии тканей — к разным классам тканей.

К З. у. относятся также некоторые предложения проективной геометрии (например, теоремы Дезарга и Паппа).

Лит.: [1] Бляшке В., Введение в геометрию тканей, пер. с нем., М., 1959; [2] Белоусов В. Д., Рыжков В. В., в сб.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 159—88; [3] Белоусов В. Д., Алгебраические сети и квазигруппы, Кишинев, 1971.

В. В. Рыжков.

ЗАОСТРЕНИЯ ТОЧКА — то же, что *возврата точка*.

ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ ПОТЕНЦИАЛОВ МЕТОД, принцип Дюамеля,— метод отыскания решения однородной задачи Коши для неоднородного линейного дифференциального уравнения или системы с частными производными по известному решению однородного уравнения или системы.

Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}-Lu=f(x,\ t),\ u=u(x,\ t),\ x=(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ (1)$$

где L — произвольный линейный дифференциальный оператор, к-рый не содержит производных по t выше

$n-1$ порядка. Частное решение $u(x,\ t)$ уравнения (1) при $t>0$ ищется в виде *Дюамеля интеграла*

$$u(x,\ t)=\int_0^t \varphi(x,\ t;\ \tau)\,d\tau, \tag{2}$$

где φ является (регулярным или обобщенным) решением однородного уравнения

$$\frac{\partial^m \varphi}{\partial t^m}-L\varphi=0,\quad t>\tau.$$

Если

$$\left.\frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k}\right|_{t=\tau}=\begin{cases}0 & \text{при } k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-2,\\ f(x,\ \tau) & \text{при } k=m-1,\end{cases}$$

то функция (2), полученная с помощью суперпозиции импульсов φ, будет решением задачи Коши

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0}=0,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1, \tag{3}$$

для неоднородного уравнения (1).

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений и систем З. п. м. известен под названием м е т о д а в а р и а ц и и п о с т о я н н ы х, или м е т о д а и м п у л ь с о в. Этот метод для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка m:

$$lu\equiv\frac{d^m u}{dt^m}-\sum_{j=1}^m a_j(t)\,\frac{d^{m-j}u}{dt^{m-j}}=f(t) \tag{4}$$

заключается в том, что если $u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots,\ u_m(t)$ — какая-либо фундаментальная система решений уравнения $lu=0$, то решение $u(t)$ неоднородного уравнения (4) отыскивается в виде

$$u(t)=\sum_{j=1}^m c^j(t)\,u_j(t).$$

Функции $\dot{c}^j=dc^j/dt,\ j=1,\ \ldots,\ m$, однозначно определяются как решения системы алгебраич. уравнений

$$\sum_{j=1}^m \dot{c}^j(t)\,d^k u_j/dt^k=0,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-2,$$

$$\sum_{j=1}^m \dot{c}^j(t)\,d^{m-1}u_j/dt^{m-1}=f(t)$$

с отличным от нуля детерминантом Вроньского.

Если $f(t)=0$ при $t\leqslant 0$, то решение $u_f(t)$ однородной задачи Коши (3) для уравнения (4) принято наз. нормальной реакцией на внешнюю нагрузку $f(t)$. Функция $u_f(t)$ представима в виде свертки или интеграла Дюамеля

$$u_f(t)=\int_0^t \varphi(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t \varphi(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau,$$

где $l\varphi(t)=0$ при $t>0$ и

$$\left.\frac{d^k\varphi}{dt^k}\right|_{t=0}=\begin{cases}0 & \text{при } k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-2,\\ 1 & \text{при } k=m-1.\end{cases}$$

Пусть $f(x,\ t)$, $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$,— функция, имеющая непрерывные частные производные до порядка $(n+1)/2$ в случае нечетного n и $(n+2)/2$ — в случае четного n, а $M_r[f(x,\ t)]$ — среднее значение f на сфере $|y-x|=r$ с центром в точке x и радиуса r. Зависящая от неотрицательного параметра $\tau\leqslant t$ функция

$$v(x,\ t;\ \tau)=\frac{1}{(n-2)!}\,\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^t (t^2-r^2)^{(n-3)/2} r M_r[f(x,\tau)]\,dr$$

является решением волнового уравнения

$$\Box v\equiv v_{tt}-\Delta v=0,$$

удовлетворяющим начальным условиям

$$v(x,\ 0;\ r)=0,\quad v_t(x,\ 0;\ \tau)=f(x,\ \tau).$$

Интеграл Дюамеля

$$u(x,\ t)=\int_0^t v(x,\ t-\tau;\ \tau)\,d\tau \qquad (5)$$

представляет собой решение однородной задачи Коши: $u(x,\ 0)=0$, $u_t(x,\ 0)=0$ для уравнения $\Box u=f(x,\ t)$. При $n=2$ и $n=3$ из (5) получаются выражения

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_{\rho\leqslant\pi}\frac{f(y,\ t-\tau)\,dy}{\sqrt{\tau^2-\rho^2}},\quad y=(y_1,\ y_2),$$

и

$$u(x,\ t)=\frac{1}{4\pi}\int_{\rho\leqslant t}\frac{f(y,\ t-\rho)}{\rho}\,dy,\quad y=(y_1,\ y_2,\ y_3), \qquad (6)$$

где $\rho=|x-y|$.

Если же $n=1$, то

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}f(y,\ \tau)\,dy,\ y=y_1.$$

Интеграл (6) наз. з а п а з д ы в а ю щ и м п о т е н ц и а л о м с плотностью f.

З. п. м. (метод вариации параметров) особенно прост и полезен, когда он применяется к линейным системам дифференциальных уравнений 1-го порядка вида

$$Su\equiv u_t+\sum_{i=1}^n A^i u_{x_i}+Bu=f(x,\ t), \qquad (7)$$

где $u=u(x,\ t)$ — вектор с k компонентами, A^i и B — заданные матрицы размера $k\times k$, а f — заданный вектор.

Пусть вектор $\varphi=\varphi(x,\ t;\ \tau)$, зависящий от параметра $\tau\leqslant t$, есть решение задачи Коши

$$\varphi(x,\ \tau;\ \tau)=f(x,\ \tau)$$

для однородной системы $S\varphi=0$. Тогда вектор

$$u(x,\ t)=\int_0^t\varphi(x,\ t;\ \tau)\,d\tau \qquad (8)$$

является решением неоднородной системы (7) с начальным условием

$$u(x,\ 0)=0. \qquad (9)$$

Функция $\varphi(x,\ t;\ \tau)$, соответствующая неоднородному уравнению теплопроводности

$$u_t-a\,\Delta u=f(x,\ t),\ a=\text{const}>0, \qquad (10)$$

имеет вид

$$\varphi(x,\ t;\ \tau)=\int_{R^n}[4\pi a(t-\tau)]^{-n/2}\,e^{-\frac{|x-y|^2}{4a(t-\tau)}}f(y,\ \tau)\,dy, \qquad (11)$$

где R^n — евклидово пространство. Решение $u(x,\ t)$ уравнения (10) с начальным условием (9) задается интегралом Дюамеля (3), где под знаком интеграла стоит функция (11).

З. п. м. используется и при исследовании смешанных задач для уравнений с частными производными параболич. и гиперболич. типов, позволяя общую задачу редуцировать к задачам со специальными начальными и граничными функциями.

Напр., пусть в области $\Omega=\{(x,\ t)|\alpha<x<\beta,\ 0<t<T\}$ задано уравнение с частными производными

$$Au_{tt}+Bu_{xx}+au_t+bu_x+cu=0, \qquad (12)$$

где $B,\ b,\ c=\text{const}$, $B<0$,

$$A=\begin{cases}A_0=\text{const} & \text{при } \alpha\leqslant x\leqslant 0,\\ 0 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\beta,\end{cases}$$

$$a=\begin{cases}a_0=\text{const}>0 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\beta,\\ a_1=\text{const} & \text{при } \alpha\leqslant x\leqslant 0,\end{cases}$$

к-рое гиперболично при $x<0$ и параболично при $x>0$. Если $\varphi(x,\ t)$ — непрерывно дифференцируемое при $x=0$ *решение смешанной задачи*

$$\varphi(x,\ 0)=0,\ \alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ \varphi_t(x,\ 0)=0,\ \alpha<x<0,$$
$$u(\alpha,\ t)=1,\ \varphi_x(\beta,\ t)=0,\ 0<t<T,$$

для уравнения (12) в области Ω, то, согласно З. п. м., интеграл Дюамеля

$$u(x,\ t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\varphi(x,\ t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau\equiv Tf \qquad (13)$$

с непрерывно дифференцируемой плотностью $f(t)$ будет решением смешанной задачи

$$u(x,\ 0)=0,\ \alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ u_t(x,\ 0)=0,\ \alpha<x<0,$$
$$u(\alpha,\ t)=f(t),\ u_x(\beta,\ t)=0,\ 0<t<T,$$

для уравнения (12) в области Ω.

Интеграл Дюамеля (13) по существу есть формула представления линейного оператора T, к-рый преобразует заданную граничную функцию $f(t)$ в решение $u(x,\ t)$. Интегральная формула Дюамеля имеет место не только для оператора T из (13), но и для всех линейных операторов T, удовлетворяющих следующим условиям.

1) Оператор T определен для всех функций $f(t)$, равных нулю при $t<0$, и преобразует f в функцию $Tf=u(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)$, также равную нулю при $t<0$.

2) $$T\int_{\tau_1}^{\tau_2}f\,[\theta(t,\ \tau)]\,d\tau=\int_{\tau_1}^{\tau_2}Tf\,[\theta(t,\ \tau)]\,d\tau,$$

где $\theta(t,\ \tau)$ — некоторая функция t и параметра τ.

3) Если $f(0)=0$ и $f(t)$ дифференцируема, то

$$\frac{d}{dt}\,Tf=T\,\frac{df}{dt}\ .$$

4) Если $Tf(t)=\varphi(t)$, то для всех $\tau>0$

$$Tf(t-\tau)=\varphi(t-\tau).$$

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [2] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [3] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1976; [4] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970; [6] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972. *А. М. Нахушев.*

ЗАПОЛНЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X такое, что каждое отображение $g\colon A\to X$ любого замкнутого подмножества A произвольного *нормального пространства* Y может быть распространено на все пространство Y. Прямое произведение и *ретракт* З. п. являются З. п. В частности, З. п. являются единичный интервал I, n-мерный куб I^n и гильбертов куб I^ω. Любые два отображения бинормального пространства в З. п. гомотопны, а бинормальное З. п. стягиваемо к точке. *М. И. Войцеховский.*

ЗАПЯТАЯ — термин, относящийся к представлению действительного числа дробью, к способу представления действительных чисел в цифровой вычислительной машине.

Пусть выбрана система счисления с основанием q, и пусть для действительного числа x имеет место разложение

$$x=\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha_k q^k, \qquad (1)$$

где α_k — целые числа, заключенные в пределах от 0 до $q-1$. В представлении числа x q-ичной дробью

$$x=(\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1\alpha_0,\ \alpha_{-1}\alpha_{-2}\ldots) \qquad (2)$$

З. (так наз. q-ичная запятая) разделяет коэффициенты

разложения (1), относящиеся соответственно к неотрицательным и отрицательным степеням q.

По способу представления действительных чисел цифровые вычислительные машины делятся на машины с фиксированной З. и машины с плавающей З.

Арифметика с фиксированной запятой предполагает, что все числа имеют модуль, меньший 1. Для хранения коэффициентов α_{-1}, α_{-2} ... отводится фиксированное число разрядов. Если при выполнении арифметич. операции над числами с фиксированной З. результат имеет модуль, больший 1, то выполнение программы прерывается, и выдается сигнал переполнения. Чтобы избежать этого, программист заранее должен предусмотреть возможность переполнения и предупредить его соответствующим масштабированием. К числу машин с фиксированной З. относится, напр., «Сетунь», работающая в троичной системе счисления. Трудности программирования для арифметики с фиксированной З. объясняют тот факт, что большинство современных ЭВМ используют арифметику с плавающей З. Число с плавающей запятой имеет вид

$$x = \pm\, q^p \sum_{k=1}^{t} \alpha_k q^{-k},$$

при этом p наз. порядком, а $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$ — мантиссой числа x. Для хранения порядка и мантиссы числа с плавающей З. обычно отводится фиксированное число разрядов (определяемое длиной машинного слова), что вызывает ограничения на величину порядка такого числа. Число с плавающей З., у к-рого $\alpha_1 \neq 0$, наз. нормализованным числом. Обычно результаты арифметич. операций в машине с плавающей З. автоматически нормализуются суммирующим устройством машины.

Х. Д. Икрамов.

ЗАРИСКОГО КАСАТЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО к алгебраическому многообразию или схеме X в точке x — векторное пространство над полем вычетов $k(x)$ точки x, двойственное к пространству $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$, где $\mathfrak{M}_x$ — максимальный идеал локального кольца $O_{X,x}$ точки x на X. Если $X \subset A_k^n$ и задается системой уравнений

$$F_\alpha = 0,$$

где $F_\alpha \in k[X_1, \ldots, X_n]$, то З. к. п. в рациональной точке $x=(x_1, \ldots, x_n)$ задается системой линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_\alpha}{\partial X_i}(x)\,(X_i - x_i) = 0.$$

Многообразие X неособо в рациональной точке x тогда и только тогда, когда размерность З. к. п. к X в x равна размерности X. Для рациональной точки $x \in X$ З. к. п. двойственно к пространству $\Omega^1_{X/k} \otimes k(x)$ — слою в точке x кокасательного пучка $\Omega^1_{X/k}$. Неприводимое многообразие X над совершенным полем k гладко тогда и только тогда, когда пучок $\Omega^1_{X/k}$ локально свободен. Векторное расслоение $T_X = V(\Omega^1_{X/k})$, ассоциированное с пучком $\Omega^1_{X/k}$, наз. касательным расслоением X над k; оно функториально связано с X. Его пучок сечений называется касательным пучком к X. З. к. п. рассмотрено О. Зариским [1].

Лит.: [1] Zariski O., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 62, p. 1—52; [2] Samuel P., Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, 2 ed., B.— Hdlb.— N.Y., 1967; [3] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972, с. 107.

В. И. Данилов.

ЗАРИСКОГО ТЕОРЕМА о связности: пусть f: $X \to Y$ — собственный сюръективный морфизм неприводимых многообразий и пусть поле рациональных

функций $k(Y)$ сепарабельно алгебраически замкнуто в $k(X)$, а $y \in Y$ — нормальная точка, тогда $f^{-1}(y)$ связно (и более того, геометрически связно) (см. [2]). Эта теорема обосновывает классический принцип вырождения: если общий цикл алгебраич. системы циклов является многообразием (т. е. геометрически неприводим), то любая специализация этого цикла связна.

Частным случаем З. т. о связности является так наз. основная теорема Зарисского, или теорема Зарисского о бирациональных соответствиях: бирациональный морфизм алгебраич. многообразий $f: X \to Y$ является открытым вложением в окрестности нормальной точки $y \in Y$, если $f^{-1}(y)$ — конечное множество (см. [1]). В частности, бирациональный морфизм нормальных многообразий, биективный на точках, является изоморфизмом. Другая формулировка этой теоремы: пусть $f: X \to Y$ — квазиконечный отделимый морфизм схем, а Y — квазикомпактная квазиотделимая схема, тогда существует разложение $f = u \circ g$, где u — конечный морфизм, а g — открытое вложение [3].

Лит.: [1] Zariski O., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 53, № 3, p. 490—542; [2] его же, «Mem. Amer. Math. Soc.», 1951, № 5, p. 1—90; [3] Grothendieck A., «Publ. Math. IHES», 1961, № 11; 1967, № 32.

В. И. Данилов.

ЗАРИСКОГО ТОПОЛОГИЯ на аффинном пространстве — топология, множество замкнутых подмножеств к-рой совпадает с множеством алгебраич. подмногообразий данного аффинного пространства A^n. Если X — аффинное алгебраич. многообразие (см. *Аффинное алгебраическое множество*) в A^n, то индуцированная на X топология также наз. З. т. Аналогично определяется З. т. аффинной схемы Spec A кольца A (она наз. иногда спектральной топологией) — замкнутыми считаются множества вида

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A,\ \mathfrak{p} \supset I\},$$

где I — идеал кольца A.

З. т. впервые была рассмотрена О. Зариским [1] как топология в множестве нормирований поля алгебраич. функций. Хотя З. т. в общем случае не является отделимой топологией, на нее переносятся многие конструкции алгебраич. топологии [2]. Аффинная схема, снабженная З. т., квазикомпактна.

Топологию, к-рая естественно определена на произвольной *схеме*, также наз. З. т., чтобы отличать ее от *этальной топологии* или, если многообразие X определено над полем $\mathbb{C}$, то — от топологии аналитич. пространства на множестве комплекснозначных точек $X(\mathbb{C})$.

Лит.: [1] Zariski O., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1944, v. 50, № 10, p. 683—91; [2] Серр Ж. П., в сб.: Расслоенные пространства и их приложения, пер. с франц., М., 1958, с. 372—450.

В. И. Данилов.

ЗАРЯД, обобщенная мера,— действительная σ-аддитивная функция множества, определенная на σ-алгебре, борелевских подмножеств области $G \subset \mathbb{R}^n$ и конечная на компактах $K \subset G$. Разность двух мер является З.; обратно, таким способом получаются все З.: для любого З. ν существует разложение G на два непересекающихся множества G^+ и G^- таких, что $\nu(e) \geqslant 0$ при $e \subset G^+$ и $\nu(e) \leqslant 0$ при $e \subset G^-$. Меры $\nu^+ = \nu(e \cap G^+)$ и $\nu^- = \nu(e \cap G^-)$ не зависят от выбора G^+ и G^- и наз. положительной и отрицательной вариациями З. ν, а мера $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ — полной вариацией З. ν. Имеет место разложение Хана — Жордана: $\nu = \nu^+ + \nu^-$, в силу к-рого свойства З. могут быть выражены в терминах теории меры.

Лит.: [1] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [2] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

М. И. Войцеховский.

ЗАУЗЛЕННАЯ СФЕРА — нетривиальный *двумерный узел* в 4-мерном евклидовом пространстве E^4, сфера S^2, к-рую нельзя получить вращением в E^4 (зауженной) дуги k, расположенной в полупространстве E^3_+ вокруг ограничивающей это полупространство плоскости. Для З. с. фундаментальная группа $\pi(E^4 \setminus S^2)$ не является группой узла.

Лит.: [1] Кроуэлл Р., Фокс Р., Введение в теорию узлов, пер. с англ., М., 1967. *М. И. Войцеховский.*

ЗАЦЕПЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТ — целое или дробное число, сопоставляемое двум непересекающимся циклам z^{k-1} и z^{n-k} в многообразии M размерности n, классы гомологий к-рых принадлежат подгруппам кручения в целочисленных гомологиях $H_{k-1}(M, \mathbb{Z})$ и $H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$ соответственно. Простейшим примером является З. к. двух непересекающихся замкнутых спрямляемых кривых L_1, L_2 пространства $\mathbb{R}^3$, выражаемый так наз. интегралом Гаусса:

$$I = \int_{L_1}\int_{L_2} \frac{(x_1 - x_2,\ dx_1,\ dx_2)}{|x_1 - x_2|^3},$$

(здесь x_1 и x_2 — радиус-векторы L_1 и L_2).

Понятие З. к. обобщается на случай замкнутых ориентированных многообразий M^{k-1} и M^{n-k}, расположенных в пространстве $\mathbb{R}^n$: З. к. равен *степени отображения* χ ориентированного прямого произведения $M^{k-1} \times M^{n-k}$ в сферу $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, где $\chi(x, y)$, $x \in M^{k-1}$, $y \in M^{n-k}$, есть точка пересечения с S^{n-1} луча, отложенного параллельно вектору (x, y) от начала координат. З. к. равен *пересечения индексу* любой k-мерной цепи C^k, для к-рой $\partial C^k = \alpha z^{k-1}$, с циклом z^{n-k}, деленному на α. Это число не зависит от выбора пленки C^k. Если поменять ролями циклы z^{k-1} и z^{n-k}, то З. к. умножится (в ориентируемом случае) на $(-1)^{k(n-k)}$. Если заменить любой из циклов на гомологичный ему в дополнении к другому, то З. к. не изменится. Этот факт является основой при интерпретации *Александера двойственности* с помощью зацеплений. При замене одного из циклов на любой гомологичный с ним З. к. изменяется на целое число, благодаря чему определено спаривание подгрупп кручения в $H_{k-1}(M, \mathbb{Z})$ и $H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$ со значениями в факторгруппе $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, где $\mathbb{Q}$ — рациональные числа. Это спаривание устанавливает между ними *Понтрягина двойственность*. В частности, для подгруппы кручения в $H_m(M, \mathbb{Z})$ в случае $n = 2m+1$ этим задается невырожденная квадратичная форма самозацеплений со значениями в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, к-рая является гомотопич. инвариантом многообразия. Напр., с ее помощью впервые были обнаружены асимметричные многообразия, а именно, нек-рые линзовые многообразия.

З. к. рассматриваются также в случае других областей коэффициентов, напр., если на многообразии действует свободно группа π, то группы гомологии являются групповыми модулями, и значение З. к. определено в соответствующим образом локализованном групповом кольце.

Лит.: [1] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.—Л., 1938; [2] Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976. *А. В. Чернавский.*

ЗВЕЗДА ЭЛЕМЕНТА ФУНКЦИИ, звезда Миттаг-Леффлера, — *звездообразная область*, в к-рую данный элемент

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

аналитич. функции может быть аналитически продолжен по лучам, выходящим из его центра a. З. э. ф. состоит из тех точек комплексной плоскости z, к-рые можно достичь, аналитически продолжая элемент $f(z)$ в виде степенного ряда вдоль всевозможных лучей, исходящих из центра элемента a. Если при продолже-

нии элемента вдоль данного луча $z=a+re^{i\varphi}$, $0\leqslant r<+\infty$, нельзя достичь произвольной точки этого луча, то на луче найдется точка $z_1\neq a$ такая, что продолжение возможно до любой точки интервала $[a, z_1)$, но далее неосуществимо. Если продолжение возможно в любую точку луча, то полагают $z_1=\infty$. Совокупность точек, принадлежащих всем интервалам $[a, z_1)$ представляет собой (односвязную) звездообразную область относительно точки a — это и есть З. э. ф. S_f. В результате аналитич. продолжения в S_f получают регулярную аналитич. функцию $f(z)$, являющуюся однозначной ветвью в S_f полной аналитич. функции, порождаемой данным элементом.

Все точки границы ∂S_f З. э. ф. являются *достижимыми граничными точками*. В вопросах аналитического продолжения (см. также *Адамара теорема*) различают также угловые, доступные и хорошо доступные точки границы ∂S_f. Точка $z_1\in\partial S_f$ наз. у г л о в о й т о ч к о й г р а н и ц ы З. э. ф., если она имеет наименьший модуль $|z_1|$ среди всех точек ∂S_f с тем же аргументом $\arg z_1$. Точка $z_1\in\partial S_f$ наз. д о с т у п н о й т о ч к о й г р а н и ц ы З. э. ф., если существует полукруг $V(z_1)$ такой, что $f(z)$ регулярна всюду внутри $V(z_1)$ и в точках его диаметра, отличных от z_1. Точка $z_1\in\partial S_f$ наз. х о р о ш о д о с т у п н о й (или х о р о ш о д о с т и ж и м о й) т о ч к о й г р а н и ц ы З. э. ф., если существует угол $V(z_1)$ с вершиной z_1 раствора больше π и такой, что $f(z)$ регулярна в области $\{V(z_1)\cap(|z-z_1|<\delta)\}$ при достаточно малом $\delta>0$.

Г. Миттаг-Леффлер [1] показал, что регулярную функцию $f(z)$ в ее звезде S_f можно представить в виде равномерно сходящегося внутри S_f ряда многочленов

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{k_n}c_\nu^{(n)}\frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(z-a)^\nu. \qquad (*)$$

Формула (*) наз. М и т т а г-Л е ф ф л е р а р а з л о ж е н и е м в з в е з д е. Здесь степени многочленов k_n и коэффициенты $c_0^{(n)}, c_1^{(n)}, \ldots, c_{k_n}^{(n)}$, $n=0, 1, \ldots$, не зависят от вида $f(z)$ и могут быть вычислены раз навсегда. Такое вычисление было проделано П. Пенлеве (P. Painlevé; см. [2], [3]).

Лит.: [1] M i t t a g-L e f f l e r G., «Acta math.», 1900, v. 23, p. 43—62; 1901, v. 24, p. 183—204, 205—44; 1902, v. 26, p. 353—93; 1905, v. 29, p. 101—82; [2] М а р к у ш е в и ч А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 8; [3] B o r e l E., Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, P., 1928.

Е. Д. Соломенцев.

ЗВЕЗДНОЕ ТЕЛО с ц е н т р о м в т о ч к е O — открытое множество $\mathfrak{S}$ n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, обладающее свойством л у ч и с т о с т и (относительно O): если $a\in\bar{\mathfrak{S}}$, где $\bar{\mathfrak{S}}$ — замыкание $\mathfrak{S}$, то и весь отрезок $[O, a)$ (здесь $O\in[O, a)$, $a\notin[O, a)$) лежит в $\mathfrak{S}$. Иногда к З. т. причисляют и точки его границы. З. т. $\mathfrak{S}$ с центром в O можно охарактеризовать следующим образом: O есть внутренняя точка $\mathfrak{S}$; каждый луч, выходящий из O, или целиком лежит в $\mathfrak{S}$, или содержит такую точку a, что отрезок луча $[O, a)$ лежит внутри $\mathfrak{S}$, а отрезок луча $(a, +\infty)$ лежит вне $\mathfrak{S}$. Это определение эквивалентно первому, с точностью до точек на границе $\mathfrak{S}$. З. т. есть частный случай з в е з д н о г о м н о ж е с т в а с центром в O — множества, обладающего свойством о б о б щ е н н о й л у ч и с т о с т и относительно O: если $a\in\bar{\mathfrak{S}}$, то и весь отрезок $[O, a]$ лежит в $\mathfrak{S}$. Частным случаем З. т. является *выпуклое тело*.

Каждому З. т. $\mathfrak{S}$ с центром в начале координат O можно взаимно однозначно сопоставить *лучевую функцию* $F(x)=F_{\mathfrak{S}}(x)$ так, что $\mathfrak{S}$ есть множество точек $x\in\mathbb{R}^n$ с условием $F(x)<1$.

Это сопоставление задается формулой

$$F(x) = \inf_{\substack{t x \in \mathfrak{S} \\ t > 0}} \frac{1}{t}.$$

При этом З. т. $\mathfrak{S}$ ограничено тогда и только тогда, когда $F(x)$ — положительная лучевая функция, и выпукло тогда и только тогда, когда $F(x)$ — выпуклая лучевая функция.

Лит.: [1] Касселс Дж. В. С., Введение в геометрию чисел, пер. с англ., М., 1965. *А. В. Малышев.*

ЗВЕЗДНОЙ АСТРОНОМИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, возникающие при исследовании общих закономерностей строения, состава, динамики и эволюции звездных систем.

Основным типом уравнений, решаемых в задачах звездной статистики, являются уравнения, связывающие функции распределения видимых и истинных характеристик объектов. Это, как правило, интегральные уравнения для искомых функций распределения истинных характеристик. Напр., важное для исследования строения Галактики уравнение Шварцшильда:

$$A(m) = \omega \int_0^\infty \Delta(r)\, \varphi(M)\, dr, \qquad (1)$$

в к-ром неизвестной в данном телесном угле ω является функция распределения звезд по расстояниям $\Delta(r)$, а функция распределения звезд по видимым звездным величинам $A(m)$ и по абсолютным звездным величинам $\varphi(M)$ известна по наблюдениям ($M = m - 5 \lg r + 5$). Уравнение (1) имеет точное решение в характеристич. функциях. Трудность задачи состоит в том, что $A(m)$ известна лишь до нек-рой, предельной для телескопов, видимой звездной величины m.

Другим примером является уравнение типа Абеля:

$$F(r) = 2 \int_r^R f(\rho) \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}},$$

связывающее наблюдаемую поверхностную звездную плотность (здесь и далее под звездной плотностью подразумевается плотность распределения звезд как объектов) $F(r)$ сферически симметричного скопления звезд или галактик, имеющего радиус R, с пространственной плотностью $f(\rho)$.

Примером двумерного интегрального уравнения является уравнение, связывающее функции распределения видимых конфигураций $\varphi(\xi, \eta)$ и истинных конфигураций $f(x, y)$ тройных звезд

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_\eta^\infty \int_{-\infty}^\infty k(x - \xi, y, \eta)\, f(x, y)\, dx dy,$$

где

$$k(x - \xi, y, \eta) = \eta^{-2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{2y\eta}{y^2 + \eta^2 + (x - \xi)^2} \right)^2 \right]^{-1/2} - 1 \right\};$$

оно получается в предположении, что все ориентации плоскости истинных конфигураций тройных звезд равновероятны; ξ и η (соответственно x и y) суть координаты третьего компонента тройной звезды, если (0, 0) — координаты первого и (0, 1) — второго компонентов.

Для звездной кинематики характерно решение избыточных систем условных уравнений, получаемых для отдельных звезд или для отдельных площадок неба.

Примеры: 1) Система для определения экваториальных компонентов X, Y, Z локальной скорости Солнца по наблюденным собственным движениям звезд μ_α и μ_δ, их расстояниям r и экваториальным координатам α и δ:

$$X \sin\alpha - Y \cos\alpha = 4{,}74 r \mu_\alpha \cos\delta,$$

$$X \cos\alpha \sin\delta + Y \sin\alpha \sin\delta - Z \cos\delta = 4{,}74 r \mu_\delta$$

и лучевым скоростям звезд v_r:

$$X\cos\alpha\cos\delta+Y\sin\alpha\cos\delta+Z\sin\delta=-v_r.$$

2) Система

$$Ar\sin 2(l-l_0)=v_r,$$

$$Ar\cos 2(l-l_0)+Br=4{,}74\mu_l$$

для определения коэффициентов Оорта A и B характеризующих угловую скорость $\omega(R)$ вращения Галактики в районе Солнца:

$$A=-\frac{1}{2}R_0\omega'(R_0),\quad B=A-\omega(R_0)$$

и долготы галактич. центра l_0 (l — галактич. долготы звезд, находящихся вблизи галактич. экватора).

Основным уравнением звездной динамики является уравнение Больцмана

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+u\frac{\partial\psi}{\partial x}+v\frac{\partial\psi}{\partial y}+w\frac{\partial\psi}{\partial z}+$$
$$+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial w}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{irr},\qquad(2)$$

где ψ — фазовая плотность, Φ — потенциал звездной системы. Так как звездная система самогравитирующая, уравнение (2) должно решаться совместно с уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=-4\pi G\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\,du\,dv\,dw.\qquad(3)$$

При рассмотрении только регулярных сил (создаваемых всей системой в целом) звездной системы правая часть (2) равна нулю; при учете также и иррегулярных сил (возникающих при сближении звезд системы) нужно учитывать интеграл столкновений. Исследование уравнений (2) и (3) показывает, что в сферич. системах имеются два, а во вращающихся системах — три интеграла движения.

В *гидродинамическом приближении* рассматриваются гидродинамич. уравнения, получаемые из уравнения (2).

В теории иррегулярных сил звездных систем изменение скорости звезды часто рассматривается как непрерывный случайный процесс и решается уравнение Фоккера — Планка

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\beta\,\mathrm{div}_v(fv)+q\nabla_v F,$$

где $F(x,\ y,\ t)dv$ — вероятность того, что звезда в момент t имеет скорость v в промежутке $[y,\ y+dy]$, если в начальный момент ее скорость была равна x. Здесь β и q соответственно коэффициенты динамич. трения и диффузии, определяемые характеристиками звездного поля.

Более точное приближение дает рассмотрение изменения скорости звезды в рамках чисто разрывного случайного процесса. После нахождения плотности переходной вероятности $P(x,\ y)$ и плотности вероятности скачка $p(x)$ решение уравнения Колмогорова

$$\frac{\partial F(x,\ y,\ t)}{\partial t}=$$
$$=-\int_{-\infty}^{y}p(z)\,d_zF(x,\ y,\ t)+$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}p(z)\,P(z,\ y)\,d_zF(x,\ z,\ t)\qquad(4)$$

определяет функцию $F(x,\ y,\ t)$. Ввиду наличия критической скорости в звездных системах уравнение (4) рассматривается также с поглощающим экраном.

При исследовании устойчивости звездных систем в уравнении Больцмана для равновесной системы рассматривают вариации фазовой плотности и потенциала. Это приводит к уравнениям, схожим с уравнениями, используемыми в физике при исследовании плазменных

неустойчивостей. Существенной особенностью для звездных систем при решении этих уравнений является самогравитация и неаддитивность энергии.

При изучении распределения плотности $\rho(a)$ во внешних галактиках решается интегральное уравнение

$$v^2(R) = 4\pi G \sqrt{1-e^2} \int_0^R \frac{a^2 \rho(a)\, da}{\sqrt{R^2 - e^2 a^2}},$$

в к-ром $v(R)$ — наблюдаемая круговая скорость вращения галактики, e — эксцентриситет ее меридианного сечения.

Лит.: [1] Паренаго П. П., Курс звездной астрономии, 3 изд., М., 1954; [2] Зонн В., Рудницкий К., Звездная астрономия, пер. с польск., М., 1959; [3] Огородников К. Ф., Динамика звездных систем, М., 1958. *Т. А. Агекян.*

ЗВЕЗДООБРАЗНАЯ ОБЛАСТЬ, звездная область, относительно фиксированной точки O — область D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, такая, что отрезок, соединяющий любую точку области D с точкой O, целиком принадлежит этой области.

Односвязная открытая риманова поверхность D над плоскостью w наз. p-листно звездообразной относительно фиксированной точки $a \in D$ (p — натуральное число), если имеется p точек D над $w=a$ (с учетом кратности) и если для любой точки $Q \in D$ существует путь $\Gamma \in D$ из Q в одну из точек над $w=a$ такой, что проекция Γ на плоскость w есть отрезок, соединяющий проекцию Q с $w=a$.

Пусть B — двусвязная область плоскости w, E_1 и E_2 — дополнительные континуумы, $\infty \in E_2$, a — фиксированная точка из E_1, Γ_1 и Γ_2 — граничные компоненты B. Тогда область B наз. З. о. относительно точки a, если либо звездообразна относительно точки a каждая из односвязных областей, содержащих точку a и ограниченных соответственно кривыми Γ_1 и Γ_2, либо Γ_1 состоит из отрезков, выходящих из точки a, а область $E_1 \cup B$ звездообразна относительно точки a.

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Hummel J. A., «J. d'Analyse math.», 1967, v. 18, p. 133—60.

Е. Г. Голузина.

ЗВЕЗДООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ, однолистная звездообразная функция,— функция $w=f(z)$, регулярная и однолистная в круге $|z|<1$, $f(0)=0$, и такая, что она отображает $|z|<1$ на *звездообразную область*, относительно точки $w=0$. Для того, чтобы функция $f(z)$, $f(z) \neq 0$ в $0<|z|<1$, $f(0)=0$, $f'(0) \neq 0$, регулярная в круге $|z|<1$, была в нем З. ф., необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0, \quad |z|<1.$$

Все З. ф. в $|z|<1$, нормированные условиями $f(0)=0$, $f'(0)=1$, образуют класс S^*, для к-рого имеет место параметрическое представление интегралом Стилтьеса

$$f(z) = z \exp\left[-2\int_{-\pi}^{\pi} \log(1-e^{-it}z)\, d\mu(t)\right],$$

где $\mu(t)$ — неубывающая функция на $[-\pi, \pi]$, $\mu(\pi) - \mu(-\pi) = 1$.

Для класса S^* решена *коэффициентов проблема*, найдены точные оценки для $|f(z)|$, $|f'(z)|$, $\arg f(z)$, $\arg f'(z)$ (под аргументом функции понимается ветвь, обращающаяся в нуль при $z=0$), причем экстремальными функциями этих оценок являются функции $f(z)=z/(1-e^{i\theta}z)^2$, где θ вещественно. Класс S^* функций $f(z)$ связан с классом функций $\varphi(z)$, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$, регулярных и однолистных в $|z|<1$, отображающих $|z|<1$ на выпуклую область, по формуле: $z\varphi'(z)=f(z)$.

З. ф., удовлетворяющая условию

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \alpha, \quad |z|<1, \quad \alpha < 1,$$

наз. З. ф. порядка α в круге $|z|<1$.

Рассматривались также однолистные З. ф. в кольце (см. [1] с. 586—87), p-листные З. ф. и слабо З. ф. в круге (см. [2], [4]), ε-локально звездные функции (см. [1] с. 584), функции, звездообразные в направлении действительной оси (см. [3]). Относительно З. ф. многих комплексных переменных см. [5].

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Hummel J. A., «J. d'Analyse math.», 1967, v. 18, p. 133—60; [3] Robertson M. S., «Amer. J. Math.», 1936, v. 58, № 3, p. 465—72; [4] Goodman A. W., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1968, v. 74, № 6, p. 1035—50; [5] Баврин И. И., Классы голоморфных функций многих комплексных переменных и экстремальные вопросы для этих классов функций, М., 1976. *Е. Г. Голузина.*

ЗВЕЗДООБРАЗНОСТИ ГРАНИЦА, точный радиус звездообразности,— точная верхняя граница R_U радиусов кругов $|z|\leqslant r$, где U — некоторый класс функций $w=f(z)=z+\dots$, регулярных и однолистных в круге $|z|<1$, а круги $|z|\leqslant r$ при отображении круга $|z|<1$ каждой функцией класса U отображаются на *звездообразные области* относительно точки $w=0$. Всякое число r из интервала $0<r<R_U$ наз. радиусом звездообразности класса U.

Для нахождения З. г. обычно используется следующий критерий звездообразности: круг $|z|<r$ при отображении $w=f(z)$ тогда и только тогда переходит в звездообразную область, когда на $|z|=r$

$$\frac{\partial \arg f(z)}{\partial \varphi}=\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\geqslant 0,\quad z=re^{i\varphi},$$

или, что то же,

$$\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

З. г. R_S класса S всех функций вида $f(z)=z+\dots$, регулярных и однолистных в круге $|z|<1$, равна $\operatorname{th}\frac{\pi}{4}=0{,}65\dots$.

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966. *Е. Г. Голузина.*

ЗЕЙДЕЛЯ МЕТОД — итерационный метод решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax=b$. Решение системы x^* находится как предел последовательности

$$x^{(k)}=\left(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \dots,\ x_n^{(k)}\right),$$

вычисляемой по правилу

$$x_i^{(k)}=-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k-1)}+\frac{b_i}{a_{ii}},\quad (*)$$

$$i=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

где a_{ij} — элементы матрицы A, b_i — компоненты вектора b; диагональные элементы матрицы A предполагаются отличными от нуля. Вычисления $(*)$ отличаются от *простой итерации метода* лишь тем, что на k-м шаге при вычислении i-й компоненты учитываются вычисленные k-е приближения первых $(i-1)$ компонент.

В матричной записи З. м. представляется следующим образом. Если $A=B+C$, где

$$B=\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{Vmatrix},$$

то соотношение $(*)$ соответствует матричному соотношению $x^{(k)}=-B^{-1}Cx^{(k-1)}+B^{-1}b$. З. м. равносилен методу простой итерации, примененному к системе $x=-B^{-1}Cx+B^{-1}b$, эквивалентной исходной. Для сходимости З. м. необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $B^{-1}C$ по модулю были меньше 1. Иначе, чтобы все корни уравнения $\det(C+B\lambda)=0$ были по модулю меньше 1.

На практике более удобны следующие достаточные условия сходимости З. м. 1) Пусть при всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\sum_{i \neq j} |a_{ij}| \leqslant q |a_{ii}|$, $q < 1$. Тогда З. м. сходится и для скорости сходимости имеет место оценка:

$$\| x^{(k)} - x^* \|_1 \leqslant q \| x^{(k-1)} - x^* \|, \quad \| x \|_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i |.$$

2) Пусть A — эрмитова положительно определенная матрица. Тогда З. м. сходится.

З. м. относится к классу *релаксации методов*, наиболее употребительным из к-рых является *сверхрелаксации метод*.

Известны модификации З. м., использующие предварительное преобразование исходной системы в эквивалентную ей систему $x = Mx + f$ (см. [4]).

Метод предложен Л. Зейделем в [1].

Лит.: [1] Seidel L., «Abhandl. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl.», 1874, Bd 11, № 3, S. 81—108; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [4] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.— Л., 1963.

Г. Д. Ким.

ЗЕЙФЕРТА МАТРИЦА — матрица, сопоставляемая узлам и зацеплениям для алгебраич. изучения их топологич. свойств. Названа в честь Г. Зейферта [1], применившего эту конструкцию для получения алгебраич. инвариантов одномерных узлов в S^3. Пусть $L = (S^{n+2}, l^n)$ есть n-мерное m-компонентное зацепление, т. е. пара, состоящая из ориентированной сферы S^{n+2} и ее дифференцируемого или кусочно линейного ориентированного подмногообразия l^n, гомеоморфного несвязной сумме m экземпляров сферы S^n. Существует компактное $(n+1)$-мерное ориентируемое подмногообразие V сферы S^{n+2} такое, что $\partial V = l$, оно наз. м н о г о о б р а з и е м З е й ф е р т а зацепления L. Ориентация многообразия Зейферта V определяется ориентацией его края $\partial V = l$, и, поскольку ориентация сферы S^{n+2} фиксирована, нормальное расслоение к V в S^{n+2} оказывается ориентированным, так что можно говорить о поле положительных нормалей к V. Пусть $i_+ : V \to Y$ малый сдвиг вдоль этого поля, где Y — дополнение открытой трубчатой окрестности V в S^{n+2}. Если $n = 2q-1$ — нечетное число, то определено спаривание

$$\theta : HqV \otimes HqV \longrightarrow \mathbb{Z},$$

к-рое сопоставляет элементу $z_1 \otimes z_2$ коэффициент зацепления класса $z_1 \in HqV$ и класса $i_{+*} z_2 \in HqY$. Спаривание θ наз. с п а р и в а н и е м З е й ф е р т а зацепления L. Если z_1 или z_2 имеет конечный порядок, то $\theta(z_1 \otimes z_2) = 0$. Имеет место формула

$$\theta(z_1 \otimes z_2) + (-1)^q \theta(z_2 \otimes z_1) = z_1 \cdot z_2,$$

где справа — индекс пересечения классов z_1 и z_2 на V.

Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — базис свободной части группы HqV. Целочисленная $(k \times k)$-матрица $A = \| \theta(e_i \otimes e_j) \|$ наз. м а т р и ц е й З е й ф е р т а зацепления L. З. м. всякого $(2q-1)$-мерного узла обладает следующим свойством: матрица $A + (-1)^q A'$ унимодулярна, а если $q = 2$, то сигнатура матрицы $A + A'$ делится на 16 (A' — матрица, транспонированная к A). Всякая целочисленная квадратная матрица A является З. м. нек-рого $(2q-1)$-мерного узла, если $q \neq 2$ и матрица $A + (-1)^q A'$ унимодулярна.

Сама по себе З. м. не является инвариантом зацепления L; это связано с неоднозначностью построения многообразия Зейферта V и выбора базиса $e_1, \ldots, e_k$. Матрицы вида

$$\begin{Vmatrix} A & 0 \\ \alpha & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \\ 0 & \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} A & \beta & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{Vmatrix},$$

где α — вектор-строка, а β — вектор-столбец, наз. элементарными расширениями квадратной матрицы A, а матрица A наз. элементарной редукцией своих элементарных расширений. Две квадратные матрицы наз. S-эквивалентными, если одну можно получить из другой последовательностью элементарных редукций, элементарных расширений и унимодулярных конгруэнций (т. е. преобразований вида $A \to P'AP$, где P — унимодулярная матрица). Для многомерных узлов ($n=1$) и для одномерных зацеплений ($n=1$) класс S-эквивалентности З. м. является инвариантом типа зацепления L. В случае, когда L — узел, З. м. A полностью определяет $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-модуль $Hq\tilde{X}$, где $\tilde{X}$ — бесконечное циклическое накрывающее дополнения узла. Полиномиальная матрица $tA+(-1)^q A'$ является матрицей Александера (см. *Александера инварианты*) модуля $Hq\tilde{X}$. З. м. определяет также q-мерные гомологии и коэффициенты зацепления в циклич. накрытиях сферы S^{2q+1}, разветвленных над зацеплением.

Лит.: [1] Seifert H., «Math. Ann.», 1934, Bd 110, S. 571—592; [2] Кроуэлл Р., Фокс Р., Введение в теорию узлов, пер. с англ., М., 1967; [3] Levine J., «Ann. Math.», 1966, v. 84, p. 537—54; [4] его же, «Comment. math. helv.», 1970, v. 45, p. 185—98.

М. Ш. Фарбер.

ЗЕЙФЕРТА МНОГООБРАЗИЕ — многообразие, имеющее *Зейферта расслоение*.

А. В. Чернавский.

ЗЕЙФЕРТА РАССЛОЕНИЕ — класс расслоений трехмерных многообразий на окружности; определен Х. Зейфертом [1]. Каждый слой З. р. имеет в многообразии M^3 окрестность со стандартным расслоением на окружности, к-рое возникает из произведения $D^2 \times [0, 1]$ диска на отрезок при склейке каждой точки $(x, 0)$ с точкой $(g(x), 1)$, где g — поворот D^2 на угол $2\pi\nu/\mu$ (μ и ν — взаимно простые целые числа, $0 \leqslant \nu < \mu$). Образы отрезков $x \times [0, 1]$ в полученном полнотории P составляют слои: каждый слой, кроме центрального, состоит из μ отрезков; центральный слой наз. особым, если $\nu > 0$. Инварианты (μ, ν) обычно заменяются инвариантами Зейферта (α, β), где $\alpha = \mu$, а β определяется из условий

$$0 < \beta < \alpha, \quad \beta\nu \equiv 1 \bmod \alpha.$$

Геометрич. смысл α и β состоит в следующем: если в расслоении, индуцированном на крае P, взять меридиан m (кривая, стягиваемая в P) и параллель l (пересекающую m трансверсально один раз), а также любой слой f и секущую g (все четыре кривые простые и замкнутые), то при надлежащей ориентации

$$m = \alpha g + \beta f, \quad l = -\nu g - \mu f,$$

причем $\beta\nu - \alpha\mu = 1$.

Первая задача относительно З. р. состоит в их классификации с точностью до послойного гомеоморфизма. Оказывается [1], что если M^3 имеет З. р., то существует отображение π: $M^3 \to B^2$, где B^2 — двумерное многообразие, и слоями служат $\pi^{-1}(x)$, $x \in B^2$. Имеется шесть типов З. р.: типы O_1 и O_2, в к-рых B^2 ориентируемо и M^3 ориентируемо в случае O_1 и неориентируемо в случае O_2, причем род B^2 в этом случае не меньше единицы, и типы n_i, $i=1, 2, 3, 4$, для к-рых B^2 неориентируемо. В случае n_1 обнос слоя вдоль пути в B^2 не меняет ориентацию слоя, в случае n_2 имеется система образующих, обнос вдоль к-рых меняет ориентацию, в случае n_3 не меняет ориентацию только одна из образующих, а в случае n_4 — только две из образующих, причем род B^2 не меньше двух для n_3 и не меньше трех для n_4. Многообразие M^3 ориентируемо только для типа n_2. Каждому З. р. относится система инвариантов

$$\{b;\ (\varepsilon, p);\quad (\alpha_1, \beta_1);\ \ldots;\ (\alpha_r, \beta_r)\},$$

так что с точностью до послойного гомеоморфизма

имеется одно и только одно З. р. с таким набором. Здесь $\varepsilon=O_i$ или n_i, p — род B^2, (α_i, β_i) — инварианты Зейферта для особых слоев расслоения, число к-рых равно r, причем $\beta_i \leqslant \alpha/2$ в случаях $\varepsilon=O_2$, n_1, n_3, n_4, и, наконец, b — целое число, если $\varepsilon=O_1$ или n_2 и вычет mod2 в остальных случаях, при этом $b=0$, если $\alpha_i=2$ хотя бы для одного слоя. Геометрич. смысл b: на крае окрестности каждого особого слоя выбирается сечение, и вся их совокупность продолжается до сечения во всем дополнении к особым слоям. Это возможно сделать вплоть до одного неособого слоя, к к-рому край продолжаемого сечения подойдет, накручиваясь на него со степенью b. При изменении ориентации M^3 в случаях O_1 и n_2 число b меняется на $-b-r$, а β_i — на $\alpha_i-\beta_i$.

Вторая задача относительно З. р. заключается в установлении того, что на замкнутом многообразии M^3 может существовать не более одного такого расслоения с точностью до послойных гомеоморфизмов. Это доказано для так наз. б о л ь ш и х З. р., к-рые являются пространствами типа $K(\pi, 1)$, т. е. гомотопич. тип к-рых определен фундаментальной группой. Фундаментальную группу $\pi_1(M^3)$ многообразия, снабженного З. р., удобно описывать с помощью специальной системы образующих: сечений g_j на краях окрестностей особых слоев, элементов a_i, b_i (или v_i, если B^2 неориентируемо), образы к-рых в $\pi_1(B^2)$ являются канонич. образующими, h — неособый слой. При этом определяющие соотношения в случаях O_1 и O_2 следующие:

$$a_i h a_i^{-1} = h^{\varepsilon_i}, \quad b_i h b_i^{-1} = h^{\varepsilon_i}, \quad g_j h g_j^{-1} = h, \quad g_j^{\alpha_i} h^{\beta_j} = 1,$$

$$g_1 \dots g_r\,[a_1, b_1] \dots [a_p, b_p] = h^b,$$

а в случаях n_i:

$$v_i h v_i^{-1} = h^{\varepsilon_i}, \quad g_j h g_j^{-1} = h, \quad g_j^{\alpha_j} h^{\beta_j} = 1,$$

$$g_1 \dots g_r v_1^2 \dots v_p^2 = h^b,$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$ в зависимости от того, обращается ли ориентация слоя при обносе вдоль соответствующей образующей $\pi_1(B^2)$. К многообразиям с м а л ы м и З. р. относятся: для типа O_1 все расслоения с

$$p=0, \quad r \leqslant 2;$$

$$p=0, \quad r=3, \quad \frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3} > 1;$$

$$p=1, \quad r=0;$$

$$\{-2;\ (O_1, 0);\ (2, 1);\ (2, 1);\ (2, 1);\ (2, 1)\};$$

для типа O_2 только расслоения с $p=1$, $r=0$; для типов n_1 и n_2 расслоения с $p=1$, $r \leqslant 1$; $p=2$, $r=0$; для типа n_3 расслоения с $p=2$, $r=0$. Все З. р. типа n_4 большие. Малые З. р. все перечислены, их имеется 10 типов (см. [3]).

Свободные действия конечных групп на трехмерной сфере коммутируют с естественным действием на ней группы $SO(2)$, и поэтому пространства орбит этих действий оказываются З. р. с конечными фундаментальными группами. Это — единственные известные (1977) примеры M^3 с конечной $\pi_1(M^3)$. Нек-рые из З. р. встречаются как границы сферич. окрестностей изолированных особых точек алгебраич. поверхностей, инвариантных относительно действия мультипликативной группы комплексных чисел. Именно, это З. р. типа: $\{b;\ (O_1, p);\ (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)\}$ при $b+r>0$. Идентификация этих многообразий позволяет построить явное разрешение особенностей с учетом действия $\mathbb{C}^*$ (а также дать полное описание изолированных особенностей поверхностей в $\mathbb{C}^3$, допускающих действие $\mathbb{C}^*$). З. р. имеются также на локально плоских римановых многообразиях, полученных при факторизации евклидова пространства по свободному действию диск-

ретной группы движений (имеется 6 ориентированных и 4 неориентируемых многообразия, все из к-рых, кроме одного, являются различными расслоениями над окружностью со слоем тор или поверхность Клейна).

В топологии трехмерных многообразий З. р. важны, напр., для идентификации многообразий, фундаментальные группы к-рых имеют центр [4]. Имеются также обобщения З. р. на другие классы расслоений с особыми слоями.

Лит.: [1] Seifert H., «Acta Math.», 1933, Bd 60, S. 147—238; [2] Holmann H., «Math. Ann.», 1964, Bd 157, S. 138—66; [3] Orlik P., Seifert manifolds, B.— Hdlb.— N. Y., 1972; [4] Hempel J., 3-manifolds, N.Y., 1976. *А. В. Чернавский.*

ЗЕНОНА ПАРАДОКС — одна из *антиномий*.

ЗИГЕЛЯ МЕТОД — метод исследования арифметич. свойств значений в алгебраич. точках E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$; был предложен К. Зигелем [1].

Целая функция

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}$$

наз. E-ф у н к ц и е й, если все коэффициенты c_n принадлежат нек-рому алгебраич. полю конечной степени, причем для каждого $\varepsilon>0$ максимум модулей, сопряженных с c_n, есть $O(n^{\varepsilon n})$ и существует последовательность целых рациональных чисел $q_n=O(n^{\varepsilon n})$ таких, что $q_n c_k$ есть целое алгебраич. число для $k=0, 1, \ldots, n$. Таковы, напр., e^z, $\sin z$, функция Бесселя $J_0(z)$.

Пусть $[\alpha, 0]=1$, а $[\alpha, n]=(\alpha+n-1)\,[\alpha, n-1]$, $n=1, 2, \ldots$ Если $a_1, \ldots, a_l$ и $b_1, \ldots, b_m$ — рациональные числа, $b_k\neq -1, -2, \ldots$ и $m-l=t>0$, то функция

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a_1, n]\ldots[a_l, n]}{[b_1, n]\ldots[b_m, n]} z^{tn}$$

является E-функцией; она удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению порядка m с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$.

Основной результат К. Зигеля относится к значениям функции

$$K_\lambda(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda} J_\lambda(z),$$

где $J_\lambda(z)$ — функция Бесселя. Если λ — рациональное число, $\lambda\neq\pm\frac{1}{2}, -1, \pm\frac{3}{2}, -2, \ldots$, то при любом алгебраическом $\alpha\neq 0$ числа $K_\lambda(\alpha)$ и $K'_\lambda(\alpha)$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

В 1949 К. Зигель придал своему методу общую форму, однако условия, к-рым должны были удовлетворять E-функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ для того, чтобы можно было утверждать, что их значения алгебраически независимы, оказались очень трудно проверяемыми. И это не позволило установить какие-либо новые конкретные результаты.

Дальнейшее развитие и обобщение З. м. получил в работах А. Б. Шидловского (см. [2] — [3]): пусть совокупность E-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ является решением системы дифференциальных уравнений

$$y'_k=q_{k0}+\sum_{i=1}^{m} q_{ki}y_i, \quad k=1, \ldots, m, \quad q_{ki}\in C(z), \quad (1)$$

и алгебраич. число α отлично от нуля и особых точек системы (1); тогда, для того чтобы m чисел $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ были алгебраически независимы над полем $\mathbb{Q}$, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ были алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Из этой теоремы, в частности, следует трансцендентность всех чисел $f_k(\alpha)$, если $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ алгебраически независимы, а также трансцендентность отличных от

нуля и полюсов системы (1) A-точек функций $f_k(z)$ при алгебраическом A; она позволила получить многочисленные результаты, относящиеся к конкретным E-функциям, доказать алгебраич. независимость значений E-функций, удовлетворяющих линейным однородным и неоднородным дифференциальным уравнениям порядка большего двух. Напр., для функции

$$\psi_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{kn}}{(n!)^k},$$

удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению порядка k с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, справедливо следующее утверждение: при любом алгебраическом $\alpha\neq 0$, $r(r+1)/2$ чисел $\psi_k^{(l)}(\alpha)$, $l=0, 1, \ldots, k-1$, $k=1, 2, \ldots, r$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

При тех же условиях максимальное количество алгебраически независимых над $\mathbb{Q}$ чисел среди $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ равно максимальному количеству алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$ функций среди $f_1(z), \ldots, f_m(z)$. Если $f_1(z), \ldots, f_l(z)$ — алгебраически независимые над $\mathbb{C}(z)$ E-функции, удовлетворяющие системе (1), то для всех, кроме конечного числа, точек α числа $f_1(\alpha), \ldots, f_l(\alpha)$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$. В каждом конкретном случае исключительные точки могут быть определены.

Этими теоремами решаются, по существу, все задачи общего характера о трансцендентности и алгебраич. независимости значений E-функций в алгебраических точках.

З. м. позволяет оценивать меру алгебраич. независимости чисел $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$, придав тем самым результатам количественную форму. Если функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ алгебраически независимы, то $\Phi(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha); n, H)>CH^{-\gamma n^m}$, где $C>0$ не зависит от H, а $\gamma>0$ зависит только от m и степени алгебраич. числа α.

Лит.: [1] Siegel C. L., «Abhandl. Dtsch. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.», 1929, № 1, p. 1—41; [2] Шидловский А. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 1, с. 35—66; [3] его же, там же, 1962, т. 26, № 6, с. 877—910; [4] его же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 132, с. 169—202; [5] Lang S., «Mathem.», 1962, v. 9, с. 157—61; [6] Фельдман Н. И., Шидловский А. Б.», «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 3, с. 1—81.

Ю. В. Нестеренко.

ЗИГЕЛЯ ОБЛАСТЬ — неограниченная область в $(n+m)$-мерном комплексном аффинном пространстве имеющая вид

$$D(V, F)=\{(z, w)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m \mid \operatorname{Im} z-F(w, w)\in V\},$$

где V — открытый выпуклый конус в пространстве $\mathbb{R}^n$, а F: $\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^n$ — отображение, являющееся V-эрмитовой формой, а именно, F линейно по первому аргументу, $F(w', w)=\overline{F(w, w')}$, $F(w, w)\in\overline{V}$ ($\overline{V}$ — замыкание V), $F(w, w')=0$ только при $w=0$. В случае, когда $m=0$ (и, стало быть, $F=0$) область $D(V, F)$ наз. З. о. первого рода и обозначается просто $D(V)$; в случае, когда $m\neq 0$, область $D(V, F)$ наз. З. о. второго рода.

Простейшим примером З. о. (первого рода) является верхняя полуплоскость одного комплексного переменного. В работе К. Зигеля [1] в связи с исследованием абелевых многообразий была рассмотрена область H_p в пространстве комплексных симметричных матриц порядка p, образованная матрицами, мнимая часть к-рых положительно определена. Эта область, наз. теперь верхней полуплоскостью Зигеля (и при $p=1$ совпадающая с обычной верхней полуплоскостью), является З. о. первого рода, ассоциированной с конусом положительно определенных симметричных матриц порядка p. Общее понятие З. о. возникло в связи с изучением автоморфных функций многих комплексных переменных (см. [5]). Впоследствии это понятие стало центральным в теории однородных ограниченных областей.

Всякая З. о. аналитически изоморфна ограниченной области. Напр., при $n=1$ З. о. изоморфна комплексному шару

$$\{z \in \mathbb{C}^{m+1} \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_{m+1}|^2 < 1\}.$$

Всякая однородная ограниченная область изоморфна З. о., однородной относительно аффинных преобразований. Две З. о. аналитически изоморфны тогда и только тогда, когда они переводятся одна в другую аффинным преобразованием (см. [3]).

Лит.: [1] Siegel C. L., «Math. Ann.», 1939, Bd 116, S. 617—57; [2] Зигель К., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1954; [3] Kaup W., Matsushima Y., Ochiai T., «Amer. J. Math.», 1970, v. 92, p. 475—98; [4] Murakami S., On Automorphisms of Siegel Domains, B.— Hdlb.— N.Y., 1972; [5] Итоги науки. Матем. анализ. 1963, М., 1965, с. 81—124. *Э. Б. Винберг.*

ЗИГЕЛЯ ТЕОРЕМА — 1) З. т. о L-функциях Дирихле: для любого $\varepsilon>0$ существует $c=c(\varepsilon)>0$ такое, что для всякого неглавного действительного *Дирихле характера* χ модуля k выполняется

$$L(1, \chi) > \frac{c(\varepsilon)}{k^{\varepsilon}}.$$

Установлена К. Зигелем [1]. Эквивалентное утверждение относится к действительным нулям L-функций: для любого $\varepsilon>0$ существует $c_1=c_1(\varepsilon)$ такое, что $L(z, \chi)\neq 0$ при $z>1-c_1/k^{\varepsilon}$ для всякого неглавного действительного характера Дирихле χ. Константы $c(\varepsilon)$ и $c_1(\varepsilon)$ не эффективны в том смысле, что ни при одном $\varepsilon<1/2$ нет способа оценивать их снизу. В силу этого применения З. т. носят неконструктивный характер. Напр., если $h(-D)$ есть число классов дивизоров квадратичного поля дискриминанта $-D$, то из З. т. следует, что

$$h(-D) > c_2(\varepsilon) D^{1/2-\varepsilon}$$

с неэффективной константой $c_2(\varepsilon)$ при $\varepsilon<1/2$. Аналогично, оценка, равномерная при $1 \leqslant k \leqslant \ln^A x$, $(k, l)=1$,

$$\pi(x, k, l) - \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = O\left(x e^{-c_3 \sqrt{\ln x}}\right),$$

где $\pi(x, k, l)$ — число простых чисел вида $kn+l$, меньших x, содержит неэффективную константу c_3.

Лит.: [1] Siegel C. L., «Acta arithmetica», 1935, v. 1, p. 83—86; [2] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер.с англ., М., 1971; [3] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, М., 1975, гл. IX. *С. М. Воронин.*

2) З. т. о целых точках — теорема о конечности числа решений в целых числах одного класса диофантовых уравнений. В своей простейшей форме эта теорема утверждает, что если $F(x, y)$ — многочлен с целыми коэффициентами, определяющий неприводимую кривую $F=0$ рода $g>0$, то уравнение $F(x, y)=0$ имеет конечное число решений в целых числах. Этот результат (в более общем виде для целых алгебраич. чисел) был получен в 1929 К. Зигелем [1] с помощью теории диофантовых приближений и теории абелевых многообразий. Он явился завершением начатого в 1908 А. Туэ (A. Thue, см. [2], [3]) направления в теории диофантовых уравнений. В дальнейшем эта теорема была обобщена на случай произвольных аффинных кривых рода $g>0$, определенных над подкольцами конечного типа глобальных полей (см. [5]). В частности, приведенное выше уравнение $F(x, y)=0$ имеет конечное число решений в числах вида

$$\frac{m}{p_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s}},$$

где $m, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}$, а $p_1, \ldots, p_s$ — фиксированные простые числа. До недавнего времени доказательства этих теорем имели существенный недостаток — утверждая лишь конечность числа решений, они не давали никакой границы для их величины (см. *Высота*

в диофантовой геометрии), так что не имелось никакого алгоритма для построения решений в явном виде. Первый результат в этом направлении был получен А. Бейкером (A. Baker, 1967). Эффективные доказательства З. т. получены для различных классов диофантовых уравнений, однако в общем случае вопрос остается (1978) открытым (см. [4]). Другой важной задачей является обобщение З. т. на многообразия размерности больше 1.

Лит.: [1] Siegel C. L., «Abhandl. Dtsch. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.», 1929, № 1, S. 41—69; [2] Гельфонд А. О., Решение уравнений в целых числах, 2 изд., М., 1956; [3] Дэвенпорт Г., Высшая арифметика, пер. с англ., М., 1965; [4] Проблемы теории диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1974; [5] Lang S., Diophantine Geometry, N. Y.— L., 1962.

А. Н. Паршин.

ЗИГМУНДА КЛАСС функций — класс Z_M непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$, для к-рых существует такая постоянная $M>0$, что при всех x и $h>0$ имеет место неравенство

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant Mh.$$

Класс Z_M введен А. Зигмундом [1]. В терминах класса Z_M получает окончательное решение задача Джексона — Бернштейна о прямых и обратных теоремах теории приближения функций. Напр., имеет место следующее утверждение: для того чтобы непрерывная 2π-периодическая функция $f(x)$ входила в З. к. при некотором $M>0$, необходимо и достаточно, чтобы ее наилучшее приближение $E_n(f)$ тригонометрич. полиномами порядка не выше n удовлетворяло неравенству

$$E_n(f)\leqslant A/n,$$

где $A>0$ — постоянная. Для модуля непрерывности $\omega(\delta, f)$ любой функции $f(x)\in Z_M$ имеет место оценка

$$\omega(\delta, f)\leqslant \frac{M}{2\ln(\sqrt{2}+1)}\,\delta\ln\frac{\pi}{\delta}+O(\delta),$$

причем постоянная $M/2\ln(\sqrt{2}+1)$ на всем З. к. Z_M не может быть улучшена [3].

Лит.: [1] Zygmund A., «Duke Math. J.», 1945, v. 12, № 1, p. 47—76; [2] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969; [3] Ефимов А. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, № 2, с. 283—8.

А. В. Ефимов.

ЗМЕЕВИДНЫЙ КОНТИНУУМ — континуум, допускающий для любого $\varepsilon>0$ открытое покрытие, *нерв* к-рого — конечный линейный комплекс. Иначе говоря, для любого $\varepsilon>0$ З. к. должен покрываться конечной системой G_n, $n=1, 2, \ldots, p$, открытых множеств такой, что все G_n имеют диаметр меньше ε, и $G_i\cap G_j\neq\phi$ тогда и только тогда, когда $|i-j|=1$ (такие системы наз. ε-цепями). Всякий З. к. неприводим (см. *Неприводимый континуум*) между любой парой своих точек. Всякий подконтинуум З. к. змеевиден. Два наследственно неразложимых З. к. (см. *Неразложимый континуум*), содержащих более одной точки, гомеоморфны и называются псевдодугами. Каждый З. к. топологически содержится в плоскости. Всякий однородный З. к. есть псевдодуга. Каждый З. к. есть непрерывный образ псевдодуги и предел обратного спектра из дуг.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология [пер. с англ.], т. 2, М., 1969.

А. А. Мальцев.

ЗНАКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ — условные обозначения, предназначенные для записи математич. понятий и выкладок. Напр., понятие «квадратный корень из числа, равного отношению длины окружности к ее диаметру» обозначается кратко $\sqrt{\pi}$, а предложение «отношение длины окружности к ее диаметру больше, чем три и десять семьдесят первых, и меньше, чем три и одна седьмая» записывается в виде:

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}.$$

Развитие математической символики было тесно связано с общим развитием понятий и методов математики.

Первыми З. м. были знаки для изображения чисел — *цифры*, возникновение которых, по-видимому, предшествовало введению письменности. Наиболее древние системы нумерации (системы *счисления*) — вавилонская и египетская — возникли еще за $3^1/_2$ тысячелетия до н. э.

Первые З. м. для произвольных величин появились много позднее (начиная с 5—4 вв. до н. э.) в Греции. Произвольные величины (площади, объемы, углы) изображались в виде отрезков, а произведение двух произвольных величин — в виде прямоугольника, построенного на соответствующих отрезках. В «Началах» Евклида (3 в. до н. э.) величины обозначаются двумя буквами — начальной и конечной буквами соответствующего отрезка, а иногда и одной. У Архимеда (3 в. до н. э.) последний способ обозначения становится обычным. Подобное обозначение содержало в себе возможности развития буквенного исчисления. Однако в классической античной математике над буквами никаких операций не производилось, а буквенного исчисления создано не было.

Начатки буквенного обозначения и исчисления возникают в позднеэллинистич. эпоху в результате освобождения алгебры от геометрич. формы. Диофант (вероятно, 3 в.) обозначал неизвестную (x) и ее степени следующими знаками:

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
s'	$\delta^{\bar{\upsilon}}$	$\kappa^{\bar{\upsilon}}$	$\delta\delta^{\bar{\upsilon}}$	$\delta\kappa^{\bar{\upsilon}}$	$\kappa\kappa^{\bar{\upsilon}}$

($\delta^{\bar{\upsilon}}$ — от греч. термина δύναμις, обозначавшего квадрат неизвестной, $\kappa^{\bar{\upsilon}}$ — от греч. κύβος — куб). Справа от неизвестной или ее степеней Диофант писал коэффициенты, напр. $3x^5$ обозначалось $\delta\kappa^{\bar{\upsilon}}\bar{\gamma}$ (где $\bar{\gamma}=3$). При сложении Диофант приписывал слагаемые друг к другу, при вычитании употреблял специальный знак $\wedge\!\!\!\!/$; равенство Диофант обозначал буквой ι (от греч. ἴσος — равный). Напр., уравнение

$$(x^3+8x)-(5x^2+1)=x$$

у Диофанта записалось бы так:

$$\kappa^{\bar{\upsilon}}\bar{\alpha}\,s'\bar{\eta}\wedge\!\!\!\!/\,\delta^{\bar{\upsilon}}\bar{\varepsilon}\,\mu^{o}\bar{\alpha}\,\iota\,s'\bar{\alpha}$$

(здесь $\bar{\alpha}=1$, $\bar{\eta}=8$, $\bar{\varepsilon}=5$, а $\mu^{o}\bar{\alpha}$ означает, что единица $\bar{\alpha}$ не имеет множителя в виде степени неизвестного).

Несколько веков спустя индийцы, разрабатывавшие числовую алгебру, ввели различные З. м. для нескольких неизвестных (сокращения наименований цветов, обозначавших неизвестные), квадрата, квадратного корня, вычитаемого числа. Так, уравнение

$$3x^2+10x-8=x^2+1$$

в записи Брахмагупты (7 в.) имело бы вид:

йа ва 3 йа 10 ру $\dot{8}$
йа ва 1 йа 0 ру 1

(йа — от йават — тават — неизвестное, ва — от варга — квадратное число, ру — от рупа — монета рупия — свободный член, точка над числом означает вычитаемое число).

Создание современной алгебраич. символики относится к 14—17 вв.; оно определялось успехами практич. арифметики и учения об уравнениях. В различных странах стихийно появляются З. м. для нек-рых дей-

ствий и для степеней неизвестной величины. Проходят многие десятилетия и даже века, прежде чем вырабатывается тот или иной удобный для исчисления символ. Так, в конце 15 в. Н. Шюке (N. Chuquet) и Л. Пачоли (L. Pacioli) употребляли знаки сложения и вычитания $\tilde{p}$ и $\tilde{m}$ (от лат. plus и minus), немецкие математики ввели современные + (вероятно, сокращение лат. et) и — . Еще в 17 в. можно насчитать около десятка З. м. для действия умножения:

$$\square\ ,\ *\ ;\ „\ ,\ ,\ ,\ ;\ \int\ ;\ \cdot\ ;\ \times.$$

Поучительна история знака радикала. Вслед за Леонардо Пизанским (Leonardo Pisano, 1220) многие обозначали (вплоть до 17 в.) квадратный корень знаком R_{x} (от лат. radix — корень). Н. Шюке обозначал квадратный, кубический и т. д. корни знаками $\mathrm{R}_{\mathrm{x}}{}^{2}$, $\mathrm{R}_{\mathrm{x}}{}^{3}$ и т. д. В немецкой рукописи ок. 1480 квадратный корень обозначался точкой перед числом, кубич. корень — тремя точками, а корень четвертой степени — двумя точками. У К. Рудольфа (Ch. Rudolff, 1525) корень уже обозначался $\sqrt{}$. Для обозначения корней высших степеней различные ученые то пишут этот знак несколько раз подряд, то ставят после него букву — сокращение наименования показателя, то — соответствующую цифру в кружке или с круглой или квадратной скобкой, чтобы отделить ее от подрадикального числа [горизонтальную черту над подрадикальным выражением ввел Р. Декарт (R. Descartes), 1637], и лишь в начале 18 в. входит в обиход запись показателя корня вверху над отверстием знака радикала, встречающаяся ранее у А. Жирара (A. Girard, 1629). Таким образом, эволюция знака радикала длилась почти пятьсот лет.

Весьма различны были З. м. неизвестной и ее степеней. В 16 и начале 17 вв. конкурировало более десяти обозначений для одного только квадрата неизвестной, напр. ce (от census — лат. термин, служивший переводом греч. δύναμις), Q (от quadratum), $\mathcal{Z}$, $\frac{\mathrm{ii}}{1}$, $A\,(2)$, $1^{\underset{\sim}{2}}$, A^{il}, aa, a^{2} и т. д. Так, уравнение

$$x^3+5x=12$$

имело бы у Дж. Кардано (G. Cardano, 1545) вид:

1. cubus p̃. 5. positionibus æquantur 12

(cubus — куб, positio — неизвестная, œquantur — равно);

у М. Штифеля (M. Stifel, 1544):

1cē + 5 2ę. æqu. 12

у Р. Бомбелли (R. Bombelli, 1572):

1 $\overset{3}{\smile}$ p. 5 $\overset{1}{\smile}$ eguale à 12

($\overset{3}{\smile}$ — куб неизвестной, $\overset{1}{\smile}$ — неизвестная; eguale à — равно);

у Ф. Виета (F. Viète, 1591):

1C + 5 N, æquatur 12

(C — cubus — куб, N — numerus — число);

у Т. Гарриота (T. Harriot, 1631):

$$aaa + 5.a = 12$$

В 16 и начале 17 вв. входят в употребление знаки равенства и скобки: квадратные (Р. Бомбелли, 1550), круглые (Н. Тарталья, N. Tartaglia, 1556), фигурные (Ф. Виет, 1593).

Значительным шагом вперед в развитии математич. символики явилось введение Ф. Виетом (1591) З. м. для произвольных постоянных величин в виде прописных согласных букв латинского алфавита B, D, что дало ему возможность впервые записывать алгебраич. уравнения с произвольными коэффициентами и оперировать с ними. Неизвестные Ф. Виет обозначал глас-

ными прописными буквами A, E, ... Напр., запись Ф. Виета

A cubus + B plano in A 3, æquatur Dsolido

[cubus — куб, planus — плоский, т. е. B — двумерная величина; solidus — телесный (трехмерный), размерность отмечалась для того, чтобы все члены были однородны] в наших символах выглядит так:

$$x^3 + 3bx = d.$$

Ф. Виет явился творцом алгебраич. формул. Р. Декарт (1637) придал знакам алгебры современный вид, обозначая неизвестные последними буквами латинского алфавита x, y, z, а произвольные данные величины — начальными буквами a, b, c. Ему же принадлежит нынешнее обозначение степени. Обозначения Р. Декарта обладали большим преимуществом по сравнению со всеми предыдущими. Поэтому они скоро получили всеобщее признание.

Дальнейшее развитие З. м. было тесно связано с созданием анализа бесконечно малых, для разработки символики к-рого основа была уже в большой мере подготовлена в алгебре. И. Ньютон (I. Newton) в своем методе флюксий и флюент (1666 и следующие годы) ввел знаки для последовательных флюксий (производных) величины x в виде $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$ и для бесконечно малого приращения o. Несколько ранее Дж. Валлис (J. Wallis, 1655) предложил знак бесконечности ∞. Создателем современной символики дифференциального и интегрального исчислений является Г. Лейбниц (G. Leibniz). Ему, в частности, принадлежат употребляемые ныне З. м. дифференциалов dx, d^2x, d^3x и интеграла

$$\int y\,dx.$$

Следует подчеркнуть принципиальное преимущество знака интеграла, данного Г. Лейбницем, перед предложенным И. Ньютоном знаком $'x$. В знаке Г. Лейбница $\int ydx$, отражающем самый процесс построения интегральной суммы, явно указана и интегрируемая функция и переменная интегрирования. Благодаря этому знак $\int ydx$ годится и для записи формул замены переменных и легко может быть использован для записи кратных и криволинейных интегралов. Знак И. Ньютона $'x$ таких возможностей непосредственно не представляет. Аналогично обстоит дело с лейбницевыми знаками дифференциалов и ньютоновыми знаками флюксий и бесконечно малого приращения.

Огромная заслуга в создании символики современной математики принадлежит Л. Эйлеру (L. Euler). Он ввел в общее употребление первый знак переменной операции, именно знак функции $f(x)$ (от лат. functio — функция, 1734). Несколько ранее знак φx был применен И. Бернулли (J. Bernoulli, 1718). После работ Л. Эйлера знаки для многих индивидуальных функций, напр. тригонометрических, приобрели стандартный характер. Л. Эйлеру же принадлежат обозначения постоянных e (основание натуральных логарифмов, 1736), π (вероятно, от греч. περιφέρεια — окружность, периферия, 1736), мнимой единицы $i = \sqrt{-1}$ (от франц. imaginaire — мнимый, 1777, опубликовано в 1794), к-рые стали общеупотребительными.

В 19 в. роль символики еще более возрастает и, наряду с созданием новых З. м., математики стремятся к стандартизации основных символов. Некоторые широко употребительные ныне З. м. появляются лишь в это время: знак абсолютной величины $|x|$ (К. Вейерштрасс, K. Weierstrass, 1841), вектора $\bar{r}$ (О. Коши,

A. Cauchy, 1853), определителя $\begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}$ (А. Кэли, A. Cayley, 1841) и др. Многие теории, возникшие в 19 в., напр. тензорное исчисление, не могли быть развиты без подходящей символики. Характерно при этом увеличение удельного веса З. м. для отношений, напр., сравнимости $\equiv$ (К. Гаусс, C. Gauss, 1801), принадлежности $\in$, изоморфизма $\simeq$, эквивалентности $\sim$ и т. д. Знаки переменных отношений появляются с развитием математич. логики, особенно широко применяющей З. м.

С точки зрения математической логики, среди З. м. можно наметить следующие основные группы: А) знаки объектов, Б) знаки операций, В) знаки отношений. Например, знаки 1, 2, 3, 4 изображают числа, т. е. объекты, изучаемые арифметикой. Знак операции сложения $+$ сам по себе не изображает никакого объекта; он получает предметное содержание лишь тогда, когда указано, какие числа складываются: запись $1+3$ изображает число 4. Знак $>$ (больше) есть знак отношения между числами. Знак отношения получает вполне определенное содержание, когда указано, между какими объектами отношение рассматривается. К указанным трем основным группам З. м. примыкает еще четвертая: Г) вспомогательные знаки, устанавливающие порядок сочетания основных знаков. Достаточное представление о таких знаках дают скобки, указывающие порядок производства арифметич. действий.

Знаки каждой из трех групп А), Б) и В) бывают двух родов: 1) индивидуальные знаки вполне определенных объектов, операций и отношений, 2) общие знаки «переменных», или «неизвестных», объектов, операций и отношений. Примерами знаков первого рода могут служить (см. также таблицу на кол. 462, 463):

A_1) Обозначения натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; трансцендентных чисел e и π; мнимой единицы $i=\sqrt{-1}$ и т. п.

$Б_1$) Знаки арифметич. действий $+$, $-$, $\cdot$, $\times$, $:$; извлечения корня $\sqrt[n]{}$, дифференцирования $\frac{d}{dx}$, оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Сюда же относятся знаки индивидуальных функций sin, tg, log и т. п.

$В_1$) Знаки равенства и неравенства $=$, $>$, $<$, $\neq$, знаки параллельности $\parallel$ и перпендикулярности $\perp$ и т. п.

Знаки второго рода изображают произвольные объекты, операции и отношения определенного класса или объекты, операции и отношения, подчиненные к.-л. заранее оговоренным условиям. Напр., при записи тождества

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

буквы a и b обозначают произвольные числа; при изучении функциональной зависимости

$$y=x^2$$

буквы x и y изображают произвольные числа, связанные заданным отношением; при решении уравнения

$$x^2-1=0$$

x обозначает любое число, удовлетворяющее данному уравнению (в результате решения этого уравнения мы узнаем, что этому условию соответствуют лишь два возможных значения $+1$ и -1).

С логич. точки зрения вполне законно все такого рода общие знаки наз. з н а к а м и п е р е м е н н ы х, как это принято в математич. логике («область изме-

Даты возникновения некоторых математических знаков

Знак	Значение	Кто ввел	Когда введен
	Знаки индивидуальных операций		
∞	бесконечность	Дж. Валлис (J. Wallis)	1655
e	основание натуральных логарифмов	Л. Эйлер (L. Euler)	1736
π	отношение длины окружности к диаметру	У. Джонс (W. Jones)	1706
		Л. Эйлер (L. Euler)	1736
i	корень квадратный из -1	Л. Эйлер (L. Euler)	1777 (в печати 1794)
i, j, k	единичные векторы, орты	У. Гамильтон (W. Hamilton)	1853
$\Pi(\alpha)$	угол параллельности	Н. И. Лобачевский	1835
	Знаки переменных объектов		
x, y, z	неизвестные или переменные величины	Р. Декарт (R. Descartes)	1637
$\bar{r}$	вектор	О. Коши (A. Cauchy)	1853
	Знаки индивидуальных операций		
$+$ $-$	сложение вычитание	немецкие математики	конец 15 в.
$\times$	умножение	У. Оутред (W. Oughtred)	1631
$\cdot$	умножение	Г. Лейбниц (G. Leibniz)	1698
$:$	деление	Г. Лейбниц (G. Leibniz)	1684
$a^2, a^3, \ldots, a^n$	степени	Р. Декарт (R. Descartes)	1637
		И. Ньютон (I. Newton)	1676
$\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, $\ldots$	корни	К. Рудольф (K. Rudolf)	1525
		А. Жирар (A. Girard)	1629
Log, log	логарифм	И. Кеплер (J. Kepler)	1624
		Б. Кавальери (B. Cavalieri)	1632
sin	синус	Л. Эйлер (L. Euler)	1748
cos	косинус		
tg	тангенс	Л. Эйлер (L. Euler)	1753
arc. sin	арксинус	Ж Лагранж (J. Lagrange)	1772
Sh	гиперболический синус	В. Риккати (V. Riccati)	1757
Ch	гиперболический косинус		
$dx, ddx, \ldots,$ $d^2x, d^3x, \ldots$	дифференциал	Г. Лейбниц (G. Leibniz)	1675 (в печати 1684)
$\int ydx$	интеграл	Г. Лейбниц (G. Leibniz)	1675 (в печати 1686)
$\frac{d}{dx}$	производная	Г. Лейбниц (G. Leibniz)	1675
$f'(x), y', f'x$	производная	Ж. Лагранж (J. Lagrange)	1770, 1779
Δx	разность, приращение	Л. Эйлер (L. Euler)	1755
$\frac{\partial}{\partial x}$	частная производная	А. Лежандр (A. Legendre)	1786
$\int_a^b f(x)dx$	определенный интеграл	Ж. Фурье (J. Fourier)	1819—22
Σ	сумма	Л. Эйлер (L. Euler)	1755
Π	произведение	К. Гаусс (C. Gauss)	1812
$!$	факториал	К. Крамп (Ch. Kramp)	1808
$\lvert x \rvert$	модуль	К. Вейерштрасс (K. Weierstrass),	1841
lim	предел	С. Люилье (S. L'Huillier)	1786
lim $n=\infty$		У. Гамильтон (W. Hamilton),	1853
lim $n\to\infty$		многие математики	начало 20 в.

Знак	Значение	Кто ввел	Когда введен
ζ	дзета-функция	Б. Риман (B. Riemann)	1857
Γ	гамма-функция	А. Лежандр (A. Legendre)	1808
B	бета-функция	Ж. Бине (J. Binet)	1839
Δ	дельта (оператор Лапласа)	Р. Мёрфи (R. Murphy)	1833
∇	набла (оператор Гамильтона)	У. Гамильтон (W. Hamilton)	1853
	Знаки переменных операций		
φx	функция	И. Бернулли (J. Bernoulli)	1718
$f(x)$	функция	Л. Эйлер (L. Euler)	1734
	Знаки индивидуальных отношений		
$=$	равенство	Р. Рекорд (R. Recorde)	1557
$>$	больше	Т. Гарриот (T. Harriot)	1631
$<$	меньше	Т. Гарриот (T. Harriot)	1631
$\equiv$	сравнимость	К. Гаусс (C. Gauss)	1801
$\parallel$	параллельность	У. Оутред (W. Oughtred)	1677 (в посмертном издании)
$\perp$	перпендикулярность	П. Эригон (P. Hérigone)	1634

нения» переменного может оказаться состоящей из одного единственного объекта или даже «пустой», напр., в случае уравнений, не имеющих решения). Дальнейшими примерами такого рода знаков могут служить:

А$_2$) Обозначения точек, прямых, плоскостей и более сложных геометрич. фигур буквами в геометрии.

Б$_2$) Обозначения f, F, φ для функций и обозначения операторного исчисления, когда одной буквой L обозначают, напр., произвольный оператор вида:

$$L[y] = a_0 + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + a_n \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Обозначения для «переменных отношений» менее распространены; они находят применение лишь в математич. логике и в сравнительно абстрактных, по преимуществу аксиоматических, математич. исследованиях.

Лит.: [1] Cajori F., A history of mathematical notations, v. 1—2, Chi., 1928—29.

ЗНАКОВ КРИТЕРИЙ — непараметрический критерий для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой случайная величина μ подчиняется биномиальному распределению с параметрами $(n;\ p=0{,}5)$. Если гипотеза H_0 справедлива, то

$$P\left\{\mu \leqslant k \mid n,\ \frac{1}{2}\right\} = \sum_{i=0}^{k} C_n^i \left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

$$= I_{0,5}(n-k,\ k+1), \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

где

$$I_z(a,\ b) = \frac{1}{B(a,\ b)} \int_0^z t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt,\ 0 \leqslant z \leqslant 1,$$

$B(a,\ b)$ — бета-функция. Согласно З. к. с уровнем значимости α, $0 < \alpha \leqslant 0{,}5$, гипотезу H_0 следует отвергнуть, если

$$\min\{\mu,\ n-\mu\} \leqslant m,$$

где $m = m(\alpha,\ n)$ — критическое значение З. к., являющееся целочисленным решением неравенств

$$\sum_{i=0}^{m} C_n^i \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{\alpha}{2},\ \sum_{i=0}^{m+1} C_n^i \left(\frac{1}{2}\right)^n > \frac{\alpha}{2}.$$

З. к. можно применять для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой неизвестное непрерывное распределение независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ является симметричным относительно нуля, т. е. для любого действительного числа x выполняется равенство

$$\mathsf{P}\{X_i < -x\} = \mathsf{P}\{X_i > x\}.$$

В этом случае З. к. основан на статистике

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \delta(X_i), \quad \delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

к-рая при справедливости гипотезы H_0 подчиняется биномиальному закону с параметрами $(n;\ p=0{,}5)$.

Аналогично, З. к. используется для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой медиана неизвестного непрерывного распределения, к-рому подчиняются независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$, имеет значение ξ_0, для чего нужно перейти к случайным величинам $Y_1 = X_1 - \xi_0, \ \ldots, \ Y_n = X_n - \xi_0$.

Лит.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, [2 изд.], М., 1968; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964; [3] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969.

М. С. Никулин.

ЗНАКОПЕРЕМЕННАЯ ГРУППА n-й степени — подгруппа A_n *симметрической группы* S_n, состоящая из всех четных подстановок. A_n является инвариантной подгруппой индекса 2 и порядка $n!/2$ группы S_n. Подстановки из A_n, рассматриваемые как подстановки индексов переменных $x_1, \ldots, x_n$, не изменяют значения так наз. знакопеременного многочлена $\Pi\,(x_i - x_j)$, откуда и происходит назв. «З. г.». Группа A_m может быть определена и для бесконечной мощности m, как подгруппа симметрич. группы S_m бесконечной мощности m, состоящая из всех четных подстановок. При $n > 3$ группа S_n будет $(n-2)$-кратно транзитивной. При любом n, конечном или бесконечном, исключая $n=4$, эта группа проста, что играет важную роль в теории разрешимости алгебраич. уравнений в радикалах.

Лит.: [1] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

Н. Н. Вильямс.

ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЙСЯ РЯД, знакопеременный ряд,— бесконечный ряд, члены к-рого попеременно положительны и отрицательны:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots, \qquad u_k > 0.$$

Если члены З. р. монотонно убывают $(u_{n+1} < u_n)$ и стремятся к нулю $(\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0)$, то ряд сходится (теорема Лейбница). Остаток сходящегося З. р.

$$r_n = (-1)^n u_{n+1} + \ldots$$

имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине. Простейшие примеры сходящихся З. р.:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots,$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \ldots$$

Сумма первого из этих рядов есть $\ln 2$, а второго $\pi/4$.

В. И. Битюцков.

ЗНАМЕНАТЕЛЬ арифметической дроби $\frac{a}{b}$ — целое число b, показывающее (знаменующее) размеры долей единицы, из к-рых составлена дробь. З. алгебраической дроби $\frac{A}{B}$ наз. выражение B (см. *Дробь*).

С. А. Степанов.

ЗНАЧАЩАЯ ЦИФРА — термин, относящийся к приближенному заданию действительного числа. Пусть в системе счисления с основанием q для действительного числа x получено приближенное представление q-ичной дробью

$$x \approx x^* = (\alpha_n \ldots \alpha_1 \alpha_0, \ \alpha_{-1}\alpha_{-2} \ldots \alpha_{-m}).$$

Пусть при этом α_s — первая ненулевая цифра, считая слева. Тогда и все последующие цифры наз. з н а ч а щ и м и ц и ф р а м и приближенного числа x^*.

З. ц. α_t наз. в е р н о й, если абсолютная погрешность $\Delta(x^*)$ числа x^*, то есть величина $|x-x^*|$, удовлетворяет неравенству

$$\Delta(x^*) \leqslant \tfrac{1}{2} q^t.$$

Обычно при приближенном задании числа x имеет смысл указывать только верные З. ц. *Х. Д. Икрамов.*

ЗНАЧИМОСТИ КРИТЕРИЙ — один из основных методов статистич. проверки гипотез, применяемый для проверки соответствия результатов наблюдений $x_1, \ldots, x_n$, трактуемых как реализации случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, нек-рой гипотезе H_0 о вероятностном распределении этих случайных величин. З. к. отвергает либо принимает гипотезу H_0 в зависимости от наблюденного значения нек-рой статистики $T=T(X_1, \ldots, X_n)$, конкретизация к-рой зависит от постановки задачи. При применении З. к., вообще говоря, не предполагается наличие какой-либо конкурирующей гипотезы H_1, к-рую принимают в случае отклонения H_0, но если H_1 задана, то, согласно общей теории статистич. проверки гипотез, именно конкурирующая гипотеза H_1 определяет выбор статистики T в соответствии с принципом максимизации мощности критерия.

Обычно З. к. применяют следующим образом. Выбрав статистику критерия $T(X_1, \ldots, X_n)$, по ее распределению при гипотезе H_0 и по заранее выбранному уровню значимости α, $0<\alpha<0{,}5$, определяют критическое значение критерия t_α такое, что $\mathsf{P}\{T \geqslant t_\alpha | H_0\} = \alpha$. Согласно З. к. с уровнем α гипотезу H_0 отвергают, если $T(x_1, \ldots, x_n) \geqslant t_\alpha$. Если $T(x_1, \ldots, x_n) < t_\alpha$, то считают, что гипотеза H_0 не противоречит результатам наблюдений $x_1, \ldots, x_n$, по крайней мере, до тех пор, пока новые результаты наблюдений не заставят экспериментатора принять другую точку зрения.

П р и м е р. Если за первый час работы счетчик зарегистрировал 150 импульсов пуассоновского процесса, а за второй — 117 импульсов, то спрашивается, можно ли считать, что интенсивность поступления импульсов в единицу времени была постоянной (гипотеза H_0)?

Если гипотеза H_0 верна, то наблюденные значения 150 и 117 можно трактовать как реализации двух независимых случайных величин X_1 и X_2, подчиняющихся одному и тому же закону Пуассона с параметром λ, значение к-рого нам неизвестно. Поскольку при гипотезе H_0 случайные величины

$$Y_1 = \sqrt{4X_1+1} - 2\sqrt{\lambda} \ \text{ и } \ Y_2 = \sqrt{4X_2+1} - 2\sqrt{\lambda},$$

приближенно подчиняются нормальному распределению с параметрами (0,1), то статистика

$$X^2 = \tfrac{1}{2}[Y_1 - Y_2]^2 = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{4X_1+1} - \sqrt{4X_2+1}\right]^2,$$

распределена приближенно по закону χ^2 с одной степенью свободы, т. е.

$$\mathsf{P}\{X^2 > x \mid H_0\} \approx \mathsf{P}\{\chi_1^2 > x\}.$$

По таблицам χ^2-распределения находят критическое значение $\chi_1^2(0{,}05)=3{,}841$, соответствующее заданному

уровню значимости $\alpha=0{,}05$, т. е.

$$P\{\chi_1^2 \geqslant 3{,}841\}=0{,}05.$$

Далее, по наблюденным значениям $X_1=150$ и $X_2=117$ вычисляют значение X^2 статистики критерия:

$$X^2=\frac{1}{2}\left[\sqrt{4\cdot 150+1}-\sqrt{4\cdot 117+1}\right]^2=4{,}087.$$

Поскольку $X^2=4{,}085>\chi_1^2(0{,}05)=3{,}841$, то гипотеза H_0 о сохранении интенсивности отвергается по З. к. типа χ^2 с уровнем значимости $\alpha=0{,}05$.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964; [3] Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969; [4] Девятов Б. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1969, т. 14, № 1, с. 175—78.

М. С. Никулин.

ЗНАЧИМОСТИ УРОВЕНЬ статистического критерия — вероятность ошибочно отвергнуть основную проверяемую гипотезу, когда она верна. В теории статистич. проверки гипотез З. у. наз. вероятностью ошибки первого рода. Понятие «З. у.» возникло в связи с задачей проверки согласованности теории с опытными данными. Если, напр., в результате наблюдений регистрируются значения n случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ и если требуется по этим данным проверить гипотезу H, согласно к-рой совместное распределение величин $X_1, \ldots, X_n$ обладает нек-рым определенным свойством, то соответствующий статистич. критерий конструируется с помощью подходящим образом подобранной функции $Y=f(X_1, \ldots, X_n)$; эта функция обычно принимает малые значения, когда гипотеза H верна, и большие значения, когда H ложна. В частности, если $X_1, \ldots, X_n$ — результаты независимых измерений некоторой известной постоянной a и гипотеза H представляет собой предположение об отсутствии в результатах измерений систематич. ошибок, то для проверки H разумно в качестве Y выбрать $(2m-n)^2$, где m — количество тех результатов измерений X_i, к-рые превышают истинное значение a. Наблюдаемое в опыте большое значение Y можно рассматривать как значимое статистич. опровержение гипотетич. согласия между результатами наблюдений и проверяемой гипотезой. Соответствующий критерий значимости представляет собой правило, согласно к-рому значимыми считаются значения Y, превосходящие заданное критич. значение y. В свою очередь выбор величины y определяется заданным З. у., к-рый в случае справедливости гипотезы H совпадает с вероятностью события $\{Y>y\}$.

При выборе З. у. следует учитывать ущерб, неизбежно возникающий при использовании любого критерия значимости. Так, напр., если З. у. чрезмерно велик, то основной ущерб будет происходить от ошибочного отклонения правильной гипотезы; если же З. у. мал, то ущерб будет, как правило, возникать от ошибочного принятия гипотезы, когда она ложна. Практически при обычных статистич. расчетах в качестве З. у. выбирают вероятность в пределах от 0,01 до 0,1. Значения З. у., меньшие, чем 0,01, используются, напр., при статистич. выявлении токсичных медицинских препаратов, а также в других особых случаях, когда первостепенное значение приобретает гарантия от ошибочного отклонения проверяемой гипотезы. См. также *Доверительное оценивание*.

Лит.: Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

Л. Н. Большев.

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ, гармоническое деление, деление в крайнем и среднем отношении,— деление отрезка a, при к-ром большая часть x является средней пропорциональной между

всем отрезком a и меньшей его частью $a-x$, то есть

$$a:x=x:(a-x). \qquad (*)$$

Для нахождения x получается квадратное уравнение

$$x^2+ax-a^2=0,$$

решение к-рого дает

$$x=\frac{a}{2}(\sqrt{\quad}-1)\approx 0{,}62a.$$

Условие (*) можно переписать и так

$$\frac{x}{a}\left(1+\frac{x}{a}\right)=1 \quad \text{или} \quad x=\frac{a}{1+\frac{x}{a}},$$

$$x=a\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}},$$

т. е. x получают в виде непрерывной дроби, подходящие дроби к-рой будут:

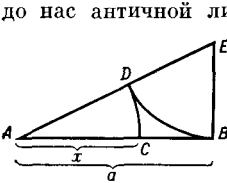
$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21} \text{ и т. д.},$$

где 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 и т. д.— так наз. *Фибоначчи числа*.

Геометрически З. с. отрезка AB (см. рис.) строится так: в точке B восстанавливают перпендикуляр к AB, откладывают на нем отрезок $BE=\frac{1}{2}AB$, соединяют A и E, откладывают $ED=EB$ и, наконец, $AC=AD$, тогда

$$AB:AC=AC:CB.$$

З. с. было известно еще в древности. В дошедшей до нас античной литературе З. с. впервые встречается в «Началах» Евклида (3 в. до н. э.).



Термин «З. с.» ввел Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci) (кон. 15 — нач. 16 вв.). Принципы З. с. или близкие ему пропорциональные отношения легли в основу композиционного построения многих произведений мирового искусства (главным образом произведений архитектуры античности и Возрождения).

ЗОММЕРФЕЛЬДА ИНТЕГРАЛ — интегральное представление интегралом по контуру цилиндрических функций: *Ганкеля функции* 1-го рода

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{iz\cos t}\, e^{i\nu(t-\pi/2)}\, dt,$$

где C_1 — кривая, пробегаемая от $-\eta+i\infty$ до $\eta-i\infty$, $0\leqslant\eta\leqslant\pi$;
функции Ганкеля 2-го рода

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{C_2} e^{iz\cos t}\, e^{i\nu(t-\pi/2)}\, dt,$$

где C_2 — кривая, пробегаемая от $\eta-i\infty$ до $2\pi-\eta+i\infty$, $0\leqslant\eta\leqslant\pi$;
Бесселя функции 1-го рода

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_3} e^{iz\cos t}\, e^{i\nu(t-\pi/2)}\, dt,$$

где C_3 — кривая, пробегаемая от $-\eta+i\infty$ до $2\pi-\eta+i\infty$, $0\leqslant\eta\leqslant\infty$. Представление справедливо в области $-\eta<\arg z<\pi-\eta$. З. и. назван по имени А. Зоммерфельда (Sommerfeld A., см. [1]).

Лит.: [1] Sommerfeld A., «Math. Ann.», 1896, Bd 47, S. 317—74; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968; [3] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1., М., 1949.

А. Б. Иванов.

ЗОММЕРФЕЛЬДА УСЛОВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ — см. *Излучения условия.*

ЗОНАЛЬНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — см. *Сферические функции.*

ЗОНОЭДРЫ — многогранники, представимые как векторная сумма конечного числа отрезков. З. в n-мерном пространстве наз. также зонотопами. З.— выпуклый многогранник, причем сам З. и его грани всех размерностей имеют центры симметрии. Наличие центров симметрии у двумерных граней выпуклого многогранника достаточно, чтобы он был З. Всякий З. есть проекция куба достаточно высокой размерности. В классе центрально симметричных выпуклых тел особую роль играют зоноиды — тела, предельные для З.; они допускают специфическое интегральное представление опорной функции и являются конечномерными сечениями сферы в банаховом пространстве L^1.

Лит.: [1] Bolker E., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 145, p. 323—45; [2] Weil W., «Math. Z.», 1976, Bd 148, № 1, S. 71—84.

В. А. Залгаллер.

ИВАСАВЫ РАЗЛОЖЕНИЕ — однозначное представление любого элемента g некомпактной связной полупростой вещественной группы Ли G в виде произведения $g = kan$ элементов k, a, n аналитич. подгрупп K, A, N группы G соответственно, где подгруппы K, A, N определяются следующим образом. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{N}$ *Картана разложение* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G; пусть $\mathfrak{a}$ — максимальное в $\mathfrak{P}$ коммутативное подпространство пространства $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}$ — такая нильпотентная подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$, что комплексификация алгебры $\mathfrak{N}$ является линейной оболочкой корневых векторов нек-рой системы положительных корней относительно комплексификации нек-рой максимальной коммутативной подалгебры Ли в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, содержащей $\mathfrak{a}$. Разложение алгебры Ли в прямую сумму подалгебр $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{N}$ наз. разложением Ивасавы [1] полупростой вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Группы K, A и N определяются как аналитич. подгруппы группы G, отвечающие подалгебрам Ли $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{N}$ соответственно. Группы K, A и N замкнуты; группы A и N односвязны; группа K содержит центр группы G, и образ группы K в присоединенном представлении группы G является максимальной компактной подгруппой в присоединенной группе группы G. Отображение $(k, a, n) \to kan$ является аналитич. диффеоморфизмом многообразия $K \times A \times N$ на группу Ли G. И. р. играет существенную роль в теории представлений полупростых групп Ли. И. р. может быть определено также для связной полупростой алгебраич. группы над p-адическим полем (или, более общо, для группы p-адического типа) (см. [4, 5]).

Лит.: [1] Iwasawa K., «Ann. Math.», 1949, v. 50, p. 507—58; [2] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [3] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [4] Bruhat F., «Publ. Math. IHES», 1964, t. 23, p. 46—74; [5] Iwahori N., Matsumoto H., там же, 1965, t. 25, p.5—48.

А. С. Феденко, А. И. Штерн.

ИВЕРСЕНА ТЕОРЕМА: если a — изолированная существенно особая точка аналитич. функции $f(z)$ комплексного переменного z, то каждое *исключительное значение* α в смысле Пикара является *асимптотическим значением* для $f(z)$ в точке a. Напр., значения $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \infty$ исключительные и асимптотические для функции $f(z) = e^z$ в существенно особой точке $a = \infty$. Этот результат Ф. Иверсена [1] дополняет большую *Пикара теорему* о поведении аналитич. функции в окрестности существенно особой точки.

Лит.: [1] Iversen F., Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes, Hels., 1914; [2] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971, гл. 1.

Е. Д. Соломенцев.

ИГР ТЕОРИЯ — теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликтов.

Формальное определение игры. Под конфликтом понимают явление, применительно к к-рому можно говорить, кто и как в этом явлении участвует, какие у него могут быть исходы и кто и как в этих исходах заинтересован. Поэтому для формального задания конфликта необходимо указать: 1) множество $\mathfrak{N}_\partial$ участвующих в нем действующих начал (называемых коалициями действия), 2) семейство множеств $\mathfrak{X}_K$ стратегий каждой из коалиций

действия, 3) множество ситуаций $\mathfrak{x} \subset \Pi_{K \in \mathfrak{K}_\partial} \mathfrak{x}_K$, 4) множество $\mathfrak{K}_U$ заинтересованных начал (называемых коалициями интересов) и 5) семейства бинарных отношений $\underset{K}{\succ}$ на $\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}$ ($K \in \mathfrak{K}_U$), выражающих предпочтения между ситуациями для коалиций интересов. Система

$$\langle \mathfrak{K}_\partial,\ \{\mathfrak{x}_K\}_{K \in \mathfrak{K}_\partial},\ \mathfrak{x},\ \mathfrak{K}_U,\ \{\underset{K}{\succ}\}_{K \in \mathfrak{K}_U} \rangle$$

наз. игрой.

Содержание И. т. состоит в установлении связей между компонентами каждой игры и «оптимальными» ее исходами, и прежде всего: в уточнении самого понятия оптимальности, в доказательстве существования оптимальных исходов и в их фактич. определении. Развитие И. т. приводит к вопросам изучения взаимосвязей между различными играми, что выражается в разработке разного рода исчислений игр, и к рассмотрению классов, пространств, категорий игр.

Классификация игр. Игры, в к-рых совсем нет коалиций интересов или же имеется лишь одна такая коалиция, являются предметами изучения чисто дескриптивных или же традиционных оптимизационных теорий. Игры в собственном смысле слова имеют не менее двух коалиций интересов.

Обычно в И. т. как коалиции действия, так и коалиции интересов принято атомизировать и считать как те, так и другие подмножествами нек-рого множества I, элементы к-рого наз. игроками. Вначале множество игроков в игре принималось конечным, но позднее (1970-е гг.) начали изучаться игры и с бесконечными и притом неатомическими множествами игроков.

Для игр с одной коалицией действия множество всех ситуаций можно принять за множество стратегий этой единственной коалиции действия и далее о стратегиях не упоминать. Поэтому такие игры наз. нестратегическими. В отличие от них, все остальные игры, с двумя или более коалициями действия, наз. стратегическими.

Весьма широкий класс нестратегич. игр может быть получен следующим образом. Пусть I — множество игроков, и $\mathfrak{K}_U = 2^I$. Каждому игроку $i \in I$ ставится в соответствие координатная прямая E^i, принимаемая за шкалу его полезностей, а каждой коалиции интересов $K \in \mathfrak{K}_U$ — произведение $E^K = \Pi_{i \in K} E^i$. Наконец, вводятся множества $v(K) \subset E^K$ для каждого $K \in \mathfrak{K}_U$ и множество $H \subset E^I$ (элементы к-рого наз. дележами) и по определению принимается, что для дележей x, $y \in E^I$ имеет место $x \underset{K}{\succ} y$ («дележ x доминирует дележ y по коалиции K») тогда и только тогда, когда $x, y \in (v(K) \times E^{I \setminus K}) \cap H$ и $x_i > y_i$ для всех $i \in K$. Такие игры наз. играми без побочных платежей. Они описывают положение, при к-ром каждая коалиция интересов K может форсированно обеспечить для своих членов в качестве выигрышей компоненты любого вектора из $v(K)$, а общие соображения целесообразности делают нерациональным выбор дележей вне H. Обычно множества $v(K)$ подчиняются нек-рым естественным условиям: 1) $v(K)$ является непустым замкнутым и выпуклым множеством, 2) если $x_k \in v(K)$ и

$y_k x \geqq x_k$ (неравенство векторов понимается покомпонентно), то $y_k \in v(K)$ («кто способен на большее, способен и на меньшее»), 3) если $K \cap L = \phi$, то $v(K \cup L) \supset v(K) \times v(L)$ (коалиции K и L вместе могут добиться не меньшего, чем порознь), 4) H состоит из всех таких векторов $x \in E^I$, что для каждого из них найдется вектор $y \in v(I)$, для к-рого $y \geqq x$ (таким образом, $v(I)$ состоит из всех таких векторов выигрышей x, что I может дать своим членам не менее чем x; H состоит из таких векторов x, что I может дать своим членам ровно x). В частности, если

$$V(K) = \left\{x : \sum\nolimits_{i \in K} x_i \leqslant v(K)\right\},$$

где $v(K)$ — некоторое действительное число, а

$$H = \left\{x : \sum\nolimits_{i \in I} x_i = v(I),\ x_i \geqslant v(i)\ (i \in I)\right\},$$

то получится классическая *кооперативная игра*. В этом случае определение $v(K)$ означает возможность коалиции K уверенно добиться суммарного выигрыша $v(K)$ и произвольно перераспределить его между своими членами. Определение H означает, что общая распределяемая в игре сумма есть $v(I)$ (распределять меньшую сумму невыгодно; большей же просто нет!), а каждый игрок i будет соглашаться лишь на долю x_i, не меньшую, чем та сумма $v(i)$, к-рую он может уверенно получить самостоятельно.

Основной класс стратегич. игр составляют *бескоалиционные игры*, в к-рых множество игроков I совпадает с множествами коалиций действия $\mathfrak{N}_\partial$ и коалиций интересов $\mathfrak{N}_U$. Каждый игрок $i \in I$ имеет в своем распоряжении множество стратегий $\mathfrak{x}_i$, в качестве множества всех ситуаций принимается декартово произведение $\mathfrak{x} = \Pi_{i \in I} \mathfrak{x}_i$, а отношение предпочтения $\underset{i}{\succ}$ описывается функцией выигрыша H_i: $\mathfrak{x} \to E^i$, причем $x' \underset{i}{\succ} x''$ тогда и только тогда, когда $H_i(x') > H_i(x'')$. Таким образом, бескоалиционная игра может быть описана в виде тройки $\Gamma = \langle I,\ \{\mathfrak{x}_i\}_{i \in I},\ \{H_i\}_{i \in I}\rangle$. Если все множества стратегий $\mathfrak{x}_i$ конечны, то и бескоалиционная игра Г наз. конечной. Конечные бескоалиционные игры с двумя игроками ($I = \{\mathrm{I},\ \mathrm{II}\}$) наз. *биматричными играми*.

Если $I = \{\mathrm{I},\ \mathrm{II}\}$ и $H_{\mathrm{I}}(x) = -H_{\mathrm{II}}(x)$ для всех $x \in \mathfrak{x}$, то игра Г наз. *антагонистической игрой*. Всякая антагонистич. игра может быть задана в виде тройки $\langle \mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ H\rangle$, где $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ — множества стратегий, соответственно, игроков I и II, а H — функция выигрыша игрока I. Конечные антагонистич. игры наз. *матричными играми*.

Если в антагонистич. игре $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = [0,\ 1]$, то всякая ситуация в такой игре описывается точкой из квадрата $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$; такие игры наз. *играми на единичном квадрате*.

Пусть I — множество игроков, $x_i (i \in I)$ — множества их стратегий; X — множество, элементы к-рого наз. позициями; T — множество, элементы к-рого имеют смысл моментов времени; $f: \mathfrak{x} \to 2^{T \times X}$, т. е. f ставит в соответствие каждой ситуации определяемой игры отношение, заданное на T со значениями в X; всякий f-образ ситуации наз. партией (множество всех партий обозначается через $\mathfrak{P}$) и, наконец, h_i: $\mathfrak{P} \to E^i$. Система

$$\Gamma = \langle I,\ \{\mathfrak{x}_i\}_{i \in I},\ T,\ X,\ f,\ \mathfrak{P},\ \{h_i\}_{i \in I}\rangle$$

наз. общей позиционной игрой. В конечном счете в такой игре выигрыш каждого игрока вполне определяется складывающейся ситуацией, т. е. выбором стратегий всеми игроками. Поэтому такие игры относятся к числу бескоалиционных игр.

Пусть в общей позиционной игре Γ компонента X является конечномерным евклидовым пространством, T — множеством действительных чисел, а $\varphi: \xi \times X \times T \to X$. Пусть рассматриваются ситуации $x \in \xi$, для которых система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, x, t),\ x \in X,\ t \in T$$

(равенство понимается как векторное) имеет при данных начальных условиях единственное решение. Тогда каждая ситуация определяет некоторую партию, к-рая в данном случае наз. траекторией. Так определенная игра наз. *дифференциальной игрой*.

К числу общих позиционных игр относятся также *позиционные игры* и *динамические игры* (в том числе *стохастические игры*, *рекурсивные игры*, а также *игры на выживание*).

Основные результаты теории игр. Основная проблематика в И. т. связана с принципами оптимальности, которые, во-первых, должны в достаточной мере отражать содержательные представления об оптимальности, а во-вторых, должны быть реализуемыми на достаточно широких и естественно очерченных классах игр. Эти два требования, предъявляемые к принципам оптимальности, в известной мере противоречат друг другу, и поэтому для многих содержательно естественных классов игр И. т. еще не выработала соответствующих принципов оптимальности. Вместе с тем известны классы игр, обслуживаемые с равным успехом несколькими различными принципами оптимальности. Поэтому конструирование и анализ принципов оптимальности являются существенной составной частью И. т. Каждый принцип оптимальности реализуется (не обязательно однозначно) в виде множества ситуаций-оптимумов. Это множество (к-рое может оказаться пустым) наз. решением.

Логической основой каждого решения являются нек-рые черты обычного экстремума, сформулированные применительно к одновременной экстремизации нескольких функций. Поэтому, помимо стремления к наибольшим (в арифметическом смысле) значениям выигрышей, решения игр могут выражать нек-рые характеристики устойчивости и симметрии, а также различные комбинации того и другого.

Так, среди черт оптимальности в нестратегич. играх можно назвать недоминируемость, т. е. соглашение считать оптимальными те и только те ситуации x, для к-рых ни при какой ситуации y и коалиции интересов K не может быть $x \underset{K}{\succ} y$ (множество оптимальных в этом смысле ситуаций наз. *с-ядром игры*). Другой принцип оптимальности состоит в сочетании внутренней и внешней устойчивости; это означает, что множество ситуаций R объявляется решением, если при $x, y \in R$ и $K \in \mathfrak{N}_U$ не может быть $x \underset{K}{\succ} y$, а по всякому $x \notin R$ найдутся такие $z \in R$ и $K \in \mathfrak{N}_U$, что $z \underset{K}{\succ} x$ (такое R наз. решением игры по Нейману — Моргенштерну). Можно формализовать угрозы, предъявляемые одними коалициями другим, а также ответные контругрозы, и объявить устойчивой всякую ситуацию, в к-рой каждая угроза может парироваться контругрозой. Множество всех устойчивых в этом смысле ситуаций наз. *k-ядром игры*. Представляет также интерес понимание оптимальности как своеобразной «справедливости», задаваемой нек-рой системой аксиом. Для кооперативных игр сформулирована такая аксиоматика, приводящая к единственному дележу (ситуации), называемому *Шепли вектором*.

В стратегич. играх основой принципа оптимальности является идея равновесия. При этом оптимальными объявляются такие ситуации, отклонения от к-рых

любым игроком не приводят к увеличению его выигрыша. Один и тот же принцип оптимальности, формулируемый для различных по объему классов игр, может приобретать различное содержательное выражение. Так, описанный принцип равновесия в случае антагонистич. игр превращается в *минимакса принцип*.

Формулы и алгоритмы, позволяющие находить решения игр, также можно отнести к числу принципов оптимальности (с узкой областью применимости). Напр., в *матричной игре* с диагональной матрицей выигрышей принципом оптимальности можно считать выбор игроками стратегий с вероятностями, обратно пропорциональными соответствующим диагональным элементам матрицы. Реализуемость принципа оптимальности для нек-рого класса игр состоит в существовании для всех игр этого класса соответствующих (непустых) множеств оптимумов. Их отсутствие в первоначально заданных ситуациях может преодолеваться путем расширения множеств стратегий (и тем самым — множеств конструируемых из них ситуаций). Для бескоалиционных игр плодотворно используются смешанные (рандомизированные) стратегии.

Большинство доказательств теорем существования решений в И. т. носит неэффективный характер (многие из них опираются на теоремы о неподвижной точке) и не содержат алгоритмов нахождения решений. Поэтому в И. т. важны частные аналитические и численные методы нахождения решений. При этом вопрос о фактическом нахождении решений игр нередко оказывается очень сложным, и ответ на него удается найти лишь для весьма узких классов игр.

В разработке исчислений игр можно выделить несколько направлений. Изучаются возможности нахождения и описания (хотя бы частичного) решений одной игры на основе решений другой игры, в том или ином смысле более просто устроенной. Элементарными примерами таких редукций могут служить естественное отбрасывание доминируемых стратегий игроков в бескоалиционных играх, симметризация таких игр, а также аппроксимации бесконечных игр конечными. Редукционным процессом можно считать также предложенное Дж. Нейманом (J. Neumann) построение кооперативной модели бескоалиционной игры. Известны и обратные результаты, указывающие на принципиальную несводимость решений игр того или иного класса к решению игр более узкого класса. Напр., можно указать бескоалиционные игры трех лиц, решение к-рых связано с выполнением иррациональных операций, в то время как решение биматричных игр всегда осуществимо при помощи рациональных операций.

Фиксация одних компонент в играх нек-рого класса (напр., множества игроков и множеств их стратегий в условиях класса всех бескоалиционных игр) и различение игр по остальным компонентам (в данном примере — по функциям выигрыша игроков) приводит к рассмотрению пространств игр, к-рое осуществляется средствами функционального анализа и топологии. Введение на таких пространствах игр вероятностной меры приводит к стохастич. играм.

Связи теории игр с другими разделами математики. И. т. тесно связана с различными разделами математики. Как общая теория множеств с несколькими бинарными отношениями, она близка алгебре. В И. т. используется весьма разнообразный математич. аппарат, а большое число вполне традиционных математич. задач допускает теоретико-игровые обобщения. Оптимальные поведения в стратегич. играх обычно оказываются рандомизированными, поэтому теоретико-вероятностные понятия настолько естественно входят в И. т. и употребляются в ней, что одно время даже было принято считать И. т. частью теории вероятностей.

Математич. модели *исследования операций* (являющиеся моделями принятия оптимальных решений) естественно распределяются по трем уровням: детерминированному, стохастическому и неопределенному — в зависимости от степени информированности принимающих решения субъектов. Принятие решения в условиях неопределенности можно интерпретировать как конфликт принимающего решение субъекта против «природы» и тем самым — как игру. По существу к играм относятся и все *многокритериальные задачи*.

Поэтому И. т. в ее методологич. основах и в практич. ориентированности можно считать разделом исследования операций.

И. т. является одной из составных частей математич. аппарата *кибернетики*. В динамич. играх стратегии выступают как функции «информационных состояний» игроков, причем в ходе игры игроки могут приобретать или утрачивать информацию. Это обусловливает связь И. т. с *информации теорией*.

Приложения теории игр. Помимо разнообразных связей внутри математики, И. т. имеет многочисленные приложения вне ее. Они касаются главным образом тех отраслей знаний и видов практич. деятельности, к-рые непосредственно имеют дело с конфликтами: военного дела, капиталистич. экономики (в частности, И. т. применяется в вопросах борьбы фирм за рынки, в явлениях олигополии, в планировании рекламных компаний, при формировании цен на конкурентных рынках, в биржевой игре и т. д.), права и т. п. С позиций И. т. можно рассматривать и различные явления в условиях плановой экономики (напр., вопросы централизации и децентрализации управления производством, преодоление ведомственных противоречий, оптимальное планирование по нескольким показателям, планирование в условиях неопределенности, порождаемой, напр., технич. прогрессом, и т. д.).

Исторический очерк. Зарождение И. т. как математич. дисциплины можно отнести к тому же письму Б. Паскаля (B. Pascal) к П. Ферма (P. Fermat) от 29 июля 1654, к-рое принято считать началом математич. теории вероятностей. В дальнейшем отдельные идеи, к-рые можно отнести к теоретико-игровым, высказывались Вальдегравом (Waldegrave, 1712; нахождение оптимальных смешанных стратегий в игре «проходящий туз»), Д. Бернулли (D. Bernoulli, 1732; анализ «петербургской игры»), П. Лапласом (P. Laplace, 1814; рассмотрение принципов оптимальности) и Ж. Бертраном (J. Bertrand, 1888; теоретико-игровой подход к игре в бакара). Ряд по существу теоретико-игровых утверждений был в эквивалентной форме рассмотрен в других разделах математики: в теории наилучших приближений (П. Л. Чебышев), в геометрии выпуклых многогранников [Г. Минковский (H. Minkowski)], в теории линейных неравенств [Э. Штимке (E. Stiemke)]. В 1911 Э. Цермело (E. Zermelo) описал теоретико-игровой подход к шахматной игре; в 1921 Э. Борель (E. Borel) начал систематич. изучение матричных игр, доказав для нек-рых случаев существование оптимальных смешанных стратегий. В 1928 вышла в свет работа Дж. Неймана «К теории стратегических игр», содержащая основные идеи современной И. т. Эти идеи были детально разработаны Дж. Нейманом и О. Моргенштерном (O. Morgenstern, [1]). С тех пор И. т. вошла в число разделов современной математики.

Лит.: [1] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [2] Льюс Р., Райфа Х., Игры и решения, пер. с англ., М., 1961; [3] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, пер. с англ., М., 1964; [4] Воробьев Н. Н., «Успехи матем. наук», 1970, т. 15, в. 2, с. 80—140; [5] Оуэн Г., Теория игр., пер. с англ., М., 1971; [6] Партхасаратхи Т., Рагхаван Т., Некоторые вопросы теории игр двух лиц, пер. с англ., М., 1974; [7] Воробьев Н. Н., Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков, Л., 1974; [8] его же, Entwicklung der Spiel-

theorie, B., 1975; [9] Теория игр. Аннотированный указатель публикаций по 1968 г., Л., 1976; [10] Журнал «International Journal of Game Theory», Vienna (выходит с 1971). *Н. Н. Воробьев.*

ИГРА НА ВЫЖИВАНИЕ — антагонистическая *динамическая игра* с терминальным выигрышем, принимающим лишь значения 0 и 1. Таким образом, терминальное множество X^T разбивается на два подмножества X^{T+} и X^{T-}, при этом, если игра попадает в состояние $x \in X^{T+}$, то выигрывает игрок I, а если в состояние $x \in X^{T-}$, то выигрывает игрок II. В случае, если игра никогда не заканчивается, игрок I выигрывает, а игрок II проигрывает нек-рое число $h_\infty \in [0, 1]$. Если $h_\infty = 0$, то имеем дело с И. на в. игрока II, а если $h_\infty = 1$, то — с И. на в. игрока I.

Исторически понятие И. на в. восходит к классической задаче «о разорении игрока». Прямым обобщением этой задачи является игра, в к-рой на каждом шаге разыгрывается одна и та же матричная подигра, а изменения состояний выражаются в изменениях капиталов участников (см. [1]). Игрок I выигрывает, если разоряется противник (т. е. капитал противника становится отрицательным), и проигрывает, если разоряется сам. Такая игра обладает значением, не зависящим от h_∞, и оба игрока имеют стационарные ε-оптимальные стратегии, если все элементы матрицы повторяемой подигры отличны от нуля. В этом случае игра почти наверное заканчивается за конечное число шагов. Другой вариант И. на в. (с многокомпонентными капиталами) представляют так наз. «игры на истощение» (см. [2]). Дифференциальные И. на в. могут рассматриваться как обобщение описанных игр на случай непрерывного времени.

Лит.: [1] Milnor J., Shapley L. S., в кн.: Contributions to the theory of games, v. 3, N. Y., 1957, p. 15—45; [2] Blackwell D., «Naval Res. Logist. Quart.», 1954, v. 1, p. 210—16; [3] Романовский И. В., «Теория вероят. и ее примен.», 1961, т. 6, № 4, с. 426—29. *В. К. Доманский.*

ИГРА НА ГРАФЕ — обобщение *позиционной игры* на случай, когда граф позиций не древовидный, а произвольный. Частным случаем И. на г. является игра Ним — *антагонистическая игра* с полной информацией, в к-рой для каждой окончательной позиции указано, выигрывает или проигрывает последний ходивший игрок. В простейшем варианте игра Ним состоит в следующем: имеется несколько кучек фишек, и игроки поочередно удаляют не менее одной фишки, причем каждый раз удаляемые фишки должны быть взяты из одной кучки. Игрок, удаливший последнюю фишку, выигрывает партию. Решение игры Ним состоит в описании для каждого игрока множества выигрышных позиций, т. е. таких позиций, начиная с к-рых данный игрок может выиграть при любой стратегии противника. Множество выигрышных позиций совпадает с множеством нулей функции Гранди (функция g, сопоставляющая каждой вершине k графа Г такое неотрицательное целое число $g(k)$, что

$$g(k) = \min\{n;\ n \neq g(i),\ i \in \Gamma(k)\}).$$

Оно обладает свойствами внутренней и внешней устойчивости и в этом отношении аналогично понятию *H-M*-решения в *кооперативных играх*.

Лит.: [1] Берж К., Общая теория игр нескольких лиц, пер. с франц., М., 1961; [2] Bouton C. L., «Ann. Math.», ser. 2, 1902, v. 3, № 1, p. 35—9. *А. Н. Ляпунов.*

ИГРА НА ЕДИНИЧНОМ КВАДРАТЕ — *антагонистическая игра*, в к-рой множеством чистых стратегий игроков I и II является сегмент $[0, 1]$. При надлежащей нормировке к И. на е. к. может быть сведена любая антагонистич. игра с континуальными множествами стратегий у обоих игроков. И. на е. к. задаются функцией выигрыша $K(x, y)$, определенной на единичном квадрате. Смешанными стратегиями игроков являются функции распределения на единичном интервале.

Если функция выигрыша ограничена и измерима по обеим переменным, то выигрыш игрока I, в условиях применения игроками I и II смешанных стратегий F и G соответственно, равен, по определению,

$$K(F, G) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y)\, dF(x)\, dG(y).$$

Если функция $K(x, y)$ непрерывна по обеим переменным, то

$$\max_F \min_G K(F, G) = \min_G \max_F K(F, G) = v,$$

т. е. для такой игры реализуем *минимакса принцип* и существуют обозначенное через v значение игры и оптимальные стратегии у обоих игроков. В дальнейшем теоремы о существовании значения игры (теоремы о минимаксах) были доказаны при более слабых предположениях относительно функции выигрыша. Из общих теорем о минимаксах следует, напр., существование игры для И. на е. к. с ограниченной функцией выигрыша, полунепрерывной сверху по x или снизу по y. Доказаны теоремы существования значения игры для нек-рых специальных классов разрывных функций выигрыша (напр., для *игр с выбором момента времени*). Однако не все И. на е. к. обладают значением игры. Так, для функции $K(x, y)$, равной

$$K(x, y) = \begin{cases} -1, & x < y \neq 1 \quad \text{и} \quad x = 1,\ y \neq 1; \\ 0, & x = y; \\ 1, & y < x \neq 1 \quad \text{и} \quad y = 1,\ x \neq 1; \end{cases}$$

имеют место равенства

$$\sup_F \inf_G K(F, G) = -1, \quad \inf_G \sup_F K(F, G) = 1.$$

Для И. на е. к. с непрерывной функцией выигрыша выяснена структура множества игр с единственным *решением*. Именно, множество непрерывных функций от двух переменных, для к-рых соответствующая И. на е. к. имеет единственное решение, оптимальные стратегии обоих игроков непрерывны и их носителями (см. *Носитель меры*) являются нигде не плотные совершенные замкнутые множества лебеговой меры нуль, содержит всюду плотное подмножество типа G_δ.

Общих методов решения И. на е. к. не существует. Тем не менее для нек-рых классов И. на е. к. можно либо найти решение аналитически (таковы, напр., игры с выбором момента времени, игры с функцией выигрыша, зависящей только от разности стратегий игроков и обладающие оптимальными выравнивающими стратегиями), либо доказать для таких игр существование оптимальных стратегий с конечным носителем (таковы, напр., *выпуклые игры*, *вырожденные игры*, *колоколообразные игры*) и тем самым получить возможность свести задачу нахождения решения И. на е. к. к решению нек-рой *матричной игры*. Для решения игр с непрерывной функцией выигрыша можно применять приближенные методы.

Лит.: [1] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании, экономике, пер. с англ., М., 1964.

Е. Б. Яновская.

ИГРА С ВЫБОРОМ МОМЕНТА ВРЕМЕНИ — *бескоалиционная игра*, в к-рой стратегиями игроков являются моменты совершения ими нек-рых действий, выбираемые из нек-рого фиксированного интервала, а функция выигрыша игроков непрерывна на множестве ситуаций (за исключением тех ситуаций, в к-рых среди выбранных игроками моментов имеются совпадающие) и монотонно возрастает в областях непрерывности по стратегиям соответствующего игрока. Наиболее изученным классом И. с в. м. в. являются *антагонистические игры*, в к-рых каждый игрок выбирает один момент времени, т. е. *игры на единичном квадрате*,

функции выигрыша к-рых имеют разрыв на диагонали квадрата, возрастают по первой переменной и убывают по второй. В таких играх существуют значение игры и оптимальные стратегии у обоих игроков. При нек-рых дополнительных предположениях решение таких игр сводится к решению интегральных уравнений. Другим классом И. с в. м. в. являются *дуэли* — антагонистич. игры, в к-рых действия игроков направлены на уничтожение противника, так что в дуэли возможны четыре различных исхода. Для дуэлей существуют аналитич. методы нахождения оптимальных (или ε-оптимальных) стратегий игроков. Теория дуэлей имеет как военное, так и экономич. приложения (конкурентная борьба за рынки, рекламная кампания и т. п.).

Лит.: [1] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании, экономике, пер. с англ., М., 1964.

Е. Б. Яновская.

ИГРА С ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ — модель конфликтной ситуации при фиксированной последовательности ходов и обмена информацией участников. Основным объектом исследования в теории И. с и. с. является задача об отыскании наибольшего гарантированного результата и оптимальной стратегии выделенного игрока. Пусть игроки I, II стремятся к увеличению, соответственно, функций выигрыша $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$, непрерывных на произведении компактов X_1, X_2; $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. В зависимости от характера информации и порядка ходов могут быть сформулированы следующие различные игры.

И г р а Γ_1. Игрок I выбирает $x_1 \in X_1$ и сообщает свой выбор игроку II. Пусть

$$P(x_1) = \{x_2 \mid f_2(x_1, x_2) = \max_{y \in X_2} f_2(x_1, y)\}$$

— множество оптимальных выборов игрока II. Тогда наибольший гарантированный результат игрока I равен

$$G_1 = \sup_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in P(x_1)} f_1(x_1, x_2).$$

И г р а Γ_2. Игрок I рассчитывает иметь и действительно будет иметь информацию о выборах игрока II; сообщает свою стратегию — функцию $\tilde{x}_1 = x_1(x_2)$, где $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ — множество всех отображений из X_2 в X_1, игроку II. Наибольший гарантированный результат игрока I равен

$$G_2 = \sup_{\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1} \inf_{x_2 \in P_2(\tilde{x}_1)} f_1(\tilde{x}_1, x_2),$$

где множество оптимальных выборов игрока II есть

$$P_2(\tilde{x}_1) = \{x_2 \mid f_2(\tilde{x}_1, x_2) = \sup_{y \in X_2} f_2(x_1(y), y) - \delta(\tilde{x}_1)\},$$

$\delta(\tilde{x}_1) \geqslant 0$, при этом $\delta(\tilde{x}_1) = 0$ тогда и только тогда, когда достигается $\max_{y \in X_2} f_2(x_1(y), y)$.

И г р а Γ_3. Игрок I рассчитывает иметь и действительно будет иметь информацию о выборах игрока II вида $\tilde{x}_2 = x_2(x_1)$, где $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ — множество всех отображений из X_1 в X_2; сообщает игроку II свою стратегию $\tilde{\tilde{x}}_1 = x_1(\tilde{x}_2)$, где $\tilde{\tilde{x}}_1 \in \tilde{\tilde{X}}_1$ — множество всех отображений из $\tilde{X}_2$ в X_1. Наибольший гарантированный результат игрока I равен

$$G_3 = \sup_{\tilde{\tilde{x}}_1 \in \tilde{\tilde{X}}_1} \inf_{\tilde{x}_2 \in P_3(\tilde{\tilde{x}}_1)} f_1(\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{x}_2),$$

где

$$P_3(\tilde{\tilde{x}}_1) = \{\tilde{x}_2 \mid f_2(\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{x}_2) = \sup_{y \in \tilde{X}_2} f_2(x_1(y), y) - \delta(\tilde{\tilde{x}}_1)\},$$

$\delta(\tilde{x}_1) \geqslant 0$, при этом $\delta(\tilde{x}_1) = 0$ тогда и только тогда, когда достигается $\max\limits_{y \in X_2} f_2(x_1(y), y)$.

Соотношение между результатами в этих играх определяет для игрока I значимость информации о действиях игрока II: $G_1 \leqslant G_3 \leqslant G_2$. Пользуясь указанной схемой в построении стратегий игроков, можно формулировать игры с произвольной глубиной рекурсии. Имеет место утверждение: в играх Γ_{2m}, $m>1$, наибольший гарантированный результат игрока I равен G_2; в играх Γ_{2m+1}, $m>1$, наибольший гарантированный результат равен G_3. Задача отыскания G_1 относится к классу задач на максимин со связанными ограничениями.

Развиты методы решения игры Γ_1, использующие штрафные функции, необходимые условия оптимальности, приближение исходной игры игрой с однозначными ответами игрока II. Полностью решены частные классы игр: с близкими интересами, биматричные, билинейные и др. Задача отыскания G_1 некорректна относительно изменения функции $f_2(x_1, x_2)$ в равномерной метрике и множеств X_1, X_2 в метрике Хаусдорфа. Предложен общий метод регуляризации решения игры Γ_1; регуляризация задачи по функции выигрыша игрока II осуществляется за счет введения искусственной неточности определения $\max\limits_{x_2 \in X_2} f_2(x_1, x_2)$. Отыскание величины G_2 сводится к решению ряда задач *математического программирования*.

Пусть для любого $\varepsilon>0$ определены функции, множества и величины:

$$f_2(x_1^H(x_2), x_2) = \min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1, x_2),$$

$$L_2 = \max_{x_2 \in X_2} f_2(x_1^H(x_2), x_2) = \max_{x_2 \in X_2} \min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1, x_2),$$

$$E_2 = \{x_2 \in X_2 \mid f_2(x_1^H(x_2), x_2) = L_2\},$$

$$K = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1, x_2) \in D} f_1(x_1, x_2), & \text{если } D \neq \varnothing, \\ -\infty, & \text{если } D = \varnothing, \end{cases}$$

$$f_1(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) \geqslant K - \varepsilon, \quad (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) \in D \neq \varnothing,$$

$$M = \inf_{x_2 \in E_2} \sup_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2),$$

$$D = \{(x_1, x_2) \mid f_2(x_1, x_2) > L_2\},$$

$$f_1(x_1^{a\varepsilon}(x_2), x_2) \geqslant \sup_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2) - \varepsilon.$$

В указанных условиях $G_2 = \max[K, M]$ и стратегия

$$\tilde{x}_1^\varepsilon = \begin{cases} x_1^\varepsilon, & \text{если } x_2 = x_2^\varepsilon,\ K > M, \\ x_1^{a\varepsilon}(x_2), & \text{если } x_2 \in E_2,\ K \leqslant M, \\ x_1^H(x_2) & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

гарантирует игроку I при достаточно малых ε получение $\max[K, M] - \varepsilon$. Как видно из определения, оптимальная стратегия состоит из нескольких ветвей, последняя играет роль стратегии наказания.

Если $L_2 < f_2(x_1, x_2)$ и у функции $f_2(x_1, x_2)$ нет локальных максимумов со значением L_2 на $X_1 \times X_2$, то $K \geqslant M$ и оптимальная стратегия имеет простой вид:

$$\tilde{x}_1^\varepsilon = \begin{cases} x_1^\varepsilon, & \text{если } x_2 = x_2^\varepsilon, \\ x_1^H(x_2), & \text{если } x_2 \neq x_2^\varepsilon. \end{cases}$$

Аналогичным образом может быть найдено решение игры Γ_3, оно также сводится к решению ряда задач математич. программирования.

При введении в И. с и. с. побочных платежей со стороны игрока I, как функций от выборов игрока II,

выражение для наибольшего гарантированного результата игрока I значительно упрощается. В игре Γ_2, где

$$w_1 = f_1(x_1,\ x_2) - z,\quad w_2 = f_2(x_1,\ x_2) + z,$$

$x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $0 \leqslant z \leqslant z^0$, и игрок I выбирает стратегии $x_1(x_2)$, $z(x_2)$, отыскание G_2 сводится к решению задачи математич. программирования

$$G_2 = \max_{x_1,\ x_2} \min\,[f_1(x_1,\ x_2);\ f_1(x_1,\ x_2) + f_2(x_1,\ x_2) - L_2],$$

$$f_2(x_1,\ x_2) \geqslant L_2 - z^0.$$

Вообще применение сколь угодно малых побочных платежей $z(x_2)$ в И. с и. с. позволяет игроку I реализовать наибольший гарантированный результат, рассчитанный на благожелательность партнера.

Сформулированные игры допускают обобщение на случай постепенного получения и использования информации в динамике. В случае, когда состояние игроков описывается дифференциальными или разностными уравнениями, возникает обширный класс задач, связанный с разнообразием форм информированности игроков о состоянии и течении как физич. процесса, так и процесса принятия решения. Рассмотрены обобщения игр Γ_1 и Γ_2 на случай запрещенных ситуаций, т. е. при наличии совместных ограничений на выборы игроков.

Приведенные формулировки относятся к случаю полной информированности игрока I о функции выигрыша и множестве его выборов. Если игроку I известно, что непрерывная функция выигрыша игрока II удовлетворяет неравенствам

$$f_2^-(x_1,\ x_2) \leqslant f_2(x_1,\ x_2) \leqslant f_2^+(x_1,\ x_2)$$

при известных непрерывных функциях $f_2^-(x_1,\ x_2)$, $f_2^+(x_1,\ x_2)$, то его наибольший гарантированный результат в игре Γ_2 определяется из условия максимизации функции от одной переменной.

Более общий вариант неполной информированности игрока I об интересах игрока II состоит в следующем: игроку I известна функция $f_2(x_1,\ x_2,\ \alpha)$, $\alpha \in A$, и известно, что при нек-ром (неизвестном) значении $\alpha = \alpha_0$ истинная функция $f_2(x_1,\ x_2) = f_2(x_1,\ x_2,\ \alpha_0)$. При такой информированности решение игры Γ_2 для конечных множеств A сводится к максимизации функции нескольких переменных; при бесконечных множествах A задача еще более сложна. Наличие неопределенных факторов в постановке игры Γ_1 не приводит к принципиальному усложнению задачи, поскольку этот случай сводится к игре без неопределенностей. Для игры Γ_2 при неопределенности рассмотрен ряд задач, когда понятие стратегии игроков расширено за счет предложения игрока I игроку II сообщить свой критерий эффективности, т. е. нек-рое $\widehat{\alpha} \in A$, так чтобы окончательный выбор x_1 мог быть сделан по получении информации о x_2 и критерия эффективности игрока II. Если в этом случае игрок II осторожен, т. е. придерживается принципа наибольшего гарантированного результата, а игрок I сообщает ему параметризованную стратегию $x_{1\alpha}(x_2, \widehat{\alpha})$, $\alpha \in A$, то можно показать, что наибольший гарантированный результат игрока I равен $G_2 = \inf\limits_{\alpha \in A} G_{2\alpha}$, где $G_{2\alpha}$ — наибольший гарантированный результат игрока I в игре Γ_2 при данном $\alpha \in A$. Аналогичный результат без предположения об осторожности игрока II имеет место, когда игроку I известно параметрич. семейство множеств $X_2(\alpha)$, $\alpha \in A$, одно из к-рых совпадает с истинным.

Близка к рассмотренным задача об отыскании наибольшего гарантированного результата игрока I в игре Γ_2 при наличии в функциях выигрышей игроков

параметра α, характеризующего природную неопределенность, когда игрок II при своем выборе информирован о конкретной величине α, а игрок I не информирован.

В случае, когда игра Γ_2 при неопределенности повторяется, информированность игрока I об интересах и возможностях игрока II может быть повышена за счет информации, содержащейся в откликах игрока II на действия игрока I. Построены соответствующие процедуры, позволяющие игроку I, начиная с нек-рой партии, получать результат, сколь угодно близкий к результату, гарантированному ему при полной информированности. Такие же результаты получены и в игре Γ_1 с неопределенностями. Если моменты получения игроком I информации о неопределенном факторе α не фиксированы, то игрок I может получить в остальных повторениях результат, сколь угодно близкий к гарантированному ему в условиях полной информированности, при более слабых предположениях относительно функций выигрышей участников. Кроме того, в игре Γ_1 аналогичный результат игрок I может получить, наблюдая только за значениями собственной функции выигрыша.

Формулировки рассматриваемых игр естественно переносятся на случай многих лиц, взаимодействия к-рых в смысле приоритета действий и передачи информации имеют иерархическую структуру. При анализе этих игр необходимо оговаривать также правила взаимодействий игроков одного уровня. Так, при рассмотрении игры трех лиц, где функции выигрышей игроков имеют вид

$$w_1=f_1(x_1,\ x_2,\ x_3),\ w_2=f_2(x_1,\ x_2,\ x_3),\ w_3=f_3(x_1,\ x_2,\ x_3),$$

$x_1\in X_1,\ x_2\in X_2,\ x_3\in X_3$, для отыскания наибольшего гарантированного результата выделенного игрока I, обладающего приоритетом в действиях, необходимо конкретизировать его информацию о поведении игроков II и III. Если игроки II и III образуют известную игроку I жесткую коалицию, т. е. формулируют коалиционный критерий и сообща определяют свои выборы, то для игрока I данный случай эквивалентен рассмотренным ранее играм двух лиц. Обозримые результаты получаются также в случае, когда игроки II и III либо находятся в известной игроку I коалиции, либо действуют индивидуально, если таким образом могут получить результат больший, чем дает коалиция: при этом каждый из игроков II и III не имеет самостоятельной информации о ходе другого и порядок их ходов задается игроком I. Подробно проанализированы игры, имеющие «веерную» структуру: выделенный игрок (управляющий центр) Π_0 и n игроков на следующем уровне иерархии (производители продукции) стремятся к увеличению функций выигрыша $f_0(x_0,\ x)$ и $f_i(x_0^i,\ x_i)$, $i=1,\ \ldots,\ n$, соответственно, где $x_0=\{x_0^1,\ \ldots,\ x_0^n\}$ — выбор Π_0, $x_0\in X_0$, $x_0^i\in X_0^i$, $x=\{x_1,\ \ldots,\ x_n\}$ — совокупный выбор игроков на нижнем уровне иерархии, причем они действуют независимо, и каждый игрок номера i распоряжается выбором $x_i\in X_i$. Все множества полагаются компактными, а функции непрерывными. Игрок Π_0 рассчитывает на информацию (и будет ее иметь) о выборах $x_i\in X_i$ и сообщает каждому игроку i соответствующую стратегию функцию $\tilde{x}_0^i=x_0^i(x_i)$, определенную на X_i со значениями из X_0^i. Для И. с и. с. n лиц получены выражения наибольшего гарантированного результата выделенного игрока при различных расширениях его класса стратегий за счет передачи игрокам нижнего уровня информации о действиях партнеров, а также введения элементов блефа. Как и в играх двух лиц, возможность побочного платежа со стороны выделенного игрока значительно упрощает отыскание его гарантированного результата.

При помощи И. с и. с. получают естественную интерпретацию различные механизмы централизованного управления активными экономич. подсистемами. Игра Γ_1 описывает процесс централизованного управления при помощи цен; игра Γ_2 моделирует политику штрафов и поощрений при стимулировании производства; игрой Γ_3 моделируется процесс распределения ресурсов как функций от производственных способов использования данных ресурсов.

Лит.: [1] Гермейер Ю. Б., Игры с непротивоположными интересами, М., 1972. *И. А. Ватель, Ф. И. Ерешко.*

ИГРОВАЯ СИТУАЦИЯ, ситуация,— результат выбора всеми коалициями действия (см. *Игр теория*) своих стратегий с учетом всех связей между стратегиями различных коалиций действия. Множество всех ситуаций можно понимать как подмножество декартова произведения $\Pi_{K\in\mathfrak{N}_\partial} X_K$, где X_K — множество всех стратегий коалиции действия K, $\mathfrak{N}_\partial$ — множество всех коалиций действия. *А. С. Михайлова.*

ИГРОК — индивидуальное действующее и заинтересованное начало в игре (см. *Игр теория*).

ИДЕАЛ — специального рода подобъект в нек-рой алгебраич. структуре. Понятие И. возникло первоначально в теории колец. Название И. ведет свое происхождение от *идеальных чисел.*

Для алгебры, кольца или полугруппы A идеал I есть подалгебра, подкольцо или полугруппа, замкнутая относительно умножения на элементы из A. При этом И. I наз. левым (соответственно правым), если он замкнут относительно умножения слева (соответственно справа) на элементы из A, т. е.

$$AI=I \text{ (соответственно } IA=I),$$

где

$$AI=\left\{ab \,\middle|\, a\in A,\ b\in I\right\},\quad IA=\left\{ba \,\middle|\, a\in A,\ b\in I\right\}.$$

И., являющийся одновременно левым и правым (т. е. выдерживающий любые умножения на элементы из A), наз. двусторонним. В коммутативном случае все эти три понятия совпадают. Любому утверждению о левых И. отвечает двойственное утверждение о правых И. (далее формулировки будут приводиться только в «левом случае»).

Двусторонние И. в кольцах и алгебрах играют ту же роль, что и *нормальные делители* в группах. Для всякого гомоморфизма $f\colon A\to B$ ядром $\operatorname{Ker} f$ (т. е. множеством элементов, отображающихся f в 0) служит И., и обратно, всякий И.— ядро нек-рого гомоморфизма. Более того, И. I однозначно определяет *конгруэнцию* $\varkappa$ в A, нулевым классом к-рой он является, и, следовательно, однозначно (с точностью до изоморфизма) определяет образ Af гомоморфизма f, ядром к-рого он служит: Af изоморфно факторкольцу (факторалгебре) $A/\varkappa$, обозначаемому также A/I. Аналогичными свойствами относительно гомоморфизмов обладают И. мультиоператорных групп. В мультиоператорной Ω-группе A И. определяется как нормальный делитель ее аддитивной группы, удовлетворяющий условию: для всякой n-арной операции ω, любых элементов $b\in I$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n\in A$ при всяком $i=1, 2, \ldots, n$ должно иметь место включение — $(a_1, a_2 \ldots a_n\omega)+ +a_1 \ldots a_{i-1}(b+a_i)a_{i+1}\ldots a_n\omega\in I$ (для колец и алгебр это понятие индуцирует понятие двустороннего И.).

Двусторонние И. полугрупп, напротив, не дают описания всех гомоморфных образов данной полугруппы. Если задан гомоморфизм f полугруппы A на полугруппу B, то только в случае, когда B — полугруппа с нулем, с гомоморфизмом f естественно связан двусторонний И. $f^{-1}(0)$, к-рый, однако, не обязан определять

однозначно f. Тем не менее, если I — И. в A, то среди факторполугрупп полугруппы A, имеющих в качестве элемента класс I, существует максимальная факторполугруппа A/I (наз. *идеальным фактором*). Элементами этой полугруппы будут элементы множества $A \setminus I$ и сам И. I, к-рый будет нулем в A/I.

Для любого подмножества $X \subset A$ можно определить *идеал* I_X, *порожденный* X, как пересечение всех И., содержащих множество X. Множество X наз. *базисом идеала* I_X. Разные базисы могут порождать один и тот же И. Идеал, порожденный одним элементом, наз. *главным*.

Пересечение, а в случае полугрупп и объединение левых (двусторонних) И. снова будет левым (двусторонним) И. Для колец и алгебр теоретико-множественное объединение И. не обязано быть И. Пусть I_1, I_2 — левые или двусторонние И. в кольце (алгебре) A. *Суммой идеалов* I_1 и I_2 наз. И. $I_1+I_2=\{a+b \mid a \in I_1, b \in I_2\}$, он является минимальным И. в A, содержащим I_1 и I_2. Относительно операций пересечения и взятия суммы все (левые или двусторонние) И. кольца (или алгебры) образуют решетку. Многие классы колец и алгебр определяются условиями на их И. или решетку И. (см. *Главных идеалов кольцо*, *Артиново кольцо*, *Нётерово кольцо*).

И. мультипликативной полугруппы кольца может и не быть И. кольца. Полугруппа A является группой тогда и только тогда, когда A не содержит (как левых, так и правых) И., отличных от самой A. Таким образом, обилие И. в полугруппе характеризует отчасти степень отличия данной полугруппы от группы.

Для k-алгебры A (алгебры над полем k) И. кольца A может, вообще говоря, не быть И. алгебры A. Напр., если A есть k-алгебра с нулевым умножением, то множество всех И. кольца A совпадает с множеством всех подгрупп аддитивной группы A, а множество всех И. алгебры A совпадает с множеством всех подпространств векторного k-пространства A. Однако в случае, когда A — алгебра с единицей, оба эти понятия И. совпадают. Поэтому многие результаты одинаково формулируются как для колец, так и для алгебр.

Кольцо, не имеющее двусторонних И., наз. *простым*. Кольцо без собственных односторонних И. является телом. Левые И. кольца A можно определить также, как подмодули левого A-модуля A. Нек-рые свойства колец не меняются при замене левых И. на правые. Напр., *Джекобсона радикал*, определенный с помощью левых И., совпадает с радикалом Джекобсона, определенным с помощью правых И. С другой стороны, нётерово слева кольцо может не быть нётеровым справа.

Изучение И. коммутативных колец — важная часть коммутативной алгебры. С любым коммутативным кольцом с единицей связано топологич. пространство Spec A, точками к-рого являются все простые И. кольца A, отличные от A. При этом существует взаимно однозначное соответствие между всеми И. кольца A и всеми замкнутыми подмножествами пространства Spec A.

В коммутативной алгебре встречается понятие И. поля, точнее И. поля относительно кольца. При этом кольцо A коммутативно, с единицей и без делителей нуля, а поле Q — поле частных кольца A. *Идеалом поля* Q наз. ненулевое подмножество $I \subset Q$, являющееся подгруппой аддитивной группы поля Q, выдерживающее умножения на элементы из A (т. е. для любых $a \in A$, $b \in I$, $ab \in I$) и такое, что существует элемент $q \in Q$, для к-рого $qI \subset A$. И. наз. *целым*, если он содержится в A (и тогда он служит обычным И. кольца A), в противном случае I наз. *дробным идеалом*.

Идеалом решетки наз. непустое подмножество I элементов решетки, удовлетворяющее условиям: 1) если $a, b \in I$, то $a+b \in I$; 2) если $c \leqslant a \in I$, то

$c \in I$. Дуальный идеал (или фильтр) решетки определяется двойственным образом ($a, b \in J \Rightarrow$ $\Rightarrow ab \in J$, $c \geqslant a \in J \Rightarrow c \in J$). И. решетки, упорядоченные включением, сами образуют решетку. Максимальный элемент в множестве всех собственных И. решетки наз. максимальным идеалом. Если f — гомоморфизм решетки в частично упорядоченное множество с нулем, то полный прообраз нуля является И. Он наз. ядерным идеалом гомоморфизма f. И. S решетки L наз. стандартным, если для любых $a, b \in L$, $s \in S$ неравенство $a < b + s$ влечет $a = x + t$, где $x \leqslant b$ и $t \in S$. Всякий стандартный И. является ядерным. Ядерный И. решетки с относительными дополнениями (см. *Решетка с дополнениями*) является стандартным. И. I наз. простым, если из $ab \in I$ следует, что $a \in I$ или $b \in I$. Каждое из следующих условий эквивалентно простоте для И. I решетки L: а) дополнение $L \setminus I$ является фильтром; б) I — полный прообраз нуля при нек-ром гомоморфизме решетки L на двухэлементную решетку. В дистрибутивной решетке каждый максимальный И. прост.

Не вполне согласовано с предыдущим определение И. в частично упорядоченном множестве. А именно, вместо условия 1) требуется выполнение более сильного условия: для всякого подмножества элементов, лежащих в И., их объединение, если оно существует в этом частично упорядоченном множестве, также лежит в I.

Идеалом объекта A категории с нулевыми морфизмами наз. *подобъект* (U, μ) объекта A такой, что $\mu = \ker \alpha$ для нек-рого морфизма $\alpha : A \to B$. Этот И. можно отождествить с совокупностью всех мономорфизмов, являющихся ядрами нек-рого морфизма (см. также *Нормальный мономорфизм*). Двойственным образом определяется коидеал объекта категории. Понятие И. для Ω-групп является частным случаем понятия И. объекта категории.

Левым идеалом категории $\mathfrak{N}$ наз. класс морфизмов $\mathfrak{M}$, содержащий вместе со всяким своим морфизмом φ все произведения $\alpha\varphi$, где $\alpha \in \mathfrak{M}$, если они определены в категории $\mathfrak{N}$. Двойственным образом определяется правый идеал категории. Двусторонний идеал — класс морфизмов, являющийся как левым, так и правым И.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [3] Ван-дер-Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [4] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [5] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [6] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [7] Скорняков Л. А., Элементы теории структур, М., 1970; [8] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974.

Л. В. Кузьмин, Т. С. Фофанова, М. Ш. Цаленко.

Т-ИДЕАЛ свободной ассоциативной алгебры — вполне характеристич. идеал этой алгебры, т. е. идеал, инвариантный относительно всех эндоморфизмов. Совокупность полиномиальных тождеств произвольной ассоциативной алгебры над полем F образует Т-И. в счетно порожденной свободной алгебре $F[X]$, $X = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$. Поэтому существует взаимно однозначное соответствие между Т-И. алгебры $F[X]$ и многообразиями ассоциативных алгебр над полем F. Если поле F имеет характеристику 0, то для любого Т-И. $T \subseteq F[X]$ существует такое натуральное число $n = n(T)$, что элементами T являются нек-рые степени элементов $M_n(F)$ и только они, где $M_n(F)$ — идеал тождеств алгебры квадратных матриц F_n порядка n над F. В этом случае Т-И. можно определить также как (односторонний) идеал, замкнутый относительно всех дифференцирований свободной алгебры. Факторалгебра $F[X]/T$ является PI-*алгеброй*, совокупность полиномиальных тождеств к-рой совпадает с T. Она

наз. относительно свободной алгеброй Т-И. тождеств T (и является свободной алгеброй многообразия алгебр, определяемого тождествами из T). Алгебра $F[X]/T$ не имеет делителей нуля тогда и только тогда, когда $T=M_n(F)$ для некоторого натурального числа n. Всякий Т-И. T свободной ассоциативной алгебры является примарным идеалом.

Т-И. свободной ассоциативной алгебры с бесконечным множеством порождающих над полем нулевой характеристики образуют свободную полугруппу относительно операции умножения идеалов. В этом случае Т-И. можно определить как идеалы, инвариантные относительно всех автоморфизмов свободной алгебры.

Вопрос о том, обладает ли всякий Т-И. алгебры $F[X]$ конечным числом образующих как вполне характеристич. идеал (проблема Шпехта), открыт (1977). См. также *Колец многообразие*.

По аналогии с ассоциативным случаем Т-И. можно определить в неассоциативных алгебрах (лиевых, альтернативных и др.).

Лит.: [1] Procesi C., Rings with polynomial identities, N.Y., 1973; [2] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [3] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [4] Amitsur S., «J. London. Math. Soc.», 1955, v. 30, p. 470—75; [5] Specht W., «Math. Z.», 1950, Bd 52, S. 557—89; [6] Bergman G., Lewin J., «J. London. Math. Soc.», 1975, ser. 2, v. 11, № 1, p. 21—31.

В. Н. Латышев.

ИДЕАЛЬНАЯ ТОЧКА, несобственная точка, бесконечно удаленная точка,— точка, к-рой пополняется плоскость для описания некоторых геометрич. соотношений и систем. Напр., *инверсия* является взаимно однозначным отображением евклидовой плоскости, пополненной И. т.; пополнение аффинной плоскости идеальными точками приводит к понятию *проективной плоскости*. См. также *Бесконечно удаленные элементы*.

А. Б. Иванов.

ИДЕАЛЬНОЕ ЧИСЛО — элемент полугруппы D *дивизоров* кольца A целых чисел нек-рого поля алгебраич. чисел. Полугруппа D — коммутативная свободная полугруппа с единицей; ее свободные образующие наз. простыми идеальными числами. В современной терминологии И. ч. наз. целыми дивизорами кольца A. Они допускают естественное отождествление с *идеалами* кольца A.

И. ч. были введены в связи с отсутствием однозначности разложения на простые множители в кольцах целых алгебраич. чисел. Для каждого $a\in A$ разложение соответствующего дивизора $\varphi(a)$ в произведение простых И. ч. можно рассматривать как нек-рую замену однозначности разложения на простые множители в случае, когда такое разложение в кольце A неоднозначно.

Напр., кольцо A всех целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ состоит из всех чисел вида $a+b\sqrt{-5}$ с целыми a и b. В этом кольце число 6 допускает два различных разложения на множители:

$$6=2\cdot 3=(1-\sqrt{-5})(1+\sqrt{-5}),$$

причем числа 2, 3, $1-\sqrt{-5}$ и $1+\sqrt{-5}$ — простые попарно неассоциированные элементы кольца A; таким образом, разложение на простые множители в A неоднозначно. Однако в полугруппе D элементы $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(1+\sqrt{-5})$, $\varphi(1-\sqrt{-5})$ не будут простыми, а именно: $\varphi(2)=\mathfrak{p}_1^2$, $\varphi(3)=\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$, $\varphi(1-\sqrt{-5})=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\varphi(1+\sqrt{-5})=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3$, где $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ — простые И. ч. в D. Таким образом, два разложения числа 6 на простые множители в кольце A продолжаются до одного и того же разложения $\varphi(6)=\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$ в D.

Понятие И. ч. было введено Э. Куммером (E. Kummer) в связи с исследованием арифметики круговых полей (см. [1] — [2]). Пусть $K=\mathbb{Q}(\zeta)$ — поле деления круга

на p частей и $A=\mathbb{Z}(\zeta)$ — кольцо целых чисел поля K. И. ч. для кольца A определялись как произведение простых И. ч., а эти последние — как «идеальные» простые делители простых натуральных чисел. Для построения всех простых И. ч., делящих заданное простое натуральное q, использовалась *Куммера теорема*. Пользуясь тем, что A имеет степенной базис $1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{p-2}$ над $\mathbb{Z}$, Э. Куммер рассматривал разложение кругового многочлена $F_p(X)$ в кольце $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}[X]$. И. ч., делящими число q, объявлялись элементы, находящиеся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми множителями $F_p(X)$ в $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}[X]$ (несколько другого подхода требовал случай $p=q$). Специальный метод применялся для определения показателя степени, с к-рым данное простое И. ч. входит в данное $a\in A$. Аналогичный метод он разработал для создания теории делимости в полях вида $\mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[p]{m})$, где $m\in\mathbb{Q}(\zeta)$.

Перенесение теории И. ч. на случай произвольного поля алгебраических чисел принадлежит в основном Л. Кронекеру (L. Kronecker) и Р. Дедекинду (R. Dedekind). Уже в их работах наметилось разделение теории И. ч. на теорию дивизоров (подход Л. Кронекера) и теорию идеалов. Р. Дедекинд каждому И. ч. взаимно однозначно сопоставлял и д е а л кольца A, к-рый определялся им как подмножество в A, состоящее из 0 и всех таких a, что a делится на это И. ч. При этом, если $a_1, \ldots, a_n$— образующие идеала I, то соответствующее I И. ч. является наибольшим общим делителем И. ч. $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)$.

Впоследствии понятие идеала было распространено на случай произвольного кольца A; кольца, для к-рых понятия идеала и дивизора совпадают, наз. теперь дедекиндовыми.

Лит.: [1] К u m m e r E., «J. reine und angew. Math.», 1847, Bd 35, S. 319—26, 327—67; [2] е г о ж е, «J. math. pures et appl.», 1851, t. 16, p. 377—498; [3] E d w a r d H a r o l d M., «Arch. Hist. Exact. Sci.», 1975, v. 14, № 3, p. 219—36; [4] Б у р б а к и Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [5] е г о ж е, Очерки по истории математики, пер. с франц., М., 1963.

Л. В. Кузьмин.

ИДЕАЛЬНЫЙ РЯД п о л у г р у п п ы S — такая последовательность подполугрупп

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_m = S, \qquad (*)$$

что A_i есть (двусторонний) идеал в A_{i+1}, $i=1, 2, \ldots, m-1$. Подполугруппа A_1 и факторполугруппы Риса A_{i+1}/A_i (см. *Полугруппа*) наз. ф а к т о р а м и ряда(*). Два И. р. наз. и з о м о р ф н ы м и, если между их факторами можно установить взаимно однозначное соответствие, при к-ром соответствующие факторы изоморфны. И. р.

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n = S$$

наз. у п л о т н е н и е м ряда (*), если каждое A_i совпадает с некоторым B_j. И. р. наз. к о м п о з и ц и о н н ы м р я д о м, если он не обладает отличными от него самого уплотнениями. Для любых двух И. р. полугруппы существуют изоморфные уплотнения; в частности, в полугруппе, обладающей композиционным рядом, все такие ряды изоморфны (аналоги теорем Шрейера и Жордана — Гёльдера о нормальных рядах групп, см. [1], [2]). И. р. наз. г л а в н ы м р я д о м, если его члены суть идеалы всей полугруппы и он не обладает отличными от него уплотнениями, состоящими из идеалов полугруппы. Если полугруппа обладает композиционным рядом, то она имеет и главный ряд; обратное неверно. В полугруппе S с главным рядом факторы его изоморфны *главным факторам* S.

Как и для нормальных рядов групп, приведенные понятия (и их свойства) естественным образом обобщаются на случай бесконечных систем вложенных подполугрупп. В частности, в о з р а с т а ю щ и й

И. р. полугруппы S — это вполне упорядоченная последовательность

$$A_1 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset \ldots \subset A_\beta = S,$$

где на предельных местах стоят объединения предыдущих членов, и A_α есть идеал в $A_{\alpha+1}$ для любого $\alpha < \beta$.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972. *Л. Н. Шеврин.*

ИДЕЛЬ — обратимый элемент кольца *аделей*. Совокупность всех И. образует по умножению группу, наз. группой иделей. Элементами группы И. поля рациональных чисел являются последовательности вида

$$a = (a_\infty, a_2, \ldots, a_p, \ldots),$$

где a_∞ — ненулевое действительное число, a_p — отличное от нуля p-адическое число, $p = 2, 3, 5, 7, \ldots$ и $|a_p|_p = 1$ при всех p, кроме конечного числа (здесь $|x|_p$ — p-адическая норма). Последовательность И.

$$a^{(n)} = (a_\infty^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_i^{(n)}, \ldots)$$

считается сходящейся к И. a, если она сходится к a покомпонентно и если существует такое N, что при $n > N$ $|a_p^{-1} a_p^{(n)}|_p = 1$ для всех p. Группа И. с такой топологией является локально компактной топологич. группой. Аналогично строится группа И. произвольного числового поля.

Мультипликативная группа поля рациональных чисел изоморфно вкладывается в группу И. этого поля. Именно, каждому рациональному числу $r \neq 0$ сопоставляется последовательность

$$(r, r, \ldots, r, \ldots),$$

являющаяся И. Такой И. наз. главным. Подгруппа главных И. дискретна в группе всех И.

Понятия аделей и И. были введены К. Шевалле (C. Chevalley) в 1936 для целей алгебраич. теории чисел. Новый язык показал свою плодотворность при изучении арифметич. аспектов теории алгебраич. групп. Для этих целей А. Вейль (A. Weil) обобщил определения аделей и И. на случай любой линейной алгебраической группы, определенной над числовым полем.

Лит.: [1] Вейль А., Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972; [2] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969. *В. Л. Попов.*

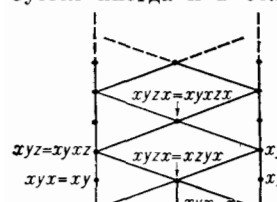
ИДЕМПОТЕНТ, идемпотентный элемент,— элемент e кольца, полугруппы или группоида, равный своему квадрату: $e^2 = e$. Говорят, что И. e содержит И. f (обозначается $e \geqslant f$), если $ef = e = fe$. Для ассоциативных колец и полугрупп отношение $\geqslant$ является отношением частичного порядка в множестве E идемпотентных элементов и наз. естественным частичным порядком на множестве E. Два И. u и v кольца наз. ортогональными, если $uv = 0 = vu$. С каждым И. кольца (а также с каждой системой ортогональных И.) связано так наз. *пирсовское разложение* кольца. Для n-арной алгебраич. операции ω И. наз. такой элемент e, что $\underbrace{(e \ldots e)}_{n}\omega = e$.

О. А. Иванова.

ИДЕМПОТЕНТОВ ПОЛУГРУППА, идемпотентная полугруппа,— полугруппа, каждый элемент к-рой есть *идемпотент*. И. п. наз. также связкой (это согласуется с понятием *связки полугрупп*: И. п. есть связка одноэлементных полугрупп). Коммутативная И. п. наз. полуструктурой, или полурешеткой; этот термин согласуется с его употреблением в теории частично упорядоченных множеств: если коммутативную И. п. S рассмотреть относительно естественного частичного порядка, то ab будет наибольшей нижней гранью элементов a, $b \in S$. Всякая полурешетка есть подпрямое произведение двухэлементных полурешеток. Полугруппа S наз.

сингулярной, если S удовлетворяет одному из тождеств $xy=x$, $xy=y$; в первом случае S наз. левосингулярной, или полугруппой левых нулей, во втором — правосингулярной, или полугруппой правых нулей.

Полугруппа наз. прямоугольной, если она удовлетворяет тождеству $xyx=x$ (этот термин используется иногда и в более широком смысле, см. [1]).



Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: 1) S прямоугольна, 2) S есть идеально простая И. п. (см. *Простая полугруппа*), 3) S есть *вполне простая полугруппа* идемпотентов, 4) S изоморфна прямому произведению $L\times R$, где L — левосингулярная, а R — правосингулярная полугруппы. Всякая И. п. является *клиффордовой полугруппой* и разлагается в полурешетку (см. *Связка полугрупп*) прямоугольных полугрупп. Это разложение служит исходным пунктом при изучении многих свойств И. п. Любая И. п. локально конечна.

И. п. изучались с разных точек зрения, в том числе с точки зрения теории многообразий. Решетка всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{B}$ всех И. п. полностью описана в [4] — [6]; она счетна и дистрибутивна, каждое подмногообразие ее может быть задано внутри $\mathfrak{B}$ одним тождеством. Диаграмму этой решетки см. на рис.; там же указаны тождества, задающие в $\mathfrak{B}$ многообразия из нескольких нижних «этажей».

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [2] McLean D., «Amer. Math. Monthly», 1954, v. 61, № 2, p. 110—13; [3] Kimura N., «Pacif. J. Math.», 1958, v. 8, p. 257—75; [4] Бирюков А. П., «Алгебра и логика», 1970, т. 9, № 3, с. 255—73; [5] Gerhard J., «J. Algebra», 1970, v. 15, № 2, p. 195—224; [6] Fennemore Ch., «Math. Nachr.», 1971, Bd 48, № 1—6, S. 237—62.

Л. Н. Шеврин.

ИЕНСЕНА НЕРАВЕНСТВО в простейшей дискретной форме:

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_nx_n)\leqslant$$
$$\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\ldots+\lambda_nf(x_n), \qquad (1)$$

где $f(x)$ — выпуклая (см. *Выпуклая функция*) на нек-ром множестве C функция, $x_i\in C$, $\lambda_i\geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, n$,

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=1.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда либо $x_1=x_2=\ldots=x_n$, либо $f(x)$ — линейная функция. Интегральное И. н. для выпуклой функции $f(x)$:

$$f\left(\int_D\lambda(t)\,x(t)\,dt\right)\leqslant\int_D\lambda(t)\,f(x(t))\,dt, \qquad (2)$$

где $x(D)\subset C$, $\lambda(t)\geqslant 0$ при $t\in D$,

$$\int_D\lambda(t)\,dt=1.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда либо $x(t)=\mathrm{const}$ на D, либо $f(x)$ линейна на $x(D)$. Если $f(x)$ — вогнутая функция, знаки неравенств (1) и (2) меняются на противоположные. Неравенство (1) установлено О. Гёльдером [1], неравенство (2) — И. Иенсеном [2].

При соответствующем подборе выпуклой функции $f(x)$ и весов λ_i или весовой функции $\lambda(t)$ неравенства (1) и (2) переходят в конкретные неравенства, среди которых большинство классич. неравенств. Например, если в (1) положить $f(x)=-\ln x$, $x>0$, то получается

неравенство между взвешенными средним арифметическим и средним геометрическим:

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\dots x_n^{\lambda_n}\leqslant \lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_nx_n; \qquad (3)$$

при $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=1/n$ неравенство (3) принимает вид

$$\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\leqslant (x_1+x_2+\dots+x_n)/n.$$

Лит.: [1] Hölder O., «Gött. Nachr.», 1889, S. 38—47; [2] Jensen J. L., «Acta math.», 1906, v. 30, p. 175—93; [3] Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948, с. 90—91, 182—83. *Е. К. Годунова.*

ИЕНСЕНА ФОРМУЛА — соотношение, связывающее значения *мероморфной функции* внутри круга с ее граничными значениями на окружности и с ее нулями и полюсами. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в круге $|z|\leqslant R$; a_μ, $|a_\mu|\leqslant R$, и b_ν, $|b_\nu|\leqslant R$,— соответственно все нули и полюсы $f(z)$, причем каждый нуль или полюс считается столько раз, какова его кратность или порядок. Если $f(0)\neq 0$, то справедлива И. ф.:

$$\ln|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi+$$

$$+\sum_{|b_\nu|<R}\ln\frac{R}{|b_\nu|}-\sum_{|a_\mu|<R}\ln\frac{R}{|a_\mu|}, \qquad (1)$$

в к-рой суммы распространены на все нули и полюсы $f(z)$ внутри круга $|z|<R$; формула (1) получена И. Иенсеном [1]. Небольшое видоизменение позволяет приспособить формулу (1) и для случая $f(0)=0$.

Справедлива и более общая формула, названная Р. Неванлинной формулой Пуассона — Иенсена и дающая значения $\ln|f(z)|$ в любой точке $z=re^{i\theta}$, отличной от нулей и полюсов:

$$\ln|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\varphi})|\,P(z,\ Re^{i\varphi})\,d\varphi+$$

$$+\sum_{|b_\nu|<R}\ln\left|\frac{R^2-\bar b_\nu z}{R(z-b_\nu)}\right|-\sum_{|a_\mu|<R}\ln\left|\frac{R^2-\bar a_\mu z}{R(z-a_\mu)}\right|, \qquad (2)$$

$$P(z,\ Re^{i\varphi})=\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)},\quad r<R.$$

Формулу (2) можно рассматривать как обобщение *Пуассона интеграла* для круга. Точно так же, обобщая *Шварца интеграл* для круга, получают формулу Шварца — Иенсена:

$$\ln f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\varphi})|\,\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\,d\varphi+$$

$$+\sum_{|b_\nu|<R}\ln\frac{R^2-\bar b_\nu z}{R(z-b_\nu)}-\sum_{|a_\mu|<R}\ln\frac{R^2-\bar a_\mu z}{R(z-a_\mu)}, \qquad (3)$$

$$r<R.$$

Возможно также построение формул типа (1) — (3) для полуплоскости и других областей. Формулы (1) — (3) играют важную роль в *распределения значений теории.*

Широкое обобщение формул (1) — (3) получено М. М. Джрбашяном в его теории классов мероморфных функций (см. [3]). Ему удалось получить целое семейство таких формул, зависящее от некоторого непрерывного параметра α, $-1<\alpha<+\infty$, связанного с интегродифференциальным оператором D^α, причем, напр., формула (3) оказывается частным случаем при $\alpha=0$.

Формулы (1) и (2) обобщаются для субгармонич. функций (см. [4]) $u(x)$ в шаре $|x|\leqslant R$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, следующим образом:

$$u(x)=\frac{1}{\sigma(R)}\int_{|y|=R}u(y)\,\frac{R^{n-2}(R^2-|x|^2)}{|x-y|^n}\,d\sigma(y)-$$

$$-\int_{|y|<R}G(x,\ y)\,d\mu(y), \qquad (4)$$

где $\sigma(R)$ — площадь сферы $|y|=R$ в $\mathbb{R}^n$, $G(x, y)$ — *Грина функция* для шара $|y|<R$ с полюсом в точке x, μ — положительная мера, ассоциированная с субгармонич. функцией $u(x)$. Первое слагаемое в формуле (4) — наименьшая *гармоническая мажоранта* функции $u(x)$ в шаре $|x|\leqslant R$, выраженная в виде интеграла Пуассона от граничных значений; второе слагаемое — потенциал Грина, в частных случаях вырождающийся в логарифмы модуля *Бляшке произведений*, фигурирующие в формуле (2). Формула (2) получается из (4) с учетом того, что $\ln|f(z)|$ для мероморфной функции $f(z)$ есть разность двух субгармонических функций; для функций последнего типа формула (4) также применима.

Пусть теперь $f(z)$ — голоморфная функция многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n\geqslant 1$, в замкнутом поликруге

$$\overline{U}^n=\{z;\ |z_j|\leqslant R_j,\quad j=1,\ \ldots,\ n\}.$$

Большое значение имеет также легко выводимое из свойств *плюрисубгармонических функций* неравенство Иенсена, в случае $n=1$ непосредственно вытекающее из формулы (2):

$$\ln|f(z)|\leqslant\int \ln\left|f\left(R_1e^{i\varphi_1},\ \ldots,\ R_ne^{i\varphi_n}\right)\right| P_n\left(z, Re^{i\varphi}\right)dm_n(\varphi),$$

где

$$P_n\left(z,\ Re^{i\varphi}\right)=P\left(z_1,\ R_1e^{i\varphi_1}\right)\ldots P\left(z_n,\ R_ne^{i\varphi_n}\right)$$

— ядро Пуассона для поликруга U^n, $m_n(\varphi)$ — нормированная мера Хаара на остове

$$T^n=\{z;\ |z_j|=R_j,\ j=1,\ \ldots,\ n\},\ m_n(T^n)=1$$

(см. [5], [6]). Неравенство (5) и нек-рые многомерные аналоги формулы (2) находят применения в современной многомерной теории распределения значений (см. [7]).

Лит.: [1] Jensen J. L., «Acta math.», 1899, v. 22, p. 359—64; [2] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.— Л., 1941; [3] Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966; [4] Привалов И. И., Субгармонические функции, М.— Л., 1937; [5] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [6] Ганнинг Р., Россси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [7] Гриффитс Ф., Кинг Дж., Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий, пер. с англ., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

ИЕРАРХИЯ — классификация тех или иных математич. объектов в соответствии с их сложностью.

Первые И. были построены в *дескриптивной теории множеств* (см. [3]). В этих И. переход к более сложному классу множеств осуществляется путем применения теоретико-множественных и топологич. операций к элементам более простых классов. Важнейшие И. дескриптивной теории множеств определяются следующим образом. Если T — некоторое семейство подмножеств множества X, то через CT обозначается семейство всех дополнений в X к элементам из T, через T_σ — семейство всех счетных объединений элементов из T, через T_δ — семейство всех счетных пересечений элементов из T. Для фиксированного *топологического пространства* X через F обозначается семейство всех замкнутых подмножеств пространства X, через G — семейство всех открытых подмножеств пространства X. По *трансфинитной индукции* определяется последовательность $F, F_\sigma, F_{\sigma\delta}, F_{\sigma\delta\sigma}, \ldots$, классы, стоящие в ней на местах, отвечающих предельным ординалам, получаются в результате применения операции δ к объединению всех предшествующих классов. Аналогично, с заменой всюду операций σ и δ на операции δ и σ, соответственно, определяется последовательность классов $G, G_\delta, G_{\delta\sigma}, G_{\delta\sigma\delta}, \ldots$. При этом $G=CF$, $G_\delta=CF_\sigma$ и т. д. Построенные последо-

вательности образуют борелевскую И. подмножеств пространства X. Объединение всех классов этой И. наз. классом борелевских подмножеств пространства X и обозначается B. Если T — некоторое семейство подмножеств топологич. пространства X, то через PT обозначается семейство всех образов элементов семейства T при непрерывных отображениях X в X. Классы B, PB, CPB, $PCPB$ и т. д. образуют проективную И. подмножеств пространства X. При этом *аналитические множества* (A-множества) составляют класс PB, дополнения к ним (CA-множества) — класс CPB и т. д.

В математич. логике рассматриваются И. множеств и отношений, задаваемых формулами логич. языков (см. [1], [2], [5]). Важнейшими примерами таких И. являются И., основанные на представлении отношения $P(x_1, \ldots, x_k)$ в виде

$$P(x_1, \ldots, x_k) \Leftrightarrow Q_1 y_1 \ldots Q_n y_n R(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n). \quad (*)$$

Здесь $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_n$ — переменные, одни из к-рых пробегают множество натуральных чисел (числовые переменные), другие — множество всех подмножеств натуральных чисел (множественные переменные); $Q_1 y_1, \ldots, Q_n y_n$ — последовательность кванторов, в к-рой кванторы всеобщности и существования чередуются, т. е. из любых двух соседних кванторов один является квантором всеобщности, а другой — квантором существования; $R(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ — произвольное *рекурсивное отношение* с числовыми и множественными переменными. Класс Σ^0_n (соответственно Π^0_n) состоит из всех отношений $P(x_1, \ldots, x_k)$, представимых в виде (*), где переменные $y_1, \ldots, y_n$ — числовые и символ Q_1 — это $\exists$ (соответственно $\forall$). Классы Σ^0_n и Π^0_n, $n=0, 1, \ldots$ образуют арифметическую иерархию Клини — Мостовского (см. *Клини — Мостовского классификация*). Объединение всех этих классов наз. классом арифметич. отношений. Классы Σ^1_{n-1} (соответственно Π^1_{n-1}), $n>1$, состоят из отношений $P(x_1, \ldots, x_k)$, представимых в виде (*), где все переменные $y_1, \ldots, y_{n-1}$ — множественные, переменная y_n — числовая и символ Q_1 — это $\exists$ (соответственно $\forall$). Через Σ^1_0 и Π^1_0 обозначается класс арифметич. отношений. Классы Σ^1_n, Π^1_n, $n=0, 1, \ldots$, образуют аналитическую иерархию Клини. Продолжением иерархии Клини — Мостовского можно считать гиперарифметич. И. множеств из класса $\Delta^1_1 = \Sigma^1_1 \cap \Pi^1_1$ (см. [2], [5]).

Различные И. могут рассматриваться единым образом с точки зрения определимости в логич. языках. В частности, начальные классы борелевской И. можно задать аналогично классам иерархии Клини — Мостовского, аналитич. И. аналогична проективной. При этом ряд утверждений, касающихся строения классов И., получает общую формулировку, а часто, и сходное доказательство (см. [1]). Примером такого утверждения является принцип редукции, состоящий в следующем. Пусть U — класс некоторой И., X и Y — его элементы, тогда существуют такие X' и Y' из U, что $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$, $X \cup Y = X' \cup Y'$ и $X' \cap Y' = \phi$. Этот принцип выполняется, в частности, когда U совпадает с Π^1_1, Σ^1_2 или CPB, $PCPB$. В *моделей теории* также строятся И. классов моделей по виду формул, задающих эти классы; имеются аналогии между этими И. и упомянутыми выше (см. [1]).

Построение И. *рекурсивных функций* осуществляется в теории алгоритмов. Один из общих методов построения таких И. основан на задании рекурсивных функций с помощью нек-рых исходных функций и операций (подстановки, примитивной рекурсии и др.). Переход

к более сложному классу некоторой И. может осуществляться, напр., в результате добавления к предыдущему классу элемента нек-рой фиксированной последовательности рекурсивных функций и замыкания полученного множества относительно операций подстановки и ограниченной рекурсии. Для получения более сложного класса, наряду с замыканием относительно каких-либо операций (как в предыдущем примере), используется однократное применение, напр., операции примитивной рекурсии к элементам более простого класса (см. [4]). Другой метод построения И. рекурсивных функций основан на их классификации по сложности вычислений (см. [4]). Рассмотрение характеристич. функций множеств позволяет строить И. разрешимых множеств, исходя из И. рекурсивных функций.

Лит.: [1] Аддисон Дж., Математическая логика и ее применения, пер. с англ., М., 1965, с. 23—36; [2] Hinman P., Recursion-theoretic hierarhies, B., 1976; [3] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970; [4] Проблемы математической логики, сб. переводов, М., 1970; [5] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972.

А. Л. Семенов.

ИЗБЫТОК ТРЕУГОЛЬНИКА, сферический избыток, эксцесс,— разность между суммой углов сферич. треугольника и двумя прямыми углами. И. т. пропорционален площади сферич. треугольника.

А. Б. Иванов.

ИЗБЫТОЧНОСТЬ — мера возможного увеличения скорости передачи информации за счет использования статистич. зависимостей между компонентами сообщения, вырабатываемого источником сообщений. И. стационарного источника сообщений с дискретным временем, вырабатывающего сообщение $\xi=(\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots)$, образованное стационарным случайным процессом

$$\xi_k,\ k=\ldots -1, 0, 1, \ldots\ ,$$

где ξ_k принимает значения из нек-рого конечного множества X с числом элементов N, определяется разностью

$$1-\frac{\overline{H}(U)}{\overline{H}_{\max}},$$

здесь $\overline{H}(U)$ — скорость создания сообщений данным источником U (см. *Сообщений скорость создания*), а $H_{\max}=\log N$ — максимально возможная скорость создания сообщений источником с дискретным временем, компоненты к-рого принимают N различных значений.

Лит. см. [4], [5] при ст. *Канал связи.*

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ИЗВИВАНИЕ КРИВОЙ, собственный поворот кривой,— часть вариации поворота кривой на нерегулярной поверхности, не вызванная сосредоточением интегральной кривизны поверхности на множестве точек кривой. Для простой дуги L И. к. равно $(\sigma_r+\sigma_l-\Omega)/2$, где σ_r, σ_l— вариации правого и левого поворотов L, а Ω — вариация кривизны L как множества. Кривые с нулевым извиванием наз. *квазигеодезическими линиями.*

Лит.: [1] Александров А. Д., Стрельцов В. В., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1965, т. 76, с. 67—80.

Ю. Д. Бураго.

ИЗГИБАНИЕ — изометрическая деформация подмногообразия M в римановом пространстве V, т. е. деформация, при к-рой длины кривых на M не изменяются. Задача об И. поверхностей ведет свое начало от К. Гаусса (C. Gauss) и принадлежит к числу основных проблем дифференциальной геометрии.

Помимо общего случая, было достаточно широко исследовано И. поверхности с сохранением нек-рой внешнегеометрич. характеристики; при этом обычно оказывалось, что лишь поверхности определенного класса допускают такого рода И. Сюда относятся, напр.: 1) поверхности, изгибающиеся с сохранением средней

кривизны (поверхности постоянной средней кривизны и, в частности, минимальные поверхности, нек-рые поверхности, наложимые на поверхность вращения); 2) поверхности, изгибающиеся с сохранением одного семейства асимптотич. линий (этот класс составляют *линейчатые поверхности*); 3) поверхности, допускающие *изгибание на главном основании*, и т. д.

По своему характеру задачу об И. поверхности в евклидовом пространстве условно можно разделить на и з г и б а н и е в м а л о м, т. е. И. какой-нибудь достаточно малой окрестности U_P нек-рой точки P поверхности, и з г и б а н и е в ц е л о м, т. е. И. произвольного заранее заданного куска поверхности или полной поверхности. Как правило, любая поверхность допускает И. в малом; однако если P является точкой уплощения, то при нек-рых условиях и при сильных предположениях регулярности допускаемых деформаций U_P оказывается неизгибаемой даже в малом.

Первыми утверждениями, касающимися И. в целом, были теорема Э. Либмана (E. Liebmann) о неизгибаемости сферы, а также результат Д. Гильберта (D. Hilbert): максимум изгиба куска сферы достигается на границе. Дальнейшими исследованиями установлено, что любая замкнутая выпуклая поверхность неизгибаема в классе выпуклых поверхностей без всяких дополнительных условий регулярности. Найдены также теоремы типа принципа максимума, относящиеся к И. произвольного куска выпуклой поверхности класса C^3, из к-рых следует неизгибаемость замкнутой выпуклой поверхности. Однако доказано, что, напр., сфера в классе C^1 допускает изгибания того же класса.

Относительно И. замкнутых поверхностей положительного рода установлены лишь частные результаты; так, напр., поверхности типа T (тора), т. е. поверхности, состоящие из конечного числа областей с кусочно гладкими границами, в каждой из к-рых гауссова кривизна K не меняет знака и обращается в нуль только на границе, причем полная кривизна всех областей с $K>0$ равна 4π,— неизгибаемы при нек-рых дополнительных условиях (аналитичность, отсутствие двух замкнутых асимптотических), в частности, обыкновенный тор неизгибаем.

Полные незамкнутые поверхности, как правило, изгибаемы. Полная выпуклая поверхность S неизгибаема, если $\int\int KdS=2\pi$, и допускает И., если $\int\int KdS<2\pi$; произвол допускаемых ею И. определяется И. ее предельного конуса. Нек-рые классы полных поверхностей отрицательной кривизны также допускают И., таковы, напр., минимальные поверхности, в частности катеноид изгибания в геликоид.

Исследования И. незамкнутых поверхностей с границей также относятся главным образом к поверхностям знакопостоянной гауссовой кривизны, причем детально рассмотрен случай, когда И. определяется единственным образом различного рода граничными условиями. Так, напр., при любом И. выпуклой поверхности F хотя бы одна точка ее края ∂F изменяет свое расстояние от нек-рой фиксированной точки O, из к-рой F видна изнутри и к-рая расположена вне выпуклой оболочки (так что F неизгибаема, если расстояние любой точки края ∂F от O неизменно); аналогично, при любом И. выпуклой поверхности F, однозначно проектирующейся на плоскость π и ограниченной плоским контуром, хотя бы одна точка края ∂F изменяет свое расстояние от π (так что F не допускает изгибаний скольжения— таких И., при к-рых точки края движутся параллельно нек-рой плоскости π); при И. поверхности этого типа хотя бы в одной точке кривизна $\varkappa$ края ∂F меняется, причем число перемен знака разности кривизн краев поверхности F и ее изгибания F' не менее

четырех (так что если кривизна края не изменяется, то F неизгибаема). Что касается поверхностей отрицательной кривизны, то достаточно широкий класс их И. получается при решении задачи Коши для уравнений Гаусса и Петерсона — Кодацци, так, напр., И. куска поверхности с $K<0$, ограниченного отрезками a_0, a_1 геодезических и двумя отрезками b_0, b_1 их ортогональных траекторий однозначно определяется И. края b_0. Относительно И. поверхностей знакопеременной кривизны ряд результатов получен лишь для поверхностей вращения.

Для изучения И. поверхностей применяются методы теории уравнений с частным производными, напр., эллиптич. типа, к-рыми описываются И. поверхностей положительной гауссовой кривизны, а также И. поверхностей с сохранением средней кривизны; кроме того, для выпуклых поверхностей особую роль играют методы прямых предельных переходов от многогранников (см. *Склеивания метод*) в комбинации с теоремами о регулярности поверхности, имеющей регулярную метрику. При достаточной близости выпуклой поверхности $F=F_0$ к ее изгибанию F_1 исследование И. сводится с помощью *Кон-Фоссена преобразования* к аналогичным задачам теории *бесконечно малых изгибаний* так наз. серединной поверхности

$$F_{1/2}=(F_0+F_1)/2.$$

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей, ч. 2, М.— Л., 1948; [2] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия, М., 1963; [3] Ефимов Н. В., Качественные вопросы деформаций поверхностей «в малом», «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1949 т. 30; [4] его же, «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 2, с. 47—158; [5] Погорелов А. В., Изгибание выпуклых поверхностей, М.— Л., 1951; [6] Бляшке В., Дифференциальная геометрия, пер. с нем., т. 1, М.— Л., 1935; [7] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959.

М. И. Войцеховский.

ИЗГИБАНИЕ НА ГЛАВНОМ ОСНОВАНИИ — изгибание F_t поверхности $F=F_0$, при к-ром направления экстремального изгиба остаются неизменными. Сеть, образованная линиями, имеющими направление экстремального изгиба, является сопряженной на каждой из поверхностей F_t и наз. главным основанием изгибания. Напр., геликоид имеет бесконечное число главных оснований; вращения поверхности и каналовые поверхности допускают И. на г. о., одно из семейств к-рого состоит из геодезич. линий (см. также *Фосса поверхности*). Задача исследования И. на г. о. была поставлена К. М. Петерсоном [1] в 1866; он же установил, что если нек-рая поверхность F изометрично преобразована в две другие поверхности F' и F'' так, что направления экстремального изгиба (и, следовательно, *основание изгибания*) F в F' совпадают с направлениями экстремального изгиба F в F'', то существует изгибание F_t поверхности F, включающее F' и F'', с теми же направлениями экстремального изгиба; другими словами, если нек-рая *сопряженная сеть* на F служит основанием двух различных ее изгибаний F' и F'', то она является главным основанием изгибания.

Если известны поверхности F, F', F'', то все остальные поверхности F_t, получаемые при изгибании F на главном основании, определяются теоремой: пусть $\varkappa$ — нормальная кривизна F в направлении одного из двух семейств главного основания σ в произвольной точке $M\in F$, а $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa_t$ — нормальные кривизны поверхностей F', F'' и F_t в соответствующих точках и направлениях, тогда двойное отношение $t=(\varkappa^2, \varkappa'^2, \varkappa''^2, \varkappa_t^2)$ сохраняет постоянную величину для всех положений M на F.

Поверхность, допускающая И. на г. о., может быть охарактеризована только *сферическим изображением* главного основания: уравнения, описывающие И. на г. о., преобразуются так, что содержат только коэффициенты линейного элемента сферич. изображения по-

верхности и получают вид: $\frac{\partial}{\partial u}\Gamma^1_{12}=\frac{\partial}{\partial v}\Gamma^2_{12}=2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}$ (у р а в н е н и я К о с с е р а), где Γ^1_{12}, Γ^2_{12}— символы Кристоффеля третьей квадратичной формы поверхности, а дифференцирование ведется вдоль координатных линий u, v, составляющих главное основание изгибания. Сферич. изображение главного основания изгибания совпадает со сферич. изображением асимптотич. линий *Бианки поверхности*, к-рая является *вращений индикатрисой* (или присоединенной поверхностью) бесконечно малого изгибания F, соответствующего И. на г. о., а также с изображением в смысле Клиффорда асимптотич. линий нек-рой поверхности в эллиптич. пространстве (являющейся *поворотов диаграммой* И. на г. о. поверхности F).

Не все поверхности обладают главным основанием, т. е. поверхности, допускающие И. на г. о., образуют специальный класс поверхностей [4]. Обобщением И. на г. о. является и з г и б а н и е н а к и н е м а т и ч е с к о м о с н о в а н и и, к-рое определяется тем, что коэффициенты второй квадратичной формы b_{ij} удовлетворяют уравнению $b_{ij}A^{ij}=c$, где A^{ij}— некоторый невырожденный тензор, c — функция, зависящая от метрики g_{ij} поверхности F и ее производных.

Лит.: [1] П е т е р с о н К. М., «Матем. сб.», 1866, т. 1, с. 391—438; [2] К а г а н В. Ф., Основы теории поверхностей, ч. 2, М.— Л., 1948; [3] Ф и н и к о в С. П., Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи, М.— Л., 1937; [4] Л у з и н Н. Н., «Изв. АН СССР. Отдел. техн. наук», 1939, № 2, с. 81—106; № 7, с. 115—32; № 10, с. 65—84.

М. И. Войцеховский.

ИЗЛОМА ТОЧКА, у г л о в а я т о ч к а,— особая точка плоской кривой, обладающая тем свойством, что в ней прекращаются две ветви кривой, причем каждая из них имеет в этой точке (одностороннюю) касательную, отличную от другой. Напр., у кривой $y=x/(1+e^{1/x})$ И. т. — начало координат (см. рис.). В И. т. правая и левая производные не совпадают.



А. Б. Иванов.

ИЗЛУЧЕНИЯ УСЛОВИЯ — условия на бесконечности единственности решения внешних краевых задач для уравнений эллиптич. типа, являющихся математич. моделью установившихся колебаний различной физич. природы. Физич. смысл И. у. заключается в выделении решения краевой задачи, описывающей расходящиеся волны, источники (действительные или фиктивные) к-рых находятся в ограниченной области (см. [1]). Решения уравнения установившихся колебаний, описывающие волны, источники к-рых находятся на бесконечности (напр., плоская волна), не удовлетворяют И. у.

Впервые аналитич. форма И. у. для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u+k^2u=-f \qquad (1)$$

была предложена А. Зоммерфельдом [2]. Если (1) соответствует задаче об установившихся колебаниях при временной зависимости $e^{-i\omega t}$, то соответствующие И. у., получившие название условий излучения Зоммерфельда, в случае пространства трех измерений имеют вид

$$u=O\left(\frac{1}{r}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial r}-iku=o\left(\frac{1}{r}\right)\quad \text{при } r\longrightarrow\infty, \qquad (2)$$

в случае двух измерений условия излучения Зоммерфельда имеют вид

$$u=O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial r}-iku=o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),\ \text{при } r\longrightarrow\infty. \qquad (3)$$

Первое условие в (2) и (3), как показано в [3], является следствием второго и требования удовлетворения уравнению (1).

Условия (2), (3) могут быть ослаблены. В частности, условия (2) в ряде случаев могут быть заменены нелокальным интегральным условием

$$\lim_{R\to\infty}\int_{r=R}\left|\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right|^2 d\sigma=0. \tag{4}$$

Условия (2) — (4) в тех случаях, когда граница внешней области имеет бесконечно удаленные точки, не являются универсальными в том смысле, что они не всегда определяют класс функций, в к-ром соответствующая краевая задача однозначно разрешима. Напр., в слое между двумя параллельными плоскостями, на к-рых ставятся однородные граничные условия Дирихле или Неймана, не существует классич. решения уравнения (1) с локальной правой частью, удовлетворяющего условиям излучения Зоммерфельда (2) или (4) (см. [4]). Для разрешимости задачи эти условия должны быть заменены на так наз. парциальные И. у. (см. [4]).

В отличие от условий (2) — (4), парциальные И. у. можно формулировать уже не в виде асимптотич. выражений, а в виде точных соотношений, к-рым должны удовлетворять компоненты разложения решения по нек-рой системе базисных функций. Соответствующая система базисных функций вводится различным образом в зависимости от специфики исходной краевой задачи. Так, в случае краевой задачи для уравнения (1) с локальной правой частью в бесконечном цилиндре с осью z при однородных граничных условиях Дирихле или Неймана на боковой поверхности цилиндра парциальные И. у. могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned}\int_S \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z\leqslant z_1}\nu_n\,d\sigma &= i\gamma_n\int_S u\Big|_{z\leqslant z_1}\nu_n\,d\sigma,\\ \int_S \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z\geqslant z_2}\nu_n\,d\sigma &= -i\gamma_n\int_S u\Big|_{z\geqslant z_2}\nu_n\,d\sigma,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где S — поперечное сечение цилиндра, ν_n — нормированные собственные функции краевой задачи для уравнения Лапласа в S:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta_2\nu_n+\lambda_n\nu_n=0,\\ &\nu_n\Big|_{\partial S}=0 \quad \text{в случае условий Дирихле},\\ &\frac{\partial\nu_n}{\partial n}\Big|_{\partial S}=0 \text{ в случае условий Неймана},\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$\gamma_n^2=k^2-\lambda_n$, $\operatorname{Im}\gamma_n\geqslant 0$ и носитель правой части лежит в области, ограниченной сечениями z_1, z_2.

Поскольку аналитич. вид И. у. (2) — (5) различен, то естественно возникает проблема формулировки общего принципа излучения, не зависящего от вида той неограниченной области, в к-рой ищется решение задачи об установившихся колебаниях. Возможны два различных подхода к решению данной проблемы. В [5] сформулирован так наз. принцип предельной амплитуды, согласно к-рому решение уравнения установившихся колебаний однозначно определяется требованием, чтобы это решение являлось пределом при $t\to\infty$ амплитуды решения задачи Коши с нулевыми начальными условиями для волнового уравнения с периодической правой частью, и дано обоснование принципа предельной амплитуды для задачи об установившихся колебаниях во всем неограниченном пространстве. Обобщение принципа предельной амплитуды на внешние задачи для достаточно общего класса дифференциальных операторов при нек-рых дополнительных условиях на внутреннюю границу неограниченной области см., напр., в [6].

Другой подход при формулировке общего принципа излучения, носящий название принципа предельного поглощения, заключается в том, что решение внешней

краевой задачи об установившихся колебаниях в среде без поглощения ищется как предел ограниченного решения соответствующей краевой задачи в среде, обладающей поглощением, при стремлении последнего к нулю. Впервые этот метод был использован при решении конкретной задачи дифракции электромагнитных волн на бесконечно длинной проволоке (см. [7]). Имеются обобщения принципа предельного поглощения, как условия единственности решения внешних краевых задач для общих эллиптич. операторов и для достаточно широкого класса внутренних границ неограниченной области (см., напр., [8]).

Принципы предельной амплитуды и предельного поглощения широко используются при исследовании общих свойств решений внешних краевых задач, однако, поскольку они так же, как и условия излучения Зоммерфельда (2) — (4), имеют асимптотич. характер, их использование при численном решении внешних краевых задач оказывается в ряде случаев недостаточно эффективным. В этих случаях обычно применяются парциальные И. у., к-рые в сочетании с проекционными методами дали возможность провести полное численное исследование большого числа практически важных задач (см., напр., [9]).

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, ч. 1, 6 изд., 1974; [2] Sommerfeld A., «Jahresber. Dtsch. Math.—Ver.», 1912, Bd 21, S. 309—53; [3] Векуа И. Н., «Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР», 1943, т. 12, с. 105—74; [4] Свешников А. Г., «Докл. АН СССР», 1950, т. 73, № 5, с. 917—920; [5] Тихонов А. Н., Самарский А. А., «Ж. эксперимент. и теоретич. физики», 1948, т. 18, № 2, с. 243—48; [6] Лакс П. Д., Филлипс Р. С., Теория рассеяния, пер. с англ., М., 1971; [7] Игнатовский В. С., «Ann. phys.», 1905, Bd 18, № 13, S. 495—522; № 15, S. 1078; [8] Эйдус Д. М., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 3, с. 91—156; [9] Свешников А. Г., Проблемы математической физики и примыкающие к ним вопросы вычислительной математики и дифференциальных уравнений, М., 1977.

А. Г. Свешников.

ИЗМЕЛЬЧЕНИЕ, измельчающееся семейство множеств,— множество F в топологич. пространстве X такое, что для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности O_x найдется $\gamma \in F$, обладающее свойством: объединение всех элементов семейства γ, содержащих x и наз. звездой $\mathrm{St}\,\gamma(x)$ точки x относительно семейства γ, содержится в O_x.

Важны И. открытых покрытий. Они играют существенную роль в теории размерности, в теории бикомпактных расширений, теории равномерных пространств, теории непрерывных отображений, метризационной проблематике. Измельчаемость множества открытых покрытий означает, говоря неформальным языком, что это множество покрытий своими элементами сколь угодно точно аппроксимирует данное пространство вблизи каждой точки. Часто требование измельчаемости соединяется с ограничениями, обеспечивающими определенные соотношения между покрытиями семейства — типа вписанности, звездной вписанности или направленности. Так, на этом пути получается определение равномерной структуры, совместимой с данной топологией. В связи с теорией паракомпактных пространств рассматриваются И. локально конечных покрытий, а в теории бикомпактных пространств — И. конечных открытых покрытий. В теории размерности особое значение имеют направленные отношением вписанности И. открытых покрытий данной кратности. И. замкнутых покрытий, на к-рые не наложено заранее ограничений типа локальной конечности, не представляют интереса, напр. покрытие любого T_1-пространства всеми его одноточечными подмножествами образует И., к-рое не несет никакой информации о топологии пространства.

Важную роль играют счетные И. открытых покрытий, записываемые часто при произвольной нумерации их элементов натуральными числами в виде измельчаю-

щихся последовательностей. Такие И. выдвинулись на первый план в проблеме метризации пространств, наличие их является необходимым признаком метризуемости. Этот признак не достаточен в классе всех вполне регулярных пространств, но добавление паракомпактности (также являющейся следствием метризуемости) уже делает его таковым. Точнее, T_1-пространство метризуемо в том и только том случае, если оно коллективно нормально и обладает счетным И. В частности, бикомпакт со счетным И. метризуем. Существует ли без дополнительных аксиоматич. предположений неметризуемое нормальное пространство со счетным И., неизвестно (1978), однако известно, что существование такого пространства совместимо с аксиоматикой Цермело — Френкеля, хотя и «наивного» примера до сих пор не построено.

Класс пространств со счетным И. сам по себе обладает хорошими свойствами. Он замкнут относительно операций перехода к произвольному подпространству и счетного перемножения, устойчив относительно совершенных отображений в сторону образа. Однако целый ряд закономерностей, действующих в классе метризуемых пространств, для пространств со счетным И. нарушается. Так, сепарабельное пространство со счетным И. уже не обязано иметь счетной базы. Пространство со счетными И. паракомпактно в том и только в том случае, если оно метризуемо. Не будучи, вообще говоря, метризуемыми, пространства со счетными И. допускают обобщенную метризацию посредством симметрик, удовлетворяющих условию Кощи. Имеется также удобная характеристика пространств со счетным И., как образов метрич. пространств при непрерывных открытых отображениях, подчиненных требованию: прообраз каждой точки лежит на положительном расстоянии от дополнения к прообразу любой ее окрестности.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

ИЗМЕРИМАЯ ФУНКЦИЯ — 1) В первоначальном понимании И. ф.— функция $f(x)$ действительного переменного, обладающая тем свойством, что для любого a множество E_a точек x, для к-рых $f(x)<a$ есть *измеримое множество* (по Лебегу). И. ф. на отрезке $[x_1, x_2]$ может быть сделана непрерывной на $[x_1, x_2]$ путем изменения ее значений на множестве сколь угодно малой меры; это — так наз. C-свойство И. ф. (Н. Н. Лузин, 1913).

2) И. ф. на пространстве X определяется относительно выбранной системы измеримых множеств A в X. Если A есть σ-кольцо, то действительная функция f, заданная на пространстве X, наз. измеримой функцией, если

$$R_f \cap E_a \in A$$

для любого действительного a, где

$$E_a = \{x:\ x \in X,\ f(x) < a\},$$

$$R_f = \{x:\ x \in X,\ f(x) \neq 0\}.$$

Это определение равносильно следующему: действительная функция f измерима, если

$$R_f \cap \{x:\ x \in X,\ f(x) \in B\} \in A$$

для любого борелевского B. В случае, когда A есть σ-алгебра, функция f является измеримой, если измеримы множества E_a (или $\{x : x \in X,\ f(x) \in B\}$). Класс И. ф. замкнут относительно арифметических и структурных операций, т. е., если f_n, $n=1, 2, \ldots$ измеримы, то f_1+f_2, $f_1 f_2$, $\max(f_1, f_2)$, $\min(f_1, f_2)$, af, где a действительно, измеримы; $\varlimsup f_n$, $\varliminf f_n$ тоже измеримы. Комплексная функция измерима, если измеримы ее действительная и мнимая части. Обобщением понятия И. ф. является понятие *измеримого отображения* одного *измеримого пространства* в другое.

Лит.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы, пер. с англ., т. 1, М., 1962; [3] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976. *В. В. Сазонов.*

ИЗМЕРИМОЕ МНОЖЕСТВО — подмножество *измеримого пространства* (X, A), принадлежащее A-кольцу или σ-кольцу его подмножеств. Понятие возникло и развивалось в процессе решения и обобщения проблемы измерения площадей (длин, объемов) различных множеств, т. е. проблемы продолжения площади (длины, объема) как аддитивной функции многоугольников (отрезков, многогранников) на более широкую систему множеств. И. м. определялось как множество той системы, на к-рую осуществлено продолжение; последнее называлось мерой. Так были определены *Жордана мера*, *Бореля мера* и *Лебега мера* с множествами, измеримыми соответственно по Жордану, Борелю и Лебегу. Решение задачи продолжения произвольной фиксированной меры в R^n привело к *Радона мере* (мере Лебега — Стилтьеса) и множествам, измеримым по данной мере Радона (Лебега—Стилтьеса). И. м., связанные с мерой, определенной в абстрактном множестве,— это множества, на к-рых определена рассматриваемая мера.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976. *А. П. Терехин.*

ИЗМЕРИМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение f измеримого пространства $(X_1, \mathcal{A}_1)$ в измеримое пространство $(X_2, \mathcal{A}_2)$ такое, что

$$f^{-1}(A) = \{x: f(x) \in A\} \in \mathcal{A}_1, \ \forall A \in \mathcal{A}_2.$$

В случае, когда $\mathcal{A}_1$ есть σ-алгебра, а $(X_2, \mathcal{A}_2)$ — действительная прямая с σ-алгеброй A_2 борелевских множеств, понятие И. о. сводится к понятию измеримой функции (однако, когда $\mathcal{A}_1$ есть лишь σ-кольцо, определение измеримой функции обычно видоизменяется в связи с нуждами теории интегрирования). Суперпозиция И. о. измерима. Если $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ — кольца, и $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ для любого B из нек-рого класса множеств $B \in \mathcal{A}_2$ такого, что кольцо, им порожденное, совпадает с $\mathcal{A}_2$, то f измеримо. Аналогичное утверждение верно и для случая σ-колец, алгебр и σ-алгебр. Если $(X_1, \mathcal{A}_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2)$ — топологич. пространства с σ-алгебрами борелевских множеств, то всякое непрерывное отображение X_1 в X_2 измеримо. Пусть X — топологич. пространство, $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра его борелевских подмножеств и μ — конечная неотрицательная регулярная мера на $\mathcal{A}$ (регулярность означает, что $\mu(A) = \sup \{\mu(F) : F \subset A, F \text{ замкнуто}\}$). Пусть, далее, S — сепарабельное метрич. пространство, $\mathcal{B}$ есть σ-алгебра его борелевских подмножеств и f — измеримое отображение $(X, \mathcal{A})$ и $(Y, \mathcal{B})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется замкнутое подмножество $F \subset X$ такое, что $\mu(X \setminus F) < \varepsilon$ и f непрерывно на F (теорема Лузина).

Лит.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры, интегрирование мер, пер. с франц., М., 1967; [4] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962. *В. В. Сазонов.*

ИЗМЕРИМОЕ ПРОСТРАНСТВО (X, A) — множество X с выделенным кольцом или σ-кольцом $\mathcal{A}$ (в частности, алгеброй или σ-алгеброй) его подмножеств.

Примеры: $\mathbb{R}^n$ с кольцом измеримых по Жордану (см. *Жордана мера*) множеств, $\mathbb{R}^n$ с σ-кольцом множеств конечной *Лебега мерой*, топологич. пространство E с σ-алгеброй борелевских множеств.

Лит.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953. *В. В. Сазонов.*

ИЗМЕРИМОЕ РАЗБИЕНИЕ пространства с мерой (M, μ) — разбиение ξ этого пространства на непересекающиеся подмножества (именуемые элементами разбиения), к-рое можно получить как раз-

биение на множества уровня нек-рой измеримой функции (с числовыми значениями) на M. Это определение можно переформулировать в терминах «внутренних» свойств разбиения (см. [1]). В соответствии с общей тенденцией пренебрегать в вопросах теории меры множествами меры нуль часто под И. р. понимают разбиение, измеримое по mod 0, т. е. эквивалентное по mod 0 нек-рому И. р. (два разбиения ξ, η пространства с мерой M эквивалентны по mod 0, если существует такое множество N меры 0, что разбиения пространства $M \setminus N$, состоящие из пересечений с $M \setminus N$ элементов разбиений ξ и η, совпадают).

Хотя приведенное определение имеет смысл для любого пространства с мерой, фактически И. р. рассматривают почти исключительно для *Лебега пространства* (и иногда для пространств, в какой-то степени обладающих свойствами последних, напр. для пространств с совершенной мерой, см. [2], [3]), так как именно в этих пространствах И. р. обладают рядом «хороших» свойств. Так, в этом случае существует система условных мер (или, как говорили раньше [1], каноническая система мер), принадлежащая И. р. Это есть система мер $\mu(\cdot|C)$ на элементах C разбиения ξ, позволяющая представить интегрирование по μ в виде повторного интегрирования: сначала на элементах C осуществляется интегрирование по соответствующим мерам $\mu(\cdot|C)$, а затем полученный результат, к-рый можно рассматривать как функцию на факторпространстве M/ξ, надо проинтегрировать по имеющейся в последнем естественной мере μ_ξ (M/ξ, по определению, имеет своими точками элементы разбиения ξ, а своими измеримыми подмножествами — те, прообразы к-рых при естественной проекции $\pi : M \to M/\xi$ измеримы; мера $\mu_\xi(A) = \mu(\pi^{-1}(A))$). Интерпретируя (M, μ) как пространство элементарных событий в теории вероятностей, можно сказать, что система условных мер является нек-рым «усовершенствованием» условной вероятности, тесно связанным со спецификой пространства Лебега: для произвольных пространств элементарных событий условную вероятность, вообще говоря, нельзя интерпретировать с помощью набора каких-то мер на элементах каких-то разбиений.

Неизмеримые (и неизмеримые по mod 0) разбиения отнюдь не всегда являются «патологическими» объектами, как неизмеримые множества или функции. Напр., разбиение фазового пространства эргодической динамич. системы на ее траектории может иметь вполне «классическое» происхождение; просто его свойства отличны от свойств И. р.

Лит.: [1] Рохлин В. А., «Матем. сб.», 1949, т. 25, № 1, с. 107—50; [2] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [3] Сазонов В. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, № 3, с. 391—414.

Д. В. Аносов.

ИЗМЕРИМЫЙ ПОТОК в пространстве с мерой (M, μ) — семейство $\{T^t\}$ (t пробегает совокупность действительных чисел $\mathbb{R}$) автоморфизмов этого пространства такое, что: 1) $T^t(T^s(x)) = T^{t+s}(x)$ для всех t, $s \in \mathbb{R}$, $x \in M$; 2) отображение $M \times \mathbb{R} \to M$, переводящее (x, t) в $T^t x$, измеримо (мера в $M \times \mathbb{R}$ вводится как прямое произведение меры μ в M и меры Лебега в $\mathbb{R}$). «Автоморфизмы» здесь понимаются в строгом смысле слова (а не по mod 0), т. е. T^t должны быть биекциями $M \to M$, переводящими измеримое множество в измеримое множество той же меры. При использовании автоморфизмов по mod 0 оказывается целесообразным заменить условие 2) условием иного характера, что приводит к понятию *непрерывного потока*. И. п. изучаются в *эргодической теории*.

Д. В. Аносов.

ИЗОБРАЖЕНИЙ МЕТОД, отображений метод,— метод теории потенциала для решения некоторых краевых (граничных) задач для дифференциальных

уравнений с частными производными в области D, при к-ром выполнение краевых (граничных) условий на границе $\partial D = \Gamma$ достигается путем соответствующего подбора нек-рых дополнительных источников поля, расположенных вне D и называемых *источниками-изображениями*.

Наибольшее развитие И. м. получил в электростатике. Пусть, напр., требуется решить *Дирихле задачу* для *Пуассона уравнения* $\Delta u = -2\pi\rho(x, y)$ в полуплоскости $D = \{(x, y): y > 0, \ -\infty < x < +\infty\}$ с заданной на границе $\Gamma = \{(x, y): y = 0, \ -\infty < x < +\infty\}$ функцией $\psi(x)$, т. е. требуется найти потенциал электрич. зарядов плотности $\rho(x, y)$, расположенных в D, при условии, что на Γ поддерживается потенциал $\psi(x)$. Известно, что для решения этой задачи достаточно знать *Грина функцию* $G(x, y; x_0, y_0)$, представляющую собой потенциал единичного точечного заряда в точке $(x_0, y_0) \in D$, когда граница Γ заземлена, т. е. $G(x, 0; x_0, y_0) = 0$. При этом решение $u(x, y)$ исходной задачи выражается через $G(x, y; x_0, y_0)$ следующим образом:

$$u(x, y) = \iint_D \rho(x_0, y_0)\, G(x, y; x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0 + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \psi(x_0) \frac{\partial G(x, y; x_0, 0)}{\partial y_0}\, dx_0. \qquad (1)$$

Потенциал точечного заряда при отсутствии границ записывается в виде фундаментального решения *Лапласа уравнения* $\ln(1/\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$. Добавляя отрицательный единичный заряд-изображение в точке $(x_0, -y_0)$ и составляя сумму потенциалов этих двух зарядов, получают искомую функцию Грина:

$$G(x, y; x_0, y_0) = \\ = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}}. \qquad (2)$$

В случае полосы $D = \{(x, y): 0 < y < b, \ -\infty < x < +\infty\}$, отражая единичный заряд $(x_0, y_0) \in D$ от прямых $y = 0$ и $y = b$, получают бесконечную последовательность зарядов-изображений -1, -1, $+1$, $+1$, ..., расположенных, соответственно, в точках $(x_0, -y_0)$, $(x_0, 2b - y_0)$, $(x_0, -2b + y_0)$, $(x_0, 2b + y_0)$, ... Функция Грина в этом случае будет выражаться в виде бесконечного ряда потенциалов точечных зарядов.

Для области D в виде круга $D = \{(\rho, \varphi): 0 \leqslant \rho < a, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ изображением единичного заряда в точке (ρ_0, φ_0) будет отрицательный единичный заряд, расположенный в точке $(a^2/\rho_0, \varphi_0)$, являющейся отображением точки (ρ_0, φ_0) при помощи *инверсии* относительно окружности $\rho = a$.

Возможны и другие конфигурации границ, составленных из прямых и окружностей, когда решение достигается построением соответствующей последовательности зарядов-изображений.

При решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = -4\pi\rho(x, y, z)$ в полупространстве

$$D = \{(x, y, z): z > 0, \ -\infty < x, y < +\infty\},$$

отражая единичный заряд $(x_0, y_0, z_0) \in D$ от плоскости $z = 0$, вместо (2) получают формулу

$$G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \\ = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}}.$$

В случае шара $D = \{(r, \theta, \varphi): 0 \leqslant r < a, \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ следует применить *Кельвина преобразование*, и изображением единичного заряда в точке $(r_0, \theta_0, \varphi_0) \in D$ будет заряд величины $-a/r_0$, расположенный в точке $(a^2/r_0, \theta_0, \varphi_0)$, являющейся отображением точки $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ при помощи инверсии относительно сферы

$r=a$. Отсюда получается, что если известно решение уравнения Пуассона $\Delta u=-4\pi\rho(r, \theta, \varphi)$ в нек-рой области D, то функция $v(r, \theta, \varphi)=(a/r)u(a^2/r, \theta, \varphi)$ дает решение уравнения Пуассона $\Delta v=-4\pi\rho'(r, \theta, \varphi)$ с плотностью $\rho'(r, \theta, \varphi)=(a/r)^5\rho(a^2/r, \theta, \varphi)$ в области D', являющейся отображением D при инверсии относительно сферы $r=a$. В такой форме И. м. иногда наз. м е т о д о м и н в е р с и и. При применении метода инверсии необходимо обращать внимание на то, что краевые (граничные) условия, вообще говоря, также преобразуются.

Для более сложных пространственных областей, граница к-рых состоит из нескольких плоскостей или сфер, возможно также применение бесконечных последовательностей зарядов-изображений. В комбинации с предельными переходами, когда один или несколько источников удаляются в бесконечность, И. м. допускает решение и более сложных задач таких, напр., как отыскание потенциала электростатич. поля в случае проводящего шара, помещенного в однородном на бесконечности поле.

В случае уравнения Гельмгольца $\Delta u+k^2u=0$ И. м. применим только для областей, ограниченных прямыми, или для пространственных областей, ограниченных плоскостями, с использованием соответствующих фундаментальных решений $H_0^{(1)}(k\rho)$, $H_0^{(2)}(k\rho)$ или e^{ikr}/r, e^{-ikr}/r.

Лит.: [1] Г р и н б е р г Г. А., Избр. вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, М.— Л., 1948; [2] С м а й т В., Электростатика и электродинамика, пер. с англ., М., 1954; [3] К о ч и н Н. Е., К и б е л ь И. А., Р о з е Н. В., Теоретическая гидромеханика, т. 1, М.— Л., 1963.

Е. Д. Соломенцев.

ИЗОГЕНИЯ — эпиморфизм *групповых схем* с конечным ядром. Морфизм групповых схем $f: G\to G'$ над базисной схемой S наз. и з о г е н и е й, если f сюръективен и его ядро $\mathrm{Ker}(f)$ есть плоская конечная групповая S-схема.

В дальнейшем предполагается, что S есть спектр поля k характеристики $p\geqslant 0$. Пусть G групповая схема конечного типа над k и H ее конечная групповая подсхема. Тогда фактор $G|H$ существует, а естественное отображение $G\to G|H$ является И. Обратно, если $f: G\to G'$ — И. групповых схем конечного типа и $H=\mathrm{Ker}(f)$, то $G'=G|H$. Для любой И. $f: G\to G'$ связных коммутативных групповых схем конечного типа существует И. $g: G'\to G$ такая, что композиция gof совпадает с гомоморфизмом n_G умножения на n групповой схемы G. Композиция И. является И. Две групповые схемы G и G' наз. и з о г е н н ы м и, если существует И. $f: G\to G'$. Изогения $f: G\to G'$ наз. с е п а р а б е л ь н о й, если $\mathrm{Ker}(f)$ является этальной групповой схемой над k. Последнее эквивалентно тому, что f есть конечное этальное накрытие. Примером сепарабельной И. служит гомоморфизм n_G, где $(n, p)=1$. Если k — конечное поле, то каждая сепарабельная И. связных коммутативных групповых схем конечного типа $f: G\to G'$ пропускается через И. $\mathfrak{p}: G\to G$, где $\mathfrak{p}=F-\mathrm{id}_G$, а F — *Фробениуса эндоморфизм*. Примером несепарабельной И. является гомоморфизм умножения на $n=p^r$ абелева многообразия A.

Локализация аддитивной категории $A(k)$ абелевых многообразий над полем k относительно И. определяет абелеву категорию $M(k)$, ее объекты наз. а б е л е в ы м и м н о г о о б р а з и я м и с т о ч н о с т ь ю д о и з о г е н и и. Каждый такой объект можно отождествить с абелевым многообразием A, а морфизмами $A\to A'$ в $M(k)$ служат элементы векторного пространства над полем рациональных чисел $\mathrm{Hom}_{A(k)}(A, A')\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$.

И. $f: A\to A'$ определяет изоморфизм соответствующих объектов в $M(k)$. Категория $M(k)$ полупроста: каждый ее объект изоморфен произведению неразло-

жимых объектов. В случае, когда k — конечное поле, имеется полное описание категории $M(k)$ (см. [4]).

Понятие И. определяется также и для формальных групп. Морфизм $f: G \to G'$ формальных групп над полем k наз. И., если его образ в факторкатегории $\Phi(k)$ категории формальных групп над k относительно подкатегории артиновых формальных групп является изоморфизмом. И. групповых схем определяет И. соответствующих формальных пополнений. Имеется описание категории $\Phi(k)$ формальных групп с точностью до И. (см. [1], [5]).

Лит.: [1] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 6, с. 3—90; [2] Мамфорд Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971; [3] Серр Ж., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [4] Тейт Дж., «Математика», 1970, т. 14, в. 6, с. 129—37; [5] Dieudonné J., «Comment. math. helv.», 1954, t. 28, № 1, p. 87—118.

И. В. Долгачев.

ИЗОГОНАЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ — плоская линия, пересекающая кривые заданного на плоскости однопараметрич. семейства под одним и тем же углом. Если

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

— дифференциальное уравнение заданного семейства кривых, то И. т., пересекающая кривые этого семейства под углом α, где $0 < \alpha < \pi$, $\alpha \neq \pi/2$, удовлетворяет одному из двух уравнений:

$$F\left(x, z, \frac{z' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + z' \operatorname{tg}\alpha}\right) = 0, \quad F\left(x, z, \frac{z' + \operatorname{tg}\alpha}{1 - z' \operatorname{tg}\alpha}\right) = 0.$$

В частности, уравнению

$$F\left(x, z, -\frac{1}{z'}\right) = 0 \qquad (2)$$

удовлетворяет ортогональная траектория, т. е. плоская линия, образующая в каждой своей точке прямой угол с проходящей через эту же точку кривой семейства (1). Ортогональные траектории для заданного семейства (1) образуют однопараметрич. семейство плоских кривых — общий интеграл уравнения (2). Напр., если рассмотреть семейство силовых линий плоского электростатич. поля, то семейство ортогональных траекторий будет представлять собой эквипотенциальные линии.

Лит.: [1] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 9 изд., М., 1966.

Н. Х. Розов.

ИЗОГОНЫ И ИЗОЭДРЫ — выпуклые трехмерные многогранники, все многогранные углы к-рых равны (изогоны), или равны все грани (изоэдры); причем группа поворотов (с отражениями) изогона (изоэдра) вокруг центра тяжести переводит любую его вершину (грань) в любую другую его вершину (грань). Каждому изогону соответствует дуальный изоэдр, и обратно. Если выпуклый многогранник является и изогоном и изоэдром, то он правильный многогранник. Комбинаторно разных изогонов имеется 13 специальных и две бесконечные серии, которые могут быть реализованы как полуправильные многогранники.

В. А. Залгаллер.

ИЗОКЛИНА обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$y' = f(x, y) \qquad (*)$$

— множество точек плоскости x, y, в к-рых наклон *направлений поля*, определяемого уравнением (*), один и тот же. Если k — произвольное действительное число, то k-изоклина уравнения (*) есть множество

$$\{(x, y) | f(x, y) = k\}$$

(в общем случае — кривая); в каждой ее точке (ориентированный) угол между осью x и касательной к проходящему через эту точку решению уравнения (*) равен $\operatorname{arctg} k$. Напр., 0-изоклина определяется уравнением $f(x, y) = 0$ и включает в себя те и только те точки плоскости x, y, в к-рых решения уравнения (*)

имеют горизонтальную касательную. k-изоклина уравнения (*) является одновременно решением этого уравнения тогда и только тогда, когда она представляет собой прямую с угловым коэффициентом k.

Приближенное качественное представление о картине поведения интегральных кривых уравнения (*) можно составить, если построить И. данного уравнения для достаточно частого набора значений параметра k и отметить на каждой И. соответствующий наклон интегральных кривых (м е т о д и з о к л и н). Полезно также построить ∞-изоклину, определяемую уравнением $1/f(x, y)=0$; в точках ∞-изоклины интегральные кривые уравнения (*) имеют вертикальную касательную. Точки (локального) экстремума решений уравнения (*) могут лежать только на 0-изоклине, а точки перегиба решений — только на линии

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}+f(x, y)\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}=0.$$

Для уравнения 1-го порядка, не разрешенного относительно производной

$$F(x, y, y')=0,$$

k-изоклина определяется как множество

$$\{(x, y)|F(x, y, k)=0\}.$$

В случае автономной системы 2-го порядка

$$\dot{x}=f(x, y),\ \dot{y}=g(x, y)$$

совокупность точек фазовой плоскости, в к-рых векторы фазовой скорости коллинеарны, есть И. уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Лит.: [1] С т е п а н о в В. В., Курс дифференциальных уравнений, 9 изд., М., 1966.

Н. Х. Розов.

ИЗОЛИРОВАННАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА д л я э л е м е н т а а н а л и т и ч е с к о й ф у н к ц и и $f(z)$ — точка a комплексной плоскости z, относительно к-рой выполняются условия: 1) этот элемент функции $f(z)$ не допускает *аналитического продолжения* по какому-либо пути в точку a; 2) существует такое число $R>0$, что в проколотой окрестности $U=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z-a|<R\}$ точки a аналитич. продолжение элемента $f(z)$ возможно по любому пути.

Если при аналитич. продолжении $f(z)$ вдоль замкнутого пути, расположенного в U и окружающего a, напр. вдоль окружности $|z-a|=\rho$, $0<\rho<R$, получается новый элемент, отличный от исходного, то a наз. *ветвления точкой*, или И. о. т. м н о г о з н а ч н о г о х а р а к т е р а. В противном случае элемент $f(z)$ определяет однозначную аналитич. функцию в U и a наз. И. о. т. о д н о з н а ч н о г о х а р а к т е р а. В проколотой окрестности U И. о. т. a однозначного характера функция $f(z)$ разлагается в *Лорана ряд*:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(z-a)^k \qquad (1)$$

с правильной частью $f_1(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k(z-a)^k$ и главной частью $f_2(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}c_k(z-a)^k$. Поведение аналитич. функции $f(z)$ в проколотой окрестности U И. о. т. однозначного характера определяется в основном главной частью ряда Лорана. Если все коэффициенты главной части равны нулю, то, полагая $f(a)=c_0$, получим однозначную аналитич. функцию в полной окрестности a. Этот случай фактического отсутствия особенности характеризуется также тем, что $f(z)$ ограничена в проколотой окрестности U, или тем, что существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a}f(z)=c_0$, $z\in U$.

Если среди коэффициентов главной части имеется лишь конечное число отличных от нуля и наименьший номер среди них имеет $c_{-m}\neq 0$, то a есть *полюс* по-

рядка m. Полюс a характеризуется также тем, что

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty, \ z \in U.$$

Наконец, если среди коэффициентов главной части имеется бесконечное множество отличных от нуля, то a — *существенно особая точка*. В этом случае не существует конечного или бесконечного предела

$$\lim_{z \to a} f(z), \ z \in U.$$

Для бесконечно удаленной И. о. т. $a = \infty$ элемента $f(z)$ проколотая окрестность имеет вид $U = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < \infty\}$, а ряд Лорана —

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k.$$

Здесь правильная часть $f_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} c_k z^k$, а главная часть $f_2(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k$. С этими условиями описанные выше классификация и признаки типов И. о. т. без дальнейших изменений переносятся на случай $a = \infty$ (см. также *Вычет*). Следует отметить, что элементы различных ветвей *полной аналитической функции* $f(z)$ в одной и той же точке $a \in \mathbb{C}$ могут иметь особенности совершенно различных типов.

Голоморфные функции $f(z)$ многих комплексных переменных, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, при $n \geqslant 2$ не могут иметь И. о. т. При $n \geqslant 2$ особые точки составляют бесконечные множества особенностей.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

ИЗОЛИРОВАННАЯ ПОДГРУППА — подгруппа A группы G такая, что из $g^n \in A$, $g^n \neq 1$, следует $g \in A$; другими словами, если уравнение $x^n = a$ (где $1 \neq a \in A$) разрешимо в G, то его решение принадлежит A. Подгруппа A наз. сильно изолированной, если из $a \in A$ следует, что централизатор элемента a во всей группе лежит в подгруппе A. Изолятором множества M элементов группы наз. минимальная И. п., содержащая M.

В R-группах (т. е. *группах с однозначным извлечением корня*) понятие И. п. соответствует понятию *сервантной подгруппы* абелевой группы. Пересечение изолированных подгрупп в R-группе — И. п. Нормальный делитель H R-группы G изолирован тогда и только тогда, когда факторгруппа G/H является группой без кручения. Центр R-группы изолирован.

В отличие от общей теории групп, в теории упорядоченных групп И. п. называют иногда *выпуклые подгруппы*. *О. А. Иванова.*

ИЗОЛИРОВАННАЯ ТОЧКА подпространства A топологического пространства X — такая точка $a \in A$, что пересечение нек-рой ее окрестности с A состоит из единственной точки a. *А. А. Мальцев.*

ИЗОЛЬ — *рекурсивной эквивалентности тип* изолированного (т. е. конечного или иммунного) множества натуральных чисел. Множество всех И. континуально и является полукольцом относительно операций сложения и умножения, определяемых для произвольных типов рекурсивной эквивалентности. Это полукольцо наз. арифметикой И. Последняя обладает рядом свойств арифметики натуральных чисел, в частности в ней выполнены все универсальные хорновские формулы, элементарные подформулы к-рых представляют собой равенство так наз. комбинаторных функций. Примером такой формулы является закон сокращения: $X + Z = Y + Z \Rightarrow X = Y$. И. рассматриваются как рекурсивные аналоги мощностей конечных по Дедекинду множеств, т. е. множеств, не равномощных никакому своему собственному подмножеству.

А. Л. Семенов.

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР — отображение U метрич. пространства (X, ρ_X) в метрич. пространство (Y, ρ_Y) такое, что

$$\rho_X(x_1, x_2) = \rho_Y(Ux_1, Ux_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in X$. Если X и Y — действительные линейные нормированные пространства, $U(X) = Y$ и $U(0) = 0$, то U — линейный оператор.

И. о. U отображает X на $U(X)$ взаимно однозначно, так что существует обратный оператор U^{-1}, также являющийся И. о. Оператор, сопряженный с линейным И. о., действующим из *одного линейного нормированного* пространства в другое, также будет изометрическим. Линейный И. о., отображающий X на все Y, наз. у н и т а р н ы м о п е р а т о р о м. Условием унитарности линейного оператора, действующего в гильбертовом пространстве H, является равенство $U^* = U^{-1}$. Спектр унитарного оператора расположен на единичной окружности, и имеет место представление

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\, dE_\varphi,$$

где $\{E_\varphi\}$ — соответствующее разложение единицы. И. о., определенный на подпространстве гильбертова пространства со значениями в таком же пространстве, может быть продолжен до унитарного, если ортогональные дополнения области его определения и области его значений имеют одинаковую размерность.

Каждому симметрич. оператору A с областью определения $D_A \subset H$ соответствует И. о.

$$U_A = (A - iI)(A + iI)^{-1},$$

наз. п р е о б р а з о в а н и е м К э л и оператора A. Если A — самосопряженный оператор, то оператор U_A увитарен.

Операторы A и B с общей областью определения D наз. м е т р и ч е с к и р а в н ы м и, если $B = UA$, где U — И. о., то есть если $\|Bx\| = \|Ax\|$ для всех $x \in D$. Такие операторы обладают рядом общих свойств. Для любого ограниченного линейного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве, существует один и только один положительный метрически равный ему оператор, определяемый равенством $B = \sqrt{A^*A}$.

Лит.: [1] А х и е з е р Н. И., Г л а з м а н И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [2] П л е с н е р А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965; [3] M a z u r S., U l a m S., «C.r. Acad. sci.», 1932, t. 194, p. 946—48.

В. И. Соболев.

ИЗОМЕТРИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение f метрического пространства A в метрич. пространство B, сохраняющее расстояние между точками: если $x, y \in A$ и $f(x), f(y) \in B$, то

$$\rho_A(x, y) = \rho_B(f(x), f(y)).$$

И. о. *является* инъективным отображением специального вида, а именно — *погружением*. Если $f(A) = B$, т. е. биективное И. о. наз. и з о м е т р и е й A на B, а про A и B говорят, что они находятся в и з о м е т р и ч е с к о м с о о т в е т с т в и и, или изометричны друг другу. Изометричные пространства гомеоморфны. Если, кроме того, B совпадает с A, то И. о. наз. и з о м е т р и ч е с к и м п р е о б р а з о в а н и е м, а также д в и ж е н и е м пространства A.

Если метрич. пространства A_0 и A_1 являются подмножествами нек-рого топологич. пространства M и существует *деформация* $F_t : A \to B$ такая, что при каждом t отображение F_t является И. о. A_0 на A_t, то $\{A_t\}$ наз. и з о м е т р и ч е с к о й д е ф о р м а ц и е й, или и з г и б а н и е м, A_0 в A_1.

И. о. метрич. линейных пространств является линейным отображением; оно осуществляется (а также и называется) *изометрическим оператором*.

М. И. Войцеховский.

ИЗОМЕТРИЧЕСКОЕ ПОГРУЖЕНИЕ — погружение k-мерного метрич. многообразия M^k в n-мерное риманово пространство V^n, $n \geqslant k$, в виде k-мерной поверхности Ф, при к-ром расстояние между любыми двумя точками на M^k совпадает с расстоянием между их образами, измеренным по поверхности Ф в пространстве V^n. Это определение можно обобщить, если риманово пространство заменить более общим метрич. пространством. Частным случаем И. п. является *изометрическое вложение* — взаимно однозначное погружение.

Основными вопросами теории И. п. являются: 1) проблема возможности И. п. данного многообразия в данное пространство; 2) в случае существования И. п.— проблема его единственности. Эти проблемы рассматриваются при различных условиях на многообразие и его изометрич. образ — гладкости, регулярности, аналитичности, выпуклости и т. д. При каждом из перечисленных условий конкретизация основных вопросов теории И. п. производится в следующих аспектах: а) вопрос глобального И. п. M^k в V^n; б) вопрос локального И. п. M^k в V^n (отыскание И. п. в V^n достаточно малой окрестности отмеченной точки $v \in M^k$); в) в локальном и глобальном случаях отыскание минимального p такого, что M^k погружаемо в евклидово пространство E^{k+p} размерности $k+p$ (число p наз. *классом погружения* многообразия M^k); г) вопросы изгибания И. п.

С аналитич. точки зрения задача нахождения И. п. M^k в V^n равносильна решению системы нелинейных уравнений с частными производными. Для И. п. в E^n эта система имеет вид:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^j} = g_{ij},$$

где $x = \{x^\alpha(u^s)\}$ — искомое И. п., g_{ij} — метрический тензор многообразия M^k в локальных координатах $u^1, \ldots, u^k$. При решении этой системы в глобальном случае используются так наз. свободные отображения x в E^n (см. *Нэша теорема* о неявной функции). В локальных аналитич. задачах место теоремы о неявной функции занимает *Коши — Ковалевской теорема*. Роль свободного отображения и теоремы о неявной функции сохраняется и в общем случае для погружений класса C^r, $s \leqslant r \leqslant \infty$, $r = a$, в римановы и псевдоримановы пространства. И. п. класса C^1 используют иные методы, основанные на деформации погружения, позволяющей менять погружения и следить за изменением метрики. При исследованиях И. п. в E^n используется также система уравнений Гаусса — Петерсона — Кодацци.

Глобальные изометрические погружения. Всякое компактное риманово многообразие M^k класса $C^r (3 \leqslant r \leqslant \infty)$ допускает изометрич. вложение класса C^r в любой шар пространства E^n, где $n \leqslant (3k^2+11k)/2$; если M^k некомпактно, то оно допускает вложение класса C^r в любую часть пространства E^n, где $3 \leqslant r \leqslant \infty$ и $n \leqslant (3k^2+11k)(k+1)/2$ (см. [6]). Размерность пространства E^n снижается в случаях $r = \infty$ и $r = a$: всякое риманово многообразие M^k (компактное или нет, с краем или без края) класса $C^\infty (C^a)$ допускает изометрич. вложение класса $C^\infty (C^a)$ в E^n, где $n \leqslant k(k+1)/2+3k+5$.

Для k-мерного гиперболич. пространства $(k > 2)$ получено в явном виде изометрич. вложение класса C^∞ в E^{6k-5}, а для k-мерного эллиптич. пространства $(k > 2)$ — изометрич. вложение класса C^a в E^n, $n = k(k+3)/2$.

В перечисленных результатах гладкость поверхности Ф не выше, чем гладкость погружаемой метрики. Этот факт не является случайным: именно, всякая k-мерная $(\alpha \leqslant k \leqslant n-1)$ поверхность Ф класса $C^{r,\alpha}, r \geqslant 2$,

$0 \leqslant \alpha < 1$, в E^n является И. п. класса $C^{r,\alpha}$ нек-рого риманова многообразия M^k класса $C^{r,\alpha}$ (см. [8]).

Нижняя граница для размерности пространства E^n, в к-рое можно осуществить И. п. риманова многообразия, дается теоремой: пусть компактное риманово многообразие M^k класса C^4 обладает следующим свойством: в каждой точке M^k существует q-плоскость такая, что в ней все кривизны по всем двумерным направлениям неположительны; тогда M^k не допускает И. п. класса C^4 в любое E^n с $n \leqslant k+q-1$; если условие, наложенное на кривизну многообразия M^k, распространяется на одну точку и $q=n$, то существует И. п. класса C^4 в E^{2k-2}. Так, напр., плоский k-мерный тор не допускает И. п. класса C^4 в E^{2k-1}; если k — степень двойки, то действительное проективное пространство $\mathbb{R}P^k$, снабженное метрикой со всюду положительной скалярной кривизной, в частности k-мерное эллиптич. пространство, не допускает изометрич. вложения класса C^2 в E^{2k}.

Результаты, относящиеся к И. п. класса C^1, резко отличаются от предыдущих. Они формулируются в следующем виде: если компактное риманово многообразие M^k класса C^0 (с границей или без нее) допускает погружение класса C^1 в E^n при $n \geqslant k+1$, то оно также допускает И. п. класса C^1 в E^n; если некомпактное риманово многообразие M^k класса C^0 допускает к о р о т к о е п о г р у ж е н и е (т. е. не удлиняющее в каждой точке линейный элемент) класса C^1 в E^n, $n \geqslant k+1$, не пересекающее свое предельное множество, то оно допускает также И. п. класса C^1 в E^n (см. [7]) (здесь предельное множество погружения многообразия M^k в E^n есть совокупность точек x пространства E^n, для каждой из к-рых в M^k существует расходящаяся последовательность, образ к-рой сходится в E^n к x). В частности, любое компактное риманово многообразие M^k класса C^0 (с границей или без нее) допускает И. п. класса C^1 в E^{2k}; любое некомпактное риманово многообразие класса C^0 допускает И. п. класса C^1 в E^{2k+1}.

Если И. п. (изометрич. вложения) класса C^1 риманова многообразия M^k в E^n с $n>k$ можно соединить короткой регулярной гомотопией (короткой диффеотопией), то их можно соединить изгибанием, составленным из И. п. (изометрич. вложений) класса C^1. В частности, в компактном случае И. п. (изометрич. вложения) класса C^1 тогда и только тогда можно соединить изгибанием, составленным из И. п. (изометрич. вложений) класса C^1, когда они регулярно гомотопны (диффеотопны).

Л о к а л ь н ы е и з о м е т р и ч е с к и е п о г р у ж е н и я. В 1873 Л. Шлефли (L. Schläfli) высказал гипотезу, согласно к-рой всякое риманово многообразие размерности k допускает локальное И. п. в евклидово пространство E^n, где $n=k(k+1)/2$. Эта гипотеза доказана лишь для аналитич. многообразий (см. *Жане теорема*); более того, во всяком римановом многообразии M^k класса C^a с отмеченной точкой существует окрестность отмеченной точки, допускающая изометрич. вложение класса C^a в E^n, $n=k(k+1)/2$. В римановом пространстве M^k класса C^∞ с отмеченной точкой существует окрестность отмеченной точки, допускающая изометрич. вложение класса C^∞ в E^n, где $n=k(k+1)/2+k$ (см. [7]). С другой стороны, у всякого риманова многообразия класса C^0 с отмеченной точкой существует окрестность ее, допускающая изометрич. вложение класса C^1 в E^{k+1}.

Несколько иное направление составляет отыскание условий, при к-рых данное многообразие M имеет И. п. в E^n, где $n<k(k+1)/2$. Это связано с тем, что не всякое риманово многообразие M^k допускает И. п. в E^n: при $r \geqslant k^2(k+1)/2-k$, $r-1 \leqslant l \leqslant \infty$, множество римановых метрик, локально индуцируемых на гладком многообразии M^k с отмеченной точкой локальными вложениями класса C^r в E^n, $n<k(k+1)/2$, нигде не плотно во множестве всех римановых метрик класса

C^l на M^k, снабженном обычной C^l-топологией; при $r=2$ и $2\leqslant l\leqslant\infty$ утверждение остается верным, если n и k связаны неравенством $n<\frac{1}{3}\{k(k+1)/2+k+1\}$.

При решении задачи об определении класса (см. выше) И. п. многообразия минимальное p, найденное в локальной постановке, оценивает снизу значение p и для глобального И. п. Однако точное значение наименьшего p, при к-ром любое многообразие M^k, $k>2$, класса C^r, $2\leqslant r\leqslant\infty$ допускает И. п. класса C^r в E^{k+p}, неизвестно. Имеются нек-рые частные приемы вычисления класса И. п. данного риманова многообразия M^k в пространство E^n. Так, $p=0$ в том и только в том случае, если тензор кривизны многообразия M^k тождественно равен нулю. Существует алгебраич. критерий, позволяющий установить, будет ли класс И. п. данного многообразия равен 1, и основанный на том факте, что для метрик класса 1 при нек-рых дополнительных условиях уравнения Петерсона — Кодацци являются следствием уравнений Гаусса [11]. В частности, метрики постоянной положительной кривизны имеют класс 1 и реализуются при $k>3$ в виде гиперсфер евклидова пространства. Но если *Риччи кривизна* для M^k равна нулю, то $p\neq1$.

Почти все изложенные результаты обобщаются на И. п. одного риманова пространства в другое. Так, напр., обстоит дело с погружениями класса C^1, с локальными И. п., с достаточно гладкими И. п. k-мерных многообразий в V^n большой размерности, со связями между порядками гладкости поверхности и ее метрики и т. д.

Задачи И. п. переносятся на псевдоримановы многообразия. В этом случае кроме размерностей k и n учитываются размерности k_+ и $k_-=k-k_+$ положительной и отрицательной части метрич. тензора на погружаемом многообразии M^k и соответствующие размерности n_+ и $n_-=n-n_+$ объемлющего пространства V^n. Так, теорема Жане сохраняется в псевдоримановом случае при $n\geqslant k(k+1)/2$, $n_+\geqslant k_+$, $n_-\geqslant k_-$.

И з о м е т р и ч е с к и е п о г р у ж е н и я д в у м е р н ы х м н о г о о б р а з и й. Многие задачи этого типа получили законченное решение в том смысле, что пространство, в к-ром строится погружение, имеет минимальную размерность. Здесь разработаны специальные методы решения, основанные на общей теории нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными и топологогеометрич. соображениях.

Вейля проблема, поставленная в 1916, гласит: допускает ли двумерное риманово многообразие M^2 И. п. в E^3, если оно гомеоморфно сфере и имеет положительную гауссову кривизну? Полное решение проблемы Вейля, обобщенной в том смысле, что речь идет об И. п. M^2 в трехмерное риманово пространство V^3, дано А. В. Погореловым [3]: пусть V^3 — полное трехмерное риманово пространство, M^2_+ — замкнутое гомеоморфное сфере риманово многообразие с гауссовой кривизной, всюду большей нек-рой постоянной k_0 (большей, меньшей или равной нулю); тогда, если кривизна пространства всюду меньше k_0, то M^2_+ допускает И. п. в виде регулярной поверхности Ф. Это погружение можно осуществить так, чтобы данный двумерный элемент α многообразия M^k (точка и пучок направлений в ней) совпал бы с данным изометричным α двумерным элементом α' в пространстве V^3, и поверхность располагалась бы по заданную сторону от площадки элемента α'. Если метрика пространства V^3 и многообразия M^2_+ принадлежат классу C^r, $r\geqslant3$, то поверхность Ф принадлежит по крайней мере классу $C^{r-1,\nu}$, $0<\nu<1$. Поверхность двумерным элементом определяется однозначно. Любые два И. п. класса C^r, $r\geqslant3$, $r=a$, в V^3 можно соединить изгибанием, составленным из И. п. того же класса.

С совершенно иной точки зрения проблема Вейля исследована А. Д. Александровым, к-рый построил теорию (нерегулярных) двумерных многообразий с *выпуклой метрикой* [4] (такие многообразия можно определить путем предельного перехода от регулярных многообразий с положительной гауссовой кривизной) и наметил следующий план решения проблемы Вейля: 1) обобщить постановку проблемы, беря в качестве M^2 многообразие с произвольной, вообще говоря, нерегулярной выпуклой метрикой; 2) затем установить регулярность И. п. в зависимости от регулярности метрики M^2. Осуществление (им же) первой части этого плана привело к исчерпывающему результату: всякое гомеоморфное сфере многообразие с выпуклой метрикой допускает И. п. в E^3 в виде замкнутой выпуклой поверхности. Реализация второй части плана проведена А. В. Погореловым в [3], где полностью решен вопрос о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой: если выпуклая поверхность $\Phi\subset E^3$ имеет метрику класса $C^{k,\alpha}$, $k\geqslant 2$, $0<\alpha<1$, и положительную гауссову кривизну, то Φ принадлежит классу $C^{k,\alpha}$. Если метрика поверхности Φ — аналитическая, то и поверхность Φ — аналитическая. Сходные теоремы имеют место для выпуклых поверхностей в пространстве постоянной кривизны. При определенных условиях существуют И. п. двумерных римановых многообразий положительной гауссовой кривизны, гомеоморфных плоскости или кругу. Наряду с этим построены примеры аналитич. метрик положительной кривизны, заданных в круге и не допускающих И. п. класса C^2 в E^3.

Теорема Гильберта о непогружаемости класса C^2 в E^3 плоскости Лобачевского естественно привела к вопросу, погружаются ли в E^3 какие-либо полные двумерные метрики с кривизной, ограниченной сверху отрицательной константой (так наз. м е т р и к и т и п а Λ)? Решение этой проблемы дано Н. В. Ефимовым [14]: если Φ — полная поверхность класса C^2 в E^3 с гауссовой кривизной $K(x)$, то $\sup\limits_{x\in\Phi} K(x)\geqslant 0$, так что, в частности, метрики типа Λ не допускают И. п. в E^3. В связи с этой теоремой представляет интерес вопрос о том, какие части метрик типа Λ (т. е. области двумерного многообразия, на к-ром задается двумерная метрика) могут быть погружены в E^3. Определенный ответ на этот вопрос получен в [15]. Пусть в бесконечной полосе

$$\Pi_a=\{0\leqslant x\leqslant a,\quad -\infty<y<+\infty\}$$

плоскости E^2 с декартовыми координатами x, y задана форма $ds^2=dx^2+B^2(x,\,y)\,dy^2$, причем функция $B\in C^{r,1}$, $r\geqslant 3$, и обладает следующими свойствами: а) она сама, все ее производные до r-го порядка, а также константы Липшица по y для производных по y от производных $(r-1)$-го порядка ограничены в Π_a; б) $\inf B>0$; в) гауссова кривизна $K=-B_{xx}/B\leqslant-\beta^2=\mathrm{const}<0$. Тогда форма ds^2 порождает на многообразии с краем Π_a риманову структуру класса $C^{r,1}$, и полученное римановo многообразие допускает И. п. класса $C^{r,1}$, $r\geqslant 3$, в E^3. В частности, существует И. п. любого геодезич. круга с произвольной (регулярной) метрикой отрицательной кривизны. Имеется ряд теорем об И. п. в E^3 некомпактных частей метрик отрицательной кривизны [5]. Даны также оценки размеров области, на к-рую однозначно проектируется поверхность отрицательной (и отделенной от нуля) кривизны.

Так как метрики типа Λ в целом в E^3 не погружаются, то ставится вопрос об И. п. этих метрик в евклидовы пространства больших размерностей. В этом направлении имеются лишь частные результаты; так, напр., существует изометрич. вложение класса C^∞ плоскости Лобачевского в E^6 и И. п. в E^5; дан пример регулярной

метрики типа Λ, допускающей И. п. в E^4; неизвестно, однако, допускает ли плоскость Лобачевского И. п. класса C^r, $r\geqslant 2$, в E^4.

Вопрос И. п. в E^3 метрик знакопеременной кривизны остается открытым даже в случае локальной проблемы. Так, напр., построен [16] пример двумерного риманова многообразия класса $C^{2,1}$, не допускающего локального И. п. класса $C^{2,1}$ в E^3. Вместе с тем задача о реализации аналитич. метрик знакопеременной кривизны решается следующей теоремой [17]: пусть в прямоугольнике $\Pi_{ab}=\{0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b\}$ плоскости E^2 задана метрика $ds^2=dx^2+B^2(x,y)\,dy^2$ и пусть $B(x,y)$ — аналитич. функция в нек-ром открытом прямоугольнике, содержащем $\Pi_{a,b}$; тогда аналитическое риманово многообразие с краем, порожденное на Π_{ab} заданной метрикой, допускает аналитич. И. п. в E^3. Имеется ряд результатов, касающихся И. п. регулярных метрик знакопеременной кривизны в евклидово пространство более высокой (но близкой к трем) размерности. Так, если M^2 — полное риманово многообразие класса $C^{3,\alpha}$, гомеоморфное плоскости, то любая его компактная часть допускает И. п. класса $C^{2,\alpha}$ в E^4; гомеоморфное тору риманово многообразие также допускает И. п. в E^4. Всякое компактное двумерное риманово многообразие класса $C^\infty(C^a)$ допускает И. п. (и даже вложение) класса $C^\infty(C^a)$ в E^{10}, а если оно не имеет замкнутых компонент, то — в E^9. Двумерная сфера с произвольной римановой метрикой класса C^∞ допускает И. п. класса C^∞ в E^7, а поверхность Клейна и лист Мёбиуса — И. п. в E^4.

Если отказаться от регулярности погружения, то всякая двумерная риманова метрика класса C^r, $r\geqslant 0$, допускает И. п. класса C^1 в E^3. Однако при этом будут нарушены обычные связи между внутренней и внешней геометрией поверхности, реализующей метрику. Построено локальное И. п. метрики двумерной сферы в виде локально невыпуклой поверхности в E^3 класса $C^{1,\alpha}$ при любом $\alpha<{}^1/_{13}$ и аналогичное И. п. в целом при $\alpha<{}^1/_{25}$. С другой стороны, если поверхность Φ принадлежит классу $C^{1,\alpha}$, $\alpha>{}^2/_3$, то поверхность Φ, имеющая знакопостоянную внутреннюю кривизну, будет иметь ограниченную внешнюю кривизну. В частности, если внутренняя кривизна Φ положительна, то Φ будет локально выпуклой поверхностью, и если сверх того метрика поверхности регулярна, то регулярна и сама поверхность. Таким образом, нижняя грань значений α, при к-рых сохраняются связи между внутренней и внешней геометрией поверхности Φ класса $C^{1,\alpha}$ со знакопостоянной внутренней кривизной, принадлежит отрезку $[{}^1/_{13},\ {}^2/_3]$. Наконец, все ориентируемые многообразия ограниченной внешней кривизны, не имеющие точек с кривизной 2π, допускают изометрич. вложения в E^3 в виде дифференцируемых поверхностей. При исследовании нерегулярных И. п. изучались также кусочно линейные И. п. кусочно линейных метрик: так, всякая развертка, гомеоморфная замкнутой области на ориентируемой замкнутой поверхности, может быть изометрич. вложена в E^3 в виде многогранника.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., в кн.: Тр. 4 Всесоюзного математического съезда, т. 1, Л., 1963, с. 86—99; [2] Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е., Введение в дифференциальную геометрию «в целом», М., 1973; [3] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969; [4] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.— Л., 1948; [5] Позняк Э. Г., Шикин Е. В., в сб.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, с. 171—207; [6] Нэш Дж., «Успехи матем. наук», 1971, т. 36, в. 4, с. 173—216; [7] Громов М. Л., Рохлин В. А., там же, 1970, т. 25, в. 5, с. 3—62; [8] Сабитов И. Х., Шефель С. З., «Сиб. матем. ж.», 1976, т. 17, № 4, с. 916—25; [9] Ôtsuki T., «J. Math. Soc. Japan», 1954, v. 6, p. 221—34; [10] Нэш Дж., «Математика», 1957, т. 1, № 2, с. 3—16; [11] Розенсон Н. А., «Изв. АН СССР. Сер. Матем.», 1943, т. 7, с. 253—84; [12] Friedman A., «J. Math., Mech.», 1961, v. 10, p. 625—49; [13] Сабитов И. Х., «Сиб. матем. ж.», 1976, т. 17,

№ 4, с. 907—15; [14] Ефимов Н. В., «Матем. сб.», 1964, т. 64, № 2, с. 286—320; [15] Позняк Э. Г., «Укр. геометр. сб.», 1966, в. 3, с. 78—92; [16] Погорелов А. В., «Докл. АН СССР», 1971, т. 198, № 1, с. 42—43; [17] Позняк Э. Г., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 4, с. 47—76; [18] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А., «Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ. и астрон.», 1960, т. 7, № 2, с. 66—80.

В. Т. Фоменко.

ИЗОМЕТРИЧНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ — поверхности в евклидовом или римановом пространстве такие, что между ними можно установить взаимно однозначное точечное соответствие, при к-ром каждая спрямляемая кривая одной из поверхностей имеет своим образом тоже спрямляемую кривую и той же длины. Другими словами, И. п. характеризуются (попарным) изометрич. соответствием — изометрией (см. *Изометрическое отображение*) относительно *внутренних метрик*, индуцированных на них метрикой объемлющего пространства. Важнейший пример И. п.— совокупность поверхностей, полученных *изгибанием* данной поверхности.

Если изометрия поверхностей влечет их равенство, точнее, если для любой поверхности F из нек-рого класса K, изометричной поверхности F_0, пространственные расстояния между соответствующими по изометрии точками F и F_0 равны, то F_0 наз. однозначно определенной, или для F_0 имеет место однозначная определенность (внутренней метрикой) в классе K.

Понятие И. п. обобщается на более общие категории метрич. пространств и их подмножеств.

М. И. Войцеховский.

ИЗОМОРФИЗМ — соответствие (отношение) между объектами или системами объектов, выражающее в некотором смысле тождество их строения. И. в произвольной категории есть обратимый морфизм, т. е. морфизм φ, для к-рого существует такой морфизм φ^{-1}, что произведение $\varphi^{-1}\varphi=\varphi\varphi^{-1}=\varepsilon$ — единичный морфизм.

Понятие И. возникло в математике применительно к конкретным алгебраич. системам (прежде всего к группам) и было естественным образом распространено на более широкий класс математич. структур. Классич. примером изоморфных, «одинаково устроенных» систем могут служить множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел с определенной на нем операцией сложения и множество P положительных действительных чисел с заданной на нем операцией умножения.

Пусть A и A' произвольные однотипные *алгебраические системы*, записанные в сигнатуре

$$\{F_i\colon\ i\in I\}\cup\{P_j,\ j\in J\}$$

с функциональными символами F_i, $i\in I$ и предикатными символами P_j, $j\in J$:

$$A=\langle A;\ \{F_i\colon\ i\in I\},\ \{P_j\colon\ j\in J\}\rangle,$$
$$A'=\langle A';\ \{F_i\colon\ i\in I\},\ \{P_j\colon\ j\in J\}\rangle.$$

Изоморфизмом, или изоморфным отображением, системы A на систему A' наз. взаимно однозначное отображение φ множества A на множество A', обладающее свойствами:

$$\varphi\left(F_i\left(a_1,\ \ldots,\ a_{n_i}\right)\right)=F_i\left(\varphi\left(a_1\right),\ \ldots,\ \varphi\left(a_{n_i}\right)\right),$$

$$P_j\left(a_1,\ \ldots,\ a_{m_j}\right)\Leftrightarrow P_j\left(\varphi\left(a_1\right),\ \ldots,\ \varphi\left(a_{m_j}\right)\right)$$

для всех элементов $a_1, a_2, \ldots$ из A и всех $i\in I, j\in J$. Таким образом, во всякой категории алгебраич. систем И. есть *гомоморфизм*, являющийся *биекцией*. И. алгебраич. системы на себя наз. автоморфизмом.

Отношение И. обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, т. е. является отношением эквивалентности, разбивающим любое множество, на к-ром оно определено, на непересекающиеся классы эквивалентности — классы попарно изоморфных систем. Класс алгебраич. систем, содержащий вместе со всякой системой все ей изоморфные, наз. абстрактным классом.

О. А. Иванова, Д. М. Смирнов.

ИЗОМОРФИЗМА ПРОБЛЕМА — задача отыскания *алгоритма*, позволяющего по любой паре эффективно заданных *алгебраических систем* из данного класса установить, изоморфны они или нет. Частная И. п. для фиксированной алгебраич. системы A состоит в отыскании алгоритма, распознающего по эффективному заданию алгебраич. системы из рассматриваемого класса, изоморфна она системе A или нет. Положительное решение (частной) И. п. состоит в указании искомого алгоритма (И. п. разрешима), отрицательное — в доказательстве того, что искомого алгоритма нет (И. п. неразрешима). Обычно И. п. ставится для алгебр, задаваемых образующими и определяющими соотношениями.

Для многих важных классов алгебр И. п. неразрешима. Доказана неразрешимость частной И. п. для произвольной конечно определенной полугруппы в классе всех конечно определенных полугрупп [2] и частной И. п. для произвольной конечно определенной группы в классе всех конечно определенных групп [1]. В классе всех групп из многообразия n-ступенно разрешимых групп, задаваемых в этом многообразии конечным числом образующих и определяющих соотношений, при $n \geqslant 7$ И. п. также неразрешима [3].

И. п. разрешима в классе всех конечных конечно определенных алгебр фиксированной сигнатуры, в классе абелевых групп.

Открытыми остаются пока (к 1978) И. п. для нильпотентных групп ступени 2, групп с одним определяющим соотношением. И. п. для групп связана с алгоритмич. проблемами топологии.

Лит.: [1] Адян С. И., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1957, т. 6, с. 231—98; [2] Марков А. А., Теория алгорифмов, М.— Л., 1954 (Тр. матем. ин-та АН СССР, т. 42); [3] Киркинский А. С., Ремесленников В. Н., «Матем. заметки», 1975, т. 18, № 3, с. 437—43.

А. Л. Семенов.

ИЗООПТИЧЕСКАЯ КРИВАЯ — плоская кривая, представляющая собой траекторию вершины данного угла γ, к-рый перемещается в плоскости так, что стороны его при любом положении угла касаются заданной кривой. Если $\gamma = \pi/2$, то И. к. наз. ортооптической кривой. Напр., ортооптич. кривая эллипса — окружность.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА — одна из основных задач классического вариационного исчисления. И. з. состоит в минимизации функционала:

$$J_0(y) = \int_{x_1}^{x_2} f_0(x, y, y')\, dx$$

при ограничениях вида

$$J_i(y) = \int_{x_1}^{x_2} f_i(x, y, y')\, dx = c_i; \quad f_i\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

и нек-рых краевых условиях.

И. з. приводится к *Лагранжа задаче* при помощи введения новых переменных z_i, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$\dot{z}_i = f_i(x, y, y'), \quad i = 1, \ldots, m,$$

и граничным условиям

$$z_i(x_1) = 0, \quad z_i(x_2) = c_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Необходимые условия оптимальности И. з. имеют тот же вид, что и для простейшей задачи вариационного исчисления относительно *Лагранжа функции*:

$$L(x, y, y', \lambda_0, \ldots, \lambda_m) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x, y, y').$$

Название «И. з.» происходит от следующей классической задачи: среди всех замкнутых линий на плоскости с заданным периметром найти линию, к-рая ограничивает наибольшую площадь.

Лит.: [1] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [2] Цлаф Л. Я., Вариационное исчисление и интегральные уравнения, 2 изд., М., 1970; [3] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950.

И. Б. Вапнярский.

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО (в геометрии и физике) — общий термин для обозначения неравенства $4\pi V \leqslant F^2$ между площадью V и периметром F плоской области, для разнообразных его обобщений и для других неравенств между геометрич. характеристиками фигур, множеств, многообразий. К И. н. относят также оценки величин физич. происхождения (моменты инерции, жесткость кручения упругой балки, основная частота мембраны, электростатич. емкость и др.) через геометрич. характеристики. Точное И. н. эквивалентно решению нек-рой экстремальной задачи. И. н. могут связывать как две, так и большее число величин.

О наиболее известном И. н.— классическом, его аналогах в пространствах Минковского M^n, Лобачевского L^n, сферическом S^n и его уточнениях см. статью *Изопериметрическое неравенство классическое.*

Обширная сводка И. н. между элементами простейших фигур — главным образом многоугольников — имеется в [1]. Такие И. н. наз. геометрическими неравенствами.

Элементарные И. н. между такими параметрами множеств в R^n, как объем V, диаметр D, радиус R наименьшего описанного шара и т. п., см. в [2], [3]. Среди них: неравенство Юнга:

$$R \leqslant \left(\frac{n}{2n+2}\right)^{1/2} D;$$

неравенство Гейла:

$$l \leqslant \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{1/2} D,$$

где l — длина ребра наименьшего описанного правильного симплекса; неравенство Бибербаха:

$$V \leqslant 2^{-n} v_n D^n;$$

неравенство Лумиса — Уитни:

$$V \leqslant \prod_{i=1}^{\lambda} V_i^{n/k\lambda},$$

где V_i — k-мерный объем проекции множества на i-ю из $\lambda = C_n^k$ попарно различных k-мерных координатных плоскостей для декартовых координат. Первые три неравенства допускают обобщения на пространства M^n, L^n, S^n (см. [4], [5]). В неравенстве Бибербаха диаметр может быть заменен средней шириной (см. [5]).

В связи с задачами *размещения* и *покрытия* рассматривались И. п., специфичные для многогранников, с привлечением числа или суммы длин ребер и т. п. (см. [6]).

Для выпуклых тел многие И. н. (в том числе классическое И. н. и серия неравенств между интегралами от симметрич. функций главных кривизн) являются частными случаями неравенств между смешанными объемами (см. *Смешанных объемов теория*, *Минковского неравенство*).

Использование И. н., как оценок одних параметров фигур через другие, вышло за рамки геометрии. При этом в математич. физике, теории функций комплексного переменного, функциональном анализе, теории приближений функций, вариационном исчислении обогатился сам класс И. н. Заметно усложняются И. н. в римановой геометрии.

В математич. физике И. н. возникли (сначала в виде предположений) в работах А. Сен-Венана (A. Saint-Venant, 1856):

$$2\pi P \leqslant V^2,$$

где P — жесткость кручения призматической упругой балки; Рэлея (Rayleigh, 1877):

$$\Lambda^2 \leqslant \pi j^2 V^{-1},$$

где Λ — основная частота мембраны, j — первый положительный корень бесселевой функции $J_0(x)$; в работах А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1903):

$$3V \leqslant 4\pi c^3,$$

где c — электростатич. емкость тела. V в этих неравенствах, соответственно, площадь сечения балки, площадь мембраны, объем тела. Многочисленные результаты такого рода подытожены в [7] и [8]. Нек-рые оценки для первого собственного числа Λ^{-1} оператора Лапласа на замкнутых римановых многообразиях имеются в [9].

В функциональном анализе в терминах И. н. (связывающих меры и емкости) были даны (см. [10], [11]) условия ограниченности и компактности операторов вложения (см. *Вложения теоремы*) для пространств Соболева.

Например, оценка

$$\left(\int_{R^n} |u|^q \, d\mu \right)^{n/q} \leqslant c \int_{R^n} (\nabla u)^2 \, dx,$$

где μ — неотрицательная мера, $q \geqslant 2$, $n > 2$, справедлива для всех $u \in C_0^\infty(R^n)$ в том и только в том случае, когда для всех компактов $e \subset R^n$ выполняется И. н.:

$$\mu^{2/q}(e) \leqslant c_1 \operatorname{cap}(e).$$

Здесь $\operatorname{cap}(\cdot)$ — емкость Винера (см. *Емкость* множества).

И. н. для объема и площади применяются при доказательстве априорных оценок решений линейных и квазилинейных эллиптич. уравнений (см. [12], [26]).

Специфич. И. н. возникают для выпуклых тел пространства Минковского в связи с теорией приближения функций (см. *Самопериметр*, *Поперечник*).

В теории конформных и квазиконформных отображений применение И. н. является обычным приемом. Примером конформно-инвариантного И. н. служит приводимое ниже неравенство (4).

И. н., включающие среднюю кривизну подмногообразия, в частности для минимальных поверхностей, играют важную роль при решении *Плато задачи*.

В римановой геометрии неоднородных пространств обобщения классического И. н. детально изучены только в двумерном случае. Пусть M — односвязное компактное двумерное многообразие с краем и положительная часть ω^+ интегральной кривизны M меньше, чем 2π.

Тогда (см. [13]):

$$2(2\pi - \omega^+) V \leqslant F^2. \qquad (1)$$

И. п. (1) справедливо и для более общих, чем римановы, *двумерных многообразий ограниченной кривизны*. Равенство в (1) достигается на нерегулярном объекте — области, изометричной боковой поверхности прямого кругового конуса с полным углом $2\pi - \omega^+$ вокруг вершины. С помощью (1) устанавливаются оценки длины кривой, умещающейся в области, в зависимости от F, ω^+ и собственного поворота (*извивания кривой*). В частности, для геодезической длины L

$$L\left(1 + \cos\tfrac{1}{2}\omega^+\right) \leqslant F \text{ при } \omega^+ \leqslant \pi,$$

$$L \sin\tfrac{1}{2}\omega^+ \leqslant F \text{ при } \pi \leqslant \omega^+ < 2\pi.$$

И. н. (1) является частным случаем оценки

$$F^2 + 2(\omega_a^+ - 2\pi\chi) V + aV^2 \geqslant 0, \qquad (2)$$

где a — любое действительное число, χ — эйлерова ха-

рактеристика компактной области с краем, $\omega^+ = \int (K-a)^+ dV$, а K — гауссова кривизна. К И. н. (2) примыкают оценки для площади t-окрестности границы области и для наибольшего удаления точек области от границы (см. [14]). Если поверхность M является гладким подмногообразием в R^3, то оценки (1), (2) дополняются И. н., включающими внешние характеристики поверхности. Для замкнутых поверхностей из интегральных тождеств (см. [15]) следует точное И. н.

$$V \leqslant 2R^2 (\omega^+ - \pi\chi),$$

где R — радиус шара в R^3, содержащего M. Сходные неравенства (не точные) получены и для поверхностей с краем (см. [16]). В частности, для односвязной седловой поверхности в $\mathbb{R}^n$ с границей длины F:

$$V \leqslant CF^2, \quad V \leqslant CF^{2-\varepsilon} R^{\varepsilon},$$

$$\frac{1}{7} > \varepsilon = \text{const} > 0.$$

Упомянутые неравенства остаются справедливыми и для общих (нерегулярных) поверхностей в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, если вместо ω^+ ввести в рассмотрение внешнюю положительную кривизну — меру в множестве локально опорных плоскостей (см. [16]).

Для n-мерного риманова пространства V^n И. н., как правило, связаны с односторонними ограничениями на секционную кривизну или кривизну Риччи. Простейшей является оценка объема $V(t)$ шара радиуса t в V^n через объем $v(t, K)$ шара того же радиуса в полном односвязном пространстве постоянной кривизны K:

$$V(t) \leqslant v(t, K), \tag{3}$$

где $(n-1)K$ есть минимальное значение кривизны Риччи в V^n; если $K>0$, то предполагается, что $t \leqslant \pi/\sqrt{K}$ (см. [17]). Аналогичное И. н. справедливо для трубчатой t-окрестности p-мерного подмногообразия в V^n, $0 \leqslant p < n$; в таком И. н. (вместо кривизны Риччи) участвуют минимум секционных кривизн V^n и максимум нормальных кривизн подмногообразия (см. [18]).

Если верхняя грань $\bar{K}$ секционных кривизн отрицательна, то объем V замкнутого многообразия оценивается снизу через $\bar{K}$ (см. [19]). Для области M в полном односвязном V^n при этом имеет место линейное И. н.

$$(n-1)\sqrt{-K}\, V \leqslant F,$$

где F есть $(n-1)$-мерная площадь границы M, а также И. н.

$$V^{\frac{n-1}{n}} \leqslant c(n) F,$$

точное значение $c(n)$ неизвестно.

В пространствах неотрицательной кривизны для выпуклых областей M получен ряд оценок, обобщающих И. н. для выпуклых тел в $\mathbb{R}^n$ (см. [20], [21]). Так,

$$n^{-1} rF \leqslant V \leqslant rF,$$

где r — наибольшее удаление точек M до границы. Если в M нижняя грань секционных кривизн $\underline{K}>0$, то $r\sqrt{\underline{K}} < \pi$ и левое неравенство уточняется:

$$F \sin^{1/n} r\sqrt{\underline{K}} \int_0^r \sin^{n-1} t\sqrt{\underline{K}}\, dt \leqslant V.$$

Справедлива оценка $rH \leqslant F$, где H — интегральная средняя кривизна. Для трехмерного случая верно И. н.:

$$2\pi\chi r \leqslant H + \Omega,$$

где χ — эйлерова характеристика границы M, а Ω — интегральная скалярная кривизна M.

В классическом И. н. площадь оценивается сверху. Для замкнутых неодносвязных поверхностей площадь может быть оценена снизу через длину λ кратчайшей негомотопной нулю петли

$$\lambda^2 C(\chi) \leqslant V. \qquad (4)$$

Точное значение $C(\chi)$ известно лишь для тора ($=\sqrt{3}/2$) и проективной плоскости ($=2/\pi$). Неравенство (4) является следствием И. н. (см. [22]):

$$\lambda_e \leqslant C^{-1}(\chi) \qquad (4')$$

для экстремальной длины λ_e семейства негомотопных нулю петель.

Вопрос об аналогичных неравенствах для V^n при $n>2$ обсуждается в [22]. Если M — топологический n-мерный куб с внутренней метрикой g, то его n-объем

$$V \geqslant \prod_{i=1}^{n} g_i,$$

где g_i — расстояние в метрике g между i-й парой противоположных $(n-1)$-мерных граней. Подробнее см. [24], [25].

В теории минимальных и родственных им поверхностей получен ряд И. н., к-рые справедливы не только для гладких k-мерных подмногообразий в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant k \geqslant 2$, но и для более общих k-мерных «пленок»: подмногообразий с особенностями, потоков и др. Так, в [26], [27] установлено неравенство

$$V \leqslant C(k)\,(F + H)^{k/(k-1)}, \qquad (5)$$

где F — $(k-1)$-площадь границы, а H — интеграл от модуля средней кривизны h пленки. Если $k=2$, то при условии $\alpha = 2 - \max|h| \operatorname{diam} M > 0$ выполняется следующее И. н.:

$$4\pi V \leqslant (1-\alpha)^{-1} F^2.$$

К И. н. (5) по методам доказательств и применениям примыкают оценки снизу для объема $V(t)$ пересечения k-пленки M с шаром радиуса t с центром $p \in M$. Так, для минимальной поверхности M функция $t^{-k}V(t)$ возрастает при всех $t < d(x, \partial M)$. Нек-рые обобщения для минимальных пленок в V^n (и для пленок при условии $|h| \leqslant \text{const}$) см. [27], [28].

Лит.: [1] Bottema O., Geometric inequalities, Groningen, 1969; [2] Хадвигер Г., Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, пер. с нем., М., 1966; [3] Bonnesen T., Fenchel W., Theorie der konvexen Körper, B., 1934; [4] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В., Теорема Хелли и ее применения, пер. с англ., М., 1968; [5] Мельников М. С., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 4, с. 165—70; [6] Тот Л. Ф., Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, пер. с нем., М., 1958; [7] Полиа Г., Сеге Г., Изопериметрические неравенства в математической физике, [пер. с англ.], М., 1962; [8] Payne L. E., «Siam Rev.», 1967, v. 9, № 3, p. 453—88; [9] Berger M., Gauduchon P., Mazet E., Le spectre d'une variété riemannienne, B., 1971; [10] Мазья В. Г., в кн.: Проблемы математического анализа, в. 3, Л., 1972, с. 33—68; [11] его же, в кн.: Теоремы вложения и их приложения, М., 1970, с. 142—59; [12] его же, «Тр. Моск. матем. об-ва», 1969, т. 20, с. 137—72; [13] Александров А. Д., Стрельцов В. В., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1965, т. 76, с. 67—80; [14] Бураго Ю. Д., «Сиб. матем. ж.», 1973, т. 14, № 3, с. 666—68; [15] Shahin J. K., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1968, v. 19, № 3, p. 609—13; [16] Бураго Ю. Д., Неравенства изопериметрического типа в теории поверхностей ограниченной внешней кривизны, Л., 1968; [17] Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Дж., Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967; [18] Cheeger I. H., «Amer. J. Math.», 1970, v. 92, № 1, p. 61—74; [19] Маргулис Г. А., в кн.: VI Всесоюзная топологическая конференция. Тезисы, Тб., 1972; [20] Декстер Б. В., «Матем. сб.», 1972, т. 88, № 1, с. 61—87; [21] Волков Ю. А., Декстер Б. В., «Матем. сб.», 1970, т. 83, в. 4, с. 616—38; [22] Berger M., «Ann. sci. Ecole norm. supér», sér. 4, 1972, t. 5, № 1, p. 1—44; [23] его же, там же, 1972, т. 5, № 2, p. 241—60; [24] Derrick W. R., «J. Math. and Mech.», 1968, v. 18, № 5, p. 453—72; [25] Almgren F., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1964, v. 15, № 2, p. 285; [26] Michal J., Simon L., «Communs Pure and Appl. Math.», 1973, v. 26, № 3, p. 361—79; [27] Allard W., «Ann. Math.», 1972, v. 95, p. 417—91; [28] Фоменко А. Т., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1972, т. 36, № 5, с. 1049—79.

Ю. Д. Бураго.

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО КЛАССИЧЕСКОЕ — неравенство между объемом V области в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $(n-1)$-мерной площадью F, ограничивающей область гиперповерхности:

$$n^n v_n V^{n-1} \leqslant F^n,$$

где v_n — объем единичного n-мерного шара. Равенство в И. н. к. имеет место только для шара. И. н. к. дает решение *изопериметрической задачи*. Для $n=2$, 3 И. н. к. известно с глубокой древности. Строгое доказательство И. н. к. для $n=2$ дано Ф. Эдлером (F. Edler) в 1882, для $n=3$ — Г. Шварцем (H. Schwarz) в 1890 и для всех $n \geqslant 2$ — Л. А. Люстерником в 1935 и Э. Шмидтом (E. Schmidt) в 1939 (см. [1], [2], [3]).

В двумерном случае есть много доказательств И. н. к. (см. [4]), при $n>2$ известно лишь два подхода. Первый — метод симметризации, предложенный Я. Штейнером (J. Steiner). Э. Шмидт, используя этот метод, получил аналоги И. н. к. (и неравенства Брунна — Минковского) для сферического и гиперболического n-мерных пространств (см. [5]). Второй подход состоит в сведении И. н. к. к Брунна — Минковского неравенству (см. *Брунна — Минковского теорема*) и использовании метода пропорционального деления объемов. При таком подходе естественно возникает более общее неравенство

$$n^n V^{n-1}(A)\, V(B) \leqslant F^n(A,\, B) \qquad (*)$$

для объемов $V(A)$, $V(B)$ двух множеств и площади $F(A, B)$ по Минковскому множества A по отношению к B. Неравенство $(*)$ допускает интерпретацию как И. н. к. в пространстве Минковского; равенство при фиксированном «шаре» Минковского B достигается, вообще говоря, не для единственного тела A, причем эти тела отличны от «шара» (см. [6]).

Имеется ряд обобщений И. н. к., при к-рых рассматриваются не области с кусочно гладкой границей, а более широкие классы множеств, причем площадь границы понимается в обобщенном смысле (площадь Минковского, площадь по Лебегу, *периметр* множества по Каччиополи — Де Джорджи, масса *потока*, см. [7], [8]). И. н. к. остается справедливым во всех этих случаях, а также для гиперповерхностей с самопересечениями и соответствующего им ориентированного объема (см. [9]). Эти обобщения получаются из И. н. к. предельным переходом при различных вариантах понятия сходимости.

Для изопериметрич. разности $F^n - n^n v_n V^{n-1}$, как и для изопериметрич. отношения $F^n V^{1-n}$, известны оценки, усиливающие И. н. к. (см. [2]). Часть таких оценок получена для множеств специального вида, в первую очередь для *выпуклых множеств* и многогранников (см. [10]). Напр., *Боннезена неравенство* для плоских фигур:

$$F^2 - 4\pi V \geqslant (F - 4\pi r)^2,$$

где r — радиус наибольшего вписанного круга, и его обобщение (см. [11]) для выпуклых тел в R^n:

$$F^{n/(n-1)}(A,\, B) - n^{n/(n-1)}\, V(A)\, V^{1/(n-1)}(B) \geqslant$$
$$\geqslant \left[F(A,\, B) - n^{n/(n-1)}\, qV(B)^{1/(n-1)}\right]^n.$$

Здесь $q = \max\{\lambda \mid \lambda B$ можно поместить в $A\}$. Относительная изопериметрич. разность выпуклых тел

$$F^n(A,\, B) - n^n V^{n-1}(A)\, V(B)$$

может служить мерой их негомотетичности (см. [12]). Это используется, напр., при доказательстве теоремы устойчивости в проблеме Минковского (см. [13]). Об обобщениях И. н. к. на пространства переменной кривизны и родственных им неравенствах см. ст. *Изопериметрическое неравенство*.

Лит.: [1] Крыжановский Д. А., Изопериметры, 3 изд., М., 1959; [2] Хадвигер Г., Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, пер. с нем., М., 1966; [3] Люстерник Л. А., «Успехи матем. наук», 1936, в. 2, с. 47—54; [4] Бляшке В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., М., 1957; [5] Schmidt E., «Math. Nachr.», 1948, Bd 1, S. 81—157; [6] Busemmann H., «Amer. J. Math.», 1949, v. 71, p. 743—62; [7] De Giorgi E., «Atti Accad. naz. Lincei. Mem. Cl. sci fis., mat. e natur. Ser. 8», 1958, № 5, № 2, p. 33—44; [8] Федерер Г., Флеминг У. Х., в сб.: Целочисленные потоки и минимальные поверхности, М., 1973, с. 9—90; [9] Radó T., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 61, № 3, p. 530—55; [10] Тот Л. Ф., Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, пер. с нем., М., 1958; [11] Дискант В. И., «Докл. АН СССР», 1973, т. 213, № 3, с. 519—21; [12] его же, «Сиб. матем. журнал», 1972, т. 13, № 4, с. 767—72; [13] Волков Ю. А., «Вестн. Ленигр. ун-та. Сер. матем. и астроном.», 1963, в. 1, с. 33—43. *Ю. Д. Бураго.*

ИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, линии кривизны к-рой образуют *изотермическую сеть*. Напр., И. п. являются *квадрики*, *вращения поверхности*, поверхности постоянной средней кривизны и, в частности, *минимальные поверхности*. Инвариантный признак И. п.— градиентность чебышевского вектора сети линий кривизны. Для каждой И. п. определяется с точностью до гомотетии другая И. п., находящаяся с первой в конформном *Петерсона соответствии*. *Инверсия* пространства сохраняет класс И. п.

И. Х. Сабитов.

ИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ СЕТЬ — ортогональная сеть на поверхности V_2 евклидова пространства, малые четырехугольники к-рой, образованные двумя парами линий из различных семейств, с точностью до бесконечно малых 1-го порядка являются квадратами. Линии И. с. суть линии уровня двух сопряженных гармонич. функций. В параметрах И. с. линейный элемент поверхности имеет вид:

$$ds^2=\lambda^2(du^2+dv^2),$$

где $\lambda=\lambda(u, v)$. И. с.— частный случай *ромбической сети*. На поверхности вращения меридианы и параллели образуют И. с., *асимптотическая сеть* на минимальной поверхности — И. с. *В. Т. Базылев.*

ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — координаты двумерного риманова пространства, в к-рых квадрат линейного элемента имеет вид:

$$ds^2=\lambda(\xi,\eta)(d\xi^2+d\eta^2).$$

И. к. задают конформное отображение двумерного риманова многообразия на евклидову плоскость. И. к. всегда можно ввести в компактной области регулярного двумерного многообразия. В И. к. гауссова кривизна может быть вычислена по формуле:

$$k=-\frac{\Delta\ln\lambda}{\lambda},$$

где Δ — оператор Лапласа.

И. к. рассматриваются и в двумерных псевдоримановых пространствах; квадрат линейного элемента имеет при этом вид:

$$ds^2=\psi(\xi,\eta)(d\xi^2-d\eta^2).$$

Часто используются естественно связанные с И. к. координаты μ, ν, в к-рых квадрат линейного элемента имеет вид:

$$ds^2=\lambda(\mu,\nu)\,d\mu d\nu.$$

В этом случае линии $\mu=\text{const}$ и $\nu=\text{const}$ — изотропные геодезические, в связи с чем система координат μ, ν наз. *изотропной*. Изотропные координаты находят широкое применение в общей теории относительности. *Д. Д. Соколов.*

ИЗОТОННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — однозначное отображение φ частично упорядоченного множества A в частично упорядоченное множество B, сохраняющее порядок. И. о. играют роль гомоморфизмов частично

упорядоченных множеств (рассматриваемых как *алгебраические системы* с одним отношением). И. о. наз. также монотонными отображениями.

О. А. Иванова.

ИЗОТОПИЯ — отношение на классе всех группоидов, определенных на одном и том же множестве G. А именно, два группоида на G наз. изотопными, если существуют такие подстановки ρ, σ и τ множества G, что для любых $a, b \in G$

$$a \circ b = (a\rho \cdot b\sigma)\,\tau,$$

где $\cdot$ и $\circ$ обозначают операции в этих группоидах. Отношение И. является отношением эквивалентности для бинарных операций на множестве G. Изоморфизм двух бинарных операций, заданных на одном и том же множестве — частный случай И. (при $\rho=\sigma=\tau^{-1}$). И. наз. главной, если τ является тождественной подстановкой. Всякий изотоп группоида изоморфен его главному изотопу. Всякий группоид, изотопный квазигруппе, сам будет квазигруппой. Всякая квазигруппа изотопна нек-рой лупе (теорема Албе рта). Если лупа (в частности, группа) изотопна нек-рой группе, то они изоморфны. Если группоид с единицей изотопен полугруппе, то они изоморфны, т. е. оба являются полугруппами с единицей.

Лит.: [1] Куро ш А. Г., Общая алгебра, М., 1974.

ИЗОТОПИЯ — гомотопия топологич. пространства X по топологич. пространству Y : $f_t : X \to Y$ (здесь и всюду далее $t \in [0,1] = I$), в к-рой при любом t отображение f_t является гомеоморфизмом X на нек-рое подмножество Y. Эквивалентно, И.— послойное непрерывное отображение $f : X \times I \to Y \times I$ такое, что f гомеоморфно переводит слой $X \times t$ на подмножество слоя $Y \times t$. И. $F_t : Y \to Y$, при к-рой $F_t(Y) = Y$ для любого t, наз. изотопией пространства Y.

Накрывающей (или объемлющей) изотопией для И. $f_t : X \to Y$ наз. И. пространства $F_t : Y \to Y$ такая, что $F_t|_X = f_t$. Два вложения $f_0, f_1 : X \to Y$ пространства X в пространство Y паз. изотопными, если существует накрывающая И. $F_t : Y \to Y$, для к-рой $F_0 = \mathrm{id}$, $F_1(f_0(X)) = f_1(X)$. Пространства X, Y наз. изотопически эквивалентными, если существуют вложения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такие, что композиции $g \circ f : X \to X$ и $f \circ g : Y \to Y$ изотопны тождественному отображению. Изотопически эквивалентные пространства наз. также (по аналогии с гомотопич. типом) пространствами одного и того же изотопического типа. Если пространства гомеоморфны, то они изотопически эквивалентны, однако есть негомеоморфные пространства одного изотопич. типа, напр. n-мерный шар и такой же шар с приклеенным к его поверхности (своим концом) отрезком. Любой гомотопич. инвариант является изотопич. инвариантом, но существуют изотопич. инварианты, напр. размерность, не являющиеся гомотопическими.

Основным вопросом в теории И. является задача продолжения изотопии, т. е. вопрос о существовании И. F_t, накрывающей данную И. f_t. Этот вопрос, равно как и общая задача нахождения полной системы изотопич. инвариантов для вложений, чаще всего рассматривается в категории топологич. многообразий и ее подкатегориях кусочно линейных и дифференцируемых многообразий.

Топологич. И. f_t многообразия M^k по многообразию M^n, $k \leqslant n$, продолжается до накрывающей И. $F_t : M^n \to M^n$ тогда и только тогда, когда соответствующее прослойное вложение $f(M^k \times [a, b]) \subset M^n \times I$ является локально плоским, здесь $[a, b]$ — подотрезок интервала $(0, 1)$. Если $n - k \neq 2$ и $n \neq 4$, то И. f_t накрывается И. F_t при условии, что вложение $f_t(M^k) \subset M^k$ является локально плоским для любого $t \in [0,1]$. В коразмерности 2 это неверно (пример — «затягивание узелка»

на окружности в E^3), и потому для существования накрывающей И. необходимы дополнительные гомотопич. предположения. Достаточно близкие локально плоские вложения при $n-k\neq 2$ изотопны.

Теорема о продолжении кусочно линейной И. в общем случае формулируется аналогично (при естественном условии, что соответствующее послойное вложение является локально плоским в кусочно линейном смысле). Если $n-k\geqslant 3$, то кусочно линейная И. продолжается всегда, так как в этих коразмерностях кусочно линейное вложение является локально плоским в кусочно линейном смысле. Для $n-k=2$ или 1 необходимо дополнительное предположение, что вложения $f_t(M^k)\subset M^n$ являются в кусочно линейном смысле локально плоскими, поскольку в этих коразмерностях кусочно линейное вложение может не быть локально плоским даже в топологич. смысле, напр. конус над узлом.

Дифференцируемая И. всегда продолжается до дифференцируемой накрывающей И.

Задача нахождения полной системы изотопич. инвариантов расположения многообразий M^k в M^n решена только в небольшом числе частных случаев. Так, всякое локально плоское (в топологич. смысле) вложение сфер $S^k\subset S^n$ при $n-k\geqslant 3$ или при $n-k=1$, $n\neq 4$, изотопно стандартному, а если $n-k=2$, $n\neq 4$, то локально плоская сфера S^{n-2} в S^n тогда и только тогда изотопна стандартной, когда дополнение $S^n\setminus S^{n-2}$ имеет гомотопич. тип окружности (теоремы Столлингса и Брауна). В коразмерности 2 могут существовать неизотопные узлы. Точно так же формулируется теорема Зимана—Столлингса о кусочно линейной И. (незаузленности) кусочно линейных сфер.

Инвариант кусочно линейной И. является более тонким по сравнению с топологич. И. Так, вопрос о топологич. изотопности произвольного гомеоморфизма сферы S^n тождественному решен в положительном смысле для $n\neq 4$, при этом же ограничении доказана изотопность любых двух гомеоморфизмов сферы S^n на себя, сохраняющих ориентацию. В кусочно линейной ситуации эти утверждения получаются элементарными методами без всяких ограничений. Достаточно близкие гомеоморфизмы топологич. многообразия на себя изотопны, однако существуют как угодно близкие кусочно линейно неизотопные кусочно линейные гомеоморфизмы кусочно линейных многообразий, напр. n-мерных торов при $n\geqslant 5$.

В отличие от топологического и кусочно линейного случая далеко не всегда два диффеоморфизма n-мерной сферы на себя дифференцируемо изотопны. Изотопич. классы дифференцируемых вложений сфер S^k в S^n подробно изучены для любого $k\leqslant n$. Если $k\geqslant n-3$, то существует нек-рое топологич. пространство C_q, $q=n-k$ такое, что гомотопич. группы $\pi_k(C_q)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами вложений S^k в S^n; при этом $\pi_k(C_q)=0$ для $k<2q-3$, а $\pi_{2q-3}(C_q)$ есть $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_2$ в зависимости от того, является ли q четным или нечетным числом. Таким образом, k-мерная стандартная сфера S^k, вложенная в S^n, может при $k\leqslant n-3$ заузливаться в дифференцируемом смысле, т. е. существуют такие вложения $S^k\subset S^n$, к-рые дифференцируемо не изотопны стандартному. Эти узлы наз. узлами Хефлигера. Если $k=n-2$, то дифференцируемые узлы $S^{n-2}\subset S^n$ могут заузливаться в топологич. смысле, однако их намного больше, чем топологических или кусочно линейных; когда n нечетно, имеется их полная классификация. Если $k=n-1$, $n\neq 4$, то любое дифференцируемое вложение $S^{n-1}\subset S^n$ дифференцируемо изотопно стандартному вложению.

Тот факт, что существуют диффеоморфизмы сферы S^n на себя, неизотопные тождественному, приводит к существованию нетривиальных дифференциальных структур на сферах размерности $n+1$. Хотя всякий гомео-

морфизм сферы S^n, $n\neq 4$, на себя аппроксимируется диффеоморфизмом, не всегда близкие диффеоморфизмы сферы дифференцируемо изотопны, т. е. диффеоморфизм сферы на себя можно как угодно малым возмущением превратить в неизотопный ему.

Лит.: [1] Келдыш Л. В., Топологические вложения в евклидово пространство, М., 1966 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 81); [2] Рурк К., Сандерсон Б., Введение в кусочно линейную топологию, пер. с англ., М., 1974; [3] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1965, т. 29, № 1, с. 71—96; [4] Чернавский А. В., «Матем. сб.», 1969, т. 79, № 3, с. 307—56; [5] Rushing T., Topological Embeddings, N.Y.—L., 1972; [6] Kirby R., Siebenmann L., Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations, N.Y., 1977.

М. А. Штанько.

ИЗОТРОПИИ ГРУППА — множество G_x таких элементов заданной группы G, действующей на нек-ром множестве M как группа преобразований, к-рые оставляют неподвижной точку x. Это множество оказывается подгруппой в G и наз. группой изотропии точки x. В этом же смысле употребляются термины: стационарная подгруппа, стабилизатор. G-централизатор. Если M является топологич. хаусдорфовым пространством и G — топологич. группой, непрерывно действующей на M, то G_x есть замкнутая подгруппа. Если при этом M и G локально компактны, G имеет счетную базу и действует на M транзитивно, то существует естественный гомеоморфизм между пространством M и топологич. факторпространством G/H, где H — одна из И. г.; с ней изоморфны все G_x, $x\in M$.

Пусть M — гладкое многообразие и G — группа Ли, гладко действующая на M. Тогда И. г. G_x точки $x\in M$ индуцирует нек-рую группу линейных преобразований касательного векторного пространства $T_x(M)$; эта последняя группа наз. линейной группой изотропии в точке x. При переходе к касательным пространствам высшего порядка в точке x получаются естественные представления И. г. в структурных группах соответствующих касательных расслоений высшего порядка; они наз. группами изотропии высшего порядка (см. также *Изотропии представление*).

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [3] Зуланке Р., Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения, пер. с нем., М., 1975.

Ю. Г. Лумисте.

ИЗОТРОПИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — естественное линейное представление *изотропии группы* в касательном пространстве к многообразию. Если G — группа дифференцируемых преобразований многообразия M и G_x — соответствующая группа изотропии в точке $x\in M$, то И. п. Is_x: $G_x\to GL(T_xM)$ сопоставляет каждому $h\in G_x$ дифференциал $\mathrm{Is}_x(h)=dh_x$ преобразования h в точке x. Образ И. п. $\mathrm{Is}_x(G_x)$ наз. линейной группой изотропии в точке x. В случае, когда G — группа Ли со счетной базой, гладко и транзитивно действующая на M, касательное пространство T_xM естественно отождествляется с пространством $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x$, где $\mathfrak{g}\supset\mathfrak{g}_x$ — алгебры Ли групп $G\supset G_x$. И. п. Is_x отождествляется при этом с представлением $G_x\to GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)$, к-рое индуцируется ограничением присоединенного представления Ad_G группы G на G_x.

Если однородное пространство M редуктивно, т. е. $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_x+m$, где m — подпространство, инвариантное относительно $\mathrm{Ad}_G(G_x)$, то T_xM отождествляется с m, а Is_x — с представлением $h\to(\mathrm{Ad}_G h)|_m$ (см. [3]). В этом случае И. п. является точным, если G действует эффективно.

И. п. и линейная группа изотропии играют важную роль при изучении *инвариантных объектов* на однородных пространствах. Инвариантные тензорные поля на однородном пространстве M находятся во взаимно однозначном соответствии с тензорами в пространстве T_xM, инвариантными относительно И. п. В частности,

M обладает римановой инвариантной метрикой тогда и только тогда, когда в T_xM существует евклидова метрика, инвариантная относительно линейной группы изотропии. Существование на однородном пространстве M положительной *инвариантной меры* равносильно условию $|\det A|=1$ для всех $A\in \mathrm{Is}_x(G_x)$. Однородное пространство ориентируемо тогда и только тогда, когда $\det A>0$ $(A\in \mathrm{Is}_x(G_x))$. Инвариантные линейные связности на M находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными отображениями $\Lambda : \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(T_xM)$, обладающими следующими свойствами:

$$\Lambda\Big|_{\mathfrak{g}_x} = (d\,\mathrm{Is}_x)_e,$$

$$\Lambda((\mathrm{Ad}\,h)\,X) = \mathrm{Is}_x(h)\;\Lambda(X)\;\mathrm{Is}_x(h)^{-1}\quad (h\in G_x).$$

Обобщением понятия И. п. является понятие И. п. порядка r. Это гомоморфизм $h\to j^r_x h$ группы G_x в группу $L^r(T_xM)$ обратимых r-струй диффеоморфизмов пространства T_xM, переводящих в себя нуль. Это понятие применяется при изучении инвариантных объектов высших порядков.

Лит.: [1] Зуланке Р., Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения, пер. с нем., М., 1975; [2] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [3] Рашевский П. К., в кн.: Тр. семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике, в. 9, М.—Л.,1952, с. 49—74; [4] Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства, пер. с франц., М., 1949.

А. Л. Онищик.

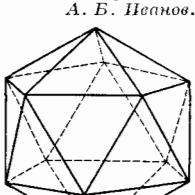
ИЗОТРОПНАЯ КОНГРУЭНЦИЯ — конгруэнция с неопределенными главными поверхностями.

ИЗОТРОПНЫЙ ВЕКТОР — вектор, ортогональный сам себе. Пусть E — векторное пространство над полем действительных или комплексных чисел, Φ — невырожденная билинейная форма с сигнатурой (p, q), $p\neq 0$, $q\neq 0$ на $E\times E$. Изотропным вектором наз. ненулевой вектор $x\in E$, для к-рого $\Phi(x, x)=0$. Иногда говорят, что И. в. имеет нулевую длину (или норму). Множество всех И. в. наз. изотропным конусом. Подпространство $V\subset E$ наз. изотропным, если существует ненулевой вектор $z\in V$, ортогональный V (т. е. сужение формы Φ на $V\times V$ вырождено: $V\cap V^{\perp}\neq \neq\{0\}$). Векторное подпространство V наз. вполне изотропным, если все его векторы суть И. в.

В релятивистской интерпретации Вселенной пространство-время локально рассматривается как четырехмерное векторное пространство с формой сигнатуры (3, 1), траектории фотонов — как изотропные прямые, а изотропный конус наз. световым конусом.

А. Б. Иванов.

ИКОСАЭДР — один из пяти правильных многогранников. И. имеет 20 граней (треугольных), 30 ребер, 12 вершин (в каждой вершине сходятся 5 ребер). Если a — длина ребра И., то его объем



$$V=\frac{5}{12}a^3\left(3+\sqrt{5}\right)\cong 2{,}1817a^3.$$

ИКОСАЭДРА ПРОСТРАНСТВО — трехмерное пространство, являющееся пространством орбит действия бинарной группы икосаэдра на трехмерной сфере. Открыто А. Пуанкаре как пример гомологич. сферы рода 2 при рассмотрении *Хегора диаграмм*. И. п. является разветвленным p-листным накрытием S^3 с ветвлением вдоль торического узла типа (q, r), где p, q, r любая перестановка чисел 2, 3, 5. Аналитически И. п. может быть задано как пересечение поверхности

$$z_1^2+z_2^3+z_3^5=0$$

в $\mathbb{C}^2$ с единичной сферой. Наконец, И. п. может быть отождествлено *с додекаэдра пространством.*

А. В. Чернавский.

ИММЕРСИЯ — то же, что *погружение*.

ИММУННОЕ МНОЖЕСТВО — бесконечное множество натуральных чисел, не содержащее бесконечных рекурсивно перечислимых подмножеств. В частности, само И. м. не является рекурсивно перечислимым. И. м. по своей насыщенности рекурсивно перечислимыми подмножествами в известном смысле противоположны *продуктивным множествам*. Рекурсивно перечислимые множества с иммунными дополнениями наз. п р о с т ы м и и образуют один из важных классов нерекурсивных рекурсивно перечислимых множеств. Типы рекурсивной эквивалентности иммунных и конечных множеств, называемые и з о л я м и, представляют интерес с точки зрения рекурсивного аналога теории кардинальных чисел. В *рекурсивной теории множеств* и ее приложениях используются также некоторые специальные подклассы класса И. м., особенно гипериммунные (г и п е р и м м у н н ы м наз. множество натуральных чисел, последовательность элементов к-рого, расположенных в порядке возрастания, не мажорируется никакой общерекурсивной функцией; рекурсивно перечислимое множество с гипериммунным дополнением наз. г и п е р п р о с т ы м).

Лит.: [1] Р о д ж е р с Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972.

В. А. Душский.

ИМПЛИКАТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА — *пропозициональная форма* вида

$$C_1 \supset (C_2 \supset \ldots (C_n \supset \perp) \ldots),$$

где все C_i, $i = 1, \ldots, n$, имеют вид

$$C_{i1} \supset (C_{i2} \supset \ldots (C_{im_i} \supset \perp) \ldots),$$

каждое C_{ij}, $i=1, \ldots, n$; $j=1, \ldots, m_i$, есть либо переменная, либо отрицание переменной, и $\perp$ есть логич. символ, обозначающий ложь. Для всякой пропозициональной формулы A можно построить классически эквивалентную ей И. н. ф. B, содержащую те же переменные, что и A. Такая формула B наз. И. н. ф. формулы A.

Лит.: [1] Ч ё р ч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960.

С. К. Соболев.

ИМПЛИКАТИВНОЕ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — пропозициональное исчисление, использующее единственную исходную связку $\supset$ (импликацию). Примерами И. п. и. являются п о л н о е (или к л а с с и ч е с к о е) И. п. и., задаваемое аксиомами

$$p \supset (q \supset p), \quad ((p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))),$$
$$((p \supset q) \supset p) \supset p$$

и правилами вывода: *модус поненс* и подстановка, а также п о з и т и в н о е И. п. и., задаваемое аксиомами

$$p \supset (q \supset p), \quad (p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$$

и теми же правилами вывода. В с я к а я и м п л и к а т и в н а я ф о р м у л а, т. е. формула, содержащая только связку $\supset$, выводима в полном (или позитивном) И. п. и. тогда и только тогда, когда она выводима в классическом (соответственно интуиционистском) пропозициональном исчислении. Для любого конечного множества V переменных среди импликативных формул с переменными из V существует лишь конечное число попарно не эквивалентных в позитивном И. п. и. (см. [3]). Существуют конечно аксиоматизируемые И. п. и. с неразрешимой проблемой выводимости (см. [4]).

Лит.: [1] Ч ё р ч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960; [2] L u k a s i e w i c z J., T a r s k i A., «C. r. Soc. Sci. Lettres Varsovie, Cl. III», 1930, v. 23, p. 30—50; [3] D i e g o A., Sur les algèbres de Hilbert, P., 1966; [4] G l a d s t o n e M. D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 118, p. 192—210.

С. К. Соболев.

ИМПЛИКАЦИЯ — логическая операция, соответствующая образованию высказывания «если A, то B» из высказываний A и B. В формализованных языках И. чаще всего обозначается символами $\supset$, $\rightarrow$, $\Rightarrow$. Высказывание A наз. посылкой высказывания $A \supset B$, а высказывание B — его заключением. Точный смысл высказывания $A \supset B$ различен при классическом, конструктивном и других подходах к построению семантики языка. В языках с классич. семантикой употребление И. согласовано с истинностной таблицей:

A	B	$A \supset B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Так понимаемая И. наз. материальной импликацией.

В. Е. Плиско.

ИМПРИМИТИВНАЯ ГРУППА — группа G взаимно однозначных отображений на себя (*подстановок*) нек-рого множества S, для к-рой существует разбиение множества S в объединение непересекающихся подмножеств $S_1, \ldots, S_m$, $m \geqslant 2$, обладающее следующими свойствами: число элементов хотя бы в одном из S_i больше единицы; для любой подстановки $g \in G$ и любого номера i, $1 \leqslant i \leqslant m$, существует такой номер j, $1 \leqslant j \leqslant m$, что g отображает S_i на S_j.

Набор подмножеств $S_1, \ldots, S_m$ наз. системой импримитивности, а сами подмножества S_i — областями импримитивности группы G. Не импримитивная группа подстановок наз. примитивной.

Примером И. г. может служить нетривиальная интранзитивная группа G подстановок множества S (см. *Транзитивная группа*): в качестве системы импримитивности можно взять набор всех *орбит* (областей транзитивности) G на S. Транзитивная группа подстановок G множества S примитивна тогда и только тогда, когда для какого-либо (а, значит, и для любого) элемента $y \in S$ множество подстановок из G, оставляющих y на месте, является максимальной подгруппой в G.

Понятие И. г. подстановок имеет аналог для групп линейных преобразований векторных пространств. Именно, линейное представление ρ группы G наз. импримитивным, если существует разложение пространства V представления ρ в прямую сумму собственных подпространств $V_1, \ldots, V_m$, обладающее следующим свойством: для любого элемента $g \in G$ и любого номера i, $1 \leqslant i \leqslant m$, найдется такой номер j, $1 \leqslant j \leqslant m$, что

$$\rho(g)(V_i) = V_j.$$

Набор подпространств $V_1, \ldots, V_m$ наз. системой импримитивности представления ρ. Если V не обладает разложением указанного типа, то представление ρ наз. примитивным. Импримитивное представление ρ наз. транзитивным импримитивным, если для любой пары подпространств V_i и V_j из системы импримитивности существует такой элемент $g \in G$, что $\rho(g)(V_i) = V_j$. Группа $\rho(G)$ линейных преобразований пространства V и G-модуль V, определяемый представлением ρ, также наз. импримитивными (примитивными), если представление ρ является импримитивным (примитивным).

Примеры. Представление ρ симметрич. группы S_n в n-мерном векторном пространстве над полем k, переставляющее элементы базиса $e_1, \ldots, e_n$, является транзитивным импримитивным; одномерные подпространства $\{ke_1, \ldots, ke_n\}$ образуют для ρ систему импримитивности. Транзитивным импримитивным является также *регулярное представление* конечной группы G над полем k; набор одномерных подпространств kg,

где g пробегает всю G, образует систему импримитивности. Более общо, любое *мономиальное представление* конечной группы является импримитивным. Представление циклич. группы порядка $m \geqslant 3$ поворотами действительной плоскости на углы, кратные $2\pi/m$, примитивно.

Понятие импримитивного представления тесно связано с понятием *индуцированного представления*. А именно, пусть ρ — импримитивное конечномерное представление конечной группы G с системой импримитивности $\{V_1, \ldots, V_n\}$. Множество $\{V_1, \ldots, V_n\}$ разбивается в объединение орбит относительно действия группы G, определенного представлением ρ. Пусть $\{V_{i_1}, \ldots, V_{i_s}\}$ — полный набор представителей различных орбит этого действия,

$$H_m = \left\{ g \in G \,\middle|\, \rho(g)(V_{i_m}) = V_{i_m} \right\}, \quad m = 1, \ldots, s,$$

φ_m — представление группы H_m в V_{i_m}, определенное сужением представления ρ на H_m, и ρ_m — представление группы G, индуцированное φ_m. Тогда ρ эквивалентно прямой сумме представлений $\rho_1, \ldots, \rho_s$. Обратно, пусть $H_1, \ldots, H_s$ — какой-либо набор подгрупп группы G, φ_m — представление группы H_m в конечномерном векторном пространстве W_m, $m = 1, \ldots, s$, и ρ_m — представление группы G, индуцированное φ_m. Пусть также $\{g_{m,j}\}_{j=1}^{r_m}$ — система представителей левых смежных классов группы G по H_m. Тогда прямая сумма представлений $\rho_1, \ldots, \rho_s$ импримитивна, а $\rho(g_{m,j})(W_m)$, $j = 1, \ldots, r_m$, $m = 1, \ldots, s$, является системой импримитивности (здесь W_m канонически отождествляется с подпространством в V).

Лит.: [1] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962; [2] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969.

Н. Н. Вильямс, В. Л. Попов.

ИМЯ — языковое выражение, служащее для обозначения определенного объекта. Объект, обозначаемый данным И., наз. д е н о т а т о м. В математике широко используются И. для конкретных математических объектов, напр. e, π — для известных трансцендентных чисел, sin — для функции синус, $\varnothing$ — для пустого множества и т. д. Из таких простейших И. могут быть образованы с о с т а в н ы е и м е н а, к-рые называют объект, используя И. других объектов. Напр., $\sin \pi$ есть другое И. числа 0. Имя *не* только называет денотат, но и выражает определенный смысл. Так, выражения

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} \quad \text{и} \quad \sin \frac{\pi}{2}$$

суть И. числа 1, однако смысл их различен. Смыслом И. однозначно определяется его денотат. Если в составном И. нек-рое входящее в него И. заменить на И., имеющее тот же денотат, то денотат составного И. не изменится. Если в составном И. нек-рое входящее в него И. заменить на его с и н о н и м (т. е. И., имеющее тот же смысл), то смысл составного И. не изменится.

Наряду с И. в математике употребляются выражения, содержащие переменные и превращающиеся в И. после подстановки вместо переменных И. объектов из области значений переменных. Такие выражения наз. и м е н н ы м и ф о р м а м и. Выражения e^x, $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$, где x — переменная для действительных чисел, являются примерами именных форм.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960.

В. Е. Плиско.

ИНВАРИАНТ — отображение φ рассматриваемой совокупности M математич. объектов, снабженной фиксированным отношением эквивалентности ρ, в дру-

гую совокупность N математич. объектов, постоянное на классах эквивалентности M по ρ (точнее: И. отношения эквивалентности ρ на M). Если X — объект из M, то весьма часто говорят, что $\varphi(M)$ — И. объекта X. Концепция И. является одной из важнейших в математике, поскольку изучение И. непосредственно связано с задачами классификации объектов того или иного типа. По существу, целью всякой математич. классификации является построение нек-рой полной системы И. (по возможности, наиболее простой), то есть такой системы, к-рая разделяет любые два неэквивалентных объекта из рассматриваемой совокупности.

Простейшим примером И. могут служить так наз. И. действительных плоских *линий второго порядка*. А именно, пусть M — множество всех таких линий, а ρ — отношение эквивалентности на M, определенное правилом: $\Gamma\in M$ эквивалентна $\Gamma'\in M$ тогда и только тогда, когда Γ' получается из Γ движением (т. е. изометрией) плоскости. Если $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ — уравнение линии $\Gamma\in M$ в какой-либо декартовой системе координат, то числа $\sigma(\Gamma)=A+C$, $\delta(\Gamma)=\begin{vmatrix}AB\\BC\end{vmatrix}$ и $\Delta(\Gamma)=\begin{vmatrix}ABD\\BCE\\DEF\end{vmatrix}$ не зависят от выбора системы координат (хотя само уравнение линии Γ — зависит). Если две линии Γ и $\Gamma'\in M$ эквивалентны, то $\sigma(\Gamma)=\sigma(\Gamma')$, $\delta(\Gamma)=\delta(\Gamma')$ и $\Delta(\Gamma)=\Delta(\Gamma')$. Иначе говоря, отображения σ, δ и Δ множества M в множество N всех действительных чисел являются И. отношения эквивалентности ρ — эти отображения и называют И. действительных плоских линий второго порядка. Значения этих И. на конкретной линии позволяют определить тип этой линии (эллипс, гипербола, парабола, пара прямых, мнимая кривая).

Другой классич. пример — *двойное отношение* упорядоченного набора четырех точек, лежащих на одной прямой в действительном проективном пространстве. Двойное отношение не изменится, если подвергнуть эти точки проективному преобразованию всего пространства. В этом примере: M — это множество упорядоченных четверок точек проективного пространства, лежащих на одной прямой; отношение эквивалентности ρ на M определяется по правилу: наборы F и $F'\in M$ эквивалентны тогда и только тогда, когда F переводится в F' проективным преобразованием пространства; N — множество действительных чисел. Взятие двойного отношения определяет отображение M в N, являющееся И. отношения ρ; именно в этом смысле говорят, что двойное отношение — И. четырех точек (относительно проективной группы).

Сопоставление *квадратичной форме* от n переменных ее ранга также доставляет пример И.: ранг не меняется при замене формы на эквивалентную (коротко: ранг есть И. квадратичной формы). Более того, если формы рассматриваются над полем комплексных чисел, то ранг составляет полную систему И. форм от n переменных — две формы эквивалентны тогда и только тогда, когда их ранги равны. Если же рассматривать формы над полем действительных чисел, то появляется еще один И.— сигнатура формы; ранг и сигнатура составляют полную систему И. В этих примерах M — множество квадратичных форм от n переменных, ρ — отношение эквивалентности, определенное невырожденными линейными преобразованиями переменных, N — множество целых чисел.

Общая черта, объединяющая эти (и многие другие) примеры, состоит в том, что отношение эквивалентности ρ определяется с помощью нек-рой группы G преобразований множества M (т. е. X и $Y\in M$ ρ-эквивалентны тогда и только тогда, когда $Y=g(X)$ для нек-рого $g\in G$); И., возникающие в таких слу-

чаях, наз. И. группы G. В первом примере — это преобразования M, индуцированные группой изометрий плоскости, во втором — проективной группой, в третьем — полной линейной группой невырожденных преобразований переменных. Эти примеры иллюстрируют общую концепцию, выдвинутую Ф. Клейном (F. Klein) (так наз. эрлангенская программа), согласно к-рой всякая группа преобразований может служить группой «преобразований систем координат» (автоморфизмов) в некоторой геометрии; величины, определяемые объектами этой геометрии и не меняющиеся при «смене координат» (инварианты), описывают внутренние свойства рассматриваемой геометрии и дают «структурную» классификацию ее теорем. Так, напр., задача проективной геометрии — нахождение И. (и соотношений между ними) для проективной группы, евклидовой геометрии — для группы движений (изометрий) евклидова пространства и т. д. На этом пути возникла классическая *инвариантов теория*, в к-рой рассматриваются лишь И. специального вида (полиномиальные или рациональные И. для групп линейных преобразований или, шире, числовые функции, постоянные на орбитах нек-рой группы).

Однако общее понятие И. является более широким и не может быть ограничено рамками И. групп преобразований, поскольку не всегда отношение эквивалентности ρ на рассматриваемом множестве M математич. объектов определено действием группы. Примеры И. такого типа можно указать во многих областях математики. В алгебраич. и гомотопич. топологии каждому топологич. пространству сопоставляют его гомотопич. группы, а также группы сингулярных гомологий (с коэффициентами в нек-рой группе); эти группы являются И. относительно гомотопич. эквивалентности пространств. В алгебраич. геометрии рассматривается отношение бирациональной эквивалентности алгебраич. многообразий; размерность многообразия и, если ограничиться рассмотрением гладких полных многообразий, арифметич. род дают примеры И. этого отношения эквивалентности. В дифференциальной топологии многообразия рассматриваются с точностью до диффеоморфизма; классы Штифеля — Уитни многообразия являются И. относительно этого отношения эквивалентности. В классической дифференциальной геометрии рассматривается полная кривизна поверхности; она является И. изгибания. В теории абелевых групп рассматриваются так наз. И. конечно порожденных групп — ранг и порядки примарных компонент; они составляют полный набор И. для множества таких групп, рассматриваемых с точностью до изоморфизма.

В. Л. Попов.

Arf-ИНВАРИАНТ, инвариант Арфа,— инвариант квадратичной формы по модулю 2, заданной на целочисленной решетке, снабженной билинейной косимметрич. формой. Пусть Π — целочисленная решетка размерности $k=2m$ и $\psi(x, y)$ — форма, для к-рой $\psi(x, y)=-\psi(y, x)$. Имеются базисы вида $\{e_1, f_1, \ldots, e_m, f_m\}$, наз. симплектическими, в к-рых матрица формы $\psi(x, y)$ приводится к блочнодиагональному виду: по диагонали стоят блоки $\left\|\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right\|$, т. е.

$$\psi(e_i, f_i)=-\psi(f_i, e_i)=1,$$

а в других местах — нули.

Пусть на Π задано отображение

$$\psi_0 : \Pi \to \mathbb{Z}_2,$$

для к-рого

$$\psi_0(x, y)=\psi_0(x)+\psi_0(y)+\psi(x, y) \bmod 2$$

— «квадратичная форма по модулю 2». Выражение

$$\sum_i \psi_0(e_i)\psi_0(f_i)$$

и наз. инвариантом Арфа [1]. Если это

выражение равно нулю, то существует симплектический базис, на всех элементах к-рого форма ψ_0 равна нулю, если же это выражение равно единице, то существует симплектический базис, на всех элементах к-рого, кроме e_1 и f_1, форма равна нулю, в то время как

$$\psi_0(e_1)=\psi_0(f_1)=1.$$

Лит.: [1] Arf C., «J. reine und angew. Math.», 1941, Bd 183, S. 148—67.

А. В. Чернавский.

ИНВАРИАНТНАЯ МЕРА — 1) И. м. в измеримом пространстве $(X, \mathfrak{B})$ относительно измеримого преобразования T этого пространства — такая мера μ на $\mathfrak{B}$, что $\mu(A)=\mu(T^{-1}A)$ для всех $A\in\mathfrak{B}$. Обычно подразумевается, что мера конечная (т. е. $\mu(X)<\infty$) или по крайней мере σ-конечная (т. е. X можно представить в виде счетного объединения $\bigcup X_n$, где $\mu(X_n)<\infty$. В наиболее важном случае, когда T — биекция и отображение T^{-1} тоже измеримо (тогда говорят, что T обратимо, имея в виду обратимость в классе измеримых преобразований), инвариантность меры μ эквивалентна тому, что $\mu(A)=\mu(TA)$ для всех $A\in\mathfrak{B}$. Наконец, И. м. для семейства (измеримых) преобразований — полугруппы, группы, потока и т. д.— называется мера, инвариантная относительно всех преобразований из этого семейства. Понятие И. м. играет важную роль в теории динамич. систем и эргодич. теории. В последней рассматриваются различные свойства динамич. систем в пространстве с мерой $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, имеющих μ своей И. м. Если динамич. система имеет несколько И. м., напр. μ и ν, то ее свойства как системы в $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ (свойства по отношению к И. м. μ) могут отличаться от ее же свойств как системы в $(X, \mathfrak{B}, \nu)$ (свойств по отношению к ν). Когда у фиксированной динамич. системы рассматриваются разные И. м., то о свойствах системы относительно И. м. μ часто говорят короче как о свойствах меры μ (напр., «эргодичность μ» означает эргодичность данной системы как системы в $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, т. е. отсутствие инвариантных множеств

$$A\in\mathfrak{B} \text{ с } \mu(A)>0$$

и

$$\mu(X\setminus A)>0).$$

Исторически первые примеры И. м. связаны с дифференциальными свойствами преобразований, образующих потоки нек-рых специальных типов на гладких многообразиях (см. *Гамильтонова система*, *Интегральный инвариант*). В терминах (локальных) координат $x_1, \ldots, x_n$ эти меры μ представляются в виде $d\mu=\rho dx_1 \ldots dx_n$, причем имеются явные выражения для плотности $\rho=\rho(x_1, \ldots, x_n)$. В примерах алгебраич. происхождения (групповые сдвиги и т. д.) И. м. часто является мера Хаара или мера, получающаяся из нее с помощью какой-нибудь естественной конструкции.

В топологич. динамике Н. Н. Боголюбовым и Н. М. Крыловым ([1], см. также [2], [3]) доказано существование конечных эргодич. И. м. для непрерывных потоков и каскадов на метрич. компакте X (возможны нек-рые обобщения [4], [5], [6]). Неэргодические конечные И. м. являются, в нек-ром смысле, линейными комбинациями эргодических; носители конечных И. м. определенным образом связаны с поведением траекторий в X (все эти И. м. сосредоточены на так наз. минимальном центре притяжения [3]). Не приходится рассчитывать на более подробные утверждения о свойствах И. м. в общем случае — они могут быть совсем различными. Так, в одном случае эргодич. И. м. может быть сосредоточена в одной точке, в другом — быть положительной для всех открытых подмножеств X и обладать свойствами «квазислучайного» характера (перемешивание, положительная энтропия и т. д.), описание и исследование к-рых относится к эргодич. теории (тогда как обращение к последней в предыду-

щем случае было бы бессодержательным). Поэтому имеется ряд исследований о существовании И. м. с теми или иными интересными свойствами у динамич. систем того или иного специального типа.

Наконец, возможна чисто метрич. постановка вопроса об И. м. Пусть динамич. система имеет квазиинвариантную меру μ; существует ли у нее И. м. ν, эквивалентная μ? (Обсуждение этой постановки вопроса см. в [7]. О другой постановке см. [8]). Ответ в общем случае отрицательный, даже если требовать только σ-конечности ν, а $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ — Лебега пространство [9]. Известны различные варианты необходимых и достаточных условий существования конечной И. м.; наиболее удачными представляются условия Хаджана и Какутани [10], [8]. *Д. В. Аносов.*

2) И. м. в теории вероятностей определяется относительно переходной вероятности. Пусть $(X, \mathcal{A})$ — измеримое пространство, где $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра, и $P(x, A)$, $x \in X$, $A \in \mathcal{A}$ — переходная вероятность (т. е. $P(x, \cdot)$, есть вероятностная мера на $\mathcal{A}$ при каждом $x \in X$ и $P(\cdot, A)$ — измерима относительно $\mathcal{A}$ при каждом $A \in \mathcal{A}$). Счетно-аддитивная мера μ на $(X, \mathcal{A})$ наз. инвариантной относительно P, если

$$\mu(A) = \int_X P(x, A)\, \mu(dx), \ \forall A \in \mathcal{A}.$$

Если T — измеримое отображение $(X, \mathcal{A})$ в себя, то мера μ инвариантна относительно T тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно переходной вероятности $P(x, A) = \chi_{T(x)}(A)$, где $\chi_y(A) = 1$ при $y \in A$ и $\chi_y(A) = 0$ при $y \notin A$. *В. В. Сазонов.*

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избр. труды, т. 1, К., 1969, с. 411—463; [2] Окстоби Дж., «Успехи матем. наук», 1953, т. 8, в. 3, с. 75—97; [3] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [4] Боголюбов Н. Н., Избр. труды, т. 1, К., 1969, с. 561—69; [5] Фомин С. В., «Матем. сб.», 1943, т. 12, № 1, с. 99—108; [6] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 3, с. 261—74; [7] Халмош П. Р., Лекции по эргодической теории, пер. с англ., М., 1959; [8] Владимиров Д. А., Булевы алгебры, М., 1969; [9] Ornstein D. S., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1960, v. 66, № 4, p. 297—300; [10] Hayian A., Kakutani Sh., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1964, v. 110, p. 136—51; [11] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [12] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [13] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967.

ИНВАРИАНТНАЯ МЕТРИКА — риманова метрика m на многообразии M, не изменяющаяся при всех преобразованиях из данной группы Ли G преобразований. Сама группа G при этом наз. группой движений (изометрий) метрики m (или риманова пространства (M, m)).

Группа Ли G преобразований многообразия M, действующая на M совершенно (т. е. так, что отображение $G \times M \to M \times M$, $(g, x) \to (gx, x)$ является собственным), обладает инвариантной метрикой. Обратно, группа всех движений любой римановой метрики (а также любая ее замкнутая подгруппа) является совершенной группой Ли преобразований. В этом случае стабилизатор

$$G_x = \{g \in G,\ gx = x\}$$

любой точки $x \in M$ — компактная подгруппа в G. Если сама группа G компактна, то G-инвариантную метрику m_0 на M можно построить, усреднив произвольную метрику m на M по группе G:

$$m_0 = \int_G (g^* m)\, dg,$$

где интеграл берется по мере Хаара.

В случае, когда группа G транзитивна, многообразие M отождествляется с пространством смежных классов G/H группы G по стабилизатору $H = G_{x_0}$ фиксированной точки $x_0 \in M$, и для существования G-инвариантной метрики на M необходимо и достаточно, чтобы линей-

ная группа изотропии (см. *Изотропии представление*) имела компактное замыкание в $GL(T_{x_0}(M))$ (в частности, достаточно, чтобы H была компактна). В этом случае пространство G/H редуктивно, т. е. алгебра Ли $\mathfrak{G}$ группы G допускает разложение $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}+\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{H}$ — подалгебра, отвечающая H, $\mathfrak{M}$ — подпространство, инвариантное относительно $\mathrm{Ad}H$, где Ad — *присоединенное представление* группы G. Если отождествить m с $T_{x_0}(M)$, то любая G-инвариантная метрика m на M получается из нек-рой $\mathrm{Ad}H$-инвариантной евклидовой метрики $\langle\ ,\rangle$ на $\mathfrak{M}$ следующим образом:

$$m_x(X,\ Y)=\langle g^{-1}X,\ g^{-1}Y\rangle,\ X,\ Y\in T_xM,$$

где $g\in G$ — такой элемент, что $gx_0=x$.

Тензорные поля, связанные с G-инвариантной метрикой (тензор кривизны, его ковариантные производные и т. п.), суть G-инвариантные поля. В случае однородного пространства $M=G/H$ их значение в точке x_0 выражается через операторы Номидзу $L_x\in\mathrm{End}(\mathfrak{M})$, задаваемые формулой

$$L_xY=-\nabla_YX^*=(\mathscr{L}_{X^*}-\nabla_{X^*})_{x_0}Y,\ Y\in\mathfrak{M},\ X\in\mathfrak{G},$$

где X^* — поле скоростей однопараметрич. группы преобразований $\exp tX$, ∇ — *оператор ковариантного дифференцирования* римановой связности, а $\mathscr{L}$ — оператор производной Ли. В частности, для оператора кривизны $\mathrm{Riem}\ (X,\ Y)$ и для секционной кривизны $K(X,\ Y)$ по направлению, задаваемому ортонормальным базисом $X,\ Y\in\mathfrak{M}$, справедливы следующие формулы:

$$\mathrm{Riem}\ (X,\ Y)=[L_X,\ L_Y]-L_{[X,\ Y]},$$

$$K(X,\ Y)\equiv-\langle\mathrm{Riem}\ (X,\ Y)\ X,\ Y\rangle=$$
$$=\langle L_XY,\ L_XY\rangle-\langle[X,\ Y]_m,\ [X,\ Y]_m\rangle-\langle[Y,\ [Y,\ X]]_m,\ X\rangle-$$
$$-\langle L_XX,\ L_YY\rangle,$$

где Z_m — проекция $Z\in\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{M}$ вдоль $\mathfrak{H}$.

Операторы Номидзу выражаются в терминах алгебры Ли $\mathfrak{G}$ и метрики $\langle\ ,\rangle$ формулой

$$2\langle L_XY,\ Z\rangle=$$
$$=\langle[X,\ Y]_m,\ Z\rangle-\langle X,\ [Y,\ Z]_m\rangle-\langle Y,\ [X,\ Z]_m\rangle,$$

где $X\in\mathfrak{G}$, $Y,\ Z\in\mathfrak{M}$. Из определения операторов Номидзу следует, что их действие на G-инвариантные поля отличается только знаком от действия ковариантной производной в точке x_0. Если риманово пространство $(G/H,\ m)$ не содержит плоских сомножителей в разложении де Рама, то линейная алгебра Ли, порожденная операторами Номидзу $L_X,\ X\in\mathfrak{G}$, совпадает с алгеброй голономии пространства $(G/H,\ m)$ в точке x_0.

Описание геодезических инвариантной метрики на однородном пространстве можно дать следующим образом. Пусть сначала $M=G$ — группа Ли, действующая на себе при помощи левых сдвигов. Пусть γ_t — геодезическая левоинвариантной метрики m на группе Ли G и $X_t=\gamma_t^{-1}\dot\gamma_t$ — соответствующая ей кривая в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ (*годограф скорости*). Кривая X_t удовлетворяет уравнению годографа

$$\dot X_t-L_{X_t}X_t=\dot X_t-(\mathrm{ad}^*X_t)\ X_t=0,$$

где $ad^*\ X$ — оператор, сопряженный оператору присоединенного представления adX. Геодезическая γ_t восстанавливается по своему годографу скорости χ_t из дифференциального уравнения $\dot\gamma_t=\gamma_tX_t$ (линейного, если группа G линейна) или из функциональных соотношений

$$\langle X_t,\ (\mathrm{Ad}\,\gamma\,(t))\,Y\rangle=\mathrm{const},\ Y\in\mathfrak{G},$$

задающих первые интегралы этого уравнения. Таким образом, описание геодезических метрики m сводится к интегрированию уравнения годографа, к-рое иногда

удается полностью проинтегрировать. Напр., в случае, когда метрика m инвариантна и относительно правых сдвигов, геодезические, проходящие через точку e, суть однопараметрич. подгруппы группы G. Такая метрика существует на любой компактной группе Ли. В случае произвольного однородного пространства $M=G/H$ инвариантную метрику m на G можно «поднять» до такой левоинвариантной метрики $\tilde{m}$ на G, что естественное расслоение $G\to G/H$ риманова пространства $(G, \tilde{m})$ над римановым пространством $(G/H, m)$ является римановым расслоением, т. е. при проектировании длина касательных векторов, ортогональных к слою, не меняется. Для этого достаточно продолжить метрику $\langle\ ,\rangle$ на всю алгебру $\mathfrak{G}$, полагая

$$\langle\mathfrak{H}, \mathfrak{M}\rangle=0 \text{ и } \langle X, Y\rangle=-\mathrm{Tr}L_XL_Y\ (X, Y\in\mathfrak{H}),$$

и разнести ее левыми сдвигами до метрики $\tilde{m}$ на G. Геодезические риманова пространства $(G/H, m)$ являются проекциями ортогональных к слоям геодезических риманова пространства $(G, \tilde{m})$.

Поскольку функция $X\to\langle X, X\rangle$ на $\mathfrak{G}$ всегда является первым интегралом уравнения годографа (интегралом энергии), соответствующее уравнению векторное поле на $\mathfrak{G}$ касается сфер $\langle X, X\rangle=$ $=\mathrm{const}$. Это влечет за собой полноту уравнения годографа, а тем самым и полноту любой инвариантной римановой метрики на однородном пространстве. Для псевдоримановых метрик свойство полноты, вообще говоря, уже не имеет места. Однако любая инвариантная псевдориманова метрика на компактном однородном пространстве полна.

См. также *Симметрическое пространство*.

Лит.: [1] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [2] Петров А. З., Новые методы в общей теории относительности, М., 1966; [3] Kobayashi S., Nomizu K., Foundation of differential geometry, v. 2, N.Y., 1969; [4] Kobayashi S., Transformation groups in differential geometry, B.—Hdlb.—N.Y., 1972; [5] Wolf J. A., Spaces of constant curvature, N. Y., 1967; [6] Lichnerowicz A., Géométrie des groupes de transformations, P., 1958. *Д. В. Алексеевский.*

ИНВАРИАНТНАЯ ПОДГРУППА — то же, что *нормальный делитель*, т. е. подгруппа H группы G, переходящая в себя при любом *внутреннем автоморфизме* группы G.

ИНВАРИАНТНАЯ СТАТИСТИКА — статистика, принимающая постоянные значения на орбитах, порожденных группой взаимно однозначных измеримых преобразований выборочного пространства. Таким образом, если $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ — выборочное пространство, $G=$ $=\{g\}$ — группа взаимно однозначных $\mathfrak{B}$-измеримых преобразований $\mathfrak{X}$ на себя, а $t(x)$ — И. с., то $t(gx)=$ $=t(x)$ для всех $x\in\mathfrak{X}$ и $g\in G$. И. с. играют важную роль при построении *инвариантных критериев*.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964; [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [3] Климов Г. П., Инвариантные выводы в статистике, М., 1973. *М.С. Никулин.*

ИНВАРИАНТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ на группе — интегрирование функций на топологич. группе, обладающее нек-рым определенным свойством инвариантности относительно групповых операций. А именно, пусть G — локально компактная топологич. группа, $C_0(G)$ — векторное пространство всех непрерывных финитных (с компактными носителями) комплекснозначных функций на G, I — интеграл на $C_0(G)$, т. е. линейный положительный ($If\geqslant 0$ при $f\geqslant 0$) функционал на $C_0(G)$. Интеграл I наз. левоинвариантным (правоинвариантным), если $I(gf)=If$ (соответственно $I(fg)=If$) для всех $g\in G$, $f\in C_0(G)$; здесь

$$(gf)(x)=f(g^{-1}x),\ (fg)(x)=f(xg^{-1}).$$

Интеграл I наз. двусторонне инвариантным, если он одновременно лево- и правоинвариантен.

Отображение $I \to \hat{I}$, где $\hat{I}f = If$, $\hat{f}(x) = f(x^{-1})$, определяет взаимно однозначное соответствие между классами левоинвариантных и правоинвариантных интегралов в $C_0(G)$. Если $I = \hat{I}$, то интеграл I наз. инверсионно инвариантным.

На всякой локально компактной группе G существует непулевой левоинвариантный интеграл, единственный с точностью до числового множителя (теорема Хаара — Неймана — Вейля). Этот интеграл наз. левым интегралом Хаара. Имеет место равенство

$$I(fg) = \Delta(g)\, If,$$

где $g \in G$, $f \in C_0(G)$, а Δ — непрерывный гомоморфизм группы G в мультипликативную группу положительных действительных чисел (положительный характер). При этом $\hat{I}f = I(f/\Delta)$. Характер Δ наз. модулем группы G. Если $\Delta(g) \equiv 1$, то группа G наз. унимодулярной. В этом случае I является двусторонне инвариантным интегралом.

В частности, унимодулярна всякая компактная группа (причем $I1 < \infty$, $\hat{I} = 1I$) и всякая дискретная группа (причем $If = \sum_g f(g)$, $f \in C_0(G)$).

Согласно теореме Рисса, всякий интеграл на $C_0(G)$ является интегралом Лебега по нек-рой борелевской *мере* μ, определяемой однозначно в классе регулярных борелевских мер, конечных на каждом компактном подмножестве $K \subset G$. Лево- (право-) инвариантная мера μ, отвечающая левому (правому) интегралу Хаара в $C_0(G)$, наз. левой (правой) *Хаара мерой* на G.

Пусть H — замкнутая подгруппа в G, Δ_0 — модуль группы H. Если Δ_0 продолжается до непрерывного положительного характера группы G, то на левом однородном пространстве $X = G/H$ существует относительно инвариантный интеграл J, т. е. положительный функционал на пространстве $C_0(X)$ непрерывных финитных функций на X, удовлетворяющий тождеству

$$J(gf) = \delta(g) Jf$$

для всех $g \in G$, $f \in C_0(X)$; здесь

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x),\ \delta(g) = \Delta_0(g)/\Delta(g),$$

Δ — модуль группы G. Этот интеграл определяется по правилу $Jf = I(\delta \tilde{f})$, где I — левый интеграл Хаара на G, $\tilde{f}$ — функция на G такая, что

$$\tilde{f}(gH) = I_0((g\tilde{f})_H),$$

(I_0 — левый интеграл Хаара на H, а φ_H — сужение функции φ на подгруппу H). Это определение корректно, поскольку $\tilde{f} \to f$ является отображением $C_0(G)$ на $C_0(X)$ и $Jf = 0$ при $f = 0$. С И. и. тесно связано понятие *инвариантного среднего*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления, пер. с франц., М., 1970; [2] Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, пер. с франц., М., 1950; [3] Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., М., 1956; [4] Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, т. 1, пер. с англ., М., 1975.

Д. П. Желобенко.

ИНВАРИАНТНОЕ МНОЖЕСТВО фазового пространства R динамической системы $f(p, t)$ — множество M, заполненное целыми траекториями, т. е. множество, удовлетворяющее условию

$$f(M, t) = M,\ t \in \mathbb{R},$$

где $f(M, t)$ — образ множества M при преобразовании группы $f(p, t)$, соответствующем данному t.

Как множество метрич. пространства R И. м. M может иметь определенную топологич. структуру:

быть, напр., топологическим или гладким многообразием, поверхностью, замкнутой жордановой кривой, отдельной точкой. Об И. м. M говорят тогда как об *инвариантном многообразии, инвариантной поверхности, инвариантной кривой или инвариантной точке*.

Инвариантную точку наз. обычно *точкой покоя* динамич. системы, поскольку для этой точки движение сводится к покою: $f(p, t)=p$ для всех значений t. Замкнутая инвариантная кривая, не содержащая точек покоя динамич. системы, всегда образована траекторией периодич. движения, т. е. движения, удовлетворяющего условию

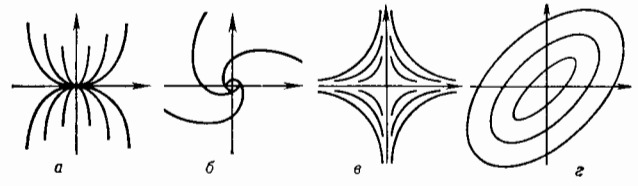
$$f(p, t+T)=f(p, t)$$

для всех $t\in\mathbb{R}$ и нек-рого $T>0$ и наз. в силу этого *периодической траекторией*. Примерами инвариантных многообразий могут служить сфера, тор, диск; инвариантных поверхностей — конус, лист Мёбиуса, сфера с ручками; инвариантных множеств — множество всех точек покоя, множества Ω_p и A_p всех, соответственно, ω- и α-предельных точек движения $f(p, t)$, а также множество всех блуждающих W или неблуждающих $R\setminus W$ точек.

Инвариантная точка динамич. системы на плоскости

$$\frac{dx}{dt}=f(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=g(x, y) \tag{1}$$

по характеру поведения траекторий в ее окрестности принадлежит к одному из 4 типов: узел, фокус, седло,



центр (см. рис.). Узел и фокус бывают асимптотически устойчивыми или неустойчивыми, седловина — неустойчива, центр — устойчив. Индекс Пуанкаре узла, центра и фокуса равен $+1$, седла -1.

В случае, когда матрица Якоби

$$J(x, y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\end{pmatrix}$$

правой части системы (1) в точке покоя $x=x_0$, $y=y_0$ имеет собственные значения λ_1, λ_2 с ненулевой действительной частью, инвариантная точка является: узлом, если значения λ_1, λ_2 действительны и одного знака; седлом, если значения λ_1, λ_2 действительны и разных знаков; фокусом, если значения λ_1, λ_2 комплексно сопряженные.

Во всех этих случаях тип особой точки системы (1) такой же, как у линейной системы, получаемой из (1) разложением ее правой части в ряд Тейлора в точке $x=x_0$, $y=y_0$, т. е. как тип точки $x_1=0$, $y_1=0$ системы

$$\frac{dx_1}{dt}=ax_1+by_1, \quad \frac{dy_1}{dt}=cx_1+dy_1, \tag{2}$$

матрица $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ к-рой равна $J(x_0, y_0)$. Между траекториями системы (1) в окрестности особой точки рассматриваемых типов и траекториями системы (2) существует более глубокая, чем отмечено выше, связь. Именно, всякий раз, когда в окрестности инвариантной точки $x=x_0=0$, $y=y_0=0$ функции f и g голоморфны и матрица $J(x_0, y_0)$ имеет ненулевые действительные части собственных значений, существует непрерывно диффе-

ренцируемая в нек-рой окрестности U точки $x=0$, $y=0$ замена переменных

$$x_1 = x + F_1(x, y), \quad y_1 = y + F_2(x, y),$$
$$F_i(0, 0) = \frac{\partial F_i(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial F_i(0, 0)}{\partial y} = 0, \; i = 1, 2,$$

приводящая систему уравнений (1) к системе (2).

Если значения λ_1, λ_2 мнимые, то инвариантная точка x_0, y_0 может быть либо фокусом, либо центром. Вопрос выяснения типа особой точки в этом случае представляет собой отдельную и трудную проблему — проблему центра и фокуса — и требует для отличения центра от фокуса привлечения более тонких критериев (см. [1], [7]). Аналогичные трудности возникают при определении типа особой точки и в случае, когда матрица $J(x_0, y_0)$ вырождена.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [2] Биркгоф Дж., Динамические системы, пер. с англ., М.— Л., 1941; [3] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959; [4] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [5] Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, 2 изд., М., 1966; [6] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956; [7] Сибирский К. С., Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц, Кишинев, 1976.

А. М. Самойленко.

ИНВАРИАНТНОЕ ПОДМНОЖЕСТВО группы G — подмножество H группы G, содержащее вместе с каждым своим элементом h все сопряженные с h в G элементы, т. е. все элементы вида $g^{-1}hg$. Инвариантная подполугруппа — подполугруппа, являющаяся одновременно инвариантным подмножеством.

О. А. Иванова.

ИНВАРИАНТНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО, допустимое подпространство, векторного пространства V относительно данного множества M линейных отображений пространства V в себя — подпространство U, удовлетворяющее условию $ug \subset U$ для всех $u \in U$, $g \in M$ (иначе M-инвариантное, M-допустимое подпространство).

Ю. И. Мерзляков.

ИНВАРИАНТНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО представления π группы (алгебры, кольца, полугруппы) X в векторном пространстве (соответственно в топологич. векторном пространстве) E — векторное (соответственно замкнутое векторное) подпространство $F \subset E$ такое, что для любого $\xi \in F$ и любого $x \in X$ выполняется соотношение: $\pi(x)\xi \in F$. Если P — проектор в E на F, то F тогда и только тогда является И. п. представления π, когда $P\pi(x)P = \pi(x)P$ для всех $x \in X$. Подпространства $\{0\}$ и E являются И. п. для любого представления в пространстве E; они наз. тривиальными И. п.; остальные И. п. (если они есть) наз. нетривиальными. См. также *Сужение представления*, *Вполне приводимое множество*, *Неприводимое представление*.

А. И. Штерн.

ИНВАРИАНТНОЕ СРЕДНЕЕ на группе или полугруппе G, точнее, инвариантное среднее на пространстве X функций на G,— непрерывный линейный функционал m на замкнутом подпространстве X пространства $B(G)$ всех ограниченных комплекснозначных функций на G, снабженном равномерной нормой, содержащем постоянные функции и инвариантном относительно операций комплексного сопряжения, причем m и X удовлетворяют следующим условиям: 1) пространство X инвариантно относительно левого сдвига, т. е. если $f \in X$, то и ${}_xf \in X$, где $xf(t) = f(xt)$ для всех x, $t \in G$, $f \in X$; 2) m — среднее на X, т. е. $m(\bar{f}) = \overline{m(f)}$ для всех $f \in X$ и $\inf\{f(x)\} \leqslant m(f) \leqslant \sup\{f(x)\}$ для всех действительнозначных $f \in X$; 3) $m({}_xf) = m(f)$ для всех $f \in X$ и всех $x \in G$. В этом случае И. с. m наз. левоинвариантным средним; аналогично определяется правоинвариантное среднее и двустороннее И. с. на G.

Если на $X=B(G)$ существует двустороннее И. с., то группа G наз. а м е н а б е л ь н о й. Аменабельность группы G связана с существованием *инвариантных мер* относительно нек-рых групп преобразований, связанных с G (см. [1]). Если G — локально компактная топологич. группа, то на пространствах почти периодич. функций и слабо почти периодич. функций на G существует нетривиальное левое И. с. С другой стороны, следующие условия эквивалентны: 1) существует левое И. с. на пространстве $X=L^\infty(G)$; 2) существует левое И. с. на пространстве $X=CB(G)$ ограниченных непрерывных комплексных функций на G; 3) существует левое И. с. на пространстве $X=UCB(G)$ двусторонне непрерывных ограниченных комплексных функций; 4) существует двустороннее И. с. на одном из пространств $L^\infty(G)$, $CB(G)$, $UCB(G)$; 5) группа G не имеет *дополнительной серии* представлений; 6) носитель регулярного представления группы G совпадает с дуальным пространством этой группы; 7) единичная функция на группе G может быть на любом компакте $K\subset G$ равномерно аппроксимирована конечными линейными комбинациями матричных элементов регулярного представления группы G; 8) если μ — левая мера *Хаара* на G, ν — такая ограниченная комплексная регулярная борелевская мера на G, что

$$\int\int f(s)\,\overline{f(t^{-1}s)}\,d\mu(s)\,d\nu(t)\geqslant 0$$

для всех финитных непрерывных функций f на G, то $\int_G d\nu\geqslant 0$; 9) для нек-рого $q>1$, $q\neq\infty$ любого $\varepsilon>0$ и любого компакта $K\subset G$ существует неотрицательная функция $\varphi\in L^q(G)$, $\|\varphi\|_q=1$, удовлетворяющая условию $\|_x\varphi-\varphi\|_q<\varepsilon$ для всех $x\in K$; 10) предыдущее условие выполняется для всех $q>1$, $q\neq\infty$; 11) для любого $\varepsilon>0$ и любого компакта $K\subset G$ существует такое борелевское множество $U\subset G$, что $0<\mu(U)<\infty$ и $\mu^{-1}(U)\,\mu(xU\Delta U)<\varepsilon$ для всех $x\in K$; 12) любое непрерывное действие группы G на компактном выпуклом множестве в локально выпуклом пространстве непрерывными аффинными преобразованиями имеет неподвижную точку. Локально компактная группа, удовлетворяющая любому из равносильных условий 1) — 12), наз. а м е н а б е л ь н о й. Непрерывные образы аменабельных групп, замкнутые подгруппы аменабельных групп, расширения аменабельных групп с помощью аменабельных, индуктивные пределы аменабельных групп — аменабельны. Равномерно ограниченное представление аменабельной группы в гильбертовом пространстве эквивалентно унитарному представлению в том же пространстве. Нек-рые из перечисленных результатов могут быть распространены на случай общих топологич. групп, допускающих И. с. на пространстве ограниченных непрерывных комплексных функций. Теория И. с. и аменабельных групп имеет существенные приложения в теории динамич. систем, эргодич. теории, теории алгебр Неймана и в абстрактном гармонич. анализе.

Лит.: [1] v o n N e u m a n n J., «Fundam. math.», 1929, v. 13, p. 73—116; [2] Г р и н л и ф Ф., Инвариантные средние на топологических группах и их приложения, пер. с англ., М. 1973; [3] Д и к с м ь е Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974.

А. И. Штерн.

ИНВАРИАНТНОСТИ ПРИНЦИП: пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные действительные случайные величины с нулевым математич. ожиданием и дисперсией σ^2; пусть построена случайная ломаная

$$Y_n(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\{S_{[nt]}+(nt-[nt])\,X_{[nt]+1}\},\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$

где $S_m=\sum_{i=1}^m X_i$; если f — непрерывная действительная функция на пространстве $C[0,1]$ непрерывных функ-

ций на $[0, 1]$ с равномерной нормой (или хотя бы непрерывная всюду за исключением множества винеровской меры нуль), то $f(Y_n)$ по распределению сходится к $f(W)$, где W — винеровская случайная функция. Таким образом, предельное распределение для $f(Y_n)$ не зависит от каких-либо специальных свойств величин $X_1, X_2, \ldots$

Типичная схема использования И. п. состоит в отыскании предельного распределения для $f(Y_n)$ путем нахождения предельного распределения для $f(Y_n')$, где Y_n' — такая же, как Y_n, случайная ломаная, построенная по нек-рой другой специальным образом подобранной последовательности $X_1', X_2', \ldots$ Напр., если

$$f(x) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} x(t),$$

то f непрерывна на C, и так как

$$f(Y_n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant m \leqslant n} S_m,$$

то

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant m \leqslant n} S_m$$

по распределению сходится к $\sup_t W(t)$. Для нахождения распределения $\sup_t W(t)$ используется последовательность $\{X_n'\}: \mathsf{P}\{X_n' = 1\} = \mathsf{P}\{X_n' = -1\} = 1/2$, и в результате вычислений получается

$$\mathsf{P}\{\sup_t W(t) \leqslant a\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a e^{-u^2/2} du, \quad a \geqslant 0.$$

Лит.: [1] Donsker M., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1951, v. 6, p. 1—12; [2] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, № 2, с. 177—238; [3] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977.

В. В. Сазонов.

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРОЦЕДУРЫ — эквивариантность (см. ниже) какого-либо решающего правила в статистич. задаче, постановка к-рой допускает группу G симметрий, относительно этой группы G. Понятие И. с. п. возникает в первую очередь в так наз. параметрич. задачах математич. статистики, когда имеется априорная информация: распределение вероятностей $P(d\omega)$ исходов ω наблюдений принадлежит известному семейству $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$. Говорят, что статистич. проблема решения G-эквивариантна относительно группы G измеримых преобразований g измеримого пространства (Ω, B_Ω) исходов, если выполнены условия: 1) существует гомоморфизм f группы G на нек-рую группу $\bar{G}$ преобразований пространства Θ параметров

$$f: g \to \bar{g} \in \bar{G}, \ \forall g \in G,$$

со свойством

$$(P_\theta g)(\cdot) = P_{\bar{g}(\theta)}(\cdot), \ \forall g \in G;$$

2) существует гомоморфизм h группы G на нек-рую группу $\hat{G}$ измеримых преобразований измеримого пространства (D, B_D) решений d,

$$h: g \to \hat{g} \in \hat{G}, \ \forall g \in G,$$

со свойством

$$L(\bar{g}(\theta), \hat{g}(d)) = L(\theta, d),$$

где $L(\theta, d)$ — функция потерь; 3) вся дополнительная априорная информация о возможных значениях параметра (априорная плотность $p(\theta)$, разбиение на альтернативы $\Theta = \Theta_1 \cup \ldots \cup \Theta_s$ и т. п.) G-инвариантна или G-эквивариантна. При этих условиях решающее правило $\delta: \omega \to \delta(\omega) \in D$, безразлично детерминирован-

ное или рандомизированное, наз. инвариантной (точнее G-эквивариантной) процедурой, если

$$\delta(g(\omega)) = \hat{g}(\delta(\omega)), \quad \forall \omega \in \Omega, \ \forall g \in G.$$

Риск

$$r_\delta(\theta) = \mathsf{E}_\theta L(\theta, \delta(\omega))$$

эквивариантной решающей процедуры δ является G-инвариантом, в частности он не зависит от θ, если группа G действует на Θ транзитивно.

Как правило, в параметрич. задачах не существует гарантированно наилучшей решающей процедуры, к-рая минимизировала бы риск при каждом значении параметра $\theta \in \Theta$. В частности, процедура может приводить к очень малым значениям риска для нек-рых θ за счет ухудшения качества при других априори столь же возможных значениях параметра. Эквивариантность в какой-то степени обеспечивает беспристрастность подхода. Когда группа G достаточно богата, существует оптимальная инвариантная процедура с равномерно наименьшим среди инвариантных процедур риском.

Инвариантные процедуры широко применяются в проверке гипотез (см. также *Инвариантный критерий*) и в оценивании параметра закона распределения. Так, в задаче оценки неизвестного вектора средних для семейства m-мерных нормальных законов

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) = (2\pi)^{-m/2} \exp\left[-\sum_j (x_j - \alpha_j)^2/2\right]$$

с единичной матрицей ковариаций и гауссовой функцией потерь $\sum_j (\delta_j - \alpha_j)^2$ оптимальной эквивариантной оценкой будет обычное выборочное среднее

$$\boldsymbol{x}^* = N^{-1}(\boldsymbol{x}^{(1)} + \ldots + \boldsymbol{x}^{(N)}).$$

Группой G здесь служит произведение группы S_N перенумерации наблюдений и группы $\mathrm{Ort}\ (m)$ движений евклидова пространства $\mathbb{R}^m$; $\bar{G} = G = \mathrm{Ort}\ (m)$. При $m \geqslant 3$ в задаче существуют неэквивариантные оценки, приводящие к меньшему, чем у $\boldsymbol{x}^*$, риску при всех $\boldsymbol{\alpha}$, однако область существенной «сверхэффективности» оказывается незначительной и безгранично уменьшается с ростом объема N выборки. Возможность сверхэффективных процедур связана с некомпактностью G.

Эквивариантные статистич. процедуры возникают также в ряде непараметрич. задач статистики, когда априорное семейство распределений P исходов существенно бесконечномерно, а также при построении доверительных множеств для параметра θ распределения при наличии мешающих параметров.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964.

Н. Н. Ченцов.

ИНВАРИАНТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — оператор, не меняющий своего вида при тех или иных преобразованиях пространства, в к-ром он определен. Напр., если $L\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$ — оператор с частными производными, записанный в некоторой системе координат $(x_1, \ldots, x_n)$, а $x_k = \varphi_k(y)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — некоторое преобразование координат, порождающее соответствующее отображение φ^* в множестве функций $u(x)$ (каждой функции $u(x)$ сопоставляется естественным образом функция $\varphi^* u(y)$), и

$$\varphi^* L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = L\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi^* u,$$

причем оператор L в правой части этого равенства выражается через $\partial/\partial y_k$ так же, как оператор L через $\partial/\partial x_k$ в левой, то говорят, что L инвариантен относительно преобразования φ (или L перестановочен с оператором преобразования φ^*). Наиболее важен случай, когда И. д. о. инвариантен относительно нек-рой совокупности преобразований, образующей группу. Определе-

ние И. д. о. существенно усложняется при рассмотрении систем функций, преобразующихся по нек-рому представлению этой группы преобразований. И. д. о., связанные с группой Лоренца и ортогональной группой (волновой оператор, операторы Клейна — Гордона, Лапласа и др.) играют важнейшую роль в математич. физике. В анализе на дифференцируемых многообразиях широко используются оператор внешнего дифференцирования d, инвариантный относительно диффеоморфизмов, и метрически сопряженный с ним оператор δ, инвариантный относительно гладких преобразований, сохраняющих метрический тензор. В теории групп Ли весьма важны так наз. лево- или правоинвариантные операторы относительно соответствующих сдвигов на группе.

Лит.: [1] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [2] Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, М., 1958; [3] Де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, пер. с франц., М., 1956; [4] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964.

А. А. Дезин.

ИНВАРИАНТНЫЙ КРИТЕРИЙ — статистический критерий, построенный на *инвариантной статистике*. Пусть $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, P_\theta, \theta\in\Theta)$ — выборочное пространство и пусть проверяется гипотеза $H_0: \theta\in\Theta_0\subset\Theta$ против альтернативы $H_1: \theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$, причем гипотеза H_0 инвариантна относительно группы $G=\{g\}$ взаимно однозначных $\mathfrak{B}$-измеримых преобразований пространства $\mathfrak{X}$ на себя, т. е.

$$\bar{g}\Theta_0=\Theta_0 \text{ и } \bar{g}\Theta_1=\Theta_1 \text{ для любого } g\in G,$$

где $\bar{g}$ — элемент индуцированной группы $\bar{G}=\{\bar{g}\}$ взаимно однозначных преобразований вероятностных мер $P_\theta: P_\theta\to P_{\bar{g}\theta}$, определяемых для всех $\theta\in\Theta$ и $g\in G$ по формуле $P_{\bar{g}\theta}(B)=P_\theta(g^{-1}B)$, $B\in\mathfrak{B}$. Так как гипотеза H_0 инвариантна относительно группы G, то представляется естественным для проверки гипотезы H_0 использовать критерий, построенный на инвариантной статистике относительно этой же группы G. Такой критерий называется И. к., причем класс всех И. к. совпадает с классом критериев, построенных на максимальном инварианте. В теории И. к. важную роль играет теорема Ханта — Стейна: если гипотеза H_0 инвариантна относительно группы G, то в классе И. к., построенных для проверки гипотезы H_0, существует максиминный критерий. И. к. является частным случаем инвариантной статистической процедуры (см. *Инвариантность статистической процедуры*).

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964; [2] Шметтерер Л., Введение в математическую статистику, пер. с нем., М., 1976; [3] Hall W., Wijsman R., Ghosh J., «Ann. Math. Statistics», 1965, v. 36, p. 575; [4] Климов Г. П., Инвариантные выводы в статистике, М., 1973; [5] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

М. С. Никулин.

ИНВАРИАНТНЫЙ ОБЪЕКТ на однородном пространстве — поле геометрич. величин на однородном пространстве $M=G/H$ группы Ли G, не меняющееся при всех преобразованиях из G. Более строгое определение И. о. состоит в следующем. Пусть

$$\pi: E\to M=G/H$$

— локально тривиальное однородное расслоение над однородным пространством $M=G/H$ группы Ли G. Сечение расслоения π наз. И. о. (типа π) на M, если оно инвариантно относительно действия L^E группы G в пространстве $\Gamma(E)$ сечений этого расслоения. Множество И. о. типа π находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством H-инвариантных элементов слоя рассматриваемого расслоения над точкой $m\in M$, соответствующей смежному классу eH.

Важнейший и наиболее изученный частный случай: π есть векторное расслоение. Тогда H действует в слое над точкой m линейно, и И. о. типа π находятся во взаи-

имно однозначном соответствии с H-инвариантными векторами этого слоя, что сводит их классификацию к классич. задаче теории инвариантов. Для тензорных расслоений (ассоциированных с касательным расслоением) задача классификации И. о. сводится к нахождению инвариантов линейной группы изотропии.

И. о. часто возникают в следующем контексте. Пусть s — поле геометрич. величин (геометрич. объект) на гладком многообразии M, а Aut (s) — его группа симметрий, т. е. множество таких диффеоморфизмов φ многообразия M, что $\varphi^* s = s$, где φ^* — индуцированное φ преобразование s. И пусть группа Aut (s) содержит транзитивную на M подгруппу G, являющуюся группой Ли. Тогда M отождествляется с однородным пространством G/H, где H — стационарная подгруппа произвольной точки $m \in M$, а объект s становится И. о. на однородном пространстве G/H. Классич. примерами И. о. являются инвариантные риманова метрика, комплексная структура, симплектич. структура, контактная структура, обыкновенное дифференциальное уравнение (в частности, пульверизация и связность), дифференциальный оператор. Широкий класс И. о. допускает единообразное описание в рамках теории G-структур.

И. о. появляются естественным образом в различных областях математики и физики. Напр., линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами есть И. о. на евклидовом пространстве, рассматриваемом как однородное пространство векторной группы. Эйлерово движение твердого тела происходит по геодезическим левоинвариантной римановой метрики на группе SO(3). Однородность пространства Ньютона и пространства-времени Минковского вместе с принципом относительности Галилея приводят к разнообразным И. о. в ньютоновской и релятивистской физике, причем требование инвариантности часто позволяет почти однозначно определить рассматриваемый объект (уравнение, лангранжиан и т. п.) (см. [9]). Изучение свойств И. о. обычно легко сводится к тем или иным вопросам линейной алгебры (часто допускающим полное решение). Это определяет важную роль И. о. как простых модельных примеров, проясняющих общую ситуацию. Часто И. о. устроены проще, чем произвольные объекты данного типа. Напр., в отличие от произвольных римановых метрик, любая инвариантная риманова метрика на однородном пространстве полна (так же как и любая инвариантная псевдориманова метрика на компактном однородном пространстве), а любая ее самопересекающаяся геодезическая замкнута.

Вопросы классификации И. о. продвинуты в основном для небольшого числа классических тензорных И. о. Наиболее полные результаты получены для однородных пространств компактных групп Ли.

Большой интерес с различных точек зрения представляет изучение И. о. на неоднородных G-пространствах, т. е. геометрич. объектов, инвариантных относительно данной нетранзитивной группы Ли G преобразований многообразия M. В случае компактной группы G для построения И. о. здесь часто используется метод усреднения по группе (пример — теорема о существовании G-инвариантной римановой метрики). Другой более тонкий метод (применимый для более широкого класса групп Ли преобразований — так наз. совершенных групп преобразований) основан на существовании слайса (среза), наличие к-рого означает «почти локальную тривиальность» расслоения многообразия M на орбиты группы G.

Важным обобщением понятия И. о. является понятие ковариантного объекта: пусть на слоях F_m расслоения π задана дополнительная структура t_m, гладко зависящая от точки $m \in M$ (например, структура векторного пространства) и $A_m = \mathrm{Aut}(t_m)$ — группа автомор-

физмов структуры t_m слоя F_m. Множество сечений $k: m \to S_m \in A_m$ расслоения ψ: $A = \bigcup_{m \in M} A_m \to M$ образует нек-рую группу автоморфизмов расслоения π, называемую калибровочной группой. Пусть K — некоторая ее подгруппа. Сечение s расслоения π наз. K-ковариантным объектом типа π на $M = G/H$, если $\left(L_g^E s\right)(m) = k_g(m)\, s(m)$ $\forall g \in G$, $m \in M$, где $g \to k_g$ — некоторый гомоморфизм $G \to K$. Важнейший частный случай получается, если π: $E \to M = G/H$ — векторное расслоение, K — группа положительных функций на M, рассматриваемая как группа автоморфизмов расслоения π, $ke = k(m)\, e$, где $k \in K$, $m = \pi(e)$, $e \in E$. В этом случае K-ковариантный объект наз. также конформно инвариантным объектом, а определяемое им сечение соответствующего проективного расслоения является И. о.

Лит.: [1] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry, v. 2, N.Y., 1969; [2] Lichnerowicz A., Géométrie des groupes de transformations, P., 1958; [3] Wolf J. A., Spaces of constant curvature, N.Y., 1967; [4] Kobayashi S., Transformation groups in differential geometry, B.—Hdlb.—N.Y., 1972; [5] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [6] Комраков Б. П., Дифференциально-геометрические структуры и однородные пространства, ч. 1, Минск, 1977; [7] Итоги науки. Алгебра. Топология. 1962, М., 1963; [8] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967; [9] Lévy-Leblond J. M., «Commun. Math. Ph.», 1969, v. 12, № 1, p. 64—79.

Д. В. Алексеевский.

ИНВАРИАНТОВ ТЕОРИЯ в классическом определении — алгебраическая теория (иногда называемая также алгебраической И. т.), изучающая алгебраич. выражения (многочлены, рациональные функции или их совокупности), изменяющиеся определенным образом при невырожденных линейных заменах переменных. При этом, вообще говоря, рассматривается не полная линейная группа (т. е. не все множество невырожденных линейных замен переменных), а нек-рая ее подгруппа (напр., ортогональная, симплектическая и др.). И. т. возникла под влиянием ряда задач теории чисел, алгебры и геометрии. Еще К. Гаусс (C. Gauss), занимаясь теорией бинарных квадратичных форм, поставил задачу изучения многочленов от коэффициентов формы $ax^2 + 2bxy + cy^2$, не меняющихся при преобразовании этих коэффициентов, определяемом подстановкой вида $x \to \alpha x + \beta y$, $y \to \gamma x + \delta y$, где $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ и α, β, γ, δ — целые. С другой стороны, в проективной геометрии при внутренней характеризации конфигураций и связей появляются алгебраич. выражения от проективных координат, не меняющиеся при проективной коллинеации. Предшествующей ступенью И. т. являлось также учение о детерминантах. Арифметич. и алгебраич. вопросами, так или иначе связанными с И. т., занимались К. Якоби (K. Jacobi), Ф. Эйзенштейн (F. Eisenstein), Ш. Эрмит (Ch. Hermite). Собственно И. т. как математич. дисциплина сложилась к сер. 19 в. Этот период характеризуется интересом к формально-алгебраич. проблемам и их приложениям к геометрии. Понятия группы, инварианта и основные задачи теории формулируются к этому времени точным образом, и постепенно становится ясно, что факты классич. и проективной геометрии есть просто выражение тождеств (сизигий) между инвариантами или ковариантами соответствующей группы преобразований. Первой работой по И. т. следует, видимо, считать «Мемуар о гипердетерминантах» А. Кэли (A. Cayley, 1846). Все обычные термины И. т.— инвариант, ковариант, комитант, дискриминант и т. д.— были введены Дж. Сильвестром (J. Sylvester).

Одним из первых объектов изучения И. т. были так наз. инварианты форм. Рассматривается форма степени r от n переменных с неопределенными коэффициентами:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1 + \ldots + i_n = r} a_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

после линейной замены переменных

$$x_i \to \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

где α_{ij} — действительные или комплексные числа, она преобразуется в форму

$$f'(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1+\ldots+i_n=r} a'_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

так что указанное линейное преобразование переменных определяет нек-рое преобразование коэффициентов формы:

$$a_{i_1, \ldots, i_n} \to a'_{i_1, \ldots, i_n}.$$

Многочлен $\varphi(\ldots, a_{i_1, \ldots, i_n}, \ldots)$ от коэффициентов формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ наз. (о т н о с и т е л ь н ы м) и н в а р и а н т о м ф о р м ы, если при всех невырожденных линейных заменах переменных выполнено соотношение

$$\varphi\left(\ldots, a'_{i_1, \ldots, i_n}, \ldots\right) = |\alpha_{ij}|^g \varphi(\ldots, a_{i_1, \ldots, i_n}, \ldots),$$

где $|\alpha_{ij}|$ — определитель линейного преобразования, а g — константа (в е с). Если $g=0$, инвариант наз. а б с о л ю т н ы м. Так, простейшим примером инварианта является дискриминант $D=b^2-ac$ бинарной квадратичной ($n=r=2$) формы $f(x, y)=ax^2+2bxy+cy^2$, или дискриминант $\Delta=3b^2c^2+6\,abcd-4b^3d-4ac^3-a^2d^2$ тернарной ($n=2$, $r=3$) формы $f(x, y)=ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3$. Если задана не одна, а несколько форм от одних и тех же переменных, то можно рассматривать многочлены φ от коэффициентов всех этих форм, преобразующиеся указанным выше способом при линейной замене переменных,— так получается понятие с о в м е с т н о г о и н в а р и а н т а с и с т е м ы ф о р м. Напр., определитель $|a_{ij}|$ есть совместный инвариант системы n линейных форм $f_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Аналогичным образом может быть определен *ковариант* и, более общим образом,— *комитант*.

Классич. постановка основной задачи И. т.— фактически вычислить инварианты, а также дать полное их описание (то же для ковариантов). С этой целью были разработаны всевозможные формальные процессы, позволяющие строить инварианты (поляризация, реституция, тождество Капелли, Ω-процесс Кэли и т. п.). Кульминацией этой деятельности является создание так наз. символич. метода в И. т.— некоторого формального способа вычислять все инварианты степени не выше заданной (см. [3], [6], [11]).

Развившаяся к 30-м гг. 20 в. глобальная теория полупростых групп и их представлений позволила дать следующую наиболее общую постановку основной задачи классич. И. т. [6]. Задана произвольная группа G и ее конечномерное линейное представление ρ в линейном пространстве V над полем k. Если $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в V (в каком-либо базисе), то каждый элемент $g \in G$ определяет линейную замену переменных $x_1, \ldots, x_n$; производя эту замену переменных в произвольном многочлене $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, получают новый многочлен, так что g индуцирует нек-рое преобразование (автоморфизм) кольца всех многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ над полем k. Многочлен $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, не меняющийся при всех таких преобразованиях (т.е. когда g пробегает всю G), называется и н в а р и а н т о м п р е д с т а в л е н и я ρ г р у п п ы G. Все инварианты образуют k-алгебру, и цель И. т.— описание этой алгебры. Так, инварианты форм — это инварианты полной линейной группы относительно ее представления в пространстве симметрич. тензоров фиксированного ранга основного (или сопряженного) пространства (коэффициенты исходной формы f и есть компоненты этого тензора), рассмотрение ковариантов сводится к изучению алгебры инвариантов для представления в пространстве тензоров смешанной валентности.

В такой постановке задача описания инвариантов есть частный случай следующей общей задачи теории линейных представлений: разложить пространство тензоров заданной валентности на неприводимые инвариантные подпространства относительно заданной группы линейных преобразований основного линейного пространства (отыскание инвариантов может быть сведено к выделению одномерных инвариантных подпространств).

Уже на первых этапах развития И. т. было обнаружено следующее обстоятельство, позволившее обозреть всю систему инвариантов в целом: во всех разобранных случаях удавалось выделить конечное число б а з и с н ы х и н в а р и а н т о в $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, т. е. таких инвариантов, что всякий другой инвариант φ заданного представления может быть выражен в виде многочлена от них: $\varphi = F(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$. Иначе говоря, алгебра инвариантов оказывалась конечно порожденной. Выяснилось также, что эти базисные инварианты, вообще говоря, не являются независимыми (т. е. алгебра инвариантов не является свободной алгеброй): могут существовать нетривиальные многочлены $P(t_1, \ldots, t_m)$, называемые с о о т н о ш е н и я м и, или с и з и г и я м и, к-рые после подстановки $t_i = \varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, тождественно обращаются в нуль. В самом множестве соотношений можно снова указать конечное число базисных соотношений, алгебраич. следствиями к-рых являются все остальные (соотношения образуют идеал в кольце многочленов от переменных $t_1, \ldots, t_m$ и базисные соотношения — его образующие). В свою очередь, базисные соотношения сами, вообще говоря, не независимы — так могут быть определены вторые сизигии и т. д. Построенная цепь сизигий всегда оказывалась конечной. Напр., если G — *симметрическая группа* всех перестановок координат $x_1, \ldots, x_n$, то алгебра инвариантов есть алгебра всех симметрических многочленов от $x_1, \ldots, x_n$; элементарные симметрич. многочлены являются базисными инвариантами, к-рые алгебраически независимы (в этом случае сизигий нет).

Эти факты привели к формулировке двух основных проблем в классич. И. т.:

1. Доказать конечную порожденность алгебры инвариантов заданного представления заданной группы (первая основная теорема И. т.) и определить систему базисных инвариантов.

2. Доказать существование конечного базиса сизигий (вторая основная теорема И. т.) и найти его.

Первая основная теорема И. т. для инвариантов формы произвольной степени от произвольного конечного числа неизвестных была доказана Д. Гильбертом (D. Hilbert) [1] (см. также *Гильберта теорема* об инвариантах). Им же доказано, что вторая основная теорема И. т. справедлива во всех случаях, когда справедлива первая основная теорема И. т., а также, что в этом случае цепь сизигий всегда конечна. Д. Гильберт получил доказательства основных теорем классич. И. т. на базе доказанных им (специально с этой целью) общих абстрактных алгебраич. утверждений, составивших позднее фундамент современной коммутативной алгебры (*Гильберта теорема* о базисе, *Гильберта теорема* о сизигиях, *Гильберта теорема* о корнях). Первоначальное доказательство первой основной теоремы И. т. было неконструктивным и не давало оценки сверху на степени базисных инвариантов, однако позднее такие оценки были получены [2] (см. также [11]). Указанные выше формальные вычислительные методы И. т. позволяют, по крайней мере, в принципе, найти с использованием этих оценок все базисные инварианты. В 30-х гг. 20 в. Г. Вейль (H. Weyl), развивая идею Д. Гильберта и А. Гурвица (A. Hurvitz, см. [14]), доказал первую основную теорему И. т. для конечномерных представлений любых компактных групп Ли и для

конечномерных представлений любых комплексных полупростых групп Ли [6]. Книга [6], подводящая итог развития классич. И. т., содержит описание базисных инвариантов и сизигий для представлений классических групп, а также нек-рых других групп. Одним из важных приложений методов И. т. явилось описание чисел Бетти классических компактных групп Ли.

Доказательство второй основной теоремы И. т. вскрыло общую алгебраич. природу этой теоремы (она является следствием теоремы Гильберта о базисе). Пытаясь выяснить, справедливо ли это же в отношении первой основной теоремы И. т., Д. Гильберт сформулировал следующую проблему (14-я п р о б л е м а Г и л ь б е р т а): пусть k — поле, $A=k[x_1, \ldots, x_n]$ — алгебра многочленов над k от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и L — произвольное подполе поля частных алгебры A, содержащее k; будет ли алгебра $A \cap L$ конечно порождена над k? Из положительного ответа на этот вопрос вытекала бы справедливость первой основной теоремы И. т. для любых групп. Отрицательное решение 14-й проблемы Гильберта было получено в [9], где приведен пример представления коммутативной унипотентной группы, для к-рого алгебра инвариантов не имеет конечного числа образующих. В 50-х гг. 20 в. получен ряд результатов об инвариантах конечных групп, в особенности групп, порожденных отражениями (см. *Отражений группа*, *Кокстера группа*). Было доказано [13], [14], что конечные линейные комплексные группы, порожденные унитарными отражениями, могут быть охарактеризованы как конечные линейные группы, алгебра инвариантов к-рых не имеет сизигий.

Новый этап развития И. т. связан с расширением круга задач и геометрич. приложений этой теории. Современная И. т. (или г е о м е т р и ч е с к а я И. т.) стала частью общей теории алгебраич. групп преобразований; ее фундаментом является теория алгебраич. групп, построенная в 50-х гг. 20 в., а языком — язык алгебраич. геометрии. В отличие от классич. И. т., основным объектом к-рой являлось кольцо многочленов от n переменных над полем k вместе с группой автоморфизмов, индуцированных линейными заменами переменных, современная И. т. рассматривает произвольную конечно порожденную k-алгебру R и алгебраич. группу G ее k-автоморфизмов. Вместо линейного пространства V и представления ρ рассматривается произвольное аффинное алгебраич. многообразие X и алгебраич. группа G его алгебраич. преобразований (автоморфизмов), так что R — *это кольцо регулярных функций на* X, а действие G на R индуцировано действием G на X. Элементы из R, неподвижные относительно G, есть инварианты; все их множество образует k-алгебру R^G.

Обобщаются и другие понятия классич. И. т., напр. комитант — это регулярное отображение одного такого многообразия в другое, коммутирующее с действием группы; если R^G конечно порождена, то говорят, что выполнена первая основная теорема И. т. Устанавливается, что R^G будет конечно порождена, если G — геометрически редуктивная группа (см. *Мамфорда гипотеза*). Во многих важных случаях, напр. в приложении к проблеме модулей, G является именно такой группой. Если R^G конечно порождена, то существует аффинное алгебраич. многообразие W, для к-рого R^G является алгеброй регулярных функций; включение $R^G \subset R$ индуцирует морфизм $\pi : X \to W$. Если G геометрически редуктивна, то многообразие W классифицирует замкнутые орбиты G в W: отображение π сюръективно, и в каждом его слое лежит ровно одна *замкнутая орбита*. Необходимое условие существования фактормногообразия X по G — замкнутость всех орбит — оказывается в этом случае и достаточным, и этим фактормногообразием оказывается W. Отсюда видна роль R^G в решении геометрич. проблем классифи-

кации и построении фактормногообразий; вместе с тем изучение R^G (к-рое было конечной целью классич. И. т.) есть лишь начальный этап решения этих геометрич. проблем, ибо значение R^G не даст, вообще говоря, полной информации об орбитах G в X и потому должно сочетаться с рассмотрением незамкнутых орбит, их замыканий и стабилизаторов (так наз. о р б и т а л ь н ы х р а з л о ж е н и й). Более того, изучение действий алгебраич. групп на аффинных алгебраич. многообразиях есть лишь «локальная часть» общей теории алгебраич. групп преобразований (так же, как теория аффинных многообразий — «локальная часть» общей теории алгебраич. многообразий).

В общем случае рассматривается алгебраическое (регулярное) действие G на произвольном алгебраич. многообразии X (склеенном из аффинных кусков), так что, напр., решение задачи о построении фактормногообразия X (или подходящего открытого подмножества в X) по действию G сводится к рассмотрению G-инвариантного аффинного покрытия X и применению указанной выше конструкции к каждому элементу этого покрытия с последующей «склейкой» полученных аффинных фактормногообразий. Для успешного применения этой процедуры следует, вообще говоря, заменить X на пек-рое его инвариантное открытое подмножество (само X может и не допускать инвариантного аффинного покрытия).

В настоящее время исследования по теории алгебраич. групп преобразований ведутся в различных направлениях, из к-рых можно выделить следующие. Получение информации о свойствах общего положения точек многообразия X, на к-ром регулярно действует алгебраич. группа G. Описание орбитальных разложений различных конкретных действий (в основном, линейных представлений). Теоремы стратификации общих пространств преобразований на более простые, стандартные пространства. Теоремы о факторногообразиях, пространствах *орбит*, сечениях, квазисечениях и «слайсах»; многообразия неподвижных точек. Теоремы об эквивариантных вложениях. Критерии аффинности и квазиаффинности орбит (см. *Мацусимы критерий*). Структура замыканий орбит различных специальных видов, теория квазиоднородных многообразий (т. е. многообразий с плотной орбитой), действия с тривиальной алгеброй инвариантов. Алгебраич. свойства колец инвариантов, алгебро-геометрич. свойства пространств преобразований и факторногообразий. Связь с теорией особенностей [16]. Проблема рациональности полей инвариантов, связь с теорией алгебраич. торов и алгебраич. теорией чисел [17].

Лит.: [1] H i l b e r t D., «Math. Ann.», 1890, Bd 36, S. 473—534; [2] с г о ж е, там же, 1893, Bd 42, S. 313—73; [3] W e i t z e n b ö c k R., Invarianten-Theorie, Groningen, 1923; [4] H u r v i t z A., «Gött. Nachr.», 1897, S. 71—90; [5] К л е й н Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., ч. 1, М.— Л., 1937; [6] Г у р е в и ч Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, М.— Л., 1948; [7] В е й л ь Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [8] Проблемы Гильберта, М., 1969; [9] N a g a t a M., в кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematics (Edinburgh, 1958), Camb., 1960, p. 459—62; [10] е г о ж е, «Amer. J. Math.», 1959, v. 81, p. 766—72; [11] M u m f o r d D., Geometric Invariant Theory, B.—Hdlb.—N. Y., 1965; [12] Д ь е д о н н е Ж., К е р р о л Д ж., М а м ф о р д Д., Геометрическая теория инвариантов, пер. с англ., М., 1974; [13] F o g a r t y S., Invariant theory, N.Y.—Amst., 1969; [14] C h e v a l l e y C., «Amer. J. Math.», 1955, v. 77, p. 778—82; [15] C h e p h a r d G. C., T o d d J. A., «Canad. J. Math.», 1954, v. 6, p. 274—304; [16] «Proc. Symp. Pure Math.», 1975, v. 29, p. 633—42; [17] В о с к р е с е н с к и й В. Е., «Успехи матем. наук», 1972, т. 28, в. 4, с. 77—102

В. Л. Попов.

ИНВЕРСИЯ — преобразование, переводящее каждую точку A плоскости в такую точку A', лежащую на луче OA, что $OA' \cdot OA = k$, где k — некоторое постоянное действительное число. Точка O наз. ц е н т р о м, или п о л ю с о м И., k — с т е п е н ь ю, или к о э ф-

фициентом И. Если $k=a^2$, то точки окружности S с центром O и радиусом a переходят при И. сами в себя; внешние по отношению к S точки переходят во внутренние, а внутренние — во внешние (иногда И. наз. симметрией относительно окружности). Центр И. не имеет образа. И. с отрицательной степенью k равносильна И. с тем центром O и положительной степенью $|k|$, сопровождаемой симметрией относительно точки O. Иногда И. с положительной степенью наз. гиперболической И., а с отрицательной степенью — эллиптической И., или антиинверсией. Прямая, проходящая через центр И., переходит при И. сама в себя. Прямая, не проходящая через центр И., переходит в окружность, проходящую через центр И. Окружность, проходящая через центр И., переходит в прямую, не проходящую через центр И. Окружность, не проходящая через центр И., переходит в окружность, не проходящую через центр И. В декартовых прямоугольных координатах И. может быть задана формулами:

$$x'=\frac{kx}{x^2+y^2},\quad y'=\frac{ky}{x^2+y^2}$$

или в плоскости комплексного переменного: $z=k/\bar{z}$. И. является антиконформным преобразованием, т. е. сохраняет углы между линиями и меняет ориентацию. Аналогично определяется И. в пространстве.

Иногда И. определяется как отображение плоскости, сопоставляющее каждой точке A, отличной от центра заданной связки окружностей, точку A' пересечения окружностей связки, проходящих через точку A.

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, М., 1969. *А. Б. Иванов.*

ИНВЕРСИЯ в комбинаторике, беспорядок, — перестановка из n элементов, в к-рой элемент i не может занимать i-ю позицию, $i=1, 2, \ldots, n$. Задача подсчета числа D_n инверсий известна как «задача о встречах». Справедлива следующая формула:

$$D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

И.— частный случай перестановок, удовлетворяющих заданным ограничениям на позиции переставляемых элементов. Напр., известная задача «о супружеских парах» состоит в подсчете числа перестановок U_n, противоречивых двум перестановкам: $(1, 2, \ldots, n)$ и $(n, 1, 2, \ldots, n-1)$. (Две перестановки из n элементов противоречивы, если i-й элемент, $i=1, 2, \ldots, n$, занимает в них разные позиции.) Числа U_n вычисляются по формуле:

$$U_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

Через D_n и U_n подсчитывается число $L(r, n)$ *латинских прямоугольников* размера $r\times n$ при $r=2$, 3, а именно

$$L(2, n)=n!\,D_n,$$

$$L(3, n)=n!\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{k}D_{n-k}D_kU_{n-2k}.$$

Лит.: [1] Райзер Г. Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [2] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963. *В. М. Михеев.*

ИНВЕРСНАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа, в к-рой для любого элемента a существует единственный инверсный к нему элемент a^{-1} (см. *Регулярный элемент*). Свойство полугруппы S быть инверсной эквивалентно каждому из следующих: S *регулярная полугруппа* и любые два ее идемпотента перестановочны (таким образом, множество всех идемпотентов И. п. есть полурешетка, см. *Идемпотентов полугруппа*); каждый левый и каждый правый *главные идеалы* полугруппы S

имеют единственный порождающий идемпотент. Всякая группа будет И. п., группы и только они являются И. п. с единственным идемпотентом. Важную роль при изучении И. п. играет следующее отношение естественного частичного порядка $\leqslant$ на произвольной И. п. S: $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $ab^{-1}=aa^{-1}$ ($a, b \in S$). На полурешетке идемпотентов И. п. оно совпадает с естественным частичным порядком этой полурешетки (см. *Идемпотент*). Полурешетка инверсных полугрупп (см. *Связка полугрупп*) будет И. п. Сдвиговая оболочка И. п. (см. *Сдвиги полугрупп*) также будет И. п. [7]. Всякая конгруэнция на И. п. определяется своими классами, содержащими идемпотенты.

Пусть J_X — множество всех взаимно однозначных частичных преобразований множества X (включая и «пустое преобразование» — отображение пустого множества на себя). Относительно операции суперпозиции множество J_X является И. п., к-рая наз. симметрической И. п. на множестве X. Принципиальное значение имеет следующая теорема Вагнера — Престона: произвольная И. п. S изоморфно вложима в симметрическую И. п. J_S.

Теория И. п. представляет собой один из важных и глубоко разработанных разделов теории полугрупп. Изучены представления И. п. взаимно однозначными частичными преобразованиями и матрицами над полем (см. [1]). Исследуются конгруэнции на И. п. Изучаются И. п. с условиями конечности. Выделен целый ряд важных специальных типов И. п. Накладываемые при этом ограничения по большей части либо носят характер простоты в нек-ром смысле (напр., бипростота, см. *Простая полугруппа*), либо относятся к полурешетке идемпотентов E, либо являются комбинациями условий обоих типов. Ограничения на E могут касаться абстрактных свойств E как полурешетки (например, E — цепь специального вида), либо тех или иных относительных свойств E в полугруппе, в частности поведения E относительно нек-рых конгруэнций. На любой И. п. S существует наименьшая конгруэнция σ с тем свойством, что S/σ есть группа (наименьшая групповая конгруэнция), причем

$$\sigma = \{(a, b) \mid ae = be \text{ для некоторого } e \in E\}.$$

И. п. наз. собственной, если E составляет σ-класс. На любой И. п. S существует наибольшая конгруэнция μ, разделяющая идемпотенты, причем

$$\mu = \{(a, b) \mid a^{-1}ea = b^{-1}eb \text{ для любого } e \in E\}$$

и μ содержится в отношении $\mathcal{H}$ (см. *Грина отношения эквивалентности*); И. п. наз. фундаментальной, если μ совпадает с отношением равенства. Для упомянутых типов И. п. получено немало структурных теорем. При этом во многих случаях описание И. п. осуществляется «по модулю групп»: группы выступают в качестве блоков различных конструкций, в к-рых участвуют также полурешетки, гомоморфизмы групп и т. п. Таковы, напр., типичные описания клиффордовых И. п. (см. *Клиффордова полугруппа*) и вполне 0-простых И. п. (см. *Брандта полугруппа*).

И. п. можно рассматривать и как универсальные алгебры с двумя операциями: бинарной — умножением и унарной — взятием инверсного элемента. Получена классификация моногенных (т. е. порожденных одним элементом) И. п. как таких алгебр [6], [9]. Относительно указанных операций класс всех И. п. является многообразием; он может быть задан, напр., следующей системой тождеств [8]:

$$(xy)z = x(yz),\ (x^{-1})^{-1} = x,\ xx^{-1}x = x,$$

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1},\ xx^{-1}yy^{-1} = yy^{-1}xx^{-1}.$$

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [3] Курош А. Г., Общая алгебра. Лекции 1969—1970 учебного года, М., 1974; [4] Вагнер В. В., «Докл. АН СССР», 1952, т. 84, № 6, с. 1119—22; [5] Preston G., «J. Lond. Math. Soc.», 1954, v. 29, № 4, p. 396—403; [6] Глускин Л. М., «Матем. сб.», 1957, т. 41, № 1, с. 23—36; [7] Понизовский И. С., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, № 6, с. 147—48; [8] Теория полугрупп и ее приложения, в. 1, Саратов, 1965, с. 286—324; [9] Ершова Т. И., «Матем. зап. Уральского ун-та», 1971, т. 8, № 1, с. 30—33; [10] Munn W. D., в кн.: Semigroups, N.Y.—L., 1969, p. 107—23; [11] O'Carrol L., «J. Algebra», 1976, v. 42, p. 26—40.

Л. Н. Шеврин.

ИНВОЛЮТИВНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — геометрическая интерпретация вполне интегрируемой дифференциальной системы на n-мерном дифференцируемом многообразии M^n класса C^k, $k\geqslant 3$. p-мерным распределением (или дифференциальной системой размерности p) класса C^r, $1\leqslant r<k$, на M^n наз. функция, относящая каждой точке $x\in M^n$ p-мерное линейное подпространство $D(x)$ касательного пространства $T_x(M^n)$, так что x имеет окрестность U с p такими C^r-векторными полями $X_1, \ldots, X_p$ на ней, что векторы $X_1(y), \ldots, X_p(y)$ образуют базис пространства $D(y)$ для каждой точки $y\in U$. Распределение D наз. инволютивным, если для всех точек $y\in U$

$$[X_i,\ X_j]\,(y)\in D\,(y),\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant p.$$

Это же условие формулируется и в терминах дифференциальных форм. Распределение D характеризуется тем, что

$$D\,(y)=\{X\in T_y\,(M^n):\omega^\alpha\,(y)\,(X)=0\},\quad p<\alpha\leqslant n,$$

где $\omega^{p+1}, \ldots, \omega^n$ суть 1-формы класса C^r, линейно независимые в каждой точке $x\in U$, т. е. D локально эквивалентно системе дифференциальных уравнений $\omega^\alpha=0$. Тогда D является И. р., если на U существуют 1-формы ω^α_β такие, что

$$d\omega^\alpha=\sum_{\beta=p+1}^{n}\omega^\beta\wedge\omega^\alpha_\beta,$$

т. е. внешние дифференциалы $d\omega^\alpha$ принадлежат идеалу, порожденному формами ω^β.

Распределение D класса C^r на M^n инволютивно тогда и только тогда, когда оно (как дифференциальная система) есть *интегрируемая система* (теорема Фробениуса).

Лит.: [1] Шевалле К., Теория групп Ли, т. 1, пер. с англ., М., 1948; [2] Нарасимхан Р., Анализ на действительных и комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1971.

Ю. Г. Лумисте.

ИНВОЛЮЦИОННАЯ СИСТЕМА — система дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка

$$F_i\,(x,\ u,\ p)=0,\quad 1\leqslant i\leqslant m,\qquad (1)$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $u=u\,(x_1, \ldots, x_n)$, $p=(p_1, \ldots, p_n)=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, для к-рой все *Якоби скобки* равны нулю

$$[F_i,\ F_j]=0,\quad 1\leqslant i,\quad j\leqslant m,\qquad (2)$$

тождественно по (x, u, p). Равенства (2) наз. условиями разрешимости.

Для квазилинейных систем это определение несколько видоизменяется. Пусть все функции $\frac{\partial F_i}{\partial p_k}$, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant k\leqslant n$, не зависят от $p=(p_1, \ldots, p_n)$. Тогда этим свойством обладают и функции

$$[F_i,\ F_j]-F_i\frac{\partial F_j}{\partial u}+F_j\frac{\partial F_i}{\partial u}.$$

В классе квазилинейных уравнений условие инволюционности системы определяется равенствами

$$[F_i,\ F_j]-F_i\frac{\partial F_j}{\partial u}+F_j\frac{\partial F_i}{\partial u}=0,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant m.$$

Когда F_i не зависят от u, это определение совпадает с предыдущим. Иногда последнее определение инволюционности распространяют на все системы вида (1).

Если система (1) линейна, однородна и записана в виде

$$P_i(u)=0,\ 1\leqslant i\leqslant m,$$

где P_i — линейные дифференциальные операторы 1-го порядка, то ее инволюционность можно определить как условие коммутируемости $P_iP_j=P_jP_i$ для всех $1\leqslant i, j\leqslant m$.

Всякая И. с. является *полной системой*. Обратно, если (1) полная система и имеет нормальную форму, т. е. $1\leqslant m\leqslant n$ и

$$F_i(x,\ u,\ p)=p_i-f_i(x,\ u,\ p_{m+1},\ \ldots,\ p_n),\qquad 1\leqslant i\leqslant m,$$

то она инволюционна. Это позволяет привести полную систему к И. с., если $m\leqslant n$, и ее можно разрешить неособым преобразованием относительно нек-рых m переменных $p=(p_1,\ \ldots,\ p_n)$.

Если система (1) не зависит от u, $m=n$, определитель $\left|\frac{\partial F_i}{\partial p_k}\right|\neq 0$ и $p_i=p_i(x)$ разрешены из уравнений $F_i(x,p)=0, 1\leqslant i\leqslant n$, то инволюционность этой системы означает, что выражение

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\,dx_i$$

является полным дифференциалом. На этом основано применение метода Якоби [2] решения И. с., не зависящих от u и состоящих из m функционально независимых уравнений, $m<n$. В соответствии с этим методом исходную систему расширяют до И. с. из n уравнений с вышеуказанными свойствами. Расширение идет в несколько этапов, каждая последующая система получается из предыдущей добавлением ее независимых первых интегралов в инволюции. Этот метод допускает применение и для системы уравнений, зависящей от u (см. [3]).

Лит.: [1] Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, 2 Aufl., Lpz., 1956; [2] Jacobi C., «J. reine und angew. Math.», 1862, Bd 60, S. 1—181; [3] Goursat E., Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, P., 1891; [4] Гюнтер Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, Л.— М., 1934; [5] Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, пер. с нем., М., 1966.

А. П. Солдатов

ИНВОЛЮЦИЯ — 1) *Эндоморфизм* второго порядка т. е. отображение объекта на себя, квадрат к-рого является единичным морфизмом (см. также *Категория инволюцией*). Иногда инволюцией наз. также периодическое отображение, т. е. морфизм нек-рая ненулевая степень к-рого является единичным морфизмом. Минимальная из таких степеней наз. периодом И.

Часто под И. группы понимают ее элементы второго порядка.

И. в алгебре E над полем действительных или комплексных чисел — отображение $x\to x^*$ алгебры E на себя, удовлетворяющее следующим аксиомам инволюции: 1) $x^{**}=x$ для всех $x\in E$; 2) $(x+y)^*=x^*+y^*$ для всех $x, y\in E$; 3) $(\lambda x)^*=\bar{\lambda}x^*$ для всех $x\in E$ и всех чисел λ из соответствующего поля; 4) $(xy)^*=y^*x^*$ для всех $x, y\in E$. Алгебра E над полем комплексных чисел, снабженная И., наз. симметричной алгеброй.

Лит.: [1] Коннер П., Флойд Э., Гладкие периодические отображения, пер. с англ., М., 1969.

2) И. в проективной геометрии — проективное преобразование, квадрат к-рого есть тождественное преобразование. Не тождественная И. действительной проективной прямой имеет только две неподвижные точки (гиперболическая И.) либо не

имеет неподвижных точек (эллиптическая И.). Если A и B — неподвижные точки гиперболической И., то соответствующие друг другу точки M и M' гармонически разделяют пару A, B. На проективной плоскости всякая И. есть гиперболическая *гомология*.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1977.

3) И. на алгебраическом многообразии — автоморфизм конечного порядка алгебраич. многообразия. Если X — неособое проективное алгебраич. многообразие над алгебраически замкнутым полем k и g — И. многообразия X, то фактормногообразие $X|\{g\}$ по действию циклич. группы $\{g\}$ является проективным многообразием и наз. образом инволюции g. Множество неподвижных точек $F(g)$ инволюции g образует неособое подмногообразие в X. В случае, когда $F(g)$ имеет в каждой своей точке коразмерность, равную 1, образ инволюции g является неособым многообразием. Численные инварианты неособой модели $\overline{X}$ многообразия $X|\{g\}$ могут быть вычислены с помощью *Лефшеца формулы*.

Лит.: [1] Атья М., Зингер И., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 1, с. 127—82; [2] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1975, с. 77—170; [3] Godeaux L., Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications, Roma, [1963].

ИНДЕКС числа a по модулю m — показатель γ в *сравнении* $a \equiv g^{\gamma} \pmod m$, где a и m взаимно просты, а g — некоторый фиксированный *первообразный корень* по модулю m. И. числа a по модулю m обозначается через $\gamma = \operatorname{ind}_g a$ или, более кратко, $\gamma = \operatorname{ind} a$. Первообразные корни существуют только для модулей вида $m = 2, 4, p^{\alpha}, 2p^{\alpha}$, где $p > 2$ — простое число, и следовательно, только для таких модулей определено понятие И.

Если g — первообразный корень по модулю m и γ пробегает значения $0, 1, \ldots, \varphi(m)-1$, где $\varphi(m)$ — *Эйлера функция*, то g^{γ} пробегает приведенную систему вычетов по модулю m. Следовательно, каждому числу a, взаимно простому с m, соответствует единственный индекс γ такой, что $0 \leqslant \gamma \leqslant \varphi(m)-1$. Любой другой индекс γ' числа a удовлетворяет сравнению $\gamma' \equiv \gamma \bmod \varphi(m)$. Поэтому И. числа a образуют класс вычетов по модулю $\varphi(m)$.

Понятие И. аналогично понятию *логарифма* и И. обладает рядом свойств логарифма, а именно:

$$\operatorname{ind}(ab) \equiv \operatorname{ind} a + \operatorname{ind} b \pmod{\varphi(m)},$$

$$\operatorname{ind}(a^n) \equiv n \operatorname{ind} a \pmod{\varphi(m)},$$

$$\operatorname{ind}\frac{a}{b} \equiv \operatorname{ind} a - \operatorname{ind} b \pmod{\varphi(m)},$$

где a/b означает корень сравнения

$$bx \equiv a \pmod m.$$

Если $m = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$ — каноническое разложение произвольного натурального числа m и $g_1, \ldots, g_s$ — первообразные корни по модулям $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_s^{\alpha_s}$ соответственно, то для всякого a, взаимно простого с m, существуют целые числа $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$ такие, что

$$a \equiv (-1)^{\gamma} 5^{\gamma_0} \pmod{2^{\alpha}},$$

$$a \equiv g_1^{\gamma_1} \pmod{p_1^{\alpha_1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a \equiv g_s^{\gamma_s} \pmod{p_s^{\alpha_s}}.$$

Указанная система $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$ наз. системой индексов числа a по модулю m. Каждому числу a, взаимно простому с m, соответствует единственная система индексов $\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s$ такая, что

$$0 \leqslant \gamma \leqslant c-1,\ 0 \leqslant \gamma_0 \leqslant c_0-1,\ 0 \leqslant \gamma_1 \leqslant c_1,\ \ldots,$$

$$0 \leqslant \gamma_s \leqslant c_s,$$

где $c_i = \varphi(p_1^{\alpha_i})$, $i = 1, 2, \ldots, s$, а c и c_0 определены следующим образом:

$$c = 1,\ c_0 = 1 \text{ при } \alpha = 0 \text{ или } \alpha = 1,$$
$$c = 2,\ c_0 = 2^{\alpha-2} \text{ при } \alpha \geqslant 2.$$

Всякая другая система $\gamma', \gamma_0', \gamma_1', \ldots, \gamma_s'$ И. числа a удовлетворяет сравнениям

$$\gamma' \equiv \gamma \pmod{c},\ \gamma_0' \equiv \gamma_0 \pmod{c_0},$$
$$\gamma_1' \equiv \gamma_1 \pmod{c_1},\quad \gamma_s' \equiv \gamma_s \pmod{c_s}.$$

Понятие системы И. числа a по модулю m удобно для явного построения характеров мультипликативной группы приведенных классов вычетов по модулю m.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972.

С. А. Степанов.

ИНДЕКС ОПЕРАТОРА — разность размерностей *дефектных подпространств* линейного оператора $A : L_0 \to L_1$ — его ядра $\operatorname{Ker} A = A^{-1}(0)$ и его коядра $\operatorname{Coker} A = L_1/A(L_0)$, если эти пространства конечномерны. И. о. является гомотопич. инвариантом, характеризующим разрешимость уравнения $Ax = b$.

ИНДЕКСА ФОРМУЛЫ — соотношения между аналитич. и топологич. инвариантами операторов нек-рого класса. Именно, И. ф. устанавливают связь между аналитич. индексом линейного оператора

$$D : L_0 \to L_1$$

(L_0, L_1 — топологич. векторные пространства), определяемым формулой

$$i_a(D) = \dim \operatorname{Ker} D - \dim \operatorname{Coker} D \in \mathbb{Z}$$

и измеряющим таким образом «разность» между дефектными подпространствами D : его ядром $\operatorname{Ker} D = D^{-1}(0)$ и его коядром $\operatorname{Coker} D = L_1/D(L_0)$, и топологич. индексом — нек-рой топологич. характеристикой оператора D и пространств L_0, L_1. Для общего эллиптического дифференциального оператора на замкнутом многообразии задача нахождения И. ф. поставлена в конце 50-х гг. 20 в. [1] и решена в 1963 (см. [2]), хотя частные виды И. ф. были известны и ранее: такова, напр., *Гаусса — Бонне теорема* и ее многомерные варианты. В дальнейшем был получен ряд обобщений И. ф. на объекты более сложной природы; в этих случаях вместо индекса — целого числа — могут фигурировать произвольные комплексные числа и даже функции.

Элементарные формулы индекса. 1) Пусть M — дифференцируемая граница ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, A — эллиптический псевдодифференциальный оператор, отображающий пространство $C^\infty(M, \mathbb{C}^p)$ дифференцируемых комплекснозначных вектор-функций на M со значениями в $\mathbb{C}^p$ в себя. Пусть $B(M)$ — многообразие касательных векторов к M длины $\leqslant 1$, ориентированное посредством $2n$-формы

$$(dx^1 \wedge d\xi_1) \wedge \ldots \wedge (dx^n \wedge d\xi_n),$$

где $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты на M, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — соответствующие координаты в касательном пространстве, $S(M)$ — ориентированная граница $B(M)$, образованная единичными касательными векторами. В силу эллиптичности A его символ a является невырожденной $(p \times p)$-матричной функцией на $S(M)$. Оказывается, что для индекса оператора A имеет место формула [7]:

$$\operatorname{ind} A = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2\pi i)^n (2n-1)!} \int_{S(M)} \operatorname{Tr}(a^{-1}da)^{\wedge 2n-1}, \quad (1)$$

где $(a^{-1}da)^{\wedge 2n-1}$ — внешняя степень матричной дифференциальной формы $a^{-1}da$, а через Tr обозначен след $(p \times p)$-матричной формы. В частности, если $p < n$ или если A — дифференциальный оператор на нечет-

номерном многообразии, то $\operatorname{ind} A=0$ (для псевдодифференциального оператора последнее, вообще говоря, неверно).

2) Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор вида (здесь α — мультииндекс)

$$A=\sum_{|\alpha|\leqslant m} A_\alpha(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$$

в пространстве $C^\infty(\Omega)$, $B_1, \ldots, B_{m/2}$ — краевые дифференциальные операторы из $C^\infty(\Omega)$ в $C^\infty(M)$ вида

$$B_j=\sum_{|\alpha|\leqslant m_j} B_{j\alpha}(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha.$$

Набор операторов $\{A, B_1, \ldots, B_{m/2}\}$ задает эллиптическую краевую задачу, если не вырождается на $S(M)$ функция $\xi\to r_{jk}(\xi)$. Здесь r_{jk} — коэффициенты полиномов

$$r_j(\xi, \lambda)=\sum_{k=0}^{m/2-1} r_{jk}(\xi)\lambda^k,$$

являющихся остатками от деления λ-полиномов $b_j(\xi, \lambda)$ на λ-полином $a^+(\xi, \lambda)$, где

$$b_j(\xi, \lambda)=\sum_{|\alpha|=m_j} B_{j\alpha}(x)(\xi+\lambda\nu)^\alpha,$$

а a^+ определяется из разложения $a=a^+a^-$, где

$$a(\xi, \lambda)=\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x)(\xi+\lambda\nu)^\alpha,$$

$x\in M$; ξ, ν — единичные касательный вектор и внутренняя нормаль к M соответственно; a^+ (соответственно a^-) — λ-полином, не имеющий нулей в верхней (соответственно, нижней) λ-полуплоскости. Индексом описанной краевой задачи наз. индекс соответствующего ей линейного оператора $\mathfrak{A}$ из $C^\infty(\Omega)$ в $C^\infty(\Omega)\times C^\infty(M)^{m/2}$, переводящего $u\in C^\infty(\Omega)$ в набор $\{Au, B_1u|_M, \ldots, B_{m/2}u|_M\}$. Оказывается, что индекс эллиптической краевой задачи совпадает с индексом эллиптического псевдодифференциального оператора на M, символом к-рого служит матрица $r=(r_{jk})$. В частности, индекс задачи Дирихле $\left\{A, 1, \frac{\partial}{\partial\nu}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{m/2-1}\right\}$ равен нулю. Имеются общие И. ф. для граничных задач [16], [17].

Ф о р м у л ы А т ь и — З и н г е р а. Пусть $C^\infty(\xi)$ и $C^\infty(\eta)$ — пространства бесконечно дифференцируемых сечений векторных расслоений ξ и η над дифференцируемым замкнутым n-мерным многообразием M, D — (псевдодифференциальный) эллиптич. оператор, действующий из $C^\infty(\xi)$ в $C^\infty(\eta)$. Топологич. индекс $i_t(D)$ оператора D определяется следующим образом. Вследствие эллиптичности символ $\sigma(D)$ оператора D определяет изоморфизм поднятий векторных расслоений на $S(M)$:

$$\sigma(D):\pi^*(\xi)\to\pi^*(\eta),$$

где $\pi: S(M)\to M$ — расслоение единичных сфер кокасательного расслоения T^*M многообразия M. Пусть $B(M)$ — пространство расслоения единичных шаров в T^*M, это — $2n$-мерное многообразие с краем $S(M)$. Склейкой двух экземпляров $B^+(M)$ и $B^-(M)$ многообразия $B(M)$ по их общей границе получается замкнутое $2n$-мерное многообразие $\Sigma(M)=B^+\cup_{S(M)}B^-$, над к-рым строится векторное расслоение

$$V(\sigma)=\pi^{+*}(\xi)\cup_{\sigma(D)}\pi^{-*}(\eta),$$

где $\pi^\pm: B^\pm(M)\to M$, а $\sigma(D)$ использовано для отождествления ξ и η вдоль $S(M)$. Это векторное расслоение $V(\sigma)$ несет всю топологич. информацию, нужную для определения топологич. индекса. Именно:

$$i_t(D)=\{\operatorname{ch}V(\sigma)\cdot\pi^*_\Sigma\mathscr{T}(M)\}[\Sigma(M)], \qquad (2)$$

где ch $V(\sigma)$ — когомологический *Чжэня характер* расслоения $V(\sigma)$, $\mathscr{T}(M)$ — когомологический *Тодда класс* комплексифицированного кокасательного расслоения $T^*M\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, $\pi_!:\Sigma(M)\to M$, $\pi^*\mathscr{T}(M)=\mathscr{T}(\Sigma(M))$, и справа стоит значение $2n$-мерной компоненты элемента ch $V(\sigma)\cdot\pi_\Sigma^*\mathscr{T}(M)$ на *фундаментальном цикле* многообразия $[\Sigma(M)]$. Таким образом, отображение $V(\sigma(D))\to i_t(D)$ определяет гомоморфизм $K(\Sigma(M))\to\mathbb{Z}$, тривиальный на образе $K(M)$, здесь $K(X)$ — *Гротендика группа*, порожденная комплексными векторными расслоениями над X.

Теорема об индексе Атьи — Зингера:

$$i_a(D)=i_t(D). \tag{3}$$

Формула (2) допускает ряд модификаций. Вводится следующим образом зависящий от символа $\sigma(D)$ рациональный класс когомологий ch $[\sigma(D)]$: тройке $\{\pi^*(\xi),\ \pi^*(\eta),\ \sigma(D)\}$ сопоставляется *различающий элемент*, к-рый можно рассматривать как первое *препятствие* к распространению изоморфизма σ на все $B(M)$,

$$[\sigma(D)]\in K(B(M)/S(M))=K(TM),$$

где TM — касательное расслоение, к-рое (с помощью римановой метрики на M) можно отождествить с T^*M, $K(B/S)$ — относительная группа Гротендика векторных расслоений над B/S, и следовательно — характер Чжэня $[\sigma(D)]:\mathrm{ch}\,[\sigma(D)]\in H^*(B/S;\mathbb{Q})$. Теперь формула для топологич. индекса D принимает вид:

$$i_t(D)=(-1)^n\{\mathrm{ch}\,[\sigma(D)]\cdot\pi^*\mathscr{T}(M)\}[TM], \tag{4}$$

где $\pi: TM\to M$, $\pi^*\mathscr{T}(M)=\mathscr{T}(TM)$.

Тома изоморфизм

$$\varphi_*: H^*(B/S)=H^*(TM)\to H^*(M)$$

позволяет записать (4) в виде

$$i_t(D)=(-1)^{n(n+1)/2}\{\varphi_*\,\mathrm{ch}\,[\sigma(D)]\cdot\mathscr{T}(M)\}[M] \tag{5}$$

(в (4) и (5) справа по-прежнему, как и в (2), значения соответствующих элементов на фундаментальных циклах.)

В терминах K-теории топологич. индекс выражается следующим образом. Пусть $i: M\to E$ — дифференцируемое вложение M в евклидово пространство, W — трубчатая окрестность M в E, к-рую можно рассматривать как действительное векторное расслоение над M, причем TW изоморфно (над $\mathbb{R}$) $\pi^*(W\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})$ — комплексификации расслоения W, поднятой на TM проекцией $\pi: TM\to M$. Композиция изоморфизма Тома $\varphi: K(TM)\to K(TW)$ с естественным гомоморфизмом $K(TW)\to K(TE)$, индуцированным вложением $W\to E$, определяет гомоморфизм $i_!: K(TM)\to K(TW)$. Пусть $\beta: K(TE)\to\mathbb{Z}$ — изоморфизм периодичности Ботта. Тогда гомоморфизм $\beta\circ i_!: K(TM)\to\mathbb{Z}$ не зависит от вложения, и

$$i_t(D)=\beta\circ i_!([\sigma(D)]).$$

Примеры. 3) Пусть M — замкнутое ориентированное риманово многообразие, $\xi^k=\Lambda^k(T^*M)\otimes\mathbb{C}$ — расслоение комплексных дифференциальных k-форм над M,

$$d: C^\infty(\xi^k)\to C^\infty(\xi^{k+1}),\quad d^*: C^\infty(\xi^{k+1})\to C^\infty(\xi^k)$$

— оператор внешнего дифференцирования и его сопряженный, соответственно. Оператор

$$d+d^*: C^\infty(\xi^e)\to C^\infty(\xi^0),$$

где $\xi^e=\bigoplus_p\xi^{2p}$, $\xi^0=\bigoplus_p\xi^{2p+1}$, эллиптичен, для него справедлива И. ф. (3), причем топологич. индекс равен *эйлеровой характеристике* $\chi(M)$ (Ходжа — де Ра-

ма теорема). При $\dim M=2$ получается теорема Гаусса — Бонне.

4) Пусть $\xi^{\pm}$ — собственные $(\pm)$-пространства инволюции $I(\alpha)=i^{p(p-1)+k}*\alpha$, $\alpha\in\xi^p$, где * есть оператор двойственности, определяемой метрикой на M, $\dim M=2k$. Сужение оператора $d+d^*$ до оператора из $C^\infty(\xi^+)$ в $C^\infty(\xi^-)$, называемое сигнатурным оператором δ_M,— эллиптический оператор, для него справедлива И. ф. (3), причем аналитич. индекс равен *сигнатуре* многообразия M, а топологич. индекс равен L-*роду* (теорема Хирцебруха).

5) Пусть η — голоморфное векторное расслоение над компактным комплексным многообразием M, $\xi^{0,q}$ — расслоение дифференциальных форм типа $(0, q)$, $\eta\otimes\xi^{0,q}$ — расслоение форм типа $(0, q)$ с коэффициентами в η, $\zeta^{0,q}$ — $\mathbb{C}$-модуль гладких сечений этого расслоения. Пусть $\overline{\partial}:\zeta^{0,q}\to\zeta^{0,q+1}$ — оператор Коши — Римана — Дольбо, $\overline{\partial}^*$ — его сопряженный, $\zeta^e=\bigoplus_p\zeta^{0,2p}$, $\zeta^0=\bigoplus_p\zeta^{0,2p+1}$. Тогда оператор $\overline{\partial}+\overline{\partial}^*:\zeta^e\to\zeta^0$ является эллиптическим, и для него справедливо (3), причем аналитич. индекс равен эйлеровой характеристике M с коэффициентами в пучке ростков голоморфных сечений расслоения η, а топологический индекс — $\{\mathrm{ch}\,\eta\times\mathscr{T}(M)\}[M]$, где $\mathrm{ch}\,\eta$ — характер Чжэня расслоения η, $\mathscr{T}(M)$ — класс Тодда касательного расслоения к M (теорема Римана — Роха — Хирцебруха).

Эллиптические комплексы. В более общей ситуации, естественно возникающей, напр., в дифференциальной геометрии, вместо одного оператора D рассматривается комплекс (псевдодифференциальных) операторов

$$A:0\to C^\infty(\xi_0)\xrightarrow{D_0}C^\infty(\xi_1)\xrightarrow{D_1}\dots\xrightarrow{D_{N-1}}C^\infty(\xi_N)\to 0,$$

где ξ_j — дифференцируемые векторные расслоения над замкнутым многообразием M, $D_{j+1}D_j=0$. Символом комплекса A наз. соответствующая последовательность главных символов

$$\sigma(A):0\to\pi^*(\xi_0)\xrightarrow{\sigma_0}\pi^*(\xi_1)\xrightarrow{\sigma_1}\dots\xrightarrow{\sigma_{N-1}}\pi^*(\xi_N)\to 0,$$

где $\pi^*(\xi_j)$ — поднятие расслоений ξ_j на $S(M)$ с помощью проекции $\pi: T^*M\to M$. Комплекс A наз. эллиптическим, если его символ является ациклическим комплексом, т. е. точен всюду вне нулевого сечения. Аналитическим индексом комплекса A наз. его эйлерова характеристика:

$$i_a(A)=\chi(A)=\sum_{j=0}^N(-1)^j\dim H^j(A),$$

где $H^j(A)$ — группы когомологий комплекса A. Двумя важными примерами эллиптич. комплексов являются комплекс де Рама и его комплексный аналог — комплекс Дольбо. Проблема вычисления $\chi(A)$ через класс комплекса $\sigma(A)$ в $K(TM)$ может быть сведена к вычислению индекса для одного оператора [3].

Если компактная группа G действует на A (и коммутирует с действием D_j, т. е. A есть G-комплекс), то $H^j(A)$ будут G-модулями, и $\chi(A)$ определяется как элемент кольца характеров группы G. Это — функция из $C^\infty(G)$. Оказывается при этом, что теорема об индексе может рассматриваться как обобщение *Лефшеца теоремы* о неподвижных точках, поскольку топологич. индекс в точке $g\in G$ может быть выражен через индекс сужения символа на подмножество $M^g\subset M$ неподвижных точек отображения, задаваемого элементом g.

Пусть G — топологическая циклическая группа, т. е. в G существует элемент g, степени к-рого плотны в G, Ng — нормальное расслоение к M^g в M, и $[\sigma(A)]\in K_G(TM)$ — класс символа A. Пусть $i^*[\sigma(A)](g)\in$

$\in K_G(TM^g)$ и $\lambda_{-1}(N^g \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\,(g)$ — ограничение на M^g его и класса, порожденного стандартным комплексом внешних степеней расслоения $\pi^*(N^g \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ соответственно (здесь $i: M^g \to M$, $\pi: TM^g \to M^g$). Тогда **число Лефшеца** $L(g, A)$, равное $\Sigma(-1)^j \operatorname{Tr}(g|H^j(A))$, задается формулой:

$$L(g,\ A) = \operatorname{ind}\left\{\frac{i^*[\sigma(A)](g)}{\lambda_{-1}\left(N^g \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\right)(g)}\right\} = \operatorname{ind}_G A(g),$$

где $\operatorname{ind}: K(TM^g) \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — естественное расширение топологич. индекса $K(TM^g) \to \mathbb{Z}$. Когомологический вариант этой формулы:

$$\operatorname{ind}_G A(g) = \left\{\frac{\operatorname{ch} i^*[\sigma(A)](g)}{\operatorname{ch} \lambda_{-1}\left(N^g \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\right)(g)} \cdot \pi^* \mathscr{T}(M^g)\right\}[M]. \quad (6)$$

Без условия компактности G, но в предположении, что M^g — нульмерное подмногообразие и действие G является невырожденным (т. е. график g трансверсален диагонали в $M \times M$), имеет место аналогичная формула. Она может быть выражена таким образом. Если $P \in M^g$, то $dg(P)$ оставляет на месте $TM|_P$, а g индуцирует в слое $\xi_j|_P$ линейное преобразование $l_j(g, P)$, и

$$\operatorname{ind}_G A(g) = \sum_{P \in M^g} \sum_j (-1)^j \operatorname{Tr} l_j(g, P)/\det(1 - dg(P)).$$

Возможно, наконец, ослабление условия эллиптичности G-комплекса A рассмотрением так наз. **трансверсально эллиптических комплексов**; в этом случае индекс оказывается обобщенной функцией на группе G (см. [8]). В частности, если G — конечна, то трансверсальная эллиптичность эквивалентна эллиптичности, так что применимы прежние формулы. Если $M = G/H$ — однородное пространство, то все комплексы операторов трансверсально эллиптичны, и здесь И. ф. по существу совпадает с Фробениуса формулой взаимности для индуцированных представлений группы G.

Нефредгольмовы операторы. В этом случае также иногда удается дать другое определение аналитич. индекса и получить соответствующие И. ф.

Примеры: 6) Пусть D — равномерно эллиптич. оператор на $\mathbb{R}^n$ с почти периодич. коэффициентами. Аналитич. индекс $i_a(D)$ вводится с помощью относительной размерности в Π_∞-факторе (см. *Неймана алгебра*) и является действительным числом (см. [11]). Имеет место формула, аналогичная (1), но вместо интеграла по $\mathbb{R}^n$ в ней используется среднее значение почти периодич. функции.

7) Пусть на многообразии M свободно действует дискретная группа Γ и факторпространство $\tilde{M} = M/\Gamma$ компактно; пусть ξ, η — векторные расслоения над M и Γ действует на них согласованно с ее действием на M. Для эллиптич. оператора $D: C^\infty(\xi) \to C^\infty(\eta)$ на M, перестановочного с действием Γ, аналитич. индекс определяется формулой

$$i_a(D) = \operatorname{Tr}_\Gamma P_1 - \operatorname{Tr}_\Gamma P_2, \quad (7)$$

где P_1, P_2 — ортогональные проекторы на $\operatorname{Ker} D$ и на $\operatorname{Ker} D^*$ в $L^2(M, d\mu)$, $d\mu$ — любая Γ-инвариантная гладкая плотность на M, а $\operatorname{Tr}_\Gamma P$ для оператора P, перестановочного с Γ и имеющего гладкое ядро $P(x, y)$, определяется формулой

$$\operatorname{Tr}_\Gamma P = \int_{M_0} \operatorname{tr} P(x,\ y)\, d\mu$$

(здесь M_0 — любая фундаментальная область группы Γ на M, tr — след матрицы). Оказывается, что $i_a(D) = i_a(\tilde{D})$, где $\tilde{D}$ — оператор на $\tilde{M}$, символ к-рого $\sigma(\tilde{D})$ индуцирует $\sigma(D)$ при поднятии на M с помощью кано-

нической проекции $\pi : M \to \tilde{M}$ [12]. Таким образом И. ф. для оператора D может быть получена из И. ф. для оператора $\tilde{D}$ на компактном многообразии $\tilde{M}$. Этот результат позволяет обнаруживать нетривиальность пространств, в к-рых реализуются представления дискретных серий [13].

8) Если коэффициенты равномерно эллиптического оператора D на $\mathbb{R}^n$ образуют однородное измеримое случайное поле, то можно ввести аналитич. индекс $i_a(D)$, являющийся случайной величиной (в эргодическом случае — действительным числом), определяемой по формуле (7) с заменой $\mathrm{Tr}_\Gamma P$ на $\mathrm{Tr} P$, где $\mathrm{Tr} P$ строится по ядру $P(x, y)$ оператора P через среднее значение по x : $\mathrm{Tr}\, P = M_x\{\mathrm{tr}\, P(x, x)\}$. Этот пример — обобщение (x 6) и для него имеет место [14] аналогичная И. ф.

Если дано семейство эллиптических операторов, параметризованное точками y компактного пространства Y, то определен его аналитич. индекс $i_a(D) \in K(Y)$ (см. [15]). Топологич. индекс $i_t(D)$ строится аналогично формуле (6) (все построения делаются «послойно» над Y) и имеет место теорема об индексе.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 3, с. 121—32; [2] Атья М. Ф., Зингер И. М., «Математика», 1966, т. 10, № 3, с. 29—38; [3] их же, «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 5, с. 99—142; [4] Атья М. Ф., Сегал Г. Б., там же, в. 6, с. 135—49; [5] Атья М. Ф., Зингер И. М., там же, 1969, т. 24, в. 1, с. 127—82; [6] их же, там же, 1972, т. 27, в. 4, с. 161—88; [7] Федосов Б. В., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1974, т. 30, с. 159—241; [8] Atiyah M., Elliptic operators and compact groups, B.—Hdlb.—N.Y., 1974; [9] Пале Р., Семинар по теореме Атьи — Зингера об индексе, пер. с англ., М., 1970; [10] Атья М. Ф., Ботт Р., Патоди В. К., «Математика», 1973, т. 17, № 6, с. 3—48; [11] Coburn L., Moyer R., Singer I. M., «Acta Math.», 1973, v. 130, № 3—4, p. 279—307; [12] Atiyah M. F., «Astérisque», 1976, v. 32—33, p. 43—72; [13] Atiyah M. F., Schmid W., «Inventiones math.», 1977, v. 42, p. 1—62; [14] Федосов Б. В., Шубин М. А., «Докл. АН СССР», 1977, т. 236, № 4, с. 812—5; [15] Атья М. Ф., Лекции по K-теории, пер. с англ., М., 1967; [16] Boutet de Monvel L., «Acta math.», 1971, v. 126, № 1—2, p. 11—51; [17] Федосов Б. В., «Матем. сб.», 1974, т. 93, № 1, с. 62—89; т. 95, № 4, с. 525—50; 1976, т. 101, № 3, с. 380—401.

М. И. Войцеховский, М. А. Шубин.

ИНДЕФИНИТНАЯ МЕТРИКА — термин, используемый в теории *пространств с индефинитной метрикой* для обозначения (в зависимости от типа пространства) либо *билинейной формы*, либо *полуторалинейной формы*, либо (нелинейного) функционала нек-рой степени однородности, заданного в рассматриваемом пространстве. И. м. не является метрикой (т. е. расстоянием), а эпитет «индефинитная» означает, что либо рассматриваемая полуторалинейная форма не является положительно определенной, либо рассматриваемый функционал не является степенью нормы в пространстве. Различные типы И. м. носят название G-метрики, I-метрики, J-метрики (см. *Гильбертово пространство с индефинитной метрикой*, *Понтрягина пространство*).

А. И. Штерн.

ИНДИВИДНАЯ КОНСТАНТА, предметная константа,— символ *формального языка*, служащий для обозначения нек-рого выделенного, фиксированного элемента (индивида) в структурах, описываемых этим языком. Всякую И. к. можно рассматривать как 0-местную функциональную *константу*. Напр., язык теории полей содержит две И. к.: 0 и 1, а язык проективной геометрии совсем не содержит И. к.

С. К. Соболев.

ИНДИВИДНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ, предметная переменная, — символ *формального языка*, служащий для обозначения произвольного элемента (индивида) в структурах, описываемых этим языком. Всякий формальный язык содержит один или несколько сортов И. п., причем переменных каждого сорта — бесконечное множество. Напр., язык теории векторного *пространства* содержит два сорта И. п.: для векторов и

для скаляров, а язык арифметики — один сорт: для неотрицательных целых чисел. *С. К. Соболев.*

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА — другое название *Биркгофа эргодической теоремы* и ее обобщений. *Д. В. Аносов.*

ИНДУКТИВНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ, б о л ь ш а я $\operatorname{Ind} X$ и м а л а я $\operatorname{Ind} X$ — *размерностные инварианты* топологического пространства X, определяемые параллельно с помощью понятия перегородки между двумя множествами следующим образом по индукции. Для пустого пространства $X=\phi$ полагается $\operatorname{Ind}\phi=\operatorname{ind}\phi=-1$. В предположении, что уже известны те пространства X, для к-рых $\operatorname{Ind} X<n$, где n — неотрицательное целое число, для пространства X считается $\operatorname{Ind} X\leqslant n+1$, если для любых двух дизъюнктных замкнутых множеств A и B в X имеется перегородка C между ними, для к-рой $\operatorname{Ind} C<n$. При этом замкнутое множество C наз. п е р е г о р о д к о й между множествами A и B в пространстве X, если открытое множество $X\setminus C$ есть сумма двух открытых дизъюнктных множеств H_A и H_B, содержащих, соответственно, A и B. Это определение переходит в определение малой И. р. $\operatorname{ind} X$, если считать одно из множеств A и B состоящим из одной лишь точки, а другое — произвольным замкнутым множеством, не содержащим эту точку.

Большая И. р. была определена для достаточно широкого класса (метрических) пространств Л. Брауэром [1]. Малая И. р. определена независимо П. С. Урысоном [2] и К. Менгером [3].

Исследование И. р. и вообще размерностных инвариантов содержательно лишь в предположении, что пространство X удовлетворяет достаточно сильным *отделимости аксиомам*, в основном аксиоме нормальности.

Лит.: [1] B r o u w e r L. E. J., «J. reine und angew. Math.», 1913, Bd 142, S. 146—52; [2] У р ы с о н П. С., «C. r. Acad. sci.», 1922, t. 175, p. 440—42; [3] M e n g e r K., «Monatsh. Math. und Phys.», 1923, Bd 13, S. 148—60; [4] А л е к с а н д р о в П. С., П а с ы н к о в Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973. *В. И. Зайцев.*

ИНДУКТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ — определение какого-либо понятия $A(n)$, зависящего от неотрицательного целого параметра n, протекающее по следующей схеме: а) задается значение $A(0)$; б) задается правило получения значения $A(n+1)$ по n и по значению $A(n)$. Типичным И. о. является определение функции $n!$: а) $0!=1$; б) $(n+1)!=n!(n+1)$. Более общим И. о. является определение по *трансфинитной индукции*, с помощью к-рого вводится какое-либо понятие $A(\alpha)$, зависящее от ординального (трансфинитного) числа α. Такое определение осуществляется заданием нек-рого правила, позволяющего получать значение $A(\alpha)$ по известным значениям $A(\beta)$ для всех $\beta<\alpha$. Напр., сумма $\gamma+\alpha$ ординалов γ и α определяется так:

$$\gamma+0=\gamma,\ \gamma+\alpha=\sup_{\beta<\alpha}(\gamma+\beta)\ \text{для}\ \alpha>0.$$

Другим расширением понятия И. о. является так наз. о б о б щ е н н о е И. о., к-рым задается класс каких-либо объектов. Оно протекает по следующей схеме: 1) задаются нек-рые (исходные) объекты определяемого класса; 2) задаются нек-рые правила, позволяющие из уже определенных объектов получать другие объекты определяемого класса; 3) объектами определяемого класса являются только те, к-рые получены согласно пп. 1) и 2) этого определения (этот пункт всегда подразумевается и поэтому часто опускается). Примером обобщенного И. о. является определение понятия теоремы для данной аксиоматич. системы S: всякая аксиома системы S является теоремой; если посылки какого-нибудь правила вывода системы S — теоремы, то заключение этого правила вывода также является теоремой.

Чтобы доказать, что любой объект из класса, заданного нек-рым обобщенным И. о., напр. всякая теорема какой-нибудь аксиоматич. системы S, обладает нек-рым свойством P, достаточно показать следующее: всякая аксиома системы S обладает свойством P; если посылки какого-нибудь правила вывода обладают свойством P, то заключение этого правила вывода также обладает свойством P. Доказательства такого рода наз. доказательствами индукцией по определению соответствующего понятия (в данном примере — теоремы) или по построению соответствующего объекта, в зависимости от контекста.

Лит.: [1] Шенфилд Дж., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975; [2] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970.

С. К. Соболев.

ИНДУКТИВНЫЙ ПРЕДЕЛ — конструкция, к-рая впервые появилась в теории множеств, а затем стала широко использоваться в алгебре, топологии и других областях математики. Важный частный случай И. п.— это И. п. направленного семейства однотипных математических структур. Пусть C — направленное по возрастанию предупорядоченное множество, т. е. в C задано рефлексивное и транзитивное отношение $\prec$ и для любых элементов $\alpha,\ \beta\in C$ найдется такой элемент $\gamma\in C$, что $\alpha\prec\gamma$ и $\beta\prec\gamma$. И пусть каждому $\alpha\in C$ сопоставлена некоторая структура A_α (для определенности можно считать, что A_α — группы) и при $\alpha\prec\beta$ заданы гомоморфизмы $\varphi_{\alpha\beta}: A_\alpha\to A_\beta$, удовлетворяющие двум условиям: $\varphi_{\alpha\alpha}=1_{A_\alpha}$ для любого $\alpha\in C$ и $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma}=\varphi_{\alpha\gamma}$ для любых $\alpha\prec\beta\prec\gamma$ из C. На множестве $\bar{A}=\bigcup_{\alpha\in C}A_\alpha$ вводится отношение эквивалентности $\sim$: элемент $x\in A_\alpha$ эквивалентен элементу $y\in A_\beta$, если $x\varphi_{\alpha\gamma}=y\varphi_{\beta\gamma}$ для некоторого γ. Фактормножество $A=\bar{A}/\sim$ можно снабдить структурой группы: если $x\in A_\alpha$, $y\in A_\beta$ и $\alpha\prec\gamma$, $\beta\prec\gamma$, то произведением классов эквивалентности с представителями x и y считается класс эквивалентности с представителем $(x\varphi_{\alpha\gamma})(y\varphi_{\beta\gamma})$. Построенная группа A наз. И. п. семейства групп A_α. Для каждого $\alpha\in C$ существует естественный гомоморфизм $\varphi_\alpha: A_\alpha\to A$, который элементу $x\in A_\alpha$ сопоставляет его класс эквивалентности. Группа A, вместе с гомоморфизмами φ_α, обладает следующим универсальным свойством: для любой системы гомоморфизмов $\psi_\alpha: A_\alpha\to B$, $\alpha\in C$, для которой $\psi_\alpha=\psi_{\alpha\beta}\psi_\beta$ при $\alpha\prec\beta$, существует такой единственный гомоморфизм $\psi: A\to B$, что $\psi_\alpha=\varphi_\alpha\psi$ для любого $\alpha\in C$.

Обобщением данной конструкции И. п. является индуктивный предел (прямой предел, копредел) функтора. Объект A категории $\mathfrak{K}$ наз. индуктивным пределом ковариантного функтора $F: \mathfrak{D}\to\mathfrak{K}$, если:

1. существуют такие морфизмы $\varphi_D: F(D)\to A$, где $D\in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$, что $F(\alpha)\varphi_{D_1}=\varphi_D$ для любого морфизма $\alpha: D\to D_1$ из $\mathfrak{D}$;

2. для любого семейства морфизмов $\psi_D: F(D)\to B$, где $D\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$, для к-рого $F(\alpha)\psi_{D_1}=\psi_D$ при любом $\alpha: D\to D_1$ из $\mathfrak{D}$, существует такой единственный морфизм $\gamma: A\to B$, что $\psi_\alpha=\varphi_D\gamma$, $D\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$.

И. п. обозначается $(A,\varphi_D)=\varinjlim F$ или $A=\varinjlim F$ или $A=\varinjlim F(D)$. И. п. контравариантного функтора $F: \mathfrak{D}\to\mathfrak{K}$ определяется как индуктивный предел ковариантного функтора F^* из двойственной к $\mathfrak{D}$ категории $\mathfrak{D}^*$ в категорию $\mathfrak{K}$.

Всякое предупорядоченное множество C можно рассматривать как категорию, объектами к-рой являются элементы множества C, а морфизмами — всевозможные пары $(\alpha,\ \beta)$, где $\alpha,\ \beta\in C$ и $\alpha\prec\beta$ с очевидным законом композиции. В произвольной категории $\mathfrak{K}$ семейство объектов A_α, $\alpha\in C$, и морфизмов $\varphi_{\alpha\beta}: A_\alpha\to A_\beta$,

где $\alpha \prec \beta$, можно рассматривать как образ функтора $F: C \to \mathfrak{K}$, если $\varphi_{\alpha\alpha}=1$ и $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma}=\varphi_{\alpha\gamma}$ при $\alpha \prec \beta \prec \gamma$. Если $\mathfrak{K}$ — категория множеств (групп, топологич. пространств и т. п.), то И. п. функтора $F: C \to \mathfrak{K}$ совпадает с приведенной выше конструкцией индуктивного предела.

Если $\mathfrak{D}$ — малая дискретная категория, то И. п. любого функтора F из $\mathfrak{D}$ в произвольную категорию $\mathfrak{K}$ есть копроизведение объектов $F(D)$, $D \in \mathfrak{D}$. В частности, если категория $\mathfrak{D}$ пуста, то И. п. есть левый нуль, или инициальный объект категории $\mathfrak{K}$. Коядра пар морфизмов любой категории $\mathfrak{K}$ являются И. п. функторов со значениями в $\mathfrak{K}$, к-рые определены на категории с двумя объектами X и Y и четырьмя морфизмами 1_X, 1_Y и $\alpha, \beta: X \to Y$.

Всякий ковариантный функтор F из произвольной малой категории $\mathfrak{d}$ в категорию $\mathfrak{K}$ обладает И. п. тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}$ — категория с копроизведениями и коядрами пар морфизмов.

Лит.: [1] Александров П. С., Топологические теоремы двойственности, ч. 1, М., 1955 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 48); [2] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [2] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974.

М. Ш. Цаленко.

ИНДУКЦИИ АКСИОМА — утверждение о справедливости для всех x нек-рого предиката $P(x)$, определенного на множестве всех неотрицательных целых чисел, если выполняются следующие условия: 1) справедливо $P(0)$, 2) для любого x, если верно $P(x)$, то верно и $P(x+1)$. И. а. записывается в виде

$$P(0) \,\&\, \forall x\,(P(x) \supset P(x+1)) \supset \forall x P(x).$$

В применениях И. а. $P(x)$ наз. индукционным предикатом, или индукционным предложением, а x — индукционной переменной, или переменной, по к-рой производится индукция (в тех случаях, когда $P(x)$ содержит, кроме x, и другие параметры). При этом проверка выполненности условия 1) наз. базисом индукции, а проверка условия 2) — индукционным шагом. Допущение внутри 2) справедливости $P(x)$, из к-рого затем выводится $P(x+1)$, наз. индуктивным предположением.

Принципом (математической) индукции в содержательной математике наз. схема всех И. а. для всевозможных предикатов $P(x)$. В системе FA *арифметики формальной* схема индукции состоит лишь из тех И. а., к-рые соответствуют выразимым в FA предикатам (таких предикатов счетное множество). Этим обстоятельством, т. е. невозможностью выразить в FA индукцию в полном объеме, объясняется неполнота системы FA (см. *Гёделя теорема о неполноте*).

Иногда вместо И. а. рассматривается аксиома: пусть $P(x)$ — некоторое свойство неотрицательных целых чисел; если для любого x из допущения, что $P(y)$ верно для всех y, меньших x, следует, что верно и $P(x)$, то $P(x)$ справедливо для всех x, т. е.

$$\forall x\,((\forall y < x)\, P(y) \supset P(x)) \supset \forall x P(x).$$

Эта аксиома носит название полной, или возвратной, И. а. Принцип полной индукции эквивалентен принципу обычной индукции. См. также *Трансфинитная индукция*.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

С. К. Соболев.

ИНДУЦИРОВАННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — представление π локально компактной группы G, индуцированное представлением ρ ее замкнутой подгруппы H, точнее, представление π группы G в нек-ром пространстве E функций f на группе G, принимающих значения в пространстве V представления ρ и удовлетворяющих условию $f(hg)=\rho(h)f(g)$ для всех $g \in G$, $h \in H$, причем $[\pi(g_1)f](g)=f(gg_1)$ для всех $f \in E$, g, $g_1 \in G$. И. п. π

обычно обозначается $\mathrm{Ind}\rho$, U^ρ, ${}_HU^\rho$, ${}_HU^\rho_G$. Операция построения И. п. является простейшим и важнейшим приемом построения представлений более сложных групп, исходя из представлений более простых групп, и для широких классов групп полное описание неприводимых представлений может быть дано в терминах И. п. или их обобщений.

Если G — конечная группа, то индуцирующее представление ρ предполагается конечномерным, а в качестве пространства V рассматривается пространство всех функций f на группе G, принимающих значения в V и удовлетворяющих условию $f(hg)=\rho(h)f(g)$. Представление ${}_{\{e\}}U^\rho_G$, где ρ — единичное представление единичной подгруппы $\{e\}$, есть правое *регулярное представление* группы G; представление ${}_GU^\rho_G$ эквивалентно представлению ρ. Представление ${}_HU^\rho_G$ эквивалентно представлению σ в пространстве W всех функций на однородном пространстве $X=G\setminus H$ со значениями в V, определенному формулой вида $[\sigma(g)f](x)=a(g,\ x)\,f(xg)$, причем функция a определяется следующим образом: если $s: X\to G$ — некоторое отображение, удовлетворяющее условию $s(x)\in x$ для всех $x\in X$, то $a(g,\ x)=\rho(h)$, где $s(x)g=hs(xg)$ для всех $x\in X$, $g\in G$. Функция a является одномерным коциклом группы G с коэффициентами в группе функций на X со значениями в обратимых операторах в V. Если ρ_1 эквивалентно представлению ρ_2, то $\mathrm{Ind}\ \rho_1$ эквивалентно $\mathrm{Ind}\ \rho_2$; представление $\mathrm{Ind}(\rho\oplus\sigma)$ эквивалентно представлению $\mathrm{Ind}\,\rho\oplus\mathrm{Ind}\,\sigma$. Если K, H — подгруппы группы G, $K\subset H$, и ρ — представление группы K, то представление группы G, индуцированное представлением ${}_KU^\rho_H$ группы H, эквивалентно представлению ${}_KU^\rho_G$ (теорема о сквозном индуцировании). Если π, ρ — представления группы G и ее подгруппы H соответственно, то пространства *сплетающих операторов* $\mathrm{Hom}(\pi,\ {}_HU^\rho_G)$ и $\mathrm{Hom}(\pi|_H,\rho)$ изоморфны, где $\pi|_H$ — сужение представления π на подгруппу H (теорема двойственности Фробениуса); в частности, если π и ρ неприводимы, то π входит в U^ρ с той же кратностью, с к-рой ρ входит в $\pi|_H$. Характер χ_π И. п. $\pi=U^\rho$ группы G определяется формулой:

$$\chi_\pi(g)=\sum\nolimits_{\{\delta:\,\delta g\in H\delta\}}\chi_\rho\ (\delta g\delta^{-1}),$$

где χ_ρ — характер представления ρ группы H, продолженный нулем на всю группу G, а δ пробегает набор представителей правых смежных классов группы G по подгруппе H. Пусть H, K — подгруппы группы G, ρ — представление группы H, $G_g=K\cap g^{-1}Hg$ для всех $g\in G$ и π^g — представление группы K, индуцированное представлением ρ^g группы G_g, определяемым формулой $\rho^g(x)=\rho(gxg^{-1})$, $x\in G_g$; тогда представление π^g однозначно определяется двойным классом HgK, содержащим элемент g, и сужение И. п. ${}_HU^\rho_G$ на подгруппу K эквивалентно прямой сумме представлений π^g, где сумма берется по множеству представителей всевозможных двойных классов HgK, $g\in G$ (теорема об ограничении И. п. на подгруппу). Эта теорема может быть применена, в частности, к разложению тензорного произведения И. п. Пространство операторов, сплетающих данные И. п., допускает явное описание. Представление π группы G тогда и только тогда эквивалентно И. п. вида ${}_HU^\rho_G$ для нек-рых H и ρ, когда существует такое отображение P множества подмножеств пространства $H\setminus G$ в множество проекторов в пространстве E представления π, что 1) $P(\phi)=0$, $P(H\setminus G)=1$; 2) если M, $N\subset H\setminus G$ и $M\cap N=\phi$, то $P(M\cup N)=P(M)+P(N)$; 3) $P(M\cap N)=P(M)P(N)$ для всех M, $N\subset H\setminus G$; 4) $P(Mg)=\pi^{-1}(g)P(M)\pi(g)$ для всех $M\subset H\setminus G$, $g\in G$ (такое отображение P наз. систе-

мой импримитивности для представления π с базой $H\backslash G$. И. п. конечной группы может быть непосредственно описано в терминах модулей над групповой алгеброй, а также может быть определено в категорных терминах. Конечная группа наз. мономиальной, если любое ее неприводимое представление индуцировано одномерным представлением нек-рой подгруппы. Всякая мономиальная группа разрешима; всякая нильпотентная группа мономиальна.

Определение И. п. локально компактной группы G существенно зависит от выбора пространства E; напр., в качестве E часто рассматривается пространство всех непрерывных функций на G, удовлетворяющих условию $f(hg)=\rho(h)f(g)$, или (если G — группа Ли) пространство всех дифференцируемых функций на G, удовлетворяющих тому же условию. С другой стороны, пусть ρ — непрерывное унитарное представление замкнутой подгруппы $H\subset G$ в гильбертовом пространстве V, пусть s — измеримое отображение локально компактного пространства $X=H\backslash G$ в G, удовлетворяющее условию $s(x)\in x$ для всех $x\in X$; пусть Δ_G, Δ_H — модули групп (см. *Хаара мера*) G и H соответственно и ν_s — такая G-квазиинвариантная мера на X, что

$$d\nu_s(xg)/d\nu_s(x)=\Delta_H(h^x,g)\,\Delta_G^{-1}(h^x,g),$$

где $s(x)g=h^x\cdot{}^g s(xg)$ для всех $x\in X$, $g\in G$; пусть $L^2(G, H, \rho)$ — гильбертово пространство измеримых вектор-функций F на группе G со значениями в V, удовлетворяющих условию

$$F(hg)=[\Delta_H(h)/\Delta_G(h)]^{1/2}\cdot\rho(h)F(g)$$

для всех $h\in H$, $g\in G$ и таких, что интеграл

$$\int_X \|F(s(x))\|_V^2 d\nu_s(x)$$

сходится; непрерывное унитарное представление π группы G в $L^2(G, H, \rho)$, определенное формулой

$$[\pi(g_1)F](g)=F(gg_1)$$

для всех $g, g_1\in G$, $F\in L^2(G, H, \rho)$, наз. унитарным индуцированным представлением локально компактной группы G. Бо́льшая часть результатов об И. п. конечных групп допускает обобщение на случай унитарных И. п. локально компактных групп, в том числе свойства представлений $\mathrm{Ind}(\rho_1\oplus\rho_2)$ и $\mathrm{Ind}(\rho_1\otimes\rho_2)$, связь И. п. с коциклами на группе G, теоремы о сквозном индуцировании и об ограничении И. п. на подгруппу, формула для характера И. п., критерий индуцированности представления, свойства мономиальных групп и теорема двойственности Фробениуса допускают более или менее непосредственное обобщение на случай унитарных И. п. И. п. локально компактной группы G связаны с представлениями нек-рых обобщенных групповых алгебр этой группы. Если G — группа Ли, то понятие И. п. группы G допускает различные обобщения, в том числе понятие голоморфно И. п., пространство к-рого E является пространством функций на G, аналитических по нек-рым переменным, и понятие представления в когомологиях векторных расслоений над однородными пространствами группы G (представления в нулевых когомологиях суть И. п.). Понятие И. п. и его обобщения играют плодотворную роль в теории представлений; в частности, в терминах унитарных И. п. описываются представления расширений групп; основная серия непрерывных унитарных представлений связной действительной полупростой группы Ли G образована И. п., а именно — индуцированными конечномерными унитарными представлениями борелевской подгруппы группы G; дискретная серия представлений линейной действительной полупростой группы Ли реализуется в когомологиях нек-рых векторных расслоений над однородными про-

странствами этой группы; неприводимые непрерывные унитарные представления разрешимых связных групп Ли типа I описаны в терминах голоморфно И. п. [7]. Операция И. п. допускает обобщение на случай неунитарных представлений локально компактных групп, а также топологич. групп, не являющихся локально компактными. Изучен [6] аналог И. п. для C^*-алгебр.

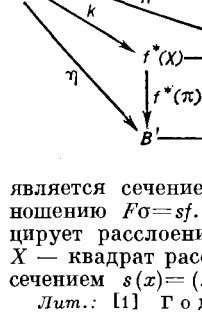
Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [2] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [3] Серр Ж.-П., Линейные представления конечных групп, пер. с франц., М., 1970; [4] Макки Г. Дж., «Математика», 1962, т. 6, № 6, с. 57—103; [5] Schmid W., «Ann. of Math.», 1976, v. 103, p. 375—94; [6] Rieffel M., «Advances in Math.», 1974, v. 13, № 2, p. 176—257; [7] Auslander L., Konstant B., «Invent. math.», 1971, v. 14, № 4, p. 255—354; [8] Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 6, с. 3—50; [9] Менский М. Б., Метод индуцированных представлений. Пространство — время и концепция частиц, М., 1976.

А. И. Штерн.

ИНДУЦИРОВАННОЕ РАССЛОЕНИЕ — расслоение $f^*(\pi): X' \to B'$, индуцированное отображением $f: B' \to B$ и расслоением $\pi: X \to B$, где X' — подпространство прямого произведения $B' \times X$, состоящее из пар (b', x), для которых $f(b') = \pi(x)$, а $f^*(\pi)$ — отображение, определяемое соответствием $(b', x) \to b'$. Отображение $F: f^*(X) \to X$ И. р. в исходное расслоение, определенное формулой $F(b', x) = x$, является морфизмом расслоений, накрывающим f. Для каждой точки $b' \in B$ ограничения

$$F_{b'}: (f^*(\pi))^{-1}(b') \to \pi^{-1}(f(b'))$$

являются гомеоморфизмами. Кроме того, для любого расслоения $\eta: Y \to B'$ и морфизма $H: \eta \to \pi$, накрывающего f, существует один и только один B'-морфизм $K: \eta \to f^*(\pi)$, удовлетворяющий соотношениям $FK = H$, $f^*(\pi)K = \eta$, так что имеет место коммутативная диаграмма:



Расслоения, индуцированные изоморфными расслоениями, изоморфны, расслоение, индуцированное постоянным отображением, изоморфно тривиальному.

Для любого сечения s расслоения π отображение $\sigma: B' \to f^*(x)$, определенное формулой $\sigma(b') = (b', sf(b'))$, является сечением И. р. $f^*(\pi)$ и удовлетворяет соотношению $F\sigma = sf$. Напр., отображение $\pi: X \to B$ индуцирует расслоение π^2 с пространством $\pi^*(x)$ и базой X — квадрат расслоения π, оно обладает единственным сечением $s(x) = (x, x)$.

Лит.: [1] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973; [2] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [3] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970.

М. И. Войцеховский.

ИНЕРТНОЕ ПРОСТОЕ ЧИСЛО в расширении $K/\mathbb{Q}$ — такое простое число p, для к-рого главный идеал, порожденный p, остается простым в $K/\mathbb{Q}$, где K — конечное расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$; другими словами, идеал (p) прост в B, где B — кольцо целых чисел поля K. В этом случае говорят также, что p остается инертным в расширении $K/\mathbb{Q}$. Аналогично, говорят, что простой идеал $\mathfrak{P}$ дедекиндова кольца A остается инертным при расширении K/k, где k — поле частных кольца A и K — некоторое конечное расширение k, если идеал $\mathfrak{P}B$, где B — целое замыкание кольца A в K, прост.

Если K/k — расширение Галуа с группой Галуа G, то для любого идеала $\mathfrak{P}$ кольца $B \subset K$ определена подгруппа $T_{\mathfrak{P}}$ в группе $G_{\mathfrak{P}}$ разложения идеала $\mathfrak{P}$, наз. подгруппой инерции (см. *Критический идеал*). Расширение $K^{T_{\mathfrak{P}}}/K^{G_{\mathfrak{P}}}$ — это максимальное промежу-

точное подрасширение в K/k, в к-ром идеал $\mathfrak{P} \bigcap K^{G_{\mathfrak{P}}}$ остается инертным.

В циклических расширениях полей алгебраич. чисел всегда существует бесконечно много инертных простых идеалов.

Лит.: [1] Ленг С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966; [2] Вейль Г., Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1947; [3] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969. *Л. В. Кузьмин.*

ИНЕРЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА — система отсчета в классической механике и в специальной теории относительности, в к-рой справедлив первый закон Ньютона. Понятие И. с. о.— абстракция, однако в весьма широком классе физич. явлений (в их круг не входит описание сильных гравитационных полей) существуют системы отсчета с высокой точностью, близкие к И. с. о. В том случае, когда в целом И. с. о. не существует (напр., в общей теории относительности), в каждой точке можно построить такую систему отсчета, к-рая в малой окрестности этой точки является приближенно инерциальной. В случае общей теории относительности такие системы отсчета наз. локально галилеевыми системами отсчета. Существование локально галилеевой системы отсчета означает то, что касательное пространство в данной точке аппроксимирует искривленное пространство-время.

Всякая система отсчета, к-рая движется относительно И. с. о. прямолинейно и равномерно, является И. с. о. Различные И. с. о. в классич. механике связаны преобразованиями из неоднородной группы *Галилея преобразований*; в специальной теории относительности — преобразованиями из группы Пуанкаре (см. *Лоренца преобразование*). Законы классич. механики и законы специальной теории относительности инвариантны относительно, соответственно, неоднородной группы Галилея и группы Пуанкаре (см. *Относительности принцип*). Следствием принципов относительности являются различные законы сохранения (энергии, импульса, момента импульса), к-рые имеют место лишь в И. с. о. В специальной теории относительности И. с. о. обычно задаются *галилеевой системой координат*, в классической механике — декартовой системой координат.

Лит.: [1] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1971. *Д. Д. Соколов.*

ИНЕРЦИИ ЗАКОН квадратичных форм — теорема, утверждающая, что при любом способе приведения квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij} x_i x_j$$

с действительными коэффициентами к сумме квадратов

$$\sum_{i=1}^{s} b_i y_i^2$$

посредством линейной замены переменных

$$(x_1, \ \ldots, \ x_s) = (y_1, \ \ldots, \ y_s)\, Q,$$

где Q — невырожденная матрица с действительными коэффициентами, число p (соответственно n) таких индексов i, что $b_i > 0$ (соответственно $b_i < 0$), остается неизменным. В этой классич. форме И. з. установлен Дж. Дж. Сильвестром (J. J. Sylvester). Это утверждение иногда называют также теоремой Сильвестра.

В современной форме И. з.— это следующее утверждение о свойствах симметрических билинейных форм над упорядоченными полями. Пусть E — конечномерное векторное пространство над упорядоченным полем k, снабженное невырожденной симметрич. билинейной формой f. Тогда существует такое целое число $p \geqslant 0$,

что для любого ортогонального относительно f базиса $e_1, \ldots, e_s$ в E среди s элементов

$$f(e_i, e_i),\ i=1, \ldots, s,$$

имеется в точности p положительных и в точности $n=s-p$ отрицательных. Пара (p, n) наз. сигнатурой билинейной формы f, а число n — ее индексом инерции. Две эквивалентные формы имеют одинаковую сигнатуру. Если k — *евклидово поле*, то равенство сигнатур является достаточным условием для эквивалентности билинейных форм. Если индекс инерции $n=0$, форма наз. положительно определенной, а при $p=0$ — отрицательно определенной. Эти случаи характеризуются тем, что $f(x, x)>0$ (соответственно $f(x, x)<0$) для любого ненулевого вектора $x\in E$. Из И. з. вытекает, что E есть ортогональная относительно f прямая сумма подпространств

$$E=E_+ \oplus E_-,$$

таких, что сужение f на E_+ является положительно определенной, а сужение f на E_- — отрицательно определенной билинейной формой и

$$\dim E_+ = p,\ \dim E_- = n$$

(так что размерности пространств E_+ и E_- не зависят от способа разложения).

Иногда сигнатурой формы f наз. разность

$$\sigma(f)=p-n.$$

Если формы f и g определяют один и тот же элемент кольца Витта $W(k)$ поля k, то $\sigma(f)=\sigma(g)$. Более того, $\sigma(f_1 \oplus f_2)=\sigma(f_1)+\sigma(f_2)$, $\sigma(f_1 \otimes f_2)=\sigma(f_1)\sigma(f_2)$ для любых невырожденных форм f_1 и f_2, и $\sigma(\langle 1\rangle)=1$, так что отображение $f\to\sigma(f)$ определяет гомоморфизм кольца $W(k)$ в кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. Если k — евклидово поле, то этот гомоморфизм является изоморфизмом.

И. з. обобщается на случай эрмитовой билинейной формы над максимальным упорядоченным полем k, над квадратичным расширением k или над телом кватернионов над k (см. [1], [4]).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [4] Milnor J., Husemoller D., Symmetric bilinear forms, B.—Hdlb.—N.Y., 1973. *В. Л. Попов.*

ИНИЦИАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО континуума K — совокупность таких точек, в к-рых K — *гладкий континуум*. *А. А. Мальцев.*

ИНТЕГРАЛ — одно из центральных понятий математич. анализа и всей математики, возникновение к-рого связано с двумя задачами: о восстановлении функции по ее производной (напр., с задачей об отыскании закона движения материальной точки вдоль прямой по известной скорости этой точки); о вычислении площади, заключенной между графиком функции $f(x)$ на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ и осью абсцисс (к этой же задаче приводит вычисление работы, произведенной силой за промежуток времени $a\leqslant t\leqslant b$, и другие вопросы).

Указанные две задачи приводят к двум видам И.: неопределенному и определенному. Изучение свойств и вычисление этих связанных между собой видов И. составляет задачу *интегрального исчисления*.

В ходе развития математики и под влиянием потребностей естествознания и техники понятия неопределенного и определенного И. подвергались ряду обобщений и изменений.

Неопределенный интеграл. Первообразной функции $f(x)$ одного переменного x на интервале $a<x<b$ наз. любая функция $F(x)$, производная к-рой для любого x из этого интервала равна $f(x)$. Очевидно, что если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на интервале $a<x<b$, то и функция $F_1(x)=F(x)+C$,

где C — любая постоянная, также является первообразной $f(x)$ на этом интервале. Верно и обратное: любые две первообразные одной и той же функции $f(x)$ на интервале $a<x<b$ могут отличаться лишь на постоянную. Следовательно, если $F(x)$ — одна из первообразных $f(x)$ на интервале $a<x<b$, то любая первообразная $f(x)$ на этом интервале имеет вид $F(x)+C$, где C — постоянная. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на интервале $a<x<b$ наз. неопределенным интегралом функции $f(x)$ (на этом интервале) и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx.$$

Согласно основной теореме интегрального исчисления, для каждой непрерывной на интервале $a<x<b$ функции $f(x)$ существует на этом интервале первообразная и, следовательно, неопределенный И.

Определенный интеграл. Понятие определенного И. вводится либо как предел интегральных сумм (см. *Коши интеграл*, *Римана интеграл*, *Лебега интеграл*, *Колмогорова интеграл*, *Стилтьеса интеграл*), либо в случае, когда заданная функция $f(x)$ определена на нек-ром отрезке $[a, b]$ и имеет на нем первообразную F, как разность ее значений на концах рассматриваемого отрезка $F(b)-F(a)$. Определенный И. от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ обозначают $\int_a^b f(x)dx$. Определение И. как предела интегральных сумм в случае непрерывных функций было сформулировано О. Коши (A. Cauchy) в 1823. Случай произвольных функций был изучен Б. Риманом (B. Riemann, 1853). Существенное продвижение в теории определенного И. принадлежит Г. Дарбу (G. Darboux, 1879), к-рый ввел в рассмотрение наряду с интегральной суммой Римана верхнюю и нижнюю суммы (см. *Дарбу сумма*). Необходимое и достаточное условие интегрируемости по Риману разрывных функций в законченной форме установил (1902) А. Лебег (H. Lebesgue).

Между определенным И. от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ и неопределенным И. (или первообразной) этой функции существует следующая связь: 1) если $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$, то справедлива формула Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a);$$

2) для любого x из отрезка $[a, b]$ неопределенный И. непрерывной функции $f(x)$ записывается в виде

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C,$$

где C — произвольная постоянная. В частности, определенный И. с переменным верхним пределом

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (1)$$

представляет собой первообразную функцию $f(x)$. Для введения определенного И. от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ в смысле Лебега разбивают множество значений y на частичные отрезки точками $\ldots<y_{-2}<y_{-1}<y_0<y_1<y_2<\ldots$ и обозначают через M_i множество всех значений x из отрезка $[a, b]$, для к-рых $y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i$, а через $\mu(M_i)$ — меру множества M_i в смысле Лебега. Интегральную сумму Лебега функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ определяют равенством

$$\sigma = \sum\nolimits_i \eta_i \mu(M_i), \qquad (2)$$

где η_i — любое число из отрезка $y_{i-1}\leqslant\eta_i\leqslant y_i$.

Функцию $f(x)$ наз. интегрируемой в смысле Лебега на отрезке $[a, b]$, если существует

предел ее интегральных сумм (2) при стремлении к нулю максимальной из разностей $y_i - y_{i-1}$, т. е. если существует такое число I, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при единственном условии $\max_i (y_i - y_{i-1}) < \delta$ справедливо неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$. При этом указанный предел I наз. определенным интегралом Лебега от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$.

Вместо отрезка $[a, b]$ можно рассматривать произвольное множество, измеримое относительно некоторой неотрицательной полной счетно аддитивной меры. Возможно и другое введение интеграла Лебега, когда этот И. первоначально определяют на множестве так наз. простых функций (т. е. измеримых функций, принимающих не более счетного множества значений), а затем с помощью операции предельного перехода вводят для произвольной функции, представляющей собой предел равномерно сходящейся последовательности простых функций (см. *Лебега интеграл*).

Каждая интегрируемая в смысле Римана функция является интегрируемой и в смысле Лебега. Обратное неверно, ибо существуют разрывные на множестве положительной меры и вместе с тем интегрируемые в смысле Лебега функции (напр., функция Дирихле).

Для интегрируемости по Лебегу ограниченной функции необходимо и достаточно, чтобы эта функция принадлежала классу *измеримых функций*. Функции, встречающиеся в математич. анализе, как правило, измеримы. Это означает, что интеграл Лебега обладает общностью, исчерпывающей потребности анализа.

Интеграл Лебега охватывает и все случаи абсолютно сходящихся *несобственных интегралов*.

Общность, достигнутая определением И. в смысле Лебега, весьма существенна во многих вопросах современного математич. анализа (теория обобщенных функций, определение обобщенных решений дифференциальных уравнений, изоморфизм гильбертовых пространств L_2 и l_2, эквивалентный так наз. теореме Рисса — Фишера в теории тригонометрических или произвольных ортогональных рядов, — все эти теории оказались возможными только при понимании И. в смысле Лебега).

Первообразную в смысле Лебега естественно определить с помощью равенства (1), в к-ром И. понимается в смысле Лебега. При таком понимании соотношение $F'(x) = f(x)$ будет справедливо всюду, кроме, может быть, множества, имеющего меру, равную нулю.

Другие обобщения понятия интеграла. В 1894 Т. Стилтьесом (T. Stieltjes) было дано другое важное для приложений обобщение интеграла Римана (получившее название интеграла Стилтьеса), в к-ром рассматривается интегрируемость одной функции $f(x)$, определенной на некотором отрезке $[a, b]$, относительно другой функции, определенной на том же отрезке. Интеграл Стилтьеса функции $f(x)$ относительно функции $U(x)$ обозначают символом

$$I = \int_a^b f(x)\, dU(x). \qquad (3)$$

Если $U(x)$ имеет ограниченную и интегрируемую в смысле Римана производную $U'(x)$, то интеграл Стилтьеса сводится к интегралу Римана по формуле

$$\int_a^b f(x)\, dU(x) = \int_a^b f(x)\, U'(x)\, dx,$$

в частности при $u(x) = x + C$ интеграл Стилтьеса (3) является интегралом Римана $\int f(x)dx$.

Однако для приложений интересен случай, когда интегрирующая функция $U(x)$ не имеет производной. Примером может служить рассмотрение в качестве $U(x)$ спектральной меры при изучении спектральных разложений.

Криволинейный интеграл

$$\int_\Gamma f(x,\ y)\,dx$$

вдоль кривой Г, определяемой уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, представляет собой частный случай интеграла Стилтьеса, так как может быть записан в виде

$$\int_a^b f[\varphi(t),\ \psi(t)]\,d\varphi(t).$$

Дальнейшим обобщением понятия И. послужило интегрирование по произвольному множеству в пространстве любого числа измерений. В самом общем случае удобно рассматривать И. как функцию от того множества M, по к-рому производится интегрирование (см. *Функции множеств*) вида

$$F(M)=\int_M f(x)\,dU(x),$$

где U — также некоторая функция множества M (в частном случае его мера), а точка принадлежит множеству M, по к-рому идет интегрирование. Частными случаями такого рассмотрения являются *кратные интегралы* и *поверхностные интегралы*.

Другим обобщением понятия И. является понятие *несобственного интеграла*.

В 1912 А. Данжуа (A. Denjoy) ввел понятие И. (см. *Данжуа интеграл*), применимое ко всякой функции $f(x)$, являющейся производной нек-рой функции $F(x)$. Это позволило привести конструктивное определение И. к такой степени общности, при к-рой оно целиком отвечает задаче разыскания неопределенного И., понимаемого в смысле первообразной.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1—2, М., 1971—73; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976; [3] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, т. 1—2, 2 изд., М., 1973; [4] Никольский С. М., Курс математического анализа, т. 1—2, 2 изд., 1975; [5] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959; [6] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.—Л., 1934.

В. А. Ильин.

A-ИНТЕГРАЛ — одно из обобщений интеграла Лебега, данное Е. Титчмаршем [1] для интегрирования функций, сопряженных к суммируемым. Измеримую функцию $f(x)$ наз. A-интегрируемой на $[a,\ b]$, если

$$m\{x,\ |f(x)|>n\}=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

и существует предел

$$I=\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(x)]_n\,dx,$$

где

$$[f(x)]_n=\begin{cases} f(x), & |f(x)|\leqslant n\\ 0\ , & |f(x)|>n.\end{cases}$$

Число I наз. A-интегралом и обозначают

$$(A)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Лит.: [1] Titchmarsh E. G., «Proc. London Math. Soc.», 1929, № 29, с. 49—80; [2] Виноградова И. А., Скворцов В. А., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1970, М., 1971, с. 65—107.

И. А. Виноградова.

ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТИ, интеграл ошибок,— функция

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt,\qquad |x|<\infty.$$

В теории вероятностей используется не И. в., а функция нормального распределения:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}\,dt=\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

— так наз. интеграл вероятности Гаусса. Для случайной величины X, имеющей нормальное распределение с математич. ожиданием 0 и дисперсией σ^2, вероятность неравенства $|X|\leqslant t$ равна $\operatorname{erf}(t/\sqrt{2})$. Для действительного x И. в. принимает действительные значения, в частности

$$\operatorname{erf}(0)=0,\ \lim_{x\to+\infty}\operatorname{erf}(x)=1.$$

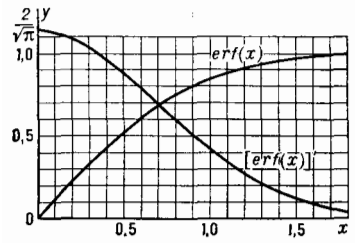


График И. в. и его производной см. на рис. Рассматриваемый и как функция комплексного переменного z, И. в. $\operatorname{erf}(z)$ есть целая функция от z.

Асимптотич. представление при больших z, $\operatorname{Re} z>0$:

$$1-\operatorname{erf}(z)\sim\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}z}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^k}\frac{1}{z^{2k}}\right).$$

В окрестности $z=0$ И. в. представляется в виде ряда

$$\operatorname{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(z-\frac{z^3}{1!\,3}+\ldots+\frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)}z^{2k+1}+\ldots\right).$$

С *Френеля интегралами* $C(z)$ и $S(z)$ И. в. связан соотношениями:

$$\frac{1+i}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}z\right)=C(z)+iS(z),$$

$$\frac{1-i}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}z\right)=C(z)-iS(z).$$

Производная И. в.:

$$[\operatorname{erf}(z)]'=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}.$$

Иногда используются следующие обозначения:

$$\Theta(x)=H(x)=\Phi(x)=\operatorname{erf}(x),$$

$$\operatorname{Erf}(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(x),$$

$$\operatorname{Erfi}(x)=-i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(ix)=\int_0^x e^{t^2}\,dt,$$

$$\operatorname{Erfc}(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\operatorname{Erf}x=\int_x^{\infty}e^{-t^2}\,dt,$$

$$\alpha(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,dt-1=\frac{2}{\pi}\operatorname{Erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968; [3] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [4] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М., 1963. *А. Б. Иванов.*

ИНТЕГРАЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ — решение дифференциального уравнения. И. д. у. наз. преимущественно соотношение вида $\Phi(x, y)=0$, определяющее решение y обыкновенного дифференциального уравнения

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)})=0 \qquad (1)$$

как неявную функцию независимой переменной x. В этом случае говорят также о частном интеграле в противоположность общему интегралу уравнения (1), т. е. соотношению

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ \ldots,\ C_n)=0, \qquad (2)$$

из к-рого при соответствующем выборе постоянных $C_1, \ldots, C_n$ получается любая *интегральная кривая* уравнения (1), проходящая в рассматриваемой области G плоскости (x, y). Если из соотношения (2) и из n соот-

ношений, получающихся из него последовательным дифференцированием по x (причем y рассматривается как функция x), исключить произвольные постоянные $C_1, \ldots, C_n$, то в результате приходят к уравнению (1). Возникающее в процессе интегрирования уравнения (1) соотношение вида

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(k)}, C_1, \ldots, C_{n-k}) = 0, \qquad (3)$$

содержащее производные до k-го порядка, $1 \leqslant k < n$, и $n-k$ произвольных постоянных, иногда наз. промежуточным интегралом уравнения (1). Знание промежуточного интеграла (3) сводит решение уравнения (1) порядка n к решению уравнения (3) порядка k. Если соотношение (3) содержит лишь одну произвольную постоянную, т. е. $k=n-1$, то оно наз. первым интегралом уравнения (1). Это уравнение имеет ровно n независимых первых интегралов; знание n таких интегралов позволяет получить общее решение уравнения (1) путем исключения из них величин $y', \ldots, y^{(n-1)}$.

Если рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (4)$$

то под ее общим интегралом имеют в виду совокупность соотношений

$$\Phi_i(t, x_1, \ldots, x_n) = C_i, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (5)$$

где C_i — произвольные постоянные, в неявном виде описывающую все решения системы (4) в нек-рой области G пространства $(t, x_1, \ldots, x_n)$. Каждое из соотношений (5) в отдельности наз. первым интегралом системы (4). Чаще под первым интегралом системы (4) понимают функцию $u(t, x_1, \ldots, x_n)$, обладающую тем свойством, что она принимает постоянное значение вдоль любого решения системы (4) в области G. Система (4) имеет ровно n независимых первых интегралов, знание к-рых дает возможность найти общее решение без интегрирования системы; знание k независимых первых интегралов позволяет свести решение системы (4) порядка n к решению системы порядка $n-k$. Гладкая функция $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ является первым интегралом системы (4) с гладкой правой частью тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Аналогичная терминология иногда употребляется в теории дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка. Так, под И. д. у.

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \qquad (6)$$

или под его частным интегралом, понимают решение этого уравнения (*интегральную поверхность*). Полным интегралом уравнения (6) наз. семейство решений $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$, зависящее от двух произвольных постоянных. Общий интеграл уравнения (6) — соотношение, содержащее одну произвольную функцию и при каждом выборе этой функции дающее решение уравнения.

Лит.: [1] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959.

Н. Х. Розов.

ИНТЕГРАЛ ПО ТРАЕКТОРИЯМ, континуальный интеграл, функциональный интеграл,— интеграл, областью интегрирования к-рого служит то или иное функциональное пространство. Чаще всего И. по т. определяется как обычный интеграл Лебега от функционала, заданного на пространстве функций (возможно, обобщенных) по нек-рой мере (быть может, комплексной) в этом пространстве.

В тех случаях, когда лебеговская конструкция интеграла оказывается неприменимой, рассматриваются и другие способы континуального интегрирования. Напр., вместо мер используются *предмеры* (или квазимеры), т. е. аддитивные функции множества, определенные на алгебре всех цилиндрич. подмножеств функционального пространства и такие, что их сужения на любую σ-подалгебру цилиндрич. множеств с фиксированным носителем являются уже мерами. Иногда И. по т. определяется как предел при $n\to\infty$ n-кратных интегралов (вычисляемых по мере Лебега в $\mathbb{R}^n$), возникающих при подходящей аппроксимации пространства функций (области интегрирования) n-мерным пространством, а интегрируемого функционала — функцией от n переменных. Эти и другие определения И. по т. применимы каждое к своему специальному классу функционалов, причем в тех случаях, когда эти определения пригодны одновременно, они могут, вообще говоря, приводить к различным значениям интеграла. Наконец, И. по т., встречающиеся в литературе по физике, подчас вообще не имеют точного смысла, а рассматриваются как формальные выражения, с к-рыми оперируют как с обычными интегралами (замена переменных, мажорирование, дифференцирование по параметру, предельный переход и т. д.), часто, однако, получая при этом серьезные и эвристически ценные результаты.

И. по т., появившиеся первоначально в теории случайных процессов, позднее были использованы для представления группы

$$\exp\{itH\},\quad t\in\mathbb{R}^1,$$

а также полугруппы операторов

$$\exp\{-tH\},\ t>0,$$

где H — *Штурма — Лиувилля оператор* в пространстве $\mathbb{R}^n$ (оператор энергии для системы квантовых частиц). Подобные представления были получены затем для более широкого класса операторов H (всякое такое представление обычно наз. формулой Фейнмана — Каца) и явились удобным средством для изучения свойств этих операторов (оценка границ спектра, асимптотика собственных значений, свойства рассеяния и т. д. [3]).

Среди применений И. по т. в математич. физике (основанных главным образом на формуле Фейнмана — Каца) наиболее глубоким оказалось их использование в проблемах квантовой статистич. физики [4] и квантовой теории поля [5], [6]. С И. по т. связано отчасти и развитие общих вопросов теории меры и интегрирования в бесконечномерных пространствах [7], [8].

Лит.: [1] Фейнман Р., Хибс А., Квантовая механика и интегралы по траекториям, пер. с англ., М., 1968; [2] Кац М., Вероятность и смежные вопросы в физике, пер. с англ., М., 1965; [3] Гельфанд И. М., Яглом А. М., «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, № 1, с. 77—114; [4] Genibre J., Statistical mechanics and quantum field theory, N.Y., 1971; [5] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957; [6] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [7] Смолянов О. Г., Фомин С. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, № 4, с. 3—56; [8] Schwartz L., Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures, L., 1973.

Р. А. Минлос.

ИНТЕГРАЛЫ В ИНВОЛЮЦИИ — решения дифференциальных уравнений, *Якоби скобки* к-рых равны нулю. Функция $G(x,\ u,\ p)$ $2n+1$ переменных $x=(x_1,\ldots,x_n)$, u, $p=(p_1,\ldots,p_n)$ есть первый интеграл уравнения с частными производными первого порядка

$$F(x,\ u,\ p)=0, \tag{1}$$

$$u=u(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i},\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

если она постоянна вдоль каждой характеристики этого уравнения. Два первые интеграла $G_i(x,\ u,\ p)$,

$i=1,2$, находятся в инволюции, если их скобка Якоби тождественно равна нулю по $(x,\ u,\ p)$:

$$[G_1,\ G_2]=0. \qquad (2)$$

Вообще, две функции G_1, G_2 находятся в инволюции, если выполнено условие (2). Любой первый интеграл G уравнения (1) находится в инволюции с F; последняя функция сама является первым интегралом.

Эти определения распространяются и на системы уравнений

$$F_i\,(x,\ u,\ p)=0,\quad 1\leqslant i\leqslant m. \qquad (3)$$

При этом первый интеграл этой системы $G(x,\ u,\ p)$ можно рассматривать как решение системы линейных уравнений

$$[F_i,\ G]=0,\quad 1\leqslant i\leqslant m, \qquad (4)$$

с неизвестной функцией G.

Если (3) является *инволюционной системой*, то (4) — полная система. Она инволюционна, если функции F_i в (3) не зависят от u.

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, Л.— М., 1934; [2] Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, пер. с нем., М., 1966.

А. П. Солдатов.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ВОРОНКА точки $P(t_0,\ x_0)$ для дифференциального уравнения $dx/dt=f(t,\ x)$ — множество всех точек, лежащих на *интегральных кривых*, проходящих через точку P [под уравнением можно понимать систему уравнений в векторной записи с $x=(x_1,\ldots,\ x_n)$]. Если через точку P проходит только одна интегральная кривая, то И. в. состоит из одной этой кривой. В случае $n=1$, т. е. когда x — скаляр, И. в. состоит из точек $(t,\ x)$, для к-рых $x_*(t)\leqslant x\leqslant x^*(t)$, где $x^*(t)$ и $x_*(t)$ — верхнее и нижнее решения, т. е. наибольшее и наименьшее из решений, проходящих через точку P.

Если функция $f(t,\ x)$ непрерывна (или удовлетворяет условиям теоремы существования Каратеодори), то И. в.— замкнутое множество. Если при этом все решения, проходящие через точку P, существуют на отрезке $a\leqslant t\leqslant b$, то отрезок воронки (часть И. в., определяемая неравенствами $a\leqslant t\leqslant b$) и сечение И. в. любой плоскостью $t=t_1\in[a,\ b]$ являются связными компактами. Любую точку на границе И. в. можно соединить с точкой P куском интегральной кривой, лежащим на границе И. в. Если последовательность точек P_k, $k=1,\ 2,\ \ldots$, сходится к точке P, то отрезки воронок точек P_k сходятся к отрезку воронки точки P в том смысле, что для любого $\varepsilon>0$ они содержатся при $k>k_1(\varepsilon)$ в ε-окрестности отрезка воронки точки P. Аналогичными свойствами обладают И. в. для *дифференциальных включений*

$$\dot{x}\in F\,(t,\ x)$$

при определенных предположениях о множестве $F(t,\ x)$.

Лит.: [1] Kamke E., «Acta math.», 1932, v. 58, p. 57—85; [2] Бокштейн М. Ф., «Уч. зап. МГУ, сер. матем.», 1939, в. 15, с. 3—72; [3] Pugh C. C., «J. Dif. Equat.», 1975, v. 19, № 2, p. 270—95.

А. Ф. Филиппов.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — теория инвариантных (относительно непрерывных групп отображений пространства на себя) мер на множествах, состоящих из подмногообразий пространства (напр., прямых, плоскостей, геодезических, выпуклых поверхностей и т. п. многообразий, сохраняющих свой тип при рассматриваемых преобразованиях). И. г. строится для различных пространств, прежде всего для евклидовых, проективных, однородных.

И. г. занимается введением инвариантных мер, их связями и геометрич. применениями. Возникла в связи с уточнением постановки задач о геометрич. вероятностях.

Для введения инвариантной меры предварительно ищут такую функцию от координат точки в пространстве, интеграл от к-рой по некоторой области пространства не изменялся бы после непрерывного преобразования координат пространства, составляющих определенную группу Ли. Это требует отыскания интегрального инварианта заданной группы Ли. Последний находится как решение системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\xi_h^i(x)\, F(x)\right] = 0, \quad h = 1, \ldots, r, \qquad (1)$$

где $F(x)$ — искомый интегральный инвариант, x — точка n-мерного пространства, ξ_h^i — коэффициент инфинитезимального преобразования группы, r — количество параметров преобразования. Важное значение в И. г. имеют измеримые группы Ли, т. е. такие группы, к-рые допускают существование одного и только одного (с точностью до постоянного множителя) инварианта. Последними, в частности, являются простые транзитивные группы.

Следующая задача И. г. состоит в установлении меры множества многообразий, которые сохраняют свой тип после нек-рой группы непрерывных преобразований. Мера устанавливается равной интегралу

$$\int_{A_\alpha} |F(\alpha^1, \ldots, \alpha^q)|\, d\alpha^1 \wedge \ldots \wedge d\alpha^q, \qquad (2)$$

где A_α — множество точек в пространстве параметров группы Ли, F — интегральный инвариант группы, определяемый уравнением (1), или плотность меры. Подинтегральное выражение в (2) наз. также элементарной мерой множества многообразий. Определенный выбор этой меры полностью устанавливает соответствие с основной задачей учения о геометрич. вероятностях. Фактически под геометрич. вероятностью множества многообразий со свойством A_1 понимается относительная доля этого множества, рассматриваемого как подмножество многообразий множества многообразий, имеющих более общее свойство A. Задача сводится к установлению мер множества многообразий со свойством A, подмножества со свойством A_1 и их отношения. Последнее и есть геометрич. вероятность.

В случае однородного многомерного пространства мера множества многообразий (напр., точек, прямых, гиперплоскостей, пар гиперплоскостей, гиперсфер, гиперповерхностей 2-го порядка) однозначно (с точностью до постоянного множителя) определяется интегралом

$$\int_X dH = [\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h], \qquad (3)$$

где $\{\omega_i\}$ суть относительные компоненты ($i = 1, \ldots, h$) заданной транзитивной группы Ли G_2. Линейные комбинации с постоянными коэффициентами этих относительных компонент представляют собой левые части уравнений системы Пфаффа, соответствующей рассматриваемому множеству многообразий. Мера (3) наз. кинематической мерой в однородном пространстве с заданной в нем группой преобразований. Она представляет собой обобщение так наз. кинематической меры Пуанкаре. (Далее все меры указываются с точностью до постоянного множителя.)

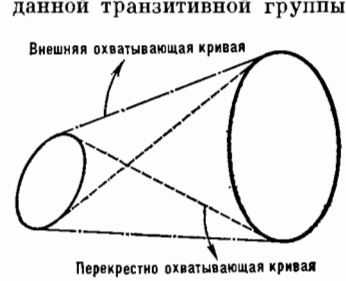


Рис. 1.

И. г. на евклидовой плоскости E^2 обычно рассматривает лишь одно непрерывное преобразо-

вание — группу движений (без отражений). Для множества точек интегральный инвариант — единица, для множества прямых — тоже единица, если в качестве параметров прямых выбраны параметры ее нормального уравнения p и φ. Длина произвольной кривой равна $\frac{1}{2}\int n dp d\varphi$, где n — число пересечений прямых с кривой, а интегрирование ведется по множеству прямых, пересекающих кривую. Мера множества прямых, пересекающих две выпуклые фигуры (овалы), равна разности длин перекрестно охватывающей овалы кривой и внешней охватывающей кривой (см. рис. 1). Мера множества прямых, разделяющих два овала, равна длине перекрестно охватывающей кривой без суммы длин контуров овалов. Мера множества пар точек определяется как

$$\int |t_2 - t_1|\, dp \wedge d\varphi \wedge dt_1 \wedge dt_2,$$

где p, φ — параметры нормального уравнения прямой, проходящей через точки, а t_1 и t_2 суть расстояния по этой прямой от точек до точки пересечения прямой и перпендикуляра к прямой, проведенного из начала координат (см. рис. 2). Мера множества пар прямых равна

$$\int |\sin(\alpha_1 - \alpha_2)|\, dx \wedge dy \wedge d\alpha_1 \wedge d\alpha_2,$$

где x и y — координаты точки пересечения пары прямых, а α_1 и α_2 — углы, к-рые составляют эти прямые с

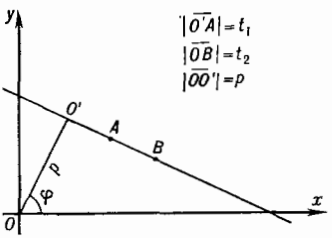


Рис. 2.

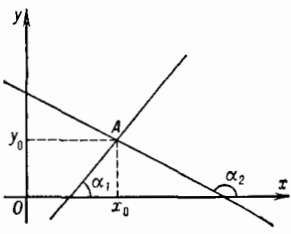


Рис. 3.

одной из координатных осей (см. рис. 3). Мера множества пар кривых, пересекающих овал, равна половине квадрата длины кривой, ограничивающей овал, без площади овала, умноженной на π (формула Крофтона). Применение кинематич. меры к множеству конгруэнтных овалов, пересекающих заданный овал, позволяет получить одно из изопериметрич. неравенств, а именно классическое *Боннезена неравенство*. Если

$$I_n = \int_G \sigma^n\, dp\, d\varphi,\quad J_n = \int_H r^n\, |t_2 - t_1|\, dp \wedge d\varphi \wedge dt_1 \wedge dt_2,$$

где σ — длина хорды овала H, G — множество пересекающих овал прямых, r — расстояние между двумя точками внутренней области овала, то

$$J_n = 2I_{n+3}/(n+2)(n+3),$$

что позволяет просто определить среднее расстояние между двумя точками внутри овала. Кинематич. мера множества фигур есть мера множества фигур, конгруэнтных данной. Она равна

$$\int_X dx \wedge dy \wedge d\varphi,$$

где X — множество точек фигуры, x, y — координаты ее фиксированной точки, φ — угол, определяющий поворот фигуры. Кинематич. мера может трактоваться как мера множества подвижных систем координат. Если неподвижную систему координат сделать подвижной, а подвижную — неподвижной, то для одного и того же множества преобразований кинематич. мера оста-

нется неизменной (симметричность кинематич. меры). Если с каждым элементом множества конгруэнтных фигур связать иную подвижную систему, то кинематич. мера также сохраняется. Мера множества конгруэнтных конечных дуг произвольной кривой, пересекающих заданную дугу нек-рой кривой, равна учетверенному произведению длин дуг (формула Пуанкаре). Количество отрезков прямой данной длины l, пересекающих овал, равно $2\pi F_0+2lL_0$, где F_0 и L_0 — площадь овала и длина ограничивающей его кривой. Если заменить овал незамкнутой кривой, то $F_0=0$, и число пересечений будет равно $2lL_0$. Мера множеств овалов, пересекающих данный овал, равна $2\pi(F_0+F)+L_0L$, где F_0, F суть соответствующие площади, а L_0 и L — длины кривых, ограничивающих овалы.

И. г. в евклидовом пространстве E^3 строится по аналогии с И. г. в E^2. Для множеств точек интегральный инвариант также равен единице. Если множество прямых задано множеством их уравнений в двух проектирующих плоскостях:

$$x=kz+a, \quad y=hz+b,$$

то интегральный инвариант для совокупности параллельного переноса и поворота осей равен $(k^2+h^2+1)^{-2}$. В частности, мера множеств прямых, пересекающих выпуклую замкнутую поверхность (поверхность овалоида), равна половине поверхности овалоида.

Введение по аналогии с E^2 меры множества пар точек позволяет вычислить среднее значение 4-й степени длин хорд овалоида, к-рое равно $12V/\pi S$, где V и S — его объем и поверхность. Для пар пересекающихся прямых, заданных уравнениями в двух проектирующих плоскостях:

$$x=k_1z+a-k_1c; \quad y=h_1z+b-h_1c$$

и

$$x=k_2z+a-k_2c; \quad y=h_2z+b-h_2c,$$

где a, b и c — координаты точек пересечения прямых, она равна

$$\left[(k_1^2+h_1^2+1)(k_2^2+h_2^2+1)\right]^{-1,5}.$$

Меры множества пересечений двух заданных подвижных овалоидов относятся как их объемы. Для плоскости, заданной уравнением в отрезках, интегральный инвариант равен

$$(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})^{-2},$$

где a, b, c — длины отрезков. Мера множества плоскостей, пересекающих поверхность площади S, равна $\pi^2S/2$, а среднее значение длин кривых, по к-рым овалоид пересекается множеством плоскостей, равно $\pi S^2/2\overline{H}$, где $\overline{H}$ — интегральная средняя кривизна.

Для пар плоскостей интегральный инвариант равен произведению интегральных инвариантов множеств плоскостей. Кинематич. мера в E^3 равна произведению меры множества по-различному ориентированных плоскостей и элементарной кинематич. меры в ориентирующей плоскости. Интегральный инвариант для вращений пространственной фигуры, имеющей одну неподвижную точку, равен

$$1+l_1^2+l_2^2+l_3^2,$$

где $l_i=\alpha_i\operatorname{tg}(\varphi/2)$, а α_i, $i=1,2,3$, суть направляющие косинусы оси вращения, φ — угол поворота вокруг этой оси. Мера множеств тел, имеющих общую точку и отличающихся поворотом в пространстве, равна π^2.

И. г. на поверхности строится введением меры множества геодезических как интеграла от внешней дифференциальной формы поверхности по всему множеству. Таким образом, внешняя дифференциальная форма есть плотность множества геодезических, так как она инвариантна относительно выбора системы

криволинейных координат на поверхности и относительно выбора параметра, определяющего положение точки на геодезической. В геодезических полярных координатах плотность имеет вид

$$dG=(\partial(\sqrt{g(\rho,\theta)})/\partial\rho)\,[d\theta\,d\rho],$$

в частности для сферы $dG=\cos\rho[d\theta d\rho]$, а для псевдосферы $dG=\mathrm{ch}\rho[d\theta d\rho]$. Для множества геодезических, пересекающих гладкую или кусочно гладкую кривую, плотность равна $dG=|\sin\varphi|[d\varphi ds]$, где φ — угол пересечения, s — длина кривой. Плотность кинематич. меры (кинематич. плотность) равна $dK=[dPdV]$. где dP — элемент площади поверхности, V — угол между геодезической и полярным радиусом. Многие результаты И. г. на E^2 обобщаются на случай однородной поверхности. Плотность меры множества представляет собой кинематич. плотность, что позволяет получить обобщение формулы Пуанкаре для E^2. Меры множества пар геодезических и пар точек строятся так же, как для E^2.

На основе так наз. полиметрической геометрии П. К. Рашевского (см. [4]) результаты И. г. на произвольной однородной поверхности обобщаются на более широкий класс поверхностей. Обобщение производится путем использования биметрич. системы Рашевского. Сначала двумя способами вводится мера в двупараметрич. множестве кривых плоскости. Затем все выводы, справедливые в случае плоскости (рассматриваемой как множество линейных элементов), обобщаются на случай линий постоянной геодезич. кривизны произвольной поверхности.

И. г. на проективной плоскости P^2. Для полной группы проективных преобразований на P^2:

$$x'=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_3x+b_3y+1};\quad y'=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_3x+b_3y+1},\qquad(4)$$

интегральный инвариант существует лишь для совокупности трех точек и равен кубу обратной величины площади треугольника, вершинами к-рого являются эти точки. Для пар точек и группы аффинных унимодулярных преобразований

$$x'=a_1x+b_1y+c_1,\ y'=a_2x+b_2y+c_2,\ a_1b_2-a_2b_1=1\qquad(5)$$

интегральный инвариант равен единице, а для группы аффинных преобразований интегральный инвариант множества пар точек равен $(x_1y_2-x_2y_1)^{-2}$, где x_1, y_1 и x_2, y_2 суть координаты точек.

Множество прямых проективной плоскости неизмеримо, но для пар точка — прямая и полной группы проективных преобразований (4) интегральный инвариант равен $(x_0\alpha+y_0\beta+1)^{-3}$, где x_0, y_0 суть координаты точки, а прямая задается уравнением $\alpha x+\beta y+1=0$. Множество параллелограммов, заданных уравнениями

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_ix+\beta_iy+1=0\\&\gamma_i(\alpha_ix+\beta_iy)+1=0\end{aligned}\right\},\quad i=1,\ 2,$$

причем $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq0$, имеет плотность меры

$$[(\gamma_1-1)^2(\gamma_2-1)^2(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2]^{-1}$$

для группы аффинных преобразований

$$x'=a_1x+b_1y+c_1,\quad y'=a_2x+b_2y+c_2,\quad a_1b_2-a_2b_1\neq0.\qquad(6)$$

Для множества окружностей на P^2, заданных уравнением

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0,$$

максимальной группой преобразований является группа преобразований подобия

$$x=ax'+by'+c,\quad y=bx'+ay'+d.$$

Плотность меры для нее равна $(\gamma-\alpha^2-\beta^2)^{-2}$. На ее основе вычисляется мера множеств окружностей (центры к-рых находятся в нек-рой области), пересекающихся с заданной кривой. Мера множества окружностей на P^2 равна кинематич. мере совокупности групп трансляции и гомотетии.

Множество конич. сечений (инвариант $\Delta\neq 0$) имеет в качестве максимальной группы инвариантности проективную группу:

$$x=\frac{\alpha_{11}x'+\alpha_{12}y'+\alpha_{13}}{\alpha_{31}x'+\alpha_{32}y'+1},$$

$$y=\frac{\alpha_{21}x'+\alpha_{22}y'+\alpha_{23}}{\alpha_{31}x'+\alpha_{32}y'+1},$$

причем $\det|\alpha_{ij}|\neq 0$, $i, j=1, 2, 3$. Плотность меры для него равна Δ^{-2}. Для множества гипербол максимальная группа инвариантности есть аффинная группа (6). Плотность меры их множества равна $a^{-1}\Delta^{-2}\sqrt{b^2-ac}$, где a, b, c суть коэффициенты общего уравнения гиперболы. Аналогично измерима максимальная группа инвариантности эллипсов, а для парабол она неизмерима. Для парабол измеримы лишь ее подгруппы: группы унимодулярных аффинных и центроаффинных преобразований. Элементарная кинематич. мера группы проективных преобразований (4) равна Δ^{-3}, где Δ — определитель преобразования.

Множество прямых центроаффинной плоскости измеримо. Плотность меры их множества равна p^{-3}, где p — свободный член нормального уравнения прямой. Кинематич. мера группы преобразований (5) не центроаффинной плоскости равна a_1^{-1}. Если $\Delta=\Delta(\varphi)$ есть ширина овала, то Δ^{-2} есть его плотность меры для аффинного унимодулярного преобразования.

И. г. в проективном пространстве P^3. Группа движений в проективном пространстве P^3 с прямоугольной декартовой системой координат является измеримой лишь для совокупности четырех точек, и плотность меры равна при этом Δ^{-4}, где Δ есть объем тетраэдра, вершинами к-рого являются эти точки. Для совокупностей двух и трех точек измерима лишь группа аффинных унимодулярных преобразований. Плотность ее меры равна единице. Для трех точек также измерима группа центроаффинных преобразований (при условии, что точки не лежат на одной прямой). Множество прямых в P^3 имеет в качестве максимальной группы инвариантности полную группу движений, но она для них неизмерима (измерима лишь нек-рая ее подгруппа). Измерима полная группа преобразований для пар прямых. Множество плоскостей относительно полной группы преобразований в P^3 не допускает меры; для множества плоскостей измерима лишь ее подгруппа ортогональных преобразований. Пары плоскостей допускают меру для группы центроаффинных унимодулярных преобразований. Параллелепипеды допускают меру частной группы аффинных преобразований, множество пар плоскость — точка допускает меру полной группы преобразований в P^3. Множество сфер в P^3 допускает меру группы преобразований подобия, причем плотность меры равна R^{-4}, где R — радиус сферы. Множество поверхностей 2-го порядка допускает меру полной группы преобразований в P^3, причем плотность меры равна Δ^{-5}, где Δ есть инвариант поверхности. Множество окружностей в P^3 допускает меру группы преобразований подобия, причем плотность меры равна R^{-4}, где R — радиус окружности. Кинематич. мера в P^3 полной группы преобразований равна Δ^{-4}, где Δ есть ее определитель. Плотность меры множества точек в центроаффинном унимодулярном пространстве трех измерений равна единице. Измеримо и множество плоскостей в этом пространстве с плотностью p^{-4}, где p есть параметр нормального уравнения плоскости.

И. г. на поверхности постоянной кривизны V^2. Семейству кривых в V^2 с постоянной положительной кривизной соответствует максимальная группа инвариантности $G_3^+(x)$. Семейства специального вида (трех-, двух- и однопараметрические) допускают плотности меры максимальной группы инвариантности (инфинитезимальных преобразований группы $G_3^+(x)$), а в случае одного параметра — группы $G_1(x)$.

То же справедливо для V^2 с отрицательной постоянной кривизной. Трехпараметрич. кривые специального вида допускают плотность меры максимальной группы инвариантности преобразований $G_3^-(x)$, равную единице. Меры существуют у группы и в случае специальных видов двух- и однопараметрич. семейств. В обоих случаях условие допущения семейством кривых $F_q(x)$ меры максимальной группы инвариантности $G_2(x)$ состоит в пространственной транзитивности (измеримости) присоединенной группы $H_2(\alpha)$.

Обобщение И. г. Вышеприведенное изложение относится к традиционному пониманию содержания И. г. как теории инвариантной меры множества геометрич. объектов в различных пространствах, в основном в однородных. При понимании И. г. как теории преобразования функций, заданных на множестве одних геометрич. объектов в нек-ром пространстве, в функции, заданные на множестве иных геометрич. объектов того же пространства, в качестве основной ставится задача, обратная интегрированию нек-рой функции точек пространства по нек-рому геометрич. объекту этого же пространства. Напр., если вводится интегральное преобразование функции $f(x)$ в n-мерном аффинном пространстве (преобразование Радона) как интегрирование ее по гиперплоскости, то в качестве обратной ставится задача восстановления $f(x)$ по ее интегралам по гиперплоскостям, т. е. задача нахождения обратного преобразования Радона. Аналогично ставятся и решаются задачи о восстановлении функции на линейчатых поверхностях 2-го порядка в 4-мерном комплексном пространстве, когда известны ее интегралы по прямым, составляющим эту поверхность, а также о восстановлении функции по ее интегралам, взятым по орисферам в действительном и мнимом пространствах Лобачевского.

Лит.: [1] Бляшке В., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 97—149; [2] Сантало Л. А., Введение в интегральную геометрию, пер. с англ., М., 1956; [3] Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я., Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, М., 1962; [4] Рашевский П. К., Полиметрическая геометрия, в кн.: Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, в. 5, М.— Л., 1941, с. 21—147; [5] Stoka M. I., Geometrie integrală, Buc., 1967; [6] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М., 1970, с. 157—91.

С. Ф. Шушурин.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ КРИВАЯ — график решения $y=y(x)$ нормальной системы

$$y' = f(x,\ y),\quad y \in \mathbb{R}^n,$$

обыкновенных дифференциальных уравнений. Напр., И. к. уравнения

$$y' = -\frac{x}{y}$$

суть окружности $x^2+y^2=c^2$, где c — произвольная постоянная. Часто И. к. отождествляют с решением. Геометрич. смысл И. к. скалярного уравнения

$$y' = f(x,\ y) \qquad (*)$$

состоит в следующем. Уравнение $(*)$ определяет на плоскости поле направлений, т. е. поле отрезков, тангенс угла наклона к-рых к оси Ox в каждой точке $(x,\ y)$ равен $f(x,\ y)$. Тогда И. к. уравнения $(*)$ суть кривые, к-рые в каждой точке имеют касательную, совпадающую с отрезком поля направлений в этой точке. И. к. уравнения $(*)$ заполняют всю область, в к-рой

функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование и единственность решения задачи Коши, нигде не пересекаясь и не касаясь друг друга.

Лит.: [1] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970.

Н. Н. Ладис.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность в $(n+1)$-мерном пространстве, заданная уравнением $u=\varphi(x_1,\ldots, x_n)$, где функция $u=\varphi(x_1,\ldots, x_n)$ является решением дифференциального уравнения с частными производными. Напр., рассмотрим линейное однородное уравнение 1-го порядка

$$X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0; \qquad (*)$$

здесь u — искомая, а $X_1,\ldots, X_n$ — заданные функции от аргументов $x_1,\ldots, x_n$. Пусть в нек-рой области G n-мерного пространства функции $X_1,\ldots, X_n$ непрерывно дифференцируемы и не обращаются одновременно в нуль, а функции $\varphi_1(x_1,\ldots, x_n),\ldots, \varphi_{n-1}(x_1,\ldots, x_n)$ являются функционально независимыми первыми интегралами в области G системы обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрич. форме

$$\frac{dx_1}{x_1}=\ldots=\frac{dx_n}{x_n}.$$

Тогда уравнение всякой И. п. уравнения (*) в области G можно представить в виде

$$u=\Phi(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{n-1}),$$

где Φ — непрерывно дифференцируемая функция. Для *Пфаффа уравнения*

$$P(x,\ y,\ z)dx+Q(x,\ y,\ z)dy+R(x,\ y,\ z)dz=0,$$

вполне интегрируемого в нек-рой области G трехмерного пространства и не имеющего в G особых точек, через каждую точку области G проходит И. п. Эти И. п. нигде не пересекаются и не касаются друг друга.

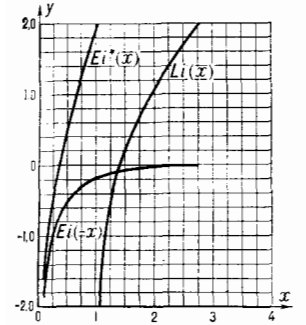
Лит.: [1] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959.

Н. Н. Ладис.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ — специальная функция, определяемая для действительного $x\neq 0$ равенством

$$\mathrm{Ei}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}\,dt=-\int_{-x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

График И. п. ф. см. на рис.



Графики функций $y=\mathrm{Ei}(-x)$, $y=\mathrm{Ei}^*(x)$, $y=\mathrm{Li}(x)$.

При $x>0$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x=0$ и И. п. ф. понимается в смысле главного значения этого интеграла:

$$\mathrm{Ei}(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_{-\infty}^{\varepsilon}\frac{e^t}{t}\,dt+\int_{\varepsilon}^{x}\frac{e^t}{t}\,dt\right\}.$$

И. п. ф. представляется в виде рядов

$$\mathrm{Ei}(x)=C+\ln(-x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!\,k},\quad x<0, \qquad (1)$$

$$\mathrm{Ei}(x)=C+\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!\,k},\quad x>0, \qquad (2)$$

где $C=0{,}5772\ldots$ — *Эйлера постоянная.*

Имеет место асимптотическое представление:

$$\mathrm{Ei}\,(-x) \approx \frac{e^{-x}}{x}\left(1-\frac{1!}{x}+\frac{2!}{x^2}-\frac{3!}{x^3}+\cdots\right),\ x\to+\infty.$$

Как функция комплексного переменного z, И. п. ф.

$$\mathrm{Ei}\,(z)=C+\ln(-z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!\,k},\quad |\arg(-z)|<\pi,$$

есть однозначная аналитич. функция в плоскости z с разрезом вдоль положительной действительной полуоси ($0<\arg z<2\pi$); значение $\ln(-z)$ выбирается при этом так, чтобы $-\pi<\mathrm{Im}\ln(-z)<\pi$. Поведение $\mathrm{Ei}\,(z)$ вблизи разреза описывается предельными соотношениями:

$$\lim_{\eta\to 0}\mathrm{Ei}\,(z+i\eta)=\mathrm{Ei}\,(z)-i\pi,$$
$$\lim_{\eta\to 0}\mathrm{Ei}\,(z-i\eta)=\mathrm{Ei}\,(z)+i\pi,\qquad z=x+iy,\quad x>0,\quad \eta>0.$$

Асимптотич. представление в области $0<\arg z<2\pi$

$$\mathrm{Ei}\,(z)\sim\frac{ez}{z}\left(\frac{1!}{z}+\frac{2!}{z^2}+\ldots+\frac{k!}{zk}+\ldots\right),\ |z|\to\infty.$$

И. п. ф. связана с *интегральным логарифмом* $\mathrm{li}\,(x)$ соотношениями:

$$\mathrm{Ei}\,(x)=\mathrm{li}\,(e^x),\ x<0,$$
$$\mathrm{Ei}\,(\ln x)=\mathrm{li}\,(x),\ x<1,$$

с *интегральным синусом* $\mathrm{Si}\,(x)$ и *интегральным косинусом* $\mathrm{Ci}\,(x)$ соотношениями:

$$\mathrm{Ei}\,(\pm ix)=\mathrm{Ci}\,(x)\pm i\,\mathrm{Si}\,(x)\mp\frac{\pi i}{2},\quad x>0.$$

Формула дифференцирования:

$$\frac{d^n\,\mathrm{Ei}\,(-x)}{dx^n}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}e^{-x}e_{n-1}(x),\ n=1,2,\ldots$$

Иногда используются обозначения

$$\mathrm{Ei}^{+}(z)=\mathrm{Ei}\,(z+i0),\quad \mathrm{Ei}^{-}(z)=\mathrm{Ei}\,(z-i0),$$
$$\mathrm{Ei}^{*}(z)=\overline{\mathrm{Ei}\,(z)}=\mathrm{Ei}\,(z)+\pi i.$$

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968; [3] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [4] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М., 1963.

А. Б. Иванов.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ СУММА — см. *Интеграл, Интегральное исчисление.*

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — раздел математики, в к-ром изучаются понятия *интеграла*, его свойства и методы вычислений. И. и. непрерывно связано с *дифференциальным исчислением* и составляет вместе с ним основу математич. анализа. Истоки И. и. относятся к античному периоду развития математики и связаны с *исчерпывания методом*, разработанным математиками Древней Греции. Этот метод возник при решении задач на вычисление площадей плоских фигур и поверхностей, объемов тел, нек-рых задач статики и гидродинамики. Он основан на аппроксимации рассматриваемых объектов ступенчатыми фигурами или телами, составленными из простейших фигур или пространственных тел (прямоугольников, параллелепипедов, цилиндров и т. п.). В этом смысле метод исчерпывания можно рассматривать как античный интегральный метод. Наибольшее развитие метод исчерпывания в древнюю эпоху получил в работах Евдокса (4 в. до н. э.) и особенно Архимеда (3 в. до н. э.). Дальнейшее его применение и совершенствование связано с именами многих ученых 15—17 вв.

Основные понятия и теория интегрального и дифференциального исчислений, прежде всего связь операций дифференцирования и интегрирования, а также их применения к решению прикладных задач, были разработаны в трудах И. Ньютона (I. Newton) и Г. Лейбница (G. Leibniz) в конце 17 в. Их исследования явились началом интенсивного развития математич. анализа. Существенную роль в его создании в 18 в. сыграли работы Л. Эйлера (L. Euler), Я. и И. Бернулли (Jacob, Johann Bernoulli), Ж. Лагранжа (J. Lagrange). В 19 в. в связи с появлением понятия предела И. и. приобрело логически завершенную форму [работы О. Коши (A. Cauchy), Б. Римана (B. Riemann) и др.]. Разработка теории и методов И. и. происходила в конце 19 в. и в 20 в. одновременно с исследованиями по теории *меры*, играющей существенную роль в И. и.

С помощью И. и. стало возможным решать единым методом многие теоретич. и прикладные задачи, как новые, к-рые ранее не поддавались решению, так и старые, требовавшие прежде специальных искусственных приемов. Основными понятиями И. и. являются два тесно связанных понятия интеграла: неопределенного и определенного.

Неопределенный интеграл от данной действительной функции на нек-ром промежутке определяется как совокупность всех ее первообразных на этом промежутке, т. е. функций, производные к-рых совпадают с заданной функцией. Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ обозначается через $\int f(x)dx$. Если $F(x)$ — какая-либо первообразная функция $f(x)$, то любая другая ее первообразная имеет вид $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, поэтому пишут

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Операция нахождения неопределенного интеграла наз. интегрированием. Интегрирование является операцией, обратной к операции дифференцирования:

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C, \quad d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Операция интегрирования линейна: если на нек-ром промежутке существуют неопределенные интегралы

$$\int f_1(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int f_2(x)\,dx,$$

то для любых действительных чисел λ_1 и λ_2 на том же промежутке существует интеграл

$$\int [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]\,dx = \lambda_1 \int f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int f_2(x)\,dx.$$

Для неопределенных интегралов справедлива формула *интегрирования по частям*: если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на нек-ром промежутке и интеграл $\int vdu$ существует, то существует и интеграл $\int udv$, причем имеет место равенство

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Справедлива формула замены переменного: если для функций $f(x)$ и $x=\varphi(t)$, определенных на нек-рых промежутках, имеет смысл сложная функция $f[\varphi(t)]$, функция $\varphi(t)$ дифференцируема и существует интеграл $\int f(x)dx$, то существует и интеграл

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}$$

(см. *Интегрирование подстановкой*).

Всякая непрерывная на нек-ром промежутке функция имеет на нем первообразную и, следовательно, для нее существует неопределенный интеграл. Задача фактического нахождения неопределенного интеграла от конкретно заданной функции осложняется тем, что неопределенный интеграл от элементарной функции не является, вообще говоря, элементарной функцией. Известны многие классы функций, для к-рых оказывается возможным выразить их неопределенные интегралы через элементарные функции. Простейшими примерами этого являются интегралы, к-рые получаются из таблицы производных основных элементарных функций (см. *Дифференциальное исчисление*):

1) $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 1, \quad a \neq 1,$ в частности $\int e^x\,dx = e^x + C;$

4) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

5) $\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

8) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;$

9) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C;$

10) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$

11) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$

12) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} + C,$

13) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a} + C = -\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{a} + C,$ $|x| < |a|;$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$ (когда под корнем стоит $x^2 - a^2$, предполагается, что $|x| > |a|$).

Если знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в нек-рой точке, то написанные формулы справедливы лишь для тех промежутков, в к-рых не происходит обращения в нуль указанного знаменателя (см. формулы 1, 2, 6, 7, 11, 13, 15).

Неопределенный интеграл от рациональной функции на всяком промежутке, на к-ром знаменатель не обращается в нуль, является суперпозицией рациональных функций, арктангенсов и натуральных логарифмов. Нахождение алгебраич. части неопределенного интеграла от рациональной функции может быть осуществлено *Остроградского методом*. К интегрированию рациональных функций с помощью подстановок сводятся, напр., интегралы вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_m}\right] dx,$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_m$ — рациональные числа, интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

(см. *Эйлера подстановки*), нек-рые случаи интегралов от *дифференциальных биномов*, интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx, \quad \int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx$$

(здесь везде $R(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — рациональные функции), интегралы

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx, \quad \int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx,$$

$$\int x^n \cos \alpha x\, dx, \quad \int x^n \sin \alpha x\, dx,$$

$$\int x^n \arcsin x\, dx, \quad \int x^n \arccos x\, dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arctg} x\, dx, \quad \int x^n \operatorname{arcctg} x\, dx, \quad n=0, 1, 2, \ldots$$

и мн. др. Вместе с тем, напр., интегралы

$$\int \frac{e^x}{x^n} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x^n} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x^n} dx, \quad n=1, 2, \ldots$$

не выражаются через элементарные функции.

О п р е д е л е н н ы м и н т е г р а л о м

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

от функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, наз. предел интегральных сумм определенного вида (см. *Коши интеграл*, *Римана интеграл*, *Лебега интеграл*, *Колмогорова интеграл*, *Стилтьеса интеграл* и т. д.). Если этот предел существует, функцию $f(x)$ наз. и н т е г р и р у е м о й соответственно по Коши, по Риману, по Лебегу и т. д.

Геометрич. смысл интеграла связан с понятием площади: если функция $f(x) \geqslant 0$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то значение интеграла

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

равно площади криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x)$, т. е. множеством, граница к-рого состоит из графика функции $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, отрезка $[a, b]$ и двух отрезков прямых $x=a$ и $x=b$, к-рые могут вырождаться в точки. К задаче вычисления предела интегральных сумм, т. е. нахождению определенного интеграла, сводится вычисление многих встречающихся на практике величин: площадей фигур и поверхностей, объемов тел, работы силы, координат центра тяжести, значений моментов инерции различных тел и т. п.

Определенный интеграл обладает свойством линейности: если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то для произвольных действительных чисел λ_1 и λ_2 функция

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$$

также интегрируема на отрезке и

$$\int_a^b [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]\, dx =$$

$$= \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

Интегрируемость функции на отрезке обладает свойством монотонности: если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $[c, d] \subset [a, b]$, то функция $f(x)$ интегрируема и на отрезке $[c, d]$. Справедливо свойство аддитивности интеграла относительно отрезков, по к-рым происходит интегрирование: если $a<c<b$ и

функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a, b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы, то их произведение также интегрируемо. Если $f(x) \geqslant g(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то ее абсолютная величина $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$ и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

По определению полагают

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \text{ и } \int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad a < b.$$

Для определенных интегралов справедливы теоремы о среднем. Напр., если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in [a, b]$ и функция $g(x)$ не меняет знака на отрезке $[a, b]$, т. е. либо неотрицательна, либо неположительна на этом отрезке, то существует такое число $m \leqslant \mu \leqslant M$, что

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

При дополнительном предположении непрерывности на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ на интервале (a, b) существует такая точка ξ, что

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx.$$

В частности, если $g(x) \equiv 1$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a).$$

Интегралы с переменным верхним пределом. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

непрерывна на этом отрезке. Если, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то функция $F(x)$ дифференцируема в этой точке и $F'(x_0) = f(x_0)$. Иначе говоря, в точках непрерывности функции справедлива формула

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Следовательно, для всякой интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$ функции эта формула справедлива во всех точках, кроме, быть может, множества точек, имеющих меру Лебега, равную нулю, ибо если функция интегрируема по Риману на некотором отрезке, то множество ее точек разрыва имеет меру нуль. Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

является ее первообразной на этом отрезке. Эта теорема показывает, что операция дифференцирования является обратной к взятию определенного интеграла с переменным верхним пределом, тем самым устанавливая связь между определенным и неопределенным интегралами:

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

Геометрич. смысл этой связи состоит в том, что задача о нахождении касательной к кривой и вычисление площадей плоских фигур являются в указанном смысле взаимно обратными.

Для любой первообразной $F(x)$ непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет место ф о р м у л а Н ь ю т о н а — Л е й б н и ц а:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Она показывает, что определенный интеграл по некоторому отрезку от непрерывной функции равен разности значений на концах этого отрезка любой из ее первообразных. Эту формулу иногда принимают за определение определенного интеграла. В этом случае доказывается, что введенный таким образом интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ является пределом соответствующих сумм.

Для определенных интегралов справедливо правило замены переменного и формула интегрирования по частям. Пусть, напр., функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на интервале (α, β), причем интервал (α, β) отображается с помощью функции $\varphi(t)$ в интервал (a, b): $a<\varphi(t)<b$ при $\alpha<t<\beta$ и, следовательно, на (α, β) имеет смысл суперпозиция $f[\varphi(t)]$. Тогда, если $\alpha_0 \in (\alpha, \beta)$, $\beta_0 \in (\alpha, \beta)$, то имеет место ф о р м у л а з а м е н ы п е р е м е н н о г о

$$\int_{\varphi(\alpha_0)}^{\varphi(\beta_0)} f(x)\,dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Ф о р м у л а и н т е г р и р о в а н и я п о ч а с т я м:

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x)\,du(x),$$

где функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на отрезке $[a, b]$ интегрируемые производные.

Формула Ньютона — Лейбница сводит вычисление определенного интеграла к отысканию значений его первообразной. Поскольку задача отыскания первообразной является сама по себе сложной, то большое значение имеют другие методы нахождения определенных интегралов, среди к-рых прежде всего следует отметить метод *вычетов* и метод дифференцирования и интегрирования по параметру *зависящих от параметров интегралов*. Разрабатываются также численные методы приближенного вычисления интегралов.

Обобщение понятия интеграла на случай неограниченных функций и случай неограниченного промежутка приводит к понятию *несобственного интеграла*, к-рый определяется при помощи еще одного дополнительного предельного перехода.

Понятия неопределенного и определенного интегралов переносятся на комплекснозначные функции. Представление любой регулярной функции комплексного переменного в виде *Коши интеграла* по контуру сыграло важную роль в развитии теории аналитич. функций.

Обобщение понятия определенного интеграла от функции одного переменного на случай функций многих переменных приводит к понятию *кратного интеграла*.

Для неограниченных множеств и неограниченных функций многих переменных, также как и в одномерном случае, вводится понятие несобственного интеграла.

Расширение практич. использования И. и. обусловило введение понятий *криволинейного интеграла* — интеграла по кривой, *поверхностного интеграла* — интеграла по поверхности и вообще — интеграла по многообразиям, сводимых в нек-ром смысле к определенному интегралу (криволинейный интеграл — к интегралу по отрезку, поверхностный — к интегралу по области (плоской), интеграл по n-мерному многооб-

разию — к интегралу по n-мерной области). Интегралы по многообразиям, в частности криволинейные и поверхностные, играют важную роль в И. и. функций многих переменных; с их помощью можно установить связь между интегрированием по области и ее границе или, в общем случае, по многообразию и его краю. Эта связь устанавливается *Стокса формулой* (см. также *Остроградского формула*, *Грина формулы*), являющейся обобщением на многомерный случай формулы Ньютона — Лейбница.

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы находят непосредственное применение в математич. физике, в частности в теории поля. Кратные интегралы и связанные с ними понятия широко используются при решении конкретных прикладных задач. Для численного вычисления кратных интегралов разработана теория *кубатурных формул*.

Теория и методы И. и. числовых функций конечного числа переменных переносятся и на более общие объекты. Напр., теория интегрирования функций, значения к-рых принадлежат линейным нормированным пространствам, функций, заданных на топологич. группах, обобщенных функций и функций бесконечного числа переменных (континуальный интеграл). Наконец, новое направление И. и. связано также с появлением и развитием конструктивной математики.

И. и. применяется во многих разделах математики (в теории дифференциальных и интегральных уравнений, в теории вероятностей и математич. статистике, в теории оптимальных процессов и др.), и в ее приложениях.

Лит.: см. [1] — [24] при статье *Дифференциальное исчисление*, а также дополнение к разделу «Работы основоположников и классиков...»: [25] Архимед, Сочинения, М., 1962; [26] Кеплер И., Новая стереометрия винных бочек, [пер. с латин.], М.— Л., 1934; [27] Кавальери Б., Геометрия..., [пер. с латин.], М.— Л., 1940; [28] Эйлер Л., Интегральное исчисление, пер. с латин., т. 1—3, М., 1956—58.

Л. Д. Кудрявцев.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — множество S_t точек фазового пространства $(t, x$-пространства) системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \qquad (*)$$

заполненное *интегральными кривыми* этой системы, определенными для всех $t \in \mathbb{R}$, и являющееся многообразием в t, x-пространстве. Размерность сечения S_t плоскостью $t = \text{const}$ наз. обычно размерностью И. м. S_t. При определении И. м. требование быть многообразием заменяют иногда требованием аналитической представимости множества S_t уравнением

$$x = f(t, C)$$

с функцией f, определенной для всех t из $\mathbb{R}$ и $C = (C_1, \ldots, C_m)$ из нек-рой области D и обладающей определенной гладкостью по t, C при t, $C \in \mathbb{R} \times D$. И. м. наз. тогда m-мерным той гладкости, какова гладкость функции f.

Примеры: интегральная кривая периодич. решения системы (*), т. е. периодическая интегральная кривая; семейство интегральных кривых системы (*), образованное семейством квазипериодич. решений системы (*), заполняющих при $t = 0$ m-мерный тор x-пространства — m-мерное тороидальное интегральное многообразие, и т. д.

Наиболее изученными И. м. являются тороидальные многообразия, т. е. множества S_t, являющиеся торами при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}$. Эти многообразия широко встречаются в системах вида (*), описывающих колебательные процессы.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, Львов, 1945; [2] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., в кн.: Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, т. 1, К., 1963, с. 93—154; [3] их же, в кн.: Тр. 4 Всесоюзного

математического съезда, т. 2, Л., 1964, с. 432—37; [4] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике, К., 1969; [5] Митропольский Ю. А., Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, М., 1964; [6] Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б., Интегральные многообразия в нелинейной механике, М., 1973.

А. М. Самойленко.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ — представление аналитич. функции в виде интеграла, зависящего от параметра. И. п. а. ф. возникли на ранних стадиях развития теории функций и математич. анализа вообще как удобный аппарат для обозримого представления аналитич. решений дифференциальных уравнений, для исследования асимптотики этих решений и их аналитич. продолжения. Несколько позже И. п. а. ф. нашли применения для решения *граничных задач теории аналитических функций* и *сингулярных интегральных уравнений*, исследования внутренних и *граничных свойств аналитических функций* различных классов, а также для решения других, самых разнообразных вопросов математич. анализа. В процессе развития теории функций изучение свойств отдельных, наиболее важных, типов И.п. а. ф. обособлялось в виде самостоятельных глав теории функций (см., напр., *Коши интеграл*, *Пуассона интеграл*, *Шварца интеграл*).

Обширный класс И. п. а. ф., используемых для получения и исследования аналитич. решений дифференциальных уравнений, описывается общей формулой:

$$f(z)=\int_L K(z,\ \zeta)\,v(\zeta)\,d\zeta, \tag{1}$$

где $K(z,\ \zeta)$ — ядро интегрального представления, $v(\zeta)$ — плотность и L — контур (или система контуров) в совмещенной плоскости комплексных переменных z, ζ. Целесообразное и, по возможности, наиболее простое решение трех взаимосвязанных вопросов о выборе ядра K, плотности v и контура L для представления данной функции $f(z)$ (или данного класса функций) является определяющим с точки зрения успешного применения м е т о д а И. п. а. ф. При этом свойства представления (1), в первую очередь, существенно зависят от того, является ли ядро $K(z,\ \zeta)$ целой функцией комплексных переменных z, ζ, или же ядро $K(z,\ \zeta)$ сингулярное, т. е. имеет те или иные особенности. Вообще говоря, ядро И. п. а. ф. не обязательно является аналитич. функцией переменных z, ζ — аналитичность функции $f(z)$ может обеспечиваться за счет специфич. свойств плотности. Формула (1) как формула простого однократного интегрирования также, вообще говоря, не обязательна — имеются типы И. п. а. ф., в к-рых используются повторные интегралы.

Общая схема получения интегральных представлений специальных функций $f(z)$, являющихся решениями нек-рого обыкновенного дифференциального уравнения $\mathfrak{L}_z[f](z)=0$, сводится в основном к следующему. За счет целесообразного выбора, чаще всего несингулярного, ядра K должна оказаться осуществимой следующая переброска действия оператора $\mathfrak{L}_z$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_z[f](z)&=\int_L \mathfrak{L}_z[K](z,\ \zeta)\,v(\zeta)\,d\zeta=\\&=\int_L \mathfrak{M}_\zeta[K](z,\ \zeta)\,v(\zeta)\,d\zeta=\\&=\int_L K(z,\ \zeta)\,\widetilde{\mathfrak{L}}_\zeta[v](\zeta)\,d\zeta+P[v,\ K],\end{aligned} \tag{2}$$

т. е. ядро должно, в первую очередь, удовлетворять по возможности простому уравнению с частными производными $\mathfrak{L}_z[K]=\mathfrak{M}_\zeta[K]$, допускающему последующее интегрирование по частям с целью восстановления первоначального вида ядра под интегралом и переброску действия получающегося при этом сопряженного оператора $\widetilde{\mathfrak{L}}_\zeta$ на плотность v. Получив формулу вида

(2), подбирают достаточно простую плотность v, удовлетворяющую сопряженному уравнению $\mathfrak{L}_\zeta[v](\zeta)=0$, и контур L, обеспечивающий обращение в нуль обинтегрированного члена $P[v, K]$. При этом необходимо иметь в виду, что выбор контура L определяет частное решение исходного уравнения $\mathfrak{L}_z[f](z)=0$. Наибольшее применение находят ядра:

$$K(z, \zeta)=e^{z\zeta} \text{ или } \quad K(z, \zeta)=e^{iz\zeta},$$

$$K(z, \zeta)=z^{\zeta} \text{ и } K(z, \zeta)=(z-\zeta)^{\alpha},$$

иногда называемые соответственно ядром Лапласа—Фурье, ядром Меллина и ядром Эйлера. Различные замены переменных приводят к видоизмененным формам ядер. В описанном виде получение И. п. а. ф. самым тесным образом связано с методом *интегральных преобразований*.

Таким путем, напр., получается известное интегральное представление функций Бесселя:

$$J_p(z)=\frac{\Gamma(1/2-p)}{2i\pi^{3/2}}\left(\frac{z}{2}\right)^p\int_L e^{iz\zeta}(\zeta^2-1)^{p-1/2}\,d\zeta, \qquad (3)$$

где контур L имеет вид восьмерки, охватывающей точки -1 и $+1$. Представление (3) характерно, с одной стороны, тем, что его плотность $v(\zeta)=(\zeta^2-1)^{p-1/2}$ гораздо проще, чем представляемые трансцендентные функции $J_p(z)$, а с другой стороны — тем, что оно позволяет довольно просто обозреть свойства функций $J_p(z)$ и, в частности, изучить их асимптотику.

Целесообразное изменение контура L позволяет осуществить аналитич. продолжение, т. е., иными словами, позволяет получить И. п. а. ф., пригодное во всей ее области существования. Напр., интеграл Эйлера второго рода:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt, \quad \operatorname{Re} z>0,$$

представляет гамма-функцию $\Gamma(z)$ при $\operatorname{Re} z>0$, а если выбрать контур интегрирования L_1 в виде петли (рис. 1), то получается интегральное представление

$$\Gamma(z)=\frac{1}{e^{2i\pi z}-1}\int_{L_1}\zeta^{z-1}e^{-\zeta}\,d\zeta,$$

пригодное для всех z, кроме точек $z=-1, -2, \ldots$, в к-рых $\Gamma(z)$ имеет простые полюсы. Аналогично, анали-

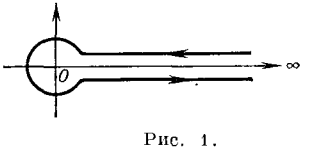


Рис. 1.

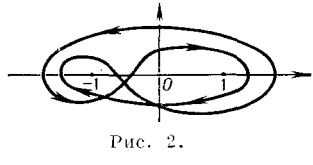


Рис. 2.

тич. продолжение интеграла Эйлера первого рода:

$$B(z, w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt, \qquad \operatorname{Re} z>0, \quad \operatorname{Re} w>0,$$

выражающего бета-функцию $B(z, w)$ при $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Re} w>0$, осуществляется путем перехода к контуру интегрирования в виде двойной петли L_2 (рис. 2).

Изучались интегральные представления специальных функций (см. [1], [2]); интегральные представления весьма обширных классов функций в связи с интегральными преобразованиями [7].

Универсальный характер в теории аналитич. функций имеют сингулярное ядро Коши

$$K(z, \zeta)=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{(\zeta-z)}$$

и соответствующее И. п. а. ф.— *Коши интеграл*:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}. \qquad (4)$$

Это И. п. а. ф. выражает значения однозначной аналитич. функции $f(z)$ в области D, ограниченной простым замкнутым контуром L (или системой таких контуров), напр., в случае, когда функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}=D\cup L$; в дополнительной области $C\bar{D}$, $\infty\in C\bar{D}$, интеграл из правой части (4) тождественно обращается в нуль. Фундаментальная роль представления (4) в теории аналитич. функций обусловливается тем, что интеграл Коши есть свертка $f(z)$ с фундаментальным решением $1/2\pi iz$ оператора Коши — Римана

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\,\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

поэтому из представления (4) получаются все основные свойства аналитич. функций. С точки зрения общих свойств И. п. а. ф. интеграл Коши выделяется особенно простой структурой ядра и тем, что плотность $v(\zeta)=f(\zeta)$ совпадает со значениями представляемой функции на контуре L. Это последнее свойство остается в силе, если под интегралом (4) заменить ядро Коши $^1/_{2\pi i}(\zeta-z)$ на любую однозначную аналитическую по z в замкнутой области $\bar{D}$ функцию $K(z,\,\zeta)$, имеющую в точке $z=\zeta$ простой полюс с вычетом 1. Среди таких функций $K(z,\,\zeta)$ ядро Коши наиболее простое, но указанная свобода выбора ядра в интеграле Коши часто используется при решении граничных задач.

Совпадение плотности $v(\zeta)$ с граничными значениями $f(\zeta)$ аналитич. функции $f(z)$ в сущности есть лишь форма выражения свойства аналитичности. При использовании интегрального представления (4) с априори произвольно заданной плотностью $v(\zeta)$ получается интеграл типа Коши, в к-ром связь плотности с граничными значениями выражается гораздо сложнее через сингулярный интеграл по контуру L.

В граничных задачах теории аналитич. функций для решения сингулярных интегральных уравнений роль интегралов типа Коши и их модификаций исключительно важна (см. [5], [6]).

При исследовании внутренних и граничных свойств аналитич. функций различных классов применяются более общие И. п. а. ф., чем (1), в виде зависящих от параметра интегралов

$$f(z)=\int_L K(z,\,\zeta)\,d\mu(\zeta) \tag{5}$$

по борелевской г р а н и ч н о й м е р е μ, вообще говоря комплексной, сосредоточенной на ограничивающем область D контуре L и выражающейся при помощи той или иной процедуры через представляемую функцию $f(z)$.

Напр., все функции $f(z)$, регулярные в единичном круге $D=\{z;|z|<1\}$ и имеющие положительную действительную часть, $\operatorname{Re}f(z)>0$, характеризуются представимостью по ф о р м у л е Г е р г л о т ц а:

$$f(z)=\int\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\mu(\zeta)+ic,\quad \operatorname{Im}c=0,$$

идея к-рой по существу восходит к *Шварца интегралу*. Здесь μ — произвольная положительная мера, сосредоточенная на окружности $L=\{\zeta;\,|\zeta|=1\}$. В теории однолистных функций находят существенные применения и другие весьма разнообразные И. п. а. ф. вида (5), известные также под названиями *параметрических представлений*, или с т р у к т у р н ы х ф о р м у л. Так, для класса т и п и ч н о в е щ е с т в е н н ы х ф у н к ц и й $f(z)=z+c_2z^2+\ldots$ в круге $D=\{z;\,|z|<1\}$ (т. е. таких, что $\operatorname{Im}f(x)=0$ при $-1<x<1$ и $\operatorname{Im}f(z)\times\times\operatorname{Im}z>0$ при $\operatorname{Im}z\neq0$) характерно представление

$$f(z)=\int\frac{z\,d\mu(\zeta)}{(z-\zeta)(z-\bar{\zeta})},$$

где μ — произвольная положительная мера, сосредоточенная на окружности $L=\{\zeta;\ |\zeta|=1\}$ и нормированная условием $||\mu||=\int d\mu(\zeta)=1$. Часто применяются также модификации представления (5) в виде

$$f(z)=\varphi\left\{\int K(z,\ \zeta)\,d\mu(\zeta)\right\},$$

где $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — некоторая особо подбираемая, по возможности простая, функция, напр. $\varphi(z)=\exp z$.

Исходя из понимания меры μ как функционала, И. п. а. ф. (5) можно истолковать как значение $\langle\mu_\zeta,\ K(z,\zeta)\rangle$ функционала μ на ядре $K(z,\zeta)$. Следовательно, развитием метода И. п. а. ф. является аналитич. представление обобщенных функций V в виде значения V на ядре $K(z,\zeta)$:

$$\hat{V}(z)=\langle V_\zeta,\ K(z,\zeta)\rangle. \tag{6}$$

При этом в дополнении носителя обобщенной функции V функция $\hat{V}(z)$ является аналитической [ядро $K(z,\zeta)$ предполагается аналитическим по z при $z\neq\zeta$]. Представления вида (6) находят важные применения в математич. физике (см. [10], [11]).

В теории аналитич. функций $f(z)$ нескольких комплексных переменных $z=(z_1,\ldots,z_n)$, $n\geqslant 1$, И. п. а. ф. простейшего вида выражаются общей формулой:

$$f(z)=\int v(\zeta)\,\omega(z,\ \zeta), \tag{7}$$

где $v(\zeta)$ — плотность, так или иначе связанная с $f(z)$, $\omega(z,\ \zeta)$ — дифференциальная форма по переменным $\zeta=(\zeta_1,\ldots,\ \zeta_n)$, $\overline{\zeta}=(\overline{\zeta}_1,\ldots,\ \overline{\zeta}_n)$, коэффициенты к-рой зависят от параметров $z=(z_1,\ldots,\ z_n)$, $\overline{z}=(\overline{z}_1,\ldots,\ \overline{z}_n)$, причем интегрирование производится по всей границе ∂D области определения D функции $f(z)$ или по нек-рой ее части. Употребляются и представления в виде линейной комбинации интегралов типа (7). Напр., функция $f(z)$, голоморфная в поликруговой области $D=D_1\times\ldots\times D_n$ и непрерывная в замыкании $\bar{D}$, всюду в D представима в виде интеграла Коши:

$$f(z)=\int f(\zeta)\,\omega(z,\ \zeta),$$

где дифференциальная форма ω имеет особенно простой вид

$$\omega(z,\ \zeta)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\,\frac{d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\ldots(\zeta_n-z_n)}=K(z,\ \zeta)\,d\zeta,$$

а интегрирование производится по остову $\Gamma=\partial D_1\times\ldots\times\partial D_n$ области D (см. *Бергмана—Вейля представление*, *Лере формула*, *Бохнера—Мартинелли представление*, а также [8], [9]).

Как и в случае одного комплексного переменного, дальнейшим развитием И. п. а. ф. (7) являются представления вида:

$$f(z)=\langle V_\zeta,\ K(z,\ \zeta)\rangle$$

или

$$f(z)=\langle V_\zeta,\ \omega(z,\ \zeta)\rangle,$$

выражающие аналитич. функцию $f(z)$ в нек-рой области в виде значения функционала V на ядре $K(z,\ \zeta)$ или на форме-ядре $\omega(z,\ \zeta)$. При этом V интерпретируется, соответственно, как обобщенная функция на определенном пространстве функций или как поток на определенном пространстве дифференциальных форм.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3, ч. 2, 6 изд., М., 1956; [2] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [3] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [4] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966;

[5] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [6] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1976; [7] Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966; [8] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [9] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976; [10] Бремерман Г., Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье, пер. с англ., М., 1968; [11] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — функциональное преобразование вида

$$F(x)=\int_C K(x,\ t)\,f(t)\,dt, \qquad (1)$$

где C — конечный или бесконечный контур в комплексной плоскости, $K(x,\ t)$ — ядро И. п. Наиболее часто рассматриваются И. п., для которых $K(x,t)\equiv K(xt)$ и C — действительная ось или ее часть $(a,\ b)$. Если $-\infty<a,\ b<\infty$, то И. п. наз. конечным И. п. Формулы, позволяющие восстановить функцию $f(t)$ по известной $F(x)$, наз. формулами обращения И. п.

Примеры И. п. Преобразование Бохнера:

$$[Tf]\,(r)=2\pi r^{1-n/2}\int_0^\infty J_{n/2-1}\,(2\pi r\rho)\,\rho^{n/2}\,f\,(\rho)\,d\rho,$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя 1-го рода порядка ν, ρ — расстояние в $\mathbb{R}^n$. Формула обращения: $f=T^2f$. Равенство Парсеваля:

$$\int_0^\infty |\,[Tf]\,(r)\,|^2\,r^{k-1}\,dr=\int_0^\infty |\,f\,(\rho)\,|^2\,\rho^{k-1}\,d\rho.$$

Преобразование Вебера:

$$F(u,a)=\int_a^\infty c_\nu(tu,au)\ tf\ (t)\,dt,\ a\leqslant t<\infty,$$

где $c_\nu(\alpha,\ \beta)\equiv J_\nu(\alpha)Y(\beta)-Y_\nu(\alpha)J_\nu(\beta)$, $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ — функции Бесселя 1-го и 2-го рода. Формула обращения:

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{c_\nu\ (xu,au)}{J_\nu^2\,(au)+Y_\nu^2\,(au)}\,uF\ (u,a)\ du.$$

При $a\to 0$ преобразование Вебера переходит в преобразование Ганкеля:

$$F(x)=\int_0^\infty \sqrt{xt}\,J_\nu\ (xt)\,f\,(t)\,dt,\quad 0<x<\infty.$$

При $\nu=\pm 1/2$ это преобразование сводится к синус- и косинус-преобразованиям Фурье. Формула обращения: если $f\in L_1(0,\ \infty)$, $f(t)$ имеет ограниченную вариацию в окрестности точки $t_0>0$ и $\nu\geqslant -1/2$, то

$$\frac{1}{2}\,[f\,(t_0+0)+f\,(t_0-0)]=\int_0^\infty \sqrt{t_0x}\,J_\nu\ (t_0x)\,F\ (x)\,dx.$$

Равенство Парсеваля: если $\nu\geqslant -1/2$, $F(x)$ и $G(x)$ — преобразования Ганкеля функций $f(t)$ и $g(t)$, причем $f,\ G\in L_1(0,\ \infty)$, то

$$\int_0^\infty f\ (t)\,g\ (t)\,dt=\int_0^\infty F\ (x)\,G\ (x)\,dx.$$

Другие формы преобразования Ганкеля:

$$\int_0^\infty J_\nu\ (xt)\ tf\ (t)\,dt,\qquad \int_0^\infty J_\nu\ (2\sqrt{xt})\,f\ (t)\,dt.$$

Преобразование Вейерштрасса:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^\infty \exp\,[-(x-t)^2/4]\,f\ (t)\,dt$$

является частным случаем *свертки преобразования.*

Цепные преобразования. Пусть

$$f_{i+1}\,(x)=\int_0^\infty f_i\,(t)\,K_i\,(xt)\,dt,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

причем $f_{n+1}(x)=f_1(x)$. Такая последовательность И. п. наз. цепочкой И. п. При $n=2$ цепные И. п. часто наз. преобразованиями Фурье.

Кратные (многомерные) И. п.— преобразования вида (1), где t, $x\in R^n$, C — некоторая область n-мерного комплексного евклидова пространства.

И. п. обобщенных функций могут быть построены следующими основными способами:

1) Строится пространство основных функций U, содержащее ядро $K(x, t)$ рассматриваемого И. п. T. Преобразование Tf для любой обобщенной функции $f(t)\in U'$ определяется как значение функционала f на основной функции $K(x, t)$ формулой

$$T[f(t)](x)=\langle f,\ K(x,\ t)\rangle.$$

2) Строится пространство основных функций U, на к-ром определено классическое И. п. T, отображающее U на нек-рое пространство основных функций V. И. п. $T'f$ обобщенной функции $f\in V'$ вводится равенством

$$\langle T'f,\ \varphi\rangle=\langle f,\ T\varphi\rangle,\ \varphi\in U.$$

3) Рассматриваемое И. п. выражается через другое И. п., к-рое определено для обобщенных функций.

См. также ст. *Ватсона преобразование*, *Гаусса преобразование*, *Гегенбауэра преобразование*, *Конторовича—Лебедева преобразование*, *Мейера преобразование*, *Мелера — Фока преобразование*, *Меллина преобразование*, *Свертки преобразование*, *Стилтьеса преобразование*, *Уиттекера преобразование*, *Фурье преобразование*, *Харди преобразование*, *Эйлера преобразование*, *Эрмита преобразование*, *Якоби преобразование*.

Лит.: [1] Диткин В. А., Прудников А. П., в сб.: «Итоги науки. Математический анализ. 1966», М., 1967, с. 7—82; [2] Брычков Ю. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования обобщенных функций, М., 1977; [3] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976. *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.*

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интеграла. И. у. делятся на два основных класса: линейные И. у. и нелинейные И. у.

Линейные И. у. имеют вид

$$A(x)\varphi(x)+\int_D K(x,\ s)\varphi(s)\,ds=f(x),\quad x\in D,\qquad(1)$$

где A, K, f — заданные функции, из которых A наз. коэффициентом, K — ядром, f — свободным членом (или правой частью) И. у., D — ограниченная или неограниченная область евклидова пространства одного или многих измерений, x, s — точки этого пространства, ds — элемент объема, φ — искомая функция. Требуется определить φ так, чтобы уравнение (1) удовлетворялось для всех (или почти всех, если интеграл рассматривается в смысле Лебега) x из D. Если в (1) A, K — матрицы, f, φ — вектор-функции, тогда (1) наз. системой линейных И. у. Если $f=0$, то И. у. наз. однородным, в противном случае — неоднородным.

В зависимости от коэффициента A различают три типа линейных И. у. Если $A(x)=0$ для всех $x\in D$, то (1) наз. уравнением 1-го рода; если $A(x)\neq 0$ для всех $x\in D$ — уравнением 2-го рода; если $A(x)$ обращается в нуль на некотором подмножестве области D — уравнением 3-го рода.

В дальнейшем, для простоты изложения, рассматриваются И. у. в одномерном случае, когда D — конечный отрезок $[a, b]$. В этом случае линейные И. у. 1-го и 2-го рода можно представить соответственно в виде:

$$\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\,ds=f(x),\quad x\in[a,\ b],\qquad(2)$$

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\,ds=f(x),\quad x\in[a,\ b];\qquad(3)$$

постоянное число λ наз. параметром И. у. При исследовании задач математич. физики особенно часто встречаются уравнения 2-го рода. Если ядро K фредгольмово, т. е. интегральный оператор в уравнениях (2), (3) вполне непрерывен, то И. у. (2), (3) наз. уравнениями Фредгольма 1-го и 2-го рода соответственно. Важным примером уравнения Фредгольма является уравнение, в к-ром ядро K удовлетворяет условию

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 \, dx \, ds < \infty, \qquad (4)$$

а правая часть f и искомая функция φ — интегрируемые с квадратом функции.

Уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) \, ds = 0, \quad x \in [a, b], \qquad (5)$$

наз. однородным И. у., соответствующим неоднородному И. у. (3). Аналогично определяется однородное И. у., соответствующее уравнению (2). Однородное И. у. всегда имеет решение $\varphi = 0$, к-рое наз. нулевым (или тривиальным) решением. Значение параметра λ, при к-ром И. у. (5) имеет ненулевое решение φ, наз. характеристическим (или фундаментальным) значением (числом) ядра K или И. у. (5), а ненулевое решение φ — собственной (или фундаментальной) функцией ядра K или И. у. (5), принадлежащей (или соответствующей) данному характеристич. значению λ. Если λ не есть характеристич. число, тогда его наз. правильным (или регулярным) значением (числом).

Комплексное ядро K наз. эрмитовым, если

$$\overline{K(x, s)} = K(s, x), \qquad (6)$$

где черта означает переход к комплексно сопряженному значению. В случае вещественного ядра равенство (6) принимает вид $K(x, s) = K(s, x)$. Такое ядро наз. симметричным.

Фредгольмово ядро может не иметь характеристич. числа (напр., в случае ядра Вольтерра, см. ниже). Если ядро симметрично и не равно нулю почти всюду, тогда оно имеет, по крайней мере, одно характеристич. число и все характеристич. числа вещественны.

Если ядро K обращается в нуль при $s > x$ (так наз. ядро Вольтерра), то уравнения (2) и (3) принимают вид:

$$\int_a^x K(x, s) \varphi(s) \, ds = f(x), \quad a \leqslant s \leqslant x \leqslant b, \qquad (7)$$

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) \varphi(s) \, ds = f(x), \; a \leqslant s \leqslant x \leqslant b. \qquad (8)$$

Эти уравнения наз. *Вольтерра уравнениями* 1-го и 2-го рода соответственно.

Частные примеры И. у. начали появляться в 1-й пол. 19 в. И. у. стали объектом особого внимания математиков после того, как удалось свести решение *Дирихле задачи* для уравнения Лапласа к исследованию линейного И. у. 2-го рода. Построение общей теории линейных И. у. было начато в конце 19 в. Основоположниками этой теории считаются В. Вольтерра (V. Volterra, 1896), Э. Фредгольм (E. Fredholm, 1903 [5]), Д. Гильберт (D. Hilbert, 1912 [6]) и Э. Шмидт (E. Schmidt, 1907 [7]). Еще до исследований этих ученых для построения решения И. у. был предложен метод последовательных приближений. Этот метод применялся сначала для решения нелинейных И. у. типа Вольтерра (по современной терминологии) в связи с исследованиями обыкновенных дифференциальных уравнений в работах Ж. Лиувилля (J. Liouville, 1838), Л. Фукса (L. Fuchs, 1870), Дж. Пеано (G. Peano, 1888) и др., а

К. Нейманом (C. Neumann, 1877) — для построения решения линейного И. у. 2-го рода. Общую форму методу последовательных приближений придал Э. Пикар (E. Picard, 1893).

При изучении уравнения колеблющейся мембраны А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1896) пришел к идее введения переменного численного параметра λ в уравнении (3). Тогда же им была высказана гипотеза, что (аналогично случаю уравнения колеблющейся мембраны) решение И. у. (3) является мероморфной функцией от λ. Эту гипотезу доказал Э. Фредгольм (1900—03). Работам Э. Фредгольма предшествовали исследования В. Вольтерра (1896—97), к-рый изучил И. у. вида (7), (8). Он доказал, что если ядро и правая часть уравнения непрерывны, то (8) имеет при любом конечном значении λ одно и только одно непрерывное решение, к-рое можно построить по методу последовательных приближений. Уравнение (3) изучалось Э. Фредгольмом в предположении, что его ядро, а также правая часть и искомое решение — непрерывные функции соответственно на квадрате $[a, b]\times[a, b]$ и на сегменте $[a, b]$. Следуя В. Вольтерра, Э. Фредгольм заменил интеграл в (3) интегральной суммой и рассмотрел интегральное уравнение (3) как предельный случай конечной системы линейных алгебраич. уравнений (см. *Фредгольма уравнение*). С помощью формального перехода к пределу Э. Фредгольм получил формулу, дающую решение уравнения (3); доказал, что построенная формула является решением уравнения (3) за исключением конечного или счетного множества значений параметра λ, и доказал теоремы об условиях разрешимости уравнения (3). Построенную теорию уравнения (3) Э. Фредгольм распространил на случай системы И. у., а также на случай ядра со слабой особенностью (см. *Интегральный оператор*). Решение системы приводится к решению одного уравнения, ядро к-рого имеет линии разрыва, параллельные осям координат.

Д. Гильберт показал (1904), что теоремы Фредгольма можно доказать путем строгого обоснования процесса предельного перехода, и построил общую теорию линейных И. у. на базе теории линейных и билинейных форм с бесконечным числом переменных. Э. Шмидт [7] придал более простую и несколько более общую форму исследованиям Д. Гильберта. Он построил теорию линейных И. у. с действительным симметричным ядром независимо от теории Фредгольма, представив ядро в виде суммы вырожденного и «малого» ядра. Значительное ослабление ограничений, налагаемых в теории И. у. 2-го рода вещественным симметричным ядром на заданные и искомые элементы уравнения, было достигнуто Т. Карлеманом (T. Carleman). Им же был распространен (см. [8]) метод Фредгольма на случай, когда ядро И. у. (3) удовлетворяет условию (4). В работах Ф. Рисса (Riesz, 1918) и Ю. Шаудера (J. Schauder, 1930) теоремы Фредгольма были обобщены для нек-рого класса линейных операторных уравнений в банаховых пространствах.

Основным методом исследования И. у. 1-го рода является так наз. *регуляризации метод*.

И. у. 3-го рода явились предметом специальных исследований Г. Бейтмана (H. Bateman, 1907), Э. Пикара (E. Picard, 1910), Дж. Фубини (G. Fubini, 1912), Ш. Платрие (Ch. Platrier, 1912).

Если линейное И. у. не является уравнением Фредгольма, то его наз. с и н г у л я р н ы м (или о с о б ы м) у р а в н е н и е м. Общая теория Гильберта квадратичных форм с бесконечным числом переменных дает возможность и в этом случае получить ряд важных результатов. Для нек-рых конкретных классов сингулярных И. у. разработаны специальные способы их решения, учитывающие характерные свойства этих уравнений. Так, напр., для сингулярных И. у. и И. у.

типа свертки, вообще говоря, неверна теорема Фредгольма о том, что два транспонированных однородных И. у. имеют одинаковое число линейно независимых решений.

Параллельно с линейными И. у. изучались и нелинейные И. у., когда неизвестная функция может входить в уравнение в степени n, $n>1$, как это, напр., имеет место в уравнении

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi^n(s)\,ds=f(x),\ x\in[a,\ b].$$

Она может входить и более общим образом, как, напр., в уравнении

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x,\ s,\ \varphi(s))\,ds$$

(см. *Гаммерштейна уравнение*, *Нелинейное интегральное уравнение*).

Лит.: [1] Привалов И. И., Интегральные уравнения, 2 изд., М.— Л., 1937; [2] Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959; [3] Трикоми Ф., Интегральные уравнения, пер. с англ., М., 1960; [4] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, ч. 1, 6 изд., М., 1974; [5] Fredholm I., «Acta Math.», 1903, v. 27, p. 365—390; [6] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Lpz.—B., 1912 (2 Aufl., Lpz., 1924); [7] Schmidt E., «Math. Ann.», 1907, Bd 63, S. 433—476; Bd 64, S. 161—74; 1908, Bd 65, S. 370—99; [8] Carleman T., «Math. Z.», 1921, Bd 9, S. 196—217. *Б. В. Хведелидзе.*

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ; численные методы решения, — методы нахождения приближенных решений И. у.

Требуется найти решение $\varphi(x)$ одномерного уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds+f(x),\qquad(1)$$

где $f(x)$ непрерывна на $[a,\ b]$, λ — числовой параметр, $K(x,\ s)$ непрерывна на $a\leqslant x,\ s\leqslant b$.

Пусть λ не является собственным значением ядра $K(x,\ s)$. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение $\varphi(x)$, непрерывное на $[a,\ b]$. При этих условиях можно указать следующие способы получения приближенного решения.

Первый способ. Пусть a и b — конечные числа. Интеграл в (1) заменяют интегральной суммой по сетке $\{s_j\}$, $j=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n$, а переменной x придают значения $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$. Получается система линейных алгебраич. уравнений относительно φ_j

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}\varphi_j=f_i,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\qquad(2)$$

где $A_{ij}=1-\lambda C_j K(x_i,\ x_j)$, C_j — коэффициенты квадратурной формулы, по к-рой интеграл в (1) заменен интегральной суммой. Система (2) при достаточно больших n имеет единственное решение $\{\bar{\varphi}_j\}$. В качестве приближенного решения уравнения (1) можно брать функцию

$$\tilde{\varphi}_n(x)=f(x)+\lambda\sum_{j=1}^n C_j K(x,\ x_j),$$

так как при $n\longrightarrow\infty$ и $\Delta_n=\max\limits_i\{|x_{i+1}-x_i|\}\longrightarrow 0$ последовательность функций $\tilde{\varphi}_n(x)$ равномерно сходится на $[a,\ b]$ к искомому решению уравнения (1). См. [1], [2], [3], [4].

При замене интеграла по квадратурной формуле надо иметь в виду, что чем более точная квадратурная формула используется, тем большую гладкость ядра и решения (а следовательно, и $f(x)$) надо требовать.

В случае, когда промежуток интегрирования $(a,\ b)$ бесконечный, его заменяют конечным промежутком $(a_1,\ b_1)$, пользуясь априорной информацией о поведении искомого решения $\bar{\varphi}(x)$ при больших значениях $|x|$. Полученное уравнение решают приближенно описанным способом; либо заменой переменной интегрирования сводят промежуток интегрирования к конечному;

либо применяют квадратурные формулы для бесконечного промежутка.

Второй способ. В уравнении (1) ядро $K(x, s)$ заменяют аппроксимирующим его вырожденным ядром

$$K_1(x, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(s),$$

в к-ром функции $\{a_i(x)\}$ линейно независимы. Получающееся при этом уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(s)\, \varphi(s)\, ds + f(x) \qquad (3)$$

имеет решение $\widehat{\varphi}(x)$ вида

$$\widehat{\varphi}(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i a_i(x) + f(x), \qquad (4)$$

в к-ром постоянные

$$C_i = \int_a^b \widehat{\varphi}(s)\, b_i(s)\, ds$$

подлежат определению. Подставляя функцию $\widehat{\varphi}(x)$ в уравнение (3) и сравнивая коэффициенты при функциях $a_i(x)$, получают систему линейных алгебраич. уравнений для C_i вида

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} C_j = \beta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$\alpha_{ij} = \int_a^b a_j(s)\, b_i(s)\, ds, \quad \beta_i = \int_a^b f(s)\, b_i(s)\, ds.$$

Определив C_i из этой системы и подставив их в (4), получают функцию $\widehat{\varphi}(x)$, к-рая и принимается за приближенное решение уравнения (1), так как при достаточно хорошей аппроксимации ядра $K(x, s)$ вырожденным ядром решение уравнения (3) произвольно мало отличается от искомого решения $\widehat{\varphi}(x)$ на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, а если (a, b) — конечный промежуток, то — и на отрезке $[a, b]$ (см. [1], [4]).

Третий способ. В качестве приближенных решений берутся функции $\varphi_n(x)$, получаемые методом итераций по формулам

$$\varphi_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi_n(s)\, ds + f(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$\varphi_0(x) = f(x)$, так как последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно сходится к искомому решению при $n \to \infty$, если $|\lambda| < 1/M(b-a)$, $M = \sup\limits_{x,\, s} |K(x, s)|$. Сходимость $\{\varphi_n(x)\}$ к точному решению имеет место и для ядер с интегрируемой особенностью (см. [1]). Оценки погрешностей этих методов содержатся в [1] — [7]. В [8] рассматривается вопрос о минимальном числе арифметич. операций, необходимых для того, чтобы получить приближенное значение интеграла с заданной точностью. Решение этой задачи эквивалентно отысканию величины минимальной погрешности приближенного решения задачи при заданном числе арифметич. операций.

Для решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода требуется применять специальные методы, так как эти задачи являются некорректно поставленными. Если в уравнении (1) λ совпадает с одним из собственных значений ядра $K(x, s)$, то в этих условиях задача нахождения решения уравнения (1) является некорректно поставленной и требует применения специальных методов (см. *Некорректные задачи*).

Нелинейные И. у. 2-го рода приближенно решают обычно методом итераций (см. [3]).

Для получения приближенных решений как линейных, так и нелинейных И. у. применяют также *Галеркина метод*.

Аналогичные методы можно применять и для получения приближенных решений многомерных интеграль-

ных уравнений Фредгольма 2-го рода. Однако численная реализация их сложнее. О кубатурных формулах приближенного вычисления кратных интегралов и оценках их погрешностей см. [5] — [10]. В [10] рассмотрен метод Монте-Карло приближенного вычисления кратных интегралов.

Лит.: [1] Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 3 изд., М., 1965; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, 1966; [4] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.— Л., 1962; [5] Мысовских И. П., «Сиб. матем. ж.», 1964, т. 5, № 3, с. 721—23; [6] его же, «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1972, т. 12, № 2; [7] его же, там же, 1975, т. 15, № 6; [8] Емельянов К. В., Ильин А. М., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1967, т. 7, № 4, с. 905—10; [9] Соболев С. Л., Введение в теорию кубатурных формул, М., 1974; [10] Соболь И. М., Многомерные кубатурные формулы и функции Хаара, М., 1969. *В. Я. Арсенин.*

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С СИММЕТРИЧНЫМ ЯДРОМ — интегральное уравнение (и. у.) с симметричным действительным ядром:

$$K(x, s) = K(s, x).$$

Теория линейных и. у. с симметричным и действительным ядром была впервые построена Д. Гильбертом (D. Hilbert, 1904) привлечением теории симметричных квадратичных форм с помощью перехода от конечного числа переменных к бесконечному. Затем Э. Шмидт (E. Schmidt, 1907) предложил более элементарный метод обоснования результатов Д. Гильберта. Поэтому теорию И. у. с с. я. часто наз. также теорией Гильберта—Шмидта. Значительное ослабление ограничений, налагаемых в этой теории на заданные и искомые элементы уравнения, было достигнуто Т. Карлеманом (T. Carleman) (см. ниже).

Пусть имеется и. у. 2-го рода с действительным симметричным ядром:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x), \quad x \in [a, b]. \qquad (1)$$

При построении теории И. у. с с. я. достаточно предполагать, что симметричное ядро K измеримо на квадрате $[a, b] \times [a, b]$

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2\, dx\, ds < \infty, \qquad (2)$$

а свободный член f и искомая функция φ — интегрируемые с квадратом функции на отрезке $[a, b]$ (интегралы понимаются в смысле Лебега).

Разработка теории И. у. с с. я. начинается с изучения ряда общих свойств собственных чисел и собственных функций однородного симметричного и. у.:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0, \quad x \in [a, b]. \qquad (3)$$

А именно, доказывается, что: уравнение (3) обладает по крайней мере одним собственным числом (когда K почти всюду не равно нулю); собственные функции, принадлежащие различным собственным числам,— ортогональны; собственные числа — действительны; ввиду действительности ядра без ограничения общности можно предполагать, что собственные функции действительны; на любом конечном сегменте значений параметра λ может находиться лишь конечное множество собственных чисел.

Множество всех собственных чисел уравнения (3) наз. спектром этого уравнения. Спектр — непустое конечное или счетное множество чисел $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \ldots, \mu_n, \ldots\}$; каждому числу μ_n спектра соответствует конечное множество линейно независимых собственных функций. Собственные числа и собственные функции можно расположить в виде последовательностей:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \ldots \\ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ldots \end{array}\right\} \qquad (4)$$

так, что абсолютные величины собственных чисел не убывают $|\lambda_k| \leqslant |\lambda_{k+1}|$; каждое собственное число повторяется столько раз, сколько собственных функций ему соответствует. Поэтому каждому числу λ_k в (4) соответствует лишь одна собственная функция. Можно считать, что система функций $\{\varphi_k\}$ ортонормирована. Последовательности (4) наз. системой собственных чисел и собственных функций симметричного ядра K или уравнения (3). Нахождение этой системы равносильно полному решению однородного симметричного и. у. (3).

Ряд Фурье ядра $K(x, s)$, рассматриваемого как функция от s относительно ортонормированной системы $\{\varphi_k(s)\}$, будет

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(s)}{\lambda_k}. \tag{5}$$

Так составленный ряд из системы собственных чисел и собственных функций симметричного ядра K наз. билинейным рядом ядра K или билинейным разложением ядра K по его собственным функциям. Этот ряд сходится в среднем к ядру K, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \int_a^b \left[K(x, s) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-2}\, \varphi_k(x)\, \varphi_k(s) \right] dx\, ds = 0.$$

Если же билинейный ряд (5) сходится равномерно, то

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\,\varphi_k(s)}{\lambda_k}.$$

В частности, это последнее равенство всегда имеет место, если ядро обладает лишь конечным множеством собственных чисел. В этом случае ядро K является вырожденным. Имеет место и обратное утверждение: вырожденное симметричное ядро имеет конечное множество собственных чисел (и, следовательно, конечное множество собственных функций). Билинейный ряд непрерывного на квадрате $[a, b]\times[a, b]$ ядра K с положительными собственными числами сходится равномерно.

Зная систему (4) собственных чисел и собственных функций, можно построить решение неоднородного уравнения (1). Имеют место следующие теоремы.

Если λ не является собственным числом ядра K, то симметричное и. у. (1) имеет единственное решение φ, выражаемое формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x), \tag{6}$$

где λ_k — собственные числа, f_k — коэффициенты Фурье функции f относительно ортонормированной системы $\{\varphi_m\}$ собственных функций ядра, т. е.

$$f_k = \int_a^b f(s)\, \varphi_k(s)\, ds, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Пусть $\lambda = \lambda_1$ — собственное число ядра K; тогда симметричное и. у. (1) разрешимо лишь в случае, если удовлетворяются условия

$$f_k = \int_a^b f(s)\, \varphi_k(s)\, ds = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, q,$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ — собственные функции, принадлежащие собственному числу λ_1. При соблюдении этих условий все решения уравнения (1) выражаются формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{q} c_k \varphi_k(x), \tag{7}$$

где $c_1, \ldots, c_q$ — произвольные постоянные.

Если ядро K имеет бесконечное множество собственных чисел и, следовательно, в правых частях формул (6),

(7) стоят бесконечные ряды, то они сходятся в среднем. Если от ядра K дополнительно потребовать, что оно удовлетворяет условию

$$\int_a^b |K(x, s)|^2 ds \leqslant \text{const}, \quad x \in [a, b],$$

то упомянутые ряды будут сходиться абсолютно и равномерно.

Формулы (6) и (7) наз. формулами Шмидта. Большая часть теории И. у. с с. я. легко распространяется и на комплекснозначные функции. В этом случае аналогом действительного симметричного ядра является эрмитово ядро: $\overline{K(x, s)} = K(s, x)$.

Если известна система (4) собственных чисел и собственных функций симметричного ядра K, то можно легко исследовать симметричное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$\int_a^b K(x, s)\, \varphi(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b]. \tag{8}$$

Пусть, как и выше, симметричное ядро K уравнения (8) — интегрируемая с квадратом функция на квадрате $[a, b] \times [a, b]$, а правая часть f и искомое решение φ — такие же функции на сегменте $[a, b]$. Симметричное ядро наз. полным, если система его собственных функций $\{\varphi_m\}$ полна (замкнута).

Теорема Никара. Пусть $K(x, s)$ — полное ядро. Тогда для разрешимости уравнения (8) необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |f_k|^2,$$

где f_k — коэффициенты Фурье функции f, сходился. При выполнении этого условия решение (единственное) представимо в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k \varphi_k(x),$$

причем последний ряд сходится в среднем.

Т. Карлеман [5] построит теорию при менее ограничительных условиях на симметричное ядро K, чем у Д. Гильберта и Э. Шмидта. Эти условия следующие: 1) $\int_a^b K^2(x, s) ds$ существует в смысле Лебега и

$$\lim_{y \to x} \int_a^b [K(y, s) - K(x, s)]^2 ds = 0$$

для любого $x \neq x_i$, где $\{x_i\}$ — некоторая последовательность точек, к-рая может иметь конечное число предельных точек; 2) может существовать конечное множество точек $s_1, \ldots, s_n \in \{x_i\}$, в окрестности к-рых функция

$$\sigma^2(x) = \int_a^b K^2(x, s)\, ds$$

не интегрируема, но она интегрируема на множестве Δ_ε, оставшемся после удаления из сегмента $[a, b]$ интервалов $(s_i - \varepsilon, s_i + \varepsilon)$, $i = 1, \ldots, n$, где ε — произвольное достаточно малое положительное число.

Пусть $K_\varepsilon(x, s)$ — функция, к-рая равна нулю на множестве точек $\{(x, s)\}$ таких, что $|x - s_i| \leqslant \varepsilon$, $|s - s_i| \leqslant \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$, а вне этого множества в квадрате $[a, b] \times [a, b]$ совпадает с ядром K уравнения (1). Идея метода Карлемана заключается в следующем: взамен уравнения (1) рассматривается линейное интегральное уравнение второго рода с ядром K_ε. Изучив спектр и решения этого уравнения, затем с помощью перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ исследуется спектр и решения уравнения (1).

Лит.: [1] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Lpz.— B., 1912 (2 Aufl., 1924); [2] Schmidt E., «Math. Ann.», 1907, Bd 63, S. 433—76; Bd 64, S. 161—74; 1908, Bd 65, S. 370—99; [3] Вирдага Г., Интегральные уравнения, пер. с нем., М.— Л., 1933;

[4] Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959; [5] Carleman T., Sur les équations intégrales singulières a noyau réel et symétrique, Uppsala, 1923.

Б. В. Хведелидзе.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА СВЕРТКИ — интегральное уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интегрального преобразования свертки (см. *Интегральный оператор*). Особенностью И. у. т. с. является то, что ядра таких уравнений зависят от разности аргументов. Простейший пример — уравнение

$$\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty} k(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t), \quad -\infty<t<\infty, \tag{1}$$

где k и f — заданные функции, а φ — искомая функция. Пусть k и $f\in L_1$ $(-\infty, \infty)$ и решение ищется в том же классе. Для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнение условия

$$1-K(\lambda)\neq 0, \quad -\infty<\lambda<\infty, \tag{2}$$

где K — преобразование Фурье функции k. При выполнении условия (2) уравнение (1) в классе L_1 имеет единственное решение, представимое формулой

$$\varphi(x)=f(x)-\int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)\,f(t)\,dt, \tag{3}$$

где $k\in L_1(-\infty, \infty)$ однозначно определяется с помощью своего преобразования Фурье

$$K_1(\lambda)=1-[1-K(\lambda)]^{-1}.$$

Уравнения типа свертки на полупрямой (*Винера—Хопфа уравнение*)

$$\varphi(t)-\int_{0}^{\infty} k(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t), \quad 0\leqslant t<\infty, \tag{4}$$

возникает при исследовании различных вопросов как теоретического, так и прикладного характера (см. [1], [4]).

Пусть правая часть f и искомая функция $\varphi\in L_p(0, \infty)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, а ядро $k\in L_1(-\infty, \infty)$ и

$$\alpha(\lambda)=1-K(\lambda)\neq 0, \quad -\infty<\lambda<\infty. \tag{5}$$

Функцию $\alpha(\lambda)$ наз. символом уравнения (4). Индексом уравнения (4) называется число

$$\varkappa=\operatorname{ind}\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda \arg\alpha(\lambda). \tag{6}$$

Если $\varkappa=0$, функции K_+, K_-, определенные из равенств:

$$1+K_{\pm}(\lambda)=$$

$$=\exp\left[-\frac{1}{2}\ln\alpha(\lambda)\mp\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\alpha(\tau)}{\tau-\lambda}\,d\tau\right], \tag{7}$$

являются преобразованиями Фурье, соответственно, функций $k_+, k_-\in L_1(-\infty, \infty)$ таких, что $k_+(t)=k_-(-t)=0$ при $t<0$. При указанных выше условиях уравнение (4) имеет единственное решение, которое представляется формулой

$$\varphi(t)=f(t)+\int_{0}^{\infty} r(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{8}$$

где

$$r(t, \tau)=k_+(t-\tau)+k_-(t-\tau)+\int_0^\infty k_+(t-s)\,k_-(s-\tau)\,ds.$$

Если $\varkappa<0$, то все решения уравнения (4) даются формулой

$$\varphi(t)=f(t)+\sum_{k=1}^{|\varkappa|} c_k t^{k-1}e^{-t}+$$

$$+\int_0^\infty r_0(t, \tau)\left[f(\tau)+\sum_{k=1}^{|\varkappa|} c_k\tau^{k-1}e^{-\tau}\right]d\tau, \tag{9}$$

где c_k — произвольные постоянные,

$$r_0(t, \tau)=k_+^{(0)}(t-\tau)+k_-^{(1)}(t-\tau)+$$

$$+\int_0^\infty k_+^{(0)}(t-s)\,k_-^{(1)}(s-\tau)\,ds, \tag{10}$$

а функции $k_+^{(0)}$, $k_-^{(1)} \in L_1(-\infty, \infty)$ однозначно определяются с помощью своих преобразований Фурье:

$$1 + K_-^{(1)}(\lambda) = \left[1 + K_-^{(0)}(\lambda)\right](\lambda + i)^{\varkappa}(\lambda - i)^{-\varkappa},$$

$$1 + K_\pm^{(0)}(\lambda) = \exp\left[-\frac{1}{2}\ln b(\lambda) \mp \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln b(\tau)}{\tau - \lambda}\, d\tau\right], \tag{11}$$

$$b(\lambda) = [1 - K(\lambda)]\left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i}\right)^{\varkappa}.$$

Однородное уравнение, соответствующее (4), имеет при $\varkappa < 0$ ровно $|\varkappa|$ линейно независимых решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_{|\varkappa|}$, являющихся абсолютно непрерывными функциями на любом конечном интервале, причем эти решения можно подобрать так, что $\varphi_{k+1}(t) = \varphi_k'(t)$, $\varphi_k(0) = 0$ при $k = 1, \ldots, |\varkappa| - 1$ и $\varphi_{|\varkappa|}(0) \neq 0$.

Если $\varkappa > 0$, то уравнение разрешимо лишь при соблюдении условий:

$$\int_0^{\infty} f(t)\, \psi_j(t)\, dt = 0, \quad j = 1, \ldots, \varkappa, \tag{12}$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_\varkappa$ — система линейно независимых решений транспонированного к (4) однородного уравнения

$$\psi(t) - \int_0^{\infty} k(\tau - t)\, \psi(\tau)\, d\tau = 0. \tag{13}$$

При соблюдении этих условий решение (единственное) дается формулой

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^{\infty} r_1(t, \tau)\, f(\tau)\, d\tau,$$

где

$$r_1(t, \tau) = k_+^{(1)}(t - \tau) + k_-^{(0)}(t - \tau) + \int_0^{\infty} k_+^{(1)}(t - s)\, k_-^{(0)'}(s - \tau)\, ds,$$

а преобразование Фурье $K_-^{(0)}(\lambda)$ и $K_+^{(1)}(\lambda)$ функций $k_-^{(0)}(t)$ и $k_+^{(1)}(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ определяется равенством

$$1 + K_+^{(1)}(\lambda) = \left[1 + K_+^{(0)}(\lambda)\right](\lambda + i)^{\varkappa}(\lambda - i)^{-\varkappa}$$

и равенствами (11). Для уравнения (4) справедливы теоремы Нётера (см. *Сингулярное интегральное уравнение*).

Первые значительные результаты по теории уравнений (4) были получены в [1], где указан эффективный метод (так наз. метод Винера — Хопфа) решения однородного уравнения, соответствующего (4), в предположении, что ядро и искомое решение удовлетворяют условиям: при некоторых $0 < \alpha < a$ и

$$k(t) = O\left(e^{-a|t|}\right), \quad \varphi(t) = O\left(e^{\alpha t}\right).$$

Основным моментом в методе Винера—Хопфа является идея факторизации функции $h(\lambda)$, голоморфной в полосе $|\mathrm{Im}\lambda| < a$, то есть идея о возможности ее представления в виде произведения $h_-(\lambda)h_+(\lambda)$, где h_-, h_+ — некоторые голоморфные функции соответственно в полуплоскостях $\mathrm{Im}\lambda < a$ и $\mathrm{Im}\lambda > -a$, удовлетворяющие нек-рым дополнительным требованиям. Эти результаты были развиты и дополнены (см. [4]).

Разработан метод сведения уравнения (4) к граничной задаче линейного сопряжения. Этим путем уравнение (4) было решено в следующих предположениях: $k \in L_{1,2}(-\infty, \infty)$, $K \in \mathrm{Lip}_\alpha(-\infty, \infty)$, $0 < \alpha < 1$; $K(\lambda) = O(|\lambda|^{-\beta})$, $\beta > 0$, при $|\lambda| \to \infty$ и $1 - K(\lambda) \neq 0$, $-\infty < \lambda < \infty$.

Кроме того, была выяснена роль числа $\mathrm{ind}[1 - K(\lambda)]$ в решении уравнения (4). В предшествующих работах аналогичную роль играло число нулей аналитич. функции $1 - K(\lambda)$ в некоторой полосе (см. [3]).

Условие (5) является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы в случае уравнения (4) были справедливы теоремы Нётера. Приведенные решения уравнения (4) упрощаются в ряде практически важных частных случаев. Установлена асимптотика решения для специальных правых частей (см. [4]).

Уравнение (4) изучено и в случае, когда $k \notin L_1(-\infty, \infty)$ и преобразование Фурье $K(\lambda)$ ядра $k(t)$ имеет разрывы 1-го рода (см. [5]) или же является почти периодической функцией (см. [2]). В этих случаях условие (5) оказывается недостаточным для того, чтобы были справедливы теоремы Нётера.

Справедливость большинства перечисленных выше результатов установлена также для систем уравнений типа (4), но, в отличие от одного уравнения, системы И. у. т. с. в общем случае не решаются явно в квадратурах (см. [6]).

К И. у. т. с. относятся также парные уравнения (или дуальные уравнения)

$$\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \quad t > 0,$$
$$\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \quad t < 0, \tag{15}$$

и транспонированное к ним так наз. И. у. т. с. с двумя ядрами:

$$\varphi(t) - \int_{0}^{\infty} k_1(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau -$$
$$-\int_{-\infty}^{0} k_2(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), -\infty < t < \infty. \tag{16}$$

Уравнения (15) решены явно в квадратурах в [3], а уравнение (16) — в [10].

И. у. т. с. на конечном промежутке

$$\varphi(t) - \int_{0}^{T} k(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty, \tag{17}$$

где $k \in L_1(-T, T)$, является *Фредгольма уравнением* (см. [7], [9]).

И. у. т. с., символ к-рых обращается в нуль в конечном числе точек и порядки нулей — целые числа, поддаются явному решению в квадратурах (см. [8], [12]).

Лит.: [1] Нобл Б., Применение метода Винера — Хопфа, пер. с англ., М., 1962; [2] Гохберг И. Ц., Фельдман И. А., Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, М., 1971; [3] Рапопорт И. М., «Докл. АН СССР», 1948, т. 59, № 8, с. 1403—06; «Сб. тр. ин-та матем. АН УССР», 1949, № 12, с. 102—17; [4] Крейн М. Г., «Успехи матем. наук», 1958, т. 13, в. 5, с. 3—120; [5] Дудучава Р. В., «Math. Nachr.», 1975, Bd 65, № 1, S. 59—82; [6] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 2, с. 44—118; [7] Ганин М. П., «Изв. ВУЗов. Математика», 1963, № 2, с. 31—43; [8] Гахов Ф. Д., Смагина В. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, № 3, с. 361—90; [9] Симоненко И. Б., «Изв. ВУЗов. Математика», 1959, № 2, с. 213—26; [10] Черский Ю. И., «Уч. зап. Казанск. ун-та», 1953, т. 113, кн. 10, с. 43—56; [11] Wiener N., Hopf E., «Sitz. Akad. Wiss. Berlin», 1931, S. 696—706; [12] Prössdorf S., Einige Klassen singulärer Gleichungen, B., 1974.

Р. В. Дудучава, Б. В. Хведелидзе.

ИНТЕГРАЛЬНОЙ РАЗДЕЛЕННОСТИ УСЛОВИЕ — условие на линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(где $A(t)$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}^+ \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, причем $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(t)\| < +\infty$), состоящее в следующем: система имеет решения $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющие при нек-рых $a > 0$, $d > 0$ неравенствам

$$|x_i(t)| \cdot |x_i(\tau)|^{-1} \geqslant de^{a(t-\tau)} \cdot |x_{i-1}(t)| \cdot |x_{i-1}(\tau)|^{-1}$$

для всех $i = 2, \ldots, n$ и всех $t \geqslant \tau \geqslant 0$.

Множество систем, удовлетворяющих И. р. у., является внутренностью множества точек непрерывности

всех *Ляпунова характеристических показателей* в пространстве систем

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \| A(t) \| < +\infty$$

с метрикой

$$\rho(A(t), B(t)) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \| A(t) - B(t) \|.$$

Лит.: [1] Изобов Н. А., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146.

В. М. Миллионщиков.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ АВТОМОРФИЗМ — то же, что *специальный автоморфизм*, построенный по автоморфизму T пространства с мерой (X, μ) и функции f (заданной на этом пространстве и принимающей положительные целочисленные значения). Термин «И. а.» принят главным образом в иностранной литературе.

Д. В. Аносов.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ КОСИНУС — специальная функция, определяемая для действительного x равенством

$$\mathrm{Chi}\,(x) = C + \ln x + \int_0^x \frac{\mathrm{ch}\,t - 1}{t}\,dt = \mathrm{Ci}\,(ix) + i\,\frac{\pi}{2},$$

где $C = 0{,}5772\ldots$ — *Эйлера постоянная*, $\mathrm{Ci}\,(x)$ — *интегральный косинус*. И. г. к. представляется в виде ряда

$$\mathrm{Chi}\,(x) = C + \ln x + \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^4}{4!4} + \ldots.$$

Иногда используют обозначение $\mathrm{chi}\,(x)$.

Лит. см. при ст. *Интегральный косинус.* *А. Б. Иванов.*

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ СИНУС — специальная функция, определяемая для действительного x равенством

$$\mathrm{Shi}\,(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{sh}\,t}{t}\,dt = i\,\mathrm{Si}\,(ix),$$

где $\mathrm{Si}\,(x)$ — *интегральный синус*. И. г. с. представляется в виде ряда

$$\mathrm{Shi}\,(x) = x + \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} + \ldots.$$

И. г. с. и *интегральный гиперболический косинус* $\mathrm{Chi}\,(x)$ связаны соотношением:

$$\mathrm{Chi}\,(x) + \mathrm{Shi}\,(x) = \mathrm{Li}\,e^x,$$

где Li — *интегральный логарифм*.

Иногда используют обозначение $\mathrm{shi}\,(x)$.

Лит. см. при ст. *Интегральный косинус.* *А. Б. Иванов.*

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ степени k (порядка k) гладкой динамической системы — а) абсолютный И. и.: внешняя *дифференциальная форма* φ степени k, переходящая в себя под действием преобразований, образующих эту систему; б) относительный И. и.: внешняя дифференциальная форма φ степени k, внешний дифференциал к-рой является абсолютным И. и. (имеющим уже степень $k+1$).

Обычно речь идет об И. и. для *потока* $\{S_t\}$, определяемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, где f — гладкое векторное поле, заданное в нек-рой области евклидова пространства (или многообразия); в терминах координат (локальных координат в случае многообразия) эта система имеет вид

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (1)$$

Важный пример И. и.— форма объема $\varphi = \rho(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ [где $\rho(x)$ — положительная локально интегрируемая (часто даже непрерывная или гладкая) функция координат]. При гладкой ρ эта форма является абсолютным И. и. системы (1), если

$$\mathrm{div}\,(\rho f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\rho f_i)}{\partial x_i} = 0.$$

В этом случае поток имеет *инвариантную меру* $\mu(A)=\int_A \varphi$, к-рая в терминах (локальных) координат задается своей плотностью $\rho(x)$ (последнюю, допуская нек-рую вольность речи, тоже часто наз. И. и.).

Гамильтонова система с (обобщенными) импульсами и координатами p_i, q_i, $i=1,\ldots, m$, имеет относительный И. и.

$$\psi=\Sigma p_i dq_i$$

и абсолютный И. и.

$$\omega=\Sigma dp_i\wedge dq_i.$$

Этот факт можно положить в основу определения гамильтоновых систем и использовать при развертывании их теории, ибо многие специфич. особенности последней непосредственно связаны с этими И. и. (см.[4], [5]). Внешние степени ω^k (в том числе и форма объема ω^m) являются абсолютными, а произведения $\psi\wedge\omega^k$ — относительными И. и. любой гамильтоновой системы, поэтому их наз. универсальными И. и. гамильтоновых систем. С точностью до множителя все универсальные И. и. гамильтоновых систем сводятся к указанным (см. [4], [7]).

Если система (1) имеет абсолютный И. и. φ степени k, то для любой k-мерной гладкой цепи c (напр., гладкого k-мерного многообразия)

$$\int_c \varphi = \int_{S_t(c)} \varphi. \qquad (2)$$

Если же система (1) имеет относительный И. и., то (2), вообще говоря, имеет место лишь тогда, когда цепь является границей цепи размерности $k+1$. Иногда относительный И. и. определяют несколько более сильным требованием, чтобы (2) выполнялось для всех циклов c. Первоначально И. и. были определены А. Пуанкаре (см. [1], [2]) именно как интегралы указанного выше типа, остающиеся инвариантными, когда область интегрирования движется под действием потока.

Все сказанное легко распространяется на неавтономные системы $\dot{x}=f(x, t)$. Более существенной является модификация понятия И. и., предложенная Э. Картаном (É. Cartan, [3]) и связанная с переходом (даже в автономном случае) к расширенному фазовому пространству (к обычным фазовым переменным добавляется время), в к-ром *интегральные кривые* рассматриваемой системы дифференциальных уравнений образуют нек-рое семейство линий (конгруэнцию). Э. Картан требует, чтобы интеграл формы φ по цепи c (или по циклу, если речь идет об относительном И. и.) оставался неизменным, когда каждую точку $(x, t)\in c$ сдвигают вдоль интегральной кривой, проходящей через эту точку; при этом различные точки можно сдвигать по-разному, лишь бы это было гладкой деформацией цикла c. (Напр., в новом смысле относительным И. и. гамильтоновой системы является не ψ, а весьма полезный интегральный инвариант Пуанкаре — Картана $\Sigma p_i dq_i - H dt$, где H — гамильтониан, см. [3]—[5].) Родственное определение дано в [6].

Лит.: [1] Poincaré H., «Acta math.», 1890, t. 13, p. 1—270; [2] Пуанкаре А., Избр. тр., пер. с франц., т. 2, М., 1972; [3] Картан Э., Интегральные инварианты, пер. с франц., М.— Л., 1940; [4] Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, М., 1960; [5] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [6] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973; [7] Hwa-Chung Lee, «Proc. Roy. Soc. Edinbourgh», ser. A, 1947, v. 62, p. 237—46.

Д. В. Аносов.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ КОСИНУС — специальная функция, определяемая для действительного $x>0$ равенством:

$$\mathrm{Ci}\,(x)=-\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = C+\ln x-\int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,dt,$$

где $C=0{,}5772\ldots$ — *Эйлера постоянная*. График И. к. см. на рис. Некоторые интегралы, содержащие $\mathrm{Ci}\,(x)$:

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,\mathrm{Ci}\,(qt)\,dt=-\frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{p^2}{q^2}\right),$$

$$\int_0^\infty \cos t\,\mathrm{Ci}\,(t)\,dt=-\frac{\pi}{4},\quad \int_0^\infty \mathrm{Ci}^2\,(t)\,dt=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Ci}\,(t)\,\mathrm{si}\,(t)\,dt=-\ln 2,$$

где $\mathrm{si}\,(t)$ — интегральный синус.

При малых x

$$\mathrm{Ci}\,(x)\approx C+\ln x.$$

Асимптотич. представление при больших x:

$$\mathrm{Ci}\,(x)=\frac{\sin x}{x}\,P\,(x)-\frac{\cos x}{x}\,Q\,(x),$$

$$P\,(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(2k)!}{x^{2k}},\quad Q\,(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)!}{x^{2k+1}}.$$

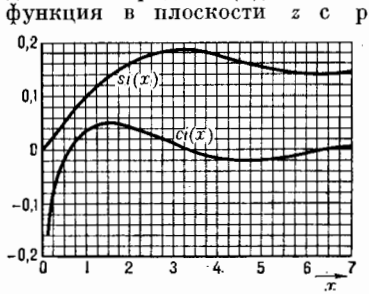
И. к. представляется в виде ряда

$$\mathrm{Ci}\,(x)=C+\ln x-\frac{x^2}{2!2}+\frac{x^4}{4!4}-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!\,2k}+\ldots. \qquad (*)$$

Как функция комплексного переменного z, $\mathrm{Ci}\,(z)$, определяемая рядом (*),— однозначная аналитическая функция в плоскости z с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси ($-\pi<\arg z<\pi$); значение $\ln z$ выбирается так, чтобы $-\pi<\mathrm{Im}\ln z<\pi$. Поведение $\mathrm{Ci}\,(z)$ вблизи разреза описывается предельными соотношениями:

$$\lim_{\eta\to 0}\mathrm{Ci}\,(x\pm i\eta)=\mathrm{Ci}\,(|z|)\pm\pi i,\quad x<0,\ \eta>0.$$



Графики функций $y=\mathrm{ci}\,(x)$ и $y=\mathrm{si}\,(x)$.

И. к. связан с *интегральной показательной функцией* $\mathrm{Ei}\,(z)$ соотношением

$$\mathrm{Ci}\,(z)=\frac{1}{2}\,[\mathrm{Ei}\,(iz)+\mathrm{Ei}\,(-iz)].$$

Иногда используется обозначение $\mathrm{ci}\,(x)\equiv\mathrm{Ci}\,(x)$.

См. также sici-*спираль*.

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968; [3] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [4] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М., 1963.

А. Б. Иванов.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ЛОГАРИФМ — специальная функция, определяемая для действительного x, $x\neq 1$, равенством

$$\mathrm{li}\,(x)=\int_0^x\frac{dt}{\ln t};$$

при $x>1$ подынтегральная функция имеет в точке $t=1$ бесконечный разрыв и И. л. понимается в смысле главного значения:

$$\mathrm{li}\,(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dt}{\ln t}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dt}{\ln t}\right\}.$$

График И. л. см. на рис. при ст. *Интегральная показательная функция*. При малых x:

$$\mathrm{li}\,(x)\approx\frac{x}{\ln(1/x)}$$

И. л. представляется в виде ряда

$$\mathrm{li}\,(x) = C + \ln|\ln x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln(x))^k}{k!k},$$

$$k > 0, \quad x \neq 1,$$

где $C = 0{,}5772\ldots$ — *Эйлера постоянная*.

Как функция комплексного переменного z:

$$\mathrm{li}\,(z) = C + \ln(-\ln z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln z)^k}{k!k}$$

есть однозначная аналитич. функция в плоскости комплексного переменного z с разрезами вдоль действительной оси от $-\infty$ до 0 и от 1 до $+\infty$ (мнимые части логарифмов берутся при этом в пределах от $-\pi$ до π). Поведение $\mathrm{li}(z)$ вблизи разреза $(1, +\infty)$ описывается соотношениями:

$$\lim_{\eta \to 0} \mathrm{li}\,(x \pm i\eta) = \mathrm{li}\,(x) \mp \pi i, \quad x > 1, \quad \eta > 0.$$

И. л. связан с *интегральной показательной функцией* $\mathrm{Ei}\,(x)$ соотношениями:

$$\mathrm{li}\,(x) = \mathrm{Ei}\,(\ln x), \quad x < 1; \quad \mathrm{Ei}\,(x) = \mathrm{li}\,(e^x), \quad x < 0.$$

Для действительного $x > 0$ иногда используется обозначение:

$$\mathrm{Li}\,(x) = \begin{cases} \mathrm{li}\,(x) = \mathrm{Ei}\,(\ln x) & \text{при } 0 < x < 1, \\ \mathrm{li}\,(x) + \pi i = \mathrm{Ei}^*(\ln x) & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Лит. см. при ст. *Интегральный косинус*. *А. Б. Иванов.*

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ категории — объект U категории $\mathfrak{K}$, для к-рого основной функтор $H_U(X) = H_{\mathfrak{K}}(U, X)$ является вложением категории $\mathfrak{K}$ в категорию непустых множеств. Другими словами, объект U интегральный, если для каждого объекта $A \in Ob\,\mathfrak{K}$ множество $H_{\mathfrak{K}}(U, A)$ не пусто и для любых двух морфизмов $\alpha, \beta : A \to B$, $\alpha \neq \beta$, существует такой морфизм $\gamma : U \to A$, что $\gamma\alpha \neq \gamma\beta$. В категории непустых множеств каждый объект является интегральным. В полной подкатегории непустых алгебр нек-рого многообразия универсальных алгебр каждая свободная алгебра — И. о. В любой абелевой категории объект U является интегральным тогда и только тогда, когда он образующий. Если в категории каждая пара морфизмов с общими началом и концом имеет ядро, то образующий объект является интегральным. *М. Ш. Цаленко.*

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — отображение $x \to Ax$, когда закон соответствия A задается с помощью интеграла. И. о. наз. иногда интегральным преобразованием. Так, напр., для интегрального оператора Урысона (см. *Урысона уравнение*): $\varphi \to A\varphi$ закон соответствия A определяется интегралом (или оператор $\varphi \to A\varphi$ порождается интегралом)

$$A\varphi(t) = \int_D P(t, \tau, \varphi(\tau))\, d\tau, \quad t \in D, \tag{1}$$

причем D — заданное измеримое множество конечной меры Лебега в конечномерном пространстве; $P(t, \tau, u)$, $t, \tau \in D$, $-\infty < u < \infty$ — заданная измеримая функция. Предполагается, что функции P и φ удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование интеграла в (1) в смысле Лебега. Если функция $P(t, \tau, u)$ нелинейна относительно u, то (1) является примером нелинейного И. о. Если же $P(t, \tau, u) = K(t, \tau)\, u$, тогда (1) принимает вид

$$A\varphi(t) = \int_D K(t, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau, \quad t \in D. \tag{2}$$

Оператор, порождаемый интегралом (2), или просто оператор (2), наз. линейным И. о., а функция K — ядром И. о.

Ядро K наз. ядром Фредгольма, если оператор (2), соответствующий ядру K, действует вполне

непрерывно из заданного функционального пространства E в нек-рое другое функциональное пространство E_1. В этом случае сам оператор (2) наз. интегральным оператором Фредгольма из E в E_1.

Линейные И. о. часто рассматриваются в функциональных пространствах: $C(D)$ — непрерывных на ограниченном замкнутом множестве D функций и $L_p(D)$ — суммируемых на D со степенью p функций. В этом случае оператор (2)—оператор Фредгольма в $C(D)$ (т. е. из $C(D)$ в $C(D)$), если K непрерывно на $D\times D$ (такое ядро наз. непрерывным). Он является оператором Фредгольма в $L_2(D)$ (из $L_2(D)$ в $L_2(D)$), если ядро K измеримо на $D\times D$ и

$$\int_D \int_D |K(t,\tau)|^2\, dt\, d\tau < \infty. \tag{3}$$

Такое ядро наз. L_2-ядром.

Сопряженный оператор к оператору (2) в комплексном функциональном пространстве $L_2(D)$ с ядром, удовлетворяющим условию (3), есть И. о.

$$A^*\varphi(t) = \int_D \overline{K(\tau,\ t)}\,\varphi(\tau)\, d\tau,\quad t\in D, \tag{4}$$

где черта означает переход к комплексно сопряженному значению. Если ядро K эрмитово (симметрично) (то есть $\overline{K(\tau,\ t)} = K(t,\ \tau)$), то соответствующий оператор Фредгольма (2) совпадает со своим сопряженным (4). Операторы, обладающие этим свойством, наз. самосопряженными. Оператор Фредгольма с симметричным ядром наз. интегральным оператором Гильберта—Шмидта.

Пусть $|t-\tau|$ обозначает расстояние между точками t и τ n-мерного евклидова пространства, $B(t,\ \tau)$ — ограниченная измеримая функция на $D\times D$, тогда ядро вида

$$K(t,\ \tau) = \frac{B(t,\tau)}{|t-\tau|^m},\quad 0 < m < n, \tag{5}$$

наз. ядром типа потенциала, а И. о. (2) с таким ядром — И. о. типа потенциала; ядро (5) наз. также полярным ядром, или ядром со слабой особенностью, а соответствующий оператор (2) — И. о. со слабой особенностью.

Если функция $B(t,\ \tau)$ непрерывна на $D\times D$, то И. о. со слабой особенностью вполне непрерывен в пространстве $C(D)$, а если $B(t,\ \tau)$ — измеримая ограниченная функция на $D\times D$, то он вполне непрерывен в пространстве $L_2(D)$.

Если ядро K и m-мерное множество D таковы, что интеграл (2) не существует в смысле Лебега, но существует в смысле главного значения по Коши, то он наз. m-мерным сингулярным интегралом. Оператор, к-рый им порождается, наз. m-мерным сингулярным И. о., или одномерным (при $m=1$) и многомерным (при $m>1$) сингулярным И. о.

Если линия D лежит на плоскости комплексного переменного t, то равенство

$$A\varphi(t) = \int_D \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau,\quad t\in D, \tag{6}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, порождает непрерывный И. о. $\varphi\to A\varphi$ в пространстве функций, удовлетворяющих условию Гёльдера, если D — простая замкнутая гладкая линия; и в пространстве $L_p(D)$, $1<p<\infty$, если D — ляпуновская линия. Оператор (6) наз. сингулярным оператором Коши.

Пусть на действительной оси заданы две измеримые по Лебегу функции φ и g. Если для почти всех

$t \in]-\infty, \infty[$ существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\tau)|\,|g(\tau-t)|\,d\tau,$$

то можно определить функцию

$$(g * \varphi)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau-t)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \qquad (7)$$

которая наз. с в е р т к о й g и φ. Если зафиксировать функцию g, то интеграл (7) определяет оператор

$$T\varphi(t) = (g * \varphi)(t), \qquad (8)$$

который наз. И. о. (или и н т е г р а л ь н ы м п р е о б р а з о в а н и е м) с в е р т к и с ядром g. Если $g \in L_r(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ и $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r} - 1$, то оператор (8) непрерывен из $L_q(-\infty, \infty)$ в $L_p(-\infty, \infty)$. При соответствующих предположениях И. о. свертки применяется как на полупрямой, так и на конечном отрезке.

Кроме указанных выше И. о., исследованы конкретные классы И. о., напр. интегральные преобразования Фурье, Лапласа, Бесселя, Меллина, Гильберта и др.

Лит.: [1] С м и р н о в В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959; [2] Интегральные уравнения, М., 1968 (Справочная матем. б-ка); [3] К р а с н о с е л ь с к и й М. А. и др., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966; [4] Д и т к и н В. А., П р у д н и к о в А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, М., 1961 (Справочная матем. б-ка); [5] М у с х е л и ш в и л и Н. И., Сингулярные интегральные уравнения..., 3 изд., М., 1968; [6] М и х л и н С. Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962; [7] Т и т ч м а р ш Э. Ч., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.— Л., 1948; [8] Э д в а р д с Р., Функциональный анализ. Теория и приложения, пер. с англ., М., 1969.

Б. В. Хведелидзе.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ СИНУС — специальная функция, определяемая для действительного $x>0$ равенством

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

График И. с. см. на рис. при ст. *Интегральный косинус*. Иногда используют обозначение

$$\mathrm{si}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \equiv \mathrm{Si}(x) - \frac{\pi}{2}.$$

Частные значения:

$$\mathrm{Si}(0) = 0, \quad \mathrm{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{si}(\infty) = 0.$$

Основные соотношения:

$$\mathrm{Si}(-x) = -\mathrm{Si}(x); \quad \mathrm{si}(x) + \mathrm{si}(-x) = -\pi;$$

$$\int_0^{\infty} \mathrm{si}^2(t)\,dt = \frac{\pi}{2}; \quad \int_0^{\infty} e^{-pt}\,\mathrm{si}(qt)\,dt = -\frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{p}{q};$$

$$\int_0^{\infty} \sin t\,\mathrm{si}(t)\,dt = -\frac{\pi}{4}; \quad \int_0^{\infty} \mathrm{Ci}(t)\,\mathrm{si}(t)\,dt = -\ln 2,$$

где $\mathrm{Ci}(t)$ — *интегральный косинус*. При малых x:

$$\mathrm{Si}(x) \approx x.$$

Асимптотич. представление при больших x:

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x}\,P(x) - \frac{\sin x}{x}\,Q(x),$$

где

$$P(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(2k)!}{x^{2k}},$$

$$Q(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(2k+1)!}{x^{2k+1}}.$$

И. с. представляется в виде ряда

$$\mathrm{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3!3} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!\,(2k+1)} + \ldots. \qquad (*)$$

Как функция комплексного переменного z, $\mathrm{Si}(z)$, определяемая формулой (*),— целая функция z во всей плоскости z.

И. с. связан с *интегральной показательной функцией* $\mathrm{Ei}(z)$ соотношением:

$$\mathrm{si}(z) = \frac{1}{2i}[\mathrm{Ei}(iz) - \mathrm{Ei}(-iz)].$$

См. также sici-*спираль*.

Лит. см. при ст. *Интегральный косинус*. *А. Б. Иванов.*

ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МЕТОД — способ решения линейных дифференциальных уравнений при заданных краевых или начальных условиях, состоящий в переходе от данного уравнения к уравнению для интегрального преобразования искомой функции. Последнее уравнение может оказаться более простым. Пусть, напр., требуется найти решение уравнения

$$a_0(x)\frac{d^2u}{dx^2} + a_1(x)\frac{du}{dx} + a_2u = f(x) \qquad (1)$$

на конечном или бесконечном интервале (α, β) с краевыми условиями $u(\alpha)=u_\alpha$, $u(\beta)=u_\beta$. Если ядро $K(s, x)$ интегрального преобразования

$$\overline{u}(s) = \int_\alpha^\beta K(s, x)\, u(x)\, dx$$

удовлетворяет соотношению

$$\frac{d^2(a_0K)}{dx^2} - \frac{d(a_1K)}{dx} + a_2K = \lambda(s)\, K, \qquad (2)$$

где $\lambda(s)$ — функция s, то после умножения уравнения (1) на $K(s, x)$ и интегрирования по частям в пределах (α, β) получится уравнение

$$\overline{f}(s) - \left[a_0\left(K\frac{du}{dx} - u\frac{dK}{dx}\right) + (a_1 - a_0')uK\right]\Bigg|_{x=\alpha}^{x=\beta} = \lambda(s)\,\overline{u}.$$

Выражая из него $\overline{u}(s)$ и применяя формулу обращения интегрального преобразования, можно найти $u(x)$. Аналогично И. п. м. применяется для дифференциальных уравнений с частными производными.

Таким образом, процесс решения дифференциального уравнения этим методом состоит из следующих этапов.

1) Выбор подходящего интегрального преобразования.

2) Умножение уравнения и граничных условий на ядро этого интегрального преобразования и интегрирование в подходящих пределах по переменной, по к-рой проводится интегральное преобразование.

3) При интегрировании в 2) используются соответствующие граничные (или начальные) условия для вычисления членов, возникающих от пределов интегрирования.

4) Решается полученное вспомогательное уравнение и находится интегральное преобразование искомой функции.

5) По формуле обращения определяется искомая функция.

Лит.: [1] Трантер К. Дж., Интегральные преобразования в математической физике, пер. с англ., М., 1956; [2] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., М.— Л., 1951. *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.*

ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ МЕТОД, метод полос,— метод решения систем дифференциальных уравнений с частными производными, основанный на приближенном сведении уравнений с частными производными к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Применим к уравнениям различных типов. Предложен А. А. Дородницыным [1] как развитие метода прямых, обобщенная форма И. с. м. с введением сглаживающих функций дана в [2], разработка и развитие метода — в [3].

Пусть имеется система дифференциальных уравнений с частными производными в дивергентном виде

$$\frac{\partial}{\partial x} P_i(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_k) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} Q_i(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_k) = F_i(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_k), \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \ldots, k,$$

где P_i, Q_i, F_i — заданные функции от независимых x, y и искомых u_1, $u_2, \ldots, u_k$ переменных. Пусть решение системы (1) ищется в криволинейном прямоугольнике с границами $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=\Delta(x)$, на к-рых ставится $2k$ условий, из них k условий на границах $x=a$ и $x=b$. Если заранее функция $\Delta(x)$ неизвестна, то требуется одно дополнительное условие. При наличии на границе особых точек вместо соответствующих граничных условий используются условия регулярности.

В N-м приближении область интегрирования разбивается на N непересекающихся полос системой линий $y=y_n(x)=n\Delta(x)/N$, $n=1, \ldots, N$. Для каждого N выбирается замкнутая система из N линейно независимых функций $f_n(y)$. При умножении каждого исходного уравнения (1) на функции $f_n(y)$ и интегрировании по y поперек всех полос получают kN интегральных соотношений вида

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\Delta(x)} f_n(y)\, P\, dy - \Delta'(x)\, f_n(\Delta(x))\, P\Big|_{y=\Delta(x)} + \\ + f_n(\Delta(x))\, Q\Big|_{y=\Delta(x)} - f_n(0)\, Q(0) - \\ - \int_0^{\Delta(x)} f_n'(y)\, Q\, dy = \int_0^{\Delta(x)} f_n(y)\, F dy.$$

Подынтегральные функции P, Q, F аппроксимируются при помощи интерполяционных формул через их значения P_n, Q_n, F_n на границах полос; интегралы, входящие в интегральные соотношения, имеют вид

$$\int_0^{\Delta(x)} f_n(y)\, P dy \approx \Delta(x) \sum_{n=0}^{N} C_n P_n y_n(x),$$

где C_n — численные коэффициенты, зависящие от выбора интерполяционных формул и вида функций $f_n(y)$. В результате получается аппроксимирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений по x относительно $K(N+1)$ значений искомых функций u_i на всех границах полос. Эта система замыкается k граничными условиями при $y=0$ и $y=\Delta(x)$.

Функции $f_n(y)$ выбираются достаточно произвольно. Применение в качестве $f_n(y)$ δ-функции $f_n(y)=\delta(y-y_n)$, $n=1, 2, \ldots, N$, приводит к методу прямых, в к-ром производные по y заменяются разностными выражениями, отвечающими выбранным интерполяционным формулам. При использовании ступенчатых функций

$$f_n(y) \begin{cases} 0 \text{ при } y < y_{n-1}, \\ 1 \text{ при } y_{n-1} \leqslant y \leqslant y_n, \\ 0 \text{ при } y > y_n \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots, N,$$

говорят о простом И. с. м., где исходные уравнения интегрируются поперек каждой полосы. При этом выраженные исходной системой (1) законы сохранения запишутся для полос в виде следующих интегральных соотношений

$$\frac{d}{dx}\int_{y_{n-1}}^{y_n} P\, dy - y_n' P(y_n) + y_{n-1}' P(y_{n-1}) + Q(y_n) - Q(y_{n-1}) = \\ = \int_{y_{n-1}}^{y_n} F dy.$$

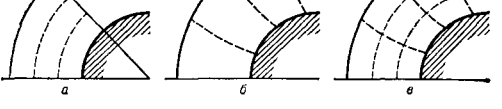
Сходимость и погрешность И. с. м. исследовались для систем квазилинейных уравнений гиперболич. типа [4]. Здесь были установлены результаты, показывающие преимущество И. с. м. над методом прямых. В более

поздних работах проводилось аналогичное исследование для уравнений эллиптич. типа.

К достоинствам И. с. м. относятся: возможность выбора интерполяционных формул и функций $f(y)$ с учетом поведения решения, точное интегрирование по одной из переменных (вследствие дивергентной формы записи исходных уравнений), простота вычислительного алгоритма, небольшой объем машинной памяти при расчетах на ЭВМ. В И. с. м. аппроксимируется интеграл: это повышает точность аппроксимации за счет уменьшения коэффициента остаточного члена; интеграл представляет собой более гладкую функцию, чем подынтегральная функция, что позволяет уменьшить число узлов интерполяции. В случае разрыва первого рода подынтегральной функции интеграл непрерывен. И. с. м. наиболее эффективен, когда решение с хорошей точностью получается при малом числе полос.

Проведением аппроксимаций по двум переменным И. с. м. обобщается на случай уравнений с тремя независимыми переменными. Аппроксимации по двум переменным можно проводить и в двумерном случае (при этом область интегрирования разбивается не на полосы, а на подобласти), тогда аппроксимирующая система будет системой нелинейных алгебраич. или трансцендентных уравнений. Элементы И. с. м. применяются в др. численных методах, напр. в *крупных частиц методе*.

И. с. м. наиболее приложим в газовой динамике, где с его помощью был решен цикл практически важных задач. При этом выделяют три схемы И. с. м.: 1) область интегрирования разбивается линиями, проходящими между поверхностью тела и ударной волной (рис. *а*);



2) область интегрирования разбивается линиями, проходящими между осью симметрии и граничной характеристикой (рис. *б*); 3) производится разбиение на подобласти двумя семействами пересекающихся линий (рис. *в*).

И. с. м. для расчета сверхзвукового обтекания носовой части затупленного тела с отошедшей ударной волной был разработан в [5], где впервые получено численное решение этой задачи в прямой постановке. Проведено решение этой задачи для самых общих случаев (тела разнообразной формы, пространственное обтекание, течения реального газа при наличии равновесных и неравновесных физико-химич. превращений и излучения, нестационарное движение, течение вязкого газа [6]). И. с. м. применялся для численного исследования потенциальных течений газа [7], для решения нек-рых смешанных задач: течение в дозвуковой и трансзвуковой части сопла [8]. Рассматривалось закритическое обтекание профиля под углом атаки с местной сверхзвуковой зоной [9]. И. с. м. рассчитывались сверхзвуковые конич. течения газа.

Широкое применение И. с. м. нашел при расчетах движения вязкого газа в рамках теории пограничного слоя. Для ламинарного несжимаемого случая было получено решение вплоть до точки отрыва [2]. Далее рассчитывался ламинарный пограничный слой в газе с учетом вдува или отсоса, излучения, теплопроводности. И. с. м. получено решение нестационарной задачи о точечном одномерном взрыве в газе с учетом противодавления [10], а также в газе с бесконечной проводимостью в присутствии магнитного поля и в горючем газе.

Лит.: [1] Дородницын А. А., в кн.: Тр. 3 Всесоюзного математического съезда. 1956, т. 3, М., 1958, с. 447—53; [2] его же, «Ж. прикл. механ. и техн. физ.», 1960, № 3, с. 111—18; [3] Белоцерковский О. М., Чушкин П. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 5, с. 731—59; [4] Бобков В. В., Крылов В. И., «Дифференциальные уравнения», 1965, т. 1, № 2, с. 230—43; [5] Белоцерковский О. М., «Докл. АН СССР», 1957, т. 113, в. 3, с. 509—12; [6] Белоцерковский О.М. и др., Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. Теоретические и экспериментальные исследования, 2 изд., М., 1967; [7] Чушкин П. И., «Вычисл. математика», 1957, № 2, с. 20—44; [8] Алихашкин Я. И., Фаворский А. П., Чушкин П. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1963, т. 3, № 6, с. 1130—34 [9] Tai T. C., «J. AIAA», 1974, v. 12, p. 798—804; [10] Коробейников В. П., Чушкин П. И., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1966, т. 87, с. 4—34.

Ю. М. Давыдов.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ — операция отыскания *интеграла*. Под И. понимают также решение дифференциальных уравнений.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ — представление решений дифференциальных уравнений аналитич. формулами, использующими указанный априори запас функций и перечисленный заранее набор математич. операций.

Если в качестве функций допускаются элементарные функции и функции, входящие в уравнение, а под операциями понимаются конечные последовательности алгебраич. операций и операций взятия неопределенного интеграла (квадратуры) от допустимых функций, то говорят об интегрировании (т. е. решении) дифференциальных уравнений в квадратурах. Примером обыкновенного дифференциального уравнения, интегрируемого в квадратурах, служит *Бернулли уравнение*. Ж. Лиувилль (см. [1]) впервые указал уравнение, интегрирование к-рого в квадратурах невозможно. Так, решения уравнения

$$y'' + xy = 0 \qquad (*)$$

нельзя выразить через элементарные функции и интегралы от них (см. [2]). Обыкновенные дифференциальные уравнения удается проинтегрировать в квадратурах крайне редко. Наиболее глубокие результаты о возможности интегрирования в квадратурах получаются на основе восходящей к С. Ли (см. [3]) теории непрерывных групп преобразований (см. [4], [5]).

И. д. у. в з. ф. допускает привлечение *специальных функций*, представление решений в виде сходящихся рядов и т. д. Любое конкретное линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами интегрируется в замкнутой форме, если включить в допустимые конечное число функций (вообще говоря, специальных), составляющих фундаментальную систему решений этого уравнения. Например, если ввести *Бесселя функции*, то с их помощью записывается формула для общего решения уравнения (*). Таким образом, дифференциальные уравнения являются источником специальных функций, включение к-рых в число допустимых позволяет расширять класс уравнений, разрешимых в замкнутой форме. Однако проблема интегрирования в замкнутой форме нелинейного уравнения в общем случае не сводится к пополнению множества допустимых функций конечным числом специальных функций.

Для дифференциальных уравнений с частными производными формулы для решений удается получить лишь в отдельных специальных случаях (см., напр., *Д'Аламбера формула*). При отыскании формул для решений таких уравнений большое значение имеют групповые методы (см. [5]).

Лит.: [1] Liouville J., «J. math. pures et appl.», scr. 1, 1841, v. 6; [2] Капланский И., Введение в дифференциальную алгебру, пер. с англ., М., 1959; [3] Lie S., Scheffers G., Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Lpz., 1891; [4] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения,

пер. с англ., Хар., 1939; [5] Овсянников Л. В., Групповые свойства дифференциальных уравнений, Новосиб., 1962; [6] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [7] его же, Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, пер. с нем., М., 1966.

Н. Х. Розов.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ — один из способов вычисления интеграла, состоящий в представлении интеграла от выражения вида $u(x)dv(x)$ через интеграл от $v(x)du(x)$. Для определенного интеграла формула И. по ч. имеет вид

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b v(x)\,du(x) \qquad (1)$$

и справедлива в предположении, что функции $u(x)$ и $v(x)$ и их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на $a \leqslant x \leqslant b$.

Аналогом этой формулы для неопределенного интеграла является соотношение

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,du(x). \qquad (2)$$

Аналогом формулы (1) для кратных интегралов является соотношение

$$\int_D u \frac{\partial v}{\partial x_k}\,dx = \oint_\Gamma uv \cos(\widehat{x_k, n})\,ds - \int_D v \frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx, \qquad (3)$$

где D — область в пространстве $\mathbb{R}^m$ с гладкой (или хотя бы кусочно гладкой) границей Γ, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $(\widehat{x_k, n})$ — угол между осью Ox_k и внешней нормалью к поверхности Γ. Формула (3) справедлива, напр., для непрерывных в $(D+\Gamma)$ функций $u(x)$ и $v(x)$ и их частных производных 1-го порядка. Если интегралы в (3) понимаются в смысле Лебега, то для справедливости этой формулы достаточно, чтобы $u(x)$ и $v(x)$ принадлежали *Соболева пространству* $u(x) \in W_p^1(D)$, $v(x) \in W_q^1(D)$ при любых $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ таких, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqslant 1 + \frac{1}{m}$.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1—2, М., 1971—73; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, ч. 1—2, М., 1970; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1973.

В. А. Ильин, Т. П. Лукашенко.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОДСТАНОВКОЙ, замена переменного в интеграле,— один из способов вычисления интеграла, состоящий в преобразовании интеграла посредством перехода к другой переменной интегрирования. Для определенного интеграла от функции одной переменной формула имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \qquad (1)$$

и справедлива при следующих предположениях: $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, к-рый является множеством значений нек-рой функции $x = \varphi(t)$, определенной и непрерывной вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Аналогом формулы (1) для неопределенного интеграла является соотношение

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \qquad (2)$$

Если функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на нек-ром промежутке $\{t\}$, а функция $f(x)$ имеет первообразную на множестве всех значений функции $x = \varphi(t)$, то и функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ имеет первообразную на указанном промежутке, причем имеет место равенство (2).

В случае кратного интеграла Римана по ограниченной замкнутой m-мерной кубируемой области G аналогом формулы (1) является соотношение

$$\int_G f(x)\,dx = \int_{G'} f[\varphi(t)] \left| \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_m)} \right| dt, \qquad (3)$$

справедливое при следующих предположениях: функция $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ непрерывна в области G; преобразование $x_i=\varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $i=1, 2, \ldots, m$, взаимно однозначно переводит область G' в пространстве переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$, в область G в пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ функции $x_i=\varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ имеют в G' непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля *якобиан* $\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_m)}$.

Формула (3) справедлива и при более общих предположениях (не обязательно требовать непрерывности $f(x)$ в области G, а можно допустить обращение в нуль якобиана на множестве точек m-мерной меры нуль).

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1—2, М., 1971—73; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, т. 1—2, М., 1970; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, М., 1973. *В. А. Ильин.*

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЕ — нахождение интеграла численными методами. И. ч. применяется, если подинтегральная функция задана приближенно (таблицей), или если она задана точно, то использование методов И. ч. быстрее приводит к получению результата с заданной точностью, чем использование точных методов, или, наконец, если использование точных методов невозможно, так как интеграл не выражается в известных функциях. Для И. ч. осуществляют построение *квадратурных формул* (в случае функций одного переменного) и *кубатурных формул* (для вычисления кратных интегралов). См. также *Интерполирование* в вычислительной математике.

ИНТЕГРИРУЕМАЯ СИСТЕМА — дифференциальная система размерности p на n-мерном дифференцируемом многообразии M^n, к-рая в окрестности каждой точки $x\in M^n$ обладает $(n-p)$-параметрич. семейством p-мерных интегральных многообразий. Часто в этом случае говорят о вполне интегрируемой дифференциальной системе; более точно она определяется следующим образом. Пусть в каждой точке $x\in M^n$ выделено нек-рое подпространство $D(x)$ размерности p касательного векторного пространства $T_x(M^n)$, так, что на M^n задана дифференциальная система, или р а с п р е д е л е н и е D класса C^r, $r\geqslant 1$ размерности p. Система D наз. в п о л н е и н т е г р и р у е м о й, если для любой точки $a\in M^n$ найдется система координат (U, φ), $x\in U$, $\varphi(x)=x^1, \ldots, x^n$, такая, что для любых постоянных c^j, $p<j\leqslant n$ многообразие $U_c=\{x\in U;\ x^j=c^j\}$ является интегральным подмногообразием, т. е. его касательное пространство в произвольной его точке x совпадает с $D(x)$. Аналитич. условия, необходимые и достаточные для этого, см. в ст. *Инволютивное распределение.* *Ю. Г. Лумисте.*

ИНТЕГРИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ — см. *Интеграл.*

ИНТЕГРИРУЕМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — непрерывное неприводимое унитарное представление π локально компактной унимодулярной группы G в гильбертовом пространстве H такое, что для нек-рого ненулевого вектора $\xi\in H$ функция $g\to(\pi(g)\xi, \xi)$, $g\in G$, является интегрируемой относительно меры Хаара на G. В этом случае представление π — квадратично интегрируемое представление, причем существует такое плотное в H векторное подпространство $H'\subset H$, что функция $g\to(\pi(g)\xi, \eta)$, $g\in G$, интегрируема относительно меры Хаари на группе G для всех $\xi, \eta\in H'$. Если $\{\pi\}$ — элемент в дуальном пространстве $\hat{G}$ группы G, определенный классом унитарной эквивалентности представления π, и $\hat{G}_r$ — носитель регулярного представления группы G в пространстве $\hat{G}$, то $\{\pi\}$ — одновременно открытая и замкнутая точка в $\hat{G}_r$. *А. И. Штерн.*

ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0 \qquad (1)$$

— функция $\mu=\mu(x, y)\not\equiv 0$, обладающая тем свойством, что уравнение

$$\mu(x, y)\,P(x, y)dx+\mu(x, y)\,Q(x, y)dy=0$$

является *дифференциальным уравнением в полных дифференциалах*. Напр., для линейного уравнения $y'+a(x)y=f(x)$, или $(a(x)y-f(x))dx+dy=0$, И. м. служит функция $\mu=\exp\int a(x)dx$. Если уравнение (1) в области D, где $P^2+Q^2\neq 0$, имеет гладкий общий интеграл $U(x, y)=C$, то оно имеет бесконечно много И. м. Если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ имеют непрерывные частные производные в односвязной области D, где $P^2+Q^2\neq 0$, то в качестве И. м. можно взять любое частное (нетривиальное) решение уравнения с частными производными

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0 \qquad (2)$$

(см. [1]). Однако общего метода отыскания решений уравнения (2) не существует и поэтому фактическое нахождение И. м. для конкретного уравнения (1) удается лишь в исключительных случаях (см. [2]).

Лит.: [1] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 9 изд., М., 1966; [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

Н. Х. Розов.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаками дифференциальных и интегральных операций. И.-д. у. включают и интегральные и дифференциальные уравнения.

Линейные И.-д. у. Пусть $f(x)$ — заданная функция,

$$L_x[U]\equiv\sum\nolimits_{i=0}^{l}p_i(x)\,U^{(i)}(x),$$

$$M_y[U]\equiv\sum\nolimits_{j=0}^{m}q_j(y)\,U^{(j)}(y)$$

— дифференциальные выражения с достаточно гладкими коэффициентами $p_i(x)$ и $q_j(y)$ на $[a, b]$, а $K(x, y)$ — известная функция, достаточно гладкая в квадрате $[a, b]\times[a, b]$. Уравнение вида

$$L_x[U]=\lambda\int_a^b K(x, y)\,M_y[U]\,dy+f(x) \qquad (1)$$

наз. линейным И.-д. у.; здесь λ — параметр. Если в И.-д. у. (1) функция $K(x, y)\equiv 0$ при $y>x$, то уравнение (1) наз. И.-д. у. с переменным пределом интегрирования: его можно записать в форме:

$$L_x[U]=\lambda\int_0^x K(x, y)\,M_y[U]\,dy+f(x). \qquad (2)$$

Для И.-д. у. (1) или (2) можно ставить задачу Коши (ищется решение, удовлетворяющее условиям $U^{(i)}\alpha=c_i$, $i=0, 1, \ldots, l-1$, где c_i — заданные числа, l — порядок выражения $L_x[U]$, а $\alpha\in[a, b]$) и различные граничные задачи (напр., задачу о периодических решениях). В ряде случаев (см. [3] — [4]) задачи для (1) или (2) можно упростить или даже свести соответственно к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода или уравнениям Вольтерра. Вместе с тем для И.-д. у. возможен ряд специфич. явлений, не характерных ни для дифференциальных, ни для интегральных уравнений.

Простейшее нелинейное И.-д. у. имеет вид:

$$U(x)=\lambda\int_a^b F(x, y, U(y), U'(y), \ldots, U^{(m)}(y))\,dy+f(x).$$

К исследованию этого уравнения применимы метод сжатых изображений, принцип Шаудера и другие методы нелинейного анализа.

Для И.-д. у. изучаются вопросы устойчивости решений, разложения по собственным функциям, асимптотика по малому параметру и др. В приложениях встречаются также И.-д. у. с частными производными и с

кратными интегралами. Таковы, напр., уравнение Больцмана, уравнение Колмогорова — Феллера.

Лит.: [1] Volterra V., Leçons sur les équations intégrales et les équations intégrodifférentielles, P., 1913; [2] его же, Математическая теория борьбы за существование, пер. с франц., М., 1976; [3] Быков Я. В., О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений, Фр., 1957; [4] Вайнберг М. М., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964, с. 5—37; [5] Филатов А. Н., Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, Таш., 1974.

В. А. Треногин.

ИНТЕГРО-СТЕПЕННОЙ РЯД — ряд, содержащий степени переменной функции под знаком интеграла. Пусть $K(s, t_1, \ldots, t_k)$ — функция непрерывная по совокупности переменных в кубе $[a, b]^{k+1}$ и пусть $U(s)$ — произвольная непрерывная на $[a, b]$ функция. Выражение

$$U^{\alpha_0}(s)\int_a^b \ldots \int_a^b K(s, t_1, \ldots, t_k)\, U^{\alpha_1}(t_1) \ldots$$

$$\ldots U^{\alpha_k}(t_k)\, dt_1 \ldots dt_k,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — неотрицательные целые числа и $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_k=m$, наз. интегро-степенным членом степени m относительно U. Два интегростепенных члена степени m принадлежат к одному типу, если они отличаются лишь своими ядрами K. Сумма конечного числа интегро-степенных членов степени m, принадлежащих различным типам, наз. интегро-степенной формой степени m относительно функции U и обозначается $W_m\left(\begin{smallmatrix} s \\ U \end{smallmatrix}\right)$. Пусть $|W|_m\left(\begin{smallmatrix} s \\ U \end{smallmatrix}\right)$ — интегро-степенная форма, в к-рой все ядра K заменены на $|K|$, пусть

$$\tilde{U}=\max_{[a,\,b]}|U(s)|, \quad \tilde{W}_m=\max_{[a,\,b]}|W|_m\left(\begin{smallmatrix} s \\ 1 \end{smallmatrix}\right),$$

тогда

$$\left|W_m\left(\begin{smallmatrix} s \\ U \end{smallmatrix}\right)\right| \leqslant \tilde{W}_m \tilde{U}^m.$$

Выражение

$$W_0\left(\begin{smallmatrix} s \\ U \end{smallmatrix}\right)+W_1\left(\begin{smallmatrix} s \\ U \end{smallmatrix}\right)+W_2\left(\begin{smallmatrix} s \\ U \end{smallmatrix}\right)+\ldots$$

наз. интегро-степенным рядом. Если сходится числовой ряд $\tilde{W}_0+\tilde{W}_1\tilde{U}+\tilde{W}_2\tilde{U}^2+\ldots$, то И.-с. р. наз. регулярно сходящимся. В этом случае И.-с. р. сходится абсолютно и равномерно и сумма его непрерывна на $[a, b]$.

Аналогично вводится И.-с. р. от нескольких функциональных аргументов, а также И.-с. р., в к-рых вместо $[a, b]$ фигурирует нек-рое замкнутое ограниченное множество конечномерного евклидова пространства. И.-с. р.— частный случай более общего понятия абстрактных степенных рядов.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., О фигурах равновесия, мало отличающихся от эллипсоидов вращающейся однородной массы жидкости. Собр. соч., т. 4, М., 1959; [2] Schmidt E., «Math. Ann.», 1908, Bd 65, S. 370—99; [3] Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969.

В. А. Треногин.

ИНТЕРВАЛ — 1) см. *Интервал и сегмент.* 2) И. пространства-времени — величина, характеризующая связь между двумя событиями, разделенными пространственным расстоянием и промежутком времени. В специальной теории относительности квадрат И. равен

$$s^2=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2,$$

где c — скорость света, x_i, y_i, z_i — пространственные координаты, t_i — соответствующие моменты времени (подробнее см. *Минковского пространство*).

В общей теории относительности рассматривается И. между двумя бесконечно близкими событиями:

$$ds=\sqrt{-g_{ik}\,dx^i\,dx^k},$$

где dx^i — бесконечно малые разности координат двух событий, g_{ik} — метрический тензор. *А. Б. Иванов.*

ИНТЕРВАЛ И СЕГМЕНТ — простейшие множества точек на прямой. Интервалом (или промежутком) наз. множество точек прямой, заключенных между фиксированными точками A и B, причем сами точки A и B не причисляются к интервалу. Сегментом (или отрезком) наз. множество точек прямой, лежащих между точками A и B, к к-рому присоединены и сами эти точки. Термины «интервал» и «сегмент» применяются также для обозначения соответствующих множеств действительных чисел: интервал состоит из чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a<x<b$, а сегмент — из чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a\leqslant x\leqslant b$. Интервал обозначается (a, b), иногда $]a, b[$, а сегмент $[a, b]$.

Термин «интервал» употребляется также в более широком смысле для обозначения произвольного связного множества на прямой. В этом случае к интервалам относятся собственно интервал (a, b), бесконечные, или несобственные, интервалы $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, сегмент $[a, b]$ и полуинтервалы $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$. При этом круглая скобка обозначает, что соответствующий конец интервала не принадлежит к рассматриваемому множеству, а квадратная — что принадлежит. *БСЭ-3.*

Более общим является понятие интервала в частично упорядоченном множестве. Интервалом $[a, b]$ здесь наз. совокупность всех таких элементов x данного частично упорядоченного множества, к-рые удовлетворяют неравенству $a\leqslant x\leqslant b$. Интервал частично упорядоченного множества, состоящий в точности из двух элементов, наз. простым. *Л. А. Скорняков.*

ИНТЕРВАЛ СХОДИМОСТИ степенного ряда — интервал действительных значений переменного, обладающий тем свойством, что в каждой точке этого интервала *степенной ряд* сходится, а в каждой точке, не принадлежащей к этому интервалу и не являющейся его концом,— расходится. *БСЭ-3.*

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА для неизвестного истинного значения скалярного параметра вероятностного распределения — интервал, принадлежащий множеству допустимых значений параметра, границы к-рого суть функции от результатов наблюдений, подчиняющихся данному распределению. Пусть X — случайная величина, принимающая значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, P_\theta)$, $\theta\in\Theta$, Θ — интервал на действительной прямой, причем истинное значение параметра θ неизвестно. Интервал $(a_1(X), a_2(X))\subset\Theta$, границы к-рого являются функциями от подлежащего наблюдению значения случайной величины X, наз. И. о., или доверительным интервалом для θ, число

$$p=\inf_{\theta\in\Theta}\mathsf{P}\{a_1(X)<\theta<a_2(X)\mid\theta\}$$

наз. коэффициентом доверия этого доверительного интервала, а величины $a_1(X)$ и $a_2(X)$ — нижним и верхним доверительными пределами соответственно. Понятие И. о. распространяется на более общий случай, когда требуется оценить нек-рую функцию или только одно ее значение, зависящую от параметра θ.

Пусть на множестве $T\subset\mathbb{R}^1$ задано семейство функций

$$u(\theta, \cdot)=(u_1(\theta, \cdot),\ u_2(\theta, \cdot), \ldots, u_k(\theta, \cdot)):\quad T\to\mathfrak{U}\subset\mathbb{R}^k,$$

$$\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_m)\in\Theta\subset\mathbb{R}^m,$$

и пусть по реализации случайного вектора $X=(X_1, \ldots, X_n)$, принимающего значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, P_\theta)$, $\mathfrak{X}\subset\mathbb{R}^n$, $\theta\in\Theta$, требуется оценить функцию $u(\theta, \cdot)$, отвечающую неизвестному истинному значению параметра θ. Каждому $t\in T$ в $\mathfrak{U}$ отвечает

множество $B(t)$, являющееся образом множества Θ при отображении $u(\cdot, t): \Theta \to B(t) \subset \mathfrak{U}$. По определению, множество $C(X, t) \subset B(t)$ называется доверительным множеством для значения $u(\theta, t)$ функции $u(\theta, \cdot)$ в точке t, $t \in T$, имеющим доверительную вероятность.

$$\mathsf{P}\{u(\theta, t) \in C(X, t) \mid \theta\} = p(\theta, t)$$

и коэффициент доверия

$$p(t) = \inf_{\theta \in \Theta} p(\theta, t).$$

Совокупность всех доверительных множеств $C(X, t)$ образует в $\mathfrak{U}$ доверительную зону $C(X)$ для функции $u(\theta, \cdot): T \to \mathfrak{U}$, имеющую доверительную вероятность

$$\mathsf{P}\{C(X) \ni u(\theta, \cdot): T \to \mathfrak{U} \mid \theta\} = \tilde{p}(\theta)$$

и коэффициент доверия

$$p = \inf_{\theta \in \Theta} \tilde{p}(\theta).$$

Множества типа $C(X, t)$ и $C(X)$ наз. И. о. для одного значения $u(\theta, t)$ функции $u(\theta, \cdot)$ в точке t и самой функции $u(\theta, \cdot)$ соответственно.

Существует несколько подходов к построению И. о. для неизвестных параметров распределений. Наиболее распространенными являются *бейесовский подход*, основанный на теореме Бейеса, метод Фишера, связанный с введением *фидуциальных распределений* (о методе Фишера см. [3] — [5]), *Неймана метод доверительных интервалов* ([5], [8], [9]) и метод, предложенный Л. Н. Большевым [6].

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Fisher R. A., Statistical Methods and Scientific Inferense, N. Y. — L., 1973; [3] Бернштейн С. Н., «Изв. АН СССР». Сер. матем.», 1941, т. 5, с. 85—93; [4] Большев Л. Н., Комментарии к статье О «доверительных» вероятностях Фишера, в кн.: Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 4, М., 1964, с. 566—9; [5] Neyman У., «J. Operat. Res. Soc. Japan», 1961, v. 3, № 4, p. 145—154; [6] Большев Л. Н., «Теория вероят. и ее примен.», 1965, т. 10, в. 1, с. 187—92; [7] Большев Л. Н., Логинов Э. А., «Теория вероят. и ее примен.», 1966, т. 11, в. 1, с. 94—107; [8] Neyman J., «Biometrika», 1941, v. 32, № 2, p. 128—150; [9] его же, «Phil. Trans. Roy. Soc. London», 1937, v. 236, p. 333—80.

М. С. Никулин.

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ — теория, предназначенная для учета ошибок округления при проведении расчетов на цифровых вычислительных машинах (ЦВМ). Так как точное представление чисел невозможно в машине с конечной разрядной сеткой, то результат каждого достаточно сложного расчета содержит нек-рую ошибку, обусловленную погрешностями округлений входных данных и промежуточных результатов. Для учета этой ошибки можно каждую величину представить парой чисел, к-рые ограничивают ее снизу и сверху и имеют точное представление в ЦВМ. Таким образом, каждая величина заменяется нек-рым, содержащим ее интервалом. При выполнении арифметич. действий новый интервал вычисляется с помощью специальных операций.

Пусть G — множество интервалов $\{[a, b]\}$. Элементарные арифметич. операции над интервалами определяются следующим образом:

$$I * J = \{x * y \mid x \in I,\ y \in J\},\quad I, J \in G,$$

где $* \in \{+, -, \cdot, /\}$. Деление возможно лишь в том случае, если интервал, являющийся делителем, не содержит нуля. Множество G образует полугруппу по сложению и умножению. Имеют место следующие равенства:

$I + (J + K) = (I + J) + K$ ассоциативность сложения,

$I \cdot (J \cdot K) = (I \cdot J) \cdot K$ ассоциативность умножения,

$I + J = J + I$ коммутативность сложения,

$I \cdot J = J \cdot I$ коммутативность умножения.

Нулем и единицей служат соответственно интервалы $\mathbf{0}=[0, 0]$, $\mathbf{1}=[1, 1]$. Особенностью этой алгебраич. структуры является то, что обратные элементы как по сложению, так и по умножению определяются не единственным образом, т. е. уравнения (относительно X) $I+X=J$, $I\cdot X=J$ имеют, вообще говоря, не единственное решение. Кроме того, не выполняется закон дистрибутивности, напр.

$$[1, 2]\cdot([1, 2]-[1, 2])=[1, 2]\cdot[-1, 1]=[-2, 2],$$

тогда как

$$[1, 2]\cdot[1, 2]-[1, 2]\cdot[1, 2]=[1, 4]-[1, 4]=[-3, 3].$$

Имеет место лишь субдистрибутивность:

$$I\cdot(J+K)\subseteq I\cdot J+I\cdot K.$$

Операции над интервалами монотонны по включению. Если $I\subset K$, $J\subset L$, то

$$I+J\subset K+L,\quad I-J\subset K-L,\quad I\cdot J\subset K\cdot L,\quad I/J\subset K/L.$$

В множестве G вводится топология с помощью метрики $\rho(I, J)=\max(|c-a|, |d-b|)$, $I=[a, b]$, $J=[c, d]$, и частичная упорядоченность $I<J$, если $b\leqslant c$, и $I=J$, если $a=c$, $b=d$.

Однозначное отображение G в G наз. интервальной функцией. Обычным образом вводится понятие непрерывности функции. Определяется производная интервальной функции, определенный и неопределенный интегралы.

И. а. успешно применяется при решении нек-рых задач. Однако применение этого метода значительно увеличивает объем работы (более чем вдвое), требует вдвое больше памяти и времени счета. Кроме того, в достаточно больших задачах интервал, содержащий окончательный ответ часто бывает настолько большим, что практически не дает решения задачи. Для преодоления последней трудности развивают И. а. со структурами теории вероятностей (см. [3]).

Лит.: [1] Мооге R. E., Interval Analysis, 1966; [2] Хемминг Р. В., Численные методы, пер. с англ., М., 1968; [3] Interval Mathematics, N.Y., 1975 (Lect. Notes Computer Sience, v. 29). *В. В. Поспелов.*

ИНТЕРКВАНТИЛЬНАЯ ШИРОТА — расстояние между нижней и верхней *квантилями* одинакового уровня. Пусть $F(x)$ — строго монотонная функция непрерывного распределения и пусть p — произвольное число из интервала $0<p<{}^1/_2$. И. ш. уровня p определяется как разность $x_{1-p}-x_p$, где x_p и x_{1-p} — решения уравнений $F(x_p)=p$ и $F(x_{1-p})=1-p$ соответственно. И. ш. определенным образом подобранного уровня p используется в математической статистике и теории вероятностей для характеризации рассеяния распределения вероятностей. Напр., разность $x_{0,75}-x_{0,25}$, отвечающая значению $p=0,25$, носит название интерквартильной широты, и в случае нормального распределения она равна 1,349 σ (σ — естественная мера рассеяния, называемая квадратичным отклонением); половину интерквартильной широты наз. *вероятным отклонением*. Если $p={}^1/_6$ и $p={}^1/_{10}$, то И. ш. наз. интерсекстильной и интердецильной соответственно. *Л. Н. Большев.*

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ, интерполяция,— в простейшем, классическом смысле — конструктивное восстановление (быть может, приближенное) функции определенного класса по известным ее значениям или значениям ее производных в данных точках.

Пусть даны $n+1$ точек $\{x_k\}_{k=0}^n$ сегмента $\Delta=[a, b]$, причем $a\leqslant x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n\leqslant b$, и набор из $n+1$ чисел $\{y_k\}_{k=0}^n$ (не обязательно различных). Пусть известно, что нек-рая функция $f(x)$, принадлежащая тому или иному фиксированному классу K функций, определенных во всяком случае на Δ (напр., $f\in\pi_n$,

где π_n — множество всех алгебраич. многочленов степени $\leqslant n$, или $f \in C^{n+1}(\Delta)$), удовлетворяет системе соотношений:

$$f(x) \in K;\ f(x_k) = y_k,\ k = 0, 1, \ldots, n. \qquad (A)$$

Точки x_k, в к-рых задаются значения $f(x_k) = y_k$, наз. узлами интерполяции, или полюсами интерполяции для f. Естественно возникли главным образом из потребностей приближенных вычислений следующие две задачи, к-рые и явились отправными моментами развития всей теории И. А именно, спрашивается, как, обладая перечисленными выше сведениями (А) относительно f, можно с определенной точностью получить информацию: 1) о поведении $f(x)$ на интервалах (x_{k-1}, x_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, то есть между (лат. inter) полюсами x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, и 2) вне (лат. extra) сегмента $[x_0, x_n]$, содержащего все полюсы $\{x_n\}_{k=0}^n$? Упомянутые здесь лат. слова inter и extra привели соответственно к образованию терминов в случае 1) задачи интерполирования (или интерполяции) функции f и в случае 2) задачи экстраполирования (или экстраполяции) функции f, к-рые впоследствии слились в одну проблему интерполирования (А).

Задача (А), понимаемая как задача точного восстановления функции, имеет единственное решение, напр. в классе $K = \pi_n$. Ее решением в π_n является интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n^f(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_{n+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{n-1})(x_k-x_{n+1})\ldots(x_k-x_n)}.$$

Однако, если $f(x)$ принадлежит классу, в каком-то смысле «более обширному», чем π_n, то интерполяционная задача (А), вообще говоря, не имеет единственного решения. Тем не менее многочлен $L_n^f(x)$ в нек-рой мере позволяет судить о поведении $f(x)$ на Δ, если считать, что

$$f(x) \approx L_n^f(x), \quad x \in \Delta. \qquad (1)$$

В связи с этим возникает потребность в оценке погрешности

$$R_n^f(x) = f(x) - L_n^f(x)$$

для $x \in \Delta$, к-рая во многом зависит от того, какому классу функций K принадлежит $f(x)$, другими словами, $R_n^f(x)$ зависит от наперед известных свойств, к-рыми обладает $f(x)$. Напр., если $K = C^{n+1}(\Delta)$, то для задачи (А) остаточный член имеет вид

$$R_n^f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} A(x),$$

где $\alpha < \xi < \beta$, а

$$A(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k).$$

Здесь через α и β обозначены соответственно наименьшее и наибольшее из чисел x_0, x_n и x. Приведенная формула остаточного члена принадлежит О. Коши (A. Cauchy, см. [3]). Величина $R_n^f(x)$ во многом зависит от характера распределения и числа узлов интерполяции $\{x_k\}_{k=0}^n$ на Δ. При этом естественно предположить, что чем больше узлов интерполяции x_k будет взято и чем «равномерней» они будут расположены на Δ, тем «точнее» будет выполняться соотношение (1). Эти соображения в свою очередь приводят к еще более важной интерполяционной задаче, тесно примыкающей к проблеме (А).

Пусть $f(x)$ принадлежит классу функций K, определенных на Δ, и таких, что $\pi_n \neq K$ при $\forall n$, $n = 0, 1, \ldots$. Предположим, что множество узлов интерполяции $\{x_k\} \subset \Delta$, $x_k \neq x_j$ при $k \neq j$, счетно, и задана последова-

тельность чисел $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$. Спрашивается, как по имеющимся данным

$$f(x)\in K;\ f(x_k)=y_k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (Б)$$

восстановить $f(x)$? Поставленная задача в общем случае далеко не всегда разрешима и требует ряда уточнений, но это будет сделано несколько позже, а сейчас укажем только абрис одного весьма естественного и важного подхода к решению проблемы (Б). Обычно вначале решается «усеченная» задача (А):

$$f(x_{kj})=y_{kj},\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1,$$

в классе π_n. Пусть $L_n^f(x)$ — интерполяционный полином, являющийся решением этой усеченной задачи и записанный, например, в виде многочлена Лагранжа. Затем рассматривается возможность осуществления в том или ином смысле предельного перехода $L_n^f(x)\to f(x)$ при $n\to\infty$ (что равносильно, в частности, исследованию вопроса о стремлении к нулю остаточного члена $R_n^f(x)$ при $n\to\infty$ в рассматриваемом смысле). Приведенный эскиз схемы решения задачи (Б) лежит в основе теории сходимости (и расходимости) *интерполяционных процессов*; он является одним из основных методов решения задач интерполирования и имеет приложения не только в различных разделах чистой математики (напр., в теории чисел, см. [3]), но и в методах вычислений (см. *Интерполирование* в вычислительной математике, а также [1]).

В последующем, наряду с интерполяционными задачами рассмотренного здесь вида, определяемыми простейшими функционалами $f(x_k)$, стали исследоваться и другие, в к-рых, напр., задаются значения производных $f^{(m)}(x_k)$, $m=0,\ 1,\ldots,\ n_k$, или иные более сложные функционалы. При их решении стали применяться интерполяционные процессы, в к-рых в роли отправного интерполирующего класса вместо класса π_n используются другие множества функций, напр. классы T_n тригонометрич. полиномов степени $\leqslant n$, классы рациональных функций $\pi_{m,n}=p_m/q_n$, где $p_m\in\pi_m$, а $q_n\in\pi_n$ и $q_n\not\equiv 0$, классы целых функций специального вида и т. д. См. также *интерполяционная формула*.

Проблема И. в своей общей постановке заключается в следующем. Пусть X и Y — два непустых множества; задано семейство отображений $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$, $f_\alpha: X\to Y$, $\forall\alpha,\ \alpha\in\mathfrak{A}$. Если $\{y_\alpha\}$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, — некоторый заданный набор элементов (не обязательно различных) множества Y, то естественно возникает задача об отыскании множества всех $x\in X$, удовлетворяющих следующей системе равенств

$$(f_\alpha)(x)=y_\alpha,\quad \forall\alpha,\ \alpha\in\mathfrak{A}. \qquad (В)$$

Вообще говоря, не для всякого априори заданного набора элементов $\{y_\alpha\}$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, задача (В) обязана иметь решения x, $x\in X$. Поэтому сформулированная проблема требует ряда уточнений своей постановки. Эти уточнения состоят в следующем.

I. Выяснить, каково множество $E=E(X;\ f_\alpha)$ всех наборов $\{y_\alpha\}$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, для к-рых система уравнений (В) (быть может, бесконечная) имеет хотя бы одно решение x, $x\in X$. Другими словами, требуется дать конструктивное описание множества E всех допустимых наборов $\{y_\alpha\}$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, для заданного фиксированного семейства отображений $\{f_\alpha\}$, $x\in\mathfrak{A}$, для к-рых система (В) непротиворечива в X.

II. Пусть $\{y_\alpha\}$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, — фиксированный допустимый набор элементов из Y (т. е. принадлежащий множеству E из пункта I) задачи (В); требуется найти множество всех решений x, $x\in X$, системы (В).

При решении задач I и II особое значение имеют ответы на следующие вопросы более частного характера.

III. Каково подмножество X_1, $X\subset X$, на к-ром система уравнений (В) имеет единственное решение x, $x\in X_1$,

для каждого допустимого для X_1 набора $\{y_\alpha\}$, $\{y_\alpha\}\in E$ $\{f_\alpha;\ X_1\}$?

IV. Пусть E_1 — некоторое подмножество E, определяемое обычно заданием лишь некоего ограничительного свойства. Требуется дать конструктивную характеристику множества решений x, $x\in X$, системы (B) при условии, что правые части в (B) «пробегают» все E_1.

Задание множества X, Y и семейства отображений $\{f_\alpha\}$, $\alpha\in\mathfrak{A}(f_\alpha : X\to Y$ при $\forall\alpha$, $\alpha\in\mathfrak{A})$ в совокупности с сформулированными вопросами I и II (и обычно присоединяемым к ним III, а иногда и IV) определяют интерполяционную задачу (B). Класс задач описанного вида иногда наз. классом прямых задач интерполирования.

Каждый в отдельности из перечисленных выше пунктов I, II, III и IV представляет и сам по себе научный интерес. Пункт I имеет «пограничный характер»: им занимаются теория чисел, функциональный анализ, теория функций и др. Пусть, напр., x является действительным числом, $x\in\mathbb{R}$, и $\{x\}$ — его дробная часть. Семейство отображений $f_n : X\to Y$, $n\in N$, задается следующим образом: $X\subset\mathbb{R}$, $Y=[0,\ 1)$, $f_n(x)=\{x^n\}$, $n=1,\ 2,\ldots$, и рассматривается следующая конкретизация интерполяционной задачи (B):

$$(f_n)\ (x)=\{x^n\}=y_n,\quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{2}$$

Для нек-рых подмножеств X, $X\subset\mathbb{R}$, пункт I задачи (2) в какой-то мере исследован, но в целом проблема (2) трудна: до сих пор (1978), напр., нет ответа на вопрос о распределении дробных долей $\{e^n\}$ степени числа e, что является весьма частным подвопросом пункта I задачи (2). Связь между вопросом I и проблемами базисности системы элементов в различных функциональных пространствах отмечались, напр., в [9].

Вопрос II самый старый в теории И., он лежит у истоков всей теории И. и связан с именами И. Ньютона (I. Newton), Ж. Лагранжа (J. Lagrange), Н. Абеля (N. Abel), Ш. Эрмита (Ch. Hermite) и др. До 20 в. задачи I, II и IV почти не рассматривались, а решение задачи II, как правило, носило формальный характер.

Пункт III тесно примыкает к пункту II, но представляет интерес еще и потому, что во многих задачах он эквивалентен проблеме полноты, а иногда и базисности различных систем элементов $\{f_\alpha\}$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, в соответствующих функциональных пространствах (полнота обычно устанавливается с помощью критерия С. Банаха (S. Banach), в к-ром доказана эквивалентность проблемы полноты нек-рой задаче единственности).

Важным примером исследований, относящихся к пункту IV, являются задачи, посвященные изучению классов функций, принимающих целые значения на заданном множестве точек (напр., $F(n)$ или $F(q^n)$, $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$, являются целыми числами). Эта область особенно бурно развивалась после получения Д. Пойа (G. Polya) следующего результата: если целая функция $F(z)$ экспоненциального типа σ, $\sigma<\ln 2$, такова, что ее значения $F(n)$, $\forall n$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, являются целыми числами, то $F(z)$ — полином. Константа $\ln 2$ в приведенной теореме точная, ибо функция $F(z)=2^z=e^{z\ln 2}$ является целой экспоненциального типа $\sigma=\ln 2$, отлична от многочлена и принимает в точках $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$ целые значения (см., напр., [5], [10]).

В том случае, когда в задаче (B) множество X является топологич. пространством и редуцированная в каком-то смысле задача (B) имеет сравнительно простое решение x^*, одним из методов ее решения является интерполяционный процесс, при к-ром исследуется сходимость решений x^* к решению x системы (B). О частном виде подобного рода процессов упоминалось выше. Однако во многих случаях задачи типа (B) эффективно решаются функциональными методами (см., напр., [10]).

Помимо прямых интерполяционных проблем определенный интерес представляют о б р а т н ы е з а д а ч и и н т е р п о л и р о в а н и я. Основное содержание исследований в этом направлении состоит в следующем. Заданы непустые множества X и Y и нек-рый класс F семейств отображений $\{\{f_\alpha\},\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$, действующих из X в Y. Пусть $M=\{\{y_\alpha\},\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$ — некоторая совокупность наборов $\{y_\alpha\}$ элементов из множества Y. Задача состоит в нахождении необходимых и достаточных условий, к-рым должен удовлетворять подкласс F_M, $F_M\subset F$, для того, чтобы существовало семейство $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}\in F_M$, обладающее следующим свойством: множество $\{f_\alpha(x),\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$ совпадает с M (или $\subset M$, или $\supset M$), когда переменная x пробегает всю совокупность значений X. Выбор F и M тесно между собой связан. Поэтому в исследованиях, относящихся к разделу обратных задач И., обычно пара $(F,\ M)$ естественным образом составляет единое целое. В качестве примера обратной задачи описанного здесь вида возьмем одну из формулировок из круга вопросов, примыкающих к известной интерполяционной п р о б л е м е Н е в а н л и н н ы — П и к а. Пусть $\{z_k\}$ — последовательность точек открытого единичного круга $|z|<1$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Каждой функции $x(z)$ из класса H^∞ (H^∞ — класс функций, аналитических и ограниченных в круге $|z|<1$) ставится в соответствие последовательность ее значений в точках z_k:

$$S(x)=\{f_k(x)=x(z_k)\}_{k=1}^{\infty}.$$

Таким образом, задан нек-рый вид F отображений $X=H^\infty$ в $Y=\mathbb{C}$. Пусть в качестве M берется пространство l^∞ (множество всех ограниченных последовательностей комплексных чисел $c=(c_1,\ c_2,\ldots)$ с нормой $\|c\|=\sup\limits_k|c_k|$).

В рассматриваемом случае обратная задача конкретизируется следующим образом: требуется дать описание множества всех последовательностей точек $\{z_k\}$ единичного круга $|z|<1$ (т. е. класса $F_M=F_{l^\infty}$ отображений специального вида $f_k(x)=x(z_k)$), обладающих следующим свойством: оператор $S(x)$ отображает все H^∞ на l^∞. Последовательности $\{z_k\}$, обладающие указанными качествами, наз. и н т е р п о л я ц и о н н ы м и. Таким образом, множество всех интерполяционных последовательностей $\{z_k\}$ и определяет в данной ситуации класс $F_M=F_{l^\infty}$. Ответ на поставленный вопрос дает т е о р е м а К а р л е с о н а: для того чтобы последовательность точек $\{z_k\}$ открытого единичного круга $|z|<1$ была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы существовало $\delta>0$ такое, что

$$\prod_{j\neq k}\left|\frac{z_k-z_j}{1-\bar{z}_jz_k}\right|>\delta,\quad k=1,2,\ldots$$

(так наз. у с л о в и е р а з д е л е н и я). Обратные задачи И., типа решенной Л. Карлесоном (L. Carleson), рассматривались и для других классов функций и соответствующих пространств числовых последовательностей (см., напр., [9], [12], [13], [14]).

См. также *Абеля — Гончарова проблема*.

Лит.: [1] Б е р е з и н И. С., Ж и д к о в Н. П., Методы вычислений, т. 1, 3 изд., М., 1966, т. 2, 2 изд., М., 1962; [2] Г е л ь ф о н д А. О., Исчисление конечных разностей, М.—Л., 1952; [3] Г о н ч а р о в В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [4] У о л ш Д ж.-Л., Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, пер. с англ., М., 1961; [5] Б и б е р б а х Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967; [6] N ö r l u n d N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung, B., 1924; [7] е г о ж е, Leçons sur les séries d'interpolation, P., 1926; [8] W h i t t a k e r J. M., The interpolatory function theory, Camb., 1935; [9] D u r e n P. L., Theorie of H^p spaces, N.Y.—L., 1970; [10] К а з ь м и н Ю. А., Методы интерполяции аналитических функций и их приложения, Докт. дисс., М., 1972; [11] К о р о б е й н и к Ю. Ф., «Матем. сб.»,

1975, т. 97, № 2, с. 193—229; т. 98, № 1, с. 3—26; [12] Кабайла В., «Литов. матем. сб.», 1963, т. 3, № 1, с. 141—47; [13] Седлецкий А. М., «Докл. АН СССР», 1973, т. 208, № 6, с. 1293—95; [14] Шведенко С. В., «Матем. заметки», 1977, т. 21, № 4, с. 503—08.

Ю. А. Казьмин.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ в вычислительной математике — способ приближенного или точного нахождения какой-либо величины по известным отдельным значениям этой же или других величин, связанных с ней. На основе И. построен ряд приближенных методов решения математич. задач.

Наибольшее значение в вычислительной математике имеет задача построения способов *интерполирования* функций. Интерполяция функционалов и операторов также широко используется при построении приближенных методов.

Приближенное представление и вычисление функций. И. функций рассматривается как один из способов их приближения. И. функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ по значениям ее в узлах x_k сетки $\Delta_n = \{a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant b\}$ означает построение другой функции $L_n(x) \equiv L_n(f; x)$ такой, что $L_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. В более общей постановке задача И. функции $f(x)$ состоит в построении $L_n(x)$ не только из условия совпадения значений функций $L_n(x)$ и $f(x)$ на сетке Δ_n, но и из требования совпадения в отдельных узлах их производных до какого-то порядка или нек-рых других соотношений, связывающих $f(x)$ и $L_n(x)$.

Обычно $L_n(x)$ строится в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x),$$

где $\{\varphi_i(x)\}$ — некоторая заранее выбранная система линейно независимых функций. Такое И. наз. линейным относительно системы $\{\varphi_i(x)\}$, а $L_n(x)$ — интерполяционным полиномом по системе $\{\varphi_i(x)\}$.

Выбор системы $\{\varphi_i(x)\}$ определяется свойством того класса функций, для приближения к-рых предназначаются интерполяционные формулы. Напр., для приближения 2π-периодических функций на $[0, 2\pi]$ за $\{\varphi_i(x)\}$ естественно взять тригонометрическую систему функций, для приближения на полуоси $[0, \infty)$ ограниченных или возрастающих функций — систему рациональных или показательных функций, учитывающих поведение приближаемых функций на бесконечности и т. д.

Чаще всего используется алгебраич. И.: $\varphi_i(x) = x^i$, простейший вариант которого — линейное интерполирование с двумя узлами И. x_k и x_{k+1} — определяется формулой

$$L_1(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] + f(x_k), \qquad (1)$$

$$x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}.$$

Алгебраическое И. более высокого порядка в задаче приближения функций на всем отрезке $[a, b]$ применяется на практике сравнительно редко. Обычно ограничиваются линейным И. по формуле (1) или квадратичным интерполированием с тремя узлами на частичных отрезках сетки по формуле

$$L_2(x) = \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k+1})} f(x_{k-1}) +$$

$$+ \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})} f(x_k) +$$

$$+ \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)} f(x_{k+1}), \qquad (2)$$

$$x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_{k+1}.$$

Имеются различные варианты записи алгебраич. интерполяционных многочленов (см. *Интерполяционная формула*).

Находит все большее применение И. *сплайнами* (см. *Интерполяционный сплайн*).

На практике чаще всего используются параболические или кубические сплайны. Интерполяционным кубическим сплайном дефекта 1 для функции $f(x)$ относительно сетки Δ_n наз. функцию $S_3(x)\equiv S_3(f;\ x)$, являющуюся многочленом третьей степени на каждом из отрезков $[x_{k-1},\ x_k]$, принадлежащую классу дважды непрерывно-дифференцируемых функций и удовлетворяющую условиям

$$S_3(x_k)=f(x_k),\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\quad n\geqslant 2.$$

При таком определении имеется еще два свободных параметра, для нахождения к-рых налагаются дополнительные краевые условия: $S_3^{(i)}(a)=S_3^i(b)$, $i=1,2$; $S_3'(a)=a_n$ и $S_3'(b)=b_n$ или нек-рые другие.

Как непосредственно для задачи приближения функций, так и при решении других задач используются сплайны, к-рые в точках сетки Δ_n совпадают не только со значениями функций $f(x)$, но и со значениями производных этой функции до нек-рого порядка.

Часто при обработке эмпирических данных $\{y_k\}$ коэффициенты a_i в $L_n(x)$ определяются, исходя из требования минимизации суммы

$$S=\sum_{k=1}^{m}[y_k-L_n(x_k)]^2,\quad m\geqslant n.$$

Такое построение функции $L_n(x)$ наз. интерполированием по методу наименьших квадратов.

И. функций многих переменных имеет ряд принципиальных и вычислительных трудностей. Напр., в случае алгебраич. И. интерполяционный многочлен Лагранжа фиксированной степени, вообще говоря, не существует для произвольной системы различных узлов И. В частности, для функций двух переменных $f(x,\ y)$ такой многочлен $L_n(x,\ y)$ суммарной степени не выше n может быть построен по узлам $(x_k,\ y_k)$ лишь при условии, что эти узлы не лежат на алгебраич. кривой порядка n.

Другой подход к И. функций многих переменных $f(x_1,\ldots,x_m)$ состоит в том, что сначала интерполируется функция по переменной x_1 при фиксированных x_k, $k=2,\ 3,\ldots,\ m$, потом по следующей переменной при фиксированных остальных x_k и т. д. При таком способе построения интерполяционный алгебраич. многочлен $L_{n_1\ldots n_m}(x_1,\ldots,x_m)$ для функции $f(x_1,\ldots,x_m)$ с узлами

$$\left(x_1^{k_1},\ \ldots,\ x_m^{k_m}\right),\quad x_j^{\nu}\neq x_j^{\mu};\quad \nu\neq\mu;\quad k_j=0,\ 1,\ \ldots,\ n_j;$$

имеет вид

$$L_{n_1\ldots n_m}(x_1,\ldots,x_m)=\sum_{k_1,\ \ldots,\ k_m=0}^{n_1,\ \ldots,\ n_m}\frac{\omega_{n_1}(x_1)\ldots\omega_{nm}(x_m)}{\omega_{n_1}'\left(x_1^{k_1}\right)\ldots\omega_{n_m}'\left(x_m^{k_m}\right)}\times$$

$$\times\frac{f\left(x_1^{k_1},\ \ldots,\ x_m^{k_m}\right)}{\left(x_1-x_1^{k_1}\right)\ldots\left(x_m-x_m^{k_m}\right)},$$

$$j=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

где

$$\omega_{n_j}(x_j)=\prod_{k_j=0}^{n_j}\left(x_j-x_j^{k_j}\right),\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Интерполяционные сплайны для функций многих переменных определяются на многомерной сетке при соответствующих изменениях по аналогии с одномерным случаем. И. функций используется для замены сложно вычисляемой функции другой, вычисляемой быстрее; для приближенного восстановления функции на всей области задания по значениям ее в отдельных точках; для получения сглаживающих функций, описывающих

плавный процесс. Такого рода задачи имеют как самостоятельное значение, так и возникают в качестве вспомогательных при решении более сложных задач во многих областях науки и техники. И. функций применяется также для приближенного нахождения предельных значений функций, в задачах ускорения сходимости последовательностей и рядов и в других вопросах.

Численное решение нелинейных уравнений и систем. Общие идеи построения интерполяционных методов решения уравнения $f(x)=0$ и систем уравнений $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)=0$, $i=1, 2, \ldots, m$, одни и те же. Трудности задачи И. функций многих переменных особенно сказываются при исследовании и практич. использовании такого рода методов для большого числа уравнений. В основу получения интерполяционных методов решения уравнения $f(x)=0$ положена замена функции $f(x)$ ее интерполяционным полиномом $L_n(x)$ и последующим решением уравнения $L_n(x)=0$. Корни уравнения $L_n(x)=0$ берутся за приближенные решения уравнения $f(x)=0$. Интерполяционный полином $L_n(x)$ используется также при построении итерационных методов решения уравнения $f(x)=0$.

Напр., взяв за x_{n+1} корень линейного интерполяционного алгебраич. многочлена, построенного по значениям $f(x_n)$ и $f'(x_n)$ в узле x_n, или по значениям $f(x_{n-1})$ и $f(x_n)$ в узлах x_{n-1} и x_n, приходят соответственно к методам Ньютона и секущих:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_{n-1}, x_n)},$$

где $f(x_{n-1}, x_n)$ — разделенная разность функции $f(x)$ для узлов x_{n-1} и x_n. При выполнении нек-рых условий последовательность значений x_n будет стремиться при $n\to\infty$ к решению уравнения $f(x)=0$.

Другой подход к построению методов решения уравнения $f(x)=0$ основан на И. обратной функции $x=g(y)$. Пусть в качестве интерполяционной формулы для функции $x=g(y)$ взят интерполяционный алгебраич. многочлен Лагранжа

$$L_n(y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega_n(y)}{\omega_n'(y_k)(y-y_k)}g(y_k),$$

$$\omega_n(y)=\prod_{k=0}^{n}(y-y_k).$$

Предполагается, что обратная функция существует в окрестности искомого корня уравнения $f(x)=0$ и составлена таблица значений x_k и $y_k=f(x_k)$, $k=0, 1, \ldots, n$. За следующее приближенное значение x_{k+1} принимается значение интерполяционного многочлена в нуле:

$$x_{k+1}=-\omega_n(0)\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{\omega_n'(y_k)\,y_k}.$$

Численное интегрирование. Аппарат И. функций лежит в основе построения многих квадратурных и кубатурных формул. Такого рода формулы строятся путем замены интегрируемой функции на всей области или на ее составных частях интерполяционными полиномами того или иного вида и последующим интегрированием этих полиномов.

Напр., квадратурные формулы наивысшей алгебраич. степени точности, так наз. *Гаусса квадратурные формулы*

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx\approx\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k),$$

где $p(x)$ — знакопостоянная весовая функция, получаются в результате замены функции $f(x)$ интерполяционным алгебраич. многочленом, построенным по корням x_k ортогонального относительно веса $p(x)$ многочлена степени n.

Если разделить весь отрезок интегрирования $[a, b]$ на четное число n равных частей длины $h=\frac{1}{n}(b-a)$ и на каждом сдвоенном частичном отрезке заменить $f(x)$ ее квадратичным интерполяционным многочленом с узлами в крайних и средней точках, то придем к составной *Симпсона формуле*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\,[f_0+f_n+2\,(f_2+f_4+\ldots+f_{n-2})+ \\ +4\,(f_1+f_3+\ldots+f_{n-1})],$$

где $f_k=f(a+kh)$, $k=0, 1, \ldots, n$.

Можно взять за основу и интерполяционные сплайны какой-то фиксированной степени. Изложенная выше схема построения формул для приближенного вычисления интегралов применима и в многомерном случае.

Численное дифференцирование. Формулы численного дифференцирования получаются в результате дифференцирования интерполяционных формул. При этом, как правило, заранее известна нек-рая априорная информация о дифференцируемой функции, касающаяся ее гладкости.

Пусть $L_n(x)$ — интерполяционный полином нек-рого вида для функции $f(x)$, а $R_n(x)$ — остаток интерполяционной формулы:

$$f(x)=L_n(x)+R_n(x).$$

Если в равенстве

$$f^{(i)}(x)=L_n^{(i)}(x)+R_n^{(i)}(x)$$

пренебречь величиной $R_n^{(i)}(x)$, то это приведет к формуле для приближенного вычисления i-й производной функции $f(x)$:

$$f^{(i)}(x) \approx L_n^{(i)}(x). \qquad (3)$$

Формулы численного дифференцирования, в основе к-рых лежит И., получаются из приближенного равенства (3) в зависимости от выбора интерполяционного полинома $L_n(x)$. При численном дифференцировании используются, как правило, приближенные значения функции в узлах; погрешность формул численного дифференцирования зависит не только от способа И. и шага И., но и от ошибки используемых значений функции в узлах. Напр., в случае линейного И. (1):

$$f'(x_k) \approx \frac{1}{h}\,[f(x_{k+1})-f(x_k)], \qquad (4)$$

причем для остатка $R_1'(x)$ имеет место представление:

$$R_1'(x_k)=-\frac{1}{2}\,f''(\xi)\,h, \quad \xi\in(x_k, \quad x_{k+1}), \quad h=x_{k+1}-x_k.$$

Если $f(x_{k+1})$ и $f(x_k)$ известны соответственно с погрешностями ε_{k+1} и ε_k, $\varepsilon_{k+1}\neq\varepsilon_k$, то погрешность формулы (4) будет содержать еще член $(\varepsilon_{k+1}-\varepsilon_k)/h$, к-рый с уменьшением шага h возрастает. При использовании формул численного дифференцирования шаг И. должен согласовываться с погрешностью значений функции. Поэтому на практике нередки случаи, когда известная с нек-рой погрешностью на густой сетке функция используется в данной задаче не во всех точках, а на более редкой сетке.

Численное решение интегральных уравнений. Неизвестная функция $\varphi(x)$ заменяется в интегральном уравнении какой-либо интерполяционной формулой (интерполяционным полиномом, интерполяционным сплайном и т. д.) с узлами И. x_k, а приближенные значения для $\varphi(x_k)$ находятся из системы, полученной после подстановки вместо независимой переменной x узлов И. x_k.

Напр., для лин
гольма 2-го рода

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds+f(x) \qquad (5)$$

можно воспользоваться лагранжевым представлением интерполяционного многочлена:

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)\,\varphi(x_k)+R_n(x)\equiv L_n(x)+R_n(x),$$

где $R_n(x)$ — остаток И.,

$$l_k(x)=\omega_n(x)/\omega_n'(x_k)\,(x-x_k),\quad \omega_n(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k).$$

Замена функции $\varphi(x)$ в (5) ее интерполяционным многочленом $L_n(x)$ и x на x_i, приводит к линейной системе уравнений

$$\varphi_i=\lambda\sum_{k=0}^{n} M_k(x_i)\,\varphi_k+f(x_i),$$

$$M_k(x_i)=\int_a^b K(x_i,\ s)\,l_k(s)\,ds,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

для нахождения приближенных значений φ_i решения $\varphi(x)$ уравнения (5) в узлах x_i. В случае нелинейных интегральных уравнений приближенные значения φ_i находятся соответственно из нелинейной системы.

Численное решение дифференциальных уравнений. Построение численных методов решения дифференциальных уравнений состоит в замене производных искомых функций интерполяционными формулами численного дифференцирования, а в ряде случаев и заменой интерполяционными формулами других функций и выражений, входящих в уравнения.

Пусть имеются формулы численного дифференцирования

$$y'(x_k)\approx\frac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h}=\frac{1}{h}\Delta y(x_k), \qquad (6)$$

$$y''(x_k)\approx\frac{1}{h^2}\left[y(x_{k-1})-2y(x_k)+y(x_{k+1})\right]=\frac{1}{h^2}\Delta^2 y(x_k)$$

для равноотстоящих узлов $x_k=x_0+kh$, получаемые соответственно дифференцированием формул линейной и квадратичной И. (1) и (2). Тогда для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$F(x,\ y,\ y',\ y'')=0$$

при нек-рых дополнительных условиях получается с учетом (6) уравнение в конечных разностях

$$F\left(x_k,\ y_k,\ \frac{1}{h}\Delta y_k,\ \frac{1}{h^2}\Delta^2 y_k\right)=0,$$

из к-рого вместе с уравнениями, полученными из дополнительных условий, находятся приближенные значения y_k решения $y(x)$ в узлах x_k.

Сведение дифференциальных уравнений с частными производными к соответствующим уравнениям в конечных разностях производится часто также с использованием формул численного дифференцирования.

Интерполяционный метод применим для решения дифференциальных уравнений, записанных в интегральной форме. Напр., для нахождения приближенного решения задачи Коши

$$y'=f(x,\ y),\quad y(x_0)=y_0 \qquad (7)$$

в точках $x_k=x_0+kh$, $k=0,\ 1,\ \ldots$, используются разностные формулы типа

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{j=1}^{n} B_j f(x_{n-j},\ y_{n-j}),$$

получаемые заменой функции под знаком интеграла в равенстве

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,\ y)\,dx$$

интерполяционным полиномом и последующим интегрированием. В частности, таким образом получены формулы Адамса для уравнения 1-го порядка (7) формулы Стёрмера для уравнений 2-го порядка и т. д.

Такой подход позволяет строить вычислительные алгоритмы для широкого класса дифференциальных уравнений в том числе и для уравнений в частных производных. Исследование разрешимости, точности и устойчивости решения возникающих конечно разностных уравнений представляет собой основную и наиболее трудную часть теории численного решения дифференциальных уравнений.

Интерполирование операторов и некоторые общие подходы к построению численных методов. Построение численных методов решения математич. задач, записанных в виде $y=Ax$, где элементы x и y принадлежат нек-рым множествам X и Y, а A — заданный оператор, состоит в замене множеств X и Y и оператора A или только нек-рых из этих трех объектов другими, удобными для вычислительных целей. При этом замена должна быть сделана так, чтобы решение новой задачи

$$\tilde{y}=\tilde{A}\tilde{x},$$

состоящей в нахождении $\tilde{y}$ или $\tilde{x}$, было в каком-то смысле близко к решению первоначальной задачи. Один из способов замены оператора A его приближением $\tilde{A}$ состоит в использовании *интерполирования операторов*. Имеются различные формулировки задачи И. операторов. Линейный интерполяционный оператор $L_1(F;\ x)$ для данного оператора записывается в виде

$$L_1(F;\ x)=F(x_0)+F(x_0,\ x_1)(x-x_0), \qquad (8)$$

где x_0 и x_1 — узлы И., $F(x_0, x_1)$ — оператор разделенной разности 1-го порядка, определяемый как линейный оператор, удовлетворяющий условию

$$F(x_0,\ x_1)(x_0-x_1)=F(x_0)-F(x_1).$$

Данное определение оператора разделенной разности в ряде случаев конкретизируется. С использованием линейного И. (8) «метод секущих» для уравнения $F(x)=0$ записывается в виде

$$x_{n+1}=x_n-F^{-1}(x_{n-1},\ x_n)\,F(x_n),$$

где $F^{-1}(x_{n-1}, x_n)$ — оператор, обратный к $F(x_{n-1}, x_n)$.

Постановка задачи И. функционалов, представляющая интерес для теории приближенных методов такова. Пусть $\{\psi_i(x)\}$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$,— некоторые фиксированные функционалы или классы функционалов, определенные на X. Функционал $L_n[F;\ x]$ наз. интерполяционным функциональным многочленом для данного функционала $F(x)$ и системы точек $\{x_k\}$ из X, если выполняются соотношения

$$L_n[F;\ x_k]=F(x_k),\quad L_n[\psi_i;\ x]\equiv\psi_i(x),$$
$$i=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

И. функционалов используется при построении приближенных методов вычисления континуальных интегралов, для нахождения экстремальных значений функционалов и ряда других задач.

Напр., приближенные интерполяционные формулы для вычисления континуальных интегралов имеют вид

$$\int_X F(x)\,d\mu(x)\approx\int_X L_n[F;\ x]\,d\mu(x),$$

при этом интеграл от интерполяционного полинома $L_n[F;\ x]$ для нек-рых мер μ может вычисляться точно или сводиться к конечномерным интегралам. Интерполяционный полином $L_1[F;\ x]$, когда X есть пространство непрерывных на отрезке $[a,\ b]$ функций $C[a,\ b]$,

представляется в виде интеграла Стилтьеса

$$L_1[F;\ x]=F(x_0)+$$
$$+\int_a^b \frac{x(\tau)-x_0(\tau)}{x_1(\tau)-x_0(\tau)}\,d_\tau F[x_0(\cdot)+\chi(\cdot,\tau)(x_1(\cdot)-x(\cdot))],$$

где $x_0(t)$ и $x_1(t)$ — узлы И., а функция

$$\chi(t,\tau)=\begin{cases}1, & \tau>t,\\ 0, & \tau\leqslant t.\end{cases}$$

Если $F(x)$ — постоянный или линейный функционал, то $L_1[F;\ x]\equiv F(x)$.

Применение И. к нахождению экстремальных значений функционалов может быть проиллюстрировано двумя интерполяционными аналогами метода градиента для нахождения локальной точки безусловного минимума функционала $F(x)$, определенного на нек-ром гильбертовом пространстве. Первый из этих методов получается, если в градиентном методе заменить $\operatorname{grad} F(x_n)$ на $F(x_{n-1},\ x_n)$, т. е.

$$x_{n+1}=x_n+\varepsilon_n F(x_{n-1},\ x_n),\quad \varepsilon_n>0,\quad n=1,\ 2,\ \ldots \qquad (9)$$

Второй метод использует градиент интерполяционного полинома. По приближениям x_{n-2}, x_{n-1}, x_n к экстремальной точке x^* функционала $F(x)$ строится квадратичный интерполяционный функционал

$$L_2[F;\ x]=F(x_n)+F(x_{n-1},\ x_n)(x-x_n)+$$
$$+F(x_{n-2},\ x_{n-1},\ x_n)(x-x_{n-1})(x-x_n),$$

где $F(x_{n-2},\ x_{n-1},\ x_n)$ — разделенная разность 2-го порядка функционала $F(x)$ относительно узлов x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, и новое приближение x_{n+1} находится по формуле

$$x_{n+1}=x_n-\varepsilon_n \operatorname{grad} L_2[F;\ x_n], \qquad (10)$$
$$\varepsilon_n>0,\quad n=2,\ 3,\ \ldots$$

Итерационные методы (9) и (10) используют соответственно два и три начальных приближения.

Применение И. функционалов и операторов для построения вычислительных алгоритмов решения конкретных задач основано на использовании интерполяционных формул с малой величиной погрешности. Такого рода формулы должны строиться для отдельных классов функционалов и операторов с учетом специфики этих классов.

Лит.: [1] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 1—2, М., 1959—60; [3] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [4] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы, т. 1—2, М., 1976—77; [5] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976; [6] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [7] Яцович Л. А., Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам, Минск, 1976. *Л. А. Яцович.*

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ОПЕРАТОРОВ — получение из известных свойств оператора в двух или нескольких пространствах выводов о свойствах этого оператора в нек-рых в определенном смысле промежуточных пространствах. Банаховой парой A, B наз. два банаховых пространства, алгебраически и непрерывно вложенные в отделимое линейное топологич. пространство $\mathfrak{A}$. На пересечении $A\cap B$ вводится норма

$$\|x\|_{A\cap B}=\max\{\|x\|_A,\ \|x\|_B\};$$

на арифметич. сумме $A+B$ — норма

$$\|x\|_{A+B}=\inf_{x=u+v}\{\|u\|_A+\|v\|_B\}.$$

Пространства $A\cap B$ и $A+B$ банаховы. Банахово пространство E наз. промежуточным для пары A, B, если $A\cap B\subset E\subset A+B$.

Линейное отображение T, действующее из $A+B$ в $C+D$, наз. ограниченным оператором

из пары A, B в пару C, D, если его сужение на A (соответственно B) является ограниченным оператором из A (соответственно B) в C (соответственно D). Тройка пространств $\{A, B, E\}$ наз. интерполяционной относительно тройки $\{C, D, F\}$, $C \cap D \subset F \subset C+D$, пространство E (соответственно F) — промежуточное для пары A, B (соответственно C, D), если всякий ограниченный оператор из пары A, B в пару C, D отображает E в F. Если $A=C$, $B=D$ и $E=F$, то пространство E наз. интерполяционным между A и B. Для интерполяционных троек существует константа c такая, что

$$\| T \|_{E \to F} \leqslant c \max \{ \| T \|_{A \to C}, \ \| T \|_{B \to D} \}.$$

Первая интерполяционная теорема получена М. Риссом (M. Riesz, 1926): тройка пространств $\{L_{p_0}, L_{p_1}, L_p\}$ является интерполяционной относительно тройки $\{L_{q_0}, L_{q_1}, L_q\}$, если $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant \infty$ и при нек-ром $\theta \in (0, 1)$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Мера, по к-рой строятся перечисленные пространства, может быть своей для каждой тройки. Аналог этой теоремы может не быть справедливым для других классич. семейств пространств; напр., пространство $C^1(0, 1)$ не является интерполяционным между $C(0, 1)$ и $C^2(0, 1)$.

Интерполяционным функтором F наз. функтор, ставящий в соответствие каждой банаховой паре A, B промежуточное пространство $F(A, B)$, причем для любых двух банаховых пар A, B и C, D тройки $\{A, B, F(A, B)\}$ и $\{C, D, F(C, D)\}$ являются друг относительно друга интерполяционными. Имеется ряд методов построения интерполяционных функторов. Наибольшее число приложений нашли два из них.

K-метод Петре. Для банаховой пары A, B строится функционал

$$K(t, x) = \inf_{x=u+v} \{ \| u \|_A + t \| v \|_B \},$$

эквивалентный при каждом t норме в $A+B$. Банахово пространство G измеримых на полуоси функций наз. идеальным пространством, если из того, что $|f(t)| \leqslant |g(t)|$ почти всюду на $(0, \infty)$ и $g \in G$, вытекает $f \in G$ и $\|f\|_G \leqslant \|g\|_G$. Рассматриваются все элементы x из $A+B$, для к-рых $K(t, x) \in G$. Они образуют банахово пространство $(A, B)_G^K$ относительно нормы $\|x\|_{(A, B)_G^K} = \|K(t, x)\|_G$. Пространство $(A, B)_G^K$ будет ненулевым и промежуточным для A, B в том и только в том случае, когда функция $\min \{t, 1\}$ принадлежит G. В этом случае функтор $F(A, B) = (A, B)_G^K$ будет интерполяционным. Для нек-рых банаховых пар функционал $K(t, x)$ вычисляется, и это позволяет эффективно строить интерполяционные пространства. Для пары L_1 и L_∞

$$K(t, x) = \int_0^t x^*(\tau)\, d\tau,$$

где $x^*(\tau)$ — равноизмеримая с функцией x невозрастающая непрерывная справа функция на $(0, \infty)$. Для пары C и C^1

$$K(t, x) = \frac{1}{2} \widehat{\omega}(2t, x),$$

где $\omega(t, x)$ — модуль непрерывности функции x, а знак $\widehat{\ }$ означает переход к наименьшей выпуклой мажоранте функции на $(0, \infty)$. Для пары $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ (*Соболева пространство*)

$$K(t, x) = \begin{cases} \omega_{l, p}(t^{1/p}, x) + t \| x \|_p, & t < 1, \\ \| x \|_{L_p}, & t \geqslant 1, \end{cases}$$

где

$$\omega_{l,\,p}(t,\,x)=\sup_{|h|\leqslant l}\|\Delta_h^n x(s)\|_{L_p},$$

За пространство G часто принимается пространство с нормой

$$\|f\|_G=\left\{\int_0^\infty (t^{-\theta}|f(t)|^q\frac{dt}{t}\right\}^{1/q},\quad 0<\theta<1,\ 1\leqslant q\leqslant\infty.$$

Соответствующий функтор обозначается $(A,\,B)^K_{\theta,\,p}$. Важную роль в теории уравнений с частными производными играют пространства Бесова

$$B^{ln}_{p,\,q}=(L_p,\,W^l_p)^K_{\theta,\,q},$$

где $m=\theta l$. Ряд классич. неравенств анализа уточняется в терминах пространств Лоренца

$$L_{r,\,q}=(L_1,\,L_\infty)^K_{\theta,\,q},\quad r=1/(1-\theta).$$

К о м п л е к с н ы й м е т о д К а л ь д е р о н а — Л и о н с а. Для банаховой пары A, B через $\Phi(A,\,B)$ обозначается пространство, состоящее из всех функций $\varphi(z)$, определенных в полосе $\Pi: 0\leqslant\mathrm{Re}\,z\leqslant 1$ комплексной плоскости, со значениями в пространстве $A+B$, обладающих свойствами: 1) $\varphi(z)$ непрерывна и ограничена по норме $A+B$ в Π, 2) $\varphi(z)$ аналитична относительно нормы в $A+B$ внутри Π, 3) $\varphi(i\tau)$ непрерывна и ограничена по норме A, 4) $\varphi(1+i\tau)$ непрерывна и ограничена по норме B. Пространство $[A,\,B]_\alpha$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, определяется как совокупность всех элементов $x\in A+B$, представимых в виде $x=\varphi(\alpha)$ при $\varphi\in\Phi(A,\,B)$. В нем вводится норма

$$\|x\|_{[A,\,B]_\alpha}=\inf_{\varphi(\alpha)=x}\|\varphi\|_{\Phi(A,\,B)}.$$

Таким образом строится интерполяционный функтор $[A,\,B]_\alpha$. Если $A=L_{p_0}$ и $B=L_{p_1}$, $1\leqslant p_0,\,p_1\leqslant\infty$, то $[L_{p_0},\,L_{p_1}]_\alpha=L_p$, где $1/p=(1-\alpha)/p_0+\alpha/p_1$. Если G_0 и G_1 — два идеальных пространства, и хотя бы в одном из них норма абсолютно непрерывна, то пространство $[G_0,\,G_1]_\alpha$ состоит из всех функций $x(t)$, для к-рых $|x(t)|=|x_0(t)|^{1-\alpha}|x_1(t)|^\alpha$ при нек-рых $x_0\in G_0$, $x_1\in G_1$. Если для двух комплексных гильбертовых пространств H_0 и H_1 имеется вложение $H_1\subset H_0$, то пространства $[H_0,\,H_1]\in$ образуют важное для приложений семейство пространств, наз. г и л ь б е р т о в о й ш к а л о й. Если $H_0=L_2$ и $H_1=W^l_2$, то $[H_0,\,H_1]_\alpha=W^{\alpha l}_2$ (пространство Соболева с дробными индексами). О других методах построения интерполяционных функторов, а также об их связях с теорией шкал банаховых пространств см. [1], [3], [5], [8].

Особую роль в теории И. о. играет направление, связанное с интерполяционной т е о р е м о й М а р ц и н к е в и ч а об операторах слабого типа: оператор T, действующий из банахова пространства A в пространство всех измеримых функций, напр., на полуоси, наз. о п е р а т о р о м с л а б о г о т и п а $(A,\,\psi)$, если $(Tx)^*(t)\leqslant\frac{c}{\psi(t)}\|x\|_A$. При этом предполагается, что функции $\psi(t)$ и $t/\psi(t)$ не убывают (напр., $\psi(t)=t^\alpha$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$). Теоремы типа теоремы Марцинкевича позволяют для операторов T слабых типов $(A_0,\,\psi_0)$ и $(A_1,\,\psi_1)$ одновременно (A_0, A_1 — банахова пара) описывать пары пространств A, E, для к-рых $TA\subset E$. Во многих случаях достаточно проверить, что из A в E действует оператор

$$\frac{1}{\psi_0(t)}K\left(\frac{\psi_0(t)}{\psi_1(t)},\ x\right),$$

где $K(t,\,x)$ — функционал Петре для пространств A_0, A_1. Если действие из A в E показано для всех ли-

нейных операторов слабых типов (A_i, ψ_i), то оно будет иметь место и для квазиаддитивных операторов (со свойством $|T(x+y)(t)| \leqslant b(|Tx(t)|+|Ty(t)|)$ слабых типов (A_i, ψ_i), $i=0, 1$. Многие важные операторы анализа (напр., сингулярный оператор Гильберта) имеют слабый тип в естественных пространствах и поэтому соответствующие интерполяционные теоремы получили многочисленные применения.

Лит.: [1] Butzer P., Berens H., Semi-groups of Operators and Approximation, B., 1967; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., М., 1965; [3] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 2, с. 89—168; [4] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э., Неоднородные граничные задачи и их приложения, пер. с франц., М., 1971; [5] Мадженес Э., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 2, с. 169—218; [6] Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974; [7] Функциональный анализ, [Справочная математическая библиотека], 2 изд., М., 1972; [8] Bergh T. Löfström, Interpolation spaces, B., 1976. *С. Г. Крейн.*

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — формула для приближенного вычисления значений функции $f(x)$, основанного на замене приближаемой функции $f(x)$ более простой в каком-то смысле функцией

$$g(x) \equiv g(x;\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)$$

наперед заданного класса, причем параметры a_i, $i=0, 1, \ldots, n$, выбираются таким образом, чтобы значения $g(x)$ совпадали с известными заранее значениями $f(x)$ для данного множества $n+1$ попарно различных значений аргумента:

$$g(x_k) = f(x_k), \quad k=0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Такой способ приближенного представления функций наз. *интерполированием*, или интерполяцией, а точки x_k, для к-рых должны выполняться условия (1),— узлами интерполяции. Вместо простейших условий (1) могут быть заданы значения каких-либо иных величин, связанных с $f(x)$, напр. значения производных функции $f(x)$ в узлах интерполяции.

Среди методов интерполирования самым распространенным является линейное интерполирование, когда приближение ищется в классе (обобщенных) полиномов

$$g(x;\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) \tag{2}$$

по некоторой системе функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$. Для того, чтобы для любой функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$, и для любого набора $n+1$ узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $x_i \in [a, b]$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ существовал интерполяционный полином (2), необходимо и достаточно, чтобы система функций $\{\varphi_i(x)\}$ являлась *Чебышева системой* на отрезке $[a, b]$. При этом интерполяционный полином будет единственным и его коэффициенты a_i можно найти непосредственным решением системы (1).

Чаще всего в качестве $\{\varphi_i(x)\}$ берут последовательность степеней x:

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots,$$

последовательность тригонометрических функций:

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \ldots,$$

или последовательность показательных функций

$$1,\ e^{\alpha_1 x},\ e^{\alpha_2 x},\ \ldots,$$

где $\{\alpha_i\}$ — некоторая подпоследовательность попарно различных действительных чисел.

В случае интерполирования алгебраич. многочленами

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{3}$$

система функций $\{\varphi_i(x)\}$ такова:

$$\varphi_i(x) = x^i, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{4}$$

а система уравнений (1) имеет вид

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_k^i = f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Система (4) является системой Чебышева, что обеспечивает существование и единственность интерполяционного многочлена вида (3). Особенностью системы (4) является возможность получения явного представления интерполяционного многочлена (3), не прибегая к непосредственному решению системы (5). Одну из явных форм интерполяционного многочлена (3):

$$g_n(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{6}$$

наз. интерполяционным многочленом Лагранжа. В предположении непрерывности производной $f^{n+1}(x)$ остаточный член интерполяционного многочлена (6) может быть записан в форме

$$f(x) - g_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, \omega_n(x), \tag{7}$$

$$\xi \in [y_1, y_2], \quad \omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i);$$

здесь $y_1 = \min(x_0, x_1, \ldots, x_n, x)$, $y_2 = \max(x_0, x_1, \ldots, x_n, x)$. Величина остаточного члена (7) зависит, в частности, от значения многочлена $\omega_n(x)$. Представляет интерес такой выбор узлов интерполяции, при к-ром $\sup\limits_{[a,\ b]} |\omega_n(x)|$ был наименьшим. Распределение узлов будет оптимальным в указанном смысле, если в качестве узлов интерполяции взяты корни

$$x_k = \frac{1}{2}(b + a) + \frac{1}{2}(b - a) \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[a, b]$ многочлена

$$\overline{T}_{n+1}^{[a,\ b]}(x) = (b - a)^{n+1} 2^{-1-2n} T_{n+1}\left(\frac{2x - (b+a)}{b-a}\right),$$

где $T_{n+1}(z)$ — *Чебышева многочлен* степени $n+1$.

Существует ряд других явных представлений интерполяционного алгебраич. многочлена (3), более приспособленных для решения тех или иных практич. задач интерполяции (см., напр., *Бесселя интерполяционная формула*, *Гаусса интерполяционная формула*, *Ньютона интерполяционная формула*, *Стирлинга интерполяционная формула*, *Стеффенсена интерполяционная формула*, *Эверетта интерполяционная формула*). Если заранее трудно оценить степень интерполяционного многочлена, требуемую для достижения заданной точности (напр., при интерполировании таблиц), то прибегают к использованию *Эйткена схемы*, по к-рой интерполяционные многочлены все более высокой степени строятся последовательно, что позволяет контролировать точность в процессе вычислений. Другой подход к построению И. ф. см. в ст. *Фрезера диаграмма*.

Решение задачи алгебраич. интерполирования по значениям функции и ее производных в узлах интерполяции дается *Эрмита интерполяционной формулой*.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975. *М. К. Самарин.*

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС — процесс получения последовательности интерполирующих функций $\{f_n(z)\}$ при неограниченном возрастании числа n условий *интерполирования*. Если интерполирующие функции $f_n(z)$ представлены в виде частных сумм некоторого функционального ряда, то последний иногда наз.

интерполяционным рядом. Целью построения И. п. чаще всего является, по крайней мере в простейших первоначальных задачах интерполирования, приближение в каком-то смысле посредством интерполирующих функций $f_n(z)$ исходной функции $f(z)$, о к-рой или имеется неполная информация или форма к-рой слишком сложна для непосредственного использования.

Довольно общая ситуация, связанная с построением И. п., описывается следующим образом. Пусть (a_{jk}), $0 \leqslant k \leqslant j$, $j=0, 1, \ldots$ — бесконечная треугольная таблица произвольно заданных комплексных чисел

$$\begin{array}{llll} a_{00} & & & \\ a_{10} & a_{11} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \end{array} \tag{1}$$

наз. узлами интерполяции. Пусть, наряду с таблицей (1), имеется таблица аналогичного вида (w_{jk}), $0 \leqslant k \leqslant j$, $j=0, 1, \ldots$, также составленная из произвольно заданных комплексных чисел w_{jk}.

Если в n-й строке a_{nk}, $k=0, 1, \ldots, n$, таблицы узлов (1) нет совпадающих чисел, или, как еще говорят, вся эта строка состоит из простых узлов, то, пользуясь, напр., *Лагранжа интерполяционной формулой*, строится (единственный) алгебраический интерполяционный многочлен $p_n(z)$ степени не выше n, удовлетворяющий простым условиям интерполяции

$$p_n(a_{nk}) = w_{nk}, \quad k=0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Если же точка a_{n0} является кратным узлом кратности $\nu_0 > 1$ в n-й строке, т. е. встречается в этой строке ν_0 раз: $a_{n0}=a_{nk_1}=\ldots=a_{nk_{\nu_0-1}}$, то соответствующие условия кратного интерполирования в узле a_{n0} имеют вид

$$p_n(a_{n0}) = p_n^{(0)}(a_{n0}) = w_{n0}, \tag{3}$$

$$p_n'(a_{n0}) = w_{nk_1}, \ \ldots, \ p_n^{(\nu_0-1)}(a_{n0}) = w_{nk_{\nu_0-1}}.$$

В общем случае при наличии кратных узлов (единственный) алгебраический интерполяционный многочлен $p_n(z)$ степени не выше n строится по этим условиям, напр., по *Эрмита интерполяционной формуле*. В качестве примера системы узлов (1) можно привести систему $j+1$, $j=0, 1, \ldots$, равноотстоящих узлов $a_{jk}=e^{2\pi ik/(j+1)}$ на единичной окружности, применяемую в случае так наз. интерполяции в корнях из единицы (см. [5]).

В результате осуществляемого таким путем И. п. получается последовательность интерполяционных многочленов $\{p_n(z)\}$, определяемая таблицами (a_{jk}) и (w_{jk}). Основными вопросами, здесь возникающими, являются: определить в зависимости от (a_{jk}) и (w_{jk}) множество $E \subset \mathbb{C}$ точек сходимости последовательности $\{p_n(z)\}$, в к-рых существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(z)=q(z)$; определить характер предельной функции $q(z)$; определить множество $F \subset E$, на к-ром сходимость $p_n(z) \to q(z)$ равномерная; и т. д.

В теории функций комплексного переменного наиболее изучен случай, когда таблица (w_{jk}) строится по значениям регулярной аналитич. функции $f(z)$ и ее производных в узлах интерполяции так, что (применительно к узлу a_{n0} кратности $\nu_0 \geqslant 1$; ср. (3))

$$p_n(a_{n0}) = p_n^{(0)}(a_{n0}) = f(a_{n0}),$$

$$p_n'(a_{n0}) = f'(a_{n0}), \ \ldots, \ p_n^{(\nu_0-1)}(a_{n0}) = f^{(\nu_0-1)}(a_{n0}).$$

В этом случае интерполяционный многочлен $p_n(z)$ можно записать по формуле Эрмита в виде интеграла по контуру Γ, охватывающему узлы a_{nk}, $k=0, 1, \ldots, n$, на к-ром и внутри к-рого $f(z)$ регулярна:

$$p_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega_n(t)-\omega_n(z)}{\omega_n(t)(t-z)}f(t)\,dt, \qquad (4)$$

$$\omega_n(z)=(z-a_{n0})(z-a_{n1})\ldots(z-a_{nn}).$$

Из формулы (4) легко получается и интегральное представление остаточного члена интерполяции $R_n(z)=f(z)-p_n(z)$. Вообще говоря, последовательность $\{p_n(z)\}$, построенная по $f(z)$, может расходиться. Если же она сходится, то предельная функция $q(z)$ может не совпадать с $f(z)$. Основным вопросом является изучение сходимости $\{p_n(z)\}$ к $f(z)$ и нахождение таких систем узлов (a_{jk}), для к-рых сходимость в каком-то смысле оптимальная. Пусть, напр., функция $f(z)$ регулярна на континууме $K\subset\mathbb{C}$, содержащем не менее двух точек, дополнение к-рого до расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ есть односвязная область, содержащая бесконечно удаленную точку. Пусть узлы (a_{jk}) принадлежат K. Тогда для того, чтобы И. п. $\{p_n(z)\}$ равномерно сходился на K к $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{M_n}=c,$$

где $M_n=\sup\{|\omega_n(z)|;\ z\in\partial K\}$, c — *емкость* множества K (см. [4]).

Классический вариант И. п. получается, когда узлы $a_{jk}=a_k$, $0\leqslant k\leqslant j$, $j=0, 1, \ldots$, составляют последовательность $\{a_k\}$, из к-рой на n-м шаге для получения многочлена $p_n(z)$ используются первые $n+1$ узлов $a_0, a_1, \ldots, a_n$. В этом случае для регулярной функции $f(z)$ многочлены $p_n(z)$ суть частные суммы интерполяционного ряда Ньютона

$$q(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\omega_n(z), \qquad (5)$$

$$\omega_n(z)=(z-a_0)(z-a_1)\ldots(z-a_n),$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(t)\,dt}{\omega_n(t)}.$$

При вычислениях интерполяционный ряд вида (5) имеет то преимущество перед последовательностью $\{p_n(z)\}$, что для перехода от уже известного многочлена $p_n(z)$ к $p_{n+1}(z)$ необходимо вычислить только один коэффициент ряда c_{n+1}. В зависимости от расположения узлов a_k и значений коэффициентов c_k, областью сходимости ряда Ньютона может быть любая односвязная область плоскости $\mathbb{C}$ с аналитич. границей. В частности, напр., если последовательность узлов $\{a_k\}$ имеет предельную точку только в бесконечности, $\sum_{k=m}^{\infty}1/|a_k|<\infty$ и ряд (5) сходится хотя бы в одной точке $z_0\neq a_k$, $k=0, 1, \ldots$, то он сходится равномерно в любом круге $|z|\leqslant R$ и, следовательно, его сумма $q(z)$ есть целая функция. Интерполяционный ряд Стирлинга есть частный случай ряда Ньютона для последовательности узлов $a_0=0$, $a_1=-1$, $a_2=1$, $\ldots$, $a_{2k-1}=-k$, $a_{2k}=k$, $\ldots$. Исследованы и другие разновидности интерполяционных рядов (см. [3], [5]).

Объектами изучения являются также И. п. с неалгебраическими интерполяционными полиномами $p_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n}b_\nu\varphi_\nu(z)$, составленными по другим системам функций $\{\varphi_\nu(z)\}$, отличным от системы степеней $\{z^\nu\}$, напр., по системе $\{e^{\alpha_\nu z}\}$ (см. [4], [6]).

Изучение И. п. в действительной области имеет свою специфику как в постановке задач, так и в результа-

тах (см. [2], [4]). Эта специфика обусловлена прежде всего естественным в действительной области отказом от требования регулярности интерполируемой функции $f(x)$. Известно, напр., что никакая система узлов на отрезке $[a, b]$ не гарантирует сходимости И. п. для произвольной непрерывной функции $f(x)$, $x \in [a, b]$. С другой стороны, если непрерывная функция $f(x)$ наперед задана, то всегда можно выбрать систему узлов так, чтобы И. п. сходился к $f(x)$.

Кроме И. п. с интерполяционными полиномами $p_n(z)$ внимание исследователей привлекают И. п. с рациональными функциями $r_n(z)$, напр. вида $r_n(z)=q_n(z)/\omega_{n-1}(z)$, где $\omega_{n-1}(z)=(z-b_0)\ldots(z-b_{n-1})$ и $q_n(z)$ — многочлен степени не выше n. Условия интерполяции (1) — (3) остаются в силе, но теперь должно быть добавлено условие на полюсы b_k, $k=0, 1, \ldots$, к-рые в простейшем случае задаются в виде треугольной таблицы (b_{jk}), $0\leqslant k\leqslant j$, $j=0, 1, \ldots$, аналогичной (1).

См. также *Абеля — Гончарова проблема*, *Бернштейна интерполяционный процесс*.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 1, 2 изд., М., 1967; [2] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [3] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, 2 изд., М., 1959; [4] Смирнов В. И., Лебедев Н. А., Конструктивная теория функций комплексного переменного, М., 1964; [5] Уолш Дж. Л., Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, пер. с англ., М., 1961; [6] Леонтьев А. Ф., Ряды экспонент, М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ СПЛАЙН — сплайн

$$S_m(\Delta_n;\ x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{m-1}x^{m-1}+\\ +\sum_{k=0}^{n-1}C_k\,(x-x_k)_+^m,$$

где

$$t_+=\begin{cases}t, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}\qquad x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n,$$

совпадающий с данной функцией в заданных различных точках $\{x_i\}$. Обычно при $m=2k+1$ полагают $\overline{x}_i=x_i$, $i=0, 1, \ldots, n$, и так как при этом у сплайна $S_{2k+1}(\Delta_n;\ x)$ остается еще $2k$ свободных параметров, то на сплайн налагают еще по k условий в точках x_0 и x_n, напр., $S^{(j)}_{2k+1}(\Delta_n,\ z)=y_z^{(j)}$, $j=1, 2, \ldots, k$, $z=x_0,\ x_1$, где $y_z^{(j)}$ — заданные числа. Если числа $y_z^{(j)}$ линейно зависят от данной функции, то соответствующий И. с. линейно зависит от этой функции. Для $m=2k$ полагают обычно $\overline{x}_0=x_0$, $\overline{x}_n=x_n$, $x_i=(\overline{x}_{i-1}+\overline{x}_i)/2$, $i=1, 2, \ldots, n-1$, и по k условий задают в точках x_0 и x_n. Если сплайн $S_m(\Delta_n,\ x)$ в точках $x_1, \ldots, x_{n-1}$ имеет непрерывную $(m-s)$-ю производную, а $(m-s+1)$-я производная в них разрывна, то при $s\geqslant 2$ в этих точках задают еще производные сплайна от 1-го до $(s-1)$-го порядка, требуя, чтобы эти производные совпадали с соответствующими производными интерполируемой функции. Рассматриваются также интерполяционные L- и L_q-сплайны и И. с. многих переменных. И. с. применяются для приближенного представления функций по их значениям на сетке. В отличие от интерполяционных полиномов для И. с. существуют матрицы узлов, для к-рых И. с. сходятся к произвольно заданной непрерывной интерполируемой функции.

Лит.: [1] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976; [2] Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и ее приложения, пер. с англ., М., 1972. *Ю. Н. Субботин.*

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ — то же, что *интерполирование*.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — задание значения (смысла) математич. выражений (символов, формул и т. д.). В математике такими значениями служат математич. объекты (множества, операции, выражения и т. д.). Сами эти значения также наз. И. соответствующих выражений.

Примеры. Значением (или И.) символа $\cdot$ может быть операция умножения действительных чисел, операция сложения целых чисел и т. д. Пусть в качестве И. символа $\cdot$ выбрана первая из этих операций. Если символы x и y понимаются как действительные переменные (т. е. переменные, областью изменения к-рых является множество всех действительных чисел), то значением выражения $x \cdot y$ является отображение, переводящее всякую пару действительных чисел в их произведение; если значениями символов x и y являются соответственно числа 6 и 2,5, то значением выражения $x \cdot y$ является число 15. Значением (или И.) высказывания в языке плоской геометрии Лобачевского при интерпретации Пуанкаре может служить соответствующее высказывание в языке плоской евклидовой геометрии.

Важнейшим видом И. являются теоретико-множественные И. выражений логич. языков. Когда речь идет об одновременной И. всех выражений языка, то говорят об И. языка. Теоретико-множественная И. логич. языка включает задание значений констант — предметных, функциональных, предикатных и констант более высоких ступеней (констант для предикатов от предикатов и т. д.), а также задание областей изменения переменных — предметных, функциональных и т. д. В многосортных И. различные предметные переменные могут иметь различные области изменения, то же касается функциональных и т. д. переменных. Наиболее употребительными, однако, являются И., при к-рых все предметные переменные, так же как и функциональные переменные с одинаковым числом аргументов и т. д., имеют одинаковые области изменения. Если областью изменения предметных переменных (иногда называемой областью, или носителем, И.) служит множество D_0, то областью изменения n-местных функциональных переменных служит нек-рое множество D_n n-местных операций на множестве D_0. В качестве множества D_n часто выбирается множество всех n-местных операций на D_0, в таком случае упоминание об области изменения функциональных переменных обычно опускается. Значениями предметных констант служат элементы из D_0, функциональных констант — элементы из D_1, D_2, ...

При теоретико-множественной И. логич. языка под И. терма (т. е. под значением терма при данной И.) понимается отображение, к-рое каждому набору значений переменных рассматриваемого языка (или, при несколько ином определении, набору значений переменных, входящих в терм) по определенному правилу сопоставляет элемент области И. Это отображение обычно задается индукцией по построению термов.

Для получения И. формул языка необходимо, кроме перечисленных выше компонент И., задать нек-рое непустое множество A, называемое множеством логических значений. И. n-местных предикатных констант являются отображениями из D_0^n в A; в частности, И. n-местных предикатных констант — это элементы A. Если в языке имеются нульместные, одноместные и т. д. предикатные переменные, то их областями изменения служат, соответственно, множество A, нек-рое подмножество множества A^{D_0}, содержащее И. всех одноместных предикатных констант и т. д. Интерпретация формулы определяется аналогично И. терма как отображение, сопоставляющее всякому набору значений предметных, функциональных и предикатных переменных языка элемент множества A. Важным видом теоретико-множественных И. являются алгебраич. И., при к-рых в качестве значений (И.) логич. связок языка выбираются операции на множестве A, в качестве значений кванторов — отображения из множества всех подмножеств A в A (обобщенные операции на A), и И. формулы определяется индукцией по пост-

роению. Среди других теоретико-множественных И. важнейшими являются *Крипке модели*.

Булевозначные алгебраические И. характеризуются тем, что множество A является полной булевой алгеброй, а значениями связок и кванторов являются: для конъюнкции — пересечение, для квантора существования — взятие точной верхней грани и т. д. Особо важную роль играют классические И., к-рые можно определить как булевозначные И. с двухэлементной булевой алгеброй A.

Понятие истинности формулы в данной И. определяется с помощью выделения в A нек-рых элементов. Напр., при классической И. единственным выделенным элементом является единица булевой алгебры (обозначаемая также «истина»). Формула наз. истинной при данной И., если ее И. принимает только выделенные значения. Моделью (или правильной И., или просто И.) системы формул нек-рого языка наз. И. языка, при к-рой все формулы системы истинны.

Термин стандартная И. употребляется, когда среди всевозможных значений (И.) нек-рого выражения имеется одно общепринятое. Напр., стандартной И. символа $=$ в классических И. является совпадение элементов, стандартными И. символов $+$ и $\cdot$ языка арифметики являются сложение и умножение натуральных чисел. Соответственно вводится понятие стандартной И. языка и стандартной модели. В частности, классическую И. языка арифметики первого порядка с предикатной константой $=$ и функциональными константами $+$ и $\cdot$, интерпретируемыми, как указано выше, наз. стандартной.

Кроме теоретико-множественных И. логич. языков используются и другие. Напр., И., при к-рых выражения нек-рого логич. языка интерпретируются выражениями другого логич. языка, применяются при доказательствах разрешимости, неразрешимости и относительной непротиворечивости логич. теорий. См. также *Конструктивная логика*.

Лит.: [1] Расева Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972; [2] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960; [3] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., 2 изд., М., 1976. *А. Л. Семенов.*

ИНТУИЦИОНИЗМ — совокупность философских и математич. идей и методов, рассматривающих математику как науку об умственных построениях. С точки зрения И., основным критерием истинности математич. суждения является интуитивная убедительность возможности построения мысленного эксперимента, связываемого с этим суждением. Поэтому в интуиционистской математике отвергается теоретико-множественный подход к определению математич. понятий, а также нек-рые способы рассуждения, принятые в классич. логике.

Истоки И. можно проследить еще в античной математике, а позднее в высказываниях таких ученых, как К. Гаусс (C. Gauss), Л. Кронекер (L. Kronecker), А. Пуанкаре (H. Poincaré), А. Лебег (H. Lebesgue), Э. Борель (E. Borel). Начиная с 1904 в ряде статей выступил с развернутой критикой нек-рых концепций классич. математики Л. Э. Я. Брауэр (L. E. J. Brouwer). В основе этой критики лежит обсуждение статуса существования в математике: в каком смысле следует считать установленным существование актуально заданного бесконечного множества и могут ли быть построены в виде потенциально осуществимой конструкции такие объекты исследования, как неизмеримое множество действительных чисел, нигде не дифференцируемая функция? Естественно предположить, что можно построить произвольное натуральное число в виде последовательного ряда однородных предметов, напр. ряда параллельных черточек. В рамках такой же идеализации можно допустить, что, построив нек-рое

натуральное число, можно построить затем и следующее добавив к уже построенному еще одну черточку. Но, возникает вопрос о том, с какого рода построением связано множество всех действительных чисел или множество всех натуральных чисел как единый объект исследования. Современные физич. воззрения также как будто не дают оснований полагать, что в окружающем нас мире актуально существуют бесконечные множества объектов. Есть серьезные основания считать, что объекты, существование к-рых устанавливается без использования *абстракции актуальной бесконечности*, а лишь в рамках гораздо более скромной *абстракции потенциальной осуществимости*, имеют более непосредственное отношение к реальной действительности. Однако при обычной теоретико-множественной трактовке не делается никакого различия между объектами, существование к-рых можно подтвердить с помощью нек-рого потенциально осуществимого построения, и абстрактными теоретико-множественными объектами исследования. Способы установления свойств обоих типов объектов в классич. математике основаны на законах логики, возникших в результате экстраполяции законов, верных для конечных совокупностей, на бесконечные множества. В области бесконечного эти законы не ориентированы на эффективное построение объектов, существование к-рых утверждается. Фактически такое положение дел приводит к появлению в математике так наз. «теорем чистого существования», в к-рых утверждается существование нек-рых объектов и в то же время не указывается никакого способа отыскания этих объектов. Такова, напр., известная теорема классич. анализа, утверждающая, что всякая непрерывная действительная функция, заданная на замкнутом ограниченном множестве, имеет максимум. Обычное доказательство этой теоремы не дает никаких указаний на метод построения искомого максимума. Это обстоятельство может и не смущать теоретико-множественно настроенного математика: он может считать, что максимум «есть» у всякой функции рассматриваемого класса, независимо от того, можно его отыскать в каждом частном случае или нет, «есть» как объект нек-рого воображаемого мира («платонистского мира», см. [6], с. 399). Однако такой подход не удовлетворяет, если принять во внимание возможности субъекта-исследователя. Имеется ли способ отыскания максимума, и если этот способ не указан, то в каком смысле верно, что максимум существует у всякой функции рассматриваемого класса? Известно, сколь трудной является задача поиска экстремума у функций даже весьма узкого класса (многочлены с рациональными коэффициентами от нескольких переменных), и, что существенно, указанная теорема нисколько не помогает в решении этой задачи. Заметим, что описанная выше критика классич. математики не связана непосредственно с *антиномиями* теории множеств. Появление антиномий можно рассматривать как дополнительный довод в пользу неудовлетворительности теоретико-множественного подхода, но критика относится и к таким разделам математики, где антиномий не возникает.

Описанная критика теоретико-множественного подхода к математике исторически привела к возникновению двух путей преодоления трудностей в обосновании математики — интуиционизма Л. Э. Я. Брауэра и формализма Д. Гильберта (D. Hilbert). Обе концепции, развиваясь, оказывают в настоящее время (1970-е гг.) значительное влияние друг на друга. Так, при обосновании непротиворечивости формальных теорий необходимо уточнить приемы содержательных умозаключений в метаматематике, что делается обычно в рамках тех или иных интуиционистских концепций. С другой

стороны, именно с помощью *формализации метода* удалось получить ряд важнейших результатов о логике интуиционизма.

Интуиционистская математика есть наука об интуитивно убедительных мысленных построениях. Сам Л. Э. Я. Брауэр трактовал эту интуитивную убедительность идеалистически, рассматривая мысленные построения как таковые «безотносительно к таким вопросам о природе конструируемых объектов, как вопрос, существуют ли эти объекты независимо от нашего знания о них» (см. [1]). Однако возможно и материалистич. толкование «интуиции» И. как наглядной умственной убедительности простейших конструктивных процессов реальной действительности. И независимо от философских установок, конкретные математич. результаты, относящиеся к интуиционистской математике и логике, представляют большую научную ценность.

При построении интуиционистской математики обычные логич. связки, употребляемые для формулировки математич. суждений, истолковываются способом, отличным от классического. Суждение считается истинным, только если исследователь имеет возможность его доказать. Доказательство же всегда связано с построением нек-рой мысленной конструкции. Так, утверждение, начинающееся с квантора существования $\exists x A(x)$, может быть доказано только путем построения объекта x, для к-рого доказывается суждение $A(x)$. Дизъюнкция $A \vee B$ суждений A и B считается доказанной, только если исследователь располагает методом доказательства одного из суждений A или B. С этой точки зрения суждение вида $A \vee \neg A$ может быть и не истинным, если проблема A не решена и не опровергнута к настоящему времени. Отсюда видно, что *исключенного третьего закон* неприемлем в интуиционистской математике в качестве логич. принципа. Истинное математич. суждение представляет собой сообщение о выполненных построениях, и эффективный характер этих построений предполагает использование особой интуиционистской логики, отличной от классической. При этом эффективность в И. понимается достаточно широко, она не обязательно связана с наличием алгоритма в точном понимании этого термина и может носить, напр., характер историч. наступления события, зависеть от фактич. решения проблем, от физич. факторов.

Объектами *исследования интуиционистской* математики являются прежде всего *конструктивные объекты*, такие, как натуральные числа, рациональные числа, конечные множества конструктивных объектов, заданные списком своих элементов. Своеобразным объектом исследования являются так наз. свободно становящиеся последовательности (с. с. п.; в другой терминологии — п о с л е д о в а т е л ь н о с т и в ы б о р а). С. с. п. можно представлять себе как функцию, определенную на натуральном ряде, принимающую в качестве значений объекты исследования некоторого класса (в простейшем случае — натуральные числа) и такую, что всякое ее значение эффективно становится доступным исследователю. Точный анализ показывает, что следует различать несколько видов с. с. п. в зависимости от степени информации, известной исследователю относительно с. с. п. Так, если полностью известен закон образования с. с. п., напр. в виде записи соответствующего алгоритма, то такую с. с. п. наз. з а д а н н о й з а к о н о м. Другой крайний случай имеет место, если в каждый момент времени исследователю известен лишь нек-рый начальный отрезок с. с. п. и нет никакой информации относительно ее дальнейшего поведения; такие с. с. п. наз. б е з з а к о н н ы м и. Эти различия, игнорируемые в клас-

сич. математике, в интуиционистской математике могут быть отражены посредством точных математич. принципов, свидетельствующих о разных способах обращения с такими с. с. п. Наконец, объектами исследования интуиционистской математики могут быть и так наз. интуиционистские *виды*. Вид — свойство, к-рым могут обладать объекты исследования. Объекты, удовлетворяющие этому свойству, наз. элементами вида, или его членами. Во избежание появления антиномий среди видов можно ввести иерархию, подобную *типов теории*, а именно, требовать, чтобы элементы вида были определены независимо от определения самого вида. Разумеется, при широком введении видов в интуиционистскую математику в ней возникают проблемы, характерные для абстрактной теории множеств, такие, как предикативность, возникновение антиномий и т. п. Следует, однако, иметь в виду, что, с одной стороны, обращение с видами во многом отлично от обращения с множествами в классич. математике и, с другой стороны, в практически разрабатываемой интуиционистской математике виды занимают весьма скромное место. В действительности подавляющую часть результатов можно сформулировать и доказать вообще без употребления видов как самостоятельных объектов исследования. Это связано с естественной тенденцией И. рассматривать в качестве объекта исследования эффективно конструируемые или эффективно порождаемые объекты. В рамках И. рассматриваются и другие, «нетрадиционные» объекты. Перспективным оказалось изучение эффективных функционалов конечного типа, с помощью к-рых в рамках И. удалось построить интерпретацию для классич. анализа [П. С. Новиков, К. Гёдель (K. Gödel), К. Спектор (C. Spector)].

Отказ от рассмотрения актуально заданных бесконечных множеств и требование эффективности всех осуществляемых построений приводят к тому, что нек-рые разделы традиционной математики приобретают в И. весьма необычный вид. Числовой континуум трактуется не как совокупность отдельных точек, а как «среда становления», *поток* измельчающихся рациональных интервалов. Каждое отдельное интуиционистское действительное число определяется с. с. п., значениями к-рой являются неограниченно уменьшающиеся вложенные друг в друга рациональные интервалы. В рассуждениях об интуиционистском числовом континууме применяются такие специфич. принципы, как *бар-индукция* и теорема о *веере*. Следствием этого является, напр., то обстоятельство, что в естественной системе понятий всякая интуиционистская действительная функция, определенная на отрезке, равномерно непрерывна. Интуиционистская математика является достаточно разработанным направлением в математике, содержащим много продвинутых результатов, в том числе и в таких областях, как теория меры, функциональный анализ, топология, теория дифференциальных уравнений.

Несколько в стороне от этих исследований стоит попытка Г. Вейля (H. Weyl, 1918) построить математику на основе предикативного подхода. Соглашаясь в целом с интуиционистской критикой, Г. Вейль предложил ограничиться конструктивными объектами исследования и задавать множества в виде условий в нек-ром языке, определяемом таким образом, чтобы не нарушалась предикативность определения множеств. Впоследствии Г. Вейль присоединился к развитой интуиционистской концепции построения математики, его взгляды положили начало глубоким исследованиям в основаниях математики.

Считая критерием верности построений прежде всего интуицию и в противовес формализму,

Л. Э. Я. Брауэр возражал против попыток формализации интуиционистской математики и, в частности, интуиционистской логики. Однако значительные успехи в изучении интуиционистской логики были достигнуты именно после того, как ее основные законы были точно сформулированы в виде *исчислений*, к к-рым можно было применять точные методы математич. логики. В разработке интуиционистской логики приняли значительное участие и математики, не считающие себя «интуиционистами». Более того, вопрос «веры в интуиционизм» становится второстепенным — специальные интуиционистские исчисления имеют большой чисто математич. интерес, как проясняющие различные идеи эффективности в математике. Современная тенденция в развитии И. сближает его с *конструктивной математикой* в самом широком понимании последнего термина.

После точной формулировки А. Гейтингом (A. Heyting) интуиционистского исчисления предикатов (см. *Интуиционистская логика*) была открыта топологич. интерпретация этого исчисления [А. Тарский (A. Tarski)] и интерпретация интуиционистского исчисления предикатов в виде исчисления задач (А. Н. Колмогоров). Была доказана независимость логич. связок и невозможность представления интуиционистской логики высказываний в виде конечнозначной логики (К. Гёдель). А. Гейтинг описал интуиционистское арифметическое исчисление, к-рое получается, если классическое арифметич. исчисление рассматривать на базе интуиционистского исчисления предикатов. Для исчисления предикатов и арифметич. исчисления А. Н. Колмогоров и К. Гёдель предложили *погружающую операцию* классич. исчисления в негативный фрагмент соответствующего интуиционистского исчисления, из к-рой, в частности, следует непротиворечивость классич. исчисления, если интуиционистское считать содержательно истинным. Были установлены свойства интуиционистской дизъюнкции и существования, состоящие в том, что если выводимо утверждение $\exists x A(x)$, то для нек-рого терма t выводимо $A(t)$, а из выводимости $A \vee B$ следует выводимость A или выводимость B. Некоторый вариант интуиционистского понимания суждений был предложен С. К. Клини (S. C. Kleene) в форме *рекурсивной реализуемости*. Именно такое понимание характерно для конструктивного направления в математике, развиваемого в Советском Союзе научной школой А. А. Маркова. Понимая термин «И.» достаточно широко, можно рассматривать конструктивное направление в математике как разновидность И., для к-рого характерно исследование конструктивных объектов и конструктивных процессов алгоритмич. методами.

Исследовался вопрос о семантической полноте интуиционистского исчисления предикатов. Исчерпывающая алгебраич. характеристика выводимости дана в теории моделей интуиционистской логики Э. Бета (E. Beth) и С. Крипке (S. Kripke). Эти теории имеют значительные приложения и в других разделах интуиционистской математики. Интуиционистская логика полна относительно нек-рых концепций с. с. п. и, в то же время, не полна относительно рекурсивной реализуемости. Интуиционистское понимание кванторов позволяет сформулировать в арифметике в виде математич. утверждения *Чёрча тезис*, напр. в форме: «если для всякого натурального числа x существует натуральное y, удовлетворяющее отношению $A(x, y)$, то существует общерекурсивная функция f такая, что для всякого x имеет место $A(x, f(x))$», при этом отношение $A(x, y)$ не должно содержать неконструктивных параметров типа с. с. п. В языке арифметики можно естественно сформулировать и *конструктивного подбора принцип* А. А. Маркова. Анализ взаимоотношений этих фунда-

ментальных принципов в интуиционистских теориях является предметом ряда современных исследований.

Удовлетворительное построение теории с. с. п. и более высоких разделов интуиционистской математики было завершено к 70-м гг. 20 в. Обычный язык формальной теории интуиционистского анализа содержит два сорта переменных: переменные $x, y, z, \ldots$ для натуральных чисел и переменные $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ для с. с. п., перерабатывающих натуральные числа в натуральные. В качестве термов теория содержит символы примитивно-рекурсивных операций над функциями и числами. Атомарные формулы имеют вид равенства двух термов, кванторы употребляются по обоим сортам переменных. Теория содержит все постулаты интуиционистского арифметич. исчисления. Эта группа постулатов обеспечивает возможность вывести в теории все основные свойства примитивно-рекурсивных преобразований чисел и функций. Так, в теории можно описать взаимно однозначный способ кодирования конечных последовательностей *(кортежей)* натуральных чисел натуральными числами. Пусть $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ означает номер кортежа с числами $x_1, \ldots, x_n$ в качестве членов; $x*y$ есть операция сочленения кортежей, заданных номерами, т. е. если $x=\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ и $y=\langle y_1, \ldots, y_m\rangle$, то $x*y=\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\rangle$. Номер одночленного кортежа $\langle x\rangle$ обозначим через $\hat{x}$. Пусть αx означает кортеж $\langle\alpha(0), \ldots, \alpha(n-1)\rangle$. Введем предикат «$\alpha$ есть непрерывный оператор» следующим определением: $\alpha\in K$ означает

$$\forall\beta\exists x\,(\alpha(\overline{\beta}x)>0)\,\&\forall xy\,(\alpha x>0\supset\alpha(x*y)=\alpha(x)),$$

результаты применения непрерывного оператора к с. с. п. определяются следующим образом: $y=\alpha(\beta)$ означает

$$\exists z\,(y+1=\alpha(\overline{\beta}z))$$

и $\gamma=(\alpha|\beta)$ означает

$$\forall y\exists z\,(\gamma(y)+1=\alpha(\widehat{y*\overline{\beta}}(z))).$$

Пусть, далее, $(\beta)_x$ означает такую функцию α, что

$$\forall y\,(\alpha(y)=\beta(\langle x, y\rangle)).$$

С помощью приведенных определений можно точно сформулировать несколько фундаментальных принципов, относящихся собственно к с. с. п. Это прежде всего интуиционистская аксиома выбора:

$$\forall x\exists\alpha A(x, \alpha)\supset\exists\beta\forall xA(x, (\beta)_x),$$

принцип непрерывности Брауэра

$$\forall\alpha\exists\beta A(\alpha, \beta)\supset(\exists\gamma\in K)\,A(\alpha, (\gamma|\alpha))$$

и бар-индукция. Эти принципы задают формальную теорию с. с. п., предложенную С. Клини, теорию, достаточную для получения в ней всех основных теорем интуиционистского анализа, включая теорему о веере, равномерную непрерывность действительных функций и др. Следует иметь в виду, что эта теория отражает лишь один вид интуиционистских последовательностей, вид, особенно пригодный для построения интуиционистского анализа. Другой характерный вид с. с. п.— беззаконные последовательности, упомянутые выше. Следующий принцип Крайзеля отражает то обстоятельство, что вся информация о беззаконной с. с. п. может быть извлечена лишь путем исследования ее начальных отрезков:

$$A(\alpha)\supset\exists xy\,(\overline{\alpha}x=y\&\forall\beta\,(\overline{\beta}x=y\supset A(\beta))),$$

где α — единственный параметр $A(\alpha)$ по с. с. п.

Еще один вид с. с. п. возникает при попытке отобразить в формальной теории существование с. с. п.,

зависящих от решения проблем. Для таких с. с. п. истинна так наз. схема Крипке:

$$\exists\alpha((\forall x\alpha(x)=0\equiv\neg A)\wedge(\exists x\alpha(x)\neq 0\supset A)).$$

Различные интуиционистские принципы имеют место по отношению к определенным видам с. с. п. Так, для беззаконных последовательностей не выполняется в общем виде интуиционистская аксиома выбора, а последовательности, зависящие от решения проблем, не удовлетворяют принципу непрерывности Брауэра в том его виде, к-рый был указан выше. Гораздо менее разработаны формальные теории для отражения интуиционистской теории видов. Однако и здесь имеются попытки сформулировать специфически интуиционистские способы обращения с видами. Напр., если X — переменная для видов натуральных чисел, то можно принять следующую схему аксиом, предложенную А. Троэльстра [4]:

$$\forall X\exists xA(x,\ X)\supset\exists x\forall XA(x,\ X).$$

До 2-й половины 20 в. идеи Л. Э. Я. Брауэра в полном объеме оставались достоянием узкой группы математиков-интуиционистов, хотя они и оказали большое влияние на все дальнейшие исследования по основаниям математики. В последнее время положение изменилось. Развитие теории доказательств позволило оформить в виде точных исчислений основные интуиционистские теории и подвергнуть их точному исследованию. Развитие вычислительной тенденции в математике пробудило интерес к логич. анализу эффективных средств доказательства и изучению абстракций, применяемых в математике. Возникли различные программы конструктивной перестройки математики в той или иной концепции конструктивности. Синтез традиционных методов И. с современными методами теории доказательств позволил значительно продвинуться в И.

Лит.: [1] Гейтинг А., Интуиционизм, пер. с англ., М., 1965; [2] Kleene S. C., Vesley R. E., The foundations of intuitionistic mathematics, Amst., 1965; [3] Kreisel G., Troelstra A. S., «Ann. Math. Logic», 1970, v. 1, № 3, p. 229—387; [4] Troelstra A. S., Metamathematical investigation of intuitionistic Arithmetic and Analysis, B., 1973 (Lect. Notes in Math., № 344); [5] Мартин-Лёф П., Очерки по конструктивной математике, пер. с англ., М., 1975; [6] Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966.

А. Г. Драгалин.

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА — совокупность приемлемых с точки зрения *интуиционизма* методов доказательства утверждений. В более узком смысле под И. л. понимается интуиционистское исчисление предикатов, сформулированное А. Гейтингом (A. Heyting) в 1930. Это исчисление формулируется обычно в стандартном языке *предикатов исчисления*, содержит все схемы аксиом и правила вывода *интуиционистского исчисления высказываний* (но для языка исчисления предикатов) и, кроме того, следующие кванторные аксиомы и правила вывода. Аксиомы:

$$\forall xA(x)\supset A(t)\quad\text{и}\quad A(t)\supset\exists xA(x).$$

Два правила вывода:

$$\frac{C\supset A(x)}{C\supset\forall xA(x)},\qquad\frac{A(x)\supset C}{\exists xA(x)\supset C},$$

где x — переменная, t — терм языка, формула C не содержит x в качестве параметра.

Полнота интуиционистского исчисления предикатов зависит от семантич. принципов, к-рые лежат в основе рассматриваемой интуиционистской теории. Так, принцип конструктивного подбора Маркова (см. *Конструктивного подбора принцип*) в форме

$$\forall x(P(x)\vee\neg P(x))\wedge$$
$$\neg\neg\exists xP(x)\supset\exists xP(x)$$

не выводится в интуиционистском исчислении предикатов, но принимается как истинный в нек-рых разновидностях конструктивизма. Другой пример такого рода — так наз. принцип униформизации:

$$(\neg Q \supset \exists x P(x)) \supset \exists x (\neg Q \supset P(x)),$$

являющийся истинным в нек-рых интуиционистских интерпретациях и в то же время несовместный с принципом конструктивного подбора в рамках арифметич. теории с *Чёрча тезисом*. Приведенные примеры показывают, что не существует единого полного интуиционистского исчисления предикатов, к-рое могло бы служить логич. базисом всех прикладных интуиционистских теорий. В зависимости от применяемых семантич. соглашений возможны существенно различные варианты И. л. Развитие интуиционистской теории *видов* позволяет в рамках интуиционизма точно формулировать многие семантич. проблемы. Так, К. Гёдель (K. Gödel) показал, что полнота интуиционистского исчисления предикатов относительно интуиционистской теории видов влечет принцип конструктивного подбора Маркова для примитивно-рекурсивных предикатов, что является аргументом в пользу неполноты исчисления предикатов с точки зрения такой семантики. С другой стороны, были найдены интуиционистски приемлемые доказательства полноты И. л. относительно алгебраич. семантик типа моделей Бета или моделей Крипке.

Лит.: [1] Гейтинг А., Интуиционизм, пер. с англ., М., 1965; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

А. Г. Драгалин.

ИНТУИЦИОНИСТСКОЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — см. *Интуиционизм.*

ИНТУИЦИОНИСТСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ — *логическое исчисление*, описывающее способы вывода высказываний, истинных с точки зрения *интуиционизма.* Общепринятая (к 1978) формулировка И. и. в. была предложена А. Гейтингом (A. Heyting) в 1930. Основное ее отличие от классич. исчисления высказываний состоит в замене *исключенного третьего закона* (или эквивалентного ему закона снятия двойного отрицания) более слабым принципом противоречия:

$$A \supset (\neg A \supset B).$$

Один из распространенных вариантов И. и. в. формулируется следующим образом. Пусть A, B, C — произвольные формулы рассматриваемого логич. языка. Аксиомы исчисления суть формулы следующего вида:

1. $A \supset (B \supset A)$;
2. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$;
3. $A \supset (B \supset A \wedge B)$;
4. $A \wedge B \supset A$;
5. $A \wedge B \supset B$;
6. $A \supset A \vee B$;
7. $B \supset A \vee B$;
8. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$;
9. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$;
10. $A \supset (\neg A \supset B)$.

Единственное правило вывода И. и. в.— правило modus ponens: если выведены формулы A и $A \supset B$, то выводима и формула B.

Всякая выводимая формула этого исчисления приемлема с интуиционистской точки зрения; более сложен вопрос о полноте описанного исчисления. И. и. в. оказывается, напр., полным относительно алгебраич. семантик — моделей Крипке и моделей Бета, но неполным относительно естественной конструктивной

семантики — *рекурсивной реализуемости* Клини; см. также *Конструктивное исчисление высказываний.*

Лит. см. при ст. *Интуиционизм.* *А. Г. Драгалин.*

ИНТУИЦИОНИСТСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ — см. *Интуиционистская логика.*

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНАЯ СВЯЗНОСТЬ — первоначальное название дифференциально-геометрич. структуры на расслоенном пространстве, к-рую впоследствии стали называть просто *связность.* *Ю. Г. Лумисте.*

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНАЯ СТРУКТУРА — структура на n-мерном дифференцируемом многообразии M^n, к-рая определяется приведением структурной дифференциальной группы D_n^r главного расслоения реперов r-го порядка на M^n, т. е. обратимых r-струй из $\mathbb{R}^n$ в M^n с началом $O \in \mathbb{R}^n$, к нек-рой своей подгруппе Ли G. Другими словами, на M^n задана И. с. r-го порядка, если в факторрасслоении главного расслоения реперов r-го порядка на M^n по подгруппе Ли $G \subset D_n^r$ выделено нек-рое сечение. При $r=1$ И. с. наз. также G-структурой на M^n, а при $r>1$ наз. G-структурой высшего порядка. Если D_n^r заменяется проективной дифференциальной группой PD_n^r — нек-рой своей факторгруппой группы D_n^{r+1}, то соответствующая И. с. наз. проективной инфинитезимальной структурой.

Аппаратом для изучения И. с. являются ее структурные уравнения. Основные задачи при исследовании И. с.— нахождение топологич. характеристик многообразия M^n, допускающего ту или иную И. с., выделение И. с., получаемых продолжением нек-рой И. с. более низкого порядка, проблема интегрируемости И. с. и др.

Лит.: [1] Лаптев Г. Ф., «Тр. геометрич. семинара ВИНИТИ», т. 1, 1966, с. 139—89; [2] Chern S. S., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1966, v. 72, № 2, p. 167—219.

Ю. Г. Лумисте.

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — наименование линейных операторов, являющихся дифференциалами отображений нек-рых классов. Так, на *дифференцируемом многообразии* И. о., или инфинитезимальное преобразование,— то же, что и векторное поле, в теории полугрупп (операторов, преобразований) — то же, что и (инфинитезимальный) производящий оператор. *М. И. Войцеховский.*

ИНФОРМАНТ — градиент логарифмической функции правдоподобия. Понятие И. возникает в так наз. параметрич. задачах математич. статистики. Имеется априорная информация, что наблюдаемое случайное явление описывается распределением вероятностей $P^\theta(d\omega)$ из семейства $\{P^t, t \in \Theta\}$, где t — числовой или векторный параметр, однако истинное значение θ неизвестно. Проведенное наблюдение (серия независимых наблюдений) явления привело к исходу ω (серии $\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(N)}$). По исходам наблюдения требуется оценить θ. Пусть семейство $\{P^t\}$ задается семейством плотностей $p(\omega; t)$ относительно меры $\mu(d\omega)$ на пространстве Ω всех исходов явления. Когда Ω дискретно, за $p(\omega; t)$ можно принять сами вероятности $P^t(\omega)$ исходов. При фиксированном ω величина $p(\omega; t)$ как функция параметра $t=(t_1, \ldots, t_m)$ наз. функцией правдоподобия, а ее натуральный логарифм — логарифмической функцией правдоподобия.

Для гладких семейств удобно вводить И. как вектор

$$\operatorname{grad}_t \ln p(\omega; t) =$$

$$= \left(\frac{1}{p(\omega; t)} \frac{\partial p(\omega; t)}{\partial t_1}, \ldots, \frac{1}{p(\omega; t)} \frac{\partial p(\omega; t)}{\partial t_n} \right),$$

к-рый, в отличие от логарифмической функции правдоподобия, не зависит от выбора меры μ. И. содержит всю существенную для задачи оценки θ информацию, как получаемую из наблюдений, так и известную за-

ранее. Кроме того, он аддитивен: при независимых наблюдениях, т. е. когда

$$p(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(N)}; t) = \prod_{k=1}^{N} p_k(\omega^{(k)}; t),$$

И. суммируется:

$$\operatorname{grad} \ln p(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(N)}; t) = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{grad} \ln p_k(\omega^{(k)}; t).$$

В теории статистич. оценивания существенны свойства И. как случайной вектор-функции. В предположении, что логарифмич. функция правдоподобия регулярна, в частности дважды дифференцируема, ее производные интегрируемы и что дифференцирование по параметру перестановочно с интегрированием по исходам, справедливы тождества:

$$\mathsf{E}_t \frac{\partial \ln p(\omega; t)}{\partial t_k} = \int_{\Omega} \frac{\partial \ln p(\omega; k)}{\partial t_k} p(\omega; t)\, d\mu = 0, \quad \forall k;$$

$$-\mathsf{E}_t \frac{\partial^2 \ln p(\omega; t)}{\partial t_j \partial t_k} = I_{jk}(t) = \mathsf{E}_t \frac{\partial \ln p}{\partial t_j} \frac{\partial \ln p}{\partial t_k}, \quad \forall j, k.$$

Ковариационная матрица $\|I_{jk}(t)\|_{j,k=1}^{m}$ наз. *информационной матрицей*. Через эту матрицу выписывается неравенство информации, дающее границу точности статистич. оценок параметра θ.

При оценке θ методом максимума правдоподобия наблюденному исходу ω (или серии $\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(N)}$) сопоставляется наиболее правдоподобное, т. е. максимизирующее функцию правдоподобия и логарифмич. функцию правдоподобия, значение $t = \theta^*(\omega)$. В точке экстремума И. должен обращаться в нуль. Однако возникающее уравнение правдоподобия

$$\operatorname{grad} \ln p(\omega; t) = 0$$

может иметь лишние корни сверх $t = \theta^*$, к-рые отвечают локальным максимумам (или минимумам) логарифмич. функции правдоподобия и к-рые следует отбрасывать. Если в нек-рой окрестности значения $t = 0$

$$\det \|I_{jk}(t)\| \neq 0,$$

то из приведенных свойств И. следует асимптотич. оптимальность оценки θ_N^* максимума правдоподобия при возрастании числа N используемых независимых наблюдений.

Лит.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

Н. Н. Ченцов.

ИНФОРМАЦИИ КОЛИЧЕСТВО — теоретико-информационная мера величины информации, содержащейся в одной случайной величине относительно другой. Пусть ξ и η — случайные величины, определенные на нек-ром *вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и принимающие значения в измеримых пространствах $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$ и $(\mathfrak{Y}, S_{\mathfrak{Y}})$ соответственно, а $p_{\xi\eta}(C)$, $C \in S_{\mathfrak{X}} \times S_{\mathfrak{Y}}$, $p_{\xi}(A)$, $A \in S_{\mathfrak{X}}$, $p_{\eta}(B)$, $B \in S_{\mathfrak{Y}}$ — их совместное и маргинальные распределения вероятностей. Если распределение $p_{\xi\eta}(\cdot)$ абсолютно непрерывно относительно прямого произведения мер $p_{\xi} \times p_{\eta}(\cdot)$, $a_{\xi\eta}(\cdot)$ — плотность (по Радону — Никодиму) меры $p_{\xi\eta}(\cdot)$ относительно меры $p_{\xi} \times p_{\eta}(\cdot)$, и $i_{\xi\eta}(\cdot) = \log a_{\xi\eta}(\cdot)$ — информационная плотность (логарифмы обычно берутся по основанию 2 или e), то, по определению, И. к. дается формулой

$$I(\xi, \eta) = \int_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}} i_{\xi\eta}(x, y)\, p_{\xi\eta}(dx, dy) =$$

$$= \int_{\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}} a_{\xi\eta}(x, y) \log a_{\xi\eta}(x, y)\, p_{\xi}(dx)\, p_{\eta}(dy).$$

Если же мера $p_{\xi\eta}(\cdot)$ не является абсолютно непрерывной относительно произведения мер $p_{\xi} \times p_{\eta}(\cdot)$, то, по определению, $I(\xi, \eta) = +\infty$.

В случае, когда величины ξ и η принимают конечное число значений, выражение для И. к. $I(\xi, \eta)$ приобретает следующий вид:

$$I(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_i q_i},$$

где

$$\{p_i,\ i=1,\ \ldots,\ n\},\quad \{q_j,\ j=1,\ \ldots,\ m\},$$

$\{p_{ij},\ i=1,\ \ldots,\ n;\ j=1,\ \ldots,\ m\}$ — распределения вероятностей ξ, η и пары (ξ, η) соответственно (в частности,

$$I(\xi, \xi) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i = H(\xi)$$

является *энтропией* случайной величины ξ), а если ξ, η — случайные векторы и существуют плотности $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$, $p_{\xi\eta}(x, y)$ случайных векторов ξ, η и пары (ξ, η) соответственно, то

$$I(\xi, \eta) = \int p_{\xi\eta}(x, y) \log \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_\xi(x)\, p_\eta(y)}\, dxdy.$$

В общем случае

$$I(\xi, \eta) = \sup I(\varphi(\xi), \psi(\eta)),$$

где верхняя грань берется по всем измеримым функциям $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ с конечным числом значений. Понятие И. к. используется главным образом в теории передачи информации.

Лит. см. [1], [2], [4] при ст. *Информации передача.*

Р. Л. Добрушин, В. В Прелов.

ИНФОРМАЦИИ ПЕРЕДАЧА — составная часть *информации теории*, относящаяся к изучению процесса переноса информации от *источника сообщений* к получателю сообщений (адресату). В теории И. п. изучаются оптимальные и близкие к оптимальным методы И. п. по каналам связи в предположении, что можно в широких пределах варьировать методы кодирования сообщений в сигналы на входе канала и декодирования сигналов на выходе канала в сообщения на выходе (см. *Кодирование и декодирование*).

Общую схему системы И. п., впервые рассмотренную К. Шенноном (C. Shannon, [1]), можно описать следующим образом. Источник сообщений вырабатывает сообщения, подлежащие передаче по каналу связи от источника к получателю. Обычно предполагают, что это сообщение — случайная величина ξ, определенная на нек-ром *вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, принимающая значения в нек-ром измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$ и имеющая распределение вероятностей $p(\cdot)$. Часто $\xi = \{\xi(t),\ t \in \Delta\}$, где Δ — множество значений параметра t, является случайным процессом с дискретным или непрерывным временем со значениями в нек-ром измеримом пространстве (X, S_X). Напр., в случае дискретного времени $\xi = \{\xi_k,\ k=1,\ 2,\ \ldots\}$ или $\xi = \{\xi_k,\ k=\ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots\}$ случайные величины ξ_k, принимающие значения в измеримом пространстве (X, S_X), *наз.* компонентами сообщения на входе и часто трактуются как сообщения, вырабатываемые источником в моменты времени k. Наборы $\xi^n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, принимающие значения в пространстве (X^n, S_{X^n}), т. е. в n-кратном произведении пространств (X, S_X), *наз.* отрезками сообщений длины n на входе. Аналогичным образом определяются соответствующие понятия и в случае, когда сообщение — случайный процесс с непрерывным временем.

Сообщение на выходе, получаемое адресатом,— это тоже случайная величина $\tilde{\xi}$, определенная на том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и принимающая значения в измеримом пространстве $(\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$ (вообще говоря, отличном от $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$). В случае, когда $\tilde{\xi}$ яв-

ляется случайным процессом с дискретным или непрерывным временем, аналогичным образом вводятся понятия пространства $(\tilde{X},\ S_{\tilde{X}})$ значений компонент сообщения на выходе и пространства $(\tilde{X}^n,\ S_{\tilde{X}^n})$ значений отрезков длины n сообщения на выходе.

Мерой качества передачи сообщений по каналу связи является *сообщений точность воспроизведения*. Как правило, если передача ведется по каналу связи с помехами, даже если множества $\mathfrak{X}$ и $\tilde{\mathfrak{X}}$ совпадают, нельзя добиться абсолютной точности, т. е. полного совпадения посылаемого и получаемого сообщений. Обычно требования, предъявляемые к точности, трактуют статистически, выделяя класс W допустимых совместных распределений вероятностей для пары $(\xi, \tilde{\xi})$ передаваемого и получаемого сообщений в множестве всех вероятностных мер в произведении $(\mathfrak{X}\times\tilde{\mathfrak{X}},\ S_{\mathfrak{X}}\times S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$. Класс W часто задается при помощи измеримой неотрицательной функции $\rho(x, \tilde{x})$, $x\in\mathfrak{X}$, $\tilde{x}\in\tilde{\mathfrak{X}}$, и числа $a>0$: считают, что распределение вероятностей $(\xi, \tilde{\xi})$ принадлежит W, лишь если

$$\mathbf{E}\rho(\xi, \tilde{\xi}) \leqslant a. \tag{1}$$

Таким образом, условие точности воспроизведения показывает, насколько полученное сообщение может отличаться от переданного.

Сообщения, вырабатываемые источником, передаются по каналу связи. Каналом (Q, V) наз. совокупность двух измеримых пространств $(\mathfrak{Y}, S_{\mathfrak{Y}})$, $(\tilde{\mathfrak{Y}}, S_{\tilde{\mathfrak{Y}}})$, переходной функции $Q(y, A)$, $y\in\mathfrak{Y}$, $A\in S_{\tilde{\mathfrak{Y}}}$, являющейся измеримой относительно σ-алгебры $S_{\mathfrak{Y}}$ при фиксированном $A\in S_{\tilde{\mathfrak{Y}}}$ и вероятностной мерой на $(\tilde{\mathfrak{Y}}, S_{\tilde{\mathfrak{Y}}})$ при фиксированном $y\in\mathfrak{Y}$, и подмножества V в пространстве всех вероятностных мер в пространстве $(\mathfrak{Y}, S_{\mathfrak{Y}})$. Пространства $(\mathfrak{Y}, S_{\mathfrak{Y}})$, $(\tilde{\mathfrak{Y}}, S_{\tilde{\mathfrak{Y}}})$ наз. соответственно пространствами сигналов на входе и выходе канала, а подмножество V — ограничением на распределение сигнала на входе. Говорят, что две случайные величины η и $\tilde{\eta}$ (определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$) связаны каналом (Q, V), если они принимают значения в $(\mathfrak{Y}, S_{\mathfrak{Y}})$, $(\tilde{\mathfrak{Y}}, S_{\tilde{\mathfrak{Y}}})$ соответственно и для любого $A\in S_{\tilde{\mathfrak{Y}}}$ с вероятностью 1 условная вероятность

$$\mathbf{P}\{\tilde{\eta}\in A \mid \eta\} = Q(\eta, A), \tag{2}$$

и распределение вероятностей случайной величины η принадлежит V. Наиболее часто ограничение V задается с помощью измеримой функции $\pi(y)$, $y\in\mathfrak{Y}$, и числа $b>0$: считают, что распределение вероятностей η принадлежит V, лишь если

$$\mathbf{E}\pi(\eta) \leqslant b. \tag{3}$$

В случае дискретных каналов V обычно совпадает с совокупностью всех распределений вероятностей, т. е. ограничение отсутствует.

С наглядной точки зрения, $\mathfrak{Y}$ — это совокупность сигналов, передаваемых передатчиком, а $\tilde{\mathfrak{Y}}$ — совокупность сигналов, принимаемых приемником (в приложениях пространства $\mathfrak{Y}$ и $\tilde{\mathfrak{Y}}$ часто совпадают). Если задано случайное значение η сигнала на входе, то (2) позволяет найти условное распределение сигнала на выходе $\tilde{\eta}$. Введение ограничения V связано с тем, что во многих приложениях нельзя считать распределение входного сигнала произвольным [типична, напр., ситуация, когда предполагается, что среднее значение квадрата (мощность) входного сигнала не превосходит

заданной константы]. В приложениях особенно важен случай, когда сигналами на входе и выходе канала являются случайные процессы $\eta=\{\eta(t)\}$, $\tilde{\eta}=\{\tilde{\eta}(t)\}$ с дискретным или непрерывным временем, определенные на нек-ром конечном или бесконечном (в одну или обе стороны) интервале действительной оси и принимающие значения в нек-рых измеримых пространствах (Y, S_Y) и $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ соответственно. Напр., если $\eta=\{\eta_1, \eta_2, \ldots\}$ и $\tilde{\eta}=\{\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \ldots\}$ — случайные последовательности, то канал связи, для к-рого последовательности η и $\tilde{\eta}$ служат сигналами на входе и выходе, часто рассматривают как последовательность каналов (в описанном выше смысле), называемых отрезками данного канала; сигналами на входе и выходе этих отрезков канала служат векторы

$$\eta^n=(\eta_1, \ldots, \eta_n) \text{ и } \tilde{\eta}^n=(\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_n), \quad n=1, 2, \ldots$$

Для того чтобы превратить сообщение на входе в сигнал, передаваемый по каналу связи, а сигнал, полученный на выходе канала,— в сообщение на выходе, необходимо провести операции кодирования и декодирования сообщений. К о д и р о в а н и е м наз. функцию $f(x)$ от $x\in\mathfrak{X}$ со значениями в $\mathfrak{Y}$, а д е к о д и р о в а н и е м — функцию $g(y)$ от $y\in\mathfrak{Y}$ со значениями в $\tilde{\mathfrak{X}}$. Множество значений функции $f(x)$, $x\in\mathfrak{X}$, часто наз. к о д о м, а отдельные элементы этого множества — к о д о в ы м и с л о в а м и. Использование кодирования $f(x)$ и декодирования $g(\tilde{y})$ означает, что если сообщение приняло значение $x\in\mathfrak{X}$, то по каналу передается сигнал $y=f(x)$; если на выходе канала получен сигнал $\tilde{y}\in\mathfrak{Y}$, то его декодируют в сообщение на выходе $\tilde{x}=g(\tilde{y})$. В теории передачи информации часто рассматривают с л у ч а й н о е к о д и р о в а н и е, когда кодовые слова выбираются случайно в соответствии с нек-рым распределением вероятностей.

Сообщение с распределением вероятностей $p(\cdot)$, вырабатываемое источником, может быть передано с точностью воспроизведения W по каналу (Q, V) при помощи кодирования $f(\cdot)$ и декодирования $g(\cdot)$, если могут быть построены случайные величины ξ, η, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$, образующие цепь Маркова такую, что ξ имеет распределение вероятностей $p(\cdot)$, распределение вероятностей пары $(\xi, \tilde{\xi})$ принадлежит W, пара $(\eta, \tilde{\eta})$ связана каналом (Q, V) и

$$\eta=f(\xi), \quad \tilde{\xi}=g(\tilde{\eta}). \tag{4}$$

Предположение о том, что ξ, η, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$ образуют цепь Маркова, сводится к предположению о том, что условное распределение $\tilde{\eta}$ при заданных значениях ξ и η зависит лишь от η, т. е. оно означает, что при передаче сигнал на выходе зависит лишь от сигнала на входе, а не от того, какое значение сообщения им закодировано.

Основную проблему, исследуемую в И. п., можно сформулировать следующим образом. Считаются известными и фиксированными источник, порождающий сообщения с распределением вероятностей $p(\cdot)$, канал связи (Q, V) и условия точности воспроизведения W. Задача состоит в том, чтобы выяснить, при каких условиях существуют методы кодирования $f(\cdot)$ и декодирования $g(\cdot)$ такие, что сообщение, вырабатываемое данным источником, может быть передано с заданной точностью воспроизведения W по данному каналу (Q, V). Решения этой проблемы при разных предположениях наз. теоремами кодирования, или теоремами Шеннона. Естественно возникает также другая проблема о том, как в случае, когда передача возможна, построить наиболее простым и эффективным образом

кодирование и декодирование, осуществляющие эту передачу.

К. Шеннон [1] ввел величины, позволяющие сформулировать ответ на первую из поставленных проблем. Главной среди них является *информации количество*, или просто информация, $I(\cdot, \cdot)$. Если

$$C = C(Q, V) = \sup I(\eta, \tilde{\eta}) \tag{5}$$

— пропускная способность канала (Q, V) (см. *Канала пропускная способность*), где верхняя грань берется по всем парам величин $(\eta, \tilde{\eta})$, связанным каналом (Q, V), и если число

$$H_W(p) = \inf I(\xi, \tilde{\xi}) \tag{6}$$

есть W-энтропия (см. *Энтропия*) сообщения, где нижняя грань берется по всем парам $(\xi, \tilde{\xi})$ таким, что совместное распределение вероятностей пары $(\xi, \tilde{\xi})$ принадлежит W, а ξ имеет распределение вероятностей $p(\cdot)$, то справедлива следующая теорема Шеннона (обращение теоремы кодирования): если сообщение с распределением вероятностей $p(\cdot)$ может быть передано по каналу (Q, V) с условием точности воспроизведения W, то

$$H_W(p) \leqslant C(Q, V). \tag{7}$$

Достаточные условия для возможности И. п. получить сложнее. Так, условие (7) достаточно для возможности И. п. лишь в некотором асимптотич. смысле, и при этом главным является предположение о том, что $H_W(p) \to \infty$, следовательно условие (7) необходимо и достаточно лишь, грубо говоря, применительно к задаче о передаче довольно большого количества информации. Остальные нужные предположения носят характер предположений регулярности, к-рые в конкретных ситуациях обычно выполняются. Чтобы сформулировать достаточные условия для возможности передачи в точных терминах, необходимы нек-рые дополнительные понятия.

Последовательность пар случайных величин $(\zeta^t, \tilde{\zeta}^t, t=1, 2, \ldots)$ наз. информационно-устойчивой, если $0 < I(\zeta^t, \tilde{\zeta}^t) < \infty$ и

$$\lim_{t \to \infty} \frac{i_{\zeta^t \tilde{\zeta}^t}(\zeta^t, \tilde{\zeta}^t)}{I(\zeta^t, \tilde{\zeta}^t)} = 1 \tag{8}$$

в смысле сходимости по вероятности. Здесь $i_{\zeta^t \tilde{\zeta}^t}(\cdot, \cdot)$ — информационная плотность (см. *Информации количество*) пары $(\zeta^t, \tilde{\zeta}^t)$. Последовательность каналов $\{(Q^t, V^t), t=1, 2, \ldots\}$ с $C(Q^t, V^t) < \infty$ наз. информационно-устойчивой, если существует информационно-устойчивая последовательность пар $(\eta^t, \tilde{\eta}^t)$, связанных каналом (Q^t, V^t), такая, что

$$\lim_{t \to \infty} \frac{I(\eta^t, \tilde{\eta}^t)}{C(Q^t, V^t)} = 1. \tag{9}$$

Последовательность сообщений с распределением вероятностей $p^t(\cdot)$ и условиями точности W^t с $H_{W^t}(p^t) < \infty$, $t=1, 2, \ldots$, наз. информационно-устойчивой, если существует последовательность пар $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ такая, что ξ^t имеет распределение вероятностей $p^t(\cdot)$, распределение вероятностей пары $(\xi^t, \tilde{\xi}^t)$ принадлежит W^t и

$$\lim_{t \to \infty} \frac{I(\xi^t, \tilde{\xi}^t)}{H_{W^t}(p^t)} = 1. \tag{10}$$

Пусть V_ε — множество распределений вероятностей, для к-рого справедливо (3) с заменой b на $b+\varepsilon$, а W_ε — условие точности, задаваемое неравенством (1), в к-ром

a заменено на $a+\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Имеет место теорема кодирования (теорема Шеннона): пусть заданы информационно-устойчивая последовательность сообщений с распределением вероятностей $p^t(\cdot)$ и условиями точности W^t и информационно-устойчивая последовательность каналов (Q^t, V^t) такие, что функции $\pi^t(\cdot)$ и $\rho^t(\cdot, \cdot)$ равномерно ограничены по t; пусть $H_{W^t}(p^t)\to\infty$ при $t\to\infty$ и

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{C(Q^t, V^t)}{H_{W^t}(p^t)} > 1, \tag{11}$$

тогда для любого $\varepsilon>0$ существует столь большое t_0, что при всех $t\geqslant t_0$ сообщение с распределением вероятностей $p^t(\cdot)$ может быть передано через канал (Q^t, V^t_ε) с точностью воспроизведения W^t_ε. Эта формулировка прямого утверждения теоремы кодирования является одной из наиболее общих. Предположение об ограниченности функций $\pi^t(\cdot)$ и $\rho^t(\cdot, \cdot)$ может быть существенно ослаблено. Информационная устойчивость последовательности сообщений и каналов всегда имеет место в большом числе практически интересных частных случаев. Наконец, при нек-рых условиях в сформулированной теореме можно заменить W^t_ε на W^t и V^t_ε на V^t.

Для описания реальных ситуаций наиболее интересен случай, когда последовательность каналов, рассматриваемая в теореме, есть последовательность отрезков данного фиксированного канала, а последовательность сообщений — это последовательность отрезков сообщений фиксированного источника с растущим числом компонент. Наглядно это соответствует функционированию системы связи во времени. Ниже для этой ситуации сформулированы нек-рый вариант теоремы кодирования и его обращение в несколько отличной от предыдущей форме. При этом рассматриваются дискретный стационарный источник и канал без памяти.

Пусть дискретный стационарный источник U, вырабатывающий сообщение $\xi=\{\xi_k,\ k=\ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots\}$, где отдельные компоненты (буквы сообщения ξ_k) принимают значения из нек-рого конечного множества алфавита X объема M, производит буквы сообщения со скоростью одна буква в единицу времени. Компоненты сообщения $\tilde{\xi}=\{\tilde{\xi}_k,\ k=\ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots\}$, получаемого адресатом, принимают значения из того же алфавита X (т. е. $\tilde{X}=X$). Пусть, далее, используется дискретный канал без памяти, передача по к-рому ведется со скоростью один символ в интервал времени τ. Ограничения на распределение сигнала на входе канала отсутствуют. Пусть отрезок сообщения $\xi^L=(\xi_1, \ldots, \xi_L)$ длины $L=L_N$ передается по отрезку канала длины $N=[L/\tau]$ (где $[x]$ — целая часть числа x) с помощью нек-рых методов кодирования и декодирования описанного выше типа. Если при этом $\tilde{\xi}^L=(\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_L)$ — соответствующий отрезок сообщения, полученный адресатом, а $\hat{P}_e$ — средняя вероятность ошибки на букву источника, определяемая формулой

$$\hat{P}_e=\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\mathsf{P}\{\tilde{\xi}_l\neq\xi_l\}, \tag{12}$$

то справедлива следующая теорема.

Обращение теоремы кодирования. Пусть $H(U)$ — скорость создания сообщений данным дискретным стационарным источником и C — пропускная способность (на передаваемый символ) используемого канала без памяти. Тогда при всех L справедливо неравенство

$$\hat{P}_e\log(M-1)+h(\hat{P}_e)\geqslant H(U)-\frac{1}{\tau}C, \tag{13}$$

где

$$h(x) = -x \log x - (1-x) \log (1-x).$$

Таким образом, если скорость создания сообщений $H(U)$ больше, чем $\frac{1}{\tau} C$ (пропускная способность канала на букву источника), то средняя вероятность ошибки на букву источника при любом L и для любых методов кодирования и декодирования ограничена снизу отличной от нуля константой и, значит, не стремится к нулю даже при $L \to \infty$. Чтобы сформулировать прямое утверждение теоремы кодирования, необходима величина

$$R_N = \frac{\log_2 M^{L_N}}{N}. \qquad (14)$$

В случае, когда $M=2$ и L_N/τ — целое число, $R_N = \tau$, т. е. R_N в *битах* является числом двоичных символов, вырабатываемых источником за время передачи одного символа по каналу. Кроме того, R_N совпадает со скоростью создания сообщений $H(U)$ источником U с независимыми и равномерно распределенными компонентами. Вероятность ошибки и средняя вероятность ошибки на блок источника определяются соответственно формулами:

$$P_{e,\ x^L} = \mathsf{P}_{x^L} \{\xi^L \neq \xi^L\}, \qquad (15)$$

$$\overline{P}_e = \sum\nolimits_{x^L} \mathsf{P} \{\xi^L = x^L\}\ P_{e,\ x^L}, \qquad (16)$$

здесь $P_{x^L}(\cdot)$ — условная вероятность при условии, что $\xi^L = x^L \in X^L$. Справедлива следующая теорема кодирования. Для всех N и любого $R < C$ существуют методы кодирования и декодирования такие, что при $R_N \leqslant R$ для всех $x^L \in X^L$

$$P_{e,\ x^L} \leqslant \exp\{-NE(R)\} \qquad (17)$$

(оценка (17) справедлива и для $\overline{P}_e$), причем для $0 \leqslant R < C$ функция $E(R)$ выпуклая, положительная и убывает с ростом R (см. также *Ошибочного декодирования вероятность*). Таким образом, эта теорема показывает, что для всех $R < C$ вероятность ошибки с ростом N стремится к нулю и притом экспоненциально быстро.

Имеются обобщения теорем Шеннона на случай так наз. составных каналов и сообщений с неизвестными параметрами. Интерес к подобным обобщениям вызван тем, что обычно на практике нельзя считать полностью известными статистич. параметры источника сообщений и канала связи, тем более что эти параметры могут иногда меняться в процессе передачи. Поэтому приходится предполагать, что источник сообщений и канал связи принадлежат нек-рому классу возможных источников сообщений и каналов. При этом вводится минимаксный критерий качества передачи, при к-ром качество данного метода передачи оценивается для наихудших возможных источников сообщений и каналов, принадлежащих рассматриваемому классу.

Имеются также обобщения теорем Шеннона на случай И. п. по *каналу с обратной связью*. Наличие полной обратной связи означает, что в момент времени t на передающей стороне канала (т. е. на его входе) считаются известными точные значения сигналов на выходе канала для всех моментов времени $t' < t$. В частности, для *каналов без памяти* с обратной связью основной результат состоит в том, что наличие обратной связи не увеличивает пропускную способность канала, хотя и может существенно уменьшить сложность кодирующих и декодирующих устройств.

Из других обобщений следует отметить теорию И. п. по каналам с ошибками синхронизации, в к-рых воз-

можны случайные сбои синхронизации, в результате чего нарушается однозначность соответствия между сигналами на входе и выходе канала, а также теорию передачи по *каналам многосторонним*, когда имеется несколько источников и получателей информации и передача может осуществляться по нескольким направлениям одновременно.

Лит.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243—332; [2] Добрушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3—104; [3] Вольфовиц Дж., Теоремы кодирования теории информации, пер. с англ., М., 1967; [4] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [5] Файнстейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960; [6] Фано Р. М., Передача информации. Статистическая теория связи, пер. с англ., М., 1965; [7] Харкевич А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965; [8] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969; [9] Колмогоров А. Н., «Пробл. передачи информ.», 1965, т. 1, № 1, с. 3—11; [10] Пинскер М. С., в сб.: Проблемы передачи информации, в. 7, 1960, М., с. 1—201; [11] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, 2 изд., М., 1974; [12] Колмогоров А. Н., в кн.: Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации производства. 15—20 октября 1956 г. Т. 1. Пленарные заседания, М., 1957, с. 66—99; [13] Key papers in the development of information theory, N.Y., 1974; [14] Proceeding of the 1975 IEEE—USSR Joint Workshop on Information Theory. Moscow. 15—19 December, 1975, N.Y., 1976. *Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.*

ИНФОРМАЦИИ СКОРОСТЬ ПЕРЕДАЧИ — величина, характеризующая *информации количество*, к-рая содержится в сигнале на выходе *канала связи* относительно сигнала на входе канала в расчете на единицу времени. Если

$$\eta=\{\eta(t),\ -\infty<t<\infty\},\quad \tilde{\eta}=\{\tilde{\eta}(t),\ -\infty<t<\infty\}$$

— случайные процессы с непрерывным или дискретным временем, являющиеся сигналами на входе и выходе нек-рого канала связи, то И. с. п. наз. величину

$$R=\lim_{T-t\to\infty}\frac{1}{T-t}\,I\left(\eta_t^T,\ \tilde{\eta}_t^T\right), \qquad (*)$$

если такой предел существует; здесь $I(\cdot,\ \cdot)$ — количество информации, $\eta_t^T=\{\eta(s),\ t<s\leqslant T\}$ — отрезок $(t,\ T]$ процесса η, аналогично определяется $\tilde{\eta}_t^T$. Существование предела (*) доказано для достаточно широкого класса каналов, в к-рых сигналы η и $\tilde{\eta}$ являются стационарными и стационарно связанными случайными процессами. Явное вычисление И. с. п. возможно, в частности, для стационарных *каналов без памяти* и *каналов гауссовских*. Напр., для гауссовского канала, сигналы η и $\tilde{\eta}$ на входе и выходе к-рого являются гауссовскими стационарными процессами, образующими совместно гауссовскую стационарную пару процессов, И. с. п. задается формулой

$$R=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\log\left(1-\frac{\left|f_{\eta\tilde{\eta}}(\lambda)\right|^2}{f_{\eta\eta}(\lambda)\,f_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}(\lambda)}\right)d\lambda,$$

где $f_{\eta\eta}(\lambda)$ и $f_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}(\lambda)$ — спектральные плотности процессов η и $\tilde{\eta}$ соответственно, а $f_{\eta\tilde{\eta}}(\lambda)$ — их взаимная спектральная плотность.

Лит.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Пинскер М. С., в сб.: Проблемы передачи информации, в. 7, М., 1960, с. 1—201. *Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.*

ИНФОРМАЦИИ ТЕОРИЯ — раздел прикладной математики и кибернетики, связанный с математич. описанием и оценкой качества передачи, хранения, извлечения и классификации информации. Термин «И. т.», возникший в 50-х гг. 20 в., до сих пор (к 1978) не имеет единого общепринятого толкования. В разных источниках по-разному определяется перечень разделов наук, включаемых в И. т., а при логич. толковании в И. т. надо включать и нек-рые разделы науки, традиционно в нее не включаемые. Важной чертой,

объединяющей различные разделы науки, относимые к И. т., является широкое использование статистич. методов. Это обусловлено тем, что процесс извлечения информации связывают с уменьшением неопределенности наших сведений об объекте, а естественной числовой мерой неопределенности нек-рого события является его вероятность.

Важнейшая составная часть И. т. при любых трактовках — теория *информации передачи*. Часто, особенно в чисто математич. литературе, термин «И. т.» используют как синоним термина «теория передачи информации». Теория передачи информации изучает оптимальные и близкие к оптимальным методы передачи информации по *каналам связи* в предположении, что можно в широких пределах варьировать методы кодирования сообщений в сигналы на входе канала связи и декодирование сигналов в сообщения на выходе.

Возникновение теории передачи информации связано с именем К. Шеннона (C. Shannon), предложившего в 1948 решение основной проблемы о нахождении скорости передачи информации, к-рую можно достичь при оптимальном методе *кодирования и декодирования* так, чтобы вероятность ошибки при передаче информации была как угодно мала. Эта оптимальная скорость передачи, называемая *канала пропускной способностью*, выражается через введенную К. Шенноном величину, называемую *информации количеством*. Понятие количества информации представляется весьма важным и находит многочисленные важные приложения и в других разделах И. т., хотя далеко не все попытки его приложения адекватны существу рассматриваемых проблем.

Задачи, связанные с оптимальным способом хранения информации, принципиально не отличаются от задач оптимальной передачи информации, так как хранение информации можно рассматривать как передачу информации, но не в пространстве, а во времени.

Основные теоремы теории передачи информации первоначально носили характер теорем существования, в к-рых доказывалось существование оптимальных методов кодирования и декодирования, но не указывались способы их построения и технич. реализации этих методов. Поэтому позже получила широкое развитие теория кодирования, посвященная построению конкретных и относительно простых алгоритмов кодирования и декодирования, приближающихся по своим возможностям к оптимальным алгоритмам, существование к-рых доказывалось в теории передачи информации. Теорию кодирования отличает то, что наряду со статистич. методами она использует для построения конкретных кодов глубокие алгебраические и комбинаторные идеи.

Обычно к И. т. относят также всю совокупность исследований, посвященных приложениям теории статистич. методов для описания способов преобразований сигналов на входе и выходе каналов связи. С математич. точки зрения, это просто нек-рые приложения математич. статистики (в первую очередь статистики случайных процессов), теории прогнозирования и фильтрации стационарных случайных процессов, теории игр и пр. Таким образом, этот раздел И. т. не имеет специфического математич. аппарата и в своем развитии все более сближается с другими разделами прикладной теории вероятностей.

В И. т. часто включают также теорию *распознавания образов*, разрабатывающую алгоритмы распределения объектов по нек-рым классам объектов, к-рые описаны лишь на интуитивном уровне и не имеют четкого математич. описания. Такие алгоритмы всегда включают в себя процесс обучения по нек-рому списку заранее классифицированных человеком объектов.

Попытка определить границы И. т., исходя из ее общепринятых определений, и включить в нее все разделы математики, имеющие дело с понятием информации в его общелексической трактовке, привела бы к неоправданной, по крайней мере на современном этапе, расширенной трактовке понятия И. т. Так, вся математич. статистика имеет дело с проблемами извлечения информации, теория алгоритмов — с проблемами переработки информации, теория формальных языков — с проблемами записи информации и т. д.

Понятие информации и его приложения весьма многообразны, и этим можно объяснить то, что в настоящее время (к 1978) комплекс наук об информации представляет собой совокупность довольно разрозненных научных дисциплин, каждая из к-рых связана с изучением одного из аспектов этого понятия. Несмотря на интенсивные усилия ученых процесс сближения этих научных дисциплин идет довольно медленно, и создание единой и всеохватывающей И. т. представляется делом не слишком близкого будущего.

Лит.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Колмогоров А. Н., «Пробл. передачи информ.», 1965, т. 1, № 1, с. 3—11; [3] Харкевич А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965; [4] Бриллюэн Л., Наука и теория информации, пер. с англ., М., 1960; [5] Черри К., Человек и информация, пер. с англ., М., 1972; [6] Яглом А. М., Яглом И. М., Вероятность и информация, 3 изд., М., 1973; [7] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969; [8] Левин Б. Р., Теоретические основы статистической радиотехники, 2 изд., М., 1974.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ИНФОРМАЦИОННАЯ МАТРИЦА, информация по Фишеру,— матрица ковариаций *информанта*. Для доминированного семейства распределений вероятностей $P^t(d\omega)$ с плотностями $p(\omega; t)$, достаточно гладко зависящими от векторного (в частности, числового) параметра $t=(t_1, \ldots, t_m)\in\Theta$, элементы И. м. при $t=\theta$ определяются как

$$I_{jk}(\theta)=\int_\Omega \frac{\partial \ln p(\omega; t)}{\partial t_j}\cdot\frac{\partial \ln p(\omega; t)}{\partial t_k}\Big|_{t=\theta} p(\omega; \theta)\, d\mu, \quad (1)$$

где $j, k=1, \ldots, m$. При скалярном параметре t И. м. описывается единственным числом — дисперсией информанта.

И. м. $I(\theta)$ определяет неотрицательную дифференциальную квадратичную форму

$$\sum_{j,k} I_{jk}(\theta)\, dt_j\, dt_k=\Delta_\theta, \quad (2)$$

снабжающую семейство $\{P^t\}$ римановой метрикой. Когда пространство Ω исходов ω конечно,

$$\Delta_P=\sum_j (dp_j)^2/p_j; \quad p_j=P(\omega_j), \quad \forall\omega_j\in\Omega.$$

Дифференциальная квадратичная форма Фишера (2) является единственной (с точностью до постоянного множителя) дифференциальной квадратичной формой, инвариантной относительно категории статистических решающих правил. Ввиду этого она возникает в формулировке многих статистич. закономерностей.

Любое измеримое отображение f пространства Ω исходов порождает новое гладкое семейство распределений $Q^t=P^tf^{-1}$ с И. м. $I^Q(\theta)$. При этом И. м. монотонно не возрастает:

$$\sum_{j,k} I^Q_{jk} z_j z_k\leqslant\sum_{j,k} I^P_{j,k} z_j z_k,$$

каковы бы ни были $z_1, \ldots, z_m$. И. м. обладает также свойством аддитивности. Если $I^{(i)}(\theta)$ — И. м. для семейства с плотностью $P_i(\omega^i; t)$, то для семейства

$$p(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(N)}; t)=\prod_{i=1}^N p_i(\omega^{(i)}; t)$$

будет $I_N(\theta)=\sum_i I^{(i)}(\theta)$. В частности, $I_N(\theta)=NI(\theta)$ при N независимых одинаково распределенных испытаниях. И. м. позволяет охарактеризовать статистич.

точность решающих правил в задаче оценки параметра закона распределения. Для дисперсии любой несмещенной оценки $\tau(\omega)=\tau(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(N)})$ скалярного параметра t справедливо

$$\mathsf{D}_\theta \tau \geqslant [NI(\theta)]^{-1}.$$

Аналогичное матричное неравенство информации выполняется для оценок векторного параметра. Его скалярное следствие

$$\mathsf{E}_\theta \sum_{j,\ k=1}^{m} [\tau_j(\omega)-\theta_j][\tau_k(\omega)-\theta_k] I_{jk}(\theta) \geqslant mN^{-1} \quad (3)$$

показывает, что несмещенное оценивание нигде не может быть слишком точным. Для произвольных оценок последнее неверно. Однако остаются ограничения, напр., на среднюю точность

$$\mathfrak{M}_{\Theta'} \mathsf{E}_\theta \langle \tau-\theta \mid I(\theta) \mid \tau-\theta \rangle \geqslant mN^{-1}+o(N^{-1}), \quad (4)$$

где усреднение $\mathfrak{M}$ левой части (3) проведено по инвариантному объему V любой компактной подобласти $\Theta' \subset \Theta$,

$$dV(\theta) = \sqrt{\det I(\theta)}\, d\theta_1 \ldots d\theta_m;$$

остаточный член зависит от размеров Θ'. Неравенства (4) асимптотически точны, и асимптотически оптимальной в этом смысле оказывается оценка максимума правдоподобия.

В точках вырождения, $\det I(\theta)=0$, совместная оценка параметров затруднена; если $\det I(\theta)=0$ в нек-рой области, то совместная оценка вообще невозможна. Таким образом, следуя Р. Фишеру [1], с известной осторожностью можно сказать, что И. м. описывает среднее количество информации о параметрах закона распределения, содержащееся в случайной выборке.

Лит.: [1] Fisher R. A., «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1925, v. 22, p. 700—25; [2] Барра Ж.-Р., Основные понятия математической статистики, пер. с франц., М., 1974; [3] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972. *Н. Н. Ченцов.*

ИНФОРМАЦИОННОЕ МНОЖЕСТВО (в теории игр) — известная игроку в данный момент совокупность возможных состояний (позиций) игры, среди к-рых находится ее действительное состояние. И. м. характеризует знания игрока о прошлых состояниях и выборах как своих (память), так и чужих (информация). Находясь в И. м., игрок должен принять одно решение (выбрать альтернативу И. м., т. е. по одной альтернативе сразу для всех позиций из И. м.), к-рое лишь конкретизируется как альтернатива позиции при реальном разыгрывании игры. *И. Н. Врублевская.*

ИНФОРМАЦИОННОЕ РАССТОЯНИЕ — метрика или псевдометрика на совокупности распределений вероятностей, характеризующая «непохожесть» описываемых этими распределениями случайных явлений. Наиболее интересны И. р. $\rho(P, Q)$, связанные с мерами информативности эксперимента в задаче различения P и Q по наблюдениям.

В любой конкретной задаче статистик, обработав материалы наблюдений, должен сделать выводы о наблюденном явлении. Эти выводы не будут, вообще говоря, совершенно точными, поскольку исходы наблюдений случайны. Интуитивно понятно, что каждая выборка несет какое-то количество полезной информации, причем: А) при обработке информация может только теряться, Б) информация, доставляемая независимыми источниками, напр. независимыми выборками, суммируется. Таким образом, если ввести информативность эксперимента как среднее количество информации в наблюдении, то для информативности выполнены аксиомы А и Б. И хотя понятие информации остается интуитивным, иногда можно указать величину I, удовлетворяющую аксиомам А и Б, к-рая описывает асимптотику средней точ-

ности выводов в задаче с ростом числа наблюдений и к-рую потому естественно принять за информативность. Информативность может быть как числовой, так и матричной величиной. Важный пример — *информационная матрица* в задаче оценки параметра закона распределения.

Согласно аксиоме Б, информативности складываются как квадраты длин (катетов), т. е. квадрат разумного И. р. должен обладать свойством аддитивности. Простейшие И. р.— р а с с т о я н и е п о в а р и а ц и и:

$$\rho_V(P,\ Q)=\int |\,P\,(d\omega)-Q\,(d\omega)\,|,$$

и р а с с т о я н и е в и н в а р и а н т н о й р и м а н о в о й м е т р и к е Ф и ш е р а:

$$\rho_F(P,\ Q)=2\arccos\int \sqrt{P\,(d\omega)\,Q\,(d\omega)},$$

последним свойством не обладают и собственного статистич. смысла не имеют.

По теории Неймана — Пирсона вся полезная информация о различении распределений вероятностей $P(d\omega)$ и $Q(d\omega)$ на общем пространстве Ω исходов ω содержится в отношении правдоподобия или его логарифме

$$\ln p\,(\omega)-\ln q\,(\omega)=\ln\frac{dP}{dQ}\,(\omega),$$

определенном с точностью до значений на множестве исходов вероятности нуль. Математическое ожидание

$$I\,(P:Q)=\int_\Omega\left[\ln\frac{p\,(\omega)}{q\,(\omega)}\right]P\,(d\omega)=$$

$$=\int_\Omega\left[\frac{P\,(d\omega)}{Q\,(d\omega)}\ln\frac{P\,(d\omega)}{Q\,(d\omega)}\right]Q\,(d\omega)$$

наз. (с р е д н е й) и н ф о р м а ц и е й р а з л и ч е н и я (п о К у л ь б а к у) в п о л ь з у P п р о т и в Q, а также о т н о с и т е л ь н о й э н т р о п и е й, и н ф о р м а ц и о н н ы м у к л о н е н и е м. Неотрицательная (может быть, бесконечная) величина $I(P:Q)$ удовлетворяет аксиомам А и Б. Она характеризует точность одностороннего различения P от Q, определяя максимальный порядок убывания вероятности β_N ошибки второго рода (т. е. ошибочного принятия гипотезы P, когда она неверна), при росте числа N независимых наблюдений:

$$\beta_N\sim\exp\,[-N\cdot I\,(P:Q)],$$

при фиксированном уровне значимости — вероятности α_N ошибки первого рода, $0<a_0\leqslant\alpha_N\leqslant a_1<1$.

Аналогичная величина $I(Q:P)$ определяет максимальный порядок убывания α_N при $0<b_0\leqslant\beta_N\leqslant b_1<1$. Отношение «сходства», в частности «сходства» случайных явлений, не симметрично и, как правило, $I(P:Q)\neq\neq I(Q:P)$. Геометрич. интерпретация $I(P:Q)$ как половины квадрата несимметричного расстояния от Q до P оказалась естественной в ряде вопросов статистики. Для такого И. р. неравенство треугольника неверно, но справедлив несимметричный аналог теоремы Пифагора:

$$I\,(R:P)=I\,(R:Q)+I\,(Q:P),$$

если

$$\int_\Omega\left[\ln\frac{q\,(\omega)}{p\,(\omega)}\right]Q\,(d\omega)=\int_\Omega\left[\ln\frac{q\,(\omega)}{p\,(\omega)}\right]R\,(d\omega).$$

Симметричная характеристика непохожести P и Q возникает при их минимаксном тестировании. Для оптимального теста

$$\alpha_N=\beta_N\sim\exp\,[-NI_{PQ}],$$

$$I_{PQ}=-\ln\min_{0<u<1}\int_\Omega|\,P\,(d\omega)\,|^u\,|\,Q\,(d\omega)\,|^{1-u}=$$

$$=\min_R\max\,\{I\,(R:P),\ I\,(R:Q)\}.$$

С информационным уклонением связаны также нек-рые другие И. р. (см. [1], [2]). Для бесконечно близких P и Q главная часть информационного уклонения, равно как и квадрата любого разумного И. р., задается, с точностью до постоянного множителя $c(I)$, квадратичной формой Фишера. Для информационного уклонения

$$c(I) = \frac{1}{2}.$$

Лит.: [1] Кульбак С., Теория информации и статистика, пер. с англ., М., 1967; [2] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972.

Н. Н. Ченцов.

ИНФОРМАЦИОННЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ — мера зависимости между двумя случайными величинами X и Y, определяемая как функция от величины количества информации в одной случайной величине относительно другой:

$$R(X, Y) = \sqrt{1 - e^{-2I(X, Y)}},$$

где $I(X, Y)$ — *информации количество*.

Свойства И. к. к. $R(X, Y)$ как меры зависимости полностью определяются свойствами величины $I(X, Y)$, к-рая сама служит характеристикой зависимости случайных величин X и Y. Однако использование И. к. к. R в качестве самостоятельной меры зависимости как информационного аналога обычного коэффициента корреляции ρ оправдано тем, что для произвольных случайных величин И. к. к. имеет преимущество перед ρ, так как в силу свойств информации $R=0$ тогда и только тогда, когда X и Y независимы. Если X и Y имеют совместное нормальное распределение, то эти два коэффициента совпадают, так как в этом случае

$$I = -\frac{1}{2}\ln(1-\rho^2).$$

Практическое исследование зависимости с помощью И. к. к. равносильно анализу количества информации в таблицах типа таблиц сопряженности признаков. Выборочным аналогом R служит коэффициент

$$\hat{R} = \sqrt{1 - e^{-2\hat{I}}},$$

вычисляемый через информационную статистику $\hat{I}$.

$$\hat{I} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\frac{n_{ij}}{n}\ln\frac{nn_{ij}}{n_{i\cdot}n_{\cdot j}},$$

где n — число наблюдений, s и t — числа классов группировки по двум признакам, n_{ij} — число наблюдений в классе (i, j), $n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{t} n_{ij}$, $n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{s} n_{ij}$. Таким образом, вопрос о распределении выборочного И. к. к. сводится к вопросу о распределении выборочной информации. Анализ выборочной информации как меры зависимости затрудняется тем, что $\hat{I}$ сильно зависит от группировки наблюдений.

Лит.: [1] Linfoot E., «Information and Control», 1957, v. 1, № 1, 85—89; [2] Кульбак С., Теория информации и статистика, пер. с англ., М., 1967.

А. В. Прохоров.

ИНФОРМАЦИЯ — основное понятие *кибернетики*. Кибернетика изучает машины и живые организмы исключительно с точки зрения их способности воспринимать определенную И., сохранять эту И. в «памяти», передавать ее по *каналам связи* и перерабатывать ее в «сигналы», направляющие их деятельность в соответствующую сторону. Интуитивное представление об И. относительно каких-либо величин или явлений, содержащейся в нек-рых данных, в кибернетике ограничивается и уточняется.

В нек-рых случаях возможность сравнения различных групп данных по содержащейся в них И. столь же естественна, как возможность сравнения плоских фи-

гур по их «площади»: независимо от способа измерения площадей можно сказать, что фигура A имеет не бо́льшую площадь, чем B, если A может быть целиком помещена в B (ср. примеры 1—3 ниже). Более глубокий факт — возможность выразить площадь числом и на этой основе сравнивать между собой фигуры произвольной формы — является результатом развитой математич. теории. Подобно этому фундаментальным результатом теории И. является утверждение о том, что в определенных, весьма широких, условиях можно пренебречь качественными особенностями И. и выразить ее количество числом. Только этим числом определяются возможности передачи И. по каналам связи и ее хранения в запоминающих устройствах.

Пример 1. Знание положения и скорости частицы, движущейся в силовом поле, дает И. о ее положении в любой будущий момент времени, притом полную, т. к. это положение может быть предсказано точно. Знание энергии частицы также дает И., но, очевидно, неполную.

Пример 2. Равенство

$$a=b \tag{1}$$

дает И. относительно переменных a и b. Равенство

$$a^2=b^2 \tag{2}$$

дает меньшую И. [т. к. из (1) следует (2), но эти равенства не равносильны]. Наконец, равенство

$$a^3=b^3, \tag{3}$$

равносильное (1), дает ту же И., то есть (1) и (3) — это различные формы задания одной и той же И.

Пример 3. Результаты произведенных с ошибками независимых измерений к.-л. физич. величины дают И. о ее точном значении. Увеличение числа наблюдений увеличивает эту И. Пример 3 а. Среднее арифметическое результатов наблюдений также содержит нек-рую И. относительно рассматриваемой величины. Как показывает математич. статистика, в случае нормального распределения вероятностей ошибок с известной дисперсией среднее арифметическое содержит всю И.

Пример 4. Пусть результатом нек-рого измерения является случайная величина ξ. При передаче по нек-рому каналу связи ξ искажается, в результате чего на приемном конце получают величину

$$\eta=\xi+\theta,$$

где θ не зависит от ξ (в смысле теории вероятностей). «Выход» η дает И. о «входе» ξ, причем естественно ожидать, что эта И. тем меньше, чем больше «рассеяние» значений θ.

В каждом из приведенных примеров данные сравнивались по большей или меньшей полноте содержащейся в них И. В примерах 1—3 смысл такого сравнения ясен и сводится к анализу равносильности или неравносильности нек-рых соотношений. В примерах 3а и 4 этот смысл требует уточнения. Это уточнение дается, соответственно, математич. статистикой и теорией И. (для к-рых эти примеры являются типичными).

В основе *информации теории* лежит предложенный в 1948 К. Шенноном (C. Shannon) способ измерения количества И., содержащейся в одном случайном объекте (событии, величине, функции и т. п.) относительно другого случайного объекта. Этот способ приводит к выражению количества И. числом. Положение можно всего лучше объяснить в простейшей обстановке, когда рассматриваемые случайные объекты являются случайными величинами, принимающими лишь конечное число значений. Пусть ξ — случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а η — случайная величина, принимающая значения $y_1, y_2, \ldots, y_m$ с вероятностями

$q_1, q_2, \ldots, q_m$. Тогда И. $I(\xi, \eta)$ относительно η, содержащаяся в ξ, определяется формулой

$$I(\xi, \eta) = \sum_{i,j} p_{ij} \log_2 (p_{ij}/p_i q_j), \qquad (4)$$

где p_{ij} — вероятность совмещения событий $\xi = x_i$ и $\eta = y_j$ и логарифмы берутся по основанию 2. И. $I(\xi, \eta)$ обладает рядом свойств, к-рые естественно требовать от меры количества И. Так, всегда $I(\xi, \eta) \geqslant 0$ и равенство $I(\xi, \eta) = 0$ возможно тогда и только тогда, когда $p_{ij} = p_i q_j$ при всех i и j, т. е. когда случайные величины ξ и η **независимы**. Далее, всегда $I(\xi, \eta) \leqslant I(\eta, \eta)$ и равенство возможно только в случае, когда η есть функция от ξ (напр., $\eta = \xi^2$ и т. д.). Неожиданным может казаться лишь равенство $I(\xi, \eta) = I(\eta, \xi)$.

Величина $H(\xi) = I(\xi, \xi) = \sum_i p_i \log_2 (1/p_i)$ носит название *энтропии* случайной величины ξ. Понятие энтропии относится к числу основных понятий теории И. Количество И. и энтропия связаны соотношением

$$I(\xi, \eta) = H(\xi) + H(\eta) - H(\xi, \eta), \qquad (5)$$

где $H(\xi, \eta)$ — энтропия пары (ξ, η), т. е.

$$H(\xi, \eta) = \sum_{i,j} p_{ij} \log_2 (1/p_{ij}).$$

Величина энтропии указывает среднее число двоичных знаков, необходимое для различения (или записи) возможных значений случайной величины. Это обстоятельство позволяет понять роль количества И. (4) при «хранении» И. в запоминающих устройствах. Если случайные величины ξ и η независимы, то для записи значения ξ требуется в среднем $H(\xi)$ двоичных знаков, для значения η требуется $H(\eta)$ двоичных знаков, а для пары (ξ, η) требуется $H(\xi) + H(\eta)$ двоичных знаков. Если же случайные величины ξ и η зависимы, то среднее число двоичных знаков, необходимое для записи пары (ξ, η), оказывается меньшим суммы $H(\xi) + H(\eta)$, так как $H(\xi, \eta) = H(\xi) + H(\eta) - I(\xi, \eta)$.

С помощью значительно более глубоких теорем выясняется роль количества И. (4) в вопросах передачи И. по каналам связи. Основная информационная характеристика каналов, так наз. **емкость**, определяется через понятие «И.».

Если ξ и η могут принимать бесконечное число значений, то предельным переходом из (4) получается формула

$$I(\xi, \eta) = \int\int p(x, y) \log_2 \frac{p(x, y)}{p(x)\, q(y)}\, dx\, dy, \qquad (6)$$

где буквами p и q обозначены соответствующие плотности вероятности. При этом энтропии $H(\xi)$ и $H(\eta)$ не существуют, но имеет место формула, аналогичная (5)

$$I(\xi, \eta) = h(\xi) + h(\eta) - h(\xi, \eta), \qquad (7)$$

где

$$h(\xi) = \int p(x) \log_2 \frac{1}{p(x)}\, dx$$

— *дифференциальная энтропия* ξ [$h(\eta)$ и $h(\xi, \eta)$ определяются подобным же образом].

Пример 5. Пусть в условиях примера 4 случайные величины ξ и θ имеют нормальное распределение вероятностей с нулевыми средними значениями и дисперсиями, равными соответственно σ_ξ^2 и σ_θ^2. Тогда, как можно подсчитать по формулам (6) или (7): $I(\eta, \xi) = I(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \log_2 [1 + \sigma_\xi^2/\sigma_\theta^2]$. Таким образом, количество И. в «принятом сигнале» η относительно «переданного сигнала» ξ стремится к нулю при возрастании уровня «помех» θ (т. е. при $\sigma_\theta^2 \to \infty$) и неограниченно возрастает при исчезающе малом влиянии «помех» (т. е. при $\sigma_\theta^2 \to 0$).

Особенный интерес для теории связи представляет случай, когда в обстановке примеров 4 и 5 случайные величины ξ и η заменяются случайными функциями (или, как говорят, случайными процессами) $\xi(t)$ и $\eta(t)$, к-рые описывают изменение нек-рой величины на входе и на выходе передающего устройства. Количество И. в $\eta(t)$ относительно $\xi(t)$ при заданном уровне помех («шумов», по акустич. терминологии) $\theta(t)$ может служить критерием качества самого этого устройства.

В задачах математич. статистики также пользуются понятием И. (ср. примеры 3 и 3а). Однако как по своему формальному определению, так и по своему назначению оно отличается от вышеприведенного (из теории И.). Статистика имеет дело с большим числом результатов наблюдений и заменяет обычно их полное перечисление указанием нек-рых сводных характеристик. Иногда при такой замене происходит потеря И., но при нек-рых условиях сводные характеристики содержат всю И., содержащуюся в полных данных (разъяснение смысла этого высказывания дано в конце примера 6). Понятие И. в статистике было введено Р. Фишером (R. Fisher) в 1921.

Пример 6. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — результаты n независимых наблюдений нек-рой величины, распределенные по нормальному закону с плотностью вероятности

$$p(x;\, a,\, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(x-a)^2/2\sigma^2\right],$$

где параметры a и σ^2 (среднее и дисперсия) неизвестны и должны быть оценены по результатам наблюдений. Достаточными статистиками (т. е. функциями от результатов наблюдений, содержащими всю И. о неизвестных параметрах) в этом примере являются среднее арифметическое

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

и так наз. эмпирическая дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \overline{\xi})^2.$$

Если параметр σ^2 известен, то достаточной статистикой будет только $\overline{\xi}$ (ср. пример 3а выше).

Смысл выражения «вся И.» может быть пояснен следующим образом. Пусть имеется к.-л. функция неизвестных параметров $\varphi = \varphi(a,\ \sigma^2)$ и пусть $\varphi^* = \varphi^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — к.-л. ее оценка, лишенная систематич. ошибки. Пусть качество оценки (ее точность) измеряется (как это обычно делается в задачах математич. статистики) дисперсией разности $\varphi^* - \varphi$. Тогда существует другая оценка φ^{**}, зависящая не от отдельных величин ξ_i, а только от сводных характеристик $\overline{\xi}$ и s^2, не худшая (в смысле упомянутого критерия), чем φ^*. Р. Фишером была предложена также мера (среднего) количества И. относительно неизвестного параметра, содержащейся в одном наблюдении. Смысл этого понятия раскрывается в теории статистич. оценок.

Лит. см. при ст. *Информации передача.* *Ю. В. Прохоров.*

ИНФРАБОЧЕЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО — локально выпуклое линейное топологич. пространство, в к-ром каждая бочка (т. е. поглощающее выпуклое замкнутое уравновешенное множество), поглощающая любое ограниченное множество, является окрестностью нуля. Важный класс И. п. доставляют *бочечные пространства.*

Произведение любого числа и индуктивный предел И. п. есть И. п.; локально выпуклое пространство инфрабочечно тогда и только тогда, когда либо каждая ограниченная полунепрерывная снизу полунорма является непрерывной, либо каждое сильно ограничен-

ное подмножество в сопряженном пространстве равностепенно непрерывно. В частности, каждое борнологическое пространство (т. е. пространство, в к-ром каждая ограниченная полунорма непрерывна) является И. п. В секвенциально полном линейном топологич. пространстве из инфрабочечности следует бочечность, И. п., подобно бочечным, могут быть охарактеризованы через отображения в банаховы пространства: локально выпуклое линейное топологич. пространство X является И. п. тогда и только тогда, когда для всякого банахова пространства Y каждое линейное отображение из X в Y, имеющее замкнутый график и переводящее ограниченные множества в ограниченные, непрерывно. См. также *Ультрабочечное пространство*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [2] Эдвардс Р.-Э., Функциональный анализ. Теория и приложения, пер. с англ., М., 1969.

В. М. Тихомиров.

ИНЦИДЕНТНОСТИ КОЭФФИЦИЕНТ — число, характеризующее когерентность ориентации инцидентных элементов симплициального, полиэдрального (клеточного) и других комплексов. Понятие И. к. и его свойства необходимо входят в определение любого абстрактного *комплекса*.

Пусть $t^n=(a_0, \ldots, a_n)$ — ориентированный симплекс в пространстве $\mathbb{R}^N$, т. е. симплекс, в к-ром выбран указанный порядок его вершин a_s, а $t_i^{n-1}=(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ — его ориентированная грань, противоположная вершине a_i. Если i — четное, то t^n и t_i^{n-1} ориентированы когерентно, а ориентация грани t_i^{n-1} индуцирована ориентацией симплекса t^n; в этом случае симплексам приписывается И. к. $[t^n: t_i^{n-1}]=+1$. Если i — нечетное, то t^n и t_i^{n-1} ориентированы некогерентно, и им приписывается И. к. $[t^n : t_i^{n-1}]=-1$.

Пусть теперь t^n и t^{n-1} — элементы (симплексы) *симплициального комплекса* в $\mathbb{R}^N$. Тогда их И. к. определяется следующим образом: если t^n и t^{n-1} неинцидентны, то $[t^n : t^{n-1}]=0$, если t^n и t^{n-1} инцидентны, то $[t^n : t^{n-1}]=+1$ или -1 в зависимости от того, когерентно ориентированы t^n и t^{n-1} или нет.

Свойства И. к.

$$[-t^n : t^{n-1}] = [t^n : -t^{n-1}] = -[t^n : t^{n-1}], \qquad (1)$$

где $-t^n$ — противоположно ориентированный симплекс, т. е. симплекс, получающийся нечетной перестановкой вершин симплекса t^n;

$$\sum\nolimits_k [t^n : t_k^{n-1}][t_k^{n-1} : t^{n-2}] = 0, \qquad (2)$$

где суммирование распространяется на все как-либо ориентированные симплексы t_k^{n-1} (для выполнимости (2) при нек-рых определениях симплициального комплекса требуется его полнота).

Аналогично, при надлежащем определении когерентностей ориентаций, вводится И. к. элементов *полиэдрального комплекса*. Пусть $\mathbb{R}^{n-1}$ — подпространство в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_1^n$ — одно из полупространств, ограниченных $\mathbb{R}^{n-1}$, и пусть $\mathbb{R}^n$ ориентировано выбором нек-рого векторного базиса $(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда $\mathbb{R}_1^n$ и $\mathbb{R}^{n-1}$ наз. когерентно ориентированными, если $(e_2, \ldots, e_n)$ — базис в $\mathbb{R}^{n-1}$, а e_1 направлен в полупространство $\mathbb{R}_1^n$. Клетки σ^r и σ^{r-1} когерентно ориентированы, если они содержатся соответственно в нек-рых когерентно ориентированных полупространстве и подпространстве.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975; [2] Хилтон П.-Дж., Уайли С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, пер. с англ., М., 1966; [3] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976.

М. И. Войцеховский.

ИНЦИДЕНТНОСТИ СИСТЕМА — совокупность $S=(A, \mathfrak{B}, I)$ двух множеств A и $\mathfrak{B}$ с отношением инцидентности I между их элементами, к-рое записывается как aIB для $a\in A$, $B\in\mathfrak{B}$; в этом случае говорят, что элемент a инцидентен элементу B, или B инцидентен a. Понятие «И. с.» вводится с целью использования геометрич. языка при рассмотрении общих комбинаторных проблем существования и построения; при этом отношению инцидентности предписываются нек-рые свойства, приводящие к тем или иным комбинаторным конфигурациям.

Примером используемых в комбинаторике И. с. служат (конечные) геометрии: элементы (конечных) множеств A и $\mathfrak{B}$ наз. соответственно точками и прямыми, а отношению I предписываются свойства, обычные в теории проективных или аффинных геометрий. Другим характерным примером И. с. являются *блок-схемы*, к-рые получаются, если потребовать, чтобы: 1) каждый элемент $a\in A$ был инцидентен в точности r элементам из $\mathfrak{B}$, 2) каждый элемент $B\in\mathfrak{B}$ был инцидентен в точности k элементам из A; 3) каждая пара $\{a, a'\}$ различных элементов из A была инцидентна в точности λ элементам из $\mathfrak{B}$. Часто в качестве $\mathfrak{B}$ берется нек-рое множество подмножеств множества A, тогда aIB есть не что иное, как $a\in B$.

И. с. $S=(A, \mathfrak{B}, I)$ и $S'=(A', \mathfrak{B}', I')$ наз. *изоморфными*, если существуют такие взаимно однозначные соответствия $\alpha : A\leftrightarrow A'$ и $\beta : \mathfrak{B}\leftrightarrow\mathfrak{B}'$, что

$$aIB \Leftrightarrow (\alpha a)\, I'\, (\beta B).$$

Если $A=\{a, a_2, \ldots\}$ и $\mathfrak{B}=\{B_1, B_2, \ldots\}$ — конечные множества, то удобно описывать свойства И. с. S с помощью *матрицы инцидентности* $\|\alpha_{ij}\|$, где $\alpha_{ij}=1$, когда $a_j\in B_i$ и $\alpha_{ij}=0$ — в противном случае; матрица $\|\alpha_{ij}\|$ определяет И. с. S с точностью до изоморфизма.

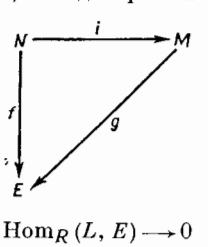
Лит.: [1] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [2] Dembowski P., Finite Geometries, B.—N.Y., 1968.

В. Е. Тараканов.

ИНЦИДЕНТНОСТЬ — геометрический термин, употребляемый для обозначения ($\in$) отношения принадлежности (связи, соединения) между основными объектами геометрии: точками, прямыми, плоскостями. Свойства И. характеризуются так наз. аксиомами принадлежности (см., например, *Гильберта система аксиом*).

А. Б. Иванов.

ИНЪЕКТИВНЫЙ МОДУЛЬ — инъективный объект в категории модулей над кольцом R, т. е. такой R-модуль E над ассоциативным кольцом R с единицей, что для любых R-модулей M, N, для любого мономорфизма $i : N\to M$ и для любого гомоморфизма $f : N\to E$ найдется такой гомоморфизм $g : M\to E$, что диаграмма коммутативна (все R-модули предполагаются правыми). Следующие условия на R-модуль E равносильны его инъективности: 1) для любой точной последовательности



$$0\to N\to M\to L\to 0$$

индуцированная последовательность

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, E)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, E)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L, E)\longrightarrow 0$$

точна; 2) любая точная последовательность R-модулей, имеющая вид

$$0\longrightarrow E\xrightarrow{\alpha} M\xrightarrow{\beta} L\longrightarrow 0,$$

расщепляется, т. е. подмодуль $\mathrm{Im}\,\alpha=\mathrm{Ker}\,\beta$ выделяется в M прямым слагаемым; 3) $\mathrm{Ext}^1_R(C, E)=0$ для всех R-модулей C; 4) для всякого правого идеала I кольца R любой гомоморфизм R-модулей $f : I\to E$ может быть

продолжен до гомоморфизма R-модулей $g : R \to E$ (критерий Бэра).

В категории R-модулей «достаточно много» инъективных объектов: каждый R-модуль M можно вложить в И. м. Более того, каждый модуль M содержится в своей инъективной оболочке $E(M)$, то есть в И. м. $E(M)$, каждый ненулевой подмодуль к-рого имеет ненулевое пересечение с M. Любое вложение модуля M в И. м. E продолжается до вложения инъективной оболочки $E(M)$ в E. Каждый R-модуль M обладает инъективной резольвентой

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow E_n \longrightarrow \ldots,$$

т. е. точной последовательностью модулей, в к-рой все модули E_i, $i \geqslant 0$, инъективны. Длина самой короткой инъективной резольвенты наз. инъективной размерностью модуля (см. также *Гомологическая размерность*).

Прямое произведение И. м. есть И. м. Инъективный модуль E равен Er для любого элемента $r \in R$, не являющегося левым делителем нуля в R, т. е. И. м.— делимый модуль. В частности, абелева группа является И.м. над кольцом $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда она делимая. Над коммутативным нётеровым кольцом R каждый И. м.— прямая сумма инъективных оболочек модулей вида R/P, где P — простой идеал кольца R.

И. м. широко используются при описании различных классов колец (см. *Гомологическая классификация колец*). Так, все модули над кольцом инъективны тогда и только тогда, когда кольцо классически полупросто. Равносильны условия: R — нётерово справа кольцо; любая прямая сумма инъективных R-модулей инъективна; любой инъективный R-модуль разлагается в прямую сумму неразложимых R-модулей. Артиновость справа кольца R равносильна тому, что каждый И. м. является прямой суммой инъективных оболочек простых модулей. Наследственность справа кольца равносильна инъективности всех фактормодулей инъективных R-модулей, а также тому, что сумма двух инъективных подмодулей в произвольном R-модуле инъективна. Если кольцо R наследственно справа и нётерово справа, то каждый R-модуль содержит наибольший инъективный подмодуль. Проективность (инъективность) всех инъективных (проективных) R-модулей эквивалентна тому, что R является квазифробениусовым кольцом.

Инъективная оболочка модуля R_R играет важную роль в теории колец частных. Напр., если правый сингулярный идеал кольца R равен нулю, E — инъективная оболочка модуля R_R, $\Lambda = \mathrm{Hom}_R(E, E)$ — ее кольцо эндоморфизмов, то R-модули Λ_R и E_R изоморфны, E является кольцом, изоморфным кольцу Λ, и это кольцо оказывается максимальным правым кольцом частных кольца R, причем $\Lambda \cong E$ — самоинъективное справа регулярное (в смысле Неймана) кольцо.

В связи с различными задачами продолжения гомоморфизмов модулей рассматриваются классы модулей M, близких к инъективным: квазиинъективные (если $0 \to N \to M$ и $f : N \to M$, то f продолжается до эндоморфизма модуля M); псевдоинъективные (если $0 \to N \to M$, $f : N \to M$ и f — мономорфизм, то f продолжается до эндоморфизма модуля M); малоинъективные (все эндоморфизмы подмодулей продолжаются до эндоморфизмов модуля M). Квазиинъективность модуля M равносильна инвариантности модуля M в своей инъективной оболочке относительно ее эндоморфизмов.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [3] Faith C., Lectures on injective modules and quotient rings, B.—Hdlb.—N.Y., 1967; [4] Sharpe D. W., Vamos P., Injective modules, Camb., 1972.

А. В. Михалев, А. А. Туганбаев.

ИНЪЕКТИВНЫЙ ОБЪЕКТ — такой объект I абелевой категории C, что для каждого мономорфизма $\alpha: A' \to A$ отображение

$$\mathrm{Hom}_C(A, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(A', I), \quad \text{где} \quad \varphi \longmapsto \varphi \circ \alpha$$

является сюръективным. Всякий инъективный подобъект I объекта A выделяется прямым слагаемым. Произведение И. о. — всегда И. о. В случае, когда каждый объект в C изоморфен подобъекту нек-рого И. о. категории C, говорят, что C — к а т е г о р и я с д о с т а т о ч н о м н о г и м и и н ъ е к т и в н ы м и о б ъ е к т а м и (такова, напр., категория Гротендика). В этих категориях объект инъективен тогда и только тогда, когда он выделяется прямым слагаемым из любого объекта, его содержащего. Для объектов таких категорий можно строить резольвенты, состоящие из И. о. (и н ъ е к т и в н ы е р е з о л ь в е н т ы), что позволяет развивать в этих категориях гомологическую алгебру.

В локально нётеровых категориях (см. *Топологизированная категория*) прямая сумма И. о. является И. о., а каждый И. о. изоморфен прямой сумме неразложимых И. о. и это представление однозначно [3]. Если C — категория модулей над нётеровым коммутативным кольцом Λ, то неразложимые инъективные модули суть инъективные оболочки полей частных факторколец $\Lambda/\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — произвольный простой идеал в Λ [4].

П р и м е р ы: 1) Категория абелевых групп имеет достаточно много И. о. Таковыми объектами являются полные (делимые) группы.

2) Категория C_Λ правых Λ-модулей содержит достаточно много И. о. (см. *Инъективный модуль*).

3) Категория пучков модулей на окольцованном топологич. пространстве (X, O_X) содержит достаточно много И. о. Примерами таких И. о. служат пучки F, все слои к-рых F_x являются инъективными $O_{X,x}$-модулями. В случае, когда (X, O_X) есть *схема*, для квазикогерентных $O_{X,x}$-модулей верно и обратное утверждение: всякий И. о. есть пучок, все слои к-рого являются инъективными $O_{X,x}$-модулями.

Лит.: [1] Б у к у р И., Д е л я н у А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [2] Г р о т е н д и к А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [3] G a b r i e l P., «Bull. Soc. Math. France», 1962, t. 90, p. 323—448; [4] M a t l i s E., «Pacific J. Math.», 1958, v. 8, p. 511—28.

И. В. Долгачев.

ИНЪЕКЦИЯ, и н ъ е к т и в н о е о т о б р а ж е н и е, множества A в множество B — отображение $f: A \to B$, при к-ром различные элементы из A имеют различные образы в B. И. наз. также в з а и м н о о д н о з н а ч н ы м о т о б р а ж е н и е м множества A в множество B, или в л о ж е н и е м.

О. А. Иванова.

ИОАХИМСТАЛЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, образованная ортогональными траекториями однопараметрического семейства сфер с центрами на одной прямой. Если за эту прямую принять ось z, аппликату центра сферы обозначить через u, а радиус сферы — через $R = R(u)$, то радиус-вектор И. п. есть:

$$r = \left\{ \frac{R\cos v}{\mathrm{ch}\,\tau}, \ \frac{R\sin v}{\mathrm{ch}\,\tau}, \ u + R\,\mathrm{th}\,\tau \right\},$$

где

$$\tau = \int \frac{du}{R} + V(v).$$

Одно из семейств линий кривизны ($v = \mathrm{const}$) И. п. расположено в плоскостях одного пучка. Изучена Ф. Иоахимсталем [1].

Лит.: [1] J o a c h i m s t h a l F., «J. reine und angew. Math.», 1846, Bd 30, S. 347—50.

И. Х. Сабитов.

ИРРАЦИОНАЛЬНОЕ ЧИСЛО — число, не являющееся рациональным (т. е. целым или дробным) числом. Геометрически И. ч. выражает собой длину от-

резка, несоизмеримого с отрезком единичной длины. О существовании несоизмеримых отрезков знали уже древние математики: им была известна, напр., несоизмеримость диагонали и стороны квадрата, что равносильно иррациональности числа $\sqrt{2}$.

Всякое действительное число может быть записано бесконечной десятичной дробью, при этом И. ч. и только они записываются непериодическими десятичными дробями, напр. $\sqrt{2}=1{,}41\ldots$, $\pi=3{,}14\ldots$. И. ч. определяют сечения (см. *Дедекиндово сечение*) в множестве рациональных чисел, у к-рых в нижнем классе нет наибольшего, а в верхнем нет наименьшего числа. Множество И. ч. всюду плотно на числовой прямой: между любыми двумя числами имеется И. ч. Множество И. ч. несчетно, является множеством второй категории и имеет тип G_δ.

И р р а ц и о н а л ь н ы е а л г е б р а и ч е с к и е ч и с л а (в отличие от трансцендентных чисел) не допускают аппроксимаций любого порядка рациональными дробями. Точнее, для всякого иррационального алгебраического числа степени n числа ξ существует такое $c>0$, что при любых целых p и q ($q>0$) выполняется неравенство

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|>\frac{c}{q^n}.$$

Квадратичные иррациональности и только они изображаются периодическими цепными дробями.

Л. Д. Кудрявцев.

ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ МЕРА д е й с т в и т е л ь н о г о ч и с л а ξ — функция

$$L(\xi,\ H)=\min|h_1\xi+h_0|,$$

где минимум берется по всевозможным парам h_0, h_1 целых рациональных чисел таких, что

$$|h_0|\leqslant H,\quad |h_1|\leqslant H,\quad |h_0|+|h_1|\neq 0.$$

Понятие И. м. является частным случаем понятий *линейной независимости меры* и *трансцендентности меры*. И. м. показывает, насколько «хорошо» может число ξ быть приближено рациональными дробями. Для всех действительных иррациональных чисел ξ выполняется неравенство

$$L(\xi,\ H)<\frac{1}{\sqrt{5}}H^{-1},$$

но при любом $\varepsilon>0$ для почти всех (в смысле меры Лебега) действительных ξ

$$L(\xi,\ H)>CH^{-1-\varepsilon},$$

где $C=C(\varepsilon,\ \xi)>0$. Однако для любой функции $\varphi(H)\to 0$ при $H\to\infty$ и $\varphi(H)>0$ существует число ξ_φ такое, что при всех $H\geqslant 1$

$$0<L(\xi_\varphi,\ H)<\varphi(H).$$

Лит.: [1] Х и н ч и н А. Я., Цепные дроби, 3 изд., М. 1978.

А. И. Галочкин.

ИРРЕГУЛЯРНАЯ ГРАНИЧНАЯ ТОЧКА — точка y_0 границы Γ области D, для к-рой существует такая непрерывная граничная функция $f(y)$ на Γ, что обобщенное решение *Дирихле задачи* в смысле Винера — Перрона (см. *Перрона метод*) $u(x)$ не принимает в точке y_0 граничного значения $f(y_0)$, т. е. либо предел

$$\lim_{x\to y_0,\ x\in D}u(x)$$

не существует, либо не совпадает с $f(y_0)$. Для плоских областей D И. г. т. является всякая изолированная точка границы Γ. В случае области D в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, А. Лебег (H. Lebesgue, 1912) впервые обнаружил, что И. г. т. может быть вершина весьма заостренного входящего в D острия. Напр.,

И. г. т. является начало координат $O \in \mathbb{R}^3$, если в его окрестности граница области имеет вид входящего острия, получаемого вращением кривой $y = e^{-1/x}$, $x > 0$, вокруг положительной полуоси Ox (острие Лебега). Обобщенное решение задачи Дирихле не принимает в И. г. т. граничного значения $f(y_0)$ в том случае, если $f(y_0)$ является верхней или нижней гранью значений $f(y)$ на Γ; при этом классическое решение не существует. Множество И. г. т. в определенном смысле разреженное, оно имеет тип F_σ, является *полярным множеством* и имеет нулевую *емкость*. См. также *Барьер*, *Регулярная граничная точка*.

Лит.: [1] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [2] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964. *Е. Д. Соломенцев.*

ИРРЕГУЛЯРНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА — понятие, возникающее в аналитич. теории линейных дифференциальных уравнений. Пусть $(n \times n)$-матрица $A(t)$ голоморфна в проколотой окрестности точки $t_0 \neq \infty$ и имеет особенность в точке t_0; точка t_0 наз. тогда особой точкой системы

$$\dot{x} = A(t)\, x. \qquad (*)$$

Существует два неэквивалентных определения И. о. т. Согласно первому определению, точка t_0 наз. И. о. т. системы (*), если $A(t)$ имеет в точке t_0 полюс порядка выше первого (см. *Аналитическая теория дифференциальных уравнений*, а также [2]). Согласно второму определению, точка t_0 наз. И. о. т. системы (*), если не существует такого числа $\sigma > 0$, что каждое решение $x(t)$ растет не быстрее $|t - t_0|^{-\sigma}$ при $t \to t_0$ по лучам (см. [3]). Случай $t_0 = \infty$ сводится к случаю $t_0 = 0$ с заменой $t \to t^{-1}$. И. о. т. наз. иногда существенно особой точкой (см., напр., *Бесселя уравнение*). В окрестности И. о. т. решения допускают асимптотич. разложения, изученные впервые А. Пуанкаре [1].

Лит.: [1] Poincaré H., «Acta math.», 1886, v. 8, p. 295—344; [2] Вазов В., Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1968; [3] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958. *Ю. С. Ильяшенко.*

ИРРЕГУЛЯРНОЕ ПРОСТОЕ ЧИСЛО — простое нечетное число p, для к-рого число классов идеалов *кругового поля* $R(e^{2\pi i/p})$ делится на p. Все остальные простые нечетные числа наз. регулярными.

Признак Куммера позволяет для каждого данного простого числа решить вопрос о том, будет ли оно регулярным или нет: для того чтобы нечетное простое число p было регулярным, необходимо и достаточно, чтобы ни один из числителей первых $\frac{p-3}{2}$ *Бернулли чисел* $B_2, B_4, \ldots, B_{p-3}$ не делился на p (см. [1]).

В связи с этим результатом возник вопрос о распределении регулярных и иррегулярных чисел. Таблицы бернуллиевых чисел и признак Куммера показывают, что в пределах первой сотни только три простых числа: 37, 59 и 67 — иррегулярны (числители B_{32}, B_{44} и B_{58} — кратны соответственно 37, 59 и 67). Э. Куммер предположил, что регулярных чисел в среднем в два раза больше, чем иррегулярных. Позднее К. Зигель [2] выдвинул предположение, состоявшее в том, что отношение числа И. п. ч. к числу регулярных простых чисел, содержащихся в промежутке $(1, x)$, при $x \to \infty$ стремится к пределу $\sqrt{e} - 1$, где e — основание натуральных логарифмов. К настоящему времени (1978) известно только, что число И. п. ч. бесконечно и что среди нечетных простых чисел, меньших 5500, имеется 439 регулярных и 285 И. п. ч. [3].

Для всякого регулярного p уравнение Ферма

$$x^p + y^p = z^p$$

не имеет ненулевых решений в рациональных числах [1].

Пусть p — некоторое И. п. ч., $2\alpha_1, \ldots, 2\alpha_s$ — индексы бернуллиевых чисел из $B_2, B_4, \ldots, B_{p-3}$, числители к-рых делятся на p, а k и t — натуральные числа такие, что $q=1+pk$ — простое, меньшее $p(p-1)$ и $t^k \not\equiv 1 \pmod q$. И пусть

$$d = \sum_{r=1}^{(p-1)/2} r^{p-2\alpha},$$

$$D_\alpha = t^{-kd/2} \prod_{r=1}^{(p-1)/2} (t^{kr}-1)^{r^{p-1-2\alpha}}.$$

Если для каждого $\alpha=\alpha_i$, $i=1, 2, \ldots, s$,

$$D_\alpha^k \not\equiv 1 \pmod q,$$

то для иррегулярного простого p справедлива теорема Ферма, т. е. уравнение Ферма неразрешимо в рациональных числах, отличных от 0. Этот признак наз. признаком Вандивера. С помощью этого признака установлена справедливость теоремы Ферма для всех показателей, меньших 5500 (см. [4]).

Лит.: [1] Kummer E. E., «J. reine und angew. Math.», 1850, Bd 40, S. 130—38; [2] Siegel C. Z., «Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.», 1904, S. 51—57; [3] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [4] Vandiver H. S., «Proc. Nat. Acad.», 1954, v. 40, № 8, p. 732—35.

В. А. Демьяненко.

ИРРЕГУЛЯРНОСТЬ — численный инвариант неособого проектного алгебраич. многообразия, равный размерности его *Пикара многообразия*. В случае, когда основное поле имеет характеристику нуль (или, более общо, если схема Пикара многообразия X приведена), И. совпадает с размерностью пространства $H^1(X, O_X)$ первых когомологий с коэффициентами в структурном пучке.

Многообразия с ненулевой И. наз. иррегулярными, а многообразия с нулевой И.— регулярными. Иногда для полной линейной системы $|D|$ на многообразии X i-й иррегулярностью системы $|D|$ наз. число

$$\sigma^i(D) = \dim H^i(X, O_X(D)),$$

где $1 \leqslant i \leqslant \dim X$.

Лит.: [1] Бальдассарри М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [2] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968.

И. В. Долгачев.

ИСКАЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ при конформных отображениях плоских областей — теоремы, характеризующие искажение линейных элементов в данной точке области, а также искажение области и ее подмножеств, и искажение границы области при *конформном отображении*. К И. т. в первую очередь относятся оценки модуля производной функции в данной точке области. Так, И. т. в классе Σ функций

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \ldots,$$

мероморфных и однолистных в области $|\zeta|>1$, состоит в утверждении, что при любом ζ_0, $1<|\zeta_0|<\infty$, имеют место точные неравенства

$$1 - \frac{1}{|\zeta_0|^2} \leqslant |F'(\zeta_0)| \leqslant \frac{|\zeta_0|^2}{|\zeta_0|^2-1}. \qquad (1)$$

Равенство в левой части (1) имеет место только для функции

$$F_1(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \zeta_0 (\overline{\zeta}_0 \zeta)^{-1},$$

а в правой части — только для функции

$$F_2(\zeta) = \frac{\zeta - \zeta_0}{1 - (\overline{\zeta}_0 \zeta)^{-1}} + \beta_0,$$

где α_0 и β_0 — произвольные фиксированные числа. Функция $w=F_1(\zeta)$ отображает область $|\zeta|>1$ на плоскость w с разрезом по отрезку, соединяющему точки

$\alpha_0-2\frac{\zeta_0}{|\zeta_0|}$ и $\alpha_0+2\frac{\zeta_0}{|\zeta_0|}$, а функция $w=F_2(\zeta)$ отображает область $|\zeta|>1$ на плоскость w с разрезом по дуге окружности $|w-\beta_0|=|\zeta_0|$ со средней точкой $\beta_0-\zeta_0$. Неравенства (1) легко получаются из неравенства Грунского

$$|\ln F'(\zeta_0)|\leqslant-\ln\left(1-\frac{1}{|\zeta_0|^2}\right),$$

определяющего область значений функционала $\ln F'(\zeta_0)$ на классе Σ. С другой стороны, неравенства (1) являются прямым следствием теоремы Голузина: если $F(\zeta)\in\Sigma$, то для любых точек ζ_1 и ζ_2, $|\zeta_1|=|\zeta_2|=\rho$, $1<\rho<\infty$, справедливо точное неравенство

$$\left|\ln\frac{F(\zeta_1)-F(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right|\leqslant-\ln\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right), \qquad (2)$$

причем знак равенства имеет место для функции $F(\zeta)=\zeta+e^{i\alpha}/\zeta$, где α — действительная постоянная. Из неравенства (2) следует также теорема искажения хорд (см. [1]): если функция $F(\zeta)\in\Sigma$, то для любых точек ζ_1 и ζ_2 на окружности $|\zeta|=\rho>1$ справедливо точное неравенство

$$\left|\frac{F(\zeta_1)-F(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right|\geqslant 1-\frac{1}{\rho^2};$$

при этом знак равенства имеет место только для функции

$$F(\zeta)=\zeta+C+\frac{e^{2i\varphi}}{\zeta},$$

где C — постоянная, $\varphi=\frac{1}{2}(\arg\zeta_1+\arg\zeta_2)$. Известны различные обобщения неравенства (2), определяющие области значений соответствующих функционалов и составляющие усиления И. т. в классе Σ и его подклассах (см., напр., [1]).

В классе S функций

$$f(z)=z+c_2z^2+\ldots,$$

регулярных и однолистных в круге $|z|<1$, при $0<|z_0|<1$ справедливы следующие точные неравенства:

$$\frac{1-|z_0|}{(1+|z_0|)^3}\leqslant|f'(z_0)|\leqslant\frac{1+|z_0|}{(1-|z_0|)^3}, \qquad (3)$$

$$\frac{|z_0|}{(1+|z_0|)^2}\leqslant|f(z_0)|\leqslant\frac{|z_0|}{(1-|z_0|)^2}, \qquad (4)$$

$$\frac{1-|z_0|}{1+|z_0|}\leqslant\left|\frac{z_0f'(z_0)}{f(z_0)}\right|\leqslant\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}. \qquad (5)$$

Оценки (4) и (5) следуют из оценок (3). Совокупность неравенств (3) — (5) наз. И. т. в классе S. Нижние границы в оценках (3) — (5) реализуются только функцией

$$f_\alpha(z)=z\left(1+e^{-i\alpha}z\right)^{-2},$$

верхние границы — только функцией

$$f_{\pi+\alpha}(z)=z\left(1-e^{-i\alpha}z\right)^{-2},$$

где $\alpha=\arg z_0$. Функции $w=f_\alpha(z)$, $0\leqslant\alpha<2\pi$, известные как функции Кёбе, отображают круг $|z|<1$ на плоскость w с разрезом по лучу $\arg w=\alpha$, $|w|\geqslant 1/4$, и являются экстремальными в ряде задач теории однолистных функций. Имеет место теорема Кёбе об $1/4$: область, являющаяся образом круга $|z|<1$ при отображении $w=f(z)$, $f(z)\in S$, всегда содержит круг $|w|<1/4$, причем точка $w_0=\frac{1}{4}e^{i\alpha}$ принадлежит границе этой области только для функции $f(z)=f_\alpha(z)$.

Оценки (3) — (5) являются простыми следствиями результатов об областях значений функционалов

$$\ln f'(z_0), \quad \ln \frac{f(z_0)}{z_0}, \quad \ln \frac{zf'(z_0)}{f(z_0)}$$

на классе S (см. [2]).

Пусть Σ_0 — класс функций $F(\zeta) \in \Sigma$, $F(\zeta) \neq 0$ при $1 < |\zeta| < \infty$. Имеет место следующая связь между функциями классов S и Σ_0: если $f(z) \in S$, то $F(\zeta) = \frac{1}{f(1/z)} \in \Sigma_0$, и обратно, если $F(\zeta) \in \Sigma_0$, то $f(z) = \frac{1}{F(1/z)} \in S$. Поэтому область значений к.-л. функционала (или системы функционалов) на классе S определяет область значений соответствующего функционала (или системы функционалов) на классе Σ_0, и обратно. Напр., из области значений функционала $\ln \frac{f(z_0)}{z_0}$, $0 < |z_0| < 1$, на классе S легко получается область значений функционала $\ln \frac{F(\zeta_0)}{\zeta_0}$, $1 < |\zeta_0| < \infty$, на классе Σ_0.

Для функций, регулярных и ограниченных в круге, примерами И. т. являются *Шварца лемма* (см. [1]) и ее обобщения, а также следующая теорема Лёвнера о граничном искажении: для функции $\varphi(z)$, регулярной в круге $|z| < 1$, $\varphi(0) = 0$ $|\varphi(z)| < 1$ в $|z| < 1$ и $|\varphi(z)| = 1$ на дуге A окружности $|z| = 1$, длина образа дуги A не меньше длины самой дуги A, и равенство длин этих дуг имеет место только для функции $\varphi(z) = e^{i\alpha} z$, где α — действительное число.

В классе функций, однолистных в данной многосвязной области, минимум (соответственно максимум) модуля производной функции в данной точке области реализуется только отображениями этой области на область с радиальными (соответственно с концентрическими круговыми) разрезами. Для случая неограниченных отображений имеет место следующая теорема. Пусть D — конечносвязная область плоскости ζ, содержащая бесконечно удаленную точку, $\Sigma(D)$ — класс функций $F(\zeta)$, однолистных в D и имеющих в окрестности $\zeta = \infty$ разложение

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \dots,$$

$\zeta_0 \neq \infty$ — точка области D. Пусть $F_\theta(\zeta)$, $F_\theta(\zeta_0) \neq 0$, есть функция класса $\Sigma(D)$, отображающая D на плоскость с разрезами по дугам логарифмич. спиралей, образующих угол θ с лучами, выходящими из начала (достаточно считать $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$; при $\theta = 0$ логарифмич. спираль вырождается в луч, выходящий из начала, а при $\theta = \pm\pi/2$ — в окружность с центром в начале),

$$p(\zeta) = \sqrt{F_0(\zeta) F_{\pi/2}(\zeta)}, \quad q(\zeta) = \sqrt{F_0(\zeta)/F_{\pi/2}(\zeta)},$$

где ветви корней выбраны так, что коэффициенты при ζ в разложениях Лорана функций $p(\zeta)$ и $q(\zeta)$ в окрестности $\zeta = \infty$ равны 1. Тогда область значений функционала $\ln F'(\zeta_0)$ на классе $\Sigma(D)$ представляет собой круг, определяемый неравенством:

$$|\ln F'(\zeta_0) - \ln p'(\zeta_0)| \leqslant -\ln q(\zeta_0),$$

причем каждой точке границы этого круга соответствует только функция $F(\zeta) = F_\theta(\zeta) + C$ с надлежащим θ, C — постоянная. В частности, справедливы точные неравенства:

$$|F'_0(\zeta_0)| \leqslant |F'(\zeta_0)| \leqslant |F'_{\pi/2}(\zeta_0)|,$$

$$\arg F'_{\pi/4}(\zeta_0) \leqslant \arg F'(\zeta_0) \leqslant \arg F'_{-\pi/4}(\zeta_0).$$

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Дженкинс Д. А., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [3] Черников В. В., в кн.: Итоги исследований по математике и меха-

нике за 50 лет. 1917—1967, Томск, 1967, с. 23—51; [4] Базилевич И. Е., в кн.: «Математика в СССР за 40 лет», М., 1959, с. 444—72; [5] Белинский П. П., Общие свойства квазиконформных отображений, Новосиб., 1974; [6] Künhau R., «Math. Nachr.», 1971, Bd 48, S. 77—105.

Е. Г. Голузина.

ИСКЛЮЧЕНИЯ ТЕОРИЯ — теория исключения неизвестных из системы алгебраич. уравнений. Более точно, пусть имеется система уравнений

$$f_i(x_1, \ldots, x_n)=0, \quad i=1, \ldots, m, \tag{1}$$

где f_i — многочлены с коэффициентами из заданного поля P. Задача исключения неизвестных $x_1, \ldots, x_k$ из системы (1) (*неоднородная задача теории исключения*) может быть сформулирована следующим образом: найти проекцию множества решений системы (1) на пространство координат $x_{k+1}, \ldots, x_n$. В том случае, когда каждое из уравнений однородно по совокупности неизвестных $x_1, \ldots, x_k$, рассматривается также *однородная задача теории исключения* (неоднородная задача в этом случае тривиальна): найти проекцию на пространство координат $x_{k+1}, \ldots, x_n$ множества тех решений системы (1), в к-рых не все неизвестные $x_1, \ldots, x_k$ равны нулю.

Неоднородная задача И. т. может также трактоваться как нахождение условий на коэффициенты системы алгебраич. уравнений, при к-рых эта система совместна, а однородная задача И. т.— как нахождение условий на коэффициенты системы однородных алгебраич. уравнений, при к-рых эта система имеет ненулевое решение.

Основные результаты И. т. заключаются в том, что если поле P алгебраически замкнуто, то решение однородной задачи И. т. является *алгебраическим множеством*, т. е. множеством решений системы алгебраич. уравнений, а решение неоднородной задачи — *конструктивным множеством* в смысле алгебраич. геометрии, т. е. конечным объединением множеств вида $M \setminus N$, где M и N суть алгебраич. множества. В нек-рых простейших случаях решение задач И. т. известно в явном виде.

1) Пусть рассматриваемая система уравнений линейна и однородна относительно $x_1, \ldots, x_k$, т. е. имеет вид

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j=0, \quad i=1, \ldots, m, \tag{2}$$

где a_{ij} — многочлены от $x_{k+1}, \ldots, x_n$. При заданных значениях $x_{k+1}, \ldots, x_n$ система (2) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы $A=(a_{ij})$ меньше k (см. *Линейное уравнение*). Решением однородной задачи И. т. в этом случае будет множество в пространстве координат $x_{k+1}, \ldots, x_n$, выделяемое условиями равенства нулю всех миноров порядка k матрицы A.

2) Пусть рассматриваемая система уравнений линейна относительно $x_1, \ldots, x_k$, т. е. имеет вид

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j=b_i, \quad i=1, \ldots, m, \tag{3}$$

где a_{ij}, b_i — многочлены от $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Пусть $\tilde{A}$ — матрица, получаемая приписыванием к матрице $A=(a_{ij})$ столбца (b_i). При заданных значениях $x_{k+1}, \ldots, x_n$ система (3) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\tilde{A}$ равен рангу матрицы A. Следовательно, результатом исключения $x_1, \ldots, x_n$ из системы (3) является

$$\bigcup_{r=0}^{k} M_r \setminus N_r,$$

где M_r — множество точек $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$, в к-рых $rk\tilde{A} \leqslant r$, а N_r — множество точек, в к-рых $rkA < r$ (множества M_r и N_r алгебраические).

3) Пусть $k=2$, поле P алгебраически замкнуто и рассматриваемая система состоит из двух уравнений, однородных по x_1, x_2:

$$\begin{aligned} a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1}x_2 + \ldots + a_nx_2^n = 0, \\ b_0x_1^m + b_1x_1^{m-1}x_2 + \ldots + b_mx_2^m = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m$ — многочлены от $x_3, \ldots, x_n$. При заданных значениях $x_3, \ldots, x_n$ система (4) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда равен нулю *результант*

$$R(a_0, a_1, \ldots, a_n; b_0, b_1 \ldots, b_m) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n & & & \\ & a_0 & \ldots & \ldots & a_{n-1} & a_n & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ & & & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_{m-1} & b_m & & & \\ & b_0 & \ldots & \ldots & b_{m-1} & b_m & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ & & & b_0 & b_1 & \ldots & b_{m-1} & b_m \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \text{ строк} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \text{ строк} \end{matrix}$$

Это и дает решение однородной задачи И. т. в рассматриваемом случае.

4) Пусть $k=1$, поле P алгебраически замкнуто и рассматриваемая система состоит из двух уравнений:

$$\begin{aligned} a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \\ b_0x_1^m + b_1x_1^{m-1} + \ldots + b_m = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m$ — многочлены от $x_2, \ldots, x_n$. При заданных значениях $x_2, \ldots, x_n$, не обращающихся в нуль a_0 или b_0, система (5) совместна тогда и только тогда, когда

$$R(a_0, a_1, \ldots, a_n; b_0, b_1, \ldots, b_m) = 0.$$

Если же $a_0 = b_0 = 0$, то следует рассмотреть

$$R(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_m)$$

и т. д. Это позволяет описать в явном виде результат исключения x_1 из системы (5).

Исключение неизвестных из произвольной системы алгебраич. уравнений может быть проведено последовательно (т. е. исключается сначала одно неизвестное, затем другое и т. д.) при помощи описываемых ниже «элементарных преобразований». Поскольку после исключения одного неизвестного получается, вообще говоря, не алгебраическое, но конструктивное множество, то следует рассмотреть задачу проектирования на пространство координат $x_2, \ldots, x_n$ произвольного конструктивного множества в P^n.

Всякое конструктивное множество $X \subset P^n$ может быть представлено как объединение множеств решений совокупности систем алгебраич. уравнений и неравенств. (Под алгебраич. неравенством здесь понимается неравенство вида $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, где f — многочлен.) Элементарным преобразованием такой совокупности наз. преобразование одного из следующих типов: в одной из систем к одному из уравнений прибавляется другое, умноженное на многочлен; в системе, содержащей неравенство $f \neq 0$, одно из уравнений умножается на f; в одной из систем к одному из неравенств прибавляется одно из уравнений, умноженное на многочлен; одна из систем заменяется на две, получаемые из нее приписыванием уравнения $f = 0$ и неравенства $f \neq 0$ соответственно (f — нек-рый многочлен); в одной из систем два неравенства заменяются их произведением.

Элементарные преобразования не изменяют объединения множеств решений систем, входящих в данную совокупность. Применяя элементарные преобразования, можно привести любую совокупность систем алгебраич.

уравнений и неравенств с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$ к такому виду, когда в каждую из систем входит не более одного уравнения или неравенства, содержащего x_1, причем наряду с таким уравнением $f=0$ или неравенством $f\neq 0$ в эту же систему входит неравенство $f_0\neq 0$, где f_0 — многочлен от $x_2, \ldots, x_n$, являющийся старшим коэффициентом в разложении f по степеням x_1. Если поле P алгебраически замкнуто, то, отбросив в системах полученной совокупности уравнения и неравенства, содержащие x_1, получают совокупность систем алгебраич. уравнений и неравенств с неизвестными $x_2, \ldots, x_n$, к-рая и задает проекцию множества X на пространство координат $x_2, \ldots, x_n$.

Последовательное исключение неизвестных с помощью элементарных преобразований позволяет в принципе свести решение произвольной системы алгебраич. уравнений с n неизвестными к решению ряда алгебраич. уравнений с одним неизвестным.

Лит.: [1] Ходж В., Пидо Д., Метод алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1954; [2] Ван-дер-Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976. *Э. Б. Винберг.*

ИСКЛЮЧЕННОГО ТРЕТЬЕГО ЗАКОН — закон классической логики, состоящий в том, что одно из двух высказываний «A» и «не A» является истинным. В математической логике И. т. з. выражается формулой $A\vee\neg A$, где $\vee$ — знак дизъюнкции, $\neg$ — знак отрицания. С интуиционистской (конструктивной) точки зрения установление истинности высказывания вида $A\vee\neg A$ означает установление истинности A или истинности $\neg A$. Поскольку не существует общего метода, позволяющего для каждого высказывания за конечное число шагов установить его истинность или истинность его отрицания, И. т. з. подвергается критике со стороны представителей интуиционистского и конструктивного направлений в основаниях математики (см. *Интуиционизм*, *Конструктивная математика*). *В. Е. Плиско.*

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО — аналитич. множество A в комплексном пространстве X, допускающем такое аналитич. отображение $f: X\to Y$, что $f(A)=y$ — точка комплексного пространства Y, а $f: X\setminus A\to Y\setminus\{y\}$ — аналитич. изоморфизм. Модификация f наз. с т я г и в а н и е м множества A в точку y.

Задача о характеризации исключительных множеств возникла в алгебраич. геометрии в связи с изучением *бирациональных преобразований* (см. также *Исключительное подмногообразие*). В аналитич. геометрии найдены весьма общие критерии исключительности множества. А именно, пусть A — связное компактное аналитич. множество положительной размерности в комплексном пространстве X. Множество A исключительно тогда и только тогда, когда оно обладает в X относительно компактной псевдовыпуклой окрестностью, в к-рой A является максимальным компактным аналитич. подмножеством. Пусть $\mathfrak{M}$ — когерентный пучок идеалов, множество нулей к-рого совпадает с A и пусть N — ограничение на A двойственного к $\mathfrak{M}$ линейного пространства над X (см. *Векторное аналитическое расслоение*). Для исключительности множества A достаточно, чтобы N было слабо отрицательным (см. *Положительное расслоение*). Если X — многообразие, а A — его подмногообразие, то N — это нормальное расслоение над X. В нек-рых случаях слабая отрицательность расслоения N является и необходимой (напр., если A — подмногообразие коразмерности 1, изоморфное $\mathrm{P}^k(\mathbb{C})$, или если X — двумерное многообразие). В частности, кривая A на комплексной поверхности X исключительна тогда и только тогда, когда матрица (A_iA_j) пересечений ее неприводимых компонент отрицательно определена (см. [1], [2]). Строение окрестности И. а. м. $A\subset X$ полностью определяется окольцованным пространством $(A, \mathcal{O}X/\mathfrak{M}^{\mu}|_A)$ при достаточно большом μ. И. а. м.

обладают следующим свойством транзитивности: если $B \subset A$ — компактные аналитич. пространства в X, причем B исключительно в A, а A — в X, то B исключительно в X. Существует относительное обобщение понятия И. а. м., рассматривающее, грубо говоря, одновременное стягивание семейства аналитич. множеств в аналитич. семействе комплексных пространств. Здесь также справедлив критерий, аналогичный сформулированному выше критерию Грауэрта (см. [2]).

Другое естественное обобщение понятия И. а. м. состоит в следующем. Пусть A — подпространство в X и пусть задано собственное сюръективное голоморфное отображение $\varphi : A \to B$. Стягиванием пространства X вдоль φ наз. такое собственное сюръективное голоморфное отображение $f : X \to Y$, где Y содержит B в качестве подпространства, что $f|_A = \varphi$ и что f индуцирует изоморфизм $X \setminus A \to Y \setminus B$. В случае, когда X—многообразие, $\dim X \geqslant 3$, A — его компактное подмногообразие коразмерности 1, а φ — расслоение со слоем $\mathrm{P}^r(\mathbb{C})$, $r > 1$, необходимое и достаточное условие стягиваемости пространства X вдоль φ на многообразие Y состоит в следующем: нормальное расслоение N над A (совпадающее в этом случае с расслоением, отвечающим дивизору A) должно индуцировать на каждом слое $\varphi^{-1}(b) \cong \mathrm{P}^r(\mathbb{C})$ расслоение $-L$, где L определяется гиперплоскостью в $\mathrm{P}^r(\mathbb{C})$; соответствующее стягивание обратно к моноидальному преобразованию с центром в B [3]. С другой стороны, для всякой модификации $f : X \to Y$, где Y — многообразие, $B = f(A)$ — его подмногообразие, $\dim B < \dim A$ и $f : X \setminus A \to Y \setminus B$ — изоморфизм, отображение $f|_A$ является расслоением со слоем $P^r(\mathbb{C})$. Известны критерии стягиваемости вдоль φ и в более общей ситуации (см. [2]). Если A исключительно в X и является его голоморфным ретрактом (напр., A — нулевое сечение слабо отрицательного векторного расслоения), то X допускает стягивание вдоль любого φ. Если при этом размерности слоев ретракции $X \to A$ равны по крайней мере $\dim A + 2$, то по полученному после стягивания пространству Y можно полностью восстановить исходные данные [5].

Лит.: [1] Грауэрт Г., сб. пер.: Комплексные пространства, М., 1965, с. 45—104; [2] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 93—171; [3] Fujiki A., Nakano S., «Publs Res. Inst. Math. Sci.», 1972, v. 7, № 3, p. 637—44; [4] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, с. 77—170; [5] Takijima K., Suzuki T., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1976, v. 219, p. 369—77.

А. Л. Онищик.

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ — понятие теории распределения значений. Пусть $f(z)$ — мероморфная во всей плоскости z функция, а $n(r, a, f)$ означает число ее a-точек (с учетом их кратностей) в круге $|z| \leqslant r$. Согласно первой основной теореме Р. Неванлинны (см. [1], с. 164), при $r \to \infty$ имеет место соотношение

$$N(r, a, f) + m(r, a, f) = T(r, f) + O(1),$$

где $T(r, f)$ — характеристическая функция, не зависящая от a, $N(r, a, f)$ — считающая функция (логарифмическое усреднение $n(r, a, f)$) и $m(r, a, f) > 0$ — функция, отражающая среднюю близость значений f к числу a на окружности $|z| = r$ (см. *Распределения значений теория*). Для большинства значений a величины $N(r, a, f)$ и $T(r, f)$ при $r \to \infty$ эквивалентны; число a (конечное или бесконечное) наз. исключительным значением, если эта эквивалентность при $r \to \infty$ нарушается. Различают несколько типов И. з.

Число a наз. И. з. функции f в смысле Пикара, если число a-точек функции f во всей плоскости конечно (см. [1], с. 22, [2], с. 68), в частности если $f(z) \neq a$ для любого z.

Число a наз. И. з. f в смысле Бореля, если при $r \to \infty$ функция $n(r, a, f)$ растет в определенном смысле медленнее функции $T(r, f)$ (см. [1], с. 266, [2], с. 69).

Число a наз. И. з. f в смысле Неванлинны ([1], с. 271), если его дефект (см. *Дефектное значение*)

$$\delta(a, f)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r, a, f)}{T(r, f)}>0.$$

Число a наз. И. з. f в смысле Валирона, если

$$\Delta(a, f)=1-\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r, a, f)}{T(r, f)}>0.$$

Число a, для к-рого

$$\beta(a.f)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\max_{|z|=r}\ln^{+}\frac{1}{|f(z)-a|}}{T(r,f)}>0,$$

также наз. И. з. $f(z)$. При этом величина $\beta(a, f)$ (положительное отклонение $f(z)$) характеризует скорость асимптотического приближения $f(z)$ к числу a (см. [3]).

Лит.: [1] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.— Л., 1941; [2] Гольдберг А. А., Островский И. В., Распределение значений мероморфных функций, М., 1970; [3] Петренко В. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, № 2, с. 414—54.

В. П. Петренко.

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ПОДМНОГООБРАЗИЕ — замкнутое подмногообразие Y алгебраич. многообразия X определенного над алгебраич. замкнутым полем, к-рое при помощи некоторого собственного бирационального морфизма $f: X\to X'$ может быть отображено на подмногообразие Y' меньшей размерности и при этом $f: X\setminus Y\cong X'-f(Y)$ — изоморфизм. Морфизм f наз. стягиванием подмногообразия Y на $Y'=f(Y)$; это понятие является частным случаем понятия модификации алгебраич. пространств [3]. В случае, когда X, Y, X' и Y' являются гладкими неприводимыми многообразиями, И. п. Y наз. исключительным подмногообразием 1-го рода. Если И. п. Y имеет коразмерность 1 в X, то оно наз. также исключительным дивизором. Исключительный дивизор на алгебраич. поверхности наз. исключительной кривой.

Понятие И. п. естественным образом распространяется на схемы, комплексные аналитич. и алгебраич. пространства. Соответствующий морфизм при этом также наз. стягиванием; естественным образом определяется понятие И. п. 1-го рода. И. п. комплексного аналитич. пространства наз. также исключительным аналитич. множеством.

Характеризация И. п. внутри объемлющего многообразия — одна из основных задач бирациональной геометрии. Исторически первый пример такой характеризации — критерий Кастельнуово — Энрикеса: неприводимая полная кривая Y на гладкой поверхности X тогда и только тогда является И. п. 1-го рода, когда она изоморфна проективной прямой P^1 и индекс ее самопересечения $(Y\cdot Y)$ на X равен -1 (см. [1], [9]). Этот критерий допускает обобщение на одномерные подсхемы двумерных регулярных схем (см. [6], [10]). Если $Y=\sum_{i=1}^{m}Y_i$ — произвольная связная полная кривая с неприводимыми компонентами Y_i на гладкой проективной поверхности X, то необходимое (но не достаточное) условие исключительности кривой Y состоит в отрицательной определенности матрицы $(Y_i\times Y_j)$ (см. [2]). В случаях связной компактной комплексной кривой на гладкой комплексной поверхности и связной полной кривой на гладком двумерном алгебраич. пространстве аналогичное условие является необходимым и достаточным условием исключительности.

Многомерное обобщение критерия Кастельнуово — Энрикеса для стягивания в точку имеет следующий вид [5]: неприводимое полное подмногообразие Y в гладком алгебраич. многообразии X тогда и только тогда является И. п. 1-го рода относительно стягивания в

точку, когда выполняются следующие два условия: а) $Y \simeq P^r$, где $r=\dim X-1$; б) нормальное расслоение $N_{Y/X}$ к Y в X определяется дивизором $-H$, где H — гиперплоскость в P^r. При этом X' проективно. Соответствующее стягивание f является *моноидальным преобразованием* с центром в точке $f(Y)$ (см. [7], [8]).

В аналитич. случае найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы связное компактное комплексное подмногообразие Y в комплексном многообразии X было И. п. 1-го рода; соответствующее стягивание f необходимо является моноидальным преобразованием с центром в $Y'=f(Y)$ (см. *Исключительное аналитическое множество*). Аналогичный критерий справедлив для алгебраич. пространств [3]. Для алгебраич. многообразий соответствующие условия необходимы, но не всегда достаточны.

При стягивании $f: X \to X'$ И. п. 1-го рода Y в алгебраич. проективном многообразии X на подмногообразие ненулевой размерности Y' в X' алгебраич. многообразие X' может уже не быть проективным. Более того, если алгебраич. многообразия X и Y определены над полем комплексных чисел, то при аналитич. стягивании f И. п. 1-го рода Y не в точку многообразие X' в общем случае не является алгебраическим.

Если рассматривать вопрос о стягиваемости в точку И. п. (не обязательно 1-го рода), то для полного связного алгебраич. подпространства Y гладкого алгебраич. пространства X достаточным (но не необходимым при $\dim X>2$) условием исключительности является отрицательность нормального расслоения $N_{Y/X}$. Аналогичный факт имеет место для комплексных пространств.

В случае алгебраич. пространств наиболее общий критерий исключительности утверждает, что в категории нётеровых алгебраич. пространств подпространство Y в X тогда и только тогда является И. п., когда формальное пополнение $\hat{Y}$ в $\hat{X}$ вдоль является И. п. в категории формальных алгебраич. пространств [3]. Иными словами, стягивание алгебраич. подпространства возможно тогда и только тогда, когда возможно его соответствующее формальное стягивание.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965, «Тр. Матем. ин-та АН СССР»; [2] Артин М., «Математика», 1965, т. 9, № 3, с. 3—14; [3] Artin M., «Ann. math.», 1970, v. 91, № 1, p. 88—135; [4] Грауэрт Г., в кн.: Комплексные пространства, М., 1965, с. 45—104; [5] Kodaira K., «Ann. math», 1954, v. 60, p. 28—48; [6] Lichtenbaum S., «Amer. J. math.», 1968, v. 90, № 2, p. 380—405; [7] Nakano S., «Publs Res. Inst. Math. Sci.», 1971, v. 6, № 3, p. 483—502; [8] Fujiki A., Nakano S., там же, 1972, v. 7, № 3, p. 637—44; [9] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [10] его же, Lectures on minimal models and borational transformations of two dimensional schemes, Bombay, 1966.

В. А. Исковских.

ИСПЫТАНИЕ — один из основных терминов классич. *вероятностей теории*. При аксиоматич. подходе определяется как любое разбиение пространства элементарных событий на попарно непересекающиеся события, к-рые наз. «исходами испытания», а элементы порождаемой ими σ-алгебры — «событиями, связанными с данными испытаниями». Термин «И.» употребляется в основном в сочетаниях «повторные И.», «независимые И.», «И., связанные в цепь Маркова».

Ю. В. Прохоров.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ — построение, разработка и приложения математич. моделей принятия оптимальных решений. Содержанием теоретич. аспекта И. о. являются анализ и решение математич. задач выбора в заданном множестве допустимых решений X элемента, удовлетворяющего тем или иным критериям оптимальности и называемого оптимальным решением задачи. При этом иногда выбирается «обобщенный» элемент X: подмножество X или функция со значениями в X (в том числе случайная величина со значениями в X). Такие задачи наз. оптимизационными. Прикладной аспект И. о. состо-

ит в составле
их решений.

Постановка задачи И. о. охватывает прежде всего формальное описание множества допустимых решений X и критериев оптимальности выбора. Оно должно соответствовать содержательным представлениям о возможном и целесообразном в данных условиях. Напротив, проверка адекватности самих содержательных представлений объективной реальности уже выходит за пределы И. о. Все решения (в том числе оптимальные) принимаются всегда на основе информации, к-рой располагает принимающий решения субъект (или субъекты), и только на ней. Поэтому каждая задача И. о. должна *в своей постановке отражать знания принимающего* решение субъекта о множестве допустимых решений и о критерии оптимальности. Так, если принятие решения происходит в наперед известном и не изменяющемся информационном состоянии, то задача наз. статической. В таких условиях весь процесс принятия решения может быть сведен к единому мгновенному акту. В противном случае, если приходится иметь дело с несколькими различными информационными состояниями, то решение будет заключаться в установлении соответствия между каждым информационным состоянием и доступной в нем альтернативой, т. е. в выборе функции, выражающей это соответствие. Если информационные состояния в ходе принятия решения сменяют друг друга, то задача наз. динамической; в ней часто целесообразно принимать поэтапные, «многошаговые» решения или даже развертывать принятие решения в непрерывный во времени процесс.

Информационные состояния принимающего решения субъекта могут по-разному характеризовать его истинное («физическое») состояние. Может оказаться, что одно информационное состояние субъекта охватывает целое множество его физич. состояний. В этом случае задача принятия решений наз. неопределенной. Такие задачи И. о. рассматриваются в *игр теории*. Если информационное множество содержит несколько физич. состояний, но субъект кроме их множества знает еще и (априорные) вероятности каждого из этих физич. состояний, то задача наз. стохастической. Наконец, если информационное состояние состоит из единственного физич. состояния, то задача наз. детерминированной. Иногда представляет интерес одновременно рассматривать семейства задач, зависящих от численного, векторного или пробегающего значения из к.-л. другого множества параметра, объединяя их в единую параметрическую задачу. Отличие ее от неопределенной задачи состоит в том, что решение первой заключается в решении всех задач, отвечающих конкретным значениям параметра, а решение второй — в нахождении такого допустимого решения, к-рое было бы в известной мере желательным, как бы конкретно ни реализовалась неопределенность. Вместе с тем решение стохастич. задачи состоит в нахождении такого допустимого решения, к-рое было бы оптимальным «в среднем» по всему множеству отдельных задач.

Теоретически мыслимы задачи И. о. с любыми множествами допустимых решений X и с весьма произвольными критериями оптимальности. Последние могут иметь вид требований о максимизации (или минимизации) значений нек-рой числовой или векторной функции f на X. Эта функция обычно наз. *целевой функцией*. В первом случае говорят о задаче *математического программирования* (оптимального программирования, что не следует смешивать с программированием на ЭВМ), а во втором — о задаче векторной оптимизации, или о *многокритериальной задаче*. Рассматриваются также критерии, выражаемые бинарным отношением предпочтения ≻

на X. Это отношение не обязано быть отношением линейного или хотя бы частичного упорядочения.

В математич. программировании чаще других рассматриваются задачи, в к-рых X есть подмножество конечномерного евклидова пространства E^n. Если при этом X — выпуклый многогранник с конечным числом вершин, а целевая функция f линейна, то имеют дело с задачами *линейного программирования*; если X — произвольное выпуклое множество, а f — выпуклая функция, то — с задачей *выпуклого программирования*. Естественным образом определяются задачи, относящиеся к кусочно линейному программированию, *квадратичному программированию* и т. д. Множество допустимых решений X может быть также подмножеством функционального пространства, и формально вариационное исчисление, а также круг вопросов, связанный с принципом максимума Понтрягина, поэтому могут быть также отнесены к оптимальному программированию. В других задачах оптимального программирования X может быть конечным множеством; такие задачи относятся к *дискретному программированию*. В них допустимые решения могут быть точками целочисленной решетки в E^n (целочисленное программирование) или векторами, каждая компонента к-рых принимает лишь два значения (булево программирование). В отдельных задачах элементы X суть перестановки конечного числа символов, пути в заданном графе и т. д. Особым случаем задач оптимального программирования является нахождение максимина, т. е. максимального значения функции, имеющей вид минимума (аналогично — минимакса).

Теория решения стохастич. задач линейного программирования составляет предмет *стохастического программирования*. Многокритериальные задачи, а также задачи с отношением предпочтения по существу относятся к теории игр; их классификация проводится по теоретико-игровым признакам.

Одной из тенденций современного (70-е гг. 20 в.) И. о. является переход от рассмотрения отдельных задач И. о. к изучению систем, пространств, исчислений таких задач и исследование связей между различными задачами или сведе́ний одних задач к другим, более просто устроенным. Математич. аппарат, предназначенный и разрабатываемый для целей решения задач И. о., принято называть математич. методами И. о. По своему характеру математич. методы И. о. в принципе не отличаются от математич. методов любой другой математич. дисциплины, имеющей содержательные приложения или хотя бы интерпретации. Разработанность математич. методов для разных задач И. о. и их классов неодинакова. Наиболее разработанной является теория линейного и выпуклого программирования.

Некоторые параметрич. задачи И. о., выделяемые специфическими содержательными интерпретациями, проблематикой и терминологией, носят название моделей И. о. Обычно каждая модель И. о. имеет присущие ей методы решения. Диапазон калибров моделей И. о. весьма широк: от конкретных задач, различающихся лишь численными значениями входящих в них параметров (к их числу можно отнести задачу о назначениях, транспортную задачу и несколько более сложные задачи о раскрое, задачу о размещении и теорию сетевых графиков), до таких разветвленных дисциплин, как теория управления запасами, теория расписаний (иногда называемая календарным планированием) или теория надежности. Большое число моделей И. о. дает теория игр (игры с выбором момента времени, игры типа Блотто, игры типа покера, дифференциальные игры преследования и др.). К числу моделей И. о. принято несколько авансированно относить теорию массового обслуживания, хотя большинство ее задач пока еще не приобрело оптимизационного характера.

Решение каждой задачи И. о. начинается с выбора принципа оптимальности. Если задача относится к оптимальному программированию, то этот выбор тривиален: принцип оптимальности состоит в максимизации (соответственно минимизации) целевой функции. Таким образом, в этом случае принцип оптимальности задачи формально совпадает с ее критерием оптимальности. В остальных случаях нахождение принципа оптимальности оказывается существенным этапом решения задачи и может реализоваться неоднозначно. Употребительны приемы сведения векторного критерия или отношения предпочтения к численным критериям. Напр., в случае многокритериальной задачи принцип оптимальности может состоять в придании отдельным компонентам векторного критерия тех или иных весов и рассмотрении в качестве целевой функции взвешенной суммы; другой принцип оптимальности в этой задаче может заключаться в максимизации минимальной компоненты вектора критерия (принцип максимина) и т. д. Весьма разнообразными могут быть принципы оптимальности в задачах с отношением предпочтения (см., напр., *Игр теория*). Возможности и пути замены отношений предпочтения численными критериями составляют один из основных вопросов *полезности теории*. Т. о., критерий задачи И. о. есть часть ее условия, а принцип оптимальности — часть ответа. Для большинства моделей И. о. принципы оптимальности фиксированы.

Следующим после выбора принципа оптимальности этапом решения задачи И. о. является установление его реализуемости (т. е. существование решений задачи в смысле этого принципа). Нереализуемость принципа оптимальности в классе заданных в условиях задачи допустимых решений иногда преодолевается путем введения в том или ином смысле обобщенных решений: подмножеств множества допустимых решений или функций со значениями в этом множестве.

Так как существование оптимальных решений задачи И. о. нередко доказывается неконструктивно (напр., на основании тех или иных теорем о неподвижной точке), а иногда конструктивным образом, но обеспечивающим фактическое его нахождение лишь потенциально (но не практически), получение оптимального решения задачи И. о. является третьим этапом ее разработки.

Задачи И. о. обладают рядом черт, обусловливающих методику их составления и решения. Во-первых, даже для наиболее простых параметрич. классов задач не удается представить решение в виде единообразного аналитич. выражения от соответствующих параметров. Поэтому задачи И. о. в подавляющем большинстве не поддаются аналитич. решению и должны решаться численно. Во-вторых, большинство практически интересных задач И. о. содержит в своих формулировках весьма большое количество числового материала, не сводящегося к аналитич. выражениям, поэтому численное решение этих задач возможно лишь с использованием ЭВМ. В-третьих, процесс решения многих задач И. о. заключается в выполнении простых однотипных операций над числами, составляющих большие массивы. Поэтому задачи И. о. предъявляют к ЭВМ требования, касающиеся в большей степени их памяти, чем быстродействия. Фактически требования И. о. оказывают значительное влияние на развитие ЭВМ и формирование их парка.

Круг приложений И. о. весьма широк. И. о. используется для решения технических (причем не столько конструкторских, сколько технологических), технико-экономических, социально-экономических задач, а также задач управления в различных сферах и на различных уровнях, вытесняя постепенно традиционные «интуитивные» методы принятия решений.

Практическое внедрение результатов И. о. встречается с трудностями различного рода. Первая из них,

преодолеваемая еще сравнительно легко, связана с построением концептуальной структуры модели реальной задачи принятия решения (или с подбором уже имеющейся структуры модели). Этим устанавливается принципиальная возможность моделирования класса реальных задач, включающего рассматриваемую задачу, нек-рым классом задач И. о. Следующая трудность состоит в выборе из этого класса задач И. о. именно той, к-рая моделирует интересующую исследователя конкретную задачу. Для этого, в частности, необходимо измерить значения параметров, определяющих решаемую задачу. Но поскольку эти параметры имеют не обязательно физический или технический, а часто экономический или даже социально-экономич. характер, их измерение с требуемой точностью может представлять самостоятельную проблему. Эту трудность сбора информации для построения конкретной модели можно считать основным препятствием на пути выработки оптимального решения. Затем, после построения модели, возникают чисто математич. и в том числе вычислительные трудности ее анализа и решения. В сущности именно их преодоление и составляет содержание И. о. Наконец, после нахождения решения возникает последняя трудность, уже организационного и психологич. плана: найденное решение нередко существенно отличается от традиционных и потому может восприниматься с недоверием. Все это ограничивает практич. применения И. о. Для более успешного их преодоления коллективы, работающие в области И. о., формируются как комплексные: в них включаются кроме математиков обычно и инженеры, и экономисты, и специалисты в области конкретных дисциплин, иногда — психологи, администраторы и т. д.

Лит.: [1] Морз Ф. М., Кимбелл Д. Е., Методы исследования операций, пер. с англ., М., 1956; [2] Саати Т.-Л., Математические методы исследования операций, пер. с англ., М., 1963; [3] Кофман А., Фор Р., Займемся исследованием операций, пер. с франц., М., 1966; [4] Кофман А., Методы и модели исследования операций, пер. с франц., М., 1966; [5] Черчмен У., Акоф Р., Арноф Л., Введение в исследование операций, пер. с англ., М., 1968; [6] Чуев Ю. В., Исследование операций в военном деле, М., 1970; [7] Гермейер Ю. Б., Введение в теорию исследования операций, М., 1971; [8] Акоф Р., Сасиени М., Основы исследования операций, пер. с англ., М., 1971; [9] Вентцель Е. С., Исследование операций, М., 1972; [10] Вагнер Г., Основы исследования операций, т. 1—3, пер. с англ., М., 1972—1973; [11] Исследование операций. Методологические аспекты, М., 1972; [12] Mathematische Standardmodelle der Operationsforschung, B., 1971; [13] Mathematische Standardmodelle der Operationsforschung. Mathematische Grundlagen, Methoden und Modelle, Bd 1—3, B., 1971—73.

Н. Н. Воробьев.

ИСТИННОСТНАЯ ТАБЛИЦА — таблица, выражающая *истинностное значение* сложного высказывания через истинностные значения входящих в него простых высказываний. И. т. имеет вид (см. таблицу, *И* означает «истина», *Л* — «ложь»).

A_1	A_2	...	A_n	$\mathfrak{A}(A_1, \ldots, A_n)$
И	*И*	...	*И*	V_1
И	*И*	...	*Л*	V_2
.	.	...	.	.
.	.	...	.	.
.	.	...	.	.
Л	*Л*	...	*Л*	V_{2^n}

Здесь $A_1, \ldots, A_n$ — пропозициональные переменные, $\mathfrak{A}(A_1, \ldots, A_n)$ — высказывательная форма, причем истинностное значение высказывания $\mathfrak{A}(A_1, \ldots, A_n)$ определяется истинностными значениями высказываний $A_1, \ldots, A_n$. Каждая строка таблицы соответствует одной из 2^n возможных комбинаций истинностных значений n высказываний. При этом V_i есть истинностное значение высказывания $\mathfrak{A}(A_1, \ldots, A_n)$, если высказывания $A_1, \ldots, A_n$ имеют истинностные значения, указанные в i-й строке. С помощью И. т. в математич. логике определяются истинностные функции, соответствующие таким логич. связкам, как отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность. В классич. логике высказываний И. т. применяются для проверки общезначимости формул: формула общезначима

тогда и только тогда, когда в последнем столбце таблицы все V_i суть $И$. *В. Е. Плиско.*

ИСТИННОСТНОЕ ЗНАЧЕНИЕ — одно из двух значений — «истина» ($И$) или «ложь» ($Л$),— которое может принимать данная логич. формула в рассматриваемой интерпретации (модели). И. з. $И$ иногда в литературе обозначается также 1, T, t, а И. з. $Л$ — 0, F, f. Если в модели $\mathfrak{M}$ заданы И. з. элементарных формул, то И. з. $\|A\|$ всякой формулы A определяется индуктивно следующим образом (для классич. логики):

$$\|B\&C\| = И \Leftrightarrow \|B\| = И \quad \text{и} \quad \|C\| = И,$$

$$\|B \vee C\| = И \Leftrightarrow \|B\| = И \quad \text{или} \quad \|C\| = И,$$

$$\|B \supset C\| = И \Leftrightarrow \|B\| = Л \quad \text{или} \quad \|C\| = И,$$

$$\|\neg B\| = И \Leftrightarrow \|B\| = Л,$$

$$\|\forall x B(x)\| = И \Leftrightarrow \text{для всех } a \text{ из } \mathfrak{M}\ \|B(a)\| = И,$$

$$\|\exists x B(x)\| = И \Leftrightarrow \text{для нек-рого } a \text{ из } \mathfrak{M}\ \|B(a)\| = И.$$

Иногда рассматриваются интерпретации, в к-рых логич. формула, кроме $И$ и $Л$, может принимать и другие «промежуточные» И. з. В таких интерпретациях И. з. формул могут быть, напр., элементами булевых алгебр (так наз. *булевозначные модели* для классической логики), элементами псевдобулевых алгебр или открытыми множествами топологич. пространств (для интуиционистской логики), элементами топологических булевых алгебр (для модальной логики $S4$) (см. [2]). При этом, если в булевозначной модели $\mathfrak{M}$ заданы И. з. элементарных формул, то И. з. сложных формул определяются так:

$$\|B\&C\| = \|B\| \cap \|C\|,$$

$$\|B \vee C\| = \|B\| \cup \|C\|, \quad \|B \supset C\| = \overline{\|B\|} \cup \|C\|,$$

$$\|\neg B\| = \overline{\|B\|}, \quad \|\forall x B(x)\| = \bigcap_{a \in \mathfrak{M}} \|B(a)\|,$$

$$\|\exists x B(x)\| = \bigcup_{a \in \mathfrak{M}} \|B(a)\|,$$

где $\overline{\|B\|}$ есть дополнение к элементу $\|B\|$. Напр., в топологич. моделях для интуиционистской логики И. з. сложных формул определяются так:

$$\|B\&C\| = \|B\| \cap \|C\|, \quad \|B \vee C\| = \|B\| \cup \|C\|,$$

$$\|B \supset C\| = \operatorname{Int}(\overline{\|B\|} \cup \|C\|), \quad \|\neg B\| = \operatorname{Int}(\overline{\|B\|}),$$

$$\|\forall x B(x)\| = \operatorname{Int}\left(\bigcap_{a \in \mathfrak{M}} \|B(a)\|\right),$$

$$\|\exists x B(x)\| = \bigcup_{a \in \mathfrak{M}} \|B(a)\|,$$

где $\operatorname{Int}(X)$ обозначает внутренность множества X.

Лит.: [1] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [2] Расева Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972.

С. К. Соболев.

ИСТИННЫЙ ЦИКЛ метрического пространства — последовательность $z^n = \{z_1^n, \ldots, z_k^n, \ldots\}$ ε_k-циклов с условием $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. Компакт, на к-ром лежат все вершины всех циклов всех симплексов И. ц., наз. компактным носителем z. Если $f : X \to X$ — некоторое непрерывное отображение, то fz — также И. ц., деформация отображения f индуцирует деформацию истинного цикла.

См. *Вьеториса гомологии.* *А. А. Мальцев.*

ИСТОЧНИК векторного поля — точка векторного поля $\boldsymbol{a}$, обладающая тем свойством, что поток Q поля через любую окружающую ее замкнутую поверхность ∂V (и не окружающую др. источников) положителен. Поток

$$Q = \int\int_{\partial V} (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a})\, ds,$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор внешней нормали к ∂V, s — элемент площади ∂V, называется мощностью И. Если

поток Q отрицателен, то говорят о стоке. Если И. распределены непрерывно по рассматриваемой области V, то предел

$$\lim_{\partial V \to M} \frac{\int\int_{\partial V} (a,\ n)\, ds}{V}$$

наз. плотностью (интенсивностью) И. в точке M и равен дивергенции векторного поля a в точке M. *А. Б. Иванов.*

ИСТОЧНИК СООБЩЕНИЙ — объект, вырабатывающий сообщения, подлежащие передаче по *каналу связи*. Сообщение, вырабатываемое И. с. U, есть случайная величина ξ, определенная на нек-ром *вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, принимающая значения в нек-ром измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$ и имеющая распределение вероятностей $p(\cdot)$.

Обычно

$$(\mathfrak{X},\ S_{\mathfrak{X}}) = \prod\nolimits_{t \in \Delta} (X_t,\ S_{X_t}),$$

где $(X_t,\ S_{X_t})$ — экземпляры одного и того же измеримого пространства $(X,\ S_X)$, а Π — прямое произведение пространств $(X_t,\ S_{X_t})$, когда параметр t пробегает множество Δ, являющееся, как правило, либо нек-рым интервалом (конечным, полубесконечным или бесконечным в обе стороны) действительной оси, либо нек-рым дискретным подмножеством этой оси (в последнем случае обычно $\Delta = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ или $\Delta = \{1, 2, \ldots\}$). В первом из этих случаев говорят об И. с. с непрерывным временем, а во втором — об И. с. с дискретным временем. И в том, и в другом случае сообщением служит случайный процесс $\xi = \{\xi(t),\ t \in \Delta\}$ со значениями в пространстве $(X,\ S_X)$; в приложениях $\xi(t)$ трактуется как сообщение, вырабатываемое И. с. в момент времени t. Наборы случайных величин $\xi_t^T = \{\xi(s),\ t < s \leqslant T\}$ наз. отрезками $(t,\ T]$ сообщений.

И. с. делятся на различные классы в зависимости от типа сообщения — случайного процесса $\xi(t)$, вырабатываемого И. с. Напр., если $\xi(t)$ — случайный процесс с независимыми одинаково распределенными значениями или стационарный, эргодический, марковский, гауссовский и т. д. процесс, то И. с. наз. соответственно И. с. без памяти, стационарным, эргодическим, марковским, гауссовским и т. д.

Одной из задач в теории *информации передачи* является задача кодирования И. с. При этом различают, напр., кодирование И. с. кодами фиксированной длины, переменной длины, кодирование И. с. при заданных условиях точности и др. (в приложениях нек-рые задачи кодирования И. с. наз. квантованием сообщений, сжатием сообщений и т. д.). Напр., пусть U — И. с. без памяти с дискретным временем, вырабатывающий сообщение $\xi = (\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots)$, компоненты ξ_k к-рого принимают значения из нек-рого конечного множества (алфавита) X. Пусть имеется другое конечное множество $\tilde{X}$ (множество значений компонент $\tilde{\xi}_k$ воспроизводимого сообщения $\tilde{\xi} = (\ldots, \tilde{\xi}_{-1}, \tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1, \ldots)$). Кодированием объема M отрезка $\xi^L = (\xi_1, \ldots, \xi_L)$ сообщения длины L наз. отображение X^L в множество из M элементов $\tilde{X}^L$, и пусть $\tilde{x}^L(x^L)$ — образ элемента $x^L \in X^L$ при таком отображении (здесь X^L — прямое произведение L экземпляров множества X). Пусть, далее, *сообщений точность воспроизведения* задается действительнозначной неотрицательной функцией $\rho(x, \tilde{x})$, $x \in X$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$, — мерой искажения, так что средняя мера ис-

кажения нек-рого кодирования задается равенством

$$\overline{\rho}_L = \frac{1}{L} \mathsf{E} \rho_L (\xi^L, \tilde{x}^L (\xi^L)), \qquad (1)$$

где

$$\rho_L (x^L, \tilde{x}^L) = \sum_{k=1}^{L} \rho (x_k, \tilde{x}_k),$$

если $x^L = (x_1, \ldots, x_L)$ и $\tilde{x}^L = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_L)$. ε-энтропией И. с. без памяти наз. величина

$$\overline{H}_\varepsilon (U) = \inf I (\xi_1, \tilde{\xi}_1), \qquad (2)$$

где $I(\cdot, \cdot)$ — *информации количество*, а нижняя грань берется по всевозможным совместным распределениям пары $(\xi_1, \tilde{\xi}_1)$, $\xi_1 \in X$, $\tilde{\xi}_1 \in \tilde{X}$, таким, что распределение X_1 совпадает с распределением отдельной компоненты И. с. U и

$$\mathsf{E} \rho (\xi_1, \tilde{\xi}_1) \leqslant \varepsilon.$$

Теорема кодирования И. с. Пусть $\overline{H}_\varepsilon (U)$ есть ε-энтропия дискретного источника U без памяти с конечной мерой искажения $\rho(\cdot, \cdot)$ и пусть $M = \exp \{LR\}$. Тогда: 1) для любого $\varepsilon > 0$, любого $\delta > 0$, любого $R > \overline{H}_\varepsilon (U)$ и достаточно большого L существует кодирование объема M отрезка сообщения длины L такое, что среднее искажение $\overline{\rho}_L$ удовлетворяет неравенству $\overline{\rho}_L \leqslant \varepsilon + \delta$; 2) если $R < \overline{H}_\varepsilon (U)$, то при любом кодировании объема M отрезка сообщения длины L среднее искажение $\overline{\rho}_L$ удовлетворяет неравенству $\overline{\rho}_L > \varepsilon$. Эта теорема кодирования обобщается и на более общий класс И. с., напр. для И. с. с непрерывным пространством X значений компонент. В этом случае вместо кодирования объема M говорят о квантовании И. с. объема M. Следует заметить, что ε-энтропия $\overline{H}_\varepsilon (U)$, входящая в формулировку теоремы, при $\varepsilon = 0$ и мере искажения

$$\rho (x, \tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = \tilde{x}, \\ 1, & \text{если } x \neq \tilde{x}, \end{cases} \quad \text{при } X = \tilde{X}$$

совпадает со скоростью создания сообщений заданным И. с.

Лит.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963; [2] Добрушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3—104; [3] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [4] Berger T., Rate distortion theory, N.Y., 1971.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ИСЧЕРПАНИЕ ОБЛАСТИ, аппроксимирующая последовательность областей,— для данной области D топологического пространства X последовательность в определенном смысле регулярных областей $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D$ такая, что $\overline{D}_k \subset D_{k+1}$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D$. Для любой области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ существует, напр., И. о., состоящее из областей D_k, ограниченных кусочно гладкими кривыми в $\mathbb{C}^1$ или кусочно гладкими поверхностями в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$. Для любой открытой римановой поверхности S существует полиэдрическое исчерпание $\{\Pi_k\}_{k=1}^{\infty}$, состоящее из полиэдрических областей Π_k, представляющих собой, каждая в отдельности, связное объединение конечного числа треугольников *триангуляции* S, причем: $\overline{\Pi}_k \subset \Pi_{k+1}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k = S$ и границей каждой из областей, составляющих открытое множество $S \setminus \overline{\Pi}_k$ при достаточно большом k является лишь один из граничных контуров Π_k.

Лит.: [1] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 2, М., 1962, гл. 5 и сл.

Е. Д. Соломенцев.

ИСЧЕРПЫВАНИЯ МЕТОД — метод доказательства, применявшийся математиками древности при нахожде-

нии площадей и объемов. Назв. «метод исчерпывания» введено в 17 в.

Типичная схема доказательства при помощи И. м. может быть изложена в современных обозначениях так: для определения величины A строится нек-рая последовательность величин $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ так, что

$$C_n < A; \tag{1}$$

предполагают также известным такое B, что

$$C_n < B \tag{2}$$

и при любом целом K для достаточно больших n удовлетворяются неравенства

$$K(A - C_n) < D, \quad K(B - C_n) < D, \tag{3}$$

где D — постоянно. С современной точки зрения, для перехода от неравенства (3) к равенству

$$A = B \tag{4}$$

достаточно заметить, что из условий (1), (2) и (3) следует

$$\lim_{n \to \infty} (A - C_n) = 0, \quad \lim_{n \to \infty} (B - C_n) = 0$$

$$A = \lim_{n \to \infty} C_n = B.$$

Математики древности, не располагавшие теорией *пределов*, обращались к доказательству от противного и доказывали невозможность каждого из неравенств $A < B$, $B < A$. Чтобы опровергнуть первое из них, при помощи *Архимеда аксиомы* устанавливали, что для $R = B - A$ существует такое K, что $KR > D$, и в силу условия (1) получали

$$K(B - C_n) > K(B - A) > D,$$

что противоречит второму из неравенств (3). Аналогично опровергалось другое предположение. После этого оставалось принять только равенство (4).

Введение И. м. вместе с лежащей в его основе аксиомой приписывается Евдоксу Книдскому. Этим методом широко пользовался Евклид, а с особенным искусством и разнообразием — Архимед. Напр., для определения площади сегмента A параболы Архимед строит площади $C_1, C_2, \ldots$, «исчерпывающие» при их постепенном нарастании площадь A сегмента.

При этом

$$C_2 = C_1 + \frac{1}{4} C_1,$$

. . . . . .

$$C_n = C_1 + \frac{1}{4} C_1 + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}} C_1.$$

Вместо того чтобы прибегнуть к предельному переходу

$$A = \lim_{n \to \infty} C_n = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\right) C_1 = \frac{4}{3} C_1,$$

Архимед геометрически доказывает, что при любом n

$$A - C_n < \frac{1}{4^{n-1}} C_1.$$

Вводя площадь

$$B = \frac{4}{3} C_1,$$

Архимед получает, что

$$B - C_n = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}} C_1,$$

и, следуя изложенному выше порядку, заканчивает доказательство того, что

$$A = B = \frac{4}{3} C_1.$$

ИСЧИСЛЕНИЕ — 1) Составная часть названия нек-рых разделов математики, трактующих правила вычислений и оперирования с объектами того или иного типа; напр., дифференциальное И., вариационное И. 2) Дедуктивная система, т. е. способ задания множества путем указания исходных элементов (аксиом исчисления) и *вывода правил*, каждое из к-рых описывает, как строить новые элементы из исходных и уже построенных. Вывод в И. Ξ наз. такое линейно упорядоченное множество, что всякий его элемент P является либо аксиомой И. Ξ, либо заключением применения к.-л. принадлежащего Ξ правила вывода, причем все посылки этого применения предшествуют P в выводе. Элемент наз. выводимым в Ξ, если в Ξ можно построить вывод, кончающийся этим элементом. Для удобства изучения выводов они иногда записываются в виде нелинейной структуры (см. *Вывода дерево*); выводы могут быть снабжены анализом, т. е. дополнительной информацией, облегчающей проверку правильности вывода (напр., при каждом элементе вывода пишутся код правила и номера предшествующих элементов, при помощи к-рых получен данный элемент).

Пример. Рассмотрим исчисление Ξ, задающее множество M записей в однобуквенном алфавите $\{|\}$ всех чисел вида 2^n при $n=1, 2, \ldots$ И. Ξ имеет одну аксиому $||$ и одно правило вывода «Из слова P можно получить PP». Легко убедиться, что слова из M и только они выводимы в Ξ.

И. может иногда порождать также нек-рые вспомогательные элементы, в таком случае задается нек-рый алгоритм, позволяющий отличать основные элементы от вспомогательных. При отсутствии вспомогательных элементов говорят о строгом представлении множества M исчислением Ξ. Таков, в частности, приведенный выше пример.

Используются и более сложные формы задания множеств посредством И., когда вместо элементов множества порождаются их коды (т. е. нужен еще дополнительный алгоритм, декодирующий основные элементы). Так, широко распространены кодировки нелинейных объектов словами, кодировки слов и n-к чисел натуральными числами и др. Важным частным случаем нестрогого представления является ступенчатое построение И., когда выводимые объекты предыдущих ступеней носят вспомогательный характер при формировании следующей ступени (такие построения особенно характерны для логико-математич. теорий, к-рые оказываются верхней ступенью над рядом И., задающих язык теории).

Понятие И. является формализацией интуитивного представления об индуктивно порождаемом множестве. Такие множества широко используются в математике; в частности, формализация любой развитой теории опирается на большое количество индуктивно определяемых множеств, начиная с простейших (множества переменных, термов, формул и т. п.) и кончая множеством теорем, к-рые выводятся из аксиом теории при помощи соответствующих логич. переходов. Неудивительно поэтому, что И. являются одним из основных аппаратов математич. логики. Именно *логические исчисления* были первыми примерами полностью формализованных дедуктивных систем (на базе этих И. вырабатывались основные понятия и методы общей теории И., возникли далеко идущие обобщения И.; см., напр., *Карнапа правило*). Нек-рые специальные виды И. хорошо пригодны для описания формальных *грамматик* (чем определяется роль И. в *математической лингвистике*) и для задания множеств, распознаваемых *автоматами конечными*.

Одной из основных сфер применения общей теории И. является *алгоритмов теория*. Это объясняется тем, что понятие И. имеет такой же фундаментальный характер, как и понятие алгоритма. Действительно, класс

множеств, к-рые могут быть заданы при помощи И., совпадает с классом алгоритмически перечислимых множеств слов (если оставаться в рамках общепринятых уточнений понятия И. и не прибегать к обобщениям, нарушающим потенциальную возможность порождения каждого выводимого элемента). Отсюда вытекает существование такого И., для к-рого неразрешима п р о б л е м а в ы в о д и м о с т и, т. е. невозможен алгоритм, к-рый для всех слов (в языке И.) кончал бы работу с правильным ответом (напр., давал бы 0 на всех выводимых словах и 1 на остальных). Из возможности задания сколь угодно сложных перечислимых множеств вытекает также существование универсальных в том или ином смысле И. (т. е. И., моделирующих все другие И. фиксированного языка, см. *Креативное множество*). Эти факты, в сочетании с изучением различных модификаций и специализаций общего понятия И., открывают возможности получения интересных алгоритмически неразрешимых проблем. Основополагающее значение для этого направления имела работа Э. Поста (см. [1]), в к-рой впервые было предложено понятие дедуктивной системы, пригодной для порождения произвольных перечислимых множеств слов (см. *Поста каноническая система*). Широкие возможности в оформлении правил вывода канонических И. позволяют хорошо обслуживать процессы индуктивного порождения множеств; подавляющее большинство построенных конкретных И. легко и естественно можно сформулировать как частные случаи канонических И.

Ассоциативные исчисления, называемые также с и с т е м а м и Т у э, служат удобным средством задания и изучения групп и полугрупп.

Лит.: [1] P o s t E. L., «Amer. J. Math.», 1943, v. 65, № 2, p. 197—215; [2] М а р к о в А. А., Теория алгорифмов, М.— Л., 1954 («Тр. матем. ин-та АН СССР», т. 42); [3] «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1964, т. 72, с. 5—56; 1967, т. 93, с. 3—42.

С. Ю. Маслов.

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ р е ш е н и я п р о б л е м ы с о б с т в е н н ы х з н а ч е н и й м а т р и ц ы — методы нахождения собственных значений и собственных векторов (или корневого базиса) матрицы, минующие предварительное вычисление характеристич. многочлена. Эти методы существенно различаются для задач среднего размера, матрицы к-рых могут быть целиком размещены в оперативной памяти вычислительной машины, и для задач большого порядка, в к-рых хранение информации обычно осуществляется в компактной форме.

Первый И. м. был предложен К. Якоби [1] для вычисления собственных значений и векторов действительных симметричных матриц (см. *Вращений метод*). Метод переносится на комплексные эрмитовы матрицы, а также на более широкий класс нормальных матриц.

Имеется ряд обобщений метода Якоби для матриц произвольного вида. Типичный алгоритм этого класса состоит из последовательности элементарных шагов, выполняемых по схеме:

$$\tilde{A}_{k+1} = S_k^{-1} A_k S_k,$$

$$A_{k+1} = T_k^* \tilde{A}_{k+1}^* T_k.$$

При этом роль подобного преобразования с (элементарной) матрицей S_k состоит в уменьшении евклидовой нормы текущей матрицы A_k, т. е. в приближении ее к нек-рой нормальной матрице. В качестве T_k обычно берется матрица вращений или ее унитарный аналог. Смысл подобного преобразования с этой матрицей, как и в классич. методе Якоби, заключается в аннулировании внедиагонального элемента в нек-рой эрмитовой матрице, связанной с матрицей A_{k+1}, напр. в матрице $A_{k+1}+\tilde{A}_{k+1}^*$. С ростом k матрицы A_k сходятся к матрице диагонального или квазидиагонального вида, а накопленное произведение матриц S_k и T_k дает матрицу, столбцами к-рой являются приближенные собственные

векторы либо векторы, образующие базисы инвариантных подпространств матрицы (см. [2], [3]).

Наряду с вышеописанными методами развиваются алгоритмы другого класса, так. наз. степенные методы. Самым эффективным методом этого направления, наиболее широко применяющимся для решения задач среднего размера, является QR-алгоритм (см. [4], [5]). Итерации QR-алгоритма проводятся по следующей схеме:

$$A_k = Q_k R_k, \quad A_{k+1} = R_k Q_k, \tag{1}$$

здесь Q_k — ортогональная или унитарная, а R_k — правая треугольная матрица. Для перехода от A_k к A_{k+1} сначала находится ортогонально-треугольное разложение матрицы A_k, после чего матрицы Q_k и R_k перемножаются в обратном порядке. Если положить $\tilde{Q}_k = Q_1 \ldots Q_k$, $R_k = R_k \ldots R_1$, то из (1) следует схема

$$A_{k+1} = \tilde{Q}_k^* A_1 \tilde{Q}_k, \quad A_1^k = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k. \tag{2}$$

Таким образом, QR-алгоритм генерирует последовательность матриц A_k, ортогонально подобных исходной матрице A_1; при этом трансформирующая матрица $\tilde{Q}_k$ является ортогональной компонентой в разложении (2) матрицы A_1^k.

При итерации по схеме (1) матрицы A_k сходятся к правой треугольной или квазитреугольной матрице, причем скорость сходимости поддиагональных элементов к нулю управляется отношениями модулей различных собственных значений и является, вообще говоря, довольно медленной. Для ускорения сходимости QR-алгоритма используются так наз. сдвиги, что приводит к следующему видоизменению схемы (1):

$$A_k - \varkappa_k I = Q_k R_k, \quad A_{k+1} = R_k Q_k + \varkappa_k I. \tag{3}$$

Обычно применение сдвигов (напр., $\varkappa_k = a_{nn}^{(k)}$) позволяет получить быструю сходимость внедиагональных элементов последней строки к нулю (асимптотически квадратичную в общем случае и кубическую для эрмитовых матриц) и соответственно быструю стабилизацию диагонального элемента (n, n). После того, как значение этого элемента установилось, дальнейшие итерации проводят с главной подматрицей порядка $n-1$, и т. д. Собственные векторы результирующей треугольной матрицы после умножения на накопленное произведение ортогональных матриц Q_k дают собственные векторы исходной матрицы A_1.

Итерации по схеме (1) либо (3) применяют к матрице, предварительно приведенной к так наз. форме Хессенберга. Говорят, что матрица A имеет правую форму Хессенберга, если $a_{ij} = 0$ при $i > j+1$. QR-алгоритм обладает свойством сохранять форму Хессенберга исходной матрицы, что намного удешевляет стоимость каждой итерации. Есть и другие важные возможности уменьшения объема вычислений, напр., неявное использование сдвигов, что позволяет находить комплексно сопряженные собственные значения действительных матриц, не прибегая к комплексной арифметике.

В задачах высокого порядка (от нескольких сотен до нескольких тысяч) матрицы обычно бывают разреженными, т. е. имеют относительно небольшое число ненулевых элементов. При этом, как правило, нужно вычислять не все, а лишь несколько собственных значений и соответствующие собственные векторы. В типичном случае требуемые собственные значения — наибольшие или наименьшие по модулю.

Описанные выше методы, основанные на подобных преобразованиях, разрушают разреженность матрицы и потому неприемлемы. Основными для задач высокого порядка являются методы, элементарная операция которых — умножение матрицы на вектор. При их опи-

сании в дальнейшем предполагается, что собственные значения заданной матрицы A занумерованы в порядке убывания модулей так, что

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|.$$

Наиболее широкую область применимости имеет степенной метод для вычисления собственного значения λ_1 с максимальным модулем. Исходя из начального приближения x_0 строится последовательность нормированных векторов

$$x_{k+1} = \rho_k A x_k, \quad \rho = 1/\| A x_k \|. \tag{4}$$

Эта последовательность сходится к собственному вектору, отвечающему λ_1, при выполнении следующих условий: 1) все элементарные делители матрицы A, относящиеся к λ_1,— линейные; 2) нет других собственных значений с тем же модулем; 3) в разложении исходного вектора x_0 по корневому базису матрицы A имеется нетривиальная компонента по собственному подпространству для λ_1. Однако сходимость степенного метода, как правило, медленная и определяется отношением величин двух старших по модулю собственных значений.

Если известно приближение $\tilde{\lambda}_0$ к желаемому собственному значению λ_i, то быстрая сходимость может быть достигнута посредством метода обратных итераций. Вместо (4) строится последовательность, определяемая соотношениями

$$(A - \tilde{\lambda}_0 I)\, x_{k+1} = \rho_k x_k, \quad \| x_k \| = 1, \quad \forall k. \tag{5}$$

Метод обратных итераций есть по существу степенной метод для матрицы $(A - \tilde{\lambda}_0 I)^{-1}$, имеющей сильно доминирующее собственное значение $1/(\tilde{\lambda}_0 - \lambda_0)$. Реализация формулы (5) требует, однако, решения линейной системы с матрицей $A - \tilde{\lambda}_0 I$ и даже при использовании специальных методов для разреженных систем предъявляет повышенные требования к оперативной памяти по сравнению со степенным методом.

Для вычисления группы собственных значений применяются так наз. методы одновременных итераций. Они представляют собой обобщение степенного метода, где вместо итераций одного вектора фактически строятся итерации матрицей A целого подпространства. Типичным для этой группы методов является м е т о д С т ь ю а р т а [6]. Пусть собственные значения матрицы A удовлетворяют соотношениям

$$|\lambda_1| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|.$$

Выбирается начальная $n \times r$-матрица Q_0 с ортонормированными столбцами. Исходя из Q_0, строится последовательность матриц Q_k по схеме:

$$\tilde{Q}_{k+1} = A Q_k, \quad \tilde{Q}_{k+1} = \tilde{\tilde{Q}}_{k+1} R_{k+1}, \tag{6}$$

$$Q_{k+1} = \tilde{\tilde{Q}}_{k+1} W_{k+1}.$$

Во второй из этих формул R_{k+1} — правая треугольная $r \times r$-матрица, а матрица $\tilde{\tilde{Q}}_{k+1}$ имеет ортонормированные столбцы. Цель этого разложения, к-рое может выполняться не на каждой итерации, состоит в том, чтобы обеспечить линейную независимость столбцов последовательно получаемых матриц Q_k, к-рая в практическом смысле может быть утеряна в результате многократного итерирования матрицей A. Важную роль в ускорении сходимости метода играет третья формула (6). Ортогональная $r \times r$-матрица, участвующая в этой формуле, имеет следующий смысл. Если обозначить через B_{k+1} $r \times r$-матрицу $Q_k^* A Q_k$, то W_{k+1} приводит B_{k+1}

к ф о р м е Ш у р а, т. е. правой треугольной матрице. Матрица W_{k+1} может быть построена посредством QR-алгоритма; ее столбцы образуют б а з и с Ш у р а матрицы B_{k+1}, характеризуемый тем, что при любом k, $1 \leqslant k \leqslant r$, линейная оболочка первых k векторов есть инвариантное подпространство матрицы B_{k+1}. Матрицы Q_k метода Стьюарта сходятся к матрице Q, столбцы к-рой дают базис Шура для инвариантного подпространства матрицы A, отвечающего собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. При этом скорость сходимости i-го столбца определяется отношением $|\lambda_{r+1}|/|\lambda_i|$.

В случае действительной симметричной матрицы появляются дополнительные возможности, связанные с трактовкой собственных значений как стационарных точек ф у н к ц и о н а л а Р э л е я:

$$\varphi(A, x) = (Ax, x)/(x, x), \quad x \neq 0. \qquad (7)$$

Для нахождения крайних точек спектра могут быть применены методы безусловной оптимизации функционала (7). Получающаяся здесь теория параллельна теории итерационных методов для решения положительно определенных линейных систем и приводит к тем же самым алгоритмам: координатной релаксации, последовательной сверхрелаксации, наискорейшего спуска, сопряженных градиентов (см. [7]).

Перечисленные методы находят собственные значения «по одному». Для одновременного вычисления группы собственных значений симметричной матрицы используется м е т о д Л а н ц о ш а [8], к-рый предназначался для трехдиагонализации симметричной матрицы порядка n. В основу метода положено следующее наблюдение: если последовательность векторов $p_0, Ap_0, \ldots, Ap_0^{n-1}$ линейно независима, то в базисе $q_1, q_2, \ldots, q_n$, полученном из нее процессом ортонормализации, матрица приводится к трехдиагональной форме T_n. Векторы q_k строятся по трехчленным рекуррентным формулам

$$\beta_k q_{k+1} = Aq_k - \beta_{k-1} q_{k-1} - \alpha_k q_k;$$

коэффициенты α_k и β_k, $k = 1, \ldots, n$, определяют матрицу T_n. После k шагов процесса ортогонализации известны векторы $q_1, \ldots, q_k$ и главная подматрица T_k матрицы T_n. Во многих случаях уже при $k \ll n$ часть собственных значений матрицы T_k достаточно точно приближает нек-рые собственные значения T_n; соответствующие собственные векторы T_k могут быть использованы для построения приближений к собственным векторам A. Если же достигнутая точность еще не удовлетворительна, то можно выбрать новое начальное приближение $\tilde{p}_0$ в линейной оболочке векторов $q_1, \ldots, q_k$ и повторить процесс, проведя $\tilde{k}$ шагов, и т. д. В этом и состоит итерационная трактовка метода Ланцоша (см. [9]).

Нахождение внутренних точек спектра для разреженных матриц высокого порядка еще не имеет удовлетворительного численного решения.

Лит.: [1] J a c o b i C. G., «J. reine und angew. Math.», 1846, Bd 30, № 1, S. 51—94; [2] E b e r l e i n P. J., «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1962, v. 101, № 1, p. 74—88; [3] В о е в о д и н В. В., «Вычисл. методы и программирование», 1965, № 3, с. 89—105; [4] К у б л а н о в с к а я В. Н., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1961, т. 1, № 4, с. 555—70; [5] F r a n c i s J. G. F., «Comput. J.», 1961, v. 4, № 3, p. 265—71; 1962, v. 4, № 4, p. 332—45; [6] S t e w a r t G. W., «Numer. Math.», 1976, v. 25, № 2, p. 123—36; [7] R u h e A., Computation of engenvalues and eigenvectors, B., 1977; [8] L a n c z o s C., «J. Res. Nat. Bur. Standards», 1950, v. 45, № 4, p. 255—82; [9] P a i g e C. C., «J. Inst. Math. and Appl.», 1972, v. 10, p. 373—81.

Х. Д. Икрамов.

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ — рекурсивный алгоритм, реализующий в нек-ром топологич. пространстве V последовательность точечно-множественных отображений $A_k : V \to V$, при помощи к-рых по начальной

точке $u^0 \in V$ вычисляют последовательность точек $u^k \in V$ согласно формулам

$$u^{k+1} = A_k u^k, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{1}$$

Операцию (1) наз. *итерацией*, а последовательность u^k — *итерационной последовательностью*.

И. а. (или *методы последовательных приближений*) применяют как для нахождения решения операторного уравнения

$$Au = f, \tag{2}$$

или минимума нек-рого функционала, или собственных значений и элементов уравнения $Au = \lambda u$ и т. п., так и для доказательства существования решений этих задач. И. а. (1) наз. *сходящимся* при начальном приближении u^0 к решению u упомянутых задач, если $u^k \to u$ при $k \to \infty$.

Операторы A_k для решения уравнения (2), заданного в линейном метрич. пространстве V, обычно строят по формулам

$$A_k u^k = u^k - H_k (Au^k - f), \tag{3}$$

где $H_k (V \to V)$ — некоторая, определяющая тип И. а., последовательность операторов. В основе построения И. а. типа (1), (3) лежат или *сжатых отображений принцип* и его обобщения, или вариационные методы минимизации нек-рого связанного с задачей функционала. При этом используются различные методы построения операторов A_k, напр. варианты *Ньютона метода*, или *спуска метода*. Операторы H_k стараются выбрать так, чтобы быстрая сходимость u^k к u обеспечивалась при условии, что численная реализация операции $A_k u^k$ при заданном объеме памяти ЭВМ была достаточно проста, нетрудоемка по количеству операций и устойчива к ошибкам округления.

Хорошо разработаны и исследованы И. а. решения линейных задач. И. а. делятся при этом на линейные и нелинейные. К линейным относятся, напр., *Гаусса метод*, *Зейделя метод*, верхней *релаксации метод*, И. а. с чебышевскими параметрами; к нелинейным — вариационные методы: *наискорейшего спуска метод*, *сопряженных градиентов метод*, *минимизации невязок метод* и т. д. Одним из эффективных И. а. является метод с использованием *чебышевских параметров*, когда A — самосопряженный оператор со спектром на отрезке $[m, M]$, где $M > m > 0$. Этот метод дает оптимальную (при данной информации о границах спектра) оценку сходимости на заранее задаваемом N-м шаге. Записывается метод в виде

$$u^{k+1} = u - \alpha_{k+1} (Au^k - f), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где

$$\alpha_{k+1} = 2 \left(M + m - (M - m) \cos \frac{2j_k - 1}{2N} \right)^{-1},$$

N — ожидаемое число итераций, в нем используется $\varkappa_N = (j_1, j_2, \ldots, j_N)$ — специальная перестановка N-го порядка, хорошо перемешивающая для устойчивости счета корни многочлена Чебышева. Для $N = 2^n$ перестановку $\varkappa_N$ можно построить, напр., так: $\varkappa_2 = (1, 2)$, и если известна перестановка $\varkappa_{2^{i-1}} = (j_1, j_2, \ldots, j_{2^{i-1}})$, то $\varkappa_{2^i} = (j_1, 2^i + 1 - j_1, j_2, 2^i + 1 - j_2, \ldots)$. При $N = 16$ эта перестановка имеет вид: (1, 16, 8, 9, 4, 13, 5, 12, 2, 15, 7, 10, 3, 14, 6, 11).

Существуют И. а., использующие r предыдущих приближений $u^k, u^{k-1}, \ldots, u^{k-r+1}$; они наз. r-шаговыми и обладают повышенной скоростью сходимости.

И. а. широко применяются при решении многомерных задач математич. физики, для нек-рых классов

таких задач существуют специальные быстросходящиеся И. а. Напр., *переменных направлений метод*, метод, изложенный в [7] для эллиптических краевых задач, нек-рые методы для задач переноса частиц или излучений (см. [1] — [7]).

Лит.: [1] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [2] Коллатц Л., Функциональный анализ и вычислительная математика, пер. с нем., М., 1969; [3] Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, М., 1971; [4] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [5] Красносельский М. А. и др., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [6] Лебедев В. И., в кн.: Тр. института кибернетики АН УССР, К., 1972, с. 109—135; [7] Федоренко Р. П., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 2, с. 121—82.

В. И. Лебедев.

ИТЕРАЦИЯ — результат повторного применения какой-либо математич. операции. Так, если

$$y = f(x) \equiv f_1(x)$$

есть нек-рая функция от x, то функции

$$f_2(x) = f[f_1(x)],\ f_3(x) = f[f_2(x)],\ \ldots,\ f_n(x) = f[f_{n-1}(x)]$$

наз. соответственно второй, третьей, ..., n-й итерациями функции $f(x)$. Напр., полагая $f(x) = x^\alpha$, получают

$$f_2(x) = (x^\alpha)^\alpha = x^{\alpha^2},$$
$$f_3(x) = (x^{\alpha^2})^\alpha = x^{\alpha^3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n(x) = (x^{\alpha^{n-1}})^\alpha = x^{\alpha^n}.$$

Индекс n наз. показателем И., а переход от функции $f(x)$ к функциям $f_2(x)$, $f_3(x)$, ...— итерированием. Для нек-рых классов функций можно определить И. с произвольным действительным и даже комплексным показателем. И. используются при решении различного рода уравнений и систем уравнений итерационными методами. Подробнее см. *Последовательных приближений метод.*

Лит.: [1] Коллатц Л., Функциональный анализ и вычислительная математика, пер. с нем., М., 1969.

БСЭ-3.

ИТЕРИРОВАННОЕ ЯДРО — функция $(x, s) \mapsto K_n(x, s)$, к-рая образуется из данного ядра K интегрального оператора

$$A\varphi(x) = \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

по рекуррентным соотношениям:

$$K_1(x, s) = K(x, s),\quad K_n(x, s) = \int_a^b K_{n-1}(x, t)\,K(t, s)\,dt;$$

K_n наз. n-й итерацией, или n-м итерированным ядром, ядра K. И. я. иногда наз. повторным ядром. Если ядро K непрерывно или интегрируемо с квадратом, то все его И. я. непрерывны, соответственно, интегрируемы с квадратом. Если K — симметричное ядро, то все его И. я. также симметричны. Ядро K_n является ядром оператора A^n. Имеет место равенство

$$K_n(x, s) = \int_a^b K_{n-m}(x, t)\,K_m(t, s)\,dt,\quad 1 \leqslant m \leqslant n-1.$$

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, ч. 1, 6 изд., М., 1974; [2] Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959.

Б. В. Хведелидзе.

ИТО ПРОЦЕСС — случайный процесс, имеющий *стохастический дифференциал*. Точнее, непрерывный случайный процесс X_t, заданный на вероятностном пространстве (Ω, F, P) с нек-рым неубывающим семейством $\{F_t\}$ σ-подалгебр событий Ω, наз. процессом Ито по отношению к $\{F_t\}$, если существуют процессы $a(t)$ и $\sigma(t)$ (называемые коэффициентом

сноса и коэффициентом диффузии соответственно), измеримые при каждом t относительно F_t, и винеровский процесс W_t относительно $\{F_t\}$ такие, что

$$dX_t = a(t)\,dt + \sigma(t)\,dW_t.$$

И. п. назван по имени К. Ито (K. Ito). Один и тот же процесс X_t может быть И. п. по отношению к двум различным семействам $\{F_t\}$. При этом соответствующие стохастич. дифференциалы могут существенно отличаться. И. п. наз. процессом диффузионного типа, если его коэффициенты сноса $a(t)$ и диффузии $\sigma(t)$ измеримы при каждом t относительно σ-алгебры

$$F_t^X = \sigma\{\omega : X_s,\ s \leqslant t\}.$$

При некоторых достаточно общих условиях оказывается возможным представление И. п. в виде процесса диффузионного типа, но, вообще говоря, с некоторым новым винеровским процессом (см. [3]). Если И. п. X_t представим в виде диффузионного И. п. с некоторым винеровским процессом $\overline{W}_t$ и выполняется равенство $F_t^{\overline{W}} = F_t^X$, то $\overline{W}_t$ наз. обновляющим процессом для X_t.

Пример. Пусть задан некоторый винеровский процесс W_t, $t \geqslant 0$, относительно $\{F_t\}$ и

$$dX_t = Y\,dt + dW_t,$$

где Y — нормально распределенная случайная величина, имеющая среднее m и дисперсию γ; Y измерима относительно F_0.

Процесс X_t, рассматриваемый относительно F_t^X, имеет стохастич. дифференциал

$$dX_t = \frac{m + \gamma X_t}{1 + \gamma t}\,dt + d\overline{W}_t,$$

где новый винеровский процесс $\overline{W}_t$, определяемый равенством

$$\overline{W}_t = \mathsf{E}\left(X_t - Yt \mid F_t^X\right),$$

является обновляющим процессом для X_t.

Лит.: [1] Гирсанов И. В., «Теория вероят. и ее примен.», 1960, т. 5, в. 3, с. 314—30; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [3] Ширяев А. Н., «Проблемы передачи информации», 1966, т. 11, в. 3, с. 3—22.

А. А. Новиков.

ИТО ФОРМУЛА — формула, по к-рой вычисляется *стохастический дифференциал* функции от *Ито процесса*. Пусть (неслучайная) функция $f(t, x)$, определенная при действительных t и x, дважды непрерывно дифференцируема по x, один раз непрерывно дифференцируема по t и пусть у процесса X_t существует стохастич. дифференциал

$$dX_t = a(t)\,dt + \sigma(t)\,dW_t;$$

тогда стохастич. дифференциал процесса $f(t, X_t)$ имеет вид

$$df(t, X_t) = \left[f'_t(t, X_t) + a(t) f'_x(t, X_t) + \right.$$

$$\left. + {}^1/_2\sigma^2(t) f''_{xx}(t, X_t)\right] dt + \sigma(t) f'_x(t, X_t)\,dW_t.$$

Эта формула была получена К. Ито [1]. Аналогичная формула имеет место и для векторных X_t и $f(t, x)$. И. ф. распространяется на некоторые классы негладких функций [2] и *семимартингалов*.

Лит.: [1] Ito K., «Nagoya Math. J.», 1951, v. 3, p. 55—65; см. также «Математика», 1959, № 3, в. 5, с. 131—41; [2] Крылов Н. В., «Теория вероят. и ее примен.», 1969, т. 14, в. 2, с. 340—48.

А. А. Новиков.

ЙЕТСА ПОПРАВКА — поправка, применяемая в нек-рых задачах математич. статистики (напр., в задаче о стохастич. независимости) и позволяющая иногда улучшить результаты, полученные с помощью обычных таблиц χ^2-распределения. Предложена Ф. Йетсом [1].

Лит.: [1] Yates J., «T. Roy. Statist. Soc.», 1934, v. 1, p. 217; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

В. В. Сенатов.

ЙОРДАНОВА АЛГЕБРА — алгебра, в к-рой справедливы тождества

$$xy=yx,$$

$$(x^2y)x=x^2(yx).$$

Такие алгебры впервые возникли в работе П. Йордана [1], посвященной аксиоматизации основ квантовой механики (см. также [2]), а затем нашли применения в алгебре, анализе и геометрии.

Пусть A — ассоциативная алгебра над полем характеристики $\neq 2$. Множество A с операциями сложения и йорданова умножения

$$a\circ b={}^1/_2\,(ab+ba)$$

образует алгебру $A^{(+)}$, к-рая является йордановой. Й. а., изоморфная подалгебре алгебры $A^{(+)}$ для некрой ассоциативной алгебры A, наз. специальной. Роль специальных алгебр в теории Й. а. во многом аналогична роли ассоциативных алгебр в теории альтернативных алгебр. В основе этой аналогии лежит теорема о том, что всякая двупорожденная подалгебра Й. а. специальна. (Всякая двупорожденная подалгебра альтернативной алгебры — ассоциативна.) Однако класс специальных Й. а. не является многообразием, т. е. не задается тождествами, поскольку специальные алгебры могут иметь неспециальные гомоморфные образы. Тем не менее, найден ряд тождеств 8-й и 9-й степеней, которым удовлетворяет всякая специальная Й. а. и не удовлетворяют нек-рые неспециальные алгебры, а также доказано, что таких тождеств степени $\leqslant 7$ не существует. Необходимое и достаточное условие специальности алгебры: Й. а. специальна тогда и только тогда, когда она изоморфно вложима в Й. а., каждое счетное подмножество к-рой лежит в подалгебре, порожденной двумя элементами.

Примеры. 1) Пусть V — векторное пространство над полем F с симметрической билинейной формой $f(x, y)$, а $F\cdot e_0+V$ — пространство на единицу большей размерности, на к-ром формулой

$$(\alpha e_0+u)\,(\beta e_0+v)=[\alpha\beta+f(u,\ v)]\,e_0+\alpha v+\beta u$$

($\alpha,\ \beta\in F,\ u,\ v\in V$) определяется умножение. Возникающая таким образом алгебра наз. алгеброй симметрической билинейной формы f. Она изоморфно вкладывается в алгебру $C(V,\ f)^{(+)}$, где $C(V,\ f)$ — алгебра Клиффорда формы f, и потому является специальной Й. а.

2) Пусть A — ассоциативная алгебра и j — ее инволюция (антиизоморфизм порядка два). Множество

$$H(A,\ j)=\{a\in A\mid a^j=a\}$$

является подалгеброй в $A^{(+)}$ и образует специальную Й. а.

3) Пусть C — альтернативная неассоциативная алгебра над полем F с инволюцией $c \to \bar{c}$, неподвижные элементы к-рой лежат в ассоциативном центре алгебры C. В алгебре матриц C_3 третьего порядка над C подмножество

$$H(C_3, \Gamma) = \{X \in C_3 \mid X = \Gamma^{-1}\bar{X}'\Gamma\},$$

где

$$\Gamma = \operatorname{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}, \quad \gamma_i \neq 0, \quad \gamma_i \in F,$$

относительно операций сложения и йорданова умножения образует неспециальную Й. а. Такая алгебра не является гомоморфным образом никакой специальной алгебры.

Конечномерные простые Й. а. над алгебраически замкнутым полем F характеристики $\neq 2$ полностью классифицированы (см. [3]). Центральные простые конечномерные Й. а. разбиваются на пять серий. Серии (A) — (D) бесконечны и состоят из специальных алгебр, серия (E) состоит из одной неспециальной алгебры:

(A) $F_n^{(+)}$;

(B) $H(F_n, J_1)$, где $J_1 : X \to X'$;

(C) $H(F_{2n}, J_S)$, где $J_S : X \to \bar{S}'X'S$, $S = \operatorname{diag}\{Q, Q, \ldots, Q\}$, $Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$;

(D) $F \cdot e_0 + V$ — алгебра симметрической невырожденной билинейной формы;

(E) $H(C_3, J_1)$, где C — алгебра Кэли — Диксона со стандартной инволюцией. Эта алгебра 27-мерна над F.

Во всякой конечномерной Й. а. J радикал (наибольший нильидеал) N нильпотентен и факторалгебра $\bar{J} = J/N$ есть конечная прямая сумма простых Й. а. Если факторалгебра $\bar{J}$ сепарабельна, то алгебра J обладает разложением $J = N + W$ в сумму радикала и полупростой подалгебры W, изоморфной $\bar{J}$. В случае поля характеристики 0 все полупростые слагаемые W сопряжены относительно автоморфизмов специального вида (см. [3]). С некоторыми ограничениями на алгебру это верно и в случае поля характеристики $p > 0$.

Обобщением теории конечномерных Й. а. является теория Й. а. с условием минимальности для квадратичных (внутренних) идеалов (см. [3], [4], [5]). Квадратичный идеал Q алгебры J — это такое подпространство, что $\{qxq\} \in Q$ для всех $q \in Q$ и $x \in J$, где $\{abc\} = (ab)c + (bc)a - (ca)b$ — тройное йорданово произведение. Если J — Й. а. с условием минимальности для квадратичных идеалов и R — ее квазирегулярный радикал, то факторалгебра J/R есть конечная прямая сумма простых алгебр, к-рые описаны за исключением Й. а. с делением. В случае, когда алгебра J специальна, доказано, что радикал R нильпотентен и конечномерен.

Алгебраическая специальная Й. а., удовлетворяющая нетривиальному (для специальных алгебр) тождеству, локально конечномерна; специальная йорданова нильалгебра с нетривиальным тождеством локально нильпотентна [6]. В частности, специальная алгебраическая (ниль) Й. а. ограниченного индекса является локально конечномерной (нильпотентной). Конечно порожденная разрешимая Й. а. нильпотентна, в общем случае это не верно даже для специальных алгебр.

Йорданово Ф-операторное кольцо, являющееся конечно порожденным Ф-модулем с нильпотентными порождающими элементами, нильпотентно [7].

Каждой Й. а. можно различными способами сопоставлять алгебры Ли (см. [3], [8]). Ряд теорем о Й. а. получен *с помощью известных теорем об алгебрах Ли*. Так, напр., доказано, что полупростая конечномерная Й. а. над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 имеет базис с целочисленными структурными константами. Для теории алгебр Ли эти конструкции также полезны, так как с их помощью реализуются нек-рые важные классы алгебр Ли. Напр., алгебра Ли дифференцирований *простой* Й. а. *типа* (*E*) *есть исключительная* простая алгебра Ли F_4, а алгебра линейных преобразований этой же алгебры, оставляющих инвариантной нек-рую кубич. форму, есть исключительная простая алгебра Ли E_6. При помощи другой конструкции, сопоставляющей альтернативной алгебре степени 2 и

Й. а. степени 3 некоторую алгебру Ли, можно реализовать все пять простых исключительных алгебр Ли типов G_2, F_4, E_6, E_7, E_8.

Интересно, наконец, отметить, что нек-рые алгебры, возникающие в генетике, являются йордановыми [10].

Лит.: [1] Jordan P., «Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. 2A», 1933, S. 209—17; [2] Эмх Ж., Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [3] Jacobson N., Structure and representations of Jordan algebras, Providence, 1968; [4] Mc Crimmon K., «Prof. Nat. Acad. Sci USA», 1969, v. 62, № 3, p. 671—78; [5] Слинько А. М., «Алгебра и логика», 1972, т. 11, № 6, с. 711—24; [6] Ширшов А. И., «Матем. сб.», 1957, т. 41, № 3, с. 381—94; [7] Шестаков И. П., «Алгебра и логика», 1971, т. 10, № 4, с. 407—48; [8] Schafer R. D., An introduction to nonassoeiative algebras, N.Y., 1966; [9] Gordon S. R., «J. of Algebra», 1973, v. 24, p. 258—82; [10] Schafer R. D., «Amer. J. Math.», 1949, v. 71, p. 121—35; [11] Koecher M., An elementary approach to bounded symmetric domains, Houston, 1969; [12] Слинько А. М. и др., Йордановы алгебры, в. 1, Новосиб., 1976.

А. М. Слинько.

КАВАГУТИ ПРОСТРАНСТВО — гладкое n-мерное многообразие V_n, в к-ром элемент дуги ds регулярной кривой $x=x(t)$, $t\in[t_0, t_1]$, выражается формулой:

$$ds = F\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^p x}{dt^p}\right) dt, \qquad (1)$$

причем метрическая функция F подчиняется условиям Цермело:

$$\sum_{s=1}^{p} s x^{(s)\,i} F_{(s)\,i} = F, \quad \sum_{s=r}^{p} \binom{s}{p} x^{(s-r+1)\,i} F_{(s)\,i} = 0, \qquad (2)$$

$$r = 2, 3, \ldots, p,$$

где

$$x^{(s)\,i} = \frac{d^s x^i}{dt^s}, \quad F_{(s)\,i} = \frac{\partial F}{\partial x^{(s)\,i}}.$$

Условия (2) обеспечивают независимость элемента дуги ds от параметризации кривой $x=x(t)$.

Общая теория К. п. впервые изложена А. Кавагути (см. [1]). Основанием для рассмотрения К. п. послужило то, что элементы дуги вида (1) встречались в различных однородных пространствах (напр., афинная дуга, проективная дуга). Впоследствии было установлено (см. [2]), что в любом *однородном пространстве* существует инвариантная метрика Кавагути (1), группа автоморфизмов к-рой совпадает с группой преобразований однородного пространства. Основы общей теории К. п. развивались на формальном пути обобщения тензорного аппарата и параллельного перенесения. А. Кавагути в качестве основного пространства рассматривал расслоенное пространство, базой к-рого является пространство линейных элементов $(x^i, x^{(s)i})$, $s=1, 2, \ldots, q$, порядка $q=2p-1$, а слоями — n-мерные векторные пространства T^n, касательные к V_n. Ковариантное дифференцирование контравариантных векторов $V^i(x^k, x^{(s)k})$ определяется с помощью операторов ковариантного дифференцирования

$$\nabla V^i = dV^i + \sum_{s=0}^{q} \overset{(s)}{\Gamma}{}^i_{kj} V^k \, dx^{(s)j},$$

$$\nabla x^{(s)\,i} = M^{si}_j \left(dx^{(s)\,j} + \sum_{\sigma=0}^{s-1} \Lambda^{sj}_{\sigma k} \, dx^{(\sigma)\,k} \right.,$$

$$s = 1, 2, \ldots, q,$$

где $\overset{(s)}{\Gamma}{}^i_{kj}$, μ^{si}_j, $\Lambda^{sj}_{\sigma k}$ зависят от линейного элемента порядка $q=2p-1$. Эти операторы могут быть построены с помощью трехкратного продолжения метрич. функции и определяемого ею метрич. тензора q_{ij}, зависящего также от линейного элемента порядка $2p-1$. Так, построенная общая теория К. п. не получила глубокого развития отчасти ввиду того, что порядок q базисного пространства линейных элементов оказался выше, чем порядок p пространства, на к-ром задана метрич. функция F и на к-ром должны определяться все дифференциальные инварианты К. п.

Другие возможности исследования К. п. основаны на современной теории расслоенных пространств, теории струй и теории нелинейных связностей. На этом пути с применением дифференциально-алгебраич. метода продолжений и охватов для широкого класса К. п. найдена нек-рая редуктивная линейная связность в подходя-

щим образом подобранном расслоенном пространстве, базой к-рого служит пространство линейных элементов порядка p. Структурные уравнения форм этой связности дают полную систему тензорных инвариантов К. п., на основе к-рой формулируются инвариантные признаки нек-рых важных классов К. п.

В дифференциальной геометрии обобщенных пространств большое место занимает исследование специальных К. п. с метрикой вида

$$ds = (A_i x''^i + B)^{1/k}\, dt,$$

где A_i и B — функции x^i и x'^i, что сближает такие пространства с *финслеровыми пространствами*. В этом случае общая теория А. Кавагути оказывается неприменимой, так как метрич. тензор g_{ij} становится вырожденным. Поэтому вводится несимметрич. тензор

$$G_{ik} = 2A_{i(k)} - A_{k(i)}, \quad A_{i(k)} = \frac{\partial A_i}{\partial x'^k},$$

к-рый в общем случае не вырожден. В отличие от таких пространств, К. п. общего типа представляют собой дифференциально-геометрич. структуру высшего порядка.

Изучение К. п. служит также для поиска геометрич. подходов к исследованию вариационной задачи для интегралов вида

$$S = \int_{t_1}^{t_2} F\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^p x}{dt^p}\right) dt.$$

Лит.: [1] Kawaguchi A., «Proc. Imp. Acad. Tokyo», 1937, v. 13, p. 237—40; [2] Лосик М. В., в кн.: Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, 1963, в. 12, с. 213—37; [3] Близникас В. И., в кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969, с. 73—125.

Л. Е. Евтушик.

КАВАЛЬЕРИ ПРИНЦИП: объемы (или площади) двух тел (фигур) равны, если равны между собой площади (длины) соответствующих сечений, проведенных параллельно нек-рой данной плоскости (прямой). Это положение, известное еще древнегреческим математикам, наз. обычно К. п., хотя Б. Кавальери (B. Cavalieri, 1635) не принимал его за принцип, а доказывал.

КАЗИМИРА ЭЛЕМЕНТ, оператор Казимира,— центральный элемент специального вида в универсальной обертывающей алгебре полупростой алгебры Ли. Такие операторы в одном частном случае были впервые введены Х. Казимиром [1].

Пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая конечномерная алгебра Ли над полем характеристики 0, B — билинейная симметричная инвариантная (т. е. $B([x, y], z) = B(x, [y, z])$ для всех $x, y, z \in \mathfrak{G}$) форма на $\mathfrak{G}$, невырожденная на идеале $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}$. К. э. алгебры $\mathfrak{G}$ (относительно формы B) наз. элемент универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{G})$, представимый в виде

$$b = \sum_{i=1}^{k} e_i f_i,$$

где $\{e_i\}$, $\{f_i\}$ — дуальные базисы $\mathfrak{G}_0$ относительно формы B, т. е. $B(e_i, f_i) = \delta_{ij}$, $i = 1, \ldots, l$, δ_{ij} — символ Кронекера, $k = \dim \mathfrak{G}_0$. Элемент b не зависит от выбора дуальных базисов в $\mathfrak{G}_0$ и содержится в центре $U(\mathfrak{G})$. Если алгебра $\mathfrak{G}$ проста, то К. э. алгебры $\mathfrak{G}$, определяемый *Киллинга формой* в B, является единственным, с точностью до числового множителя, центральным эле-

ментом в $U(\mathfrak{G})$, представимым в виде однородного квадратичного полинома от элементов алгебры $\mathfrak{G}$.

Каждое линейное представление φ полупростой алгебры $\mathfrak{G}$ в конечномерном пространстве V определяет билинейную симметрическую инвариантную форму

$$B_\varphi(x, y) = \mathrm{Tr}(\varphi(x)\varphi(y))$$

на $\mathfrak{G}$, невырожденную на идеале $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}$, дополнительном к $\ker\varphi$, и тем самым нек-рый К. э. $b_\varphi \in U(\mathfrak{G})$. Если φ неприводимо, то продолжение представления φ на $U(\mathfrak{G})$ переводит b_φ в $\frac{k}{\dim V}E$.

Лит.: [1] Casimir H., van der Waerden B. L., «Math. Ann.», 1935, Bd 111, S. 1—12; [2] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., М., 1976; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [5] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [6] Dixmier J., Algèbres enveloppantes, P., 1974.

Д. П. Желобенко.

КАКТОИД — локально связный континуум C, к-рый является замыканием суммы не более чем счетного числа сфер S_i и простых дуг D_i, расположенных в евклидовом пространстве E^3, причем для каждого простого замкнутого контура $L \subset C$ существует одна и только одна сфера S_i, его содержащая. К. и только они являются монотонными образами двумерной сферы S^2; более того, всякий К.— монотонно открытый образ S^2. *Б. А. Ефимов.*

КАКУТАНИ ТЕОРЕМА: пусть X — непустое выпуклое компактное множество в $\mathbb{R}^n$, X^*— множество его подмножеств и $f: X \to X^*$ — такое полунепрерывное сверху отображение, что для каждой точки $x \in X$ множество $f(x)$ непусто, замкнуто и выпукло; тогда отображение f имеет неподвижную точку. С. Какутани [1] показал, что из этой теоремы вытекает *минимакса принцип* для конечных игр.

Лит.: [1] Kakutani S., «Duke Math. J.», 1941, v. 8, № 3, p. 457—59; [2] Ky Fan, «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1952, v. 38, p. 121—26; [3] Никайдо Х., Выпуклые структуры и математическая экономика, пер. с англ., М., 1972.

А. Я. Кирута.

КАЛИБР топологического пространства X — *кардинальное число* τ такое, что всякое семейство $\mathfrak{B}$ мощности τ, состоящее из непустых открытых подмножеств топологич. пространства X, содержит подсемейство $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ также мощности τ с непустым пересечением, т. е. $\bigcap \{U : U \in \mathfrak{B}'\} \neq \varnothing$. Регулярное несчетное кардинальное число τ является К. топологического произведения $\prod X_\alpha$, $\alpha \in A$, тогда и только тогда, когда τ — К. каждого сомножителя X_α. Свойство быть К. сохраняется при непрерывных отображениях; всякое несчетное регулярное кардинальное число является К. любого диадического бикомпакта. Если первое несчетное кардинальное число — К. пространства X, то X удовлетворяет *Суслина условию*. В некоторых моделях аксиоматич. теории множеств верно почти обратное утверждение, а именно, аксиома Мартина и условие $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ влекут следующее: если пространство X удовлетворяет условию Суслина, то всякое несчетное семейство непустых открытых в X множеств содержит несчетное центрированное подсемейство. В частности, в этой модели кардинальное число $\aleph_1$ является К. для всякого бикомпакта с условием Суслина. В некоторых иных моделях теории множеств существует бикомпакт с условием Суслина, для к-рого $\aleph_1$ не является К.

Лит.: [1] Шанин Н. А., О произведении топологических пространств, М.— Л., 1948 (Тр. матем. ин-та АН СССР, т. 24).

Б. А. Ефимов.

КАЛЬДЕРОНА — ЗИГМУНДА ОПЕРАТОР — оператор K, определяемый на достаточно гладких финитных функциях $\varphi(x)$, заданных в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, формулой

$$K\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y)\varphi(y)\,dy,$$

где ядро $k(x)$ — однородная функция степени n с нулевым средним значением по единичной сфере $S=\{x;\ x\in\mathbb{R}^n,\ |x|=1\}$. Ядро $k(x)$ имеет вид

$$k(x)=\Omega(x)/|x|^n,$$

где функция $\Omega(x)$ — характеристика $k(x)$ — удовлетворяет условиям

$$\Omega(tx)=\Omega(x)\ \text{при}\ t>0,\ \Omega(x)\in L_1(S),$$

$$\int_S \Omega(x)\,dS=0. \qquad (*)$$

Преобразование К.— З. о. записывают часто в виде

$$K\varphi(x)=\text{v.p.}\int_{R^n}\varphi(y)\,\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}\,dy;$$

при этом интеграл понимается в смысле главного значения. В одномерном случае К.— З. о. превращается в оператор Гильберта H:

$$H\varphi(x)=\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{x-t}\,dt.$$

К.— З. о. по непрерывности расширяется на пространство $L_p(\mathbb{R}^n)$ функций $f(x)$, суммируемых в степени p, $1<p<\infty$, по $\mathbb{R}^n$ и непрерывно отображает это пространство в себя. Если функция $\Omega(x)$ удовлетворяет условиям (*) и, кроме того, условию Дини:

$$\int_0^1\frac{\omega(t)\,dt}{t}<\infty,\quad \omega(t)=\sup_{\substack{|x-x'|\leqslant t,\\ |x|=|x'|=1}}|\Omega(x)-\Omega(x')|;$$

$$K_\varepsilon f(x)=\int_{|y|>\varepsilon}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}f(x-y)\,dy$$

для $1<p<\infty$ и $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$, то:

а) существует постоянная A_p (не зависящая от f и ε) такая, что

$$\|K_\varepsilon f\|_{L_p}\leqslant A_p\|f\|_{L_p};$$

б) предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}K_\varepsilon f=Kf$ существует в смысле сходимости в L_p и

$$\|Kf\|_{L_p}\leqslant A_p\|f\|_{L_p}.$$

К.— З. о. рассмотрен А. Кальдероном и А. Зигмундом [1].

Лит.: [1] Calderon A. P., Zygmund A., «Acta Math.», 1952, v. 88, № 1—2, p. 85—139; [2] Михлин С. Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962; [3] Стейн И., Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, пер. с англ., М., 1973.

Н. И. Лизоркин.

КАМЕРА в конечномерном действительном аффинном пространстве E относительно локально конечного множества $\mathfrak{H}$ гиперплоскостей в E — связная компонента множества $E\setminus\bigcup_{H\in\mathfrak{H}}H$. К. является открытым выпуклым множеством в E.

Пусть $\mathfrak{H}$ — такое множество гиперплоскостей в E, что группа W движений пространства E, порожденная ортогональными отражениями относительно гиперплоскостей из $\mathfrak{H}$, есть *дискретная группа* преобразований пространства E, причем система $\mathfrak{H}$ инвариантна относительно W. В этом случае говорят о К. относительно W. Группа W действует на множестве всех К. просто транзитивно и порождена множеством S ортогональных отражений относительно гиперплоскостей системы $\mathfrak{H}$, содержащих (dim E—1)-мерные грани, любой фиксированной К. C, причем пара (W, S) является системой Кокстера, а замыкание К. C — фундаментальной областью группы W. Строение C (описание двугранных углов между стенками) полностью определяет структуру группы W как абстрактной группы. Изучение этого строения является важным моментом в получении

полной классификации дискретных групп, порожденных отражениями в E (см. *Кокстера группа*). Вместе с этой классификацией получается и полное описание строения К. для таких групп W.

В том случае, когда W является группой Вейля системы корней полупростой алгебры Ли, К. относительно W наз. камерой Вейля группы W.

Понятие К. может быть введено и для гиперплоскостей и дискретных групп, порожденных отражениями в пространстве Лобачевского или на сфере [2].

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., М., 1972, гл. 4; [2] Винберг Э. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 5, с. 1072—112. *В. Л. Попов.*

КАНАЛ БЕЗ ПАМЯТИ — *канал связи*, для к-рого статистич. свойства сигнала на выходе в момент времени t определяются только сигналом на входе, переданном в этот момент времени t (и, следовательно, не зависят от сигналов, переданных до и после этого момента времени t). Точнее, канал связи с дискретным временем, сигналами на входе и выходе к-рого служат случайные последовательности $\eta=(\eta_1, \eta_2, \ldots)$ и $\tilde{\eta}=(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \ldots)$ с пространствами значений (Y, S_Y) и $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ соответственно, наз. К. б. п., если для любого натурального n и любых множеств $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n, \tilde{A}_k \in S_{\tilde{Y}}$, $k=1, \ldots, n$, справедливо равенство

$$\mathsf{P}\{\tilde{\eta}_1 \in \tilde{A}_1, \ \ldots, \ \tilde{\eta}_n \in \tilde{A}_n \mid \eta^n\} = \mathsf{P}\{\tilde{\eta}_1 \in \tilde{A}_1 \mid \eta_1\} \ldots \mathsf{P}\{\tilde{\eta}_n \in \tilde{A}_n \mid \eta_n\},$$

где $\eta^n=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Если к тому же условные вероятности $\mathsf{P}\{\tilde{\eta}_k \in \tilde{A}_k \mid \eta_k\}$ не зависят от k, то К. б. п. наз. однородным.

Если обозначить через C_n *канала пропускную способность* отрезка длины n однородного К. б. п., то $C_n = nC_1$. В случае, когда Y и $\tilde{Y}$ — конечные (или счетные) множества, однородный К. б. п. полностью задается матрицей переходных вероятностей $\{q(y, \tilde{y}), \ y \in Y, \ \tilde{y} \in \tilde{Y}\}$, где

$$q(y, \tilde{y}) = \mathsf{P}\{\tilde{\eta}_k = \tilde{y} \mid \eta_k = y\}, \quad k=1, 2, \ldots$$

Лит. см. [1], [3], [4], [5] при ст. *Канал связи*.
Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛ ГАУССОВСКИЙ — *канал связи*, переходная функция к-рого задает условное гауссовское распределение. Точнее, канал связи (Q, V) наз. К. г. на конечном отрезке $[0, T]$, если выполнены условия: 1) пространствами значений сигналов на входе и выходе $(\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}})$ и $(\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}})$ являются пространства функций $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$, $t \in [0, T]$, с действительными значениями и обычным образом вводимой σ-алгеброй измеримых множеств (т. е. сигналами на входе и выходе К. г. служат случайные процессы $\eta=\{\eta(t), \in [0, T]\}$ и $\tilde{\eta}=\{\tilde{\eta}(t), \ t \in [0, T]\}$ соответственно), 2) переходная функция $Q(y, \cdot)$ канала задает при любом фиксированном $y \in Y$ условное гауссовское распределение (говорят, что нек-рая совокупность случайных величин имеет условное гауссовское распределение, если любая конечная подсовокупность имеет условное конечномерное *нормальное распределение* со вторыми моментами, не зависящими от этого условия) и 3) ограничение V наложено лишь на вторые моменты случайной величины η.

Примером К. г., определенного на интервале $(-\infty, \infty)$, является канал, сигналом на входе к-рого служит стационарная случайная последовательность $\eta=(\ldots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots)$, а сигналом на выходе — стационарная случайная последовательность $\tilde{\eta}=(\ldots, \tilde{\eta}_{-1}, \tilde{\eta}_0, \tilde{\eta}_1, \ldots)$, получаемая по формулам

$$\tilde{\eta}_i = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \eta_{i-k} + \zeta_i, \quad i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $\zeta=(\ldots, \zeta_{-1}, \zeta_0, \zeta_1, \ldots)$ — не зависящая от η стационарная гауссовская случайная последовательность с $\mathsf{E}\zeta_i=0$, $i=0, \pm1, \pm2, \ldots$, и спектральной плотностью $f_\zeta(\lambda)$, $-1/2 \leqslant \lambda \leqslant 1/2$. Ограничение на входной сигнал имеет вид

$$\int_{-1/2}^{1/2} |\Phi(\lambda)|^2 f_\eta(\lambda) d\lambda \leqslant S,$$

где $f_\eta(\lambda)$ — спектральная плотность η, $\Phi(\lambda)$ — некоторая функция и S — константа. Пропускная способность такого канала задается формулой

$$C=\frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \log \max\left[\left|\frac{a(\lambda)}{\Phi(\lambda)}\right|^2 \cdot \frac{\mu}{f_\zeta(\lambda)}, 1\right] d\lambda,$$

где $a(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-2\pi i k\lambda}$, а μ определяется из уравнения

$$\int_{-1/2}^{1/2} \max\left[\mu - \left|\frac{\Phi(\lambda)}{a(\lambda)}\right|^2 f_\zeta(\lambda), 0\right] d\lambda = S.$$

Лит.: [1] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969.

См. также [1], [4], [6] при ст. *Канал связи*.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛ МНОГОСТОРОННИЙ — *канал связи*, для к-рого возможна передача информации одновременно в нескольких направлениях. Ниже описан К. м. без памяти с дискретным временем и конечными алфавитами на входах и выходах. Пусть заданы s конечных множеств $Y_1, \ldots, Y_s$, где (алфавит) Y_i — совокупность возможных сигналов, передаваемых i-м передатчиком, r конечных множеств $\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_r$, где (алфавит) $\tilde{Y}_j$ — совокупность возможных сигналов, принимаемых j-м приемником, и стохастическая матрица

$$q(y_1, \ldots, y_s; \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_r),$$
$$y_i \in Y_i, \quad \tilde{y}_j \in \tilde{Y}_j, \quad i=1, \ldots, s; \quad j=1, \ldots, r.$$

Говорят, что два набора случайных векторов $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ и $(\tilde{\eta}^{(1)}, \ldots, \tilde{\eta}^{(n)})$, где $\eta^{(k)}=(\eta_1^{(k)}, \ldots, \eta_s^{(k)})$, $\tilde{\eta}^{(k)}=(\eta_1^{(k)}, \ldots, \eta_r^{(k)})$, определенных на нек-ром *вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, связаны отрезком длины n однородного К. м. с s входами и r выходами, если $\eta_i^{(k)}$ и $\eta_j^{(k)}$, $i=1, \ldots, s$; $j=1, \ldots, r$; $k=1, \ldots, n$, принимают значения в множествах Y_i и $\tilde{Y}_j$, соответственно, и справедлива формула

$$\mathsf{P}\{(\tilde{\eta}^{(1)}, \ldots, \tilde{\eta}^{(n)})=(\tilde{y}^{(1)}, \ldots, \tilde{y}^{(n)}) \mid (\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})=(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})\} =$$
$$=\prod_{k=1}^{n} q(y_1^{(k)}, \ldots, y_s^{(k)}; \tilde{y}_1^{(k)}, \ldots, \tilde{y}_r^{(k)})$$

при любых $y^{(k)}=(y_1^{(k)}, \ldots, y_s^{(k)})$ и $\tilde{y}^{(k)}=(\tilde{y}_1^{(k)}, \ldots, \tilde{y}_r^{(k)})$, $k=1, \ldots, n$, $y_i^{(k)} \in Y_i$, $\tilde{y}_j^{(k)} \in \tilde{Y}_j$, $i=1, \ldots, s$; $j=1, \ldots, r$.

Наглядно можно представить, что каждый вход и каждый выход К. м. расположены в разных терминалах (концах) К. м. (т. е. всего имеется $s+r$ терминалов). Это означает, что передатчик или приемник, расположенный в нек-ром терминале, не может использовать информацию, известную передатчикам или приемникам других терминалов. К. м., обладающие указанным свойством, часто наз. чистыми в отличие от смешанных К. м., для к-рых существуют терминалы, содержащие одновременно нек-рые входы и выходы канала. Сложность исследования смешанных К. м. связана с тем обстоятельством, что передатчики нек-рого терминала при выборе очередного сигнала для передачи могут использовать информацию, полученную к данному моменту времени всеми приемниками данного терминала; в свою очередь и приемники этого терминала могут использовать всю информацию, имеющуюся на данный момент в терминале.

Наиболее общая задача передачи информации по наглядно описанному выше чистому К. м. без памяти состоит в следующем. Пусть имеется $s(2^r-1)$ дискретных стационарных *источников сообщений* $U(i,\ \Delta)$, $i=1,\ \ldots,\ s$; $\Delta\in D$, где D — множество всех непустых подмножеств совокупности индексов $\{1,\ \ldots,\ r\}$, вырабатывающих сообщения $\xi(i,\ \Delta)=\{\xi_k(i,\ \Delta),\ k=\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots\}$, причем отдельные компоненты сообщения $\xi_k(i,\ \Delta)$ принимают значения из нек-рого множества $X(i,\ \Delta)$ объема $M(i,\ \Delta)$; $\xi(i,\ \Delta)$ можно трактовать как сообщение, предназначенное для передачи с i-го входа К. м. во все выходы с номерами $j\in\Delta$. Сообщением на j-м, $j=1,\ \ldots,\ r$, выходе служит набор случайных процессов $\{\tilde{\xi}(i,\ \Delta;\ j),\ i=1,\ \ldots,\ s$, и Δ таковы, что $j\in\Delta\}$, где

$$\tilde{\xi}(i,\Delta;\ j)=\{\tilde{\xi}_k(i,\ \Delta;\ j),\ k=\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots\}$$

и компоненты $\tilde{\xi}_k(i,\ \Delta;\ j)$ принимают значения в множестве $X(i,\ \Delta)$. Пусть отрезки сообщений

$$\{\xi^L(i,\ \Delta)=(\xi_1(i,\ \Delta),\ \ldots,\ \xi_L(i,\ \Delta)),\ i=1,\ \ldots,\ s;\ \Delta\in D\}$$

длины L передаются по отрезку К. м. без памяти длины N с использованием следующих блочных методов кодирования и декодирования. Кодирование задается набором из s кодирующих отображений f_i таких, что

$$f_i:\prod\nolimits_{\Delta\in D}X(i,\ \Delta)\longrightarrow Y_i^N,\quad i=1,\ \ldots,\ s,$$

(Y_i^N — прямое произведение N экземпляров множеств Y_i), а декодирование — набором декодирующих отображений

$$g_{j;\,i,\,\Delta}:\tilde{Y}_j^N\longrightarrow X(i,\ \Delta),\ j=1,\ \ldots,\ r;\ i=1,\ \ldots,\ s,$$

и Δ таковы, что $j\in\Delta$.

Набор кодирующих функций $\{f_i\}$ устанавливает функциональную зависимость между отрезками сообщений длины L всевозможных источников и отрезками длины N сигналов на входах К. м. Набор декодирующих функций $\{g_{j;\,i,\,\Delta}\}$ устанавливает функциональную зависимость между отрезками длины N сигналов на выходах канала и отрезками длины L сообщений, воспроизводимых на каждом выходе. Если известно совместное распределение отрезков сообщений $\xi^L(i,\ \Delta)$ длины L, кодирующие и декодирующие функции $\{f_i\}$ и $\{g_{j;\,i,\,\Delta}\}$ и переходные вероятности К. м. без памяти, то может быть вычислена вероятность ошибки p_e, определяемая формулой $p_e=\mathsf{P}\{\tilde{\xi}^L(i,\ \Delta)\neq\xi^L(i,\ \Delta;\ j)$ хотя бы при одном $i=1,\ \ldots,\ s$; $j=1,\ \ldots,\ r$ и Δ таком, что $j\in\Delta\}$.

Множество $\mathfrak{R}$ наборов (векторов) скоростей $R=\{R(i,\ \Delta),\ i=1,\ \ldots,\ s;\ \Delta\in D\}$ в $s(2^r-1)$-мерном евклидовом пространстве наз. областью пропускной способности рассматриваемого К. м., если для любого $\varepsilon>0$ существуют N, кодирование $\{f_i\}$ и декодирование $\{g_{j;\,i,\,\Delta}\}$ такие, что

$$\frac{L\log M(i,\ \Delta)}{N}\geqslant R(i,\ \Delta)-\varepsilon,\quad p_e\leqslant\varepsilon.$$

Задача об описании области $\mathfrak{R}$ является одной из основных задач теории К. м. В общем случае эта задача не решена. Ее окончательное решение получено лишь в нек-рых частных случаях, напр. для каналов с многократным доступом (то есть К. м. с $r=1$) и для некоторого класса широковещательных каналов (то есть К. м. с $s=1$).

Лит.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 622—63; [2] Van der Meulen E. C., в кн.: Proceedings of the 1975 IEEE—USSR Joint Workshop on Information Theory. Moscow. December 1975, N.Y., 1976, p. 227—47; [3] Cover T. M., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1972, v. 18, № 1, p. 2—14; [4] Slepian D., Wolf J. K., «Bell System Techn. J.», 1973, v. 52, № 7, p. 1037—76.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛ С КОНЕЧНОЙ ПАМЯТЬЮ — *канал связи*, для к-рого статистические свойства сигнала на выходе в момент времени t определяются сигналами на входе, переданными в момент времени t', $t-m \leqslant t' \leqslant t$ (и, следовательно, не зависят от сигналов, переданных до момента времени $t-m$); число m наз. величиной (длиной) памяти К. с к. п.

Точнее, канал связи с дискретным временем, сигналами на входе и выходе к-рого служат случайные последовательности $\eta=(\ldots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots)$ и $\tilde{\eta}=(\tilde{\eta}_{-1}, \tilde{\eta}_0, \tilde{\eta}, \ldots)$ с пространствами значений (Y, S_Y) и $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ соответственно, наз. К. с к. п., если согласованный набор условных распределений

$$\mathsf{P}\left\{\tilde{\eta}_k^n \in \tilde{A} \mid \eta_{-\infty}^n\right\},$$

с помощью к-рого может быть определен такой канал, при любых k, n и $\tilde{A}$ удовлетворяет условию

$$\mathsf{P}\left\{\tilde{\eta}_k^n \in \tilde{A} \mid \eta_{-\infty}^n\right\} = \mathsf{P}\left\{\tilde{\eta}_k^n \in \tilde{A} \mid \eta_{k-m}^n\right\}.$$

Здесь $\tilde{\eta}_k^n=(\tilde{\eta}_k, \tilde{\eta}_{k+1}, \ldots, \tilde{\eta}_n)$, $\eta_{-\infty}^n=(\ldots, \eta_{n-1}, \eta_n)$, $\tilde{A}$ — некоторое множество из прямого произведения $n-k+1$ экземпляров пространств $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$. Аналогично определяется К. с к. п. с непрерывным временем.

Лит.: [1] Хинчин А. Я., «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, в. 1, с. 17—75; [2] Файнстейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ — *канал связи*, для к-рого статистич. свойства сигнала на выходе в момент времени t определяются сигналом на входе в этот момент времени и состоянием канала в предыдущий момент времени, причем множество возможных состояний канала конечно. Можно также определить К. с к. ч. с. как канал, заданный конечным *автоматом вероятностным*. Ниже приведено строгое определение о д н о р о д н о г о К. с к. ч. с. с дискретным временем и конечными пространствами Y и $\tilde{Y}$ значений компонент сигналов на входе и выходе. Пусть заданы функция $q(y, s'; \tilde{y}, s'')$, $y \in Y$, $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, $s', s'' \in S$, где S — конечное множество, называемое м н о ж е с т в о м с о с т о я н и й к а н а л а, и распределение вероятностей $\{p_{s_0}, s_0 \in S\}$. Наглядно функция $q(y, s'; \tilde{y}, s'')$ определяет условную вероятность того, что в момент времени $k\tau$ на выходе К. с к. ч. с. появится сигнал $\tilde{y}$ и канал перейдет в состояние s'' при условии, что передавался сигнал y и в предыдущий момент времени $(k-1)\tau$ канал находился в состоянии s'. Распределение $\{p_{s_0}, s_0 \in S\}$ трактуют как распределение вероятностей начального состояния канала (т. е. состояние канала в начальный момент времени). Рекуррентным образом с помощью равенств определяют функцию

$$Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n, s_n) =$$

$$= \sum\nolimits_{s_{n-1} \in S} q(y_n, s_{n-1}; \tilde{y}_n, s_n) Q_{n-1}(y^{n-1}, s_0; \tilde{y}^{n-1}, s_{n-1}),$$

$$Q_1(y, s_0; \tilde{y}, s_1) = q(y, s_0; \tilde{y}, s_1),$$

где $y^n=(y_1, \ldots, y_n)$, $y_i \in Y$, $\tilde{y}_i \in \tilde{Y}$, $i=1, \ldots, n$, $s_k \in S$, $k=0, 1, \ldots, n$.

Пусть

$$Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n) = \sum\nolimits_{s_n \in S} Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n, s_n).$$

Тогда переходная функция

$$Q_n(y^n, \tilde{y}^n) = \mathsf{P}\{\tilde{\eta}^n = \tilde{y}^n \mid \eta^n = y^n\}$$

отрезка длины n К. с к. ч. с. при любом n, по определению, равна

$$Q_n(y^n, \tilde{y}^n) = \sum\nolimits_{s_0 \in S} p_{s_0} Q_n(y^n, s_0; \tilde{y}^n),$$

здесь $\eta^n=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ и $\tilde{\eta}^n=(\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_n)$ — отрезки длины n сигналов на входе и выходе канала.

Лит. см. [3], [4] при ст. *Канал связи.*

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ — *канал связи*, используемый для передачи сообщений от *источника сообщений* к получателю, на входе к-рого в любой момент времени известна нек-рая информация о сигналах, полученных на его выходе до этого момента времени; эта информация может быть использована для выбора очередного сигнала, подлежащего передаче по каналу. Ниже приведено описание одной из возможных схем передачи информации по каналу с дискретным временем при наличии полной обратной связи. Пусть сообщением на входе канала служит случайная величина ξ, принимающая значения в нек-ром измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$. Сообщение, доставляемое адресату (получателю),— случайная величина $\tilde{\xi}$, принимающая значения в измеримом пространстве $(\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$. Пусть для передачи сообщения ξ используется отрезок длины n нек-рого канала с дискретным временем. Сигналами на входе $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ и выходе $(\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_n)$ этого отрезка канала служат случайные векторы, компоненты к-рых принимают значения в измеримых пространствах (Y, S_Y) и $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ соответственно. Метод передачи по такому каналу с использованием полной обратной связи задается набором из n кодирующих функций

$$f_1(x),\ f_2(x, \tilde{y}_1),\ f_3(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2),\ \ldots,\ f_n(x, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{n-1}),$$

$$x\in\mathfrak{X},\ \tilde{y}_i\in\tilde{Y},\ i=1, \ldots, n-1,$$

со значениями в множестве Y и декодирующей функцией $g(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$, $\tilde{y}_i\in\tilde{Y}$, $i=1, \ldots, n$, со значениями в множестве $\tilde{\mathfrak{X}}$, с помощью соотношений

$$\eta_k=f_k(\xi, \tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_{k-1}),\ k=1, \ldots, n,$$

$$\tilde{\xi}=g(\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_n).$$

Эти соотношения показывают, что выбор очередного сигнала η_k для передачи по К. с о. с. зависит как от передаваемого сообщения ξ, так и от сигналов $\tilde{\eta}_1, \ldots, \tilde{\eta}_{k-1}$, полученных на выходе канала до этого момента времени. Реально это означает, что имеется возможность мгновенно и без помех доставлять на вход канала сведения о полученном сигнале на его выходе. В этом случае часто говорят, что наряду с каналом, осуществляющим передачу в прямом направлении (т. е. от источника сообщений адресату), имеется к а н а л о б р а т н о й с в я з и (т. е. канал, осуществляющий передачу в обратном направлении) с бесконечной пропускной способностью (см. *Канала пропускная способность*). Более реальным является предположение о том, что канал обратной связи не является бесшумным, т. е. сведения о сигналах на выходе канала, поступающие на его вход, могут содержать случайные ошибки. В этом случае говорят о к а н а л е с н е п о л н о й о б р а т н о й с в я з ь ю.

Так же, как и в обычном случае, вводится понятие пропускной способности канала с обратной связью как верхней грани скоростей передачи, при к-рых можно вести передачу, используя описанные выше методы кодирования и декодирования при сколь угодно малой вероятности ошибки. В общем случае пропускная способность К. с о. с. больше обычной пропускной способности канала. Установлено, однако, что для каналов без памяти эти пропускные способности совпадают. Для каналов с полной обратной связью предложены просто описываемые и высоко эффективные алгоритмы кодирования и декодирования.

Лит.: [1] Добрушин Р. Л., «Теория вероятн. и ее применен.», 1958, т. 3, № 4, с. 395—412; [2] Feedback communication systems, N.Y., 1961; [3] Зигангиров К. Ш., «Пробл. передачи информ.», 1970, т. 6, № 2, с. 87—92.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛ СВЯЗИ — одна из основных составных частей систем передачи информации, рассматриваемых в теории передачи информации. Используется при математич. описании реального канала связи, т. е. совокупности технических устройств, обеспечивающих передачу сообщений от передатчика к приемнику по физической линии связи, и среды, в к-рой распространяются сигналы от передатчика к приемнику.

К. с. с одним передатчиком и одним приемником, используемый для передачи информации в одном направлении (от передатчика к приемнику), задается совокупностью двух измеримых пространств $(\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}})$, $(\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}})$ (пространств сигналов, передаваемых передатчиком и принимаемых приемником соответственно), переходной функцией $Q(y, A)$, $y \in \mathcal{Y}$, $A \in S_{\tilde{\mathcal{Y}}}$, измеримой относительно σ-алгебры $S_{\mathcal{Y}}$ при фиксированном A и являющейся *вероятностной мерой* на $(\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}})$ при фиксированном y (функция $Q(y, A)$ задает условное распределение сигнала, получаемого приемником, при условии, что передатчик передал сигнал y), и подмножеством V в пространстве всех вероятностных мер в пространстве $(\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}})$ (V задает ограничение на распределении сигнала, передаваемого передатчиком). Говорят, что две случайные величины η и $\tilde{\eta}$, определенные на нек-ром вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, связаны каналом (Q, V), если они принимают значения в пространствах $(\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}})$ и $(\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}})$ соответственно, для любого $A \in S_{\tilde{\mathcal{Y}}}$ с вероятностью 1 условная вероятность $\mathsf{P}\{\tilde{\eta} \in A \mid \eta\} = Q(\eta, A)$, и распределение η принадлежит V.

В приложениях часто рассматривают К. с., для к-рых $(\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}})$ и $(\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}})$ являются пространствами измеримых функций, определенных на отрезке $[a, b]$ и принимающих значения в нек-рых измеримых пространствах (Y, S_Y) и $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ соответственно с σ-алгеброй, порожденной измеримыми цилиндрическими множествами. В этом случае пишут $(\mathcal{Y}, S_{\mathcal{Y}}) = (Y_a^b, S_{Y_a^b})$, $(\tilde{\mathcal{Y}}, S_{\tilde{\mathcal{Y}}}) = (\tilde{Y}_a^b, S_{\tilde{Y}_a^b})$ и говорят о К. с. с непрерывным временем на отрезке $[a, b]$, для к-рого $\eta = \{\eta(t),\ t \in [a, b]\}$ и $\tilde{\eta} = \{\tilde{\eta}(t),\ t \in [a, b]\}$ — случайные процессы со значениями в пространствах (Y, S_Y) и $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ соответственно; значения $\eta(t)$ и $\tilde{\eta}(t)$ трактуются тогда как переданный и получаемый сигнал в момент времени t. Аналогично, в случае дискретного времени сигналами на входе и выходе К. с. служат случайные векторы $\eta_k^n = (\eta_k, \eta_{k+1}, \ldots, \eta_n)$ и $\tilde{\eta}_k^n = (\tilde{\eta}_k, \tilde{\eta}_{k+1}, \ldots, \tilde{\eta}_n)$, компоненты к-рых принимают значения в измеримых пространствах (Y, S_Y) и $(\tilde{Y}, S_{\tilde{Y}})$ соответственно; при этом η_j и $\tilde{\eta}_j$ трактуются как переданный и полученный сигналы в момент времени $j\tau$, где $\tau = \text{const}$ — промежуток времени между двумя последовательными передачами сигналов по К. с.

Часто рассматривают также К. с. с непрерывным или дискретным временем t на полубесконечном или бесконечном в обе стороны интервале. Напр., под К. с. (Q, V) с непрерывным временем на полубесконечном интервале $[0, \infty)$ подразумевают обычно совокупность описанных выше К. с. (Q_0^T, V_0^T), заданных на всех конечных отрезках $[0, T]$ и удовлетворяющих нек-рым условиям согласованности. Каждый К. с. $(Q_0^T, V_0^T$

наз. в этом случае о т р е з к о м $[0, T]$ К. с. (Q, V). Один из возможных вариантов условий согласованности может быть сформулирован следующим образом. Пусть A_0^T — произвольное множество из $S_{\tilde{Y}_0^T}$; y_0^T — произвольная функция из Y_0^T и $y_0^T = (y_0^s, y_s^T)$ для нек-рого s, $0 < s < T$, где $y_0^s \in Y_0^s$, $y_s^T \in Y_s^T$. Условия согласованности, наложенные на переходные функции $Q_0^T(\cdot, \cdot)$, состоят тогда в требовании, чтобы для любого конечного отрезка $[0, T]$, любых s, $0 < s < T$, множества $A_0^s \in S_{\tilde{Y}_0^s}$ и функции $y_0^T = (y_0^s, y_s^T) \in Y_0^T$, $y_0^s \in Y_0^s$, $y_s^T \in Y_s^T$, выполнялось равенство

$$Q_0^T((y_0^s, y_s^T), A_0^s \times \tilde{Y}_s^T) = Q_0^s(y_0^s, A_0^s),$$

где $A_0^s \times \tilde{Y}_s^T$ — цилиндрическое множество в пространстве $\tilde{Y}_0^T$, порожденное множеством A_0^s из пространства $\tilde{Y}_0^s$. Ограничения V_0^T, $0 < T < \infty$, накладываемые на вероятностные меры в пространствах (Y_0^T, S_0^T), также должны удовлетворять нек-рым условиям согласованности.

Аналогично вводят понятие К. с. (Q, V) с непрерывным временем на бесконечном в обе стороны интервале $(-\infty, \infty)$. Условия согласованности, необходимые при задании такого К. с., формулируются обычно специфически для каждого типа этого канала. Иногда в конкретных ситуациях понятие К. с. на бесконечных интервалах $[0, \infty)$ и $(-\infty, \infty)$ вводится и непосредственно (без рассмотрения конечных отрезков этих каналов) с помощью явного описания преобразования, совершаемого над входным сигналом К. с. при получении сигнала на выходе К. с. (см., напр., *Канал гауссовский*, *Шум аддитивный*). Все сказанное о К. с. (Q, V) с непрерывным временем на интервалах $[0, \infty)$ или $(-\infty, \infty)$ сохраняет силу и для аналогичных К. с. с дискретным временем.

К. с. делятся на различные классы в зависимости от типов условных распределений Q и ограничений V (см., напр., *Канал без памяти*, *Канал с конечной памятью*, *Канал с конечным числом состояний*, *Канал гауссовский*, *Канал симметричный*). Основной характеристикой К. с. является *канала пропускная способность*, к-рая характеризует максимально возможную *информации скорость передачи* по этому К. с.

Возможны различные обобщения приведенного определения К. с., соответствующие более общим и сложным системам передачи информации (см., напр., *Канал с обратной связью*, *Канал многосторонний*).

Лит.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243—332; [2] Добрушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3—104; [3] Вольфовиц Дж., Теоремы кодирования теории информации, пер. с англ., М., 1967; [4] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [5] Файнстейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960; [6] Фано Р., Передача информации. Статистическая теория связи, пер. с англ., М., 1965.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛ СВЯЗИ КВАНТОВЫЙ — система передачи (преобразования) информации, использующая в качестве носителя сообщений квантово-механич. объект.

В отличие от классического сообщения, описываемого распределением вероятностей на пространстве сигналов X, квантовое сообщение представляется оператором плотности (состоянием) в гильбертовом пространстве H, соответствующем данному квантово-механич. объекту. Всякий канал связи можно рассматривать как аффинное (сохраняющее выпуклые комбинации) отображение (выпуклого) множества сообщений на входе в множество сообщений на выходе. В частности, к в а н т о в о е к о д и р о в а н и е есть аффинное отображение C множества $S(X)$ распределений вероятностей на про-

странстве входных сигналов X в $\Sigma(H)$, множество всех операторов плотности в H. Собственно К. с. к. есть аффинное отображение L из $\Sigma(H)$ в $\Sigma(H')$, где H, H' — гильбертовы пространства, описывающие соответственно вход и выход канала. Квантовое декодирование есть аффинное отображение D из $\Sigma(H')$ в $S(Y)$, где Y — пространство сигналов на выходе. Передача сообщений, как и в классической теории информации, описывается схемой

$$S(X) \xrightarrow{C} \Sigma(H) \xrightarrow{L} \Sigma(H') \xrightarrow{D} S(Y). \qquad (1)$$

Важной задачей является нахождение оптимального способа передачи сообщения по заданному квантовому каналу L. При фиксированном L условное распределение сигнала на выходе относительно сигнала на входе является функцией $P_{C,D}(dy|x)$ кодирования C и декодирования D. Задается некоторый функционал $Q\{P_{C,D}(dy|x)\}$ и требуется найти экстремум этого функционала по C и D. Наиболее изучен случай, когда C также фиксированно и нужно найти оптимальное D. Тогда схема (1) сводится к более простой:

$$S(X) \xrightarrow{C} \Sigma(H) \xrightarrow{D} S(Y). \qquad (2)$$

Чтобы задать кодирование, достаточно указать образы ρ_x распределений, сосредоточенных в точках $x \in X$. Декодирование удобно описывать Y-измерением, к-рое определяется как мера $M(dy)$ на Y со значениями в множестве неотрицательных эрмитовых операторов в H, причем $M(Y)$ равно единичному оператору. Взаимно однозначное соответствие между декодированием и измерениями задается формулой

$$D\rho(dy) = \operatorname{Tr} \rho M(dy),$$

так что условное распределение сигнала на выходе схемы (2) относительно сигнала на входе есть

$$P(dy|x) = \operatorname{Tr} \rho_x M(dy).$$

В случае конечных X, Y для оптимальности измерения $\{M(y)\}$ необходимо, чтобы оператор

$$\Lambda = \sum\nolimits_y F(y) M(y),$$

где

$$F(y) = \sum\nolimits_x \rho_x (\partial Q / \partial P(y|x)),$$

был эрмитов и удовлетворял условию

$$(F(y) - \Lambda) M(y) = 0, \quad y \in Y. \qquad (3)$$

Если Q — аффинная функция (как в случае бейесовского риска), то для оптимальности (в смысле минимума Q) необходимо и достаточно, чтобы оператор Λ, кроме (3), удовлетворял условию $\Lambda \leqslant F(y)$, $y \in Y$. Аналогичные условия имеют место для достаточно произвольных X, Y.

Существует параллель между квантовыми измерениями и решающими процедурами в классической теории статистич. решений, причем детерминированным процедурам соответствуют простые измерения, определяемые проекторнозначными мерами $M(dy)$. Однако, в отличие от классич. статистики, где оптимальная процедура, как правило, сводится к детерминированной, в квантовом случае уже для бейесовской задачи с конечным числом решений оптимальное измерение, вообще говоря, не может быть выбрано простым. Геометрически это объясняется тем, что оптимум достигается на крайних точках выпуклого множества всех измерений, а в квантовом случае класс простых измерений содержится в множестве крайних точек, не совпадая с ним.

Как и в классич. теории статистич. решений, возможно ограничение класса измерений требованиями инвариантности или несмещенности. Известны квантовые аналоги неравенства Рао — Крамера, дающие нижнюю границу для среднеквадратичной погрешности измере-

ния. В приложениях теории много внимания уделяется бозонным гауссовским каналам связи, для к-рых в ряде случаев дано явное описание оптимальных измерений.

Лит.: [1] Helstrom C. W., Quantum detectiv and estimation theory, N. Y., 1976; [2] Холево А. С., Исследования по общей теории статистических решений, М., 1976; [3] его же, «Repts Math. Phys.», 1977, v. 12, p. 273—78.

А. С. Холево.

КАНАЛ СИММЕТРИЧНЫЙ — *канал связи*, переходная функция к-рого обладает тем или иным свойством симметрии. Однородный *канал без памяти* с дискретным временем и конечными пространствами состояний Y и $\tilde{Y}=Y$ компонент сигналов на входе и выходе, задаваемый матрицей переходных вероятностей $\{q(y,\ \tilde{y}),\ y,\ \tilde{y}\in Y\}$, наз. К. с., если

$$q(y,\tilde{y})=\begin{cases} q & \text{при } y=\tilde{y},\\ \dfrac{1-q}{n-1} & \text{при } y\neq\tilde{y}, \end{cases} \qquad (*)$$

где n — число элементов множества Y, $0\leqslant q\leqslant 1$. Наиболее изученным примером К. с. без памяти является двоичный К. с. с матрицей переходных вероятностей

$$\left\| \begin{matrix} q & 1-q \\ 1-q & q \end{matrix} \right\|.$$

Для К. с. многие важные теоретико-информационные характеристики могут быть либо вычислены явно, либо их вычисление значительно упрощается по сравнению с несимметричными каналами. Напр., для К. с. без памяти с матрицей $\{q(y,\ \tilde{y}),\ y,\ \tilde{y}\in Y\}$ вида $(*)$ *канала пропускная способность* C дается равенством

$$C=\log n+q\log q+(1-q)\log\frac{1-q}{n-1}.$$

Лит. см. [1], [4] при ст. *Канал связи*.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛА ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ — теоретико-информационная мера возможности передачи информации по *каналу связи*. Пусть η и $\tilde{\eta}$ — случайные величины, связанные каналом связи $(Q,\ V)$. К. п. с. C такого канала определяется равенством

$$C=\sup I(\eta,\ \tilde{\eta}), \qquad (1)$$

где $I(\eta,\ \tilde{\eta})$ — *информации количество* в $\tilde{\eta}$ относительно η, а верхняя грань берется по всем парам случайных величин $(\eta,\ \tilde{\eta})$, связанным каналом $(Q,\ V)$. В случае, когда сигналы на входе и выходе канала $\eta=\{\eta(t),\ -\infty<t<\infty\}$ и $\tilde{\eta}=\{\tilde{\eta}(t),\ -\infty<t<\infty\}$ являются случайными процессами с непрерывным или дискретным временем, под К. п. с. обычно понимают среднюю К. п. с., приходящуюся на единицу времени или на один символ передаваемого сигнала, т. е., по определению, полагают

$$C=\lim_{T-t\to\infty}\frac{1}{T-t}\sup I(\eta_t^T,\ \tilde{\eta}_t^T), \qquad (2)$$

если такой предел существует; здесь верхняя грань берется по всевозможным парам случайных величин $\eta_t^T=\{\eta(s),\ t<s\leqslant T\}$, $\tilde{\eta}_t^T=\{\tilde{\eta}(s),\ t\leqslant s\leqslant T\}$, связанных соответствующим отрезком данного канала. Существование предела (2) доказано для достаточно широкого класса каналов, напр. для однородных *каналов с конечной памятью* и необращающимися в нуль вероятностями перехода.

Известно, что в достаточно широком классе случаев (напр., для упомянутых выше каналов с конечной памятью) справедливо равенство

$$C=\sup\left(\lim_{T-t\to\infty}\frac{1}{T-t}I(\eta_t^T,\ \tilde{\eta}_t^T)\right), \qquad (3)$$

где верхняя грань берется по всем парам стационарно связанных случайных процессов $\eta(t)$, $\tilde{\eta}(t)$, $-\infty<t<\infty$, таким, что *при любых* $-\infty<t<T<\infty$ случайные величины $\eta_t^T=\{\eta(s),\ t<s\leqslant T\}$ и $\tilde{\eta}_t^T=\{\tilde{\eta}(s),\ t<s\leqslant T\}$ связаны соответствующим отрезком рассматриваемого канала. Равенство (3) показывает, таким образом, что К. п. с. совпадает с максимально возможной *информации скоростью передачи* по этому каналу.

Явное вычисление К. п. с. оказывается возможным лишь в ряде частных случаев, напр. для *каналов симметричных* без памяти и *каналов гауссовских*. Поэтому значительный интерес представляют различные асимптотические формулы для К. п. с. Напр., для канала (Q, V), сигналы на входе и выходе к-рого принимают значения в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, переходная функция канала $Q(y,\cdot)$ задается плотностью $q(y,\tilde{y})$ (относительно меры Лебега), $y,\ \tilde{y}\in\mathbb{R}^n$, и ограничение V состоит в ограничении на среднюю мощность сигнала на входе $\mathsf{E}|\eta|^2\leqslant S$ (где $|\eta|$ — длина вектора η в $\mathbb{R}^n$), $S>0$ — фиксированное число, известны следующие результаты (*см.* [1]).

1) Пусть $q(y,\tilde{y})=q(\tilde{y}-y)$, т. е. рассматривается канал с аддитивным шумом, так что сигнал на выходе $\tilde{\eta}$ равен сумме $\tilde{\eta}=\eta+\zeta$ сигнала на входе η и не зависящего от него шума ζ, и пусть $\mathsf{E}|\zeta|^2=N$. Тогда при $N\to 0$ (при слабых дополнительных условиях) справедлива асимптотическая формула

$$C=-h(\zeta)+\frac{n}{2}\log\frac{2\pi eS}{n}+\frac{n\log e}{2S}N+o(N),$$

где $h(\zeta)$ — *дифференциальная энтропия* ζ, а $o(N)/N\to 0$ при $N\to 0$. Эта формула соответствует случаю малого шума.

2) Пусть $q(y,\tilde{y})$ — произвольно, но $S\to 0$. Тогда

$$C=\left(\sup_y\frac{\varphi(y)}{|y|}\right)S+o(S),$$

где

$$\varphi(y)=\int_{\mathbb{R}^n}q(y,\tilde{y})\log\frac{q(y,\tilde{y})}{q(0,\tilde{y})}\,d\tilde{y}.$$

Лит.: [1] Прелов В. В., «Пробл. передачи информ.», 1969, т. 5, № 2, с. 31—36; 1972, т. 8, № 4, с. 22—27.
См. также [11], [3]—[6] при ст. *Канал связи*.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

КАНАЛОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, одно семейство линий кривизны к-рой состоит из окружностей, плоскость каждой такой окружности пересекает К. п. под постоянным углом. Одна полость эволюты К. п. вырождается в кривую Γ, так что К. п. является огибающей однопараметрич. семейства сфер. Если $\rho(s)$ — радиус-вектор кривой Γ — множества центров сфер семейства, $R(s)$ — радиус соответствующей сферы (s — длина дуги Γ), то радиус-вектор К. п. определяется из уравнений:

$$(r-\rho)^2=R^2,\quad (r-\rho,\ \rho')+(R,\ R')=0,$$

причем $|R'|\leqslant 1$. Если $R=\mathrm{const}$, то К. п.— т р у б ч а т а я п о в е р х н о с т ь, *таков, напр.*, тор.

И. Х. Сабитов.

КАНОНИЧЕСКАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ — корреляция между линейными функциями двух множеств случайных величин, характеризуемая максимально возможными значениями коэффициентов корреляции. В теории К. к. случайные величины $X_1,\ \ldots,\ X_s$ и $X_{s+1},\ \ldots,\ X_{s+t}$, $s\leqslant t$, линейно преобразуются в так наз. канонические случайные величины $Y_1,\ \ldots,\ Y_s$ и $Y_{s+1},\ \ldots,\ Y_{s+t}$— такие, что: а) все величины Y имеют нулевое математич. ожидание и единичную дисперсию, б) внутри каждого из двух множеств величины Y некоррелированы, в) любая величина Y из 1-го множества коррели-

рована лишь с одной величиной из 2-го множества, г) ненулевые коэффициенты корреляции между величинами Y из разных множеств имеют максимальное значение.

В частном случае $s=1$ К. к. представляет собой множественную корреляцию между X_1 и $X_2, \ldots, X_{1+t}$. Преобразование к каноническим случайным величинам соответствует алгебраич. задаче приведения квадратичных форм к канонич. виду. В многомерном статистич. анализе с помощью метода К. к. при изучении взаимосвязи двух множеств компонент вектора наблюдений осуществляется переход к новой системе координат, в к-рой корреляция между $X_1, \ldots, X_s$ и $X_{s+1}, \ldots, X_{s+t}$ проявляется наиболее отчетливо. В результате анализа К. к. может оказаться, что взаимосвязь между двумя множествами полностью описывается корреляцией между несколькими каноническими случайными величинами.

Лит.: [1] Hotelling H., «Biometrika», 1936, v. 28, p. 321—77; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [3] Кендалл М. Д., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976. *А. В. Прохоров.*

КАНОНИЧЕСКАЯ КРИВАЯ — образ алгебраич. кривой при *каноническом погружении*. Если кривая X не является гиперэллиптической и имеет род $g>2$, то ее образ в проективном пространстве P_{g-1} при канонич. погружении имеет степень $2g-2$ и является нормальной кривой. Обратно, любая нормальная кривая степени $2g-2$ в проективном пространстве P_{g-1} будет канонич. кривой для нек-рой кривой рода g. Алгебраич. кривые (с указанным выше условием) бирационально изоморфны тогда и только тогда, когда их К. к. проективно эквивалентны. Это сводит проблему классификации кривых к задаче теории проективных инвариантов и дает возможность построить многообразие модулей алгебраич. кривых [2]. Для небольших g можно дать явное геометрич. описание К. к. рода g. Так, для рода 4 К. к. совпадают с пересечениями квадрики и кубики в P_3, а для рода 5 — с пересечением трех квадрик в P_4.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Дьёдонне Ж., Кэррол Дж., Мамфорд Д., Геометрическая теория инвариантов, пер. с англ., М., 1974; [3] Уокер Р., Алгебраические кривые, пер. с англ., М., 1952; [4] Severi F., Vorlesungen über algebraische Geometrie, Lpz., 1921. *А. Н. Паршин.*

КАНОНИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИИ — максимальные значения коэффициентов корреляции между парами линейных функций

$$U=\alpha_1X_1+\ldots+\alpha_sX_s,\ V=\beta_1X_{s+1},\ \ldots,\ \beta_tX_{s+t}$$

от двух множеств случайных величин $X_1, \ldots, X_s$ и $X_{s+1}, \ldots, X_{s+t}$, для к-рых U и V являются каноническими случайными величинами (см. *Каноническая корреляция*). Задача определения максимума коэффициента корреляции между U и V при условиях $\mathsf{E}U=\mathsf{E}V=0$ и $\mathsf{E}U^2=\mathsf{E}V^2=1$ решается с помощью неопределенных множителей Лагранжа. К. к. к. являются корнями $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant\lambda_s>0$ уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\lambda\Sigma_{22} \end{vmatrix}=0,$$

где Σ_{11} и Σ_{12} соответственные матрицы ковариаций величин $X_1, \ldots, X_s$ и $X_{s+1}, \ldots, X_{s+t}$, а $\Sigma_{12}=\Sigma_{21}^T$ — матрица ковариаций между величинами 1-го и 2-го множеств. При этом r-й корень уравнения наз. r-м К. к. к. между $X_1, \ldots, X_s$ и $X_{s+1}, \ldots, X_{s+t}$ и равен максимальному значению коэффициентов корреляции между парой линейных функций $U^{(r)}$ и $V^{(r)}$ канонических случайных величин, каждая из к-рых имеет единичную дисперсию и некоррелирована с первыми $r-1$ парами величин U и V. Коэффициенты $\alpha^{(r)}=$

$=(\alpha_1^{(r)}, \ldots, \alpha_s^{(r)})^T$, $\beta^{(r)}=(\beta_1^{(r)}, \ldots, \beta_t^{(r)})^T$ линейных функций $U^{(r)}$ и $V^{(r)}$ удовлетворяют уравнению

$$\begin{pmatrix} -\lambda\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\lambda\Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

при условии $\lambda=\lambda_r$. *И. О. Сарманов.*

КАНОНИЧЕСКИЕ РАЗРЕЗЫ, каноническое сечения,— система

$$S=\{a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots,\ a_g,\ b_g,\ l_1,\ \ldots,\ l_\nu\}$$

$2g+\nu$ кривых на конечной *римановой поверхности* R рода g с ν компонентами края, после удаления точек к-рых из R, т. е. разрезания R вдоль кривых системы S, остается (плоская) односвязная область R^*. Точнее, система S образована из К. р., если каждому замкнутому, или циклическому, разрезу, или, короче, циклу a_j, $j=1, \ldots, g$, в S соответствует ровно один так называемый сопряженный цикл b_j, пересекающий цикл a_j в одной и только в одной фиксированной точке $p_0\in R$, общей для всех разрезов системы S. Остальные циклы a_k, b_k, $k\neq j$, и кривые l_s, $s=1, \ldots, \nu$, лишь имеют точку p_0 общей, но не переходят с одного берега разреза a_j на другой; каждая кривая l_s соединяет p_0 с соответствующей компонентой края. На данной римановой поверхности R существует бесконечное множество систем S К. р. В частности, какова бы ни была односвязная область $D\subset R$, вместе со своим замыканием $\bar{D}$ расположенная строго внутри R, можно выбрать систему К. р. так, чтобы $D\subset R^*$.

Далее, всегда можно найти систему К. р. S, состоящую только из аналитич. кривых. Единственность системы S аналитич. К. р. можно обеспечить, напр., потребовав дополнительно, чтобы достигался экстремум нек-рого функционала, связанного с S. В частности, можно проводить циклич. К. р. a_j, b_j системы S так, чтобы достигалось наибольшее в классе систем, гомотопных S, значение *Робена постоянной* в точке p_0 для определенной области $D\subset R$, $p_0\in D$. Единственности разрезов l_s также можно добиться, исходя из требования максимизации постоянных Робена в определенной паре точек (см. [2]).

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [2] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957. *Е. Д. Соломенцев.*

КАНОНИЧЕСКИЙ КЛАСС — класс K_X дивизоров относительно линейной эквивалентности на алгебраич. многообразии X, являющихся дивизорами дифференциальных форм ω максимальной степени. Если X — неособое алгебраич. многообразие и $\dim X=n$, то в локальных координатах $x_1, \ldots, x_n$ форма ω имеет вид

$$\omega=f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n.$$

Дивизор (ω) формы ω локально равен дивизору (f) рациональной функции f. Эта конструкция не зависит от выбора локальных координат и дает дивизор (ω) формы на всем многообразии X. Поскольку для любой другой формы ω' той же степени, что и ω, имеет место равенство $\omega'=g\omega$, то $(\omega')=(g)+(\omega)$ и соответствующие дивизоры эквивалентны. Построенный так К. к. K_X является первым *Чжэня классом* пучка Ω_X^n регулярных дифференциальных форм степени n. Его численные характеристики (степень, индекс самопересечения и т. д.) являются эффективно вычисляемыми инвариантами алгебраич. многообразия.

Если X — неособая проективная кривая рода g, то $\deg K_X=2g-2$. Для эллиптич. кривых и, более общо, для абелевых многообразий $K_X=0$. Если X — неособая гиперповерхность степени d в проективном пространстве P_n, то $K_X=(d-n-1)\,H$, где H — ее гиперплоское сечение.

См. также *Каноническое погружение.*

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

А. Н. Паршин.

КАНОНИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО замкнутое, ка-множество,— множество M топологич. пространства, являющееся замыканием открытого множества; другими словами, это — множество, являющееся замыканием своего открытого ядра $<M>: M=[<M>]$. В каждом замкнутом множестве F содержится максимальное ка-множество: $A=[<F>]$. Сумма двух ка-множеств есть ка-множество, однако пересечение их может и не быть таковым. Множество, являющееся пересечением конечного числа ка-множеств, наз. л-множеством.

Множество, являющееся (открытым) ядром замкнутого множества, наз. каноническим множеством открытым или ко-множеством; другими словами, это — множество, совпадающее с ядром своего замыкания: $M=<[M]>$. Всякое открытое множество G содержится в наименьшем ко-множестве: $B=<[G]>$. Открытые К. м. могут быть определены и как дополнения к замкнутым К. м., и наоборот.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

М. И. Войцеховский.

КАНОНИЧЕСКОЕ ПОГРУЖЕНИЕ — отображение алгебраич. многообразия X в проективное пространство с помощью степеней *канонического класса* K_X (см. *Линейная система*). Пусть X — неособая проективная кривая рода g; отображение, определяемое классом nK_X, будет вложением для нек-рого n только, если $g>1$. Причем можно взять $n=1$ для негиперэллиптич. кривых, $n=2$ для гиперэллиптич. кривых рода $g>2$ и $n=3$ для кривых рода $g=2$. Эти результаты используются для классификации алгебраич. кривых рода $g>1$ (см. *Каноническая кривая*).

Аналогичные вопросы для многообразий размерности больше единицы рассматривались в основном для поверхностей. При этом роль кривых рода $g>1$ играют поверхности, у к-рых нек-рая степень nK_X канонич. класса дает бирациональное вложение поверхности в проективное пространство. Они наз. поверхностями общего типа; основной результат об этих поверхностях состоит в том, что для них уже класс $5K_X$ определяет регулярное отображение в проективное пространство, являющееся бирациональным вложением. Напр., неособые поверхности степени m в P_3 являются поверхностями общего типа, если $m>4$. В этом случае бирациональное вложение дает уже канонический класс K_X. Если $K_XK_X>2$ и $p_g(X)>1$ (здесь K_XK_X — индекс самопересечения, а $p_g(X)$ — геометрический род), то вместо $5K_X$ можно взять даже $3K_X$. Поверхности, для к-рых никакая степень nK_X не дает вложения, разбиваются на следующие пять семейств: рациональные поверхности, линейчатые поверхности, абелевы многообразия, $K3$-поверхности и поверхности с пучком эллиптич. кривых. При этом рациональные и линейчатые поверхности — аналоги рациональных кривых, а остальные три семейства — аналоги эллиптич. кривых.

Получены первые обобщения этих результатов и на многообразия произвольной размерности [5].

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Severi F., Vorlesungen über algebraische Geometrie, Lpz., 1921; [3] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [4] Bombieri E., Husemoller D., «Proc. Sympos. Pur. Math.», 1975, v. 29, p. 329—420; [5] Ueno K., в кн.: Lecture Notes in Mathematics, v. 412, B.—Hdlb.—N.Y., 1974, p. 288—332.

А. Н. Паршин.

КАНОНИЧЕСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, каноническое произведение Вейерштрасса,— целая функция, все нули к-рой составляют заданную

последовательность комплексных чисел $\{\alpha_k\}$. Пусть нули $\alpha_k \neq 0$ расположены в порядке неубывания их модулей, $|\alpha_k| \leqslant |\alpha_{k+1}|$, и не имеют предельных точек в конечной плоскости (необходимое условие), т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \infty$. Тогда К. п. имеет вид

$$\prod\left(\frac{z}{\alpha_k}, q_k\right) = \prod_{k=1}^{\infty} W\left(\frac{z}{\alpha_k}, q_k\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right) e^{P_k(z)},$$

где

$$P_k(z) = \frac{z}{\alpha_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\alpha_k}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{q_k}\left(\frac{z}{\alpha_k}\right)^{q_k},$$

$W\left(\frac{z}{\alpha_k}, q_k\right)$ — первичные, или примарные, множители Вейерштрасса. Показатели q_k выбираются так, чтобы К. п. абсолютно и равномерно сходилось на любом компакте; напр., достаточно взять $q_k \geqslant k-1$. Если последовательность $\{|\alpha_k|\}$ имеет конечный показатель сходимости

$$\beta = \inf\{\lambda > 0: \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^{-\lambda} < \infty\},$$

то все q_k можно взять одинаковыми, исходя, напр., из минимального требования $q_k = q \leqslant \beta \leqslant q+1$; такое число q наз. родом К. п. Если $\beta = \infty$, т. е. если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^{-\lambda}$ расходятся при любом $\lambda > 0$, то имеем К. п. бесконечного рода. Порядок К. п. $\rho = \beta$ (об определении типа К. п. см. [1]).

Лит.: [1] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., 1956. *Е. Д. Соломенцев.*

КАНТОРА АКСИОМА — одна из аксиом, характеризующих непрерывность прямой линии; заключается в следующем: любая последовательность вложенных друг в друга отрезков, длины к-рых стремятся к нулю, имеет одну общую точку. Сформулирована Г. Кантором (G. Cantor, 1872). *БСЭ-3.*

КАНТОРА ПАРАДОКС — см. *Антиномия.*

КАНТОРА ТЕОРЕМА — 1) Множество 2^A, состоящее из всех подмножеств множества A, не равномощно ни самому A, ни его подмножеству. Идея доказательства этой теоремы, принадлежащая Г. Кантору (G. Cantor, 1878), получила название «канторова диагонального метода» и играет существенную роль в теории множеств. Из К. т. следует, что никакие два из множеств A, 2^A, 2^{2^A}, $2^{2^{2^A}}$,... не равномощны. Таким способом получается бесконечно много различных *кардинальных чисел*. Из К. т. вытекает, что не существует множества всех множеств. Это означает, что нельзя принять аксиому теории множеств, утверждающую существование для каждой высказывательной функции $\Phi(x)$ множества, состоящего из элементов x, удовлетворяющих $\Phi(x)$ (см. [1], [2], [3], [8]). *Б. А. Ефимов.*

2) Любая последовательность убывающих ограниченных замкнутых множеств действительных чисел имеет непустое пересечение. Обобщается на компактные подмножества метрич. пространства. Свойство: диаметры замкнутых множеств метрич. пространства X, последовательно вложенных друг в друга, стремятся к нулю — одно из определений полноты X. Свойство: вполне упорядоченная система убывающих замкнутых множеств топологич. пространства X — одно из определений бикомпактности X (см. [1], [2], [4], [5], [11]).

3) Всякое множество действительных чисел есть объединение совершенного множества своих *конденсации точек* и счетного множества; иногда наз. теоремой Кантора — Бендиксона. Обобщена на случай подмножеств метрич. пространства со счетной

базой (теорема Линделёфа) (см. [1], [2], [3], [14], [15]).

4) Если из двух множеств каждое эквивалентно части другого, то эти два множества эквивалентны между собою. Аналогичное утверждение справедливо и для вполне упорядоченных множеств. Иногда наз. теоремой Кантора—Бернштейна или просто теоремой Бернштейна (последний дал корректное доказательство этой теоремы) (см. [1], [2], [3], [10], [12], [16]).

5) Если

$$A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx \longrightarrow 0$$

для всех, кроме конечного числа, точек отрезка $[-\pi, \pi]$, то a_n, $b_n \to 0$. Обобщена на случаи, когда $A_n \to 0$ на множестве положительной меры (теорема Лебега), когда $A_n \to 0$ на множестве второй категории (теорема Юнга), и на другие ситуации. Важнейшим следствием являются различные теоремы о множествах единственности тригонометрич. рядов (см. [1], [6], [7], [9], [18], [19]).

6) Функция, непрерывная на замкнутом отрезке действительной оси, равномерно непрерывна на нем. Обобщена на случай непрерывных отображений бикомпактного пространства в *равномерное пространство*. Иногда наз. теоремой Гейне—Кантора (см. [1], [4], [5], [13]).

Лит.: [1] Cantor G., Gesammelte Abhandlungen, B., 1932; [2] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.—Л., 1937; [3] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970; [4] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [5] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968; [6] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [7] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, 2 изд., т. 1, пер. с англ., М., 1963; [8] Cantor G., «J. reine und angew. Math.», 1878, Bd 84, S. 242—58; [9] его же, «Math. Ann.», 1871, Bd 4, S. 139—43; [10] его же, там же, 1897, Bd 49, S. 207—46; [11] его же, там же, 1880, Bd 17, S. 355—58; [12] Borel E., Leçons sur la théorie des fonctions, P., 1898; [13] Heine E., «J. reine und angew. Math.», 1872, Bd 74, S. 172; [14] Lindelöf E., «Acta math.», 1905, v. 29, p. 183—90; [15] Cantor G., «J. reine und angew. Math.», 1870, Bd 72, S. 130—42; [16] его же, «Math. Ann.», 1883, Bd 21, S. 51—58; [17] Bendixson I., «Acta math.», 1883, v. 2, p. 415—29; [18] Lebesgue H., Leçons sur les séries trigonométriques..., P., 1906; [19] Young W. H., «Proc. Roy. Soc.», 1912, v. 87, p. 331—39; [20] Бурбаки Н., Очерки по истории математики, пер. с франц., М., 1963.

М. И. Войцеховский.

КАНТОРОВ ДИСКОНТИНУУМ, канторово совершенное множество,— то же, что *Кантерово множество.*

В. В. Федорчук.

КАНТОРОВА КРИВАЯ — метризуемый одномерный континуум. Первоначально К. к. наз. плоский нигде не плотный континуум, и это была первая (хотя и не внутренняя) характеристика одномерных замкнутых связных подмножеств плоскости, рассмотренная Г. Кантором (G. Cantor). К. к. содержит нигде не плотный подконтинуум тогда и только тогда, когда замыкание множества всех точек ветвления одномерно. В то же время, если К. к. не содержит нигде неплотного подконтинуума, то все ее точки имеют конечный индекс ветвления. К. к. без точек ветвления является или простой дугой, или простой замкнутой линией. Множество концевых точек К. к., т. е. множество точек индекса 1, нульмерно, но может быть всюду плотным. Если все точки К. к. имеют одинаковый конечный индекс ветвления, то эта К. к. является простой замкнутой линией. Построена универсальная К. к. (кривая Менгера), то есть К. к., к-рая содержит топологич. образ всякой К. к.

Лит.: [1] Урысон П. С., Тр. по топологии и другим областям математики, т. 2, М.—Л., 1951; [2] Menger K., Kurventheorie, Lpz.—B., 1932.

В. В. Федорчук.

КАНТОРОВИЧА ПРОЦЕСС — итерационный метод уточнения значения корня нелинейного функционального (операторного) уравнения (обобщение метода Ньютона). Для уравнения $P(x)=0$, где P — нелинейная

операция, действующая из одного банахова пространства в другое, вычислительная формула метода имеет следующий вид

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1} P(x_n)$$

(здесь P' — производная Фреше). Иногда используется модифицированный процесс, определяемый формулой

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - [P'(x_0)]^{-1} P(\tilde{x}_n).$$

Пусть операция P дважды непрерывно дифференцируема и выполняются условия (см. [2]):

1) существует линейная операция $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$,
2) $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta$,
3) $\|\Gamma_0 P''(x)\| \leqslant K$ при $\|x - x_0\| \leqslant r$,
4) $h = K\eta \leqslant 1/2$,
5) $r \geqslant r_0 = (1 - \sqrt{1-2h})\eta/h$.

Тогда уравнение $P(x)=0$ имеет решение x^* такое, что

$$\|x^* - x_0\| \leqslant r_0.$$

К этому решению сходятся последовательности x_n и $\tilde{x}_n$, причем

$$\|x^* - x_n\| \leqslant (2h)^{2^n} \eta/(2^n h),$$

и в случае $h < 1/2$

$$\|x^* - \tilde{x}_n\| \leqslant (1 - \sqrt{1-2h})^{n+1}\eta/h.$$

К. п. всегда сходится к корню x^* уравнения $P(x)=0$, если только P достаточно гладкая, существует $[P'(x^*)]^{-1}$ и начальное приближение x_0 избрано достаточно близким к x^*. Если существует непрерывная $P''(x)$, то сходимость основного процесса квадратическая. Модифицированный процесс сходится с быстротой убывающей геометрич. прогрессии; знаменатель этой прогрессии стремится к нулю, когда $x_0 \to x^*$.

К. п. предложен Л. В. Канторовичем [1].

Лит.: [1] Канторович Л. В., «Докл. АН СССР», 1948, т. 59, № 6, с. 1237—40; [2] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959; [4] Красносельский М. А. и др., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [4] Коллатц Л., Функциональный анализ и вычислительная математика, пер. с нем., М., 1969. *И. К. Даугавет.*

КАНТОРОВО МНОГООБРАЗИЕ — n-мерный бикомпакт X, $\dim X = n$, в к-ром любая *перегородка* B между непустыми множествами имеет размерность $\dim B \geqslant n-1$. Эквивалентное определение: n-мерное К. м. есть n-мерный бикомпакт X, обладающий тем свойством, что при всяком представлении его в виде суммы двух непустых и отличных от всего пространства X замкнутых множеств X_1 и X_2 пересечение $X_1 \cap X_2$ имеет размерность $\dim(X_1 \cap X_2) \geqslant n-1$. Одномерные метризуемые К. м. суть одномерные континуумы, или *канторовы кривые*.

Понятие К. м. было введено П. С. Урысоном (см. [1]). n-мерный замкнутый шар и, значит, n-мерное замкнутое многообразие являются К. м.; n-мерное евклидово пространство нельзя разбить множеством размерности $\leqslant n-2$ (при $n=3$ — теорема Урысона, при $n>3$ — теорема Александрова). $(n-1)$-мерным К. м. является совместная граница двух областей n-мерного евклидова пространства, одна из к-рых ограничена (теорема Александрова). Основной факт теории К. м.: всякий n-мерный бикомпакт содержит n-мерное канторово подмногообразие (теорема Александрова).

Всякое лежащее в n-мерном бикомпакте X максимальное n-мерное К. м. наз. размерностной компонентой бикомпакта X. Всякое n-мерное канторово подмногообразие бикомпакта X лежит в единственной размерностной компоненте X. Пересечение двух различных размерностных компонент n-мерного бикомпакта X имеет размерность $\leqslant n-2$. В частности, размерностные компоненты одномерного бикомпакта

суть его компоненты. Множество размерностных компонент конечномерного компакта конечно, счетно или имеет мощность континуума. Справедливо неравенство: $\dim(A \cap B) \leqslant n-2$, где A — произвольная размерностная компонента совершенно нормального бикомпакта X, а B — объединение всех остальных размерностных компонент (теорема Александрова). В наследственно нормальном бикомпакте с 1-й аксиомой счетности размерностная компонента может содержаться в сумме остальных размерностных компонент.

Объединение K_X всех размерностных компонент n-мерного бикомпакта X наз. его внутренним размерностным ядром. Ввиду монотонности размерности в совершенно нормальном бикомпакте X всегда $\dim K_X = \dim X$ и $\dim(X \setminus K_X) \leqslant \dim X$. Множество $X \setminus K_X$ не содержит никакого n-мерного бикомпакта. Но даже для компактов неизвестно (1978), может ли $\dim(X \setminus K_X) = \dim X$. Что касается наследственно нормальных бикомпактов, то в них внутреннее размерностное ядро и его дополнение могут иметь все допустимые размерности, а именно, в предположении континуум-гипотезы, для всякой тройки целых чисел n, n_1 и n_2 с $n \geqslant 1$, $n_1 \geqslant n$ и $n_2 \geqslant 0$ существует такой наследственно нормальный n-мерный бикомпакт X, что $\dim K_X = n_1$ и $\dim(X \setminus K_X) = n_2$.

Если $\dim X = \operatorname{ind} X$, то $K_X \subset N_X$, где N_X (определенное по Урысону) — индуктивное размерностное ядро, т. е. множество всех точек $x \in X$, в к-рых $\operatorname{ind}_X X = n$. Индуктивное размерностное ядро N_X компакта X всегда имеет тип F_σ. Неизвестно, так ли обстоит дело с внутренним размерностным ядром компакта. Что касается бикомпактов, то в них ни индуктивное, ни внутреннее размерностные ядра не обязаны иметь тип F_σ. Для всякой точки $x \in N_X$

$$\operatorname{ind}_x N_X = \operatorname{ind}_x X,$$

где X — компакт (теорема Менгера). Поэтому для произвольного компакта X его внутреннее размерностное ядро K_X всюду плотно в индуктивном размерностном ядре N_X. На бикомпакты это утверждение уже не переносится. Нерешенным остается вопрос (1978), всякая ли точка содержится в индуктивном размерностном ядре вместе с нек-рым невырожденным континуумом.

Конечномерный континуум X, внутреннее размерностное ядро K_X к-рого всюду плотно в X, наз. обобщенным канторовым многообразием. Совместная граница двух открытых подмножеств n-мерного евклидова пространства является $(n-1)$-мерным обобщенным К. м. В метризуемом n-мерном обобщенном К. м. X может быть всюду плотно множество тех точек x, в к-рых $\operatorname{ind}_x X < n$. Ни произведения, ни непрерывные отображения не сохраняют свойство быть обобщенными К. м., равно как и свойство быть К. м.

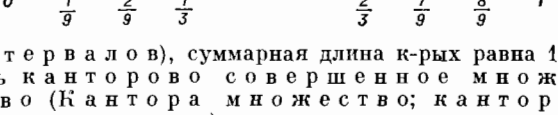
Бикомпакт X наз. бесконечномерным канторовым многообразием, если его *нельзя* разбить никаким способом слабо бесконечномерным замкнутым подмножеством. Во всяком бесконечномерном бикомпакте содержится бесконечномерное К. м.

Лит.: [1] Урысон П. С., Тр. по топологии и другим областям математики, т. 1, М.— Л., 1951; [2] Александров П. С., «Ann. Math.», 1929, v. 30, p. 101—87; [3] его же, «Proc. Roy. Soc. London. Ser. A», 1947, v. 189, p. 11—39; [4] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности ..., М., 1973; [5] Федорчук В. В., «Докл. АН СССР», 1974, т. 215, № 2, с. 289—92; [6] Menger K., Dimensionstheorie, Lpz.—B., 1928; [7] Скляренко Е. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 2, с. 197—212.

В. В. Федорчук.

КАНТОРОВО МНОЖЕСТВО — подмножество отрезка $[0, 1]$ числовой оси, состоящее из всех чисел вида $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^i}$, где ε_i равно 0 или 2. Построено Г. Кантором (G. Cantor, 1883). Геометрич. его описание (см. рис.):

из отрезка [0, 1] выбрасывается его средняя треть — интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, затем из оставшихся отрезков $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ выбрасываются интервалы $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ и $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, из оставшихся четырех отрезков также выбрасываются их средние трети, и т. д.; то, что останется после выбрасывания всех этих интервалов (с м е ж н ы х



и н т е р в а л о в), суммарная длина к-рых равна 1, и есть к а н т о р о в о с о в е р ш е н н о е м н о ж е с т в о (К а н т о р а м н о ж е с т в о; к а н т о р о в д и с к о н т и н у у м); оно нигде не плотно на числовой прямой, имеет мощность континуума.

С топологич. точки зрения К. м.— нульмерный совершенный (т. е. без изолированных точек), компакт, причем с точностью до гомеоморфизма существует единственный такой компакт. Все ограниченные совершенные нигде не плотные множества на числовой прямой суть подобные множества. К. м. гомеоморфно счетной степени $D^{\aleph_0}$ простого двоеточия D и является пространством топологич. группы $Z_2^{\aleph_0}$; К. м. универсально в двух смыслах: во-первых, всякое нульмерное пространство со счетной базой гомеоморфно подмножеству К. м.; 2) во-вторых, всякий компакт является непрерывным образом К. м. (т е о р е м а А л е к с а н д р о в а). Эта теорема кладет начало теории диадических бикомпактов и показывает, что многие компакты похожи друг на друга с функциональной точки зрения. Так, в частности, все совершенные компакты имеют одинаковые булевы алгебры всех канонич. открытых множеств. Существование специальных отображений К. м. на компакты позволяет доказать, что банаховы алгебры всех непрерывных функций на двух произвольных совершенных компактах (напр., на отрезке и квадрате) *линейно* гомеоморфны. Далее, К. м. и возможность отобразить его на произвольный компакт лежат в основе построения многих примеров, интересных с точки зрения топологии и теории функций. Одним из них является так наз. к а н т о р о в а л е с т н и ц а — график непрерывного монотонного отображения отрезка [0, 1] на себя, производная к-рого определена и равна нулю на множестве меры 1. Хотя стандартное К. м. имеет меру нуль, существуют нигде не плотные на отрезке совершенные компакты меры, сколь угодно близкой к единице.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977. *В. В. Федорчук.*

КАППА — плоская алгебраическая кривая 4-го порядка, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид:

$$(x^2+y^2)y^2=a^2x^2;$$

в полярных координатах:

$$\rho=a\operatorname{ctg}\varphi.$$



Начало координат — узловая точка с совпавшими касательными $x=0$ (см. рис.). Асимптоты — прямые $y=\pm a$. Относится к так наз. *узлам*.

Лит.: [1] С а в е л о в А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

КАРАТЕОДОРИ КЛАСС — класс C функций

$$f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n,$$

регулярных в круге $|z|<1$ и имеющих в нем положительную действительную часть. Класс *назван по имени*

К. Каратеодори, определившего точное множество значений системы коэффициентов $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, $n \geqslant 1$, на классе C (см. [1], [2]).

Теорема Рисса — Герглотца. Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала классу C, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление интегралом Стилтьеса

$$f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, d\mu(t),$$

где $\mu(t)$ — функция, неубывающая на отрезке $[-\pi, \pi]$ и такая, что $\mu(\pi) - \mu(-\pi) = 1$.

С помощью этого представления легко выводятся интегральные параметрич. представления для классов функций, выпуклых и однолистных в круге, звездообразных и однолистных в круге и др.

Теорема Каратеодори — Тёплица. Множество значений системы $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, $n \geqslant 1$, на классе C есть замкнутое выпуклое ограниченное множество K_n точек n-мерного комплексного евклидова пространства, в к-рых определители

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 2 & c_1 & \ldots & c_k \\ \overline{c_1} & 2 & \ldots & c_{k-1} \\ \overline{c_2} & \overline{c_1} & \ldots & c_{k-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{c_k} & \overline{c_{k-1}} & \ldots & 2 \end{vmatrix}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

либо все положительны, либо положительны до какого-то номера, начиная с к-рого все равны нулю. В последнем случае получается поверхность Π_n тела K_n. Каждой точке Π_n отвечает только одна функция класса C и она имеет вид

$$f_N(z) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \frac{e^{it_j} + z}{e^{it_j} - z},$$

где

$$\sum_{j=1}^{N} \mu_j = 1, \ \mu_j > 0, \ 1 \leqslant N \leqslant n, \ -\pi < t_j \leqslant \pi, \ t_j \neq t_k$$

при $j \neq k$, $k, j = 1, \ldots, N$.

Множество значений коэффициента c_n, $n = 1, 2, \ldots$, на классе C есть круг $|c_n| \leqslant 2$; окружности $|c_n| = 2$ соответствуют только функции

$$f(z) = \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}.$$

Множество значений $f(z_0)$ (z_0 фиксировано, $|z_0| < 1$) на классе C есть круг, диаметром к-рого является отрезок $\left[\frac{1 - |z_0|}{1 + |z_0|}, \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|}\right]$; границе этого круга соответствуют только функции

$$f(z) = \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}.$$

Рассматривались множества значений систем функционалов и более общего вида (см. [6]). Для класса C получены вариационные формулы, с помощью к-рых показано, что ряд экстремальных задач в классе C решается функциями $f_N(z)$, $N \leqslant 2$ (см. [6]).

Основной подкласс C — класс C_r функций $f(z) \in C$, имеющих действительные коэффициенты c_n, $n = 1, 2, \ldots$. Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала классу C_r, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - z^2}{1 - 2z\cos t + z^2}\, d\mu(t),$$

где $\mu(t)$ — функция, неубывающая на $[0, 2\pi]$, $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$. С помощью этого представления решаются многие экстремальные задачи на классе C_r.

Лит.: [1] Carathéodory C., «Math. Ann.», 1907, Bd 64, S. 95—115; [2] его же, «Rend. Circolo mat. Palermo», 1911, v. 32, p. 193—217; [3] Toeplitz O., там же, p. 191—

92; [4] Riesz F., «Ann. scient. École norm. supér.», 1911, t. 28, p. 33—62; [5] Herglotz G., «Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-naturwiss. Kl.», 1911, Bd 63, S. 501—11; [6] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

Е. Г. Голузина.

КАРАТЕОДОРИ МЕРА — мера μ, порожденная внешней мерой Каратеодори μ^*, где внешняя мера Каратеодори есть *внешняя мера*, определенная на классе всех подмножеств метрич. пространства M (с метрикой ρ) и такая, что

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

если $\rho(A, B) > 0$. Введена К. Каратеодори [1]. Множество $E \subset M$ принадлежит области определения μ, т. е. μ^*-измеримо, тогда и только тогда, когда

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^C)$$

для любого $A \subset M$ (здесь $E^C = M \setminus E$); если E μ^*-измеримо, то $\mu(E) = \mu^*(E)$. Область определения К. м. содержит все борелевские множества. Если μ^* — внешняя мера в классе всех подмножеств метрич. пространства такая, что всякое открытое множество μ^*-измеримо, то μ^* — внешняя К. м.

Лит.: [1] Carathéodory C., «Nachr. Ges. Wiss. Göttingen», 1914, 404—26; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [3] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

В. В. Сазонов.

КАРАТЕОДОРИ ОБЛАСТЬ — ограниченная односвязная область G комплексной плоскости такая, что граница G совпадает с границей области G_∞, смежной с областью $\bar{G}$ и содержащей точку ∞. К К. о. относятся, напр., все области, ограниченные кривыми Жордана. Каждая К. о. может быть представлена в виде ядра убывающей сходящейся последовательности односвязных областей $\{G_n\}$:

$$\bar{G} \subset G_{n+1} \subset \bar{G}_{n+1} \subset G_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и каждая область G, для к-рой существует такая последовательность, есть К. о. (теорема Каратеодори, см. [1]).

Лит.: [1] Carathéodory C., «Math. Ann.», 1912, Bd 72, S. 107—44; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 2, 2 изд., М., 1968.

Е. Г. Голузина.

КАРАТЕОДОРИ ТЕОРЕМА о конформном отображении областей с переменными границами — один из основных результатов теории конформных отображений областей с переменными границами: получен К. Каратеодори [1].

Пусть дана последовательность односвязных областей B_n, $n = 1, 2, \ldots$, плоскости z, содержащих фиксированную точку z_0, $z_0 \neq \infty$. Если существует круг $|z - z_0| < \rho$, $\rho > 0$, принадлежащий всем областям B_n, то ядром последовательности B_n, $n = 1, 2, \ldots$, относительно точки z_0 наз. наибольшая область B, содержащая точку z_0 и обладающая тем свойством, что для всякого компакта E, принадлежащего B, существует такое число N, что E принадлежит областям B_n при $n \geqslant N$. Наибольшая область понимается в том смысле, что она содержит любую другую область, обладающую тем же свойством. Если указанного круга не существует, то под ядром B последовательности B_n, $n = 1, 2, \ldots$, понимается точка z_0 (в этом случае говорят, что последовательность областей B_n, $n = 1, 2, \ldots$, имеет вырожденное ядро). Последовательность областей B_n, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к ядру B, если любая последовательность из B_n имеет своим ядром также B.

Теорема Каратеодори. Пусть дана последовательность функций $z = f_n(\zeta)$, $f_n(\zeta_0) = z_0$, $f_n'(\zeta_0) > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, регулярных и однолистных в круге $|\zeta - \zeta_0| < 1$ и отображающих $|\zeta - \zeta_0| < 1$ соответственно на области B_n. Для того чтобы функции $f_n(\zeta)$, $n = 1, 2, \ldots$,

сходились в круге $|\zeta-\zeta_0|<1$ к конечной функции $f(\zeta)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность областей B_n, $n=1, 2,\ldots$, сходилась к ядру B, к-рое есть либо точка z_0, либо область, имеющая более одной граничной точки. При этом сходимость равномерна внутри круга $|\zeta-\zeta_0|<1$. Если предельная функция $f(\zeta)\not\equiv\text{const}$, то она однолистно отображает круг $|\zeta-\zeta_0|<1$ на ядро B, а обратные функции $\varphi_n(z)$, $n=1,2,\ldots$, равномерно сходятся внутри B к функции $\varphi(z)$, обратной к $f(\zeta)$.

Аналогично рассматривается вопрос о сходимости последовательности функций, однолистных в многосвязных областях. Ниже приводится одна из таких теорем для неограниченных областей. Пусть дана последовательность любых областей B_n, $n=1, 2,\ldots$, плоскости z, содержащих нек-рую фиксированную окрестность точки $z=\infty$. Я д р о м п о с л е д о в а т е л ь н о с т и B_n, $n=1, 2,\ldots$, относительно точки $z=\infty$ наз. наибольшая область B, содержащая $z=\infty$, любая замкнутая подобласть к-рой принадлежит всем B_n, начиная с некоторого n. Сходимость последовательности областей B_n, $n=1, 2,\ldots$, к ядру B определяется, как и выше. Имеет место следующая теорема [2]. Пусть в плоскости z дана последовательность областей A_n, $n=1, 2,\ldots$, содержащих $z=\infty$ и сходящихся к ядру A, и пусть функции $\zeta=f_n(z)$, $n=1, 2,\ldots$, однолистно отображают их соответственно на области B_n, содержащие $\zeta=\infty$, $f_n(\infty)=\infty$, $f_n'(\infty)=1$, $n=1, 2,\ldots$. Для того чтобы функции $f_n(z)$, $n=1, 2,\ldots$, равномерно сходились внутри области A к однолистной функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность областей B_n, $n=1, 2,\ldots$, имела ядро B и сходилась к нему, причем тогда функция $\zeta=f(z)$ однолистно отображает A на B.

Можно указать и другие теоремы о сходимости последовательностей однолистных функций в зависимости от способа их нормировки (см. [2]).

Лит.: [1] Carathéodory C., «Math. Ann.», 1912, Bd 72, S. 107—44; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

Г. В. Кузьмина.

КАРАТЕОДОРИ — ФЕЙЕРА ЗАДАЧА — задача о продолжимости многочлена от z до степенного ряда, представляющего собой регулярную в круге $|z|<1$ функцию, реализующую наименьшее значение супремума модуля в круге $|z|<1$ в классе всех регулярных в $|z|<1$ функций, к-рые имеют начальным отрезком своего разложения в ряд Маклорена данный многочлен. Решение этой задачи дается следующей теоремой.

Т е о р е м а К а р а т е о д о р и — Ф е й е р а [1]. Пусть

$$P(z)=c_0+c_1z+\ldots+c_{n-1}z^{n-1}$$

— данный многочлен, $P(z)\not\equiv 0$. Существует единственная рациональная функция $R(z)=R(z, c_0, c_1,\ldots, c_{n-1})$ вида

$$R(z)=\lambda\frac{\bar\alpha_{n-1}+\bar\alpha_{n-2}z+\ldots+\bar\alpha_0 z^{n-1}}{\alpha_0+\alpha_1z+\ldots+\alpha_{n-1}z^{n-1}},\quad \lambda>0,$$

регулярная в $|z|\leqslant 1$ и имеющая в своем разложении в ряд Маклорена n первых коэффициентов, равных соответственно $c_0, c_1,\ldots, c_{n-1}$. Эта функция, и только она, реализует наименьшее значение

$$M_f=\sup_{|z|<1}|f(z)|$$

в классе всех регулярных в круге $|z|<1$ функций $f(z)$ вида

$$f(z)=P(z)+a_nz^n+\ldots,$$

и указанное наименьшее значение равно $\lambda=\lambda(c_0, c_1,\ldots, c_{n-1})$.

Число $\lambda(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ равно наибольшему положительному корню уравнения $2n$-й степени

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & 0 & c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} \\ 0 & -\lambda & \ldots & 0 & 0 & c_0 & \ldots & c_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 0 & 0 & \ldots & c_0 \\ \bar{c}_0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_0 & \ldots & 0 & 0 & -\lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{c}_{n-1} & \bar{c}_{n-2} & \ldots & \bar{c}_0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Если $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ — действительные числа, то $\lambda(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ является наибольшим из абсолютных значений корней уравнения n-й степени

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & 0 & c_0 \\ 0 & -\lambda & \ldots & c_0 & c_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Лит.: [1] Carathéodory C., Fejer L., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1911, v. 32, p. 218—39; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966. *Г. В. Кузьмина.*

КАРДАНО ФОРМУЛА — формула для отыскания корней кубического уравнения над полем комплексных чисел

$$x^3 + px + q = 0. \qquad (1)$$

К такому виду может быть приведено любое кубич. уравнение. К. ф. для уравнения (1) имеет вид:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Применяя эту формулу, нужно для каждого из трех значений кубич. корня

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

брать то значение корня

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

для к-рого выполняется условие $\alpha\beta = -p/3$ (такое значение корня β всегда существует). В К. ф. числа p и q — любые комплексные. В случае действительных коэффициентов p и q свойство корней уравнения быть действительными или мнимыми зависит от знака дискриминанта уравнения

$$D = -27q^2 - 4p^3 = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right).$$

При $D > 0$ все три корня уравнения действительны и различны. Но по К. ф. корни выражаются через кубич. радикалы с мнимыми подкоренными выражениями. Хотя в этом случае как коэффициенты, так и корни действительны, корни не могут быть выражены через коэффициенты при помощи радикалов из действительных чисел, ввиду чего данный случай получил название неприводимого. При $D = 0$ все корни действительны, причем при p и q, отличных от нуля, имеется один двукратный и один однократный корень, а при $p = q = 0$ — один трехкратный корень. При $D < 0$ все три корня различны, причем один корень является действительным, а два других — сопряженными мнимыми числами.

К. ф. названа по имени Дж. Кардано (G. Cardano), впервые опубликовавшего ее в 1545.

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975. *И. В. Проскуряков.*

КАРДИНАЛЬНОЕ ЧИСЛО, трансфинитное число, мощность по Кантору, кардинал множества A,— такое свойство этого множества, к-рое присуще любому множеству B, равномощному A. При этом два множества A и B наз. равномощными, если существует взаимно однозначная функция $f: A \to B$ с областью определения A и множеством значений B. Г. Кантор (G. Cantor) определял К. ч. множества A как такое его свойство, к-рое остается после абстрагирования от качества элементов множества A и от их порядка. Чтобы подчеркнуть этот двойной акт абстрагирования, Г. Кантор для обозначения К. ч. множества A ввел символ $\overline{\overline{A}}$. Из других обозначений К. ч. множества A наиболее употребительны символы $\operatorname{card} A$ и $|A|$. Если A — конечное множество, содержащее n элементов, то $\operatorname{card} A = n$. Если $\mathbb{Z}^+$ — множество всех натуральных чисел, то $\operatorname{card} \mathbb{Z}^+ = \aleph_0$ (см. *Алефы*). Если $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел, то $\operatorname{card} \mathbb{R} = \mathfrak{c}$ — мощность континуума. Множество 2^A всех подмножеств множества A не равномощно ни самому A, ни его подмножеству (теорема Кантора). В частности, никакие два из множеств

$$A,\ 2^A,\ 2^{2^A},\ 2^{2^{2^A}},\ \ldots \qquad (1)$$

не равномощны. При $A = \mathbb{Z}^+$ получается бесконечно много различных бесконечных К. ч. Другие К. ч. получаются, если взять объединение Q множеств, входящих в (1), и построить последовательность, аналогичную (1), положив $A = Q$. Этот процесс можно продолжать бесконечно. Шкала всех бесконечных К. ч. намного богаче шкалы конечных мощностей. Более того, их так много, что нельзя образовать множества, содержащего по крайней мере по одному К. ч.

Для К. ч. определяются операции сложения, умножения, возведения в степень, а также взятие логарифма и извлечение корня. Так, К. ч. $\delta = \alpha + \beta$ наз. суммой К. ч. α и β, если каждое множество мощности δ можно представить в виде объединения двух непересекающихся множеств A и B мощностей α и β соответственно; К. ч. $\gamma = \alpha\beta$ наз. произведением К. ч. α и β, если γ является К. ч. декартова произведения $A \times B$, причем $\operatorname{card} A = \alpha$ и $\operatorname{card} B = \beta$. Сложение и умножение К. ч. коммутативно и ассоциативно, а умножение дистрибутивно относительно сложения. К. ч. $\varkappa = \alpha^\beta$ наз. степенью с основанием α и показателем β, если каждое множество мощности $\varkappa$ равномощно множеству A^B, где $\operatorname{card} A = \alpha$ и $\operatorname{card} B = \beta$. К. ч. α не больше К. ч. β, $\alpha \leqslant \beta$, если каждое множество мощности α равномощно нек-рому подмножеству множества мощности β. Если $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$, то $\alpha = \beta$ (теорема Кантора—Бернштейна), так что шкала К. ч. линейно упорядочена. Более того, для каждого К. ч. β множество $\{\alpha : \alpha < \beta\}$ вполне упорядочено, что позволяет определить логарифм $\log_\alpha \beta$ К. ч. β по основанию К. ч. α, $\alpha \leqslant \beta$ как наименьшее К. ч. γ такое, что $\alpha^\gamma \geqslant \beta$ и корень α-й степени $\beta^{1/\alpha}$ из К. ч. β, $\alpha \leqslant \beta$, как наименьшее К. ч. δ такое, что $\delta^\alpha \geqslant \beta$.

Любое К. ч. α можно отождествить с наименьшим *порядковым числом* мощности α. В частности, $\aleph_0$ соответствует порядковому числу ω_0, $\aleph_1$ — порядковому числу ω_1, и т. д. Таким образом, шкала К. ч. является подшкалой шкалы порядковых чисел. Ряд свойств порядковых чисел переносится на К. ч., однако эти же свойства можно определить и «внутренним» способом. Если $\alpha_t < \beta_t$ для каждого $t \in T$ и $\operatorname{card} T \geqslant \omega_0$, то

$$\sum \{\alpha_t : t \in T\} < \prod \{\beta_t : t \in T\} \qquad (2)$$

(теорема Кёнига). Если в (2) положить $T = \mathbb{Z}^+$ и $1 < \alpha_n < \alpha_{n+1}$, то

$$\alpha_{\omega_0} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots < \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \qquad (3)$$

В частности, ни для какого К. ч. $\alpha \geqslant 2$ степень α^{ω_0} нельзя представить в виде суммы членов бесконечно возрастающей последовательности меньших К. ч. Для каждого К. ч. α определяется К. ч. $cf(\alpha)$ — к о н ф и н а л ь н ы й х а р а к т е р α, как наименьшее К. ч. γ такое, что $\alpha = \Sigma\{\beta_t,\ t \in T\}$, если $\beta_t < \alpha$ для всех $t \in T$ и card $T = \gamma$. Если $cf(\alpha) = \alpha$, то α наз. р е г у л я р н ы м. К. ч., не являющееся регулярным, наз. с и н г у л я р н ы м. Для любого К. ч. α наименьшее К. ч. α^+, следующее за α, является регулярным. Примером сингулярного К. ч. является К. ч. α_{ω_0} из левой части формулы (3) при условии, что $\omega_0 < \alpha_1$. В этом случае

$$cf(\alpha_{\omega_0}) = \omega_0 < \alpha_{\omega_0}.$$

К ч. α наз. п р е д е л ь н ы м, если для любого К. ч. $\beta < \alpha$ существует К. ч. γ такое, что $\beta < \gamma < \alpha$. Примеры предельных К. ч.: ω_0 и α_{ω_0}. Непредельным К. ч. является ω_1. Регулярное и предельное К. ч. называется с л а б о н е д о с т и ж и м ы м. К. ч. α называется д о м и н а н т н ы м, если для любого $\beta < \alpha$ выполняется $2^\beta < \alpha$. Доминантное и регулярное К. ч. наз. с и л ь н о н е д о с т и ж и м ы м. Из обобщенной *континуум-гипотезы* вытекает, что класс сильно недостижимых К. ч. совпадает с классом слабо недостижимых К. ч. Классы недостижимых К. ч. допускают дальнейшую классификацию (так наз. с х е м а М а л о), к-рая приводит к определению гипернедостижимых К. ч. Существование сильно (слабо) недостижимых К. ч., бо́льших ω_0, оказывается независимым от обычных аксиом как аксиоматической, так и наивной теории множеств.

К. ч. α наз. измеримым (точнее, $\{0, 1\}$-измеримым), если существует множество A мощности α и функция μ, определенная на всех элементах семейства 2^A, принимающая значения 0 или 1 и такая, что $\mu(A) = 1$, $\mu\{a\} = 0$ для любого $a \in A$ и если $\{X_n : n \in \omega_0\}$ — последовательность, состоящая из попарно непересекающихся подмножеств A, то

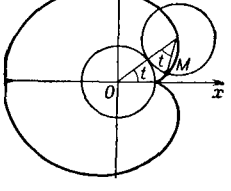
$$\mu\left(\bigcup \{X_n : n \in \omega_0\}\right) = \sum \{\mu(X_n) : n \in \omega_0\}.$$

Каждое К. ч., меньшее первого несчетного сильно недостижимого К. ч., неизмеримо (т е о р е м а У л а м а), так что первое измеримое К. ч. непременно сильно недостижимо. Однако первое измеримое К. ч. значительно больше, чем первое несчетное сильно недостижимое К. ч. (т е о р е м а Т а р с к о г о). Неизвестно (1978), противоречит ли аксиомам теории множеств гипотеза о существовании измеримых К. ч.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] К а н т о р Г., в кн.: Новые идеи в математике, сб. 6, СПБ, 1914, с. 90—184; [3] Х а у с д о р ф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [4] К у р а т о в с к и й К., М о с т о в с к и й А., *Теория множеств*, пер. с англ., М., 1970; [5] S i e r p i ń s k i W., Cardinal and ordinal numbers, Warsz., 1958 (2 wyd. 1965).

Б. А. Ефимов.

КАРДИОИДА — плоская алгебраич. кривая 4-го порядка, к-рая описывается точкой M окружности ра-



диуса r, катящейся по окружности с таким же радиусом r; *эпициклоида* с модулем $m = 1$. Уравнение К. в полярных координатах:

$$\rho = 2r(1 - \cos\varphi),$$

в декартовых прямоугольных координатах:

$$(x^2+y^2+2rx)^2=4r^2(x^2+y^2).$$

Длина дуги от точки возврата:

$$l=16r\sin^2\frac{\varphi}{4}.$$

Радиус кривизны:

$$r_k=\frac{8r}{3}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Площадь, ограниченная кривой: $S=6\pi r^2$. Длина кривой: $16r$. К. является *конхоидой* окружности, частным случаем *Паскаля улитки* и *синусоидальных спиралей*.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

КАРЛЕМАНА ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА — граничная задача аналитич. функций со сдвигом, изменяющим направление обхода контура на обратное; впервые рассмотрена Т. Карлеманом [1]. Пусть L — простая замкнутая кривая Ляпунова на плоскости комплексного переменного z, D — конечная область, ограниченная кривой L. Пусть дифференцируемая комплексная функция $\alpha(t)$, заданная на L, осуществляет взаимно однозначное отображение контура L самого на себя с изменением направления обхода L на обратное и удовлетворяет дополнительному условию Карлемана:

$$\alpha[\alpha(t)]=t,\quad t\in L, \qquad (*)$$

(предполагается еще, что производная $\alpha'(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера). К. г. з. состоит в нахождении аналитической в D, за исключением конечного числа полюсов, и непрерывной в $D\cup L$ функции $\Phi(z)$ по граничному условию

$$\Phi[\alpha(t)]=G(t)\Phi(t)+g(t),\quad t\in L,$$

где заданные на L функции $G(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера и $G(t)\neq 0$ на L.

Изучалась также К. г. з. с условием

$$\alpha^m(t)=t,\ \alpha^1(t)=\alpha(t),\ \alpha^k(t)=\alpha(\alpha^{k-1}(t)),\ k=2,3,\ldots,m,$$

более общим, чем (*), и К. г. з. для нескольких неизвестных функций (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Carleman T., в сб.: Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses, Bd 1, Z.—Lpz., 1932, S. 138—51; [2] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [3] Векуа Н. П., Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, 2 изд., М., 1970.

Е. Д. Соломенцев.

КАРЛЕМАНА НЕРАВЕНСТВО — неравенство для произвольных неотрицательных чисел $a_n\geqslant 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\ldots a_n)^{1/n}<e\sum_{n=1}^{\infty}a_n;$$

найдено Т. Карлеманом [1]. Константу e здесь уменьшить нельзя. Аналог К. н. для интегралов имеет вид:

$$\int_0^{\infty}\exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^x\ln f(t)\,dt\right\}<e\int_0^{\infty}f(x)\,dx,\quad f(x)\geqslant 0.$$

Имеются и другие обобщения К. н. [3].

Лит.: [1] Carleman T., в кн.: Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem fünften Kongress der skandinavischen Mathematiker, Hels., 1923, S. 181—96; [2] Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948.

Е. Д. Соломенцев.

КАРЛЕМАНА ТЕОРЕМА — 1) К. т. о квазианалитических классах функций — необходимое и достаточное условие квазианалитичности в смысле Адамара, найденное Т. Карлеманом [1] (см. также [5]). Класс K действительных функций $f(x)$, бесконечно дифференцируемых на отрезке $[a,\ b]$, наз. квазианалитическим в смысле Адамара, если из равенств $f^n(c)=0$, $n=0,\ 1,\ldots$, в какой-либо точке c, $a<c<b$, следует, что $f(x)\equiv 0$. Формулировка теоремы: класс K квазианалитический тогда и только тогда, когда

$$\sqrt[n]{M_n(f)}<A(f)\,a_n,\quad n=0,\ 1,\ \ldots, \qquad (1)$$

где

$$M_n(f) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n)}(x)|,$$

$A(f)$ — константа, а последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет одному из равносильных условий:

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)\, dr}{r^2} = +\infty, \qquad \sum_{n=1}^\infty \left(\inf_{k \geqslant n} \sqrt[k]{a_k}\right)^{-1} = +\infty, \tag{2}$$

где

$$T(r) = \sup_{n \geqslant 1} (r^n / a_n).$$

В теории квазианалитич. классов функций это — один из первых законченных результатов. Квазианалитич. классы, определяемые условиями (1), (2), часто наз. к л а с с а м и К а р л е м а н а.

2) К. т. о б у с л о в и я х о п р е д е л е н н о с т и п р о б л е м ы м о м е н т о в: если последовательность положительных чисел s_n, $n=0, 1, \ldots$, удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt[2n]{s_{2n}}} = +\infty,$$

то проблема моментов

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k\, d\sigma(t), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

является определенной. Это означает, что существует неубывающая функция $\sigma(t)$, $-\infty < t < +\infty$, для к-рой выполняются равенства (3), единственная с точностью до прибавления любой функции, постоянной в окрестности каждой точки ее непрерывности. Теорема установлена Т. Карлеманом (см. [1], [2]).

3) К. т. о р а в н о м е р н о м п р и б л и ж е н и и ц е л ы м и ф у н к ц и я м и: если $f(x)$ — любая непрерывная функция на действительной оси, а $\varepsilon(r)$, $0<r<+\infty$, — положительная непрерывная функция, сколь угодно быстро убывающая при $r \to +\infty$, то существует целая функция $g(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ такая, что

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon(|x|), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Эта теорема, установленная Т. Карлеманом [3], явилась исходным пунктом исследований по приближениям целыми функциями. В частности, континуум E на плоскости z наз. к о н т и н у у м о м К а р л е м а н а, если для любой непрерывной на E комплексной функции $f(z)$ и произвольно быстро убывающей при $r \to \infty$ положительной функции $\varepsilon(r)$, нижняя грань к-рой на любом конечном интервале положительна, существует целая функция $g(z)$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(|z|), \quad z \in E.$$

Необходимые и достаточные условия, при к-рых замкнутое множество E является континуумом Карлемана, получены в теореме Келдыша — Лаврентьева (см. [6]). Напр., континуумом Карлемана является замкнутое множество, составленное из лучей вида

$$\arg z = \text{const}, \quad |z| > c > 0.$$

4) К. т. о п р и б л и ж е н и и а н а л и т и ч е с к и х ф у н к ц и й п о л и н о м а м и в с р е д н е м п о п л о щ а д и о б л а с т и: пусть D — конечная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная жордановой кривой Γ, и пусть $f(z)$ — регулярная аналитич. функция в D такая, что

$$\iint_D |f(z)|^p\, dx\, dy < \infty, \quad p > 0;$$

тогда для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такой полином $P(z)$, что

$$\iint_D |f(z)-P(z)|^p\,dx\,dy<\varepsilon.$$

Этот результат установлен Т. Карлеманом [4]. Аналогичное утверждение верно и для случая приближения с любым положительным непрерывным весом, причем граница Γ может быть и более общей природы. Система степеней $\{z^n\}$, $n=0, 1, \ldots$, полна относительно любого такого веса. Ортогонализация и нормирование этой системы дает полиномы $P_n(z)$ степеней n, часто наз. полиномами Карлемана.

Лит.: [1] Carleman T., Les fonctions quasi-analytiques, P., 1926; [2] его же, Sur les équations intégrales singulières ànoyau réel et symétrique, Uppsala, 1923; [3] его же, «Arkiv mat., astron., fys.», 1927, Bd 20, № 4; [4] его же, там же, 1922, Bd 17, № 9; [5] Мандельбройт С., Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, пер. с франц., М., 1955; [6] Мергелян С. Н., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 2, с. 31—122. *Е. Д. Соломенцев.*

КАРЛЕМАНА ЯДРО — измеримая, вообще говоря, комплекснозначная функция $K(x, s)$, удовлетворяющая условиям: 1) $\overline{K(x, s)}=K(s, x)$ почти всюду на $E\times E$, где E — измеримое в смысле Лебега точечное множество в конечномерном евклидовом пространстве; 2) $\int_E |K(x, s)|^2 ds<\infty$ для почти всех $x\in E$.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966. *Б. В. Хведелидзе.*

КАРЛЕСОНА МНОЖЕСТВО — замкнутое множество $E\subset[0, 2\pi)$, на к-ром всякая функция $f(t)$, заданная и непрерывная на этом множестве, представима рядом вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}$, где $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<+\infty$. Введено Л. Карлесоном [1]. К. м. образуют важный класс так наз. *тонких множеств*. Для того чтобы замкнутое множество $E\subset[0, 2\pi)$ было К. м., необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная $c>0$, что коэффициенты Фурье — Стилтьеса

$$c_n(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}\,d\mu(t),\quad n=0,\ \pm 1,\ \ldots,$$

всякой меры μ, сосредоточенной на E, удовлетворяли неравенству

$$\sup_{n\geqslant 0}|c_n(\mu)|>c\int_0^{2\pi}|d\mu(t)|.$$

Лит.: [1] Carleson L., «Acta math.», 1952, v. 87, № 3—4, 325—45; [2] Wik I., «Arkiv mat.», 1960, v. 4, № 2—3, 209—18; [3] Kahane J.-P., Salem R., Ensembles parfaits et séries trigonométriques, P., 1963, p. 142; [4] Кахан Ж.-П., Абсолютно сходящиеся ряды Фурье, пер. с франц., М., 1976. *Б. И. Голубов.*

КАРЛЕСОНА ТЕОРЕМА: для функции из пространства $L^2(0, 2\pi)$ ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится почти всюду. В качестве гипотезы эта теорема была высказана Н. Н. Лузиным [1], доказана Л. Карлесоном [2]. Утверждение К. т. справедливо также для всех функций пространства L^p при $p>1$ (см. [3]). То, что для $p=1$ это не так, показывает построенный А. Н. Колмогоровым [4] пример функции из L^1, тригонометрич. ряд Фурье к-рой почти всюду расходится.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М., 1915; [2] Carleson L., «Acta math.», 1966, v. 116, p. 135—57 (см. также «Математика», 1967, т. 11, № 4, с. 113—132); [3] Hunt R., в кн.: Orthogonal expansions and their continuons analogucs, Carbondale — L.— Amst., 1968, p. 235—255; [4] Колмогоров А. Н., «Fundam. Math.», 1923, t. 4, p. 324—28. *С. А. Теляковский.*

КАРЛСОНА МЕТОД, S_n-метод,— один из численных методов решения кинетического уравнения переноса нейтронов в ядерных реакторах. Первый вариант метода для сферически симметричной геометрии, предложенный Б. Карлсоном (B. Carlson, 1953), был основан на кусочно линейном представлении потока нейтронов как функции косинуса угла между вектором скорости

нейтрона и радиусом. После интегрирования по угловой переменной в пределах элементарной ячейки получается система уравнений, в каждое из к-рых входят лишь два направления скорости нейтрона, если считать известным из предыдущего приближения интеграл столкновений (к-рый вычисляется по формуле трапеций). Иными словами, как и в *Владимирова методе*, решение уравнения переноса ведется методом последовательных приближений по интегралу столкновений. В каждом приближении система распадается на отдельные уравнения, если ввести дополнительное уравнение для направления вдоль радиуса, к-рое интегрируется от внешней границы шара к его центру. Каждое следующее направление в уравнениях системы будет теперь связано с предыдущим, для к-рого неизвестная функция уже определена. Интегрирование для отрицательных значений косинуса, определяющего направление, ведется от внешней границы к центру, а для положительных значений косинуса — от центра к краю.

Немонотонный характер решения уравнения переноса К. м. (возможность появления осцилляций и отрицательных значений потока нейтронов) привел к необходимости дальнейшего развития К. м. Широко используется дискретный К. м.: DS_n-м е т о д. В этом методе разностные уравнения выводятся из физических соображений методом баланса частиц в ячейке фазового пространства. В низком приближении DS_n-метод не обеспечивает требуемой точности в неодномерных геометриях. Одним из выходов из этой ситуации является добавление в систему уравнений DS_n-метода слагаемых так. обр., чтобы с помощью линейного преобразования неизвестных она переводилась в систему уравнений, возникающую в *сферических гармоник методе*.

Большое число расчетов ядерных реакторов К. м. (и его модификациями) дает хорошие результаты, согласующиеся с результатами других численных методов решения уравнения переноса нейтронов.

Лит.: [1] М а р ч у к Г. И., Методы расчёта ядерных реакторов, М., 1961; [2] Вычислительные методы в физике реакторов, пер. с англ., М., 1972; [3] Б е л л Дж., Г л е с с т о н С., Теория ядерных реакторов, пер. с англ., М., 1974.

В. А. Чуянов.

КАРЛСОНА НЕРАВЕНСТВО: пусть $\{a_n,\ 1<n<\infty\}$ — не все равные нулю неотрицательные действительные числа, тогда:

$$\left(\sum a_n\right)^4 < \pi^2 \sum a_n^2 \sum n^2 a_n^2. \qquad (1)$$

Установлено Ф. Карлсоном [1]. Интегральный аналог К. н.: если $f(x)>0$, $f(x)\not\equiv 0$, f, $xf\in L^2(0,\ \infty)$, то

$$\left\{\int_0^\infty f(x)\,dx\right\}^4 \leqslant \pi^2 \left\{\int_0^\infty f^2(x)\,dx\right\} \left\{\int_0^\infty x^2 f^2(x)\,dx\right\}. \qquad (2)$$

Константа π^2 является наилучшей в том смысле, что существует последовательность a_n такая, для к-рой правая часть (1) сколь угодно близка к левой, и существует функция $f(x)$ такая, для к-рой знак равенства в (2) достигается.

Лит.: [1] C a r l s o n F., «Ark. mat., astron. och fys.», 1934, Bd 25A, № 7, S. 1—13; [2] Х а р д и Г. Г., Л и т т л ь в у д Дж. Е., П о л и а Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948.

М. И. Войцеховский.

КАРНАПА ПРАВИЛО, п р а в и л о б е с к о н е ч н о й и н д у к ц и и, ω-п р а в и л о, — *вывода правило*, состоящее в том, что если для арифметич. формулы $\varphi(x)$ доказаны предложения $\varphi(0)$, $\varphi(1)$,..., $\varphi(n)$,..., то можно считать доказанным предложение $\forall x\varphi(x)$. Это правило впервые введено в рассмотрение Р. Карнапом [1]. К. п. использует бесконечное множество посылок и потому неприемлемо при построении формальных теорий по Д. Гильберту (D. Hilbert). Понятие вывода в системе с К. п. является неразрешимым. В математич. логике при исследовании формальной арифметики используется к о н с т р у к т и в н о е К. п.: если имеется алгоритм, к-рый по натуральному числу n

дает вывод формулы $\varphi(n)$, то можно считать доказанным предложение $\forall x \varphi(x)$ (ограниченное ω-правило, правило конструктивно-бесконечной индукции). Классическое арифметич. исчисление, неполное в силу теоремы Гёделя, становится полным после добавления конструктивного К. п. (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Carnap R., Der logische Syntax der Sprache, W., 1934; [2] Кузнецов А. В., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 4, с. 218—19; [3] Shoenfield J. R., «Bull. Acad. polon. sci. Cl. III», 1959, t. 7, № 7, s. 405—07.

В. Е. Плиско.

КАРНО ТЕОРЕМА — теорема о произведении простых отношений, в к-рых точки пересечения алгебраич. линии со сторонами треугольника делят эти стороны. Пусть алгебраич. линия l порядка n не проходит ни через одну из вершин треугольника ABC и пересекает каждую из его сторон или ее продолжение в n точках: сторону AB — в точках $C_1, C_2, \ldots, C_n$; сторону BC — в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$; сторону CA — в точках $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Тогда произведение $3n$ простых отношений

$$\frac{\overrightarrow{AC}_i}{\overrightarrow{C}_iB}, \quad \frac{\overrightarrow{BA}_i}{\overrightarrow{A}_iC}, \quad \frac{\overrightarrow{CB}_i}{\overrightarrow{B}_iA}, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

равно -1, если n — число нечетное, и $+1$, если n — четное.

Эта формулировка эквивалентна следующей: произведение $3n$ отношений

$$\frac{\overrightarrow{C_iA}}{\overrightarrow{C_iB}}, \quad \frac{\overrightarrow{A_iB}}{\overrightarrow{A_iC}}, \quad \frac{\overrightarrow{B_iC}}{\overrightarrow{B_iA}}, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

равно $+1$.

Частный случай этой теоремы был доказан Л. Карно [1].

Если l — прямая линия, то получается *Менелая теорема*.

Обобщение К. т.: пусть алгебраич. линия порядка n пересекает каждую из прямых A_iA_{i+1}, $i=1,2,\ldots, m$, $A_{m+1}=A_1$, лежащих в плоскости этой линии, ровно в n точках B_{ij}, $i=1,2,\ldots, m$; $j=1,2,\ldots, n$. Тогда

$$\prod_{i,j} \frac{\overrightarrow{A_iB_{ij}}}{\overrightarrow{B_{ij}A_{i+1}}} = (-1)^{mn}.$$

Лит.: [1] Carnot L., Géométrie de position, P., 1803.

П. С. Моденов.

КАРСОНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование функции $f(t)$, определенной при $-\infty<t<\infty$ и равной нулю при $t<0$, в функцию

$$F(s)=s\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt,$$

где s — комплексная переменная. Формула обращения:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{1}{s} F(s)\, e^{st}\, ds.$$

К. п. функции $f(t)$ отличается от *Лапласа преобразования* этой же функции наличием множителя s.

А. Б. Иванов.

КАРТА, криволинейная система координат, параметризация множества M,— взаимно однозначное отображение

$$x: M \longrightarrow D, \quad p \longrightarrow x(p)=(x^1(p), \ldots, x^n(p))$$

множества M на открытое подмножество D арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Число n наз. размерностью карты, а компоненты $x^i(p)$ вектора $x(p)\in\mathbb{R}^n$ — координатами точки $p\in M$ относительно карты x.

Примером К. служит декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве, введенная

П. Ферма (P. Fermat) и Р. Декартом (R. Descartes) и положенная ими в основу аналитич. геометрии. К. (криволинейные координаты) на поверхности в геометрич. исследованиях впервые использовал Л. Эйлер (L. Euler). Б. Риман (B. Riemann) положил понятие К. в основу нового инфинитезимального подхода к обоснованию геометрии (см. [1]). Согласно концепции Б. Римана, основным объектом исследования геометрии является многообразие — множество M, снабженное К. Современное понятие многообразия является естественным обобщением определения Б. Римана.

Карта $x : U \to D$ нек-рого подмножества U множества M наз. локальной картой множества M с областью определения U. Если множество M снабжено структурой топологич. пространства, то при этом дополнительно требуется, чтобы область определения U была открытым подмножеством в M, а отображение x было бы гомеоморфизмом. Аналогично определяется К. со значениями в F^n, где F — произвольное нормированное поле, и вообще К. со значениями в топологическом векторном пространстве. Две локальные К. (x, U), (y, V) с областями определения U, V множества M наз. согласованными класса C^l, если: 1) их общая область определения $W = U \cap V$ изображается на каждой из них открытым множеством (т. е. множества $x(W)$ и $y(W)$ открыты в $\mathbb{R}^n$), 2) координаты точки из общей области определения W относительно одной из этих К. являются l раз непрерывно дифференцируемыми функциями от координат этой же точки относительно другой К., т. е. вектор-функция

$$y \circ x^{-1} : x(W) \longrightarrow y(W)$$

l раз непрерывно дифференцируема. Множество $A = \{(x_\alpha, U_\alpha)\}$ попарно согласованных между собой локальных К. (x_α, U_α) множества M, покрывающих все $M (\bigcup_\alpha U_\alpha = M)$ наз. атласом множества M. Задание атласа определяет на M структуру *дифференцируемого многообразия*, а локальные К., согласованные со всеми К. этого атласа, наз. допустимыми (или C^l-гладкими).

Инфинитезимальным аналогом понятия К. является понятие инфинитезимальной карты порядка k (или, иначе, k-струи карты, или корепера порядка k). Говорят, что две согласованные между собой локальные карты (x, U) (y, V) множества M касаются друг друга до порядка k в точке $p \in U \cap V$, если $x(p) = y(p)$ и все частные производные до порядка k включительно вектор-функции $y \circ x^{-1}$: $x \to y(x)$ обращаются в точке $x(p)$ в нуль. Класс $j^k_p(x)$ локальных К., касающихся в точке $p \in U$ допустимой локальной К. (x, U) многообразия M, наз. инфинитезимальной К. порядка k в точке p.

Выбор К. многообразия M позволяет рассматривать различные полевые величины на M как числовые функции и применять к ним методы анализа. Вообще говоря, значение полевой величины в точке зависит от выбора К. (Величины, не зависящие от выбора К., наз. скалярными и описываются функциями на многообразии M.) Однако для широкого и наиболее важного класса величин (см. *Геометрических объектов теория*) их значение в точке зависит только от устройства К. в инфинитезимальной окрестности k-го порядка этой точки. Такие величины (примерами к-рых являются тензорные поля) описываются функциями на множестве всех реперов порядка k на M. Вместе с тем изучаются такие свойства величин, к-рые не зависят от выбора К. В связи с этим весьма эффективным оказывается инвариантный бескоординатный подход к задачам дифференциальной геометрии.

Лит.: [1] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948, с. 279—93; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [3] Зуланке Р., Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения,

пер. с нем., М., 1975; [4] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960.
Д. В. Алексеевский.

КАРТАНА ЛЕММА: если для $2p$ линейных форм φ_i, σ^ν от n переменных равна нулю сумма внешних произведений

$$\sum_{i=1}^{p} \varphi_i \wedge \sigma^i = 0,$$

и формы σ^i линейно независимы, то φ_i будут линейными комбинациями σ^i с симметричными коэффициентами:

$$\varphi_i = \sum a_{ij}\sigma^j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Установлена Э. Картаном (E. Cartan) в 1899.

Лит.: [1] Картан Э., Внешние дифференциальные системы..., пер. с франц., М., 1962.
М. И. Войцеховский.

КАРТАНА МАТРИЦА — 1) К. м. конечномерной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0 — матрица

$$A = \| 2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) \| \quad i, j = 1, \ldots, r,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — какая-либо система простых корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно фиксированной *Картана подалгебры* $\mathfrak{t}$, а $(\ ,\ )$ — скалярное произведение на пространстве, дуальном к $\mathfrak{t}$, определенное *Киллинга формой* на $\mathfrak{g}$. (О К. м. произвольной системы корней см. *Корневая система*.) С точностью до преобразования, индуцированного перестановкой индексов $1, \ldots, r$, К. м. является инвариантом алгебры $\mathfrak{g}$, т. е. не зависит от выбора $\mathfrak{t}$ и системы простых корней. Этот инвариант полностью определяет $\mathfrak{g}$: две полупростые алгебры Ли изоморфны тогда и только тогда, когда их К. м. совпадают, с точностью до преобразования, индуцированного перестановкой индексов. Полупростая алгебра Ли проста тогда и только тогда, когда ее К. м. неразложима, т. е. не представима в виде блочно-диагональной матрицы после нек-рой перестановки индексов.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \ldots + \mathfrak{g}_m$ — разложение алгебры $\mathfrak{g}$ в прямую сумму простых идеалов и A_j — К. м. простой алгебры Ли $\mathfrak{g}_j$. Тогда блочно-диагональная матрица

$$\begin{Vmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{Vmatrix}$$

является К. м. алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (явный вид К. м. простых алгебр Ли см. *Ли полупростая алгебра*).

Элементы $a_{ij} = 2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j)$ К. м. обладают следующими свойствами:

$$\left.\begin{array}{l} a_{ii} = 2; \quad a_{ij} \leqslant 0, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ при } i \neq j \\ a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ji} = 0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

К. м. тесно связаны с заданием $\mathfrak{g}$ образующими и соотношениями. А именно, в алгебре $\mathfrak{g}$ существуют линейно независимые образующие e_i, f_i, h_i, $i = 1, \ldots, r$ (так наз. каноническое образующие), связанные следующими соотношениями:

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i; \quad [h_i, e_j] = a_{ij} e_j;$$
$$[h_i, f_j] = -a_{ij} f_j; \quad [h_i, h_j] = 0. \qquad (2)$$

Любые две системы канонических образующих переводятся друг в друга автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$. Кроме (2), канонические образующие удовлетворяют также соотношениям

$$(\operatorname{ad} e_i)^{-a_{ij}+1} e_j = 0, \quad (\operatorname{ad} f_i)^{-a_{ij}+1} f_j = 0, \quad i \neq j, \quad (3)$$

где, по определению, $(\operatorname{ad} x)y = [x, y]$. Соотношения (2) и (3) являются определяющими для алгебры $\mathfrak{g}$ при выбранной системе образующих e_i, f_i, h_i, $i = 1, \ldots, r$ (см. [2]).

Для любой матрицы A, удовлетворяющей условиям (1), алгебра Ли $\mathfrak{g}(A)$ над полем k с образующими e_i, f_i, h_i, $i=1,\ldots, r$ и определяющими соотношениями (2) и (3) конечномерна тогда и только тогда, когда A есть К. м. конечномерной полупростой алгебры Ли [3].

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [3] Кац В. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1968, т. 32, № 6, с. 1323—67.

2) К. м. конечномерной ассоциативной алгебры A с единицей над полем k — матрица (c_{ij}), $i,\ j=1,\ldots, s$, определяемая полным набором $N_1,\ldots, N_s$ конечномерных неприводимых левых A-модулей. А именно, c_{ij} есть кратность вхождения N_j в композиционный ряд такого неразложимого проективного левого A-модуля P_i, для к-рого $\mathrm{Hom}(P_i, N_i)\neq 0$. Модуль P_i существует для каждого N_i и определен однозначно с точностью до изоморфизма.

В некоторых случаях К. м. C оказывается симметричной, положительно определенной и даже $C=D^{\mathrm{T}}D$, где D — целочисленная, не обязательно квадратная матрица (T — знак транспонирования). Такова К. м. групповой алгебры $A=kG$ конечной группы G над полем k характеристики $p>0$ (см. [1]), причем $P_1,\ldots, P_s$ в этом случае — полный набор неизоморфных главных неразложимых левых A-модулей, т. е. неразложимых A-модулей, в прямую сумму к-рых раскладывается левый A-модуль A. Другой пример, когда такое равенство для К. м. имеет место: A — ограниченная универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над алгебраически замкнутым полем характеристики $p>0$, полученной из полупростой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ редукцией в характеристику p (см. [2]).

Лит.: [1] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [2] Humphreys J. E., «J. Algebra», 1971, v. 19, p. 51—79.

В. Л. Попов.

КАРТАНА МЕТОД ВНЕШНИХ ФОРМ — дифференциально-алгебраический метод исследования систем дифференциальных уравнений и многообразий с различными структурами. Алгебраич. основу метода составляет алгебра Грассмана. Пусть V есть 2^n-мерное векторное пространство над произвольным полем K с базисными векторами e^0, e^i, e^{ij}, e^{ijk}, $\ldots$, $e^{12\cdots n}$, $i<j<k$. Кроме векторов базиса для произвольного натурального числа q, определяются векторы $e^{i_1 i_2\cdots i_q}$, $i_1,\ i_2,\ldots, i_q=1,\ 2,\ldots, n$, по следующему закону: если среди натуральных чисел $i_1,\ i_2,\ldots, i_q$ есть хотя бы одна пара одинаковых, то $e^{i_1\cdots i_q}=0$; если все числа $i_1,\ldots, i_q$ попарно различны и числа $j_1<j_2<\ldots<j_q$ являются перестановкой чисел $i_1,\ i_2,\ldots, i_q$, то $e^{i_1\cdots i_q}=e^{j_1\cdots j_q}$, когда подстановка $(i_k)+(j)_k$ — четная, и $e^{i_1\cdots i_q}=-e^{j_1\cdots j_q}$, когда эта подстановка нечетная. В векторном пространстве V вводится внешнее умножение: $e^{i_1 i_2\cdots l}p\wedge e^{k_1 k_2\ldots k_q}=e^{i_1\ldots i_p k_1\ldots k_q}$, при этом требуется выполнение обычных для гиперкомплексной системы (алгебры) законов. Построенная алгебра ранга 2^n наз. алгеброй Грассмана. Вектор

$$\lambda e^{i_1 i_2\ldots i}p=\lambda e^{i_1}\wedge e^{i_2}\wedge\ldots\wedge e^{i}p$$

наз. мономом степени p, $\lambda\in K$. Сумма мономов одинаковой степени $p>1$ наз. внешней формой степени p; сумма мономов первой степени наз. линейной формой. Элементы поля K являются, по определению, формами нулевой степени. Векторы e^i и любые n их линейно независимых комбинаций

$$\omega^j=a^j_i e^i,\quad \det\left(a^j_i\right)\neq 0,\quad a^j_i\in K,$$

образуют линейный базис алгебры Грассмана. Здесь и в дальнейшем по одинаковым индексам, встречающимся один раз снизу и один раз сверху, производится суммирование в соответствующих пределах.

Алгебраической производной 1-го порядка от внешней формы

$$\Omega_p = a_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$$

степени p по символу e^i наз. форма $\Omega_{p-1} = \frac{\partial \Omega_p}{\partial e^i}$ степени $p-1$, к-рая получается из формы Ω_p заменой нулем всех мономов, не содержащих символа e^i, и заменой единицей символа e^i в остальных мономах после перенесения символа e^i на первое место с соблюдением закона антикоммутативности при каждой последовательной перестановке. Ассоциированной системой линейных форм внешней формы Ω_p наз. совокупность всех ненулевых алгебраических производных $(p-1)$-го порядка от формы Ω_p. Рангом внешней формы Ω_p наз. ранг ее ассоциированной системы. Он совпадает с минимальным числом линейных форм, через к-рые, используя операцию внешнего умножения, можно выразить форму Ω_p. Для исследования системы дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$ используется дифференциальная алгебра Грассмана, когда в качестве K рассматривается множество аналитич. функций от n действительных переменных x^i, определенных в нек-рой области пространства $\mathbb{R}^n$, а векторы e^i обозначаются символами dx^i. Линейные формы в ней наз. 1-формами, или формами Пфаффа. В них символы dx^i являются дифференциалами переменных x^i. Внешние формы степени $p>1$ наз. p-формами, или внешними дифференциальными формами степени p. Внешним дифференциалом p-формы

$$\Omega_p = a_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

наз. $(p+1)$-форма

$$D\Omega_p = da_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Внешнее дифференцирование обладает следующими свойствами:

$$D(\Omega_p \pm \Omega_p^*) = D\Omega_p \pm D\Omega_p^*,$$

$$D(\Omega_p \wedge \Omega_q) = D\Omega_p \wedge \Omega_q + (-1)^p \Omega_p \wedge D\Omega_q,$$

$$D(D\Omega_p) \equiv 0,$$

где Ω_p, Ω_p^* — произвольные p-формы, а Ω_q — произвольная q-форма.

Форма Пфаффа $\omega = a_i dx^i$ тогда и только тогда является полным дифференциалом нек-рой функции f, когда ее внешний дифференциал равен нулю. Пусть

$$\theta^\alpha \equiv b_a^\alpha(x^b, z^p)\, dx^a + c_\xi^\alpha(x^b, z^p)\, dz^\xi - dz^\alpha = 0, \qquad (1)$$

$$\alpha, \beta = 1, \ldots, s;\ a, b = 1, \ldots, m;\ \xi, \eta = s+1, \ldots, r;$$

$$p, q = 1, \ldots, r,$$

— произвольная система линейно независимых уравнений Пфаффа с m независимыми переменными x^a и r неизвестными функциями z^p. Система $D\theta^\alpha = 0$ наз. замыканием системы (1). Замыкание наз. чистым замыканием (обозначается $\overline{D\theta^\alpha} = 0$), если в нем алгебраически учтена исходная система (1), то есть если в квадратичные формы $D\theta^\alpha$ подставлены значения dz^α из уравнений (1). Система $\theta^\alpha = 0$, $D\theta^\alpha = 0$ или эквивалентная ей система $\theta^\alpha = 0$, $\overline{D\theta^\alpha} = 0$ наз. замкнутой системой. Система (1) тогда и только тогда вполне интегрируема, когда $\overline{D\theta^\alpha} = 0$. Приравнивая нулю алгебраические производные от $\overline{D\theta^\alpha}$ по dx^a и dz^ξ, $a = 1, \ldots, m$, $\xi = s+1, \ldots, r$, и присоединяя уравнения Пфаффа к исходной системе (1), получают вполне интегрируемую систему уравнений, к-рая наз. харак-

теристической системой системы (1). Множество ее независимых первых интегралов образует наименьшую совокупность переменных, через к-рые можно выразить все уравнения системы (1). Пусть $m^{\alpha}_{\xi,h}$ — результат подстановки в алгебраич. производную $\overline{\partial D\theta^{\alpha}}/\partial dz^{\xi}$ вместо dx^a, dz^{ξ} произвольных переменных X^a_h, z^{ξ}_h, $h=1, 2, \ldots, m-1$. С системой (1) ассоциируется последовательность матриц

$$M_h=\begin{pmatrix} m^{\alpha}_{\xi,1} \\ \cdots \\ m^{\alpha}_{\xi,h} \end{pmatrix}.$$

Числа

$$\begin{aligned} s_1&=\operatorname{rang} M_1,\\ s_2&=\operatorname{rang} M_2-\operatorname{rang} M_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ s_{m-1}&=\operatorname{rang} M_{m-1}-\operatorname{rang} M_{m-2},\\ s_m&=r-s-\operatorname{rang} M_{m-1} \end{aligned}$$

наз. характерами, число

$$Q=s_1+2s_2+\ldots+ms_m$$

наз. числом Картана системы (1). Присоединяя к замкнутой системе $\theta^{\alpha}=0$, $\overline{D\theta^{\alpha}}=0$ уравнения $dz^{\xi}=b^{\xi}_a dx^a$, где b^{ξ}_a — новые неизвестные функции, получают первое продолжение системы (1). Пусть N — число функционально независимых функций из b^{ξ}_a; всегда $N\leqslant Q$. Если $N=Q$, то система (1) — в инволюции и ее общее решение зависит от s_m произвольных функций m аргументов, s_{m-1} функций $m-1$ аргумента, и т. д., s_1 функций одного аргумента и s произвольных постоянных. Если же $N<Q$, то систему (1) надо продолжать, причем в результате конечного числа продолжений получается либо система в инволюции, либо противоречивая система.

Пусть, напр., имеется система

$$dz_1=u\,dx+x^2\,dy,\quad dz_2=u\,dy+y^2\,dx$$

с независимыми переменными x, y и неизвестными функциями u, z_1, z_2 ($s=2, m=2$, $r=3$). Чистое замыкание ее имеет вид:

$$du\wedge dx+2x\,dx\wedge dy=0,\quad du\wedge dy+2y\,dy\wedge dx=0.$$

Для этой системы:

$$M_1=\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix},\ s_1=\operatorname{rang} M_1=1,\ s_2=0,\ Q=1,\ N=0.$$

Система не находится в инволюции. Продолженная система
$dz_1=u\,dx+x^2\,dy$, $dz_2=u\,dy+y^2\,dx$, $du=2\,(y\,dx+x\,dy)$ вполне интегрируема и ее общее решение имеет вид:

$$u=2xy+c_1,\quad z_1=x\,(xy+c_1)+c_2,\quad z_2=y\,(xy+c_1)+c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

Использование К. м. в. ф. значительно упрощает формулировки и доказательства многих теорем математики и теоретич. механики. Напр., теорема Остроградского записывается формулой

$$\oint_{\Gamma}\Omega=\int_M D\Omega,$$

где M — аналитическое ориентируемое $(m+1)$-мерное многообразие, Γ — его m-мерная гладкая граница, Ω — m-форма, а $D\Omega$ — ее внешний дифференциал. Формула замены переменных в кратном интеграле

$$J=\int\ldots\int_D f\,(x^1,\ \ldots,\ x^n)\,dx^1\wedge dx^2\wedge\ldots\wedge dx^n$$

при отображении $p: \Delta\to D$, определенном формулами $x^i=\varphi^i\ (u^1, u^2, \ldots, u^n)$, где D, $\Delta\subset R^n$, получается не-

посредственной заменой переменных x^i и их дифференциалов $dx^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial u^j} du^j$. Так как

$$dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \frac{\partial (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)}{\partial (u^1, \ldots, u^n)} du^1 \wedge \ldots \wedge du^n,$$

то

$$J = \int \ldots \int_{\Delta} \frac{\partial (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)}{\partial (u^1, \ldots, u^n)} du^1 \wedge \ldots \wedge du^n.$$

К. м. в. ф. широко применяется при исследовании многообразий с различными структурами. Пусть M — дифференцируемое многообразие класса C^∞, $F = C^\infty(M)$ — множество дифференцируемых функций на M, D^1 — множество всех векторных полей на M, $\mathfrak{A}_s$ — множество кососимметричных F-полилинейных отображений модуля $D^1 \times \ldots \times D^1$ (s раз, $s \geqslant 1$ — натуральное число).

Пусть $\mathfrak{A}_0 = F$, а через $\mathfrak{A}$ обозначена прямая сумма F-модулей $\mathfrak{A}_s$:

$$\mathfrak{A} = \sum_{s=0}^{\infty} \mathfrak{A}_s.$$

Элементы модуля $\mathfrak{A}$ наз. внешними дифференциальными формами на M; элементы модуля $\mathfrak{A}_s$ наз. s-формами. Пусть

$$f, g \in C^\infty(M); \quad \theta \in \mathfrak{A}_r, \quad \Omega \in \mathfrak{A}_s, \quad X_i \in D^1.$$

Тогда внешнее умножение $\wedge$ определится формулами:

$$f \wedge g = fg, \quad (f \wedge \theta)(X_1, \ldots, X_r) = f\theta(X_1, \ldots, X_r),$$

$$(\Omega \wedge g)(X_1, \ldots, X_s) = g\Omega(X_1, \ldots, X_s),$$

$$(\theta \wedge \Omega)(X_1, \ldots, X_{r+s}) =$$

$$= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \varepsilon(\sigma)\, \theta(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)}) \times$$

$$\times \Omega(X_{\sigma(r+1)}, \ldots, X_{\sigma(r+s)}),$$

где S_{r+s} — группа подстановок множества $1, 2, \ldots, r+s$, а $\varepsilon(\sigma) = 1$ или -1, в зависимости от того, четной или нечетной подстановкой является σ. Модуль $\mathfrak{A}$ кососимметрических F-полилинейных функций с внешним умножением наз. алгеброй Грассмана над многообразием M. Если M совпадает с $\mathbb{R}^n$, то получается рассмотренная выше дифференциальная алгебра Грассмана. Внешним дифференцированием наз. R-линейное отображение $D : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, обладающее следующими свойствами: $D\mathfrak{A}_s \subset \mathfrak{A}_{s+1}$ для каждого $s \geqslant 0$, если $f \in \mathfrak{A}_0 = C^\infty(M)$, то Df есть 1-форма, определенная равенством $Df(X) = X(f)$, где $X \in D^1$; $D \cdot D = 0$, $D(\theta \wedge \Omega) = D\theta \wedge \Omega + (-1)^r \theta \wedge D\Omega$, если $\theta \in \mathfrak{A}_r$, $\Omega \in \mathfrak{A}$. Пусть, напр., M — многообразие с заданной аффинной связностью. Аффинная связность на многообразии M — это правило ∇, к-рое сопоставляет каждому $X \in D^1$ линейное отображение ∇_X векторного пространства D^1 в себя, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y; \quad \nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + (Xf)\,Y$$

для $f, g \in C^\infty(M)$, $X, Y \in D^1$. Оператор ∇_X наз. ковариантной производной относительно X. Пусть Φ — диффеоморфизм многообразия M, ∇ — аффинная связность на M. Формула

$$\nabla'_X(Y) = \left(\nabla_X \Phi(Y^\Phi)\right)^{\Phi^{-1}},$$

где $X, Y \in D^1$, определяет на M новую аффинную связность. Аффинная связность ∇ наз. инвариантной относительно Φ, если $\nabla' = \nabla$. В этом случае Φ наз. аффинным преобразованием многообразия M. Пусть

$$[X, Y] = XY - YX,$$

$$T(X, Y) = \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y],$$

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

для всех X, $Y \in D^1$, и пусть D_1 — модуль, двойственный F-модулю D^1. F-полилинейное отображение $(\omega, X, Y) \to \omega(T(X, Y))$, где $\omega \in D_1$ — форма Пфаффа, наз. тензорным полем кручения и обозначается через T; F-полилинейное отображение $(\omega, Z, X, Y) \to \omega(R(X, Y) \cdot Z)$ наз. тензорным полем кривизны и обозначается через R. Пусть $p \in M$ и $X_1, \ldots, X_n$ — базис для векторных полей в нек-рой окрестности U_p точки p. Функции Γ^K_{IJ}, T^K_{IJ}, R^K_{IJ} определяются на U_p формулами

$$\nabla_{X_J}(X_I) = \Gamma^K_{IJ} X_K, \quad T(X_I, X_J) = T^K_{IJ} X_K,$$

$$R(X_I, X_J) \cdot X_L = R^K_{LIJ} X_K, \quad I, J, K = 1, \ldots, n.$$

Для 1-форм ω^I, ω^K_J, определенных на U_p формулами

$$\omega^I(X_J) = \delta^I_J, \quad \omega^J_I = \Gamma^J_{KI} \omega^K,$$

справедливы структурные уравнения Картана:

$$D\omega^J = \omega^K \wedge \omega^J_K + \frac{1}{2} T^J_{JK} \omega^J \wedge \omega^K,$$

$$D\omega^J_I = \omega^K_I \wedge \omega^J_K + \frac{1}{2} R^J_{IKL} \omega^K \wedge \omega^L.$$

Система уравнений Пфаффа

$$\omega^a = \lambda^a_i \omega^i, \; i, j, k = 1, \ldots, m; \; a, b = m+1, \ldots, n,$$

задает m-мерное подмногообразие $\mathfrak{M}_m \subset M$. Продолжая эту систему с использованием структурных уравнений Картана, получают последовательность фундаментальных геометрич. объектов подмногообразия

$$\mathfrak{M}_m : \{\lambda^a_i\}, \; \{\lambda^a_i, \; \lambda^a_{ij}\}, \; .$$

первого, второго и т. д. порядков. В общем случае существует фундаментальный геометрич. объект

$$\{\lambda^a_i, \; \ldots, \; \lambda^a_{i_1, \ldots, i_k}\}$$

конечного порядка k, определяющий подмногообразие $\mathfrak{M}_m$ с точностью до постоянных. При исследовании подмногообразий многообразия M К. м. в. ф. обычно используется совместно с методом подвижного репера (см., напр., [4]).

Метод назван по имени Э. Картана (E. Cartan), к-рый широко использовал внешние формы с 1899.

Лит.: [1] Картан Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения, пер. с франц., М., 1962; [2] Фиников С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.— Л., 1948; [3] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [4] Картан Э., Риманова геометрия в ортогональном репере, пер. с франц., М., 1960.

В. С. Малаховский.

КАРТАНА ПОДАЛГЕБРА конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем k — нильпотентная подалгебра в $\mathfrak{g}$, совпадающая со своим нормализатором в $\mathfrak{g}$. Напр., если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли всех комплексных квадратных матриц фиксированного порядка, то подалгебра всех диагональных матриц является К. п. в $\mathfrak{g}$. К. п. может быть определена также как нильпотентная подалгебра $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{g}$, совпадающая со своей фиттинговой нуль-компонентой

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} \mid (\operatorname{ad} H)^{n_{X,H}}(X) = 0, \; H \in \mathfrak{t}, \; n_{X,H} \in \mathbb{Z}\},$$

где ad обозначает присоединенное представление $\mathfrak{g}$.

Пусть, далее, характеристика k равна 0. Для произвольного регулярного элемента $X \in \mathfrak{g}$ множество $\mathfrak{n}(X, \mathfrak{g})$ всех элементов из $\mathfrak{g}$, аннулируемых степенями оператора ad X, является К. п. в $\mathfrak{g}$ и всякая К. п. в $\mathfrak{g}$ имеет вид $\mathfrak{n}(X, \mathfrak{g})$ для подходящего регулярного элемента X. Всякий регулярный элемент принадлежит

одной и только одной К. п. Размерности всех К. п. в $\mathfrak{g}$ одинаковы и равны рангу алгебры $\mathfrak{g}$. Всякая максимальная нильпотентная подалгебра в $\mathfrak{g}$ размерности, равной рангу $\mathfrak{g}$, есть К. п. (но не всякая максимальная нильпотентная подалгебра есть К. п.). Образ К. п. при сюръективном гомоморфизме алгебр есть К. п. Если поле k алгебраически замкнуто, то все К. п. в $\mathfrak{g}$ сопряжены, а точнее, преобразуются друг в друга операторами из алгебраич. группы D автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$, алгебра Ли к-рой есть коммутант алгебры $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{g}$ разрешима, это утверждение справедливо и без предположения об алгебраич. замкнутости k.

Пусть G — либо неприводимая алгебраич. линейная группа над k, либо связная группа Ли, и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Тогда подалгебра $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{g}$ будет К. п. в $\mathfrak{g}$, если и только если она является алгеброй Ли *Картана подгруппы* в G.

Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ всех эндоморфизмов конечномерного векторного пространства V над k, а $\overline{\mathfrak{g}}$ — наименьшая *Ли алгебраическая алгебра* в $\mathfrak{gl}(V)$, содержащая $\mathfrak{g}$. Тогда, если $\overline{\mathfrak{t}}$ — К. п. в $\overline{\mathfrak{g}}$, то $\overline{\mathfrak{t}}\cap\mathfrak{g}$ — К. п. в $\mathfrak{g}$, и если $\mathfrak{t}$ — К. п. в $\mathfrak{g}$, а $\overline{\mathfrak{t}}$ — наименьшая алгебраич. подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, содержащая $\mathfrak{t}$, то $\overline{\mathfrak{t}}$ — К. п. в $\overline{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{t}=\overline{\mathfrak{t}}\cap\mathfrak{g}$.

Если $k\subset K$ — некоторое расширение полей, то подалгебра $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{g}$ есть К. п. тогда и только тогда, когда $\mathfrak{t}\otimes_k K$ есть К. п. в $\mathfrak{g}\otimes_k K$.

Особо важную роль К. п. играют, когда $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли (это было использовано Э. Картаном [1]). В этом случае всякая К. п. $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{g}$ абелева и состоит из полупростых элементов (см. *Жордана разложение*), а ограничение *Киллинга формы* на $\mathfrak{t}$ невырождено.

Лит.: [1] Cartan E., Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, P., 1894; [2] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, т. 3, пер. с франц., М., 1958; [4] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, пер. с франц., М., 1962.

В. Л. Попов.

КАРТАНА ПОДГРУППА группы G — максимальная нильпотентная подгруппа C в G, всякий нормальный делитель конечного индекса к-рой является подгруппой конечного индекса в своем нормализаторе в G. Если G — связная линейная алгебраич. группа над полем характеристики 0, то К. п. в G могут быть определены и как замкнутые связные подгруппы, алгебры Ли к-рых являются *Картана подалгебрами* алгебры Ли группы G. Примером К. п. может служить подгруппа D всех диагональных матриц в группе $GL_n(k)$ всех невырожденных матриц.

В связной линейной алгебраич. группе G К. п. может быть определена также как централизатор максимального тора группы G или как связная замкнутая нильпотентная подгруппа, совпадающая со связной компонентой единицы своего нормализатора в G. Множества C_s и C_u всех полупростых и унипотентных элементов в C (см. *Жордана разложение*) являются замкнутыми подгруппами в C и $C=C_s\times C_u$. При этом C_s — единственный максимальный тор группы G, лежащий в C. Размерность К. п. группы G наз. рангом группы G. Объединение всех К. п. группы G содержит открытое в топологии Зарисского подмножество в G (но, вообще говоря, не совпадает с G). Всякий полупростой элемент в G лежит по крайней мере в одной К. п., а всякий регулярный элемент — ровно в одной К. п. Если $\varphi: G\to G'$ — сюръективный морфизм линейных алгебраич. групп, то К. п. в G' — образы К. п. в G относительно φ. Любые две К. п. в G сопряжены.

Пусть группа G определена над полем k, тогда в G существует К. п., также определенная над k, более того, G порождается своими К. п., определенными над k. Две определенные над k К. п. в G могут быть и

не сопряжены над k (но в случае, когда G разрешима, они сопряжены). Многообразие К. п. группы G рационально над k. К. п. связной полупростой (или, более общо, редуктивной) группы G является максимальным тором в G.

Пусть G—связная вещественная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда К. п. группы G замкнуты в G (но не обязательно связны) и их алгебрами Ли являются подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Если G — аналитич. подгруппа в $GL_n(\mathbb{R})$, а $\bar{G}$—наименьшая содержащая G алгебраич. подгруппа в $GL_n(\mathbb{R})$, то К. п. в G являются пересечениями G с К. п. в $\bar{G}$. В случае, когда G компактна, К. п. связны, абелевы (являются максимальными торами) и сопряжены между собой, а всякий элемент в G лежит в нек-рой К. п.

Лит.: [1] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958; [2] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [3] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; №2, с. 3—31; [4] Demazure M., Grothendieck A., Schemas en groupes, Séminaire de géométrie algébrique, P., 1964. *В. Л. Попов.*

КАРТАНА РАЗЛОЖЕНИЕ — представление действительной некомпактной *Ли полупростой алгебры* $\mathfrak{g}$ в виде прямой суммы векторных пространств. Пусть $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ — комплексная оболочка $\mathfrak{g}$, тогда в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ существует действительная компактная подалгебра $\mathfrak{g}^K$ той же размерности, что и $\mathfrak{g}$, такая, что имеют место следующие разложения в прямые суммы векторных пространств

$$\mathfrak{g}^k=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{g}=\mathfrak{k}+i\mathfrak{p},$$

где $\mathfrak{k}$ — подалгебра инвариантных элементов нек-рого инволютивного автоморфизма φ алгебры $\mathfrak{g}^k$, а $\mathfrak{p}$ — множество антиинвариантных элементов автоморфизма φ. Вторая формула и есть К. р. алгебры $\mathfrak{g}$ (см. [1]). К. р. сводит классификацию действительных некомпактных полупростых алгебр Ли к классификации компактных полупростых алгебр Ли и инволютивных автоморфизмов в них.

Лит.: Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964.
А. С. Феденко.

КАРТАНА ТЕОРЕМА — 1) К. т. о старшем векторе: пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли, e_i, f_i, h_i, $i=1,\ldots,r$ — ее канонические образующие, т. е. линейно независимые образующие, между к-рыми имеются следующие соотношения:

$$[e_i, f_j]=\delta_{ij}h_i, \quad [h_i, e_j]=a_{ij}e_j, \quad [h_i, f_j]=-a_{ij}f_j,$$
$$[h_i, h_j]=0,$$

где $a_{ii}=2$, a_{ij} —неположительные целые числа при $i\neq j$, $i, j=1,\ldots,r$, $a_{ij}=0$ влечет за собой $a_{ji}=0$, и пусть $\mathfrak{t}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, являющаяся линейной оболочкой элементов $h_1,\ldots,h_r$. Пусть также ρ — линейное представление $\mathfrak{g}$ в комплексном конечномерном пространстве V. Тогда существует ненулевой вектор $v\in V$, для которого:

$$\rho(e_i)v=0, \quad \rho(h_i)v=k_iv, \quad i=1, \ldots, r,$$

где k_i — некоторые числа. К. т. установлена Э. Картаном [1]. Вектор v наз. старшим вектором представления ρ, а линейная функция Λ на $\mathfrak{t}$, определенная условиями $\Lambda(h_i)=k_i$, $i=1, \ldots, r$, наз. старшим весом представления ρ, соответствующим v. Упорядоченный набор чисел $(k_1,\ldots,k_r)$ наз. набором числовых отметок старшего веса Λ. К. т. дает полную классификацию неприводимых конечномерных линейных представлений комплексной полупростой конечномерной алгебры Ли. Она утверждает, что всякое конечномерное комплексное неприводимое представление $\mathfrak{g}$ обладает единственным, с точностью до пропорциональности, старш-

шим вектором, причем соответствующие ему числовые отметки — неотрицательные целые числа; два конечномерных неприводимых представления эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие старшие веса совпадают и любой набор неотрицательных целых чисел является набором числовых отметок старшего веса нек-рого конечномерного комплексного неприводимого представления.

Лит.: [1] Cartan E., «Bull. Sci. math.», 1925, t. 49, p. 130—52; [2] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [3] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, пер. с франц., М., 1962; [4] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [5] Dixmier J., Algèbres enveloppantes, P., 1974; [6] Семинар по алгебраическим группам, пер. с англ., М., 1973. *В. Л. Попов.*

2) К. т. в теории функций многих комплексных переменных — так наз. теоремы А и В о когерентных аналитич. пучках на многообразиях Штейна, впервые доказанные А. Картаном (H. Cartan, [1]). Пусть $\mathcal{O}$ — пучок ростков голоморфных функций на комплексном многообразии X. Пучок $\mathcal{O}$-модулей $\mathcal{S}$ на X наз. когерентным аналитическим, если в окрестности каждой точки $x\in X$ существует точная последовательность пучков

$$\mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0$$

для нек-рых натуральных p, q. Такими являются, например, все локально конечно порожденные подпучки в $\mathcal{O}^p$.

Теорема А. Пусть $\mathcal{S}$ — когерентный аналитич. пучок на многообразии Штейна X. Тогда для каждой точки $x\in X$ найдется конечное число глобальных сечений $s_1,\ldots, s_N$ пучка $\mathcal{S}$ таких, что любой элемент s слоя $\mathcal{S}_x$ представляется в виде

$$s=h_1(s_1)_x+\ldots+h_N(s_N)_x,$$

где все $h_j\in\mathcal{O}_x$. (Другими словами, пучок $\mathcal{S}$ локально конечно порожден над $\mathcal{O}$ своими глобальными сечениями.)

Теорема В. Пусть $\mathcal{S}$ — когерентный аналитич. пучок на многообразии Штейна X. Тогда все группы когомологий порядка $p\geqslant 1$ многообразия X с коэффициентами в пучке $\mathcal{S}$ тривиальны:

$$H^p(X,\ \mathcal{S})=0 \quad \text{при} \quad p\geqslant 1.$$

К. т. имеют много приложений. Из теоремы А получаются различные теоремы существования глобальных аналитич. объектов на многообразиях Штейна. Основным следствием теоремы В является разрешимость $\overline{\partial}$-проблемы: на многообразии Штейна уравнение $\overline{\partial}f=g$ с условием согласования $\overline{\partial}g=0$ всегда разрешимо.

Схема применения теоремы В такова: если

$$0\longrightarrow\mathcal{S}\longrightarrow F\longrightarrow G\longrightarrow 0$$

— точная последовательность пучков на X, то последовательность

$$\ldots\longrightarrow H^p(X,\ \mathcal{S})\longrightarrow H^p(X,\ F)\xrightarrow{\varphi_p} H^p(X,\ G)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^{p+1}(X,\ \mathcal{S})\longrightarrow\ldots$$

тоже точна. Если X — многообразие Штейна, то

$$H^p(X,\ \mathcal{S})=0, \quad p\geqslant 1,$$

и, значит, φ_0 есть отображение на, а φ_p, $p\geqslant 1$,— изоморфизмы.

Теорема В точна: если на комплексном многообразии X группы $H^1(X,\mathcal{S})=0$ для любого когерентного аналитич. пучка $\mathcal{S}$, то X — многообразие Штейна. Теоремы А и В вместе с их многочисленными следствиями составляют т. наз. теорию Ока—Картана о многообразиях Штейна. Из этих теорем следует разрешимость на многообразиях Штейна всех классич. проблем многомерного комплексного анализа — проблема

Кузена, Леви, Пуанкаре и др. Теоремы А и В и их следствия допускают дословное обобщение на пространства Штейна.

Лит.: [1] Картан А., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения, М., 1958, с. 352—62; [2] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [3] Хёрмандер Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968.
Е. М. Чирка.

КАРТАНА — ВЕЙЛЯ БАЗИС конечномерной полупростой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — базис $\mathfrak{g}$, составленный из элементов *Картана подалгебры* алгебры $\mathfrak{g}$ и корневых векторов X_α, $\alpha\in\Delta$, где Δ — система всех ненулевых корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно τ. К.— В. б. выбирается неоднозначно. Корень $\alpha(h)$, $h\in\tau$, как линейная форма над τ, отождествляется с вектором $h'_\alpha\in\tau$, для которого $\alpha(h)=(h'_\alpha,h)$, где (x, y) — *Киллинга форма* в алгебре $\mathfrak{g}$. При этом

$$[h,\ X_\alpha]=(h'_\alpha,\ h)\,X_\alpha$$

для всякого $h\in\tau$. Если $\alpha\in\Delta$, то $-\alpha\in\Delta$, причем можно выбрать X_α так, чтобы выполнялось равенство $[X_\alpha,\ X_{-\alpha}]=h'_\alpha$. Если $\alpha+\beta\in\Delta$, то

$$[X_\alpha,\ X_\beta]=N_{\alpha\beta}X_{\alpha+\beta},$$

где $N_{\alpha\beta}\neq0$. Если α, β, $\gamma\in\Delta$, $\alpha+\beta+\gamma=0$, то $N_{\alpha\beta}=N_{\beta\gamma}=N_{\gamma\alpha}$. Существует нормировка векторов X_α, при которой $N_{\alpha\beta}=-N_{-\alpha,-\beta}$, причем числа $N_{\alpha\beta}$ получаются рациональными. Существует нормировка векторов X_α, при которой все $N_{\alpha\beta}$ — целые (см. *Шевалле группа*). Определение К.— В. б. (введенное Г. Вейлем в [1]), а также все сказанное выше о векторах X_α, h'_α и числах $N_{\alpha\beta}$ дословно переносится на случай произвольной конечномерной полупростой расщепляемой алгебры Ли над полем нулевой характеристики и ее корневого разложения относительно расщепляющей подалгебры Картана.

Лит.: [1] Weyl H., «Math. Z.», 1924, Bd 23, S. 271—304; [2] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [3] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, пер. с франц., М., 1962.
Д. П. Желобенко.

КАРТЕРА ПОДГРУППА — максимальная нильпотентная подгруппа группы, совпадающая со своим нормализатором. Введена Р. Картером [1]. Любая конечная разрешимая группа G обладает К. п., причем все К. п. в группе G сопряжены (теорема Картера).

Лит.: [1] Carter R. W., «Math. Z.», 1961, Bd 75, № 2, S. 136—39; [2] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 23—24.
Н. Н. Вильямс.

КАРТОГРАФИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, возникающие при построении математич. основы географических и специальных карт, именно, при разработке теории *картографических проекций*, исследовании их свойств, преобразований, методов изысканий и др. Поверхность Земли при этом принимают либо за сферу, либо за эллипсоид вращения.

Основным объектом изучения в математич. картографии является картографич. проекция: отображение на плоскости всей поверхности земного эллипсоида (шара) или какой-либо ее части:

$$x=f_1(u,\ v),\quad y=f_2(u,\ v),\qquad(1)$$

где u — широта, v — долгота точки $P\in\Delta$ (Δ — односвязная область эллипсоида); x, y определяют на плоскости точку Q — изображение точки P, $Q\in D$, D — область изображения Δ. Функции f_1 и f_2 удовлетворяют следующим условиям: они однозначные, дважды непрерывно дифференцируемые, имеют якобиан $h=\partial(x,\ y)/\partial(u,\ v)\neq0$ (для сохраняющих ориентацию отображений, используемых в геодезии и картографии, $h>0$). Большинство фактов математич. картографии относится не только к отображениям эллипсоида на плоскость, но и к отображениям произвольных поверх-

ностей, поэтому далее под картографич. проекцией (1) понимается отображение $\Delta \subset S_1$ на $D \subset S_2$, где

$$S_1 : ds^2 = \lambda_1^2(u, v)\,[du^2 + dv^2]; \qquad (2)$$
$$S_2 : d\sigma^2 \lambda_2^2(x, y)\,[dx^2 + dy^2]$$

— любые регулярные поверхности; Δ и D — односвязные области. Выбор для целей отображения таких координат, кроме простоты записи в них линейного элемента поверхности и выгоды их использования при последующих вычислениях, обусловлен еще и тем, что переход к ним от произвольных криволинейных координат на поверхности непосредственно доставляет конформное отображение поверхности на плоскость (см. [6], [3]). Эти координаты даже на произвольной поверхности наз. иногда картографическими координатами (см. [9]); в геодезии и картографии их наз. изометрическими координатами.

Знание уравнений (1) отображения S_1 на S_2 позволяет изучить метрич. свойства отображения (см. [7], [2]), т. е. найти его характеристики: масштаб отображения $\mu = d\sigma/ds$, причем $\mu = \mu(u, v; \alpha)$, и, в частности, масштабы по направлениям координатных линий $m = \mu|_{v=\text{const}}$, $n = \mu|_{u=\text{const}}$:

$$m^2 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}(x_u^2 + y_u^2), \quad n^2 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}(x_v^2 + y_v^2);$$

поворот ψ изображения в направлении линии u и его поворот χ в направлении линии v:

$$\operatorname{tg}\psi = y_u/x_u, \quad \operatorname{tg}\chi = y_v/x_v;$$

угол θ между образами параметрич. линий:

$$\theta = \chi - \psi;$$

искажение этого угла:

$$\varepsilon = \theta - \frac{\pi}{2};$$

масштаб площади:

$$p = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} h;$$

наибольшее искажение углов:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b};$$

и др. Большое значение имеют г л а в н ы е м а с ш т а б ы $a = \mu_{\max}$ и $b = \mu_{\min}$, связанные с m, n, θ теоремами Аполлония:

$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2, \quad ab = mn \sin\theta = p,$$

и соответствующие им главные направления, ортогональные как на S_1 ($\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2f/(e-g)$, где

$$e = x_u^2 + y_u^2, \quad f = x_u x_v + y_u y_v, \quad g = x_v^2 + y_v^2),$$

так и на S_2 ($\operatorname{tg} A_0 = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\alpha_0$). С указанной сетью Тиссо на S_2 связывается индикатриса отображения — эллипс искажений $\{a, b, A_0, \psi\}$, трактуемый в касательной плоскости к S_2 в точке Q как эллипс, подобный и подобно расположенный тому бесконечно малому эллипсу (главной части отображения), к-рый является — с точностью до $o(\rho)$ — изображением окружности бесконечно малого радиуса ρ, взятой в касательной плоскости к S_1 в точке P. Из приведенных характеристик, выраженных через коэффициенты первых квадратичных форм взаимно отображаемых поверхностей (2) и частные производные 1-го порядка отображающих функций (1), независимы только четыре. Выбор групп независимых характеристик неоднозначен, и вместо $\{a, b, A_0, \psi\}$ часто берут $\{m, n, \psi, \theta\}$.

По характеру искажений среди картографич. проекций выделяют следующие проекции: а) к о н ф о р м-

ные, или равноугольные ($m=n$, $\theta=\pi/2$); б) эквивалентные, или равновеликие ($p=1$); в) эквидистантные, или равнопромежуточные ($a=1$, или $b=1$); г) геодезические, в картографии наз. ортодромическими (ортодрома — геодезическая на сфере), при к-рых геодезические на S_1 переходят в геодезические на S_2; и др. Построение проекций, обладающих объединением хотя бы двух из перечисленных свойств а) — г), возможно только при отображении поверхности на изометричные ей поверхности и в нек-рых других тривиальных случаях. Так как условия конформности и эквивалентности для целей картографии не совместимы, то для нее особое значение имеют проекции эквидистантные, к-рые по характеру искажений занимают промежуточное место между отображениями а) и б). Выделение отдельных совокупностей картографич. проекций делают обычно указанием присущих им свойств, напр. вида а) — в), т. е. заданием их уравнениями в характеристиках, к-рые с учетом формул теории искажений легко преобразуются в уравнения с частными производными 1-го порядка. Множество решений конкретной системы двух таких уравнений описывает определенный класс проекций. По типу этих уравнений проекциям приписывают соответствующий тип (эллиптический, гиперболический и т. д.).

Использование в картографии приведенных выше формул теории искажений позволяет выполнить выбор нужной для конкретной цели проекции: установив каким-либо образом уравнения проекции (1) (напр., задав на плоскости общий вид изображения координатных линий эллипсоида и, возможно, использовав при этом нек-рые дополнительные условия — конформности, эквивалентности и др.), можно на основании этих формул исследовать отображение и, варьируя его параметрами, подобрать наиболее подходящую проекцию для картографирования заданной $\Delta\subset S_1$. Кроме такого решения прямой задачи, в ней используются и иные методы (геометрические, графоаналитические и др.).

В обратных задачах картографии проекции изыскивают на основе априорного задания искажений в них (см. [11]). При этом первоочередное значение имеет вопрос существования требуемых проекций. Ответ на этот вопрос дает основная система уравнений в теории отображения поверхностей (см. [4]):

$$\left.\begin{aligned} m^*_v - n^*_u\cos\theta + \psi_u n^*\sin\theta + \theta_u n^* \sin\theta = 0,\\ \psi_v m^* - n^*_u\sin\theta - \psi_u n^*\cos\theta - \theta_u n^*\cos\theta = 0,\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

в к-рой

$$m^* = \frac{\lambda_1(u,\,v)}{\lambda_2(x,\,y)}\,m; \quad n^* = \frac{\lambda_1(u,\,v)}{\lambda_2(x,\,y)}\,n.$$

При отображении поверхности на плоскость: $\lambda_2(x, y)\equiv 1$, при отображении плоских областей друг на друга также и $\lambda_1(u, v)=1$. Система (3) — недоопределенная: двумя ее уравнениями связаны четыре независимые характеристики отображения; различные способы доопределения и интерпретации системы дают возможности разнообразным ее приложениям. Система (3) — квазилинейная относительно любой пары характеристик. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Характеристики m, n, ψ, θ отображения области $\Delta\subset S_1$ на область $D\subset S_2$, осуществляемого однозначными дважды непрерывно дифференцируемыми функциями (1) с якобианом, сохраняющим знак в области Δ, удовлетворяют во всех точках этой области системе (3).

Теорема 2. Пусть выделена односвязная область Δ данной регулярной поверхности и пусть в области Δ заданы четыре функции $\varphi_i=\varphi_i(u, v)$, непрерывные в Δ вместе со своими частными производными 1-го по-

рядка и принимающие значения из любой односвязной области П, принадлежащей 4-мерному параллелепипеду

$$[0 < \varphi_1 < k_1;\ 0 < \varphi_2 < k_2;\ k_i = const,\ i = 1,\ 2;$$
$$-\pi < \varphi_3 \leqslant \pi;\ 0 < \varphi_4 < \pi].$$

Если эти функции принять за характеристики нек-рого отображения $\Delta \subset S_1$ на плоскость

$$m = \varphi_1,\quad n = \varphi_2,\quad \psi = \varphi_3,\quad \theta = \varphi_4,$$

и если они удовлетворяют в Δ системе (3), то восстанавливаемое по ним отображение $\Delta \subset S_1$ на нек-рую область D плоскости xOy гомеоморфно, дважды непрерывно дифференцируемо, имеет в Δ якобиан $h > 0$ и переводит любую точку $(u_0,\ v_0) \in \Delta$ в заданную точку $(x_0,\ y_0)$ плоскости xy.

Теорема 2 дает при заданном распределении характеристик условия существования отображений односвязной области Δ поверхности S_1 на нек-рую область D плоскости S_2 при соответствии одной внутренней точки $(u_0,\ v_0)$ своему изображению $(x_0,\ y_0)$ на плоскости; граница области D при этом неизвестна. Незнание области изображения характерно для К. м. з.: она либо определяется после установления отображающих функций (1), либо должна быть найдена на основе дополнительных условий, напр. условий минимизации искажений в проекции.

При отображениях сферы на плоскость система (3) переходит в так наз. с и с т е м у Э й л е р а — У р м а е в а (см. [5], [11]), а при отображениях плоских областей, когда система (3) доопределена записанной в характеристиках системой уравнений отображения, она дает как следствие производную систему квазиконформных отображений (см. [12]). Сведение отображений поверхностей к квазиконформным отображениям плоских областей (с ограниченным искажением) вполне естественно, и первые, т. е. отображения (1) заданной области $\Delta \subset S_1$ на заданную область $D \subset S_1$, могут интерпретироваться как «тройная» проекция: область $\Delta \subset S_1$ конформно отображается на область $\tilde{\Delta}$ плоскости uv, область $D \subset S_2$ конформно отображается на область $\tilde{D}$ плоскости xOy; область $\tilde{\Delta}$ плоскости uOv квазиконформно преобразуется в область $\tilde{D}$ плоскости xOy. Квазиконформное отображение плоских областей $\tilde{\Delta}$ на $\tilde{D}$, сопутствующее отображению $\Delta \subset S_1$ на $D \subset S_2$, имеет следующие характеристики: $V = m^*$, $\alpha = \psi$, $W = n^* \sin\theta$, угол θ имеет тот же смысл, что и выше. Связь рассматриваемых изображений дала возможность (см. [4]) использовать в К. м. з. теорию квазиконформных отображений плоских областей. При этом систему уравнений любого класса картографич. проекций или, более общо, всякую нелинейную систему дифференциальных уравнений вида

$$F_i(u,\ v,\ x_u,\ x_v,\ y_u,\ y_v) = 0,\quad i = 1,\ 2, \tag{4}$$

после ее записи в характеристиках

$$J_i(u,\ v,\ m^*,\ n^*,\ \psi,\ \theta) = 0,\quad i = 1,\ 2, \tag{5}$$

удается редуцировать к квазилинейной системе, к-рая следует из системы (3) после ее доопределения системой (5) и к-рая трактуется как производная система исходной системы (4). При этом, однако, остается открытым вопрос о соотношении типов этих двух систем: исходной и производной.

Аппарат квазиконформных отображений плоских областей (с двумя парами характеристик) может быть привлечен также в качестве теоретич. основы приборного (с использованием механич., оптич., электронных и других устройств) преобразования картографич. проекций, точнее, преобразования двух заданных односвязных плоских областей друг в друга, каждая из

к-рых является результатом картографирования одной и той же области земного эллипсоида, но в различных проекциях.

Одной из основных задач картографии (в области создания мелкомасштабных и частично среднемасштабных карт) является проблема наивыгоднейших картографич. проекций, т. е. таких отображений заданной области Δ поверхности S на плоскость, в к-рых искажения (в нек-ром заранее оговоренном смысле) сведены к минимуму (см. [2]). Наиболее распространенными критериями достоинств картографич. проекций являются следующие:

критерий Эйри:

$$\Phi_E = \int_\Delta \varepsilon_E^2 \, d\Delta, \quad \varepsilon_E^2 = \frac{1}{2}[(a-1)^2 + (b-1)^2];$$

критерий Иордана:

$$\Phi_J = \int_\Delta \varepsilon_J^2 \, d\Delta, \quad \varepsilon_J^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mu - 1)^2 \, d\alpha;$$

критерий Эйри — Каврайского:

$$\Phi_{E-K} = \int_\Delta \varepsilon_{E-K}^2 \, d\Delta, \quad \varepsilon_{E-K}^2 = \frac{1}{2}(\ln^2 a + \ln^2 b);$$

критерий Иордана — Каврайского:

$$\Phi_{J-K} = \int_\Delta \varepsilon_{J-K}^2 \, d\Delta, \quad \varepsilon_{J-K}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^2 \mu \, d\alpha,$$

причем все они суть вариационного типа, и

критерий Чебышева — критерий минимаксного типа, согласно к-рому качества проекции оцениваются либо величиной

$$\delta = \frac{\sup a\,|_\Delta}{\inf b\,|_\Delta},$$

либо ее логарифмом, либо просто максимумом модуля логарифма масштаба в пределах отображаемой территории. В соответствии с тем, критерий какого вида используется при построении проекции, различают выгоднейшие проекции вариационного и минимаксного типов. Таким образом, проблемы построения наивыгоднейших проекций заключаются в том, что для заданной односвязной области Δ поверхности S требуется отыскать (при условии минимума одного из приведенных функционалов Φ или величины δ) проекцию Δ на плоскость либо из всего их множества (1) — такие проекции наз. идеальными, либо из какой-либо их совокупности (напр., из класса проекций, описываемых решениями соответствующей ему системы (4)) — такие проекции наз. наилучшими проекциями данной их совокупности (класса). Для каждой такой задачи должна быть исследована корректность ее постановки.

Для сферич. сегмента (области сферы, ограниченной окружностью малого круга) в соответствии с критерием Чебышева идеальной проекцией (см. [2], [13]) является равнопромежуточная проекция Постеля; наилучшей конформной — стереографическая (см. [8]); наилучшей эквивалентной — равновеликая проекция Ламберта (см. [2]). На основании вариационного критерия для сферич. сегмента Эйри (см. [14]) была вычислена наилучшая азимутальная проекция. Для сферич. трапеции — области сферы, ограниченной дугами двух меридианов и двух параллелей, и (в некотором смысле) близких к ней областей при картографировании используют конические проекции.

Среди этих проекций, предназначенных для картографирования сферич. трапеций, известны наилучшие проекции минимаксного типа (проекции Маркова, см. [10]), а также наилучшие (того же типа) конформные и эквивалентные (см. [2]). Разработана общая методика построения наилучших по критерию Эйри конич. проекций (конформных, эквивалентных, равнопромежуточных)

для односвязных областей произвольных очертаний (см. [15], [2]). Однако для сферич. трапеции при изображении ее на плоскости в конформной проекции наименьшее колебание логарифма масштаба имеет место в проекциях, рассчитанных (см. [9], [11]) в соответствии с теоремой Чебышева — Граве (см. [8], [9]): для того чтобы в конформной проекции ($m=n$, $\varepsilon=0$) на плоскость односвязной области Δ поверхности S, имеющей полную кривизну одного и того же знака, логарифм масштаба наименее уклонялся от нуля, необходимо и достаточно постоянство масштаба на контуре изображаемой территории. Конформные проекции, удовлетворяющие условиям этой теоремы, наз. чебышевскими проекциями. Они обладают рядом полезных свойств (в них $\frac{\sup|\mu|_\Delta}{\inf|\mu|_\Delta}=\min$, $\Phi_{J-K}=\min$, минимальна средняя кривизна изображений геодезич. линий поверхности S, $\max_\Delta|\ln p|=\min$), за счет к-рых они ценны для практики. П. Л. Чебышев решил задачу отыскания для $\Delta\subset S$ конформной проекции с минимумом искажения площадей, т. е. конформной проекции, наиболее близкой к эквивалентным.

Важна и обратная задача: среди всех эквивалентных проекций области $\Delta\subset S$ на плоскость найти проекцию с минимумом искажений форм. Один из подходов к этой задаче таков. Ввиду разной мощности двух рассматриваемых множеств проекций (множество конформных описывается системой двух уравнений с частными производными $m=n$, $\varepsilon=0$, а эквивалентных — одним $p=mn\cos\varepsilon=1$) сначала из совокупности эквивалентных проекций выделяется нек-рый класс проекций, близких к конформным, а затем уже в нем ищется проекция с минимумом искажений форм. Из классич. наследия был известен один класс таких проекций, именно, класс эйлеровых проекций: $p=1$, $\varepsilon=0$ (см. [5]), ныне предложены и другие классы эквивалентных проекций, близких к конформным, напр. класс: $p=1$, $(m-n)+k\varepsilon=0$, $k=k(u, v)$ — параметр класса (см. [4]).

Исследование указанных и других новых классов картографич. проекций и поиски в них наивыгоднейших проекций минимаксного типа привели к постановке задач на условный минимакс (см. [16]). Сущность таких задач заключается в том, что для данной системы дифференциальных уравнений с частными производными, решения к-рой должны быть найдены в заданной области Δ, требуется установить те дополнительные условия (краевые, начальные и т. д.) и в нек-рых случаях еще определить вид тех кривых, к к-рым должны быть отнесены эти условия, чтобы при интегрировании системы с ними одно из ее решений в области Δ наименее уклонялось бы от нуля. Известны только частные случаи исследования таких задач, основанные на методе априорных оценок решений дифференциальных уравнений. Достигнутые результаты для систем эллиптич. типа — распространение теоремы Чебышева — Граве на два новых класса проекций: класс, описываемый системой уравнений в характеристиках $n=km$, $\varepsilon=0$, $k=\text{const}>0$ (см. [17]), и класс $m=n^c$, $\varepsilon=0$, $c=\text{const}>0$ (см. [19]). Для гиперболич. системы, описывающей эйлеровы проекции, методом характеристик установлены такие начальные условия на меридиане (см. [16]) и на параллели (см. [18]), при к-рых одно из решений системы (логарифм масштаба) в области влияния начальных данных наименее уклоняется от нуля. Картографический смысл этого аналога теоремы Чебышева таков: «носительница» данных Коши должна быть линией конформности, т. е. масштаб на ней равен единице. Этот результат при задании начальных условий на меридиане справедлив и для более широкого класса проекций: $m=n^c$, $\varepsilon=0$, $c=\text{const}$ (см. [19]). Исследован случай эйлеровых проекций для заданной сферич. трапеции, в к-ром при рассмотрении — с привлечением

интеграла энергии — смешанной задачи установлены начальные (для южной стороны трапеции) и краевые (на дугах, ограничивающих ее меридианов) условия, обеспечивающие получение для этой области наилучших эйлеровых проекций вариационного типа: на указанных трех сторонах области масштаб должен быть равен единице (см. [20]). Общая методика изыскания наивыгоднейших проекций вариационного типа для произвольной области $\Delta \subset S$ сводится к решению вариационных задач со свободными краями (см. [4]).

Лит.: [1] Итоги науки и техники. Картография, т. 7, М., 1976, с. 45—57; [2] Каврайский В. В., Избр. труды, т. 2, в. 1—3, М., 1958—1960; [3] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей ..., ч. 1—2, М.— Л., 1947—48; [4] Мещеряков Г. А., Теоретические основы математической картографии, М., 1968; [5] Эйлер Л., Избр. картографические статьи, пер. с нем., М., 1959; [6] Гаусс К. Ф., Избр. геодезические соч., т. 2, М., 1958; [7] Тиссо М. А., Изображение одной поверхности на другой и составление географических карт, пер. с франц., М., 1899; [8] Чебышев П. Л., Соч., т. 1, СПБ, 1899; [9] Граве Д. А., Об основных задачах математической теории построения географических карт, СПБ, 1896; [10] Марков А. А., «Изв. АН», сер. 5, 1895, т. 2, № 3, с. 177—87; [11] Урмаев Н. А., Методы изыскания новых картографических проекций, М., 1947; [12] Лаврентьев М. А., Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, М., 1962; [13] Milnor J., «Amer. Math. Monthly», 1969, v. 76, p. 1101—12; [14] Airy G. B., «Philos. Mag.», 1861, Ser. 4, v. 22, p. 409—21; [15] Цингер Н. Я., «Изв. АН», 1916, сер. 6, т. 10, № 17, с. 1693—1704; [16] Мещеряков Г. А., «Докл. АН СССР», 1961, т. 136, № 5, с. 1026—29; [17] Топчилов М. А., «Изв. ВУЗов. Геод. и аэрофотосъемка», 1970, № 4, с. 91—96; [18] Тучин Я. И., «Тр. Новосиб. ин-та инженеров геод., аэрофотосъемки и картографии», 1973, т. 30, с. 65—67; [19] Юзефович Ю. М., «Сб. научн. трудов Белорусск. сельхоз. академии», 1972, т. 86, с. 245—53; [20] Тучин Я. И., «Тр. Новосиб. ин-та инженеров геод., аэрофотосъемки и картографии», 1975, т. 34, с. 55—64.

Г. А. Мещеряков.

КАРТОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ — отображение всей поверхности земного эллипсоида или какой-либо ее части на плоскость, получаемое в основном с целью построения карты.

К. п. чертят в определенном масштабе. Уменьшая мысленно земной эллипсоид в M раз, получают его геометрич. модель — глобус, изображение к-рого в натуральную величину на плоскости дает карту поверхности этого эллипсоида. Величина $1 : M$ определяет главный, или общий, масштаб карты. Однако основной характеристикой К. п. в любой ее точке является частный масштаб μ. Это — величина, обратная отношению бесконечно малого отрезка dS на земном эллипсоиде к его изображению $d\sigma$ на плоскости: $1/\mu = dS/d\sigma$, причем μ зависит от положения точки на эллипсоиде и от направления выбранного отрезка. Отношение μ/M наз. относительным масштабом, или увеличением длины, разность $(\mu/M - 1)$ — искажением длины. Численное значение главного масштаба M учитывается только при вычислениях координат точек К. п. и при использовании карты, а при исследованиях К. п. полагают $M = 1$.

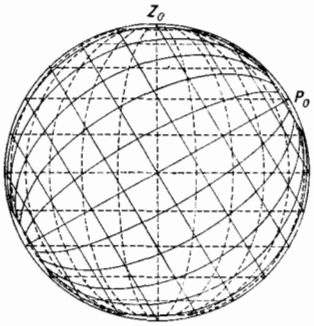
В картографии часто ограничиваются рассмотрением отображений на плоскость сферы нек-рого радиуса R, отклонениями к-рой от земного эллипсоида можно пренебречь или каким-либо способом их учесть. Поэтому далее имеются в виду отображения на плоскость xOy сферы, отнесенной к географич. координатам φ (широта) и λ (долгота).

Уравнения К. п. имеют вид

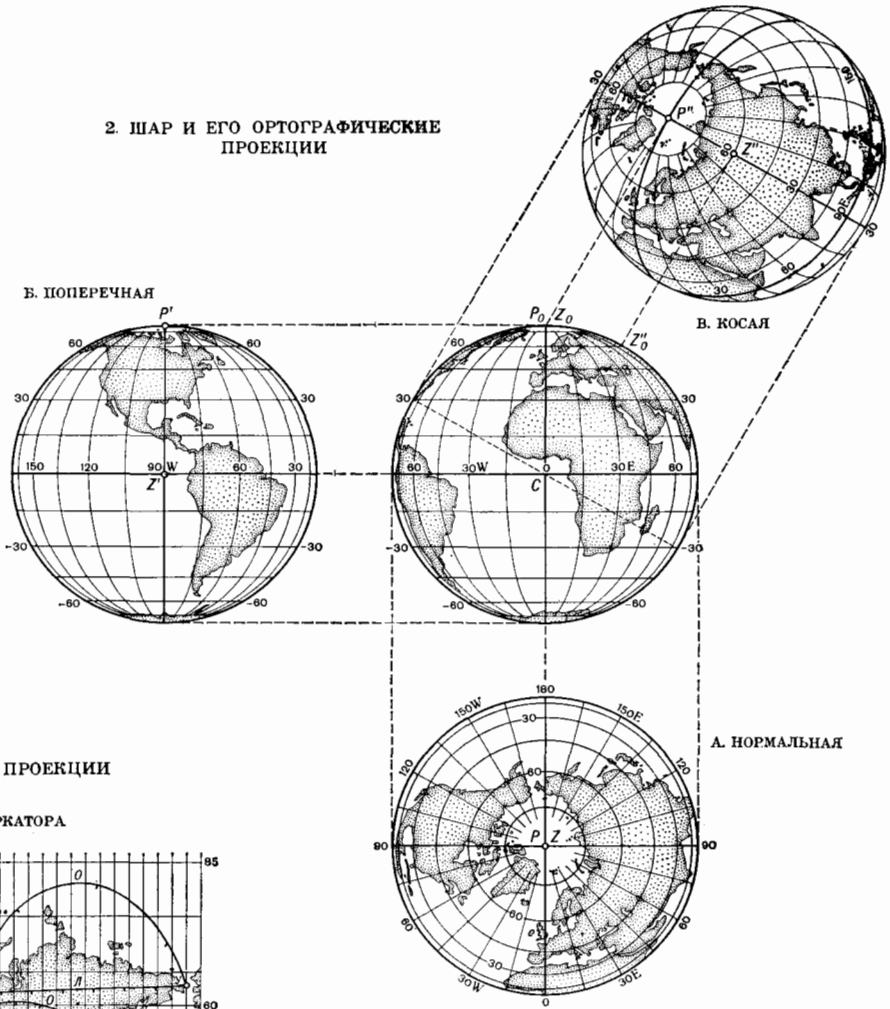
$$x = f_1(\varphi, \lambda), \quad y = f_2(\varphi, \lambda), \qquad (*)$$

где f_1 и f_2 — функции, удовлетворяющие нек-рым общим условиям (К. п. может быть определена также уравнениями, в к-рых фигурируют не прямоугольные координаты плоскости x, y, а какие-либо иные). Изображения меридианов $\lambda = \text{const}$ и параллелей $\varphi = \text{const}$ в данной К. п. образуют картографическую сетку.

1. СЕТИ СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТНЫХ ЛИНИЙ

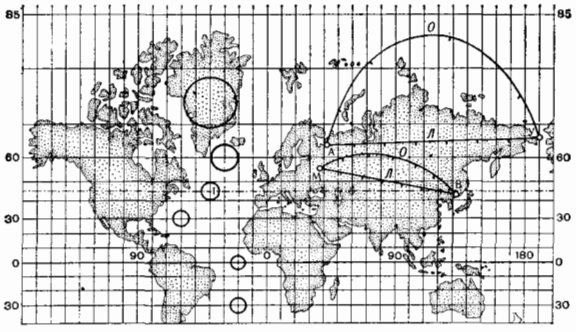


2. ШАР И ЕГО ОРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

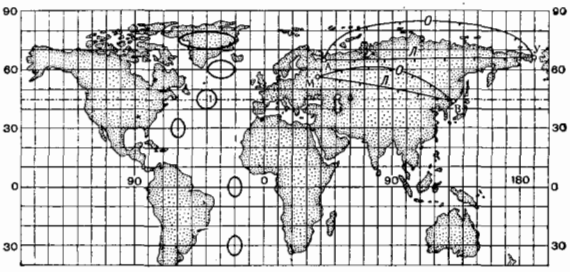


3. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

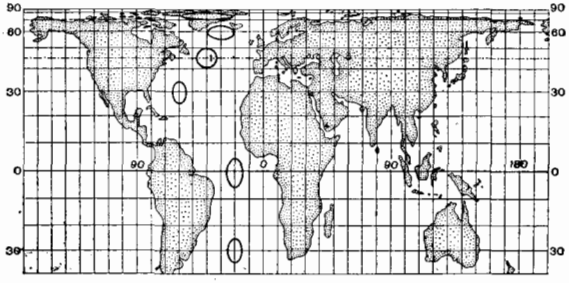
А. РАВНОУГОЛЬНАЯ МЕРКАТОРА



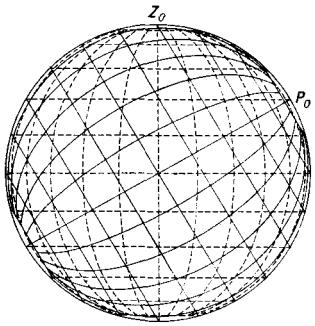
Б. РАВНОПРОМЕЖУТОЧНАЯ (ПРЯМОУГОЛЬНАЯ)



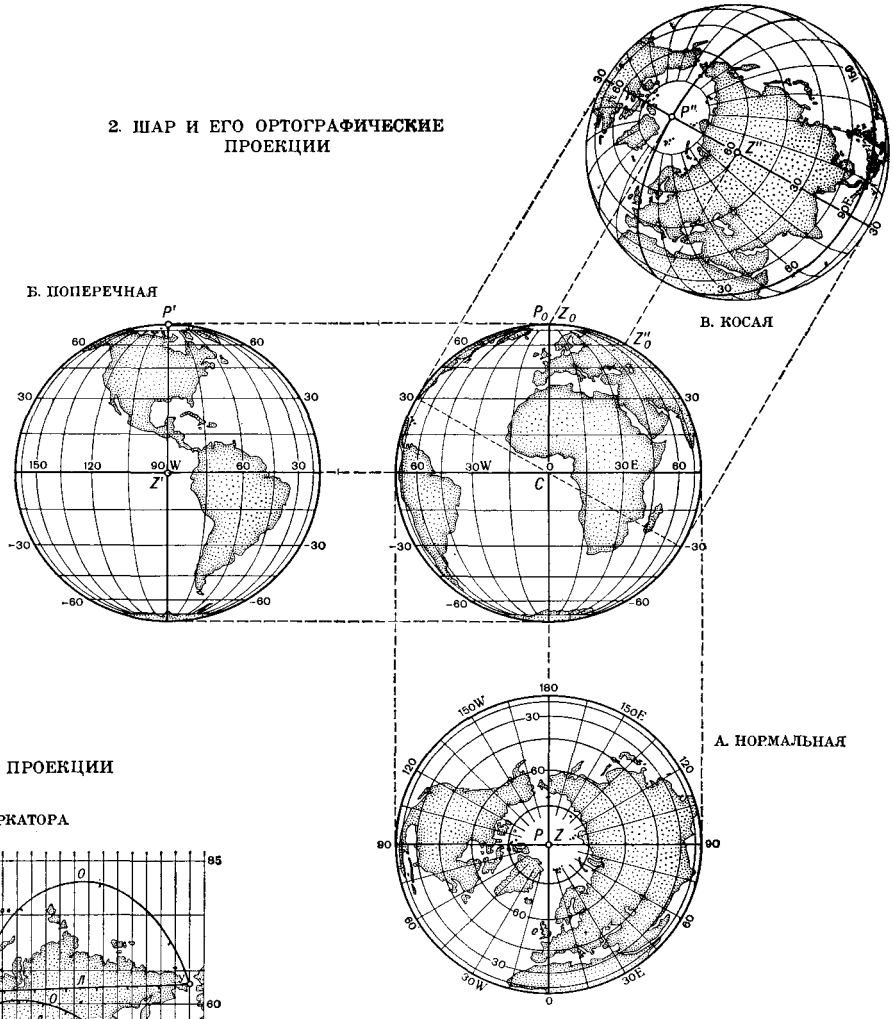
В. РАВНОВЕЛИКАЯ (ИЗОЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ)



1. СЕТИ СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТНЫХ ЛИНИЙ

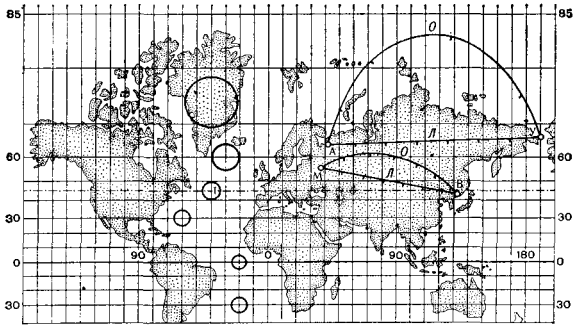


2. ШАР И ЕГО ОРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

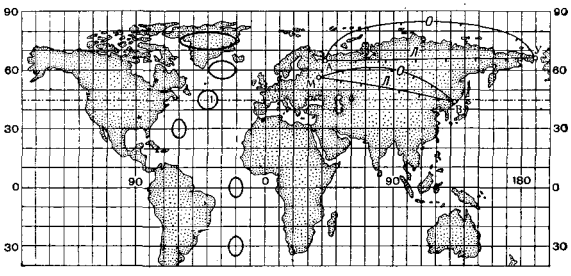


3. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

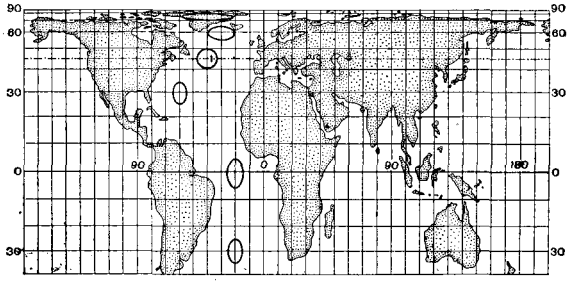
А. РАВНОУГОЛЬНАЯ МЕРКАТОРА



Б. РАВНОПРОМЕЖУТОЧНАЯ (ПРЯМОУГОЛЬНАЯ)

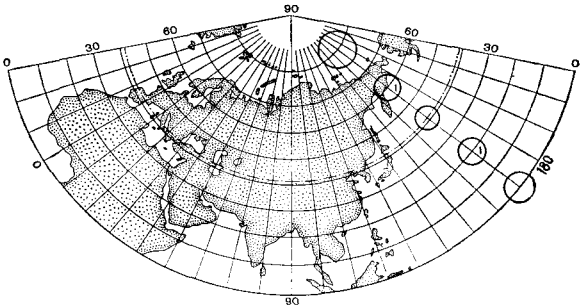


В. РАВНОВЕЛИКАЯ (ИЗОЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ)

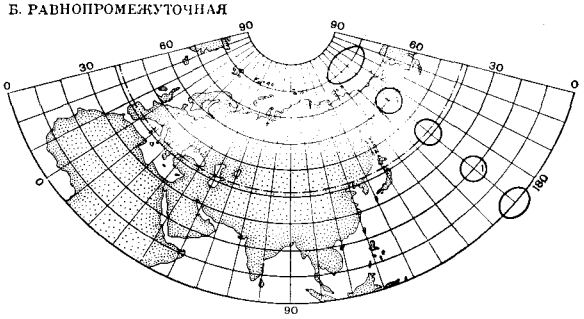


4. КОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

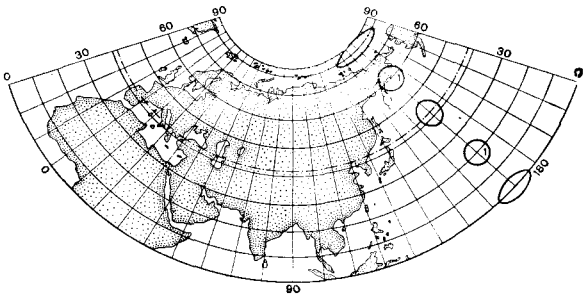
А. РАВНОУГОЛЬНАЯ



Б. РАВНОПРОМЕЖУТОЧНАЯ



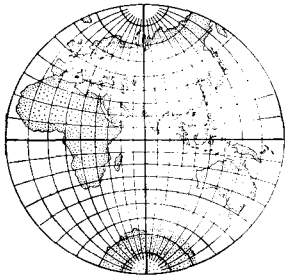
В. РАВНОВЕЛИКАЯ



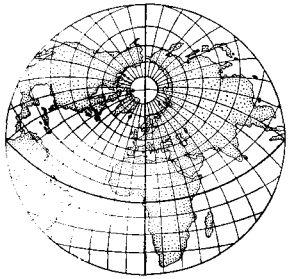
5. АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

А. РАВНОУГОЛЬНАЯ (СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ)

ПОПЕРЕЧНАЯ

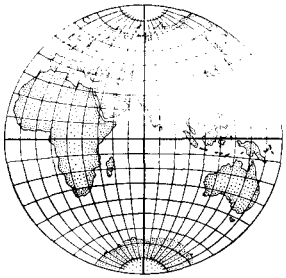


КОСАЯ

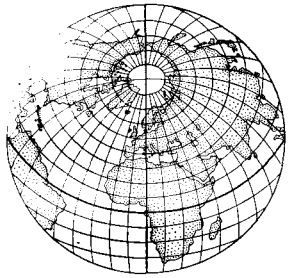


Б. РАВНОПРОМЕЖУТОЧНАЯ

ПОПЕРЕЧНАЯ



КОСАЯ

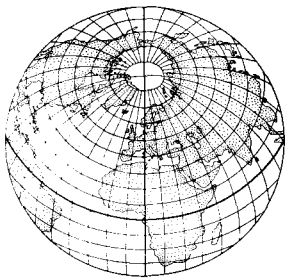


В. РАВНОВЕЛИКАЯ

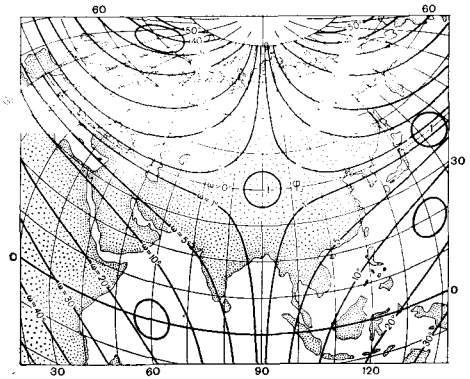
ПОПЕРЕЧНАЯ



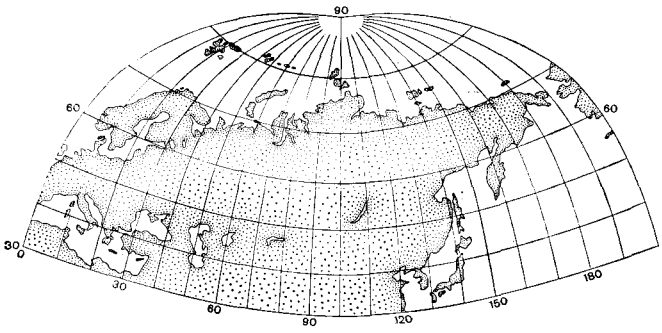
КОСАЯ



6. ПСЕВДОКОНИЧЕСКАЯ РАВНОВЕЛИКАЯ ПРОЕКЦИЯ БОННА

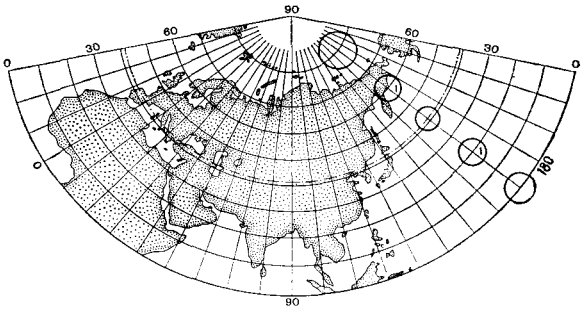


7. КОСАЯ ПЕРСПЕКТИВНО-ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ М.Д. СОЛОВЬЕВА

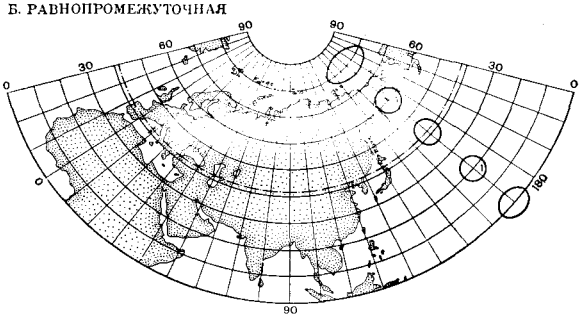


4. КОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

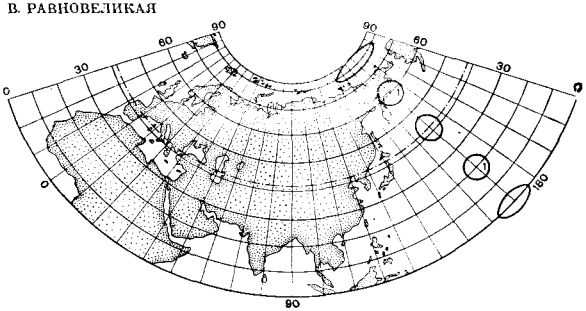
А. РАВНОУГОЛЬНАЯ



Б. РАВНОПРОМЕЖУТОЧНАЯ



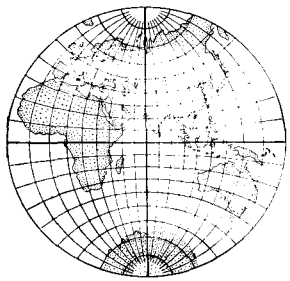
В. РАВНОВЕЛИКАЯ



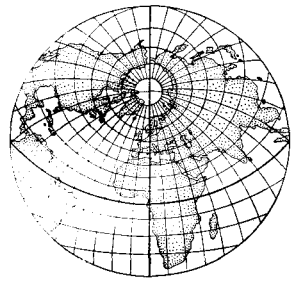
5. АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

А. РАВНОУГОЛЬНАЯ (СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ)

ПОПЕРЕЧНАЯ

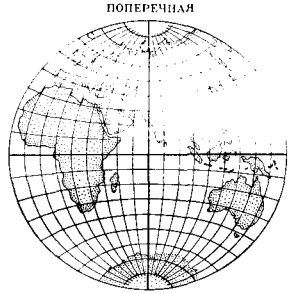


КОСАЯ

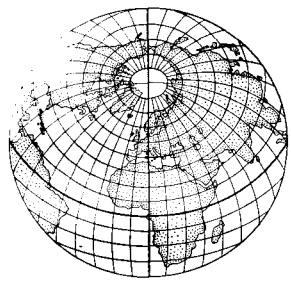


Б. РАВНОПРОМЕЖУТОЧНАЯ

ПОПЕРЕЧНАЯ



КОСАЯ

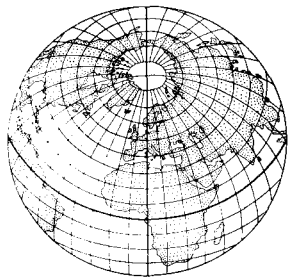


В. РАВНОВЕЛИКАЯ

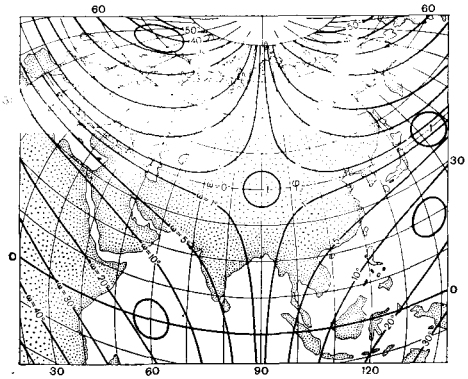
ПОПЕРЕЧНАЯ



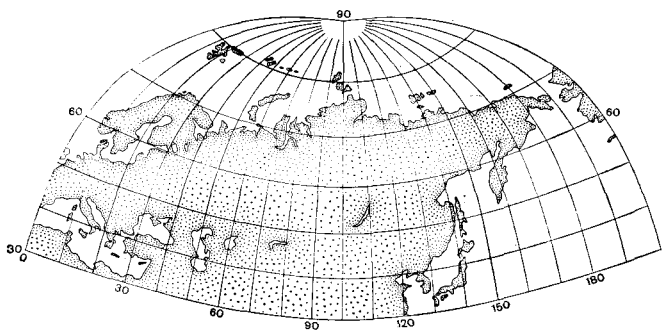
КОСАЯ



6. ПСЕВДОКОНИЧЕСКАЯ РАВНОВЕЛИКАЯ ПРОЕКЦИЯ БОННА

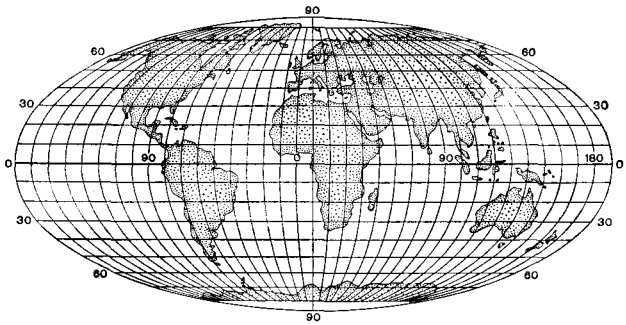


7. КОСАЯ ПЕРСПЕКТИВНО-ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ М.Д. СОЛОВЬЕВА



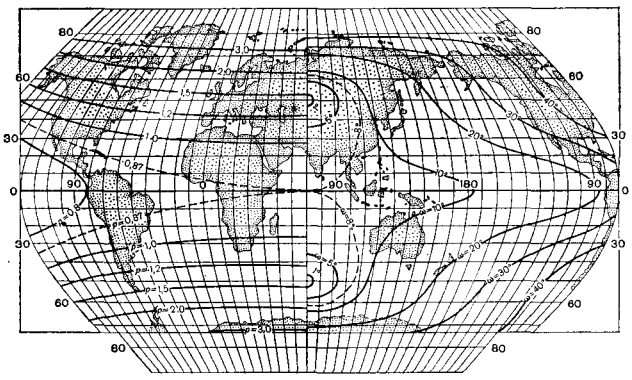
8. ПСЕВДОЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

А. РАВНОВЕЛИКАЯ ПРОЕКЦИЯ МОЛЬВЕЙДЕ



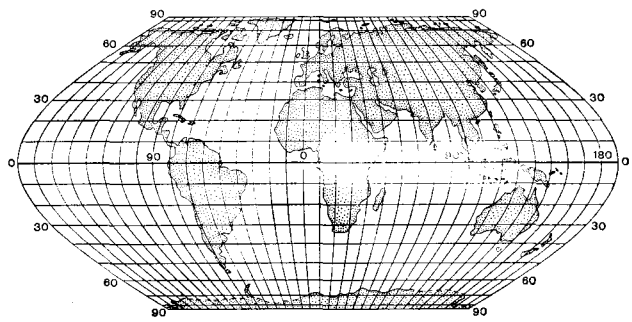
Изображения меридианов—эллипсы. Длины сохраняются вдоль параллелей с широтами $\varphi = \pm 40°,7$

В. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ЦНИИГАиК



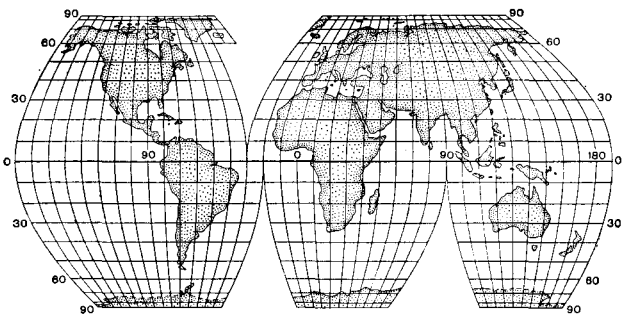
Длины сохраняются вдоль экватора по всем меридианам

Б. РАВНОВЕЛИКАЯ СИНУСОИДАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ В.В. КАВРАЙСКОГО



Изображения меридианов—дуги синусоид. Длины сохраняются вдоль параллелей с широтами $\varphi = \pm 46°,5$

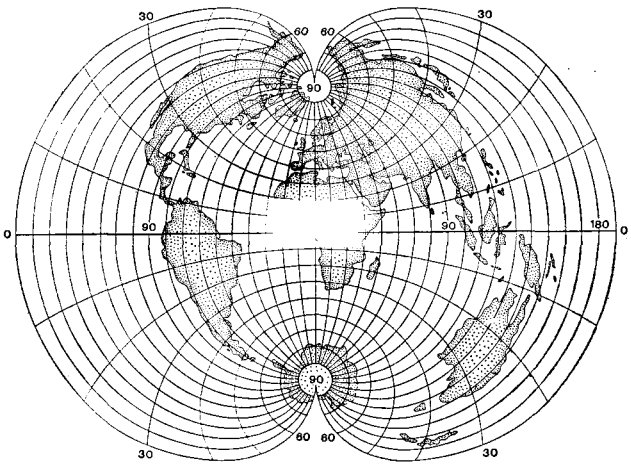
Г. ПРОЕКЦИЯ БСАМ



Использован способ Гуда построения надрезанной проекции: допущены разрывы изображения на океанах с целью уменьшения искажений на континентах

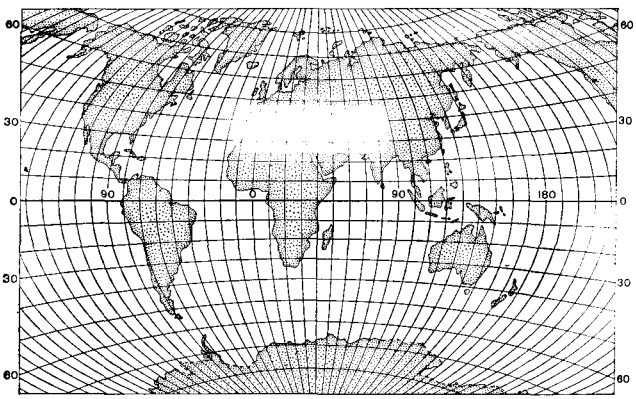
9. ПОЛИКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

А. ПРОСТАЯ



Проекция произвольная. Длины сохраняются вдоль всех параллелей и по среднему меридиану

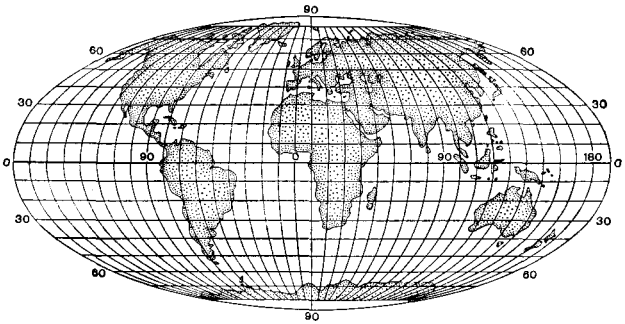
Б. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ Г.А. ГИНЗБУРГА



Длины сохраняются вдоль параллелей с широтами $\varphi = \pm 45°$

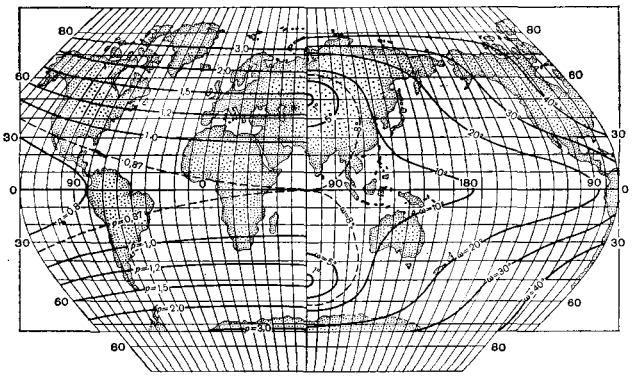
8. ПСЕВДОЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

А. РАВНОВЕЛИКАЯ ПРОЕКЦИЯ МОЛЬВЕЙДЕ



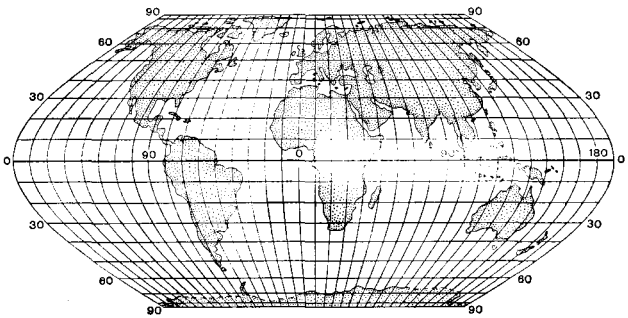
Изображения меридианов—эллипсы. Длины сохраняются вдоль параллелей с широтами $\varphi = \pm 40°,7$

В. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ЦНИИГАиК



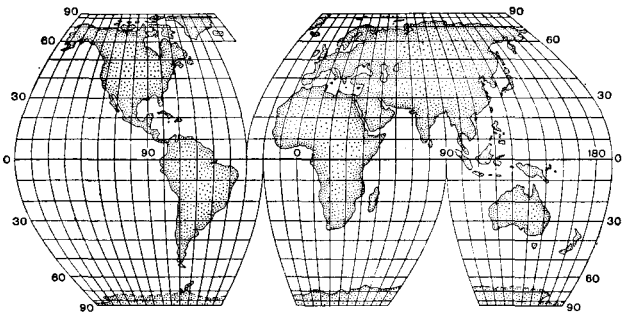
Длины сохраняются вдоль экватора по всем меридианам

Б. РАВНОВЕЛИКАЯ СИНУСОИДАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ В.В. КАВРАЙСКОГО



Изображения меридианов—дуги синусоид. Длины сохраняются вдоль параллелей с широтами $\varphi = \pm 46°,5$

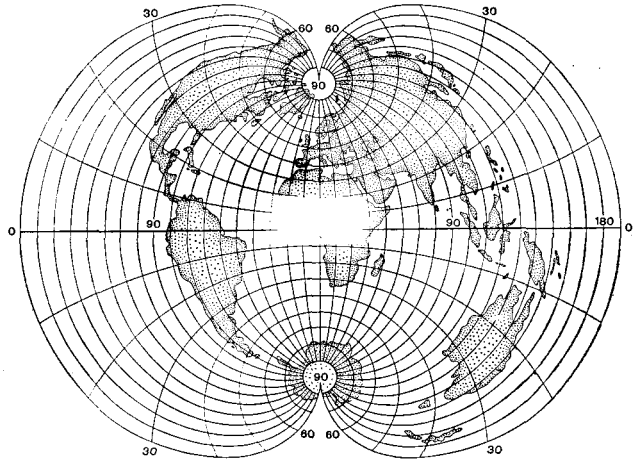
Г. ПРОЕКЦИЯ БСАМ



Использован способ Гуда построения надрезанной проекции: допущены разрывы изображения на океанах с целью уменьшения искажений на континентах

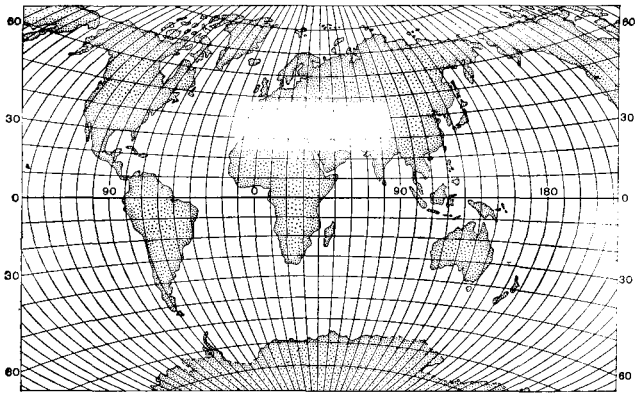
9. ПОЛИКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

А. ПРОСТАЯ



Проекция произвольная. Длины сохраняются вдоль всех параллелей и по среднему меридиану

Б. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ Г.А. ГИНЗБУРГА



Длины сохраняются вдоль параллелей с широтами $\varphi = \pm 45°$

При картографировании областей, содержащих географич. полюсы, иногда применяют не географич. координаты, а другие, в к-рых полюсы оказываются обыкновенными точками координации. Напр., используют сферич. координаты, координатные линии к-рых — так наз. вертикалы (условная долгота на них a=const) и альмукантараты (где полярные расстояния z=const)—аналогичны географич. меридианам и параллелям, но их полюс $Z_0(\varphi_0, \lambda_0)$ не совпадает с географич. полюсом P_0 (рис. 1). Всякая К. п., данная уравнениями (*), наз. нормальной, или прямой ($\varphi_0=\pi/2$). Если та же самая проекция сферы вычисляется по формулам (*), в к-рых вместо φ, λ фигурируют z, a, то эта проекция наз. поперечной при $\varphi_0=0$, и косой, если $0<\varphi_0<\pi/2$. На рис. 2 показаны нормальная (А), поперечная (Б) и косая (В) ортографич. проекции шара.

Искажения в бесконечно малой области около какой-либо точки проекции подчиняются нек-рым общим законам. Во всякой точке карты, составленной в проекции, не являющейся равноугольной (см. ниже), существует два таких взаимно перпендикулярных направления, к-рым на отображаемой поверхности соответствуют также взаимно перпендикулярные направления — так наз. главные направления отображения. Масштабы по этим направлениям имеют экстремальные значения $\mu_{max}=a$ и $\mu_{min}=b$. Если в какой-либо К. п. изображения меридианов и параллелей пересекаются под прямым углом, то их направления и есть главные для данной К. п. Искажения длин в данной точке К. п. наглядно представляет эллипс искажений, подобный и подобно расположенный изображению бесконечно малой окружности, описанной вокруг соответствующей точки отображаемой поверхности. Полудиаметры этого эллипса численно равны частным масштабам в данной точке в соответствующих направлениях, полуоси эллипса равны экстремальным масштабам, а направления их — главные.

В равноугольных (конформных) К. п. масштаб зависит только от положения точки и не зависит от направления. Эллипсы искажения — окружности. Примеры: проекция Меркатора, стереографическая проекция, равноугольная коническая проекция и др. (см. рис. 3А, 5А, 4А).

В равновеликих (эквивалентных) К. п. сохраняются площади; точнее, площади фигур на картах, составленных в таких проекциях, пропорциональны площадям соответствующих фигур в натуре, причем коэффициент пропорциональности — величина, обратная квадрату главного масштаба карты. Эллипсы искажений всюду имеют одинаковую площадь, различаясь формой и ориентировкой; см., например, рис. 3В, 4В, 5В.

Произвольные К. п. (см., напр., рис. 7) не относятся ни к равноугольным, ни к равновеликим. Из них выделяют равнопромежуточные, в к-рых один из главных масштабов равен единице (см. рис. 3Б, 4Б, 5Б), и ортодромические, в к-рых большие круги сферы (ортодромы) изображаются прямыми.

При изображении сферы на плоскости свойства равноугольности, равновеликости, равнопромежуточности и ортодромичности несовместимы.

Для показа искажений в разных местах изображаемой области применяют: эллипсы искажений (см., напр., рис. 3, 4); изоколы — линии равного значения искажений (на рис. 8 В см. изоколы наибольшего искажения углов ω и изоколы масштаба площадей p); изображения в нек-рых местах карты нек-рых сферич. линий, обычно ортодромий «О» и изогональных траекторий меридианов-локсодромий «Л» (см., напр., рис. 3А, 3Б).

По виду картографической сетки К. п. подразделяют на следующие группы.

Цилиндрические проекции — проекции, в к-рых меридианы изображаются равноотстоящими параллельными прямыми, а параллели — прямыми, перпендикулярными меридианам (см. рис. 3).

Конические проекции — проекции, в к-рых параллели изображаются концентрич. окружностями, меридианы — ортогональными им прямыми, причем углы между последними пропорциональны соответствующим разностям долгот (см. рис. 4).

Азимутальные проекции — проекции, в к-рых параллели изображаются концентрич. окружностями, меридианы — их радиусами, при этом углы между последними равны соответствующим разностям долгот (см. рис. 5).

Псевдоконические проекции — проекции, в к-рых параллели изображаются концентрич. окружностями, средний меридиан — прямой линией, остальные меридианы — кривыми симметричными относительно изображения среднего меридиана (см., напр., рис. 6).

Псевдоцилиндрические проекции — проекции, в к-рых параллели изображаются параллельными прямыми, средний меридиан — прямой линией, перпендикулярной этим прямым, остальные меридианы — кривыми (см. рис. 8).

Поликонические проекции — проекции, в к-рых параллели изображаются окружностями с центрами, расположенными на одной прямой, изображающей средний меридиан, остальные меридианы — кривыми, также симметричными относительно этой прямой (см. рис. 9). При построении конкретных поликонических проекций ставятся дополнительные условия.

Существуют и другие проекции, не относящиеся к указанным видам. Цилиндрические, конические и азимутальные проекции, называемые простейшими, часто относят к круговым проекциям в широком смысле, выделяя из них круговые проекции в узком смысле — проекции, в к-рых все меридианы и параллели изображаются окружностями.

Об использовании, выборе, исследованиях свойств, преобразованиях К. п. см. статью *Картографии математические задачи* и лит. при ней. *Г. А. Мещеряков.*

КАСАНИЕ — геометрическое понятие, обозначающее, что в некоторой точке две кривые (кривая и поверхность) имеют общую *касательную* прямую или две поверхности имеют общую *касательную плоскость*. Порядок К.— характеристика близости двух кривых (кривой и поверхности или двух поверхностей) в окрестности их общей точки. См. *Соприкосновение.* *БСЭ-3.*

КАСАТЕЛЬНАЯ к кривой линии — прямая, представляющая предельное положение секущей. Пусть M — точка кривой L (рис. 1). На L выбирается вторая точка M' и проводится прямая MM'. Точка M считается



Рис. 1.

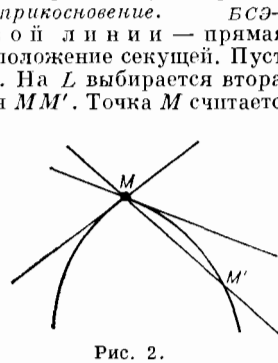


Рис. 2.

неподвижной, а точка M' приближается к M по кривой L. Если при неограниченном приближении M' к M прямая MM' стремится к определенной кривой MT, то MT наз. касательной к кривой L в точке M.

Не у всякой непрерывной кривой имеются К., поскольку прямая MM' может не стремиться к предельному положению или может стремиться к двум разным предельным положениям, когда M' стремится к M с разных сторон от M (рис. 2). Если кривая на плоскости в прямоугольных координатах определяется уравнением $y=f(x)$ и $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то угловой коэффициент К. в точке M с абсциссой x_0 равен значению производной $f'(x_0)$ в точке x_0; уравнение К. в этой точке имеет вид:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Уравнение К. к пространственной кривой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+\lambda\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\quad -\infty<\lambda<+\infty.$$

К. к поверхности S в точке M наз. прямая, проходящая через точку M и лежащая в касательной плоскости к S в точке M. *БСЭ-3.*

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ к поверхности S в точке M — плоскость, проходящая через точку M и характеризующаяся тем свойством, что расстояние от этой плоскости до переменной точки M' поверхности S при произвольном стремлении M' к M является бесконечно малым по сравнению с расстоянием MM'. Если поверхность S задана уравнением $z=f(x, y)$, то уравнение К. п. в точке (x_0, y_0, z_0), где $z_0=f(x_0, y_0)$, имеет вид:

$$z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0)$$

в том и только том случае, когда функция $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) полный дифференциал. В этом случае A и B суть значения частных производных $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ в точке (x_0, y_0). *БСЭ-3.*

КАСАТЕЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — см. *Прикосновения преобразование.*

КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ дифференцируемого многообразия M — *векторное расслоение* $\tau: TM\to M$, пространство к-рого TM является касательным пространством к M (объединением касательных пространств $TM|_x$ в точке $x\in M$), состоящим из касательных векторов к M, а проекция τ отображает $TM|_x$ в x. Сечение К. р. $\tau(M)$ — векторное поле на многообразии M. Атлас многообразия TM определяется атласом многообразия M и условием локальной тривиальности расслоения $\tau(M)$. Функции перехода К. р. являются матрицами Якоби функций перехода атласа многообразия.

К К. р. присоединено главное расслоение реперов многообразия M. Расслоение $\tau^*(M)$, двойственное К. р. $\tau(M)$, наз. кокасательным расслоением, а его пространство T^*M — кокасательным пространством. Сечениями его являются линейные дифференциальные формы (*Пфаффа формы*).

Дифференцируемое отображение $h: M\to N$ индуцирует морфизм К. р. $\tau(M)\to\tau(N)$; соответствующее отображение касательных пространств $h^T: TM\to TN$ наз. касательным к h отображением. В частности, если $i: M\to N$ — иммерсия, то $\tau(M)$ является подрасслоением *индуцированного расслоения* $i^*\tau(N)$. Факторрасслоение $\nu(i)=i^*\tau(M)/\tau(M)$ наз. нормальным расслоением иммерсии. Двойственно, если $j: M\to N$ — субмерсия, то факторрасслоение $\tau(M)/j^*\tau(M)$ наз. субрасслоением j. Если в качестве M и N взяты соответственно TM и M, а $h=\tau: TM\to M$, то $\tau^*\tau(M)$ наз. вторым касательным расслоением.

Если К. р. $\tau(M)$ — тривиально, то M наз. параллелизуемым многообразием.

Лит.: [1] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973.

М. И. Войцеховский.

КАСАТЕЛЬНЫЙ КОНУС—1) К. к. к выпуклой поверхности S в точке O—поверхность $V(O)$ конуса, образованного полупрямыми, исходящими из O и пересекающими выпуклое тело, ограниченное S по крайней мере в одной еще точке, отличной от O (сам этот конус иногда наз. телесным К. к.). Другими словами, $V(O)$ — граница пересечения всех полупространств, содержащих S и определяемых опорными плоскостями к S в точке O. Если $V(O)$ — плоскость, то O наз. гладкой точкой S, если $V(O)$ — двугранный угол, то O наз. ребристой точкой, наконец, если $V(O)$ — невырожденный (выпуклый) конус, то O наз. конической точкой поверхности S.

Лит.: [1] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.
М. И. Войцеховский.

2). К. к. к алгебраическому многообразию X в точке x—множество предельных положений секущих прямых, проходящих через x. Точнее, если алгебраич. многообразие X вложено в аффинное пространство A^n и задается идеалом $\mathfrak{A}$ кольца $k[T_1, \ldots, T_n]$, а точка $x \in X$ имеет координаты $(0, \ldots, 0)$, то касательный конус $C(X, x)$ к X в точке x задается идеалом начальных форм многочленов из $\mathfrak{A}$ (если $F = F_k + F_{k+1} + \ldots$ — разложение F на однородные многочлены и $F_k \neq 0$, то F_k наз. начальной формой F). Существует другое определение, пригодное для произвольных нётеровых схем (см. [1]): пусть $O_{X,x}$— локальное кольцо схемы X в точке x, $\mathfrak{M}$ — его максимальный идеал, тогда спектр градуированного кольца

$$\oplus_{n \geqslant 0} (\mathfrak{M}^n / \mathfrak{M}^{n+1})$$

наз. касательным конусом к X в точке x.

Многообразие X в окрестности точки x в некотором смысле устроено так же, как К. к. Напр., если К. к. приведенный, нормальный или регулярный, то таким же будет локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$. Размерность и кратность X в точке x совпадают с размерностью К. к. и кратностью его в вершине. К. к. совпадает с *Зариского касательным пространством* тогда и только тогда, когда x — неособая точка X. Морфизм многообразий индуцирует отображение К. к.

Лит.: [1] Igusa J., «Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto», 1951, v. 27, p. 189—201; [2] Samuel P., Méthodes d'algèbre abstracte en géométrie algébrique, B., 1967; [3] Хиронака Ж., «Математика», 1965, т. 9, № 6, с. 2—70; [4] Whitney H., Differential and Combinatorial Topology, N.Y., 1965, p. 205—44.
В. И. Данилов.

КАСАТЕЛЬНЫЙ ПОТОК — поток в пространстве Ω_k ортонормированных k-реперов n-мерного риманова многообразия M, обладающий следующим свойством. Пусть $\omega(t)$ — произвольная траектория потока; по определению пространства Ω_k, $\omega(t)$ есть нек-рый k-репер $\xi_1(t), \ldots, \xi_k(t)$ в нек-рой точке $x(t) \in M$ (т. е. в касательном пространстве к M в этой точке). Требуется, чтобы $dx(t)/dt = \xi_1(t)$ (вариант: требуется, чтобы сопровождающий репер параметризованной кривой $x(t)$ в M имел своими первыми k векторами как раз $\xi_1(t), \ldots, \xi_k(t)$). Для получения содержательных результатов о К. п. приходится накладывать различные дополнительные условия. Полученные результаты обобщают нек-рые из свойств *геодезических потоков* (являющихся частным случаем К. п., когда $k=1$ и ковариантная производная $D\xi_1/dt = 0$). См. [1], [2].

Иногда касательными потоками наз. различные типы потоков в касательном пространстве к нек-рому многообразию M (или — считая, что M снабжено римановой или финслеровой метрикой,— в пространстве единичных касательных векторов). Напр., К. п. наз. *пульверизации* (вообще, уравнения 2-го порядка) на M и уравнения в вариациях для нек-рого потока на M. Но такое словоупотребление не получило распро-

странения — со временем находились более употребительные термины.

Лит.: [1] Арнольд В. И., «Докл. АН СССР», 1961, т. 138, № 2, с. 255—57; [2] его же, «Сиб. матем. ж.», 1961, т. 2, № 6, с. 807—13.

Д. В. Аносов.

КАСАТЕЛЬНЫЙ ПУЧОК в алгебраической геометрии — пучок Θ_X на алгебраич. многообразии или схеме X над полем k, сечения к-рого над открытым аффинным подмножеством $U=\mathrm{Spec}(A)$ составляют A-модуль k-дифференцирований $\mathrm{Der}_k(A, A)$ кольца A. Эквивалентное определение состоит в том, что Θ_X есть пучок гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(\Omega^1_{X/k}, O_X)$ пучка дифференциалов $\Omega^1_{X/k}$ в структурный пучок O_X (см. *Дифференциалов модуль*).

Для любой рациональной k-точки $x\in X$ слой $\Theta_X(x)$ пучка Θ_X совпадает с касательным пространством Зарискогo $T_{X,x}$ к схеме X в точке x, т. е. с векторным k-пространством $\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2, k)$, где $\mathfrak{M}_x$ — максимальный идеал локального кольца $O_{X,x}$. К. п. Θ_X служит пучком ростков сечений векторного расслоения $V(\Omega^1_{X/k})$, двойственного пучку Ω^1_X (касательного расслоения к схеме X). В случае, когда X — гладкая связная k-схема, пучок Θ_X является локально свободным пучком на X ранга, равного размерности X.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., *Основы алгебраической геометрии*, М., 1972.

И. В. Долгачев.

КАСАТЕЛЬНЫХ ИНДИКАТРИСА кривой Γ в евклидовом пространстве E^n — расположенная на сфере $S^n\subset E^n$ кривая Γ^*, радиус-векторы точек к-рой параллельны касательным векторам τ кривой Γ. Для того чтобы сферич. кривая L была К. и. нек-рой замкнутой кривой в E^n, необходимо и достаточно, чтобы L не могла поместиться ни в какой открытой полусфере (теорема Крейна).

Лит.: [1] Выгодский М. Я., Дифференциальная геометрия, М.— Л., 1949.

М. И. Войцеховский.

КАСКАД в теории динамических систем, динамическая система с дискретным временем,— *динамическая система*, определяемая действием аддитивной группы целых чисел $\mathbb{Z}$ (или аддитивной полугруппы натуральных чисел $\mathbb{N}$) на нек-ром фазовом пространстве W. Согласно общему определению действия группы (полугруппы), это означает, что каждому целому (натуральному) числу n сопоставлено нек-рое преобразование $S_n: W\to W$, причем

$$S_{n+m}(w)=S_n(S_m(w)) \qquad (*)$$

для всех $w\in W$. Поэтому все преобразования S_n получаются из одного преобразования $S=S_1$ посредством итерирования и (если $n<0$) обращения:

$$S_n=(S)^n \text{ при } n>0, \quad S_n=(S^{-1})^n \text{ при } n<0.$$

Тем самым изучение К. по существу сводится к изучению свойств порождающего его преобразования S, и в этом смысле К. являются простейшими динамич. системами. Поэтому К. исследуются весьма интенсивно, хотя в приложениях чаще всего встречаются динамич. системы с непрерывным временем *(потоки)*. Принципиальная сторона дела для потоков и К. обычно одинакова, но случай К. несколько проще технически, и в то же время полученные для них результаты часто без особого труда удается перенести на потоки — иногда путем формальной редукции свойств потоков к свойствам К., но чаще путем нек-рого видоизменения доказательств.

Как и для любых динамич. систем, обычно фазовое пространство W наделено нек-рой структурой, и преобразования S_n ее сохраняют. Напр., W может быть гладким многообразием, топологич. пространством или пространством с мерой; соответственно говорят о непрерывном, гладком или измеримом К.

(впрочем, в последнем случае определение обычно несколько видоизменяют, требуя, чтобы каждое S_n было определено почти всюду и чтобы при любых n, m равенство (*) имело место при почти всех w). Преобразование S, порождающее К., является в этих случаях *диффеоморфизмом*, *гомеоморфизмом* или автоморфизмом пространства с мерой (если речь идет о группе преобразований), либо гладким отображением, непрерывным отображением или эндоморфизмом пространства с мерой (если К. является полугруппой).

Д. В. Аносов.

КАСКАДНЫЙ МЕТОД, метод Лапласа,— метод теории дифференциальных уравнений с частными производными, позволяющий в нек-рых случаях находить общее решение линейного уравнения с частными производными гиперболич. типа

$$Lu \equiv u_{xy} + a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u = f(x, y), \quad (1)$$

построив последовательность уравнений

$$L_i u \equiv u_{xy} + a_i(x, y)\, u_x + b_i(x, y)\, u_y + c_i(x, y) u = f_i(x, y), \quad (2_i)$$

$i = \pm 1, \pm 2, \ldots$, через решения к-рых выражается решение уравнения (1).

Уравнение (1) может быть записано в одном из следующих видов:

$$v_x + bv - hu = f, \quad w_y + aw - ku = f,$$

где

$$h = a_x + ab - c, \quad k = b_y + ab - c,$$
$$v = u_y + au, \quad w = u_x + bu.$$

Функции h и k наз. инвариантами уравнения (1).

При $h = 0$ решение уравнения (1) сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений и его решение имеет вид:

$$u = e^{-\int a\,dy}\left[X + \int\left\{Y + \int f e^{\int b\,dx}\,dx\right\} e^{\int a\,dy - b\,dx}\,dy\right],$$

где X и Y — произвольные функции, зависящие соответственно от x и y. Аналогично, если $k \equiv 0$, то решение уравнения (1) запишется следующим образом:

$$u = e^{-\int b\,dx}\left[Y + \int\left\{X + \int f e^{\int a\,dy}\,dy\right\} e^{\int b\,dx - a\,dy}\,dx\right].$$

В случае $h \neq 0$, решение u уравнения (1) может быть получено из решения u_1 уравнения (2_1), коэффициенты a_1, b_1, c_1 и правая часть f_1 к-рого имеют вид:

$$a_1 = a - (\ln h)_y, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c - a_x + b_y - b\,(\ln h)_y,$$
$$f_1 = f \cdot (a - (\ln h)_y),$$

по формуле

$$u = \frac{u_{1x} + bu_1 - f}{h}.$$

Для уравнения (2_1) инварианты h_1 и k_1 выражаются по формулам

$$h_1 = 2h - k - (\ln h)_{xy}, \quad k_1 = h.$$

Если $h_1 \equiv 0$, то решение u_1 уравнения (2_1) получается описанным выше способом; если $h_1 \neq 0$, то процесс продолжается дальше построением уравнений (2_i), при $i = 2, 3, \ldots$, через решения последовательности уравнений с помощью квадратур выражается решение уравнения (1). В случае $k \neq 0$, можно построить аналогичную цепочку уравнений (2_i) при $i = -1, -2, \ldots$. Если на каком-нибудь шаге h_i (или k_i) обратится в нуль, то общее решение уравнения (1) находится в квадратурах.

К. м. может быть использован для перехода от данного уравнения к уравнению, для к-рого легче приме-

нить какой-либо другой из известных аналитических или численных методов решения; для получения семейств уравнений, решения к-рых известны и коэффициенты к-рых достаточно хорошо аппроксимируют коэффициенты уравнений, встречающихся в важных прикладных задачах; для получения основных операторов в теории возмущений операторов.

К. м. указан П. Лапласом [1] в 1773 и развит Г. Дарбу [2].

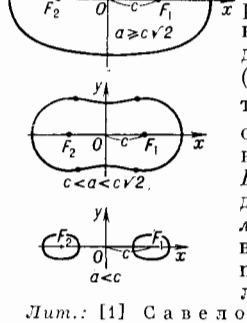
Лит.: [1] Laplace P. S., Oeuvres complètes, t. 9, P., 1893, p. 5—68; [2] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, 2 ed., t. 2, P., 1915; [3] Трикоми Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, пер. с итал., М., 1957, с. 177—86; [4] Бабич В. М. и др., Линейные уравнения математической физики, М., 1964; [5] Домбровский Г. А., Метод аппроксимации адиабаты в теории плоских течений газа, М., 1964; [6] Чекмарев Т. В., «Изв. ВУЗов. Математика», 1972, № 11, с. 72—9; [7] Пашковский В. И., «Дифференциальные уравнения», 1976, т. 12, № 1, с. 118—28.

В. И. Пашковский.

КАСП, обыкновенная точка возврата,— особая точка алгебраич. кривой специального типа. А именно, особая точка x алгебраич. кривой X над алгебраически замкнутым полем k наз. К., если пополнение ее локального кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ изоморфно пополнению локального кольца плоской алгебраич. кривой $y^2+x^3=0$ в начале координат.

КАССИНИ ОВАЛ — плоская алгебраич. кривая 4-го порядка, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид:

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=a^4-c^4.$$



К. о. — множество точек (см. рис.), произведение расстояний каждой из к-рых до двух заданных точек $F(-c, 0)$ и $F_1(c, 0)$ (фокусов) есть величина постоянная. При $a\geqslant c\sqrt{2}$ К. о.— овальная линия, при $c<a<c\sqrt{2}$— кривая с «талией», при $a=c$ — *Бернулли лемниската*, при $a<c$ — два овала. К. о. относятся к *лемнискатам*. К. о. рассматривались Дж. Кассини (G. Cassini, 17 в.) при попытках определить орбиту Земли.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

КАТАЛАНА ПОВЕРХНОСТЬ — линейчатая поверхность, прямолинейные образующие к-рой параллельны одной и той же плоскости. Ее стрикционная линия плоская. Радиус-вектор К. п.: $r=\rho(u)+vl(u)$, причем $l''(u)\neq 0$, $(l, l', l'')=0$. Если все образующие К. п. пересекают одну и ту же прямую, то она является *коноидом*.

Лит.: [1] Catalan E., Mémoire sur les surfaces gauches à plan directeur, P., 1843.

И. Х. Сабитов.

КАТЕГОРИЧНАЯ СИСТЕМА АКСИОМ — всякая система аксиом Σ, для к-рой все алгебраические системы сигнатуры Σ, удовлетворяющие этим аксиомам, изоморфны. Из теоремы Мальцева — Тарского об элементарном расширении следует, что модели категоричной системы Σ аксиом 1-го порядка имеют конечную мощность. Верно и обратное: для любой конечной алгебраич. системы A существует категоричная система Σ аксиом 1-го порядка, модели к-рой изоморфны A. Пусть Σ_0 — множество универсальных замыканий формул

1) $0\neq x+1$, 2) $x+1=y+1\longrightarrow x=y$,

3) $x+0=x$, 4) $x+(y+z)=(x+y)+z$,

5) $x\cdot 0=0$, 6) $x\cdot(y+1)=(x\cdot y)+x$,

7) $(\varphi(0)\ \&\ \forall x(\varphi(x)\longrightarrow\varphi(x+1)))\longrightarrow\forall x\varphi(x)$,

где $\varphi(x)$ — любая формула сигнатуры $\langle +, \cdot, 0, 1\rangle$. Система аксиом Σ_0 известна под названием арифметики Пеано. Арифметика натуральных чисел N

будет моделью для Σ_0. Однако существуют модели Σ_0, не изоморфные N. Пусть система Σ_1 получается из Σ_0 заменой схемы элементарной индукции 7) на аксиому полной индукции

$$\forall P\,((P(0) \,\&\, \forall x\,(P(x) \longrightarrow P(x+1))) \longrightarrow \forall x P(x)),$$

записанную на языке 2-го порядка. Система Σ_1 является категоричной, и все модели Σ_1 изоморфны арифметике натуральных чисел N. Другой способ категоричного описания арифметики N состоит в добавлении к Σ_0 следующей бесконечной аксиомы (языка $L_{\omega_1\omega}$):

$$\forall x\,(x=0 \vee x=1 \vee \ldots \vee x=n \vee \ldots),$$

где n — сокращение для суммы $1+\ldots+1$ из n единиц.

Лит.: [1] Шенфилд Дж., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975. *Е. А. Палютин.*

КАТЕГОРИЧНОСТЬ В МОЩНОСТИ $\varkappa$ — свойство класса алгебраич. систем, заключающееся в изоморфизме всех систем из этого класса, имеющих мощность $\varkappa$. Теория T 1-го порядка наз. категоричной в мощности $\varkappa$, если все модели T мощности $\varkappa$ изоморфны одной алгебраич. системе. Счетная полная теория T категорична в счетной мощности тогда и только тогда, когда для любого натурального числа n существует такое конечное множество F_n формул сигнатуры T со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$, что любая формула сигнатуры T со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$ эквивалентна в теории T одной из формул множества F_n. Совокупность аксиом:

1) $x < y \longrightarrow \neg (y < x)$,

2) $(x < y \,\&\, y < z) \longrightarrow x < z$,

3) $x < y \vee x = y \vee y < x$,

4) $\exists u \exists v \exists t\,(x < y \longrightarrow u < x < v < y < t)$

определяет теорию T_0 плотных линейных порядков, к-рая категорична в счетной мощности и не категорична во всех несчетных мощностях. Теория T_1 алгебраически замкнутых полей характеристики 0 категорична во всех несчетных мощностях, но не категорична в счетной мощности. Верна общая теорема: если счетная теория T 1-го порядка категорична в какой-нибудь несчетной мощности, то она категорична во всех несчетных мощностях. Этот результат обобщен на несчетные теории T с заменой в условии несчетных мощностей на мощности, бо́льшие мощности теории T. Квазитождеством наз. универсальное замыкание формулы

$$(Q_0 \& Q_1 \& \ldots \& Q_n) \longrightarrow P,$$

где Q_i и P — атомарные формулы. В счетных теориях T', аксиоматизируемых с помощью квазитождеств, возможностей распределения категоричности еще меньше: если такая теория T' категорична в счетной мощности, то она категорична во всех мощностях. Если к аксиомам теории T_0 добавить аксиомы для констант c_i

$5_i)$ $c_i < c_{i+1}$,

где i пробегает все натуральные числа, то полученная теория T_3 имеет ровно три счетных модели (с точностью до изоморфизма), так как возможны лишь 3 случая: множество $\{c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots\}$ не имеет верхней грани, имеет верхнюю грань, но не имеет наименьшей верхней грани, и, наконец, имеет наименьшую верхнюю грань. Если в счетных моделях M_1 и M_2 теории T_3 имеет место один и тот же из описанных случаев, то M_1 изоморфна M_2. Оказывается, что среди теорий, категоричных в несчетных мощностях, аналогичного примера найти нельзя. А именно: если теория T 1-го порядка категорична в несчетной мощности, то число счетных моделей T (с точностью до изоморфизма) либо равно 1, либо бесконечно.

Лит.: [1] Сакс Дж., Теория насыщенных моделей, пер. с англ., М., 1976; [2] Палютин Е. А., «Алгебра и логика», 1975, т. 14, № 2, с. 145—85; [3] Shelah S., «Proc. of Symp. Pure Math.», 1974, v. 13, № 2, p. 187—203. *Е. А. Палютин.*

КАТЕГОРИЯ — понятие, выделяющее ряд алгебраич. свойств совокупностей морфизмов однотипных математич. объектов (множеств, топологич. пространств, групп и т. п.) друг в друга при условии, что эти совокупности содержат тождественные отображения и замкнуты относительно последовательного выполнения (суперпозиции или умножения) отображений. К. $\mathfrak{K}$ состоит из класса $\mathrm{Ob}\mathfrak{K}$, элементы к-рого наз. о б ъ е к т а м и к а т е г о р и и, и класса $\mathrm{Mor}\mathfrak{K}$, элементы к-рого наз. м о р ф и з м а м и к а т е г о р и и. Эти классы должны удовлетворять следующим условиям:

1) Каждой упорядоченной паре объектов A, B сопоставлено множество $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ (обозначаемое также $\mathrm{Hom}(A, B)$ или $H(A, B)$) из Mor; если $\alpha \in H(A, B)$, то говорят, что A — начало, или область определения, морфизма α, а B — конец, или область значений α; часто вместо $\alpha \in H(A, B)$ пишут $\alpha : A \to B$ или $A \overset{\alpha}{\to} B$.

2) Каждый морфизм К. принадлежит одному и только одному множеству $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$.

3) В классе Mor $\mathfrak{K}$ задан частичный закон умножения: произведение морфизмов $\alpha : A \to B$ и $\beta : C \to D$ определено тогда и только тогда, когда $B = C$, и принадлежит множеству $H(A, D)$, произведение α и β обозначается $\alpha\beta$ или $\beta\alpha$.

4) Для любых морфизмов $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$ и $\gamma : C \to D$ справедлив закон ассоциативности:

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$

5) В каждом множестве $H_{\mathfrak{K}}(A, A)$ содержится такой морфизм 1_A, что $\alpha \cdot 1_A = \alpha$ и $1_A \cdot \beta = \beta$ для любых морфизмов $\alpha : X \to A$ и $\beta : A \to Y$; морфизмы 1_A наз. е д и н и ч н ы м и, т о ж д е с т в е н н ы м и, или е д и н и ц а м и.

Входящее в определение К. понятие класс предполагает использование такой аксиоматики теории множеств, к-рая различает множества и классы. Наиболее употребительной является аксиоматика Гёделя — Бернсайда — Неймана.

Иногда в определении К. не требуют, чтобы классы $H(A, B)$ являлись множествами. Иногда вместо использования классов предполагается существование универсального множества и требуется принадлежность классов $\mathrm{Ob}\mathfrak{K}$ и $\mathrm{Mor}\mathfrak{K}$ фиксированному универсальному множеству.

Поскольку между единицами К. $\mathfrak{K}$ и классом $\mathrm{Ob}\mathfrak{K}$ имеется биективное соответствие, К. можно определить как класс морфизмов с частичным умножением, удовлетворяющим дополнительным требованиям (см., напр., [6], [9]).

Понятие К. было введено в 1945 [8]. Своим происхождением и первоначальными стимулами развития теория К. обязана алгебраич. топологии. Последующие исследования выявили объединяющую и унифицирующую роль понятия К. и связанного с ним понятия функтора для многих разделов математики.

П р и м е р ы К.:

1) К а т е г о р и я м н о ж е с т в Ens; класс Ob Ens состоит из всевозможных множеств, класс Mor Ens — из всевозможных отображений множеств друг в друга, а умножение совпадает с последовательным выполнением отображений (см. *Множеств категория*).

2) К а т е г о р и я т о п о л о г и ч е с к и х п р о с т р а н с т в Top (или $\mathfrak{T}$); класс Ob Top состоит из всевозможных топологич. пространств, класс Mor Top — из всех непрерывных отображений топологич. пространств, а умножение снова совпадает с последовательным выполнением отображений.

3) К а т е г о р и я г р у п п Gr (или $\mathfrak{G}$); класс Ob Gr состоит из всевозможных групп, класс Mor Gr — из всех гомоморфизмов групп, а умножение опять совпадает с последовательным выполнением гомоморфизмов

(см. *Групп категория*). По аналогии с этими примерами можно ввести К. векторных пространств над нек-рым телом, К. колец и т. п.

4) Категория бинарных отношений множеств Rel Ens (или $R(\mathfrak{S})$); класс объектов этой К. совпадает с классом Ob Ens, а морфизмами множества A в множество B служат бинарные отношения этих множеств, т. е. всевозможные подмножества декартова произведения $A\times B$; умножение совпадает с умножением бинарных отношений.

5) Полугруппа с единицей является К. с одним объектом, и наоборот, каждая К., состоящая из одного объекта, есть полугруппа с единицей.

6) Предупорядоченное множество N можно рассматривать как К. $\mathfrak{N}$, для которой $\mathrm{Ob}\mathfrak{N}=N$ и $\mathrm{Mor}\mathfrak{N}=\{(a, b)\mid a, b\in N, a\leqslant b\}$, а умножение определяется равенством $(a, b)(b, c)=(a, c)$.

Все перечисленные выше К. допускают изоморфное вложение в К. множеств. К., обладающие указанным свойством, наз. конкретными К. Не всякая К. конкретна, напр., такова К., объектами к-рой являются все топологич. пространства, а морфизмами — классы гомотопных отображений [10].

Запас примеров К. можно значительно расширить при помощи различных конструкций и прежде всего при помощи К. функторов или К. диаграмм.

Отображение $F:\mathfrak{K}\to\mathfrak{K}'$ категории $\mathfrak{K}$ в категорию $\mathfrak{K}'$ наз. ковариантным функтором, если для каждого объекта $A\in\mathrm{Ob}\mathfrak{K}$ объект $F(A)\in\mathrm{Ob}\mathfrak{K}'$, для каждого морфизма $\alpha\in H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ образ $F(\alpha)\in H_{\mathfrak{K}'}(F(A), F(B))$, причем $F(1_A)=1_{F(A)}$ и $F(\alpha\beta)=F(\alpha)\times F(\beta)$ всякий раз, когда определено произведение $\alpha\beta$. Если объекты К. $\mathfrak{K}$ составляют множество, то можно построить К. диаграмм $\mathrm{Funct}(\mathfrak{K},)$ или $F(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}')$, объектами к-рой являются всевозможные ковариантные функторы из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{K}$, а морфизмами — всевозможные естественные преобразования этих функторов.

Каждой К. $\mathfrak{K}$ может быть сопоставлена двойственная, или дуальная, К. $\mathfrak{K}^*$, или $\mathfrak{K}^T$, для которой $\mathrm{Ob}\mathfrak{K}^*=\mathrm{Ob}\mathfrak{K}$ и $H_{\mathfrak{K}^*}(A, B)=H_{\mathfrak{K}}(B, A)$ для любых $A, B\in\mathrm{Ob}\mathfrak{K}$. Ковариантный функтор из $\mathfrak{K}^*$ в $\mathfrak{K}'$ наз. контравариантным функтором из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{K}$. Наряду с функторами одного аргумента можно рассматривать многоместные функторы или функторы от многих аргументов.

Для каждого предложения теории К. существует двойственное (дуальное) предложение, к-рое получается формальным «обращением стрелок». При этом справедлив так наз. принцип двойственности: предложение p истинно в теории К. тогда и только тогда, когда в этой теории истинно двойственное предложение p^*.

Многие понятия и результаты в математике оказались двойственными друг другу с категорной точки зрения: инъективность и проективность, нильпотентность и К. топологич. пространства в смысле Люстерника — Шнирельмана, многообразия и радикалы в алгебре и т. д.

Теоретико-категорный анализ основ теории гомологий привел к выделению в середине 50-х гг. 20 в. так наз. *абелевых категорий*, в рамках к-рых оказалось возможным осуществить основные построения гомологич. алгебры [2]. В 60-е гг. 20 в. определился возрастающий интерес к неабелевым К., вызванный задачами логики, общей алгебры, топологии и алгебраич. геометрии. Интенсивное развитие универсальной алгебры и аксиоматич. построения теории гомотопий положили начало различным направлениям исследований: категорному изучению многообразий универсальных алгебр, теории изоморфизмов прямых разложений, теории сопряженных функторов и теории двойственности функторов. Последующее развитие обнаружило существенные вза-

имосвязи между этими исследованиями. Благодаря возникшей в последние годы теории относительных К., широко использующей технику сопряженных функторов и замкнутых К., была установлена двойственность между теорией гомотопий и теорией универсальных алгебр, основанная на интерпретации категорных определений моноида и комоноида в подходящих К. функторов (см., напр., [7]). Наряду с развитием общей теории относительных К., шло выделение специальных классов таких К.: 2-категории, или формальные К., К. с инволюцией, или 1-категории, включающие, в частности, К. бинарных отношений, и т. д. В частности, 2-категорией является К. малых К., к-рая может быть положена в основу аксиоматического построения математики.

Перечисленные классы К. характеризуются тем, что их множества морфизмов $H(A, B)$ обладают дополнительной структурой. Другой способ введения дополнительных структур в К. связан с заданием в К. топологии и построении К. пучков над топологизированной К. (так наз. топосы).

Лит.: [1] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [2] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [3] Курош А. Г., Лившиц А. Х., Шульгейфер Е. Г., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 6, с. 3—52; [4] Итоги науки. Алгебра. Топология. 1962, М., 1963, с. 90—106; [5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969, с. 9—57; [6] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974; [7] Bunge M., «J. Algebra», 1969, v. 11, p. 64—101; [8] Eilenberg S., Mac Lane S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1945, v. 58, p. 231—94; [9] Freyd P., Abelian categories, N. Y., 1964; [10] его же, «Symposia mathem.», IV, S. 431—56; [11] Mac Lane S., Kategorien. Begriffssprache und mathematische Theorie, B., 1972; [12] Schubert H., Kategorien, Bd 1—2, B., 1970; [13] Mitchell B., Theory of categorie, N. Y., 1965.

М. Ш. Цаленко.

КАТЕГОРИЯ (в смысле Люстерника — Шнирельмана) — характеристика топологич. пространства E — минимальное число $\mathrm{cat}E'$ таких замкнутых множеств $A_i \subset E$, к-рыми можно покрыть E и каждое из к-рых может быть стянуто в точку посредством непрерывной деформации в E. К. является гомотопич. инвариантом (т. е. совпадает для всех топологич. пространств одного *гомотопического типа*). К. имеет важное значение для *вариационного исчисления в целом*, так как она оценивает снизу число стационарных (критических) точек гладкой функции на замкнутом многообразии. Уже простейшие примеры вроде функции $f(x)=x$, рассматриваемой на всей действительной оси и вообще не имеющей критич. точек, показывают, что за пределами класса замкнутых многообразий нельзя ожидать, чтобы такая оценка выполнялась для всех гладких функций. Тем не менее в ряде случаев удается получить аналогичную оценку для числа критич. точек различных изучаемых в вариационном исчислении функционалов, рассматриваемых как функции на бесконечномерных функциональных пространствах. Общих методов вычисления К. не имеется (хотя известно ее значение для некоторых конкретных пространств), известна только оценка

$$\mathrm{cat}\, E \geqslant \mathrm{long}\, E + 1,$$

где (когомологическая) длина $\mathrm{long}\, E$ определяется как наибольшее число классов когомологий положительной размерности, произведение которых может быть отлично от нуля. Поэтому иногда рассуждения проводят непосредственно в терминах когомологического умножения (или, двойственно, пересечения циклов), не обращаясь к К.

К. введена в [1], впервые вычислена в нетривиальном случае (для действительного проективного пространства) и сразу же использована для решения ряда задач, в том числе задачи Пуанкаре о трех замкнутых геодезических на поверхностях, гомеоморфных двумерной сфере [2].

Лит.: [1] Lusternik L., в кн.: «Atti del Congresso Internazionale dei Matematica», Bologna, 1931, t. 4, p. 291—96; [2] Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г., «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, № 1, с. 166—217. *Д. В. Аносов.*

КАТЕГОРИЯ МНОЖЕСТВА — топологическая характеристика «массивности» множества. Множество E топологич. пространства X наз. множеством первой категории на X, если оно представимо в виде конечной или счетной суммы множеств, нигде не плотных на X. В противном случае E наз. множеством второй категории. Иногда множеством второй категории наз. также дополнение в X к множеству первой категории. В современной литературе (см. [2]) иногда (в случае *Бэра пространства*) такие множества наз. резидуальными, или остаточными. Непустое замкнутое числовое множество, в частности отрезок, не является множеством первой категории на самом себе [1]. Имеется обобщение этого результата на случай любого полного метрич. пространства. Это обобщение имеет большое применение в анализе. Роль множества первой категории в топологии аналогична роли множества меры нуль в теории меры. Однако множество первой категории может быть множества полной меры, а среди множеств меры нуль имеются множества второй категории.

Лит.: [1] Бэр Р., Теория разрывных функций, пер. с франц., М.— Л., 1932; [2] Окстоби Д., Мера и категория, пер. с англ., М., 1974. *В. А. Скворцов.*

КАТЕГОРИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ — категория, обладающая рядом характерных свойств категории бинарных отношений. К. с и. наз. категория, в к-рой каждое множество $H(A, B)$ частично упорядочено отношением $\subset$, а также задано отображение $^{\#}$, наз. инволюцией, сопоставляющее морфизму α морфизм $\alpha^{\#}$ и удовлетворяющее следующим условиям:

а) если $\alpha \in H(A, B)$, то $\alpha^{\#} \in H(B, A)$;

б) $\alpha^{\#\#} = \alpha$;

в) если $\alpha \in H(A, B)$, $\beta \in H(B, C)$, то $(\alpha\beta)^{\#} = \beta^{\#}\alpha^{\#}$;

г) если $\alpha \subset \beta$, $\alpha, \beta \in H(A, B)$ и $\gamma \in H(B, C)$, то $\alpha\gamma \subset \beta\gamma$.

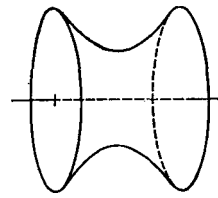
В каждой К. с и. утверждение, двойственное истинному утверждению, также истинно (усиленный принцип двойственности). Категория, двойственная К. с и., является К. с и. Всякая группа может рассматриваться как К. с и., состоящая из одного объекта, если в качестве отношения порядка взять отношение тождества (тривиальный частичный порядок), а в качестве инволюции — отображение, сопоставляющее элементу группы обратный к нему элемент.

Важный пример К. с и.— категория бинарных отношений $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ над категорией множеств $\mathfrak{S}$ строится следующим образом. $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{R}(\mathfrak{S}) = \mathrm{Ob}\,\mathfrak{S}$, морфизмы $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ — бинарные отношения с обычным умножением бинарных отношений и частичной упорядоченностью, индуцируемой отношением включения подмножеств декартова произведения. Инволюция в этой категории определяется с помощью перестановки множителей в декартовом произведении. Аналогично можно построить категории бинарных отношений над категориями групп, колец, топологич. групп и т. п. Однако для категории всех топологич. пространств описанное выше построение зависит от выбора структуры бикатегории и может привести к неассоциативному умножению.

Описание строения разных классов К. с и., их связей с классами точных, абелевых, регулярных категорий и их использование в гомологич. алгебре можно найти в [1] — [4].

Лит.: [1] Brinkmann H. B., Puppe D., Abelsche und exakte Kategorien, B. — Hdlb.—N. Y., 1969; [2] Kawahara J., «Memoirs Fac. Sci., Kyushu Univ. Ser. A. Math.», 1973, v. 27, № 1, p. 149—73; [3] его же, там же, 1973, v. 27, № 2, p. 249—73; [4] Цаленко М. Ш., «Докл. АН СССР», 1973, т. 211, № 2, с. 297—9. *М. Ш. Цаленко.*

КАТЕНОИД — поверхность, образуемая вращением цепной линии $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{b}$ вокруг оси Ox, принадлежит к числу *минимальных поверхностей*. Форму К. принимает мыльная пленка (см. рис.), «натянутая» на 2 проволочных круга, плоскости к-рых перпендикулярны линии, соединяющей их центры.



БСЭ-3.

КАТЕТ — сторона прямоугольного треугольника, прилегающая к прямому углу.

КАУСТИКА — огибающая лучей, отраженных или преломленных данной линией. К. отраженных лучей наз. катакаустикой, К. преломленных лучей — диакаустикой. Напр., катакаустика параллельного пучка лучей, отраженного от полуокружности,— часть эпициклоиды (см. рис. 1); диакаустика пучка лучей, исходящего из точки A, лежащей в более плотной среде, и преломленного прямой,— часть астроиды с острием в точке A', лежащей на расстоянии в n раз (n — показатель преломления) более близком от прямой, чем сама точка A (см. рис. 2).

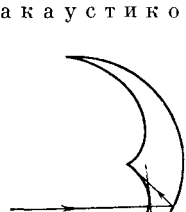


Рис. 1.

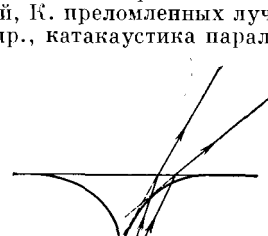


Рис. 2.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

А. Б. Иванов.

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ — математическая дисциплина, изучающая свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений без нахождения самих решений.

Основы К. т. д. у. были заложены в конце 19 в. А. Пуанкаре (см. [1], [2]) и А. М. Ляпуновым (см. [3], [4]). А. Пуанкаре широко пользовался геометрич. методами, рассматривая решения систем дифференциальных уравнений как кривые в соответствующем пространстве. На основе этого рассмотрения он создал общую теорию поведения решений дифференциальных уравнений (д. у.) 2-го порядка, разрешил ряд фундаментальных проблем о зависимости решений от параметров (см. ниже). А. М. Ляпунов изучал поведение решений в окрестности состояния равновесия. Он создал современную теорию устойчивости движения (см. *Устойчивости теория*).

Геометрическое направление А. Пуанкаре было развито в 20-х гг. 20 в. Дж. Биркгофом, открывшим многие важные факты качественной теории многомерных систем д. у. (см. [5], [6]).

Линейные системы. Рассматривается система д. у.

$$\frac{dy}{dx}=P(x)\,y,\quad y\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $P(x)$ — квадратная матрица порядка n. Предполагается, что $P(x)$ ограничена (в случае неограниченности имеется лишь небольшое число весьма специальных исследований). В К. т. д. у. изучается асимптотич. поведение решений системы (1) при $x\to\infty$.

Характеристическим показателем решения $y(x)$ наз. величина

$$\lambda=\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln|y(x)|,$$

характеризующая рост решения в сравнении с экспоненциальной функцией. Каждое ненулевое решение системы (1) имеет конечный характеристич. показатель. Характеристич. показатели ненулевых решений наз. также характеристическими показателями системы. Линейная система не может иметь более чем n различных характеристич. показателей. Характеристич. показатели системы не меняются при линейной замене переменных:

$$z = U(x)y, \tag{2}$$

в к-рой матрица $U(x)$ ограничена вместе с $\frac{dU}{dx}$ и U^{-1}. Такие преобразования наз. преобразованиями Ляпунова.

В случае, когда матрица $P(x)$ постоянна, характеристич. показатели системы (1) суть действительные части собственных значений матрицы P.

Линейная система наз. приводимой, если существует преобразование Ляпунова (2), приводящее эту систему к виду (1), но с постоянной матрицей P (см. [7], [8]).

В случае, когда матрица $P(x)$ имеет период ω, фундаментальная матрица $\Phi(x)$ (т. е. матрица, составленная из линейно независимых решений) представляется по теореме Флоке (см. [9]) в следующем виде:

$$\Phi(x) = Q(x)\, e^{Ax}, \tag{3}$$

где $Q(x)$ есть ω-периодическая, а A — постоянная матрицы. При этом, если $P(x)$ — вещественная матрица, не всегда можно A и $Q(x)$ выбрать вещественными, однако в представлении (3) их можно выбрать таковыми при условии, что $Q(x)$ имеет период 2ω. Из формулы (3) следует, что система (1) с периодич. матрицей $P(x)$ приводима (теорема Ляпунова). Формула (3) показывает, что для вычисления характеристич. показателей требуется знать лишь $\Phi(\omega)$, т. е. надо вычислить n различных решений на промежутке $0 \leqslant x \leqslant \omega$. Линейные системы с периодич. коэффициентами изучены весьма подробно (см. [8], а также *Линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами*).

Линейная система обладает свойством устойчивости асимптотич. поведения решений по отношению к малым возмущениям самой системы. Важной характеристикой линейной системы с этой точки зрения является правильность в смысле Ляпунова (см. [3]).

А. М. Ляпунов доказал (это составляет сущность его первого метода в теории устойчивости), что правильная система устойчива по отношению к аналитическим нелинейным возмущениям.

Одной из интересных задач качественной теории линейных д. у. является проблема колеблемости решений таких уравнений (см. *Колеблющееся решение*), т. е. проблема распределения нулей решений. Напр., если $p(x) > \alpha > 0$ при всех x, то всякое решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\, y = 0$$

имеет бесконечно много нулей на промежутке $0 < x < +\infty$, причем нули двух линейно независимых решений чередуются (см. [10]).

Нелинейные системы. Рассматриваются общие системы нелинейных д. у. в нормальной форме:

$$\frac{dy}{dx} = Y(y,\ x), \qquad y \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Наиболее детально изучены *автономные системы*:

$$\frac{dy}{dx} = Y(y). \tag{5}$$

Пространство векторов y для системы (5) наз. фазовым. Система (4) приводится к автономному виду (5)

с помощью увеличения порядка на единицу. Автономная система вида (5), в случае если все ее решения продолжимы на всю ось $-\infty<x<+\infty$, определяет *динамическую систему*.

Пусть $y=y(x, y_0)$ — решение системы (5) с начальными данными $x=0$, $y=y_0$. Кривая фазового пространства $y=y(x, y_0)$, $-\infty<x<+\infty$, наз. т р а е к т о р и е й, а ее части, соответствующие $x\geqslant 0$, $x\leqslant 0$,— п о л у т р а е к т о р и я м и. Особую роль играют траектории, вырождающиеся в точку: $y(x, y_0)\equiv y_0$; это происходит, если $Y(y_0)=0$. Такие точки наз. с о с т о я н и я м и р а в н о в е с и я. Другой важный тип траекторий — траектории периодич. решений, представляющие собой замкнутые кривые в фазовом пространстве. Замкнутую траекторию наз. *предельным циклом*, если к ней стремится хотя бы одна траектория, отличная от нее.

Важная задача качественной теории нелинейных систем — изучение асимптотич. поведения всех решений при $x\to\pm\infty$. Для автономных систем вида (5) эта задача сводится к изучению структуры предельных множеств всех полутраекторий и способов приближения траекторий к этим множествам. Предельное множество всякой полутраектории замкнуто и инвариантно (множество фазового пространства наз. и н в а р и а н т н ы м, если оно состоит из целых траекторий). Если полутраектория ограничена, то ее предельное множество связно.

В случае, когда $n=2$, т. е. когда фазовое пространство представляет собой плоскость, А. Пуанкаре (см. [1]) и И. Бендиксон (I. Bendixon, см. [11]) дали исчерпывающее описание возможного расположения траекторий. В предположении, что уравнение $Y(y)=0$ имеет лишь конечное число решений в ограниченной части плоскости, они доказали, что предельное множество любой ограниченной полутраектории может быть одного из трех следующих типов: 1) одно состояние равновесия, 2) одна замкнутая траектория, 3) конечное число состояний равновесия и траектории, стремящиеся к этим состояниям равновесия при $x\to\pm\infty$. А. Пуанкаре [1] и А. Данжуа [12] рассмотрели случай уравнения 1-го порядка вида (4) с правой частью, периодичной по обоим аргументам y и x. Такие уравнения удобно рассматривать на торе (см. *Дифференциальные уравнения на торе*). Расположение решений в этом случае существенно зависит от ч и с л а в р а щ е н и я, определяемого формулой

$$\mu=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x, y_0)}{x}.$$

Если μ рационально, то существуют периодические решения; если μ иррационально, то периодич. решений нет. При этом, если функция Y достаточно гладкая, то все решения суть квазипериодич. функции с двумя частотами.

В случае $n>2$ такого четкого описания возможного поведения траекторий дать не удается. Однако имеется много сведений, касающихся предельного поведения решений многомерных автономных систем. Имеет место следующий результат Дж. Биркгофа. Пусть замкнутое, ограниченное, инвариантное множество фазового пространства наз. м и н и м а л ь н ы м, если оно не содержит истинного подмножества с теми же свойствами. Всякое минимальное множество представляет собой замыкание рекуррентной траектории. Таким образом, в предельном множестве всякой ограниченной полутраектории содержится рекуррентная траектория.

В том важном частном случае, когда система имеет инвариантную меру, исследование общих закономерностей поведения решений проведено весьма детально (см. [5], [22]).

Особый интерес для приложений представляют *грубые системы*, т. е. системы, устойчивые по отношению

к малым в смысле C^1 возмущениям правых частей. Для случая $n=2$ А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин [13] сформулировали условия, необходимые и достаточные для грубости. В частности, они показали, что в ограниченной части плоскости существует лишь конечное число периодич. решений. В случае $n>2$ поведение грубых систем значительно сложнее. С. Смейл (S. Smale, [14]) указал пример грубой системы, имеющей бесконечно много периодич. решений в ограниченной части фазового пространства.

Многочисленные исследования посвящены изучению глобальных свойств конкретных систем д. у. В связи с запросами теории автоматич. управления в 50-х гг. 20 в. была развита новая отрасль К. т. д. у.— теория устойчивости движения в целом. Важную роль в теории колебаний играют диссипативные системы — системы вида (4), у к-рых все решения с ростом времени попадают в нек-рую ограниченную область. Свойства диссипативных систем изучены весьма детально. Построены сравнительно надежные методы, позволяющие устанавливать диссипативность конкретных систем (см. [15]).

Одной из проблем К. т. д. у. является проблема существования периодич. решений. Для доказательства существования таких решений часто используют топологич. приемы, в частности различные критерии существования неподвижной точки. Многие теоремы такого рода были доказаны применением принципа тора. При $n=2$ этот принцип вырождается в классический принцип кольца Пуанкаре.

Полное качественное исследование нелинейных систем д. у. удается дать лишь в весьма частных случаях. Напр., было доказано (см. [16]), что *Льенара уравнение*

$$\ddot{x}+f(x)\,\dot{x}+g(x)=0$$

при весьма естественных предположениях имеет единственное периодич. решение, а все остальные его решения стремятся к этому периодическому.

Относительно уравнения Ван дер Поля с возмущением

$$\ddot{x}+k\,(x^2-1)\,\dot{x}+x=kb\lambda\sin\lambda t$$

при больших значениях параметра k были установлены в числе других следующие интересные факты (см. [17]). При специальном выборе параметра b уравнение имеет два асимптотически устойчивых решения с периодами $(2n+1)2\pi/\lambda$ и $(2n-1)2\pi/\lambda$, где n — натуральное достаточно большое число, «большинство» остальных решений стремится к этим двум. Имеется, кроме того, счетное множество неустойчивых периодич. решений и континуум рекуррентных непериодических.

Локальная теория. Качественное исследование нелинейной системы д. у. (4) значительно упрощается, если его требуется провести не во всем пространстве y, x, а лишь в окрестности заданного решения. В этом случае простой заменой переменных проблема сводится к изучению следующей системы д. у.:

$$\frac{dy}{dx}=P(x)\,y+Y(y,\,x),\quad y\in\mathbb{R}^n, \tag{6}$$

где вектор-функция Y в определенном смысле мала в сравнении с y. Исследование поведения решений системы (6) в окрестности состояния равновесия $y=0$ и составляет предмет локальной К. т. д. у.

Важное место в этой теории занимает проблема устойчивости нулевого решения системы (6). Нулевое решение наз. устойчивым, если решение $y=y(x,\,y_0)$ непрерывно по y_0 при $y_0=0$ равномерно относительно $x\geqslant 0$.

В локальной К. т. д. у. наиболее полно исследован случай постоянной матрицы $P(x)$. К этому случаю

сводится проблема исследования окрестности состояния равновесия и периодич. решения автономной системы.

Описание поведения решений системы (6) в окрестности $y=0$ сравнительно просто, если матрица P постоянная и все ее собственные значения имеют ненулевые действительные части. В этом случае дело сводится к следующему фундаментальному результату Ляпунова — Перрона (см. [1], [18]). Пусть k собственных значений постоянной матрицы P имеют отрицательные действительные части, а остальные $n-k$ собственных значений имеют положительные действительные части. Тогда в пространстве y существуют два многообразия M и N размерности k и $n-k$, соответственно, такие, что если $y_0 \in M$, то $y(x, y_0) \to 0$ при $x \to +\infty$, а если $y_0 \in N$, то $y(x, y_0) \to 0$ при $x \to -\infty$; все остальные решения покидают окрестность начала координат как при возрастании, так и при убывании x. Случаи, когда матрица P имеет собственные числа с нулевыми действительными частями, наз. критическими.

А. М. Ляпунов дал исчерпывающее описание поведения решений системы (6) в окрестности начала координат в случаях, когда постоянная матрица P имеет одно нулевое или два чисто мнимых собственных числа, все остальные собственные числа имеют отрицательные действительные части, а вектор-функция Y не зависит от x и аналитична (см. [3]). Основополагающие результаты в локальной качественной теории автономных систем 2-го порядка принадлежат А. Пуанкаре [1], А. М. Ляпунову [3, 4], И. Бендиксону [11] и М. Фроммеру (M. Frommer, [19]).

Пусть рассматривается система уравнений

$$\frac{dy}{dx} = P_m(y, z) + Y(y, z), \quad \frac{dz}{dx} = Q_m(y, z) + Z(y, z), \quad (7)$$

где P_m и Q_m — формы степени m, а функции Y и Z малы в сравнении с величиной $(y^2+z^2)^{m/2}$. Пусть состояние равновесия, расположенное в начале координат, изолировано. В этом случае для системы (7) либо существует решение, стремящееся к началу, либо в любой окрестности начала существует замкнутая траектория. Во втором случае либо все траектории, лежащие в окрестности начала, замкнуты (расположение типа *центр*), либо в любой окрестности начала существуют как замкнутые, так и незамкнутые траектории (расположение типа центрофокус). Показано, что в случае аналитических Y и Z центрофокус невозможен (см. [20]). Далее, если траектория стремится к началу координат, то либо она имеет в начале определенную касательную, либо вдоль нее полярный угол не ограничен. В последнем случае — расположение типа *фокус*. Касательными к траекториям, стремящимся к началу, могут быть лишь прямые, на к-рых аннулируется величина $Q_m y - P_m z$. Такие прямые наз. исключительными направлениями. Для достаточно гладких Y и Z разработаны алгоритмы, позволяющие выяснить наличие и количество траекторий, входящих в начало вдоль данного исключительного направления. Это позволяет в случаях, когда существуют траектории, входящие в начало с определенной касательной, полностью описать поведение траекторий в окрестности начала.

Если исключительные направления отсутствуют или все они «проходятся» решениями (т. е. не существует решений, входящих в начало с определенной касательной), то возникает *центра и фокуса проблема*.

Зависимость поведения решений от параметров системы. Одной из центральных проблем К. т. д. у. является проблема поведения решений системы, близкой к данной, при условии, что свойства этой последней известны. Рассматривается система

$$\frac{dy}{dx} = Y(y, x) + \mu R(y, x, \mu), \quad (8)$$

где μ — параметр. Пусть порождающая система, т. е. система (8) при $\mu=0$, обладает нек-рым свойством. Ставится вопрос, обладает ли тем же свойством система (8) при малых, но отличных от нуля, μ. Классическим примером такой задачи является задача Пуанкаре (см. [2]) о существовании периодических решений. Пусть векторы Y и R имеют период ω по x, а порождающая система обладает ω-периодическим решением. В этом случае проблема сводится к рассмотрению квазилинейной системы

$$\frac{dy}{dx}=Ay+\mu R(y,\ x,\ \mu), \tag{9}$$

где A — постоянная матрица. Оказывается, что если собственные числа A отличны от $2\pi ki/\omega$; где k — целое число, то система (9) имеет при достаточно малых μ единственное ω-периодич. решение $\varphi(x,\ \mu)$, непрерывное по μ, и $\varphi(x,\ 0)=0$. В случае, когда матрица A имеет собственные числа вида $2\pi ki/\omega$, вопрос о существовании и количестве периодич. решений существенно зависит от вида возмущения $R(y,\ x,\ \mu)$. При решении проблемы существования периодич. решений в этом случае весьма полезным оказывается метод усреднения (см. *Крылова — Боголюбова метод усреднения*).

Аналогичные вопросы ставятся и для других типов решений: ограниченных, рекуррентных, почти периодических и т. д. Напр., если вектор R равномерно почти периодичен по x, а все собственные числа матрицы A имеют ненулевые действительные части, то система (9) при достаточно малом μ имеет единственное почти периодич. решение (см. [21]).

Малого параметра методом исследуются также вопросы существования у системы (8) интегральных множеств с определенными свойствами. Н. Н. Боголюбов (см. [21]) рассмотрел с этой точки зрения следующую важную для приложений систему:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt}&=a+\mu\Phi(x,\ \varphi,\ t,\ \mu),\\ \frac{dx}{dt}&=Ax+\mu R(x,\ \varphi,\ t,\ \mu),\end{aligned} \tag{10}$$

где φ есть k-мерный, x есть n-мерный векторы, a — постоянный k-мерный вектор, A — постоянная матрица, все собственные числа к-рой имеют ненулевые вещественные части. Векторы R и Φ имеют период 2π по компонентам вектора φ. При $\mu=0$ система (10) имеет интегральную поверхность $x=0$. Н. Н. Боголюбов доказал, что при достаточно малом μ система (10) имеет интегральную поверхность:

$$x=f(t,\ \varphi,\ \mu),$$

где функция f имеет период 2π по компонентам φ и $f(t,\ \varphi,\ 0)=0$. При этом, если векторы Φ и R являются ω-периодичными по t, то вектор f также ω-периодичен по t. Если все собственные числа матрицы A имеют отрицательные действительные части, то интегральная поверхность $x=f$ асимптотически устойчива. Отсюда, в частности, вытекает, что если в системе (8) вектор Y не зависит от x и при $\mu=0$ эта система имеет асимптотически устойчивое по первому приближению периодич. решение, то при достаточно малых μ система (8) имеет в пространстве y, x двумерное, цилиндрическое асимптотически устойчивое *интегральное многообразие*.

Лит.: [1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М., 1947; [2] Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 1—3, P., 1892—99; [3] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.— Л., 1950; [4] его же, «Матем. сб.», 1893, т. 17, в. 2, с. 253—333; [5] Биркгоф Д. Д., Динамические системы, пер. с англ., М., 1941; [6] Birkhoff G. D., «Acta Math.», 1922, v. 43, p. 1—119; [7] Еругин Н. П., Приводимые системы, Л.— М., 1946; [8] его же, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963; [9] Floquet M. G., «Ann. sci. École norm.

supér.», 1883, ser. 2, t. 12, p. 47—89; [10] Sturm J. Ch., «J. math. pures et appl.», 1836, p. 106—86; [11] Бендиксон И., «Успехи матем. наук», 1941, в. 9, с. 191—211; [12] Denjoy A., «J. math., pures et appl.», 1932, sér. 9, t. 11, № 3, p. 333—75; [13] Андронов А. А., Понтрягин Л. С., «Докл. АН СССР», 1937, т. 14, № 5, с. 247—50; [14] Смейл С., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 1, с. 113—85; [15] Плисс В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, М.— Л., 1964; [16] Levinson N., Smith O. K., «Duke Math. J.», 1942, v. 9, № 2, p. 382—403; [17] Littlewood J. E., «Acta math.», 1937, v. 97, № 3—4, p. 267—308; [18] Perron O., «Math. Z.», 1928, Bd 29, S. 129—60; [19] Фроммер М., «Успехи матем. наук», 1941, в. 9, с. 212—53; [20] Dulac H., «Bull. Soc. math. France», 1923, t. 51; [21] Боголюбов Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, К., 1945; [22] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М., 1949; [23] Андронов А. А. и др., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966; [24] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [25] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961. *В. А. Плисс.*

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ в банаховом пространстве — раздел функционального анализа, в к-ром исследуется поведение на действительной оси J или на положительной (отрицательной) полуоси J^+ (J^-) решений *эволюционных уравнений* в банаховом пространстве. Рассматриваются уравнения

$$\text{I. } \dot{u} = A(t)\,u;$$

$$\text{II. } \dot{u} = A(t)\,u \pm f(t);$$

$$\text{III. } \dot{u} = A(t)\,u + f(t,\ u),$$

где $u(t)$ — искомая, а $f(t)$ — заданная функция со значениями в комплексном банаховом пространстве E, $A(t)$ — линейный оператор, $f(t,\ u)$ — нелинейный оператор в E. Под производной $\dot{u}$ понимается предел по норме пространства E отношения $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$.

Для дифференциального уравнения I имеется равномерная устойчивость (р. у.), если существует константа M такая, что для любого решения $\|u(t)\| \leqslant M\|u(s)\|$, $t \geqslant s$, и экспоненциальная устойчивость (э. у.), если для всех решений $\|u(t)\| \leqslant Me^{-\alpha(t-s)}\|u(s)\|$ при нек-рых M и $\alpha > 0$.

Для уравнения I с постоянным ограниченным оператором $A(t) = A$ решение задачи Коши ($u(s)$ задано) имеет вид $u(t) = e^{(t-s)A}u(s)$. Справедлива оценка $\|e^{At}\| \leqslant Me^{\sigma t}$, где σ — число, большее всех действительных частей точек спектра оператора A. Таким образом, для э. у. необходимо и достаточно, чтобы спектр A лежал внутри левой полуплоскости. В гильбертовом пространстве это имеет место тогда и только тогда, когда существует положительно определенная форма (Wx, y), для к-рой $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Wu,\ u) = \mathrm{Re}(Wu,\ Au) \leqslant -\alpha(u,\ u)$ на любом решении уравнения (теорема Ляпунова). Если спектр A расположен по обе стороны от мнимой оси и не пересекается с ней, то пространство E разлагается в прямую сумму инвариантных относительно A подпространств E_+ и E_-, причем все решения в E_+ (E_-) экспоненциально возрастают (убывают) при $t \to \infty$. В этом случае для уравнения имеет место экспоненциальная дихотомия (э. д.).

Если оператор A неограничен, замкнут и имеет плотную в E область определения, то задача Коши с $u(0) = u_0$, вообще говоря, не является корректной. Существование и свойства ее решений не определяются только расположением спектра оператора A, необходимо еще определенное поведение его резольвенты $(A - \lambda I)^{-1}$. Употребительными условиями, обеспечивающими равномерную корректность задачи Коши на J^+, являются неравенства

$$\|(A - \lambda I)^{-m}\| \leqslant \frac{M}{(\lambda - \sigma)^m}, \quad \lambda > \sigma,\ m = 1,\ \ldots,$$

для выполнения к-рых достаточно условие Хилле—Иосиды

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leqslant 1/(\lambda-\sigma), \lambda > \sigma,$$

или неравенство

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leqslant M/|\lambda-\sigma|, \ \mathrm{Re}\,\lambda > \sigma.$$

При выполнении их решение задачи Коши имеет вид $u(t)=T(t-s)u(s)$, где $T(t)$ — сильно непрерывная при $t\geqslant 0$ полугруппа операторов, причем $\|T(t)\|\leqslant Me^{\sigma t}$. Для р. у. (э. у.) достаточно, чтобы было $\sigma=0$ ($\sigma<0$). Если оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу в гильбертовом пространстве, то для него справедлива достаточная часть теоремы Ляпунова, а если — группу, то — и необходимая. В гильбертовом пространстве э. у. эквивалентна L_2-устойчивости, т. е. тому, что для всех решений $\|T(t)u_0\|\in L_2(0, \infty)$.

Важным для приложений свойством решений $u(t)$ является почти периодичность (п. п.) или слабая почти периодичность (то есть п. п. скалярных функций $\langle u(t), \varphi\rangle$ для всех $\varphi\in E^*$). Все значения п. п. решения лежат в компактном множестве — решение компактно. Из компактности и слабой п. п. следует п. п. Для уравнения $\dot{u}=A(u)$ вопрос о п. п. решений связан со структурой пересечения спектра A с мнимой осью. Если A — производящий оператор ограниченной сильно непрерывной полугруппы и указанное пересечение счетно, то для п. п. определенного на всей оси и ограниченного решения необходимо и достаточно, чтобы существовал предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon(A-\lambda+\varepsilon)^{-1}u(0)$ в каждой предельной точке спектра λ на мнимой оси. При этом всякое равномерно непрерывное решение слабо п. п.; оно п. п., если оно слабо компактно, или если E не содержит подпространств, изоморфных пространству C_0 последовательностей, стремящихся к нулю с нормой max. Если A — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $T(t)$, к-рая обладает тем свойством, что функции $\|T^*(t)\varphi\|$ ограничены на J^+ для плотного в E^* множества функционалов φ, то из компактности решения следует п. п.

Для уравнения I с ограниченным и непрерывным по t оператором $A(t)$ решения задачи Коши определены на всей оси, и с помощью эволюционного оператора $U(t, s)$ записываются в виде $u(t)=U(t, s)\,u(s)$. Свойство р. у. эквивалентно тому, что $\|U(t, s)\|\leqslant M$, свойство э. у.— тому, что $\|U(t, s)\|\leqslant Me^{-\alpha(t-s)}$. Если оператор $A(t)$ интегрально ограничен, т. е. $\sup\limits_t\int\limits_t^{t+1}\|A(\tau)\|d\tau<\infty$, то генеральный показатель

$$\varkappa\overset{\text{def}}{=}\lim_{t,\,s\to\infty}\frac{\ln\|U(t+s,\,s)\|}{t}$$

конечен. Если $\varkappa<0$, то имеет место э. у. Для уравнений с постоянным или периодич. оператором $A(t)$ справедлива формула $\varkappa=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,\frac{\ln\|u(t,0)\|}{t}$. В общем случае она неверна. Генеральный показатель не изменяется, если оператор $A(t)$ возмущается слагаемым $B(t)$, для к-рого $B(t)\to 0$ при $t\to\infty$ или для к-рого сходится на ∞ интеграл $\int\|B(t)\|dt$. Величина генерального показателя зависит от поведения $A(t)$ на бесконечности. Если существует предел $A_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}A(t)$ и спектр A_∞ лежит внутри левой полуплоскости, то $\varkappa<0$. Если операторы $A(t), 0\leqslant t<\infty$, образуют компактное множество в пространстве ограниченных операторов, спектры всех предельных операторов лежат в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda\leqslant-\nu<0$ и оператор-функция $A(t)$ мало осциллирует, напр., имеет вид $B(\varepsilon t)$ при достаточно малом ε или при достаточно больших t удовлетворяет условию Липшица $\|A(t)-A(\tau)\|\leqslant\varepsilon|t-\tau|$ с достаточно малым ε, то $\varkappa<0$.

В гильбертовом пространстве условие $\varkappa<0$ эквивалентно существованию эрмитовой формы $(W(t)x,\ y)$ такой, что $0<\alpha_1(x,\ x)\leqslant(W(t)x,\ x)\leqslant\alpha_2(x,\ x)$ и $\frac{d}{dt}(W(t)u,\ u)\leqslant-\alpha(u,\ u)$ для любого решения $u(t)$.

Если оператор $A(t)$ периодичен с периодом ω, $A(t+\omega)=A(t)$, то оператор $U(t,\ s)$ обладает свойством $U(t+\omega,\ 0)=U(t,\ 0)U(\omega,\ 0)$. Оператор $U(\omega)=U(\omega,\ 0)$ наз. оператором монодромии уравнения I. Его спектральный радиус $r_{U(\omega)}$ связан с генеральным показателем $\varkappa$ формулой $\varkappa=\frac{1}{\omega}\ln r_{U(\omega)}$. Уравнение имеет периодич. решения тогда и только тогда, когда 1 является собственным числом $U(\omega)$. Если оператор $U(\omega)$ обладает логарифмом, то справедливо представление Флоке $U(t,\ 0)=Q(t)e^{t\Gamma}$, где $Q(t)$ периодичен с периодом ω, а $\Gamma=\frac{1}{\omega}\ln U(\omega)$. В частности, представление Флоке имеет место, если спектр $U(\omega)$ не окружает нуля, для чего достаточно, чтобы $\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\|A(t)\|dt$ было меньше нек-рой константы, зависящей от геометрии сферы в E и не меньшей $\ln 4$. Для гильбертова пространства эта константа равна π. Представление Флоке сводит вопрос о поведении решений уравнения с периодич. оператором к такому же вопросу для уравнения $\dot{v}=\Gamma v$ с постоянным оператором Γ.

Для уравнения I имеет место экспоненциальная дихотомия (э. д.), если для нек-рого s пространство E разлагается в прямую сумму подпространств $E_+(s)$ и $E_-(s)$ так, что

$$\|U(t,\ s)x\|\leqslant N_1e^{-\nu_1(t-s)}\|x\|,\quad \nu_1>0,$$

при $x\in E_-(s)$, $t\geqslant s$, и

$$\|U(t,\ s)x\|\leqslant N_2e^{-\nu_2(t-s)}\|x\|,\ \nu_2>0,$$

при $x\in E_+(s)$, $t\leqslant s$. При этом предполагается, что подпространства $U(t,s)E_+(s)$ и $U(t,s)E_-(s)$ в определенном смысле не должны сближаться. В случае конечности генерального показателя последнее условие выполняется автоматически. Для того чтобы для уравнения с периодич. $A(t)$ имела место э. д., необходимо и достаточно, чтобы спектр оператора монодромии располагался вне и внутри единичного круга, но не пересекался с единичной окружностью.

Для уравнения I с неограниченным оператором $A(t)$ с не зависящей от t областью определения, удовлетворяющим условиям корректности задачи Коши (см. выше) при каждом t, при дополнительных условиях гладкости доказано существование эволюционного оператора $U(t,\ s)$, определенного и сильно непрерывного по t и s при $t\geqslant s$. Это позволяет перенести на этот случай ряд понятий и результатов, описанных выше. Однако здесь встречаются трудности. Так, представление Флоке получено лишь для уравнений в гильбертовом пространстве, когда $A(t)=A+B(t)$, где A — отрицательно определенный самосопряженный оператор, а $B(t)$ — ограниченный периодич. оператор, удовлетворяющий нек-рым дополнительным условиям.

Пусть $A(t)$ периодичен, и задача Коши для уравнения I равномерно корректна. Если пересечение спектра оператора монодромии $U(\omega)$ с единичной окружностью счетно, то каждое ограниченное равномерно непрерывное на J решение слабо п. п. Оно — п. п. в случае слабой компактности или если E не содержит c_0. В рефлексивном пространстве E существует разложение в прямую сумму E_1+E_2 такое, что E_1 и E_2 инвариантны относительно $U(\omega)$, и все решения, начинающиеся в E_1, являются п. п., а начинающиеся в E_2 — в определенном смысле убывают: при $U_2(0)\in E_2$, $\varphi\in E_*^*$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}|\langle u_2(k\omega),\ \varphi\rangle|^2=0.$$

Для решения неоднородного уравнения II справедлива формула

$$u(t) = U(t,\ s)\,u(s) + \int_s^t U(t,\ \tau)\,f(\tau)\,d\tau.$$

Для уравнения с ограниченным оператором это равенство эквивалентно дифференциальному уравнению. В случае неограниченного оператора, это, вообще говоря, не так, но тогда это равенство принимается за определение (обобщенного) решения. Основной задачей для уравнения II является исследование свойств решений при заданных свойствах правой части. Эти свойства обычно описываются как принадлежность функции какому-либо банахову пространству функций на J или J^+ со значениями в E. Если каждой непрерывной ограниченной функции $f(t) \in C(E)$ отвечает хотя бы одно ограниченное решение, то оператор $L = \frac{d}{dt} - A(t)$ наз. с л а б о р е г у л я р н ы м. Если каждой $f \in C(E)$ отвечает единственное решение $u \in C(E)$, то L наз. р е г у л я р н ы м. Для ограниченного постоянного A из слабой регулярности следует регулярность. Для неограниченного A или ограниченного периодического $A(t)$ этот факт уже может быть неверным даже в гильбертовом пространстве. Если генеральный показатель уравнения $\dot{u} = A(t)u$ конечен, то э. д. для этого уравнения эквивалентна регулярности оператора L на J. Для того чтобы э. д. имела место на полуоси J^+, необходимо и достаточно, чтобы оператор L на J^+ был слабо регулярным и чтобы множество тех начальных значений $u(0)$, к-рым отвечают ограниченные решения уравнений I, было дополняемым подпространством E. Если для всех решений уравнения II выполнено неравенство

$$\|u(t)\| \leqslant k \sup_t \left\{ \int_0^1 \|f(t+s)\|^2\,ds \right\}^{1/2},$$

а для решений формально сопряженного уравнения $-\frac{dv}{dt} = A^*(t)v + g(t)$ — неравенство $\|v(t)\| \leqslant k \sup \|g(t)\|$, то операторы L и $L^* = -\frac{d}{dt} - A^*(t)$ регулярны. Неизвестно (1978), сохранится ли регулярность, если справа в первом неравенстве стоит $k \sup_t \|f(t)\|$. Для регуляр

ности L и L^* обе априорные оценки необходимы.

Если $A(t)$ периодичен, то для существования периодич. решения при всякой периодич. $f(t)$ необходимо и достаточно, чтобы отображение $I - U(\omega)$ было сюръективным, а для того чтобы такое решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы оператор $I - U(\omega)$ был обратимым.

Проверка регулярности при известных условиях может быть сведена к проверке регулярности операторов с постоянными коэффициентами. В случае сильной осцилляции $A(t)$ (напр., $A(t) = B(\omega t)$ с большим ω) при условии существования среднего

$$\overline{A} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{T+\alpha}^{T+\alpha} A(t)\,dt$$

равномерно по $\alpha \in J$ оператор $A(t)$ регулярен тогда и только тогда, когда регулярен оператор $\frac{d}{dt} - \overline{A}$.

Для почти периодических решений специфика бесконечномерного пространства сказывается уже на обобщении известной теоремы Боля-Бора о п. п. ограниченного интеграла от п. п. функции, то есть о п. п. ограниченного решения простейшего уравнения $\dot{u} = f(t)$. Если неопределенный интеграл от п. п. функции со значениями в E ограничен и E не содержит c_0, то он является п. п. В пространстве c_0 теорема Боля-Бора неверна. Если $A(t)$ периодичен, $f(t)$ — почти периодична и пересечение

спектра оператора монодромии $U(\omega)$ с единичной окружностью счетно, то справедливы те же выводы о п. п. решения, к-рые сформулированы выше для однородного уравнения. Если $A(t)$ почти периодичен (как функция со значениями в пространстве ограниченных операторов в E), то для того чтобы при всякой п. п. $f(t)$ существовало единственное п. п. решение, необходимо и достаточно, чтобы оператор L был регулярным. Если уравнение II имеет (слабо) компактное при $t>0$ решение, и нетривиальные (слабо) компактные решения однородного уравнения $\dot{u}=A(t)u$ обладают тем свойством, что $\lim\limits_{t\to\infty}\|u(t)\|>0$, то уравнение II имеет (слабо) п. п. решение.

При качественном исследовании нелинейного уравнения $\dot{z}=F(t,\ z)$ обычно заранее предполагаются выполненными условия, обеспечивающие существование решений на J или на J^+, что налагает существенные ограничения на вид нелинейности $F(t,\ z)$. Решение $z_0(t)$ на J^+ наз. равномерно устойчивым (р. у.), если для всякого ε существует δ такое, что для всякого другого решения $z(t)$ из неравенства $\|z(s)-z_0(s)\|\leqslant\delta$, $s\geqslant 0$, следует, что $z(t)$ определено при $t\geqslant s$ и $\|z(t)-z_0(t)\|\leqslant\varepsilon$. Решение наз. асимптотически устойчивым (а. у.), если оно р. у. и при нек-ром δ из неравенства $\|z(s)-z_0(s)\|\leqslant\delta$ следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}\|z(t)-z_0(t)\|=0$. Если в уравнении сделать замену $u=z-z_0(t)$, то после линеаризации (если она возможна) оно принимает вид III, где $A(t)=F_z'(t,\ z_0(t))$, а нелинейность обладает тем свойством, что $f(t,\ 0)\equiv 0$. Таким образом, задача о р. у. или а. у. решения $z_0(t)$ сводится к задаче о р. у. или а. у. нулевого решения уравнения III. Уравнение $\dot{\tilde{u}}=A(t)\tilde{u}$ при этом наз. уравнением в вариациях для исходного уравнения относительно решения $z_0(t)$.

Если нелинейная часть $f(t,\ u)$ достаточно мала, то свойства решений определяются свойствами решений уравнения в вариациях. Если генеральный показатель уравнения в вариациях отрицателен, и выполнено неравенство $\|f(t,\ u)\|\leqslant q\|u\|$, $t\geqslant 0$, $\|u\|\leqslant\rho$, то при достаточно малом q нулевое решение уравнения III будет а. у. Если $A(t)\equiv A$ и спектр A не пересекается с мнимой осью и имеет точки в правой полуплоскости, то при достаточно малом q нулевое решение неустойчиво. Если выполнено неравенство

$$\|f(t,\ u)\|\leqslant c\|u\|^{1+p},\quad p>0,\ t\geqslant 0,\ \|u\|\leqslant\rho,$$

то требование отсутствия точек спектра на мнимой оси можно отбросить.

Если для уравнения в вариациях имеет место э. д. на J, то для каждого $\rho>0$ существуют такие M и c, зависящие только от $A(t)$ и ρ, что из неравенств

$$\|f(t,\ u)\|\leqslant M$$

и

$$\|f(t,\ u)-f(t,\ v)\|\leqslant c\|u-v\|,\ t\in J,\ \|u\|,\ \|v\|\leqslant\rho,$$

следует существование в нек-рой окрестности нуля многообразий M_+ и M_-, пересекающихся в одной точке u_0, таких, что решение $u_0(t)$, начинающееся в u_0, ограничено на всей оси, и $\|u_0(t)\|\leqslant\rho$; решения, начинающиеся на M_- (M_+), экспоненциально приближаются при $t\to\infty$ ($t\to-\infty$) к $u_0(t)$ и удаляются от него при t, неограниченно изменяющемся в противоположном направлении. При этом M_+ (M_-) гомеоморфны окрестностям пространств $E_+(0)$ и $E_-(0)$, участвующих в определении э. д. Если в предыдущих условиях $A(t)\equiv A$ и $f(t,\ u)$ п. п. по t при каждом u с $\|u\|\leqslant\rho$, то решение $u_0(t)$ п. п.

Пусть автономное уравнение $\dot{z}=F(z)$ имеет ω-периодич. решение $z_0(t)$, тогда уравнение в вариациях $\dot{\tilde{u}}=F_z'(z_0(t))\tilde{u}$ имеет одно периодич. решение $\dot{z}_0(t)$ и, следовательно, его оператор монодромии $U(\omega)$ имеет 1 собственным

числом. Если это число простое и остальной спектр $U(\omega)$ лежит внутри единичного круга и не окружает нуля, то существуют такие числа $\mu>0$, τ_0 и N, что для всех других решений исходного уравнения $\|z(t-z_0)-z(t)\|\leqslant Ne^{-\mu t}$. Указанное свойство наз. асимптотической орбитальной устойчивостью периодич. решения. Имеются исследования и других устойчивых инвариантных многообразий для нелинейных уравнений.

Уравнения вида III с неограниченным оператором $A(t)$ в приложениях соответствуют квазилинейным уравнениям параболич. и гиперболич. типа. Развита теория «истинно» нелинейных эволюционных уравнений определенного типа. Так, если B — непрерывный всюду определенный *диссипативный оператор*, то задача Коши $\dot{u}=Bu$, $u(0)=u_0$ однозначно разрешима на полуоси J^+ при любом $u_0\in E$. Определение диссипативного оператора естественно переносится на случай многозначного оператора, и для таких операторов вместо дифференциального уравнения рассматривается дифференциальное включение $\dot{u}\in Bu$. Если в рефлексивном пространстве оператор B замкнут, диссипативен и значения оператора $I-B$ покрывают все пространство E, то задача Коши однозначно разрешима на J^+ при каждом u_0 из области определения оператора B. Имеется много вариантов последнего утверждения. Решение задается формулой $u(t)=S(t)u_0$, где $S(t)$ — полугруппа нелинейных операторов $S(t+\tau)x=S(t)(S(\tau)x)$, t, $\tau\geqslant 0$. Для уравнений с диссипативными операторами имеются также теоремы существования периодич. и почти периодич. решений.

Лит.: [1] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970; [2] Массера Х.-Л., Шефер Х.-Х., Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства, пер. с англ., М., 1970; [3] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [4] Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, М., 1967; [5] Barbu V., Nonlinear semigroups and differential equations in banach spaces, Netherlands, 1976; [6] Баскаков А. Г., «Тр. матем. ф-та Воронеж. ун-та», 1973, в. 10, с. 96—101; [7] Жиков В. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1976, т. 40, с. 1380—1408, № 6; [8] Жиков В. В., Левитан Б. М., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 2, с. 123—71; [9] Милославский А. И., «Функц. анализ и его прилож.», 1976, т. 10, № 2, с. 80—81; [10] Тюрин В. М., в кн.: «Функциональный анализ», в. 1, Ульяновск, 1973; [11] Левитан Б. М., Жиков В. В., Почти периодические функции и дифференциальные уравнения, М., 1977. *С. Г. Крейн.*

КВАДРАНТ — 1) К. плоскости — любая из четырех областей (углов), на к-рые плоскость делится двумя взаимно перпендикулярными прямыми, принятыми в качестве осей координат. 2) К. круга — сектор с центральным углом в 90°, $^1/_4$ часть круга. *БСЭ-3.*

КВАДРАТ — 1) Равносторонний прямоугольник. К. является правильным многоугольником. 2) К. числа a — произведение $a\cdot a=a^2$; название связано с тем, что таким произведением выражается площадь К., сторона к-рого равна a. *БСЭ-3.*

КВАДРАТИЧЕСКАЯ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ — корень неприводимого над полем рациональных чисел квадратного трехчлена с рациональными коэффициентами. К. и. представима в виде $a+b\sqrt{d}$, где a и b — рациональные числа, $b\neq 0$, а d — целое число, не являющееся полным квадратом. Действительное число α тогда и только тогда является К. и., когда оно допускает разложение в бесконечную периодическую цепную дробь. *А. И. Галочкин.*

КВАДРАТИЧНАЯ ОШИБКА — см. *Квадратичное отклонение.*

КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА над коммутативным кольцом с единицей — однородный многочлен

$$q=q(x)=q(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\sum_{i\leqslant j} q_{ij}x_ix_j,\ 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n,$$

от $n=n(q)$ переменных с коэффициентами $q_{ij}\in R$. Обычно R — это поле $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Q}$, либо кольцо $\mathbb{Z}$, кольцо целых элементов алгебраич. числового поля, а также их пополнения по неархимедовым нормам.

Симметрическая квадратная матрица $A=A(q)=(a_{ij})$ порядка n, где $a_{ii}=2q_{ii}$, $a_{ij}=a_{ji}=q_{ij}$, $1\leqslant i<j\leqslant n$, наз. кронекеровой матрицей К. ф. $q(x)$; обозначение Зигеля: $q(x)=\frac{1}{2}A[x]$. Если *дискриминант* $D(q)$ К. ф. q не равен 0, то q наз. невырожденной, а если равен 0, то — вырожденной.

К. ф. $q(x)$ наз. гауссовой, если она допускает симметрическую запись:

$$q(x)=\sum_{i,\ j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j,\quad b_{ij}=b_{ji}\in R,$$

т. е. найдутся $b_{ij}=b_{ji}\in R$, для к-рых $q_{ij}=2b_{ij}$, $1\leqslant i<j\leqslant n$. Симметрическая квадратная матрица $B=B(q)=(b_{ij})$ наз. матрицей (или гауссовой матрицей) К. ф. $q(x)$. Величина $d=d(q)=\det B$ наз. определителем К. ф. $q(x)$; при этом

$$D(q)=(-1)^{n/2}2^n\,d(q),\ \text{если } n(q) \text{ четно},$$

$$D(q)=(-1)^{(n-1)/2}\,2^{n-1}\,d(q),\ \text{если } n(q) \text{ нечетно}.$$

Если R — поле характеристики, отличной от 2, то всякая К. ф. над R гауссова. Если R вкладывается в поле F характеристики, отличной от 2, то К. ф. $q(x)$ над R можно рассматривать как гауссову, но с матрицей $B=B(q)$ над F и $d(q)\in F$.

К. ф. q_1 и q_2 эквивалентны над R ($q_1\simeq q_2$), если одна из них преобразуется в другую обратимой в R линейной однородной подстановкой переменных, т. е. если найдется такая обратимая квадратная матрица U над R, что $A(q_1)=U^TA(q_2)U$. Совокупность К. ф. над R, эквивалентных над R данной, называется классом К. ф. Дискриминант К. ф., с точностью до квадрата обратимого в R элемента,— инвариант класса.

Другая точка зрения на К. ф. состоит в следующем. Пусть V — унитарный R-модуль; отображение $q: V\to R$ наз. квадратичным отображением (или квадратичной формой на модуле V, если 1) $q(ax)=a^2q(x)$, $a\in R$, $x\in V$; 2) отображение b_q: $V\times V\to R$, задаваемое равенством

$$b_q(x,\ y)=q(x+y)-q(x)-q(y),$$

является *билинейной формой* на модуле V. Пара $(V,\ q)$ наз. квадратичным модулем. Форма b_q всегда является симметрической.

Всякой билинейной форме $b(x,\ y)$ на V отвечает К. ф. $q(x)=q_b(x)=b(x,x)$; при этом $b_{q_b}(x,\ y)=b(x,\ y)+b(y,x)$. Если в кольце R элемент 2 имеет обратный $^1/_2$, то $q\leftrightarrow\frac{1}{2}b_q$ есть взаимно однозначное соответствие между квадратичными и симметричными билинейными формами на модуле V. Если V — свободный R-модуль ранга n и q — К. ф. на V, то каждому базису $e_1,\ \ldots,\ e_n$ модуля V отвечает К. ф. в классическом понимании

$$q(x_1,\ \ldots,\ x_n)=q(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)=\sum\nolimits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}q_{ij}x_ix_j,$$

где $q_{ii}=q(e_i)$, $q_{ij}=b_q(e_i,\ e_j)$, $1\leqslant i<j\leqslant n$. Каждая К. ф. $q(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ над R получается таким способом из нек-рого квадратичного модуля $(R^n,\ q)$. При замене базиса К. ф. $q(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ переходит в эквивалентную К. ф., и обратно.

Говорят, что элемент $\gamma\in R$ представим К. ф. q (или что форма q представляет γ), если γ является значением этой формы при нек-рых значениях переменных. Эквивалентные К. ф. представляют одни и те же элементы. К. ф. $q(x)$ над упорядоченным полем наз. неопределенной, если она представляет как положительные, так и отрицательные элементы, и наз. поло-

тельно (отрицательно) определенной, если $q(x)>0$ (соответственно $q(x)<0$) при всех $x\neq 0$. Невырожденная К. ф., представляющая 0 нетривиально, наз. изотропной, в противном случае — анизотропной. Аналогично, К. ф. $r(y_1, \ldots, y_m)$ наз. представимой К. ф. q, если q превращается в r при подстановке нек-рых линейных форм от $y_1, \ldots, y_m$ вместо переменных в q, т. е. если существует прямоугольная матрица S порядка $m\times n$ над R такая, что $A(r)=S^T A(q)S$ (T — знак транспонирования).

Алгебраическая теория К. ф.— теория К. ф. над полями.

Пусть F — произвольное поле характеристики, отличной от 2. Задача о представлении формы r формой q над F сводится к проблеме эквивалентности форм над F, ибо (теорема Полла) для того, чтобы невырожденная К. ф. r была представима невырожденной К. ф. q над R, необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая форма $h=h(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, что К. ф. $r\dotplus h$ и q эквивалентны над F. Здесь $r\dotplus h$ — ортогональная прямая сумма форм, т. е. r и h не имеют общих переменных. Теорема Витта о сокращении: если $h\dotplus q_1\simeq h\dotplus q_2$, то $q_1\simeq q_2$.

Всякая К. ф. над F эквивалентна диагональной:

$$a_1x_1^2\dotplus a_2x_2^2\dotplus\ldots\dotplus a_rx_r^2\dotplus\ldots\dotplus a_nx_n^2.$$

Можно считать, что $a_1, \ldots, a_r\neq 0$, а $a_{r+1}=\ldots=a_n=0$. Число r называется рангом К. ф. q и совпадает с рангом матрицы $A(q)$. Если в F существует квадратный корень из любого элемента, то К. ф. над F эквивалентна форме $x_1^2\dotplus\ldots\dotplus x_r^2$ (нормальный вид К. ф.).

Всякая невырожденная К. ф. q эквивалентна форме

$$q'=q_0\dotplus\sum_{i=1}^{k}(x_i^2-y_i^2),$$

где q_0 анизотропна; при этом q однозначно определяет k и класс формы q_0 над F, называемый анизотропным ядром формы q (см. также *Витта разложение*). Две формы q_1 и q_2, имеющие одно и то же анизотропное ядро, наз. подобными по Витту. На классах подобия форм определена структура кольца (см. *Витта кольцо*).

Пусть F — упорядоченное поле (в частности, поле $\mathbb{R}$) и всякий положительный элемент в F является квадратом. Тогда всякая К. ф. q приводима к форме вида

$$x_1^2\dotplus\ldots\dotplus x_s^2-x_{s+1}^2-\ldots-x_r^2.$$

При этом числа s и $r-s$ (положительный и отрицательный индексы инерции) определены формой однозначно (см. *Инерции закон*). Тем самым для этих полей разрешается проблема эквивалентности К. ф.

Над полем $\mathbb{Q}$ проблема эквивалентности сводится к аналогичной проблеме для полей p-адических чисел: для того чтобы К. ф. q_1 и q_2 были эквивалентны над $\mathbb{Q}$, необходимо и достаточно, чтобы q_1 и q_2 были эквивалентны над $\mathbb{Q}_p$ для всех простых чисел p и над $\mathbb{Q}_\infty=\mathbb{R}$ (теорема Минковского — Хассе). Аналогичное утверждение справедливо и для A-полей — алгебраических числовых полей и полей алгебраич. функций от одной переменной над конечным полем констант. Это — частные случаи общего *Хассе принципа*. В поле $\mathbb{Q}_p$ ($p\neq\infty$) проблема эквивалентности решается с помощью *Хассе инварианта*.

К. ф. q над полем F наз. мультипликативной над F, если

$$q(x_1, \ldots, x_n)\,q(y_1, \ldots, y_n)=q(z_1, \ldots, z_n),$$

где z_i суть рациональные функции от $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ над F. Если при этом z_i — билинейные функ-

ции, то говорят, что форма о б л а д а е т к о м п о з и ц и е й. Композиция возможна лишь в случаях $n=2, 4, 8$ (т е о р е м а Г у р в и ц а). Существует простое описание мультипликативных форм [16].

Изложенная алгебраич. теория К. ф. обобщена [7] на случай поля характеристики 2.

А р и ф м е т и ч е с к а я т е о р и я К. ф.— теория К. ф. над кольцами. Она возникла в связи с задачей о решении диофантовых уравнений 2-й степени. Вопрос о решении таких уравнений сводится к задаче о представлении целых чисел целочисленной К. ф. q, т. е. к задаче решения в $\mathbb{Z}$ уравнения $b=q(x_1, \ldots, x_n)$. Известны алгоритмы, сводящие нахождение (описание) всех решений этого уравнения к проблеме эквивалентности К. ф. над $\mathbb{Z}$, т. е. к задаче отыскания по заданным К. ф. $q(x)=\frac{1}{2}A[x]$ и $q_1(x)=\frac{1}{2}A_1[x]$ обратимых матриц U над $\mathbb{Z}$, удовлетворяющих условию $U^TAU=A_1$. Для $n=2$ эти алгоритмы были построены Ж. Лагранжем (J. Lagrange) и К. Гауссом (C. Gauss), к-рые создали общую теорию бинарных К. ф. На произвольное n они обобщены Г. Смитом (H. Smith) и Г. Минковским (H. Minkowski).

Одной из центральных проблем арифметич. теории является задача отыскания простых критериев существования представлений S формы $r(x)=\frac{1}{2}B[x]$ формой $q(x)=\frac{1}{2}A[x]$, т. е. решений матричного уравнения

$$S^TAS=B, \tag{1}$$

а также задача построения формул для числа $R(q, r)=R(A, B)$ таких представлений. При этом, если число представлений бесконечно, то речь идет о числе $R'(q, r)$ «существенно различных» представлений (представления S и S' отождествляются, если $S'=VS$, где V — ц е л о ч и с л е н н ы й а в т о м о р ф и з м формы $q(x)$, т. е. $V^TAV=A$). Необходимым условием существования представлений является разрешимость уравнения (1) над $\mathbb{R}$ и разрешимость над $\mathbb{Z}$ матричного сравнения

$$S^TAS\equiv B \pmod g \tag{2}$$

по любому g. (Для разрешимости всех сравнений (2) достаточна разрешимость (2) при $g=g_0=8D(q)D(r)$.) Эти необходимые условия, наз. «р о д о в ы м и», равносильны разрешимости (1) над $\mathbb{Z}_p$ для любого простого числа p и над $\mathbb{Z}_\infty=\mathbb{R}$. Они равносильны также разрешимости (1) над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ «без существенного знаменателя», т. е. существованию рационального решения S с общим знаменателем, взаимно простым с любым наперед заданным числом g (достаточно ограничиться числом $g=g_0$). Условия разрешимости сравнений (2) можно выразить через родовые инварианты форм q и r. Число решений сравнения (2) находится с помощью сумм Гаусса.

Р о д К. ф. над $\mathbb{Z}$— множество К. ф. над $\mathbb{Z}$, эквивалентных друг другу над $\mathbb{Z}_p$ для всех простых p, включая $\mathbb{Z}_\infty=\mathbb{R}$. Род К. ф. состоит из конечного числа классов одного и того же дискриминанта. Род К. ф. $q(x)=\frac{1}{2}A[x]$ может быть задан конечным набором родовых инвариантов — инвариантов порядка, выражаемых через элементарные делители матрицы A, и характеров рода $\chi(q)=\pm 1$. Род может быть задан также значениями сумм Гаусса. Существенную роль в теории К. ф. играет также понятие спинорного рода, более тонкое, чем понятие рода.

Число $R'(q, r)$ существенно различных представлений формы r формой q просто связано с числом $R'_0(q, r)$ с у щ е с т в е н н о р а з л и ч н ы х п р и м и т и в н ы х п р е д с т а в л е н и й, т. е. таких представлений S,

что наибольший общий делитель миноров порядка m матрицы равен 1. Для величины

$$S_0(q, r) = \sum_{i=1}^{l} R_0'(q_i, r)$$

(усреднения функции $R_0'(q, r)$ по роду формы q), где $q_1, \ldots, q_l$ — представители всех классов рода формы q (из каждого класса по одному), имеются (см. [11], [15]) формулы, выражающие $S_0(q, r)$ через число решений нек-рых сравнений. В случае, когда род формы q состоит из одного класса, эти формулы полностью решают вопрос о числе представлений. В случае многоклассных родов известны лишь асимптотич. формулы для $R(q, r)$, а также точные формулы для нек-рых конкретных К. ф.

А н а л и т и ч е с к а я т е о р и я К. ф. Аналитич. методы в теорию К. ф. были введены П. Дирихле (P. Dirichlet). Развивая эти методы, К. Зигель (K. Siegel) пришел к общим формулам для числа представлений формы родом форм.

Пусть $q(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} A[x]$ и $r(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{2} B[x]$ — положительно определенные К. ф. над $\mathbb{Z}$. Число

$$\tilde{R}(q, r) = \frac{1}{M(q)} \sum_{i=1}^{l} \frac{R(q_i, r)}{E(q_i)}$$

наз. з и г е л е в ы м с р е д н и м п о р о д у для числа представлений $R(q, r)$ формы r формой q. Здесь $E(q_i)$ — число автоморфизмов формы q_i,

$$M(q) = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{E(q_i)}$$

— вес рода К. ф. q. Пусть

$$\chi_\infty(q, r) = \lim_{\vartheta \to r} \frac{V(\vartheta')}{V(\vartheta)},$$

где ϑ — окрестность точки $r = r(x)$ в $m(m+1)/2$-мерном пространстве m-арных К. ф. над $\mathbb{R}$, ϑ' — соответствующая область решений S_1 матричного уравнения (1) над $\mathbb{R}$, а $V(\vartheta)$ и $V(\vartheta')$ — их объемы.

Ф о р м у л а З и г е л я для К. ф. q и r имеет вид

$$\tilde{R}(q, r) = \tau \chi_\infty(q, r) H(q, r), \qquad (3)$$

где $\tau = 1/2$, если $n = m > 1$ или $n = m+1$ и $\tau = 1$ в остальных случаях. Здесь

$$H(q, r) = \lim_{g \to \infty} \frac{R_g(q, r)}{2^{\omega_{n-m}(g)}\, g^{nm - m(m+1)/2}},$$

где предел берется по таким последовательностям g, что любое натуральное число является делителем почти всех g, а $\omega_0(g)$ — число различных простых делителей g, $\omega_{n-m}(g) = 0$, если $n > m$, а $R_g(q, r)$ — число представлений формы r формой q по модулю g, т. е. число решений матричного сравнения

$$S^T \left(\frac{1}{2} A\right) S \equiv \frac{1}{2} B \pmod{g}.$$

Справедливо равенство

$$H(q, r) = \frac{R_{g_0}(q, r)}{2^{\omega_{n-m}(g_0)}\, g_0^{nm - m(m+1)/2}}, \qquad g_0 = 8D(q) D(r).$$

Имеется ряд равносильных определений для $H(q, r)$ и (см. [17]) выражение через обобщенные суммы Гаусса. Формула (3) содержит, как частный случай, ф о р м у л у М и н к о в с к о г о для веса рода:

$$M(q) = \frac{2\{d(q)\}^{(n+1)/2}}{\pi^{n(n+1)/2}} \frac{\prod_{k=1}^{n} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\prod_p \chi_p(q, q)}, \quad n > 1,$$

последняя в случае $n=2$ дает формулу Дирихле для числа классов.

Формулы, аналогичные (3), имеют место и для неопределенных К. ф. и форм с целыми алгебраич. коэффициентами (см. [17], [18]).

Приложение теории модулярных форм к исследованию мультипликативных свойств количества представлений чисел положительными К. ф. с четным числом переменных было дано Э. Хекке (E. Hecke, [10]). Теория модулярных форм позволяет получать формулы для $R(q, b)$ (см. обзор [5]).

К вопросу о представлении чисел К. ф. от четырех и более переменных применяется круговой метод (см. [4]). Если q — положительно определенная К. ф. над $\mathbb{Z}$, то применение кругового метода приводит для $n\geqslant 4$ к асимптотич. формуле

$$R(q, b)=\frac{\pi^{n/2}\, b^{n/2-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) d(q)} H(q,\ b)+O\left(b^{\frac{n}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right).$$

Подобные асимптотич. формулы могут быть получены круговым методом и для неопределенных К. ф. при $n\geqslant 4$.

Для исследования $R(q, b)$ в случае $n=3$ применяется дискретный эргодический метод Линника (см. [3], [4]). Он заключается в том, что на нек-ром множестве представлений чисел тернарными К. ф. устраивается эргодический поток представлений, управляемый оператором, связанным с задачей представления чисел кватернарными К. ф. Эргодический метод приводит (при выполнении необходимых условий) к оценке типа

$$R(q,\ b) > ch(-\Delta b),\quad c=c(q) > 0;$$

в ряде случаев получены и асимптотич. формулы.

Для исследования таких вопросов теории К. ф., как теория приведения, автоморфизмы, арифметич. минимумы К. ф., Ш. Эрмитом (Ch. Hermite) был развит метод непрерывных параметров, превратившийся затем в обширный раздел теории К. ф.— геометрическую теорию К. ф., или геометрию К. ф. (к-рую можно рассматривать и как часть *Геометрии чисел*). Идея метода состоит в следующем. Заданной n-мерной точечной решетке Λ ставится в соответствие та или иная арифметич. величина $a=a(\Lambda)$ и рассматривается поведение функции $a(\Lambda)$ при малых изменениях параметров решетки Λ. Характерной чертой геометрии К. ф. является систематич. использование $n(n+1)/2$-мерного пространства коэффициентов (параметров), в к-ром решетка Λ изображается точкой. Пусть

$$f=\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

— К. ф. с действительными коэффициентами $a_{ij}=a_{ji}$ $(i, j=1, \ldots, n)$. Форме f ставится в соответствие точка $\bar{f}=(a_{11}, \ldots, a_{nn}, a_{12}, \ldots, a_{n-1,n})$ в N-мерном евклидовом пространстве. $N=n(n+1)/2$, называемом пространством коэффициентов. Положительно определенным формам f при этом отвечает открытый выпуклый коиус $\mathfrak{P}$ с вершиной в начале координат, называемый конусом положительности. Решетке Λ соотносится класс эквивалентных n-арных положительно определенных К. ф.; при базисе $[\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n]$ решетки Λ ей ставится в соответствие форма

$$f=\sum_{i,\ j=1}^{n} (\bar{a}_i\bar{a}_j)\, x_ix_j.$$

Тем самым решетке Λ соответствует бесконечное дискретное множество точек конуса положительности $\mathfrak{P}$. Если выбрать точную область приведения $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{P}$ положительно определенных К. ф., то каждой решетке будет взаимно однозначно соответствовать точка $\bar{f}\in\mathfrak{F}$ пространства коэффициентов. Малым изменениям параметров решетки Λ отвечают малые изменения точки $\bar{f}$.

Геометрическая теория К. ф. распадается на ряд достаточно самостоятельных теорий, связанных единым методом исследования. Фундаментом ее является теория приведения положительных К. ф., к-рая, изучая области приведения $\mathfrak{F}$, решает проблему эквивалентности положительных К. ф.— одну из центральных задач арифметич. теории К. ф. (см. *Квадратичных форм приведение*).

Существенную роль играет теория *Вороного типов решетки*. Она имеет важные приложения в теории параллелоэдров. Теория типов получила применение в решении задач об экономнейшем решеточном покрытии n-мерного пространства шарами.

Другой традиционный раздел геометрич. теории К. ф.— теория совершенных форм, также созданная Г. Ф. Вороным. Эта теория позволила решить *Эрмита проблему* арифметич. минимумов положительных К. ф., равнозначную задаче о плотнейшей решетчатой *упаковке* шаров в n-мерном пространстве. Задача о плотнейшей решетчатой упаковке шаров и задача об экономнейшем решетчатом покрытии шарами — наиболее известные примеры экстремальных задач, составляющих значительную часть К. ф. геометрии.

К геометрической теории К. ф. можно также отнести нек-рые обобщения алгоритма цепных дробей, напр. алгоритм Вороного вычисления единиц кубического поля, теорию фундаментальных областей автоморфизмов неопределенных К. ф.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Делоне Б. Н., «Успехи матем. наук», 1937, в. 3, с. 16—62; 1938, в. 4, с. 102—64; [3] Линник Ю. В., Эргодические свойства алгебраических полей, Л., 1967; [4] Малышева А. В., О представлении целых чисел положительными квадратичными формами, М.— Л., 1962; [5] его же, в кн.: Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974, с. 119—37; [6] Серр Ж.-П., Курс арифметики, пер. с франц., М., 1972; [7] Arf C., «J. reine und angew. Math.», 1941, Bd 183, S. 148—67; [8] Eichler M., Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, 2 Aufl., B., 1974; [9] Hasse H., «J. reine und angew. Math.», 1923, Bd 152, S. 129—48, 205—24; 1924, Bd 153, S. 12—43, 76—93, 113—30, 158—62, 186—207; [10] Hecke E., Mathematische Werke, Gött., 1959; [11] Jones B. W., The arithmatic theory of quadratic forms, N. Y., 1950; [12] Lam T. Y., The algebraic theory of quadratic forms, Reading, 1973; [13] Minkowski H., Gesammelte Abhandlungen, Bd 1—2, Lpz.— B., 1911; [14] O'Meara O. T., Introduction to quadratic forms, B., 1963; [15] Pall G., «Canad. J. Math.», 1949, v. 1, p. 344—64; [16] Pfister A., «Arch. Math.», 1965, Bd 16, S. 363—70; [17] Siegel C. L., Lecturis on the analytical theory of quadratic forms, 3 ed., Gött., 1963; [18] его же, Gesammelte Abhandlungen, Bd 1—3, B., 1966; [19] Smith H. J. S., The collected mathematical papers, v. 1—2, Oxf., 1894; [20] Watson G. L., Integral quadratic forms, Camb., 1960; [21] Фоменко О. М., Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 5—91.

А. В. Малышев.

КВАДРАТИЧНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ, квадратичное уклонение, стандартное отклонение величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ от a — квадратный корень из выражения

$$\frac{(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+\ldots+(x_n-a)^2}{n}.$$

Наименьшее значение К. о. имеет при $a=\bar{x}$, где $\bar{x}$ — среднее арифметическое величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

В этом случае К. о. может служить мерой рассеяния системы величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Употребляют также более общее понятие взвешенного К. о.

$$\sqrt{[p_1(x_1-a)^2+\ldots+p_n(x_n-a)^2]/(p_1+\ldots+p_n)},$$

числа $p_1, \ldots, p_n$ наз. при этом весами, соответствующими величинам $x_1, \ldots, x_n$. Взвешенное К. о. достигает наименьшего значения при a, равном взвешенному среднему:

$$(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)/(p_1+\ldots+p_n).$$

В теории вероятностей К. о. σ_X случайной величины X (от ее математич. ожидания) наз. квадратный корень из дисперсии $\sqrt{\mathrm{D}(X)}$.

К. о. употребляют как меру качества статистич. оценок и наз. в этом случае квадратичной ошибкой. *БСЭ-3.*

КВАДРАТИЧНОЕ ПОЛЕ — расширение степени 2 поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Любое К. п. имеет вид $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где $d\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{d}\notin\mathbb{Q}$, т. е. получается присоединением к полю $\mathbb{Q}$ элемента $\sqrt{d}$. $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})=\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ тогда и только тогда, когда $d_1=c^2d_2$, где $c\in\mathbb{Q}$. Поэтому любое К. п. имеет вид $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где d — целое рациональное число свободное от квадратов, однозначно определяемое этим К. п. В дальнейшем d предполагается именно таким.

При $d>0$ поле $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ наз. вещественным К. п., а при $d<0$ — мнимым.

В качестве фундаментального базиса поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, т. е. базиса кольца целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ над кольцом целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$, можно взять

$$\left\{1,\ \frac{1+\sqrt{d}}{2}\right\} \quad \text{при } d\equiv 1 \pmod 4$$

и

$$\{1,\ \sqrt{d}\} \quad \text{при } d\equiv 2,\ 3 \pmod 4.$$

Дискриминант D поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ равен соответственно d при $d\equiv 1 \pmod 4$ и $4d$ при $d\equiv 2,\ 3 \pmod 4$.

Мнимые К. п.— единственный тип полей (кроме $\mathbb{Q}$) с конечной группой единиц. Эта группа имеет порядок 4 для $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ (и образующую $\sqrt{-1}$), порядок 6 для $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ (и образующую $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}$), порядок 2 (и образующую -1) для всех остальных мнимых К. п.

Для вещественных К. п. группа единиц изоморфна прямому произведению $\{\pm 1\}\times\{\varepsilon\}$, где $\{\pm 1\}$ — группа порядка 2, порожденная числом -1, и $\{\varepsilon\}$ — бесконечная циклическая группа, порожденная основной единицей ε. Напр., для поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ $\varepsilon=1+\sqrt{2}$.

Закон разложения простых дивизоров в К. п. допускает простую формулировку: полю $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ можно сопоставить квадратичный характер χ на $\mathbb{Z}$ по модулю $|D|$. Если p — простое число и $(D, p)=1$, то дивизор (p) прост в $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ при $\chi(p)=-1$, и распадается в произведение двух простых дивизоров при $\chi(p)=1$.

Группа классов дивизоров К. п. изучена лучше, чем для других классов полей. В случае мнимых К. п. теорема Брауэра — Зигеля (утверждающая, что для полей алгебраических чисел фиксированной степени выполняется асимптотич. соотношение

$$\frac{\ln(hR)}{\ln\sqrt{|D|}} \longrightarrow 1 \text{ при } |D|\longrightarrow\infty,$$

где h, R и D — число классов, регулятор и дискриминант поля) показывает, что число классов дивизоров стремится к бесконечности при $d\to-\infty$. Имеется ровно 9 одноклассных мнимых К. п. (при $d=-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$, см. [2]). Для вещественных К. п. неизвестно (1978) конечно или бесконечно число одноклассных полей. Существует бесконечно много К. п. (как мнимых, так и вещественных), число классов к-рых делится на данное натуральное число (см. [3], [4]). Аналогичное свойство для 2-компоненты группы классов следует из теории родов Гаусса.

Абелевы расширения мнимых К. п. в явном виде позволяет строить теория комплексного умножения (см. [5]).

Многие арифметич. свойства К. п. допускают переформулировку в терминах теории *бинарных квадратичных форм*.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Stark H. M., «Mich. Math. J.», 1967, v. 14, p. 1—27; [3] Ankeny N. C., Chowla S., «Pacific. J. Math.», 1955, v. 5, p. 321—24; [4] Jamamoto J., «Osaka J. Math.», 1970, v. 7, p. 57—76; [5] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969, гл. 13.

Л. В. Кузьмин.

КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — раздел *выпуклого программирования*, посвященный теории и методам решения задач минимизации выпуклых квадратичных функций на множествах, задаваемых системами линейных неравенств и равенств. Существует законченная теория К. п., и разработаны численные методы решения задач К. п., в том числе методы типа *симплексного метода*, приводящие к решению за конечное число шагов (итераций).

Реальные задачи технико-экономич. содержания, математич. моделями к-рых являются задачи К. п., немногочисленны. Однако задачи К. п. возникают как вспомогательные при решении различных задач *математического программирования*. Так, в одном из вариантов метода возможных направлений для численного решения задач нелинейного программирования проблему выбора направления спуска на каждой итерации сводят к решению задачи К. п. Задачи безусловной минимизации квадратичных функций, а также задачи К. п. с ограничениями простейшего вида (напр., когда ограничениями являются условия неотрицательности переменных) возникают в результате применения метода регуляризации для решения неустойчивых (некорректных) задач *линейного программирования* и *штрафных функций метода* для решения задач линейного программирования.

Лит.: [1] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах, М., 1975; [2] Хедли Дж., Нелинейное и динамическое программирование, пер. с англ., М., 1967; [3] Зангвилл У. И., Нелинейное программирование. Единый подход, пер. с англ., М., 1973; [4] Кюнци Г. П., Крелле В., Нелинейное программирование, пер. с нем., М., 1965; [5] Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н., Введение в минимакс, М., 1972.

В. Г. Карманов.

КВАДРАТИЧНОЕ СРЕДНЕЕ — число s, равное корню квадратному из среднего арифметического квадратов данных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

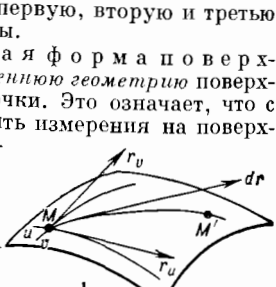
$$s=\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)/n}.$$

БСЭ-3.

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ — общее наименование квадратичных форм от дифференциалов координат на поверхности, инвариантных при преобразованиях этих координат. К. ф. п. характеризуют основные внутренние свойства поверхности и ее расположение в пространстве в окрестности данной точки; обычно выделяют так наз. первую, вторую и третью основные квадратичные формы.

Первая квадратичная форма поверхности характеризует *внутреннюю геометрию* поверхности в окрестности данной точки. Это означает, что с ее помощью можно производить измерения на поверхности. Пусть поверхность задана уравнением:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v),$$



где u и v — координаты на поверхности;

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\,du+\boldsymbol{r}_v\,dv$$

— дифференциал радиус-вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$ вдоль выбранного направления смещения из точки M в бесконечно близкую точку M' (см. рис. 1). Главная линейная часть приращения длины дуги MM' выражается квадратом дифференциала dr:

$$\mathrm{I}=ds^2=d\boldsymbol{r}^2=E\,(u,\ v)\,du^2+2F\,(u,\ v)\,du\,dv+G\,(u,\ v)\,dv^2,$$

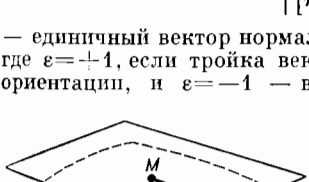
где $E(u, v)=\boldsymbol{r}_u^2$, $F(u, v)=(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)$, $G(u, v)=\boldsymbol{r}_v^2$. Форма I

и наз. первой основной К. ф. п. См. также *Первая квадратичная форма* поверхности.

Вторая квадратичная форма поверхности характеризует локальную структуру поверхности в окрестности обыкновенной точки. Именно, пусть

$$\boldsymbol{n} = \frac{\varepsilon [\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]|}$$

— единичный вектор нормали к поверхности в точке M, где $\varepsilon = +1$, если тройка векторов $\{\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{n}\}$ — правой ориентации, и $\varepsilon = -1$ — в противоположном случае.



2

Удвоенная главная линейная часть 2δ отклонения точки M' (см. рис. 2) поверхности от касательной плоскости в ее точке M равна

$$\mathrm{II} = 2\delta = (-d\boldsymbol{r},\ d\boldsymbol{n}) = \\ = L(u, v)\,du^2 + \\ + 2M(u,v)\,du\,dv + N(u,v)\,dv^2,$$

где $L = (\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{n})$, $M = (\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{n})$, $N = (\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{n})$. Форма II наз. второй основной К. ф. п. См. также *Вторая квадратичная форма* поверхности.

Первая и вторая К. ф. п. обладают двумя важными совместными скалярными инвариантами относительно преобразования координат на поверхности. Именно, отношение дискриминантов этих форм равно *гауссовой кривизне* поверхности в точке:

$$K = \frac{LM - N^2}{EG - F^2},$$

а выражение

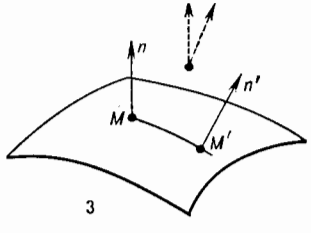
$$H = \frac{1}{2}\,\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

определяет *среднюю кривизну* поверхности в точке.

Задание первой (положительно определенной) и второй К. ф. п. определяет поверхность с точностью до движения (*Бонне теорема*).

Третья квадратичная форма поверхности представляет собой квадрат дифференциала единичного вектора $\boldsymbol{n}$ нормали к поверхности в точке M (см. рис. 3):

$$\mathrm{III} = d\boldsymbol{n}^2 = \boldsymbol{n}_u^2\,du^2 + \\ + 2\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n}_v\,du\,dv + \boldsymbol{n}_v^2\,dv^2.$$



3

Третья К. ф. п. равна главной линейной части приращения угла между векторами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n}'$ при смещении по поверхности из точки M в точку M'; она является первой К. ф. п. *сферического изображения* поверхности.

Три основные К. ф. п. связаны линейной зависимостью:

$$\mathrm{I} \cdot K - \mathrm{II} \cdot 2H - \mathrm{III} = 0.$$

Кроме перечисленных выше иногда рассматривают и другие К. ф. п. (см., напр., [3]).

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1, М.— Л., 1947; [2] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956; [3] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

А. Б. Иванов.

КВАДРАТИЧНЫЙ ВЫЧЕТ по модулю m — целое число a, для которого разрешимо сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod{m}.$$

Если указанное сравнение не разрешимо, то число a наз. квадратичным невычетом по модулю m. Критерий Эйлера: пусть $p > 2$ простое.

Число a, взаимно простое с p, является К. в. по модулю p тогда и только тогда, когда

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p},$$

и является квадратичным невычетом по модулю p тогда и только тогда, когда

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972.

С. А. Степанов.

КВАДРАТИЧНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ на римановой поверхности R — правило, которое каждому локальному параметру z, отображающему параметрич. окрестность $U \subset R$ в замкнутую комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}(z : U \to \overline{\mathbb{C}})$, ставит в соответствие функцию $Q_z : z(U) \to \overline{\mathbb{C}}$ такую, что для всяких локальных параметров $z_1 : U_1 \to \overline{\mathbb{C}}$ и $z_2 : U_2 \to \overline{\mathbb{C}}$ с непустым пересечением $U_1 \cap U_2$ в последнем выполнено соотношение

$$\frac{Q_{z_2}(z_2(p))}{Q_{z_1}(z_1(p))} = \left(\frac{dz_1(p)}{dz_2(p)}\right)^2, \quad \forall p \in U_1 \cap U_2; \tag{1}$$

здесь $z(U)$ — образ U в $\overline{\mathbb{C}}$ при отображении z. К. д. часто обозначается символом $Q(z)dz^2$, к-рому приписывается указанная инвариантность относительно выбора локального параметра z. Иначе говоря, К. д.— это нелинейный дифференциал типа (2,0) на римановой поверхности.

Функции $Q_z(\cdot)$, входящие в определение К. д., обычно предполагаются измеримыми или даже аналитическими. В последнем случае К. д. наз. аналитическим. Точка $p \in R$ наз. нулем или полюсом порядка k дифференциала $Q(z)dz^2$, если для каждого локального параметра z функция $Q_z(\cdot)$ имеет в p соответственно нуль или полюс порядка k. Нули и полюсы К. д. наз. его критическими точками. Нули и простые полюсы наз. конечными критич. точками, и их совокупность обозначают C. Множество всех полюсов порядка $k \geqslant 2$ обозначают H.

Если кривая $\gamma \subset R$ имеет в каждой своей точке q относительно локального параметра z касательную с направляющим вектором $a_z(q)$ и

$$Q_z(z(q))\,(a_z(q))^2 > 0, \quad \forall q \in \gamma, \tag{2}$$

то К. д. $Q(z)dz^2$ наз. положительным и пишут $Q(z)dz^2 > 0$ на кривой γ. Если в (2) вместо знака $>$ имеет место знак $<$, то К. д. $Q(z)dz^2$ отрицателен ($Q(z)dz^2 < 0$) на кривой γ. Всякая максимальная на R регулярная кривая, на к-рой $Q(z)dz^2 > 0$ (либо $Q(z)dz^2 < 0$), наз. траекторией дифференциала $Q(z)dz^2$ (соответственно ортогональной траекторией).

К. д. $Q(z)dz^2$, определенный на конечной римановой поверхности R, принадлежит R, если край ∂R поверхности R либо пуст, либо состоит из конечного числа точек $p \notin H$ и дуг γ, на каждой из к-рых дифференциал $Q(z)dz^2$ регулярен и положителен или отрицателен. Если к тому же край ∂R пуст или если дифференциал $Q(z)dz^2$ на ∂R регулярен и положителен, то $Q(z)dz^2$ наз. положительным К. д. на R. Метрика $|Q(z)|^{1/2}|dz|$, называемая Q-метрикой, однозначна на R и инвариантна относительно выбора локального параметра z.

В нек-рой окрестности U любой точки $p \in R \setminus (C \cup H)$ функция

$$\zeta(q) = \int_{z(p)}^{z(q)} Q(z)^{1/2}\,dz$$

регулярна, однозначна и однолистна при каждом выборе знака подинтегрального выражения, причем всякая максимальная дуга траектории (или ортогональной

траектории) из U при отображении $\zeta(q)$ переходит в горизонтальный (соответственно вертикальный) прямолинейный интервал. Поэтому через каждую точку $p \in R \setminus (C \cup H)$ проходит траектория, являющаяся либо открытой дугой, либо жордановой кривой на R. Топологическая и конформная структуры семейства траекторий в малой окрестности всякой критич. точки r полностью классифицированы в зависимости от порядка критич. точки r и (если r — полюс 2-го порядка и $z(r)=0$) от

$$\arg \lim_{q \to r} Q_z(z(q))z(q)^2$$

(см. *Локальная структура траекторий*). Описание *глобальной структуры траекторий* известно для конечных римановых поверхностей и имеет много важных приложений (см. также [1]).

О. Тайхмюллер (O. Teichmüller) исследовал роль понятия К. д. для теории экстремальных конформных и квазиконформных отображений и для решения проблемы модулей римановых поверхностей (см. [1]—[3]). Он сформулировал принцип, согласно к-рому экстремальным задачам геометрич. теории функций ставятся в соответствие нек-рые К. д., причем каждому типу экстремальных задач соответствуют определенные особенности (полюсы) К. д., а геометрич. свойства решения связаны надлежащим образом со структурой траекторий К. д. В терминах К. д. доказаны неравенства для коэффициентов *однолистных функций*. Общее неравенство для коэффициентов однолистных функций в семействах областей, расположенных на конечной римановой поверхности, носит название о б щ е й т е о р е м ы о к о э ф ф и ц и е н т а х и является конкретным воплощением принципа Тайхмюллера для широкого класса задач (см. [1], [4]). Принцип Тайхмюллера позволил также установить специальную теорему о коэффициентах и решить большое число конкретных экстремальных задач (см. [1], [5]).

Лит.: [1] Д ж е н к и н с Д ж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [2] Ш и ф ф е р М., С п е н с е р Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957; [3] А л ь ф о р с Л., Б е р с Л., Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, пер. с англ., М., 1961; [4] Т а м р а з о в П. М., «Матем. сб.», 1967, т. 72, № 1, с. 59—71; [5] J e n k i n s J. A., «Ill. J. Math.», 1964, v. 8, № 1, p. 80—99.

П. М. Тамразов.

КВАДРАТИЧНЫЙ ЗАКОН ВЗАИМНОСТИ — соотношение

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}},$$

связывающее *Лежандра символы* $\left(\frac{p}{q}\right)$ и $\left(\frac{q}{p}\right)$ для различных нечетных простых чисел p и q. Имеются два дополнения к указанному квадратичному закону взаимности, а именно:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}$$

и

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}.$$

К. Гаусс (C. Gauss) дал первое полное доказательство К. з. в., в связи с чем К. з. в. наз. также *Гаусса законом взаимности*.

Из К. з. в. непосредственно следует, что при заданном целом d, не делящемся на квадрат целого числа, простые p, для к-рых d является квадратичным вычетом по модулю p, лежат в нескольких арифметич. прогрессиях с разностью $2|d|$ или $4|d|$. Число этих прогрессий равно $\frac{1}{2}\varphi(2|d|)$ или $\frac{1}{2}\varphi(4|d|)$, где $\varphi(n)$ — *Эйлера функция*. К. з. в. дает возможность установить законы разложения в квадратичном расширении $R(\sqrt{d})$ поля ра-

циональных чисел, поскольку в $R(\sqrt{d})$ разложение простого числа p, не делящего d, на простые дивизоры зависит от того, приводим или нет многочлен x^2-d по модулю p.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [2] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972. *С. А. Степанов.*

КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ ПРИВЕДЕНИЕ — выделение в каждом классе квадратичных форм (к. ф.) над данным кольцом R приведенных форм — «стандартных» форм класса (одной или нескольких). Основной целью К. ф. п. является решение проблемы эквивалентности к. ф.: установить, эквивалентны над R данные к. ф. q и r или нет, и в случае их эквивалентности найти (описать) все обратимые матрицы U над R, переводящие q в r (см. *Квадратичная форма*). Для решения последней задачи достаточно знать одну такую матрицу U_0 и все автоморфизмы V формы q, ибо тогда $U=VU_0$. Обычно имеется в виду эквивалентность к. ф. над $\mathbb{Z}$, причем часто рассматривается вся совокупность к. ф. над $\mathbb{R}$ и их классы над $\mathbb{Z}$. Имеются принципиальные различия в теории приведения положительных (положительно определенных) и неопределенных к. ф.

Приведение положительных к. ф. Имеются различные способы приведения над $\mathbb{Z}$ действительных положительных к. ф. Из них наиболее распространенный и изученный — способ приведения по Минковскому (или по Эрмиту — Минковскому), наиболее общий — по Венкову. Распространено также приведение по Зелингу ($n=3$) и по Шарву ($n=4$).

Определить приведенную к. ф.

$$q(x)=B[x]=\sum_{i,\,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j,\ b_{ij}=b_{ji}\in\mathbb{R},\ \|b_{ij}\|=B$$

значит задать в конусе положительности $\mathfrak{P}$ пространства коэффициентов $\mathbb{R}^N$, $N=n(n+1)/2$, область приведения $\mathfrak{G}$ так, чтобы $q(x)$ была приведенной тогда и только тогда, когда $q=(b_{11},\ \dots\ ,\ b_{n-1,n})\in\mathfrak{G}$. Желательно, чтобы $\mathfrak{G}$ обладала хорошими геометрич. свойствами (была односвязной, выпуклой и т. п.) и была фундаментальной областью группы Γ целочисленных подстановок определителя ±1. Область $F\subset\mathfrak{P}$ наз. фундаментальной областью приведения положительных к. ф., если F — открытая область в $\mathbb{R}^N$ и: 1) для всякой к. ф. $q\in\mathfrak{P}$ найдется эквивалентная к. ф. $h\simeq q(\mathbb{Z})$, для к-рой $h\in\bar{F}$; 2) если $h_1,\ h_2\in F$ и $h_1\simeq h_2(\mathbb{Z})$, то $h_1=h_2$.

а) Приведение к. ф. по Минковскому. Положительная к. ф. $q(x)$ приведена по Минковскому, если для любого $k=1,\ \dots\ ,\ n$ и любых целых чисел $l_1,\ \dots\ ,\ l_n$ с условием н. о. д. $(l_k,\dots,\ l_n)=1$,

$$q(l_1,\ \dots,\ l_n)\geqslant b_{kk}. \qquad (1)$$

Из бесконечного числа неравенств (1) для коэффициентов b_{ij} можно выбирать конечное число так, что остальные неравенства из них следуют. В пространстве коэффициентов $\mathbb{R}^N$ множество приведенных по Минковскому форм образует бесконечную выпуклую пирамиду (гоноэдр) с конечным числом граней, наз. областью приведения Минковского (или гоноэдром Эрмита — Минковского) $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_n$; $\mathfrak{F}$ — замкнутое множество, $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{P}$. Для $n\leqslant7$ вычислены грани области $\mathfrak{F}_n$ (см. [9]).

Существует такая постоянная λ_n, что если к. ф. $q(x)$ приведена по Минковскому, то

$$\prod_{i=1}^{n} b_{ii}\leqslant\lambda_n\,d(q),$$

где $d(q)=\det\|b_{ij}\|$ — определитель к. ф. $q(x)$.

Всякая действительная положительная к. ф. эквивалентна над $\mathbb{Z}$ приведенной по Минковскому к. ф. Имеет-

ся алгоритм приведения (отыскания приведенной формы, эквивалентной данной) (см. [8], [15]).

Для $n=2$, $q=q(x, y)=(a, b, c)=ax^2+2bxy+cy^2$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a>0$, $d(q)>0$ условия приведения имеют вид

$$0\leqslant 2b\leqslant a\leqslant c.$$

Если ограничиться собственной эквивалентностью (когда допускаются целочисленные преобразования только определителя $+1$), то область приведения имеет вид $0\leqslant 2|b|\leqslant a\leqslant c$ (условия приведения Лагранжа — Гаусса). Множество всех неэквивалентных (собственно) приведенных к. ф. записывается как объединение $F\cup F_1\cup F_2$, где

$F: 2|b|<a<c$, $F_1: 0\leqslant 2b<a=c$, $F_2: 0<2b=a\leqslant c$.

Для $n=2$ имеется алгоритм приведения Гаусса, согласно к-рому от формы, не удовлетворяющей условиям Лагранжа — Гаусса, следует перейти к ее «соседней»:

$$(a',\ b',\ c')=(a,\ b,\ c)\begin{Vmatrix}0 & -1\\ 1 & k\end{Vmatrix},\quad a'=c,$$

где целое число k выбирается так, что $|b'|\leqslant c/2$. Для любой действительной к. ф. (a, b, c) алгоритм обрывается через конечное число шагов.

Если $q=(a, b, c)$, $a, b, c\in\mathbb{Z}$, н. о. д. $(a, b, c)=1$, то для $d(q)=ac-b^2>3$ имеется лишь два автоморфизма (определителя $+1$), для $d(q)=3$ — шесть автоморфизмов, для $d(q)=1$ — четыре автоморфизма.

б) Приведение к. ф. по Венкову. Это — способ приведения ($\mathfrak{V}_\varphi$), зависящий от параметра φ — произвольно задаваемой действительной положительной n-арной к. ф. (см. [3]). Говорят, что к. ф. q φ-приведена, если

$$(q,\ \bar{\varphi})\leqslant(q,\ \bar{\varphi}S)$$

для всех целочисленных $n\times n$-матриц S определителя 1; здесь $\bar{\varphi}=d(\varphi)\varphi^{-1}$ — форма, взаимная с φ, $\bar{\varphi}S$ — к. ф., получающаяся из $\bar{\varphi}$ подстановкой S, (q_1, q_2) — полуинвариант Вороного, определяемый так: если $q_1=B_1[x]$, $B_1=\|b_{ij}^{(1)}\|$, $q_2=B_2[x], B_2=\|b_{ij}^{(2)}\|$, то

$$(q_1,\ q_2)=\sum\nolimits_{i,\ j=1}^{n} b_{ij}^{(1)}\,b_{ij}^{(2)}.$$

Совокупность φ-приведенных к. ф. образует в пространстве коэффициентов $\mathbb{R}^N$ выпуклый гоноэдр $\mathfrak{V}_\varphi$ с конечным числом граней, лежащий в $\mathfrak{P}$. Если $\varphi=x_1^2+\ldots+x_n^2$ и $n\leqslant 6$, то $\mathfrak{V}_\varphi$ совпадает с областью приведения Минковского.

в) Приведение к. ф. по Зелингу и Шарву. Если в приведении по Венкову положить $\varphi=\varphi_n^{(0)}=\sum_{i\leqslant j}x_ix_j$, где $\varphi_n^{(0)}$ — первая совершенная форма Вороного, то для $n=3$ получается приведение по Зелингу, а для $n=4$ — приведение по Шарву (см. [5], [6]).

Приведение неопределенных к. ф. принципиально сложнее, чем приведение положительных к. ф. Для них нет фундаментальных областей. Только для $n=2$ имеется законченная теория приведения к. ф. над $\mathbb{Z}$.

а) Приведение неопределенных бинарных к. ф. Пусть

$$q=q(x,\ y)=(a,\ b,\ c)\Rightarrow ax^2+2bxy+cy^2,\ a,\ b,\ c\in\mathbb{Z},$$

к. ф. определителя $d=ac-b^2=-|d|$ и $|d|$ не есть полный квадрат. Форме q сопоставляется квадратное уравнение $az^2+2bz+c=0$ и его различные иррациональные корни

$$\Omega=\Omega(q)=\frac{-b-\sqrt{|d|}}{a},\quad \omega=\omega(q)=\frac{-b+\sqrt{|d|}}{a}.$$

Форма q наз. приведенной, если $|\Omega|>1$, $|\omega|<1$, $\Omega\omega<0$. Эти условия равносильны условиям

$$0<\sqrt{|d|}-b<|a|<\sqrt{|d|}+b$$

(а также условиям $0<\sqrt{|d|}-b<|c|<\sqrt{|d|}+b$). Число приведенных целочисленных к. ф. данного определителя конечно. Каждая к. ф. эквивалентна приведенной. Существует алгоритм приведения, использующий цепные дроби (см. [1]).

Для приведенной к. ф. существует ровно одна «соседняя справа» и ровно одна «соседняя слева» приведенная к. ф. (см. [1], с. 100). Исходя из приведенной к. ф., переходя к «соседним», получают двояко бесконечную цепь приведенных форм. Эта цепь периодична. Конечный отрезок неэквивалентных форм этой цепи наз. п е р и о д о м. Две приведенные формы собственно эквивалентны тогда и только тогда, когда одна из них встречается в периоде другой.

Изложенная теория справедлива и для форм с действительными коэффициентами a, b, c, если $\Omega(q)$ и $\omega(q)$ — различные иррациональные корни, но цепь приведенных форм при этом может не быть периодичной.

Все собственные автоморфизмы (определителя $+1$) к. ф. с н. о. д. $(a, b, c)=1$, н. о. д. $(a, 2b, c)=\sigma$, $d=ac-b^2<0$ имеют вид

$$\begin{Vmatrix} \frac{t-bu}{\sigma} & -\frac{cu}{\sigma} \\ \frac{au}{\sigma} & \frac{t+bu}{\sigma} \end{Vmatrix} = \pm \begin{Vmatrix} \frac{T-bU}{\sigma} & -\frac{cU}{\sigma} \\ \frac{aU}{\sigma} & \frac{T+bU}{\sigma} \end{Vmatrix}^n, \qquad n=0, \pm 1, \ldots,$$

где (t, u) пробегает все решения *Пелля уравнения* $t^2+du^2=\sigma^2$, (T, U) — фундаментальное решение этого уравнения, т. е. наименьшее положительное решение. Несобственные автоморфизмы (определителя -1) имеются лишь у д в у с т о р о н н и х ф о р м — форм, класс к-рых совпадает с обратным (см. [1], с. 111). Подгруппа собственных автоморфизмов двусторонней формы имеет индекс 2 в группе всех автоморфизмов.

Неопределенные целочисленные к. ф. определителя $d=-s^2$, $s>0$, $s\in\mathbb{Z}$, приводятся к виду $(0, -s, r)$, где $r\in\mathbb{Z}$, $0\leqslant r<2s$. К. ф. $(0,-s, r_1)$ и $(0, -s, r_2)$, $0\leqslant r_1, r_2<2s$ собственно эквивалентны тогда и только тогда, когда $r_1=r_2$. Все автоморфизмы таких форм суть $\pm\left\|\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right\|$ (см. [1], с. 107).

б) П р и в е д е н и е н е о п р е д е л е н н ы х n-а р н ы х к. ф. Пусть $q(x)=B[x]=x^TBx$ — такая форма с действительными коэффициентами и $d(q)\neq 0$. Тогда существует такая подстановка переменных (над $\mathbb{R}$): $x=Sy$, что

$$q(x)=y_1^2+\ldots+y_t^2-y_{t+1}^2-\ldots-y_n^2,$$

где $(t, n-t)$ — сигнатура к. ф. q. Пусть

$$D=\begin{Vmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \cdot & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & \cdot \\ 0 & & & & & & & -1 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} t \text{ строк} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n-t \text{ строк} \end{matrix}$$

и $B=S^TDS$. К. ф. $q(x)$ сопоставляется положительная к. ф.

$$h_S(x)=y_1^2+\ldots+y_t^2+y_{t+1}^2+\ldots+y_n^2=S^TS[x].$$

Форма q наз. приведенной (по Эрмиту), если найдется такое преобразование S формы q к сумме квадратов, что положительная к. ф. $h_S(x)$ является приведенной (напр., по Минковскому).

Равносильное этому определение приведенной к. ф. следующее [13], [14]. Пусть $\Phi(q)$ — множество матриц H над $\mathbb{R}$ положительных n-арных к. ф., удовлетворяющих равенству $HB^{-1}H=B$. Это связное $t(n-t)$-мерное многообразие конуса положительности $\mathfrak{P}\subset\mathbb{R}^N$ (выпи-

сываемое в явном виде). Пусть $F \subset \mathfrak{P}$ — область приведения положительных к. ф. Форма q наз. приведенной, если $\Phi(q) \cap F$ не пусто.

Число классов целочисленных неопределенных к. ф. от n переменных с данным определителем d конечно (это верно и для положительных к. ф.). Число приведенных форм в данном классе также конечно. Если две целочисленные к. ф. q_1 и q_2 эквивалентны, то найдется целочисленная подстановка S, абсолютные величины элементов к-рой ограничены постоянной, зависящей только от n и d, переводящая q_1 в q_2. Тем самым проблема установления эквивалентности или неэквивалентности двух неопределенных целочисленных к. ф. решается в конечное число шагов.

в) Автоморфизмы неопределенных к. ф. Проблема описания всех автоморфизмов неопределенной целочисленной к. ф. имеет два аспекта: 1) построить фундаментальную область группы автоморфизмов и 2) описать общий вид автоморфизмов (подобно описанию автоморфизмов через уравнение Пелля).

Общий вид автоморфизмов к. ф. был описан Ш. Эрмитом (Ch. Hermite) для $n=3$ и А. Кэли (A. Cayley) для произвольного n (см. [10]).

Построена фундаментальная область группы автоморфизмов неопределенной целочисленной к. ф. $q(x)$ в многообразии $\Phi(q)$, ограниченная конечным числом алгебраич. поверхностей, и вычислен ее объем [13]. В случае $t=1$ в n-мерном пространстве переменных построена фундаментальная область группы автоморфизмов к. ф. $q(x)$ в виде бесконечной пирамиды с конечным числом плоских граней [2], [4].

Построена теория приведения к. ф. в алгебраич. числовых полях (см. [11]).

Лит.: [1] Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.— Л., 1937; [2] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1937, т. 1, с. 139—70; [3] его же, там же, 1940, т. 4, с. 37—52; [4] его же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 30—41; [5] Делоне Б. Н., «Успехи матем. наук», 1937, в. 3, с. 16—62; 1938, в. 4, с. 104—64; [6] Делоне Б. Н., Галиулин Р. В., Шторгин М. И., в кн.: Современные проблемы математики, т. 2, М., 1973, с. 119—254; [7] Леженъ-Дирихле П. Г., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М.— Л., 1936; [8] Рышков С. С., «Зап. науч. семинаров ЛОМИ», 1973, т. 33, с. 37—64; [9] Таммела П. П., там же, 1975, т. 50, с. 6—96; 1977, т. 67, с. 108—43; [10] Bachmann P., Die Arithmetik der quadratischen Formen, Abt. 1—2, Lpz., 1923—25; [11] Humbert P., «Comment. math. helv.», 1949, t. 23, p. 50—63; [12] Minkowski H., «J. reine und angew. Math.», 1905, Bd 129, S. 220—74; [13] Siegel C. L., «Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg», 1940, Bd 13, S. 209—39; [14] его же, «Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl.», 1972, S. 21—46; [15] Van der Waerden B. L., «Acta math.», 1956, v. 96, p. 265—309.

А. В. Малышев.

КВАДРАТНОГО КОРНЯ МЕТОД — метод решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax=b$ с эрмитовой невырожденной матрицей A. Среди прямых методов он наиболее эффективен при реализации на ЭВМ.

Вычислительная схема метода в общем случае основана на факторизации эрмитовой матрицы A в виде

$$A = S^*DS, \tag{1}$$

где S — правая треугольная матрица с действительными положительными диагональными элементами, D — диагональная матрица с элементами 1 или -1 на диагонали. Из (1) непосредственно получаются рекуррентные соотношения для вычисления элементов s_{ij} и d_{ii} матриц S и D:

$$\left.\begin{aligned} d_{ii} &= \operatorname{sign}\left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk}\right), \\ s_{ii} &= \left|a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk}\right|^{1/2}, \\ s_{ij} &= \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \bar{s}_{ki} s_{kj} d_{kk}\right)/s_{ii} d_{ii}, \quad j > i. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

После того как факторизация (1) выполнена, решение исходной системы сводится к последовательному решению двух систем $S^*Dy=b$ и $Sx=y$ с треугольными мат-

рицами. В этой части К. к. м. совпадает с обратным ходом большинства прямых методов решения систем (см. *Гаусса метод*).

В действительном случае, когда A — симметрич. матрица, схема (2) соответствует разложению $A=S'DS$ с действительной матрицей S и несколько упрощается. Существенное упрощение схемы (2) происходит, когда A — положительно определенная матрица. В этом случае $D=E$, $A=S^*S$.

Известны схемы К. к. м. для неположительно определенных матриц, основанные на факторизации вида $A=S^*S$. Для вычисления элементов S имеют место рекуррентные соотношения, аналогичные (2). Однако эта факторизация не эффективна для реализации на ЭВМ в случае, когда A — действительная матрица, так как при вычислении матрицы S возможен выход в комплексную арифметику.

Из характеристик К. к. м. важны следующие.

1) Среди прямых методов решения систем, основанных на факторизации матрицы, К. к. м. обладает самым высоким быстродействием (в два раза выше, чем у метода Гаусса).

2) Для факторизации матрицы по К. к. м. достаточно задавать компактную информацию о матрице в виде элементов ее треугольной половины. Кроме того, схема (2) позволяет записывать в память ЭВМ матрицу S на месте исходной информации об A. Это существенно увеличивает порядок решаемых систем.

3) Вычислительная схема К. к. м. допускает сегментированную обработку исходной матрицы участками из нескольких последовательных строк. Использование внешней памяти при этом позволяет решать системы высокого порядка.

4) К. к. м. сохраняет ленточную структуру матрицы, т. е. матрица S будет иметь тот же вид, что и верхняя половина исходной матрицы.

5) Особенно эффективен К. к. м. для систем с положительно определенными матрицами. В данном случае нет роста элементов матрицы в процессе вычислений. Это свойство обеспечивает устойчивость вычислительного процесса к ошибкам округления. Мажорантная оценка точности вычисленного решения в этом случае — минимальная в классе прямых методов. Понижению общего уровня ошибок способствует и возможность вычисления скалярного произведения векторов в схеме (2) в режиме накопления с удвоенной точностью.

Отсутствие роста элементов в процессе вычислений делает удобным реализацию К. к. м. на ЭВМ, работающих в арифметике с фиксированной запятой.

6) Разложение (1) по К. к. м. может быть использовано для вычисления определителя матрицы, обращения матрицы.

Лит.: [1] Воеводин В. В., Численные методы алгебры, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, М., 1974; [4] Уилкинсон Дж. Х., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970; [4] Воеводин В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977.

Г. Д. Ким.

КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ — алгебраическое уравнение 2-й степени. Общий вид К. у.

$$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0.$$

В поле комплексных чисел К. у. имеет два решения, выражающиеся в радикалах через коэффициенты этого уравнения:

$$x_{1,\,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (*)$$

При $b^2>4ac$ оба решения К. у. действительные и различные, при $b^2<4ac$ решения — комплексные (комплексно сопряженные) числа, при $b^2=4ac$ уравнение имеет кратный корень $x_1=x_2=-b/2a$.

Для приведенного К. у.

$$x^2+px+q=0$$

формула (*) имеет вид

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Корни и коэффициенты К. у. связаны соотношениями: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$ (*Виета теорема*).

О. А. Иванова.

КВАДРАТРИСА — плоская кривая, используемая для решения задачи *квадратуры круга*. Напр.: *Диностратa квадратриса*, *кохлеоида*, квадратриса Чирнгаузена:

$$y=a\sin\frac{\pi x}{2a},$$

квадратриса Оцанама:

$$x=2a\sin^2\frac{y}{2a}.$$

А. Б. Иванов.

КВАДРАТУРА — 1) Построение квадрата, равновеликого данной фигуре (см., напр., *Квадратура круга*). 2) Вычисление площади или интеграла (от функции одного переменного).

КВАДРАТУРА КРУГА — задача на построение квадрата, равновеликого данному кругу; одна из классич. задач древности на точное построение циркулем и линейкой. Сторона квадрата, равновеликого кругу радиуса r, равна $r\sqrt{\pi}$. Таким образом, задача о К. к. сводится к следующей: построить отрезок длины $\sqrt{\pi}$. Такое построение неосуществимо с помощью циркуля и линейки, так как π — *трансцендентное число*, что было доказано в 1882 Ф. Линдеманом (F. Lindemann). Однако задача о К. к. разрешима, если расширить средства построения, напр., используя нек-рые трансцендентные кривые, наз. *квадратрисами*.

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963, с. 205—27.

Е. Г. Соболевская.

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — приближенная формула для вычисления определенного интеграла:

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx\cong\sum_{j=1}^{N}C_jf(x_j);\qquad(1)$$

в левой части стоит интеграл, подлежащий вычислению. Подинтегральная функция записана в виде произведения двух функций. Первая из них $p(x)$ считается фиксированной для данной К. ф. и наз. весовой функцией, функция $f(x)$ принадлежит достаточно широкому классу функций, напр. непрерывных и таких, что интеграл в левой части (1) существует. Сумма в правой части (1) наз. квадратурной суммой, числа x_j наз. узлами К. ф., а числа C_j — коэффициентами К. ф. Нахождение приближенного значения интеграла с помощью формулы (1) сводится к вычислению квадратурной суммы; при этом значения узлов и коэффициентов обычно берутся из таблиц (см., напр., [3]).

Наибольшее распространение получили К. ф., основанные на алгебраическом интерполировании. Пусть $x_1,\ \ldots,\ x_N$ — попарно различные точки (обычно $x_i\in[a,\ b]$, хотя это требование не является обязательным) и $P(x)$ — интерполяционный многочлен функции $f(x)$, построенный по ее значениям в этих точках:

$$P(x)=\sum_{i=1}^{N}L_i(x)\,f(x_i);$$

здесь $L_i(x)$ — многочлен влияния i-го узла: $L_i(x_j)=\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Интеграл по $[a,\ b]$ от $p(x)f(x)$ приближенно заменяется интегралом от $p(x)P(x)$; получается приближенное равенство вида (1), в к-ром

$$C_i=\int_a^b p(x)\,L_i(x)\,dx,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N.\qquad(2)$$

Существование интегралов в (2) равносильно существованию моментов весовой функции

$$\mu_k = \int_a^b p(x)\, x^k\, dx, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N$$

(здесь и далее предполагается, что требуемые моменты $p(x)$ существуют, в частности в случае $p(x) = 1$ промежуток $[a, b]$ считается конечным).

К. ф. (1), коэффициенты к-рой определяются равенствами (2), наз. *интерполяционной*. Целое число $d \geqslant 0$ наз. *алгебраической степенью точности* К. ф. (1), если эта формула точна, когда $f(x)$ — любой многочлен степени выше d, и не точна для $f(x) = x^{d+1}$. Чтобы К. ф. (1) была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы для ее алгебраич. степени точности d выполнялось неравенство $d \geqslant N-1$.

Пусть $p(x) = 1$ и $[a, b]$ конечен. Интерполяционная К. ф. с равноотстоящими узлами

$$x_j = a + jh,\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ h = (b-a)/n, \qquad (3)$$

где n — натуральное число, $N = n+1$, наз. *Ньютона — Котеса квадратурной формулой*; такая К. ф. имеет алгебраич. степень точности $d = n$ при n нечетном и $d = n+1$ при n четном. Интерполяционная К. ф. с одним узлом

$$\int_a^b f(x)\, dx \cong (b-a)\, f(\xi), \quad a \leqslant \xi \leqslant b,$$

наз. *прямоугольников формулой*, ее алгебраич. степень точности $d = 1$, когда $\xi = (a+b)/2$, и $d = 0$ в остальных случаях.

Пусть

$$p(x) \geqslant 0 \text{ на } [a, b],\ \mu_0 > 0 \qquad (4)$$

Интерполяционная К. ф. (1), у к-рой узлами являются корни ортогонального на $[a, b]$ с весом $p(x)$ многочлена степени N, наз. *квадратурной формулой гауссова типа*; ее называют также квадратурной формулой *наивысшей алгебраич. степени точности*, так как при условиях (4) никакая К. ф. с N узлами не может быть точна для x^{2N}. Наиболее употребительны К. ф. гауссова типа, к-рые определяются следующими частными случаями веса $p(x)$ и промежутка $[a, b]$:

вес Якоби $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ $(\alpha > -1,\ \beta > -1)$, $[-1, 1]$ при значениях параметров: а) $\alpha = \beta = 0$ (*Гаусса квадратурная формула*), б) $\alpha = \beta = -1/2$ (*Мелера квадратурная формула*), в) $\alpha = \beta = 1/2$, г) $\alpha = -\beta = 1/2$;

вес Эрмита e^{-x^2} $(-\infty, +\infty)$;

вес Лагерра $x^\alpha e^{-x} (\alpha > -1)$, $(0, +\infty)$.

Существуют К. ф., в к-рых часть узлов заранее фиксирована, а остальные узлы выбираются так, чтобы К. ф. имела наивысшую алгебраич. степень точности. Таковы, в частности, *Лобатто квадратурная формула* и *Радо квадратурная формула* для вычисления интеграла по $[-1, 1]$ с весом 1. В первой из них фиксированными узлами являются -1, 1, а во второй — одна из этих точек.

Две К. ф. с весом 1

$$\int_c^d f(t)\, dt \cong \sum_{j=1}^m C_j f(t_j), \quad \int_\gamma^\delta \varphi(\tau)\, d\tau \cong \sum_{j=1}^m \Gamma_j \varphi(\tau_j)$$

наз. подобными, если $t_j - c = s(\tau_j - \gamma)$, $C_j = s\Gamma_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, где s определяется равенством $d - c = s(\delta - \gamma)$. В случае конечного $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx, \qquad (5)$$

где x_i определяются равенствами (3). Если для вычисления интегралов по промежуткам $[x_i, x_{i+1}]$ применяются К. ф., подобные одной и той же К. ф., то равенст-

(5) приведет к составной К. ф. для вычисления интеграла, стоящего в левой его части. Такова, напр., составная К. ф. прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong h\sum_{j=1}^{n} f(\xi+(j-1)h), \quad \xi\in[a, a+h].$$

В случае $b-a=2\pi$ эта К. ф. точна для $\cos kx$, $\sin kx$ при $k=0, 1, \ldots, n-1$.

Можно рассматривать интерполяционные К. ф., к-рые получаются интегрированием интерполяционного многочлена Эрмита функции $f(x)$. В квадратурную сумму такой К. ф. входит не только значение самой функции в узле, но и значения ее последовательных производных до нек-рого порядка. Значения производных подинтегральной функции на концах промежутка интегрирования используются и в *Эйлера — Маклорена формуле*.

Для погрешности К. ф. (1)

$$R(f)\overset{\text{def}}{=}\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx-\sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j)$$

имеются представления, в к-рые входит производная $f^{(r)}(x)$. Эти представления мало пригодны для фактической оценки $R(f)$, так как при этом требуется оценка производной $f^{(r)}(x)$. Погрешность $R(f)$ является аддитивным и однородным функционалом на векторном пространстве функций, для к-рых она определена.

Другой подход основан на минимизации нормы функционала погрешности $R(f)$ построению К. ф.

Пусть $R(f)$ — погрешность К. ф., к-рая точна для всех многочленов степени не выше $r-1$, при этом $[a, b]=[0, 1]$ и $p(x)=1$, и $W_q^{(r)}$ ($q>1$, r — натуральное число) — векторное пространство функций $f(x)$, к-рые на $[0, 1]$ имеют абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и суммируемую со степенью q производную порядка r. Две функции из $W_q^{(r)}$ считают эквивалентными, если их разность есть многочлен степени не выше $r-1$. Множество классов эквивалентности (факторпространство $W_q^{(r)}$ по векторному пространству многочленов степени не выше $r-1$) является векторным пространством, к-рое обозначают $L_q^{(r)}$. В $L_q^{(r)}$ можно ввести норму, полагая для класса $\psi\in L_q^{(r)}$

$$\|\psi\|\overset{\text{def}}{=}\|f^{(r)}\|_{L_q}\overset{\text{def}}{=}\left\{\int_0^1|f^{(r)}(x)|^q\,dx\right\}^{1/q},$$

где f — любая функция, принадлежащая ψ. Функционал погрешности К. ф. рассматривают на $L_q^{(r)}$, полагая $R(\psi)=R(f)$, $f\in\psi$. Функционал $R(\psi)$ непрерывен в линейном нормированном пространстве $L_q^{(r)}$. Его норма $\|R\|$ характеризует точность К. ф. для всех функций из $W_q^{(r)}$: для любой $f\in W_q^{(r)}$ справедливо неравенство

$$|R(f)|\leqslant\|R\|\cdot\|f^{(r)}\|_{L_q},$$

к-рое является точным. Ясно, что $\|R\|$ есть функция параметров x_k, c_k, $k=1, 2, \ldots, N$, К. ф., и естественно пытаться их выбрать так, чтобы $\|R\|$ принимала наименьшее значение. Это приводит к такой К. ф. (из класса рассматриваемых), погрешность к-рой имеет минимальную оценку для всех функций пространства $W_q^{(r)}$. Таким образом, построение К. ф. сводится к решению экстремальной задачи. Эта задача уже в рассмотренном частном случае весьма сложна и ее решение получено (1978) лишь при $r=1$ и $r=2$.

Лит.: [1] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967; [2] Никольский С. М., Квадратурные формулы, 2 изд., М., 1974; [3] Крылов В. И., Шульгина Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию, М., 1966.

И. П. Мысовских.

КВАДРАТУРНЫХ СУММ МЕТОД — метод аппроксимации интегрального оператора при построении численных методов решения интегральных уравнений.

Простейший вариант К. с. м. состоит в замене интегрального оператора, напр. вида

$$\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

в интегральном уравнении

$$\lambda\varphi(x)+\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds=f(s),$$

на оператор с конечномерной областью значений по правилу

$$\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\approx\sum_{i=1}^N a_i^{(N)}K(x, s_i)\,\varphi(s_i). \qquad (1)$$

Интегральное уравнение в свою очередь аппроксимируется линейным алгебраич. уравнением

$$\lambda\tilde{\varphi}(s_j)+\sum_{i=1}^N a_i^{(N)}K(s_j, s_i)\,\tilde{\varphi}(s_i)=f(s_i),\ j=\overline{1,N}.$$

В правой части приближенного равенства (1) стоит квадратурная формула для интеграла по s. Возможны разнообразные обобщения аппроксимации (1) вида:

$$\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds\approx\sum_{i=1}^N a_i^{(N)}(x)\,\varphi(s_i), \qquad (2)$$

где $a_i^{(N)}(x)$ — некоторые функции, строящиеся по ядру $K(x, s)$. К. с. м., обобщенный в виде (2), может применяться при аппроксимации интегральных операторов с особенностями в ядре и даже сингулярных интегральных операторов.

Лит.: [1] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.— Л., 1962.

А. Б. Бакушинский.

КВАДРИКА — 1) К.— поверхность 2-го порядка. В трехмерном пространстве (проективном, аффинном или евклидовом) К. есть множество точек, однородные координаты x_0, x_1, x_2, x_3 к-рых (относительно проективной, аффинной или декартовой системы координат) удовлетворяют однородному уравнению 2-й степени:

$$F(x)\equiv\sum_{i,\ j=0}^3 a_{ij}x_ix_j=0,\quad a_{ij}=a_{ji}.$$

Билинейная симметричная форма

$$\Phi(x, \tilde{x})=\sum_{i,\ j=0}^3 a_{ij}x_i\tilde{x}_j$$

наз. полярной формой относительно $F(x)$. Две точки $M'(x_0', x_1', x_2', x_3')$, $M''(x_0'', x_1'', x_2'', x_3'')$, для которых $\Phi(x', x'')=0$, наз. полярно сопряженными точками относительно К. Если прямая (M', M'') пересекает К. в точках N_1, N_2 и точки M', M'' полярно сопряжены относительно К., то точки N_1, N_2 и M', M'' образуют *гармоническую четверку*. Точки К. и только они являются самосопряженными. Прямая, каждая точка к-рой принадлежит К., наз. прямолинейной образующей К. Полюсом данной плоскости относительно К. наз. точка, полярно сопряженная со всеми точками этой плоскости. Множество точек пространства, полярно сопряженных с данной точкой M' относительно К., наз. полярой точки M' относительно К. Касательная плоскость к К.— поляра точки касания. Поляра точки M' определяется линейным уравнением $\Phi(x, x')=0$ относительно координат x_0, x_1, x_2, x_3. Если $\Phi(x, x')\not\equiv 0$, то поляра точки M' — плоскость; если $\Phi(x, x')\equiv 0$, то поляра точки M' — все пространство. В этом случае точка M' принадлежит К. и наз. особой точкой. Если число $R=\operatorname{rang}(a_{ij})=4$, то К. не имеет особых точек и наз. невырождающейся К. В проективном пространстве это — мнимый овалоид, действительный овалоид или линейчатая К. Невырождающаяся К. определяет корреляцию — биективное отображение множества точек проективного простран-

ства на множество плоскостей. Линейчатая невырождающаяся К. имеет два различных семейства прямолинейных образующих, расположенных на К. так, что всякие две прямые одного семейства не пересекаются, а две прямые разных семейств пересекаются в одной точке. Если $R=3$, то К. является конусом (действительным или мнимым) с вершиной в единственной особой точке. Действительный конус имеет единственное семейство прямолинейных образующих, проходящих через его вершину. Если $R=2$, то К. распадается на пару плоскостей (действительных или мнимых), пересекающихся по прямой, состоящей из особых точек. Если $R=1$, то К. является сдвоенной действительной плоскостью, образованной особыми точками К. Аффинные свойства К. выделяются спецификой расположения К., ассоциированных с ней точек, прямых и плоскостей относительно выделенной плоскости $x_0=0$ — несобственной плоскости. Напр., эллипсоид (гиперболоид, параболоид) — невырожденная К., не пересекающая (пересекающая, касающаяся) несобственную плоскость. Центр К.— полюс несобственной плоскости; диаметр — прямая, полярно сопряженная несобственной прямой.

Лит.: [1] Фиников С. П., Аналитическая геометрия, 2 изд., М., 1952; [2] Ефимов Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 5 изд., М., 1960. *В. С. Малаховский.*

2) К. в алгебраической геометрии — проективное алгебраическое многообразие, определяемое однородным квадратным уравнением

$$\sum_{i,\ j=0}^{n} a_{ij}x_ix_j=0$$

в проективном пространстве P^n над основным полем k.

Пусть далее основное поле алгебраически замкнуто с характеристикой, не равной 2. Пусть Q — К. в P^n и $s(Q)$ — множество ее особых точек. Тогда $s(Q)$ — пустое множество, если и только если $rk\,(Q)=n+1$, где $rk\,(Q)$ — ранг соответствующей квадратичной формы. Если $s(Q)$ не пусто, то Q — конус над гладкой К. размерности $rk\,(Q)-1$, вершиной к-рого является проективное подпространство $s(Q)$ в P^n размерности $n-rk\,(Q)$. Все К. с $rk\,(Q)=r$ проективно эквивалентны К.

$$\sum_{i=0}^{r-1} x_i^2=0.$$

Пусть $s(Q)$ пусто и $E\subset Q$ — линейное подпространство максимальной размерности (оно наз. образующей квадрики Q), тогда

а) если $\dim Q=2m$, то $\dim E=m$;

б) если $\dim Q=2m+1$, то $\dim E=m$.

Кроме того, семейство всех подпространств E максимальной размерности на Q является замкнутым неособым подмножеством G грассманова многообразия подпространств размерности $\dim E$ в P^n, причем, если $\dim Q=2m$, то $G=G_1\cup G_2$; G_i, $i=1,\ 2$,— непересекающиеся неособые неприводимые рациональные многообразия одинаковой размерности $\binom{m+1}{2}$, а E и E' принадлежат одной и той же компоненте, если и только если

$$\dim (E\cap E')\equiv \dim E\ (\mathrm{mod}\ 2).$$

Если же $\dim Q=2m+1$, то G является неособым и неприводимым рациональным многообразием размерности $\binom{m+2}{2}$.

В случае, когда $s(Q)$ пусто и $\dim Q=2$, $Q\simeq P^1\times P^1$; если же $\dim Q\neq 2$, то $\mathrm{Pic}(Q)\simeq\mathbb{Z}$.

Любая К. рациональна: бирациональный изоморфизм К. Q с проективным пространством задается стереографич. проекцией К. Q из нек-рой точки $q\in Q$, $q\notin s(Q)$. Многообразия, являющиеся полными пересечениями К., изучаются с точки зрения бирациональной геометрии [3]. Пересечения двух К. изучены в [2], трех — в [4].

Любое проективное многообразие X может быть так погружено в проективное пространство P^N (для достаточно большого N), что его образ является пересечением (как правило, неполным) К., его содержащих [1].

Изучение К. над незамкнутыми полями тесно связано с арифметикой квадратичных форм.

Лит.: [1] Mumford D., C. I. M. E. III ciclo. Varenna, 1969, Roma, 1970, p. 29—100; [2] Reid M., The complete intersection of two or more quadrics, These D. Ph. Cambridge Univ., 1972; [3] Roth L., Algebraic threefols (with special regard to problems of rationality), B.—Hdlb.—N.Y., 1955; [4] Тюрин А. Н., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, № 6, с. 51—99.

В. А. Исковских.

КВАДРИРУЕМОСТЬ — измеримость по Жордану множества на плоскости (см. *Жордана мера*). Не всякая область (т. е. открытое связное множество) и даже не всякая жорданова область (т. е. область, имеющая своей границей простую замкнутую кривую) квадрируема. С другой стороны, множество, граница к-рого *спрямляемая кривая*, квадрируемо.

Лит.: [1] Никольский С. М., Курс математического анализа, т. 2, М., 1973.

В. В. Сазонов.

КВАЗИАБЕЛЕВА ФУНКЦИЯ — обобщение *абелевой функции*. Мероморфная в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $n>1$, функция $f(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)$, наз. квазиабелевой функцией, если она имеет m, $0<m\leqslant 2n$, линейно независимых периодов; в случае абелевых функций $m=2n$. К. ф. могут рассматриваться как предельный случай абелевых функций, когда нек-рые периоды неограниченно возрастают.

Лит.: [1] Severi F., Funzioni quasi-abeliane, Roma, 1947.

Е. Д. Соломенцев.

КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЙ КЛАСС функций — класс функций, характеризуемый свойством единственности: если две функции класса совпадают «в малом», то они тождественны. Простейшим К. к. является класс функций, аналитических на отрезке $[a, b]$ действительной оси (функция этого класса представляется в достаточно малой окрестности каждой точки отрезка рядом Тейлора): если две аналитические на $[a, b]$ функции равны на интервале $(\alpha, \beta)\subset[a, b]$, то они тождественны [совпадение «в малом» здесь означает равенство функций на внутреннем интервале (α, β)]. Совпадение «в малом» для аналитич. функций может означать и равенство функций вместе со всеми производными в нек-рой точке x_0, $0\leqslant x_0\leqslant b$. Из совпадения «в малом» в этом новом смысле также следует тождественность функций на всем отрезке.

Э. Борель (E. Borel) обнаружил, что свойство единственности может иметь место не только для аналитич. функций. В связи с этим Ж. Адамар (J. Hadamard, 1912) поставил следующую проблему. Пусть $\{M_n\}$ — последовательность положительных чисел и $[a, b]$ — некоторый отрезок действительной оси. Пусть $C\{M_n\}$ — множество бесконечно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $f(x)$ таких, что

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant K^n M_n,\ a\leqslant x\leqslant b,\ n=0, 1, 2, \ldots,$$

где $K=K(f)$ — постоянная, не зависящая от n. При этом функция $f(x)$ является аналитической на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда при некотором $K=K(f)$

$$|f^{(n)}(x)|<K^n n!,\ a\leqslant x\leqslant b,\ n=0, 1, 2, \ldots \quad (1)$$

Таким образом, класс аналитических на $[a, b]$ функций есть класс $C\{n!\}$. Проблема Адамара состоит в указании условий на числа M_n таких, чтобы всякая функция из класса $C\{M_n\}$, обращающаяся в нуль вместе со всеми своими производными в нек-рой точке α_0, $a\leqslant\alpha_0\leqslant b$, была тождественно равна нулю (или, что то же, чтобы две функции из $C\{M_n\}$, равные вместе со всеми производными в точке α_0, были всюду равны). Класс $C\{M_n\}$ с таким свойством наз. квазианалитическим на $[a, b]$. Класс $C\{n!\}$, согласно сказанному выше,— квазианалитический на $[a, b]$.

А. Данжуа (A. Denjoy, 1921) привел достаточные условия квазианалитичности. Он указал, что если

$$M_n = n!\,(\ln n)^n,\quad M_n = n!\,(\ln n)^n\,(\ln\ln n)^n,\ \ldots,$$

то $C\{M_n\}$ — квазианалитический (эти классы, в силу (1), шире класса аналитич. функций).

Т. Карлеман (T. Carleman) полностью решил проблему Адамара, дав необходимые и достаточные условия квазианалитичности. Эти условия в дальнейшем видоизменялись. Теорема Данжуа — Карлемана о квазианалитичности формулируется так: каждое из следующих условий является необходимым и достаточным для квазианалитичности класса $C\{M_n\}$:

а) если положить

$$\beta_n = \inf_{k \geqslant n} M_k^{1/k},$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} = \infty,$$

б) если положить

$$T(r) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{r^n}{M_n},$$

то

$$\int^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr = \infty,$$

в) либо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, M_n^{1/n} < \infty,$$

либо

$$\lim_{n\to\infty} M_n^{1/n} = \infty$$

и

$$\sum^{\infty} \frac{M'_n}{M'_{n+1}} = \infty,$$

где $\{M'_n\}$ — выпуклая регуляризация посредством логарифмов последовательности $\{M_n\}$. [Условие а) наз. условием Карлемана, б) — условием Островского, в) — условием Банга — Мандельбройта].

В случае $M_n = n! = n^n/(e+\varepsilon_n)^n$ ($\varepsilon_n \to 0$ при $n\to\infty$) имеем $\beta_n \approx n/e$, выполняется условие а), и снова получаем, что $C\{n!\}$ — квазианалитич. класс. В случае $M_n = n!\,(\ln n)^n$ имеем $\beta_n \approx (n\ln n)/e$, выполняется условие а) и потому класс Данжуа $C\{n!\,(\ln n)^n\}$ — квазианалитический. В случае $M_n = n!\,(\ln^{1+\varepsilon} n)^n$, $\varepsilon > 0$, имеем

$$\beta_n \approx (n \ln^{1+\varepsilon} n)/e,\quad \sum_n^{\infty} \frac{1}{\beta_n} < \infty,$$

вследствие чего $C\{M_n\}$ — не К. к.

С. Н. Бернштейн ввел другие К. к. функций. Он показал, что функция $f(x)$ является аналитической на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда

$$E_n(f) < M\rho^n,\quad n = 0, 1, 2, \ldots,\ \rho < 1,$$

где $M = M(f)$ и $\rho = \rho(f)$ не зависят от n, а $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ на $[a, b]$ многочленами степени n. Имея это ввиду, он рассмотрел класс функций $f(x)$ на $[a, b]$, удовлетворяющих условию

$$E_n(f) < M\rho^n,\ \rho < 1,\ n = n_1, n_2, \ldots, \qquad (2)$$

где $n_1, n_2, \ldots$ — некоторая бесконечная возрастающая последовательность целых чисел, и доказал, что если на нек-ром интервале $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ функция этого класса равна нулю, то она тождественно равна нулю. Класс функций C, заданных на $[a, b]$, наз. квазианалитическим (по Бернштейну), если две

функции этого класса, совпадающие в нек-рой части $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$, необходимо совпадают на всем отрезке $[a, b]$. Класс (2) — квазианалитический в этом смысле. Следует заметить, что из условия (2) не вытекает, что $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция (имеются соответствующие примеры).

Изучаются и другие проблемы квазианалитичности. Напр., решается вопрос о скорости убывания коэффициентов a_n и b_n в ряде

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

при к-рой класс таких функций квазианалитический; находятся условия на числа M_n такие, чтобы функции $f(z)$, аналитические в круге $|z|<1$, бесконечно дифференцируемые в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ и удовлетворяющие условиям

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant K^n M_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad |z| \leqslant 1,$$

образовывали К. к., и т. д.

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1954; [2] Мандельбройт С., Квазианалитические классы функций, пер. с франц., Л.— М., 1937; [3] его же, Примыкающие ряды, регуляризация последовательностей. Применения, пер. с франц., М., 1955.

А. Ф. Леонтьев.

КВАЗИАФФИННАЯ СХЕМА — схема, изоморфная открытой квазикомпактной подсхеме *аффинной схемы*. Квазикомпактная схема X квазиаффинна, если выполняется любое из следующих условий: канонический морфизм $X \to \operatorname{Spec} \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ является открытым вложением; любой квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей порождается глобальными сечениями. Морфизм схем $f: X \to Y$ наз. квазиаффинным, если для любой открытой аффинной подсхемы U в Y прообраз $f^{-1}(U)$ является К. с.

В. И. Данилов.

КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ, квазигеодезическая,— кривая на поверхности, на любом отрезке к-рой повороты справа и слева имеют одинаковый знак (см. *Извивание кривой*). Напр., ребро линзы — К. л.

Класс К. л. существенно дополняет класс геодезич. линий, делая его семейства (ограниченные по длине и расположению) компактными. В двумерном многообразии M ограниченной кривизны из каждой точки в каждом направлении идет хотя бы одна К. л.; она всегда может быть продолжена. Отрезки К. л. (в пределах к-рых на M нет точек с кривизной 2π) суть пределы геодезических, лежащих на гладких поверхностях, правильно сходящихся к M.

Лит.: [1] Александров А. Д., Бураго Ю. Д., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1965, т. 76, с. 49—63.

В. А. Залгаллер.

КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — проективное n-пространство, в к-ром метрика определяется абсолютом, заданным совокупностью абсолютного конуса Q_0 индекса k с $(n-m-1)$-вершиной (абсолютная плоскость T_0) и $(n-m-2)$-квадрикой (абсолютная квадрика Q_1) индекса l на этой $(n-m-1)$-плоскости. Определяемое таким образом пространство наз. квазигиперболическим пространством индексов k и l, обозначается символом ${}^{kl}S_n^m$, где $m<n$. К. п. является частным случаем *полугиперболических пространств*. К. п. ${}^{kl}S_n^m$ получается предельным переходом из гиперболич. пространства ${}^{l}S_n$ таким образом, что при этом абсолют гиперболич. пространства переходит в абсолют К. п.

При $m=0$ конус Q_0 является парой сливщихся плоскостей, совпадающих с плоскостью T_0, а абсолют пространства совпадает с абсолютом псевдоевклидова пространства ${}^{l}R_n$. При $m=1$ конус Q_0 является парой действительных плоскостей; в частности, для ${}^{11}S_3^1$ плоскость T_0 является прямой пересечения этих двух плоскостей, а квадрика Q_1 — парой точек на прямой T_0. В случае

$m=n-1$ конус Q_0 имеет точечную вершину, и абсолют пространства ${}^{kl}S_n^{n-1}$ совпадает с абсолютом *копсевдоевклидова пространства* ${}^{l}R_n^*$.

К. п. являются пространствами более общего проективного типа по отношению к копсевдоевклидовым пространствам.

Проективная метрика К. п. ${}^{kl}S_n^m$ определяется таким образом, чтобы при $m=0$ получалась метрика псевдоевклидова пространства ${}^{l}R_n$, а при $m=n-1$ — метрика копсевдоевклидова пространства ${}^{k}R_n^*$.

В К. п. различают прямые четырех типов: э л л и п т и ч е с к и е п р я м ы е, пересекающие абсолютный конус в двух *мнимо сопряженных* точках; г и п е р б о л и ч е с к и е п р я м ы е, пересекающие абсолютный конус в двух действительных точках; п а р а б о л и ч е с к и е п р я м ы е, проходящие через вершину абсолютного конуса; и з о т р о п н ы е п р я м ы е, проходящие через вершину абсолютного конуса и касающиеся его.

Расстояние δ между двумя точками X и Y определяется в случае, когда прямая XY не пересекается с $(n-m-1)$-плоскостью T_0, с помощью соотношения

$$\cos^2\frac{\delta}{\rho}=\frac{(x^0E_0y^0)^2}{(x^0E_0x^0)\,(y^0E_0y^0)},$$

где E_0 — линейный оператор, определяющий скалярное произведение в псевдоевклидовом $(m+1)$-пространстве ${}^{k}R_{m+1}$; $x^0=(x^a,\ a\leqslant m)$, $y^0=(y^b,\ b\leqslant m)$ — векторы точек X и Y, ρ — действительное число. Расстояние между двумя точками, не лежащими на параболич. прямой, равно расстоянию между проекциями этих точек на m-плоскость $x^1=0$ в направлении $(n-m-1)$-плоскости T_0. В случае, когда прямая XY пересекает $(n-m-1)$-плоскость T_0, то расстояние d вычисляется с помощью разности $a=y^1-x^1$, где $x^1=(x^u,\ u>m)$, $y^1=(y^v,\ v>m)$ — векторы точек X и Y в псевдоевклидовом пространстве R_{n-m}; $d(XY)=aE_1a$, здесь E_1 — линейный оператор, определяющий скалярное произведение в этом пространстве.

За угол между двумя плоскостями пространства ${}^{kl}S_n^m$ принимается (нормированное) расстояние между двумя соответствующими точками в двойственном ему пространстве ${}^{lk}S_n^{n-m-1}$ по принципу двойственности проективного n-пространства. Координаты этих точек численно равны проективным координатам данных плоскостей. В случае, когда $(n-2)$-плоскость пересечения двух данных плоскостей пересекается с $(n-m-1)$-плоскостью T_0, этот угол всегда равен нулю, но тогда применяется способ измерения, аналогичный измерению расстояний в подобном случае. В частности, при $n=2$ углы между 1-плоскостями являются углами между прямыми и, в зависимости от расположения 2-плоскости относительно плоскости T_0, на этой плоскости возможны три типа геометрий — евклидова, псевдоевклидова или копсевдоевклидова.

Движениями К. п. являются коллинеации, сохраняющие расстояние между точками и переводящие абсолютный конус Q_0, $(n-m-1)$-вершину T_0 и $(n-m-2)$-квадрику Q_1 в T_0 в себя. Движения описываются псевдоортогональными операторами индекса l. В К. п. ${}^{ll}S_{2m+1}^m$, двойственном самому себе, определяется к о д в и ж е н и е — корреляция, переводящая всякие две точки в две плоскости, угол между к-рыми пропорционален расстоянию между двумя данными точками, а всякие две плоскости — в две точки, расстояние между которыми пропорционально углу между плоскостями. Кодвижения описываются псевдоортогональными операторами индекса l. Движения образуют группу Ли, как и движения и кодвижения двойственного самому себе К. п.

Квазигиперболическое 3-пространство с проективной эллиптич. метрикой на прямых — ${}^{01}S_3^1$ — имеет коевклидову метрику на 2-плоскостях и псевдоевклидову метрику индекса 1 в связках плоскостей. Квазигиперболическое 3-пространство с гиперболической проективной метрикой расстояний может быть двух типов — ${}^{10}S_3^1$ и ${}^{11}S_3^1$, отличающихся метриками в связках плоскостей: в первом — евклидова, во втором — псевдоевклидова метрика индекса 1. Метрика на 2-плоскостях одна и та же — копсевдоевклидова индекса 1.

Квазигиперболическое 3-пространство ${}^{11}S_3^1$ может быть интерпретировано как группа движений псевдоевклидовой 2-плоскости индекса 1. Многообразие гиперболич. прямых указанного квазигиперболического 3-пространства допускает интерпретацию на паре таких псевдоевклидовых плоскостей. Пространства ${}^{10}S_3^1$ и ${}^{01}S_3^1$, двойственные друг другу, допускают интерпретации на комплексной 2-плоскости.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969; [2] Яглом И. М., Розенфельд Б. А., Ясинская Е. У., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 5, с. 51—113.

Л. А. Сидоров.

КВАЗИГРУППА — множество с одной бинарной операцией (наз. обычно умножением), в к-ром каждое из уравнений $ax=b$ и $ya=b$ имеет единственное решение для любых элементов a, b этого множества. К. с единицей наз. *лупой*.

К.— естественное обобщение понятия группы. К. возникают в различных областях математики, напр. в теории проективных плоскостей, неассоциативных тел, в ряде вопросов комбинаторного анализа и т. п. Термин «К.» введен Р. Муфанг (R. Moufang); с ее работ по недезарговым плоскостям (1935), в к-рых выяснялась связь таких плоскостей с К., собственно и началось развитие теории К.

Основные понятия. Отображения $R_a: x \to xa$ и $L_a: x \to ax$ наз. правой и левой трансляциями (или сдвигами) относительно элемента a. В К. трансляции являются *подстановками* множества ее элементов. Подгруппа G группы подстановок множества Q, порожденная всеми трансляциями К. $Q(\cdot)$, наз. группой, ассоциированной с квазигруппой $Q(\cdot)$. Существует тесная связь между строением группы G и К. $Q(\cdot)$.

Гомоморфный образ К., вообще говоря, не К., а *группоид* с делением. Гомоморфизмам К. на К. соответствуют так наз. нормальные конгруэнции (конгруэнция θ на $Q(\cdot)$ нормальна, если каждое из соотношений $ac\theta bc$ и $ca\theta cb$ влечет $a\theta b$). В группах все конгруэнции нормальны. Подквазигруппа H наз. нормальной, если существует такая нормальная конгруэнция θ, что H совпадает с одним из классов конгруэнции. Существуют К., в к-рых два или даже все классы по конгруэнции θ — подквазигруппы.

С каждой квазигрупповой операцией на множестве связаны еще две операции, наз. левой и правой обратной операциями, обозначаемые $(/)$ и $(\backslash)$ соответственно. Они определяются следующим образом: $z/y=x$ и $x\backslash z=y$, если $x\cdot y=z$. Рассматривая всевозможные перестановки трех элементов x, y, z, можно получить пять обратных операций, не считая исходной. Переход от основной операции к одной из них наз. парастрофией. К., в к-рых все обратные операции совпадают с основной, наз. тотально-симметрическими, или TS-квазигруппами. TS-квазигруппы можно определить также как К., удовлетворяющие тождествам: $xy=yx$ и $x(xy)=y$. Идемпотентные TS-квазигруппы (т. е. с дополнительным тождеством $x^2=x$) наз. квазигруппами Штейнера. Они тесно связаны с системами троек Штейнера (см. *Штейнера система*).

Одним из самых важных понятий в теории К. является понятие *изотопии*. Изотопия может быть определена и для К., заданных на разных (но равномощных) множествах. Число неизотопных К., к-рые могут быть заданы на конечном множестве мощности n, известно (1978) только для $n \leqslant 8$.

Основные классы квазигрупп. Самые первые работы по К. относятся к таким обобщениям групп, в к-рых требование ассоциативности заменяется более слабыми условиями, теперь называемыми постулатами «А» и «Б» Сушкевича. К. удовлетворяет постулату Сушкевича «А», если решение x уравнения $(ab)c=a(bx)$ зависит только от b и c, и постулату «Б», если это решение зависит только от c. Доказано, что К. этих классов изотопны группам. В случае, когда решение такого уравнения зависит от a и c, К. наз. левой F-квазигруппой. Аналогично, при помощи уравнения $(ab)c=x(bc)$ определяется правая F-квазигруппа. К., являющаяся левой и правой F-квазигруппой одновременно, наз. F-квазигруппой. Существуют F-квазигруппы, не изотопные группам. Идемпотентная F-квазигруппа наз. дистрибутивной квазигруппой и может быть определена тождествами:

$$(yz)x=(yx)(zx), \quad x(yz)=(xy)(xz),$$

наз. тождествами дистрибутивности. Доказано, что дистрибутивные К. изотопны лупам Муфанг (см. *Луп а*). К. $Q(\cdot)$ медиальна, если выполняется тождество

$$(xy)(uv)=(xu)(yv).$$

Всякая медиальная К. изотопна абелевой группе $Q(+)$ и изотопия имеет вид

$$x \cdot y=\varphi x+\psi y+c,$$

где φ, ψ — коммутирующие автоморфизмы группы, а c — некоторый элемент Q (теорема Тоёды).

Системы квазигрупп и функциональные уравнения. Пусть на множестве Q задана нек-рая система К. В этом случае операции удобнее обозначать буквами: вместо $ab=c$ писать, напр., $A(a, b)=c$. Квазигрупповые операции на Q предполагаются связанными между собой нек-рым образом, чаще всего какими-либо тождествами, называемыми в этом случае «функциональными уравнениями». Обычно решается задача нахождения системы К. на Q по заданным функциональным уравнениям. Напр., решено уравнение общей ассоциативности:

$$A_1[A_2(x, y), z]=A_3[x, A_4(y, z)], \qquad (1)$$

а именно, доказано, что если четыре К. удовлетворяют (1), то они изотопны одной группе $Q(\cdot)$, а общее решение дается равенствами:

$$A_1(x, y)=\alpha x \cdot \beta y, \quad A_2(x, y)=\alpha^{-1}(\varphi x \cdot \psi y),$$
$$A_3(x, y)=\varphi x \cdot \theta y, \quad A_4(x, y)=\theta^{-1}(\psi x \cdot \beta y),$$

где α, β, φ, ψ, θ — любые подстановки множества Q. Очень похоже решается уравнение общей медиальности:

$$A_1[A_2(x, y), A_3(u, v)]=A_4[A_5(x, u), A_6(y, v)].$$

Все шесть К. здесь оказываются изотопными одной абелевой группе.

***n*-арные квазигруппы.** Множество с одной n-арной операцией наз. n-квазигруппой, если каждое из уравнений

$$a_1a_2 \ldots a_{i-1}xa_{i+1} \ldots a_n=b$$

(где $b, a_1, a_2, \ldots, a_n \in Q$, $i=1, 2, \ldots, n$) имеет единственное решение. На n-квазигруппы переносятся основные понятия теории К. (изотопия, парастрофия и т. д.).

Каждая n-квазигруппа изотопна нек-рой n-лупе (см. *Лупа*).

Некоторые классы обычных бинарных К. (такие как классы медиальных, TS-квазигрупп и др.) имеют аналог в n-арном случае. Операция A арности n п р и в о д и м а, если существуют две такие операции B и C арности не меньше двух, что

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = B(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, C(x_i, \ldots, x_j), x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

(сокращенная запись $A = B \overset{i}{+} C$). В противном случае A наз. н е п р и в о д и м о й. Для n-арных К. верна теорема, аналогичная теореме о канонич. разложении натурального числа на простые множители.

Комбинаторные вопросы. Таблица умножения конечной К., т. е. ее *Кэли таблица*, в комбинаторике известна под названием *латинский квадрат*. Одна из задач комбинаторной теории К.— отыскание систем взаимно ортогональных К. на заданном множестве — важна для построения конечных проективных плоскостей. Две К. A и B, заданные на множестве Q, о р т о г о н а л ь н ы, если система уравнений $A(x, y) = a$, $B(x, y) = b$ имеет единственное решение для любых a и b из Q. Ортогональность конечных К. эквивалентна ортогональности их латинских квадратов. Доказано, что система взаимно ортогональных К., определенных на множестве из n элементов, не может содержать более чем $n-1$ К.

Другим комбинаторным понятием, связанным с К., является понятие п о л н о й п о д с т а н о в к и. Подстановка φ К. $Q(\cdot)$ наз. полной, если отображение $\varphi' : x \to x\varphi x$ также подстановка множества Q. Не всякая К. обладает полной подстановкой. К., обладающая полной подстановкой, наз. д о п у с т и м о й. Для допустимой группы существует ортогональная к ней К., и обратно: если для группы существует ортогональная к ней К., то группа допустима. Если конечная К. порядка n допустима, то из нее специальным процессом (продолжением) можно получить К. порядка $n+1$.

Алгебраические сети. К. имеют естественную геометрич. интерпретацию с помощью алгебраич. сетей, называемых также алгебраич. тканями (см. *Ткани геометрия*). А л г е б р а и ч е с к о й с е т ь ю наз. множество, состоящее из элементов двух видов — линий и точек — с некоторым отношением инцидентности между ними. (Вместо слова «инцидентна» употребляются также выражения «проходит через», «лежит на».) Пусть множество линий N разбито на три класса так, что выполняются аксиомы: 1) две линии из различных классов инцидентны ровно одной общей точке из N; 2) каждая точка инцидентна ровно одной линии каждого класса. Тогда N наз. 3-сетью. Аналогично, разбиением на k классов могут быть определены k-сети. Число (мощность множества) линий в каждом классе одинаково и равно числу (мощности множества) точек любой линии сети. Оно наз. п о р я д к о м с е т и. Сети могут быть координатизированы с помощью К. следующим образом. Пусть дана 3-сеть N с множеством линий L_1, L_2, L_3 и Q — множество, мощность к-рого равна порядку сети N. И пусть фиксированы нек-рые взаимно однозначные соответствия между Q и каждым из L_i, т. е. каждой линии класса L_i дана нек-рая координата в Q. Множество Q становится К. (к о о р д и н а т н а я к в а з и г р у п п а с е т и), если на нем определить следующую операцию: $xy = z$, тогда и только тогда, когда общая точка линии с координатой x из L_1 и линии с координатой y из L_2 лежит на линии с координатой z из L_3. Обратно, каждая К. является координатной К. некоторой 3-сети. При различных взаимно однозначных соответствиях между Q и L_i получаются различные, но изотопные К. на множестве Q. Каждой 3-сети, в к-рой зафиксирован

порядок классов L_1, L_2, L_3, соответствует класс всех изотопных между собой К. Перенумерации классов сети соответствует парастрофия координатных К.

Каждому свойству 3-сети соответствует инвариантное при изотопии (т. е. универсальное) свойство К. Такими свойствами являются, напр., *замыкания условия*, наиболее известны из к-рых условия замыкания Томсена, Рейдемейстера, Бола, шестиугольника. Условие Томсена для координатной К. означает, что из соотношений $x_1y_2=x_2y_1$ и $x_1y_3=x_3y_1$ для ее элементов x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 следует соотношение $x_2y_3=x_3y_2$. В К. выполняется условие Томсена тогда и только тогда, когда она изотопна абелевой группе. Аналогичные характеристики К. получены и для других условий замыкания.

k-сети координатизируются с помощью $k-2$ взаимно ортогональных К.

Лит.: [1] Белоусов В. Д., Основы теории квазигрупп и луп, М., 1967; [2] Итоги науки, Алгебра. Топология. Геометрия, 1965, М., 1967, с. 63—81; [3] Bruck R. H., A Survey of Binary Systems, 3 ed., B., 1971; [4] его же, «Studies in math.», 1963, v. 2, p. 59—99; [5] Aczél J., «Adv. Math.», 1965, v. 1, № 3, p. 383—450.

В. Д. Белоусов.

КВАЗИДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР — термин эргодич. теории и топологич. динамики, употребляемый в оборотах: «динамическая система (поток, каскад или порождающее последний преобразование) имеет К. с. (или является системой, потоком и т. д. с К. с.)».

В эргодич. теории понятие «преобразование с К. с.» фактически рассматривается только применительно к эргодич. автоморфизму T *Лебега пространства* (X, μ) (хотя приводимое ниже определение формально годится и в более общей ситуации). Для T индуктивно определяются квазисобственные функции (к. ф.) и квазисобственные значения (к. з.) n-го порядка. К. ф. 1-го порядка — это обычные собственные функции соответствующего оператора сдвига

$$U_T: f(x) \longmapsto f(Tx) \text{ в } L^2(X, \mu),$$

т. е. такие ненулевые $f \in L^2(X, \mu)$, что $f(Tx)=\lambda f(x)$ (почти всюду; ниже подобная оговорка опускается), где λ — некоторая константа (собственное значение; оно является к. з. 1-го порядка). Если $f \in L^2(X, \mu)$, $f \neq 0$ и $f(Tx)=\varphi(x)f(x)$, где φ — некоторая к. ф. n-го порядка, то f наз. к. ф. $(n+1)$-го порядка, а φ — соответствующим к. з. (того же порядка). (В [2] вместо к. ф. и к. з. говорится об обобщенных собственных функциях и обобщенных собственных значениях.) Из эргодичности T следует, что $|f(x)|=\text{const}$ для любой к. ф. f, а если f еще и к. з., то $|f(x)|=1$. Поэтому часто в определение к. ф. включают условие нормировки $|f(x)|=1$. Говорят, что T имеет К. с., если к. ф. всевозможных порядков образуют полную систему в $L^2(X, \mu)$. Законченные результаты относятся к тому случаю, когда в дополнение к сказанному T вполне эргодичен (т. е. все его степени эргодичны). Имеется полная метрическая классификация таких T и их свойства хорошо изучены [3]. Понятие К. с. и соответствующую теорию можно обобщить для локально компактных коммутативных групп преобразований пространств Лебега (в частности, для *измеримых потоков*) — см. изложение результатов Т. Уитинга (T. Wieting) в [4].

Хотя внешне термин «К. с.» выглядит так, как если бы речь шла о нек-ром типе спектра динамич. системы, на самом деле свойство каскада $\{T^n\}$ иметь К. с. не является спектральным, т. е. не может быть выражено в терминах спектральных свойств оператора сдвига U_T. Даже если известно, что каскад имеет К. с., спектр еще не определяет однозначно его метрич. свойства. К. с. был введен именно в связи с первым примером метрически неизоморфных эргодич. каскадов с одинаковым спектром ([1], см. также [2]). В этом примере каскады

имеют К. с., но у одного из них имеются к. ф. 3-го порядка, а у другого — нет.

В топологич. динамике понятие К. с. вводится применительно к гомеоморфизму T компакта X, предполагаемому в п о л н е м и н и м а л ь н ы м (т. е. каждая его степень минимальна). К. ф. и к. з. определяются аналогично предыдущему с заменой $L^2(X, \mu)$ на $C(X)$ (непрерывные функции с комплексными значениями). T имеет К. с., если к. ф. разделяют точки X. Топологич. вариант теории во многом аналогичен метрическому (см. [5]—[7]). Однако при переходе в топологич. теории от каскадов к потокам с К. с. требуются существенно иные соображения и даже в нек-рой степени приходится выходить за рамки обычных понятий топологич. динамики (оказывается целесообразным рассматривать потоки $\{T_t\}$ с разрывной зависимостью гомеоморфизмов T_t от t) (см. [8], [9]).

Лит.: [1] Halmos P. R., Neumann J., «Ann. Math.», 1942, v. 43, № 2, p. 332—50; [2] Халмош П. Р., Лекции по эргодической теории, М., 1959; [3] Абрамов Л. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, № 4, с. 513—30; [4] Zimmer R. J., «Ill. J. Math.», 1976, v. 20, № 4, p. 555—88; [5] Hahn F., Parry W., «J. London Math. Soc.», 1965. v. 40, № 2, p. 309—23; [6] их же, «Math. systems theory», 1968, v. 2, № 2, p. 179—90; [7] Brown J. R., Ergodic theory and topological dynamics, N.Y.—S.F.—L., 1976; [8] Hahn F., «Israel J. Math.», 1973, v. 16, № 1, p. 20—37; [9] Parry W., там же, p. 38—45.
Д. В. Аносов.

КВАЗИДИЭДРАЛЬНАЯ ГРУППА — конечная 2-группа, задаваемая в образующих x, y определяющими соотношениями

$$x^{2^{m-1}} = y^2 = x^{-1+2^{m-2}} yx^{-1}y = 1,$$

где $m \geqslant 4$. Порядок К. г. равен 2^m; группа обладает циклической инвариантной подгруппой индекса 2. Название дано по причине сходства определяющих соотношений с определяющими соотношениями *диэдра групп*, к-рым, однако, эта группа не изоморфна ни при одном значении m. К. г. иногда наз. также с е м и д и э д р а л ь н о й.

Лит.: [1] Huppert B., Endliche Gruppen, B., 1967.
Н. Н. Вильямс.

КВАЗИЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — двумерное пространство, в к-ром каждое направление, заданное в его точке, может быть включено в поле, направления к-рого переносятся параллельно по любому пути (т. е. К. п. допускает абсолютный параллелизм). Геодезические линии К. п. распадаются на ∞^1 семейств векторных линий полей абсолютно параллельных направлений, причем каждое такое семейство образует с тремя другими постоянное ангармоническое отношение:

$$\frac{k-k_1}{k_2-k} : \frac{k_3-k_1}{k_2-k_3} = \text{const},$$

где $k = du^2/du^1$ — угловой коэффициент направления. Всякое семейство геодезических определяется через три данных уравнением 1-го порядка:

$$\frac{a_p\, du^p}{b_q\, du^q} = c = \text{const}.$$

Лит.: [1] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976.
А. Б. Иванов.

КВАЗИИНВАРИАНТНАЯ МЕРА — мера на некотором пространстве, остающаяся эквивалентной себе при «сдвигах» этого пространства. Более точно: пусть (X, B) — измеримое пространство (т. е. множество X с выделенной σ-алгеброй B его подмножеств) и G — некоторая группа его автоморфизмов (т. е. взаимно однозначных преобразований $g : X \to X$, измеримых вместе со своими обратными g^{-1} относительно σ-алгебры B). Мера μ на (X, B) наз. к в а з и и н в а р и а н т н о й (относительно G), если при любом $g \in G$ преобразованная мера $g\mu(A) = \mu(g^{-1}A)$, $A \in B$, эквивалентна мере μ (т. е. эти меры взаимно абсолютно непрерывны). В случае,

когда X — топологическое однородное пространство с непрерывной локально компактной группой автоморфизмов G (т. е. группа G действует на X транзитивно и снабжена такой топологией, что отображение $G\times X\to X:(g, x)\to gx$ непрерывно относительно произведения топологий в $G\times X$), а B — борелевская σ-алгебра относительно введенной в X топологии, существует единственная с точностью до эквивалентности К. м. [1]. В частности, мера в пространстве $\mathbb{R}^n$ квазиинвариантна относительно всех сдвигов $x\to x+a$, $x, a\in\mathbb{R}^n$, в том и только том случае, когда она эквивалентна *Лебега мере*. В случае, когда группа преобразований не локально компактна, К. м. может не существовать: это имеет место, напр., у широкого класса бесконечномерных топологич. векторных пространств [2].

Лит.: [1] Бурбаки Н., Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления, пер. с франц., М., 1970; [2] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961. *Р. А. Минлос.*

КВАЗИИНФОРМАЦИОННОЕ РАСШИРЕНИЕ бескоалиционной игры $\Gamma=\langle J, \{S_i\}_{i\in J}, \{H_i\}_{i\in J}\rangle$ — *бескоалиционная игра* $\tilde\Gamma=\langle J, \{\tilde S_i\}_{i\in J}, \{\tilde H_i\}_{i\in J}\rangle$, для к-рой заданы отображения $\pi\colon \tilde S\to S$ и $c_i\colon S_i\to\tilde S_i$, $i\in J$, удовлетворяющие при всех $i\in J$, $s_i\in S_i$, $\tilde s\in\tilde S$ условиям: 1) $\tilde H_i=H_i\circ\pi$, 2) $\pi_i(\tilde s\|c_i(s_i))=s_i$, где π_i — композиция отображения π и проекции $S\to S_i$. К. р. игры Γ может интерпретироваться как результат установления определенной схемы взаимодействия игроков в процессе выбора ими своих стратегий s_i в игре Γ. Стратегии s_i соответствуют правилам, определяющим поведение игрока i в любой ситуации, с к-рой он может встретиться. Отображение π сопоставляет набору правил поведения игроков их реализацию, т. е. набор стратегий s_i, $i\in J$, к-рые будут выбраны игроками, придерживающимися данных правил. Условие 1) определения К. р. является тогда определением функций выигрыша новой игры $\tilde\Gamma$, а условие 2) выражает сохранение у каждого игрока старых стратегий $s_i\in S_i$.

Ситуация s^* игры $\tilde\Gamma$ тогда и только тогда является образом ситуации равновесия какого-либо К. р. $\tilde\Gamma$ игры Γ при соответствующем отображении π, когда для любого $i\in J$ и любой $\bar s_i\in S_i$ найдется такая ситуация $s\in S$, что

$$H_i(s^*)\geqslant H_i(s\,\|\,\bar s_i).$$

Особенно широко понятие К. р. используется в теории *игр с иерархической структурой*, где неформальная задача оптимизации информационной схемы трансформируется в задачу построения К. р. заданной игры, дающего первому игроку наилучший результат. Рассматриваются также классы К. р., удовлетворяющих условиям, выражающим те или иные ограничения на информированность игроков. Напр., если Γ — игра двух лиц ($J=\{1, 2\}$), то говорят, что в К. р. игрок 1 не имеет (собственной) информации о стратегии s_2, если для каждой $\tilde s_1\in\tilde S_1$ найдется такая $s_1\in S_1$, что $\pi(\tilde s_1, \tilde S_2)\supseteq\{s_1\}\times S_2$. Наилучшим среди К. р., удовлетворяющих этому условию, является, напр., «игра Γ_3», в то время как наилучшим среди всех К. р. является «игра Γ_2».

Лит.: [1] Гермейер Ю. Б., Игры с непротивоположными интересами, М., 1976; [2] Кукушкин Н. С., Морозов В. В., Теория неантагонистических игр, ч. 2, М., 1977. *Н. С. Кукушкин.*

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ — асимптотическое представление, асимптотика решений уравнений квантовой механики при $h\to 0$ (h — постоянная Планка). Уравнение Шрёдингера

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{h^2}{2}\Delta\psi+V(x)\psi,\quad x\in\mathbb{R}^n,\qquad(1)$$

описывает движение квантовомеханич. частицы в потенциальном поле $V(x)$. Движение классич. частицы

описывается уравнением Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla S)^2+V(x)=0 \qquad (2)$$

или системой Гамильтона

$$\frac{dx}{dt}=p,\quad \frac{dp}{dt}=-\nabla V(x). \qquad (3)$$

Задаче Коши для уравнения Шрёдингера

$$\psi|_{t=0}=\varphi(x)\exp\left[\frac{i}{h}S_0(x)\right] \qquad (4)$$

сопоставляется задача Коши для системы (3)

$$x|_{t=0}=y,\quad p|_{t=0}=\nabla S_0(y),\quad y\in\mathbb{R}^n \qquad (5)$$

(здесь функции φ, S_0, V — гладкие, S_0, V — действительные, φ — финитна). Асимптотика решения $\psi(t, x)$ при $h\to 0$, $0\leqslant t\leqslant T$ и при малых $T>0$ имеет вид:

$$\psi(t, x)\sim\exp\left[\frac{i}{h}S(t, s)\right]\sum_{j=0}^{\infty}(-ih)^j\varphi_j(t, x), \qquad (6)$$

здесь $S(t, x)$ — решение уравнения (2) с данными Коши $S|_{t=0}=S_0(x)$ (классическое действие), а

$$\varphi_0(t, x)=\varphi(0, y)\sqrt{\frac{J(0, y)}{J(t, y)}},\quad J(t, y)=\det\frac{\partial x(t, y)}{\partial y},$$

где $x=x(t, y)$, $p=p(t, y)$ — решение задачи (3), (5). Функции φ_j при $j\geqslant 1$ определяются из рекуррентной системы уравнений переноса (это обыкновенные дифференциальные уравнения вдоль траекторий системы (3)), так что все члены асимптотики выражаются в терминах классич. механики. Принцип соответствия Бора утверждает: «Если h стремится к нулю, то квантовые законы должны переходить в законы классические». Метод отыскания асимптотики в виде (6) был предложен П. Дебаем (P. Debye) и широко применяется в квантовой механике.

Асимптотика решения задачи (1), (4) в большом (т. е. за любое конечное время) строится с помощью канонич. оператора В. П. Маслова [3]. Данные Коши (5) заполняют n-мерное лагранжево многообразие Λ^n в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}_{x,p}$. Его сдвиги $\Lambda^n_t=g^t\Lambda^n$ вдоль траекторий системы (3) — также лагранжевы многообразия; их объединение $\Lambda^{n+1}=\bigcup_{-\infty<t<\infty}\Lambda^n_t$ есть $(n+1)$-мерное лагранжево многообразие в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n+2}$ с координатами (t, x, p_0, p). Для канонич. оператора $K=K_{\Lambda^{n+1}}$, отвечающего Λ^{n+1}, справедлива формула коммутации

$$\hat{L}K\varphi=-ihK\dot{\varphi}+O(h^2), \qquad (7)$$

где $\dot{\varphi}$ — производная в силу системы (3), $\hat{L}$ — оператор Шрёдингера. Асимптотика решения ψ в большом дается формулой

$$\psi(t, x)\sim K\left[\sum_{j=0}^{\infty}(-ih)^j\chi_j(t, x)\right], \qquad (8)$$

где функции χ_j определяются из данных Коши (4) с помощью уравнений переноса и выражаются в терминах классич. механики. В нефокальной точке (t_0, x^0) асимптотика имеет вид

$$\psi(t_0, x^0)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\varphi_j}{\sqrt{|J_j|}}\exp\left(\frac{i}{h}S_j-\frac{i\pi}{2}l_j\right).$$

где сумма берется по всем лучам, приходящим в эту точку, S_j и J_j — действие и якобиан для j-го луча, l_j — индекс Морса j-го луча. Для стационарного уравнения Шрёдингера в К. п. исследованы задача о рассеянии, задача о поле точечного источника, получены квазиклассич. серии (типа бальмеровских) собственных значений.

Квазиклассическое приближение в широком смысле слова (синонимы: высокочастотная асимптотика, коротковолновое приближение, приближение геометрич. оптики, метод ВКБ, метод эйконала) — асимптотика решений дифференциальных уравнений с частными производными с действительными характеристиками вида

$$L(x, \lambda^{-1}D_x;\ (i\lambda)^{-1})\,u(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \qquad (9)$$

а также систем дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений. Здесь $\lambda \to \infty$ — большой параметр, символ $L(x, p; \varepsilon)$ слабо зависит от ε. Уравнению (9) отвечают уравнения классич. механики — уравнение Гамильтона — Якоби

$$L^0(x,\ \nabla S(x)) = 0$$

и система Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial L^0}{\partial p},\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial L^0}{\partial x}, \qquad (10)$$

где $L^0 = L(x, p; 0)$. К. п. строится с помощью канонич. оператора, отвечающего инвариантным относительно динамич. системы (10) лагранжевым многообразиям, и имеет вид, аналогичный (8).

К. п. широко применяется в современной физике, в задачах о распространении звуковых, упругих, электромагнитных волн, в нерелятивистской и релятивистской квантовой механике и других вопросах.

Лит.: [1] Бриллюэн Л., Атом Бора, пер. с франц., Л.— М., 1935; [2] Ландау Л. Д., Лившиц Е. М., Квантовая механика, 2 изд., М., 1963 (Теоретическая физика, т. 3); [3] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; [4] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976; [5] Фок В. А., Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, М., 1970; [6] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [7] Маслов В. П., Операторные методы, М., 1973. *М. В. Федорюк.*

КВАЗИКОГЕРЕНТНЫЙ ПУЧОК — пучок модулей, локально задаваемый образующими и соотношениями. Точнее, пусть X — топологич. пространство и $\mathcal{A}$ — пучок колец на X, пучок $\mathcal{A}$-модулей $\mathcal{F}$ наз. квазикогерентным, если для любой точки $x \in X$ найдется открытая окрестность U и точная последовательность пучков $(\mathcal{A}|_U)$-модулей

$$\mathcal{A}|_U^{(I)} \longrightarrow \mathcal{A}|_U^{(J)} \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0,$$

где I и J — некоторые множества, $|_U$ означает ограничение пучка на U, а $\mathcal{A}^{(I)}$ есть прямая сумма I экземпляров $\mathcal{A}$. Аналогично определяется К. п. на топологизированной категории с пучком колец.

Если $(X, \mathcal{A})$ — аффинная схема, то сопоставление $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ осуществляет эквивалентность категории квазикогерентных пучков $\mathcal{A}$-модулей с категорией $\Gamma(X, \mathcal{A})$-модулей. Благодаря этому К. п. находят широкое применение в теории схем. См. также *Когерентный пучок.* *В. И. Данилов.*

КВАЗИКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X, в к-ром всякий фильтр имеет по крайней мере одну точку прикосновения. Этому условию эквивалентны следующие три условия: 1) всякое семейство замкнутых множеств в X, пересечение к-рого пусто, содержит конечное подсемейство с пустым пересечением; 2) всякий ультрафильтр в X сходится; 3) всякое открытое покрытие пространства X содержит конечное открытое покрытие этого пространства (условие Бореля — Лебега). К. п. наз. компактом (или бикомпактом), если оно отделимо (или хаусдорфово). Напр., всякое пространство, в к-ром имеется только конечное число открытых множеств, является К. п. В частности, таково любое конечное пространство. Непрерывный образ К. п. является К. п. Топологич. произведение К. п. в любом числе есть К. п. (теорема Тихонова).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968. *Б. А. Ефимов.*

КВАЗИКОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение с ограниченным искажением или ограниченным отклонением от конформного. Числовой характеристикой искажения при отображении $f: D \to D'$ в точке $a \in D$ является коэффициент квазиконформности (или дилатация) отображения f в этой точке:

$$k(f, a) = \lim_{r \to 0} \frac{\sup\limits_{|x-a|=r} |f(x)-f(a)|}{\inf\limits_{|x-a|=r} |f(x)-f(a)|}.$$

Величина

$$k(f) = \sup_{x \in D} k(f, x)$$

наз. коэффициентом квазиконформности (или дилатацией) отображения f в области D. Сохраняющее ориентацию отображение $f: D \to D'$ наз. квазиконформным (или отображением с ограниченным искажением), если $k(f) < \infty$; оно наз. k-квазиконформным, если $k(f) \leqslant k$. Для *конформного отображения* $k(f) = k(f, x) \equiv 1$. Если f дифференцируемо в точке $a \in D$, то линейное отображение $f'(a)$ преобразует шар касательного пространства в эллипсоид, отношением наибольшей полуоси к-рого к наименьшей будет $k(f, a)$.

Наряду с данным определением часто используются следующие эквивалентные ему условия квазиконформности f в области $D \subset \mathbb{R}^n$: $f \in W_n^1$ (т. е. f имеет обобщенные производные, локально суммируемые в D в степени n) и существует такое действительное число k, что

$$\|f'(x)\|^n \leqslant k \det f'(x),$$

или

$$|\operatorname{grad} f(x)|^n \leqslant k n^{n/2} \det f'(x)$$

почти во всех точках $x \in D$.

Термин «К. о.», как правило, предполагает гомеоморфность отображения. Негомеоморфные отображения с ограниченным искажением обычно наз. квазирегулярными. Теория К. о. областей в $\mathbb{R}^n$ при $n=2$ и $n \geqslant 3$, если не считать общих для них и, как правило, более простых вопросов, имеет ярко выраженную специфику.

Двумерная теория. В этом случае дифференциал отображения в точке $z \in D$ может быть записан в виде

$$df(z) = f_z(z)\, dz + f_{\bar{z}}(z)\, d\bar{z}.$$

С точностью до множителя он определяется соотношением

$$f_{\bar{z}}(z) = \mu(z)\, f_z(z). \qquad (1)$$

Функция $\mu(z)$ наз. комплексной характеристикой отображения f в точке z; $|\mu(z)| < 1$ для отображений с положительным якобианом $J = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$. Для аналитич. отображений $\mu(z) \equiv 0$ — условия Коши — Римана. Коэффициент $k(f, z)$ квазиконформности отображения в точке выражается через $\mu(z)$ в виде

$$k(f, z) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|},$$

поэтому условие квазиконформности отображения $f \in W_2^1$ в терминах комплексной характеристики есть $\|\mu\|_\infty(D) < 1$.

Обычно соотношение (1) появляется как уравнение относительно f при известной функции μ; оно наз. уравнением (или системой) Бельтрами. Напр., задача конформного отображения одной области D на другую D' есть задача отыскания гомеоморфиз-

ма $f: D \to D'$, удовлетворяющего в D уравнению Бельтрами с $\mu(z) \equiv 0$.

К решению общего уравнения (1) сводится, напр., классич. задача об одновременном во всей области D приведении к канонич. виду заданной в D положительно определенной квадратичной формы от двух переменных или, что то же самое, задача построения конформно евклидовых координат на двумерной поверхности (см. [2]).

Основной факт двумерной теории К. о., аналогичный Римана теореме для конформных отображений, состоит в следующем: для всякой измеримой в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ функции $\mu(z)$ такой, что $\|\mu\|_\infty(D) < 1$, найдется квазиконформный гомеоморфизм f области D с комплексной характеристикой $\mu(z)$; общее решение уравнения (1) в области D имеет вид $F \circ f(z)$, где f — построенный квазиконформный гомеоморфизм, а F — любая аналитич. функция.

Если D — единичный круг, то f можно выбрать так, что $f(D) = D$. Тогда f продолжается до гомеоморфизма замкнутого круга на себя и условия нормировки $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ выделяют единственный гомеоморфизм $f: D \to D$, удовлетворяющий уравнению Бельтрами. Если, кроме того, $\mu \in C^m_\alpha(D)$, $0 < \alpha < 1$, $m \geqslant 0$, то $f \in C^{m+1}_\alpha(D)$, где $C^m_\alpha(D)$ — пространство функций, имеющих в D m непрерывных производных, причем последняя удовлетворяет в D условию Гёльдера с показателем α. Если последовательность f_n нормированных квазиконформных автоморфизмов круга D такова, что $|\mu_n(z)| \leqslant \mu < 1$ и $\|\mu_n\|_\infty(D) \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\| f_n(z) - z \|_{C(D)} \longrightarrow 0.$$

К. о. как гомеоморфные решения сильно эллиптических систем

$$\Phi_i(x, y, u, v, u_x, v_x; u_y, v_y) = 0, \quad i = 1, 2, \qquad (2)$$

так же естественно связаны с проблемами струйных течений дозвуковой газовой динамики, как конформные отображения, удовлетворяя системе Коши — Римана, связаны с течением несжимаемой идеальной жидкости (см. [1], [5]).

Общая задача построения К. о. одной односвязной области на другую, удовлетворяющего системе (2), была поставлена и решена М. А. Лаврентьевым [1] — одним из основателей теории К. о. В явном виде понятие К. о. появилось у Х. Грётша (H. Grötzsch, см. [3]) в связи со следующей экстремальной задачей (з а д а ч е й Г р ё т ш а): среди отображений с соответствием вершин квадрата на прямоугольник, не являющийся квадратом, найти наиболее близкое к конформному. Чтобы охарактеризовать меру этой близости, пришлось ввести коэффициент квазиконформности — начальное понятие геометрич. теории К. о.

В двумерной теории К. о., как и в теории аналитич. функций, исследованы общие вопросы компактности — нормальности семейства отображений; построена теория соответствия границ, показавшая, что это соответствие осуществляется по тем же простым концам в смысле Каратеодори (см. *Граничные элементы*), как и в конформном случае; изучены условия устранимости множества особенностей; разработаны вариационные принципы решения основных экстремальных задач на классе квазиконформных гомеоморфизмов (см. [4], [7]).

Важное применение в геометрич. теории функций двумерные К. о. получили в исследованиях по проблеме *модулей римановых поверхностей* в связи с *Тайхмюллера пространством* и деформацией *клейновых групп* (см. [7]).

П р о с т р а н с т в е н н а я т е о р и я. Теория К. о. областей пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, также имеет свою специфику. Прежде всего это связано с отсутствием

конформных отображений: по теореме Лиувилля всякое достаточно гладкое конформное отображение области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, является мёбиусовым, т. е. суперпозицией инверсий и вращений. Суть этого факта в том, что условия конформности отображения при $n \geqslant 3$, в отличие от условий Коши — Римана при $n=2$, составляют переопределенную систему уравнений с частными производными.

Ниже указаны нек-рые важные результаты пространственной теории К. о. Теорема Лиувилля остается в силе как в случае гильбертова пространства, так и при минимальных априорных условиях регулярности отображения. В теореме Лиувилля имеет место устойчивость в том смысле, что существуют константы k_1 и k_2 и функция $\lambda(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, обладающие следующими свойствами: а) если $y = f(x)$ есть К. о. шара $|x| < 1$ с $k(f) < k_1$, то существует мёбиусово отображение $L(y)$ такое, что

$$\sup_{|x|<1} |L \circ f(x)| < \infty,$$

и образ единичного шара при отображении $L \circ f$ содержит шар $|y| < 1$; б) если $k(f) \leqslant 1 + \varepsilon < k_2$, то

$$|L \circ f(x_1) - L \circ f(x_2)| \leqslant k(\varepsilon) |x_1 - x_2|^{\alpha(\varepsilon)},$$

где

$$\lim_{\varepsilon \to 0} k(\varepsilon) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \alpha(\varepsilon) = 1;$$

в) если $k(f) \leqslant 1 + \varepsilon$, то

$$|L \circ f(x) - x| \leqslant \lambda(\varepsilon)$$

во всем шаре $|x| < 1$. Устойчивость имеет место также в нек-рых классах областей с нерегулярной границей.

Подобно тому, как 1-квазиконформное отображение оказывается мёбиусовым даже без априорного предположения гомеоморфности, К. о. локально гомеоморфно как только его коэффициент квазиконформности достаточно близок к 1. В отличие от плоского случая, всякое локально гомеоморфное К. о. единичного шара в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, автоматически гомеоморфно в нек-ром шаре $|x| \leqslant r(n, k) < 1$, где r зависит только от размерности n пространства и коэффициента квазиконформности $k = k(f)$ отображения. В частности, локально гомеоморфное К. о. всего пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, глобально гомеоморфно и $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Граничное поведение: если $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ есть К. о. полупространства $x_n > 0$ пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, на себя, то f продолжается до гомеоморфизма замкнутых областей; при этом индуцированный на границе $\partial \mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$ гомеоморфизм $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ в случае $n=2$ удовлетворяет M-условию;

$$M^{-1} \leqslant \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{\varphi(x) - \varphi(x-h)} \leqslant M,$$

а в случае $n \geqslant 3$ является квазиконформным. Каждое из последних двух условий в своей размерности не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы отображение $\varphi : \partial \mathbb{R}^n_+ \to \partial \mathbb{R}^n_+$ было граничным следом нек-рого К. о. (при $n = 4$ это пока (1978) не доказано).

Вытекающая отсюда возможность продолжить квазиконформный автоморфизм пространства Лобачевского до К. о. абсолюта в совокупности с тем, что 1-квазиконформное отображение сферы конформно и является следом конформного автоморфизма шара, лежит в основе доказательства жесткости пространственных гиперболич. форм: если два замкнутых римановых многообразия размерности $n \geqslant 3$ одной и той же постоянной отрицательной кривизны гомеоморфны, то они изометричны (см. [9]).

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М., 1962; [2] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические

функции, М., 1959; [3] Альфорс Л., Лекции по квазиконформным отображениям, пер. с англ., М., 1969; [4] Бслинский П. П., Общие свойства квазиконформных отображений, Новосиб., 1974; [5] Берс Л., Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, пер. с англ., М., 1961; [6] Väisälä Jussi, Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings, B., 1971; [7] Крушкаль С. Л., Квазиконформные отображения и римановы поверхности, Новосиб., 1975; [8] Lehto O., Virtanen K. I., Quasiconforme Abbildungen, B., 1965; [9] Мостов Г. Д., «Математика», 1972, т. 16, № 5, с. 105—57. *В. А. Зорич.*

КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИЯ — совокупность приемов численного решения нелинейных задач путем сведения их к последовательности линейных задач. В основе аппарата квазилинеаризации лежит метод Ньютона и его обобщение на функциональные пространства, теория *дифференциальных неравенств* и метод *динамич. программирования*. Наиболее простым примером, иллюстрирующим приемы К., является использование метода Ньютона — Рафсона для отыскания корня r скалярной монотонно убывающей строго выпуклой функции $f(x)$. В этом случае на каждом шаге итеративного процесса исходная нелинейная функция $f(x)$ аппроксимируется линейной $\varphi(x)$, отыскивается корень $\varphi(x)$, к-рый служит следующим приближением, так что

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n),\ n=0,1,\ \ldots$$

Построенная последовательность обладает свойством монотонности ($x_0<x_1<x_2<\ldots<r$) и квадратичной сходимости

$$|x_{n+1}-r|\leqslant k|x_n-r|^2.$$

Применение К. для решения уравнения Риккати

$$v'+v^2+p(t)v+q(t)=0,\qquad v(0)=c,$$

(предполагается, что решение существует на отрезке $[0, t_0]$) выглядит следующим образом. Исходное уравнение заменяется эквивалентным

$$v'=\min_u[u^2-2uv+p(t)v-q(t)],$$

где минимум берется по функциям $u(t)$, заданным на $[0, t_0]$. Данное уравнение обладает рядом свойств, присущих линейным уравнениям, и для его решения используется линейное дифференциальное уравнение

$$w'=u^2-2uw-p(t)w-q(t),\quad w(0)=c,$$

где $u(t)$ — некоторая фиксированная функция. Опираясь на свойство $v(t)\leqslant w(t)$ (причем равенство имеет место при $u(t)=v(t)$), можно построить систему последовательных приближений

$$v_1\geqslant v_2\geqslant\ldots\geqslant v_n\geqslant v_{n+1}\geqslant\ldots,$$

удовлетворяющих линейным уравнениям

$$v'_{n+1}=v_n^2-2v_nv_{n+1}-p(t)v_{n+1}-q(t),\ v_{n+1}(0)=c.$$

То же самое рекуррентное соотношение может быть получено путем применения метода Ньютона — Канторовича к исходному нелинейному уравнению.

Использование схемы К. при решении краевой задачи для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$u''=f(u',u,t),\qquad t_1\leqslant t\leqslant t_2,$$
$$g_1(u(t_1),u'(t_2))=0,\qquad g_2(u(t_2),u'(t_2))=0$$

приводит к следующей последовательности функций $\{u_n(t)\}$, удовлетворяющих линейным уравнениям

$$u''_{n+1}=f(u'_n,u_n,t)+f_{u'}(u'_n,u_n,t)(u'_{n+1}-u'_n)+$$
$$+f_n(u'_n,u_n,t)(u_{n+1}-u_n),$$

с линеаризованными краевыми условиями

$$g_i(u_n(t_i),u'_n(t_i))+g_{iu}(u_n(t_i),u'_n(t_i))(u_{n+1}(t_i)-u_n(t_i))+$$
$$+g_{iu'}(u_n(t_i),u'_n(t_i))(u'_{n+1}(t_i)-u'_n(t_i))=0.$$

Существование, единственность и квадратичная сходимость последовательности следуют из соответствующей выпуклости функций f, g_1, g_2 при достаточно малом интервале $[t_1, t_2]$.

Метод К. находит применение при решении двухточечных и многоточечных краевых задач для линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, краевых задач для эллиптич. и параболич. уравнений в частных производных, вариационных задач, дифференциально-разностных и функционально-дифференциальных уравнений и т. д. Как и всякая итеративная схема, метод К. удобен для реализации на ЭВМ, допускает различные модификации, позволяющие ускорить сходимость для более узких классов задач. Существуют разнообразные примеры его использования как эвристического способа решения ряда физических, технических и экономических задач.

Лит.: [1] Беллман Р., Калаба Р., Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, пер. с англ., М., 1968.

И. А. Ватель, Ф. И. Ерешко.

КВАЗИЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными, линейное относительно старших производных от неизвестной функции. Так, напр., уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0$$

— К. у. 2-го порядка относительно неизвестной функции u.

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ — уравнения и системы дифференциальных уравнений вида:

$$L[u] \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m} a^\alpha D^\alpha u = f, \qquad (1)$$

где оператор L характерен тем, что в каждой точке существует проходящий через нее вектор ζ такой, что для произвольного непараллельного к ζ вектора η характеристическое уравнение

$$Q(\lambda\zeta + \eta) = 0 \qquad (2)$$

относительно параметра λ имеет mk действительных корней (каждый корень считается столько раз, какова его кратность).

Система уравнений (1) рассматривается относительно искомой вектор-функции $u(x)$ с компонентами $u_1(x)$, ..., $u_k(x)$ (в случае одного уравнения $k=1$). Коэффициенты a^α — матрицы, элементы к-рых зависят от независимых пространственных переменных $x=(x_0, \ldots, x_n)$, вектор-функции $u(x)$ и ее частных производных до порядка $m-1$ включительно. От этих же аргументов зависит правая часть f. Если a^α являются квадратными матрицами порядка, совпадающего с числом компонент вектор-функции $u(x)$, система (1) наз. определенной системой. Характеристическая форма:

$$Q(\xi) = Q(\xi_0, \ldots, \xi_n) = \det \left\| \sum_{|\alpha|=m} a^\alpha \xi^\alpha \right\|$$

определяется по главной части $\Sigma_{|\alpha|=m} a^\alpha D^\alpha$ оператора L.

Элементы поверхности, к-рые проходят через нек-рую точку P и ортогональны векторам ζ, наз. элементами пространственного типа. Векторы ζ, проходящие через ζ, определяют так наз. конус нормалей. Любое направление, выходящее из точки во внешней полости конуса нормалей, наз. направлением временного типа. Кривая, к-рая в каждой точке пространства переменных x имеет направление временного типа, наз. кривой временного типа.

Среди задач для К. г. у. и с. центральное место занимает задача Коши — задача нахождения решения $u(x)$

системы (1), если на нек-рой гладкой n-мерной гиперповерхности П, определенной уравнением

$$\varphi(x)=0, \quad |D\varphi| \neq 0,$$

известны значения вектора-функции $u(x)$ и ее частных производных по какому-нибудь нетангенциальному к П направлению до порядка $m-1$ включительно. Если такое решение всегда можно найти, то гиперповерхность П наз. свободной относительно оператора L.

Если коэффициенты системы (1) и условия Коши, заданные на аналитической свободной гиперповерхности П, аналитичны, то аналитическое в окрестности П решение единственно; если, помимо этого, условия Коши определяют на П все производные до порядка $m-1$, то, согласно теореме Коши — Ковалевской, в достаточно малой окрестности любой точки поверхности П аналитич. решение отсутствует. Эта теорема применима ко всем аналитич. уравнениям и системам независимо от того, какому типу они принадлежат. При неаналитических же данных теорема не дает ответа о существовании таких решений.

Если никакая часть гиперповерхности П не свободна, то ее наз. характеристической поверхностью относительно оператора L. Чтобы гиперповерхность П была характеристической относительно оператора L, необходимо и достаточно выполнение условия

$$Q(\xi)=0, \tag{3}$$

где $\xi=(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ — нормаль к поверхности П. Характеристич. матрица, характеристич. форма и характеристич. поверхность инвариантны относительно неособых преобразований. Характеристич. поверхности играют важную роль при исследовании многих задач для уравнений и систем вида (1).

Многие задачи математич. физики сводятся к симметрическим гиперболич. уравнениям и системам. Квазилинейная система 1-го порядка

$$L[u] \equiv \sum_{i=0}^{n} a^i u_{x_i} + bu = f \tag{1'}$$

наз. симметрической, если все матрицы a^i симметричны. Симметрич. система (1′) наз. гиперболической симметрической системой в точке P, если одна из матриц a^i или какая-либо линейная комбинация $\xi^i a^i$ знакоопределенна. Одно уравнение или система уравнений высшего порядка наз. симметрическими гиперболическими, если они эквивалентны какой-нибудь симметрической гиперболич. системе 1-го порядка. Систему (1′) при положительно определенном коэффициенте a^0 с помощью линейного преобразования можно привести к виду

$$u_t + M[u] = f, \quad t \equiv x_0 \tag{1''}$$

с симметрич. оператором M. При помощи *энергетических неравенств* и метода итераций доказывается существование решения задачи Коши для квазилинейных систем 2-го порядка и для одного нелинейного уравнения произвольного порядка.

Так как характеристики и бихарактеристики для гиперболич. уравнений и систем, как линейных, так и квазилинейных, определяются одинаково, известные факты о распределении разрывов младших производных решений линейных уравнений и систем относятся и к случаю квазилинейных уравнений. Распространение разрывов решения $u(x)$ гиперболич. систем рассмотрено для законов сохранения, т. е. для систем 1-го порядка, имеющих следующий вид:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F^{ij}(x, u)=0, \quad j=1, 2, \ldots, k, \tag{4}$$

при условии, что поверхность ударной волны является нехарактеристической.

Много работ посвящено исследованию К. г. у. и с. в случае двух пространственных переменных x и t. Важную часть этих исследований составляют квазилинейные системы 1-го порядка, к-рые имеют вид:

$$L[u] \equiv Au_x + Bu_t = C, \tag{5}$$

где A и B — квадратные матрицы порядка k, вектор C зависят от переменных x, t и от вектора $u(x, t) = \{u_1(x,t), \ldots, u_k(x, t)\}$. Если от искомой вектор-функции $u(x, t)$ зависит только правая часть C, (5) наз. почти линейной системой. Почти линейные системы 1-го порядка эквивалентно сводятся к симметрич. системам линейными преобразованиями. Квазилинейная система (5) при предположении $\det B \neq 0$ имеет следующий вид:

$$u_t + Au_x = C. \tag{6}$$

Матрицу A можно преобразовать к диагональному виду с элементами $\varkappa_i$, где векторы $(\varkappa_i, 1)$ определяют характеристич. направления; эта запись наз. нормальной формой системы (5). Для систем вида (6) справедлива теорема единственности, независимо от того, зависят их характеристики от решения $u(x, t)$ или нет.

Если коэффициенты A, C и начальные значения решения $u(x, t)$ при $t=0$ имеют первые производные по всем аргументам и эти производные удовлетворяют *Липшица условию*, то можно указать окрестность $0 \leqslant t \leqslant h$ отрезка оси $t=0$, в к-рой существует единственное решение задачи Коши с первыми производными, удовлетворяющими условию Липшица. При этом вводятся вектор-функции $v(x, t)$, к-рые при $t=0$ совпадают с заданными начальными данными, а их первые производные удовлетворяют условию Липшица. После подстановки $v(x,t)$ в коэффициенты A и C решается задача Коши с заданными начальными данными для линейного уравнения. Каждой функции $v(x, t)$ ставится в соответствие решение $u(x, t)$ и решение задачи для системы (6) выводится как неподвижный элемент преобразования $u = \mathfrak{A}[v]$, или как предел равномерно сходящейся последовательности $\{u_n\}_{n-1,2\ldots}$, полученный в результате итерационного процесса

$$u_{n+1} \equiv \mathfrak{A}[u_n].$$

Аналогичный результат получается при достаточно гладких коэффициентах A, C и начальных данных путем редукции задачи к системе интегральных уравнений, разрешимость к-рой доказывается на основе *сжатых отображений принципа*.

Квазилинейная система 1-го порядка (5) наз. слабо нелинейной системой, если соответствующая ей нормальная форма

$$u_t + Au_x = C \tag{7}$$

такова, что для каждого элемента a^{ii} диагональной матрицы выполняется условие:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} a^{ii}(x, t, u_1, \ldots, u_k) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

В других случаях (5) наз. сильно нелинейной системой. Если решение слабо нелинейной системы при $k=2$ ограничено, то задача Коши всегда разрешима в области определенности.

Кроме задачи с начальными данными, для квазилинейных систем 1-го порядка поставлены и исследованы и другие задачи. Напр., так наз. смешанные задачи, заключающиеся в нахождении решения $u(x, t)$ системы (7), к-рое наряду с начальными условиями $u(x, 0) = \psi(x)$ при $t=0$, $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ удовлетворяет краевым условиям на нек-рых гладких кривых Γ_1 и Γ_2, выходящих из точек $(\alpha, 0)$ и $(\beta, 0)$ соответственно. Эти краевые ус-

ловия относительно решения $u(x,\ t)$ могут быть как линейными, так и нелинейными. В нек-рых случаях при соблюдении специальных условий удается проверить корректность постановки задач указанного типа.

Для сильно нелинейной системы (6) в случае $k=2$ исследована следующая задача: пусть Γ_1 — кривая выходящая из начала координатной системы и заданная уравнением $x=x(t)$, кривая Γ_1 предполагается характеристической, имеющей непрерывную касательную. Следует определить решение системы (6) в нек-рой области, ограниченной характеристикой Γ_1 и еще одной кривой Γ_2, выходящей тоже из начала координат, если известно решение $u(x,\ t)$ на Γ_1 при дополнительном условии, что одна из компонент вектора $u(x,\ t)$ имеет определенную особенность в точке пересечения граничных кривых. Известна разрешимость подобных задач при $t\leqslant\delta$ для достаточно малых δ.

Среди задач, поставленных для квазилинейных гиперболич. систем 1-го порядка, имеется ряд важных прикладных задач: задача о распаде произвольного взрыва, задача хроматографии, задача фильтрации и др.

Изложенные выше результаты носят локальный характер, касаются только регулярных решений. Если же решения не являются дифференцируемыми или даже непрерывными функциями, вводятся понятия так наз. слабых решений, определяемых различными способами, для к-рых доказываются теоремы единственности и существования решения задачи Коши глобально. Как правило, эти решения определяются в довольно широких классах функций (ограниченные измеримые функции, локально суммируемые функции и др.). Они удовлетворяют уравнению или системе в каком-нибудь смысле, напр. в смысле теории обобщенных функций, или подчинены вполне определенным интегральным соотношениям. Слабое решение в нек-рых случаях принято наз. решением задачи Коши, если разность решения и начальных данных слабо стремится к нулю при стремлении точки к носителю начальных данных.

Известно несколько путей построения глобальных слабых решений задачи Коши для законов сохранения в случае многих переменных с начальными данными довольно общего вида. Напр., метод сглаживания, конечно разностные схемы решения задач с начальными данными.

Общие нелинейные гиперболич. уравнения и системы путем дифференцирования по независимым переменным сводятся к квазилинейным гиперболич. системам 1-го порядка. Любое гиперболич. уравнение 2-го порядка редуцируется к симметрической гиперболич. системе 1-го порядка, и факты, относящиеся к гиперболич. системам 1-го порядка, остаются в силе и для одного гиперболич. уравнения 2-го порядка.

Теорема существования решения задачи Коши для одного гиперболич. уравнения высшего порядка была получена при требовании достаточно высокой гладкости коэффициентов уравнения (см. [9]).

Задача Коши для гиперболических квазилинейных уравнений высшего порядка была исследована при помощи редукции к аналогичной задаче для квазилинейных систем 1-го порядка. Для уравнений 2-го порядка, кроме этого, используется и другой метод, заключающийся в введении характеристич. системы координат $(\alpha,\ \beta)$. Получается система уравнений относительно $x,\ t$ функции u и ее производных 1-го и 2-го порядков, к-рые рассматриваются как функции характеристич. переменных. Система эта состоит из шести уравнений 1-го порядка относительно функций

$$x=x(\alpha,\ \beta),\quad y=y(\alpha,\ \beta),\quad u=u(\alpha,\ \beta),\quad p=u_x(\alpha,\ \beta),$$
$$q=u_y(\alpha,\ \beta),$$

одно из к-рых является следствием всех остальных. Можно рассматривать определенную систему из пяти

квазилинейных уравнений с пятью неизвестными функциями. Для подобных систем и, следовательно, для квазилинейных уравнений имеются теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Этот метод без существенных изменений применяется и для квазилинейных систем уравнений 2-го порядка

$$au^j_{xx} + bu^j_{xt} + cu^j_{tt} + d^j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, k,$$

где коэффициенты зависят от x, t и функций u^j.

Лит.: [1] Glimm J., «Comm. pure and appl. Math.», 1965, № 18, p. 697—715; [2] Douglis A., «Ann. Inst. Fourier», 1972, t. 22, p. 141—227; [3] Кружков С. Н., «Докл. АН СССР», 1969, т. 187, № 1, с. 29—32; [4] Кузнецов Н. Н., «Матем. заметки», 1967, т. 2, № 4, с. 401—10; [5] Courant R., Lax P., «Comm. pure and appl. Math.», 1949, v. 2, p. 255—73; [6] Conway E., Smoller J., «Comm. pure and appl. Math.», 1966, v. 19, p. 95—105; [7] Lax P., «Comm. pure and appl. Math.», 1953, v. 6, p. 231—58; [8] Lewy H., «Math. Ann.», 1927, Bd 98, p. 179—91; [9] Levi E., «Rend. reale accad. Lincei», 1908, ser. 5, v. 17, p. 331—39; [10] Leray J., Hyperbolic differential equations, Prinston, 1953; [11] Lee Da-tsin, Yu Wen-tzu, «Scientia sinica», 1964, t. 13, № 4, p. 529—62; [12] Олейник О. А., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 3, с. 3—73; [13] Петровский И. Г., «Матем. сб.», 1937, т. 2, в. 5, с. 815—66; [14] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений, М., 1968; [15] Friedrichs K., «Amer. J. Math.», 1948, v. 70, p. 555—89; [16] Hartman P., Wintner A., «Amer. J. Math.», 1952, v. 74, p. 834—64; [17] Schauder J., «Comment. math. helv.», 1936, v. 9, p. 263—283.

Д. К. Гвазава.

КВАЗИМНОГООБРАЗИЕ — см. *Алгебраических систем квазимногообразие.*

КВАЗИНОРМА — неотрицательная функция $\|x\|$, определенная на линейном пространстве R и удовлетворяющая тем же аксиомам, что и норма, кроме аксиомы сложения $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, к-рая заменяется более слабым требованием: существует постоянная $c>0$ такая, что для всех $x \in R$ и $y \in R$ выполняется неравенство $\|x+y\| \leqslant c(\|x\| + \|y\|)$.

Л. Д. Кудрявцев.

КВАЗИНОРМАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО — регулярное пространство, в к-ром два непересекающихся *π-множества* имеют непересекающиеся окрестности. Всякое $T\lambda$-пространство, в к-ром любые два непересекающихся π-множества имеют непересекающиеся окрестности, является К. п. Для К. п. и только для такого пространства *Стоуна — Чеха бикомпактное расширение* βX совпадает с $\omega_\kappa X$-пространством. Большой запас ненормальных К. п. дает теорема: произведение любого числа метрических пространств есть К. п.

Лит.: [1] Зайцев В. И., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1972, т. 27, с. 129—93; [2] Щепин Е. В., «Матем. сб.», 1972, т. 88, № 2, с. 316—25.

В. В. Федорчук.

КВАЗИНОРМИРОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО — линейное пространство, в к-ром задана *квазинорма.* Примерами К. п., не являющихся нормированными, служат *Лебега пространства* $L_p(E)$ при $0<p<1$, в к-рых квазинормой является выражение

$$\|f\| = \left[\int_E |f(x)|^p\, dx\right]^{1/p}, \quad f \in L_p(E).$$

Л. Д. Кудрявцев.

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ с периодами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — функция $f(t)$ такая, что $f(t) = F(t, t, \ldots, t)$ для нек-рой непрерывной функции $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ от n переменных, периодической по $t_1, t_2, \ldots, t_n$ с периодами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ соответственно. Все $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ строго положительны, и их обратные величины $p_1, p_2, \ldots, p_n$ являются рационально линейно независимыми.

Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — непрерывные периодич. функции с периодами ω_1 и ω_2 соответственно, причем отношение ω_1/ω_2 иррационально, то $g(t) = f_1(t) + f_2(t)$ и $h(t) = \max\{f_1(t), f_2(t)\}$ суть К. ф.

Теория К. ф. послужила основой для создания теории *почти периодических функций.* В случае непрерывных функций К. ф. являются обобщением периодич. функций, но частным случаем почти периодических.

К. ф. допускает представление вида

$$f(t)=\sum c_{k_1\dots k_n}\, e^{i(k_1p_1+\dots+k_np_n)t},$$

если $c_{k_j\dots k_n}=c_k$ таковы, что $\sum|c_k|^2<\infty$. К. ф. обладают следующими свойствами: сложение и умножение К. ф. дают снова К. ф.; равномерно сходящаяся последовательность К. ф. при $t\in\mathbb{R}$ дает в пределе почти периодич. функцию; если $g(t)$ — почти периодич. функция и $\varepsilon>0$, то существует такая К. ф. $f(t)$, что

$$|f(t)-g(t)|<\varepsilon \text{ при } t\in\mathbb{R}.$$

Лит.: [1] Боль П. Г., Избр. труды, пер. с нем., Рига, 1961; [2] Харасахал В. Х., Почти-периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений, А.-А., 1970.

Ю. В. Комленко, Е. Л. Тонков.

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ — прямолинейное движение материальной точки, закон к-рого выражается *квазипериодической функцией.*

КВАЗИПРОЕКТИВНАЯ СХЕМА — локально замкнутая подсхема проективного пространства P^n. Иначе говоря, К. с.— это открытая подсхема проективной схемы. Схема X над полем квазипроективна тогда и только тогда, когда на X существует обратимый обильный пучок. Обобщение понятия «К. с.» — квазипроективный морфизм, т. е. морфизм схем, являющийся композицией открытого вложения и проективного морфизма. Схема, одновременно квазипроективная и полная, является проективной. *В. И. Данилов.*

КВАЗИПРОСТОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — непрерывное линейное представление π связной полупростой действительной группы Ли G в банаховом пространстве E такое, что: 1) оператор $\pi(x)$ является скалярным кратным единичного оператора в пространстве E для любого элемента x из центра группы G; 2) если F — пространство аналитич. векторов в E относительно π и если π_F— представление универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{G}$ алгебры Ли группы G в векторном пространстве F, то оператор $\pi_F(z)$ является скалярным кратным единичного оператора в пространстве F для всех элементов z из центра алгебры $\mathcal{G}$. Эти скалярные кратные определяют характер центра алгебры $\mathcal{G}$, наз. инфинитезимальным характером К. п. Два К. п. наз. инфинитезимально эквивалентными, если определяемые ими представления универсальной обертывающей алгебры в соответствующих векторных пространствах аналитич. векторов эквивалентны. Всякое вполне неприводимое представление группы в банаховом пространстве есть К. п., и любое неприводимое К. п. группы G в банаховом пространстве инфинитезимально эквивалентно нек-рому вполне неприводимому представлению; последнее является ограничением на инвариантное подпространство нек-рого факторпредставления представления (вообще говоря, неунитарного) из основной серии представлений группы G.

Лит.: [1] Harish-Chandra, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 75, p. 185—243; 1954, v. 76, p. 26—65; [2] Lepowsky J., там же, 1973, v. 176, p. 1—44; [3] Фомин А. И., «Функцион. анализ и его прилож.», 1976, т. 10, № 3, с. 95—96.

А. И. Штерн.

КВАЗИПРОСТОЕ ЧИСЛО — натуральное число n, не имеющее малых простых делителей. Это означает, что все простые делители числа n должны быть больше $\mathcal{P}(n)$, где $\mathcal{P}(n)$ — некоторая функция, растущая медленнее, чем n. Напр.,

$$\mathcal{P}(n)=n^{1/(\ln\ln n)^2}.$$

К. ч. хорошо распределены в арифметич. прогрессиях с большим модулем. *Б. М. Бредихин.*

КВАЗИРАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ — обобщение равномерной сходимости. Поточечная сходимость последовательности отображений $\{f_n\}$ топологич. пространства X в метрич. пространство Y к отображению f

наз. К. с., если для всякого $\varepsilon > 0$ и всякого натурального числа N существует такое не более чем счетное открытое покрытие $\{\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_s, \ldots\}$ пространства X и такая последовательность $n_0, n_1, \ldots, n_s, \ldots$ натуральных чисел, больших N, что $\rho(f(x), f_{n_k}(x)) < \varepsilon$ для всякого $x \in \Gamma_k$. Из равномерной сходимости вытекает К. с. Для последовательностей непрерывных функций К. с. является необходимым и достаточным условием непрерывности предельной функции (т е о р е м а А р ц е л я — А л е к с а н д р о в а).

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948. *В. В. Федорчук.*

КВАЗИРАЗЛОЖИМАЯ ГРУППА, к в а з и р а с щ е п и м а я г р у п п а, над полем k — аффинная алгебраич. группа, определенная над полем k, содержащая *Бореля подгруппу*, определенную над тем же полем. Всякая аффинная алгебраич. группа становится К. г. при нек-ром расширении основного поля, напр. над алгебраическим замыканием этого поля. Всякая аффинная алгебраич. группа, определенная над конечным полем k, квазиразложима над k. См. также *Разложимая группа.* *В. Л. Попов.*

КВАЗИРЕГУЛЯРНОЕ КОЛЬЦО — кольцо, в к-ром каждый элемент квазирегулярен. Элемент a альтернативного (в частности, ассоциативного) кольца R наз. к в а з и р е г у л я р н ы м, если существует такой элемент $a' \in R$, что

$$a + a' + aa' = a + a' + a'a = 0.$$

Элемент a' наз. к в а з и о б р а т н ы м для элемента a. Если R — кольцо с единицей 1, то элемент $a \in R$ является квазирегулярным с квазиобратным a' тогда и только тогда, когда элемент $1+a$ обратим в R с обратным $1+a'$. Всякий нильпотентный элемент квазирегулярен. В ассоциативном кольце множество всех квазирегулярных элементов образует группу относительно операции круговой композиции: $x \cdot y = x + y + xy$. Важным примером К. к. является кольцо (некоммутативных) формальных степенных рядов без свободных членов. Существуют простые ассоциативные К. к. [2].

Лит.: [1] Д ж е к о б с о н Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] S a s i a d a E., C o h n P. M., «J. Algebra», 1967, v. 5, № 3, p. 373—77. *И. П. Шестаков.*

КВАЗИРЕГУЛЯРНЫЙ РАДИКАЛ к о л ь ц а — наибольший квазирегулярный идеал данного кольца. Идеал A кольца R наз. квазирегулярным, если A является *квазирегулярным кольцом*. Во всяком альтернативном (в частности, ассоциативном) кольце существует К. р.; он совпадает с суммой всех правых (левых) квазирегулярных идеалов (см. [1], [10]). К. р. ассоциативного кольца наз. также *Джекобсона радикалом*.

К. р. $J(R)$ произвольного альтернативного кольца R равен пересечению всех максимальных модулярных правых (левых) идеалов кольца R; $J(R)$ равен также пересечению ядер всех неприводимых правых (левых) представлений кольца R (см. [1], [5]—[8]). Кольцо R наз. J-п о л у п р о с т ы м (или просто полупростым), если $J(R)=0$. Факторкольцо $R/J(R)$ всегда полупросто. Всякое полупростое кольцо изоморфно подпрямой сумме примитивных колец [1], [8]. Если R удовлетворят условию минимальности для правых (левых) идеалов, то радикал $J(R)$ нильпотентен, а факторкольцо $R/J(R)$ изоморфно конечной прямой сумме полных матричных колец над телами и алгебр Кэли — Диксона (последние слагаемые в ассоциативном случае отсутствуют), см. [1]—[3]. Пусть A — двусторонний идеал кольца R, тогда

$$J(A) = A \cap J(R)$$

(см. [1], [4]); если R ассоциативно и R_n — кольцо всех матриц порядка n над R, то

$$J(R_n) = [J(R)]_n.$$

Если R — ассоциативная алгебра над полем F и мощность F больше размерности R над F либо R является алгебраической над F, то $J(R)$ — нильидеал. К. р. конечно порожденного альтернативного кольца, удовлетворяющего существенному тождественному соотношению, совпадает с нижним нильрадикалом (см. *Радикалы* колец и алгебр) [6]. Некоторый аналог К. р. существует во всякой *йордановой алгебре*.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Жевлаков К. А., «Алгебра и логика», 1965, т. 4, № 4, с. 87—102; [3] его же, там же, 1966, т. 5, № 3, с. 11—36; [4] его же, там же, 1969, т. 8, № 2, с. 176—80; [5] его же, там же, № 3, с. 309—19; [6] его же, там же, 1972, т. 11, № 2, с. 140—61; [7] Слинько А. М., Шестаков И. П., там же, 1974, т. 13, № 5, с. 544—88; [8] Kleinfeld E., «Amer. J. Math.», 1955, v. 77, p. 725—30; [9] McCrimmon K., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1969, v. 62, p. 671—78; [10] Smiley M. F., «Ann. Math.», 1948, v. 49, № 3, p. 702—09.

И. П. Шестаков.

КВАЗИРЕШЕНИЕ — обобщенное решение некорректных задач, к-рое (при достаточно общих условиях), в отличие от истинного решения, удовлетворяет условиям корректности по Адамару.

Пусть X, Y — метрические пространства, $A : X \to Y$, M — множество из X. Квазирешением уравнения

$$Ax = y \qquad (1)$$

на множестве M при заданном y из Y наз. элемент $\bar{x}$ из M, минимизирующий уклонение $\rho(Ax, y)$ при x из M. Если уравнение (1) имеет на M истинное решение x_0, то x_0 будет также и К.

Зависимость множества К. от y удобно представить как суперпозицию двух отображений

$$\bar{x} = A^{-1}Py,$$

где A^{-1} — обращение (вообще — многозначное) отображения A, а P — оператор метрич. проектирования в пространстве Y на множество $N = AM$. Такая суперпозиция позволяет свести исследование свойств К. к исследованию отображений A^{-1} и P. Напр., если множество N — чебышевское, а отображение A^{-1} — однозначно и непрерывно на N, то задача нахождения К. является корректной. Если P или A^{-1} многозначны, то устойчивость множества K формулируется в терминах β-непрерывности (непрерывности функций от множеств).

Обычно в качестве X и Y берутся линейные нормированные пространства, что позволяет получить наиболее полные и законченные результаты. Так, задача нахождения К. корректна, если Y — строго выпукло, A — линейный непрерывный обратимый оператор, M — выпуклый компакт. Имеется ряд других комбинаций условий, обеспечивающих корректность задачи нахождения К., в к-рых одни условия усиливаются, другие ослабляются (напр., A — линейный замкнутый оператор, но Y — гильбертово).

Существует ряд способов задания множества M, обеспечивающих возможность эффективного нахождения К. Один из наиболее распространенных способов состоит в следующем. Рассматривается третье пространство Z (все или нек-рые из пространств X, Y, Z могут совпадать) и линейный оператор $B : Z \to X$ такой, что B^{-1} — неограничен. За множество $M = M_r$ принимается образ шара:

$$M_r = BS_r;\ S_r = \{z \in Z : \|z\| \leqslant r\}.$$

В такой форме задача нахождения К. является задачей математич. программирования: минимизировать функционал

$$f(z) = \|ABz - y\|$$

при ограничении $\|z\| \leqslant r$. Для гильбертовых Y и Z получается задача квадратичного программирования.

В случаях корректности К. важное значение для приложений имеют оценки устойчивости, в к-рых дается за-

висимость $\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$ от $\|y_1 - y_2\|$. При приведенном выше способе задания множества M устойчивость К. характеризуется функцией:

$$\Omega(\tau, r) = \sup \|x_1 - x_2\|;\ x_i = Bz_i,\ \|z_i\| \leqslant r,$$
$$\|Ax_1 - Ax_2\| \leqslant \tau,\ i = 1, 2.$$

Имеет место соотношение

$$\Omega(\tau, r) = \omega(\tau, 2r),$$

где $\omega(\tau, r)$ есть решение экстремальной задачи $\omega(\tau, r) = \sup \|Bz\|$ при $\|z\| \leqslant r$, $\|ABz\| \leqslant \tau$.

Для гильбертовых Z и Y имеются выражения для $\omega(\tau, r)$ в замкнутой форме.

Лит.: [1] Иванов В. К., «Докл. АН СССР», 1962, т. 145, № 2, с. 270—72; [2] его же, «Матем. сб.», 1963, т. 61, № 2, с. 211—23; [3] Лисковец О. А., «Дифференциальные уравнения», 1971, т. 7, № 9, с. 1707—09; [4] Морозов В. А., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 11, М., 1973, с. 129—78; [5] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, М., 1974; [6] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы высшей математики, т. 1—2, Минск, 1972—75.

В. К. Иванов.

КВАЗИСИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — нечетномерное проективное пространство P_{2n-1}, в к-ром заданы нульсистемы:

$$u_a = -x^{m+a};\quad u_{m+a} = x^a;\quad u_{m+b} = u_{n+b} = 0$$

и

$$u_{n+b} = x^{m+b};\quad u_{m+b} = -x^{n+b},$$
$$m \leqslant b \leqslant n-1;\ 0 \leqslant a \leqslant m-1.$$

Первая нульсистема переводит точки пространства в гиперплоскости, проходящие через $(2n-2m-1)$-плоскость

$$x^a = x^{m+a} = 0,$$

вторая нульсистема — в точки этой же плоскости.

Плоскость $x^a = x^{m+a} = 0$ наз. абсолютной, а обе нульсистемы — абсолютными нульсистемами К. п. $S^{2m-1}_{P_{2n-1}}$. К. п. является частным случаем полусимплектических пространств.

Коллинеации пространства $S^{2m-1}_{P_{2n-1}}$, переводящие в себя абсолютную плоскость, имеют вид:

$$'x^k = \sum\nolimits_\lambda U^k_\lambda x^\lambda,$$
$$'x^u = \sum\nolimits_\lambda T^u_\lambda x^\lambda + \sum\nolimits_\mu V^u_\mu x^\mu,$$
$$0 \leqslant k,\ \lambda \leqslant 2m-2,\ 2m-1 \leqslant \mu,\ u \leqslant 2n-1,$$

и матрицы U^k_λ и V^n_μ — симплектич. матрицы порядков $2m$ и $(2n-2m)$; T^u_λ — прямоугольная матрица с $2m$ столбцами и $(2n-2m)$ строками.

Эти коллинеации наз. квазисимплектическими преобразованиями пространства $S^{2m-1}_{P_{2n-1}}$. Они перестановочны с заданными нульсистемами пространства. Квазисимплектич. инвариант двух прямых определяется по аналогии с симплектич. инвариантом прямых симплектического пространства.

К. п. $S^{2m-1}_{P_{2n-1}}$ может быть получено из симплектического $S_{P_{2n-1}}$ путем предельного перехода от абсолюта пространства $S_{P_{2n-1}}$ к абсолюту пространства $S^{2m-1}_{P_{2n-1}}$. Именно, первая из заданных нульсистем переводит все точки пространства в плоскости, проходящие через абсолютную плоскость, а вторая — переводит все плоскости в точки той же плоскости.

Квазисимплектич. преобразования образуют группу, являющуюся группой Ли.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров.

КВАЗИСРЕДНИХ МЕТОД — конструктивная схема исследования систем со спонтанным нарушением симметрии, основанная на фундаментальной концепции квазисредних (Н. Н. Боголюбов [1], 1961).

К в а з и с р е д н и е — термодинамические (в статистической механике) или вакуумные (в квантовой теории поля) средние от динамических величин в специальным образом модифицированной процедуре усреднения, позволяющей учесть эффекты влияния вырождения состояния системы.

В с т а т и с т и ч. м е х а н и к е при спонтанном нарушении симметрии на основе К. м. могут быть описаны макроскопические наблюдаемые в рамках микроскопического подхода.

В задачах с вырождением одному уровню энергии отвечает более одного независимых состояний системы; среднее же значение $\langle A \rangle$ любой динамической величины A определенно однозначно:

$$\langle A \rangle_H = \frac{\mathrm{Tr}\,(Ae^{-\beta H})}{\mathrm{Tr}\,e^{-\beta H}}, \qquad (1)$$

где H — гамильтониан системы, β — обратная температура. Если состояние статистического равновесия системы обладает более низкой симметрией, чем гамильтониан системы (так наз. спонтанное нарушение симметрии см. [2]—[5]), то операцию усреднения (1) необходимо дополнить правилом, запрещающим «лишнее» усреднение по различным значениям рассматриваемой макроскопической величины, изменение к-рой не сопровождается изменением энергии.

Это достигается введением квазисредних, т. е. средних по гамильтониану, дополненному бесконечно малыми членами, нарушающими аддитивные законы сохранения. Термодинамические средние могут оказаться неустойчивыми по отношению к такому изменению исходного гамильтониана, что и свидетельствует о вырождении состояния статистического равновесия.

Итак, квазисреднее $\langle A \rangle$ динамической величины A для системы с гамильтонианом H определяется как предел

$$\langle A \rangle_H = \lim_{\nu \to 0} \lim_{V \to \infty} \langle A \rangle_{H_\nu}^{(V)}, \qquad (2)$$

где через $\langle \ldots \rangle_{H_\nu}$ обозначено обычное среднее, взятое по гамильтониану H_ν, содержащему малые нарушающие симметрию члены, вводимые параметром включения ν, исчезающие при $\nu \to 0$. Согласно определению (2) обычное термодинамическое среднее получается дополнительным усреднением квазисреднего по группе нарушенной симметрии.

Значение квазисреднего (2) может зависеть от конкретной структуры добавочного члена $\Delta H = H_\nu - H$, если усредняемая динамическая величина A неинвариантна относительно группы симметрии исходного гамильтониана H. При стремлении параметров включения источников ν к нулю произвольным образом предел обычных средних (2) для вырожденного состояния не существует. Для полного определения квазисредних необходимо указать способ стремления этих параметров к нулю, обеспечивающий сходимость (см., напр., [5]). С другой стороны, для снятия вырождения достаточно нарушить при построении H_ν лишь те аддитивные законы сохранения, «выключение» к-рых приводит к неустойчивости обычных средних. При этом для квазисредних не будут выполняться именно те правила отбора корреляционных функций, к-рые обусловлены указанными законами сохранения.

К. м. непосредственно связан с принципом ослабления корреляции (см. [8], [9]): корреляционные функции

$$\langle U_1(x_1, t_1) \ldots U_s(x_s, t_s) \ldots U_n(x_n, t_n) \rangle, \qquad (3)$$

где $U_s(x_s, t_s)$ — полевые функции в *Гейзенберга представлении* $\Psi(x_s, t_s)$ или $\Psi^+(x_s, t_s)$, распадаются на произведение

$$\langle U_1(x_1, t_1) \dots U_{s-1}(x_{s-1}, t_{s-1})\rangle \times \\ \times \langle U_s(x_s, t_s) \dots U_n(x_n, t_n)\rangle, \qquad (4)$$

если совокупность точек $x_1, \dots, x_{s-1}$ бесконечно удаляется от совокупности точек $x_s, \dots, x_n$ при фиксированных временных переменных $t_1, t_2, \dots, t_n$. В случае вырождения рассматриваемого состояния выражения $\langle \dots \rangle$, входящие в эту формулировку, с необходимостью должны пониматься как квазисредние: приведенная выше формулировка принципа ослабления корреляций становится прямо неверной, если считать $\langle \dots \rangle$ обычными средними.

Для построения неравновесного статистического оператора рассматриваются бесконечно малые возмущения, нарушающие симметрию (*Лиувилля уравнения*) относительно обращения времени. Применение этой операции эквивалентно отбору запаздывающих решений уравнения Лиувилля (см. [7]).

Вопросы о выборе способа стремления параметров включения источников ν к нулю, обеспечивающего сходимость обычных средних в определении квазисредних (2) рассмотрены в рамках метода аппроксимирующих гамильтонианов, где исходный гамильтониан заменяется на специальным образом конструируемый путем замены динамических величин, коммутирующих со всей алгеброй локальных наблюдаемых в пределе большой системы, на *с*-числа, так наз. аппроксимирующей гамильтониан, так что этот последний гамильтониан является много проще исходного (и в широком ряде физически важных случаев допускается точное решение) и является ему эквивалентным при $V \to \infty$ (см. [7]). При построении добавочного члена ΔH следует взять его пропорциональным решениям в общем случае минимаксной задачи для предельной ($V \to \infty$) функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана. Тогда произвольная последовательность вещественных положительных ν, сходящаяся к нулю, обеспечивает сходимость в определении (2), при этом таким образом построенные квазисредние оказываются равными соответствующим решениям указанной минимаксной задачи.

В рамках метода аппроксимирующих гамильтонианов указан другой альтернативный способ определения квазисредних без введения дополнительных членов в гамильтониан H. В этом подходе при вычислении квазисреднего $\langle A \rangle_H$ рассматриваемая динамическая величина A домножается на нек-рый, в определенном смысле стремящийся к единице при $V \to \infty$, множитель L, гамильтониан H остается неизменным [4]:

$$\langle A \rangle_H = \lim \langle A \cdot L \rangle. \qquad (5)$$

Квазисредние, определенные согласно (2) и (5), совпадают.

Математический аппарат К. м. включает *Боголюбова теорему* об особенностях типа $1/q^2$ и *Боголюбова неравенства* для *Грина функций* и *корреляционных функций*; содержит в себе алгоритмы установления нетривиальных оценок для равновесия квазисредних, позволяющих исследовать проблему упорядочения в статистич. системах и выяснять структуру энергетического спектра низколежащих возбужденных состояний (см. [4], [8]).

Концепция квазисредних непосредственно связана с теорией фазовых переходов (см. [6], [7], [9]): неустойчивость термодинамических средних по отношению к возмущениям гамильтониана, нарушающим инвариантность относительно нек-рой группы преобразований, означает, что в системе происходит переход в экстремальное состояние.

В квантовой теории поля для ряда модельных систем доказано наличие фазового перехода и ус-

тановлена справедливость теоремы Боголюбова об особенностях типа $1/q^2$; исследована возможность локальной неустойчивости вакуума и появления у него доменной структуры.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избр. труды, т. 3, К., 1971; [2] Статистическая физика и квантовая теория поля, М., 1973; [3] Гриб А. А., Дамаскинский Е. В., Максимов В. М., «Успехи физ. наук», 1970, т. 102, с. 587—620; [4] Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И., Некоторые вопросы статистической механики, М., 1975; [5] Боголюбов Н. Н. (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, М., 1974; [6] Браут Р., Фазовые переходы, пер. с англ., М., 1967; [7] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [8] Ахиезер А. И., Пелетминский С. В., Методы статистической физики, М., 1977; [9] Престон К., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1977.

А. Н. Ермилов, А. М. Курбатов.

КВАЗИТОЖДЕСТВО, условное тождество,— формулы логического языка 1-й ступени вида

$$(\forall x_1 \ldots x_n)\,(A_1 \& \ldots \& A_p \longrightarrow A),$$

где через $A_1, \ldots, A_p, A$ обозначены простейшие формулы вида

$$f = g,\ P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m),$$

а $f, g, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — термы от $x_1, \ldots, x_n$, P — сигнатурный предикатный символ. Квазитождествами определяются *алгебраических систем квазимногообразия.* Тождество — частный случай К. *О. А. Иванова.*

КВАЗИФРОБЕНИУСОВО КОЛЬЦО, QF-кольцо,— артиново кольцо (слева и справа), удовлетворяющее аннуляторным условиям:

$$\mathfrak{Z}_e(\mathfrak{Z}_r(L)) = L \text{ и } \mathfrak{Z}_r(\mathfrak{Z}_r(H)) = H$$

для каждого левого (правого) идеала $L(H)$ (см. *Аннулятор*). Артиново слева кольцо, удовлетворяющее лишь одному из аннуляторных условий, может не быть К. к. Интерес к К. к. обусловлен наличием двойственности: артиново слева кольцо R является К. к. тогда и только тогда, когда отображение

$$M \longmapsto \mathrm{Hom}_R(M, R)$$

определяет двойственность категорий левых и правых конечно порожденных R-модулей. Конечномерная алгебра A над полем P оказывается К. к. в том и только том случае, когда каждое неприводимое прямое слагаемое левого A-модуля $\mathrm{Hom}_P(A_A, P)$ изоморфно некрому минимальному левому идеалу алгебры A. А это равносильно самодуальности решеток левых и правых идеалов алгебры A.

К. к. были введены как обобщение фробениусовых алгебр, определяемых требованием эквивалентности правого и левого регулярных представлений. Первоначально свойство артинова слева и справа кольца R быть квазифробениусовым определялось следующим условием: если $e_1, \ldots, e_n$ — полный список примитивных идемпотентов из R (т. е. $Re_i \ncong Re_j$ при $i \neq j$ и, каков бы ни был примитивный идемпотент e, $Re \cong Re_i$ для некрого i), J — радикал кольца R и $\varphi : R \to R/J$ — естественный гомоморфизм, то найдется такая перестановка π множества $\{1, \ldots, n\}$, что

$$\mathrm{Soc}(e_i R) \cong \varphi(e_{\pi(i)} R) \text{ и } \mathrm{Soc}(Re_{\pi(i)}) \cong \varphi(Re_i),$$

где $\mathrm{Soc}\, M$ — *цоколь* модуля M. Квазифробениусовость кольца R эквивалентна также каждому из следующих свойств: (1) R нётерово слева, $\mathfrak{Z}_r(\mathfrak{Z}_e(H)) = H$ для каждого правого идеала H и

$$\mathfrak{Z}_r(L_1 \cap L_2) = \mathfrak{Z}_r(L_1) + \mathfrak{Z}_r(L_2)$$

для любых левых идеалов L_1 и L_2; (2) R удовлетворяет условию максимальности для левых (или правых) аннуляторных идеалов (в частности, если R нётерово слева или справа) и самоинъективно слева или справа; (3) R артиново справа и самоинъективно слева или справа;

(4) каждый инъективный (проективный) левый R-модуль проективен (инъективен); (5) все плоские левые R-модули инъективны; (6) R самоинъективно слева и справа и совершенно справа; (7) R самоинъективно слева и справа и каждый его правый идеал является аннулятором нек-рого конечного множества из R; (8) R совершенно справа и каждый конечно порожденный левый R-модуль вкладывается в проективный модуль; (9) R когерентно и совершенно справа и $\mathrm{Ext}_R(M, R)=0$ для всех конечно представимых левых R-модулей M; (10) R удовлетворяет условию максимальности для левых аннуляторов и $\mathrm{Ext}_R(M, R)=0$ для всех конечно представимых левых R-модулей M; (11) R артиново слева и справа и для всякого конечно порожденного левого R-модуля M длины модулей M и $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ совпадают; (12) кольцо эндоморфизмов каждого свободного левого R-модуля самоинъективно слева; (13) конечно порожденные односторонние идеалы кольца эндоморфизмов любого проективного образующего (инъективного кообразующего) категории левых R-модулей являются аннуляторами.

Инъективные модули над К. к. разлагаются в прямую сумму циклических. Для коммутативных колец справедливо и обратное. Если радикал Джекобсона J кольца R трансфинитно нильпотентен (т. е. $J^\alpha=0$ для нек-рого трансфинита α, где $J^1=J$, $J^\alpha=J^{\alpha-1}J$ и $J^\alpha=\bigcap_{\beta<\alpha}J^\beta$ для предельного α), то R — К. к. тогда и только тогда, когда R самоинъективно слева и все его односторонние идеалы аннуляторные. Левый модуль над К. к. R точен в том и только в том случае, когда он является образующим категории левых R-модулей. Групповое кольцо RG является К. к. тогда и только тогда, когда группа G конечна, а кольцо R квазифробениусово.

Изучаются также нек-рые обобщения К. к.: л е в о е QF-3-к о л ь ц о R определяется требованием существования точного левого R-модуля, вкладывающегося в качестве прямого слагаемого в любой точный левый R-модуль; л е в о е QF-3′-к о л ь ц о R определяется требованием вложимости инъективной оболочки левого R-модуля R в прямое произведение нек-рого множества экземпляров модуля R. Л е в о е п с е в д о ф р о б е н и у с о в о к о л ь ц о (или л е в о е PF-к о л ь ц о) определяется каждым из следующих свойств: а) R — инъективный кообразующий категории левых R-модулей; б) каждый точный левый R-модуль является образующим категории левых R-модулей; в) R — левое QF-3-кольцо и аннулятор любого отличного от R правого идеала отличен от нуля.

Лит.: [1] К э р т и с Ч., Р а й н е р И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [2] Модули. [в.] 2, Новосиб., 1973, с. 42—48; [3] Ф е й с К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—78.

Л. А. Скорняков.

КВАЗИХАРАКТЕР — непрерывный гомоморфизм c абелевой топологич. группы G в мультипликативную группу комплексных чисел. В качестве G обычно рассматривается мультипликативная группа k^* нек-рого локального поля k.

Ограничение К. c на любую компактную подгруппу группы G является характером этой подгруппы. В частности, если $\|\ \|$ — нормирование поля k и $U=\{a\in k^* \mid \|a\|=1\}$, то c индуцирует нек-рый характер χ группы U, совпадающей в неархимедовом случае с группой единиц поля k. Если $c(U)=1$, то К. наз. н е р а з в е т в л е н н ы м. Любой неразветвленный К. имеет вид

$$c=\|\ a\ \|^s=e^{s\log\|a\|},$$

В общем случае К. группы k^* имеет вид $c=c^1\|a\|^s$, где s — комплексное число, а $c^1(a)$ — характер группы k^*. Действительная часть числа s однозначно определяется К. c и наз. в е щ е с т в е н н о й ч а с т ь ю К. c.

В неархимедовом случае для всякого К. c найдется натуральное m, для которого

$$c\,(1+\mathfrak{M}^m)=1,$$

где $\mathfrak{M}$ — максимальный идеал кольца целых поля k. Минимальное число m с этим свойством наз. с т е п е н ь ю в е т в л е н и я К. c, а идеал $\mathfrak{M}^m$ — в е д у щ и м м о д у л е м К. c.

Лит.: [1] Л е н г С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966; [2] Ш а ф а р е в и ч И. Р., Дзета-функция, М., 1969.

Л. В. Кузьмин.

КВАЗИЦИКЛИЧЕСКАЯ ГРУППА, г р у п п а т и п а p^∞,— бесконечная абелева p-группа, все собственные подгруппы к-рой циклические. Для каждого простого p существует единственная с точностью до изоморфизма К. г. Эта группа изоморфна мультипликативной группе всех корней уравнений

$$x^{p^n}=1,\quad n=1,\,2,\,\ldots,$$

в поле комплексных чисел с обычным умножением, а также факторгруппе $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, где $\mathbb{Q}_p$— аддитивная группа поля рациональных p-адических чисел, а $\mathbb{Z}_p$— аддитивная группа кольца всех целых p-адических чисел. К. г. есть объединение возрастающей последовательности циклич. групп C_n порядка p^n, $n=1,\,2,\,\ldots$, точнее — индуктивный предел

$$\varinjlim_n C_n$$

относительно индуктивной системы $(C_n,\ \varphi_n)$. В терминах образующих и определяющих соотношений эта группа может быть определена как группа со счетной системой образующих $a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n,\ \ldots$ и определяющими соотношениями

$$a_1^p=1,\quad a_{n+1}^p=a_n,\quad n=2,\,3,\,\ldots\ .$$

К. г. являются единственными бесконечными абелевыми (а также единственными локально конечными бесконечными) группами, все подгруппы к-рых конечны. Вопрос о существовании бесконечных неабелевых групп с указанным свойством еще не решен (1978) и составляет одну из проблем О. Ю. Шмидта.

К. г. являются полными абелевыми группами, и всякая полная абелева группа есть прямая сумма нек-рого множества групп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел и К. г. для нек-рых простых чисел p. Группы типа p^∞ являются максимальными p-подгруппами мультипликативной группы комплексных чисел, а также максимальными p-подгруппами аддитивной группы рациональных чисел по модулю 1. Кольцо эндоморфизмов группы типа p^∞ изоморфно кольцу целых p-адических чисел. К. г. совпадает со своей *Фраттини подгруппой.*

Лит.: [1] К у р о ш А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] К а р г а п о л о в М. И., М е р з л я к о в Ю. И., Основы теории групп, М., 1972.

Н. Н. Вильямс.

КВАЗИЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ — унитарные представления π_1, π_2 группы X (или симметричные представления симметричной алгебры X) в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 соответственно, удовлетворяющие одному из следующих четырех эквивалентных условий: 1) существуют такие унитарно эквивалентные представления ρ_1 и ρ_2, что ρ_1 есть кратное представления π_1, а ρ_2 — кратное представления π_2; 2) ненулевые подпредставления представления π_1 не дизъюнктны с π_2, а ненулевые подпредставления представления π_2 не дизъюнктны с π_1; 3) π_2 унитарно эквивалентно подпредставлению нек-рого представления ρ_1, кратного представлению π_1, имеющему единичный центральный носитель; 4) существует изоморфизм Ф *Неймa-*

на алгебры, порожденной множеством $\pi_1(X)$, на алгебру Неймана, порожденную множеством $\pi_2(X)$, удовлетворяющий условию $\Phi(\pi_1(x))=\pi_2(x)$ для всех $x\in X$. Унитарно эквивалентные представления суть К. п.; неприводимые К. п. унитарно эквивалентны. Если π_1 и π_2 — К. п., и π_1 — факторпредставление, то и π_2 — факторпредставление; факторпредставление и его ненулевое подпредставление суть К. п.; два факторпредставления либо дизъюнктны, либо являются К. п. Понятие К. п. приводит к понятию квазидуального объекта и квазиспектра для локально компактных групп и симметричных алгебр соответственно.

Лит.: [1] Диксмье Ж., C*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974.

А. И. Штерн.

КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — проективное n-пространство, проективная метрика к-рого определяется абсолютом, состоящим из совокупности мнимого конуса (абсолютный конус Q_0) с $(n-m-1)$-вершиной (абсолютная плоскость T_0) и мнимой $(n-m-2)$-квадрикой Q_1 на этой $(n-m-1)$-плоскости (абсолютная квадрика Q_1); обозначается символом S_n^m, $m<n$. К. п. является пространством более общего проективного типа по отношению к евклидову пространству и *коевклидову пространству*, метрики последних получаются из метрики первого. К. п. является частным случаем *полуэллиптических пространств*. При $m=0$ абсолютный конус является парой слившихся $(n-1)$-плоскостей, совпадающих с **$(n-1)$-абсолютной** плоскостью T_0, а абсолюты совпадают с абсолютом евклидова n-пространства. При $m=n-1$ конус Q_0 является конусом с точечной вершиной, абсолют в этом случае совпадает с абсолютом коевклидова n-пространства. При $m=1$ конус Q_0 является парой мнимых $(n-1)$-плоскостей. В частности, конус Q_0 квазиэллиптического 3-пространства S_3^1 является парой мнимых 2-плоскостей, прямая (1-плоскость) T_0 является действительной прямой их пересечения, а квадрика Q_1 — парой мнимых точек на прямой T_0.

Расстояние δ между двумя точками X и Y определяется в случае, когда прямая XY не пересекает $(n-m-1)$-плоскость T_0, с помощью соотношения

$$\cos^2\frac{\delta}{\rho}=\frac{(x^0E_0y^0)^2}{(x^0E_0x^0)\,(y^0E_0y^0)},$$

где

$$x^0=(x^a,\ a\leqslant m),$$
$$y^0=(y^b,\ b\leqslant m)$$

— векторы точек X и Y, E_0 — линейный оператор, определяющий скалярное произведение в пространстве этих векторов, ρ — действительное число; в случае, когда прямая XY пересекает плоскость T_0, расстояние d между этими точками определяется с помощью разности векторов точек X и Y:

$$x=y^1-x^1,\quad x^1=(x^a,\ a>m),$$
$$y^1=(y^b,\ b>m),$$
$$d^2=aE_1a,$$

где E_1 — линейный оператор, определяющий скалярное произведение в пространстве этих векторов.

Угол между двумя плоскостями, $(n-2)$-плоскость пересечения к-рых не пересекается с $(n-m-1)$-плоскостью T_0, определяется как (нормированное) расстояние между соответствующими точками в двойственном К. п. S_n^{n-m-1}, координаты к-рых численно равны или пропорциональны проективным координатам плоскостей в пространстве S_n^m. Если $(n-2)$-плоскость пересечения данных двух плоскостей пересекается с $(n-m-1)$-плоскостью T_0, то угол между плоскостями и в этом

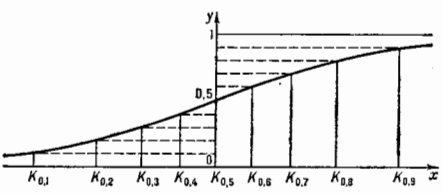
случае определяется как нормированное расстояние. При $n=2$ углы между плоскостями являются углами между прямыми.

Движениями К. п. S_n^m являются коллинеации этого пространства, переводящие конус Q_0, плоскость T_0 и квадрику Q_1 в себя. Группа движений является группой Ли, а движения описываются ортогональными операторами. В К. п. S_{2m+1}^m, двойственном самому себе, определяются кодвижения — корреляции, переводящие каждые две точки в две $2m$-плоскости, угол между к-рыми пропорционален расстоянию между точками, а каждые две $2m$-плоскости — в две точки, расстояние между к-рыми пропорционально углу между плоскостями. Движения и кодвижения пространства S_{2m+1}^m образуют группу, являющуюся группой Ли. Геометрия 2-плоскости S_2^0 совпадает с геометрией евклидовой, а геометрия 2-плоскости S_2^1— с геометрией коевклидовой плоскости.

Геометрия 3-пространства S_3^1 определяется эллиптической проективной метрикой на прямых, коевклидовой — на плоскостях и евклидовой — в связках плоскостей. Геометрия 3-пространства S_3^0 совпадает с евклидовой, а геометрия 3-пространства S_3^2— с геометрией коевклидова 3-пространства. Пространство S_3^1 с радиусом кривизны $^1/_2$ изометрично связной группе движений евклидовой 2-плоскости со специально введенной метрикой. Связная группа движений К. п. S_3^1 изоморфна прямому произведению двух связных групп движений евклидовой 2-плоскости.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.
Л. А. Сидоров.

КВАНТИЛЬ — одна из числовых характеристик *распределения вероятностей*. Для действительной случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ квантилью порядка $p, 0<p<1$, наз. число K_p такое, что $F(K_p)\leqslant p, F(K_p+0)\geqslant p$. Если $F(x)$ — непрерывная строго монотонная функция, то K_p — единственное решение уравнения $F(x)=p$, то есть K_p— функция p, обратная функции $F(x)$. Если $F(x)$ непрерывна и $p'>p$, то вероятность неравенства



$K_p<X<K_{p'}$ равна $p'-p$. Квантиль $K_{1/2}$ есть *медиана* случайной величины X. Квантили $K_{1/4}$ и $K_{3/4}$ наз. квартилями, а $K_{0,1}, K_{0,2}, \ldots, K_{0,9}$— децилями. Знание К. для подходящие выбранных значений p позволяет составить представление о виде функции распределения.

Напр., для нормального распределения (рис.)

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$$

график функции $\Phi(x)$ можно вычертить по децилям: $K_{0,1}=-1{,}28$; $K_{0,2}=-0{,}84$; $K_{0,3}=-0{,}52$; $K_{0,4}=-0{,}25$; $K_{0,5}=0$; $K_{0,6}=0{,}25$; $K_{0,7}=0{,}52$; $K_{0,8}=0{,}84$; $K_{0,9}=1{,}28$. Квартили нормального распределения $\Phi(x)$ равны $K_{1/4}=-0{,}67$; $K_{3/4}=0{,}67$.
В. В. Сенатов.

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ — теория релятивистских квантовых систем. Возникновение К. т. п. связано с задачами о взаимодействии вещества с излучением и с попытками построения релятивистской кван-

товой механики [П. Дирак (P.A.M. Dirac, 1927), В. Гейзенберг (W. Heisenberg), В. Паули (W. Pauli) и др.]. При релятивистских (т. е. больших) энергиях не может быть последовательной квантовой механики частицы, так как релятивистская квантовая частица способна порождать новые (такие же или другие) частицы, а сама — исчезать. Вследствие этого нельзя выделить нек-рое число механич. степеней свободы, связанных с этой частицей, а приходится говорить о системе с переменным, вообще говоря, бесконечным числом степеней свободы. К. т. п. объединяет описание полей и частиц, к-рые в классич. физике выступают как две разные сущности.

Центральную роль в теории играет понятие квантового поля. Удобно пояснить, как оно вводится, на примере электромагнитного поля, так как это единственное поле, имеющее ясное содержание и в классическом и в квантовом случаях.

Классическое электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла. Эти уравнения можно переписать в виде канонических уравнений Гамильтона, так что потенциал поля играет роль координаты, а его производная по времени — импульса в соответствующем фазовом пространстве. Поле представляется как каноническая система с бесконечным числом степеней свободы, так как потенциал в каждой пространственной точке есть независимая координата. Эту систему можно квантовать так же, как обычную механич. систему. В квантовой картине основные понятия — это состояния, описываемые векторами гильбертова пространства, и наблюдаемые, описываемые самосопряженными операторами, действующими в этом пространстве. Квантование состоит в замене канонических координат и импульсов на операторы таким образом, чтобы скобке Пуассона сопоставлялся коммутатор соответствующих операторов. Квантовое поле становится оператором, действующим на векторы состояния и вызывающим переходы между состояниями с различным числом квантовых частиц — фотонов, т. е. описывающим рождение и уничтожение (излучение и поглощение) квантов поля.

Аналогично квантовое поле может быть поставлено в соответствие любым другим фундаментальным частицам. Уравнения для оператора свободного поля получаются из основного требования теории относительности — условия инвариантности относительно *Пуанкаре группы*. Сорт частиц характеризуется массой покоя m, спином, т. е. собственным моментом s, принимающим целые и полуцелые значения, включая нуль, и различными зарядами (электрическим, барионным, лептонным и т. д.). Первые два числа $[m, s]$ определяют неприводимое представление группы Пуанкаре, по к-рому преобразуется поле, а тем самым и уравнения поля.

Свободное классическое скалярное поле $u(x)$ подчиняется уравнению $(x = (x^0, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^4)$

$$(\Box + m^2)\, u(x) = 0, \quad \Box = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2. \quad (1)$$

Это — вариационное уравнение Эйлера для функционала действия

$$A = \int dx \mathscr{L}_0 (u(x))$$

с плотностью лагранжиана

$$\mathscr{L}_0 (u(x)) = \tfrac{1}{2}\, \partial_\mu u \partial^\mu u - \frac{m^2}{2}\, u^2.$$

Если рассматривать $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$ как каноническую координату, то сопряженный импульс есть $p(x) = \partial \mathscr{L}_0 / \partial \dot{u}(x) = \dot{u}(x)$ (точка означает производную по времени). Квантование выполняется посредством со-

поставления функциям $u(x)$, $p(x)$ операторных функций $\varphi(x)$, $\pi(x)$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (квантовой скобке Пуассона)

$$[\varphi(x),\ \pi(x')] = i\hbar\delta(x-x')$$

($\hbar$ — постоянная Планка, далее принимается $\hbar=1$). Оператор Гамильтона имеет вид:

$$H_0 = \int dx\, H_0(\varphi(x),\ \pi(x)) =$$

$$= \int dx \left\{ :\frac{1}{2}\pi^2(x) + \frac{1}{2}(\nabla\varphi(x))^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2(x): \right\}$$

т. е. H_0 — та же функция квантовых операторов φ и π, что и классич. гамильтониан, с точностью до порядка (не коммутирующих) операторов. Символ :: нормального произведения уточняет этот порядок. Гамильтоновы уравнения движения

$$\dot{\varphi}(x) = i[H_0,\ \varphi(x)],$$
$$\dot{\pi}(x) = i[H_0,\ \pi(x)]$$

эквивалентны уравнению

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0. \qquad (2)$$

Квантовое поле в 4-мерном пространстве-времени необходимо является обобщенной, а не обыкновенной операторнозначной функцией, поэтому $\varphi(x)$ следует понимать только как символическую запись.

Математич. смысл этим символам придается в формализме пространства Фока, представляющего собой реализацию пространства состояний в К. т. п. Состояние одной частицы в заданный момент времени описывается комплексной функцией $\Psi(p)$, квадратично интегрируемой по релятивистски инвариантной мере

$$d\sigma(p) = \frac{dp}{2\omega(p)};\quad p \in \mathbb{R}^3,$$

где $\omega(p) = (p^2 + m^2)^{1/2}$ — релятивистская энергия частицы с массой m. Такие функции образуют гильбертово пространство $\mathcal{H} = L^2(d\sigma)$. Система из n тождественных частиц описывается квадратично интегрируемой функцией $\Psi_n(p_1, \ldots, p_n)$, симметричной (для бозонов — частиц с целым спином) или антисимметричной (для фермионов — частиц с полуцелым спином) относительно перестановки любых двух координат. Эти функции (для бозонов) принадлежат гильбертову пространству $\mathcal{F}_n$ — симметризованному тензорному произведению n экземпляров $\mathcal{H}$. Для описания систем с переменным числом частиц вводится прямая сумма пространств $\mathcal{F}_n$ — фоковское пространство $\mathcal{F} = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_0 = \mathbb{C}$. Вектор $\Omega_0 = (1, 0, 0, \ldots)$ наз. в а к у у м о м и интерпретируется как состояние системы без частиц. Векторы вида $(0, 0, \ldots, \Psi_n, 0, \ldots)$ наз. ч а с т и ч н ы м и в е к т о р а м и и отождествляются с Ψ_n. Удобно рассматривать функции $\Psi(p)$ из $\mathcal{H}$ как функции 4-вектора $p = (p_0, \boldsymbol{p})$, где $p_0 = \omega(\boldsymbol{p})$. Тогда представление группы Пуанкаре $U(a, \Lambda)$ дается формулой

$$(U(a, \Lambda)\Psi)(p) = e^{-i(p, a)}\Psi(\Lambda^{-1}p),$$

где $(p, a) = p_\mu a^\mu = p^0 a^0 - \boldsymbol{pa}$ — лоренц-инвариантная билинейная форма. Представление, заданное в $\mathcal{H}$, естественным образом индуцирует представление во всем фоковском пространстве $\mathcal{F}$. Генератор сдвигов вдоль оси p_0 совпадает с гамильтонианом H_0. Здесь описано простейшее представление группы Пуанкаре, соответствующее спину $s=0$.

Различные операторы в фоковском пространстве выражаются через операторы рождения и уничтожения. Пусть $f(p)$ — одночастичная волновая функция (т. е.

$f \in \mathcal{H}$). Тогда оператор уничтожения $a(f) : \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_{n-1}$ определяется по формуле

$$(a(f)\Psi_n)(p_1, \ldots, p_{n-1}) = \sqrt{n} \int \Psi_n(p_1, \ldots, p_n) f(p_n) d\sigma(p_n),$$

а оператор рождения $a^*(f) : \mathcal{F}_{n-1} \to \mathcal{F}_n$ — как ему сопряженный. В частности, $a^*(f)\Omega_0 = (0, f(p), 0, \ldots)$, т. е. оператор $a^*(f)$ рождает из вакуума частицу с волновой функцией $f(p)$, а $a(f)\Omega_0 = 0$. Операторы рождения и уничтожения принято записывать в символическом виде

$$a(f) = \int a(p) f(p) d\sigma(p), \qquad a^*(f) = \int a^*(p) f(p) d\sigma(p).$$

Фурье-преобразование суммы операторов рождения и уничтожения $\varphi(f) = a(\tilde{f}) + a^*(\bar{\tilde{f}})$ является для действительных $f \in L^2(R^3_x)$ симметрическим оператором и наз. свободным (скалярным) квантовым полем в нулевой момент времени. Квантовое поле в момент времени x^0 имеет вид

$$\varphi(x^0, f) = e^{ix^0 H_0} \varphi(f) e^{-ix^0 H_0}$$

и как операторная обобщенная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет на своей области определения уравнению (2) и каноническим коммутационным соотношениям

$$[\varphi(f), \pi(g)] = i \int f(x) g(x) dx. \qquad (3)$$

Таким образом, в фоковском пространстве реализуется каноническое квантование, описанное выше.

Теория свободного квантового поля может быть изложена математически строго и последовательно. Для взаимодействующих полей положение иное. Хотя в К. т. п. и получен целый ряд важных результатов по проблемам, допускающим корректную математическую постановку, но до сих пор не решена принципиальная задача обоснования теории взаимодействующих полей: не построено нетривиального примера, удовлетворяющего всем физич. требованиям. Конкретные физич. расчеты опираются на эвристическую схему К. т. п., в основе к-рой в большинстве случаев лежит теория возмущений. Уравнение для взаимодействующего поля содержит нелинейный член — $j(\Phi(x))$:

$$(\Box + m^2)\Phi(x) = j(\Phi(x)). \qquad (4)$$

Это уравнение, так же как (1), может быть получено как вариационное уравнение для $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}$, причем

$$j(\Phi(x)) = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial \Phi(x)}.$$

Лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_{\text{int}}(\Phi)$ выбирается в виде нелинейной инвариантной комбинации полей, участвующих во взаимодействии, и их производных. В простейшем случае скалярного поля, взаимодействующего с самим собой, $\mathcal{L}_{\text{int}} = -\lambda \Phi^4(x)$. При $\lambda = 0$ получается свободное поле. Взаимодействующее квантовое поле $\Phi(x)$ можно явно выразить через начальные данные $\Phi(x)$ и $\Pi(x) = \dot{\Phi}(x)$ по формуле

$$\Phi(x) = e^{ix^0 H} \Phi(x) e^{-ix^0 H},$$

где, однако, в экспоненте стоит уже полный гамильтониан

$$H = H_0 + H_{\text{int}} = \int dx \left\{ H_0(\Phi(x), \Pi(x)) + \lambda : \Phi^4(x) : \right\}.$$

Выбирая в качестве начальных данных значения свободного поля $\varphi(x)$ и $\pi(x)$, можно выразить решение нелинейного уравнения (4) через операторы рождения и уничтожения $a^*(p)$ и $a(p)$ свободных частиц.

В этой схеме приходится вводить в рассмотрение невзаимодействующие частицы и рассматривать взаимодействие как дополнительный фактор, к-рый в последовательном изложении приходится «включать» и «выключать» с помощью специальной адиабатической процедуры (см. [5]). Между тем взаимодействие может весьма заметно менять спектр и другие характеристики рассматриваемых полей. В стандартных методах считается, что полю Ф отвечает именно та частица, к-рая проявляется в линеаризованном уравнении. Только для достаточно слабого взаимодействия типа $\lambda\Phi^4$ можно доказать, что это так. Однако и в теории возмущений спектр, вообще говоря, меняется. Собственный вектор Ω, отвечающий минимальному собственному значению дискретного спектра H (точнее, следовало бы говорить об операторе массы) наз. перенормированным вакуумом и интерпретируется как состояние без частиц. Собственные значения, отвечающие остальным точкам дискретного спектра, называются перенормированными одночастичными состояниями (обычно считается, что имеется одно такое состояние). Оно отличается от состояния $a^*(f)\Omega_0$ и имеет массу M, отличную от затравочной массы m.

Прямое применение теории возмущений дает бессмысленные расходящиеся выражения (так наз. «ультрафиолетовые расходимости»). Если регуляризацию этих расходимостей проводить в соответствии с физическими принципами (главным условием оказалась релятивистская и калибровочная инвариантность всей процедуры), то весь произвол (в электродинамике) сводится к формально бесконечной перенормировке массы и заряда электрона, как было показано в 1948 Ю. Швингером (J. Schwinger), Р. Фейнманом (R. P. Feynman) и Ф. Дайсоном (F. J. Dyson).

Окончательную формулировку и строгий математич. анализ К. т. п. в рамках теории возмущений дал Н. Н. Боголюбов (1951—55). Он указал, что ультрафиолетовые расходимости в теории возмущений появляются вследствие перемножения обобщенных функций в точках, где их носители пересекаются, и сформулировал такой способ их перемножения, при к-ром выполняются физич. требования релятивистской инвариантности, причинности и др. В практич. расчетах теория возмущений применяется не непосредственно к уравнению (4), а к различным другим объектам, к-рые могут быть из него получены, напр. к S-матрице (см. *Рассеяния матрица*) или к функциям Грина. Вычисление S-матрицы является одной из главных задач в физике элементарных частиц. Ее матричные элементы просто выражаются через функции Грина поля $\Phi(x)$:

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = (\Omega, T(\Phi(x_1) \ldots \Phi(x_n))\Omega),$$

где $T(\ldots)$ — символ хронологического упорядочения

$$T(\Phi(x_1) \ldots \Phi(x_n)) = \Phi(x_{i_1}) \ldots \Phi(x_{i_n}), \text{ если}$$

$$x^0_{i_1} \geqslant x^0_{i_2} \geqslant \ldots \geqslant x^0_{i_n}.$$

Разлагая G_n в ряд по степеням $\mathscr{L}_{\text{int}}$, используя, напр., представление для G_n в виде функционального интеграла

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{C}\int u(x_1) \ldots u(x_n)\, e^{i\int (\mathscr{L}_0(u(x)) + \mathscr{L}_{\text{int}}(u(x)))\,dx} \Pi_x du(x), \tag{5}$$

можно выразить ее в каждом порядке теории возмущений через интегралы от произведений простейших функций Грина свободного поля

$$D(x_1 - x_2) = (\Omega_0, T(\varphi(x_1)\varphi(x_2))\Omega_0) =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{i(p,\, x_1 - x_2)}}{(p,\ p) - m^2 + i0}\, dp.$$

Для вычислений по теории возмущений разработана техника диаграмм Фейнмана. При этом возникают произведения функций Грина $D(x)$ в совпадающих точках. Напр., функция $G_2(x_1, x_2)$ для модели $\mathscr{L}_{\text{int}} = -\lambda\Phi^4$ во втором порядке по λ пропорциональна выражению

$$\int dy_1\, dy_2 D(x_1 - y_1)\, D^3(y_1 - y_2)\, D(y_2 - x_2). \qquad (6)$$

Этот интеграл расходится, однако его можно регуляризовать, т. е. сопоставить ему нек-рое осмысленное выражение. Прежде всего следует придать смысл произведению обобщенных функций $D^3(x)$. Это можно сделать следующим образом. Рассматривается сглаженная функция

$$D_{\varkappa,\,\varepsilon}(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{i(p,\,x)}\, \rho_\varkappa((p,\,p))}{(p,\,p) - m^2 + i\varepsilon}\, dp,$$

где $\varepsilon > 0$, а $\rho_\varkappa(\xi)$ — такая функция, что $D_{\varkappa,\varepsilon}(x)$ — достаточно гладкая, напр., $\rho_\varkappa(\xi) = (1 + \xi/\varkappa)^{-N}$, $N > 2$ и $D_{\varkappa,\varepsilon}(x) \to D(x)$ при $\varkappa \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ ($\varkappa$ — называется ультрафиолетовым обрезанием). Можно считать, что лагранжиан $\mathscr{L}$ в (5) заменен на

$$\mathscr{L}^{(\varkappa)} = \frac{1}{2}\, \partial_\mu u \rho\,(\Box)\, \partial^\mu u - \frac{m^2}{2}\, u^2 - \lambda u^4.$$

Найдутся такие константы $a_\varkappa$ и $b_\varkappa$ (расходящиеся при $\varkappa \to \infty$), что в смысле обобщенных функций существует предел

$$D^3_{\text{reg}}(x) = \lim_{\varkappa \to \infty} \left\{ \lim_{\varepsilon \to 0} D^3_{\varkappa,\,\varepsilon}(x) - a_\varkappa \Box\, \delta(x) - b_\varkappa \delta(x) \right\}.$$

Функция $D^3{}_{\text{reg}}(x)$ и является регуляризацией $D^3(x)$. Она определяется с точностью до слагаемых $a\Box\delta(x) + b\delta(x)$, где a и b — произвольные константы. Таким же образом регуляризуется и все выражение (6), при этом нового произвола не появляется. Аналогично регуляризуются все функции Грина во всех порядках теории возмущений по λ. Подобную процедуру можно провести для $\mathscr{L}_{\text{int}}$, равного любому полиному. Для $\mathscr{L}_{\text{int}} = -\lambda\Phi^4$ процедуру регуляризации можно провести самосогласованно во всех порядках теории возмущений по λ в следующем смысле. Существуют такие константы $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, $C_\varkappa$ (представимые в виде рядов по λ степени два и выше; для их вычисления разработаны простые правила), что при подстановке в (5) вместо лагранжиана $\mathscr{L}^{(\varkappa)}$ — перенормированного лагранжиана

$$\mathscr{L}^{(\varkappa)}_{\text{ren}} = \mathscr{L}^{(\varkappa)} + :A_\varkappa \partial_\mu u \partial^\mu u + B_\varkappa u^2 + C_\varkappa u^4:$$

в каждом порядке разложения в ряд по λ при $\varkappa \to \infty$ получаются конечные выражения. $\mathscr{L}^{(\varkappa)}_{ren}$ называется перенормированным лагранжианом, и говорят, что к исходному $\mathscr{L}$ добавлены расходящиеся контрчлены. Эти контрчлены имеют ту же структуру, что и исходный лагранжиан (т. е. являются линейной комбинацией выражений $\partial_\mu u \partial^\mu u$, u^2, u^4). Вследствие этого неоднозначность в величинах $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, $C_\varkappa$ можно фиксировать, если считать заданными массу и заряд системы (масса определяется как значение p^2, при к-ром $\tilde{G}_2(p^2)$ имеет полюс, а заряд — как значение $\tilde{G}_4$ в нек-рой определенной точке). Анализ этой неоднозначности приводит к важному понятию ренормализационной группы [5].

Если в данной модели возможно устранить ультрафиолетовые расходимости с помощью добавления контрчленов той же структуры, что и исходный лагранжиан, то такая модель называется перенормируемой; в противном случае — неперенормируемой. Все модели скалярного поля, взаимодействие в к-рых есть полином степени выше четвертой — неперенормируемы. Это относится только к теории возмущений. Последова-

тельная формулировка описанного способа отделения «бесконечностей», возникающих при перемножении сингулярных обобщенных функций во всех порядках теории возмущений, составляет содержание так наз. теоремы об «R-операции» Н. Н. Боголюбова и О. С. Парасюка (1956) [5], [19]. Тем самым была доказана теорема существования квантовой теории взаимодействующих полей во всех порядках теории возмущений. Последующие исследования показали, что ряд теории возмущений является в лучшем случае асимптотическим, и оценки на его основе применимы только при не слишком больших энергиях участвующих в процессе частиц. Устранение ультрафиолетовых расходимостей удается последовательно провести только в рамках теории возмущений.

Все вышесказанное относилось к реальному четырехмерному пространству-времени. В трехмерном пространстве-времени взаимодействие становится менее сингулярным и можно ограничиться добавлением контрчлена $B_\varkappa : u^2$, причем $B_\varkappa$ имеет второй порядок по λ. В двумерном пространстве-времени контрчлены не нужны.

Здесь описана только простейшая модель скалярного поля с взаимодействием $\lambda\Phi^4$. В К. т. п. имеют дело с более сложными многокомпонентными системами взаимодействующих ферми- и бозе-полей. Напр., киральные поля уже на классич. уровне принимают значения в нек-рых не обязательно линейных однородных пространствах (напр., на сфере); калибровочные поля являются связностями в нек-рых векторных расслоениях — к ним относятся электромагнитное поле, гравитационное поле и поле Янга — Миллса (см. [11], [15]).

Метод возмущений не применим в тех случаях, когда константа взаимодействия — основной параметр разложения — заведомо больше единицы, как для сильных ядерных взаимодействий мезонов и нуклонов. Для сильных взаимодействий пользуются другими методами, в к-рых существенную роль играют рассмотрение S-матрицы в целом и изучение общих свойств ее матричных элементов, прямо описывающих интересные для опыта величины — амплитуды процессов рассеяния и рождения. При этом квантовые поля (или токи), к-рые могут быть выражены через S-матрицу, играют важную роль, поскольку на S-матрицу накладывается центральное условие причинности (Н. Н. Боголюбов, 1955) как ограничение на носитель определенных матричных элементов S-матрицы. Вместе с другими физич. требованиями, такими, как релятивистская инвариантность и характер энергетического спектра, условие причинности позволяет установить свойства голоморфности обобщенных функций — амплитуд рассеяния как функций нескольких комплексных переменных. Эти аналитич. свойства оказываются достаточными для вывода специального рода интегральных представлений для амплитуды рассеяния — «дисперсионных соотношений». Строгое доказательство дисперсионных соотношений [4] потребовало развития специальных математич. методов, лежащих на стыке теории обобщенных функций и теории функций многих комплексных переменных и, в частности, доказательства теоремы об острие клина Н. Н. Боголюбова и о C-выпуклой оболочке В. С. Владимирова [8]. Дисперсионные соотношения стали основой большей части конкретных методов расчета в теории сильных взаимодействий [А. А. Логунов, С. Мандельстам (S. Mandelstam) и др.]. Они примыкают к так наз. аксиоматической теории поля, в к-рой выясняются совместность аксиом и их следствия, касающиеся вопросов существования и свойств квантовых полей.

Метод теории возмущений предполагает, что для уравнения (4), решением к-рого является квантовое поле

$\Phi(x)$, выбираются простейшие начальные данные φ, π, заданные в фоковском пространстве свободных частиц. Существует много унитарно неэквивалентных реализаций (представлений) коммутационных соотношений (3), и в этом состоит отличие К. т. п. как системы с бесконечным числом степеней свободы от квантовой механики, где имеется теорема Неймана о единственности этих представлений. Для физики интересны любые реализации начальных данных, для к-рых уравнение (4) имеет решения $\Phi(x)$, и гамильтониан H ограничен снизу. Гильбертово пространство, в к-ром реализовано такое представление, наз. сектором. Нек-рые модели могут иметь по нескольку фаз (фаза — сектор с единственным вакуумом), напр., $\lambda\Phi^4$-модель имеет при достаточно больших λ две фазы — происходит фазовый переход. При построении фаз применяется *квазисредних метод*. Представление о фазовом переходе и связанном с ним явлении спонтанного нарушения симметрии сыграло важную роль в частности в единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий. В 1974 было показано, что в нек-рых двумерных моделях имеются так наз. солитонные сектора, в к-рых вакуум отсутствует, но к-рые имеют богатый спектр частиц, аналогичный спектру частиц соответствующей классич. модели (Л. Д. Фаддеев и др.).

В К. т. п. имеется много задач, требующих для своего решения методов из различных областей математики, в настоящее время интенсивно исследуемых. Условно их можно разбить на следующие группы.

1) Анализ аксиом и их следствий для квантовых полей и S-матрицы. Помимо средств функционального анализа — теории самосопряженных операторов, обобщенных функций, представлений групп,— здесь используются методы теории функций многих комплексных переменных, C^*-алгебры и алгебры Неймана, в последнее время — методы теории вероятностей. Основные величины — функции Грина или функции Уайтмана $w_n(x_1, \ldots, x_n)$ — являются граничными значениями функций, голоморфных в некоторых областях $D_n \subset \mathbb{C}^{4n}$. Нерешенная задача здесь — построение оболочек голоморфности $\mathscr{H}(D_n)$. Область D_n содержит евклидовы точки вида $(ix_1^0, \boldsymbol{x}_1, ix_2^0, \boldsymbol{x}_2, \ldots)$. Для ряда моделей в двух- и трехмерном пространстве-времени доказано, что значения функций Уайтмана в этих точках являются моментами вероятностной меры. Заслуживает внимания дальнейший анализ такого евклидова подхода к К. т. п. с точки зрения теории вероятностей.

Имеется общий алгебраич. подход к теории поля, при к-ром в основу теории кладутся алгебры наблюдаемых — т. е. C^*-алгебры или алгебры Неймана, наделенные нек-рыми естественными с физич. точки зрения структурными свойствами. Здесь одна из основных задач состоит в анализе связи между алгебрами полей и алгебрами наблюдаемых, а также задача об описании динамики в рамках этого подхода.

2) Конструктивная К. т. п. имеет важнейшей задачей доказательство существования моделей К. т. п. в 4-мерном пространстве-времени. В двух- и трехмерном случае существование ряда моделей доказано на основе евклидова (вероятностного) подхода с применением методов, развитых по аналогии со статистической механикой; здесь требуется дальнейший математич. анализ таких вопросов, как спектр гамильтониана, фазовые переходы, свойства S-матрицы и др.

3) В формальной К. т. п., существование к-рой известно в каждом порядке теории возмущений, также имеется ряд проблем, допускающих математич. формулировку. Сюда относятся, напр., анализ рядов теории возмущений (в частности, аналитич. свойства диаграмм Фейнмана), изучение классич. уравнений теории поля

и квазиклассических поправок к ним — здесь возникают нелинейные уравнения эллиптического и гиперболического типов, для анализа к-рых применяются, в частности, метод обратной задачи рассеяния, методы дифференциальной и алгебраической геометрии и топологии, и др.

Лит.: [1] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, 3 изд., М., 1969; [2] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965; [3] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода к квантовой теории поля, М., 1969; [4] Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., 1958; [5] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 3 изд., М., 1976; [6] Вайтман А., Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей, пер. с англ., М., 1968; [7] Васильев А. Н., Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике, Л., 1976; [8] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [9] Йост Р., Общая теория квантованных полей, пер. с англ., М., 1967; [10] Конструктивная теория поля, пер. с англ., М., 1977; [11] Попов В. Н., Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике, М., 1976; [12] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1977, т. 2, М., 1978; [13] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [14] Сигал И., Математические проблемы релятивистской физики, пер. с англ., М., 1968; [15] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., Введение в теорию калибровочных полей, М., 1978; [16] Стритер Р., Вайтман А., PCT, спин и статистика и все такое, пер. с англ., М., 1966; [17] Фам Ф., Введение в топологическое исследование особенностей Ландау, пер. с франц., М., 1970; [18] Фридрихс К., Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве, пер. с англ., М., 1969; [19] Хепп К., Теория перенормировок, пер. с франц., М., 1974; [20] Шварц А. С., Математические основы квантовой теории поля, М., 1975; [21] Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, пер. с англ., М., 1963; [22] Квантовая теория калибровочных полей, пер. с англ., М., 1977.

И. В. Волович, М. К. Поливанов.

КВАНТОР — общее название для логических операций, к-рые по предикату $P(x)$ строят высказывание, характеризующее область истинности предиката $P(x)$. В математич. логике наиболее употребительны квантор всеобщности $\forall$ и квантор существования $\exists$. Высказывание $\forall x P(x)$ означает, что область истинности предиката $P(x)$ совпадает с областью значений переменной x. Высказывание $\exists x P(x)$ означает, что область истинности предиката $P(x)$ непуста. Если интересуются поведением предиката $P(x)$ не на всей области значений переменной x, а лишь на ее части, выделяемой предикатом $R(x)$, то часто употребляют так наз. ограниченные кванторы $(\exists x)_{R(x)}$ и $(\forall x)_{R(x)}$, при этом высказывание $(\exists x)_{R(x)} P(x)$ означает то же, что и $\exists x (R(x) \& P(x))$, а $(\forall x)_{R(x)}\ P(x)$ — то же, что $\forall x (R(x) \supset P(x))$, где & — знак *конъюнкции*, $\supset$ — знак *импликации*.

В. Е. Плиско.

КВАРТИЛЬ в теории вероятностей — частный случай *квантили*. К. наз. квантили K_p, соответствующие значениям p, равным $^1/_4$ (нижняя К.) и $^3/_4$ (верхняя К.).

КВАТЕРНАРНАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА — квадратичная форма от четырех переменных. К. к. ф. над полем F связаны с алгебрами *кватернионов* над тем же полем, а именно, алгебре с базисом $[1, i_1, i_2, i_3]$, $i_1^2 = -a_1 \in F$, $i_2^2 = -a_2 \in F$, $i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3$ отвечает К. к. ф.— норма кватерниона,

$$q(x_0, x_1, x_2, x_3) = N(x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3) = \\ = x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2.$$

Для К. ф., отвечающих кватернионным алгебрам, и только для таких определена композиция квадратичных форм:

$$q(x)\, q(y) = q(z),$$

где координаты вектора z суть билинейные формы от x и y. Композиция возможна лишь для квадратичных форм от двух, четырех и восьми переменных.

А. В. Малышев.

КВАТЕРНАРНАЯ ФОРМА — форма от четырех переменных, т. е. однородный многочлен от четырех неизвестных с коэффициентами из заданного коммутативного кольца с единицей. *О. А. Иванова.*

КВАТЕРНИОН — *гиперкомплексное число*, геометрически реализуемое в четырехмерном пространстве. Система К. предложена в 1843 У. Гамильтоном (W. Hamilton). К. явились исторически первым примером гиперкомплексной системы, возникшей при попытках найти обобщение комплексных чисел. Комплексные числа изображаются геометрически точками плоскости, и действия над ними соответствуют простейшим геометрич. преобразованиям плоскости. Из точек пространства трех и выше измерений нельзя «устроить» числовую систему, подобную полю действительных или комплексных чисел. Однако, если отказаться от коммутативности умножения, то из точек 4-мерного пространства можно устроить числовую систему (в пространстве трех, пяти и выше измерений нельзя построить даже такую систему).

К. образуют 4-мерную алгебру над полем действительных чисел с базой $1, i, j, k$ («базисные единицы») и следующей таблицей умножения «базисных единиц»:

$1\cdot 1=1$	$1\cdot i=i$	$1\cdot j=j$	$1\cdot k=k$
$i\cdot 1=i$	$i\cdot i=-1$	$i\cdot j=k$	$i\cdot k=-j$
$j\cdot 1=j$	$j\cdot i=-k$	$j\cdot j=-1$	$j\cdot k=i$
$k\cdot 1=k$	$k\cdot i=j$	$k\cdot j=-i$	$k\cdot k=-1.$

Всякий К. может быть записан в виде

$$X=x_0\cdot 1+x_1 i+x_2 j+x_3 k$$

или (поскольку 1 играет роль обычной единицы и в записи К. может быть опущена) в виде

$$X=x_0+x_1 i+x_2 j+x_3 k.$$

Различаются с к а л я р н а я ч а с т ь К. x_0 и в е к т о р н а я ч а с т ь

$$V=x_1 i+x_2 j+x_3 k,$$

так что $X=x_0+V$. Если $x_0=0$, то кватернион V наз. вектором, и он может отождествляться с обычным 3-мерным вектором, поскольку умножение в алгебре К. двух таких векторов V_1 и V_2 связано со скалярным (V_1, V_2) и векторным $[V_1, V_2]$ произведениями векторов V_1 и V_2 в 3-мерном пространстве формулой

$$V_1V_2=-[V_1, V_2)+[V_1, V_2].$$

Это показывает тесную связь К. с векторным исчислением. Исторически последнее и возникло из теории К.

Всякому К. $X=x_0+V$ сопоставляется с о п р я ж е н н ы й к в а т е р н и о н $\overline{X}=x_0-V$, при этом

$$X\cdot\overline{X}=\overline{X}\cdot X=x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2.$$

Это действительное число наз. н о р м о й к в а т е р н и о н а X и обозначается $N(X)$. Норма К. удовлетворяет соотношению

$$N(XY)=N(X)N(Y).$$

Любое вращение 3-мерного пространства вокруг начала координат может быть задано при помощи кватерниона P с нормой 1. Вращение, соответствующее P, переводит вектор $X=x_1 i+x_2 j+x_3 k$ в вектор $Y=y_1 i+y_2 j+y_3 k=PXP^{-1}$.

Алгебра К. является единственной ассоциативной, но не коммутативной, конечномерной нормированной алгеброй над полем действительных чисел, обладающей единицей. Алгебра К.— *тело*, т. е. в ней определено деление, причем К., обратным к К. X, является $\frac{1}{N(X)}\overline{X}$. Тело К. единственная конечномерная дейст-

вительная ассоциативная, но не коммутативная алгебра без делителей нуля (см. также *Фробениуса теорема*).

Лит.: [1] Калужнин Л. А., Введение в общую алгебру, М., 1973; [2] Кантор И. Л., Солодовников А. С., Гиперкомплексные числа, М., 1973; [3] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973. *Н. Н. Вильямс.*

КВАТЕРНИОННАЯ СТРУКТУРА — 1) К. с. на вещественном векторном пространстве V — структура модуля над телом кватернионов $\mathbb{H}$, т. е. подалгебра H алгебры $\mathrm{End}\ V$ эндоморфизмов пространства V, порожденная двумя антикоммутирующими *комплексными структурами* J_1, J_2 на пространстве V. Эндоморфизмы J_1, J_2 наз. стандартными образующими К. с. H, а определяемый ими базис $\{id, J_1, J_2, J_3=J_1J_2\}$ алгебры H — стандартным базисом. Стандартный базис определен с точностью до автоморфизмов алгебры H. Алгебра H изоморфна алгебре *кватернионов*. Автоморфизм A векторного пространства V наз. автоморфизмом К. с., если индуцированное им преобразование $\mathrm{Ad}\ A$ пространства автоморфизмов сохраняет H, т. е. $(\mathrm{Ad}\ A)H=AHA^{-1}=H$. Если при этом на H индуцируется тождественный автоморфизм, то A наз. специальным автоморфизмом К. с. Группа всех специальных автоморфизмов К. с. изоморфна полной линейной группе $GL(m, \mathbb{H})$ над телом $\mathbb{H}$, при этом $4m=\dim V$. Группа всех автоморфизмов К. с. изоморфна прямому произведению с объединенной подгруппой группы $GL(m, \mathbb{H})$ и группы единичных кватернионов $H_1\approx \mathrm{Sp}(1)$.

2) К. с. на дифференцируемом многообразии — поле кватернионных структур на касательных пространствах, т. е. подрасслоение $\pi: H\to M$ расслоения $\mathrm{End}\ T(M)\to M$ эндоморфизмов касательных пространств, слой $\mathscr{H}_p=\pi^{-1}(p)$ к-рого суть К. с. на касательном пространстве T_pM для любого $p\in M$. Специальной К. с. наз. пара антикоммутирующих почти комплексных структур J_1, J_2 на многообразии M. Она порождает К. с. H, где

$$H_p=\{J=\lambda_0 id+\lambda_1J_1+\lambda_2J_2+\lambda_3J_1J_2,\ \lambda_i\in\mathbb{R}\}.$$

К. с. H на многообразии M порождается нек-рой специальной К. с. тогда и только тогда, когда расслоение $H\to M$ тривиально. К. с. на многообразии можно рассматривать как $\mathrm{Sp}(1)\cdot GL(m, \mathbb{H})$-структуру, а специальную К. с.— как $GL(m, \mathbb{H})$-структуру в смысле теории G-структур. Отсюда следует, что для существования на многообразии M нек-рой К. с. (специальной К. с.) необходимо и достаточно, чтобы структурная группа его касательного расслоения редуцировалась к группе $\mathrm{Sp}(1)\cdot\mathrm{Sp}(m)$ (соответственно, $\mathrm{Sp}(m)$). Первое продолжение специальной К. с., рассматриваемой как $GL(m, \mathbb{H})$-структура, есть e-структура (поле реперов), к-рая определяет каноническую линейную связность, ассоциированную со специальной К. с. Обращение в нуль кривизны и кручения этой связности является необходимым и достаточным условием того, чтобы специальная К. с. была локально эквивалентна стандартной плоской специальной К. с. на векторном пространстве $\mathbb{R}^{4m}$.

Аналогом кэлерова многообразия для К. с. служит кватернионное риманово многообразие. Оно определяется как риманово многообразие M размерности $4m$, группа голономии Γ к-рого содержится в группе $\mathrm{Sp}(1)\cdot\mathrm{Sp}(m)$. Если $\Gamma\subset\mathrm{Sp}(m)$, то кватернионное риманово многообразие наз. специальным, или кватернионным кэлеровым, многообразием и при $m>1$ имеет нулевую кривизну Риччи. Кватернионное риманово многообразие можно охарактеризовать как риманово многообразие M, в к-ром существует К. с. H, инвариантная относительно параллельного переноса Леви-

Чивиты. Аналогично, специальное кватернионное риманово многообразие есть риманово многообразие, в к-ром существует специальная К. с. (J_1, J_2), инвариантная относительно параллельных переносов Леви-Чивиты: $\nabla J_1 = \nabla J_2 = 0$, где ∇ — оператор ковариантной производной связности Леви-Чивиты.

В кватернионном римановом многообразии существует каноническая параллельная 4-форма, к-рая определяет ряд операторов в кольце $\Lambda(M)$ дифференциальных форм на M, перестановочных с оператором Бельтрами — Лапласа (оператор внешнего умножения, операторы свертки). Это позволяет построить содержательную теорию гармонических дифференциальных форм на кватернионных римановых многообразиях [2], аналогичную теории Ходжа на кэлеровых многообразиях, и получить оценки для чисел Бетти многообразия M. Все однородные специальные кватернионные римановы многообразия исчерпываются локально евклидовыми пространствами. Примером однородного кватернионного риманова многообразия, не являющегося специальным, служит кватернионное проективное пространство, а также другие симметрич. пространства Вольфа, к-рые находятся во взаимно однозначном соответствии с простыми компактными группами Ли без центра. Ими исчерпываются все компактные однородные кватернионные римановы многообразия. Широкий класс некомпактных несимметрических однородных кватернионных римановых многообразий строится с помощью модулей над алгеброй Клиффорда (см. [5]).

Лит.: [1] Chern S. S., в кн.: Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz, N. Y., 1957, p. 103—21; [2] Kraines V. Y., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1966, v. 122, p. 357—67; [3] Jano K., Ako M., «J. of diff. geom.», 1973, v. 8, № 3, p. 341—47; [4] Sommese A. J., «Math. Ann.», 1975, Bd 212, S. 191—214; [5] Алексеевский Д. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1975, т. 39, № 2, с. 315—62; [6] Wolf J. A., «J. Math. and Mech.», 1965, v. 14, № 6, p. 1033—47; [7] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 11, М., 1974, с. 37—123.

Д. В. Алексеевский.

КВАТЕРНИОНОВ ГРУППА — метабелева 2-группа порядка 8, задаваемая в образующих x, y определяющими соотношениями

$$x^4 = x^2y^2 = xy\,xy^{-1} = 1.$$

К. г. может быть изоморфно вложена в мультипликативную группу алгебры *кватернионов* (вложение определяется соответствием $x \to i$, $y \to j$). Более того, алгебра кватернионов является *групповой алгеброй* К. г. над полем действительных чисел. Соответствие

$$x \longrightarrow \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad y \longrightarrow \begin{Vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{Vmatrix}$$

задает точное представление К. г. матрицами 2-го порядка с комплексными элементами.

Обобщенная группа кватернионов (частным случаем к-рой при $n=2$ является К. г.) — группа, задаваемая в образующих x и y определяющими соотношениями

$$x^{2^n} = x^{2^{n-1}}y^2 = xy\,xy^{-1} = 1$$

(где n — фиксированное число). Эта группа является 2-группой порядка 2^{n+1} и класса нильпотентности n.

К. г. является *гамильтоновой группой* и минимальной гамильтоновой группой в том смысле, что любая гамильтонова группа содержит подгруппу, изоморфную К. г. Пересечение всех неединичных подгрупп К. г. (а также любой обобщенной К. г.) является неединичной подгруппой. Всякая некоммутативная конечная группа, обладающая этим же свойством, будет одной из обобщенных К. г. Среди конечных абелевых групп таким свойством обладают циклические p-группы и только они. Обобщенные К. г. и циклические p-группы являются единственными p-группами, допускающ-

щими собственный L-гомоморфизм, т. е. гомоморфизм решеток подгрупп на нек-рую решетку L, не являющийся изоморфизмом.

Иногда термин «К. г.» используется для обозначения различных подгрупп мультипликативной группы алгебры кватернионов и соответствующих топологич. групп.

Лит.: [1] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

Н. Н. Вильямс.

КЁБЕ ТЕОРЕМА — 1) К. т. п о к р ы т и я: существует абсолютная постоянная $K>0$ (п о с т о я н н а я К ё б е) такая, что если $f\in S$ (S — класс функций $f(z)=z+\ldots$, регулярных и однолистных в $|z|<1$), то множество значений функции $w=f(z)$ при $|z|<1$ заполняет круг $|w|<K$, причем K — наибольшее из чисел, для к-рых это справедливо. Л. Бибербах (L. Bieberbach, 1916) доказал, что $K=1/4$ и что на окружности $|w|=1/4$ только в том случае имеются точки, не принадлежащие образу круга $|z|<1$ при отображении $w=f(z)$, если

$$f(z)=z\,(1+e^{i\alpha}z)^{-2},$$

где α — действительное число. К. т. покрытия иногда формулируют так: если функция $w=f(z)$, $f(0)=0$, регулярна и однолистна в $|z|<1$ и отображает круг $|z|<1$ на область, не содержащую точку c, то $|f'(0)|\leqslant 4c$.

2) К. т. и с к а ж е н и я. а) Существуют такие положительные числа $m_1(r)$, $M_1(r)$, зависящие только от r, что для $f\in S$, $|z|=r$ имеют место неравенства:

$$m_1(r)\leqslant|f(z)|\leqslant M_1(r).$$

б) Существует число $M(r)$, зависящее только от r и такое, что для $f\in S$, $|z_1|\leqslant r$, $|z_2|\leqslant r$ справедливы неравенства:

$$\frac{1}{M(r)}\leqslant\left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right|\leqslant M(r).$$

Эту теорему можно также сформулировать следующим образом: существуют положительные числа $m_2(r)$, $M_2(r)$, зависящие только от r и такие, что для $f\in S$, $|z|\leqslant r$

$$m_2(r)\leqslant|f'(z)|\leqslant M_2(r).$$

Л. Бибербах показал, что наилучшие границы в К. т. искажения таковы:

$$m_1(r)=\frac{r}{(1+r)^2},\quad M_1(r)=\frac{r}{(1-r)^2},$$

$$m_2(r)=\frac{1-r}{(1+r)^3},\quad M_2(r)=\frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

3) К. т. о б о т о б р а ж е н и и к о н е ч н о с в я з н ы х о б л а с т е й н а к а н о н и ч е с к и е о б л а с т и. а) Всякую n-связную область B плоскости z можно однолистно отобразить на к р у г о в у ю о б л а с т ь (т. е. на область, ограниченную конечным числом полных окружностей без общих точек, причем нек-рые из них могут вырождаться в точки) плоскости ζ. Среди этих отображений существует только одно нормированное отображение, переводящее заданную точку $z=a\in B$ в $\zeta=\infty$ и такое, что разложение отображающей функции в окрестности $z=a$ имеет вид

$$\frac{1}{z-a}+\alpha_1(z-a)+\ldots\quad\text{или}\quad z+\frac{\alpha_1}{z}+\ldots,$$

смотря по тому, конечно a или нет.

б) Всякую n-связную область B плоскости z с граничными континуумами $K_1,\ldots,K_n$ можно однолистно отобразить на плоскость ζ с n разрезами по дугам логарифмич. спиралей соответственно наклонов $\theta_1,\ldots,\theta_n$, $0\leqslant\theta_\nu\leqslant\pi/2$, $\nu=1,\ldots,n$, к радиальным направлениям и притом так, что континуумы K_ν, $\nu=1,\ldots,n$, переходят соответственно в дуги наклонов θ_ν, заданные

точки a, $b \in B$ переходят в 0 и ∞ и разложение отображающей функции в окрестности $z=b$ имеет вид

$$\frac{1}{z-b}+\alpha_0+\alpha_1(z-b)+\dots \text{ или } z+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{z}+\dots,$$

смотря по тому, конечно b или нет. Отображение единственно.

Теоремы 1) — 3) установлены П. Кёбе (см.[1] — [4]).

Лит.: [1] Koebe P., «Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Gött., Math.-Phys. Kl.», 1907, Bd 2, S. 191—210; 1909, Bd 4, S. 68—76; [2] его же, «Math. Ann.», 1910, Bd 69, S. 1—81; [3] его же, «Acta Math.», 1918, v. 41, p. 305—44; [4] его же, «Math. Z.», 1918, Bd 2, S. 198—236; [5] Голузин Г. М., «Успехи матем. наук», 1939, в. 6, с. 26—89; [6] его же, Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [7] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962. *Е. Г. Голузина.*

КЁБЕ ФУНКЦИЯ — функция

$$w=f(z)=f_\theta(z)=z(1-e^{i\theta}z)^{-2}=z+\sum_{n=2}^{\infty}ne^{i(n-1)\theta}z^n,$$

где $\theta \in [0, 2\pi)$. Эта функция была впервые изучена П. Кёбе [1]. К. ф. отображает круг $|z|<1$ на плоскость w с разрезом по лучу, исходящему из точки $-\frac{1}{4}e^{-i\theta}$ и содержащему на своем продолжении точку $w=0$. К. ф. является экстремальной функцией ряда задач теории однолистных функций.

Лит.: [1] Koebe P., «Math. Ann.», 1910, Bd 69, S. 1—81; [2] Hayman W. K., «J. London Math. Soc.», 1965, v. 40, № 3, p. 385—406; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966. *Е. Г. Голузина.*

КЕЛДЫША ТЕОРЕМА — 1) К. т. о приближении непрерывных функций многочленами: пусть функция $f(z)$ комплексного переменного z голоморфна в области G и непрерывна в замкнутой области $\bar{G}$; тогда, для того чтобы при любом $\varepsilon>0$ существовал многочлен $P(z)$ такой, что

$$|f(z)-P(z)|<\varepsilon, \quad z \in \bar{G},$$

необходимо и достаточно, чтобы дополнение $C\bar{G}$ состояло из одной единственной области G^*, содержащей бесконечно удаленную точку. Установлена М. В. Келдышем [1]. Эта теорема является одним из основных результатов теории равномерных приближений функций многочленами в комплексной области (см. [2]).

2) К. т. в теории потенциала — теоремы о разрешимости и устойчивости *Дирихле задачи*, установленные М. В. Келдышем в 1938—41.

а) Пусть D — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с границей $\Gamma=\partial D$. Тогда на Γ существует счетное множество *иррегулярных граничных точек* $\{y_k\}$, $k=1, 2, \dots$, такое, что для разрешимости задачи Дирихле в области D с непрерывной граничной функцией $f(y)$ на Γ необходимо и достаточно, чтобы эта задача была разрешима в точках y_k, $k=1, 2, \dots$, т. е. чтобы

$$\lim_{x \to y_k,\ x \in D} u(x)=f(y_k), \quad k=1, 2, \dots,$$

где $u(x)$ — обобщенное в смысле Винера — Перрона решение задачи Дирихле (см. *Перрона метод*, а также [3], [4]).

б) Пусть оператор A действует из пространства $C(\Gamma)$ непрерывных функций на Γ в пространство ограниченных гармонических в D функций и удовлетворяет следующим условиям: (а) $A(\alpha f+\beta g)=\alpha A(f)+\beta A(g)$, $f, g \in C(\Gamma)$, где α, β — действительные числа, т. е. оператор A линейный; (б) если $f(y) \geqslant 0$, $f \in C(\Gamma)$, то $A(f)(x) \geqslant 0$; (в) если для функции $f \in C(\Gamma)$ задача Дирихле разрешима, то $A(f)$ дает решение этой задачи. При этих условиях оператор A единственный и $A(f)$ для всех $f \in C(\Gamma)$ дает обобщенное в смысле Винера — Перрона решение задачи Дирихле (см. [5]—[7]).

в) Для того чтобы всякая разрешимая в D задача Дирихле была устойчивой в $\bar{D}$, необходимо и достаточно, чтобы множество иррегулярных граничных точек множества $C\bar{D}$ совпадало с множеством иррегулярных граничных точек множества CD. Задача Дирихле с любой функцией $f \in C(\Gamma)$ устойчива внутри D тогда и только тогда, когда множество иррегулярных граничных точек $C\bar{D}$, принадлежащих Γ, имеет в D гармонич. меру нуль (см. [4]).

Лит.: [1] Келдыш М. В., «Матем. сб.», 1945, т. 16, № 3, с. 249—58; [2] Мергелян С. Н., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 2, с. 3—122; [3] Келдыш М. В., «Докл. АН СССР», 1938, т. 18, с. 315—18; [4] его же, «Успехи матем. наук», 1941, т. 8, с. 171—292; [5] его же, «Докл. АН СССР», 1941, т. 32, с. 308—9; [6] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966, гл. 4, 5; [7] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

КЕЛДЫША — ЛАВРЕНТЬЕВА ПРИМЕР — пример односвязной области Δ плоскости комплексного переменного z, ограниченной спрямляемой кривой Жордана, но не принадлежащей классу областей Смирнова S.

Пусть функция $z=f(w)$ реализует конформное отображение единичного круга $E=\{w;\ |w|<1\}$ на односвязную область D, ограниченную спрямляемой кривой Жордана. Известно, что $f(w)$ непрерывна в замкнутом круге $\bar{E}$, а логарифм модуля производной $\ln|f'(w)|$ представим в E интегралом Пуассона — Стилтьеса

$$\ln|f'(\rho e^{i\varphi})| = \int \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\varphi-\theta)}\, d\mu(\theta), \qquad (*)$$

где μ — нормированная борелевская мера на ∂E, $\int d\mu(\theta)=1$. Класс S состоит из таких областей D, для к-рых мера μ в представлении $(*)$ абсолютно непрерывна по мере Лебега на ∂E и интеграл $(*)$ превращается в интеграл Пуассона — Лебега от существующих почти всюду на ∂E граничных значений $\ln|f'(e^{i\theta})|$.

М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев [1] построили для любого h, $0<h<1$, односвязную область Δ, ограниченную спрямляемой кривой Жордана Γ, расположенную в круге $|z|<h$, $0\in\Delta$ и такую, что при конформном отображении области Δ на круг E,

$$z=0 \leftrightarrow w=0,$$

произвольной дуге кривой Γ на окружности $\partial E=\{w;\ |w|=1\}$ соответствует дуга той же длины. Эта область Δ не принадлежит классу S, так как $\ln|f'(e^{i\theta})|=0$ почти всюду на ∂E.

Проблема характеризации областей класса S (областей типа Смирнова) до сих пор (1978) полного решения не получила (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Келдыш М. В., Лаврентьев М. А., «Ann. École norm. supér.», 1937, t. 54, p. 1—38; [2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [3] Ловатер Дж., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 11, М., 1973, с. 99—179.

Е. Д. Соломенцев.

КЕЛДЫША — ЛАВРЕНТЬЕВА ТЕОРЕМА о равномерном приближении целыми функциями: для того чтобы для любой непрерывной комплексной функции $f(z)$ на континууме E и произвольно быстро убывающей при $r\to\infty$ положительной функции $\varepsilon(r)$, $0\leqslant r$, нижняя грань к-рой на любом конечном интервале положительна, существовала целая функция $g(z)$ такая, что

$$|f(z)-g(z)|<\varepsilon(|z|), \quad z\in E,$$

необходимо и достаточно, чтобы E не содержал внутренних точек и существовала растущая к $+\infty$ функция $\eta(t)$, $0<t<+\infty$, такая, что любую точку z дополнения CE можно соединить с ∞ жордановой кривой, расположенной вне E и вне круга $|\zeta|<\eta(|z|)$.

Этот результат М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева [1] подвел итог многочисленным исследованиям по приближениям целыми функциями, начатым *Карлемана теоремой* (п. 3, см. также [2]).

Лит.: [1] Келдыш М. В., Лаврентьев М. А., «Докл. АН СССР», 1939, т. 23, № 8, с. 746—48; [2] Мергелян С. Н., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 2, с. 31—112.

Е. Д. Соломенцев.

КЕЛЛОГА ТЕОРЕМА: пусть функция $w=f(z)$ реализует однолистное конформное отображение круга $\{z\in\mathbb{C};\ |z|<1\}$ на область D, ограниченную гладкой замкнутой жордановой кривой S, у к-рой угол наклона $\theta(l)$ касательной к действительной оси, как функция длины дуги l кривой S, удовлетворяет условию Гёльдера:

$$|\theta(l_1)-\theta(l_2)|\leqslant K|l_1-l_2|^{\alpha},\quad 0<\alpha<1;$$

тогда производная $f'(z)$ непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$, а на окружности $|z|=1$ выполняются условия Гёльдера с тем же показателем α:

$$|f'(e^{i\theta_1})-f'(e^{i\theta_2})|\leqslant K_1|\theta_1-\theta_2|^{\alpha},$$

$$|\ln f'(e^{i\theta_1})-\ln f'(e^{i\theta_2})|\leqslant K_2|\theta_1-\theta_2|^{\alpha}.$$

К. т. непосредственно следует из более общих результатов О. Келлога (см. [1], [2]) о граничном поведении частных производных порядков $r\geqslant 1$ гармонич. функции $u(x)$, являющейся решением *Дирихле задачи* для области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, ограниченной достаточно гладкой поверхностью Ляпунова S (при $n\geqslant 3$) или кривой Ляпунова S (при $n=2$; см. *Ляпунова поверхности и кривые*), причем заданная на границе S функция $f(y)$ также предполагается достаточно гладкой.

Другие результаты о граничном поведении производной $f'(z)$ отображающей функции см. в [3], [4].

Лит.: [1] Kellogg O. D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1912, v. 13, № 1, p. 109—32; [2] его же, там же, 1931, v. 33, № 2, p. 486—510; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [4] Warschawski S. E., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1961, v. 12, p. 614—20.

Е. Д. Соломенцев.

КЕЛЛОГА — ЭВАНСА ТЕОРЕМА, *лемма* Келлога: множество всех иррегулярных точек границы произвольной области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, относительно обобщенного решения *Дирихле задачи* для D в смысле Винера — Перрона (см. *Перрона метод*) имеет нулевую емкость, является *полярным множеством* и имеет тип F_σ. Следствие К.— Э. т.: если K — компакт положительной емкости в $\mathbb{R}^n$ и D — связная компонента дополнения CK, содержащая бесконечно удаленную точку, то на границе $\partial D\subset K$ существует по крайней мере одна регулярная точка. К.— Э. т. была высказана О. Келлогом [1] в виде гипотезы, доказана впервые Г. Эвансом [2].

Лит.: [1] Kellogg O. D., Foundations of potential theory, B., 1929; [2] Evans G. C., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1933, v. 19, p. 457—61; [3] Келдыш М. В., «Успехи матем. наук», 1941, в. 8, с. 171—231; [4] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

КЕЛЬВИНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование функций, определенных в областях евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, при к-ром гармонические функции переходят в гармонические. Получено У. Томсоном (лордом Кельвином, [1]).

Если $u(x)$ — гармонич. функция в области $D\subset\mathbb{R}^n$, то ее К. п. есть функция

$$v(y)=\left(\frac{R}{|y|}\right)^{n-2}u\left(\frac{R^2}{|y|^2}y\right),\quad v(\infty)=0,$$

гармоническая в области D^*, получающейся из D инверсией относительно сферы $S_R=$

$=\{x : |x|=R\}$, т. е. отображением пространства $\mathbb{R}^n$, определяемым формулами

$$x \longrightarrow y = \frac{R^2}{|x|^2}\, x, \quad 0 \longrightarrow \infty,$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $|x|=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$.

При инверсии бесконечно удаленная точка ∞ компактифицированного по Александрову пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$ переходит в начало координат O, и наоборот. При К. п. гармонич. функции $u(x)$ в областях D, содержащих ∞, р е г у л я р н ы е в ∞, т. е. такие, что $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x)=0$, переходят в гармонич. функции $v(y)$ в ограниченных областях D^*, содержащих начало координат 0, причем $v(0)=0$. Благодаря этому свойству, К. п. позволяет сводить внешние краевые задачи теории потенциала к внутренним, и наоборот (см. [2], [3]).

Кроме К. п., гармоничность функций в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, сохраняется при аналитич. преобразованиях вида $v(y)=\varphi(y)\, u(\psi(y))$ только в случае, когда $\varphi(y)\equiv 1$ и ψ есть отображение подобия, движение или симметрия относительно плоскости; при $n=2$ этим свойством обладает широкий класс конформных отображений ψ.

Лит.: [1] Thomson W., «J. math. pures et appl.», 1847, v. 12, p. 256—64; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1976, гл. 5; [3] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

КЕЛЬВИНА ФУНКЦИИ, функции Томсона,— функции $\mathrm{ber}(z)$ и $\mathrm{bei}(z)$, $\mathrm{her}(z)$ и $\mathrm{hei}(z)$, $\mathrm{ker}(z)$ и $\mathrm{kei}(z)$, к-рые определяются следующими соотношениями:

$$\mathrm{ber}_\nu(z) \pm i\,\mathrm{bei}_\nu(z) = J_\nu\left(ze^{\pm 3i\pi/4}\right),$$

$$\mathrm{her}_\nu(z) + i\,\mathrm{hei}_\nu(z) = H_\nu^{(1)}\left(ze^{3i\pi/4}\right),$$

$$\mathrm{her}_\nu(z) - i\,\mathrm{hei}_\nu(z) = H_\nu^{(2)}\left(ze^{-3i\pi/4}\right),$$

$$\mathrm{ker}_\nu(z) + i\,\mathrm{hei}_\nu(z) = \frac{i\pi}{2}\, H_\nu^{(1)}\left(ze^{3i\pi/4}\right),$$

$$\mathrm{ker}_\nu(z) - i\,\mathrm{kei}_\nu(z) = -\frac{i\pi}{2}\, H_\nu^{(2)}\left(ze^{-3i\pi/4}\right),$$

где H_ν — *Ганкеля функция*, J_ν — *Бесселя функция*. При $\nu=0$ индекс у знака функции опускается. К. ф. составляют фундаментальную систему решений уравнения

$$z^2y'' + zy' - (iz^2+\nu^2)\, y = 0,$$

переходящего при $z=\sqrt{i}\, x$ в уравнение Бесселя.

Представление в виде ряда:

$$\mathrm{ber}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{4k}}{2^{4k}[(2k)!]^2},$$

$$\mathrm{bei}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{4k+2}}{2^{4k+2}[(2k+1)!]^2},$$

$$\mathrm{ker}(z) = \left(\ln\frac{2}{z} - C\right)\mathrm{ber}(z) + \frac{\pi}{4}\,\mathrm{bei}(z) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{4k}}{2^{4k}[(2k)!]^2}\sum_{m=1}^{2k}\frac{1}{m},$$

$$\mathrm{kei}(z) = \left(\ln\frac{2}{z} - C\right)\mathrm{bei}(z) - \frac{\pi}{4}\,\mathrm{ber}(z) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{4k+2}}{2^{4k+2}[(2k+1)!]^2}\sum_{m=1}^{2k+1}\frac{1}{m}.$$

Асимптотическое представление:

$$\mathrm{ber}(z) = \frac{e^{\alpha(z)}}{\sqrt{2\pi z}}\cos\beta(z),$$

$$\mathrm{bei}(z) = \frac{e^{\alpha(z)}}{\sqrt{2\pi z}}\sin\beta(z),$$

$$\mathrm{ker}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{\alpha(-z)}\cos\beta(-z),$$

$$\operatorname{kei}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{\alpha(-z)} \sin\beta(-z),$$

$$|\arg z| < \frac{5}{4}\pi,$$

где

$$\alpha(z) \sim \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8z\sqrt{2}} - \frac{25}{384z^3\sqrt{2}} - \frac{13}{128z^4} - \dots,$$

$$\beta(z) \sim \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8z\sqrt{2}} - \frac{1}{16z^2} - \frac{25}{384z^3\sqrt{2}} + \dots.$$

Функции введены У. Томсоном (лордом Кельвином, [1]).

Лит.: [1] Thomson W., Mathematical and Physical papers, v. 3, Camb., 1890, p. 492; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 1964; [3] Рыжик И. М., Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 3 изд., М.— Л., 1951.

А. Б. Иванов.

КЕНДАЛЛА КОЭФФИЦИЕНТ РАНГОВОЙ КОРРЕЛЯЦИИ — одна из выборочных мер зависимости двух случайных величин (признаков) X и Y, основанная на ранжировании элементов выборки $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$. К. к. р. к. относится, таким образом, к *ранговым статистикам* и определяется формулой

$$\tau = \frac{2S(r_1, \dots, r_n)}{n(n-1)},$$

где r_i— ранг Y, принадлежащего той паре (X, Y), для к-рой ранг X равен i, $S = 2N - n(n-1)/2$, N— число элементов выборки, для к-рых одновременно $j > i$ и $r_j > r_i$. Всегда $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$. В качестве выборочной меры зависимости К. к. р. к. широко использовался М. Кендаллом (M. Kendall, см. [1]).

К. к. р. к. применяется для проверки гипотезы независимости случайных величин. Если гипотеза независимости верна, то $E\tau = 0$ и $D\tau = 2(2n+5)/9n(n-1)$. При небольшом объеме выборки $(4 \leqslant n \leqslant 10)$ проверка статистич. гипотезы независимости производится с помощью специальных таблиц (см. [3]). При $n > 10$ пользуются нормальным приближением для распределения τ: если

$$|\tau| > u_{\alpha/2} \sqrt{2(2n+5)/9n(n-1)},$$

то гипотеза о независимости отвергается, в противном случае принимается. Здесь α — уровень значимости, $u_{\alpha/2}$ есть $100 \cdot \frac{\alpha}{2}$-процентная точка нормального распределения. К. к. р. к., как и любая ранговая статистика, может использоваться для обнаружения зависимости двух качественных признаков, если только элементы выборки можно упорядочить относительно этих признаков. Если X, Y имеют совместное нормальное распределение с коэффициентом корреляции ρ, то связь между К. к. р. к. и имеет вид:

$$E\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin\rho.$$

См. также *Спирмена коэффициент ранговой корреляции, Ранговый критерий.*

Лит.: [1] Кендэл М., Ранговые корреляции, пер. с англ., М., 1975; [2] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, М., 1965.

А. В. Прохоров.

КЁНИГА ТЕОРЕМА: если прямоугольная матрица составлена из нулей и единиц, то минимальное число линий, содержащих все единицы, равно максимальному числу единиц, к-рые могут быть выбраны так, чтобы никакие две из них не лежали на одной и той же линии (термин «линия» обозначает либо строку, либо столбец в матрице). Сформулирована и доказана Д. Кёнигом [1]. К. т., одна из основных в комбинаторике, представляет собой матричный аналог критерия Холла существования системы различных представи-

телей у семейства подмножеств конечного множества (см. *Выбора теоремы*). Распространена также формулировка К. т. в терминах графов: в *графе двудольном* число ребер в наибольшем паросочетании равно числу вершинного покрытия.

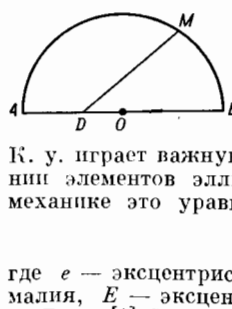
К. т. часто используется в различных комбинаторных вопросах, связанных с проблемами выбора и экстремальными задачами. Известны ее обобщения на случай бесконечных матриц [3].

Лит.: [1] K ö n i g D., «Mat. lapok», 1931, v. 38, p. 116—19; [2] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [3] Тараканов В. Е., в кн.: Вопросы кибернетики. Тр. Семинара по комбинаторной математике, М., 1973, с. 185—99.
В. Е. Тараканов.

КЕПЛЕРА УРАВНЕНИЕ — трансцендентное уравнение вида

$$y - c \sin y = x.$$

Для приложений важен случай $|c| < 1$, когда y определяется по заданным c и x единственным образом. К. у. впервые рассматривалось И. Кеплером (J. Kepler, 1609) в связи с задачей: на диаметре AB полукруга $AOBM$ дана точка D; провести прямую DM так, чтобы она делила площадь полукруга в заданном отношении (см. рис.).



К. у. играет важную роль в астрономии при определении элементов эллиптич. орбит планет. В небесной механике это уравнение обычно записывают в форме

$$E - e \sin E = M,$$

где e — эксцентриситет эллипса, M — средняя аномалия, E — эксцентрическая аномалия.

Лит.: [1] Субботин М. Ф., Курс небесной механики, 2 изд., т. 1, Л.— М., 1941.
БСЭ-3.

КЕРВЕРА ИНВАРИАНТ — инвариант почти параллелизуемого гладкого многообразия M размерности $4k+2$, определяемый как arf-*инвариант* квадратичной формы по модулю 2, возникающий на решетке $(2k+1)$-мерных гомологий многообразия M.

Пусть M — односвязное почти параллелизуемое замкнутое гладкое многообразие размерности $4k+2$, гомологич. группы $H_i(M; \mathbb{Z})$ к-рого при $0 < i < 4k+2$, кроме $V = H_{2k+1}(M; \mathbb{Z})$, равны нулю.

На свободной абелевой группе V имеется кососимметрическая форма пересечения циклов $\Phi(x, y)$, $\Phi : V \times V \to \mathbb{Z}$ и размерность целочисленной решетки V равна $2m$. На группе V существует функция $\Phi_0 : V \to \mathbb{Z}_2$, определяемая следующим образом: если $x \in V$, то существует гладкое вложение сферы S^{2k+1} в M, реализующее данный элемент x, $k \geqslant 1$. Трубчатая окрестность этой сферы S^{2k+1} в M параллелизуема, она может быть либо тривиальной, либо изоморфной трубчатой окрестности диагонали в произведении $S^{2k+1} \times S^{2k+1}$. При этом трубчатая окрестность диагонали в $S^{2k+1} \times S^{2k+1}$ тогда и только тогда нетривиальна, когда $2k+1 \neq 1, 3, 7$ (см. *Хопфа инвариант*). Значение функции Φ_0 равно нулю или единице в зависимости от тривиальности или нетривиальности трубчатой окрестности сферы S^{2k+1}, реализующей элемент x в M, $2k+1 \neq 1, 3, 7$. Так определенная функция $\Phi_0 : V \to \mathbb{Z}_2$ удовлетворяет свойству

$$\Phi_0(x+y) = \Phi_0(x) + \Phi_0(y) + \Phi(x, y) \bmod 2.$$

arf-инвариант для функции Φ_0 и наз. инвариантом Кервера многообразия M^{4k+2}, $2k+1 \neq 1, 3, 7$.

Если К. и. многообразия M^{4k+2} равен нулю, то существует симплектич. базис (e_i, f_i) для V такой, что $\Phi_0(e_i) = \Phi_0(f_i) = 0$. В этом случае многообразие M^{4k+2} есть связная сумма произведения сфер

$$M^{4k+2} = (S^{2k+1} \times S^{2k+1})_1 \# \ldots \# (S^{2k+1} \times S^{2k+1})\, m.$$

Если же К. и. многообразия M^{4k+2} не равен нулю, то

существует симплектич. базис (e_i, f_i) для V такой, что $\Phi_0(e_i)=\Phi_0(f_i)=0$ для $i\neq 1$ и $\Phi_0(e_1)=\Phi_0(f_1)=1$. В этом случае объединение трубчатых окрестностей двух $(2k+1)$-мерных сфер, вложенных в M^{4k+2} с трансверсальным пересечением в одной точке и реализующих элементы e_1, f_1, дает нек-рое многообразие K^{4k+2}, наз. многообразием Кервера (см. *Древовидное многообразие*); его край ∂K^{4k+2} диффеоморфен стандартной сфере, а само многообразие M^{4k+2} представляет собой связную сумму

$$M^{4k+2}=\hat{K}^{4k+2}\#(S^{2k+1}\times S^{2k+1})_1\#\ldots$$
$$\ldots\#(S^{2k+1}\times S^{2k+1})_{m-1},$$

где гладкое замкнутое многообразие $\hat{K}^{4k+2}$ получено из K^{4k+2} добавлением клетки.

Если M^{4k+2}, $k\neq 0, 1, 3$, есть гладкое параллелизуемое $(2k)$-связное многообразие с краем, к-рый является гомотопич. сферой, то точно так же определен К. и. многообразия M^{4k+2} с теми же свойствами, что и выше, с той разницей, что в разложении M^{4k+2} в связную сумму простейших многообразий слагаемое K_0^{4k+2}, являющееся многообразием Кервера, будет иметь край $\partial K^{4k+2}=\partial M^{4k+2}$ (вообще говоря, не диффеоморфный стандартной сфере).

В случае $k=0, 1, 3$ исходные многообразия M^2, M^6, M^{14} представляют собой связную сумму $(S^{2k+1}\times S^{2k+1})\#\ldots\#(S^{2k+1}\times S^{2k+1})$ (если край пуст), или $(S^{2k+1}\times S^{2k+1})_0\#(S^{2k+1}\times S^{2k+1})_1\#\ldots\#(S^{2k+1}\times S^{2k+1})_{m-1}$, (если край непуст), где $(S^{2k+1}\times S^{2k+1})_0$ получено выкидыванием открытой клетки из многообразия $S^{2k+1}\times S^{2k+1}$.

Однако К. и. для замкнутых многообразий M^2, M^6, M^{14} может быть все же определен (см. *Понтрягина инвариант*, *Кервера — Милнора инвариант*) и зависит в этих размерностях от выбора оснащения, т. е. является инвариантом оснащенных перестроек пары (M^{4k+2}, f_r), $k=0, 1, 3$. В размерностях $k\neq 0, 1, 3$ многообразие M^{4k+2} тогда и только тогда перестраивается до сферы S^{4k+2}, когда пара (M^{4k+2}, f_r) оснащенно перестраивается до пары (S^{4k+2}, f_r) при любом выборе оснащения f_r на исходном многообразии M^{4k+2} (см. *Перестройка* на многообразии).

К. и. определен для любого стабильно параллелизуемого многообразия M^{4k+2} как инвариант оснащенных перестроек и любой элемент в стабильных гомотопич. группах сфер может быть представлен либо гомотопич. сферой с оснащением, либо замкнутым гладким многообразием Кервера с оснащением (в этом случае $m=4k+2$, $k\neq 0, 1, 3$), либо многообразием $S^{2k+1}\times S^{2k+1}$ с оснащением, если $k=0, 1, 3$.

Иначе говоря, К. и. можно рассматривать как препятствие к тому, чтобы заданное оснащение на многообразии «перенести» на сферу той же размерности, $k\neq 0, 1, 3$. В этом смысле К. и. для значений $k=0, 1, 3$ выполняет ту же роль: заданное оснащение на многообразии $S^{2k+1}\times S^{2k+1}$, $k=0, 1, 3$, вообще говоря, не всегда может быть «перенесено» на сферу S^{4k+2}, $k=0, 1, 3$, с помощью оснащенных перестроек.

Впервые такое оснащение на многообразии $S^{2k+1}\times S^{2k+1}$ было построено Л. С. Понтрягиным для случая $k=0$, т. е. оснащение на двумерном торе $((S^1\times S^1), f_r)$, которое нельзя «перенести» на S^2. Существуют такие же примеры оснащения на многообразиях $S^3\times S^3$ и $S^7\times S^7$.

Основная задача, касающаяся К. и., заключается в следующем: для каких нечетных значений n существует пара (M^{2n}, f_r) с отличным от нуля К. и.? Ответ на этот вопрос отрицателен для $n\neq 2^i-1$ и положителен для $n=2^i-1$, где $i=1$ (Л. С. Понтрягин, см. [2]), $i=2, 3$ (М. Кервер — Дж. Милнор, [5], [6]), $i=4$ (У. Браудер, [3]), $i=5, 6$ [М. Баррат (M. Barratt), Ма-

ховальд (M. Mahowald), А. Мильграм (A. Milgram)]. Для остальных значений i ответ неизвестен (1978).

Лит.: [1] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 365—474; [2] Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976; [3] Browder W., «Ann. Math.», 1969, v. 90, p. 157—86; [4] его же, Surgery on simply-connected manifolds, B., 1972; [5] Kervaire M., «Comm. math. helv.», 1960, v. 34, p. 257—70; [6] Kervaire M. A., Milnor J. W., «Ann. Math.», 1963, v. 77, № 3, p. 504—37. *М. А. Штанько.*

КЕРВЕРА — МИЛНОРА ИНВАРИАНТ — инвариант оснащенных перестроек замкнутого 6- или 14-мерного многообразия с заданным на нем оснащением.

Пусть M^6— стабильно параллелизуемое 2-связное многообразие, на к-ром задано стабильное N-мерное оснащение (M^6, U), т. е. тривиализация стабильного N-мерного нормального расслоения. Пусть S^3_i— сферы, реализующие базис 3-мерных гомологий многообразия M^6. Суммированием заданной N-тривиализации U с некоторыми тривиализациями $\alpha_i \in \pi_3(SO_3)$ трубчатых окрестностей сфер S^3_i в M^6 получаются $(N+3)$-мерные тривиализации стабильных нормальных расслоений к сферам S^3_i и возникают элементы $\alpha^1_i \in \in \pi_3(SO_{N+3})$. Ядро гомоморфизма стабилизации $s: \pi_n(SO_n) \to \pi_n(SO_{N+n})$ изоморфно $\mathbb{Z}_2$ для $n=3$, так что каждой сфере S^3_i сопоставляется элемент из группы $\pi^3(SO_{N+3})/Ims$ (по значению элементов α^1_i, к-рое они принимают в группе $\mathbb{Z}_2$ после факторизации по α^1_i). Это значение не зависит от выбора элементов α_i, а зависит только от классов гомологий, реализуемых сферами S^3_i, и оснащения U. arf-*инвариант* получающейся функции $\varphi_0 : H_3(M^6, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}_2$, обладающей свойством $\varphi_0(x+y) = \varphi_0(x) + \varphi_0(y) + \varphi(x, y) \bmod 2$, где $\varphi(x, y)$ — форма пересечений 3-мерных гомологий на многообразии M^6, и наз. инвариантом Кервера — Милнора этого многообразия с оснащением U. Пара (M^6, U) оснащенно перестраивается до пары (S^6, V) тогда и только тогда, когда К.— М. и. пары (M^6, U) равен нулю.

Аналогичные построения проводятся и для M^{14}. К.— М. и. в размерности шесть является единственным инвариантом стабильного 6-мерного оснащенного кобордизма и задает изоморфизм $\pi_{n+6}(S^n) \approx \mathbb{Z}_2$, $n \geqslant 7$, в размерности же четырнадцать это — не единственный инвариант стабильного четырнадцатимерного оснащенного кобордизма, т. е. стабильная группа $\pi_{n+14}(S^n)$, $n \geqslant 16$, определяется оснащениями на сфере S^{14} и оснащениями на $S^7 \times S^7$.

Лит. см. при статье *Кервера инвариант.* *М. А. Штанько.*

КЕРНФУНКЦИЯ — см. *Бергмана кернфункция.*

КЕРРА МЕТРИКА — решение уравнений Эйнштейна, описывающее внешнее гравитационное поле вращающегося источника с массой m и угловым моментом L. Относится к типу D по классификации А. З. Петрова. Наиболее просто записывается в виде метрики Керра — Шильда:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2hK_\mu K_\nu,$$

где K_μ— нулевой (изотропный) вектор ($K_\mu K_\nu g^{\mu\nu} = 0$), касательный к специальной главной нулевой конгруэнции с вращением (неградиентного типа), $\eta_{\mu\nu}$— метрический тензор пространства Минковского. Характерный параметр К. м. $a = L/m$. В общем случае при наличии заряда e (метрика Керра — Ньюмена) скалярная функция h имеет вид

$$h = \frac{m}{2}(\rho^{-1} + \bar{\rho}^{-1}) + \frac{e^2}{\rho\bar{\rho}},$$

где

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + (z + ia)^2.$$

Поле сингулярно на кольцевой нити радиуса a (при $\rho = 0$). При $a = 0$ сингулярность стягивается в точку; при $a = e = 0$ переходит в *Шварцшильда метрику.*

К. м. получена Р. П. Керром [1].

Лит.: [1] Керр Р. П., «Phys. Rew. Letters», 1963, v. 11, p. 237—38; [2] Мёллер К., Теория относительности, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Рис М., Руффини Р., Уилер Дж., Черные дыры, гравитационные волны и космология, пер. с англ., М., 1977. *А. Я. Буринский.*

КИБЕРНЕТИКА — наука об управлении, связи и переработке информации (буквально «искусство управления рулем»). Первым, кто употребил этот термин для управления в общем смысле, был, по-видимому, древнегреческий философ Платон. А. М. Ампер (А. М. Ampère, 1834) предложил называть К. науку об управлении человеческим обществом. Н. Винер (N. Wiener, 1948) назвал К. науку об управлении и связи в живом организме и машине. На дальнейшее становление К. огромное влияние оказали электронные вычислительные машины (ЭВМ). К началу 70-х гг. 20 в. К. окончательно оформилась как наука физико-математ. профиля с собственным предметом исследования — так наз. кибернетич. системами. Кибернетические системы представляют собой абстракцию под определенным (информационным) углом зрения сложных систем, изучаемых широким спектром естественных, технических и социальных наук (под своими специфическими углами зрения). Выявляя общие аспекты в системах столь различной природы, К. вместе с тем дает общий и притом принципиально новый метод их изучения. Это — так наз. метод машинного эксперимента, промежуточный между классическим дедуктивным и классическим экспериментальным методами. Благодаря этому К., подобно математике, можно использовать в качестве аппарата исследования в других науках. Причем спектр проблем, доступных исследованию кибернетич. методами, по сравнению с классическими (аналитическими) математич. методами значительно шире и охватывает практически все науки. Кибернетическая система в простейшем случае может сводиться к одному элементу. Элемент A кибернетич. системы, рассматриваемый в абстрактном плане, представляет собой набор $\langle x, y, z, f, g\rangle$ пяти объектов. Через $x=x(t)$ обозначается так наз. входной сигнал элемента, т. е. конечное множество функций времени t : $x=\langle x_1(t), \ldots, x_k(t)\rangle$. Во многих конкретных кибернетич. системах время рассматривается как параметр, принимающий лишь дискретные множества значений (обычно целочисленные значения). Однако можно, не нарушая общности, рассматривать и обычное «непрерывное» время (ниже рассматривается именно этот случай). Области значений функций $x_i(t)$ в одном и том же элементе могут быть различными множествами действительных чисел. Чаще всего в качестве областей значений фигурируют обычные непрерывные числовые интервалы, множество целых чисел и различные его конечные подмножества. Сами функции $x_i(t)$ обычно предполагаются кусочно непрерывными. Буквой y обозначается выходной сигнал $y=y(t)$ элемента, представляющий собой конечное множество функций $y=\langle u_1(t), \ldots, y_m(t)\rangle$ той же самой природы, что входные функции $x_i(t)$. Через $z=z(t)$ обозначено внутреннее состояние элемента A, также характеризующееся конечным множеством функций $z=\langle z_1(t), \ldots, z_n(t)\rangle$ той же природы. Через f и g обозначены функционалы, задающие текущие значения внутреннего состояния $z(t)$ и выходного сигнала $y(t)$:

$$z(t)=f(t, x(t), D_t z(t)); \quad y(t)=g(t, x(t), D_t z(t)). \quad (1)$$

Здесь через $D_t z(t)$ обозначено сужение векторной функции $z(t)=\langle z_1(t), \ldots, z_n(t)\rangle$ на область, задаваемую системой полуоткрытых интервалов $[\tau_1, t), \ldots, [\tau_n, t)$, где $\tau_i=\tau_i(t)$ — заданные кусочно непрерывные функции от t, удовлетворяющие условию $\tau_i<t$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Приведенное определение элемента кибернетич. системы предполагает, что время t может принимать

любые действительные значения. На практике в большинстве случаев эти значения ограничиваются лишь неотрицательными числами. При этом определение элемента должно быть дополнено заданием его начального состояния $z_0 = z(0)$, а также, возможно, заданием начального выходного сигнала $y_0 = y(0)$. Зависимости (1) рассматриваются в таком случае лишь при положительных значениях t. Другое обстоятельство связано с тем, что наряду с детерминированными элементами в кибернетич. системах часто приходится иметь дело со стохастич. элементами. Для этого обычно оказывается достаточным в правые части соотношений (1) добавить в качестве аргументов функционалов случайную функцию $\omega(t)$, принимающую значения на непрерывном или дискретном множестве действительных чисел.

Возможны и другие варианты обобщений этого определения, в частности введение бесконечномерных векторных функций для входных и выходных сигналов, а также для внутреннего состояния элемента. Однако следует иметь в виду, что, в отличие от математики, для К. характерен конструктивный подход к изучаемым объектам. Это означает возможность фактического вычисления (с той или иной степенью точности) значений всех рассматриваемых функций. Поэтому на практике рано или поздно при изучении кибернетич. систем, а следовательно, и их элементов приходится переходить к конечным аппроксимациям.

Многоэлементные кибернетические системы строятся из набора (обычно конечного) M элементов путем отождествления выходных сигналов одних элементов с входными сигналами других. Формально такие отождествления задаются системой равенств

$$x_i^p(t) = y_j^r(t) \; (p \in M, \; r \in M), \; i \in I_p, \; j \in J_p, \qquad (2)$$

где через $x_i^p(t)$ обозначена i-я компонента входного сигнала p-го элемента, а через $y_j^r(t)$ — j-я компонента выходного сигнала r-го элемента. При подобном отождествлении (соединении элементов в систему) часть компонент входных сигналов тех или иных элементов может оказаться свободной, т. е. не отождествленной ни с какими выходными компонентами. Все такие компоненты объединяются в векторный входной сигнал $x(t)$ построенной системы S. Оставшиеся свободными компоненты выходных сигналов образуют выходной сигнал $y(t)$ построенной системы. В отличие от входного сигнала в выходной сигнал $y(t)$ могут быть включены (по определению строящейся системы) также любые несвободные компоненты выходных сигналов, составляющих систему S элементов. Начальным состоянием системы, по определению, считается вектор, составленный из компонент начальных состояний всех ее элементов (упорядоченных тем или иным образом). Аналогичным образом определяется и вектор $z(t)$ состояния системы в произвольный момент времени.

Определяя систему множеством элементов и множеством отождествляющих соотношений (2), необходимо обеспечить корректность такого определения, под к-рой понимается возможность фактического вычисления выходного сигнала $y(t)$ для всех $t > 0$ при задании начального состояния системы $z(0)$ и входного сигнала $x(t)$ для всех $t \geqslant 0$. Необходимым условием корректности определения системы является, напр., вхождение области значений функции $y_j^r(t)$ в соотношениях (2) в область значений функции $x_i^p(t)$. Для упрощения задачи обеспечения корректности определения систем обычно вводится запрет на отождествление любой входной компоненты более чем с одной выходной компонентой.

Множество соотношений (2) задает структуру кибернетич. системы (не путать с абстрактным поня-

тием структуры в математике!). В ряде приложений оказывается полезным рассмотрение систем с переменной структурой. При этом, вводя дополнительные коммутационные элементы, можно любую систему с переменной структурой свести к системе с постоянной структурой.

Приведенное определение абстрактной кибернетич. системы охватывает весьма большой круг конкретных систем, рассматриваемых в различных областях знания. К их числу относятся логические сети и сети абстрактных *автоматов*, механические динамич. системы, различного рода электромеханические и электронные устройства (включая ЭВМ), биологич. организмы и различные их подсистемы (напр., нервная система), экологические, экономические и социальные системы. Для возможности рассмотрения конкретных биологических, технических и социальных систем в качестве абстрактных кибернетич. систем необходимо отвлечься от большинства их специальных свойств (размеров, массы, химич. состава, многих конкретных форм представления сигналов и состояний и т. д.).

Кибернетический аспект рассмотрения систем является аспектом чисто информационным. Иными словами, состояния элементов и взаимодействие элементов друг с другом описываются системой кодов прежде всего для установления меры их различия (при заданной точности описания), а не для фактич. измерения тех или иных реальных физич. величин. Напр., при наличии в электрич. сети лишь двух уровней напряжения v_1 и v_2 их можно задать числовыми кодами 0 и 1, независимо от фактич. величин этих напряжений. Заметим, что хотя в приведенном выше определении кибернетич. системы употреблялись лишь числовые коды, их нетрудно, в случае необходимости, заменить буквенно-цифровыми кодами с использованием букв любых конечных алфавитов.

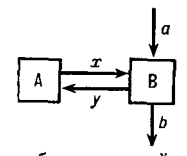
Всякая система, имеющая нетривиальный входной сигнал $x(t)$ и выходной сигнал $y(t)$, может рассматриваться как п р е о б р а з о в а т е л ь и н ф о р м а ц и и, перерабатывающий поток информации $x(t)$ в поток информации $y(t)$. В случае дискретного времени и конечных областей определения функций $x(t)$ и $y(t)$ преобразование (при соответствующем кодировании входной информации) можно интерпретировать как соответствие между словами в той или иной паре фиксированных алфавитов. В этом случае система может рассматриваться как дискретный преобразователь информации. Системы с нетривиальным входным сигналом $x(t)$ наз. о т к р ы т ы м и. В отличие от них з а м к н у т ы е системы не оставляют свободных входных компонент ни у одного из своих элементов. Вектор входного сигнала $x(t)$ в таких системах имеет нулевое число компонент и не может, следовательно, нести никакой информации. Замкнутые системы в строгом смысле слова не должны иметь не только входа, но и выхода. Однако даже в этом случае их можно интерпретировать как генераторы информации, рассматривая изменение их внутреннего состояния $z(t)$ во времени. В дальнейшем генерацию удобно рассматривать как частный случай преобразования информации.

Для кибернетич. систем важное значение имеют задачи их анализа и синтеза. З а д а ч а а н а л и з а системы состоит в нахождении различного рода свойств задаваемого системой преобразования информации, в частности представление в удобной форме алгоритма преобразования. В последнем случае речь идет фактически об агрегации (композиции) системы в один единственный элемент. З а д а ч а с и н т е з а системы противоположна задаче анализа. Необходимо по описанию осуществляемого системой преобразования построить систему, фактически выполняющую это

преобразование. При этом должен быть предварительно определен класс элементов, из к-рых должна строиться искомая система.

Важное значение имеет задача нахождения формальных преобразований кибернетич. систем, не меняющих задаваемых ими преобразований (а, возможно, и нек-рые другие инварианты). Тем самым вводятся различные определения эквивалентности систем, делающие возможными постановку з а д а ч о п т и м и з а ц и и систем, т. е. задач нахождения в классе эквивалентных систем системы с экстремальными значениями определяемых на системах функционалов.

З а д а ч а д е к о м п о з и ц и и системы означает представление части системы или всех ее элементов в виде систем, состоящих из более мелких элементов (подсистем). Для большого числа применений важное значение имеют системы, представляемые в виде комбинации двух подсистем (элементов), наз. обычно у п р а в л я ю щ е й с и с т е м о й и о б ъ е к т о м у п р а в л е н и я. Для наглядности подобную систему можно представить в виде графа (см. рис.), где через A обозначена управляющая система, через B — объект управления; буквой x обозначен так наз. к а н а л п р я м о й с в я з и (выход элемента A, отождествленный с входом элемента B), через y — к а н а л о б р а т н о й с в я з и, через a — входной сигнал системы (воздействие окружающей среды, различного рода помехи) и через b — выходной сигнал, характеризующий качество функционирования подсистемы B (качество управления).



Для подобных систем задача синтеза ставится обычно следующим образом: при заданной системе B, заданном классе внешних воздействий a и заданном критерии качества управления b постро́ить управляющую систему A, обеспечивающую заданное поведение критерия качества b. Под такое определение попадают задачи синтеза систем программного управления (b — заданная векторная функция времени), следящие системы (минимизирующие в том или ином смысле вектор $b-a$), системы оптимального управления (системы, выводящие объект управления в желательную область значений его состояния за кратчайшее время) и т. п.

Важное место в теории кибернетич. систем занимают задачи обеспечения надежности их функционирования. Причем, кибернетич. аспект надежности связан не с обеспечением физич. надежности элементов и связей между ними, а с вопросами организации самой системы (избыточность элементов и связей, специальные системы кодирования и т. п.).

Для достаточно простых систем большинство из перечисленных задач (если не в полных, то хотя бы в упрощенных постановках) могут быть решены средствами классич. математики, дополненными тривиальным перебором вариантов. Для сложных систем, с к-рыми приходится обычно иметь дело на практике, эти методы оказываются, как правило, непригодными. При этом сложность систем в К. понимается не только и не столько в простом количественном смысле (число элементов системы, число связей, размерность векторов состояний, входов и выходов), а прежде всего — в принципиальном качественном смысле. С л о ж н о й в этом смысле наз. система, не имеющая простых описаний. А это предполагает наряду с большими количествами используемых элементов и параметров большое их разнообразие (не сводящееся к простым закономерностям), а также большое разнообразие и нерегулярность связей между элементами. Эффективное исследование таких систем классическими дедуктивными методами оказывается практически невозможным. Классический экспериментальный метод исследования также

оказывается применимым лишь в весьма ограниченных пределах. Во многих случаях его применение ограничивается высокой стоимостью эксперимента, а в ряде случаев (метеорология, экология, макроэкономика и др.) натурные эксперименты становятся либо вовсе невозможными, либо по крайней мере чересчур рискованными.

Поэтому в качестве основного метода исследования сложных систем К. использует метод машинного эксперимента, превратившийся в новый мощный универсальный метод научного познания в результате появления быстродействующих универсальных ЭВМ. Метод машинного эксперимента в чистом виде основан на использовании так наз. имитационных моделей. Такие модели по существу являются простым переложением на машинный язык описаний моделируемых систем. Специальные программы, обслуживающие модель, генерируют различные конкретные реализации входного сигнала $x(t)$ моделируемой системы и строят в соответствии с введенным в ЭВМ описанием системы (включая ее начальное состояние) выходной сигнал $y(t)$. Далее, как и в обычном (натурном) эксперименте, полученные результаты обрабатываются с помощью специальных программ, строящих, напр., гистограммы распределений тех или иных величин, характеризующих поведение исследуемой системы, определяющих различные качественные характеристики (принадлежность системы и определяемого ею преобразования информации к тому или иному классу), и т. п. Таким способом решаются прежде всего задачи анализа кибернетич. систем. Для решения задач синтеза и оптимизации методом машинного эксперимента обслуживающая эксперимент система машинных программ дополняется средствами, обеспечивающими диалог ЭВМ с человеком-исследователем, внесение изменений в описание моделируемой системы по подсказке человека, а также процедуры направленного перебора для организации подобных изменений в автоматич. режиме.

Перевод описаний кибернетич. систем на машинный язык представляет собой достаточно трудоемкую процедуру. Поэтому в современные средства машинного эксперимента включаются специальные программы-трансляторы (или интерпретаторы), автоматизирующие перевод на машинный язык описаний систем на специально разрабатываемых для этой цели языках системного моделирования. Основу таких языков составляют средства (удобные для исследователя) фактич. описания параметров, функций и связей, входящих в описание систем. Сохраняя, как правило, универсальность (т. е. возможность описания произвольных систем), языки моделирования обычно ориентированы на более простое и легкое описание систем тех или иных специальных классов. Кроме того, в языки системного моделирования включаются дополнительные средства для описания процедур, обслуживающих машинный эксперимент, к-рые были описаны выше. В настоящее время (1978) разработаны многие десятки универсальных и специализированных языков системного моделирования и основанных на них систем машинного эксперимента: иностранные языки—симула, симскрипт, отечественные — слэнг, недис и др.

Во многих системах машинного эксперимента имитационное моделирование дополняется возможностями использования аналитич. аппарата тех или иных разделов математики (напр., теории массового обслуживания), а также современных вычислительных методов. В первую очередь это касается различного рода оптимизационных методов: линейное программирование, динамич. программирование, градиентные методы, стохастич. программирование и др.

В ряде случаев для изучения кибернетич. систем оказывается целесообразным дополнять машинный экс-

перимент натурным. Некоторые части моделируемой кибернетич. системы при этом подключаются к универсальной ЭВМ (через специальные преобразователи) в виде натурных моделей, моделирование же остальных частей, управление экспериментом и обработка его результатов производятся в универсальной ЭВМ уже описанным способом. Использование универсальных и специализированных ЭВМ для автоматизации управления натурными экспериментами, а также для сбора и обработки получаемых экспериментальных данных является важным направлением совершенствования исследовательского процесса во всех экспериментальных науках. Не менее широкие возможности применения имеет и чистый машинный эксперимент.

Взаимоотношения К. с математикой не ограничиваются одним лишь использованием К. математич. методов. Математика и К. имеют и общие объекты исследования. Так, напр., алгоритмы, являющиеся объектом исследования в математич. теории алгоритмов, могут рассматриваться в то же время как кибернетич. системы и служить для К. не только средством, но и объектом исследования. Однако подход к изучению этого объекта, а следовательно, и возникающие при этом задачи у математики и К. сильно отличаются друг от друга. Для математики алгоритм выступает прежде всего как одно из фундаментальных понятий оснований математики. Поэтому главная задача состоит в изучении общих свойств этого понятия, для чего необходимо свести его определение к минимальному числу простейших фундаментальных понятий и операций. К. ставит своей задачей разрабатывать практически удобные методы синтеза конкретных систем, в том числе и алгоритмов. Эта практическая направленность приводит к необходимости разработки достаточно удобных для пользования процедурно и проблемно ориентированных *алгоритмических языков*. Вместо характерного для математики интереса к принципиальной возможности установления эквивалентности в тех или иных классах алгоритмов, К. интересуется прежде всего созданием аппарата, удобного для фактич. выполнения эквивалентных преобразований алгоритмов. Вместо простейшей формы представления информации в виде слов в абстрактном алфавите, К. изучает сложные структуры данных, необходимые для эффективной реализации алгоритмов на ЭВМ. Приведенные примеры достаточно ясно характеризуют особенности подхода К. к изучаемым ею математич. объектам. То же различие подходов обнаруживается при изучении К. других математич. объектов (абстрактные автоматы, логич. сети и т. п.).

Особый интерес с точки зрения взаимоотношения К. с математикой представляет их подход к аппарату классической математич. логики. Математич. аспект предполагает максимальное упрощение системы аксиом и правил вывода, без чего невозможен эффективный анализ общих свойств и возможностей *логических исчислений*. К., ставящая задачу автоматизации дедуктивных построений на практический путь, начала развивать язык практической математич. логики. Этот язык относится к языку классической математич. логики, а как современный язык программирования (напр., *алгол*-68) — к языку алгоритмов Поста или нормальных алгорифмов Маркова. Правила вывода в этом языке (во взаимодействии с конкретными содержательными математич. текстами) имеют доказательную силу, не меньшую, чем сила, к-рая скрывается за словом «очевидно» в современных математич. монографиях.

Автоматизация дедуктивных построений представляет собой одну из наиболее важных частей раздела К., получившего наименование «искусственный интеллект». Естественный человеческий интеллект (мозг вместе с органами восприятия информации и выдачи

ее во вне) представляет собой одну из наиболее интересных и сложных кибернетич. систем. Вопрос о том, как человек мыслит, был и продолжает оставаться одним из самых интересных и увлекательных научных вопросов. К. подходит к его решению не только с теоретической, но и с практич. стороны. Речь идет об автоматизации (полной или частичной — с подсказкой человека) различных аспектов интеллектуальной деятельности человека, а в конце концов — и всего интеллекта в целом.

Помимо автоматизации логич. мышления (дедуктивных построений), важными составными частями проблемы «искусственного интеллекта» являются задачи *распознавания образов* (прежде всего зрительных и слуховых), операции в естественных человеческих языках (распознавание смысла фраз и выражений, поддержание диалога и т. п.), задачи обучения и самообучения и т. д. Важное значение имеют задачи изучения и синтеза эффективных алгоритмов управления движениями искусственных конечностей человекоподобных роботов, синтеза искусственного голоса, управления им и др. Особая группа задач возникает при изучении целенаправленного поведения, методов выбора целей и подцелей и планов их достижения. Практический путь к созданию искусственного интеллекта лежит в создании диалоговых (человеко-машинных) систем, повышающих производительность труда человека в различных областях умственной деятельности (логич. вывод, переводы с одних естественных языков на другие, шахматная игра и т. п.). По мере их совершенствования доля ЭВМ в совместной работе будет непрерывно повышаться вплоть до достижения полной автоматизации соответствующего процесса.

Очень важным является вопрос о взаимоотношениях К. с современной вычислительной техникой. Эти взаимоотношения имеют две различные стороны. Во-первых, ЭВМ являются для К. основным инструментом исследований, а во-вторых, будучи сами сложными кибернетич. системами, они выступают в качестве важного объекта исследований К. Разумеется, в задачу К. не входят многие технич. вопросы, разрешающиеся при реальном проектировании ЭВМ. Однако вопросы архитектуры ЭВМ и вычислительных систем, организация управления вычислительным процессом (включая организацию баз данных) входят в компетенцию К. и представляют один из важных ее разделов. На это обстоятельство следует обратить особое внимание, ибо оно отличает понимание предмета К., сложившееся в СССР, от западного (прежде всего американского) понимания, где вопросы архитектуры и управления вычислит. системами относят к специальной компьютерной науке (computer science) и не включают их в К.

Кибернетич. системы встречаются практически во всех областях знания. Отличаясь теми или иными специфич. свойствами, такие системы могут изучаться кибернетич. методами, специально приспособленными к системам соответствующих классов. Тем самым становится возможным более глубокое их изучение. Так возникли и продолжают развиваться специализированные прикладные разделы К.: техническая К., экономическая К., биологическая К., медицинская К., военная К. Применение математических и кибернетических методов в языкознании привело к возникновению так наз. *математической лингвистики*. Эта наука имеет непосредственное отношение к языковым проблемам искусственного интеллекта.

Лит.: [1] Винер Н., Кибернетика..., пер. с англ., 2 изд., М., 1968; [2] Эшби У. Р., Введение в кибернетику, пер. с англ., М., 1959; [3] Глушков В. М., Введение в кибернетику, К., 1964; [4] Энциклопедия кибернетики, т. 1—2, К., 1974.

В. М. Глушков.

КИЛЛИНГА ВЕКТОР, точнее—киллинга векторное поле, или инфинитезимальное

движение,— поле скоростей (локальной) однопараметрич. группы движений риманова пространства M. Точнее, векторное поле X на M наз. векторным полем Киллинга (к. в. п.), если оно удовлетворяет следующему уравнению Киллинга

$$L_X g = 0, \qquad (*)$$

где L_X— производная Ли по направлению X, а g — тензорное поле на M, определяющее структуру риманова пространства (риманова метрика). К. в. п. впервые были систематически изучены В. Киллингом [1], к-рый вывел также для них уравнение (*). В полном римановом пространстве любое к. в. п. полно, т. е. является полем скоростей однопараметрич. группы движений. Множество $i(M)$ всех к. в. п. на M образует алгебру Ли размерности не более $n(n+1)/2$, где $n=\dim M$, причем эта размерность равна $n(n+1)/2$ только для пространств постоянной кривизны. Множество всех полных к. в. п. образует подалгебру в $i(M)$, являющуюся алгеброй Ли группы движений пространства M. Производная Ли по направлению к. в. п. аннулирует не только метрику g, но и все другие поля, к-рые канонически строятся по метрике, напр. тензор кривизны Римана, оператор Риччи и т. д. Это позволяет установить связь между свойствами к. в. п. и тензором кривизны. Так, напр., в точке, где собственные значения оператора Риччи попарно различны, к. в. п. не может обращаться в нуль.

К. в. п. X, рассматриваемое как функция

$$X : T^*M \ni \alpha \longrightarrow \alpha(X)$$

на кокасательном многообразии T^*M, является первым интегралом (гамильтонова) геодезич. потока на T^*M, определяемого римановой метрикой. По аналогии, поле S контравариантных симметрич. тензоров на M наз. тензорным полем Киллинга, если соответствующая ему (полиномиальная по слоям) функция

$$S : \alpha \to S(\alpha, \ldots, \alpha)$$

на T^*M является первым интегралом геодезич. потока. Уравнение, задающее тензорное поле Киллинга, также наз. уравнением Киллинга. Множество всех тензорных полей Киллинга, рассматриваемых как функции на T^*M, образует (вообще говоря, бесконечномерную) алгебру Ли относительно скобки Пуассона, задаваемой стандартной симплектич. структурой на T^*M.

Более общо, пусть $Q : \mathrm{Rep}^k M \to W$ — геометрич. объект порядка k на многообразии M, т. е. $GL^k(n)$-эквивариантное отображение многообразия реперов порядка k на M в пространство W, на к-ром действует группа $GL^k(n)$ k-струй в нуле диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n$, сохраняющих начало координат. Векторное поле X на M наз. инфинитезимальным автоморфизмом, или полем Киллинга объекта Q, если соответствующая ему (локальная) однопараметрич. группа преобразований φ_t многообразия M индуцирует группу $\varphi_t^{(k)}$ преобразований многообразия реперов $\mathrm{Rep}^k M$, сохраняющую $Q : Q \circ \varphi_t^{(k)} = Q$. Уравнение, задающее поля Киллинга объекта Q, наз. уравнением Ли — Киллинга, а соответствующий ему оператор — оператором Ли.

Лит.: [1] Killing W., «J. reine und angew. Math.», 1892, Bd 109, S. 121—86; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [3] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [4] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [5] Kobayashi S., Transformation groups in differential geometry, B.— Hdlb.— N. Y., 1972; [6] Kumpera A., Spencer D., Lie equations. V. 1. General theory, N. Y., 1972; [7] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry, v. 2, N. Y., 1969; [8] Егоров И. П., Движения в пространствах аффинной связности, Казань, 1965, с. 5—179.

Д. В. Алексеевский.

КИЛЛИНГА ФОРМА — билинейная форма специального вида на конечномерной алгебре Ли, введенная В. Киллингом [1]. Пусть $\mathfrak{G}$ — конечномерная алгебра Ли над полем k. К. ф. на алгебре $\mathfrak{G}$ наз. билинейная форма

$$B(x, y) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\,x \cdot \mathrm{ad}\,y),\ x, y \in \mathfrak{G},$$

где tr обозначает след линейного оператора, а ad x — образ x при присоединенном представлении алгебры $\mathfrak{G}$, т. е. линейный оператор на векторном пространстве $\mathfrak{G}$, определенный правилом $z \to [x, z]$, $[,]$ — операция коммутирования в алгебре Ли $\mathfrak{G}$. К. ф. симметрична. Операторы $\mathrm{ad}x$, $x \in \mathfrak{G}$, кососимметричны относительно К. ф., т. е.

$$B([x, y], z) = B(x, [y, z]) \text{ для всех } x, y, z \in \mathfrak{G}.$$

Если $\mathfrak{G}_0$ — идеал алгебры $\mathfrak{G}$, то сужение К. ф. на $\mathfrak{G}_0$ совпадает с К. ф. алгебры $\mathfrak{G}_0$. Всякий коммутативный идеал $\mathfrak{G}_0$ содержится в ядре К. ф. Если К. ф. невырождена, то алгебра $\mathfrak{G}$ полупроста.

Пусть характеристика поля k равна 0. Радикал алгебры $\mathfrak{G}$ совпадает с ортогональным дополнением относительно К. ф. к производной подалгебре $\mathfrak{G}' = [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$. Алгебра $\mathfrak{G}$ разрешима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{G} \perp \mathfrak{G}'$, т. е. когда $B([x, y], z) = 0$ для всех x, y, $z \in \mathfrak{G}$ (*критерий разрешимости Картана*). Если алгебра $\mathfrak{G}$ нильпотентна, то $B(x, y) = 0$ для всех x, $y \in \mathfrak{G}$. Алгебра $\mathfrak{G}$ полупроста тогда и только тогда, когда К. ф. невырождена (*критерий полупростоты Картана*).

Каждая комплексная полупростая алгебра Ли содержит вещественную форму Г (компактную форму Вейля) (см. *Комплексификация алгебры Ли*), на к-рой К. ф. отрицательно определена.

Лит.: [1] Killing W., «Math. Ann.», 1888, Bd 31, S. 252—90; 1889, Bd 33, S. 1—48; 1889, Bd 34, S. 57—122; 1890, Bd 36, S. 161—89; [2] Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрических пространства, пер. с франц., М., 1949, с. 259—261; [3] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., М., 1976; [4] Капланский И., Алгебры Ли и локально компактные группы, пер. с англ., М., 1974; [5] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976.

Д. П. Желобенко.

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение неравновесной статистич. физики, используемое в теории газов, аэродинамике, физике плазмы, теории прохождения частиц через вещество, теории переноса излучения. Решение К. у. определяет функцию распределения динамич. состояний одной частицы, обычно в зависимости от времени, координаты и скорости.

В 80-х гг. 19 в. Л. Больцман (L. Boltzmann) сформулировал основное К. у. теории газов — нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (см. *Больцмана уравнение*), к-рое описывает движение молекул как нек-рый случайный процесс, определяемый механизмом бинарных соударений молекул. Входящие в уравнение коэффициенты (эффективные сечения) рассчитываются из уравнений классич. механики. Исследуя свойства решений кинетич. уравнения, Л. Больцман дал молекулярно-кинетич. истолкование второго начала термодинамики и установил статистич. смысл понятия энтропии (см. *Больцмана H-теорема*). В квантовой статистич. физике в простейшем случае уравнение Больцмана записывается аналогично классич. случаю, но с использованием квантовых эффективных сечений и с учетом требований симметрии. Для релятивистского газа уравнение Больцмана формулируется в ковариантном виде. Развит метод получения К. у. теории газа, учитывающий корреляции между динамич. состояниями молекул (см. *Боголюбова цепочка уравнений*). Исходя из *Лиувилля уравнения*, этим методом можно в низшем приближении получить уравнение Больцмана, если использовать разложения по степеням плотности газа.

Разложение по степеням малости энергии взаимодействия приводит к *Власова кинетическому уравнению* с самосогласованным полем, а в следующем приближении в пространственно однородном случае — к кинетическому уравнению Ландау, описывающему так наз. «диффузию в пространстве скоростей».

Известно небольшое число точных решений нелинейного К. у. Его численные решения трудны и при использовании ЭВМ. Более исследовано линеаризованное К. у., описывающее малые отклонения от равновесного решения нелинейного уравнения. По форме оно совпадает с линейными уравнениями переноса, возникающими в теории переноса излучения и нейтронов (см. *Переноса излучения теория*), а также в теории прохождения частиц через вещество.

Теория переноса излучения по своим задачам и методам их решения близка к теории переноса нейтронов. Расчет ядерных реакторов и защиты от ядерных излучений потребовал создания эффективных методов решения К. у. переноса нейтронов и гамма-квантов, а также способствовал созданию математич. теории линейного К. у. Если для нелинейного уравнения Больцмана теоремы существования и единственности решения и его асимптотич. поведение исследованы лишь в простейших случаях [1], то для линейного уравнения они получены в самой общей постановке математической теории ядерных реакторов [2], [3], [4]. Ряд задач решается аналитическими методами, в общем случае разработаны многочисл. приближенные методы решения, приспособленные для удобного программирования на ЭВМ (см. *Переноса уравнения*, численные методы решения).

Задача о прохождении заряженных частиц через вещество сводится часто к решению линейного уравнения переноса при анизотропном рассеянии или к решению линеаризованного уравнения Ландау (напр., при определении углового распределения частиц, вылетающих с поверхности тела, или при определении энергетич. спектра заряженных частиц в веществе).

Лит.: [1] Карлеман Т., Математические задачи кинетической теории газов, пер. с франц., М., 1960; [2] Владимиров В. С., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1961, № 61; [3] Шихов С. Б., Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ, М., 1973; [4] Кейз К., Цвайфель П., Линейная теория переноса, пер. с англ., М., 1972; [5] Коган М. Н., Динамика разреженного газа (кинетическая теория), М., 1967; [6] Силин В. П., Введение в кинетическую теорию газов, М., 1971; [7] Соболев В. В., Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., 1956.

В. А. Чуянов.

КИРХГОФА МЕТОД — метод приближенного решения задач теории дифракции коротких волн; предложен Г. Кирхгофом (G. Kirchhoff). В своем простейшем варианте К. м. сводится к следующему: пусть волновой процесс описывается уравнением Гельмгольца и рассматривается задача рассеяния плоской волны ограниченным выпуклым препятствием Σ, на к-ром выполняется классическое краевое условие $u|_{\Sigma}=0$. Решение сводится к нахождению функции, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца $(\Delta+k^2)u=0$, для указанного краевого условия и представляющейся в виде суммы $u=e^{ikx}+U$, где U отвечает *излучения условиям* Зоммерфельда. Решение задачи существует и для него имеет место интегральное представление

$$u(x)=e^{ikx_1}+\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\frac{\partial u(x')}{\partial n_{x'}}\,\frac{e^{ik\,|\,x-x'\,|}}{|\,x-x'\,|}\,d\Sigma_{x'}, \qquad (1)$$

$$x=(x_1,\ x_2,\ x_3),\ x'=(x_1',\ x_2',\ x_3'),$$

$$|\,x-x'\,|=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-x_i')^2},$$

где $\partial/\partial n_{x'}$ —дифференцирование по нормали к Σ. Нормаль берется внешней по отношению к бесконечной

области, ограниченной Σ. Предполагается, что на части Σ, освещенной плоской волной e^{ikx}, $\partial u/\partial n_{x'}$ приближенно равна тому выражению, к-рое получается по *лучевому методу*. На теневой части полагают $\partial u(x')/\partial n_{x'}=0$. Полученное таким путем выражение u_K наз. приближением по Кирхгофу для u.

В освещенной области u_K и геометрич. приближении для u в главных членах совпадают. В окрестности границы, отделяющей освещенную область от зоны тени, главный член асимптотич. разложения u_K выражается через интеграл Френеля $\int_0^\alpha \exp\, i\alpha^2 d\alpha$, в зоне тени $u_K=O(1/k)$ (на самом деле u в зоне тени убывает гораздо быстрее, чем $1/k$).

К. м. дает асимптотически правильную в главных членах формулу для u, сохраняющую свою справедливость и при $|x|\to\infty$. В следующих порядках по k приближение по Кирхгофу уже неприменимо.

Лит.: [1] Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К., Теория дифракции, пер. с нем., М., 1964. *В. М. Бабич.*

КИРХГОФА ФОРМУЛА, Кирхгофа интеграл,— формула

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{f(y,\ t-r)}{r}\,d\Omega_y+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial n}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{\partial r}{\partial n}\right]_{\tau=t-r}d\sigma_y, \qquad (1)$$

которая выражает значение $u(x,\ t)$ решения неоднородного волнового уравнения

$$u_{tt}-u_{x_1x_1}-u_{x_1x_2}-u_{x_3x_3}=f(x,\ t) \qquad (2)$$

в любой точке $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)\in\Omega$ в момент времени t через запаздывающий объемный потенциал

$$v_1(x,\ t)=\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\frac{f(y,\ t-r)}{r}\,d\Omega_y,\ y=(y_1,\ y_2,\ y_3),$$

с плотностью f и через значения функции $u(y,\ t)$ и ее производных 1-го порядка на границе σ области Ω в момент времени $\tau=t-r$. Здесь Ω — ограниченная область трехмерного евклидова пространства с кусочно гладкой границей σ, n — внешняя нормаль к σ, $r=|x-y|$ — расстояние между точками x и y.

Пусть

$$v_1(x,\ t)=\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\frac{\mu_1(y,\ t-r)}{r}\,d\sigma_y,$$

$$v_2(x,\ t)=\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\frac{\partial^*}{\partial^* n}\frac{\mu_2(y,\ t-r)}{r}\,d\sigma_y,$$

где

$$\frac{\partial^*}{\partial^* n}\frac{\mu_2(y,\ t-r)}{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial\mu_2(y,\ t-r)}{\partial t}-\mu_2(y,\ t-r)\frac{\partial(1/r)}{\partial n}.$$

Интегралы $v_1(x,\ t)$ и $v_2(x,\ t)$ наз. запаздывающими потенциалами простого и двойного слоев.

К. ф. (1) означает, что любое дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(x,\ t)$ уравнения (2) представляется в виде суммы запаздывающих потенциалов простого слоя, двойного слоя и объемного потенциала:

$$u(x,\ t)=v_1(x,\ t)+v_2(x,\ t)+v_3(x,\ t).$$

В случае, когда $u(x,\ t)=u(x)$, $f(x,\ t)=f(x)$ не зависят от t, К. ф. принимает вид

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\frac{f(y)}{r}\,d\Omega_y+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u(y)}{\partial n}-u(y)\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right]d\sigma_y$$

и дает решение уравнения Пуассона $\Delta u=-f(x)$.

К. ф. широко применяется при решении целого ряда задач. Например, если Ω — шар $|y-x|\leqslant t$ радиуса t

с центром в точке x, то формула (1) преобразуется в соотношение

$$u(x,\ t)=\frac{1}{4\pi}\int_{r\leqslant t}\frac{f(y,\ t-r)}{r}\,dy+tM_t\,[\psi]+\frac{\partial}{\partial t}\,tM_t\,[\varphi], \tag{3}$$

где

$$M_t\,[\varphi]=\frac{1}{4\pi}\int_{|y|=1}\varphi(x+ty)\,ds_y$$

— среднее значение функции $\varphi(x)$ по поверхности сферы $|y-x|=t$,

$$\varphi(x)=u\Big|_{t=0},\quad \psi(x)=u_t\Big|_{t=0}. \tag{4}$$

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные в шаре $|x|\leqslant R$ функции, имеющие непрерывные частные производные 3-го и 2-го порядков соответственно, а $f(x,\ t)$ дважды непрерывно дифференцируема при $|x|<R$, $0\leqslant t\leqslant R-|x|$, то функция $u(x,\ t)$, заданная формулой (3), является регулярным решением *Коши задачи* (4) для уравнения (2) при $|x|<R$ и $t<R-|x|$.

Формула (3) также наз. К. ф.

К. ф. в виде

$$u(x,\ t)=tM_t\,[\psi]+\frac{\partial}{\partial t}\,tM_t\,[\varphi]$$

для волнового уравнения

$$\Delta u=u_{tt} \tag{5}$$

примечательна тем, что из нее следует *Гюйгенса принцип*: решение (волна) $u(x,\ t)$ уравнения (5) в точке $(x,\ t)$ пространства независимых переменных x_1, x_2, x_3, t вполне определяется значениями φ, $\partial\varphi/\partial n$ и ψ на сфере $|y-x|=t$ с центром в точке x и радиуса $|t|$.

Пусть дано уравнение нормально гиперболического типа

$$\sum_{i,\ j=1}^{m+1}a^{ij}(x)\,u_{x_i\,y_j}+\sum_{j=1}^{m+1}b^j(x)\,u_{x_j}+c(x)\,u=f(x) \tag{6}$$

с достаточно гладкими в нек-рой $(m+1)$-мерной области Ω_{m+1} коэффициентами $a^{ij}(x)$, $b^j(x)$, $c(x)$ и правой частью $f(x)$, т. е. уравнение, форма

$$\sum_{i,\ j=1}^{m+1}a^{ij}(x)\,\xi_i\xi_j$$

к-рого в любой точке $x\in\Omega_{m+1}$ с помощью невырожденного линейного преобразования приводится к виду

$$y_0^2-\sum_{i=1}^{m}y_i^2.$$

К. ф. обобщена на уравнение (6) в случае, когда число $m+1$ независимых переменных $x_1,\ \ldots,\ x_{m+1}$ четно [4]. При этом существенным моментом было построение функции $\overset{k}{\varphi}$, обобщающей на случай уравнения (6) ньютоновский потенциал $1/r$. Для частного случая уравнения (6)

$$u_{tt}-\sum_{i=1}^{m}u_{x_i\,x_i}=0,\quad m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2) \tag{7}$$

обобщенная К. ф. принимает вид

$$u(y,\ t)=\gamma\int_\sigma\sum_{i=1}^{k}(-1)^k\left\{\frac{\partial\overset{k-i+1}{\varphi}}{\partial n}\left[\frac{\partial^{i-1}u}{\partial t^{i-1}}\right]-\right.$$
$$\left.-\overset{k-i+1}{\varphi}\left[\frac{\partial^i u}{\partial n\,\partial t^{i-1}}\right]-\overset{k-i+1}{\varphi}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right]\right\}d\sigma_x, \tag{8}$$

где γ — некоторое положительное число, σ — кусочно гладкая граница m-мерной ограниченной области Ω_m, содержащей внутри себя точку y, n — внешняя нормаль к σ;

$$\overset{i}{\varphi}=\gamma_i r^{-k-i+1},\quad \overset{k}{\varphi}=r^{2-m},\quad r=|y-x|;$$

$$\gamma_i=\mathrm{const},\quad i=1,\ \ldots,\ k-1;\quad k=(m-1)/2;$$

$[\psi]$ означает запаздывающее значение $\psi(x, t)$:

$$[\psi(x, t)]=\psi(x, t-r).$$

Формулу (8) для уравнения (6) иногда наз. формулой Кирхгофа — Соболева.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1976; [3] Bateman H., Partial Differential equations of Mathematical Physics, N. Y., 1944, Camb., 1959; [4] Mathisson M., «Math. Ann.», 1932, Bd 107, S. 400—19; [5] его же, «Acta Math.», 1939, v. 71, № 3—4, p. 249—82; [6] Михлин С. Г., Линейные уравнения в частных производных, М., 1977; [7] Соболев С. Л., «Докл. АН СССР», 1933, т. 1, № 6, с. 256—62; [8] его же, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962; [9] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, 3 изд., М., 1957; [10] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972.

А. М. Нахушев.

КИТАЙСКАЯ ТЕОРЕМА ОБ ОСТАТКАХ: пусть A — ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей и $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ — такая совокупность идеалов кольца A, что $\mathfrak{a}_i+\mathfrak{a}_j=A$ для любых $i\neq j$; тогда для любого набора элементов $x_1, \ldots, x_n\in A$ найдется элемент $x\in A$ такой, что $x\equiv x_i \pmod{\mathfrak{a}_i}$, $i=1, \ldots, n$. В частном случае, когда A — кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$, К. т. об о. утверждает, что для любого набора попарно взаимно простых чисел $a_1, \ldots, a_n$ найдется целое число x, дающее заданные остатки при делении его на $a_1, \ldots, a_n$. В этой форме К. т. об о. была известна еще в Древнем Китае, с чем и связано название теоремы.

Наиболее часто К. т. об о. применяется в случае, когда A — *дедекиндово кольцо* и $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{p}_1^{s_1}, \ldots, \mathfrak{a}_n=\mathfrak{p}_n^{s_n}$, где $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ — различные простые идеалы в A (если идеалы $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ удовлетворяют условию теоремы, то этим же свойством обладают и идеалы $\mathfrak{a}_1^{s_1}, \ldots, \mathfrak{a}_n^{s_n}$ для любых натуральных $s_1, \ldots, s_n$). К. т. об о. в этом случае показывает, что для любого набора $s_1, \ldots, s_n$ найдется $x\in A$ такой, что разложение главного идеала (x) в произведение простых идеалов имеет вид

$$(x)=\mathfrak{p}_1^{s_1}\ldots\mathfrak{p}_n^{s_n}\mathfrak{q}_1^{t_1}\ldots\mathfrak{q}_m^{t_m}\quad(m\geqslant 0),$$

где идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$ попарно различны (теорема о независимости показателей).

Лит.: [1] Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] его же, Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966.

Л. В. Кузьмин.

КЛАСС — 1) Термин, употребляемый в математике в основном как синоним термина «множество» для обозначения произвольных совокупностей объектов, обладающих каким-либо определенным свойством или признаком (напр., в алгебре — классы эквивалентности относительно данного отношения эквивалентности). Иногда К. предпочитают наз. совокупности, элементами которых являются множества (напр., в рекурсивной теории — перечислимые классы). В некоторых случаях под влиянием аксиоматической теории множеств (см. п. 2) термин «К.» применяется для того, чтобы подчеркнуть, что данная совокупность оказывается собственно К., а не множеством в узком смысле (напр., в алгебре — примитивные классы универсальных алгебр, называемые также многообразиями). Теоретико-множественные операции над К. определяются так же, как и над множествами.

2) К. в аксиоматической теории множеств (точнее, в аксиоматич. системе Гёделя — Бернайса) — один из видов исходных объектов, рассматриваемых в этих системах, причем различие между множествами и К. состоит в том, что элементами К. и множеств, рассматриваемых в данной теории, могут быть только множества, но не классы. Идея введения так понимаемых К. в теорию множеств принадлежит

Дж. Нейману (J. Neumann) и основывается на его замечании, что известные противоречия канторовской теории множеств возникают не из-за допущения образования очень больших множеств, а из-за того, что таким множествам разрешается быть элементами других множеств. Кроме указанного ограничения, в названных аксиоматич. системах допускаются все обычные теоретико-множественные операции над К., приводящие к К., а не к множествам; к тому же для всякого в нек-ром смысле допустимого предиката, определенного на множествах, существует К., состоящий в точности из множеств, удовлетворяющих рассматриваемому предикату. Доказано, что непротиворечивость каждой из систем Гёделя — Бернайса и Цермело — Френкеля следует из непротиворечивости другой (чем подтверждается точка зрения Дж. Неймана). См. также *Аксиоматическая теория множеств.*

Лит.: [1] Коэн Пол Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969; [2] Френкель А.-А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966.

В. А. Душский.

3) К. римановa пространства V^l — число p такое, что V^l может быть локально изометрически вложено в $(l+p)$-мерное евклидово пространство E^{l+p} и не может быть вложено в евклидово пространство меньшего числа измерений. От вложения требуется достаточно высокая регулярность (т. к. риманово пространство V^l допускает локальное изометрическое вложение в виде C^1-гладкой гиперповерхности в E^{l+1} (теорема Нэша)); класс аналитич. риманова пространства V^l не превосходит $l(l+1)/2$ (теорема Жане — Картана).

К. риманова пространства равен нулю в том и только том случае, если тензор кривизны многообразия V^l тождественно равен нулю. Метрики постоянной положительной кривизны имеют К. 1 и реализуются в виде гиперсфер евклидова пространства. К. l-мерного пространства постоянной отрицательной кривизны равен $l-1$ (теорема Картана). К. риманова многообразия V^l строго отрицательной двумерной секционной кривизны не меньше $l-1$ (см. [3]). Если риманово многообразие V^l имеет отрицательную k-мерную секционную кривизну, где k — четно, то К. $p \geqslant (l-1)/(k-1)$. Найден алгебраич. критерий [4], позволяющий установить, будет ли К. данного многообразия равен 1, основанный на том факте, что для метрик К. 1 при нек-рых дополнительных условиях уравнения Петерсона — Кодацци являются следствием уравнений Гаусса.

Если риманово многообразие V^l является метрич. произведением римановых многообразий V^{l_i}:

$$V^l = V^{l_1} \times \ldots \times V^{l_k}, \; l_1 + \ldots + l_k = l,$$

причем V^{l_i} — пространства К. 1, то V^l есть пространство К. $p=k$ (см. [5]). Если многообразия V^{l_i} имеют постоянную отрицательную секционную кривизну, то К. их метрич. произведения равен $l-k$ (см. [5]).

К. двумерных римановых многообразий знакопостоянной кривизны равен 1. Вопрос остается открытым (1978) в случае метрики знакопеременной кривизны. Построен [6] пример двумерного риманова многообразия класса $C^{2,1}$, не допускающего локально изометричного погружения класса C^2 в E^3. Однако любая компактная часть полной метрики на плоскости изометрично погружается в E^4 (причем, если метрика имела регулярность $C^{3\alpha}$, то поверхность принадлежит классу $C^{2,\alpha}$), т. е. К. не больше двух [7].

Понятие К. погружения вводится и для псевдориманова пространства. Пусть $V^n(p, q)$ — псевдориманово многообразие, метрический тензор которого имеет p положительных и q отрицательных собственных

значений, $p+q=n$, а $E^n(p,\ q)$ — псевдоевклидово пространство с метрикой

$$ds^2=dx_1^2+\ldots+dx_p^2-dx_{p+1}^2-\ldots-dx_n^2.$$

Пусть k_0— наименьшее неотрицательное целое число такое, что $V^n(p, q)$ допускает погружение в пространство с $E^{n+k_0}(p,\ q+k_0)$. Для каждого k из $0\leqslant k\leqslant k_0$ определяется k-й К. погружения многообразия $V^n(p, q)$ как такое наименьшее число N_k, что $V^n(p, q)$ допускает погружение в $E^{n+N_k}(p+a_k,\ q+k)$, где $a_k=N_k-k$. К. погружения многообразия $V^n(p, q)$ определяется как $\min\limits_{0\leqslant k\leqslant k_0} N_k$.

Любое псевдориманово многообразие $V^n(p, q)$ с аналитич. метрикой допускает аналитич. и изометрич. погружение в $E^m(r, s)$, где $m=n(n+1)/2$, а r, s — любые заданные целые числа, удовлетворяющие условию $r\geqslant p$, $s\geqslant q$, т. е. $N_k\leqslant n(n+1)/2$ для всех k [8]. Если тензор Риччи для $V^n(p, q)$ равен нулю, то $N_k\neq 1$.

Если $V^n(p, q)$ имеет постоянную кривизну, то его К. равен 1, т. е. существует пространство $E^{n+1}(r, s)$ с $r\geqslant p$, $s\geqslant q$ такое, что $V^n(p, q)$ локально изометрично части гиперсферы в $E^{n+1}(r, s)$. Для пространств постоянной отрицательной кривизны $N_0=n-1$, тогда как $N=1$ (см. [9]).

Лит.: [1] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с нем., М., 1948; [2] Moor J., «Pacif. J. Math.», 1972, v. 40, № 1, p. 157—66; [3] Борисенко А. А., «Укр. геометр. сб.», 1973, в. 13, с. 15—18; [4] Розенсон Н. А., «Изв. АН СССР. Сер. Матем.», 1941, т. 5, с. 325—52; 1943, т. 7, с. 253—84; [5] Moor J., «J. Diff. Geometry», 1971, v. 5, № 1—2, p. 159—69; [6] Погорелов А. В., «Докл. АН СССР», 1971, т. 198, № 1, с. 42—43; [7] Позняк Э. Г., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, № 4, с. 47—76; [8] Фридман А., в кн.: Гравитация и топология, пер. с англ., М., 1966, с. 182—88; [9] Борисенко А. А., «Укр. геометр. сб.», 1976, в. 19, с. 11—18.

А. А. Борисенко.

КЛАССИФИЦИРУЮЩЕЕ ПРОСТРАНСТВО — база B_0 универсального расслоения $\xi=(E_0, p_0, B_0)$.

Универсальность расслоения ξ понимается в следующем смысле. Пусть $k_G(X)$ — множество классов эквивалентности (относительно изоморфизма, накрывающего тождественное отображение X) локально тривиальных расслоений над клеточным разбиением X со структурной группой G. Если $\xi=(E, p, B)$ — локально тривиальное расслоение со структурной группой G, B' — топологич. пространство, $f,\ g: B'\to B$ — гомотопные отображения, то индуцированные расслоения $f^*(\xi)$ и $g^*(\xi)$ над B' принадлежат одному и тому же классу $k_G(B')$. Локально тривиальное расслоение $\xi^G=(EG, p, BG)$ наз. универсальным, если отображение $[X, BG]\to k_G(X)$, $f\to f^*(\xi^G)$ взаимно однозначно. Пространство BG в этом случае наз. также классифицирующим пространством группы G. Главное расслоение со структурной группой G универсально (в классе локально тривиальных расслоений над клеточными разбиениями), если пространство расслоения имеет нулевые гомотопич. группы.

Важнейшие примеры К. п. BO_n, BSO_n, BU_n, BSU_n для групп O_n, SO_n, U_n, SU_n соответственно конструируются следующим образом. Пусть $G(n, k)$ — *Грассмана многообразие*, оно является базой главного O_n-расслоения с *Штифеля многообразием* $V(n, k)$ в качестве пространства расслоения. Естественные вложения $G(n, k)\subset G(n, k+1)$ и $V(n, k)\subset V(n, k+1)$ позволяют строить объединения $G(n)=\bigcup_{k=1}^{\infty}G(n, k)$ и $V(n)=\bigcup_{k=1}^{\infty}V(n, k)$. Расслоение $(V(n), p_0, G(n))$ универсально, а $G(n)=BO_n$ есть К. п. для группы $O_n(\pi_iV(n, k)=0$ при $i<k-1$ и $\pi_iV(n)=0$ для всех $i)$. Многообразие Грассмана $\tilde{G}(n, k)$ (пространство с фиксированной ориентацией) приводит аналогично к К. п. $\bigcup_{k=1}^{\infty}\tilde{G}(n, k)=\tilde{G}(n)=BSO_n$ для группы SO_n. К. п. групп BU_n и BSU_n строятся так же, с той разницей, что здесь рассматриваются комплексные многообразия Грассмана.

Для любого O_n-расслоения $(E,\ p,\ B)$ (B — клеточное разбиение) существует отображение $f: B \to G(n)$, при к-ром индуцированное расслоение над B изоморфно $(E,\ p,\ B)$. В случае, когда B — гладкое n-мерное многообразие, а главное O_n-расслоение $(E,\ p,\ B)$ ассоциировано с касательным векторным расслоением к B, построение отображения f особенно просто: многообразие B вкладывается в евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+k}$ при достаточно большом k и полагается $f(x)$, $x \in B$, совпадающим с n-мерным подпространством в $\mathbb{R}^{n+k}$, к-рое получается сдвигом касательного пространства к B в точке x. Многообразия Грассмана дают удобный способ конструкции К. п. для векторных расслоений. Имеются также конструкции, позволяющие функториально строить К. п. для любой топологич. группы. Наиболее употребительная из них — конструкция Милнора ω_G (см. *Главное расслоение*), причем расслоение ω_G универсально в более широкой категории всех нумерируемых G-расслоений над произвольным топологич. пространством.

Важную роль играют К. п. для сферических расслоений BG_n над клеточным разбиением B; для построения пространств BG_n (и BSG_n для ориентированных сферич. расслоений) конструкция Милнора не пригодна, так как множество гомотопич. эквивалентностей $S^n \to S^n$ не группа, а H-пространство. Явная конструкция этих пространств изложена в [2].

Существуют также К. п. BPl_n и $BTop_n$ для кусочно линейных и топологич. микрорасслоений.

Имеется естественное отображение $BO_n \to BO_{n+1}$, соответствующее прибавлению к векторному расслоению одномерного тривиального расслоения. Отображение это можно считать вложением, так что имеет смысл объединение $BO = \bigcup_{n=1}^{\infty} BO_n$ в топологии индуктивного предела. Совершенно аналогично строятся пространства BSO, BU, BSU, BG, BSG, BPl, $BTop$ и т. д. Это — К. п. для классов стационарной эквивалентности расслоений, заданных над связными конечными клеточными разбиениями. Все эти пространства имеют структуру H-пространств, связанную с операцией суммы Уитни расслоений.

Термин «К. п.» употребляется не всегда в связи с расслоениями. Иногда К. п. наз. представляющее пространство (объект) для произвольного представимого функтора $T: H \to Ens$ гомотопич. категории в категорию множеств. Примером такого К. п. является пространство $B\Gamma_q$, классифицирующее в нек-ром смысле *слоения* коразмерности q на многообразии, или, более общо, q-структуры Хефлигера на произвольном топологич. пространстве.

Лит.: [1] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [2] Бордман Дж., Фогт Р., Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах, пер. с англ., М., 1977.

А. Ф. Харшиладзе.

КЛАССИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа автоморфизмов нек-рой *полуторалинейной формы* f на правом K-модуле E, где K — кольцо; при этом f и E (а иногда и K) удовлетворяют дополнительным условиям. Точного определения К. г. нет. Предполагается, что f — либо нулевая, либо невырожденная рефлексивная форма; иногда считается, что E — свободный модуль конечного типа. Часто под К. г. понимают также и другие группы, тесно связанные с группами автоморфизмов форм (напр., их коммутанты или факторы по центру) или нек-рые их расширения (напр., группы полулинейных преобразований модуля E, сохраняющие f с точностью до множителя и применения автоморфизма кольца K).

К. г. тесно связаны с геометрией: они могут быть охарактеризованы как группы таких преобразований проективных пространств (а также нек-рых многообразий, связанных с грассманианами, см. [2]), к-рые

сохраняют естественные отношения инцидентности. Напр., согласно основной теореме проективной геометрии, группа всех преобразований n-мерного проективного пространства P над телом K, переводящих любые три коллинеарные точки снова в три коллинеарные точки, совпадает при $n \geqslant 3$ с K. г. всех проективных коллинеаций пространства P. По этой причине изучение структуры K. г. имеет геометрический смысл — оно равносильно изучению симметрий (автоморфизмов) соответствующей геометрии.

Теория К. г. наиболее глубоко развита для случая, когда K — тело, а E — векторное пространство над K конечной размерности n. Далее эти условия предполагаются выполненными; в этой ситуации классическими наз. обычно группы из следующих (описываемых ниже) серий: $GL_n(K)$, $SL_n(K)$, $Sp_n(K)$, $O_n(K, f)$, $U_n(K, f)$.

1) Пусть f — нулевая форма. Группа всех автоморфизмов формы f совпадает с группой всех автоморфизмов пространства E (т. е. биективных линейных отображений E в E); она обозначается $GL_n(K)$ и наз. полной линейной группой от n переменных над телом K. Подгруппа в $GL_n(K)$, порожденная всеми *трансвекциями*, обозначается $SL_n(K)$ и наз. специальной линейной группой (или унимодулярной группой) от n переменных над телом K. Она совпадает с множеством автоморфизмов, имеющих *определитель*, равный 1.

2) Пусть f — невырожденная полуторалинейная форма (относительно инволюции J тела K), для которой отношение ортогональности симметрично, т. е.

$$f(x, y)=0 \Rightarrow f(y, x)=0.$$

Такая форма наз. рефлексивной. Группа $U_n(K, f)$ автоморфизмов формы f наз. унитарной группой от n переменных над телом K относительно формы f. Имеются лишь две возможности: либо K — поле, $J=1$ и f — кососимметрическая билинейная форма, либо, умножая f на подходящий скаляр и меняя J, можно добиться того, чтобы f стала эрмитовой формой или косоэрмитовой формой. Для кососимметрич. формы f группа $U_n(K, f)$ наз. симплектической группой от переменных над телом K (если $\mathrm{char}\, K=2$, нужно считать, что f — знакопеременная форма); она обозначается $Sp_n(K)$. Это обозначение не содержит f, поскольку все невырожденные знакопеременные формы на E эквивалентны и определяют изоморфные симплектич. группы. В этом случае n четно. Для эрмитовых и косоэрмитовых форм выделяется случай, когда K — поле характеристики, отличной от 2, $J=1$, а f — симметрическая билинейная форма. Тогда $U_n(K, f)$ наз. ортогональной группой от n переменных над полем K относительно формы f и обозначается $O_n(K, f)$. Ортогональные группы могут быть определены (особым способом) и для полей характеристики 2 (см. [2]). Часто термин «унитарная группа» употребляется в более узком смысле — для групп $U_n(K, f)$, не являющихся ортогональными или симплектическими, т. е. соответствующих нетривиальным инволюциям J.

К каждой из основных серий К. г. относят также и их проективные образы $PGL_n(K)$, $PSL_n(K)$, $PSp_n(K)$, $PO_n(K, f)$, $PU_n(K, f)$, т. е. их факторгруппы по пересечениям с центром Z_n группы $GL_n(K)$. Группу

$$O_n^+(K, f)=O_n(K, f) \cap SL_n(K),$$

коммутант $\Omega_n(K, f)$ группы $O_n(K, f)$ и группу

$$U_n^+(K, f)=U_n(K, f) \cap SL_n(K)$$

и их проективные образы также относят к сериям ортогональных и унитарных К. г. соответственно.

Классическим направлением в теории К. г. является выяснение их алгебраич. строения, к-рое сводится к описанию нормальных рядов подгрупп и их последовательных факторов (в частности, к описанию нормальных делителей и выяснению вопроса о простоте), описанию автоморфизмов и изоморфизмов К. г. (и, более общо, гомоморфизмов), описанию различных типов систем порождающих элементов и соотношений между ними и т. п. Так, основные утверждения о строении групп типа $GL_n(K)$ и $SL_n(K)$ следующие. Коммутантом $GL_n(K)$, $n\geqslant 2$, является $SL_n(K)$, кроме случая $n=2$ и $K=\mathbb{F}_2$ (здесь $\mathbb{F}_q$— поле из q элементов). Центр Z_n группы $GL_n(K)$ состоит из всех гомотетий $x\to x\alpha$, где α — элемент центра группы K^*. Имеется нормальный ряд подгрупп

$$GL_n(K)\supset SL_n(K)\supset SL_n(K)\cap Z_n\supset\{1\}.$$

Группа $GL_n(K)/SL_n(K)$ изоморфна K^*/C, где K^*— мультипликативная группа тела K, а C — ее коммутант. Группа $SL_n(K)\cap Z_n$ является центром в $SL_n(K)$ и факторгруппа

$$SL_n(K)/(SL_n(K)\cap Z_n)=PSL_n(K)$$

является простой во всех случаях, кроме $n=2$, $K=\mathbb{F}_2$ или $\mathbb{F}_3$. Подробнее см. *Полная линейная группа*, *Специальная линейная группа*, *Симплектическая группа*, *Ортогональная группа*, *Унитарная группа*. Строение К. г. существенно зависит от ее типа, тела K, свойств формы f и числа n. Для одних типов К. г. оно выяснено весьма детально, для других имеются еще открытые вопросы (последнее относится в основном к случаю групп типа $U_n(K, f)$, где f — анизотропная форма). Типичным в построении структурной теории К. г. является наличие утверждений, справедливых почти для всех K, f и n, и исследование различных исключительных случаев, когда эти утверждения не выполняются (такие исключения возникают, напр., для небольших значений n, для конечных полей K маленького порядка или для специальных значений индекса формы f).

Особое место занимает вопрос об изоморфизмах К. г. Среди всего множества изоморфизмов выделяются т и п о в ы е и з о м о р ф и з м ы — изоморфизмы между $G(n, K, f)$ и $G'(n', K', f')$, определение к-рых не зависит от специальных свойств тела K (кроме, быть может, его коммутативности). Все прочие изоморфизмы наз. н е т и п о в ы м и. Напр., существует (типовой) изоморфизм $Sp_2(K)$ на $SL_2(K)$, где K — любое поле, или $U_2^+(K, f)$ на $SL_2(K_0)$, где K — любое поле, $J\neq 1$, f — форма индекса 1 и K_0— поле инвариантов инволюции J. Подробное описание известных типовых изоморфизмов см. [2], [3]. Из нетиповых изоморфизмов известны следующие:

$$PSL_2(\mathbb{F}_4)\cong PSL_2(\mathbb{F}_5),\ PSL_2(\mathbb{F}_7)\cong PSL_3(\mathbb{F}_2),$$
$$PSp_4(\mathbb{F}_2)\cong PU_4^+(\mathbb{F}_4).$$

Известно также, что группы $PSL_n(K)$ и $PSL_m(K')$, $n\geqslant 2$, $m\geqslant 2$, могут быть изоморфны только при $n=m$, кроме случая

$$PSL_2(\mathbb{F}_7)\cong PSL_3(\mathbb{F}_2);$$

при $m=n>2$ изоморфизм возможен лишь, если тела K и K' изоморфны или антиизоморфны, это же верно при $m=n=2$, если K и K'— поля, кроме случая

$$PSL_2(\mathbb{F}_4)\cong PSL_2(\mathbb{F}_5).$$

Группы $PSp_n(K)$ и $PSp_m(K')$ могут быть изоморфны только, если $n=m$ и $K\cong K'$, кроме случая $m=n=2$, $K=\mathbb{F}_4$, $K'=\mathbb{F}_5$. Между группами $PSL_n(K)$, $PSp_m(K)$, $P\Omega_q(K, f)$, где K — конечное поле, нет никаких других изоморфизмов, кроме указанных выше.

Перечисленные результаты о строении К. г. и их изоморфизмах получены классич. методами линейной алгебры и проективной геометрии. Их основу составляет исследование специальных типов преобразований из К. г. и их геометрич. свойств главным образом, изучение инволюций и плоских вращений. Позднее в теорию К. г. были введены методы теории групп Ли и алгебраич. геометрии, после чего теория К. г. стала частью общей теории полупростых алгебраич. линейных групп, в к-рой К. г. появляются в качестве форм: всякая форма простой алгебраической линейной группы классич. типа (т. е. типа A_n, B_n, C_n или D_n) является К. г. (исключение составляет форма D_4, связанная с внешним автоморфизмом третьего порядка). В случае, когда K есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, К. г. естественно снабжается структурой группы Ли, а для p-адических полей — структурой p-адической аналитич. группы. Это позволяет использовать при изучении таких К. г. топологич. методы, а также, наоборот, получать информацию о топологич. строении многообразия К. г. (напр., о его конечно клеточном разбиении) из знания ее алгебраич. структуры.

В более общей ситуации (когда E — модуль над кольцом K) результаты о К. г. не столь исчерпывающи (см. [3]). В этой своей части теория К. г. смыкается с алгебраической K-теорией.

Лит.: [1] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [2] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [3] Автоморфизмы классических групп, сб. пер., пер. с англ. и франц., М., 1976; [4] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966.

В. Л. Попов.

КЛАССИЧЕСКИ ПОЛУПРОСТОЕ КОЛЬЦО — ассоциативное артиново справа (или, что равносильно, артиново слева) кольцо с нулевым *Джекобсона радикалом*. Строение К. п. к. описывает *Веддерберна — Артина теорема*. Класс К. п. к. может быть охарактеризован и гомологическими свойствами (см. *Гомологическая классификация колец*). К. п. к. является каждая *групповая алгебра* конечной группы над полем, характеристика к-рого взаимно проста с порядком этой группы. Коммутативные К. п. к. суть конечные прямые суммы полей. С К. п. к. связана теорема Голди, утверждающая, что кольцо обладает левым классическим кольцом частных, являющимся К. п. к., тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию максимальности для левых аннуляторов и не содержит прямых сумм левых идеалов.

Л. А. Скорняков.

КЛАССИЧЕСКИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ — общее название *Якоби многочленов*, *Эрмита многочленов*, *Лагерра многочленов* и *Чебышева многочленов*. Эти системы *ортогональных многочленов* обладают общими свойствами:

1) Весовая функция $\varphi(x)$ на интервале ортогональности (a, b) удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2} \equiv \frac{A(x)}{B(x)}, \quad x \in (a, b),$$

причем на концах интервала ортогональности выполняются условия

$$\lim_{x \to a+0} \varphi(x) B(x) = \lim_{x \to b-0} \varphi(x) B(x) = 0.$$

2) Многочлен $y = P_n(x)$ порядка n удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$B(x)y'' + [A(x) + B'(x)]y' - n[p_1 + (n+1)q_2]y = 0.$$

3) Имеет место обобщенная *Родрига формула*

$$P_n(x) = \frac{c_n}{\varphi(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\varphi(x) B^n(x)],$$

где c_n — некоторый нормировочный коэффициент.

4) Производные К. о. м. суть также К. о. м. и ортогональны на том же интервале ортогональности, вообще говоря, с другим весом.

5) Для производящей функции

$$F(x, w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)}{n!c_n}w^n, \quad x\in(a, b),$$

имеет место представление

$$F(x, w)=\frac{1}{\varphi(x)}\frac{\varphi(\lambda)}{1-wB'(\lambda)}, \quad x\in(a, b),$$

где $\lambda=\lambda(x, w)$ — тот корень квадратного уравнения $\zeta-x-wB(\zeta)=0$, который при малых $|w|$ ближе расположен к точке x.

Этими свойствами обладают только три из указанных систем ортогональных многочленов, а также системы, полученные из этих трех линейными преобразованиями независимого переменного.

В обобщенной формуле Родрига нормировочный коэффициент c_n обычно выбирается тремя различными способами с целью получения ортонормированных многочленов, либо ортогональных многочленов с единичным старшим коэффициентом, либо так наз. стандартизованных ортогональных многочленов, к-рые вводятся потому, что наиболее удобны в применениях и основные формулы для них имеют наиболее простой вид.

К. о. м. являются собственными функциями нек-рых задач на собственные значения для уравнений типа Штурма — Лиувилля, причем в этих задачах каждая система ортогональных многочленов (многочлены Якоби, многочлены Эрмита, многочлены Лагерра) является единственной последовательностью решений соответствующей системы уравнений (см. [4], с. 110).

Частные случаи К. о. м. определяются следующим выбором весовой функции и интервала ортогональности:

1) Многочлены Якоби $\{P_n(x; \alpha, \beta)\}$ ортогональны на сегменте $[-1,1]$ с весом $\varphi(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, где $\alpha>-1$, $\beta>-1$. В частности, при $\alpha=\beta$ имеем *ультрасферические многочлены*, или многочлены Гегенбауэра $\{P_n(x; \alpha)\}$. *Лежандра многочлены* $\{P_n(x)\}$ соответствуют значениям $\alpha=\beta=0$ и ортогональны на сегменте $[-1,1]$ с весом $\varphi(x)\equiv 1$. Если $\alpha=\beta=-1/2$, т. е. $\varphi(x)=[(1-x)(1+x)]^{-1/2}$, то имеем многочлены Чебышева первого рода $\{T_n(x)\}$, а при $\alpha=\beta=1/2$ — многочлены Чебышева второго рода $\{U_n(x)\}$.

2) Многочлены Эрмита $\{H_n(x)\}$ ортогональны на интервале $(-\infty, \infty)$ с весом $\varphi(x)=\exp(-x^2)$

3) Многочлены Лагерра $\{L_n(x; \alpha)\}$ ортогональны на интервале $(0, \infty)$ с весом $\varphi(x)=x^{\alpha}e^{-x}$, где $\alpha>-1$.

Лит.: [1] Геронимус Я. Л., Теория ортогональных многочленов, М.—Л., 1950; [2] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Т. 2, Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [3] Джексон Д., Ряды Фурье и ортогональные полиномы, пер. с англ., М., 1948; [4] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б., Основы теории специальных функций, М., 1974; [5] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, М., 1976. См. также лит. при ст. *Ортогональные многочлены.*

П. К. Суетин.

КЛАССИЧЕСКОЙ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, возникающие в астрономии в связи с изучением движения небесных тел в гравитационном поле. Классическими объектами, изучаемыми небесной механикой, являются планеты и спутники Солнечной системы. Движение звезд и звездных систем изучает звездная астрономия (см. *Звездной астрономии математические задачи*). Движение искусственных небесных тел исследует астродинамика. Так как расстояния между телами Солнечной системы велики по сравнению с размерами самих тел, то поступательное и вращательное движения можно изучать отдельно, причем при изучении поступательного движения все тела Солнечной системы можно рассматривать как материальные точки, взаимодействующие по

закону тяготения Ньютона,— так наз. задача N тел. Идеализированной схемой этой задачи описывается большая часть задач классической небесной механики. Единственным универсальным методом получения решений этой задачи для произвольных начальных значений является численное интегрирование. Однако численное интегрирование не в состоянии выявить эволюцию системы на достаточно больших интервалах времени. Известны нек-рые частные классы решений, пригодные для любого момента времени. (напр., периодич. решения Эйлера и Лагранжа, см. [1]). Более полно изучены общие свойства *трех тел задачи*. В 1912 было найдено аналитич. решение этой задачи и координаты тел в виде рядов по степеням времени, сходящихся для любого момента. Однако эти ряды непригодны для практич. вычислений из-за их крайне медленной сходимости. Большая часть результатов, относящихся к задаче N тел, получена с помощью методов теории возмущений для планетной проблемы, т. е. в случае, когда масса $N-1$ тел мала по сравнению с массой центрального тела. Если пренебречь возмущениями, то уравнения движения вырождаются в уравнения задачи двух тел и интегрируются в замкнутой форме. Движение планеты подчиняется при этом законам Кеплера. Для достаточно малых масс удается получить аналитич. продолжение нек-рых важных классов решений: периодических и квазипериодических. Показано, что наиболее общим видом движения является квазипериодич. движение с несоизмеримыми частотами. Эти результаты позволяют приблизиться к решению проблемы устойчивости Солнечной системы под действием взаимных возмущений планет.

Наиболее полно исследована ограниченная задача трех тел, в к-рой два тела конечной массы движутся вокруг центра инерции по эллиптич. орбитам, а третье имеет пренебрежимо малую массу. Довольно полно исследована также задача Хилла, описывающая движение спутника, подвергающегося возмущениям со стороны весьма удаленного, но массивного тела. Ограниченная задача имеет важное значение для теории движения малых планет, задача Хилла — для теории движения Луны.

Для построения теорий движения конкретных небесных тел разработаны эффективные вычислительные методы, основанные на разложении решения в ряд по степеням малого параметра. Эти методы могут быть разбиты на две группы в зависимости от того, входит ли время только в аргументы тригонометрич. функций в выражениях для возмущений или эти выражения могут содержать время и в явном виде (так наз. вековые возмущения). Методы первой группы значительно сложнее и используются в тех случаях, когда необходимо получить решение на интервалах времени достаточно больших по сравнению с периодами невозмущенного движения (как, напр., в теории движения Луны). Для вычислительных методов небесной механики характерной чертой является необходимость выполнения большого объема вычислений.

Теория движений больших планет сводится к решению задачи N тел при $N=10$, под к-рыми понимается Солнце и девять планет. Уравнения движения интегрируются приближенно с помощью разложений в ряды (аналитич. методы) или численным интегрированием. Идеальная теория движения больших планет должна удовлетворять следующим четырем условиям: 1) она должна быть построена на основе единого математич. метода, 2) постоянные интегрирования должны быть определены, исходя из согласованной системы астрономич. постоянных, 3) точность теории должна соответствовать требованиям современных космич. экспериментов, 4) теория должна быть пригодной на длительные промежутки времени. Существующая к 70-м гг.

20 в. (и лежащая в основе всех астрономич. эфемерид) теория не удовлетворяет указанным выше требованиям. Она была создана разными авторами, различными методами и в разное время. Создание теории, удовлетворяющей современным требованиям, немыслимо без широкого использования ЭВМ и совершенных наблюдений.

Теория движения спутников во многом аналогична теории движения больших планет, однако особенностью этой задачи является то обстоятельство, что масса планеты, относительно к-рой вращается спутник, значительно меньше массы Солнца, притяжение к-рого существенно возмущает движение спутников. Для близких спутников необходимо также учитывать несферичность центрального тела. В связи с этим важное значение приобретает задача двух неподвижных центров, поскольку потенциал несферической планеты может быть довольно точно аппроксимирован потенциалом двух соответствующим образом подобранных точечных масс.

Лит.: [1] Дубошин Г. Н., Небесная механика, 2 изд., М., 1968; [2] Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, М., 1971.

Г. А. Чеботарев.

КЛАССОВ ДИВИЗОРОВ ГРУППА — факторгруппа группы *дивизориальных идеалов* $D(A)$ *Крулля кольца* A по подгруппе главных идеалов $F(A)$. К. д. г. является абелевой группой и обычно обозначается $C(A)$. Группа $C(A)$ порождается классами простых идеалов высоты 1 в кольце A.

В некотором смысле К. д. г. измеряет отклонение от однозначности разложения элементов кольца A на неразложимые множители. Так, факториальное кольцо имеет нулевую К. д. г.

Пусть $\varphi : A \to B$ — гомоморфизм колец Крулля, тогда при некоторых дополнительных предположениях (напр., в случае, когда B — целое или плоское расширение кольца A) определен канонич. гомоморфизм К. д. г. $\varphi^* : C(A) \to C(B)$. Если B — локализация кольца A по мультипликативной системе S, то φ^* сюръективно и ядро φ^* порождается простыми дивизориальными идеалами кольца A, пересекающимися с S (теорема Нагата). Если B — кольцо многочленов над A, то канонич. гомоморфизм φ^* биективен (это является обобщением теоремы Гаусса о факториальности кольца многочленов над полем). В более общем случае, когда B — симметрическая нётерова алгебра A-модуля M, канонич. гомоморфизм φ^* будет биективен при условии, что все симметрич. степени $S^i(M)$ рефлексивны. Если B — кольцо формальных степенных рядов над A, то гомоморфизм φ^* инъективен (и даже обратим слева), но, вообще говоря, не биективен.

Подгруппа группы $C(A)$, порожденная обратимыми идеалами, изоморфна *Пикара группе* $\mathrm{Pic}(A)$ кольца A, и функториальные свойства $\mathrm{Pic}(A)$ и $C(A)$ согласованы. Так, если B — строго плоское расширение кольца A и гомоморфизм $\varphi^* : \mathrm{Pic}A \to \mathrm{Pic}\,B$ инъективен, то инъективен и $\varphi^* : C(A) \to C(B)$. В частности, если пополнение $\hat{A}$ локального кольца A факториально, то факториально и A (теорема Мори).

Пусть A — нормальное нётерово кольцо. Группа $\mathrm{Pic}\,(A)$ совпадает с $C(A)$ тогда и только тогда, когда A — локально факториальное кольцо, т. е. все локальные кольца A_m факториальны (напр., когда A — регулярное кольцо). Более точно, если $F = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,(A),\ A_\mathfrak{p}$ — факториально$\}$, то $C(A) = \varinjlim \mathrm{Pic}\,(U)$, где U пробегают систему открытых подсхем в $\mathrm{Spec}(A)$, содержащих F. Это позволяет определить К. д. г. нормальной схемы [5] — группу классов дивизоров Вейля (см. *Дивизор*).

Первоначально изучались К. д. г. колец алгебраич. чисел, первые результаты о конечности этой группы были получены еще Э. Куммером (E. Kummer). Имеется тесная связь свойств К. д. г. с теоретико-числовыми вопросами, напр. с теоремой Ферма. Таблицы порядков

К. д. г. некоторых колец алгебраич. чисел приведены в [1].

Современную общность теория К. д. г. получила в работах В. Крулля (W. Krull); П. Самюэль (P. Samuel) изучил функториальный характер К. д. г. и предложил несколько методов ее вычисления (как, напр., метод спуска). Другие подходы к изучению К. д. г. основаны на сравнении ее с группой Пикара, при этом применяются когомологич. и алгебро-геометрич. средства.

Для любой абелевой группы существует изоморфная ей К. д. г.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, М., 1964; [2] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [3] Samuel P., Topology, [1964], v. 3, Suppl. 1, S. 81—96; [4] Fossum R. M., The divisor class group of a Krull domain, B., 1973; [5] Grothendieck A., Dieudonné J., «Publ. Math. IHES», 1967, t. 32.

В. И. Данилов.

КЛАССОВ ИСЧИСЛЕНИЕ — традиционное, восходящее к Дж. Булю (G. Boole) название раздела математич. логики, изучающего логику классов. К. и. фактически представляет собой логику высказываний, в к-рой дополнительно рассматривается субъектно-предикатная структура элементарных высказываний (т. е. элементарные высказывания имеют вид «элемент x обладает свойством P»), причем с каждым предикатом (свойством) P связывается класс элементов из рассматриваемой области, обладающих этим свойством. К. и. было задумано как математич. эквивалент аристотелевой силлогистики, однако оно не является таковым, поскольку допустимые в К. и. пустой и одноэлементные классы Аристотелем не рассматривались. К. и. обычно не выделяют в самостоятельный раздел математич. логики, так как все его выразительные возможности перекрываются исчислением одноместных предикатов (являющимся, в свою очередь, разрешимым фрагментом узкого исчисления предикатов, см. *Логические исчисления*). Аристотелева силлогистика адекватным образом формализована Я. Лукасевичем [4].

Лит.: [1] Гильберт Д., Аккерман В., Основы теоретической логики, пер. с нем., М., 1947; [2] Кутюра Л., Алгебра логики, [пер. с франц.], Одесса, 1909; [3] Wajsberg M., «Monatsch. für Math. und Phys.», 1933, Bd 40, S. 113—26; [4] Лукасевич Ян, Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики, пер. с англ., М., 1959; [5] Яновская С., Логика классов, в кн.: Философская энциклопедия, т. 3, М., 1964, с. 224—26.

В. А. Душский.

КЛЕБША УСЛОВИЕ — необходимое условие оптимальности в задаче вариационного исчисления на условный экстремум; установлено Р. Клебшем [1]. Если экстремаль $x(t)$, $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, доставляет условный минимум функционалу в *Больца задаче:*

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t,\ x,\ \dot{x})\,dt + g(t_1,\ x(t_1),\ t_2,\ x(t_2)),$$

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\quad g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$\varphi(t,\ x,\ \dot{x}) = 0,\quad \varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\quad m < n,$$

$$\psi(t_1,\ x(t_1),\ t_2,\ x(t_2)) = 0,\quad \psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p,$$

$$p \leqslant 2m + 2,$$

то согласно правилу множителей она является безусловной экстремалью функционала

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t,\ x,\ \dot{x},\ \lambda)\,dt + \lambda_0 g + \sum_{\mu=1}^{p} e_\mu \psi_\mu, \qquad (1)$$

где

$$F(t,\ x,\ \dot{x},\ \lambda) = \lambda_0 f + \lambda_1(t)\,\varphi_1 + \ldots + \lambda_m(t)\,\varphi_m,$$

а

$$\lambda_0,\ \lambda_i(t),\ i = 1,\ \ldots,\ m,\ e_\mu,\ \mu = 1,\ \ldots,\ p,$$

— *Лагранжа множители*, определяемые вместе с $x(t)$ из необходимых условий экстремума функционала (1). Одним из таких необходимых условий является К. у.

Для того, чтобы экстремаль $x(t)$ доставляла минимум в рассматриваемой задаче, необходимо выполнение К. у., требующего, чтобы для любой ненулевой совокупности чисел ξ_i, $i=1,\ldots, n$, удовлетворяющей уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k (t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}_i} \xi_i = 0, \quad k=1, \ldots, m,$$

имела место неотрицательность квадратичной формы

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} \frac{\partial^2 F (t, x, \dot{x}, \lambda)}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \xi_i \xi_j \geqslant 0.$$

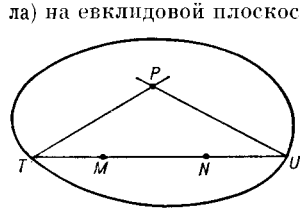
Необходимое К. у. непосредственно связано с более сильным необходимым *Вейерштрасса условием* и может быть получено из последнего как следствие.

В задачах вариационного исчисления на безусловный экстремум, в частности в простейшей задаче вариационного исчисления, аналогом К. у. является *Лежандра условие*.

В задачах оптимального управления К. у. эквивалентно неположительности второго дифференциала *Гамильтона функции*, что является необходимым условием выполнения *Понтрягина принципа максимума* при изменении оптимального управления в открытой области.

Лит.: [1] Clebsch R. F. A., «J. für Math.», 1858, Bd 55, S. 254; [2] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950. *И.Б.Вапнярский.*

КЛЕЙНА ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — модель, реализующая систему аксиом геометрии Лобачевского. В К. и. плоскость Лобачевского интерпретируется как внутренность действительного невырожденного абсолюта (овала) на евклидовой плоскости. Прямые линии плоскости Лобачевского реализуются хордами абсолюта (без концевых точек). Параллели через точку P к прямой MN реализуются прямыми PU и PT, пересекающими прямую MN в точках U и T на абсолюте (см. рис.). Движениями в К. и. служат проективные преобразования, оставляющие абсолют инвариантным. Метрическими величинами служат численные инварианты этих преобразований: расстояния выражаются с помощью ангармонических отношений четверок точек, углы — с помощью ангармонических отношений четверок прямых. Абсолют можно рассматривать как совокупность бесконечно удаленных точек плоскости Лобачевского. К. и. обобщается на многомерный случай.



К. и. предложена Ф. Клейном в [1].

Лит.: [1] Klein F., «Gött. Nachr.», 1871, 419—33; [2] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 2, М., 1956; [3] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 5 изд., М., 1971; [4] Погорелов А. В., Основания геометрии, 3 изд., М., 1968. *А. Б. Иванов.*

КЛЕЙНА КООРДИНАТЫ — см. *Плюккеровы координаты.*

КЛЕЙНА ПОВЕРХНОСТЬ, бутылка Клейна,— замкнутая односторонняя поверхность рода I



Рис. 1.

(см. рис. 1, *а*, *б*). К. п. может быть получена из квадрата $ABCD$ (см. рис. 2) отождествлением точек отрезков AB и CD, лежащих на прямых, параллельных стороне AD, и точек отрезков BC и AD, симметричных относительно центра квадрата $ABCD$. К. п. топологически вкладывается в 4-мерное евклидово пространство и не вкладывается в 3-мерное евклидово пространство.

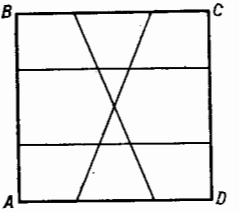


Рис. 2.

К. п. введена в рассмотрение Ф. Клейном (F. Klein, 1874). *Е. В. Шикин.*

КЛЕЙНА ПРОСТРАНСТВО, однородное пространство,— топологическое пространство, в к-ром определена группа гомеоморфных отображений этого пространства на себя, обладающая тем свойством, что для каждых двух точек пространства A и B существует преобразование этой группы, переводящее точку A в точку B.

Происхождение термина «К. п.» связано с эрлангенской программой Ф. Клейна (F. Klein, 1872), в к-рой различные геометрии определялись с точки зрения соответствующих групп преобразований. *А. Б. Иванов.*

КЛЕЙНА — ГОРДОНА УРАВНЕНИЕ — релятивистски инвариантное квантовое уравнение, описывающее бесспиновые скалярные или псевдоскалярные частицы, напр. π-, K-мезоны. Уравнение установлено О. Клейном [1] и несколько позднее В. А. Фоком как волновое уравнение при условии цикличности по пятой координате и вскоре было выведено без привлечения пятой координаты многими авторами (напр., В. Гордоном [2]).

Последовательное применение К.—Г. у. как квантового релятивистского уравнения возможно лишь в квантовой теории поля, а не в квантовой механике. В [3] была дана интерпретация К.—Г. у. как уравнения для полей частиц спина нуль. К.—Г. у. применяется для описания π-мезоатомов и соответствующих полей; играет роль одного из фундаментальных уравнений квантовой теории поля.

К.—Г. у. — линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\mu^2\right)\varphi=0, \qquad (1)$$

где $\varphi(x, t)$ — (псевдо) скалярная функция, в общем случае комплексная, $\mu=mc/\hbar$, m — масса покоя частиц. Если φ — действительная функция, то К.—Г. у. описывает нейтральные (псевдо) скалярные частицы, а при комплексном φ — заряженные. В последнем случае уравнение (1) дополняют уравнением для комплексно сопряженной функции φ^*:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\mu^2\right)\varphi^*=0. \qquad (2)$$

Взаимодействие (псевдо) скалярных частиц с электромагнитным полем описывается минимальной подстановкой $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\to\frac{\partial}{\partial x^\alpha}-ieA_\alpha$. К.—Г. у. удовлетворяет также каждая компонента волновой функции частиц любого спина, но только для случая спина 0 функция является инвариантной относительно Лоренца—Пуанкаре группы.

К.—Г. у. может быть получено с помощью соотношения между энергией E и импульсом $\boldsymbol{p}$ частицы в специальной теории относительности

$$\frac{1}{c^2}E^2-p_x^2-p_y^2-p_z^2=m^2c^2$$

путем замены величин операторами (см. [4], [5]):

$$E \to -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}, \quad p \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Как все релятивистские уравнения К.—Г. у. может быть представлено в форме *Дирака уравнения*, т. е. приведено к линейному уравнению первого порядка:

$$\left(\Gamma^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \mu\right)\psi = 0, \tag{3}$$

где коэффициенты Γ^α — матрицы, аналогичные *Дирака матрицам* γ^α. В случае К.—Г. у. матрицы Γ^α удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho + \Gamma_\rho\Gamma_\nu\Gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\Gamma_\rho + \eta_{\rho\nu}\Gamma_\mu, \tag{4}$$

напр., $\Gamma_\alpha^3 = 0$ (матрицы Кеммера—Дуффина). Здесь $\eta_{\mu\nu}$ — метрический тензор пространства Минковского. Все Γ^α являются особенными матрицами ($\det \Gamma_\alpha = 0$) и не имеют обратных матриц.

Наряду с тривиальным решением (4) $\Gamma_\alpha = 0$, $\psi = 0$ и в виде пятирядных матриц, описывающим скалярное поле самой функцией φ и четырьмя компонентами ее градиента, соотношение (4) имеет еще решение в виде матриц десятого ранга. Соответствующая десятикомпонентная функция содержит 4 компоненты потенциала A_α и 6 компонент напряженности $F_{\alpha\beta} = 2\partial_{[\alpha}A_{\beta]}$, т. е. уравнения (3), (4) могут одновременно давать представление для уравнения Прока, описывающего векторные частицы спина 1; при $\mu = 0$ и действительной φ дают представление уравнений Максвелла.

При учете взаимодействия (псевдо) скалярных частиц с гравитационным полем в соответствии с общей теорией относительности К.—Г. у. обобщается на произвольное риманово пространство в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta}\right) - \mu^2\varphi = 0, \tag{5}$$

где $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор, g — определитель матрицы $\|g_{\alpha\beta}\|$. Часто в уравнение (5) добавляют член $R\varphi/6$, где R — скалярная кривизна, благодаря чему при $\mu = 0$ общерелятивистское К.—Г. у.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta}\right) - \frac{R\varphi}{6} = 0$$

становится конформно инвариантным.

Лит.: [1] Klein O., «Z. Phys.», 1926, Bd 37, S. 895—906; [2] Gordon W., там же, 1926/1927, Bd 40, S. 117—33; [3] Pauli W., Weisskopf V., «Helv. phys. acta», 1934, Bd 7, S. 709—31; [4] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 3 изд., М., 1976; [5] Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, пер. с англ., М., 1963.

В. Г. Кречет.

КЛЕЙНОВА ГРУППА — *дискретная подгруппа* Γ группы всех *дробно-линейных отображений*

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1,$$

расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$, являющаяся собственно разрывной. Это означает, что множество $\Lambda(\Gamma)$ точек накопления орбит $\{\gamma(z_0)\}$, $\gamma \in \Gamma$, для всех точек $z_0 \in \mathbb{C}$, называемое предельным множеством группы Γ, есть собственное подмножество $\mathbb{C}$. Дополнение $\Omega(\Gamma) = \bar{\mathbb{C}} \setminus \Lambda(\Gamma)$, называемое множеством разрывности группы Γ, открыто и обладает тем свойством, что каждая его точка z имеет окрестность U_z, для к-рой $\gamma(U_z) \cap U_z = \varnothing$ при всех $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_z$, где

$$\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(z) = z\}$$

— стабилизатор точки z в Γ. Если точка $z \in \Omega(\Gamma)$ отлична от неподвижных точек эллиптич. элементов Γ, то $\Gamma_z = \{J\}$, где J — тождественное отображение,

а для каждой эллиптической неподвижной точки Γ_z — циклическая группа конечного порядка. Основы теории К. г. были заложены в фундаментальных работах А. Пуанкаре [1] и Ф. Клейна [2] еще в 19 в., название «К. г.» восходит к А. Пуанкаре.

Предельное множество $\Lambda(\Gamma)$ либо пусто, либо состоит из одной или двух точек, либо бесконечно. Первые два случая соответствуют элементарным группам (сюда, в частности, входят все циклич. группы). Если $\Lambda(\Gamma)$ бесконечно, то оно есть нигде не плотное в $\overline{\mathbb{C}}$ совершенное множество положительной логарифмич. *емкости*. Часто элементарные группы не включают в К. г.

Факторпространство $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ имеет естественную комплексную (конформную) структуру, в к-рой проекция

$$\pi:\Omega(\Gamma)\to\Omega(\Gamma)/\Gamma$$

голоморфна, и представляет собой конечное или счетное объединение $\bigcup_j S_j$ римановых поверхностей S_j; это накрытие будет разветвленным над проекциями точек $z\in\Omega(\Gamma)$ с нетривиальными стабилизаторами Γ_z. Само $\Omega(\Gamma)$ распадается на компоненты связности Ω_j, число к-рых равно 1,2 или ∞. Если подгруппа

$$\Gamma_{\Omega_j}=\{\gamma\in\Gamma:\gamma(\Omega_j)=\Omega_j\}$$

совпадает с Γ, то компонента Ω_j наз. инвариантной. Инвариантных компонент может быть не больше двух. К. г. с инвариантными компонентами получили название функциональных.

Примеры. 1) *Фуксовы группы*. Каждая такая группа оставляет инвариантной нек-рую окружность (прямую) l с сохранением направления обхода, и $\Lambda(\Gamma)\subset l$. Для того чтобы (неэлементарная) К. г. Γ была фуксовой, необходимо и достаточно, чтобы она не содержала локсодромических элементов. По теореме Клейна — Пуанкаре об униформизации всякая риманова поверхность, за исключением нескольких простейших случаев, униформизируется фуксовой группой, действующей, напр., в верхней полуплоскости $H=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$, т. е. с точностью до конформной эквивалентности представляется в виде H/Γ. Если в H ввести гиперболич. метрику Пуанкаре

$$ds=\frac{|dz|}{\operatorname{Im}z},$$

то элементы Γ становятся неевклидовыми (гиперболическими) движениями. А. Пуанкаре предложил подобную интерпретацию и для произвольной К. г. Γ, основанную на продолжении действия Γ в полупространство

$$\mathbb{R}^3_+=\{x=(x_1,x_2,x_3):\ x_1+ix_2\in\mathbb{C},x_3>0\}.$$

Именно, поскольку всякий элемент Γ есть суперпозиция четного числа инверсий относительно окружностей $L\subset\overline{\mathbb{C}}$, можно рассмотреть инверсии относительно соответствующих полусфер в $\mathbb{R}^3_+$, опирающихся на L. Продолженная таким образом группа Γ действует в $\mathbb{R}^3_+$ разрывно, а ее элементы становятся гиперболич. движениями $\mathbb{R}^3_+$.

2) Квазифуксовы группы. Они служат непосредственным обобщением фуксовых групп. Квазифуксовой наз. К. г. Γ, оставляющая инвариантной нек-рую ориентированную жорданову кривую $l\subset\mathbb{C}$. Тогда $\Lambda(\Gamma)\subset l$. Если $\Lambda(\Gamma)=l$, то Γ наз. группой первого рода, а при $l\setminus\Lambda(\Gamma)\neq\varnothing$ — второго рода. Римановы поверхности D_1/Γ и D_2/Γ, где D_1 — внутренность, а D_2 — внешность l, гомеоморфны; более того, напр., любые две гомеоморфные римановы поверхности конечного типа (т. е. замкнутые поверхности с

конечным числом проколов) могут быть униформизированы одной квазифуксовой группой. Конечно порожденные квазифуксовы группы сводятся к фуксовым (сопрягаются с ними) с помощью квазиконформных автоморфизмов плоскости.

3) Группы Шотки. Каждая такая группа есть К. г. Γ с образующими $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$, $p \geqslant 1$, для к-рых существуют $2p$ непересекающихся жордановых кривых $l_1, l_1', \ldots, l_p, l_p'$, ограничивающих $2p$-связную область D такую, что

$$\gamma_j(D) \cap D = \varnothing, \quad \gamma_j(l_j) = l_j', \quad j = 1, \ldots, p.$$

При этом Γ свободна, $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ — замкнутая поверхность рода p, а все элементы $\gamma \in \Gamma \setminus \{J\}$ — гиперболические или локсодромические. Группами Шотки униформизируются все замкнутые римановы поверхности (это — униформизация по Кёбе).

4) Вырожденные группы. Это — неэлементарные конечно порожденные К. г., у к-рых множества разрывности являются односвязными областями. Имеется весьма сложное доказательство существования таких групп, однако явных их примеров пока (1978) не построено. Вырожденные группы являются частным случаем групп с одной инвариантной односвязной компонентой, называемых b-группами.

В основе геометрич. подхода к исследованию К. г. лежит понятие фундаментальной области, т. е. множества $\omega \subset \Omega(\Gamma)$, содержащего по одной точке из каждой орбиты Γz_0, $z_0 \in \Omega(\Gamma)$, и такого, что каждая непустая его компонента $\omega \cap \Omega_j$ связна. Напр., для групп Шотки в качестве ω можно взять указанную область D, присоединив к ней точки кривых $l_1, \ldots, l_p$. Часто фундаментальной областью наз. только внутренность ω. Для любой К. г. можно выбрать каноническую фундаментальную область, ограниченную дугами окружностей. Свойства фундаментальной области позволяют выяснить структуру К. г. Γ. Одним из методов построения К. г. служат так наз. комбинационные теоремы, дающие условия, когда группа Γ, порожденная данными К. г., снова является К. г. Напр., если взять фуксовы группы $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, действующие соответственно в кругах $U_1, \ldots, U_n$, достаточно удаленных друг от друга, и представляющие компактные поверхности U_j/Γ_j соответственно родов p_j, то $\Gamma = \langle \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \rangle$ — функциональная группа, представляющая $n+1$ поверхностей родов $p_1, \ldots, p_n$ и $p_1 + \ldots + p_n$. Весьма полезными оказались методы трехмерной топологии, связанные с рассмотрением 3-многообразия $(\mathbb{R}^3_+ \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$, у к-рого $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ служит краем.

Аналитический подход в теории К. г. связан с рассмотрением *автоморфных форм*. Если Γ — неэлементарная К. г. и $\infty \in \Omega(\Gamma)$, то при целых $q \geqslant 2$ сходится ряд $\sum_{\gamma \in \Gamma} |\gamma'(z)|^q$ (в точках $z \in \Omega(\Gamma)$ с $\Gamma_z = \{J\}$); соответствующие тета-ряды Пуанкаре

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma(z)) \gamma'^q(z),$$

где f — мероморфная функция в $\Omega(\Gamma)$, дают автоморфные формы веса $(-2q)$. Для конечно порожденных К. г. размерность пространств таких форм подсчитывается с помощью *Римана—Роха теоремы*. Геометрич. структура таких групп Γ описывается теоремой Альфорса, согласно к-рой пространство $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ для них состоит из конечного числа поверхностей $S_1, \ldots, S_n$ конечного типа, а π^{-1} может быть разветвлено над каждой S_j лишь в конечном числе точек. Этот результат допускает количественные уточнения. Используются и когомологич. методы, основанные на рассмотрении действия группы Γ в векторных пространствах полиномов (см. [5]). Существенную роль в теории К. г. на плоскости играют методы теории квазиконформных

отображений [6], [7]. На них опирается, в частности, теория деформаций К. г., тесно связанная с теорией *модулей римановых поверхностей* (см. также *Римановых поверхностей конформные классы*). На этом пути были выявлены и нек-рые новые классы К. г. Однако пока еще не получено полной классификации даже конечно порожденных К. г.

По сравнению с плоскими гораздо слабее изучены К. г. в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n>2$, определяемые как собственно разрывные подгруппы группы конформных автоморфизмов пространства $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$; здесь появляется ряд совершенно новых эффектов.

Лит.: [1] Poincaré H., «Acta math.», 1883, v. 3, p. 49—92; [2] Klein Ch. F., «Math. Ann.», 1883, Bd 21, S. 141—218; [3] Форд Л. Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.— Л., 1936; [4] Lehner J., Discontinuous groups and automorphic functions, Providence, 1964; [5] Кра И., Автоморфные функции и клейновы группы, пер. с англ., М., 1975; [6] Крушкаль С. Л., Квазиконформные отображения и римановы поверхности, Новосиб., 1975; [7] A crash course on Kleinian groups, B.— Hdlb.— N. Y., 1974. *С. Л. Крушкаль.*

КЛЕРО УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка, не разрешенное относительно производной:

$$y=xy'+f(y'), \tag{1}$$

где $f(t)$ — нелинейная функция. Уравнение (1) называется по имени А. Клеро [1], к-рый впервые указал на различие общего и особого решений уравнения такого вида. К. у. является частным случаем уравнения Лагранжа.

Если $f(t)\in C^1(a,\ b)$ и $f'(t)\neq 0$ при $t\in(a,\ b)$, то множество *интегральных кривых* уравнения (1) включает в себя: параметрически заданную кривую

$$x=-f'(t),\quad y=-tf'(t)+f(t),\ a<t<b; \tag{2}$$

однопараметрич. семейство прямых

$$y=Cx+f(C),\quad C\in(a,\ b), \tag{3}$$

касательных к кривой (2); кривые, составленные из произвольного участка кривой (2) и двух прямых семейства (3), касающихся кривой (2) в концах этого участка. Семейство прямых (3) представляет собой *общее решение*, а кривая (2), являющаяся *огибающей* семейства (3),— *особое решение* (см. [2]). Семейство касательных к гладкой нелинейной кривой удовлетворяет К. у. Поэтому к К. у. приводят геометрич. задачи, в к-рых требуется определить кривую по заданному свойству ее касательных (общему для всех точек кривой).

Уравнением Клеро наз. также уравнение с частными производными 1-го порядка

$$z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+f\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

оно имеет интеграл

$$z=\alpha x+\beta y+f(\alpha,\ \beta),$$

где $(\alpha,\ \beta)$ — произвольная точка области определения функции $f(p,\ q)$ (см. [3]).

Лит.: [1] Clairaut A., в кн.: Histoire de l'Academie Royal des sciences. Année 1734, P., 1736, p. 196—215; [2] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959; [3] Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, пер. с нем., М., 1966. *Н. Х. Розов.*

КЛЕТОЧНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение $f:(X,\ A)\to(Y,\ B)$ одного относительного *клеточного разбиения* $(X,\ A)$ в другое клеточное разбиение $(Y,\ B)$ такое, что $f((X,\ A)^p)\subset(Y,\ B)^p$, где $(X,\ A)^p$ и $(Y,\ B)^p$ — p-мерные остовы пространств X и Y относительно A и B соответственно. В случае, когда $A,\ B=\phi$ получается К. о. f клеточного разбиения X в клеточное разбиение Y.

Гомотопия $F:(X,\ A)\times I\to(Y,\ B)$, где $I=[0,\ 1]$, наз. клеточной, если $F((X,\ A)\times I)^p\subset(Y,\ B)^p$

для всех p. Следующая теорема о клеточной аппроксимации является аналогом теоремы о симплициальной аппроксимации (см. *Симплициальное отображение*): пусть дано отображение $f:(X, A)\to(Y, B)$ одного относительного клеточного разбиения (X, A) в другое (Y, B), ограничение к-рого на некоторый подкомплекс $(L, N)\subset(X, A)$ является клеточным. Тогда существует клеточное отображение $g:(X, A)\to(Y, B)$, гомотопное относительно L отображению f.

Лит. см. при ст. *Клеточное разбиение.* *Д. О. Балодзе.*

КЛЕТОЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО — хаусдорфово пространство, наделенное *клеточным разбиением*. Напр., каждое *симплициальное пространство* является К. п. Обратно, для любого К. п. существует гомотопически эквивалентное ему симплициальное пространство той же размерности.

Лит.: [1] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977.

С. Н. Малыгин.

КЛЕТОЧНОЕ РАЗБИЕНИЕ, CW-комплекс,— *клеточный комплекс* X, удовлетворяющий следующим условиям: (C) Для любой точки $x\in X$ комплекс $X(x)$ является конечным, т. е. состоит из конечного числа клеток (для произвольного подмножества A клеточного комплекса X через $X(A)$ обозначается пересечение всех подкомплексов комплекса X, содержащих множество A). (W) Если F — нек-рое множество клеточного комплекса X, и для любой клетки t из клеточного комплекса X пересечение $F\cap\bar{t}$ замкнуто в $\bar{t}$ (а следовательно и в X), то F является замкнутым подмножеством в X. При этом каждая точка $x\in X$ принадлежит некоторой определенной клетке t_x из клеточного комплекса X, и выполняется равенство $X(x)=X(t_x)=X(\bar{t}_x)$.

Обозначение CW получено из первых букв англ. названий вышеприведенных двух условий: (C) — Closure finiteness (конечность замыкания) и (W) — Weak topology (слабая топология).

Конечный клеточный комплекс X удовлетворяет обоим условиям (C) и (W). Вообще, клеточный комплекс X, в к-ром каждая точка x содержится в нек-ром конечном подкомплексе $Y(x)$, есть К. р. Пусть для нек-рого множества F из X множество $F\cap\bar{t}$ замкнуто в $\bar{t}$ при любом выборе клетки t из X. Тогда для любой точки $x\in X$ множество $F\cap Y(x)$ замкнуто в X. Если теперь точка x не принадлежит множеству F, то открытое множество $U_x=X\setminus(F\cap Y(x))$ содержит точку x и не пересекается с F. Множество $X\setminus F=\bigcup_{x\in X\setminus F}U_x$— открыто, а множество F — замкнуто.

Класс К. р. (или класс пространств, каждое из к-рых имеет гомотопический тип К. р.) является наиболее подходящим классом топологич. пространств для построения содержательной теории гомотопии. Так: если подмножество A К. р. X замкнуто, то отображение f топологич. пространства A в топологич. пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны ограничения отображения f на замыкания клеток комплекса X. Если C — компактное подмножество К. р. X, то комплекс $X(C)$ конечный. Для любой клетки t из К. р. X существует множество D, открытое в $\bar{t}$, к-рое допускает в качестве деформационного ретракта множество $\bar{t}\setminus t$.

Практически К. р. строятся последовательно: каждая стадия состоит в приклеивании клеток данной размерности к результату предшествующей стадии. Клеточная структура такого комплекса находится в прямой связи с его гомотопич. свойствами. Даже для таких «хороших» пространств, как полиэдры, полезно рассматривать их представление в виде К. р.: в таком представлении они обычно имеют меньше клеток, чем при симплициальной триангуляции. Если пространство X получено приклеиванием n-мерных клеток к простран-

ству A, то подмножество $X\times 0\cup A\times I$, где $I=[0, 1]$ является сильным деформационным ретрактом пространства $X\times I$.

Относительным К. р. наз. пара (X, A), состоящая из топологич. пространства X и его замкнутого подпространства A, а также такой последовательности замкнутых подпространств $(X, A)^k$, $k\geqslant 0$, что выполняются следующие условия: а) пространство $(X, A)^0$ получено из A приклеиванием нульмерных клеток; б) при $k\geqslant 1$ пространство $(X, A)^k$ получается приклеиванием k-мерных клеток к пространству $(X, A)^{k-1}$; в) пространство $X=U(X, A)^k$; г) топология пространства X согласована с семейством $\{(X, A)^k\}$. Пространство $(X, A)^k$ наз. k-мерным остовом пространства X относительно A. При $A=\phi$ относительное К. р. $(X, \phi)=X$ есть К. р. в прежнем смысле, его k-мерный остов — X^k.

Примеры: 1) Пара (K, L) симплициальных комплексов K и L, $L\subset K$ определяет относительное К. р. $(|K|, |L|)$, где $(|K|, |L|)^k=(K^k\cup L)$. 2) Шар V^n есть К. р.: $(V^n)^k=p_0$ при $k<n-1$, $(V^n)^{n-1}=S^{n-1}$ и $(V^n)^k$ при $k\geqslant n$. Сфера S^{n-1} есть подразбиение этого К. р. V^n. 3) Если пара (X, A) есть относительное К. р., то $(X\times I, A\times I)$ — также К. р., и $(X\times I, A\times I)^k=((X, A)^k\times 0\times 1)\cup((X, A)^{k-1}\times I)$. 4) Если (X, A) есть относительное К. р., то X/A есть К. р., при этом $(X/A)^k=(X, A)^k/A$, где X/A — факторпространство пространства X, полученное отождествлением всех точек множества A с одной точкой.

Лит.: [1] Телеман К., Элементы топологии и дифференцируемые многообразия, пер. с рум., М., 1967; [2] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [3] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976.

Д. О. Баладзе.

КЛЕТОЧНЫЙ КОМПЛЕКС — отделимое пространство X являющееся объединением непересекающихся клеток. При этом p-мерной клеткой наз. топологич. пространство, гомеоморфное внутренности единичного куба размерности p. Если: 1) для каждой p-мерной клетки t^p пространства X задано непрерывное отображение f p-мерного куба I^p в пространство X, причем ограничение f' отображения f на внутренность $\dot{I}^p$ куба I^p взаимно однозначно, и образ $f(I^p)$ совпадает с замыканием $\overline{t^p}$ в X клетки t^p (т. е. f' — гомеоморфизм $\dot{I}^p$ на t^p) и 2) множество $f(\partial I^p)$, где ∂I^p — граница куба I^p, включено в объединение X^{p-1} клеток t^{p-1} пространства X, то X наз. клеточным комплексом; объединение X^{p-1} наз. остовом размерности $p-1$ К. к. X. Пример К. к.— симплициальный полиэдр.

Подмножество L К. к. X наз. подкомплексом, если L является объединением клеток из X, к-рое вместе с клетками содержит их замыкание. Так, n-мерный остов X^n К. к. X является его подкомплексом. Любое объединение и любое пересечение подкомплексов К. к. X являются подкомплексами X.

Любое топологич. пространство можно рассматривать как К. к.— объединение его точек, к-рые являются клетками размерности нуль. Этот пример показывает, что понятие К.к. слишком обширно и потому для приложений важны более узкие классы К. к., напр. класс *клеточных разбиений*, или CW-комплексов.

Д. О. Баладзе.

КЛИН в векторном пространстве — выпуклое множество, инвариантное относительно преобразования $x\to\lambda x$, $\lambda\geqslant 0$, т. е. множество K такое, что если $x, y\in K$, а числа $\lambda, \mu\geqslant 0$ то $\lambda x+\mu y\in K$. К., удовлетворяющий условию: если $x, -x\in K$, то $x=0$ наз. конусом (выпуклым). Всякий К. порождает в векторном пространстве структуру квазипорядка: $x\geqslant y$, когда $x-y\in K$. К. K в пространстве X наз. воспроизводящим, если $K-K=X$.

Б. З. Вулих.

КЛИНИ — МОСТОВСКОГО КЛАССИФИКАЦИЯ — классификация теоретико-числовых предикатов, введенная независимо С. Клини [1] и А. Мостовским [2]. Через Π_0 и одновременно через Σ_0 обозначается класс всех рекурсивных предикатов. Для всякого $k>0$ класс Σ_k определяется как класс всех предикатов, выразимых в виде $\exists y R(y, x_1, \ldots, x_n)$, где $\exists$ — *квантор* существования, $R(y, x_1, \ldots, x_n)$ — предикат из класса Π_{k-1}, а класс Π_k определяется как класс предикатов, выразимых в виде $\forall y R(y, x_1, \ldots, x_n)$, где $\forall$ — квантор всеобщности, $R(y, x_1, \ldots, x_n)$ — предикат из класса Σ_{k-1}. Таким образом получается последовательность классов:

$$\Sigma_0 = \Pi_0 \begin{matrix} \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \ldots \\ \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \ldots \end{matrix}$$

Если предикат принадлежит классу Σ_k или Π_k, то он принадлежит классам Π_j и Σ_j для любого $j>k$, т. е. $\Sigma_k \subseteq \Sigma_j \cap \Pi_j$ и $\Pi_k \subseteq \Sigma_j \cap \Pi_j$ для любого $j>k$. Если $k>0$, то существуют предикаты из класса Σ_k, не принадлежащие Π_k, а также предикаты из класса Π_k, не принадлежащие Σ_k, т. е. $\Sigma_k - \Pi_k \neq \varnothing$ и $\Pi_k - \Sigma_k \neq \varnothing$. Предикат принадлежит одному из классов Σ_k или Π_k тогда и только тогда, когда он выразим в языке *арифметики формальной*. Если предикат $Q(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит классу Σ_k (или Π_k), то предикат $\neg Q(x_1, \ldots, x_n)$, где $\neg$ — знак отрицания, принадлежит классу Π_k (соответственно Σ_k). Предикат $Q(x_1, \ldots, x_n)$ рекурсивен тогда и только тогда, когда предикаты $Q(x_1, \ldots, x_n)$ и $\neg Q(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежат классу Σ_1, т. е. $\Sigma_1 \cap \Pi_1 = \Sigma_0 = \Pi_0$. Если $k>0$, то $(\Sigma_{k+1} \cap \Pi_{k+1}) - (\Sigma_k \cup \Pi_k) \neq \varnothing$.

На классификации предикатов основана к л а с с и ф и к а ц и я м н о ж е с т в, определимых в языке формальной арифметики: множество M принадлежит классу Π_k или Σ_k, если этому классу принадлежит предикат «$x \in M$».

Лит.: [1] K l e e n e S. C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 53, p. 41—73; [2] M o s t o w s k i A., «Fund. math.», 1947, v. 34, p. 81—112.

В. Е. Плиско.

КЛИФФОРДА АЛГЕБРА — конечномерная ассоциативная алгебра над коммутативным кольцом, впервые рассмотренная У. Клиффордом (W. Clifford) в 1876. Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, E — свободный K-модуль, Q — квадратичная форма на E. К. а. квадратичной формы Q (или пары (E, Q)) наз. факторалгебра $C(Q)$ тензорной алгебры $T(E)$ K-модуля E по двустороннему идеалу, порожденному элементами вида $x \otimes x - Q(x) \cdot 1$, где $x \in E$. Элементы из E отождествляются с соответствующими классами смежности в $C(Q)$. Для любых $x, y \in E$ имеет место тождество $xy + yx = \Phi(x, y) \cdot 1$, где $\Phi : E \times E \to K$ — ассоцированная с Q симметрическая билинейная форма.

Для нулевой квадратичной формы Q алгебра $C(Q)$ совпадает с внешней алгеброй $\Lambda(E)$ K-модуля E. Если $K = \mathbb{R}$ — поле действительных чисел, а Q — невырожденная квадратичная форма на n-мерном векторном пространстве E над $\mathbb{R}$, то $C(Q)$ совпадает с алгеброй ${}^{l}A_{n+1}$ *альтернионов*, где l — число положительных квадратов в канонич. виде формы Q.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис K-модуля E, тогда элементы $1, e_{i_1} \ldots e_{i_k} (i_1 < \ldots < i_k)$ образуют базис K-модуля $C(Q)$. В частности, $C(Q)$ является свободным K-модулем ранга 2^n. Если, кроме того, $e_1, \ldots, e_n$ ортогональны относительно Q, то $C(Q)$ можно задать как K-алгебру с образующими $1, e_1, \ldots, e_n$ и определяющими соотношениями $e_i e_j = -e_j e_i (i \neq j)$ и $e_i^2 = Q(e_i)$. Подмодуль $C(Q)$, порожденный произведениями четного числа элементов из E, образует подалгебру в $C(Q)$, к-рая обозначается через $C^+(Q)$.

Пусть K — поле и квадратичная форма Q невырождена. При четном n алгебра $C(Q)$ является *центральной простой алгеброй* над K размерности 2^n, подалгебра $C^+(Q)$ сепарабельна, а ее центр Z имеет размерность

2 над K. Если K алгебраически замкнуто, то при четном n $C(Q)$ — матричная алгебра, а $C^+(Q)$ — произведение двух матричных алгебр (если же n нечетно, то, наоборот, $C^+(Q)$ — матричная, а $C(Q)$ — произведение двух матричных алгебр).

Обратимые элементы s алгебры $C(Q)$ (соответственно $C^+(Q)$) такие, что $sEs^{-1}=E$, образуют группу Клиффорда $G(Q)$ квадратичной формы Q (соответственно специальную группу Клиффорда $G^+(Q)$). Ограничение преобразований

$$x \to sxs^{-1} \quad (x \in G(Q))$$

на подпространство E определяет гомоморфизм φ: $G(Q) \to O(Q)$, где $O(Q)$ — *ортогональная группа* квадратичной формы Q. Ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ состоит из обратимых элементов алгебры Z и $\operatorname{Ker}\varphi \cap G^+(Q) = K^*$. Если n четно, то $\varphi(G(Q))=O(G)$, а $\varphi(G^+(Q)) \to O^+(Q)$ есть подгруппа индекса 2 в $O(Q)$, совпадающая со специальной ортогональной группой $SO(Q)$ в случае, когда характеристика K отлична от 2. Если n нечетно, то

$$\varphi(G(Q)) = \varphi(G^+(Q)) = SO(Q).$$

Пусть $\beta : C(Q) \to C(Q)$ — антиавтоморфизм К. а. $C(Q)$, индуцированный антиавтоморфизмом

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \to x_n \otimes \ldots \otimes x_1$$

тензорной алгебры $T(E)$. Группа

$$\operatorname{Spin}(Q) = \{s \in G^+(Q) \mid \beta(s) = s^{-1}\}$$

наз. спинорной группой квадратичной формы Q (или К. а. $C(Q)$).

Гомоморфизм $\varphi : \operatorname{Spin}(Q) \to O^+(Q)$ имеет ядро $\{\pm 1\}$. Если $k=\mathbb{C}$ или $k=\mathbb{R}$ и Q положительно определена, то $\operatorname{Im}\varphi = O^+(Q) = SO(Q)$ и $\operatorname{Spin}(Q)$ совпадает с классической *спинорной группой*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Элементы математики, пер. с франц., М., 1966; [2] Дьёдонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [3] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [4] Cartan E., Leçons sur la théorie des spineurs, P., 1938. *И. В. Долгачев.*

КЛИФФОРДА ПАРАЛЛЕЛЬ — прямая эллиптич. пространства, отстоящая от данной (базисной) прямой на постоянном расстоянии. Через каждую точку, лежащую вне данной прямой и вне полярной ей прямой, проходят две К. п. к данной прямой. Поверхность, образуемая вращением К. п. вокруг ее базисной прямой, наз. поверхностью Клиффорда. Поверхность Клиффорда имеет постоянную нулевую гауссову кривизну.

На существование К. п. впервые указал У. Клиффорд (W. Clifford, 1873).

Лит.: [1] Богомолов С. А., Введение в неевклидову геометрию Римана, Л.— М., 1934; [2] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *А. Б. Иванов.*

КЛИФФОРДА ТЕОРЕМА — теорема, устанавливающая неравенство между степенью и размерностью специального дивизора на алгебраич. кривой. Доказана У. Клиффордом (W. Clifford).

Пусть X — гладкая проективная кривая над алгебраически замкнутым полем и D — дивизор на X. Пусть $\deg D$ — степень, а $l(D)$ — размерность дивизора D. Положительный дивизор наз. специальным, если $l(K-D)>0$, где K — канонический дивизор на X. К. т. утверждает: для любого специального дивизора D справедливо неравенство $\deg D \geqslant 2l(D)-2$, причем равенство имеет место, если $D=0$ или $D=K$ или X — гиперэллиптич. кривая и D — кратность единственного специального дивизора степени 2 на X. Из К. т. следует, что данное неравенство справедливо для любого дивизора D на X такого, что $0 \leqslant \deg D \leqslant 2g-2$, где $g=l(K)$ — род кривой X.

Лит.: [1] Уокер Р., Алгебраические кривые, пер. с англ., М., 1952; [2] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948; [3] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972. *В. А. Исковских.*

КЛИФФОРДОВА ПОЛУГРУППА, вполне регулярная полугруппа,— полугруппа, каждый элемент к-рой является групповым, т. е. принадлежит нек-рой подгруппе. Элемент полугруппы будет групповым тогда и только тогда, когда он вполне регулярен (см. *Регулярный элемент*). Свойство полугруппы S быть К. п. эквивалентно каждому из следующих: 1) для любого $a \in S$ имеет место $a \in a^2 S \cap S a^2$, 2) каждый односторонний идеал I из S изолирован, т. е. из того, что $x \notin I$, следует $x^n \notin I$ при любом натуральном n.

К. п. наряду с *инверсными полугруппами* представляют собой один из важнейших типов *регулярных полугрупп*. Их изучение началось с основополагающей работы А. Клиффорда [1]. Произвольная К. п. обладает (единственным) разбиением на группы, классы к-рого суть в точности $\mathcal{H}$-классы (см. *Грина отношения эквивалентности*). Указанное разбиение не всегда будет связкой (см. *Связка полугрупп*); условия, когда это так, известны (см. [3]). Отношения Грина $\mathcal{J}$ и $\mathcal{D}$ на К. п. совпадают. Всякая *вполне простая полугруппа* будет К. п., причем для К. п. свойство быть вполне простой эквивалентно идеальной простоте (см. *Простая полугруппа*). Произвольная К. п. S разлагается в полуструктуру вполне простых полугрупп, это разложение единственно, его компоненты суть в точности $\mathcal{D}$-классы, а соответствующая факторполуструктура изоморфна полуструктуре главных идеалов полугруппы S; обратно, всякая полугруппа, разложимая в полуструктуру вполне простых полугрупп, есть К. п.

Для К. п. S следующие условия эквивалентны: 1) S инверсна; 2) каждый идемпотент из S лежит в центре, т. е. перестановочен с любым элементом из S; 3) каждый односторонний идеал полугруппы S является двусторонним; 4) отношения Грина $\mathcal{H}$ и $\mathcal{D}$ на S совпадают; 5) S есть полуструктура групп; 6) S разложима в подпрямое произведение групп и групп с присоединенным нулем.

Указанное выше разложение произвольной К. п. в полуструктуру вполне простых полугрупп определяет ее «грубое строение». Закон перемножения элементов в компонентах этого разложения описывает теорема Риса (см. *Вполне простая полугруппа*). Дальнейшее изучение К. п. в значительной степени направлено на выяснение «тонкого строения», т. е. закона перемножения элементов из различных компонент. В случае, когда эти компоненты — группы, т. е. для инверсных К. п., известно следующее конструктивное описание в терминах так наз. суммы прямого спектра групп. Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство попарно непересекающихся групп, A — полуструктура (см. *Идемпотентов полугруппа*) и каждой паре элементов $\alpha, \beta \in A$ таких, что $\alpha \geqslant \beta$, поставлен в соответствие гомоморфизм $\varphi_{\alpha,\beta}\colon G_\alpha \to G_\beta$, причем $\varphi_{\alpha,\alpha}$ для любого α есть тождественный автоморфизм и для любых $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$ имеет место $\varphi_{\alpha,\beta} \cdot \varphi_{\beta,\gamma} = \varphi_{\alpha,\gamma}$. На объединении $S = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ задается умножение $\cdot$, а именно, $a \cdot b = a\varphi_{\alpha,\alpha\beta}\, b\varphi_{\beta,\alpha\beta}$ для любых $a \in G_\alpha$ и $b \in G_\beta$.

Тогда S превращается в инверсную К. п. Обратно, каждая инверсная К. п. может быть получена указанным способом.

В общем случае проблема «тонкого строения» К. п. чрезвычайно усложняется, и удовлетворительного ее решения пока (1978) нет. Некоторые весьма сложные конструкции, описывающие К. п. в терминах вполне простых полугрупп, их сдвиговых оболочек, полуструктур, отображений со специальными свойствами, приведены в [5]. Больший прогресс достигнут в случае ортодоксальных К. п. (см. *Регулярная полугруппа*); такие полугруппы наз. ортогруппами. Для них имеется несколько обозримых, хотя и довольно гро-

моздких конструкций (см. [2]). Все упомянутые конструкции так или иначе обобщают приведенное выше описание инверсных К. п., полученное в [1].

Лит.: [1] Clifford A., «Ann. Math.», 1941, v. 42, № 4, p. 1037—49; [2] его же, «J. Pure and Appl. Algebra», 1976, v. 8, № 1, p. 23—50; [3] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [4] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [5] Petrich M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1974, v. 189, p. 211—36.

Л. Н. Шеврин.

КЛОН операции — всякое замкнутое относительно композиции множество конечноместных операций вида $\omega: A^n \to A$, содержащее все единичные операции $\omega_n^i: A^n \to A$, т. е. такие, что

$$\omega_n^i(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = a_i$$

для любого набора $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ из A^n, где $n \geqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots$, A — произвольное фиксированное множество. Под композицией операций $\omega_1(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ и $\omega_2(y_1, \ldots, y_m)$ понимается операция $\omega_3(z_1, \ldots, z_l)$, задаваемая с помощью формулы вида

$$\omega_1(x_1, \ldots, x_{j-1}, \omega_2(y_1, \ldots, y_m), x_{j+1}, \ldots, x_n),$$

где для множеств переменных $X = \{x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ и $Z = \{z_1, \ldots, z_l\}$ выполнено

$$Z = (X \setminus \{x_j\}) \cup Y, m \geqslant 1, \ l \geqslant 1.$$

В. Б. Кудрявцев.

КЛОТОИДА — то же, что *Корню спираль*.

КНАСТЕРА КОНТИНУУМ, наследственно неразложимый континуум, — континуум, всякий подконтинуум к-рого неразложим. Пространство X наз. неразложимым, если оно связно и не допускает представления в виде объединения двух замкнутых связных множеств, отличных от X. Первое доказательство существования К. к. было дано Б. Кнастером [1]. В пространстве всех подконтинуумов обычного квадрата I^2 множество всех К. к. составляет всюду плотное G_δ-множество [2].

Лит.: [1] Knaster B., «Fundam. math.», 1922, t. 3, s. 247—86; [2] Mazurkiewicz S., там же, 1930, t. 16, s. 151—59.

Л. Г. Замбахидзе.

КНЕЗЕРА ТЕОРЕМА об одномерных *слоениях* без особенностей на замкнутых поверхностях рода нуль — теорема, устанавливающая свойства такого слоения в зависимости от наличия или отсутствия у него замкнутых слоев и описывающая поведение незамкнутых слоев в областях, ограничиваемых замкнутыми слоями. К. т. принадлежит Х. Кнезеру (говорившему не о слоениях, а о «регулярных семействах кривых на поверхности» [1]; модернизированное изложение основных аспектов К. т. см. в [2], [3]). Чаще всего К. т. упоминается в связи с траекториями потока без положений равновесия на торе или *Клейна поверхности*: эти траектории образуют слоение рассматриваемого в К. т. типа.

Одномерное слоение (без особенностей) на поверхности — это целиком заполняющее последнюю семейство непересекающихся кривых («слоев»), причем у каждой точки имеется такая координатная окрестность U, что в терминах соответствующих локальных координат x_1, x_2 слоение локально выглядит как семейство прямых $x_2 = \text{const}$ (точнее, такое уравнение имеют связные компоненты пересечений слоев с U). Слоение наз. ориентируемым, если можно так определить нек-рое «положительное» направление на каждом его слое (ориентировать слои), чтобы для различных слоев эти направления были согласованы — при непрерывном переходе от слоя к слою положительное направление нигде не менялось скачком. Ориентируемы те и только те слоения, к-рые состоят из траекторий нек-рых потоков без положений равновесия.

Пусть на поверхности M задано поле направлений (поле линейных элементов) — каждой точке $x \in M$ сопоставлено одномерное подпространство $l(x)$ касательной плоскости T_xM в этой точке (если M лежит в евклидовом пространстве, то $l(x)$ представляется прямой, касающейся M в точке x, см. рис. 1). Если $l(x)$ гладко зависит от x, то интегральные кривые этого поля направлений образуют одномерное слоение, к-рое может и не быть ориентируемым.

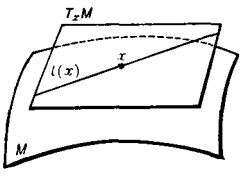


Рис. 1.

Основное содержание К. т. относится к тому случаю, когда у слоения имеются как замкнутые, так и незамкнутые слои. Утверждается, что последние заполняют области, ограниченные первыми, причем эти области могут быть трех типов — см. рис. 2, где подразумевается, что у каждого прямоугольника а), б) и в) надо

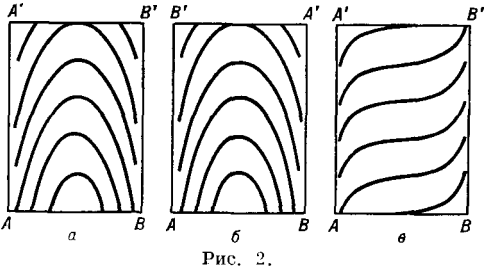


Рис. 2.

верхнюю сторону склеить с нижней, причем A склеивается с A', а B — с B'; (напр., из а) при этом получается «кольцо Кнезера», см. рис. в ст. *Дифференциальные уравнения на торе*. Если на поверхности имеется только один замкнутый слой, то у прямоугольника надо дополнительно склеить еще левую и правую стороны.

Незамкнутый слой, лежащий в одной из этих областей, при неограниченном продолжении в одну сторону навивается на замкнутый слой, ограничивающий данную область, или на один из двух ограничивающих ее замкнутых слоев. При продолжении в другую сторону незамкнутый слой навивается, соответственно, на тот же замкнутый слой (но с другой стороны) или на второй из упомянутых замкнутых слоев.

Областей типа а) и б) может быть лишь конечное число, причем неориентируемая область типа б) возможна только на поверхности Клейна и только для неориентируемого слоения, областей типа в) — конечное или счетное число.

Х. Кнезер доказал также, что тот случай, когда у слоения нет замкнутых слоев, возможен только для ориентируемого слоения на торе, и что в этом случае имеется замкнутая линия L, трансверсальная к слоению и пересекающая все слои. (В общем случае, когда не предполагается, что слои гладкие и что слоение задается нек-рым полем направлений, трансверсальность понимается в том смысле, что у каждой точки линии L имеется координатная окрестность, в к-рой слои задаются уравнением $x_2 = \text{const}$, а L — уравнением $x_1 = 0$.) См. об этом также в ст. *Дифференциальные уравнения на торе*.

Лит.: [1] Kneser H., «Math. Ann.», 1924, Bd 91, № 1—2, S. 135—54; [2] Reinhart B. L., «Amer. J. Math.», 1959, v. 81, № 3, p. 617—31; [3] Aeppli A., Markus L., «Amer. J. Math.», 1963, v. 85, № 4, p. 633—54.
Д. В. Аносов.

КНЕЗЕРА — ТИТСА ГИПОТЕЗА — гипотеза о строении k-простых односвязных изотропных над полем k алгебраич. групп. А именно, К.— Т. г. состоит в том,

что группа G_k k-рациональных точек k-простой односвязной и изотропной над k алгебраич. группы G порождается унипотентными элементами. В несколько менее общей форме это утверждение было высказано М. Кнезером (M. Kneser), общая формулировка принадлежит Ж. Титсу [1]. Для групп типа A_n (см. *Полупростая алгебраическая группа*) К.— Т. г. эквивалентна проблеме Таннака — Артина о совпадении подгруппы $SL(1, D)$ элементов единичной приведенной нормы конечномерного тела D с коммутантом $[D^*, D^*]$ его мультипликативной группы. К.— Т. г. имеет тесную связь с вопросами аппроксимации в алгебраич. группах, рациональности групповых многообразий и алгебраич. K-теории.

Справедливость К.— Т. г. доказана в случае локально компактных полей [2], а также для глобальных функциональных полей [3]. Более того, для глобальных полей нулевой характеристики метод спуска из [2] дал возможность доказать справедливость К.— Т. г. для всех алгебраич. групп за исключением типов E_6 и E_8. Однако в общем случае К.— Т. г. не верна, что следует из отрицательного решения проблемы Таннака — Артина [4]. Вследствие этого выдвинулись задачи исследования меры отклонения $SL(1, D)$ от $[D^*, D^*]$, выражаемой приведенной группой Уайтхеда. Результаты, полученные в этом направлении ([5] — [6]), составили основы приведенной K-теории. В [7] показано, что К.— Т. г. неверна и в случае унитарных групп, что, в свою очередь, открывает путь к развитию приведенной унитарной K-теории.

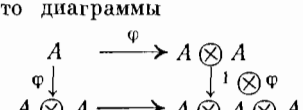
Лит.: [1] Tits J., «Ann. Math.», 1964, v. 80, № 2, p. 313—29; [2] Платонов В. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, № 6, с. 1211—20; [3] его же, «Proc. Intern. Congr. Math. Vancouver», 1974, p. 471—76; [4] его же, «Докл. АН СССР», 1975, т. 221, № 5, с. 1038—41; [5] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1976, т. 40, № 2, с. 227—61; [6] его же, «Матем. сб.», 1976, т. 100, № 2, с. 191—200; [7] Платонов В. П., Янчевский В. И., «Докл. АН СССР», 1975, т. 225, № 1, с. 48—51.

В. И. Янчевский.

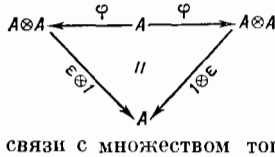
КНОППА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — *суммирования метод* числовых и функциональных рядов; является обобщением *Эйлера метода суммирования* и носит в литературе название Эйлера — Кноппа метод суммирования.

И. И. Волков.

КОАЛГЕБРА — модуль A над коммутативным кольцом K с такими двумя гомоморфизмами $\varphi : A \to A \otimes_k A$ и $\varepsilon : A \to k$, что диаграммы



и



коммутативны, т. е. К. понятие дуальное (в смысле теории категорий) к понятию ассоциативной алгебры над кольцом K.

К. приобрели значение в связи с множеством топологич. приложений, так, например, симплициальный комплекс топологического пространства является К. Тесно связаны с К. *Хопфа алгебры*, несущие на себе структуры алгебры и К. одновременно.

Лит.: [1] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966.

В. Е. Говоров.

КОАЛИЦИОННАЯ ИГРА — игра, в к-рой коалиции действия $\mathfrak{N}_\partial$ и коалиции интересов $\mathfrak{N}_u$ составляют различные семейства (вообще говоря, пересекающихся) подмножеств множества игроков I, а отношение предпочтения для каждой из коалиций интересов $K \in \mathfrak{N}_u$ описывается ее функцией выигрыша H_k (см. *Игр теория*). Исследовался случай, когда $\mathfrak{N}_u \subset \mathfrak{N}_\partial$.

Множество $\mathfrak{K}_\partial$ естественно и полезно понимать как симплициальный комплекс с множеством вершин I. Некоторые топологич. свойства $\mathfrak{K}_\partial$ имеют теоретико-игровой смысл; в частности, если комплекс $\mathfrak{K}_\partial$ нульмерен, то игра оказывается бескоалиционной.

Протекание К. п. можно интерпретировать как согласованный набор игроками («на по-коалиционных совещаниях») коалиционных *стратегий* для каждой коалиции действия, после чего в сложившейся ситуации s каждая коалиция интересов K получает выигрыш $H_K(s)$.

Оптимальность в К. п. можно понимать как своего рода «локализацию конфликтов», а именно как устойчивость ситуации s в смысле выполнения набора условий следующего вида: коалиция интересов K не заинтересована в отклонении от своей коалиционной стратегии в s, даже если нек-рая коалиция действия K' отклонится от своей стратегии. Равновесность по Нэшу охватывается этим принципом.

Лит.: [1] Воробьев Н. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, № 2, с. 289—306. *Н. Н. Воробьев.*

КОАЛИЦИЯ (в теории игр) — группа лиц или сторона, принимающая решение в конфликте (коалиция действия), либо отстаивающая нек-рые интересы (коалиция интересов). См. *Игр теория.*

А. С. Михайлова.

КОБАЗИС — *базис* двойственного, или *сопряженного пространства.*

КОБОЛ — *алгоритмический язык*, ориентированный на задачи обработки данных (COBOL — сокр. от Common Business Oriented Language). Способ записи программы приближен к естественному английскому языку, удобен в изучении, документировании и переносе программы с одной ЭВМ на другую. К. разрабатывается в США, начиная с 1959; получил широкое распространение, стал национальным стандартом [1]. Русский вариант К. опубликован в 1968 [2], с 1978 вводится государственный стандарт [3].

Программа на К. состоит из четырех разделов:

1) Раздел идентификации содержит имя программы, автора, дату и другую справочную информацию.

2) Раздел оборудования определяет конфигурацию транслирующей и рабочей ЭВМ, специфические особенности оборудования и управления вводом-выводом.

3) Раздел данных содержит машинно-независимое описание вида и структуры входных, промежуточных и выходных данных. Допускаются цифровые и нецифровые элементарные данные, к-рые могут объединяться в группы, группы групп и т. д. Такая структурная иерархия задается с помощью номеров уровней. Высший уровень присваивается логической записи. Совокупности однородных или разнородных записей образуют файлы. Допустимы указания, повышающие эффективность внутренней интерпретации формата данных.

4) Раздел процедур задает операции обработки данных в виде последовательности предложений, именованных параграфов и секций, составленных из повелительных, условных и управляющих трансляцией операторов.

По назначению элементы К. разделяются на ядро и 11 функциональных обрабатывающих модулей. Ядро содержит элементы языка, необходимые для обработки данных во внутренней памяти ЭВМ. Функциональные модули соответственно содержат средства: обработки таблиц; последовательного, относительного и индексного ввода-вывода для организации доступа к внешним файлам; сортировки-слияния; генерации отчетов; сег-

ментации программы для совмещения памяти в рабочее время; модификации и включения в программу текстов на К. из библиотеки; отладки и контроля данных и процедур; организации межпрограммных связей с другими программами; а также коммуникативные средства посылки и получения сообщений.

Гибкость выбора стандартных подмножеств К. при разработке конкретных трансляторов основана на выделении в ядре и функциональных модулях фиксированных уровней. Элементы языка распределены по уровням так, что более высокие уровни обеспечивают бо́льшую полноту реализации соответствующей функции и содержат нижние уровни как собственные подмножества. Для некоторых функциональных модулей в качестве самого низкого уровня допускается пустое множество.

Основные направления дальнейшего развития К.— организация взаимодействия с базами данных и использование идей структурного программирования.

Лит.: [1] American National Standard. Programming Language COBOL. ANSI X3.23—1974; [2] Бабенко Л. П. [и др.], в кн.: Тр. 1 Всесоюзной конференции по программированию. И. Алгоритмические языки, К., 1968, с. 3—15; [3] ГОСТ 22558—77. «Язык программирования КОБОЛ»; [4] Ющенко Е. Л. [и др.], КОБОЛ, 2 изд., К., 1974.

Г. К. Столяров.

КОБОРДИЗМ, кобордизмов теория,— обобщенная теория когомологий, определенная спектрами пространств Тома и связанная с различными структурами в стабильном касательном или нормальном расслоении к многообразию. Теория К. двойственна (в смысле *S-двойственности*) теории *бордизмов*.

Простейшим примером К. являются ортогональные, или неориентированные К. Пусть O_r — группа ортогональных преобразований евклидова пространства $\mathbb{R}^r$, BO_r — ее *классифицирующее пространство*. Стандартное вложение $O_r \to O_{r+1}$ задает отображение $j_r : BO_r \to BO_{r+1}$, переводящее *универсальное расслоение* γ_{r+1} над BO_{r+1} в расслоение $\gamma_r \oplus \theta$, где θ — одномерное тривиальное расслоение над BO_r. Если TBO_r — *Тома пространство* расслоения γ_r, то получается индуцированное отображением j_r отображение $s_r : STBO_r \to TBO_{r+1}$, где S — оператор *надстройки*. Последовательность $\{TBO_r, s_r\}$ образует *спектр пространств* и, следовательно, задает теорию когомологий, наз. теорией ортогональных К., или O-К., обозначаемую O^*. Группа $O^n(X, A)$ n-мерных O-К. пары пространств (X, A) определяется как

$$\lim_{i \to \infty} [S^i(X/A),\ TBO_{i+n}],$$

где $[P, Q]$ — множество гомотопич. классов отображений из P в Q. При этом $O^n(X) = O^n(X, \phi)$, где ϕ — пустое множество, а под $X/\phi = X^+$ понимается несвязное объединение X и точки. Группа $O^n(X, x_0)$, где $x_0 \in X$, наз. приведенной группой n-мерных O-К. $\tilde{O}^n(X)$ пространства X. Обобщенная теория гомологий, двойственная теории O-К., наз. теорией O-бордизмов. Группы $O_n(X, A)$ n-мерных бордизмов пары (X, A) определяются как

$$\lim_{i \to \infty} \pi_{i+n}((X/A) \wedge TBO_i).$$

Группы n-мерных O-К. точки обозначаются через Ω_0^n, а n-мерных O-бордизмов точки — через Ω_n^0; последние описываются чисто геометрически. При этом $\Omega_0^{-n} \approx \Omega_n^0 \approx \pi_{n+N}(TBO_N)$, $N \gg n$, так что ее можно интерпретировать как группу К. и как группу бордизмов (см. *Бордизм*), где она обозначена $\mathfrak{N}_n$. Полная группа коэффициентов теории O-К.— градуированная группа $\Omega_0 = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} \Omega_0^n$ — является кольцом: умножение индуцировано прямым произведением многообразий. Более

того, для любого конечного CW-комплекса X группа $O(X)=\bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} O^n(X)$ является естественным по X кольцом, поскольку индуцированное вложением $O_m\times O_n\to O_{m+n}$ отображение $BO_m\times BO_n\to BO_{m+n}$ задает отображение $TBO_m\wedge TBO_n\to TBO_{m+n}$, так что $\{TBO_r\}$ — мультипликативный спектр пространств.

Общая ситуация описывается следующим образом. Структурной серией (B, φ) наз. последовательность расслоений $\varphi_r: B_r\to BO_r$ и отображений $i_r: B_r\to B_{r+1}$ таких, что $\varphi_{r+1}\circ i_r=j_r\circ\varphi_r$. Отображение φ_r задает векторное расслоение $\xi_r=\varphi^*\gamma_r$ над B_r, причем $i_r^*\xi_{r+1}=\xi_r+\varphi_r^*\theta$. Пусть TB_r — пространство Тома расслоения ξ_r; указанное равенство задает отображение $s_r: STB_r\to TB_{r+1}$, так что последовательность $T(B, \varphi)=\{TB_r, s_r\}$ является спектром пространств и, следовательно, задает теорию когомологий, наз. теорией (B, φ)-К., обозначаемую $(B, \varphi)^*$. Таким образом

$$(B\varphi)^i(X, A)=\lim_{N\to\infty}[S^N(X/A), TB_{i+N}].$$

Группа коэффициентов теории (B, φ)-К. обозначается через $\Omega_{(B, \varphi)}$. При этом $\Omega_i^{(B, \varphi)}=\Omega_{(B, \varphi)}^{-i}=\pi_{i+N}(TB_N)$, $N\gg i$, где $\Omega_i^{(B, \varphi)}$ — группа коэффициентов двойственной теории (B, φ)-бордизмов, которая допускает геометрическое определение, использующее понятие так наз. (B, φ)-*структуры*: определяется (B, φ)-бордантность и элементы $\Omega^{(B, \varphi)}$ интерпретируются как классы (B, φ)-бордантных многообразий.

Первые примеры теорий К. возникают из серий линейных групп. Напр., серия ортогональных групп $\{O_r\}$ определяет структурную серию $\{B_r, \varphi_r\}$, где $B_r=BO_r$, $\varphi_r=id$. Серия $\{SO_r\}$ определяет структурную серию $\{B_r, \varphi_r\}$, где $B_r=BSO_r$, $\varphi_r: BSO_r\to BO_r$ — универсальное двулистное накрытие, соответствующее включению $SO_r\subset O_r$. Соответствующая теория К. наз. теорией ориентированных К. и обозначается через SO^*. Серия унитарных групп $\{U_r\}$ определяет теорию унитарных, или квазикомплексных К., обозначаемую U^*. Здесь серия $\{B, \varphi\}$ строится так: $B_{2r}=B_{2r+1}=BU_r$ — классифицирующее пространство группы U_r, а отображения φ_r — отображения классифицирующих пространств $BU_r\to BO_{2r}\to BO_{2r+1}$, индуцированные естественными вложениями $U_r\subset O_{2r}\subset O_{2r+1}$. Серия симплектических групп $\{Sp_r\}$ определяет теорию симплектических К. Sp^*, здесь $B_{4r}=B_{4r+1}=B_{4r+2}=B_{4r+3}=B\,Sp_r$, и отображения φ_r строятся так же, как и в случае унитарных К. Имеются также теории К., соответствующие сериям групп $\{Spin_r\}$, $\{SU_r\}$, и т. д. Наконец, серия единичных групп $\{E_r\}$, где $\varphi_r: B_r\to BO_r$ — расслоение со стягиваемым B_r, дает теорию К., совпадающую с теорией стабильных когомотопических групп, и потому двойственная теория бордизмов изоморфна теории стабильных гомотопических групп, $E_i(X)\approx\approx\pi_{i+N}(S^NX)$, $N\gg i$. E-многообразие наз. оснащенным, так как E-структура — это в точности оснащение (тривиализация) стабильного нормального расслоения. Теория E-К. наз. теорией оснащенных К., а ее i-мерная группа коэффициентов обозначается через Ω_{fr}^i [так что $\Omega_{fr}^{-i}=\Omega_i^{fr}=\pi_{i+N}(S^N)$]; это — первый пример К.; он появился у Л. С. Понтрягина (1955), проинтерпретировавшего стабильные гомотопич. группы сферы как (определяемые геометрически) группы оснащенных К. точки Ω_{fr}^i с целью вычисления группы $\pi_{i+N}(S^N)$.

Все описанные теории К., возникающие из серий линейных групп, являются мультипликативными, и потому для любого конечного CW-комплекса X полная (градуированная) группа К. является кольцом.

Например, для серии групп $\{U_r\}$ имеется вложение $U_m \times U_n \to U_{m+n}$, порождающее отображение

$$BU_m \times BU_n \to BU_{m+n}$$

и, следовательно, отображение $TBU_m \wedge TBU_n \to TBU_{m+n}$. Спектр $\{M_r\}$, представляющий теорию U^*, имеет вид $M_{2r} = TBU_r$, $M_{2r+1} = STBU_r$ и потому существуют отображения $M_r \wedge M_s \to M_{r+s}$, так что спектр пространств $\{M_r\}$ мультипликативен.

Развитие теории К. началось с геометрич. определения и вычисления групп Ω_E, Ω_O, Ω_{SO}. Важную роль сыграла теорема Понтрягина о том, что O-бордантные многообразия имеют одни и те же числа Штифеля. Исследование К. было продвинуто Р. Томом (R. Thom). Он ввел пространства TBO_N, $TBSO_N$ и доказал изоморфизм $\pi_{i+N}(TBO_N) \approx \Omega_O^i$, что позволило привлечь к вычислению колец К. точки методы гомотопич. топологии. Конструкции Тома стимулировали введение TBU_n, $TBSp_n$ и т. д. и соответствующих К. Основной задачей первого этапа развития теории К. и было вычисление колец К. точки.

При изучении К. точки большую роль играют *характеристические классы* — Чжэня для Ω_U, Штифеля для Ω_O, Понтрягина и Штифеля для Ω_{SO}. Вообще, для любой структурной серии (B, φ) и любой мультипликативной теории когомологий h^*, в к-рой все расслоения ξ_r над B_r ориентируемы, можно определить характеристические классы как элементы группы $h^*(B)$, где $B = \lim(B_r, j_r)$. При этом соответствующие характеристич. числа, являющиеся элементами кольца h^* (точка), будут инвариантны относительно (B, φ)-бордантности. Пусть x_i — образующие Ву для классов Чжэня и S_ω — симметрич. функция от n переменных, соответствующая нек-рому разбиению $\omega = (i_1, \ldots i_k)$ числа n. Характеристич. класс $S_\omega(x_1, \ldots, x_n)$ обозначается через S^c_ω. Аналогичные конструкции для классов Понтрягина и Штифеля обозначаются через S^p_ω и S^w_ω соответственно.

1) У н и т а р н ы е К. Кольцо Ω_U — свободная градуированная полиномиальная алгебра от счетного числа однородных образующих

$$\Omega_U = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n, \ldots], \quad \deg x_i = -2i.$$

Множество $\{x_n\}$, $\deg x_n = -2n$ является системой полиномиальных образующих тогда и только тогда, когда

$$S^c_{(n)}(x_n) = \begin{cases} \pm 1, & n \neq p^r - 1 \text{ ни для какого простого } p \\ & \text{и целого } r, \\ \pm p, & n = p^r - 1 \text{ для некоторого простого } p, \end{cases}$$

где (n) — разбиение числа n, состоящее из одного слагаемого. Одну из систем полиномиальных образующих кольца Ω_U можно описать так. Пусть $\mathbb{C}P^n$ есть n-мерное комплексное проективное пространство. Комплексная алгебраич. гиперповерхность бистепени $(1,1)$ в $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$ является комплексным многообразием. Класс его унитарных К. обозначим $H_{i,j}$, $\dim_{\mathbb{R}} H_{i,j} = 2(i+j-1)$. Оказывается, что $S_{i+j-1}(H_{i,j}) = \binom{i+j}{i}$, так что подходящая целочисленная линейная комбинация элементов $H_{i,j}$ задает образующую кольца Ω_U степени $2(1-i-j)$.

Из отсутствия кручения в кольце Ω_U и того, что $H^*(BU; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n \ldots]$, где c_n — *Чжэня классы*, $\deg c_n = 2n$, следует, что *Чжэня числа* полностью определяют класс унитарных К. квазикомплексного многообразия.

Пусть n — натуральное число $(i_1, \ldots, i_k)$, $i_s > 0$, $\sum i_s = n$ — его разбиение. Каждому $2n$-мерному (размерность действительная) квазикомплексному многооб-

разию M соответствует набор $\{a_{i_1\dots i_k}\}=\{c_{i_1}\dots c_{i_k}(M)\}$ целых чисел, где мультииндекс $i_1,\dots i_k$ пробегает все разбиения числа n. Набор таких целых чисел $\{b_{i_1},\dots, b_{i_k}\}$ реализуется как набор чисел Чжэня нек-рого квазикомплексного многообразия в следующей ситуации. Пусть $S^c_\omega(e)\in H^{**}(BU;\ \mathbb{Q})$ — *характеристический класс*, заданный симметрич. функцией S_ω от переменных $e^{x_i}-1$, $i=1,\ 2,\dots,\ |\omega|$, а $T\in H^{**}(BU;\ \mathbb{Q})$ — характеристический класс, заданный произведением функций $x_i/(e^{x_i}-1)$, где x_i — образующие By. Пусть $x(M)$ — значение характеристич. класса $x\in H^n(BU;\ \mathbb{Q})$ на фундаментальном классе $[M]\in H_n(M,\ \mathbb{Z})$ квазикомплексного многообразия M с касательным расслоением TM.

Для гомоморфизма $\varphi: H^n(BU;\ \mathbb{Q})\to\mathbb{Q}$ тогда и только тогда существует такое замкнутое квазикомплексное многообразие M, что $\varphi(x)=x(M)$ для всех $x\in H^n(BU;\ \mathbb{Q})$, когда φ принимает целые значения на всех n-мерных компонентах каждого характеристич. класса $S^c_\omega(e)T$ (теорема Стонга). Эквивалентно, гомоморфизм Гуревича

$$\pi_{2(k+N)}(TBU_N)\to\tilde K_{2(k+N)}(TBU_N),$$

где $N\gg k$,— мономорфизм на прямое слагаемое (теорема Хаттори). Здесь $\tilde K$ — приведенная *K-теория*.

2) Неориентированные, или ортогональные, К. Каждый элемент кольца Ω_O имеет порядок 2, и

$$\Omega_O\mathbb{Z}_2[x_1,\dots,x_n,\dots],\ \deg x_i=-i,\quad i\neq 2^k-1,$$

т. е. Ω_O — свободная полиномиальная $\mathbb{Z}_2$-алгебра. В качестве образующей x_i можно выбрать любой элемент $[M]$ с $S^\omega_{(i)}(M)\neq 0$, напр. $x_{2i}=\mathbb{R}P^{2i}$. В этой теории есть аналоги многообразий $H_{i,j}$, если вместо $\mathbb{C}P^k$ брать $\mathbb{R}P^k$; подходящее многообразие $H_{i,j}$ может служить образующей степени $1-i-j$. *Штифеля числа* полностью определяют класс неориентируемых К. многообразия, соотношения между числами Штифеля дает следующая теорема: для гомоморфизма φ: $H^n(BO;\ \mathbb{Z}_2)\to\mathbb{Z}_2$. Тогда и только тогда существует такое n-мерное замкнутое многообразие M, что $\varphi(x)=x(M)$ для всех $x\in H^n(BO;\mathbb{Z}_2)$, когда $\varphi(Sqb+vb)=0$ для всех $b\in H^*(BO;\ \mathbb{Z}_2)$, где $v=Sq^{-1}w$. Здесь $Sq=Sq^1+Sq^2+\dots$ — полная *Стинрода операция*, $w=w_1+w_2+\dots$ — полный класс Штифеля. Образом гомоморфизма $\Omega_U\to\Omega_0$ является кольцо $(\Omega_0)^2$

3) Ориентированные К. с кольцом Ω_{SO}. Все элементы подгруппы кручения Tors этого кольца имеют порядок 2. Кольцо $\Omega_{SO}/\mathrm{Tors}$ является кольцом полиномов над $\mathbb{Z}$ от классов x_i степени $4i$, образующие выделяются условием

$$S^p_{(i)}(x_i)=\begin{cases}\pm 1, & 2i=p^r-1 \text{ для некоторого простого } p\\ & \text{и целого } r,\\ \pm p, & 2^i=p^{r-1} \text{ для некоторого простого } p.\end{cases}$$

Класс SO-К. многообразия определяется *Понтрягина числами* и числами Штифеля. Инвариантом класса К. является также *сигнатура многообразия*. Соотношения между числами Штифеля вытекают из следующего факта: образ гомоморфизма «забывания» $\Omega_{SO}\to\Omega_0$ состоит точно из тех классов К., у которых все числа, содержащие класс w_1, равны нулю. Для любого разбиения $\omega=(i_1,\dots,i_k)$ имеет место

$$p_\omega(M)\bmod 2=w^2_{2\omega}=[w_{2i_1}w_{2i_2}\dots w_{2i_k}(M)],$$

где p_ω — соответствующее число Понтрягина. Не существует 2-примарных соотношений между числами Понтрягина.

Подобно тому, как для унитарных К. вводились классы $S^c_\omega(l)$, вводятся классы $S^p_\omega(e)$ — симметрич. функции от $e^{x_i}+e^{-x_i}-2$. Пусть L — характеристич. класс, задающий *L-род* Хирцебруха. Все соотношения между числами Понтрягина следуют из того, что числа Понтрягина целые, и $(S^p_\omega(e)L)\ [M]\in\mathbb{Z}[1/2]$. Гомоморфизм $\Omega_U\to\Omega_{SO}/\mathrm{Tors}$ эпиморфен.

4) Специальные унитарные К. с кольцом Ω_{SU}. U-многообразие M допускает SU-структуру тогда и только тогда, когда $C_1(M)=0$. Все элементы подгруппы кручения Tors имеют порядок 2. Ядро гомоморфизма $\Omega_{SU}\to\Omega_U$ есть в точности Tors. Группы Ω^n_{SU} конечно порождены, и $\Omega_{SU}\otimes\mathbb{Q}$ есть кольцо полиномов над $\mathbb{Q}$ от классов x_i степени $-2i$, $i>1$. Подгруппа кручения Tors имеет вид $\mathrm{Tors}^{-n}=0$ при $n\neq 8k+1$, $8k+2$, а для $n=8k+1$, $8k+2$ группа Tors^{-n} есть векторное пространство над $\mathbb{Z}_2$, размерность к-рого равна числу разбиений числа k. Два SU-многообразия бордантны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же характеристич. числа в целочисленных когомологиях и в KO-теории.

Все соотношения между числами Чжэня для n-мерных SU-многообразий вытекают из следующих: $c_1c_\omega(M)=0$ для всех ω; $(S^c_\omega(e)T)\ [M]\in\mathbb{Z}$ для всех ω; если $n\equiv 4 \bmod 8$, то $(S^p_\omega(e)T)\ [M]\in 2\mathbb{Z}$ для всех ω. Образ гомоморфизма $\Omega_{SU}\to\Omega_O$ состоит из классов $[M]^2$, где M — ориентированное многообразие, у к-рого все числа Понтрягина, содержащие класс p_1, четны.

Полностью вычислены также кольца Ω_{Spin} и $\Omega_{\mathrm{Spin}\mathbb{C}}$. Кольца Ω_{Sp} и Ω_{fr} до сих пор (1978) не вычислены. Кольцо $\Omega_{Sp}\otimes\mathbb{Z}[1/2]$ является кольцом полиномов от $(-4i)$-мерных образующих. Все известные (1978) элементы группы Tors Ω_{Sp} имеют порядок 2. Что касается кольца Ω_{fr}, то здесь основным результатом является теорема Серра о конечности этих групп. Изучается также кольцо самосопряженных К. Ω_{SC}, где объекты — квазикомплексные многообразия с заданным в нормальном расслоении оператором, изоморфно отображающим комплексную структуру на сопряженную. Спектр $TBSC$ построен; о группах Ω_{SO} известно, что там есть лишь 2-примарное кручение, но, в отличие от Ω_{Sp}, найдены элементы порядка 4^k с любым k, именно $[\mathbb{R}P^{4k-3}]$. Вычислен также образ $\mathrm{im}(\Omega_{SC}\to\Omega_O)$ с помощью техники *формальных групп*.

Отображение одной теории К. в другую, напр. $SU^*\to U^*$, индуцирует отображение спектров $TBSU\to TBU$. Конус этого отображения в категорию спектров задает обобщенную теорию когомологий. Кольцо точки полученной теории имеет следующую геометрич. интерпретацию. Пусть (U, SU) — U-многообразие, на краю к-рого (возможно, пустом) фиксирована SU-структура. Введением для (U, SU)-многообразий соответствующего отношения бордантности получается кольцо $\Omega_{U,SU}$. Так же вводятся группы Ω_U, fr, $\Omega_{O,SO}$ и др.

Выше рассматривались гладкие многообразия или, эквивалентно, линейные представления групп (структурные серии возникали из расслоений над SO_r). Можно рассматривать различные структуры на топологич. многообразиях, т. е. исходить из группы гомеоморфизмов (и даже собственных гомотопич. эквивалентностей) пространства $\mathbb{R}^r$. Здесь известны следующие примеры (буква S везде означает переход к ориентированному случаю).

5) Кусочно линейные К. Объекты — кусочно линейные многообразия. Соответствующее отношение бордантности приводит к группам Ω_{PL}, Ω_{SPL}. Определив группу PL_n (соответственно SPL_n) как группу кусочно линейных гомеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^n$ на себя, сохраняющих начало координат (соот-

ветственно и сохраняющих ориентацию), можно ввести классифицирующие пространства BPL_n, $BSPL_n$ и пространства Тома $TBPL_n$, $TBSPL_n$ и построить теории К. *PL*, *SPL*. При этом $\Omega^i_{PL} \approx \pi_i(TBPL)$, $\Omega^i_{SPL} \approx \pi_i(TBSPL)$. Группы Ω_{PL} вычислены. Класс К. кусочно линейного многообразия полностью определяется своими характеристич. числами, т. е. элементами группы $H^*(BPL; \mathbb{Z}_2)$.

6) Т о п о л о г и ч е с к и е К. Объекты — топологич. многообразия, для к-рых определяются группы Ω_{Top}, Ω_{STop}. Рассматривая группу Top_n, сохраняющих начало координат гомеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^n$ на себя, можно определить пространства $BTop$ и $TBTop_n$. Группы $\pi_i(TBTop)$ и $H^*(BTop, \mathbb{Z}_2)$ вычислены. Однако изоморфизм $\Omega^i_{Top} \approx \pi_i(TBTop)$ установлен при всех i, кроме $i=4$. Отсутствие доказательства этого изоморфизма связано с тем, что теорема трансверсальности, на к-рой основан изоморфизм $\Omega^i_{B,\varphi} \approx \pi_i(T(B, \varphi))$, для топологич. многообразий в общем случае не доказана (но и не опровергнута, 1978).

7) К. к о м п л е к с о в П у а н к а р е Ω_G, Ω_{SG}. Объекты — комплексы с *Пуанкаре двойственностью*, бордантность — соответствующее отношение эквивалентности. Такие комплексы имеют нормальное сферич. расслоение, к-рое индуцируется из универсального расслоения над BG_N (или BSG_N). Здесь G_N (соответственно SG_N) — *H-пространство* гомотопич. эквивалентностей (соответственно степени 1) сферы S^N на себя. Возникающие спектры Тома *TBG* и *TBSG* имеют конечные гомотопич. группы, в то время как сигнатура задает нетривиальный гомоморфизм $\sigma : \Omega^{4k}_{SG} \to \mathbb{Z}$, так что отображение $\Omega^i_{SG} \to \pi_{i+N}(TBG_N)$ заведомо не изоморфизм.

Еще одну серию примеров дают К. многообразий с особенностями специального типа. На этом пути можно построить теорию К., совпадающую с обычной теорией сингулярных когомологий, и теорию К., совпадающую со связной *K*-теорией.

Второй этап развития теории К. связан с изучением К. как специфических обобщенных теорий когомологии. Пусть F — одно из полей $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{H}$, GF — соответствующая серия групп ($G\mathbb{R}_n = O_n$, $G\mathbb{C}_n = U_n$, $G\mathbb{H}_n = Sp_n$) и GF^* — соответствующая теория К. Мультипликативная обобщенная теория когомологий h^* наз. *F*-о р и е н т и р у е м о й, если любое *F*-векторное расслоение h^*-ориентируемо или, эквивалентно, каноническое одномерное *F*-векторное расслоение $\xi \to FP^\infty$, где FP^∞ — проективное пространство, h^* ориентируемо. *F*-ориентацией теории h^* наз. h^*-ориентация $U_h(\xi) \in h^*(FP^\infty)$ расслоения ξ, и теория с выбранной ориентацией наз. о р и е н т и р о в а н н о й. Теории *GF*-К. имеют канонич. ориентацию благодаря отождествлению $FP^\infty = TBGF_1$. Теория GF^* является универсальной в классе *F*-ориентированных теорий, т. е. для любой *F*-ориентированной теории h^* с *F*-ориентацией $U_h(\xi)$ существует единственный мультипликативный гомоморфизм теорий $\varphi^h : GF^* \to h^*$, при к-ром канонич. ориентация теории GF^* переходит в U_h. При этом, когда F_0 — одно из полей $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, то для любой F_0-ориентированной теории h^* и любого конечного CW-комплекса X существуют спектральные последовательности $E^r_{p,q}(X)$ и $E^{p,q}_r(X)$ с

$$E^2_{p,q}(X) = \mathrm{Tor}^{\Omega_{GF_0}}_{p,q}(GF^*_0(X),\ h^*(\text{точка})),$$

$$E^{p,q}_2(X) = \mathrm{Ext}^{p,q}_{\Omega_{GF_0}}(GF^*_0(X),\ h^*(\text{точка})),$$

сходящиеся к $h^*(X)$ и естественные по X и h^*, где h^*(точка) сделано Ω_{GF_0}-модулем посредством гомоморфизма φ^h(точка). Если h_* — теория гомологий,

двойственная F-ориентированной теории когомологий h^*, то имеется гомоморфизм $\varphi_h : GF_* \to h_*$. В случае, когда h_* — обычная теория гомологий, он совпадает с гомоморфизмом Стинрода—Тома реализации циклов (см. *Стинрода задача*).

Наиболее важные и удачные применения теории К.: доказательство теоремы Атьи—Зингера об индексе эллиптич. оператора и общей теоремы Римана—Роха; изучение неподвижных точек действий групп; классификация гладких (кусочно линейных) многообразий данного гомотопич. типа; доказательство теоремы о топологич. инвариантности рациональных классов Понтрягина и решение проблемы триангулируемости топологич. многообразия.

Лит.: [1] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [2] Коннер П., Флойд Э., Гладкие периодические отображения, пер. с англ., М., 1969; [3] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 4, с. 855—951; [4] Вгöcker T., Dieck T., Kobordismentheorie, B., 1970; [5] Бухштабер В. М., Итоги науки и техники. Алгебра. Геометрия. Топология, т. 13, М., 1975, с. 231—72. См. также лит. при статье *Бордизм*. *Ю.Б.Рудяк.*

h-КОБОРДИЗМ — *бордизм* $(W;\ M_0,\ M_1)$, где W — компактное многообразие, край к-рого ∂W — объединение непересекающихся замкнутых многообразий M_0 и M_1, являющихся *деформационными ретрактами* W. Простейший пример — тривиальный h-К.

$$(M\times[0,\ 1];\ M\times\{0\},\ M\times\{1\}).$$

Многообразия M_0 и M_1 наз. h-к о б о р д а н т н ы м и, если существует h-К. W, соединяющий их.

Если $(W;\ M_0,\ M_1)$ — такой h-К., что W, M_0, M_1 — односвязные дифференцируемые (кусочно линейные) многообразия и $\dim W\geqslant 6$, то W диффеоморфно (кусочно линейно изоморфно) $M_0\times[0,\ 1]$: $W\approx M_0\times[0,\ 1]$ и, следовательно, $M_0\approx M_1$ (т е о р е м а о б h-к о б о р д и з м е [4]). Таким образом, установление изоморфизма $M_0\approx M_1$ сводится к установлению их h-кобордантности, что удается сделать методами алгебраич. топологии, и по этой причине эта теорема является основным средством перехода от гомотопич. классификации односвязных многообразий к их классификации с точностью до диффеоморфизма (кусочно линейного изоморфизма). Так, если W^n, $n\geqslant 6$,— дифференцируемое компактное многообразие односвязным краем, то оно диффеоморфно диску D^n. Если M^n, $n\geqslant 5$,— многообразие, гомотопически эквивалентное сфере S^n, то оно гомеоморфно (и даже кусочно линейно изоморфно) сфере S^n (о б о б щ е н н а я г и п о т е з а П у а н к а р е).

Теорема об h-К. позволила классифицировать дифференцируемые структуры на сфере, S^n, $n\geqslant 5$ [6], а также на гомотопическом типе произвольного замкнутого односвязного многообразия [1].

В случае h-К. $(W;\ M_0,\ M_1)$ с $\pi_1 W\neq\{1\}$ диффеоморфизма $W\approx M_0\times[0,\ 1]$, вообще говоря, нет.

Все h-К. $(W;\ M_0,\ M_1)$ с $\dim W\geqslant 6$ и фиксированным M_0 классифицируются нек-рой абелевой группой — *Уайтхеда группой* $Wh\pi_1$ группы $\pi_1 M_0$. Данному h-К. соответствует элемент $Wh\pi_1$, являющийся инвариантом пары $(W,\ M_0)$; он обозначается $\tau(W,\ M_0)$ и наз. к р у ч е н и е м (иногда к р у ч е н и е м У а й т х е д а) данного h-К. Если $\tau(W,\ M_0)=0$ (или равносильно $\tau(W,\ M_1)=0$), то h-К. наз. s-к о б о р д и з м о м. Если $(W;\ M_0,\ M_1)$ — такой h-К., что $\dim W\geqslant 6$, то кручение $\tau(W,\ M_0)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда $W\approx M_0\times[0,\ 1]$ (т е о р е м а о б s-к о б о р д и з м е). Теорема об h-К. есть частный случай этой теоремы ввиду $Wh\ \{1\}=0$. Теорема об s-кобордизме справедлива и для топологич. многообразий [9].

Для h-К. $(W;\ M_0,\ M_1)$ наряду с $\tau(W,\ M_0)$ определяется кручение $\tau(W,\ M_1)$; если данный h-К. ориентируем, то $\tau(W,\ M_0)=(-1)^{n-1}\tau^*(W,\ M_1)$, где $n=\dim W$, а эле-

мент τ^* сопряжен к τ в группе $Wh\pi_1$. В частности, если π_1 конечна и абелева, то $\tau^*=\tau$.

Если два h-К. $(W;\ M_0,\ M_1)$ и $(W';\ M_1,\ M_2)$ склеены по M_1 в h-К. $(W\cup W';\ M_0,\ M_1)$, то

$$\tau(W\cup W',\ M_0)=\tau(W,\ M_0)+\tau(W',\ M_1).$$

Если склеить две копии W по M_1, причем $\dim W$ нечетно и $\pi_1=\mathbb{Z}_5$, то получится h-К. $(2W,\ M_0,\ M_0')$, где $M_0=M_0'$ при отсутствии диффеоморфизма $W\approx M_0\times[0,\ 1]$, т. е. из $M_0\approx M_1$ не следует тривиальность связывающего их h-К.

Если M_0—замкнутое связное многообразие, и $\dim M_0\geqslant 5$, то для любого $\tau\in Wh\pi_1 M_0$ существует h-К. $(W;\ M_0,\ M_1)$ с $\tau(W,\ M_0)=\tau$. Если h-К. $(W;\ M_0,\ M_1)$ и $(W';\ M_0,\ M_1')$ с $\dim W\geqslant 6$ имеют одинаковые кручения $\tau(W,\ M_0)=\tau(W',\ M_0)$, то $W\approx W'$ rel M_0. При четной $\dim M_0$ и конечной $\pi_1 M_0$ существует конечное множество различных многообразий, h-кобордантных M_0, в случае нечетной размерности это не так.

Если гомотопич. эквивалентные многообразия M_1 и M_2 вложены в $\mathbb{R}^N$ с достаточно большим N, и их нормальные расслоения тривиальны, то многообразия $M_1\times S^N$ и $M_2\times S^N$ h-кобордантны. Если же M_1 и M_2 — одного и того же *простого гомотопического типа*, т. е. кручение этой гомотопич. эквивалентности равно нулю, то $M_1\times S^N\approx M_2\times S^N$.

Для h-К. $(W;\ M_0,\ M_1)$ и замкнутого многообразия P имеет место h-К. $(W\times P,\ M_0\times P,\ M_1\times P)$, причем $\tau(W\times P,\ M_0\times P)=\tau(W,\ M_0)\chi(P)$, где $\chi(P)$ — эйлерова характеристика P. Если $\dim W\geqslant 5$ и $P=S^1$, то

$$W\times S^1\approx M_0\times S^1\times[0,\ 1]\approx M_1\times S^1\times[0,\ 1].$$

В частности, $M_0\times S^1\approx M_1\times S^1$; кроме того, замкнутые многообразия M_0 и M_1 одинаковой размерности $\geqslant 5$ h-кобордантны тогда и только тогда, когда $M_0\times\mathbb{R}^1\approx M_1\times\mathbb{R}^1$.

Структура h-К. при $n<6$ полностью не выяснена (1978). Так, имеет место [8] следующий отрицательный результат: существует h-К. $(W;\ T^4,\ T^4)$, где T^4 — четырехмерный тор, где нет диффеоморфизма $W\approx T^4\times[0,\ 1]$, и поскольку $Wh\pi_1 T^4=0$, то теорема об s-кобордизме при $n=5$ неверна.

Лит.: [1] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 365—474; [2] Милнор Дж., Теорема об h-кобордизме, пер. с англ., М., 1969; [3] его же, «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 3—43; [4] Смейл С., там же, 1964, т. 8, № 4, с. 95—108; [5] Milnor J., «Bull. Soc. Math. France», 1959, t. 87, p. 439—44; [6] Kervaire M., Milnor J., «Ann. Math.», 1963, v. 77, p. 504—37; [7] Mazur B., там же, p. 232—49; [8] Siebenmann L., Topology of Manifolds, Chi., 1969; [9] Kirby R., Siebenmann L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 75, p. 742—49; [10] Kervaire M., «Lect. Notes Math.», 1967, v. 48, p. 83—95; [11] Thom R., Topologia algebraico, Méx., 1958; [12] Рурк К., Сандерсон Б., Введение в кусочно линейную топологию, пер. с англ., М., 1974.

Ю. Б. Рудяк.

КОВАРИАНТ тензора t на конечномерном векторном пространстве V — такое отображение φ пространства T тензоров фиксированного типа на V в некоторое пространство S ковариантных тензоров на V, что $\varphi(g(t))=g(\varphi(t))$ для любого невырожденного линейного преобразования g пространства V и любого $t\in T$. Это — определение коварианта тензора относительно полной линейной группы $GL(V)$. Если же g не любое, а принадлежит фиксированной подгруппе $G\subset GL(V)$, то получается определение К. тензора относительно группы G, или просто К. группы G.

На координатном языке К. тензора на конечномерном векторном пространстве представляет собой набор функций

$$s_i=\varphi_i(t_1,\ \ldots,\ t_n),\quad i=1,\ \ldots,\ m,$$

от координат тензора t, обладающий свойством: при изменении набора чисел $t_1,\ldots,\ t_n$, определенным невырожденным линейным преобразованием $g\in G$, набор

чисел $s_1, \ldots, s_m$ меняется так же, как меняются координаты нек-рого ковариантного тензора s на V при преобразовании g. Аналогично (рассматривая вместо одного тензора t конечный набор тензоров) определяется совместный К. системы тензоров. Если же вместо ковариантности тензора s требовать контравариантность, получится понятие контравариантa.

Понятие К. возникло в классической теории инвариантов и является частным случаем понятия *комитанта*. Координаты любого тензора на V могут рассматриваться как коэффициенты соответствующей формы от нескольких контравариантных и ковариантных векторов (т. е. векторов пространства V и его сопряженного пространства V^*). Пусть тензору t соответствует таким образом форма f, а его ковариантy s — форма h. Тогда h — форма только от контравариантных векторов. В классич. теории инвариантов форма h называлась К. формы f. Особенно часто рассматривался случай, когда h — форма от одного контравариантного вектора. Степень этой формы наз. порядком К. Если коэффициенты формы h являются многочленами от коэффициентов формы f, то наивысшая из степеней этих многочленов наз. степенью К.

Пример. Пусть $f = \sum a_{i_1 \ldots i_r} x^{i_1} \ldots x^{i_r}$ — n-арная форма порядка r, где $x^1, \ldots, x^r$ — координаты контравариантного вектора. Форма f соответствует симметрическому ковариантному тензору t r-й валентности с координатами $a_{i_1 \ldots i_r}$. Пусть

$$h = \frac{1}{r^n (r-1)^n} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{(\partial x^n)^2} \end{vmatrix}.$$

Тогда коэффициенты формы h являются координатами нек-рого ковариантного тензора s. Тензор s (форма h) есть К. тензора t (формы f). Форма h наз. гессианом формы f.

Лит.: [1] Гуревич Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, М.— Л., 1948.

В. Л. Попов.

КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — обобщение понятия производной для полей различных геометрических объектов на многообразиях — векторов, тензоров, форм и т. д. Это — линейный оператор ∇_X, действующий на модуле тензорных полей T^r_s данной валентности и определяемый по векторному полю X на многообразии M следующими свойствами:

1) $\nabla_{fX+gY} U = f \nabla_X U + g \nabla_Y U$,

2) $\nabla_X (fU) = f \nabla_X U + (Xf)\, U$,

где $U \in T^r_s(M)$, f, g — дифференцируемые функции на M. По линейности это отображение распространяется на алгебру тензорных полей, причем для тензорного произведения $\otimes$ тензоров U и V:

$$\nabla_X (U \otimes V) = \nabla_X U \otimes V + U \otimes \nabla_X V.$$

Таким образом, отображение ∇_X является *дифференцированием* алгебры тензорных полей; оно обладает дополнительными свойствами перестановочности с операциями свертки, альтернирования и симметрирования тензоров.

Свойства 1) и 2) отображения ∇_X позволяют ввести на M линейную связность (и соответствующее параллельное перенесение) и на ее основе дать локальное определение К. п., к-рая, будучи распространенной на все многообразие, совпадает с определенным здесь оператором ∇_X; см. также *Ковариантное дифференцирование*.

И. Х. Сабитов.

КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ, абсолютное дифференцирование, — операция, инвариантным образом определяющая понятия

производной и дифференциала для полей геометрич. объектов на многообразиях — векторов, тензоров, форм и т. д. Основные понятия теории К. д. (под названием абсолютное дифференциальное исчисление) были даны в конце 19 в. в работах Г. Риччи (G. Ricci) и в наиболее полной форме изложены им в 1901 в совместной работе его с Т. Леви-Чивита (T. Levi-Civita) (см. [1]). Сначала теория К. д. строилась на римановых многообразиях и предназначалась в первую очередь для исследования инвариантов дифференциальных форм. Впоследствии оказалось, что определение и свойства К. д. естественным образом связаны с введенными позже понятиями *связности* и *параллельного перенесения* на многообразиях, и теперь теория К. д. строится в общих рамках теории связностей. Как аппарат тензорного анализа, К. д. широко употребляется в теоретич. физике, особенно в общей теории относительности.

Пусть на n-мерном многообразии M введена аффинная связность и соответствующее параллельное перенесение векторов и вообще тензоров. Пусть X — гладкое векторное поле, $X_p \neq 0$, $p \in M$, и U — тензорное поле типа (r, s), т. е. r раз контравариантное и s раз ковариантное; ковариантной производной (относительно данной связности) тензорного поля U в точке $p \in M$ вдоль векторного поля X наз. тензор того же типа (r, s)

$$(\nabla_X U)_p = \lim_{t \to 0} \frac{\tau_t^{-1}(U_{x(t)}) - U_p}{t},$$

где $x(t)$ — точка интегральной кривой γ_X векторного поля X с начальным условием $x(0)=p$, U_p и $U_{x(t)}$ — локализации (значения) тензорного поля U в точках p и $x(t)$ соответственно, $\tau_t^{-1}(U_{x(t)})$ — результат параллельного перенесения тензора $U_{x(t)}$ вдоль γ_X из $x(t)$ в p. Таким образом, основная идея определения ковариантной производной тензорного поля U вдоль векторного поля X заключается в том, что ввиду отсутствия операций между тензорами U_p и $U_{x(t)}$, принадлежащими разным слоям тензорного расслоения над M, т. е. принадлежащими тензорным пространствам T_s^r над разными касательными к M плоскостями T_pM и $T_{x(t)}M$, в качестве «приращения» тензора U рассматривается разность между $U_p \in T_s^r(T_pM)$ и образом параллельно перенесенного в $T_s^r(T_pM)$ вдоль γ_X тензора $U_{x(t)} \in T_s^r(T_{x(t)}M)$, и дальше, как обычно, берется предел отношения этого «приращения» к приращению аргумента t. В частности, если для точек $x(t)$, близких к p, поле U получено параллельным перенесением тензора U_p вдоль γ_X, то $(\nabla_X U)_p = 0$, и тем самым в общем случае ковариантная производная поля U в точке p вдоль X определяет начальную скорость отличия поля U вдоль γ_X от результата параллельного перенесения U_p вдоль γ_X. Для тензорных полей нулевой валентности, т. е. для функций f из кольца дифференцируемых функций $\mathscr{T}$ на M

$$(\nabla_X f)_p = \lim_{t \to 0} \frac{f(x(t)) - f(p)}{t},$$

что приводит к совпадению $(\nabla_X f)_p$ с производной f по вектору X_p, т. е. с $X_p f$. При $X_p = 0$ для любого тензорного поля U, по определению, считается $(\nabla_X U)_p = 0$.

Введение ковариантной производной позволяет определить ковариантный дифференциал DU для тензорного поля U вдоль гладкой кривой $\gamma(t)$ как

$$(DU)_{\gamma(0)} = \left(\nabla_{\dot{\gamma}(t)} U\right)_{\gamma(0)} dt,$$

и его можно рассматривать как главную линейную часть «приращения» тензора U (в описанном выше смысле) при перемещении точки вдоль γ на бесконечно малый участок $d\gamma = \dot{\gamma}(0)dt$.

Знание $\nabla_X U$ для тензорного поля U типа (r, s) в каждой точке $p \in M$ вдоль каждого векторного поля X позволяет ввести два поля: 1) поле ковариантного дифференциала DU как тензорной 1-формы со значениями в модуле $T^r_s(M)$, определенной на векторах X по формуле $(DU)(X)=\nabla_X U$; 2) поле ковариантной производной ∇U как тензорного поля типа $(r, s+1)$, канонически соответствующего форме DU и действующего на 1-формах ω^i и векторах X_i по формуле

$$(\nabla U)(\omega^1, \ldots, \omega^r; X_1, \ldots, X_s, X) = \\ = (\nabla_X U)(\omega^1, \ldots, \omega^r; X_1, \ldots, X_s).$$

Обычно под ковариантным дифференциалом понимается не сама 1-форма DU, а ее значения на векторах X, и в таком толковании $(DU)(X)$ тоже превращается в тензорное поле типа (r, s), локализация к-рого, в частности, при $p=\gamma(0)$ и $X=\dot\gamma$ совпадает с введенным выше ковариантным дифференциалом $(DU)_{\gamma(0)}$ вдоль кривой $\gamma(t)$. Иногда ковариантная производная ∇U называется г р а д и е н т о м т е н з о р а U; а производная — ковариантным дифференциалом.

Если x^i — локальные координаты, $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ — базисные векторные поля, e^i — сопряженные базисные 1-формы, X^i и $U^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ — координаты векторного и тензорного полей в этих базисах, Γ^k_{ij} — коэффициенты введенной на M аффинной связности, то, обозначая через $\nabla_k U^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ или $U^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s,\ k}$ координаты тензорного поля ∇U, получают следующие выражения (для примера взяты $r=2$, $s=1$)

$$(\nabla_X U)^{i_1 i_2}_j = \\ = \left(\frac{\partial U^{i_1 i_2}_j}{\partial x_k} + \Gamma^{i_1}_{km} U^{mi_2}_j + \Gamma^{i_2}_{km} U^{i_1 m}_j - \Gamma^m_{kj} U^{i_1 i_2}_m \right) X^k \equiv \\ \equiv \nabla_k U_j{}^{i_1 i_2} X^k;$$

$$(DU_{\gamma(t)})^{i_1 i_2}_j = \nabla_k U^{i_1 i_2}_j dx^k,\ dx^k = \dot x^k\, dt,\ \gamma(t) = \{x^k(t)\},$$

$$DU = \left(U^{i_1 i_2}_{j,\,k} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e^j\right) e^k,\ \nabla U = U^{i_1 i_2}_{j,\,k} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e^j \otimes e^k,$$

$$\nabla_X U = (DU)(X) = U^{i_1 i_2}_{j,\,k} X^k e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e^j = C^3_2 (\nabla U \otimes X),$$

где C^3_2 — операция *свертки* по последним (третьему) контравариантному и (второму) ковариантному индексам.

Если M — аффинное пространство, x^i — аффинные координаты, то $(\nabla_X U)_p$ является обычной производной тензорного поля U по векторному полю X, $(\nabla_k U)_p$ — частными производными U в точке p по x^k, $(DU)_{\gamma(t)}$ — обычным дифференциалом U вдоль кривой $\gamma(t)$ и, таким образом, К. д. выступает как обобщение обычного дифференцирования с сохранением известных связей между частными производными и дифференциалами первого порядка.

Значение К. д. заключается в том, что оно дает удобный аналитический аппарат для изучения и записи свойств геометрич. объектов и операций в инвариантной форме. Напр., условие параллельного перенесения тензора U вдоль кривой γ дается уравнением $\nabla_{\dot\gamma} U = 0$, уравнение геодезической γ записывается в виде $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$, условие интегрируемости системы уравнений в ковариантных производных 1-го порядка сводится к нек-рому уравнению для альтернированной разности $\nabla_\lambda \nabla_\mu U - \nabla_\mu \nabla_\lambda U$; внешнее дифференцирование форм на многообразии и в расслоениях над ним можно также выразить через К. д., и т. д.

Определение ковариантных производных высших порядков дается индуктивно: $\nabla^m U = \nabla(\nabla^{m-1}U)$. Вообще говоря, получаемый при этом тензор $\nabla^m U$ не симметричен относительно последних ковариантных индексов; высшие ковариантные производные вдоль разных векторных полей также зависят от порядка дифференцирования. Альтернированные разности компонент ковариантных производных высших порядков выражаются через *кривизны тензор* R^i_{jkl} и *кручения тензор* S^i_{jk}, совместно характеризующих отличие многообразия M с данной связностью от аффинного пространства. Напр.,

$$\nabla_\lambda \nabla_\mu U^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} - \nabla_\mu \nabla_\lambda U^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} =$$

$$= \sum\nolimits_{k=1}^{r} R^{i_k}_{j\lambda\mu} U^{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} -$$

$$- \sum\nolimits_{k=1}^{s} R^{i}_{j_k \lambda\mu} U^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_{k-1} i j_{k+1} \dots j_s} - S^k_{\lambda\mu} \nabla_k U^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s},$$

(тождество Риччи)

$$\nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_X U = \Big(\sum\nolimits_{k=1}^{r} R^{i_k}_{j\lambda\mu} U^{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} -$$

$$- \sum\nolimits_{k=1}^{s} R^{i}_{j_k \lambda\mu} U^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_{k-1} i j_{k+1} \dots j_s} \Big) X^\lambda X^\mu +$$

$$+ \nabla_{[X,\,Y]} U^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s},$$

где $[X, Y]$ — коммутатор векторов X и Y, а

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma^i_{lj} - \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma^i_{kj} + \Gamma^i_{kp} \Gamma^p_{lj} - \Gamma^p_{kj} \Gamma^i_{lp},$$

$$S^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}.$$

Определение К. д. и его свойства остаются в силе и в более общем случае, когда вместо сечения U тензорного расслоения с аффинной связностью рассматривается сечение φ произвольного (действительного или комплексного) *векторного расслоения*, ассоциированного некому *главному расслоению* со связностью Γ и со структурной группой G, к-рая действует на слое своим представлением в группе невырожденных матриц. Существуют определения К. д. в более общей ситуации, когда расслоение не обязательно является векторным; общий смысл [9] этих определений заключается в аналитическом выражении параллельного перенесения объекта или параллельности определяющего его сечения как равенства нулю результата К. д. Подобные подходы имеются и для бесконечномерных многообразий.

Лит.: [1] Ricci G., Levi-Civita T., «Math. Ann.», 1901, Bd 54, № 1, S. 125—201; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1967; [3] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976; [4] Лихнерович А., Теория связности в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [5] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [6] Бишоп Р., Криттенден Р., Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967; [7] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [8] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry, v. 1—2, N. Y.—L., 1963—69; [9] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1969, М., 1971, с. 123—68; [10] Зуланке Р., Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения, пер. с нем., М., 1975.

И. Х. Сабитов.

КОВАРИАНТНЫЙ ВЕКТОР — элемент векторного пространства E^*, сопряженного к n-мерному векторному пространству E, то есть линейный функционал (линейная форма) на E. В упорядоченной паре (E, E^*) элемент пространства E наз. *контравариантным вектором*. В общей схеме построения тензоров К. в. отождествляется с ковариантным тензором валентности 1.

Координатная запись К. в. особенно проста, если в E и E^* выбраны так наз. взаимные, или дуальные,

базисы $e_1, \ldots, e_n$ в E и $e^1, \ldots, e^n$ в E^*, т. е. такие базисы, что $(e^i e_j) = \delta^i_j$ (где δ^i_j — *Кронекера символ*); тогда произвольный К. в. $\omega \in E^*$ представляется в виде $\omega = f_i e^i$ (суммирование по i от 1 до n), где f_i — значение линейной формы ω их вектора e_i. При переходе от взаимных базисов (e_i) и (e^j) к взаимным базисам $(e_{i'})$ и $(e^{j'})$ по формулам

$$e_{i'} = p^i_{i'} e_i, \quad e^{j'} = q^{j'}_i e^i, \quad p^i_{k'} q^{k'}_j = \delta^i_j,$$

координаты x^i контравариантного вектора $x = x^i e_i$ изменяются по контравариантному закону $x^{i'} = q^{i'}_i x^i$, а координаты f_i К. в. ω изменяются по ковариантному (созменяющемуся с базисом) закону $f_{i'} = p^i_{i'} t_i$.

Лит.: [1] Широков П. А., Тензорное исчисление, 2 изд., Казань, 1961; [2] Беклемишев Д. В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., 1971; [3] Схоутен Я. А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., М., 1965.

И. Х. Сабитов.

КОВАРИАНТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ — обобщение понятия дифференциала для полей различных геометрич. объектов. Это — тензорная 1-форма DU на многообразии со значениями в модуле тензорных полей U, определенных формулой

$$(DU)(X) = \nabla_X U,$$

где $\nabla_X U$ — *ковариантная производная* поля U вдоль X. См. также *Ковариантное дифференцирование*.

И. Х. Сабитов.

КОВАРИАНТНЫЙ ТЕНЗОР валентности $s \geqslant 1$ — тензор типа $(0, s)$, элемент тензорного произведения $T_s(E) = E^* \otimes \ldots \otimes E^*$ s экземпляров пространства E^*, сопряженного (дуального) к векторному пространству E над полем K. Относительно операции сложения К. т. одной и той же валентности и умножения их на скаляр $T_s(E)$ является в свою очередь векторным пространством над K. Пусть E — конечномерно и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в E, а $e^1, \ldots, e^n$ — сопряженный с ним базис в E^*. Тогда $\dim T_s(E) = n^s$ и базис в $T_s(E)$ состоит из всевозможных разложимых тензоров вида $e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_s}$, $1 \leqslant i_1, \ldots, i_s \leqslant n$. Любой К. т. $t \in T_s(E)$ может быть представлен в виде $t = t_{i_1 \ldots i_s} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_s}$. Числа $t_{i_1 \ldots i_s}$ наз. координатами или компонентами К. т. относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$ в E. При изменении базиса в E по формулам $e_{i'} = a^i_{i'} e_i$ и соответственно базиса в $T_s(E)$ координаты К. т. t изменяются по так наз. ковариантному закону

$$t_{i'_1 \ldots i'_s} = a^{i_1}_{i'_1} \ldots a^{i_s}_{i'_s} t_{i_1 \ldots i_s}.$$

При валентности $s \geqslant 2$ К. т. наз. *ковариантным вектором*; при $s \geqslant 2$ К. т. можно инвариантным образом связать с s-линейным отображением прямого произведения $E^s = E \times \ldots \times E$ (s раз) в K, приняв координаты К. т. t относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$ за значения r-линейного отображения $\tilde{t}$ на базисных в E^s векторах $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_s})$, и обратно; поэтому иногда К. т. определяют как полилинейный функционал на E^s.

Лит. см. при статье *Ковариантный вектор*.

И. Х. Сабитов.

КОВАРИАЦИОННАЯ МАТРИЦА — матрица, образованная из попарных ковариаций нескольких случайных величин; точнее, для k-мерного случайного вектора $X = (X_1, \ldots, X_k)$ К. м. наз. квадратная матрица $\Sigma = \mathsf{E}[(X - \mathsf{E}X)(X - \mathsf{E}X)^T]$, где $\mathsf{E}X = (\mathsf{E}X_1, \ldots, \mathsf{E}X_k)$ — вектор средних значений. Компоненты К. м. равны

$$\sigma_{ij} = \mathsf{E}[(X_i - \mathsf{E}X_i)(X_j - \mathsf{E}X_j)] = \operatorname{cov}(X_i, X_j),$$
$$i, j = 1, \ldots, k,$$

и при $i=j$ совпадают с $\mathsf{D}X_i$ (т. е. на главной диагонали К. м. находятся дисперсии величин X_i). К. м. представляет собой симметричную неотрицательно определенную матрицу. Если К. м. является положительно определенной, то распределение X — невырожденное распределение, в противном случае — вырожденное. Для случайного вектора X К. м. играет роль дисперсии. Если дисперсии случайных величин $X_1, \ldots, X_k$ равны 1, то К. м. для вектора $X=(X_1, \ldots, X_k)$ совпадает с *корреляционной матрицей*.

Выборочная К. м. для выборки $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$, где $X^{(m)}$, $m=1, \ldots, n$ — независимые одинаково распределенные случайные k-мерные векторы, состоит из оценок дисперсий и ковариаций:

$$S=\frac{1}{n-1}\sum_{m=1}^{n}(X^{(m)}-\bar{X})\,(X^{(m)}-\bar{X})^{T},$$

где $\bar{X}$ — вектор арифметического среднего $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$. Если случайные векторы $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ имеют нормальное распределение с К. м. Σ, то S является оценкой максимального правдоподобия Σ; в этом случае совместное распределение элементов матрицы $(n-1)S$ наз. *Уишарта распределением*, оно является одним из основных распределений в многомерном статистич. анализе, с помощью к-рого проверяются гипотезы о К. м. Σ.

А. В. Прохоров.

КОВАРИАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ — совокупность методов математич. статистики, относящихся к анализу моделей зависимости среднего значения нек-рой случайной величины Y от набора неколичественных факторов F и, одновременно, от набора количественных факторов x. По отношению к Y переменные x наз. с о п у т с т в у ю щ и м и; факторы F задают сочетания условий качественной природы, при к-рых получены наблюдения Y и x, и описываются с помощью так наз. и н д и к а т о р н ы х переменных; среди сопутствующих и индикаторных переменных могут быть как случайные, так и не случайные (контролируемые в эксперименте); если случайная величина Y является вектором, то говорят о многомерном К. а.

Основные теоретические и прикладные проблемы К. а. относятся к линейным моделям. В частности, если анализируется схема из n наблюдений $Y_1, \ldots, Y_n$ с p сопутствующими переменными и k возможными типами условий эксперимента, то линейная модель соответствующего К. а. задается уравнениями

$$Y_i=\sum_{j=1}^{k} f_{ij}\theta_j+\sum_{s=1}^{p}\beta_s(F_i)\,x_i^{(s)}+\varepsilon_i(F_i), \qquad (*)$$

$$i=1, \ldots, n,$$

где индикаторные переменные f_{ij} равны 1, если j-е условие эксперимента имело место при наблюдении Y_i, и равны 0 в ином случае; коэффициенты θ_j определяют эффект влияния j-го условия; $x_i^{(s)}$ — значение сопутствующей переменной $x^{(s)}$, при к-рой получено наблюдение Y_i, $i=1, \ldots, n$; $s=1, \ldots, p$; $\beta_s(F_i)$ — значения соответствующих коэффициентов регрессии Y по $x^{(s)}$, вообще говоря, зависящие от конкретного сочетания условий эксперимента, т. е. от вектора $F_i=(f_{i1}, \ldots, f_{ik})$; $\varepsilon_i(F_i)$ — случайные ошибки, имеющие нулевые средние значения. Основное содержание К. а.— в построении статистич. оценок для неизвестных параметров $\theta_1, \ldots, \theta_k$; $\beta_1, \ldots, \beta_p$ и статистич. критериев для проверки различных гипотез относительно значений этих параметров.

Если в модели (*) постулировать априори $\beta_1=\ldots=\beta_p=0$, то получится модель *дисперсионного анализа*; если из (*) исключить влияние неколичественных факторов (положить $\theta_1=\ldots=\theta_k=0$), то получится модель *регрессионного анализа*. Своим названием К. а. обязан тому обстоятельству, что в его вычислениях исполь-

зуются разбиения *ковариации* величин Y и X точно так же, как в дисперсионном анализе используются разбиения суммы квадратов отклонений Y.

Лит.: [1] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] «Biometrics», 1957, v. 13, № 3. *С. А. Айвазян.*

КОВАРИАЦИЯ — числовая характеристика совместного распределения двух случайных величин, равная математич. ожиданию произведения отклонений случайных величин от их математич. ожиданий. К. определяется для случайных величин X_1 и X_2 с конечными дисперсиями и обычно обозначается $\operatorname{cov}(X_1, X_2)$. Таким образом,

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \mathsf{E}\,[(X_1 - \mathsf{E}X_1)(X_2 - \mathsf{E}X_2)],$$

при этом $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \operatorname{cov}(X_2, X_1)$; $\operatorname{cov}(X, X) = \mathsf{D}X$. К. естественным образом появляется в выражении для дисперсии суммы случайных величин

$$\mathsf{D}(X_1 + X_2) = \mathsf{D}X_1 + \mathsf{D}X_2 + 2\operatorname{cov}(X_1, X_2).$$

Если величины X_1 и X_2 независимы, то $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$. К. служит характеристикой взаимозависимости случайных величин, с помощью К. определяется *корреляции коэффициент*. В математич. статистике оценкой К. служит выборочная К., вычисляемая по формуле

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_1^{(i)} - \overline{X}_1)(X_2^{(i)} - \overline{X}_2),$$

где $(X_1^{(i)}, X_2^{(i)})$, $i = 1, \ldots, n$, — независимые величины, а $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ — арифметические средние. *А. В. Прохоров.*

КОВАРИАЦИЯ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ — понятие в *дисперсионном методе*, вводимое при сравнении чисел решений уравнений

и

$$n = \varphi + D'\nu \tag{1}$$

$$n = \psi + D'\nu, \tag{2}$$

где φ и ψ принадлежат к некоторым последовательностям натуральных чисел, D' пробегает некоторую заданную систему чисел сегмента

$$(D) = [D_1, D_1 + D_2],$$

ν пробегает систему чисел сегмента

$$(\nu) = [\nu_0, \nu_0 + \nu_0'].$$

Пусть

$$U_1(m) = \sum_{\varphi = m} 1, \quad U_2(m) = \sum_{\psi = m} 1,$$

тогда дисперсия разности решений уравнений (1) и (2) будет

$$V' = \sum_{D' \in (D)} \left(\sum\nolimits_1' - \sum\nolimits_2'\right)^2,$$

где

$$\sum\nolimits_1' = \sum_{\nu \in (\nu)} U_1(n - D'\nu), \quad \sum\nolimits_2' = \sum_{\nu \in (\nu)} U_2(n - D'\nu)^2.$$

Применяя идею И. М. Виноградова по сглаживанию двойных сумм, можно распространить суммирование по D' на все D из (D). Дисперсия при этом может только увеличиться; таким образом

$$V' \leqslant V = V_1 - 2V_2 + V_3,$$

где

$$V_1 = \sum_{D \in (D)} \left(\sum\nolimits_1\right)^2,$$

$$V_3 = \sum_{D \in (D)} \left(\sum\nolimits_2\right)^2,$$

$$V_2 = \sum_{D \in (D)} \left(\sum\nolimits_1 \sum\nolimits_2\right);$$

здесь

$$\sum_1 = \sum_{\nu \in (\nu)} U_1 (n - D\nu),$$

$$\sum_2 = \sum_{\nu \in (\nu)} U_2 (n - D\nu).$$

По аналогии с теоретико-вероятностными концепциями выражение V_2 наз. ковариацией числа решений уравнений (1) и (2). Асимптотический расчет V_1, V_3 и ковариации V_2 может показать, что дисперсия V' относительно мала, а это существенно при рассмотрении аддитивных задач, приводимых к уравнениям (1) и (2).

Лит.: [1] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961. *Б. М. Бредихин.*

КОГЕРЕНТНОЕ КОЛЬЦО — кольцо, в к-ром каждый конечно порожденный левый идеал является конечно представимым, т. е. фактормодулем конечно порожденного свободного модуля по конечно порожденному свободному подмодулю. Такое К. к. наз. когерентным слева кольцом, аналогично, но с помощью правых идеалов, может быть определено когерентное справа кольцо. Когерентное слева кольцо R может быть определено также любым из следующих двух эквивалентных условий: 1) каждый левый конечно порожденный подмодуль конечно представимого R-модуля конечно представим; 2) прямое произведение левых плоских R-модулей — левый плоский R-модуль.

Многие конструкции, известные для модулей над *нётеровыми кольцами*, оказались осуществимыми и для модулей над К. к. Напр., всякий конечно порожденный модуль над К. к. обладает проективной резольвентой из конечно порожденных модулей. В то же время класс К. к. шире класса нётеровых колец, так как включает в себя, напр., все *регулярные кольца* (в смысле Неймана) и кольца многочленов над нётеровыми кольцами от любого (конечного или бесконечного) числа переменных.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *В. Е. Говоров.*

КОГЕРЕНТНЫЕ ЧИСЛА — натуральные числа, отличающиеся друг от друга только квазипростыми множителями (см. *Квазипростое число*). При решении *аддитивных проблем* часто используется тот факт, что числа решений некоторых аддитивных уравнений, относящихся к различным К. ч., асимптотически совпадают. *Б. М. Бредихин.*

КОГЕРЕНТНЫЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПУЧОК — когерентный пучок модулей на алгебраич. многообразии или схеме. Структурный пучок нётеровой схемы и, в частности, алгебраич. многообразия является когерентным.

К. а. п.— удобное средство исследования алгебраич. многообразий. Интуитивно К. а. п. соответствуют представлению о непрерывной алгебраич. системе линейных пространств на многообразии (см. *Векторное расслоение* на алгебраическом многообразии) и возникают при рассмотрении линейных и алгебраич. семейств дивизоров, вложений многообразия в проективное пространство, дифференциальных форм, векторных полей и автоморфизмов, деформаций многообразий и подмногообразий, одним словом — при линеаризации всевозможных задач алгебраич. геометрии (см. [3]). Результаты при этом формулируются в терминах когомологий К. а. п. Теория когомологий К. а. п. включает: а) *конечности теоремы* (в алгебраической геометрии), утверждающие конечномерность пространств когомологий $H^i(X, \mathcal{F})$, $i \geqslant 0$, когерентного пучка $\mathcal{F}$ на полном многообразии X; б) *Римана — Роха теорему*, вычисляющую характеристику Эйлера — Пуанкаре К. а. п.; в) теоремы об обращении в нуль высших когомологий типа теоремы Серра (см. *Аффинная схема*) или *Кодаиры теоремы* (см.

[4], [5]); г) теоремы двойственности (см. *Двойственность* в алгебраической геометрии), связывающие i-мерные и $(n-i)$-мерные когомологии пучков на гладком многообразии размерности n; д) *Кюннета формулы*, выражающие когомологии некоторых пучков на произведении многообразий; е) сравнения теоремы в алгебраич. геометрии с другими теориями когомологий — аналитическими, формальными, этальными; ж) теорию *локальных когомологий*, полезную при изучении К. а. п. на неполных многообразиях. Одно из важнейших ее применений относится к *Лефшеца теореме*, сравнивающей свойства многообразия и его гиперплоского сечения.

Многие результаты обобщаются на случай, когда одно многообразие X заменяется семейством многообразий, т. е. на случай морфизма $f: X \to Y$. Пространства когомологий заменяются при этом пучками $R^n f_*$ производных от функтора прямого образа f_*; большую роль здесь играет поведение этих функторов при *замене базы*.

См. также *Квазикогерентный пучок*, *Когомологии* со значениями в пучке.

Лит.: [1] Серр Ж.-П., в сб.: Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1958, с. 372—450; [2] Grothendieck A., Eléments de géométrie algébrique, t. 3, P., 1961 (Publs math. IHES, № 11); [3] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [4] Кодаира К., «Математика», 1958, т. 2, № 6, с. 126—31; [5] Mumford D., «Amer. J. Math.», 1967, v. 89, № 1, p. 94—104; [6] Итоги науки и техники. Алгебра. Геометрия. Топология, т. 10, М., 1972, с. 47—112. *В. И. Данилов.*

КОГЕРЕНТНЫЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПУЧОК — когерентный пучок $\mathcal{O}$-модулей на *аналитическом пространстве* $(X, \mathcal{O})$. Пространство $(X, \mathcal{O})$ наз. когерентным, если $\mathcal{O}$ — когерентный пучок колец. Любое аналитич. пространство над алгебраически замкнутым полем когерентно. Важнейшими примерами К. а. п. на таком пространстве $(X, \mathcal{O})$ являются любой локально свободный пучок (т. е. аналитич. пучок, локально изоморфный пучку $\mathcal{O}^p$), а также пучок идеалов аналитического множества $Y \subset X$, т. е. пучок ростков аналитич. функций, равных 0 на Y [1].

Если $\mathcal{F}$ — К. а. п. на комплексном аналитич. пространстве $(X, \mathcal{O})$, то пространство его сечений $\Gamma(X, F)$ снабжается естественной топологией, превращающей его в пространство Фреше, если X сепарабельно. Для $F=\mathcal{O}$ эта топология совпадает с топологией равномерной сходимости аналитич. функций на компактах. При этом $\mathcal{F}$ превращается в пучок Фреше, т. е. для любых открытых множеств $U \subset V \subset X$ отображение ограничения $\Gamma(V, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ непрерывно. Аналитич. гомоморфизм когерентных пучков $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ порождает непрерывное линейное отображение $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G})$. Если $\mathcal{F}$ — К. а. п. на X и M — подмодуль в $\mathcal{F}_x$, $x \in X$, то для любой окрестности U точки x подмодуль $\{s \in \Gamma(U, \mathcal{F}) | s(x) \in M\}$ замкнут в $\Gamma(U, \mathcal{F})$. Пространства когомологий $H^p(X, \mathcal{F})$ также обладают естественной топологией, к-рая, вообще говоря, не отделима для $p>0$ (они являются факторпространствами пространств Фреше) [2], [4].

К. а. п. были введены в связи с задачами теории аналитич. функций в областях пространства $\mathbb{C}^n$ (см. [3], [5]). Впоследствии К. а. п. и их когомологии стали основным аппаратом глобальной теории аналитич. пространств. Важную роль в этой теории играют критерии обращения в 0 когомологий со значениями в К. а. п. (см. *Кодаиры теорема*, *Обильное векторное расслоение*, *Штейна пространство*), а также критерии их конечномерности и отделимости (см. *Конечности теоремы* в теории аналитических пространств).

См. также *Векторное аналитическое расслоение*, *Двойственность* в теории аналитических пространств.

Лит.: [1] Abhyankar S. S., Local analytic geometry, N. Y.— L., 1964; [2] Bănică C., Stănăşilă O., Metode algebrice în teoria globală a spaţiilor complexe, Buc., 1974; [3] Cartan H., «Bull. Soc. math. France», 1950, t. 78, p. 28—64; [4] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [5] Ока К., «Bull. Soc. math. France», 1950, t. 78, p. 1—27.

А. Л. Онищик.

КОГЕРЕНТНЫЙ ПУЧОК на окольцованном пространстве $(X, \mathcal{O})$ — пучок модулей $\mathcal{F}$ над пучком колец $\mathcal{O}$, обладающий следующими свойствами: 1) $\mathcal{F}$ — пучок конечного типа, т. е. локально порождается над $\mathcal{O}$ конечным числом сечений; 2) ядро любого гомоморфизма пучков модулей $\mathcal{O}^p|_U \to \mathcal{F}|_U$ над открытым множеством $U \subset X$ является пучком конечного типа. Если в точной последовательности $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$ пучков $\mathcal{O}$-модулей два из трех пучков $\mathcal{F}_i$ когерентны, то и третий пучок когерентен. Если $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{S}$ — гомоморфизм когерентных пучков $\mathcal{O}$-модулей, то $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Coker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$ — также когерентные пучки. Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{S}$ когерентны, то $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{S}$ и $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{S})$ также когерентны [4].

Структурный пучок $\mathcal{O}$ наз. когерентным пучком колец, если $\mathcal{O}$ когерентен как пучок модулей над самими собой, что сводится к выполнению условия 2). Если $\mathcal{O}$ — когерентный пучок колец, то пучок $\mathcal{O}$-модулей $\mathcal{F}$ когерентен тогда и только тогда, когда каждая точка пространства X обладает окрестностью U, над которой существует точная последовательность пучков $\mathcal{O}$-модулей:

$$\mathcal{O}^p | U \to \mathcal{O}^q | U \to \mathcal{F} | U \to 0$$

[4]. Далее, при этом условии для любых когерентных $\mathcal{F}, \mathcal{S}$ пучки $\operatorname{Ext}^p_{\mathcal{O}}(F, \mathcal{S})$ когерентны для всех p (см. [2]).

Основными классами окольцованных пространств с когерентным структурным пучком $\mathcal{O}$ являются: аналитич. пространства над алгебраически замкнутым полем [1], нётеровы схемы и, в частности, алгебраич. многообразия [4]. Классический частный случай представляет собой пучок $\mathcal{O}$ ростков голоморфных функций в области пространства $\mathbb{C}^n$; утверждение о его когерентности известно как теорема Ока [3], [5]. Структурный пучок вещественного аналитич. пространства, вообще говоря, не когерентен.

См. также *Когерентный аналитический пучок*, *Когерентный алгебраический пучок*.

Лит.: [1] Abhyankar S. S., Local analytic geometry, N. Y.— L., 1964; [2] Bănică C., Stănăşilă O., Metode algebrice în teoria globală a spaţiilor complexe, Buc., 1974; [3] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [4] Серр Ж.-П., в сб.: Расслоенные пространства и их приложения, пер. с франц., М., 1958, с. 372—450; [5] Фукс Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963.

А. Л. Онищик.

КОГОМОЛОГИИ — термин, употребляемый по отношению к функторам гомологической природы, которые, в отличие от гомологий, как правило, контравариантно зависят от объектов основной категории, на которой они определены. В отличие от гомологий, связывающие гомоморфизмы в когомологической точной последовательности повышают размерность. В типичных ситуациях когомологии возникают одновременно с соответствующими гомологиями.

Е. Г. Скляренко.

Когомологии топологического пространства — градуированная группа

$$H^*(X, G) = \sum\nolimits_{n \geqslant 0} H^n(X, G),$$

которая ставится в соответствие топологич. пространству и абелевой группе G. Понятие К. двойственно понятию гомологий (см. *Гомологии теория*, *Гомологии группа*, *Александрова — Чеха гомологии и когомологии*). Если G — кольцо, то в группе $H^*(X, G)$ определено

естественное умножение (произведение Колмогорова — Александера или $\cup$-произведение), превращающее эту группу в градуированное кольцо (кольцо когомологий). В случае, когда X — дифференцируемое многообразие, кольцо когомологий $H^*(X, \mathbb{R})$ может быть вычислено при помощи дифференциальных форм на X (см. де *Рама теорема*).

Когомологии со значениями в пучке абелевых групп — обобщение обычных когомологий топологич. пространств. Имеются две теории когомологий со значениями (или с коэффициентами) в пучках абелевых групп: когомологии Чеха и когомологии Гротендика.

Когомологии Чеха. Пусть X — топологич. пространство, $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на X, $\mathfrak{V}=\{U_i\}_{i\in I}$ — открытое покрытие пространства X. n-мерной коцепью покрытия $\mathfrak{V}$ наз. отображение f, к-рое всякому упорядоченному набору $i_0, \ldots, i_n \in I$, такому, что

$$U_{i_0 \ldots i_n} = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_n} \neq \varnothing,$$

сопоставляет сечение $f_{i_0 \ldots i_n}$ пучка F над $U_{i_0 \ldots i_n}$. Множество всех n-мерных коцепей $C^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ является абелевой группой относительно сложения. Кограничный оператор

$$\delta_n : C^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \to C^{n+1}(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

определяется следующим образом:

$$(\delta_n f)_{i_0 \ldots i_{n+1}} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j f_{i_0 \ldots \hat{i}_j \ldots i_{n+1}},$$

где символ $\hat{}$ означает, что соответствующий индекс опускается.

Последовательность

$$C^*(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) : C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_1} C_1(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_2} \ldots$$

является комплексом (комплекс Чеха). Когомологии этого комплекса обозначаются $H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ и наз. когомологиями Чеха покрытия $\mathfrak{V}$ со значениями в $\mathcal{F}$. Группа $H^0(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ совпадает с группой $\Gamma(X, \mathcal{F})$ сечений пучка $\mathcal{F}$. При вычислении этих когомологий комплекс Чеха можно заменить его подкомплексом, состоящим из альтернированных коцепей, т. е. коцепей, меняющих знак при перестановке двух индексов и равных 0 в случае, когда два индекса совпадают.

Если покрытие $\mathfrak{V}$ вписано в $\mathfrak{U}=\{V_j\}$, т. е. для каждого $i\in I$ указано $\tau(i)\in J$ так, что $U_i \subseteq V_{\tau(i)}$, то определен канонический гомоморфизм $H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$, не зависящий от вписывания τ. n-мерная группа когомологий Чеха пространства X со значениями в $\mathcal{F}$ определяется формулой:

$$\check{H}^n(X, F) = \varinjlim H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{F}),$$

где индуктивный предел берется по направленному (по отношению вписанности) множеству классов открытых покрытий (два покрытия эквивалентны тогда и только тогда, когда каждое из них можно вписать в другое). Определение когомологий Чеха применимо и к предпучкам.

Недостатком когомологий Чеха является то, что они (для непаракомпактных пространств) не образуют когомологич. функтора (см. *Гомологический функтор*). В случае, когда $\mathcal{F}$ — постоянный пучок, соответствующий абелевой группе $\mathcal{F}$, группы $\check{H}^n(X, \mathcal{F})$ совпадают с когомологиями Александрова — Чеха с коэффициентами в группе $\mathcal{F}$.

Когомологии Гротендика. Рассматривается функтор $\mathcal{F} \to \Gamma(X, \mathcal{F})$ из категории пучков абелевых групп на X в категорию абелевых групп. Правые производные этого функтора наз. *n-мерными группами когомологий Гротендика со значениями в пучке* $\mathcal{F}$ и обозначаются $H^n(X, \mathcal{F})$, $n=0, 1, \ldots$. Точной последовательности пучков абелевых групп

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

соответствует точная последовательность

$$\ldots \longrightarrow H^{n-1}(X, \mathcal{F}_3) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F}_1) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F}_2) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^n(X, \mathcal{F}_3) \longrightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{F}_1) \longrightarrow \ldots,$$

т. е. $\{H^n(X, \mathcal{F})_{n=0, 1, \ldots}$ образуют когомологич. функтор. При этом $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Если $\mathcal{F}$ — *вялый пучок*, то $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ $(n>0)$. Эти три свойства когомологий Гротендика характеризуют функтор $\mathcal{F} \mapsto \{H^n(X, \mathcal{F})\}_{n=0, 1, \ldots}$ однозначно с точностью до изоморфизма.

Для вычисления когомологий Гротендика пучка $\mathcal{F}$ можно воспользоваться левой резольвентой пучка $\mathcal{F}$, состоящей из пучков, когомологии Гротендика к-рых равны 0 в положительных размерностях. Напр., на произвольных топологич. пространствах можно взять резольвенту из вялых пучков, а на паракомпактных пространствах — из *мягких пучков* или из *тонких пучков*.

Когомологии Гротендика связаны с когомологиями покрытий следующим образом. Пусть $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ — открытое покрытие пространства X. Тогда существует спектральная последовательность $\{E_r^{p, q}\}$, сходящаяся к $\{H^n(X, \mathcal{F})\}$ и такая, что

$$E_2^{p, q} = H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^q(X, \mathcal{F})),$$

где $\mathcal{H}^q(X, \mathcal{F})$ — предпучок, сопоставляющий открытому множеству $V \subset X$ группу $H^q(V, \mathcal{F})$. Если когомологии всех $U_{i_0 \ldots i_n}$ со значениями в $\mathcal{F}$ равны 0 в положительных размерностях, то последовательность вырождается и

$$H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong H^n(X, \mathcal{F}), \quad n=0, 1, \ldots,$$

(теорема Лере). В общем случае спектральная последовательность определяет функторный гомоморфизм

$$H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F})$$

и, после перехода к пределу,— функторный гомоморфизм

$$\check{H}^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F}).$$

Последний гомоморфизм биективен для $n=0, 1$, инъективен (но, вообще говоря, не сюръективен) для $n=2$ и биективен для всех n, если X паракомпактно. Таким образом, для паракомпактного пространства X

$$\check{H}^n(X, \mathcal{F}) \cong H^n(X, \mathcal{F}), \quad n=0, 1, \ldots$$

Обобщением определенных выше групп когомологий являются *группы когомологий* $H_\Phi^n(X, \mathcal{F})$ *с носителями в семействе* Φ. Семейство Φ замкнутых подмножеств пространства X наз. *семейством носителей*, если 1) замкнутое подмножество любого множества из Φ принадлежит Φ; 2) объединение любых двух подмножеств из Φ лежит в Φ. Группы $H_\Phi^n(X, \mathcal{F})$ определяются как правые производные функтора $\mathcal{F} \mapsto \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F})$, где $\Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}) = H_\Phi^0(X, \mathcal{F})$ — группа сечений пучка $\mathcal{F}$, носители к-рых лежат в Φ. Они образуют когомологич. функтор.

Если Φ — семейство всех замкнутых множеств, то $H^n_\Phi(X, \mathcal{F}) = H^n(X, \mathcal{F})$. Другой важный частный случай: $\Phi = c$ — семейство всех компактных подмножеств. Группы $H^n_c(X, \mathcal{F})$ наз. группами когомологий с компактными носителями.

В случае, когда $\mathcal{F}$ — пучок колец, в группе

$$H^*(X, \mathcal{F}) = \sum\nolimits_{n \geqslant 0} H^n(X, \mathcal{F})$$

естественным образом определяется умножение, превращающее ее в градуированное кольцо (кольцо когомологий). При этом ассоциативность в пучке $\mathcal{F}$ влечет за собой ассоциативность умножения в $H^*(X, \mathcal{F})$, а пучок коммутативных колец или колец Ли приводит к градуированно-коммутативному кольцу или градуированному кольцу Ли когомологий соответственно. Если $\mathcal{F}$ — пучок модулей над пучком колец $\mathcal{A}$, то $H^n(X, \mathcal{F})$ являются модулями над кольцом $\Gamma(X, \mathcal{A})$.

О когомологиях со значениями в пучке неабелевых групп см. *Неабелевы когомологии.*

Лит.: [1] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [2] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [3] Серр Ж.-П., в сб.: Расслоенные пространства, М., 1958, с. 372—450.

Д. А. Пономарев.

Когомологии пространства с операторами — когомологические инварианты топологич. пространства с заданным на нем действием группы. Пусть группа G действует на пространстве X, причем для каждого $g \in G$ отображение $x \mapsto gx$ является гомеоморфизмом $X \to X$, тогда G-пучком абелевых групп на X наз. пучок абелевых групп на X вместе с заданным на нем действием группы G, к-рое непрерывно, согласовано с действием на X и изоморфно отображает слои пучка друг на друга. В группе сечений G-пучка $\mathcal{F}$ (и вообще в группах когомологий $H^n(X, \mathcal{F})$) определена естественная структура G-модуля. G-пучки абелевых групп на X образуют абелеву категорию, всякий объект к-рой вкладывается в инъективный объект. Функтор $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})^G$ из этой категории в категорию абелевых групп, где $\Gamma(X, \mathcal{F})^G$ — группа G-инвариантных сечений G-пучка $\mathcal{F}$, обладает правыми производными функторами $\mathcal{F} \mapsto H^n(X, G, \mathcal{F})$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где $H^0(X, G, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})^G$, составляющими когомологич. функтор. Группы $H^n(X, G, \mathcal{F})$ играют основную роль в изучении связи между когомологиями пространства X, факторпространства $Y = X/G$ и группы G. Существует спектральная последовательность $\{E_r\}$ со вторым членом $E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X, \mathcal{F}))$, сходящаяся к $H^*(X, G, \mathcal{F})$. Пусть $\mathcal{F}^G$ — пучок инвариантов прямого образа $f_*\mathcal{F}$ ($f : X \to Y$ — естественная проекция), рассматриваемого как G-пучок на пространстве Y, на к-ром G действует тривиально. Если G действует на X собственно разрывно (см. *Дискретная группа* преобразований) и свободно, то $H^*(X, G, \mathcal{F}) \cong H^*(Y, \mathcal{F}^G)$ (см. [1]). В частности, если A — некоторый G-модуль, то постоянный пучок $\mathcal{F} = A$ на X обладает естественной структурой G-пучка, а пучок $\mathcal{F}^G$ на Y будет локально постоянным. В этом случае спектральная последовательность $\{E_r\}$ удовлетворяет условию $E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X, A))$ и сходится к $H^*(Y, \mathcal{F}^G)$ (спектральная последовательность накрытия). Если при этом X связно и $H^q(X, A) = 0$ для $q > 0$, то $H^p(G, A) \cong H^p(Y, \mathcal{F}^G)$, что дает топологич. интерпретацию когомологий группы G [2]. Если G собственно разрывна и Y паракомпактно, то группы $H^n(X, G, \mathcal{F})$ можно вычислять аналогично когомологиям Чеха при помощи G-инвариантных покрытий пространства X (см. [1]).

В случае, когда G — группа Ли, дифференцируемо и свободно действующая на дифференцируемом многооб-

разии X, причем X/G — дифференцируемое многообразие, известен аналог $\{E_r\}$ спектральной последовательности накрытия [3]. Последовательность $\{\tilde{E}_r\}$ сходится к когомологиям комплекса G-инвариантных дифференциальных форм на X и $\tilde{E}_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X, \mathbb{R}))$, где когомологии группы G вычисляются при помощи коцепей класса C^∞.

См. также *Когомологии групп*, *Эквивариантные когомологии*.

Лит.: [1] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [2] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [3] van Est W. T., «Proc. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A», 1958, v. 61, p. 399—413.

А. Л. Онищик, Д. А. Пономарев.

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР — группы

$$H^n(R, A) = \mathrm{Ext}_R^n(K, A), \quad n \geqslant 0,$$

(см. *Функтор* Ext), где R — ассоциативная алгебра над коммутативным кольцом K с фиксированным гомоморфизмом K-алгебр $\varepsilon : R \to K$, позволяющим рассматривать кольцо K как R-модуль, а A есть R-модуль. Это определение охватывает наиболее распространенные теории когомологий нек-рых типов (универсальных) алгебр.

Впервые группы когомологий групп во всех размерностях были введены С. Эйленбергом и С. Маклейном [3] в связи с топологич. исследованиями и Д. К. Фаддеевым [5] — с чисто алгебраич. точки зрения — как группы классов обобщенных систем факторов, в 40-х гг. 20 в. Ранее изучались в той или иной форме когомологии групп в малых размерностях (см. [1], [2], [4]).

Примеры групп когомологий. 1) Если $K = \mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, G — группа, $R = \mathbb{Z}G$ — групповая алгебра группы G над $\mathbb{Z}$,

$$\varepsilon\left(\sum n_i g_i\right) = \sum n_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad g_i \in G,$$

то группы $H^n(R, A)$ наз. группами когомологий группы G с коэффициентами (или со значениями) в R-модуле A и обозначаются $H^n(G, A)$. Можно вместо группы G рассмотреть моноид G и аналогично получить группы когомологий $H^n(G, A)$ моноида G. 2) Если S — ассоциативная K-алгебра, S^0 — антиизоморфная ей K-алгебра,

$$R = S \otimes_K S^0, \quad \varepsilon\left(\sum s_i \otimes t_i\right) = \sum s_i t_i,$$

то группы $H^n(R, A)$ наз. группами когомологий ассоциативной алгебры S с коэффициентами в S-бимодуле A (т. е. в R-модуле A) и обозначаются $H^n(S, A)$. Если K — поле, то группы $H^n(S, A)$ наз. группами когомологий Хохшильда K-алгебры S.

3) Если S-алгебра Ли над полем K, $R = U_S$ — ее универсальная обертывающая алгебра с пополнением $\varepsilon : R \to K$, то группы $H^n(R, A)$ наз. группами когомологий алгебры Ли S с коэффициентами в U_S-модуле A (т. е. в левом S-модуле A) и обозначаются $H^n(S, A)$.

При $n = 0, 1, 2$ группы когомологий в ряде случаев допускают простую интерпретацию.

а) Если G — группа, то группа $H^0(G, A)$ изоморфна группе

$$A^G = \{a \in A \mid ga = a, \quad \forall g \in G\}$$

инвариантных элементов; группа $H^1(G, A)$ изоморфна факторгруппе $\mathrm{Der}(G, A)/\mathrm{Ider}(G, A)$, где

$$\mathrm{Der}(G, A) = \{f : G \to A \mid f(xy) = xf(y) + f(x), \ \forall x, y \in G\}$$

— группа дифференцирований (или скрещенных гомоморфизмов),

$$\mathrm{Ider}(G, A) = \{f : G \to A \mid \exists a \in A, \ f(x) = xa - a, \ \forall x \in G\}$$

— группа внутренних дифференцирований (или глав-

ных скрещенных гомоморфизмов), при этом точна последовательность

$$0 \longrightarrow A^G \longrightarrow A \longrightarrow \mathrm{Der}\,(G,\ A) \longrightarrow H^1\,(G,\ A) \longrightarrow 0;$$

для абелевой группы G группа $H^2(G,\ A)$ изоморфна группе расширений группы A с помощью группы G (см. *Бэра умножение*); третья группа когомологий группы G связана с препятствиями для расширений (см. [9], гл. IV).

б) Если S — ассоциативная K-алгебра, то группа $H^0\ (S,\ A)$ изоморфна группе

$$\{a \in A \mid xa = ax, \quad \forall x \in S\};$$

группа $H^1\ (S,\ A)$ изоморфна факторгруппе

$$\mathrm{Der}\,(S,\ A)/\mathrm{Ider}\,(S,\ A),$$

где

$$\mathrm{Der}\,(S,\ A) = \{f : S \otimes_K S^0 \longrightarrow A \mid f\,(xy) = xf\,(y) + f(x)\,y,\ \forall x,\ y \in S \otimes_K S^0\},$$

$$\mathrm{Ider}\,(S,\ A) = \{f : S \otimes_K S^0 \longrightarrow A \mid \exists a \in A,\ f\,(x) = xa - ax,\ \forall x \in S \otimes_K S^0\};$$

группа $H^2(S,\ A)$ описывает сингулярные расширения S-бимодуля A с помощью кольца S (см. [14]).

в) Если S — алгебра Ли, то группа $H^0(S, A)$ изоморфна K-модулю $\{a \in A \mid xa = 0,\ \forall x \in S\}$; группа $H^1(S,\ A)$ изоморфна факторгруппе

$$\mathrm{Der}\,(S,\ A)/\mathrm{Ider}\,(S,\ A),$$

где

$$\mathrm{Der}\,(S,\ A) = \{f : S \longrightarrow A \mid f\,([x,\ y]) = xf\,(y) - yf\,(x),\ \forall x,\ y \in S\},$$

$$\mathrm{Ider}\,(S,\ A) = \{f : S \longrightarrow A \mid \exists a \in A,\ f\,(x) = xa,\ \forall x \in S\};$$

двумерная группа когомологий $H^2(S,\ A)$ алгебры Ли соответствуют K-расщепляющимся расширениям алгебр Ли (см. [6], гл. XVI); в нек-рых случаях элементы группы $H^3(S,\ A)$ являются препятствиями в задаче о расширении.

Группы когомологий находят широкое применение в различных областях алгебры. Так, напр., если G — группа и $H^2(G,\ A) = 0$ для всех $\mathbb{Z}G$-модулей A, то G — свободная группа (т е о р е м а С т о л л и н г с а, см. *Гомологическая размерность*). Если G — группа, $\mathbb{C}^*$ — мультипликативная группа поля комплексных чисел, то группа $M(G) = H^2(G,\ \mathbb{C}^*)$ наз. м у л ь т и п л и к а т о р о м Ш у р а группы G. Она играет важную роль при изучении центральных расширений групп и в теории проективных представлений конечных групп [1]. Если G — группа, A — $\mathbb{Z}G$-модуль и $pA = 0$ для простого числа p, то

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}\,(\mathbb{Z},\ A) \cong \mathrm{Ext}^n_{kG}\,(k,\ A),$$

где $k = GF(p)$ — поле из p элементов. Если G — конечная p-группа, то $d(G) = \dim_k H^1(G,\ k)$ — минимальное число образующих группы G, $r(G) = \dim_k H^2(G,\ k)$ — минимальное число определяющих соотношений для G, рассматриваемой как про-p-группа, $r(G) \leqslant R(G)$, где $R(G)$ — минимальное число соотношений дискретной группы G. Тот факт, что $r(G) - d(G)$ стремится к бесконечности при $d(G) \to \infty$, приводит к отрицательному решению проблемы башни полей, проблемы Куроша о нильалгебрах и общей проблемы Бернсайда [10].

Если G — про-p-группа, $\{U_i,\ i \in I\}$ — семейство всех ее открытых нормальных делителей, то группа

$$\varinjlim H^n\left(G/U_i,\ A^{U_i}\right)$$

наз. n-й г р у п п о й к о г о м о л о г и й п р о-p-г р у п п ы G с коэффициентами в $\mathbb{Z}G$-модуле A и обозначается $H^n(G,\ A)$. Если E — расширение Галуа

поля L с группой Галуа $G=G(E/L)$, то группа G является про-p-группой, группы $H^n(G,\ A)$ наз. группами когомологий Галуа. Важную роль играют группы $H^q(G,\ E^*)$, где E^* — мультипликативная группа поля E. Так, $H^1(G,\ E^*)=0$, а следствием этого факта является известная теорема Гильберта (о циклических расширениях) 90. Если же E — сепарабельное замыкание поля L, то группа $H^2(G(E/L),\ E^*)$ наз. группой Брауэра поля L (см. *Брауэра группа*). В настоящее время (1978) развита теория Галуа коммутативных колец, в к-рой существенную роль играют когомологии Галуа коммутативных колец и группа Брауэра.

Если S — ассоциативная алгебра, то из $H^2(S,\ S)=0$ следует, что алгебра S жесткая (см. *Деформация* алгебры).

Группы когомологий $H^n(R,\ A)$ в нек-ром смысле двойственны группам гомологий

$$H_n(R,\ A)=\mathrm{Tor}_n^R(A,\ K)$$

ассоциативной K-алгебры R с коэффициентами в R-модуле A. Если G — группа, $R=\mathbb{Z}G$ и $K=\mathbb{Z}$, то группы $H_n(R,\ A)$ наз. группами гомологий группы G с коэффициентами в R-модуле A и обозначаются $H_n(G,\ A)$; если S — ассоциативная K-алгебра и $R=S\otimes_K S^\circ$, то группы $H_n(R,\ A)$ наз. группами гомологий ассоциативной алгебры S с коэффициентами в S-бимодуле A и обозначаются $H_n(S,\ A)$; если S — алгебра Ли и $R=U_S$— ее универсальная обертывающая алгебра, то группы $H_n(R,\ A)$ наз. группами гомологий алгебры Ли S с коэффициентами в левом S-модуле A и обозначаются $H_n(S,\ A)$. Группы гомологий в малых размерностях в ряде случаев также допускают простую интерпретацию. Так, если G — группа, то $H_0(G,\ \mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$, $H_1(G,\ \mathbb{Z})\cong G/[G,\ G]$.

Если в абелевой категории функтор Hom обладает производным функтором Ext и определен функтор $\otimes$ с его производным функтором Tor, то приведенная схема определяет теории гомологий и когомологий в этой категории. Весьма общий подход к построению теории когомологий может быть развит с использованием котроек [11]. Понятие (ко)тройки возникло при анализе минимальных средств, необходимых для построения симплициальных резольвент. Тройкой $T=(T,\ k,\ p)$ над категорией $\mathfrak{A}$ наз. совокупность функтора $T:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ и двух естественных преобразований функторов $k:1_{\mathfrak{A}}\to T$, $p:T^2\to T$, подчиненных условиям

$$pTk=pkT=1,\quad pTp=pTp.$$

Понятие котройки двойственно, т. е. получается из приведенного обращением стрелок. Если объект $X\in\mathfrak{A}$ и морфизм $q:T(X)\to X$ удовлетворяют условиям $qk(X)=1_X:X\to X$, $qT(q)=qp(X):T^2(X)\to X$, то пару $(X,\ q)$ наз. T-алгеброй. Пусть $\mathfrak{A}^T$ — категория T-алгебр. Если $X\in\mathfrak{A}$, то $F(X)=(T(X),\ p(X))\in\mathfrak{A}^T$. Тем самым определен функтор $F:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}^T$ (в нек-ром смысле $F(X)$ — объект, свободный над X). Пусть $U:\mathfrak{A}^T\to\mathfrak{A}$ — функтор, забывающий T-структуру. Тогда функторы F и U сопряжены, $UF=T$, а $G=FU:\mathfrak{A}^T\to\mathfrak{A}^T$ с $l:G\to 1_{\mathfrak{A}^T}$, $q:G\to G^2$ определяют котройку $(G,\ l,\ q)$ и комплекс

$$X\xleftarrow{d_0}G(X)\xleftarrow{d_1}G^2(X)\xleftarrow{d_2}G^3(X)\leftarrow\dots$$

с дифференцированием $d_n=\sum_{i=0}^n(-1)^iG^{n-i}lG^i$ (этот комплекс является аналогом свободной резольвенты объекта X). Если категория $\mathfrak{A}^T$ абелева и полученный комплекс ациклический, то стандартное применение функтора Hom (соответственно $\otimes$) приводит к построению групп когомологий (соответственно гомологий) объекта

X. В общем случае над T-алгеброй (X, q) надо построить новую абелеву категорию (X, q)-модулей, на к-рой имеется естественная структура котройки, позволяющая уже построить группы, называющиеся группами когомологий первоначальной категории (аналогично построению групп когомологий для категорий групп, ассоциативных алгебр и алгебр Ли). В эту схему включаются как когомологии групп, ассоциативных алгебр, алгебр Ли, так и ряд других теорий когомологий (когомологии коммутативных алгебр Харрисона, когомологии Андре — Квиллена, когомологии Амицура и др., см. [8]).

Все приведенные конструкции относились так или иначе к абелевым категориям. В то же время ряд разделов математики (напр., теория расширений групп) приводит к необходимости построения теории когомологий с коэффициентами в неабелевой категории (напр., в неабелевом G-модуле A в случае группы G) (см. [8], [11]). Отправной точкой для построения различных теорий неабелевых когомологий алгебр служат интерпретации когомологий в размерностях 0 и 1, но при этом приходится отказываться от нек-рых привычных аспектов классической теории (структуры группы на когомологиях и др.). Рассматривались когомологии топологических алгебраических структур (напр., когомологии топологич. групп [5], банаховых алгебр и др.).

Лит.: [1] Schur J., «J. reine und angew. Math.», 1907, Bd 132, S. 85—137; [2] Baer R., «Math. Z.», 1934, Bd 38, S. 374—416; [3] Eilenberg S., MacLane S., «Proc. Nath. Acad. Sci. USA», 1943, v. 29, p. 155—58; [4] Hopf H., «Comment. math. helv.», 1944/45, v. 17, p. 39—79; [5] Фаддеев Д. К., «Докл. АН СССР», 1947, т. 58, № 3, с. 361—64; [6] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [7] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [8] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 203—35; [9] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [10] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [11] Seminar on Triples and Categorical Homology Theory. Zürich. 1966—67, B.— Hdlb.— N. Y., 1969; [12] Gruenberg K. W., Cohomological topics in group theory, B.— Hdlb.— N. Y., 1970; [13] Stammbach Urs., Homology in group theory, B.— Hdlb.— N. Y., 1973; [14] Fossum R., Griffith Ph., Reiter I., Trivial extensions of abelian categories. Homological algebra of trivial extensions of abelian categories with application to ring theory, B.— Hdlb.— N. Y., 1975.

В. Е. Говоров, А. В. Михалев.

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР ЛИ — специальный случай когомологий алгебр. Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли над коммутативным кольцом K с единицей и пусть задан левый $\mathfrak{G}$-модуль V, т. е. линейное над K представление алгебры $\mathfrak{G}$ в K-модуле V. Модулем p-мерных когомологий алгебры Ли $\mathfrak{G}$ со значениями в V наз. $H^p(\mathfrak{G}, V) = \mathrm{Ext}^p_{U(\mathfrak{G})}(K, V)$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, где $U(\mathfrak{G})$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{G}$ [3]. Иначе говоря, соответствие $V \mapsto H^p(\mathfrak{G}, V)$ есть p-й правый производный функтор для функтора $V \to V^{\mathfrak{G}}$ из категории $\mathfrak{G}$-модулей в категорию K-модулей, где $V^{\mathfrak{G}} = \{v \in V \mid xv = 0 \ (x \in \mathfrak{q})\}$. Функтор $V \to H^*(\mathfrak{G}, V) = \sum_{p \geqslant 0} H^p(\mathfrak{G}, V)$ является когомологическим (см. *Гомологический функтор*).

В малых размерностях К. а. Ли интерпретируются следующим образом. Модуль $H^0(\mathfrak{G}, V)$ совпадает с $V^{\mathfrak{G}}$. Если V', V'' — $\mathfrak{G}$-модули, то $H^1(\mathfrak{G}, \mathrm{Hom}_K(V'', V'))$ можно отождествить с множеством классов эквивалентных расширений $\mathfrak{G}$-модуля V'' с ядром V'. Если рассматривать $\mathfrak{G}$ как $\mathfrak{G}$-модуль относительно *присоединенного представления* ad, то $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ изоморфен фактормодулю $\mathrm{Der}\,\mathfrak{G}/\mathrm{ad}\,\mathfrak{G}$ модуля всех дифференцирований по подмодулю внутренних дифференцирований. Если $\mathfrak{G}$ есть свободный K-модуль (напр., K — поле), то $H^2(\mathfrak{G}, V)$ отождествляется с множеством классов эквивалентных расширений алгебры $\mathfrak{G}$, ядром к-рых служит абелева алгебра Ли V с заданным представлением алгебры $\mathfrak{G}$. Модуль $H^2(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ интерпретируется

также как множество инфинитезимальных *деформаций* алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

Имеется следующая связь между К. а. Ли и когомологиями ассоциативных алгебр; если $\mathfrak{G}$ — свободный K-модуль и V — произвольный двусторонний $U\mathfrak{G}$-модуль, то $H^p(U\mathfrak{G}, V) \cong H^p(\mathfrak{G}, V)$, где представление алгебры $\mathfrak{G}$ в V определяется формулой $(x, v) \mapsto xv - vx$.

Другой способ введения К. а. Ли (см. [6], [14]) использует коцепной комплекс $C^*(\mathfrak{G}, V) = \sum_{p \geqslant 0} C^p(\mathfrak{G}, V)$, где $C^p(\mathfrak{G}, V) = C^p$ — модуль всех кососимметрических p-линейных отображений $\mathfrak{G}^p \to V$, снабженный кограницей $d : C^p \to C^{p+1}$ вида

$$(d\omega)(x_1, \ldots, x_{p+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} x_i \omega(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{p+1}) +$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{p+1})$$

$$\omega \in C^p;\ x_1, \ldots, x_{p+1} \in \mathfrak{G},$$

где знак $\hat{}$ показывает, что соответствующий аргумент пропускается. В случае, когда $\mathfrak{G}$ — свободный K-модуль, когомологии этого комплекса естественно изоморфны модулям $H^p(\mathfrak{G}, V)$. С каждой подалгеброй $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ связывается подкомплекс $C^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; V) \subset C^*(\mathfrak{G}, V)$, приводящий к относительным когомологиям $H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; V) = \sum_{p \geqslant 0} H^p(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; V)$. Если V — алгебра над K, на к-рой $\mathfrak{G}$ действует дифференцированиями, то в когомологиях возникает естественное умножение, к-рое превращает $H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; V)$ в градуированную алгебру.

Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{X}(M)$ — алгебра Ли (над $\mathbb{R}$) гладких векторных полей на дифференцируемом многообразии M, $V = F(M)$ — пространство гладких функций на M с естественной структурой $\mathfrak{G}$-модуля. Определение кограницы в $C^*(\mathfrak{X}(M), F(M))$ формально совпадает с определением внешнего дифференциала дифференциальной формы. Точнее, комплекс де Рама есть подкомплекс в $C^*(\mathfrak{X}(M), F(M))$, состоящий из коцепей, линейных над $F(M)$. С другой стороны, если $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли связной вещественной группы Ли G, то комплекс $C^*(\mathfrak{G}, \mathbb{R})$ отождествляется с комплексом левоинвариантных дифференциальных форм на G. Аналогично, если $\mathfrak{H}$ — подалгебра, отвечающая связной замкнутой подгруппе $H \subset G$, то $C^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; \mathbb{R})$ естественно изоморфен комплексу G-инвариантных дифференциальных форм на многообразии G/H. В частности, если G компактна, то отсюда получаются изоморфизмы градуированных алгебр:

$$H^*(\mathfrak{G}, \mathbb{R}) \cong H^*(G, \mathbb{R}); \quad H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; \mathbb{R}) \cong H^*(G/H, \mathbb{R}).$$

Именно эти факты послужили отправной точкой при определении К. а. Ли. На них основаны и приложения аппарата К. а. Ли к изучению когомологий главных расслоений и однородных пространств (см. [8], [14]).

Двойственным образом определяются гомологии алгебры Ли $\mathfrak{G}$ с коэффициентами в правом $\mathfrak{G}$-модуле V. А именно, p-мерная группа гомологий есть K-модуль $H_p(\mathfrak{G}, V) = \mathrm{Tor}_p^{U\mathfrak{G}}(V, K)$. В частности, $H_0(\mathfrak{G}, V) = V/V\mathfrak{G}$, а если V — тривиальный $\mathfrak{G}$-модуль, то $H_1(\mathfrak{G}, V) \cong V \otimes_K \mathfrak{G}/[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$.

При вычислении К. а. Ли широко используются следующие спектральные последовательности, часто наз. спектральными последовательностями Хохшильда — Серра. Пусть $\mathfrak{H}$ — идеал в $\mathfrak{G}$ и V — некоторый $\mathfrak{G}$-модуль. Если $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ — свободные K-модули, то существует спектральная последовательность $\{E_r^{p,q}\}$ с $E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}, H^q(\mathfrak{H}, V))$, сходящаяся к $H^*(\mathfrak{G}, V)$ (см. [3], [14]). Аналогичная спектральная последовательность существует для гомологий [3]. Далее, пусть $\mathfrak{G}$ — конечно-

мерная алгебра Ли над полем K характеристики 0, $\mathfrak{G}'' \subset \mathfrak{G}'$ — ее подалгебры, причем $\mathfrak{G}'$ редуктивна в $\mathfrak{G}$, V — $\mathfrak{G}$-модуль, являющийся полупростым $\mathfrak{G}$-модулем. Тогда существует спектральная последовательность $\{F_r^{p,q}\}$ с $F_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'; V) \otimes H^q(\mathfrak{G}', \mathfrak{G}''; K)$, сходящаяся к $H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}''; V)$ (см. [12], [14]).

Полностью изучены когомологии конечномерных редуктивных и, в частности, полупростых алгебр Ли над полем характеристики 0. Если $\mathfrak{G}$ — полупростая конечномерная алгебра Ли над таким полем, то для любого конечномерного $\mathfrak{G}$-модуля V имеют место равенства

$$H^1(\mathfrak{G}, V) = 0; \quad H^2(\mathfrak{G}, V) = 0$$

(леммы Уайтхеда). Первое из этих свойств является и достаточным условием полупростоты конечномерной алгебры $\mathfrak{G}$ и равносильно также полупростоте всех конечномерных $\mathfrak{G}$-модулей. Второе свойство равносильно теореме Леви (см. *Леви — Мальцева разложение*) для алгебр Ли с абелевым радикалом [1], [5], [14]. Если $\mathfrak{G}$ — редуктивная алгебра Ли, $\mathfrak{H}$ — ее подалгебра и V — конечномерный полупростой модуль, то $H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; V) \cong H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; V^{\mathfrak{G}})$, что сводит вычисление когомологий к случаю тривиального $\mathfrak{G}$-модуля $V = K$ (см. [5], [14]). Алгебра когомологий $H^*(\mathfrak{G}, K)$ редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ естественно изоморфна алгебре $C^*(\mathfrak{G}, K)^{\mathfrak{G}}$ коцепей, инвариантных относительно ad. В этом случае $H^*(\mathfrak{G}, K)$ является алгеброй Хопфа и, следовательно, есть внешняя алгебра над пространством $P_{\mathfrak{G}}$ примитивных элементов, градуированных нечетными степенями $2m_i - 1$, $i = 1, \ldots, r$. В частности, $\dim H^1(\mathfrak{G}, K) = \dim P_{\mathfrak{G}}^1$ есть размерность центра алгебры $\mathfrak{G}$, а $P_{\mathfrak{G}}^3$ изоморфно пространству инвариантных квадратичных форм на $\mathfrak{G}$ (см. [12], [14]). Если K алгебраически замкнуто, то r есть ранг алгебры $\mathfrak{G}$, т. е. размерность ее подалгебры Картана $\mathfrak{A}$, а m_i суть степени свободных образующих в алгебре многочленов на $\mathfrak{G}$, инвариантных относительно ad (или в изоморфной ей алгебре многочленов на $\mathfrak{A}$, инвариантных относительно группы Вейля). В этом случае числа $2m_i - 1$ совпадают с размерностями примитивных классов когомологий соответствующей компактной группы Ли.

Алгебра гомологий $H_*(\mathfrak{G}, K)$ редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ над полем характеристики 0 есть внешняя алгебра, двойственная к $H^*(\mathfrak{G}, K)$. Для любой n-мерной унимодулярной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ справедлив аналог двойственности Пуанкаре:

$$H^p(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; K) \cong H_{n-m-p}(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}; K),$$

где $0 \leqslant p \leqslant n - m$ и $\mathfrak{H}$ — любая m-мерная редуктивная в $\mathfrak{G}$ подалгебра (см. [14], [16]).

Для когомологий разрешимых алгебр Ли известны лишь немногие сколько-нибудь общие утверждения. Напр., пусть $\mathfrak{G}$ — конечномерная нильпотентная алгебра Ли над бесконечным полем, а V — конечномерный $\mathfrak{G}$-модуль. Тогда $H^p(\mathfrak{G}, V) = 0$ для всех p, если в V нет тривиальных $\mathfrak{G}$-подмодулей, и $H^p(\mathfrak{G}, V) \neq 0$ для $p = 0, 1, \ldots, n = \dim \mathfrak{G}$, причем $\dim H^p(\mathfrak{G}, K) \geqslant 2$ для $1 \leqslant p \leqslant n - 1$, если такой $\mathfrak{G}$-подмодуль существует (см. [7]). Хорошо изучены группы $H^p(\mathfrak{n}, V)$, где $\mathfrak{n}$ — нильпотентный радикал параболической подалгебры $\mathfrak{P}$ в некоторой полупростой алгебре Ли $\mathfrak{G}$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, а представление алгебры $\mathfrak{n}$ в V является ограничением некоторого представления алгебры $\mathfrak{G}$ в V (см. [11]). Эти когомологии тесно связаны с когомологиями комплексного однородного пространства G/P, отвечающего паре $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{P}$, со значениями в пучках ростков голоморфных сечений однородных векторных расслоений над

G/P. Для вычисления когомологий неполупростых конечномерных алгебр Ли над полем характеристики 0 полезна формула

$$H^*(\mathfrak{G}, V) \cong H^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{h}, K) \otimes H^*(\mathfrak{h}, V)^{\mathfrak{G}},$$

где $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{G}$, причем $\mathfrak{G}/\mathfrak{h}$ полупроста [14].

В некоторых случаях можно установить связь между К. а. Ли и *когомологиями групп*. Пусть G — связная вещественная группа Ли, K — ее максимальная компактная подалгебра, $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{K}$ — их алгебры Ли, V — конечномерный гладкий G-модуль. Если определить в V естественную структуру $\mathfrak{G}$-модуля, то когомологии $H^*(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}; V)$ изоморфны когомологиям группы G (как абстрактной группы), вычисленным с помощью непрерывных коцепей [10]. С другой стороны, пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли односвязной разрешимой группы Ли G, Γ — решетка в G и $\rho: G \to GL(V)$ — гладкое конечномерное линейное представление. Если $\rho(\Gamma) \times \times \mathrm{Ad}\,\Gamma$ плотна по Зарискому в алгебраич. замыкании группы $\rho(G) \times \mathrm{Ad}\,G$, то $H^*(\mathfrak{G}, V) \cong H^*(\Gamma, V)$ (см. [4]). В общем случае $\dim H^p(\Gamma, V) \geqslant \dim H^p(\mathfrak{G}, V)$ $(p = 0, 1, \ldots)$. Для нильпотентной $\mathfrak{G}$ достаточно потребовать, чтобы ρ было унипотентным. Если решетка Γ в односвязной разрешимой группе G такова, что $\mathrm{Ad}\,\Gamma$ плотна в алгебраич. замыкании группы $\mathrm{Ad}\,\Gamma$ (напр., G нильпотентна), то $H^*(\mathfrak{G}, \mathbb{R}) \cong H^*(G/\Gamma, \mathbb{R})$.

В последние годы стали систематически изучаться когомологии некоторых бесконечномерных алгебр Ли. К ним относятся алгебра $\mathfrak{X}(M)$ векторных полей на дифференцируемом многообразии M, алгебра Ли формальных векторных полей, подалгебры этих алгебр, состоящие из бездивергентных, гамильтоновых или канонических векторных полей (см. [2], [13]), а также некоторые классические банаховы алгебры Ли [9].

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 11, М., 1974, с. 37—123; [3] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [4] Рагунатан М., Дискретные подгруппы групп Ли, пер. с англ., М., 1977; [5] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1961; [6] Chevalley C., Eilenberg S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1948, v. 63, p. 85—124; [7] Dixmier J., «Acta scient. mat. Szeged», 1955, v. 16, № 3—4, p. 246—50; [8] Greub W., Halperin S., Vanstone R., Connections, curvature and cohomology. Vol. 3: Cohomology of principal bundles and homogeneous spaces, N. Y.— L., 1975; [9] de la Harpe P., Classical Banach — Lie algebras and Banach — Lie groups of operators in Hilbert space, B.— Hdlb.— N. Y., 1972; [10] Hochschild G., Mostow G. D., «Ill. J. Math.», 1962, v. 6, № 3, p. 367—401; [11] Kostant B., «Ann. Math.», 1961, v. 74, № 2, p. 329—87; [12] Koszul J. L., «Bull. Soc. math. France», 1950, t. 78, p. 65—127; [13] Lichnerowicz A., «J. math. pures appl.», 1974, t. 53, № 4, p. 459—83; [14] Verona A., Introducere în coomologia algebrelor Lie, Buc., 1974.

А. Л. Онищик.

КОГОМОЛОГИИ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР — группы $H^n(A, X)$, $n \geqslant 0$, где X — банахов бимодуль над банаховой алгеброй A, определяемые как когомологии коцепного комплекса

$$0 \longrightarrow C^0(A, X) \longrightarrow \ldots \longrightarrow C^n(A, X) \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1}(A, X) \longrightarrow \ldots,$$

n-мерные цепи к-рого являются непрерывными n-линейными операторами из A в X, а

$$\delta^n f(a_1, \ldots, a_{n+1}) = a_1 f(a_2, \ldots, a_{n+1}) + \\ + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(a_1, \ldots, a_k a_{k+1}, \ldots, a_{n+1}) + \\ + (-1)^{n+1} f(a_1, \ldots, a_n) a_{n+1}.$$

К. б. а. могут быть также введены с помощью банахова аналога функтора Ext, есть и их аксиоматическое определение.

Аналогично когомологиям алгебр, элементы одномерных К. б. а. реализуются как непрерывные дифференцирования из A в X «по модулю внутренних», а элементы двумерных — как препятствия к расщепимости сингулярных расширений A с ядром X. В то же время

на языке К. б. а. выражается ряд специфических понятий анализа и топологии.

Алгебра A такая, что $H^2(A, X)=0$ для всех X, наз. в п о л н е о т д е л и м о й; эти алгебры характеризуются тем, что все их сингулярные расширения расщепимы. Специфика банаховых структур сказывается в том, что такое требование является весьма жестким: вполне отделимая коммутативная банахова алгебра необходимо имеет конечный спектр (пространство максимальных идеалов). В частности, вполне отделимая алгебра функций совпадает с прямой суммой конечного числа полей комплексных чисел.

Класс банаховых алгебр с тривиальными когомологиями в высших ($n\geqslant 3$) размерностях уже не столь узок: таковы, напр., бипроективные алгебры — алгебры A, проективные, как банахов A-бимодуль. Бипроективными являются L^1- и C^*-алгебра компактной группы, а также алгебры ядерных операторов во всех классических примерах банаховых пространств. При нек-рых условиях на банахову структуру топологически простые бипроективные алгебры допускают полное описание, а любая полупростая бипроективная алгебра разлагается в их топологич. прямую сумму.

Коммутативная алгебра наз. слабо наследственной, если ее максимальные идеалы проективны. Это свойство эквивалентно тривиальности $H^2(A, X)$ с теми X, у к-рых $xa=\lambda x$ при всех $x\in X$, $a\in A$. Для проективности идеала в коммутативной банаховой алгебре A необходимо, а при $A=C(\Omega)$ и достаточно, чтобы его спектр был паракомпактен. В частности, слабая наследственность алгебры $C(\Omega)$ эквивалентна паракомпактности всех множеств вида $\Omega\setminus\{t\}$, $t\in\Omega$.

Пространство, сопряженное к A-бимодулю X, само есть A-бимодуль. Алгебры с $H^n(A, X^*)=0$ при всех X и $n>0$ наз. а м е н а б е л ь н ы м и, поскольку для $A=L^1(G)$ такое свойство равносильно аменабельности (усреднимости) самой G. В общем случае A аменабельна тогда и только тогда, когда алгебра

$$I_\Delta=\left\{u=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\otimes b_k\in A_t\hat{\otimes}A_t:\ \sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k=0\right\}$$

обладает ограниченной аппроксимативной единицей.

Лит.: [1] J o h n s o n B. E., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1972, № 127; [2] Х е л е м с к и й А. Я., Труды семинара им. Петровского, 1978, в. 3, с. 223—42.

А. Я. Хелемский.

КОГОМОЛОГИИ ГРУПП — исторически первая теория *когомологий алгебр*.

Любой паре (G, A), где G — группа, а A — левый G-модуль, т. е. модуль над целочисленным групповым кольцом $\mathbb{Z}(G)$, сопоставляется последовательность абелевых групп $H^n(G, A)$, называемых г р у п п а м и к о г о м о л о г и й г р у п п ы G с к о э ф ф и ц и е н т а м и в A. Число n, пробегающее все целые неотрицательные значения, наз. р а з м е р н о с т ь ю группы $H^n(G, A)$. Группы К. г. являются важными инвариантами, содержащими информацию как о группе G, так и о модуле A.

Группа $H^0(G, A)$ равна, по определению, $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, A)\simeq A^G$, где A^G — подмодуль G-инвариантных элементов в A. Группы $H^n(G, A)$ для $n\geqslant 1$ определяются как значения n-го *производного функтора* от функтора $A\curvearrowright H^0(G, A)$. Пусть

$$\ldots\xrightarrow{d_n}P_n\xrightarrow{d_{n-1}}P_{n-1}\longrightarrow\ldots\longrightarrow P_0\longrightarrow\mathbb{Z}\longrightarrow 0$$

— некоторая проективная *резольвента* тривиального G-модуля $\mathbb{Z}$ в категории G-модулей, т. е. точная последовательность, в которой все модули P_i проективны. Тогда $H^n(G, A)$ — это n-я группа когомологий *комплекса*

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_G(P_0, A)\xrightarrow{d_0'}\mathrm{Hom}_G(P_1, A)\longrightarrow\ldots,$$

где отображения d'_n индуцированы отображениями d_n, т. е. $H^n(G, A)=\operatorname{Ker} d'_n/\operatorname{Im} d'_{n-1}$.

Группы гомологий групп определяются при помощи двойственной конструкции с заменой всюду функтора Hom_G функтором $\otimes_G$.

Набор функторов $A \rightsquigarrow H^n(G, A)$, $n=0, 1, \ldots$, является когомологическим функтором (см. *Гомологический функтор*) на категории левых G-модулей.

Модуль вида $B=\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}[G], X)$, где X — абелева группа, а G действует на B по формуле

$$(g\varphi)(t)=\varphi(tg) \quad (\varphi \in B,\ t \in \mathbb{Z}(G)),$$

наз. коиндуцированным. Для инъективных и коиндуцированных модулей A $H^n(G, A)=0$ при $n \geqslant 1$. Любой модуль A изоморфен подмодулю нек-рого коиндуцированного модуля B. Точная когомологическая последовательность для последовательности

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow B/A \longrightarrow 0$$

определяет изоморфизмы $H^n(G, B/A) \simeq H^{n+1}(G, A)$ $(n \geqslant 1)$ и точную последовательность

$$B^G \longrightarrow (B/A)^G \longrightarrow H^1(G, A) \longrightarrow 0.$$

Таким образом, вычисление $n+1$-мерной группы когомологий для модуля A сводится к вычислению n-мерной группы когомологий для модуля B/A. Этот прием наз. сдвигом размерностей.

Сдвиг размерностей позволяет дать аксиоматическое определение групп когомологий, а именно, их можно определить как последовательность функторов $A \rightsquigarrow H^n(G, A)$ из категории G-модулей в категорию абелевых групп, образующую когомологический функтор и удовлетворяющую условию $H^n(G, B)=0$ при $n \geqslant 1$ для любого коиндуцированного модуля B.

Группы $H^n(G, A)$ можно определить также как классы эквивалентности точных последовательностей G-модулей вида

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow M_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_n \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

относительно подходящим образом определенной эквивалентности (см. [1], гл. 3, 4).

Для вычисления групп когомологий обычно используют стандартную резольвенту тривиального G-модуля $\mathbb{Z}$, в которой $P_n=\mathbb{Z}[G^{n+1}]$ и для $(g_0, \ldots, g_k) \in G^{n+1}$

$$d_n(g_0, \ldots, g_n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_n),$$

где знак $\hat{}$ означает, что член g_i опущен. Коцепи из $\operatorname{Hom}_G(P_n, A)$ — это функции $f(g_0, \ldots, g_n)$ такие, что $gf(g_0, \ldots, g_n)=f(gg_0, \ldots, gg_n)$. Делая замену переменных по формулам $g_0=1$, $g_1=h_1$, $g_2=h_1h_2$, $g_n=h_1h_2 \ldots h_n$, можно перейти к неоднородным коцепям $f(h_1, \ldots, h_n)$. Действие кограничного оператора на них таково:

$$d'f(h_1, \ldots, h_{n+1})=h_1f(h_2, \ldots, h_{n+1})+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(h_1, \ldots, h_ih_{i+1}, \ldots, h_{n+1})+$$
$$+(-1)^{n+1}f(h_1, \ldots, h_n),$$

напр., одномерный коцикл — это функция $f: G \to A$ такая, что $f(g_1g_2)=g_1f(g_2)+f(g_1)$ для $g_1, g_2 \in G$, а кограница — функция вида $f(g)=ga-a$ для нек-рого $a \in A$. Одномерный коцикл наз. также скрещенным гомоморфизмом, а одномерная коцепь — тривиальным скрещенным гомоморфизмом. В случае, когда G действует на A тривиально, скрещенные гомоморфизмы совпадают с обычными гомоморфизмами, а все тривиальные скрещенные гомоморфизмы равны 0, т. е. в этом случае $H^1(G, A)=\operatorname{Hom}(G, A)$.

Элементы группы $H^1(G, A)$ можно интерпретировать как классы автоморфизмов группы F, содержащейся

в точной последовательности $1 \to A \to F \to G \to 1$, тождественные на A и на G по модулю сопряжений элементами $a \in A$. Элементы группы $H^2(G, A)$ интерпретируются как классы расширений группы A с помощью G. Наконец, группа $H^3(G, A)$ допускает интерпретацию в качестве препятствий для расширений неабелевой группы H с центром A с помощью G (см. [1]). Для $n>3$ аналогичная интерпретация групп $H^n(G, A)$ неизвестна (1978).

Если H — подгруппа группы G, то ограничение коциклов с G на H определяет для всех n функториальные гомоморфизмы ограничения

$$\text{res}\colon H^n(G, A) \longrightarrow H^n(H, A).$$

При $n=0$ res совпадает с вложением $A^G \subset A^H$. Если G/H — некоторая факторгруппа группы G, то подъем коциклов с G/H на G индуцирует функториальные гомоморфизмы инфляции

$$\text{inf}\colon H^n(G/H, A^H) \longrightarrow H^n(G, A).$$

Пусть $\varphi : G' \to G$ — некоторый гомоморфизм. Тогда любой G-модуль A можно превратить в G'-модуль, полагая для $g' \in G'$, $g'a = \varphi(g')a$. Комбинируя отображения res и inf, получают отображения $H^n(G, A) \to H^n(G', A)$. В этом смысле $H \to (G, A)$ является контравариантным функтором по G. Если Π — некоторая группа автоморфизмов группы G, то группы $H^n(G, A)$ можно превратить в Π-модули. Напр., если H — нормальный делитель в G, то группы $H^n(H, A)$ можно снабдить естественной структурой G/H-модулей. Это возможно благодаря тому, что внутренние автоморфизмы группы G индуцируют тождественные отображения на группах $H^n(G, A)$. В частности, для нормального делителя $H \in G$ $\operatorname{Im}\text{res} \subset H^n(H, A)^{G/H}$.

Пусть H — подгруппа группы G конечного индекса. Тогда отображение нормы $N_G/H : A^H \to A^G$ позволяет, при помощи сдвига размерностей, определить для всех n функториальные гомоморфизмы кограничения

$$\text{cores}\colon H^n(H, A) \longrightarrow H^n(G, A),$$

удовлетворяющие соотношению $\text{cores} \cdot \text{res} = (G : H)$.

Если H — нормальный делитель в G, то существует спектральная последовательность Линдона, со вторым членом $E_2^{p,q} = H^p(G/H, H^q(H, A))$, сходящаяся к когомологиям $\otimes_n H^n(G, A)$ (см. [1], гл. 2). В малых размерностях она приводит к точной последовательности

$$0 \longrightarrow H^1(G/H, A^H) \xrightarrow{\text{inf}} H^1(G, A) \xrightarrow{\text{res}} H'(H, A)^{G/H_{\text{tr}}} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^2(G/H, A^H) \xrightarrow{\text{inf}} H^2(G, A),$$

где tr — отображение трансгрессии.

Для конечной группы G норменное отображение N_G: $A \to A$ индуцирует отображение $\hat{N}_G : H_0(G, A) \to H^0(G, A)$, где $H_0(G, A) = A/J_G A$ и J_G — идеал кольца $\mathbb{Z}(G)$, порожденный всеми элементами вида $g-1$ для $g \in G$. Отображение N_G позволяет срастить точные последовательности когомологий и гомологий. Точнее, можно определить модифицированные группы когомологий — $\hat{H}^n(G, A)$ (называемые также когомологиями Тейта) для всех целых n. При этом

$$\hat{H}^n(G, A) = H^n(G, A) \quad \text{для } n \geqslant 1,$$
$$\hat{H}^n(G, A) = H_{-n-1}(G, A) \quad \text{для } n \leqslant -1,$$
$$\hat{H}^{-1}(G, A) = \operatorname{Ker} \hat{N}_G \quad \text{и} \quad \hat{H}_0(G, A) = \operatorname{Coker} \hat{N}_G.$$

Для этих когомологий существует точная бесконечная в обе стороны когомологическая последовательность. G-модуль A наз. когомологически тривиальным, если $\hat{H}^n(H, A) = 0$ для всех n и любой

подгруппы $H \subseteq G$. Модуль A когомологически тривиален тогда и только тогда, когда для нек-рого $i \hat{H}^i(H, A) = 0$ и $\hat{H}^{i+1}(H, A) = 0$ для любой подгруппы $H \subseteq G$. Любой модуль A можно представить как подмодуль или фактормодуль когомологически тривиального модуля, что позволяет применять сдвиг размерностей как для повышения, так и для понижения размерности. В частности, сдвиг размерностей позволяет определить отображения res и cores (но не inf) для всех целых n. Для конечно порожденного G-модуля A группы $\hat{H}^n(G, A)$ конечны.

Группы $\hat{H}^n(G, A)$ аннулируются умножением на порядок G, а отображения $\hat{H}(G, A) \to \bigoplus_p \hat{H}^n(G_p, A)$, индуцированные ограничениями, где G_p — некоторая силовская p-подгруппа группы G, мономорфны. Это позволяет сводить ряд вопросов о когомологиях конечных групп к рассмотрению когомологий p-групп. Когомологии циклической группы имеют период 2, т. е. для любого n $\hat{H}^n(G, A) \simeq \hat{H}^{n+2}(G, A)$.

Для любых целых n и m определено отображение (наз. $\smile$-произведением)

$$\hat{H}^n(G, A) \otimes \hat{H}^m(G, B) \longrightarrow \hat{H}^{n+m}(G, A \otimes B),$$

где тензорное произведение групп A и B рассматривается как G-модуль. В частном случае, когда A — кольцо, и операции из группы G являются автоморфизмами, то $\smile$-произведение превращает группу $\bigoplus_n \hat{H}^n(G, A)$ в градуированное кольцо. Теорема двойственности для $\smile$-произведения утверждает, что для любой полной абелевой группы C и G-модуля A $\smile$-произведение

$$\hat{H}^n(G, A) \otimes \hat{H}^{-n-1}(G, \mathrm{Hom}(A, C)) \longrightarrow \hat{H}^{-1}(G, C)$$

определяет изоморфизм между группами $\hat{H}^n(G, A)$ и $\mathrm{Hom}(\hat{H}^{-n-1}(G, \mathrm{Hom}(A, C)), \hat{H}^{-1}(G, C))$ (см. [2]). $\smile$-произведение определено и для бесконечной группы G при условии, что $n, m > 0$.

Многие задачи приводят к необходимости рассмотрения когомологий топологич. группы G, непрерывно действующей на топологич. модуле A. В частности, если G — *проконечная группа* (случай наиболее близкий конечным группам) и A — дискретная абелева группа, являющаяся непрерывным G-модулем, то можно рассмотреть когомологии группы G с коэффициентами в A, вычисляемые в терминах непрерывных коцепей [5]. Эти группы можно определить также как пределы $\lim H^n(G/U, A^U)$ относительно отображений инфляции, где U пробегает все открытые нормальные делители в G. Эти когомологии обладают всеми основными свойствами когомологий конечных групп. Если G — про-p-группа, то размерности над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ первой и второй групп ее когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ интерпретируются как минимальное число образующих и соотношений (между этими образующими) группы G.

О различных вариантах непрерывных когомологий, а также нек-рых других типах групп когомологий см. [6]. О К. г. с неабелевой группой коэффициентов см. *Неабелевы когомологии*.

Лит.: [1] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [2] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [3] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [4] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [5] Кох Х., Теория Галуа p-расширений, пер. с нем., М., 1973; [6] Итоги науки. Математика. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 203—35.

Л. В. Кузьмин.

КОГОМОЛОГИЙ КОМПЛЕКСА — см. *Гомологии комплекса.*

КОГОМОЛОГИЙ ГРУППА коцепного комплекса $K = (K^n, d_n)$ абелевых групп — градуированная группа $H(K) = \bigoplus H^n(K)$, где $H^n(K) = \mathrm{Ker}\, d_{n+1}/\mathrm{Im}\, d_n$ (см. *Комплекс*). Группа $H^n(K)$ наз.

n-мерной, или n-й, К. г. комплекса K. Это понятие двойственно понятию группы гомологий цепного комплекса (см. *Гомологии комплекса*).

Модули когомологий коцепного комплекса в категории модулей также часто наз. К. г.

Когомологий группа цепного комплекса $K.=(K_n,\ d_n)$ Λ-модулей с коэффициентами, или со значениями, в A, где Λ — некоторое ассоциативное кольцо с единицей, а A — Λ-модуль, есть К. г.

$$H^{\cdot}(K.,\ A)=\otimes H^n(K.,\ A)$$

коцепного комплекса

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda}(K.,\ A)=(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(K_n,\ A),\ d_n^*),$$

где $d_n^*(\gamma)=\gamma\circ d_n$, $\gamma\in\mathrm{Hom}_{\Lambda}(K_n,\ A)$. Частным случаем этой конструкции являются К. г. полиэдра, сингулярные К. г. топологич. пространства, К. г. групп, алгебр и т. д.

Если $0\to K.\xrightarrow{\alpha}L.\xrightarrow{\beta}M.\to 0$ — точная последовательность комплексов Λ-модулей, причем образы K_n — прямые слагаемые в L_n, то естественным образом возникает точная последовательность

$$\ldots\longrightarrow H^n(M.,\ A)\xrightarrow{\alpha^*}H^n(L.,\ A)\xrightarrow{\beta^*}H^n(K.,\ A)\xrightarrow{d^*}$$
$$\longrightarrow H^{n+1}(M.,\ A)\longrightarrow\ldots$$

С другой стороны, если $K.$ — комплекс Λ-модулей, причем все K_n проективны, то с каждой точной последовательностью $0\to A\to B\to C\to 0$ Λ-модулей связана точная последовательность К. г.

$$\ldots\longrightarrow H^n(K.,\ A)\longrightarrow H^n(K.,\ B)\longrightarrow H^n(K.,\ C)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{n+1}(K.,\ A)\longrightarrow\ldots$$

О К. г. топологич. пространства см. *Гомологии группа* топологич. пространства, *Когомологии*.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [3] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966.

Л. В. Кузьмин.

КОГОМОЛОГИЙ КОЛЬЦО — кольцо, аддитивной группой к-рого является градуированная группа когомологий

$$\oplus\sum_{n=0}^{\infty}H^n(X,\ A),$$

где X — некоторый цепной комплекс, A — группа коэффициентов, а умножение определяется по линейности набором отображений

$$\nu_{m,\,n}\colon H^m(X,\ A)\otimes H^n(X,\ A)\longrightarrow H^{m+n}(X,\ A)$$

для всех $m,\ n\geqslant 0$, являющихся внутренними когомологич. умножениями. К. к. оказывается при этом снабженным структурой градуированного кольца.

Для существования отображений $\nu_{m,\,n}$ достаточно иметь набор отображений $\hat{\nu}_{m,\,n}\colon X_{m+n}\to X_m\otimes X_n$, удовлетворяющих нек-рым дополнительным свойствам, и отображение $A\otimes A\to A$, т. е. умножение в группе коэффициентов A (см. [2]). Тогда отображения $\hat{\nu}_{m,\,n}$ индуцируют отображения

$$\mathrm{Hom}(X_m,\ A)\otimes\mathrm{Hom}(X_n,\ A)\longrightarrow\mathrm{Hom}(X_{m+n},\ A),$$

к-рые в свою очередь индуцируют на когомологиях отображения $\nu_{m,\,n}$.

В частности, структура кольца определена на градуированной группе $H(G,\ \mathbb{Z})=\oplus\sum_{n=0}^{\infty}H^n(G,\ \mathbb{Z})$, где G — некоторая группа и $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел с тривиальным действием группы G. Соответствующие отображения $\nu_{m,\,n}$ совпадают с $\smile$-произведением. Это ассоциативное кольцо с единицей, а для однородных элементов $a,\ b\in H(G,\ \mathbb{Z})$ степеней p и q соответственно выполняется соотношение $ab=(-1)^{pq}ba$.

Аналогично, $\cup$-произведение определяет структуру кольца на группе $\oplus_{n=0}^{\infty} H^n(X, \mathbb{Z})$, где $H^n(X, \mathbb{Z})$ — n-мерная группа сингулярных когомологий топологич. пространства X с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966. *Л. В. Кузьмин.*

КОГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ — естественное преобразование одних когомологич. функторов в другие (чаще всего — в себя).

Когомологической операцией типа $(n, m; \pi, G)$, n, m — целые числа, π, G — абелевы группы, наз. такое семейство заданных для любого пространства X отображений (не обязательно гомоморфизмов) групп когомологий $\theta_X : H^n(X; \pi) \to H^m(X; G)$, что для любого непрерывного отображения $f : X \to Y$, $\theta_X \circ f^* = f^* \circ \theta_Y$ (естественность). Множество всех К. о. типа $(n, m; \pi, G)$ образует абелеву группу относительно сложения: $(\theta+\psi)_X = \theta_X + \psi_X$, обозначаемую $O(n, m; \pi, G)$.

Примеры К. о.: *Стинрода приведенные степени* Sq^i и $\mathcal{P}^i$; *Понтрягина квадрат* $\mathcal{P}_1$; *Постникова квадрат*; возведение в k-ю степень μ_k: для $x \in H^s(X; \pi)$, где π — кольцо, $\mu_k(x) = x^k$, $\mu_k \in O(s, ks, \pi, \pi)$; гомоморфизм Бокштейна β; К. о., индуцированные гомоморфизмами $\pi \to G$ групп коэффициентов, например mod $p : H^n(X) \to H^n(X; \mathbb{Z}_p)$.

К. о. представляют собой дополнительную структуру в когомологич. функторах, ввиду чего они позволяют решать такие задачи гомотопич. топологии, к-рые нельзя решить «на уровне» групп когомологий. Примеры: 1) пусть X и Y — два пространства и $x \in H^n(X; \pi)$, $y \in H^n(Y; \pi)$ — два элемента. Существует ли отображение $f : X \to Y$ с $f^*(y) = x$? Первым достаточным условием отсутствия такого f является отсутствие гомоморфизма $g : H^*(Y; \pi) \to H^*(X; \pi)$ с $g(y) = x$ (таким приемом доказывается, напр., *Брауэра теорема* о неподвижной точке). Если g существует, то несуществование отображения f можно установить так: пусть имеется К. о. $\theta \in O(n, m; \pi, G)$ с $\theta_Y(y) = 0$, $\theta_X(x) \neq 0$. Тогда $0 \neq \theta_X(x) = \theta_X(f^*(y)) = f^*(\theta_Y(y)) = f^*(0) = 0$, что невозможно; в частности $\theta(0) = O$. 2) Существенно ли отображение $f : S^m \to S^n$? Пусть $C_f = S^n \cup_f e^m$. Тогда (при $m \neq n$) $H^{m+1}(C_f; G) = G$, $H^n(C_f; \pi) = \pi$. Если существует К. о. $\theta \in O(n, m+1; \pi, G)$ с $\theta_{C_f} \neq 0$, то f существенно. В этом случае операция θ детектирует отображение f или элемент $[f] \in \pi_m(S^n)$.

Имеет место изоморфизм группы $O(n, m; \pi, G) \approx H^m(K(\pi, n); G)$, где $K(\pi, n)$ — *Эйленберга—Маклейна пространство*, и потому $O(n, m; \pi, G) \approx [K(\pi, n), K(G, m)]$ (см. *Представимый функтор*). Группы $H^m(K(\pi, n); G)$ вычислены для всех m и n и любых конечно порожденных π и G [9].

Когомологическая надстройка ${}^1\theta \in O(n-1, m-1; \pi, G)$ над К. о. $\theta \in O(n, m; \pi, G)$, определяется отображением ${}^1\theta_X$, заданным композицией

$$H^{n-1}(X; \pi) \longrightarrow H^n(SX; \pi) \xrightarrow{\theta_{SX}} H^m(SX; G) \longrightarrow H^{m-1}(X; G),$$

где SX — *надстройка* над X. Напр., ${}^1\mu_k = 0$, ${}^1Sq^i = Sq^i$, ${}^1\mathcal{P}^i = \mathcal{P}^i$. При $m \leq 2n - 1^1(\theta)$ есть изоморфизм. Для любого X ${}^1\theta_X$ есть гомоморфизм групп.

Стабильной (или стационарной) когомологической операцией типа (π, G) степени k наз. набор $\{\theta_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ с $\theta_n \in O(n, n+k; \pi, G)$ и ${}^1\theta_n = \theta_{n-1}$. Такие К. о. образуют абелеву группу $O_S(k; \pi, G)$, изоморфную группе $\varprojlim_n H^{n+k}(K(\pi, n); G)$ — обратному пределу последовательности

$$\ldots \leftarrow H^{n+k}(K(\pi, n); G) \leftarrow H^{n+k-1}(K(\pi, n-1); G) \leftarrow \ldots$$

Группа $\oplus_k O_S(k; \pi, G)$ обозначается $O_S(\pi, G)$.

Примеры стабильных К. о.: степени Стинрода $Sq^i \in O_S(i;\ \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2)$ и $\mathcal{P}^i \in O_S(2(p^i-1);\ \mathbb{Z}_p,\ \mathbb{Z}_p)$, $p>2$ — простое, и гомоморфизмы Бокштейна $\beta \in O_S(1;\ \mathbb{Z}_m,\ \mathbb{Z}_m)$.

Если $\theta \in O(n,\ m;\ \pi,\ G)$ и $\varphi \in O(m,\ l;\ G,\ \tau)$, то определена К. о. $\varphi\circ\theta \in O(n,\ l;\ \pi,\ \tau)$. В частности, можно определить композицию $\varphi\circ\theta \in O_S(\pi,\ \tau)$ любых двух стабильных К. о. $\theta \in O_S(\pi,\ G)$ и $\varphi \in O_S(G,\ \tau)$, так что группа $O_S(\pi,\ \pi)$ является кольцом; $O_S(\mathbb{Z}_p,\ \mathbb{Z}_p)$ паз. *Стинрода алгеброй* A_p.

К. о. впервые появилась при решении задачи классификации отображений $(n+1)$-мерного полиэдра в n-мерную сферу ($n=2$ в [1] и $n>2$ в [2]). Теорема классификации [2]. Имеет место точная последовательность групп:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker}(Sq^2 : H^{n-1}(X;\ \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{n+1}(X;\ \mathbb{Z}_2)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow [X,\ S^n] \longrightarrow \ker(H^n(X) \xrightarrow{\text{mod } 2} H^n(X;\ \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{Sq^2}$$

$$\longrightarrow H^{n+2}(X;\ \mathbb{Z}_2)) \longrightarrow 0.$$

Теорема продолжения [2]. Пусть Y — $(n+2)$-мерный полиэдр, Y^{n+1} — его $(n+1)$-мерный остов. Отображение $f : Y^{n+1} \to S^n$ определяет элемент $y = f^*(s) \in H^n(Y^{n+1})$, где $s \in H^n(S^n)$ — образующая. Это отображение продолжается до $g : Y \to S^n$ тогда и только тогда, когда $Sq^2(y \bmod 2) = 0$.

Отвечающее К. о. $\theta \in O(n,\ m;\ \pi,\ G)$ отображение $\theta : K(\pi,\ n) \to K(G,\ m)$ из стандартного *Серра расслоения*

$$K(G,\ m-1) \longrightarrow PK(G,\ m) \longrightarrow K(G,\ m)$$

индуцирует расслоение

$$F = K(G,\ m-1) \xrightarrow{i} E(\theta) \xrightarrow{p} K(\pi, n) = B.$$

Вторичные когомологические операции — классы когомологий пространств $E(\theta)$. Более точно, пусть задан элемент $\varphi \in H^q(E(\theta);\ H)$, H — абелева группа. Для любого $u \in H^n(X;\ \pi)$ с $\theta_X(u) = 0$ существует $\tilde{u} \in [X,\ E(\theta)]$ с $p_{\#}\tilde{u} = u$, где $p_{\#} : [X,\ E(\theta)] \to [X,\ B]$ — индуцированное p отображение, и элемент $v = \varphi\circ\tilde{u} = \tilde{u}^*(\varphi) \in H^q(X;\ H)$, зависящий от выбора элемента $\tilde{u}$. Произвол в выборе $\tilde{u}$ определяется прообразом $p^{-1}(u)$, т. е. орбитой действия группы $[X,\ F] = H^{m-1}(X;\ G)$ на множестве $[X,\ E(\theta)]$. При $m<2n-1$ и $q<2n-1$ $i_{\#}$ и $\varphi_{\#}$ будут гомоморфизмами групп, и потому при другом выборе $\tilde{u}$ элемент v может измениться лишь на некрый элемент подгруппы $\operatorname{Im}(i^*\varphi : H^m(X;\ G) \to H^q(X;\ H)) = Q$ группы $H^q(X;\ H)$. Определим вторичную К. о. Φ, полагая $\Phi_X(u) = u + Q$ (смежный класс $u+Q$ однозначно определен элементом u). Таким образом, отображение Φ_X определено на подгруппе $\operatorname{Ker}\theta_X$ и принимает значения в факторгруппе $H^q(X;\ H)/Q$, где Q наз. неопределенностью К. о. Φ. Другое название: Φ — частичная многозначная К. о. из $H^n(\cdot;\ \pi)$ в $H^q(\cdot;\ H)$.

Вторичные К. о. естественны в следующем смысле: для любого $f : Y \to X$ и любого $u \in \operatorname{Ker}\theta \subset H^n(X;\ \pi)$ имеет место: $f^*(\Phi_X(u)) \subset \Phi_Y(f^*(u))$ [3]. Если $i^*(\varphi) = 0$, то $\varphi = p^*(\theta')$ для нек-рой $\theta' \in H^q(B;\ H)$, так что $\tilde{u}^*(\varphi) = \theta'(u)$, и потому $\Phi u = u^*(\theta') = \theta'(u)$ с нулевой неопределенностью. При этом для К. о. $\theta'' \in H^m(B;\ H)$ с $p^*(\theta'') = \varphi$ и элемента $u \in \operatorname{Ker}\theta$ выполнено $\theta'(u) = \theta''(u)$, так что К. о. Φ является однозначной К. о. θ', ограниченной на $\operatorname{Ker}\theta$.

Каждой вторичной К. о. отвечает нек-рое соотношение между обычными (примарными) К. о. Если $q<2m-1$, то К. о. $i^*(\varphi) \in H^q(K(G,\ m-1);\ H)$ однозначно представляется в виде $^1\psi$ с $\psi \in H^{q+1}(K(G,\ m+1);\ H)$ и $\psi\circ\theta = 0$. Если $\varphi' \in H^m(E(\theta);\ H)$ такова, что $i^*(\varphi - \varphi') = 0$, то К. о. Φ' отвечает то же самое соотношение $\psi\circ\theta = 0$. Обратно, любому соотношению вида

$\psi\circ\theta=0$ отвечает множество вторичных К. о. $\{\Phi\}$, любые две из к-рых отличаются друг от друга на примарную К. о., определенную на ядре К. о. θ.

Более общее понятие вторичной К. о. получается, если исходить из набора $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ с $\theta_i\in H^{m_i}(K(\pi, n); G)$ и соотношения $\sum\Psi_i\circ\theta_i=0$ (см. [3]).

Пример вторичной К. о. Пусть

$$\theta=Sq^2\circ\mathrm{mod}\,2: H^n(\cdot; \mathbb{Z})\longrightarrow H^{n+2}(\cdot, \mathbb{Z}_2)$$

и пусть $\varphi\in H^{n+3}(E(\theta); \mathbb{Z}_2)$ — $\mathbb{Z}_2$-образующая. Возникает вторичная К. о. $\alpha: H^n(\cdot; \mathbb{Z})\to H^{n+3}(\cdot; \mathbb{Z}_2)$, соответствующая соотношению $Sq^2\circ(Sq^2\circ\mathrm{mod}\,2)=0$. Она позволяет классифицировать отображения $(n+2)$-мерного полиэдра в n-мерную сферу, $n>2$. Решение соответствующей задачи продолжения таково. Пусть Y — $(n+3)$-мерный полиэдр и пусть дано отображение $f: Y^{n+1}\to S^n$, так что имеется элемент $y\in H^n(Y^{n+1})$, $y\in f^*(s)$. Для продолжения f на Y^{n+2} необходимо условие $Sq^2(y \bmod 2)=0$; если f продолжается на Y^{n+2}, то на y определена α. Оказывается, что f можно продолжить на Y тогда и только тогда, когда $0\in\alpha(y)$. При этом α детектирует отображение $S^{n+2}\to S^{n+1}\to S^n$, являющееся композицией надстроек над отображением Хопфа $S^3\to S^2$ и задающее образующую группы $\pi_{n+2}(S^n)=\mathbb{Z}_2$.

С помощью вторичных К. о. было дано также первое решение проблемы «нечетного инварианта Хопфа» [7]. Для отображения $f: S^{2n-1}\to S^n$ инвариантом Хопфа $H(f)\in\mathbb{Z}$ определяется формулой $u^2=H(f)v$, где $v\in H^{2n}(S^n\cup_f e^{2n})=\mathbb{Z}$, $u\in H^n(S^n\cup_f e^{2n})=\mathbb{Z}$ — образующие. Нечетность $H(f)$ равносильна условию $Sq^n u_n\neq 0$, где $u_n\in H^n(S^n\cup_f e^{2n}; \mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2$. При $n\neq 2^s$ операция Sq^n разложима в классе примарных операций, т. е. $Sq^n=\sum_{t<n}a_t Sq^t$, так что $H(f)$ может быть нечетным лишь при $n=2^s$. Но в классе вторичных операций Sq^{2^s} разложимы при $s\neq 1, 2, 3$, и поэтому $H(f)$ нечетно лишь при $n=2, 4, 8$.

Наряду с вторичными К. о. существуют третичные К. о. и вообще К. о. любого порядка. Примарной операции θ и элементу $\varphi\in H^q(E(\theta); H)$, определяющим вторичную К. о. Φ, отвечает отображение $E(\theta)\to K(H; q)$, индуцирующее из расслоения Серра над $K(H; q)$ расслоение $K(H, q-1)\to E(\Phi)\to E(\theta)$; при этом $E(\Phi)$ наз. пространством когомологической операции Φ. Имея класс когомологий $\gamma\in H^r(E(\Phi); A)$, можно построить третичную К. о. $\Gamma: H^n(X; \pi)\to H^r(X; A)$, определенную на $\mathrm{Ker}\,\Phi$, неопределенность к-рой (при подходящих размерностных ограничениях) есть $\mathrm{Im}\,(i^*\gamma)$. Этой К. о. отвечает соотношение $\psi\circ\Phi=0$, где ψ — примарная К. о., ${}^1\psi=i^*\gamma$. Индуктивное продолжение этого процесса приводит к определению когомологической операции n-го порядка. Иными словами, для К. о. ξ n-го порядка, пространство к-рой есть $E(\xi)$, и элемента $\lambda\in H^s(E(\xi); C)$ строится К. о. $(n+1)$-го порядка Λ, определенная на $\mathrm{Ker}\,\xi$. При этом пространство $E(\Lambda)$ является пространством расслоения, индуцированного из расслоения Серра над $K(C, s)$ отображением $\lambda: E(\xi)\to K(C, s)$. Построена [12] аксиоматика высших К. о.

Простейшими примерами высших К. о. являются высшие гомоморфизмы Бокштейна. Пусть дана точная последовательность групп

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow{p}\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}_p\longrightarrow 0$$

и соответствующая точная последовательность

$$\ldots H^n(X)\xrightarrow{p}H^n(X)\xrightarrow{\mathrm{mod}\,p}H^n(X; \mathbb{Z}_p)\xrightarrow{\delta}H^{n+1}(X)\longrightarrow\ldots$$

Гомоморфизм $\beta=\mathrm{mod}\,p\circ\delta: H^n(X; \mathbb{Z}_p)\to H^{n+1}(X; \mathbb{Z}_p)$ и есть гомоморфизм Бокштейна; $\beta\in O_S(1; \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$.

Имеет место $\beta\circ\beta=0$; этому соотношению отвечает вторичная К. о. β_2. При этом $\beta\circ\beta_2=0$, так что возникает третичная К. о. β_3. И вообще β_r — это К. о. порядка r, построенная по соотношению $\beta\circ\beta_{r-1}=0$. При этом β_r определен на $\operatorname{Ker}\beta_{r-1}$. Явное описание К. о. β_r выглядит так: пусть $x\in H^n(X;\ \mathbb{Z}_p)$ и пусть c — представляющий его коцикл с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$; равенство $\beta_{r-1}x=0$ означает, что существует целочисленный представитель z коцикла c, кограница δz которого делится на p^r. Тогда $\beta_r x$ — класс когомологий $\bmod p$ коцикла $\frac{\delta z}{p^r}$. Таким образом, информация о действии высших К. о. Бокштейна в группах $H^*(X;\ \mathbb{Z}_p)$ позволяет полностью вычислить свободную часть и p-компоненту группы $H^*(X)=H^*(X;\ \mathbb{Z})$.

Каждой частичной К. о. Ф отвечает гомотопически простое пространство $E(\Phi)$ с конечным числом (нетривиальных) гомотопич. групп. Обратно, каждому такому пространству E можно сопоставить К. о. Ф, для к-рой E и $E(\Phi)$ слабо гомотопически эквивалентны, $E\overset{w}{\sim}E(\Phi)$. Напр., если E — пространство с двумя нетривиальными гомотопич. группами $\pi_n(E)=\pi,\ \pi_m(E)=G,\ m>n$, то имеется отображение $E\to K(\pi,\ n)$, индуцирующее изоморфизм $\pi_n(E)\to\pi_n(K(\pi,\ n))$. Это отображение можно превратить в расслоение, слоем к-рого будет $K(G,\ m)$; это расслоение индуцируется из расслоения Серра над $K(G,\ m+1)$ нек-рым отображением $K(\pi,\ n)\to K(G,\ m+1)$, последнее задает К. о. $\theta\in O(n,\ m+1;\ \pi,\ G)$.

Эти соображения позволяют описать слабый гомотопич. тип любого пространства, сопоставив ему набор частичных К. о. $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, наз. его n-ми постниковскими факторами (см. *Постникова системы*). Напр., для сферы S^n, $n>3$, первым постниковским фактором является Sq^2, а вторым — α.

Другим важным типом К. о. являются функциональные когомологические операции [3]. Для их определения задается отображение $f: Y\to X$ («функция») и К. о. $\theta\in O(n,\ m;\ \pi,\ G)$. При $m\leqslant 2n-2$ θ лежит в образе когомологич. надстройки и является гомоморфизмом групп. Если f — замкнутое вложение (корасслоение) и $j: X\to(X,\ Y)$ — включение, то функциональная К. о. θ_f: $H^n(X;\ \pi)\to H^{m-1}(Y,\ G)$ определяется как частичное многозначное отображение

$$\theta_f: H^n(X;\pi)\xleftarrow{j^*}H^n(X,Y;\pi)\xrightarrow{\theta(X,Y)}H^m(X,Y;G)\xleftarrow{\delta}$$

$$\longleftarrow H^{m-1}(Y;\ G);$$

$\theta_f=\delta^{-1}\circ\theta\circ(j^*)^{-1}$. Эта К. о. определена на подгруппе $\operatorname{Ker}f^*\cap\operatorname{Ker}\theta_X$ группы $H^n(X,\pi)$, а ее неопределенность есть подгруппа $\operatorname{Im}({}^1\theta_y)+\operatorname{Im}(f^*)$ группы $H^{n-1}(Y;\ G)$. Конструкция функциональной К. о. естественна по f. Пример: если для отображения $f: Y\to X$ существует такая (примарная) К. о. θ и такой класс когомологий u пространства X, что $\theta_f(u)$ определена и $0\notin\theta_f(u)$, то отображение f существенно. Функциональные и вторичные К. о. связаны между собой формулами Петерсона — Штейна (см. [3]), позволяющими в ряде случаев сводить вычисление вторичных К. о. к вычислению примарных и функциональных К. о. Существуют также функциональные К. о. высшего порядка [6].

Конструкцией, аналогичной по построению и приложениям высшим К. о., является *Масси произведение*.

Понятие К. о. было перенесено и в обобщенные теории когомологий. К. о. типа $(n,\ m)$ в обобщенной теории когомологий h^* наз. естественное по X преобразование $h^n(X)\to h^m(X)$. Эти К. о. образуют группу, изоморфную группе $h^m(M_n)$, где $\{M_k,\ s_k\}$ — Ω-спектр, представляющий теорию h^*. Группа всех стабильных К. о. является (относительно композиции) кольцом A^h, так

что $h^*(X)$ — естественный по X A^h-модуль. Понятия частичной и функциональной К. о. также имеют аналоги в обобщенных теориях когомологий.

С помощью частичных К. о. в обычной теории когомологий можно решить в принципе любую гомотопич. задачу, однако практич. применение К. о. порядка $n>3$ весьма трудоемко. В то же время часто бывает, что задача, требующая для своего решения обычных К. о. высшего порядка, может быть решена применением примарных К. о. в подходяще выбранной обобщенной теории когомологий. Напр., проблема «инварианта Хопфа» легко решается с помощью примарных когомологич. операций Адамса ψ^k в K-теории [10]. Эти К. о., введенные [8] для решения задачи о векторных полях на сферах, явились первым примером К. о. в обобщенной теории когомологий.

Алгебра A^h вычислена [4] для $h=U^*$ — теории унитарных *кобордизмов* и использована при построении спектральной последовательности типа Адамса, начальный член к-рой есть когомологии алгебры A^U. Информация о действии кольца A^h в группах $h^*(X)$ оказывается полезной при вычислении спектральной последовательности Атья — Хирцебруха в теории h^* [11].

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Матем. сб.», 1941, т. 9, с. 331—63; [2] Steenrod N., «Ann. Math.», 1947, v. 48, p. 290—320; [3] Мошер Р., Тангора М., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970; [4] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 4, с. 855—951; [5] Стинрод Н., «Математика», 1958, т. 2, № 6, с. 11—48; [6] Петерсон Ф., там же, 1958, т. 2, № 2, с. 47—60; [7] Адамс Дж., там же, 1961, т. 5, № 4, с. 3—86; [8] его же, там же, 1963, т. 7, № 6, с. 49—79; [9] Картан А., там же, 1959, т. 3, № 5, с. 3—50; т. 3, № 6, с. 3—45; [10] Атья М., Лекции по K-теории, пер. с англ., М., 1967; [11] Бухштабер В. М., «Матем. сб.», 1969, т. 78, с. 307—20; 1974, т. 83, с. 61—76; [12] Maunder C., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1963, v. 13, p. 125—154.

Ю. В. Рудяк.

КОГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — см. *Гомологическая последовательность.*

КОГОМОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ — 1) К. р. ($\dim_G X$) топологического пространства X относительно группы коэффициентов G — максимальное целое число p, для к-рого в X найдутся замкнутые подмножества A такие, что когомологии $H^p(X, A; G)$ отличны от нуля. Аналогично определяется *гомологическая размерность* $h\dim_G X$. Конечная лебегова размерность совпадает с $\dim_G$ (с $h\dim_G$), если G — целые числа (приведенные по модулю 1 действительные числа). В евклидовом пространстве $X\subset\mathbb{R}^n$ равенство $\dim_G X=p$ равносильно тому, что X локально зацепляется $(n-p-1)$-мерными циклами (с коэффициентами в G). Для паракомпактных пространств X неравенство $\dim_G X\leqslant p$ равносильно существованию мягких резольвент для G длины p. Поскольку мягкие пучки ацикличны, этим устанавливается связь с общим определением размерности в гомологич. алгебре, напр. инъективная (проективная) размерности модуля $\leqslant p$, если он обладает инъективными (проективными) резольвентами длины p; глобальная размерность кольца есть максимум инъективных (проективных) размерностей модулей над кольцом и является аналогом лебеговой размерности X.

Лит.: [1] Александров П. С., «Ann. Math.», 1929, v. 30, p. 101—87; [2] его же, «Math. Ann.», 1932, Bd 106, S. 161—238; [3] его же, Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975; [4] Харлап А. Э., «Матем. сб.», 1975, т. 96, № 3, с. 347—73; [5] Кузьминов В. И., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, № 5, с. 3—49; [6] Bredon G. E., Sheaf theory, N. Y., 1967; [7] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960.

Е. Г. Скляренко.

2) К. р. схемы — аналог понятия когомологической размерности топологич. пространства для алгебраич. многообразия или схемы с выбранной теорией когомологий на них. Пусть X — алгебраич. многообразие или нётерова схема размерности n. К. р. схемы X наз. целое число $\mathrm{cd}(X)$, равное нижней грани в тех i,

для к-рых $H^j(X, \mathcal{F})=0$ для всех абелевых пучков на топологическом пространстве X при $j>i$. Справедливо неравенство

$$\mathrm{cd}(X)\leqslant n.$$

Когерентной когомологической размерностью схемы X наз. число $\mathrm{cohcd}(X)$, равное нижней грани тех i, для к-рых $H^j(X, \mathcal{F})=0$ для всех когерентных алгебраич. пучков $\mathcal{F}$ на X при $j>i$. В силу определения $\mathrm{cohcd}(X)\leqslant\mathrm{cd}(X)$. По теореме Серра $\mathrm{cohcd}(X)=0$ тогда и только тогда, когда X — аффинная схема. С другой стороны, если X — алгебраич. многообразие над полем k, то $\mathrm{cohcd}(X)=n$ тогда и только тогда, когда X собственно над k (теорема Лихтенбаума) (см. [3]).

Пусть X — собственная схема над полем k, Y — ее замкнутая подсхема коразмерности d и $U=X-Y$. Тогда имеют место следующие утверждения ([2] — [4]).

Если Y — теоретико-множественное полное пересечение обильных дивизоров на X, то

$$\mathrm{cohcd}(U)\leqslant d-1;$$

если X — проективное многообразие Коэна — Маколея (напр., неособое проективное многообразие) и Y нульмерно, то $\mathrm{cohcd}(U)=n-1$. Условие $\mathrm{cohcd}(U)\leqslant n-2$ равносильно тому, что Y связно. Если $X=P^n$ — проективное пространство и Y связно и размерности $\geqslant 1$, то

$$\mathrm{cohcd}(U)<n-1.$$

Если X — алгебраич. комплексное многообразие, то можно рассматривать гомологич. размерность соответствующего топологич. пространства $X(C)$. В общем случае, когда X — нётерова схема, аналогом гомологич. размерности является понятие этальной когомологической размерности схемы X. Точнее, пусть X_{et} — этальная топология Гротендика схемы X и l — простое число. Когомологической l-размерностью схемы X (или этальной К. р.) наз. число $\mathrm{cd}_l(X)$, равное нижней грани тех i, для к-рых $H^j(X_{et}, \mathcal{F})=0$ для всех l-периодических абелевых пучков $\mathcal{F}$ на X_{et} при $j>i$. Если $X=\mathrm{Spec}\,A$ — аффинная схема, то $\mathrm{cd}_l(\mathrm{Spec}\,A)$ наз. также К. р. кольца A. В частности, если A — поле, то понятие $\mathrm{cd}_l(A)$ совпадает с понятием К. р. поля, к-рое изучается в теории *Галуа когомологий*.

Если X — алгебраич. многообразие размерности n над полем k и $l\neq\mathrm{char}\,k$, то $\mathrm{cd}_l(X)\leqslant 2n+cd_l(k)$. В частности, если k — сепарабельно замкнутое поле, то $\mathrm{cd}_l(X)\leqslant 2n$. Если X — аффинное алгебраич. многообразие над сепарабельно замкнутым полем k, то $\mathrm{cd}_l(X)\leqslant\dim X$.

Пусть k — поле конечной характеристики p, тогда для любой нётеровой схемы X над полем k имеет место неравенство

$$\mathrm{cd}_p(X)\leqslant\mathrm{cohcd}(X)+1.$$

В частности, для любого нётерова коммутативного кольца A

$$\mathrm{cd}_p(A)\leqslant 1.$$

Если X — квазипроективное алгебраич. многообразие над сепарабельно замкнутым полем k, то $\mathrm{cd}_p(X)\leqslant\dim X$, где p — характеристика k.

Лит.: [1] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [2] Hartshorne R., «Ann. Math.», 1968, v. 88, p. 403—50; [3] его же, Ample subvarieties of algebraic varieties, B., 1970; [4] его же, «Compositio math.», 1971, t. 23, № 3, p. 257—64; [5] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, B.— Hdlb.— N. Y., t. 2, 1972; t. 3, 1973.

И. В. Долгачев.

КОГОМОЛОГИЧЕСКИЙ ФУНКТОР — см. *Гомологический функтор*.

КОГОМОЛОГИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — см. *Гомологическое многообразие*.

КОГОМОТОПИЧЕСКАЯ ГРУППА — одно из обобщений одномерной группы когомологий, понятие, в некотором смысле дуальное понятию *гомотопической группы*.

Пусть $\pi^n(X)=[X, S^n]$ — множество гомотопич. классов непрерывных отображений пунктрированного топологич. пространства X в пунктированную сферу. Множество $\pi^n(X)$ не всегда имеет естественную структуру группы (это так лишь при $n=1, 3, 7$, поскольку тогда S^n является *H-пространством*). Группа $\pi^1(X)$ совпадает с $H^1(X, \mathbb{Z})$.

Если X — *клеточное разбиение* размерности, не превосходящей $2n-2$, то на множестве $\pi^n(X)$ следующим образом задается структура группы. Для $[\alpha], [\beta]\in \in\pi^n(X)$ рассматривается отображение

$$(\alpha\times\beta)\circ\Delta: X\longrightarrow S^n\times S^n,$$

здесь $\Delta: X\to X\times X$ — диагональное отображение, $\alpha, \beta: X\to S^n$ — представители классов $[\alpha], [\beta]$. Ввиду ограничения на размерность X существует единственный гомотопич. класс отображений $f: X\to S^n\vee S^n$ (здесь $S^n\vee S^n$ — букет пунктированных сфер), композиция к-рого с естественным включением $S^n\vee S^n\subset \subset S^n\times S^n$ совпадает с гомотопич. классом отображения $(\alpha\times\beta)\circ\Delta$. Гомотопич. класс $[\theta\circ f]\in\pi^n(X)$ отображения $\theta\circ f: X\to S^n$, где $\theta: S^n\vee S^n\to S^n$ — складывающее отображение, полагается равным $[\alpha]+[\beta]\in \pi^n(X)$. Относительно описанной операции множество $\pi^n(X)$ представляет собой абелеву группу, поэтому часто функтор π^n рассматривается как функтор, определенный лишь на категории клеточных разбиений размерности, не превосходящей $2n-2$, со значениями в категории абелевых групп. Для клеточных разбиений X размерности, меньшей n, $\pi^n(X)=0$. Таким образом, функтор π^n представляет интерес в размерностях от n до $2n-2$, т. е. в так наз. стабильных размерностях.

Если $\dim X\leqslant 2n-2$, то $\pi^n(X)\approx\pi^{n+1}(SX)$, где SX — *надстройка* над X. Этот изоморфизм задается функтором надстройки: $[X, S^n]\to[SX, SS^n]=[SX, S^{n+1}]$. Если X — произвольное конечномерное клеточное разбиение, то при достаточно большом N множество $\pi^{n+N}(S^NX)$ имеет структуру группы (при $N\geqslant\dim X- -2n+2$ выполнено соотношение $\dim(S^NX)=N+ +\dim X\leqslant 2(n+N)-2$. Группа $\pi^n_S(X)=\pi^{n+N}(S^NX)$ при $N\geqslant\dim X-2n+2$ наз. стабильной когомотопической группой клеточного разбиения, она определена для любого конечномерного клеточного разбиения. Группы $\pi^n_S(X)$ определены при всех целых n (а не только при положительных). Если в качестве X взять две точки (одна из к-рых отмечена), то $\pi^n_S(X)=0$ при $n>0$, $\pi^0_S(X)=\mathbb{Z}$, а $\pi^n_S(X)=\pi_{N-n}(S^N)$ — стабильные гомотопич. группы сфер при $n<0$.

Если (X, A) — пара клеточных разбиений размерности m, то при $m\leqslant 2n-2$ определена относительная когомотопическая группа $\pi^n(X, A)=\pi^n(X/A)$. Имеет место точная последовательность абелевых групп

$$\pi^i(X)\longrightarrow\pi^i(A)\longrightarrow\pi^{i+1}(X, A)\longrightarrow\pi^{i+1}(X)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow\pi^{i+1}(A)\longrightarrow\pi^{i+2}(X, A)\longrightarrow\ldots,$$

продолжающаяся вправо неограниченно, однако, начиная с нек-рого места, все группы будут нулевыми: $\pi^i(X, A)=\pi^i(X)=\pi^i(A)=0$ при $i>m$. Влево эта последовательность продолжается лишь до тех значений i, при к-рых $m\leqslant 2i-2$. В этой последовательности гомоморфизмы $\pi^i(X)\to\pi^i(A)$ и $\pi^i(X/A)\to\pi^i(X)$ индуцированы естественными отображениями $A\subset X$ и $X\to X/A$. Гомоморфизм $\pi^i(A)\to\pi^{i+1}(X/A)$ устроен следующим образом. Для класса $[f]\in\pi^i(A)=[A, S^i]$ и для его представителя $f: A\to S^i$ выбирается продолжение

$F : X \to D^{i+1}$ отображения f, заданного на подпространстве $A \subset X$ со значениями в $S^i \subset D^{i+1}$. Отображение F индуцирует отображение $X/A \to D^{i+1}/S^i = S^{i+1}$, гомотопич. класс к-рого (элемент группы $\pi^{i+1}(X, A)$) ставится в соответствие с классом $[f] \in \pi^i(A)$.

Если (X, A) — пара пунктированных клеточных разбиений конечной размерности, то для стабильных К. г. имеет место точная последовательность

$$\ldots \to \pi_S^i(X) \to \pi_S^i(A) \to \pi_S^{i+1}(X, A) \to \pi_S^{i+1}(X) \to \ldots,$$

продолжающаяся неограниченно в обе стороны. Это обстоятельство позволяет превратить стабильные К. г. в обобщенную теорию когомологий. Для произвольного (непунктированного) конечномерного клеточного разбиения X пусть $\pi_S^i(X) = \pi_S^i(X \bigcup x_0, x_0)$, где $(X \bigcup x_0, x_0)$ — пунктированное клеточное разбиение, полученное из X несвязным присоединением отмеченной точки. Функтор π_S^*, определенный на категории конечномерных клеточных разбиений, задает обобщенную теорию когомологий, если положить

$$\pi_S^*(X, A) = \tilde{\pi}_S^*(X/A) = \mathrm{Ker}\,[\pi_S^*(X/A) \longrightarrow \pi_S^*(pt)].$$

Значение на точке этой теории совпадает со стабильными гомотопич. группами сфер.

К. г., так же как и гомотопические, не могут быть явно вычислены даже в самых простых случаях, и это сильно ограничивает возможность практич. применения описанных выше функторов.

Лит.: [1] Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, пер. с англ., М., 1964; [2] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971.

А. Ф. Харшиладзе.

КОД — конечное или счетное множество *слов* в некром *алфавите*, изучаемое в теории *кодирования и декодирования*. См. *Код с исправлением арифметических ошибок*, *Код с исправлением выпадений и вставок*, *Код с исправлением ошибок*.

КОД С ИСПРАВЛЕНИЕМ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОШИБОК, код, исправляющий арифметические ошибки,— код, предназначенный для контроля работы сумматора. При сложении чисел, представленных в двоичной системе счисления, одиночный сбой в работе сумматора приводит, как правило, к изменению результата на нек-рую степень числа два. В связи с этим в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ вводится понятие (одиночной) арифметической ошибки как преобразования числа N в число $N' = N \pm 2^i$, $i = 0, 1, \ldots$. Функция $\rho(N_1, N_2)$ на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, определяемая как минимальное число арифметич. ошибок, преобразующих N_1 в N_2, является метрикой. Произвольное конечное подмножество (код) $K \subset \mathbb{Z}$ характеризуется расстоянием

$$\rho(K) = \min \rho(N_1, N_2),$$

где минимум берется по всем различным $N_1, N_2 \in K$. Последовательности из t или менее арифметич. ошибок преобразуют любое число N в метрический шар радиуса t с центром в N. Поэтому если метрические шары радиуса t, описанные вокруг любых двух чисел кода, не пересекаются (т. е. расстояние кода больше $2t$), то код наз. кодом, исправляющим t арифметических ошибок. Если же метрический шар радиуса s, описанный вокруг любого числа кода, не содержит других чисел кода (т. е. расстояние кода больше s), то код наз. кодом, обнаруживающим s арифметических ошибок. Метрика ρ допускает другое описание:

$$\rho(N_1, N_2) = w(N_1 - N_2),$$

где $w(N)$ — (арифметический) вес числа N, равный

минимально возможному числу ненулевых коэффициентов в представлениях

$$N=\sum_{i=0}^{k} N_i 2^i, \quad N_i=0, \pm 1, \ k=0, 1, \ \ldots \qquad (*)$$

Для каждого числа N существует единственное представление (*), в к-ром $N_k\neq 0$ и $N_iN_{i+1}=0$, $i=0, 1, \ldots, k-1$, число ненулевых коэффициентов в этом представлении равно $w(N)$. Напр., $23=2^4+2^2+2^1+2^0=2^5-2^3-2^0$ и $w(23)=3$. Так как $\rho(N_1+N, N_2+N)=\rho(N_1, N_2)$ для любых N_1, N_2, $N\in\mathbb{Z}$, то ограничиваются рассмотрением кодов, не содержащих отрицательных чисел. Д л и н о й к о д а K наз. величина $[\log_2 B(K)]+1$, где $B(K)$ — наибольшее число кода K. Произвольному числу B кода длины n однозначно соответствует слово $\beta(B)=b_{n-1}\ldots b_1b_0$ в алфавите $\{0, 1\}$ такое, что $B=\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$. Если код $K\subset\mathbb{Z}$ исправляет t арифметич. ошибок, то код $\{\beta(B): B\in K\}$ исправляет t ошибок (типа замещения) в силу того, что $d(\beta(B_1), \beta(B_2))\geqslant\rho(B_1, B_2)$, где $d(\cdot, \cdot)$ — метрика Хемминга (см. *Код с исправлением ошибок*). При исследовании задачи контроля сумматора обычно рассматривают кодирования $f:\{0, 1, \ldots, M-1\}\longrightarrow\mathbb{Z}$ (см. *Кодирование и декодирование*), обладающие свойством $f(i+j)=f(i)+f(j)$ при $i+j<M$ (что равносильно $f(i)=A\cdot i$, где $A=f(1)$). В этом случае операция кодирования состоит в умножении кодируемого числа на A, а обнаружение ошибок в работе сумматора заключается в проверке делимости на A результата сложения. Код $K_{A, M}=\{0, A, \ldots, A(M-1)\}$ наз. A- к о д о м м о щ н о с т и M. Расстояние A-кода равно минимальному $w(A\cdot i)$, $i=1, \ldots, M-1$. Напр., расстояние 3-кода произвольной мощности равно 2, код обнаруживает одиночные арифметич. ошибки и часто применяется в ЭВМ (в виде контроля по модулю 3). Наиболее исследованы (циклические и негациклические) A-коды мощности $M=2^n\mp 1/A$, характеризующиеся тем свойством, что вместе с числом $B=\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$, $b_i=0, 1$, число $B'=\pm b_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1} b_i 2^i$ также принадлежит коду. Такие коды, называемые (n, A)-к о д а м и, удобно рассматривать как подмножества метрического пространства $\mathbb{N}_m=\{0, 1, \ldots, m-1\}$, $m=2^n\mp 1$ с метрикой $\rho_m(x, y)=w_m(x-y)=\min\{w(x-y), \quad w(x-y-m)\}$. Расстояния (n, A)-кода в метриках ρ и ρ_m равны. С каждым (n, A)-кодом связан (n, A^*)-код, где $AA^*=m$, называемый д в о й с т в е н н ы м. Если 2 или -2 — первообразный корень по модулю простого числа p, то $((p-1)/2, p)$-код исправляет одиночные арифметич. ошибки и является совершенным в метрике ρ_m, т. е. метрические шары радиуса 1, описанные вокруг чисел кода, не только попарно не пересекаются, но и заполняют все $\mathbb{N}_m$. В двойственном коде все расстояния между различными числами кода равны $]p+1)/6[$. Перечисленные результаты для кодов имеют аналоги в классе двоичных линейных циклических кодов, исправляющих ошибки. В то же время не известны арифметич. аналоги БЧХ-кодов, а также не известны верхние границы мощности кодов с заданными длиной и расстоянием, аналогичные границам для кодов, исправляющих ошибки. Еще большей спецификой обладают коды, исправляющие q-ичные ($q>2$) арифметич. ошибки (q-и ч н о й а р и ф м е т и ч е с к о й о ш и б к о й наз. преобразование числа N в число $N'=N\pm aq^i$, $a=1, \ldots, q-1$; $i=0, 1, \ldots$), интерес к к-рым возрастает с развитием вычислительной техники. Так, в отличие от кодов, исправляющих ошибки при $q=2^l$ ($l>1$), не существует совершенных A-кодов, исправляющих одиночные q-ичные арифметич. ошибки, а при $q=6$ известны примеры таких кодов. Условия существования совершенных A-кодов имеют теоретико-числовой ха-

рактер и связаны с изучением законов взаимности в числовых полях.

Лит.: [1] Дадаев Ю. Г., Арифметические коды, исправляющие ошибки, М., 1969; [2] Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки, пер. с англ., 2 изд., М., 1976; [3] Massey J. L., Garcia O. N., в кн.: Advances in Information Systems Science, v. 4, N. Y.—L., 1972, p. 273—326; [4] Бояринов И. М., Кабатянский Г. А., «Проблемы передачи информации», 1976, т. 12, в. 1, с. 16—23.

Г. А. Кабатянский.

КОД С ИСПРАВЛЕНИЕМ ВЫПАДЕНИЙ И ВСТАВОК — код, предназначенный для исправления ошибок двух типов, встречающихся при передаче и перфорации информации. Выпадением буквы в слове $\beta=b_1\ldots b_n$ длины n в нек-ром алфавите B наз. преобразование слова β в слово $\beta'=b_1\ldots b_{i-1}b_{i+1}\ldots b_n$ длины $n-1$, $1\leqslant i\leqslant n$. Для числа $N_s(\beta)$ слов, получаемых из слова β выпадениями s букв, справедливы следующие оценки $C^s_{\tau(\beta)-s+1}\leqslant N_s(\beta)\leqslant C^s_{\tau(\beta)+s-1}$, где $\tau(\beta)$ — число серий слова β (серией слова $\beta=b_1\ldots b_n$ наз. слово $b_{i+1}b_{i+2}\ldots b_j$, $j\geqslant i+1$, такое, что 1) $b_{i+1}=\ldots=b_j$, 2) если $i\geqslant 1$, то $b_i\neq b_{i+1}$, 3) если $j<n$, то $b_{j+1}\neq b_j$). В частности, $N_1(\beta)=\tau(\beta)$. Вставкой буквы в слове $\beta=b_1\ldots b_n$ наз. преобразование слова β в слово $\beta'=b_1\ldots b_ibb_{i+1}\ldots b_n$ длины $n+1$, где $b\in B$ и $0\leqslant i\leqslant n$. Число слов, получаемых из произвольного слова β длины n вставками s букв алфавита B, равно $\sum_{j=0}^{s}C^j_{n+s}(r-1)^j$, где r — число букв алфавита B. Множество K слов в алфавите B наз. кодом с исправлением s выпадений (вставок, выпадений или вставок), если никакое слово в алфавите B не может быть получено из двух различных слов из K в результате s или менее выпадений (вставок, выпадений или вставок) букв в каждом из них. Функция, определенная на парах (β_1, β_2) слов в алфавите B и равная минимальному числу выпадений и вставок букв, преобразующих β_1 в β_2, является метрикой. Множество K слов в алфавите B является кодом с исправлением s выпадений (вставок, выпадений или вставок) тогда и только тогда, когда расстояние между любыми двумя различными словами из K больше $2s$, так что указанные три определения кодов эквивалентны. Примером кода с исправлением одного выпадения или одной вставки является множество слов $\{\beta=b_1\ldots b_n\}$ длины n в алфавите $B=\{0,1\}$, для к-рых $\sum_{i=1}^{n}ib_i\equiv 0 \pmod{n+1}$. Число слов в этом коде равно $\frac{1}{2(n+1)}\sum\varphi(d)\,2^{(n+1)/d}$, где суммирование производится по всем нечетным делителям d числа $n+1$ и $\varphi(d)$ — функция Эйлера, и является асимптотически максимальным при $n\to\infty$.

В. И. Левенштейн.

КОД С ИСПРАВЛЕНИЕМ ОШИБОК, код, корректирующий ошибки,— множество сообщений, предназначенных для передачи по *каналу связи* с шумами, обладающее тем свойством, что окрестность ошибок каждого сообщения (т. е. совокупность искаженных вариантов этого сообщения) не пересекается с окрестностями ошибок других сообщений. Это свойство К. с и. о. позволяет правильно корректировать ошибки (т. е. правильно восстанавливать переданное сообщение) в тех (полученных на выходе канала) искаженных сообщениях, к-рые принадлежат своей окрестности ошибок. Элементы К. с и. о. используются при кодировании последовательностей информационных символов, вырабатываемых *источником сообщений*. Кодирование заключается в представлении информационной последовательности в специальной форме и введении в нее дополнительной информации (*избыточности*). Избыточность обычно вводят путем добавления в сообщение тем или иным способом дополнительных символов. Напр., последовательность символов разби-

вается на блоки фиксированной длины k, а затем независимо один от другого блоки заменяются другими блоками большей длины n, к-рые являются элементами так наз. блокового К. с и. о. Известны [1] и другие способы введения избыточности и связанные с ними К. с и. о.

Элементы блокового К. с и. о. выбираются из нек-рого множества n-мерных векторов L^n, снабженного метрикой $\lambda(,)$, а их окрестности ошибок задаются в виде шара с центром в элементе кода. Радиус этого шара определяет корректирующую способность блокового кода. Метрика $\lambda(,)$ зависит от характера ошибок, для исправления к-рых предназначен код. Дальнейшее изложение касается только блоковых К. с и. о. как наиболее распространенных.

Для того чтобы иметь возможность передать максимальное количество сообщений по каналу связи, необходимо использовать коды с максимальным числом элементов при заданной корректирующей способности. Построение таких кодов является одной из основных задач теории К. с и. о. Эта задача достаточно далеко продвинута только для нек-рых рассматриваемых ниже конечных множеств L^n. В то же время как для приложений, так и для теории интересны коды на нек-рых бесконечных множествах, напр. на сфере в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

При практическом использовании К. с и. о. возникают задачи отображения информации, предназначенной для передачи в множество элементов К. с и. о. и нахождения по принятому элементу x' переданного элемента кода x. Первая задача наз. задачей кодирования, вторая — задачей декодирования. Сложность кодирования и декодирования в значительной мере определяется свойствами используемого К. с и.о. Это обстоятельство приводит к изучению относительно узких классов кодов, как, например, рассматриваемых ниже двоичных линейных кодов.

Наиболее широко исследовались блоковые r-ичные коды в метрике Хемминга, ввиду того что они находят многочисленные применения, а методы их построения связаны с известными ранее математическими структурами. Элементами этих кодов являются нек-рые элементы множества B_r^n, состоящего из всех векторов длины n, координаты к-рых принадлежат множеству из r элементов. Расстоянием Хемминга $d(x, y)$ между векторами x, y из B_r^n наз. число их несовпадающих координат. Окрестность ошибок $U_t(x)$ кратности t (t — целое) вектора x состоит из всех векторов из B_r^n, отличающихся от x не более чем в r координатах, т. е. $U_t(x)$ — шар в метрике $d(,)$ радиуса t с центром в точке x. В частности, $U_1(x)$ состоит из $(r-1)n+1$ векторов. Для произвольного множества $K \subset B_r^n$ функция $d(K) = \min\limits_{x,\, y \in K,\, x \neq y} d(x, y)$ наз. кодовым расстоянием r-ичного кода K. Код K является К. с и. о. кратности t, если $d(K) \geqslant 2t+1$. При выполнении последнего неравенства каждая окрестность ошибок $U_t(x)$, $x \in K$, не пересекается ни с какой другой окрестностью ошибок кратности t вектора y из K.

Значительный прогресс в изучении r-ичных кодов получен для случая, когда r является степенью простого числа. В этом случае в качестве множества координат берут конечное поле $GF(q)$ из q элементов и используют алгебраические свойства этого понятия. Ниже предполагается, что координатами элементов множества B_q^n являются элементы поля $GF(q)$. Множество B_q^n является линейным пространством над полем $GF(q)$. Если векторы кода K образуют линейное подпространство про-

странства B_q^n, то код наз. л и н е й н ы м. Линейный код K может быть задан как своим базисом, так и базисом линейного пространства, двойственного к K. Последний способ более распространен. Матрица A, строками к-рой служат базисные векторы пространства, двойственного к K, наз. п р о в е р о ч н о й м а т р и ц е й K. Для векторов $x \in K$ справедливо соотношение: $xA^T=0$, где A^T — транспонированная матрица A. Далее n — длина кода, k — размерность линейного кода и d — кодовое расстояние. Код над B_2^n наз. д в о и ч н ы м к о д о м.

Для оценки качества конкретных кодов изучают поведение функции $m(n, d)$, равной максимальному числу векторов двоичного кода длины n с кодовым расстоянием d. Относительно хорошо функция $m(n, d)$ изучена при больших d, $2d \geqslant n$, и малых d, $d=\text{const}$, $n \to \infty$. В первом случае величина $m(n, d)$ не превосходит $2n$ при $2d=n$ и $2d/(2d-n)$ при $2d-n>0$, а во втором — равна по порядку $n^{-1}2^n$ при $d=2t+1$. Если $d=3$, $n=2^l-1$, то $m(n, 3)=2^n/(n+1)$.

Код, на к-ром достигается последнее равенство, носит название д в о и ч н о г о к о д а Х е м м и н г а. Двоичный код Хемминга, корректирующий ошибки кратности $t=1$, обладает следующим свойством: шары радиуса $t=1$ с центрами в точках кода не пересекаются и в то же время заполняют все множество B_2^n. Подобные коды наз. с о в е р ш е н н ы м и. Известно, что, кроме кодов Хемминга, существует еще лишь конечное число нетривиальных двоичных совершенных кодов.

В случае $n \to \infty$, $d/n \to \delta$, $0<\delta<1/2$, изучают функцию

$$\overline{\lim} \log_2 \frac{m(n, d)}{n} = R(\delta)$$

(логарифмич. асимптотику $m(n, d)$), называемую с к о р о с т ь ю п е р е д а ч и максимальным кодом с относительным кодовым расстоянием δ. Для скорости $R(\delta)$ известны существенно различающиеся верхние и нижние оценки. Нижняя оценка (о ц е н к а В а р ш а м о в а — Г и л б е р т а) имеет вид

$$R(\delta) \geqslant 1-H(\delta), \qquad (*)$$

где

$$H(\delta) = \delta \log_2 \frac{1}{\delta} + (1-\delta) \log_2 \frac{1}{1-\delta},$$

и гарантирует существование кодов с указанными параметрами. Коды с параметрами, лежащими на границе (*), к настоящему времени (1978) могут быть построены только методом перебора. Существенно новые верхние оценки получены в [6], [7]. Весьма правдоподобна гипотеза, по к-рой $R(\delta)=1-H(\delta)$.

Далее рассматриваются к о н с т р у к т и в н ы е м е т о д ы (т. е. методы, требующие для своей реализации относительно небольшого числа операций) построения К. с. и. о. К важнейшим конструктивным кодам относятся: к о д ы Р и д а — С о л о м о н а (РС-коды), к о д ы Б о у з а — Ч о у д х у р и — Х о к в и н г е м а (БЧХ-коды) и к о д ы Р и д а — М а л л е р а (РМ-коды). Перечисленные коды являются линейными. Отправной конструкцией для построения первых двух служит матрица A_r с элементами из $GF(q)$:

$$A_r = \begin{Vmatrix} 1 & \dots & \alpha^j & \dots & \alpha^{q-2} \\ 1 & \dots & \alpha^{2j} & \dots & \alpha^{2(q-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \dots & \alpha^{(r+1)j} & \dots & \alpha^{(r-1)(q-2)} \end{Vmatrix},$$

где α — первообразный корень $GF(q)$. Матрица A_r является проверочной матрицей РС-кода C_r над $GF(q)$, к-рый имеет следующие параметры: $n=q-1$, $k=q-r$, $d=r$. Кодовое расстояние кода C_r является максимальным среди всех линейных кодов длины $q-1$ и

размерности q—r. Двоичный БЧХ-код H_r состоит из всех векторов РС-кода C_r над $GF(2^l)$, координаты к-рых принадлежат полю $GF(2)$, т. е. $H_r = C_r \cap B_2^n$. БЧХ-код H_r при $r=2t+1$ имеет следующие параметры: $n=2^l-1$, $k \geqslant n-lt$, $d \geqslant 2t+1$. Упомянутый выше код Хемминга совпадает с БЧХ-кодом H_3. Если $t<2^{[(l+1)/2]}$ ($[x]$ — целая часть x), то размерность кода H_{2t+1} равна $n-lt$. БЧХ-код является ц и к л и ч е с к и м, т. е. обладает тем свойством, что вместе с вектором x содержит все его циклич. сдвиги. Число векторов БЧХ-кодов в случае $n \to \infty$, $r=\text{const}$ совпадает по порядку с мощностью наилучшего кода $m(n, r)$.

Двоичный РМ-код определяется как множество двоичных векторов вида $(f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n))$, где $n=2^l$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$— всевозможные двоичные векторы длины l и $f(x)$ пробегает множество всех функций *алгебры логики*, представимых в виде многочлена над $GF(2)$ степени не выше r от l двоичных переменных. РМ-код имеет следующие параметры: $n=2^l$, $k=\sum_{l=0}^{r} C_l^i$, $d=2^{l-r}$.

Скорость передачи $R(K)$ двоичного кода K длины n с числом векторов m определяется как

$$R(K)=\frac{\log_2 m}{n}.$$

Если K — линейный код, то $R(K)=k/n$. Скорость передачи перечисленных выше конструктивных кодов при $n \to \infty$, $d/n \to \delta$, $\delta>0$, стремится к 0. Известны конструктивные коды со скоростью передачи большей нуля при $n \to \infty$, $d/n \to \delta$, $1/2>\delta>0$, но меньшей скорости передачи кодов, существование к-рых устанавливает граница (*).

При практическом использовании К. с и. о. кратности t для коррекции ошибок канала связи необходимо устройство (д е к о д е р), к-рое по искаженному вектору $x' \in U_t(x)$ указывает переданный кодовый вектор x. При этом предпочтительно использовать такие К. с и. о., для к-рых декодер имеет небольшую сложность. Под с л о ж н о с т ь ю д е к о д е р а двоичного кода K с кодовым расстоянием $2t+1$ понимается, напр., минимальное число функциональных элементов, к-рое необходимо для реализации булева оператора $F(x')=x$, $x' \in U_t(x)$, $x \in K$. Малую сложность декодера имеют рассмотренные конструктивные коды. Кроме того, известны другие К. с и. о. со скоростью передачи, не стремящейся к 0 при $n \to \infty$, $d/n \to \delta$, $\delta>0$, и малой сложностью декодера. К таким кодам относятся, напр., каскадные коды и коды с малой плотностью проверок на четность. К а с к а д н ы й к о д в простейшем случае представляет собой итерацию РС-кода над полем $GF(2^l)$ и двоичного кода длины n_1 размерности l с кодовым расстоянием d_1. С помощью какого-либо линейного отображения устанавливается взаимно однозначное соответствие между элементами поля $GF(2^l)$ и векторами двоичного кода. Затем координаты РС-кода заменяются соответствующими векторами двоичного кода. В результате получается двоичный линейный каскадный код с параметрами $n=n_1(2^l-1)$, $k=l(2^l-r)$, $d \geqslant r_1$. Лучшие результаты достигаются, если для замены различных разрядов РС-кода использовать различные двоичные коды. Таким способом могут быть получены коды длины n, исправляющие с помощью декодера со сложностью, равной по порядку $n \log n$, фиксированную долю от n ошибок. Ансамбль д в о и ч н ы х к о д о в с м а л о й п л о т н о с т ь ю п р о в е р о к н а ч е т н о с т ь определяется ансамблем проверочных матриц $\{A\}$, состоящим из двоичных матриц нек-рого вида, размера $n \times r$, к-рые содержат в каждом столбце и каждой строке соответственно l и h единиц, $4<l<h$. При фиксированных l и h и $n \to \infty$ типичный код длины n ансамбля

с помощью декодера со сложностью, по порядку равной $n \log n$, может исправлять фиксированную долю от n ошибок. Скорость передачи как каскадных, так и кодов с малой плотностью проверок лежит ниже оценки (*).

Достаточно широко исследовались коды на множествах B_q^n в метриках, отличных от метрики Хемминга. Направление и результаты этих исследований во многом сходны с соответствующими результатами для метрики Хемминга. В частности, рассматривались коды в метриках, связанных с синхронизационными ошибками, с ошибками в арифметич. устройствах ЭВМ (а р и ф м е т и ч е с к и е к о д ы), с пачками ошибок, с несимметричными ошибками, с ошибками в непрерывном канале связи. Напр., в последнем случае множеством L^n является сфера единичного радиуса S^n в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат, а окрестностью ошибок $U_\varphi(x)$, $x \in S^n$,— поверхность, высекаемая из S^{n-1} круговым конусом с полууглом φ и с осью, проходящей через точки 0 и x. Следует также заметить, что коды в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ в несколько иной трактовке рассматривались, начиная с конца 19 в., в геометрии.

Развитие теории К. с и. о. стимулировалось работами К. Шеннона (C. Shannon) по теории информации, в к-рых была показана принципиальная возможность передачи по каналу связи с шумами информации со скоростью меньшей пропускной способности канала и произвольной малой ошибкой. Первоначально теория К. с и. о. удовлетворяла потребности техники связи в математических конструкциях, обеспечивающих надежную передачу информации при ограничениях на число и вид ошибок в сообщении. Затем результаты и методы теории К. с и. о. нашли применение в других областях. В частности, в математике этими методами удалось получить наилучшие (к 1978) оценки плотности укладки шаров в евклидовом пространстве, получить значительное продвижение при оценке сложности тупиковых дизъюнктивных форм для почти всех функций алгебры логики, построить нек-рые новые объекты в комбинаторике, построить самокорректирующиеся схемы из функциональных элементов и т. д.

Лит.: [1] П и т е р с о н У., У э л д о н Э., Коды, исправляющие ошибки, пер. с англ., 2 изд., М., 1976; [2] Б е р л е к э м п Э., Алгебраическая теория кодирования, пер. с англ., М., 1971; [3] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1, М., 1974; [4] Б л о х Э. Л., З я б л о в В. В., Обобщенные каскадные коды, М., 1976; [5] К о л е с н и к В. Д., М и р о н ч и к о в Е. Т., Декодирование циклических кодов, М., 1968; [6] С и д е л ь н и к о в В. М., «Пробл. передачи информ.», 1974, т. 10, в. 2, с. 43—51; [7] Л е в е н ш т е й н В. И., там же, с. 26—42; [8] З я б л о в В. В., П и н с к е р М. С., «Пробл. передачи информ.», 1975, т. 11, в. 1, с. 23—36.

В. М. Сидельников.

КОДАИРЫ РАЗМЕРНОСТЬ — численный инвариант алгебраич. многообразия, названный по имени К. Кодаиры (K. Kodaira), впервые указавшего на важность этого инварианта в теории классификации алгебраич. многообразий.

Пусть V — неособое алгебраич. многообразие и $\Phi_m : V \to \mathbb{P}(n)$ — рациональное отображение, определяемое линейной системой $|mK_V|$, где K_V — канонический класс многообразия V. Р а з м е р н о с т ь К о д а и р ы $\varkappa(V)$ многообразия V определяется как $\max_{m \geqslant 1} \{\dim \Phi_m(V)\}$. При этом, если $|mK_V| = \varnothing$ для всех $m \geqslant 1$, то считается, что $\varkappa(V) = -\infty$. К. р. является бирациональным инвариантом, т. е. не зависит от представителя в классе бирациональной эквивалентности.

Пусть основное поле есть поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Если m достаточно большое, то имеет место оценка

$$\alpha m^{\varkappa(V)} \leqslant \dim |mK_V| \leqslant \beta m^{\varkappa(V)},$$

где α, β — некоторые положительные числа. Если $\varkappa(V) > 0$, то существует сюръективный морфизм $f : V^* \to$

$\to W$ алгебраич. многообразий такой, что: а) V^* бирационально эквивалентно V; б) $\varkappa(V)=\dim W$; в) для некоторого плотного открытого множества $U\subset W$ все слои $f^{-1}(\omega)$, $\omega\in U$, являются многообразиями параболич. типа.

Существует обобщение понятия К. р. (см. [2]) на случай, когда в линейной системе $|mK_V|$ канонич. класс K_V заменяется на произвольный дивизор D.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [2] Ueno K., Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces, B.— Hdlb.— N. Y., 1975; [3] Iitaka S., «J. Math. Soc. Jap.», 1971, v. 23, p. 256—73.

И. В. Долгачев.

КОДАИРЫ ТЕОРЕМА об обращении в нуль, теорема Кодаиры об исчезновении,— теорема о равенстве нулю групп когомологий $H^i(X, \mathcal{O}(L))$, $i<\dim X$, где $\mathcal{O}(L)$ — пучок голоморфных сечений отрицательного *векторного расслоения* L ранга 1 на компактном комплексном многообразии X. Эквивалентная формулировка К. т. состоит в том, что

$$H^i(X, \mathcal{O}(L\otimes K_X))=0, \quad i>0,$$

для любого положительного векторного расслоения ранга 1 (здесь K_X обозначает каноническое линейное расслоение на X). В терминах дивизоров К. т. формулируется как равенство $H^i(X, O_X(-D))=0$ для $i<\dim X$ и любого дивизора D такого, что для некоторого $n\geqslant 1$ nD является гиперплоским сечением в каком-*либо* проективном *вложении* многообразия X.

К. т. была доказана трансцендентными методами К. Кодаирой [1] (см. также [2]) как обобщение на случай произвольной размерности классич. теоремы о регулярности присоединенной системы на алгебраич. поверхности. Существует пример нормальной алгебраич. поверхности над полем положительной характеристики, для к-рой К. т. неверна [4]. Неизвестно (1978), справедлива ли К. т. для неособого алгебраич. многообразия над полем положительной характеристики.

К. т. справедлива *и для* голоморфных векторных расслоений произвольного ранга, отрицательных в смысле Накано. Обобщением К. т. является также следующий результат:

$$H^i(X, \Omega^p(L))=0 \quad \text{для } p+i\geqslant \dim X+r,$$

где L — слабо положительное векторное расслоение ранга r на компактном комплексном многообразии X, $\Omega^p(L)=\Omega^p\otimes\mathcal{O}(L)$ — пучок *голоморфных форм* степени p со значениями в L. Для слабо отрицательных векторных расслоений L обращение в 0 имеет место при $p+i\leqslant\dim X-r$. Аналоги этих теорем получены для слабо 1-полных многообразий X, т. е. многообразий, допускающих гладкую плюрисубгармонич. функцию ψ такую, что множества $\{x\in X, \psi(x)<c\}$ относительно компактны в X для всех $c\in\mathbb{R}$, и для компактных комплексных пространств X, обладающих $n=\dim X$ алгебраически независимыми мероморфными функциями [5].

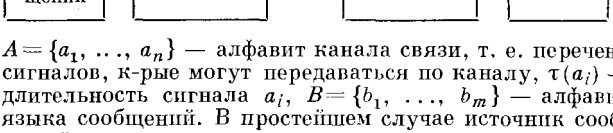
Лит.: [1] Kodaira K., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1953, v. 39, p. 1268—73; [2] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, М., 1976; [3] Mumford D., «Amer. J. Math.», 1967, v. 89, № 1, p. 94—104; [4] Zariski O., Algebraic surfaces, B.— Hdlb.— N. Y., 1971; [5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 93—171.

И. В. Долгачев.

КОДИРОВАНИЕ АЛФАВИТНОЕ, кодирование неравномерное,— представление информации в стандартной форме, при к-рой элементарным синтаксическим единицам языка сообщений (буквам алфавита языка) последовательно сопоставляются кодовые комбинации символов из нек-рого заданного алфавита (здесь под информацией понимается линейная запись букв). Примером К. а. может служить известный код Морзе, в к-ром слова кодируются побуквенно, а буквам сопоставлены слова

в алфавите трех символов $\{\cdot, —, \wedge\}$, где $\wedge$ — пробел. Примером естественно сложившегося кодирования, к-рое не укладывается в модель К. а., является десятичная система счисления. Источником идей для развития теории К. а. являются кибернетич. точка зрения на информационные процессы и системы, с одной стороны, и потребность техники связи (где часто возникает необходимость преобразования информации к более удобной в каком-то отношении форме) — с другой; отправным пунктом была фундаментальная работа К. Шеннона [1], опубликованная в 1948. Теория К. а.— раздел прикладной математики, включающий в себя изучение различных математич. моделей каналов связи с использованием разнообразных математич. методов. Лучше всего изучено равномерное или блочное кодирование, при к-ром кодовые комбинации имеют фиксированную длину. Для этого класса имеется развитый математич. аппарат (см. *Код с исправлением ошибок*). Более общей абстрактной схемой является автоматное кодирование, при к-ром соответствие реализуется конечным автоматом. В практич. отношении равномерное кодирование обеспечивает, как правило, удовлетворительные результаты, поэтому использование других методов кодирования должно иметь очень веские достоинства (напр., существенное сжатие информации) при не слишком серьезных недостатках (усложнение кодирования и декодирования).

Основные результаты общего характера можно сформулировать для случая побуквенного К. а. (когда кодирующий автомат имеет одно внутреннее состояние), так как известные обобщения не имеют принципиального значения, а исследования, связанные с другими моделями, не получили еще значительного теоретич. развития. Рассматривается следующая модель канала связи:



$A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ — алфавит канала связи, т. е. перечень сигналов, к-рые могут передаваться по каналу, $\tau(a_i)$ — длительность сигнала a_i, $B=\{b_1, \ldots, b_m\}$ — алфавит языка сообщений. В простейшем случае источник сообщений есть вероятностная схема, на выходе к-рой в каждый момент дискретного времени появляется одна из букв B, причем вероятности $p_i=p(b_i)$ появления букв не зависят от времени. Схема кодирования f отображает буквы B в слова A^* (A^*— моноид, порожденный A), $f(b_i)=v_i$ и слова B^* кодируются побуквенно: $f(b_{i_1} \ldots b_{i_k})=f(b_{i_1})\ldots f(b_{i_k})$. Таким образом, отображение f полностью задается кодом $V=\{v_1, \ldots, v_m\}$. Если f взаимно однозначно, то задача схемы декодирования — восстановить переданное сообщение, реализуя отображение f^{-1}.

Оценочными факторами для модели являются *информации скорость передачи* и сложность декодирования, определяемые выбором кода V. Скорость передачи характеризуется количественно величиной математич. ожидания времени, к-рое требуется для передачи одной буквы сообщения: длительность передачи буквы b_i есть

$$\tau(b_i)=\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\tau(a_j),$$

где ω_{ij}— число вхождений буквы a_j в слово v_i, а искомое математическое ожидание есть

$$\mathsf{E}_f=\sum_{i=1}^{m}p_i\tau(b_i)$$

(E_f наз. также стоимостью кодирования

f). В общем случае E_f зависит от структуры кода, к-рая описывается структурным многочленом

$$S_f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{\omega_{ij}} \right)$$

— производящей функцией, перечисляющей слова кода по их составу. В частном случае, когда $\tau(a_1) = \ldots = \tau(a_n) = \tau$, имеем $\mathsf{E}_f = \tau \sum_{i=1}^{m} p_i l_i$, т. е. E_f определяется только спектром длин слов кода $\{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$, где l_i — длина слова v_i. Для этого случая проблема выбора о п т и м а л ь н о г о к о д а (т. е. минимизирующего стоимость) решается полностью; доказано [2] необходимое и достаточное спектральное условие для существования однозначно декодируемого кода

$$\sum_{i=1}^{m} n^{-l_i} \leqslant 1. \qquad (1)$$

Показано [4], что вместе с неравенством (1) условие

$$\text{НОД}(l_1, l_2, \ldots, l_m) = 1$$

необходимо и достаточно для существования кода с данным спектром, имеющего так наз. с в о й с т в о с а м о с и н х р о н и з а ц и и, к-рое состоит в том, что ошибка при декодировании автоматически локализуется с вероятностью 1.

Для с л о ж н о с т и д е к о д и р о в а н и я, с абстрактной точки зрения, наиболее интересна качественная мера: наличие свойства конечности задержки декодирования, означающее возможность реализации декодирования конечным автоматом (количественные оценки сложности схемной реализации автоматов выходят за рамки теории кодирования). Так наз. п р е ф и к с н ы е к о д ы (свойство префиксности состоит в том, что никакое слово V не является начальным отрезком другого слова из V) все имеют это свойство. Было показано [2], что любой код, для к-рого f взаимно однозначно, спектрально эквивалентен нек-рому префиксному коду. Класс префиксных кодов относительно хорошо обозрим, чем и объясняется результативность исследования случая $\tau(a_1) = \ldots = \tau(a_n)$.

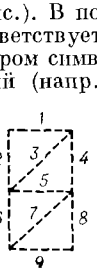
В общем случае известны алгоритмич. решения вопросов распознавания свойств взаимной однозначности кодирования и конечности задержки декодирования. Свойство взаимной однозначности f можно рассматривать как минимальный уровень помехоустойчивости кода V. Имеется алгоритмич. решение задачи вычисления фактической корректирующей способности произвольного кода в общем случае и с дополнительным требованием конечной задержки декодирования. Класс всех свободных кодов (т. е. однозначно декодируемых) устроен весьма сложно, но экстремальные требования к кодам часто приводят к существенным ограничениям. Напр., показано, что для максимальных по включению кодов (для к-рых неравенство (1) обращается в равенство и к-рые наз. полными, так как для них и только для них алфавит канала используется полностью в том смысле, что любое слово из A^* является частью нек-рого закодированного сообщения) свойство конечной задержки имеет место в том и только в том случае, если код префиксный.

Лит.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963; [2] Мак-Миллан Б., «Кибернетич. сб.», 1961, в. 3, с. 88—92; [3] Хаффмен Д., там же, с. 79—87; [4] Schützenberger M. P., «Information and Control», 1967, v. 11, p. 396—401; [5] Марков А. А., «Пробл. кибернетики», 1962, в. 8, с. 169—86; 1964, в. 12, с. 137—53; 1967, в. 19, с. 307—09; 1976, в. 31, с. 77—108.

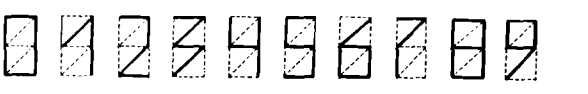
Ал. А. Марков.

КОДИРОВАНИЕ И ДЕКОДИРОВАНИЕ — процесс представления *информации* в определенной стандартной форме и обратный процесс восстановления информации по ее такому представлению. В математич. литературе к о д и р о в а н и е м наз. отображение произвольного множества A в множество конечных после-

довательностей (слов) в нек-ром алфавите B, а д е к о д и р о в а н и е м — обратное отображение. Примерами кодирования являются: представление натуральных чисел в r-ичной системе счисления, при к-ром каждому числу $N=1, 2, \ldots$ ставится в соответствие слово $b_1 b_2 \ldots b_l$ в алфавите $B_r=\{0, 1, \ldots, r-1\}$ такое, что $b_1 \neq 0$ и $b_1 r^{l-1}+\ldots+b_{l-1} r+b_l=N$; преобразование текстов на русском языке с помощью телеграфного кода в последовательности, составленные из посылок тока и пауз различной длительности; отображение, применяемое при написании цифр почтового индекса (см. рис.). В последнем случае каждой десятичной цифре соответствует слово в алфавите $B_2=\{0, 1\}$ длины 9, в котором символами 1 отмечены номера использованных линий (напр., цифре 5 соответствует слово 110010011).



Исследование различных свойств К. и д. и построение эффективных в определенном смысле кодирований, обладающих требуемыми свойствами, составляет проблематику т е о р и и к о д и р о в а н и я. Обычно критерий эффективности кодирования так или иначе связан с минимизацией длин кодовых слов (образов



элементов множества A), а требуемые свойства кодирования связаны с обеспечением заданного уровня *помехоустойчивости*, понимаемой в том или ином смысле. В частности, под помехоустойчивостью понимается возможность однозначного декодирования при отсутствии или допустимом уровне искажений в кодовых словах. Помимо помехоустойчивости, к кодированию может предъявляться ряд дополнительных требований. Напр., при выборе кодирования для цифр почтового индекса необходимо согласование с обычным способом написания цифр. В качестве дополнительных требований часто используются ограничения, связанные с допустимой сложностью схем, осуществляющих К. и д. Проблематика теории кодирования в основном создавалась под влиянием разработанной К. Шенноном (C. Shannon, [1]) теории передачи информации. Источником новых задач теории кодирования служат создание и совершенствование автоматизированных систем сбора, хранения, передачи и обработки информации. Методы решения задач теории кодирования главным образом комбинаторные, теоретико-вероятностные и алгебраические.

Произвольное кодирование f множества (алфавита) A словами в алфавите B можно распространить на множество A^* всех слов в A (сообщений) следующим образом:

$$f(a_1 a_2 \ldots a_k)=f(a_1)\, f(a_2) \ldots f(a_k),$$

где $a_i \in A$, $i=1, 2, \ldots, k$. Такое отображение $f: A^* \to B^*$ наз. п о б у к в е н н ы м к о д и р о в а н и е м сообщений. Более общий класс кодирований сообщений образуют а в т о м а т н ы е к о д и р о в а н и я, реализуемые инициальными асинхронными *автоматами*, выдающими в каждый момент времени нек-рое (быть может, пустое) слово в алфавите B. Содержательный смысл этого обобщения заключается в том, что автомат в разных состояниях реализует различные кодирования букв алфавита сообщений. Побуквенное кодирование — это автоматное кодирование, реализуемое автоматом с одним состоянием. Одним из направлений теории кодирования является изучение общих свойств кодирования и построение алгоритмов распознавания этих свойств (см. *Кодирование алфавитное*). В частности, для побуквенных и автоматных кодирований найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы:

1) декодирование было однозначным, 2) существовал декодирующий автомат, т. е. автомат, реализующий декодирование с нек-рой ограниченной задержкой, 3) существовал самонастраивающийся декодирующий автомат (позволяющий в течение ограниченного промежутка времени устранить влияние сбоя во входной последовательности или в работе самого автомата).

Большинство задач теории кодирования сводится к изучению конечных или счетных множеств слов в алфавите B_r. Такие множества наз. к о д а м и. В частности, каждому однозначному кодированию $f : B_m \to B_r^*$ (и побуквенному кодированию $f : B_m^* \to B_r^*$) соответствует код $\{f(0), \ldots, f(m-1)\} \subset B_r^*$. Одно из основных утверждений теории кодирования состоит в том, что условие взаимной однозначности побуквенного кодирования $f : B_m^* \to B_r^*$ накладывает следующее ограничение на длины $l_i = l_i(f)$ кодовых слов $f(i)$:

$$\sum_{i=0}^{m-1} r^{-l_i} \leqslant 1. \qquad (1)$$

Справедливо и обратное утверждение: если $(l_0, \ldots, l_{m-1})$ — набор натуральных чисел, удовлетворяющих (1), то существует взаимно однозначное побуквенное кодирование $f : B_m^* \to B_r^*$ такое, что слово $f(i)$ имеет длину l_i. При этом, если числа l_i упорядочены по возрастанию, то в качестве $f(i)$ можно взять первые после запятой l_i символов разложения числа $\sum_{j=0}^{i-1} r^{-l_j}$ в r-ичную дробь (м е т о д Ш е н н о н а).

Наиболее законченные результаты в теории кодирования связаны с построением эффективных взаимно однозначных кодирований. Описанные здесь конструкции используются на практике для сжатия информации и выборки информации из памяти. Понятие эффективности кодирования зависит от выбора критерия стоимости. При определении с т о и м о с т и $L(f)$ взаимно однозначного побуквенного кодирования $f : B_m^* \to B_r^*$ предполагается, что каждому числу $i \in B_m$ поставлено в соответствие положительное число p_i и $P = \{p_0, \ldots, p_{m-1}\}$. Исследованы следующие варианты определения стоимости $L(f)$:

1) $L_{\text{ср}}(f) = \sum_{i=0}^{m-1} p_i l_i$,

2) $L^{(t)}(f) = \frac{1}{t} \log_r \sum_{i=0}^{m-1} p_i r^{t l_i}$, $0 < t < \infty$,

3) $L'(f) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant m-1} (l_i - p_i)$,

причем предполагается, что в первых двух случаях p_i — вероятности, с к-рыми некоторый бернуллиевый источник порождает соответствующие буквы алфавита B_m ($\sum_{i=0}^{m-1} p_i = 1$), а в третьем случае p_i — заданные длины кодовых слов. При первом определении стоимость равна средней длине кодового слова, при втором определении с ростом параметра t более длинные кодовые слова оказывают все большее влияние на стоимость ($L^{(t)}(f) \to L_{\text{ср}}(f)$ при $t \to 0$ и $L^{(t)}(f) \to \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant m-1} l_i$ при $t \to \infty$), при третьем определении стоимость равна максимальному превышению длины l_i кодового слова над заданной длиной p_i. Задача построения взаимно однозначного побуквенного кодирования $f : B_m^* \to B_r^*$, минимизирующего стоимость $L(f)$, равносильна задаче минимизации функции $L(f)$ на наборах $(l_0, \ldots, l_{m-1})$ из натуральных чисел, удовлетворяющих (1). Решение этой задачи известно при каждом из указанных определений стоимости.

Пусть минимум величины $L(f)$ на наборах $(l_0, \ldots, l_{m-1})$ из произвольных (не обязательно натуральных) чисел равен $L_r(P)$ и достигается на наборе $(l_0(P), \ldots,$

$l_{m-1}(P)$). Неотрицательная величина $I(f)=L(f)-L_r(P)$ наз. избыточностью, а величина $I(f)/L(f)$ — относительной избыточностью кодирования f. Для избыточности взаимно однозначного кодирования $f: B_m^* \to B_r^*$, построенного по методу Шеннона для длин l_i, $l_i(P) \leqslant l_i < l_i(P)+1$, справедливо неравенство $I(f)<1$. При первом, наиболее употребительном, определении стоимости как среднего числа кодовых символов, приходящихся на одну букву порождаемого источником сообщения, величина $L_r(P)$ равна энтропии Шеннона

$$H_r(P) = -\sum_{i=0}^{m-1} p_i \log_r p_i$$

источника, вычисленной по основанию r, а $l_i(P) = -\log_r p_i$. Граница избыточности $I(f)=L_{cp}(f)-H_r(P)<1$ может быть улучшена с помощью так наз. кодирования блоками длины k, при к-ром сообщения длины k (а не отдельные буквы) кодируются по методу Шеннона. Избыточность такого кодирования не превышает $1/k$. Этот же прием используется для эффективного кодирования зависимых источников. В связи с тем, что определение длин l_i при кодировании по методу Шеннона основано на знании статистики источника, для нек-рых классов источников разработаны методы построения универсального кодирования, гарантирующего определенную верхнюю границу избыточности для любого источника из этого класса. В частности, построено кодирование блоками длины k, избыточность к-рого для любого бернуллиевого источника асимптотически не превышает $\frac{m-1}{2k}\log_r k$ (при фиксированных m, r и $k \to \infty$), причем эта асимптотическая граница не может быть улучшена.

Наряду с задачами эффективного сжатия информации рассмотрены задачи оценки избыточности конкретных видов сообщений. Напр., была оценена относительная избыточность нек-рых естественных языков (в частности, английского и русского) в предположении, что тексты на них порождаются марковскими источниками с большим числом состояний.

При исследовании задач построения эффективных помехоустойчивых кодирований обычно рассматривают кодирования $f: B_m \to B_r^*$, к-рым соответствуют коды $\{f(0), \ldots, f(m-1)\}$, принадлежащие множеству B_r^n слов длины n в алфавите B_r, и предполагают, что буквы алфавита сообщений B_m равновероятны. Эффективность такого кодирования оценивают избыточностью $I(f)=n-\log_r m$ или скоростью передачи $R(f)=\frac{1}{n}\log_r m$. При определении помехоустойчивости кодирования формализуется понятие ошибки и вводится в рассмотрение нек-рая модель образования ошибок. Ошибкой типа замещения (или просто ошибкой) наз. преобразование слова, состоящее в замещении одного из его символов другим символом алфавита B_r. Напр., проведение лишней линии при написании цифры почтового индекса приводит к замещению в кодовом слове символа 0 символом 1, а отсутствие нужной линии — к замещению символа 1 символом 0. Возможность обнаружения и исправления ошибок основана на том, что для кодирования f, обладающего ненулевой избыточностью, декодирование f^{-1} может быть произвольным образом доопределено на r^n-m словах из B_r^n, не являющихся кодовыми. В частности, если множество B_r^n разбито на m непересекающихся подмножеств $D_0, \ldots, D_{m-1}$ таких, что $f(i) \in D_i$, а декодирование f^{-1} доопределено так, что $f^{-1}(D_i)=i$, то при декодировании будут исправлены все ошибки, преобразующие кодовое слово $f(i)$ в D_i, $i=0, \ldots, m-1$. Аналогичная возможность имеется и в случае

ошибок других типов таких, как стирание символа (замещение символом другого алфавита), изменение числового значения кодового слова на $\pm br^i$, $b=1, \ldots, r-1$, $i=0, 1, \ldots$ (арифметическая ошибка), выпадение или вставка символа и т. п.

В теории передачи информации (см. *Информации передача*) рассматриваются вероятностные модели образования ошибок, называемые каналами. Простейший канал без памяти задается вероятностями p_{ij} замещения символа i символом j. Для канала определяется величина (пропускная способность)

$$C = \max \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{r-1} q_i p_{ij} \log_r \left(p_{ij} \Big/ \sum_{h=0}^{m-1} q_h p_{hj} \right),$$

где максимум берется по всем наборам $(q_0, \ldots, q_{m-1})$ таким, что $q_i \geqslant 0$ и $\sum_{i=0}^{m-1} q_i = 1$. Эффективность кодирования f характеризуется скоростью передачи $R(f)$, а помехоустойчивость — средней вероятностью ошибки декодирования $P(f)$ (при наилучшем разбиении B_r^n на подмножества D_i). Основной результат теории передачи информации (теорема Шеннона) состоит в том, что пропускная способность C является верхней гранью чисел R таких, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех n, начиная с нек-рого, существует кодирование $f : B_m \to B_r^n$, для к-рого $R(f) \geqslant R$ и $P(f) < \varepsilon$.

Другая модель образования ошибок (см. *Код с исправлением ошибок*, *Код с исправлением арифметических ошибок*, *Код с исправлением выпадений и вставок*) характеризуется тем, что в каждом слове длины n происходит не более заданного числа t ошибок. Пусть $E_i(t)$ — множество слов, получаемых из $f(i)$ в результате t или менее ошибок. Если для кода

$$\{f(0), \ldots, f(m-1)\} \subset B_r^n$$

множества $E_i(t)$, $i=0, \ldots, m-1$, попарно не пересекаются, то при декодировании таком, что $E_i(t) \subseteq D_i$, будут исправлены все ошибки, допустимые рассматриваемой моделью образования ошибок, и такой код наз. кодом с исправлением t ошибок. Для многих типов ошибок (напр., замещений, арифметич. ошибок, выпадений и вставок) функция $d(x, y)$, равная минимальному числу ошибок данного типа, преобразующих слово $x \in B_r^n$ в слово $y \in B_r^n$, является метрикой, а множества $E_i(t)$ — метрическими шарами радиуса t. Поэтому задача построения наиболее эффективного (т. е. максимального по числу слов m) кода в B_r^n с исправлением t ошибок равносильна задаче плотнейшей упаковки метрического пространства B_r^n шарами радиуса t. Код для цифр почтового индекса не является кодом с исправлением одной ошибки, так как $d(f(0), f(8)) = 1$ и $d(f(5), f(8)) = 2$, хотя все другие расстояния между кодовыми словами не менее 3.

Задача исследования величины $I_r(n, t)$ — минимальной избыточности кода в B_r^n с исправлением t ошибок типа замещения распадается на два основных случая. В первом случае, когда t фиксировано, а $n \to \infty$, справедлива асимптотика

$$I_2(n, t) \sim t \log_2 n, \qquad (2)$$

причем достигается «мощностная» граница, основанная на подсчете числа слов длины n в шаре радиуса t. Асимптотика величины $I_r(n, t)$ при $r > 2$, а также при $r = 2$ для многих других типов ошибок (напр., арифметич. ошибок, выпадений и вставок) не известна (1978). Во втором случае, когда $t = [pn]$, где p — некоторое фиксированное число, $0 < p < (r-1)/2r$, а $n \to \infty$, «мощностная» граница

$$I_r(n, [pn]) \geqslant nT_r(p),$$

где $T_r(p) = -p \log_r(p/(r-1)) - (1-p)\log_r(1-p)$, существенно улучшена. Имеется предположение, что верхняя граница

$$I_r(n, [pn]) \leqslant nT_r(2p), \qquad (3)$$

полученная методом случайного выбора кода, является асимптотически точной, т. е. $I_r(n, [pn]) \sim nT_r(2p)$. Доказательство или опровержение этого предположения — одна из центральных задач теории кодирования.

Большинство конструкций помехоустойчивых кодов являются эффективными, когда длина n кода достаточно велика. В связи с этим особое значение приобретают вопросы, связанные со сложностью устройств, осуществляющих кодирование и декодирование (кодера и декодера). Ограничения на допустимый тип декодера или его сложность могут приводить к увеличению избыточности, необходимой для обеспечения заданной помехоустойчивости. Напр., минимальная избыточность кода в B_2^n, для к-рого существует декодер, состоящий из регистра сдвига и одного мажоритарного элемента и исправляющий одну ошибку, имеет порядок $\sqrt{n}$ (ср. с (2)). В качестве математич. модели кодера и декодера обычно рассматривают схемы из функциональных элементов и под сложностью понимают число элементов в схеме. Для известных классов кодов с исправлением ошибок проведено исследование возможных алгоритмов К. и д. и получены верхние границы сложности кодера и декодера. Найдены также нек-рые соотношения между скоростью передачи кодирования, помехоустойчивостью кодирования и сложностью декодера (см. [5]).

Еще одно направление исследований в теории кодирования связано с тем, что многие результаты (напр., теорема Шеннона и граница (3)) не являются «конструктивными», а представляют собой теоремы существования бесконечных последовательностей $\{K_n\}$ кодов $K_n \subseteq B_r^n$. В связи с этим предпринимаются усилия, чтобы доказать эти результаты в классе таких последовательностей $\{K_n\}$ кодов, для к-рых существует машина Тьюринга, распознающая принадлежность произвольного слова длины l множеству $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ за время, имеющее медленный порядок роста относительно l (напр., $l \log l$).

Нек-рые новые конструкции и методы получения границ, разработанные в теории кодирования, привели к существенному продвижению в вопросах, на первый взгляд весьма далеких от традиционных задач теории кодирования. Здесь следует указать на использование максимального кода с исправлением одной ошибки в асимптотически оптимальном методе реализации функций алгебры логики *контактными схемами*; на принципиальное улучшение верхней границы для плотности упаковки n-мерного евклидова пространства равными шарами; на использование неравенства (1) при оценке сложности реализации формулами одного класса функций алгебры логики. Идеи и результаты теории кодирования находят свое дальнейшее развитие в задачах синтеза самокорректирующихся схем и надежных схем из ненадежных элементов.

Лит.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963; [2] Берлекэмп Э., Алгебраическая теория кодирования, пер. с англ., М., 1971; [3] Питерсон У., Уэлдон Э., Коды, исправляющие ошибки, пер. с англ., 2 изд., М., 1976; [4] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1, М., 1974, раздел 5; [5] Бассалыго Л. А., Зяблов В. В., Пинскер М. С., «Пробл. передачи информации», 1977, т. 13, № 3, с. 5—17; [6] Сидельников В. М., «Матем. сб.», 1974, т. 95, в. 1, с. 148—58.

В. И. Левенштейн.

КОЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — пространство, получаемое из евклидова применением принципа двойственности проективного пространства такой же размерности. Обозначается $\mathbb{R}_n^*$, где n — размерность

пространства. К. п. $\mathbb{R}_n^*$ является пространством с проективной метрикой, к-рая задается в соответствии с общей схемой введения проективных метрик. Если проективная метрика евклидова пространства $\mathbb{R}_n$ определяется абсолютом, состоящим из совокупности $(n-1)$-плоскости и $(n-2)$-мнимой квадрики в этой плоскости, то проективная метрика К. п. $\mathbb{R}_n^*$ определяется двойственным абсолютом: мнимым конусом 2-го порядка, к-рый наз. абсолютным конусом, с вершиной в качестве абсолютной точки абсолюта.

Расстояние между точками в пространстве $\mathbb{R}_n^*$ определяется в соответствии с общей схемой определения расстояния между точками в пространствах с проективной метрикой с учетом двойственного характера этого пространства по отношению к $\mathbb{R}_n$. Пусть

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) + u_0 = 0, \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{y}) + v_0 = 0$$

— нормальные уравнения нек-рых плоскостей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n$, двойственном для $\mathbb{R}_n^*$, где

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 1, \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 1, \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x})$$

— скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}_n$. В пространстве $\mathbb{R}_n^*$ этим плоскостям ставятся в соответствие точки $X(x^0, \boldsymbol{x})$ и $Y(y^0, \boldsymbol{y})$ с координатами

$$x^0 = \rho u_0, \quad x^i = \rho u_i, \quad y^0 = \rho v_0, \quad y^i = \rho v_i, \quad \rho \in \mathbb{R},$$

координаты этих точек нормированы условиями

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \rho^2 > 0, \quad (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \rho^2 > 0$$

(x^0 и y^0 — координаты точек X и Y в бесконечно удаленной плоскости). Расстояние δ между точками X и Y определяется соотношением

$$\cos^2 \frac{\delta}{\rho} = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})},$$

т. е. выражается через величину угла между плоскостями, двойственными точкам X и Y. В соответствии с нормировкой векторов точек X и Y это соотношение можно записать в виде

$$\cos \frac{\delta}{\rho} = \frac{1}{\rho^2} |\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, |.$$

Действительное число ρ наз. радиусом кривизны К. п.

В случае, когда точкам X, $Y \in \mathbb{R}_n^*$ в двойственном пространстве $\mathbb{R}_n$ соответствуют параллельные плоскости, то $\delta = 0$, а расстояние между точками X и Y определяются как евклидово расстояние между этими параллельными плоскостями.

Углы между двумя плоскостями определяются в $\mathbb{R}_n^*$ как нормированное евклидово расстояние между соответствующими по принципу двойственности двумя точками в $\mathbb{R}_n$. Этот угол равен также нормированному расстоянию между точками данных плоскостей в $\mathbb{R}_n^*$, являющихся полюсами $(n-2)$-плоскости их пересечения относительно квадрик, высекаемых абсолютным конусом на этих плоскостях. При этом всегда определяется тот из углов между плоскостями, к-рый не содержит абсолютной точки. В частности, между двумя прямыми на коевклидовой плоскости $\mathbb{R}_2^*$ он равен нормированному расстоянию между такими двумя точками этих прямых, к-рые вместе с точкой пересечения данных прямых гармонически делят точки пересечения прямых с абсолютными прямыми.

Движения К. п. $\mathbb{R}_n^*$ определяются как преобразования этого пространства, индуцируемые движениями соответствующего двойственного пространства $\mathbb{R}_n$, тем самым движения К. п. $\mathbb{R}_n^*$ описываются ортогональными операторами.

Геометрия коевклидовой плоскости $\mathbb{R}_2^*$ обладает свойствами, двойственными свойствам плоскости $\mathbb{R}_2$.

Так, из инвариантности длин сторон в треугольнике ABC относительно движений плоскости $\mathbb{R}_2$ следует, что угловой избыток $\Delta=\hat{A}+\hat{C}-\hat{B}$ инвариантен при движениях плоскости $\mathbb{R}_2^*$ и всегда положителен. (Здесь и далее предполагается, что внутренний угол B треугольника ABC в $\mathbb{R}_2^*$ содержит абсолютную точку.) За площадь S треугольника на плоскости $\mathbb{R}_2^*$ берется величина, пропорциональная угловому избытку, к-рый является аддитивной функцией треугольника: $S=\rho^2\Delta$.

Вследствие двойственного характера величин углов и длин сторон треугольника на плоскости $\mathbb{R}_2^*$ имеют место следующие тригонометрич. соотношения в треугольнике ABC:

$$b \quad a+c,$$

$$\hat{A}^2=\hat{B}^2+\hat{C}^2-2\hat{C}\hat{B}\cos\frac{a}{\rho},$$

$$\frac{\sin\frac{a}{\rho}}{\hat{A}}=\frac{\sin\frac{b}{\rho}}{\hat{B}}=\frac{\sin\frac{c}{\rho}}{\hat{C}}.$$

На плоскости $\mathbb{R}_2^*$ метрика расстояний (на прямых) является проективной эллиптической, метрика углов — параболической. В пространстве $\mathbb{R}_3^*$ проективная метрика расстояний (на прямых) — эллиптическая, в плоскостях — также эллиптическая, а в пучках плоскостей — параболическая.

К. п. $\mathbb{R}_n^*$ является предельным случаем как эллиптического пространства, так и Лобачевского пространства: проективная метрика К. п. $\mathbb{R}_n^*$ может быть получена предельными переходами из проективных метрик указанных пространств.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров.

КОКСТЕРА ГРУППА — группа с отмеченной системой образующих $\{r_i\colon i\in I\}$, допускающая определяющую систему соотношений

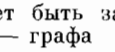
$$(r_i,\ r_j)^{n_{ij}}=1,\quad i,\ j\in I,$$

где $n_{ii}=1$ (так что $r_i^2=1$ при любом i) и $n_{ij}=n_{ji}$ при $i\neq j$ — целое число $\geqslant 2$ или ∞ (в последнем случае соотношения между r_i и r_j нет). При этих условиях n_{ij} совпадает с порядком элемента r_ir_j. Если $n_{ij}=2$, то r_i и r_j коммутируют. Матрица (n_{ij}), $i,\ j\in I$ наз. матрицей Кокстера данной К. г. Эта матрица (и, тем самым, группа) может быть задана посредством графа Кокстера — графа с вершинами a_i $(i\in I)$, в к-ром вершины a_i и a_j соединены $(n_{ij}-2)$-кратным ребром, если $n_{ij}<\infty$ (в частности, вообще не соединены, если $n_{ij}=2$), и соединены жирным ребром, если $n_{ij}=\infty$. В другой системе обозначений вершины a_i и a_j графа Кокстера соединяются простым ребром с отметкой n_{ij}.

Примеры. 1. Всякая группа, порождаемая двумя элементами порядка 2, есть К. г. с графом



2. Симметрическая группа S_n является К. г. относительно образующих $r_i=(i,\ i+1)$, $i=1,\ \ldots,\ n-1$; ее граф Кокстера имеет вид



3. Группа $PGL_2(\mathbb{Z})=GL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ является К. г. относительно образующих

$$r_1=\left\{\pm\begin{Vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}\right\},\ r_2=\left\{\pm\begin{Vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{Vmatrix}\right\},\ r_3=\left\{\pm\begin{Vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}\right\};$$

ее граф имеет вид



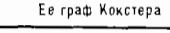
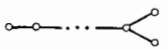
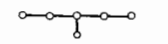
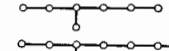
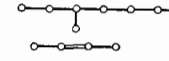
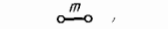
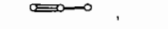
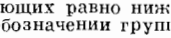
Группа $PGL_2(\mathbb{Z})$ содержит подгруппу $PSL_2(\mathbb{Z})=$

$= SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ индекса 2, изоморфную модулярной группе Клейна.

Понятие К. г. возникло в теории дискретных групп, порождаемых отражениями относительно гиперплоскостей (см. *Отражений группа*, в дальнейшем — о. г.). Всякая о. г. является К. г., если в качестве образующих взять отражения относительно гиперплоскостей, ограничивающих ее фундаментальный многогранник. К числу о. г. относятся *Вейля группы* (обычные и аффинные) полупростых групп Ли.

В 1934 Х. С. М. Коксетер [1] перечислил все о. г. в n-мерном евклидовом пространстве E^n и доказал, что все они являются, как говорят сейчас, К. г. В следующей работе [2] он доказал, что всякая конечная К. г. изоморфна некоторой о. г. в E^n, элементы которой имеют общую неподвижную точку, и тем самым получил классификацию конечных К. г. (см. табл. 1).

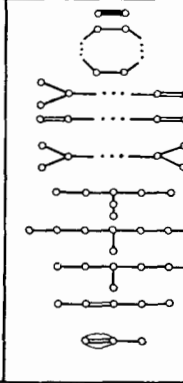
Табл. 1. — Неразложимые конечные К. г.

Обозначение группы	Ее граф Коксетера	Ее показатели
A_n $n \geqslant 1$		1, 2, ..., n
B_n или C_n, $n \geqslant 2$		1, 3, ..., $2n-1$
D_n $n \geqslant 4$		1, 3, ..., $2n-3$, $n-1$
E_6		1, 4, 5, 7, 8, 11
E_7		1, 5, 7, 9, 11, 13, 17
E_8		1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29
F_4		1, 5, 7, 11
$G_2^{(m)}$, $m \geqslant 5$		1, $m-1$
H_3		1, 5, 9
H_4		1, 11, 19, 29

Число образующих равно нижнему индексу в обозначении группы.

Среди бесконечных К. г. выделяются параболические и гиперболические К. г. По определению, К. г. является параболической (соответственно гиперболической), если она изоморфна о. г. в E^n (соответственно в пространстве Лобачевского L^n), элементы к-рой не имеют общей инвариантной плоскости размерности $< n$ (в гиперболическом случае плоскостью следует считать и бесконечно удаленную точку).

Табл. 2.—Неразложимые параболические К. г.

Обозначение группы	Ее граф Коксетера
$\widetilde{A}_1$	
$\widetilde{A}_n$, $n \geqslant 2$	
$\widetilde{B}_n$, $n \geqslant 3$	
$\widetilde{C}_n$, $n \geqslant 2$	
$\widetilde{D}_n$, $n \geqslant 4$	
$\widetilde{E}_6$	
$\widetilde{E}_7$	
$\widetilde{E}_8$	
$\widetilde{F}_4$	
$\widetilde{G}_2$	

Число образующих на единицу больше индекса в обозначении группы.

Параболические К. г. перечислены Х. С. М. Коксте́ром (см. табл. 2); они возникают в теории полупростых групп Ли как аффинные группы Вейля.

К. г. с k образующими является двумерной гиперболической К. г. тогда и только тогда, когда, при подходящей нумерации образующих,

$$\frac{1}{n_{12}}+\frac{1}{n_{23}}+\ldots+\frac{1}{n_{k1}}<1$$

и $n_{ij}=\infty$ при $|i-j|>1$. Что касается n-мерных гиперболических К. г. при $n>2$, то их полное перечисление не представляется возможным, хотя были достигнуты определенные успехи в изучении наиболее важных классов таких групп (см. *Отражений группа*).

Конечные, параболические и гиперболические К. г. и их прямые произведения составляют лишь небольшую часть К. г. Произвольная К. г. с конечным числом образующих допускает конечномерное вещественное линейное представление, указанное явно Х. С. М. Коксте́ром [2], при к-ром образующие переходят в линейные отражения. Доказано [4], что это представление является точным, из чего вытекает, в частности, решение проблемы тождества слов в К. г. [5].

С т а н д а р т н ы е п о д г р у п п ы К. г. Пусть G — К. г. с системой образующих $\{r_i,\ i\in I\}$. Для любого подмножества $J\subset I$ подгруппа G_J, порожденная множеством $\{r_i,\ i\in J\}$, является К. г., причем $r_i\notin G_J$ при $i\notin J$. Подгруппы такого вида наз. с т а н д а р т н ы м и. Всякая максимальная конечная подгруппа К. г. сопряжена стандартной подгруппе.

К. г. наз. н е р а з л о ж и м о й, если она не является прямым произведением двух нетривиальных стандартных подгрупп; это эквивалентно связности ее графа Коксте́ра. Все конечные (соответственно параболические) К. г. суть прямые произведения неразложимых К. г. того же типа; все гиперболические К. г. неразложимы. Неразложимая К. г. является конечной (соответственно параболической, гиперболической) тогда и только тогда, когда симметрическая матрица $\left\|-\cos\frac{\pi}{n_{ij}}\right\|$ положительно определенна (соответственно неотрицательно определенна и вырождена, имеет отрицательный индекс инерции 1).

В теории конечных К. г. важную роль играют так наз. п о к а з а т е л и (см. табл. 1) — уменьшенные на единицу степени образующих инвариантов соответствующей о. г. Через показатели выражаются порядок группы, число отражений (элементов, сопряженных образующим) и пр.— см. *Отражений группа*.

Произведение всех образующих конечной К. г. с точностью до сопряженности не зависит от порядка множителей и наз. э л е м е н т о м К и л л и н г а — К о к с т е р а.

Лит.: [1] C o x e t e r H. S. M., «Ann. Math.», 1934, v. 35, p. 588—621; [2] е г о ж е, «J. London Math. Soc.», 1935, v. 10, p. 21—25; [3] е г о ж е, «Duke Math. J.», 1951, v. 18, p. 765—82; [4] Б у р б а к и Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., М., 1972, гл. 4—6; [5] T i t s J., в кн.: Symposia Mathematica, v. 1, L.— N. Y., 1969, p. 175—85. *Э. Б. Винберг.*

КОЛЕБАНИЕ ФУНКЦИИ на м н о ж е с т в е E — разность между верхней и нижней гранями значений функции на множестве E. Иначе, К. ф. равно

$$\omega_E(f)=\sup_{P',\ P''\in E}\{|f(P')-f(P'')|\}.$$

Если функция не ограничена на множестве E, К. ф. полагается равным ∞. Для постоянных на E функций (и только для них) колебание на E равно нулю. Если функция f определена на подмножестве E пространства $\mathbb{R}^n$, то К. ф. в любой точке Q замыкания $\bar{E}$ определяется по формуле

$$\omega_{Q,E}(f)=\inf_{U:Q\in U}\omega_{U\cap E}(f),$$

где нижняя грань берется по всем окрестностям точки Q. Если $Q \in E$, то для непрерывности f в точке Q по множеству E необходимо и достаточно, чтобы $\omega_{Q, E}(f) = 0$.

А. А. Конюшков.

КОЛЕБАНИЙ ТЕОРИЯ — раздел прикладной теории дифференциальных уравнений, связанный с изучением колебательных явлений в естествознании и технике. Основные проблемы К. т. состоят в доказательстве существования и фактич. отыскании колебательных (периодических, почти периодических и др.) движений — решений заданной системы, и исследовании поведения остальных решений по отношению к данным колебательным. Различают теорию линейных колебаний и теорию нелинейных колебаний.

В теории линейных колебаний дело сводится к изучению линейных систем дифференциальных уравнений, это обычно бывает связано с тем, что рассматриваемые величины (искомые функции системы дифференциальных уравнений) столь малы, что оказывается возможным пренебречь нелинейными членами в правых частях системы. Рассматриваются линейные системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\, x + f(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ и $f(t)$ суть n-мерные векторы, а $P(t)$ — квадратная матрица порядка n, причем $P(t)$ и $f(t)$ чаще всего являются периодич. или почти периодич. функциями. Основные проблемы теории линейных колебаний: построение периодич. и почти периодич. решений системы (1) и исследование свойств их устойчивости. Наиболее детально с этих точек зрения изучены случаи, когда заданная система близка к системе уже изученной, иными словами, те случаи, когда удается ввести малый параметр следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = (P(t) + \mu Q(t, \mu))\, x + f(t) \tag{2}$$

в предположении, что система

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\, x \tag{3}$$

полностью исследована, а μ — малый параметр. Для таких систем в большинстве случаев удается исследовать вопрос о существовании периодических (соответственно почти периодических) решений и фактически построить их. При весьма широких предположениях относительно матриц P и Q дается представление характеристич. показателей системы (3) в виде функций параметра (см. [7], [10]), в частности исследовано интересное явление параметрич. резонанса в линейных системах [5].

В теории нелинейных колебаний как по постановке задач, так и по методам исследования существенным образом различаются так наз. локальные и нелокальные проблемы. К первым из них относятся такие задачи, в к-рых удается выделить какие-либо «малости» (напр., малы сами исследуемые величины, или в системе имеются малые параметры).

Если в исследуемой задаче искомые функции можно считать малыми, то дело сводится к исследованию окрестности состояния равновесия для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t), \tag{4}$$

где $x(t)$ и $X(x, t)$ суть n-мерные векторы и $X(0, t) \equiv 0$. Здесь широко применяются методы локальной качественной теории дифференциальных уравнений [4] и методы теории устойчивости движения в смысле Ляпунова [1]. Весьма важный результат для теории нелинейных колебаний был получен А. Н. Колмогоровым и его последователями (см. [4]): было доказано сущест-

вование квазипериодич. решений в окрестности состояния равновесия $x=0$ для системы (4).

Часто в заданные системы дифференциальных уравнений входят малые параметры, т. е. рассматриваются системы вида

$$\frac{dx}{dt} = X(x,\ t) + \mu R(x,\ t,\ \mu), \tag{5}$$

где μ — малый параметр. С такого рода системами связывают следующую проблему: наряду с системой (5) рассматривают так наз. «порождающую» систему — ту, в к-рую обращается система (5) при $\mu=0$, т. е. систему вида (4). Предполагается, что «порождающая» система обладает нек-рым свойством; ставится вопрос: не будет ли и система (5) обладать тем же свойством при малых, но отличных от нуля μ. Напр., пусть система (4) имеет периодич. или почти периодич. решение $x=\psi(t)$, будет ли при этом система (5) обладать периодич. или почти периодич. решением $x=\varphi(t,\ \mu)$ таким, что

$$\lim_{\mu \to 0} \varphi(t,\ \mu) = \psi(t)?$$

Еще А. Пуанкаре [2] разработал мощные методы для решения такого рода проблем. В ряде случаев им было не только доказано существование периодич. решения, но и указан алгоритм для его построения (см., напр., [5]).

Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов и их ученики (см. [3], [6], [11]) развивали для систем вида (5) асимптотич. методы. Среди этих методов особо важную роль играет метод осреднения, к-рый состоит в следующем. Рассматривается так наз. стандартная система:

$$\frac{dx}{dt} = \mu X(x,\ t,\ \mu). \tag{6}$$

Оказывается, что к такой системе могут быть сведены многие системы теории нелинейных колебаний. Наряду с системой (6) рассматривается «осредненная» система

$$\frac{dy}{dt} = \mu Y(y), \tag{7}$$

где

$$Y = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(x,\ \tau,\ 0)\, d\tau.$$

Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов показали, что система (7) приближает систему (6) с точностью до величин порядка μ^2. С помощью дальнейших осреднений можно избавиться от зависимости от t в членах сколь угодно высокого порядка малости по μ. Однако этот процесс, как правило, расходится, так что описанный метод является по существу асимптотическим.

Весьма важную роль в теории нелинейных колебаний играет метод интегральных поверхностей. Основы этого метода были заложены А. М. Ляпуновым [1]. При весьма общих предположениях было доказано (см. [3], [6], [11]), что если «порождающая» система (4) имеет интегральную поверхность с определенными свойствами, то и система (5) обладает такой же интегральной поверхностью.

С описанным кругом проблем тесно связана теория *релаксационных колебаний*. Эти колебания описываются системами дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных:

$$\frac{dx}{dt} = X(x,\ y,\ t,\ \mu), \quad \mu\frac{dy}{dt} = Y(x,\ y,\ t,\ \mu), \tag{8}$$

где x и X — n-мерные векторы, y и Y — m-мерные векторы, а μ — малый параметр. Наряду с системой (8) рассматривается вырожденная система:

$$\frac{dx}{dt} = X(x,\ y,\ t,\ 0), \quad Y(x,\ y,\ t,\ 0) = 0. \tag{9}$$

Если система (9) имеет специальное «разрывное» периодическое решение, то и (8) в ряде случаев располагает при малых μ истинным периодич. решением (см. [12]).

В приложениях весьма часто встречаются системы дифференциальных уравнений, в к-рых нельзя выделить никаких малостей. Здесь сталкиваются с нелокальными проблемами К. т. При исследовании нелокальных проблем возникают весьма серьезные трудности. Однако в ряде частных, но важных для приложений, случаев удается провести полное исследование соответствующей системы или получить достаточно существенную информацию о поведении ее решений. Напр., для уравнения

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \tag{10}$$

представляющего собой обобщение *Ван дер Поля уравнения*, Н. Левинсон и О. Смит [15] доказали существование, устойчивость и единственность предельного цикла. При доказательстве существенно использовался тот факт, что уравнение (10) есть уравнение 2-го порядка. В дальнейшем было доказано существование периодич. решения у нелинейного уравнения 3-го порядка и различных автономных систем высших порядков.

При исследовании периодических неавтономных систем, т. е. систем вида (4), у к-рых $X(x, t+\omega) = X(x, t)$, с системой связывают ее преобразование Пуанкаре T, вводимое формулой $Tx_0 = x(\omega, 0, x_0)$, где $x(t, t_0, x_0)$ — решение системы (4) такое, что $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$. Если x^* есть неподвижная точка преобразования T, то решение $x(t, 0, x^*)$ имеет период ω по t. Это дает возможность для доказательства существования периодич. решений применять различные теоремы о существовании неподвижной точки (см. [8], [9]).

В теории нелинейных колебаний важную роль играют диссипативные системы (это такие системы вида (4), у к-рых все решения при достаточно больших t остаются в фиксированном шаре) и системы с конвергенцией (у таких систем все решения сходятся к одному устойчивому); разработаны достаточно надежные методы доказательства конвергентности и диссипативности конкретных систем [8].

Поведение решений диссипативной периодич. системы во многом определяется структурой нек-рого асимптотически устойчивого интегрального множества этой системы. Поэтому для теории нелинейных колебаний существенно исследование структуры таких множеств. В случае, если заданная система имеет лишь конечное число периодич. решений, такое множество удается охарактеризовать достаточно полно [13]. Если же система имеет бесконечно много периодич. решений, то в этом случае оказывается, что асимптотически устойчивые интегральные множества имеют чрезвычайно сложную структуру [13]. Исследование таких систем связано, как правило, с преодолением значительных трудностей, и его удается провести лишь в исключительных случаях. Пример такого исследования дан М. Картрайт и Дж. Литлвудом [16] при исследовании уравнения Ван дер Поля с вынуждением:

$$\ddot{x} + k(x^2 - 1)\dot{x} + x = kb \sin t.$$

В частности, они показали, что это уравнение при соответствующем выборе параметров b и k имеет бесконечно много периодич. решений.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Хар., 1892; [2] Poincare H., Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste, t. 1, P., 1892; [3] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Новые методы нелинейной механики, М.—Л., 1934; [4] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М.—Л., 1949; [5] Малкин И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, М.—Л., 1956; [6] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 3 изд., М., 1963; [7] Еругин Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с

периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963; [8] Плисс В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, М.— Л., 1964; [9] Красносельский М. А., Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, М., 1966; [10] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами, М., 1972; [11] Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б., Интегральные многообразия в нелинейной механике, 1973; [12] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975; [13] Плисс В. А., *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений*, М., 1977; [14] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 6, с. 91—192; [15] Levinson N., Smit O. K., «Duke Math. J.», 1942, v. 9, p. 382—403; [16] Littlewood J. E., «Acta math.», 1957, v. 97, № 3—4, p. 267—308. *В. А. Плисс.*

КОЛЕБЛЮЩЕЕСЯ РЕШЕНИЕ — решение $x(t)$ дифференциального уравнения

$$x^{(n)}=f(t,\ x,\ x',\ \ldots,\ x^{(n-1)}),\quad t\in[t_0,\ \infty),\qquad (*)$$

обладающее свойством: для любого $t_1\geqslant t_0$ найдется точка $t_2>t_1$, при переходе через к-рую функция $x(t)$ меняет знак. Во многих прикладных задачах возникает вопрос о существовании К. р. или о колеблемости всех решений уравнения (*). Известно много достаточных условий, при к-рых уравнение (*) имеет К. р. (см. [1] — [3]). Напр., любое нетривиальное решение уравнения $x''+2\delta x'+\omega^2x=0$ с постоянными коэффициентами колеблется, если $\delta^2<\omega^2$; любое нетривиальное решение уравнения

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0$$

с ω-периодическими коэффициентами колеблется, если

$$\int_0^{\omega}dt\int_t^{t+\omega}q(s)\exp\left(-\int_s^t p(r)\,dr\right)ds\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{1}{2}\left(1-\exp\int_0^{\omega}p(t)\,dt\right)\int_0^{\omega}p(t)\,dt$$

и $q(t)\not\equiv 0$ на $[0,\ \omega]$.

В ряде приложений возникает вопрос о К. р. (в определенном смысле) системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Напр., в теории регулирования изучают колеблемость относительно заданной гиперплоскости $\sum_{i=1}^n c_ix_i=0$ решений $x(t)=(x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t))$ системы уравнений $x'=f(t,\ x)$, т. е. вопрос о колеблемости функции $\sigma(t)=\sum_{i=1}^n c_ix_i(t)$. Изучают также $[\alpha,\ \beta]$-колеблющиеся решения, при этом ограниченное решение $x(t)$ системы $x'=f(t,\ x)$ наз. $[\alpha,\ \beta]$-колеблющимся, если функция $\sigma(t)$ колеблется и для любого $t_1\geqslant t_0$ найдутся точки t_2 и t_3 такие, что $t_1<t_2<t_3$, $\sigma(t_2)<\alpha$, $\sigma(t_3)>\beta$, причем $\alpha<0<\beta$. Для системы (2) существуют и др. определения колеблемости решений.

Лит.: [1] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [2] Swanson C. A., Comparison and oscillation theory of linear differential equations, N. Y.— L., 1968; [3] Кигурадзе И. Т., Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, Тб., 1975. *Ю. В. Комленко, Е. Л. Тонков.*

КОЛЕЦ МНОГООБРАЗИЕ — класс колец $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих заданной системе полиномиальных тождеств. К. м. можно определить аксиоматически, как наследственный класс алгебр, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и полных прямых сумм (см. *Алгебраических систем многообразие*). Так как совокупность полиномиальных тождеств, выполнимых в данном кольце, образует вполне характеристич. идеал (*T-идеал*) свободного кольца, то существует взаимно однозначное соответствие между многообразиями колец и T-идеалами счетно порожденного свободного кольца. Если для К. м. имеет место включение $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{M}$, то говорят, что $\mathfrak{N}$ является подмногообразием в $\mathfrak{M}$. Многообразие, соответствующее T-идеалу тождеств кольца A, наз. многообразием, порожденным кольцом A. Каждое многообразие колец порождается своим «универсальным объектом» — свободным коль-

цом данного многообразия, к-рое обладает свободной системой образующих: всякое отображение множества свободных образующих в произвольное кольцо из многообразия продолжается до гомоморфизма.

Пусть M_n — многообразие, порожденное алгеброй квадратных матриц порядка n. Для всякого многообразия ассоциативных колец нулевой характеристики (т. е. колец, аддитивная группа к-рых без кручения) существует такое натуральное число $n=n(\mathfrak{M})$, что $M_n \subseteq \mathfrak{M}$, но $M_{n+1} \not\subseteq \mathfrak{M}$. Многообразие колец наз. шпехтовым, если всякое его кольцо обладает конечным базисом тождеств. Многообразие, порожденное конечным ассоциативным кольцом или конечным кольцом Ли, является шпехтовым. Вопрос о том, всякое ли многообразие ассоциативных алгебр шпехтово, составляет содержание (пока открытой, 1978) проблемы Шпехта. Если многообразие $\mathfrak{M}$ порождено ассоциативной алгеброй с конечным числом образующих над полем нулевой характеристики и $M_2 \not\subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ шпехтово.

См. также PI-*алгебра*.

Лит.: [1] Procesi C., Rings with polynomial identities, N. Y., 1973; [2] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968.

В. Н. Латышев.

КОЛЛИНЕАРНЫЕ ВЕКТОРЫ — векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых. Для того чтобы два ненулевых вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны. Нулевой вектор коллинеарен всякому вектору. Аналогично, коллинеарными наз. точки, лежащие на одной прямой.

А. Б. Иванов.

КОЛЛИНЕАЦИЯ — *проективное преобразование* проективного пространства Π_n, представимое в виде произведения конечного числа перспектив; если ν есть К., то для любого подпространства S_q существует такое произведение π не более чем $q-1$ перспектив, что $\nu(S_p)=\pi(S_p)$ для любого $S_p \subset S_q$. Напр., проективное преобразование, оставляющее неподвижной каждую точку нек-рой прямой, является К.,— это гомология (в узком смысле).

Пусть Π_n интерпретируется как совокупность подпространств линейного пространства $A^e_{n+1}(K)$ над телом K. Для того чтобы проективное преобразование было К., необходимо и достаточно, чтобы оно индуцировалось линейным преобразованием $A^e_{n+1}(K)$. Совокупность всех К. образует подгруппу G_0 группы проективных преобразований G, являющуюся нормальным делителем G.

К. тогда и только тогда исчерпывают все проективные преобразования, когда каждый автоморфизм тела K является внутренним. Поле обладает этим свойством в том и только в том случае, когда любой его автоморфизм — тождественный, таково, напр., поле действительных чисел $\mathbb{R}$. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ этим свойством не обладает, в то время как каждый автоморфизм тела кватернионов $\mathbb{H}$ является внутренним.

Если K — некоммутативное тело, то существует нетождественная К., оставляющая неподвижной каждую точку данного симплекса. Каждый симплекс тогда и только тогда отображается на любой другой симплекс одной и только одной К., когда K — поле (вторая основная теорема проективной геометрии).

М. И. Войцеховский.

КОЛЛОКАЦИИ МЕТОД — проекционный метод решения интегральных и дифференциальных уравнений, в к-ром приближенное решение определяется из условия удовлетворения уравнению в нек-рых заданных точках. Напр., для приближенного решения интегрального уравнения

$$u(t)=\int_a^b K(t,\ s,\ u(s))\,ds+f(t)$$

выбираются нек-рое n-параметрич. семейство функций

$\varphi(t, c_1, \ldots, c_n)$ и нек-рые точки (у з л ы к о л л о к а ц и и) $t_1, \ldots, t_n$ на отрезке $[a, b]$. Приближенное решение $u_n(t) = \varphi(t, c_1, \ldots, c_n)$ определяется из условий

$$u_n(t_i) = \int_a^b K(t_i, s, u_n(s))\, ds + f(t_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

представляющих собой систему n уравнений относительно неизвестных $c_1, \ldots, c_n$. Если данное уравнение линейно, а приближенное решение ищется в виде линейной комбинации $u_n(t) = c_1\varphi_1(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t)$ заданных (так наз. координатных) функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, то и система уравнений относительно $c_1, \ldots, c_n$ получается линейная.

С х о д и м о с т ь К. м. д л я л и н е й н ы х к р а е в ы х з а д а ч. Пусть поставлена краевая задача

$$Lu = u^{(m)} + a_1(t)\, u^{(m-1)} + \ldots + a_m(t)\, u = f(t), \quad (1)$$
$$-1 < t < 1;$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} [\alpha_{ij} u^{(j)}(-1) + \beta_{ij} u^{(j)}(1)] = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \quad (2)$$

Приближенное решение задачи разыскивается в виде

$$u_n(t) = c_1\varphi_1(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t),$$

где $\varphi_j(t)$ — некоторый многочлен степени $m+j-1$, удовлетворяющий краевым условиям (2). Коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ определяются из линейной системы

$$[Lu_n - f]_{t=t_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad (3)$$

с чебышевскими узлами $t_i = t_i^{(u)} = \cos\frac{2i-1}{2n}\pi$, $i = 1, \ldots, n$. Справедлива следующая теорема [1]. Пусть функции f и a_j, $j = 1, \ldots, m$, непрерывны на $[-1, 1]$ и пусть краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $u(t)$. Тогда существует n_0 такое, что при $n \geqslant n_0$ система (3) однозначно разрешима, и

$$\max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} \left| u_n^{(k)}(t) - u^{(k)}(t) \right| \leqslant cE_n(u^{(m)}) \longrightarrow 0,$$
$$k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

$$\left\{ \int_{-1}^{1} \frac{\left| u_n^{(m)}(t) - u^{(m)}(t) \right|^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \right\}^{1/2} \leqslant cE_n(u^{(m)}) \longrightarrow 0,$$

где $c = \text{const}$,

$$E_n(v) = \min_{b_0, \ldots, b_{n-1}} \max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} \left| v(t) - \sum_{j=0}^{n-1} b_j t^j \right|.$$

Аналогичный результат верен (см. [1]), если узлы — корни ортогональных по какому-либо весу многочленов. При равноотстоящих узлах рассматриваемый метод расходится.

Развиваются также эффективные вычислительные схемы К. м. с координатными сплайн-функциями (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [2] R u s s e l l R. D., S h a m p i n e L. F., «Numerische Mathematik», 1972, Bd 19, № 1, S. 1—28; [3] B o o r C. de, S w a r t z B., «SIAM Journal of Numerical Analysis», 1973, v. 10, № 4, p. 582—606.

Г. М. Вайникко.

КОЛМОГОРОВА АКСИОМА, а к с и о м а T_0,— самая слабая из всех *отделимости аксиом* в общей топологии; введена А. Н. Колмогоровым. Топологич. пространство удовлетворяет этой аксиоме, или есть T_0-п р о с т р а н с т в о, п р о с т р а н с т в о К о л м о г о р о в а, если, каковы бы ни были две различные точки пространства, в этом пространстве существует открытое множество, содержащее одну из этих точек, но не содержащее другую. Если потребовать, чтобы каждая из двух (произвольно данных) точек содержалась в открытом множестве, не содержащем другую точку, то получим следующую по силе аксиому отделимости, называемую аксиомой T_1; удовлетворяющие ей топо-

логич. пространства наз. T_1-пространствами. Простейшим примером T_0-пространства, не являющегося T_1-пространством, служит связное *двоеточие*.

В T_0-пространстве одноточечные множества могут не быть замкнутыми; T_1-пространства могут быть определены как такие T_0-пространства, в к-рых все одноточечные множества замкнуты. T_0-пространство, в к-ром пересечение любого числа открытых множеств открыто, наз. дискретным (в широком смысле) пространством. В таком и только в таком пространстве замыкание объединения любого числа множеств совпадает с объединением замыканий этих множеств. В любом дискретном пространстве и даже в любом пространстве Колмогорова может быть определен (частичный) порядок между его точками x и y : пишем $x \leqslant y$, если точка x содержится в замыкании одноточечного множества, состоящего из точки y. Обратно, определяя в произвольном частично упорядоченном множестве замыкание какой-либо точки x как множество всех точек $x' \leqslant x$ и называя замыканием любого множества объединение замыканий всех его точек, получим дискретное пространство. Таким образом, изучение дискретных пространств равносильно изучению частично-упорядоченных множеств. К важным примерам дискретных пространств относятся симплициальные (и более общие) комплексы комбинаторной топологии: для симплексов x, y отношение порядка $x \leqslant y$ означает, что x есть грань (возможно, несобственная) симплекса y.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977. *В. И. Зайцев.*

КОЛМОГОРОВА ДВОЙСТВЕННОСТЬ — двойственность в алгебраич. топологии, состоящая в изоморфизме

$$H_r(A, G) \sim H_{r+1}(R \setminus A, G)$$

r-мерной группы гомологии $H_r(A, G)$ замкнутого множества A хаусдорфова локально компактного пространства R с нулевыми r- и $(r+1)$-мерными группами гомологий $(r+1)$-мерной группе гомологии с абелевой группой коэффициентов G дополнения $R \setminus A$ и в изоморфизме

$$H^r(A, G) \sim H^{r+1}(R \setminus A, G)$$

соответствующих групп когомологии при $H^r(R, G)=0$ и $H^{r+1}(R, G)=0$.

Группы гомологии и когомологии, участвующие в этих изоморфизмах, определяются так. За r-мерную цепь принимается любая кососимметрическая, аддитивная относительно каждого аргумента функция $c_r(e_0, e_1, \ldots, e_r)$ от $r+1$ подмножеств пространства R, имеющих компактные замыкания, принимающая значения из G и равная нулю, когда пересечение $e_0 \cap \ldots \cap e_r$ пусто. Граничный оператор ∂ определяется по формуле

$$\partial c_r(e_0, \ldots, e_{r-1}) = c_r(U, e_0, \ldots, e_{r-1}),$$

где U — любое открытое множество из R с компактным замыканием, содержащее $e_0 \cup \ldots \cup e_{r-1}$. Циклами считаются цепи c_r с нулевыми границами, $\partial c_r = 0$, а циклами, гомологичными нулю,— цепи c_r, являющиеся границами, $c_r = \partial c_{r+1}$. Группа $Z_r(R, G)$ всех r-мерных циклов по обычному сложению функций содержит группу $B_r(R, G)$ всех r-мерных границ в качестве подгруппы. Факторгруппа $Z_r(R, G)/B_r(R, G)$ и есть группа $H_r(R, G)$. Группу G коэффициентов А. Н. Колмогоров всегда рассматривал как компактную группу и компактно топологизировал и группу гомологии. Однако на построение группы гомологии топология группы коэффициентов не оказывает влияния, и гомологии можно брать над любой абелевой группой.

Для определения коцепей рассматриваются такие кососимметрические функции $f^r(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ от $r+1$

точек x_0, x_1, ..., x_r пространства R со значениями в G, что для каждой f^r существует конечная система S_{f^r} попарно непересекающихся подмножеств из R с компактными замыканиями, удовлетворяющая условиям: $f^r(x_0, \ldots, x_r)=f^r(x_0', \ldots, x_r')$, если x_i и x_i' принадлежат одному и тому же элементу системы S_{f^r} для любого i; $f^r(x_0, \ldots, x_r)=0$, если хотя бы одно x_i не содержится ни в каком элементе из S_{f^r}. Граничный оператор δ определяется по формуле

$$\delta f^r(x_0, \ldots, x_{r+1}) = \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i f^r(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{r+1}).$$

Функции f_1^r и f_2^r считаются эквивалентными, если каждая точка x из R имеет такую окрестность U, что $f_1^r(x_0, \ldots, x_r)=f_2^r(x_0, \ldots, x_r)$, как только все x_i принадлежат U, и за коцепь принимается класс эквивалентных функций. Кограница коцепи определяется как класс кограниц входящих в эту коцепь функций. Коцикл есть коцепь c^r с нулевой кограницей, $\delta c^r=0$, а когомологичным нулю считается коцикл, являющийся кограницей, $c^r=\delta c^{r-1}$. Группа $B^r(R, G)$ всех r-мерных кограниц есть подгруппа группы $Z^r(R, G)$ всех r-мерных коциклов; факторгруппа $Z^r(R, G)/B^r(R, G)$ и есть группа $H^r(R, G)$.

Определенные так группы гомологии и когомологии, часто называемые функциональными, были введены А. Н. Колмогоровым [1]. Тогда же, кроме выше указанных изоморфизмов двойственностей, им были доказаны двойственность между гомологиями и когомологиями $H_r(R, G^*) \mid H^r(R, G)$ в смысле теории характеров Понтрягина, когда компактная группа G^* двойственна группе G, и двойственности Пуанкаре

$$H_r(R, G^*) \sim \tilde{H}^{n-r}(R, G^*), \quad H^r(R, G) \sim \tilde{H}_{n-r}(R, G),$$

где R — открытое n-мерное многообразие, $H_r(R, G^*)$ и $H^r(R, G)$ — функциональные группы над компактной (соответственно, дискретной) группой G^* (соответственно G), $\tilde{H}^{n-r}(R, G^*)$ и $\tilde{H}_{n-r}(R, G)$ — группы когомологии (соответственно гомологии) бесконечных коцепей (соответственно конечных цепей) произвольного клеточного разбиения многообразия R.

В случае, когда R есть n-мерное евклидово пространство, из указанных двойственностей получается теорема двойственности Понтрягина (см. *Александера двойственность*). Частным случаем этих двойственностей является и теорема двойственности Стинрода (см. *Двойственность* в алгебраич. топологии), поскольку К. д. для гомологии справедлива и для произвольной группы коэффициентов [2].

Функциональные группы гомологии изоморфны: группам Вьеториса (см. *Вьеториса гомологии*) в случае компактных метрич. пространств и компактной группы коэффициентов [1]; спектральным группам гомологии Александрова относительно особых подкомплексов [3] в случае локально компактных пространств и компактной группы коэффициентов [4] и, следовательно: группам гомологии Александрова — Чеха одноточечной компактификации данного локально компактного пространства [5]; группам гомологии Стинрода [8] в случае компактных метрич. пространств и произвольной группы коэффициентов [7]. Таким образом, гомологии Колмогорова, введенные на четыре года раньше гомологий Стинрода, представляют собой и их обобщение на более широкий класс пространств.

Функциональные гомологии и когомологии удовлетворяют всем *Стинрода — Эйленберга аксиомам* на категории локально компактных пространств с допусти-

мыми отображениями (т. е. когда прообраз каждого компактного множества компактен) [6] и, кроме того, двум аксиомам Милнора на категории компактных метрич. пространств [7].

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «C. r. Acad. sci.», 1936, t. 202, p. 1144—47; 1325—27; 1558—60; 1641—43; [2] Мдзинаришвили Л. Д., «Докл. АН СССР», 1974, т. 216, № 3, с. 502—04; [3] Александров П. С., «Уч. зап. МГУ», 1940, т. 45, с. 1—60; [4] Чогошвили Г. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1951, т. 15, № 5, с. 421—38; [5] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, М., 1958; [6] Балавадзе М. Б., «Тр. Тбил. матем. ин-та», 1972, т. 41, с. 5—40; [7] Мдзинаришвили Л. Д., «Тр. Тбил. матем. ин-та», 1972, т. 41, с. 143—63; [8] Steenrod N., «Ann. Math.», 1940, v. 41, p. 831—51. *Г. С. Чогошвили.*

КОЛМОГОРОВА ИНТЕГРАЛ — общая схема построения интеграла, включающая в себя *Лебега — Стилтьеса интеграл*, *Бёркиля интеграл*, *Хеллингера интеграл* и др. Предложена А. Н. Колмогоровым [1]. Рассматривается направленное семейство разбиений пространства E произвольной природы. На элементах разбиения определена функция множества Ф, вообще говоря многозначная. Сумма значений этой функции, взятая по всем элементам разбиения, задает многозначную функцию разбиения. Эта сумма представляет собой, в частности, обобщение суммы Римана $\Sigma_i f(\xi_i)\Delta x_i$, где многозначность является следствием произвольности выбора точек ξ_i на элементах разбиения. Предел многозначной функции разбиения по направлению и определяет К. и. $\int_E d\Phi$. К. и. рассматривается как для конечных, так и для счетных разбиений. Можно рассматривать К. и. от функций со значениями в коммутативной топологич. группе.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Math. Ann.», 1930, Bd 103, S. 654—96. *В. А. Скворцов.*

КОЛМОГОРОВА КРИТЕРИЙ — статистический критерий, применяемый для проверки простой непараметрической гипотезы H_0, согласно к-рой независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют заданную непрерывную функцию распределения $F(x)$, причем альтернативная гипотеза H_1 предполагается двусторонней:

$$|\,\mathsf{E}F_n(x) - F(x)\,| > 0,$$

где $\mathsf{E}F_n$ — математическое ожидание функции эмпирического распределения $F_n(x)$. Критическое множество К. к. выражается неравенством

$$D_n = \sup_{|x|<\infty} |\,F_n(x) - F(x)\,| > \lambda_n$$

и основано на теореме, доказанной А. Н. Колмогоровым в 1933: в случае справедливости гипотезы H_0 распределение статистики D_n не зависит от функции $F(x)$, причем если $n\to\infty$, то

$$\mathsf{P}\left\{\sqrt{n}\,D_n < \lambda\right\} \longrightarrow K(\lambda), \quad \lambda > 0,$$

где $$K(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{-2m^2\lambda^2}.$$

В 1948 Н. В. Смирнов [4] табулировал функцию распределения Колмогорова $K(\lambda)$. Согласно К. к. с уровнем значимости α, $0<\alpha<0{,}5$, гипотезу H_0 следует отвергнуть, если $D_n \geqslant \lambda_n(\alpha)$, где $\lambda_n(\alpha)$ — критическое значение К. к., соответствующее заданному уровню значимости α и являющееся корнем уравнения $\mathsf{P}\{D_n \geqslant \lambda\} = \alpha$.

Для определения $\lambda_n(\alpha)$ рекомендуется пользоваться аппроксимацией допредельного закона статистики Колмогорова D_n ее предельным распределением; см. [3], где показано, что если $n\to\infty$ и $0<\lambda_0<\lambda=O(n^{1/3})$, то

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{18n}(6nD_n+1)^2 \geqslant \lambda\right\} =$$

$$= \left[1 - K\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right)\right]\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \qquad (*)$$

Применение аппроксимации (*) дает следующее приближение критического значения

$$\lambda_n(\alpha) \approx \sqrt{\frac{z}{2n} - \frac{1}{6n}},$$

где z — корень уравнения $1 - K(\sqrt{\lambda/2}) = \alpha$.

На практике для вычисления значения статистики D_n пользуются тем обстоятельством, что

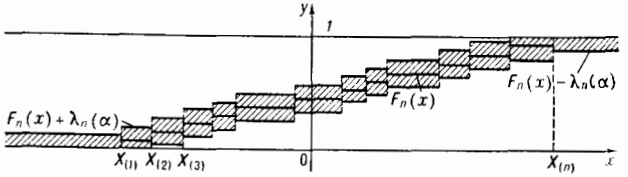
$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-),$$

где

$$D_n^+ = \max_{1 \leqslant m \leqslant n} \left(\frac{m}{n} - F(X_{(m)}) \right),$$

$$D_n^- = \max_{1 \leqslant m \leqslant n} \left(F(X_{(m)}) - \frac{m-1}{n} \right),$$

$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)}$ — *вариационный ряд*, построенный по выборке $X_1, \ldots, X_n$. К. к. имеет следующее геометрич. истолкование (см. рис.). Изобразим на



плоскости xOy графики функций $F_n(x)$, $F_n(x) \pm \lambda_n(\alpha)$. Заштрихованная область является доверительной зоной уровня $1-\alpha$ для функции распределения $F(x)$, так как если гипотеза H_0 верна, то согласно теореме Колмогорова

$$\mathsf{P}\{F_n(x) - \lambda_n(\alpha) < F(x) < F_n(x) + \lambda_n(\alpha)\} \approx 1 - \alpha.$$

Если график функции $F(x)$ не выходит из заштрихованной области, то по К. к. с уровнем значимости α гипотезу H_0 следует принять, в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

К. к. дал мощный толчок развитию математич. статистики, в результате чего были получены совершенно новые методы статистич. исследований, к-рые легли в основу непараметрич. статистики.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Giorn. Istit. Ital. Attuari», 1933, v. 4, p. 83—91; [2] Смирнов Н. В., «Бюлл. МГУ», секц. А, 1939, т. 2, в. 2, с. 3—14; [3] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, с. 129—55; [4] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968. *М. С. Никулин.*

КОЛМОГОРОВА НЕРАВЕНСТВО — 1) К. н. в теории приближений — мультипликативное неравенство между нормами в пространствах $L_s(J)$ функций и их производных на действительной оси (или полуоси):

$$\|x^{(k)}\|_{L_q} \leqslant C \|x\|_{L_r}^{\nu} \cdot \|x^{(n)}\|_{L_p}^{1-\nu},$$

где $0 \leqslant k < n$, $\nu = \left(n - k - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Big/ \left(n - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)$, а C не зависит от x. Впервые такие неравенства изучали Г. Харди (G. Hardy, 1912), Дж. Литлвуд (J. Littlewood, 1912), Э. Ландау (E. Landau, 1913), Ж. Адамар (J. Hadamard, 1914). А. Н. Колмогоров [1] нашел наименьшую константу C для наиболее важного случая $J = (-\infty, +\infty)$, $p = q = r = \infty$ и любых k, n.

К. н. связаны с задачей наилучшего численного дифференцирования и устойчивого вычисления (неограниченного) оператора D^k k-кратного дифференцирования. Именно, модуль непрерывности

$$\omega(\delta) = \sup\{\|x^{(k)}\|_{L_q} : \|x\|_{L_r} \leqslant \delta, \ \|x^{(n)}\|_{L_p} \leqslant 1\}$$

оператора D^k на классе $\{x \in L_r : \|x^n\|_{L_p} \leqslant 1\}$ выражается формулой $\omega(\delta) = \omega(1)\delta$, т. е. имеет место К. н. с константой $C = \omega(1)$.

К. н.— частный случай неравенств, связанных с вложением классов дифференцируемых функций (см. *Вложения теоремы*).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Ученые зап. Моск. ун-та, математика», 1939, в. 30, кн. 3, с. 3—16; [2] Стечкин С. Б., «Матем. заметки», 1967, т. 1, в. 2, с. 137—48; [3] Тайков Л. В., «Матем. заметки», 1968, т. 4, в. 2, с. 233—238; [4] Арестов В. В., «Acta Sci. Math.», 1972, v. 33, p. 243—67. *Ю. Н. Субботин.*

2) К. н. в теории вероятностей — неравенство для максимума сумм независимых случайных величин — обобщение классического *Чебышева неравенства*. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — независимые случайные величины с конечными математич. ожиданиями $a_n=\mathsf{E}X_n$ и дисперсиями $\sigma_n^2=\mathsf{D}X_n$. Тогда для любого $\varepsilon>0$

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k-a_k)\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2,$$

и если величины ограничены ($|X_i|\leqslant c$ с вероятностью 1), то

$$1-\frac{(\varepsilon+2c)^2}{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2}\leqslant\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{m}(X_k-a_k)\right|\geqslant\varepsilon\right\}.$$

К. н. установлено А. Н. Колмогоровым [1]. К. н. замечательно как доказательством — способ рассуждений был новым в теории вероятностей, так и самим результатом — оценка для максимума сумм такова же, что и для последней суммы в неравенстве Чебышева.

При доказательстве К. н. существенно используются вытекающие из взаимной независимости X_k свойства условных математич. ожиданий функций от сумм S_{k+p} при условии, что $X_1, \ldots, X_k$ фиксированы.

К. н. допускает многочисленные обобщения, из которых можно отметить следующие:

1) К. н. остается справедливым, если условие взаимной независимости величин X_n заменить условием, что $\{X_n\}$ есть *абсолютно беспристрастная последовательность*, т. е. что последовательность сумм $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ образует мартингал.

2) Если $g(t)\geqslant 0$ — выпуклая монотонная функция, $\mathsf{E}g(|S_n|)<\infty$, то

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}|S_m|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\mathsf{E}g(|S_n|)\frac{1}{g(\varepsilon)}.$$

3) Если X_k, $k=1, \ldots, n$, симметричны относительно начала координат, то

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}|S_m|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant 2\mathsf{P}\{|S_n|\geqslant\varepsilon\},$$

см. *Леви неравенство*.

4) Для произвольных независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}|S_m|>\delta+\varepsilon\right\}\leqslant\frac{1}{1-p}\mathsf{P}\{|S_n|>\varepsilon\},$$

если только числа $\delta>0$ и $0<p<1$ выбраны так, что $\mathsf{P}\{|S_m|>\delta\}\leqslant p$ при всех m, $1\leqslant m\leqslant n$.

Во всех вариантах К. н. можно увидеть следующее свойство сумм независимых величин — «размах» максимальной суммы имеет тот же порядок, что и «размах» последней суммы.

Как неравенство Чебышева применяется при выводе *больших чисел закона*, так и К. н. применяется при доказательстве *больших чисел усиленного закона* (критерий Колмогорова сходимости $S_n/n\to 0$ почти всюду). На использовании К. н. основано доказательство теорем о сходимости рядов из случайных величин.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Math. Ann.», 1928, Bd 99, S. 309—19; 1929, Bd 102, S. 484—88; [2] его же, Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [3] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962. *А. В. Прохоров.*

КОЛМОГОРОВА ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, удовлетворяющее *Колмогорова аксиоме.*

КОЛМОГОРОВА УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -A_s f \tag{1}$$

(обратное, или первое, уравнение; $s < t$)

или вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A_t^* f \tag{2}$$

(прямое, или второе, уравнение; $t > s$)

для *переходной функции* [$f = P(s, x; t, \Gamma)$, $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, $(E, \mathfrak{B})$ — измеримое пространство] или ее плотности [$f = p(s, x; t, \Gamma)$, если она существует], к уравнению (1) для переходной функции $P(s, x; t, \Gamma)$ присоединяется условие

$$\lim_{s \uparrow t} P(s, x; t, \Gamma) = I_\Gamma(x),$$

а к уравнению (2) — условие

$$\lim_{t \downarrow s} P(s, x; t, \Gamma) = I_\Gamma(x),$$

где $I_\Gamma(x)$ — индикатор множества Γ; в этом случае оператор A_s — оператор, действующий в пространстве функций, а A_t^* — в пространстве обобщенных мер.

Для марковских процессов со счетным множеством состояний переходная функция полностью определяется вероятностями перехода $p_{ij}(s, t) = P(s, i; t, \{j\})$ (из состояния i в момент s в состояние j в момент t), для к-рой обратное и прямое уравнения Колмогорова имеют (при некоторых дополнительных предположениях) следующий вид:

$$\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial s} = \sum_k \alpha_{ik}(s)\, p_{kj}(s, t), \quad s < t, \tag{3}$$

$$\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial t} = \sum_k p_{ik}(s, t)\, \alpha_{kj}(t), \quad t > s, \tag{4}$$

где

$$\alpha_{ij}(s) = \lim_{s_1 \uparrow s,\ s_2 \uparrow s} \frac{p_{ij}(s_1, s_2) - \delta_{ij}}{s_2 - s_1}. \tag{5}$$

В случае конечного числа состояний уравнения (3), (4) справедливы, если только предположить существование пределов в (5).

Другой важный класс процессов, для к-рых детально изучен вопрос о справедливости уравнений (1) и (2), — это процессы диффузионного типа, определяемые тем, что их переходная функция $P(s, x; t, \Gamma)$, $x \in \mathbb{R}$, $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ удовлетворяет следующим условиям:

а) для всякого $x \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ равномерно по s, $s < t$,

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} P(s, x; t, dy) = o(t - s),$$

б) существуют функции $a(s, x)$ и $b(s, x)$ такие, что для всякого x и $\varepsilon > 0$ равномерно по s, $s < t$,

$$\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon} (y - x)\, P(s, x; t, dy) = a(s, x)(t - s) + o(t - s),$$

$$\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon} (y - x)^2\, P(s, x; t, dy) = b(s, x)(t - s) + o(t - s).$$

Тогда, если существует плотность $p = p(s, x; t, y)$, то (при некоторых дополнительных предположениях) справедливо (по $t > s$ и $y \in \mathbb{R}$) прямое уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}(ap) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(bp)$$

(называемое также уравнением Фоккера — Планка), а обратное уравнение (по $s < t$ и $x \in \mathbb{R}$) имеет следующий вид

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = a\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 5—41; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973. *А. Н. Ширяев.*

КОЛМОГОРОВА — СЕЛИВЕРСТОВА ТЕОРЕМА: если выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)W(n)<\infty$$

с $W(n)=\log n$, то ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

сходится почти всюду. Установлена А. Н. Колмогоровым и Г. А. Селиверстовым (см. [1], [2]). В [1] доказано, что можно брать $W(n)=\log^{1+\delta}n$ для любого $\delta>0$, а в [2] было усилено это утверждение: доказана его справедливость и при $\delta=0$. Это усиление было получено также А. И. Плеснером [3]. До К.—С. т. была известна теорема Г. Х. Харди (G. H. Hardy, 1916), где $W(n)=\log^2 n$. К.—С. т. оставалась наиболее сильным результатом в этом направлении до 1966, когда была доказана *Карлесона теорема*, согласно к-рой можно брать $W(n)\equiv 1$. С. Качмаж [4] перенес К.—С. т. с тригонометрической системы на произвольные ортонормированные системы, показав, что для сходимости рядов по таким системам почти всюду на нек-ром множестве в качестве $W(n)$ можно брать монотонную мажоранту функций Лебега на этом множестве.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Селиверстов Г. А., «C. r. Acad. sci.», 1924, t. 178, p. 303—06; [2] их же, «Atti Accad. naz. Lincei», 1926, v. 3, p. 307—10; [3] Plessner A., «J. reine und angew Math.», 1925, Bd 155, S. 15—25; [4] Kaczmarz S., «Studia math.», 1929, t. 1, p. 87—121.
С. А. Теляковский.

КОЛМОГОРОВА — СМИРНОВА КРИТЕРИЙ — непараметрический критерий, применяемый для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют заданную непрерывную функцию распределения $F(x)$ против односторонней альтернативы H_1^+: $\sup_{|x|<\infty}(\mathsf{E}F_n(x)-F(x))>0$, где $\mathsf{E}F_n(x)$ — математическое ожидание функции эмпирического распределения $F_n(x)$. К.— С. к. построен на статистике

$$D_n^+=\sup_{|x|<\infty}(F_n(x)-F(x))=\max_{1\leqslant m\leqslant n}\left(\frac{m}{n}-F(X_{(m)})\right),$$

где $X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\ldots\leqslant X_{(n)}$ — вариационный ряд, полученный по выборке $X_1, \ldots, X_n$. Таким образом, К.— С. к. является вариантом *Колмогорова критерия* для проверки гипотезы H_0 против односторонней альтернативы H_1^+. Изучая распределение статистики D_n^+, Н. В. Смирнов [1] показал, что

$$\mathsf{P}\{D_n^+\geqslant\lambda\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{[n(1-\lambda)]}C_n^k\lambda\left(\lambda+\frac{k}{n}\right)^{k-1}\left(1-\lambda-\frac{k}{n}\right)^{n-k},\quad(1)$$

где $0<\lambda<1$, $[a]$ — целая часть числа a. Кроме точного распределения (1) статистики D_n^+, Н. В. Смирнов получил также ее предельное распределение, именно: если $n\to\infty$ и $0<\lambda_0<\lambda=O(n^{1/6})$, то

$$\mathsf{P}\{D_n^+\geqslant\lambda\}=e^{-2\lambda^2}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где λ_0— любое положительное число. С помощью техники асимптотических пирсоновских преобразований было показано [2], что если $n\to\infty$ и $0<\lambda_0<\lambda=O(n^{1/3})$, то

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{18n}(6nD_n^++1)^2\geqslant\lambda\right\}=e^{-\lambda}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right].\quad(2)$$

Согласно К.— С. к. с уровнем значимости α гипотезу H_0 следует отвергнуть, коль скоро

$$\exp\left[-(6nD_n^++1)^2/18n\right]\leqslant\alpha,$$

причем, в силу (2),

$$\mathsf{P}\left\{\exp\left[-(6nD_n^+ + 1)^2/18n\right] \leqslant \alpha\right\} = \alpha\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Аналогично поступают при проверке гипотезы H_0 против альтернативы H_1^- : $\inf\limits_{|x|<\infty} (\mathsf{E}F_n(x) - F(x)) < 0$.

В этом случае статистикой К.— С. к. является случайная величина

$$D_n^- = -\inf_{|x|<\infty} (F_n(x) - F(x)) = \max_{1 \leqslant m \leqslant n}\left(F(X_{(m)}) - \frac{m-1}{n}\right),$$

распределение к-рой, при справедливости гипотезы H_0, совпадает с распределением статистики D_n^+.

Лит.: [1] Смирнов Н. В., «Успехи матем. наук», 1944, в. 10, с. 179—206; [2] Большев Л. Н., «Теория вероятностей и ее применения», 1963, т. 8, в. 2, с. 129—55; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [4] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960.

М. С. Никулин.

КОЛМОГОРОВА — ЧЕПМЕНА УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$P(s, x; u, \Gamma) = \int_E P(s, x; t, dy)\, P(t, y; u, \Gamma), \quad s < t < u,$$

то есть условие, налагаемое на *переходную функцию* $P(s, x; t, \Gamma)(0 \leqslant s \leqslant t < \infty,\ x \in E,\ \Gamma \in \mathfrak{B},\ (E, \mathfrak{B})$ — измеримое пространство), позволяющее (при некоторых условиях на $(E, \mathfrak{B})$) построить *марковский процесс*, для которого условная вероятность $P_{s,x}(x_t \in \Gamma)$ совпадает с $P(s, x; t, \Gamma)$. Обратно, для марковского процесса его переходная функция $P(s, x; t, \Gamma)$, по определению равная $P_{s,x}(x_t \in \Gamma)$, удовлетворяет К.—Ч. у., что непосредственно следует из общих свойств условных вероятностей. Указано С. Чепменом [1], исследовано А. Н. Колмогоровым в 1931 (см. [2]).

Лит.: [1] Chapman S., «Pros. Roy. Soc., Ser. A», 1928, v. 119, p. 34—54; [2] Колмогоров А. Н., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 5—41; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

А. Н. Ширяев.

КОЛОКОЛООБРАЗНАЯ ИГРА — *игра на единичном квадрате*, у к-рой функция выигрыша имеет вид $\varphi(x-y)$, где φ — положительная аналитическая регулярная частотная функция Пойа, то есть: 1) $\varphi(u)$ определена при всех $u \in (-\infty, \infty)$, 2) для любого n и любых наборов $-\infty < x_1 < \ldots < x_n < \infty$ и $-\infty < y_1 < \ldots < y_n < \infty$ имеет место неравенство $\det||\varphi(x_i - y_j)|| \geqslant 0$, 3) для любого набора $\{x_k\}$ (соответственно $\{y_k\}$) найдется такой набор $\{y_k\}$ (соответственно $\{x_k\}$), что $\det||\varphi(x_i - y_j)|| > 0$, 4) $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)du < \infty$. Примером К. и. может служить игра с функцией выигрыша $e^{-(x-y)^2}$. Оптимальные стратегии игроков в К. и. единственны и являются кусочно постоянными распределениями с конечным числом скачков. Значение игры с функцией выигрыша $\varphi(\lambda(x-y))$ при $\lambda \to \infty$ стремится к нулю, а число точек в носителе оптимальных стратегий неограниченно возрастает.

Лит.: [1] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, пер. с англ., М., 1964.

В. К. Доманский.

КОЛЬЦА И АЛГЕБРЫ — множества с двумя бинарными операциями, к-рые обычно принято наз. сложением и умножением. Кольцом наз. множество: 1) являющееся *абелевой группой* относительно сложения (в частности, в кольце существует нулевой элемент, обозначаемый 0, и противоположный элемент $-x$ для каждого элемента x), 2) операция умножения в к-ром удовлетворяет правому и левому законам дистрибутивности относительно сложения, т. е. $x(y+z) = xy + xz$ и $(y+z)x = yx + zx$, для любых элементов x, y, z из кольца.

Если кольцо K не имеет делителей нуля, т. е. $xy \neq 0$ для любых ненулевых элементов x, $y \in K$, то множество

всех ненулевых элементов кольца будет *группоидом* относительно умножения. Кольцо будет *телом*, если множество его ненулевых элементов образует группу относительно умножения. Кольцо K наз. а с с о ц и а т и в н ы м, если умножение в нем удовлетворяет закону ассоциативности, т. е. $(xy)z=x(yz)$, для любых x, y, z из K. Если умножение в кольце коммутативно, то кольцо наз. к о м м у т а т и в н ы м. Е д и н и ц е й наз. такой элемент 1 кольца, что

$$x\cdot 1=1\cdot x=x$$

для всех $x\in K$. Кольцо, вообще говоря, не обязано обладать единицей. Любое тело является ассоциативным кольцом с единицей и без делителей нуля. Ассоциативно-коммутативное кольцо без делителей нуля и с единицей наз. о б л а с т ь ю ц е л о с т н о с т и.

Пусть Φ — произвольное ассоциативное кольцо с единицей 1. Кольцо A (не обязательно ассоциативное) наз. а л г е б р о й над Φ, или *операторным кольцом* с кольцом операторов Φ, если для любых элементов $\alpha\in\Phi$, $a\in A$ однозначно определено произведение $\alpha a\in A$, причем так, что для всех $\alpha, \beta\in\Phi$, $a, b\in A$ справедливы соотношения

$$\left.\begin{array}{lll}(\alpha+\beta)\,a=\alpha a+\beta a, & & \alpha\,(a+b)=\alpha a+\alpha b,\\ \alpha\,(\beta a)=(\alpha\beta)\,a, & 1a=a, & \alpha\,(ab)=(\alpha a)\,b.\end{array}\right\}\quad(1)$$

Если кольцо Φ коммутативно, то принято требовать условия последнего из условий (1):

$$\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b).$$

Любое кольцо можно считать алгеброй над кольцом целых чисел, если понимать произведение na (где n — целое число) обычно, т. е. как $\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\text{ раз}}$. Поэтому кольца можно рассматривать как частный случай алгебр.

Если A — алгебра над полем Φ, то, по определению, A является *векторным пространством* над Φ, а значит, имеет базис. Это дает возможность строить алгебры над полем по базису, для чего достаточно задать таблицу умножения базисных элементов. Алгебра над полем наз. к о н е ч н о м е р н о й, если она имеет конечный базис, т. е. если она конечномерна как векторное пространство над своим полем.

Наиболее известными примерами алгебр являются алгебры квадратных матриц, алгебры многочленов и алгебры формальных степенных рядов над полями.

В теории К. и а., как и в любой другой алгебраич. теории, большую роль играют понятия гомоморфизма и изоморфизма. Многие рассуждения и описания проводятся «с точностью до изоморфизма», т. е. изоморфные кольца и алгебры не различаются. Понятие гомоморфизма тесно связано с понятиями *идеала* и подалгебры (подкольца).

Пусть A и B — две алгебры (над некоторым фиксированным кольцом Φ с единицей). Отображение $\varphi: A\to B$ множества A в множество B наз. г о м о м о р ф и з м о м а л г е б р ы A в алгебру B, если оно «сохраняет операции алгебры», т. е.

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),$$
$$\varphi(xy)=\varphi(x)\,\varphi(y),$$
$$\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x)$$

для любых $x, y\in A$, $\alpha\in\Phi$. Гомоморфизм φ наз. и з о м о р ф и з м о м, если φ — взаимно однозначное отображение множества A на множество B. Последнее равносильно тому, что о б р а з г о м о м о р ф и з м а φ:

$$\operatorname{Im}\varphi=\varphi(A)=\{\varphi(a)\mid a\in A\},$$

вообще говоря, являющийся подалгеброй алгебры B, совпадает со всей алгеброй B, а ядро гомоморфизма φ:

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\},$$

вообще говоря, являющееся двусторонним идеалом в A, в этом случае — нулевой идеал. Двусторонние идеалы алгебры A и только они служат ядрами гомоморфизмов этой алгебры, а гомоморфные образы A, с точностью до изоморфизма, исчерпываются факторалгебрами алгебры A по всевозможным ее двусторонним идеалам.

Переход от алгебры к ее подалгебрам и гомоморфным образам является одним из способов получения новых алгебр. Так, напр., из алгебры многочленов (от достаточно большого числа переменных) над полем Φ можно получить, в качестве гомоморфного образа, любую ассоциативно-коммутативную алгебру над Φ. Среди других часто применяемых конструкций следует отметить прямые суммы, прямые и подпрямые произведения К. и а.

Историческая справка. Примерно до середины 19 в. были известны лишь отдельные примеры колец: числовые кольца, т. е. подкольца поля комплексных чисел, появившиеся в связи с потребностями теории алгебраич. уравнений, кольца вычетов целых чисел — в теории чисел. Общего понятия кольца не существовало.

Первые примеры некоммутативных К. и а. встречаются (1843—44) в работах У. Р. Гамильтона (W. R. Hamilton) и Г. Грассмана (H. Grassman). Это — тело *кватернионов*, алгебра бикватернионов, *внешняя алгебра*. Начинает формироваться понятие гиперкомплексной системы, т. е., в современной терминологии, конечномерной ассоциативной алгебры над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел либо над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. К 1870 в работах Б. Пирса (B. Peirce) появились понятия идемпотентного элемента *(идемпотента)* и *нильпотентного элемента* и было доказано, что если не все элементы гиперкомплексной системы нильпотентны, то в ней имеется хотя бы один ненулевой идемпотент. Полученные результаты позволили развить «технику идемпотентов» и «пирсовских разложений», широко применявшихся при изучении конечномерных алгебр.

После 1870 начинается общее исследование гиперкомплексных систем. В работах Р. Дедекинда (R. Dedekind) встречается общее понятие (ассоциативного) кольца, тела и алгебры над полем (гиперкомплексной системы), хотя кольцо у него называлось не кольцом, а порядком. Термин «кольцо» был введен Д. Гильбертом (D. Hilbert) позднее. К. Вейерштрасс (K. Weierstrass) и Р. Дедекинд доказали, что любая конечномерная ассоциативно-коммутативная алгебра без нильпотентных элементов над полем действительных чисел является прямой суммой полей, изоморфных либо полю $\mathbb{R}$ действительных чисел, либо полю $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Г. Фробениус (G. Frobenius) в 1878 доказал, что единственное некоммутативное тело конечной размерности над полем действительных чисел — тело кватернионов.

К началу 20 в. в работах С. Э. Молина и Э. Картана (E. Cartan) были получены наиболее значительные результаты по теории гиперкомплексных систем. К этому времени уже была достаточно развита теория гомоморфизмов, выяснена связь их с идеалами, появилось понятие прямой суммы алгебр. С. Э. Молин, рассматривая конечномерные ассоциативные алгебры над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, ввел понятие простой алгебры и доказал, что простые алгебры — это в точности полные алгебры матриц над полем $\mathbb{C}$. Он же ввел понятие радикала (теперь называемого классическим радикалом) и доказал, по существу, что если ра-

дикал алгебры равен нулю, то алгебра является прямой суммой простых алгебр. Эти результаты были вновь найдены Э. Картаном, к-рый, кроме того, распространил их на алгебры над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел.

В начале 20 в. начинают рассматривать алгебры (ассоциативные и конечномерные) над произвольным полем, а не только над полями действительных или комплексных чисел. Дж. М. Веддерберн (J. M. Wedderburn), совершенствуя технику идемпотентов Пирса, перенес результаты С. Э. Молина и Э. Картана на случай произвольного поля. Он же доказал, что любое конечное тело коммутативно.

Наконец, в 20—30-х гг. 20 в. стали изучать произвольные *ассоциативные кольца и алгебры*. При этом большую роль начинают играть левые и правые идеалы колец. В. Крулль (W. Krull) и Э. Нётер (E. Noether) в 1925—26 ввели и систематически использовали условие максимальности и минимальности для левых идеалов. В 1927 Э. Артин (E. Artin) перенес результаты Дж. М. Веддерберна о разложении полупростых алгебр на все ассоциативные кольца и алгебры, левые идеалы к-рых одновременно удовлетворяют и условию максимальности и условию минимальности. В 1929 Э. Нётер показала, что при этом достаточно требовать только условий минимальности. К 1939 было доказано, что при условии минимальности (также как и при условии максимальности) радикал кольца является его наибольшим нильпотентным левым идеалом (см. *Артиново кольцо*, *Нётерово кольцо*). Таким образом, к 1940 теория Молина — Картана — Веддерберна была перенесена на случай ассоциативных колец и алгебр с условием минимальности для левых (или правых) идеалов.

Основные направления теории колец и алгебр. Структурная теория дает описание алгебр (как правило, удовлетворяющих нек-рым условиям конечности), представляя их в виде прямой суммы или подпрямого произведения более просто устроенных алгебр. К настоящему времени (70-е гг. 20 в.) для ассоциативных К. и а. классич. теория Молина — Картана — Веддерберна — Артина перенесена на случай К. и а. с условием минимальности для главных левых идеалов. При этом же условии доказано, что если алгебра не имеет нильпотентных идеалов, то она разлагается в прямую (не обязательно конечную) сумму простых алгебр, а если она не имеет даже нильпотентных элементов, то — в прямую сумму тел. В случае, когда алгебра имеет нильпотентные идеалы, ее строение значительно сложнее. Наиболее известной теоремой о таких алгебрах является *Веддерберна — Мальцева теорема* «об отщеплении радикала» — о разложении конечномерной ассоциативной алгебры в полупрямую сумму радикала и полупростой подалгебры. Содержательная структурная теория создана для альтернативных алгебр (см. *Альтернативные кольца и алгебры*), на к-рые фактически перенесена вся теория Молина — Картана — Веддерберна — Артина, а также для *йордановых алгебр*.

Ряд структурных теорем получен и без условий конечности. Еще В. Крулль доказал, что любое ассоциативно-коммутативное кольцо без нильпотентных элементов разлагается в подпрямое произведение колец без делителей нуля. В дальнейшем было доказано, что в теореме Крулля требование коммутативности можно опустить, а затем был найден ряд критериев разложимости произвольной неассоциативной алгебры в подпрямое произведение алгебр без делителей нуля и алгебр с однозначным делением.

Теория простых алгебр и тел тесно связана со структурной теорией, так как многие структурные теоремы сводят изучение рассматриваемых колец и алгебр к изучению простых алгебр и тел. Получено описание ассоциативных простых алгебр с единицей, обладаю-

щих минимальными левыми идеалами, а также конечномерных альтернативных и йордановых простых алгебр. Рассмотрены автоморфизмы и дифференцирования простых ассоциативных алгебр и тел (см. *Алгебраической системы автоморфизм*, *Дифференциальная алгебра*).

Теория радикалов также тесно связана со структурной теорией; сами структурные теоремы — это, как правило, теоремы о К. и а. полупростых в смысле некоторого радикала. Для получения новых структурных теорем было введено множество различных радикалов: нижний нильрадикал Бэра, локально нильпотентный радикал Левицкого, квазирегулярный *Джекобсона радикал*, радикал Брауна — Маккоя и др. В начале 50-х гг. 20 в. была создана общая теория радикалов, тесно связанная с теорией модулей и представлений (см. *Радикалы* колец и алгебр).

Алгебры с тождественными соотношениями начали привлекать внимание алгебраистов с тех пор, как обнаружилось, что наличие (нетривиального) тождества сильно влияет на строение К. и а. В этом отношении показательна теорема Капланского об ассоциативных алгебрах: если A — примитивная алгебра с полиномиальным тождеством степени d, то A — конечномерная простая алгебра над своим центром и ее размерность не превосходит $[d/2]^2$ (см. [6]). Имеется немало результатов и о неассоциативных алгебрах с тождественными соотношениями (см. *Колец многообразие*).

Свободные алгебры и *свободные произведения* алгебр являются важными конструкциями в теории К. и а., поскольку любая алгебра (некоторого многообразия) является гомоморфным образом свободной алгебры этого многообразия. Доказано, что любая подалгебра свободной неассоциативной алгебры сама свободна, а также что свободны все подалгебры свободных коммутативных, антикоммутативных алгебр и свободных алгебр Ли. Исследования в этой области тесно связаны с исследованиями алгебр с тождественными соотношениями и многообразий алгебр, так как тождества данного многообразия — это определяющие соотношения в свободной алгебре данного многообразия.

Теория вложений изучает в основном вопросы вложения ассоциативных К. и а. в тела или простые алгебры, в к-рых разрешимы те или иные уравнения (см. *Вложение кольца*). Стимулом к развитию этой теории послужил пример ассоциативной алгебры без делителей нуля, не вложимой в тело. Затем был найден критерий существования (классического) тела дробей для ассоциативных К. и а. без делителей нуля, а также необходимые и достаточные условия вложимости кольца в тело. К теории вложений можно отнести и теорию колец частных (см. *Частных кольцо*).

Аддитивная теория идеалов возникла при обобщении основной теоремы арифметики, равносильной теореме о представлении любого идеала кольца целых чисел в виде пересечения степеней простых идеалов, на произвольные ассоциативно-коммутативные кольца с условием максимальности (т. е. нётеровы кольца). Основная цель этой теории — представление любого идеала кольца в виде пересечения конечного числа идеалов нек-рого специального вида (примарных, примальных, терциарных и т. д.). При этом вид «специальных» идеалов и вид разложений подбирается так, что при нек-рых условиях конечности верны и «теоремы существования» (т. е. любой идеал имеет разложение) и «теорема единственности» (с каждым идеалом связывается нек-рое множество простых идеалов, не зависящее от разложения). Для нётеровых колец эта цель была достигнута в классической нётеровой теории примарных идеалов. Найдено обобщение этой теории и на некоммутативный случай.

Коммутативная алгебра занималась сначала числовыми кольцами, возникшими в теории алгебраич. чисел. В настоящее время теория коммутативных колец является бурно развивающейся областью на границе алгебры и алгебраич. геометрии.

Нормированные, топологические, упорядоченные и нек-рые другие К. и а. с дополнительными структурами часто встречаются в функциональном анализе и других областях математики. Подробнее о кольцах с дополнительными структурами см. *Нормированное кольцо*, *Топологическая алгебра*, *Упорядоченное кольцо*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Очерки по истории математики, пер. с франц., М., 1963; [2] его же, Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [3] его же, Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [4] его же, Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [5] Джекобсон Н., Теория колец, пер. с англ., М., 1947; [6] его же, Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [7] его же, Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [8] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, т. 1—2, пер. с англ., М., 1963; [9] Атья М., Макдональд И., Введение в коммутативную алгебру, пер. с англ., М., 1972; [10] Херстейн И., *Некоммутативные кольца, пер. с англ.*, М., 1972; [11] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, М., 1962; [12] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [13] Ван-дер-Варден Б. Л., Алгебра, М., 1976; [14] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [15] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [16] Фейс К., Алгебра. Кольца, модули и категории, т. 1, пер. с англ., М., 1977.

В. А. Андрунакиевич.

КОЛЬЦЕВАЯ ГРАНИЦА — подмножество Γ пространства M_A максимальных идеалов *коммутативной банаховой алгебры* A с единицей над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, на к-ром модули *Гельфанда представлений* $\hat{a}$ всех элементов $a \in A$ достигают максимума. Напр., можно положить $\Gamma = M_A$ (тривиальная граница). Интерес представляют нетривиальные границы с тем или иным свойством минимальности. Среди замкнутых границ $\Gamma \subset M_A$ существует минимальная ∂M_A — такая замкнутая граница, что $\partial M_A \subset \Gamma$ для каждой замкнутой границы Γ; она наз. границей Шилова. Точки границы Шилова характеризуются тем, что для каждой окрестности $V \subset M_A$ такой точки ξ и каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент $a \in A$, для к-рого $\max|\hat{a}| = 1$ и $|\hat{a}| < \varepsilon$ вне V. Точки $\xi \in \partial M_A$ составляют «наиболее устойчивую» часть множества M_A максимальных идеалов: если B — коммутативное банахово расширение алгебры A, то максимальные идеалы (мультипликативные функционалы), отвечающие таким точкам, расширяются до максимальных идеалов (мультипликативных функционалов) алгебры B, тогда как за пределами ∂M_A такое расширение, вообще говоря, невозможно. Это обстоятельство аналогично устойчивости границы спектра ограниченного линейного оператора банахова пространства. Типичный пример: алгебра A состоит из непрерывных функций в диске $|\lambda| \leqslant 1$, аналитических при $|\lambda| < 1$. В этом случае M_A отождествляется с замкнутым диском, а ∂M_A — с его топологич. границей; максимальные идеалы, отвечающие внутренним точкам диска, не продолжаются до максимальных идеалов алгебры всех непрерывных функций на границе, в к-рую естественно (согласно принципу максимума) вкладывается A, а максимальные идеалы, отвечающие граничным точкам,— продолжаются.

Подобно алгебрам аналитич. функций, для общих коммутативных банаховых алгебр имеет место *локальный принцип максимума модуля*: если V — открытое подмножество пространства M_A, то

$$\max\{|\hat{a}(\xi)| : \xi \in \overline{V}\} = \max\{|\hat{a}(\xi)| : \xi \in (\partial M_A \cap V) \cup \partial V\}$$

для всех $a \in A$, где $\overline{V}$ — замыкание и ∂V — топологич. граница множества V в M_A. Грубо говоря, это означает, что точка локального максимума непременно является точкой глобального максимума (нек-рого, быть может, другого элемента).

Понятие К. г. используется при изучении равномерных алгебр, т. е. замкнутых, разделяющих точки и содержащих константы подалгебр A алгебры $C(X)$ всех непрерывных функций на компакте X. В данной ситуации $\partial M_A \subset X \subset M_A$. Для каждой точки $\xi \in M_A$ существует представляющая мера, сосредоточенная на границе Шилова, т. е. такая вероятностная мера μ, что

$$\hat{a}(\xi) = \int_{\partial M_A} \hat{a}\, d\mu$$

при всех $a \in A$ (это верно для произвольных коммутативных банаховых алгебр). В простейшем (описанном выше) случае диска и алгебры аналитич. функций последняя формула сводится к *Пуассона формуле*. Вообще говоря, представляющая мера μ не единственна. Для точек ξ, принадлежащих одной и той же доле Глисона (см. *Алгебра функций*), меры μ можно выбирать взаимно абсолютно непрерывными, что при нек-рых дополнительных условиях типа единственности представляющих мер позволяет наделять доли Глисона пространства максимальных идеалов одномерной аналитич. структурой, согласованной с алгеброй. Каждая точка границы Шилова равномерной алгебры составляет одноточечную долю Глисона, но обратное, вообще говоря, неверно.

Равенство $\partial M_A = X = M_A$ для равномерных алгебр служит простейшим необходимым условием совпадения A с $C(X)$. Без дополнительных предположений оно не является достаточным для такого совпадения даже в случае алгебр $A = R(X)$ равномерных пределов рациональных функций на плоском компакте X.

Пусть X — метризуемый компакт и A — равномерная алгебра на X. Тогда существует минимальная среди всех границ: $\partial_0 M_A$. Замыкание минимальной границы совпадает с ∂M_A, однако, вообще говоря, $\partial_0 M_A$ не замкнуто: пример доставляет подалгебра тех аналитич. внутри диска $|\lambda| \leqslant 1$ функций, для к-рых $f(0) = f(1)$. Граница $\partial_0 M_A$ совпадает с множеством точек пика относительно A, т. е. таких точек $\xi \in M_A$, для к-рых существует $a \in A$ с $|\hat{a}(\xi)| > |\hat{a}(\eta)|$ при всех $\eta \neq \xi$. С другой стороны, известно формально гораздо более слабое достаточное условие принадлежности к $\partial_0 M_A$. Именно, если точка $\xi \in M_A$ такова, что при нек-рых $0 < c < 1$ и $d \geqslant 1$ для каждой окрестности V точки ξ в A имеется элемент a, для к-рого $\hat{a}(\xi) = 1$, $\max |\hat{a}| = d$ и $|\hat{a}(\eta)| \leqslant c$ при $\eta \notin V$, то $\xi \in \partial_0 M_A$. Абстрактная формула Пуассона усиливается следующим образом: для любой точки $\xi \in M_A$ существует представляющая мера, сосредоточенная на $\partial_0 M_A$ (при этом $\partial_0 M_A$ есть G_δ-множество), и в таком виде она с успехом применяется в нек-рых вопросах теории приближений. Точки $\xi \in \partial_0 M_A$ характеризуются тем, что для них такая мера единственна и совпадает с δ-мерой, т. е. минимальная граница есть частный случай границы Шоке.

Для алгебры $A = R(X)$ равномерных пределов рациональных функций на плоском компакте X совпадение A с $C(X)$ равносильно совпадению $X = M_A$ с $\partial_0 M_A$. Для произвольных равномерных алгебр это не так: существует равномерная алгебра A, отличная от $C(M_A)$, для к-рой M_A метризуемо, и каждая точка $\xi \in M_A$ является точкой пика (т. е. $\partial_0 M_A = M_A$). Существует и такая равномерная алгебра, что все доли Глисона тривиальны (одноточечны), однако даже граница Шилова составляет собственную часть пространства максимальных идеалов.

Одно из алгебраич. обобщений понятия границы Шилова заключается в следующем. Пусть $\partial_1 M_A = \partial M_A$ и I — замкнутый идеал, порожденный набором элементов $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$, $n \geqslant 2$. Пространство $M_{A/I}$ естественно отождествляется с множеством общих

нулей функций $\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_{n-1}$. Замыкание объединения границ $\partial M_{A/I}$ по всем $(n-1)$-наборам обозначается $\partial_n M_A$. Напр., для алгебры непрерывных функций в бидиске $|\lambda_1| \leqslant 1$, $|\lambda_2| \leqslant 1$, аналитических внутри его, $\partial_1 M_A$ — остов $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, $\partial_2 M_A$ — топологич. граница $|\lambda_1| = 1$, $|\lambda_2| \leqslant 1$; $|\lambda_1| \leqslant 1$, $|\lambda_2| = 1$, $\partial_3 M_A = M_A$. Эти обобщения полезны при доказательстве теорем о многомерной аналитич. структуре в пространстве максимальных идеалов.

Понятия К. г. (или функциональных границ), аналогичные описанным, встречаются в теории аналитич. функций (граница Бергмана), теории вероятностей (граница Мартина) и в ряде других разделов математики. При этом исходный запас функциональных элементов не обязательно предполагается составляющим алгебру или кольцо.

Лит.: [1] Basener R., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1975, v. 47, № 1, p. 98—104; [2] Browder A., Introduction to function algebras, N. Y.— Amst., 1969; [3] Гамелин Т. В., Равномерные алгебры, пер. с англ., М., 1973; [4] Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, М., 1960; [5] Гончар А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1963, т. 27, № 4, с. 949—55; [6] Фелпс Р., Лекции о теоремах Шоке, пер. с англ., М., 1968.

Е. А. Горин.

КОЛЬЦЕВАЯ ОБЛАСТЬ — 1) Двусвязная плоская область между двумя замкнутыми жордановыми кривыми без общих точек, из к-рых одна охватывает другую. 2) К. о. относительно квадратичного дифференциала — см. *Глобальная структура траекторий* квадратичного дифференциала. *Е. Д. Соломенцев.*

КОЛЬЦО — множество R, в к-ром заданы две бинарные алгебраич. операции: сложение и умножение, причем по сложению это множество — абелева группа (аддитивная группа кольца R), а умножение связано со сложением законами дистрибутивности:

$$a(b+c)=ab+ac, \quad (b+c)a=ba+ca,$$

где $a, b, c \in R$. На умножение в общем случае не накладываются никаких ограничений, т. е. R по умножению — *группоид* (наз. мультипликативным группоидом кольца R).

Непустое подмножество $A \subset R$ наз. подкольцом в R, если A само является кольцом относительно операций, определенных в R, т. е. A должно быть подгруппой аддитивной группы кольца R и подгруппоидом мультипликативного группоида этого кольца. Естественно, подкольцами всякого кольца служат само это кольцо и нульподкольцо, состоящее из одного нуля. Пересечение (теоретико-множественное) подколец любого кольца есть подкольцо. Объединением подколец A_α, $\alpha \in I$, кольца R наз. пересечение всех подколец, каждое из к-рых содержит все A_α. Множество всех подколец данного кольца является *решеткой* $S(R)$ относительно операций пересечения и объединения подколец. Множество *идеалов* этого кольца образуют подрешетку в $S(R)$.

О направлениях в теории колец см. *Кольца и алгебры*, *Ассоциативные кольца и алгебры*, *Неассоциативные кольца и алгебры*. *О. А. Иванова.*

КОЛЬЦО С ДЕЛЕНИЕМ — кольцо (не обязательно ассоциативное), в к-ром для любых элементов a и b, где $a \neq 0$, уравнения

$$ax=b, \quad ya=b$$

обладают решениями. Если решения этих уравнений определены однозначно, то К. с д. наз. квазителом. Квазитело, в отличие от произвольного К. с д., не может содержать *делителей нуля*; ненулевые элементы квазитела составляют по умножению *квазигруппу*. Всякое (не обязательно ассоциативное) кольцо без делителей нуля вкладывается в квазитело. Ассоциа-

тивное К. с д. является (ассоциативным) *телом*. См. также *Алгебра с делением*.

Лит.: [1] К у р о ш А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973.

О. А. Иванова.

КОЛЬЦОИД — обобщение понятия ассоциативного кольца. Пусть (Ω, Λ) — многообразие *универсальных алгебр* сигнатуры Ω. Алгебра $G=\{G, \Omega \cup (\cdot)\}$ наз. к о л ь ц о и д о м н а д а л г е б р о й G^+ многообразия (Ω, Λ), или (Ω, Λ)-к о л ь ц о и д о м, если $G^+=\{G, \Omega\}$ принадлежит многообразию (Ω, Λ), по умножению $(\cdot)$ алгебра G является полугруппой и выполняется закон дистрибутивности на втором месте относительно умножения

$$(x_1x_2\ldots x_n\omega)\cdot y=(x_1y)\,(x_2y)\ldots(x_ny)\,\omega,\ \forall\omega\in\Omega,\ x_i\in G.$$

Операции из Ω наз. а д д и т и в н ы м и о п е р а ц и я м и к о л ь ц о и д а G, а G^+ — а д д и т и в н о й а л г е б р о й к о л ь ц о и д а. К. наз. д и с т р и б у т и в н ы м, если законы дистрибутивности выполняются также и на первом месте, т. е.:

$$y\,(x_1x_2\ldots x_n\omega)=(yx_1)\,(yx_2)\ldots(yx_n)\,\omega.$$

Обычное ассоциативное кольцо G есть дистрибутивный К. над абелевой группой (и G^+ — аддитивная группа кольца G). К. над группой наз. п о ч т и - к о л ь ц о м, К. над полугруппой — п о л у к о л ь ц о м, К. над лупой — н е о к о л ь ц о м. Рассматривались также (под разными названиями, одно из которых — м е н г е р о в а а л г е б р а) К. над кольцами.

Лит.: [1] К у р о ш А. Г., Общая алгебра, лекции 1969—1970 учебного года, М., 1974.

О. А. Иванова.

КОМБИНАТОРИКА — см. *Комбинаторный анализ*.

КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел математики, объединяющий круг задач, в к-рых исследуются экстремальные свойства комбинаторного характера для систем фигур. Эти задачи связаны, в первую очередь, с оптимальным в нек-ром смысле расположением выпуклых множеств. Примером одной из старейших задач такого рода может служить з а д а ч а о 13 ш а р а х: каково максимальное число равных материальных шаров, к-рые можно приложить к равному всем им шару в евклидовом пространстве? И. Кеплер (J. Kepler, 1611) указал число 12, но строгое решение этой задачи было дано в сер. 20 в. Б. Л. Ван дер Варденом (B. L. Van der Waerden) и К. Шютте (K. Schütte).

Термин «К. г.», по-видимому, впервые появился в 1955 (см. [1]). Обычно с этим годом связывают возникновение К. г. как направления в математике, хотя к ней можно отнести и более ранние результаты (см., напр., [2]). Для К. г. характерна наглядность ее задач. В К. г. широко используются комбинаторные соображения и сочетания приемов из различных областей математики (топологии, функционального анализа, геометрии в целом, теории графов и др.).

Одной из центральных групп задач К. г. являются задачи о *разбиении* фигур на части, напр. *Борсука проблема*.

Большую группу задач К. г. составляют задачи о *покрытиях*, в к-рых исследуется возможность покрытия заданного множества фигурами специального вида (см., напр., *Хадвигера гипотезу* о покрытии выпуклого тела минимальным числом меньших гомотетичных ему тел с коэффициентом гомотетии k, $0<k<1$); *освещения задачи* о минимальном числе направлений пучков параллельных лучей или источников, освещающих границу выпуклого тела и др.

К. г. родственна дискретной геометрии, см., напр., определенным образом связанную с гипотезой Хадвигера и задачами освещения *Эрдёша задачу* о нахождении максимального числа точек евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, любые три из к-рых образуют треугольник с углами, не превосходящими $\pi/2$.

К. г. тесно примыкает к теории выпуклых множеств. См., напр., *Хелли теорему*, к-рая описывает пересечения нек-рых семейств выпуклых множеств в зависимости от пересечения их подсемейств.

Лит.: [1] Hadwiger H., «J. reine angew. Math.», 1955, Bd 194, S. 101—10; [2] Alexandroff P., Hopf H., Topologie, Bd 1, B., 1935; [3] Хадвигер Г., Дебруннер Г., Комбинаторная геометрия плоскости, пер. с нем., М., 1965; [4] Грюнбаум Б., Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел, пер. с англ., М., 1971; [5] Hadwiger H., Debrunner H., Combinatorial Geometry in the Plane, N. Y., 1964; [6] Яглом И. М., О комбинаторной геометрии, М., 1971; [7] Болтянский В. Г., Солтан П. С., Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств, Киш., 1978. *П. С. Солтан.*

КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — конечное множество S вместе с отношением замыкания

$$A \to \overline{A},$$

определенным для всех подмножеств A из S (т. е. $A \subseteq \overline{A}$, $A \subseteq B$ влечет $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ и $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, но не обязательно $\overline{A \cup B} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$), удовлетворяющим условиям: 1) $\overline{\varnothing} = \varnothing$ для пустого множества $\varnothing$; 2) $\overline{p} = p$ для каждого элемента $p \in S$; 3) если $p, q \in S$ и $A \subseteq S$ и если $q \in \overline{A \cup p}$, но $q \notin \overline{A}$, то $p \in \overline{A \cup q}$ (свойство замены). Замкнутые множества, или плоскости ($\overline{A} = A$), образуют геометрическую решетку. Подмножество $I \subseteq S$ независимо, если $p \notin \overline{I \setminus p}$ для всех $p \in I$; все максимальные независимые множества, или базисы, имеют одинаковую мощность. Обычным образом определяются прямая сумма К. г. и сужение К. г. на подмножество A. Мощность базисов сужения К. г. на A наз. рангом $r(A)$ множества A. Ранг удовлетворяет условию:

$$r(A \cup B) + r(A \cap B) \leqslant r(A) + r(B).$$

Множество $A \subseteq S$, для к-рого $r(A) < |A|$, наз. зависимым; минимальные зависимые множества К. г. наз. циклами. Опуская условия 1) и 2) в определении К. г., получают определение предгеометрии, или *матроида*. Рассматриваются также бесконечные К. г., при этом требуется конечность базисов.

Пример К. г.— подмножество S векторного пространства V с отношением

$$A \to \overline{A} = \mathrm{sp}(A) \cap S,$$

определенным для всех $A \subseteq S$, где $\mathrm{sp}(A)$ — линейная оболочка, натянутая на A в V.

Одной из основных проблем в теории К. г. является так наз. критическая проблема. Для К. г., заданной множеством S в проективном пространстве размерности n над полем Галуа, эта проблема состоит в том, чтобы найти наименьшее положительное целое число k (критическую экспоненту), для к-рого существует семейство гиперплоскостей $H_1, \ldots, H_k$, различающих S (семейство гиперплоскостей различает множество S, если для всякого $t \in S$ существует хотя бы одна гиперплоскость, не содержащая t).

Лит.: [1] Whitney H., «Amer. J. Math.», 1935, v. 57, p. 509—33; [2] Crapo H. H., Rota G. C., On the foundations of combinatorial theory: combinatorial geometries, Camb.— L., 1970; [3] Tutte W. T., Introduction to the theory of matroids, N. Y., 1971; [4] Уилсон Р., Введение в теорию графов, пер. с англ., М., 1977; [5] Рыбников К. А., Введение в комбинаторный анализ, М., 1972. *А. М. Ревякин.*

КОМБИНАТОРНАЯ ЛОГИКА — раздел логики, посвященный изучению и анализу таких понятий и методов, как переменная, функция, операция подстановки, классификация предметов по типам или категориям и другие.

В качестве основных понятий в К. л. выбираются одноместная функция и операция применения функ-

ции к аргументу (а п п л и к а ц и я), при этом понятие функции рассматривается как первичное по отношению к понятию множества и обобщается таким образом, что функция может принимать объекты одного с ней уровня как в качестве аргументов, так и в качестве значений. В частности, аргументом функции f может служить сама эта функция. Поскольку функции могут выступать в качестве как аргументов, так и значений, понятие многоместной функции сводится к понятию одноместной функции. Результат аппликации функции f к аргументу x обозначают (fx). Для простоты часто скобки опускают, понимая при этом запись $fx_1x_2\ldots x_n$ как $(\ldots((fx_1)x_2)\ldots x_n)$. Функция f, удовлетворяющая равенству

$$fx_1x_2\ldots x_n=\mathfrak{X},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n\geqslant 1$, — произвольные функции, а $\mathfrak{X}$ — объект, построенный из этих функций (быть может, не из всех) с помощью операции аппликации, наз. к о м б и н а т о р о м (существование комбинаторов неявно постулируется). Всякий комбинатор может быть выражен через два комбинатора S и K, удовлетворяющих следующим равенствам:

$$Sxyz=xz(yz), \quad Kxy=x$$

(здесь x, y, z — произвольные функции).

Одной из первых в К. л. была задача, к-рая состояла в сведении первичных логич. понятий к минимальному числу достаточно простых понятий. Была введена индивидуальная функция U, к-рая обобщала штрих Шеффера [если f и g — одноместные пропозициональные функции, то Ufg интерпретируется как $(\forall x)(f(x)\Rightarrow \Rightarrow \neg g(x))$], и было показано, что каждую формулу исчисления предикатов можно представить в виде комбинации из букв U, S, K (и скобок), откуда и название «К. л.» [Х. Карри (H. Curry), 1930]. Переменные в таком представлении совсем не использовались, что позволило избавиться от переменной как исходного понятия (понятия индивидуальной константы, высказывания и пропозициональной функции при этом также элиминировались как исходные понятия). Однако, как показало дальнейшее развитие К. л., построение на такой основе логич. систем встретило значительные трудности. Первые логич. исчисления такого типа, предложенные А. Чёрчем (A. Church) и Х. Карри, оказались противоречивыми (п а р а д о к с К л и н и — Р о с с е р а, см. [4]). Чтобы избежать этого противоречия, К. л. приходится строить либо как обладающую очень бедными дедуктивными возможностями, либо как содержащую объекты разных категорий. Основное развитие К. л. пошло по второму пути.

Часть К. л., к-рая не имеет дела с «логикой», а интересуется только свойствами комбинаторов, наз. т е о р и е й к о м б и н а т о р о в. Показано, что эта теория непротиворечива. В результате формализации она принимает вид различных исчислений. Все они распадаются на два внешне различных класса: и с ч и с л е н и я к о м б и н а т о р о в и λ-и с ч и с л е н и я.

Лит.: [1] C u r r y H., F e y s R., Combinatory logic, v. 1, Amst., 1958; [2] C u r r y H., H i n d l e y J., S e l d i n J., Combinatory logic, v. 2, Amst.— L., 1972; [3] C h u r c h A., The calculi of lambda-conversion, Princeton, 1941; [4] K l e e n e S., R o s s e r J., «Ann. Math.», 1935, v. 36, p. 630—36; [5] Я н о в с к а я С. А., Логика комбинаторная, в кн.: Философская энциклопедия, т. 3, М., 1964, с. 226—27; [6] К у з и ч е в А. С., в сб.: История и методология естественных наук, в. 14, 1973, с. 131—41.

Л. В. Шабунин.

КОМБИНАТОРНАЯ МАТЕМАТИКА — см. *Комбинаторный анализ.*

КОМБИНАТОРНАЯ ТОПОЛОГИЯ — раздел топологии, в к-ром топологич. свойства геометрич. фигур изучаются при помощи их *разбиений* на более элементарные фигуры (напр., разбиение полиэдров на сим-

плексы) или при помощи *покрытий* системами множеств. Эти методы применимы в самых широких предположениях об изучаемых фигурах.

Лит.: [1] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947; [2] Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, 2 изд., М., 1976. *С. П. Новиков.*

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ классические — задачи выбора и расположения элементов конечного множества, имеющие в качестве исходной нек-рую формулировку развлекательного содержания типа головоломок.

Одной из классических К. з., фигурирующей еще в мифах Древнего Востока, является построение магического квадрата, т. е. расположение первых n^2 натуральных чисел в квадрате $n\times n$ так, чтобы все суммы по строкам, столбцам и диагоналям были равны одному и тому же числу. Напр.,

4	9	2
3	5	7
8	1	6

— магический квадрат при $n=3$. Известен ряд методов построения таких квадратов (см., напр., [1]). Определение числа магических квадратов порядка n при $n>4$ представляет трудную еще нерешенную (1978) задачу.

Ряд К. з. был рассмотрен Л. Эйлером (L. Euler). Одна из них — задача о 36 офицерах, состоящая в том, чтобы указанное число офицеров 6 различных воинских званий и из 6 различных полков так расположить в ячейках квадрата 6×6 (каре), чтобы каждая колонна и каждая шеренга содержали одновременно одного и только одного офицера каждого ранга и каждого полка. Квадрат размером $n\times n$, содержащий в ячейках элементы $1, 2, \ldots, n$, наз. латинским, если элементы в каждой строке и каждом столбце различны. Два латинских квадрата наз. ортогональными, если при их наложении все n^2 пар элементов в ячейках различны. Задача о 36 офицерах эквивалентна задаче о существовании пары ортогональных латинских квадратов порядка 6. Л. Эйлер высказал гипотезу о несуществовании ортогональных латинских квадратов порядка $n=4k+2$, $k=1, 2, \ldots$ В 1900 Г. Тарри (G. Tarry) подтвердил эту гипотезу для $n=6$ и тем самым доказал, что задача о 36 офицерах не имеет решения. В 1959—60 была доказана теорема о существовании пары ортогональных латинских квадратов для каждого $n=4k+2$, $k=2, 3, \ldots$ (см. [2]).

Другая задача, рассмотренная Л. Эйлером,— задача о кёнигсбергских мостах, формулируемая следующим образом. Имеется семь мостов, соединяющих берега реки, протекающей через город, и два острова, расположенные на ней. Спрашивается, можно ли обойти все мосты, проходя по каждому только один раз, и возвратиться в исходную точку. Полагая, что вершины соответствуют районам суши, а ребра — мостам, эту задачу можно сформулировать в виде вопроса о возможности последовательного обхода графа, изображенного на рис. 1, с условием однократного использования его ребер и возвращения в исходную точку (см. *Графа обход*). Если в графе такой обход возможен, то говорят, что он обладает эйлеровым циклом. Л. Эйлер установил, что такой цикл в графе существует тогда и только тогда, когда он связен, и число ребер, инцидентных каждой вершине, четно. Так как граф на рис. 1 не удовлетворяет этому требованию, то задача о кёнигсбергских мостах неразрешима. Она неразрешима и в том случае, если отбросить требование совпадения точек начала и конца обхода. В этом случае решается вопрос о существовании эйле-

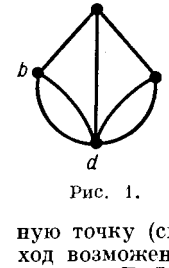


Рис. 1.

ровой цепи в графе. Граф обладает эйлеровой цепью тогда и только тогда, когда он связен и число вершин, инцидентных нечетному числу ребер, равно 0 или 2. Граф на рис. 1 не удовлетворяет и этому условию (см. [3]).

В 1859 У. Гамильтон (W. Hamilton) придумал игру «Кругосветное путешествие», состоящую в отыскании такого пути, проходящего через все вершины (города) графа, изображенного на рис. 2, чтобы посетить каждую вершину однократно и вернуться в исходную. Пути в графах, обладающие таким свойством, наз. гамильтоновыми циклами. Необходимые и достаточные условия существования гамильтонова цикла в графе пока (1978) неизвестны (см. [3]).

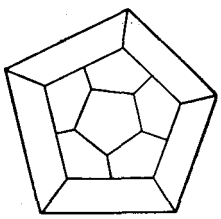


Рис. 2.

Задача о гамильтоновых циклах в графе получила различные обобщения. Одно из этих обобщений — задача коммивояжера, имеющая ряд приложений в исследовании операций, в частности при решении нек-рых транспортных проблем. Она состоит в следующем: имеется нек-рое количество городов, расстояния между к-рыми известны; нужно найти кратчайший путь, проходящий через все города и возвращающийся в исходный.

В 1847 Р. Киркман (R. Th. Kirkman) поставил и решил задачу о 15 школьницах. Они должны были гулять ежедневно пятью группами по три в каждой группе. При этом необходимо было так составить расписание для их прогулок, чтобы каждая школьница в течение семи дней смогла точно один раз попасть в одну группу с каждой из остальных. Эта задача связана с задачей построения системы троек, поставленной Я. Штейнером (J. Steiner, 1853). Системой троек Штейнера порядка v наз. такой набор троек из множества, содержащего v элементов, что каждая пара элементов входит точно в одну тройку. Системы троек Штейнера описаны для $v \leqslant 15$. Оказывается, что для $v=3, 7, 9$ системы троек единственны с точностью до эквивалентности (подстановка v элементов, перестановка троек); для $v=13$ существуют две неэквивалентные системы троек; при $v=15$ таких троек 80. Для $v>15$ число различных систем троек Штейнера пока (1978) неизвестно. При $v>3$ система троек Штейнера является частным случаем неполной частично уравновешенной *блок-схемы*.

Классическая задача о встречах состоит в следующем. Имеются две одинаковые колоды из n различных карт каждая. Необходимо определить D_{nr}, $r=0, 1, \ldots, n$,— число расположений карт во второй колоде таких, что при сравнении соответствующих карт первой и второй колоды число совпадений равно r, $r=0, 1, \ldots, n$. Частный случай этой задачи при $r=0$ впервые был сформулирован П. Монмором (P. Montmort, 1708). Л. Эйлер рассматривал задачу отыскания числа членов определителя, не имеющих общих элементов с главной диагональю, эквивалентную определению D_{no}.

Задача о встречах была исходным пунктом для возникновения раздела комбинаторного анализа, связанного с исследованием перестановок с ограниченными позициями. На совокупности S_n подстановок степени n, действующих на множестве X, можно ввести расстояние ρ, полагая

$$\rho(s, s') = |\{x : s(x) \neq s'(x),\ x \in X\}|, \quad s,\ s' \in S_n.$$

Тогда

$$D_{nr} = |\{s : \rho(s, s') = n - r, s \in S_n\}|,$$

причем

$$D_{nr}=\frac{n!}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k\frac{1}{k!},\quad r=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

В терминах расстояний между подстановками можно сформулировать и другую классическую К. з., называемую обычно задачей о супружеских парах. Она состоит в определении числа M_n рассаживаний n супружеских пар на $2n$ местах за круглым столом так, чтобы ни один муж не сидел рядом со своей женой. Тогда
$M_n=2\cdot n!U_n$, $U_n=|\{s:\rho(s,e)=n,\ \rho(s,c)=n,\ s\in S_n\}|$, где e — единичная подстановка, а $c=(1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Получена формула:

$$U_n=n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

Если

$$U_n(s_1,\ s_2)=|\{s:\rho(s,\ s_1)=n,\ \rho(s,\ s_2)=n,\quad s\in S_n\}|,$$

то величина $U_n(s_1,\ s_2)$ зависит только от цикловой структуры $s_1^{-1}s_2$ и может быть выражена в виде формулы с использованием *Чебышева многочленов* (см. [4]).

Тесную связь с приведенными задачами имеет проблема определения числа L_{kn} *латинских прямоугольников* $k\times n$ и числа L_n латинских квадратов. Латинский прямоугольник $k\times n$ может рассматриваться как упорядоченный набор подстановок $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_k$ степени n таких, что $\rho(s_i,\ s_j)=n$, $i\neq j$. Показано, что

$$L_{1n}=n!,\quad L_{2n}=D_n\cdot n!,\quad D_n=D_{n0}$$

$$L_{3n}=n!\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{k}D_kD_{n-k}U_{n-2k},\ U_0=D_0=1.$$

Установлено, что при $k<n^{1/3-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$,

$$L_{kn}=(n!)^k\cdot e^{-\binom{k}{2}}(1+\delta_n),$$

где $\delta_n\to 0$ при $n\to\infty$. Число латинских квадратов порядка n известно до $n=9$ включительно.

Задача о числе разбиений натурального числа n на слагаемые впервые появилась в письме Г. Лейбница (G. Leibniz) к Я. Бернулли (J. Bernoulli) в 1669. Однако разработка методов решения целого класса задач такого типа была осуществлена Л. Эйлером, к-рый эффективно использовал для этой цели производящие функции, задаваемые в виде бесконечных произведений. Он, в частности, установил, что число разбиений $m+n$ на n слагаемых равно числу разбиений m на не более чем n слагаемых, равно числу разбиений m на слагаемые, не превосходящие n, и равно числу разбиений $m+\binom{n+1}{2}$ на n различных слагаемых.

Классическая задача размещения состоит в определении числа $C_{nm}(r)$ способов размещения m различных предметов в n различных ячейках с заданным числом r пустых ячеек. Получено, что

$$C_{nm}(r)=\binom{n}{r}\Delta^{n-r}0^m,\quad r=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

где

$$\Delta^k0^m=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^m.$$

Исследования здесь велись в плане теоретико-вероятностных приложений, включая разнообразные обобщения и модификации. Наиболее интересная часть этих исследований касается получения различных асимптотических результатов, когда m и n неограниченно возрастают.

Лит.: [1] Постников М. М., Магические квадраты, М., 1964; [2] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [3] Оре О., Теория графов, пер. с англ., М., 1968;

[4] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963; [5] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973.
В. Н. Сачков.

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ, комбинаторная математика, комбинаторика,— раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов нек-рого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения нек-рой конструкции из элементов исходного множества, называемой комбинаторной конфигурацией. Поэтому можно сказать, что целью К. а. является изучение комбинаторных конфигураций. Это изучение включает в себя вопросы существования комбинаторных конфигураций, алгоритмы их построения, оптимизацию таких алгоритмов, а также решение задач перечисления, в частности определение числа конфигураций данного класса. Простейшими примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки, сочетания и размещения.

Множество X из n элементов наз. n-множеством; любое его m-подмножество, $m \leqslant n$, наз. сочетанием объема m. Число сочетаний объема m из n различных элементов равно

$$C(n, m) = \binom{n}{m} = n\,(n-1)\ldots(n-m+1)/m!$$

Имеет место формула:

$$(1+t)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} t^m, \quad \binom{n}{0} = 1,$$

обычно называемая формулой бинома Ньютона. Числа $\binom{n}{m}$ наз. биномиальными коэффициентами. Упорядоченное m-подмножество наз. размещением объема m. Число размещений объема m из n различных элементов равно

$$A(n, m) = n(n-1)\ldots(n-m+1).$$

При $m=n$ размещение представляет собой перестановку элементов множества X, причем число таких перестановок равно $P(n)=n!$

Возникновение основных понятий и развитие К. а. шло параллельно с развитием других разделов математики, таких, как алгебра, теория чисел, теория вероятностей, с к-рыми К. а. тесно связан. Еще математикам Древнего Востока были известны формула, выражающая число сочетаний через биномиальные коэффициенты, и формула бинома Ньютона с натуральным показателем n. С мистическими целями изучались *магические квадраты* 3-го порядка. Рождение К. а. как раздела математики связано с трудами Б. Паскаля (B. Pascal) и П. Ферма (P. Fermat) по теории азартных игр. Эти труды, составившие основу теории вероятностей, одновременно содержали принципы определения числа комбинаций элементов конечного множества, устанавливая тем самым ставшую затем традиционной связь К. а. с теорией вероятностей.

Большой вклад в систематическое развитие комбинаторных методов был сделан Г. Лейбницем (G. Leibniz) в его диссертации «Ars Combinatoria» («Комбинаторное искусство»), где, по-видимому, впервые появился термин «комбинаторный». Большое значение для становления К. а. имела работа Я. Бернулли (J. Bernoulli) «Ars conjectandi» («Искусство предположений»), посвященная основным понятиям теории вероятностей, где обстоятельно изложен ряд комбинаторных понятий и указаны их применения для вычисления вероятностей. Можно считать, что с появлением работ Г. Лейбница и Я. Бернулли комбинаторные методы выделились в самостоятельную часть математики.

Большой вклад в развитие комбинаторных методов сделал Л. Эйлер (L. Euler). В его работах по разбие-

ниям и композициям натуральных чисел на слагаемые было положено начало одному из основных методов перечисления комбинаторных конфигураций — методу производящих функций.

Возрождение интереса к К. а. относится к 50-м гг. 20 в. в связи с бурным развитием кибернетики и дискретной математики и широким использованием электронно-вычислительной техники. В этот период активизировался интерес к классическим комбинаторным задачам.

На формирование направлений исследований в дальнейшем оказывают влияние два фактора. С одной стороны, выбор объектов исследований, с другой стороны — формулировка целей исследования, зависящая в конечном счете от сложности изучаемых объектов. Если исследуемая комбинаторная конфигурация имеет сложный характер, то целью исследования является выяснение условий ее существования и разработка алгоритмов построения.

Большой развивающийся раздел К. а. составляет теория *блок-схем* (см. также [2], [3], [10]); основные проблемы этого раздела связаны с вопросами классификации, условиями существования и методами построения нек-рых классов блок-схем. Частным случаем блок-схем являются так наз. уравновешенные неполные блок-схемы, или (b, v, r, k, λ)-конфигурации, к-рые определяются как совокупности из b k-подмножеств нек-рого v-множества, называемых блоками, с условием, что каждый элемент появляется в r блоках, а каждая пара элементов — в λ блоках. При $b=v$ и, следовательно, $r=k$ (b, v, r, k, λ)-конфигурация наз. (v, k, λ)-конфигурацией, или симметричной уравновешенной неполной блок-схемой. Даже для (v, k, λ)-конфигураций вопрос о необходимых и достаточных условиях их существования остается пока (1978) открытым. Для существования (v, k, λ)-конфигураций необходимо, чтобы при v четном $k-\lambda$ было квадратом, а при v нечетном уравнение

$$z^2=(k-\lambda)x^2+(-1)^{(v-1)/2}\lambda y^2$$

имело решение в целых числах x, y, z, одновременно не равных нулю.

При $v=n^2+n+1$, $k=n+1$, $\lambda=1$ (v, k, λ)-конфигурация представляет собой проективную плоскость порядка n, являющуюся частным случаем конечной геометрии, содержащей конечное число точек и прямых с заданными условиями их инцидентности. Каждой проективной плоскости порядка $n-1$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие полное множество из $n-1$ попарно ортогональных *латинских квадратов* порядка n. Для существования проективной плоскости порядка n необходимо, чтобы при $n\equiv 1, 2 \pmod 4$ существовали целые числа a и b, удовлетворяющие равенству

$$n=a^2+b^2.$$

Вопрос о существовании проективных плоскостей порядка n решен положительно только для $n=p^\alpha$, где p — простое, а α — натуральное числа. Даже для $n=10$ этот вопрос является открытым (1978). К этому кругу вопросов относится результат, связанный с опровержением гипотезы Эйлера о несуществовании пары ортогональных латинских квадратов порядка $n=4k+2$, $k=1, 2, \ldots$ (см. *Комбинаторные задачи*).

Другое направление К. а. связано с *выбора теоремами*. В основе целого ряда результатов этого направления лежит теорема Ф. Холла о существовании системы различных представителей (трансверсали) семейства подмножеств $(X_1, \ldots, X_n)$ множества X, т. е. системы элементов $(x_1, \ldots, x_n)$ такой, что $x_i\in X$ и $x_i\neq x_j$ при $i\neq j$: трансверсаль существует тогда и только тогда, когда для любых $i_1, \ldots$

..., i_k таких, что $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$, справедливо неравенство

$$|X_{i_1} \cup \ldots \cup X_{i_k}| \geqslant k,$$

где $|Y|$ — число элементов в множестве Y. Из теоремы Ф. Холла вытекает теорема о существовании латинского квадрата, состоящая в том, что любой латинский прямоугольник размера $k \times n$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, можно дополнить до латинского квадрата порядка n. Другое следствие теоремы Ф. Холла: любую неотрицательную матрицу $A = ||a_{ij}||$, $i, j = 1, \ldots, n$, такую, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = t > 0,$$

можно представить в виде

$$A = \alpha_1 \Pi_1 + \ldots + \alpha_s \Pi_s,$$

где $\Pi_1, \ldots, \Pi_s$ — матрицы подстановки порядка n и $s \leqslant (n-1)^2 + 1$. Из теоремы Ф. Холла следует также теорема о том, что минимальное число строк и столбцов неотрицательной матрицы, содержащих все положительные элементы, равно максимальному числу элементов, попарно не расположенных в одной и той же строке или в одном и том же столбце. Экстремальное свойство частично упорядоченных множеств, аналогичное этой теореме, устанавливает теорема, утверждающая, что минимальное число непересекающихся цепей совпадает с объемом максимального подмножества, состоящего из попарно несравнимых элементов. Экстремальный характер носит и следующая теорема: если для n-множества X составить все $\binom{n}{r}$ сочетаний по r элементов и разбить их на k непересекающихся классов, то для целого m существует число $n_0 = n_0(m, r, k)$ такое, что при $n \geqslant n_0$ найдется подмножество из m элементов $Y \subset X$, для к-рого все $\binom{m}{r}$ сочетаний принадлежат одному классу.

Экстремальной является задача коммивояжера, заключающаяся в составлении кратчайшего маршрута посещения n городов с возвращением в исходный пункт при условии, что расстояния между городами известны. Эта задача имеет приложения к изучению транспортных сетей. Комбинаторные задачи экстремального характера рассматриваются в теории потоков в сетях и в теории графов.

Значительную часть К. а. составляют **перечислительные задачи**. При их решении либо указывается метод перебора комбинаторных конфигураций из данного класса, либо определяется их число, либо делается то и другое. Типичные результаты перечислительных задач: число подстановок степени n с k циклами равно $|S(n, k)|$, где $S(n, k)$ — числа **Стирлинга 1-го рода**, определяемые равенством

$$x(x-1)\ldots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)\, x^k;$$

число разбиений множества из n элементов на k подмножеств равно **числу Стирлинга 2-го рода**

$$\sigma(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n;$$

число размещений m различных предметов в n различных ячейках, когда пустых ячеек нет, равно $n!\sigma(m, n)$.

Полезным инструментом для решений перечислительных задач является **перманент матрицы**. Перманент матрицы $A = ||a_{ij}||$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, $n \leqslant m$, с элементами из нек-рого кольца определяется равенством

$$\operatorname{per} A = \sum_{(j_1, \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n},$$

где суммирование производится по всевозможным размещениям объема n из m различных элементов,

Число трансверсалей нек-рого семейства подмножеств конечного множества равно перманенту соответствующей матрицы инцидентности.

К вычислению перманентов сводится целый класс задач по определению числа перестановок с ограниченными позициями. Эти задачи для удобства иногда формулируются как задачи о расстановке взаимно неатакующих фигур на шахматной доске размером $n \times n$. С определением перманентов нек-рых классов матриц связаны варианты задачи о димерах, возникающей при изучении явления адсорбции и заключающейся в определении числа способов объединения атомов в двухатомные молекулы на нек-рой поверхности. Ее решение может быть также получено через пфаффианы — некоторые функции от матриц, близкие к определителям. Проблема о числе латинских прямоугольников (квадратов) также связана с разработкой эффективных методов вычисления перманентов нек-рых (0, 1)-матриц.

Для вычисления перманентов применяется формула:

$$\operatorname{per} A = \sum_{k=m-n}^{m} (-1)^{k-m+n} \binom{k}{m-n} S_k,$$

$$S_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} a_{il} - \sum_{r=1}^{k} a_{ij_r} \right).$$

Имеется большое число неравенств, дающих оценку величины перманента в нек-рых классах матриц. Представляет интерес определение экстремальных значений перманента в определенных классах неотрицательных матриц, однако эта задача не решена (1978) даже для (0, 1)-матриц с заданным значением числа единиц в строках и столбцах. К этой проблеме примыкает гипотеза Ван дер Вардена о том, что минимум перманента дважды стохастической матрицы порядка n равен $n!/n^n$, подтвержденная только для положительно полуопределенных матриц.

Большую роль в решении перечислительных задач играет метод *производящих функций*. Производящая функция

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

ставится в соответствие последовательности $(a_0, a_1, \ldots)$ с элементами из нек-рого поля и рассматривается как формальный степенной ряд. При таком определении производящие функции эффективно используются для решения перечислительных задач параллельно с методами рекуррентных соотношений и конечно разностных уравнений. При получении асимптотических формул в качестве производящих функций обычно используются аналитические функции действительного или комплексного переменного. В последнем случае для отыскания выражений коэффициентов применяют интегральную формулу Коши.

Имеются результаты в направлении возможной унификации методов перечисления, связанные с рассмотрением так наз. алгебр инцидентности и использованием функции Мёбиуса на частично упорядоченных множествах (см., напр., [10]). При решении перечислительных задач существенную роль играет формализация понятия неразличимости объектов. Использование для этих целей понятия эквивалентности объектов относительно нек-рой группы подстановок в сочетании с применением метода производящих функций было положено в основу так наз. теории перечисления Пойа (см. [10]). Сущность этой теории состоит в следующем. Рассматривается Y^X — множество конфигураций

$$f: X \to Y, \quad |X| = m, \quad |Y| = n.$$

На множестве X действует группа подстановок A, определяющая на Y^X отношение эквивалентности $\sim$,

при к-ром $f \sim f_1$, если существует такое $\alpha \in A$, что $f(\alpha(x)) = f_1(x)$ для всех $x \in X$, $f, f_1 \in Y^X$. Каждому $y \in Y$ ставится в соответствие характеристика $[y] = (s_1, \ldots, s_k)$, где s_i, $i = 1, \ldots, k$,— элементы абелевой группы. Характеристика конфигурации f задается равенством

$$[f] = \sum_{x \in X} [f(x)].$$

Если $a(s_1, \ldots, s_k)$ — число элементов $y \in Y$ с заданным значением характеристики и $b_m(s_1, \ldots, s_k)$ — число неэквивалентных конфигураций $f \in Y^X$,

$$F(y_1, \ldots, y_k) = \sum_{(s_1, \ldots, s_k)} a(s_1, \ldots, s_k)\, y_1^{s_1} \ldots y_k^{s_k},$$

$$\Phi_m(y_1, \ldots, y_k) = \sum_{(s_1, \ldots, s_k)} b(s_1, \ldots, s_k)\, y_1^{s_1} \ldots y_k^{s_k},$$

то основная теорема Пойа утверждает, что

$$\Phi_m(y_1, \ldots, y_k) =$$
$$= Z(F(y_1, \ldots, y_k),\ F(y_1^2, \ldots, y_k^2), \ldots, F(y_1^m, \ldots, y_k^m)),$$

где Z есть цикличесκий индекс группы A, определяемый равенством

$$Z(t_1, \ldots, t_m; A) =$$
$$= \sum_{j_1 + 2j_2 + \ldots + mj_m = n} C(j_1, \ldots, j_m; A)\, t_1^{j_1} \ldots t_m^{j_m},$$

$C(j_1, \ldots, j_m; A)$ — число элементов циклового класса $\{1^{j_1} 2^{j_2} \ldots m^{j_m}\}$ группы A. Эта теорема основана на лемме Бернсайда: число классов эквивалентности $N(A)$, определяемых на множестве X группой подстановок A, дается формулой

$$N(A) = \frac{1}{|A|} \sum_{\alpha \in A} j_1(\alpha),$$

где $j_1(\alpha)$ — число единичных циклов $\alpha \in A$. Теория Пойа имеет применения при решении перечислительных задач теории графов и перечислении углеродных химических соединений. Имеется обобщение теории Пойа на случай, когда эквивалентность конфигураций определяется двумя группами G и H, действующими на X и Y соответственно (см. [4] и [10]). В таком виде она применяется, напр., для определения числа неизоморфных абстрактных автоматов.

Если $X = \{1, \ldots, m\}$, $Y = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $\sigma : X \to Y$, где a_j используется α_j раз в качестве образа, то выражение

$$[\sigma] = \left| a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n} \right|, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m,$$

наз. первичной спецификацией σ. Если числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ содержат β_0 нулей, β_1 единиц и т. д., то выражение

$$[[0^{\beta_0} 1^{\beta_1} \ldots m^{\beta_m}]], \quad \beta_0 + \ldots + \beta_m = n,$$
$$\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + m\beta_m = m,$$

наз. вторичной спецификацией. При нек-рой специализации групп G и H, определяющих эквивалентность конфигураций $\sigma : X \to Y$, можно указать способ построения производящих функций для перечисления неэквивалентных конфигураций. Этот способ, называемый общей комбинаторной схемой, подразделяется на четыре частных случая в соответствии с тем, принимают группы G и H значения единичной E или симметрической S_n групп соответствующих степеней. Эти частные случаи являются моделями для большинства известных комбинаторных схем (см. [9], [10]).

1. Коммутативный несимметричный случай: $G = S_m$, $H = E$. Моделирует схемы сочетаний, заполнений одинаковых предметов в различные ячейки и др. Производящая функция для пере-

числения неэквивалентных конфигураций σ таких, что

$$[\sigma]=\left[a_1^{\alpha_1}\dots a_n^{\alpha_n}\right],$$
$$\alpha_i\in\Lambda_i\subseteq N_0=\{0,1,\dots\},\quad \Lambda=(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n),$$

имеет вид:

$$\Phi(t;x_1,\dots,x_n;\Lambda)=\prod_{j=1}^{n}\sum_{\alpha_j\in\Lambda_j}(tx_j)^{\alpha_j}.$$

2. Некоммутативный несимметричный случай: $G=E$, $H=E$. Моделирует схемы размещений, заполнений различимых предметов в различные ячейки и др. Производящая функция для перечисления неэквивалентных конфигураций σ таких, что

$$[\sigma]=\left[a_1^{\alpha_1}\dots a_n^{\alpha_n}\right],\ \alpha_i\in\Lambda_i,\ \Lambda=(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n),$$

имеет вид:

$$\tilde{\Phi}(t;x_1,\dots,x_n;\Lambda)=\prod_{j=1}^{n}\sum_{\alpha_j\in\Lambda_j}\frac{t^{\alpha_j}}{\alpha_j!}x_j^{\alpha_j}.$$

3. Коммутативный симметричный случай: $G=S_m$, $H=S_n$. Моделирует схемы заполнения одинаковых предметов в одинаковые ячейки, перечисления разбиений натуральных чисел и др. Перечисление конфигураций σ таких, что

$$[[\sigma]]=\left[\left[0^{\beta_0}1^{\beta_1}\dots m^{\beta_m}\right]\right],\ \beta_j\in\Lambda_j,\ \Lambda=(\Lambda_1,\Lambda_2,\dots),$$

основано на использовании производящей функции вида:

$$\Psi(t;x_1,\dots;\Lambda)=\prod_{j=1}^{\infty}\sum_{\beta_j\in\Lambda_j}(x_jt^j)^{\beta_j}.$$

4. Некоммутативный симметричный случай: $G=E$, $H=S_n$. Моделирует схемы разбиений конечных множеств на блоки, заполнения различимых предметов в одинаковые ячейки и др. Перечисление конфигураций σ таких, что

$$[[\sigma]]=\left[\left[0^{\beta_0}1^{\beta_1}\dots m^{\beta_m}\right]\right],\ \beta_j\in\Lambda_j,\ \Lambda=(\Lambda_1,\Lambda_2,\dots),$$

основано на использовании производящей функции вида:

$$\tilde{\Psi}(t;x_1,\dots;\Lambda)=\prod_{j=1}^{\infty}\sum_{\beta_j\in\Lambda_j}\left(\frac{x_jt^j}{j!}\right)^{\beta_j}\frac{1}{\beta_j!}.$$

Значительное место в К. а. занимают асимптотические методы. Они применяются как для упрощения сложных конечных выражений при больших значениях входящих в них параметров, так и при получении приближенных формул обходными путями, когда точные формулы неизвестны. Комбинаторную задачу перечислительного характера иногда удобно сформулировать как задачу отыскания характеристик распределения нек-рой случайной величины. Такая интерпретация дает возможность применять развитый аппарат теории вероятностей, а для отыскания асимптотик — предельные теоремы. Детальному исследованию с этих позиций подвергнута классическая схема случайных размещений предметов в ячейки, случайные разбиения множеств, цикловая структура случайных подстановок, а также различные классы случайных графов, включая графы отображений (см. [8], [9]).

Вероятностный подход применяется при изучении комбинаторных свойств симметрических групп и полугрупп. Исследовано предельное распределение порядка случайного элемента симметрической группы S_n при $n\to\infty$, а также асимптотика вероятности порождения ее случайными элементами. Для нек-рых классов случайных неотрицательных матриц изучались распределения числа нулевых линий в матрице и перманентов, даны оценки вероятности примитивности таких

матриц. Для доказательства существования комбинаторных конфигураций без их конструирования иногда используется нек-рый специфический вероятностный прием. Сущность этого приема заключается в установлении существования конфигурации без ее конструирования с помощью оценки вероятности нек-рого события (см. [7]).

Лит.: [1] Риордан Д ж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Райзер Г.-Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [3] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [4] Прикладная комбинаторная математика, сб. статей, пер. с англ., М., 1968; [5] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [6] Харари Ф., Палмер Э., Перечисление графов, пер. с англ., М., 1977; [7] Эрдёш П., Спенсер Дж., Вероятностные методы в комбинаторике, пер. с англ., М., 1976; [8] Колчин В. Ф., Чистяков В. П., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 11, М., 1974, с. 5—45; [9] Сачков В. Н., в кн.: Вопросы кибернетики. Тр. семинара по комбинаторной математике, М., 1973, с. 146—64; [10] его же, Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977.

В. Н. Сачков.

КОМИТАНТ, конкомитант, группы G, действующей на множествах X и Y,— такое отображение $\varphi : X \to Y$, что

$$g(\varphi(x)) = \varphi(g(x))$$

для любых $g \in G$, $x \in X$. В этом случае говорят также, что φ коммутирует с действием G, или, что φ — эквивариантное отображение. Если G действует на каждом множестве семейства $\{X_i,\ i \in I\}$, то К. $\prod_{i \in I} X_i \to Y$ наз. совместным (или одновременным) К. группы G.

Понятие К. происходит из классической *инвариантов теории*, в к-рой, однако, К. понимается в более узком смысле: G — полная линейная группа нек-рого конечномерного линейного пространства U, X и Y — пространства тензоров на U определенного (вообще говоря, различного) типа, на к-рых G действует естественным образом, а φ — эквивариантное полиномиальное отображение X в Y. Если, кроме того, Y есть пространство ковариантных тензоров, то К. наз. ковариантом группы G, а если Y — пространство контравариантных тензоров, то К. наз. контравариантом группы G.

Пример. Пусть f — бинарная кубическая форма от переменных x и y:

$$f = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3.$$

Ее коэффициенты являются координатами ковариантного симметрического тензора. Коэффициенты гессиана формы f, т. е. формы

$$H = \frac{1}{36}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_0a_2 - a_1^2)\,x^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)\,xy + (a_1a_3 - a_2^2)\,y^2$$

также являются координатами ковариантного симметрического тензора и отображение

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \longmapsto \left(a_0a_2 - a_1^2,\ \frac{1}{2}(a_0a_3 - a_1a_2),\ a_1a_3 - a_2^2\right)$$

соответствующих пространств тензоров есть К. (так наз. К. формы f). Аналогично можно определить гессиан произвольной формы, к-рый также дает пример К. (см. *Ковариант*).

В современной геометрич. теории инвариантов под К. часто понимают любой эквивариантный морфизм $X \to Y$, где X и Y — алгебраич. многообразия, снабженные регулярным действием алгебраич. группы G. Если X и Y аффинны, то К. определяет гомоморфизм (и сам определяется им) $k[Y] \to k[X]$ G-модулей регулярных функций на многообразиях Y и X соответственно (k — основное поле).

Лит.: [1] Гуревич Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, М.— Л., 1948; [2] Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д., Геометрическая теория инвариантов, пер. с англ., М., 1974. *В. Л. Попов.*

КОММУТАНТ группы, производная группа, второй член нижнего центрального ряда группы,— подгруппа, порождаемая в группе G всевозможными *коммутаторами* элементов группы G. Обычно К. группы G обозначается $[G, G]$, или G', или $\Gamma_2(G)$. К. группы является *вполне характеристической подгруппой*, а любая подгруппа, содержащая К., является нормальным делителем этой группы. Факторгруппа по некоторому нормальному делителю абелева тогда и только тогда, когда этот нормальный делитель содержит К. группы.

К. кольца R — идеал, порожденный всеми произведениями ab, $a, b \in R$; он наз. также квадратом кольца R и обозначается $[R, R]$ или R^2.

Оба введенные понятия — частные случаи понятия К. мультиоператорной Ω-группы G, определяемого как идеал, порожденный всеми коммутаторами и элементами вида

$$-a_1a_2\ldots a_n\omega - b_1b_2\ldots b_n\omega + (a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots$$
$$\ldots(a_n+b_n)\omega,$$

где ω — n-арная операция из Ω, а

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in G.$$

Н. Н. Вильямс, О. А. Иванова.

КОММУТАТИВНАЯ АЛГЕБРА — раздел алгебры, изучающий свойства коммутативных *колец* и связанных с ними объектов (*идеалов*, *модулей*, *нормирований* и т. д.).

К. а. выросла из задач, возникавших в теории чисел и алгебраич. геометрии. Задачи эти, как правило, относились к конкретным классам колец. Фундаментальным объектом теории чисел является кольцо $\mathbb{Z}$ целых рациональных чисел, и основной факт его арифметики состоит в том, что любое целое число по существу однозначно разлагается в произведение простых чисел. В 30-е гг. 19 в. К. Гауссом (C. Gauss), Э. Куммером (E. Kummer) и другими была обнаружена связь различных вопросов теории чисел (напр., квадратичные формы, теорема Ферма) с арифметикой квадратичных и круговых расширений поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (см. [11]). Распространению классических рассуждений на кольца алгебраич. чисел препятствовало, однако, то обстоятельство, что разложение на далее неразложимые множители в них перестает быть однозначным (см. *Алгебраическая теория чисел*). Догадка Э. Куммера состояла в том, что если добавить к обычным числам некие «идеальные» числа (подобно тому, как в проективной геометрии добавляются бесконечно удаленные точки), однозначность разложения сохранится (см. *Идеальное число*).

Э. Куммеру удалось построить такие «идеальные» числа, или, как сейчас говорят, *дивизоры*, только для круговых полей; однако его результаты побудили Р. Дедекинда (R. Dedekind) и Л. Кронекера (L. Kronecker) распространить теорию дивизоров на произвольные кольца алгебраич. чисел. В построенной Р. Дедекиндом к 1882 теории была выявлена роль целых элементов поля; но что еще более важно — это появление понятия идеала и *простого идеала*. Так были заложены основы одномерной К. а.

Параллельно в алгебраич. геометрии происходило формирование многомерной К. а. Алгебраич. геометрия того времени изучала свойства алгебраич. кривых на плоскости, а также более общих алгебраич. многообразий, задаваемых как множество $M \subset \mathbb{C}^n$ общих нулей нескольких многочленов $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ (различие между аффинными и проективными многообразиями здесь не существенно). То же многообразие

M можно задавать и другими уравнениями, так что более инвариантно с многообразием M связывается идеал $\mathfrak{A}$ всех многочленов, обращающихся в нуль на M. Это еще один путь, приводящий к понятию идеала. Однако до 1890 алгебраич. основы алгебраич. геометрии находились в зачаточном состоянии. Положение изменилось после опубликования работ Д. Гильберта (D. Hilbert). В 1893 он доказал теорему о нулях (см. *Гильберта теорема*). Несколько раньше он же установил следующие факты, во многом определившие дальнейшее направление развития К. а.: теорему о базисе (любой идеал в $C[x_1, \ldots, x_n]$ порождается конечным числом многочленов), теорему о сизигиях и существование *Гильберта многочлена* для однородного идеала в кольце многочленов.

Опыт работы с алгебраич. многообразиями малой размерности убеждал в том, что они состоят из конечного числа неприводимых подмногообразий, что приводило к алгебраич. задаче о представлении идеала в виде пересечения более просто устроенных идеалов. Эта задача была решена Э. Ласкером (E. Lasker, см. [4]), к-рый ввел понятие *примарного идеала*, заменяющего в многомерном случае степень простого идеала, и ассоциированного с ним простого идеала, а также доказал существование примарного разложения произвольного идеала в кольце многочленов. Вопрос об однозначности такого разложения рассматривался Ф. Маколеем (F. Macaulay, 1913). Было установлено, что хотя само примарное разложение и не однозначно, множество ассоциированных с ним простых идеалов определяется однозначно, как и «изолированные» примарные компоненты. Естественное стремление избавиться от неоднозначности примарного разложения побудило Б. Л. Ван дер Вардена (B. L. Van der Waerden, 1931) ввести более грубое отношение эквивалентности для идеалов, чем равенство. Это привело к теории *дивизориальных идеалов*, или дивизоров, и позволило обобщить теорию Куммера — Дедекинда на более широкий класс колец (см. *Крулля кольцо*).

Начиная с Л. Кронекера и Э. Ласкера, с простыми идеалами в кольце многочленов связывают их размерность, определяемую пока как степень трансцендентности соответствующего факторкольца; современное комбинаторное определение размерности было предложено В. Круллем (W. Krull) позже. Если все простые идеалы, ассоциированные с идеалом $\mathfrak{A}$, имеют одну размерность, то идеал $\mathfrak{A}$ наз. несмешанным. В кольце многочленов идеалы главного ряда несмешаны, или, в современной терминологии, кольцо многочленов является *Коэна — Маколея кольцом*.

Наконец, ряд своих результатов Э. Ласкер распространил на кольцо сходящихся степенных рядов, рассматривая последнее с алгебраич. точки зрения.

К началу 20 в. были получены результаты, относящиеся к кольцам алгебраич. чисел и многочленов. Здесь же стоит упомянуть о конструктивном направлении, отыскивающем явные алгоритмы для установления принадлежности многочлена нек-рому идеалу. Однако конкретность материала мешала увидеть общие закономерности и связи. Толчком к развитию современной К. а. послужила теория p-адических чисел К. Гензеля (K. Hensel); именно возможность применения классических методов к такому нетрадиционному объекту позволила осознать и выделить общие идеи, применимые к произвольным кольцам (удовлетворяющим тем или иным условиям, напр. условиям конечности). Начинается новый этап — этап абстрактной К. а., систематич. изучение строения различных классов коммутативных колец. Это проявилось уже в работах Э. Нётер (E. Noether). Связав условие конечности базиса для любого идеала с условием максимальности, т. е. с условием обрыва возрастающих цепочек идеалов

(кольца с этим условием наз. нётеровыми), она получила в наиболее общем виде теорию примарных разложений Ласкера — Маколея, казавшуюся ранее сугубо вычислительной и громоздкой. Ею было дано также аксиоматич. описание дедекиндовых колец. В то же время Э. Артин (E. Artin) изучает кольца с условием минимальности — артиновы кольца; Х. Грелль (H. Grell) вводит понятие локализации целостного кольца — операции, обобщенной затем К. Шевалле (C. Chevalley) и А. И. Узковым. В. Крулль доказывает теорему о главном идеале, положившую начало теории размерности нётеровых колец, а также теорему о пересечении степеней идеала в нётеровом кольце, являющуюся основой при изучении $\mathfrak{N}$-адических топологий. Теория дивизориальных идеалов (1931) и теория нормирования обобщают более ранние исследования К. Гензеля и А. Островского (A. Ostrowski). Наконец, следует упомянуть теорему Нётер о нормализации, выяснение роли понятия целой зависимости в рамках общей теории коммутативных колец, а также теоремы Крулля о подъеме простых идеалов для целых расширений.

Новое направление открыла работа В. Крулля о *локальных кольцах* [7]. Так называются кольца, имеющие единственный максимальный идеал; примером может служить кольцо ростков аналитич. функций на комплексном многообразии. В абстрактном случае к локальным кольцам приводят операции локализации и пополнения, а также операция перехода к *Гензеля кольцу*. В. Крулль развил теорию размерности локальных колец и ввел понятие регулярного локального кольца, соответствующего геометрич. понятию неособой точки многообразия. В 40-е гг. 20 в. интенсивно развивается локальная алгебра и ее алгебро-геометрич. приложения. Локальное кольцо снабжается естественной топологией; это позволяет использовать операцию пополнения и сравнивать свойства кольца и его пополнения. Устанавливается, что для колец алгебраич. геометрии (геометрич. кольца) переход к пополнению сохраняет ряд важных свойств. Вместе с исследованиями о конечности целого замыкания это сформировалось в целое направление теории колец (см. *Превосходное кольцо*). В 1946 И. С. Коэн (I. S. Cohen) описал структуру полных локальных колец. Другое направление связано с обоснованием теории пересечений. Развивая идеи В. Крулля, П. Самюэль (P. Samuel) вводит понятие градуированного кольца, связанного с локальным кольцом, возрождает характеристич. функции Гильберта, приводящие к еще одному определению размерности локального кольца, определяет кратность идеала.

Последующее развитие идей К. а. связано с гомологич. методами, функториальным подходом и дальнейшей геометризацией. Этому способствовала восходящая к Р. Дедекинду и Э. Нётер тенденция к линеаризации К. а., в соответствии с к-рой идеалы кольца рассматриваются как частный случай модулей. Последние являются обобщением векторных пространств и в геометрич. представлении соответствуют понятию семейства векторных пространств. К модулям применимы обычные конструкции линейной алгебры — прямой суммы, модуля гомоморфизмов, тензорного произведения. Плодотворность такого более широкого взгляда видна уже из возможности применять *резольвенты*, а вместе с ними и гомологич. алгебру, сформировавшуюся к 50-м гг. 20 в. и представляющую далеко идущее обобщение теории сизигий. Это привлекло внимание к модулям специального вида (см. *Проективный модуль*, *Инъективный модуль*, *Плоский модуль*). Изучение любого класса колец тесно связано с изучением модулей над ними (см. *Гомологическая классификация колец*). Серьезное продвижение было достигнуто в локальной алгебре: Ж. П. Серр (J.-P. Serre) охарактери-

зовал регулярные кольца как кольца конечной гомологич. размерности и установил Tor-формулу для кратности пересечений, М. Ауслендер и Д. А. Буксбаум (M. Auslander, D. A. Buchsbaum) доказали факториальность регулярного локального кольца. Началось изучение функторов Ext и Tor, связанных с гомоморфизмами и тензорными произведениями модулей, *Горенштейна колец* и колец Коэна — Маколея, допускающих гомологич. описание, чисел Бетти локальных колец.

Другая особенность современной К. а.— функторный подход, проявляющийся в изучении свойств не изолированного кольца или модуля, а целой системы таких объектов, связанных между собой морфизмами. Замена базисного кольца, теория спуска, изучение различных функториальных конструкций — все это отражение упомянутой тенденции. Так, напр., сохранение многих свойств при локализации и пополнении связано с плоскостностью соответствующего расширения.

Третья особенность — геометризация. Она соответствует взгляду (естественному в алгебраич. геометрии и функциональном анализе) на элементы кольца как на функции на нек-ром пространстве. В качестве такого пространства предлагалось брать сначала множество максимальных идеалов кольца, а затем множество всех простых идеалов, снабженное *Зарисского топологией* (простой спектр кольца). В частности, появилась возможность использовать теорию пучков и их когомологий. К. а. становится составной частью алгебраич. геометрии, значительно расширившей благодаря этому свои рамки и возможности. Напр., появилась возможность использовать и интерпретировать в геометрич. терминах кольца с делителями нуля и нильпотентными элементами. В свою очередь геометрич. методы оживили те направления К. а., к-рые можно назвать глобальной К. а. К ним относятся *инвариантов теория*, *алгебраическая К-теория*, когомологич. образования (*Пикара группа*, *Брауэра группа* и др.), изучение группы автоморфизмов и различных инвариантов колец, теория разрешения особенностей и т. д. Однако здесь уже стираются грани между К. а. и алгебраич. геометрией.

Лит.: [1] Kummer E., «J. reine und angew. Math.», 1847, Bd 35, S. 319—26; [2] Dedekind R., Gesammelte mathematische Werke, Bd 3, Braunschweig, 1932; [3] Hilbert D., Gesammelte Abhandlungen, Bd 2, B., 1933; [4] Lasker E., «Math. Ann.», 1905, Bd 60, S. 20—116; [5] Noether E., «Math. Ann.», 1921, Bd 83, S. 24—66; [6] ее же, там же, 1926, Bd 96, S. 26—61; [7] Krull W., «J. reine und angew. Math.», 1938, Bd 179, S. 204—26; [8] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, в. 5, с. 3—93; [9] Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, т. 2, пер. с нем., М.— Л., 1947; [10] Krull W., Idealtheorie, B., 1935; [11] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [12] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, т. 1—2, пер. с англ., М., 1963; [13] Nagata M., Local rings, N. Y., 1962; [14] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [15] Kaplansky I., Commutative rings, Boston, 1970.

В. И. Данилов.

КОММУТАТИВНАЯ БАНАХОВА АЛГЕБРА — банахова алгебра A с единицей над полем $\mathbb{C}$, в к-рой $xy=yx$ для всех $x, y\in A$.

Всякий максимальный идеал К. б. а. A является ядром нек-рого линейного непрерывного мультипликативного функционала φ на A, т. е. гомоморфизма алгебры A в поле комплексных чисел. Обратно, всякий линейный мультипликативный функционал на К. б. а. непрерывен, имеет норму 1, и его ядром служит максимальный идеал в A. Пусть Φ — множество линейных мультипликативных функционалов на A. Элемент $a\in A$ тогда и только тогда обратим, когда $\varphi(a)\neq 0$ для всех $\varphi\in\Phi$. Более того, спектр $\sigma(a)$ состоит в точности из чисел вида $\varphi(a)$. Если линейный непрерывный функционал ψ на A таков, что $\psi(a)\in\sigma(a)$ для любого $a\in A$, то ψ — мультипликативный функционал; для алгебр над полем действительных чисел это, вообще говоря, уже неверно.

Примеры описания максимальных идеалов в К. б. а. Пусть $A=C(X)$ — алгебра всех непрерывных функций на компакте X. Если x_0— фиксированная точка из X, то совокупность функций $f\in A$, для к-рых $f(x_0)=0$, образует максимальный идеал, и в $C(X)$ нет других максимальных идеалов. Если X — компакт на комплексной плоскости и $A=R(X)$ — замкнутая подалгебра в $C(X)$, состоящая из функций, к-рые равномерно аппроксимируются на X рациональными функциями с полюсами вне X, то максимальные идеалы в $R(X)$ устроены так же, как и в $C(X)$. Пусть $L^1(G)$ — групповая алгебра, где G — дискретная абелева группа, и каждому элементу $f\in L^1(G)$ ставится в соответствие его преобразование Фурье. Если φ — мультипликативный линейный функционал на $L^1(G)$, то $\varphi(f)=\hat{f}(\chi_0)$ для нек-рого χ_0 из группы характеров $\hat{G}$ группы G, поэтому множество максимальных идеалов в $L^1(G)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством элементов группы $\hat{G}$. В применении к группе целых чисел $\mathbb{Z}$ последний пример приводит к доказательству известной теоремы Винера: если функция $\hat{f}(t)$ разлагается в абсолютно сходящийся тригонометрич. ряд и не обращается в нуль на $[0, 2\pi]$, то $1/\hat{f}(t)$ также разлагается в абсолютно сходящийся тригонометрич. ряд.

Так как мультипликативные линейные функционалы имеют норму 1, то каждый такой функционал является элементом из единичной сферы банахова пространства, сопряженного A. Множество Φ всех мультипликативных линейных функционалов на A замкнуто в слабой топологии сопряженного пространства. Так как единичный шар сопряженного пространства есть компакт в слабой топологии сопряженного пространства, то и Φ в этой топологии является компактом, к-рый наз. пространством максимальных идеалов алгебры A и обозначается через $\mathfrak{M}$.

Если К. б. а. содержит нетривиальный идемпотент, т. е. такой элемент $f\in A$, что $f\neq 0$, $f\neq e$ и $f^2=f$, то пространство максимальных идеалов алгебры A несвязно. Обратно, если пространство X максимальных идеалов алгебры A представимо в виде объединения двух непересекающихся замкнутых множеств X_0 и X_1, то существует элемент $f\in A$ такой, что $\hat{f}|_{X_0}=0$ и $\hat{f}|_{X_1}=1$ (теорема Шилова). В частности, пространство максимальных идеалов К. б. а. связно тогда и только тогда, когда эта алгебра не может быть представлена в виде прямой суммы двух своих нетривиальных идеалов.

Пусть $\varepsilon_1(A)$ — подгруппа в группе $\varepsilon(A)$ обратимых элементов алгебры A, состоящая из экспонент, т. е. элементов вида $\exp a=\sum_0^\infty \frac{a^n}{n!}$. Подгруппа $\varepsilon_1(A)$ образует связную компоненту единицы в группе $\varepsilon(A)$. Для любого компакта X имеется канонический изоморфизм между группами $H^1(X, \mathbb{Z})$ и $\varepsilon(C)/\varepsilon_1(C)$, где $C=C(X)$ — алгебра всех непрерывных функций на X (теорема Брушлинского — Эйленберга). Оказывается, этот изоморфизм естественно индуцирует изоморфизм между $H^1(X, \mathbb{Z})$ и $\varepsilon(A)/\varepsilon_1(A)$, где A — любая К. б. а., пространством максимальных идеалов к-рой является X (теорема Аренса — Ройдена). В нек-рых случаях аналогичную интерпретацию допускают группы $H^q(X, \mathbb{Z})$ с нечетным q. Алгебра A допускает следующее каноническое представление в алгебру $C(\mathfrak{M})$. Преобразованием Гельфанда элемента $a\in A$ наз. функция $\hat{a}$ на $\mathfrak{M}$, значение к-рой в каждой точке $x\in\mathfrak{M}$ определяется правилом $\hat{a}(x)=\varphi_x(a)$, где φ_x— линейный мультипликативный функционал, соответствующий точке $x\in\mathfrak{M}$. Ядром гомоморфизма $a\mapsto\hat{a}$ служит совокупность элементов $a\in A$, принадлежащих всем максимальным идеалам, т. е. радикал алгебры A. Если алгебра A полупроста,

т. е. Rad $A=\{0\}$, то гомоморфизм $a\mapsto\hat{a}$ оказывается (алгебраическим) изоморфизмом A в $C(\mathfrak{M})$. Полупростые К. б. а. часто наз. алгебрами функций.

Представление Гельфанда хорошо приспособлено для изучения полупростых алгебр: один из основных результатов теории К. б. а. есть возможность изоморфного представления полупростой алгебры в алгебру непрерывных функций на пространстве максимальных идеалов. Об общих алгебрах с радикалом известно гораздо меньше, чем о полупростых. Описаны все идеалы в алгебре комплексных полиномов степени $\leqslant m$. Эта алгебра состоит из формальных полиномов $\xi=a_0+a_1\lambda+\ldots+a_m\lambda^m$, к-рые перемножаются по обычным правилам, но с учетом соотношения $\lambda^{m+1}=0$. Такая алгебра конечномерна, все нормы в ней эквивалентны и любой идеал замкнут. Совокупность I_k тех ξ, для к-рых $a_j=0$ при $j\leqslant k$, образует замкнутый идеал; других идеалов в этой алгебре нет. Всякая алгебра с единственным нетривиальным идеалом изоморфна алгебре полиномов первой степени. До сих пор неизвестно (1978), верно ли это для алгебр с единственным замкнутым идеалом.

Естественным бесконечномерным аналогом алгебры полиномов служат алгебры бесконечных комплексных формальных степенных рядов $\xi=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\ldots$ с обычными операциями и нормой $||\xi||=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\alpha_k$, где α_k — положительная последовательность, удовлетворяющая условию $\alpha_{k+l}\leqslant\alpha_k\alpha_l$. Если $\alpha_k^{1/k}\to 0$ при $k\to\infty$, то единственным нетривиальным гомоморфизмом алгебры в поле комплексных чисел служит $\xi\mapsto a_0$. Таким образом, I_1 является единственным максимальным идеалом, и этот идеал совпадает с радикалом. Идеалы I_k, определяемые аналогично конечномерному случаю, дают счетный набор различных замкнутых идеалов. Если последовательность α_{k+1}/α_k монотонна, то этим набором идеалов исчерпываются все замкнутые идеалы. В общем случае алгебра может содержать континуальное семейство различных замкнутых идеалов.

При надлежащем выборе последовательности α_k в рассматриваемой алгебре (не имеющей нетривиальных нильпотентов) можно задать ненулевое непрерывное дифференцирование, т. е. ограниченный линейный оператор D такой, что $D(\xi\eta)=D(D\xi)\eta+\xi(D\eta)$. В полупростых алгебрах нет нетривиальных непрерывных дифференцирований, так как в любой (не обязательно коммутативной) алгебре имеет место тождество

$$(D\xi)^n=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n}\binom{n}{k}\xi^{n-k}D^n\xi^k,$$

если ξ и $D\xi$ коммутируют. В частности, если D непрерывен, то $D\xi$ — обобщенный нильпотент.

Любая конечномерная алгебра разлагается в прямую сумму радикала и полупростой алгебры. В бесконечномерном случае аналогичное утверждение, вообще говоря, перестает быть справедливым даже для К. б. а. Кроме того, приходится различать случаи алгебраической и сильной (топологической) разложимости.

Оказывается, никакие условия, наложенные только на радикал, не обеспечивают даже алгебраич. разложимости: радикал может быть одномерным и аннулирующим нек-рый максимальный идеал и, тем не менее, не выделяться в качестве прямого слагаемого хотя бы в алгебраич. смысле.

С другой стороны, если радикал конечномерен, а факторалгебра есть алгебра всех непрерывных функций (или алгебра всех операторов в гильбертовом пространстве), то имеется сильная разложимость. Если факторалгебра есть алгебра всех непрерывных функций и R — ее аннуляторный радикал (т. е. такой, что квадрат любого элемента в R равен нулю) и A имеет

банахово дополнение, то A сильно разложима; вместо условия дополняемости R можно потребовать, чтобы пространство максимальных идеалов A удовлетворяло первой аксиоме счетности в каждой точке.

Полностью исследован также случай, когда фактор-алгебра по радикалу есть алгебра непрерывных функций на вполне несвязном компакте: необходимое и достаточное условие сильной разложимости состоит в равномерной ограниченности идемпотентов исходной алгебры.

Пусть V — некоторая ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ и A — замкнутая подалгебра алгебры $C(\overline{V})$, состоящая из функций, голоморфных на V. Известно, что в достаточно общих предположениях относительно V любой максимальный идеал алгебры A, отвечающий точке $z^0=(z_1^0, \ldots, z_n^0)\in V$, конечно порожден, а именно, порождается функциями $f_i=z_i-z_i^0$. Это утверждение допускает следующее локальное обращение. Пусть A — полупростая К. б. а. с пространством максимальных идеалов X. Если максимальный идеал, соответствующий нек-рой точке $x_0\in X$, порожден конечным набором элементов $f_1, \ldots, f_n\in A$, то максимальные идеалы, соответствующие точкам из нек-рой окрестности точки x_0, порождаются элементами вида $f_i-\lambda_i e$, отображение $\psi: x\mapsto(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ взаимно однозначно в нек-рой окрестности точки x_0, функция $g\circ\psi^{-1}$ для любого $g\in A$ голоморфна в нек-рой фиксированной окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$ и, кроме того, X вблизи x_0 допускает введение нек-рой естественной аналитической структуры.

Множество S элементов алгебры A наз. системой образующих, если наименьшей замкнутой подалгеброй с единицей в A, содержащей множество S, служит сама алгебра A. Единица обычно не включается в число образующих. Если существует конечная система S с указанными свойствами, то A наз. алгеброй с конечным числом образующих. Числом образующих алгебры A называют в этом случае наименьшее возможное число элементов в системе образующих.

Если $f_1, \ldots, f_n$— система образующих нек-рой алгебры, то отображение $x\mapsto(\hat{f}_1(x), \ldots, \hat{f}_n(x))$ осуществляет гомеоморфизм пространства максимальных идеалов этой алгебры на нек-рый полиномиально выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$. Всякий полиномиально выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$ служит пространством максимальных идеалов нек-рой банаховой алгебры (напр., алгебры равномерных на этом компакте пределов полиномов).

Пространство максимальных идеалов алгебры с n образующими удовлетворяет условию $\dim X\leqslant 2n$ и обладает рядом других свойств; напр., $H^i(X, \mathbb{C})=0$ при $i\geqslant n$. Отсюда, в частности, следует, что число образующих в алгебре $C(S^n)$, где S^n есть n-мерная сфера, равно $n+1$; аналогичный результат имеет место для любого n-мерного компактного многообразия X. Для любого конечного клеточного n-мерного полиэдра X алгебра $C(X)$ допускает систему из $n+1$ образующей.

Наименьшее замкнутое множество $\Gamma\subset X$, где X — пространство максимальных идеалов алгебры A, на к-ром все функции $|\hat{f}|$ достигают максимума, наз. границей Шилова пространства X. Для любой К. б. а. с единицей такое множество существует и единственно.

Точка $x_0\in X$ тогда и только тогда принадлежит Γ, когда для любой ее окрестности U существует такой элемент $f\in A$, для к-рого $\max\limits_X|\hat{f}|=1$, но $|\hat{f}(x)|<1$ вне U.

Более того, если U — открытое множество в X и существует такое замкнутое множество $F\subset U$ и такой элемент $g\in A$, что $|\hat{g}(x)|<\max\limits_F|\hat{g}|$ для точек $x\in U\setminus F$,

то пересечение $\Gamma \cap U$ непусто. В частности, если $X = [0, 1]$, то $\Gamma = X$.

Любой мультипликативный линейный функционал φ непрерывен относительно нормы, определяемой спектральным радиусом; более того, $|\varphi(t)| \leqslant \max_X |\hat{f}|$, где X — пространство максимальных идеалов. В этом неравенстве можно, по определению границы Шилова, заменить X на Γ; поэтому существует положительная регулярная мера μ на Γ, «представляющая» функционал φ, т. е. такая, что для любого $f \in A$ имеет место равенство $\varphi(f) = \int_\Gamma \hat{f} d\mu$. Для случая алгебры аналитич. функций в круге эта формула сводится к классической формуле Пуассона. Среди представляющих мер существует мера μ, удовлетворяющая неравенству Иенсена $\ln|\varphi(t)| \leqslant \int_\Gamma \ln|\hat{f}| d\mu$ для всех $f \in A$.

Пусть B есть К. б. а. с единицей и A — некоторая ее замкнутая подалгебра. Алгебра A наз. максимальной подалгеброй алгебры B, если B не содержит никакой замкнутой собственной подалгебры, содержащей A и не совпадающей с A. Во всякой достаточно широкой алгебре B имеются максимальные подалгебры с единицей и даже замкнутые подалгебры коразмерности 1. Действительно, если φ_1, φ_2 — два различных гомоморфизма алгебры B в поле комплексных чисел и $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$, то ядро фуикционала ψ является замкнутой подалгеброй A алгебры B такой, что $\dim B/A = 1$. Аналогично, ядро «точечного дифференцирования», т. е. функционала ψ такого, что $\psi(fg) = \psi(f)\varphi(g) + \psi(g)\psi(f)$, где φ — мультипликативный функционал, есть подалгебра коразмерности 1. В комплексном случае эти примеры исчерпывают всевозможные подалгебры коразмерности 1. В частности, всякая такая подалгебра алгебры $C(X)$ не разделяет точки компакта X, так как на $C(X)$ нет никаких (даже разрывных) дифференцирований. Близкое описание допускают все подалгебры конечной коразмерности.

Алгебра A тех непрерывных функций на единичной окружности, к-рые допускают аналитич. продолжение внутрь единичного круга, является максимальной подалгеброй алгебры непрерывных функций на окружности; это утверждение может рассматриваться как обобщение теоремы Вейерштрасса, к-рая означает, что замкнутая подалгебра алгебры $C(\Gamma)$, где $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$, содержащая A и функцию $\bar{z}$, совпадает с $C(\Gamma)$. Алгебра $L^1_+(\mathbb{R}) = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : f(t) = 0 \text{ при } t < 0\}$ является замкнутой подалгеброй алгебры $L^1(\mathbb{R})$; эта подалгебра максимальна.

Пусть α — иррациональное число, A_α — алгебра, состоящая из всех тех непрерывных функций на двумерном торе, коэффициенты Фурье к-рых $c_{mn} = 0$ при $m + n\alpha < 0$. Эта алгебра является максимальной подалгеброй алгебры всех непрерывных функций тора. Тор служит границей Шилова относительно A_α, и A_α есть алгебра Дирихле. Если тор реализовать в виде остова единичного бицилиндра в $\mathbb{C}^2$, то пространство максимальных идеалов A_α идентифицируется с подмножеством бицилиндра, к-рое описывается уравнением $|z_1| = |z_2|^\alpha$. Точка $(0, 0)$ не принадлежит границе Шилова, но является одноточечной долей Глисона (два мультипликативных функционала φ_1 и φ_2 на равномерной алгебре принадлежат, по определению, одной и той же доле, если $\|\varphi_1 - \varphi_2\| < 2$). Алгебра A_α аналитична (в смысле свойства единственности: $f = 0$, если $\hat{f}(\xi) = 0$ для точек непустого открытого множества) на пространстве максимальных идеалов, хотя вещественная размерность пространства максимальных идеалов равна 3. Алгебра непрерывных функций на n-мерном торе, допускающих распространение внутрь

соответствующего полицилиндра, не является максимальной при $n>1$, но она максимальна в классе подалгебр, инвариантных относительно голоморфных автоморфизмов тора.

Лит. см. при статье *Банахова алгебра*. *Е. А. Горин.*

КОММУТАТИВНАЯ ГРУППА — то же, что *абелева группа*.

КОММУТАТИВНАЯ ГРУППОВАЯ СХЕМА — групповая схема G над базисной схемой S, значение к-рой на любой S-схеме является абелевой группой. Примерами К. г. с. служат *абелевы схемы* и *алгебраические торы*. Обобщением алгебраич. торов в рамках теории групповых схем служит следующее понятие. Говорят, что К. г. с. есть групповая схема мультипликативного типа, если для любой точки $s\in S$ существует открытая окрестность $U\ni s$ и абсолютно плоский квазикомпактный морфизм $f: U\to U$ такой, что К. г. с. $G'=G\times_U U'$ является диагонализируемой над U'. При этом диагонализируемой групповой схемой наз. групповая схема

$$D_S(M)=\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_S(M)),$$

где M — абелева группа и $\mathcal{O}_S(M)$ — ее групповая алгебра с коэффициентами в структурном пучке $\mathcal{O}_S$ схемы S. В случае, когда S есть спектр алгебраически замкнутого поля, это понятие сводится к понятию диагонализируемой группы. Если $M=\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел, то $D_S(M)$ совпадает с мультипликативной групповой схемой $G_{m,\,S}$.

Пусть G — групповая схема над S, слой к-рой над точкой $s\in S$ является групповой схемой мультипликативного типа над полем вычетов $k(s)$. Тогда существует окрестность U точки s такая, что $G\times_S U$ является групповой схемой мультипликативного типа над U (теорема жесткости Гротендика).

Строение К. г. с. изучено лишь в случае, когда базисная схема S есть спектр поля k, а К. г. с. G имеет конечный тип над k. В этом случае К. г. с. содержит максимальную инвариантную групповую аффинную подсхему, фактор по к-рой является абелевым многообразием. Любая аффинная К. г. с. G такого типа обладает максимальной инвариантной групповой подсхемой G_m мультипликативного типа, фактор по к-рой является унипотентной группой. Если поле k совершенно, то $G\simeq G^m\times G^n$, где G^u — максимальная унипотентная подгруппа в G.

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [2] Grothendieck A., в кн.: Schémas en groupes, t. 2, B.— Hdlb.— N. Y., 1970, p. 1—179; [3] Demazure M., Gabriel P., Groupes algébriques, P.— Amst., 1970; [4] Oort F., Commutative group schemes, B.— Hdlb.— N. Y., 1966. *И. В. Долгачев.*

КОММУТАТИВНОЕ КОЛЬЦО — кольцо, умножение в к-ром удовлетворяет закону *коммутативности*. Теория ассоциативно-коммутативных колец с единицей наз. *коммутативной алгеброй*. Примером неассоциативных К. к. могут служить йордановы кольца (см. *Йорданова алгебра*). *О. А. Иванова.*

КОММУТАТИВНОСТЬ, перестановочность,— свойство *алгебраической операции*. Для сложения и умножения К. выражается формулами

$$a+b=b+a \quad \text{и} \quad ab=ba.$$

Произвольная бинарная операция $*$ коммутативна (или, что то же, для $*$ выполняется закон коммутативности), если в данной алгебраич. системе справедливо тождество $x*y=y*x$. *Д. М. Смирнов.*

КОММУТАТОР элементов a и b мультиоператорной группы — элемент

$$-a-b+a+b.$$

Для групп без мультиоператоров (где операцию принято наз. умножением) К. элементов a и b будет элемент $a^{-1}b^{-1}ab$. Множество всевозможных К. в группе G порождает подгруппу, наз. *коммутантом* группы G.

В ассоциативной алгебре произведением Ли, или К. элементов a и b, наз. элемент $[x, y]=xy-yx$.

О. А. Иванова.

КОММУТАЦИОННЫХ И АНТИКОММУТАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — линейное слабо непрерывное отображение $f \to a_f$, $f \in L$, некоторого предгильбертова пространства L в совокупность (вообще говоря, неограниченных) операторов, действующих в каком-либо гильбертовом пространстве H, такое, что выполнены либо соотношения коммутации

$$a_{f_1} a^*_{f_2} - a^*_{f_2} a_{f_1} = (f_1, f_2)\, E, \quad a_{f_1} a_{f_2} - a_{f_2} a_{f_1} = 0, \qquad (1)$$

либо соотношения антикоммутации

$$a_{f_1} a^*_{f_2} + a^*_{f_2} a_{f_1} = (f_1, f_2)\, E, \quad a_{f_1} a_{f_2} + a_{f_2} a_{f_1} = 0, \qquad (2)$$

где a^*_f, $f \in L$,— оператор в H, сопряженный оператору a_f, E — единичный оператор в H и $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в L.

В случае, когда пространство L конечномерно, все неприводимые представления как соотношений (1), так и соотношений (2) унитарно эквивалентны друг другу. В случае бесконечномерного пространства существует бесконечно много различных (не унитарно эквивалентных) неприводимых представлений соотношений (1) и (2); для полного сепарабельного пространства L все они описаны [2] — [5].

Операторы a_f, $f \in L$, удовлетворяющие соотношениям (1) и (2), лежат в основе формализма так наз. вторичного квантования (где a_f наз. обычно оператором уничтожения частицы в состоянии $f \in L$, а оператор a^*_f — оператором рождения этой частицы), часто используемого при исследовании квантовых физич. систем с большим числом степеней свободы. Однако во вторичном квантовании используются в основном наиболее простые, так наз. фоковские, К. и а. с. п., то есть неприводимые представления, у к-рых пространство индексов L — сепарабельное гильбертово пространство, а в пространстве H существует так наз. вакуумный вектор, обращаемый всеми операторами a_f, $\forall f \in L$, в нуль.

Лит.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965; [2] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Обобщенные функции, в. 4, М., 1961; [3] Голодец В. Я., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 4, с. 3—64; [4] Gårding L., Wightman A., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1954, v. 40, № 7, p. 617—26; [5] Segal I. E., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1958, v. 88, № 1, p. 12—41.

Р. А. Минлос.

КОМПАКТ — метризуемое *бикомпактное пространство*. Примеры К.: отрезок, окружность, n-мерные куб, шар, сфера, *канторово множество*, *гильбертов кирпич*; n-мерное евклидово пространство не является К., а подмножество такого пространства будет К. тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Замкнутое подмножество К. есть К., и всякий К. гомеоморфен замкнутому подмножеству гильбертова кирпича (теорема Урысона). Для существования гомеоморфизма К. в евклидово пространство необходимо и достаточно, чтобы он был конечномерен (теорема Понтрягина — Нёбелинга). Непрерывный образ К., являющийся T_2-пространством, есть К., и всякий К. есть непрерывный образ канторова множества (теорема Александрова). Произведение конечного или счетного множества К. есть К. Любой К. сепарабелен; среди всех бикомпактов К. характеризуются тем, что обладают конечной или счетной базой. К. характеризуется также тем, что он вполне ограничен относительно какой-нибудь метрики, совместимой его топологией (теорема Хаусдорфа).

К.— один из важнейших классов топологич. пространств. Свойство метризуемого пространства быть К. равносильно каждому из следующих свойств.

1) Из любого счетного открытого покрытия пространства X можно выделить конечное подпокрытие (аналог леммы Гейне — Бореля — Лебега о покрытии отрезка интервалами).

2) Любая счетная система таких замкнутых в X непустых множеств F_i, что $F_{i+1} \subset F_i$, $i = 1, 2, \ldots$, имеет непустое пересечение (обобщение принципа вложенных отрезков Кантора).

3) Из любой последовательности точек пространства X можно выделить сходящуюся в X подпоследовательность (обобщенная теорема Больцано — Вейерштрасса).

4) Любое бесконечное подмножество пространства X имеет в X хотя бы одну предельную точку (обобщенная теорема Больцано — Вейерштрасса).

5) Любая непрерывная на X функция ограничена (обобщенная теорема Вейерштрасса).

6) Любая непрерывная на X функция принимает в нек-рой точке максимальное (минимальное) значение (обобщенная теорема Вейерштрасса).

7) Любая непрерывная на X функция равномерно непрерывна на X относительно какой-либо метрики, совместимой с топологией пространства X (обобщенная теорема Гейне — Кантора).

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 4 изд., М., 1976, гл. 2.

Б. А. Пасынков.

КОМПАКТНАЯ ГРУППА — *топологическая группа*, компактная как топологич. пространство. Напр., всякая конечная группа (в дискретной топологии) является К. г. Алгебраическая группа, хотя она и является компактным топологич. пространством (относительно топологии Зариского), не будет топологич. группой относительно этой топологии и потому не будет К. г.

Два важнейших типа К. г. представляют следующие группы. 1) Локально связные компактные группы. Примерами таких К. г. являются группа $U(n, \mathbb{C})$ всех унитарных комплексных матриц порядка n, группа $O(n, \mathbb{R})$ всех ортогональных вещественных матриц порядка n (с топологией, индуцированной топологией полей $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ соответственно, определенной обычным абсолютным значением) и, более общо, любая компактная вещественная группа Ли. 2) Вполне несвязные компактные группы. Такова группа $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ невырожденных матриц порядка n с коэффициентами в кольце $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел (с топологией, индуцированной топологией кольца $\mathbb{Z}_p$, определенной p-адическим нормированием) (см. *Вполне несвязное пространство*).

Любая вполне несвязная К. г. является *проконечной группой*, и обратно, всякая проконечная группа будет вполне несвязной К. г. Вполне несвязные хаусдорфовы К. г. могут быть охарактеризованы как К. г. нулевой топологич. размерности. Если же G локально связна и конечномерна, то G — вещественная группа Ли [1]. Структура К. г. общего вида до нек-рой степени определена структурой этих двух типов К. г. А именно: в произвольной конечномерной К. г. G имеется такой нульмерный нормальный делитель N (лежащий в центре группы G), что G/N — вещественная группа Ли и, более того, нек-рая окрестность единицы в G является прямым произведением группы N и вещественной *Ли локальной группы*. Всякая связная конечномерная К. г. имеет вид $(P \times C)/Z$, где P — односвязная компактная полупростая вещественная группа Ли, C — связная конечномерная коммутативная К. г., а Z — конечный центральный нормальный делитель, у к-рого лишь единица лежит в C. Изучение строения связных компактных вещественных групп Ли доведено до их полной классификации (см. *Ли компактная группа*); строение коммутативных К. г. выясняется в теории двойственности Понтрягина. Любая К. г. (не

обязательно конечномерная) является проективным пределом компактных вещественных групп Ли [2]. Топологич. строение указанных двух типов К. г. следующее: всякая локально связная конечномерная К. г. является топологич. многообразием, а всякая бесконечная нульмерная К. г. со счетной базой гомеоморфна канторову совершенному множеству.

Изучение строения К. г. основано на том, что всякая К. г. G обладает достаточной системой конечномерных линейных представлений, т. е. для любого элемента $g \in G$ существует такое непрерывное конечномерное линейное представление ρ, для к-рого $g \notin \operatorname{Ker} \rho$. Этот факт является одним из важных результатов далеко развитой общей теории линейных представлений К. г. Эта теория существенно использует то, что каждая К. г. обладает двусторонне инвариантной мерой $\mu(g)$, к-рая позволяет определить на G инвариантное интегрирование. Важнейшие факты этой теории состоят в следующем. Всякое непрерывное представление К. г. G в предгильбертовом пространстве эквивалентно унитарному представлению. Пусть $L^2(G)$ — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом по инвариантной мере $\mu(g)$ комплекснозначных функций на G. Действие группы G на функции левыми и правыми сдвигами определяет на $L^2(G)$ структуры левого и правого G-модулей. Соответствующие представления наз. соответственно левым и правым регулярным представлением группы G; они унитарны и унитарно эквивалентны. Пусть $\{R^\alpha,\ \alpha \in I\}$ — семейство всевозможных попарно неэквивалентных конечномерных неприводимых унитарных представлений К. г. G и $m_{ij}^\alpha(g)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n_\alpha = \dim R^\alpha$—набор матричных элементов представления R^α в некотором ортонормированном базисе. Тогда функции $m_{ij}^\alpha(g)$ лежат в $L^2(G)$ и образуют там полную ортонормированную систему, причем норма функции $m_{ij}^\alpha(g)$ равна $n_\alpha^{-1/2}$. Любая непрерывная на G комплекснозначная функция может быть с любой точностью равномерно аппроксимирована конечными линейными комбинациями функций $m_{ij}^\alpha(g)$ (теорема Петера — Вейля). Характеры неприводимых унитарных конечномерных представлений попарно ортогональны и имеют норму 1. Непрерывные конечномерные унитарные представления эквивалентны тогда и только тогда, когда их характеры равны. Непрерывное конечномерное унитарное представление неприводимо тогда и только тогда, когда норма его характера (который лежит в $L^2(G)$) равна 1. Всякое неприводимое непрерывное унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве конечномерно. Всякое непрерывное унитарное представление группы в гильбертовом пространстве является ортогональной прямой суммой унитарных представлений, кратных конечномерным неприводимым представлениям. В частности, кратность вхождения представления R^α в правое регулярное представление равна $n_\alpha = \dim R^\alpha$; при этом сумма всех G-подмодулей в G-модуле $L^2(G)$, изоморфных R^α, является в точности линейной оболочкой всех функций $m_{ij}^\alpha(g)$.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, М., 1950; [3] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [4] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970.

В. Л. Попов.

КОМПАКТНОЕ МНОЖЕСТВО — подмножество M топологич. пространства X такое, что каждая бесконечная последовательность $\{x_i,\ i \in \mathbb{Z}\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к нек-рой точке x_0 пространства X. Если $x_0 \in M$, то M наз. компактным в себе множеством. Оно является

компактным пространством в индуцированной из X топологии. Обратно, всякое К. м. метрич. пространства является в такой топологии компактным пространством. Множество, замыкание к-рого — К. м., наз. относительно компактным множеством.

М. И. Войцеховский.

КОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологич. пространство, обладающее свойством *компактности*. Метризуемое К. п. является *компактом*. Иногда под К. п. понимается *бикомпактное пространство*, причем требуется его отделимость; пространство без этого условия наз. квазикомпактным. Пространство, представимое в виде счетного объединения К. п., наз. σ-компактным.

М. И. Войцеховский.

КОМПАКТНОЙ СХОДИМОСТИ ТОПОЛОГИЯ — одна из топологий в пространстве непрерывных отображений, по существу, то же, что и *бикомпактно открытая топология*, в определении к-рой бикомпактность заменена свойством *компактности* (в том или ином смысле). Для пространства отображений $L(E, F)$ локально выпуклых пространств E и F К. с. т.— одна из σ-топологий, т. е. топологий равномерной сходимости на множествах из семейства σ ограниченных множеств в E; она согласуется со структурой векторного пространства $L(E, F)$ и локально выпукла.

М. И. Войцеховский.

КОМПАКТНОСТИ ПРИНЦИП в теории функций комплексного переменного — условие компактности семейств аналитических функций. Бесконечное семейство $\Phi=\{f(z)\}$ голоморфных функций в области D комплексной плоскости z называется компактным, если из любой последовательности $\{f_k(z)\}\subset\Phi$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к аналитической функции в D или, что то же самое, равномерно сходящуюся внутри D, т. е. равномерно сходящуюся на любом компакте $K\subset D$. К. п. был дан П. Монтелем (P. Montel, 1927, см. [1]): для того чтобы семейство Φ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограниченным внутри D, т. е. равномерно ограниченным на любом компакте $K\subset D$.

Пусть H_D — комплексное векторное пространство голоморфных функций в области D пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, с топологией равномерной сходимости на компактах $K\subset D$. К. п. можно сформулировать и в более абстрактной форме: замкнутое множество $\Phi\subset H_D$ компактно в H_D тогда и только тогда, когда оно ограничено в H_D. Понятие компактных семейств аналитич. функций тесно связано с *нормальными семействами*. См. также *Витали теорема*.

Лит.: [1] Монтель П., Нормальные семейства аналитических функций, пер. с франц., М.— Л., 1936; [2] Мальгранж Б., Лекции по теории функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969.

Е. Д. Соломенцев.

КОМПАКТНОСТЬ — свойство топологич. пространства, состоящее в том, что каждое бесконечное его подмножество имеет предельную точку. Для метрич. пространства понятие К. совпадает с понятием *бикомпактности*. Свойство К. может быть выражено в такой форме: всякое счетное подмножество имеет предельную точку, так что компактные пространства естественно называть компактными для мощности $\aleph_0$.

В связи с этим возникают понятия инициальной и финальной К. или, более общо, компактности в отрезке мощностей $[a, b]$, или $[a, b]$-компактности, выражаемой в трех эквивалентных формах: 1) всякое множество $M\subset X$ мощности $m\in[a, b]$ имеет точку полного накопления, т. е. такую точку ξ, что для каждой ее окрестности O_ξ множество $O_\xi\cap M$ имеет ту же мощность, что и M; 2) всякая вполне упорядоченная система порядкового типа $\omega\in[\omega_a, \omega_b]$ замкнутых множеств имеет непустое пересечение; 3) всякое открытое покрытие мощности $m\subset[a, b]$ со-

держит покрытие мощности $<m$. Если $a=\aleph_0$, то X наз. инициально компактным вплоть до мощности b. Просто К. означает инициальную К. до мощности $\aleph_0$ и поэтому иногда К. наз. счетной К. Если $b\geqslant a$ — любое, то X наз. финально компактным, начиная с мощности a; так, всякое пространство со счетной базой финально компактно с $a=\aleph_1$. Бикомпактные пространства инициально компактны до любой (бесконечной) мощности и одновременно финально компактны, начиная с любой мощности,— отсюда их название. Таким образом, всякое бикомпактное пространство компактно, но не наоборот: пространство $W(\omega_1)$ всех порядковых чисел $<\omega_1$ компактно, но не бикомпактно. Из К. пространства X, вообще говоря, не следует, что X является *компактным множеством*, напр. в пространстве (неметризуемом) I^c существует замкнутое (и следовательно бикомпактное) множество, не содержащее никакой нестационарной сходящейся последовательности. *М. И. Войцеховский.*

КОМПАКТНЫЙ ОПЕРАТОР — оператор A, определенный на множестве M топологич. векторного пространства X, со значениями в топологич. векторном пространстве Y такой, что всякое ограниченное подмножество множества M он отображает в предкомпактное множество пространства Y. Если, кроме того, оператор A непрерывен на M, то он наз. вполне непрерывным на этом множестве. В случае, когда X и Y банаховы или, более общо, борнологические пространства, а оператор $A: X\to Y$ линеен, то понятия компактного и вполне непрерывного оператора совпадают. Если A — компактный, а B — непрерывный операторы, то $A\circ B$ и $B\circ A$ — К. о., так что множество К. о. есть двусторонний идеал в кольце всех непрерывных операторов. В частности, К. о. не имеет непрерывного обратного. Свойство компактности играет существенную роль в теории неподвижных точек оператора и при изучении его спектра, к-рый в этом случае обладает рядом «хороших» свойств.

Примерами К. о. являются *интегральные операторы* Фредгольма

$$Ax=\int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

Гаммерштейна

$$Ax=\int_a^b K(t, s)\, g(s, x(s))\, ds,$$

и Урысона

$$Ax=\int_a^b K(t, s, x(s))\, ds$$

в нек-рых функциональных пространствах при соответствующих ограничениях на функции $K(t, s)$, $g(t, u)$ и $K(t, s, u)$.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [3] Рудин У., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1975; [4] Красносельский М. А. и др., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966.

В. И. Соболев.

КОМПАКТНЫЙ ЭЛЕМЕНТ решетки — элемент a решетки L, для которого условие

$$a\leqslant \vee_{j\in I} x_j,\ x_j\in L,$$

влечет

$$a\leqslant x_{j_1}\vee\ldots\vee x_{j_k}$$

для некоторого конечного подмножества $\{j_1, \ldots, j_k\}\subseteq J$.

Т. С. Фофанова.

КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ — векторы, параллельные одной плоскости. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов

$$\boldsymbol{a}_1=\{x_1, y_1, z_1\},\ \boldsymbol{a}_2=\{x_2, y_2, z_2\},\ \boldsymbol{a}_3=\{x_3, y_3, z_3\}$$

является равенство:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

КОМПЛЕКС — частично упорядоченное рефлексивным, правильным и транзитивным отношением $<$ множество $K=\{t\}$ каких-либо элементов t, вместе с целочисленной функцией $\dim t$, называемой размерностью элемента t, $[t:t']$, называемой коэффициентом инцидентности элементов t и t', которые удовлетворяют условиям: 1) из $t'<t$ следует, что $\dim t'<\dim t$; 2) $[t:t']=[t':t]$; 3) из $[t:t']\neq 0$ следует, что либо $t'<t$, либо $t<t'$, и $|\dim t-\dim t'|=1$; 4) для любой пары элементов t, t'', из K, размерности к-рых отличаются на две единицы, в K найдется не более, чем конечное число таких элементов t', что

$$[t:t']\,[t':t'']\neq 0 \text{ и } \sum_{t'}[t:t']\,[t':t'']=0.$$

Заменой $[t:t']$ на $\alpha(t)\alpha(t')\,[t:t']$, где $\alpha(t)$ — функция со значениями ± 1, получается К., отождествляемый с K; иначе говоря, инциденции $[t:t']$ задаются с точностью до множителя $\alpha(t)\alpha(t')$; переход от одного значения к другому наз. переменой ориентации К. K; элемент t сохраняет или меняет ориентацию, смотря по тому, что $\alpha(t)=\pm 1$ или, соответственно, -1.

К. K наз. конечномерным, а именно — n-мерным, если n есть максимальная размерность симплексов из K; если же в K не существует симплекса максимальной размерности, то K наз. бесконечномерным. Звездой элемента t К. K наз. множество всех таких элементов t' из K, что $t'>t$. Замыканием элемента t из K наз. множество всех таких элементов t' из K, что $t'<t$. Границей элемента t из K наз. множество всех таких элементов t' из K, что $t'<t$ и $t'\neq t$. Элемент t' наз. гранью элемента t из K, если $t'<t$; грань t' элемента t наз. истинной гранью, если $t'\neq t$. Элементы t и t' из K наз. инцидентными, если $t'<t$ или $t<t'$. К. K наз. конечным, если множество его элементов конечно. К. наз. звездно конечным, или замкнуто конечным, если звезда (соответственно замыкание каждого его элемента) состоит из конечного числа элементов. К. наз. локально конечным, если он является и звездно конечным, и замкнуто конечным.

Подкомплексом К. K наз. любое подмножество множества K, являющееся К. при тех же размерностях и коэффициентах инцидентности, что и в K. Подкомплекс наз. замкнутым, если он содержит замыкание каждого своего элемента, и открытым, если он содержит звезду каждого своего элемента. Дополнение замкнутого К. есть открытый К., и наоборот. Звезда каждого элемента любого К. является открытым подкомплексом, а замыкание и граница — замкнутыми подкомплексами. r-мерным остовом K^r К. K наз. множество всех таких элементов t из K, что $\dim t\leqslant r$; он является замкнутым подкомплексом.

К. $K=\{t\}$ и L наз. изоморфными, если существует такое взаимно однозначное отображение f множества K на множество L, что $\dim f(t)=\dim t$ и $[t:t']=[f(t):f(t')]$.

Важнейшим типом К. является симплициальный К., к-рый в свою очередь имеет две разновидности: абстрактный К. и геометрический К.

Абстрактный симплициальный комплекс K имеет элементами абстрактные симплексы различных размерностей. r-мерный симплекс t^r есть множество каких-либо $r+1$ объектов $a^0, a^1, \ldots, a^r$.

Эти объекты, т. е. O-мерные симплексы, наз. в е р ш и н а м и К. K. Симплекс о р и е н т и р о в а н, если множество его вершин упорядочено, причем порядки, отличающиеся друг от друга четной перестановкой, задают одну и ту же ориентацию. s-м е р н ы м и г р а н я м и симплекса t^r наз. s-мерные симплексы, вершины к-рых содержатся среди вершин t^r. Вместе с данным симплексом симплициальный К. содержит и все его грани. Порядок $t^s<t^r$ означает, что t^s есть грань t^r. Грани $(a^0, \ldots, a^s)$ и $(a^{s+1}, \ldots, a^r)$ наз. п р о т и в о п о л о ж н ы м и г р а н я м и симплекса t^r. Если t^{r-1} есть грань t^r, противоположная вершине a^i, то

$$[t^{r-1}:t^r]=[t^r:t^{r-1}]=\pm 1,$$

смотря по тому, ориентирован ли t^r так же, как $a^i t^{r-1}$, или нет. Если t^{r-1} не есть грань t^r, то

$$[t^{r-1}:t^r]=[t^r:t^{r-1}]=0.$$

Ориентацией каждого симплекса симплициального К. получается ориентированный К.

Абстрактный симплициальный К. определен, если известны множество его вершин и система, так наз. с х е м а, всех тех конечных подмножеств этого множества, к-рые приняты за симплексы; при этом требуется, чтобы каждая вершина принадлежала хотя бы одному элементу системы и чтобы с каждым входящим в систему элементом ей принадлежали и все подмножества этого элемента. Размерность, ориентация и т. д. определяются как и выше.

П о л и э д р а л ь н ы й (к л е т о ч н ы й) к о м п л е к с n-мерного евклидова пространства E^n есть счетный локально конечный К. K, элементами к-рого являются r-мерные клетки t^r — ограниченные выпуклые открытые подмножества нек-рого E^r из E^n, $0\leqslant r\leqslant n$, причем клетки попарно не пересекаются, объединение клеток, принадлежащих замыканию элемента t^r, есть топологич. замыкание $\overline{t^r}$ множества t^r в E^r, и топологич. замыкание объединения клеток, не принадлежащих звезде элемента t^r, не пересекается с t^r. При этом $t^r<t^s$ означает, что либо $t^r=t^s$, либо $t^r\subset\overline{t^s}\setminus t^s$, а $[t^{r-1}:t^r]$ определяется с помощью коэффициента инцидентности $[E_1^{r-1}:E^r]=-[E_2^{r-1}:E^r]$, где E_1^{r-1} и E_2^{r-1} — те две области, на к-рые пространство E^{r-1}, содержащее t^{r-1}, делит пространство E^r. Объединение клеток полученного таким образом полиэдрального К. K с индуцированной из E^n топологией, наз. п о л и э д р о м и обычно обозначается через $|K|$. Частным видом полиэдрального К. является евклидов г е о м е т р и ч е с к и й с и м п л и ц и а л ь н ы й К., элементы к-рого — евклидовы симплексы из E^n. r-м е р н ы й е в к л и д о в с и м п л е к с t^r состоит из точек $x=(x_1, \ldots, x_n)\in E^n$, заданных соотношениями

$$x_k=\sum_{i=0}^{r}\lambda^i a_k^i, \quad k=1, \ldots, n,$$

где $a^i=(a_1^i, \ldots, a_n^i)$, $i=0, \ldots, r$ — независимые точки из E^n (т. е. не содержащиеся ни в одном E^{r-1} из E^n), $0<\lambda^i<1$,

$$\sum_{i=0}^{r}\lambda^i=1 \quad (\text{если } r=0,\ x=a^0),$$

a^i наз. в е р ш и н а м и t^r, λ^i — б а р и ц е н т р и ч е с к и м и к о о р д и н а т а м и точки x, а t^r — г е о м е т р и ч е с к и м с и м п л е к с о м, порожденным абстрактным симплексом $(a^0, a^1, \ldots, a^r)$.

Пусть K — счетный локально конечный абстрактный симплициальный К., вершины к-рого принадлежат E^n, причем если какие-либо вершины образуют симплекс, то они независимы, если два симплекса из K не имеют общей вершины, то порожденные ими геометрич. симплексы не пересекаются, и замыкание объеди-

нения всех тех геометрич. симплексов, к-рые порождены симплексами из K и к-рые не принадлежат одному какому-либо из этих порожденных симплексов, не пересекаются с последним. На множество порожденных геометрич. симплексов переносятся из K понятия размерности, порядка, инцидентности, и т. п., это превращает указанное множество в полиэдральный К., наз. евклидовой реализацией K.

Геометрич. реализация, не обязательно евклидова, возможна и для любого абстрактного симплициального К. Пусть $\{a^i\}$ — совокупность вершин произвольного абстрактного симплициального К. K, обозначенных индексами i из нек-рого вполне упорядоченного множества I, $|K|$ — множество всех таких систем $\{\lambda_i\}$, $i \in I$, неотрицательных действительных чисел λ_i, что вершины, соответствующие отличным от нуля координатам $\lambda_{i_0}, \ldots, \lambda_{i_r}$ системы $\{\lambda_i\}$, образуют симплекс $(a^{i_0}, \ldots, a^{i_r})$ из K (число таких координат конечно) и $\sum_i \lambda_i = 1$. Симплексу $t^r = (a^{i_0}, \ldots, a^{i_r})$ из K ставится в соответствие множество $|t^r|$ всех таких систем $\{\lambda_i\}$, что $\lambda_i \neq 0$ тогда и только тогда, когда i есть один из $i_0, \ldots, i_r$; тогда $|K|$ есть объединение множеств $|t^r|$. Пусть $|t^r|$ гомеоморфно вложено в E^{r+1}: точке $\{\lambda_i\}$ из $|t^r|$ соответствует точка $\{\lambda_{i_0}, \ldots, \lambda_{i_r}\}$ из E^{r+1}. Это вносит топологию в $|t^r|$ и в $|K|$: множество из $|K|$ считается открытым, если его пересечение с каждым $|t^r|$ открыто в $|t^r|$. Полиэдр $|K|$ и наз. геометрической реализацией К. K, а K — триангуляцией полиэдра $|K|$. К. K конечен (соответственно локально конечен) тогда и только тогда, когда $|K|$ является компактным (соответственно локально компактным) пространством. Локальная конечность К. K является также необходимым и достаточным условием метризуемости $|K|$, причем метрика задается формулой

$$\rho(\{\lambda_i\}, \{\mu_i\}) = \sqrt{\sum_i (\lambda_i - \mu_i)^2}.$$

Если K — счетный локально конечный n-мерный К., то он может быть реализован в $(2n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{2n+1}. К. K реализуем в гильбертовом пространстве, если $|K|$ можно гомеоморфно вложить в это пространство так, чтобы каждый замкнутый симплекс из $|K|$ получал евклидову реализацию; это возможно тогда и только тогда, когда K есть счетный локально конечный симплициальный К.

Конечный геометрический К. есть такое множество открытых геометрич. симплексов, к-рое вместе с нек-рым симплексом содержит и все его грани, а пересечение различных симплексов пусто. При рассмотрении замкнутых симплексов второе условие заменяется требованием, чтобы пересечение двух замкнутых симплексов было пусто или являлось замкнутой гранью обоих этих симплексов.

Понятие К. находит наибольшее применение в теории гомологий. Использование симплициальных К. при вычислении топологич. инвариантов полиэдров осложняется тем, что при триангуляции полиэдра может понадобиться слишком много симплексов. В этом отношении преимущество принадлежит *клеточному разбиению*, при к-ром количество клеток может быть гораздо меньшим, чем количество симплексов при любом симплициальном разбиении этого полиэдра. С другой стороны, и симплициальные комплексы и триангуляции имеют свои преимущества, напр. при симплициальной аппроксимации непрерывного отображения, при составлении и применении матриц инцидентности, при использовании комплексов для гомологич. исследования общих топологич. пространств и т. п.

Симплициальным отображением К. K в К. L наз. функция $f: K \to L$, ставящая в соответствие каждой вершине a К. K нек-рую вершину $f(a)$ К. L так, что если какие-либо вершины $a^{i_0}, \ldots, a^{i_r}$ К. K образуют в нем симплекс, то и вершины $f(a^{i_0}), \ldots, f(a^{i_r})$, среди к-рых могут быть и совпадающие, должны образовывать симплекс К. L. Функция f каждому симплексу t^r К. K приводит в соответствие нек-рый симплекс $t^s = f(t^r)$ К. L. Симплициальным отображением $f: (K, L) \to (K', L')$ пары (K, L) в пару (K', L'), где L, L' — замкнутые подкомплексы комплексов K, K' соответственно, наз. такое симплициальное отображение $f: K \to K'$, что $f(L) \subset L'$. Множество всех симплициальных К. и всех их симплициальных отображений также, как и множество всех пар симплициальных К. и всех их симплициальных отображений, образуют категории.

Гомологии К., выражавшиеся сначала числовыми инвариантами, позднее стали представляться алгебраич. средствами — группами, модулями, пучками и т. п. Схема их построения такова. Пусть K — произвольный К., а G — абелева группа; r-мерной цепью (вообще говоря, бесконечной) К. K над группой коэффициентов G наз. функция c_r, областью определения к-рой является множество всех r-мерных элементов К. K, а множеством значений — группа G. Совокупность $\{c_r\}$ всех r-мерных цепей c_r К. K, обозначаемая через $C_r(K; G)$ относительно операции сложения

$$(c_r + c'_r)(t^r) = c_r(t^r) + c'_r(t^r), \quad c_r, c'_r \in C_r(K; G), \quad t \in K,$$

образует группу, наз. группой r-мерных цепей К. K над G. В предположении, что K — звездно конечный К., в $C_r(K; G)$ вводится граничный оператор ∂_r с помощью формулы

$$\partial c_r = \sum_j \left(\sum_i c_r(t_i^r) \left[t_i^r : t_j^{r-1} \right] \right) t_j^{r-1},$$

к-рый определяет гомоморфизм

$$\partial_r : C_r(K; G) \to C_{r-1}(K; G).$$

В силу равенства $\partial_{r-1} \partial r = 0$ получается цепной К. $\{C_r(K; G), \partial_r\}$, группа гомологии $H_r(K; G)$ к-рого, т. е. факторгруппа группы $\operatorname{Ker} \partial_r$ по подгруппе $\operatorname{Im} \partial_{r+1}$, наз. r-мерной группой гомологии К. K над G (группа $\operatorname{Ker} \partial_r$ часто обозначается через $Z_r(K; G)$ и наз. группой r-мерных циклов К. K над G, а группа $\operatorname{Im} \partial_{r+1}$ обозначается через $B_r(K; G)$ и наз. группой r-мерных ограничивающих циклов К. K над G).

Наряду с группами гомологий для К. определяются группы когомологий. При их определении исходной является опять же группа цепей, называемая в этом случае группой коцепей и обозначаемая через $C^r(K; G)$. К. K предполагается здесь замкнуто конечным, а ограничный оператор δ^r задается формулой

$$\delta^r c^r = \sum_j \left(\sum_i c^r(t_i^r) \left[t_i^r : t_j^{r+1} \right] \right) t_j^{r+1},$$

определяющей гомоморфизм

$$\delta^r : C^r(K; G) \to C^{r+1}(K; G).$$

Когомологическая группа $H^r(K; G)$ этого коцепного комплекса $\{C^r(K; G), \delta^r\}$, $\delta^{r+1} \delta^r = 0$, т. е. факторгруппа группы $\operatorname{Ker} \delta^r$ по подгруппе $\operatorname{Im} \delta^{r-1}$, наз. r-мерной когомологической группой К. K над G (группа $\operatorname{Ker} \delta^r$ часто обозначается через $Z^r(K; G)$ и наз. группой r-мерных коциклов К. K над G, а группа $\operatorname{Im} \delta^{r-1}$ обозначается через $B^r(K; G)$ и наз. группой r-мерных кограничивающих коциклов К. K над G).

Звездная (соответственно замкнутая) конечность К. требуется для того, чтобы суммирование при определении граничного (соответственно кограничного) оператора было конечным. В случае звездно конечного К. определяются гомологии произвольных (бесконечных) циклов и когомологии конечных коциклов. В случае замкнуто конечного К.— когомологии бесконечных коциклов и гомологии конечных циклов. В случае локально конечного К. определяются как конечные, так и бесконечные гомологии и когомологии. Если К. произвольный, то его группы гомологии (соответственно когомологии) определяются как пределы прямого (соответственно обратного) спектра групп гомологии (соответственно когомологии) всех локально конечных подкомплексов данного К., упорядоченных по возрастанию.

При исследовании гомологии и когомологии К. рассматривается категория пар симплициальных К. (K, L) и их симплициальных отображений $f : (K, L) \to (K', L')$ и группы $C_r(K, L; G)$ r-мерных конечных цепей К. K по модулю L над G, являющаяся факторгруппой группы $C_r(K; G)$ r-мерных цепей К. K над G по подгруппе $C_r(L; G)$ r-мерных цепей К. L над G. Гомологическая группа $H_r(K, L; G)$ цепного комплекса $\{C_r(K; L; G), \partial_r\}$ наз. r-мерной относительной группой гомологии К. K по модулю L над группой коэффициентов G.

Симплициальное отображение f порождает гомоморфизм f_1 группы $C_r(K; G)$ в группу $C_r(K'; G)$ по формуле

$$(f_1 c_r)(t^r_{K'}) = \sum (\pm c_r(t^r_K)),$$

где $c_r \in C_r(K; G)$, а сумма распространяется на все такие симплексы t^r_K из K, к-рые отображаются на данный симплекс $t^r_{K'}$ из K', причем знак $+$ или $-$ берется в зависимости от того, совпадают или не совпадают ориентации $t^r_{K'}$, и $f(t^r_K)$. Гомоморфизм f_1, распространенный на факторгруппы, порождает гомоморфизм группы $C_r(K, L; G)$ в $C_r(K', L'; G)$; последний гомоморфизм коммутирует с граничным оператором ∂_r, так что получается гомоморфизм относительных групп гомологии

$$f_{*r} : H_r(K, L; G) \to H_r(K', L'; G),$$

наз. гомоморфизмом, индуцированным симплициальным отображением f. Пара (H_r, f_{*r}) является ковариантным функтором из категории пар симплициальных К. и симплициальных отображений в категорию абелевых групп.

Отображения включения $L \overset{\varphi}{\subset} K \overset{\psi}{\subset} (K, L)$, где L и K — пары $(L, \varnothing)$ и $(K, \varnothing)$, порождают точную последовательность

$$0 \to C_r(L; G) \xrightarrow{\varphi} C_r(K; G) \xrightarrow{\psi} C_r(K, L; G) \to 0.$$

Пусть z_r — произвольный цикл К. K по модулю L из любого элемента h_r группы $H_r(K, L; G)$; существует такая цепь c_r К. K, что $\psi(c_r) = z_r$ (ψ — эпиморфизм), цепь $\psi(\partial_r c_r) = \partial_r \psi(c_r) = \partial_r z_r$ К. K лежит на L (т. е. равняется нулю на симплексах из $K \setminus L$) и принадлежит $\operatorname{Ker} \psi$; совпадающая с ней цепь — прообраз $\varphi^{-1}(\partial_r z_r)$ при мономорфизме φ — является циклом К. L. Данному элементу h_r ставится в соответствие класс гомологии $h_{r-1} \in H_{r-1}(L; G)$ соответствующего цикла, и получается гомоморфизм

$$\partial_{*r} : H_r(K, L; G) \to H_{r-1}(L; G),$$

наз. связывающим гомоморфизмом. Он согласован с функтором $\{H_r, f_{*r}\}$, т. е. имеет место равенство $\partial_{*r} f_{*r} = (f|_L)_{*r} \partial_{*r}$, где $f|_L$ — ограничение f на L. Отображения вложения $\varphi : L \subset K$, $\psi : K \subset (K, L)$

порождают точную последовательность групп

$$\ldots \xleftarrow{\Phi_{*(r-1)}} H_{r-1}(L;\, G) \xleftarrow{\partial_{*r}} H_r(K, L;\, G) \xleftarrow{\Psi_{*r}}$$
$$\xleftarrow{} H_r(K;\, G) \xleftarrow{\varphi_{*r}} H_r(L;\, G) \xleftarrow{\partial_{*(r+1)}} \ldots,$$

наз. гомологической последовательностью пары (K, L).

Симплициальные отображения $f,\ g : (K, L) \to (K', L')$ наз. смежными, если для каждого симплекса t^r из K симплексы $f(t^r)$ и $g(t^r)$ являются гранями одного и того же симплекса из K'. В категории пар симплициальных К. и их симплициальных отображений это отношение играет роль отношения гомотопности: для любых смежных симплициальных отображений $f,\ g : (K, L) \to (K', L')$ и для любого r индуцированные гомоморфизмы $f_{*r},\ g_{*r}$ группы $H_r(K, L;\, G)$ в группу $H_r(K', L';\, G)$ совпадают.

Вложение $i : (K_1, L_1) \subset (K, L)$ наз. отображением вырезания, если $K_1 - L_1 = K - L$. Свойство вырезания состоит в том, что всякое отображение вырезания симплициальных пар i для любого r индуцирует изоморфизм $i_{*r} : H_r(K_1, L_1;\, G) \approx H_r(K, L;\, G)$. r-мерная группа гомологии любого К. K, состоящего из одной точки над произвольной группой коэффициентов G, является нулевой группой для всех $r \neq 0$ и изоморфна группе G при $r = 0$.

Таким образом, тройка $(H_r,\ f_{*r},\ \partial_{*r})$ представляет собой теорию гомологий в смысле Стинрода — Эйленберга (см. *Стинрода — Эйленберга аксиомы*).

Аналогично строится теория когомологии. Группа $C^r(K, L;\, G)$ r-мерных бесконечных коцепей К. K по модулю подкомплекса L над G является множеством всех таких r-мерных коцепей c^r К. K, к-рые равны нулю на симплексах t^r подкомплекса L К. K, а r-мерная относительная группа когомологии $H^r(K, L;\, G)$ К. K по модулю L над группой коэффициентов G есть когомологич. группа коцепного комплекса $\{C^r(K, L;\, G),\ \delta^r\}$.

Симплициальное отображение f порождает гомоморфизм f^1 группы $C^r(K';\, G)$ в группу $C^r(K;\, G)$

$$(f^1 c^r)\,(t^r_K) = c^r\,(f\,(t^r_K)),\quad t^r_K \in K,\ c_r \in C^r\,(K';\, G).$$

Гомоморфизм f^1 порождает также гомоморфизм группы $C^r(K', L';\, G)$ в группу $C^r(K, L;\, G)$; последний гомоморфизм коммутирует с кограничным оператором δ^r, и получается гоморфизм f^{*r} относительных групп когомологии

$$f^{*r} : H^r\,(K', L';\, G) \to H^r\,(K, L;\, G),$$

наз. гомоморфизмом, индуцированным симплициальным отображением f. Пара $(H^r,\ f^{*r})$ является контравариантным функтором из категории пар симплициальных К. и симплициальных отображений в категорию абелевых групп.

Имеет место точная последовательность

$$0 \xleftarrow{} C^r\,(L;\, G) \xleftarrow{\varphi} C^r\,(K;\, G) \xleftarrow{\Psi} C^r\,(K, L,\, G) \xleftarrow{} 0,$$

порожденная вложениями $\varphi : L \subset K,\ \psi : K \subset (K, L)$. В классе когомологии $h^r \in H^r(L;\, G)$ произвольный коцикл $z^r \in Z^r(L;\, G)$ распространяется до коцепи $z^r_1 \in C^r(K;\, G)$ произвольно, когда t^r не принадлежит подкомплексу L К. K. Кограница $\delta^r z^r_1$ получающейся коцепи равна нулю на L и принадлежит группе $Z^{r+1}(K, L;\, G)$. Класс когомологии $\delta^r h^r \in H^{r+1}(K, L;\, G)$ этого коцикла приводится в соответствие выбранному классу h^r. Это соответствие $h^r \to \delta^r h^r$ определяет гомоморфизм

$$\delta^{*r} : H^r\,(L;\, G) \to H^{r+1}\,(K, L;\, G),$$

наз. связывающим гомоморфизмом. Гомоморфизм δ^{*r} согласован с функтором $\{H^r,\ f^{*r}\}$, т. е. имеет место равенство $\delta^{*r}(f|_L)^{*r} = f^{*r}\delta^{*r}$.

Прямая последовательность групп

$$\ldots \xrightarrow{\varphi^{*r}} H^r(L;G) \xrightarrow{\delta^{*r}} H^{r+1}(K,L;G) \xrightarrow{\psi^{*(r+1)}} \longrightarrow H^{r+1}(K;G) \xrightarrow{\varphi^{*(r+1)}} H^{r+1}(L;G) \xrightarrow{\delta^{*(r+1)}} \ldots,$$

где $\varphi : L \subset K$ и $\psi : K \subset (K, L)$ — отображения вложения, является точной последовательностью и наз. когомологической последовательностью пары (K, L).

Для любых смежных симплициальных отображений $f, g : (K, L) \to (K', L')$ и любого r индуцированные гомоморфизмы f^{*r}, g^{*r} группы $H^r(K', L'; G)$ в группу $H^r(K, L; G)$ совпадают; всякое отображение вырезания симплициальных пар $i : (K_1, L_1) \subset (K, L)$ индуцирует изоморфизм $i^{*r} : H^r(K, L; G) \approx H^r(K_1, L_1; G)$. Для любого одноточечного К. K группы $H^r(K; G) = 0$ для всех $r \neq 0$, а $H^0(K; G) \approx G$. Таким образом, тройка $(H^r, f^{*r}, \delta^{*r})$ является теорией когомологии (в смысле Стинрода — Эйленберга).

Лит.: [1] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947; [2] его же, Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975; [3] Лефшец С., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1948; [4] Хилтон П.-Дж., Уайли С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, пер. с англ., 1966; [5] Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, 2 изд., М., 1976. *Д. О. Баладзе.*

КОМПЛЕКС — одно из основных понятий гомологической алгебры. Пусть A — абелева категория. Градуированным объектом наз. последовательность $K = (K_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ объектов K_n из A. Последовательность $a = (a_n)$ морфизмов $a_n : K'_n \to K_n$ наз. морфизмом $a : K' \to K$ градуированых объектов. Полагая $K(h)_n = K_{n+h}$, можно определить объект $K(h)$. Морфизм градуированных объектов $K' \to K(h)$ наз. морфизмом степени h из K' в K. Градуированный объект наз. положительным, если $K_n = 0$ для $n < 0$, ограниченным снизу, если $K(h)$ положителен для нек-рого h, и конечным, если $K_n = 0$ для всех, кроме конечного множества, чисел n. Цепной комплекс в категории A состоит из градуированного объекта K и морфизма $d : K \to K$ степени -1 такого, что $d^2 = 0$. Подробнее: $d = (d_n)$, где $d_n : K_n \to K_{n-1}$ и $d_{n-1} d_n = 0$ для любого n. Морфизм цепных комплексов

$$(K', d') \longrightarrow (K, d)$$

это морфизм $a : K' \to K$ градуированных объектов такой, что $ad' = da$. Двойственным образом (как градуированный объект с морфизмом d степени $+1$) определяется коцепной комплекс.

Наиболее часто рассматриваются К. в категориях абелевых групп, модулей, пучков абелевых групп на топологич. пространстве. Так, К. абелевых групп есть градуированная дифференциальная группа, дифференциал в к-рой имеет степень -1 или $+1$.

С каждым цепным К. K связаны три градуированные объекта:

$B = B(K)$: $B_n = \operatorname{Im}(K_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} K_n)$ — границы;

$Z = Z(K)$: $Z_n = \operatorname{Ker}(K_n \xrightarrow{d_n} K_{n-1})$ — циклы;

$H = H(K)$: $H_n = Z_n / B_n$ — n-мерные гомологии (см. *Гомологии комплекса*).

Для коцепного К. аналогичные объекты наз. кограницами, коциклами и когомологиями.

Если $H(K) = 0$, то говорят, что К. K — ациклический.

Морфизм $a : K' \to K$ комплексов индуцирует морфизмы

$$Z(K') \longrightarrow Z(K), \quad B(K') \longrightarrow B(K)$$

и, следовательно, морфизм гомологий или когомологий

$$H(a): H(K') \longrightarrow H(K).$$

Два морфизма $a,\ b: K' \to K$ наз. г о м о т о п н ы м и (что обозначается $a \simeq b$), если существует такой морфизм $s: K' \to K(1)$ (или $s: K' \to K(-1)$ для коцепных К.) градуированных объектов (называемый г о м о т о п и е й), что

$$a - b = ds + sd'$$

(откуда следует, что $H(a) = H(b)$). Комплекс K наз. с т я г и в а е м ы м, если $1_K \simeq 0$ (в этом случае К. K ациклич е н).

Если $0 \to K' \to K \to K'' \to 0$ — точная последовательность К., то существует с в я з ы в а ю щ и й м о р ф и з м $\partial: H(K'') \to H(K)$ степени -1 $(+1)$, естественный относительно морфизмов точных последовательностей и такой, что ассоциированная с ним д л и н н а я г о м о л о г и ч е с к а я п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь (т. е. последовательность

$$\ldots \longrightarrow H_n(K') \longrightarrow H_n(K) \longrightarrow H_n(K'') \xrightarrow{\partial} \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(K') \longrightarrow H_{n-1}(K) \longrightarrow \ldots$$

для цепного К. и последовательность

$$\ldots \longrightarrow H_n(K') \longrightarrow H_n(K) \longrightarrow H_n(K'') \xrightarrow{\partial} \xrightarrow{\partial} H_{n+1}(K') \longrightarrow H_{n+1}(K) \longrightarrow \ldots$$

для коцепного К.) является точной.

К о н у с м о р ф и з м а ц е п н ы х к о м п л е к с о в $a: K' \to K$ есть К. $MC(a)$, определенный следующим образом:

$$MK(a)_n = K_n \oplus K'_{n-1},$$

$$d(a)_{n+1} = \begin{pmatrix} d_{n+1}, & a_n \\ 0, & -d'_n \end{pmatrix}: K_{n+1} \oplus K'_{n-1} \longrightarrow K_n \oplus K'_{n-1}.$$

Разложение К. $MK(a)$ в прямую сумму приводит к точной последовательности К.

$$0 \to K \to MK(a) \to K'(-1) \to 0,$$

для к-рой ассоциированная длинная гомологич. последовательность изоморфна последовательности

$$\ldots \longrightarrow H_n(K) \longrightarrow H_n(MK(a)) \longrightarrow H_{n-1}(K') \xrightarrow{H_{n-1}(a)} \xrightarrow{H_{n-1}(a)} H_{n-1}(K) \longrightarrow H_{n-1}(MK(a)) \longrightarrow \ldots$$

Следовательно, цепной К. $MK(a)$ ациклич е н тогда и только тогда, когда $H(a)$ — изоморфизм. Аналогичные понятия и факты имеют место для коцепных К.

Лит.: [1] Б а с с Х., Алгебраическая К-теория, пер. с англ., М., 1973.

А. В. Михалев.

КОМПЛЕКС п р я м ы х — множество K прямых в трехмерном пространстве (проективном, аффинном, евклидовом), зависящее от трех параметров. Прямая $l \in K$ наз. лучом К. Через каждую точку M пространства проходит однопараметрическая совокупность лучей К.— конус K_M. К. определяет соответствие между точками луча К. и плоскостями, проходящими через этот луч: каждой точке M луча l соответствует плоскость П, касательная к конусу K_M в точке M. Такое соответствие наз. н о р м а л ь н о й к о р р е л я ц и е й. В каждой плоскости пространства располагается однопараметрическое семейство лучей К., огибающих плоскую кривую s. И н ф л е к ц и о н н ы м ц е н т р о м луча $l \in K$ наз. точка $M \in l$, в к-рой кривая s плоскости П, соответствующей точке M в нормальной корреляции, имеет возврат. На каждом луче К. имеется в общем случае четыре инфлекционных центра. Т о ч к о й п р и к о с н о в е н и я линейчатой поверхности К. наз. такая точка M на ее образующей, в к-рой касательная плоскость поверхности совпадает

с плоскостью П, соответствующей точке M в нормальной корреляции. На каждой образующей линейчатой поверхности К. имеется в общем случае две и только две точки прикосновения. Линии, описанные этими точками, наз. линиями прикосновения линейчатой поверхности. Главными поверхностями К. наз. линейчатые поверхности, у к-рых линии прикосновения суть их асимптотич. линии. Проективную классификацию К. можно осуществлять по кратности инфлекционных центров их лучей.

В евклидовом пространстве на каждом луче l определяется инвариантная точка C (центр луча), в к-рой вектор нормали к плоскости П, соответствующей в нормальной корреляции точке C, ортогонален нормали к плоскости П, соответствующей несобственной точке луча l. Примеры К.: специальный К.— множество всех касательных к данной поверхности; линейный К., задаваемый линейным однородным уравнением относительно грассмановых координат луча К.; специальный линейный К.— множество прямых трехмерного пространства, пересекающих данную прямую.

Наряду с К. прямых рассматривают К. (трехпараметрич. семейства) плоскостей, коник, квадрик и других фигур (см. *Фигур многообразие*).

Лит.: [1] Фиников С. П., Теория конгруэнций, М.— Л., 1950; [2] Кованцов Н. И., Теория комплексов, К., 1963.

В. С. Малаховский.

КОМПЛЕКСИФИКАЦИЯ АЛГЕБРЫ ЛИ $\mathfrak{G}$ над $\mathbb{R}$ — комплексная алгебра Ли $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$, являющаяся *тензорным произведением* алгебры $\mathfrak{G}$ на поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{G}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{G} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Таким образом, К. а. Ли $\mathfrak{G}$ получается из $\mathfrak{G}$ расширением поля скаляров с $\mathbb{R}$ до $\mathbb{C}$. Элементами алгебры $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$ можно считать пары (u, v), $u, v \in \mathfrak{G}$; тогда операции в $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$ будут определяться формулами:

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2),$$

$(\alpha + i\beta)(u, v) = (\alpha u - \beta v, \alpha v + \beta u)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$[(u_1, v_1), (u_2, v_2)] = ([u_1, u_2] - [v_1, v_2], [v_1, u_2] + [u_1, v_2])$.

Алгебра $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$ наз. также комплексной оболочкой алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

Нек-рые важные свойства алгебр наследуются при комплексификации: $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$ нильпотентна, разрешима или полупроста тогда и только тогда, когда $\mathfrak{G}$ обладает этим свойством. Однако простота $\mathfrak{G}$ не влечет, вообще говоря, простоту $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$.

Понятие К. а. Ли тесно связано с понятием вещественной *формы* комплексной алгебры Ли. Вещественная подалгебра Ли $\mathfrak{f}$ в комплексной алгебре Ли $\mathfrak{h}$ наз. вещественной формой алгебры Ли $\mathfrak{h}$, если всякий элемент $x \in \mathfrak{h}$ однозначно представим в виде $x = u + iv$, где $u, v \in \mathfrak{f}$. К. а. Ли $\mathfrak{f}$ естественно изоморфна алгебре $\mathfrak{h}$. Не всякая комплексная алгебра Ли имеет вещественную форму. С другой стороны, заданная комплексная алгебра Ли, вообще, может иметь несколько неизоморфных вещественных форм. Так, алгебра Ли всех вещественных матриц порядка n и алгебра Ли всех антиэрмитовых матриц порядка n являются неизоморфными вещественными формами алгебры Ли всех комплексных матриц порядка n (у к-рой имеются и другие вещественные формы).

Лит.: [1] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [3] Гантмахер Ф., «Матем. сб.», 1939, т. 5, в. 2, с. 217—50.

В. Л. Попов.

КОМПЛЕКСИФИКАЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА — комплексное векторное пространство $V^{\mathbb{C}}$, полученное из вещественного векторного пространства

V путем расширения поля скаляров. Пространство $V^{\mathbb{C}}$ определяется как тензорное произведение $V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$. Его можно определить также как множество формальных выражений $x+iy$, где $x,\ y\in V$, с естественно заданными операциями сложения и умножения на комплексные числа. Пространство V вкладывается в $V^{\mathbb{C}}$ в качестве вещественного подпространства и наз. вещественной формой пространства $V^{\mathbb{C}}$. Всякий базис пространства V будет базисом пространства $V^{\mathbb{C}}$ (над $\mathbb{C}$). В частности, $\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}=\dim_{\mathbb{R}} V$.

Операция $V\mapsto V^{\mathbb{C}}$ является функтором из категории векторных пространств над $\mathbb{R}$ в категорию векторных пространств над $\mathbb{C}$. *А. Л. Онищик.*

КОМПЛЕКСИФИКАЦИЯ ГРУППЫ ЛИ G над $\mathbb{R}$ — комплексная группа Ли $G_{\mathbb{C}}$, содержащая G в качестве вещественной подгруппы Ли и такая, что алгебра Ли $\mathfrak{G}$ группы G является вещественной формой алгебры Ли $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$ группы $G_{\mathbb{C}}$ (см. *Комплексификация алгебры Ли*). Группа G при этом наз. вещественной формой группы Ли $G_{\mathbb{C}}$. Напр., группа $U(n)$ всех унитарных матриц порядка n является вещественной формой группы $GL(n,\mathbb{C})$ всех невырожденных матриц порядка n с комплексными элементами.

Имеется взаимно однозначное соответствие между комплексно аналитическими линейными представлениями связной односвязной комплексной группы Ли $G_{\mathbb{C}}$ и вещественно аналитич. представлениями ее связной вещественной формы G, при к-ром неприводимым представлениям соответствуют неприводимые. Это соответствие устанавливается следующим образом: если ρ — (неприводимое) конечномерное комплексно аналитическое представление группы $G_{\mathbb{C}}$, то ограничение ρ на G является (неприводимым) вещественно аналитич. представлением группы G.

Не всякая вещественная группа Ли обладает комплексификацией. В частности, связная полупростая группа Ли G обладает комплексификацией тогда и только тогда, когда G линейна, т. е. изоморфна подгруппе некоторой группы $GL(n,\mathbb{C})$. Например, универсальная накрывающая группы вещественных матриц второго порядка с определителем 1 не имеет комплексификации. Однако всякая компактная группа Ли комплексификацией обладает.

Отсутствие комплексификации у нек-рых вещественных групп Ли инспирировало введение более общего понятия — универсальной комплексификации $(\tilde{G},\ \tau)$ вещественной группы Ли G. Здесь $\tilde{G}$ — комплексная группа Ли, $\tau: G\to\tilde{G}$ — вещественно аналитич. гомоморфизм такой, что для любой комплексной группы Ли H и любого вещественно аналитич. гомоморфизма $\alpha: G\to H$ существует единственный комплексно аналитич. гомоморфизм $\beta:\tilde{G}\to H$, для к-рого $\alpha=\beta\circ\tau$. Универсальная К. г. Ли всегда существует и определена однозначно [3]. Однозначность означает, что если $(\tilde{G}',\ \tau')$ — другая универсальная К. г. Ли G, то существует единственный изоморфизм $\lambda:\tilde{G}\to\tilde{G}'$, для к-рого $\lambda\circ\tau=\tau'$. В общем случае $\dim_{\mathbb{C}}\tilde{G}\leqslant\dim_{\mathbb{R}} G$, если же G односвязна, то $\dim_{\mathbb{C}}\tilde{G}=\dim_{\mathbb{R}} G$ и ядро гомоморфизма τ дискретно.

См. также *Форма* группы Ли.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [3] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976. *В. Л. Попов.*

КОМПЛЕКСНАЯ СТРУКТУРА — 1) К. с. на *действительном векторном пространстве* V — структура комплексного векторного пространства на V, согласованная с исходной структурой. К. с. на V полностью определяется заданием оператора умножения на число i, роль к-рого может играть произвольное линейное преобразование $I: V \to V$, удовлетворяющее условию $I^2 = -E$. Поэтому преобразование такого типа часто наз. К. с. на V. Если V снабжено К. с. I и $v_1, \ldots, v_n$ — базис этого пространства над $\mathbb{C}$, то $v_1, \ldots, v_n, Iv_1, \ldots, Iv_n$ образуют его базис над $\mathbb{R}$, так что $\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$. Если I — К. с. на V, то комплексификация $V^{\mathbb{C}}$ пространства V распадается в прямую сумму $V^{\mathbb{C}} = V_+ \dotplus V_-$, где $V_\pm$ — собственные подпространства преобразования I, продолженного на $V^{\mathbb{C}}$, отвечающие собственным значениям $\pm i$, причем $V_- = \overline{V}_+$. Обратно, всякое комплексное подпространство $S \subset V^{\mathbb{C}}$ такое, что $V^{\mathbb{C}} = S \dotplus \overline{S}$, определяет на V К. с., для к-рой $V_+ = S$.

Любые две К. с. на $2n$-мерном действительном пространстве V переводятся друг в друга нек-рым автоморфизмом пространства V. Множество всех К. с. на V является, таким образом, однородным пространством группы $GL(2n, \mathbb{R})$ и отождествляется с факторпространством $GL(2n, \mathbb{R})/H$, где $H \cong GL(n, \mathbb{C})$ — подгруппа, состоящая из невырожденных матриц вида $\left\| \begin{matrix} A & B \\ -B & A \end{matrix} \right\|$.

2) К. с.— структура комплексного *аналитического многообразия*. Если M — дифференцируемое многообразие, то К. с. на M — это комплексный аналитич. атлас на M, согласованный с заданным на M действительным дифференцируемым атласом. При этом $\dim_{\mathbb{R}} M = 2 \dim_{\mathbb{C}} M$. К. с. на M индуцирует К. с. на каждом касательном пространстве $T_x(M)$ и тем самым индуцирует на M *почти комплексную структуру*, к-рая ее полностью определяет.

Лит.: [1] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [2] Уэллс Р., *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях*, пер. с англ., М., 1976.

А. Л. Онищик.

КОМПЛЕКСНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ МЕТОД, контурного интегрирования метод,— один из наиболее универсальных методов исследования и приложений *дзета-функций*, *L-функций*, вообще, функций, определяемых рядами Дирихле.

К. и. м. в теорию чисел впервые ввел Б. Риман (B. Riemann) [1] в 1876 в связи с изучением свойств дзета-функции. Известные в настоящее время применения К. и. м., опирающиеся на теорему Коши о вычетах, теорему Фрагмена — Линделёфа для рядов Дирихле, метод перевала и т. п., весьма разнообразны по своей форме и содержанию. К. и. м. используется для аналитич. продолжения и вывода функциональных уравнений функций Дирихле; для вывода приближенных функциональных уравнений этих функций; для оценок числа их нетривиальных нулей и оценок плотности распределения таких нулей в той или иной части критической полосы; для получения асимптотич. формул и разного рода оценок важнейших арифметич. функций.

Классический вариант К. и. м. иллюстрируется нижеследующим примером аналитич. продолжения и вывода функционального уравнения дзета-функции Римана (см. [2], [3]). При $s = \sigma + it$, $\sigma > 0$, $n > 0$

$$n^{-s}\Gamma(s) = n^{-s}\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx = \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\,dx.$$

После суммирования получается, что функция $\zeta(s)$, первоначально определенная рядом $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$,

при $\sigma>1$, представляется также формулой

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx. \qquad (1)$$

Пусть рассматривается интеграл

$$J(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,dz,$$

взятый вдоль (бесконечного) контура $C=\alpha+\beta+\gamma$, где α, γ проходят по нижнему и верхнему краям разреза вдоль отрицательной действительной оси плоскости z, обходя начало координат по окружности β радиуса $r<2\pi$. Интеграл $J(s)$ сходится при всех s и притом равномерно в любом круге $|s|<\Delta$, ибо на α и γ подинтегральная функция меньше $e^{-0.5|z|}$ для всех $|x|>z_0(\Delta)$. По теореме Коши он не зависит от r и, значит, представляет целую функцию s. Полагая, что на α, β, γ соответственно $z=\delta e^{-i\pi}$, $z=re^{i\theta}$, $z=\delta e^{i\pi}$ и $f(z)=1/(e^z-1)$, легко расписать $J(s)$ в виде интегралов по действительным переменным:

$$\pi J(s)=\sin\pi s\int_r^\infty \delta^{s-1}f(-\delta)\,d\delta+\frac{r^s}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta s}f(re^{i\theta})\,d\theta.$$

В круге $|z|<\pi$ будет $|zf(z)|<A$. Поэтому второе слагаемое правой части этого равенства меньше, чем $2\pi A r^{\sigma-1}e^{\pi|t|}$, что для любого фиксированного s с $\sigma>1$ стремится к нулю при $r\to 0$. Следовательно, в силу формулы (1), $\pi J(s)=\sin\pi s\Gamma(s)\zeta(s)$ и

$$\zeta(s)=\frac{\pi J(s)}{\sin\pi s\Gamma(s)}\,\Gamma=(1-s)\,J(s). \qquad (2)$$

Эта формула, доказанная в предположении $\sigma>1$, дает продолжение функции $\zeta(s)$ на всю плоскость. Из нее видно, что $\zeta(s)$ является однозначной аналитич. функцией во всей плоскости s, имеющей единственной особенностью простой полюс в точке $s=1$ с вычетом 1.

Для вывода функционального уравнения $\zeta(s)$ предполагается, что $\sigma<0$, N — целое >4. Пусть

$$J_N(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(N)}\frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,dz,$$

где $C(N)$ — контур, отличающийся от прежнего контура замыканием α, γ дугой окружности радиуса $R=2N+1$ с центром в начале координат. Интеграл по внешней дуге контура $C(N)$ оценивается в виде $AR^\sigma e^{\pi|t|}$, что при $\sigma<0$ стремится к нулю при $N\to\infty$. Отсюда, $J_N(s)\to J(s)$ при $N\to\infty$. С другой стороны по теореме о вычетах

$$J_N(s)=\sum_{n=1}^N\{(2\pi ni)^{s-1}+(-2\pi i)^{s-1}\}=$$

$$=2(2\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n=1}^N n^{s-1}.$$

Поэтому при $\sigma<0$

$$J(s)=\lim J_N(s)=2(2\pi)^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\,\zeta(1-s).$$

Это равенство в соединении с формулой (2) дает соотношение:

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)\,\zeta(s),$$

к-рое по теории аналитич. продолжения имеет место уже во всей плоскости s и наз. функциональным уравнением дзета-функции Римана.

К. и. м. играет большую роль в получении приближенных функциональных уравнений, к-рые лежат в основе современных оценок функций Дирихле (см. [4], [5]).

К. и. м. является основным в исследованиях распределения нулей функций $\zeta(s)$, $L(s, \chi)$ и др. До недавнего времени здесь он применялся в форме известных теоремы Литлвуда о числе нулей в прямоугольнике регулярной при $\sigma>0$ функции $F(s)$ и теоремы Баклунда об $\arg F(s)$, а также теорем о выпуклости средних значений аналитич. функций (см. [2]). В 1969 Х. Монтгомери (G. Montgomerie) [6] нашел новый прямой и более сильный путь использования К. и. м. для этих целей.

К. и. м. в приложениях к теории чисел естественно возникает в связи с формулой суммирования коэффициентов рядов Дирихле (см. [2], [7]).

Лит.: [1] Риман Б., Сочинения, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М., 1953; [3] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [4] Лаврик А. Ф., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 2, с. 431—42; [5] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1968, т. 32, № 1, с. 134—185; [6] Монтгомери Х., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1974; [7] Карацуба А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1972, т. 36, № 3, с. 475—83. *А. Ф. Лаврик.*

КОМПЛЕКСНОЕ МНОГООБРАЗИЕ, комплексное аналитическое многообразие,— *аналитическое многообразие* над полем комплексных чисел.

КОМПЛЕКСНОЕ ПРОСТРАНСТВО, комплексное аналитическое пространство,— аналитическое пространство над полем комплексных чисел. Наиболее простым и употребительным К. п. является числовое комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, точками, или элементами, к-рого являются всевозможные n-строки $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $z'=(z_1', \ldots, z_n')$, ..., составленные из произвольных комплексных чисел $z_\nu = x_\nu+iy_\nu$, $z_\nu'=x_\nu'+iy_\nu'$, $\nu=1, 2, \ldots, n$. К. п. $\mathbb{C}^n$ есть векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с операциями сложения

$$z+z'=(z_1+z_1', \ldots, z_n+z_n')$$

и умножения на число $\lambda\in\mathbb{C}$

$$\lambda z=(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n),$$

а также метрическое пространство с евклидовой метрикой

$$\rho(z, z')=|z-z'|=\sqrt{\sum_{\nu=1}^n |z_\nu-z_\nu'|^2}=$$

$$=\sqrt{\sum_{\nu=1}^n (x_\nu-x_\nu')^2+(y_\nu-y_\nu')^2}.$$

Иначе говоря, К. п. $\mathbb{C}^n$ получается в результате комплексификации числового действительного пространства $\mathbb{R}^{2n}$. К. п. $\mathbb{C}^n$ есть топологич. произведение n комплексных плоскостей $\mathbb{C}^1=\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n=\mathbb{C}\times\ldots\times\mathbb{C}$.

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства, пер. с франц., М., 1969. *Е. Д. Соломенцев.*

КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО — число вида $z=x+iy$, где x и y — *действительные числа*, а $i=\sqrt{-1}$ — так наз. мнимая единица, т. е. число, квадрат к-рого равен -1 (в технической литературе применяется также обозначение $j=\sqrt{-1}$); x наз. действительной, или вещественной, частью К. ч. z, а y — его мнимой частью (обозначения $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$). Действительные числа — частный случай К. ч. при $y=0$; К. ч., не являющиеся действительными, т. е. такие, что $y\neq 0$, иногда наз. мнимыми числами. В приведенных терминах, в основном традиционного происхождения, нашел свое отражение сложный исторический процесс развития понятия К. ч.

Алгебраическая природа К. ч. состоит в том, что К. ч. есть элемент (алгебраического) расширения $\mathbb{C}$ поля действительных чисел $\mathbb{R}$, получаемого алгебраич. присоединением к полю $\mathbb{R}$ корня i многочлена X^2+1.

Получающееся таким путем поле $\mathbb{C}$ наз. полем комплексных чисел. Наиболее важное свойство поля $\mathbb{C}$ состоит в том, что оно алгебраически замкнуто, т. е. любой многочлен с коэффициентами из $\mathbb{C}$ разлагается на линейные множители. Иначе это свойство алгебраич. замкнутости выражается в том, что любой многочлен степени $n \geqslant 1$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$ имеет в $\mathbb{C}$ по крайней мере один корень (теорема Д'Аламбера — Гаусса).

Фактическое построение поля $\mathbb{C}$ осуществляется следующим образом. В качестве элементов $z=(x, y)$, $z'=(x', y')$, ..., или комплексных чисел, принимаются точки (x, y), (x', y'), ..., плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми прямоугольными координатами x и y, x' и y', ..., причем суммой К. ч. $z=(x, y)$ и $z'=(x', y')$ наз. К. ч. $(x+x', y+y')$, т. е.

$$z+z'=(x, y)+(x', y')=(x+x', y+y'), \qquad (1)$$

а произведением этих К. ч. наз. К. ч. $(xx'-yy', xy'+x'y)$, т. е.

$$zz'=(x, y)(x', y')=(xx'-yy', xy'+x'y). \qquad (2)$$

Нулевой элемент $0=(0, 0)$ совпадает с началом координат, К. ч. $(1, 0)$ есть единица поля $\mathbb{C}$.

Плоскость $\mathbb{R}^2$, точки к-рой отождествлены с элементами поля $\mathbb{C}$, наз. комплексной плоскостью. Действительные числа x, x', ... отождествляются при этом с точками $(x, 0)$, $(x', 0)$, ... оси абсцисс, к-рая применительно к плоскости $\mathbb{C}$ наз. действительной, или вещественной, осью. Точки $(0, y)=iy$, $(0, y')=iy'$, ... располагаются на оси ординат, называемой на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ мнимой осью; числа вида iy, iy', ... наз. чисто мнимыми. Это представление элементов z, z', ... поля $\mathbb{C}$, или К. ч., в виде точек комплексной плоскости с правилами действий (1) и (2) равносильно указанной выше наиболее употребительной форме записи К. ч.:

$$z=(x, y)=x+iy,\ z'=(x', y')=x'+iy', \ldots,$$

называемой также алгебраической, или декартовой, формой записи К. ч. Применительно к алгебраич. форме правила (1) и (2) сводятся к простому условию, что все действия с К. ч. выполняются как с многочленами с учетом свойства мнимой единицы: $i \cdot i=i^2=-1$.

К. ч. $z=(x, y)=x+iy$ и $\bar{z}=(x, -y)=x-iy$ наз. сопряженными, на плоскости $\mathbb{C}$ они располагаются симметрично относительно действительной оси. Сумма и произведение сопряженных К. ч. суть действительные числа:

$$z+\bar{z}=2 \operatorname{Re} z, \qquad z\bar{z}=|z|^2,$$

где $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$ наз. модулем, или абсолютной величиной, К. ч. z.

Всегда

$$||z|-|z'|| \leqslant |z+z'| \leqslant |z|+|z'|.$$

К. ч. z отлично от 0 тогда и только тогда, когда $|z|>0$. Отображение $z \to \bar{z}$ есть автоморфизм комплексной плоскости порядка 2 (т. е. $\bar{z} \to \bar{\bar{z}}=z$), оставляющий на месте все точки действительной оси. При этом $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$, $\overline{zz'}=\bar{z}\bar{z'}$.

Операции сложения и умножения (1) и (2) коммутативны и ассоциативны, связаны соотношением дистрибутивности и для них существуют обратные действия вычитания и деления (кроме деления на нуль), записываемые в алгебраич. форме следующим образом:

$$z-z'=(x+iy)-(x'+iy')=(x-x')+i(y-y'),$$

$$\frac{z'}{z}=\frac{x'+iy'}{x+iy}=\frac{z'\bar{z}}{|z|^2}=\frac{xx'+yy'}{x^2+y^2}+i\,\frac{yx'-xy'}{x^2+y^2}, \quad z \neq 0. \qquad (3)$$

Деление К. ч. z' на К. ч. $z \neq 0$ сводится, таким образом, к умножению z' на К. ч.

$$\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}.$$

На важный вопрос о том, является ли построенное расширение $\mathbb{C}$ поля действительных чисел с указанными выше правилами действий единственно возможным или же мыслимы существенно иные варианты, дает ответ т е о р е м а е д и н с т в е н н о с т и: всякое (алгебраическое) расширение поля $\mathbb{R}$, получающееся из $\mathbb{R}$ присоединением корня i уравнения $X^2+1=0$, изоморфно $\mathbb{C}$, т. е. с требованием алгебраич. присоединения корня i совместимы только указанные выше правила действий с К. ч. Этому факту, однако, не противоречит наличие других интерпретаций К. ч., отличных от истолкования К. ч. как точек комплексной плоскости. Наиболее часто в приложениях используются следующие две интерпретации.

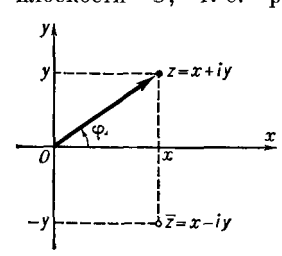
В е к т о р н а я и н т е р п р е т а ц и я. К. ч. $z=x+iy$ можно отождествить с вектором (x, y) с координатами x и y, приложенным в начале координат (см. рис.). При такой интерпретации сложение и вычитание К. ч. производится по правилам сложения и вычитания векторов. Однако умножение и деление К. ч., совершаемые необходимо по формулам (2) и (3), не имеют непосредственных аналогов в векторной алгебре (см. [4], [5]). Векторная интерпретация К. ч. непосредственно применяется, напр., в электротехнике для изображения переменных синусоидальных токов и напряжений.

М а т р и ч н а я и н т е р п р е т а ц и я. К. ч. $w=u+iv$ можно отождествить с матрицей второго порядка специального вида

$$w = \begin{Vmatrix} u & v \\ -v & u \end{Vmatrix},$$

причем действия сложения, вычитания и умножения выполняются по обычным правилам матричной алгебры.

Применяя полярные координаты на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т. е. радиус-вектор $r=|z|$ и полярный угол $\varphi=\operatorname{Arg} z$, называемый здесь а р г у м е н т о м К. ч. z (иногда также ф а з о й, или а м п л и т у д о й, К. ч. z), получают т р и г о н о м е т р и ч е с к у ю, или п о л я р н у ю, ф о р м у К. ч.:



$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r\cos\varphi = \operatorname{Re} z,\ r\sin\varphi = \operatorname{Im} z. \qquad (4)$$

Аргумент $\varphi=\operatorname{Arg} z$ является многозначной действительной функцией К. ч. $z\neq 0$, значения к-рой для данного z отличаются одно от другого на целое кратное 2π; аргумент К. ч. $z=0$ не определен. Обычно используется г л а в н о е з н а ч е н и е а р г у м е н т а $\varphi=\arg z$, определяемое дополнительным условием $-\pi<\arg z\leqslant\pi$. *Эйлера формулы* $e^{\pm i\varphi}=\cos\varphi\pm i\sin\varphi$ преобразуют тригонометрич. форму (4) в п о к а з а т е л ь н у ю ф о р м у К. ч.:

$$z = re^{i\varphi}. \qquad (5)$$

Формы (4) и (5) особенно удобны для выполнения умножения и деления К. ч.:

$$zz' = rr'[\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')] = rr'e^{i(\varphi+\varphi')},$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r}[\cos(\varphi'-\varphi) + i\sin(\varphi'-\varphi)] = \frac{r'}{r}\,e^{i(\varphi-\varphi')},\ r>0.$$

При умножении (делении) К. ч. модули перемножаются (модуль делимого делится на модуль делителя), а ар-

гументы складываются (из аргумента делимого вычитается аргумент делителя). Возведение в степень К. ч. и извлечение корня из К. ч. производятся по так наз. формулам Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi},$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

причем первая из них применима и для целых отрицательных показателей n. Геометрически умножение К. ч. z на К. ч. $z'=r'e^{i\varphi'}$ сводится к повороту вектора z на угол φ' (против часовой стрелки при $\varphi'>0$) и последующему изменению его длины в $|z'|=r'$ раз; в частности, умножение на К. ч. $z'=e^{i\varphi'}$, по модулю равное единице, есть не что иное как поворот на угол φ'. Таким образом, К. ч. могут быть истолкованы и как операторы специального вида *(аффиноры)*. В связи с этим иногда удобна смешанная векторно-матричная интерпретация умножения К. ч.:

$$(x,\ y)\cdot\begin{Vmatrix} u & v \\ -v & u \end{Vmatrix} = (xu-yv,\ xv+yu),$$

при к-рой множимое трактуется как матрица-вектор, а множитель — как матрица-оператор.

Биективное отображение $(x,\ y)\to x+iy$ переносит в поле К. ч. $\mathbb{C}$ топологию двумерного действительного числового пространства $\mathbb{R}^2$, эта топология согласуется со структурой поля $\mathbb{C}$ и, таким образом, $\mathbb{C}$ есть топологическое тело. Модуль $|z|$ есть евклидова норма К. ч. $z=(x,\ y)$, и поле $\mathbb{C}$, наделенное этой нормой, есть комплексное одномерное евклидово пространство, называемое также плоскостью комплексного переменного $\mathbb{C}$. Топологич. произведение $\mathbb{C}^n=\mathbb{C}\times\ldots\times\mathbb{C}$ (n раз, $n\geqslant 1$) есть комплексное n-мерное евклидово пространство. Вследствие алгебраич. замкнутости поля К. ч. $\mathbb{C}$, изучение функций и математич. анализ вообще приобретают должную полноту и законченность только при рассмотрении поведения функций в комплексной области. В частности, даже поведение таких элементарных функций, как z^n, $\cos z$, $\sin z$, e^z, может быть правильно понято только при условии их рассмотрения как функций комплексного переменного (см. *Аналитическая функция*).

Впервые, по-видимому, мнимые величины появились в известном труде «Великое искусство, или об алгебраических правилах» Дж. Кардано (G. Cardano, 1545), к-рый счел их бесполезными, непригодными к употреблению. Пользу мнимых величин, в частности при решении *кубического уравнения* в так наз. неприводимом случае (когда действительные корни выражаются через кубические корни из мнимых величин) впервые оценил Р. Бомбелли (R. Bombelli, 1572). Он же дал нек-рые простейшие правила действий с К. ч. Вообще, выражения вида $a+b\sqrt{-1}$, $b\neq 0$, появляющиеся при решении квадратных и кубических уравнений, стали называть в 16—17 вв. «мнимыми». Однако даже для многих крупных ученых 17 в. алгебраич. и геометрич. сущность мнимых величин представлялась неясной и даже загадочной и мистической. Известно, напр., что И. Ньютон (I. Newton) не включал мнимые величины в понятие числа, а Г. Лейбницу (G. Leibniz) принадлежит фраза: «Мнимые числа — это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием».

Задача о выражении корней степени n из данного числа была в основном решена в работах А. Муавра (A. de Moivre, 1707, 1724) и Р. Котеса (R. Cotes, 1722). Символ $i=\sqrt{-1}$ предложил Л. Эйлер (L. Euler, 1777, опубл. 1794). Он же высказал в 1751 мысль об

алгебраич. замкнутости поля $\mathbb{C}$, к такому же выводу пришел Ж. Д'Аламбер (J. D'Alembert, 1747), но первое строгое доказательство этого факта принадлежит К. Гауссу (C. Gauss, 1799). Он же ввел в употребление термин «К. ч.» в 1831. Полное геометрич. истолкование К. ч. и действий над ними появилось впервые в работе К. Весселя (C. Wessel, 1799). Геометрич. представление К. ч., иногда называемое «диаграммой Аргана», вошло в обиход после опубликования в 1806 и 1814 работы Ж. Р. Аргана (J. R. Argand), повторявшей в основном независимо выводы К. Весселя.

Чисто арифметич. теория К. ч. как пар действительных чисел была построена У. Гамильтоном (W. Hamilton, 1837). Ему же принадлежит важное пространственное обобщение К. ч.— *кватернионы*, алгебра к-рых некоммутативна. Вообще, в конце 19 в. было доказано, что всякое расширение понятия числа за пределы поля К. ч. возможно только при отказе от каких-либо обычных действий (прежде всего коммутативности). См. также *Гиперкомплексное число*, *Двойные и дуальные числа*, *Кэли число*.

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 9 изд., М., 1968; [2] Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 1, 2 изд., М., 1967; [4] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1, 2 изд., М., 1976; [5] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, 2 изд., М., 1977; [6] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [7] Харди Г. Х., Курс чистой математики, пер. с англ., М., 1949; [8] Бурбаки Н., Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними пространства, пер. с франц., М., 1969.

Е. Д. Соломенцев.

КОМПЛЕКСНЫЙ ТОР — комплексная абелева группа Ли, получаемая из n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ факторизацией по решетке $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ ранга $2n$. К. т.— это единственные связные компактные комплексные группы Ли [1]. Каждое эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$ определяет на $T=\mathbb{C}^n/\Gamma$ кэлерову метрику, инвариантную относительно сдвигов. К. т. могут быть охарактеризованы также как единственные компактные кэлеровы параллелизуемые многообразия [2]. Группа автоморфизмов комплексного многообразия T совпадает с *голоморфом группы* T как комплексной группы Ли.

Голоморфные p-формы на К. т. T имеют вид

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_p} a_{i_1 \ldots i_p} dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p},$$

где $a_{i_1, \ldots i_p} \in \mathbb{C}$, а $z_1, \ldots, z_n$ — координаты в $\mathbb{C}^n$, и кольцо когомологий Дольбо $\sum_{p,q=0}^{n} H^{p,q}(T)$ естественно изоморфно $\wedge \mathbb{C}^{n*} \otimes \wedge \bar{\mathbb{C}}^{n*}$ (см. [1]).

Как вещественные группы Ли все n-мерные К. т. являются $2n$-мерными торами и изоморфны между собой при фиксированном n. С точки зрения комплексной структуры положение гораздо сложнее. Базис решетки $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ можно задать матрицей Ω размера $n \times 2n$, наз. матрицей периодов тора $T=\mathbb{C}^n/\Gamma$. Торы $T_i=\mathbb{C}^n/\Gamma_i$ с матрицами периодов Ω_i ($i=1, 2$) изоморфны между собой (как комплексные группы Ли или как комплексные многообразия) тогда и только тогда, когда существуют такие матрицы $C \in GL(n, \mathbb{C})$ и $Z \in GL(2n, \mathbb{Z})$, что $\Omega_2 = C\Omega_1 Z$.

Матрицу периодов любого n-мерного тора можно привести к виду $\|EA\|$, где $\operatorname{Im}|A|>0$. Торы с матрицами такого вида образуют голоморфное семейство, дающее эффективно параметризованную версальную деформацию любого n-мерного К. т., зависящую от n^2 параметров [3]. В частности, при $n=1$ пространство параметров есть верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} a>0$ и множество классов изоморфных одномерных К. т. отождествляется с фактором $\{\operatorname{Im} a>0\}/\Delta$, где Δ — *модулярная группа*.

К. т., являющиеся алгебранч. многообразиями, наз. *абелевыми многообразиями*. К. т. $\mathbb{C}^n/\Gamma$ — абелево многообразие тогда и только тогда, когда в $\mathbb{C}^n$ существует эрмитово скалярное произведение, мнимая часть к-рого целочисленна на $\Gamma\times\Gamma$ [1]. В терминах матрицы периодов это условие выражается как условие Римана — Фробениуса: должна существовать такая кососимметрич. матрица $Q\in GL(2n, \mathbb{Z})$, что $\Omega Q\Omega'=0$ и что $-i\Omega Q\bar{\Omega}'$ положительно определена. При $n=1$ эти условия всегда выполнены; соответствующие алгебранч. кривые суть *эллиптические кривые*. Матрица периодов

$$\Omega=\begin{Vmatrix}1 & 0 & i\sqrt{2} & i\sqrt{5}\\ 0 & 1 & i\sqrt{3} & i\sqrt{7}\end{Vmatrix}$$

дает пример двумерного К. т., не являющегося абелевым многообразием. На этом торе не существует даже непостоянных мероморфных функций [5]. Необходимым и достаточным условием алгебранчности n-мерного К. т. является также наличие на нем n алгебраически независимых мероморфных функций.

Интерес к К. т. возник в 19 в. в связи с изучением *абелевых функций*, а также *Якоби многообразий* алгебранч. кривых. С любым n-мерным компактным кэлеровым многообразием M связан набор n К. т.— его многообразий Якоби, к-рые являются абелевыми многообразиями, если M алгебранчно [7].

Лит.: [1] Мамфорд Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971; [2] Wang H. C., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1954, v. 5, p. 771—76; [3] Kodaira K., Spencer D. C., «Ann. Math.», 1958, v. 67, p. 328—466; [4] Вейль А., Введение в теорию кэлеровых многообразий, пер. с франц., М., 1961; [5] Зигель К. Л., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1954; [6] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [7] Чжень Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961. *А. Л. Онищик.*

КОМПОЗИТ расширений поля — наименьшее подрасширение $A\cdot B$ расширения Ω поля k, содержащее заданные два подрасширения $A\subset\Omega$ и $B\subset\Omega$; оно совпадает с образом гомоморфизма $\varphi: A\otimes_k B\to\Omega$, сопоставляющего тензорному произведению $a\otimes b$ произведение $ab\in\Omega$.

КОМПОЗИЦИОННЫЙ РЯД — конечное подмножество $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ частично упорядоченного множества с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1 такое, что

$$0=a_0<a_1<\ldots<a_n=1$$

и все интервалы $[a_i, a_{i+1}]$ являются *простыми интервалами*. Можно говорить также о К. р. любого интервала $[a, b]$ частично упорядоченного множества. К. р. существует далеко не всегда.

Под К. р. универсальной алгебры понимается К. р. в решетке ее конгруэнций. Поскольку конгруэнции в группах определяются нормальными подгруппами, К. р. группы может быть определен как ее нормальный ряд (см. *Подгрупп ряды*), не имеющий отличных от него самого уплотнений (без повторений). Ряд

$$E=G_0\subset\ldots\subset G_{k-1}\subset G_k=G$$

будет К. р. группы G тогда и только тогда, когда всякая подгруппа G_{i-1}, $i=1, 2, \ldots, k$, является максимальным истинным нормальным делителем подгруппы G_i.

Все факторы К. р. будут простыми группами. Всякий нормальный ряд, изоморфный с некоторым К. р., сам будет композиционным. Для К. р. групп имеет место *Жордана — Гёльдера теорема*. Аналогично определяются и аналогичными свойствами обладают К. р. колец и, вообще, Ω-групп (см. [2]).

Лит.: [1] Кон П. М., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973. *О. А. Иванова, Л. А. Скорняков.*

КОМПОЗИЦИЯ — бинарная *алгебраическая операция*. Напр., К. (или суперпозицией) двух функций $f(x)$ и $g(x)$ наз. функция $h(x)=f[g(x)]$. О К. в теории вероятностей см. *Свертка*.

КОМПОНЕНТА вектора a по оси — вектор, образованный проекциями концов вектора a на эту ось.

КОМПОНЕНТА пространства — связное подмножество C топологич. пространства X, обладающее следующим свойством: для любого связного множества $C_1 \subset X$ из включения $C \subset C_1$ вытекает, что $C=C_1$. К. пространства являются непересекающимися множествами. Всякое непустое связное множество содержится в одной и только одной К. Если C — К. пространства X, и при этом $C \subset Y \subset X$, то C есть К. подпространства Y. Если $f: X \to Y$ — монотонное непрерывное отображение на, то множество C является компонентой Y тогда и только тогда, когда $f^{-1}(C)$ — К. X.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, т. 2, пер. с англ., М., 1969.

Б. А. Ефимов.

КОНГРУЭНТНОСТЬ — отношение эквивалентности на множестве геометрич. фигур (отрезков, углов и т. д.). Оно вводится либо аксиоматически (см. *Гильберта система аксиом*), либо на основе какой-либо группы преобразований, чаще всего *движений*. Так, в евклидовой геометрии (и вообще в геометрии пространств постоянной кривизны) две фигуры наз. конгруэнтными, или равными, если одна из них движением может быть переведена в другую.

М. И. Войцеховский.

КОНГРУЭНЦ-ПОДГРУППА — подгруппа H полной линейной группы $GL(n, R)$ над кольцом R, обладающая следующим свойством: существует такой ненулевой двусторонний идеал $\mathfrak{P}$ кольца R, что $H \supseteq GL(n, R, \mathfrak{P})$, где

$$GL(n, R, \mathfrak{P}) = \mathrm{Ker}\,(GL(n, R) \longrightarrow GL(n, R/\mathfrak{P}),$$

т. е. H содержит все матрицы из $GL(n, R)$, сравнимые с единичной матрицей по модулю $\mathfrak{P}$. Более общо, подгруппа H линейной группы Γ степени n над R наз. К.-п., если для некоторого ненулевого двустороннего идеала $\mathfrak{P} \subseteq R$

$$H \supseteq \Gamma \cap GL(n, R, \mathfrak{P}).$$

В случае

$$H = \Gamma \cap GL(n, R, \mathfrak{P})$$

подгруппа H наз. главной К.-п., соответствующей идеалу $\mathfrak{P}$. Понятие К.-п. первоначально возникло для $R=\mathbb{Z}$. Оно особенно эффективно и важно с точки зрения применений для дедекиндова кольца R и $\Gamma = G_R$, где G — алгебраическая группа, определенная над полем отношений кольца R.

Лит.: [1] Басс Х., Милнор Дж., Серр Ж.-П., «Математика», 1970, т. 14, № 6, с. 64—128.

В. П. Платонов.

КОНГРУЭНЦ-ПРОБЛЕМА: всякая ли подгруппа конечного индекса группы G_O, где O — кольцо целых элементов поля алгебраич. чисел k, а G — связная линейная алгебраическая k-определенная группа, является *конгруэнц-подгруппой*? Это — классическая постановка К.-п. Современный вариант К.-п. основывается на понятии конгруэнц-ядра, выражающего меру отклонения от ее положительного решения. А именно, пусть $\widehat{G}_O$ и $\overline{G}_O$ — пополнения группы O — точек G_O в топологии, определяемой соответственно всеми подгруппами конечного индекса и конгруэнц-подгруппами группы G_O. Тогда существует сюръективный и непрерывный гомоморфизм $\pi: \widehat{G}_O \to \overline{G}_O$. Ядро $\mathrm{Ker}\,\pi$ наз. конгруэнц-ядром и обозначается через $c(G)$. Положительное решение К.-п. в классической постановке эквивалентно $c(G)=1$. К.-п. в современной форме заключается в вычислении конгруэнц-ядра $c(G)$.

Для $G_O = SL(\pi, \mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, еще в конце 19 в. было известно, что при $n=2$ К.-п. решается отрицательно. В 1965 было показано, что при $n>2$ всякая подгруппа конечного индекса группы $SL(n, \mathbb{Z})$ является конгруэнц-подгруппой (см. [1]). Вслед за этим было получено [1] решение К.-п. для $G_O = SL(n, O)$, $n>2$, или $Sp(2n, O)$, $n>1$, где Sp обозначает симплектическую группу. Для этих групп результат таков: $c(G)\neq 1$ только для вполне мнимого поля k, для к-рого конгруэнц-ядро $c(G)$ изоморфно циклической группе корней из единицы, содержащихся в k. Оказывается, точно такой же результат справедлив для всех односвязных групп Шевалле, кроме SL (2) (см. [3]). Условие односвязности является существенным, ибо из теоремы о сильной аппроксимации следует, что для неодносвязной полупростой группы G конгруэнц-ядро $c(G)$ бесконечно. Для неполупростой группы G всегда $c(G)=c(S)$, где S — максимальная полупростая подгруппа в G; в частности, для разрешимой G всегда $c(G)=1$.

Более общая форма К.-п. получается заменой кольца O на кольцо

$$O_V = \{x \in k \mid v(x) \leqslant 1, \text{ при всех } v \notin V\},$$

где V — произвольное конечное множество неэквивалентных нормирований поля k, содержащее все архимедовы нормирования. В этой ситуации конгруэнц-ядро, обозначаемое $c(G, V)$, существенно зависит от V (см. [4], [5]).

Лит.: [1] Басс Х., Милнор Дж., Серр Ж.-П., «Математика», 1970, т. 14, № 6, с. 64—128; 1971, т. 15, № 1, с. 44—60; [2] Серр Ж.-П., «Математика», 1971, т. 15, № 6, с. 12—45; [3] Matsumoto H., «Ann. sci. École norm. supér.», 1969, t. 2, № 1, p. 1—62; [4] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 11, М., 1974, с. 5—37; [5] Raghunathan M., «Publ. Math. IHES», 1976, № 46, p. 107—61.

В. П. Платонов.

КОНГРУЭНЦИЯ — отношение эквивалентности π на *универсальной алгебре* $A=\{A, \Omega\}$, перестановочное с любой операцией из Ω, т. е. такое отношение эквивалентности, для которого из $a_i \pi a_i'$ следует $(a_1, \ldots, a_n\omega) \times \times \pi (a_1', \ldots, a_n'\omega)$, где $a_i, a_i' \in A$, $i=1, \ldots, n$, $\omega \in \Omega$ — n-арная операция. Аналогично определяется К. в алгебраич. системе. Таким образом классы по К. π образуют однотипную с A универсальную алгебру (алгебраич. систему) A/π, называемую фактор алгеброй (факторсистемой) по К. π. Естественное отображение A на A/π (сопоставляющее элементу a класс по π, к-рому он принадлежит) является сюръективным гомоморфизмом. Обратно, всякий гомоморфизм $\varphi : A \to B$ определяет однозначно К., классами к-рой служат полные прообразы элементов B.

Пересечение К. π_i, $i \in I$, в решетке соответствий на универсальной алгебре (алгебраич. системе) является К. Объединение К. в решетке соответствий, вообще говоря, не обязано быть К. Произведение $\pi_1\pi_2$ К. π_1 и π_2 тогда и только тогда будет К., когда π_1 и π_2 перестановочны, т. е. $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$.

Лит.: [1] Курош А. Г., Общая алгебра. Лекции..., М., 1974.

В. С. Малаховский.

КОНГРУЭНЦИЯ прямых — множество C прямых трехмерного пространства (проективного, аффинного, евклидова), зависящее от двух параметров. Прямая $l \in C$ наз. лучом К. Порядком К. наз. число прямых К., проходящих через произвольную точку пространства; классом — число прямых К., лежащих в произвольной плоскости.

Лучи К. можно двумя способами разложить на однопараметрич. семейство *торсов* так, что через каждый луч $l \in C$ проходят два торса действительных различных (гиперболический луч), мнимых (эллиптический луч) или действительных совпадающих (параболический луч). Точки касания луча $l \in C$ с ребрами возврата этих торсов наз.

фокусами луча l. Поверхности, образованные фокусами лучей К., наз. ее фокальными поверхностями. Касательные плоскости к фокальным поверхностям, проходящие через луч l К., наз. фокальными плоскостями луча l. Торсы К. высекают на каждой фокальной поверхности сеть линий, к-рая наз. фокальной сетью К. Фокальная сеть линий на каждой фокальной поверхности сопряжена. В гиперболич. области К. представляет собой множество общих касательных двух фокальных поверхностей; в эллиптич. области К. образована действительными общими касательными двух сопряженных мнимых поверхностей; в параболич. области К. образована касательными к одному семейству асимптотич. линий единственной фокальной поверхности. Центром луча К. наз. середина отрезка, определяемого фокусами луча. Поверхность, описанная центрами лучей, наз. средней поверхностью К. Основания общих перпендикуляров двух смежных лучей $l\,(u, v)$ и $l'(u+du,\ v+dv)$ заполняют на луче l отрезок, концы к-рого наз. граничными точками луча. Плоскости, перпендикулярные к направлению общего перпендикуляра в граничных точках, наз. главными плоскостями; линейчатые поверхности, линии сжатия к-рых пересекают лучи в их граничных точках, наз. главными поверхностями. Множество граничных точек луча наз. граничной поверхностью. Примеры К.: W-конгруэнция, у к-рой асимптотич. линии на фокальных поверхностях соответствуют друг другу; линейная К.— множество прямых пространства, пересекающих две данные прямые, называемые директрисами; нормальная К.— множество нормалей нек-рой поверхности; изотропная К.— К. с неопределенными главными поверхностями.

Наряду с К. прямых рассматриваются К. (двупараметрич. семейства) плоскостей, коник, квадрик и других фигур (см. *Фигур многообразие*). К. произвольных линий в пространстве называются криволинейными К.

Лит.: [1] Фиников С. П., Теория конгруэнций, М.— Л., 1950.

В. С. Малаховский.

КОНДЕНСАЦИИ ТОЧКА множества M, лежащего в евклидовом пространстве E,— точка из E, в любой окрестности к-рой содержится несчетное множество точек множества M. Множество К. т. любого множества замкнуто; если оно непусто, то является совершенным множеством и имеет мощность континуума. Понятие К. т. обобщается для произвольного топологич. пространства.

Б. А. Ефимов.

КОНДУКТОР характера — целое число, сопоставляемое характеру нек-рого представления группы Галуа конечного расширения локальных полей. Пусть K — полное поле дискретного нормирования с полем вычетов k характеристики $p \geqslant 0$, L/K — его расширение Галуа степени n с группой Галуа G. Если χ — характер некоторого конечномерного комплексного представления группы G, то его К. $f(\chi)$ определяется формулой:

$$f(\chi) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n_i}{n_0} (\chi(1) - \chi(G_i)),$$

где

$$G_i = \{g \in G \mid v_L(g(\Pi) - \Pi) \geqslant i+1\},$$

$$n_i = |G_i|,\quad \chi(G_i) = \frac{\sum_{g \in G_i} \chi(g)}{n_i},$$

причем Π обозначает простой элемент поля L, а v_L — соответствующее нормирование. Для $(n, p)=1$ будет $G_0 = G$, $G_i = \{1\}$ для $i>0$ и $f(\chi) = \chi(1) - \chi(G_i)$. Если χ — характер рационального представления M, то $\chi(G_i) =$

$=\dim M^{G_i}$. К. $f(\chi)$ является целым положительным числом, равным 0 только, если $n=1$.

Лит.: [1] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [2] Artin E., Tate J., Class field theory, N. Y.— Amst., 1967; [3] Серр Ж.-П., Абелевы l-адические представления и эллиптические кривые, пер. с англ., М., 1973.

И. В. Долгачев.

КОНДУКТОР целого замыкания —идеал целостного коммутативного кольца A, являющийся аннулятором A-модуля $\bar{A}/A$, где $\bar{A}$ — целое замыкание кольца A в его поле частных. Иногда К. рассматривается также как идеал кольца $\bar{A}$. Если $\bar{A}$ является A-модулем конечного типа (напр., когда A — геометрич. кольцо), то простой идеал $\mathfrak{P}$ кольца A содержит К. тогда и только тогда, когда локализация $A_{\mathfrak{P}}$ не является целозамкнутым локальным кольцом. В геометрич. терминах это означает, что К. определяет замкнутую подсхему аффинной схемы $\mathrm{Spec}(A)$, состоящую из точек, не являющихся нормальными точками.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963.

И. В. Долгачев.

КОНЕЧНАЯ ГРУППА — группа с конечным числом элементов. Это число наз. порядком группы. Исторически К. г. послужили исходным материалом для формирования многих понятий абстрактной теории групп.

Обычно говорят, что целью теории К. г. является описание, с точностью до изоморфизма, групп любого порядка. Это верно лишь отчасти. Наивный подход, основанный на полном переборе всех групп, заведомо обречен на неудачу. Напр., составление списка всех неизоморфных групп сравнительно небольшого порядка 1024 явилось бы трудным испытанием для лучших современных ЭВМ. Вообще, перебор конечных p-групп (групп порядка p, где p — простое число) — «дикая», или плохо поставленная задача. Напротив, существуют некие экстремальные классы групп, играющие принципиальную роль в теории, для к-рых проблема классификации (перечисления с точностью до изоморфизма) либо решена, либо представляется вполне осмысленной.

Так, для абелевых К. г. имеется законченная теория (см. *Абелева группа*). Отдельные типы конечных p-групп (регулярные, свободные экспоненты p, максимального класса, заданные образующими и минимально возможным числом соотношений) также допускают качественное описание. Простые группы (т. е. группы с тривиальными нормальными подгруппами), являющиеся «строительными блоками» для всех К. г., несмотря на настойчивые попытки пока не удается описать. Существует гипотеза, что должно существовать не более двух (чаще всего — нуль) неизоморфных простых групп любого фиксированного порядка n. Это проверено для $n\leqslant 10^6$. При конкретном анализе простых групп оказалось успешным применение ЭВМ, хотя, разумеется, их роль — чисто вспомогательная. Гораздо более значительными являются теоретические результаты о простых группах (см. *Простая конечная группа*). К настоящему времени (1978) известно несколько бесконечных серий простых групп *(Шевалле группы)* и около трех десятков изолированных примеров *(спорадические простые группы)*. Описание конечных групп целочисленных матриц — еще один пример важной классификационной задачи, решенной лишь для небольших размеров матриц.

После периода становления в теории К. г., связанного с именами О. Коши (A. Cauchy), Ж. Лагранжа (J. Lagrange), К. Гаусса (C. Gauss), Н. Абеля (N. Abel) и, в первую очередь, Э. Галуа (E. Galois), К. г. изучались почти исключительно как группы перестановок (см. неудачно укоренившийся термин *подстановок группа*), причем эта точка зрения остается плодотвор-

ной и в наши дни. Напр., если абстрактная К. г. G допускает реализацию (вложение в симметрич. группу S_m) в виде кратно-транзитивной группы перестановок, то в ряде случаев G определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Классификационные результаты, относящиеся к простым 2-транзитивным группам перестановок, составляют богатый раздел теории К. г., начало к-рому было заложено более ста лет тому назад К. Жорданом (C. Jordan). Вычислительные методы в теории групп перестановок, развившиеся за последние годы, отчасти вызваны к жизни запросами комбинаторики, теории графов, теории кодирования, необходимостью проверки различных гипотез.

В начале 20 в. трудами Г. Фробениуса (G. Frobenius), У. Бёрнсайда (W. Burnside), И. Шура (I. Schur) и др. была развита теория линейных представлений К. г. (см. *Конечной группы представление*), давшая мощный инструмент исследования абстрактных групп и послужившая прототипом для аналогичной теории представлений групп Ли, а затем и других алгебраич. систем. Выражение свойств групп и их представлений на языке теории характеров — одно из проявлений взаимных связей между различными разделами алгебры. Интенсивно изучаются представления К. г. над коммутативными кольцами и над полями ненулевой характеристики (Р. Брауэр (R. Brauer) и др., см. [2]). Выделившаяся в результате этих исследований область конечных линейных групп изобилует многими глубокими результатами.

Почти очевидное соображение, что свойства конечной группы G должны быть в какой-то мере арифметическими, зависящими от канонического разложения $|G|=p_1^{n_1}\ldots p_k^{n_k}$ ее порядка, нашло свое воплощение в *Силова теоремах* о существовании и сопряженности подгрупп порядка $p_i^{n_i}$. Если $|G|=nm$, где n и m — произвольные взаимно простые натуральные числа, то подгруппа порядка n, называемая холловской, существует, вообще говоря, не всегда, но для обширного класса разрешимых групп холловские подгруппы полностью наследуют свойства силовских. Открытая У. Бёрнсайдом разрешимость групп порядка p^aq^b (p, q — простые числа) — типичный пример арифметич. свойства. Разрешимость групп нечетного порядка, установленная много лет спустя Дж. Томпсоном и У. Фейтом (J. Thompson, W. Feit, см. *Бёрнсайда проблема* 1),— достижение, к-рое поставило теорию К. г. на принципиально новую основу. Существование инволюций (элементов порядка два) в неразрешимых группах — иная формулировка теоремы Томпсона — Фейта и выражение свойств группы в терминах централизаторов инволюций — одно из главных направлений исследований в области К. г. за последние два десятилетия.

Длительное время изучаются свойства групп, представимых в виде произведения подгрупп специальных типов. Если, напр., $G=AB$, где A и B — нильпотентные подгруппы, то G — разрешимая группа. Произвольная 2-транзитивная группа преобразований допускает факторизацию $G=ABA$, где A — стабилизатор точки, а B — подгруппа порядка 2. Остается недоказанной пока (1978) гипотеза С. А. Чунихина о непростоте К. г., представимой в виде произведения централизаторов двух неединичных элементов.

Видное место занимает изучение К. г. с выделенным действием на них групп автоморфизмов. Согласно не доказанной в полной общности гипотезе, К. г. G с автоморфизмом φ, оставляющим на месте лишь единичный элемент из G, должна быть разрешимой. Если G — простого порядка, то G нильпотентна, и уже отсюда следует, что К. г., обладающая нильпотентной максимальной подгруппой нечетного порядка, разрешима. Как видно, критерии разрешимости К. г. могут быть самой различной природы.

Расширения К. г. изучаются средствами теории когомологий (см. *Когомологии групп*), имеющей самостоятельное значение.

Лит.: [1] Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., ч. 1, М.—Л., 1937; [2] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [3] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977; [4] Кострикин А. И., в кн.: Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 1—46; [5] Чунихин С. А., Шеметков Л. А., в кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1969, М., 1971, с. 7—70; [6] Мазуров В. Д., в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 14, М., 1976, с. 5—56; [7] Speiser A., Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 4 Aufl., Basel, 1956; [8] Wielandt H., Finite permutations groups, N. Y.— L., 1964; [9] Huppert B., Endliche Gruppen, B.— Hdlb.— N. Y., 1967; [10] Gorenstein D., Finite groups, N. Y., 1968; [11] Isaacs I. M., Character theory of finite groups, N. Y., 1976. *А. И. Кострикин.*

КОНЕЧНАЯ ГРУППОВАЯ СХЕМА — групповая схема, конечная и плоская над базисной схемой. Если G — К. г. с. над схемой $(S, \mathcal{O}_S)$, то $G=\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — конечный плоский квазикогерентный пучок алгебр над $\mathcal{O}_S$. В дальнейшем предполагается, что S локально нётерова. В этом случае пучок $\mathcal{A}$ является локально свободным. Если S связна, то ранг алгебры $\mathcal{A}\times_{\mathcal{O}_S} k(s)$ над полем вычетов $k(s)$ точки $s\in S$ не зависит от s и наз. рангом К. г. с. Пусть $n_G\colon G\to G$ морфизм S-схем, отображающий элемент $x\in G(T)$ в элемент $x^n\in G(T)$ для любой S-схемы T. Морфизм n_G является нулевым, если ранг G делит n и S — приведенная схема или G — коммутативная К. г. с. (см. *Коммутативная групповая схема*). К. г. с. ранга p, где p — простое число, коммутативна [2].

Если G — подгруппа коммутативной К. г. с. G, то определяется К. г. с. G/G', причем ранг схемы G равен произведению рангов схем G' и G/G'.

Примеры. 1) Пусть $G=G_{mS}$ — мультипликативная групповая схема (соответственно абелева схема $\mathcal{A}$ над S); тогда $\mathrm{Ker}\, n_G$ является К. г. с. ранга $|n|$ (соответственно $|n|^{2\dim \mathcal{A}}$). 2) Пусть S — схема над простым полем $\mathbb{F}_p$ и $F: G_{aS}\to G_{aS}$ — гомоморфизм Фробениуса аддитивной групповой схемы G_{aS}. Тогда $\mathrm{Ker}\, F$ является К. г. с. ранга p. 3) Для любой конечной абстрактной группы Γ порядка n постоянная групповая схема Γ_S является К. г. с. ранга n.

Классификация К. г. с. над произвольными базами проведена только для случая, когда ранг схемы G есть простое число [2]. Хорошо изучен случай, когда G — коммутативная К. г. с., а S — спектр поля характеристики p (см. [1], [3], [7]).

Лит.: [1] Манин Ю. Н., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 6, с. 3—90; [2] Тэйт Дж., Оорт Ф., «Математика», 1973, т. 16, № 1, с. 165—83; [3] Demazure M., Gabriel P., Groupes algébriques, t. 1, P.— Amst., 1970; [4] Oort F., Commutative group schemes, B.— Hdlb.— N. Y., 1966; [5] Shatz S., «Ann. Math.», 1964, v. 79, p. 411—49; [6] Mazur B., «Ann. sci. École norm. supér.», 1973, t. 6, p. 521—52; [7] Kraft H., Kommutative algebraische Gruppen und Ringe, B.— Hdlb.— N. Y., 1975. *И. В. Долгачев.*

КОНЕЧНАЯ МАТЕМАТИКА — область математики, занимающаяся изучением свойств структур финитного (конечного) характера, к-рые возникают как внутри математики, так и в ее приложениях. К числу таких конечных структур могут быть отнесены, напр., *конечные группы*, конечные *графы*, а также нек-рые математич. модели преобразователей информации, *автоматы конечные*, *Тьюринга машина* и т. п. Иногда допускают расширение предмета К. м. до произвольных дискретных структур и приходят к дискретной математике, отождествляя последнюю с К. м. К таким структурам могут быть отнесены нек-рые *алгебраические системы*, бесконечные графы, определенные виды вычислительных схем, клеточные автоматы и т. д. В качестве синонима понятий «К. м.» и «дискретная математика» употребляется термин *дискретный анализ*.

КОНЕЧНАЯ РАЗНОСТЬ — см. *Конечных разностей исчисление.*

КОНЕЧНАЯ РИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ — *риманова поверхность* конечного рода, имеющая конечное число невырожденных компонент края. К. р. п. может быть вложена в замкнутую риманову поверхность — *дубль римановой поверхности.*

Лит.: [1] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957.

Е. Д. Соломенцев.

КОНЕЧНО ОПРЕДЕЛЕННАЯ ГРУППА — группа, обладающая конечным числом образующих и задаваемая в этих образующих конечным числом соотношений. Таких групп с точностью до изоморфизма счетное множество. Для любой конечной системы образующих К. о. г. из всякой системы определяющих соотношений, связывающих эти образующие, можно выбрать конечную подсистему, уже достаточную для задания группы.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

О. А. Иванова.

КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННАЯ ГРУППА — группа G, обладающая конечным порождающим множеством $M=\{a_1, \ldots, a_d\}$. Состоит из всевозможных произведений $a_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots a_{i_n}^{\varepsilon_n}$, где $i_k \in \{1, \ldots, d\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$. Если M содержит d элементов, то G наз. d-порожденной. Из любого порождающего множества К. п. г. можно выбрать конечное порождающее множество. 1-порожденные группы наз. циклическими (они исчерпываются с точностью до изоморфизма группой $\mathbb{Z}$ целых чисел относительно сложения и группами $\mathbb{Z}_n$ классов вычетов по данному модулю n относительно сложения, $n=1, 2, \ldots$).

Множество всех неизоморфных 2-порожденных групп имеет мощность континуума. Всякая счетная группа изоморфно вкладывается в нек-рую 2-порожденную группу; можно считать при этом, что последняя проста, а ее порождающие элементы имеют порядки 2 и 3. Всякая счетная n-ступенно разрешимая группа изоморфно вкладывается в 2-порожденную $(n+2)$-ступенно разрешимую группу. Подгруппа конечного индекса в К. п. г. сама является К. п. г. Во всякой К. п. г. имеется лишь конечное число подгрупп данного конечного индекса. К. п. г. может быть бесконечной периодической; более того, для всякого натурального числа $d \geqslant 2$ и всякого нечетного числа $n \geqslant 665$ существует бесконечная d-порожденная группа периода n (см. *Бёрнсайда проблема*). К. п. г. может быть нехопфовой, т. е. изоморфной своей истинной факторгруппе; более того, существуют разрешимые нехопфовы К. п. г. Если К. п. г. финитно аппроксимируема (см. *Финитно аппроксимируемая группа*), то она хопфова. Всякая К. п. г. матриц над полем финитно аппроксимируема. Существуют бесконечные К. п. г., и даже *конечно определенные группы*, являющиеся простыми.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977.

Ю. И. Мерзляков.

КОНЕЧНОЕ ПОЛЕ — см. *Галуа поле.*

КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — гомоморфизм конечной группы G в группу обратимых линейных операторов в векторном пространстве над полем K. Теория К. г. п. является наиболее разработанным (и одним из наиболее важных) разделом теории представлений групп.

Теория К. г. п. над полем $\mathbb{C}$ является частью теории представлений компактных групп, и все результаты этой теории (теорема Петера — Вейля, теория характеров, соотношения ортогональности и т. д.) справедливы (и притом упрощаются) для К. г. п. В частности, любое К. г. п. в топологич. векторном пространстве является суммой представлений, кратных неприводимым. С другой стороны, в теории К. г. п. есть ряд существенных результатов, использующих специфику конечных групп. Напр., для данной

конечной группы G число различных классов эквивалентности К. г. п. равно числу классов сопряженных элементов в G; сумма квадратов размерностей представителей классов эквивалентности К. г. п. равна порядку $|G|$ группы G; размерность любого неприводимого К. г. п. является делителем индекса любого абелева нормального делителя в G (в частности, делителем порядка $|G|$) и не превосходит индекса абелевых подгрупп в G. Если χ — характер К. г. п. π, d — размерность π, то для всех $s \in G$ и всех классов сопряженных элементов $Q \subset G$ числа $\chi(s)$ и $d^{-1}\sum_{s \in G}\chi(s)$ являются целыми алгебраическими. Каждый характер группы G является линейной комбинацией характеров К. г. п., индуцированных (см. *Индуцированное представление*) представлениями ее циклических подгрупп и линейной комбинацией с целыми коэффициентами характеров К. г. п., индуцированных одномерными представлениями подгрупп. Группа H наз. p-элементарной, если она является произведением группы, порядок к-рой равен степени простого числа p, и циклич. группы порядка, взаимно простого с p; группа H наз. элементарной, если она p-элементарна для нек-рого простого p. Любой характер конечной группы G является линейной комбинацией с целыми коэффициентами характеров К. г. п., индуцированных представлениями элементарных подгрупп $H \subset G$ (теорема Брауэра, допускающая обобщение на случай поля произвольной характеристики). Если группа G сверхразрешима, т. е. допускает композиционный ряд из нормальных делителей с циклическими факторами, то любое неприводимое К. г. п. для G индуцировано одномерным представлением нек-рой подгруппы.

В случае, если характеристика p поля K не является делителем порядка $|G|$, теория мало отличается от случая $K=\mathbb{C}$. В частности, любое конечномерное К. г. п. вполне приводимо; если K — алгебраически замкнутое поле, то число классов эквивалентности неприводимых К. г. п. над K равно числу классов сопряженных элементов группы, а сумма квадратов размерностей представителей этих классов равна порядку группы. Но для алгебраически замкнутого поля K могут существовать представления, неприводимые над K, но приводимые над его расширениями; поле K наз. полем разложения неприводимого К. г. п. π, если π остается неприводимым над любым расширением поля K, и — полем разложения для G, если K есть поле разложения для любого неприводимого К. г. п. для G. Если K — поле характеристики нуль или конечное поле, содержащее корни из единицы степени m, где m — наименьшее общее кратное порядков элементов группы G, то K — поле разложения для G; теория К. г. п. над полем, не являющимся полем разложения, связана с группой Галуа расширения данного поля, получаемого присоединением всех корней m-й степени из единицы. В частности, число классов неприводимых представлений группы G над полем рациональных чисел равно числу классов сопряженности циклич. подгрупп этой группы; если K — совершенное поле, то существует поле разложения для G, конечное над K. Для любого поля K характер любого К. г. п. принимает значение во множестве конечных сумм корней из единицы в поле K, и для матричных элементов и характеров справедлив аналог соотношений ортогональности и их следствий; в частности, если K — поле разложения для G характеристики нуль, то К. г. п. с характером χ неприводимо тогда и только тогда, когда $\sum_{g \in G}\chi(g)\chi(g^{-1})=|G|$. Если характеристика p поля K — делитель порядка $|G|$, то групповая алгебра группы G над полем K не полупроста, и существуют не вполне приводимые К. г. п. над K. Пусть k — локальное поле характеристики нуль, полное относительно нек-рого дискретного нормирования, K — конечное поле классов вычетов поля k с характеристикой p; К. г. п.

группы G над K наз. модулярными. Теория модулярных К. г. п. устанавливает более глубокие связи между строением группы и свойствами представлений этой группы, чем теория К. г. п. над $\mathbb{C}$. Теория упрощается в случае, если k и K содержат все корни m-й степени из единицы (и поэтому являются полями разложения); в этом случае для матричных элементов и характеров справедлив аналог соотношений ортогональности. Пусть π — К. г. п. над K, χ — его характер, Δ — первообразный корень m-й степени из единицы в поле k, δ — его канонический образ в K; пусть $s \in G$ — элемент, порядок к-рого взаимно прост с p, т. е. p-регулярный элемент, G_{reg} — множество p-регулярных элементов. Преобразование $\pi(s)$ диагонализуемо и $\chi(s)=\delta^{a_1}+\ldots+\delta^{a_n}$ для нек-рых целых $a_1, \ldots, a_n$; формула $\eta(s)=\Delta^{a_1}+\ldots+\Delta^{a_n}$ определяет функцию $\eta : G_{\mathrm{reg}} \to k$, наз. характером Брауэра представления π; он однозначно определяет композиционные факторы представления π над K. Неразложимые двусторонние идеалы в групповой алгебре $K(G)$ группы G над полем K наз. блоками; существует классификация неэквивалентных неприводимых представлений над k, неизоморфных представлений над K и неизоморфных компонент разложения левого регулярного представления группы G над K в алгебре $K(G)$ в прямую сумму ненулевых неразложимых представлений в терминах блоков; эти результаты допускают распространение на случай, когда поля k и K не являются полями разложения для G.

Лит.: [1] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр., пер. с англ., М., 1969; [2] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [3] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [4] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [5] Серр Ж.-П., Линейные представления конечных групп, пер. с франц., М., 1970.

А. И. Штерн.

КОНЕЧНОКРАТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение $f : X \to Y$ такое, что прообраз $f^{-1}y$ любой точки $y \in Y$ состоит из конечного числа n_y точек. Если $n_y=n$ — одно и то же для всех y, то f наз. n-кратным отображением.

Понятию К. о. в дифференцируемом случае соответствует понятие конечного отображения. Дифференцируемое отображение дифференцируемых многообразий $f : X \to Y$ наз. конечным в точке $x \in X$, если размерность *локального кольца* $R_f(x)$ отображения f в точке x конечна. Все отображения такого рода являются К. о. на компактных подмножествах X, более того, существует открытая окрестность U точки x такая, что $f^{-1}(f(x)) \cap U$ состоит только из одной точки. Число $k=\dim R_f(x)$ измеряет кратность x как корня уравнения $f(y)=x$: существует окрестность V точки x такая, что для всякого y, достаточно близкого к $f(x)$, множество $f^{-1}(y) \cap V$ состоит не более, чем из k точек.

Если $\dim X \leqslant \dim Y$, то конечные отображения образуют *массивное множество* в пространстве $C^\infty(X, Y)$, более того, множество неконечных отображений имеет в этом пространстве бесконечную коразмерность (теорема Тужрона).

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Голубицкий М., Гийемин В., Устойчивые отображения и их особенности, пер. с англ., М., 1977.

М. И. Войцеховский.

КОНЕЧНОМЕРНАЯ АССОЦИАТИВНАЯ АЛГЕБРА — ассоциативное кольцо A, являющееся одновременно конечномерным векторным пространством над полем F, в к-ром выполняется следующее условие

$$\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b)$$

для всех $a, b \in A$ и $\alpha \in F$. Размерность $n=\dim_F A$ пространства A над полем F наз. размерностью алгебры A над F. Принято также говорить, что алгебра A является n-мерной. Всякая n-мерная ассоциативная алгебра A над полем F имеет точное представление матрицами по-

рядка $n+1$ над F, т. е. существует изоморфизм алгебры A на нек-рую подалгебру алгебры всех квадратных матриц порядка $(n+1)\times(n+1)$ над F. Если, кроме того, алгебра A содержит единицу, то она имеет точное представление матрицами порядка n над F.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — некоторый базис векторного пространства A над F (он наз. также б а з и с о м а л г е б р ы A) и

$$e_ie_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^k e_k, \ \gamma_{ij}^k \in F.$$

Элементы γ_{ij}^k, поля F наз. с т р у к т у р н ы м и к о н с т а н т а м и а л г е б р ы A в данном базисе. Они образуют тензор третьего ранга в пространстве A.

О с н о в н ы е т е о р е м ы о К. а. а. Радикал Джекобсона К. а. а. нильпотентен и, если основное поле сепарабельно, отщепляется полупрямым слагаемым (см. *Веддерберна — Мальцева теорема*). Полупростая К. а. а. над полем разлагается в прямую сумму матричных алгебр над телами. Если основное поле F алгебраически замкнуто, то полупростая К. а. а. распадается в прямую сумму матричных алгебр над F. Простые конечномерные алгебры исчерпываются полными матричными алгебрами над телами (т е о р е м а В е д д е р б е р н а). В частности, К. а. а. без делителей нуля оказывается телом. Над полем действительных чисел К. а. а. с делением (т. е. тела) исчерпываются следующими примерами: поле действительных чисел, поле комплексных чисел, тело кватернионов (т е о р е м а Ф р о б е н и у с а).

Многие из упомянутых структурных свойств К. а. а. имеют место и в более широких классах нётеровых и артиновых колец (см., напр., *Веддерберна — Артина теорема*).

Лит.: [1] В а н д е р В а р д е н Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [2] A l b e r t A. A., Structure of algebras, N. Y., 1939.

В. Н. Латышев.

КОНЕЧНОМЕРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — линейное представление топологич. группы в конечномерном векторном пространстве. Теория К. п. является одним из наиболее разработанных и важных разделов общей теории представлений групп. Неприводимое К. п. вполне неприводимо (см. *Шура лемма*), но операторно неприводимое К. п. может быть приводимым. Измеримое К. п. локально компактной группы совпадает локально почти всюду с нек-рым непрерывным К. п. Ограниченное К. п. локально компактной группы эквивалентно унитарному представлению. Локально компактная группа, имеющая точное К. п., является группой Ли [7].

Унитарное К. п. есть прямая сумма неприводимых унитарных К. п. Пересечение ядер непрерывных гомоморфизмов топологич. группы G совпадает с пересечением ядер неприводимых унитарных К. п. группы G; если это множество содержит лишь единичный элемент группы G, то группа G допускает непрерывный мономорфизм в нек-рую компактную группу и группа G наз. в л о ж и м о й в компактную группу, или м а к с и м а л ь н о й п о ч т и п е р и о д и ч е с к о й (МПП-группой). Если G — МПП-группа, то семейство матричных элементов неприводимых унитарных К. п. группы G разделяет точки группы G. Коммутативные и компактные группы являются МПП-группами; связная локально компактная группа тогда и только тогда является МПП-группой, когда она есть прямое произведение связной компактной группы и группы $\mathbb{R}^n$ (см. [5]). МПП-группа может иметь бесконечномерные неприводимые унитарные представления и даже быть группой не типа I. Для того чтобы любое непрерывное неприводимое унитарное представление локально компактной группы G было К. п., необходимо и достаточно [8], чтобы группа G являлась проективным пределом конечных расширений групп H вида $(K\cdot D)\times V$, где K, D, V —

замкнутые подгруппы группы H, причем группа V изоморфна $\mathbb{R}^n$, K — компактная группа, D — дискретная группа, центральная в H; достаточно, чтобы факторгруппа группы G по ее центру была компактна. Кроме того, для многих локально компактных групп (в частности, для некомпактных простых групп Ли) единственным неприводимым унитарным К. п. является единичное представление.

Неунитарные К. п. топологич. групп расклассифицированы (с точностью до эквивалентности) лишь для нек-рых групп, в частности для групп $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$, где задача описания К. п. решается приведением матрицы к жордановой форме и — в случае группы $\mathbb{R}$ — связана с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, так как пространство решений такого уравнения является конечномерным инвариантным подпространством регулярного представления группы $\mathbb{R}$ в пространстве непрерывных функций на $\mathbb{R}$. Кроме того, известны К. п. связных полупростых групп Ли. А именно, К. п. таких групп являются прямыми суммами неприводимых К. п., к-рые описываются следующим образом. Если G — полупростая комплексная группа Ли, U — ее максимальная компактная подгруппа, то любое непрерывное неприводимое унитарное представление π группы U в пространстве E может быть продолжено: 1) до неприводимого представления π^G группы G в E, матричные элементы к-рого являются аналитич. функциями на G; 2) до неприводимого представления группы $\bar{\pi}^G$ группы G, матричные элементы к-рого комплексно сопряжены аналитич. функциями на G; представления π^G и $\bar{\pi}^G$ определяются представлением π однозначно. Тензорное произведение $\pi_1^G \otimes \bar{\pi}_2^G$ является неприводимым К. п. группы G для любых неприводимых унитарных К. п. π_1, π_2 группы G, и любое неприводимое К. п. группы G эквивалентно одному из представлений вида $\pi_1^G \otimes \bar{\pi}_2^G$. Описание К. п. односвязной связной комплексной полупростой группы Ли может быть дано также в терминах экспонент К. п. ее алгебры Ли, а также с помощью *Гаусса разложения* $G \supset Z_- DZ_+$ группы G: пусть α — такая непрерывная функция на G, что $\alpha(z_- \delta z_+) = \alpha(\delta)$ для всех $z_- \in Z_-$, $\delta \in D$, $z_+ \in Z_+$, и пусть линейная оболочка Φ_α функций $g \to \alpha(gg_0)$, $g_0 \in G$ конечномерна; тогда формула $[T_\alpha(g_0)f](g) = f(gg_0)$, $g, g_0 \in G$, $f \in \Phi_\alpha$, определяет неприводимое К. п. группы G, и все неприводимые К. п. группы G могут быть получены таким образом. Если G — действительная полупростая группа Ли, имеющая комплексную форму $G^{\mathbb{C}}$, то любое неприводимое К. п. группы G является сужением на G нек-рого однозначно определенного неприводимого К. п. группы $G^{\mathbb{C}}$, матричные элементы к-рого аналитичны на $G^{\mathbb{C}}$ (так что теория К. п. полупростых связных групп Ли по существу сводится к теории представлений компактных групп Ли). К. п. любой группы Ли является действительно аналитическим; если G — односвязная группа Ли, то между К. п. группы G и ее алгебры Ли существует взаимно однозначное соответствие (сопоставляющее представлению группы Ли его дифференциал; обратное соответствие сопоставляет представлению алгебры Ли его экспоненту). Но классификация К. п. произвольных групп Ли далека (1978) от полного решения даже для частных случаев групп $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, как и для групп $\mathbb{Z}^n$, $n \geqslant 2$ (см. [6]). С другой стороны, неприводимые К. п. π связной группы Ли G известны [2]: они имеют вид $\pi = \chi \otimes \pi_0$, где χ — одномерное представление группы G (т. е. фактически — ее коммутативной факторгруппы по коммутанту), а π_0 — К. п. полупростой факторгруппы группы G по максимальному связному разрешимому нормальному делителю группы G (см. *Леви — Мальцева разложение*).

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [3] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [4] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [5] Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, пер. с франц., М., 1950; [6] Гельфанд И. М., Пономарёв В. А., «Функциональный анализ и его применения», 1969, т. 3, № 4, с. 81—82; [7] Глушков В. М., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, № 2, с. 3—41; [8] Штерн А. И., «Матем сб.», 1973, т. 90, № 1, с. 86—95. *А. И. Штерн.*

КОНЕЧНОСТИ ТЕОРЕМЫ — 1) К. т. в алгебраической геометрии — утверждения о различных объектах алгебраич. геометрии (пространствах когомологий, алгебраич. многообразиях, схемах, расслоениях и т. п.), состоящие в том, что эти объекты зависят от конечного числа параметров или же образуют конечное множество.

Первый круг теорем конечности относится к пространствам когомологий когерентных алгебраич. пучков. Фундаментальная теорема состоит в том, что эти пространства конечномерны над основным полем k, если многообразие собственно (для $k=\mathbb{C}$ это свойство равносильно компактности) (см. [2]). В рамках теории схем были получены весьма широкие обобщения этой теоремы. Одно из них обобщает данную теорему на случай собственных морфизмов схем и утверждает, что прямой образ когерентного пучка относительно такого отображения когерентен (см. [3], [4]). Другое обобщение относится к изучению когомологий несобственных многообразий. Оказывается, что если рассматриваемое многообразие X получается выбрасыванием нек-рого подмногообразия Y из собственного многообразия, то можно оценить те размерности, в к-рых группы когомологий конечномерны. Эти оценки зависят от коразмерности многообразия Y и свойств его особых точек (см. [5], [6]). Известны также соответствующие К. т. для этальных когомологий.

Другой круг К. т. относится к подсхемам и, более общо, когерентным пучкам на фиксированной собственной схеме. Эти объекты могут быть параметризованы в весьма широкой ситуации *Гильберта схемами* (или для обратимых пучков — *Пикара схемами*). Наиболее общая из таких К. т. утверждает, что эти схемы квазипроективны, если ограничиться подсхемами или пучками с одним и тем же *Гильберта многочленом* [4]. Ее частным случаем является тот факт, и что алгебраич. подмногообразия данной степени в проективном пространстве зависят от конечного числа параметров, а также теорема о конечности базиса *Нерона — Севери группы*.

Эти теоремы находят применение в целом ряде проблем конечности, возникающих в диофантовой геометрии. Среди таких проблем: вопрос о конечности множества рациональных точек алгебраич. многообразия, определенного над глобальным полем (многомерный аналог гипотезы Морделла), гипотеза Шафаревича о конечности числа алгебраич. кривых, определенных над данным глобальным полем и с фиксированными вырождениями, вопрос о конечной порожденности группы рациональных точек алгебраич. группы.

Лит.: [1] Serre J.-P., «J. math. pures et appl.», 1957, t. 36, № 5, p. 1—16; [2] Расслоение пространства и их приложения, М., 1958, с. 372—450; [3] Grothendieck A., Eléments de géométrie algébrique, ch. 3, pt 2, P., 1963 (Publ. Math. IHES, № 17); [4] его же, Fondements de géométrie algébrique, P., 1962; [5] Hartshorne R., Ample Subvarieties of Algebraic Varieties, B.—Hdlb.—N. Y., 1970; [6] Ogus A., «Ann. Math.», 1973, v. 98, № 2, p. 327—65; [7] Шафаревич И. Р., в кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Stockh., 1962, p. 163—76; [8] Аракелов С. Ю., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 6, с. 1269—93. *А. Н. Паршин.*

2) К. т. в теории аналитических пространств — критерии конечномерности групп когомологий со значениями в *когерентных аналитических пучках*. Первой общей теоремой такого рода явилась

теорема конечности Картана — Серра [1]: если X — компактное комплексное пространство и $\mathcal{F}$ — когерентный аналитич. пучок на X, то пространства когомологий $H^k(X, \mathcal{F})$ конечномерны и отделимы для всех $k \geqslant 0$. Обобщение этой теоремы на случай выпукло-вогнутых пространств [2], [3] утверждает: если X — сильно (p, q)-выпукло-вогнутое пространство (см. *Псевдовыпуклость и псевдовогнутость*) и $\mathcal{F}$ — когерентный аналитич. пучок на X, то $H^k(X, \mathcal{F})$ конечномерны при $p \leqslant k \leqslant \operatorname{prof} \mathcal{F} - q - 1$ и отделимы при $p \leqslant k \leqslant \operatorname{prof} \mathcal{F} - q$, а $H^k_c(X, \mathcal{F})$ конечномерны при $q+1 \leqslant k \leqslant \operatorname{prof} \mathcal{F} - p$ и отделимы при $q+1 \leqslant k \leqslant \operatorname{prof} \mathcal{F} - p + 1$.

К К. т. относят также обобщения указанных выше теорем на относительный случай, т. е. критерии когерентности прямых образов когерентных аналитич. пучков при аналитич. отображениях. Обобщением теоремы Картана — Серра является следующая теорема Грауэрта [4], [5]: если $\pi : X \to Y$ — собственное аналитич. отображение комплексных пространств и F — когерентный аналитич. пучок на X, то прямые образы $R^k\pi_*\mathcal{F}$ когерентны при всех $k \geqslant 0$. Это свойство оказывается и достаточным для собственности отображения π. Аналогичные К. т. доказаны для сильно p-выпуклых и сильно q-вогнутых отображений (см. [6]). Аналог теоремы Грауэрта доказан также для *жестких аналитических пространств* над полем с неархимедовым нормированием [7].

С К. т. тесно связаны теоремы об оценке степени трансцендентности поля мероморфных функций на различных классах комплексных пространств (см. *Зигеля теорема*). Простым следствием теоремы Грауэрта является следующая теорема Реммерта [4]: если $\pi : X \to Y$ — собственное аналитич. отображение комплексных пространств и Z — аналитич. множество в X, то множество $\pi(Z)$ аналитично в Y. Эта теорема переносится и на случай жестких пространств [7].

Лит.: [1] Cartan H., Serre J.-P., «C. r. Acad. sci.», 1953, t. 237, p. 128—30; [2] Андреотти А., Грауэрт Г., в кн.: Комплексные пространства, М., 1965, с. 105—89, пер. с франц.; [3] Ramis J. P., «Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat.», 1973, ser. 3, t. 27, № 4, p. 933—97; [4] Грауэрт Г., в кн.: Комплексные пространства, М., 1965, с. 205—299, пер. с нем.; [5] Bănică C., Stănăşilă O., Metode algebrice în teoria globală a spaţiilor complexe, Buc., 1974; [6] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 93—171; [7] Kiehl R., «Invent. math.», 1967, Bd 2, № 3, S. 191—214.

А. Л. Онищик.

КОНЕЧНОСТРОЧНЫЙ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — *матричный метод суммирования*, определенный конечнострочной матрицей — матрицей, каждая строка к-рой содержит только конечное число отличных от нуля элементов. Важным частным случаем К. м. с. являются *треугольные методы суммирования*.

Для любого регулярного матричного метода суммирования последовательностей можно построить К. м. с. равносильный и совместный (см. *Включение методов суммирования* и *Совместность методов суммирования*) с ним на множестве ограниченных последовательностей (см. [3]). Однако существуют регулярные матричные методы суммирования, для к-рых нет равносильных К. м. с. на множестве всех последовательностей (пример см. [4]).

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Брудно А.Л., «Матем. сб.», 1945, т. 16, с. 191—247; [4] Erdos P., Piranian G., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1950, v. 1, p. 397—401.

И. И. Волков.

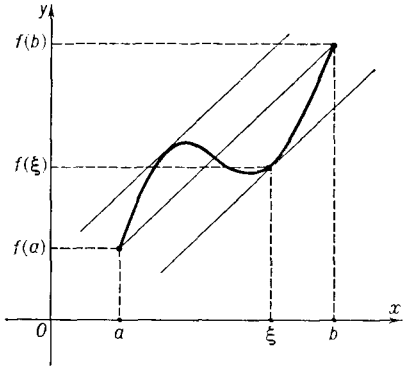
КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ ФОРМУЛА, формула конечных приращений Лагранжа,— формула, выражающая приращение функции через значение производной в промежуточной точке. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ числовой оси и дифференцируема в его внутренних точках, тогда

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), \quad a < \xi < b.$$

К. п. ф. записывают также в виде

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, \quad a<\theta<1.$$

Геометрич. смысл К. п. ф.: для хорды графика функции f с концами в точках $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ существует такая точка ξ, $a<\xi<b$, что касательная к графику функции в точке $(\xi, f(\xi))$ параллельна указанной хорде (см. рис.).



К. п. ф. обобщается на функции многих переменных: если функция f дифференцируема в каждой точке выпуклой области G n-мерного евклидова пространства, то для каждой пары точек $x=(x_1, \ldots, x_n)\in G$, $x+\Delta x=(x_1+\Delta x_1, \ldots, x_n+\Delta x_n)\in G$ существует такая точка $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, лежащая на отрезке с концами в точках x и $x+\Delta x$, что

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\xi)}{\partial x_i}\Delta x_i.$$

Л. Д. Кудрявцев.

КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ИСЧИСЛЕНИЕ — раздел математики, в к-ром изучаются функции при дискретном изменении аргумента, в отличие от дифференциального и интегрального исчислений, где аргумент изменяется непрерывно. Пусть функция $y=f(x)$ задана в точках $x_k=x_0+kh$ (h — постоянная, k — целое). Тогда

$$\Delta y_k=\Delta f_k=f(x_{k+1})-f(x_k)$$

— (конечные) разности первого порядка,

$$\Delta^2 y_k=\Delta^2 f_k=\Delta f_{k+1}-\Delta f_k=f(x_{k+2})-2f(x_{k+1})+f(x_k)$$

— разности второго порядка, ... ,

$$\Delta^n y_k=\Delta^n f_k=\Delta^{n-1} f_{k+1}-\Delta^{n-1} f_k$$

— разности n-го порядка. Разности удобно располагать в таблицу:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	...
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				
...					

Разность n-го порядка через величины $y_0, y_1, \ldots$ выражается формулой:

$$\Delta^n y_n=y_{k+n}-C_n^1 y_{k+n-1}+C_n^2 y_{k+n-2}-\ldots+(-1)^n y_k.$$

Наряду с разностями вперед Δy_k употребляются разности назад:

$$\nabla y_k=f(x_k)-f(x_{k-1}).$$

В ряде вопросов (в частности, при построении интерполяционных формул) используют центральные разности:

$$\delta^{2m-1}y_{i+\frac{1}{2}},\ \delta^{2m}y_i,$$

к-рые определяются следующим образом:

$$\delta y_{i+\frac{1}{2}} = y_{i+1} - y_i,$$

$$\delta^2 y_i = \delta y_{i+\frac{1}{2}} - \delta y_{i-\frac{1}{2}},$$

. . . . . .

$$\delta^{2m-1}y_{i+\frac{1}{2}} = \delta^{2m-2}y_{i+1} - \delta^{2m-2}y_i,$$

$$\delta^{2m}y_i = \delta^{2m-1}y_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{2m-1}y_{i-\frac{1}{2}}.$$

Между центральными $\delta^n y_l$ и обычными разностями $\Delta^n y_k$ имеется связь

$$\delta^{2m}y_i = \Delta^{2m}y_{i-m},\ \delta^{2m+1}y_{i+\frac{1}{2}} = \Delta^{2m+1}y_{i-m}.$$

В случае, когда промежутки $x_{k+1} - x_k$ не постоянны, рассматривают так наз. разделенные разности:

$$[x_0;\ x_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1},$$

$$[x_0;\ x_1;\ x_2] = \frac{[x_0;\ x_1] - [x_1;\ x_2]}{x_0 - x_2},$$

. . . . . .

$$[x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n] = \frac{[x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_{n-1}] - [x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n]}{x_0 - x_n}.$$

Имеет место формула

$$[x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n] = \sum_{j=0}^{n} \frac{y_j}{\prod_{i \neq j}(x_j - x_i)}.$$

Иногда вместо $[x_0;\ x_1;\ \ldots\ ;\ x_n]$ употребляется обозначение $f(x_0;\ x_1;\ \ldots\ ;\ x_n)$. Если $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$[x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n] = \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}.$$

Если функция $f(x)$ в интервале $x_k < x < x_{k+n}$ имеет n-ю производную $f^n(x)$, то

$$\Delta^n y_k = h^n f^{(n)}(\xi),\ x_k < \xi < x_{k+n}.$$

К. р. н. тесно связано с общей теорией приближения функций, используется в приближенном дифференцировании и интегрировании, в приближенном решении дифференциальных уравнений и других вопросах. Пусть поставлена задача (интерполяционная задача) о восстановлении функции $f(x)$, если известны значения $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Строится многочлен $P(x)$ степени n, к-рый в указанных точках принимает те же значения, что и $f(x)$. Его можно записать в различных формах — в форме Лагранжа, в форме Ньютона и т. д. В форме Ньютона интерполяционный многочлен имеет вид:

$$P_n(x) = f(x_0) + [x_0;\ x_1](x - x_0) +$$

$$+ [x_0;\ x_1;\ x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$\ldots + [x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}),$$

а в случае равноотстоящих значений независимого переменного:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!\, h^k}(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1}).$$

Функцию $f(x)$ принимают приближенно равной $P_n(x)$. Если $f(x)$ имеет $n+1$ производную, то ошибка от замены $f(x)$ на $P_n(x)$ оценивается соотношением

$$f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n),$$

где ξ лежит в интервале, в к-ром находятся точки x, $x_0, \dots, x_n$. В случае, если $f(x)$ — многочлен степени $\leqslant n$, то $f(x)=P_n(x)$.

При неограниченном увеличении числа узлов интерполяции многочлен $P_n(x)$ становится в пределе многочленом $P(x)$ «бесконечной» степени и естественно возникает вопрос: когда $f(x)=P(x)$, т. е. когда будет выполняться равенство

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta^k f(x_0)}{k!\,h^k}(x-x_0)\dots(x-x_{k-1}) \quad (1)$$

(для простоты рассматривается случай равноотстоящих узлов). Пусть $x_0=0$, $h=1$, так что $x_n=n$ $(n\geqslant 0)$. Если ряд (1) сходится в точке α, отличной от узлов (ряд (1) всегда сходится в узлах $x_0, x_1, \dots$), то он сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} x>\alpha$ и представляет собой в этой полуплоскости аналитич. функцию, к-рая в полуплоскости $\operatorname{Re} x\geqslant\beta>\alpha$ удовлетворяет условию $(\varepsilon>0)$:

$$|f(re^{i\varphi})|<ce^{rh(\varphi)}r^{\alpha+\frac{1}{2}+\varepsilon},$$
$$h(\varphi)=\cos\varphi\ln(2\cos\varphi)+\varphi\sin\varphi.$$

Обратно, если $f(x)$ аналитична в нек-рой полуплоскости и имеет оценку роста, подобную указанной (несколько лучше ее), то она представляется рядом (1). Таким образом, в ряд (1) (так наз. ряд Ньютона) разлагаются функции из весьма узкого класса (только аналитич. функции с определенным ростом). Изучаются ряды Ньютона, когда узлы — вообще комплексные числа. Такие ряды нашли большое применение в теории трансцендентных чисел. Пусть теперь узлы интерполяции образуют треугольную матрицу

$$\begin{array}{l} x_{0,0} \\ x_{1,0}\quad x_{1,1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{n,0}\quad x_{n,1}\ \cdots\ x_{n,n} \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

и интерполяционный многочлен $P_n(x)$ строится по узлам, расположенным в $(n+1)$-й строчке. Класс функций, для к-рых $P_n(x)$ стремится к $f(x)$ при $n\to\infty$, зависит от матрицы узлов. Напр., в случае, когда

$$x_{n,k}=\cos\frac{2k+1}{2n}\pi,\quad k=0,\ 1,\ \dots,\ n,$$

($x_{n,k}$ — корни *Чебышева многочлена*), для сходимости интерполяционного процесса на отрезке $[-1,1]$ достаточно выполнения условия

$$\lim_{n\to\infty}\omega(1/n)\ln n=0,$$

где $\omega(\delta)$ — *непрерывности модуль* $f(x)$ на $[-1,1]$.

Другая важная задача К. р. н. — задача суммирования функций. Пусть дана нек-рая функция $f(x)$. Требуется найти в конечном виде, точно или приближенно, сумму

$$S_n=f(x_0)+f(x_0+h)+\dots+f(x_0+nh),$$

при фиксированных x_0 и h и большом n, если известны нек-рые аналитич. свойства $f(x)$. Иначе говоря, исследуется асимптотич. поведение S_n при $n\to\infty$. Пусть $x_0=0$, $h=1$ (для простоты) и найдена функция $F(x)$ такая, что

$$\Delta F(x)=F(x+1)-F(x)=f(x). \quad (2)$$

Тогда

$$S_n = F(n+1) - F(0). \qquad (3)$$

Напр., пусть $f(x)=x^2$. Решение уравнения (2) ищется в виде многочлена третьей степени

$$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

с неопределенными коэффициентами. При подстановке в уравнение (2) и приравнивании коэффициентов левой и правой частей при соответствующих степенях многочлен имеет вид:

$$Q(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}$$

и

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

Не всегда удается в конечном виде получить решение уравнения (2). Поэтому полезно иметь приближенные формулы для S_n. Такой формулой является *Эйлера — Маклорена формула* суммирования. В случае, если $f(x)$ имеет k производных и k — четное, формулу Эйлера — Маклорена можно записать в виде

$$\sum_{x=0}^{n-1} f(x) = \int_0^n f(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{B_\nu}{\nu!} \{f^{(\nu-1)}(n) - f^{(\nu-1)}(0)\} + \frac{B_k}{k!} \sum_{x=0}^{n-1} f^{(k)}(x+\theta),$$

где $0<\theta<1$ (θ вообще зависит от n), B_ν — *Бернулли числа*. Если $f(x)$ — многочлен степени, меньшей k, то остаточный член равен нулю.

Имеется аналогия между задачами К. р. и. и дифференциальным и интегральным исчислениями. Операция разыскания разности соответствует нахождению производной; решение уравнения (2) как операция, обратная разысканию конечной разности, соответствует нахождению первообразной, т. е. неопределенному интегрированию. Формула (3) есть прямой аналог *Ньютона — Лейбница формулы*. Эта аналогия проявляется при рассмотрении уравнений в конечных разностях. Уравнением в конечных разностях наз. соотношение

$$F(x,\ f(x),\ \Delta f(x),\ \ldots,\ \Delta^n f(x)) = 0,$$

где F — заданная функция, а $f(x)$ — искомая. Если выразить все $\Delta^n f(x)$ через $f(x)$, $f(x+1)$, $\ldots$, $f(x+n)$, то уравнение в конечных разностях запишется в виде

$$\Phi(x, f(x), f(x+1), \ldots, f(x+n)) = 0. \qquad (4)$$

Его решение относительно $f(x+n)$:

$$f(x+n) = \psi(x,\ f(x),\ \ldots,\ f(x+n-1)). \qquad (5)$$

При заданиц начальных значений $f(x_0)$, $f(x_0+1)$, $\ldots$, $f(x_0+n-1)$ можно последовательно найти $f(x_0+n)$, $f(x_0+n+1)$ и т. д. После решения уравнения (4) относительно $f(x)$:

$$f(x) = \varphi(x, f(x+1), \ldots, f(x+n)),$$

можно, положив $x=x_0-1$, найти $f(x_0-1)$, затем найти $f(x_0-2)$ и т. д. Таким образом, из уравнения через начальные данные могут быть найдены значения $f(x)$ во всех точках x_0+k, где k — целое. Пусть рассматривается линейное уравнение

$$f(x+k) + P_1(x) f(x+k-1) + \ldots + P_k(x) f(x) = Q(x),\ x=0,\ 1,\ \ldots, \qquad (6)$$

где $P_1(x)$, $\ldots$, $P_k(x)$ и $Q(x)$ — заданные функции на множестве $x=0, 1, 2\ldots$. Общее решение неоднородного уравнения (6) есть сумма частного решения неодно-

родного уравнения и общего решения однородного уравнения

$$f(x+k)+P_1(x)\,f(x+k-1)+\ldots+P_k(x)\,f(x)=0. \quad (7)$$

Если $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ — линейно независимые решения уравнения (7), то общее решение уравнения (7) выражается формулой

$$f(x)=c_1f_1(x)+\ldots+c_kf_k(x),$$

где $c_1, \ldots, c_k$ — произвольные постоянные. Постоянные $c_1, \ldots, c_k$ можно найти, задав начальные условия, значения $f(0), f(1), \ldots, f(k-1)$. Линейно независимые решения $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ (фундаментальная система) легко находятся в случае уравнения с постоянными коэффициентам

$$f(x+k)+a_1f(x+k-1)+\ldots+a_nf(x)=0. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) ищется в виде $f(x)=\lambda^x$. Характеристическое уравнение для λ:

$$\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+\ldots+a_k=0.$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — его корни и все они различны. Тогда фундаментальная система решений уравнения (8) есть система $\lambda_1^x, \ldots, \lambda_k^x$ и общее решение уравнения (8) представляется формулой:

$$f(x)=c_1\lambda_1^x+\ldots+c_n\lambda_k^x.$$

Если λ_1 есть s-кратный корень характеристич. уравнения, то ему соответствуют частные решения λ_1^x, $x\lambda_1^x$, ..., $x^{s-1}\lambda_1^x$.

Пусть, напр., рассматривается последовательность чисел, начинающаяся с нуля и единицы, в к-рой каждый последующий член равен сумме двух непосредственно предшествующих ему: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 15, ... (*Фибоначчи числа*). Ищется выражение для общего члена последовательности. Пусть $f(x)$, $x=0, 1, 2, 3, \ldots$,— общий член последовательности; условие

$$f(x+2)=f(x+1)+f(x), \quad f(0)=0, \quad f(1)=1,$$

является разностным уравнением с заданными начальными условиями. Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2-\lambda-1=0$, его корни $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, поэтому

$$f(x)=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x;$$

$c_1=1/\sqrt{5}$ и $c_2=-1/\sqrt{5}$ находятся из начальных условий.

Уравнение (4) можно изучать не только тогда, когда x изменяется дискретно, принимая значения 0, 1, 2, ... , но и тогда, когда x изменяется непрерывно. Пусть $f(x)$ задана произвольно в полуинтервале $[0, n)$. Из (5), положив $x=0$, получают $f(n)$. Если $f(x)$ задана непрерывной в $[0, n)$, то в замкнутом интервале $[0, n]$ функция $f(x)$ может оказаться разрывной. Желая иметь дело с непрерывными решениями, надо $f(x)$ так задать в $[0, n)$, чтобы, в силу (5), $f(x)$ оказалась непрерывной в $[0, n]$. Зная $f(x)$ в $[0, n]$, из (5) находят $f(x)$ для $x\in(n, n+1]$, затем для $x\in(n+1, n+2]$ и т. д.

Более общим, чем уравнение (8), является уравнение

$$f(x+h_k)+a_1f(x+h_{k-1})+\ldots+a_kf(x)=0, \quad (9)$$

$$0<h_1<h_2<\ldots<h_k.$$

Здесь $h_1, \ldots, h_k$ — необязательно целые и необязательно соизмеримы между собой. Уравнение (9) имеет частные решения

$$f(x)=e^{\lambda x},$$

где λ — корень уравнения

$$L(\lambda)\equiv e^{h_k\lambda}+a_1e^{h_{k-1}\lambda}+\ldots+a_k=0.$$

Это уравнение имеет бесконечно много корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Следовательно, уравнение (9) имеет бесконечно много частных решений $e^{\lambda_m x}$, $m=1, 2, \ldots$. Пусть все корни простые. Для выражения решения уравнения (9) через эти элементарные частные решения уравнение удобнее записать в виде:

$$\int_0^{\alpha} f(x+t)\, d\sigma(t) = 0, \quad \alpha = h_k, \tag{10}$$

где $\sigma(t)$ — кусочно постоянная функция, имеющая скачки в точках $0, h_1, \ldots, h_k$, равные соответственно $1, a_1, \ldots, a_k$. Пусть

$$\psi_\nu(t) = \frac{1}{L'(\lambda_\nu)} \int_0^t e^{\lambda_\nu \xi} d\sigma(\xi), \quad \nu \geqslant 1.$$

Функции $\psi_\nu(t)$ обладают свойством:

$$\int_0^{\alpha} e^{\lambda_m t} \psi_\nu(t)\, dt = \delta_{m\nu}$$

($\delta_{m\nu}=1$, если $m=\nu$, и $\delta_{m\nu}=0$, если $m\neq\nu$), т. е. они образуют систему, биортогональную к системе $\{e^{\lambda_n t}\}$. На этом основании решению $f(x)$ уравнения (10) приводится в соответствие ряд

$$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{\lambda_\nu x}, \tag{11}$$

$$a_\nu = \int_0^{\alpha} f(t)\, \psi_\nu(t)\, dt.$$

В случае, когда уравнение (9) имеет вид

$$f(x+2\pi) - f(x) = 0 \tag{12}$$

(т. е. $f(x)$ — периодическая функция с периодом 2π); $L(\lambda)=e^{2\pi\lambda}-1$; корни уравнения $L(\lambda)=0$ суть mi; ($m=0, \pm 1, \ldots$) и ряд (11) есть ряд Фурье для функции $f(x)$, записанный в комплексной форме. Ряд (11) можно рассматривать как обобщение на случай разностного уравнения (9) обычного ряда Фурье, соответствующего простейшему разностному уравнению (12). При определенных условиях ряд (11) сходится к решению $f(x)$. Если $f(x)$ — аналитическая функция, то уравнение (9) представимо в виде *бесконечного порядка уравнения*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f^{(n)}(x) = 0.$$

Аналогично разностям функций одного переменного вводятся разности функций многих переменных. Так, напр., пусть требуется решить задачу численного решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, при заданных значениях $u(x, y)$ на границе прямоугольника. Прямоугольник разбивается на мелкие прямоугольные ячейки со сторонами $\Delta x = a/N$, $\Delta y = b/M$. В вершинах этих ячеек ищутся значения решения. В вершинах, к-рые лежат на границе исходного прямоугольника, значения $u(x, y)$ известны. Принимая приближенно (в числителях стоят разности второго порядка)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+\Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x, y+\Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2},$$

вместо уравнения Лапласа получают систему уравнений

$$\frac{u(x+\Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2} +$$

$$+ \frac{u(x, y+\Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2} = 0.$$

Точка (x, y) пробегает те вершины ячеек, к-рые расположены внутри основного прямоугольника. Тем самым

строится система $(N-1)(M-1)$ уравнений, содержащая то же число неизвестных. Решая эту алгебраич. систему уравнений, получают значения $u(x, y)$ в вершинах ячеек. Когда Δx и Δy малы, а решение задачи имеет определенную гладкость, найденные значения близки к точным значениям.

К. р. и. развивалось параллельно с развитием основных разделов математич. анализа. Начала К. р. и. содержатся в трудах П. Ферма (P. Fermat), И. Барроу (I. Barrow), Г. Лейбница (G. Leibniz). В 18 в. К. р. и. приобрело характер самостоятельной математич. дисциплины. Первое систематич. изложение К. р. и. было дано Б. Тейлором (B. Taylor) в 1715. Труды математиков 19 в. подготовили почву для современных глав К. р. и. Идеи и методы К. р. и. получили существенное развитие в применении к аналитич. функциям комплексного переменного и задачам вычислительной математики.

Лит.: [1] Марков А. А., Исчисление конечных разностей, 2 изд., Од., 1910; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 1—2, 3 изд., М., 1966; [3] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, 3 изд., М., 1967; [4] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975.

А. Ф. Леонтьев.

КОНИКА — линия 2-го порядка, т. е. множество точек плоскости (проективной, аффинной, евклидовой), однородные координаты x_0, x_1, x_2 к-рых (относительно проективной, аффинной или декартовой систем координат) удовлетворяют однородному уравнению второй степени:

$$F(x) \equiv \sum_{i,\,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j = 0,\ a_{ij} = a_{ji}.$$

Билинейная симметричная форма

$$\Phi(x, \tilde{x}) = \sum_{i,\,j=0}^{2} a_{ij}x_i\tilde{x}_j$$

наз. полярной формой относительно $F(x)$. Две точки $M'(x_0', x_1', x_2')$, $M''(x_0'', x_1'', x_2'')$, для к-рых $\Phi(x', x'') = 0$, наз. полярно сопряженными относительно К. Если прямая (M', M'') пересекает К. в точках N_1, N_2 и точки M', M'' полярно сопряжены относительно К., то точки N_1, N_2 и M', M'' образуют гармоническую четверку. Точки К. и только они являются самосопряженными относительно К. Полюсом данной прямой относительно К. наз. точка, полярно сопряженная со всеми точками этой прямой. Множество точек плоскости, полярно сопряженных с данной точкой M' относительно К., наз. полярой точки M' относительно К. Поляра точки M' определяется линейным уравнением $\Phi(x, x') = 0$ относительно координат x_0, x_1, x_2. Если $\Phi(x, x') \not\equiv 0$, то поляра точки M' — прямая линия; если $\Phi(x, x') \equiv 0$ то поляра точки M' — вся плоскость. В этом случае точка M' принадлежит К. и наз. ее особой точкой. Если число $R = \operatorname{rang}(a_{ij}) = 3$, то К. не имеет особых точек и наз. невырождающейся, или нераспадающейся. На проективной плоскости это — действительный овал, или мнимый овал. Нераспадающаяся К. определяет на проективной плоскости корреляцию — биективное отображение множества точек на множество прямых. Касательная к нераспадающейся К. есть поляра точки касания. Если $R = 2$, то К. является парой действительных или парой мнимых прямых, пересекающихся в особой точке. Если $R = 1$, то каждая точка К. является особой, а сама К.— парой совпадающих действительных прямых (сдвоенной прямой). Аффинные свойства К. выделяются спецификой ее расположения и ассоциированных с ней точек и прямых относительно выделенной прямой $x_0 = 0$ — несобственной прямой. К. имеет гиперболический, эллиптический или параболический тип в зависимости от того, пересекает она несобственную прямую ($\delta < 0$, $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}$), не пересекает

($\delta>0$) или касается ее ($\delta=0$). Центр К.— полюс несобственной прямой, диаметр — поляра несобственной точки, асимптота — касательная к К. в несобственной точке. Два диаметра сопряжены относительно К., если их несобственные точки полярно сопряжены относительно К.

Метрические свойства К. выделяются из аффинных инвариантностью расстояния между двумя произвольными точками. Диаметр К., ортогональный сопряженному с ним диаметру, является осью симметрии К. и наз. ее осью. Директриса К.— поляра ее фокуса.

Лит.: [1] Фиников С. П., Аналитическая геометрия, 2 изд., М., 1952; [2] Ефимов Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 5 изд., М., 1960. *В. С. Малаховский.*

КОНИЧЕСКАЯ КОНСТРУКЦИЯ — сопоставление с каждым непрерывным отображением топологич. пространств $f: X\to Y$ топологич. пространства $C_f\supset Y$, к-рое получается из топологич. суммы (несвязного) объединения $CX\oplus Y$ (здесь $CX=(X\times[0,1])/(X\times\{0\})$ — конус над X) отождествлением $x\times\{1\}=f(x)$, $x\in X$. Пространство C_f наз. конусом отображения f. Если пространства X, Y пунктированы отмеченными точками $x\in X$, $y\in Y$, то дополнительно стягивается в точку образующая $x\times[0,1]$ конуса CX, и само C_f наз. стянутым конусом отображения f. Для любого пунктированного топологич. пространства K последовательность $X\xrightarrow{f}Y\subset C_f$ индуцирует точную последовательность

$$[X,\ K]\leftarrow[Y,\ K]\leftarrow[C_f,\ K]$$

пунктированных множеств. Отображение f гомотопно постоянному отображению в отмеченную точку тогда и только тогда, когда Y является *ретрактом* пространства C_f.

Лит.: [1] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [2] Мошер Р. Э., Тангора М. К., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970. *А. Ф. Харшиладзе.*

КОНИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, конус, — поверхность, образуемая движением прямой (образующей), проходящей через данную точку (вершину К. п.) и пересекающей данную линию (направляющую). К. п. имеет две полости, расположенные симметрично относительно вершины.

Коническая поверхность 2-го порядка — один из видов *поверхностей второго порядка*. Каноническое уравнение действительной К. п. 2-го порядка:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;$$

если $a=b$, то К. п. наз. круглой (круговой) К. п., или К. п. вращения; каноническое уравнение мнимой К. п. 2-го порядка:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0;$$

единственная действительная точка мнимой К. п.— точка (0, 0, 0).

Конической поверхностью n-го порядка наз. алгебраич. поверхность, задаваемая в аффинной системе координат x, y, z уравнением:

$$f(x,\ y,\ z)=0,$$

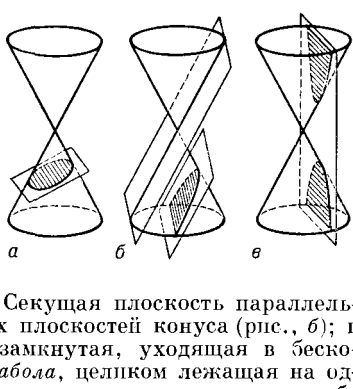
где $f(x, y, z)$ есть однородный многочлен (форма n-й степени от переменных x, y, z). Если точка $M(x_0, y_0, z_0)$ лежит на К. п., то и вся прямая OM лежит на К. п. (точка O — начало координат). Справедливо и обратное утверждение: всякая алгебраич. поверхность, к-рая состоит из прямых, проходящих через одну точку, есть К. п. *А. Б. Иванов.*

КОНИЧЕСКАЯ СЕТЬ — сопряженная сеть на поверхности трехмерного пространства, образованная коническими линиями, т. е. линиями касания конусов,

описанных около поверхности. Поверхности, несущие К. с., наз. *Петерсона поверхностями. Переноса сеть* можно рассматривать как частный случай К. с. Вершины конусов К. с. расположены на двух кривых. К. с. зависят самое большее от четырех параметров. Только невырожденные поверхности 2-го порядка несут 4-параметрическое семейство К. с. Поверхности, несущие 2-параметрическое семейство К. с.,— линейчатые, принадлежащие линейной конгруэнции (т. е. конгруэнции, образованной общими секущими двух прямых).

Лит.: [1] Бланк Я. И., «Тр. геометр. семинара. Ин-т науч. информ. АН СССР», 1971, т. 3, с. 5—27. *В. Т. Базылев.*

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ — линии, к-рые получаются сечением прямого кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину. К. с. могут быть трех типов: 1) секущая плоскость пересекает все образующие конуса в точках одной его полости (рис., *а*): линия пересечения есть замкнутая овальная кривая — *эллипс*; окружность как частный случай эллипса получается, когда секущая плоскость перпендикулярна оси конуса. 2) Секущая плоскость параллельна одной из касательных плоскостей конуса (рис., *б*); в сечении получается незамкнутая, уходящая в бесконечность кривая — *парабола*, целиком лежащая на одной плоскости. 3) Секущая плоскость пересекает обе полости конуса (рис., *в*); линия пересечения — *гипербола* — состоит из двух одинаковых незамкнутых, простирающихся в бесконечность частей (ветвей гиперболы), лежащих на обеих полостях конуса.



С точки зрения аналитич. геометрии К. с.— действительные нераспадающиеся *линии второго порядка*.

В тех случаях, когда К. с. имеет центр симметрии (центр), т. е. является эллипсом или гиперболой, его уравнение может быть приведено (путем перенесения начала координат в центр) к виду:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=a_{33}.$$

Дальнейшие исследования таких (наз. центральными) К. с. показывают, что их уравнения могут быть приведены к еще более простому виду:

$$Ax^2+By^2=C, \qquad (*)$$

если за направления осей координат выбрать так наз. главные направления — направления главных осей (осей симметрии) К. с. Если A и B имеют одинаковые знаки (совпадающие со знаком C), то уравнение (*) определяет эллипс; если A и B разного знака, то — гиперболу.

Уравнение параболы привести к виду (*) нельзя. При надлежащем выборе осей координат (одна ось координат — единственная ось симметрии параболы, другая — перпендикулярная к ней прямая, проходящая через вершину параболы) ее уравнение можно привести к виду:

$$y^2=2px.$$

К. с. были известны уже математикам Древней Греции. Наиболее полным сочинением, посвященным этим кривым, были «Конические сечения» Аполлония Пергского (ок. 200 до н. э.). Дальнейшие успехи теории К. с. связаны с созданием в 17 в. новых геометрич. методов: проективного [Ж. Дезарг (G. Désargues), Б. Паскаль (B. Pascal)] и в особенности координатного [Р. Декарт (R. Descartes), П. Ферма (P. Fermat)].

При надлежащем выборе системы координат (ось абсцисс — ось симметрии К. с., ось ординат — касательная в вершине К. с.) уравнение К. с. может быть приведено к виду:

$$y^2 = 2px + \lambda x^2$$

(p и λ — постоянные). Если $p \neq 0$, то оно определяет параболу при $\lambda = 0$, эллипс при $\lambda < 0$, гиперболу при $\lambda > 0$. Геометрич. свойство К. с., содержащееся в последнем уравнении, было известно уже древнегреч. геометрам и послужило для Аполлония Пергского поводом присвоить отдельным типам К. с. названия, сохранившиеся до сих пор: слово «парабола» (греч. parabolé) означает приложение (т. к. в греч. геометрии превращение прямоугольника данной площади y^2 в равновеликий ему прямоугольник с данным основанием $2p$ наз. приложением данного прямоугольника к этому основанию); слово «эллипс» (греч. élleipsis) — недостаток (приложение с недостатком); слово «гипербола» (греч. hyperbolé) — избыток (приложение с избытком).

С переходом к современным методам исследования стереометрич. определение К. с. было заменено планиметрич. определениями этих кривых как множеств точек на плоскости. Так, напр., эллипс определяется как множество точек, для к-рых сумма расстояний от двух данных точек (фокусов) имеет данное значение. Можно дать другое планиметрич. определение К. с., охватывающее все три типа этих кривых: К. с.— множество точек, для каждой из к-рых отношение ее расстояний до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) равно данному положительному числу (эксцентриситету) e. Если при этом $e < 1$, то К. с.— эллипс; если $e > 1$, то — гипербола; если $e = 1$, то — парабола.

Лит.: [1] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии, М., 1968; [2] Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

В. И. Битюцков.

КОННЕКС, коннекс Клебша,— связь точек и прямых на плоскости, выражаемая уравнением

$$f(x^1, x^2, x^3, u_1, u_2, u_3) = 0, \qquad (1)$$

где x^i и u_i — однородные координаты соответственно точки и прямой. Напр., уравнение

$$u_1x^1 + u_2x^2 + u_3x^3 = 0 \qquad (2)$$

задает так наз. главный коннекс, выражающий инцидентность точки x и прямой u. То, что два К. имеют общее, наз. конциденцией. Понятие К. введено А. Клебшем (A. Clebsch) в 1871 для однородной формулировки дифференциальных уравнений.

Так, уравнение

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

определяется конциденцией К. (1) и (2), и задача интегрирования (3) заключается в том, чтобы из x определенных таким образом соответствующих точек и прямых u составить кривые, для к-рых x и u являются соответствующими точками интегральной кривой и касательными к ней. Введение такой проектной точки зрения (равноправности координат x и u) дает также нек-рый принцип классификации дифференциальных уравнений.

Аналогичные построения могут быть проведены для уравнений с частными производными, причем не обязательно первого порядка.

Лит.: [1] Клейн Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.—Л., 1939.

М. И. Войцеховский.

КОНОИД — *Каталана поверхность*, все прямолинейные образующие к-рой пересекают фиксированную прямую — ось К. Напр., гиперболич. параболоид есть К. с двумя осями.

Радиус-вектор К.

$$r=\{u\cos v+\alpha f(v),\quad u\sin v+\beta f(v),\quad \gamma f(v)\},$$

где $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ — единичный вектор, имеющий направление оси К., $f(v)$ — некоторая функция. Для прямого К. $\alpha=\beta=0$, $\gamma=1$, и тогда его ось является стрикционной линией. Прямой К. с $f(v)=av$ есть *геликоид*.

И. Х. Сабитов.

КОНОРМАЛЬ — термин, употребляемый в теории *краевых задач* для дифференциальных уравнений с частными производными. Пусть $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — внешняя нормаль в точке x к гладкой поверхности S, расположенной в евклидовом пространстве E^n с координатами $x^1, \ldots, x^n$, g^{ij} — контравариантный невырожденный тензор, обычно представляющий коэффициенты некоторого дифференциального оператора второго порядка $D=g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$. Тогда к о н о р м а л ь ю (относительно D) наз. вектор

$$n=(\nu^1, \ldots, \nu^n),$$

где $\nu^i=g^{ik}\nu_k$. Другими словами, К.— контравариантная запись (в пространстве с метрикой, определяемой тензором, обратным g^{ij}) нормального к S ковариантного (в пространстве с евклидовой метрикой) вектора ν.

Лит.: [1] Б и ц а д з е А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [2] М и р а н д а К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957.

М. И. Войцеховский.

КОНСТАНТА в м а т е м а т и ч е с к о й л о г и к е — символ *формального языка* для обозначения некоторого фиксированного элемента (индивида), фиксированной операции или отношения на какой-либо структуре, описываемой этим языком. В соответствии с этим различают *индивидные константы*, ф у н к ц и о н а л ь н ы е к о н с т а н т ы и п р е д и к а т н ы е к о н с т а н т ы. Совокупность всех К. языка наз. с и г н а т у р о й этого языка. Напр., сигнатура языка *арифметики формальной* состоит из индивидной К. «0» (нуль), двуместных функциональных К. «+» (сложение) и «·» (умножение), одноместной функциональной К. «′» (прибавление единицы) и двуместной предикатной К. «=» (равенство).

С. К. Соболев.

КОНСТРУКТИВНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ — раздел математической физики, изучающий свойства моделей *квантовой теории поля* (к. т. п.). Одна из задач К. к. т. п. состоит в исследовании квантовых полей в реальном 4-мерном пространстве-времени. Однако само существование этих полей остается (1978) математически недоказанным. Основные усилия были направлены на изучение менее сингулярных моделей к. т. п. в 2- и 3-мерном пространстве-времени. К. к. т. п. представляет собой синтез идей и методов аксиоматич. теории поля и теории перенормировок с современными математич. методами. Само понятие релятивистского квантового поля допускает различные эквивалентные математич. интерпретации, что позволяет использовать в к. т. п. методы различных областей математики.

Квантовое поле можно трактовать либо в терминах теории нелинейных гиперболич. уравнений для операторных обобщенных функций, либо в терминах теории обобщенных случайных полей (устанавливая тесный контакт со статистич. механикой), либо как систему аналитич. функций многих комплексных переменных (при изучении аналитич. свойств S-матрицы), либо же рассматривать его с точки зрения C^*-алгебр и теории представлений.

В первых работах по К. к. т. п. использовались в основном средства функционального анализа. Релятивистское квантовое поле в 2-мерном пространстве-времени, удовлетворяющее аксиомам Уайтмана, впервые удалось построить [8], только используя евклидову фор-

мулировку [9] к. т. п., позволившую привлечь методы теории вероятностей и статистич. механики.

Релятивистское квантовое поле полностью характеризуется последовательностью своих функций Уайтмана $W_n(x_1, \ldots, x_n)$. Эквивалентная евклидова формулировка к. т. п. дается последовательностью функций Швингера $S_n(x_1, \ldots, x_n)$ (они получаются из W_n аналитич. продолжением в евклидовы точки $(ix_1^0, x_1, ix_2^0, x_2, \ldots)$), удовлетворяющих аксиомам Остервальдера — Шрадера (ОШ). При некоторых дополнительных предположениях можно доказать, что S_n являются моментами *вероятностной меры*, обладающей специальными свойствами. Способ построения моделей к. т. п., при к-ром сначала строится вероятностная мера, а затем проверяются аксиомы ОШ для ее моментов, оказался наиболее удобным и является общепринятым.

В простейшем случае одного скалярного поля рассматривается *измеримое пространство* $(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d), \mathscr{B})$, где $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ — пространство обобщенных функций умеренного роста, $\mathscr{B}$ есть σ-алгебра, генерируемая цилиндрическими множествами, и класс вероятностных мер μ на $(\mathscr{S}', \mathscr{B})$, обладающих следующими специальными свойствами.

1) На $(\mathscr{S}', \mathscr{B})$ задано естественное представление связной компоненты единицы G евклидовой группы движений $\mathbb{R}^d$ автоморфизмами σ-алгебры $\mathscr{B}$. Требуется, чтобы мера μ была G-инвариантна. Это условие есть евклидово выражение релятивистской инвариантности.

2) Пусть $\Phi(f)$ — непосредственно заданное обобщенное случайное поле на $(\mathscr{S}', \mathscr{B}, \mu)$, т. е. $\Phi(f)(\omega) = \omega(f)$, $\omega \in \mathscr{S}'$, $f \in \mathscr{S}$. Для любой функции $F(\omega)$ на $\mathscr{S}'$ определяется $F_\theta(\omega) = F(\omega_\theta)$, где $\omega_\theta(f) = \omega(f_\theta)$, $f_\theta(x_1, \ldots, x_d) = f(x_1, \ldots, -x_d)$. Пусть $\mathscr{B}_+$ — σ-алгебра, генерируемая функциями $\Phi(f)$ с $\operatorname{supp} f \subset \{x \in \mathbb{R}^d, x_d > 0\}$. Требуется выполнение условия положительности ОШ:

$$\int \bar{F}_\theta(\omega)\, F(\omega)\, d\mu(\omega) \geqslant 0$$

для любой $\mathscr{B}_+$-измеримой функции F на $\mathscr{S}'$. Это условие выражает положительную определенность скалярного произведения в релятивистском гильбертовом пространстве. Для двумерных моделей широко используется несколько более сильное условие марковости поля $\Phi(f)$.

3) Требуется существование нормы $\|\cdot\|$ на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ такой, что

$$\int e^{\Phi(f)}\, d\mu$$

равномерно ограничена и непрерывна по норме $\|\cdot\|$ на

$$\{f : f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),\ \|f\| \leqslant 1\}.$$

4) Подгруппа трансляций группы G должна действовать эргодически. Это есть выражение единственности вакуума в релятивистской теории.

Если мера μ удовлетворяет условиям 1—4, то она называется к в а н т о в о й м е р о й, а соответствующее обобщенное случайное поле $\Phi(f)$ наз. е в к л и д о в ы м п о л е м. Моменты квантовой меры

$$S_n(f_1, \ldots, f_n) = \int \Phi(f_1) \ldots \Phi(f_n)\, d\mu$$

— функции Швингера, удовлетворяют аксиомам ОШ. Существует единственное релятивистское квантовое поле, удовлетворяющее всем аксиомам Уайтмана, такое, что аналитич. продолжение его функций Уайтмана в евклидовы точки совпадает с функциями Швингера данной квантовой меры μ. Если некоторая мера μ удовлетворяет лишь условиям 1—3, то для всех ее эргодич. компонент выполняются условия 1—4.

Один класс квантовых мер строится легко — это гауссовы меры (зависящие от параметра $m>0$) с характеристич. функционалом

$$\int \exp\{i\Phi(f)\}\, d\nu_m = \exp\left\{-\frac{1}{2}\,(f,\ (-\Delta+m)^{-1}f)_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right\},$$

здесь Δ — оператор Лапласа (при $d\geqslant 3$ допускается $m=0$). Соответствующее евклидово поле называют свободным (скалярным) евклидовым полем массы m.

Построение негауссовых мер представляет большие трудности, и результаты существенно зависят от размерности d. Обычная процедура следующая. Строится нек-рая функция $V(\Lambda, \varkappa)$ на $\mathscr{S}'$ (потенциал взаимодействия), зависящая от параметров Λ, наз. объемным обрезанием, и $\varkappa$, наз. ультрафиолетовым обрезанием. Эвристически $V=-\mathscr{L}_{\text{int}}$ (см. *Квантовая теория поля*). Желательно, чтобы $V(\Lambda, \varkappa)$ обладала свойствами аддитивного функционала. Затем строится мера

$$d\mu_{\Lambda,\varkappa} = e^{-V(\Lambda,\varkappa)}\, d\nu_m^\Lambda \Big/ \int e^{-V(\Lambda,\varkappa)} d\nu_m^\Lambda$$

(определение $d\nu_m^\Lambda$ см. ниже) и изучаются пределы последовательности мер $d\mu_{\Lambda,\varkappa}$ при $\Lambda, \varkappa\to\infty$. Для некоторых потенциалов V (каких именно — определяется из физич. соображений; вид V и задает модель) предельная мера μ будет удовлетворять условиям 1—4. Сходимость мер обычно понимается в смысле сходимости всех моментов и характеристич. функционалов.

Напр., для модели со взаимодействием $\lambda\Phi^4$ при $d=2$ эта процедура конкретизируется следующим образом. Пусть $d\nu_m^\Lambda$ — гауссова мера на $(\mathscr{S}', \mathscr{B})$ с характеристич. функционалом

$$\int \exp\{i\Phi(f)\}\, d\nu_m^\Lambda = \exp\left\{-\frac{1}{2}(f,\ (-\Delta_\Lambda+m^2)^{-1}f)_{L^2}\right\},$$

где Δ_Λ — самосопряженное расширение оператора Лапласа с нек-рыми краевыми условиями на границе $\partial\Lambda$ области Λ на плоскости $\mathbb{R}^2$ (обычно Λ — прямоугольник); ядром $(-\Delta_\Lambda+m^2)^{-1}(x, y)$ может быть, например, функция Грина для задачи Дирихле. Пусть, далее, $h_\varkappa\in\mathscr{S}$ и $h_\varkappa(x-y)\to\delta(x-y)$ при $x\to\infty$. Случайная величина $\Phi_\varkappa(x)=\Phi(h_\varkappa(x-.))$ при $\varkappa<\infty$ является гладкой функцией параметра $x\in\mathbb{R}^2$ *и*

$$\int \Phi_\varkappa(x)\, f(x)\, dx \to \Phi(f)$$

при $\varkappa\to\infty$. Положим

$$V(\Lambda,\ \varkappa) = \lambda \int_\Lambda :\Phi_\varkappa^4(x):dx,\ \lambda\geqslant 0,$$

где $:\Phi_\varkappa^4(x):$ виковская степень случайной величины $\Phi_\varkappa(x)$ (см. *Фока пространство*). Тогда

$$e^{-V(\Lambda,\varkappa)}\in L^p\left(d\nu_m^V\right),\quad p\geqslant 1,$$

$$Z_{\varkappa,\Lambda} = \int e^{-V(\Lambda,\varkappa)} d\nu_m^\Lambda \neq 0.$$

Пусть, наконец,

$$d\mu_{\Lambda,\varkappa} = \exp\{-V(\Lambda,\ \varkappa)\}\, d\nu_m^\Lambda / Z_{\varkappa,\Lambda}.$$

При $\varkappa\to\infty$, $\Lambda\to\mathbb{R}^2$ все моменты и характеристич. функционалы мер $\mu_{\Lambda,\varkappa}$ сходятся к моментам и характеристич. функционалу нек-рой квантовой меры μ. Оказывается, что при достаточно больших λ меры $\mu_\Lambda=\lim\limits_{\varkappa\to\infty}\mu_{\Lambda,\varkappa}$ с разными краевыми условиями на $\partial\Lambda$ имеют, вообще говоря, разные пределы при $\Lambda\to\mathbb{R}^2$. В этом случае говорят, что имеет место фазовый переход.

Задача К. к. т. п. состоит в том, чтобы описать все квантовые меры (фазы), отвечающие данному потенци-

алу взаимодействия, и исследовать свойства соответствующих релятивистских квантовых полей. В первую очередь интересуются спектральными свойствами оператора массы группы Пуанкаре (его изучение сводится к рассмотрению поведения функций Швингера на больших расстояниях) и свойствами S-матрицы — аналитичность, унитарность и другие (S-матрица изучается при помощи аналитического продолжения функций Швингера).

Существование квантовых мер при $d=2$ доказано (1978) для потенциалов взаимодействия $V=P(\Phi)$, P — любой полуограниченный снизу полином, $V=\lambda\cos g\Phi$ (уравнение синус-Гордона) и нек-рых других неполиномиальных взаимодействий, а также для нек-рых многокомпонентных полей $\vec{\Phi}=(\Phi_1, \ldots, \Phi_N)$. Для полиномиального достаточно слабого взаимодействия начато изучение спектра массового оператора в зависимости от вида полинома и установлено существование S-матрицы. Исследуется также взаимодействие Юкавы фермионных и скалярных полей. Евклидово фермионное поле не является обобщенным случайным полем, оно принимает значения в алгебре Грассмана. Однако по фермионным переменным можно «проинтегрировать», и задача сводится к оценкам нек-рых континуальных интегралов по обычным гауссовым мерам. Все эти модели при нек-рых значениях параметров имеют фазовые переходы.

Описанная выше конструкция релятивистских квантовых полей приводит только к так называемым вакуумным секторам, т. е. к квантовым полям, удовлетворяющим аксиомам Уайтмана, включая существование вакуума. Эти поля являются решением нелинейных уравнений с простейшими начальными условиями. Для ряда 2-мерных моделей (синус-Гордона и др.) построены солитонные сектора, у которых вакуум отсутствует, но которые имеют весьма интересный с физич. точки зрения спектр оператора массы. Эти новые сектора строятся при помощи специальных автоморфизмов C^*-алгебры, наблюдаемых в вакуумном секторе.

При $d=3$ доказано существование квантовых мер для модели с $\lambda(\vec{\Phi}, \vec{\Phi})^2$ взаимодействием, где

$$(\vec{\Phi}(x),\ \vec{\Phi}(x))=\sum_{i=1}^{N}\Phi_i(x)\,\Phi_i(x).$$

Потенциал взаимодействия здесь имеет вид

$$V(\Lambda, \varkappa)=\lambda\int_\Lambda :(\vec{\Phi}_\varkappa(x),\ \vec{\Phi}_\varkappa(x))^2:dx+$$

$$+\lambda^2\delta m_\varkappa\int_\Lambda :(\vec{\Phi}_\varkappa(x),\ \vec{\Phi}_\varkappa(x)):dx+C_{\varkappa,\Lambda},$$

где $\delta m_\varkappa$ и $C_{\varkappa,\Lambda}$ — некоторые определенные функции от $\varkappa$ и Λ, т. е. добавлены контрчлены. В этой модели также происходит фазовый переход при достаточно больших λ, причем он сопровождается нарушением $O(N)$-симметрии.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969; [2] Конструктивная теория поля, пер. с англ., М., 1977; [3] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., М., т. 1, 1977, т. 2, 1978; [4] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [5] Хепп К., Теория перенормировок, пер. с франц., М., 1974; [6] Эвклидова квантовая теория поля. Марковский подход, пер. с англ., М., 1978; [7] Добрушин Р. Л., Минлос Р. А., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 2, с. 67—122; [8] Glimm J., Jaffe A., Spencer T., «Ann. Math.», 1974, v. 100, № 3, p. 585—632; [9] Nelson E., «J. Funct. Anal.», 1973, v. 12, № 1, p. 97—112; [10] Fröhlich J., «Adv. Math.», 1977, v. 23, № 2, p. 119—81.

И. В. Волович, М. К. Поливанов.

КОНСТРУКТИВНАЯ ЛОГИКА — раздел математической логики, изучающий рассуждения о *конструктивных объектах* и конструкциях. При таком понимании К. л. шире, чем логика *конструктивной математики*. Самое заметное отличие от традиционной (классиче-

ской) логики состоит в отсутствии *исключенного третьего закона* $A \vee \neg A$ и *двойного отрицания закона* $\neg\neg A \to A$.

При обозначении систем чистой логики (исчисление высказываний, предикатов) термины «конструктивное», «интуционистское», «гейтинговское» часто считаются синонимами (см. *Гейтинга формальная система*). Под конструктивной арифметикой иногда понимают гейтинговскую арифметику, а иногда — ее расширение, получаемое добавлением принципа Маркова (см. *Конструктивного подбора принцип*) и схемы $A \leftrightarrow \exists e(e\,r\,A)$, выражающей эквивалентность формулы и утверждения о ее реализуемости (см. *Конструктивная семантика*). Эта расширенная система, достаточная для доказательства основных результатов конструктивного математич. анализа, не является, в отличие от гейтинговских систем, подсистемой классич. арифметики: в ней опровергается закон исключенного третьего $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$.

Иногда к К. л. относят системы *интуционистской логики*, содержащие средства описания специфически интуционистских понятий. Общая черта подавляющего большинства систем К. л., отражающая специфику конструктивного понимания связки $\vee$ и квантора $\exists$,— явная реализация этих связок: выводимость $A \vee B$ (соответственно $\exists x A(x)$) влечет выводимость одной из формул A, B (соответственно $A(t)$ для нек-рого терма t). При этом в случае прикладных систем (арифметика, анализ) требуется замкнутость рассматриваемых формул. Большинство систем К. л. (включая все гейтинговские системы) корректны относительно различных понятий реализуемости, включая реализуемость по Клини и *Гёделя интерпретацию*: все выводимые формулы реализуемы, в частности истинны, в конструктивной семантике. С другой стороны, формальные системы К. л. обычно неполны относительно естественной конструктивной семантики. Для систем, содержащих арифметику, это следует из *Гёделя теоремы о неполноте*.

Множество реализуемых предикатных формул неперечислимо, поэтому конструктивное исчисление предикатов неполно относительно реализуемости, а из его полноты относительно «наивной» конструктивной семантики следовала бы интуционистская истинность принципа конструктивного подбора. Конструктивное исчисление высказываний также неполно относительно реализуемости, но полно при нек-рой интерпретации в терминах систем Поста. Арифметическая полуформальная система, полная относительно конструктивной семантики Маркова — Шанина, получается, если добавить к формальной конструктивной арифметике со схемой $A \leftrightarrow \exists e(e\,r\,A)$ и принципом конструктивного подбора эффективное ω-правило: из $A(0)$, $A(1)$, ... вывести $\forall x A(x)$. Для гейтинговских систем установлены теоремы полноты относительно теоретико-модельных семантик Крипке и Бета, использующих «возможные миры» (эти семантики связаны с теоретико-множественным вынуждением), а также относительно алгебраических и топологических моделей.

Классические формальные системы обычно погружаются в соответствующие системы К. л. (с сохранением отношения выводимости из гипотез) с помощью негативного перевода, т. е. приписывания двойного отрицания $\neg\neg$ перед всеми подформулами. Поэтому системы арифметики, анализа и *типов теории*, основанные на классич. логике, изоморфно вкладываются в соответствующие системы, основанные на К. л. Имеются системы теории множеств, основанные на К. л., в к-рые погружаются классич. системы. Гейтинговские системы погружаются в модельные расширения классических с помощью d-перевода, т. е. приписывания знака необходимости D перед всеми подформулами. При этом D можно читать «доказуемо».

В нек-рых системах К. л. справедливы суждения, ложные при классическом истолковании, напр. отрицание закона исключенного третьего или специфически интуционистские утверждения о последовательностях. Такие системы S сводятся к классическим системам S° с помощью подходящего понятия реализуемости ρ. Доказывают, что $S\vdash A$ влечет существование t такого, что $S^\circ\vdash(t\rho A)$, причем если A — числовое равенство, то $S^\circ\vdash(A\leftrightarrow t\rho A)$. Отсюда следует непротиворечивость S относительно S°.

К. л. исследует истинность суждений также в нетрадиционных языках, отличных от языков логики предикатов арифметики, анализа и т. д. Наряду с традиционным отрицанием $\neg$, основанным на приведении к противоречию, изучается с и л ь н о е о т р и ц а н и е $\sim$, предусматривающее построение контрпримера. Для $\sim$ справедливы многие из законов классич. логики, напр.

$$\sim(p\&q)\leftrightarrow\neg p\vee\neg q,\quad\sim\sim p\leftrightarrow p,$$

но теорема об эквивалентной замене верна лишь в виде

$$((p\leftrightarrow q)\,\&\,(\sim p\leftrightarrow\sim q))\supset(A\,(p)\leftrightarrow A\,(q)).$$

К системе сильного отрицания близки системы, основанные на симметричной трактовке истинности и ложности. Семантика для них предусматривает указание не только вида конструкций, обосновывающих истинность, но и вида конструкций, обосновывающих ложность рассматриваемого суждения.

Безотрицательная л о г и к а Г р и с с а — Н е л ь с о н а стремится избежать использования отрицания и ограничить класс свойств, о к-рых делаются утверждения, такими, для к-рых уже построены объекты, удовлетворяющие этим свойствам. Язык такой логики содержит с в я з к у $\underset{x}{\rightarrow}$ причем $A\underset{x}{\rightarrow}B$ понимается приблизительно как

$$\forall x\,(A\supset B)\,\&\,\exists x A.$$

В т е о р и и к о н с т р у к ц и й исследуются сами правила построения и доказательства, лежащие в основе конструктивной математики. Конструкции строятся из исходных с помощью фиксированного набора комбинаторов и операции применения функции к аргументу. Формулы строятся из равенства с помощью связок логики высказываний и предиката доказуемости π, причем $\pi(a,\,x\cdot\alpha(x))$ читается «a есть доказательство того, что $\alpha(x)$ верно для всех x». В качестве аксиом берутся, в частности, все классические тавтологии (включая закон исключенного третьего), т. е. отношение «быть доказательством» предполагается разрешимым. Имеется корректная и точная интерпретация гейтинговских систем в теории конструкций.

Рассмотрение в К. л. бескванторных систем вызвано стремлением получить финитные (в том или ином смысле) доказательства рассматриваемых суждений или их мажорант (см. *Конструктивная семантика*). Многие традиционные системы S К. л. погружаются в бескванторные системы S^- таким образом, что выводимость в S суждения $\forall x\exists y R(x,\,y)$ с бескванторной формулой R влечет выводимость в S^- формулы $R(x,\,\varphi(x))$ для подходящего φ. Если S — арифметика без индукции, то S^- примитивно рекурсивная арифметика; если S — гейтинговская арифметика, то S^- — система гёделевских примитивно рекурсивных функционалов.

Для формальных систем К. л. доказаны т е о р е м ы н о р м а л и з а ц и и: любой вывод может быть конечным числом стандартных преобразований (редукций) приведен к нормальной форме, не содержащей «лишних» участков (см. *Генцена формальная система*). Нормальные выводы обладают (в полной мере или, в случае арифметики и более широких систем, частично) свойством подформульности.

Имеются связи между К. л. и теорией категорий. Так, понятию «декартовой замкнутой категории» соответствует гейтинговское исчисление высказываний.

Иногда к К. л. относят все логические рассмотрения, в к-рых требуется, чтобы все изучаемые объекты были конструктивными, независимо от применяемой логики. С этой тенденцией связано название *конструктивных по Гёделю множеств.*

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Troelstra A. S., в кн.: Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis, B.—Hdlb.—N. Y., 1973; [3] Новиков П. С., Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., 1977; [4] Kreisel G., Mathematical logic, в кн.: Lectures on modern mathematics, v. 3, N. Y., 1965, p. 95—195. *Г. Е. Минц.*

КОНСТРУКТИВНАЯ МАТЕМАТИКА, конструктивное направление в математике,— математика, строящаяся в соответствии с тем или иным конструктивным математич. мировоззрением, обыкновенно стремящимся связывать утверждения о существовании математич. объектов с возможностью их построения и отвергающим в силу этого ряд установок традиционной теоретико-множественной математики, приводящих к появлению чистых теорем существования (в частности, *абстракцию актуальной бесконечности* и универсальный характер *исключенного третьего закона*). Конструктивная тенденция в математике проявлялась в той или иной форме на протяжении всей ее истории, хотя, по-видимому, только К. Гаусс (C. Gauss) впервые отчетливо выразил принципиальное для К. м. различие становящейся (потенциальной) и актуальной математич. бесконечности и возразил против употребления последней. Дальнейшие критические шаги в этом направлении были сделаны Л. Кронекером (L. Kronecker), А. Пуанкаре (H. Poincaré) и особенно Л. Брауэром (L. Brouwer). В критике Л. Брауэра, совпавшей по времени с кризисом оснований математики конца 19 — нач. 20 вв., энергично отвергалась как вера в экзистенциальный характер бесконечных множеств, так и убежденье в допустимости неограниченной экстраполяции классических логических принципов, в особенности закона исключенного третьего. В качестве альтернативы теоретико-множественному подходу Л. Брауэр, а затем и его последователи, разработали оригинальную программу построения математики, известную ныне под названием *интуиционизм.* Интуционистскую математику Л. Брауэра можно считать первой систематич. попыткой построения математики на конструктивной основе. Параллельно успехам интуиционистов в созданной Д. Гильбертом (D. Hilbert) с целью обоснования теоретико-множественной математики *доказательств теории* был четко выявлен ряд первоначальных понятий, послуживший впоследствии отправной точкой отличных от интуиционизма конструктивных течений. Значительная часть соответствующих работ (при этом обнаружился достаточно широкий спектр толкования различными исследователями терминов «конструктивный», «эффективный» и пр.) опиралась на успехи, достигнутые (опять-таки под влиянием идей Д. Гильберта) в изучении математич. понятия *алгоритма.* Один из наиболее последовательных и законченных подходов к построению К. м. на этой основе доставляется основанной А. А. Марковым советской школой К. м., формирование основных понятий к-рой относится к 50-м гг. 20 в. Сам термин «К. м.» (конструктивное направление в математике) часто употребляется в узком смысле слова для именования математики, строящейся советским конструктивным направлением; ниже этот термин будет использоваться именно в указанном только что смысле.

К. м. может быть коротко охарактеризована следующими основными чертами: (1) предметом изучения являются конструктивные процессы и возникающие в результате их выполнения *конструктивные объекты*;

(2) рассмотрение конструктивных процессов и объектов производится в рамках *абстракции потенциальной осуществимости* с полным исключением идеи актуальной бесконечности; (3) интуитивное понятие эффективности связывается с точным понятием алгоритма; (4) используется специальная, учитывающая специфику конструктивных процессов и объектов *конструктивная логика*.

Понятия конструктивного процесса и конструктивного объекта являются первоначальными; представления о них имеют своим источником практическую материальную деятельность человека. Примерами конструктивных процессов могут служить сборка часов на конвейере, полная или частичная разборка их в ремонтной мастерской, набор текстов (с корректурами) в типографии, формирование и расформирование железнодорожных составов и пр. Характерной чертой конструктивных процессов является протекающее по отдельным шагам оперирование в рамках нек-рых четко указанных правил с элементарными, заведомо отличимыми друг от друга объектами, считающимися неразложимыми в ходе этих процессов. Возникающие в результате фигуры, составленные из исходных элементарных объектов, и считаются конструктивными объектами. К. м. не имеет необходимости углубляться в общее понятие конструктивного процесса и объекта, поскольку для ее нужд оказывается вполне достаточным один специальный вид конструктивных объектов — слова в том или ином алфавите.

Рассмотрение слов (это понятие также представляется первоначальным) происходит на следующей основе.

Вначале фиксируется нек-рый алфавит, т. е. список неразложимых, уверенно отличимых друг от друга элементарных знаков (букв). Каждая буква алфавита может копироваться; возникающие в результате последовательных актов такого копирования прямолинейные цепочки знаков считаются словами в исходном алфавите. К словам в данном алфавите удобно отнести также и пустое слово, т. е. цепочку, не содержащую ни одного знака. Напр., цепочки (5) «аввввсд» и (6) «книга» являются словами в русском алфавите. При обращении со словами К. м.— и в этом проявляется ее абстрактный характер — использует *абстракции отождествления* и потенциальной осуществимости. Первая из них позволяет, отвлекаясь от различий копий и оригинала, говорить о разных копиях данной буквы и о ней самой, как об одной букве. Напр., говорят, что в слово (5) три раза входит буква «в» русского алфавита, тогда как в действительности при написании данного слова воспроизводились три различных конкретных копии исходной буквы. Это соглашение естественным образом распространяется на одинаковые по написанию (графически равные) слова. Напр., о двух конкретных словах: слове «книга» и слове (6) говорят как об одном слове. В допущении абстракции отождествления проявляется предполагаемая К. м. первоначальная способность человека к «чтению» слов, т. е. к многократному и устойчивому опознанию знаковых цепочек как одинаковых или различных. На это обстоятельство как минимальную предпосылку любой научной деятельности указывал Д. Гильберт. Абстракция потенциальной осуществимости позволяет пренебрегать в рассуждениях о написании слов реальными ограничениями в пространстве, времени и материале. Таким образом, о воображаемых очень длинных словах начинают рассуждать как о реально существующих, в частности считается возможным к любому данному слову приписать справа (или слева) любое другое слово. Отсюда вытекает и возможность рассмотрения сколь угодно больших натуральных чисел, а также сложения любых двух натуральных чисел, поскольку натуральными числами можно, напр., считать слова вида 0, 0|, 0|| и т. д. в алфавите 0|. Вме-

сте с тем абстракция потенциальной осуществимости не позволяет рассматривать как своего рода завершенные объекты «бесконечные» слова и совокупность «всех» слов в данном алфавите (в частности, не рассматривается как завершенный объект и натуральный ряд). Такого рода рассмотрения требуют привлечения более сильной абстракции — абстракции актуальной бесконечности, к-рая отвергается К. м.

Принятие абстракции потенциальной осуществимости приводит к тому, что наряду с элементарными, целиком обозримыми конструктивными процессами (напр., написанием коротких слов) рассматриваются воображаемые, не подлежащие реальному воспроизведению конструктивные процессы. Такие процессы задаются своими предписаниями; сами эти предписания по существу и становятся предметом исследования. Задающее конструктивный процесс предписание (для простоты речь идет о процессах, оперирующих со словами) должно быть общепонятным и совершенно однозначно определять шаг за шагом последовательное построение слов, причем шаги должны быть элементарными, т. е. не предполагать ничего, кроме умения читать, писать (и стирать) слова. Шаги эти, таким образом, сводятся к написанию и графическому сравнению нек-рых слов, а также к замене *вхождений* одних слов в другие третьими словами. Окончание процесса определяется самим предписанием и может зависеть от результатов, полученных на шагах, предшествующих заключительному, причем принятие решения о заключительном характере данного шага также должно носить описанный только что элементарный характер. Возможна ситуация, когда никакой шаг не оказывается заключительным, т. е. после каждого совершенного шага данное предписание требует совершить следующий шаг. Такому предписанию не соответствует никакой потенциально выполнимый конструктивный процесс, однако здесь оказывается удобной условная терминология, согласно к-рой соответствующее предписание определяет неограниченно продолжаемый (потенциально бесконечный) процесс. Для оправдания этой терминологии можно было бы также расширить исходные представления о конструктивных процессах, рассматривая наряду с потенциально реализуемыми процессами более абстрактные образования — процессы, отождествляемые с их предписаниями. В связи с появлением неограниченно продолжаемых конструктивных процессов возникает вопрос о средствах, при помощи к-рых можно убедиться в обрываемости задаваемого данным предписанием конструктивного процесса. К. м. принимает здесь важный принцип, называемый *конструктивного подбора принципом* и позволяющий устанавливать такие факты методом от противного, т. е. приводя к нелепости предположение о неограниченной продолжаемости соответствующего конструктивного процесса. Примеры предписаний: (7) написать |; (8) к произвольному слову в алфавите 0| приписать справа |; (9) п. 1: написать | и перейти к п. 2; п. 2: стереть | (т. е. заменить эту букву пустым словом) и перейти к п. 1; (10) п. 1: к произвольному слову в алфавите 0| приписать справа | и перейти к п. 2; п. 2: если обрабатываемое в данный момент слово совпадает с 0||, то закончить процесс, в противном случае вернуться к п. 1; (11) п. 1: написать 0 и перейти к п. 2; п. 2: к обрабатываемому в данный момент слову приписать справа | и перейти к п. 3; п. 3: если получилось совершенное натуральное число, то закончить процесс, в противном случае приписать к обрабатываемому в данный момент слову справа | и перейти к п. 2. Предписание (7) задает конструктивный процесс, оканчивающийся за один шаг написанием однобуквенного слова |. Процесс выполнения (9) неограниченно продолжаем. В настоящее время (к 1978) неизвестно, заканчивается ли конструктивный процесс, задаваемый (11) (в (11) для краткости

использовались понятия теории чисел; ясно, что возможно более длинное предписание этого рода, опирающееся исключительно на возможности чтения, написания и сравнения слов в алфавите 0|). Несколько особый характер имеют предписания (8) и (10): их выполнение может начинаться с любого слова в указанном алфавите, при этом конструктивный процесс, определяемый (8), всегда заканчивается, в то время как в случае предписания (10) он неограниченно продолжаем при нек-рых исходных словах. Предписания указанных типов принято называть а л г о р и т м а м и (в данном контексте речь идет об алгоритмах, оперирующих со словами).

К необходимости рассмотрения алгоритмов приводит конструктивная трактовка экзистенциальных утверждений. Утверждение о существовании конструктивного объекта с данным свойством, т. е. утверждение вида (12) $\exists x A(x)$, в соответствии с представлениями о конструктивных объектах как результатах конструктивных процессов считается в К. м. установленным только в том случае, когда указан потенциально выполнимый конструктивный процесс, заканчивающийся построением искомого объекта. Соответственно установление параметрического утверждения существования (13) $\forall x \exists y A(x, y)$ («для всякого x существует y такой, что $A(x, y)$») предполагает указание «общего» конструктивного процесса, начинающегося с произвольного конструктивного объекта x данного исходного типа и заканчивающегося построением искомого y. Другими словами, (13) выражает существование алгоритма, находящего y, исходя из x. Из такой трактовки существования вытекает и конструктивное понимание *дизъюнкции*: суждение $A \vee B$ («A или B») считается установленным, только если предъявлен конструктивный процесс, заканчивающийся указанием его верного члена. Дальнейшее разъяснение смысла суждений более сложной структуры и выработка правил обращения с ними, соответствующих исходным конструктивным установкам, составляет задачу *конструктивной семантики* и *конструктивной логики*. Приведенная конструктивная трактовка утверждений существования и дизъюнкции существенно отличается от традиционной: в теоретико-множественной математике, напр., суждение (12) может быть доказано приведением к нелепости его отрицания. Такое доказательство обыкновенно не содержит никакого способа построения искомого конструктивного объекта. К. м. считает, что подобное рассуждение доказывает не (12), а его «двойное отрицание», т. е. $\neg\neg\exists x A(x)$. Последнее суждение рассматривается в К. м. как, вообще говоря, более слабое, чем (12). Таким образом, К. м. не принимает закона снятия двойного отрицания, а, следовательно, и закона исключенного третьего (на отсутствие оснований для принятия последнего указывает и конструктивная трактовка дизъюнкции).

Первоначальные математич. структуры — натуральные, целые и рациональные числа — непосредственно могут трактоваться как слова нек-рых простых типов в фиксированном алфавите, при этом соответствующие отношения равенства и порядка легко сводятся к графич. совпадению и различию слов. Введение более сложных структур — действительных чисел, функций над ними и т. д.— осуществляется в К. м. на основе понятия алгоритма, играющего в ней примерно такую же роль, какую играет в традиционной математике понятие функции. Считая интуитивные представления об алгоритмах слишком расплывчатыми для таких построений, К. м. делает здесь принципиальный шаг, стандартизируя используемые алгоритмы посредством принятия одного из современных точных определений этого понятия вместе с соответствующей гипотезой типа *Чёрча тезиса*, принципа нормализации и т. д., утверждающей совпадение оперативных возможностей, доставляемых алгоритмами в интуитивном и точном смысле слова.

Фактически наибольшее применение в К. м. получили *нормальные алгорифмы* Маркова. К необходимости уточнения понятия алгоритма приводит также и конструктивная трактовка существования. Напр., отрицание суждения (13) есть утверждение о невозможности нек-рого алгоритма, между тем интуитивные представления, достаточные для опознания в качестве алгоритма того или иного конкретного предписания, в принципе не позволяют получать сколько-нибудь нетривиальные теоремы невозможности. На основе изложенных принципов и опираясь на современную теорию алгоритмов, К. м. строит ряд математич. дисциплин, в том числе и конструктивный математич. анализ, включая сюда элементы функционального анализа, дифференциальные уравнения, теорию функций комплексного переменного и т. д. (см. *Конструктивный анализ*). Получаемые таким образом теоретич. модели, основанные на более скромной чем обычно системе абстракций, хотя и уступают традиционным в прозрачности и элегантности, тем не менее, по-видимому, способны обслужить тот же круг приложений.

Имея общий критический источник с интуиционистской математикой Л. Брауэра и заимствовав из нее ряд конструкций и идей, К. м. обнаруживает определенное сходство с последней. Вместе с тем, здесь имеются и принципиальные отличия как общефилософского, так и конкретно математич. характера. Прежде всего К. м. не разделяет свойственное интуиционизму убеждение в первоначальном характере математич. интуиции, считая, что сама эта интуиция формируется под влиянием практической деятельности человека. Соответственно абстрагирование в К. м. идет не от умственных построений как в интуиционизме, а от простейших реально наблюдаемых конструктивных процессов. В математич. плане К. м. не принимает выводящую за рамки конструктивных процессов и объектов концепцию свободно становящейся последовательности и основанную на ней интуиционистскую теорию континуума как среды свободного становления. С другой стороны, интуиционистская математика не принимает правила конструктивного подбора и не считает необходимым элиминировать интуитивные алгоритмы при помощи соответствующих точных определений. Следует заметить, что в последние годы наметилась определенная тенденция к сближению конструктивного и интуиционистского подходов: в нек-рых конструктивных исследованиях, в особенности относящихся к семантике, используются индуктивные определения и соответствующие им индуктивные доказательства, напоминающие построения Л. Брауэра при доказательстве его так наз. бар-теоремы (см. *Бар-индукция*), занимающей одно из центральных мест в интуиционистской математике.

Лит.: [1] Френкель А.-А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [2] Гейтинг А., Интуиционизм. Введение, пер. с англ., М., 1965; [3] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М., 1948; [4] Constructivity in mathematics, Amst., 1959; [5] Марков А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 42); [6] его же, О логике конструктивной математики, М., 1972; [7] *Проблемы конструктивного направления в математике*, в. 1—6, М.— Л., 1958—73 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 52, 67, 72, 93, 113, 129).

См. также лит. при ст. *Конструктивный анализ*.

Б. А. Кушнер.

КОНСТРУКТИВНАЯ СЕМАНТИКА — совокупность способов понимания суждений в *конструктивной математике*. Необходимость в особой семантике вызвана различием общих принципов, лежащих в основе традиционной (классической) и конструктивной математики (далее последний термин будет в основном относиться к подходу, развитому в советской школе конструктивной математики). Основное внимание К. с. уделяет суждениям о *конструктивных объектах* в языках первого порядка, то есть, по существу, арифметич. суждениям (см. *Арифметика формальная*). Принципи-

альные различия с традиционной семантикой в понимании дизъюнкций $A_0 \vee A_1$ (и суждений о существовании $\exists x A(x)$) сформулированы Л. Брауэром (L. Brouwer). Конструктивное обоснование таких суждений требует решения задачи: найти число $i \leqslant 1$ такое, что верно A_i (соответственно найти число n такое, что $A(n)$). Общие принципы описания задач, соответствующих более сложным формулам, были намечены А. Гейтингом (A. Heyting) и А. Н. Колмогоровым. Точная формулировка (к-рая стала возможной после появления математич. определения *алгоритма*) была дана С. Клини (S. Kleene) в виде понятия реализации замкнутой арифметич. формулы (см. *Рекурсивная реализуемость*). Реализация верного равенства $t=r$ есть фиксированная константа, напр. число 0, а ложное равенство не имеет реализаций. Реализация конъюнкции $A\&B$ — это пара $\langle a, b\rangle$, где a — реализация A, b — реализация B. Реализация дизъюнкции $A_0 \vee A_1$ — это пара $\langle i, a\rangle$, где $i=0,1$ и a — реализация суждения A_i. Реализация суждения $\exists x A(x)$ — это пара $\langle n, a\rangle$, где n — число, a — реализация суждения $A(n)$. Реализация суждения $\forall x A(x)$ — это общий метод f, к-рый по всякому натуральному n выдает реализацию $f(n)$ суждения $A(n)$. Реализация суждения $A \supset B$ — это общий метод f, к-рый по всякой реализации a суждения A выдает реализацию $f(a)$ суждения B (и может быть не определен для аргументов a, не являющихся реализациями A). При этом общий метод понимается как алгоритм (частично рекурсивная функция). Используя кодирование алгоритмов числами, можно записать условие «число e есть реализация формулы A» в виде арифметич. формулы (erA), не содержащей дизъюнкции $\vee$ и содержащей существование $\exists$ только тривиальным образом — перед равенствами. Такие формулы наз. почти нормальными. Суждение $\exists e\,(erA)$ (читаемое «A реализуема») может служить конструктивным разъяснением суждения A. При таком понимании закон исключенного третьего $\forall x(A(x) \vee \vee \neg A(x))$ опровергается, напр., для $A(x)=\exists y\, T(x, x, y)$, где $T(e, x, y)$ означает, что алгоритм (с кодом) e заканчивает работу над аргументом x за y шагов. Опровергается и закон двойного отрицания $\forall x(\neg\neg B(x) \supset \supset B(x))$, напр. для $B(x)=A(x) \vee \neg A(x)$. Приведенное определение связывает конструктивную задачу (поиск реализации) со всяким суждением A, даже если A не содержит $\vee$, $\exists$. Предложенный Н. А. Шаниным алгоритм выявления конструктивной задачи не меняет формул без $\vee$, $\exists$ (нормальных формул) и эквивалентен реализуемости в формальной интуиционистской арифметике с бескванторной индукцией. Произвольные формулы сводятся к почти нормальным, так как обоснование $\exists x A(x)$ состоит в предъявлении числа n и обосновании $A(n)$. К. с. для почти нормальных формул определяется разными авторами по-разному, однако ни в одном случае не получается столь существенного расхождения с классическим пониманием, как для формул, содержащих $\vee$ и нетривиальное $\exists$.

А. А. Марков определяет истинность для почти нормальных формул с помощью выводимости по обычным правилам для рассматриваемых логических связок плюс эффективное ω-правило: если имеется общий метод, позволяющий для любого n устанавливать выводимость $A(n)$ из суждения K, то $\forall x A(x)$ выводимо из K. Истинность определяется постепенно. Язык $Я\omega$, состоящий из всех почти нормальных формул, делится на слои $Я_1$, $Я_2$, ... ; язык $Я_1$ состоит из формул без $\supset$, $\forall$; язык $Я_{n+1}$, $n \geqslant 1$, включает $Я_n$ и формулы, к-рые можно построить из формул языка $Я_n$ одним применением импликации и любым числом применений $\forall$, &. Истинность для $Я_1$-формул — это выводимость по обычным правилам для &, $\exists$, $\vee$. Истинность для $Я_2$-формул определяется через допустимость соответствующего

правила. Напр., истинность $\exists x R(x) \supset \exists y T(y)$ означает наличие алгоритма φ такого, что $R(n) \supset T(\varphi(n))$ для любого числа n. Для Π_{n+1}-формул при $n>1$ истинность конъюнкций и $\forall$-формул определяется обычным образом через истинность компонент, а истинность импликации $A \supset B$ означает выводимость B из A по нек-рым правилам S_n, о к-рых уже доказано, что они сохраняют истинность Π_n-формул. Системы S_n содержат ω-правило, а в качестве аксиом — все истинные Π_n-формулы. Понятие выводимости в S_n вводится обобщенным индуктивным определением, а для доказательства метатеорем применяется соответствующий принцип индукции. Индукцией по S_2-выводу доказывается допустимость правила $A \supset \neg\neg \exists x R \vdash A \supset \exists x R$. Оно включается в S_3 и дает принцип Маркова $\neg\neg \exists x R \supset \exists x R$. Системы S_{n+3}, $n \geqslant 1$, состоят из обычных правил для рассматриваемых связок, включая ω-правило. Оказывается, что почти нормальная формула A истинна по Маркову тогда и только тогда, когда примитивно рекурсивное дерево T_A поиска вывода формулы A без сечения (но с ω-правилом и принципом Маркова) является выводом в смысле индуктивного определения. Это эквивалентно (в рамках классической математики) классической истинности A.

В мажорантной семантике Н. А. Шанина для каждой почти нормальной формулы A определяется трансфинитная иерархия $\{A^\alpha\}$ формул простой структуры, причем $A^\alpha \supset A$ доказуемо в подходящей формальной системе. Формула A^α наз. м а ж о р а н т о й для A, и A считается истинной формулой ранга α, если A^α верна. Точность аппроксимации растет с ростом α: $\alpha<\beta \supset (A^\alpha \supset A^\beta)$. Если отвлечься от технических деталей, то формула A строится с помощью α-кратного вынесения кванторов, согласно эквивалентности

$$\neg\neg (B \vee \neg\neg \exists u \forall v C(u, v)) \leftrightarrow$$

$$\exists \bar{u} \forall \bar{v} \neg\neg (B \vee \neg\neg \exists u \forall v C(u, v) \vee C(\bar{u}, \bar{v})),$$

и сворачивания цепочек кванторов с помощью алгоритма выявления конструктивной задачи. Это дает доказуемую в арифметике с трансфинитной индукцией до α эквивалентность

$$A \leftrightarrow \exists u \forall v \neg\neg (\neg\neg \exists w C_\alpha \vee D_\alpha)$$

с бескванторной формулой C_α, так что

$$A^\alpha = \exists u \forall v \exists w C_\alpha(u, v, w)$$

оказывается мажорантой для A. Суждение A^α оказывается, с точностью до технических деталей, эквивалентным утверждению о существовании вывода высоты $<\alpha$ для исходной формулы с использованием ω-правила. В этом смысле мажорантная семантика эквивалентна ступенчатой семантике А. А. Маркова. После фиксации нек-рого класса Θ общерекурсивных функций (напр., класса всех функций, определимых рекурсией до α) определяются мажоранты еще более простой структуры:

$$\exists u \forall v C_\alpha(u, v, \varphi(v)) \text{ для } \varphi \in \Theta.$$

Если K — бескванторное исчисление для класса Θ, то K-истинность формулы $\exists u \forall v C(u, v)$ определяется как выводимость формулы $C(t, v)$ с переменной v для нек-рого постоянного терма t. Если в качестве K взято стандартное исчисление равенств для функций, определимых рекурсией до ординалов, меньших α, то K-истинными оказываются формулы, выводимые в формальной интуиционистской арифметике, пополненной принципом Маркова, соотношениями, определяющими алгоритм выявления конструктивной задачи, и правилом индукции до ординалов β таких, что $\varepsilon(\beta) \leqslant \alpha$, где $\varepsilon(\beta)$ — первое ε-число, большее β. В частности, $\alpha=\varepsilon_0$ для $\beta=\omega$, т. е. для обычной индукции.

Доведение обоснования до бескванторного уровня (K-истинность) связано со стремлением остаться по возможности в рамках финитизма, т. е. бескванторного языка и соответствующих логических средств. С этим же связано стремление ограничиться небольшими α. Для большей части «работающего» конструктивного анализа (включая теорему о непрерывности эффективных операторов) достаточно конечных α.

Лит.: [1] Марков А. А., в сб.: Исследования по теории алгорифмов и математической логике, М., 1976, т. 2, с.3—31; [2] Шанин Н. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 129, с. 203—66; [3] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *Г. Е. Минц.*

КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ — понятие, введенное С. Н. Бернштейном, назвавшим К. т. ф. «направление теории функций, которое ставит себе целью дать возможно более простую и удобную основу для качественного изучения и вычисления как эмпирических функций, так и всяких функций, являющихся решениями естественно поставленных задач математического анализа» [1]. Имелось в виду, что К. т. ф. должна содержать теорию приближения (аппроксимации) функций в качестве одного из своих разделов. Однако фактически название К. т. ф. получило употребление в более узком смысле, как другое название теории приближения функций. В последнее время термин «К. т. ф.» используется реже.

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1945, т. 9, № 3, с. 145—58 (Собр. соч., т. 2, М., 1954, с. 349—60). *С. А. Теляковский.*

КОНСТРУКТИВНАЯ ФУНКЦИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО, конструктивная функция,— понятие функции одного и многих действительных переменных, используемое в *конструктивной математике*. Предложено А. А. Марковым. Может трактоваться как частный случай понятия алгоритмического оператора в конструктивных метрич. пространствах. См. также *Конструктивный анализ*, *Конструктивное метрическое пространство*. *Б. А. Кушнер.*

КОНСТРУКТИВНОГО ПОДБОРА ПРИНЦИП, принцип Маркова,— логико-философский принцип *конструктивной математики*, выдвинутый А. А. Марковым [1], [2] и в общей форме утверждающий, что если конструктивный процесс, заданный нек-рым предписанием, не является неограниченно продолжаемым, то он заканчивается. В конструктивной математике получили применение несколько конкретных, содержательно эквивалентных разновидностей этого принципа. 1) Пусть Ψ — *нормальный алгорифм*, P — слово в его алфавите. Тогда, если опровергнуто предположение о неприменимости Ψ к P, то Ψ применим к P; символически

$$\neg\neg!\Psi(P) \supset !\Psi(P).$$

2) *В арифметике формальной* К. п. п. может быть выражен следующей арифметич. формулой

$$\forall z \forall x\,[\neg\forall y \neg T_1(z,\ x,\ y) \supset \exists y T_1(z,\ x,\ y)],$$

где T_1 — примитивно рекурсивный предикат такой, что частично рекурсивная функция с гёделевым номером z определена на x тогда и только тогда, когда $\exists y\, T_1(z, x, y)$ (ср. [3]). 3) Если рекурсивно перечислимое множество непусто, то оно содержит нек-рый элемент. 4) Пусть A — алгоритмически проверяемое свойство натуральных чисел. Тогда, если опровергнуто предположение о том, что не существует числа со свойством A, то найдется натуральное число со свойством A. Соответствующая логическая схема записывается в виде

$$\forall x\,(A(x) \vee \neg A(x)) \supset (\neg\neg\exists x A(x) \supset \exists y A(y)).$$

Иногда термин «К. п. п.» специально связывается именно с этой последней формой рассуждений, поскольку искомое число «подбирается» в ходе следующего конструктивного процесса: проверяют $A(0)$, если это верно,

то берут 0 в качестве искомого числа, в противном случае переходят к проверке $A(1)$ и т. д.

Интуитивное оправдание К. п. п. в рамках применяемой в конструктивной математике системы абстракций состоит в том, что если невозможность неограниченного продолжения данного конструктивного процесса убедительно доказана, то потенциально достижимо окончание этого процесса в результате его последовательного выполнения шаг за шагом. Таким образом, при утверждении существования *конструктивного объекта* (напр., результата применения нормального алгорифма к слову) на основании К. п. п. не происходит выхода за рамки абстракции потенциальной осуществимости.

К. п. п. безусловно допустим с точки зрения классич. логики, поскольку он является частным случаем общего закона снятия двойного отрицания и закона исключенного третьего. Применение этих логических законов сводится к К. п. п. во многих конструкциях теории *рекурсивных функций*, что делает эти конструкции достоянием конструктивной математики. Использование К. п. п. позволяет также получить ряд значительных результатов в *конструктивном анализе*, в частности теорему о непрерывности алгоритмич. операторов и о продолжимости эффективных функционалов до частично рекурсивных функционалов (см. также *Конструктивное метрическое пространство*). Другой сферой приложений К. п. п. является конструктивная семантика [4]. Еще задолго до формулировки К. п. п. в качестве общего принципа конструктивной математики проводились исследования по обоснованию различных форм этого принципа в рамках того или иного круга допускаемых конструктивных средств. Здесь следует указать следующий основополагающий результат П. С. Новикова, полученный в 1943 (см. [5]): пусть для формулы $A(x)$ с одной переменной в конструктивной формальной арифметике выводимо $A(n) \vee \neg A(n)$ для каждого n и в классической арифметике выводимо $\exists x A(x)$; тогда формула $\exists x A(x)$ выводима и в конструктивной арифметике. В работе [6] было получено обоснование К. п. п. в рамках новой системы конструктивной семантики, развиваемой в последние годы А. А. Марковым.

Являясь, по-видимому, наименее непосредственной из первоначальных установок конструктивной математики, К. п. п. принимается нек-рыми сторонниками последней с известными оговорками. К. п. п. отвергается также интуиционистской математикой как недостаточно убедительный интуитивно. С другой стороны, в связи с формализацией ряда разделов интуиционистской математики детально изучались вопросы о соотношениях соответствующих систем с формальными схемами, выражающими К. п. п. В частности, установлена независимость схем (2) и (4) от аксиом интуиционистского исчисления предикатов, арифметики и анализа (см. [2], [7], [8]).

Лит.: [1] Марков А. А., «Успехи матем. наук», 1954, т. 9, в. 3, с. 226—30; [2] его же, в кн.: Тр. 3 Всесоюзного математического съезда, т. 2, М., 1956, с. 146—47; [3] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [4] Шанин Н. А., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 52, с. 226—311; [5] Новиков П. С., «Матем. сб.», 1943, т. 12, в. 2, с. 231—61; [6] Марков А. А., «Докл. АН СССР», 1974, т. 214, № 4, с. 765—68, т. 215, № 1, с. 57—60; [7] Клини С., Весли Р., Основания интуиционистской математики с точки зрения теории рекурсивных функций, пер. с англ., М., 1978; [8] Troelstra A. S., в кн.: ISILC. Proof theory symposion, B., 1975, p. 370—83.

Б. А. Кушнер.

КОНСТРУКТИВНОЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО — понятие действительного числа, употребляемое в *конструктивной математике*. В более широком смысле — действительное число, конструируемое в соответствии с тем или иным кругом конструктивных средств. Близкое значение имеет термин «вычислимое действительное число», обычно употребляемый в тех ситуациях, когда не ставится цель изначального, нетрадиционного построения континуума, а речь идет просто о классиче-

ских действительных числах, вычислимых в том или ином смысле посредством нек-рых алгоритмов. (См. также *Конструктивный анализ*.) *Б. А. Кушнер.*

КОНСТРУКТИВНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ — *логическое исчисление*, описывающее способы вывода высказываний, истинных с точки зрения *конструктивной математики*. Обычно этот термин рассматривается как синоним термина *интуиционистское исчисление высказываний*. Однако, при нек-рых специальных интерпретациях конструктивизма интуиционистское исчисление высказываний оказывается неполным. Напр., известная формула Роуза:

$$((\neg\neg A \supset A) \supset (\neg\neg A \vee \neg A)) \supset (\neg\neg A \vee \neg A),$$

где A — формула $\neg p \vee \neg q$, а p, q — пропозициональные переменные, не выводится в интуиционистском исчислении высказываний и в то же время тождественно истинна в интерпретации рекурсивной реализуемости Клини, по крайней мере, если признавать *конструктивного подбора принцип*. Актуальной задачей является исследование полноты К. и. в. для различных вариантов семантики конструктивной математики.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Rose G. F., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 75, p. 1—19. *А. Г. Драгалин.*

КОНСТРУКТИВНОЕ МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — концепция метрич. пространства, используемая в конструктивной математике. Близкий смысл имеет также понятие рекурсивного метрического пространства.

Список $\{\mathfrak{M}, \rho\}$, где $\mathfrak{M}$ — некоторое множество конструктивных объектов (обычно слов в том или ином алфавите), ρ — алгоритм, переводящий любую пару элементов $\mathfrak{M}$ в конструктивное действительное число (к. д. ч., см. *Конструктивный анализ*), наз. К. м. п., если при любых X, Y, $Z \in \mathfrak{M}$ выполняется: 1) $\rho(X, X)=0$, 2) $\rho(X, Y) \leqslant \rho(X, Z)+\rho(Y, Z)$ (здесь и ниже термин «алгоритм» употребляется в смысле одного из точных понятий алгоритма). Множество $\mathfrak{M}$ и алгоритм ρ наз. носителем и метрическим алгоритмом соответствующего К. м. п., а элементы $\mathfrak{M}$ — точками этого К. м. п. Из аксиом 1), 2) следует, что всегда $\rho(X, Y) \geqslant 0$ и $\rho(X, Y)=\rho(Y, X)$. Две точки X, $Y \in \mathfrak{M}$ называются эквивалентными (различными) в К. м. п. $\{\mathfrak{M}, \rho\}$, если $\rho(X, Y)=0$ (соответственно $\rho(X, Y) \neq 0$).

Примеры К. м. п.: а) пространство натуральных чисел H. Носителем H является множество натуральных чисел (натуральные числа трактуются как слова вида 0, 01, 011, ...), а метрич. алгоритм ρ таков, что $\rho(m, n)=|m-n|$. Аналогично определяются пространства R и E_1 — рациональных и конструктивных действительных чисел, соответственно; б) n-мерное евклидово пространство E_n. Носителем E_n является множество слов вида $x_1 * \ldots * x_n$, где x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, есть к. д. ч., а метрич. алгоритм ρ строится так, что

$$\rho(x_1 * \ldots * x_n,\ y_1 * \ldots * y_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2};$$

в) пространство C равномерно непрерывных на единичном сегменте конструктивных функций. Носителем C является множество слов вида $\varepsilon f_3 * \varepsilon\gamma_3$, где f — всюду определенная на единичном сегменте конструктивная функция, а γ — алгоритм, переводящий всякое натуральное число в натуральное число, причем

$$\forall n x_1 x_2\,((0 \leqslant x_1,\ x_2 \leqslant 1 \,\&\, |x_1 - x_2| < 2^{-\gamma(n)}) \supset \supset |f(x_1) - f(x_2)| < 2^{-n})$$

($\varepsilon\mathfrak{A}_3$ означает запись (код) алгоритма $\mathfrak{A}$). Метрич. алгоритм ρ строится так, что

$$\rho(\varepsilon f_1 3 * \varepsilon\gamma_1 3,\ \varepsilon f_2 3 * \varepsilon\gamma_2 3) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} (|f_1(x) - f_2(x)|).$$

Сложный вид носителя пространства C обусловлен требованием эффективной вычислимости метрики; г) бэровское пространство B общерекурсивных функций. Носителем B является множество гёделевых номеров общерекурсивных функций, а метрич. алгоритм ρ строится так, что если φ_n и φ_m — общерекурсивные функции с номерами n и m, то $\rho(n, m)=0$, если $\varphi_n(i)=\varphi_m(i)$ при любом i, и $\rho(n, m)=2^{-k}$, если $\varphi_n(i)=\varphi_m(i)$ при $i<k$ и $\varphi_n(k)\neq\varphi_m(k)$.

Пусть $M=\{\mathfrak{M}, \rho\}$ — К. м. п. Алгоритм β наз. последовательностью точек M, если при всяком n имеем $\beta(n)\in\mathfrak{M}$. Последовательность β наз. регулярной, если при $m\geqslant n$ имеем $\rho(\beta(m), \beta(n))<2^{-n}$. Регулярная последовательность β сходится к точке X К. м. п. M, если при любом n имеем $\rho(X, \beta(n))\leqslant 2^{-n}$. К. м. п. M наз. полным, если существует алгоритм, находящий для каждой регулярной последовательности β (точек M) точку M, к к-рой сходится β. К. м. п. M наз. сепарабельным, если существуют алгоритмы α, δ такие, что α — последовательность точек M, и при любом $X\in M$ и любом n имеем: $\delta(X*n)$ есть натуральное число, причем $\rho(\alpha(\delta(X*n)), X)<2^{-n}$. Все пространства H, R, E_1, E_n, C, B примеров а) — г) сепарабельны, пространства H, E_1, E_n, C, кроме того, полны. Пример несепарабельного К. м. п. дает рассмотрение подпространства H, индуцированного не рекурсивно перечислимым множеством. В терминах К. м. п. могут быть изложены многие результаты классич. теории метрич. пространств; в частности, большое значение имеет конструктивный вариант теоремы Хаусдорфа, утверждающий, что для каждого К. м. п. может быть построено его пополнение.

Процесс пополнения К. м. п. является сильным средством введения тех или иных структур конструктивной математики. На этом пути вводятся к. д. ч., могут быть определены естественные аналоги классич. понятий измеримых множеств и функций, интегрируемых по Лебегу функций, и т. д. Одной из основных целей теории К. м. п. является исследование алгоритмич. отображений, корректных относительно тех или иных вычислимых метрик.

Пусть $M_1=\{\mathfrak{M}_1, \rho_1\}$, $M_2=\{\mathfrak{M}_2, \rho_2\}$ — К. м. п. Алгоритмическим оператором типа $M_1\to M_2$ наз. алгоритм ψ, удовлетворяющий условиям: а) если $X\in\mathfrak{M}_1$ и определено $\Psi(X)$, то $\Psi(X)\in\mathfrak{M}_2$; б) если X, Y — эквивалентные точки M_1 (т. е. $\rho_1(X, Y)=0$) и определено $\Psi(X)$, то определено $\Psi(Y)$, причем $\Psi(X)$, $\Psi(Y)$ — эквивалентные точки M_2. Алгоритмич. операторы типа $E_1\to E_1$, $E_n\to E_1$ суть конструктивные функции одной и n переменных; алгоритмич. операторы типа $B\to H$ принято наз. эффективными функционалами.

Основным результатом теории алгоритмических операторов является теорема Цейтина, утверждающая, что в случае полного сепарабельного К. м. п. M_1 для любого алгоритмич. оператора Ψ типа $M_1\to M_2$, при каждом n можно построить алгоритмически (рекурсивно) перечислимое множество шаров, покрывающее область определения Ψ, такое, что колебание Ψ на любом шаре этого множества не превосходит 2^{-n}. Из этой теоремы вытекает известный результат о продолжимости эффективных функционалов до частично-рекурсивных функционалов. Другим важным следствием приведенного результата является теорема о непрерывности алгоритмич. операторов: если M_1 — полное и сепарабельное К. м. п., M_2 — произвольное К. м. п., то по любому алгоритмич. оператору Ψ типа $M_1\to M_2$ можно построить алгоритм α такой, что для любых X, Y из области определения Ψ и любого n число $\alpha(X, n)$ есть натуральное, причем из $\rho_1(X, Y)<2^{-\alpha(X, n)}$ следует $\rho_2(\Psi(X), \Psi(Y))<2^{-n}$.

В таком же порядке идей, что и в случае К. м. п., может быть развита теория конструктивных нормированных и гильбертовых пространств.

Лит.: [1] Цейтин Г. С., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1962, т. 67, с. 295—361; [2] Moschovakis G. N., «Fundam. math.», 1964, v. 55, № 3, p. 215—38; [3] Шанин Н. А., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1962, т. 67, с. 15—294; [4] Кушнер Б. А., Лекции по конструктивному математическому анализу, М., 1973.

Б. А. Кушнер.

КОНСТРУКТИВНОЕ ПО ГЁДЕЛЮ МНОЖЕСТВО — множество, возникающее в описанном ниже процессе построения множеств. Пусть X — множество и $R \subseteq X \times X$. Рассмотрим язык 1-й ступени $L(R, X)$, содержащий один 2-местный предикатный символ, обозначающий отношение R, и индивидные константы, обозначающие элементы множества X (для каждого $x \in X$ своя константа $\underline{x}$). Суждение «формула φ языка $L(R, X)$ истинна в модели $M=(X, R)$» записывается следующим образом:

$$M \models \varphi.$$

Множество $Y \subseteq X$ наз. определимым в модели $M=(X, R)$ (иначе M-определимым), если существует формула $\varphi(v)$ языка $L(R, X)$ с одной свободной переменной v такая, что

$$\forall x \in X \ (x \in Y \leftrightarrow M \models \varphi(\underline{x})).$$

Пусть $\mathrm{Def}\, M$ обозначает множество всех M-определимых множеств. Каждому ординальному числу α сопоставим множество L_α, определяемое рекурсивным соотношением:

$$L_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathrm{Def}\,(L_\beta, \in | L_\beta),$$

где $\in | L_\beta$ есть отношение принадлежности, ограниченное множеством L_β. Отсюда следует:

$$L_0 = \varnothing,\ L_1 = \{\varnothing\},\ L_2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},\ \ldots,\ L_{\omega_0} = \bigcup_{n<\omega_0} L_n,\ \ldots$$

Множество z наз. конструктивным, если существует ординал α такой, что $z \in L_\alpha$. Класс всех конструктивных множеств обозначается через L. К. Гёдель (K. Gödel) ввел следующую аксиому конструктивности: всякое множество конструктивно. Он доказал, что в классе L выполняются все аксиомы системы ZF, а также аксиома конструктивности, и что аксиома выбора и обобщенная континуум-гипотеза («для всякого ординала α имеет место $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$») следуют в ZF из аксиомы конструктивности.

Класс L можно охарактеризовать также как наименьший класс, являющийся моделью ZF и содержащий все ординальные числа; имеются и другие определения класса L (см. [2]—[4]). Отношение $x \in L_\alpha$ можно выразить формулой языка ZF и притом простой синтаксической структуры (так наз. Δ_1^{ZF}-формулой, см. [4]).

Среди результатов, относящихся к К. м., упомянем следующие. Множество *конструктивных действительных чисел*, т. е. множество $R \cap L$, где R — множество всех действительных чисел, т. е. последовательностей нулей и единиц, является A_2-множеством (см. [5]). Было показано, что из аксиомы конструктивности вытекает существование неизмеримого по Лебегу множества действительных чисел типа A_2 (см. [6]), отрицание *Суслина гипотезы* и несуществование измеримого кардинала (см. [2]).

Лит.: [1] Гёдель К., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, вып. 1, с. 96—149; [2] Йех Т., Теория множеств и метод форсинга, пер. с англ., М., 1973; [3] Мостовский А., Конструктивные множества и их применения, пер. с англ., М., 1973; [4] Karp C., A proof of the relative consistency of the continuum Hypothesis, в кн.: Sets models and recursion theory, Amsterdam, 1967; [5] Addison J. W., «Fund. Math.», 1959, v. 46, № 3, p. 337—57; [6] Новиков П. С., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 279—316; [7] Feigner U., Models of ZF-Set theory, B.—Hdlb.—N.Y., 1971 (Lect. notes in mathematics, v. 223).

В. Н. Гришин.

КОНСТРУКТИВНОЕ ПОДМНОЖЕСТВО алгебраического многообразия — конечное объединение локально замкнутых (в *Зарисского топологии*) подмножеств. Локально замкнутым подмножеством наз. пересечение открытого и замкнутого подмножеств. К. п. образуют булеву алгебру и могут быть определены как элементы булевой алгебры, порожденной алгебраич. подмногообразиями. Роль К. п. в алгебраич. геометрии объясняет следующая теорема Шевалле: если $f: X \to Y$ — морфизм алгебраич. многообразий, то $f(X)$ (и более того, образ любого К. п. из X) является К. п. в Y. С этим фактом связано то, что «алгебраические» условия выделяют конструктивные подмножества алгебраич. многообразий.

Отображение $h: X \to T$ наз. конструктивным, если $h(X)$ конечно и для любой точки $t \in T$ прообраз $h^{-1}(t)$ есть К. п. в X.

Лит.: [1] Grothendieck A., Éléments de géometrie algébrique, t. 4, P., 1964; [2] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972. *В. И. Данилов.*

КОНСТРУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ, рекурсивный анализ, вычислимый анализ,— название, объединяющее различные течения в основаниях математики и математич. анализе. При развитии К. а., как правило, преследуются обе или вторая из следующих двух принципиальных целей: (1) нетрадиционное построение тех или иных фрагментов анализа на основе более ясных и в большей степени учитывающих реальные вычислительные возможности исходных концепций, нежели теоретико-множественные посылки обычного анализа; (2) изучение эффективности в анализе; введение и изучение вычислимых объектов анализа, в частности исследование вопроса о том, по каким исходным данным можно эффективно находить те или иные вычислимые объекты. В соответствии с этими целями, исследования по К. а. можно грубо разделить на два типа: претендующие и не претендующие на достижение цели (1). Для исследований первого типа характерно либо использование нестандартных логик, либо существенные ограничения в употреблении традиционных логических и математических средств, в то время как в работах второго типа свободно используются традиционная математика и логика. Ко второму типу относятся основополагающие работы (см. [1]—[4]), в к-рых были выработаны современные концепции *вычислимого действительного числа* (см. также [5]—[12]). К первому типу относятся исследования по интуиционистскому анализу (см. *Интуиционизм*), возникшие в связи с выдвинутой Л. Э. Я. Брауэром (L. E. J. Brower) интуиционистской программой построения математики и оказавшие существенное влияние на формирование задач и методов К. а., рекурсивный анализ Р. Л. Гудстейна (R. L. Goodstein, см. [12]), а также оригинальная и чрезвычайно далеко продвинутая система К. а., развитая Э. Бишопом (см. [13]). (Конструктивный анализ Бишопа занимает промежуточное положение между интуиционистским анализом и системами, использующими точные концепции алгоритма.) Своеобразная трактовка К. а. (в частности, теории меры) была предложена в 1970 П. Мартином-Лёфом [14]. В СССР начиная с 50-х гг. в трудах А. А. Маркова, Н. А. Шанина и их учеников (см. [15], [16], [19]) интенсивно разрабатывалась система К. а., относящаяся к первому типу и укладывающаяся в рамки конструктивного направления в математике. Являясь частью *конструктивной математики*, эта система (за к-рой ниже для краткости закрепляется термин «К. а.») сохраняет характерные черты последней. В частности, рассмотрения ограничиваются *конструктивными объектами* (чаще всего словами в нек-рых алфавитах или объектами, допускающими очевидное кодирование словами) и проводятся в рамках *абст-*

ракции потенциальной осуществимости с применением специальной конструктивной логики, вырабатываемой с учетом специфики конструктивных объектов как результатов потенциально выполнимых конечных построений. При этом полностью исключается использование *абстракции актуальной бесконечности*, и интуитивное понятие «эффективности» связывается с одним из точных понятий алгоритма (в большинстве работ, относящихся к рассматриваемой системе К. а., используется понятие нормального алгорифма). В рамках К. а. получено большое число результатов, интересных как с точки зрения круга вопросов (1), так и с точки зрения круга вопросов (2). По существу показана возможность построения средствами конструктивной математики ряда теорий, таких, как теория элементарных функций, теория рядов, интегрирования по Риману и Лебегу, теория функций комплексного переменного, теория обобщенных функций и т. п. Получающиеся конструктивные теории наряду со сходством с одноименными традиционными теориями обладают заметными отличиями от них; впрочем эти отличия проявляются не столько в конкретных вопросах, связанных с приложениями анализа, сколько в теоретич. концепциях (таких, напр., как концепция компактности и т. д.).

Фундаментальными понятиями К. а. являются понятия конструктивного действительного числа и конструктивной функции действительного переменного. Конструктивные действительные числа можно ввести различными (не всегда эквивалентными) способами. Опишем один из таких способов, следующий канторовскому построению классического континуума и приводящий к наиболее употребительной и естественной концепции конструктивного (вычислимого) действительного числа. Сначала вводятся натуральные числа как слова вида 0, 01, 011, ... в двухбуквенном алфавите {0|}. Аналогично определяются рациональные числа как слова нек-рого типа в алфавите {0|—/}. Определяются отношения порядка и равенства над рациональными числами, а также арифметич. операции над ними. К о н с т р у к т и в н о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю н а т у р а л ь н ы х ч и с е л (к. п. н. ч.) наз. (нормальный) алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число в натуральное число. Аналогичным образом трактуется понятие к о н с т р у к т и в н о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т и р а ц и о н а л ь н ы х ч и с е л (к. п. р. ч.). Схемы нормальных алгорифмов однозначным образом кодируются словами в алфавите {0|}; код данного алгорифма наз. его з а п и с ь ю. К. п. н. ч. α наз. р е г у л я т о р о м ф у н д а м е н т а л ь н о с т и к. п. р. ч. β, если для любых натуральных l, m, n таких, что l, $m \geqslant \alpha(n)$, выполняется неравенство $|\beta(l) - \beta(m)| < 2^{-n}$. К. п. р. ч. наз. ф у н д а м е н т а л ь н о й, если можно построить ее регулятор фундаментальности. К о н с т р у к т и в н ы м и д е й с т в и т е л ь н ы м и ч и с л а м и (к. д. ч.) наз. рациональные числа, а также слова в алфавите {0|◇} вида $U \diamond V$ (◇ играет роль разделительного знака), где U — запись некоторой к. п. р. ч., V — запись к. п. н. ч., являющейся регулятором фундаментальности этой к. п. р. ч. Описанное понятие к. д. ч. (предложенное Н. А. Шаниным, см. [20], называвшим такие к. д. ч. «*FR*-числами» или «дуплексами») хорошо согласуется с интуитивным представлением о вычислимых действительных числах как объектах, допускающих эффективную сколь угодно точную аппроксимацию рациональными числами. Для к. д. ч. можно определить естественным образом отношения порядка и равенства и арифметич. операции (причем последние задаются алгоритмами). Система к. д. ч. с этими отношениями равенства и порядка и арифметич. операциями оказывается полем. Далее, можно ввести в рассмотрение конструктивные последовательности к. д. ч. (к. п. д. ч.) и определить в том же порядке идей, что и выше,

понятие фундаментальной к. п. д. ч. и понятие конструктивной сходимости к. п. д. ч. к данному к. д. ч. Относительно такого понятия сходимости система к. д. ч. оказывается полной: существует алгоритм, находящий, исходя из записи всякой фундаментальной к. п. д. ч. γ и записи ее регулятора фундаментальности, такое к. д. ч., к к-рому (конструктивно) сходится γ (теорема о полноте системы к. д. ч.). Методом, аналогичным канторовскому, можно доказать также теорему о конструктивной несчетности множества всех к. д. ч.: осуществим алгоритм, перерабатывающий запись всякой к. п. д. ч. в к. д. ч., отличное (в смысле равенства к. д. ч.) от всех членов этой к. п. д. ч. Теорема о полноте придает значительное сходство конструктивной и классич. теориям пределов, особенно сильно проявляющееся в вопросах сходимости тех или иных конкретных используемых в анализе последовательностей и рядов. Вместе с тем здесь имеются и существенные отличия, проявляющиеся, напр., в следующем результате Э. Шпеккера (см. [4]): можно построить возрастающую к. п. р. ч. β такую, что всегда $0<\beta(n)<1$ и, несмотря на это, β не является фундаментальной (и, следовательно, не сходится (конструктивно) ни к какому к. д. ч.). Кроме того, из β нельзя выбрать сходящейся (конструктивной) подпоследовательности, и множество значений β не имеет в конструктивном континууме точной верхней границы. Другим напрашивающимся способом введения к. д. ч. является конструктивизация понятия систематической дроби в той или иной системе счисления. Именно, конструктивной m-ичной дробью ($m>1$) наз. (нормальный) алгорифм α такой, что $\alpha(0)$ есть целое число и $\alpha(i)$ при $i>0$ есть натуральное число, причем $0\leqslant\alpha(i)\leqslant m-1$ (с m-ичной дробью α связывается к. п. р. ч. $\alpha(0)+\sum_{k=1}^{n}m^{-k}\alpha(k)$). Несмотря на простоту такого понятия к. д. ч., оно не получило распространения, поскольку обладает рядом существенных неудобств: напр., не сохраняется теорема о полноте и невозможен алгорифм, осуществляющий сложение любых двух m-ичных дробей.

Понятие конструктивной функции (к. ф.) является естественным уточнением интуитивного понятия точечной вычислимой функции над вычислимыми действительными числами. Конструктивной функцией (одной действительной переменной) наз. (нормальный) алгорифм F такой, что для любых равных к. д. ч. x и y, если F применим к x, то F применим к y и $F(x)$, $F(y)$ суть равные к. д. ч. В терминах к. ф. могут быть введены элементарные функции (показательная функция, тригонометрич. функции и др.), обладающие обычными свойствами; для конструктивных функций могут быть развиты теории дифференцирования, интегрирования по Риману и т. д., близкие к традиционным. Вместе с тем возможны и необычные с традиционной точки зрения функции: напр., построена к. ф., всюду определенная, непрерывная на единичном сегменте и не ограниченная на нем (см. [17]). Не имеет аналогов в традиционном анализе и теорема, согласно к-рой всякая к. ф. конструктивно непрерывна в любой точке, в к-рой она определена (см. [18]).

Система понятий и методы К. а., позволяя существенно продвинуться с точки зрения цели (1), оказались также удобными для выявления вычислительных связей в анализе, поскольку многие теоремы К. а. являются либо утверждениями об осуществимости алгоритмов, строящих нек-рые конструктивные объекты по тем или иным исходным данным, либо утверждениями, что такие алгоритмы невозможны. В настоящее время (к 1978) установлена неразрешимость большого числа естественных массовых проблем анализа. Результаты этого типа (совершенно отсутствующие в курсах традиционного

анализа) имеют очевидную теоретич. и практич. ценность, так как они выявляют потенциальные вычислительные тупики и способствуют четкому уяснению принципиальных границ вычислительных возможностей. Так, доказана невозможность следующих алгоритмов (в смысле одного из уточнений понятия алгоритма): 1) распознающего для произвольного конструктивного действительного числа равно оно нулю или нет; 2) находящего для каждой сходящейся к. п. р. ч. то к. д. ч., к к-рому она сходится; 3) находящего для каждой совместной системы линейных уравнений (над полем к. д. ч.) какое-либо ее решение; 4) находящего для каждой непрерывной кусочно линейной знакопеременной функции корень этой функции; 5) находящего для всякой непрерывной кусочно линейной на единичном сегменте функции ее интеграл Римана по этому сегменту. К этому же кругу результатов принадлежит и следующая теорема, полностью решающая вопрос о возможности эффективного перехода от одной системы счисления к другой: алгоритм, находящий для всякой m-ичной конструктивной дроби равную ей n-ичную конструктивную дробь, возможен тогда и только тогда, когда множество простых делителей n содержится в множестве простых делителей m (см. [6]). (В частности, возможен алгоритм перехода от десятичной системы счисления к двоичной, но невозможен алгоритм перехода от двоичной системы к десятичной.) Теоремы о невозможности алгоритмов часто сопровождаются и К. а. теоремами о существовании алгоритмов, решающих рассматриваемые задачи по более полным исходным данным (ср. теорему о полноте к. д. ч. и пример 2)) или с произвольной наперед заданной точностью (напр., можно построить алгоритм, находящий для каждой всюду определенной знакопеременной к. ф. f и каждого n к. д. ч. $x_{f,n}$ такое, что $|f(x_{f,n})|<2^{-n}$). Сопоставление таких результатов позволяет во многих случаях получить отчетливое представление о том, как можно корректно ставить ту или иную алгоритмич. проблему.

Лит.: [1] Turing A. M., «Proc. London Math. Soc. Ser. II», 1937, v. 42, p. 230—65; v. 43, part 6, p. 544—46; [2] Banach S., Mazur S., «Ann. polon. math.», 1937, v. 16, p. 223; [3] Mazur S., Computable analysis, Warszawa, 1963; [4] Specker E., «J. Symbol. Log.», 1949, v. 14, № 3, p. 145—158; [5] Grzegorczyk A., «Fundam. math.», 1955, v. 42, p. 168—202, 232—39; 1957, v. 44, № 1, p. 61—71; [6] Mostowski A., там же, p. 37—51; [7] Klaua D., Konstruktive Analysis, B., 1961; [8] Kreisel G., Lacombe D., Schoenfield J. R., «C. r. Acad. sci.», 1957, t. 245, № 4, p. 399—402; [9] Kreisel G., Lacombe D., там же, № 14, p. 1106—1109; [10] Lacombe D., там же, 1955, t. 240, № 26, p. 2478—80; t. 241, № 1, p. 13—14, № 2, p. 151—53, № 19, p. 1250—52; 1957, t. 244, № 7, p. 838—40, № 8, p. 996—97; t. 245, № 13, p. 1040—43; 1958, t. 246, № 1, p. 28—31; [11] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [12] Гудстейн Р. Л., Ренурсивный математический анализ, пер. с англ., М., 1970; [13] Bishop E., Foundations of constructive analysis, N. Y., 1967; [14] Мартин-Лёф П., Очерки по конструктивной математике, пер. с англ., М., 1975; [15] Марков А. А., Теория алгорифмов, М.— Л., 1954; [16] Шанин Н. А., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1962, т. 67, с. 15—294; [17] Заславский И. Д., там же, с. 385—457; [18] Цейтин Г. С., там же, с. 295—361; [19] Кушнер Б. А., Лекции по конструктивному математическому анализу, М., 1973.

Б. А. Кушнер.

КОНСТРУКТИВНЫЙ ОБЪЕКТ — название, установившееся за математич. объектами, возникающими в результате развертывания так называемых конструктивных процессов. При описании того или иного конкретного конструктивного процесса обычно «...предполагается, что отчетливо охарактеризованы объекты, которые в данном рассмотрении фигурируют в качестве нерасчленяемых на части исходных объектов; предполагается, что задан список тех правил образования новых объектов из ранее построенных, которые в данном рассмотрении фигурируют в качестве описаний допустимых шагов конструктивных процессов; предполагается, что процессы построения осуществляются отдельными шагами, причем выбор каждого очередного

шага произволен в тех границах, которые определяются списком ранее построенных объектов и совокупностью тех правил образования, которые фактически можно применить к ранее построенным объектам» (см. [3], с. 16). Такое описание конструктивного процесса, а тем самым и К. о., разумеется, не может претендовать на то, чтобы быть точным математич. определением. Однако конкретные математич. теории всегда имеют дело лишь с такими конкретными т и п а м и К. о., к-рые допускают точную характеризацию. Приведенное выше описание К. о. служит в таких ситуациях ориентиром для выбора соответствующих точных определений.

Примером точно определенного типа К. о. могут служить *слова* в к.-л. фиксированном *алфавите* (буквы этого алфавита играют роль исходных объектов; новые слова получаются из уже имеющихся путем приписывания к последним справа букв рассматриваемого алфавита). Другими примерами типов К. о. могут служить конечные *графы*, конечные абстрактные топологические *комплексы*, релейно-контактные схемы (выбор соответствующих исходных объектов и правил образования не представляет труда). Как К. о. могут быть также определены рациональные числа, алгебраические многочлены, *алгоритмы* и *исчисления* различных точно определенных типов, *автоматы конечные*, конечно определенные группы и другие им подобные математич. объекты.

К. о. играют важную роль в тех математич. теориях, в к-рых возникает потребность в рассмотрении объектов, допускающих отчетливое индивидуальное задание средствами той или иной математич. символики. В рамках теоретико-множественной математики, неограниченно использующей *абстракцию актуальной бесконечности*, К. о. и произвольные множества К. о. рассматриваются одновременно и наравне с прочими математич. объектами, среди к-рых К. о. выделяются лишь своей большей «осязаемостью». В рамках *конструктивной математики* К. о. (или объекты, задаваемые ими) представляют собой единственно допускаемый к рассмотрению тип математич. объектов, и рассмотрение их здесь ведется на базе отказа от применения абстракции актуальной бесконечности и на основе специальной *конструктивной логики*, учитывающей, в частности, специфику определения К. о. См. также *Конструктивная математика*.

Лит.: [1] М а р к о в А. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1962, т. 67, с. 8—14; [2] е г о ж е, О логике конструктивной математики, М., 1972; [3] Ш а н и н Н. А., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1962, т. 67, с. 15—294.

Н. М. Нагорный.

КОНСТРУКТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИЯ — один из разделов математики, возникший на границе *моделей теории*, алгебры и теории *рекурсивных функций* и связанный с изучением вопросов эффективности в моделях и алгебрах.

Статья А. И. Мальцева «Конструктивные алгебры» [1] явилась первой обзорной работой по конструктивным моделям, в к-рой были выработаны и систематизированы основные понятия и намечены дальнейшие пути развития этой теории. Большую роль в становлении и развитии этого раздела математики сыграли работы Ю. Л. Ершова и его учеников, в к-рых был решен ряд основных проблем, выработаны новые понятия и определены новые направления в исследовании конструктивных моделей (см. [2]).

Ниже сформулированы основные понятия и результаты К. м. т. Все рассмотрения обычно ведутся в нек-рой фиксированной сигнатуре

$$\sigma_0 \leftrightarrows \langle P_0^{n_0}, \ \ldots, \ P_k^{n_k}, \ \ldots \rangle_{k<\omega}$$

такой, что функция $f : f(k) \leftrightarrows n_k$ общерекурсивна. Если рассматриваются алгебраич. системы, то в сигнатуре могут быть и функциональные символы. Используется также сигнатура

$$\sigma_1 \leftrightarrows \sigma_0 \cup \langle a_0, \ a_1, \ \ldots, \ a_k, \ \ldots \rangle_{k<\omega},$$

к-рая получается присоединением к σ_0 счетного числа символов для констант. Всегда предполагается, что $n_0 = 2$ и предикат P_0^2 на любой модели определен как равенство. Пусть L_i, $i=0,1$,— совокупность всех формул узкого исчисления предикатов с равенством (P_0^2) сигнатуры σ_i, $i=0,1$, и g — некоторая фиксированная гёделевская нумерация (см. [3]) множества $L_1 (g : N \to L_1)$. Подмножество $S \subseteq L_1$ наз. р а з р е ш и м ы м, если множество $g^{-1}(S)$ рекурсивно. Н у м е р о в а н н о й м о д е л ь ю (сигнатуры σ_0) наз. пара $(\mathfrak{M}, \nu)$, где $\mathfrak{M} = \langle M, P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, \ldots \rangle_{k<\omega}$ — модель сигнатуры σ_0, а ν — нумерация основного множества M модели $\mathfrak{M}$. Нумерованная модель $(\mathfrak{M}, \nu)$ наз. к о н с т р у к т и в н о й м о д е л ь ю, если множество

$$\bar{D}(\mathfrak{M}, \nu) \rightleftarrows \{\langle k, x_1, \ldots, x_{n_k}\rangle \mid \mathfrak{M} \models P_k^{n_k}(\nu(x_1), \ldots, \nu(x_{n_k}))\}$$

рекурсивно.

По каждой нумерованной модели $(\mathfrak{M}, \nu)$ можно канонич. образом построить нек-рое σ_1-о б о г а щ е н и е $\mathfrak{M}_\nu$ м о д е л и $\mathfrak{M}$, т. е. модель сигнатуры σ_1, основное множество к-рой есть основное множество модели $\mathfrak{M}$, предикаты из σ_0 в $\mathfrak{M}_\nu$ совпадают с соответствующими предикатами $\mathfrak{M}$, а константы определены следующим образом: в качестве значения a_k, $k<\omega$, полагают элемент $\nu(k) \in M$. Пусть $Th(\mathfrak{M})$ — э л е м е н т а р н а я т е о р и я м о д е л и $\mathfrak{M}$, т. е. множество всех замкнутых формул сигнатуры σ_0, истинных на модели $\mathfrak{M}$, а $Th(\mathfrak{M}, \nu)$ — элементарная теория нумерованной модели $\mathfrak{M}_\nu$. Нумерованная модель $(\mathfrak{M}, \nu)$ наз. с и л ь н о к о н с т р у к т и в н о й, если теория $Th(\mathfrak{M}, \nu)$ разрешима. Непосредственно из определения видно, что сильно конструктивная модель конструктивна.

Одной из основных проблем К. м. т. является проблема существования конструктивных моделей с различными элементарными свойствами, т. е. свойствами, записываемыми на языке узкого исчисления предикатов. В этом направлении получен (к 1978) ряд интересных и важных теорем. Существование широкого класса сильно конструктивных моделей дает следующая теорема: если $T \subseteq L_0$ — разрешимая теория, то существует такая последовательность сильно конструктивных моделей

$$(\mathfrak{M}_0, \nu_0), (\mathfrak{M}_1, \nu_1), \ldots, (\mathfrak{M}_k, \nu_k), \ldots, k < \omega,$$

что: $T = \bigcap_{k<\omega} Th(\mathfrak{M}_k)$; множество $\{\langle x, y\rangle \mid g(y) \in Th(\mathfrak{M}_x, \nu_x)\}$ является рекурсивным. Было замечено, что существуют формулы, не имеющие конструктивных моделей. Следующие две теоремы дают нек-рые достаточные условия существования конструктивных моделей у теорий с рекурсивно перечислимым множеством аксиом.

Если T — рекурсивно перечислимая $\forall\exists$-теория, имеющая модель $\mathfrak{M}$ с рекурсивно перечислимой $\exists$-теорией, то теория T имеет конструктивную модель.

Теория T конечной сигнатуры $\sigma = \langle P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, c_0, \ldots, c_l\rangle$ наз. $\forall$-к о н е ч н о й, если универсальная теория любого расширения $T' \supseteq T$ (той же сигнатуры) конечно аксиоматизируема (универсальными предложениями). Теория T наз. с и л ь н о $\forall$-к о н е ч н о й, если для любого конечного множества $\langle c_{l+1}, \ldots, c_N\rangle$ константных символов теория T^*, определенная теорией T в языке сигнатуры $\sigma^* = \sigma \cup \langle c_{l+1}, \ldots, c_N\rangle$, является $\forall$-конечной.

Если теория T сильно $\forall$-конечна, а T' — рекурсивно перечислимое расширение T, то T' имеет конструктивную модель.

Другой круг исследуемых вопросов связан с проблемой существования для заданной модели $\mathfrak{M}$ нумерации ν такой, чтобы пара $(\mathfrak{M}, \nu)$ стала (сильно) конструктивной моделью. Модель, для к-рой существует такая ну-

мерация, наз. (сильно) конструктивизируемой, а соответствующая нумерация (сильной) конструктивизацией. Для решения ряда вопросов, связанных с конструктивизируемостью моделей, оказывается полезной теорема Ершова о ядре, применение к-рой к конкретным алгебраич. системам позволяет решить ряд естественных вопросов. В частности, установлено: 1) для любой конструктивной локально нильпотентной группы без кручения существует конструктивное пополнение; 2) если (F,ν) — конструктивное поле, F_0 — алгебраич. расширение поля F, то ν продолжается до конструктивизации поля F_0 тогда и только тогда, когда семейство конечных множеств многочленов над F от счетного числа переменных, имеющих корень в F, рекурсивно перечислимо.

Большой класс конструктивизируемых моделей дает следующая теорема: любая счетная модель $\aleph_1$-категоричной разрешимой теории сильно конструктивизируема. Интересным является вопрос о (сильной) конструктивизируемости специальных моделей полных теорий, в частности простых и универсальных. Найдены необходимые и достаточные условия (сильной) конструктивизируемости простой (и счетной насыщенной) модели полной теории; построены примеры полных теорий с неконструктивизируемыми простой и универсальной моделями. Доказано, что простая модель полной разрешимой теории, имеющей сильно конструктивизируемую универсальную модель или конечное число попарно неизоморфных счетных моделей, всегда сильно конструктивизируема.

Изучался вопрос о числе неэквивалентных конструктивизаций для данной модели. Две конструктивизации ν и μ модели $\mathfrak{M}$ наз. (рекурсивно) эквивалентными, если существуют изоморфизм φ ($\varphi = id_{\mathfrak{M}}$) и рекурсивная функция f такие, что $\varphi\nu = \mu f$. Модель наз. (рекурсивно устойчивой) автоустойчивой, если любые две ее конструктивизации (рекурсивно) эквивалентны.

Для широкого класса алгебраич. систем показано, что существует либо только одна (с точностью до эквивалентности), либо счетное число неэквивалентных конструктивизаций [4], [5]. Полностью решен вопрос о числе неэквивалентных конструктивизаций и описаны автоустойчивые модели для полей, булевых алгебр и абелевых групп без кручения. А также показано, что вопросы автоустойчивости связаны с изучением вычислимости классов конструктивных моделей.

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, № 3, с. 3—60; [2] Ершов Ю. Л., Теория нумераций, ч. 3 — Конструктивные модели, Новосиб., 1974; [3] Ершов Ю. Л. и др., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, № 4, с. 37—108; [4] Гончаров С. С., «Алгебра и логика», 1975, т. 14, № 6, с. 647—80; [5] Нуртазин А. Т., там же, 1974, т. 13, № 3, с. 311—23; [6] Cobham A., в кн.: Summaries of talks presented at the Summer Institute for Symbolic Logic Cornell University. 1957, Wash., 1960, p. 391—95; [7] Fröhlich A., Shepherdson J. C., «Phil. Trans. Royal Soc. London», 1956, ser. A, v. 248, p. 407—32; [8] Mostowski A., «Fundam. math.», 1955, v. 42, № 1, p. 125—40; [9] Rabin M. O., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1960, v. 95, № 2, p. 341—60; [10] Vaught R. L., «J. Symb. Logic», 1960, v. 25, № 1, p. 39—53.

С. С. Гончаров.

КОНТАКТНАЯ СТРУКТУРА — *инфинитезимальная структура* 1-го порядка на гладком многообразии M^{2n+1} нечетной размерности, к-рая определяется заданием на M^{2n+1} такой 1-формы α, что $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$. Здесь α наз. контактной формой на M^{2n+1}. К. с. существует только на ориентируемом M^{2n+1} и определяет единственное векторное поле Y на M^{2n+1} такое, что $\alpha(Y)=1$ и $d\alpha(Y, X)=0$ для любого векторного поля X; поле Y наз. динамич. системой на M^{2n+1}, соответствующей контактной форме α. К. с. находит применения в аналитич. механике благодаря тому, что на любом подмногообразии уровня гамильтониана, заданного на фазовом пространстве, возникает естественная К. с.

Лит.: [1] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973.

Ю. Г. Лумисте.

КОНТАКТНАЯ СХЕМА — специальная управляющая система, одна из математических моделей реальных устройств, построенных из контактов реле. К. с.— модельный класс управляющих систем, и для него рассматриваются все те же задачи, что и для прочих классов управляющих систем; он особенно удобен при изучении «геометрических» свойств управляющих систем.

К. с. получается в результате приписывания каждому ребру нек-рого графа с выделенными вершинами одной из букв конечного алфавита $\{x_1, \bar{x}_1, \ldots, x_n, \bar{x}_n\}$. Выделенные вершины наз. полюсами схемы. Ребро с приписанной ему буквой x_i ($\bar{x}_i$) наз. замыкающим (размыкающим) контактом. Последовательность контактов между полюсами a и b схемы S, соответствующая простой цепи (см. *Граф*) в графе схемы S, наз. цепью между полюсами a и b схемы S; конъюнкция соответствующих букв наз. проводимостью данной цепи. Проводимость между полюсами a и b схемы есть функция алгебры логики $f_{ab}(x_1, \ldots, x_n)$, равная дизъюнкции проводимостей всех цепей между этими полюсами (в случае, если множество цепей между a и b пусто, $f_{ab}\equiv 0$; при a, совпадающем с b, $f_{aa}\equiv 1$). Всякой К. с. сопоставляется матрица проводимостей $\|f_{ab}\|$, элементами к-рой являются проводимости между парами полюсов. При этом $f_{ab}\cdot f_{bc}\leqslant f_{ac}$. Обратно, если задана матрица из функций алгебры логики $\|f_{ab}\|$ такая, что $f_{aa}=1$, $f_{ab}=f_{ba}$ и $f_{ab}\cdot f_{bc}\leqslant f_{ac}$ для любых a, b, c, то существует К. с. с данными полюсами, для которых проводимости совпадают с заданными f_{ab}. В частности, для любой f существует двухполюсная схема, проводимость между полюсами к-рой равна f. В этом случае говорят, что схема реализует функцию f. Напр., схема рис. 1 реализует линейную функцию $f = x_1 + \ldots + x_n + 1 \pmod 2$. Всякая функция алгебры логики реализуема некоторой К. с.

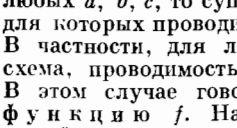


Рис. 1.

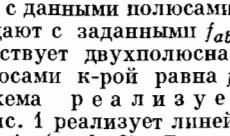


Рис. 2.

Иногда в К. с. множество всех полюсов разбито на два подмножества — входов и выходов. К. с. с r входами и s выходами называется контактным (r, s)-полюсником. К. с., проводимости между любыми парами выходов (входов) которой равны нулю, называется разделительной относительно выходов (входов). Примером разделительного (относительно выходов) $(1, 2^n)$-полюсника может служить контактное *дерево* (рис. 2). К. с. наз. плоской, если соответствующий ей граф, дополненный источниковым ребром (т. е. ребром, соединяющим полюсы, к-рому не приписана никакая буква рассматриваемого алфавита), является плоским (см. *Граф плоский*). Плоская К. с. S^* наз. двойственной к плоской К. с. S, если граф Γ^* схемы S^* (с источниковым ребром) является двойственным к аналогичному графу Γ схемы S, причем источниковому ребру графа Γ соответствует таковое в графе Γ^*, а остальные соответствующие друг другу ребра несут одинаковые буквы (рис. 3). Схемы S и S^* имеют одинаковое число контактов и реализуют двойственные функции (принцип двойственности). При замене

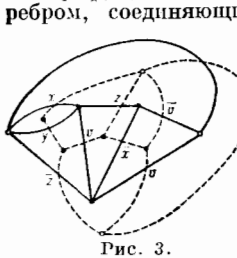


Рис. 3.

контактов в схеме S^* на противоположные получается схема для отрицания функции, реализуемой схемой S. Для неплоских К. с., вообще говоря, не существует возможности перехода к схемам с тем же числом контактов, реализующим двойственные функции. П-схема (параллельно-последовательная схема) может быть определена индуктивно: К. с., состоящая из единственного контакта, соединяющего полюсы, есть П-схема; К. с., построенная из двух П-схем, соединенных параллельно или последовательно, есть П-схема. Существуют К. с., не являющиеся П-схемами, напр. схема рис. 4. К. с., двойственная к П-схеме, есть П-схема. Существует соответствие между П-схемами и формулами в базисе $\{\&, \vee, -\}$. При этом всякая П-схема реализует ту же самую функцию, что и соответствующая ей формула, и содержит столько же контактов, сколько букв содержит формула. Напр., схеме рис. 5 соответствует ф-ла

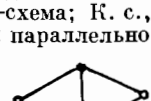


Рис. 4.

$$(x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2)(x_3x_4 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4) \vee (x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2)(x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3x_4).$$

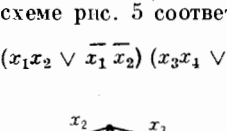


Рис. 5.

Под сложностью К. с. понимается число всех ее контактов. Минимальное число контактов, достаточное для реализации контактной схемой произвольной функции алгебры логики, зависящей от n переменных, асимптотически равно $2^n/n$; минимальное число контактов, достаточное для реализации П-схемой, асимптотически равно $2^n/\log n$ (см. *Синтеза задачи*).

Две К. с. наз. эквивалентными (при заданном взаимно однозначном соответствии между их полюсами), если проводимости между любой парой соответствующих полюсов этих схем совпадают. При замене в любой К. с. S любой ее подсхемы S' на эквивалентную получается схема, эквивалентная S. (При замене необходимо рассматривать как полюсы S' все попавшие в S' полюсы S и все вершины S', инцидентные не попавшим в S' контактам S.) Если S_1, S_2 — эквивалентные К. с., то правило $S_1 \leftrightarrow S_2$ эквивалентного преобразования К. с. разрешает в любой схеме заменить подсхему, полученную из S_1 (или S_2) переименованием букв, на К. с., полученную из S_2 (S_1) тем же переименованием. Для каждого n существует конечная полная система правил (рис. 6), позволяющая переводить друг в друга любые эквивалентные К. с. с числом переменных, не превосходящим n. Для класса же всех К. с. (без ограничения числа переменных) конечной полной системы правил не существует (если при применении правил допускать только переименования букв).

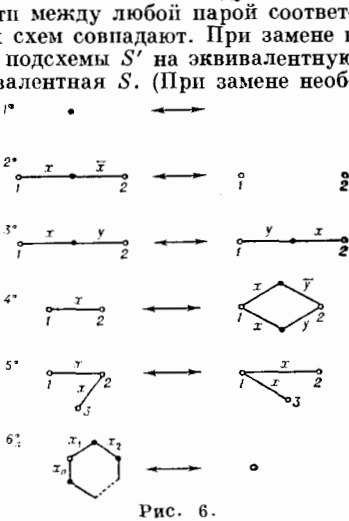


Рис. 6.

Лит.: [1] Шестаков В. И., «Автоматика и телемеханика», 1941, т. 6, № 2, с. 15—24; [2] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 9—45; [3] Nakasima A., «Nippon Electr. Comm. Eng.», 1938, №№ 9, 10, 13, 14; [4] Яблонский С. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 51, с. 5—142; [5] Кузнецов А. В., там же, с. 174—85; [6] Чегис И. А., Яблонский С. В., там же, с. 270—360; [7] Лупанов О. Б., «Проблемы кибернетики», 1963, в. 10, с. 63—97; [8] Мурский В. Л., там же, 1961, в. 5, с. 61—76.

Н. А. Карпова.

КОНТАКТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование кривых на плоскости, при к-ром касающиеся кривые переходят в касающиеся же кривые. Аналогично определяется К. п. поверхностей в пространстве. Простейший пример К. п.— *Лежандра преобразование.*

Более общо, контактное преобразование — такой диффеоморфизм f контактного многообразия (т. е. многообразия M^{2n+1}, снабженного *контактной структурой* с формой η), что $f^*\eta=\sigma\eta$, где σ — ненулевая функция на M^{2n+1}. При $\sigma=1$ f наз. строго контактным преобразованием. Векторное поле X на контактном многообразии наз. контактным (строго контактным) инфинитезимальным преобразованием, если $L_X\eta=\widetilde{\sigma}\eta$, $(L_X\eta=0)$, где L_X — *Ли производная* вдоль X. К. п. иногда наз. преобразованиями прикосновения.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.— Л., 1947; [2] Эйзенхарт Л. П., Непрерывные группы преобразований, пер. с англ., М., 1947; [3] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959; [4] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973; [5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1967, М., 1969, с. 127—188. *М. П. Войцеховский.*

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ — задачи распространения тепла (стационарные и нестационарные для эллиптич. и параболич. уравнений соответственно) в случае, когда вещество является термически неоднородным — состоит из нескольких частей с различными коэффициентами теплопроводности k, теплоемкости c и плотности ρ. Входящие в дифференциальное уравнение коэффициенты k, c, ρ, имеют разрывы 1-го рода, что приводит к задачам со слабыми разрывами решений — непрерывной температурой T и разрывными ее производными. Однако поток тепла w задается непрерывным.

Пусть, напр., имеется одномерное по x, $0<x<l$, уравнение теплопроводности

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right) \qquad (1)$$

и пусть в точке $0<x=x^0<l$ функции $k(x)$, $c(x)$, $\rho(x)$ имеют разрыв 1-го рода

$$[k]\equiv k(x^0+0)-k(x^0-0)\neq 0,\ [c\rho]\neq 0.$$

Тогда в точке $x=x^0$ должны выполняться условия (см. [1], [2]) непрерывности температуры T и потока $w=-k(x)\partial T/\partial x$ (условия сопряжения)

$$[T]=0,\quad [w]=0,\quad t\geqslant 0. \qquad (2)$$

В других точках отрезка температура $T(x, t)$ должна удовлетворять уравнению (1) при $t>0$, начальным условиям при $t=0$, а также граничным условиям при $x=0$, $x=l$, $t>0$.

В многомерном случае для параболич. уравнения

$$\cos(x,\ t)\,\rho(x,\ t)\frac{\partial T}{\partial t}=\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{\alpha\beta}(x,\ t)\frac{\partial T}{\partial x_\beta}\right)+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{p}b_\alpha(x,\ t)\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}-q(x,\ t)\,T+f(x,\ t),$$

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p)$$

на поверхности Γ^0 разрыва коэффициентов также ставятся условия (2) непрерывности функции T и потока

$$w=\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{p}k_{\alpha\beta}(x,\ t)\frac{\partial T}{\partial x_\beta}\cos\widehat{(n^0,\ x_\alpha)},$$

где n^0 — нормаль к поверхности Γ^0 (см. [3], [4]).

В стационарном случае ($\partial T/\partial t\equiv 0$) условия (1) на разрыве сохраняются. Иногда ставятся более общие условия сопряжения (см. [2], [4]). Так, в одномерном случае рассматриваются условия

$$[T]=r(t),\ [a\partial T/\partial x]=h(t),\ x=x^0,\ t\geqslant 0.$$

К К. з. т. т. относится также задача о распределении тепла в средах, агрегатное состояние к-рых может

меняться при определенном значении температуры T^* (температуры фазового перехода) с выделением или поглощением теплоты фазового перехода λ (з а д а ч а С т е ф а н а [5]). На искомой границе $x=x^0(t)$ раздела фаз в одномерном случае ставятся условия

$$T(x^0(t)+0,\ t)=T(x^0(t)-0,\ t)=T^*,$$

$$\left[k\frac{\partial T}{\partial x}\right]=\lambda\frac{dx^0}{dt}.$$

Имеется большое число контактных задач для системы уравнений теплопроводности и газовой динамики, магнитной гидродинамики.

Лит.: [1] С а м а р с к и й А. А., «Докл. АН СССР», 1958, т. 121, № 2, с. 225—28; [2] К а м ы н и н Л. И., «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 5, с. 1071—1105; [3] О л е й н и к О. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1961, т. 25, № 1, с. 3—20; [4] К а м ы н и н Л. И., «Дифференциальные уравнения», 1967, т. 3, № 6, с. 948—964; [5] Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972; [6] Л а д ы ж е н с к а я О. А., С о л о н н и к о в В. А., У р а л ь ц е в а Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., 1967. *И. В. Фрязинов.*

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ — задачи распределения деформации и напряжения в системе твердых тел, имеющих общие участки границ (поверхности соприкосновения). В общей постановке результаты по контактной задаче (к. з.) ограничиваются теоремами существования и нек-рыми приближенными способами решения. Более полные результаты относятся к тому случаю, когда одно из контактирующих тел является упругой полуплоскостью (или полупространством), а другое — абсолютно жестким телом, вдавливаемым в полуплоскость (полупространство) заданными силами (задачи о штампах). Вне основания штампа, приходящего в соприкосновение с упругим телом, на границе последнего граничные условия могут задаваться, из числа допустимых, произвольно, а на участке под штампом граничные условия формулируются в зависимости от характера контакта. Так, если упругое тело жестко сцеплено с прижимаемым к нему твердым телом, под штампом могут считаться заданными перемещения; если же допускается скольжение упругого тела по контактной поверхности жесткого штампа, то под штампом известны нормальная составляющая перемещения и нек-рое линейное соотношение между нормальным и касательным напряжением, зависящее от коэффициента трения (закон Кулона). Могут реализоваться и другие граничные условия. Все случаи упругого полупространства (полуплоскости) приводят к смешанной задаче с различными граничными условиями на различных участках границы. Развитие методов решения этих задач, включая тот случай, когда оба контактирующих тела являются упругими, составляет содержание работ, посвященных задачам о штампах. Эти методы близки друг другу и в плоской задаче, в конечном счете, сводятся к методу сопряжения кусочно голоморфных функций (метод задачи Римана — Гильберта), с помощью к-рого к. з. решаются в квадратурах. Задача о соприкосновении двух упругих тел в трехмерном случае была впервые поставлена и решена Г. Герцем (H. Hertz), к-рый считал площадку соприкосновения весьма малой, а уравнения недеформированных поверхностей вблизи места соприкосновения — уравнениями поверхностей 2-го порядка. При этом оказалось возможным воспользоваться одной электростатич. аналогией, и функция, выражающая давление на участке контакта, была найдена в виде электростатич. потенциала нек-рого эллипсоида. В плоском случае задача Герца приводится к уравнению Фредгольма 1-го рода

$$\int_a^b p(t)\ln|t-t_0|\,dt=f(t_0)+C,$$

где $p(t)$ — искомое давление одного тела на другое в точке t участка соприкосновения ab, а $f(t)$ — заданная

функция; эта же задача приводится к разрешимому в замкнутом виде сингулярному интегральному уравнению.

В общей постановке к. з. формулируются следующим образом.

З а д а ч а I. Пусть в бесконечном изотропном упругом теле с постоянными Ламе λ_0, μ_0 имеются m упругих изотропных изолированных включений с постоянными λ_k, μ_k, $k=1, \ldots, m$, ограниченных гладкими поверхностями S_k произвольной конфигурации. Считая включения жестко сцепленными с основной средой вдоль контактных поверхностей S_k, требуется определить напряженное состояние тела под влиянием заданных объемных сил.

З а д а ч а II. В конечном изотропном упругом теле с произвольной гладкой границей S_0 и постоянными λ_0, μ_0 имеется m упругих изотропных изолированных включений, ограниченных поверхностями S_k, $k=1, \ldots, m$, жестко сцепленных с несущей средой вдоль S_k. Требуется найти упругое состояние тела, возникающее под действием заданных объемных сил и заданных граничных условий на S_0.

Эти же задачи ставятся для анизотропных тел, а также при других допущениях относительно характера контактов вдоль S_k, $k=1, \ldots, m$. Для указанных задач доказаны теоремы существования, в изотропном случае — методом сингулярных потенциалов и сингулярных интегральных уравнений, для анизотропных тел — методами функционального анализа.

В изотропном случае найдены также способы приближенного решения в квадратурах. Пусть x, y — точки трехмерного пространства E_3, D_k — область, ограниченная поверхностью S_k, $D^+ = \bigcup_{k=1}^m D_k$, $D^- = E_3 \setminus \overline{D}^+$, $\Gamma^k(x-y)$ — матрица размера 3×3 фундаментальных решений для области D_k, $k=1, \ldots, m$, $\Gamma^0(x-y)$ — та же матрица для области D^-, $u(x)$ — вектор смещения в точке x, T — оператор напряжения, $Tu(x)$ — вектор напряжения, соответствующий смещению u в точке x, $T\Gamma_p^k(x-y)$, $p=1, 2, 3$,— вектор напряжения, соответствующий смещению $\Gamma_p^k(x-y)$ в области D_k для $x \neq y$, $T\Gamma^k(x-y)$ — матрица размера 3×3, составленная из $T\Gamma_p^k(x-y)$, $p=1, 2, 3$, как из столбцов, $(T\Gamma^k(x-y))'$ — союзная матрица; $M^k(x, y)$ и $M^0(x, y)$ — прямоугольные матрицы размера 3×6, определенные следующим образом

$$M^k(x, y) =$$

$$= \begin{cases} \| (T\Gamma^k(x-y))', \ -\Gamma^k(x-y) \|_{3\times 6}, \\ \qquad\qquad y \in S_k, \ k=1, \ldots, m, \ x \in E_3, \\ 0 \qquad\qquad y \in S_j, \ j=1, \ldots, m, \ j \neq k, x \in E_3, \end{cases}$$

$$M^0(x, y) = \| (T\Gamma^0(x-y))', \ -\Gamma^0(x-y) \|_{3\times 6},$$

$$y \in \bigcup_{k=1}^m S_k, \quad x \in E_3.$$

Задача I, без ограничения общности, есть задача об определении смещения из условий

$$\forall x \in D_k : \mu_k \Delta u + (\lambda_k + \mu_k) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0,$$

$$\forall x \in D^- : \mu_0 \Delta u + (\lambda_0 + \mu_0) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = \Phi^0(x),$$

$$\forall y \in S_k : \lim_{D^+ \ni x \to y} u(x) = \lim_{D^- \ni x \to y} u(x),$$

$$\lim_{D^+ \ni x \to y} Tu(x) = \lim_{D^- \ni x \to y} Tu(x), \quad k=1, \ldots, m.$$

Пусть значения пределов с обеих сторон контактных границ для $u(x)$ и $Tu(x)$ обозначены через $u(y)$, $Tu(y)$,

$y \in \bigcup_{k=1}^{m} S_k$, тогда для регулярного решения:

$$\left.\begin{aligned} &\delta_k(x)\,u(x) = \int_{S_k} \Gamma^k(x-y)\,Tu(y)\,d_y S - \\ &-\int_{S_k} (T\Gamma^k(x-y))'\,u(y)\,d_y S,\ k=1,\ \ldots,\ m; \\ &\delta(x)\,u(x) = \int_{\bigcup_{i=1}^{m} S_i} \Gamma^0(x-y)\,Tu(y)\,d_y S - \\ &-\int_{\bigcup_{i=1}^{m} S_i} (T\Gamma^0(x-y))'\,u(y)\,d_y S - F(x), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где

$$F(x) = \int_D \Gamma^0(x-y)\,\Phi^0(y)\,dy,\ \delta_k(x) = 2$$

для $x \in D_k$ и $\delta_k(x) = 0$ для $x \in E_3 \setminus \overline{D}_k$, а $\delta(x) = 0$ для $x \in \bigcup_{i=1}^{m} D_i$ и $\delta(x) = 2$ для $x \in D^-$.

Формулы (1) могут быть записаны в виде:

$$\forall x \in E_3 \setminus \overline{D_k}: \int_{\bigcup_{i=1}^{m} S_i} M^k(x, y)\,\lambda(y)\,d_y S = 0,\ k = 1, \ldots, m;$$

$$\forall x \in \bigcup_{i=1}^{m} D_i: \int_{\bigcup_{i=1}^{m} S_i} M^0(x,\ y)\,\lambda(y)\,d_y S = F(x),$$

где $\lambda(y) = (u(y),\ Tu(y))$ — шестимерный вектор. Первое из этих равенств верно для всех x, принадлежащих $E_3 \setminus \overline{D}_k$, а второе — для всех x, принадлежащих $\bigcup_{i=1}^{m} D_i$. Соответствующие произвольно заданные значения переменной x приводят к бесконечному множеству равенств

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\bigcup_{i=1}^{m} S_i} M^k(\xi_j,\ y)\,\lambda(y)\,d_y S = 0, \\ &k = 1,\ \ldots,\ m;\ \xi_j \in E_3 \setminus \overline{D}_k,\ j = 1,\ 2,\ \ldots, \\ &\int_{\bigcup_{i=1}^{m} S_i} M^0(\xi_j^1,\ y)\,\lambda(y)\,d_y S = F(\xi_j^1),\ \ldots \\ &\ldots,\ \int_{\bigcup_{i=1}^{m} S_i} M^0(\xi_j^m,\ y)\,\lambda(y)\,d_y S = F(\xi_j^m), \\ &\xi_j^h \in D_h,\ h = 1,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Пусть $\{\varphi^n(y)\}_0^\infty$ — множество шестимерных векторов

$$(T\Gamma_p^1(\xi_j - y),\ -\Gamma_p^1(\xi_j - y)),\ \ldots,\ (T\Gamma_p^m(\xi_j - y),\ -\Gamma_p^m(\xi_j - y)),$$
$$(T\Gamma_p^0(\xi_j^1 - y),\ -\Gamma_p^0(\xi_j^1 - y)),\ \ldots$$
$$\ldots,\ (T\Gamma_p^0(\xi_j^m - y),\ -\Gamma_p^0(\xi_j^m - y)),$$
$$y \in \bigcup_{i=1}^{m} S_i,\quad p = 1,\ 2,\ 3,$$

соответственно пронумерованное, напр., по диагональному правилу. Это множество линейно независимо и полно в $\mathscr{L}_2(\bigcup_{i=1}^{m} S_i)$. В левых частях равенств (2) стоят скалярные произведения (λ, φ^n) для любого значения индекса n в качестве составляющих заданных векторов и, следовательно, эти произведения также заданы. Вследствие полноты $\{\varphi^n(y)\}_0^\infty$ в $\mathscr{L}_2(\bigcup_{i=1}^{m} S_i)$ неизвестный вектор $\lambda = (u, Tu)$ может быть аппроксимирован линейной комбинацией $\sum_{n=1}^{N} a_n^N \varphi^n(y)$, если постоянные a_n^N найдены из условия минимума нормы

$$\left\| \lambda(y) - \sum_{n=1}^{N} a_n^N \varphi^n \right\|_{L_2\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i\right)}.$$

Это приводит к системе линейных алгебраич. уравнений

$$\sum_{s=1}^{N} a_s^N\,(\varphi^s,\ \varphi^n) = (\lambda,\ \varphi^n),\ n = 1,\ \ldots,\ N,$$

к-рая разрешима. N-е — приближение $\lambda^N(y)$ для вектора $\lambda(y)$ выражается формулой $\lambda^N(y) = \sum_{n=1}^{N} a_n^N \varphi^n(y)$.

Подстановка первых трех составляющих $\lambda^N(y)$, как вектора, вместо $u(y)$, а вторых трех составляющих вместо $Tu(y)$ под интегралами в (1), приводит к приближенному решению в квадратурах задачи I. Точное решение есть равномерный при $N\to\infty$ предел приближенного в произвольной внутренней точке области.

Формулы для решения задачи II остаются теми же, с одним изменением: вместо матрицы $\Gamma^0(x-y)$ используется тензор Грина для полной области, ограниченной поверхностью S_0, соответствующей заданным на S_0 граничным условиям.

Лит.: [1] Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд., М., 1966; [2] Галин Л. А., Контактные задачи теории упругости, М., 1953; [3] Штаерман И. Я., Контактная задача теории упругости, М.—Л, 1949; [4] Купрадзе В. Д. и др., Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости, 2 изд., М., 1976; [5] Фикера Г., Теоремы существования в теории упругости, пер. с англ., М., 1974.

В. Д. Купрадзе.

КОНТИНГЕНЦИЯ подмножества E евклидова пространства в точке $A\in E$ — объединение лучей $\overrightarrow{AB}$ с началом A таких, что существует последовательность точек $B_n\in E$, сходящаяся к A, и последовательность лучей $\overrightarrow{AB_n}$ сходится к $\overrightarrow{AB}$; обозначается $\mathrm{contg}\,(E, A)$. Для m-мерного дифференцируемого многообразия E $\mathrm{contg}(E, A)$ совпадает с m-мерной плоскостью, касательной к E в точке A. Понятие оказалось полезным при изучении дифференциальных свойств функций. Если для любой точки A плоского множества E $\mathrm{contg}(E, A)$ не совпадает со всей плоскостью, то E распадается на счетное число частей, расположенных на спрямляемых кривых. Эта теорема неоднократно обобщалась и уточнялась, напр. множество конечной p-меры Хаусдорфа $p=1, \ldots, n-1$, расположенное в n-мерном евклидовом пространстве, распадается на счетное число частей, одна из к-рых имеет нулевую меру Фавара порядка p, а каждая из остальных расположена на нек-рой липшицевой поверхности размерности p; для почти всех $x\in E$ в смысле p-меры Хаусдорфа $\mathrm{contg}\,(E, A)$ является плоскостью размерности p, если все вариации множества E конечны и, начиная с $(p+1)$-й, равны нулю.

Лит.: [1] Bouligand G., Introduction à la gèométrie infinitésimale directe, P., 1932; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [3] Federer H., Geometric measure theory, B., 1969; [4] Иванов Л. Д., Вариации множеств и функций, М., 1975.

Л. Д. Иванов.

КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ — см. *Интеграл по траекториям.*

КОНТИНУУМ — непустое связное хаусдорфово *бикомпактное пространство.* К. наз. вырожденным, если он состоит из одной точки. Особо важным является класс метризуемых К. Примеры К.: замкнутый отрезок, окружность, выпуклый многогранник и т. д. Компакт (X, ρ) (т. е. метризуемый бикомпакт с метрикой ρ) есть К. в том и только в том случае, если для каждой пары точек $a, b\in X$ и для любого $\varepsilon>0$ найдется конечная ε-цепь, соединяющая эти точки, т. е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^k$ точек в X такая, что $x_1=a$, $x_k=b$ и $\rho(x_n, x_{n+1})<\varepsilon$. Объединение двух К., имеющих общую точку, есть К. Топологич. произведение К. есть К., непрерывный образ К. есть К., компоненты бикомпакта суть К., пересечение убывающей последовательности К. есть К. Никакой К. нельзя разложить в объединение счетного семейства непересекающихся замкнутых множеств (теорема Серпинского).

Каждый локально связный метрич. К. является непрерывным образом замкнутого отрезка (теорема Хана — Мазуркевича). Невырожденный К. неприводим между двумя своими точками, если никакой его собственный подконтинуум не содержит этих двух точек К., неприводимый между некоторыми

двумя своими точками, наз. неприводимым континуумом. Всякий локально связный неприводимый К. есть простая дуга, т. е. гомеоморфен отрезку.

Невырожденный К. наз. неразложимым, если его нельзя представить в виде суммы двух собственных подконтинуумов, и — наследственно неразложимым, если неразложим он сам, и неразложимы все его подконтинуумы. К. неразложим тогда и только тогда, когда в нем существуют три такие точки, что он неприводим между любыми двумя из них; все наследственно неразложимые К. гомеоморфны между собой.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 2, М., 1969. *П. С. Александров, Л. Г. Замбахидзе.*

КОНТИНУУМА МОЩНОСТЬ — *кардинальное число* $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$, являющееся мощностью множества всех подмножеств натуральных чисел. Следующие множества имеют К. м.: 1) множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, 2) множество всех точек интервала (0, 1); 3) множество всех иррациональных чисел из этого интервала, 4) множество всех точек пространства $\mathbb{R}^n$, где n — натуральное; 5) множество всех трансцендентных чисел; 6) множество всех непрерывных функций действительного переменного К. м. нельзя представить в виде счетной суммы меньших кардинальных чисел. Для любого кардинального числа α такого, что $2\leqslant\alpha\leqslant\mathfrak{c}$, выполняется

$$\alpha^{\aleph_0}=\mathfrak{c}.$$

В частности,

$$2^{\aleph_0}=3^{\aleph_0}=\ldots=\aleph_0^{\aleph_0}=\aleph_1^{\aleph_0}=\mathfrak{c}^{\aleph_0}=\mathfrak{c}.$$

Континуум-гипотеза утверждает, что К. м. является первым несчетным кардинальным числом, т. е.

$$\mathfrak{c}=\aleph_1.$$

Лит.: [1] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970. *Б. А. Ефимов.*

КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗА — гипотеза Г. Кантора (G. Cantor, 1878), состоящая в том, что всякое бесконечное подмножество континуума $\mathbb{R}$ равномощно либо множеству натуральных чисел, либо $\mathbb{R}$. Эквивалентная формулировка (при наличии *выбора аксиомы*):

$$2^{\aleph_0}=\aleph_1$$

(см. *Алефы*). Обобщение этого равенства на произвольные кардинальные числа наз. обобщенной континуум-гипотезой: для всякого ординального числа α

$$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}. \qquad (1)$$

В отсутствии аксиомы выбора обобщенная К.-г. формулируется в виде

$$\forall k\,\neg\exists m\,(k<m<2^k), \qquad (2)$$

где k, m — переменные для бесконечных кардинальных чисел. Из (2) вытекают аксиома выбора и (1), а из (1) и аксиомы выбора вытекает (2).

Д. Гильберт (D. Hilbert) в своем знаменитом списке проблем поставил под номером 1 проблему доказать гипотезу континуума Кантора (проблема континуума). В рамках традиционного теоретико-множественного решения проблема не поддавалась решению. Среди математиков росло убеждение в принципиальной неразрешимости проблемы континуума. Лишь после того, как был найден способ сведения математич. понятий к теоретико-множественным, выявлены аксиомы, сформулированные на теоретико-множественном языке, к-рые можно положить в основу реально встречающихся математич. доказательств, и формализованы логич. средства вывода, стало возможным точно поставить, а затем и решить вопрос о формальной неразрешимости К.-г. Формальная неразрешимость понимается в смысле не существования формального вывода в системе Цермело — Френкеля ZF как для К.-г., так и для ее отрицания.

В 1939 К. Гёдель (K. Gödel) установил недоказуемость отрицания обобщенной К.-г. (а следовательно, и недоказуемость отрицания К.-г.) в системе ZF с аксиомой выбора (системе ZFC), в предположении, что ZF непротиворечива (см. *Конструктивное по Гёделю множество*). В 1963 П. Коэн (P. Cohen) показал невыводимость К.-г. (а следовательно, и невыводимость обобщенной К.-г.) из аксиом ZFC при условии непротиворечивости ZF (см. *Вынуждения метод*).

Являются ли эти результаты окончательными в проблеме континуума? Ответ на этот вопрос зависит от отношения к посылке о непротиворечивости ZF и, что более существенно, к тому экспериментальному факту, что всякое содержательное математич. доказательство (традиционной классич. математики), после того как оно найдено, может быть адекватным образом формализовано в системе ZFC. Факт этот нельзя не только доказать, но даже точно сформулировать, поскольку всякое уточнение поднимает аналогичный вопрос об адекватности уточнения уточняемому.

На теоретико-модельном языке К. Гёдель и П. Коэн построили модели для ZFC, в к-рых

$$2^k = \begin{cases} m, & \text{если } k < m, \\ k^+, & \text{если } k \geqslant m, \end{cases}$$

где m — произвольный, наперед заданный несчетный регулярный кардинал, а k^+ — первое кардинальное число, большее k. Каково возможное поведение функции 2^k в различных моделях ZFC?

Известно, что на регулярных кардиналах k функция эта может вести себя как угодно, подчиняясь лишь условиям

$$k \leqslant k' \longrightarrow 2^k \leqslant 2^{k'}, \quad k < cf\,(2^k),$$

где $cf\,(m)$ — наименьший кардинал конфинальный m (см. *Кардинальное число*). Для сингулярных (т. е. не регулярных) k значение функции 2^k может зависеть от ее поведения на меньших кардинальных числах. Так, напр., если равенство (1) имеет место для всех $\alpha < \omega_1$, то оно имеет место и для $\alpha = \omega_1$.

Лит.: [1] Коэн П. Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969; [2] Baumgartner J. E., Prikry K., «Amer. Math. Monthly», 1977, v. 84, № 2, p. 108—113.

В. Н. Гришин.

КОНТОРОВИЧА — ЛЕБЕДЕВА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F\,(\tau) = \int_0^\infty K_{i\tau}\,(x)\,f\,(x)\,dx,$$

где $K_\nu(x)$ — *Макдональда функция*.

Если функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение в окрестности точки $x = x_0 > 0$ и

$$f\,(x) \ln x \in L\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad f\,(x)\sqrt{x} \in L\left(\frac{1}{2}, \infty\right),$$

то справедлива формула обращения

$$\frac{f\,(x_0+0)+f\,(x_0-0)}{2} = \frac{2}{\pi^2 x_0} \int_0^\infty K_{i\tau}\,(x_0)\,\tau \operatorname{sh} \pi\tau\, F\,(\tau)\,d\tau.$$

Пусть $f_i(x)$, $i = 1, 2$, — действительные функции, причем

$$f_i\,(x)\,x^{-3/4} \in L\,(0, \infty), \quad f_i\,(x) \in L_2\,(0, \infty);$$

$$F_i\,(\tau) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{2\tau \operatorname{sh} \pi\tau}}{\pi} \frac{K_{i\tau}\,(x)}{\sqrt{x}}\, f_i\,(x)\,dx.$$

Тогда

$$\int_0^\infty F_1\,(\tau)\,F_2\,(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty f_1\,(x)\,f_2\,(x)\,dx$$

(равенство Парсеваля).

Конечное К.— Л. п. имеет вид

$$F(\tau)=\frac{2\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau}{\pi^2\,|\,I_{i\alpha}(\alpha)\,|^2}\times$$

$$\times\int_0^{\alpha}\left[K_{i\tau}(\alpha)\,I_{i\tau}(x)-I_{i\tau}(\alpha)\,K_{i\tau}(x)\right]\,f(x)\,\frac{dx}{x}\,,$$

$\tau>0$, $I_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя (см. [3]).

Исследование таких преобразований было начато М. И. Конторовичем и Н. Н. Лебедевым (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Конторович М. И., Лебедев Н. Н., «Ж. экспер. и теор. физ.», 1938, т. 8, № 10—11, с. 1192—206; [2] Лебедев Н. Н., «Докл. АН СССР», 1946, т. 52, № 5, с. 395—98; [3] Уфлянд Я. С., Юшкова Е. А., там же, 1965, т. 164, № 1, с. 70—72; [4] Диткин В. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, 2 изд., М., 1974. *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.*

КОНТРАВАРИАНТНЫЙ ВЕКТОР — наименование элемента векторного пространства E в ситуации, когда наряду с E рассматривается сопряженное ему пространство E^*. Элементы пространства E^* наз. тогда *ковариантными векторами.* *М. И. Войцеховский.*

КОНТРАВАРИАНТНЫЙ ТЕНЗОР валентности $r\geqslant 1$ — тензор типа $(r, 0)$, элемент тензорного произведения

$$T^r(E)=E\otimes\ldots\otimes E$$

r экземпляров векторного пространства E над полем K. Относительно операции сложения К. т. одной и той же валентности и умножения их на скаляр $T^r(E)$ является векторным пространством над K. Пусть E — конечномерно и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в E. Тогда размерность $T^r(E)$ равна n^r; базис в $T^r(E)$ состоит из всевозможных К. т. вида

$$e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_r},\quad 1\leqslant i_1,\ \ldots,\ i_r\leqslant n.$$

Любой К. т. $t\in T^r(E)$ представляется в виде

$$t=t^{i_1\ldots i_r}\,e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_r}.$$

Числа $t^{i_1\ldots i_r}$ наз. координатами, или компонентами, К. т. t относительно базиса $e_1, \ldots, e_n$ в E. При переходе в E к новому базису по формулам

$$e_{i'}=a^i_{i'}e_i$$

координаты К. т. t изменяются по так наз. контравариантному закону

$$t^{i'_1\ldots i'_r}=b^{i'_1}_{i_1}\ldots b^{i'_r}_{i_r}\,t^{i_1\ldots i_r},\quad a^i_{i'}b^{j'}_i=\delta^{j'}_{i'}.$$

При валентности $r=1$ К. т. совпадает с вектором — элементом пространства E; при $r\geqslant 2$ К. т. можно инвариантным образом связать с r-линейным отображением в K прямого произведения

$$E^{r*}=E^*\times\ldots\times E^*$$

r экземпляров сопряженного к E пространства E^*. Для этого достаточно принять за координаты К. т. t значения r-линейного отображения $\tilde{t}$ на векторах $(e^{i_1}, \ldots, e^{i_r})\in E^{r*}$ (где $e^1, \ldots, e^n$ — элементы базиса в E^*, сопряженного к $e_1, \ldots, e_n$, т. е. $e^i(e_j)=\delta^i_j$), и обратно; поэтому иногда К. т. сразу определяют как полилинейный функционал на E^{r*}. *И. Х. Сабитов.*

КОНТРАГРЕДИЕНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ к представлению φ группы G в линейном пространстве V — представление φ^* этой же группы G в двойственном к V пространстве V^*, определяемое правилом:

$$\varphi^*(g)=\varphi(g^{-1})^*$$

для любого $g \in G$, где * означает переход к сопряженному оператору.

Более общо, если W — линейное пространство над тем же полем k, что и пространство V, а $(\ ,\ )$ — невырожденная *билинейная форма* (спаривание) на $V \times W$ со значениями в k, то представление ψ группы G в W наз. К. п. к представлению φ относительно формы $(\ ,\ )$, если

$$(\varphi(g)x,\ y) = (x,\ \psi(g^{-1})y)$$

для любых $g \in G$, $x \in V$, $y \in W$.

Напр., если G — полная линейная группа конечномерного пространства V, то естественное представление G в пространстве ковариантных тензоров фиксированного ранга на V является К. п. относительно канонического спаривания к естественному представлению G в пространстве контравариантных тензоров того же ранга на V.

Пусть V конечномерно над k и (e) — его базис, а (f) — дуальный к (e) базис в V^*. Тогда для любого g из G матрица оператора $\varphi^*(g)$ в базисе (f) получается из матрицы оператора $\varphi(g)$ в базисе (e) транспонированием и переходом к обратной. Если φ неприводимо, то и φ^* неприводимо. Если G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, а $d\varphi$ и $d\psi$ — представления алгебры $\mathfrak{g}$, индуцированные соответственно представлениями φ и ψ группы G в пространствах V и W, контрагредиентными относительно спаривания $(\ ,\ )$, то

$$(d\varphi(X)(x),\ y) = -(x,\ d\psi(X)y) \qquad (*)$$

для всех $X \in \mathfrak{g}$, $x \in V$, $y \in W$. Представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющие условию (*), также наз. К. п. относительно $(\ ,\ )$.

Пусть далее G — комплексная связная односвязная полупростая группа Ли и φ — ее неприводимое конечномерное представление в линейном пространстве V. Веса представления φ^* противоположны весам представления φ (см. *Вес представления*), младший вес представления φ^* противоположен старшему весу представления φ (см. *Картана теорема* о старшем векторе). Представления φ и φ^* эквивалентны тогда и только тогда, когда на V существует ненулевая инвариантная относительно $\varphi(G)$ билинейная форма. Если такая форма существует, то она невырождена и либо симметрична, либо кососимметрична. Набор числовых отметок старшего веса представления φ^* получается из набора числовых отметок представления φ применением подстановки, индуцированной следующим автоморфизмом ν схемы простых корней Δ группы G:

а) ν переводит каждую связную компоненту Δ_i, $i=1, \ldots, l$, схемы Δ в себя;

б) если Δ_i — схема типа A_r, D_{2r+1} или E_6, то сужение ν на Δ_i однозначно определяется как единственный элемент второго порядка в группе автоморфизмов схемы Δ_i, в остальных случаях сужение ν на Δ_i тождественно.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [2] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [3] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [4] Винберг Э. Б., Онищик А. Л., Семинар по алгебраическим группам и группам Ли. 1967/68, М., 1969.

В. Л. Попов.

КОНТРАГРЕДИЕНТНЫЙ АВТОМОРФИЗМ к автоморфизму φ правого модуля M над кольцом A — автоморфизм $\tilde{\varphi}$ левого A-модуля M^* (*обозначает переход к сопряженному модулю), сопряженный к автоморфизму, обратному φ. Более общо, если ψ — изоморфизм правого A-модуля M_1 и правого A-модуля M_2, то контрагредиентным к ψ изоморфизмом наз. изоморфизм левого A-модуля M_1^* на левый A-модуль M_2^*, сопряженный к изоморфизму, обратному ψ. Пусть $\langle\ ,\ \rangle_1$

и $\langle\ ,\ \rangle_2$ — канонические билинейные формы на $M_1\times M_1^*$ и $M_2\times M_2^*$. Тогда $\check{\psi}$ определяется следующим тождеством относительно $x\in M_1$, $y\in M_1^*$:

$$\langle\psi(x),\ \check{\psi}(y)\rangle_2=\langle x,\ y\rangle_1.$$

Если M_1 и M_2 обладают конечными базисами, то ψ — изоморфизм, контраградиентный к $\check{\psi}$.

Пусть A — кольцо с единицей и M — правый A-модуль, обладающий конечным базисом, φ — некоторый автоморфизм модуля M и X — матрица φ в фиксированном базисе (эта матрица обратима). Тогда в сопряженном базисе матрица К. а. $\check{\varphi}$ имеет вид

$$\check{X}=({}^TX)^{-1}={}^T(X^{-1})$$

(индекс ^{T} означает транспонирование). Матрица $\check{X}$ наз. контрагредиентной матрицей к обратимой матрице X.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962.

В. Л. Попов.

КОНТРАПОЗИЦИИ ЗАКОН — логический принцип, согласно к-рому если из одного утверждения следует другое, то отрицание последнего влечет отрицание первого:

$$(A\supset B)\supset(\neg B\supset\neg A).$$

К. з. принимается как классической, так и конструктивной логикой.

С. К. Соболев.

КОНТРАСТ, сравнение,— скалярное произведение $\theta^T\cdot c$ вектора $\theta=(\theta_1,\ \ldots,\ \theta_k)^T$, координаты к-рого суть неизвестные параметры, на заданный вектор $c=(c_1,\ \ldots,\ c_k)^T$ такой, что $c_1+\ \ldots\ +c_k=0$. Напр., разность $\theta_1-\theta_2=(\theta_1,\ \theta_2)\,(1,-1)^T$ неизвестных математич. ожиданий θ_1 и θ_2 двух одномерных нормальных распределений является К. Среди всех функций, зависящих от неизвестного вектора $\theta=(\theta_1,\ \ldots,\ \theta_k)^T$, только для К. существует линейная несмещенная оценка, и наоборот. В дисперсионном анализе часто рассматривается задача *множественного сравнения*, которая заключается в проверке гипотез о численных значениях К.

Лит.: [1] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1963.

М. С. Никулин.

КОНТУРНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ МЕТОД — один из основных методов геометрич. теории функций комплексного переменного, позволяющий получать различные неравенства, выражающие экстремальные свойства однолистных и многолистных функций, а также тождества, связывающие основные функции областей теории конформного отображения. Метод существенно связан с использованием свойств функций, конформно отображающих данную область на различные канонические области. С помощью таких функций можно строить функции области, обладающие следующим контурным свойством: на каждой граничной компоненте области значения функции разнятся на аддитивную постоянную от комплексно сопряженных значений соответствующей другой функции. К. и. м. состоит в основном в следующем.

Рассматривается нек-рый интеграл, взятый по всему контуру данной области (*обычно контур можно считать* состоящим из конечного числа простых замкнутых аналитич. кривых). Этот интеграл выбирается так, чтобы подинтегральное выражение содержало множители с указанным выше контурным свойством и чтобы после использования этого свойства получался интеграл, вычисляемый с помощью теоремы о вычетах. Если из других соображений известны либо значение исходного интеграла, либо его знак, то в результате получается или нек-рое соотношение между использованными функциями, или нек-рое неравенство, связывающее их. Часто контурный интеграл, к к-рому удается приме-

нить указанный метод, появляется в результате преобразования по формуле Грина неотрицательного двойного интеграла — интеграла от квадрата модуля производной нек-рой функции, регулярной в данной области. Отсюда — связь К. и. м. с *площадей методом*. С помощью К. и. м. были получены результаты, касающиеся *искажения теорем* для однолистных конформных отображений многосвязных областей (см. [1], [2]); необходимые и достаточные условия для коэффициентов однолистных функций (см. [3]); тождества, связывающие основные функции областей теории конформного отображения (см. [4]).

К. и. м. применялся для исследования однолистных функций также в следующей форме. Пусть, напр., B — область плоскости w с контуром C, состоящим из конечного числа простых замкнутых аналитич. кривых; $S(w)$ — функция, гармоническая в полной плоскости w за исключением конечного числа точек области B; $p(w)$ — функция, обладающая свойством: разность $S(w) - p(w)$ является гармонической в области B и непрерывной в этой замкнутой области, $p(w)|_C = 0$. Тогда

$$\int_C S \frac{\partial p}{\partial n}\, ds \leqslant 0,$$

где $\partial/\partial n$ обозначает дифференцирование по направлению внешней нормали к области B. Если $\sigma(w)$ и $q(w)$ — аналитич. функции, для к-рых $S = \mathrm{Re}\,\{\sigma\}$, $p = \mathrm{Re}\,\{q\}$, то последнее неравенство может быть переписано в виде

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i}\int_C (\sigma - q)\,\sigma'\,dw\right\} \leqslant 0.$$

В этом неравенстве интеграл вычисляется по теореме о вычетах. Выбирая различные функции $S(w)$ и $p(w)$, надлежаще связанные с исследуемыми функциями, можно таким образом получать различные новые неравенства для однолистных функций (см. [5] — [7]).

К. и. м. успешно использовался и при исследовании неоднолистных конформных отображений. Так, этим методом был установлен ряд новых экстремальных свойств функций, мероморфных в многосвязной области и удовлетворяющих нек-рым дополнительным условиям (см. [8]); получено обобщение на многосвязные области, на случай нескольких полюсов и на функции, p-листные в соответствующем обобщенном смысле теоремы площадей Голузина для функций, p-листных в круге (см. [9]). Упомянутые выше функции области тесно связаны с *Бергмана кернфункциями*, и результаты, получаемые К. и. м., часто выражаются через них. Отсюда же следует связь К. и. м. с теорией ортонормальных систем аналитич. функций.

Лит.: [1] Grunsky H., «Schriften math. Semin. und Inst. angew. Math. Univ. Berlin», 1932, S. 95—140; [2] Голузин Г. М., «Матем. сб.», 1937, т. 2, № 1, с. 37—63; [3] Grunsky H., «Math. Z.», 1939, Bd 45, S. 29—61; [4] Garabedian P. R., Schiffer M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1949, v. 65, № 2, p. 187—238; [5] Nehari Z., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 75, № 2, p. 256—86; [6] Аленицын Ю. Е., «Матем. сб.», 1956, т. 39, № 3, с. 315—36; [7] его же, «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1967, т. 94, с. 4—18; [8] Meschkowski H., «Math. Ann.», 1954, Bd 127, S. 107—29; [9] Аленицын Ю. Е., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1973, т. 37, в. 5, с. 1132—54; [10] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966, с. 221—26.

Ю. Е. Аленицын.

КОНУС — 1) К. в евклидовом пространстве — множество K, составленное из полупрямых, исходящих из нек-рой точки O — вершины К. Границу ∂K множества K (составленную из полупрямых, наз. образующими К.) — часть *конической поверхности* — также иногда наз. К. Наконец, часто К. наз. пересечение K с полупространством, содержащим O и ограниченным плоскостью, не проходящей через O. В этой ситуации часть плоскости, лежащая

внутри конич. поверхности, наз. основанием К., а часть конич. поверхности, заключенная между вершиной и основанием,— боковой поверхностью К.

Если основание К. есть круг, то К. наз. круговым. Круговой К. наз. прямым, если ортогональная проекция его вершины на плоскость основания совпадает с центром основания. Прямая, проходящая через вершину К. перпендикулярно основанию, наз. осью К., а ее отрезок между вершиной и основанием — высотой К. Объем прямого кругового К. равен $\pi R^2 h/3$, где h — высота, R — радиус основания; площадь боковой поверхности равна $\pi R l$, где l — длина отрезка образующей между вершиной и основанием. Подмножество К., заключенное между двумя параллельными плоскостями, наз. усеченным К., или коническим слоем. Слой прямого кругового К. между плоскостями, параллельными основанию, имеет объем $\pi(R^2+r^2+Rr)\,h/3$, где R, r — радиусы оснований, h — высота (расстояние между основаниями); площадь боковой поверхности $\pi(R+r)\,l$, где l — длина отрезка образующей. *А. Б. Иванов.*

2) К. над топологич. пространством X (основанием К.) — пространство CX, получающееся из произведения $X\times[0,\ 1]$ стягиванием подпространства $X\times\{0\}$ в одну точку W (вершину K):

$$CX=(X\times[0,\ 1])/(X\times\{0\}).$$

Другими словами, CX — цилиндр постоянного отображения $X\to W$ (см. *Цилиндрическая конструкция*) или конус тождественного отображения $\mathrm{id}: X\to X$ (см. *Коническая конструкция*). Пространство X стягиваемо тогда и только тогда, когда оно является *ретрактом* всякого К. над X.

Понятие К. над топологич. пространством обобщается в рамках теории категорий: множество морфизмов $\alpha_i: A\to A_i$, $i\in I$, произвольной категории $\mathfrak{A}$ с общим началом в объекте A наз. конусом морфизмов с вершиной A; двойственно, конус морфизмов есть множество морфизмов $\beta_i: A_i\to A$, $i\in I$ с общим концом в объекте A. См. [4], [5], [6]. *М. И. Войцеховский.*

3) К. отображения — топологич. пространство, сопоставляемое непрерывному отображению $f: X\to Y$ топологич. пространств *конической конструкцией*. Пусть C_1 — конус вложения $Y\subset C_f$, C_2 — конус вложения $C_f\subset C_1$ и т. д. Получающаяся последовательность

$$X\xrightarrow{f} Y\subset C_f\subset C_1\subset C_2\subset\dots$$

наз. последовательностью Пуппе; здесь $C_1\sim SX$, $C_2\sim SY$ и т. д., где $SX\,(SY)$ — *надстройка* над X (над Y).

Аналогично определяется приведенный конус $\tilde{C}_f$ отображения пунктированных пространств. При этом, как и в ситуации с корасслоением, для любого пунктированного пространства A последовательность гомотопич. классов, индуцированная последовательностью Пуппе,

$$[X,\ A]\leftarrow[Y,\ A]\leftarrow[C_1,\ A]\leftarrow[C_2,\ A]\leftarrow\dots,$$

точна; в ней все члены, начиная с четвертого,— группы, а начиная с седьмого — абелевы группы. См. [4], [5]. *А. Ф. Харшиладзе.*

4) К. в действительном векторном пространстве E — множество $K\subset E$ такое, что $\lambda K\subset K$ для любого $\lambda>0$. К. наз. заостренным, если $0\in K$, а заостренный К.— выступающим, если K не содержит никакого одномерного подпространства. Невыступающий К. иногда наз. клином.

К., являющийся выпуклым множеством в E, наз. выпуклым. Таким образом, подмножество K в E

является выпуклым К. тогда и только тогда, когда $\lambda K \subset K$ для всякого $\lambda > 0$ и $K + K \subset K$. В этом случае векторное подпространство в E, порожденное выпуклым К. K, совпадает с множеством $K - K$. Если К. заострен, то $K \cap (-K)$ — наибольшее векторное подпространство, содержащееся в K. Заостренный выпуклый К. будет выступающим тогда и только тогда, когда $K \cap (-K) = 0$.

Если E — полуупорядоченное пространство, то положительный конус $P = \{x : x \in E, \ x \geqslant 0\}$ является выступающим, заостренным, выпуклым К. Обратно, любой такой К. K в векторном пространстве E порождает отношение порядка: $x_1 \geqslant x_2$, если $x_1 - x_2 \in K$.

К. K наз. воспроизводящим, если любой элемент $x \in E$ представим в виде разности элементов из K. Напр., воспроизводящими являются К. неотрицательных непрерывных (или суммируемых) функций на отрезке $[0, 1]$, множество положительных операторов в пространстве ограниченных самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Однако К. неотрицательных неубывающих непрерывных функций таковым не является.

Наличие топологии в E наделяет понятие К. более богатым содержанием, позволяющим получать нетривиальные результаты. Напр., пусть E — отделимое локально выпуклое пространство и K — выступающий заостренный выпуклый К. в E, имеющий непустую внутренность (такие К. наз. телесными). Тогда каждая линейная форма на E, положительная на K, непрерывна; если M — векторное подпространство в E, пересекающееся с внутренностью K, и f — линейная форма на M, положительная на $K \cap M$, то на E существует линейная форма $\tilde{f}$, продолжающая f и положительная на K. См. [1], [2], [3]. *М. И. Войцеховский.*

Более других развита теория К. в банаховых пространствах. Пусть K — К. в банаховом пространстве E, порождающий в E нек-рое отношение порядка $\geqslant$. Если К. замкнут, то для E имеет место принцип Архимеда: если $x \in E$, а числа $\lambda_n > 0$ и $\lambda_n \to \infty$, и при этом существует такое y, что $\lambda_n x \leqslant y$ при всех n, то $x \leqslant 0$. Для телесного К. верно и обратное: из архимедовости E вытекает замкнутость K.

Пусть K' — сопряженный клин, т. е. совокупность всех положительных линейных непрерывных функционалов на E (f положителен, если $f(x) \geqslant 0$ для любого $x \in K$). K' — К. тогда и только тогда, когда K — пространственный, т. е. замыкание $\overline{K - K} = X$. Если K замкнут, то для любого $x_0 > 0$ (соответственно $x_0 \notin K$) существует такой $f \in K'$, что $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$).

К. K наз. несплющенным, если для любого $x \in E$ существуют такие $u, v \in K$, что

$$x = u - v, \text{ а } \|u\|, \ \|v\| \leqslant M\|x\|,$$

где $M = \text{const}$.

Если K. замкнутый и воспроизводящий, то он несплющен (теорема Крейна — Шмульяна).

К. K наз. нормальным, если

$$\inf\{\|x + y\| : x, \ y \in K, \ \|x\| = \|y\| = 1\} > 0.$$

Нормальность К. равносильна полумонотонности нормы: $0 \leqslant y \leqslant x$ влечет $\|y\| \leqslant M\|x\|$, где $M = \text{const}$. Для того чтобы клин K' был воспроизводящим в сопряженном пространстве, необходимо и достаточно, чтобы K. был нормальным (теорема Крейна). Двойственно: если K' — нормальный К., соответствующий замкнутому К. K, то К. K воспроизводящий. Существует взаимно однозначное линейное и непрерывное отображение пространства E с нормальным К. K в подпространство пространства $C(Q)$ непрерывных функций на некотором бикомпакте Q, при котором элементы из K и только они переходят в неотрицательные функции.

К. K наз. правильным (вполне правильным), если всякая последовательность элементов из K, возрастающая и ограниченная по порядку (по норме), сходится. Если K замкнут и правилен, то он нормален, а всякий вполне правильный конус нормален и правилен. Если же K правилен и телесен, то он вполне правилен. Правильность К. связана со свойством монотонной непрерывности нормы: если $x_\alpha \downarrow 0$, т. е. семейство $\{x_\alpha\}$ — убывающее направление, и $\inf x_\alpha = 0$, то $\|x_\alpha\| \to 0$. Правильность замкнутого К. K равносильна тому, что пространство E дедекиндово полно, а норма в E монотонно непрерывна. Правильность телесного К. K влечет монотонную непрерывность нормы в E.

К. K наз. оштукатуриваемым, если существуют К. $K_1 \subset X$ и число $\delta > 0$ такие, что для любого $x \in K$ шар $S(x;\ \delta\|x\|) \subset K_1$. Оштукатуриваемость K равносильна существованию в E эквивалентной нормы, аддитивной на K. Оштукатуриваемый К. вполне правилен.

Теория К. развита и для произвольных нормированных пространств. Однако в этом общем случае нек-рые из вышеприведенных результатов не сохраняются, напр., перестает быть верной теорема Крейна — Шмульяна, а правильность замкнутого К. не влечет его нормальность. См. [1], [7], [8], [9], [10]. *Б. З. Вулих.*

Лит.: [1] Функциональный анализ, 2 изд., М., 1972, гл. 8 (Справочная матем. библиотека); [2] Эдвардс Р. Э., Функциональный анализ. Теория и приложения, пер. с англ., М., 1969; [3] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [4] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976; [5] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [6] Даленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974; [7] Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962; [8] Вулих Б. З., Введение в теорию конусов в нормированных пространствах, Калинин, 1977; [9] его же, Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах, Калинин, 1977; [10] Крейн М. Г., Рутман М. А., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 1, с. 3—95.

КОНУСА УСЛОВИЕ — условие на область евклидова пространства, отражающее нек-рым образом ее неспльощенность. Открытое множество $G \in E^n$ удовлетворяет слабому условию конуса, если $x + V(e(x),\ H) \subset G$ для всех $x \in G$, где $V(e(x),\ H)$ — прямой круговой конус с вершиной в начале координат, фиксированного раствора ε и высоты H, $0 \leqslant H \leqslant \infty$, и с зависящим от x вектором $e(x)$ направления оси. Открытое множество G удовлетворяет сильному условию конуса, если существует покрытие замыкания $\bar{G}$ открытыми множествами G_k, что для любого $x \in \bar{G} \cap G_k$ конус $x + V(e(x),\ H)$ содержится в G (растворы этих конусов могут зависеть от k). В связи с интегральными представлениями функций и вложения теоремами рассматриваются анизотропные обобщения К. у.— напр., условия слабого, сильного l-рога (см. [1], с. 117 и далее), условия куба и т. п.

Лит.: [1] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М., Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., 1975. *М. И. Войцеховский.*

КОНФИГУРАЦИЯ — конечное множество точек, прямых, плоскостей, связанных между собой взаимными *инцидентностями*. К. могут быть как плоскими, так и пространственными.

Плоская конфигурация — конечная система p точек и g прямых на плоскости, расположенных таким образом, что всякая точка системы инцидентна с одним и тем же числом γ прямых этой системы, а всякая прямая инцидентна с одним и тем же числом π точек этой системы. Минимальная система точек данной К., из к-рой вся К. может быть получена путем инциденций пар точек с прямыми и пересечений пар прямых, наз. системой образующих данной К. Числа p, g, γ, π связаны соотношением $p\gamma = g\pi$, а К. обозначается символом $(p_\gamma,\ g_\pi)$. К., содержащая

одинаковое число точек и прямых, обозначается символом (p_γ).

Примеры плоских К.: 1) Одна точка и одна прямая, инцидентные между собой, образуют К. (1_1). 2) Три точки, не лежащие на одной прямой, и три прямые, инцидентные с каждой парой, образуют К. (3_2), эта фигура — трехвершинник (или трехсторонник) на плоскости. 3) Полный четырехсторонник — четыре прямые и шесть точек их попарного пересечения образуют К. $(6_2, 4_3)$. Однако здесь не все прямые, соединяющие попарно точки К., являются прямыми этой К.; точки R, P, Q и прямые RP, RQ, PQ не принадлежат ей (рис. 1).

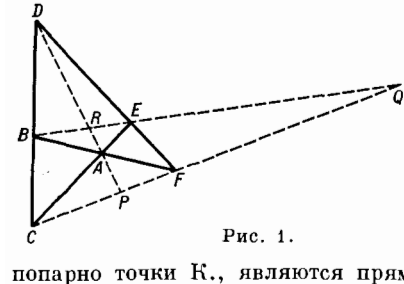


Рис. 1.

Автоморфизмом К. наз. отображение К. на себя, при к-ром точки К. переходят в точки, прямые — в прямые этой же К., и при этом ни одна инцидентность не пропадает, и не добавляется новых. К. наз. правильной, если группа автоморфизмов этой К. транзитивна.

Для данной К. (p_γ, g_π) двойственной наз. К. (g_π, p_γ). К. типа (p_γ) и только такие, двойственно соответствуют К. такого же типа, они наз. двойственно-инвариантными.

К. наз. проективной, если инцидентность ее элементов сохраняется при проективных преобразованиях. Напр., инцидентность элементов нек-рой К., расположенной на проективной плоскости, обеспечивается выполнением аксиом связи ее, и потому инцидентность точек и прямых К. сохраняется при проективных преобразованиях этой плоскости, а К. будет проективной. Все инцидентности и элементы такой плоской К. могут быть изображены на чертеже с помощью только одной линейки. Плоская К. всегда имеет двойственную вследствие принципа двойственности.

К. может быть определена также как конечная частичная плоскость. Возможность существования нек-рой К. определяется из геометрич. и комбинаторных соотношений между количеством точек и прямых и количеством взаимных инциденций. К. задается и с помощью абстрактных схем, напр. на таблице (рис. 2) указаны инцидентности (обозначенные крестиком) четырех точек, вершин A_i, и четырех плоскостей, граней D_i тетраэдра. После того как нек-рая К. определена абстрактно, возникает вопрос о ее реализации, т. е. о возможности построения всех инциденций по данной системе образующих. Реализуемость К. как конечной частичной плоскости означает возможность изоморфного отображения ее на нек-рую подплоскость какой-либо плоскости.

	A_1	A_2	A_3	A_4
D_1	•	×	×	×
D_2	×	•	×	×
D_3	×	×	•	×
D_4	×	×	×	•

Рис. 2.

К. (p_2), $p \geqslant 3$, реализуется в виде p-сторонника так, что вершины и стороны его попарно инцидентны. Абстрактную схему К. (3_2) можно построить, напр., таблицей, как на рис. 2. Плоские К. (p_3) возможны лишь при $p \geqslant 7$, так как через каждую точку К. должны проходить три прямые и на каждой из них должны лежать еще две другие точки К. (число p должно удовлетворять неравенству $p(p-1)/2 \geqslant 3p$). К. типа (p_3) допускают модификации, количество к-рых зависит от p. К. (7_3) представляется схемой (рис. 3), где цифра за фигурной

скобкой означает точку пересечения прямых, проходящих через пары точек, записанные слева от скобки, цифры за вертикальной чертой обозначают те точки, к-рые должны быть коллинеарными при выполнении всех указанных слева инциденций. На действительной проективной плоскости все инцидентности реализуются в полном четырехвершиннике (рис. 4), однако последняя

$$\left.\begin{matrix}13\\24\end{matrix}\right\}5\quad\left.\begin{matrix}12\\34\end{matrix}\right\}6\quad\left.\begin{matrix}14\\23\end{matrix}\right\}7\quad\Big|\,567$$

Рис. 3.

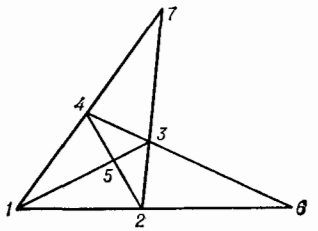


Рис. 4.

инциденция (коллинеарность трех точек) здесь не имеет места. К. (9_3) допускает три различные модификации, одна из к-рых $(9_3)_1$ наз. конфигурацией Брианшона — Паскаля (рис. 5): каждая прямая l_i

Прямые l_i / Точки a_i	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
	1	1	1	2	2	3	3	4	5
	2	4	6	4	7	6	5	6	7
	3	5	7	8	9	8	9	9	8

Рис. 5.

инцидентна с тремя различными точками a_i, а каждая точка — с тремя различными прямыми. Эта К. может быть реализована на проективной плоскости (рис. 6), она является проективной, правильной, двойственно инвариантной (см. *Брианшона теорема*, *Паскаля теорема*). Две другие модификации К. $(9_3)_2$, $(9_3)_3$ (рис. 7) существенно отличаются от конфигурации Брианшона —Паскаля. Напр., К. $(9_3)_3$ не является правильной, а для построения К. $(9_3)_2$ необходима вспомогательная кривая 2-го порядка. К. (10_3) имеет уже десять различных модификаций, из к-рых важнейшей является

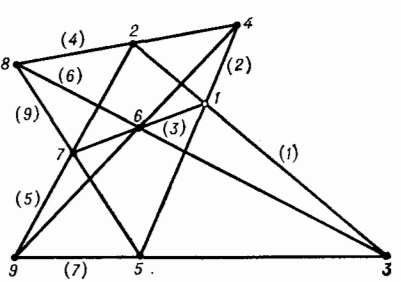


Рис. 6.

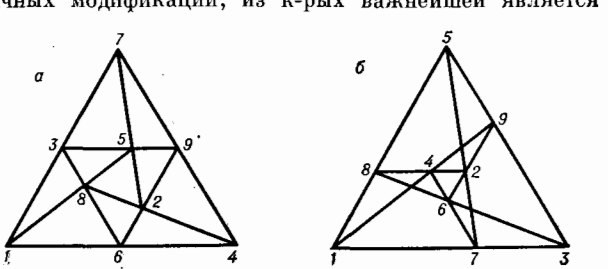


Рис. 7.

конфигурация Дезарга (рис. 8). Она реализуется на действительной проективной плоскости, является проективной, правильной, двойственно инвариантной. Другие девять модификаций К. (10_3) не выражают никакой общей геометрич. теоремы, причем лишь восемь из них могут быть реализованы на дей-

ствительной проективной плоскости, но для их построения требуется специальное расположение системы образующих точек (в частности, К. такого типа реализуются

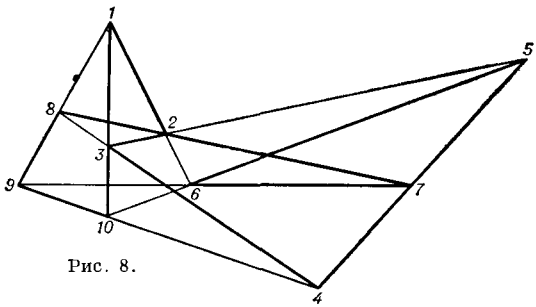


Рис. 8.

в виде правильных многосторонников (рис. 9). В приведенной на чертеже последовательности вершин также получается вписанный и одновременно описанный десятисторонник. К. (9_3) и (10_3) также допускают геометрич. построение с помощью многосторонников, вписанных и описанных вокруг самих себя, так, К. $(9_3)_1$ представляется в виде девятисторонника (2, 3, 6, 1, 5, 9, 4, 8, 7, 2) (рис. 6), конфигурация Дезарга — в виде десятисторонника (рис. 8) (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1). Такие представления этих К. единственны с точностью до автоморфизмов. Вообще, построение p-сторонников, одновременно вписанных и описанных вокруг самих себя, приводит к К. типа (p_3). Существуют также представления К. типа (p_3) в виде нескольких многосторонников, вписанных и описанных вокруг друг друга. Напр., конфигурация Дезарга допускает единственный способ (с точностью до автоморфизма) представления парой взаимно вписанных и описанных пятисторонников (1, 9, 7, 5, 3) и (8, 4, 10, 6, 2) (рис. 8). При увеличении числа p количество модификаций К. типа (p_3) быстро растет.

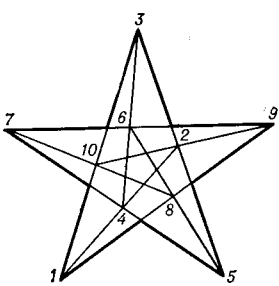


Рис. 9.

Пространственная конфигурация — конечная система точек и плоскостей такая, что каждая точка инцидентна с одним и тем же числом плоскостей, а каждая плоскость — с одним и тем же числом точек. Наряду с К., состоящей из точек и плоскостей, в пространстве рассматриваются и К., состоящие из точек и прямых. Так, рассмотренная выше конфигурация Дезарга, состоящая из точек и прямых, представляет собой также и пространственную К. (10_3) (рис. 8), если соответствующие трехсторонники лежат в различных плоскостях; одновременно ее можно рассматривать как К. $(10_3, 5_6)$, составленную из точек и плоскостей: шесть вершин соответствующих трехсторонников, центр перспективы и три точки на оси перспективы, в к-рых сходятся соответствующие стороны трехсторонников, дают всего десять точек, а три плоскости, образованные соответствующими сторонами трехсторонников, и две плоскости самих трехсторонников дают всего пять плоскостей. В каждой плоскости шесть точек К., и каждая точка инцидентна трем различным плоскостям.

Тривиальной пространственной К. типа (p_γ) является К. (4_3), ее схема — на рис. 2; она изображается тетраэдром. К. типа (p_4) для $p \leqslant 7$ невозможна, при $p=8$ имеется пять различных схем К., одна из к-рых, так наз. конфигурация Мёбиуса, состоит из двух тетраэдров, вписанных и описанных друг около

друга. Каждой из восьми точек — вершин тетраэдров — инцидентны четыре плоскости граней тетраэдров, а каждой из восьми плоскостей инцидентны четыре точки — вершины. При переходе к К. более высокого порядка число возможных модификаций быстро возрастает, напр., К. (9_4) имеет уже 26 геометрич. осуществимых модификаций.

Из пространственных К. более высокого порядка примечательны конфигурация Рейе и конфигурация Шлефли. Конфигурацией Рейе наз. состоящая из точек и плоскостей К. (12_6). В действительном проективном пространстве ее можно построить, напр., из вершин нек-рого куба, его центра, трех (бесконечно удаленных) точек, в к-рых сходятся параллельные ребра куба, а плоскостями этой К. являются шесть граней

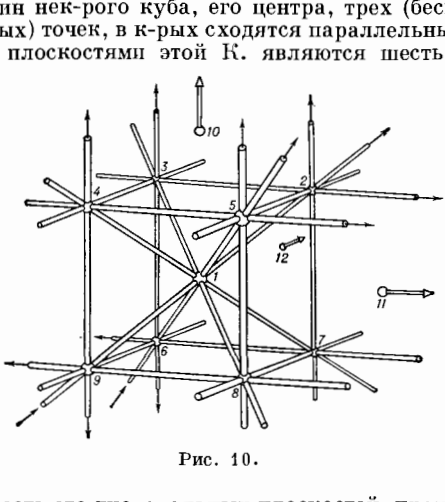


Рис. 10.

куба и шесть его диагональных плоскостей, проходящих через пары противоположных ребер (рис. 10). Конфигурация Рейе является проективной, правильной и двойственно инвариантной, причем изображение этой К. можно построить (согласно большому принципу двойственности), используя вместо куба октаэдр (рис. 11). Конфигурацию Рейе можно рассматривать также как пространственную К. точек и прямых $(12_4, 16_3)$. К. $(30_2, 12_5)$, состоящая из точек и прямых, наз. двойным шестисторонником Шлефли. Он изображается в пространстве, напр., в виде симметрично расположенных прямых и точек на каждой грани куба (по одной из двух шестерок) (рис. 12).

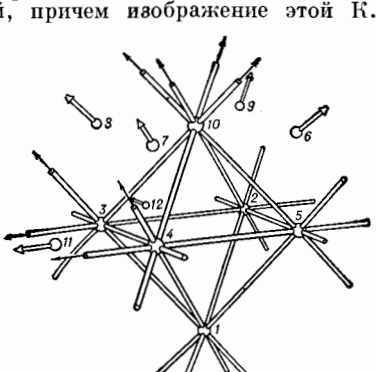


Рис. 11.

Не всякая плоская К. может быть реализована на действительной проективной плоскости. Напр., К. (7_3) и (8_3) не реализуются на ней, в связи с чем возникает задача реализации К. на каких-либо других проективных плоскостях. Каждое предложение, утверждающее, что из реализуемости в данной плоскости нек-рой К. со всеми инцидентностями, кроме, быть может, одной, вытекает реализуемость К. со всеми ее инцидентностями, называется конфигурационным предложением данной плоскости. Таким образом, если все инцидентности некоторой К. реализуются на данной плоскости вследствие геометрических свойств этой плоскости, то К. реализуется на этой плоскости. Например, К. $(9_3)_1$ всегда реализу-

ется на действительной проективной плоскости, так как из реализуемости всех инциденций, кроме одной, последняя инцидентность выполняется всегда вследствие теорем Брианшона и Паскаля, т. е. эти теоремы являются конфигурационными предложениями. Выполнение по-

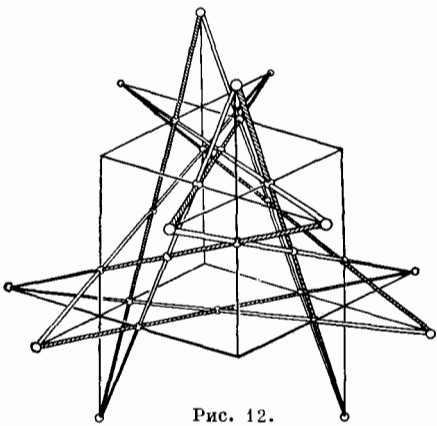


Рис. 12.

следней инцидентности в К. (7_3) (рис. 4) на такой плоскости не имеет места (так как диагональные точки полного четырехвершинника не принадлежат одной прямой), поэтому такое утверждение не является конфигурационным предложением. Однако оно будет таковым в комплексной проективной плоскости. Подобным образом рассматривается и реализуемость других К.; в частности, К. (8_3) может быть реализована в конечных папповых плоскостях, построенных над полями Галуа с тремя и четырьмя элементами.

Конфигурационные предложения, справедливые в данной плоскости, определенным образом организуют элементы этой плоскости и потому играют роль при аксиоматическом построении геометрии этой плоскости. Напр., если в данной плоскости выполняются все аксиомы связи проективной плоскости, но не реализуется конфигурация Дезарга, то данная плоскость несет на себе так наз. недезаргову геометрию. Конфигурационное предложение может быть также записано в алгебраич. форме в виде нек-рого алгебраич. тождества. В произвольной проективной плоскости конфигурационные предложения могут вводиться лишь в качестве новых аксиом, причем постулирование одного какого-нибудь конфигурационного предложения может повлечь за собой справедливость других конфигурационных предложений в этой плоскости. Вообще говоря, всякому алгебраич. тождеству соответствует конфигурационное предложение, к-рое наз. геометрич. представлением этого тождества в определенной плоскости, где реализуется К. (однако не установлено, всякое ли конфигурационное предложение является геометрич. представлением определенного вида тождества в алгебре тернаров и натуральных тел проективной плоскости). Исследование подобных алгебраич. эквивалентов позволяет изучать как свойства К., так и возможность их реализуемости как конечной частичной плоскости в определенной проективной плоскости, а также логическую связь между различными конфигурационными предложениями.

Теория К. находит применение в решении ряда геометрич. вопросов. Так, плоская К. (8_3) играет важную роль в теории плоских кривых третьего порядка, не имеющих двойных точек, в частности, при исследовании их точек перегиба. Конфигурация Рейе применяется при изучении правильных многогранников в четырехмерном евклидовом пространстве E^4. Правильный

многогранник в E^4 ограничен областями, являющимися правильными трехмерными многогранниками. Правильный многогранник в E^4 наз. *n-я ч е й к о й*, если он ограничен n правильными многогранниками. Напр., 5-ячейка ограничена пятью трехмерными тетраэдрами, 8-ячейка — восемью кубами и т. д., причем 5-ячейка и 24-ячейка являются двойственными сами себе (точки соответствуют пространствам, а прямые — плоскостям). Изучение правильных ячеек проводится исследованием их проекций в E^3. Если в качестве пространства проекции выбирается для 24-ячейки нек-рая трехмерная

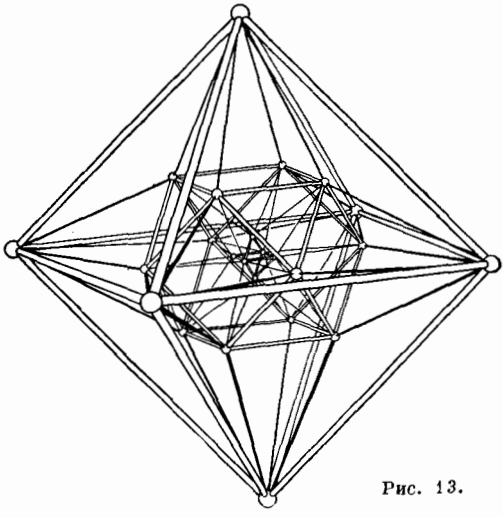


Рис. 13.

грань, то получается разделение пространства на 12-октаэдров, из к-рых все, не считая среднего, простираются в бесконечность, что приводит к такому виду проекции, к-рая составляет конфигурацию Рейе (рис. 10). Если в качестве пространства проекции берется трехмерное пространство, проходящее через вершину 24-ячейки, то получается также конфигурация Рейе (рис. 11). (Проекция 24-ячейки в трехмерное пространство — на рис. 13.) Конфигурация Рейе возникает и в системе точек и осей подобия четырех шаров, центры к-рых не лежат все в одной плоскости. В этой системе каждая ось инцидентна с тремя точками, и каждая точка — с четырьмя осями, получается пространственная К. (12_4, 16_3) точек и прямых. Каждые три точки — центры подобия — определяют по одной плоскости, каждые две оси, инцидентные с точкой подобия, образуют еще восемь различных плоскостей, всего 12, каждая из к-рых инцидентна с шестью точками подобия, а каждая из двенадцати точек подобия — с шестью плоскостями, т. е. получается К. (12_6). К., представляемая двойным шестисторонником Шлефли, применяется для изучения свойств алгебраич. поверхностей третьего порядка, к-рая определяется 19 точками и всегда проходит через нек-рый двойной шестисторонник Шлефли. При этом существенным является то, что любые четыре прямые его имеют гиперболоидальное расположение.

Конфигурационные предложения о реализации инцидентностей на плоскости применяются для изучения свойств многосторонников (многовершинников) и для решения задач на построение при различных ограничениях (построение с недоступными элементами, построение одной линейкой и т. д.). В кинематике и графической статике находит практическое применение теория К. полиэдров.

Возможны К., составленные из других геометрич. элементов, напр. из кругов произвольной размерности и единичного радиуса в E^n.

Лит.: [1] Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, пер. с нем., 2 изд., М.—Л., 1951; [2] Скорняков Л. А., «Успехи матем. наук», 1951, т. 6, в. 6, с. 112—154; [3] Аргунов Б. И., «Матем. сб.», 1950, т. 26, № 3, с. 425—56; [4] Levi F., Geometrische Konfigurationenen, Lpz., 1929.
Л. А. Сидоров.

КОНФЛЮЭНТНАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — то же, что *вырожденная гипергеометрическая функция.*

КОНФЛЮЭНТНЫЙ АНАЛИЗ — совокупность методов математической статистики, относящихся к анализу априорно постулируемых функциональных связей между количественными (случайными или неслучайными) переменными $X^{(1)}, \ldots, X^{(p)}$ в условиях, когда наблюдаются не сами переменные $X^{(s)}$, а случайные величины

$$\tilde{X}_i^{(s)} = X_i^{(s)} + \varepsilon_i^{(s)}, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

где $\varepsilon_i^{(s)}$ — случайная ошибка измерения $X_i^{(s)}$ переменной $X^{(s)}$ в i-м наблюдении, n — общее число наблюдений. При этом общий вид исследуемых функциональных («структурных») соотношений между ненаблюдаемыми переменными $X^{(1)}, \ldots, X^{(p)}$ считается заданным. В задачу К. а. входит построение статистич. оценок для неизвестных значений параметров, участвующих в уравнениях исследуемых «структурных» соотношений, а также — статистич. критериев, предназначенных для проверки различных гипотез о природе анализируемых связей.

Разработка теоретических и прикладных аспектов К. а. ведется главным образом применительно к линейному (или линеаризуемому с помощью подходящих преобразований исходных переменных) виду исследуемых структурных соотношений. В рамках линейной модели К. а. априорное постулирование m линейных связей между p, $m<p$, переменными может быть сформулировано как допущение о существовании $p-m$ «общих» факторов $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(p-m)}$ таких, что

$$X^{(s)} = \lambda_{s,1} Y^{(1)} + \ldots + \lambda_{s,p-m} Y^{(p-m)}, \quad s = 1, 2, \ldots, p, \qquad (2)$$

причем матрица $\Lambda = \|\lambda_{sk}\|$, $s=1, \ldots, p$, $k=1, \ldots, p-m$, имеет ранг $p-m$. Параметризация модели К. а. в виде (1) — (2) позволяет сформулировать основные задачи в терминах статистич. оценивания неизвестных значений параметров λ_{sk} и статистич. проверки гипотез, с ними связанных. Формально модель (1) — (2) выглядит так же, как модель *факторного анализа*, однако задачи К. а. и факторного анализа почти не пересекаются: если цель К. а. в описании структурных соотношений, существующих между переменными $X^{(1)}, \ldots, X^{(p)}$, то в факторном анализе основной задачей является построение и интерпретация общих факторов $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(p-m)}$. В то же время можно говорить о родственном характере задач К. а. и *регрессионного анализа:* некоторые частные схемы К. а. укладываются в рамки схемы регрессионного анализа (напр., если по наблюдениям (1) надо выявить единственную зависимость переменной $X^{(1)}$, измеряемой с ошибкой, от остальных переменных, измеряемых без ошибок).

Лит.: [1] Frisch R., Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems, Oslo, 1934; [2] Koopmans T. C., Linear Regression Analysis of Economic Time Series, Haarlem, 1937; [3] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973, гл. 29; [4] Маленво Э., Статистические методы эконометрии, в. 1, пер. с франц., М., 1975, гл. 10; [5] Айвазян С. А., Богдановский И. М., «Заводск. лаборатория», 1974, т. 40, № 3, с. 285—95.
С. А. Айвазян.

КОНФОКАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ — то же, что *софокусные кривые.*

КОНФОРМНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии, в к-ром изучаются свойства фигур, неизменные при *конформных преобразованиях.* Основным инвариантом К. г. является угол между направлениями.

К. г.— это геометрия, определенная в евклидовом пространстве, дополненном одной бесконечно удален-

ной (несобственной) точкой, с фундаментальной группой точечных преобразований, переводящих сферы в сферы. Указанное пространство наз. конформным пространством M_n, а фундаментальная группа — группой конформных преобразований. В конформном пространстве плоскость является сферой, проходящей через бесконечно удаленную точку.

Приведенное определение К. г. справедливо для пространства любого числа измерений; в двумерном случае вместо сфер говорят о кругах (точнее окружностях). При числе измерений $n \geqslant 3$ преобразования, переводящие сферы в сферы, исчерпывают все преобразования, сохраняющие углы (теорема Лиувилля). При $n=2$ группа преобразований, сохраняющих углы, шире, однако и здесь название К. г. сохраняется за геометрией с фундаментальной группой точечных преобразований, переводящих круги в круги.

Всякое преобразование из фундаментальной группы К. г. состоит из конечного числа движений, подобных преобразований и инверсий.

Фундаментальная группа К. г. плоскости M_2 изоморфна нек-рой подгруппе проективной группы, именно подгруппе проективных преобразований трехмерного проективного пространства P_3, переводящих в себя овальную поверхность 2-го порядка, т. е. группе гиперболич. движений трехмерного пространства. Это позволяет применять для К. г. удобный аналитич. аппарат, к-рый используется в неевклидовых геометриях.

Всякая точка P_3 определяется четырьмя однородными координатами x_i, $i=\overline{1,4}$, или псевдовектором $\boldsymbol{x}$ с этими координатами. Пусть

$$(\boldsymbol{xy}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

— форма от векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$; K — овальная поверхность 2-го порядка P_3, задаваемая уравнением $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$, или $(\boldsymbol{xx})=0$. Для точек вне K $(\boldsymbol{xx})>0$, внутри — $(\boldsymbol{xx})<0$. С помощью абсолюта K осуществляется *стереографическая проекция* точек абсолюта и точек вне абсолюта на конформную плоскость. Координаты x_i, $i=\overline{1,4}$, точек P_3 наз. *тетрациклическими координатами* точек и кругов на плоскости M_2. Так как при стереографич. проекции точки на абсолюте переходят в точки на плоскости, а точки вне абсолюта — в круги на плоскости, то группе гиперболич. движений в P_3 с абсолютом K будет соответствовать группа преобразований на плоскости, при к-рых точки переходят в точки, а круги — в круги, т. е. фундаментальная группа К. г. плоскости. Аналитически эта группа задается формулами

$$x_k^* = \sum_{l=1}^{4} p_k^l x_l;\ k=1,\ \ldots,\ 4;\ \mathrm{Det}\,\|p_k^l\| \neq 0,$$

где $M(x_i)$ и $M^*(x_i^*)$ — точки до и после преобразований, причем форма

$$(\boldsymbol{xx}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

отличается от формы

$$(\boldsymbol{x^*x^*}) = x_1^{*2} + x_2^{*2} + x_3^{*2} - x_4^{*2}$$

только множителем. Если ввести

$$e^{ij} = p_1^i p_1^j + p_2^i p_2^j + p_3^i p_3^j - p_4^i p_4^j,$$

то условия сохранения квадратичной формы запишутся в виде

$$-e^{44} = e^{11} = e^{22} = e^{33} = 1,\ e^{ij} = 0$$

при $i \neq j$.

При конформных преобразованиях несобственная точка может переходить в любую другую точку, поэтому круг может перейти в прямую, и обратно. Если потребовать, чтобы несобственная точка переходила в себя, т. е. чтобы прямые переходили в прямые, то под-

группа таких преобразований представляет группу подобных преобразований (*гомотетия* и евклидово *движение*). В P_3 подгруппе подобия соответствует подгруппа гиперболич. движений, оставляющих неподвижной нек-рую фиксированную точку абсолюта.

Другим важным классом конформных преобразований является *инверсия*. В P_3 инверсии соответствует полярная гомология, т. е. такое гиперболич. движение, при к-ром каждая пара соответствующих точек M и M^* лежит на прямой, проходящей через нек-рую фиксированную точку C вне абсолюта, и удовлетворяется условие: двойное отношение $D(M, M^*, C, N)=-1$, где N — точка пересечения указанной прямой с плоскостью, полярной точке C относительно абсолюта. Также как всякое гиперболич. движение можно получить с помощью конечного числа полярных гомологий, так и любое конформное преобразование можно получить с помощью конечного числа инверсий.

Основным инвариантом К. г. на плоскости является угол φ между двумя кругами. Он выражается по формуле

$$\cos^2\varphi=\frac{(xy)^2}{(xx)(yy)},$$

где x и y — векторы, соответствующие двум кругам с тетрациклич. координатами x_i и y_i, $i=\overline{1,4}$. В гиперболич. геометрии P_3 угол между кругами на плоскости равен неевклидову расстоянию между точками в пространстве, соответствующими кругам. Инвариантность угла следует из инвариантности расстояния. Условие ортогональности двух кругов $(xy)=0$, условие касания $(xx)(yy)-(xy)^2=0$. Если один из кругов обращается в точку: $(xx)=0$, то получается условие инцидентности точки и круга $(xy)=0$.





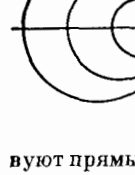


Рис. 1.

Простейшим образом в M_2 является пучок кругов. Он задается уравнением $t=\alpha p+\beta q$, где p и q — фиксированные круги пучка. В зависимости от знака $\Delta=(pp)(qq)-(pq)^2$ пучки бывают: а) эллиптические ($\Delta>0$), б) гиперболические ($\Delta<0$), в) параболические ($\Delta=0$) (см. рис. 1). В P_3 пучкам кругов соответствуют прямые. Эллиптическому пучку — прямая, не пересекающая абсолют, гиперболическому — прямая, пересекающая абсолют, параболическому — прямая, касающаяся абсолюта. Так как у всякой прямой P_3 есть сопряженная ей, то и у всякого пучка в M_2 имеется сопряженный пучок.

Преобразования фундаментальной группы К. г. плоскости это — преобразования, задаваемые дробно-линейной функцией комплексного переменного.

В К. г. трехмерного пространства M_3 основными образами являются точки и сферы. Задаются они *пентасферическими координатами* x_i, $i=\overline{1,5}$, или псевдовектором x пятимерного пространства. Угол между сферами определяется по той же формуле, что и угол между кругами на плоскости.

Простейшие образы в M_3: пучки сфер $w=\alpha y+\beta z$, двупараметрич. связки $w=\alpha x+\beta y+\gamma z$ и трехпараметрич. связки $w=\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t$ сфер.

Круг в M_3 задается с помощью эллиптич. пучка сфер, т. е. формулой

$$x = \sum_{i=1}^{2} \alpha^i x_i$$

при дополнительном условии

$$(x_1x_1)\,(x_2x_2) - (x_1x_2)^2 > 0.$$

Угол θ между кругом, заданным с помощью сфер x_1, x_2 и сферой y, определяется по формуле

$$\cos^2\theta = \frac{A^{\alpha\beta}\,(x_\alpha y)\,(x_\beta y)}{(yy)},$$

где $A^{\alpha\beta}$ — алгебраич. дополнения элементов определителя, составленного из $A_{\alpha\beta} = x_\alpha x_\beta$; $\alpha, \beta = 1, 2$. Пара кругов

$$x = \sum_{i=1}^{2} \alpha^i x_i \quad \text{и} \quad \tilde{x} = \sum_{i=1}^{2} \beta^i \tilde{x}_i$$

имеет два абсолютных инварианта

$$k = \frac{s^2}{A\tilde{A}} \quad \text{и} \quad h = \frac{1}{2} A^{ij}\tilde{A}^{kl} S_{ik} S_{jl},$$

где

$$A_{ij} = (x_i x_j),\ \tilde{A}_{ij} = (\tilde{x}_i \tilde{x}_j),\ A = \mathrm{Det}\,\|A_{ij}\|,$$

$$\tilde{A} = \mathrm{Det}\,\|\tilde{A}_{ij}\|,\ S_{ij} = (x_i \tilde{x}_j),\ S = \mathrm{Det}\,\|S_{ij}\|.$$

Для каждой пары кругов из составляющих их пучков можно выделить главные сферы. Это сферы, к-рые удовлетворяют условиям $A_{11} = A_{22} = \tilde{A}_{11} = \tilde{A}_{22} = 1$, $A_{12} = \tilde{A}_{12} = 0$, $S_{12} = S_{21} = 0$. Через эти сферы сами пучки задаются в виде

$$x = \cos\varphi x_1 + \sin\varphi x_2,\ \tilde{x} = \cos\varphi_1 \tilde{x}_1 + \sin\varphi_1 \tilde{x}_2,$$

где $\varphi(\varphi_1)$ — угол между сферой $x(\tilde{x})$ и сферой $x_1(\tilde{x}_1)$. Углы θ_1 и θ_2, под к-рыми пересекаются главные сферы первого круга со вторым кругом, наз. главными углами пары кругов (они совпадают с углами, под к-рыми главные сферы второго круга пересекаются с первым кругом). Через главные углы инварианты пары кругов выражаются следующим образом:

$$k = \cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2, \quad h = \frac{1}{2}(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2).$$

Главные углы θ_1 и θ_2 определяют экстремальные значения углов, к-рые сферы одного круга образуют с другим. Если $\theta_1 = \theta_2$, то для всех сфер пары $\theta = \theta_1 = \theta_2$, и такая пара кругов наз. изогональной. С помощью инвариантов пары кругов можно охарактеризовать

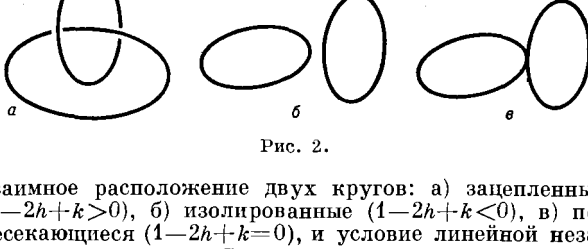


Рис. 2.

взаимное расположение двух кругов: а) зацепленные ($1 - 2h + k > 0$), б) изолированные ($1 - 2h + k < 0$), в) пересекающиеся ($1 - 2h + k = 0$), и условие линейной независимости сфер x_i и $\tilde{x}_i$ (см. рис. 2). Необходимое и достаточное условие изогональности пары кругов $h^2 - k = 0$.

Использование в К. г. методов математич. анализа привело к созданию *конформно-дифференциальной геометрии*. На основе К. г. построена геометрия пространства *конформной связности*, относящаяся к К. г. как риманова геометрия к евклидовой. Для К. г. на плоскости употребительны также названия геометрия обратных радиусов, круговая гео-

метрия, инверсионная геометрия, а также геометрия Мёбиуса (по имени А. Мёбиуса, A. Möbius), впервые изучавшего геометрию круговых преобразований.

Лит.: [1] Клейн Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.— Л., 1939; [2] Blaschke W., Vorlesungen über Differential-Geometrie, Bd 3, B., 1929; [3] Бушманова Г. В., Норден А. П., Элементы конформной геометрии, Казань, 1972.

Г. В. Бушманова.

КОНФОРМНАЯ СВЯЗНОСТЬ — *дифференциально-геометрическая структура* на гладком многообразии M, специальный вид связности на многообразии, когда приклеенное к M гладкое расслоенное пространство E имеет своим типовым слоем конформное пространство C_n размерности $n=\dim M$. Структурой такого пространства E к каждой точке $x\in M$ присоединяется экземпляр конформного пространства $(C_n)_x$, к-рый отождествляется (с точностью до конформных преобразований, сохраняющих x и все направления в ней) с касательным пространством $T_x(M)$, дополненным одной бесконечно удаленной точкой. К. с., как связность в таком E, предусматривает сопоставление каждой гладкой кривой $\mathscr{L}\subset M$ с началом x_0 и каждой ее точке x_t конформное отображение $\gamma_t : (C_n)_{x_t}\to(C_n)_{x_0}$ так, что удовлетворяется нек-рое условие (см. ниже условие на γ_t). Пусть пространство C_n отнесено к реперу, к-рый состоит из двух точек (вершин) и из n проходящих через них попарно ортогональных гиперсфер. Такой репер интерпретируется в псевдоевклидовом пространстве ${}^1R_{n+2}$ как класс эквивалентных базисов, удовлетворяющих условиям

$$\left.\begin{gathered}(e_0,\ e_{n+1})=(e_1,\ e_1)=\ldots=(e_n,\ e_n),\\(e_0,\ e_0)=(e_{n+1},\ e_{n+1})=(e_i,\ e_j)=0,\\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n,\ i\neq j,\end{gathered}\right\}\qquad(1)$$

относительно эквивалентности

$$\{e_\alpha\}\sim\{\lambda e_\alpha\},\quad \alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ n+1.$$

Пусть M покрыто координатными областями и в каждой области фиксировано гладкое поле репера в $(C_n)_x$, у к-рого вершина, определяемая вектором e_0, совпадает с x. Условие на γ_t следующее: при $t\to 0$, когда x_t перемещается по $\mathscr{L}$ до x_0, γ_t должно стремиться к тождественному отображению, причем главная часть его отклонения от последнего должна определяться относительно поля репера в нек-рой окрестности точки x_0 матрицей вида

$$\omega=\|\omega_\alpha^\beta\|=\left\|\begin{array}{c|c|c}\omega_0^0 & \omega_0^j & 0\\ \hline \omega_i^0 & \omega_i^j & -\omega_0^i\\ \hline 0 & -\omega_j^0 & -\omega_0^0\end{array}\right\|,\qquad(2)$$

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0,\quad \alpha,\ \beta=0,\ \ldots,\ n+1;\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n,$$

из $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ линейных дифференциальных форм ω_0^0, ω_0^i, ω_i^j $(i<j)$, ω_i^0 типа

$$\omega_\alpha^\beta=\Gamma_{\alpha i}^\beta dx^i,\ \det\|\Gamma_{0i}^j\|\neq 0.\qquad(3)$$

Другими словами, образ репера в точке x_t при γ_t должен быть определен векторами

$$e_\beta\left[\delta_\alpha^\beta+\omega_\alpha^\beta(X)\,t+\varepsilon_\alpha^\beta(t)\right],$$

где X — касательный вектор к $\mathscr{L}$ в точке x_0 и

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon_\alpha^\beta(t)}{t}=0.$$

При преобразовании репера поля в произвольной точке x согласно формулам $e_{\alpha'}=A_{\alpha'}^\beta e_\beta$, $e_\beta=A_\beta^{\alpha'}e_{\alpha'}$, сохраняющим условия (1), т. е. при переходе к произ-

вольному элементу главного расслоенного пространства П реперов в пространствах $(C_n)_x$, формы (3) заменяются следующими 1-формами на П:

$$\omega^{\beta'}_{\alpha'} = A^{\beta'}_{\gamma}\, dA^{\gamma}_{\alpha'} + A^{\gamma}_{\alpha'} A^{\beta'}_{\delta}\omega^{\delta}_{\gamma},$$

образующими также матрицу ω' вида (2). 2-формы

$$\Omega^{\beta'}_{\alpha'} = d\omega^{\beta'}_{\alpha'} + \omega^{\beta'}_{\gamma'} \wedge \omega^{\gamma'}_{\alpha'}$$

образуют матрицу $\Omega' = \|\Omega^{\beta'}_{\alpha'}\|$ такой же структуры, как (2), и выражаются по формулам $\Omega^{\beta'}_{\alpha'} = A^{\gamma}_{\alpha'} A^{\beta'}_{\delta}\Omega^{\delta}_{\gamma}$ через формы $\Omega^{\beta}_{\alpha} = d\omega^{\beta}_{\alpha} + \omega^{\beta}_{\gamma} \wedge \omega^{\gamma}_{\alpha}$, являющиеся в силу (3) линейными комбинациями от $dx^k \wedge dx^l$, а следовательно и от $\omega^k_0 \wedge \omega^l_0$. Для элементов матрицы ω' имеют место структурные уравнения К. с. (где для простоты опущены штрихи):

$$\left.\begin{aligned}
&d\omega^0_0 + \omega^0_i \wedge \omega^i_0 = \Omega^0_0,\\
&d\omega^i_0 + \left(\omega^i_j - \delta^i_j\omega^0_0\right) \wedge \omega^j_0 = \Omega^i_0,\\
&d\omega^j_i + \omega^j_k \wedge \omega^k_i + \omega^j_0 \wedge \omega^0_i + \omega^0_j \wedge \omega^i_0 = \Omega^j_i,\ i < j,\\
&d\omega^0_i + \omega^0_j \wedge \left(\omega^j_i - \delta^j_i\omega^0_0\right) = \Omega^0_i.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Здесь правые части полубазовы, т. е. являются линейными комбинациями только от $\omega^k_0 \wedge \omega^l_0$; они составляют систему форм кручения-кривизны К. с. и преобразуются по законам

$$\Omega^{0'}_{0'} = A^{0}_{0'}\left(A^{0'}_{0}\Omega^{0}_{0} + A^{0'}_{i}\Omega^{i}_{0}\right),$$

$$\Omega^{i'}_{0'} = A^{0}_{0'}A^{i'}_{j}\Omega^{j}_{0},$$

$$\Omega^{j'}_{i'} = A^{k}_{i'}A^{j'}_{l}\Omega^{l}_{k} + \Omega^{k}_{0}\left(A^{0}_{i'}A^{j'}_{k} - A^{k}_{i'}A^{j'}_{n+1}\right).$$

Равенства $\Omega^i_0 = 0$ имеют инвариантный смысл и выделяют К. с. нулевого кручения. Пусть

$$\Omega^j_i = \frac{1}{2}\, C^j_{ikl}\omega^k_0 \wedge \omega^l_0;$$

тогда при $\Omega^i_0 \equiv 0$:

$$C^{j'}_{i'k'l'} = \left(A^{0'}_{0}\right)^2 A^{p}_{i'}A^{j'}_{q}A^{r}_{k'}A^{s}_{l'}C^{q}_{prs}$$

и для $C_{ik} = C^j_{ikj}$:

$$C_{i'k'} = \left(A^{0'}_{0}\right)^2 A^{p}_{i'}A^{r}_{k'}C_{pr}.$$

Инвариантные тождества $\Omega^i_0 = \Omega^0_0 \equiv 0$, $C_{ik} = 0$ выделяет специальный класс так называемых (по Картану) нормальных К. с.

Формы (3), образующие матрицу вида (2), определяют К. с. на M однозначно: образ репера в точке x_t при γ_t: $(C_n)_{x_t} \to (C_n)_{x_0}$ определяется решением $\{e_\alpha(t)\}$ системы

$$du_\alpha = \left(\omega^{\beta}_{\alpha}\right)_{x(t)}\left(\dot{x}(t)\right) u_\beta$$

при начальных условиях $u_\alpha(0) = e_\alpha$, где $x^i = x^i(t)$ — уравнения кривой $\mathscr{L}$ в нек-рой координатной окрестности ее точки x_0 с координатами $x^i(0)$. Любые 1-формы ω^0_0, ω^i_0, $\omega^j_i (i<j)$, ω^0_i на П, удовлетворяющие уравнениям (4) с правыми частями, выражающимися через $\omega^k_0 \wedge \omega^e_0$, где ω^i_0 $(i = 1, \ldots, n)$ — линейно независимы, определяют в указанном смысле нек-рую К. с. на М.

К. с. дают удобный аппарат для исследования конформных отображений римановых пространств. К. с. сводится к *Леви-Чивита связности* нек-рого риманова пространства, если на M существуют локальные поля реперов, относительно к-рых

$$\omega^0_i = P_{ij}\omega^j_0, \quad \omega^0_0 = Q_i\omega^i_0, \quad \Omega^i_0 = Q_j\omega^i_0 \wedge \omega^j_0.$$

Для тензора кривизны R^i_{jkl} этой связности, определяемого равенством

$$d\omega^i_l + \omega^i_k \wedge \omega^k_l = \frac{1}{2} R^i_{jkl} \omega^k_0 \wedge \omega^l_0,$$

имеет место

$$R^i_{jkl} = \delta^i_l P_{jk} - \delta^i_k P_{jl} - \delta^i_l P_{jk} + \delta^i_k P_{jl} + C^i_{jkl}.$$

Обратно, для каждой связности Леви-Чивита риманова пространства существует единственная нормальная К. с., из к-рой она получается указанным способом. При этом $Q_j = 0$ и P_{ij} выражается через тензор Риччи $R_{ik} = R^j_{kj}$ и скалярную кривизну $R = \sum R_{ii}$ формулой

$$P_{ij} = \frac{1}{n-2} R_{ij} - \delta^i_j \frac{R}{2(n-1)(n-2)}.$$

Соответствующий тензор C^i_{jkl} наз. тензором конформной кривизны связности Леви-Чивита. Два римановых пространства конформно эквивалентны, если их связности Леви-Чивита имеют совпадающие нормальные К. с. В частности, риманово пространство при $n > 3$ конформно евклидово тогда и только тогда, когда для него $C^i_{jkl} = 0$.

Лит.: [1] Cartan E., «Ann. polon. math.», 1923, t. 2, s. 171—221; [2] Картан Э., Пространства аффинной, проективной и конформной связности, пер. с франц., Казань, 1962; [3] Ogiue K., «Kodai Math. Semin. Repts», 1967, v. 19, p. 193—224.

Ю. Г. Лумисте.

КОНФОРМНАЯ СТРУКТУРА — 1) К. с. на векторном пространстве V — класс K попарно гомотетичных евклидовых метрик пространства V. Любая евклидова метрика g пространства V определяет К. с.

$$K = \mathbb{R}^+ g = \{\lambda g,\ \lambda > 0\},$$

которая наз. К. с., порожденной евклидовой метрикой g. Автоморфизм A пространства V наз. автоморфизмом К. с. K, если индуцированное им преобразование пространства билинейных форм сохраняет множество K. Группа автоморфизмов К. с. изоморфна линейной конформной группе

$$CO(n) = \mathbb{R}^+ \times O(n), \qquad n = \dim V,$$

являющейся прямым произведением мультипликативной группы положительных чисел и ортогональной группы.

2) К. с. на многообразии — поле конформных структур касательных пространств, т. е. подрасслоение π: $K \to M$ расслоения симметрических билинейных форм на многообразии M, слои $K_p = \pi^{-1}(p)$ к-рого суть К. с. соответствующих касательных пространств T_pM. Расслоение π является топологически тривиальным, и любое его сечение g (представляющее из себя риманову метрику на M) однозначно определяет К. с. по формуле

$$K_p = \{\lambda g_p,\quad \lambda > 0\}.$$

Сечение g наз. римановой метрикой, подчиненной К. с. K. Любое другое сечение g_1 расслоения имеет вид $g_1 = fg$, где f — положительная функция на M, т. е. римановы метрики g_1 и g конформно эквивалентны. Поэтому К. с. можно определить также как класс конформно эквивалентных римановых метрик. К. с. K на многообразии M можно отождествить с $CO(n)$-структурой B на M, состоящей из всех реперов на M, ортонормированных относительно хотя бы одной римановой метрики, подчиненной структуре K. Основные свойства К. с. определяются тем, что $CO(n)$-структура B является G-структурой второго порядка: ее первое продолжение есть $\mathbb{R}^n$-структура $B^{(1)} \to B$ на B, а второе продолжение — e-структура (поле реперов) на $B^{(1)}$. Отсюда в частности следует, что группа автомор-

физмов К. с. K (к-рая совпадает с группой конформных преобразований любой подчиненной K римановой метрики) есть группа Ли размерности $\leqslant {}^1/_2(n+1)(n+2)$, а представление изотропии ее стационарной подгруппы в касательном пространстве второго порядка точно.

Как правило, группа автоморфизмов К. с. K совпадает с группой движений нек-рой подчиненной ей римановой метрики. Исключениями являются только стандартные конформные структуры K_0 на сфере S^n и евклидовом пространстве E^n, порожденные стандартными римановыми метриками. К. с. на многообразии M наз. л о к а л ь н о п л о с к о й, если она локально эквивалентна стандартной К. с. K_0 евклидова пространства E^n, т. е. если в окрестности любой точки $p \in M$ существует подчиненная K плоская риманова метрика. Для того чтобы К. с. была локально плоской, необходимо и достаточно, чтобы тензор конформной кривизны Вейля нек-рой (а тем самым и любой) подчиненной ей римановой метрики был равен нулю. Примерами локально плоских К. с. являются стандартные К. с. в евклидовом пространстве E^n, на сфере S^n, в пространстве Лобачевского Λ^n, а также в пространствах $\Lambda^{n_1} \times S^{n_2}$ и $\Lambda^n \times E^1$, порожденные стандартными метриками. Ими исчерпываются все локально плоские К. с. на односвязных многообразиях, обладающие транзитивной группой автоморфизмов. Стандартная К. с. K_0 на сфере S^n выделяется среди всех К. с. как единственная К. с., имеющая максимальную (в смысле размерности) группу автоморфизмов. Сфера S^n, снабженная К. с. K_0, наз. к о н ф о р м н ы м п р о с т р а н с т в о м.

Понятие К. с. тесно связано с понятием *конформной связности* на M: заданием такой связности всегда определена нек-рая К. с. на M; с другой стороны, конформная связность — это связность в приведенном главном расслоении, к-рое определяет данная К. с.

Лит.: [1] K o b a y a s h i S., Transformation groups in differential geometry, B.— Hdlb.— N. Y., 1972; [2] С т е р н б е р г С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [3] К и м е л ь ф е л ь д Б. Н., «Матем. заметки», 1970, т. 8, № 3, с. 321—28; [4] А л е к с е е в с к и й Д. В., «Матем. сб.», 1972, т. 89, № 2, с. 280—96.

Д. В. Алексеевский, Ю. Г. Лумисте.

КОНФОРМНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СЕТЬ — сеть на двумерной поверхности евклидова пространства, допускающая *конформное отображение* на *геодезическую сеть*. При повороте на прямой угол К.-г. с. переходит в *ромбическую сеть*, и обратно. *В. Т. Базылев.*

КОНФОРМНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел *конформной геометрии*, в котором геометрические образы, инвариантные при конформных преобразованиях, изучаются методами анализа бесконечно малых, в первую очередь дифференциального исчисления.

В конформной плоскости M_2 каждая точка и круг определяются вектором $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, где x_i, $i=1,2,3,4$ — *тетрациклические координаты*. Для точки

$$(\boldsymbol{xx}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0,$$

для круга $(\boldsymbol{xx}) > 0$. К.-д. г. плоскости изучает последовательности и конгруэнции кругов. Последовательности кругов соответствует в трехмерном гиперболич. пространстве кривая, конгруэнции кругов — поверхность. Последовательность задается параметрич. уравнением $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$. Параметр t можно специализировать, взяв в качестве него

$$\sigma = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2}\, dt;$$

$d\sigma$ — угол между двумя бесконечно близкими кругами последовательности. Особое значение в теории последовательностей имеют две ветви огибающей этой последовательности $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ и $\tilde{\boldsymbol{v}} = \tilde{\boldsymbol{v}}(t)$, их соприкасающиеся круги. Как и в обычной дифференциальной геометрии

кривых можно записать деривационные формулы для последовательности кругов, разложив производные векторов x, $z=dx/d\sigma$, v, $\tilde{v}$ по ним самим:

$$\frac{dx}{d\sigma}=z, \quad \frac{dz}{d\sigma}=-x+\tilde{c}v+c\tilde{v},$$

$$\frac{dv}{d\sigma}=-cz, \quad \frac{d\tilde{v}}{\sigma}=-\tilde{c}z.$$

Можно получить два инварианта $b=-2c\tilde{c}$ и $g=c'/c$. Инвариант b выражается через угол φ между соприкасающимися кругами огибающей: $b=1/\sin^2\varphi/2$. Теория кривых конформной плоскости строится на основе теории последовательности кругов: каждая кривая рассматривается как огибающая: последовательности, у к-рой инвариант $g=\pm 1$. Если при этом инвариант b постоянный, то кривая оказывается изогональной траекторией пучка кругов, т. е. локсодромой.

В трехмерном конформном пространстве M_3 уравнение $x=x(t)$ задает последовательность сфер. При ее изучении важную роль играет ее огибающая поверхность, так наз. *каналовая поверхность*. Каждая последовательность сфер характеризуется тремя инвариантами, выражающимися через нек-рые углы, связанные со сферами последовательности.

Конгруэнция кругов в M_2 задается уравнением $x=x(u_1, u_2)$. На поверхности, соответствующей ей в гиперболич. пространстве, удобно ввести полярную нормализацию, приняв за нормаль 1-го рода прямую, ортогональную касательной плоскости поверхности в точке x, а за нормаль 2-го рода — поляру нормали 1 рода относительно абсолюта K (см. [3]). В M_3 нормализации поверхности соответствует нормализация конгруэнции: каждому кругу x конгруэнции ставится в соответствие круг $\tilde{x}$, ортогональный кругу x и всякому бесконечно близкому кругу, и два круга y_i, определяющие пучок кругов, сопряженный пучку $\{x, \tilde{x}\}$: $y_i=\partial_i x$. В соответствии с инвариантами поверхности в гиперболич. пространстве на M_2 определяются инварианты конгруэнции кругов, выделяются специальные виды конгруэнций.

В теории поверхностей M_3 вводится оснащение поверхности с помощью нормализующих кругов, ортогональных в каждой точке всем касательным сферам поверхности; связывается с каждой точкой конформный репер, состоящий из точки поверхности x, двух координатных сфер y_i, $i=1, 2$, определяющих нормализующий круг, касательной в точке x сферы z и точки X пересечения этой сферы и нормализующего круга. В общей теории нормализации поверхностей используется изоморфизм теории нормализованных поверхностей конформного пространства и теории внутренних полярных нормализаций абсолюта гиперболич. пространства. Внутренняя геометрия нормализованной поверхности M_n есть геометрия Вейля, основной тензор к-рой совпадает с тензором угловой метрики поверхности, а дополнительный тензор есть нормализатор, определяющий опорные координатные сферы.

Результаты, полученные для нормализованной поверхности, справедливы и для нормализованного конформного пространства.

Лит.: [1] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaus, pt. 1—4, P., 1887—96; 2 éd., pt. 1—2, P., 1914—26; [2] Blaschke W., Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd 3, B., 1929; [3] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976; [4] Бушманова Г. В., Норден А. П., Элементы конформной геометрии, Казань, 1972.

Г. В. Бушманова.

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — непрерывное отображение, сохраняющее форму бесконечно малых фигур.

Основные понятия. Непрерывное отображение $w=f(z)$ области G n-мерного евклидова пространства ($n\geqslant 2$) в n-мерное евклидово пространство наз. к о н-

формным в точке $z_0 \in G$, если оно в этой точке обладает свойствами постоянства растяжений и сохранения углов. Свойство постоянства растяжений в точке z_0 при отображении $w=f(z)$ состоит в том, что отношение $|f(z)-f(z_0)|/|z-z_0|$ расстояния между образами $f(z)$ и $f(z_0)$ точек z и z_0 к расстоянию между z и z_0 стремится к определенному пределу $k=k(z_0, f)$, когда z стремится к z_0 произвольным образом; число k наз. коэффициентом растяжения в точке z_0 при рассматриваемом отображении. Свойство сохранения (консерватизма) углов в точке $z_0 \in G$ при отображении $w=f(z)$ состоит в том, что любая пара непрерывных кривых l_1, l_2, расположенных в G и пересекающихся в точке z_0 под углом α (т. е. имеющих касательные в точке z_0, образующие между собой угол α), при рассматриваемом отображении переходит в пару непрерывных кривых L_1, L_2, пересекающихся в точке $w_0=f(z_0)$ под тем же углом α. Непрерывное отображение области G наз. конформным, если оно конформно в каждой точке этой области. По определению, К. о. области G обязано быть непрерывным и конформным лишь во внутренних точках G, и если говорят о К. о. замкнутой области, то, как правило, имеют в виду непрерывное отображение замкнутой области, конформное в ее внутренних точках.

В наиболее важном случае $n=2$ область G и ее образ $f(G)$ при отображении f лежат в плоскости, к-рую удобно рассматривать как плоскость $\mathbb{C}$ комплексного переменного z; соответственно отображение $w=f(z)$ является комплекснозначной функцией комплексного переменного $z \in G$. При этом если в точке z_0 отображение $w=f(z)$ сохраняет углы, то криволинейные углы с вершиной z_0 при этом отображении либо все сохраняют свою абсолютную величину и знак, либо все сохраняют свою абсолютную величину, изменяя знак на противоположный. В первом случае говорят, что отображение в точке z_0 является К. о. первого рода, во втором — К. о. второго рода. Если функция $w=f(z)$ задает К. о. второго рода в точке z_0, то комплексно сопряженная функция $w=\overline{f(z)}$ задает К. о. первого рода в точке z_0, и наоборот. Поэтому изучаются лишь К. о. первого рода, и именно их обычно имеют в виду, когда говорят о К. о., не уточняя их род.

Если отображение $w=f(z)$ конформно в точке z_0, то при $z \to z_0$ существует конечный предел отношения $(f(z)-f(z_0))/(z-z_0)$, т. е. существует производная $f'(z_0)$. При дополнительном предположении, что $f'(z_0) \neq 0$, верно и обратное.

Таким образом, если существует $f'(z_0) \neq 0$, то каждый бесконечно малый вектор с началом в точке z_0 при отображении $w=f(z)$ растягивается в $k(z_0, f)=|f'(z_0)|$ раз, поворачивается на угол $\arg f'(z_0)$ и параллельно сдвигается на вектор $f(z_0)-z_0$; бесконечно малые круги с центром z_0 переходят в бесконечно малые круги.

Отображение $w=f(z)$ является конформным в области G конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда функция $f(z)$, $z \in G$, является аналитической и $f'(z) \neq 0$ в G. Для конформности отображения $w=f(z)$ (и аналитичности $f(z)$) в области G достаточно потребовать, чтобы непрерывная функция $f(z)$ обладала в каждой точке $z \in G$ лишь свойством сохранения углов (с сохранением не только величин углов при этом отображении, но и их знаков). Если же от непрерывного отображения $w=f(z)$, $z \in G$, потребовать однолистности его (т. е. взаимной однозначности) и постоянства растяжений в каждой точке, то это отображение будет конформным первого или второго рода, так что либо $f(z)$, либо $\overline{f(z)}$ является аналитич. функцией, производная к-рой всюду в G отлична от нуля. В случае аналитичности $f(z)$ в нек-рой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ следующие

три свойства эквивалентны: а) отображение $w=f(z)$ конформно (первого рода) в точке z_0, б) функция $f(z)$ (локально) однолистна в точке z_0, в) $f'(z_0)\neq 0$. Всякая однолистная аналитическая в области G функция совершает К. о. области G на область $f(G)$ той же связности; при этом обратная функция $f^{-1}(z)$ является в области $f(G)$ однолистной аналитич. функцией с ненулевой производной. Существуют и неоднолистные К. о. (например, отображение $w=z^4$ конформно и не однолистно в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$, а $w=e^z$ — во всей плоскости $\mathbb{C}$).

В теории плоских К. о. и ее приложениях принципиальным является вопрос о возможности однолистно и конформно отобразить одну заданную область на другую, а в практических приложениях — вопрос о возможности это сделать посредством сравнительно простых функций. Первую задачу для случая односвязных областей, границы к-рых не пусты и не вырождаются в точки, решает в положительном смысле *Римана теорема* о конформном отображении. Вторая задача для некрых областей специального вида решается применением элементарных функций комплексного переменного (см. ниже), *Кристоффеля — Шварца формулы* для отображения полуплоскости или круга на многоугольник, применением *симметрии принципа* и приближенных методов К. о. По теореме Римана, все односвязные области расширенной комплексной плоскости с непустыми границами, не вырождающимися в точки, конформно эквивалентны. Иначе обстоит дело с К. о. многосвязных областей. Поскольку однолистное К. о. нек-рой области G_1 на другую область G_2 является взаимно однозначным и взаимно непрерывным, то для существования такого отображения необходимо, чтобы G_1 и G_2 имели один и тот же порядок связности, т. е. они одновременно должны быть либо односвязными, либо двусвязными и т. д., либо бесконечносвязными. Однако это необходимое условие не является достаточным, что проявляется уже в случае односвязных областей. Так, круг $|z|<1$ нельзя однолистно и конформно отобразить на конечную плоскость $\mathbb{C}$, а расширенную комплексную плоскость $\bar{\mathbb{C}}$ нельзя конформно и однолистно отобразить на круг $|z|<1$ или плоскость $\mathbb{C}$ (на самом деле, последние два отображения невозможно выполнить даже топологически). Еще более жесткая ситуация имеет место в случае многосвязных областей. Напр., круговое кольцо $G_1=\{z: r_1<|z|<R_1\}$ можно однолистно и конформно отобразить на другое круговое кольцо $G_2=\{z: r_2<|z|<R_2\}$, $r_1>0$, $r_2>0$, тогда и только тогда, когда эти кольца подобны, т. е. $R_1 : r_1=R_2 : r_2$; в этом случае всякое К. о. G_1 на G_2 является целой линейной функцией вида $e^{i\beta}r_2z/r_1$, где β — некоторое действительное число. Однако всякую конечносвязную область G расширенной комплексной плоскости с непустой границей можно однолистно и конформно отобразить на любую из так наз. **канонических областей** той же связности, содержащую точку ∞, а именно: на расширенную плоскость с конечными горизонтальными разрезами, на расширенную плоскость с исключенными конечными не пересекающимися замкнутыми кругами, на расширенную плоскость с исключенными замкнутыми дугами логарифмич. спиралей заданного наклона θ; при этом отдельные отрезки, круги и дуги спиралей могут вырождаться в точки. Если потребовать, чтобы заданная точка $a\in G$ при таком отображении перешла в ∞ и при $z\to a$ выполнялось соотношение $f(z)=(z-a)^{-1}+O(z-a)$ при $a\neq\infty$ или соотношение $f(z)=z+O(1/z)$ при $a=\infty$, то в случае канонич. областей первых двух перечисленных типов отображающая функция $w=f(z)$ существует, определяется единственным образом и наз. **каноническим** К. о. Эти теоремы справедливы и для бесконечносвязных областей.

Всякое однолистное К. о. области G_1, ограниченной конечным числом *непересекающихся* окружностей (*при* этом прямая считается окружностью бесконечно большого радиуса), на область G_2 этого же типа является *дробно-линейным отображением*. В теории аналитич. функций рассматриваются также неоднолистные отображения областей разной связности друг на друга посредством аналитич. функций, в том числе К. о. круга на многосвязные области, отображение n-связных областей на n-листный круг, вообще, отображения одной римановой поверхности на другую.

В теории К. о. и ее приложениях важную роль играют так наз. условия нормировки, или условия единственности, К. о., обеспечивающие выделение одной единственной функции из рассматриваемого бесконечного класса К. о. одной заданной области на другую (в случае односвязных областей) или заданной области на каноническую область определенного типа (в случае областей любой связности). Наиболее употребительные условия нормировки К. о. в случае односвязных областей G_1, G_2 с непустыми границами Γ_1, Γ_2 соответственно, не вырождающимися в точки, таковы: 1) заданная конечная точка $a \in G_1$ переходит в заданную конечную точку $b \in G_2$, причем $\arg f'(a) = \alpha$, где α — наперед заданное действительное число, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ (см. *Римана теорема* о К. о.); 2) заданная точка $a \in G_1$ переходит в заданную точку $b \in G_2$, а заданная *достижимая граничная точка* (или *граничный элемент*) ζ_1 области G_1 переходит в заданную достижимую граничную точку (граничный элемент) ω_1 области G_2 (см. *Конформных отображений граничные свойства*); 3) заданные три различные достижимые граничные точки (граничные элементы) ζ_1, ζ_2, ζ_3 области G_1 переходят соответственно в заданные достижимые граничные точки (граничные элементы) ω_1, ω_2, ω_3 области G_2, при этом, если при движении по Γ_1 от ζ_1 к ζ_3 через ζ_2 область G_1 остается слева (справа), то при движении по Γ_2 от ω_1 к ω_3 через ω_2 область G_2 также должна оставаться слева (соответственно справа). Последними двумя типами нормировок проще всего пользоваться в случае областей, ограниченных замкнутыми жордановыми кривыми, так как в этом случае понятия достижимой граничной точки и граничного элемента области эквивалентны понятию граничной точки области. Об условиях нормировки в случае отображения области произвольной связности на каноническую область сказано выше.

К. о. областей n-мерного евклидова пространства при $n \geqslant 3$ образуют весьма узкий класс так наз. м ё б и у с о в ы х о т о б р а ж е н и й, каждое из к-рых является либо линейным преобразованием подобия, либо композицией такого линейного преобразования подобия и одной *инверсии* (т. е. симметрии относительно нек-рой сферы в пространстве, или преобразования обратных радиусов) (т е о р е м а Л и у в и л л я).

Существенно более обширный класс отображений при $n \geqslant 2$ образуют так наз. *квазиконформные отображения*. При этих отображениях формы бесконечно малых фигур искажаются, но в ограниченных пределах, в частности в ограниченных пределах меняются величины углов, а бесконечно малые шары переходят в бесконечно малые эллипсоиды с ограниченным отношением наибольшей полуоси к наименьшей. Большую роль играют К. о. двумерных областей не только плоских, но и лежащих на гладких поверхностях. Примеры таких К. о. дают *стереографическая проекция* и проекция Меркатора сферы на плоскость. Они были открыты и нашли применение в картографии (см. *Картографии математические задачи*, *Картографическая проекция*). Заметим, что постановка в общем виде задачи о К. о. поверхностей в свое время привела к возникновению и развитию общей теории поверхностей. К. о. имеют обширные применения

в теории функций, теории потенциала, при решении краевых задач для уравнений математической физики, прежде всего при решении первой краевой задачи для уравнений Лапласа и Пуассона.

Конформное отображение некоторых односвязных областей. Растяжения, повороты и параллельные переносы областей комплексной плоскости осуществляют целые линейные функции вида $w=az+b$. Однолистные К. о. полуплоскостей, кругов и внешностей кругов друг на друга осуществляются посредством дробно-линейных функций. При этом каковы бы ни были три различные точки ζ_1, ζ_2, ζ_3 границы одной и той же области G_1 (занумерованные так, что при движении по границе G_1 от ζ_1 к ζ_3 через ζ_2 область G_1 остается слева) и различные точки ω_1, ω_2, ω_3 границы другой такой области G_2 (занумерованные аналогичным образом), существует, и притом единственная, дробно-линейная функция $w=L(z)$, однолистно и конформно отображающая G_1 на G_2 с условиями нормировки третьего типа: $L(\zeta_k)=\omega_k$, $k=1, 2, 3$. Эта функция находится из уравнения

$$\frac{w-\omega_1}{w-\omega_2}:\frac{\omega_3-\omega_1}{\omega_3-\omega_2}=\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}:\frac{\zeta_3-\zeta_1}{\zeta_3-\zeta_2},$$

в к-ром каждый числитель или знаменатель заменяется числом 1, если в его запись должна войти точка $\omega_k=\infty$ или точка $\zeta_k=\infty$. В частности, общий вид отображений единичного круга $D=\{z : |z|<1\}$ на себя:

$$w=L_1(z)=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

а общий вид отображения верхней полуплоскости $P=\{z : \operatorname{Im} z>0\}$ на этот круг:

$$w=L_2(z)=e^{i\alpha}\frac{z-c}{z-\bar{c}}.$$

Здесь a и c — соответственно прообразы точки 0 при этих отображениях, $\alpha=\arg L_1'(a)=\arg L_2'(c)$, $0\leqslant\alpha<2\pi$. Числа a, $|a|<1$, c, $\operatorname{Im} c>0$, и α, $0\leqslant\alpha<2\pi$, могут задаваться произвольно. Таким образом, указанный общий вид однолистных К. о. единичного круга и верхней полуплоскости на единичный круг позволяет легко учитывать условия нормировки первого типа при этих отображениях. Условия нормировки второго типа с $b=0$ при этих же отображениях также легко выполнить, если воспользоваться указанным общим видом с заданным a (или c), после чего остается только подобрать множитель $e^{i\alpha}$ из условия соответствия заданных граничных точек ζ и ω.

Простота выполнения условий нормировки при отображении единичного круга на себя или верхней полуплоскости на себя лежит в основе следующего употребительного приема, с помощью к-рого учитывают условия нормировки при однолистных К. о. произвольных областей G_1, G_2 с непустыми невырожденными границами друг на друга. Именно, обе области G_1 и G_2 каким-либо образом конформно и однолистно отображают на D (или на P) с помощью нек-рых функций $w=f_1(z)$ и $w=f_2(z)$ соответственно, после чего задача об отображении G_1 на G_2 с нек-рыми условиями нормировки сводится к задаче о дробно-линейном отображении $w=L(z)$ круга D (соответственно полуплоскости P) на себя с выполнением соответствующих условий нормировки. Если функция L найдена, то $f(z)=f_2^{-1}(L(f_1(z)))$ решает исходную задачу. Ввиду этого обстоятельства ниже приводятся лишь однолистные К. о. различных областей на единичный круг D или на верхнюю полуплоскость P без каких-либо условий нормировки.

1) Горизонтальную полосу $\{z=x+iy : 0<y<\pi\}$ на верхнюю полуплоскость отображает функция $w=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$. Эта функция каждую горизонталь $y=c$ переводит в луч $\operatorname{Arg} w=c$; каждый вертикальный отрезок $\{x+iy : x=d,\ \alpha\leqslant y\leqslant\beta\}$ — в дугу $\{w : |w|=e^d,\ \alpha\leqslant\operatorname{Arg} w\leqslant\beta\}$.

2) Вертикальную полосу $\{x+iy : -\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\}$ на круг D отображает функция $w=\operatorname{tg} z$. При этом вертикаль $x=c$, $-\frac{\pi}{4}\leqslant c\leqslant\frac{\pi}{4}$, переходит в «меридиан» — дугу окружности с концами i и $-i$, проходящую через точку $w=\operatorname{tg} c$, а горизонтальный отрезок $\{x+iy : -\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4},\ y=d\}$, $-\infty<d<\infty$, переходит в «параллель» — дугу окружности, ортогональную «меридианам», соединяющую левую часть единичной окружности с ее правой частью и проходящую через точку $z=ith\ d$.

3) Полуполоса $\{x+iy : -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ y>0\}$ отображается на P функцией $w=\sin z$. При этом горизонтальные отрезки переходят в дуги эллипсов с фокусами -1, $+1$, а вертикальные — в дуги гипербол с теми же фокусами.

4) Угол $V_\alpha=\{z : 0<\arg z<\alpha\}$, $0<\alpha\leqslant 2\pi$, на угол $V_\beta=\{z : 0<\arg z<\beta\}$, $0<\beta\leqslant 2\pi$ ($V_\pi=P$), отображает функция

$$w=\exp\left\{\frac{\beta}{\alpha}\ln z\right\}=|z|^{\beta/\alpha}\left(\cos\left(\frac{\beta}{\alpha}\arg z\right)+i\sin\left(\frac{\beta}{\alpha}\arg z\right)\right)$$

— однозначная аналитическая ветвь функции $w=z^{\beta/\alpha}$. При этом луч $\arg z=c$ переходит в луч $\arg w=\beta c/\alpha$, дуга окружности $|z|=d$ — в дугу окружности $|w|=d^{\beta/\alpha}$.

5) Внутренность или внешность двуугольника с вершинами a и b ($a\neq b$), образованного двумя дугами окружностей или дугой окружности и отрезком прямой, имеющими общие концы в этих точках, может быть отображена на P следующим образом. Сначала дробно-линейным преобразованием $w_1=(z-a)/(z-b)$ отображают данную область на угол V с вершиной в O, затем поворотом $w_2=e^{i\gamma}w_1$ на нек-рый угол γ переводят V в нек-рый угол V_α (см. п. 4), после чего пользуются преобразованием п. 4 с $\beta=\pi$.

6) Внешность эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ с фокусным расстоянием $c=\sqrt{a^2-b^2}>0$ отображается однозначной аналитической ветвью функции (см. *Жуковского функция*)

$$w=\frac{1}{c}\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right),$$

выделяемой условием $|w|<1$, на круг $|w|<c/(a+b)$, а второй ее ветвью, выделяемой условием $|w|>1$, — на область $|w|>(a+b)/c$. Эти же ветви отображают расширенную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с удаленным отрезком $[-c,\ c]$ соответственно на внутренность и внешность единичной окружности $|z|=1$. Внутренность эллипса нельзя отобразить на D или P посредством композиции элементарных функций; это отображение осуществляется посредством композиции элемеитарных функций и эллиптич. синуса $\operatorname{sn} z$.

7) Часть G плоскости $\mathbb{C}$, заключенная между ветвями гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ с фокусным расстоянием $c=\sqrt{a^2+b^2}$, отображается на P функцией

$$w=\left(e^{-i\gamma}\frac{1}{c}\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)\right)^{\pi/(\pi-2\gamma)},$$

где однозначная аналитич. ветвь функции $t=z+\sqrt{z^2-c^2}$ в области G выделяется условием $\operatorname{Im} t>0$, $\gamma=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$,

$$\zeta^{\pi/(\pi-2\gamma)}=|\zeta|^{\pi/(\pi-2\gamma)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{\pi-2\gamma}\arg\zeta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{\pi-2\gamma}\arg\zeta\right)\right).$$

Внутренность правой ветви этой гиперболы отображается на верхнюю полуплоскость однозначной ветвью аналитич. функции

$$i \operatorname{ch}\left\{\frac{\pi}{2\gamma} \operatorname{arch} \frac{z}{c}\right\},$$

где arch ζ означает (единственное) решение уравнения $\operatorname{ch} \omega = \zeta$, принадлежащее полосе $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ с присоединенной действительной положительной полуосью.

8) Внешность параболы $y^2 = 2px$ отображается на P однозначной аналитич. ветвью функции

$$w = \sqrt{z - \frac{p}{2}} - i\sqrt{\frac{p}{2}},$$

выделяемой условием $\operatorname{Im} w > 0$, т. е. функцией

$$w = \sqrt{\left|z - \frac{p}{2}\right|}\left\{\cos \frac{1}{2} \arg\left(z - \frac{p}{2}\right) + i \sin \frac{1}{2} \arg\left(z - \frac{p}{2}\right)\right\} - i\sqrt{\frac{p}{2}},$$

где значения квадратного корня берутся положительные. Внутренность этой параболы отображает на P однозначная аналитич. функция

$$w = i \operatorname{ch} \pi \sqrt{\frac{z}{2p} - \frac{1}{4}},$$

где

$$\sqrt{\zeta} = \sqrt{|\zeta|}\left(\cos \frac{1}{2} \arg \zeta + i \sin \frac{1}{2} \arg \zeta\right),$$

$$0 \leqslant \arg \zeta < 2\pi.$$

9) Прямоугольник $Q = \{x + iy : -a < x < a,\ 0 < y < b\}$ отображается на P с помощью эллиптич. синуса, а P отображается на Q одной из однозначных аналитич. ветвей функции

$$w = c \int_0^z \{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)\}^{-1/2} d\zeta,$$

где k зависит от отношения a/b, а c — от величины a/K,

$$K = \int_0^1 \{(1 - t^2)(1 - k^2t^2)\}^{-1/2} dt.$$

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Келдыш М. В., «Успехи матем. наук», 1939, т. 6, с. 90—119; [4] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950; [5] Лаврентьев М. А., Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики, М.— Л., 1946; [6] Коппенфельс В., Штальман Ф., Практика конформных отображений, пер. с нем., М., 1963; [7] Лаврик В. И., Савенков В. Н., Справочник по конформным отображениям, К., 1970; [8] Фильчакова В. П., Конформные отображения областей специального типа, К., 1972; [9] Каратеодори К., Конформное отображение, пер. с англ., М.— Л., 1934; [10] Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972; [11] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, 2 изд., М., 1977.

Е. П. Долженко.

КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — взаимно однозначное *конформное отображение*. К. п. в n-мерном, $n > 2$, евклидовом пространстве, образует $(n+1)(n+2)/2$-параметрическую конформную группу.

М. И. Войцеховский.

КОНФОРМНОЕ ПРОСТРАНСТВО M_n — евклидово пространство E_n, дополненное одной несобственной (бесконечно удаленной) точкой. Рассматривается в *конформной геометрии*, в к-рой в этом пространстве задается фундаментальная группа, состоящая из точечных преобразований, переводящих сферы (в M_2 окружности) в сферы. С помощью *стереографической проекции* К. п. M_n отображается на абсолют K_n пространства P_{n+1} с гиперболич. метрикой, а фундамен-

тальная группа конформной геометрии изоморфна группе гиперболич. движений этого P_{n+1}.

Наличие одной несобственной точки обеспечивает взаимную однозначность стереографич. проекции. При преобразованиях конформной группы несобственная точка может переходить в обычную точку. Поэтому в К. п. сфера неразличима с плоскостью. Плоскость — это сфера, проходящая через несобственную точку.

Г. В. Бушманова.

КОНФОРМНО-ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — риманово пространство, допускающее конформное отображение на евклидово пространство. Тензор кривизны К.-е. п. имеет вид

$$R_{ijk}^{\ \ \ l} = 2T^{lm}_{\ \ .. k[i}p_{j]m}, \qquad (*)$$

где

$$T^{km}_{\ \ .. ij} = \delta^k_i\delta^m_j + \delta^k_j\delta^m_i - g^{km}g_{ij},$$
$$p_{ij} = \nabla_i p_j - \frac{1}{2}T^{km}_{\ \ .. ij}p_k p_m.$$

При $n=2$ всякое V_n есть К.-е. п. Для того чтобы пространство при $n>3$ было К.-е. п., необходимо и достаточно, чтобы существовал тензор p_{ij}, удовлетворяющий условиям (*) и $\nabla_{[k}p_{j]l}=0$. Иногда К.-е. п. наз. пространство Вейля, допускающее конформное отображение на евклидово пространство (см. [2]).

Лит.: [1] Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 2, М.—Л., 1948; [2] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976.

Г. В. Бушманова.

КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНАЯ МЕТРИКА на римановой поверхности R — правило, к-рое каждому локальному параметру z, отображающему параметрич. окрестность $U\subset R$ в замкнутую комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ ($z: U\to\overline{\mathbb{C}}$), ставит в соответствие действительную функцию

$$\rho_z : z(U) \longrightarrow [0, +\infty]$$

такую, что для всяких локальных параметров $z_1: U_1\to\overline{\mathbb{C}}$ и $z_2: U_2\to\overline{\mathbb{C}}$ с непустым пересечением $U_1\cap U_2$ в последнем выполнено соотношение

$$\frac{\rho_{z_2}(z_2(p))}{\rho_{z_1}(z_1(p))} = \left|\frac{dz_1(p)}{dz_2(p)}\right| \qquad (\forall p\in U_1\cap U_2),$$

где $z(U)$ — образ U в $\overline{\mathbb{C}}$ при отображении z. К.-и. м. часто обозначается символом $\rho(z)|dz|$, к-рому приписывается указанная инвариантность относительно выбора локального параметра z.

Всякий линейный дифференциал $\lambda(z)\,dz$ или *квадратичный дифференциал* $Q(z)\,dz^2$ порождает К.-и. м. соответственно $|\lambda(z)|\cdot|dz|$ или $|Q(z)|^{1/2}|dz|$. Понятие К.-и. м. позволяет ввести понятие длины для кривых на R, а также понятия экстремальной длины и модуля семейств кривых, являющиеся весьма общей формой определения конформных инвариантов (см. *Экстремальной метрики метод*, а также [1]). Определение К.-и. м. может быть перенесено на римановы многообразия любой размерности.

Лит.: [1] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [2] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957; [3] Альфорс Л., Берс Л., Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, пер. с англ., М., 1961.

П. М. Тамразов.

КОНФОРМНЫЙ РАДИУС области — характеристика конформного отображения односвязной области, определяемая следующим образом. Пусть D — односвязная область плоскости z, имеющая более одной граничной точки. Пусть z_0 — точка D. Если $z_0\neq\infty$, то существует единственная функция $w=f(z)$, регулярная в D, нормированная условиями $f(z_0)=0$, $f'(z_0)=1$ и однолистно отображающая область D на круг $|w|<r$. Радиус $r=r(z_0, D)$ указанного круга

наз. К. р. области D в точке z_0. Если $\infty \in D$, то существует единственная функция $w=f(z)$, регулярная в области D за исключением точки ∞, в окрестности к-рой она имеет разложение в ряд Лорана вида

$$f(z)=z+c_0+c_1z^{-1}+\dots,$$

и однолистно отображающая D на область $|w|>r$. В этом случае величина $r=r(\infty, D)$ наз. К. р. области D в точке ∞. К. р. области D, $\infty \in D$, в точке ∞ равен *трансфинитному диаметру* границы C области D, или *емкости* множества C.

Расширением понятия К. р. области на случай произвольной области D комплексной плоскости z является понятие внутреннего радиуса области D в точке $z_0 \in D$ (в зарубежной литературе термин «внутренний радиус» употребляется и в случае односвязной области). Пусть D — область комплексной плоскости z, z_0 — точка D и пусть существует функция Грина $g(z, z_0)$ области D с полюсом в точке z_0. Пусть γ — постоянная Робэна области D относительно точки z_0:

$$\gamma=\begin{cases}\lim\limits_{z\to z_0}\,[g(z,\,z_0)+\ln|z-z_0|] & \text{при } z_0\neq\infty,\\ \lim\limits_{z\to\infty}\,[g(z,\,\infty)-\ln|z|] & \text{при } z_0=\infty.\end{cases}$$

Величина $r=e^{\gamma}$ наз. внутренним радиусом области D в точке z_0. Если D — односвязная область, граница к-рой содержит не менее двух точек, то внутренний радиус области D в точке $z_0 \in D$ равен К. р. области D в точке z_0. Внутренний радиус области не убывает с расширением области: если области D, D_1 имеют функции Грина $g(z, z_0)$, $g_1(z, z_0)$ соответственно, $z_0 \in D \cap D_1$, и если $D \subset D_1$, то для внутренних радиусов r, r_1 областей D, D_1 в точке z_0 справедливо неравенство

$$r \leqslant r_1.$$

Внутренний радиус произвольной области D в точке $z_0 \in D$ определяется как точная верхняя граница множества внутренних радиусов в точке z_0 всех областей, содержащих z_0, содержащихся в D и имеющих функцию Грина. В соответствии с этим определением, если область D не обладает функцией Грина, то внутренний радиус r области D в точке $z_0 \in D$ равен ∞.

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Смирнов В. И., Лебедев Н. А., Конструктивная теория функций комплексного переменного, М.— Л., 1964; [3] Хейман В. К., Многолистные функции, пер. с англ., М., 1960.

Г. В. Кузьмина.

КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА — свойства функций, конформно отображающих одну область комплексной плоскости на другую, проявляющиеся вблизи границы отображаемой области и на самой границе. К числу таких свойств относятся: возможность непрерывного продолжения функции $w=f(z)$, конформно отображающей рассматриваемую область G_1 на область G_2, в нек-рую точку ζ границы Γ_1 области G_1 или на всю границу Γ_1 этой области; характер разрыва в случае невозможности такого продолжения; наличие конформности продолженного отображения в граничных точках $\zeta \in \Gamma_1$; дифференциально-гладкостные свойства продолженной функции на Γ_1 и на замкнутой области $\bar{G}_1=G_1 \cup \Gamma_1$; принадлежность производной $f'(z)$, $z \in G_1$, отображающей функции к различным классам функций, аналитических в G_1, и т. п. Эти свойства изучаются в зависимости от свойств границ областей G_1 и G_2. Из самых общих К. о. г. с. можно выделить следующее: каковы бы ни были односвязные области G_1 и G_2 и однолистное конформное отображение $w=f(z)$ области G_1 на G_2, это отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между *граничными элементами* этих областей в том смысле,

что класс всех эквивалентных путей, лежащих в области G_1 и определяющих нек-рый граничный элемент ζ области G_1, переходит при этом отображении в класс всех эквивалентных путей, лежащих в области G_2 и определяющих нек-рый граничный элемент ω области G_2 (обратное отображение $z=f^{-1}(w)$, $w\in G_2$, переводит класс эквивалентных путей, определяющих ω, в класс эквивалентных путей, определяющих ζ). При этом в специальной топологии f задает гомеоморфизм области G_2 с присоединенными ее граничными элементами (рассматриваемыми наряду с точками $z\in G_1$ как точки топологич. пространства) на область G_2 с присоединенными граничными элементами. Обычно рассматривается случай, когда одна из областей G_1, G_2 является единичным кругом $D=\{z:|z|<1\}$ (реже полуплоскостью или углом), общий же случай сводится к этому частному случаю.

Пусть $w=f(z)$ — однолистное конформное отображение круга D с границей $C=\{z:|z|=1\}$ на ограниченную односвязную область G с границей Γ, $z=\varphi(w)$ — обратное конформное отображение: $\varphi(f(z))=z$ при $z\in D$. Имеют место следующие результаты.

1) Для того чтобы отображение $w=f(z)$ непрерывно продолжалось в точку $\zeta\in C$, необходимо и достаточно, чтобы граничный элемент области G, соответствующий точке ζ при этом отображении, был граничным элементом 1 рода (т. е. состоял из единственной точки). Для непрерывной продолжимости функции $z=\varphi(w)$ в точку $\omega\in\Gamma$ необходимо и достаточно, чтобы ω входила в состав лишь одного граничного элемента (точнее, в состав лишь одного носителя граничного элемента области G). Если Γ — замкнутая жорданова кривая, то f непрерывно продолжается на C, а φ — на Γ, так что продолженные функции осуществляют взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение (гомеоморфизм) замкнутых областей $\overline{D}$ и $\overline{G}$ друг на друга.

Всюду ниже Γ обозначает жорданову кривую и предполагается, что функции f и φ уже продолжены по непрерывности на C и Γ соответственно.

2) Если Γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая, то граничные функции $f(\zeta)$, $\zeta\in C$, и $\varphi(\omega)$, $\omega\in\Gamma$, являются абсолютно непрерывными. Таким образом, отображения $\omega=f(\zeta)$, $\zeta\in C$, и $\zeta=\varphi(\omega)$, $\omega\in\Gamma$, переводят граничные множества меры нуль в граничные множества меры нуль. Функция $f(z)$ имеет конечную ненулевую производную относительно замкнутого круга $\overline{D}$ почти в каждой точке $\zeta\in\Gamma$, а функция $\varphi(w)$ имеет конечную ненулевую производную почти в каждой точке $\omega\in\Gamma$. Следовательно, эти отображения обладают свойством конформности (т. е. свойством постоянства растяжений и сохранения углов) почти в каждой граничной точке соответствующей области. Функция $f'(z)$ принадлежит классу Харди H^1.

3) Пусть Γ — спрямляемая жорданова замкнутая кривая со свойством: для любой пары различных точек $\omega_1\in\Gamma$, $\omega_2\in\Gamma$ отношение длины меньшей из дуг, на к-рые эти точки разбивают кривую Γ, к расстоянию $|\omega_1-\omega_2|$ между этими точками ограничено сверху некрой величиной d, не зависящей от ω_1 и ω_2. Тогда функция $f(z)$ удовлетворяет на $\overline{D}$ условию Гёльдера порядка $2(1+d)^{-2}$.

4) Пусть Γ — гладкая замкнутая жорданова кривая. Зафиксируем нек-рую точку $\omega_0\in\Gamma$ и при $-\infty<s<\infty$ отложим вдоль Γ дугу длины $|s|$ в положительном (при $s>0$) или отрицательном (при $s<0$) направлении обхода области G. Пусть $\omega(s)$ — конец отложенной дуги, а $\tau(s)$ — угол между положительным направлением действительной оси и положительным направлением касательной в точке $\omega(s)$ (значение угла $\tau(s)$ выбирается так, чтобы функция $\tau(s)$ была непрерывной). Если при нек-ром $p=0, 1, \ldots$ существует производ-

ная $\tau^{(p)}(s)$, удовлетворяющая условию Гёльдера некрого положительного порядка $\alpha<1$, то функция $f^{(p+1)}(z)$ непрерывна и удовлетворяет условию Гёльдера того же порядка α на замкнутом круге $\bar{D}$ и $f'(z)\neq 0$ на $\bar{D}$, а $\varphi^{(p+1)}(w)$ непрерывна и удовлетворяет условию Гёльдера порядка α на $\bar{G}$ и $\varphi'(w)\neq 0$ на $\bar{G}$.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [2] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [3] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [4] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [5] Warschawski S. E., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1961, v. 12, № 4, p. 614—20; [6] Kellogg O. D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1912, v. 13, № 1, p. 109—32; [7] Долженко Е. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1965, т. 29, с. 1069—84.

Е. П. Долженко.

КОН-ФОССЕНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — соответствие между парой изометричных поверхностей F_1 и F_2 и бесконечно малым изгибанием Z так наз. срединной поверхности $F_{\text{ср.}}$: если x_1 и x_2— радиус-векторы поверхностей F_1 и F_2, то радиус-вектор $x_{\text{ср.}}$ поверхности $F_{\text{ср.}}$ равен $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, а поле скоростей z бесконечно малого изгибания Z равно $\frac{1}{2}(x_1-x_2)$; введено С. Э. Кон-Фоссеном [1]. Если F_1 и F_2— гладкие поверхности и если углы между полукасательными τ_1 и τ_2 к соответствующим по изометрии кривым поверхностей F_1 и F_2 меньше π, то $F_{\text{ср.}}$ оказывается гладкой. Этот факт позволяет в ряде случаев сводить исследование изометрии F_1 и F_2 к изучению *бесконечно малых изгибаний* $F_{\text{ср.}}$ Для фиксированной точки M_1 на F_1 (и соответственно M_2 на F_2) К.-Ф. п. определяет преобразование Кэли ортогональной матрицы O, преобразующей касательный пучок на F_1 в изометричный ему пучок на F_2, в кососимметрическую матрицу K, описывающую бесконечно малое изгибание $F_{\text{ср.}}$ Так как O полностью определяется вектором $V=\overset{\circ}{V}\sin\frac{\chi}{2}$ и скаляром $\rho=\cos\frac{\chi}{2}$, где $\overset{\circ}{V}$ — орт оси поворота соответствующих пучков, χ — угол поворота (см. *Поворотов диаграмма*), а K — вектором вращения y, то К.-Ф. п. можно выразить формулой: $y=V/\rho$.

К.-Ф. п. обобщается на случай пространств постоянной кривизны [2].

Лит.: [1] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959; [2] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.

М. И. Войцеховский.

КОНХОИДА кривой — плоская кривая, получающаяся при увеличении или уменьшении радиус-вектора каждой точки данной плоской кривой на постоянный отрезок l. Если уравнение данной кривой в полярных координатах: $\rho=f(\varphi)$, то уравнение ее К. имеет вид: $\rho=f(\varphi)\pm l$. Примеры: К. прямой — *Никомеда конхоида*, К. окружности — *Паскаля улитка*.

Д. Д. Соколов.

КОНЦЕНТРАЦИИ ФУНКЦИЯ случайной величины X — функция $Q(l, X)$, определенная для всех неотрицательных l и случайной величины X соотношением

$$Q(l, X)=\sup_{-\infty<x<\infty}\mathbf{P}\{x\leqslant X\leqslant x+l\}.$$

К. ф. $Q(l, X)$ является неотрицательной, полуаддитивной, монотонно неубывающей функцией при $l\geqslant 0$, непрерывной справа и такой, что

$$\lim_{l\to\infty}Q(l, X)=1.$$

Обратно, любая функция, обладающая этими свойствами, может рассматриваться, как К. ф. нек-рой случайной величины.

К. ф. является удобной характеристикой разброса значений случайной величины, особенно для количест-

венного выражения факта увеличения разброса при суммировании независимых случайных величин. Первая абсолютная, т. е. содержащая лишь абсолютные константы, оценка для концентрации суммы при заданных концентрациях слагаемых была получена А. Н. Колмогоровым [4] методом, развивающим метод П. Леви [2]. В дальнейшем этот результат был усилен (см. [5]); была получена формулировка, включающая в качестве частных случаев все ранее найденные результаты:

$$Q(l, S) \leqslant Cl \left\{ \sum_{i=1}^{n} l_i^2 [1 - Q(l_i, X_i)] \right\}^{-1/2},$$

где

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$X_1, \ldots, X_n$ — совокупность независимых случайных величин, $l \geqslant l_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и C — абсолютная постоянная. Выделены два типа оценок: оценки $Q(l, S)$ локального типа (см. [6]); оценки $Q(l, S)$ интегрального типа (см. [7]).

Двойственной характеристикой разброса, тесно связанной с К. ф., является функция рассеивания случайной величины X:

$$D(q, X) = \inf \{l : Q(l, X) \geqslant q\}$$

при $0 \leqslant q < 1$. Имеет место (см. [8]) следующее неравенство, связывающее К. ф. и характеристич. функцию $f(t)$ случайной величины X:

$$Q(l, X) \leqslant \left(\frac{96}{95}\right)^2 \max\left(l, \frac{1}{a}\right) \int_{|t|<a} |f(t)|\, dt,$$

а также неравенства

$$Q(l, X_1 + X_2) \leqslant Q(l, X_i), \qquad i = 1, 2,$$

где X_1 и X_2 — независимые случайные величины. Имеются попытки перенести нек-рые результаты, касающиеся К. ф. на случай суммирования независимых случайных векторов (см. [9]).

Лит.: [1] Doeblin W., Lévy P., «C. r. Acad. sci.», 1936, t. 202, p. 2027—29; [2] Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoire, 2 ed., P., 1954; [3] Doeblin W., «Bull. sci. math.», 1939, t. 63, p. 23—64; [4] Колмогоров А., «Ann. de l'Inst. H. Poincaré», 1958, t. 16, p. 27—34; [5] Рогозин Б. А., «Теория вероят. и ее примен.», 1961, т. 6, в. 1, с. 103—108; [6] Kesten H., «Math. Scand.», 1969, v. 25, p. 133—44; [7] Рогозин Б. А., «Докл. АН СССР», 1973, т. 211, с. 1067—70; [8] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [9] Esseen C. G., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.», 1968, Bd 9, S. 290—308.

Б. А. Рогозин.

КОНЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА — пропозициональная формула, имеющая вид

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} C_{ij}, \qquad (*)$$

где каждое C_{ij}, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m_i$, есть либо переменная, либо отрицание переменной. К. н. ф. $(*)$ является тавтологией тогда и только тогда, когда для любого i среди $C_{i1}, \ldots, C_{im_i}$ встречаются обе формулы p и $\neg p$ для нек-рой переменной p. Для всякой пропозициональной формулы A можно построить эквивалентную ей К. н. ф. B, содержащую те же переменные, что и A. Такая формула B наз. К. н. ф. формулы A.

С. К. Соболев.

КОНЪЮНКЦИЯ — логическая операция, служащая для образования высказывания «A и B» из высказываний A и B. В формализованных языках К. высказываний A и B обозначается посредством $A\&B$, $A \wedge B$, $A \cdot B$, AB. Высказывания A и B наз. конъюнктивными членами высказывания $A\&B$. Употреблению К. в математической логике соответствует следующая *истинностная таблица* (см. выше).

A	B	$A\&B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

В. Е. Плиско.

КООПЕРАТИВНАЯ ИГРА — нестратегическая игра (см. *Игр теория*), задаваемая тройкой $\langle I, v, H\rangle$, где I — множество (обычно конечное), элементы к-рого наз. игроками, а подмножества $K \subset I$ — коалициями, v — вещественная функция, определенная на множестве коалиций и называемая характеристической функцией игры, H — некоторое подмножество векторов x_I (компоненты x_i к-рых соответствуют игрокам i из I), называемых дележами. К. и. впервые были введены Дж. Нейманом (J. Neumann, 1929) как аппарат кооперативной теории (бескоалиционных) игр.

В классической теории К. и. принимается:

$$H = \{x_I : \sum_{i \in I} x_i = v(I),$$
$$x_i \geqslant v(\{i\}) \quad (i \in I)\}.$$

На множестве H вводится бинарное отношение $\underset{K}{\succ}$ доминирования (предпочтения) дележей по коалиции $K \subset I$.:

$$x_I \underset{K}{\succ} y_I \leftrightarrow \sum_{i \in K} x_i \leqslant v(K),$$
$$x_i > y_i \quad (i \in K).$$

Если $x_I \underset{K}{\succ} y_I$ для нек-рого $K \subset I$, то полагают $x_I \succ y_I$. Относительно этого отношения доминирования формулируются понятия оптимальности дележей.

Значительная часть содержания теории К. п. состоит в разработке понятий оптимальности, в доказательствах их реализуемости для различных частных классов К. и. и фактическом нахождении таких реализаций. К числу принципов оптимальности, разрабатываемых применительно к К. п., относятся: двойная (т. е. внешняя и внутренняя) устойчивость, реализуемая в форме *решений* по Нейману — Моргенштерну (Н—М-решения); недоминируемость дележей (см. *Ядро* в теории игр); устойчивость относительно угроз; устойчивость в смысле минимизации наибольшей неудовлетворенности (см. *Устойчивость* в теории игр), справедливость (см. *Шепли вектор*) и др.

Введение на классе К. п. алгебраич. операций приводит к исчислениям К. и. и к исследованию взаимосвязей между этими операциями и различными принципами оптимальности. Специальному изучению подвергались различные частные классы К. и., описанные ниже.

Простая игра — К. п., в к-рой характеристич. функция v принимает ровно два значения (обычно 0 и 1); при этом коалиции K, на к-рых достигается максимальное значение $v(K)$, наз. выигрывающими. Частным случаем простых игр является взвешенная мажоритарная игра, в к-рой коалиция K является выигрывающей, если $\sum_{i \in K} w_i > c \sum_{i \in I} w_i$, где $w_i (i \in I)$ и $c \in (1/2, 1)$ — некоторые заданные числа.

Сбалансированная игра — К. и., для характеристической функции которой

$$\sum_{K \in \mathfrak{K}} \lambda_K v(K) \leqslant v(I),$$

если семейство коалиций $\mathfrak{K}$ и числа $\lambda_K (K \in \mathfrak{K})$ таковы, что

$$\sum_{K \in \mathfrak{K}} \lambda_K \chi_K(i) = \chi_I(i) \quad \text{для всех} \quad i \in I,$$

где $\chi_K(i) = 1$, если $i \in K$, и 0 в противном случае. Сбалансированные игры и только они имеют непустое c-ядро.

Выпуклая игра — К. и., для характеристич. функции к-рой при K, $L \subset I$

$$v(K) + v(L) \leqslant v(K \cup L) + v(K \cap L). \qquad (*)$$

В выпуклой игре c-ядро непусто и совпадает с единственным Н — М-решением. Если К. и. строго выпуклая (т.е. неравенство (*) строгое), то вектор Шепли является центром тяжести c-ядра.

Игра с квотой — К. и. с характеристич. функцией v, для к-рой существует такой вектор $\omega \in (\omega_i)_{i \in I}$, что $\sum_{i \in I} \omega_i = v(I)$, и для любых игроков $i, j \in I$ $(i \neq j)$ имеет место $v(\{i, j\}) = \omega_i + \omega_j$.

Игра рынка — К. и., порожденная рынком, к-рый понимается как система

$$\langle I,\ \mathbb{R}^m_+,\ \{u^i(x^i)\}_{i \in I},\quad \{a^i\}_{i \in I} \rangle,$$

где I — множество участников рынка (с m товарами), $a^i \in \mathbb{R}^m_+$ — начальный набор товаров i-го участника, $u^i(x^i)$ — функция полезности i-го участника, определенная на $\mathbb{R}^m_+$. На основе этого рынка строится К. и., в к-рой

$$H = \Big\{ y_I : y_i = u^i(x^i) \quad (i \in I),$$
$$x^i \in \mathbb{R}^m_+ \quad (i \in I), \quad \sum_{i \in I} x^i = \sum_{i \in I} a^i \Big\},$$

а характеристич. функция определяется равенством

$$v(K) = \max \Big\{ \sum_{i \in K} u^i(x^i) :$$
$$x^i \in \mathbb{R}^m_+ \ (i \in K), \ \sum_{i \in K} x^i = \sum_{i \in K} a^i \Big\}.$$

Теория классич. К. и. подвергалась обобщениям в различных направлениях (см. также *Неатомическая игра*).

Игры без побочных платежей — нестратегич. игры, задаваемые тройкой $\langle I, v, H \rangle$, где v (в отличие от классических К. и.) — функция, к-рая каждой коалиции K ставит в соответствие множество $v(K)$ векторов x_I, удовлетворяющее условиям: 1) $v(K)$ замкнуто и выпукло; 2) если $x_I \in v(K)$ и $y_i \leqslant x_i$ $(i \in K)$, то $y_I \in v(K)$; 3) если $S \cap K = \varnothing$, то $v(S) \cap v(K) \subset v(S \cup K)$; 4) $v(K) \neq \varnothing$ для всех $K \subset I$; 5) $x_I \in v(I)$ тогда и только тогда, когда $x_I \leqslant y_I$ для нек-рого $y_I \in H$.

Доминирование в игре без побочных платежей определяется следующим образом: $x_I \succ y_I$, если существует такая непустая коалиция $K \subset I$, что

$$x_i > y_i \quad (i \in K) \ \text{и} \ x_I \in v(K).$$

Игра в форме функции разбиения — нестратегическая игра, задаваемая множеством игроков I и функцией v, к-рая каждому разбиению $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_n)$ множества I ставит в соответствие вектор $v^{\mathcal{P}} = (v^{\mathcal{P}}(P_1), \ldots, v^{\mathcal{P}}(P_n))$. Максимальный выигрыш, к-рый может гарантировать себе коалиция K, определяется формулой $u(K) = \min\limits_{\mathcal{P} \in K} v^{\mathcal{P}}(K)$. Дележ в игре в форме функции разбиения определяется как вектор x_I, удовлетворяющий условиям: $x_i \geqslant u(\{i\})$ $(i \in I)$; $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{S \in \mathcal{P}} v^{\mathcal{P}}(S) = \|\mathcal{P}\|$ для нек-рого $\mathcal{P}$. Дележ x_I доминирует дележ y_I по коалиции K, если: $x_i > y_i (i \in K)$; $\sum_{i \in K} x_i \leqslant u(K)$; существует такое $\mathcal{P}$, что $K \in \mathcal{P}$ и $\sum_{i \in I} x_i = \|\mathcal{P}\|$.

Лит.: [1] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [2] Воробьев Н. Н., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, № 2, с. 81—140; [3] Розенмюллер И., Кооперативные игры и рынки, пер. с англ., М., 1974.

Н. Н. Воробьев, А. И. Соболев.

КООРДИНАТЫ — числа, величины, по к-рым находится (определяется) положение какого-либо элемента (точки) в некоторой совокупности (множестве M), например на плоскости поверхности, в пространстве, на многообразии. В ряде разделов математики и физики К. именуются по-другому, напр. К. элемента (вектора) векторного пространства наз. его компонентами, К. в произведении множеств — проекции на один из его сомножителей, в теории относительности системы К.— это системы отсчета, и т. п. Часто встречается ситуация, когда ввести достаточно разумные и удобные К. глобально на всем множестве невозможно (напр., точкам сферы в отличие от плоскости нельзя взаимно однозначно и непрерывно сопоставить пары чисел), и тогда вводят понятие локальных координат. Таково, напр., положение в теории многообразий.

Совокупность К. организуется в с и с т е м у к о о р д и н а т (с и с т е м у о т н е с е н и я, с и с т е м у р е ф е р е н ц и и), или *карту*, причем К. взаимно однозначно соответствуют элементам множества M. В этом — основа м е т о д а к о о р д и н а т, истоками к-рого принято считать работы П. Ферма (P. Fermat, 1636) и Р. Декарта (R. Descartes, 1637). Впрочем, еще Аполлоний Пергский (3—2 вв. до н. э.) определял конич. сечения с помощью того, что сейчас [следуя Г. Лейбницу (G. Leibniz, 1694)] называют К., хотя числовых значений они не имели. Но широта и долгота в «Географии» Птолемея (2 в. н. э.) были уже числовыми К. В 14 в. Н. Орем (N. Oresme) пользовался К. на плоскости для построения графиков, называя долготой и широтой то, что теперь называется абсциссой и ординатой.

Попытки обойтись без введения К. извне, сохранить, так сказать, «чистоту» теории, себя не оправдали [напр., синтетические конструкции *проективных координат*, культивировавшиеся К. Штаудтом (Ch. Staudt, 1847), оказалось возможным заменить простыми алгебраич. эквивалентами, что привело к понятию проективной геометрии над телом]. Впрочем не пропал вкус и, так сказать, к в н у т р е н н е м у с п о с о б у введения К. (в отличие от в н е ш н е г о с п о с о б а привнесения К. извне), основанному на оценке положения координируемого объекта относительно нек-рых, выбранных a priori стандартных подмножеств, напр. линий, поверхностей и т. п. (называемых в этом случае к о о р д и н а т н ы м и л и н и я м и, п о в е р х н о с т я м и и т. п.). Это в особенности относится к множествам, в определении к-рых участвуют числа (напр., метрич. и векторные пространства), т. е. к весьма обширному и практически важному классу математич. объектов, чем и объясняется их широкое распространение.

Среди систем К. точек (т о ч е ч н ы х К.) выделяют т. н. л и н е й н ы е к о о р д и н а т ы, в к-рых координатными линиями служат прямые. Таковы, напр., *декартова прямоугольная система координат*, треугольные К. (см. *Тетраэдральные координаты*), *барицентрические координаты*, *проективные координаты*. Системы К., для к-рых не все координатные линии прямые, наз. криволинейными координатами. Такие К. используются как на плоскости (напр., *полярные координаты*, *эллиптические координаты*, *параболические*

координаты, *биполярные координаты*), так и на поверхностях (*геодезические координаты*, *изотермические координаты* и др.). Многие специальные виды систем криволинейных К. вводятся при использовании сетей линий, отвечающих тем или иным условиям. Из них наиболее важный класс — *ортогональные системы* координат, в к-рых координатные линии пересекаются под прямым углом.

Различные виды К. на плоскости (или на поверхности) обобщаются на случай пространства. Напр., понятие полярных К. на плоскости приводит к понятию полярных К. в пространстве (*сферических координат* и *цилиндрических координат*); понятие биполярных К. на плоскости — к понятиям *тороидальных координат*, *бицилиндрических координат* и биполярных К. в пространстве; понятие эллиптических К. на плоскости — к понятию *эллипсоидальных координат* в пространстве.

Иногда потребности удобства и наглядности приводят к отступлению от равенства количества чисел, являющихся К. точек множества и его размерностью. По тем же причинам допускается нарушение в отдельных точках взаимной однозначности координатного отображения (таковы, напр., полярные К.).

В тех случаях, когда изучаемое многообразие M негомеоморфно области евклидова пространства, бывает удобно использовать избыточные К., в к-рых число К. больше размерности M. Такие К., как правило,— *однородные координаты*.

Часто говорят о К. прямых, плоскостей и других геометрич. объектов, понимая под этим К. в каком-либо пространстве, точками к-рого являются прямые, плоскости и т. д. (см., напр., *Грассмана многообразие*). Равноправие точек и прямых в геометрии двух измерений и равноправие точек и плоскостей в геометрии трех измерений согласно *двойственности принципу* позволяют ввести К., с помощью к-рых могут быть определены положения прямых и плоскостей. Таковы, напр., *тангенциальные координаты*.

Метод К. стал полезным не только на пути алгоритмизации рассуждений (сведению их к вычислениям), но и для обнаружения новых фактов и связей (так, напр., непротиворечивость евклидовой геометрии посредством К. сводится к непротиворечивости арифметики). И хотя ряд разделов математики, напр. *римановa геометрия*, может быть изложен в «бескоординатном» виде, конкретные результаты чаще добываются методом К., а точнее, выбором удобных для данной задачи координатных систем (напр., выразительность ряда задач механики достигается именно в специальных К., в к-рых «разделяются» переменные).

М. И. Войцеховский, А. Б. Иванов.

КОПРЕДСТАВЛЕНИЕ группы — задание группы ее образующими и соотношениями между ними.

КОПРИСОЕДИНЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — представление группы Ли G, контрагредиентное к *присоединенному представлению* Ad этой группы. К. п. действует в пространстве $\mathfrak{g}^*$, дуальном к пространству алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G.

Если G — вещественная матричная группа, т. е. подгруппа в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, то $\mathfrak{g}$ — подпространство в пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ вещественных матриц порядка n.

Пусть $\mathfrak{g}^{\perp}$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{g}$ относительно билинейной формы

$$(X, Y) \mapsto \operatorname{tr} XY \text{ в } \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R}),$$

V — какое-нибудь подпространство в $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$, дополнительное к $\mathfrak{g}^{\perp}$, P — оператор проектирования на V параллельно $\mathfrak{g}^{\perp}$. Тогда $\mathfrak{g}^*$ отождествляется с V и К. п. задается формулой

$$K(g)\, X = P(gXg^{-1}),\ g \in G,\ X \in V.$$

Соответствующее представление алгебры $\mathfrak{g}$ также наз. К. п. В рассматриваемом случае оно имеет вид

$$K(X)\, Y = P(XY - YX),\ X \in \mathfrak{g},\ Y \in V.$$

К. п. играет основную роль в *орбит методе* (см. [2]). Каждая G-орбита Ω в К. п. несет на себе каноническую G-инвариантную гамильтонову структуру (см. *Гамильтонова система*). Другими словами, на каждой орбите Ω имеется однозначно определенная невырожденная G-инвариантная замкнутая дифференциальная 2-форма B_{Ω} (откуда все G-орбиты в К. п. четномерны). Явное выражение для B_{Ω} можно получить следующим образом. Пусть $F \in \mathfrak{g}^*$, Ω — орбита, проходящая через точку F, а ξ и η — касательные векторы к Ω в точке F. Найдутся такие X и Y из $\mathfrak{g}$, что

$$\xi = K(X)F,\ \eta = K(Y)F.$$

Тогда

$$B_{\Omega}(\xi, \eta) = \langle F, [X, Y] \rangle.$$

Для каждого $X \in \mathfrak{g}$ векторное поле $\xi_X(F) = K(X)F$ является гамильтоновым относительно B_{Ω}; в качестве его производящей функции (генератора) можно взять элемент X, рассматриваемый как линейная функция на $\mathfrak{g}^*$.

Стабилизатор точки, орбита которой имеет максимальную размерность в К. п., коммутативен [1]. Возникающие на каждой орбите скобки Пуассона порождают единую скобку Березина, задающую структуру *Ли локальной алгебры* в пространстве гладких функций на $\mathfrak{g}^*$ (см. [3]). Координатное выражение этой скобки имеет вид

$$\{f_1, f_2\} = \sum_{i,j,k} c_{ij}^k x_k \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j},$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Лит.: [1] Bernat P. [и др.], Représentations des groupes de Lie résolubles, P., 1972; [2] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [3] его же, «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 4, с. 57—76. *А. А. Кириллов.*

КОПРОИЗВЕДЕНИЕ семейства объектов категории — понятие, описывающее на языке морфизмов конструкции прямой суммы модулей или разъединенного объединения (букета) множеств. Пусть A_i, $i \in I$,— индексированное семейство объектов категории $\mathfrak{M}$. Объект S, вместе с морфизмами $\sigma_i : A_i \to S$, наз. **копроизведением** семейства A_i, $i \in I$, если для всякого семейства морфизмов $\alpha_i : A_i \to X$, $i \in I$, существует такой единственный морфизм $\alpha : S \to X$, что $\sigma_i \alpha = \alpha_i$, $i \in I$. Морфизмы σ_i наз. **вложениями копроизведения**; К. обозначается $\coprod_{i \in I}^* A_i(\sigma_i)$ или $\coprod_{i \in I}^* A_i$, или $S = A_1 * \ldots * A_n$ в случае $I = \{1, \ldots, n\}$. Морфизм α, входящий в определение К., иногда обозначается $\coprod_{i \in I}^* \alpha_i$ или $(*)_{i \in I} \alpha_i$. К. семейства объектов определено однозначно с точностью до изоморфизма, оно ассоциативно и коммутативно. Понятие К. двойственно понятию *произведения*.

К. пустого семейства объектов является левым нулем (инициальным объектом) категории. В абелевой категории К. часто наз. **прямой суммой семей-**

ства объектов A_i, $i \in I$, и обозначается $\sum_{i \in I} A_i$ или $A_1 \dot{+} \ldots \dot{+} A_n$ в случае $I = \{1, \ldots, n\}$. В большинстве категорий структуризованных множеств К. семейства объектов совпадает со свободным произведением этого семейства и, как правило, требует специального описания. Так, в категории групп К.— это свободное произведение групп, в категориях модулей — прямая сумма модулей и т. д.

В категории с нулевыми морфизмами для К. $S = \Pi^*_{i \in I} A_i(\sigma_i)$ существуют такие однозначно определенные морфизмы $\pi_i : S \to A_i$, что $\sigma_i \pi_i = 1_A$, $\sigma_i \pi_j = 0$. В абелевой категории К. и произведение конечного семейства объектов совпадают.

Лит.: [1] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974. *М. Ш. Цаленко.*

КО-*Н*-ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, двойственное *Н-пространству*.

КОПСЕВДОГАЛИЛЕЕВО ПРОСТРАНСТВО — пространство, двойственное *псевдогалилееву пространству*. Оно является частным случаем *полугиперболического пространства*.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *Л. А. Сидоров.*

КОПСЕВДОЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — пространство, получаемое из псевдоевклидова путем применения принципа двойственности проективного пространства такой же размерности; обозначение ${}^lR^*_n$. К. п. ${}^lR^*_n$ является пространством с проективной метрикой, к-рая вводится в соответствии с общим определением проективных метрик путем выделения абсолюта в соответствующем по размерности проективном пространстве. Проективная метрика псевдоевклидова пространства ${}^lR_n$ определяется абсолютом, состоящим из совокупности $(n-1)$-плоскости и вещественной $(n-2)$-квадрики в этой плоскости, поэтому проективная метрика соответствующего двойственного К. п. ${}^lR^*_n$ определяется двойственным к указанному абсолютом: вещественным (абсолютным) конусом 2-го порядка с точечной вершиной, принимаемой в качестве абсолютной точки. Абсолютный конус делит К. п. ${}^lR^*_n$ на две области, в к-рых скалярный квадрат векторов имеет постоянный знак. Эти области изображают многообразия соответствующих плоскостей псевдоевклидова пространства, двойственного для данного ${}^lR^*_n$. Изотропные плоскости псевдоевклидова пространства изображают точки абсолюта ${}^lR^*_n$. В зависимости от расположения относительно абсолютного конуса и абсолютной точки (вершины) различают четыре типа прямых: эллиптические прямые, пересекающие абсолютный конус в двух мнимо сопряженных точках; гиперболические прямые, пересекающие абсолютный конус в двух вещественных точках; параболические прямые, проходящие через абсолютную точку; изотропные прямые — параболические, к-рые касаются абсолютного конуса.

В соответствующем по принципу двойственности псевдоевклидовом пространстве прямые первых двух типов изображаются пучками плоскостей, пересекающихся соответственно по евклидовым и псевдоевклидовым $(n-2)$-плоскостям, параболические прямые — пучками параллельных плоскостей, а изотропные — пучками плоскостей, пересекающихся по изотропным $(n-2)$-плоскостям.

Расстояние между точками К. п. ${}^lR^*_n$ определяется с учетом двойственного характера этого пространства по отношению к соответствующему псевдоевклидову пространству ${}^lR_n$. Пусть точкам X и $Y \subset {}^lR^*_n$ соответствуют плоскости в ${}^lR_n$ с нормальными уравнениями

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) + u_0 = 0; \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{y}) + v_0 = 0$$

так, что

$$x^0 = \rho u_0,\ x^i = \rho u_i;\ y^0 = \rho v_0,\ y^i = \rho v_i;$$

причем

$$(uEu) = \pm 1,\ (vEv) = \pm 1,$$

где E — линейный оператор, определяющий скалярное произведение в ${}^lR_n$. Расстояние δ между точками $X(x^0, x)$ и $Y(y^0, y)$ определяется соотношением

$$\cos^2 \frac{\delta}{\rho} = \frac{(xEy)^2}{(xEx)(yEy)},$$

где ρ — мнимое или действительное число, называемое радиусом кривизны пространства ${}^lR_n^*$.

В случае, когда плоскости в пространстве ${}^lR_n$, отвечающие точкам X и Y, параллельны, за расстояние между точками принимается расстояние d между этими параллельными плоскостями:

$$d = |y^0 - x^0|, \quad \text{когда } (xEx) > 0,$$

$$d = i\,|y^0 - x^0|, \quad \text{когда } (xEx) < 0.$$

Геометрия на различных типах прямых пространства ${}^lR_n^*$ определяется типом проективной метрики на этих прямых. Так, гиперболич. прямая несет на себе проективную метрику гиперболич. пространства и т. д.

За величину угла между двумя плоскостями в К. п. ${}^lR_n^*$ принимается нормированное расстояние между соответствующими им по принципу двойственности точками псевдоевклидова пространства ${}^lR_n$. Угол между двумя плоскостями равен нормированному расстоянию между точками этих плоскостей, являющихся полюсами $(n-2)$-плоскости их пересечения относительно квадрик, высекаемых абсолютным конусом на данных плоскостях, причем во всех случаях определяется тот угол, к-рый не содержит абсолютной точки. В частности, в пространстве ${}^1R_2^*$ угол между двумя прямыми равен нормированному расстоянию между такими двумя точками данных прямых, к-рые вместе с точкой пересечения этих прямых гармонически делят точки пересечения с абсолютными прямыми.

Движениями К. п. ${}^lR_n^*$ наз. такие его преобразования, к-рые индуцируются движениями двойственного ему псевдоевклидова пространства. Движения К. п. ${}^lR_n^*$ описываются (как и движения псевдоевклидова пространства ${}^lR_n$) псевдоортогональными операторами индекса l.

Вследствие двойственного характера свойств плоскостей ${}^1R_2^*$ и ${}^1R_2$ геометрия плоскости ${}^1R_2^*$ может быть получена из геометрии плоскости ${}^1R_2$, в частности геометрия треугольника в плоскости ${}^1R_2^*$. Основные соотношения между длинами сторон и величинами углов выражаются формулами, аналогичными для треугольников в коевклидовой плоскости (см. *Коевклидово пространство*), но с применением гиперболич. функций вместо соответствующих тригонометрических.

Пусть в треугольнике ABC внутренний угол B содержит абсолютную точку. Между длинами сторон a, b, c и величинами углов $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ имеют место соотношения

$$b = a + c,$$

$$\frac{\hat{A}}{\operatorname{sh}\frac{a}{\rho}} = \frac{\hat{B}}{\operatorname{sh}\frac{b}{\rho}} = \frac{\hat{C}}{\operatorname{sh}\frac{c}{\rho}},$$

$$\hat{A}^2 = \hat{B}^2 + \hat{C}^2 - 2\hat{B}\hat{C}\operatorname{ch}\frac{a}{\rho}.$$

На плоскости ${}^1R_2^*$ метрика расстояний является гиперболической проективной, а метрика углов — пара-

болической. В 3-пространстве ${}^1R_3^*$ проективная метрика на плоскости является гиперболической, на прямой — эллиптической, а метрика в пучках плоскостей — параболической (псевдоевклидовой) метрикой.

К. п.— предельный случай гиперболических пространств.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969; [2] Яглом И. М., Розенфельд Б. А., Ясинская Е. У., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 5, с. 51—113.

Л. А. Сидоров.

КОРАЗМЕРНОСТЬ — 1) К. (или факторразмерность) подпространства L в векторном пространстве V — размерность факторпространства V/L; она обозначается $\operatorname{codim}_V L$ или просто $\operatorname{codim} L$ и совпадает с размерностью прямого дополнения к L в V. Справедливо равенство

$$\dim L+\operatorname{codim} L=\dim V.$$

Если M и N — два подпространства в V, имеющие конечные К., то $M\cap N$ и $M+N$ также имеют конечные К., причем

$$\operatorname{codim}(M+N)+\operatorname{codim}(M\cap N)=\operatorname{codim} M+\operatorname{codim} N.$$

2) К. подмногообразия N в дифференцируемом многообразии M — К. касательного подпространства $T_x(N)$ в касательном пространстве $T_x(M)$ в точке $x\in N$. Если M и N конечномерны, то

$$\operatorname{codim} N=\dim M-\dim N.$$

Если M и N — дифференцируемые многообразия, L — подмногообразие в N, $f: M\to N$ — дифференцируемое отображение, трансверсальное подмногообразию L, то

$$\operatorname{codim} f^{-1}(L)=\operatorname{codim} L.$$

3) К. алгебраического подмногообразия (или аналитического пространства) Y в алгебраическом многообразии (аналитическом пространстве) X — разность

$$\operatorname{codim} Y=\dim X-\dim Y.$$

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] его же, Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов, пер. с франц., М., 1975; [3] Голубицкий М., Гийемин В., Устойчивые отображения и их особенности, пер. с англ., М., 1977.

В. Е. Говоров, А. Ф. Харшиладзе.

КОРАССЛОЕНИЕ — тройка (X, i, Y), где X, Y — топологич. пространства, $i: X\to Y$ — вложение, обладающее следующим свойством существования продолжающей гомотопии для полиэдров: для любых полиэдра K, отображения $f: Y\to K$ и гомотопии

$$F: X\times[0,\ 1]\to K$$

с

$$F|\,(X\times\{0\})=f\circ i$$

существует гомотопия

$$G: Y\times[0,\ 1]\to K$$

с

$$G\circ(i\times id)=F,$$

где

$$(i\times id): X\times[0,\ 1]\to Y\times[0,\ 1].$$

Если это свойство выполнено для любых топологич. пространств, то К. (X, i, Y) наз. парой Борсука (впрочем, термин «К.» употребляется и в смысле «пара Борсука»). Пространство $Y/i(X)$ наз. кослоем К. (X, i, Y). Цилиндрическая конструкция превращает любое непрерывное отображение в К. и позволяет построить последовательность

$$X\to Y\to Y/i(X)\to C_1\to C_2\to\dots$$

топологич. пространств, в к-рой $C_1 \sim SX$ (SX — *надстройка* над X) — кослой отображения $Y \to Y/i(X)$, превращенного в К., $C_2 \sim SY$ — кослой отображения $Y/i(X) \to C_1$ и т. д. Если (X, i, Y) — К. пунктированных пространств, то для любого пунктированного полиэдра K индуцированная последовательность

$$[X, K] \leftarrow [Y, K] \leftarrow [Y/i(X), K] \leftarrow [C_1, K] \leftarrow \dots$$

есть точная последовательность пунктированных множеств; здесь все члены, начиная с четвертого,— группы, а начиная с седьмого,— абелевы группы.

Лит.: [1] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971.

А. Ф. Харшиладзе.

КОРЕНЬ — 1) К. степени n из числа a — число $x = \sqrt[n]{a}$, n-я степень x^n к-рого равна a.

2) К. алгебраического уравнения над полем K

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

— элемент $c \in K$, к-рый после подстановки его вместо x обращает уравнение в тождество. К. этого уравнения наз. также и К. многочлена

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Если c является К. многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится без остатка на $x-c$ (см. *Безу теорема*). Всякий многочлен $f(x)$ с действительными или комплексными коэффициентами имеет, по крайней мере, один, вообще говоря, комплексный К. Многочлен $f(x)$ можно записать в виде

$$f(x) = a_0(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_n),$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — К. многочлена $f(x)$. Если среди К. $c_1, c_2, \dots, c_n$ многочлена $f(x)$ встречаются равные, то общее их значение наз. кратным корнем.

3) К. из единицы — элемент поля k, удовлетворяющий уравнению $x^m = 1$ при нек-ром натуральном m. К. из единицы образуют подгруппу в мультипликативной группе поля k. Обратно, любая конечная подгруппа мультипликативной группы поля k состоит из К. из единицы и является циклической. В частности, такова подгруппа U_n всех К. из единицы заданной степени n, содержащихся в алгебраич. замыкании $\bar{k}$ поля k, т. е. всех $\zeta \in \bar{k}$, удовлетворяющих уравнению $\zeta^n = 1$. Если n взаимно просто с характеристикой поля k (или эта характеристика равна 0), то порядок группы U_n равен n и образующие этой группы наз. первообразными корнями степени n из единицы. Число таких корней в группе U_n равно значению функции Эйлера $\varphi(n)$, т. е. числу вычетов по модулю n, взаимно простых с n. В поле характеристики $p > 0$ не существует К. из единицы степени p, отличных от 1.

В случае, когда поле k конечно порождено над своим простым подполем, число К. из единицы, содержащихся в k, конечно.

В поле комплексных чисел число z является К. из единицы степени n тогда и только тогда, когда $|z| = 1$ и $\arg z = 2\pi m/n$ с целыми m и n, т. е. когда

$$z = e^{2\pi im/n} = \cos\frac{2\pi m}{n} + i\sin\frac{2\pi m}{n};$$

при этом первообразные К. выделяются условием $(m, n) = 1$. На комплексной плоскости К. из единицы степени n лежат в вершинах правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность, что объясняет связь К. из единицы с задачей о делении круга.

К. из единицы появляются в теории чисел в качестве значений ряда важных теоретико-числовых функций (абелевы числовые характеры, символ Лежандра, функция Мёбиуса, символ нормменного вычета и т. д.). В теории полей и алгебраич. теории чисел важную роль играют поля, получаемые присоединением К. из единицы

к нек-рому основному полю (см. *Круговое поле*, *Круговое расширение*, *Куммера расширение*).

Лит.: [1] Ван-дер-Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

Л. В. Кузьмин.

КОРНА НЕРАВЕНСТВО — неравенство для вектор-функций $v_i(x^j)$, $i, j=1, \ldots, n$, и их производных, определенных в нек-рой ограниченной области A пространства $\mathbb{R}^n$:

$$\int_A \sum_{i,\,j=1}^{n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right)^2 dx + \int_A \sum_{k=1}^{n} v_k^2 \geqslant c \| v \|_1^2, \qquad (1)$$

где

$$\| v \|_1 = \int_A \left\{ \sum_{i,\,j=1}^{n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} \right)^2 + \sum_{k=1}^{n} v_k^2 \right\} dx. \qquad (2)$$

К. н. справедливо и для вектор-функций из пространства $H_1(A)$, полученного пополнением пространства $C^1(A)$ по норме (2). Иногда неравенство (1) наз. в т о р ы м К. н., а п е р в ы м К. н. считается неравенство (1) без второго слагаемого в левой части.

К. н. предложено А. Корном (A. Korn, 1908) для получения априорной оценки решения неоднородных уравнений теории упругости.

Лит.: [1] Фикера Г., Теоремы существования в теории упругости, пер. с англ., М., 1974.

М. И. Войцеховский.

КОРНЕВАЯ СИСТЕМА — конечное множество R векторов векторного пространства V над полем $\mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами: 1) R не содержит нулевого вектора и порождает V; 2) для каждого $\alpha \in R$ существует такой элемент α^* сопряженного к V пространства V^*, что $\alpha^*(\alpha)=2$ и что эндоморфизм $s_\alpha : x \longmapsto x-\alpha^*(x)\alpha$ пространства V переводит R в себя; 3) $n(\alpha, \beta)=\beta^*(\alpha) \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha, \beta \in R$.

Впервые наборы векторов, обладающие перечисленными свойствами, возникли в теории полупростых комплексных алгебр Ли как системы весов присоединенного представления максимального тора такой алгебры (см. *Вес* представления, *Ли полупростая алгебра*). Позже было обнаружено, что такие системы векторов естественно появляются и во многих других разделах математики, напр. в алгебраической геометрии [4], [7], в теории особенностей [7], в теории целочисленных квадратичных форм [5]. С К. с. оказались также связанными нек-рые вопросы теории чисел [6].

Общие свойства К. с. Эндоморфизм s_α является *отражением* относительно α и определен свойствами 1) и 2) однозначно. Кег α^* является множеством неподвижных точек эндоморфизма s_α и $s_\alpha(\alpha)=-\alpha$. Элементы из R наз. к о р н я м и К. с. R, $\dim V$ — р а н г о м. К. с. R наз. п р и в е д е н н о й, если для любого $\alpha \in R$ вектор $-\alpha$ является единственным корнем, коллинеарным с α. Множество $R^*=\{\alpha^* | \alpha \in R\}$ есть К. с. в V^*, для к-рой $\alpha^{**}=\alpha$ при всех $\alpha \in R$; она наз. д у а л ь н о й (или о б р а т н о й) К. с. к R. Конечная группа $A(R)$, образованная всеми автоморфизмами пространства V, переводящими R в себя, наз. г р у п п о й а в т о м о р ф и з м о в К. с. R. Подгруппа $W(R)$ в $A(R)$, порожденная отражениями s_α, $\alpha \in R$, наз. г р у п п о й В е й л я К. с. R. Если V — прямая сумма своих подпространств V_i, $i=1, \ldots, l$, и R_i — К. с. в V_i, то $R=\bigcup_{i=1}^{l} R_i$ — К. с. в V, она наз. п р я м о й с у м м о й К. с. R_i. Непустая К. с. R наз. н е п р и в о д и м о й, если R не является прямой суммой двух непустых К. с. Всякая К. с. является прямой суммой некоторого набора неприводимых К. с. и это разложение определено однозначно с точностью до порядка слагаемых.

Связные компоненты множества $V - \bigcup_{\alpha \in R} \mathrm{Ker}\, \alpha^*$ являются открытыми симплициальными конусами и наз. камерами К. с. R в V (см. *Камера*). Группа Вейля действует просто транзитивно на множестве всех камер. Замыкание $\bar{C}$ камеры C является фундаментальной областью дискретной группы $W(R)$. Пусть $L_1, \ldots, L_r$ — стенки камеры C. Для каждой стенки L_i существует единственный корень α_i такой, что $L_i = \mathrm{Ker}\, \alpha_i^*$ и α_i лежит по ту же сторону от L_i, что и C. Семейство корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ образует базис в V, который наз. базисом К. с., определенным камерой C. Говорят также, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — набор простых корней, определенный камерой C. Группа $W(R)$ порождена отражениями s_{α_i}, $i = 1, \ldots, r$, причем $(s_{\alpha_i} s_{\alpha_j})^{m_{ij}} = 1$, где m_{ij} — порядок $s_{\alpha_i} s_{\alpha_j}$, — система определяющих соотношений для $W(R)$, так что $W(R)$ — *Кокстера группа*. Группа $A(R)$ есть полупрямое произведение подгруппы всех элементов из $A(R)$, оставляющих множество $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ инвариантным, и $W(R)$.

Выбор камеры C определяет отношение порядка в V (согласованное со структурой векторного пространства), при к-ром положительными считаются линейные комбинации простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ с неотрицательными коэффициентами. Всякий корень оказывается либо положительным, либо отрицательным, а все его координаты в базисе $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — целочисленными. Подгруппа $Q(R)$ в V, порожденная К. с. R, является решеткой (т. е. дискретной подгруппой ранга r), инвариантной относительно группы Вейля $W(R)$. Ее элементы наз. радикальными весами К. с. R. Группы Вейля К. с. могут быть охарактеризованы среди всех дискретных линейных групп, порожденных отражениями, как такие, к-рые не имеют ненулевых неподвижных векторов и обладают инвариантной решеткой. Если $Q(R)$ рассматривать как группу параллельных переносов пространства V, то полупрямое произведение $W_a(R)$ группы $W(R)$ на $Q(R)$ наз. аффинной группой Вейля К. с. R. $W_a(R)$ является дискретной группой преобразований пространства V, порожденной отражениями в гиперплоскостях

$$L_{\alpha, k} = \{v \in V \mid \alpha^*(v) = k\},$$

где $\alpha \in R$, $k \in \mathbb{Z}$. Факторпространство пространства V по $W_a(R)$ компактно; если R неприводима, то фундаментальной областью для $W_a(R)$ будет симплекс.

На V может быть выбрана (неоднозначно) билинейная симметрическая положительно определенная форма $(,)$, инвариантная относительно $W(R)$. Эта форма снабжает V структурой евклидова пространства, в к-ром элементы из $W(R)$ являются ортогональными преобразованиями, а отражение s_α, $\alpha \in R$, имеет для всех $x \in V$ вид

$$s_\alpha(x) = x - 2(x, \alpha)\,\alpha/(\alpha, \alpha).$$

С помощью формы $(\ ,\ )$ пространства V и V^* могут быть отождествлены, и тогда $\alpha^* = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$, а условие 3) определения К. с. означает, что $n(\alpha, \beta) = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta) \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha, \beta \in R$.

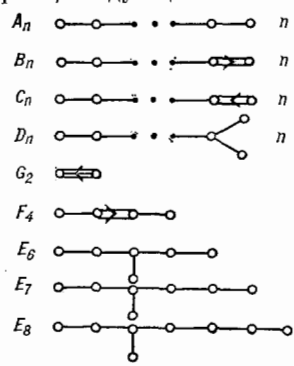
Введение формы $(,)$ позволяет говорить о метрических соотношениях между корнями, в частности об угле между корнями и о длине корня. Величина угла оказывается не зависящей от выбора формы $(,)$, а если К. с. R неприводима, то это верно и для отношения длин двух корней.

Классификация К. с. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — некоторый фиксированный базис приведенной К. с. R и $n_{ij} = n(\alpha_i, \alpha_j)$. Матрица $\|n_{ij}\|$, $1 \leqslant i, j \leqslant r$, наз. матрицей Картана К. с. R; в ней $n_{ii} = 2$, а n_{ij} при $i \neq j$ могут быть равны 0, -1, -2 или -3. С точностью до перестановки индексов эта матрица не зависит от выбора бази-

са. Две К. с. с одинаковыми матрицами Картана изоморфны.

С К. с. обычно связывают граф Кокстера К. с., вершинами к-рого служат элементы базиса $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, причем вершины α_i и α_j соединены одним, двумя, тремя ребрами или не соединены вовсе в случаях, когда произведение $n_{ij}n_{ji}$ равно соответственно 1, 2, 3 или 0. К. с. неприводима тогда и только тогда, когда ее граф Кокстера связен. Граф Кокстера определяет лишь углы между парами корней базиса; по нему не восстанавливается матрица Картана (но восстанавливается группа Вейля): существуют дуальные неизоморфные К. с. с одинаковыми графами Кокстера. Однако матрица Картана (а с ней и К. с.) полностью определяется ориентированным графом Кокстера, наз. также схемой простых корней К. с. R. Ориентация вводится по правилу: если простые корни α_i и α_j не ортогональны и имеют разную длину, то на двух или трех ребрах, соединяющих i-ю и j-ю вершины, ставится знак неравенства $>$, ориентированный в сторону вершины, отвечающей корню меньшей длины. В нек-рых случаях над каждой вершиной графа Кокстера надписывают число, пропорциональное квадрату длины соответствующего корня (с общим для всех корней коэффициентом пропорциональности); по такому взвешенному графу также однозначно восстанавливается К. с.

Полный список попарно неизоморфных неприводимых приведенных К. с., заданных своими схемами простых корней, следующий:

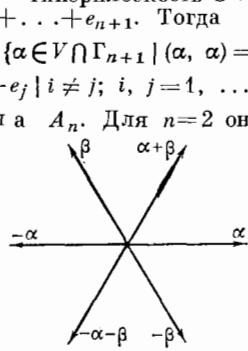


Конструкция неприводимых К. с. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$, $(,)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, для к-рого $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, и Γ_n — решетка в $\mathbb{R}^n$, порожденная векторами $e_1, \ldots, e_n$.

1) Пусть V — гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$, ортогональная вектору $e_1 + \ldots + e_{n+1}$. Тогда

$$R = \{\alpha \in V \cap \Gamma_{n+1} \mid (\alpha, \alpha) = 2\} =$$
$$= \{e_i - e_j \mid i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n+1\}$$

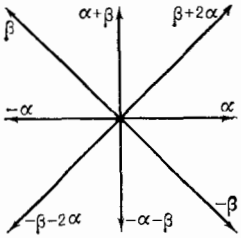
есть К. с. типа A_n. Для $n=2$ она имеет вид



2) Множество векторов

$$\{\alpha \in \Gamma_n \mid (\alpha, \alpha) = 1 \text{ или } 2\} =$$
$$= \{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j \mid i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n\}$$

в $\mathbb{R}^n$ есть К. с. типа B_n. Для $n=2$ она имеет вид



3) К. с. типа C_n дуальна системе B_n и состоит из векторов

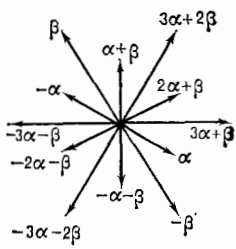
$$\{\pm e_i \pm e_j,\ \pm 2e_i \mid i \neq j;\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n\}.$$

4) Множество векторов

$$\{\alpha \in \Gamma_n \mid (\alpha,\ \alpha)=2\} = \{\pm e_j \pm e_j \mid i \neq j;\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n\}$$

в $\mathbb{R}^n$ есть К. с. типа D_n.

5) К. с. типа G_2 имеет вид



и может быть описана как множество целых алгебраич. чисел кругового поля, порожденного кубич. корнем из единицы с нормой 1 или 3.

6) Множество векторов

$$\left\{\pm e_i,\ \pm e_i \pm e_j,\ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) \mid i \neq j;\right.$$
$$\left. i,\ j=1,\ \ldots,\ 4\right\}$$

в $\mathbb{R}^4$ есть К. с. типа F_4.

7) Множество векторов

$$\left\{\pm e_i \pm e_j,\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{m(i)}e_i\right\},$$

где

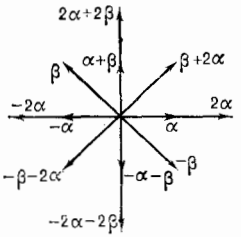
$$\left\{\sum m(i) \equiv 0 \bmod 2 \mid i \neq j;\ i,\ j=1,\ \ldots,\ 8\right\}$$

в $\mathbb{R}^8$ есть К. с. типа E_8.

8) К. с. типа E_6 может быть получена как пересечение К. с. типа E_8 с подпространством в $\mathbb{R}^8$, натянутым на $e_1,\ \ldots,\ e_6$.

9) К. с. типа E_7 может быть получена как пересечение К. с. типа E_8 с подпространством в $\mathbb{R}^8$, натянутым на $e_1,\ \ldots,\ e_7$.

10) В каждой размерности $n \geqslant 1$ существует ровно одна (с точностью до изоморфизма) неприведенная неприводимая К. с. BC_n. Она есть объединение указанных выше К. с. B_n и C_n. Для $n=2$ такая система имеет вид



Об аффинных К. с. см. [6].

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли..., пер. с франц., М., 1972; [2] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [3] Стейнберг Р., Лекции о группах Шевалле, пер. с англ., М., 1975; [4] Манин Ю. И., Кубические формы, М., 1972; [5] Milnor J., Husemoller D., Symmetric bilinear forms, B.—Hdlb.—N. Y., 1973; [6] Макдональд И. Г., «Математика», 1972, т. 16, № 4, с. 3—49; [7] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 5, с. 3—65. *В. Л. Попов.*

КОРНЕВОЙ ВЕКТОР линейного преобразования A векторного пространства V над полем k — вектор $v \in V$, лежащий в ядре линейного преобразования $(A-\lambda E)^n$, где $\lambda \in k$, n — целое положительное число, зависящее от A и v. Число λ будет непременно собственным значением преобразования A. Если при этом $(A-\lambda E)^{n-1}v \neq 0$, то говорят, что v — К. в. высоты n, принадлежащей λ.

Понятие К. в. обобщает понятие собственного вектора преобразования A: собственные векторы — это в точности К. в. высоты 1. Множество V_λ К. в., принадлежащих фиксированному собственному значению λ, является линейным подпространством в V, инвариантным относительно A. Оно наз. корневым подпространством, принадлежащим собственному значению λ. К. в., принадлежащие различным собственным значениям, линейно независимы; в частности, $V_\lambda \cap V_\mu = 0$, если $\lambda \neq \mu$.

Пусть V конечномерно. Если все корни характеристич. многочлена преобразования A лежат в k (напр., когда k алгебраически замкнуто), то V раскладывается в прямую сумму различных корневых подпространств:

$$V = V_\alpha \oplus V_\beta \oplus \ldots \oplus V_\delta. \qquad (*)$$

Это разложение является частным случаем весового разложения векторного пространства V относительно расщепляемой нильпотентной алгебры Ли L линейных преобразований: алгеброй L в этом случае служит одномерная подалгебра, порожденная преобразованием A в алгебре Ли всех линейных преобразований пространства V (см. *Вес* представления).

Если в нек-ром базисе матрица преобразования A является *жордановой матрицей*, то компоненты разложения (*) могут быть описаны следующим образом: корневое подпространство V_λ есть линейная оболочка множества тех векторов базиса, к-рые отвечают жордановым клеткам с собственным числом λ.

Лит.: [1] Воеводин В. В., Линейная алгебра, М., 1974; [2] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 3 изд., М., 1970. *В. Л. Попов.*

КОРНИША — ФИШЕРА РАЗЛОЖЕНИЕ — асимптотическое разложение разности между соответствующими квантилями нормального распределения и какого-либо близкого к нему распределения по степеням малого параметра; изучено Э. Корнишем и Р. Фишером [1]. Если $F(x, t)$ — функция распределения, зависящая от параметра t, $\Phi(x)$ — функция нормального распределения с параметрами (0, 1), причем $F(x, t) \to \Phi(x)$ при $t \to 0$, то при определенных условиях на $F(x, t)$ К.— Ф. р. функции $x = F^{-1}[\Phi(z), t]$ (F^{-1} — функция, обратная к F) имеет вид

$$x = z + \sum_{i=1}^{m-1} S_i(z)\, t^i + O(t^m), \qquad (1)$$

где $S_i(z)$ — некоторые многочлены от z. Аналогично определяется К.— Ф. р. функции $z = \Phi^{-1}[F(x, t)]$ (Φ^{-1} — функция, обратная к Φ) по степеням x:

$$z = x + \sum_{i=1}^{m-1} Q_i(x)\, t^i + O(t^m), \qquad (2)$$

где $Q_i(x)$ — некоторые многочлены от x. Формула (2) получается при разложении функции Φ^{-1} в ряд Тейлора в точке $\Phi(x)$ и использовании Эджворта разложения. Разложение (1) является обращением формулы (2).

Если X — случайная величина с функцией распределения $F(x,\ t)$, то величина $Z=Z(X)=\Phi^{-1}[F(X,\ t)]$ имеет нормальное распределение с параметрами (0, 1) и, как следует из (2), функция распределения величины

$$\tilde{Z}=X+\sum_{i=1}^{m-1} Q_i(X)\,t_i$$

лучше аппроксимируется при $t\to 0$ функцией $\Phi(x)$, чем функция $F(x,\ t)$. Если X имеет нулевое математич. ожидание и единичную дисперсию, то первые члены разложения (1) имеют следующий вид

$$x=z+[\gamma_1 h_1(z)]+[\gamma_2 h_2(z)+\gamma_1^2 h_3(z)]+\ldots,$$

где $\gamma_1=\varkappa_3/\varkappa_2^{3/2}$, $\gamma_2=\varkappa_4/\varkappa_2^2$, $\varkappa_r$ есть r-й семиинвариант X, $h_1(z)=\frac{1}{6}H_2(z)$, $h_2(z)=-\frac{1}{36}[2H_3(z)+H_1(z)]$, $H_r(z)$ — многочлены Эрмита, определяемые соотношением

$$\varphi(z)\,H_r(z)=(-1)^r\frac{d^r\varphi(z)}{dz^r}\quad(\varphi(z)=\Phi'(z)).$$

О разложениях для величин с предельными законами из семейства распределений Пирсона см. [3]. См. также *Случайных величин преобразование.*

Лит.: [1] Cornish E. A., Fisher R. A., «Rev. Inst. internat. statist.», 1937, v. 5, p. 307—20; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [3] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, с. 129—55.

В. И. Пагурова.

КОРНЮ СПИРАЛЬ, клотоида, клофоида,— плоская трансцендентная кривая (см. рис.), натуральное уравнение к-рой имеет вид

$$r=\frac{a}{s},$$

где r — радиус кривизны, $a=\text{const}$, s — длина дуги. Параметрические уравнения:

$$x=\int_0^s \cos\frac{s^2}{2a}\,ds,\quad y=\int_0^s \sin\frac{s^2}{2a}\,ds.$$

К. с. касается оси абсцисс в начале координат. Асимптотические точки: $M_1(\sqrt{\pi a}/2,\ \sqrt{\pi a}/2)$ и $M_2(-\sqrt{\pi a}/2,\ -\sqrt{\pi a}/2)$.



К. с. иногда наз. спиралью Эйлера по имени Л. Эйлера (L. Euler), у к-рого она впервые встречается (1744). Начиная с работ А. Корню (A. Cornu, 1874) К. с. широко используется в практике расчета дифракции света.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

КОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА — задача определения решения $z=R(u)$ из метрического пространства Z (с расстоянием $\rho_Z(\cdot,\cdot)$) по исходным данным u из метрического пространства U (с расстоянием $\rho_U(\cdot,\cdot)$), для к-рой выполнены следующие условия: а) для всякого $u\in U$ существует решение $z\in Z$; б) решение определяется однозначно; в) задача устойчива на пространствах $(Z,\ U)$: для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для любых $u_1,\ u_2\in U$ из неравенства $\rho_U(u_1,\ u_2)\leqslant\delta(\varepsilon)$ следует неравенство $\rho_Z(z_1,\ z_2)\leqslant\varepsilon$, где $z_1=R(u_1)$, $z_2=R(u_2)$.

Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному из перечисленных условий корректности, наз. *некорректными задачами.*

КОРРЕЛОГРАММА временно́го ряда $x_1,\ \ldots,\ x_T$ — совокупность серпальных (выборочных)

коэффициентов корреляции

$$r_t = \frac{\frac{1}{T-t}\sum_{s=1}^{T-t}(x_s-\overline{x})(x_{s+t}-\overline{x})}{\frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T}(x_s-\overline{x})^2}, \quad t=1, 2, \ldots,$$

где $\overline{x}$ — выборочное среднее ряда

$$\overline{x} = \frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T} x_s.$$

Иногда К. наз. график r_t как функции от t. К. является эмпирической мерой статистической связи между членами последовательности $\{x_t\}$. В анализе временны́х рядов К. используется для статистич. выводов о вероятностной модели, предлагаемой для описания и объяснения наблюдаемой последовательности данных.

Т е о р е т и ч е с к о й К. иногда наз. нормированную *корреляционную функцию* (стационарной) случайной последовательности $\{X_t\}$:

$$\rho_t = \frac{\operatorname{cov}(X_s, X_{s+t})}{\mathsf{D}(X_s)}, \quad t=1, 2, \ldots,$$

где

$$\operatorname{cov}(X_s, X_{s+t}) = \mathsf{E}(X_s - \mathsf{E}X_s)(X_{s+t} - \mathsf{E}X_{s+t})$$

— ковариация случайных величин X_s, X_{s+t}, а $\mathsf{D}(X_s)$ — дисперсия случайной величины X_s. Если рассматривать $\{x_t\}$ как реализацию случайной последовательности $\{X_t\}$, то выборочная К. $\{r_t\}$ при достаточно общих предположениях дает состоятельные и асимптотически нормальные оценки для теоретической К. $\{\rho_t\}$ (см. [3]).

Хотя описания стационарной случайной последовательности в корреляционных и спектральных терминах с математич. точки зрения эквивалентны, в статистич. анализе временны́х рядов области применений корреляционных и спектральных методов разделяются в зависимости от исходного материала и конечной цели анализа. Если спектральный анализ дает представление о наличии и интенсивностях периодич. компонент временно́го ряда, то корреляционные методы удобнее применять при исследовании статистич. связей между последовательными значениями наблюдаемых данных. В статистич. практике методы, основанные на К., используются обычно в тех случаях, когда есть основания предполагать наличие достаточно простой стохастич. модели (авторегрессия, скользящие средние или смешанная модель авторегрессии и скользящих средних невысоких порядков), порождающей данный временно́й ряд (напр., в эконометрии). В таких моделях теоретическая К. $\{\rho_t\}$ обладает выраженной особенностью (обращение в нуль для всех достаточно больших значений t в модели скользящих средних, экспоненциальное убывание с возможной осцилляцией в моделях авторегрессии), наличие подобной особенности у выборочной К. может служить указанием на ту или иную гипотетическую вероятностную модель. Для проверки согласия и оценки параметров выбранной модели разработаны статистические методы, основанные на распределениях сериальных коэффициентов корреляции.

Лит.: [1] А н д е р с о н Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [2] К е н д а л л М., С т ь ю а р т А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] Х е н н а н Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974. *А. С. Холево.*

КОРРЕЛЯЦИИ КОЭФФИЦИЕНТ — числовая характеристика совместного распределения двух случайных величин, выражающая их взаимосвязь. К. к. $\rho = \rho(X_1, X_2)$ для случайных величин X_1 и X_2 с математич. ожиданиями $a_1 = \mathsf{E}X_1$ и $a_2 = \mathsf{E}X_2$ и ненулевы-

ми дисперсиями $\sigma_1^2 = \mathsf{D}X_1$ и $\sigma_2^2 = \mathsf{D}X_2$ определяется равенством

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\mathsf{E}(X_1 - a_1)(X_2 - a_2)}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

К. к. для X_1 и X_2 совпадает с *ковариацией* для нормированных величин $(X_1 - a_1)/\sigma_1$ и $(X_2 - a_2)/\sigma_2$. К. к. симметричен относительно X_1 и X_2 и инвариантен относительно изменения начала отсчета и масштаба. При этом $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$. Значение К. к. как одной из возможных мер взаимосвязи определяется следующими его свойствами: 1) если величины X_1 и X_2 независимы, то $\rho(X_1, X_2) = 0$ (обратное утверждение в общем случае неверно), о величинах, для к-рых $\rho = 0$, говорят, что они некоррелированы; 2) $|\rho| = 1$ тогда и только тогда, когда величины связаны линейной функциональной зависимостью:

$$X_2 = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1 - a_1) + a_2.$$

Трудность интерпретации ρ как меры взаимозависимости заключается в том, что равенство $\rho = 0$ может иметь место как для независимых, так и для зависимых случайных величин, в общем случае для независимости необходимо и достаточно равенство нулю их *максимального коэффициента корреляции*. Таким образом, К. к. не исчерпывает все виды связи между случайными величинами и является лишь мерой линейной зависимости. При этом степень линейной зависимости характеризуется следующим образом: величина

$$\hat{X}_2 = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1 - a_1) + a_2$$

дает линейное представление X_2 по X_1, наилучшее в том смысле, что

$$\mathsf{E}(X_2 - \hat{X}_2)^2 = \min_{c_1,\ c_2} \mathsf{E}(X_2 - c_1 X_1 - c_2)^2,$$

см. также *Регрессия*. Характеристиками корреляции между несколькими случайными величинами служат *частный коэффициент корреляции* и *множественный коэффициент корреляции*. О способах проверки гипотез независимости и исследования корреляции с помощью К. к. см. *Корреляция*.

А. В. Прохоров.

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ МАТРИЦА — матрица коэффициентов корреляции нескольких случайных величин. Если $X_1, \ldots, X_n$ — случайные величины с ненулевыми дисперсиями $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$, то элементы ρ_{ij} при $i \neq j$ равны *корреляции коэффициентам* $\rho(X_i, X_j)$, а при $i = j$ равны 1. Свойства К. м. P определяются свойствами *ковариационной матрицы* Σ в силу соотношения: $\Sigma = BPB$, где B — диагональная матрица с диагональными элементами $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

А. В. Прохоров.

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ действительного случайного процесса $\{X(t);\ t \in T\}$ — функция аргументов $t,\ s \in T$, определяемая равенством

$$B(t, s) = \mathsf{E}[X(t) - \mathsf{E}X(t)][X(s) - \mathsf{E}X(s)].$$

Для того чтобы К. ф. была определена, следует предположить, что процесс $X(t)$ при всех $t \in T$ имеет конечный второй момент $\mathsf{E}X(t)^2$. Параметр t пробегает здесь некоторое подмножество T действительной прямой и обычно интерпретируется как «время», однако совершенно аналогично определяется К. ф. случайной функции, заданной на множестве произвольной природы, в частности К. ф. случайного поля, когда T — подмножество конечномерного пространства. Если $X(t) = [X_1(t), \ldots, X_n(t)]$ — многомерный случайный процесс (случайная функция), то его К. ф. наз. матричнозначная функция

$$B(t, s) = \|B_{ij}(t, s)\|_{i,\ j=1}^{n},$$

где

$$B_{ij}(t, s) = \mathsf{E}[X_i(t) - \mathsf{E}X_i(t)][X_j(s) - \mathsf{E}X_j(s)]$$

— взаимная корреляционная функция процессов $X_i(t)$, $X_j(t)$.

К. ф. является важной характеристикой случайного процесса. Если $X(t)$ — *гауссовский процесс*, то его К. ф. $B(t, s)$ и среднее значение $\mathsf{E}X(t)$ (т. е. первые и вторые моменты) однозначно определяют конечномерные распределения, а значит и процесс в целом. В общем случае первых двух моментов заведомо недостаточно для полного описания случайного процесса. Напр., одинаковую К. ф. $B(t, s)=e^{-a|t-s|}$ имеют гауссовский марковский стационарный процесс, траектории к-рого непрерывны, и так наз. телеграфный сигнал — точечный марковский стационарный процесс, принимающий два значения ± 1. Однако К. ф. определяет ряд важных свойств процесса — так наз. свойства второго порядка (т. е. выражающиеся в терминах вторых моментов). В силу этого, а также благодаря своей относительной простоте, корреляционные методы широко используются как в теории случайных процессов, так и в ее статистич. приложениях (см. *Корелограмма*).

Скорость и характер убывания корреляций при $|t-s| \to \infty$ дают представление об эргодических свойствах процесса. Условия на скорость убывания корреляций в той или иной форме присутствуют в предельных теоремах для случайных процессов. Локальные свойства 2-го порядка, такие как среднеквадратичные непрерывность, дифференцируемость, дают полезную, хотя и весьма грубую характеристику локального поведения процесса. Исследование свойств траекторий в терминах К. ф. с большой полнотой проведено в гауссовском случае (см. *Выборочная функция*). Одним из наиболее завершенных разделов теории случайных процессов является теория линейной экстраполяции и фильтрации, позволяющая находить оптимальные линейные алгоритмы прогноза и аппроксимации случайных процессов, основываясь на знании К. ф.

Характеристическим свойством К. ф. является положительная определенность:

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} c_i\overline{c}_j B(t_i,\ t_j) \geqslant 0$$

для любого n, любых комплексных $c_1, \ldots, c_n$ и любых $t_1, \ldots, t_n \in T$. В наиболее важном случае стационарного в широком смысле процесса $B(t, s)$ зависит от разности аргументов: $B(t, s)=R(t-s)$. Условие положительной определенности принимает тогда вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i\overline{c}_j R(t_i-t_j) \geqslant 0.$$

Если $R(t)$ дополнительно непрерывна при $t=0$ (что соответствует среднеквадратичной непрерывности процесса $X(t)$), то

$$R(t)=\int e^{it\lambda} F(d\lambda),$$

где $F(d\lambda)$ — положительная конечная мера; здесь λ пробегает всю действительную прямую, если $T=(-\infty, \infty)$ (случай «непрерывного времени»), или отрезок $[-\pi, \pi]$, если $T=\{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ (случай «дискретного времени»). Мера $F(d\lambda)$ наз. спектральной мерой случайного процесса. Таким образом, корреляционные и спектральные свойства стационарного случайного процесса оказываются тесно связанными; напр., скорость убывания корреляций при $t \to \infty$ соответствует степени гладкости спектральной плотности $f(\lambda)=F(d\lambda)/d\lambda$ и т. п.

В статистической механике К. ф. наз. также совместная плотность вероятности $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ нахождения m различных частиц рассматриваемой системы в точках $x_1, \ldots, x_m$; совокупность этих функций однозначно определяет соответствующее точечное случайное поле

Лит.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, М., 1965. *А. С. Холево.*

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ в статистической механике — функция, описывающая влияние частиц или групп частиц друг на друга и эффекты взаимодействия подсистем рассматриваемой системы.

В классической статистич. механике К. ф. $G_2(1, 2)$, $G_3(1, 2, 3)$, ... определяются соотношениями

$$F_2(1, 2)=F_1(1)F_1(2)+G_2(1, 2),$$

$$F_3(1,2,3)=F_1(1)F_1(2)F_1(3)+F_1(1)G_2(2, 3)+F_1(2)G_2(1, 3)+ +F_1(3)G_2(1, 2)+G_3(1, 2, 3), \ldots,$$

где символами 1, 2, ... в аргументах функций обозначена совокупность координат $\mathbf{r}$ и импульсов $\boldsymbol{p}$ соответственно 1-й, 2-й, ... частицы, $F_s(1, \ldots, s)$ — приведенные функции распределения

$$F_s(1, 2, \ldots, s)=V^{\circ}\left(1-\frac{1}{N}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(1-\frac{s-1}{N}\right)\int D_t d\,(s+1)\ldots dN,$$

V — объем системы, N — число частиц, $D_t=D_t(1, 2, \ldots, N)$ — функция распределения в фазовом пространстве в момент времени t с нормировкой

$$\int D_t(1, 2, \ldots, N)\, d1\ldots dN=1.$$

Закон изменения D_t во времени характеризуется уравнением Лиувилля $\partial D_t/\partial t=\Lambda D_t$, в к-ром Λ представляет не зависящий явно от времени оператор Лиувилля. Обычно рассматривается случай, когда Λ состоит из суммы аддитивной части и бинарной части, характеризующей взаимодействия между частицами:

$$\Lambda=\sum\nolimits_{1\leqslant j\leqslant N}\Lambda(j)+\sum\nolimits'_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant N}\Lambda(j_1, j_2).$$

Согласно принципу ослабления корреляции К. ф. удовлетворяют граничным условиям $G_s(1, 2, \ldots, s)\to 0$ при $\max\{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|, \ldots, |\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_s|, \ldots, |\mathbf{r}_{s-1}-\mathbf{r}_s|\}\to\infty$.

К. ф. $G_1(1)=F_1(1)$, $G_2(1, 2)$, ..., $G_3(1, \ldots, s)$ являются функциональными производными функционала

$$G_s(1, 2, \ldots, s)=\left(\frac{\delta^s A_t(u)}{\delta u(1)\,\delta u(2)\ldots\delta u(s)}\right)_{u=0}$$

$A_t(u)$, связанного с так наз. производящим функционалом

$$L_t(u)=\int\left\{\prod\nolimits_{1\leqslant j\leqslant N}\left(1+\frac{\mathbf{v}}{N}u(j)\right)\right\}D_t\,d1\ldots dN$$

соотношением

$$L_t(u)=e^{A_t(u)}.$$

Функционал $A_t(u)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial A_t(u)}{\partial t}=\int u(1)\Lambda(1)\frac{\delta A_t(u)}{\delta u(1)}\,d1+\frac{1}{2}\int\left\{u(1)\,u(2)+ +\frac{N}{\mathbf{V}}u(1)+\frac{N}{V}u(2)\right\}\Lambda(1, 2)\left\{\frac{\delta A_t(u)}{\delta u(1)}\frac{\delta A_t(u)}{\delta u(2)}+ +\frac{\delta^2 A_t(u)}{\delta u(1)\,\delta u(2)}\right\}d1\,d2.$$

В квантовой статистич. механике К. ф. являются операторными величинами и определяются соотношениями:

$$F_2(1, 2)=S(1, 2)\{F_1(1)F_1(2)\}+G_2(1, 2),$$

$$F_3(1, 2, 3)=S(1, 2, 3)\{F_1(1)F_1(2)F_1(3)\}+ +\frac{1}{2}S(1, 2, 3)\{F_1(1)G_2(2, 3)+F_1(2)\,G_2(1, 3)+ +F_1(3)\,G_2(1, 2)\}+G_3(1, 2, 3), \ldots, \qquad (*)$$

где $S(1, 2)$, $S(1, 2, 3)$ — операторы симметризации для бозе-систем и антисимметризации для ферми-систем. К. ф. (*), наз. матрицей плотности, удовлетворяет квантовомеханич. уравнению Лиувилля (см. [2]).

В квантовой статистич. механике помимо К. ф. (*) рассматриваются К. ф., построенные на обычных термодинамических средних (см. [3]), и К. ф., построенные на квазисредних (см. [3]).

Билинейные комбинации К. ф. (как квантовые, так и классические) дают функции Грина (см. [5]). Для К. ф. справедливы спектральные представления, Боголюбова неравенство, вариации среднего значения теорема (см. [4]).

Иногда используют К. ф., соответствующие так наз. разложению Кирквуда (см. [6]); пространственно-временную К. ф. (см. [8]).

К. ф. могут быть интерпретированы как характеристики вероятностных мер (см. [9]).

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, М.— Л., 1946; [2] Боголюбов Н. Н., Гуров К. П., «Ж. экспериментальной и теоретич. физики», 1947, т. 17, в. 7, с. 614—28; [3] Боголюбов Н. Н., Избранные труды, т. 3, К., 1971; [4] Боголюбов Н. Н., (мл.), Садовников Б. И., Некоторые вопросы статистической механики, М., 1975; [5] Боголюбов Н. Н., Тябликов С. В., «Докл. АН СССР», 1959, т. 126, № 1, с. 53—56; [6] Либов Р., Введение в теорию кинетических уравнений, пер. с англ., М., 1974; [7] Исихара А., Статистическая физика, пер. с англ., М., 1973; [8] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [9] Престон К. Дж., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1977.

А. Н. Ермилов, А. М. Курбатов.

КОРРЕЛЯЦИОННОЕ ОТНОШЕНИЕ — характеристика зависимости между случайными величинами. Именно, К. о. случайной величины Y по случайной величине X называется выражение

$$\eta^2_{Y|X}=1-\mathsf{E}\left[\frac{\mathsf{D}(Y|X)}{\mathsf{D}Y}\right],$$

где $\mathsf{D}Y$ — дисперсия Y, $\mathsf{D}(Y|X)$ — условная дисперсия Y при данном X, характеризующая рассеяние Y около условного математич. ожидания $\mathsf{E}(Y|X)$ при данном значении X. Всегда $0\leqslant\eta^2_{Y|X}\leqslant 1$. Равенство $\eta^2_{Y|X}=0$ соответствует некоррелированным случайным величинам; $\eta^2_{Y|X}=1$ тогда и только тогда, когда имеется точная функциональная связь между Y и X; в случае линейной зависимости Y от X К. о. совпадает с квадратом коэффициента корреляции. К. о. несимметрично относительно X и Y, поэтому наряду с $\eta^2_{Y|X}$ рассматривается $\eta^2_{X|Y}$ — К. о. X по Y, определяемое аналогичным образом. Между $\eta^2_{Y|X}$ и $\eta^2_{X|Y}$ нет какой-либо простой зависимости. См. также *Корреляция*.

А. В. Прохоров.

КОРРЕЛЯЦИЯ — зависимость между случайными величинами, не имеющая, вообще говоря, строго функционального характера. В отличие от функциональной зависимости К., как правило, рассматривается тогда, когда одна из величин зависит не только от данной другой, но и от ряда случайных факторов. Зависимость между двумя случайными событиями проявляется в том, что условная вероятность одного из них при наступлении другого отличается от безусловной вероятности. Аналогично, влияние одной случайной величины на другую характеризуется условными распределениями одной из них при фиксированных значениях другой. Пусть X и Y — случайные величины с заданным совместным распределением вероятностей, m_X и m_Y — математич. ожидания X и Y, σ^2_X и σ^2_Y — дисперсии X и Y, ρ — коэффициент К. между X и Y. Если для каждого возможного значения $X=x$ определено условное математич. ожидание $y(x)=\mathsf{E}[Y\mid X=x]$ величины Y, то

функция $y(x)$ наз. *регрессией* величины Y по X, а ее график — линией регрессии Y по X. Зависимость Y от X проявляется в изменении средних значений Y при изменении X, хотя при каждом фиксированном значении $X=x$ величина Y остается случайной величиной с определенным рассеянием. Для выяснения вопроса, насколько точно регрессия передает изменение Y при изменении X, используется условная дисперсия Y при данном значении $X=x$ или ее средняя величина (мера рассеяния Y около линии регрессии)

$$\sigma^2_{Y\mid X}=\mathsf{E}\,[Y-\mathsf{E}\,(Y\mid X=x)]^2.$$

Если X и Y независимы, то все условные математич. ожидания Y не зависят от x и совпадают с безусловным: $y(x)=m_Y$, при этом $\sigma^2_{Y|X}=\sigma^2_Y$. При точной функциональной зависимости Y от X величина Y при каждом данном $X=x$ принимает лишь одно определенное значение и $\sigma^2_{Y|X}=0$. Аналогично определяется $x(y)=\mathsf{E}[X|Y=y]$ — регрессия X по Y. Естественным показателем концентрации распределения вблизи линии регрессии $y(x)$ служит *корреляционное отношение*

$$\eta^2_{Y\mid X}=1-\sigma^2_{Y\mid X}/\sigma^2_Y.$$

Величина $\eta^2_{Y|X}=0$ тогда и только тогда, когда регрессия имеет вид $y(x)=m_Y$, в этом случае коэффициент К. ρ равен 0 и величина Y не коррелирована с X. Если регрессия Y по X линейна, т. е. линия регрессии — прямая

$$y(x)=m_Y+\rho\,\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X),\ \text{то}\ \sigma^2_{Y|X}=\sigma^2_Y(1-\rho^2)\ \text{и}\ \eta^2_{Y\ X}=\rho^2;$$

если, кроме того, $|\rho|=1$, то Y связана с X точной линейной зависимостью, если же $\eta^2_{Y|X}=\rho^2<1$, то между Y и X нет функциональной зависимости. Точная функциональная зависимость Y от X, отличная от линейной, имеет место тогда и только тогда, когда $\rho^2<\eta^2_{Y\ X}=1$. Практическое использование коэффициента К. в качестве меры отсутствия зависимости справедливо (за редким исключением) лишь тогда, когда совместное распределение X и Y нормально (или близко к нормальному распределению), так как в этом случае из равенства $\rho=0$ следует независимость X и Y. Использование ρ как меры зависимости для произвольных случайных величин X и Y приводит часто к ошибочным выводам, так как ρ может равняться 0 даже при функциональной зависимости между величинами. Если двумерное распределение X и Y нормально, то обе линии регрессии суть прямые и ρ полностью определяет концентрацию распределения вблизи линий регрессии: при $|\rho|=1$ прямые регрессии сливаются в одну, что соответствует линейной зависимости между X и Y, при $\rho=0$ величины независимы.

При изучении связи между несколькими случайными величинами $X_1, \ldots, X_n$ с заданным совместным распределением пользуются множественными и частными корреляционными отношениями и коэффициентами К. Последние вычисляются с помощью обычных коэффициентов К. между X_i и X_j, в совокупности образующих *корреляционную матрицу*. Мерой линейной связи между X_1 и совокупностью всех остальных величин $X_2, \ldots, X_n$ служит *множественный коэффициент корреляции*. Если взаимосвязь величин X_1 и X_2 предположительно определяется влиянием остальных величин $X_3, \ldots, X_n$, то показателем линейной связи между X_1 и X_2 при исключении влияния $X_2, \ldots, X_n$ является *частный коэффициент корреляции* X_1 и X_2 относительно $X_2, \ldots, X_n$.

О мерах К., основанных на *ранговых статистиках*, см. ст. *Кендалла коэффициент ранговой корреляции*, *Спирмена коэффициент ранговой корреляции*.

В математич. статистике разработаны методы оценки коэффициентов, характеризующих К. между случайными величинами или признаками, и методы проверки гипотез об их значениях, использующие их выборочные аналоги. Совокупность таких методов наз. корреляционным анализом. Корреляционный анализ статистич. данных заключает в себе следующие основные практич. приемы: 1) построение корреляционного поля и составление корреляционной таблицы; 2) вычисление выборочных корреляционных отношений или коэффициентов К.; 3) проверка статистич. гипотезы значимости связи. Дальнейшее исследование может заключаться в установлении конкретного вида зависимости между величинами (см. *Регрессия*).

Вспомогательными средствами при анализе выборочных двумерных данных являются корреляционное поле и корреляционная таблица. При нанесении на координатную плоскость выборочных точек получают корреляционное поле. По характеру расположения точек поля можно составить предварительное мнение о форме зависимости случайных величин (напр., о том, что одна величина в среднем возрастает или убывает при возрастании другой). Для численной обработки результаты обычно группируют и представляют в форме корреляционной таблицы. В каждой клетке этой таблицы приводятся численности n_{ij} тех пар (x, y), компоненты к-рых попадают в соответствующие интервалы группировки по каждой переменной. Предполагая длины интервалов группировки (по каждому из переменных) равными между собой, выбирают центры x_i (соответственно y_j) этих интервалов и числа n_{ij} в качестве основы для расчетов.

Более точную информацию о характере и силе связи, чем картина корреляционного поля, дают коэффициент К. и корреляционное отношение. Выборочный коэффициент корреляции определяется по формуле

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_i \sum_j (x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y}) n_{ij}}{\sqrt{\sum_i n_{i\cdot} (x_i - \overline{x})^2} \sqrt{\sum_j n_{\cdot j} (y_j - \overline{y})^2}},$$

где

$$n_{i\cdot} = \sum_j n_{ij}, \quad n_{\cdot j} = \sum_i n_{ij}$$

и

$$\overline{x} = \frac{\sum_i n_{i\cdot} x_i}{n}, \quad \overline{y} = \frac{\sum_j n_{\cdot j} y_j}{n}.$$

При большом числе независимых наблюдений, подчиненных одному и тому же распределению, близкому к нормальному, $\hat{\rho}$ близок к истинному коэффициенту К. ρ. Во всех других случаях в качестве характеристики силы связи рекомендуется использовать корреляционное отношение, интерпретация к-рого не зависит от вида исследуемой зависимости. Выборочное значение $\hat{\eta}^2_{Y|X}$ вычисляется по данным корреляционной таблицы:

$$\hat{\eta}^2_{Y|X} = \frac{\frac{1}{n}\sum_i n_{i\cdot} (\overline{y}_i - \overline{y})^2}{\frac{1}{n}\sum_j n_{\cdot j} (y_j - \overline{y})^2},$$

где числитель характеризует рассеяние условных средних значений $\overline{y}_i$ около безусловного среднего $\overline{y}$ (аналогично определяется выборочное значение $\hat{\eta}^2_{X|Y}$). Величина $\hat{\eta}^2_{Y|X} - \hat{\rho}^2$ используется в качестве индикатора отклонения регрессии от линейной.

Проверка гипотезы значимости связи основывается на распределениях выборочных корреляционных характеристик. В случае нормального распределения величина выборочного коэффициента К. $\hat{\rho}$ считается значимо отличной от нуля, если выполняется неравенство

$$(\hat{\rho})^2 > \left[1 + \frac{n-2}{t_\alpha^2}\right]^{-1},$$

где t_α есть критическое значение t-распределения Стьюдента с $(n-2)$ степенями свободы, соответствующее выбранному уровню значимости α. В случае $\rho \neq 0$ обычно используют так наз. z-преобразование Фишера, заменяя величину $\hat{\rho}$ на z по формуле

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\hat{\rho})}{1-\hat{\rho}}.$$

Уже при сравнительно небольших n распределение величины z хорошо приближается нормальным распределением с математич. ожиданием, равным

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-1)},$$

и дисперсией, равной $1/(n-3)$. Исходя из этого, можно определить приближенные интервалы для истинного коэффициента К. ρ.

О распределении выборочного корреляционного отношения и о способах проверки гипотез о линейности регрессии см. [3].

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Ван-дер-Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [4] Айвазян С. А., Статистическое исследование зависимостей, М., 1968.

А. В. Прохоров.

КОРРЕЛЯЦИЯ, дуальное преобразование,— взаимно однозначное отображение $\varkappa$ проективного пространства Π_n на себя такое, что из $S_p \subset S_q$ следует $\varkappa(S_p) \supset \varkappa(S_q)$. При К. образом суммы подпространств является пересечение их образов и, наоборот, образом пересечения является сумма образов, в частности образ точки — гиперплоскость, а образ гиперплоскости — точка. Для существования К. пространства $\Pi_n(K)$ над телом K необходимо и достаточно, чтобы в K существовал инверсный автоморфизм: взаимно однозначное отображение $\alpha : K \to K$, при к-ром $\alpha(k_1+k_2)=\alpha(k_1)+\alpha(k_2)$, $\alpha(k_1k_2)=\alpha(k_2)\alpha(k_1)$; в этом случае $\Pi_n(K)$ оказывается двойственным самому себе. Примерами пространств, для к-рых существует К., являются вещественные ($K=\mathbb{R}$, $\alpha=id$), комплексные ($K=\mathbb{C}$, $\alpha : z \to \bar{z}$), кватернионные ($K=\mathbb{H}$, $\alpha : Q \to \bar{Q}$) проективные пространства.

Пусть Π_n интерпретируется как совокупность линейных подпространств (левого) линейного пространства $A^l_{n+1}(K)$ над телом K; полубилинейной формой на A_{n+1} наз. функция $f_\alpha(x, y)$, зависящая от инверсного автоморфизма α тела K и обладающая следующими свойствами:

$$f_\alpha(x+y, z) = f_\alpha(x, z) + f_\alpha(y, z),$$
$$f_\alpha(x, y+z) = f_\alpha(x, y) + f_\alpha(x, z),$$
$$f_\alpha(kx, y) = k f_\alpha(x, y),$$
$$f_\alpha(x, ky) = \alpha(k) f_\alpha(x, y).$$

В частности, если $\alpha=id$, то $f_\alpha(x, y)$ наз. билинейной формой,— напр., если $K=\mathbb{R}$; в случае $K=\mathbb{C}$ и $\alpha : z \to \bar{z}$, то f_α наз. эрмитовой; если же $K=\mathbb{H}$ и $\alpha : Q \to \bar{Q}$, то f_α наз. симплектической. Тогда для любого $x \in A^l_{n+1}(K)$ образ К. $\varkappa(x)$ совпадает с совокупностью решений x уравнения $f_\alpha(x, X)=0$

(говорят также, что каждая К. $\varkappa$ представима полубилинейной формой $f_\alpha(x, y)$ — теорема Биркгофа — Неймана).

Подпространство W наз. нулевым относительно К. $\varkappa$, если $\varkappa(P)\supset P$ для любой точки $P\in W$. Если $\varkappa$ представима формой $f_\alpha(x, y)$, то $f_\alpha(x, x)=0$ для всех $x\in W$ (в частности, $f_\alpha(x, y)=-f_\alpha(y, x)$). Напр., строго изотропное подпространство (т. е. подпространство U такое, что $U\subset\varkappa(U)$) является нулевым, причем на нем $f(U, U)\equiv 0$; нулевая прямая либо неизотропна, либо строго изотропна. Все максимальные нулевые подпространства К. $\varkappa$ имеют одну и ту же размерность. Если $w=\Pi_n$, то К. наз. нульполярной (нулевой) и является (симплектическим) *поляритетом*.

Обобщение понятия К.— дуальное отображение $\varkappa$ проективных пространств: $\Pi_n(K)\to\widetilde{\Pi}_n(L)$ — взаимно однозначное отображение такое, что если $Y\subset X\in\Pi_n$, то $\varkappa(X)\subset\varkappa(Y)\in\widetilde{\Pi}_n$; оно существует, если есть инверсный изоморфизм $\alpha: K\to L$. Напр., пусть $L=K^*$ — совокупность элементов K, в к-рой операции сложения и умножения определены следующим образом: $x\overset{*}{+}y=x+y$, $x\overset{*}{\cdot}y=y\cdot x$ (см. *Проективная алгебра*, конструкция II). Тогда K^* — тело, инверсно изоморфное K; если $\Pi_n(K)$ — левое, то $\widetilde{\Pi}_n(K^*)$ — правое проективные пространства, и они канонически двойственны друг другу.

М. И. Войцеховский.

КОРТЕВЕГА — де ФРИСА УРАВНЕНИЕ, КдФ-уравнение,— уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0;\quad x,\ t\in\mathbb{R}^1,\ u(x,\ t)\in\mathbb{R}^1,$$

предложено Д. Кортевегом и Г. де Фрисом [1] для описания распространения волн на мелкой воде. Оно может быть проинтегрировано с помощью метода обратной задачи теории рассеяния, к-рый основан на представлении К.— де Ф. у. в виде

$$\frac{\partial L}{\partial t}=[L,\ M]=LM-ML,$$

где $L=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u(x,\ t)$ — одномерный оператор Шрёдингера, а

$$M=4\frac{\partial^3}{\partial x^3}-3\left(u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}u\right).$$

Для К.— де Ф. у. однозначно разрешима задача Коши в классе быстроубывающих функций с начальным условием: $u(x)\in S(\mathbb{R}^1)$ (здесь $S(\mathbb{R}^1)$ — пространство Шварца). Пусть

$$s=\{r(k)\in S(\mathbb{R}^1);\ \varkappa_j,\ m_j>0,\ \varkappa_{j_1}\neq\varkappa_{j_2}\text{ при }j_1\neq j_2,$$
$$j=1,\ \ldots,\ n\}$$

— данные рассеяния для оператора Шрёдингера с потенциалом $u(x)$.

Тогда

$$r(k,\ t)=e^{8ik^3t}r(k),\ m_j(t)=e^{8\varkappa_j^3 t}m_j,\ \varkappa_j(t)=\varkappa_j,$$

и решение $u(x, t)$ определяется по данным рассеяния $s(t)$ с помощью нек-рого интегрального уравнения. В случае $r(k)\equiv 0$ последнее уравнение явно решается; возникающие таким образом потенциалы наз. безотражательными, а соответствующие решения К.— де Ф. у.— n-солитонными (см. *Солитон*).

К.— де Ф. у. записывается в гамильтоновом виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u},\quad H(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u^3+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)dx;$$

здесь фазовым пространством является пространство $S(\mathbb{R}^1)$, а скобки Пуассона задаются билинейной формой оператора $\frac{\partial}{\partial x}$. Отображение $u(x)\to s$ представляет собой каноническое преобразование к переменным типа

действие — угол. В новых переменных гамильтоновы уравнения явно интегрируются, и их решение дается указанными выше формулами. К.— де Ф. у. обладает бесконечным набором интегралов движения:

$$I_n(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2n-1}\left(u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^{n-2}}\right) dx;$$

$$P_1 = u,\ P_n = -\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-1} P_{n-1-j}P_j,\ n > 1.$$

Все эти интегралы движения находятся в инволюции, и порождаемые ими гамильтоновы системы (так наз. высшие уравнения Кортевега — де Фриса) вполне интегрируемы.

С помощью интегральных уравнений обратной задачи также находится решение задачи Коши для начального данного типа ступеньки:

$$\lim_{x \to -\infty} u(x) = c < 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} u(x) = 0.$$

При $t \to +\infty$ в окрестности фронта решение $u(x, t)$ распадается на невзаимодействующие солитоны — происходит распад ступеньки.

В случае задачи Коши с периодическим начальным условием $u(x+T) = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, аналогом безотражательных потенциалов являются потенциалы, для к-рых оператор Шрёдингера имеет конечное число запрещенных зон,— конечнозонные потенциалы. Периодические и почти периодические конечнозонные потенциалы являются стационарными решениями высших К.— де Ф. у.; последние представляют собой вполне интегрируемые конечномерные гамильтоновы системы. Произвольный периодич. потенциал аппроксимируется конечнозонными. Пусть $E_j \in \mathbb{R}^1$; $E_{j_1} \neq E_{j_2}$ при $j_1 \neq j_2$; $j = 1, \ldots, 2g+1$ — края зон; а Γ — гиперэллиптическая кривая

$$y^2 = \prod_{j=1}^{2g+1} (x - E_j)$$

над полем $\mathbb{C}$. Тогда действительнозначные почти периодические потенциалы с указанными краями зон, а также решения задачи Коши выражаются через θ-функции на многообразии Якоби $J(\Gamma)$ кривой Γ. При определенных соотношениях на края зон полученные решения будут периодическими. Если отказаться от условий $E_j \in \mathbb{R}^1$, то получатся комплекснозначные (возможно с полюсами) решения К.— де Ф. у., к-рые также наз. конечнозонными.

Лит.: [1] Korteweg D., de Vries G., «Phil. Mag.», 1895, v. 39, p. 422—43; [2] «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 19, p. 1095—97; [3] Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д., «Функциональный анализ и его приложения», 1971, т. 5, в. 4, с. 18—27; [4] Марченко В. А., Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля, К., 1972; [5] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 1, с. 55—136; [6] Кунин И. А., Теория упругих сред с микроструктурой, М., 1975.

Л. А. Тахтаджян.

КОРТЕЖ — конечная последовательность (допускающая повторения) элементов какого-нибудь множества X. К. обозначается посредством $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ или $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где n — длина К. ($n \geqslant 0$), а x_i есть i-й член К. и $x_i \in X$ ($1 \leqslant i \leqslant n$). При $n=0$ получается пустой кортеж, не имеющий членов.

В качестве синонимов термина «К.» можно использовать следующие понятия: *слово* в алфавите X (в этом случае обычно предполагается, что X конечно); элемент нек-рой декартовой степени множества X; элемент свободной полугруппы с множеством образующих X и единицей; функция, определенная на первых n натуральных числах ($n \geqslant 0$), со значениями в множестве X.

В. Н. Гришин.

КОС ТЕОРИЯ — раздел топологии и алгебры, изучающий косы и группы, составленные из их классов эквивалентности, и различные обобщения этих групп [1].

Коса из n нитей — объект, состоящий из двух параллельных плоскостей P_0 и P_1 в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, содержащих упорядоченные множества точек $a_1, \ldots, a_n \in P_0$ и $b_1, \ldots, b_n \in P_1$, и из n простых дуг $l_1, \ldots, l_n$, пересекающих каждую параллельную плоскость P_t между P_0 и P_1 однократно и соединяющих точки $\{a_i\}$ с точками $\{b_i\}$, $i=1, \ldots, n$.

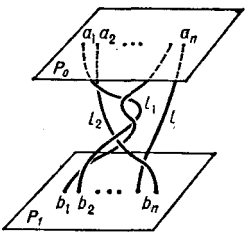


Рис. 1.

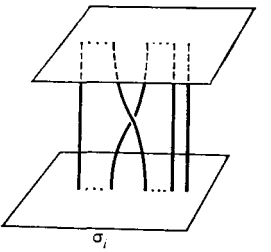


Рис. 2.

Считается, что a_i лежат на прямой L_a в P_0, точки b_i — на прямой L_b в P_1, параллельной L_a, причем b_i расположены под a_i для каждого i (см. рис. 1). Косы изображаются в проекции на плоскость, проходящую через L_a и L_b; эта проекция может быть приведена в общее положение так, что имеется только конечное число двойных точек, попарно лежащих в разных уровнях, и пересечения трансверсальны.

Нить l_i косы ω соединяет a_i с b_{k_i} и определяет подстановку $S^\omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$. Если эта подстановка тождественна, то ω наз. крашеной (или чистой) косой. Транспозиции $(i\ i+1)$ отвечает простейшая коса σ_i (см. рис. 2).

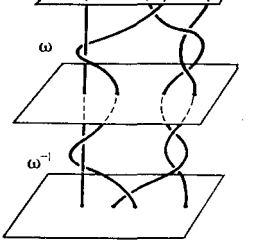


Рис. 3.

Во множестве всех кос с n нитями и с фиксированными P_0, P_1, $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ вводится отношение эквивалентности. Оно определяется гомеоморфизмами $h : \Pi \to \Pi$, где Π — область между P_0 и P_1, тождественными на $P_0 \cup P_1$, к-рые можно считать такими, что $h(P_t) = P_t$. Косы α и β эквивалентны, если существует такой гомеоморфизм h и $h(\alpha) = \beta$.

Классы эквивалентности, далее также называемые косами, образуют группу кос $B(n)$ относительно операции, определяемой следующим образом. Экземпляр Π' области Π помещается над другим экземпляром Π'' так, чтобы P_0'' совпала с P_1', a_i'' — с b_i', а затем $\Pi' \cup \Pi''$ сжимается вдвое. Образы кос $\omega' \in \Pi'$ и $\omega'' \in \Pi''$ дают косу $\omega'\omega''$, нить l_i к-рой получается продолжением l_i' с помощью l_{k_i}'', где $k_i \in S^{\omega'(i)}$. Единичная коса — класс эквивалентности, содержащий косу из n параллельных отрезков, коса ω^{-1}, обратная косе ω, определяется отражением в плоскости $P_{1/2}$. Условие $\omega\omega^{-1} = \varepsilon$ — на рис. 3. Отображение $\omega \to S^\omega$ определяет эпиморфизм $B(n)$ на группу $S(n)$ перестановок n элементов, ядром к-рого является подгруппа $K(n)$, соответствующая всем чистым косам, так что имеется точная последовательность

$$1 \to K(n) \to B(n) \to S(n) \to 1.$$

Группа кос $B(n)$ имеет две основные интерпретации. Первая — пространство конфигураций — получается отождествлением плоскостей P_t с помощью вертикальной проекции на P_0, при к-рой образы точек

$a_{it}=l_i \cap P_t$ при изменении t от 0 до 1 образуют след изотопии φ_t^{ω} множества $\bigcup a_i$ по P_0, причем $\varphi_1^{\omega}(\bigcup a_i)=\bigcup a_i$. Косе однозначно соответствует класс гомотопных петель в пространстве неупорядоченных наборов $G(n)$ из n попарно различных точек плоскости, и имеет место изоморфизм

$$\beta : B(n) \to \pi_1 G(n).$$

Для крашеных кос аналогично строится изоморфизм

$$\alpha : K(n) \to \pi_1 F(n),$$

где $F(n)$ — пространство упорядоченных наборов из n различных точек плоскости, так что $K(n)$ можно отождествить с подгруппой, отвечающей накрытию

$$p : F(n) \to G(n)=F(n)/S(n).$$

Вторая — г р у п п а г о м е о т о п и й — получается продолжениями изотопии φ_t^{ω} до изотопии $\tilde{\varphi}_t^{\omega}$ плоскости P_0, тождественной вне нек-рого диска, причем $\tilde{\varphi}_0^{\omega}=id$. При каждом t два такие продолжения отличаются на гомеоморфизм, тождественный в точках a_{it}. Косе однозначно соответствует компонента пространства гомеоморфизмов $Y(n)$ плоскости, отображающих множество $\bigcup a_i$ на себя, и имеет место изоморфизм

$$\gamma : B(n) \to \pi_0 Y(n).$$

Каждому гомеоморфизму $h \in Y$ сопоставляется автоморфизм свободной группы ранга n: $F_n=\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup a_i)$, определенный с точностью до внутреннего, к-рый в свою очередь дает гомоморфизм $B(n) \to \mathrm{Out}\ F_n=\mathrm{Aut}F_n/\mathrm{Inn}F_n$. Элементы образа наз. к о с о в ы м и а в т о м о р ф и з м а м и свободной группы. В частности, косе σ_i отвечает автоморфизм

$$\bar{\sigma}_i\colon\ \bar{\sigma}_i(x_i)=x_{i+1},\ \bar{\sigma}_i(x_{i+1})=x_{i,+1}x_i x_{i+1}^{-1},\ \bar{\sigma}_i(x_j)=x_j,$$

если $j \neq i,\ i+1$ ($\{x_i\}$ — базис F_n). Любой косовой автоморфизм α обладает свойствами:

$$\alpha(x_i)=A_i x_i A_i^{-1},\ \ \alpha\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)=\prod_{i=1}^{n} x_i$$

с точностью до внутреннего (смысл A_i — ниже), эти свойства характеризуют косовые автоморфизмы.

Косы σ_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, являются образующими группы $B(n)$, т. е. $\omega=\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}\ldots\sigma_{k_m}$, причем

$$\left.\begin{aligned} \sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i \text{ при } |i-j|>1, \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i-1},\ 1 \leqslant i \leqslant n-2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Оказывается, что (1) — копредставление для $B(n)$ (см. рис. 4). Имеет место расщепляющая точная последова-

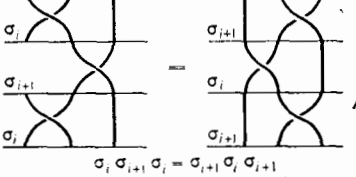


Рис. 4.

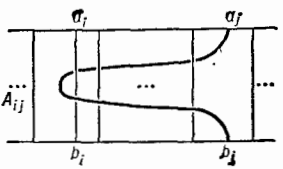


Рис. 5.

тельность (получающаяся из локально тривиального расслоения $F(n) \to F(n-1)$ со слоем $R^2 \setminus (a_1, \ldots, a_{n-1})$):

$$1 \to F_{n-1} \to K(n) \to K(n-1) \to 1,$$

к-рая приводит к нормальному ряду

$$K(n)=A_n \supset \ldots \supset A_1 \supset A_0=F_{n-1}$$

со свободными факторами A_i/A_{i-1}, причем A_i имеет «дополнение» U_{n-i}, изоморфное $K(n-i-1)$. Каждый

элемент $\omega \in B(n)$ может быть представлен единственным образом в виде

$$\omega = \omega_2 \ldots \omega_n \pi_\omega,$$

где π_ω — выбранный представитель для S^ω в $B(n)$, а $\omega_i \in A_{n-i+1} \cap U_i$. Приведение косы к такой форме наз. ее **приче сывание м**. Это решает проблему тождества в $B(n)$.

Копредставление для $K(n)$ таково: образующие (см. рис. 5)

$$A_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_i^2\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j-1} \subset A_i \cap U_{n-i+1};$$

соотношения

$$\left.\begin{array}{l} A_{rs}A_{ij} = A_{ij}A_{rs}, \text{ если } r \leqslant s < i < j \text{ или } i < r < s < j; \\ A_{rj}A_{ij} = A_{rj}, \text{ если } i = s; \\ A_{ij}A_{sj}A_{ij}A_{ij} = A_{sj}, \text{ если } r = i < j < s; \\ A_{rj}A_{sj}A_{rj}^{-1}A_{sj}^{-1}A_{ij}A_{rj}A_{sj} = A_{sj}A_{rj}, \text{ если } r < i < s < j. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Оно может быть получено как копредставление ядра естественного гомоморфизма в $S(n)$ абстрактной группы $B(n)$, заданной копредставлением (1) с помощью *Шрейера системы* $\prod_{j=2}^{n} M_{jk_j}$, $j \geqslant k_j \geqslant n$, где $M_{ji} = \sigma_{j-1} \ldots \sigma_i$.

Центр группы $B(n)$ — бесконечная циклич. группа, порожденная элементом $(\sigma_1 \ldots \sigma_n)^n$. Коммутант $B'(n)$ совпадает с $B''(n)$ при $n \geqslant 5$; $B'(3)$ изоморфна свободной группе ранга 2, а $B'(4)$ — полупрямому произведению двух таких групп. Фактор по коммутанту — бесконечная циклич. группа, порожденная образами σ_i. Элементы конечного порядка в $B(n)$ отсутствуют. Группа $K(n)$ переходит в себя при эндоморфизмах с неабелевым образом. В частности, $K(n) \cap B'(n)$ — вполне характеристич. подгруппа в $B(n)$, а также и в $K(n)$ (см. [15]).

Проблема сопряженности в $B(n)$ решается существенно сложнее проблемы тождества. Имеется единственная **нормальная по Гарсайду форма** косы $\omega = \Delta^m \Omega$, где $\Delta = (\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \ldots \sigma_{n-2}) \ldots (\sigma_1\sigma_2)\sigma_1$ — так наз. элемент Гарсайда, Ω — положительная, т. е. имеющая запись через σ_i с положительными показателями, коса. Косе ω конечным числом операций, определяемых по i (сопряжение с нек-рыми элементами, выбор элементов максимальной степени и т. п.), сопоставляется нек-рое множество слов $\Sigma(\omega)$, из к-рого выбирается слово в нормальной форме $\Delta^+ T$ с минимальным T. Это — так наз. **верхняя форма** косы ω. Оказывается, что две косы сопряжены тогда и только тогда, когда их верхние формы совпадают (см. [7]).

Представление Бурау группы кос $B(n)$ в группу матриц над кольцом целочисленных многочленов одной переменной определяется соответствием:

$$b(\omega)\colon \sigma_i \longrightarrow \begin{Vmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-k-1} \end{Vmatrix}$$

где I_k — единичная матрица порядка k. Матрица $b(\omega) - I_n$ есть приведенная матрица Александера (см. *Александера инварианты*) зацепления, полученного замыканием косы ω (см. ниже). Для крашеной косы из аналогичной матрицы Гаснера получается полная матрица Александера. Проблема точности этих представлений не решена (1982) (см. [2]).

То, что пространства $F(n)$ и $G(n)$ асферичны, дает возможность вычислить гомологии групп кос.

Гомологии $K(n)$ (см. [16]): гомологически $K(n)$ совпадает с произведением букетов окружностей, в к-рых число окружностей увеличивается от одной до $n-1$. Кольцо когомологий изоморфно внешнему градуированному кольцу, порожденному одномерными элементами $\omega_{ij} = \omega_{ji}$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, с соотношениями

$\omega_{kl}\omega_{lm}+\omega_{lm}\omega_{mk}+\omega_{mk}\omega_{kl}=0$. В качестве ω_{kl} можно взять формы $\frac{1}{2\pi i}\frac{dz_k-dz_l}{z_k-z_l}$, отвечающие обходу диагоналей $z_k=z_l$.

Гомологии $B(n)$ (см. [8], [12]): гомоморфизм $B(n)\to S(n)$ может быть продолжен вложением $S(n)\to O(n)$; индуцированный гомоморфизм в когомологиях $H^*(O(n))\to H^*(B(n))$ эпиморфен, т. е. когомологии mod 2 группы $B(n)$ порождаются классами Штифеля—Уитни.

Имеется естественное отображение $G(n)$ в Ω^2S^2 — пространство сфероидов $S^2\to S^2$ (вокруг n точек берутся малые диски, к-рые канонически со степенью I отображаются в сферу, а все дополнение — в точку). Это отображение (см. [14]) устанавливает гомологич. эквивалентность предельного пространства $G(\infty)$ и $(\Omega^2S^2)_0$ (индекс означает, что берется компонента сфероидов степени 0). Относительно нестабильных групп гомологий $B(n)$ доказано [16], что они конечны, стабилизируются с ростом n и имеется правило повторения $H^iB(2n+1)=H^iB(2n)$. Дано [17] описание вычисления этих групп.

Приложения и обобщения. 1) Замкнутой косой наз. зацепление (n-компонентный *узел*) в $\mathbb{R}^3$, каждая компонента к-рого трансверсально пересекает полуплоскости, ограниченные одной и той же прямой — осью l замкнутой косы (см. рис. 6). Коса ω порождает замкнутую косу $\tilde{\omega}$ (замыкание ω) следующим образом. Цилиндр с основаниями на P_0 и P_1, содержащий внутри себя ω, изгибается в $\mathbb{R}^3$ так, что образующие переходят в окружности с центрами на прямой l, а основания совмещаются и каждая точка a_i совпадает с b_i. Тогда объединение нитей l_i перейдет в $\tilde{\omega}$. Обратно, каждое зацепление в $\mathbb{R}^3$ может быть представлено замкнутой косой. Эквивалентным косам отвечают изотопные зацепления и, более того, сопряженные косы дают изотопные зацепления. Обратное неверно, так как зацепление может быть представлено косами с разным числом нитей. Кроме того, косы $\omega\sigma_{n-1}$ и $\omega\sigma_{n-1}^{-1}$ не сопряжены в $B(n)$, но отвечают изотопным зацеплениям. Если две замкнутые косы эквивалентны как зацепления, то они могут быть получены одна из другой цепочкой элементарных преобразований двух типов (см. рис. 7). Эти операции интерпретируются в терминах копредставлений группы зацеплений, что дает алгебраич. переформулировку проблемы изотопности зацеплений в виде вопроса о системе групп $B(n)$. Копредставление группы зацепления $\tilde{\omega}$ имеет вид

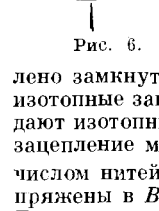


Рис. 6.

$$\{y_1,\ \ldots,\ y_n;\ y_i=A_iy_{k_i}A_i^{-1}\},$$

где соотношения определены косовым автоморфизмом $b\omega$. Обратно, каждое такое соотношение определяет косу.

2) Если разрезать поверхность рода g с помощью g непересекающихся сечений так, что получится сфера с $2g$ дырами, то гомеоморфизмы этой сферы с дырами, оставляющие на месте точки на краях дыр, определяют гомеоморфизмы поверхности, неподвижные на сечениях, и сами определяются с точностью до изотопии элементами группы $K(2g)$. Это дает представление группы кос в группе гомеотопий поверхности. Аналогично строится и представление $B(2g)$. Эти представления используются при изучении диаграмм Хегора *трехмерных многообразий*.

3) Отождествлением $\mathbb{R}^2$ с комплексной прямой $\mathbb{C}^1$ и сопоставлением неупорядоченному набору из n точек плоскости многочлена степени n, имеющего эти точки своими корнями, получается возможность отождествить

$G(n)$ с пространством многочленов с ненулевым дискриминантом. Так, этот факт позволил получить ряд результатов о непредставимости алгебраич. функций суперпозицией функций от меньшего числа переменных (см. [16]).

4) Пространства конфигураций для любого пространства X определяются аналогично $G(n)$ и $F(n)$ с заменой $\mathbb{R}^2$ на X. Фундаментальные группы этих пространств $B(X)$ и $K(X)$ наз. группами кос пространства X и чистых кос соответственно. Для многообразия M^n размерности больше 2 $\pi_1 F_n(X) \approx \Pi_{i=1}^n \pi_i M(i)$, и эти группы интереса не представляют. Для двумерного многообразия имеется естественное вложение $B(n)$ и $K(n)$ в $B_n(M^2)$ и $K_n(M^2)$, индуцированное вложением $\mathbb{R}^2 \subset M^2$. Для M^2, отличного от сферы и проективной плоскости, получается точная последовательность

$$1 \longrightarrow \pi_1 K(2) \xrightarrow{e} \pi_1 K_n(M^2) \longrightarrow \Pi_{i=1}^n \pi_i M_{(i)}^2;$$

для сферы гомоморфизм e является эпиморфизмом, полученным добавлением к (1) еще одного соотношения

$$\sigma_s \ldots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \ldots \sigma_1 = 1.$$

5) Если $p : X \to Y$ есть k-листное накрытие, то $p^{-1}\alpha$, где α — петля в Y, является петлей в пространстве конфигураций X, чем определяется гомоморфизм $\pi_1 Y \to \to B_k(X)$, к-рый усиливает монодромию накрытия и находит применение в алгебраич. геометрии.

6) Пусть $V^{\mathbb{C}}$ — комплексификация действительного векторного пространства V, а W — конечная неприводимая группа, порожденная отражениями, действующая в V (и, следовательно, в $V^{\mathbb{C}}$). Пусть s_i — порождающие отражения в плоскостях $P_i \subset V$ и D — их объединение.

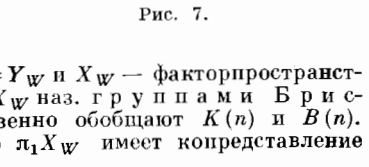


Рис. 7.

Пусть, наконец, $V^{\mathbb{C}}/D = Y_W$ и X_W — факторпространство. Группы $\pi_1 Y_W$ и $\pi_1 X_W$ наз. группами Брискорна, они естественно обобщают $K(n)$ и $B(n)$. Если $\operatorname{ord}(s_i s_j) = m_{ij}$, то $\pi_1 X_W$ имеет копредставление вида

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_i \ldots = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \ldots,$$

где число сомножителей с каждой стороны равно m_{ij} (σ_i здесь соответствует камере Вейля). Для этих групп доказано, что X_W и Y_W являются пространствами типа $K(\pi, 1)$, решена проблема сопряженности. В алгебраич. геометрии пространства X_W появляются как дополнения к дискриминанту версальных деформаций рациональных особенностей (см. [12], [13]).

Лит.: [1] Artin E., «Ann. Math.», 1947, v. 48, p. 101—26, 643—49; [2] Birman J., «Ann. Math. St.», 1974, № 82; [3] Burau W., «Hamburg Abh.», 1932, Bd 9, S. 117—24; [4] Марков А. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1945, т. 16; [5] Gassner B., «Hamburg Abh.», 1961, Bd 25, S. 10—22; [6] Fadell E., Neuwirth L., «Math. Scand.», 1962, v. 10, p. 111—18; [7] Гарсайд Ф., «Математика», 1970, т. 14, № 4, с. 116—32; [8] Фукс Д. Б., «Функциональный анализ и его приложения», 1970, т. 4, № 2, с. 62—73; [9] Арнольд В. И., там же, № 1, с. 84—85; [10] Горин Е. А., Лин В. Я., «Матем. сб.», 1969, т. 78, с. 579—610; [11] Арнольд В. И., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1970, т. 21, с. 27—46; [12] Брискорн Э., «Математика», 1974, т. 18, № 3, с. 46—59; [13] Брискорн Э., Сайто К., там же, № 6, с. 56—79; [14] Deligne P., «Invent. Math.», 1972, v. 17, № 4, p. 273—302; [15] Лин В. Я., «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, в. 1, с. 173—74; [16] Арнольд В. И., «Матем. заметки», 1969, т. 5, № 2, с. 227—31; [17] Лин В. Я., в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 17, М., 1979, с. 159—227.

А. В. Черновский.

КОСАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, наклонная производная,— производная функции f, заданной в окрестности точек нек-рой поверхности S, по направлению l, не совпадающему с направлением конормали нек-рого эллиптич. оператора в точках S. В краевых задачах для эллиптич. уравнений 2-го порядка К. п. может фигурировать в граничных условиях. В этом случае краевая задача наз. задачей с косой производной. См. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; задача с косой (наклонной) производной.

Если поле направлений l на S имеет вид $l=(l_1, \ldots, l_n)$, где l_i — функции точки $P \in S$, удовлетворяющие соотношению $\sum_{i=1}^{n}(l_i)^2=1$, то К. п. функции f как производная по направлению l имеет вид

$$\frac{df}{dl}=\sum_{i=1}^{n} l_i(P)\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad P=(x_1, \ldots, x_n),$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — декартовы координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Лит.: [1] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957.

А. И. Янушаускас.

КОСЕКАНС — одна из *тригонометрических функций*:

$$y=\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x};$$

другие обозначения: $\csc x$, $\operatorname{cosc} x$. Область определения — вся числовая прямая за исключением точек, абсциссы к-рых

$$x=\pi n, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

К.— функция неограниченная нечетная периодическая (с периодом 2π). Производная К.:

$$(\operatorname{cosec} x)'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x.$$

Интеграл от К.:

$$\int \operatorname{cosec} x\, dx=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

К. разлагается в ряд

$$\operatorname{cosec} x=\frac{1}{x}+\frac{x}{6}+\frac{7x^3}{360}+\frac{31x^5}{15120}+\ldots, \quad 0<|x|<\pi.$$

Ю. А. Горьков.

КОСИНУС — одна из *тригонометрических функций*:

$$y=\cos x.$$

Область определения — вся числовая прямая, область значений — отрезок $[-1; 1]$; К.— функция четная периодическая с периодом 2π. К. и синус связаны формулой

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

К. и секанс связаны формулой

$$\cos x=\frac{1}{\sec x}.$$

Производная К.:

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

Интеграл от К.:

$$\int \cos x\, dx=\sin x+C.$$

К. разлагается в степенной ряд:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots, \quad -\infty<x<\infty.$$

Функция, обратная К., наз. арккосинусом.

К. и синус комплексного аргумента z связаны с показательной функцией формулой Эйлера

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z.$$

Если x — действительное число, то

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Если $z = ix$ (чисто мнимое число), то

$$\cos ix = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

где $\operatorname{ch} x$ — гиперболический косинус. *Ю. А. Горьков.*

КОСИНУС АМПЛИТУДЫ, эллиптический косинус,— одна из трех основных *Якоби эллиптических функций*, обозначаемая

$$\operatorname{cn} u = \operatorname{cn}(u,\ k) = \cos \operatorname{am} u.$$

К. а. выражается следующим образом через сигма-функции Вейерштрасса, тета-функции Якоби или с помощью степенного ряда:

$$\operatorname{cn} u = \operatorname{cn}(u,\ k) = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\vartheta_0(0)\,\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_0(v)} =$$

$$= 1 - \frac{u^2}{2!} + (1 + 4k^2)\frac{u^4}{4!} - (1 + 44k^2 + 16k^4)\frac{u^6}{6!} + \ldots,$$

где k — модуль эллиптической функции, $0 \leqslant k \leqslant 1$; $v = u/2\omega$, $2\omega = \pi\vartheta_3^2(0)$. При $k = 0$, 1 имеем соответственно $\operatorname{cn}(u,\ 0) = \cos u$, $\operatorname{cn}(u,\ 1) = 1/\operatorname{ch} u$.

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. [с нем.], М., 1968, ч. 2, гл. 3. *Е. Д. Соломенцев.*

КОСИНУС ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ — см. *Гиперболические функции.*

КОСИНУСОВ ТЕОРЕМА: квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними, т. е.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

где a, b, c — стороны треугольника, а C — угол между сторонами a и b. *Ю. А. Горьков.*

КОСИНУС-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ — см. *Фурье преобразование.*

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСТОЯННАЯ — физическая постоянная, характеризующая свойства вакуума, к-рая иногда вводится в общей теории относительности. С учетом К. п. уравнения Эйнштейна имеют вид

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} + \Lambda g_{ij},$$

где Λ — К. п., g_{ij} — метрический тензор, R_{ij} — тензор Риччи, R — кривизна пространства, Tij — тензор энергии-импульса, c — скорость света, G — гравитационная постоянная. Эти уравнения являются уравнениями Лагранжа для действия

$$S = S_0 - \frac{c^3}{16\pi G}\int (R + 2\Lambda)\, dV,$$

где S_0 — действие для вещества, V — четырехмерный объем. К. п. была введена в общую теорию относительности [1] для того, чтобы уравнения гравитационного поля допускали пространственно однородное статическое решение (так. наз. космологическая модель Эйнштейна). После построения теории эволюционирующей космологич. модели Фридмана и получения ее наблюдательных подтверждений, отсутствие такого решения у исходных уравнений Эйнштейна не рассматривается как недостаток теории. Достоверных указаний на отличие К. п. от нуля нет. Однако наличие достаточно малой К. п. ($|\Lambda| \leqslant 10^{-55}\ см^{-2}$) не противоречит наблюдательным данным и общим физическим принципам.

Наличие К. п. может существенно изменять некоторые этапы эволюции наиболее распространенных космологич. моделей (см. [2]). В связи с этим космологич. модели с К. п. предлагалось использовать для объяснения нек-рых свойств распределения квазаров (см. [3], [4], [5]).

Член Λg_{ij} в уравнениях гравитационного поля можно включить в тензор энергии-импульса и рассматривать как тензор энергии импульса вакуума (см. [2]). В этом случае вакуум имеет плотность энергии $\varepsilon = c^4\Lambda/8\pi G$ и давление $p = -c^4\Lambda/8\pi G$, что соответствует уравнению состояния $p = -\varepsilon$. В теории с К. п. свойства вакуума сказываются уже в нерелятивистском приближении. Так, гравитационный потенциал точечной массы в теории с К. п. равен (см. [6]):

$$\varphi = -G\frac{m}{r} - \frac{\Lambda}{6}r^2c^2.$$

Член Λg_{ij} инвариантен по отношению к преобразованиям локальной группы Лоренца, что соответствует принципу лоренц-инвариантности вакуума в квантовой теории поля. Представление о К. п. как о величине, характеризующей плотность энергии и давление вакуума, в принципе позволяет связать представление о К. п. с представлениями квантовой теории поля. Имеется ряд формул, связывающих значение К. п. с фундаментальными физическими постоянными и возрастом Вселенной (см. [2]).

Лит.: [1] Эйнштейн А., Собр. научных трудов, т. 1, М., 1965, с. 601—12; [2] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Строение и эволюция Вселенной, М., 1975; [3] Petrosian V., Salpeter E., Szekeres P., «Astrophys. J.», 1967, v. 147, p. 1222—26; [4] Шкловский И. С., «Астрономический циркуляр», 1967, № 429; [5] Кардашёв Н. С., там же, № 430; [6] Толмен Р., Относительность, термодинамика и космология, пер. с англ., М., 1974.

Д. Д. Соколов.

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ — одно из основных понятий космологии как науки, описывающей Вселенную (окружающий нас мегамир) как целое, отвлекаясь от несущественных в этой связи деталей.

Математич. форма К. м. зависит от того, какая физич. теория кладется в основу описания движущейся материи: в соответствии с этим различают общерелятивистские, ньютонианские модели, модели стационарного состояния, модели с изменяющейся константой тяготения и т. д. Из них наиболее важны общерелятивистские. К К. м. можно отнести и астрономич. системы мира: системы Птолемея, Коперника и др. В современных К. м. для учета лишь существенных деталей вводится понятие об усреднении физич. характеристик по физически большому объему. Усредненные значения предполагаются непрерывными и (обычно) много раз дифференцируемыми. Возможность такого усреднения не является самоочевидной. Можно представить себе иерархическую модель Вселенной, в к-рой существуют качественно различные объекты все возрастающих масштабов. Однако имеющиеся наблюдательные данные не согласуются с такой моделью.

Процедура усреднения для общерелятивистских К. м. еще недостаточно обоснована математически. Трудность здесь состоит в том, что различные «микросостояния», дающие одну и ту же К. м. при усреднении, являются различными псевдоримановыми многообразиями, обладающими, возможно, даже различной топологич. структурой (см. также *Геометродинамика*).

Физической основой общерелятивистских К. м. является общая теория относительности Эйнштейна (иногда включая вариант с *космологической постоянной*, см. *Относительности теория*). Математич. формой общерелятивистских К. м. является геометрия в целом псевдоримановых многообразий. Считается, что топологич. структура многообразия должна предсказываться теоретически. Выбор того или иного топологич. строения К. м. затруднен тем, что модели, имеющие различную топологию и другие глобальные свойства, могут быть локально изометричны. Один из методов решения вопроса о топологии К. м. состоит в задании дополнительных постулатов, либо вытекающих из общетеоретич. соображений (напр., принцип причинно-

сти), либо являющихся опытными фактами (напр., постулат в [1] исходит из CP-неинвариантности). Обычно построение К. м. начинают с предположения того или иного типа симметрии, в связи с чем выделяются однородные и изотропные К. м., анизотропные однородные К. м. и др. (см. [2]). Впервые общерелятивистская К. м. была предложена А. Эйнштейном в 1917 (см. [3]). Эта модель была статистической однородной и изотропной и содержала Λ-член. Впоследствии была разработана нестационарная однородная изотропная модель, к-рая наз. фридмановской [4]. Предсказанная этой моделью нестационарность была обнаружена в 1929 (см. [5]). Фридмановская модель имеет варианты в зависимости от значений входящих в нее параметров. При плотности вещества ρ, меньшей или равной нек-рой критической плотности ρ_0, имеет место так наз. открытая модель, при $\rho>\rho_0$ — закрытая. Метрика фридмановской К. м. имеет в нек-рых координатах вид

$$ds^2=c^2\,dt^2-\left(\frac{Rt}{R_0}\right)^2\left[\frac{dr^2}{1-\frac{kr}{R_0^2}}+r\,(d\theta^2+\sin\theta\,d\varphi^2)\right],$$

где t — время, ρ и ρ_0 — средняя и так наз. критическая плотности вещества в данный момент времени, c — скорость света, r, θ и φ — координаты. Критическая плотность ρ_0 является нек-рой функцией времени, причем оказывается, что величина $\rho-\rho_0$ не меняет знак. При $k<1$ пространственное сечение $t=\text{const}$ является пространством Лобачевского, при $k=0$ — евклидовым пространством (однако сама К. м. не является плоской), при $k>0$ — сферическим пространством. Функция $R(t)$ (радиус мира) определяется из уравнений Эйнштейна и уравнений состояния. При одном ($k\leqslant 0$) или двух ($k>0$) значениях t функция R обращается в нуль. Одновременно обращаются в бесконечность средняя плотность, кривизна и другие физич. характеристики модели. Принято говорить, что в подобных точках К. м. имеет сингулярность. В зависимости от уравнения состояния говорят о холодной (давление $p=0$) или о горячей ($p=\varepsilon/3$, ε — плотность энергии) моделях. Открытие в 1965 изотропного равновесного излучения ($T\approx 3^\circ$K) подтверждает горячую модель. Несмотря на грубый характер фридмановских моделей, уже они передают основные черты строения Вселенной. О дальнейшем построении К. м. на их основе см. [1]. Развита теория эволюции малых отклонений К. м. от фридмановской модели. В результате этой эволюции, по-видимому, образуются скопления галактик и другие астрономич. объекты. Имеющиеся наблюдательные данные свидетельствуют в пользу того, что реальная Вселенная с хорошей степенью точности описывается фридмановской К. м. Эти данные, однако, не позволяют определить знак величины k (несколько более вероятным представляется $k<0$). Возможны иные топологич. интерпретации фридмановской К. м., к-рые получаются различными факторизациями (склейками) пространственного сечения. Наблюдательные данные накладывают лишь очень слабые ограничения на характер этих факторизаций (см. [1]). В логически последовательной теории построение К. м. должно начинаться с выбора многообразия — носителя псевдоримановой метрики. Однако метода такого выбора еще нет. Имеется лишь несколько ограничений возможного глобального строения К. м., основанных на принципе причинности и на факте несохранения комбинированной четности (см. [1]).

Предлагались многие иные К. м., в частности анизотропные однородные (см. [1], [6]).

До появления общерелятивистских К. м. неявно предполагалось, что распределение масс является изотропным, однородным и статическим. Однако это предположение приводит к так наз. гравитационному, фото-

метрическому и другим парадоксам (бесконечно большой гравитационный потенциал, бесконечно большая освещенность и др.). Общерелятивистские К. м. не содержат этих парадоксов (см. [2]). Рассматривая распределения масс, аналогичные тем, к-рые имеют место в общерелятивистских К. м., удалось получить хорошие ньютонианские приближения к нек-рым общерелятивистским К. м. (см. [1]). Эти К. м. также не содержат упомянутых парадоксов.

Лит.: [1] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Релятивистская астрофизика, М., 1967; [2] Петров А. З., Новые методы в общей теории относительности, М., 1966; [3] Эйнштейн А., Собр. научных трудов, т. 1, М., 1965; [4] Friedman A. A., «Z. Phys.», 1922, Bd 10, S. 377—86; [5] Hubble E. P., «Proc. Nat. Acad. Sci.», 1929, v. 15, № 3, p. 168—73; [6] Penzias A. A., Wilson R. W., «Astrophys. J.», 1965, v. 142, p. 419—21; [7] Heckmann O., Schücking E., в кн.: Handbuch der Physik, Bd 53, B., 1959, S. 489—519; [8] Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М., «Успехи физ. наук», 1970, т. 102, в. 3, с. 463—500; [9] Пенроуз Р., Структура пространства — времени, пер. с англ., М., 1972. *Д. Д. Соколов.*

КОСОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ — 1) К. п. векторов — то же, что *псевдоскалярное произведение* векторов.

2) К. п. в эргодической теории — автоморфизм T пространства с мерой E (и порожденный им каскад $\{T^n\}$) такой, что E является прямым произведением двух пространств с мерой $X\times Y$ и действие T в E специальным образом согласовано с этой структурой прямого произведения. А именно:

$$T(x,\ y)=(R(x),\ S(x,\ y)),$$

где R — автоморфизм пространства с мерой X («базы»), а $S(x,\ \cdot)$ при фиксированном x является автоморфизмом пространства с мерой Y («слоя»). Понятие К. п. непосредственно переносится на случай эндоморфизмов, потоков и более общих групп и полугрупп преобразований.

Во многих примерах геометрич. и алгебраич. происхождения фазовое пространство E естественно определяется как нек-рое К. п. в топологич. смысле *(расслоение)*. Однако это не вызывает необходимости в обобщении приведенного определения К. п. в эргодической теории, ибо с метрической (в смысле теории меры) точки зрения нет различия между прямыми и косыми произведениями пространств. *Д. В. Аносов.*

3) К. п. в топологии — устаревшее название *расслоения* со структурной группой.

КОСОСИММЕТРИЧЕСКАЯ БИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА, антисимметрическая билинейная форма,— билинейная форма f на унитарном A-модуле V (где A — коммутативное кольцо с единицей), удовлетворяющая условию:

$$f(v_1,\ v_2)=-f(v_2,\ v_1) \text{ для любых } v_1,\ v_2\in V.$$

Строение любой К. б. ф. f на конечномерном векторном пространстве V над полем характеристики $\neq 2$ полностью определяется ее индексом Витта $w(f)$ (см. *Витта теорема*, *Витта разложение*). А именно, V будет ортогональной (относительно f) прямой суммой ядра $V^{\perp}$ формы f и подпространства размерности $2w(f)$, на к-ром сужение формы f является нейтральной формой. Две К. б. ф. на V изометричны тогда и только тогда, когда их индексы Витта равны между собой. В частности, невырожденная К. б. ф. нейтральна, а размерность пространства V в этом случае четна.

Для любой К. б. ф. f на V существует базис $e_1, \ldots, e_n$, в к-ром матрица формы f имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & E_m & 0 \\ -E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad (*)$$

где $m=w(f)$, а E_m — единичная матрица порядка m. Матрица К. б. ф. в произвольном базисе кососимметрична. Поэтому указанные выше свойства К. б. ф.

могут быть сформулированы и следующим образом: для любой кососимметрич. матрицы M над полем характеристики $\neq 2$ найдется такая невырожденная матрица P, что $P^{\tau}MP$ имеет вид (*). В частности ранг матрицы M четен, а определитель кососимметрич. матрицы нечетного порядка равен 0.

В случае поля характеристики 2 перечисленные утверждения сохраняют силу, если заменить условие кососимметричности формы f более сильным условием знакопеременности: $f(v, v)=0$ для любых $v \in V$ (для полей характеристики $\neq 2$ эти условия эквивалентны).

Эти результаты допускают обобщение на случай, когда A — коммутативное кольцо главных идеалов, V — свободный A-модуль конечной размерности и f — знакопеременная билинейная форма на V. А именно, в этих условиях существует такой базис $e_1, \ldots, e_n$ модуля V и целое неотрицательное число $m \leqslant n/2$, что

$$0 \neq f(e_i, e_{i+m}) = \alpha_i \in A, \quad i=1, \ldots, m,$$

α_i делит α_{i+1} при $i=1, \ldots, m-1$, а в остальных случаях $f(e_i, e_j)=0$. Идеалы $A\alpha_i$ однозначно определяются указанными условиями, а модуль $V^{\perp}$ порождается элементами $e_{2m+1}, \ldots, e_n$.

Определитель знакопеременной матрицы нечетного порядка равен 0 для любого коммутативного кольца A с единицей. В случае, когда порядок знакопеременной матрицы M над A четен, элемент $\det M \in A$ является квадратом в A (см. *Пфаффиан*).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969.

В. Л. Попов.

КОСОСИММЕТРИЧЕСКАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица A над полем характеристики $p \neq 2$ такая, что $A^{\tau}=-A$. Ранг К. м.— число четное. Любая квадратная матрица B над полем характеристики, отличной от 2, есть сумма симметрической и кососимметрической матриц:

$$B=\frac{1}{2}(B+B^{\tau})+\frac{1}{2}(B-B^{\tau}).$$

Ненулевые корни характеристич. многочлена действительной К. м.— чисто мнимые числа. Действительная К. м. подобна матрице

$$\operatorname{diag}[a_1, \ldots, a_t, 0, \ldots, 0],$$

где $a_j=\alpha_j \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$, α_j — действительные числа, $j=1, \ldots, t$. Жорданова форма J комплексной К. м. обладает свойствами: 1) жорданова клетка $J_m(\lambda)$ с элементарным делителем $(x-\lambda)^m$, где $\lambda \neq 0$, повторяется в J столько же раз, сколько и клетка $J_m(-\lambda)$; 2) при четном m жорданова клетка $J_m(0)$ с элементарным делителем x^m повторяется в J четное число раз. Любая комплексная Ж. м. со свойствами 1) и 2) подобна нек-рой К. м.

Множество всех К. м. порядка n над полем k образует алгебру Ли над k относительно сложения матриц и коммутирования: $AB-BA$.

Лит.: [1] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967.

Д. А. Супруненко.

КОСОСИММЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР — тензор над n-мерным векторным пространством E, инвариантный относительно операции *альтернирования* по нек-рой группе его индексов. Координаты К. т. обладают косой симметрией по соответствующей группе индексов, т. е. при перестановке местами двух индексов они изменяют свое значение на противоположное (в смысле аддитивного закона в поле K, над к-рым определено E), а при равенстве двух индексов они равны нулю.

Наиболее важное значение имеют К. т., не изменяющиеся при альтернировании по всей группе ковариантных или контравариантных индексов. Контравариант-

ный или ковариантный К. т. валентности r наз. r-в е к т о р о м, или п о л и в е к т о р о м, над E, соответственно над E^* — сопряженном к E пространством; они являются элементами внешней алгебры векторного пространства E. Внешнюю алгебру над E^* обычно наз. алгеброй внешних форм, отождествляя ковариантные К. т. валентности r с r-формами.

Лит. см. при ст. *Внешняя алгебра.* *И. Х. Сабитов.*

КОТАНГЕНС — одна из *тригонометрических функций*:

$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

другие обозначения: $\cot x$, $\operatorname{cotg} x$. Область определения — вся числовая ось, за исключением точек, абсциссы к-рых $x = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. К.— функция неограниченная нечетная периодическая (с периодом π). К. и тангенс связаны соотношением

$$\operatorname{ctg} x = 1/\operatorname{tg} x.$$

Функция, обратная К., наз. а р к к о т а н г е н с о м. Производная К.:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x.$$

Интеграл от К.:

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

К. разлагается в ряд

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \ldots, \quad 0 < |x| < \infty.$$

К. комплексного аргумента z — мероморфная функция, нули к-рой находятся в точках $z = \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. *Ю. А. Горьков.*

КОТЕЛЬНИКОВА ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — интерпретация многообразия прямых трехмерного *Лобачевского пространства* ${}^1S_3$ на комплексной плоскости $S_2(i)$ (или на ${}^1S_2(i)$). Всякой прямой пространства ${}^1S_3$ ставятся в соответствие плюккеровы координаты, определенные в этом случае с точностью до знака. С помощью этих координат прямых устанавливается соответствие между прямыми и их полярами в пространстве ${}^1S_3$, а также определяются векторы прямых и их поляр. Одна из двух взаимных поляр изображается вектором единичной длины, а другая — вектором мнимоединичной длины. Многообразие пар взаимно полярных прямых пространства ${}^1S_3$ изображается плоскостью $S_2(i)$ с радиусом кривизны, равным 1 или i, причем это соответствие является непрерывным. Изотропные прямые пространства ${}^1S_3$ изображаются точками абсолюта плоскости $S_2(i)$. Связная группа движений пространства ${}^1S_3(i)$ изоморфна группе движений плоскости $S_2(i)$.

Иногда К. и. понимается в более широком смысле как интерпретация многообразий прямых трехмерных пространств в виде комплексных или др. двумерных плоскостей (см. *Фубини интерпретация*).

К. и. впервые была предложена А. П. Котельниковым (см. [1]) и независимо от него Э. Штуди (см. [2]).

Лит.: [1] К о т е л ь н и к о в А. П., Проективная теория векторов, Казань, 1899; [2] S t u d y E., Geometrie der Dynamen, Lpz., 1903; [3] Р о з е н ф е л ь д Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *Л. А. Сидоров.*

КОТЕСА ФОРМУЛЫ — формулы для приближенного вычисления определенных интегралов по значениям подинтегральной функции в конечном числе равноотстоящих точек, т. е. *квадратурные формулы* с равноотстоящими узлами. К. ф. имеют вид

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots. \qquad (*)$$

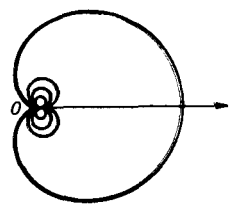
Числа $a_k^{(n)}$ наз. к о э ф ф и ц и е н т а м и К о т е с а, они определяются из того условия, чтобы формула (*) была точной для случаев, когда $f(x)$ является многочленом степени не выше n.

К. ф. предложены Р. Котесом (R. Cotes, 1722), в более общей форме были рассмотрены И. Ньютоном (I. Newton). См. *Ньютона — Котеса квадратурная формула.* *БСЭ-3.*

КОХЛЕОИДА — плоская трансцендентная кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид

$$\rho = a\frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

К. имеет бесчисленное множество завитков, проходящих через полюс и касающихся полярной оси (см. рис.); полюс — особая точка бесконечной кратности. Каждая прямая, проведенная через полюс O, пересекает К. в точках, касательные в которых проходят через одну и ту же точку.



Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

КОЦЕПЬ — однородный элемент коцепной абелевой группы C^* (или, в общем случае, модуля), т. е. градуированной абелевой группы, снабженной эндоморфизмом δ степени $+1$, обладающим свойством $\delta\delta=0$. Эндоморфизм δ наз. кограничным отображением, или кограницей.

Обычно коцепная группа C^* возникает как группа $\mathrm{Hom}(C_*, \mathbb{Z})$, или $\mathrm{Hom}(C_*, G)$, где G — произвольная абелева группа, наз. группой коэффициентов, а C_* — группа *цепей*, т. е. градуированная абелева группа, снабженная эндоморфизмом ∂ степени -1 — граничным отображением, или границей, причем $\partial\partial=0$. При этом отображение δ в группе $C^*=\mathrm{Hom}(C_*, G)$ определяется как сопряженное к ∂ : $(\delta f)\sigma=f(\partial\sigma)$, где $f\in C^*$, $\sigma\in C_*$.

Для топологич. пространства X определена группа $C_*(X)$ сингулярных цепей — абелева группа формальных конечных сумм $\Sigma a_i s_i$, где $a_i\in\mathbb{Z}$, а s_i — произвольные сингулярные симплексы пространства X, т. е. непрерывные отображения в X стандартного симплекса. Сингулярной коцепью пространства X с коэффициентами в G наз. однородный элемент группы $C^*(X, G)=\mathrm{Hom}(C_*(X), G)$.

Аналогично, симплициальной n-коцепью симплициального разбиения X с коэффициентами в абелевой группе G наз. гомоморфизм $C_n(X)\to G$, где $C_n(X)$ — группа n-цепей разбиения X, т. е. группа формальных конечных сумм $\Sigma a_i s_i$, где $a_i\in\mathbb{Z}$, а s_i суть n-симплексы разбиения X. В частности, коцепь в смысле Александрова — Чеха произвольного топологич. пространства X есть К. нерва нек-рого открытого покрытия пространства X.

Если X — клеточное разбиение (X_n — n-мерный остов X), то абелева группа $H^n(X_n, X_{n-1})$ наз. группой n-мерных клеточных коцепей разбиения X. Кограничный гомоморфизм $\delta : H^n(X_n, X_{n-1})\to H^{n+1}(X_{n+1}, X_n)$ полагается совпадающим со связывающими отображениями тройки (X_{n+1}, X_n, X_{n-1}).

На практике часто группа C^* снабжается дополнительно мультипликативной структурой, т. е. представляет собой градуированную алгебру. В этих случаях кограничное отображение δ обладает свойством Лейбница: $\delta(xy)=(\delta x)y+(-1)^{\deg x}x(\delta y)$, здесь элемент $x\in C^*$ полагается однородным степени $\deg x$. Такой градуированной коцепной алгеброй является, напр., алгебра дифференциальных форм на гладком многообразии, в к-рой внешний дифференциал играет роль конграницы.

А. Ф. Харшиладзе.

КОЦИКЛ — *коцепь*, аннулируемая кограничным отображением, другими словами, коцепь, обращающаяся в нуль на ограничивающих цепях. Понятие К. обобщает понятие замкнутой дифференциальной формы на

гладком многообразии, интеграл к-рой по ограничивающей цепи равен нулю.

В соответствии с различными вариантами понятия коцепи имеются различные варианты понятия К. Напр., К. в смысле Александрова — Чеха топологич. пространства есть К. нерва нек-рого открытого покрытия его. Лишь одномерные К. с неабелевыми коэффициентами требуют отдельного обсуждения. Одномерный коцикл симплициального множества K с коэффициентами в неабелевой группе G представляет собой такую функцию $\sigma \to f(\sigma) \in G$, определенную на множестве K_1 одномерных симплексов из K, что $f(\sigma^{(0)})f(\sigma^{(2)}) = f(\sigma^{(1)})$ для любого двумерного симплекса $\sigma \in K$. Два К. f *и* g *наз.* когомологичными, если существует такая функция $h : K_0 \to G$, что $f(\tau)h(\tau^{(0)}) = h(\tau^{(1)})g(\tau)$ для любого одномерного симплекса $\tau \in K$. Классы когомологии одномерных К. образуют пунктированное множество $H^1(K; G)$. Аналогично определяются одномерные К. и их когомологич. классы в смысле Александрова — Чеха с коэффициентами в пучке неабелевых групп. Классы когомологии этих К. связаны с расслоениями со структурной группой. *А. Ф. Харшиладзе.*

КОШИ ЗАДАЧА — одна из основных задач теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными); состоит в отыскании решения (интеграла) дифференциального уравнения, удовлетворяющего так наз. начальным условиям (начальным данным). К. з. обычно возникает при анализе процессов, определяемых дифференциальным законом и начальным состоянием, математич. выражением к-рых и являются уравнение и начальное условие (откуда терминология и выбор обозначений: начальные данные задаются при $t=0$, а решение отыскивается при $t \geqslant 0$). От краевых задач К. з. отличается тем, что область, в к-рой должно быть определено искомое решение, здесь заранее не указывается. Тем не менее и К. з. можно рассматривать как одну из краевых задач.

Основные вопросы, к-рые связаны с К. з., таковы.

1) Существует ли (хотя бы локально) решение К. з.?

2) Если решение существует, то какому пространству оно принадлежит, в частности, какова область его существования?

3) Является ли решение единственным?

4) Если решение единственно, то будет ли оно корректным, т. е. непрерывным (в каком-либо смысле) относительно начальных данных?

Простейшая К. з. состоит в том, что требуется найти определенную на полупрямой $x \geqslant x_0$ функцию $u(x)$, к-рая удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению 1-го порядка

$$\frac{du}{dx} = f(x, u) \qquad (1)$$

(f — данная функция) и при $x = x_0$ принимает значение u_0:

$$u(x_0) = u_0. \qquad (2)$$

Геометрически это означает, что в семействе интегральных кривых уравнения (1) на плоскости (x, u) разыскивается кривая, проходящая через точку (x_0, u_0).

Первое утверждение о существовании такой функции (при условии непрерывности f для всех x и непрерывной дифференцируемости ее по u) доказано О. Коши (A. Cauchy, 1820—30) и обобщено Э. Пикаром (E. Picard, 1891—96) (заменившим дифференцируемость условием Липшица по u). При этом решение К. з. оказывается единственным и непрерывно зависящим от начальных данных. Современные представления о К. з.— по существу далеко идущее обобщение этой задачи.

То, что вопросы 1) — 4) глубоко затрагивают суть дела, т. е. для утвердительного ответа на них требуются

определенные условия, иллюстрируется уже теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Так, решение К. з. для уравнения (1) с условием (2), где f задана на открытом множестве G и лишь непрерывна, существует на нек-ром интервале, зависящем от G и (x_0, u_0) (см. *Пеано теорема*), но может быть неединственным. Решение может существовать не во всех точках, где определено f.

Дословно так же формулируется К. з. для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е. для обыкновенного дифференциального уравнения вида (1) с начальным условием (2), где $u=u(x)$ — функция со значением в конечномерном векторном пространстве E, $u(x_0)=u_0\in E$, а $f(x, u)$ — функция, определенная в $\mathbb{R}^+\times E$. Для существования, единственности и корректности решения К. з. и здесь достаточны условия Пикара.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков

$$\frac{d^n u}{dx^n}=f\left(x,\ u,\ u',\ \ldots,\ u^{(n-1)}\right).$$

К. з., в начальных данных к-рой участвуют, помимо самой функции, и ее производные

$$u(x_0)=u_0,\ u'(x_0)=u_0',\ \ldots,\ u^{(n-1)}(x_0)=u_0^{(n-1)},$$

стандартным приемом сводится к соответствующей задаче вида (1), (2).

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, не разрешимых относительно производной искомой функции, постановка К. з.— та же, разве что в большей степени опирается на ее геометрич. трактовку, но исследование может осложняться невозможностью (даже локальной) редукции уравнения к нормальной форме (1).

Если для обыкновенного дифференциального уравнения постановка и исследование К. з. не содержит принципиальных затруднений, то в случае дифференциальных уравнений с частными производными положение (и, в частности, ответы на вопросы 1) — 4)) существенно усложняется, даже если рассматриваемые функции достаточно регулярны. Это в значительной мере обусловлено многомерностью пространства независимых переменных и вытекающими из этого (алгебраическими) вопросами разрешимости. Так, условие разрешимости К. з. (в нек-ром смысле промежуточной между «обыкновенностью» и «частностью») для системы уравнений в полных дифференциалах

$$\omega^\alpha \overset{\text{def}}{=\!=} A_i^\alpha(x)\,dx^i=0,\ i=1,\ \ldots,\ n,\ \alpha=1,\ \ldots,\ k<n,$$

состоящей в отыскании $(n-k)$-мерной интегральной поверхности, проходящей через данную точку, имеет вид

$$d\omega^\alpha\wedge\omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^k=0$$

(в окрестности этой точки; здесь d, $\wedge$ — символы внешнего дифференциала и внешнего произведения соответственно) (см. *Фробениуса теорема*).

Для линейных дифференциальных уравнений с частными производными

$$Lu=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\,\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}=f(x) \qquad (3)$$

К. з. ставится следующим образом. В нек-рой области G переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$ найти решение, удовлетворяющее начальным условиям, т. е. принимающее вместе со своими производными до $(m-1)$-го порядка включительно заданные значения на нек-рой расположенной в G $(n-1)$-мерной гиперповерхности S (носители начальных условий). Начальные ус-

ловия можно задавать в виде производных от u по направлению единичной нормали ν к S:

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}\right|_S = \varphi_k,\ 0 \leqslant k \leqslant m-1, \qquad (4)$$

где $\varphi_k(z)$, $x \in S$ — известные функции (данные Коши).

Аналогичным образом ставится К. з. и для нелинейных дифференциальных уравнений.

С К. з. связано понятие нехарактеристич. поверхности. Если неособое преобразование переменных $x \to x'$ «выпрямляет» поверхность S в окрестности точки x_0, переводя ее в участок гиперплоскости $x'_n = 0$, то в преобразованном уравнении (3) коэффициент при $\left(\frac{\partial}{\partial x'_n}\right)^m$ пропорционален величине

$$Q(x, \nu) = \sum_{|d|=m} a_\alpha(x)\, \nu^d,\ \nu^d = \nu_1^{d_1}\nu_2^{d_2}\ldots\nu_n^{d_n}.$$

Поверхность S наз. нехарактеристической в точке x_0, если

$$Q(x_0, \nu) \neq 0. \qquad (5)$$

В этом случае вблизи точки x_0 уравнений (3) можно записать в так наз. нормальной форме

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_n'^m} = F\left(x'_i,\ \frac{\partial^d u}{\partial x'^d}\right),\ d = (d_1, \ldots, d_n),\ d_n < m. \qquad (6)$$

К. з. обычно рассматривается, когда носителем начальных данных является характеристич. поверхность, т. е. когда условие (5) выполнено для всех $x_0 \in S$.

В теории К. з. важное место занимает *Коши — Ковалевской теорема*: если S — аналитич. поверхность в окрестности своей точки x_0, функции a_α, f и φ_k, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, аналитичны в этой окрестности и выполнено условие (5), то в окрестности точки существует аналитич. решение $u(x)$ К. з. (3), (4), к-рое в классе аналитич. функций единственно. В предположении аналитичности эта теорема справедлива и для общих нелинейных уравнений, если они могут быть приведены к нормальной форме (6), а также для систем таких уравнений. Эта теорема носит универсальный характер, поскольку она применима к аналитич. уравнениям независимо от их типа (эллиптического, гиперболического и т. д.) и дает существование решения в малом. Решение единственно в классе неаналитич. функций.

Для дифференциальных уравнений с частными производными порядка выше 1-го К. з. может оказаться некорректной, если в условиях теоремы Коши — Ковалевской отказаться от аналитичности уравнения или данных Коши. Иллюстрацией служит пример Адамара: К. з. для уравнения Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

с начальными условиями

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y),\quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0) = 0$$

не имеет решения, если функция $\varphi_0(x, y)$ не является аналитической.

Широкий класс уравнений, для к-рых К. з. поставлена корректно, составляют гиперболич. уравнения. В этом случае К. з. носит глобальный характер, однако условия нехарактеристичности S при этом недостаточно. Необходимо, чтобы S была поверхностью пространственного типа. Модельным уравнением гиперболич. типа является волновое уравнение

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \qquad (7)$$

рассматриваемое в $(n+1)$-мерной области переменных

$(x,\ t)=(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)$. К. з. для этого уравнения с данными

$$u\ (x,\ 0)=\varphi_0\ (x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\ (x,\ 0)=\varphi_1\ (x)$$

на гиперплоскости $t=0$ однозначно разрешима для любых достаточно гладких функций φ_0, φ_1, и решение непрерывно зависит в метрике пространств C^k от этих функций. Для случаев $n=1$, $n=2$ и $n=3$ явный вид этого решения дается формулами Д'Аламбера, Пуассона и Кирхгофа соответственно:

$$u\ (x,\ t)=\frac{1}{2}\ [\varphi_0\ (x+t)+\varphi_0\ (x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\varphi_1\ (\tau)\ d\tau;$$

$$u\ (x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{|y-x|^2\leqslant t^2}\frac{\varphi_1\ (y)\ dy}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{|y-x|^2\leqslant t^2}\frac{\varphi_0\ (y)\ dy}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}},$$

где

$$x=(x_1,\ x_2),\ y=(y_1,\ y_2);$$

$$u\ (x,\ t)=\frac{1}{4\pi}\ t\int_{|\xi|=1}\varphi_1\ (x+t\xi)\ d\sigma+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[t\int_{|\xi|=1}\varphi_0\ (x+t\xi)\ d\sigma\right],$$

где $x=(x_1, x_2, x_3)$, $\xi=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $d\sigma$ — элемент поверхности единичной сферы $|\xi|=1$.

Множество точек на плоскости $t=0$, данные Коши на к-ром вполне определяют значение $u(x,\ t)$ решения волнового уравнения (7) в точке $(x,\ t)$, наз. областью зависимости для этой точки. Областями зависимости точки $(x,\ t)$ в случаях $n=1$, $n=2$ и $n=3$ являются отрезок, круг и шар, определяемые соотношением $|y-x|^2\leqslant t^2$ (в соответствующем пространстве $\mathbb{R}^n$). Если носителем данных Коши является нек-рая область S гиперплоскости $t=0$, то данные Коши в этой области влияют на решение во всех точках $(x,\ t)$ множества, для к-рого пересечение $S\bigcap\{|y-x|^2\leqslant t^2\}$ не пусто; это множество наз. областью влияния.

Множество точек $(x,\ t)\in\mathbb{R}^{n+1}$, на к-ром решение u вполне определяется по данным Коши на S, наз. областью определения $u(x,\ t)$ с начальными данными на S. В случае $n=1$, $n=2$ и $n=3$ область определения образуют все точки $(x,\ t)$, для к-рых отрезок, круг и шар $|y-x|^2\leqslant t^2$ соответственно расположены в S.

Эти результаты распространяются на более общий случай, когда носителем данных Коши является поверхность S пространственного типа, то есть поверхность, для к-рой величина Q в (5) сохраняет на S положительное значение.

Кроме К. з., для гиперболич. уравнений корректно поставлены и другие задачи, напр. *Коши характеристическая задача*, смешанная начально-краевая задача; в последней задаче решение имеется в $(n+1)$-мерном цилиндре с образующей, параллельной оси t, и с основанием S, представляющем собой нек-рую область в пространстве переменных $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ с границей Γ. Носителем начальных условий служит S, а на боковой поверхности $\Gamma\times\{t>0\}$ цилиндра задается значение функции или ее нормальной производной (в случае уравнений 2-го порядка) или более общие краевые условия.

Для вырождающихся уравнений К. з. имеет свои особенности. Напр., если уравнение гиперболич. типа и носителем данных Коши является поверхность, на к-рой уравнение параболически вырождается, то в зависимости от характера вырождения принятие начальных условий может осуществляться с нек-рым весом.

Лит.: [1] Ковалевская С. В., Научные работы, М., 1948; [2] Адамар Ж., Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, пер. с франц., М., 1978; [3] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [4] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [5]

Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [6] Мизохата С., Теория уравнений с частными производными, пер. с япон., М., 1977; [7] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972; [8] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965. *А. П. Солдатов.*

КОШИ ЗАДАЧА; численные методы решения для обыкновенного дифференциального уравнения. Задачей Коши наз. задача определения функции или нескольких функций, удовлетворяющих одному или, соответственно, системе дифференциальных уравнений и принимающих заданные значения в нек-рой фиксированной точке. Пусть

$$y(x)=\{y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)\},$$

$$f(x,\ y)=\{f_1(x,\ y),\ f_2(x,\ y),\ \ldots,\ f_n(x,\ y)\}$$

— вектор-функции, определенные и непрерывные соответственно на отрезке $I=\{x,\ |\ x-a\ |\leqslant A\}$ и в замкнутой области $\Pi=\{(x,\ y),\ |x-a|\leqslant A,\ \|y-b\|\leqslant B\}$, где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$. В этих обозначениях К. з. для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка записывается в виде

$$y'(x)=f(x,\ y),\ y(x_0)=y_0,\ x_0\in I,\ y_0\in\Pi. \qquad (1)$$

Вводя соответствующим образом новые неизвестные функции, можно привести к такому виду К. з. для любой системы обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка.

Решение задачи (1) существует, если функция $f(x, y)$ непрерывна в Π. Для того чтобы это решение было единственным, достаточно, чтобы выполнялось условие Осгуда:

$$\|f(x,\ y_1)-f(x,\ y_2)\|\leqslant\omega(\|y_1-y_2\|), \qquad (2)$$

где функция $\omega(t)$ — такова, что

$$\int_{\varepsilon}^{c}\frac{dt}{\omega(t)}\longrightarrow\infty,\ \varepsilon\longrightarrow 0,\ c>0,$$

или более сильное условие Липшица:

$$\|f(x,\ y_1)-f(x,\ y_2)\|\leqslant L\|y_1-y_2\|. \qquad (3)$$

Величина L наз. постоянной Липшица. Если функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема по y, то в качестве постоянной Липшица можно взять величину

$$L=\sup_{x\in I,\ y\in\Pi}\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|. \qquad (4)$$

Оценка (3) с постоянной Липшица (4) оказывается в ряде случаев слишком грубой для успешного применения численных методов решения К. з., несмотря на то, что теоретически решение этой задачи существует и оно единственно. Это происходит, в частности, в тех случаях, когда собственные значения матрицы $\frac{\partial f}{\partial y}$ имеют «большой разброс», т. е. наибольшее собственное значение в сотни или даже тысячи раз больше наименьшего собственного значения. Такие системы дифференциальных уравнений наз. жесткими системами, а соответствующие задачи — жесткими задачами Коши. Одним из источников возникновения жестких систем является сведение уравнений с частными производными к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, напр. с помощью метода прямых.

Численные методы для обыкновенных дифференциальных уравнений представляют собой, как правило, одно или несколько соотношений, связывающих искомую функцию $y(x)$ в дискретной последовательности точке x_k, $k=0, 1, \ldots$, множество к-рых наз. сеткой. Ос-

новы численных методов вообще и для дифференциальных уравнений в частности были заложены Л. Эйлером (L. Euler). Его именем называется один из самых простых методов решения К. з., к-рый состоит в следующем. Пусть решение задачи (1) в окрестности точки x_k разложено в ряд Тейлора

$$y(x) = y(x_k) + y'(x_k)(x - x_k) + y''(x_k)\frac{(x-x_k)^2}{2} + \dots$$

Если величина $x - x_k$ мала, то, отбрасывая члены порядка $(x-x_k)^2$ и более высокого, получают приближенное равенство

$$y(x) \approx y(x_k) + y'(x_k)(x - x_k), \qquad y'(x_k) = f(x_k,\ y(x_k)).$$

В точке x_{k+1} приближенное решение может быть вычислено по формуле

$$y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k) f(x_k,\ y_k).$$

Это соотношение и наз. м е т о д о м Э й л е р а.

В дальнейшем численные методы были значительно усовершенствованы. Это развитие велось в основном в двух направлениях: методы, получившие в дальнейшем название *Рунге—Кутта методов* и конечноразностные методы, важнейшим представителем к-рых является *Адамса метод*.

К достоинствам методов Рунге — Кутта следует отнести то, что алгоритмы, получающиеся на их основе, являются однородными, т. е. не изменяющимися при переходе от одной точки сетки к другой. Кроме того, в методах Рунге — Кутта можно изменять шаг интегрирования в соответствии с требуемой точностью вычислений без значительного усложнения самого алгоритма (см. *Кутта — Мерсона метод*, *Рунге правило*). На основе этих методов созданы достаточно надежные двусторонние методы. Основным недостатком является то, что для вычисления приближенного решения в одной точке сетки требуется несколько вычислений правой части $f(x,\ y)$ дифференциального уравнения (1). Это приводит, в особенности при сложных правых частях, к значительному увеличению времени вычислений.

В конечноразностных методах, в том числе в методе Адамса, требуется лишь одно вычисление правой части на один узел сетки. Это является главным достоинством конечноразностных методов. Однако для того чтобы начать вычисления по какой-либо конечноразностной формуле, необходимо прежде вычислить дополнительные «начальные значения». Это приводит к тому, что алгоритм оказывается неоднородным — первые несколько значений должны вычисляться по другим формулам. Более существенным недостатком конечноразностных методов является невозможность простого изменения шага интегрирования, т. е. необходимость использовать сетки с постоянным шагом.

На основе конечноразностных методов разработаны так. наз. методы предсказания — уточнения, к-рые представляют собой пару конечноразностных формул, одна из к-рых (предсказывающая) является, как правило, явной, а вторая (уточняющая) — неявной, напр., предсказывающая:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3\bar{f}_n - f_{n-1}),$$

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n),$$

уточняющая:

$$f_n = f(x_n,\ y_n), \quad \bar{f}_n = f(x_n,\ \bar{y}_n).$$

Предсказывающе-уточняющие методы находят успешное применение при решении жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Несмотря на то, что дифференциальные уравнения высокого порядка формально сводятся к системе урав-

нений 1-го порядка, методы, приспособленные к конкретному виду дифференциального уравнения, иногда оказываются значительно более эффективными. В связи с этим развиваются конечноразностные методы, использующие производные высшего порядка, напр. *Штермера метод*.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Modern Numerical Methods for ordinary differential equations, Oxf., 1976.

В. В. Поспелов.

КОШИ ИНТЕГРАЛ — 1) К. и.— определенный интеграл от непрерывной функции одного действительного переменного. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, n$; предел

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x_i$$

наз. определенным интегралом по Коши от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

К. и.— частный случай *Римана интеграла*. Определение дано О. Коши в [1].

Лит.: [1] Cauchy A. L., Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal, t. 1, P., 1823.

Л. Д. Кудрявцев.

2) К. и.— интеграл с ядром Коши

$$\frac{1}{2\pi i\,(\zeta-z)},$$

выражающий значения регулярной аналитич. функции $f(z)$ внутри контура L через ее значения на L. Точнее, пусть $f(z)$ — регулярная аналитич. функция комплексного переменного z в области D и L — замкнутая кусочно гладкая жорданова кривая, расположенная в D вместе со своей внутренностью G, причем обход L совершается против часовой стрелки. Тогда справедлива основная в теории аналитич. функций одного комплексного переменного интегральная формула Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}. \qquad (1)$$

Стоящий справа в формуле (1) интеграл и наз. интегралом Коши.

Впервые, по-видимому, К. и., применительно к частным ситуациям, появляется в работах О. Коши [1].

К. и. характеризуется, таким образом, двумя условиями: 1) К. и. берется по замкнутой гладкой или хотя бы кусочно гладкой кривой L; 2) подинтегральная функция К. и. имеет вид

$$\frac{f(\zeta)}{2\pi i\,(\zeta-z)},$$

где $\zeta\in L$, а $f(z)$ — регулярная аналитич. функция на L и внутри L. Если в К. и. $z\in C\bar{G}$, т. е. если z расположена во внешности кривой L, то при сохранении условий 1) и 2):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=0, \quad z\in C\bar{G}. \qquad (2)$$

В частности, если L — окружность радиуса ρ с центром z, т. е.

$$L=\{\zeta=z+\rho e^{i\theta};\quad 0\leqslant\theta<2\pi\},$$

то из (1) следует

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z+\rho^{i\theta})\,d\theta,$$

т. е. значение $f(z)$ в любой точке $z\in D$ равно среднему арифметическому ее значений на любой достаточно малой окружности $L\subset D$ с центром z. Формула (1) позво-

ляет получить и все остальные элементарные свойства аналитич. функций.

Если, с другой стороны, $f(z)$ является регулярной аналитич. функцией в бесконечной области $C\overline{G}$ — внешности замкнутой кривой L и на L,

$$f(\infty)=\lim_{z\to\infty} f(z),$$

то справедлива интегральная формула Коши для бесконечной области:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\begin{cases} f(\infty)-f(z), & z\in C\overline{G};\\ f(\infty), & z\in G.\end{cases}$$

Пусть теперь Γ — некоторая, не обязательно замкнутая, кусочно гладкая кривая, расположенная в конечной плоскости $z\neq\infty$, $\varphi(\zeta)$ — непрерывная комплексная функция на Γ и z — точка, не лежащая на Γ. Интегралом типа Коши (и. т. К.) наз. обобщение К. и. в виде

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},\quad z\notin\Gamma. \tag{3}$$

Функцию $\varphi(\zeta)$ наз. иногда плотностью интеграла типа Коши. Простейшие свойства и. т. К.:

1) $F(z)$ — регулярная аналитич. функция переменного z в любой области, не содержащей точек Γ;

2) производные $F^{(n)}(z)$ выражаются формулами

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}},\quad z\notin\Gamma;\quad n=0,\ 1,\ \ldots;$$

3) функция $F(z)$ регулярна в бесконечности, причем $F(\infty)=0$, $F(z)=O(1/z)$ при $z\to\infty$.

С точки зрения общей теории аналитич. функций и применений к механике и физике, основное значение имеет вопрос о существовании граничных значений и. т. К. при приближении к Γ и об их аналитич. выражении. К.и. (1) всюду внутри L равен $f(z)$, а во внешности он тождественно равен нулю. Поэтому, когда и.т.К. (3) обращается в К. и., т. е. когда выполняются условия 1) и 2), функция $F(z)$ при приближении к L слева (т. е. изнутри) имеет граничные значения $F^+(\zeta_0)=f(\zeta_0)$, и при этих значениях на L она непрерывна в каждой точке $\zeta_0\in L$ слева от L; при приближении к L справа (т. е. извне) $F(z)$ имеет граничные значения нуль, $F^-(\zeta_0)=0$, и при этих значениях на L она непрерывна в каждой точке $\zeta_0\in L$ справа от L. Т. обр., для К. и.

$$F^+(\zeta_0)-F^-(\zeta_0)=f(\zeta_0).$$

Для и. т. К. общего вида дело обстоит несколько сложнее. Пусть кривая Γ задана уравнением $\zeta=\zeta(s)$, s — длина ее дуги, отсчитываемая от какой-либо фиксированной точки, $\zeta_0=\zeta(s_0)$ — произвольно фиксированная точка на Γ и Γ_ε — та часть кривой Γ, к-рая остается после удаления из Γ меньшей дуги с концами $\zeta(s_0-\varepsilon)$ и $\zeta(s_0+\varepsilon)$. Если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0},\quad \zeta_0\in\Gamma, \tag{4}$$

то он наз. сингулярным, или особым, интегралом. Доказано, напр., что сингулярный интеграл (4) существует, если кривая Γ гладкая в окрестности отличной от концов Γ точки ζ_0, а плотность $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$|\varphi(\zeta')-\varphi(\zeta'')|\leqslant C\,|\zeta'-\zeta''|^\mu,\quad \mu>0.$$

При этих условиях существуют и граничные значения, к-рые выражаются формулами Сохоцкого:

$$F^\pm(\zeta_0)=\pm\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0},\quad \zeta_0\in\Gamma, \tag{5}$$

а функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ — непрерывны в окрестности

$\zeta_0 \in \Gamma$ соответственно слева и справа от Γ. В случае К. и. сингулярный интеграл равен $\frac{f(\zeta_0)}{2}$, $F^+(\zeta_0) - F^-(\zeta_0) = f(\zeta_0)$, $F^+(\zeta_0) + F^-(\zeta_0) = f(\zeta_0)$.

В эквивалентной форме формулы (5) записываются так:

$$F^+(\zeta_0) - F^-(\zeta_0) = \varphi(\zeta_0), \tag{6}$$

$$F^+(\zeta_0) + F^-(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - \zeta_0}, \quad \zeta_0 \in \Gamma. \tag{7}$$

Формулы Сохоцкого (5) — (7) имеют основное значение при решении *граничных задач теории аналитических функций*, *сингулярных интегральных уравнений*, связанных с и. т. К., а также при решении ряда задач гидродинамики, теории упругости и др.

Пусть Γ — произвольная, для простоты замкнутая, спрямляемая кривая длины l, $\psi = \psi(s)$ — угол между направлением оси Ox и касательной к Γ в точке $\zeta = \zeta(s) \in \Gamma$, рассматриваемый как функция длины дуги s, $\Phi(s)$ — комплексная функция длины дуги s ограниченной вариации на $[0, l]$. Выражение

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{i\psi} d\Phi(s)}{\zeta - z}, \quad \zeta = \zeta(s), \quad z \notin \Gamma, \tag{8}$$

наз. интегралом типа Коши — Стилтьеса (и. т. К.—С.). Иначе говоря, и. т. К.— С. есть и. т. К. по произвольной конечной комплексной борелевской мере, сосредоточенной на Γ. Если функция $\Phi(s)$ абсолютно непрерывна, то и. т. К.—С. превращается в интеграл типа Коши — Лебега (и. т. К.—Л.), часто называемый также просто интегралом типа Коши:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \notin \Gamma, \tag{9}$$

где $\varphi(\zeta) = \varphi[\zeta(s)] = \Phi'(s)$.

Пусть ζ_0—точка Γ, в к-рой существует определенная касательная, наклоненная к оси Ox под углом ψ_0; такие точки имеются на спрямляемой кривой почти всюду. Пусть точка z находится на нек-рой прямой, проходящей через ζ_0 и наклоненной к нормали под углом α_0, на расстоянии $|z - \zeta_0| = \varepsilon$, т. е. $z = \zeta_0 \pm \varepsilon i e^{i(\psi_0 + \alpha_0)}$. Разность между и. т. К.— С. (8) и интегралом по Γ_ε

$$W(\zeta_0;\ \varepsilon,\ \alpha_0) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_\Gamma \frac{e^{i\psi} d\Phi(s)}{\zeta - z} - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{i\psi} d\Phi(s)}{\zeta - \zeta_0} \right]$$

определена во всех точках $\zeta_0 \in \Gamma$, в к-рых существует определенная касательная, т. е. почти всюду на Γ. В теории и. т. К.—С. важное значение имеет основная лемма Привалова: предельный переход

$$\lim_{\varepsilon \to 0} W(\zeta_0;\ \varepsilon,\ \alpha_0) = \pm\, \Phi'(\zeta_0)$$

осуществляется для всех точек $\zeta_0 \in \Gamma$, кроме, быть может, точек множества меры нуль на Γ, не зависящего от α_0, равномерно относительно α_0 в любом угле $|\alpha_0| < \pi/2 - \delta$, $\delta > 0$. Если сингулярный интеграл существует почти всюду на Γ, то и. т. К.—С. имеет почти всюду на Γ угловые граничные значения $F^\pm(\zeta_0)$, для к-рых справедливы формулы Сохоцкого:

$$F^\pm(\zeta_0) = \pm \frac{1}{2} \Phi'(s_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{i\psi} d\Phi(s)}{\zeta - \zeta_0}, \quad \zeta_0 \in \Gamma. \tag{10}$$

Верно и обратное: если и. т. К.—С. почти всюду на Γ имеет угловые граничные значения изнутри и извне Γ, то сингулярный интеграл существует и формулы (10) справедливы почти всюду на Γ. Полного решения проблемы необходимых и достаточных условий существования граничных значений в достаточно простых терминах для и. т. К.—С. и даже для и. т. К.—Л. пока (1982) не получено.

В отличие от рассмотренного выше случая и. т. К. по гладкой кривой Г, даже при наличии угловых граничных значений, и. т. К.—С. уже, вообще говоря, не является непрерывной функцией в окрестности точки $\zeta_0 \in \Gamma$ слева или справа от Г. Здесь известно, напр., что и. т. К.—Л. (9) непрерывен в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной спрямляемым контуром Г, при дополнительном условии, что его плотность $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет на Г условию Липшица

$$|\varphi(\zeta') - \varphi(\zeta'')| \leqslant C\,|\zeta' - \zeta''|, \quad \zeta',\ \zeta'' \in \Gamma.$$

Относительно и. т. К.—Л. (9) говорят, что он обращается в К. и.

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \qquad (11)$$

понимаемый в смысле Лебега, если угловые граничные значения $F^+(\zeta_0)$ изнутри Г совпадают с $\varphi(\zeta_0)$ почти всюду на контуре Г. Иначе говоря, интеграл (9) обращается в К. и. (11), если угловые граничные значения $F^-(\zeta_0)$ извне Г равны нулю почти всюду на Г. Относящаяся сюда теорема Голубева — Привалова гласит: суммируемая функция $\varphi(\zeta)$ на Г тогда и только тогда представляет собой угловые граничные значения нек-рого К. и. изнутри Г, когда равны нулю все моменты

$$\int_\Gamma \zeta^n \varphi(\zeta)\,d\zeta = 0, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (12)$$

Если выполнены аналогичные (12) условия

$$\int_\Gamma \zeta^n e^{i\psi}\,d\Phi(s) = 0, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (13)$$

то и. т. К.—С. (8) обращается в интеграл Коши — Стилтьеса (и. К.—С.):

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{i\psi}\,d\Phi(s)}{\zeta - z}, \qquad (14)$$

т. е. угловые граничные значения $F^+(\zeta_0)$ изнутри Г совпадают с производной $\Phi'(s_0)$ почти всюду на Г или, иначе говоря, угловые граничные значения $F^-(\zeta_0)$ извне Г равны нулю почти всюду на Г. Условия (13) сразу обеспечивают абсолютную непрерывность функции $\Phi(s)$ на отрезке $[0, l]$, а следовательно, на самом деле в этом случае и. К.—С. (14) является интегралом Коши — Лебега (и. К.—Л.) с плотностью $\varphi(\zeta) = \varphi[\zeta(s)] = \Phi'(s)$. Таким образом, класс функций, представимых и. К.—С., совпадает с классом функций, представимых и. К.—Л.

Важной задачей представляется внутренняя характеризация классов функций, регулярных в области D, ограниченной замкнутой спрямляемой кривой Г, и представимых К. и. (11), и. т. К.—Л. (9) или и. т. К.—С. (8) (о наиболее важных классах $A(D)$, $B(D) = H_\infty(D)$, $H_p(D)$ и $N^*(D)$ см. в ст. *Граничные свойства аналитических функций*).

В простейшем случае, когда $D = \{z: |z| < 1\}$ — единичный круг и $\Gamma = \{z: |z| = 1\}$ — единичная окружность, и. т. К.—С., принимающий в этом случае вид

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta\,d\Phi(\theta)}{\zeta - z}, \quad |z| < 1, \quad \zeta = e^{i\theta}, \qquad (15)$$

изображает всегда функцию класса H_p, $0 < p < 1$. Обратная теорема неверна: совокупность функций классов H_p, $0 < p < 1$, шире, чем совокупность функций, представимых в виде (15). Напротив, совокупность функций, представимых в D и. К.—С. или К. и., совпадает с классом H_1.

В случае произвольной односвязной области D, ограниченной спрямляемой кривой Г, класс функций, представимых в D и. К.—С. или К. и., совпадает с классом Смирнова E_1 (см. *Граничные свойства аналитических*

функций). Характеристики классов функций, представимых и. т. К.—С. или и. т. К.—Л., значительно сложнее.

Пусть $f(z)$ — произвольная (не аналитическая) функция класса C^1 в конечной замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной кусочно гладкой жордановой кривой L. Иногда интегральной формулой Коши наз. также следующее обобщение классич. формулы (1):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\,\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta - z} = \begin{cases} f(z), & z \in D; \\ 0, & z \in C\overline{D}, \end{cases} \qquad (16)$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + i\frac{\partial f}{\partial \eta}\right), \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Эта формула встречается, начиная, по-видимому, с работ Д. Помпею (D. Pompeiu, 1912). Она известна также как формула Помпею, формула Бореля — Помпею, формула Коши — Грина и находит многочисленные приложения в теории обобщенных аналитич. функций, сингулярных интегральных уравнений и в различных прикладных вопросах.

Пусть $f(z)$ — регулярная аналитич. функция многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$ в замкнутом поликруге $\overline{D}$, $D=\{z\in\mathbb{C}^n: |z_\nu - a_\nu| < r_\nu\}$. Тогда в каждой точке D функция $f(z)$ представима кратным интегралом Коши:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_T \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \qquad (17)$$

где $T=\{\zeta\in\mathbb{C}^n: |\zeta_\nu - a_\nu| = r_\nu, \ \nu=1, \ldots, n\}$ — остов поликруга, $\zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, $d\zeta = d\zeta_1 \ldots d\zeta_n$, $\zeta - z = (\zeta_1 - z_1) \ldots (\zeta_n - z_n)$. Формула (17) дает простейший аналог К. и. для окружности $L=\{z\in\mathbb{C}: |z-a|=r\}$, но при $n>1$ интегрирование в (17) распространено уже не на всю границу поликруга, а лишь на его остов. Вообще, пусть $D = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ — поликруговая область в $\mathbb{C}^n$, составленная как произведение односвязных плоских областей D_ν с гладкими границами $\partial D_\nu = \{z_\nu = z_\nu(t_\nu), \ 0 \leqslant t_\nu \leqslant 1\}$, $T = \partial D_1 \times \partial D_2 \times \ldots \partial D_n$ — остов D, представляющий собой гладкое n-мерное многообразие. Формула (17) распространяется и на этот случай.

Большое значение в теории аналитич. функций многих комплексных переменных имеют более глубокие обобщения интегральной формулы Коши, в первую очередь такие, как *Лере формула*, названная самим Ж. Лере (J. Leray) формулой Коши — Фантапье, и *Бохнера — Мартинелли представление*. В связи с этим при $n>1$ изучаются в основном граничные свойства интегральных представлений, отличных от (17).

Лит.: [1] Cauchy A. L., Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites, Turin, 1831 (или Œuvres complètes, sér. 1, t. 8, P., 1892); [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, 1976; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [4] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [5] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [6] Привалов И. И., Интеграл Cauchy, Саратов, 1918; [7] его же, Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [8] Хавинсон С. Я., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1963, М., 1965, с. 5—80; [9] Хведелидзе Б. В., в кн.: «Современные проблемы математики», т. 7, М., 1975, с. 5—162; [10] Calderón A. P., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1977, v. 74, № 4, p. 1324—27.

Е. Д. Соломенцев.

КОШИ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА: если $f(z)$ — регулярная аналитич. функция комплексного переменного z в односвязной области D на комплексной плоскости $\mathbb{C}=\mathbb{C}^1$, то интеграл от $f(z)$, взятый по любой замкнутой спрямляемой кривой γ, расположенной в D, равен нулю, т. е.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Эквивалентная формулировка К. и. т. утверждает, что интеграл

$$\int_a^b f(z)\,dz, \quad a,\ b \in D,$$

не зависит от выбора пути интегрирования, соединяющего фиксированные точки a и b в области D. Именно такой в сущности и была первоначальная формулировка К. и. т., предложенная О. Коши в 1825 (см. [1]); близкие формулировки имеются в письмах К. Гаусса (C. Gauss, 1811). Доказательство О. Коши содержало дополнительное предположение непрерывности производной $f'(z)$; первое полное доказательство дано Э. Гурса [2]. Свойство аналитич. функций, выражаемое К. и. т., полностью характеризует последние (см. *Мореры теорема*), и потому из К. и. т. выводятся все основные свойства аналитич. функций.

В случае произвольной области D на плоскости $\mathbb{C}$ или на римановой поверхности К. и. т. может быть сформулирована так: если $f(z)$ — регулярная аналитич. функция в области D, то интеграл от $f(z)$ по любой спрямляемой замкнутой кривой $\gamma \subset D$, гомотопной нулю в D, равен нулю.

Распространением К. и. т. на случай аналитич. функций многих комплексных переменных является теорема Коши — Пуанкаре: если $f(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)$,— регулярная аналитич. функция в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, то для любой $(n+1)$-мерной поверхности $G \subset D$ с гладкой границей $\gamma = \partial G$ интеграл

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

где $f(z)dz$ — сокращенное обозначение голоморфной дифференциальной формы

$$f(z)\,dz = f(z_1, \ldots, z_n)\,dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n.$$

При $n=1$ поверхность G и область D имеют одинаковую размерность, $n+1=2n$ (случай классической К. и. т.); при $n>1$ размерность G меньше размерности D, $n+1<2n$. См. также *Вычет, Коши интеграл*.

Лит.: [1] Cauchy A. L., Œuvres complètes, sér. 1, t. 4, P., 1890, p. 285; [2] Goursat E., «Acta math.», 1884, v. 4, p. 197—200; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [4] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [5] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

КОШИ КРИТЕРИЙ — 1) К. к. сходимости числовой последовательности: для того чтобы последовательность чисел (действительных или комплексных) x_n, $n=1, 2, \ldots$, имела предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$ выполнялось неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

К. к. сходимости числовой последовательности обобщается в критерий сходимости точек полного метрич. пространства.

Последовательность точек $\{x_n\}$ полного метрич. пространства сходится в том и только в том случае, когда для любого $\varepsilon>0$ существует такое N, что для всех $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$.

2) К. к. существования предела функций n переменных ($n \geqslant 1$). Пусть функция f определена на множестве X n-мерного пространства R^n и принимает числовые (действительные или комплексные) значения, a — предельная точка множества X (или символ ∞, в этом случае множество X неограничено). Конечный предел $\lim\limits_{x \to a,\ x \in X} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ найдется та-

кая окрестность $U=U(a)$ точки a, что для любых $x'\in U\cap X$ и $x''\in U\cap X$ выполняется неравенство

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon.$$

Этот критерий обобщается на более общие отображения: пусть X — топологич. пространство, a — его предельная точка, в к-рой выполняется первая аксиома счетности, Y — полное метрич. пространство и f — отображение X в Y. Для того чтобы существовал предел

$$\lim_{x\to a} f(x),$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовала окрестность $U=U(a)$ точки a такая, что для всех $x'\in U$ и $x''\in U$ выполнялось неравенство

$$\rho(f(x''),\ f(x'))<\varepsilon.$$

3) К. к. равномерной сходимости семейства функций. Пусть X — некоторое множество, Y — топологич. пространство, удовлетворяющее в предельной точке $y_0\in Y$ первой аксиоме счетности, R — полное метрич. пространство, $f(x,\ y)$ — отображение множества $X\times Y$ в R, $x\in X$, $y\in Y$. Семейство отображений $f(x,\ y)$, отображающих при фиксированном $y\in Y$ множество X в R, является равномерно сходящимся на X при $y\to y_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такая окрестность $U=U(y_0)$ точки y_0, что для всех $y'\in U$, $y''\in U$ и всех $x\in X$ выполняется неравенство

$$\rho(f(x,\ y''),\ f(x,\ y'))<\varepsilon.$$

В частности, если Y — множество натуральных чисел и $f_n(x)=f(x,\ n)$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве X при $n\to\infty$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех $x\in X$ и всех номеров $n\geqslant N$ и $m\geqslant N$ выполняется неравенство

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon.$$

4) К. к. сходимости ряда: числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех $n\geqslant N$ и всех целых $p\geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}\right|<\varepsilon.$$

Для кратных рядов аналогичный критерий сходимости наз. критерием Коши — Штольца. Напр., для того чтобы двойной ряд

$$\sum_{n,\ m=1}^{\infty}u_{nm}$$

сходился по прямоугольным частичным суммам

$$S_{nm}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}u_{kl},$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось такое N, что при всех $n\geqslant N$, $m\geqslant N$ и всех целых $p\geqslant 0$ и $q\geqslant 0$ выполнялось неравенство

$$|S_{n+p,\ m+q}-S_{nm}|<\varepsilon.$$

Эти критерии обобщаются на ряды в банаховых пространствах (вместо абсолютной величины берутся нормы соответствующих элементов).

5) К. к. равномерной сходимости ряда: пусть $u_n=u_n(x)$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, — функции, определенные на нек-ром множестве X и принимающие числовые значения. Для того чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

равномерно сходился на множестве X, необходимо и

достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой номер N, что для всех $n\geqslant N$, целых $p\geqslant 0$ и $x\in X$ выполнялось неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{m+k}(x)\right|<\varepsilon.$$

Этот критерий также переносится на кратные ряды, причем не только на числовые, но и на ряды, члены к-рых принадлежат банаховым пространствам, т. е. когда $u_n(x)$ являются отображениями множества X в нек-рое банахово пространство.

6) К. к. сходимости несобственных интегралов: пусть функция f определена на полуинтервале $[a, b)$, $-\infty<a<b\leqslant+\infty$, принимает на нем числовые значения и при любом $c\in(a, b)$ интегрируема (по Риману или по Лебегу) на отрезке $[a, c]$. Для того чтобы несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало такое $\eta\in(a, b)$, что для всех η' и η'', удовлетворяющих условию $\eta<\eta'<b$, $\eta<\eta''<b$, выполнялось неравенство

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Аналогичным образом критерий формулируется и для несобственных интегралов других типов, а также обобщается на случай, когда функция f зависит от нескольких переменных и ее значения лежат в банаховом пространстве.

7) К. к. равномерной сходимости несобственных интегралов: пусть функция $f(x, y)$ при каждом фиксированном $y\in Y$, где Y — некоторое множество, определена на полуинтервале $[a, b)$, $-\infty<a<b\leqslant+\infty$, принимает числовые значения и при любом $c\in(a, b)$ интегрируема по x на отрезке $[a, c]$. Для того чтобы интеграл

$$\int_a^b f(x, y)\,dx,\quad y\in Y,$$

равномерно сходился на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось такое $\eta\in(a, b)$, что для любых η' и η'', удовлетворяющих условиям $\eta<\eta'<b$, $\eta<\eta''<b$ и всех $y\in Y$, выполнялось неравенство

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Этот критерий также переносится на несобственные интегралы других типов, на случай функций многих переменных и на функции, значения к-рых лежат в банаховых пространствах.

Лит.: [1] Cauchy A. L., Analyse algébrique, P., 1821; [2] Stolz O., «Math. Ann.», 1884, Bd 24, S. 154—71; [3] Дьедонне Ж., Основы современного анализа, пер. с англ., М., 1964; [4] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1971, т. 2, М., 1973; [5] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1981; [6] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975; [7] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 1, М., 1963.

Л. Д. Кудрявцев.

КОШИ МАТРИЦА линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — матрица, задающая *Коши оператор* $X(\theta, \tau)$ этой системы в нек-ром базисе пространства $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$), не зависящем от θ и τ.

В. М. Миллионщиков.

КОШИ НЕРАВЕНСТВО — 1) К. н.— неравенство для конечных сумм, имеющее вид:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n} a_k^2\sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Доказано О. Коши (A. Cauchy, 1821); интегральный аналог — *Буняковского неравенство.*

2) К. н.— неравенство для модуля $|f^{(k)}(a)|$ производной регулярной аналитич. функции $f(z)$ в фиксированной точке a комплексной плоскости $\mathbb{C}$ или для модуля коэффициента $|c_k|$ разложения $f(z)$ в степенной ряд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(z-a)^k.$$

К. н. имеют вид

$$|f^{(k)}(a)|\leqslant k!\,\frac{M(r)}{r^k},\quad |c_k|\leqslant\frac{M(r)}{r^k},\qquad (*)$$

где r — радиус любого круга $U=\{z\in\mathbb{C};\ |z-a|\leqslant r\}$, на к-ром функция $f(z)$ регулярна; $M(r)$ — максимум модуля $|f(z)|$ на окружности $|z-a|=r$. Неравенства $(*)$ встречаются в работах О. Коши (A. Cauchy, см., напр., [1]). Из них непосредственно вытекает неравенство Коши — Адамара (см. [2]):

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!}}\leqslant\frac{1}{d(a,\,\partial D)},$$

где $d(a,\,\partial D)$ — расстояние от точки a до границы ∂D области голоморфности функции $f(z)$. В частности, для целой функции $f(z)$ в любой точке $a\in\mathbb{C}$ имеем

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!}}=0.$$

Для голоморфной функции $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1,\ \ldots,\ z_n)$, $n>1$, К. н. имеют вид

$$\left|\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}f(a)}{\partial z_1^{k_1}\ldots\partial z_n^{k_n}}\right|\leqslant k_1!\ldots k_n!\,\frac{M(r_1,\ \ldots,\ r_n)}{r_1^{k_1}\ldots r_n^{k_n}}$$

или

$$|c_{k_1,\ \ldots,\ k_n}|\leqslant\frac{M(r_1,\ \ldots,\ r_n)}{r_1^{k_1}\ldots r_n^{k_n}},$$

$$a=(a_1,\ \ldots,\ a_n)\in\mathbb{C}^n,\quad k_1,\ \ldots,\ k_n=0,\ 1,\ \ldots,$$

где $c_{k_1,\ \ldots,\ k_n}$ — коэффициенты разложения $f(z)$ в степенной ряд

$$f(z)=\sum_{k_1,\ \ldots,\ k_n=0}^{\infty} c_{k_1,\ \ldots,\ k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\ldots(z_n-a_n)^{k_n};$$

$r_1,\ \ldots,\ r_n$ — радиусы поликруга $U^n=\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z_j-a_j|\leqslant r_j,\ j=1,\ \ldots,\ n\}$, на к-ром $f(z)$ голоморфна; $M(r_1,\ \ldots,\ r_n)$ — максимум $|f(z)|$ на остове поликруга U^n.

Лит. см. при ст. *Коши — Адамара теорема.*

Е. Д. Соломенцев.

КОШИ ОПЕРАТОР системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(t,\ x),\quad x\in\mathbb{R}^n,\qquad (1)$$

— зависящий от параметров θ и τ оператор $X(\theta,\ \tau)$: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, сопоставляющий значению всякого решения $x(t)$ системы (1) в точке $t=\tau$ значение этого же решения в точке $t=\theta$:

$$X(\theta,\ \tau)x(\tau)=x(\theta).$$

Если система (1) линейная, т. е.

$$\dot{x}=A(t)x,\qquad (2)$$

где $A(\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение $(\alpha,\ \beta)\longrightarrow \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n)$ (или $(\alpha,\ \beta)\longrightarrow \mathrm{Hom}\,(\mathbb{C}^n,\ \mathbb{C}^n)$), то К. о. при всяких $\theta,\ \tau\in(\alpha,\ \beta)$ есть невырожденное линейное отображение $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$), удовлетворяющее при всяких $\theta,\ \tau,\ \eta\in(\alpha,\ \beta)$ равенствам:

$$\left.\begin{aligned}X(\theta,\ \theta)=I,\quad X(\theta,\ \tau)=X^{-1}(\tau,\ \theta),\\ X(\theta,\ \eta)X(\eta,\ \tau)=X(\theta,\ \tau)\end{aligned}\right\}\qquad (3)$$

и неравенству

$$\| X(\theta, \tau)\| \leqslant \exp\left| \int_\tau^\theta \| A(t)\| dt \right|.$$

(Для нелинейной системы (1), удовлетворяющей условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши, равенства (3) тоже верны, с должными оговорками относительно областей определения входящих в них операторов.) Общее решение системы

$$\dot{x} = A(t)x + h(t),$$

где $h(\cdot)$— суммируемое на каждом отрезке отображение

$$(\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}^n \ (\text{или } (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{C}^n),$$

записывается через К. о. $X(\theta, \tau)$ системы (2) формулой *произвольных постоянных вариации*:

$$x(t) = X(t, \tau)\, x(\tau) + \int_\tau^t X(t, \theta)\, h(\theta)\, d\theta.$$

Для К. о. системы (2) имеет место *Лиувилля—Остроградского формула*

$$\det X(\theta, \tau) = \exp \int_\tau^\theta \operatorname{tr} A(\xi)\, d\xi,$$

где $\operatorname{tr} A(\xi)$ — след оператора $A(\xi)$.

Производная К. о. $X(\theta, \tau)$ системы (1) в точке $x \in \mathbb{R}^n$ равна К. о. системы уравнений в вариациях вдоль решения $x(t)$ системы (1), равного x при $t=\tau$ (предполагается, что график решения $x(t)$ при всех t, принадлежащих отрезку с концами θ и τ, содержится в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ такой, что f — непрерывное отображение $G \to \mathbb{R}^n$, имеющее непрерывную в G производную f'_x; это — одна из формулировок теоремы о дифференцируемости решения по начальному значению).

Для линейной системы (2) с постоянными коэффициентами ($A(t) \equiv A$) К. о. задается формулой

$$X(\theta, \tau) = \exp((\theta - \tau)A) \qquad (4)$$

($\exp B$ для линейного оператора B определяется как $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k$; при другом подходе за определение $\exp A$ можно принять формулу (4), положив в ней $\theta = \tau + 1$). Из формулы (4) видно, что К. о. зависит только от разности параметров $\theta - \tau$:

$$X(\theta + t, \tau + t) = X(\theta, \tau).$$

Это равенство — следствие автономности системы, имеющее место для всякой *автономной системы*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (5)$$

обозначив для системы (5) К. о. $X(\theta, \tau)$ через $f^{\theta - \tau}$, получают из формул (3) следующие формулы:

$$f^0 = I; \ (f^t)^{-1} = f^{-t}; \ f^t f^\tau = f^{t+\tau}$$

(см. также *Динамическая система*, *Действие группы*).

Для линейной системы (2) с периодическими коэффициентами:

$$A(t + T) = A(t)$$

при нек-ром $T > 0$ и всех $t \in \mathbb{R}$ — выполняется тождество

$$X(\theta + T, \tau + T) = X(\theta, \tau)$$

при всех $\theta, \tau \in \mathbb{R}$; для такой системы оператор $X(\tau + T, \tau)$, где $\tau \in \mathbb{R}$ — любое, наз. оператором монодромии. Матрица, задающая оператор $X(\tau + T, \tau)$ (или, напр., $X(T, 0)$) в каком-либо базисе, наз. *монодромии матрицей*. Все операторы монодромии фиксированной линейной системы с периодическими коэффициентами подобны друг другу:

$$X(\theta + T, \theta) = X(\theta, \tau) X(\tau + T, \tau) X^{-1}(\theta, \tau),$$

поэтому спектр оператора монодромии $X(\tau+T,\ \tau)$ не зависит от τ. Собственные значения оператора монодромии наз. *мультипликаторами* такой системы, через них выражаются условия устойчивости и условной устойчивости системы (см. *Ляпунова характеристический показатель*, *Устойчивость по Ляпунову*, *Устойчивости теория*). Для систем (2) с периодическими комплексными коэффициентами:

$$A(\cdot):\mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{Hom}\,(\mathbb{C}^n,\ \mathbb{C}^n),\ A(t+T)=A(t)$$

для нек-рого $T>0$ и всех $t\in\mathbb{R}$ — имеет место т е о р е м а Л я п у н о в а:

$$X(\theta,\ \tau)=S_\tau(\theta)\exp((\theta-\tau)B_\tau),$$

где $B_\tau=\frac{1}{T}\ln X(\tau+T,\ \tau)$, а $S_\tau(\theta)$ при любых $\theta,\ \tau\in\mathbb{R}$ является невырожденным линейным оператором $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$, периодически зависящим от θ:

$$S_\tau(\theta+T)=S_\tau(\theta).$$

Иногда К. о. наз. по-другому (напр., «матрицантом» — для линейной системы, или «оператором сдвига по траекториям»). *В. М. Миллионщиков.*

КОШИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — то же, что *фундаментальная последовательность*.

КОШИ ПРИЗНАК — 1) К. п. с х о д и м о с т и ч и с л о в о г о р я д а: если для числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с неотрицательными членами существует такое число q, $0\leqslant q<1$, что, начиная с нек-рого номера, выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n}\leqslant q$, равносильное условию $\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$, то данный ряд сходится. Если же, начиная с нек-рого номера, имеет место неравенство $\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$ или даже менее того существует подпоследовательность u_{n_k}, $k=1,2,\ldots$, для членов к-рой имеет место неравенство $\sqrt[n_k]{u_{n_k}}\geqslant 1$, то ряд расходится.

В частности, если существует $\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, если существует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}>1$, то ряд расходится. Установлен О. Коши [1]. Для рядов $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с членами u_n произвольных знаков из условия $\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}>1$ следует расходимость ряда; из условия $\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}<1$ — абсолютная сходимость ряда.

2) К. п. и н т е г р а л ь н ы й, и н т е г р а л ь н ы й п р и з н а к К о ш и — М а к л о р е н а: если для числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с неотрицательными членами существует такая невозрастающая неотрицательная функция $f(x)$, определенная при $x\geqslant 1$, что $f(n)=u_n$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, то данный ряд сходится в том и только в том случае, когда сходится интеграл $\int_1^{+\infty}f(x)dx$. Впервые дан в геометрич. форме К. Маклореном [2], а впоследствии вновь открыт О. Коши [3].

Лит.: [1] C a u c h y A. L., Analyse algébrique, P., 1821, p. 132—35; [2] M a c L a u r i n C., A treatise of fluxions, v. 1, Edinburgh, 1742, p. 289—90; [3] C a u c h y A. L., Œuvres complètes, sér. 2, t. 7, P., 1889, p. 268—79; [4] Н и к о л ь с к и й С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975. *Л. Д. Кудрявцев.*

КОШИ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное распределение вероятностей с плотностью

$$p(x;\ \lambda,\ \mu)=\frac{1}{\pi}\,\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2},\quad -\infty<x<\infty,$$

и функцией распределения

$$F(x;\ \lambda,\ \mu)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x-\mu}{\lambda},$$

где $-\infty<\mu<\infty$ и $\lambda>0$ — параметры. К. р. одновершинно и симметрично относительно точки $x=\mu$, являющейся модой и медианой этого распределения. Моменты положительного порядка, в том числе и математич. ожидание, не существуют. Характеристич. функция имеет вид $e^{i\mu t-\lambda|t|}$. Класс К. р. замкнут относительно линейных преобразований: если случайная величина X имеет К. р. с параметрами λ и μ, то случайная величина $Y=aX+b$ также имеет К. р. с параметрами $\lambda'=|a|\lambda$ и $\mu'=a\mu+b$. Класс К. р. замкнут относительно операции свертки:

$$p(x;\ \lambda_1,\ \mu_1)*\ldots*p(x;\ \lambda_n,\ \mu_n)=$$
$$=p(x;\ \lambda_1+\ldots+\lambda_n,\ \mu_1+\ldots+\mu_n), \qquad (*)$$

иначе, сумма независимых случайных величин с К. р. снова имеет К. р. Таким образом, К. р., также как нормальное распределение, принадлежит к классу устойчивых распределений, а именно, является симметричным устойчивым распределением с показателем 1. Следствием соотношения (*) является следующее свойство К. р.: если случайные величины $X_1,\ \ldots,\ X_n$ независимы и имеют одно и то же К. р., то арифметическое среднее $\frac{1}{n}(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ имеет такое же распределение, как и каждая величина X_k. Еще одна особенность К. р. состоит в том, что в семействе К. р. распределение суммы случайных величин может быть задано формулой (*), даже если величины зависимы: напр., если X и Y независимы и имеют одинаковое К. р., то случайные величины $X+X$ и $X+Y$ имеют одно и то же К. р. К. р. с параметрами $\lambda=1$ и $\mu=0$ есть t-распределение Стьюдента с числом степеней свободы, равным 1. К. р. с параметрами $(\lambda,\ \mu)$ совпадает с распределением случайной величины $\mu+\frac{X}{Y}$, где X и Y независимы и нормально распределены с параметрами $(0,\ \lambda^2)$ и $(0,\ 1)$ соответственно. Такое же К. р. имеет функция $\mu+\lambda\ \mathrm{tg}\ z$ случайной величины z, равномерно распределенной на отрезке $[-\pi/2,\ \pi/2]$. К. р. определяется также и в пространствах размерности больше единицы. К. р. рассмотрено О. Коши (A. Cauchy).

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1967. *А. В. Прохоров.*

КОШИ ТЕОРЕМА — 1) К. т. о многогранниках: два замкнутых выпуклых многогранника конгруэнтны, если между их истинными гранями, ребрами и вершинами имеется сохраняющее инцидентность взаимно однозначное соответствие, причем соответствующие грани многогранников конгруэнтны. К. т.— первая теорема об однозначной определенности выпуклых поверхностей, поскольку многогранники, о к-рых идет речь в К. т., изометричны в смысле внутренней метрики. К. т. является частным случаем теоремы о том, что всякая замкнутая выпуклая поверхность однозначно определяется своей метрикой (см. [4]).

К. т. установлена О. Коши (см. [1]).

Лит.: [1] Cauchy A. L., «J. École polytechn.», 1813, t. 9, p. 87—98; [2] Александров А. Д., Выпуклые многогранники, М.— Л., 1950; [3] Адамар Ж., Элементарная геометрия, 3 изд., ч. 2, М., 1958; [4] Погорелов А. В., Однозначная определенность выпуклых поверхностей, М.— Л., 1949 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 29). *Е. В. Шикин.*

2) К. т. о промежуточных значениях непрерывной функции на отрезке: *если функция f, значениями к-рой являются действительные числа, непрерывна на $[a,\ b]$ и число C лежит между $f(a)$ и $f(b)$, то существует такая точка $\xi\in[a,\ b]$, что $f(\xi)=C$.* В частности, если $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, то существует такая точка ξ, что $f(\xi)=0$. В этой форме К. т. используют для выделения промежутков, в к-рых заведомо имеются нули рассматриваемой функции. Из К. т. следует, что образом промежутка числовой прямой при его непрерывном отображении в числовую прямую является также промежуток. К. т. до-

пускает обобщение на топологич. пространства: всякая непрерывная функция $f: X \to R^1$, определенная на связном топологич. пространстве X (R^1 — множество действительных чисел), принимающая какие-либо два значения, принимает и любое лежащее между ними, поэтому образ пространства X также промежуток числовой прямой.

К. т. была сформулирована независимо Б. Больцано (B. Bolzano, 1817) и О. Коши (A. Cauchy, 1821).

3) К. т. о среднем значении — обобщение формулы конечных приращений Лагранжа. Если функции f и g принимают действительные значения, непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b), причем $g' \neq 0$ на (a, b), а потому $g(a) \neq g(b)$, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

При $g(t)=t$, $a \leqslant t \leqslant b$, получается формула конечных приращений Лагранжа. Геометрич. смысл К. т. состоит в том, что на всякой непрерывной кривой $x=f(t)$, $y=g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, лежащей на плоскости xOy и имеющей в каждой точке $(f(t), g(t))$ касательную, есть точка $(f(\xi), g(\xi))$, в к-рой касательная параллельна хорде, соединяющей концы $(f(a), g(a))$ и $(f(b), g(b))$ рассматриваемой кривой.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975. *Л. Д. Кудрявцев.*

4) К. т. в теории групп: если порядок конечной группы G делится на простое число p, то G обладает элементами порядка p.

Теорема была доказана О. Коши (см. [1]) для групп подстановок.

Лит.: [1] Cauchy A. L., в кн.: Exercices d'analyse et de physique mathématique, t. 3, P., 1844, p. 151—252; [2] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

КОШИ ФИЛЬТР — фильтр F в равномерном пространстве X такой, что для любого окружения V равномерной структуры пространства X существует множество, малое порядка V и принадлежащее F. Другими словами, К. ф.— это фильтр, содержащий сколь угодно малые множества в равномерном пространстве X. Понятие К. ф. обобщает понятие последовательности Коши в метрич. пространстве.

Всякий сходящийся фильтр есть К. ф. Всякий фильтр, мажорирующий К. ф., также есть К. ф. При равномерно непрерывном отображении образ базиса К. ф. есть базис К. ф. Равномерное пространство, в к-ром всякий К. ф. сходится, является полным пространством.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968. *Б. А. Ефимов.*

КОШИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА — задача отыскания решения дифференциальных уравнений или систем уравнений с частными производными по заданным его значениям на характеристических многообразиях.

Для широкого класса уравнений гиперболического и параболического типов в пространстве E_{n+1} независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ носителями данных могут служить определенным образом ориентированные незамкнутые n-мерные поверхности S. Если, напр., S является поверхностью пространственного типа, то *Коши задача* (с начальными данными на S) поставлена всегда корректно. В К. х. з. носителем данных является исключительно характеристическое многообразие (или ее определенная часть). В этом случае задача Коши может и вовсе не иметь решения, а если и имеет таковое, то оно может быть неединственным.

Напр., К. х. з. для уравнения ($n=1$, $x_1=x$)

$$u_{xt}=0$$

с данными на характеристике $t=0$

$$u(x,\ 0)=\tau(x),\quad u_t(x,\ 0)=\nu(x)$$

некорректна. Если решение К. х. з. существует, то из уравнения и из второго начального условия вытекает необходимое условие ее разрешимости: $\nu'(x)=0$, то есть решение К. х. з. может существовать лишь при $\nu(x)=\text{const}=\alpha$. В этом случае, если $\tau(x)\in C^2$, $t\geqslant 0$, решение действительно существует и задается формулой

$$u(x,\ t)=\tau(x)+\alpha t+\rho(t),$$

где $\rho(t)$ — любая функция класса C^2, $t\geqslant 0$, удовлетворяющая условиям $\rho(0)=\rho'(0)=0$.

Для существования решения К. х. з. для линейных систем гиперболических уравнений требуется, чтобы ранг расширенной матрицы системы был равен вдоль характеристической поверхности S рангу вырожденной матрицы.

Существует широкий класс гиперболических уравнений и систем, для к-рых в качестве носителя данных могут служить характеристические поверхности. Так, напр., для уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}-u_{tt}=0, \tag{1}$$

когда характеристическая поверхность S представляет собой конус

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2-(t-t_0)^2=0, \tag{2}$$

К. х. з. ставится так: найти регулярное внутри конуса (2) решение $u(x,\ t)$ уравнения (1), принимающее на конусе (2) наперед заданные значения.

В случае пространственного переменного ($n=1$, $x_1=x$) конус (2) представляет собой пару прямых $(x-x_0)^2=(t-t_0)^2$, проходящих через точку $(x_0,\ t_0)$. Эти прямые разбивают плоскость E_2 переменных x, t на четыре угла. Пусть область Ω представляет один из этих углов. В этом случае характеристическую задачу принято наз. задачей Гурса: определить регулярное в области Ω решение $u(x,\ t)$ уравнения

$$u_{xx}-u_{tt}=0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u=\varphi \text{ при } x-x_0=t-t_0,\quad u=\psi \text{ при } x-x_0=t_0-t,$$
$$\varphi(x_0,\ t_0)=\psi(x_0,\ t_0).$$

Если характеристическая поверхность S является одновременно поверхностью вырождения типа или порядка, то К. х. з. может оказаться корректной.

Для уравнения

$$y^m u_{yy}-u_{xx}+au_x+bu_y+cu=f, \tag{3}$$

к-рое является гиперболическим при $y>0$, линия вырождения $y=0$ является характеристикой. При $0<m<1$ задача Коши

$$u(x,\ 0)=\tau(x),\quad u_y(x,\ 0)=\nu(x) \tag{4}$$

для уравнения (3) является корректной, а при $m\geqslant 1$ она становится некорректной. В этом случае естественно исследовать эту задачу как с видоизмененными начальными данными:

$$\lim_{y\to 0}\alpha(x,\ y)\,u(x,\ y)=\tau(x),\quad \lim_{y\to 0}\beta(x,\ y)\,u_y(x,\ y)=\nu(x),$$

$$\lim_{y\to 0}\alpha(x,\ y)=0,\quad \lim_{y\to 0}\beta(x,\ y)=0,$$

так и с неполными начальными данными, т. е. при отсутствии одного из условий (4).

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1976; [2] Годунов С. К., Уравнения математической физики, М., 1971; [3] Трикоми Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, пер. с итал., М., 1957; [4] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [5] Би-

цадзе А. В., Калиниченко Д. Ф., Сборник задач по уравнениям математической физики, М., 1977; [6] Бицадзе А. В., Линейные уравнения с частными производными смешанного типа, в кн.: Тр. третьего Всесоюзного математического съезда, т. 3, М., 1958. *В. А. Елеев.*

КОШИ ЯДРО — функция вида $1/(t-x)$, являющаяся ядром *Коши интеграла*. Между К. я. и *Гильберта ядром* в случае единичной окружности существует связь:

$$\frac{dt}{t-\tau}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{x-s}{2}+i\right)dx,$$

где

$$t=e^{ix},\ \tau=e^{is}.$$

Иногда К. я. наз. функцию вида $\frac{1}{2\pi i\,(t-x)}$. *А. Б. Иванов.*

КОШИ — АДАМАРА ТЕОРЕМА: пусть задан степенной ряд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,(z-a)^k \qquad (1)$$

и

$$\Lambda=\lim_{k\to\infty}\sup\sqrt[k]{|c_k|}.$$

Если $\Lambda=\infty$, то ряд (1) сходится только в точке $z=a$; если $0<\Lambda<\infty$, то ряд (1) абсолютно сходится в круге $|z-a|<R$ радиуса

$$R=\frac{1}{\Lambda} \qquad (2)$$

и расходится вне этого круга при $|z-a|>R$; если $\Lambda=0$, то ряд (1) абсолютно сходится при всех $z\in\mathbb{C}$. Содержание К.— А. т. выражается, таким образом, формулой Коши — Адамара (2), к-рую при этом следует понимать в расширенном смысле, включая равенства $1/\infty=0$ и $1/0=\infty$. Иначе говоря, содержание К.— А. т. состоит в том, что внутренность множества точек (абсолютной) сходимости ряда (1) есть круг $|z-a|<R$ радиуса (2). В случае действительного степенного ряда (1) формула (2) определяет радиус интервала сходимости $a-R<x<a+R$. В основном К.— А. т. была высказана О. Коши (A. Cauchy) в его лекциях [1], опубликованных в 1821, полную ясность в формулировку и доказательство внес Ж. Адамар [2].

Для степенных рядов

$$f(z)=\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty}c_{k_1\ldots k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\ldots(z_n-a_n)^{k_n} \qquad (3)$$

по n комплексным переменным $z=(z_1,\ldots,z_n)$, $n\geqslant 1$, обобщением формулы Коши — Адамара является следующее соотношение:

$$\lim_{|k|\to\infty}\sqrt[|k|]{|c_{k_1\ldots k_n}|\,r_1^{k_1}\ldots r_n^{k_n}}=1, \qquad (4)$$

$$|k|=k_1+\ldots+k_n,$$

к-рому удовлетворяют сопряженные радиусы сходимости $r_1,\ldots,r_n$ ряда (3) (см. *Круг сходимости*). Записав соотношение (4) в виде $\Phi(r_1,\ldots,r_n)=0$, получают уравнение, определяющее границу нек-рой логарифмически выпуклой *кратно круговой области* с центром a, к-рая и является внутренностью множества точек абсолютной сходимости ряда (3) при $n>1$.

Лит.: [1] Коши О. Л., Алгебраический анализ, пер. с франц., Лейпциг, 1864; [2] Hadamard J., «J. math. pures et appl.» (4), 1892, t. 8, p. 101—86; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [4] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976.
Е. Д. Соломенцев.

КОШИ — КОВАЛЕВСКОЙ ТЕОРЕМА — теорема, утверждающая существование (единственного) аналитич. решения задачи Коши в малом, если функции, задающие дифференциальное уравнение или систему этих уравнений и все начальные данные вместе с их нехарактеристическим носителем, являются аналитическими.

Для системы k дифференциальных уравнений с частными производными с k неизвестными функциями $u_1(x,\ x_0),\ \ldots,\ u_k(x,\ x_0)$ вида

$$\frac{\partial^m u_i}{\partial x_0^m} = F_i\left(x_0,\ x,\ u,\ \frac{\partial^{m_1+\ldots+m_n} u}{\partial x_0^{m_0}\ldots\partial x_n^{m_n}}\right), \qquad (1)$$

где

$$i=1,\ \ldots,\ k,\ x=(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ u=(u_1,\ \ldots,\ u_k),$$

$$\sum_{j=0}^{n} m_j \leqslant m,\ m_0 < m,\ m \geqslant 1,$$

К.— К. т. формулируется следующим образом: задача Коши

$$\left.\frac{\partial^j u_i}{\partial x_0^j}\right|_\sigma = \varphi_{ij}(x),\ i=1,\ \ldots,\ k;\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1, \qquad (2)$$

где $\sigma=\{(x,\ x_0),\ x_0=0,\ x\in\Omega_0\}$ — носитель начальных данных φ_{ij}, всегда имеет и притом единственное аналитич. решение $u(x,\ x_0)$ в нек-рой области Ω пространства переменных x_0, x, содержащей Ω_0, если F_i и φ_{ij} являются аналитич. функциями всех своих аргументов.

Пусть дана линейная система дифференциальных уравнений вида

$$P(x,\ D)\,u \equiv \sum_{|\alpha|\leqslant m} A_\alpha(x)\,D^\alpha u = B(x), \qquad (3)$$

где $\alpha=(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ — вектор с неотрицательными целочисленными координатами;

$$|\alpha| = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j$$

— порядок дифференциального оператора

$$D^\alpha = D_0^{\alpha_0} D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n},\quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j},\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ n;$$

$A_\alpha(x)$, $x=(x_0,\ldots,x_n)$ — заданная квадратная матрица порядка N; $u(x)=\|u_j(x)\|$, $j=1,\ \ldots,\ N$,— искомый вектор-столбец; $B(x)$ — заданный вектор с N компонентами.

Вообще говоря, К.— К. т. не исключает существования неаналитических, помимо аналитического, решений задачи Коши. Однако для линейной системы дифференциальных уравнений (3) с аналитич. коэффициентами $A_\alpha(x)$ и условиями Коши на аналитической нехарактеристич. поверхности σ задача Коши имеет не более одного решения в нек-рой окрестности Ω_0 поверхности σ. При этом не предполагается аналитичность начальных данных и решения $u(x)$.

Решение задачи Коши (1), (2), существование к-рого гарантируется К.— К. т., может оказаться неустойчивым (т. к. малое изменение начальных данных $\varphi_{ij}(x)$ может вызвать сильное изменение решения), напр., в том случае, когда система (1) принадлежит эллиптич. типу. При неаналитических начальных данных задача Коши (1), (2) может потерять смысл, если не ограничиться случаем, когда система (1) является гиперболической.

К.— К. т. для широкого класса уравнений обобщена на случай, когда начальное многообразие является характеристическим в каждой точке (см. [1], [2]). В этом случае начальные функции не могут быть заданы произвольно; они должны удовлетворять определенным условиям, к-рые диктуются дифференциальным уравнением.

Характеристическая задача Коши может иметь неединственное решение. В частности, имеет место следующее утверждение. Пусть $P(x,\ D)$ — дифференциальный оператор порядка m с главной частью $P_m(x,\ D)$ и с вещественными аналитич. коэффициентами, определенный в окрестности Ω точки x^0 из евклидова прост-

ранства R^n, φ — вещественная аналитическая в Ω функция такая, что

$$\operatorname{grad}\varphi(x^0)\neq 0 \quad \text{и} \quad P_m(x, \operatorname{grad}\varphi)=0,$$

но $P_m^{(j)}(x, \operatorname{grad}\varphi)\neq 0$ для некоторого j при $x=x^0$. Тогда существует такая окрестность Ω_0 точки x^0 и аналитическая при $\varphi(x)\neq\varphi(x^0)$ функция $u(x)$ из класса $C^m(\Omega_0)$, что $P(x, D)u=0$ и

$$\sup u=\{x \mid x\in\Omega_0,\ \varphi(x)\leqslant\varphi(x_0)\}.$$

Если начальное многообразие является характеристическим вдоль нек-рых кривых, то, вообще говоря, решение характеристич. задачи Коши многозначно в нек-рой окрестности начальной поверхности и степень ветвления определяется геометрич. природой соответствующих характеристич. поверхностей. Теорема доказана С. В. Ковалевской (1875).

Лит.: [1] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [2] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [3] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [4] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965.

А. М. Нахушев.

КОШИ—РИМАНА УСЛОВИЯ, Д'Аламбера — Эйлера условия,— условия на действительную $u=u(x, y)$ и мнимую $v=v(x, y)$ части функции комплексного переменного $w=f(z)=u+iv$, $z=x+iy$, обеспечивающие моногенность и аналитичность $f(z)$ как функции комплексного переменного.

Для того чтобы функция $w=f(z)$, определенная в нек-рой области D комплексной плоскости z, была моногенной в точке $z_0=x_0+iy_0$, т. е. имела производную в точке z_0 как функция комплексного переменного z, необходимо и достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части u и v были дифференцируемы в точке (x_0, y_0) как функции действительных переменных x и y и чтобы, кроме того, в этой точке выполнялись условия Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Если К.— Р. у. выполнены, то производная $f'(z)$ представима в любой из следующих форм:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Для того чтобы однозначная в области D функция $f(z)$ была аналитической в D, необходимо и достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части были дифференцируемыми функциями, удовлетворяющими К.— Р. у. всюду в D. Функции u и v класса $C^2(D)$, удовлетворяющие К.— Р. у. (1), являются, каждая по отдельности, гармоническими функциями от x и y; условия (1) суть условия сопряженности этих двух гармонич. функций: зная одну из них, вторую можно найти интегрированием.

Условия (1) справедливы для любых двух ортогональных направлений s и n, ориентированных взаимно так же, как оси Ox и Oy в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}.$$

Напр., в полярных координатах (r, φ) при $r\neq 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Введя операторы комплексного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

К.— Р. у. (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Таким образом, дифференцируемая функция $f(z, \bar{z})$ переменных z и $\bar{z}$ является аналитич. функцией от z тогда и только тогда, когда $\partial f/\partial \bar{z} = 0$.

Для аналитич. функций многих комплексных переменных $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, К.— Р. у. записываются в виде переопределенной при $n > 1$ системы уравнений с частными производными для функций

$$u = \operatorname{Re} f(z) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

$$v = \operatorname{Im} f(z) = v(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n):$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

или, при помощи операторов комплексного дифференцирования, в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Функции u и v класса C^2, удовлетворяющие условиям (2), являются при $n \geqslant 1$, каждая по отдельности, *плюригармоническими функциями* от переменных x_k и y_k. Плюригармонич. функции при $n > 1$ составляют собственный подкласс класса гармонич. функций. Условия (2) суть условия сопряженности двух плюригармонич. функций u и v: зная одну из них, другую можно найти интегрированием.

Условия (1) впервые, по-видимому, появились в работе Ж. Д'Аламбера [1]. В работе Л. Эйлера, доложенной Петербургской академии наук в 1777 (см. [2]), условия (1) получили впервые характер общего признака аналитичности функций. О. Коши пользовался соотношениями (1) для построения теории функций, начиная с мемуара, представленного Парижской академии наук в 1814 (см. [3]). Знаменитая диссертация Б. Римана (B. Riemann) об основах теории функций относится к 1851 (см. [4]).

Лит.: [1] D'Alembert J., Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides, P., 1752; [2] Euler L., «Nova Acta Acad. Sc. Petrop.», 1797, v. 10, p. 3—19; [3] Cauchy A.-L., Œuvres complètes, sér. 1, t. 1, P., 1882, p. 319—506; [4] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948, с. 49—87; [5] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 1; [6] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976, ч. 1, гл. 1, ч. 2, гл. 1.

Е. Д. Соломенцев.

КОЭНА — МАКОЛЕЯ КОЛЬЦО, маколеево кольцо,— коммутативное локальное нётерово кольцо A, глубина $\operatorname{prof} A$ к-рого равна его размерности $\dim A$. Гомологич. характеризация К.— М. к. A состоит в том, что группы $\operatorname{Ext}^i_A(k, A)$ или группы локальных когомологий $H^i_{\mathfrak{m}}(A)$ обращаются в нуль при всех $i < \dim A$; здесь $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал, а k — поле вычетов A. Можно дать определение К.— М. к., используя понятие регулярной последовательности. Так называется последовательность $a_1, \ldots, a_k$ элементов $\mathfrak{m}$ такая, что для всех i элемент a_i не делит нуль в $A/(a_1, \ldots, a_{i-1})$. Локальное кольцо A наз. К.— М. к., если существует регулярная последовательность $a_1, \ldots, a_k$, для к-рой факторкольцо $A/(a_1, \ldots, a_k)$ артиново. В этом случае $k = \operatorname{prof} A = \dim A$.

Если $\mathfrak{p}$ — простой идеал в К.— М. к. A, то для его высоты $ht(\mathfrak{p})$ (см. *Высота идеала*) выполняется соотношение

$$ht(\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p}) = \dim A.$$

В частности, К.— М. к. равноразмерное и цепное. Фундаментальным результатом о К. —М. к. является сле-

дующая теорема о несмешанности. Пусть A есть d-мерное К.— М. к., а $a_1, \ldots, a_k$ — последовательность элементов A и $\dim(A/(a_1, \ldots, a_k)) = d-k$. Тогда последовательность $a_1, \ldots, a_k$ регулярна, и идеал $\mathfrak{A}=(a_1, \ldots, a_k)$ несмешанный, т. е. любой простой идеал, ассоциированный с $\mathfrak{A}$, имеет высоту k и ковысоту $d-k$. Теорема о несмешанности была доказана Ф. Маколеем [1] для кольца многочленов и И. Коэном [2] для кольца формальных степенных рядов.

Примеры К.— М. к. Регулярное локальное кольцо (и, вообще, любое кольцо Горенштейна) является К.— М. к.; любое артиново кольцо, любое одномерное приведенное кольцо, любое двумерное нормальное кольцо являются К.— М. к. Если A — локальное К.— М. к., то такими же будут его пополнение, кольцо формальных степенных рядов над A и любое конечное плоское расширение. К.— М. к. будет и полное пересечение в К.— М. к. A, т. е. факторкольцо вида $A/(a_1, \ldots, a_k)$, где последовательность $a_1, \ldots, a_k$ регулярна. Наконец, локализация К.— М. к. в простом идеале снова является К.— М. к. Это позволяет расширить определение К.— М. к. на произвольные кольца и схемы. А именно, нётерово кольцо A (схема X) наз. кольцом Коэна — Маколея (схемой Коэна — Маколея), если для любого простого идеала $\mathfrak{p}\subset A$ (соответственно любой точки $x\in X$) локальное кольцо $A_{\mathfrak{p}}$ (соответственно $\mathcal{O}_{X,\,x}$) является К.— М. к. В этом более широком смысле К.— М. к. является кольцо многочленов над полем и даже над любым К.— М. к., а также полугрупповое кольцо $K[G\cap\mathbb{Z}^n]$, где G — выпуклый многогранный конус в $\mathbb{R}^n$ (см. [6]).

К.— М. к. стабильны и при переходе к кольцам инвариантов. Если G — конечная группа, действующая на К.— М. к. A, причем ее порядок обратим в A, то кольцо инвариантов A^G также есть К.— М. к.

Для градуированного кольца A свойство быть К.— М. к. проявляется в когомологиях обратимых пучков на проективной схеме $\mathrm{Proj}(A)$ (см. [4]). Если однородное кольцо A конуса в A^{n+1}, связанного с проективным многообразием $X\subset\mathrm{P}^n$, является К.— М. к., то X наз. арифметическим многообразием Коэна — Маколея. В этом случае кольцо A изоморфно $\bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(\nu))$, и $H^i(X, \mathcal{O}_X(\nu))=0$ для всех $\nu\in\mathbb{Z}$ и для $0<i<\dim X$, где $\mathcal{O}_X(\nu)$ есть ν-я тензорная степень поляризующего обратимого пучка $\mathcal{O}_X(1)$ на X. Этим свойством обладают проективные пространства и их произведения, полные пересечения, многообразия Грассмана и подмногообразия Шуберта [7], многообразие флагов и обобщенное многообразие флагов [8].

Модуль M над локальным кольцом A наз. модулем Коэна — Маколея, если его глубина равна размерности. На модули Коэна — Маколея распространяются многие результаты о К.— М. к.; напр., носитель такого модуля равноразмерен. Существует гипотеза, что любое полное локальное кольцо обладает модулем Коэна — Маколея M таким, что $\dim M = \dim A$.

Лит.: [1] Macaulay F. S., The algebraic theory of modular systems, Camb., 1916; [2] Cohen I. S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1946, v. 59, p. 54—106; [3] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [4] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [5] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5, с. 3—93; [6] Hochster M., «Ann. Math.», 1972, v. 96, p. 318—37; [7] его же, «J. Algebra», 1973, v. 25, p. 40—57; [8] Kempf G. R., «Ann. Math.», 1976, v. 103, p. 557—91.

В. И. Данилов.

КОЭРЦИТИВНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА — краевая задача, удовлетворяющая *коэрцитивности неравенству*. Иногда К. к. з. для эллиптич. уравнений наз. эллиптическими краевыми задачами [4].

Пусть $P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — однородный многочлен степени $2m$ и

$$P(D)u = f, \quad D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \tag{1}$$

— эллиптич. уравнение порядка $2m$. Для уравнения (1) в полупространстве $R_n^+ : \{x_n > 0\}$ рассматривается краевая задача с граничными условиями

$$q_j(D)u = \varphi_j, \ j = 1, \ldots, m, \text{ при } x_n = 0, \tag{2}$$

где $q_j(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — однородные многочлены степеней μ_j, $j = 1, \ldots, m$.

Задача (1), (2) коэрцитивна в R_n^+, если порядки всех операторов q_j относительно $\partial/\partial x_n$ меньше $2m$ и если эта задача не имеет ограниченных решений вида

$$u(x) = w(x_n) \exp i(x_1\xi_1 + \ldots + x_{n-1}\xi_{n-1}), \tag{3}$$
$$\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \neq 0.$$

Многочлен $P(\xi', \tau)$ относительно τ имеет в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\tau > 0$ ровно m корней $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Если все эти корни различны, то отсутствие ограниченных решений вида (3) у задачи (1), (2) эквивалентно выполнению неравенства

$$\left[\Pi_{l<j}(\tau_j - \tau_l)\right]^{-1} \det(q_j(\xi', \tau_i)) \neq 0, \ \xi' \neq 0. \tag{4}$$

Это условие иногда наз. условием дополнительности.

Краевая задача

$$P(x, D)u = f, \quad x \in G, \ q_j(x, D)u = \varphi_j, \ x \in \partial G, \tag{5}$$
$$j = 1, \ldots, m,$$

для линейного эллиптич. уравнения порядка $2m$ в области G коэрцитивна в точке x_0 границы Γ области G, если коэрцитивна задача

$$P_{2m}(x_0, D)u = f, \quad q_j^0(x_0, D)u = \varphi_j, \ j = 1, \ldots, m,$$

где P_{2m} и $q_j^{(0)}$ — однородные составляющие самой высокой степени соответствующих полиномов.

Для исследования К. к. з. успешно применяется метод выпрямления границы. Некоторым гомеоморфным отображением окрестность $U(X)$ точки X границы Γ области G отображается так, чтобы пересечение $U(X) \cap \Gamma$ переходило в нек-рую область плоскости $y_n = 0$, а $U(X) \cap G$ — в полупространство R_n^+ переменных $y_1, \ldots, y_n$. В результате такого отображения К. к. з. для произвольной области G с достаточно гладкой границей Γ редуцируется к исследованию задачи для R_n^+.

Условие (4) для задачи (5) означает, что характеристич. направление системы дифференциальных операторов

$$q_j(x, D)u, \quad j = 1, \ldots, m,$$

заданных в окрестности точек границы Γ области G, ни в одной точке Γ не является касательным к Γ. При выполнении этого условия для решения u задачи (5) имеет место коэрцитивная оценка

$$\|u\|_{2m, G} \leqslant C\left\{\|f\|_{0, G} + \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|_{2m-\mu_j, \Gamma} + \|u\|_{0, G}\right\},$$

где норма в пространстве Соболева $W_2^{2m}(G)$ оценивается через норму u в $L_2(G)$ и нормы f в $L_2(G)$ и φ_j в $W_2^{2m-\mu_j}(\Gamma)$, $j = 1, \ldots, m$, причем μ_j — порядок оператора q_j.

Понятие К. к. з. обобщается и на эллиптич. системы уравнений. Методы исследования и результаты, справедливые для К. к. з. для одного эллиптич. уравнения, обобщаются и на К. к. з. для эллиптич. систем (3). Исследование К. к. з. для эллиптич. уравнений и систем часто редуцируется, напр. *параметрикса методом*, к ис-

следованию системы сингулярных интегральных уравнений. Эта система является нётеревой системой интегральных уравнений (см. [2], [6]), а условие (4), или в случае системы аналог этого условия, гарантирует нормальность системы интегральных уравнений. К. к. з. всегда нётерова, т. е. неоднородная задача разрешима при соблюдении конечного числа условий ортогональности, наложенных на правые части уравнений системы и на заданные функции в краевых условиях, а соответствующая однородная задача имеет конечное число линейно независимых решений.

Примером К. к. з. для любого эллиптич. уравнения может служить задача Дирихле. В этом случае

$$q_j(x, D) = \frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где $\partial/\partial n$ означает производную по направлению конормали для данного эллиптич. оператора. Однако задача Дирихле уже не для всякой эллиптич. системы является К. к. з. Примером таких систем может служить система двух уравнений, к-рая в комплексной записи наз. *Бицадзе уравнением.*

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [2] Лопатинский Я. Б., «Укр. матем. ж.», 1953, т. 5, № 2, с. 123—51; [3] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [4] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965; [5] его же, «Математика», 1960, т. 4, № 4, с. 37—73; [6] Шапиро З. Я., «Матем. сб.», 1951, т. 28, с. 55—78.

А. И. Янушаускас.

КОЭРЦИТИВНОСТИ НЕРАВЕНСТВО — неравенство, дающее оценку снизу нек-рой билинейной формы либо дающее оценку сверху нормы решения нек-рого эллиптич. уравнения через норму известной функции и нормы граничных данных.

Пусть

$$L = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x)\, \partial^\alpha, \quad (-1)^m \operatorname{Re} \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha \geqslant c\, |\xi|^{2m}$$

— равномерно эллиптический в области Ω_1 из пространства $\mathbb{R}^n$ оператор с коэффициентами $a_\alpha(x) \in C_\infty(\Omega_1)$, пусть область Ω содержится в области Ω_1 и в нек-рой окрестности границы S области Ω заданы дифференциальные операторы M_j, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, порядков j такие, что характеристики этих операторов ни в одной точке поверхности S не являются касательными к S. Тогда в нек-рой окрестности S существуют дифференциальные операторы N_j порядков j, $j = m, \ldots, 2m-1$, такие, что

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m,\ |\beta| \leqslant m} \left(\partial^\alpha v,\ a_{\alpha\beta}\, \partial^\beta v\right) - (v, L(u)) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_S M_j(v)\, \overline{N_{2m-1-j}(u)}\, d\sigma \qquad (1)$$

для всех v и u из $C^\infty(\bar{\Omega})$. Здесь $(\ ,\ )$ обозначает скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Форма

$$D(v, u) = \sum_{|\alpha| \leqslant m,\ |\beta| \leqslant m} \left(\partial^\alpha v,\ a_{\alpha\beta}\, \partial^\beta u\right)$$

наз. коэрцитивной формой на пространстве X, $\mathring{W}_2^m(\Omega) \subset X \subset W_2^m(\Omega)$, если существуют постоянные $C > 0$ и $\lambda \geqslant 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} D(u, u) \geqslant C\, \|u\|^2_{m,\,\Omega} - \lambda\, \|u\|^2_{0,\,\Omega} \qquad (2)$$

для всех $u \in X$. Здесь W_2^m — *Соболева пространство*, а $\mathring{W}_2^m$ — его подпространство элементов с компактными носителями, т. е. обращающихся в нуль в окрестности границы области Ω. Неравенство (2) является К. н. для формы $D(v, u)$. Если в (2) можно положить $\lambda = 0$, то $D(v, u)$ наз. строго коэрцитивной.

Если решение u уравнения $L(u)=f$ удовлетворяет на S условиям $M_j(u)=0$, $j=0, \ldots, m-1$, то справедливо неравенство

$$\|u\|_{2m,\,\Omega} \leqslant C_1 \|L(u)\|_{0,\,\Omega} + \lambda_1 \|u\|_{0,\,\Omega} \qquad (3)$$

с нек-рыми постоянными $C_1>0$ и $\lambda_1 \geqslant 0$. Когда решение u уравнения $L(u)=f$ удовлетворяет на S условиям $M_j(u)=\varphi_j$, $j=0, \ldots, m-1$, вместо неравенства (3) имеет место следующее неравенство

$$\|u\|_{2m,\,\Omega} \leqslant C \left\{ \|L(u)\|_{0,\,\Omega} + \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{2m-j,\,s} + \right. \\ \left. + \|u\|_{0,\,\Omega} \right\}. \qquad (4)$$

Это неравенство дает оценку нормы решения u уравнения $L(u)=f$ в пространстве Соболева $W_2^{2m}(\Omega)$ через норму u в пространстве $L_2(\Omega)$ и нормы функций f и φ_j, $j=0, \ldots, m-1$, в соответствующих пространствах. Неравенство (4) является К. н. для краевой задачи для эллиптич. уравнения.

При помощи неравенства (4) получается более общее неравенство

$$\|u\|_{2m+k,\,\Omega} \leqslant C \left\{ \|L(u)\|_{k,\,\Omega} + \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{2m-j+k,\,s} + \right. \\ \left. + \|u\|_{0,\,\Omega} \right\}.$$

К. н. играет важную роль в исследовании коэрцитивных краевых задач и в доказательствах гладкости решений эллиптич. уравнений и, в частности, в доказательствах аналитичности решений аналитических эллиптич. уравнений.

Лит.: [1] Agmon S., Lectures on elliptic boundary value problems, [N. Y.], 1965; [2] Morrey C. B., Nirenberg L., «Comm. Pure Appl. Math.», 1957, v. 10, № 2, p. 271—90.

А. И. Янушаускас.

КОЭФФИЦИЕНТ — числовой множитель при буквенном выражении, известный множитель при той или иной степени неизвестного или постоянный множитель при переменной величине. Так, в одночлене $-\frac{3}{4}a^2b^2$ К. есть $-\frac{3}{4}$, в уравнении $x^2+2px+q=0$ К. при x^2 есть 1, а К. при x равен $2p$; в формуле длины окружности $l=2\pi r$ К. есть 2π. В уравнении прямой $y=kx+b$ число k, выражающее тангенс угла наклона прямой к оси Ox, наз. угловым коэффициентом. *БСЭ-3.*

КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРОБЛЕМА для класса S — проблема для класса функций

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n,$$

регулярных и однолистных в круге $|z|<1$, заключающаяся в определении для каждого n, $n \geqslant 2$, области значений V_n системы коэффициентов $\{c_2, c_3, \ldots, c_n\}$ функций этого класса и, в частности, в нахождении точных оценок для $|c_n|$, $n \geqslant 2$, в классе S (см. *Бибербаха гипотеза*). К. п. для нек-рого класса R функций, регулярных в $|z|<1$, заключается в определении в классе R для каждого n, $n \geqslant 1$, области значений системы первых n коэффициентов разложения функции класса R в ряд по степеням z и, в частности, в получении точных оценок этих коэффициентов в классе R. К. п. решена для *Каратеодори класса*, для класса регулярных типично вещественных в круге функций, для класса однолистных звездообразных функций, для класса функций, регулярных и ограниченных в $|z|<1$.

Известно, что V_2 — круг: $|c_2| \leqslant 2$. Получены глубокие качественные результаты по К. п. в классе S (см. [7]). Множество V_n — ограниченная замкнутая область, точка $c_2=0$, $c_3=0, \ldots, c_n=0$ — внутренняя точка V_n; V_n гомеоморфно замкнутому $(2n-2)$-мерному шару;

граница V_n состоит из конечного числа частей Π_1, Π_2, . . ., Π_N; координаты точки $(c_2, c_3, \ldots, c_n)$ на любой одной из этих частей — функции конечного числа параметров ($\leqslant 2n-3$). Каждой граничной точке V_n соответствует единственная функция класса S. Граница V_3 состоит из двух гиперповерхностей Π_1 и Π_2 размерности 3 и их пересечения: поверхностей Π_3 и Π_4 и кривой Π_5. Для Π_1 и Π_2 получены параметрич. формулы в терминах элементарных функций. Сечение V_3 плоскостью $\operatorname{Im} c_2=0$ симметрично относительно плоскостей $\operatorname{Re} c_2=0$ и $\operatorname{Im} c_3=0$. Сечение V_3 плоскостью $\operatorname{Im} c_3=0$ симметрично относительно плоскостей $\operatorname{Im} c_2=0$ и $\operatorname{Re} c_2=0$. Функция $w=f(z)$, соответствующая точке поверхности Π_1, отображает $|z|<1$ на плоскость w с единственным аналитич. разрезом, уходящим в бесконечность. Функция $w=f(z)$, соответствующая точке поверхности Π_2, отображает $|z|<1$ на плоскость w с разрезом по трем аналитич. дугам, исходящим из нек-рой конечной точки под углом $2\pi/3$ друг к другу, одна из этих дуг лежит на прямой $\arg w=\text{const}$ и уходит в бесконечность.

Были исследованы также: область значений $\{c_2, c_3\}$ в подклассе функций из S с действительными c_2 и c_3; области значений $\{|c_{k+1}|, |c_{2k+1}|\}$ и $\{c_{k+1}, c_{2k+1}\}$, если $\operatorname{Im} c_{k+1}=\operatorname{Im} c_{2k+1}=0$, на подклассе ограниченных функций из S вида

$$f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty} c_{nk+1}z^{nk+1};$$

область значений $\{c_2, c_3\}$ на подклассе ограниченных функций из S; область значений $\{c_2, c_3, c_4\}$ в подклассе функций из S с действительными c_2, c_3 и c_4.

Точные оценки для коэффициентов вида $|c_n|\leqslant A_n$, $n\geqslant 2$, получены в подклассе *выпуклых функций* из S с $A_n=1$, в подклассе звездообразных функций из S с $A_n=n$, в подклассе нечетных звездообразных функций из S с $A_n=1$, $n=3, 5, \ldots$, в классе однолистных функций с действительными коэффициентами с $A_n=n$, в подклассе близких к выпуклым функций из S с $A_n=n$. В классе функций

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n,$$

регулярных и типично вещественных в $|z|<1$, имеет место точная оценка $|c_n|\leqslant n$, $n\geqslant 2$, а в классе *Бибербаха — Эйленберга функций* $f(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots$ — точная оценка $|a_n|\leqslant 1$, $n\geqslant 1$.

Для класса Σ функций

$$F(\zeta)=\zeta+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{\zeta^n},$$

мероморфных и однолистных в $|\zeta|>1$, известны точные оценки:

$$|b_1|\leqslant 1,\quad |b_2|\leqslant\frac{2}{3},\quad |b_3|\leqslant\frac{1}{2}+e^{-6}.$$

Для подкласса звездообразных функций из Σ справедлива точная оценка

$$|b_n|\leqslant\frac{2}{n+1},\quad n\geqslant 1.$$

Имеются точные оценки коэффициентов и в других подклассах из S и Σ (см. [1]—[4]), а также в нек-рых классах p-листных функций и в классах p-листных в среднем функций (см. [5]).

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Базилевич И. Е., в кн.: Математика в СССР за сорок лет. 1917—1957, т. 1, М., 1959, с. 444—72; [3] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [4] Hayman W. K., «J. London Math. Soc.», 1965, v. 40, pt 3, p. 385—406; [5] Goodman A. W., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1968, v. 74, № 6, p. 1035—50; [6] Phelps D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 143, p. 475—85; [7] Schaeffer A. C., Spencer D. C., Coefficient regions for schlicht functions, N. Y., 1950.

Е. Г. Голузина.

КОЯДРО морфизма категории — понятие, двойственное понятию *ядра* морфизма. В категориях векторных пространств, групп, колец и т. п. оно описывает наибольший *факторобъект* объекта B, аннулирующий образ гомоморфизма α: $A \to B$.

Пусть $\mathfrak{K}$ — категория с нулевыми морфизмами. Морфизм $\nu : B \to C$ наз. коядром морфизма $\alpha : A \to B$, если $\alpha\nu = 0$ и всякий морфизм φ, для к-рого $\alpha\varphi = 0$, однозначно представим в виде $\varphi = \nu\psi$. К. морфизма α обозначается $\operatorname{coker} \alpha$.

Если $\nu = \operatorname{coker} \alpha$ и $\nu' = \operatorname{coker} \alpha$, то $\nu' = \nu\xi$ для единственного изоморфизма ξ.

Обратно, если $\nu = \operatorname{coker} \alpha$ и ξ — изоморфизм, то $\nu' = \nu\xi$ есть К. морфизма α. Таким образом, все К. морфизма α образуют факторобъект объекта B, к-рый обозначается $\operatorname{Coker} \alpha$. Если $\nu = \operatorname{coker} \alpha$, то ν — нормальный эпиморфизм. Обратное, вообще говоря, неверно. К. нулевого морфизма $0 : A \to B$ равно 1_B. К. единичного морфизма 1_A существует тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{K}$ имеется нулевой объект.

В категории $\mathfrak{K}$ с нулевым объектом морфизм $\alpha : A \to B$ обладает К. в том и только в том случае, когда в $\mathfrak{K}$ существует коуниверсальный квадрат относительно морфизмов α и $0 : A \to 0$. Это условие выполнено, в частности, для любого морфизма локально малой справа категории с нулевым объектом и произведениями.

М. Ш. Цаленко.

КРАВЧУКА МНОГОЧЛЕНЫ — многочлены, ортогональные на конечной системе $N+1$ целочисленных точек при условии, что функция распределения $\sigma(x)$ есть ступенчатая функция со скачками

$$\sigma(x+0) - \sigma(x-0) = \binom{N}{x} p^x q^{N-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

где $\binom{N}{x}$ — биноминальный коэффициент, $p > 0$, $q > 0$ и $p+q=1$. К. м. имеют представление

$$P_n(x) = \left[\binom{N}{x}\right]^{-1/2} (pq)^{-n/2}$$
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{N-x}{n-k} \times \binom{x}{k} p^{n-k} q^k.$$

Впервые рассмотрены М. Ф. Кравчуком [1].

Лит.: [1] Krawtchouk M., «C. r. Acad. sci.», 1929, t. 189, p. 620—22; [2] Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962.

И. К. Суетин.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА для обыкновенного дифференциального уравнения — задача о нахождении решения уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in J, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

принадлежащего заданному множеству D пространства $D(J, \mathbb{R}^n)$ абсолютно непрерывных на J функций от t со значениями в $\mathbb{R}^n$:

$$x(\cdot) \in D. \tag{2}$$

Здесь функция $f(t, x)$ определена на $J \times \mathbb{R}^n$, принимает значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условиям Каратеодори; J — промежуток числовой прямой $\mathbb{R}$.

1) К. з. (1), (2) наз. линейной, если

$$f(t, x) \equiv A(t)x + b(t),$$

где функции $A(t)$ и $b(t)$ суммируемы на каждом компактном промежутке из J; множество D является линейным многообразием в $D(J, \mathbb{R}^n)$. В частности, может быть

$$J = [t_0, t_1],$$

$$D = \left\{ x(\cdot) \in D(J, \mathbb{R}^n) : \int_{t_0}^{t_1} [d\Phi(t)]\, x(t) = 0 \right\},$$

где функция $\Phi(t)$ имеет ограниченную вариацию. Линейная К. з. порождает линейный оператор

$$Lx(t) \equiv x' - A(t)\,x,\ x(\cdot) \in D,$$

собственные значения к-рого являются теми значениями параметра λ, при к-рых однородная К. з.

$$x' - A(t)\,x = \lambda x,\ x(\cdot) \in D,$$

имеет нетривиальные решения. Эти нетривиальные решения суть собственные функции оператора L. Если обратный оператор L^{-1} существует и имеет место интегральное представление

$$x(t) = L^{-1} b(t) \equiv \int_J G(t,\ s)\, b(s)\, ds,\ t \in J,$$

то функция $G(t, s)$ наз. функцией Грина.

2) Пусть $J = (-\infty, \infty)$, функция $f(t, x)$ почти периодична по t равномерно относительно x на каждом компактном подмножестве из $\mathbb{R}^n$, D — множество абсолютно непрерывных на J почти периодич. функций от t. Тогда К. з. (1), (2) наз. задачей о почти периодических решениях.

3) В теории управления рассматриваются К. з. с функциональным параметром — управлением. Напр., пусть задано уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\ x,\ u),\ t \in J = [t_0,\ t_1],\ x \in \mathbb{R}^n, \qquad (3)$$

множество допустимых управлений U и два множества $M_0,\ M_1 \subset \mathbb{R}^n$. Пусть D — множество абсолютно непрерывных функций от t, удовлетворяющих включениям $x(t_0) \in M_0$, $x(t_1) \in M_1$. К. з. состоит в нахождении такой пары $(x_0(\cdot),\ u_0(\cdot))$, что $u_0(\cdot) \in U$ и решение $x_0(t)$ уравнения (3) при $u = u_0(t)$ удовлетворяет условию $x_0(\cdot) \in D$.

4) Имеется большое количество разнообразных необходимых и достаточных условий существования, единственности решения разных К. з. и методов построения приближенного решения (см. [4]—[7]). Рассмотрим, напр., задачу

$$\left.\begin{aligned} &x' = A(t)\,x + f(t,\ x), \\ &\int_{t_0}^{t_1} [d\Phi(t)]\, x(t) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

в которой

$$\| f(t,\ x) \| \leqslant a + b \| x \|^{\alpha}$$

для нек-рых постоянных $a > 0$, $b > 0$, $\alpha \geqslant 0$. Пусть соответствующая однородная задача

$$x' = A(t)\,x,\ \int_{t_0}^{t_1} [d\Phi(t)]\, x(t) = 0 \qquad (5)$$

регулярна, т. е. имеет только тривиальное решение. Тогда задача (4) имеет по крайней мере одно решение, если либо $\alpha < 1$, либо $\alpha \geqslant 1$ и b достаточно мало. Исследование задачи (5) на регулярность является довольно сложной проблемой. Однако, напр., линейная К. з. (скалярная)

$$x'' + q(t)\,x' + p(t)\,x = 0,\ x(t_0) = 0,\ x(t_1) = 0$$

регулярна, если при $|q(t)| \leqslant 2m$ найдется такое $k \in \mathbb{R}$, что

$$\int_{t_0}^{t_1} [p(t) - k]_+\, dt \leqslant 2\,[F(k,\ m) - m],$$

где

$$F(k,\ m) = \begin{cases} \sqrt{k - m^2}\ \operatorname{ctg} \dfrac{(t_1 - t_0)\sqrt{k - m^2}}{2}, \\ \qquad\qquad m^2 < k \leqslant m^2 + \pi^2 (t_1 - t_0)^{-2}, \\ \dfrac{2}{t_1 - t_0},\ k = m^2, \\ \sqrt{m^2 - k}\ \operatorname{ctg} \dfrac{(t_1 - t_0)\sqrt{m^2 - k}}{2},\ k < m^2. \end{cases}$$

Лит.: [1] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [2] Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С., Нелинейные почти периодические колебания, М., 1970; [3] Понтрягин Л. С., [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976; [4] Красовский Н. Н., Теория управления движением. Линейные системы, М., 1968; [5] Зубов В. И., Лекции по теории управления, М., 1975; [6] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [7] Кигурадзе И. Т., Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, Тб., 1975.

Ю. В. Комленко, Е. Л. Тонков.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА для уравнения с частными производными — задача определения в нек-рой области D переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$ решения $u(x)$ уравнения

$$(Lu)(x)=f(x), \quad x\in D, \tag{1}$$

удовлетворяющего на границе S этой области (или ее части) определенным *краевым условиям*

$$(Bu)(y)=\varphi(y), \quad y\in S. \tag{2}$$

Как правило, краевые условия связывают граничные значения решения с его производными до нек-рого порядка, т. е. B является дифференциальным оператором. Однако встречаются и краевые условия других типов.

Для данного дифференциального уравнения целесообразность рассмотрения той или иной К. з. часто определяется понятием ее корректной постановки. Именно, К. з. корректно поставлена, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от данных этой задачи. Различные типы дифференциальных уравнений требуют различных корректно поставленных К. з., и обратно, корректные постановки К. з. иногда могут служить основой для классификации типов дифференциальных уравнений.

К. з. наз. линейной, если операторы L и B линейны, и однородной, если f и φ в (1), (2) равны нулю. Линейная К. з. наз. нётеровой, если: а) однородная задача имеет конечное число k линейно независимых решений; б) неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда f и φ удовлетворяют l линейно независимым условиям типа условий ортогональности; в) при условии однозначной разрешимости решение непрерывно зависит от f и φ.

Если $k=l$, то задача наз. фредгольмовой. Разность $k-l$ определяет индекс задачи.

Широкий класс К. з. для линейных уравнений с частными производными 2-го порядка

$$Lu=\sum_{i,\,j=0}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+ \\ +\sum_{i=0}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x) \tag{3}$$

охватывается задачей Пуанкаре. В этой задаче носителем краевых условий является вся граница, к-рая предполагается $(n-1)$-мерным многообразием, а граничный оператор B в (2) имеет вид

$$(Bu)(y)=\sum_{i=1}^{n} p_i(y)\frac{\partial u}{\partial x_i}+p(y)u=\varphi(y), \quad y\in S. \tag{4}$$

Задача Пуанкаре хорошо исследована в ограниченной области D с достаточно гладкой границей, при условии равномерной эллиптичности оператора L.

В предположении достаточной гладкости коэффициентов операторов L и B в (3), (4) и границы области D задача Пуанкаре нётерова, если $n=2$, $\sum p_i^2>0$, и фредгольмова, если $n>2$, $\sum p_i^2>0$ и вектор $\boldsymbol{p}=(p_1, \ldots, p_n)$ некасателен к S. При исследовании задачи Пуанкаре в двумерном случае широкое применение находят методы теории функций комплексного переменного (см. *Краевая задача*; методы комплексного переменного).

Для общего эллиптич. уравнения порядка $2m$

$$Lu=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha(x)\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}=f(x),\ x\in D, \qquad (5)$$

краевые условия могут задаваться с помощью линейных дифференциальных операторов

$$B_j u=\sum_{|\alpha|\leqslant m_j} b_{j\alpha}(y)\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}=\varphi_j(y),\ y\in S,\ 1\leqslant j\leqslant m, \qquad (6)$$

порядка $m_j<2m$ с коэффициентами, определенными на границе S области D. Если операторы L и B_j удовлетворяют так наз. условию дополнительности, то производные порядка $2m$ функции u, удовлетворяющей граничным условиям, можно оценить (в нек-рой норме) через норму f в (5) и подходящие нормы граничных функций φ_j в (6). К. з. такого типа наз. коэрцитивными К. з.

Другой тип К. з. представляют так наз. *смешанные задачи*, в к-рых на смежных участках границы задаются различные краевые условия.

Для эллиптич. уравнений характерно то, что краевые условия задаются на всей границе. Однако в полной мере это относится только к равномерно эллиптич. уравнениям. Если оператор L в (3) эллиптичен внутри области и на части $S_0\subseteq S$ параболически вырождается, то в зависимости от характера вырождения участок S_0 от задания краевых условий может освобождаться. См. также *Краевая задача* для эллиптического уравнения.

Если уравнение (3) не принадлежит к эллиптич. типу, то часть границы от задания краевых условий, как правило, освобождается. Напр., для простейшего уравнения параболич. типа — уравнения теплопроводности

$$Lu=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

задача Дирихле в области D, ограниченной прямыми $x=\pm 1$, $t=\pm 1$, состоит в задании граничных значений функции u на отрезках $\{t=-1,\ -1\leqslant x\leqslant +1\}$ и $\{x=\pm 1,\ -1\leqslant t\leqslant 1\}$.

Специальным образом ставятся К. з. для уравнений смешанного эллиптико-гиперболич. типа.

Важное место занимают К. з. в теории аналитич. функций. Пусть S — кусочно гладкая линия на плоскости, т. е. объединение конечного числа простых ориентируемых дуг. Задача линейного сопряжения заключается в определении аналитической вне S функции $\varphi(z)$, имеющей предельные значения $\varphi^\pm(t)$, $t\in S$, с обеих сторон S и удовлетворяющей краевому условию

$$\varphi^+(t)-G(t)\varphi^-(t)=g(t),\ t\in S,$$

где $G(t)$ и $g(t)$ — заданные функции. С помощью представлений аналитич. функций интегралами типа Коши при некоторых предположениях относительно функций G, g и линии S решения этой задачи выписываются в явном виде. См. *Граничные задачи теории аналитических функций*.

Для изучения К. з. предложен ряд методов. *Шварца альтернирующий метод* и связанные с ними *выметания метод* Пуанкаре и *Перрона метод* опираются на применение принципа максимума. Решение К. з. с помощью интегральных уравнений основано на различных интегральных представлениях решений. Исследование К. з. с помощью априорных оценок относится к функциональным методам. Широко применяется теория обобщенных функций. В практических приложениях значительное распространение получили различные конечно-разностные методы.

Лит.: [1] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., *Уравнения с частными производными*, пер. с англ., М., 1966; [2] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических урав-

нений второго порядка, М., 1966; [3] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [4] Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики, М., 1973; [5] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [6] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [7] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972.

А. П. Солдатов.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА *для эллиптического уравнения* — задача отыскания регулярного в области D решения u эллиптического уравнения

$$\sum_{i,\ k=0}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}+\sum_{i=0}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f, \qquad (1)$$

удовлетворяющего нек-рым дополнительным условиям на границе Γ области D.

Классические К. з. являются частными случаями следующей задачи: найти регулярное в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее на границе Γ условию

$$a\frac{du}{dl}+bu=g, \qquad (2)$$

где d/dl — производная по нек-рому направлению; a, b и g — заданные непрерывные на Γ функции, причем $|a|+|b|>0$ всюду на Γ (см. [1]).

При $a\equiv 0$, $b=1$ К. з. есть *Дирихле задача*; при $b\equiv 0$, $a=1$ — задача с косой производной (см. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; задача с косой производной), к-рая переходит в *Неймана задачу*, если направление l совпадает с направлением конормали. Если $\Gamma=\overline{\Gamma}_1\cup\overline{\Gamma}_2$, где Γ_1 и Γ_2 — непересекающиеся открытые подмножества Γ, а $\overline{\Gamma}_1\cap\overline{\Gamma}_2$ либо является $(n-2)$-мерным многообразием, либо пусто, и $a=1$, $b=0$ на Γ_1, $a=0$, $b=1$ на Γ_2, то получается *смешанная задача*.

Задача (2) изучалась для эллиптич. уравнений с двумя независимыми переменными (см. [2]). Довольно полно исследованы задача Дирихле для эллиптич. уравнений с любым конечным числом независимых переменных (см. [1], [3], [4]) и задача с косой производной в том случае, когда направление l ни в одной точке Γ не выходит в касательную к Γ плоскость. В этом случае задача с наклонной производной — фредгольмова и решение имеет такую же гладкость, как и поле направлений l и функция g (см. [1]). Изучался случай, когда l выходит в касательную к Γ плоскость в нек-рых точках Γ (см. [3]). Были исследованы локальные свойства решений задачи с косой производной (см. [5]). В точках выхода поля l в касательную к Γ плоскость решение задачи менее гладкое, чем поле l и функция g. На основании этого исследована задача в обобщенной постановке (см. [7], [8]).

Пусть краевое условие для регулярных в единичном шаре $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ гармонич. функций имеет вид

$$au_x+bu_y+cu_z=g;$$

K — множество точек единичной сферы S, в к-рых обращается в нуль функция $\omega=ax+by+cz$. Векторное поле $P(a, b, c)$ по множеству K выходит в касательную к единичной сфере S плоскость. Пусть, кроме того, K состоит из конечного числа непересекающихся кривых, K^+ — подмножество K, состоящее из таких точек, в к-рых $\operatorname{grad}\omega$ составляет острый угол с проекцией поля P на сферу S, и K^- — оставшаяся часть K. Обобщенная постановка задачи заключается в дополнительном задании значений u на K^+, но на множестве K^- допускаются интегрируемые особенности у решения u. В случае, когда K^- пусто, за счет повышения гладкости дополнительных данных задачи можно сделать сколь угодно гладким решение обобщенной задачи. Решение смешанной задачи на множестве $\Gamma_0=\overline{\Gamma}_1\cap\overline{\Gamma}_2$, вообще говоря, имеет особенности (см. [1]). Для того чтобы это решение

не имело особенностей на Γ_0, необходимо накладывать дополнительные условия на данные задачи (см. [11]).

Широкий класс К. з. составляют так наз. задачи со свободными границами. В этих задачах требуется найти не только решение уравнения (1), но и область его регулярности. Граница Γ области неизвестна, но на ней должны удовлетворяться два краевых условия. Примером таких задач является *задача о волновых движениях идеальной жидкости*. В этой задаче ищется регулярная в нек-рой области D гармонич. функция u, причем часть Γ_1 границы известна и на Γ_1 нормальная производная $\partial u/\partial n$ равна нулю, а другая часть границы Γ_2 неизвестна и на ней выполняются два краевых условия:

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0,\ u_x^2+u_y^2+u_z^2=q\ (x,\ y,\ z),$$

где $q>0$ — заданная функция.

Для гармонич. функций двух независимых переменных используется аппарат конформных отображений (см. [12], [13], [14]). См. также *Дифференциальное уравнение с частными производными*; задача со свободными границами.

Исследовалась следующая задача: найти регулярную в области D гармонич. функцию u, удовлетворяющую на границе Γ области условию

$$|\operatorname{grad} u|^2=q,$$

где $q>0$ — заданная функция. Для гармонич. функций двух независимых переменных эта задача решена полностью (см. [14]).

Для уравнения $Lu=f$, где L — равномерно эллиптический в замыкании $\bar{D}$ области D оператор порядка $2m$, рассматривается задача отыскания регулярного в D решения u, удовлетворяющего на границе Γ области D условиям:

$$B_ju=\Phi_j,\quad j=1,\ \ldots,\ m, \tag{3}$$

где $B_j(x,\ D)$, $j=1,\ \ldots,\ m$,— дифференциальные операторы, удовлетворяющие следующему *условию дополнительности*.

Пусть $L'\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\right)$ — главная часть оператора L, B_j' — главная часть оператора B_j, n — нормаль к Γ в точке x, $\lambda\neq 0$ — произвольный вектор, параллельный Γ. Через $\tau_k^+(\lambda)$ обозначены корни $L'(x,\ \lambda+\tau n)$ с положительными мнимыми частями. Многочлены $B_j'(x,\ \lambda+\tau n)$, $j=1,\ \ldots,\ m$, относительно переменного τ должны быть линейно независимыми по модулю многочлена $\Pi_{k=1}^m(\tau-\tau_k^+(\lambda))$. И в этом случае задача является нормально разрешимой. Нарушение условия дополнительности может повлечь существенное изменение характера задачи (см. [17]).

Задача (2) — частный случай задачи (3). Для задачи (2) при $a\equiv 1$ условие дополнительности эквивалентно тому, что направление l ни в одной точке границы области не выходит в касательную к границе плоскость.

Другим частным случаем задачи (3) является задача с краевыми условиями:

$$\frac{\partial^j u}{\partial n^j}=\Phi_j,\quad j=0,1,\ \ldots,\ m-1,$$

к-рая есть некоторый аналог задачи Дирихле для эллиптич. уравнений высших порядков.

Изучена К. з. для полигармонич. уравнения $\Delta^k u=0$, когда граница области состоит из многообразий различной размерности (см. [15]).

При исследовании К. з. для нелинейных уравнений (напр., задач Дирихле и Неймана) важную роль играют априорные оценки решений (1), различные

принципы неподвижной точки (см. [17], [18]) и обобщения *Морса теории* на бесконечномерный случай (см. [19]).

Лит.: [1] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [2] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959; [3] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [4] Келдыш М. В., «Успехи матем. наук», 1941, в. 8, с. 171—292; [5] Hörmander L., «Ann. Math.», 1966, v. 83, № 1, p.129—209; [6] Borrelli R. L., «J. Math. and Mech.», 1966, v. 16, № 1, p. 51—81; [7] Егоров Ю. В., Кондратьев В. А., «Матем. сб.», 1969, т. 78, № 1, с. 148—76; [8] Мазья В. Г., «Матем. сб.», 1972, т. 87, № 3, с. 417—53; [9] Янушаускас А., «Докл. АН СССР», 1965, т. 164, № 4, с. 753—55; [10] Вишик М. И., Эскин Г. И., «Сиб. матем. ж.», 1968, т. 9, № 5, с. 973—97; [11] Giraud G., «Ann. Soc. Polon. de Math., année 1933», Kraków, 1934, t. 12, p. 35—54; [12] Лаврентьев М. А., Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, М., 1962; [13] Некрасов А. И., Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости, в кн.: Собр. соч., т. 1, М., 1961; [14] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 2 изд., М., 1963; [15] Соболев С. Л., «Матем. сб.», 1937, т. 2, № 3, с. 465—99; [16] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях, пер. с англ., М., 1962; [17] Schauder J., «Math. Z.». 1931, Bd 33, S. 602—40; [18] Leray J., Schauder J., «Ann. sci. École norm. sup.», sér. 3, 1934, t. 51, p. 45—78; [19] Palais R. S., «Topology», 1963, v. 2, № 4, p. 299—340.

А. И. Янушаускас.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА; методы комплексного переменного — методы изучения К. з. для дифференциальных уравнений с частными производными, в к-рых используется представление решений через аналитич. функции комплексного переменного.

Пусть для уравнения 2-го порядка эллиптич. типа

$$\Delta u + a(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,\ y)\,u = 0, \qquad (1)$$

где a, b, c — аналитич. функции действительных переменных x, y в нек-рой области плоскости $z=x+iy$, поставлена К. з.: найти регулярное в односвязной области $S\subset D_0$ решение уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию

$$R(u) \equiv \sum\nolimits_{0\leqslant j+k\leqslant m}\left[a_{jk}(t)\frac{\partial^{j+k}u}{\partial x^j\,\partial y^k} + T_{jk}\left(\frac{\partial^{j+k}u}{\partial x^j\,\partial y^k}\right)\right] = f(t), \qquad (2)$$

где $a_{jk}(t)$, $f(t)\in C_\alpha(\partial S)$, $0<\alpha<1$, T_{jk} — линейные операторы, отображающие $C(\partial S)$ в $C_\alpha(\partial S)$, причем $T_{m-k,\,k}$ — вполне непрерывны.

Эта задача охватывает известные классические краевые задачи Дирихле, Неймана, Пуанкаре и др.

При помощи формулы общего представления решений (см. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; методы комплексного переменного):

$$u(x,\ y) = \operatorname{Re}\left\{G(z,\ \bar{z}_0\ z,\ \bar{z})\,\Phi(z) - \int_{z_1}^{z}\Phi(t)\frac{\partial}{\partial t}G(t,\ \bar{z},\ z,\ \bar{z})\,dt\right\},$$

эта задача приводится к эквивалентной К. з. для аналитич. функций:

$$\operatorname{Re}\sum\nolimits_{k=0}^{m}\left[a_k(t)\,\Phi^{(k)}(t) + T_k(\Phi^{(k)})\right] = f(t), \qquad (3)$$

где $a_k(t)$ — заданные непрерывные в смысле Гёльдера функции, $t\in\partial S$, T_m — вполне непрерывный оператор, а T_k ($k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$) — линейные операторы.

Пусть конечная односвязная область S ограничена замкнутым контуром Ляпунова (см. *Ляпунова поверхности и кривые*) ∂S и пусть производная порядка $m\geqslant 0$ голоморфной в S функции $\Phi(z)$ принимает на ∂S значения функции класса C_α, $0<\alpha<1$. Тогда, считая, что

точка
в виде

$$\Phi(z)=\int_{\partial S}\frac{t\mu(t)\,ds}{t-z}+ic,\ \text{если } m=0;$$

$$\Phi(z)=\int_{\partial S}\mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+$$

$$+\int_{\partial S}\mu(t)\,ds+ic,\ \text{если } m\geqslant 1,$$

где $\mu(t)$ — действительная функция класса $C_\alpha(\partial S)$, $0<\alpha<1$, а c — действительная постоянная; $\mu(t)$ и c определяются по $\Phi(z)$ единственным образом.

Подстановка этих выражений в краевое условие (3) позволяет получить для искомой функции μ эквивалентное задаче (2) сингулярное интегральное уравнение вида

$$K(\mu)=A(t_0)\,\mu(t_0)+\frac{B(t)}{\pi i}\int_{\partial S}\frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}+T\mu=f,$$

$$t_0\in\partial S,$$

где T — вполне непрерывный оператор.

Для нормальной разрешимости К. з. (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$a(t)=\sum_{k=0}^{m}i^k a_{m-k}(t)\neq 0,\ t\in\partial S,\ m\geqslant 0. \qquad (4)$$

Задача Дирихле ($m=0$) всегда нормально разрешима. (Ниже всюду предполагается, что условие (4) соблюдено.)

Индекс К. з. (2) вычисляется по формуле

$$\varkappa=2(m+p),\ m\geqslant 1,$$

где p — приращение функции $\frac{1}{2\pi}\arg\overline{a(t)}$ при однократном обходе контура ∂S в положительном направлении. Индекс задачи Дирихле равен нулю.

Однородная К. з. $R(u)=0$ имеет конечное число $k\geqslant 0$ линейно независимых решений, причем $k\geqslant\varkappa$, а неоднородная задача (2) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\int_{\partial S}f(t)\,\nu_j(t)\,dS=0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k',$$

где ν_j — полная система линейно независимых решений союзного однородного интегрального уравнения

$$k'(\nu)=A(t_0)\,\nu(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_{\partial S}\frac{B(t)\,\nu(t)\,dt}{t-t_0}+T(\nu)=0.$$

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы К. з. (2) имела решение для любой правой части, является наличие ровно $\varkappa$ линейно независимых решений у соответствующей однородной задачи $R(u)=0$. Следовательно, в случае $\varkappa>0$ однородная К. з. $R(u)=0$ всегда имеет не меньше, чем $\varkappa$, линейно независимых решений, а при $\varkappa<0$ неоднородная задача (2) не допускает решения для любой правой части, причем число условий разрешимости не меньше $|\varkappa|$.

Необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной К. з. могут быть сформулированы в терминах замкнутости относительно рассматриваемой области нек-рого ядра, а также полноты определенной системы функций. Эти ядра и системы функций строятся в явном виде при помощи функции Римана уравнения (1) и коэффициентов краевого условия. Напр., пусть $\{u_k\}$ — некоторая полная система решений относительно основной области D_0 уравнения (1) и пусть $S\subset D_0$. Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (2) для любой правой части является полнота системы функций $\{R(u_k)\}$ на границе.

Весьма полные результаты получены относительно следующей К. з. (обобщенной задачи Рима-

на — Гильберта): найти решение уравнения

$$\partial_{\bar z} w + A(z)\, w + B(z)\, \overline{w} = f(z), \quad w = u + iv, \tag{5}$$

$$2\partial_{\bar z} = \partial_x - i\partial_y,$$

непрерывное в $S+\partial S$ и удовлетворяющее краевому условию

$$\operatorname{Re}\left[\overline{\lambda(z)},\ w(z)\right] \equiv \alpha u + \beta v = \gamma, \quad z \in \partial S, \tag{6}$$

где α, β, γ — заданные действительные функции, принадлежащие классу $C_\alpha(\partial S)$, $0<\alpha<1$, причем $\alpha^2+\beta^2=1$. Область S, вообще говоря, многосвязна. Такая задача может быть редуцирована к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению. Этим путем удается получить полный качественный анализ К. з. (6).

Пусть граница ∂S области S состоит из конечного числа простых замкнутых кривых $\partial S_0, \ldots, \partial S_m$, удовлетворяющих условиям Ляпунова. Так как при конформных отображениях вид уравнения и краевого условия сохраняются, то без ущерба для общности можно считать, что ∂S_0 — единичная окружность с центром в точке $z=0$, лежащей в рассматриваемой области S, а $\partial S_1, \ldots, \partial S_m$ — окружности, лежащие внутри ∂S_0.

Индексом задачи (6) наз. целое число n, равное приращению $\frac{1}{2\pi}\arg[\alpha(\zeta)+i\beta(\zeta)]$, когда точка ζ один раз обойдет ∂S в положительном направлении. Краевое условие можно привести к более простому виду

$$\operatorname{Re}\left[z^{-n} e^{ic(z)}\, w(z)\right] = \gamma, \quad z \in \partial S,$$

где $c(z)=c_j$ на ∂S_j, причем $c_0=0$, а $c_1, \ldots, c_m$ — некоторые действительные постоянные, к-рые однозначно выражаются через α и β. Индекс сопряженной задачи

$$\left.\begin{aligned} &\partial_{\bar z} w_* - A w_* - B\overline{w}_* = 0, \qquad z \in S, \\ &\operatorname{Re}\left\{(\alpha+i\beta)\,\frac{d\bar z}{ds}\, w(z)\right\} = 0, \ z \in \partial S, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

вычисляется по формуле: $n' = -n+m-1$.

Задача (6) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_{\partial S} (\alpha+i\beta)\, w_* \gamma\, ds = 0,$$

где w_* — произвольное решение сопряженной задачи.

Пусть e и e' — числа линейно независимых решений однородных задач (6) и (7) соответственно. Тогда

$$e - e' = n - n' = 2n + 1 - m.$$

Если $n<0$, то однородная задача (6) не имеет нетривиальных решений. Если $n>m-1$, то однородная задача (6) имеет ровно $e=2n+1-m$ линейно независимых решений, а неоднородная задача (6) всегда разрешима. Если $n<0$, то неоднородная задача (6) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_{\partial S} (\alpha+i\beta)\, w_{*j} \gamma\, ds = 0, \ j = 1, 2, \ldots; \ e' = m - 2n - 1,$$

где w_{*j} — полная система решений однородной задачи (7). Если $m=0$ и $n=0$, то $e=1$ и все решения однородной задачи [6] имеют вид

$$w(z) = ice^{\omega_0(z)},$$

где c — действительная постоянная, а ω_0 — непрерывная в $S+\partial S$ функция.

Приведенные результаты полностью характеризуют задачу в односвязном ($m=0$) и многосвязном ($n<0$, $n>m-1$) случаях. Особого рассмотрения требуют случаи $0 \leqslant n \leqslant m-1$, к-рые также в достаточной мере детально разработаны.

Для уравнения (5) изучена также К. з. типа *Пуанкаре задачи*.

Лит. см. при ст. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; методы комплексного переменного. *И. Н. Векуа.*

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА теории потенциала — основная задача *потенциала теории* как классической, так и абстрактной. Поскольку классические ньютонов и логарифмич. потенциалы удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям с частными производными эллиптич. типа, а именно *Лапласа уравнению* в областях, свободных от порождающих эти потенциалы масс, и *Пуассона уравнению* в областях, занятых массами, к числу К. з. теории потенциала относят в первую очередь *краевые задачи* для эллиптич. уравнений и систем.

1) *Дирихле задача*, или первая краевая задача, когда требуется найти потенциал $u(x)$ в нек-рой области D по заданным его непрерывным значениям $u(x)=f(x)$, $x\in\Gamma$, на границе области $\partial D=\Gamma$, причем распределение масс внутри D предполагается известным. Эта задача в теории потенциала является основной.

2) *Неймана задача*, или вторая краевая задача, когда требуется найти потенциал в D по заданным непрерывным значениям его нормальной производной

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n}=\varphi(x) \text{ на } \Gamma.$$

3) *Смешанная задача*, или третья краевая задача, когда на Γ задается линейная комбинация

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n}+\alpha(x)\,u(x)=\psi(x),\quad x\in\Gamma. \qquad (*)$$

4) Задача с *косой производной*, когда на Γ в условии (*) вместо производной по нормали $\partial u(x)/\partial n$ к Γ фигурирует производная $\partial u(x)/\partial l$ по произвольному, вообще говоря, направлению $l=l(x)$, $x\in\Gamma$.

Кроме перечисленных общих задач, в теории потенциала возникли также следующие специфические проблемы.

5) *Робена задача*, когда на Γ ищется такое распределение масс, потенциал к-рого $u(x)$ постоянен внутри области D. Эта задача возникает как электростатич. проблема определения такого равновесного распределения зарядов на проводнике Γ, к-рое ничем не проявляет себя внутри D.

6) *Выметания метод*, к-рый в своем простейшем изложении, ведущем начало от А. Пуанкаре (H. Poincaré), состоит в отыскании такого распределения масс на границе Γ, потенциал к-рого в дополнительной области $\overline{CD}$ совпадал бы с потенциалом данных «выметаемых» масс, расположенных внутри D. В *потенциала теории абстрактной* две последние задачи имеют особенно большое значение.

См. также *Бесселев потенциал*, *Нелинейный потенциал*, *Рисса потенциал*.

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [2] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [3] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [4] Constantinescu C., Cornea A., Potential theory on harmonic spaces, B., 1972.

Е. Д. Соломенцев.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, численные методы решения для уравнений с частными производными — приближенные методы решения, в результате к-рых решение задачи представляется таблицей чисел. Точно решения (в виде явных формул, рядов и т. п.) К. з. можно построить лишь в редких случаях. Из приближенных методов решения наибольшее распространение получили разностные методы (см. [1]); они применимы к самым общим задачам и удобны для реализации на ЭВМ. Сущность разностных методов

состоит в том, что исходная область изменения независимых переменных заменяется дискретным множеством точек — сеткой, а производные, входящие в уравнение и в граничные условия, аппроксимируются на этой сетке разностными отношениями. В результате такой процедуры исходной задаче сопоставляется система конечного числа алгебраич. уравнений (линейных или нелинейных), называемая разностной схемой. За приближенное решение исходной задачи принимается решение разностной схемы. Точность приближения зависит от способа аппроксимации и от густоты сетки, т. е. от того, насколько плотно сетка заполняет исходную область. В дальнейшем рассматриваются только линейные К. з. для уравнений с частными производными, причем исходная задача считается корректно поставленной. Обоснование разностных методов связано с исследованием корректности разностной задачи и ее сходимости при измельчении сетки. Разностная задача наз. к о р р е к т н о й, если при любых правых частях ее решение существует, единственно и устойчиво. Под устойчивостью разностной схемы понимается непрерывная зависимость ее решения от правой части, равномерная относительно шагов сетки.

Пусть, напр., требуется решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в квадрате $G=\{0<x_1,\ x_2<1\}$ с границей Γ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-f(x_1,\ x_2),\quad (x_1,\ x_2)\in G,$$

$$u(x_1,\ x_2)=\mu(x_1,\ x_2),\quad (x_1,\ x_2)\in\Gamma.$$

Область G заменяется квадратной сеткой G_h с шагом h, т. е. множеством точек

$$G_h=\left\{\left(x_1^{(i)},\ x_2^{(j)}\right)\Big|\ x_1^{(i)}=ih,\ x_2^{(j)}=jh;\right.$$

$$\left.i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1\right\},\quad hN=1,$$

с границей

$$\Gamma_h=\bigcup_{i,\ j=1}^{N-1}\left\{\left(0,\ x_2^{(j)}\right)\cup\left(1,\ x_2^{(j)}\right)\cup\left(x_1^{(i)},\ 0\right)\cup\left(x_1^{(i)},\ 1\right)\right\},$$

а производные, входящие в уравнение,— разностными отношениями

$$(\Lambda_1 u)_{i,\ j}=u_{\overline{x_1}x_1,\ i,\ j}=(u_{i+1,\ j}-2u_{i,\ j}+u_{i-1,\ j})/h^2,$$

$$(\Lambda_2 u)_{i,\ j}=u_{\overline{x_2}x_2,\ i,\ j}=(u_{i,\ j+1}-2u_{i,\ j}+u_{i,\ j-1})/h^2,$$

где $u_{i,\ j}=u(x_1^{(i)},\ x_2^{(j)})$. Разностная схема имеет вид

$$(\Lambda_h y)_{i,\ j}=y_{\overline{x_1}x_1,\ i,\ j}+y_{\overline{x_2}x_2,\ i,\ j}=-f_{i,\ j},\qquad (1)$$

$$i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1;\ y_{i,\ j}|_{\Gamma_h}=\mu_{i,\ j},$$

где $y_{i,\ j}$ — ее решение.

Решение задачи (1) существует и единственно при любых правых частях f и при любых граничных условиях μ (см. [2]). Более того, решение разностной задачи (1) сходится при $h\to 0$ к решению исходной задачи, причем схема имеет второй порядок точности в норме c, то есть

$$\max_{(x_1,\ x_2)\in G_h}|y(x_1,\ x_2)-u(x_1,\ x_2)|\leqslant Mh^2,$$

где M — постоянная, не зависящая от h.

Разностная схема (1) представляет собой систему линейных алгебраич. уравнений, для к-рой характерно большое число уравнений (именно $(N-1)^2$ уравнений, причем $N\to\infty$ при $h\to 0$), большое число нулей в матрице этой системы и плохая обусловленность (отношение наименьшего собственного числа к наибольшему есть величина порядка h^2 при $h\to 0$). Для решения подобных систем уравнений, возникающих при аппроксиз-

мации дифференциальных уравнений разностными, существуют эффективные прямые и итерационные методы. Прямые методы дают точное решение разностной задачи после выполнения конечного числа арифметич. действий. К прямым методам относятся различные варианты метода прогонки, включая матричную прогонку, метод декомпозиции, быстрое преобразование Фурье, метод суммарных представлений (см. [1], [2], [3], [6]). Эффективность прямых методов оценивается порядком числа действий при $h \to 0$. Так, матричная прогонка требует для решения задачи (1) числа действий $\mathcal{O}(h^{-4})$, в то время как метод быстрого преобразования Фурье требует для решения той же задачи $\mathcal{O}(h^{-2} \ln h^{-1})$ действий. Из итерационных методов решения разностных задач используется метод Ричардсона с чебышевским набором параметров, попеременно-треугольный итерационный метод, различные методы переменных направлений (см. [2]). Эффективность итерационных методов оценивается порядком минимального числа итераций $n_0(\varepsilon)$, необходимых для того, чтобы уменьшить погрешность начального приближения в $1/\varepsilon$ раз. Напр., при решении задачи (1) методом Ричардсона величина $n_0(\varepsilon)$ имеет порядок $h^{-1}\ln\frac{1}{\varepsilon}$, а при решении методом переменных направлений с оптимальным выбором итерационных параметров $n_0(\varepsilon)=O(\ln h^{-1} \ln\frac{1}{\varepsilon})$. Итерационные методы более универсальны и более просты в реализации, чем прямые, и вследствие этого получили большое распространение при решении разностных задач.

Пусть, напр., требуется решить первую К. з. для уравнения теплопроводности:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad t>0, \quad (x_1, x_2)\in G,\\ &u(x_1, x_2, 0)=u_0(x_1, x_2);\\ &u(x_1, x_2, t)=0, \quad (x_1, x_2)\in\Gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Для решения этой задачи задается сетка по времени с шагом $\tau>0$

$$\omega_\tau=\{t_n=n\tau, \quad n=0, 1, 2, \ldots\}$$

и сетка G_h по пространственным переменным. Пусть $u_{i,j}^n=u(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, t_n)$. Производная u_t' аппроксимируется отношением

$$u_{t,i,j}=\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^n}{\tau}$$

а лапласиан Δ — разностным оператором Δ_h. Исходному уравнению (2) ставится в соответствие разностная схема

$$\left.\begin{aligned} &y_{t,i,j}=\sigma(\Delta_h y)_{i,j}^{n+1}+(1-\sigma)(\Delta_h y)_{i,j}^n;\\ &y_{i,j}^0=u_0\left(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}\right), \quad i, j=1, 2, \ldots, N-1;\\ &y_{i,j}^n\big|_{\Gamma_h\times\omega_\tau}=0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Параметр σ, входящий в эти уравнения, определяет устойчивость и точность схемы. Если $\sigma\geqslant 0{,}5$, то схема (3) устойчива при любых шагах сетки τ и h (абсолютно устойчивая разностная схема). Если же $\sigma<0{,}5$, то схема (3) устойчива при нек-ром ограничении на величину $\gamma=\tau/h^2$ (условно устойчивая разностная схема); напр., явная схема ($\sigma=0$) устойчива при условии $\gamma\leqslant 1/4$. При $\sigma=0{,}5$ схема имеет второй порядок точности по τ и по h, при остальных σ — первый порядок точности по τ и второй — по h. Разностная задача (3) решается «по слоям». Слоем номера n наз. множество всех точек сетки

$G_h \times \omega_\tau$ при нек-ром фиксированном h. На нулевом слое (при $n=0$) значения $y^0_{i,\,j}$ известны из начальных условий. Если значения $y^n_{i,\,j}$ на нек-ром слое n уже известны, то значения $y_{i,\,j}=y^{n+1}_{i,\,j}$ на следующем слое находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &y_{i,\,j}-\sigma\tau\,(\Delta_h y)_{i,\,j}=f^n_{i,\,j},\ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,\\ &y_{i,\,j}|_{\Gamma_h}=0, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

где

$$f^n_{i,\,j}=y^n_{i,\,j}+(1-\sigma)\,\tau\,(\Delta_h y)^n_{i,\,j}.$$

Для нахождения решения задачи (4) можно воспользоваться любым из методов решения стационарной задачи (1). Существуют, однако, более экономичные алгоритмы решения многомерных нестационарных К. з., а именно методы переменных направлений (см. [1] — [5]), позволяющие сводить решение многомерной задачи к решению последовательности одномерных задач. Так, для решения уравнения теплопроводности можно воспользоваться следующей схемой переменных направлений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y^{n+1/2}_{i,\,j}-y^n_{i,\,j}}{0{,}5\tau}=\Lambda_1 y^{n+1/2}_{i,\,j}+\Lambda_2 y^n_{i,\,j},\\ &\frac{y^{n+1}_{i,\,j}-y^{n+1/2}_{i,\,j}}{0{,}5\tau}=\Lambda_1 y^{n+1/2}_{i,\,j}+\Lambda_2 y^{n+1}_{i,\,j}. \end{aligned}\right\}$$

Эта схема абсолютно устойчива, имеет второй порядок точности и решается путем последовательного обращения одномерных разностных операторов.

Решение разностной задачи, даже если оно получено точно, может не только количественно, но и качественно отличаться от решения исходной дифференциальной задачи. Особенно сильно это отличие сказывается при счете уравнений, имеющих особенности в коэффициентах или в самом решении (так, при расчете разрывных решений уравнений газовой динамики обычно появляются зоны сильного «размазывания» разрывов). Таким образом, непосредственная аппроксимация дифференциальной задачи разностной, когда производные заменяются с большой степенью произвола разностными отношениями, не всегда приводит к хорошей разностной схеме. Выработан ряд принципов построения разностных схем, позволяющих получить схемы хорошего качества. Так, успешно применяется метод баланса и методы аппроксимации вариационного функционала (см. [1]—[3]). Полученные этими методами разностные схемы правильно отражают интегральные законы сохранения, справедливые для исходных уравнений, и обеспечивают знакоопределенность соответствующих разностных операторов. В теории разностных однородных схем (см. [7]) рассматриваются вопросы построения и исследования сходимости разностных схем для уравнений с переменными (в том числе и разрывными) коэффициентами.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [2] Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977; [3] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, М., 1977; [4] Яненко Н. Н., Методы дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967; [5] Дьяконов Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, в. 1—2, М., 1971—72; [6] Положий Г. Н., Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента, Киев, 1962; [7] Тихонов А. Н., Самарский А. А., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1961, т. 1, в. 1, с. 5—63.

А. В. Гулин.

КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ, граничные условия,— условия, к-рым должно удовлетворять искомое решение заданного дифференциального уравнения на границе (или ее части) области, где это решение ищется.

К. у. обычно задаются с помощью дифференциальных операторов, однако встречаются К. у. и других типов. *А. П. Солдатов.*

КРАЙ — подмножество замыкания $\overline{M^n}$ (открытого) действительного n-мерного многообразия M^n, каждая точка к-рого гомеоморфна нек-рой области W^n замкнутого полупространства $\mathbb{R}^n$, открытой в $\mathbb{R}^n_+$ (но не в $\mathbb{R}^n$). Точка $a\in\overline{M^n}$, соответствующая краевой точке области $W^n\subset\mathbb{R}^n_+$, т. е. точке пересечения $\overline{W^n}$ с границей полупространства $\mathbb{R}^n_+$, наз. к р а е в о й т о ч к о й M^n. Многообразие, обладающее краевыми точками, наз. м н о г о о б р а з и е м с к р а е м. Компактное многообразие без К. наз. з а м к н у т ы м м н о г о о б р а з и е м. Совокупность всех краевых точек M^n есть $(n-1)$-мерное многообразие без края. *М. И. Войцеховский.*

КРАМЕРА ПРАВИЛО: если определитель D квадратной системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ &a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{aligned}$$

не равен нулю, то эта система имеет единственное решение и это решение находится по формулам

$$x_k=\frac{D_k}{D},\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (*)$$

Здесь D_k — определитель, получаемый из D заменой k-го столба на столбец свободных членов. Формулы (*) наз. ф о р м у л а м и К р а м е р а; они были найдены Г. Крамером [1].

Лит.: [1] C r a m e r G., Introduction' à l'analyse des lignes courbes, Gen., 1750, p. 657; [2] К у р о ш А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975. *И. В. Проскуряков.*

КРАМЕРА ТЕОРЕМА — интегральная предельная теорема для вероятностей больших отклонений (уклонений) сумм независимых случайных величин. Пусть $X_1,\ X_2,\ \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с общей невырожденной функцией распределения $F(x)$ такой, что $\mathsf{E}X_1=0$ и производящая функция моментов $\mathsf{E}e^{tX_1}$ конечна в нек-ром интервале $|t|<H$ (последнее условие наз. у с л о в и е м К р а м е р а). Пусть

$$\mathsf{E}X_1^2=\sigma^2,\quad F_n(x)=\mathsf{P}\left(\sigma^{-1}n^{-1/2}\sum\nolimits_{j=1}^{n}X_j<x\right).$$

Если $x>1$, $x=o(\sqrt{n})$ при $n\to\infty$, то

$$\frac{1-F_n(x)}{1-\Phi(x)}=\exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

$$\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)}=\exp\left\{-\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Здесь $\Phi(x)$ — нормальная (0, 1) функция распределения, $\lambda(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$ — так наз. р я д К р а м е р а, коэффициенты к-рого зависят только от моментов случайной величины X_1; этот ряд сходится для всех достаточно малых t. Несколько более слабый по сравнению с приведенным выше результат был получен Г. Крамером (H. Cramér) в 1938.

Лит.: [1] К р а м е р Г., «Успехи матем. наук», 1944, в. 10, с. 166—78; [2] И б р а г и м о в И. А., Л и н н и к Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [3] П е т р о в В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972. *В. В. Петров.*

КРАМЕРА — МИЗЕСА КРИТЕРИЙ — *непараметрический критерий* для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1,\ \ldots,\ X_n$ имеют заданную непрерыв-

ную функцию распределения $F(x)$. К.— М. к. основан на статистике вида

$$\omega_n^2[\Psi(F(x))]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sqrt{n}(F_n(x)-F(x)\right]^2\Psi(F(x))\,dF(x),$$

где $F_n(x)$ — функция эмпирического распределения, построенная по выборке $X_1, \ldots, X_n$, $\Psi(t)$ — некоторая неотрицательная функция, определенная на отрезке $[0, 1]$ и такая, что $\Psi(t)$, $t\Psi(t)$ и $t^2\Psi(t)$ интегрируемы на $[0, 1]$. Критерии такого типа, основанные на квадратичной метрике, впервые были рассмотрены Г. Крамером [1] и Р. Мизесом [2]. Н. В. Смирнов предложил выбрать $\Psi(t)\equiv 1$ и показал, что в этом случае при справедливости гипотезы H_0 и $n\to\infty$ статистика $\omega_n^2=\omega_n^2$ [1] имеет в пределе *«омега-квадрат» распределение*, не зависящее от гипотетич. функции распределения $F(x)$. Статистич. критерий для проверки гипотезы H_0, основанный на статистике ω_n^2, наз. к р и т е р и е м ω^2 (к р и т е р и е м К р а м е р а — М и з е с а — С м и р н о в а), при этом для нахождения численного значения статистики ω_n^2 пользуются следующим ее представлением:

$$\omega_n^2=\frac{1}{12n}+\sum_{j=1}^{n}\left[F(X_{(j)})-\frac{2j-1}{2n}\right]^2,$$

где $X_{(1)}\leqslant\ldots\leqslant X_{(n)}$ — вариационный ряд, построенный по выборке $X_1, \ldots, X_n$. Согласно критерию ω^2 с уровнем значимости α, гипотеза H_0 отвергается, коль скоро $\omega_n^2\geqslant\omega_\alpha^2$, где ω_α^2 — верхняя α-квантиль распределения ω^2, т. е. $\mathsf{P}\{\omega^2<\omega_\alpha^2\}=1-\alpha$. Аналогично устроен критерий, предложенный Т. Андерсоном и Д. Дарлингом (см. [5]), основанный на статистике $\omega_n^2[1/F(x)(1-F(x))]$.

Лит.: [1] C r a m é r H., Sannolikhetskalkylen och några av dess användningar, Stockh., [1926]; [2] M i s e s R. V., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik, Lpz.— W., 1931; [3] С м и р н о в Н. В., «Матем. сб.», 1937, т. 2, № 5, с. 973—93; [4] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [5] A n d e r s o n T. W., D a r l i n g D. A., «Ann. Math. Stat.», 1952, v. 23, p. 193—212.

М. С. Никулин.

КРАТНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, k-к р а т н а я п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь, элементов данного множества X — отображение k-й степени N^k множества натуральных чисел N в множество X. Э л е м е н т о м (или ч л е н о м) К. п. $f\colon N^k\to X$ наз. упорядоченный комплекс из $k+1$ элементов $(n_1, \ldots, n_k, x)$, где $x=f(n_1, \ldots, n_k)$, $x\in X$, $(n_1, \ldots, n_k)\in N^k$, т. е. $n_j\in N$, $j=1, 2, \ldots, k$, к-рый обозначается через $x_{n_1\ldots n_k}$.

Л. Д. Кудрявцев.

КРАТНАЯ ТОЧКА плоской кривой $F(x, y)=0$ — особая точка, в к-рой обращаются в нуль частные производные до порядка n включительно и не равна нулю хотя бы одна из частных производных $(n+1)$-го порядка. Так, например, если $F(x_0, y_0)=0$, $F'_x(x_0, y_0)=0$, $F'_y(x_0, y_0)=0$, но из производных $F''_{xx}(x_0, y_0)$, $F''_{xy}(x_0, y_0)$, $F''_{yy}(x_0, y_0)$ хотя бы одна не равна 0, то К. т. $M(x_0, y_0)$ наз. *двойной точкой*; если в точке $M(x_0, y_0)$ равны нулю первые и вторые частные производные и не равна нулю хотя бы одна из трех производных, то К. т.— т р о й н а я т о ч к а и т. д.

А. Б. Иванов.

КРАТНО КРУГОВАЯ ОБЛАСТЬ, о б л а с т ь Р е й н х а р т а,— область D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, с центром в точке $a=(a_1, \ldots, a_n)\in\mathbb{C}^n$ такая, что вместе с каждой точкой $z^0=(z_1^0, \ldots, z_n^0)\in D$ ей принадлежат и все точки вида

$$\{z=(z_1, \ldots, z_n)\colon |z_\nu-a_\nu|=|z_\nu^0-a_\nu|,\ \nu=1, 2, \ldots, n\}.$$

К. к. о. D с $a=0$ инвариантна относительно преобразований $\{z^0\}\to\{z_\nu^0 e^{i\theta_\nu}\}$, $0\leqslant\theta_\nu<2\pi$, $\nu=1, \ldots, n$. К. к. о. составляют подкласс *Гартогса областей* и под-

класс класса круговых областей, определяемых условием: вместе с каждой точкой $z^0 \in D$ они содержат и все точки вида

$$\{z=(z_1, \ldots, z_n): z=a+(z^0-a)\,e^{i\theta},\quad 0 \leqslant \theta < 2\pi\},$$

т. е. все точки окружности с центром a и радиусом $|z^0-a|=(\sum_{\nu=1}^{n}|z_\nu^0-a_\nu|^2)^{1/2}$, расположенной на комплексной прямой, проходящей через a и z^0.

К. к. о. D наз. полной кратно круговой областью, если вместе с каждой точкой $z^0 \in D$ ей принадлежит поликруг

$$\{z=(z_1, \ldots, z_n): |z_\nu - a_\nu| \leqslant |z_\nu^0 - a_\nu|,\quad \nu=1, \ldots, n\}.$$

Полная К. к. о. звездообразна относительно ее центра a.

Примеры полных К. к. о.: шары и поликруги в $\mathbb{C}^n$. Круговая область D наз. полной круговой областью, если вместе с каждой точкой $z^0 \in D$ она содержит и весь круг $\{z=a+(z^0-a)\zeta,\ |\zeta| \leqslant 1\}$.

К. к. о. D наз. логарифмически выпуклой кратно круговой областью, если образ $\lambda(D^*)$ множества

$$D^*=\{z=(z_1, \ldots, z_n) \in D: z_1 z_2 \ldots z_n \neq 0\}$$

при отображении

$$\lambda: z \longrightarrow \lambda(z)=(\ln|z_1|, \ldots, \ln|z_n|)$$

является выпуклым множеством в действительном пространстве $\mathbb{R}^n$. Важное свойство логарифмически выпуклых полных К. к. о. состоит в том, что каждая такая область в $\mathbb{C}^n$ есть внутренность множества точек абсолютной сходимости (т. е. область сходимости) нек-рого степенного ряда по переменным $z_1-a_1, \ldots, z_n-a_n$, и обратно: область сходимости любого степенного ряда по $z_1, \ldots, z_n$ есть логарифмически выпуклая полная К. к. о. с центром $a=0$.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

КРАТНОГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — гармоническая функция, у к-рой операторы Лапласа по отдельным группам независимых переменных обращаются в нуль. Точнее, функция $u=u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$, класса C^2 в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ наз. К. ф. в D, если существуют такие натуральные числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$, $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, $n \geqslant k \geqslant 2$, что всюду в D выполняются тождества:

$$\sum_{\nu=1}^{n_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2}=0,$$

$$\sum_{\nu=n_1+1}^{n_1+n_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2}=0,\ \ldots,\ \sum_{\nu=n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2}=0.$$

Важный собственный подкласс класса К. ф. составляют *плюригармонические функции*, для к-рых $n=2m$, $n_j=2$, $j=1, 2, \ldots, m$, т. е. $k=m$, и к-рые, кроме того, удовлетворяют нек-рым дополнительным условиям.

Лит.: [1] Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974.

Е. Д. Соломенцев.

КРАТНОЕ натурального числа a — натуральное число, делящееся на a без остатка. Число n, к-рое делится на каждое из чисел $a, b, \ldots, m$, наз. общим кратным этих чисел. Из всех общих К. двух или нескольких чисел одно (не равное нулю) является наименьшим (наименьшее общее кратное), а остальные будут К. этого наименьшего. Зная наибольший общий делитель d двух чисел a и b, находят наименьшее общее К. m по формуле $m=ab/d$.

КРАТНОСТЬ ВЕСА M представления ρ алгебры Ли $\mathfrak{k}$ в векторном пространстве V — размерность n_M весового подпространства

$V_M \subset V$, соответствующего весу M (см. *Вес* представления).

Пусть $\mathfrak{t}$ — *Картана подалгебра* полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, а ρ — ограничение на $\mathfrak{t}$ конечномерного представления σ алгебры $\mathfrak{g}$. В этом случае пространство V является прямой суммой весовых подпространств алгебры $\mathfrak{t}$, соответствующих различным весам. Эти веса и их кратности часто наз. весами и кратностями весов представления σ алгебры $\mathfrak{g}$.

Пусть представление σ неприводимо и Λ — его старший вес (см. *Картана теорема* о старшем векторе). Тогда $n_\Lambda = 1$. Для весов, отличных от старшего, известно несколько способов вычисления их кратностей. Два из них являются классическими результатами теории представлений — формула Фрейденталя и формула Костанта.

1. Формула Фрейденталя (см. [4], [1]). Пусть $(\ ,\ )$ — естественное скалярное произведение на сопряженном к $\mathfrak{t}$ пространстве $\mathfrak{t}^*$, индуцированное *Киллинга формой* на $\mathfrak{t}$, R — система корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{t}$ и $>$ — отношение частичного порядка на $\mathfrak{t}^*$, определенное какой-либо фиксированной системой простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ в R. Тогда

$$((\Lambda+\delta,\ \Lambda+\delta)-(M+\delta,\ M+\delta))\, n_M = \\ = 2 \sum_{\alpha \in R,\ \alpha>0} \sum_{k=1}^{\infty} n_{M+k\alpha}\, (M+k\alpha,\ \alpha),$$

где $\delta = (1/2)\sum_{\alpha \in R,\ \alpha>0} \alpha$ и, по определению, $n_N = 0$, если N не вес представления σ. Для любого веса $M \neq \Lambda$ множитель при n_M в левой части формулы отличен от нуля. Эта формула имеет рекуррентный характер: она позволяет выразить n_M через n_N, если $N > M$. Поскольку известно, что $n_\Lambda = 1$, формула Фрейденталя дает эффективный способ нахождения кратностей n_M.

2. Формула Костанта (см. [5], [1]). Пусть

$$\Gamma = \{M \in \mathfrak{t}^* \mid 2(M, \alpha_i)/(\alpha_i, \alpha_i) \in \mathbb{Z} \text{ для всех } i = 1, \ldots, r\}.$$

Множество Γ является подгруппой по сложению в $\mathfrak{t}^*$, инвариантной относительно группы Вейля W, к-рая действует в $\mathfrak{t}^*$ естественным образом. Элемент δ, а также все веса представления σ лежат в Γ. Пусть для каждого $M \in \Gamma$ число $P(M)$ равно количеству способов записи M в виде суммы положительных корней, т. е. $P(M)$ — это число решений $\{k_\alpha \mid \alpha \in R,\ \alpha>0\}$ уравнения

$$M = \sum_{\alpha \in R,\ \alpha>0} k_\alpha \alpha,$$

где $k_\alpha \in \mathbb{Z}$, $k_\alpha > 0$ при всех α. Функция $P(M)$ на Γ наз. функцией разбиения. Тогда

$$n_M = \sum_{S \in W} (\det S)\, P\,(S\,(\Lambda+\delta)-(M+\delta)).$$

Практическое использование приведенных выше формул связано с громоздкими вычислениями. Для полупростых алгебр ранга 2 имеются более удобные геометрические правила подсчета К. в. (см. [2]).

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Желобенко Д. П., Лекции по теории групп Ли, Дубна, 1965; [3] его же, Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [4] Freudenthal H., «Indag. Math.», 1954, v. 16, p. 369—76, 487—91; 1956, v. 18, p. 511—14; [5] Kostant B., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1959, v. 93, p. 53—73.

В. Л. Попов.

КРАТНОСТЬ ОСОБОЙ ТОЧКИ алгебраического многообразия — целое число, измеряющее степень особенности многообразия в этой точке. Кратностью $\mu(X, x)$ многообразия X в точке x наз. кратность максимального идеала $\mathfrak{m}$ в локальном кольце $\mathcal{O}_{X,x}$. Кратность X в точке x совпадает с кратностью касательного конуса $C(X, x)$ в вершине, а также со степенью специального слоя $\sigma^{-1}(x)$ раздутия $\sigma\colon X' \to X$

точки x на X, где $\sigma^{-1}(x)$ рассматривается погруженным в проективное пространство $P(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ (см. [3]). Кратность $\mu(X, x)=1$ тогда и только тогда, когда x неособая (регулярная) точка X. Если X является гиперповерхностью в окрестности x (т. е. X задается одним уравнением $f=0$ в аффинном пространстве Z), то $\mu(X, x)$ совпадает с числом n таким, что $f\in\mathfrak{n}^n-\mathfrak{n}^{n+1}$, где $\mathfrak{n}$ — максимальный идеал локального кольца $\mathcal{O}_{Z, x}$. Кратность не меняется при пересечении X общей гиперплоскостью, проходящей через x. Если через X_d обозначить множество точек $x\in X$ таких, что $\mu(X, x)\geqslant d$, то X_d является замкнутым подмножеством (подмногообразием).

Лит.: [1] Samuel P., Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, 2 éd., B., 1967; [2] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5, с. 3—93; [3] Ramanujam C. P., Invent. math.», 1973, v. 22, № 1, p. 63—67. *В. И. Данилов.*

КРАТНЫЙ ИНТЕГРАЛ — определенный интеграл от функции нескольких переменных. Имеются различные понятия К. и. (интеграл Римана, интеграл Лебега, интеграл Лебега — Стилтьеса и др.).

Кратный интеграл Римана вводится на основе *Жордана меры* μ. Пусть E — измеримое по Жордану множество n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, μ_n есть n-мерная мера Жордана и $\tau=\{E_i\}_{i=1}^k$ — разбиение множества E, т. е. такая система измеримых по Жордану множеств E_i, что $\bigcup_{i=1}^k E_i=E$ и $\mu_n(E_i\cap E_j)=0$, $i\neq j$, $i, j=1, 2, \ldots, n$. Величину

$$\delta_\tau=\max_{i=1, 2, \ldots, k} d(E_i),$$

где $d(E_i)$ — диаметр множества E_i, наз. м е л к о с т ь ю р а з б и е н и я τ. Если функция $f(x)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, определена на множестве E, то всякую сумму вида

$$\sigma_\tau=\sigma_\tau(f;\ \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(k)})=\sum_{i=1}^k f(\xi^{(i)})\,\mu_n E_i,$$
$$\xi^{(i)}\in E_i\in\tau,$$

наз. и н т е г р а л ь н о й с у м м о й Р и м а н а ф у н к ц и и f. Если для функции f существует $\lim_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau$, независящий от разбиения, то этот предел наз. n-к р а т н ы м и н т е г р а л о м Р и м а н а и обозначают

$$\int_E f(x)\,dx$$

или

$$\int\int\ldots\int_E f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n.$$

Саму функцию f наз. в этом случае и н т е г р и р у е м о й п о Р и м а н у, короче — R-и н т е г р и р у е м о й.

В случае $n=1$ в качестве множества E, по к-рому производится интегрирование, обычно берется отрезок, а в качестве его разбиений τ рассматриваются разбиения, состоящие также только из отрезков (см. *Римана интеграл*). Таким образом, в этом случае как множество, по к-рому производится интегрирование, так и элементы разбиения представляют собой измеримые по Жордану множества весьма специального вида — отрезки. Поэтому не все свойства R-интегрируемых на отрезке функций справедливы для функций R-интегрируемых на произвольных измеримых по Жордану множествах. Напр., из того, что любая функция, определенная на множестве жордановой меры нуль, R-интегрируема на нем, следует, что R-интегрируемые функции могут быть неограниченными, это невозможно для R-интегрируемых функций на отрезках. Чтобы из R-интегрируемости функции на нек-ром множестве следовала ограниченность функции, на рассматриваемое множество налагают дополнительные условия, напр. чтобы у него

существовали сколь угодно мелкие разбиения, все элементы к-рых имеют положительную меру Жордана. К таким множествам относятся все измеримые по Жордану открытые множества и их замыкания, в частности измеримые по Жордану области и их замыкания. Именно для таких множеств большей частью и используется кратный интеграл Римана.

В случае $n=2$ ($n=3$) К. и. наз. *двойным* (*тройным*). Поскольку кратный интеграл Римана можно брать только по множествам, измеримым по Жордану (в случае $n=2$ они наз. также *квадрируемыми*, а при $n=3$ — *кубируемыми множествами*), то двойной (тройной) интеграл Римана рассматривают только на множествах (обычно областях или их замыканиях), границы к-рых имеют площади (объемы) в смысле Жордана, равные нулю.

Интеграл Римана от ограниченных функций n переменных ($n\geqslant 1$) обладает обычными свойствами интеграла (линейность, аддитивность относительно множеств, по к-рым производится интегрирование, сохранение при интегрировании нестрогих неравенств, интегрируемость произведения интегрируемых функций и т. п.).

Кратный интеграл Римана может быть сведен к *повторному интегралу*. Пусть $x=(x', x'')\in R^n$,

$$x'=(x_1, \ldots, x_m)\in R^m,$$

$$x''=(x_{m+1}, \ldots, x_n)\in R^{n-m},\ E\subset R^n,$$

E — измеримое в R^n по Жордану множество, $E(x_0')=E\cap\{x'=x_0'\}$ — сечение множества E $(n-m)$-мерной гиперплоскостью $x'=x_0'$, $E_{x''}$ — проекция E на гиперплоскость $R^m=\{x : x''=0\}$, причем $E(x')$ и $E_{x''}$ измеримы соответственно в смысле $(n-m)$-мерной и m-мерной меры Жордана. Тогда, если функция f R-интегрируема на множестве E и для всех $x'\in E_{x''}$ существуют $(n-m)$-кратные интегралы от ее сужения на множестве $E(x')$, то существует повторный интеграл

$$\int_{E_{x''}} dx \int_{E(x')} f(x', x'')\, dx'',$$

где внешний интеграл является m-кратным интегралом Римана, и

$$\int_E f(x)\, dx=\int\int_E f(x', x'')\, dx'\, dx''=$$

$$=\int_{E_{x''}} dx' \int_{E(x')} f(x', x'')\, dx''.$$

Для случая $n=3$ отсюда следуют формулы: 1) Если $E\subset R^3_{xyz}$, E_{xy} — проекция E на плоскость xOy, а функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, $(x, y)\in E_{xy}$, таковы, что множество E ограничено в направлении оси z их графиками, т. е.

$$E=\{(x, y, z):(x, y)\in E_{xy},\quad \varphi(x, y)\leqslant z\leqslant\psi(x, y)\},$$

то

$$\int\int\int_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz=$$

$$=\int_{E_{xy}} dx\, dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\, dz.$$

2) Пусть проекцией множества E на ось Ox является отрезок $[a, b]$, а $E(x)$ — сечение множества E плоскостью, параллельной плоскости yOz и проходящей через точку x, тогда

$$\int\int\int_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz=\int_a^b dx \int\int_{E(x)} f(x, y, z)\, dy\, dz.$$

В случае, когда G является измеримой по Жордану областью в пространстве R^n_t, а $x=\varphi(t)$ — взаимно одно-

значное отображение G на измеримую область Γ пространства R^n_x, причем φ непрерывно дифференцируемо на замыкании $\bar{G}$ области G, для интегрируемой на $\Gamma = \varphi(G)$ функции $f(x)$ справедлива формула замены переменного в интеграле

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\,dx = \int_G f(x(t))\,|J(t)|\,dt, \qquad (1)$$

где $J(t)$ — якобиан отображения φ.

Геометрический смысл кратного интеграла Римана от функции n переменных связан с понятием $(n+1)$-мерной меры Жордана μ_{n+1}: если функция $f(x)$ интегрируема на множестве $E \subset R^n_x$, $f(x) \geqslant 0$ на E и

$$A = \{(x,\ y) : x \in E,\ \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\} \subset R^{n+1}_{xy},$$

то

$$\int_E f(x)\,dx = \mu_{n+1} A. \qquad (2)$$

Кратным интегралом Лебега наз. *Лебега интеграл* от функций многих переменных, его определение базируется на понятии *Лебега меры* в n-мерном евклидовом пространстве. Кратный интеграл Лебега может быть сведен к повторному интегралу (см. *Фубини теорема*). Для непрерывно дифференцируемых взаимно однозначных отображений областей справедлива формула замены переменного (1), а также формула (2), выражающая геометрич. смысл кратного интеграла Лебега, в к-рой под мерой μ_{n+1} следует понимать $(n+1)$-мерную меру Лебега.

Понятие К. и. переносится на функции, интегрируемые по множеству A, принадлежащему произведению $X \times Y$ пространств X и Y, в каждом из к-рых заданы σ-конечные полные неотрицательные меры, соответственно μ_x и μ_y, при этом интегрирование по множеству A производится по мере μ, являющейся произведением мер μ_x и μ_y.

Для функций многих переменных существует также понятие несобственного К. и. (см. *Несобственный интеграл*). Понятие К. и. применяется также к неопределенным интегралам функций многих переменных. Под неопределенным К. и. понимают функцию множества

$$F(E) = \int_E f(x)\,dx,$$

где E — измеримое множество. Если, напр., $f(x)$ интегрируема по Лебегу на нек-ром множестве, то ее неопределенный интеграл $F(E)$ почти всюду на этом множестве имеет функцию $f(x)$ своей симметричной производной. В этом смысле (аналогично случаю функций одной переменной) взятие неопределенного К. и. является операцией, обратной к операции дифференцирования функции множества.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев.

КРАТНЫЙ РЯД, s-кратный ряд,— выражение вида

$$\sum_{m,\ n,\ \ldots,\ p=1}^{\infty} u_{m,\ n,\ \ldots,\ p},$$

составленное из членов таблицы $\|u_{m,\ n,\ \ldots,\ p}\|$. Каждый член этой таблицы занумерован $s \geqslant 2$ индексами m, n, . . . , p, к-рые пробегают независимо друг от друга все натуральные числа. Теория К. р. аналогична теории *двойных рядов*. См. также *Абсолютно сходящийся ряд*.

Лит.: [1] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 4 изд., т. 2, М., 1959.

Е. Г. Соболевская.

КРАТЧАЙШАЯ — линия в метрическом пространстве, соединяющая две его точки и не превосходящая по длине любую другую линию с теми же концами.

На плоскости К.— отрезки прямых, на сфере — дуги больших полуокружностей. В римановых пространствах *геодезические линии* являются К. на малых участках; длины подобных участков оцениваются в зависимости от кривизны и топологии пространства. Важную роль играют К. в геометрии в целом поверхностей и метрик, не подчиненных требованиям регулярности. Так, понятие К.— одно из основных и исходных в аксиоматич. построениях общих пространств с *внутренней метрикой*; многие внутренние и внешние геометрич. характеристики общих *выпуклых поверхностей* устанавливаются с помощью свойств принадлежащих им К. и т. п.

А. Д. Милка.

КРЕАТИВНОЕ МНОЖЕСТВО, творческое множество,— рекурсивно перечислимое множество A натуральных чисел, дополнение к-рого $\bar{A}$ до натурального ряда является *продуктивным множеством*; иными словами, множество A креативно, если оно рекурсивно перечислимо и существует такая частично рекурсивная функция $\varphi(x)$, что для всякого содержащегося в $\bar{A}$ рекурсивно перечислимого множества W_x с гёделевым номером x

$$\varphi(x) \in \bar{A} - W_x.$$

К. м. часто встречаются в различных алгоритмически неразрешимых проблемах, в силу чего образуют важнейший класс рекурсивно перечислимых множеств, не являющихся рекурсивными. Креативными оказываются множества номеров доказуемых и опровержимых формул многих формальных теорий (при естественной нумерации всех формул теории); в частности, так обстоит дело в арифметике Пеано и вообще во всех рекурсивно неотделимых теориях (т. е. в теориях, множества доказуемых и опровержимых формул к-рых эффективно неотделимы). Все К. м. рекурсивно изоморфны между собой (т. е. для каждой пары К. м. существует рекурсивное взаимно однозначное преобразование натурального ряда, отображающее одно из них на другое) и принадлежат одной тьюринговой степени, наибольшей среди степеней рекурсивно перечисленных множеств. Понятие креативности обобщается на последовательности множеств и другие объекты.

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [2] Шенфилд Дж., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975.

В. А. Душский.

КРЕМОНОВО ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — *бирациональное преобразование* проективного пространства P_k^n, $n \geqslant 2$, над полем k. Бирациональные преобразования плоскости и трехмерного пространства систематически изучал (начиная с 1863) Л. Кремона (L. Cremona). Группа К. п. также называется его именем — группа Кремоны и обозначается $\mathrm{Cr}(P_k^n)$.

Простейшими примерами К. п., отличными от проективных преобразований, являются квадратичные бирациональные преобразования плоскости. В неоднородных координатах (x, y) их можно записать в виде дробно-линейных преобразований

$$x \longrightarrow \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \quad y \longrightarrow \frac{a_3x + b_3y + c_3}{a_4x + b_4y + c_4}.$$

Среди них выделяется так наз. стандартное квадратичное преобразование τ:

$$(x, y) \longrightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right),$$

или в однородных координатах

$$(x_0, x_1, x_2) \longrightarrow (x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1).$$

Оно является изоморфизмом вне координатных осей

$$\tau: P_k^2 - \{x_0x_1x_2 = 0\} \xrightarrow{\sim} P_k^2 - \{x_0x_1x_2 = 0\},$$

имеет три фундаментальные точки (точки неопределенности) (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0) и отображает в каждую из этих точек координатную ось, не содержащую эту точку.

По теореме Нётера (см. *Кремоны группа)* над алгебраически замкнутым полем k каждое К. п. плоскости P_k^2 может быть представлено в виде композиции квадратичных преобразований.

В теории К. п. плоскости важную роль играют нек-рые специальные классы преобразований, в частности инволюции Гейзера и инволюции Бертини (см. [1]). Инволюция Гейзера α: $P_k^2 \to P_k^2$ определяется с помощью линейной системы кривых степени 8 на P_k^2, проходящих с кратностью 3 через 7 точек в общем положении. Инволюция Бертини β: $P_k^2 \to P_k^2$ определяется с помощью линейной системы кривых степени 17 на P_k^2, проходящих с кратностью 6 через 8 точек в общем положении.

К. п. вида

$$x \longrightarrow x,$$

$$y \longrightarrow \frac{P(x)y + Q(x)}{R(x)y + S(x)}, \quad P, Q, R, S \in k[x],$$

наз. преобразованиями Жонкьера. Наиболее естественно они интерпретируются как бирациональные преобразования квадрики $P_k^1 \times P_k^1$, сохраняющие проекцию на один из множителей. Теорема Нётера допускает при этом следующую переформулировку: группа $\mathrm{Bir}(P^1 \times P^1)$ бирациональных автоморфизмов квадрики порождена инволюцией σ и преобразованиями Жонкьера, где $\sigma \in \mathrm{Aut}(P^1 \times P^1)$ — автоморфизм перестановки множителей.

Всякий бирегулярный автоморфизм аффинного пространства A_k^n в P_k^n продолжается до К. п. пространства P_k^n, так что $\mathrm{Aut}(A_k^n) \subset \mathrm{Cr}(P_k^n)$. В случае $n=2$ группа $\mathrm{Aut}(A_k^2)$ порождена подгруппой аффинных преобразований и подгруппой преобразований вида

$$x \longrightarrow ax + b, \ a \neq 0, \ c \neq 0, \ a, \ b \in k,$$

$$y \longrightarrow cy + Q(x), \ Q(x) \in k[x],$$

более того, она является амальгамированным произведением этих подгрупп [5]. Как устроены группы $\mathrm{Aut}(A_k^n)$ при $n \geqslant 3$ неизвестно. Вообще, о К. п. в размерности $n \geqslant 3$ не получено к настоящему времени (1982) сколь либо существенных результатов.

Лит.: [1] Hudson H., Cremona transformations in plane and space, Camb., 1927; [2] Godeaux L., Les transformations birationnelles du plan, P., 1927; [3] Coble A., Algebraic geometry and theta functions, N. Y.,1929; [4] Нагата М., «Математика», 1964, т. 8, № 4, с. 75—94; [5] Шафаревич И. Р., «Rend. math.», 1966, v. 25, p. 208—12. *В. А. Исковских.*

КРЕМОНЫ ГРУППА — группа $\mathrm{Cr}(P_k^n)$ бирациональных автоморфизмов проективного пространства P_k^n над полем k, или, что то же, группа *кремоновых преобразований* пространства P_k^n.

Группа $\mathrm{Cr}(P_k^n)$ естественным образом содержит в качестве подгруппы группу $\mathrm{PGL}(n+1, k)$ проективных преобразований пространства P_k^n, причем при $n \geqslant 2$ эти группы не совпадают. Группа $\mathrm{Cr}(P_k^n)$ будет изоморфна группе $\mathrm{Aut}\, k(x_1, \ldots, x_n)$ автоморфизмов над k поля рациональных функций от n переменных над k. Основным результатом о К. г. проективной плоскости является теорема Нётера: группа $\mathrm{Cr}(P_k^2)$ над алгебраически замкнутым полем порождается квадратичными преобразованиями или, что эквивалентно, стандартным квадратичным преобразованием и проективными преобразованиями (см. [1], [7]). Неизвестно (1982), является ли эта группа простой. Существует

обобщение теоремы Нётера на случай, когда основное поле k не является алгебраически замкнутым (см. [5]).

Одна из труднейших проблем бирациональной геометрии — проблема описания строения группы $\mathrm{Cr}(P_k^3)$, к-рая уже не порождается квадратичными преобразованиями. Почти во всех работах о кремоновых преобразованиях 3-мерного пространства изучаются лишь конкретные примеры таких преобразований. О строении К. г. пространства размерности выше 3 почти ничего не известно.

Важное направление исследований К. г. связано с изучением подгрупп группы $\mathrm{Cr}(P_k^n)$. С точностью до сопряженности описаны конечные подгруппы в $\mathrm{Cr}(P_k^2)$ над алгебраически замкнутым полем k (см. [8], а также [6]). Классификация всех инволюций в $\mathrm{Cr}(P_k^2)$ получена еще в 1877 Э. Бертини (E. Bertini, см., напр., [4], [5]). Вопрос об описании всех инволюций в $\mathrm{Cr}(P_k^n)$, $n \geqslant 3$, открыт. Все максимальные связные алгебраич. подгруппы в $\mathrm{Cr}(P_k^2)$ описаны Ф. Энрикесом (F. Enriques) в 1893 (см. [4]). Это в точности группы автоморфизмов всех минимальных моделей рациональных поверхностей, т. е. плоскости P_k^2, квадрики $P^1 \times P^1$ и серии линейчатых поверхностей F_N, $N \geqslant 2$. Имеются нек-рые обобщения этого результата (см. [3], [9]) на случай группы $\mathrm{Cr}(P_k^n)$, $n \geqslant 3$.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [2] Coble A., Algebraic geometry and theta functions, N. Y., 1929; [3] Demazure M., «Ann. sci. Éc. norm. sup.», sér. 4, 1970, t. 3, № 4, p. 507—88; [4] Godeaux L., Les transformations birationnelles du plan, P., 1927; [5] Hudson H., Cremona transformations in plane and space, Camb., 1927; [6] Манин Ю. И., «Матем. сб.», 1967, т. 72, № 2, с. 161—92; [7] Нагата М., «Математика», 1964, т. 8, № 4, с. 75—94; [8] Wiman A., «Math. Ann.», 1897, Bd 48, S. 195—240; [9] Umemura H., «Nagoya Math. J.», 1980, v. 79, p. 47—67.

В. А. Исковских.

КРИВАЯ — обычно *линия* вообще, не исключая и частного случая — прямой.

КРИВИЗНА — собирательное название ряда количественных характеристик (численных, векторных, тензорных), описывающих отклонение свойств того или иного объекта (кривой, поверхности, риманова пространства и др.) от соответствующих объектов (прямая, плоскость, евклидово пространство и др.), к-рые считаются плоскими. Обычно понятия К. вводятся локально, то есть в каждой точке. Эти понятия К. связаны с рассмотрением отклонений 2-го порядка малости, поэтому предполагается задание изучаемого объекта C^2-гладкими функциями. В ряде случаев вводят интегральные понятия, к-рые сохраняются и при отказе от C^2-гладкости. Как правило, тождественное обращение в нуль К. во всех точках приводит к совпадению (на малых участках, но не в целом) изучаемого объекта с «плоским» объектом.

К р и в и з н а к р и в о й. Пусть γ — регулярная кривая в n-мерном евклидовом пространстве, параметризованная натуральным параметром t. Пусть далее $\alpha(P, P_1)$ и $s(P, P_1)$ — соответственно угол между касательными к кривой γ в точках P и P_1 этой кривой и длина дуги кривой между P и P_1. Тогда предел

$$k = \lim_{P_1 \to P} \alpha(P, P_1)/s(P, P_1)$$

наз. к р и в и з н о й к р и в о й γ в точке P. К. кривой γ равна модулю вектора $d^2\gamma(t)/dt^2$, а направление этого вектора совпадает с направлением главной нормали кривой. Для того чтобы кривая γ совпадала с нек-рым отрезком прямой или со всей прямой, необходимо и достаточно, чтобы К. кривой k тождественно равнялась нулю.

К р и в и з н а п о в е р х н о с т и. Пусть Φ — регулярная поверхность в трехмерном евклидовом про-

странстве. Пусть P — точка Ф, T_P — касательная плоскость к Ф в точке P, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к Ф в точке P, α — плоскость, проходящая через $\boldsymbol{n}$ и нек-рый единичный вектор $\boldsymbol{l}$ в T_P. Кривая γ_l, получающаяся при пересечении плоскости α и поверхности Ф, наз. нормальным сечением поверхности Ф в точке P в направлении $\boldsymbol{l}$. Величина

$$k_l = \left(\frac{d^2\gamma_l}{dt^2}, \boldsymbol{n} \right),$$

где t — натуральный параметр на кривой γ, наз. нормальной кривизной поверхности Ф в направлении $\boldsymbol{l}$. С точностью до знака нормальная К. равна К. кривой γ_l.

В касательной плоскости T_P существуют два перпендикулярных направления $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ такие, что нормальную К. в произвольном направлении можно представить с помощью так наз. формулы Эйлера:

$$k_l = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta,$$

где θ — угол между $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$. Величины k_1 и k_2, являющиеся нормальными К. в направлениях $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$, наз. главными кривизнами, а направления $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ — главными направлениями поверхности. Главные К. являются экстремальными значениями нормальных К. Структуру нормальных К. в данной точке поверхности удобно графически изображать следующим образом. При $k_l \neq 0$ уравнение

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{l} \left| \frac{1}{k_l} \right|^{1/2},$$

где $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{l})$ — радиус-вектор, задает в касательной плоскости T_P нек-рую кривую 2-го порядка, к-рая наз. индикатрисой Дюпена. Индикатриса Дюпена может быть одной из следующих трех кривых: эллипсом, гиперболой или парой параллельных прямых. Соответственно этому точки поверхности подразделяются на эллиптические, гиперболические и параболические. В эллиптич. точке 2-я квадратичная форма поверхности знакоопределенна, в гиперболической точке — знаконеопределенна, а в параболич. точке — вырождена. В случае, если все нормальные К. в точке равны нулю, точка наз. точкой уплощения. Если индикатриса Дюпена является кругом, то такую эллиптич. точку наз. шаровой (или омбилической) точкой.

Главные направления определены однозначно (с точностью до перенумерации) в том случае, если точка не является шаровой точкой или точкой уплощения. В этих случаях любое направление является главным. Имеет место теорема Родрига, в силу к-рой необходимым и достаточным условием того, что направление $\boldsymbol{l}$ — главное, является выполнение условия

$$d\boldsymbol{n} = -\lambda d\boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор поверхности, $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной нормали.

Линия на поверхности наз. линией кривизны, если ее направление в каждой точке является главным. В окрестности каждой точки P поверхности, к-рая не является шаровой точкой или точкой уплощения, поверхность можно параметризировать так, что ее координатные линии будут линиями К.

Величина

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

наз. средней кривизной поверхности. Величина

$$K = k_1 k_2$$

наз. гауссовой (или полной) кривизной

поверхности. Гауссова К. является объектом внутренней геометрии поверхностей, т. е. может быть выражена только через 1-ю квадратичную форму:

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\left(\frac{Ev-Fu}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_v-\left(\frac{Fv-Gu}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_u\right\}, \quad (1)$$

где E, F, G — коэффициенты 1-й квадратичной формы поверхности.

С помощью формулы (1) гауссова К. вводится для абстрактного двумерного риманова многообразия с линейным элементом ds^2. Для того чтобы поверхность была локально изометрична плоскости, необходимо и достаточно, чтобы ее гауссова К. была тождественно равна нулю.

К р и в и з н а р и м а н о в а п р о с т р а н с т в а. Пусть M^n — регулярное n-мерное *риманово пространство*, BM^n — пространство регулярных векторных полей на M^n. К. риманова пространства M^n обычно характеризуют с помощью *Римана тензора*, т. е. полилинейного отображения

$$R: BM^n\times BM^n\times BM^n\longrightarrow BM^n,$$

к-рое задано соотношением

$$R(X, Y)Z=\nabla_X\nabla_YZ+\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X, Y]}Z, \quad (2)$$

где ∇ — связность Леви-Чивита на M^n, $[\ ,\ ]$ — скобка Ли. Если в нек-рой локальной системе координат x^i положить $X=\frac{\partial}{\partial x^k}$, $Y=\frac{\partial}{\partial x^l}$, то формуле (2) можно придать следующий вид:

$$Z^i_{;\ k;\ l}-Z^i_{;\ l;\ k}=Z^mR^i_{mkl},$$

где ; — знак ковариантной производной.

Таким образом, тензор Римана является количественной характеристикой некоммутативности вторых ковариантных производных в римановом пространстве. С помощью тензора Римана количественно описывается и ряд других свойств римановых пространств, отличающих их от евклидовых.

Коэффициенты тензора Римана в локальной системе координат x^i могут быть выражены через символы Кристоффеля и коэффициенты метрич. тензора следующим образом:

$$R^l_{ijk}=\frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^j}+\Gamma^l_{ir}\Gamma^r_{jk}-\Gamma^l_{jr}\Gamma^r_{ik},$$

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2g_{il}}{\partial x^k\,\partial x^m}+\frac{\partial^2g_{km}}{\partial x^i\,\partial x^l}-\frac{\partial^2g_{im}}{\partial x^k\,\partial x^l}-\frac{\partial^2g_{kl}}{\partial x^i\,\partial x^m}\right)+$$

$$+g_{np}\left(\Gamma^p_{km}\Gamma^n_{il}-\Gamma^p_{im}\Gamma^n_{kl}\right),$$

где R_{iklm} — тензор Римана с опущенным индексом, или — в бескоординатных обозначениях — отображение $\langle R(X, Y)U, Z\rangle$ (где $\langle\cdot, \cdot\rangle$ — знак скалярного произведения).

Тензор Римана имеет следующие свойства симметрии:

$$R(X, Y)Z=-R(Y, X)Z,$$
$$\langle R(X, Y)Z, U\rangle=-\langle R(X, Y)U, Z\rangle,$$
$$\langle R(X, Y)Z, U\rangle=\langle R(Z, U)X, Y\rangle,$$
$$R(X, Y)Z+R(Y, Z)X+R(Z, X)Y=0,$$

к-рые в локальных координатах можно записать в виде

$$R_{iklm}=-R_{kilm}=-R_{ikml},$$
$$R_{iklm}=R_{lmik},$$
$$R_{iklm}+R_{imkl}+R_{ilmk}=0.$$

Тензор Римана имеет $n^2(n^2-1)/12$ алгебраически независимых компонент. Справедливо так наз. т о ж д е с т в о Б ь я н к и для ковариантных производных тензора Римана

$$(\nabla_X R)(Y, Z, U)+(\nabla_Y R)(Z, X, U)+(\nabla_Z R)(X, Y, U)=0,$$

где $(\Delta_X R)(Y, Z, U)$ — ковариантная производная $R(Y, Z)U$ по X. В локальных координатах это тождество имеет вид

$$R^n_{ikl;\,m}+R^n_{imk;\,l}+R^n_{ilm;\,k}=0.$$

Иногда тензор Римана определяют с обратным знаком.

Необходимым и достаточным условием локальной изометричности риманова пространства евклидову является равенство нулю его тензора Римана.

Используют и иной, эквивалентный подход к описанию свойств К. риманова пространства M^n. Пусть σ — двумерное линейное пространство касательного пространства TM^n к M^n в точке P. Тогда с е к ц и о н н о й к р и в и з н о й M^n в точке P в направлении σ наз. величина

$$K_\sigma=\frac{\langle R(V, W)W, V\rangle}{\langle V, V\rangle\langle W, W\rangle-\langle V, W\rangle^2},$$

где V и W — векторы, определяющие σ. Одна и та же площадка σ может определяться разными векторами V и W, однако K_σ не зависит от выбора различных векторов, определяющих одну и ту же площадку. Для двумерного риманова пространства секционная К. совпадает с гауссовой К. Тензор Римана может быть восстановлен по секционным кривизнам следующим образом:

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)Z, U\rangle=\frac{1}{6}\{&R(X+U, Y+Z)-k(X+U, Y)-\\&-k(X+U, Z)-k(X, Y+Z)-k(U, Y+Z)+k(X, Z)+\\&+k(U, Y)-k(Y+U, X+Z)+k(Y+U, X)+\\&+k(Y+U, Z)+k(Y, Z+X)+\\&+k(U, Z+X)-k(Y, Z)-k(U, X)\},\end{aligned}$$

где

$$k(V, W)=K_\sigma(\langle V, V\rangle\langle W, W\rangle-\langle V, W\rangle^2).$$

Используют и менее детальные характеристики К. риманова пространства — т е н з о р Р и ч ч и:

$$R_{ik}=R^l_{ilk},$$

и с к а л я р н у ю к р и в и з н у, или к р и в и з н у Р и ч ч и:

$$R=g^{ik}R_{ik}.$$

Тензор Риччи симметричен: $R_{ik}=R_{ki}$.

Иногда для характеристики К. употребляют и более сложные, в частности квадратичные, конструкции, построенные из тензора Римана. Одним из наиболее употребительных инвариантов такого рода является инвариант

$$C=R^i_{klm}R^{klm}_i,$$

используемый при изучении поля тяготения Шварцшильда.

Для двумерного пространства тензор Римана имеет вид

$$R(X, Y)Z=K(\langle Y, Z\rangle X-\langle X, Z\rangle Y), \qquad (3)$$

где K — Гауссова К. В этом случае кривизна Риччи равна K. Для трехмерного пространства тензор Римана имеет вид

$$\begin{aligned}R_{iklm}=&R_{il}g_{km}-R_{im}g_{kl}+R_{km}g_{il}-R_{kl}g_{im}+\\&+\frac{R}{2}(g_{im}g_{kl}-g_{il}g_{km}),\end{aligned}$$

где g_{ij} — метрический тензор, R_{ij} — тензор Риччи, R — кривизна Риччи.

В том случае, если секционные К. не зависят ни от точки, ни от двумерного направления, пространство M^n наз. пространством постоянной кривизны; тензор Римана такого пространства имеет вид (3) (константа K наз. кривизной пространства M^n). При $n>2$ оказывается, что если во всех точках К. не зависят от направления, то пространство M^n является пространством постоянной К. (теорема Шура).

Кривизна подмногообразий. Пусть Φ — регулярная поверхность в E^3, γ — кривая на Φ, α_P — касательная плоскость к Φ в точке P, через к-рую проходит кривая γ. Пусть малая окрестность точки P проектируется на плоскость α_P и пусть $\overline{\gamma}$ — проекция кривой γ на плоскость α_P. *Геодезической кривизной* $\varkappa$ кривой γ в точке P наз. число, равное по модулю К. кривой $\overline{\gamma}$ в точке P. Геодезическая К. считается положительной, если вращение касательной кривой $\overline{\gamma}$ при прохождении точки P образует с направлением нормали к поверхности правый винт. Геодезическая К. является объектом внутренней геометрии поверхности Φ. Геодезическая К. может быть вычислена по формуле

$$\varkappa=\frac{e_{ij}\left(\frac{d^2x^i}{ds^2}\frac{d^2x^j}{ds^2}+\Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)}{\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)^{3/2}}, \qquad (4)$$

где $x^i(s)$ — натуральное уравнение кривой γ в локальных координатах x^i на Φ, g_{ij} — компоненты метрич. тензора поверхности Φ в этих координатах, Γ^i_{kl} — символы Кристоффеля, e_{ij} — вполне дискриминантный тензор. С помощью формулы (4) вводится понятие геодезической К. для кривой на абстрактном двумерном римановом пространстве. Необходимым и достаточным условием того, что кривая на римановом многообразии совпадает с геодезической или с ее отрезком, является тождественное равенство нулю геодезической К.

Пусть Φ — двумерное подмногообразие трехмерного риманова пространства M. К определению К. для Φ можно подойти двумя способами. С одной стороны, можно рассматривать Φ как риманово пространство, метрика к-рого индуцирована метрикой M, и определить его К. по формуле (1). Полученная таким образом К. наз. внутренней кривизной. С другой стороны, можно провести построение, приводящее к понятию К. для поверхности в евклидовом пространстве и для подмногообразия риманова пространства. В результате получается иное понятие К.; эта К. наз. внешней кривизной. Справедливо следующее соотношение:

$$K_i=K_e+K_\sigma,$$

где K_σ — К. пространства M в направлении касательной плоскости к Φ.

Понятия нормальной, внешней и внутренней К. допускают обобщение на размерности и коразмерности изучаемого подмногообразия.

Понятие тензора Римана обобщено на ряд пространств, имеющих менее сильные структуры, чем риманово пространство. Напр., тензоры Римана и Риччи зависят лишь от аффинной структуры риманова пространства и могут быть введены и для пространства аффинной связности (однако в этом случае тензоры Римана и Риччи обладают не всеми свойствами симметрии). Напр., $R_{ik}\neq R_{ki}$. Другими примерами такого рода являются тензор конформной К. и тензор проективной К.

Тензор конформной кривизны (тензор Вейля) имеет вид

$$c_{iklm}=R_{iklm}-R_{l[i}g_{k]m}+R_{m[i}g_{k]l}+\frac{1}{3}R_{l[i}g_{k]m},$$

где квадратные скобки означают альтернацию по за-

ключенным в них индексам. Равенство нулю тензора конформной К. является необходимым и достаточным условием того, что данное пространство локально совпадает с конформно-евклидовым пространством. Тензор проективной кривизны имеет вид

$$P^q_{lki} = R^q_{lki} + \delta^q_k \frac{R_{li} + R_{il}}{n^2-1} - \delta^q_l \frac{nR_{ki} + R_{ik}}{n^2-1} + \delta^q_i \frac{R_{lk} - R_{kl}}{n+1},$$

где δ^k_i — символ Кронекера, n — размерность пространства. Равенство нулю тензора проективной К. является необходимым и достаточным условием того, что данное пространство локально совпадает с проективно-евклидовым пространством.

Понятие К. обобщено на случай нерегулярных объектов, в частности на случай теории двумерных многообразий ограниченной кривизны. К. в пространстве здесь рассматривается не в точке, а в области, и говорят о полной, или интегральной, кривизне области. В регулярном случае полная К. равна интегралу от гауссовой К. Полная К. геодезич. треугольника может быть выражена через углы β_i при вершинах этого треугольника соотношением

$$K = \sum \beta_i - \pi, \qquad (5)$$

являющимся частным случаем *Гаусса — Бонне теоремы*. Формула (5) была положена в основу определения полной К. для многообразий ограниченной К.

Понятие К. является одним из основных понятий современной дифференциальной геометрии. Ограничения на К. дают обычно содержательную информацию об объекте. Так, в теории поверхностей E^3 знак гауссовой К. определяет тип точки (эллиптический, гиперболический, параболический). Поверхности с всюду неотрицательной гауссовой К. обладают целым набором общих свойств, к-рые позволяют объединять их в один естественный класс (см. [4]; [6]). Много специфических свойств имеют поверхности нулевой средней К. (см. *Минимальная поверхность*). В теории нерегулярных поверхностей специально изучают классы поверхностей ограниченной интегральной абсолютной гауссовой или средней К.

В римановых пространствах равномерное ограничение секционных кривизн K_σ пространства в любой его точке и любом двумерном направлении позволяет использовать теоремы сравнения. Последние позволяют сравнивать скорость расхождения геодезических и объемы областей в рассматриваемом пространстве с характеристиками соответствующих линий и областей в пространстве постоянной К. Некоторые из ограничений на K_σ даже предопределяют топологич. строение пространства в целом. Например.

Теорема о сфере. Пусть M полное односвязное риманово пространство размерности $n \geqslant 2$ и $^1/_4 < \delta \leqslant K_\sigma \leqslant 1$. Тогда M гомеоморфно сфере S^n.

Теоремы Адамара — Картана и Громола — Майера. Пусть M полное риманово пространство размерности $n \geqslant 2$. Если всюду $K_\sigma \leqslant 0$ и M односвязно или всюду $K_\sigma > 0$ и M некомпактно, то M гомеоморфно евклидову пространству E^n.

Понятия К. используются в различных естественных науках. Так, при движении тела по траектории с ее К. связана центробежная сила. Гауссова К. возникла в связи с работами К. Гаусса (K. Gauss) по картографии. Со средней К. поверхности жидкости связан капиллярный эффект. В *относительности теории* с распределением вещества и энергии (точнее, с тензором энергии-импульса) связана К. пространства-времени (см. *Пространство-время*). Тензор конформной К. находит применение в теории рождения частиц в гравитационном поле.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [2] Погорелов А. В.,

Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969; [3] Бляшке В., Дифференциальная геометрия..., пер. с нем., т. 1, М.—Л., 1935; [4] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.—Л., 1948; [5] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [6] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.

Д. Д. Соколов.

КРИВИЗНЫ ЛИНИЙ СЕТЬ — ортогональная сеть на гладкой гиперповерхности V_{n-1} евклидова пространства $E_n (n \geqslant 3)$, образованная *кривизны линиями*. К. л. с. на V_{n-1} является *сопряженной сетью*. Напр., на поверхности вращения $V_2 \subset E_3$ меридианы и параллели образуют К. л. с. Если на гладкой p-мерной поверхности $V_p \subset E_n$ $(2 \leqslant p < n)$ задано поле одномерных нормалей такое, что нормаль $[x, \boldsymbol{n}]$ этого поля принадлежит дифференциальной окрестности 2-го порядка точки $x \in V_p$, то относительно этого поля нормалей на V_p определяются линии кривизны и К. л. с. точно также, как и на V_{n-1}. Но К. л. с. на $V_p (p < n-1)$, вообще говоря, не является сопряженной.

Лит.: [1] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [2] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. Т. Базылев.

КРИВИЗНЫ ЛИНИЯ — линия на поверхности, в каждой точке к-рой касательная имеет одно из главных направлений. К. л. определяется уравнением

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0,$$

где E, F, G — коэффициенты первой, а L, M, N — коэффициенты второй квадратичных форм поверхности. Нормали поверхности вдоль К. л. образуют развертывающуюся поверхность. На поверхностях вращения К. л.— меридианы и параллели. К. л. развертывающейся поверхности — ее прямолинейные образующие и линии, ортогональные к ним.

А. Б. Иванов.

КРИВИЗНЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — отображение $R(X, Y)$ пространства $\mathscr{T}(M)$ векторных полей на многообразии M, линейно зависящее от X, $Y \in \mathscr{T}(M)$ и задаваемое формулой

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z;$$

здесь ∇_X — *ковариантная производная* вдоль X, $[X, Y]$ — коммутатор X и Y. Отображение

$$R \equiv R(X, Y)Z : \mathscr{T}^3(M) \longrightarrow \mathscr{T}(M)$$

есть *кривизны тензор* определяемой ∇_X *линейной связности*.

М. И. Войцеховский.

КРИВИЗНЫ ТЕНЗОР — тензор типа (1,3), получающийся в разложении *кривизны формы* в локальном кобазисе на многообразии M^n. В частности, в голономном кобазисе dx^i, $i = 1, \ldots, n$, компоненты К. т. R^k_{lij} аффинной связности выражаются через объекты связности Γ^k_{ij} и их производные

$$R^k_{lij} = \partial_i \Gamma^k_{jl} - \partial_j \Gamma^k_{il} + \Gamma^k_{ip} \Gamma^p_{jl} - \Gamma^k_{jp} \Gamma^p_{il}.$$

Аналогично определяется К. т. для произвольной связности на главном расслоенном пространстве со структурной группой Ли G через разложение соответствующей формы кривизны, в частности для конформной связности и проективной связности. Он принимает значения в алгебре Ли группы G и представляет собой пример так наз. тензоров с нескалярными компонентами.

М. И. Войцеховский.

Лит. см. при ст. *Кривизна.*

КРИВИЗНЫ ФОРМА — 2-форма Ω на главном расслоенном пространстве P со структурной группой Ли G, принимающая значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G и определяемая *связности формой* θ, заданной на P,

по формуле

$$d\Omega = d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta].$$

К. ф. является мерой отклонения данной связности от локально плоской связности, к-рая характеризуется условием $\Omega \equiv 0$. К. ф. удовлетворяет тождеству Бианки

$$d\Omega = [\Omega, \theta]$$

и определяет алгебру голономии (см. *Голономии группа*).

Ю. Г. Лумисте.

КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл по кривой. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ задана спрямляемая кривая $\gamma = \{x = x(s),\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, s — длина дуги и на кривой γ задана функция $F = F(x(s))$. К. и.

$$\int_\gamma F(x)\, ds$$

определяется равенством

$$\int_\gamma F(x)\, ds = \int_0^S F(x(s))\, ds \qquad (1)$$

(справа — интеграл по отрезку) и наз. криволинейным интегралом первого рода, или криволинейным интегралом по длине дуги. Он является пределом соответствующих интегральных сумм, к-рые могут быть описаны в терминах, связанных с кривой. Напр., если функция $F(x(s))$ интегрируема по Риману (см. *Римана интеграл*), $\tau = \{s_i\}_{i=0}^m$ — разбиение отрезка $[0, S]$, $\delta_\tau = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} (s_i - s_{i-1})$ — его мелкость, $\xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$, $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ — длина части кривой γ от точки $x(s_{i-1})$ до точки $x(s_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^m F(x(\xi_i))\, \Delta s_i,$$

то

$$\int_\gamma F(x)\, ds = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau.$$

Если спрямляемая кривая γ задана параметрическим представлением $x = x(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, и на ней задана функция $F = F(x(t))$, то интеграл

$$\int_\gamma F(x) dx_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

определяется равенством

$$\int_\gamma F(x)\, dx_k = \int_a^b F(x(t))\, d\varphi_k(t) \qquad (2)$$

(справа — *Стилтьеса интеграл*) и наз. криволинейным интегралом второго рода, или криволинейным интегралом по координате x_k. Он также является пределом соответствующих интегральных сумм: если $\tau = \{t_i\}_{i=0}^m$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta x_{ki} = \varphi_k(t_i) - \varphi_k(t_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и

$$\tilde{\sigma}_\tau = \sum_{i=1}^m F(x(\eta_i))\, \Delta x_{ki},$$

то

$$\int_\gamma F(x)\, dx_k = \lim_{\delta_\tau \to 0} \tilde{\sigma}_\tau.$$

Если F — непрерывная на спрямляемой кривой функция, то К. и. (1) и (2) всегда существуют. Если A — начало, а B — конец кривой γ, то К. и. (1) и (2) обозначаются также через

$$\int_{\widehat{AB}} F(x)\, ds \quad \text{и} \quad \int_{\widehat{AB}} F(x)\, dx_k.$$

К. и. первого рода не зависит от ориентации кривой:

$$\int_{\widehat{BA}} F(x)\,ds = \int_{\widehat{AB}} F(x)\,ds,$$

а К. и. второго рода меняет знак при изменении ориентации кривой:

$$\int_{\widehat{BA}} F(x)\,dx_k = -\int_{\widehat{AB}} F(x)\,dx_k.$$

Если γ — непрерывно дифференцируемая кривая, $x(t)=(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ — ее непрерывно дифференцируемое представление, $a \leqslant t \leqslant b$, и F — непрерывная на γ функция, то

$$\int_\gamma F(x)\,ds = \int_a^b F(x(t)) \sqrt{\sum\nolimits_{k=1}^n [\varphi_k'(t)]^2}\,dt,$$

$$\left(\sum\nolimits_{k=1}^n [\varphi_k'(t)]^2 > 0\right),$$

$$\int_\gamma F(x)\,dx_k = \int_a^b F(x(t))\,\varphi_k'(t)\,dt, \quad k=1, 2, \ldots, n,$$

и тем самым интегралы, стоящие в правой части этих равенств, не зависят от выбора параметра на кривой γ. Если $\tau=(\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$ — единичный касательный вектор к кривой γ, то К. и. второго рода выражается через К. и. первого рода по формуле

$$\int_\gamma F(x)\,dx_k = \int_\gamma F(x)\cos\alpha_k\,ds.$$

Если кривая γ задана векторным представлением $r(t)=(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, а $a(x(t))=(a_1(x(t)), \ldots, a_n(x(t)))$ — векторная функция, определенная на γ, то, по определению,

$$\int_\gamma a(x)\,dr = \int_\gamma (a, \tau)\,ds = \sum\nolimits_{k=1}^n \int_\gamma a_k(x)\,dx_k.$$

Связь между К. и. и интегралами других видов устанавливается *Грина формулой* и *Стокса формулой*.

С помощью К. и. можно вычислять площади плоских областей: если конечная плоская область G ограничена спрямляемым простым контуром γ, то ее площадь равна

$$\operatorname{mes} G = \int_\gamma x_1\,dx_2 = -\int_\gamma x_2\,dx_1 = \frac{1}{2}\int_\gamma x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1,$$

где контур γ ориентирован против часовой стрелки.

Если вдоль кривой γ распределена нек-рая масса M с линейной плотностью $\rho(x)$, то

$$M = \int_\gamma \rho(x)\,ds.$$

Если $F(x)$ — напряженность силового поля (т. е. сила, действующая на единицу массы), тогда

$$\int_\gamma F(x)\,dr$$

равен работе силового поля вдоль кривой γ при перемещении вдоль γ единичной массы.

К. и. используются в теории векторных полей. Если непрерывное векторное поле $a=a(x)=(a_1(x), \ldots, a_n(x))$ определено на нек-рой n-мерной области G, $n>1$, то следующие три свойства эквивалентны.

1) Для любой замкнутой спрямляемой кривой $\gamma \subset G$ справедливо равенство

$$\int_\gamma a(x)\,dr = 0$$

(векторное поле, обладающее этим свойством, наз. потенциальным).

2) Для любой пары точек $A \in G$, $B \in G$ и для любых двух спрямляемых кривых $(\widehat{AB})_1$, $(\widehat{AB})_2$ с началом в точ-

ке A и концом в точке B:

$$\int_{\widehat{(AB)}_1} \boldsymbol{a}(x)\,d\boldsymbol{r} = \int_{\widehat{(AB)}_2} \boldsymbol{a}(x)\,d\boldsymbol{r}.$$

3) В области G существует такая функция $u(x)$ (называемая потенциальной функцией векторного поля $\boldsymbol{a}(x)$), что $\nabla u(x) = \boldsymbol{a}(x)$, т. е. $\partial u(x)/\partial x_k = a_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, при этом для любых A, $B \in G$ и любой кривой $\widehat{AB} \subset G$:

$$\int_{\widehat{AB}} \boldsymbol{a}(x)\,d\boldsymbol{r} = u(B) - u(A).$$

Если $n=2$ или $n=3$ и область G односвязна при $n=2$ и поверхностно односвязна при $n=3$, а поле $\boldsymbol{a}(x)$ непрерывно дифференцируемо, то свойства 1) — 3) эквивалентны следующему свойству.

4) Вихрь векторного поля в области G равен нулю:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(x) = 0,\ x \in G.$$

Если условие односвязности области G не выполнено, то свойство 4) не эквивалентно, вообще говоря, свойствам 1) — 3). Напр., для поля

$$\boldsymbol{a}(x_1, x_2) = \left(-\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2},\ \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \right),$$

определенного на плоскости с выброшенным началом координат, имеем $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(x) = 0$, $x \neq 0$, но

$$\int_{|r|=1} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = 2\pi \neq 0.$$

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980; [2] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 2, М., 1981; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев.

КРИПКЕ МОДЕЛИ — структуры, состоящие из нек-рого множества обычных моделей для классической логики, упорядоченных между собой нек-рым отношением, и служащие для интерпретации в них различных неклассических логик (интуиционистской, модальных и др.). Точнее, К. м. для языка L имеют вид

$$K = (S, R, D, W),$$

где S — некоторое непустое множество («миров», «ситуаций»); R — некоторое бинарное отношение на S (напр., для системы J *интуиционистской логики* R является частичным порядком, для модальной системы $S4$ — предпорядком, для системы $S5$ — отношением эквивалентности); отображение D сопоставляет каждому $\alpha \in S$ нек-рую непустую область D_α так, что если $\alpha R \beta$, то $D_\alpha \subseteq D_\beta$; оценка W сопоставляет всякой индивидной константе a элемент $W(a) \in \bigcap_{\alpha \in S} D_\alpha$, всякой индивидной переменной x — элемент $W(x) \in \bigcup_{\alpha \in S} D_\alpha$, для каждого $\alpha \in S$ всякой пропозициональной переменной p — истинностное значение $W_\alpha(p) \in \{\text{И}, \text{Л}\}$ (для системы J требуется также, чтобы если $\alpha R \beta$ и $W_\alpha(p) = \text{И}$, то $W_\beta(p) = \text{И}$), всякой n-местной ($n \geqslant 1$) предикатной константе P — некоторое подмножество $W_\alpha(P) \subseteq (D_\alpha)^n$ [для системы J, если $\alpha R \beta$, то $W_\alpha(P) \subseteq W_\beta(P)$], всякой n-местной функциональной константе f — функцию $W_\alpha(f)$ из $(D_\alpha)^n$ в D_α [для системы J, если $\alpha R \beta$, то $W_\alpha(f)$ есть ограничение $W_\beta(f)$ на D_α].

Для всяких $\alpha \in S$ и формулы A языка L такой, что для любой свободной переменной x в A $W(x) \in D_\alpha$, индуктивно определяется истинностное значение $W_\alpha(A) \in \{\text{И}, \text{Л}\}$. Для системы J значение $W_\alpha(A)$ определяется следующим образом:

а) если A — элементарная формула, то значение $W_\alpha(A)$ уже задано моделью;

б) $W_\alpha(B \& C) = \text{И} \rightleftarrows (W_\alpha(B) = \text{И}$ и $W_\alpha(C) = \text{И})$;

в) $W_\alpha(B \vee C) = \text{И} \rightleftarrows (W_\alpha(B) = \text{И}$ или $W_\alpha(C) = \text{И})$;

г) $W_\alpha(B \supset C) = \text{И} \leftrightarrows$ (для всякого $\beta \in S$, если $\alpha R \beta$ и $W_\beta(B) = \text{И}$, то $W_\beta(C) = \text{И}$);

д) $W_\alpha(\neg B) = \text{И} \leftrightarrows$ (для всякого $\beta \in S$, если $\alpha R \beta$, то $W_\beta(B) = \text{Л}$);

е) $W_\alpha(\forall x B) = \text{И} \leftrightarrows$ (для всяких $W' \underset{x}{=} W$ и $\beta \in S$, если $\alpha R \beta$ и $W'(x) \in D_\beta$, то $W'_\beta(B) = \text{И}$);

ж) $W_\alpha(\exists x B) = \text{И} \leftrightarrows$ (существует $W' \underset{x}{=} W$ такое, что $W'(x) \in D_\alpha$ и $W'_\alpha(B) = \text{И}$) (здесь $W' \underset{x}{=} W$ означает, что оценка W' совпадает с W всюду, кроме, быть может, на x). Иногда вместо $W_\alpha(A) = \text{И}$ пишут $\alpha \models A$.

Для модальных логик определение $W_\alpha(A)$ в случаях (г), (д) и (ж) происходит иначе:

г′) $W_\alpha(B \supset C) = \text{И} \leftrightarrows (W(B) = \text{Л}$ или $W_\alpha(C) = \text{И})$;

д′) $W_\alpha(\neg B) = \text{И} \leftrightarrows W_\alpha(B) = \text{Л}$;

ж′) $W_\alpha(\forall x B) = \text{И} \leftrightarrows$ (для всякого $W' \underset{x}{=} W$, если $W'(x) \in D_\alpha$, то $W'_\alpha(B) = \text{И}$);

кроме того, добавляется

з) $W_\alpha(\Box B) = \text{И} \leftrightarrows$ (для всякого $B \in S$, если $\alpha R \beta$, то $W_\beta(B) = \text{И}$).

Формула A наз. и с т и н н о й в К. м. $K = (S, R, D, W)$ (пишут $K \models A$), если $W_\alpha(A) = \text{И}$ для всякого $\alpha \in S$. Для каждой из систем J, $S4$, $S5$ справедлива т е о р е м а о п о л н о т е: всякая формула выводима в этой системе тогда и только тогда, когда она истинна во всех К. м. из соответствующего класса. Существенно, что области D_α являются, вообще говоря, различными, поскольку формула

$$\forall x (A \vee B(x)) \supset A \vee \forall x B(x), \qquad (*)$$

где x не входит свободно в A, не выводима в системе J, но истинна во всех К. м. с постоянной областью. Система, полученная из J добавлением схемы (*), полна относительно К. м. с постоянной областью (см. [4]). Пропозициональный фрагмент каждой из систем J, $S4$, $S5$ является финитно аппроксимируемым, т. е. всякая невыводимая в нем формула опровержима на нек-рой конечной К. м. из соответствующего класса.

Понятие «К. м.» родственно понятию вынуждения (см. *Вынуждения метод*). К. м. введены С. А. Крипке (S. A. Kripke).

Лит.: [1] К р и п к е С. А., Семантический анализ модальной логики, в кн.: Ф е й с Р., Модальная логика, пер. с англ., М., 1974, с. 254—323; [2] Ш ю т т е К., Полные системы модальной и интуиционистской логики, там же, с. 324—421; [3] G ö r d e r m a n n S., «J. Symb. Logic», 1971, v. 36, p. 249—61; [4] К о э н П о л Д ж., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969. *С. К. Соболев.*

КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКАЯ ГРУППА — дискретная группа движений n-мерного евклидова пространства E^n, имеющая ограниченную фундаментальную область. Две К. г. считаются э к в и в а л е н т н ы м и, если они сопряжены в группе аффинных преобразований пространства E^n.

Происхождение теории К. г. связано с изучением симметрии орнаментов ($n=2$) и кристаллических структур ($n=3$). Классификация всех п л о с к и х (двумерных) и п р о с т р а н с т в е н н ы х (трехмерных) К. г. была получена в конце 19 в. Е. С. Федоровым и несколько позже А. Шёнфлисом (см. [2], [3], а также [6], [7], [9]). С точностью до эквивалентности имеется 17 плоских и 219 пространственных К. г.; если же рассматривать пространственные группы с точностью до сопряженности при помощи аффинных преобразований, сохраняющих ориентацию, то их будет 230. В 1910 Л. Бибербахом были исследованы К. г. в п р о и з в о л ь н о й размерности [4]. Он доказал, в частности, следующие теоремы.

1) Всякая n-мерная К. г. Г содержит n линейно независимых параллельных переносов; группа G линейных частей преобразований из Г конечна. (Для $n=3$ это было доказано в [3].)

2) Две К. г. эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны как абстрактные группы.

3) При любом n имеется лишь конечное число n-мерных К. г., рассматриваемых с точностью до эквивалентности (что является решением 18-й проблемы Гильберта).

Теорема 1) позволяет дать следующее описание строения К. г. как абстрактных групп. Пусть L — совокупность всех параллельных переносов, принадлежащих К. г. Г. Тогда L — нормальная подгруппа конечного индекса, изоморфная $\mathbb{Z}^n$ и совпадающая со своим централизатором в Г. Наличие такой нормальной подгруппы L в абстрактной группе Г является и достаточным условием того, чтобы группа Г была изоморфна К. г. [7].

Группа G линейных частей К. г. Г сохраняет решетку L; иными словами, в базисе решетки L преобразования из G записываются целочисленными матрицами.

Для того чтобы задать К. г. Г, нужно, помимо G и L, указать для каждого $g\in G$ такой вектор $a(g)$, что преобразование

$$x\longmapsto gx+a(g),\quad x\in E^n,$$

принадлежит группе Г. Вектор $a(g)$ определен с точностью до прибавления вектора из L. Отображение

$$\alpha: g\longmapsto a(g)+L$$

является одномерным коциклом на G со значениями в V/L, где V — векторное пространство, ассоциированное с E^n.

Любая тройка $\{G, L, \alpha\}$, где $G\subset \mathrm{GL}(V)$ — конечная линейная группа, L — G-инвариантная решетка и α — одномерный коцикл на G со значениями в V/L, соответствует указанным образом нек-рой К. г. При этом тройки $\{G, L, \alpha_1\}$ и $\{G, L, \alpha_2\}$, где α_1 и α_2 — когомологичные коциклы, соответствуют эквивалентным К. г. Нулевому классу когомологий соответствует расщепляемая (или симморфная) К. г., к-рая, при подходящем выборе начала отсчета, состоит из всех преобразований вида

$$x\longmapsto gx+a\ \ (x\in E^n),$$

где $g\in G$, $a\in L$.

В матричной интерпретации описание всех n-мерных К. г. сводится к описанию всех конечных групп целочисленных матриц порядка n (с точностью до сопряженности в группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$) и, для каждой такой группы G, к вычислению группы когомологий $H^1(G, \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$.

Двум классам когомологий отвечают эквивалентные К. г. тогда и только тогда, когда они переводятся друг в друга нормализатором группы G в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Теорема 2) Бибербаха и результат Х. Цассенхауза [7] означают, что естественный гомоморфизм

$$H^1(G, \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)\longrightarrow H^2(G, \mathbb{Z}^n)$$

является изоморфизмом. Это легко может быть выведено из точной последовательности когомологий группы G.

Две К. г. относятся к одному классу (соответственно арифметическому классу), если их группы линейных частей сопряжены в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (соответственно в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$). При $n=3$ имеется 32 класса и 73 арифметических класса К. г.

Среди конечных групп целочисленных матриц можно выделить группы симметрии решеток, т. е. группы всех ортогональных преобразований, сохраняющих какую-либо заданную решетку в векторном пространстве (и записанных в базисе этой решетки). В 1848 О. Браве (A. Bravais) определил все возможные группы симметрии 3-мерных решеток и разбил в соответствии с этим

все 3-мерные решетки на 14 типов (так наз. типы Браве). Подгруппы группы $GL_n(\mathbb{Z})$, являющиеся группами симметрии решеток, наз. подгруппами Браве.

Подгруппы Браве можно интерпретировать также как стационарные подгруппы для естественного действия группы $GL_n(\mathbb{Z})$ на множестве положительно определенных квадратичных форм от n переменных. Поэтому для их нахождения может быть использована теория приведения (см. [11]). Всякая максимальная конечная подгруппа группы $GL_n(\mathbb{Z})$ является подгруппой Браве (но не наоборот).

Приводимая таблица дает число конечных подгрупп в группе $GL_n(\mathbb{Z})$ (рассматриваемых с точностью до сопряженности).

n	Число максимальных конечных подгрупп	Число подгрупп Браве	Число конечных подгрупп
1	1	1	2
2	2	5	13
3	4	14	73
4	9	64	710
5	17	?	?

Пересечение подгрупп Браве также есть подгруппа Браве. Наименьшая подгруппа Браве $\hat{G}$, содержащая группу G линейных частей К. г. Г и рассматриваемая с точностью до сопряженности в $GL_n(\mathbb{R})$ (соответственно в $GL_n(\mathbb{Z})$), наз. геометрической (соответственно арифметической) голоэдрией группы Г. Если Г — К. г. общего положения в том смысле, что ее нельзя аффинным преобразованием перевести в К. г., решетка параллельных переносов к-рой обладает меньшей симметрией, то $\hat{G}$ совпадает с группой симметрии решетки параллельных переносов группы Г. Две К. г. относятся к одной сингонии (соответственно типу Браве), если их геометрические (соответственно арифметические) голоэдрии совпадают. При $n=3$ имеется 7 сингоний и 14 типов Браве кристаллографич. групп.

Линейные представления К. г. Неприводимые конечномерные комплексные линейные представления К. г. Г описываются следующим образом. Пусть χ — какой-либо характер (гомоморфизм в мультипликативную группу комплексных чисел) группы L,

$$\Gamma_\chi = \{\gamma \in \Gamma : \chi(\gamma l \gamma^{-1}) = \chi(l)\ \forall l \in L\}$$

и σ — такое неприводимое представление группы Γ_χ, что $\sigma(l) = \chi(l) \cdot 1$ при $l \in L$. Тогда представление группы Г, индуцированное представлением σ подгруппы Γ_χ (см. *Индуцированное представление*), неприводимо. Всякое неприводимое представление группы Г получается описанным способом (см. [9], [10]).

Лит.: [1] Браве О., Избр. научные труды, Л., 1974, с. 41—138; [2] Федоров Е. С., Симметрия и структура кристаллов. Основные работы, М., 1949, с. 111—255; [3] Schoenflies A., Kristallsysteme und Kristallstruktur, Lpz., 1891; [4] Bieberbach L., «Math. Ann.», 1911, Bd 70, S. 297—336; 1912, Bd 72, S. 400—12; [5] Делоне Б., Падуров Н., Александров А., Математические основы структурного анализа кристаллов..., Л.— М., 1934; [6] Шубников А. В., Атлас кристаллографических групп симметрии, М.—Л., 1946; [7] Zassenhaus H., «Comm. math. helv.», 1948, v. 21, p. 117—141; [8] Мальцев А. И., Избр. труды, т. 1— Классическая алгебра, М., 1976, с. 371—75; [9] Любарский Г. Я., Теория групп и ее применение в физике, М., 1957; [10] Фаддеев Д. К., Таблицы основных унитарных представлений федоровских групп, М.— Л., 1961; [11] Делоне Б. Н., Галиулин Р. В., Штогрин М. И., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 2, М., 1973, с. 119—254.

Э. Б. Винберг.

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ — совокупность методов описания внешних форм кристаллов и их внутреннего пространственного строения. В основе К. м. лежит представление об упорядоченном трехмерно периодическом расположении в кристалле составляющих его частиц, к-рые образуют кристаллич. решетку. Выросшие в равновесных условиях кристаллы имеют форму правильных выпуклых многогранников той или иной симметрии. Группы симметрий классифицируют: по числу n измерений пространства, в к-ром они определены; по числу m измерений пространства, в к-рых объект периодичен (их соответственно обозначают G_m^n) и по нек-рым другим признакам. Для описания кристаллов используют различные группы симметрии, из к-рых важнейшими являются пространственные группы G_3^3, описывающие атомную структуру кристаллов, и точечные группы симметрии G_0^3, описывающие их внешнюю форму.

Операциями точечной группы симметрии являются: повороты вокруг оси симметрии порядка N на $360°/N$, отражение в плоскости симметрии (зеркальное отражение), инверсия $\overline{1}$ (симметрия относительно точки), инверсионные повороты $\overline{N}$ (комбинация поворота на $360°/N$ с одновременной инверсией). Вместо инверсионных поворотов иногда рассматривают зеркальные повороты $\tilde{N}$. Число групп G_0^3 бесконечно. Однако в кристаллах ввиду наличия кристаллич. решетки возможны только операции и соответственно оси симметрии до 6-го порядка (кроме 5-го), к-рые обозначаются символами *1*, *2*, *3*, *4*, *6*, а также инверсионные оси: $\overline{1}$ (она же центр симметрии), $\overline{2}=m$ (она же плоскость симметрии, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$). Количество точечных кристаллографич. групп, описывающих внешнюю форму кристаллов, ограничено: 32 группы.

Группы, содержащие лишь повороты, описывают кристаллы, состоящие только из совместимо равных частей. Эти группы наз. группами 1-го рода. Группы, содержащие отражения, или инверсионные повороты, описывают кристаллы, в к-рых есть зеркально равные части (но могут быть и совместимо равные части). Эти группы наз. группами 2-го рода. Кристаллы, описываемые группами 1-го рода, могут кристаллизоваться в двух энантиоморфных формах, условно наз. «правой» и «левой», каждая из них не содержит элементов симметрии 2-го рода, но они зеркально равны друг другу.

Многие свойства кристаллов, принадлежащих к определенным классам, описываются предельными точечными группами, содержащими оси симметрии бесконечного порядка. Наличие такой оси означает, что объект совмещается с собой при повороте на любой, в том числе бесконечно малый угол. Таких групп семь.

Пространственная группа симметрий кристаллич. решетки описывается группами G_3^3. Характерными для решетки операциями являются три некомпланарных переноса $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, к-рые отвечают трехмерной периодичности атомной структуры кристаллов.

Вследствие возможности комбинирования в решетке трансляций и операций точечной симметрии в группах G_3^3 возникают операции и соответствующие элементы симметрии с трансляционной компонентой — винтовые оси различных порядков и плоскости скользящего отражения.

Всего известно 230 пространственных (федоровских) групп симметрии G_3^3, и любой кристалл относится к одной из этих групп. Трансляционные компоненты элементов микросимметрии микроскопически не проявляются; поэтому каждая из 230 групп G_3^3 макроскопически сходственна с одной из 32 точечных групп. Сово-

купность переносов, присущих данной пространственной группе, есть ее трансляционная подгруппа, или решетка Браве; таких решеток существует 14. См. также *Кристаллографическая группа.*

Лит.: [1] Шубников А. В., Флинт Е. Е., Бокий Г. Б., Основы кристаллографии, М.— Л., 1940; [2] Федоров Е. С., Симметрия и структура кристаллов, [М.], 1949; [3] Шаскольская М., Кристаллы, М., 1959.

По материалам ст. Симметрия кристаллов из БСЭ-3.

КРИСТОФФЕЛЯ СИМВОЛ дифференциальной квадратичной формы

$$\sum_{r,\,s=1}^{n} g_{rs}\,dx^r\,dx^s$$

— символ для сокращенного обозначения выражения

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)\equiv \Gamma_{k,\,ij}.$$

Символ $\Gamma_{k,\,ij}$ наз. К. с. 1-го рода, в отличие от К. с. 2-го рода Γ^k_{ij}, определяемого соотношением

$$\Gamma^k_{ij}=\sum_{t=1}^{n} g^{kt}\Gamma_{k,\,ij},$$

где g^{kt} определяется из равенств

$$\sum_{k=1}^{n} g^{kt}g_{ks}=\begin{cases}1, & \text{если } t=s,\\ 0, & \text{если } t\neq s.\end{cases}$$

К. с. введен Э. Кристоффелем (E. Christoffel, 1869).

КРИСТОФФЕЛЯ ЧИСЛА, Кристоффеля коэффициенты,— коэффициенты λ_k квадратурной формулы

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\approx\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k),$$

точной для алгебраич. многочленов степени $\leqslant 2n-1$. Узлы x_k такой квадратурной формулы являются нулями многочлена $p_n(x)$ степени n, ортогонального на $[a, b]$ относительно распределения $d\alpha(x)$ всем многочленам степени $n-1$; если $x_1<x_2<\ldots<x_n$, то К. ч. определяются однозначно. К. ч. $\lambda_k>0$, $\Sigma_{k=1}^{n}\lambda_k=\alpha(b)-\alpha(a)$ и

$$\lambda_k=\int_a^b\left[\frac{p_n(x)}{p_n'(x)\,(x-x_k)}\right]^2 d\alpha(x),\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,n.$$

Если многочлены $p_n(x)$ ортонормированны, то К. ч. представимы в виде

$$\lambda_k^{-1}=p_0(x_k)+p_1(x_k)+\ldots+p_n(x_k),\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,n,$$

$$\lambda_k=-\frac{K_{n+1}}{K_n}\,\frac{1}{p_{n+1}(x_k)\,p_n'(x_k)}=$$

$$=\frac{K_n}{K_{n-1}}\,\frac{1}{p_{n-1}(x_k)\,p_n'(x_k)},\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,n,$$

где K_n — старший коэффициент многочлена $p_n(x)$. В случае $a=-1$, $b=1$ и $d\alpha(x)=dx$ $p_n(x)$ являются *Лежандра многочленами*, а К. ч.

$$\lambda_k=\frac{2}{(1-x_k^2)\left[p_n'(x_k)\right]^2}.$$

Эти выражения указаны Э. Кристоффелем [1]. Для $n=1,\,2,\,\ldots,\,7$ эти коэффициенты были вычислены К. Гауссом (C. Gauss). См. также *Гаусса квадратурная формула.*

Лит.: [1] Christoffel E. B., «J. reine und angew. Math.», 1858, Bd 55, S. 61—82; [2] Сегё Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [3] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.— Л., 1949.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

КРИСТОФФЕЛЯ — ДАРБУ ФОРМУЛА для многочленов $\{P_n(x)\}$, ортонормированных с интегральным ве-

сом $d\sigma(x)$ на некотором интервале (a, b),— формула вида

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x)\, P_k(t) = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)\, P_n(t) - P_n(x)\, P_{n+1}(t)}{x-t},$$

где μ_n — старший коэффициент многочлена $P_n(x)$. К.— Д. ф. применяется при исследовании условий сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в отдельной точке. К.— Д. ф. в случае, когда $\sigma(x)$ ступенчатая функция, была опубликована П. Л. Чебышевым в 1855 (см. [1]). Затем Э. Кристоффель [2] установил ее для *Лежандра многочленов*, а Г. Дарбу [3] распространил эту формулу на общий случай произвольного веса.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М., 1947, с. 103—106; [2] Christoffel E. B., «J. reine und angew. Math.», 1858, Bd 55, S. 61—82; [3] Darboux M. G., «J. math. pures et appl.», 1878, sér. 3, t. 4, p. 5—56, 377—416.

См. также лит. при статье *Ортогональные многочлены*.

П. К. Суетин.

КРИСТОФФЕЛЯ — ШВАРЦА ФОРМУЛА — формула

$$f(z) = c \int_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n} (t-a_k)^{\alpha_k - 1}\, dt + c_1, \qquad (*)$$

дающая интегральное представление функции $f(z)$, конформно отображающей верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на внутренность ограниченного многоугольника с вершинами A_k и углами $\pi\alpha_k$ при вершинах ($0<\alpha_k\leqslant 2$, $k=1, \ldots, n$). При этом z_0, c, c_1 — некоторые постоянные, $A_k=f(a_k)$, $k=1, \ldots, n$. Постоянную z_0 можно фиксировать произвольно в верхней полуплоскости. Тройку точек из $a_1, \ldots, a_n$, напр. a_1, a_2, a_3, можно задавать произвольно; остальные $n-3$ точки a_k, а также постоянные c, c_1 определяются однозначно, если вершины $A_1, \ldots, A_n$ многоугольника заданы (см. [3]). Формула (*) была получена независимо Э. Кристоффелем (1867, см. [1]) и Г. Шварцем (1869, см. [2]). Интеграл в правой части (*) наз. интегралом Кристоффеля — Шварца.

Основная трудность при применении формулы (*) состоит в нахождении неизвестных параметров. При $n>4$ общие методы неизвестны.

Разработаны методы приближенного отыскания параметров К.— Ш. ф. (см. [4], [5]).

К.— Ш. ф. остается справедливой и для многоугольников, у к-рых одна или несколько вершин лежат в бесконечно удаленной точке. В этом случае угол между сторонами многоугольника в бесконечности определяется как угол, взятый со знаком минус, между этими же сторонами или их продолжениями в конечной точке. Если прообраз a_i одной из вершин многоугольника находится в бесконечно удаленной точке, то соответствующий множитель $(t-a_i)^{\alpha_i-1}$ в формуле (*) выпадает.

К.— Ш. ф. справедлива также для функции, отображающей единичный круг $|z|<1$ на рассмотренный выше многоугольник. В этом случае $|a_k|=1$, $k=1, \ldots, n$, $|z_0|\leqslant 1$. Видоизменения этой формулы охватывают случаи отображения верхней полуплоскости, а также внутренности и внешности единичного круга на внешность многоугольника (см. [3]).

К.— Ш. ф. обобщена на случай, когда функция $f(z)$ конформно отображает круговое кольцо $0<q<|z|<1$ или, в более общем случае, многосвязную область, состоящую из круга с выброшенными из него n кругами, на область соответствующей связности, ограниченную многоугольниками (см. [6], [7]).

Лит.: [1] Christoffel E. B., «Ann. math. pura ed appl.», Ser. 2, 1868, t. 1, p. 89—103; 1871, t. 4, p. 1—9; [2] Schwarz H. A., Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd 1—2, B., 1890; [3] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973; [4] Канторович Л. В., Крылов В. И., При-

ближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.— Л., 1962; [5] Коппенфельс В., Штальман Ф., Практика конформных отображений, пер. с нем., М., 1963; [6] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970; [7] Максимов Ю. Д., «Докл. АН СССР», 1960, т. 136, № 2, с. 284—87. *Ю. Д. Максимов.*

КРИТИЧЕСКАЯ ОБЛАСТЬ — часть выборочного пространства такая, что попадание в нее наблюденного значения случайной величины, с распределением к-рой связана проверяемая гипотеза, влечет отказ от этой гипотезы. Пусть нужно проверить гипотезу H_0 о распределении случайной величины X, принимающей значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$. При построении нерандомизированного критерия для проверки гипотезы H_0 пространство $\mathfrak{X}$ разбивают на два непересекающихся множества K и $\overline{K}$ таких, что $K \cup \overline{K} = \mathfrak{X}$, $K \in \mathfrak{B}$. При этом критерий проверки представляет собой правило, согласно к-рому гипотеза H_0 отклоняется, если в результате эксперимента окажется, что реализация x случайной величины X попадает в множество K, в противном случае (т. е. при $x \in \overline{K}$) гипотезу H_0 следует принять. Множество K наз. К. о. критерия, а его дополнение $\overline{K}$ — областью принятия гипотезы. В этом смысле задача выбора К. о. эквивалентна построению нерандомизированного статистич. критерия для проверки гипотезы H_0. Естественно, что К. о. выбирается до проведения эксперимента, связанного с проверкой гипотезы H_0, а сам выбор К. о. в рамках теории Неймана — Пирсона определяется вероятностями ошибок первого и второго рода, возникающими в задачах статистич. проверки гипотез.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Ван-дер-Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960. *М. С. Никулин.*

КРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКА — 1) К. т. порядка m — такая точка a комплексной плоскости, в к-рой аналитич. функция $f(z)$ регулярна, а ее производная $f'(z)$ имеет нуль порядка m, где m — натуральное число. Иными словами, К. т. определяется условиями:

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{(z-a)^m} = 0, \quad \lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{(z-a)^{m+1}} \neq 0.$$

Бесконечно удаленная К. т. $a=\infty$ порядка m для функции $f(z)$, регулярной в бесконечности, определяется условиями:

$$\lim_{z \to \infty} [f(z) - f(\infty)]\, z^m = 0, \qquad \lim_{z \to \infty} [f(z) - f(\infty)]\, z^{m+1} \neq 0.$$

При аналитическом отображении $w=f(z)$ угол между двумя кривыми, выходящими из К. т. порядка m, увеличивается в $m+1$ раз. Если функция $f(z)$ рассматривается как комплексный потенциал нек-рого плоского течения несжимаемой жидкости, то К. т. характерна тем, что через нее проходит не одна, а $m+1$ линий тока, причем скорость течения в К. т. обращается в нуль. Для обратной функции $z=\psi(w)$ такой, что $f[\psi(w)] \equiv w$, К. т. a является алгебраич. точкой ветвления порядка $m+1$.

2) Точка a комплексного $(n-m)$-мерного неприводимого аналитического множества

$$M = \{z \in V;\ f_1(z) = f_2(z) = \ldots = f_m(z) = 0\},$$

заданного в окрестности V точки a комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ условиями $f_1(z)=f_2(z)=\ldots=f_m(z)=0$, где $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — голоморфные на V функции n комплексных переменных, $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, наз. К. т., если ранг матрицы Якоби $\|\partial f_j/\partial z_k\|$, $j=1, \ldots, m$; $k=1, \ldots, n$, меньше числа m. Прочие точки M наз. правильными. К. т. на M сравнительно мало — они образуют аналитическое множество комплексной размерности не выше $n-m-1$. В частности, при $m=1$,

т. е. если $M=\{f_1(z)=0\}$ и размерность M равна $n-1$, размерность множества К. т. не выше $n-2$.

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

3) К. т. гладкого (т. е. непрерывно дифференцируемого) отображения f k-мерного дифференцируемого многообразия M в l-мерное дифференцируемое многообразие N — такая точка $x_0\in M$, что ранг $\mathrm{Rk}_{x_0}f$ отображения f в этой точке (т. е. размерность образа $df(T_{x_0}M)$ касательного пространства к M под действием дифференциала $df: T_{x_0}M\to T_{f(x_0)}N$) меньше l. Совокупность всех К. т. наз. критическим множеством, образ $f(x_0)$ К. т. x_0 — критическим значением, а точка $y\in N$, не являющаяся образом никакой К. т., — регулярной точкой, или регулярным значением (хотя она может вообще не принадлежать образу $f(M)$); некритические точки из M тоже наз. регулярными.

Согласно теореме Сарда, если f имеет класс гладкости C^m, $m>\min(k-l, 0)$, то образ критического множества имеет первую категорию в N (т. е. является объединением не более чем счетной системы нигде не плотных множеств) и имеет l-мерную меру нуль (см. [1], [2]). Условие на m не может быть ослаблено [3]. Чаще всего бывает нужен случай $m=\infty$ (при этом доказательство упрощается, см. [4]). Эта теорема широко используется для приведения в *общее положение* посредством «малых шевелений»; напр., с ее помощью легко доказать, что если в $\mathbb{R}^n$ имеются два гладких подмногообразия, то сколь угодно малым сдвигом одного из них можно достичь, чтобы их пересечение тоже было подмногообразием (см. [2], [4], а также *Трансверсальность* отображений).

Согласно приведенному определению, при $k<l$ каждую точку $x_0\in M$ надо считать критической. Но при этом существенно различаются свойства тех точек x_0, для к-рых $\mathrm{Rk}_{x_0}f=k$, и тех, для к-рых $\mathrm{Rk}_{x_0}f<k$. В первом случае в нек-рой окрестности точки x_0 отображение f выглядит приблизительно как стандартное вложение $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^l$; точнее, имеются такие локальные координаты $x_1, \ldots, x_k$ вблизи x_0 (на M) и $y_1, \ldots, y_l$ вблизи $f(x_0)$ (на N), что в этих координатах f представляется в виде

$$y_i=x_i, \quad i\leqslant k; \quad y_{k+1}=\ldots=y_l=0.$$

Во втором случае образ окрестности точки x_0 может не быть многообразием, а иметь различные особенности — заострения, самопересечения и т. д. Поэтому определение К. т. часто модифицируют, понимая под К. т. те точки x_0, для которых $\mathrm{Rk}_{x_0}f<\min(k, l)$; соответственно модифицируется и смысл других приведенных выше терминов [5].

Поведение отображений в окрестности К. т. изучается в теории особенностей дифференцируемых отображений (см. [5], [6]). При этом рассматриваются не произвольные К. т. (о к-рых мало что можно сказать), а К. т., удовлетворяющие условиям «не слишком сильной вырожденности» и «типичности». Так, рассматриваются К. т. достаточно гладких отображений или семейств отображений (достаточно гладко зависящих от конечного числа параметров), являющиеся «неустранимыми» в том смысле, что при малом (в смысле C^m с подходящим m) возмущении исходного отображения или семейства у возмущенного отображения (семейства) в нек-рой окрестности исходной К. т. имеется К. т. того же типа. Для отображения $M\to\mathbb{R}$ (т. е. обычной скалярной функции; в этом случае К. т. часто наз. стационарными точками) типичными в указанном смысле являются так наз. невырожденные К. т., в к-рых гессиан — невырожденная квадратичная

форма. О типичных К. т. для семейства функций см. [6], [7].

Лит.: [1] Sard A., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1942, v. 48, p. 883—90; [2] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [3] Whitney H., «Duke Math. J.», 1935, v. 1, № 4, p. 514—17; [4] Милнор Дж., Топология с дифференциальной точки зрения, в кн.: Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология. Начальный курс, пер. с англ., М., 1972; [5] Голубицкий М., Гийемин В., Устойчивые отображения и их особенности, пер. с англ., М., 1977; [6] Брёкер Т., Ландер Л., Дифференцируемые ростки и катастрофы, пер. с англ., М., 1977; [7] Арнольд В. И., «Функцион. анализ и его прилож.», 1972, т. 6, № 4, с. 3—25.
Д. В. Аносов.

КРИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — статистика, значения к-рой суть условные вероятности отклонения проверяемой гипотезы при заданном значении результата наблюдения. Пусть X — случайная величина, принимающая значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$, распределение вероятностей к-рой принадлежит семейству $\{P_\theta\}$, $\theta\in\Theta$, и пусть проверяется гипотеза H_0: $\theta\in\Theta_0\subset\Theta$ против альтернативы H_1: $\theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$. Далее, пусть на $\mathfrak{X}$ задана измеримая функция $\varphi(\cdot)$ такая, что $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$ при всех $x\in\mathfrak{X}$. Если для проверки гипотезы воспользоваться рандомизированным критерием, согласно к-рому гипотеза H_0 отвергается с вероятностью $\varphi(x)$, когда в результате эксперимента установлено, что $X=x$, и принимается с вероятностью $1-\varphi(x)$, то функция $\varphi(\cdot)$ наз. К. ф. этого критерия. При построении нерандомизированного критерия К. ф. выбирают так, чтобы она принимала только значения 0 и 1. В этом случае К. ф. является индикатором нек-рого множества $K\in\mathfrak{B}$, называемого критической областью критерия, т. е. $\varphi(x)=1$ при $x\in K$ и $\varphi(x)=0$ при $x\notin K$.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.
М. С. Никулин.

КРИТИЧЕСКИЙ ИДЕАЛ — простой идеал дедекиндова кольца A, делящий дискриминант конечного сепарабельного расширения K/k, где k — поле частных кольца A. К. и. и только такие идеалы разветвлены в расширении K/k. Простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца A наз. р а з в е т в л е н н ы м в K/k, если в целом замыкании B кольца A в поле K имеет место равенство

$$\mathfrak{p}B=\mathfrak{P}_1^{l_1}\dots\mathfrak{P}_s^{l_s},$$

где $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_s$ — некоторые простые идеалы кольца B и хотя бы одно из чисел l_i больше 1. Число l_i наз. и н д е к с о м в е т в л е н и я идеала $\mathfrak{P}_i$.

Если K/k — расширение Галуа с группой Галуа $G(K/k)$, то $l_1=l_2=\dots=l_s$ и индекс l_i совпадает с порядком п о д г р у п п ы и н е р ц и и $T(\mathfrak{P}_i)$ группы $G(K/k)$:

$$T(\mathfrak{P}_i)=\{\sigma\in G(K/k)\mid \sigma a-a\in\mathfrak{P}_i \text{ для всех } a\in B\}.$$

Другой, более тонкой характеристикой ветвления является п о д г р у п п а в ы с ш е г о в е т в л е н и я $T(\mathfrak{P}_i)_n\subset T(\mathfrak{P}_i)$, $n=1, 2, \dots$, определяемая следующим образом:

$$T(\mathfrak{P}_i)_n=\{\sigma\in G(K/k)\mid \sigma(a)-a\in\mathfrak{P}_i^{n+1} \text{ для всех } a\in B\}.$$

Пусть $A=\mathbb{Z}$; согласно т е о р е м е М и н к о в с к о г о в любом конечном расширении поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ существуют К. и. Для произвольных полей алгебраич. чисел это не так: если поле k не одноклассно, т. е. имеет нетривиальную группу классов идеалов, то над k существуют н е р а з в е т в л е н н ы е р а с ш и р е н и я, т. е. расширения, не имеющие критич. идеалов. Пример такого расширения — гильбертово поле классов поля k: так, поле $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{-5})$ совпадает с гильбертовым полем классов поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ и не разветвлено над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [3] Ленг С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966.
Л. В. Кузьмин.

КРИТИЧЕСКИЙ УРОВЕНЬ — дополнение *критической функции* до единицы. Пусть для проверки нек-рой гипотезы H_0 относительно распределения вероятностей случайной величины X применяется критерий, основанный на статистике $T(X)$, функция распределения к-рой при гипотезе H_0 есть $G(t)$. Если критич. область, соответствующая данному критерию, задается неравенством вида $T(X)>t$, то К. у. выражается формулой $1-G\{T(X)\}$.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971. *М. С. Никулин.*

КРИТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ — значение дифференцируемого отображения в *критической точке*.

КРОНЕКЕРА МЕТОД — метод разложения многочлена с рациональными коэффициентами на неприводимые множители над полем рациональных чисел; предложен в 1882 Л. Кронекером [1]. Пусть d — общий знаменатель всех коэффициентов многочлена $\varphi(x)$. Тогда $f(x)=d\varphi(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами; причем из любого разложения $\varphi(x)$ на неприводимые множители с рациональными коэффициентами можно получить разложение $f(x)$ на неприводимые множители с целыми коэффициентами, множители к-рого отличаются от соответствующих множителей $\varphi(x)$ лишь постоянными множителями, и обратно.

Пусть $f(x)$ имеет степень $n>0$ и k — наибольшее натуральное число, для к-рого $k\leqslant n/2$. Если $f(x)=g(x)\times\times h(x)$ — разложение $f(x)$ на множители с целыми коэффициентами, где степень $g(x)$ не больше степени $h(x)$, то степень $g(x)$ не превосходит k. Давая x любые $k+1$ различных целых значений $x=c_i$, $i=1, 2, \ldots, k+1$, получают равенства

$$f(c_i)=g(c_i)\,h(c_i), \quad i=1, 2, \ldots, k+1,$$

где $g(c_i)$ и $h(c_i)$ — целые числа. Таким образом, $g(c_i)$ делит $f(c_i)$. Беря произвольные делители d_i чисел $f(c_i)$, получают

$$g(c_i)=d_i, \quad i=1, 2, \ldots, k+1.$$

Из этих равенств многочлен $g(x)$ находится по интерполяционной формуле Лагранжа или проще — из уравнений для коэффициентов. Найденный многочлен $g(x)$ надо испытать, проверив, делит ли он $f(x)$. Это построение многочлена и проверка проводятся для всевозможных наборов делителей чисел $f(c_i)$.

Далее этот же процесс применяется к $g(x)$ и $h(x)$ и т. д., пока не приходят к неразложимым множителям.

К. м. приводит к громоздким вычислениям. Для упрощения можно сначала понизить степень $f(x)$, выделив его рациональные корни (см. [3] с. 355).

Пример. $f(x)=x^5-x^4-2x^3-8x^2+6x-1$ (это многочлен с целыми коэффициентами и без рациональных корней). Если $f(x)=g(x)h(x)$, где степень k многочлена $g(x)$ не больше степени $h(x)$, то $2\leqslant k<{}^5/_2$, т. е. $k=2$. Пусть $c_1=0$, $c_2=1$, $c_3=2$. Тогда $f(0)=-1$; $f(1)=-5$; $f(2)=-21$. Делители этих чисел: $d_1=\pm1$, $d_2=\pm1, \pm5$, $d_3=\pm1, \pm3, \pm7, \pm21$. Всего получается $2\cdot4\cdot8=64$ комбинации. Две комбинации d_i, отличающиеся лишь знаком, дают два многочлена $\pm g(x)$. Поэтому можно проверять лишь $g(0)=+1$. Остаются 32 случая. Перебирая все эти случаи, можно найти лишь один многочлен 2-й степени, делящий $f(x)$. Это $g(x)=x^2-3x+1$. Откуда $f(x)=(x^2-3x+1)(x^3+2x^2+3x-1)$. Оба сомножителя этого разложения неприводимы (как многочлены 2-й и 3-й степеней, не имеющие рациональных корней).

Лит.: [1] Kronecker L., «J. reine und angew. Math.», 1882, Bd 92, S. 1—122; [2] Окунев Л. Я., Высшая алгебра, М., 1937; [3] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975. *И. В. Проскуряков.*

КРОНЕКЕРА СИМВОЛ — величина δ^i_j, определяемая равенствами

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i=j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots$$

При $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$ К. с. δ^i_j имеет n^2 компонент, матрица к-рых $\|\delta^i_j\|$ является единичной. К. с. введен Л. Кронекером (L. Kronecker, 1866).

Обобщением К. с. является совокупность величин $\delta^{i_1,\ i_2\ \ldots\ i_p}_{j_1,\ j_2\ \ldots\ j_p}$, имеющих $2p$ целых (верхних и нижних) индексов, $i_\alpha,\ i_\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, равных $+1$ (или -1), если строка индексов $(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_p)$ — четная (нечетная) перестановка строки различных индексов $(j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_p)$, и нулю — во всех остальных случаях. Числа $\delta^{i_1,\ \ldots\ i_p}_{j_1\ \ldots\ j_p}$ (часто обозначаемые при $p \geqslant 2$ через $\varepsilon^{i_1\ \ldots\ i_p}_{j_1\ \ldots\ j_p}$) наз. компонентами К. с. Аффинный тензор типа $(p,\ p)$, имеющий в нек-ром базисе компоненты, равные компонентам К. с., имеет те же самые компоненты в любом другом базисе.

К. с. удобен в различных задачах тензорного исчисления. Напр., определитель

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \ldots & a^n_n \end{vmatrix}$$

равен сумме

$$\sum\nolimits_i \delta^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{1\ 2\ \ldots\ n} a^1_{i_1} a^2_{i_2} \ldots a^n_{i_n},$$

в к-рой суммирование производится по всем $n!$ перестановкам чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Операция альтернирования тензора $\{a^{\alpha_1\ \ldots\ \alpha_p},\ 1 \leqslant \alpha_j \leqslant n\}$ имеет вид

$$a^{[\alpha_1\ \ldots\ \alpha_p]} = \frac{1}{p!} \sum\nolimits_i \delta^{\alpha_1\ \ldots\ \alpha_p}_{i_1\ \ldots\ i_p} a^{i_1\ \ldots\ i_p}.$$

Лит.: [1] Kronecker L., Vorlesungen über die Theorie der Determinanten, Lpz., 1903.

Л. П. Купцов.

КРОНЕКЕРА ТЕОРЕМА: пусть даны $a_i = (a_{i1},\ \ldots,\ a_{in}) \in \mathbb{R}^n,\ i=1,\ \ldots,\ m$, и $b=(b_1,\ \ldots,\ b_n) \in \mathbb{R}^n$; для того чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовали целые числа $q_i,\ i=1,\ \ldots,\ m$, и $p_j,\ j=1,\ \ldots,\ n$, такие, что

$$\left| \sum\nolimits_{i=1}^m q_i a_{ij} - p_j - b_j \right| < \varepsilon, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любых таких $r_1,\ \ldots,\ r_n \in \mathbb{Z}$, что

$$\sum\nolimits_{j=1}^n a_{ij} r_j \in \mathbb{Z}, \quad i=1,\ \ldots,\ m,$$

число

$$\sum\nolimits_{j=1}^n b_j r_j$$

также было целым. Эта теорема была доказана в 1884 Л. Кронекером (см. [1]).

К. т. является частным случаем следующей теоремы, описывающей замыкание подгруппы тора $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, порожденной элементами $a_i + \mathbb{Z}^n,\ i=1,\ \ldots,\ m$: это замыкание состоит в точности из таких классов $b + \mathbb{Z}^n$, что для любых чисел $r_1,\ \ldots,\ r_n \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\sum\nolimits_{j=1}^n a_{ij} r_j \in \mathbb{Z}, \quad i=1,\ \ldots,\ n,$$

выполнено

$$\sum\nolimits_{j=1}^n b_j r_j \in \mathbb{Z}$$ [2].

В условиях К. т. указанное замыкание совпадает со

всем T^n. Это означает, что подгруппа элементов вида

$$\sum_{i=1}^{m} q_i (a_i + \mathbb{Z})^n,$$

где $q_i \in \mathbb{Z}$, плотна в T^n, а подгруппа векторов вида

$$\sum_{i=1}^{m} q_i a_i + p,$$

где $p \in \mathbb{Z}^n$, плотна в $\mathbb{R}^n$. К. т. можно вывести из теории двойственности для коммутативных топологических групп [3].

В случае $m=1$ К. т. превращается в следующее утверждение: для того чтобы класс $\omega + \mathbb{Z}^n$, где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$, порождал T^n как топологич. группу, необходимо и достаточно, чтобы числа $1, \omega_1, \ldots, \omega_n$ были линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. В частности, тор T^n как топологич. группа монотетичен, т. е. порождается одним элементом.

Лит.: [1] Kronecker L., Werke, Bd 3, Halbbd 1, Lpz., 1899; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства, пер. с франц., М., 1969; [3] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973.

А. Л. Онищик.

КРОНЕКЕРА ФОРМУЛА — формула, выражающая алгебраич. сумму значений нек-рой функции на множестве корней системы уравнений; установлена Л. Кронекером [1], [2]. Пусть $F^t(x^1, \ldots, x^n)$, $t=0, 1, \ldots, n$, $f(x^1, \ldots, x^n)$ — действительнозначные непрерывно дифференцируемые в $\mathbb{R}^n$ такие, что система уравнений

$$F^s(x^1, \ldots, x^n) = 0, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

имеет конечное число корней. Пусть уравнение

$$F^0(x^1, \ldots, x^n) = 0$$

определяет замкнутую поверхность P, не проходящую через корни системы (1), и $F^0 < 0$ внутри P. Если функции F^s, $s=1, \ldots, n$, рассматриваются как компоненты векторного поля в пространстве $\mathbb{R}^n$, то его особые точки (по определению) соответствуют корням системы (1). Пусть x_α — некоторый корень, а $\chi(x_\alpha)$ — индекс этой особой точки. Тогда

$$\frac{1}{K^n} \sum_\alpha f(x_\alpha)\, \chi(x_\alpha) = \int_{F^0 < 0} \frac{\Lambda}{R^n}\, dV - \int_{F^0 = 0} \frac{fD}{QR^n}\, dS \tag{2}$$

(суммирование по всем корням), где K^n — объем единичной сферы S^{n-1},

$$R = \sqrt{\sum_{s=1}^{n} (F^s)^2}, \quad Q = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (F_i^0)^2},$$

$$\Lambda = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & \ldots & f_n \\ F^1 & F_1^1 & \ldots & F_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F^n & F_1^n & \ldots & F_n^n \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} F^0 & F_1^0 & \ldots & F_n^0 \\ F^1 & F_1^1 & \ldots & F_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F^n & F_1^n & \ldots & F_n^n \end{vmatrix},$$

и для функции Φ через Φ_i обозначены ее производные $\partial\Phi/\partial x^i$. Формула (2) и есть формула Кронекера.

При $f \equiv 1$ пространственный интеграл в (2) исчезает, и получается выражение для суммы индексов χ_F особых точек векторного поля $\{F^s\}$, расположенных внутри поверхности P, т. е. для степени отображения поверхности P в сферу S^{n-1}, определяемого как ограничение на множество P отображения $\mathring{F}^s = F^s/R$, $s=1, \ldots, n$. При нек-рых дополнительных условиях величина χ_F равна так наз. характеристике Кронекера системы функций $F^0, F^1, \ldots, F^n$ (см. [3]).

Лит.: [1] Kronecker L., «Monatsbericht», 1869, S. 159—193, 688—98; [2] его же, там же, 1878, S. 95—121; [3] Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитиче-

ской механике, М., 1962, с. 273—313; [4] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М.—Л., 1947. *М. И. Войцеховский.*

КРОНЕКЕРА — КАПЕЛЛИ ТЕОРЕМА, критерий совместности системы линейных уравнений: для совместности системы уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n&=b_s \end{aligned}$$

необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $A=\|a_{ij}\|$ из коэффициентов при неизвестных был равен рангу расширенной матрицы $\overline{A}$, получающейся из матрицы A добавлением столбца, свободных членов b_i.

У Л. Кронекера эта теорема содержится в его лекциях, читавшихся в Берлинском университете в 1883—1891 (см. [1]). А. Капелли, по-видимому, впервые дал приведенную выше формулировку теоремы с использованием термина «ранг матрицы» (см. [2]).

Лит.: [1] Kronecker L., Vorlesungen über die Theorie der Determinanten, Lpz., 1903; [2] Capelli A., «Revista di Matematica», 1892, v. 2, p. 54—58; [3] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975. *И. В. Проскуряков.*

КРОНЕКЕРОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ колец, алгебр — то же, что их *тензорное произведение*.

КРУГ — часть плоскости, ограниченная окружностью и содержащая ее центр. Площадь К.: $S=\pi r^2$, где r — радиус окружности.

КРУГ КРИВИЗНЫ, окружность кривизны,— окружность, имеющая с кривой в данной точке *соприкосновение* не ниже 2-го порядка. Центр К. к. наз. центром кривизны кривой в точке соприкосновения, а радиус К. к.— радиусом кривизны. К. к. располагается в соприкасающейся плоскости кривой. *БСЭ-3.*

КРУГ СХОДИМОСТИ степенного ряда

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k \qquad (1)$$

— круг вида $\Delta=\{z\colon |z-a|<R\}$, $z\in\mathbb{C}$, в к-ром ряд (1) абсолютно сходится, а вне его, при $|z-a|>R$, расходится. Иными словами, К. с. Δ есть внутренность множества точек сходимости ряда (1). Радиус R К. с. наз. радиусом сходимости ряда (1). К. с. может вырождаться в точку a, когда $R=0$, и может совпадать со всей открытой плоскостью переменного z, когда $R=\infty$. Радиус сходимости R равен расстоянию от центра ряда a до множества особых точек функции $f(z)$ (об определении R по коэффициентам ряда c_k см. *Коши — Адамара теорема*). Любой круг $\Delta=\{z\colon |z|<R\}$, $0\leqslant R\leqslant\infty$, на плоскости z является К. с. нек-рого степенного ряда.

В случае степенного ряда

$$f(z)=f(z_1,\ \ldots,\ z_n)=$$
$$=\sum_{k_1,\ \ldots,\ k_n=0}^{\infty}c_{k_1\ldots k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\ldots(z_n-a_n)^{k_n} \qquad (2)$$

по нескольким комплексным переменным $z_1,\ \ldots,\ z_n$, $n>1$, поликругом сходимости ряда (2) наз. всякий поликруг

$$\Delta_n=\{z=(z_1,\ \ldots,\ z_n)\colon\ |z_\nu-a_\nu|<R_\nu,\quad \nu=1,\ \ldots,\ n\}$$

такой, что во всех его точках ряд (2) абсолютно сходится, а в любом поликруге вида

$$\{z=(z_1,\ \ldots,\ z_n)\colon\ |z_\nu-a_\nu|<R'_\nu,\quad \nu=1,\ \ldots,\ n\},$$

где $R'_\nu\geqslant R_\nu$ и по крайней мере одно из последних неравенств строгое, найдется хотя бы одна точка, в к-рой ряд (2) расходится. Радиусы R_ν, $\nu=1,\ \ldots,\ n$, $0\leqslant R_\nu\leqslant\infty$, поликруга сходимости наз. сопряженными

радиусами сходимости ряда (2). Они связаны определенным соотношением с коэффициентами ряда (2), так что любой поликруг с центром a, радиусы к-рого удовлетворяют этому соотношению, является поликругом сходимости ряда (2) (см. *Коши — Адамара теорема*). Любой поликруг вида Δ_n, $0 \leqslant R_\nu \leqslant \infty$, $\nu = 1, \ldots, n$, в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ есть поликруг сходимости нек-рого степенного ряда по n комплексным переменным. Вся внутренность множества точек абсолютной сходимости ряда (2) при $n > 1$ имеет более сложный вид — это логарифмически выпуклая полная *кратно круговая область* пространства $\mathbb{C}^n$ с центром a.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1, М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

КРУГА ПРОБЛЕМА — проблема наилучшей асимптотич. оценки числа $A(x)$ целых точек (u, v) в круге $u^2 + v^2 \leqslant x$. Пусть θ — нижняя грань числа α в равенстве

$$A(x) = \pi x + O(x^\alpha). \qquad (*)$$

К. Гаусс (см. [1]) доказал, что $\theta \leqslant 1/2$. В. Серпиньский [2] по методу Г. Ф. Вороного [3] установил, что $\theta \leqslant 1/3$. Последней (1982) является оценка $\theta \leqslant 13/40$ (см. [4]). Существует гипотеза, что остаточный член в формуле (*) есть

$$O(x^{1/4} \log^2 x).$$

Среднее значение для К. п.:

$$\int_0^N (A(x) - \pi x)^2 \, dx = CN^{3/2} + O(N^{1+\varepsilon}),$$

где C — некоторая абсолютная постоянная, $\varepsilon > 0$ — любое.

К. п. по содержанию и методам исследования во многом аналогична проблеме делителей Дирихле (см. *Делителей проблемы*). Обобщением К. п. является проблема шара — проблема оценки $B(x)$ — числа целых точек (u, v, w) в шаре $u^2 + v^2 + w^2 \leqslant x$. Исходной для оценки является формула

$$B(x) = 24G(x) + O(\sqrt{x}),$$

где

$$G(x) = \sum_{0 < u \leqslant \sqrt{x/3}} \times$$

$$\times \sum_{u < v \leqslant \sqrt{(x-u^2)/2}} \left(\left[\sqrt{x - u^2 - v^2} \right] - v \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{0 < v \leqslant \sqrt{x/2}} \left(\left[\sqrt{x - v^2} \right] - v \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{0 < u \leqslant \sqrt{x/3}} \left(\left[\sqrt{x - 2u^2} \right] - u \right) + O(\sqrt{x}),$$

к-рая получается за счет разбиения шара шестью плоскостями

$$u = v, \; u = w, \; v = w, \; v = 0, \; u = 0, \; w = 0$$

на 24 части, имеющие одинаковое число целых точек, если считать точки на плоскостях сечений с коэффициентами $1/2$. Главный член роста $B(x)$ равен объему шара

$$V(x) = \frac{2\pi}{3} x^{3/2};$$

проблема сводится к оценке $P(x) = B(x) - V(x)$ — величины суммы дробных долей функций, стоящих под знаком [ ] в выражении для $G(x)$. Наиболее глубокие оценки для $P(x)$ получены на основе метода тригонометрич. сумм И. М. Виноградовым [5], [6]:

$$P(x) = O(x^{2/3} \log^6 x).$$

Существует гипотеза, что

$$P(x) = O(x^{1/2} \log^2 x).$$

Обобщением К. п. и проблемы шара является проблема оценки $A_F(x)$ — числа целых точек в n-мерных эллипсоидах

$$F(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{r,\,v=1}^{n} a_{rv} u_r u_v \leqslant x, \quad a_{rv} = a_{vr},$$

где F — положительно определенная квадратичная форма (см. [7]).

Лит.: [1] Gauss C. F., Werke, Bd 2, Göttingen, 1863, S. 269—91; [2] Sierpiński W., «Prace Mat.— Fiz.», 1906, t. 17, p. 77—118; [3] Вороной Г. Ф., Собр. соч., т. 1, К., 1952, с. 5; [4] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [5] Виноградов И. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1963, т. 27, № 5, с. 957—68; [6] его же, Особые варианты метода тригонометрических сумм, М., 1976; [7] Novák B., Lattice points in moredimensional ellipsoids, «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 132, с. 145—50.

А. Ф. Лаврик.

КРУГОВАЯ СИММЕТРИЗАЦИЯ — геометрическое преобразование открытого (замкнутого) плоского множества G относительно луча λ с началом в точке P во множество G^*, определяемое следующими условиями: 1) пересечение G^* с нек-рой окружностью с центром в P пусто или состоит из всей этой окружности, в зависимости от того, является ли пересечение G с выбранной окружностью соответственно пустым или совпадающим со всей окружностью; 2) если пересечение G и окружности с центром в точке P имеет угловую меру Лебега Φ, то пересечение этой окружности с G^* состоит из открытой (замкнутой) дуги, пересекающей λ, симметричной относительно λ и видимой из P под углом, равным Φ.

Определение К. с. естественным образом переносится на пространственный случай (симметризация относительно полуплоскости). См. также *Симметризация.*

Лит.: [1] Полиа Г., Сеге Г., Изопериметрические неравенства в математической физике, пер. с англ., М., 1962; [2] Хейман В. К., Многолистные функции, пер. с англ., М., 1960; [3] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962.

И. П. Митюк.

КРУГОВОЕ ПОЛЕ, поле деления круга,— поле $K_n = \mathbb{Q}(\zeta_n)$, получающееся присоединением к полю $\mathbb{Q}$ рациональных чисел первообразного корня ζ_n из единицы степени n, где n — некоторое натуральное число. Иногда (локальным) круговым полем наз. также поле вида $\mathbb{Q}_p(\zeta_n)$, где $\mathbb{Q}_p$ — поле рациональных p-адических чисел. Так как $K_n = K_{2n}$ при нечетном n, обычно предполагается, что $n \not\equiv 2 \pmod 4$. Тогда различным n соответствуют неизоморфные поля K_n.

К. п. естественно возникают в задаче о делении круга — деление окружности на n равных частей эквивалентно построению на комплексной плоскости первообразного корня ζ_n. К. п. устроены «достаточно просто», и поэтому дают удобный экспериментальный материал для создания общих понятий теории чисел. Напр., понятие целого алгебраич. числа и дивизора возникли первоначально при рассмотрении К. п.

Место К. п. среди всех полей алгебраич. чисел выясняет теорема Кронекера — Вебера, утверждающая, что конечное расширение $K/\mathbb{Q}$ абелево тогда и только тогда, когда $K \subset K_n$ для нек-рого n. Аналогичное утверждение выполняется и для локальных К. п.

Алгебраическая теория. Поле K_n является абелевым расширением поля $\mathbb{Q}$ с группой Галуа

$$G(K_n/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*,$$

где $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ — мультипликативная группа кольца вычетов по модулю n. В частности, степень $[K_n : \mathbb{Q}]$ равна $\varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера. Поле K_n чисто мнимое и имеет степень 2 над своим максимальным вполне вещественным подполем $K_n^+ = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$.

Если $n = p_1^{t_1}, \ldots, p_s^{t_s}$ — разложение n на простые множители, то K_n является свободным композитом

полей $K_{p_1}^{t_1}, \ldots, K_{p_s}^{t_s}$. В поле $K_p t$ простой дивизор p имеет индекс ветвления $e=(p-1)p^{t-1}=\varphi(p^t)$. В $K_p t$ имеет место равенство главных дивизоров $(p)=(1-\zeta_{pt})^e$. Все остальные простые дивизоры поля $\mathbb{Q}$ не разветвлены в $K_p t$, откуда следует, что p разветвлен в поле K_n тогда и только тогда, когда $p|n$.

Числа $1, \zeta_n, \ldots, \zeta_n^{\varphi(n)-1}$ образуют фундаментальный базис поля K_n. Дискриминант поля $K_p t$ равен $\pm p^{pt-1(pt-t-1)}$. Для линейно разделенных над $\mathbb{Q}$ полей E и F со взаимно простыми дискриминантами D_{E_m} и D_F выполняется соотношение $D_{EF}=D_E^n D_F^m$, где $n=[F:\mathbb{Q}]$, $m=[E:\mathbb{Q}]$. Это позволяет вычислить D_{K_n} для произвольного n (см. [3]).

Для поля $K_p t$ числа вида

$$(1-\zeta_{pt}^a)/(1-\zeta_{pt})^b,$$

где $a,\ b\neq 0 \pmod p$, порождают подгруппу конечного индекса в группе всех единиц. Элементы этой подгруппы наз. круговыми единицами.

Закон разложения для К. п., т. е. закон, по к-рому простые дивизоры (p) поля $\mathbb{Q}$ разлагаются в произведение простых дивизоров в K_n,— частный случай общего закона разложения в абелевых расширениях, доставляемого теорией полей классов (см. [4]). А именно, если $(p,\ n)=1$ и f — наименьшее натуральное число, для к-рого $p^f\equiv 1 \pmod n$, то в K_n

$$(p)=\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_g,$$

где простые дивизоры $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_g$ попарно различны, $N(\mathfrak{p}_i)=p^f$ и $fg=\varphi(n)$. Таким образом, тип разложения (p) зависит только от вычета $p \pmod n$. В случае, когда $p|n$, точный вид разложения (p) можно получить, учитывая, что $K_n=K_m K_p t$, где $(m,\ p)=1$ и (p) вполне разветвлен в $K_p t$.

Если K — максимальное абелево расширение $\mathbb{Q}$, то $K=\bigcup_n K_n$ и

$$G(K/\mathbb{Q}) \simeq \varprojlim G(K_n/\mathbb{Q}) \simeq \lim (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \simeq \hat{\mathbb{Z}}^*,$$

где $\hat{\mathbb{Z}}$ — пополнение кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ по всем идеалам конечного индекса. В частности, для любого простого l существует единственное расширение $\mathbb{Q}_{\infty,l}/\mathbb{Q}$ с группой Галуа, изоморфной группе целых l-адических чисел $\mathbb{Z}_l$.

Согласно теории полей классов существует отображение взаимности

$$\psi: J_{\mathbb{Q}} \longrightarrow G(K/\mathbb{Q}),$$

где $J_{\mathbb{Q}}$ — группа иделей поля $\mathbb{Q}$. В случае К. п. отображение ψ допускает простое и явное описание (см. [4]).

Аналитическая теория. Многие результаты о строении группы классов дивизоров поля K_n удается получить с помощью аналитич. методов. Если h_n — число классов поля K_n, то

$$h_n=2^{-t_\Pi-t} R w \sqrt{|D|}\, F(1) \Pi_{\chi\neq\chi_0} L(1,\ \chi),$$

где w, D и R — число корней из единицы, дискриминант и регулятор поля K_n, $t=\varphi(n)/2$ и $F(1)$ — некоторая явно вычислимая константа, $L(1,\ \chi)$ — L-функция Дирихле, соответствующая характеру χ, где χ пробегает все нетривиальные мультипликативные характеры $\bmod n$. В свою очередь, для $L(1,\ \chi)$ существуют явные выражения в терминах гауссовых сумм (см. [7] гл. 5). Этим решается вопрос о вычислении h_n при заданном n.

Существует естественное разложение h_n на два множителя $h_n=h_n^- h_n^+$ — первый и второй множители числа

классов, причем h_n^+ интерпретируется как число классов поля K_n^+. В случае, когда $n=p^t$, $h_n^+=(E:E_0)$, где E — группа единиц поля $K_{p^t}^\circ$ и E_0 — группа круговых единиц (любая круговая единица становится действительной после умножения на подходящий корень из единицы).

Для задач, связанных с проблемой Ферма, важную роль играет вопрос о делимости числа классов поля K_l на l для простых l. Известно, что $h_l \equiv 0 \pmod{l}$ для бесконечного числа простых l (такие l наз. и р р е г у л я р н ы м и). Относительно регулярных простых чисел l, т. е. чисел, для к-рых $h_l \not\equiv 0 \pmod{l}$, до сих пор не известно (1982), конечно или бесконечно их число. Существует гипотеза, что $h_l^+ \not\equiv 0 \pmod{l}$ для всех l. Эта гипотеза проверена для большого числа примеров. Легче поддается исследованию множитель h_l^-. Существует относительно простой критерий делимости h_l^- (и h_l) на l в терминах чисел Бернулли [7]. Известно, что $h_l^- \to \infty$ при $l \to \infty$ и что $h_l = 1$ тогда и только тогда, когда $l \leqslant 19$ (см. [6]).

Для исследования группы классов К. п. успешно применяются так наз. p-адические L-функции (см. [5], [8]).

Лит.: [1] K u m m e r E., «J. reine und angew. Math.», 1847, Bd 35, S. 327—67; [2] В е й л ь Г., Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1947; [3] Л е н г С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966; [4] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [5] Ш а ф а р е в и ч И. Р., Дзета-функция, М., 1969; [6] U c h i d a K., «Tôhoku Math. J.», 1971, v. 23, p. 573—80; [7] Б о р е в и ч З. И., Ш а ф а р е в и ч И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [8] I w a s a w a K., Lectures on p-adic L-functions, N. Y. — Tokyo, 1972; [9] L a n g S., Cyclotomic fields, Pricеton — Hdlb.— B., 1978. *Л. В. Кузьмин.*

КРУГОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, п р е о б р а з о в а н и е М ё б и у с а,— преобразование, переводящее окружности в окружности. Рассматриваемое как точечное преобразование, К. п. является преобразованием расширенной (дополненной бесконечно удаленной точкой) евклидовой плоскости, при к-ром окружность или прямая переходят в окружность или прямую. В этом случае говорят о т о ч е ч н о й а н а л л а г м а т и ч е с к о й г е о м е т р и и.

Как неточечное преобразование К. п.— частный случай преобразований прикосновения (или касательных К. п., или К. п. Ли); основным элементом является не точка, а окружность. В этом случае говорят о круговой аналлагматической геометрии.

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, М., 1963. *А. Б. Иванов.*

КРУГОВОЕ РАСШИРЕНИЕ п о л я k — расширение K, получаемое присоединением к k *первообразного корня* из единицы нек-рой степени n. Иногда термин «К. р.» относят и к любому промежуточному подполю расширения K над k. К. р. наз. также бесконечное алгебраич. расширение, являющееся объединением конечных К. р. Важный пример К. р.— *круговые поля*, отвечающие случаю, когда $k=\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел.

Пусть поле k имеет характеристику 0 и $k(\zeta_n)$ — его К. р., полученное присоединением первообразного корня ζ_n. Тогда поле $k(\zeta_n)$ является композитом k и кругового поля $\mathbb{Q}(\zeta_n)$. Поэтому многие свойства круговых полей переносятся и на К. р. Напр., $k(\zeta_n)$ будет нормальным абелевым расширением поля k (причем это справедливо и для полей положительной характеристики), группа Галуа расширения $k(\zeta_n)/k$ является подгруппой группы Галуа расширения $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$, в частности, ее порядок делит $\varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера.

Если k — поле алгебраич. чисел, то в расширении $k(\zeta_n)/k$ могут ветвиться только простые девизоры, делящие n, хотя при $k\neq\mathbb{Q}$ дивизор поля k, делящий n,

может остаться неразветвленным в $k(\zeta_n)$. К. р. поля алгебраич. чисел с группой Галуа Γ, изоморфной аддитивной группе целых l-адических чисел Z_l, наз. круговыми Γ-расширениями (см. [2], [3], [4]). Такое Γ-расширение в случае, когда $\zeta_l \in k$, имеет вид $k_\infty = \bigcup_n k_n$, где $k_n = k(\zeta_{l^n})$.

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Шафаревич И. Р., Дзета-функция, М., 1969; [3] Кузьмин Л. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1972, т. 36, № 2, с. 267—327; [4] Iwasawa K., «Ann. Math.», 1973, v. 98, № 2, p. 246—326. *Л. В. Кузьмин.*

КРУГОВОЙ МЕТОД — один из наиболее общих методов аддитивной теории чисел. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_k$ — произвольные множества натуральных чисел, N — натуральное число и $J_k(N)$ — число решений уравнения

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N,$$

где $n_1 \in X_1$, $n_2 \in X_2, \ldots, n_k \in X_k$. Изучением величин $J_k(N)$ занимается аддитивная теория чисел; напр., если доказать, что $J_k(N)$ больше нуля при всех N, то это будет означать, что любое натуральное число является суммой k слагаемых чисел множеств $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Пусть, далее, s — комплексное число, $|s| < 1$, и

$$g_1(s) = \sum\nolimits_{n_1 \in X_1} s^{n_1}, \quad g_2(s) = \sum\nolimits_{n_2 \in X_2} s^{n_2}, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad g_k(s) = \sum\nolimits_{n_k \in X_k} s^{n_k}.$$

Тогда функция $g(s)$

$$g(s) = g_1(s)\, g_2(s) \ldots g_k(s) = \sum\nolimits_{N=1}^{\infty} J_k(N)\, s^N$$

является производящей функцией величин $J_k(N)$. По формуле Коши

$$J_k(N) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R<1} g(s)\, s^{-(N+1)}\, ds.$$

Последний интеграл изучается при $R \to 1-0$. Окружность интегрирования $|s| = R$ разбивается на «большие» и «малые» дуги, центрами к-рых являются рациональные числа. Для целого ряда аддитивных задач удается достаточно полно исследовать интегралы по «большим» дугам, к-рые дают «главную» часть величины $J_k(N)$, и оценить интегралы по «малым» дугам, к-рые дают «остаточный» член асимптотич. формулы для $J_k(N)$.

Введение И. М. Виноградовым в К. м. тригонометрич. сумм не только сильно упростило его применения, но и дало возможность единым способом решать широкий круг самых разных аддитивных задач. Основой К. м. в форме тригонометрич. сумм является следующая формула:

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha m}\, d\alpha = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0, \end{cases} \quad m \text{ — целое.}$$

Из этой формулы следует, что

$$J_k(N) = \int_0^1 s_1(\alpha)\, s_2(\alpha) \ldots s_k(\alpha)\, e^{-2\pi i \alpha N}\, d\alpha,$$

где

$$s_m(\alpha) = \sum\nolimits_{n \in X_m,\ n \leqslant N} e^{2\pi i \alpha n}, \quad m = 1, 2, \ldots, k.$$

Конечные суммы $s_m(\alpha)$ наз. тригонометрическими. Для исследования $J_k(N)$ отрезок интегрирования $[0, 1]$ разбивается на «большие» и «малые» дуги — отрезки с центрами в рациональных точках с «малыми» и «большими» знаменателями. Для многих аддитивных задач удается с хорошей точностью вычислить интегралы по «большим» дугам (тригонометрич. суммы для α из «больших» дуг близки к рациональным тригонометрич. суммам с малым знаменателем, хорошо вычисляются и являются «большими»); на «малых» же дугах, к-рые содержат основную долю точек отрезка $[0, 1]$, тригоно-

метрич. суммы «малы»; их удается нетривиально оценить (см. *Тригонометрических сумм метод*, *Виноградова метод*), что позволяет получить асимптотич. формулу для $J_k(N)$.

С помощью К. м. в форме тригонометрич. сумм и метода И. М. Виноградова оценок тригонометрич. сумм получены наиболее сильные результаты в аддитивной теории чисел (см. *Варинга проблема*, *Гольдбаха проблема*, *Гольдбаха—Варинга проблема*, *Гильберта — Камке проблема*).

Лит.: [1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [2] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [3] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, М., 1975. *А. А. Карацуба.*

КРУГОВЫЕ ТОЧКИ, циклические точки, на плоскости, дополненной мнимыми и бесконечно удаленными точками,— две мнимые бесконечно удаленные точки, однородные координаты $(1, i, 0)$ и $(1, -i, 0)$ к-рых удовлетворяют уравнению любой окружности. Прямые, проходящие через К. т., наз. изотропными прямыми. *БСЭ-2.*

КРУЛЛЯ КОЛЬЦО — коммутативное целостное кольцо A, для к-рого существует семейство $(v_i)_{i\in I}$ дискретных нормирований поля частных K кольца A, удовлетворяющее следующим условиям: а) для любого $x\in K\setminus\{0\}$ и для всех i, исключая, быть может, конечное число, $v_i(x)=0$; б) для $x\in K\setminus\{0\}$ условие $x\in A$ эквивалентно тому, что $v_i(x)\geqslant 0$ для всех $i\in I$. Нормирования v_i наз. при этом существенными.

К. к. были рассмотрены В. Круллем [1] под названием колец конечного дискретного главного порядка. Они являются наиболее естественным классом колец, в к-рых существует теория дивизоров (см. также *Дивизориальный идеал*, *Классов дивизоров группа*). Упорядоченная группа дивизоров К. к. A канонически изоморфна упорядоченной группе $\mathbb{Z}^{(I)}$. Существенные нормирования К. к. могут быть отождествлены с множеством простых идеалов высоты 1. К. к. вполне целозамкнуто. Любое целозамкнутое нётерово кольцо, в частности *дедекиндово кольцо*, является К. к. Кольцо $k[X_1, \ldots, X_n, \ldots]$ многочленов от бесконечного числа переменных — пример К. к., не являющегося нётеровым. Вообще, любое факториальное кольцо — К. к. Для того чтобы К. к. было факториально, необходимо и достаточно, чтобы любой его простой идеал высоты 1 был главным.

Класс К. к. замкнут относительно операций локализации, перехода к кольцу многочленов или формальных степенных рядов, а также целого замыкания в конечном расширении поля частных К.

Лит.: [1] Krull W., «J. reine und angew. Math.», 1931, Bd 167, S. 160—96; [2] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [3] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *В. И. Данилов.*

КРУЛЛЯ — РЕМАКА — ШМИДТА ТЕОРЕМА — группа утверждений, касающихся связи между прямыми разложениями группы или кольца. Теоретико-структурная форма этого результата известна как теорема Оре (см. *Дедекиндова решетка*). Для группы G с произвольной системой операторов имеет место теорема Шмидта (Р. Ремак получил этот результат для конечных групп [2], а В. Крулль — для колец [1]): если такая группа обладает *главным рядом*, то любые два ее разложения в прямое произведение с неразложимыми сомножителями центрально изоморфны, т. е. между множествами сомножителей каждого из этих разложений может быть установлено взаимно однозначное соответствие и, если A и A' — соответствующие друг другу сомножители, то существует такой изоморфизм φ: $A\to A'$, что $a^{-1}\varphi(a)$ для всякого $a\in A$ лежит в центре группы G ([3], см. также [4]). А. Г. Курош установил,

что можно ограничиться требованием существования главного ряда лишь у факторгрупп группы G, вложимых в ее центр. Теорема Шмидта, как теорема для групп с операторами, в частности, справедлива для модуля над любым кольцом. Однако модуль M неразложим, если его кольцо эндоморфизмов локально (см. *Локальное кольцо*), а при нек-рых ограничениях (напр., если M — модуль конечной длины) справедливо и обратное. В связи с этим К.— Р.— Ш. т. для модулей может быть сформулирована так: два разложения

$$M=\sum M_i=\sum M'_j,$$

где кольца эндоморфизмов модулей M_i и M'_j локальны, изоморфны. При этом каждое слагаемое одного из разложений может быть заменено нек-рым слагаемым другого. В нек-рых случаях такую замену можно осуществить и для бесконечного множества слагаемых. К исследованию вопросов, связанных с К.— Р.— Ш. т., разработан теоретико-категорный подход, использующий рассмотрение категории подмодулей прямых сумм данных модулей.

Лит.: [1] Krull W., «Math. Ann.», 1924, Bd 91, S. 1—46; [2] Remak R., «J. reine und angew. Math.», 1911, Bd 139, S. 293—308; [3] Шмидт О. Ю., «Math. Z.», 1928, Bd 29, S. 34—41; [4] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [5] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971; [6] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [7] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 14, М., 1976, с. 57—190.

Л. А. Скорняков.

КРУПНЫХ ЧАСТИЦ МЕТОД — метод для расчета сжимаемых течений сплошной среды [1]. К. ч. м. основывается на расщеплении исходной системы дифференциальных уравнений по физическим процессам (см. [3]). Им решается эволюционная система уравнений. Допускается стационарное решение в результате установления. К. ч. м. является развитием метода «частиц в ячейках» Харлоу.

К. ч. м. широко используется для исследования аэрогазодинамич. течений, дифракционных задач, трансзвуковых потоков, явлений взаимодействия излучения с веществом и др.

Разностная схема К. ч. м. может быть описана на примере движения идеального сжимаемого газа (уравнения неразрывности, импульса и энергии):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0,\\&\frac{\partial\rho u_i}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}u_i)+\frac{\partial P}{\partial x_i}=0,\\&\frac{\partial\rho E}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho E\boldsymbol{v})+\operatorname{div}(P\boldsymbol{v})=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Здесь $x_i=\{x,\ y,\ z\}$, t — время, ρ — плотность, $\boldsymbol{v}=\{u_i\}=\{u,\ v,\ w\}$ — скорость, E — полная удельная энергия, P — давление. Для замыкания системы (1) используется уравнение состояния

$$P=P(\rho, J),$$

где

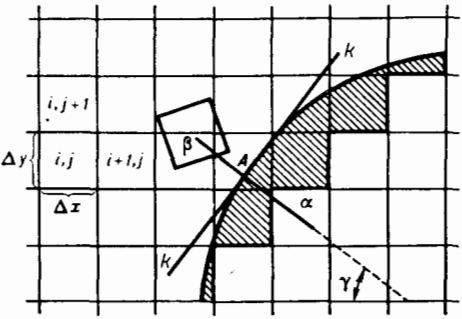
$$J=E-\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2$$

— внутренняя удельная энергия.

Процесс решения эволюционной системы (1) разбивается на шаги по времени, каждый из к-рых состоит из трех этапов: эйлерова, лагранжева и заключительного. Вначале рассматривается изменение внутреннего состояния подсистемы — «крупной частицы» (эйлеров этап), а затем — перемещение этой подсистемы без изменения внутреннего состояния (лагранжев и заключительный этапы).

Эйлеров этап. Область интегрирования покрывается неподвижной (эйлеровой) разностной сеткой про-

извольной формы [для краткости изложения рассматривается прямоугольная сетка в двумерной (плоской) области (см. рис.)]. На этом этапе расчета изменяются лишь величины, относящиеся к ячейке в целом, а жидкость предполагается моментально заторможенной.



Поэтому конвективные члены вида $\operatorname{div}(\psi\rho\boldsymbol{v})$, $\psi=(1,\ u,\ v,\ E)$, соответствующие эффектам перемещения, из уравнений (1) опускаются. В оставшихся уравнениях (1) ρ выносится из-под знака дифференциала, и уравнения (1) разрешаются относительно временных производных от u, v, E:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial x}=0,\ \rho\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial y}=0,\ \rho\frac{\partial E}{\partial t}+\operatorname{div}(P\boldsymbol{v})=0. \quad (2)$$

Простейшая конечноразностная аппроксимация (центральные разности) приводит к следующим выражениям:

$$\tilde{u}^n_{i,\,j}=u^n_{i,\,j}-\frac{P^n_{i+1/2,\ j}-P^n_{i-1/2,\ j}}{\Delta x}\,\frac{\Delta t}{\rho^n_{i,\,j}},$$

$$\tilde{v}^n_{i,\,j}=v^n_{i,\,j}-\frac{P^n_{i,\ j+1/2}-P^n_{i,\ j-1/2}}{\Delta y}\,\frac{\Delta t}{\rho^n_{i,\,j}},$$

$$\tilde{E}^n_{i,\ j}=E^n_{i,\ j}-$$
$$-\left[\frac{P^n_{i+1/2,\ j}\tilde{u}^n_{i+1/2,\ j}-P^n_{i-1/2,\ j}\tilde{u}^n_{i-1/2,\ j}}{\Delta x}+\right.$$
$$\left.+\frac{P^n_{i,\ j+1/2}\tilde{v}^n_{i,\ j+1/2}-P^n_{i,\ j+1/2}\tilde{v}^n_{i,\ j-1/2}}{\Delta y}\right]\frac{\Delta t}{\rho^n_{i,\,j}}.$$

Здесь величины с дробными индексами относятся к границам ячеек, напр.

$$u^n_{i+1/2,\ j}=\frac{u^n_{i,\ j}+u^n_{i+1,\ j}}{2},\quad P^n_{i-1/2,\ j}=\frac{P^n_{i-1,\ j}+P^n_{i,\ j}}{2},\ \ldots;$$

$\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{E}$ — промежуточные значения параметров потока, полученные в предположении «замороженности» поля ρ на слое $t^n+\Delta t$. Хотя схема эйлерова этапа в данном виде неустойчива, при определенных формах записи последующих этапов вся схема в целом — устойчива. Устойчивости эйлерова этапа можно достигнуть, напр., путем введения в него элементов *интегральных соотношений метода*. При этом аппроксимация подинтегральных функций производится в направлении, параллельном оси тела (см. рис.), т. е. как в схеме 1 метода интегральных соотношений: исходная система уравнений берется в интегральном виде, в ней аппроксимируются интегралы

$$f=\int_V \rho u\,d\tau,\quad \vartheta=\int_V \rho v\,d\tau,\quad \psi=\int_V \rho E\,d\tau.$$

Л а г р а н ж е в э т а п. На данном этапе находятся при $t^n+\Delta t$ потоки массы через границы ячеек. При этом

полагают, что масса крупной частицы переносится только за счет нормальной к границе составляющей скорости. Так, напр.,

$$\Delta M^n_{i+1/2,\,j} = \langle \rho^n_{i+1/2,\,j} \rangle \langle u^n_{i+1/2,\,j} \rangle \Delta y\, \Delta t$$

и т. д. Знак $\langle\ \rangle$ определяет параметры ρ и u на границе ячейки. Выбор этих величин имеет важное значение, так как сильно влияет на устойчивость и точность счета. Возможны различные разностные представления для ΔM^n: разного порядка точности, с учетом и без учета направления потока, центральные разности, *ZIP*-аппроксимации и т. д. Потоки импульса (энергии) равны произведению ΔM^n на соответствующие значения скорости (полной удельной энергии). Проводились также аппроксимации не только потоков массы, но и потоков импульса и энергии.

З а к л ю ч и т е л ь н ы й э т а п. На этом этапе находятся окончательные поля эйлеровых параметров потока в момент $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. Уравнения этого этапа представляют собой законы сохранения массы M, импульса $\boldsymbol{p}$ и полной энергии E, записанные для данной ячейки (крупной частицы) в разностной форме $M^{n+1} = M^n + \Sigma \Delta M^n$, $\boldsymbol{p}^{n+1} = \boldsymbol{p}^n + \Sigma \Delta \boldsymbol{p}^n$, $E^{n+1} = E^n + \Sigma \Delta E^n$. Окончательные значения параметров потока ρ, $X = \{u, v, E\}$ на следующем временном слое вычисляются по формулам (поток течет слева направо и снизу вверх):

$$\rho^{n+1}_{i,\,j} = \rho^n_{i,\,j} + \frac{\Delta M^n_{i-1/2,\,j} + \Delta M^n_{i,\,j-1/2} - \Delta M^n_{i,\,j+1/2} - \Delta M^n_{i+1/2,\,j}}{\Delta x\, \Delta y},$$

$$X^{n+1}_{i,\,j} = \frac{\rho^n_{i,\,j}}{\rho^{n+1}_{i,\,j}} \tilde{X}^n_{i,\,j} + \frac{\tilde{X}^n_{i-1,\,j} \Delta M^n_{i-1/2,\,j} + \tilde{X}^n_{i,\,j-1} \Delta M^n_{i,\,j-1/2}}{\rho^{n+1}_{i,\,j}\, \Delta x\, \Delta y} + \frac{-\tilde{X}^n_{i,\,j} \Delta M^n_{i+1/2,\,j} - \tilde{X}^n_{i,\,j} \Delta M^n_{i,\,j+1/2}}{\rho^{n+1}_{i,\,j}\, \Delta x\, \Delta y}.$$

Консервативность и полную дивергентность разностной схемы (схема дивергентно-консервативная) обеспечивает уравнение для полной энергии E. На заключительном этапе (в случае использования дискретной модели среды) целесообразно производить дополнительный пересчет плотности, что сглаживает флуктуации и повышает точность вычислений. Комбинируя различные представления этапов, получают серию разностных схем К. ч. м., что позволяет осуществить широкий класс численных экспериментов.

К. ч. м. допускает трактовку с различных точек зрения: метод расщепления, смешанный эйлерово-лагранжевый метод, расчет в локально лагранжевых координатах (эйлеров этап) с пересчетом на прежнюю сетку (лагранжев и заключительный этапы), разностная запись законов сохранения для элемента жидкости — «крупной частицы», эйлерова разностная схема.

Граничные условия ставятся с помощью рядов фиктивных ячеек (чтобы каждую расчетную точку сделать внутренней и сохранить единый алгоритм для всех ячеек). Для схемы 1-го порядка аппроксимации достаточно одного слоя, для 2-го порядка — два слоя и т. д. Пусть, напр., рассматривается задача о расчете обтекания осесимметричных и плоских тел с образующей произвольной формы (см. рис.). Приведенные ранее расчетные формулы справедливы для внутренних ячеек поля, со всех сторон окруженных жидкостью, и для ячеек, прилегающих к твердому телу, контур к-рого совпадает с границами ячеек.

При расчете обтекания тел конечноразностными методами можно использовать два подхода: расчет в коор-

динатах s, n; введение в рассмотрение дробных ячеек (см. [2]). В первом случае затруднительно рассчитывать тела с изломами и с вогнутостями. Второй подход свободен от этих недостатков.

Граничные условия на теле в случае дробных ячеек ставятся, как и в случае целых ячеек, с помощью введения фиктивных ячеек. Внутри тела формируется слой фиктивных ячеек, прилегающих к дробным ячейкам. Для определения параметров газа в этих фиктивных ячейках из центра фиктивной ячейки α на контур тела опускают нормаль и в точке их пересечения A проводят касательную k—k (см. рис.). Затем в поле течения строят нек-рую ячейку β, симметричную данной фиктивной ячейке α относительно касательной k—k. Газодинамич. параметры g в ячейке β определяют путем «взвешивания» $g_\beta = \Sigma_i S_{\beta_i} g_i$ ($\Sigma_i S_{\beta_i} = 1$), где суммирование производится по тем ячейкам i, часть площади S_{β_i} к-рых попала в ячейку β. Постановка условий непротекания требует для каждой фиктивной ячейки задания еще одного параметра γ: угла наклона радиус-вектора, пересекающего контур тела в точке A. При использовании условий прилипания (обе компоненты скорости при переходе через поверхность тела меняют знак) не требуется задания дополнительного параметра γ. Параметры газа в фиктивной ячейке α тогда будут

$$\begin{Bmatrix}\rho\\E\end{Bmatrix}_\alpha = \sum S_{\beta_i} \begin{Bmatrix}\rho\\E\end{Bmatrix}_i, \qquad \begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}_\alpha = -\sum S_{\beta_i} \begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}_i.$$

Граничные условия для тела, контур к-рого совпадает с границами ячеек, являются частным случаем изложенных здесь граничных условий.

Для каждой дробной ячейки (см. рис.) необходимо знать 5 геометрич. характеристик: $A_{i-1/2,\ j}$, $A_{i,\ j-1/2}$, $A_{i+1/2,\ j}$, $A_{i,\ j+1/2}$ и $f_{i,\ j}$, где $f_{i,\ j}$ — доля объема дробной ячейки по отношению к объему полной ячейки $\Delta x \Delta y$, $A_{i-1/2,\ j}$ — часть площади стороны $(i-1/2,\ j)$, открытой для течения жидкости, и т. п.

Размещение твердой границы внутри ячейки вносит две особенности: оно смещает центр масс из геометрич. центра ячейки ближе к границе и уменьшает реальные размеры ячейки. При рассмотрении как целых, так и дробных ячеек все параметры потока относятся к центру массы. Именно между центрами масс производится интерполяция газодинамич. функций. В случае целых ячеек центр масс либо совпадает с геометрич. центром ячеек (плоская декартова система координат), либо близок к нему (цилиндрич. система координат). В реальных расчетах разница даже для прилегающего к оси ряда ячеек не превышает $0{,}2 \cdot \Delta r$. В результаты расчетов это обстоятельство не вносит существенных искажений. При надлежащем введении дробных ячеек смещение центра массы относительно геометрич. центра также не превышает этой величины. Более серьезным является вопрос, связанный с уменьшением эффективных размеров ячейки. Чтобы при уменьшении размеров ячейки не нарушалось условие устойчивости $c\frac{\Delta t}{\Delta \lambda} < 1$, где $\lambda = x$ или y, ячейки с $f < f_{\min\ \text{уст.}}$ присоединяются к соседним целым ячейкам внутри потока и полученные комплексы рассчитываются по формулам дробных ячеек. В этом случае геометрич. размеры укрупненной ячейки не меньше размеров целой ячейки: $A_{i-1/2,\ j} \geqslant 1$, $A_{i,\ j-1/2} \geqslant 1$, . . . , $f_{ij} > 1$, поэтому вопрос об устойчивости дробных ячеек снят.

В плоском случае геометрич. характеристики дробных ячеек можно получить непосредственным измерением. В осесимметричном случае необходимо произвести дополнительный пересчет с учетом расстояния данной дробной ячейки до оси симметрии. Разностные формулы для дробных ячеек получаются путем незначи-

тельного изменения разностных выражений для целых ячеек.

Исследование разностных схем К. ч. м. (аппроксимации, вязкостных эффектов, устойчивости) проводилось с помощью дифференциальных приближений (см. [4]). Проведено обобщение К. ч. м. на пространственно-трехмерный случай.

Лит.: [1] Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1971, т. 11, № 1, с. 182—207; [2] Давыдов Ю. М., там же, № 4, с. 1056—63; [3] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, Новосиб., 1973; [4] Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М., Исследование схем метода «крупных частиц» с помощью дифференциальных приближений, в кн.: Проблемы прикладной математики и механики, М., 1971, с. 145—55.

Ю. М. Давыдов.

КРУЧЕНИЕ — 1) К. кривой — величина, характеризующая отклонение пространственной кривой γ от соприкасающейся плоскости. Пусть P — произвольная точка кривой γ и Q — точка кривой γ, близкая P, $\Delta\theta$ — угол между соприкасающимися плоскостями кривой γ в точках P и Q, а $|\Delta s|$ — длина отрезка PQ кривой γ. Абсолютным кручением $|k_2|$ кривой γ в точке P наз. величина

$$|k_2| = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}.$$

К. кривой определяется равенством $k_2 = \pm|k_2|$ и считается положительным (отрицательным), если вращение соприкасающейся плоскости при движении вдоль кривой в сторону возрастания s от вектора бинормали к вектору главной нормали происходит против часовой стрелки (по часовой стрелке) при наблюдении из точки P.

Регулярная (трижды непрерывно дифференцируемая) кривая в каждой точке, где ее кривизна отлична от нуля, имеет К. Если $r = r(s)$ — естественная параметризация кривой, то

$$k_2 = -\frac{(r', r'', r''')}{[r', r'']^2}.$$

К. иногда наз. второй кривизной.

Кривизна и К., заданные как функции длины дуги, определяют кривую с точностью до положения в пространстве.

Кривая, у к-рой К. в каждой точке равно нулю,— плоская. *Е. В. Шикин.*

2) К. геодезическое — обобщение К. кривой, инвариант полосы в пространстве E^3, определяемый формулой

$$a = (x_1, x_3, x_3'),$$

где x_1 — касательный вектор к базовой кривой Γ полосы, x_3 — нормальный вектор полосы. Обычное К. $\varkappa$ кривой Γ ненулевой кривизны выражается через a и нормальную и геодезич. кривизны b и c по формуле

$$\varkappa = a + \frac{b'c - bc'}{b^2 + c^2}.$$

Равенство нулю геодезич. К. характеризует полосы кривизны, в частности для полос, принадлежащих поверхности в E^3, — *кривизны линии*.

Аналогичные понятия вводятся для полос в римановом пространстве (см. [1], [2]).

3) К. подмногообразия — обобщение К. кривой, кривизна связности, индуцированной в нормальном расслоении $\nu(M^k)$ многообразия M^k, погруженного в риманово пространство V^n. Пусть ω_β^α — формы связности в $\nu(M^k)$, ω_s^α — формы эйлеровых кривизн M^k в V^n, $s = 1, \ldots, k$; $\alpha, \beta = 1, \ldots, n-k$. Тогда формы

$$\Omega_{\alpha R}^{\beta} = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$$

определяют риманово кручение, а формы

$$\Omega^{\beta}_{\alpha G} = \omega^{s}_{\alpha} \wedge \omega^{\beta}_{s}$$

— гауссово кручение M^k в V^n. Риманово К. и гауссово К. связаны соотношением

$$\Omega^{\beta}_{\alpha R} = \Omega^{\beta}_{\alpha G} + R^{\beta}_{\alpha kh}\sigma^k \wedge \sigma^h,$$

где $R^{\beta}_{\alpha kh}$ — компоненты тензора кривизны V^n в направлении бивектора, касательного к M^k, а σ^s — ортогональный кобазис касательного пространства к M^k. Тензоры S^{β}_{ij}, получающиеся в разложении форм К. $\Omega^{\beta}_{\alpha R}(\Omega^{\beta}_{\alpha G})$ по формам $\sigma^i \wedge \sigma^j$, нзз. тензорами гауссова и риманова кручения (см. [1], [4]).

Пример. Пусть M^2 — поверхность в евклидовом пространстве E^4. Тогда гауссово и риманово К. равны и сводятся к единственному числу

$$\varkappa = \frac{1}{EG - F^2}\begin{vmatrix} E & F & G \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix},$$

где E, F, G — коэффициенты первой, а L_i, M_i, N_i — второй квадратичных форм M^2 в E^4. Равенство $\varkappa = 0$ в нек-рой окрестности геометрически интерпретируется как вырождение эллипса кривизны в отрезок, тогда существует два семейства ортогональных линий кривизны, касательные к к-рым соответствуют концам этого отрезка. Условие $\varkappa = 0$ локально необходимо и достаточно для того, чтобы M^2 располагалась в римановом пространстве V^3, погруженном в E^4, и нормаль к M^2 в касательном пространстве к V^3 была направлена по главному вектору *Риччи тензора* V^3. В частности, нулевое К. необходимо для уплощения M^2 в E^3.

4) К. аффинной связности Г — величина, выражающая отклонение от перестановочности *ковариантных производных* какой-либо функции на многообразии M^n с этой связностью Г. Она определяется преобразованием

$$(X, Y) \longrightarrow S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

где X, Y — векторные поля на M^n, $\nabla_X Y$ — ковариантная производная Y вдоль X, $[X, Y]$ — коммутатор X и Y. В локальных координатах x^i, $i = 1, \ldots, n$, таких, что $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ и $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, преобразование S имеет вид

$$S\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = S^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k};$$

тензор $S^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$, где Γ^k_{ji} — компоненты связности Г в выбранном базисе, наз. тензором кручения.

Эквивалентным образом К. определяется ковариантным дифференциалом векторнозначной 1-формы ω^k смещения данной связности

$$\Omega^k = d\omega^k + \theta^k_j \wedge \omega^k,$$

к-рый наз. формой кручения; здесь θ^k_j — связности формы для Г. В локальном кобазисе dx^i (дуальном базису $\frac{\partial}{\partial x^i}$) форма

$$\Omega^k = S^k_{ij}\, dx^i \wedge dx^j,$$

где S^k_{ij} имеет те же значения, что и выше.

Геометрич. смысл К. аффинной связности Г заключается в том, что развертка каждого бесконечномалого контура L, выходящего из точки $x \in M^n$ и возвращающегося в нее на касательное пространство к M^n в x, уже не будет замкнутой кривой. Векторная разность

между концами развертки с точностью до малых 2-го порядка имеет компоненты Ω^k, $k=1, \ldots, n$. Другими словами, этот вектор пропорционален ограниченной контуром L двумерной площадке с бивектором df^{ij}: $\Omega^k = S^k_{ij} df^{ij}$. Эти представления лежат в основе интерпретации упругой среды с непрерывным распределением источников внутренних напряжений в виде дислокаций, вектор Ω^k тогда оказывается аналогом так наз. в е к т о р а Б ю р г е р с а (см. [4]—[7]).

П р и м е р. В двумерном римановом пространстве M^2 с *метрической связностью* тензор К. сводится к вектору: $S^k_{ij} = S^k e_{ij}$, здесь e_{ij} — метрич. бивектор. Пусть в M^2 дан малый треугольник, образованный отрезками геодезических длины a, b, c, с углами A, B, C. Тогда главная часть проекции вектора S^k в точке A на сторону AB равна отношению величины $c - a\cos B - b\cos A$ к площади треугольника σ, а на перпендикуляр к AB — величине $a\sin B - b\sin A$, деленной на σ. Таким образом, в M^2 нулевого К. имеют место теоремы косинусов и синусов обыкновенной тригонометрии с точностью до величин, малых в сравнении с σ.

5) К. п р о с т р а н с т в а A — элемент $\tau(X, A)$ *Уайтхеда группы* Wh A, определяемый парой (X, A), где A — конечное *клеточное пространство*, и вложение $A \subset X$ является гомотопич. эквивалентностью. Эквивалентно, К.— элемент группы Уайтхеда Wh π_1 фундаментальной группы π_1. К. инвариантно при клеточных расширениях и стягиваниях и при клеточных измельчениях. Доказана топологич. инвариантность К. Если A односвязно, то его К. равно нулю.

Если $(W;\ M_0,\ M_1)$ — произвольный h-кобордизм, то $\tau(W, M_0) = \tau(K, M_0)$, где K — клеточное пространство, ассоциированное с данным разложением на ручки многообразия W (от многообразия M_0), это — к р у ч е н и е h-к о б о р д и з м а.

Пусть M_f — цилиндр клеточного отображения f: $X \to Y$, являющегося гомотопич. эквивалентностью. Тогда $\tau(M_f, Y) = 0$, но $\tau(M_f, X) \in$ Wh $\pi_1 X$ не всегда равно нулю. Оно определяет по формуле

$$\tau(f) = f_*\tau(M_f, X) \in \mathrm{Wh}\,\pi_1 Y$$

элемент $\tau(f)$, наз. к р у ч е н и е м о т о б р а ж е н и я f (иногда К. наз. сам $\tau(M_f, X)$). Если $\tau(f)=0$, то наз. п р о с т о й г о м о т о п и ч е с к о й э к в и в а л е н т н о с т ь ю (см. [8]).

6) К. к о н е ч н о п о р о ж д е н н о й а б е л е в о й г р у п п ы G — группа T, состоящая из всех элементов конечного порядка группы G. Числа $\nu > 1$ могут быть однозначно с точностью до перестановки выбраны в виде степеней простых чисел, и тогда они наз. к о э ф ф и ц и е н т а м и к р у ч е н и я г р у п п ы G (см. [9]).

Лит.: [1] К а р т а н Э., Риманова геометрия в ортогональном реперe, пер. с франц., М., 1960; [2] Б л я ш к е В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., М., 1957; [3] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1969, М., 1971, с. 123—68; [4] З у л а н к е Р., В и н т г е н П., Дифференциальная геометрия и расслоения, пер. с нем., М., 1975; [5] Н о р д е н А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976; [6] К а р т а н Э., Пространства аффинной, проективной и конформной связности, [пер. с франц.], Казань, 1962; [7] С х о у т е н Я.-А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., М., 1965; [8] Р у р к К., С а н д е р с о н Б., Введение в кусочно линейную топологию, пер. с англ., М., 1974; [9] К у р о ш А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

М. И. Войцеховский.

КРУЧЕНИЯ ТЕНЗОР — кососимметрический по нижним индексам тензор типа (1, 2), получающийся в разложении *кручения формы* в локальном кобазисе на многообразии M^n. В частности, в голономном кобазисе dx^i, $i=1, \ldots, n$, компоненты К. т. S^k_{ij} выражаются через объекты связности Γ^k_{ij}:

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}.$$

М. И. Войцеховский.

КРУЧЕНИЯ ФОРМА — ковариантный дифференциал векторнозначной 1-формы смещения *аффинной связности* — 2-форма

$$\Omega = D\omega = d\omega + \theta \wedge \omega,$$

где θ — форма связности. К. ф. удовлетворяет так наз. первому тождеству Бианки

$$d\Omega + \theta \wedge \Omega + \omega \wedge \Xi,$$

где Ξ — *кривизны форма* данной связности. Аналогично определяется К. ф. для редуктивных связностей.

М. И. Войцеховский.

КРЫЛА ТЕОРИЯ — раздел аэродинамики, изучающий взаимодействие тел с потоками жидкости и газа. Основная задача К. т.— определение аэродинамич. сил, действующих на тело, и нахождение поля скоростей $\mathbf{u}$ и давления p как функций времени t и декартовых координат $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, $n=2$ для плоских и $n=3$ для пространственных течений.

Для безвихревых баротропных течений в отсутствие вязких и массовых сил плотность газа ρ — известная функция давления $\rho=\rho(p)$, компоненты скорости u_i — частные производные потенциала φ, $u_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$. В области, занятой газом, φ удовлетворяет квазилинейному уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{2}{c^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial t}= \\ =\sum_{i,\,j=1}^{n}\left(\delta_{ij}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_j}, \qquad (1)$$

где $c=\left(\frac{d\rho}{dp}\right)^{-1/2}$ — скорость звука, δ_{ij} — символы Кронекера. Давление p определяется потенциалом из интеграла Коши — Лагранжа

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2.$$

Граница области течения состоит из кусочно гладкой поверхности крыла S и конечного числа поверхностей контактного разрыва Σ_j, $j=1, \ldots, m$, к-рые пересекаются с S по ребрам заострения кромок крыла либо касаются S. В плоских течениях S, Σ_j — кусочно гладкие кривые, кромки крыла — угловые точки S. На S потенциал удовлетворяет условию непротекания, а на Σ_j — условиям контактного разрыва:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\nabla F\cdot\nabla\varphi=0 \text{ на } S, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial t}+\nabla F_j\nabla\varphi^{\pm}=0, \quad p^+=p^- \text{ на } \Sigma_j, \qquad (3)$$

где $F(\boldsymbol{x}, t)=0$, $F_j(\boldsymbol{x}, t)=0$ — уравнения поверхностей S, Σ_j, $\varphi^{\pm}$ — предельные значения φ при подходе к различным сторонам поверхности Σ_j. На линиях пересечения $S\cap\Sigma_j$ ставится условие Жуковского — Кутта — Чаплыгина о конечности давлений в кромках крыла

$$\lim_{x\to x_0}|p(x)|<\infty \quad \text{при} \quad x_0\in S\cap\Sigma_j. \qquad (4)$$

В стационарном случае (4) совпадает с условием конечности скоростей в точках $S\cap\Sigma_j$. Форма поверхностей Σ_j неизвестна и определяется вместе с решением задачи.

Поверхности Σ_j моделируют вихревой след, возникающий за обтекаемым телом в реальных течениях (см. *Аэродинамики математические задачи*). Этот факт согласуется с тем, что в рамках гипотезы о безвихревом характере движения непрерывного решения задачи об обтекании крыла с конечной величиной давления в острых кромках в общем случае не существует. В исключительных случаях, напр. для плоских стацио-

нарных течений с постоянной циркуляцией скорости вокруг крылового профиля, поверхности разрыва могут отсутствовать.

Уравнения (1)—(4) вместе с начальными данными образуют краевую задачу для нахождения φ, Σ_t. Ее тип определяется характером течения и числом Маха $M=|\nabla\varphi|c^{-1}$. *Для неустановившихся движений* сжимаемой жидкости и стационарных $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\right)$ сверхзвуковых ($M>1$) течений уравнение (1) имеет гиперболич. тип, для движений несжимаемой жидкости ($\rho=\text{const}$, $c=\infty$) и стационарных дозвуковых ($M<1$) течений уравнение (1) эллиптическое. В последнем случае в предположении, что S — кусочно гладкая кривая, имеющая одну угловую точку $\boldsymbol{x}_0$ с углом $\alpha\pi$, $\alpha\in[0, 1]$, справедливо утверждение: для любого вектора $\boldsymbol{k}$, $|\boldsymbol{k}|=1$, существует $\lambda>0$ такое, что при $q\in[0, \lambda)$ задача (1)—(2) имеет единственное решение, удовлетворяющее в $\boldsymbol{x}_0$ условию Жуковского — Кутта — Чаплыгина и условию на бесконечности:

$$\overline{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}}\,|\nabla\varphi|<\infty,\qquad \lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}\nabla\varphi(\boldsymbol{x})=q\boldsymbol{k},$$

причем $M(q)\to 0$ при $q\to 0$ и $M(q)\to 1$ при $q\to\lambda$, где $M(q)=\sup\limits_{\boldsymbol{x}} M(\boldsymbol{x})$ — число Маха течения.

Для стационарных плоских дозвуковых течений справедлива основная теорема Жуковского (см. [1]—[3]): при обтекании профиля полная сила, действующая на него со стороны жидкости, перпендикулярна $\boldsymbol{k}$, а ее величина R равна

$$R=q\rho_\infty\oint_S\frac{\partial\varphi}{\partial s}\,ds,\quad \rho_\infty=\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}\rho(\boldsymbol{x}).$$

Для таких течений доказана математич. корректность более общих задач: о совместном обтекании нескольких профилей; об обтекании крыла со срывом струй и с образованием *застойной зоны* (*струйные течения*); обратные задачи, определяющие формы крыла и его части по заданной эпюре давлений [4].

В связи с трудностями решения задач К. т. в точной постановке большое значение имеют приближенные модели: теория тонкого крыла, К. т. малого удлинения и т. д. Наиболее распространенной из них является линейная теория слабого изогнутого тонкого крыла (см. [1], [5]—[11]). В ее основе лежат следующие предположения: потенциал течения имеет вид $\varphi=qx_1+\Phi$, толщина крыла и $\nabla\Phi$ малы по отношению к хорде крыла и скорости невозмущенного потока $q>0$. В теории тонкого крыла поверхность S моделируется ее проекцией S_0 на плоскость $x_n=0$, а поверхность контактного разрыва Σ — полуполосой $\Sigma_0=\Omega\setminus S_0$, где Ω — объединение всех лучей, параллельных оси Ox_1, выходящих из точек S_0 в положительном направлении этой оси. Функция $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$ удовлетворяет *линеаризованным* уравнениям и граничным условиям:

$$\frac{1}{c_\infty^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+2\frac{M_\infty}{c_\infty}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\,\partial t}=(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}\ \text{вне }\Omega;$$

$$\lim_{x_n\to\pm 0}\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}=v^{\pm}\ \text{на } S_0;\quad\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\right]=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+q\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right]=0\ \text{на }\Sigma_0;$$

$$\overline{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial t}+q\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right|<\infty\ \text{при}\ \boldsymbol{x}_0\in S_0\cap\Sigma_0,$$

где c_∞, M_∞ — постоянные скорость звука и число Маха, соответствующие равномерному потоку со скоростью q, через $[f]$ обозначен скачок величины f при переходе через Σ_0, $v^{\pm}$ — заданные функции, определенные формой и условиями движения крыла.

К этим уравнениям добавляются соотношения, определяющие *поведение решений на бесконечности*: в за-

дачах о стационарных дозвуковых ($M_\infty<1$) течениях — затухание возмущений при $|x| \to \infty$, в задачах о малых дозвуковых колебаниях крыла — условие излучения Зоммерфельда *(излучения условия)*, в задачах о сверхзвуковых ($M_\infty>1$) течениях добавляется равенство $\Phi = 0$ на головной волне возмущений (огибающей характеристических конусов с центрами на S_0).

Основной метод решения задач теории тонкого крыла — представление S_0, Σ_0 в виде вихревых поверхностей и сведение краевых задач к сингулярным интегральным уравнениям для плотности вихря. При этом в точках границы S_0, не принадлежащих Σ_0, производные Φ, как правило, обращаются в бесконечность. Линейная теория пригодна для описания реальных течений лишь вне нек-рой окрестности передней кромки крыла.

В линейной теории тонкого крыла получены решения в виде бесконечных рядов, содержащих специальные функции, плоской задачи о малых гармонич. колебаниях крылового профиля, пространственной стационарной задачи в случае, когда S является эллипсом (см. [1], [5]—[9]). Для расчета крыльев произвольной формы в плане разработаны численные методы (см. [10], [11]).

Лит.: [1] Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 2 изд., М., 1966; [2] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, 6 изд., ч. 1, М., 1963; [3] Бэр с Л., Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, пер. с англ., М., 1961; [4] Монахов В. Н., Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений, Новосиб., 1977; [5] Некрасов А. И., Теория крыла в нестационарном потоке, М.—Л., 1947; [6] Горелов Д. Н., Теория крыла в нестационарном потоке, Новосиб., 1975; [7] Майлс Дж., Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений, пер. с англ., М., 1963; [8] Голубев В. В., Труды по аэродинамике, М.— Л., 1957; [9] Кочин Н. Е., «Прикл. матем. и механ.», 1945, т. 9, в. 1, с. 13—66; [10] Красильщикова Е. А., Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке, М.— Л., 1952; [11] Белоцерковский О. М., Ништ М. И., Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью, М., 1978.

В. Н. Монахов, П. И. Плотников.

КРЫЛОВА — БОГОЛЮБОВА МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ — метод, применяемый в теории нелинейных колебаний для исследования колебательных процессов, основанный на принципе усреднения (осреднения), заменяющем точное дифференциальное уравнение движения усредненным.

Различные схемы усреднения (Гаусса, Фату, Делоне — Хилла и др.) широко применялись в небесной механике еще задолго до работ Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Разработка общего алгоритма, получившего название м е т о д а у с р е д н е н и я К р ы л о в а — Б о г о л ю б о в а, и теорема о близости решений точной и усредненной систем принадлежат Н. М. Крылову и Н. Н. Боголюбову (см. [1], [2]). Создание строгой теории метода усреднения, исчерпывающее выяснение сущности общего принципа усреднения принадлежат Н. Н. Боголюбову (см. [3], [4]), к-рый показал, что метод усреднения связан с существованием нек-рой замены переменных, позволяющей исключить время t из правых частей рассматриваемых уравнений с наперед заданной степенью точности относительно малого параметра ε; он же обосновал асимптотич. характер приближений, получаемых методом усреднения, и установил соответствие между решениями точных и усредненных уравнений на бесконечном временном интервале. Эти результаты получили дальнейшее развитие в работах Ю. А. Митропольского и др. (см. [5]—[8]) и применяются для изучения нелинейных колебаний.

Система уравнений, для к-рых разработан К.— Б. м. у., имеет стандартный вид:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

где t — время, ε — малый положительный параметр. Основные предположения, при к-рых рассматривается

система (1), сводятся к достаточной гладкости функции X по t, x и нек-рой «возвращаемости» ее по t, обеспечивающей существование среднего значения

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t,x)\,dt = X_0(x),$$

напр. периодичности или почти периодичности X по t.

Согласно К.— Б. м. у. m-е приближение к решению $x=x(t)$ системы (1) определяется выражением

$$x=\xi+\varepsilon F_1(t,\xi)+\ldots+\varepsilon^m F_m(t,\xi), \qquad (2)$$

в к-ром $\xi=\xi(t)$ — решение «усредненного» уравнения

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon X_0(\xi)+\varepsilon^2 P_2(\xi)+\ldots+\varepsilon^m P_m(\xi),$$

F_1, F_j, P_j, $j=2,\ldots,m$,— функции, подбираемые из условия, чтобы выражение (2) удовлетворяло уравнению (1) с точностью до величин порядка ε^{m+1} и чтобы F_j обладали по t той же возвращаемостью, что и правая часть системы (1). Функции F_j находятся элементарно, функции P_j определяются в результате усреднения правой части системы (1) после подстановки в нее выражения (2). Так, в частности, для системы (1) с периодической по t правой частью, когда

$$X(t,x)=X(t+2\pi,x)=\sum_{-\infty<k<\infty}X_k(x)\,e^{ikt}, \qquad (3)$$

функция F_1 определяется по (3) согласно формуле

$$F_1(t,\xi)=\sum_{k\neq 0}\frac{X_k(\xi)}{ik}\,e^{ikt},$$

функции F_m и P_m при $m\geqslant 2$ определяются по соотношению

$$X(t,\xi+\varepsilon F_1(t,\xi)+\ldots+\varepsilon^{m-1}F_{m-1}(t,\xi))=$$
$$=X(t,\xi)+\varepsilon\frac{\partial X(t,\xi)}{\partial x}F_1(t,\xi)+\ldots+$$
$$+\varepsilon^{m-1}\frac{\partial X(t,\xi)}{\partial x}F_{m-1}(t,\xi)$$

аналогичными формулами.

Обоснование метода усреднения сводится к следующему: 1) установление оценки

$$\|x(t)-\xi(t)\|\leqslant\eta(\varepsilon),\quad t\in\left[0,\frac{L}{\varepsilon}\right],$$

где $\eta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, L — постоянная, не зависящая от ε, $x(0)=\xi(0)$; 2) доказательство существования решения $x=x_0(t)$ системы (1), находящегося в достаточно малой окрестности положения равновесия $\xi=\xi_0$: $X_0(\xi_0)=0$ усредненной системы:

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)}\|x(t)-\xi_0\|\leqslant\eta(\varepsilon),$$

и установление свойств устойчивости, периодичности или почти периодичности этого решения; 3) доказательство существования интегрального многообразия τ:

$$x=f(t,\varphi,\varepsilon),\quad f(t,\varphi+2\pi,\varepsilon)=f(t,\varphi,\varepsilon),$$

системы (1), находящегося вблизи периодической траектории $\xi=\xi_0(\varphi)$, $\dot\varphi=\varepsilon\nu$, $\nu=\mathrm{const}$, усредненной системы:

$$\sup_{t,\,\varphi\in(-\infty,\infty)}\|f(t,\varphi,\varepsilon)-\xi_0(\varphi)\|\leqslant\eta(\varepsilon),$$

и исследование поведения решений системы (1), начинающихся в окрестности многообразия τ.

Лит.: [1] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний, К., 1934; [2] их же, Введение в нелинейную механику, К., 1937; [3] Боголюбов Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, К., 1945; [4] его же, «Сб. трудов Ин-та строительной механики АН УССР», 1950, № 14, с. 9—34; [5] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 3 изд., М., 1963; [6] Митропольский Ю. А., Метод усреднения в нелинейной механике, К., 1971; [7] его же, *Нестационарные процессы в нелинейных*

колебательных системах, К., 1955; [8] Волосов В. М., в кн.: Механика в СССР за 50 лет, т. 1, М., 1968, с. 115—35.

А. М. Самойленко.

КУБ — 1) К.— один из пяти типов правильных многогранников; имеет 6 квадратных граней, 12 ребер, 8 вершин, в каждой вершине сходятся 3 ребра (они взаимно перпендикулярны). К. иногда наз. гексаэдром.

2) К. числа a — третья степень a^3 этого числа.

КУБАТУРНАЯ ФОРМУЛА — формула для приближенного вычисления кратных интегралов вида

$$I(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega p(x) f(x)\, dx.$$

Интегрирование выполняется по Ω-множеству в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. К. ф. наз. приближенное равенство

$$I(f) \cong \sum_{j=1}^{N} C_j f(x^{(j)}). \qquad (1)$$

Подинтегральная функция записана в виде произведения двух функций: первая $p(x)$ считается фиксированной для данной К. ф. и наз. весовой функцией, вторая $f(x)$ принадлежит достаточно широкому классу функций, напр., непрерывных и таких, что интеграл $I(f)$ существует. Сумма в правой части (1) наз. кубатурной суммой, точки $x^{(j)}$ наз. узлами К. ф., а числа C_j — ее коэффициентами. Обычно $x^{(j)} \in \Omega$, хотя это требование не является обязательным. Нахождение приближенного значения $I(f)$ с помощью формулы (1) сводится к вычислению кубатурной суммы. При $n=1$ формула (1) и сумма в правой ее части наз. квадратурными (см. *Квадратурная формула*).

Пусть $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, здесь α_i — неотрицательные целые числа;

$$|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n; \quad x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

— одночлен степени $|\alpha|$ от n переменных;

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} M(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n+m)!/n!m!$$

— число одночленов степени не выше m от n переменных; $\varphi_j(x)$, $j=1, 2, \ldots$,— одночлены, занумерованные так, что одночлены меньшей степени имеют меньший номер, а одночлены одной и той же степени нумеруются в любом порядке, напр. лексикографическом. При указанной нумерации $\varphi_1(x)=1$, а среди $\varphi_j(x)$, $j=1, 2, \ldots, \mu$, содержатся все одночлены степени не выше m. Пусть $\varphi(x)$ — многочлен степени m. Множество точек в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих уравнению $\varphi(x)=0$, наз. алгебраич. гиперповерхностью порядка m.

Один из способов получения К. ф. основан на алгебраич. интерполировании. Точки $x^{(j)} \in \Omega$, $j=1, 2, \ldots, \mu$, выберем так, чтобы они не лежали на алгебраич. гиперповерхности порядка m или, что равносильно, чтобы матрица Вандермонда

$$V \stackrel{\text{def}}{=} [\varphi_1(x^{(j)}), \varphi_2(x^{(j)}), \ldots, \varphi_\mu(x^{(j)})]_{j=1}^{\mu}$$

была неособенной. Интерполяционный многочлен функции $f(x)$ по ее значениям в $x^{(j)}$ в форме Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{j=1}^{\mu} \mathcal{L}_j(x) f(x^{(j)}),$$

где $\mathcal{L}_j(x)$ — многочлен влияния j-го узла: $\mathcal{L}_j(x^{(i)})=\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Умножение приближенного равенства $f(x) \cong \mathcal{P}(x)$ на $p(x)$ и интегрирование по Ω приводит к К. ф. (1), в к-рой $N=\mu$ и

$$C_j = I(\mathcal{L}_j), \quad j=1, 2, \ldots, \mu. \qquad (2)$$

Существование интегралов (2) равносильно существованию моментов весовой функции $p_i \underset{\text{def}}{=} I(\varphi_i)$, $i=1, 2, \ldots, \mu$. Здесь и далее предполагается, что требуемые моменты $p(x)$ существуют. К. ф. (1), узлы к-рой не лежат на алгебраич. гиперповерхности порядка m, их число $N=\mu$ и коэффициенты определяются равенствами (2), наз. интерполяционной К. ф. Формула (1) обладает m-свойством, если она обращается в точное равенство, когда $f(x)$ — любой многочлен степени не выше m; интерполяционная К. ф. обладает m-свойством. Для того чтобы К. ф. (1), обладающая m-свойством и с числом узлов $N \leqslant \mu$, была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$\left[\varphi_1(x^{(j)}), \ldots, \varphi_\mu(x^{(j)})\right]_{j=1}^{N}$$

был равен N. При $n=1$ это условие выполнено, так что квадратурная формула, обладающая m-свойством и с числом узлов $N \leqslant m+1$, является интерполяционной. Фактич. построение интерполяционной К. ф. сводится к выбору узлов и вычислению коэффициентов. Коэффициенты C_j можно находить из линейной алгебраич. системы

$$\sum_{j=1}^{\mu} C_j \varphi_i(x^{(j)}) = p_i, \quad i=1, 2, \ldots, \mu,$$

которую получают, записывая, что К. ф. (1) (при $N=\mu$) точна для одночленов степени не выше m. Матрица системы совпадает с V'.

Пусть требуется построить К. ф. (1), к-рая обладает m-свойством, а число ее узлов меньше μ. За счет выбора коэффициентов это сделать невозможно, поэтому неизвестными в (1) считаются не только коэффициенты, но и узлы. Таким образом, имеется $N(n+1)$ неизвестных. Так как К. ф. должна обладать m-свойством, то это дает μ уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} C_j \varphi_i(x^{(j)}) = p_i, \quad i=1, 2, \ldots, \mu. \qquad (3)$$

Естественно потребовать, чтобы число неизвестных совпадало с числом уравнений: $N(n+1)=\mu$. Это равенство ориентировочно определяет число узлов искомой К. ф. Если $N=\mu/(n+1)$ — не целое, то полагаем $N=[\mu/(n+1)]+1$, где $[\mu/(n+1)]$ означает целую часть $\mu/(n+1)$. Требуемая К. ф. с указанным числом узлов не всегда существует. Если К. ф. существует, то она имеет в $(n+1)$ раз меньше узлов, чем интерполяционная К. ф. Однако в этом случае узлы и коэффициенты определяются из нелинейной системы уравнений (3). Метод неопределенных параметров построения К. ф. состоит в том, что К. ф. ищется в таком виде, к-рый приводит к упрощению системы (3). Это возможно в тех случаях, когда Ω и $p(x)$ обладают симметрией. Расположение узлов согласуется с симметрией Ω и $p(x)$, при этом симметричным узлам сопоставляются одинаковые коэффициенты. Упрощение системы (3) связано с риском: система (3) может иметь решение, а упрощенная — не имеет.

Пример. Пусть $\Omega = K_2 \underset{\text{def}}{=} \{-1 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1\}$, $p(x_1, x_2)=1$. Требуется построить К. ф. с 7-свойством; $n=2$, $\mu=M(2, 7)=36$ и число узлов равно 12. Узлы расположим следующим образом. Первую группу узлов образуют точки пересечения окружности с центром в начале координат и радиусом a с координатными осями. Вторая группа узлов состоит из точек пересечения окружности с тем же центром и радиусом b с прямыми $x_1=\pm x_2$. Третья группа узлов образуется как и вторая, при этом радиус окружности обозначается c. Коэффициенты, отвечающие узлам одной и той же группы, считаются одинаковыми и равными A, B, C для уз-

лов первой, второй и третьей групп соответственно. Такой выбор узлов и коэффициентов обеспечивает точность К. ф. для одночленов $x_1^i x_2^j$, у к-рых хоть одно из чисел i и j нечетно. Чтобы К. ф. имела 7-свойство, достаточно потребовать, чтобы она была точна для 1, x_1^2, x_1^4, $x_1^2x_2^2$, x_1^6, $x_1^4x_2^2$. Это приводит к нелинейной системе шести уравнений относительно шести неизвестных a, b, c, A, B, C. Решая ее, получаем К. ф., узлы к-рой принадлежат K_2 и коэффициенты положительны.

Пусть G — конечная подгруппа группы ортогональных преобразований $O(n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, оставляющих неподвижным начало координат. Множество Ω и функция $p(x)$ наз. инвариантными относительно G, если $g(\Omega)=\Omega$ и $p(g(x))=p(x)$ при $x\in\Omega$ для любого $g\in G$. Совокупность точек вида ga, где a — фиксированная точка $\mathbb{R}^n$ и g пробегает все элементы группы G, наз. орбитой, содержащей a. К. ф. (1) наз. инвариантной относительно G, если Ω и $p(x)$ инвариантны относительно G и совокупность ее узлов представляет собой объединение орбит, при этом узлам одной и той же орбиты сопоставляются одинаковые коэффициенты. Инвариантными относительно G множествами являются все пространство $\mathbb{R}^n$, шар и сфера с центром в начале координат, а если G — группа преобразований правильного многогранника U в себя, то инвариантен и U. Таким образом, инвариантные К. ф. можно рассматривать, когда в качестве Ω берутся $\mathbb{R}^n$, шар, сфера, куб и любой правильный многогранник, а в качестве $p(x)$ — любая инвариантная относительно G функция, напр., $p(r)$, где $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$. Теорема 1. Чтобы инвариантная относительно G К. ф. обладала m-свойством, необходимо и достаточно, чтобы она была точна для тех многочленов степени не выше m, к-рые инвариантны относительно G (см. [5]). Метод неопределенных параметров можно определить как метод построения инвариантных К. ф., обладающих m-свойством. В приведенном выше примере в качестве G можно взять группу симметрии квадрата. Теорема 1 имеет существенное значение при построении инвариантных К. ф.

Для простых областей интегрирования, таких, как куб, симплекс, шар, сфера, и для веса $p(x)=1$ можно построить К. ф. кратным применением квадратурных формул. Напр., когда $\Omega=K_n \overset{\text{def}}{=} \{-1\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=1, 2, \ldots, n\}$ — куб, то с помощью квадратурной формулы Гаусса с k узлами t_i и коэффициентами A_i может быть получена К. ф.

$$\int_{K_n} f(x)\,dx \cong \sum_{i_1,\ \ldots,\ i_n=1}^{k} A_{i_1}\ldots A_{i_n} f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}),$$

имеющая k^n узлов и точная для всех одночленов x^α таких, что $0\leqslant\alpha_i\leqslant 2k-1$, $i=1, 2, \ldots, n$, в частности для всех многочленов степени не выше $2k-1$. Число узлов таких К. ф. быстро возрастает. Этим фактом определяются границы их применимости.

Всюду в дальнейшем считается, что весовая функция сохраняет знак, для определенности

$$p(x)\geqslant 0 \text{ в } \Omega \text{ и } p_1>0. \qquad (4)$$

Положительность коэффициентов К. ф. с таким весом является ценным ее свойством. Теорема 2. Если область интегрирования Ω замкнута и $p(x)$ удовлетворяет (4), то существует интерполяционная К. ф. (1), обладающая m-свойством, $N\leqslant\mu$, с положительными коэффициентами и узлами, принадлежащими Ω. Вопрос о фактическом построении такой К. ф. остается открытым.

Теорема 3. Если К. ф. с весом, удовлетворяющим (4), имеет действительные узлы и коэффициенты и обладает m-свойством, то среди ее коэффициентов не менее $\lambda \overset{\text{def}}{=} M(n,\ l)$ положительных, $l=[m/2]$ — целая часть

числа $m/2$. При условиях теоремы 3 число λ является нижней границей для числа узлов:

$$N \geqslant \lambda.$$

Это неравенство остается справедливым и без предположения о действительности $x^{(j)}$ и C_j.

Среди К. ф. с m-свойством большой интерес представляют те, к-рые имеют наименьшее число узлов. В случае $m=1$, 2 такие формулы легко найти при любом n и для произвольных Ω и $p(x) \geqslant 0$, при этом наименьшее число узлов совпадает с нижней границей λ: равно 1 в первом случае и $n+1$ — во втором. При $m \geqslant 3$ наименьшее число узлов зависит от области и веса. Напр., при $m=3$ для области с центральной симметрией и $p(x)=1$ наименьшее число узлов равно $2n$, а для симплекса и $p(x)=1$ оно равно $n+2$. При $n \geqslant 3$ эти числа различны.

В силу (4)

$$(\varphi, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} I(\varphi\overline{\psi}) \qquad (5)$$

является скалярным произведением в пространстве многочленов. Пусть $\mathcal{P}_k$ — векторное пространство многочленов степени k, к-рые ортогональны в смысле скалярного произведения (5) ко всем многочленам степени не выше $k-1$. Размерность $\mathcal{P}_k$ равна $M(n-1, k)$ — числу одночленов степени k. Многочлены из $\mathcal{P}_k$ наз. ортогональными многочленами Ω и $p(x)$. Теорема 4. Чтобы существовала К. ф. (1), обладающая $(2k-1)$-свойством и с числом узлов $N=M(n, k-1)$, равным нижней границе, необходимо и достаточно, чтобы ее узлы были общими корнями всех ортогональных многочленов Ω и $p(x)$ степени k. Теорема 5. Если n ортогональных многочленов степени k имеют k^n конечных и попарно различных общих корней, то эти корни можно взять в качестве узлов К. ф. (1), к-рая обладает $(2k-1)$-свойством.

Погрешность К. ф. (1), в к-рой $p(x)=1$ и Ω ограничено, определяется равенством

$$l(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega f(x)\,dx - \sum_{j=1}^{N} C_j f(x^{(j)}).$$

Пусть B — банахово пространство функций такое, что $l(f)$ является линейным функционалом в B. Норма функционала $\|l\| = \sup\limits_{\|f\|=1} |l(f)|$ характеризует качество рассматриваемой К. ф. для всех функций пространства B. Другой подход к построению К. ф. основан на минимизации $\|l\|$ как функции узлов и коэффициентов искомой кубатурной формулы (при фиксированном числе узлов). Даже при $n=1$ реализация этого подхода связана с трудностями. Для любого $n \geqslant 2$ важные результаты получил С. Л. Соболев [4]. Вопрос о минимизации $\|l\|$ по коэффициентам при заданных узлах решается до конца; задача выбора узлов рассматривается в предположении, что узлы образуют параллелепипедальную решетку и минимизация осуществляется лишь за счет параметров этой решетки. В качестве B, в частности, берется пространство $L_2^m(\mathbb{R}^n)$, где $m > n/2$, при этом искомая К. ф. считается точной для многочленов степени не выше $m-1$.

Лит.: [1] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967; [2] Крылов В. И., Шульгина Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию, М., 1966; [3] Stroud A. H., Approximate calculation of multiple integrals, [N. Y.], 1971; [4] Соболев С. Л., Введение в теорию кубатурных формул, М., 1974; [5] его же, «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 5, с. 769—96; [6] Мысовских И. П., Интерполяционные кубатурные формулы, М., 1981.

И. П. Мысовских.

КУБИКА — плоская кривая 3-го порядка, т. е. множество точек плоскости (проективной, аффинной, евклидовой), однородные координаты x_0, x_1, x_2 к-рых (относительно проективной, аффинной или декартовой

системы координат) удовлетворяют однородному уравнению третьей степени

$$F(x) \equiv \sum_{i,\ j,\ k=0}^{2} a_{ijk} x_i x_j x_k = 0, \quad a_{ijk} = a_{jik} = a_{ikj}.$$

Количество касательных, к-рые можно провести к К. из находящейся вне ее точки, наз. к л а с с о м К. Коника

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i' = 0$$

наз. к о н и ч е с к о й (или п е р в о й) п о л я р о й точки $M'(x_0', x_1', x_2')$ — полюса; прямая

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i'} x_i = 0$$

наз. п р я м о л и н е й н о й (или в т о р о й) п о л я р о й точки относительно К. Если полюс M' лежит на К., то его прямолинейная поляра касается в точке M' К. и конической поляры точки M'. Г е с с и а н о й К. наз. множество точек, конич. поляры к-рых распадаются на две прямые; она определяется уравнением

$$H_3 \equiv \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_j}\right) = 0.$$

К. пересекается со своей гессианой в девяти общих точках перегиба. Прямые, на к-рые распадаются конич. поляры точек гессианы, а также прямые, соединяющие пары соответствующих точек гессианы, огибают кривую 6-го порядка 3-го класса — к э л и а н у К. Все К. плоскости, проходящие через девять точек перегиба К., образуют с и з и г е т и ч е с к и й п у ч о к, содержащий гессианы всех кривых пучка и четыре кривые, каждая из к-рых распадается на три прямые и образует с и з и г е т и ч е с к и й т р е у г о л ь н и к. Конич. поляра точки перегиба M' распадается на две прямые: касательную к К. в точке M' и г а р м о н и ч е с к у ю п о л я р у точки M' — множество точек, гармонически сопряженных с M' относительно двух точек пересечения К. с секущей, проведенной через M'. Гармонич. поляры трех лежащих на одной прямой точек перегиба пересекаются в одной точке. Существуют различные проективные, аффинные и метрич. классификации К.: по типам канонич. уравнений; по характеру несобственных точек К.; по характеру асимптот и др.

Из К. на евклидовой плоскости наиболее известны: декартов лист $(x^3+y^3-3axy=0)$, локон Аньези $(y(a^2+x^2)=a^3)$, кубич. парабола $(y=ax^3)$, полукубич. парабола $(y^2=ax^3)$, строфоида $(y^2(a-x)=x^2(a+x))$, циссоида Диоклеса $(y^2(2a-x)=x^3)$, трисектриса $(x(x^2+y^2)=a(3x^2-y^2))$, конхоида Слюза $(a(x-a)(x^2+y^2)=k^2x^2)$. В алгебраич. геометрии кубикой наз. как *кубическую гиперповерхность*, так и пространственную кубическую кривую.

Лит.: [1] С м о г о р ж е в с к и й А. С., С т о л о в а Е. С., Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, М., 1961.

В. С. Малаховский.

КУБИЧЕСКАЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ — проективное алгебраич. многообразие, задаваемое однородным уравнением $F_3(x_0, \ldots, x_n)=0$ 3-й степени с коэффициентами из нек-рого основного поля k.

К у б и ч е с к и е к р и в ы е. Неприводимая кубич. кривая является либо гладкой (в этом случае ее канонич. класс равен 0, а род 1), либо имеет одну особую двойную точку (в этом случае она рациональна). Кубич. кривые — кривые наименьшей степени, для к-рых существуют *модули*. Каждая гладкая кубич. кривая X над алгебраически замкнутым полем k, характеристика к-рого отлична от 2 и 3, бирациональными преобразованиями может быть приведена к вейерштрассовой форме, в неоднородных координатах плоскости (x, y) имеющей вид

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

где $g_2,\ g_3 \in k,\ g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Две кубич. кривые с коэффи-

циентами (g_2, g_3) и (g_2', g_3') в вейерштрассовой форме изоморфны тогда и только тогда, когда

$$\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}=\frac{g_2'^2}{g_2'^3-27g_3'^2}.$$

Функция

$$j=\frac{1728g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}$$

принимает любые значения из k и зависит только от кривой X, она наз. а б с о л ю т н ы м и н в а р и а н т о м кубич. кривой X.

На множестве точек $X(k)$ кубич. кривой определен бинарный закон композиции $(x_1, x_2) \to x_1 \circ x_2$, где $x_1 \cdot x_2$ — третья точка пересечения кривой X с прямой, проходящей через точки x_1 и x_2. Если фиксировать нек-рую точку $x_0 \in X(k)$, то композиция

$$(x_1, x_2) \longrightarrow x_0 \circ (x_1 \circ x_2)$$

превращает множество $X(k)$ в абелеву группу с нулем x_0. Кубич. кривая, снабженная этой структурой, является одномерным абелевым многообразием (эллиптич. кривой).

В случае, когда $k=\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, $X(\mathbb{C})$ есть риманова поверхность рода 1, т. е. одномерный комплексный тор — факторгруппа $\mathbb{C}/\Gamma(X)$, где $\Gamma(X)$ — двумерная решетка периодов. Поле k рациональных функций кривой X в этом случае изоморфно полю эллиптич. функций на $\mathbb{C}$ с решеткой периодов $\Gamma(X)$. Коэффициенты g_2 и g_3 интерпретируются как модулярные формы весов 4 и 6 соответственно, совпадающие с точностью до постоянного множителя с формами, определяемыми рядами Эйзенштейна наименьших весов. Функция j в этом случае есть не что иное, как модулярный инвариант.

Для кубич. кривых над алгебраически незамкнутым полем k также развита содержательная арифметич. теория (см. [2]). Существенную часть ее достижений составляют теорема Морделла — Вейля, теория комплексного умножения и когомологическая теория главных однородных пространств. Основные нерешенные (1982) проблемы этой теории: проблема ограниченности ранга над полем алгебраич. чисел, гипотеза конечности для группы главных однородных локально тривиальных пространств, гипотеза Берча и Суиннертон-Дайера о дзета-функции, гипотеза Вейля об униформизации и др.

К у б и ч е с к и е п о в е р х н о с т и. Над алгебраически замкнутым полем k каждая неприводимая кубич. поверхность (если она не вырождается в конус) является рациональной поверхностью. Класс гиперплоского сечения h поверхности F совпадает с каноническим классом ($-K_F$). Любая гладкая кубич. поверхность получается из проективной плоскости P^2 раздутием (т. е. моноидальным преобразованием) 6 точек, никакие 3 из к-рых не лежат на одной прямой, а все 6 не лежат на одной конике. Соответствующее бирациональное отображение $\varphi\colon P^2 \to F$ задается линейной системой кубич. кривых, проходящих через эти 6 точек. На F лежат 27 прямых, каждая из к-рых является исключительной (см. *Исключительное подмногообразие*). Ими исчерпываются все исключительные кривые на F. Конфигурация 27 прямых богата симметриями: группа автоморфизмов соответствующего графа изоморфна группе Вейля E_6. Кубич. поверхности принадлежат к серии п о в е р х н о с т е й д е л ь П е ц ц о — проективных поверхностей с обильным обратным канонич. классом.

Над алгебраически незамкнутым полем k имеются гладкие кубич. поверхности F, для к-рых не существует бирационального изоморфизма с P^2 над k (т. е. F не

рационален над k). Среди них есть поверхности, обладающие k-точками, в этом случае они унирациональны над k. Такие кубич. поверхности являются контрпримером для *Люрота проблемы* о поверхностях над незамкнутыми полями. Над нек-рыми k существуют минимальные кубич. поверхности. Критерий минимальности Сегре [6]: $\mathrm{Pic}(F)\simeq\mathbb{Z}$. Вычислена группа бирациональных автоморфизмов минимальной кубич. поверхности (найдены ее образующие и определяющие соотношения) и развита арифметич. теория кубич. поверхностей [4]. Для описания множества точек $F(k)$ привлечены неассоциативные структуры: квазигруппы и лупы Муфанг.

Кубические гиперповерхности размерности 3. Все гладкие К. г. размерности $\geqslant 2$ над алгебраически замкнутым полем унирациональны. В 80-е гг. 19 в. был поставлен вопрос: будет ли гладкая трехмерная К. г. рациональна? На него получен отрицательный ответ [3]. Тем самым дано и отрицательное решение проблемы Люрота для трехмерных многообразий. С каждой гладкой К. г. V размерности 3 связано главное поляризованное пятимерное абелево многообразие — промежуточный якобиан $J_3(V)$. В случае $k=\mathbb{C}$ он определяется как комплексный тор

$$H^{1,2}(V,\mathbb{C})/H^3(V,\mathbb{Z}),$$

где $H^{1,2}(V,\mathbb{C})$ — соответствующая компонента Ходжа в разложении пространства когомологий $H^3(V,\mathbb{C})$. Для доказательства нерациональности V было показано, что $J_3(V)$ не является якобианом никакой кривой рода 5. Нерациональность К. г. над полем конечной характеристики установлена в [5].

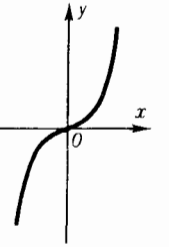
К. г. V однозначно определяется своей *Фано поверхностью* $\Phi(V)$. Для $\Phi(V)$ справедлива *Торелли теорема* (и тем самым теорема Торелли справедлива и для V). Нерешенной проблемой о К. г. размерности 3 является проблема описания ее группы бирациональных автоморфизмов.

Неизвестно (1982), будет ли каждая гладкая К. г. размерности $\geqslant 4$ рациональна. Рациональность установлена в этом случае для нек-рых К. г. специального вида; напр.:

$$\sum_{i=0}^{2m+1} a_i x_i^3 = 0, \quad m \geqslant 2.$$

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. [с нем.], М., 1968; [2] Касселс Дж., «Математика», 1968, т. 12, № 1, с. 113—60; т. 12, № 2, с. 3—48; [3] Клеменс К. Г., Гриффитс Ф. А., там же, 1972, т. 16, № 6, с. 3—32; 1973, т. 17, № 1, с. 3—41; [4] Манин Ю. И., Кубические формы, М., 1972; [5] Murre J. P., «Comp. math.», 1973, v. 27, p. 63—82; [6] Segre B., The non-singular cubic surfaces, Oxf., 1942; [7] Тюрин А. Н., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 5, с. 3—50; [8] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, с. 498—529; [9] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

В. А. Исковских.



КУБИЧЕСКАЯ ПАРАБОЛА — плоская кривая (см. рис.), выражаемая в прямоугольной системе координат уравнением $y=ax^3$.

КУБИЧЕСКАЯ ФОРМА — однородный многочлен третьей степени от нескольких переменных с коэффициентами из нек-рого фиксированного поля или кольца. Пусть k — нек-рое поле и $F_3(x_0, \ldots, x_n)$ — К. ф. с коэффициентами из k (говорят, что это — К. ф. над k). Уравнение

$$F_3(x_0, \ldots, x_n)=0$$

определяет *кубическую гиперповерхность* в проективном пространстве P^n, что сводит алгебро-геометрическую теорию К. ф. над алгебраически замкнутым полем k к теории кубических гиперповерхностей (см. [1]).

Арифметич. теория К. ф. над числовыми полями (и их кольцами целых) развита пока (1982) недостаточно полно по сравнению с богатой и содержательной арифметич. теорией квадратичных форм. Для К. ф. от двух переменных арифметич. теория — это теория кубич. расширений числовых полей (см. [2]). Для К. ф. от трех переменных арифметич. теория — это часть арифметич. теории эллиптич. кривых (см. [3]). В частности, для К. ф. от трех переменных известны примеры нарушения принципа Хассе. Для К. ф. от четырех переменных (см. [1, 4, 6]) также известны примеры нарушения принципа Хассе. Для К. ф. от большего числа переменных нет никакой общей теории.

В чисто алгебраич. теории К. ф. кроме результатов о структуре множеств точек на кубич. гиперповерхностях имеется еще ряд результатов классич. теории инвариантов. А именно, известно строение алгебры (абсолютных) инвариантов К. ф. от двух и трех переменных; в этих случаях она не имеет сизигий и является алгеброй многочленов соответственно от одного (степени 4) и двух (степени 4 и 6) алгебраич. независимых однородных образующих. Если число переменных больше трех, указанная алгебра имеет сизигии [5] и устроена весьма сложно. Орбиты, их стабилизаторы и канонич. представители, а также семейства орбит относительно естественного действия группы SL_n на пространстве всех К. ф. от трех и четырех переменных изучались А. Пуанкаре [6].

Лит.: [1] Манин Ю. И., Кубические формы. Алгебра, геометрия, арифметика, М., 1972; [2] Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К., Теория иррациональностей третьей степени, М.— Л., 1940 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 11); [3] Касселс Дж., «Математика», 1968, т. 12, № 1, с. 113—60; № 2, с. 3—48; [4] Segre B., «Math. Notae», [Univ. Rosario], 1951, v. 11, p. 1—68; [5] Кац В. Г., Попов В. Л., Винберг Е. Б., «С. r. Acad. sci.», 1976, t. 283, p. 875—78; [6] Пуанкаре А., Избр. труды, пер. с франц., т. 2, М., 1972, с. 819—900.

В. А. Исковских, В. Л. Попов.

КУБИЧЕСКИЙ ВЫЧЕТ по модулю m — целое число a, для к-рого *сравнение* $x^3 \equiv a \pmod m$ разрешимо. Если указанное сравнение не разрешимо, то число a наз. кубическим невычетом по модулю m. В случае простого модуля p вопрос о разрешимости сравнения $x^3 \equiv a \pmod p$ может быть выяснен с помощью критерия Эйлера: для разрешимости сравнения $x^3 \equiv a \pmod p$, $(a,p)=1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$a^{\frac{p-1}{q}} \equiv 1 \pmod p,$$

где $q=(3,\ p-1)$, и при выполнении последнего условия исходное сравнение имеет q различных по модулю p решений. Из критерия следует, в частности, что среди чисел $1, 2, \ldots, p-1$ имеется ровно $(q-1)\frac{p-1}{q}$ кубических невычетов и $\frac{p-1}{q}$ К. в. по простому модулю p.

С. А. Степанов.

КУБИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — алгебраическое уравнение третьей степени, т. е. уравнение вида

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

где $a\neq 0$. Заменяя в этом уравнении x новым неизвестным y, связанным с x равенством $x=y-b/3a$, К. у. можно привести к более простому (каноническому) виду:

$$y^3+py+q=0,$$

где

$$p=-\frac{b^2}{3a^2}-\frac{c}{a},$$

$$q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a},$$

решение же этого уравнения можно получить с помощью *Кардано формулы*; таким образом, К. у. решается в радикалах.

Решение К. у. было найдено в 16 в. В начале 16 в. С. Ферро (S. Ferro) решил уравнение вида $x^3+px=q$, где $p>0$, $q>0$, но не опубликовал решения. Затем Н. Тарталья (N. Tartaglia) заново открыл результат С. Ферро, а также дал решение уравнения вида $x^3=px+q$ ($p>0$, $q>0$) и без доказательства сообщил, что к уравнению этого вида сводится уравнение вида $x^3+q=px$, где $p>0$, $q>0$. Свои результаты Н. Тарталья сообщил Дж. Кардано (G. Cardano), к-рый опубликовал решение уравнения третьей степени общего вида в 1545.

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975.

И. В. Проскуряков.

КУБОВИДНЫЙ КОНТИНУУМ, n-кубовидный континуум,— компакт (метризуемый бикомпакт), обладающий для любого $\varepsilon>0$ ε-отображением на обычный куб I^n. Если компакт X является пределом счетного спектра из компактов, вложимых в I^n, то X является подмножеством К. к. В классе К. к. существует универсальный элемент, т. е. такой К. к. U, что каждый К. к. гомеоморфен нек-рому подпространству пространства U.

Лит.: [1] Пасынков Б. А., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4, с. 91—100.

Л. Г. Замбахидзе.

КУЗЕНА ПРОБЛЕМЫ — проблемы, названные по имени П. Кузена [1], к-рый впервые решил их для простейших областей в пространстве n комплексных переменных $\mathbb{C}^n$.

Первая (аддитивная) проблема Кузена (I К. п.). Дано покрытие $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$ комплексного многообразия M открытыми подмножествами U_α и в каждом U_α задана мероморфная функция f_α, причем функции $f_{\alpha\beta}=f_\alpha-f_\beta$ голоморфны в $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta$ для всех индексов α, β (условие согласования). Требуется построить функцию f, мероморфную на всем многообразии M и такую, что функции $f-f_\alpha$ голоморфны в U_α для всех α. Другими словами, надо построить глобальную мероморфную функцию с локально заданными полярными особенностями.

Функции $f_{\alpha\beta}$, определенные в попарных пересечениях $U_{\alpha\beta}$ элементов покрытия $\mathcal{U}$, определяют голоморфный коцикл 1-го порядка для $\mathcal{U}$, т. е. удовлетворяют условию

$$f_{\alpha\beta}+f_{\beta\alpha}=0 \text{ в } U_{\alpha\beta},$$

$$f_{\alpha\beta}+f_{\beta\gamma}+f_{\gamma\alpha}=0 \text{ в } U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma \qquad (1)$$

для всех α, β, γ. Более общая проблема (так наз. I К. п. в когомологической формулировке) заключается в следующем. На попарных пересечениях $U_{\alpha\beta}$ покрытия $\mathcal{U}$ заданы голоморфные функции $f_{\alpha\beta}$, удовлетворяющие условию коцикличности (1). Требуется найти функции h_α, голоморфные в U_α и такие, что

$$f_{\alpha\beta}=h_\beta-h_\alpha \qquad (2)$$

для всех α, β. Если $f_{\alpha\beta}$ соответствуют данным I К. п. и указанные h_α существуют, то функция

$$f=\{f_\alpha+h_\alpha \text{ в } U_\alpha\}$$

определена и мероморфна на всем многообразии M и является решением данной I К. п. Обратно, если f — решение I К. п. с данными $\{f_\alpha\}$, то голоморфные функции $h_\alpha=f-f_\alpha$ удовлетворяют (2). Таким образом, конкретная I К. п. разрешима тогда и только тогда, когда соответствующий ей коцикл является голоморфной когранicей (т. е. выполняется условие (2)).

I К. п. можно формулировать в локализованном варианте. Каждому набору данных $\{U_\alpha, f_\alpha\}$ с условием согласования соответствует однозначно определенное глобальное сечение пучка $\mathcal{M}/\mathcal{O}$, где $\mathcal{M}$ и $\mathcal{O}$ — пучки ростков мероморфных и голоморфных функций соответственно, причем любое глобальное сечение $\mathcal{M}/\mathcal{O}$ соответствует какой-нибудь I К. п. (значение сечения $\varkappa$,

соответствующего данным $\{f_\alpha\}$, в точке $z \in U_\alpha$ есть элемент $\mathscr{M}_z/\mathscr{G}_z$ с представителем f_α). Отображение глобальных сечений $\Gamma(\mathscr{M}) \xrightarrow{\varphi} \Gamma(\mathscr{M}/\mathscr{G})$ переводит каждую мероморфную на M функцию f в сечение $\varkappa_f$ пучка $\mathscr{M}/\mathscr{G}$, где $\varkappa_f(z)$ — класс в $\mathscr{M}_z/\mathscr{G}_z$ ростка f в точке z, $z \in M$. Локализованная I К. п. заключается в том, чтобы для данного глобального сечения $\varkappa$ пучка $\mathscr{M}/\mathscr{G}$ найти мероморфную на M функцию f (т. е. сечение $\mathscr{M}$) такую, что $\varphi(f)=\varkappa$.

Теоремы о разрешимости I К. п. можно рассматривать как многомерное обобщение *Миттаг-Леффлера теоремы* о построении мероморфной функции с данными полярными особенностями. I К. п. в когомологич. формулировке с фиксированным покрытием $\mathscr{U}$ разрешима (для произвольных согласованных $\{f_\alpha\}$) тогда и только тогда, когда $H^1(\mathscr{U}, \mathscr{G})=0$ (когомологии Чеха для покрытия $\mathscr{U}$ с голоморфными коэффициентами тривиальны).

Конкретная I К. п. на M разрешима тогда и только тогда, когда соответствующее ей сечение $\mathscr{M}/\mathscr{G}$ принадлежит образу отображения φ. Произвольная I К. п. на M разрешима тогда и только тогда, когда φ — отображение на (сюръективно). На любом комплексном многообразии M имеет место точная последовательность

$$\Gamma(\mathscr{M}) \xrightarrow{\varphi} \Gamma(\mathscr{M}/\mathscr{G}) \longrightarrow H^1(M, \mathscr{G}).$$

Если когомологии Чеха для M с коэффициентами в $\mathscr{G}$ тривиальны (т. е. $H^1(\mathscr{M}, \mathscr{G})=0$), то φ — отображение на и $H^1(\mathscr{U}, \mathscr{G})=0$ для любого покрытия $\mathscr{U}$ многообразия M. Таким образом, если $H^1(M, \mathscr{G})=0$, то на M разрешима любая I К. п. (в классической, когомологической и локализованной формулировках). В частности, I К. п. разрешима во всех областях голоморфности и на *Штейна многообразиях*. Если область $D \subset \mathbb{C}^2$, то I К. п. в D разрешима тогда и только тогда, когда D — область голоморфности. Пример неразрешимой I К. п.: $M=\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, $U_\alpha=\{z_\alpha \neq 0\}$, $\alpha=1, 2$, $f_1=(z_1 z_2)^{-1}$, $f_2=0$.

Вторая (мультипликативная) проблема Кузена (II К. п.). Дано открытое покрытие $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ комплексного многообразия M и в каждом U_α задана мероморфная функция f_α, $f_\alpha \not\equiv 0$ на каждой компоненте U_α, причем функции $f_{\alpha\beta}=f_\alpha f_\beta^{-1}$ голоморфны и нигде не равны нулю в $U_{\alpha\beta}$ для всех α, β (условие согласования). Требуется построить мероморфную на M функцию f такую, что функции $f f_\alpha^{-1}$ голоморфны и нигде не равны нулю в U_α для всех α.

Когомологическая формулировка II К. п. Дано покрытие $\mathscr{U}$ и в попарных пересечениях $U_{\alpha\beta}$ заданы голоморфные нигде не равные нулю функции $f_{\alpha\beta}$, образующие мультипликативный коцикл первого порядка, т. е.

$$f_{\alpha\beta} f_{\beta\alpha} = 1 \text{ в } U_{\alpha\beta},$$
$$f_{\alpha\beta} f_{\beta\gamma} f_{\gamma\alpha} = 1 \text{ в } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

Требуется найти функции h_α, голоморфные и нигде не равные нулю в U_α такие, что $f_{\alpha\beta}=h_\beta h_\alpha^{-1}$ в $U_{\alpha\beta}$ для всех α, β. Если коцикл $\{f_{\alpha\beta}\}$ соответствует данным II К. п. и указанные h_α существуют, то функция $f=\{f_\alpha h_\alpha$ в $U_\alpha\}$ определена и мероморфна всюду на M и является решением данной II К. п. Обратно, если данная II К. п. разрешима, то соответствующий ей коцикл является голоморфной когранicей.

Локализованная II К. п. Каждому набору данных $\{U_\alpha, f_\alpha\}$ II К. п. соответствует однозначно определенное глобальное сечение пучка $\mathscr{M}^*/\mathscr{G}^*$ (аналогично I К. п.), где $\mathscr{M}^*=\mathscr{M} \setminus \{0\}$ (0 — нулевое сечение) — мультипликативный пучок ростков мероморфных функций и $\mathscr{G}^*$ — подпучок $\mathscr{G}$, у к-рого каждый слой $\mathscr{G}_z^*$ состоит из ростков голоморфных функций,

отличных от нуля в точке z. Отображение глобальных сечений

$$\Gamma(\mathscr{M}^*) \xrightarrow{\psi} \Gamma(\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*)$$

сопоставляет мероморфной функции f сечение $\varkappa_f^*$ пучка $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$, где $\varkappa_f^*(z)$ — класс в $\mathscr{M}_z^*/\mathscr{O}_z^*$ ростка f в точке z, $z \in M$. Локализованная II К. п. заключается в следующем: дано глобальное сечение $\varkappa^*$ пучка $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$, требуется найти мероморфную функцию f на M, $f \not\equiv 0$ на компонентах M (т. е. глобальное сечение $\mathscr{M}^*$), такую, что $\psi(f)=\varkappa^*$.

Сечениям $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ однозначно соответствуют *дивизоры*, поэтому пучок $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^* = \mathscr{D}$ наз. пучком ростков дивизоров. Дивизор на комплексном многообразии M — это формальная локально конечная сумма $\Sigma k_j \Delta_j$, где k_j — целые числа и Δ_j — аналитические подмножества M чистой коразмерности 1. Каждой мероморфной функции f соответствует дивизор, слагаемые к-рого — неприводимые компоненты нулевого и полярного множеств f с соответствующими кратностями k_j, причем кратности нулей берутся со знаком плюс, а кратности полюсов — со знаком минус. Отображение ψ сопоставляет каждой функции f ее дивизор (f); такие дивизоры наз. собственными. II К. п. в терминах дивизоров заключается в следующем: на многообразии M задан дивизор Δ, требуется построить мероморфную на M функцию f такую, что $\Delta = (f)$.

Теоремы о разрешимости II К. п. можно рассматривать как многомерные обобщения теоремы Вейерштрасса о построении мероморфной функции с данными нулями и полюсами. Аналогично I К. п., для разрешимости всякой II К. п. в когомологич. формулировке необходимо и достаточно условие $H^1(M, \mathscr{O}^*)=0$. К сожалению, пучок $\mathscr{O}^*$ не когерентен, и это условие менее эффективно. При попытке свести данную II К. п. к I К. п. путем логарифмирования возникает препятствие в виде целочисленного коцикла 2-го порядка и получается точная последовательность

$$H^1(M, \mathscr{O}) \longrightarrow H^1(M, \mathscr{O}^*) \xrightarrow{\alpha} H^2(M, \mathbb{Z}),$$

где $\mathbb{Z}$ — постоянный пучок целых чисел. Таким образом, если $H^1(M, \mathscr{O})=H^2(M, \mathbb{Z})=0$, то на M разрешима любая II К. п., любой дивизор является собственным. Если M — многообразие Штейна, то α — изоморфизм, поэтому топологич. условие $H^2(M, \mathbb{Z})=0$ на многообразии Штейна M является необходимым и достаточным для разрешимости II К. п. в когомологич. формулировке. Сквозное отображение $c=\alpha \circ \beta$,

$$\Gamma(\mathscr{D}) \xrightarrow{\beta} H^1(M, \mathscr{O}^*) \xrightarrow{\alpha} H^2(M, \mathbb{Z})$$

сопоставляет каждому дивизору Δ элемент $c(\Delta)$ группы $H^2(M, \mathbb{Z})$, к-рый наз. классом Чжэня дивизора Δ. Конкретная II К. п., соответствующая дивизору Δ, разрешима при условии $H^1(M, \mathscr{O})=0$ тогда и только тогда, когда класс Чжэня дивизора Δ тривиален, т. е. $c(\Delta)=0$. На многообразии Штейна отображение c сюръективно, более того, любой элемент из $H^2(M, \mathbb{Z})$ имеет вид $c(\Delta)$ для нек-рого дивизора Δ с положительными кратностями k_j. Таким образом, препятствия для решения II К. п. на многообразии Штейна M полностью описываются группой $H^2(M, \mathbb{Z})$.

Примеры. 1) $M=\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1=z_2,\ |z_1|=1\}$; I К. п. неразрешима, II К. п. неразрешима, напр. для дивизора $\Delta = M \cap \{z_1=z_2,\ |z_1|<1\}$ с кратностью 1.

2) $M=\{|z_1^2+z_2^2+z_3^2-1|<1\} \subset \mathbb{C}^3$, Δ — одна из компонент пересечения M плоскостью $z_2=iz_1$ с кратностью 1; II К. п. неразрешима (M — область голоморфности, I К. п. разрешима).

3) I К. п. и II К. п. разрешимы в областях $D = D_1 \times \ldots \times D_n \subset \mathbb{C}^n$, где D_j — плоские области и все D_j, кроме, быть может, одной, односвязны.

Лит.: [1] Cousin P., «Acta math.», 1895, v. 19, p. 1—62; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [3] Таннинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969.

Е. М. Чирка.

КУММЕРА ГИПОТЕЗА — предположение о поведении кубической *Гаусса суммы*

$$\tau(\chi) = \sum_{n=0}^{p-1} \chi(n,\ p)\, e^{\pi i n/p},$$

где $\chi(n,\ p) = \exp(2\pi i \operatorname{ind} n/3)$ — кубический характер по модулю $p \equiv 1 \pmod 3$, а p — простое число. Известно, что

$$\tau(\chi) = \sqrt{-p} e^{i \arg \tau(\chi)}.$$

При этом $\arg \tau(\chi)$ лежит либо в первом, либо в третьем, либо в пятом секстанте. В соответствии с этим Э. Куммер (E. Kummer) разбил все простые числа $p \equiv 1 \pmod 3$ на три класса P_1, P_3 и P_5. Согласно К. г. в каждом из классов P_1, P_5 и P_3 находится бесконечное множество простых чисел, причем эти классы имеют соответственно асимптотич. плотности $^1/_2$, $^1/_3$ и $^1/_6$. Существуют различные обобщения К. г. на характеры более высокого порядка, чем 3. К. г. доказана в модифицированном виде (см. [3]).

Лит.: [1] Хассе Г., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953; [2] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971; [3] Heath-Brown D. R., Patterson S. I. «J. reine und angew. Math.», 1979, Bd 130, S. 111—30.

Б. М. Бредихин.

КУММЕРА ПОВЕРХНОСТЬ — алгебраич. поверхность четвертого порядка и класса, сама себе взаимная, имеющая 16 двойных точек, из к-рых 16 групп (по 6 точек каждая) расположены в одной двойной касательной плоскости к поверхности (т. е. плоскости, касающейся поверхности по конич. сечению). Уравнение 16-й степени, определяющее двойной элемент, приводится к одному уравнению 6-й степени и нескольким квадратным. Найдена Э. Куммером (E. Kummer, 1864). К. п. принадлежит классу *KЗ-поверхностей* и выделяется среди них условием существования на ней 16 неприводимых рациональных кривых.

Лит.: [1] Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., М.—Л., 1937; [2] Hudson R., Kummer's quartic surface, Camb., 1905; [3] Enriques F., Le superficie algebriche, Bologna, 1949.

М. И. Войцеховский.

КУММЕРА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — одно из преобразований числовых рядов, улучшающее сходимость; предложено Э. Куммером (E. Kummer). Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$$

— сходящиеся ряды и пусть существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \gamma \neq 0.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \gamma B + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \gamma \frac{b_k}{a_k}\right) a_k.$$

Если сумма B известна, то К. п. может оказаться полезным при вычислениях, так как ряд в правой части сходится быстрее ряда в левой.

Лит.: [1] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., т. 2, М., 1970.

В. В. Сенатов.

КУММЕРА ПРИЗНАК — общий признак сходимости рядов с положительными членами, предложенный Э. Куммером (E. Kummer). Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (*)$$

и $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — произвольная последовательность положительных чисел такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ расходится. Если для $n > N$ выполняется неравенство

$$K_n \equiv c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geqslant \delta,$$

где δ — постоянное положительное число, то ряд (*) сходится. Если $K_n \leqslant 0$ для $n > N$, то ряд (*) расходится.

В предельной форме К. п. формулируется следующим образом: пусть

$$\lim_{n \to \infty} K_n = K,$$

тогда при $K > 0$ ряд (*) сходится, при $K < 0$ — расходится.

Лит.: [1] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., т. 2, М., 1970.

Е. Г. Соболевская.

КУММЕРА РАСШИРЕНИЕ — расширение поля k характеристики $p \geqslant 0$ вида

$$K = k\left(\sqrt[n]{\alpha_1}, \ldots, \sqrt[n]{\alpha_t}\right), \qquad (1)$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in k$, n — некоторое натуральное число, причем предполагается, что поле k содержит первообразный корень ζ_n из 1 степени n (в частности, n взаимно просто с p при $p \neq 0$). К. р. названы по имени Э. Куммера (E. Kummer), впервые подробно рассмотревшего расширения вида $\mathbb{Q}(\zeta_n, \sqrt[n]{\alpha})$, где $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел и $\alpha \in \mathbb{Q}(\zeta_n)$.

Основной результат теории К. р. состоит в том, что для поля k, содержащего первообразный корень ζ_n, конечное расширение K/k является куммеровым (для данного n) тогда и только тогда, когда K/k — нормальное абелево расширение и группа Галуа $G(K/k)$ имеет период n. Любое К. р. поля k полностью характеризуется своей группой Куммера $A(K/k) = B/k^*$, где k^* — мультипликативная группа поля k, а

$$B = \{x \in K^* \mid x^n \in k^*\}.$$

Существует невырожденное спаривание Куммера, т. е. отображение

$$G(K/k) \times A(K/k) \longrightarrow \mu(n),$$

где $\mu(n)$ — подгруппа группы k^*, порожденная ζ_n. Для $\sigma \in G(K/k)$ и $a \in A(K/k)$ это спаривание задается формулой $(\sigma, a) = \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^{\sigma-1} \in \mu(n)$, где $\alpha \in k$, а $\sqrt[n]{\alpha} \in B$ — некоторый представитель элемента a. Это спаривание определяет канонический изоморфизм

$$G(K/k) \overset{\varphi}{\simeq} \mathrm{Hom}\,(A(K/k), \mu(n)). \qquad (2)$$

Другими словами, всякий автоморфизм $\sigma \in G(K/k)$ определяется своим действием на корни $\sqrt[n]{\alpha_i}$ в (1), и это действие может быть произвольным, если только корни $\sqrt[n]{\alpha_i}$ независимы. В частности, если $G(K/k)$ — циклич. группа, то $K = k\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)$, где $\alpha \in k^*$.

Пусть k — нормальное расширение поля k_0 и $K \subset k$. Поле K тогда и только тогда нормально над k_0, когда $A(K/k)$ переходит в себя под действием $G(k/k_0)$. В этом случае изоморфизм (2) является $G(k/k_0)$-операторным, т. е. если $\tau \in G(k/k_0)$, $\sigma \in G(K/k)$ и

$$\varphi(\sigma) = \chi : A(K/k) \longrightarrow \mu(n),$$

то $\varphi(\sigma^\tau) = \tau\chi$, где $(\tau\chi)(a) = \tau(\chi(\tau^{-1}a))$. (Группа $G(k/k_0)$ действует на $G(K/k)$ с помощью сопряжения в $G(K/k_0)$.) Это обстоятельство позволяет сводить многие вопросы об абелевых расширениях периода n поля k к теории К. р. даже в том случае, когда $\zeta_n \notin k$. А имен-

но, если K/k — такое расширение, то расширение $K(\zeta_n)/k(\zeta_n)$ является куммеровым, причем его группа Куммера характеризуется условием: для $\tau \in G(k(\zeta_n)/k)$ и $a \in A(K(\zeta_n)/k(\zeta_n))$ будет $\tau(a)=a^i$, где i — натуральное число, определенное по модулю n условием $\tau(\zeta_n)=\zeta_n^i$.

Основные результаты о К. р. могут быть получены как следствие *Гильберта теоремы* о циклич. расширениях, утверждающей тривиальность одномерной группы *Галуа когомологий* $H^1(G(K/k), K^*)$.

Теория К. р. переносится на случай бесконечных абелевых расширений периода n. При этом спаривание Куммера устанавливает двойственность Понтрягина между проконечной группой $G(K/k)$ (наделенной топологией Крулля) и дискретной группой $A(K/k)$ (см. [1] гл. 8, § 8; [2] гл. 3, § 2).

Теория К. р., называемая также т е о р и е й К у м м е р а, имеет аналог для случая расширений вида (1), но с $n=p$ (так наз. т е о р и я А р т и н а — Ш р е й е р а). Роль группы $\mu(n)$ в этом случае играет аддитивная группа простого подполя F_p поля k. Основное утверждение этой теории: любое абелево расширение K периода p поля k имеет вид $k(\beta_1, \ldots, \beta_t)$, где $\beta_1, \ldots, \beta_t$ — корни уравнений вида $x^p-x=a$ (см. [1] гл. 8, § 8). Существует также принадлежащее Э. Витту (E. Witt) обобщение этой теории для случая $n=p^s$, где $s>1$, использующее *Витта векторы*.

Имеется, наконец, попытка построения неабелевой «теории Куммера» [3], где роль мультипликативной группы поля играет группа матриц $\mathrm{GL}(n, K)$.

Лит.: [1] Л е н г С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [3] T a k a h a s h i S., «J. Math. Soc. Japan», 1968, v. 20, № 1—2, p. 365—70.

Л. В. Кузьмин.

КУММЕРА ТЕОРЕМА: пусть k — поле частных дедекиндова кольца A, K — расширение поля k степени n, B — целое замыкание A в K и $\mathfrak{p}$ — некоторый простой идеал кольца A; пусть $K=k[\theta]$, где $\theta \in B$, и элементы $1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}$ образуют базис A-модуля B; наконец, пусть $f(x)$ — минимальный многочлен элемента θ, $f^*(x)$ — образ $f(x)$ в кольце $A/\mathfrak{p}[x]$ и $f^*(x)=f_1^*(x)^{l_1} \ldots f_r^*(x)^{l_r}$ — разложение многочлена $f^*(x)$ на неприводимые множители в кольце $A/\mathfrak{p}[x]$; тогда в кольце B идеал $\mathfrak{p}B$ распадается в произведение простых идеалов

$$\mathfrak{p}B=\mathfrak{p}_1^{l_1} \ldots \mathfrak{p}_r^{l_r},$$

при этом степень многочлена $f_i^*(x)$ совпадает со степенью $[B/\mathfrak{p}_i : A/\mathfrak{p}]$ расширения полей вычетов.

К. т. позволяет определить разложение простого идеала при расширении основного поля через разложение на неприводимые множители в поле вычетов минимального многочлена подходящего примитивного элемента данного расширения.

Эта теорема в нек-рых частных случаях была доказана Э. Куммером [1] и применена для получения закона разложения в круговых полях и нек-рых циклич. расширениях круговых полей.

Лит.: [1] K u m m e r E., «J. reine und angew. Math.», 1847, Bd 35, S. 319—26; [2] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969.

Л. В. Кузьмин.

КУМУЛЯНТ — то же, что *семиинвариант*.

КУРАНТ — термин, употребляемый при рассмотрении разностных схем интегрирования одномерных гиперболических систем. Если τ — шаг по t, h — шаг по x, λ — максимальный из наклонов характеристик, то к у р а н т разностной схемы равен $\lambda\tau/h$.

Лит.: [1] Г о д у н о в С. К., Р я б е н ь к и й В. С., Разностные схемы, М., 1973.

Н. С. Бахвалов.

КУРАНТА ТЕОРЕМА о к о н ф о р м н о м о т о б р а ж е н и и о б л а с т е й с п е р е м е н н ы м и г р а н и ц а м и: пусть $\{D_n\}$ — последовательность

вложенных односвязных областей плоскости комплексного переменного z, $\overline{D}_{n+1} \subset D_n$, сходящаяся к своему ядру D_{z_0} относительно нек-рой точки z_0, причем область D_{z_0} ограничена жордановой кривой; тогда последовательность функций $\{w=f_n(z)\}$, конформно отображающих области D_n на круг $\Delta=\{w: |w|<1\}$, $f_n(z_0)=0$, $f_n'(z_0)>0$, равномерно сходится в замкнутой области $\overline{D}_{z_0}$ к функции $w=f(z)$, конформно отображающей D_{z_0} на Δ, причем $f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$.

К. т., полученная Р. Курантом [1], дополняет *Каратеодори теорему*.

Лит.: [1] Courant R., «Gott. Nachr.», 1914, S. 101—109; 1922, S. 69—70; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968. *Е. Д. Соломенцев.*

КУРАНТА — ФРИДРИХСА — ЛЕВИ УСЛОВИЕ — необходимое условие устойчивости разностных схем в классе бесконечно дифференцируемых коэффициентов. Пусть $\Omega(P)$ — область зависимости значения решения по какому-либо из коэффициентов (в частности, им может быть начальное условие), $\Omega_h(P)$— область зависимости значения $u_h(P)$ решения соответствующего разностного уравнения. Для сходимости $u_h(P) \to u(P)$ необходимо, чтобы при мельчении шага h область зависимости разностного уравнения покрывала область зависимости дифференциального уравнения

$$\Omega(P) \subset \varliminf_{h \to 0} \Omega_h(P).$$

Лит.: [1] Курант Р., Фридрихс К., Леви Г., «Успехи матем. наук», 1940, в. 8, с. 125—60; [2] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы. Введение в теорию, М., 1973. *Н. С. Бахвалов.*

КУРАТОВСКОГО ГРАФИК — плоский одномерный континуум, во всех точках (кроме счетного числа) имеющий размерность 0. Построен К. Куратовским [1] в связи с задачей о размерности подмножества $N(X)$ данного n-мерного пространства X, состоящего из всех точек $z \in X$, в к-рых

$$\operatorname{ind}_z X = \operatorname{ind} X = n$$

($N(X)$ наз. размерным ядром пространства X). Для метрич. пространства со счетной базой X всегда

$$\operatorname{ind} N(X) \geqslant \operatorname{ind} X - 1,$$

и К. г. показывает, что этот результат — окончательный.

К. г. строится так. Пусть Π — *канторово множество* на отрезке [0, 1] оси абсцисс декартовой системы координат на плоскости. Для каждого

$$x \in \Pi, \quad x = \frac{2}{3^{k_1}} + \frac{2}{3^{k_2}} + \ldots, \quad k_1 < k_2 < \ldots,$$

полагается

$$f(x) = \frac{(-1)^{k_1}}{2} + \frac{(-1)^{k_2}}{2} + \ldots$$

и $f(0)=0$. График этой функции, т. е. множество K точек $(x, f(x))$, $x \in \Pi$, плоскости и есть К. г. Если z — правый конец смежного к Π интервала, то $\operatorname{ind}_z K=1$, а во всех остальных точках — $\operatorname{ind}_z K=0$.

Лит.: [1] Kuratowski K., «Mathematica», 1932, t. 6; [2] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности..., М., 1973. *А. А. Мальцев.*

КУРАТОВСКОГО ПОЛИЭДР — некоторая одномерная фигура в трехмерном пространстве. К. п. первого типа состоит из ребер тетраэдра и еще одного отрезка, соединяющего середины непересекающихся ребер. К. п. второго типа есть полный граф, натянутый на вершины тетраэдра и нек-рую точку, взятую внутри него. Необходимое и достаточное условие, при выполнении к-рого граф G является плоским, состоит в том, что граф G не должен содержать К. п. первого или вто-

рого типа (теорема Куратовского — Понтрягина).

Лит.: [1] Kuratowski K., «Fund. math.», 1930, t. 15, p. 271—83; [2] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973.

Б. А. Ефимов.

КУРАТОВСКОГО — КНАСТЕРА ВЕЕР — вполне несвязное плоское множество, становящееся связным после прибавления к нему одной точки. Построено К. Куратовским и Б. Кнастером [1] следующим образом. Пусть C — канторово совершенное множество, P — подмножество множества C, состоящее из точек $p=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ таких, что, начиная с нек-рого n, числа a_n либо все равны нулю, либо все равны двум, Q — множество остальных точек. Пусть, далее, a — точка на плоскости с координатами $(^1/_2,\ ^1/_2)$, $L(c)$ — отрезок, соединяющий переменную точку c множества C с точкой a. Пусть, наконец, $L^*(p)$ — множество всех точек отрезка $L(p)$, имеющих рациональные ординаты для $p\in P$, и $L^*(q)$ — множество всех точек отрезка $L(q)$, имеющих иррациональные ординаты для $q\in Q$. Тогда

$$X=\left(\bigcup_{p\in P}L^*(p)\right)\cup\left(\bigcup_{q\in Q}L^*(q)\right)$$

связно, хотя $X\setminus a$ вполне несвязно, т. е. X есть К.— К. в.

Лит.: [1] Knaster B., Kuratowski K., «Fund. math.», 1921, t. 2, p. 206—55.

Л. Г. Замбахидзе.

КУСОЧНО ЛИНЕЙНАЯ ТОПОЛОГИЯ — раздел топологии, изучающий полиэдры. Под полиэдром понимается прежде всего подмножество топологического векторного пространства, представимое конечным или локально конечным объединением выпуклых многогранников ограниченной размерности, а также топологич. полиэдры с фиксированной кусочно линейной структурой (см. ниже). Локальная конечность означает, что каждая точка имеет в объемлющем пространстве окрестность, пересекающуюся только с конечным числом элементов объединения. Понятие полиэдра является промежуточным между понятиями топологич. пространства и симплициального комплекса (последнее вводится для того, чтобы сделать более конструктивным изучение сначала пространств, гомеоморфных полиэдрам, а затем и более общих пространств). Пространство, гомеоморфное полиэдру, наз. топологическим полиэдром (t-полиэдром). К классу t-полиэдров относятся важнейшие объекты конечномерной топологии, прежде всего сглаживаемые многообразия.

Имея в виду финитизацию изучения полиэдров, рассматриваются следующие четыре категории $\mathfrak{T}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{A}$. В $\mathfrak{T}$ объектами служат t-полиэдры, а морфизмами — непрерывные отображения. В $\mathcal{P}$ объекты — полиэдры, а морфизмы — кусочно линейные отображения (pl-отображения), т. е. отображения, линейно переводящие выпуклые многогранники нек-рого покрытия прообраза в многогранники нек-рого покрытия образа. Объектами в $\mathcal{K}$ являются симплициальные комплексы, т. е. полиэдры с фиксированным правильным его покрытием симплексами — таким покрытием, что два симплекса могут пересекаться только по общей грани; морфизмы в $\mathcal{K}$ — симплициальные отображения, т. е. pl-отображения, линейно переводящие каждый симплекс прообраза на нек-рый симплекс образа. Наконец, $\mathcal{A}$ состоит из абстрактных комплексов (a-комплексов) и их симплициальных отображений. a-комплекс в $\mathcal{A}$ есть не более чем счетное множество $\overline{A}$ с выделенной системой его конечных подмножеств ограниченной мощности, к-рые наз. его симплексами, удовлетворяющей условиям: 1) с каждым симплексом σ выделяются и все содержащиеся в нем подмножества — грани σ; 2) каждый симплекс

служит гранью не более чем конечного числа других симплексов. Отображение множеств, на к-рых определено строение a-комплекса, наз. симплициальным, если оно переводит симплексы прообраза в симплексы образа. Размерностью симплекса в a-комплексе наз. уменьшенное на единицу число его элементов. Каждый элемент множества $\overline{A}$ является гранью комплекса A и наз. его вершиной. Удобно считать, что каждый a-комплекс содержит пустой симплекс, обозначаемый 1.

Имеются функторы забывания

$$\tau \xleftarrow{t} \mathcal{P} \xleftarrow{p} \mathcal{K} \xrightarrow{a} \mathcal{A}.$$

Именно, полиэдр определяет топологич. пространство, а pl-отображение непрерывно; это задает t, $t(p)$ наз. пространством полиэдра P. Каждый комплекс определяет полиэдр, а симплициальное отображение комплексов есть pl-отображение; это задает p, $p(K)$ наз. телом комплекса и обозначается $|K|$. Наконец, множество вершин комплекса K имеет выделенные подмножества — множества вершин симплексов K, что определяет a-комплекс, причем симплициальное отображение комплексов определяет симплициальное отображение соответствующих a-комплексов; это задает a, $a(K)$ наз. схемой комплекса K. Построенные функторы не имеют естественных обращений. Они, однако, становятся эквивалентностями, если перейти к факторкатегориям. Естественные изоморфизмы наз. соответственно гомеоморфизмом в τ, pl-гомеоморфизмом в $\mathcal{P}$, симплициальным изоморфизмом в $\mathcal{K}$ и в $\mathcal{A}$. Каждому a-комплексу следующим образом можно поставить в соответствие его реализации. В топологич. векторном пространстве R выбирается множество точек b_i во взаимно однозначном соответствии с вершинами a-комплекса A, к-рые находятся в *общем положении* в R (для этого достаточно, напр., чтобы размерность R была больше удвоенной размерности A), причем в ограниченной части пространства может лежать только конечное число точек. Если на каждое множество точек b_i, отвечающих одному симплексу в A, натянуть симплекс в R, то объединение этих симплексов дает комплекс, схемой к-рого служит A; он и наз. реализацией a-комплекса. Все реализации одного и того же a-комплекса изоморфны, так что функтор a устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных комплексов в K и в $\mathcal{A}$. Любой полиэдр P является телом нек-рого комплекса K, и в этом случае K наз. прямолинейной триангуляцией P, или просто триангуляцией, схема K наз. абстрактной триангуляцией P. Для pl-отображения $f: P \to Q$ существуют триангуляции K для P и L для Q, так что f симплициально отображает K в L. Различные триангуляции полиэдра не обязательно изоморфны, вследствие чего вводится более грубое отношение эквивалентности в $\mathcal{K}$. Подразделением комплекса K_1 наз. комплекс K_2 такой, что $|K_2|=|K_1|$, и каждый симплекс K_2 лежит в нек-ром симплексе K_1. Комплекс K комбинаторно эквивалентен K', если K и K' имеют изоморфные подразделения. Комплексы K и K' комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда $|K|$ pl-гомеоморфно $|K'|$. Иначе говоря, функтор p устанавливает естественное соответствие между классами комбинаторно эквивалентных комплексов и pl-гомеоморфных полиэдров. Функтор t эпиморфен (по определению). Полиэдр P наз. прямолинейной реализацией t-полиэдра $t(P)$. Предположение о том, что любые две реализации t-полиэдра pl-гомеоморфны между собой, известное как основная гипотеза комбинаторной топологии

(Hauptvermutung), оказалось неверным [3]. В связи с этим говорят о pl-строениях на t-полиэдрах: pl-строение задается гомеоморфизмом $\tau : T \to P$ t-полиэдра на полиэдр, причем два гомеоморфизма $\tau_1 : T \to P$ и $\tau_2 : T \to P_2$ определяют одну и ту же структуру, если $\tau_1\tau_2^{-1}$ является pl-гомеоморфизмом; τ_1 и τ_2 определяют эквивалентные (но не обязательно совпадающие) структуры, если P_1 и P_2 pl-гомеоморфны. t-полиэдр с фиксированной pl-структурой также наз. полиэдром. Наконец, отношение комбинаторной эквивалентности в K приводит с помощью функтора a к новому отношению эквивалентности в $\mathcal{A}$. Для выражения этого отношения внутренними средствами в $\mathcal{A}$ удобна операция звездного подразделения, определяемая следующим образом. Джойном (или соединением) двух симплексов $\sigma_1^{n_1}$ и $\sigma_2^{n_2}$, вершины к-рых находятся в общем положении в векторном пространстве R, наз. их выпуклая оболочка; это — симплекс размерности n_1+n_2-1, обозначаемый $\sigma_1*\sigma_2$. Джойн σ с пустым симплексом 1 совпадает с σ. Джойном двух комплексов K_1 и K_2, расположенных в топологич. векторном пространстве R так, что каждый симплекс K_1 находится в общем положении с каждым симплексом K_2, наз. комплекс, составленный из попарных джойнов симплекса из K_1 и симплекса из K_2 (считается, что 1 лежит и в K_1 и в K_2). Звездой симплекса σ в комплексе K наз. подкомплекс $St_K\sigma$, состоящий из всех замкнутых симплексов, имеющих σ своей гранью. Звезда может быть представлена как джойн σ и нек-рого комплекса $lk_K\sigma$, наз. линком (или поясом) σ в K и составленного из тех симплексов звезды, к-рые не пересекают σ. Пусть x — произвольная точка внутри σ. Заменой в K симплексов звезды симплексами вида $x*\sigma_1*\sigma_2$, где σ_1— симплекс из $lk_K\sigma$, а σ_2 — одна из граней σ, при сохранении остальных симплексов получается подразделение K, к-рое и наз. звездным подразделением K с центром в σ и обозначается σK. Два комплекса комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют изоморфные подразделения, получаемые последовательностями звездных подразделений (теорема Александера, [4]).

Понятие звездного подразделения переносится в категорию $\mathcal{A}$. Для этого комплексы записываются в виде многочленов специального вида: переменными служат вершины комплекса, а одночлены — его симплексы, включая 1. При сложении многочленов повторяющиеся симплексы заменяются одним одночленом. Умножение многочленов (определенное, только если они не имеют общих переменных) интерпретируется как джойн соответствующих комплексов. Пусть фиксирован симплекс σ в комплексе A, и A записан в виде $A=\sigma*lk_K\sigma+A_1$, где σ вынесено за скобки из объединения тех одночленов, к-рые содержат σ, т. е. входят в звезду $St_A\sigma$. То, что остается в скобке, есть линк σ; A_1 — объединение остальных симплексов. После замены σ на $x*\partial\sigma$, где $\partial\sigma$ — объединение граней σ, кроме самого σ, но включающее 1, получится новый комплекс $\sigma A=x*\partial\sigma*lk_A\sigma+A_1$. Переход $A \to \sigma A$, а также и сам σA, наз. (абстрактным) звездным подразделением A. Операции звездного подразделения в K и в $\mathcal{A}$ согласованы с действием функтора a, и можно представить $\mathcal{A}$ как формальную систему со счетным алфавитом, с многочленами указанного вида в качестве конструктивных объектов и звездным подразделением в качестве элементарных переходов от одного объекта к другому. Вместе с тем в $\mathcal{A}$ становятся оправданными вопросы об алгоритмической разрешимости. В частности, неразрешим вопрос о комбинаторной эквивалентности a-комплексов (и, следовательно, о pl-гомеоморфизме полиэдров) (теорема Маркова, [5]).

Финитизм комплексов первоначально имел целью введение инвариантов: инвариант определяется по триангуляции, а его инвариантность проверяется только при элементарных преобразованиях (моделью здесь служило введение эйлеровой характеристики). Однако этот метод не получил широкого распространения в связи с тем, что, во-первых, из-за нарушения Hauptvermutung он не дает доказательства топологич. инвариантности, а во-вторых, вычисление инвариантов по триангуляции является часто безнадежной задачей. Более или менее систематически этот путь применяется в топологии трехмерных многообразий и в теории узлов. В гомотопической топологии это привело к технике *клеточных разбиений*. Развитие идеи a-комплексов привело к теории *полусимплициальных комплексов*, позволяющих в гомотопич. топологии избегать несущественных топологич. трудностей.

Основным объектом К. л. т. являются pl-многообразия, играющие важную роль соединяющего звена между дифференцируемыми и топологич. многообразиями. Понятие многообразия естественно вводится в каждую из четырех категорий τ, $\mathcal{P}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{A}$. В τ это просто топологич. многообразия, к-рые могут быть триангулированы, в $\mathcal{P}$ это pl-многообразия — полиэдры, каждая точка к-рых имеет окрестность, pl-гомеоморфную кубу соответствующей размерности, в $\mathcal{K}$ и в $\mathcal{A}$ рассматриваются соответственно комбинаторные и формальные многообразия — комплексы (a-комплексы), звезды вершин к-рых комбинаторно эквивалентны стандартной триангуляции симплекса, состоящей из самого симплекса и всех его граней. В классе pl-многообразий также не верна Hauptvermutung. Построен пример некомбинаторной триангуляции топологич. многообразия (см. [7], [8]), в к-ром вложения нек-рых симплексов не локально плоски. Если предположить локальную плоскостность всех симплексов и, сверх того, выполнимость *Пуанкаре гипотезы* в размерностях 3 и 4, то можно доказать, что триангуляция многообразия является комбинаторным многообразием. Наконец, не выяснен (1982) вопрос о триангулируемости произвольного (метризуемого) многообразия, хотя построены примеры многообразий без комбинаторной триангуляции.

Лит.: [1] Рурк К., Сандерсон Б., Введение в кусочно линейную топологию, пер. с англ., М., 1974; [2] Манкрс Дж., Элементарная дифференциальная топология, в кн.: Милнор Дж., Сташеф Дж., Характеристические классы, пер. с англ., М., 1979, с. 270—359; [3] Milnor J., «Ann. of Math.», 1961, v. 74, p. 575—90; [4] Alexander J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1926, v. 28, p. 301—29; [5] Марков А. А., «Докл. АН СССР», 1958, т. 121, № 2, с. 218—20; [6] Kirby R., Siebenmann L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 75, p. 742—49; [7] Edwards R., «Notices Amer. Math. Soc.», 1975, v. 22, № 2, A—334. *А. В. Чернавский.*

КУТТА — МЕРСОНА МЕТОД — пятиэтапный метод Рунге — Кутта 4-го порядка точности. Применительно к задаче Коши

$$y'(x)=f(x,\ y(x)),\ x_0\leqslant x\leqslant X,\ y(x_0)=y_0, \qquad (1)$$

метод имеет вид:

$$k_1=hf(x_0,\ y_0),\quad y_0=y(x_0),$$

$$k_2=hf\left(x_0+\frac{1}{3}h,\ y_0+\frac{1}{3}k_1\right),$$

$$k_3=hf\left(x_0+\frac{1}{3}h,\ y_0+\frac{1}{6}k_1+\frac{1}{6}k_2\right),$$

$$k_4=hf\left(x_0+\frac{1}{2}h,\ y_0+\frac{1}{8}k_1+\frac{3}{8}k_2\right),$$

$$k_5=hf\left(x_0+h,\ y_0+\frac{1}{2}k_1-\frac{3}{2}k_3+2k_4\right),$$

$$y^1(x_0+h)=y_0+\frac{1}{2}k_1-\frac{3}{2}k_3+2k_4,$$

$$y^2(x_0+h)=y_0+\frac{1}{6}k_1+\frac{2}{3}k_4+\frac{1}{6}k_5.$$

Величина $R=0{,}2|y^1-y^2|$ служит для оценки погрешности метода и для автоматического выбора шага интегрирования. Если ε — предписанная точность вычислений, то шаг интегрирования выбирается следующим образом. Берется нек-рый начальный шаг и производятся вычисления по формулам (2). Вычисляется величина R. При $R>\varepsilon$ шаг интегрирования уменьшается в два раза. При $R\leqslant\varepsilon/64$ шаг увеличивается вдвое. Если же $\varepsilon/64<R\leqslant\varepsilon$, то шаг считается выбранным правильно. После этого в качестве начальной точки x_0 берется точка x_0+h и весь процесс повторяется снова. В качестве приближенного решения выступает величина y^2. Величина y^1 носит вспомогательный характер.

В связи с тем, что

$$y^2(x_0+h)=y_0+\frac{1}{6}\,k_1+\frac{2}{3}\,k_4+\frac{1}{6}\,hf\,(x_0+h,\ y^1\,(x_0+h)),$$

то есть формула для вычисления y^1 является как бы «вложенной» в формулу для вычисления y^2, описанный выше метод оценки погрешности и выбора шага интегрирования наз. м е т о д о м в л о ж е н н ы х ф о р м.

Имеются стандартные программы К.— М. м. на языке алгол [1], [2].

Лит.: [1] C h r i s t i a n s e n J., «Numer. Mach.», 1970, Bd 14, S. 317—24; [2] L u k e h a r t P. M., «Communs Assoc. Comput. Math.», 1963, v. 6, № 12, p. 737—38; [3] F o x L., Numerical solution of ordinary and partial differential equations, Oxf., 1962; [4] L a n c e G. N., Numerical methods for high speed computers, L., 1960.

В. В. Поспелов.

КЭЛЕРА МЕТРИКА, к э л е р о в а м е т р и к а,— *эрмитова метрика* на комплексном многообразии, фундаментальная форма ω к-рой замкнута, т. е. удовлетворяет условию $d\omega=0$. П р и м е р ы К. м.: эрмитова метрика $\sum_{k=1}^{n}|dz_k|^2$ в пространстве $\mathbb{C}^n$, *Фубини — Штуди метрика* в комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$, метрика Бергмана (см. *Бергмана ядерная функция*) в ограниченной области пространства $\mathbb{C}^n$. К. м. на комплексном многообразии индуцирует К. м. на любом его подмногообразии. Всякая эрмитова метрика на одномерном многообразии кэлерова.

Понятие К. м. было впервые рассмотрено Э. Кэлером [1]. В то же время в алгебраич. геометрии систематически использовалась метрика на проективных алгебраич. многообразиях, индуцированная метрикой Фубини — Штуди (см. [5]). Эта метрика является м е т р и к о й Х о д ж а, т. е. ее фундаментальная форма имеет целочисленные периоды.

Эрмитова метрика h на комплексном многообразии является кэлеровой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет любому из следующих условий: параллельный перенос вдоль любой кривой (относительно связности Леви-Чивита) является комплексным линейным отображением, т. е. перестановочен с оператором комплексной структуры; соответствующий метрике h комплексный оператор Лапласа $\square$ на дифференциальных формах удовлетворяет условию $\overline{\square}=\square$, т. е. *Лапласа оператор* Δ совпадает с $2\square$; в окрестности каждой точки существуют локальные координаты, в к-рых матрица метрики h совпадает с единичной матрицей с точностью до бесконечно малых 2-го порядка (см. [3], [6]).

Лит.: [1] K ä h l e r E., «Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg», 1933, Bd 9, S. 173—86; [2] В е й л ь А., Введение в теорию кэлеровых многообразий, пер. с франц., М., 1961; [3] Л и х н е р о в и ч А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [4] У э л л с Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [5] H o d g e W. V. D., The theory and applications of harmonic integrals, 2 ed., Camb., 1952; [6] Г р и ф ф и т с Ф. [и др.], «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 3, с. 119—52.

А. Л. Онищик.

КЭЛЕРОВА ФОРМА — фундаментальная форма *Кэлера метрики* на комплексном многообразии. К. ф. является гармонической вещественной дифференциальной формой типа (1, 1). Дифференциальная форма ω на комплексном многообразии M служит К. ф. для

нек-рой кэлеровой метрики тогда и только тогда, когда ω в окрестности U каждой точки $x \in M$ записывается в виде

$$\omega = i\partial\bar{\partial}\, p = i\sum \frac{\partial^2 p}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\, dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta,$$

где p — строго плюрисубгармонич. функция в U, $z_1, \ldots, z_n$ — локальные комплексные координаты.

К. ф. наз. ф о р м о й Х о д ж а, если она соответствует метрике Ходжа, т. е. имеет целочисленные периоды или, что то же, определяет целочисленный класс когомологий.

Лит.: [1] У э л л с Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976.

А. Л. Онищик.

КЭЛЕРОВО МНОГООБРАЗИЕ — комплексное многообразие, на к-ром можно ввести *Кэлера метрику*. Иногда такие многообразия наз. м н о г о о б р а з и я м и к э л е р о в а т и п а, а термин «К. м.» оставляется для многообразий, снабженных кэлеровой метрикой [1]. Всякое подмногообразие К. м. является К. м. В частности, все проективные комплексные алгебраич. многообразия без особых точек являются К. м., причем кэлерова метрика на них индуцируется *Фубини — Штуди метрикой* на комплексном проективном пространстве. Аналогично, всякое подмногообразие в аффинном пространстве $\mathbb{C}^n$ (в частности, всякое *Штейна многообразие*) является кэлеровым. Другие примеры К. м. получаются, если рассматривать факторпространство M/Γ К. м. M по дискретной группе аналитич. автоморфизмов Γ, сохраняющих кэлерову метрику. В частности, любой *комплексный тор* есть К. м. Всякое одномерное комплексное многообразие кэлерово.

Теория гармонич. форм на компактном К. м. дает следующие свойства групп когомологий де Рама и Дольбо на таком многообразии M (см. [1], [2], а также [5], где эти свойства были впервые доказаны для проективных алгебраич. многообразий):

$$H^r(M, \mathbb{C}) \cong \bigoplus \sum\nolimits_{p+q=r} H^{p,q}(M),$$

$$H^{p,q}(M) \cong H^{q,p}(M),$$

$$\dim H^{2r+1}(M, \mathbb{C}) \text{ четна},$$

$$H^{2r}(M, \mathbb{C}) \neq 0 \text{ при } r = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}} M.$$

Голоморфные формы на компактном К. м. замкнуты. В частности,

$$H^1(M, \mathbb{C}) \cong A^1 \oplus \overline{A}^1,$$

где A^1 — пространство всех голоморфных 1-форм на M. В случае $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$ число

$$\dim A^1 = \tfrac{1}{2}\dim H^1(M, \mathbb{C})$$

есть род компактной римановой поверхности M. На указанных выше свойствах основано построение примеров некэлеровых компактных многообразий, простейшим из к-рых является поверхность Хопфа, диффеоморфная $S^1 \times S^3$.

К. м. M наз. м н о г о о б р а з и е м Х о д ж а, если кэлерова метрика на M является метрикой Ходжа. Всякое проективное алгебраич. многообразие без особых точек является многообразием Ходжа относительно метрики, индуцированной метрикой Фубини — Штуди. Обратно, всякое компактное комплексное многообразие M, снабженное кэлеровой метрикой Ходжа η, допускает биголоморфное вложение в комплексное проективное пространство, причем метрика на M, индуцированная метрикой Фубини — Штуди, имеет вид $k\eta$, где k — натуральное число [1], [3] (т е о р е м а К о д а и р ы о п р о е к т и в н о м в л о ж е н и и). Таким образом, компактное комплексное многообразие

M изоморфно проективному алгебраич. многообразию тогда и только тогда, когда M — многообразие Ходжа. Другая форма этого критерия состоит в том, что компактное комплексное многообразие M является проективным алгебраич. многообразием тогда и только тогда, когда на M существует *отрицательное расслоение* на комплексные прямые. Теорема Кодаиры допускает обобщение на комплексные пространства (см. [4], [6]). Компактные К. м., не являющиеся многообразиями Ходжа, можно найти среди двумерных комплексных торов. Напр., этим свойством обладает тор $\mathbb{C}^2/\Gamma$, где Γ — решетка, натянутая на векторы (1,0), (0,1), $(\sqrt{-2}, \sqrt{-3})$, $(\sqrt{-5}, \sqrt{-7})$ (см. [1], [3]). Другое необходимое и достаточное условие проективности n-мерного компактного кэлерова многообразия M состоит в наличии на M n алгебраически независимых мероморфных функций.

Всякое некомпактное полное К. м., имеющее положительную секционную кривизну, является многообразием Штейна. Тем же свойством обладает любое односвязное полное К. м. неположительной секционной кривизны [7].

Лит.: [1] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [2] Вейль А., Введение в теорию кэлеровых многообразий, пер. с франц., М., 1961; [3] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [4] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [5] Hodge W. V. D., The theory and applications of harmonic integrals, 2 ed., Camb., 1952; [6] Грауэрт Г., в кн.: Комплексные пространства. Сб. пер., М., 1965, с. 45—104; [7] Greene R. E., Wu H., в сб.: Value-Distribution Theory. Part A, N. Y., 1974, p. 145—67.

А. Л. Онищик.

КЭЛИ АЛГЕБРА — алгебра *Кэли чисел.*

КЭЛИ ПОВЕРХНОСТЬ — алгебраическая линейчатая поверхность, являющаяся поверхностью переноса с ∞^1 сетями переноса. Ее уравнение в декартовых координатах

$$x^3 - 6xy + 6z = 0.$$

Название в честь А. Кэли [1], рассматривавшего эту поверхность как геометрич. иллюстрацию своих исследований по теории пучков бинарных квадратичных форм.

Лит.: [1] Cayley A., «Philos. Trans. Roy. Soc. London», 1858, v. 148, p. 415—27; [2] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

М. И. Войцеховский.

КЭЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ линейного (диссипативного) оператора A с областью определения $\mathrm{Dom}A$, плотной в гильбертовом пространстве H,— оператор $C_A=(A-iI)(A+iI)^{-1}$, определенный на подпространстве $\mathrm{Dom}C_A=(A+iI)\mathrm{Dom}A$. Матричный вариант такого преобразования рассматривал А. Кэли (A. Cayley). К. п. устанавливает соответствие между свойствами операторов A, чей спектр $\sigma(A)$ «близок» к действительной прямой, и операторов с околоунитарным спектром (близким к окружности $\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta|=1\}$). Так, имеют место утверждения: 1) если A — линейный *диссипативный оператор*, то C_A — сжатие (т. е. $\|C_Ax\|\leqslant\|x\|$, $x\in\mathrm{Dom}A$) и $\mathrm{Ker}(I-C_A)=\{0\}$; 2) если T — сжатие, $\mathrm{Ker}(I-T)=\{0\}$ и $(I-T)\mathrm{Dom}T$ плотно в H, то $T=C_A$ при нек-ром линейном диссипативном операторе A: именно $A=i(I+T)(I-T)^{-1}$; 3) симметричность A равносильна изометричности (унитарности) C_A; 4) $\sigma(A)=\omega(\sigma(C_A))$, где $\omega(\zeta)=i(1+\zeta)(1-\zeta)^{-1}$, в частности ограниченность A эквивалентна тому, что $1\notin\sigma(C_A)$; 5) если γ — идеал операторов в H, то из $A-B\in\gamma$ следует $C_A-C_B\in\gamma$; если же A, B — ограниченные операторы, то верно и обратное: из $C_A-C_B\in\gamma$ следует $A-B\in\gamma$. К. п. устанавливает соответствие и между нек-рыми другими характеристиками операторов A и C_A: классификациями частей спектра, кратностями спектров, структурами инвариантных подпро-

странств, функциональными исчислениями, спектральными разложениями и т. д. Так, если A — *самосопряженный оператор* с разложением единицы $\{E_t\}$, $t\in\mathbb{R}$, то $\{F_s\}$, $F_s=E_t$ при $s=-2\operatorname{arctg} t$, — разложение единицы для C_A и

$$A=\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\,dF_s.$$

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [2] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с англ., М., 1970.
Н. К. Никольский.

КЭЛИ ТАБЛИЦА — квадратная таблица умножения произвольного конечного *группоида*. Заглавная строка таблицы заполняется в нек-ром порядке символами, обозначающими различные элементы группоида, теми же символами и в том же порядке заполняется заглавный столбец. Если группоид обладает единицей, то единичный символ, как правило, помещается на первом месте. Если на i-м месте в заглавном столбце стоит символ a_i и на j-м месте в заглавной строке — символ a_j, то на пересечении i-й строки и j-го столбца записывается символ, обозначающий произведение a_ia_j. К. т. введена А. Кэли (A. Cayley) в 1854 для *групп*.

Для того чтобы К. т. определяла нек-рую *квазигруппу*, необходимо и достаточно, чтобы в каждой строке (столбце) таблицы, не считая заглавных, каждый символ встречался ровно один раз. К. т. группы, кроме того, должна удовлетворять следующему условию: на местах, соответствующих произведениям $(a_ia_j)a_k$ и $a_i(a_ja_k)$, стоят одинаковые элементы. Симметричные относительно главной диагонали К. т. соответствуют коммутативным бинарным операциям; в частности, таковы К. т. *абелевых групп*.

Лит.: [1] Гроссман И., Магнус В., Группы и их графы, пер. с англ., М., 1971; [2] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972.
Н. Н. Вильямс.

КЭЛИ ФОРМА — форма от $(n+1)(N+1)$ переменных, где $n=\dim X$, а X — замкнутое алгебраическое подмногообразие N-мерного проективного пространства $\mathbb{P}^N$, однозначно с точностью до умножения на константу определяемая по X и сама однозначно определяющая X. Точное определение К. ф. состоит в следующем. Пусть $\tilde{\mathbb{P}}^N$ есть N-мерное проективное пространство всех гиперплоскостей в $\mathbb{P}^N$, Γ — подмножество в многообразии

$$\underbrace{\tilde{\mathbb{P}}^N\times\ldots\times\tilde{\mathbb{P}}^N}_{n+1}\times X,$$

состоящее из всех таких наборов $(\pi_1,\ldots,\pi_{n+1},x)$, что точка $x\in X$ лежит в пересечении гиперплоскостей $\pi_1,\ldots,\pi_{n+1}$ и

$$\varphi:\underbrace{\tilde{\mathbb{P}}^N\times\ldots\times\tilde{\mathbb{P}}^N}_{n+1}\times X\to\underbrace{\tilde{\mathbb{P}}^N\times\ldots\times\tilde{\mathbb{P}}^N}_{n+1}$$

— естественная проекция. Тогда $\varphi(\Gamma)$ есть неприводимое подмногообразие коразмерности 1 в

$$\underbrace{\tilde{\mathbb{P}}^N\times\ldots\times\tilde{\mathbb{P}}^N}_{n+1}$$

и потому $\varphi(\Gamma)$ является многообразием нулей нек-рой формы F_X на

$$\underbrace{\tilde{\mathbb{P}}^N\times\ldots\times\tilde{\mathbb{P}}^N}_{n+1}.$$

Всегда можно считать, что F_X не имеет кратных множителей, и это условие определяет F_X по X однозначно с точностью до умножения на константу. Наобо-

рот, F_X однозначно определяет множество всевозможных наборов $n+1$ гиперплоскостей в $\mathbb{P}^N$, пересекающихся по точкам из X, и потому F_X однозначно определяет X. Форма F_X и наз. ф о р м о й К э л и многообразия X.

Часто К. ф. наз. также ф о р м о й Ч ж о у, или а с с о ц и и р о в а н н о й ф о р м о й м н о г о о б р а з и я X. Идея определения X комплексом линейных подпространств размерности $N-n-1$ в $\mathbb{P}^N$, пересекающих X, восходит к А. Кэли [5], к-рый применил ее для случая $n=1$, $N=3$. Коэффициенты К. ф. наз. к о о р д и н а т а м и Ч ж о у м н о г о о б р а з и я X.

К. ф. F_X однородна по каждой из $n+1$ систем координат пространства

$$\underbrace{\check{\mathbb{P}}^N \times \ldots \times \check{\mathbb{P}}^N}_{n+1}$$

(i-я система координат — это система координат i-го сомножителя указанного пространства). Степени однородности F_X по каждой из систем координат совпадают. Эта общая степень d обозначается через $\deg X$, наз. с т е п е н ь ю п о д м н о г о о б р а з и я X, и имеет следующий геометрич. смысл: d есть максимум числа точек пересечения X со всевозможными $(N-n)$-мерными линейными пространствами L в $\mathbb{P}^N$, для к-рых $X \cap L$ — конечное множество (т. е. d — это число точек пересечения X с «общим» $(N-n)$-мерным линейным подпространством).

Множество всех форм (рассматриваемых с точностью до умножения на ненулевую константу) от $n+1$ групп переменных по $N+1$ переменных, имеющих степень d по каждой группе, образует проективное пространство $\mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$ нек-рой размерности $\nu_{N,n,d}$. К. ф. F_X можно отождествить с точкой $\mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$. Множество $C_{N,n,d}$ всех точек в $\mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$, являющихся К. ф. n-мерных замкнутых подмногообразий степени d в $\mathbb{P}^N$, есть квазипроективное многообразие; оно параметризует семейство всех таких подмногообразий, причем указанное семейство является алгебраическим относительно этой параметризации. В общем случае $C_{N,n,d}$ не замкнуто в $\mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$.

Конструкция К. ф. естественно распространяется на замкнутые n-мерные циклы в $\mathbb{P}^N$, т. е. формальные линейные комбинации $m_1X_1+\ldots+m_sX_s$ замкнутых n-мерных подмногообразий $X_1, \ldots, X_s$ в $\mathbb{P}^N$ с целыми коэффициентами $m_i > 0$. А именно, полагают

$$\deg X = \sum_{i=1}^{s} m_i \deg X_i$$

и $F_X = F_{X_1}^{m_1} \ldots F_{X_s}^{m_s}$. Множество $\overline{C_{N,n,d}}$ всех К. ф. n-мерных циклов степени d в $\mathbb{P}^N$ замкнуто в $\mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$.

Изучение К. ф. и свойств многообразий $C_{N,n,d}$ и $\overline{C_{N,n,d}}$ является важным моментом в проблеме классификации подмногообразий и циклов в $\mathbb{P}^N$. Первый шаг в этой классификации состоит в изучении разбиения $\overline{C_{N,n,d}}$ на неприводимые компоненты. Напр., для $N=3$, $n=1$, $d=2$ (кривые степени 2 в трехмерном пространстве) многообразие $\overline{C_{3,1,2}}$ состоит из двух неприводимых компонент размерности 8. Первая компонента соответствует плоским кривым второго порядка, а вторая — парам прямых. Бирациональная классификация многообразий $C_{N,n,d}$ является важной проблемой (во всех известных примерах такие многообразия рациональны).

Лит.: [1] Ш а ф а р е в и ч И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Х о д ж В., П и д о Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 2, М., 1954; [3] S a m u e l P., Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, 2 éd., B., 1967; [4] C h o w W.-L., v a n d e r W a e r d e n

B. L., «Math. Ann.», 1937, Bd 113, S. 692—704; [5] Cayley A., Collected mathematical papers, v. 4, Cambr., 1891, p. 446—55.
В. Л. Попов.

КЭЛИ ЧИСЛО — *гиперкомплексное число*, а именно, элемент 8-мерной алгебры над полем действительных чисел (алгебры Кэли), впервые рассмотренной А. Кэли (A. Cayley). Алгебра Кэли может быть получена применением процесса Кэли—Диксона из алгебры *кватернионов* (см. *Кэли—Диксона алгебра*). Она является единственной 8-мерной действительной альтернативной алгеброй без делителей нуля (см. *Фробениуса теорема*). Алгебра Кэли является алгеброй с однозначным делением и с единицей, альтернативной, но неассоциативной и **не**коммутативной.

Лит.: [1] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973.
Н. Н. Вильямс.

КЭЛИ — ДАРБУ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными третьего порядка, к-рому должна удовлетворять функция $u(x_1, x_2, x_3)$ для того, чтобы семейство поверхностей $u(x_1, x_2, x_3)=\text{const}$ могло быть дополнено до трижды ортогональной системы поверхностей. К.— Д. у. может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{22} & c_{33} & 2c_{12} & 2c_{23} & 2c_{31} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & 2u_{12} & 2u_{23} & 2u_{31} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & 0 & 0 & u_2 & 0 & u_3 \\ 0 & u_2 & 0 & u_1 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 & u_2 & u_1 \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$c_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{3} (u_k u_{\alpha\beta k} - 2u_{\alpha k} u_{\beta k}),$$

а

$$u_k = u_{x_k}, \ \ldots, \ u_{\alpha\beta\gamma} = u_{x_\alpha x_\beta x_\gamma}.$$

К.— Д. у. получено в раскрытом виде А. Кэли [1]. В приведенном виде выведено Г. Дарбу [2].

Лит.: [1] Cayley A., «C. r. Acad. sci.», 1872, t. 75, p. 324—30; 381—85; [2] Darboux G., Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, P., 1898; [3] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 2, М.— Л., 1948.
Е. В. Шикин.

КЭЛИ — ДИКСОНА АЛГЕБРА — альтернативная 8-мерная алгебра, получающаяся из алгебры обобщенных *кватернионов* применением процесса Кэли—Диксона. Этот процесс заключается в построении по заданной алгебре A новой алгебры A_1 (удвоенной размерности) и является обобщением процесса удвоения (см. *Гиперкомплексное число*). А именно, пусть A — алгебра с единицей 1 над полем F, δ — некоторый ненулевой элемент из F и задано F-линейное отображение $x \to x^*$, являющееся инволюцией, причем

$$x + x^* = \mathrm{tr}\,(x) \in F, \ \ xx^* = n(x) \in F.$$

На прямой сумме линейных пространств $A \oplus A = A_1$ формулой

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1 - \delta b_2 a_2^*, \ a_1^* b_2 + b_1 a_2)$$

определяется умножение, превращающее A_1 в алгебру. Алгебра A вкладывается в A_1 в качестве подалгебры: $x \to (x, 0)$ и инволюция $*$ продолжается до инволюции в A_1:

$$(a_1, a_2)^* = (a_1^*, \ -a_2).$$

При этом

$$\mathrm{tr}\,(a_1, a_2) = \mathrm{tr}\,(a_1), \ \ n(a_1 a_2) = n(a_1) + \delta n(a_2).$$

Процесс перехода от алгебры A к алгебре A_1 можно продолжить, получая возрастающую цепочку алгебр $A \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$; параметр δ на каждом шаге может меняться. Если процесс Кэли — Диксона начинается с алгебры A с базисом $\{1, u\}$, таблицей умножения

$$u^2 = u + \alpha, \ \ \alpha \in F, \ \ 4\alpha + 1 \neq 0,$$

и инволюцией: $1^*=1$, $u^*=1-u$, то после первого шага получится алгебра A_1 обобщенных кватернионов (ассоциативная алгебра размерности 4), а на втором шаге — алгебра A_2 размерности 8, к-рая и наз. К э л и — Д и к с о н а а л г е б р о й.

Любая К.— Д. а. является альтернативной, но не ассоциативной центральной простой алгеброй над F; обратно, простое альтернативное кольцо либо ассоциативно, либо является К.— Д. а. над своим центром. Определенная на К.—Д. а. квадратичная форма $n(x)$ от восьми переменных, соответствующих базису алгебры, обладает мультипликативным свойством:

$$n(xy)=n(x)\cdot n(y).$$

Тем самым устанавливается связь между К.— Д. а. и проблемой существования композиции для квадратичных форм. К.— Д. а. является алгеброй с делением тогда и только тогда, когда квадратичная форма $n(x)$ (н о р м а э л е м е н т а x) не представляет нуля в F. Если характеристика поля F отлична от 2, то К.— Д. а. обладает базисом $\{1, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ с таблицей умножения вида

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
u_1	$-\alpha$	u_3	$-\alpha u_2$	$-u_5$	αu_4	$-u_7$	αu_6
u_2	$-u_3$	$-\beta$	βu_1	$-u_6$	u_7	βu_4	$-\beta u_5$
u_3	αu_2	$-\beta u_1$	$-\alpha\beta$	$-u_7$	$-\alpha u_6$	βu_5	$\alpha\beta u_4$
u_4	u_5	u_6	u_7	$-\gamma$	$-\gamma u_1$	$-\gamma u_2$	$-\gamma u_3$
u_5	$-\alpha u_4$	$-u_7$	αu_6	γu_1	$-\alpha\gamma$	$-\gamma u_3$	$\alpha\gamma u_2$
u_6	u_7	$-\beta u_4$	$-\beta u_5$	γu_2	γu_3	$-\beta\gamma$	$-\beta\gamma u_1$
u_7	$-\alpha u_6$	βu_5	$-\alpha\beta u_4$	γu_3	$-\alpha\gamma u_2$	$\beta\gamma u_1$	$-\alpha\beta\gamma$

где $\alpha, \beta, \gamma \in F$, $\alpha\beta\gamma\neq 0$, а инволюция определяется условиями

$$1^*=1,\ u_i^*=-u_i \text{ при } i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Эта алгебра обозначается $A(\alpha, \beta, \gamma)$. Алгебры $A(\alpha, \beta, \gamma)$ и $A(\alpha', \beta', \gamma')$ изоморфны тогда и только тогда, когда эквивалентны отвечающие им квадратичные формы $n(x)$. Если $n(x)$ представляет нуль, то соответствующая К.— Д. а. изоморфна $A(-1, 1, 1)$. Алгебра $A(-1, 1, 1)$ наз. р а с щ е п л я е м о й а л г е б р о й К э л и, или в е к т о р н о - м а т р и ч н о й а л г е б р о й. Ее элементы могут быть представлены матрицами вида

$$\begin{Vmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{Vmatrix},$$

где $\alpha, \beta \in F$, $a, b \in V$, V — трехмерное пространство над F с обычными операциями скалярного произведения $\langle a, b\rangle$ и векторного произведения $a\times b$. Умножение этих матриц задается формулой

$$\begin{Vmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \gamma & c \\ d & \delta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha\gamma-\langle a, d\rangle & \alpha c+\delta a+b\times d \\ \gamma b+\beta d+a\times c & \beta\delta-\langle b, c\rangle \end{Vmatrix}.$$

Если $F=\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, то $A(1, 1, 1)$ — алгебра *Кэли чисел* (она является алгеброй с делением). Любая К.— Д. а. над $\mathbb{R}$ изоморфна либо $A(1, 1, 1)$, либо $A(-1, 1, 1)$.

Построение К.— Д. а. над произвольным полем принадлежит Л. Диксону (L. Dickson), к-рый изучил также их основные свойства (см. [1], [2]).

Пусть A — альтернативное кольцо, ассоциативно-коммутативный центр C к-рого отличен от нуля и не содержит делителей нуля, а F — поле частных кольца C. Тогда имеется естественное вложение $A \to A \otimes_C F$. Если $A \otimes_C F$ есть К.— Д. а. над F, то A наз. к о л ь ц о м К э л и — Д и к с о н а.

Лит.: [1] Д и к с о н Л. Э., Линейные алгебры, пер. с англ., Харьков, 1935; [2] S c h a f e r R. D., An introduction to nonassociative algebras, N. Y., 1966; [3] Ж е в л а к о в К. А., С л и н ь к о А. М., Ш е с т а к о в И. П., Ш и р ш о в А. И., Кольца, близкие к ассоциативным, М., 1978.

Е. Н. Кузьмин.

КЭЛИ — КЛЕЙНА ПАРАМЕТРЫ — некоторые специальные координаты в группе вращений трехмерного пространства $SO(3)$, построение к-рых в конечном счете основано на связи между $SO(3)$ и группой $SU(2)$ унитарных матриц 2-го порядка с единичным определителем. Существует отображение $\varphi : SU(2) \to SO(3)$, являющееся *эпиморфизмом* по своим алгебраич. свойствам и двулистным *накрытием* — по топологическим. (Рассматриваемое в нек-рой окрестности единичной матрицы, это отображение обладает свойствами изоморфизма, поэтому говорят, что $SO(3)$ и $SU(2)$ локально изоморфны.) Каждая матрица $V \in SU(2)$ имеет вид $\left\| \begin{matrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{matrix} \right\|$, где α, β — комплексные числа, связанные соотношением $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$. Их и принимают за К.— К. п. для $A=\varphi(V)$. (Иногда под К.— К. п. понимают все четыре коэффициента матрицы V.) Построение конкретного отображения φ с указанными свойствами можно осуществить по-разному, поэтому у различных авторов имеются нек-рые различия в определении К.— К. п. (см. [2], [3]).

Поскольку φ является не настоящим изоморфизмом, а только двулистным накрытием, то невозможно определить К.— К. п. как (непрерывные) координаты на всей группе $SO(3)$; это можно сделать лишь локально. Однако К.— К. п. можно использовать для изучения процесса вращения, при к-ром A непрерывно зависит от действительного параметра t (причем здесь нет необходимости как-либо ограничивать область возможных значений A). Действительно, если для некрого $t=t_0$ выбрано какое-то фиксированное значение прообраза $V(t_0) \in \varphi^{-1}(A(t_0))$, то по непрерывности для всех t однозначно определяются соответствующие $V(t)$. (Двузначность полного прообраза φ^{-1} проявляется лишь в том, что равенство $A(t)=A(s)$ имеет место не только при $V(t)=V(s)$, но и при $V(t)=-V(s)$.) Поэтому К.— К. п. можно применять при исследовании движений твердого тела с неподвижной точкой (его конфигурационное пространство совпадает с $SO(3)$). Такой подход принят в [1], однако он не получил широкого распространения.

Группа $SU(2)$ изоморфна группе *кватернионов* с единичной нормой, поэтому, переходя от V к соответствующему кватерниону $\rho+\lambda i+\mu j+\nu k$, можно вместо К.— К. п. пользоваться п а р а м е т р а м и Э й л е р а — Р о д р и г а — четырьмя действительными числами ρ, λ, μ, ν, удовлетворяющими соотношению $\rho^2+\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$. Они связаны простыми формулами с К.— К. п. (см. [1], [3]) и обладают тем же свойством «двузначности» (историю вопроса см. в [1]). По существу, в относящихся сюда исследованиях впервые рассматривались двузначные представления группы вращений (см. *Спинор*).

Лит.: [1] K l e i n F., S o m m e r f e l d A., Über die Theorie des Kreisels, Hf. 1—2, Lpz., 1897—98 (перепечатка N. Y.— Stuttg., 1965); [2] Г о л д с т е й н Г., Классическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] С и н г Дж.- Л., Классическая динамика, пер. с англ., М., 1963.

Д. В. Аносов.

КЭМПБЕЛЛА — ХАУСДОРФА ФОРМУЛА — формула для вычисления выражения

$$w=\ln(e^u e^v)$$

в алгебре формальных степенных рядов от некоммутирующих ассоциативных u и v. Более точно, пусть A — свободная ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{Q}$ со свободными образующими u и v, а L — ее подалгебра Ли, порожденная этими же элементами относительно операции коммутирования $[x, y]=xy-yx$; и пусть $\hat{A}$ и $\hat{L}$ — пополнения алгебр A и L степенными рядами элементов из A и L. Тогда отображение

$$\exp\colon\ x\longrightarrow e^x=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

является непрерывной биекцией алгебры $\hat{A}$ на мультипликативную группу $1+\hat{A}_1$, где $\hat{A}_1$ — совокупность рядов без свободного члена. Обратным к этому отображению является отображение

$$\ln\colon\ y\longrightarrow\ln(y)=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(y-1)^n.$$

Ограничение отображения exp на $\hat{L}$ является биекцией алгебры $\hat{A}$ на группу $1+\hat{L}$. Это позволяет ввести групповую операцию $x\circ y=\ln(e^x e^y)$ на множестве элементов алгебры Ли $\hat{L}$, причем в получаемой таким образом группе подгруппа, порожденная элементами u и v, оказывается свободной. К.— Х. ф. дает выражение для $u\circ v$ в виде степенного ряда от u и v:

$$\sum_m\sum_{p_i q_i}\frac{(-1)^{m-1}}{m\sum(p_i+q_i)}\times$$

$$\times\frac{[\overbrace{\dots[}^{p_1}\dots[\overbrace{[u,\ u],\ \dots,\ u}^{p_1}]\overbrace{v,\ \dots,\ v}^{q_1}],\ \dots,\ \overbrace{v,\ \dots,\ v}^{q_m}]}{p_1!\,q_1!\,\dots\,p_m!\,q_m!}\qquad(*)$$

или (в терминах присоединенного представления $(\mathrm{ad}\ x)(y)=[x,\ y]$):

$$w=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{r+s=n,\ r,\ s\geqslant 0}(w'_{r,\ s}+w''_{r,\ s}),$$

где

$$w'_{r,\ s}=\sum\nolimits_{m\geqslant 1}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\times$$

$$\times\sum{}^{*}\left(\left(\prod\nolimits_{i=1}^{m-1}\frac{(\mathrm{ad}u)^{r_1}}{r_i!}\frac{(\mathrm{ad}v)^{s_1}}{s_i!}\right)\frac{(\mathrm{ad}u)^{r_m}}{r_m!}\right)(v),$$

$$w''_{r,\ s}=\sum\nolimits_{m\geqslant 1}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\times$$

$$\times\sum{}^{**}\left(\prod\nolimits_{i=1}^{m-1}\frac{(\mathrm{ad}u)^{r_i}}{r_i!}\frac{(\mathrm{ad}v)^{s_i}}{s_i!}\right)(u).$$

Здесь Σ^* означает суммирование по $r_1+\dots+r_m=rs_1+\dots+s_{m-1}=s-1$, $r_1+s_1\geqslant 1,\dots,\ r_{m-1}+s_{m-1}\geqslant 1$, а Σ^{**} — суммирование по $r_1+\dots+r_{m-1}=r-1$, $s_1+\dots+s_{m-1}=s$, $r_1+s_1\geqslant 1,\dots,\ r_{m-1}+s_{m-1}\geqslant 1$.

Первым задачу о разыскании выражения w рассмотрел Дж. Кэмпбелл [1]. Ф. Хаусдорф [2] доказал, что w выражается через коммутаторы от элементов u и v, т. е. принадлежит алгебре Ли $\hat{L}$.

Если $\mathfrak{g}$ — нормированная алгебра Ли над полным недискретно нормированным полем K, то ряд (*), где $u,\ v\in\mathfrak{g}$, сходится в окрестности нуля. Это позволяет определить в окрестности нуля пространства $\mathfrak{g}$ структуру локальной банаховой группы Ли над K (в ультраметрическом случае — структуру банаховой группы Ли), алгеброй Ли к-рой является $\mathfrak{g}$. Этот факт дает одно из доказательств существования локальной группы Ли с заданной алгеброй Ли (3-я т е о р е м а

Л и). Обратно, во всякой локальной группе Ли умножение в канонических координатах задается К.— Х. ф.

Лит.: [1] Campbell J. E., «Proc. London Math. Soc.», 1897, v. 28, p. 381—90; 1898, v. 29, p. 14—32; [2] Hausdorff F., «Leipziger Ber.», 1906, Bd 58, S. 19—48; [3] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [4] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1969; [5] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1962; [6] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп, пер. с англ., М., 1974.

Ю. А. Бахтурин.

КЮННЕТА ФОРМУЛА — формула, выражающая гомологии (или когомологии) тензорного произведения комплексов или прямого произведения пространств через гомологии (когомологии) сомножителей.

Пусть Λ — ассоциативное кольцо с единицей, A и C — цепные комплексы соответственно правых и левых Λ-модулей. Пусть $A \otimes C$ — комплекс, ассоциированный с *тензорным произведением* комплексов A и C над Λ. Если

$$\operatorname{Tor}_1(B(A),\ B(C)) = \operatorname{Tor}_1(H_*(A),\ B(C)) = \\ = \operatorname{Tor}_1(B(A),\ Z(C)) = \operatorname{Tor}_1(H_*(A),\ Z(C)) = 0,$$

то имеет место точная последовательность градуированных модулей

$$0 \longrightarrow H_*(A) \otimes H_*(C) \xrightarrow{\alpha} H_*(A \otimes C) \xrightarrow{\beta} \\ \longrightarrow \operatorname{Tor}_1(H_*(A),\ H_*(C)) \longrightarrow 0, \qquad (1)$$

где α — гомоморфизм степени 0, а β — степени -1 (см. [2]). Для коцепных комплексов имеется аналогичная точная последовательность с гомоморфизмом β степени $+1$. Если $H_*(\operatorname{Tor}_1(A, C)) = 0$ (напр., A или C — плоский Λ-модуль) и Λ наследственно, то последовательность (1) существует и расщепляется [2], [3], так что

$$H_n(A \otimes C) = \sum\nolimits_{p+q=n} H_p(A) \otimes H_q(C) + \\ + \sum\nolimits_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}_1(H_p(A),\ H_q(C)).$$

Эта формула наз. формулой Кюннета; иногда формулой, или соотношением, Кюннета называют и точную последовательность (1). Имеет место обобщение формулы (1), в к-ром тензорное произведение заменяется произвольным двойным функтором $T(A, C)$ на категории Λ-модулей со значениями в той же категории, ковариантным по каждому аргументу. Рассматривается также случай функтора T, ковариантного по A и контравариантного по C. В частности, функтор $T(A, C) = \operatorname{Hom}(A, C)$ приводит к формуле, выражающей когомологии $H^*(\operatorname{Hom}(A, C))$, где A — правый цепной, а C — левый коцепной комплексы над Λ, через $H_*(A)$ и $H^*(C)$, а именно, если Λ наследственно и $H^*(\operatorname{Ext}^1(A, C)) = 0$ (напр., A свободен), то имеет место расщепляемая точная последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(H_*(A),\ H^*(C)) \xrightarrow{\beta'} H^*(\operatorname{Hom}(A, C)) \xrightarrow{\alpha'} \\ \xrightarrow{\alpha'} \operatorname{Hom}(H_*(A),\ H^*(C)) \longrightarrow 0,$$

где α' — гомоморфизм степени 0, а β' — степени $+1$ (см. [2], [3]).

Пусть X, Y — топологич. пространства, а L, M — модули над кольцом главных идеалов R, причем $\operatorname{Tor}_1(L, M) = 0$. Тогда сингулярные гомологии пространств X, Y, $X \times Y$ связаны следующей расщепляемой точной последовательностью

$$0 \longrightarrow H_*(X, L) \otimes H_*(Y, M) \xrightarrow{\alpha} H_*(X \times Y, L \otimes M) \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\beta} \operatorname{Tor}_1(H_*(X, L), H_*(Y, M)) \longrightarrow 0,$$

где α — гомоморфизм степени 0, а β — степени -1. Если предположить дополнительно, что либо все $H_k(X, R)$ и $H_k(Y, R)$, либо все $H_k(Y, R)$ и M конечно по-

рождены, то аналогичная точная последовательность имеется для сингулярных когомологий:

$$0 \longrightarrow H^*(X, L) \otimes H^*(Y, M) \xrightarrow{\alpha} H^*(X \times Y, L \otimes M) \xrightarrow{\beta}$$
$$\xrightarrow{\beta} \mathrm{Tor}_1(H^*(X, L), H^*(Y, M)) \longrightarrow 0,$$

причем α — гомоморфизм степени 0, а β — степени $+1$. Например, если R — поле, то

$$H_*(X \times Y, R) \cong H_*(X, R) \otimes H_*(Y, R),$$

а если при этом все $H_k(X, R)$ или все $H_k(Y, R)$ конечномерны, то

$$H^*(X \times Y, R) \cong H^*(X, R) \otimes H^*(Y, R).$$

Имеются также аналогичные формулы для относительных гомологий и когомологий [3], [4].

В случае $L = M = R$ модуль $H^*(X, R) \otimes H^*(Y, R)$ обладает структурой косого тензорного произведения алгебр, при этом α — гомоморфизм алгебр. Таким образом, если $\mathrm{Tor}_1(H^*(X, R), H^*(Y, R)) = 0$ и все $H_k(X, R)$ или все $H_k(Y, R)$ конечно порождены, то имеет место изоморфизм алгебр [3]:

$$H^*(X \times Y, R) \cong H^*(X, R) \otimes H^*(Y, R).$$

В случае, когда X и Y — конечные полиэдры, К. ф. позволяет найти числа Бетти и коэффициенты кручения полиэдра $X \times Y$ через аналогичные инварианты полиэдров X и Y. Именно эти результаты были получены самим Г. Кюннетом [1]. В частности, если $b_k(X)$ есть k-е число Бетти полиэдра X и

$$p(X) = \sum\nolimits_{k \geqslant 0} b_k(X)\, t^k$$

— многочлен Пуанкаре полиэдра X, то $p(X \times Y) = p(X) p(Y)$.

В теории когомологий со значениями в пучке имеется следующий вариант К. ф. [6]. Пусть X и Y — топологич. пространства со счетными базами, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — пучки Фреше на X и Y (см. *Когерентный аналитический пучок*). И пусть $\mathcal{F}$ (или $\mathcal{G}$) — ядерный пучок (т. е. $\mathcal{F}(U)$ — ядерное пространство для всех открытых $U \subset X$). Тогда на $X \times Y$ определен пучок Фреше $\mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}$ такой, что

$$(\mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G})(U \times V) = \mathcal{F}(U) \tilde{\otimes} \mathcal{G}(V),$$

где $\tilde{\otimes}$ — знак пополненного тензорного произведения, а $U \subset X$, $V \subset Y$ открыты. Если пространства $H^*(X, \mathcal{F})$ и $H^*(Y, \mathcal{G})$ отделимы, то справедлива К. ф.

$$H^*(X \times Y, \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) \cong H^*(X, \mathcal{F}) \tilde{\otimes} H^*(Y, \mathcal{G}).$$

В частности, когерентные аналитич. пучки $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ на комплексных аналитич. пространствах X, Y со счетными базами являются ядерными и

$$\mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G} \cong \mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} \mathcal{G}^*,$$

где $\mathcal{F}^*$, $\mathcal{G}^*$ — аналитические обратные образы пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ при проекциях $X \times Y \to X$ и $X \times Y \to Y$. Таким образом, если $H^*(X, \mathcal{F})$ и $H^*(Y, \mathcal{G})$ отделимы, то

$$H^*\left(X \times Y, \mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} \mathcal{G}^*\right) \cong H^*(X, \mathcal{F}) \tilde{\otimes} H^*(Y, \mathcal{G}).$$

В алгебраической геометрии К. ф. обычно встречаются в таком варианте. Пусть X и Y — алгебраические многообразия над полем k, а $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — когерентные алгебраич. пучки на X и Y соответственно. Тогда [9]:

$$H^*(X \times Y, \mathcal{F} \otimes_k \mathcal{G}) \cong H^*(X, \mathcal{F}) \otimes_k H^*(Y, \mathcal{G}).$$

Здесь $\mathcal{F} \otimes_k \mathcal{G}$ — пучок на $X \times Y$, модули сечений которого над $U \times V$ (U — открытое аффинное подмножество в X, V — в Y) суть

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) \otimes_k \Gamma(V, \mathcal{G}).$$

Более общо, пусть $p : X \to S$ и $q : Y \to S$ — морфизмы в категории схем, $h : X \underset{S}{\times} Y \to S$ — их расслоенное произведение, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — квазикогерентные пучки модулей на X и Y. Обобщая конструкцию пучка $\mathcal{F} \otimes_k \mathcal{G}$, можно ввести пучки модулей $\mathrm{Tor}_m^S(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ на $X \times Y$, модули сечения которых для аффинных S, X и Y изоморфны $\mathrm{Tor}_m^A(\Gamma(X, \mathcal{F}), \Gamma(Y, \mathcal{G}))$, где $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. Тогда существуют [7] две спектральные последовательности (E^r) и ($'E^r$) с начальными членами

$$E^2_{n,\,m} = R^{-n}h_*\left(\mathrm{Tor}_m^S(\mathcal{F}, \mathcal{G})\right)$$

и

$$E'^2_{n,\,m} = \bigoplus_{m_1+m_2=m} \mathrm{Tor}_n^S\left(R^{-m_1}p_*\mathcal{F},\ R^{-m_2}q_*\mathcal{G}\right),$$

имеющие один и тот же предел. Эта громоздкая формулировка К. ф. приобретает более привычный вид в терминах производных функторов [11]:

$$Rp_*(\mathcal{F}) \overset{L}{\underset{\mathcal{O}_S}{\otimes}} Rq_*(\mathcal{G}) = Rh_*\left(\mathcal{F} \overset{L}{\underset{\mathcal{O}_S}{\otimes}} \mathcal{G}\right).$$

Если пучок $\mathcal{F}$ или $\mathcal{G}$ является плоским над S, то спектральная последовательность (E^r) вырождается. Аналогично, ($'E^r$) вырождается, если все $R^kp_*(F)$ (или все $R^kq_*(\mathcal{G})$) плоские над S. Если обе спектральные последовательности (E^r) и ($'E^r$) вырождаются, то К. ф. приобретает вид

$$R^*h_*\left(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{G}\right) \cong R^*p_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_S} R^*q_k(\mathcal{G}).$$

К. ф. имеется и для этальных пучков A-модулей на схемах X и Y, где A — конечное кольцо. Ее можно записать в виде

$$Rp_!(\mathcal{F}) \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} Rq_!(\mathcal{G}) = Rh_!\left(\mathcal{F} \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} \mathcal{G}\right),$$

где ! означает, что когомологии берутся с компактными носителями. В частности (см. [8]), для полных алгебраич. многообразий X и Y К. ф. для l-адических когомологий имеет вид

$$H^*(X \times Y, \mathbb{Q}_l) = H^*(X, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} H^*(Y, \mathbb{Q}_l).$$

Для произвольных многообразий такая формула доказана лишь в предположении о возможности разрешения особенностей, напр., для многообразий над полем нулевой характеристики.

Вариант К. ф. имеется и в K-теории. Пусть X — такое пространство, что группа $K^*(X)$ конечно порождена, и пусть Y — клеточное пространство. Тогда имеет место точная последовательность $\mathbb{Z}_2$-градуированных модулей

$$0 \longrightarrow K^*(X) \otimes K^*(Y) \xrightarrow{\alpha} K^*(X \times Y) \xrightarrow{\beta} \xrightarrow{\beta} \mathrm{Tor}_1(K^*(X),\ K^*(Y)) \longrightarrow 0,$$

где α — гомоморфизм степени 0, а β — степени 1 (см. [5]). Частным случаем этого утверждения является *Ботта теорема периодичности* для комплексных расслоений. Известна также К. ф. в теории бордизмов [10].

Лит.: [1] Künneth H., «Math. Ann.», 1923, Bd 90, S. 65—85; 1924, Bd 91, S. 125—34; [2] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [3] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976; [4] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [5] Атья М., Лекции по К-теории, пер. с англ., М., 1967; [6] Kaup L., «Math. Z.», 1967, Bd 97, № 2, S. 158—68; [7] Grothendieck A., Dieudonné J., Eléments de géométrie algébrique, ch. 3, pt. 2, P., 1963. (Publ. Math. IHES, № 17); [8] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, t. 3, B.— [a. o.], 1973; [9] Sampson J., Washnitzer G., «Ill. J. Math.», 1959, v. 3, № 3, p. 389—402; [10] Коннер Э., Флойд Э., Гладкие периодические отображения, пер. с англ., М., 1969; [11] Hartshorne R., Residues and duality, B.— Hdlb.— N. Y., 1966.

В. И. Данилов, А. Л. Онищик.

ЛАВРЕНТЬЕВА ТЕОРЕМА — 1) Л. т. в дескриптивной теории множеств: топологич. отображение между двумя множествами в $\mathbb{R}^n$ можно продолжить до гомеоморфизма нек-рых содержащих их множеств типа G_δ. Следствием этой Л. т. является топологич. инвариантность хаусдорфова типа множества (см. [1]).

2) Л. т. в теории приближений, критерий возможности равномерной аппроксимации: для того чтобы любую непрерывную на компакте $K \subset \mathbb{C}$ функцию можно было равномерно на K аппроксимировать многочленами, необходимо и достаточно, чтобы K был не разбивающим комплексную плоскость компактом без внутренних точек (см. [2]).

3) Л. т. в теории квазиконформных отображений: если D_z и D_w — две односвязные плоские области, ограниченные кусочно гладкими кривыми, а z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 — положительно занумерованные тройки точек на их границах, то какова бы ни была сильно эллиптическая система уравнений

$$\Phi_1(x, y, u, v, u'_x, u'_y, v'_x, v'_y) = 0,$$
$$\Phi_2(x, y, u, v, u'_x, u'_y, v'_x, v'_y) = 0$$

с равномерно непрерывными частными производными функций, задающих уравнения характеристик, всегда существует единственное гомеоморфное отображение D_z на D_w, осуществляемое решением $u(x, y)$, $v(x, y)$ системы, с соответствием указанных троек граничных точек.

4) Л. т. в области механики (теория крыла, уединенная волна, формы динамич. потери устойчивости, струйные течения, теория кумулятивного заряда, направленный взрыв) см. в [4].

Теоремы 1) — 4) получены М. А. Лаврентьевым.

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., «Fundam. math.», 1924, t. 6, p. 149—60; [2] его же, «Тр. физико-матем. ин-та АН СССР, Отдел матем.», 1934, т. 5, с. 159—245; [3] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1948, т. 12, № 6, с. 513—54; [4] Михаил Алексеевич Лаврентьев, М., 1971 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР. Сер. математики, в 12).

В. А. Зорич.

ЛАГЕРРА МНОГОЧЛЕНЫ, многочлены Чебышева — Лагерра,— многочлены, ортогональные на интервале $(0, \infty)$ с весовой функцией $\varphi(x) = x^\alpha e^{-x}$, где $\alpha > -1$. Стандартизованные Л. м. определяются формулой

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n} e^{-x}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

представление с помощью гамма-функции:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \frac{(-x)^k}{k!\,(n-k)!}.$$

В применениях наиболее важны формулы:

$$(n+1) L_{n+1}^\alpha(x) = (\alpha + 2n + 1 - x) L_n^\alpha(x) - (\alpha + n) L_{n-1}^\alpha(x),$$
$$x L_{n-1}^{\alpha+1}(x) = (n+\alpha) L_{n-1}^\alpha(x) - n L_n^\alpha(x),$$
$$\left(L_n^\alpha(x)\right)' = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x).$$

Многочлен $L_n^\alpha(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (уравнению Лагерра)

$$xy'' + (\alpha - x + 1) y' + ny = 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Производящая функция Л. м. имеет вид

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x)\, t^n.$$

Ортонормированные Л. м. выражаются через стандартизованные многочлены:

$$\hat{L}_n^{\alpha}(x) = (-1)^n L_n^{\alpha}(x) \sqrt{\Gamma(n+1)/\Gamma(\alpha+n+1)}.$$

Множество всех Л. м. плотно в пространстве функций, квадрат к-рых интегрируем с весом $\varphi(x)$ на интервале $(0, \infty)$.

Наиболее часто употребляются Л. м. при условии $\alpha=0$, исследованные Э. Лагерром [1], обозначаются в этом случае $L_n(x)$ (в отличие от них Л. м. $L_n^{\alpha}(x)$ иногда называют о б о б щ е н н ы м и). Несколько первых Л. м. $L_n(x)$ имеют вид

$$L_0(x) = 1,$$
$$L_1(x) = 1 - x,$$
$$L_2(x) = 1 - 2x + x^2/2,$$
$$L_3(x) = 1 - 3x + 3x^2/2 - x^3/6,$$
$$L_4(x) = 1 - 4x + 3x^2 - 2x^3/3 + x^4/24.$$

Л. м. $L_n^{\alpha}(x)$ иногда обозначается $L_n(x; \alpha)$.

Лит.: [1] L a g u e r r e E., «Bull. Soc. math. France», 1878, t. 6, p. 72—78; [2] С т е к л о в В. А., «Изв. Имп. АН», 1916, [т. 10], с. 633—42; [3] С е г ё Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [4] С у е т и н П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979. *П. К. Суетин.*

ЛАГЕРРА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$f(n) = T\{F(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x)\, F(x)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $L_n(x)$ — *Лагерра многочлен* степени n. Формула обращения имеет вид

$$T^{-1}\{f(n)\} = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, L_n(x), \quad 0 < x < \infty,$$

если ряд сходится. Если функция $F(x)$ непрерывна, $F'(x)$ кусочно непрерывна на $[0, \infty)$ и $F(x) = O(e^{ax})$, $x \to \infty$, $a < 1$, то

$$T\left\{\frac{dF(x)}{dx}\right\} = \sum_{k=0}^{n} f(k) - F(0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$T\left\{x\frac{dF(x)}{dx}\right\} = -(n+1)\, f(n+1) + nf(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Если функции $F(x)$, $F'(x)$ непрерывны, $F''(x)$ кусочно непрерывна на $[0, \infty)$ и $|F(x)| + |F'(x)| = O(e^{ax})$, $x \to \infty$, $a < 1$, то

$$T\left\{e^x \frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{dF(x)}{dx}\right]\right\} = -nf(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Если $F(x)$ кусочно непрерывна на $[0, \infty)$ и $F(x) = O(e^{ax})$, $x \to \infty$, $a < 1$, то для

$$G(x) = \int_0^x F(t)\, dt,$$

$$g(n) = T\left\{\int_0^x F(t)\, dt\right\} = f(n) - f(n-1), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и при $n = 0$

Пусть функции $F(x)$ и $G(x)$ кусочно непрерывны на $[0, \infty)$ и

$$|F(x)|+|G(x)|=O(e^{ax}),\ x\longrightarrow\infty,\ a<1/2,$$
$$T\{F\}=f(n),\ T\{G\}=g(n).$$

Тогда

$$T^{-1}\{f(n)\,g(n)\}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-t}F(t)\int_0^\pi e^{\sqrt{xt}\cos\theta}\cos\left(\sqrt{xt}\sin\theta\right)\times$$
$$\times G\left(x+t-2\sqrt{xt}\cos\theta\right)d\theta\,dt.$$

Обобщенное Л. п. имеет вид

$$f_\alpha(n)=T_\alpha\{F(x)\}=$$
$$=\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_n^\alpha(x)F(x)\,dx,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где $L_n^\alpha(x)$ — обобщенный многочлен Лагерра (см. [4]).

Лит.: [1] Земанян А. Г., Интегральные преобразования обобщенных функций, пер. с англ., М., 1974; [2] Mc Cully J., «SIAM Rev.», 1960, v. 2, № 3, p. 185—91; [3] Debnath L., «Bull. Calcutta Math. Soc.», 1960, v. 52, № 2, p. 69—77; [4] Итоги науки. Математический анализ. 1965, М., 1967, с. 7—82.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

ЛАГЕРРА УРАВНЕНИЕ — см. *Лагерра многочлены.*

ЛАГЕРРА ФОРМУЛА — 1) Формула для вычисления угла между прямыми в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах. Пусть X и Y — бесконечно удаленные точки прямых a и b, а G и K — точки пересечения этих прямых с абсолютом пространства. Тогда угол φ между этими прямыми выражается с помощью двойного отношения $W(G, K, X, Y)$:

$$\varphi=\left|\frac{i}{2}\ln W(G, K, X, Y)\right|.$$

Для двумерного псевдоевклидова пространства G и K — направляющие векторы изотропных прямых, проходящих через точку пересечения прямых a и b.

Формула выведена Э. Лагерром [1].

2) Формула, согласно к-рой для всех кривых на данной поверхности, имеющих касание в нек-рой точке, совпадают величины

$$\left(3\frac{d\theta}{ds}+2k_2\right)\sin\theta k_1-\left(\frac{d}{ds}k_1\right)\cos\theta,$$

где k_1 и k_2 — кривизна и кручение кривой, угол между главной нормалью кривой и нормалью к поверхности, s — натуральный параметр на кривой. Формула получена Э. Лагерром (1870, см. [2]).

Лит.: [1] Laguerre E., «Nouv. ann. math.», 1853, t. 12, p. 57—66; [2] его же, Œuvres, t. 2, P., 1905; [3] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Д. Д. Соколов.

ЛАГЕРРА ФУНКЦИИ — функции, являющиеся решениями уравнения

$$xy''+(\alpha-x+1)y'+ny=0, \qquad (*)$$

где α, n — произвольные параметры. Л. ф. могут быть выражены через *вырожденную гипергеометрическую функцию* или через *Уиттекера функцию*. В случае $n=0, 1, 2\ldots$ решения уравнения (*) наз. *Лагерра многочленами*. Иногда Л. ф. наз. функцию

$$e_n^{(\alpha)}(x)=x^{\alpha/2}e^{-x/2}L_n^{(\alpha)}(x),$$

где $L_n^{(\alpha)}(x)$ — многочлены Лагерра.

Лит.: [1] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968.

А. Б. Иванов.

ЛАГРАНЖА ЗАДАЧА — одна из основных задач классич. вариационного исчисления. Состоит в минимизации функционала

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2}f(x,\ y,\ y')\,dx,\ \ f:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R},$$

при на
венств:

$$\varphi(x,\ y,\ y')=0,\quad \varphi\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m,\ m<n,\quad (1)$$

и граничных условий:

$$\psi(x_1,\ y(x_1),\ x_2,\ y(x_2))=0,\quad \psi\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^p,$$
$$p\leqslant 2n+2.$$

Обычно Л. з. рассматривается при условии, что имеет место регулярность системы (1), состоящая в том, что матрица $\|\partial\varphi/\partial y'\|$ имеет максимальный ранг:

$$\operatorname{rang}\|\partial\varphi/\partial y'\|=m.$$

При этом условии систему (1) можно разрешить относительно части переменных и, используя иные обозначения (t, x вместо x, y), привести Л. з. к виду

$$\left.\begin{array}{l}\int_{t_0}^{t_1}F(t,\ x,\ u)\,dt,\ F\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\longrightarrow\mathbb{R},\\ \dot{x}=\Phi(t,\ x,\ u),\ \Phi\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\longrightarrow\mathbb{R}^n.\end{array}\right\}\quad (2)$$

Функцию F и отображение Φ предполагают обычно непрерывно дифференцируемыми. Задачи оптимального управления задаются обычно в форме (2) (р а з р е ш е н н а я, или п о н т р я г и н с к а я, ф о р м а), и при этом накладываются еще ограничения на управление $u\in U$. Необходимые условия сильного экстремума для задачи (2) (для простоты — с закрепленным левым x_0 и свободным правым концом x_1) имеют следующий вид. Пусть

$$L(t,\ x,\ \dot{x},\ u,\ p(t))=(p(t))\ -\dot{x}+\Phi(t,\ x,\ u))-F(t,\ x,\ u)$$

— *Лагранжа функция*. Для того чтобы вектор-функция $(x^*(t),\ u^*(t))$ доставляла сильный минимум в Л. з. (2), необходимо, чтобы были выполнены соотношения:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\Big|_{(x^*,\ u^*)}+\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{dx}\Big|_{(x^*,\ u^*)}\,dt=0,\quad (3)$$

$$p(t_1)=0,\quad (4)$$

$$\mathcal{E}\equiv L(t,\ x^*(t),\ \dot{x},\ u,\ p(t))-$$
$$-L(t,\ x^*(t),\ \dot{x}^*(t),\ u^*(t),\ p(t))-$$
$$-((\dot{x}-\dot{x}^*(t))\,|\,L_{\dot{x}}(t,\ x^*(t),\ \dot{x}^*(t),\ u^*(t),\ p(t))=$$
$$=(p(t)\,|\,\Phi(t,\ x^*(t),\ u)-F(t,\ x^*(t),\ u))-$$
$$-(p(t)\ |\Phi(t,\ x^*(t),\ u^*(t))+F(t,\ x^*(t),\ u^*(t)))\leqslant 0\quad (5)$$

при всевозможных допустимых значениях $\dot{x}$, u.

Если провести дифференцирование в (3) по t и воспользоваться обозначением

$$\mathcal{H}(t,\ x,\ u,\ p)=(p\,|\,\Phi)-F,$$

то необходимое условие сильного минимума сформулируется в форме принципа максимума, в к-ром соединены *Эйлера уравнение* (3), *трансверсальности условие* (4) и *Вейерштрасса условие* (5). Для того чтобы вектор-функция $(x^*,\ u^*)$ доставляла сильный минимум в задаче (2) с закрепленным левым и свободным правым концами, необходимо, чтобы нашлось решение системы

$$\dot{p}(t)=-\frac{\partial\mathcal{H}(t,\ x^*,\ u^*,\ p)}{\partial x},\quad p(t_1)=0,$$

при к-ром

$$\mathcal{H}(t,\ x^*(t),\ u^*(t),\ p(t))=\max_{u\in U}\mathcal{H}(t,\ x^*(t),\ u,\ p(t)).$$

Ж. Лагранж (J. Lagrange) рассматривал подобные задачи в связи с исследованиями по механике (2-я пол. 18 в.).

Лит. см. при статье *Вариационное исчисление*.

И. Б. Вапнярский, В. М. Тихомиров.

ЛАГРАНЖА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — форма записи многочлена степени n (и н т е р п о л я ц и о н н о г о м н о г о ч л е н а Л а г р а н ж а),

интерполирующего заданную функцию $f(x)$ в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (1)$$

В случае, когда значения x_i являются равноотстоящими, т. е. $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$, с помощью обозначений $(x - x_0)/h = t$ формула (1) может быть приведена к виду

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = (-1)^n \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{n!} \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \frac{f(x_i)}{t-i}. \quad (2)$$

В выражении (2), наз. Л. и. ф. для равноотстоящих узлов, коэффициенты, стоящие перед $f(x_i)$:

$$(-1)^{n-i} C_n^i \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(t-i)\,n!},$$

наз. коэффициентами Лагранжа.

Если функция f имеет производную порядка $n+1$ на отрезке $[a, b]$, все узлы интерполяции лежат на этом отрезке и для любой точки $x \in [a, b]$: $\alpha_x = \min\{x_0, x_1, \ldots, x_n, x\}$, $\beta_x = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_n, x\}$, то существует такая точка $\xi \in [\alpha_x, \beta_x]$, что

$$f(x) - L_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\,\omega_n(x)/(n+1)!,$$

где

$$\omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Если абсолютная величина производной $f^{(n+1)}$ ограничена на отрезке $[a, b]$ постоянной M и если в качестве узлов интерполяции выбраны точки, в к-рые перейдут корни многочлена Чебышева степени $n+1$ при линейном отображении отрезка $[-1, 1]$ на отрезок $[a, b]$, то для любого $x \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant M(b-a)^{n+1}/(n+1)!\,2^{2n+1}.$$

Если узлы интерполяции — комплексные числа $z_0, z_1, \ldots, z_n$ и лежат в нек-рой области G, ограниченной кусочно гладким контуром γ, а функция f является однозначной аналитич. функцией в замыкании области G, то Л. и. ф. имеет вид

$$L_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\omega(\zeta) - \omega(z)}{\omega(\zeta)(\zeta - z)} f(\zeta)\,d\zeta,$$

причем

$$f(z) - L_n(z) = \frac{\omega(z)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)(z-\zeta)}\,d\zeta.$$

Л. и. ф. для интерполирования с помощью тригонометрич. полиномов наз. формула

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{j \neq k} \frac{\sin(x - x_j)/2}{\sin(x_k - x_j)/2},$$

дающая тригонометрич. полином порядка n, принимающий в заданных узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$ данные значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Формула предложена Ж. Лагранжем (J. Lagrange, 1795).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев, М. К. Самарин.

ЛАГРАНЖА МЕТОД — метод приведения квадратичной формы к сумме квадратов, указанный в 1759 Ж. Лагранжем (J. Lagrange). Пусть дана квадратичная форма

$$f(x) = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (1)$$

от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с коэффициентами из

поля k характеристики $\neq 2$. Требуется привести эту форму к канонич. виду

$$f(x)=\sum_{i=1}^{r} b_i y_i^2,\ b_i \in k,\ b_i \neq 0,\ i=1,\ \ldots,\ r, \quad (2)$$

при помощи невырожденного линейного преобразования переменных. Л. м. состоит в следующем. Можно считать, что не все коэффициенты формы (1) равны нулю. Поэтому возможны два случая.

1) При некотором g, $1 \leqslant g \leqslant n$, диагональный коэффициент $a_{gg} \neq 0$. Тогда

$$f(x)=\frac{1}{a_{gg}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{gk}x_k\right)^2+f_1(x), \quad (3)$$

где форма $f_1(x)$ не содержит переменную x_g.

2) Если же все $a_{gg}=a_{hh}=0$, но $a_{gh}\neq 0$, то

$$f(x)=\frac{1}{2a_{gh}}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_{gk}+a_{hk})\,x_k\right]^2-$$

$$-\frac{1}{2a_{gk}}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_{gk}-a_{hk})\,x_k\right]^2+f_2(x), \quad (4)$$

где форма $f_2(x)$ не содержит двух переменных x_g и x_h. Формы, стоящие под знаками квадратов в (4), линейно независимы. Применением преобразований вида (3) и (4) форма (1) после конечного числа шагов приводится к сумме квадратов линейно независимых линейных форм. С помощью частных производных формулы (3) и (4) можно записать в виде

$$f(x)=\frac{1}{4a_{gg}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_g}\right)^2+f_1(x),$$

$$f(x)=\frac{1}{8a_{gh}}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_g}+\frac{\partial f}{\partial x_h}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial x_g}-\frac{\partial f}{\partial x_h}\right)^2\right].$$

Лит.: [1] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966; [2] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [3] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии..., М., 1968.

И. В. Проскуряков.

ЛАГРАНЖА МНОЖИТЕЛИ — переменные, с помощью к-рых строится *Лагранжа функция* при исследовании задач на условный экстремум. Использование Л. м. и функции Лагранжа позволяет единообразным способом получать необходимые условия оптимальности в задачах на условный экстремум. Метод получения необходимых условий в задаче определения экстремума функции

$$f(x_1,\ \ldots,\ x_n) \quad (1)$$

при ограничениях

$$g_i(x_1,\ \ldots,\ x_n)=b_i,\ i=1,\ \ldots,\ m,\ m<n, \quad (2)$$

заключающийся в использовании Л. м. λ_i, $i=1,\ldots,m$, построении функции Лагранжа

$$F(x,\ \lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,[b_i-g_i(x)]$$

и приравнивании к нулю ее частных производных по x_j и λ_i, наз. м е т о д о м Л а г р а н ж а. В этом методе оптимальное значение $x^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ находится вместе с соответствующим ему вектором Л. м. $\lambda^*=(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*)$ из решения системы $m+n$ уравнений. Л. м. λ_i^*, $i=1,\ldots,m$, допускают следующую интерпретацию [1]: пусть x^* доставляет относительный экстремум функции (1) при условиях (2); $z^*=f(x^*)$. Значения x^*, λ^* и z^* зависят от значений b_i — правых частей ограничений (2). Формулируются достаточно общие предположения, при к-рых все x_j^* и λ_i^* являются непрерывно дифференцируемыми функциями вектора $b=(b_1,\ldots,b_m)$ в нек-рой ε-окрестности его значения, задаваемого в (2). При этих предположениях непрерывно дифференцируемой по b_i будет и функция z^*. Частные

производные от экстремума z^* по b_i равны соответствующим Л. м. λ_i^*, вычисленным при данном $b=(b_1, \ldots, b_m)$:

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i}=\lambda_i^*,\ i=1,\ \ldots,\ m. \qquad (3)$$

В прикладных задачах z часто интерпретируется как доход или стоимость, а правые части b_i — как затраты некоторых ресурсов. Тогда размерностью λ_i^* будет отношение единицы стоимости к единице i-го вида ресурсов. Числа λ_i^* показывают, как изменится максимальный доход (или максимальная стоимость), если количество i-го вида ресурсов увеличится на единицу. Приведенная интерпретация Л. м. распространяется также на случай ограничений в виде неравенств и на случай, когда переменные x_j подчинены требованиям неотрицательности.

В вариационном исчислении с помощью Л. м. удобно получать необходимые условия оптимальности в задаче на условный экстремум как необходимые условия безусловного экстремума нек-рого составного функционала. Л. м. в вариационном исчислении являются уже не константами, а нек-рыми функциями. В теории оптимального управления и в *Понтрягина принципе максимума* Л. м. получили название сопряженных переменных.

Лит.: [1] Хедли Дж., Нелинейное и динамическое программирование, пер. с англ., М., 1967; [2] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950.

И. Б. Вапнярский.

ЛАГРАНЖА ПРИНЦИП, принцип стационарного действия,—вариационный интегральный принцип динамики голономных систем, стесненных идеальными стационарными связями и находящихся под действием потенциальных сил, не зависящих явно от времени.

Согласно Л. п., в действительном движении голономной системы, для к-рой существует интеграл энергии $T+V=h$, между нек-рым начальным A_0 и конечным A_1 положениями, действие по Лагранжу

$$\int_{t_0}^{t} 2T\,dt=\int_{A_0}^{A_1}\sum_{\nu} m_\nu v_\nu dr_\nu$$

имеет стационарное значение по сравнению с кинематически возможными движениями между теми же положениями и с той же энергией h, что и в действительном движении. Здесь T и V — кинетическая и потенциальная энергии системы, $m_\nu v_\nu$ — количество движения ν-й точки системы, t_0 и t — моменты времени прохождения системы через положения A_0 и A_1.

Если начальное и конечное положения системы достаточно близки одно к другому, то действие по Лагранжу имеет минимум для действительного движения, в связи с чем Л. п. наз. также принципом наименьшего действия в форме Лагранжа.

Л. п. приводит задачу определения действительного движения системы к вариационной *Лагранжа задаче*; он выражает условие, необходимое и достаточное для действительного движения [4].

Л. п. в неявной форме впервые был высказан П. Мопертюи [1]; Л. Эйлер [2] дал его обоснование для случая движения одной материальной точки в центральном поле. Ж. Лагранж [3] распространил этот принцип на многие более общие задачи.

Лит.: [1] Maupertuis P. L. M., «Histoire de l'Acad. Royale des Sci.», ann. 1744, P., 1748, p. 417; [2] Euler L., Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, Lausannae-Genevae, 1744; [3] Lagrange J., Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies, Turin, 1762; [4] Суслов Г. К., Теоретическая механика, 3 изд., М.— Л., 1946.

В. В. Румянцев.

ЛАГРАНЖА РЯД — степенной ряд, дающий решение задачи локального обращения голоморфной функции комплексного переменного. Первоначальное решение задачи обращения, данное Ж. Лагранжем (J. Lagrange, 1770), было затем усовершенствовано А. Бюрманом (H. Burmann, 1779). См. *Бюрмана — Лагранжа ряд.*

Е. Д. Соломенцев.

ЛАГРАНЖА СКОБКИ относительно переменных u и v — суммы вида

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v}-\frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial p_i}{\partial u}\right)\equiv[u,\ v]_{p,\ q}, \qquad (*)$$

где $q=(q_1,\ldots,q_n)$ и $p=(p_1,\ldots,p_n)$ — нек-рые функции от u и v.

Если $q=(q_1,\ldots,q_n)$ и $p=(p_1,\ldots,p_n)$ — канонич. переменные и $Q=Q(q,\ p)$, $P=P(q,\ p)$ — канонические преобразования, то Л. с. являются инвариантами этого преобразования

$$[u,\ v]_{q,\ p}=[u,\ v]_{Q,\ P}.$$

По этой причине индексы q, p в правой части (*) часто опускают. Л. с. наз. фундаментальными, когда переменные u и v совпадают с какой-либо парой из $2n$ переменных q, p. Из них можно составить три матрицы

$$[p,\ p]=\{[p_i,\ p_j]\}_{i,\ j=1}^{n},\ \ [q,\ q],\ [q,\ p],$$

первые две из к-рых нулевые, а последняя единичная. Между Л. с. и *Пуассона скобками* имеется определенная связь. Именно, если функции $u_i=u_i(q,\ p)$, $1\leqslant i\leqslant n$, осуществляют диффеоморфизм $R^{2n}\to R^{2n}$, то матрицы, составленные из элементов $[u_i,\ u_j]$ и $(u_j,\ u_i)$, взаимно обратны.

Лит.: [1] Lagrange J. L., Œuvres, t. 6, P., 1873; [2] Уиттекер Э. Т., Аналитическая динамика, пер. с англ., М.— Л., 1937; [3] Лурье А. И., Аналитическая механика, М., 1961; [4] Голдстейн Г., Классическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

А. П. Солдатов.

ЛАГРАНЖА СПЕКТР — множество постоянных Лагранжа в проблеме рациональных приближений действительных чисел. Л. с. содержится в спектре Маркова (см. *Маркова проблема спектра*).

ЛАГРАНЖА ТЕОРЕМА — 1) Л. т. в дифференциальном исчислении — см. *Конечных приращений формула.*

2) Л. т. в теории групп: порядок $|G|$ любой конечной группы G делится на порядок $|H|$ любой ее подгруппы H. Фактически теорема была доказана Ж. Лагранжем (J. Lagrange, 1771) при изучении свойств подстановок в связи с исследованиями разрешимости алгебраич. уравнений в радикалах.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977.

Н. Н. Вильямс.

3) Л. т. о сравнениях: число решений сравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p),\ \ a_0\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p),$$

по простому модулю p не превосходит его степени n. Доказана Ж. Лагранжем (см. [1]). Обобщается на многочлены с коэффициентами из произвольной области целостности.

Лит.: [1] Lagrange J. L., Œuvres, t. 2, P., 1868, p. 667; [2] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972.

С. А. Степанов.

4) Л. т. о сумме четырех квадратов: всякое натуральное число можно представить в виде суммы четырех квадратов целых чисел. Установлена Ж. Лагранжем [1]. Об обобщении Л. т. см. *Варинга проблема.*

Лит.: [1] Lagrange J. L., «Nouv. mém. Acad. roy. sci. de Berlin, ann. 1770», B., 1772, p. 123—33; [2] Серр Ж.-П., Курс арифметики, пер. с франц., М., 1972.

С. М. Воронин.

5) Л. т. о цепных дробях: всякая цепная дробь, представляющая *квадратическую иррациональность*, является периодической. Установлена Ж. Лагранжем [1].

Лит.: [1] Lagrange J. L., «Mém. Acad. roy. sci. de Berlin, ann. 1767», t. 23, B., 1769, p. 165—310; [2] Хинчин А. Я., Цепные дроби, 3 изд., М., 1961, с. 62. *С. М. Воронин.*

ЛАГРАНЖА УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка, не разрешенное относительно производной, но линейное относительно независимой переменной и неизвестной функции:

$$F(y')x+G(y')y=H(y'). \qquad (1)$$

Это уравнение названо по имени Ж. Лагранжа (J. Lagrange, 1759, см. [1]); уравнение (1) исследовал также Ж. Д'Аламбер (J. D'Alembert), и потому оно иногда наз. уравнением Д'Аламбера. Частным случаем Л. у. является *Клеро уравнение*.

Л. у. всегда разрешимо в квадратурах методом введения параметра (методом дифференцирования). Пусть, напр., уравнение (1) приводится к виду

$$y=f(y')x+g(y'), \quad f(y')\not\equiv y'. \qquad (2)$$

Вводя параметр $p=y'$ и взяв полный дифференциал от обеих частей равенства (2), с учетом соотношения $dy=pdx$ приходят к линейному уравнению 1-го порядка

$$[p-f(p)]\frac{dx}{dp}-f'(p)\,x=g'(p).$$

Если $x=\Phi(p, C)$ — решение этого уравнения (где C — произвольная постоянная), то решение уравнения (2) записывается в параметрич. виде

$$x=\Phi(p, C), \quad y=f(p)\Phi(p, C)+g(p).$$

Если p_0 — изолированный корень уравнения $p=f(p)$, то $y=f(p_0)x+g(p_0)$ — также решение уравнения (2); это решение может оказаться особым.

Лит.: [1] Lagrange J. L., Œuvres, t. 1, P., 1867, p. 23—36; [2] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959. *Н. Х. Розов.*

ЛАГРАНЖА УРАВНЕНИЯ механики — обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка, описывающие движения механич. систем под действием приложенных к ним сил. Л. у. установлены Ж. Лагранжем [1] в двух формах: Л. у. 1-го рода, или уравнения в декартовых координатах с неопределенными множителями Лагранжа, и 2-го рода, или уравнения в обобщенных лагранжевых координатах.

Л. у. 1-го рода описывают движения как голономных систем, стесненных только геометрич. связями вида $f_s(x_1, \ldots, x_{3N}, t)=0$, $s=1, \ldots, k$, $f_s(x, t)\in C^2$, (1) так и неголономных систем, на к-рые наложены, помимо связей (1), кинематич. связи вида

$$\varphi_r(x_1, \ldots, x_{3N}, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{3N}, t)=0, \quad r=1, \ldots, m, \ \varphi_r(x, \dot{x}, t)\in C^1, \qquad (2)$$

где x_ν, $\dot{x}_\nu=\frac{dx_\nu}{dt}$ — декартовы координаты и скорости точек, N — число точек системы, t — время, $m_{3p-2}=m_{3p-1}=m_{3p}$ — масса p-й точки, имеющей координаты x_{3p-2}, x_{3p-1}, x_{3p}.

Связи (1) и (2) предполагаются независимыми, т. е. ранги матриц $\left\|\frac{\partial f_s}{\partial x_\nu}\right\|$ и $\left\|\frac{\partial \varphi_r}{\partial \dot{x}_\nu}\right\|$ равны соответственно k и m.

Л. у. 1-го рода имеют вид

$$m_\nu\ddot{x}_\nu=X_\nu+\sum_{s=1}^{k}\lambda_s\frac{\partial f_s}{\partial x_\nu}+\sum_{r=1}^{m}\mu_r\frac{\partial \varphi_r}{\partial \dot{x}_\nu}, \qquad (3)$$
$$\nu=1, \ldots, 3N,$$

где λ_s, μ_r — неопределенные множители Лагранжа, пропорциональные реакциям связей, X_ν — проекции на оси координат заданных активных сил, причем сила

F_p, действующая на p-ю точку, имеет проекции X_{3p-2}, X_{3p-1}, X_{3p}; $\dot{x}_\nu = \frac{dx_\nu}{dt}$.

К дифференциальным уравнениям (3) надлежит присоединить $k+m$ уравнений (1) и (2), в результате чего получается система $3N+k+m$ уравнений с таким же числом неизвестных x_ν, λ_s, μ_r. Л. у. 1-го рода на практике обычно применяются для систем с небольшим числом неизвестных.

Л. у. 2-го рода описывают движения лишь голономных систем, стесненных связями вида (1). Введением в рассмотрение $n=3N-k$ независимых обобщенных лагранжевых координат q_i, с помощью к-рых любое возможное положение системы может быть получено при нек-рых значениях q_i из равенств

$$x_\nu = x_\nu(q_1, \ldots, q_n, t),\ x_\nu(q_i, t) \in C^2, \qquad (4)$$

обращающих уравнения (1) в тождества, устанавливается для каждого t взаимно однозначное соответствие между возможными положениями системы и точками нек-рой области n-мерного конфигурационного пространства $(q_1, \ldots, q_n)$. В случае стационарных связей (1) всегда возможно выбрать переменные q_i так, что время t не будет входить в уравнения (4). Далее записываются с помощью уравнений (4) выражения для суммы элементарных работ всех активных сил F_p на возможных перемещениях системы

$$\sum_{p=1}^{N} F_p \cdot \delta r_p = \sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \delta x_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$$

и кинетич. энергии системы

$$T(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu^2 = T_2 + T_1 + T_0.$$

Здесь

$$Q_i = \sum_{i=1}^{3N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}$$

— обобщенная сила, соответствующая координате q_i, $T_s(q_i, \dot{q}_i, t)$ — однородные степени s формы обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, причем

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad T_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \dot{q}_i,$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t} \right)^2,$$

$$a_{ij} = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_j},$$

$$a_i = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial x_\nu}{\partial t}.$$

В случае стационарных связей $T = T_2$.

Л. у. 2-го рода имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,\ i = 1, \ldots, n. \qquad (5)$$

Уравнения (5) представляют собой систему n обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с неизвестными q_i. Они инвариантны по форме относительно выбора лагранжевых координат. Эта система уравнений движения имеет наименьший возможный порядок $2n$. В этом, а также в отсутствии в уравнениях (5) реакций связей, состоит большое преимущество уравнений (5) по сравнению с Л. у. 1-го рода (3). После интегрирования системы (5) реакции связей могут быть определены из уравнений, выражающих второй закон Ньютона для точек системы.

В случае потенциальных обобщенных сил, когда существует силовая функция $U(q_1, \ldots, q_n, t)$ такая, что $Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$, $i=1, \ldots, n$, уравнения (5) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i=1, \ldots, n, \qquad (6)$$

где $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T + U$ носит название функции Лагранжа, или кинетич. потенциала.

Если $\frac{\partial L}{\partial t} \equiv 0$, или $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \equiv 0$, то уравнения (6) допускают обобщенный интеграл энергии

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = T_2 - T_0 - U = \text{const}$$

или циклический интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \beta_\alpha = \text{const},$$

соответствующий циклической координате q_α.

Лит.: [1] Lagrange J., Mécanique analytique, P., 1788 (рус. пер.— Лагранж Ж., Аналитическая механика, 2 изд., т. 1, М.— Л., 1950).

В. В. Румянцев.

ЛАГРАНЖА ФУНКЦИЯ — функция, используемая при решении задач на условный экстремум функций многих переменных и функционалов. С помощью Л. ф. записываются необходимые условия оптимальности в задачах на условный экстремум. При этом не требуется выражать одни переменные через другие или учитывать, что не все переменные являются независимыми. Получаемые с помощью Л. ф. необходимые условия представляют замкнутую систему соотношений, среди решений к-рой содержится искомое оптимальное решение задачи на условный экстремум. Л. ф. используется как при рассмотрении теоретич. вопросов линейного и нелинейного программирования, так и при построении нек-рых вычислительных методов.

Пусть, напр., поставлена задача на условный экстремум функции многих переменных: найти максимум или минимум функции

$$f(x_1, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

при условиях

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = b_i, \quad i=1, \ldots, m; \; m < n. \qquad (2)$$

Функция $F(x, \lambda)$, определенная выражением

$$F(x, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 [b_1 - g_1(x)] + \ldots + \\ + \ldots + \lambda_m [b_m - g_m(x)], \qquad (3)$$

наз. функцией Лагранжа, а числа λ_i — *Лагранжа множителями*. Имеет место следующее утверждение, называемое правилом множителей: если $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ — решение задачи на условный экстремум (1), (2), то существует хотя бы одна ненулевая система множителей Лагранжа $\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ такая, что точка (x^*, λ^*) является точкой стационарности Л. ф. по переменным x_j и λ_i, $i \neq 0$, рассматриваемым как независимые переменные. Необходимые условия стационарности Л. ф. приводят к системе $m+n$ уравнений

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = \lambda_0^* \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} = 0, \qquad (4)$$
$$j=1, \ldots, n,$$

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x^*) = 0, \quad i=1, \ldots, m. \qquad (5)$$

Соотношения (5) полученной системы представляют условия связи (2). Точка x^* доставляет обычный (безусловный) экстремум Л. ф. $F(x, \lambda^*)$ по x.

Для большинства практич. задач значение λ_0^* в (3), (4) можно принять равным единице. Однако имеются

примеры (см. [1]), в к-рых правило множителей при $\lambda_0^*=1$ не выполняется, а выполняется при $\lambda_0^*=0$. Для определения условий, позволяющих отличить случаи $\lambda_0^*=1$ и $\lambda_0^*=0$, рассматриваются (см. [2]) матрицы G и G_f:

$$G=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}\end{matrix}\right\|,\qquad G_f=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{matrix}\right\|.$$

Пусть $r(G)$ — ранг матрицы G, рассматриваемой в оптимальной точке x^*. Тогда если $r(G_f)=r(G)$, то $\lambda_0^*=1$; если же $r(G_f)>r(G)$, то для выполнения правила множителей необходимо положить $\lambda_0^*=0$. Кроме того, если $r(G_f)=r(G)=m$ (наиболее распространенный случай в практич. задачах), то λ_i^* определены однозначно, а если $r(G_f)>r(G)$ или $r(G_f)=r(G)<m$, то λ_i^* определяются не единственным образом. В зависимости от рассмотренных случаев λ_0^* полагается равным 0 или 1. Тогда система (4), (5) превращается в систему $m+n$ уравнений с $m+n$ неизвестными $x_1^*,\dots, x_n^*, \lambda_1^*,\dots, \lambda_m^*$. Множителям Лагранжа λ_i^* можно дать интерпретацию, имеющую определенный физич. смысл (см. *Лагранжа множители*).

В случае, когда оптимизируемая функция $f(x)$ является квадратичной, а условия связи (2) линейны, система необходимых условий (4), (5) оказывается линейной, и ее решение не вызывает затруднений. В общем случае система необходимых условий (4), (5) в задаче на условный экстремум, получаемая с помощью Л. ф., оказывается нелинейной, и ее решение возможно лишь с применением итерационных методов, напр. *Ньютона метода*. Основной трудностью при этом, помимо вычислительных трудностей решения системы нелинейных уравнений, оказывается проблема получения всех решений, удовлетворяющих необходимым условиям. Не существует вычислительного процесса, обеспечивающего получение всех решений системы (4), (5), и это является одним из обстоятельств, ограничивающих применение метода множителей Лагранжа.

Л. ф. применяется в задачах нелинейного программирования, отличающихся от классич. задач на условный экстремум наличием, помимо условий типа равенства, ограничений типа неравенства: найти минимум или максимум

$$f(x) \tag{6}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} &g_i(x)\leqslant b_i, \quad i=1,\ \dots,\ m_1,\\ &g_i(x)\geqslant b_i, \quad i=m_1+1,\ \dots,\ m_2,\ m_1\leqslant m_2,\\ &g_i(x)=b_i, \quad i=m_2+1,\ \dots,\ m,\ m_2\leqslant m, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$x\geqslant 0. \tag{8}$$

Для вывода необходимых условий оптимальности в задаче (6) — (8) вводится Л. ф.

$$F(x,\ \lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,[b_i-g_i(x)]. \tag{9}$$

Для определенности рассматривается случай максимума $f(x)$. Пусть $x^*=(x_1^*,\dots, x_n^*)\geqslant 0$ доставляет максимум $f(x)$ при ограничениях (7), (8) и пусть в точке x^* выполнено требование регулярности ограничений (см. [2]); пусть J — множество индексов j из $j=1,\dots, n$, для к-рых $x_j^*>0$, J_0 — множество индексов j, для к-рых $x_j^*=0$, и I — множество индексов i из $i=1,\dots, m_2$,

для к-рых ограничения (7) в точке x^* выполняются как строгие неравенства. Тогда существует такой вектор $\lambda^*=(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*)$:

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_i^*\geqslant 0 \quad \text{при} \quad i=1,\ \ldots,\ m_1,\\ \lambda_i^*\leqslant 0 \quad \text{при} \quad i=m_1+1,\ \ldots,\ m_2,\\ \lambda_i^* \text{ любого знака при } i=m_2+1,\ \ldots,\ m,\\ \lambda_i^*=0 \quad \text{при} \quad i\in I,\end{array}\right\} \tag{10}$$

что

$$\frac{\partial F(x^*,\ \lambda^*)}{\partial x_j}=$$

$$=\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j}\begin{cases}=0 & \text{при } j\in J,\\ \leqslant 0 & \text{при } j\in J_0,\end{cases} \tag{11}$$

$$\frac{\partial F(x^*,\ \lambda^*)}{\partial \lambda_i}=$$

$$=b_i-g_i(x^*)\begin{cases}\geqslant 0 & \text{при } i=1,\ \ldots,\ m_1,\\ \leqslant 0 & \text{при } i=m_1+1,\ \ldots,\ m_2,\\ =0 & \text{при } i=m_2+1,\ \ldots,\ m.\end{cases} \tag{12}$$

Сформулированные необходимые условия обобщают условия (4), (5). Эти условия можно интерпретировать, используя понятие седловой точки функции $F(x,\ \lambda)$. В седловой точке $(x^*,\ \lambda^*)$ функция $F(x,\ \lambda)$ удовлетворяет неравенствам

$$F(x,\ \lambda^*)\leqslant F(x^*,\ \lambda^*)\leqslant F(x^*,\ \lambda).$$

Точка $(x^*,\ \lambda^*)$, в к-рой выполняются условия (10) — (12), удовлетворяет необходимым условиям существования седловой точки Л. ф. $F(x,\ \lambda)$ на множестве $x\geqslant 0$ и λ, удовлетворяющем ограничениям (10). В том случае, когда $f(x)$ — вогнутая при $x\geqslant 0$ функция, а $g_i(x)$ — выпуклая, если $\lambda_i^*>0$, и вогнутая, если $\lambda_i^*<0$, $i=1,\ldots,m$, сформулированные необходимые условия оказываются и достаточными, т. е. найденная из необходимых условий точка $(x^*,\ \lambda^*)$ является седловой точкой Л. ф. $F(x,\ \lambda)$ при $x\geqslant 0$ и λ, удовлетворяющем ограничениям (10), и $f(x^*)$ является абсолютным максимумом $f(x)$ при ограничениях (7), (8).

Наряду с Л. ф., записываемой в виде (9), используется и другая форма записи Л. ф., отличающаяся знаком множителей Лагранжа. При этом изменяется и форма записи необходимых условий. Пусть поставлена задача нелинейного программирования: найти максимум

$$f(x) \tag{13}$$

при ограничениях

$$g_i(x)\geqslant 0,\quad i=1,\ \ldots,\ m, \tag{14}$$

$$x\geqslant 0. \tag{15}$$

Ограничения (7) при $i=1,\ldots,m_2$ сводятся к (14) простым переобозначением. Условия типа равенства $g_i(x)=b_i$, $i>m_2$, заменяются неравенствами $g_i(x)-b_i\geqslant 0$ и $b_i-g_i(x)\geqslant 0$ и также приводятся к виду (14).

Пусть Л. ф. записана в виде

$$F(x,\ \lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x) \tag{16}$$

и пусть I — множество индексов i из $i=1,\ldots,m$, для к-рых ограничения (14) выполняются как строгие неравенства. Тогда если $x^*\geqslant 0$ — оптимальное решение задачи (13) — (15), то при выполнении требования регулярности ограничений существует такой вектор $\lambda^*=(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*)$:

$$\lambda_i^*\geqslant 0,\quad i=1,\ \ldots,\ m;\ \lambda_i^*=0,\ i\in I, \tag{17}$$

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} =$$

$$= \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \begin{cases} = 0 \text{ при } j \in J, \\ \leqslant 0 \text{ при } j \in J_0, \end{cases} \tag{18}$$

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = g_i(x^*) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{19}$$

(см. [2], [3]). Условия (17) — (19) с учетом положительных и нулевых значений x_j^* и λ_i^* иногда записывают следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0.$$

Если ограничения (7) или (14) линейны, то упоминаемое выше условие регулярности ограничений всегда выполнено. Поэтому для линейных ограничений единственным предположением при выводе необходимых условий является дифференцируемость функции $f(x)$.

Если в задаче (13) — (15) функции $f(x)$ и $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, вогнутые, то точка (x^*, λ^*), удовлетворяющая необходимым условиям (17) — (19), является седловой точкой Л. ф. (16) и x^* доставляет абсолютный максимум. То что Л. ф. имеет в этом случае седловую точку, может быть доказано и без предположений о дифференцируемости функций $f(x)$ и $g_i(x)$.

Аналог Л. ф. применяется и в вариационном исчислении при рассмотрении задач на условный экстремум функционалов. Здесь также необходимые условия оптимальности в задаче на условный экстремум оказывается удобным записывать как необходимые условия для некрого составного функционала (аналога Л. ф.), построенного с помощью множителей Лагранжа. Пусть, напр., поставлена *Больца задача*: найти минимум функционала

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, \dot{x})\, dt + g(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)),$$

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

при наличии дифференциальных ограничений типа равенств

$$\varphi(t, x, \dot{x}) = 0, \quad \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad m < n,$$

и граничных условий

$$\psi(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) = 0, \qquad \psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p,$$

$$p \leqslant 2n + 2.$$

Необходимые условия в этой условноэкстремальной задаче получаются как необходимые условия безусловного экстремума функционала (см. [4])

$$I(x, \lambda, e) = \int_{t_1}^{t_2} (\lambda_0 f(t, x, \dot{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) \varphi_i(t, x, \dot{x}))\, dt +$$

$$+ \lambda_0 g(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) + \sum_{\mu=1}^{p} e_\mu \psi_\mu(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)),$$

составленного с помощью множителей Лагранжа

$$\lambda_0, \quad \lambda_i(t), \quad i = 1, \ldots, m, \quad e_\mu, \quad \mu = 1, \ldots, p.$$

Эти необходимые условия, представляющие собой замкнутую систему соотношений для определения оптимального решения $x^*(t)$ и соответствующих множителей Лагранжа $\lambda_i^*(t)$ и e_μ^*, в конкретных постановках записываются в виде *Эйлера уравнения*, *Вейерштрасса условия* и *трансверсальности условия*.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 23 изд., т. 1, М., 1974; [2] Хедли Дж., Нелинейное и динамическое программирование, пер. с англ., М., 1967; [3] Kuhn H.

W., Tucker A. W., в кн.: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berk.— Los Ang., 1951, p. 481—92; [4] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950. *И. Б. Вапнярский.*

ЛАГРАНЖЕВО МНОГООБРАЗИЕ — n-мерное дифференцируемое подмногообразие L^n $2n$-мерного *симплектического многообразия* M^{2n} такое, что внешняя форма ω, задающая симплектич. структуру на M^{2n}, обращается в нуль тождественно на L^n (т. е. для любой точки $x \in L^n$ и любых векторов X, Y, касающихся L^n в этой точке, $\omega(X, Y)=0$). В наиболее важном случае, когда $M^{2n}=\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$, а $\omega=\sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$, условие лагранжевости подмногообразия L^n, заданного параметрич. уравнениями

$$p_i=p_i(u_1, \ldots, u_n), \quad q_i=q_i(u_1, \ldots, u_n),$$

имеет вид

$$[u_i, u_j]=0, \quad i, j=1, \ldots, n,$$

где $[u_i, u_j]$ — *Лагранжа скобки*.

Лит.: [1] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; [2] его же, Метод ВКБ в многомерном случае, в кн.: Хединг Дж., Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ), пер. с англ., М., 1965; [3] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [4] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976; [5] Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е., Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора, М., 1978. *Д. В. Аносов.*

ЛАГРАНЖИАН, функция Лагранжа, интегрант,— подинтегральная функция $L(q, \dot{q}, t)$ в задаче на экстремум для функционала

$$J(q)=\int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt; \qquad (*)$$

экстремальная задача решается при возможном наложении связей и граничных условий; здесь $q=(q_1, \ldots, q_n)$, $\dot{q}=dq/dt$, L — произвольное дифференцируемое отображение $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Термин «Л.» возник в классич. механике, где в простейшем случае Л. наз. разность кинетической и потенциальной энергии системы, причем движения системы совпадают с экстремалями соответствующего интегрального функционала (принцип стационарного действия). В общем случае в классич. механике Л. наз. произвольное дифференцируемое отображение $L: TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где TM — касательное расслоение некрого дифференцируемого многообразия M (конфигурационного многообразия системы).

Необходимое условие слабого экстремума функционала (*) при отсутствии связей дается уравнением Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0.$$

Наличие связей типа равенств учитывается при помощи множителей Лагранжа. При наличии «неклассических» связей типа неравенств в теории оптимального управления необходимое условие сильного экстремума функционала (*) дает *Понтрягина принцип максимума*.

При помощи понятия Л. удобно рассматривать различные симметрии системы, поскольку всякой однопараметрич. группе диффеоморфизмов конфигурационного многообразия, сохраняющих Л., соответствует первый интеграл уравнений движения (теорема Нётер).

Во многих задачах полезным оказывается переписать уравнения Эйлера — Лагранжа в виде *Гамильтона уравнений*, что позволяет, в частности, использовать метод канонич. преобразований и *Гамильтона — Якоби теорию*. Переход к гамильтоновой форме записи полезен также при квантовании исходной классич. системы. Если Л. не вырожден, то переход к гамильтоновой формулировке производится с помощью *Лежандра*

преобразования, в случае вырождения применяется более сложная процедура редукции (см. [1], [6]).

В механике сплошных сред и *квантовой теории поля*, к-рые можно рассматривать как механич. системы с бесконечным числом степеней свободы, рассматриваются экстремальные задачи для функционалов вида

$$J(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t)\, dt,$$

где

$$L(t) = \int_G \mathscr{L}(q,\ \dot{q},\ q',\ t,\ x)\, dx,$$

$$x = (x_1,\ \ldots,\ x_k),\ G \subset \mathbb{R}^k,\ q = q(t,\ x) = (q_1,\ \ldots,\ q_n),$$

$$\dot{q} = (\partial q_1/\partial t,\ \ldots,\ \partial q_n/\partial t),\quad q' = (\partial q_i/\partial x_j).$$

В этом случае функционал $L(t)$ наз. л а г р а н ж и а н о м, а функция $\mathscr{L}(q,\ \dot{q},\ q',\ t,\ x)$ — п л о т н о с т ь ю л а г р а н ж и а н а. Основные понятия для таких систем (гамильтониан и др.) вводятся по аналогии с классич. механикой.

Лит.: [1] А р н о л ь д В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [2] Б о г о л ю б о в Н. Н., Ш и р к о в Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 3 изд., М., 1976; [3] И о ф ф е А. Д., Т и х о м и р о в В. М., Теория экстремальных задач, М., 1974; [4] П о н т р я г и н Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969; [5] С т е р н б е р г С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [6] Ф а д д е е в Л. Д., «Теоретич. и матем. физика», 1969, т. 1, № 1, с. 1—18.

И. В. Волович.

ЛАКУНА — 1) Л. в т е о р и и ф у н к ц и й — см. *Адамара теорема* о лакунах, *Лакунарный степенной ряд*.

2) Л. в г е о м е т р и и — см. *Движений группа*, *Лакунарное пространство*.

3) Л. в т е о р и и д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы х у р а в н е н и й с ч а с т н ы м и п р о и з в о д н ы м и — одна из областей D, на к-рые разбивается внутренность характеристич. конуса линейной гиперболич. системы

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{k} L_{ij} u_j,\quad 1 \leqslant i \leqslant k, \tag{1}$$

с вершиной в точке $(x_0,\ t_0)$ плоскостью $t = t_1$, обладающая следующим свойством: малые достаточно гладкие изменения начальных данных внутри D не влияют на значение решения u в точке $(x_0,\ t_0)$. В (1) предполагается, что L_{ij} — линейный дифференциальный оператор порядка n_j и порядок дифференцирований в нем по t не превосходит $n_j = 1$. Под «изменением внутри» понимается изменение в нек-рой области, входящей в D вместе со своей границей.

Для волнового уравнения

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0 \tag{2}$$

решение u задачи Коши

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1 \tag{3}$$

в точке $(x_0,\ t_0)$, $t_0 > 0$, вполне определяется значениями функций φ_0, φ_1 на сфере $|y - x_0| = t_0$ при нечетном $n > 1$ и на шаре $|y - x_0| \leqslant t_0$ при четном n и $n = 1$, поэтому область $|y - x_0| < t_0$ на плоскости $t = 0$ является Л. для уравнения (2) при нечетном $n > 1$. Для четного n и $n = 1$ уравнение (2) Л. не имеет. Это согласуется с *Гюйгенса принципом* для решений волнового уравнения.

Возмущение начальных данных (3) в малой окрестности точки x_0 приводит к сферич. волне с центром в этой точке, к-рая при нечетном $n > 1$ имеет передний и

задний фронты. При остальных значениях n задний фронт этой волны «размыт», это явление наз. д и ф ф у з и е й в о л н. Диффузия волн типична для всех линейных гиперболич. уравнений 2-го порядка, если число n пространственных переменных четно (см. [1]). Аналогичный вопрос для $n=3$ изучался в [2], где был описан класс гиперболич. уравнений 2-го порядка, для к-рых диффузия волн отсутствует. Уравнения этого класса тесно связаны с волновым уравнением. Для общих гиперболич. систем (1) найдена связь «в малом» между существованием Л. для системы (1) и аналогичным вопросом для соответствующей системы с постоянными коэффициентами (см. [3]). Для последних систем получены необходимые и достаточные условия алгебраич. характера, обеспечивающие наличие Л.

Лит.: [1] А д а м а р Ж., Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, пер. с франц., М., 1978; [2] M a t h i s s o n M., «Acta math.», 1939, t. 71, № 3—4, p. 249—82; [3] П е т р о в с к и й И. Г., «Матем. сб.», 1945, т. 17, с. 289—370; [4] К у р а н т Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964. *А. П. Солдатов.*

ЛАКУНАРНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность чисел $\{n_k\}$ таких, что $n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1$; обозначается Λ и применяется, в частности, в теории лакунарных рядов и в теории лакунарных тригонометрич. рядов. Существуют обобщения класса Λ. Напр., класс B_2 : $\{n_k\} \in B_2$, если существует такое A, что число решений уравнений $[n_{k_1} \pm n_{k_2}] = m$ $(n_{k_1} > n_{k_2}$, $[a]$ — целая часть числа $a)$ не превосходит A при любом целом m; класс R : $\{n_k\} \in R$, если существует такое A, что число решений уравнения $[n_{k_1} \pm n_{k_2} \pm \ldots \pm n_{k_p}] = m$ $(n_{k_1} > n_{k_2} > \ldots > n_{k_p})$ не превосходит A^p при любом $p=2, 3, \ldots$ и любом целом m; классы Λ_σ, $B_{2\sigma}$, R_σ, состоящие из последовательностей, разбивающихся на конечное число последовательностей, соответственно из классов Λ, B_2, R.

Лит.: Б а р и Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961. *В. Ф. Емельянов.*

ЛАКУНАРНАЯ СИСТЕМА п о р я д к а $p>2$, S_p-с и с т е м а,— ортонормированная система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства L^p такая, что если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n \qquad (*)$$

сходится в пространстве L^2, то его сумма принадлежит классу L^p. Если система функций $\{\varphi_n\}$ есть S_p-система при любом $p>2$, то она наз. S_∞-с и с т е м о й. С. Банах (S. Banach) доказал (см. [2]), что из всякой ограниченной в пространстве L^p ортонормированной в L^2 системы функций можно выбрать S_p-систему. Для того чтобы ортонормированная система функций $\{\varphi_n\}$ была S_p-системой, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная μ_p, зависящая только от p и такая, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\|_{L^p} \leqslant \mu_p \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\|_{L^2}$$

для всех N, $\{a\}$. Если система функций $\{\varphi_n\}$ есть S_p-система при некотором $p>2$, то найдется постоянная m такая, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\|_{L^2} \leqslant m \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\|_{L}$$

для всех N, $\{a_n\}$. Система функций, обладающая этим свойством, наз. с и с т е м о й Б а н а х а. Эти определения распространяются и на не ортогональные системы функций (см., напр., [3]). Иногда под Л. с. понимают систему функций, ряды к-рой обладают одним или несколькими свойствами *лакунарных тригонометрических рядов*, в зависимости от к-рых ей придают различные названия. Напр., с теоремой единственности для лакунарных тригонометрич. рядов связано понятие Л. с. ε-единственности. Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$

наз. системой ε-единственности, если существует число $\varepsilon>0$ такое, что из сходимости ряда (*) к нулю всюду, за исключением быть может множества меры, меньшей ε, следует равенство всех его коэффициентов нулю.

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [2] Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963; [3] Гапошкин В. Ф., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 6, с. 3—82.

В. Ф. Емельянов.

ЛАКУНАРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — пространство аффинной связности или риманово пространство нек-рой определенной степени подвижности. Л. п. определяется порядком полной *движений группы*, т. е. наибольшим числом ее параметров для данного пространства. Так, обычное n-мерное аффинное пространство

Табл. 1.—Порядки полных групп автоморфизмов в пространствах аффинной связности A_n размерности n

A_2	A_3	A_n	Типы пространств и лакун
6	12	n^2+n	Пространства первой лакунарности
			Первая лакуна
4	9	n^2	Пространства второй лакунарности
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
1	1	n^2-1	
			Вторая лакуна
		n^2-n+1	Пространства третьей лакунарности
		.	
		.	
		.	
		n^2-n-2	
			Третья лакуна
		n^2-2n+5	Пространства четвертой лакунарности
		.	
		.	
		.	
		.	
		.	
		.	
		3	.
		2	.
		1	.

допускает группу движений максимального порядка n^2+n. Порядки полных групп движений других пространств аффинной связности принадлежат отрезку натурального ряда $[1, n^2+n]$, но не каждое число из этого отрезка может быть порядком полной группы движений. Интервалы наибольшей длины, составленные из чисел, не являющихся порядком полных групп движений, наз. лакунами, а дополнения к ним до указанного отрезка натурального ряда — отрезками конденсации. Пространство наз. пространством k-й лакунарности, если порядок его полной группы движений принадлежит отрезку конденсации, имеющему номер k. Счет ведется с отрезка конденсации, содержащего максимальный порядок. Об известном распределении подвижности «твердых» тел в пространствах аффинной связности см. таблицу 1. Речь идет о порядках полных групп движений — синонимах степени подвижности, степени свободы твердых тел. Вопрос об определении возможных степеней подвижности твердых

и подобно изменяемых тел в римановых пространствах частично решен лишь для пространств знакоопределенной метрики. В общем случае известны те степени подвижности и реализующие их римановы пространства, к-рые приведены в таблице 2.

Табл. 2.—Порядки полных групп автоморфизмов в римановых пространствах V_n размерности n

V_2	V_3	V_4	V_5	V_n	Типы пространств и лакун
3	6	10	15	$\frac{n(n+1)}{2}$	Пространства первой лакунарности (постоянной кривизны)
					Первая лакуна
1	4 . . . 1	8 . . . 1	11 . . . 1	$\frac{n(n-1)}{2}+1$ $\frac{n(n-1)}{2}$	Пространства второй лакунарности
					Вторая лакуна
				$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+5$ . . .	Пространства третьей лакунарности
				. . . 3 2 1	. . .

Лит.: [1] Егоров И. П., в сб.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 375—428; [2] его же, в сб.: Итоги науки и техники. Проблемы геометрии, т. 10, М., 1978, с. 147—91; [3] его же, Геометрия, М., 1979.

И. П. Егоров.

ЛАКУНАРНЫЙ РЯД — ряд по *лакунарной системе* функций. Примерами служат лакунарные тригонометрич. ряды, лакунарные степенные ряды, ряды Радемахера, ряды независимых функций с нулевыми математич. ожиданиями, ряды Дирихле с показателями, независимыми над полем рациональных чисел, и т. д.

В. Ф. Емельянов.

ЛАКУНАРНЫЙ СТЕПЕННОЙ РЯД — ряд

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{\lambda_k} \qquad (*)$$

с пропусками (лакунами), в к-ром показатели $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ пробегают не все числа из натурального ряда. В зависимости от свойств последовательности $\{\lambda_k\}$ получено много свойств ряда (*). Так, если

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k > \theta\lambda_k, \quad k=0, 1, 2, \ldots, \theta > 0,$$

и ряд (*) сходится в круге $|z|<R$, $0<R<\infty$, то все точки окружности $|z|=R$ — особые для $f(z)$ (теорема Адамара о лакунах). Усилением этой теоремы является *Фабри теорема* о лакунах. Если нижняя плотность

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{k}{\lambda_k}=0,$$

то $f(z)$ — однозначная аналитич. функция с односвязной областью существования (теорема Пойа). См. также *Сверхсходимость*.

Лит.: [1] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967.

А. Ф. Леонтьев.

ЛАКУНАРНЫЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД — ряд вида

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x+b_k \sin n_k x, \qquad (1)$$

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k}=\lambda>1.$$

Рядом типа (1) К. Вейерштрасс (K. Weierstrass) в 1872 представил непрерывную нигде не дифференцируемую функцию. Ж. Адамар (J. Hadamard) в 1892 применил ряды (1), назвав их лакунарными, к изучению аналитич. продолжения функции. Систематич. изучение Л. т. р. началось с работы П. Фату (P. Fatou, 1906), в к-рой доказано, что из сходимости всюду Л. т. р. при $\lambda>3$ следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|+|b_k|<+\infty. \qquad (2)$$

Л. т. р. обладают свойствами, существенно отличающими их от общих тригонометрич. рядов. Напр., А. Н. Колмогоров, построив первый пример (1923) суммируемой функции с расходящимся почти всюду рядом Фурье, в 1924 доказал сходимость почти всюду лакунарного ряда Фурье; А. Зигмунд (A. Zygmund, 1948) доказал, что если суммы двух Л. т. р. совпадают на множестве положительной меры, то эти ряды тождественны. Для многих приложений Л. т. р. важна обнаруженная Зигмундом в 30-е гг. 20 в. зависимость свойств ряда (1) от его коэффициентов. Так, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2+b_k^2<+\infty, \qquad (3)$$

то ряд (1) есть ряд Фурье функции $f(x)$, принадлежащей всем пространствам $L^p(0,\ 2\pi)$, $1\leqslant p<+\infty$, и, следовательно, сходится почти всюду. При этом существуют постоянные $A_p>0$, $B_p>0$, зависящие только от p и λ такие, что

$$A_p\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2+b_k^2\right)^{1/2}\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant B_p\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2+b_k^2\right)^{1/2}.$$

Если условие (3) не выполнено, то ряд (1) расходится почти всюду и, более того, почти всюду не суммируется никаким методом Тёплица (следовательно, не является рядом Фурье). Если ряд (1) сходится в каждой точке нек-рого интервала (T^* — ограничен в каждой точке нек-рого интервала), то выполнено условие (2). Если коэффициенты ряда (1) есть $o(1/n_k)$, то его сумма есть непрерывная гладкая функция, дифференцируемая в тех и только в тех точках, в к-рых сходится формально продифференцированный ряд (1).

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., [2 изд.], т. 1—2, М., 1965; [3] Ульянов П. Л., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 1, с. 3—69; [4] Гапошкин В. Ф., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 6, с. 3—83; [5] Кахан Ж.-П., Случайные функциональные ряды, пер. с англ., М., 1973; [6] Kahane J.-P., *Séries de Fourier absolument convergentes*, B.— Hdlb.— N. Y., 1970; [7] Rudin W., Fourier analysis on groups, N. Y.— L., 1962. *В. Ф. Емельянов.*

ЛАМБЕРТА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования числовых рядов. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

суммируем методом Ламберта к числу S, если

$$\lim_{y\to+0} F(y)=S,$$

где

$$F(y)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{nye^{-ny}}{1-e^{-ny}} \quad \text{при } y>0,$$

и ряд справа сходится. Метод предложен И. Ламбертом (1). Из суммируемости ряда *Чезаро методом суммирования* (C, k) для нек-рого $k>-1$ к сумме S следует его суммируемость Л. м. с. к той же сумме, и если ряд суммируем Л. м. с. к сумме S, то он суммируем и *Абеля методом суммирования* к той же сумме. Л. м. с. регулярен (см. *Регулярные методы суммирования*).

Лит.: [1] Lambert J. H., Anlage zur Architektonik, Bd 2, Riga, 1771; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951.

И. И. Волков.

ЛАМБЕРТА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F(x)=\int_0^\infty \frac{ta(t)}{e^{xt}-1}\,dt.$$

Л. п. является непрерывным аналогом *Ламберта ряда* (при соответствии $ta(t)\leftrightarrow a_n$, $e^x\leftrightarrow 1/x$). Имеет место следующая формула обращения. Пусть

$$a(t)\in L(0,\ \infty)$$

и

$$\lim_{t\to+0} a(t)\,t^{1-\delta}=0,\quad \delta>0;$$

тогда если $\tau>0$ и функция $a(t)$ непрерывна при $t=\tau$, то

$$\tau a(\tau)=\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{\tau}\right)^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\,n^kF^{(k)}\left(\frac{nk}{\tau}\right),$$

где $\mu(n)$ — *Мёбиуса функция*.

Лит.: [1] Widder D. V., «Math. Mag.», 1950, v. 23, p. 171—82; [2] Итоги науки. Математический анализ. 1966, М., 1967, с. 7—82.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

ЛАМБЕРТА РЯД — функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{x^n}{1-x^n}. \qquad (1)$$

Рассмотрен И. Ламбертом (см. [1]) в связи с вопросами сходимости степенных рядов. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

то Л. р. сходится при всех значениях x, кроме $x=\pm 1$; в противном случае он сходится для тех значений x, для к-рых сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n.$$

Л. р. применяется в нек-рых задачах теории чисел. Так, при $|x|<1$ сумма $\varphi(x)$ ряда (1) представляется в виде степенного ряда:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nx^n, \qquad (2)$$

где

$$\alpha_n=\sum_{k/n} a_k,$$

а суммирование распространяется на делители k числа n. В частности, если $a_n=1$, то $\alpha_n=\tau(n)$ — число делителей n, если $a_n=n$, то $\alpha_n=\sigma(n)$ — сумма делителей n. Поведение $\varphi(x)$ (с надлежащими a_n) при $x\to 1-0$ используется, напр. (см. [3]), в задаче Харди и Рамануджана для получения асимптотич. формулы для количества «неограниченных разбиений» натурального числа.

Лит.: [1] Lambert J. H., Opera mathematica, v. 1—2, Zürich, 1946—48; [2] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 4 изд., т. 2, М., 1959; [3] Постников А. Г., Введение в аналитическую теорию чисел, М., 1971.

М. И. Войцеховский.

ЛАМБЕРТА ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК, трипрямоугольник,— четырехугольник, в к-ром при трех вершинах прямые углы. Рассматривался И. Ламбертом (J. Lambert, 1766) при попытках доказать постулат Евклида о параллельных. Из трех возможных предположений о величине четвертого угла: либо угол прямой,

либо угол тупой, либо угол острый; первая гипотеза является утверждением, эквивалентным постулату Евклида о параллельных; вторая приводит к противоречию с др. аксиомами и постулатами Евклида. Относительно третьей гипотезы И. Ламберт сделал предположение, что она выполняется на нек-рой мнимой сфере.

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.— Л., 1949; [2] Погорелов А. В., Основания геометрии, 3 изд., М., 1968.

А. Б. Иванов.

ЛАМЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ортогональной криволинейной системы координат u, v, w в пространстве — величины

$$L_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2},$$

$$L_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2},$$

$$L_w = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2};$$

аналогично определяются Л. к. на плоскости. Через Л. к. в координатах u, v, w выражаются элемент длины:

$$dl = \sqrt{L_u^2\,du^2 + L_v^2\,dv^2 + L_w^2\,dw^2};$$

элемент площади поверхности:

$$d\sigma = \sqrt{(L_u L_v\,du\,dv)^2 + (L_u L_w\,du\,dw)^2 + (L_v L_w\,dv\,dw)^2};$$

элемент объема:

$$dV = L_u L_v L_w\,du\,dv\,dw.$$

Л. к. входят в выражения векторных дифференциальных операций в координатах u, v, w:

$$\operatorname{grad}_u \psi = \frac{1}{L_u}\frac{\partial \psi}{\partial u},\quad \operatorname{grad}_v \psi = \frac{1}{L_v}\frac{\partial \psi}{\partial v},\quad \operatorname{grad}_w \psi = \frac{1}{L_w}\frac{\partial \psi}{\partial w};$$

$$\operatorname{div} a = \frac{1}{L_u L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_u L_v L_w) + \frac{\partial}{\partial v}(a_v L_u L_w) + \frac{\partial}{\partial w}(a_w L_u L_v)\right];$$

$$\operatorname{rot}_u \boldsymbol{a} = \frac{1}{L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(a_w L_w) - \frac{\partial}{\partial w}(a_v L_v)\right],$$

$$\operatorname{rot}_v \boldsymbol{a} = \frac{1}{L_u L_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(a_u L_u) - \frac{\partial}{\partial u}(a_w L_w)\right],$$

$$\operatorname{rot}_w \boldsymbol{a} = \frac{1}{L_u L_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_v L_v) - \frac{\partial}{\partial v}(a_u L_u)\right];$$

$$\Delta\psi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\psi) = \frac{1}{L_u L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L_v L_w}{L_u}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L_u L_w}{L_v}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{L_u L_v}{L_w}\frac{\partial \psi}{\partial w}\right)\right].$$

Л. к. для различных ортогональных криволинейных координат см. в соответствующих статьях.

Л. к. введены Г. Ламе [1].

Лит.: [1] Lamé G., Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, P., 1859; [2] Лаптев Г. Ф., Элементы векторного исчисления, М., 1975; [3] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1958.

В. И. Битюцков.

ЛАМЕ КРИВАЯ — плоская алгебраич. кривая, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1,$$

где $m = p/q$, p и q — взаимно простые числа, $a > 0$ и $b > 0$. Порядок Л. к. равен pq при $m > 0$ и $2pq$ при $m < 0$. При $m = 1$ Л. к.— прямая, при $m = 2$ — эллипс, при $m = 2/3$ и $a = b$ — *астроида*. Л. к. названы по имени Г. Ламе (G. Lamé), рассмотревшего их в 1818.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ЛАМЕ ПОСТОЯННЫЕ — величины, связывающие компоненты упругого напряжения в какой-либо точке твердого изотропного деформируемого тела с компонентами деформации в этой же точке:

$$\sigma_x = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \quad \tau_{xy} = \mu\varepsilon_{xy},$$

где σ и τ — нормальная и касательная составляющие напряжения, ε — компоненты деформации, а коэффициенты λ и μ — постоянные Ламе. Л. п. зависят от материала и его температуры. Л. п. связаны с модулями упругости и коэффициентом Пуассона ν:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

где E — модуль продольной упругости, G — модуль сдвига.

Л. п. наз. по имени Г. Ламе (G. Lamé). *БСЭ-3.*

ЛАМЕ УРАВНЕНИЕ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка в комплексной области

$$\frac{d^2w}{dz^2} = [A + B\wp(z)]\, w, \qquad (1)$$

где $\wp(z)$ — *Вейерштрасса эллиптическая функция*, A и B — константы. Это уравнение было впервые изучено Г. Ламе [1]; оно возникает при разделении переменных в уравнении Лапласа в эллиптич. координатах. Уравнение (1) наз. ф о р м о й В е й е р ш т р а с с а для Л. у. Существует такая замена независимой переменной в уравнении (1), в результате к-рой получается ф о р м а Я к о б и для Л. у.:

$$\frac{d^2w}{du^2} = [C + D\,\mathrm{sn}^2 u]\, w.$$

Имеются также многочисленные алгебраич. формы Л. у., переход к к-рым осуществляется различными преобразованиями независимой переменной уравнения (1), напр.:

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi-e_1} + \frac{1}{\xi-e_2} + \frac{1}{\xi-e_3}\right)\frac{dw}{d\xi} = \frac{A+B\xi}{4(\xi-e_1)(\xi-e_2)(\xi-e_3)}\, w. \qquad (2)$$

Для практич. приложений форма Якоби является наиболее подходящей.

Особенно важен случай, когда в уравнении (1) (или (2)) $B = n(n+1)$, где n — натуральное число. В этом случае решения уравнения (1) мероморфны во всей плоскости и их свойства довольно хорошо изучены. Среди решений уравнения (2) при $B = n(n+1)$ первостепенное значение имеют *Ламе функции*.

Лит.: [1] L a m é G., «J. math. pures et appl.», 1837, t. 2, p. 147—88; [2] С т р е т т М. Д. О., Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, пер. с нем., Хар.— К., 1935; [3] У и т т е к е р Э.-Т., В а т с о н Д.-Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963; [4] Б е й т м е н Г., Э р д е й и А., Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье, пер. с англ., М., 1967; [5] Г о б с о н Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, пер. с англ., М., 1952.

Н. Х. Розов.

ЛАМЕ ФУНКЦИЯ, э л л и п с о и д а л ь н а я г а р м о н и ч е с к а я ф у н к ц и я,— функция специального вида, удовлетворяющая *Ламе уравнению*. Если уравнение Ламе в алгебраич. форме

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi-e_1} + \frac{1}{\xi-e_2} + \frac{1}{\xi-e_3}\right)\frac{dw}{d\xi} = \frac{A+n(n+1)\xi}{4(\xi-e_1)(\xi-e_2)(\xi-e_3)}\, w, \qquad (*)$$

где n — натуральное число, а e_1, e_2, e_3 и A — констан-

ты, имеет решение одного из следующих видов:

$$P(\xi),$$
$$\sqrt{\xi-e_i}\,P(\xi),\quad i=1,\ 2,\ 3,$$
$$\sqrt{\xi-e_i}\,\sqrt{\xi-e_j}\,P(\xi),\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ i\neq j,$$
$$\sqrt{\xi-e_1}\,\sqrt{\xi-e_2}\,\sqrt{\xi-e_3}\,P(\xi),$$

где $P(\xi)$ — многочлен с единичным старшим коэффициентом, то это решение наз. соответственно функцией Ламе степени n первого рода 1-го, 2-го, 3-го или 4-го вида.

При фиксированном четном n всегда найдутся такие значения параметра A (собственные значения), что существует $(n+2)/2$ Л. ф. 1-го вида и $3n/2$ Л. ф. 3-го вида с многочленами $P(\xi)$ степени $n/2$ и $(n-2)/2$ соответственно. При фиксированном нечетном n всегда найдутся такие значения A, что существует $3(n+1)/2$ Л. ф. 2-го вида и $(n-1)/2$ Л. ф. 4-го вида с многочленами $P(\xi)$ степени $(n-1)/2$ и $(n-3)/2$ соответственно. Всего при заданном натуральном n существует $2n+1$ линейно независимых Л. ф.

Решения уравнения (*), линейно независимые с Л. ф. первого рода и получающиеся с помощью *Лиувилля — Остроградского формулы*, наз. функциями Ламе второго рода.

Лит. см. при ст. *Ламе уравнение.* *Н. Х. Розов.*

ЛАНДАУ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — кинетическое уравнение для слабо взаимодействующего газа, в частности уравнение переноса заряженных частиц в плазме с учетом кулоновских столкновений. Получено Л. Д. Ландау (см. [1], [2]). Для систем с кулоновским взаимодействием при выводе Л. к. у. коэффициенты уравнения содержат расходящийся интеграл («кулоновский логарифм»: $\ln\Lambda_{ab}$ — логарифм отношения максимального и минимального прицельного параметра при столкновении двух заряженных частиц a и b). Чтобы получить приближенный нерасходящийся результат, интеграл «обрезают»: за верхний предел интегрирования берется длина электростатич. экранирования Дебая, за нижний — расстояние ближнего взаимодействия (или квантовомеханич. длина волны). Наложенное извне «обрезание» интеграла, не вытекающее из самого вывода Л. к. у., оставляет открытым вопрос о построении адекватного кинетич. уравнения для систем с кулоновским взаимодействием. Были предложены (см., напр., [3]) различные виды таких уравнений (также не свободные от расходимостей). В этих уравнениях учитывается динамич. экранирование, зависящее от скоростей частиц.

Для разреженного газа пробных частиц, взаимодействующих с равновесным фоном, Л. к. у. переходит в линейное уравнение Фоккера — Планка. Для неоднородной плазмы интеграл столкновений Ландау следует добавить в правую часть *Власова кинетического уравнения*. Полученное уравнение наз. уравнением Власова — Ландау (см. [3]).

Для смеси частиц нескольких типов систему Л. к. у. можно записать в виде

$$\frac{df_a}{dt}=I_a+S_a, \tag{1}$$

где $f_a\equiv f_a\ (\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v},\ t)$ — функция распределения для частиц типа a в 6-мерном фазовом пространстве координат $\boldsymbol{r}$ и скоростей $\boldsymbol{v}$ (t — время). Функция $S_a(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v},\ t)\equiv S$ описывает источники частиц, I_a — интеграл столкновений, к-рый можно привести к виду

$$I_a=\Gamma_a\left[-\frac{\partial}{\partial v_i}\left(f_a\,\frac{\partial h_a}{\partial v_i}\right)+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial v_i\,\partial v_j}\left(f_a\,\frac{\partial^2 g_a}{\partial v_i\,\partial v_j}\right)\right], \tag{2}$$

где суммирование подразумевается по одинаковым индексам $i,\ j$ от 1 до 3, $\Gamma_a=4\pi Z_a^4e^4/m_a^2$; m_a, Z_ae —

масса и заряд частиц типа a, e — заряд электрона,

$$\left.\begin{aligned} g_a &= \sum_b \left(\frac{Z_b}{Z_a}\right)^2 \ln \Lambda_{ab} \int f_b(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}', t)\, |\, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'\, |\, d\boldsymbol{v}', \\ h_a &= \sum_b \left(\frac{m_a + m_b}{m_b}\right) \left(\frac{Z_b}{Z_a}\right)^2 \ln \Lambda_{ab} \int f_b(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}', t) \times \\ &\qquad \times |\, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'\, |^{-1} d\boldsymbol{v}' \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

— потенциалы, введенные в [2], $\ln\Lambda_{ab}$ — кулоновские логарифмы, зависящие от средних энергий частиц. Интеграл столкновений (2) содержит эллиптич. дифференциальный оператор по скорости, коэффициенты к-рого выражаются через интегральные операторы типа потенциала от $f_a(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$. Для неоднородной плазмы

$$\frac{df_a}{dt} \equiv \frac{\partial f_a}{\partial t} + \boldsymbol{v}\,\frac{df_a}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{Z_a e}{m_a}\boldsymbol{F}\,\frac{\partial f_a}{\partial \boldsymbol{v}},$$

где $Z_a e\boldsymbol{F}$ — сила, действующая на частицы типа a.

Л. к. у. позволяют получить гидродинамич. уравнения сохранения для плотностей массы, импульса и внутренней энергии, а также *Больцмана H-теорему*.

Существование обобщенного решения Л. к. у. доказано в малом (см. [4]).

Численное решение Л. к. у. на ЭВМ проводилось для расчета утечки частиц из открытых магнитных ловушек (см. [5]), определения коэффициента умножения энергии в тороидальных термоядерных реакторах (см. [6]), оценки дополнительных методов нагрева плазмы в токамаках. В условиях хорошего удержания плазмы в магнитных ловушках необходимо использовать полностью консервативные разностные схемы (см. [7]), точно сохраняющие для решения Л. к. у. полное число частиц и их энергию.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., «Phys. Z. Sowjetunion», 1936, Bd 10, Hft 2, S. 154—64; его же, «Ж. эксперимент. и теоретич. физики», 1937, т. 7, № 2, с. 203—209; [2] Трубников Б. А., в кн.: Вопросы теории плазмы, в. 1, М., 1963, с. 98—182; [3] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1—2, М., 1978; [4] Арсеньев А. А., Песков Н. В., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1977, т. 17, № 4, с. 1063—68; [5] Киллин Дж., Маркс К. Д., в кн.: Вычислительные методы в физике плазмы, пер. с англ., М., 1974; с. 417—82; [6] Киллин Дж., Мирин А., Ренсинк М., в кн.: Управляемый термоядерный синтез, пер. с англ., М., 1980, с. 419—67; [7] Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977.

В. А. Чуянов.

ЛАНДАУ ТЕОРЕМЫ — теоремы для регулярных в круге функций, устанавливающие нек-рые связи между геометрич. свойствами производимого этими функциями конформного отображения и начальными коэффициентами представляющих их степенных рядов.

В 1904 Э. Ландау показал [1], что если функция $f(z)$ регулярна в круге $|z|<R$ и не принимает в нем значений 0 и 1, то R ограничено сверху положительной постоянной, зависящей только от $a_0=f(0)$ и $a_1=f'(0)$. В 1905 К. Каратеодори (C. Carathéodory) установил, что роль экстремальной функции в этой теореме играет *модулярная функция*. Эти результаты Э. Ландау и К. Каратеодори известны в виде следующей теоремы.

Теорема Ландау — Каратеодори. Если функция

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots, \quad a_1 \neq 0,$$

регулярна и не принимает значений 0 и 1 в круге $|z|<R$, то

$$R \leqslant R(a_0, a_1) = \frac{2\,|\mathrm{Im}\,\tau(a_0)|}{|\,a_1\,|\,|\,\tau'(a_0)\,|};$$

здесь $\tau=\tau(\lambda)$ — какая-либо ветвь функции, обратной к классич. модулярной функции $k^2(\tau)=\lambda(\tau)$ группы M_2 дробно-линейных преобразований

$$\tau \longrightarrow \frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \quad ad-bc=1,$$

где a, d — нечетные, а b, c — четные числа. Функция

$\lambda(\tau)$ отображает *фундаментальную область* T_2 группы M_2:

$$\operatorname{Int} T_2 = \left\{\tau : \left|\tau \pm \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}, \quad |\operatorname{Re}\tau| < 1, \ \operatorname{Im}\tau > 0\right\}$$

(T_2 получается присоединением к Int T_2 той части границы этой области, для к-рой $\operatorname{Re}\tau \geqslant 0$), на всю расширенную λ-плоскость таким образом, что $\lambda(\infty)=0$, $\lambda(0)=1$, $\lambda(1)=\infty$. При этом для каждого значения λ уравнение $k^2(\tau)=\lambda$ имеет одно и только одно решение τ, принадлежащее T_2. Под функцией $\tau(\lambda)$ в теореме Ландау — Каратеодори можно понимать ту ветвь указанной обратной функции, к-рая отображает расширенную λ-плоскость на T_2.

Пример функции $f(z)=\lambda\left(i\,\frac{1+z}{1-z}\right)$, регулярной в круге $|z|<1$ и не обращающейся в нуль и 1 при $|z|<1$, показывает, что теорема Ландау — Каратеодори неулучшаема. Из теоремы Ландау — Каратеодори вытекает *Пикара теорема* о значениях, не принимаемых целыми функциями.

Э. Ландау нашел точное значение постоянной $\Omega(M)$, фигурирующей в следующей формулировке теоремы Коши об обратных функциях. Пусть функция $w=f(z)$ регулярна в круге $|z|<1$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$ и $|f(z)|<M$ в круге $|z|<1$, $M\geqslant 1$; тогда существует такая постоянная $\Omega(M)$, что обратная функция $z=\varphi(w)$, обращающаяся в нуль при $w=0$, регулярна в круге $|w|<\Omega(M)$ и $|\varphi(w)|<1$ в этом круге. Э. Ландау установил, что

$$\Omega(M) = M\,(M - \sqrt{M^2-1})^2.$$

Экстремальной функцией этой оценки является

$$f_M(z) = M z\,\frac{1-Mz}{M-z}.$$

Та же функция $f_M(z)$ является экстремальной в следующей Л. т. Если функция $f(z)$ удовлетворяет указанным выше условиям, то $f(z)$ однолистна в круге $|z|<\rho(M)$, где $\rho(M)=M-\sqrt{M^2-1}$.

Э. Ландау принадлежит ряд теорем покрытия в теории конформного отображения, устанавливающих существование и оценки соответствующих постоянных. Ниже приведена одна из них. Пусть H — класс функций $f(z)$, регулярных в круге $|z|<1$ и нормированных условиями $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Из теоремы Блоха (см. *Блоха константа*) вытекает следующая Л. т.: существует абсолютная постоянная

$$\inf\{L_f : f \in H\} = L \geqslant B,$$

где L_f — радиус наибольшего круга w-плоскости, целиком накрываемого образом круга $|z|<1$ при отображении $w=f(z)$; B — константа Блоха. Постоянная L наз. постоянной Ландау. Для L известны оценки (см. [5], [8]): $1/2 \leqslant L < 0{,}55\ldots$ Из сформулированной Л. т. вновь следует теорема Пикара.

Лит.: [1] Landau E., «Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.», 1904, S. 1118—33; [2] его же, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2 Aufl., B., 1929; [3] его же, «Rend. Circolo mat. Palermo», 1922, t. 46, p. 347—48; [4] его же, «Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl», 1926, S. 467—74; [5] его же, «Math. Z.», 1929, Bd 30, S. 608—34; [6] его же, «Тр. Тбилисск. матем. ин-та. АН СССР», 1940, т. 8, с. 23—68; [7] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1, М., 1962; [8] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [9] Валирон Ж., Аналитические функции, пер. с франц., М., 1957; [10] Берман т А., «Матем. сб.», 1944, т. 15, № 2, с. 285—318.

Г. В. Кузьмина.

ЛАПЛАСА ВЕКТОР — интеграл движения точки постоянной массы m в поле потенциала Ньютона —

Кулона $V(r)=\varkappa/r$:

$$\Lambda_1=(x_1\dot{x}_4-x_4\dot{x}_1)=\frac{1}{m}(\dot{x}_2L_3-\dot{x}_3L_2)+\varkappa\frac{x_1}{r},$$

$$\Lambda_2=(x_2\dot{x}_4-x_4\dot{x}_2)=\frac{1}{m}(\dot{x}_3L_1-\dot{x}_1L_3)+\varkappa\frac{x_2}{r},$$

$$\Lambda_3=(x_3\dot{x}_4-x_4\dot{x}_3)=\frac{1}{m}(\dot{x}_1L_2-\dot{x}_2L_1)+\varkappa\frac{x_3}{r},$$

где

$$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2};\quad x=(x_1,\ x_2,\ x_3)\in E^3;$$
$$x_4=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}r^2;\quad m\ddot{x}_4=\varkappa\frac{x_4}{r};$$

$L=(L_1,\ L_2,\ L_3)$ — момент импульса — определяет плоскость орбиты (при $L\neq 0$), а совместно с интегралом энергии

$$\mathcal{E}=\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)+\frac{\varkappa}{r},$$

— ее конфигурацию. Л. в. определяет ориентацию кеплеровой орбиты и пропорционален радиус-вектору ее второго фокуса.

Аналог интеграла Л. в. существует также для потенциала изотропного гармонич. осциллятора, к-рый вместе с ньютоновым занимает исключительное положение среди потенциалов центрального поля.

В центрально-возмущенном ньютоновом поле Л. в. не является интегралом, а прецессирует. Напр., в задаче Кеплера с релятивистским 4-импульсом угол поворота Л. в.

$$|\Delta\varphi|=2\pi\left(\left(1-\frac{\varkappa^2}{c^2L^2}\right)^{-1/2}-1\right)\approx\frac{\pi\varkappa^2}{L^2c^2}$$

за период r. В квантовой теории существование интеграла Л. в. объясняет «случайное вырождение» уровней энергии водородоподобного атома по азимутальному квантовому числу l в дополнение к вырождению по магнитному квантовому числу m, обязательному для произвольного центрального потенциала $V(r)$. Уравнение Шрёдингера кулонова осциллятора соответствует двум тождественным частицам, одна из к-рых движется в поле кулонова центра, расположенного в первом фокусе кеплерова эллипса, а другая — в поле второго фокуса. Гамильтониан каждой частицы инвариантен относительно группы ортогональных преобразований ее координат $O(3)$, а вся система в целом относительно группы $O(3)\times O(3)=O(4)$ ортогональных преобразований 4-мерного евклидова пространства.

Л. в. введен в рассмотрение Я. Германом (см. [1]) и П. Лапласом (см. [2]), по-видимому, независимо. Иногда Л. в. называют вектором Рунге — Ленца.

Лит.: [1] Hermann J., «Giornale de Letterati d'Italia», Venecia, 1710, v. 2, p. 447—67; [2] Laplace P., Traité de mécanique celeste, t. 1, P., 1798; [3] Volk O., «Celestial Mechanics», 1976, v. 14, p. 365—82; [4] Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, М., 1975; [5] Попов В. С., Физика высоких энергий и теории элементарных частиц, К., 1967, с. 702—27.

В. В. Охрименко.

ЛАПЛАСА ИНТЕГРАЛ — 1) Интеграл вида

$$\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt\equiv F(p),$$

осуществляющий интегральное *Лапласа преобразование* функции $f(t)$ действительного переменного t, $0<t<\infty$, в функцию $F(p)$ комплексного переменного p. Был рассмотрен П. Лапласом (P. Laplace) в кон. 18— нач. 19 вв.; применялся Л. Эйлером (L. Euler, 1737).

2) Интегралы, зависящие от параметров $\alpha,\ \beta>0$:

$$\int_0^\infty\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta},$$

$$\int_0^\infty\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}.$$

В. И. Битюцков.

ЛАПЛАСА МЕТОД асимптотических оценок — метод вычисления асимптотики при $\lambda>0$, $\lambda \to +\infty$ интегралов Лапласа

$$F(\lambda)=\int_{\Omega} f(x)\, e^{\lambda S(x)}\, dx, \qquad (1)$$

где $\Omega=[a, b]$ — конечный отрезок, S — действительная, f — комплексная функции, достаточно гладкие при $x\in\Omega$. Асимптотика $F(\lambda)$ равна сумме вкладов от точек, в к-рых достигается $\max\limits_{x\in\Omega} S(x)$, если число их конечно.

1) Если максимум достигается при $x=a$ и $S'(a)\neq 0$, то вклад $V_a(\lambda)$ от точки a в асимптотику интеграла (1) равен

$$V_a(\lambda)=-\frac{f(a)+O(\lambda^{-1})}{\lambda S'(a)}\, e^{\lambda S(a)}.$$

2) Если максимум достигается во внутренней точке x^0 отрезка Ω и $S''(x^0)\neq 0$, то вклад от нее равен

$$V_{x^0}(\lambda)=\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x^0)}}\,[f(x^0)+O(\lambda^{-1})]\, e^{\lambda S(x^0)}.$$

Эта формула получена П. Лапласом [1]. Полностью исследован случай, когда функции $f(x)$, $S'(x)$ имеют нули конечной кратности в точках максимума функции S, и получены асимптотич. разложения (см. [2]—[8]). Л. м. распространяется и на случай контура Ω, расположенного на комплексной плоскости (см. *Перевала метод*).

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n_x$, наибольшее значение функции $S(x)$ в замыкании Ω достигается только во внутренней точке x^0, и x^0 — невырожденная стационарная точка функции S. Тогда

$$F(\lambda)=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} |\det S''_{xx}(x^0)|^{-1/2}\,[f(x^0)+O(\lambda^{-1})]\, e^{\lambda S(x^0)}.$$

В этом случае также получены асимптотич. разложения для $F(\lambda)$. Все приведенные выше формулы справедливы при комплексных λ, $|\lambda|\to\infty$, $|\arg\lambda|\leqslant\pi/2-\varepsilon$. Имеются также модификации Л. м. на случай более сложной зависимости от параметра (см. [4], [8]):

$$F(\lambda)=\int_{\Omega(\lambda)} f(x,\lambda)\, e^{S(x,\lambda)}dx.$$

Лит.: [1] Laplace P. S., Essai philosophique sur les probabilités, Œuvres complètes, t. 7, P., 1886 (в рус. пер.— Опыт философии теории вероятностей, М., 1908); [2] Эрдейи А., Асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1962; [3] Брёйн Н. Г., Асимптотические методы в анализе, пер. с англ., М., 1961; [4] Евграфов М. А., Асимптотические оценки и целые функции, 2 изд., М., 1962; [5] Копсон Э.-Т., Асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1966; [6] Olver F. W. J., Asymptotics and special functions, N. Y.— [a. o.], 1974; [7] Риекстыньш Э. Я., Асимптотические разложения интегралов, т. 1, Рига, 1974; [8] Федорюк М. В., Метод перевала, М., 1977. *М. В. Федорюк.*

ЛАПЛАСА ОПЕРАТОР, лапласиан,— дифференциальный оператор Δ в $\mathbb{R}^n$, определяемый формулой

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \qquad (1)$$

(здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$— координаты в $\mathbb{R}^n$), а также некоторые его обобщения. Л. о. (1) является простейшим эллиптич. дифференциальным оператором 2-го порядка. Л. о. играет важную роль в математич. анализе, математич. физике и геометрии (см., напр., *Лапласа уравнение*, *Лапласа — Бельтрами уравнение*, *Гармоническая функция*, *Гармоническая форма*).

Пусть M есть n-мерное риманово пространство с метрикой

$$ds^2=g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \quad g_{ij}=g_{ji}, \qquad (2)$$

пусть $\|g^{ij}\|$ — матрица, обратная к матрице $\|g_{ij}\|$, $g=\det\|g_{ij}\|$. Тогда Л. о. (или оператор Лап-

ласа — Бельтрами) римановой метрики (2) на M имеет вид

$$\Delta u = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right), \tag{3}$$

где $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальные координаты на M. Оператор (1) отличается знаком от Л. о. стандартной евклидовой метрики $ds^2 = (dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2$ на $\mathbb{R}^n$.

Обобщением оператора (3) является Л. о. на дифференциальных формах. Именно, в пространстве всех внешних дифференциальных форм на M Л. о. имеет вид

$$\Delta = (d + d^*)^2 = dd^* + d^*d, \tag{4}$$

где d — оператор внешнего дифференцирования формы, d^* — формально сопряженный к d оператор, определяемый с помощью следующего произведения на гладких финитных формах:

$$(\alpha,\ \beta) = \int \alpha \wedge *\beta, \tag{5}$$

где $*$ — оператор Ходжа, порожденный метрикой (2) и переводящий p-формы в $(n-p)$-формы. В формуле (5) формы α и β считаются действительными, на комплексных формах нужно использовать эрмитово продолжение скалярного произведения (5). Сужение оператора (4) на O-формы (т. е. функции) задается формулой (3). На p-формах при произвольном целом $p \geqslant 0$ Л. о. в локальных координатах записывается в виде

$$\Delta\,(a_{i_1 \ldots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}) =$$

$$= \Big\{ -\nabla^i \nabla_i a_{i_1 \ldots i_p} + \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu R^n_{i_\nu}\, a_{ni_1 \ldots \hat{i}_\nu \ldots i_p} +$$

$$+ 2 \sum_{\mu < \nu} (-1)^{\mu+\nu} R^{\cdot h \cdot k}_{\cdot i_\nu \cdot i_\mu}\, a_{kni_1 \ldots \hat{i}_\mu \ldots \hat{i}_\nu \ldots i_p} \Big\} \times$$

$$\times dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Здесь ∇^i, ∇_i — ковариантные производные по x^i, $R^{\cdot i \cdot k}_{\cdot j \cdot l}$ — тензор кривизны, $R^n_k = R^{n \cdot i \cdot}_{\cdot i \cdot k}$ — тензор Риччи.

Пусть дан произвольный эллиптич. комплекс

$$\ldots \Gamma(E_{p-1}) \xrightarrow{d} \Gamma(E_p) \xrightarrow{d} \Gamma(E_{p+1}) \longrightarrow \ldots, \tag{6}$$

где E_p — действительные или комплексные расслоения на многообразии M, $\Gamma(E_p)$ — пространства их гладких сечений. Введя в каждом расслоении E_p эрмитову метрику, а также задав произвольным образом элемент объема на M, можно определить эрмитово скалярное произведение в пространствах гладких финитных сечений расслоений E_p. Тогда определены операторы d^*, формально сопряженные к операторам d. По формуле (3) строится Л. о. на каждом пространстве $\Gamma(E_p)$. Если в качестве комплекса (6) взять комплекс де Рама, то при естественном выборе метрики в p-формах и элемента объема, порожденных метрикой (2), получается в качестве Л. о. комплекса де Рама описанный выше Л. о. на формах.

На комплексном многообразии M наряду с комплексом де Рама имеются эллиптич. комплексы

$$\ldots \Lambda^{p-1,\,q} \xrightarrow{\partial} \Lambda^{p,\,q} \xrightarrow{\partial} \Lambda^{p+1,\,q} \longrightarrow \ldots, \tag{7}$$

$$\ldots \Lambda^{p,\,q-1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^{p,\,q} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^{p,\,q+1} \longrightarrow \ldots, \tag{8}$$

где $\Lambda^{p,\,q}$ — пространство гладких форм типа $(p,\ q)$ на M. Вводя эрмитову структуру в касательном расслоении на M, можно построить Л. о. (4) комплекса де Рама и Л. о. комплексов (7), (8):

$$\Box = \partial\partial^* + \partial^*\partial,$$

$$\overline{\Box} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}.$$

Каждый из этих операторов переводит в себя пространство $\Lambda^{p,q}$. Если M — кэлерово многообразие, а эрмитова структура на M индуцирована кэлеровой метрикой, то

$$\Delta = 2\square = 2\overline{\square}.$$

Важным фактом, определяющим роль Л. о. эллиптич. комплекса, является существование в случае компактного многообразия M ортогонального разложения Ходжа:

$$\Gamma(E_p) = d(\Gamma(E_{p-1})) \oplus \mathcal{H}^p(E) \oplus d^*(\Gamma(E_{p+1})). \quad (9)$$

В этом разложении $\mathcal{H}^p(E) = \operatorname{Ker}\Delta|_{\Gamma(E_p)}$, где Δ — Л. о. комплекса (6), так что $\mathcal{H}^p(E)$ — пространство «гармонических» сечений расслоения E_p (в случае комплекса де Рама — это пространство всех гармонических форм степени p). Прямая сумма первых двух слагаемых в правой части формулы (9) равна $\operatorname{Ker} d|_{\Gamma(E_p)}$, а прямая сумма двух последних слагаемых совпадает с $\operatorname{Ker} d^*|_{\Gamma(E_p)}$. В частности, разложение (9) задает изоморфизм пространства когомологий комплекса (6) в члене $\Gamma(E_p)$ и пространства гармоних. сечений $\mathcal{H}^p(E)$.

Лит.: [1] Рам Ж. де, Дифференцируемые многообразия, пер. с франц., М., 1956; [2] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [3] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976.

М. А. Шубин.

ЛАПЛАСА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность конгруэнций в трехмерном проективном (аффинном, евклидовом) пространстве, в к-рой каждые две соседние конгруэнции образованы касательными к двум семействам линий сопряженной сети одной поверхности (фокальной поверхности конгруэнции). Каждая из двух соседних конгруэнций Л. п. наз. преобразованием Лапласа другой. Аналитич. преобразования уравнения Лапласа связаны с геометрич. переходом от одной фокальной поверхности конгруэнции к другой ее фокальной поверхности (см. [1]). С каждой Л. п. конгруэнций связана Л. п. фокальных поверхностей (см. [2]). Л. п. p-мерных многообразий Картана особого проективного типа в проективном n-пространстве P_n (см. [3]) обобщена на случай произвольных p-сопряженных систем в P_n (см. [4]).

Лит.: [1] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, 2 éd., pt. 2, P., 1915; [2] Фиников С. П., Теория конгруэнций, М.— Л., 1950; [3] Chern S.-S., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1944, v. 30, p. 95—97; [4] Смирнов Р. В., «Докл. АН СССР», 1950, т. 71, № 3, с. 437—39.

В. Т. Базылев.

ЛАПЛАСА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, трансформация Лапласа,— в широком смысле — интеграл Лапласа вида

$$F(p) = \int_L f(z)\, e^{-pz}\, dz, \quad (1)$$

где интегрирование производится по нек-рому контуру L в плоскости комплексного переменного z, ставящий в соответствие функции $f(z)$, определенной на L, аналитич. функцию $F(p)$ комплексного переменного $p = \sigma + i\tau$. Многие интегралы вида (1) были рассмотрены П. Лапласом (см. [1]).

В узком смысле под Л. п. подразумевают одностороннее преобразование Лапласа

$$F(p) = L[f](p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt, \quad (2)$$

называемое так в отличие от двустороннего преобразования Лапласа

$$F(p) = L[f](p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt. \quad (3)$$

Л. п.— частный вид *интегральных преобразований*; преобразования вида (2) или (3) тесно связаны с *Фурье*

преобразованием. Двустороннее Л. п. (3) можно рассматривать как преобразование Фурье функции $f(t)e^{-\sigma t}$, одностороннее Л. п. (2) — как преобразование Фурье функции $\varphi(t)$, равной $f(t)e^{-\sigma t}$ при $0<t<\infty$ и равной нулю при $-\infty<t<0$.

Подинтегральная комплексная локально суммируемая функция $f(t)$ наз. функцией-оригиналом, или просто оригиналом; в приложениях часто удобно трактовать переменное t как время. Функция $F(p)=L[f](p)$ наз. также преобразованием Лапласа оригинала $f(t)$ или изображением по Лапласу. Интеграл (2) понимается, вообще говоря, как условно сходящийся на бесконечности. Априори возможны три случая: 1) существует действительное число σ_c такое, что интеграл (2) сходится при $\mathrm{Re}\, p=\sigma>\sigma_c$, а при $\mathrm{Re}\, p=\sigma<\sigma_c$ — расходится; это число σ_c наз. абсциссой (условной) сходимости; 2) интеграл (2) сходится при всех p, в этом случае полагают $\sigma_c=-\infty$; 3) интеграл (2) расходится при всех p, в этом случае полагают $\sigma_c=+\infty$. Если $\sigma_c<+\infty$, то интеграл (2) представляет однозначную аналитич. функцию $F(p)$ в полуплоскости сходимости $\mathrm{Re}\, p>\sigma_c$. Обычно ограничиваются рассмотрением абсолютно сходящихся интегралов (2). Точная нижняя грань тех σ, для к-рых существует интеграл

$$\int_0^\infty |f(t)|\, e^{-\sigma t}\, dt,$$

наз. абсциссой абсолютной сходимости σ_a, $\sigma_c\leqslant\sigma_a$. Если a есть нижняя грань тех σ, для к-рых $|f(t)|=O(e^{\sigma t})$, $t\to+\infty$, то $\sigma_a=a$; число a иногда наз. показателем роста оригинала $f(t)$.

При нек-рых дополнительных условиях оригинал $f(t)$ однозначно восстанавливается по своему Л. п. $F(p)$. Напр., если $f(t)$ имеет ограниченную вариацию в окрестности точки t_0 или если $f(t)$ кусочногладкая, то имеет место формула обращения Л. п.:

$$\mathring{f}(t_0)=\frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR}F(p)\,e^{pt}\,dp,\ \sigma>\sigma_a. \qquad (4)$$

Формулы (2) и (4) позволяют получить ряд соотношений между операциями, производимыми над оригиналами и изображениями, а также таблицу изображений для часто встречающихся оригиналов. Все это составляет элементарную часть *операционного исчисления*.

В математич. физике важные применения находит многомерное Л. п.

$$F(p)=\int_{C^*}f(t)\,e^{-(p,\,t)}\,dt, \qquad (5)$$

где $t=(t_1,\ldots,t_n)$ — точка n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $p=(p_1,\ldots,p_n)=\sigma+i\tau=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)+i(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ — точка комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant1$,

$$(p,\,t)=(\sigma,\,t)+i\,(\tau,\,t)=p_1t_1+\ldots+p_nt_n$$

— скалярное произведение, $dt=dt_1\ldots dt_n$ — элемент объема в $\mathbb{R}^n$. Комплексная функция $f(t)$ в (5) определена и локально суммируема в области интегрирования $C^*=\{t\in\mathbb{R}^n;\ t_j>0,\ j=1,\ldots,n\}$ — положительном координатном угле пространства $\mathbb{R}^n$. Если функция $f(t)$ ограничена в C^*, то интеграл (5) существует во всех точках $p\in\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}\,(p,\,t)>0$, $t\in C^*$, к-рое определяет снова положительный координатный угол $S=\{\sigma\in\mathbb{R}^n;\ \sigma_j>0,\ j=1,\ldots,n\}$. Интеграл (5) определяет голоморфную функцию комплексных переменных $p=(p_1,\ldots,p_n)$ в трубчатой об-

ласти $T^S=S+i\mathbb{R}^n=\{p=\sigma+i\tau\in\mathbb{C}^n;\quad \sigma\in S,\quad \tau\in\mathbb{R}^n\}$ пространства $\mathbb{C}^n$ с основанием S. В более общем случае в качестве области интегрирования $\mathbb{C}^*$ в (5) и основания S трубчатой области можно взять любую пару сопряженных замкнутых выпуклых острых конусов в пространстве $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат. При $n=1$ формула (5) переходит в (2), причем $\mathbb{C}^*=\{t\in\mathbb{R};\ t>0\}$ — положительная полуось и $T^S=\{p=\sigma+i\tau\in\mathbb{C};\ \sigma>0\}$ — правая полуплоскость. Л. п. (5) определено и голоморфно и для функций $f(t)$ гораздо более широких классов, напр. для всех быстро убывающих функций, составляющих класс $\gamma=\gamma(\mathbb{R}^n)$, т. е. для бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций $f(t)$, убывающих при $|t|\to\infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени величины $|t|^{-1}$. Элементарные свойства Л. п. с соответствующими изменениями остаются справедливыми и для многомерного случая.

Развитием Л. п. является Л. п. мер и вообще обобщенных функций. Наиболее полно теория Л. п. обобщенных функций развита для важного в математич. физике класса $\gamma'=\gamma'(\mathbb{R}^n)$ обобщенных функций медленного роста, определяемых как линейные непрерывные функционалы на пространстве быстро убывающих основных функций $\gamma=\gamma(\mathbb{R}^n)$. Такое Л. п. $L[g]$ обобщенной функции медленного роста $g\in\gamma'$ снова является обобщенной функцией медленного роста, $L[g]\in\gamma'$.

Численное преобразование Лапласа — численное выполнение преобразования (2), переводящего оригинал $f(t)$, $0<t<\infty$, в изображение $F(p)$, $p=\sigma+it$, а также численное обращение Л. п., т. е. численное нахождение $f(t)$ из интегрального уравнения (2) либо по формуле обращения (4).

Необходимость применения численного Л. п. возникает вследствие того, что таблицы оригиналов и изображений охватывают далеко не все встречающиеся в практике случаи, а также вследствие того, что оригинал или изображение зачастую выражаются слишком сложными, неудобными для применений формулами.

В случае действительных значений параметра p формулу (2) при нек-рых дополнительных предположениях можно свести к вычислению интеграла с весом Лагерра:

$$F(p)=\frac{1}{p}\int_0^\infty x^s e^{-x}\varphi(x)\,dx \qquad (6)$$

при нек-ром $s\geqslant 0$. При нек-рых условиях к интегралу (6) приводится и Л. п. для комплексных p (см. [9]).

Для вычисления интеграла в (6) применима квадратурная формула

$$\int_0^\infty x^s e^{-x}\varphi(x)\,dx\approx\sum_{k=1}^n A_k^{(s)}\varphi\left(x_k^{(s)}\right), \qquad (7)$$

где коэффициенты $A_k^{(s)}$ и узлы $x_k^{(s)}$ выбираются так, чтобы равенство (7) при фиксированном n было точным или для всех многочленов степени $\leqslant 2n-1$, или для некрой системы рациональных функций в зависимости от свойств функции $\varphi(x)$. Коэффициенты $A_k^{(s)}$ и узлы $x_k^{(s)}$ для таких квадратурных формул просчитаны для многих значений параметра s (см. [9] — [11]).

Проблема обращения Л. п., как задача отыскания решения $f(x)$ интегрального уравнения первого рода (2), относится к классу некорректных задач и может быть решена, в частности, посредством регуляризирующего алгоритма.

Задачу численного обращения Л. п. можно также решать методами, основанными на разложении функции-оригинала в функциональный ряд. Сюда в первую очередь можно отнести разложение в степенной ряд, в обобщенный степенной ряд, в ряд по показательным функциям, а также в ряды по ортогональным функциям, в частности по многочленам Чебышева, Лежандра,

Якоби и Лагерра. Задача разложения оригинала в ряды по многочленам Чебышева, Лежандра, Якоби в окончательном своем виде сводится к проблеме моментов на конечном промежутке. Пусть известно Л. п. $F(p)$ функции $\beta(t)f(t)$:

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\beta(t)\,f(t)\,dt,$$

где $f(t)$ — искомая функция, а $\beta(t)$ — неотрицательная, интегрируемая на $[0,\infty)$ функция. Предполагается, что функция $f(t)$ интегрируема на любом конечном отрезке $[0,T]$ и принадлежит классу $L_2(\beta(t),0,\infty)$. По изображению $F(p)$ функции $\beta(t)f(t)$ функция $f(t)$ строится в виде ряда по смещенным многочленам Якоби, в частности по смещенным многочленам Лежандра, Чебышева первого и второго рода, коэффициенты к-рого a_k вычисляются по формуле

$$a_k=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i^{(k)}F(i),$$

где $\alpha_i^{(k)}$ — коэффициенты смещенного многочлена Лежандра, Чебышева первого и второго рода соответственно, записанных в виде $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^{(k)}x^i$ (см. [4]).

Пусть задано Л. п. $F(p)$ функции $f(t)$, причем $f(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{-\lambda}\,|f(t)|^2\,dt<\infty,\quad \lambda>-1.$$

Тогда $f(t)$ можно разложить в ряд по обобщенным многочленам Лагерра

$$f(t)=t^\lambda\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{k!}{\Gamma(k+\lambda+1)}L_k^{(\lambda)}(t),$$

сходящийся к $f(t)$ в среднем. Коэффициенты a_k этого ряда вычисляются по формуле

$$a_k=\frac{(-1)^k}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\left\{\frac{1}{z^{\lambda+1}}F\left(\frac{1}{z}\right)\right\}_{z=1}.$$

Другим приемом численного обращения Л. п. является построение квадратурных формул для интеграла обращения (4).

Изображение $F(p)$ стремится к нулю, если точка p удаляется на бесконечность так, что $\mathrm{Re}\,p$ при этом неограниченно растет. Предполагается, что $F(p)$ убывает по степенному закону, т. е. что $F(p)$ представима в виде

$$F(p)=\frac{1}{p^s}\varphi(p),\quad s>0,$$

а $\varphi(p)$ регулярна в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p>\sigma_a$ и непрерывна при $\mathrm{Re}\,p\geqslant\sigma_a$. Интеграл (4) при этом имеет вид

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pt}p^{-s}\varphi(p)\,dp. \tag{8}$$

Для интеграла (8) построена интерполяционная квадратурная формула, основанная на интерполировании $\varphi(p)$ многочленами от $1/p$:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n}A_k^{(s)}(t)\,\varphi(p_k)+R_n, \tag{9}$$

где p_k — узлы интерполирования, произвольные, расположенные справа от прямой $\mathrm{Re}\,p=\sigma_a$, R_n — остаточный член формулы и

$$A_k^{(s)}(t)=\sum_{j=0}^{n}\frac{a_{kj}t^{s+j-1}}{\Gamma(s+j)}.$$

Коэффициенты a_{kj} зависят только от выбранных узлов p_k и для нек-рых способов их выбора (в частности, для равноотстоящих узлов) вычислены (см. [12]). Задача исследования сходимости интерполяционных квадратурных формул заключается в выяснении связей между

свойствами $\varphi(p)$ и узлами p_k, при к-рых можно быть уверенным в стремлении остаточного члена R_n формулы (9) к нулю. Эта задача решена для нек-рых конкретных узлов p_k и для нек-рых частных классов функций $\varphi(p)$ (см. [13]).

Для интеграла (4) можно строить квадратурные формулы наивысшей степени точности в классе рациональных функций частного вида. Чтобы параметры формулы не зависели от σ_a и t, выполняется замена переменной $p=z/t+\sigma_a$. Интеграл (4) принимает вид

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{e^{\sigma_a t}}{t}\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^{z}F^{*}(z)\,dz=\frac{e^{\sigma_a t}}{t}\,J(s),$$

$$\varepsilon>0,\quad F^{*}(z)=F\left(\frac{z}{t}+\sigma_a\right)=F(p).$$

Как и прежде, предполагается, что $F^{*}(z)=z^{-s}\varphi(z)$ и для вычисления интеграла $J(s)$ строится квадратурная формула

$$J(s)\approx\sum_{k=1}^{n}A_k^{(s)}\,\varphi\left(z_k^{(s)}\right),\qquad(10)$$

точная для любого многочлена степени $\leqslant 2n-1$ от переменной $1/z$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы формула (10) была интерполяционной и чтобы узлы $z_k^{(s)}$ были корнями нек-рой системы ортогональных многочленов $\omega_n^{(s)}(1/z)$. Окончательно это условие приводит к формуле

$$f(t)\approx\frac{e^{\sigma_a t}}{t}\sum_{k=1}^{n}A_k^{(s)}\left(z_k^{(s)}\right)^{s}F\left(\frac{z_k^{(s)}}{t}+\sigma_a\right),\qquad(11)$$

где $z_k^{(s)}$ — корни ортогональных многочленов $\omega_n^{(s)}(1/z)$. Для многочленов $\omega_n^{(s)}(1/z)$ известны явное выражение, рекуррентное соотношение, дифференциальное уравнение, решением к-рого они являются, производящая функция. Для нек-рых частных значений s показано, что *корни многочленов* $\omega_n(1/z)$ *лежат в правой полуплоскости* (см. [13]). В [12] приведены значения узлов и коэффициентов $A_k^{(s)}$ формулы (11) для $s=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$; $n=1\,(1)15$ с 20 верными десятичными знаками и для $s=0{,}01\ (0{,}01)3$; $n=1(1)10$ с 7—8 верными десятичными знаками.

Лит.: [1] Laplace P. S., Théorie analytique des probabilités, P., 1812; [2] Ван дер Поль Б., Бреммер Х., Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, пер. с англ., М., 1952; [3] Бохнер С., Лекции об интегралах Фурье, пер. с англ., М., 1962; [4] Диткин В. А., Прудников А. П., Операционное исчисление, М., 1966; [5] их же, Интегральные преобразования и операционное исчисление, 2 изд., М., 1974; [6] Doetsch G., Handbuch der Laplace-Transformation, Bd 1—3, Basel, 1950—56; [7] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976; [8] Земанян А. Г., Интегральные преобразования обобщенных функций, пер. с англ., М., 1974; [9] Айзенштат В. С., Крылов В. И., Метельский А. С., Таблицы для численного преобразования Лапласа и вычисления интегралов вида $\int_0^\infty x^s e^{-x} f(x)dx$, Минск, 1962; [10] Salzer H. E., Zucker R., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1949, № 55, p. 1004—12; [11] Пальцев А. А., Скобля Н. С., «Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук», 1965, № 3, с. 15—23; [12] Крылов В. И., Скобля Н. С., Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа, Минск, 1968; [13] их же, Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа, М., 1974.

Н. С. Жаврид.

ЛАПЛАСА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ в геометрии — переход от одной *фокальной сети конгруэнции* к другой фокальной сети той же конгруэнции. Понятие Л. п. сети ввел Г. Дарбу (G. Darboux, 1888), обнаруживший, что аналитич. преобразование решений уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=a\,\frac{\partial\theta}{\partial u}+b\,\frac{\partial\theta}{\partial v}+c\theta,$$

где a, b, c — известные функции переменных u, v, может быть интерпретировано геометрически как пе-

реход от одной фокальной сети конгруэнции к другой ее фокальной сети. Л. п. сетей устанавливает связь теории *сопряженных сетей* с линейчатой геометрией. Существуют различные обобщения Л. п. сети.

Лит.: [1] Tzitzeica G., Géométrie différentielle projective des réseaux, P.—Bucarest, 1924; [2] Итоги науки. Геометрия. 1963, М., 1965.

В. Т. Базылев.

ЛАПЛАСА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное распределение вероятностей с плотностью

$$p(x)=\frac{1}{2}\,\alpha e^{-\alpha|x-\beta|},\quad -\infty<x<\infty,$$

где β, $-\infty<\beta<\infty$, — параметр сдвига, а $\alpha>0$, — масштабный параметр. Плотность Л. р. симметрична относительно точки $x=\beta$, производная плотности имеет разрыв при $x=\beta$. Характеристич. функция Л. р. с параметрами α и β равна

$$e^{it\beta}\,\frac{1}{1+t^2/\alpha^2}.$$

Л. р. имеет конечные моменты любого порядка, в частности его математич. ожидание равно β, а дисперсия равна $2/\alpha^2$.

Л. р. было впервые введено П. Лапласом [1] и часто наз. «первым законом распределения Лапласа» в отличие от «второго закона распределения Лапласа», как иногда наз. *нормальное распределение*. Л. р. наз. также двусторонним показательным распределением в силу того, что Л. р. совпадает с распределением случайной величины

$$\beta+X_1-X_2,$$

где X_1 и X_2 — независимые случайные величины, имеющие одинаковое *показательное распределение* с плотностью $\alpha e^{-\alpha x}$, $x>0$. Л. р. с плотностью $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ и *Коши распределение* с плотностью $\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}$ связаны следующим образом:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}e^{-|x|}\,dx=\frac{1}{1+t^2}$$

и

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt=e^{-|x|}.$$

Лит.: [1] Laplace P. S., Théorie analytique des probabilités, P., 1812; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1967.

А. В. Прохоров.

ЛАПЛАСА ТЕОРЕМА — 1) Л. т. об определителях — см. ст. *Алгебраическое дополнение*.

2) Л. т. об аппроксимации биномиального распределения нормальным распределением; первый вариант *центральной предельной теоремы* теории вероятностей: если S_n — число «успехов» в n *Бернулли испытаниях* с вероятностью успеха p, $0<p<1$, то при $n\to\infty$ для любых действительных чисел x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$

$$\mathsf{P}\left\{x_1<\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}<x_2\right\}\longrightarrow\Phi(x_2)-\Phi(x_1),\qquad(*)$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}\,dy$$

— функция распределения стандартного нормального закона.

Самостоятельное значение имеет т. н. локальная Л. т.: для вероятности

$$\mathsf{P}\{S_n=m\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m},\ 0\leqslant m\leqslant n,\ m\text{ — целое},$$

справедливо равенство

$$\mathsf{P}\{S_n = m\} = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi(x)(1+\varepsilon_n),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

— плотность стандартного нормального распределения и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно для всех m, для к-рых $x = \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ принадлежит какому-либо конечному интервалу.

В общем виде Л. т. была доказана П. Лапласом [1]. Один частный случай Л. т. ($p=1/2$) был изучен А. Муавром [2], в связи с чем Л. т. иногда наз. т е о р е м о й М у а в р а — Л а п л а с а.

Для практич. применения Л. т. важно иметь представление об ошибках, возникающих при использовании приближенных формул. В более точной (по сравнению с [1]) асимптотич. формуле

$$\mathsf{P}\{S_n < y\} = \Phi\left(\frac{y-np+0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) + R_n(y)$$

остаточный член $R_n(y)$ имеет порядок $O(1/\sqrt{n})$ равномерно для всех действительных y. Из равномерных аппроксимаций биномиального распределения посредством нормального распределения наиболее удачна формула Я. Успенского (1937): если $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$, то для любых y_1 и y_2

$$\mathsf{P}\{y_1 < S_n < y_2\} = \Phi\left(\frac{y_2-np+0,5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{y_1-np+0,5}{\sigma}\right) + \psi\left(\frac{y_2-np+0,5}{\sigma}\right) - \psi\left(\frac{y_1-np+0,5}{\sigma}\right) + \Delta,$$

где

$$\psi(y) = \frac{1-2p}{6\sigma}(1-y^2)\varphi(y)$$

и при $\sigma \geqslant 5$

$$|\Delta| < (0,13+0,18\,|1-2p|)\,\sigma^{-2} + e^{-3\sigma/2}.$$

Для улучшения относительной точности аппроксимации С. Н. Бернштейном (1943) и В. Феллером (W. Feller, 1945) были предложены другие формулы.

Лит.: [1] L a p l a c e P. S., Théorie analytique des probabilités, P., 1812; [2] M o i v r e A. de, Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, L., 1730; [3] П р о х о р о в Ю. В., Р о з а н о в Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [4] F e l l e r W., «Ann. Math. Statistics», 1945, v. 16, p. 319—29; [5] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1967. *А. В. Прохоров.*

ЛАПЛАСА УРАВНЕНИЕ — однородное дифференциальное уравнение с частными производными вида

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0, \qquad (1)$$

где $u = u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция от n действительных переменных. Левая часть Л. у. наз. *Лапласа оператором* от функции u. Регулярные решения Л. у. класса C^2 в нек-рой области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, т. е. решения, имеющие непрерывные частные производные до 2-го порядка в D, наз. *гармоническими функциями* в D. Л. у. является основным представителем дифференциальных уравнений с частными производными 2-го порядка эллиптич. типа, на к-ром вырабатывались и вырабатываются основные методы решения *краевых задач* для эллиптических уравнений.

Пусть $\boldsymbol{v}$ — п о т е н ц и а л ь н о е в е к т о р н о е п о л е в D, т. е. $\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} u$, где $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — потенциал. Так как

$$\Delta u \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad} u = -\operatorname{div} \boldsymbol{v},$$

то физич. смысл Л. у. состоит в том, что оно выполняется для потенциала любого такого поля в областях D, свободных от источников поля. Напр., Л. у. удовлетворяет гравитационный потенциал сил тяготения в областях, свободных от притягивающих масс, потенциал электростатич. поля в областях, свободных от зарядов, и т. д. Таким образом, Л. у. выражает закон сохранения для потенциального поля. С этой точки зрения форма (1) Л. у. получается при выборе декартовой прямоугольной системы координат; в других системах координат оператор Лапласа и Л.у. принимают другой вид. При наличии источников поля в правой части (1) появляется функция, пропорциональная плотности источников, и Л. у. переходит в *Пуассона уравнение*. Л. у. возникает и во многих других вопросах математич. физики, в к-рых рассматриваются стационарные поля, напр. при изучении стационарного распределения температур, статических задач теории упругости и др.

Основными для Л. у. являются следующие краевые задачи теории потенциала: 1) *Дирихле задача*, или первая краевая задача, когда ищется гармонич. функция, принимающая на границе области ∂D заданные непрерывные значения; 2) *Неймана задача*, или вторая краевая задача, когда ищется гармонич. функция u такая, что ее нормальная производная $\partial u/\partial n$ принимает на ∂D заданные непрерывные значения; 3) *смешанная задача*, когда ищется гармонич. функция u, удовлетворяющая на границе линейному соотношению $\alpha(y)\partial u(y)/\partial n+\beta(y)u(y)=g(y)$, $y\in\partial D$, $\alpha(y)\neq 0$.

В случае $n=2$ Л. у. тесно связано с теорией аналитич. функций комплексного переменного $z=x_1+ix_2$, характеризующихся тем, что их действительная и мнимая части являются сопряженными гармонич. функциями. Л. у. встречается у Л. Эйлера и Ж. Д'Аламбера (см. [1], [2]) в связи с задачами гидромеханики и первоначальным рассмотрением функций комплексного переменного. Однако широкую известность оно получило после появления работ П. Лапласа (см. [3], [4]) по теории гравитационного потенциала и небесной механике.

Уравнение (1) иногда наз. скалярным Л. у. в отличие от векторного Л. у.

$$\Delta \boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0. \qquad (2)$$

В случае, напр., векторного поля $\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{3} v_i \boldsymbol{e}_i$, заданного в прямоугольной декартовой системе координат пространства $\mathbb{R}^3$, векторное Л. у. (2) равносильно трем скалярным Л. у. $\Delta v_i=0$ для каждой из компонент $v_i=v_i(x_1, x_2, x_3)$, $i=1, 2, 3$. В других системах координат векторное Л. у. равносильно системе трех уравнений с частными производными 2-го порядка относительно компонент векторного поля $\boldsymbol{v}$, получающейся из (2) после выполнения указанных там операций векторного анализа в соответствующих координатах (см. [7]).

Лит.: [1] Euler L., «Novi Commentarii Acad. Sci. Petropolitanae», 1761, t. 6; [2] D'Alembert J. le Rond, Opuscules mathématiques, t. 1, P., 1761; [3] Laplace P. S., «Mém. Acad. Paris (1782)», 1785; [4] его же, Traité de mécanique céleste, t. 2, P., 1799; [5] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [6] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [7] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 2, М., 1960.

Е. Д. Соломенцев.

ЛАПЛАСА УРАВНЕНИЕ; численные методы решения — методы, заменяющие исходную краевую задачу дискретной задачей, содержащей конечное число N неизвестных, нахождение к-рых с соответствующей точностью позволяет определить решение исходной задачи с заданной точностью ε; N зависит от ε и стремится к ∞ при $\varepsilon\to 0$.

Л. у. в случае d пространственных переменных $x=(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ имеет вид

$$\Delta u(x) \equiv \sum_{r=1}^{d} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_r^2} = 0$$

и является однородным уравнением Пуассона. Краевые задачи для уравнения Лапласа являются частными случаями краевых задач для уравнения Пуассона и более общих уравнений эллиптич. типа (см. [1]), а численные методы решения краевых задач для уравнений эллиптич. типа (см. [2]) содержат в себе многие численные методы для уравнения Лапласа. Специфика Л. у. позволяет конструировать и использовать методы, обладающие существенно лучшими характеристиками, чем методы для более общих уравнений, хотя на практике часто этим возможностям предпочитают простоту реализации метода на ЭВМ.

Основными численными методами для уравнений эллиптич. типа являются: вариационно-разностные методы (проекционно-разностные, методы конечных элементов) и разностные методы (методы сеток). Оба класса методов связаны с аппроксимацией исходной области Ω нек-рой сеточной областью Ω_N, содержащей N узлов сетки, и построением системы алгебраич. уравнений

$$L_N u_N = f_N \qquad (*)$$

относительно значений функции, определяемой в этих узлах. В вариационно-разностных методах, являющихся специальными случаями вариационных и проекционных методов, используется идея аппроксимации рассматриваемого пространства функций, содержащего решение исходной задачи, нек-рыми специальными конечномерными подпространствами с заданными базисными функциями, а в системе (*) вектор u_N состоит из коэффициентов разложения получаемой аппроксимации искомого решения по выбранному базису. В предположении, что решение исходной задачи в ограниченной области Ω на плоскости имеет вид

$$u(x) = \sum_{r=1}^{k} c_r \chi_r(x) + u_0(x),$$

где $u_0(x) \in W_2^{1+m}(\Omega)$, $m>0$, $W_2^{1+m}(\Omega)$ — пространство Соболева, а функции $\chi_k(x) \in W_2^1(\Omega)$ заданы и отражают асимптотич. поведение $u(x)$ вблизи особых точек (угловых точек границы, точек перемены типа граничного условия), для многих типов областей Ω и смешанных краевых задач эти методы позволяют, напр., найти решение $u(x)$ с точностью ε в $W_2^1(\Omega)$ при затрате $O(\varepsilon^{-2/m}|\ln^2 \varepsilon)$ арифметич. действий (см. [3]), а в ряде более частных случаев оценки вычислительной работы уменьшаются до $O(\varepsilon^{-2/m}|\ln \varepsilon|)$ и $O(\varepsilon^{-2/m})$.

В разностных методах обычно используется в той или иной форме аппроксимация производных разностями, и в системе (*) вектор состоит из компонент, аппроксимирующих значения решения в узлах сетки Ω_N. Наиболее изучены характеристики упомянутых методов для краевых задач в ограниченных областях Ω на плоскости. Напр., для условия Дирихле $u|_\Gamma = \varphi(s)$, где Γ — граница Ω и $\varphi(s)$ — достаточно гладкие, можно на основе улучшения дифференциальных свойств решения Л. у. по мере удаления от Γ так построить систему (*), что число N по порядку равно числу N_Γ точек на Γ, используемых для задания $\varphi(s)$ с точностью ε, а u_N может быть найдено с точностью ε при затрате $O(N_\Gamma \ln^2 N_\Gamma)$ арифметич. действий и дает возможность найти решение исходной задачи с точностью ε в любой фиксированной точке из строго внутренней подобласти при затрате конечного числа действий (см. [4]). Методы такого типа являются асимптотически оптимальными; в случае

же использования, напр., более простых методов с прямоугольной сеткой, обладающих точностью $O(N^{-1})$, затраты на нахождение u_N с точностью ε составляют $O(N|\ln N||\ln\varepsilon|)$; $N \asymp N_\Gamma^2$ (см. [4]). Наиболее детально изучены оценки погрешности метода сеток для Л. у. (см. [4], [5]); при наличии особых точек на Γ целесообразно использовать специальную структуру сеток вблизи этих точек (см. [6]). Часто используются и разностные методы, основанные на аппроксимации нек-рых интегральных характеристик для Л. у. (см. [7] — [9]).

Относительно редко применяется метод коллокаций, в к-ром система (*) получается как следствие выполнения исходного уравнения в узлах сетки и предположения, что приближение к решению исходной задачи ищется в нек-ром конечномерном подпространстве. Специальный класс численных методов решения краевых задач для Л. у. основан на сведении этих задач к сингулярным интегральным уравнениям (см. [1]) и последующему решению полученных интегральных уравнений численными методами (см. [10], [11]).

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [2] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [3] Дьяконов Е. Г., в сб.: Вариационно-разностные методы в математической физике, Новосиб., 1978, с. 149—64; [4] Бахвалов Н. С., в сб.: Международный конгресс математиков в Ницце. 1970, М., 1972, с. 27—33; [5] Волков Е. А., «Ж. вычислит. матем. и матем. физики», 1969, т. 9, № 3, с. 573—84; [6] его же, «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1979, т. 150, с. 67—98; [7] Люстерник Л. А., «Успехи матем. наук», 1954, т. 9, в. 2, с. 3—66; [8] Самарский А. А., Фрязинов И. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 6, с. 167—97; [9] Волков Е. А., «Докл. АН СССР», 1978, т. 238, № 5, с. 1036—39; [10] Партон В. З., Перлин П. И., Интегральные уравнения теории упругости, М., 1977; [11] Иванов В. В., в сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, М., 1972, с. 209—19.

Е. Г. Дьяконов.

ЛАПЛАСА — БЕЛЬТРАМИ УРАВНЕНИЕ, Бельтрами уравнение,— *обобщение Лапласа уравнения* для функций на плоскости на случай функций u на произвольном двумерном римановом многообразии R класса C^2. Для поверхности R с локальными координатами ξ, η и *первой квадратичной формой*

$$ds^2 = E d\xi^2 + 2F d\xi d\eta + G d\eta^2$$

Л.— Б. у. имеет вид

$$\Delta u \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{F\dfrac{\partial u}{\partial \eta} - G\dfrac{\partial u}{\partial \xi}}{\sqrt{EG-F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{F\dfrac{\partial u}{\partial \xi} - E\dfrac{\partial u}{\partial \eta}}{\sqrt{EG-F^2}}\right) = 0. \qquad (*)$$

При $E=G$ и $F=0$, т. е. для случая, когда (ξ, η) — изотермич. координаты на R, уравнение (*) переходит в уравнение Лапласа. Л.— Б. у. было введено Э. Бельтрами в 1864—65 (см. [1]).

Левая часть уравнения (*), поделенная на $\sqrt{EG-F^2}$, наз. *вторым дифференциальным параметром Бельтрами*.

Регулярные решения u Л.— Б. у. являются обобщениями гармонич. функций и наз. обычно *гармоническими функциями на поверхности* R. Физически эти решения интерпретируются подобно обычным гармонич. функциям, напр. как потенциал скоростей потока несжимаемой жидкости, текущего по поверхности R, или как потенциал электростатич. поля на R, и т. п. Гармонич. функции на поверхности сохраняют свойства обычных гармонич. функций. Для них справедливо обобщение *Дирихле принципа*: среди всех функций v класса $C^2(G) \cap C(\bar{G})$ в области $G \subset R$, принимающих на границе ∂G те же значения, что гармонич. функция $v \in C(\bar{G})$, последняя дает минимум интегралу Дирихле

$$D(v) = \iint_G \nabla v \cdot \sqrt{EG-F^2}\, d\xi\, d\eta,$$

где

$$\nabla v = \frac{E\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2 - 2F\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta} + G\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2}{EG - F^2}$$

— первый дифференциальный параметр Бельтрами, являющийся обобщением квадрата градиента $\mathrm{grad}^2 U$ на случай функций на поверхности.

По поводу обобщения Л.— Б. у. на римановы многообразия высших размерностей см. *Лапласа оператор*.

Лит.: [1] Beltrami E., Richerche di analisi applicata alla geometria, в кн.: Opere matematiche, t. 1, Milano, 1902, p. 107—98; [2] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957.

Е. Д. Соломенцев, Е. В. Шикин.

ЛАРМОРОВСКИЙ РАДИУС, радиус Лармора,— радиус окружности, по к-рой движется заряженная частица в плоскости, перпендикулярной магнитному полю $\boldsymbol{H}$. Движение заряда e в однородном магнитном поле происходит под действием силы Лоренца и описывается уравнением

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} = \frac{e}{c}[\boldsymbol{V}, \boldsymbol{H}], \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{p}$ — импульс заряженной частицы, c — скорость света, $\boldsymbol{V}$ — скорость заряда в лабораторной системе отсчета. Решение уравнения (1) в декартовой системе координат с осью z, направленной по полю $\boldsymbol{H}$, имеет вид

$$V_x = V_{0t}\cos(\omega t + \alpha), \quad V_y = -V_{0t}\sin(\omega t + \alpha), \quad V_z = V_{0z},$$
$$x = x_0 + r\sin(\omega t + \alpha), \quad y = y_0 + r\cos(\omega t + \alpha), \quad z = z_0 + V_{0z}t, \qquad (2)$$

где $\omega = ecH/\varepsilon$ — т. н. частота Лармора, ε — энергия заряженной частицы, не меняющаяся при движении в однородном магнитном поле, V_{0t}, V_{0z}, α, x_0, y_0, z_0 — постоянные, определяемые из начальных условий,

$$r = \frac{V_{0t}}{\omega} = \frac{V_{0t}\varepsilon}{ecH}$$

— Л. р. В однородном магнитном поле заряд движется по винтовой линии с осью вдоль магнитного поля с Л. р. r. Скорость частицы при этом постоянна по величине.

Если скорость частицы мала по сравнению со скоростью света, то можно приближенно положить $\varepsilon = mc^2$ и выражение для Л. р. принимает вид

$$r = V_{0t}/\omega_0 = V_{0t}mc/eH.$$

В результате вращения заряженных частиц в магнитном поле возникает магнитный момент системы.

Лит.: [1] Тамм И. Е., Основы теории электричества, 7 изд., М., 1957; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973.

В. В. Параил.

ЛАСКЕРА КОЛЬЦО — коммутативное кольцо, в к-ром любой идеал обладает примарным разложением, т. е. представляется в виде пересечения конечного числа примарных идеалов. Аналогично, A-модуль наз. модулем Ласкера, если любой его подмодуль обладает примарным разложением. Любой модуль конечного типа над Л. к. является ласкеровым. Э. Ласкер [1] доказал наличие примарного разложения в кольцах многочленов. Э. Нётер [2] установила, что любое нётерово кольцо является Л. к.

Лит.: [1] Lasker E., «Math. Ann.», 1905, Bd 60, S. 20—116; [2] Noether E., там же, 1921, Bd 83, S. 24—66; [3] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

В. И. Данилов.

ЛАТИНСКИЙ КВАДРАТ — квадратная матрица порядка n, каждая строка и каждый столбец к-рой являются перестановкой элементов конечного множества S, состоящего из n элементов. Говорят, что Л. к. по-

строен на множестве S; обычно $S=\{1, 2, \ldots, n\}$. Л. к. существует для любого n; напр., $A=\|a_{ij}\|$, где

$$a_{ij} \equiv i+j-1 \pmod{n},\ i, j=1, 2, \ldots, n,$$

есть Л. к.

Каждый Л. к. можно рассматривать как таблицу умножения *квазигруппы*; верно и обратное: таблица умножения конечной квазигруппы есть Л. к. Для того чтобы Л. к. $A=\|a_{ij}\|$ был *Кэли таблицей* группы, необходимо и достаточно выполнение условия (критерия квадрата):
если $a_{ik}=a_{i_1k_1}$, $a_{il}=a_{i_1l_1}$, $a_{jk}=a_{j_1k_1}$, то $a_{jl}=a_{j_1l_1}$.
По двум Л. к. $A=\|a_{kl}\|$ порядка n и $B=\|b_{rs}\|$ порядка m можно всегда построить Л. к. $C=\|c_{ij}\|$ порядка mn, напр. следующим образом:

$$c_{ij}=b_{rs}+(a_{kl}-1)\,m,\ i=r+m\,(k-1),\ j=s+m\,(l-1).$$

Для числа L_n Л. к. порядка n верна оценка снизу:

$$L_n \geqslant n!\,(n-1)!\ldots 2!\,1!$$

Л. к. наз. редуцированным (или Л. к. стандартного вида), если элементы его первой строки и первого столбца расположены в натуральном порядке. Для числа l_n редуцированных Л. к. порядка n верны соотношения:

$$L_n=n!\,(n-1)!\,l_n,\ l_n \geqslant m_n=(n-2)!\,(n-3)!\ldots 2!\,1!$$

Два Л. к., построенные на одном и том же множестве S, наз. эквивалентными, если один из другого получается перестановкой строк, столбцов и переименованием элементов. Пусть k_n — число классов эквивалентности Л. к. порядка n. Известны следующие первые значения l_n и k_n:

n	3	4	5	6	7	8
k_n	1	2	2	22	563	1 676 257
l_n	1	4	56	9408	16 942 080	535 281 401 856
m_n	1	2	12	288	34 560	24 883 200

Кроме того, $l_9=377\ 597\ 570\ 964\ 258\ 816$. Задача получения оценок для l_n остается нерешенной (1982).

В теории планирования экспериментов требуется строить Л. к. с различными ограничениями на расположения элементов в них. Л. к. наз. полным, если для любых натуральных α, β, $\alpha \neq \beta$, $1 \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant n$, существуют такие i, j, k, l, что

$$(a_{ij}, a_{i, j+1})=(\alpha, \beta) \text{ и } (a_{kl}, a_{k+1, l})=(\alpha, \beta).$$

Известны алгоритмы построения полных Л. к. только в случае четных n, для нек-рых нечетных n имеются примеры полных Л. к.

Латинским подквадратом данного Л. к. порядка n наз. такая его подматрица, что она сама является Л. к. порядка k, $k<n$. Любой Л. к. порядка k может быть латинским подквадратом Л. к. порядка n при $n \geqslant 2k$.

При построении *ортогональных латинских квадратов* существенную роль играет понятие трансверсали Л. к. Частичной трансверсалью длины t Л. к. $A=\|a_{ij}\|$ наз. такое множество T, состоящее из t клеток Л. к.

$$T=\{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_t, j_t)\},$$

что $i_k \neq i_l$, $j_k \neq j_l$, $a_{i_kj_k} \neq a_{i_lj_l}$ при $k \neq l$, $1 \leqslant k$, $l \leqslant t$.

Всегда $t \leqslant n$; при $t=n$ частичная трансверсаль наз. трансверсалью. Существование в Л. к. порядка n множества из n непересекающихся трансверсалей является необходимым и достаточным условием суще-

ствования для него ортогонального соквадрата. Л. к. 6-го порядка

$$\begin{array}{cc} 012 & 345 \\ 120 & 453 \\ 201 & 534 \\ 345 & 012 \\ 453 & 120 \\ 534 & 201 \end{array}$$

не имеет ни одной трансверсали.

В любом Л. к. порядка $n \geqslant 7$ существует по крайней мере одна частичная трансверсаль длины $t \geqslant (2n+1)/3$. При $n \geqslant 4$ всегда можно построить Л. к. такой, что обе его главные диагонали являются трансверсалями.

Несколько обобщений Л. к. Частичным, или неполным, Л. к. порядка n наз. матрица порядка n, у к-рой только часть клеток заполнена элементами множества S мощности n, но в каждой строке и в каждом столбце элементы S встречаются не более одного раза. Существуют частичные Л. к., к-рые нельзя дополнить до Л. к., напр.:

$$\begin{array}{cccc} 1 & . & . & . \\ . & 2 & 3 & 4 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{array}$$

Неполный Л. к., содержащий точно $n-1$ элементов, может быть дополнен до Л. к. Известно, что две таблицы Кэли двух разных групп порядка n отличаются друг от друга по крайней мере на $2n$ местах.

Бесконечным Л. к. наз. бесконечная матрица, элементы к-рой — натуральные числа, встречающиеся в каждой строке и в каждом столбце точно один раз.

Имеется несколько обобщений понятия Л. к. на многомерный случай. Так, m-мерным перестановочным кубом порядка n наз. m-мерная матрица

$$A = \| a_{i_1 i_2 \dots i_m} \|$$

порядка n, элементами к-рой являются первые n натуральных чисел и для любого k набор

$$a_{i_1 \dots i_{k-1}\, 1\, i_{k+1} \dots i_m},\ a_{i_1 \dots i_{k-1}\, 2\, i_{k+1} \dots i_m}, \dots, a_{i_1 \dots i_{k-1}\, n\, i_{k+1} \dots i_m}$$

есть перестановка первых n натуральных чисел. А m-мерным гиперкубом порядка n и класса r наз. m-мерная матрица порядка n, элементы к-рой принадлежат множеству из n^r элементов, каждый элемент встречается в матрице n^{m-r} раз, а в каждом $(n-1)$-мерном сечении матрицы (т. е. среди элементов

$$a_{i_1 \dots i_{k-1}\, i_k^0\, i_{k+1} \dots i_m},$$

где $i_k^0 = \text{const}$, а остальные индексы пробегают все n значений) встречается n^{m-r-1} раз.

Лит.: [1] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [2] Dénes J., Keedwell A. D., Latin Squares and their Applications, Budapest, 1974; [3] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [4] Райзер Г.-Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966.

В. М. Михеев.

ЛАТИНСКИЙ ПРЯМОУГОЛЬНИК — прямоугольная матрица размера $m \times n$, $m \leqslant n$, каждая строка к-рой является перестановкой (без повторений) элементов множества S, состоящего из n элементов, причем в столбцах каждый элемент встречается не более одного раза. При $m = n$ Л. п. является *латинским квадратом* порядка n. Обычно $S = \{1, 2, \dots, n\}$, и о Л. п. говорят, что он построен на множестве S.

Л. п. существует при любых натуральных m, n, $m \leqslant n$. Примером Л. п. может служить матрица, первая строка к-рой есть $(1, 2, \dots, n)$, а все последующие получаются из предыдущей циклич. сдвигом на

один шаг. Л. п. размера $m\times n$, $m<n$, всегда может быть дополнен до латинского квадрата порядка n так, что первые m строк латинского квадрата будут совпадать со строками Л. п.

Для числа $L(m, n)$ Л. п. размера $m\times n$ верна следующая оценка снизу:

$$L(m, n)\geqslant n!\,(n-1)!\ldots(n-m+1)!$$

Л. п. наз. нормализованным, если его первая строка есть $(1, 2, \ldots, n)$. Число $K(m, n)$ нормализованных Л. п. связано с $L(m, n)$ соотношением:

$$L(m, n)=n!\,K(m, n).$$

Подсчет $L(m, n)$ при $m=2,3$ связан с классич. *комбинаторными задачами:* с задачей о числе беспорядков (см. *Инверсия*) и с задачей о супружеских парах. Так, число беспорядков $D_n=K(2, n)$, а число размещений U_n в задаче о супружеских парах есть число Л. п. размера $3\times n$, первые две строки к-рых суть:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&\ldots&n\\ n&1&2&\ldots&n-1\end{pmatrix}.$$

Для U_n верны формулы:

$$U_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{2k}{2k-1}\binom{2k-1}{k}(n-k)!,$$

$$U_n\sim n!\,e^{-2}\left(1-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2!\,(n-1)_2}-\ldots+\frac{(-1)^k}{k!\,(n-1)_k}+\ldots\right),$$

$$(m)_k=m\,(m-1)\ldots(m-k+1).$$

Число $K(3, n)$ выражается через D_k и U_l:

$$K(3, n)=\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}D_{n-k}D_kU_{n-2k},$$

где $m=[n/2]$, $U_0=1$. Верна также следующая асимптотика:

$$K(3, n)\sim(n!)^2\,e^{-3}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{2!\,(n)_2}+\ldots+\frac{b_s}{s!\,(n)_s}+\ldots\right),$$

где $b_s=H_s(-1/2)$, $H_s(t)$ — *Эрмита многочлен*. Известно также, что

$$K(3, r+s)\equiv 2^rK(3, s)\pmod r.$$

Задача о перечислении Л. п., имеющих более трех строк, не решена (1982). При $m<n^{1/3-\delta}$, где $\delta=\delta(n)\to+0$ так, что $n^{-\delta(n)}\to 0$, получена асимптотика:

$$L(m, n)\sim(n!)^m\exp\left\{-\frac{m(m-1)}{2}\right\}.$$

На Л. п. распространяются нек-рые понятия и теоремы, связанные с латинскими квадратами. Так, два Л. п. $\|a_{ij}\|$ и $\|b_{ij}\|$ размера $m\times n$ наз. ортогональными, если все пары вида (a_{ij}, b_{ij}) различны. Множество Л. п., в к-ром любые два Л. п. ортогональны, имеет не более $m-1$ Л. п.

Часто под Л. п. понимают следующее обобщение Л. п.: латинским прямоугольником размера $r\times s$, построенным на множестве S, состоящем из n элементов, наз. матрица размера $r\times s$ с элементами из S, встречающимися в каждой строке и каждом столбце не более одного раза. Л. п. размера $r\times s$, построенный на n символах, может быть расширен до латинского квадрата порядка n тогда и только тогда, когда каждый символ встречается в Л. п. не менее $r+s-n$ раз.

Лит.: [1] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963.

См. также лит. при ст. *Латинский квадрат*. *В. М. Михеев.*

ЛЕБЕГА ИНТЕГРАЛ — одно из наиболее важных обобщений понятия интеграла. Пусть (X, μ) — пространство с неотрицательной полной счетноаддитивной мерой μ, причем $\mu X<+\infty$. Простой функцией наз. измеримая функция $g: X\to\mathbb{R}^1$, принимаю-

щая не более счетного множества значений: $g(x)=y_n$, $y_n \neq y_k$ при $n \neq k$, если $x \in X_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$. Простая функция g наз. суммируемой, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu X_n$$

сходится абсолютно; сумма этого ряда есть интеграл Лебега:

$$\int_X g \, d\mu.$$

Функция $f : X \to \mathbb{R}^1$ суммируема на X, $f \in L(X, \mu)$, если существует равномерно сходящаяся на множестве полной меры к f последовательность простых суммируемых функций g_n и предел

$$\lim_{n \to \infty} \int_X g_n \, d\mu = I$$

конечен. Число I есть интеграл Лебега:

$$\int_X f \, d\mu.$$

Определение корректно: предел I существует и не зависит от выбора последовательности g_n. Если $f \in L(X, \mu)$, то f — измеримая почти всюду конечная функция на X. Л. и. есть линейный неотрицательный функционал на $L(X, \mu)$, обладающий следующими свойствами:

1) если $f(x) \in L(X, \mu)$ и

$$\mu \{x \in X, \ f(x) \neq h(x)\} = 0,$$

то $h(x) \in L(X, \mu)$ и

$$\int_X f \, d\mu = \int_X h \, d\mu;$$

2) если $f \in L(X, \mu)$, то $|f| \in L(X, \mu)$ и

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leqslant \int_X |f| \, d\mu;$$

3) если $f \in L(X, \mu)$, $|h| \leqslant f$ и h измерима, то $h \in L(X, \mu)$ и

$$\left| \int_X h \, d\mu \right| \leqslant \int_X f \, d\mu;$$

4) если $m \leqslant f \leqslant M$ и f измерима, то $f \in L(X, \mu)$ и

$$m\mu X \leqslant \int_X f \, d\mu \leqslant M\mu X.$$

В случае, когда $\mu X = +\infty$ и $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $\mu X_n < +\infty$, интеграл Лебега

$$\int_X f \, d\mu$$

определяется как

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_n} f \, d\mu$$

при условии, что этот предел существует и конечен для любой последовательности E_n такой, что $\mu E_n < +\infty$, $E_n \subset E_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$. В этом случае свойства 1), 2), 3) сохраняются, а свойство 4) нарушается.

О переходе к пределу под знаком Л. и. см. *Лебега теорема*.

Если A есть измеримое множество X, то Л. и.

$$\int_A f \, d\mu$$

определяется или, как указано выше, заменой X на A, или как

$$\int_X f \chi_A \, d\mu,$$

где χ_A — характеристич. функция A; эти определения эквивалентны. Если $f \in L(A, \mu)$, то $f \in L(A', \mu)$ для любого измеримого $A' \subset A$. Если

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

A_n измеримо для каждого n, для $n \neq k$

$$A_n \cap A_k = \varnothing$$

и $f \in L(A, \mu)$, то

$$\int_A f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\, d\mu.$$

Обратно, если при тех же условиях на A_n для каждого n, $f \in L(A_n, \mu)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f|\, d\mu < +\infty,$$

то $f \in L(A, \mu)$ и верно предыдущее равенство (σ-аддитивность Л. и.).

Функция множества $A \subset X$

$$F(A) = \int_A f\, d\mu$$

абсолютно непрерывна относительно μ; если $f \geqslant 0$, то $F(A)$ есть неотрицательная абсолютно непрерывная относительно μ мера. Обратное утверждение представляет *Радона — Никодима теорему*.

Для функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ название «интеграл Лебега» применяется к соответствующему функционалу, если мера μ есть *Лебега мера*; при этом множество суммируемых функций обозначается просто $L(X)$ и интеграл

$$\int_X f(x)\, dx.$$

Для других мер этот функционал наз. *Лебега—Стилтьеса интегралом*.

Если $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $f \in L[a, b]$ и $x : [\alpha, \beta] \to [a, b]$,— неубывающая абсолютно непрерывная функция, то

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\, x'(t)\, dt.$$

Если $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $f \in L[a, b]$ и $g : [a, b] \to \mathbb{R}^1$,—монотонна на $[a, b]$, то $fg \in L[a, b]$ и существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\, dx + g(b) \int_\xi^b f(x)\, dx$$

(вторая теорема о среднем).

А. Лебег дал в 1902 (см. [1]) определение интеграла для $X \subset \mathbb{R}^1$ и меры μ, являющейся мерой Лебега. Он строил простые функции, равномерно приближающие почти всюду на множестве конечной меры E измеримую неотрицательную функцию $f : E \to R^1$, и доказал существование общего предела (конечного или бесконечного) интегралов этих простых функций при стремлении их к f. Л. и. является базой для различных обобщений понятия интеграла. Как отметил Н. Н. Лузин [2], свойство 2) — т. н. абсолютная интегрируемость, выделяет Л. к. для $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ из всевозможных обобщенных интегралов.

Лит.: [1] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.— Л., 1934; [2] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.— Л., 1951; [3] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981.

И. А. Виноградова.

ЛЕБЕГА КОНСТАНТЫ — 1) Величины

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt,$$

где

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)\,t}{2\sin t/2}$$

есть *Дирихле ядро*. Л. к. L_n при каждом n является:
1) максимальным значением $|S_n(f, x)|$ для всех x и функций $f(t)$ таких, что $|f(t)| \leqslant 1$ при почти всех t;
2) точной верхней гранью $|S_n(f, x)|$ для всех x и всех непрерывных функций $f(t)$ таких, что $|f(t)| \leqslant 1$;
3) точной верхней гранью интегралов

$$\int_0^{2\pi} |S_n(f, x)|\, dx$$

для всех функций $f(t)$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt \leqslant 1.$$

Здесь $S_n(f, x)$ есть частная сумма ряда Фурье по тригонометрич. системе 2π-периодической функции $f(t)$. Справедлива асимптотич. формула:

$$L_n = \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1), \quad n \to \infty.$$

В частности, $L_n \to \infty$ при $n \to \infty$, что связано с расходимостью тригонометрич. рядов Фурье нек-рых непрерывных функций. В более широком смысле Л. к. определяются для других ортонормированных систем как величины

$$L_n = \operatorname{vrai\,sup}_{x \in (a, b)} \int_a^b |D_n(x, t)|\, dt,$$

где $D_n(x, t)$ есть ядро Дирихле для данной ортонормированной на (a, b) системы функций, и играют важную роль в вопросах сходимости рядов Фурье по этим системам. Л. к. введены А. Лебегом (H. Lebesgue, 1909). См. также *Лебега функции*.

Лит.: [1] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965. *К. И. Осколков.*

2) Л. к. интерполяционного процесса — числа

$$\lambda_n = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \sum_{k=0}^{n} |l_{nk}(x)|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где

$$l_{nk}(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные узлы интерполяции, лежащие на нек-ром отрезке $[a, b]$.

Пусть $C[a, b]$ и $\mathcal{P}_n[a, b]$ — соответственно пространства непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций и многочленов степени не выше чем n, рассматриваемых на том же отрезке, с равномерной метрикой, и пусть $P_n(x, f)$ — интерполяционный многочлен степени n, принимающий в узлах x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, те же значения, что и функция f. Если через P_n обозначить оператор, ставящий в соответствие функции $f(x)$ многочлен $P_n(x, f)$, $P_n : C[a, b] \to \mathcal{P}_n[a, b]$, то $\|P_n\| = \lambda_n$, где слева стоит норма оператора в пространстве линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(C[a, b], P_n[a, b])$ и

$$\|f(x) - P_n(x, f)\|_{C[a, b]} \leqslant (1 + \lambda_n) E_n(f),$$

где $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции f алгебраич. многочленами степени $\leqslant n$.

При любом выборе на отрезке $[a, b]$ узлов интерполяции $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$. Для равноотстоящих узлов существует такая постоянная $c > 0$, что $\lambda_n \geqslant c 2^n n^{-3/2}$. Для узлов, совпадающих с нулями многочлена Чебышева,

Л. к. имеют минимальный порядок возрастания, именно:

$$\lambda_n \asymp \ln n.$$

Если функция f m раз дифференцируема на отрезке $[a, b]$, $Y=\{y_k\}_{k=0}^n$ — заданный набор чисел («приближений значений $f(x_k)$»), $P_n(x, Y)$ — интерполяционный многочлен степени n, принимающий в узлах x_k, $k=0, 1, \ldots, n$, значения y_k,

$$\lambda_{nm} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \sum_{k=1}^n |\, l_{nk}^{(m)}(x)\,|, \quad n=0, 1, \ldots,$$

то

$$\| f^{(m)}(x) - P_n^{(m)}(x, Y) \|_{C[a, b]} \leqslant$$
$$\leqslant \| f^{(m)}(x) - P_n^{(m)}(x, f) \|_{C[a, b]} +$$
$$+ \lambda_{nm} \max_{k=0, 1, \ldots, n} |\, f(x_k) - y_k \,|.$$

Л. к. λ_{nm} произвольного отрезка $[a, b]$ связаны с аналогичными константами Λ_{nm} для отрезка $[-1, 1]$ соотношением

$$\Lambda_{nm} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^m \lambda_{nm},$$

в частности $\lambda_n = \Lambda_n$. *Л. Д. Кудрявцев.*

ЛЕБЕГА МЕРА в $\mathbb{R}^n$ — счетно-аддитивная мера λ, являющаяся продолжением объема как функции n-мерных интервалов на более широкий класс $\mathcal{A}$ множеств, измеримых по Лебегу. Класс $\mathcal{A}$ содержит в себе класс $\mathcal{B}$ борелевских множеств и состоит из множеств вида $A \cup B$, где $B \subset B_1$, A, $B_1 \subset \mathcal{B}$ и $\lambda(B_1)=0$. Не всякое подмножество $\mathbb{R}^n$ принадлежит $\mathcal{A}$. Для любого $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A) = \inf \sum\nolimits_j \lambda(I_j), \qquad (*)$$

где inf берется по всевозможным счетным семействам интервалов $\{I_j\}$ таким, что $A \subset \bigcup I_j$. Формула (*) имеет смысл для каждого $A \subset \mathbb{R}^n$ и определяет функцию множеств λ^* (совпадающую на $\mathcal{A}$ с λ), называемую в н е ш н е й м е р о й Л е б е г а. Множество A принадлежит $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda(I) = \lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(I \setminus A)$$

для любого конечного интервала I; при всех $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\lambda^*(A) = \inf \{\lambda(U) : A \subset U,\ U \text{ — открыто}\}$$

и при всех $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A) = \lambda^*(A) = \sup \{\lambda(F) : A \supset F,\ F \text{ — компактно}\};$$

если $\lambda^*(A) < \infty$, то последнее равенство достаточно для включения $A \in \mathcal{A}$. Если O — ортогональный оператор в $\mathbb{R}^n$ и $a \in \mathbb{R}^n$, то $\lambda(OA+a) = \lambda(A)$ для любого $A \in \mathcal{A}$. Л. м. введена А. Лебегом [1].

Лит.: [1] Lebesgue H., «Ann. mat. pura ed appl.», (3) 1902, v. 7, p. 231; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [3] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [4] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981. *В. В. Сазонов.*

ЛЕБЕГА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования тригонометрич. рядов. Ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (*)$$

суммируем в точке x_0 м е т о д о м с у м м и р о в а н и я Л е б е г а к сумме s, если в нек-рой окрестности (x_0-h, x_0+h) этой точки сходится проинтегрированный ряд

$$\frac{a_0 x}{2} + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

и его сумма $F(x)$ в точке x_0 имеет симметрич. производную, равную s:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0-h)}{2h} = s.$$

Последнее условие можно представить также в виде

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) \frac{\sin nh}{nh} \right] = s.$$

Л. м. с. не является регулярным в том смысле, что не может суммировать любой сходящийся тригонометрич. ряд (*) (см. *Регулярные методы суммирования*), однако если ряд (*) есть ряд Фурье суммируемой функции $f(x)$, то он суммируем Л. м. с. почти всюду к $f(x)$. Метод предложен А. Лебегом [1].

Лит.: [1] Lebesgue H., Leçons sur les séries trigonométriques, P., 1906; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961.
И. И. Волков.

ЛЕБЕГА МНОЖЕСТВО функции f, определенной на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^k$,— множество точек $y \in G$ таких, что

$$\lim_{\lambda(\Delta) \to 0} \frac{1}{\lambda(\Delta)} \int_{\Delta} |f(y) - f(x)| \, dx = 0,$$

где Δ — замкнутый куб, содержащий точку y, и λ — мера Лебега. Функция f здесь может быть действительной или векторной.
В. В. Сазонов.

ЛЕБЕГА НЕРАВЕНСТВО — оценка уклонения частных сумм ряда Фурье с помощью наилучших приближений. Л. н. в случае тригонометрич. системы понимается как соотношение

$$\max_x |R_n(f, x)| \leqslant (L_n + 1) E_n(f), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $R_n(f, x)$ есть n-й остаток (тригонометрического) ряда Фурье непрерывной 2π-периодической функции f, L_n — *Лебега константа*, $E_n(f)$ — равномерное наилучшее приближение тригонометрич. полиномами порядка n. Л. н.— соотношение общего характера: его аналоги выполнены для произвольных ортонормированных систем при соответствующих определениях констант Лебега и наилучших приближений, а также для сравнения остатков рядов Фурье с наилучшими приближениями в нормах других пространств, напр. L^p, $1 \leqslant p < \infty$. Л. н. и подобные ему соотношения часто используются в теории аппроксимации для получения оценок наилучших приближений снизу. Л. н. доказано А. Лебегом (H. Lebesgue).

Лит.: [1] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965.
К. И. Осколков.

ЛЕБЕГА ПРИЗНАК — признак точечной сходимости ряда Фурье. Если 2π-периодическая интегрируемая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$ в точке x_0 при нек-ром $\delta > 0$ удовлетворяет условию

$$\lim_{h \to +0} \int_h^{\delta} \left| \frac{\varphi_{x_0}(t+h)}{t+h} - \frac{\varphi_{x_0}(t)}{t} \right| dt = 0, \qquad (*)$$

где

$$\varphi_{x_0}(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S,$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к числу S. Л. п. доказан А. Лебегом [1]. Условие (*) равносильно совокупности двух условий

$$\int_0^h |\varphi_{x_0}(t)| \, dt = o(h),$$

$$\int_h^{\delta} \frac{1}{t} |\varphi_{x_0}(t+h) - \varphi_{x_0}(t)| \, dt = o(1), h \to +0.$$

Л. п. сильнее *Дирихле признака*, *Жордана признака*, *Дини признака*, *Валле Пуссена признака* и *Юнга признака*.

Лит.: [1] Lebesgue H., «Math. Ann.», 1905, Bd 61, S. 251—80; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961.
Б. И. Голубов.

ЛЕБЕГА ПРОСТРАНСТВО — пространство с мерой $(M, \mathfrak{B}, \mu)$ (где M — нек-рое множество, $\mathfrak{B}$ — нек-рая σ-алгебра его подмножеств, именуемых измеримыми, а

μ — нек-рая мера, определенная на измеримых множествах), изоморфное «стандартному образцу», состоящему из нек-рого отрезка Δ и не более чем счетного множества точек a_i (в «крайних» случаях этот «образец» может состоять только из отрезка Δ или только из точек a_i) и снабженному следующей мерой m: на Δ берется обычная *Лебега мера*, а каждой из точек a_i приписывается мера $m(a_i)=m_i>0$; при этом мера предполагается нормированной, т. е. $\mu(M)=m(\Delta)+\Sigma m_i=1$. «Изоморфизм» здесь можно понимать в строгом смысле или по mod 0; соответственно получается более узкий или более широкий вариант понятия Л. п. (в последнем случае можно говорить о Л. п. по mod 0). Можно дать определение Л. п. в терминах «внутренних» свойств пространства с мерой $(M, \mathfrak{B}, \mu)$ (см. [1] — [3]).

Л. п.— наиболее часто встречающийся тип пространств с нормированной мерой, ибо любое полное сепарабельное метрич. пространство с нормированной мерой (определенной на его борелевских подмножествах и затем обычным образом пополненной) является Л. п. Помимо свойств, общих всем пространствам с мерой, Л. п. обладает рядом специфических «хороших» свойств. Напр., любой автоморфизм булевой σ-алгебры с мерой $(\mathfrak{B}, \mu)$ порождается нек-рым автоморфизмом Л. п. M. При ряде естественных операций из Л. п. снова получается Л. п. Так, подмножество A положительной меры в Л. п. M само является Л. п. (его измеримыми подмножествами считаются те, которые измеримы в M, а мера $\mu_A(X)=\mu(X)/\mu(A)$); прямое произведение конечного или счетного числа Л. п. есть Л. п. Другие свойства Л. п. связаны с *измеримыми разбиениями*.

Лит.: [1] Halmos P. R., Neumann J., «Ann. Math.», 1942, v. 43, № 2, p. 332—50; [2] Рохлин В. А., «Матем. сб.», 1949, т. 25, № 1, с. 107—50; [3] Haezendonck J., «Bull. Soc. math. Belg.», 1973, t. 25, № 3, p. 243—58.

Д. В. Аносов.

ЛЕБЕГА РАЗЛОЖЕНИЕ — 1) Л. р. функции ограниченной вариации — каноническое представление функции ограниченной вариации в виде суммы не более чем трех слагаемых. Если $f(x)$ — функция ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$, то она может быть представлена в виде

$$f(x)=A(x)+S(x)+D(x),$$

где $A(x)$ — абсолютно непрерывная функция (см. *Абсолютная непрерывность*), $S(x)$ — *сингулярная функция*, а $D(x)$ — *скачков функция*. В нек-рых случаях, напр., если $f(a)=A(a)$, это представление единственно. Л. р. установлено А. Лебегом (H. Lebesgue, 1904, см. [1]).

Лит.: [1] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.— Л., 1934; [2] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974; [3] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

Б. И. Голубов.

2) Л. р. заданной на измеримом пространстве $(X, \mathfrak{A})$ ($\mathfrak{A}$ есть σ-алгебра) σ-конечной обобщенной меры μ относительно определенной там же σ-конечной обобщенной меры ν — представление μ в виде $\mu=\alpha+\beta$, где α, β суть σ-конечные обобщенные меры, причем α абсолютно непрерывна относительно ν, а β сингулярна относительно ν. Такое представление всегда возможно и единственно.

Лит.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы, пер. с англ., М., 1962.

В. В. Сазонов.

ЛЕБЕГА РАЗМЕРНОСТЬ — размерность, определенная посредством покрытий; важнейший *размерностный инвариант* $\dim X$ топологич. пространства X, открытый А. Лебегом [1]. Он высказал гипотезу, что $\dim I^n=n$ для n-мерного куба I^n. Л. Брауэр [2] впервые доказал это, а также более сильное тождество: $\dim I^n=\operatorname{Ind} I^n=n$. Точное определение инварианта $\dim X$ (для класса

метрич. компактов) дал П. С. Урысон, доказавший для пространств X этого класса тождество

$$\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$$

(тождество Урысона, см. *Размерности теория*), распространенное на класс всех сепарабельных метрич. пространств в 1925 В. Гуревичем (W. Hurewicz) и Л. А. Тумаркиным.

Для компактов X Л. р. определяется как наименьшее целое число n, обладающее тем свойством, что при любом $\varepsilon > 0$ существует конечное открытое ε-покрытие компакта X, имеющее кратность $\leqslant n+1$; при этом ε-покрытием метрич. пространства наз. покрытие, все элементы к-рого имеют диаметр $< \varepsilon$, а кратностью конечного покрытия пространства X наз. наибольшее такое целое число k, что существует точка пространства X, содержащаяся в k элементах данного покрытия. Для произвольного нормального (в частности, метризуемого) пространства X Л. р. наз. наименьшее целое число n такое, что ко всякому конечному открытому покрытию ω пространства X существует вписанное в него (конечное открытое) покрытие α кратности $n+1$. При этом покрытие α наз. вписанным в покрытие ω, если каждый элемент покрытия α является подмножеством хотя бы одного элемента покрытия ω.

Лит.: [1] Lebesgue H., «Math. Ann.», 1911, Bd 70, S. 166—68; [2] Brouwer L. E. J., «J. reine und angew. Math.», 1913, Bd 142, S. 146—52; [3] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности..., М., 1973. *П. С. Александров.*

ЛЕБЕГА ТЕОРЕМА — 1) Л. т. в теории размерности: n-мерный куб для любого $\varepsilon > 0$ обладает конечным замкнутым ε-покрытием кратности $\leqslant n+1$, и в то же время существует такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n) > 0$, что любое конечное замкнутое ε_0-покрытие n-мерного куба имеет кратность $\geqslant n+1$. Это утверждение привело в дальнейшем к определению основного размерностного инварианта — *Лебега размерности* $\dim X$ нормального топологич. пространства X. *Б. А. Пасынков.*

2) Л. т. о предельном переходе под знаком интеграла; пусть на множестве E задана последовательность измеримых функций $f_n(x)$, к-рая сходится почти всюду (или по мере) на E к функции $f(x)$; если на E существует такая суммируемая функция $\Phi(x)$, что при всех n и x

$$|f_n(x)| \leqslant \Phi(x),$$

то $f_n(x)$ и $f(x)$ суммируемы на E и

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

Впервые доказана А. Лебегом [1]. Важный частный случай $\Phi(x) = \text{const}$ и E с конечной мерой, также называемый Л. т., был им получен раньше [2].

Иногда Л. т. называют теорему, впервые доказанную Б. Леви [3]: пусть на множестве E задана неубывающая последовательность измеримых неотрицательных функций $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots$ и

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

почти всюду, тогда

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

Лит.: [1] Lebesgue H., «Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse sci. math. et sci. phys.», 1909, v. 1, p. 25—117; [2] Lebesgue H., «Ann. mat. pura ed appl.», (3), 1902, v. 7, p. 231; [3] Levi B., «Rend. Ist. Lombardo sue lett», (2), 1906, v. 39, p. 775—80; [4] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [5] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974. *Т. П. Лукашенко.*

ЛЕБЕГА ТОЧКА — значение действительной переменной x такое, что для данной суммируемой по Лебегу на (a, b) функции $f(x)$ выполнены соотношения

$$\int_0^h |f(x \pm t) - f(x)|\, dt = o(h), \quad h \to 0.$$

Согласно теореме Лебега множество точек, в к-рых эти соотношения выполнены (т. н. множество Лебега), имеет полную меру (Лебега) на интервале (a, b), т. е. в почти каждой точке x, а именно, во всех Л. т. функция $f(x)$ в среднем мало отличается от ее значения в близлежащих точках $x \pm t$. Понятие Л. т. имеет аналоги и для функций многих переменных. Это понятие и утверждения типа приведенной теоремы Лебега лежат в основе различных исследований проблем сходимости почти всюду, в частности исследований сингулярных интегралов.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981.
К. И. Осколков.

ЛЕБЕГА ФУНКЦИИ — функции

$$L_n^{\Phi}(t) = \int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(x)\, \varphi_k(t) \right| dx, \quad t \in [a, b],$$

где $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — заданная ортонормированная по мере Лебега на отрезке $[a, b]$ система функций, $n = 1, 2, \ldots$. Аналогично определяются Л. ф. в случае, когда ортонормированная система Φ задана на произвольном пространстве с мерой. Справедливо равенство

$$L_n^{\Phi}(t) = \sup_{f : \|f\|_{C[a,\,b]} \leqslant 1} |S_n(f)(t)|, \quad t \in [a, b],$$

где

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=1}^n c_k(f)\, \varphi_k(t)$$

— частная сумма ряда Фурье функции f по системе Φ. В случае, когда Φ — тригонометрич. система, Л. ф. постоянны и сводятся к *Лебега константам*. Л. ф. введены А. Лебегом (H. Lebesgue).

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958.
Б. С. Кашин.

ЛЕБЕГА ЧИСЛО — 1) Л. ч. открытого покрытия ω метрич. пространства X — любое такое число $\varepsilon > 0$, что как только подмножество A пространства X имеет диаметр $< \varepsilon$, так A содержится хотя бы в одном элементе покрытия ω. Для любого открытого покрытия компакта существует хотя бы одно Л. ч.; можно построить двухэлементное покрытие прямой, для к-рого нет ни одного Л. ч.

2) Л. ч. системы замкнутых подмножеств λ метрич. пространства X — любое такое число $\varepsilon > 0$, что как только множество $A \subset X$ диаметра $\leqslant \varepsilon$ пересекает все элементы какой-нибудь подсистемы λ' системы λ, так пересечение элементов системы λ' непусто. Любая конечная система замкнутых подмножеств компакта обладает хотя бы одним Л. ч.
Б. А. Пасынков.

ЛЕБЕГА — СТИЛТЬЕСА ИНТЕГРАЛ — обобщение *Лебега интеграла*. Для неотрицательной меры μ название «интеграл Лебега—Стилтьеса» употребляется в том случае, когда $X = \mathbb{R}^n$ и μ не есть мера Лебега; тогда интеграл $\int_X f\, d\mu$ определяется так же, как интеграл Лебега в общем случае. Если мера μ знакопеременная, то $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1 и μ_2 — неотрицательные меры, и Л.—С. и.

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f\, d\mu_1 - \int_X f\, d\mu_2$$

при условии, что оба интеграла в правой части существуют. Для $X = \mathbb{R}^1$ счетная аддитивность и ограниченность меры μ эквивалентна тому, что мера порождена

нек-рой функцией Φ ограниченной вариации. В таком случае Л.— С. и. записывается в виде

$$\int_a^b f d\Phi.$$

Для дискретной меры Л.— С. и. представляет собой числовой ряд.

Лит.: [1] Камке Е., Интеграл Лебега — Стильтьеса, пер. с нем., М., 1959.
И. А. Виноградова.

ЛЕБЕГОВСКИЙ СПЕКТР — термин *спектральной теории.* Пусть A — самосопряженный, а U — унитарный операторы, действующие в гильбертовом пространстве H. Оператор A, соответственно U, имеет простой спектр Лебега, если он унитарно эквивалентен оператору умножения на λ в пространстве комплекснозначных функций $f(\lambda)$, к-рые определены на действительной оси $\mathbb{R}$, соответственно на окружности

$$S^1 = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| = 1\},$$

и для которых

$$\|f\|^2 = \int |f(\lambda)|^2 d\lambda < \infty,$$

где интегрирование ведется по обычной *Лебега мере* на $\mathbb{R}$, соответственно на S^1, откуда и назв. Л. с. (см. *Унитарно эквивалентные операторы*). Для U это определение эквивалентно следующему: в H существует такой ортонормированный базис e_j, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, что $Ue_j = e_{j+1}$. Далее, оператор имеет спектр Лебега, если H можно разложить в ортогональную прямую сумму инвариантных подпространств, в каждом из к-рых оператор имеет простой Л. с. Хотя для данного оператора может быть много таких разложений, число «слагаемых» для каждого из них одно и то же (оно может быть и бесконечным *кардинальным числом*). Это число наз. кратностью Л. с. Наконец, аналогичные понятия можно ввести для однопараметрич. группы унитарных операторов $U(t)$, непрерывной в слабой (или, что в данном случае то же, сильной) операторной топологии. По теореме Стоуна $U(t) = e^{iAt}$, где A — нек-рый самосопряженный оператор. Если A имеет Л. с. нек-рой кратности, то говорят, что теми же свойствами обладает и $U(t)$. Напр., группа $U(t)$ имеет простой Л. с., если она унитарно эквивалентна группе $f(\lambda) \to e^{i\lambda t} f(\lambda)$ в $L^2(\mathbb{R})$, а та в свою очередь эквивалентна группе сдвигов $f(\lambda) \to f(\lambda + t)$ в том же пространстве $L^2(\mathbb{R})$.
Д. В. Аносов.

ЛЕБЕДЕВА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F(\tau) = \int_0^\infty [I_{i\tau}(x) + I_{-i\tau}(x)] K_{i\tau}(x) f(x)\, dx, \quad 0 \leqslant \tau < \infty,$$

где $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ — модифицированные цилиндрич. функции. Введено Н. Н. Лебедевым [1]. Если

$$x^{-1/2} f(x) \in L(0, 1), \quad x^{1/2} f(x) \in L(1, \infty),$$

то почти при всех x имеет место формула обращения

$$f(x) = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty F(\tau)\, \tau \operatorname{sh} \pi\tau K_{i\tau}^2(x)\, dx.$$

Лит.: [1] Лебедев Н. Н., «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 2, с. 213—22.
Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

ЛЁВЕНХЕЙМА — СКОЛЕМА ТЕОРЕМА — см. *Гёделя теорема о полноте.*

ЛЕВИ КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — формула для логарифма характеристич. функции $\ln\varphi(\lambda)$ безгранично делимого распределения:

$$\ln\varphi(\lambda) = i\gamma\lambda - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{i\lambda x} - 1 - \frac{i\lambda x}{1+x^2} \right) dM(x) +$$

$$+ \int_0^\infty \left(e^{i\lambda x} - 1 - \frac{i\lambda x}{1+x^2} \right) dN(x),$$

где характеристики Л. к. п. γ, σ^2, M, N удовлетворяют следующим условиям: $-\infty<\gamma<\infty$, $\sigma^2\geqslant 0$, $M(x)$ и $N(x)$ — неубывающие непрерывные слева функции на $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ соответственно и такие, что

$$\lim_{x\to\infty} N(x) = \lim_{x\to-\infty} M(x) = 0$$

и

$$\int_{-1}^{0} x^2\, dM(x) < \infty, \quad \int_{0}^{1} x^2\, dN(x) < \infty.$$

Каждому безгранично делимому распределению соответствует единственный набор характеристик Л. к. п. γ, σ^2, M, N, и обратно, при приведенных выше условиях на γ, σ^2, M и N по любому такому набору Л. к. п. определяет логарифм характеристич. функции нек-рого безгранично делимого распределения.

Так, для нормального распределения со средним a и дисперсией σ^2

$$\gamma=a,\ \sigma^2=\sigma^2,\ N(x)\equiv 0,\ M(x)\equiv 0.$$

Для распределения Пуассона с параметром λ

$$\gamma=\lambda/2,\ \sigma^2=0,\ M(x)\equiv 0,\ N(x)=-\lambda \text{ при } x\leqslant 1,$$
$$N(x)=0 \text{ при } x>1.$$

Устойчивому распределению с показателем α, $0<\alpha<2$, соответствует Л. к. п. с

$$\sigma^2=0 \text{ и нек-рым } \gamma,\ M(x)=c_1/|x|^{\alpha},\ N(x)=-c_2/x^{\alpha},$$

где $c_i\geqslant 0$, $i=1, 2$, — постоянные $(c_1+c_2>0)$. Л. к. п. безгранично делимого распределения было предложено П. Леви (P. Levy, 1934). Оно является обобщением формулы А. Н. Колмогорова, найденной им в 1932 для случая, когда безгранично делимое распределение имеет конечную дисперсию. Для $\ln\varphi(\lambda)$ имеется эквивалентная Л. к. п. формула, предложенная в 1937 А. Я. Хинчиным и называемая *Леви — Хинчина каноническим представлением*. Вероятностный смысл функций N и M и область использования Л. к. п. определяются следующим: каждой безгранично делимой функции распределения $F(x)$ соответствует стохастически непрерывный однородный процесс с независимыми приращениями

$$X=\{X(t),\ 0\leqslant t<\infty\},\ X(0)=0,$$

такой, что

$$F(x)=\mathsf{P}\{X(1)<x\}.$$

В свою очередь сепарабельный процесс X упомянутого типа имеет с вероятностью 1 выборочные траектории без разрывов второго рода, и поэтому для $b>a>0$ определена случайная величина $Y([a, b])$, равная числу элементов в множестве

$$\left\{t: a\leqslant \lim_{\tau\downarrow 0} X(t+\tau) - \lim_{\tau\downarrow 0} X(t-\tau) < b,\ 0\leqslant t\leqslant 1\right\}.$$

В этих обозначениях для функции N, соответствующей $F(x)$, имеет место следующее соотношение

$$\mathsf{E}\{Y([a, b])\}=N(b)-N(a).$$

Аналогичное соотношение имеет место и для функции M.

В терминах характеристик Л. к. п. функции распределения $\mathsf{P}\{X(1)<x\}$ легко выражаются многие свойства поведения выборочных траекторий сепарабельного процесса X. В частности, при $\sigma^2=0$

$$\lim_{x\to 0} N(x) > -\infty,\ \lim_{x\to 0} M(x) < \infty,$$

$$\gamma=\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\, dM(x) + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dN(x),$$

почти все выборочные функции X с вероятностью 1 будут ступенчатыми функциями с конечным числом скачков на любом конечном интервале. Если $\sigma^2=0$ и

$$\int_{-1}^{0} |x| \, dM(x) + \int_{0}^{1} x \, dN(x) < \infty,$$

то выборочные траектории X с вероятностью 1 имеют ограниченную вариацию на любом конечном интервале. Непосредственно через характеристики Л. к. п. $\mathsf{P}\{X(1) < x\}$ определяется инфинитезимальный оператор, соответствующий процессу X, рассматриваемому как марковская случайная функция. Многие аналитич. свойства безгранично делимой функции распределения непосредственно выражаются в терминах характеристик ее Л. к. п.

Имеются аналоги Л. к. п. для безгранично делимых распределений, задаваемых на широком классе алгебраич. структур.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [2] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [3] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [4] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [5] Ито К., Вероятностные процессы, пер. с япон., т. 2, М., 1963. *Б. А. Рогозин.*

ЛЕВИ МЕТРИКА — метрика L в пространстве $\mathcal{F}$ функций распределения одномерных случайных величин:

$$L \equiv L(F, G) = \inf \{\varepsilon : F(x-\varepsilon) - \varepsilon \leqslant G(x) \leqslant F(x+\varepsilon) + \varepsilon, \ \forall x\}$$

для любых F, $G \in \mathcal{F}$. Введена П. Леви (см. [1]). Если между графиками функций F и G вписывать квадраты со сторонами, параллельными осям координат (в точках разрыва графики дополняются вертикальными отрезками), то сторона наибольшего из них равна L.

Л. м. можно рассматривать как частный случай *Леви—Прохорова метрики*. Определение Л. м. переносится на множество M всевозможных неубывающих функций, заданных на $\mathbb{R}^1$ (при этом допускаются бесконечные значения метрики).

Важнейшие свойства Л. м.:

1) Л. м. индуцирует в $\mathcal{F}$ слабую топологию. Метрич. пространство $(\mathcal{F}, L)$ является сепарабельным и полным. Сходимость последовательности функций из M в метрике L эквивалентна полной сходимости.

2) Если $F \in M$ и

$$F_{-1}(x) = \inf \{t : F(t) < x\},$$

то для любых F, $G \in M$

$$L(F, G) = L(F_{-1}, G_{-1}).$$

3) Регулярность Л. м.: для любых F, G, $H \in \mathcal{F}$

$$L(F * H, \ G * H) \leqslant L(F, G),$$

следствием этого свойства является свойство полуаддитивности:

$$L(F_1 * F_2, \ G_1 * G_2) \leqslant L(F_1, G_1) + L(F_2, G_2)$$

и «неравенство сглаживания»:

$$L(F, G) \leqslant L(F * H, \ G \times H) + 2L(E, H)$$

(E — распределение, вырожденное в нуле).

4) Если $\alpha_k \geqslant 0$, F_k, $G_k \in \mathcal{F}$, то

$$L\left(\sum \alpha_k F_k, \ \sum \alpha_k G_k\right) \leqslant \max\left(1, \sum \alpha_k\right) \max L(F_k, G_k).$$

5) Если $\beta_r(F)$, $r>0$,— абсолютный момент распределения F, то

$$L(F, E) \leqslant \{\beta_r(F)\}^{r/(r+1)}.$$

6) Л. м. на M связана со средней метрикой

$$\rho_1=\rho_1(F,\ G)=\int |F(x)-G(x)|\,dx$$

неравенством

$$L^2\leqslant\rho_1.$$

7) Л. м. на M связана с равномерной метрикой

$$\rho=\rho(F,\ G)=\sup_x |F(x)-G(x)|$$

соотношениями

$$L\leqslant\rho\leqslant L+\min\{Q_F(L),\ Q_G(L)\},\qquad (*)$$

где

$$Q_F(x)=\sup_t |F(t+x)-F(t)|$$

($Q_F(x)$ — *концентрации функция*, если $F\in\mathcal{F}$). В частности, если одна из функций, напр. G, имеет равномерно ограниченную производную, то

$$\rho\leqslant(1+\sup_x G'(x))\,L.$$

Следствием (*) является теорема Пойа — Гливенко об эквивалентности слабой и равномерной сходимости в том случае, когда предельное распределение непрерывно.

8) Если $F_{a,\,\sigma}(x)=F(\sigma x+a)$, где a и $\sigma>0$ — константы, то для любых $F,\ G\in\mathcal{F}$

$$L(\sigma F,\ \sigma G)\leqslant\sigma L(F_{a,\,\sigma},\ G_{a,\,\sigma})$$

(в частности, Л. м. инвариантна относительно сдвига распределений) и

$$\lim_{\sigma\to 0} L(F_{a,\,\sigma},\ G_{a,\,\sigma})=\rho(F,\ G).$$

9) Если f, g — характеристич. функции, соответствующие распределениям F, G, то для любых $T>e$

$$L(F,\ G)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^T |f(t)-g(t)|\,\frac{dt}{t}+2e\,\frac{\ln T}{T}.$$

Понятие Л. м. можно распространить на случай распределений в $\mathbb{R}^n$.

Лит.: [1] Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, P., 1937; 2 éd., P., 1954; [2] Золотарев В. М., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 112, с. 224—31; [3] Золотарев В. М., Сенатов В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, № 2, с. 239—50; [4] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972.

В. М. Золотарев.

ЛЕВИ НЕРАВЕНСТВО — неравенство для распределения максимума сумм независимых случайных величин, центрированных соответствующими медианами. Именно, пусть $X_1,\ \ldots,\ X_n$ — независимые случайные величины, $S_k=\sum_{i=1}^k X_i$ и mX — медиана случайной величины X, тогда для любого x имеет место Л. н.

$$\mathsf{P}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}(S_k-m(S_k-S_n))\geqslant x\}\leqslant 2\mathsf{P}\{S_n\geqslant x\}$$

и

$$\mathsf{P}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k-m(S_k-S_n)|\geqslant x\}\leqslant 2\mathsf{P}\{|S_n|\geqslant x\}.$$

Непосредственным следствием этих неравенств являются Л. н. для симметрично распределенных случайных величин $X_1,\ \ldots,\ X_n$:

$$\mathsf{P}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k\geqslant x\}\leqslant 2\mathsf{P}\{S_n\geqslant x\}$$

$$\mathsf{P}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant x\}\leqslant 2\mathsf{P}\{|S_n|\geqslant x\}.$$

Л. н. можно рассматривать как обобщение *Колмогорова неравенства*. Л. н. было получено П. Леви [1]

при исследовании общих проблем сходимости распределений сумм независимых случайных величин к устойчивым законам. Существует обобщение Л. н. для мартингалов.

Лит.: [1] Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, P., 1937; 2 éd., P., 1954; [2] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

А. В. Прохоров.

ЛЕВИ ПРОБЛЕМА — проблема геометрич. характеризации областей данного аналитич. пространства, являющихся пространствами Штейна; была поставлена Э. Леви [1] для областей аффинного пространства $\mathbb{C}^n$ в следующей форме. Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$, каждая граничная точка ζ к-рой обладает следующим свойством: существуют окрестность U точки ζ в $\mathbb{C}^n$ и голоморфная функция в $U \bigcap D$, не продолжаемая голоморфно в точку ζ. Является ли D *голоморфности областью*? Указанное свойство равносильно любому из следующих утверждений об области D: 1) ни для какой $\zeta \in \partial D$ не существует последовательности ограниченных голоморфных поверхностей S_ν, сходящейся к голоморфной поверхности S, причем $\partial S_\nu \to \partial S$, $\overline{S}_\nu$, $\partial S \subset D$, $\zeta \in S$; 2) область D псевдовыпукла, т. е. — $\log \rho(z, \partial D)$, $z \in D$, где ρ — евклидово расстояние,— плюрисубгармоничная функция в D; 3) D — псевдовыпуклое многообразие, т. е. в D существует плюрисубгармонич. функция, стремящаяся к $+\infty$ при приближении к ∂D. Л. п. для $\mathbb{C}^n$ была положительно решена в 1953—54 независимо К. Ока (K. Oka), Х. Бремерманом (H. Bremermann) и Ф. Норге (F. Norguet), причем К. Ока решил проблему в более общей постановке, относящейся к *наложения областям* над $\mathbb{C}^n$ (см. [2] — [6]). Результат К. Ока обобщается на области наложения над любым многообразием Штейна: если такая область D является псевдовыпуклым многообразием, то D — многообразие Штейна. Л. п. положительно решена и в ряде других случаев, напр. для некомпактных областей наложения над проективным пространством $\mathbb{CP}^n$ или над кэлеровым многообразием, на к-ром существует строго плюрисубгармонич. функция (см. [2]), для областей в кэлеровом многообразии с положительной голоморфной бисекционной кривизной [7]. В то же время известны примеры псевдовыпуклых многообразий и областей, не являющихся многообразиями Штейна и даже не голоморфно выпуклых. Необходимым и достаточным условием штейновости комплексного пространства является его сильная псевдовыпуклость (см. *Псевдовыпуклость и псевдовогнутость*). Далее, сильно псевдовыпуклая область любого комплексного пространства голоморфно выпукла и является собственной модификацией некоторого пространства Штейна (см. [2], [4]).

Л. п. может быть поставлена также для областей D в бесконечномерном топологич. комплексном векторном пространстве E. Если E локально выпукло и D — область голоморфности, то D псевдовыпукла, т. е. в D существует плюрисубгармонич. функция, стремящаяся к $+\infty$ при приближении к ∂D. Обратная теорема неверна даже в банаховых пространствах, но доказана для банаховых пространств со счетным базисом и ряда других классов пространств E (см. [2]).

Лит.: [1] Levi E. E., «Ann. mat. pura ed appl.», 1911, v. 18, p. 69—79; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 11, М., 1974, с. 125—51; 1977, т. 15, с. 93—171; [3] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [4] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [5] Фукс Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963; [6] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2 — Функции нескольких переменных, М., 1976; [7] Suzuki O., «Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.», 1976, v. 12, p. 439—45.

А. Л. Онищик.

ЛЕВИ УСЛОВИЕ — поддающееся эффективной проверке условие псевдовыпуклости в смысле Леви областей комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, предложенное Э. Леви [1] и состоящее в следующем. Пусть область

D в окрестности $U\zeta$ граничной точки $\zeta \in \partial D$ задана условием

$$D \cap U\zeta = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in U\zeta;\ \varphi(z) = \varphi(z, \overline{z}) < 0\},$$

где действительная функция φ принадлежит классу $C^2(U\zeta)$ и $\operatorname{grad} \varphi(\zeta) \neq 0$. Тогда, если область D псевдовыпукла в точке ζ в смысле Леви, то неотрицателен (комплексный) гессиан

$$H(\zeta; \varphi)(a, \overline{a}) = \sum_{j,\ k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j\, \partial \overline{z}_k}(\zeta)\, a_j \overline{a}_k \geqslant 0 \qquad (1)$$

при всех $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, комплексно ортогональных $\operatorname{grad} \varphi(\zeta)$, т. е. таких, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}(\zeta)\, a_k = 0. \qquad (2)$$

Обратно, если в точке $\zeta \in \partial D$ выполнено условие

$$H(\zeta; \varphi)(a, \overline{a}) > 0 \qquad (3)$$

при всех $a \neq 0$, удовлетворяющих условию (2), то область D псевдовыпукла в смысле Леви в точке ζ.

При $n = 2$ в приведенных формулировках неравенства (1), (3) можно заменить соответственно еще более простыми равносильными неравенствами $L(\varphi)(\zeta) \geqslant 0$, $L(\varphi)(\zeta) > 0$, где

$$L(\varphi) = -\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}_2} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_1} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1\, \partial \overline{z}_1} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{z}_1\, \partial z_2} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_2} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1\, \partial \overline{z}_2} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z_2\, \partial \overline{z}_2} \end{vmatrix}$$

— *определитель Леви функции* $\varphi(z)$.

Л. у. (1) — (3) обобщается также для областей на комплексных многообразиях (см. [4]).

Лит.: [1] Levi E. E., «Ann. mat. pura ed appl.», 1910, v. 17, p. 61—87; 1911, v. 18, p. 69—79; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [4] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969.

Е. Д. Соломенцев.

ЛЕВИ — КРАМЕРА ТЕОРЕМА: если сумма двух независимых непостоянных случайных величин нормально распределена, то и каждое из слагаемых нормально распределено; высказана П. Леви [1] и доказана Г. Крамером [2]. Эквивалентные формулировки: 1) если композиция двух собственных распределений является нормальным распределением, то и каждое из них является нормальным распределением; 2) если $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — характеристич. функции и

$$\varphi_1(t)\, \varphi_2(t) = \exp(-\gamma t^2 + i\beta t),$$
$$\gamma \geqslant 0,\ -\infty < \beta < \infty, \qquad (*)$$

то

$$\varphi_j(t) = \exp(-\gamma_j t^2 + i\beta_j t),\ \gamma_j \geqslant 0,\ -\infty < \beta_j < \infty.$$

В формулировке 1) Л.— К. т. допускает обобщение на композицию двух знакопеременных мер с ограничениями на отрицательную вариацию; в формулировке 2) — на случай, когда вместо условия (*) рассматривается условие

$$\prod_{j=1}^{m} \{\varphi_j(t)\}^{\alpha_j} = \exp(-\gamma t^2 + i\beta t),\ \gamma \geqslant 0,\ -\infty < \beta < \infty,\ t \in E,$$

где $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$ — характеристич. функции, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — положительные числа, E — множество действительных чисел с точкой сгущения в нуле. Имеются обобщения Л.— К. т. на случайные величины в евклидовых пространствах и в локально компактных абелевых группах.

Л.—К. т. обладает свойством устойчивости, т. е. близость распределения суммы независимых случайных величин к нормальному влечет близость распределения каждого из слагаемых к нормальному; известны количественные оценки устойчивости.

Теоремы, аналогичные Л.— К. т., получены для распределения Пуассона, для композиции распределения Пуассона и нормального, для других классов безгранично делимых распределений (см. [6]).

Лит.: [1] Lévy P., «J. math. pures et appl.», 1935, t. 14, p. 347—402; [2] Cramér H., «Math. Z.», 1936, Bd 41, S. 405—14; [3] Райков Д. А., «Докл. АН СССР», 1937, т. 14, с. 9—12; [4] Линник Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, с. 34—59; [5] Сапогов Н. А., «Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ. и астр.», 1959, № 19, с. 78—105; [6] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972; [7] Фельдман Г. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, вып. 1, с. 136—43.

И. В. Островский.

ЛЕВИ — МАЛЬЦЕВА РАЗЛОЖЕНИЕ — представление конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль в виде прямой суммы (векторных пространств) ее радикала R (максимального разрешимого идеала в L) и нек-рой полупростой подалгебры Ли $S \subset L$. Получено Э. Леви [1] и А. И. Мальцевым [2]. Теорема Леви — Мальцева утверждает, что такое разложение $L = R + S$ всегда существует; при этом подалгебра S определена однозначно с точностью до автоморфизма вида $\exp(adz)$, где adz — внутреннее дифференцирование алгебры Ли L, *определяемое нек-рым элементом* z нильрадикала (наибольшего нильпотентного идеала) алгебры L. Если G — связная односвязная вещественная группа Ли, то в группе G существуют замкнутые односвязные аналитич. подгруппы R и S, где R — максимальный связный замкнутый разрешимый нормальный делитель в G, S — полупростая подгруппа в G, $R \cap S = \{e\}$ и отображение $(r, s) \to rs$, $r \in R$, $s \in S$, является аналитич. изоморфизмом многообразия $R \times S$ на G; разложение $G = RS = SR$ также наз. в этом случае Л.— М. р.

Лит.: [1] Levi E. E., «Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur.», 1905, v. 40, p. 3—17; [2] Мальцев А. И., «Докл. АН СССР», 1942, т. 36, № 2, с. 46—50; [3] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [4] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [5] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976.

А. И. Штерн.

ЛЕВИ — ПРОХОРОВА МЕТРИКА — метрика в пространстве $\mathfrak{M}$ конечных борелевских мер на метрич. пространстве (U, d), определяемая равенством:

$$\pi(P, Q) = \inf\{\varepsilon: P(A) \leqslant Q(A^\varepsilon) + \varepsilon,\ Q(A) \leqslant P(A^\varepsilon) + \varepsilon;\ \forall A \subset \mathfrak{B}\},$$

где $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра борелевских множеств из (U, d) и

$$A^\varepsilon = \{x: d(x, y) < \varepsilon,\ y \in A\}.$$

Л.— П. м. введена Ю. В. Прохоровым [1] как обобщение *Леви метрики*. Величина π не изменится, если в ее определении оставить одно из двух неравенств и заменить $\mathfrak{B}$ системой всех открытых или всех замкнутых множеств из $\mathfrak{B}$ (см. [2]).

Важнейшие свойства Л.— П. м.

1) Метрич. пространство $(\mathfrak{M}, \pi)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда сепарабельно (U, d).

2) Пространство (U, d) полно, если полно пространство $(\mathfrak{M}, \pi)$. Обратное верно, если меры из $\mathfrak{M}$ имеют сепарабельные носители.

3) В пространстве $\mathfrak{M}_0$ Л.— П. м. обладает свойствами, аналогичными свойствам метрики Леви. Именно, свойством регулярности 3) и его следствиями, свойствами 4), 5), свойством 6) (в случае $U = \mathbb{R}^1$), частично свойством 7) (именно, $\pi \leqslant V$), а также аналогом свойства 8), если (U, d) является линейным нормированным пространством: если $P_{a,\sigma}(A) = P(\sigma A + a)$, где $\sigma > 0$,

$a \in U$, то для любых $P, Q \in \mathfrak{M}$

$$\pi(\sigma P,\ \sigma Q) \leqslant \sigma\pi(P_{a,\sigma},\ Q_{a,\sigma}),$$

$$\lim_{\sigma \to 0} \pi(P_{a,\sigma},\ Q_{a,\sigma}) = \operatorname{var}(P,\ Q).$$

4) В случае $U = R^k$ Л.— П. м. в $\mathfrak{M}_0$ оценивается с помощью характеристич. функций f, g, соответствующих мерам P, Q (см. [3], [4]).

5) Л.— П. м. является минимальной метрикой по отношению к расстоянию по вероятности

$$\varkappa(X,\ Y) = \inf\{\varepsilon\colon P\{d(X,\ Y) > \varepsilon\} < \varepsilon\}$$

(см. [5]).

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее [illegible]», 1956, т. 1, в. 2, с. 177—238; [2] Dudley R. M., «Math. Statistics», 1968, v. 39, № 5, p. 1563—72; [3] Юринский В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 1, с. 3—12; [4] Абрамов В. А., там же, 1976, т. 21, в. 2, с. 406—410; [5] Strassen V., «Ann. Math. Statistics», 1965, v. 36, № 2, p. 423—39; [6] Биллингслей П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977. *В. М. Золотарев.*

ЛЕВИ — ХИНЧИНА КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — формула для логарифма характеристич. функции $\ln\varphi(\lambda)$ безгранично делимого распределения:

$$\ln\varphi(\lambda) = i\gamma\lambda + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\lambda x} - 1 - \frac{i\lambda x}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x),$$

где подинтегральная функция при $x=0$ равна $-\lambda^2/2$ и характеристики Л.— Х. к. п. γ и G удовлетворяют следующим условиям: γ — действительное число, $G(x)$ — неубывающая непрерывная слева функция ограниченной вариации.

Л.—Х. к. п. было предложено А. Я. Хинчиным (1937) и эквивалентно формуле, предложенной несколько ранее П. Леви (P. Lévy, 1934) и называемой *Леви каноническим представлением*. Каждому безгранично делимому распределению соответствует единственный набор характеристик Л.— Х. к. п. γ и G, и обратно, при условиях на γ и G, приведенных выше, по любому такому набору Л.— Х. к. п. определяет логарифм характеристич. функции нек-рого безгранично делимого распределения. Для слабой сходимости последовательности безгранично делимых распределений, определяемых характеристиками γ_n, G_n, $n=1, 2, \ldots$, к распределению (которое необходимо будет безгранично делимым) с характеристиками γ и G необходимо и достаточно, чтобы $\lim\gamma_n = \gamma$ и G_n вполне сходились к G при $n \to \infty$.

Лит. см. при ст. *Леви каноническое представление.*

Б. А. Рогозин.

ЛЕВИ-ЧИВИТА СВЯЗНОСТЬ — *аффинная связность* на римановом пространстве M, к-рая является *римановой связностью* (т. е. связностью, относительно к-рой метрич. тензор ковариантно постоянный) и имеет нулевое кручение. Аффинная связность на M определяется этими условиями однозначно, так что каждое риманово пространство M обладает единственной Л.-Ч. с. Впервые это понятие возникло в 1917 у Т. Леви-Чивита [1] в виде понятия *параллельного перенесения* вектора в римановой геометрии. Сама идея восходит еще к Ф. Миндингу (F. Minding), к-рый в 1837 ввел понятие развертки линии на поверхности.

Относительно локальной координатной системы в M, где $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, Л.-Ч. с. на M определяется формами $\omega_j^i = \left\{ {i \atop jk} \right\} dx^k$, где

$$\left\{ {i \atop jk} \right\} = \frac{1}{2} g^{il}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right);$$

ее тензор кривизны R^i_{jkl} определяется формулой

$$d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = \frac{1}{2} R^i_{jkl} dx^k \wedge dx^l.$$

Пусть $R_{ij,\,kl}=g_{im}R^m_{jkl}$, тогда

$$R_{ij,\,kl}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\,\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\,\partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\,\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\,\partial x^k}\right\}+$$

$$+g_{pq}\left(\left\{\begin{matrix}p\\il\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}q\\jk\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}p\\ik\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}q\\jl\end{matrix}\right\}\right);$$

при этом:

$$R_{ij,\,kl}=-R_{ij,\,lk};\quad R_{ij,\,kl}=R_{kl,\,ij};$$

$$R_{ij,\,kl}+R_{ik,\,lj}+R_{il,\,jk}=0.$$

Тензор кривизны Л.-Ч. с. имеет $n^2(n^2-1)/12$ существенных компонент, где $n=\dim M$. Напр., при $n=2$ имеется только одна существенная компонента $R_{12,\,12}=K\det|g_{ij}|$, где K — гауссова кривизна.

Если риманово пространство M изометрически погружено в евклидово пространство E_N, то его Л.-Ч. с. характеризуется следующим образом: для произвольных двух векторных полей X, Y на $M\subset E_N$ ковариантная производная $(\nabla_Y X)_x$ в точке $x\in M$ является ортогональной проекцией на касательную плоскость $T_x(M)\subset E_N$ обычного дифференциала $(dYX)_x$ поля X в E_N относительно вектора $Y_x\in T_x(M)$. Другими словами, отображение соседней бесконечно близкой касательной плоскости на исходную совершается путем ортогонального проектирования.

Лит.: [1] Levi-Civita T., «Rend. Circolo math. Palermo», 1917, v. 42, p. 173—205; [2] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [3] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967. *Ю. Г. Лумисте.*

ЛЁВНЕРА МЕТОД, метод Лёвнера параметрических представлений однолистных функций, параметрический метод Лёвнера,— метод в теории однолистных функций, заключающийся в использовании *Лёвнера уравнения* для решения экстремальных задач. Метод был предложен К. Лёвнером [1]. Он основан на том, что множество функций $f(z)$, $f(0)=0$, регулярных и однолистных в круге $E=\{z:|z|<1\}$ и отображающих E на области типа (s), получаемые из круга $|w|<1$ проведением разреза вдоль части нек-рой жордановой дуги, исходящей из точки окружности $|w|=1$ и не проходящей через точку $w=0$, плотно (в топологии равномерной сходимости функций внутри круга E) во всем семействе функций $f(z)$, $f(0)=0$, регулярных и однолистных в E и таких, что $|f(z)|<1$ в E. Связывая длину удаляемой дуги с параметром t, удается установить, что функция $w=f(z,\,t)$, $f(0)=0$, однолистно отображающая E на область D типа (s), является решением дифференциального уравнения (см. *Лёвнера уравнение*)

$$\frac{\partial f(z,\,t)}{\partial t}=-f(z,\,t)\,\frac{1+k(t)\,f(z,\,t)}{1-k(t)\,f(z,\,t)},\qquad(*)$$

$f(z,\,t_0)=f(z)$, удовлетворяющим начальному условию $f(z,\,0)=z$. Здесь $t\in[0,\,t_0]$, $k(t)$ — непрерывная комплекснозначная функция на промежутке $[0,\,t_0]$, соответствующая области D, причем $|k(t)|=1$. К. Лёвнер использовал этот метод для получения точных оценок коэффициентов c_3 и b_n, $n=2,\,3,\ldots$, разложений

$$w=f(z)=z+\sum\nolimits_{n=2}^{\infty}c_n z^n$$

и

$$z=f^{-1}(w)=w+\sum\nolimits_{n=2}^{\infty}b_n w^n$$

в классе S функций $w=f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, регулярных и однолистных в E.

Л. м. был использован (см. [3]) для получения основных результатов теории однолистных функций (теорем искажения, взаимного роста, теорем вращения).

Пусть S' — подкласс функций $f(z)$ класса S, имеющих в E представление

$$f(z)=\lim_{t\to\infty} e^t f(z,\ t),$$

где $f(z,\ t)$ как функция от z регулярна и однолистна в E, $|f(z,\ t)|<1$ в E, $f(0,\ t)=0$, $f'_z(0,\ t)>0$, а как функция от t, $0<t<\infty$, является решением дифференциального уравнения (*), удовлетворяющим начальному условию $f(z,\ 0)=z$; $k(t)$ в уравнении (*) — любая комплекснозначная функция, кусочно непрерывная и по модулю равная единице на промежутке $[0,\ \infty)$. Для того чтобы оценить какую-либо величину в классе S, достаточно оценить ее в подклассе S', поскольку любую функцию $f(z)$ класса S можно аппроксимировать функциями $f_n(z)$, $f_n(0)=0$, $f'_n(0)>0$, каждая из к-рых однолистно отображает E на плоскость w с разрезом по жордановой дуге, уходящей в ∞ и не проходящей через $w=0$, а значит и функциями $f_n(z)/f'_n(0)\in S'$. При этой аппроксимации оцениваемые величины для аппроксимирующих функций сходятся к той же величине, что и для функции $f(z)$.

Л. м. используется в работах по теории однолистных функций (см. [3] с. 536—37); он часто приводит к успеху при получении явных оценок, но, как правило, не обеспечивает описания всех экстремальных функций и полной информации об их единственности. Для полного решения экстремальных задач Л. м. обычно сочетают с вариационным методом (см. [3] с. 538—539 и *Вариационно-параметрический метод*). Л. м. распространен на двусвязные области. Получено обобщенное уравнение типа уравнения Лёвнера для многосвязных областей, для автоморфных функций (см. [4]).

Лит.: [1] Löwner K., «Math. Ann.», 1923, Bd 89, S. 103—21; [2] Peschl E., «J. reine und angew. Math.», 1936, Bd 176, S. 61—94; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [4] Александров И. А., Параметрические продолжения в теории однолистных функций, М., 1976. *Е. Г. Голузина.*

ЛЁВНЕРА УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dw}{dt}=-w\,\frac{1+e^{i\alpha(t)}w}{1-e^{i\alpha(t)}w},$$

где $\alpha(t)$ — действительная непрерывная на интервале $-\infty<t<\infty$ функция. Обобщением Л. у. является уравнение Куфарева — Лёвнера (у. К.— Л.):

$$\frac{dw}{dt}=-wP(w,\ t),$$

где $P(w,\ t)$, $|w|<1$, $-\infty<t<\infty$,— измеримая по t при фиксированном w и регулярная по w функция с положительной действительной частью, нормированная условием $P(0,\ t)=1$. Л. у. и у. К.— Л., возникшие в теории однолистных функций, лежат в основе параметрич. метода исследования экстремальных проблем конформного отображения.

Решение $w(t,\ z,\ \tau)$, $w(\tau,\ z,\ \tau)=z$, у. К.— Л., рассматриваемое как функция начального значения z, при всяком $t>\tau$ конформно отображает круг $|z|<1$ на однолистную односвязную область, принадлежащую кругу $|w|<1$. По формуле

$$f(z)=a+b\lim_{t\to\infty} e^t w(t,\ z,\ 0)$$

при надлежащем выборе $P(w,\ t)$ в у. К.— Л. и комплексных постоянных a, b можно получить произвольную регулярную однолистную функцию в круге $|z|<1$. Л. у. порождает на этом пути, в частности, конформные отображения круга на области, получаемые из всей плоскости проведением разреза вдоль нек-рой дуги Жордана (см. [1] — [4]).

Дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial f(z,\tau)}{\partial \tau} = z\frac{\partial f(z,\tau)}{\partial z} P(z,\tau),$$

к-рому удовлетворяет функция

$$f(z,\tau) = \lim_{t\to\infty} e^{t}w(t,z,\tau),$$

также называют у. К.— Л.

Л. у. было установлено К. Лёвнером [1]; у. К.— Л. впервые было получено П. П. Куфаревым (см. [5]).

Лит.: [1] Löwner K., «Math. Ann.», 1923, Bd 89, № 2, S. 103—21; [2] Куфарев П. П., «Ученые зап. Томск. ун-та», 1947, т. 5, с. 20—21; [3] Pommerenke C., «J. reine und angew. Math.», 1965, Bd 218, S. 159—73; [4] Гутлянский В. Я., «Докл. АН СССР», 1970, т. 194, № 4, с. 750—53; [5] Куфарев П. П., «Матем. сб.», 1943, т. 13, № 1, с. 87—118; [6] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966. *В. Я. Гутлянский.*

ЛЕЖАНДРА МНОГОЧЛЕНЫ, сферические многочлены,— многочлены, ортогональные на сегменте $[-1,1]$ с единичным весом $\varphi(x)=1$. Стандартизованные Л. м. определяются *Родрига формулой*

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

и имеют представление

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}x^{n-2k}.$$

Наиболее употребительны формулы

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x),$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x);\ P_n(1)=1,\ P_n(-1)=(-1)^n,$$

$$(1-x^2)P_n'(x) = nP_{n-1}(x) - xnP_n(x),$$

$$P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x).$$

Л. м. можно определить как коэффициенты разложения производящей функции

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n,$$

где ряд в правой части сходится, если $x\in[-1,\ 1]$.

Несколько первых стандартизованных Л. м. имеют вид

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=(3x^2-1)/2,$$

$$P_3(x)=(5x^3-3x)/2,\quad P_4(x)=(35x^4-30x^2+3)/8,$$

$$P_5(x)=(63x^5-70x^3+15x)/8,$$

$$P_6(x)=(231x^6-315x^4+105x^2-5)/16.$$

Л. м. порядка n удовлетворяет дифференциальному уравнению (уравнению Лежандра)

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0,$$

к-рое появляется при решении уравнения Лапласа в сферич. координатах методом разделения переменных. Ортонормированные Л. м. имеют вид

$$\hat{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x), \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

и допускают равномерную и весовую оценки

$$|\hat{P}_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2n+1}{2}}, \quad x\in[-1,\ 1],$$

$$(1-x^2)^{1/4}\,|\hat{P}_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2n+1}{\pi n}}, \quad x\in[-1,\ 1].$$

Ряды Фурье по Л. м. внутри интервала $(-1,\ 1)$ аналогичны тригонометрич. рядам Фурье; есть теорема о равносходимости этих двух рядов, к-рая означает, что ряд Фурье — Лежандра функции $f(x)$ в точке

$x \in (-1, 1)$ сходится тогда и только тогда, когда в точке $\theta = \arccos x$ сходится тригонометрич. ряд Фурье функции

$$F(\theta) = (\sin\theta)^{1/2} f(\cos\theta).$$

В окрестности концов положение иное, ибо последовательность $\{\hat{P}_n(\pm 1)\}$ возрастает со скоростью $\sqrt{n}$. Если функция $f(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 1/2$, то ряд Фурье — Лежандра сходится к функции $f(x)$ равномерно на всем сегменте $[-1, 1]$. При условии $\alpha = 1/2$ этот ряд, вообще говоря, расходится в точках $x = \pm 1$.

Этп многочлены введены А. Лежандром [1].

Лит.: [1] Legendre A. M., «Mémoires de mathématique et de physique, présentes à l'Académie royale des sciences par divers savants», 1785, t. 10, p. 411—34; [2] Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, пер. с англ., М., 1952; см. также лит. при статье *Ортогональные многочлены*.

П. К. Суетин.

ЛЕЖАНДРА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — 1) Преобразование математич. анализа, осуществляющее двойственность между объектами в дуальных пространствах (наряду с проективной двойственностью в аналитич. геометрии и полярной двойственностью в выпуклой геометрии). Пусть $f : A \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, рассматриваемая на открытом множестве A нормированного пространства X и обладающая тем свойством, что отображение $x \to f'(x)$ (здесь $f'(x)$ — *Фреше производная f*) взаимно однозначно отображает A на множество $B \subset X^*$. Тогда Л. п. f — это функция на B, определенная формулой

$$f^*(x^*) = \langle x^*, (f')^{-1}(x^*)\rangle - f((f')^{-1}(x^*)). \qquad (1)$$

В случае, если f — функция на $\mathbb{R}^n$ и при этом определитель $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)$ отличен от нуля в области A, Л. п. задается формулами

$$f'(x) = y,\ f^*(y) = \langle x,\ f'(x)\rangle - f(x); \qquad (1')$$

здесь

$$\langle x,\ y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i, \quad f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x^n}\right).$$

Преобразование $x \to f^*(f'(x))$ встречается еще у Г. Лейбница (G. Leibnitz), в общем виде определено А. Лежандром (A. Legendre, 1789), хотя ранее рассматривалось также Л. Эйлером (L. Euler, 1776).

В случае, если f — *конечномерная функция*, являющаяся гладкой, строго выпуклой и растущей на бесконечности быстрее линейной функции, то Л. п. можно определить так:

$$f^*(x^*) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle x^*,\ x\rangle - f(x)). \qquad (2)$$

Выражение (2) с заменой max на sup было положено (см. [2]) в основу теории двойственности выпуклых функций (см. *Сопряженная функция*).

Примеры. Л. п. функции

$$f_p(x) = \frac{|x|^p}{p}, \quad 1 < p < \infty,$$

одного переменного будет функция

$$f_{p'}(y) = \frac{|y|^{p'}}{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1;$$

Л. п. функции $(x, x)/2$ в гильбертовом пространстве X со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ будет функция $(y, y)/2$.

Л. п., основанное на замене переменных $x \to y = f'(x)$, является частным случаем *прикосновения преобразования*; сущность Л. п. заключается в возможности двойственного описания поверхности в пространстве — как множества точек $(x, f(x))$ и как огибающей семейства ее касательных плоскостей, задаваемых парой $(x^*,$

$<x^*, \cdot> - f^*(x^*))$, состоящей из линейного функционала x^* и аффинной касательной функции $x \to <x^*, x> - f^*(x^*)$.

Л. п. играет важную роль в анализе, особенно в выпуклом анализе (см. [1], [2], [4]), в теории дифференциальных уравнений, в вариационном исчислении (см. [6]), в классич. механике, термодинамике, теории упругости и других разделах математич. физики. Так, применение Л. п. к решению y дифференциального уравнения $F(x, y, y')=0$ переводит его в решение Y уравнения $F(Y', XY'-Y, X)$, где $X=y'(x)$, $Y(X)=y^*(X)$, к-рое иногда интегрируется проще исходного. Применение Л. п. к *лагранжиану* задачи классического вариационного исчисления переводит его в *Гамильтона функцию*. При этом система уравнений Эйлера (в вариационном исчислении) и уравнения Лагранжа (в классич. механике) переходят в эквивалентную систему канонич. уравнений. В термодинамике Л. п. осуществляет переход от одних функций состояния к другим, напр. от удельного объема и энтропии к температуре и давлению.

Лит.: [1] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, М., 1970; [2] Гурса Э., Курс математического анализа, пер. с франц., 3 изд., т. 1, М.— Л., 1936; [3] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [4] Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973; [5] Fenchel W., «Canad. J. Math.», 1949, v. 1, p. 73—77; [6] Carathéodory C., Variations rechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Lpz.— B., 1935. *В. М. Тихомиров.*

2) Интегральное преобразование вида

$$f(n) = T\{F(x)\} = \int_{-1}^{1} P_n(x) F(x)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $P_n(x)$ — *Лежандра многочлен* порядка n. Формула обращения имеет вид

$$T^{-1}\{f(n)\} = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) f(n),$$

$$-1 < x < 1,$$

если ряд сходится. Л. п. сводит дифференциальную операцию

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}$$

к алгебраической по формуле

$$T\left\{\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dF(x)}{dx}\right\} = -n(n+1) f(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Для Л. п. имеет место теорема о свертке: если

$$T\{F_i(x)\} = f_i(n), \quad i = 1, 2,$$

то

$$f_1(n) f_2(n) = T\{h(x)\},$$

где

$$h(x) = \frac{1}{\pi}\int\int_{E(x)} f_1(\xi) f_2(\xi) (1 - x^2 - \xi^2 - \eta^2 + 2x\xi\eta)^{-1/2}\, d\xi\, d\eta,$$

$E(x)$ — внутренность эллипса $\xi^2+\eta^2-2x\xi\eta=1-x^2$. Л. п. является частным случаем *Якоби преобразования*.

Лит.: [1] Tranter C. J., «Quart. J. Math.», 1950, v. 1, p. 1—8; [2] Итоги науки. Математический анализ, 1966, М., 1967, с. 7—82. *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.*

ЛЕЖАНДРА СИМВОЛ — арифметическая функция чисел p и a, определенная для простых нечетных p и целых a, не делящихся на p. Л. с. обозначается $\left(\frac{a}{p}\right)$. Л. с. $\left(\frac{a}{p}\right)=1$, если сравнение $x^2 \equiv a \pmod p$ разрешимо; в противном же случае $\left(\frac{a}{p}\right)=-1$. Иногда Л. с. доопределяют и для чисел a, делящихся на p, полагая, что в

этом случае $\left(\frac{a}{p}\right)=0$. Л. с. обладает следующими свойствами:

1) если $a\equiv b \pmod p$, то $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{b}{p}\right)$;

2) $\left(\frac{1}{p}\right)=1$;

3) $\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{(p-1)/2} \pmod p$;

4) $\left(\frac{ab}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$;

5) $\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{(p-1)/2}$;

6) $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{(p^2-1)/8}$;

7) если p и q — простые нечетные, то

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{(p-1)/2\cdot(q-1)/2}.$$

Последний факт, впервые доказанный К. Гауссом (C. Gauss, 1796), носит название квадратичного закона взаимности. Перечисленные свойства позволяют легко вычислять Л. с., не прибегая к решению сравнений. Напр.,

$$\left(\frac{438}{593}\right)=\left(\frac{2}{593}\right)\left(\frac{3}{593}\right)\left(\frac{73}{593}\right)=$$
$$=+1\left(\frac{593}{3}\right)\left(\frac{593}{73}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{9}{73}\right)=-1\left(\frac{3}{73}\right)^2=-1.$$

Еще более облегчает вычисление Л. с. использование *Якоби символа*. При фиксированном p Л. с. является действительным характером мультипликативной группы классов вычетов по модулю p.

Введен А. Лежандром (A. Legendre, 1785).

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972. *Ю. В. Нестеренко.*

ЛЕЖАНДРА ТЕОРЕМА — 1) Неопределенное (диофантово) уравнение

$$ax^2+by^2+cz^2=0,$$

коэффициенты к-рого a, b и c — попарно взаимно простые целые рациональные числа, свободные от квадратов и не все одного знака, имеет ненулевое рациональное решение тогда и только тогда, когда разрешимы все три сравнения:

$$x^2\equiv -bc \pmod{|a|},$$
$$x^2\equiv -ca \pmod{|b|},$$
$$x^2\equiv -ab \pmod{|c|}.$$

К Л. т. сводится вопрос о представлении нуля произвольной тернарной квадратичной формой с рациональными коэффициентами.

Доказана А. Лежандром (A. Legendre, 1785).

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972, гл. 1, § 7. *Ю. В. Нестеренко.*

2) Сумма углов треугольника не может быть больше двух прямых углов.

3) Если в одном треугольнике сумма углов равна двум прямым углам, то она равна двум прямым углам во всяком другом треугольнике.

Теоремы 2), 3) были доказаны А. Лежандром (A. Legendre, 1800, 1833) при попытках обосновать постулат Евклида о параллельных. Аналогичные утверждения были установлены Дж. Саккери (G. Saccheri, см. *Саккери четырехугольник*).

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.—Л., 1949; [2] Погорелов А. В., Основания геометрии, 3 изд., М., 1968. *А. Б. Иванов.*

ЛЕЖАНДРА УРАВНЕНИЕ — см. *Лежандра функции.*

ЛЕЖАНДРА УСЛОВИЕ — необходимое условие для решения простейшей задачи вариационного исчисления,

предложенное А. Лежандром (A. Legendre, 1786): для того чтобы кривая $y_0(x)$ доставляла минимум функционалу

$$J=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx,\quad y(x_1)=y_1,\quad y(x_2)=y_2,$$

необходимо, чтобы во всех точках кривой $y(x)$ вторая производная от подинтегральной функции по y' была неотрицательна

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x))\geqslant 0,\quad x_1\leqslant x\leqslant x_2.$$

Если y есть n-мерный вектор с координатами $y_1, \ldots, y_n$, то Л. у. требует неотрицательности квадратичной формы

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} F_{y'_i y'_j}(x, y(x), y'(x))\,\eta_i\eta_j\geqslant 0,$$

$$x\in[x_1, x_2],\ \eta=(\eta_1, \ldots, \eta_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Для случая максимума функционала знак неравенства в Л. у. меняется на противоположный. Для вариационных задач на условный экстремум аналогом Л. у. является *Клебша условие*.

Л. у., так же как и *Эйлера уравнение*, является необходимым условием слабого экстремума. При нарушении Л. у. вторая вариация функционала не сохраняет свой знак и кривая $y(x)$ не доставляет экстремум функционалу.

Если в Л. у. знак нестрогого неравенства заменен на знак строгого неравенства, то такое условие наз. усиленным условием Лежандра. Усиленное Л. у. в отличие от Л. у. не является необходимым. Усиленное Л. у. участвует в формулировке достаточных условий экстремума. Экстремаль, на к-рой выполняется усиленное Л. у., наз. неособой (неособенной) экстремалью. Такая экстремаль дважды непрерывно дифференцируема, и уравнение Эйлера для нее можно представить в виде обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка, разрешенного относительно старшей производной. Если на неособой экстремали выполняется усиленное *Якоби условие*, то можно построить поле экстремалей, окружающее данную экстремаль, что является первым шагом при исследовании достаточных условий экстремума.

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М., 1950; [2] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950.

И. Б. Вапнярский.

ЛЕЖАНДРА ФУНКЦИИ — функции, являющиеся решениями дифференциального уравнения Лежандра:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right]y=0,\qquad (*)$$

где ν и μ — произвольные числа. Если $\nu=0, 1, 2, \ldots$, а $\mu=0$, то ограниченные на $[-1, 1]$ решения уравнения (*) наз. *Лежандра многочленами*; при целых μ, $-\nu\leqslant\mu\leqslant\nu$, ограниченные на $[-1, 1]$ решения уравнения (*) наз. присоединенными функциями Лежандра.

А. Б. Иванов.

ЛЕЖАНДРОВО МНОГООБРАЗИЕ — такое n-мерное гладкое подмногообразие L^n $(2n+1)$-мерного контактного многообразия M^{2n+1} (т. е. многообразия, снабженного пфаффовой формой α, внешнее произведение к-рой на n-ю внешнюю степень ее внешнего дифференциала $\alpha\wedge(d\alpha)^n\neq 0$ во всех точках M^{2n+1}), что пфаффова форма α, задающая контактную структуру на M^{2n+1}, обращается в нуль тождественно на L^n (т. е. $\alpha(X)=0$ для любого вектора X, касающегося L^n в какой-нибудь точке последнего). В важном частном случае, когда $M^{2n+1}=\mathbb{R}^{2n+1}$ с координатами $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, r)$ и $\alpha=\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i-dr$, а L^n расположено

так, что q_i можно принять за координаты на нем, условие, чтобы L^n было Л. м., означает, что оно задается уравнениями вида

$$r = f(q_1, \ldots, q_n), \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial q_1} \quad \ldots, \; p_n = \frac{\partial f}{\partial q_n}.$$

и при этом p_i также можно принять за координаты на L^n, то координаты q_i и p_i связаны *Лежандра преобразованием*; если же в окрестности нек-рой точки этого сделать нельзя, то преобразование Лежандра имеет в этой точке особенность.

Примеры Л. м. уже давно встречались в различных вопросах анализа и геометрии, но само понятие Л. м. введено сравнительно недавно по аналогии с *лагранжевым многообразием*. *Д. В. Аносов.*

ЛЕЙБНИЦА ПРИЗНАК сходимости знакочередующегося ряда: если члены знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \; a_n > 0,$$

монотонно убывают ($a_n > a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$) и стремятся к нулю ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$), то ряд сходится; при этом остаток ряда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине. Признак установлен Г. Лейбницем (G. Leibniz, 1682). *В. И. Битюцков.*

ЛЕЙБНИЦА РЯД — знакочередующийся ряд

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

сходящийся к $\pi/4$. Рассмотрен Г. Лейбницем (G. Leibniz, 1673—74). *В. И. Битюцков.*

ЛЕЙБНИЦА ФОРМУЛА для производных произведения — формула, дающая выражение для производной порядка n от произведения двух функций через их производные порядков $k = 0, 1, \ldots, n$ (под производными нулевого порядка понимаются сами функции). А именно, если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют в нек-рой точке производные до порядка n включительно, то их произведение uv имеет в этой точке производные тех же порядков и

$$(uv)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Эта формула была сообщена Г. Лейбницем (G. Leibniz) в письме к И. Бернулли (J. Bernoulli) в 1695. *Л. Д. Кудрявцев.*

ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИЙ ПОРЯДОК — порядок на прямом произведении

$$X = \prod\nolimits_{\alpha \in L} X_\alpha$$

частично упорядоченных множеств X_α, где множество индексов L — вполне упорядочено, определяемый следующим образом: если $\{x_\alpha\}, \{y_\alpha\} \in X$, то $\{x_\alpha\} \leqslant \{y_\alpha\}$ тогда и только тогда, когда либо $x_\alpha = y_\alpha$ для всех $\alpha \in L$, либо существует такое $\alpha \in L$, что $x_\alpha < y_\alpha$ и $x_\beta = y_\beta$ для всех $\beta < \alpha$. Множество X, упорядоченное лексикографич. порядком, наз. лексикографическим, или ординальным, произведением множеств X_α. Если все множества X_α совпадают между собой ($X_\alpha = Y$ для всех $\alpha \in L$), то их лексикографич. произведение наз. ординальной степенью множества Y и обозначается ${}^L Y$. Говорят также, что X упорядочено по принципу первого различия (как слова упорядочены в словаре). Таким образом, если L — натуральный ряд, то

$$\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} < \{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$$

означает, что для нек-рого k

$$x_k < y_k \text{ и } x_i = y_i \text{ для всех } i < k.$$

Л. п. является частным случаем упорядоченного произведения частично упорядоченных множеств (см. [3]). Л. п. может быть определен аналогично и для любого частично упорядоченного множества индексов L (см. [1]), однако в этом случае отношение на множестве $\prod_{\alpha \in L} X_\alpha$ не обязано быть порядком в обычном смысле.

Лексикографич. произведение конечного числа вполне упорядоченных множеств вполне упорядочено. Лексикографич. произведение цепей есть цепь.

Для конечного L Л. п. рассматривался фактически еще Г. Кантором [4] при определении произведения порядковых типов линейно упорядоченных множеств.

Л. п. широко используется вне математики, например при упорядочении слов в словарях, справочниках и т. п.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970; [3] Скорняков Л. А., Элементы теории структур, М., 1970; [4] Cantor G., «Math. Ann.», 1895, Bd 46, № 4, S. 481—512; [5] Hausdorff F., Grundzüge der Mengenlehre, Lpz., 1914. *Т. С. Фофанова.*

ЛЕМНИСКАТНЫЕ ФУНКЦИИ, лемнискатические функции, — частный случай *эллиптических функций*, возникающий при обращении эллиптич. интеграла частного вида

$$z = \int_0^u (1 - t^4)^{-1/2}\, dt.$$

Эти интегралы появились впервые при вычислении длины дуги *Бернулли лемнискаты* в работах Дж. Фаньяно (G. Fagnano, 1715). Сами Л. ф. ввел К. Гаусс (C. Gauss, 1797).

Л. ф. две:

$$u = \cos \operatorname{lemn} z = \operatorname{cl} z,$$

$$\sin \operatorname{lemn} z = \operatorname{sl} z = \cos \operatorname{lemn} \left(\frac{\omega}{2} - z \right),$$

где

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 (1 - t^4)^{-1/2}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{\pi}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right]^2.$$

Л. ф. выражаются через *Якоби эллиптические функции* с модулем $k = \sqrt{2}/2$:

$$\operatorname{sl} z = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\operatorname{sn}(z\sqrt{2})}{\operatorname{dn}(z\sqrt{2})}, \quad \operatorname{cl} z = \operatorname{cn}(z\sqrt{2}).$$

В теории *Вейерштрасса эллиптических функций* Л. ф. появляются в т. н. гармоническом случае, когда инварианты $g_2 = 4$, $g_3 = 0$.

Лит.: [1] Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963, гл. 22. *Е. Д. Соломенцев.*

ЛЕМНИСКАТЫ — 1) Плоские алгебраич. кривые порядка $2n$, произведение расстояний каждой точки к-рых до заданных точек (фокусов) $F_1, F_2, \ldots, F_n$ равно заданному числу r (радиусу Л.). Уравнение Л. в декартовых прямоугольных координатах

$$|(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)| = r^n, \quad r > 0, \quad z = x + iy.$$

Окружность есть Л. с одним фокусом, *Кассини овал* — Л. с двумя фокусами. См. также *Бернулли лемниската* и *Бута лемниската*. *Д. Д. Соколов.*

2) Л. — кривая уровня многочлена. Если все фокусы F_k: $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, различны и радиус Л. достаточно мал, то Л. состоит из n континуумов, попарно не имеющих общих точек. При достаточно большом радиусе Л. состоит из одной связной компоненты. Как показал Д. Гильберт (D. Hilbert, 1897), границу Γ произвольной односвязной конечной области можно сколь угодно хорошо приблизить Л., т. е. для любого

$\varepsilon>0$ можно указать Λ такую, что в ε-окрестности каждой точки Γ существуют точки Λ и каждая точка Λ попадает в ε-окрестность соответствующей точки Γ.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [2] Уолш Дж.-Л., Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, пер. с англ., М., 1961. *Е. Д. Соломенцев.*

ЛЕРЕ СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, спектральная последовательность непрерывного отображения,— спектральная последовательность, связывающая когомологии со значениями в пучке абелевых групп $\mathcal{F}$ на топологич. пространстве X с когомологиями его прямых образов $f_q\mathcal{F}$ при непрерывном отображении $f: X \to Y$. Точнее, второй член Л. с. п. имеет вид

$$E_2^{p,\,q} = H^p(Y,\, f_q(\mathcal{F})),$$

а ее предел E_∞ есть биградуированная группа, связанная с нек-рой фильтрацией градуированной группы $H^*(X, \mathcal{F})$. Конструкция Л. с. п. может быть обобщена на когомологии с носителями в заданных семействах. В случае локально компактных пространств и когомологий с компактными носителями Л. с. п. была построена Ж. Лере в 1946 (см. [1], [2]).

Если $\mathcal{F}=A$ — постоянный пучок, отвечающий абелевой группе A, f — проекция локально тривиального расслоения со слоем F, а пространство Y локально стягиваемо, то $f_q(\mathcal{F})$ будут локально постоянными пучками со слоем $H^q(F, A)$. Если, кроме того, Y односвязно или же X — расслоенное пространство со связной структурной группой, то $f_q(\mathcal{F})$ — постоянные пучки и член E_2 принимает особенно простой вид:

$$E_2^{p,\,q} = H^p(Y,\, H^q(F,\, A)).$$

Условие локальной стягиваемости может быть заменено другими топологич. условиями на X, Y, F (напр., Y локально компактно, F компактно).

Используя сингулярные когомологии, можно построить для любого расслоения в смысле Серра с линейно связными слоями аналог Л. с. п., обладающий всеми перечисленными выше свойствами Л. с. п. локально тривиального расслоения (спектральная последовательность Серра). Аналогичная спектральная последовательность существует в сингулярных гомологиях.

Лит.: [1] Leray J., «J. math. pures et appl.», 1950, t. 29, p. 1—139; [2] его же, там же, p. 169—213; [3] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [4] Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, пер. с англ., М., 1964. *Д. А. Пономарев.*

ЛЕРЕ ФОРМУЛА, Коши — Фантапье формула,— формула интегрального представления голоморфных функций $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $n\geqslant 1$, обобщающая интегральную формулу Коши (см. *Коши интеграл*).

Пусть D — конечная область комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ с кусочно гладкой границей ∂D; $\chi(\zeta; z): \partial D \to \mathbb{C}^n$ — любая гладкая вектор-функция от $\zeta \in \partial D$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ такая, что скалярное произведение

$$\langle \zeta - z,\ \chi(\zeta;\ z)\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu - z_\nu)\,\chi_\nu(\zeta;\ z) \neq 0$$

всюду на ∂D для всех $z \in D$. Тогда любая голоморфная в D функция $f(z)$, непрерывная в замкнутой области $\bar{D}$, представима в виде

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,\delta(\chi(\zeta;\ z)) \wedge d\zeta}{\langle \zeta - z,\ \chi(\zeta;\ z)\rangle^n},\quad z \in D. \quad (*)$$

Формула (*) обобщает классическую интегральную формулу Коши для аналитич. функций одного комплексного переменного и наз. формулой Лере. Ж. Лере (J. Leray), получивший эту формулу (см. [1]), назвал ее формулой Коши — Фантапье. В этой фор-

муле дифференциальные формы $\delta(\chi(\zeta;\ z))$ и $d\zeta$ составляются по законам:

$$\delta(\chi(\zeta;\ z)) = \sum_{\nu=1}^{n-1}(-1)^{\nu-1}\chi_\nu(\zeta;\ z)\,d\chi_1(\zeta;\ z)\wedge\ldots$$

$$\ldots\wedge d\chi_{\nu-1}(\zeta;\ z)\wedge d\chi_{\nu+1}(\zeta;\ z)\wedge\ldots\wedge d\chi_n(\zeta;\ z)$$

и

$$d\zeta = d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n,$$

где $\wedge$ — знак внешнего умножения (см. *Внешнее произведение*). Выбирая вид функции χ, из формулы (*) можно получить различные интегральные представления. При этом следует иметь в виду, что, вообще говоря, интеграл Лере в формуле (*) не равен тождественно нулю, когда z находится вне D.

См. также *Бохнера — Мартинелли представление*.

Лит.: [1] Лере Ж., Дифференциальное и интегральное исчисление на комплексном аналитическом многообразии, пер. с франц., М., 1961; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

ЛЕФШЕЦА ДВОЙСТВЕННОСТЬ, Лефшеца — Пуанкаре двойственность,— утверждение о двойственности между гомологиями и когомологиями, установленное С. Лефшецем (S. Lefschetz). Более точно, если (X, A) — такая пара пространств, что $X\setminus A$ есть n-мерное топологич. многообразие, то для любой абелевой группы G и для любого i имеет место изоморфизм

$$H_i(X, A; G)\approx H_C^{n-i}(X\setminus A;\ G);$$

здесь в правой части стоят когомологии с компактными носителями; если многообразие $X\setminus A$ неориентируемо, то нужно, как обычно, брать когомологии с локальными коэффициентами. *Ю. Б. Рудяк.*

ЛЕФШЕЦА ТЕОРЕМА — 1) Л. т. о неподвижных точках, Лефшеца — Хопфа теорема,— теорема, позволяющая выразить число неподвижных точек непрерывного отображения через его *Лефшеца число*. Так, если непрерывное отображение $f: X\to X$ конечного клеточного пространства X не имеет неподвижных точек, то его число Лефшеца $L(f)$ равно нулю. Частным случаем последнего утверждения является *Брауэра теорема* о неподвижной точке. *Ю. Б. Рудяк.*

2) Л. т. о гиперплоском сечении, слабая Л. т.: пусть X — алгебраич. подмногообразие комплексной размерности n в комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^N$ и пусть $P\subset\mathbb{C}P^N$ — гиперплоскость, проходящая через все особые точки многообразия X (если они есть), а $Y=X\cap P$ — гиперплоское сечение многообразия X; тогда относительные группы гомологий $H_i(X, Y, \mathbb{Z})$ равны нулю при $i<n$. Отсюда вытекает, что естественный гомоморфизм

$$H_i(Y;\ \mathbb{Z})\longrightarrow H_i(X;\ \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом для $i<n-1$ и сюръективен для $i=n-1$ (см. [1]).

По формулам универсальных коэффициентов отсюда получаются соответствующие утверждения для групп целочисленных когомологий. Во всяком случае для когомологий с коэффициентами в поле рациональных чисел имеют место двойственные утверждения: гомоморфизм пространств когомологий

$$H^i(X;\ \mathbb{Q})\longrightarrow H^i(Y;\ \mathbb{Q}),$$

индуцированный вложением $Y\subset X$, является изоморфизмом для $i<n-1$ и инъективен для $i=n-1$ (см. [6]).

Аналогичное утверждение справедливо для гомотопич. групп: $\pi_i(X, Y)=0$ при $i<n$. В частности, канонич. гомоморфизм $\pi_1(Y)\to\pi_1(X)$ является изоморфизмом при $n\geqslant 3$ и сюръективен при $n=2$ (теорема Лефшеца о фундаментальной группе). Существует обобщение этой теоремы на случай произ-

вольного алгебраически замкнутого поля (см. [7]), а также на случай, когда Y — нормальное полное пересечение в X (см. [8]).

3) Сильная Л. т. — теорема о существовании разложения Лефшеца когомологий комплексного кэлерова многообразия на примитивные составляющие.

Пусть V — компактное кэлерово многообразие размерности n с кэлеровой формой ω и пусть

$$\eta \in H^{1,1}(V, \mathbb{C}) \subset H^2(V, \mathbb{C})$$

— класс когомологий типа (1, 1), соответствующий форме ω при изоморфизме де Рама (если V — проективное алгебраич. многообразие над $\mathbb{C}$ с естественной метрикой Ходжа, то η — класс когомологий, двойственный классу гомологий гиперплоского сечения) и

$$L: H^i(V, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{i+2}(V, \mathbb{C})$$

— линейный оператор, определяемый умножением на η, т. е.

$$Lz = z \cdot \eta, \ z \in H^i(V, \mathbb{C}).$$

Имеет место изоморфизм (см. [1])

$$L^k: H^{n-k}(V, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-k}(V, \mathbb{C})$$

для любого $k = 0, 1, \ldots, n$. Ядро оператора

$$L^{k+1}: H^{n-k}(V, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n+k+2}\ V, \mathbb{C})$$

обозначается $H_0^{n-k}(V, \mathbb{C})$ и наз. примитивной частью $(n-k)$-когомологий многообразия V. Элементы из $H_0^{n-k}(V, \mathbb{C})$ наз. примитивными когомологиями, а соответствующие им циклы — примитивными циклами. Сильная Л. т. устанавливает следующее разложение когомологий в прямую сумму примитивных (наз. разложением Лефшеца):

$$H^m(V, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=0}^{[m/2]} L^k H_0^{m-2k}(V, \mathbb{C})$$

для всех $m = 0, 1, 2, \ldots, 2n$. Отображения

$$L^k: H_0^{m-2k}(V, \mathbb{C}) \longrightarrow H^m(V, \mathbb{C}), \ k = 0, 1, \ldots, [m/2],$$

являются вложениями. Разложение Лефшеца коммутирует с разложением Ходжа

$$H^m(V, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=m} H^{p,q}(V, \mathbb{C})$$

(см. [13]). В частности, определена примитивная часть $H_0^{p,q}(V, \mathbb{C})$ в $H^{p,q}(V, \mathbb{C})$ и

$$H_0^m(V, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=m} H_0^{p,q}(V, \mathbb{C}).$$

Сильная Л. т. и разложение Лефшеца имеют аналоги в абстрактной алгебраич. геометрии для l-адических и кристальных когомологий (см. [4], [14]).

4) Л. т. о когомологиях типа (1, 1) — теорема о соответствии между двумерными алгебраич. классами когомологий комплексного проективного алгебраич. многообразия и классами когомологий типа (1, 1).

Пусть V — неособое проективное алгебраич. многообразие над полем $\mathbb{C}$. Элемент $z \in H^2(V, \mathbb{Z})$ наз. алгебраическим, если двойственный ему (в смысле Пуанкаре) класс гомологий определяется нек-рым дивизором. Л. т. о когомологиях типа (1,1) утверждает, что класс $z \in H^2(V, \mathbb{Z})$ алгебраичен тогда и только тогда, когда

$$z \in j(H^2(V, \mathbb{Z})) \cap H^{1,1}(V, \mathbb{C}),$$

где $H^{1,1}(V, \mathbb{C})$ — компонента Ходжа типа (1, 1) двумерных комплексных когомологий $H^2(V, \mathbb{C})$, а отображение $j: H^2(V, \mathbb{Z}) \to H^2(V, \mathbb{C})$ индуцировано естественным вложением $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ (см. [1], а также [6], [12]).

По поводу алгебраич. классов когомологий в размерностях, больших 2, см. *Ходжа гипотеза*.

Для произвольного комплексного аналитич. многообразия V существует аналогичная характеризация элементов группы $H^2(V, \mathbb{Z})$, являющихся классами Чжэня расслоений на комплексные прямые над V (см. [11]).

Лит.: [1] Lefschetz S., L'analysis situs et la géométrie algébrique, P., 1924; [2] его же, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1921, v. 22, p. 327—482; [3] его же, «Ann. Math.», 1937, v. 38, p. 819—22; [4] Berthelot P., Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p>0$, B.— [a. o.], 1974; [5] Deligne P., Katz N., Groupes de monodromie en géométrie algébrique, B.— [a. o.], 1973; [6] Griffiths P., Harris J., Principles of algebraic geometry, N. Y., 1978; [7] Grothendieck A., Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, P.— Amst., 1968; [8] Hartshorne R., Ample subvarieties of algebraic varieties, B.— [u. a.], 1970; [9] Мамфорд Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971; [10] Милнор Дж., Теория Морса, пер. с англ., М., 1965; [11] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [12] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [13] Вейль А., Введение в теорию кэлеровых многообразий, пер. с франц., М., 1961; [14] Делинь П., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 5, с. 159—90.

В. Л. Исковских.

ЛЕФШЕЦА ФОРМУЛА — формула, выражающая число неподвижных точек эндоморфизма топологич. пространства через следы соответствующих эндоморфизмов в пространствах когомологий.

Эта формула была установлена впервые С. Лефшецом для конечномерных ориентируемых топологич. многообразий [1] и для конечных клеточных комплексов (см. [2, 3]). Этим работам С. Лефшеца предшествовала работа Л. Брауэра (L. Brouwer, 1911) о неподвижной точке непрерывного отображения n-мерной сферы в себя. Некоторый новый вариант доказательства Л. ф. для конечных клеточных комплексов был дан Х. Хопфом (H. Hopf, см. [9]).

Пусть X — связное ориентируемое n-мерное компактное топологич. многообразие или n-мерный конечный клеточный комплекс, $f: X \to X$ — непрерывное отображение, $\Lambda(f, X)$ — *Лефшеца число* отображения f. Предполагается, что *все неподвижные точки* отображения $f: X \to X$ изолированы. Для каждой неподвижной точки $x \in X$ пусть $i(x)$ — ее индекс Кронекера (локальная степень отображения f в окрестности точки x). Тогда Л. ф. для X и f имеет вид

$$\sum_{f(x)=x} i(x) = \Lambda(f, X). \qquad (1)$$

Имеется [8] обобщение Л. ф. на случай произвольных непрерывных отображений компактных евклидовых окрестностных ретрактов.

Пусть X — дифференцируемое компактное ориентированное многообразие, $f: X \to X$ — дифференцируемое отображение. Неподвижная точка $x \in X$ для отображения f наз. невырожденной, если она изолирована и $\det(df_x - E) \neq 0$, где $df_x: T_x(X) \to T_x(X)$ — дифференциал отображения f в точке x, а E — тождественное преобразование. Для невырожденной точки $x \in X$ ее индекс $i(x)$ совпадает с числом $\operatorname{sgn} \det(df_x - E)$. В этом случае Л. ф. (1) показывает, что число Лефшеца $\Lambda(f, X)$ равно разности между числом неподвижных точек с индексом $+1$ и числом неподвижных точек с индексом -1, в частности не превосходит общего числа неподвижных точек. Левую часть формулы (1) в этом случае можно определить так же, как индекс пересечения $\Gamma_f \Delta$ на $X \times X$, где Γ_f — график отображения f и $\Delta \subset X \times X$ — диагональ.

Следствием Л. ф. является формула Хопфа, утверждающая, что эйлерова характеристика $\chi(X)$ равна сумме индексов нулей глобального C^∞-векторного поля v на X (предполагается, что все нули векторного поля v изолированы) (см. [5]).

Существует вариант Л. ф. для компактных комплексных многообразий и когомологии Дольбо (см. [5]). Пусть X — компактное комплексное многообразие размерности m и $f: X \to X$ — голоморфное отображение с невырожденными неподвижными точками. Пусть $H^{p,q}(X)$ — когомологии Дольбо многообразия X типа (p, q) и $f^*: H^{p,q}(X) \to H^{p,q}(X)$ — индуцированный отображением f эндоморфизм. Число

$$\Lambda(f, \mathcal{O}_X) = \sum_{q=0}^{m} (-1)^q \operatorname{Tr}(f^*; H^{0,q}(X))$$

наз. голоморфным числом Лефшеца. Тогда имеет место следующая голоморфная Л. ф.

$$\Lambda(f, \mathcal{O}_X) = \sum_{f(x)=x} \frac{1}{\det(E - df_x)},$$

где df_x — голоморфный дифференциал отображения f в точке x.

В абстрактной алгебраич. геометрии Л. ф. послужила отправной точкой для поиска *Вейля когомологий* в связи с гипотезами Вейля о *дзета-функциях* алгебраич. многообразий, определенных над конечными полями. Аналог Л. ф. в абстрактной алгебраич. геометрии устанавливается для l-адических когомологий с компактными носителями и с коэффициентами в конструктивных $\mathbb{Q}_l$-пучках, где $\mathbb{Q}_l$ — поле l-адических чисел, l — простое число, отличное от характеристики поля k. Эту формулу часто называют формулой следа.

Пусть X — алгебраич. многообразие (или схема) над конечным полем k, $F: X \to X$ — морфизм Фробениуса и $\mathcal{F}$ — пучок на X и $H^i_C(X, \mathcal{F})$ — когомологии с компактными носителями многообразия (схемы) X с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$. Тогда морфизм F определяет эндоморфизм когомологии

$$F^*: H^i_C(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i_C(X, \mathcal{F}).$$

Если $k_n \supset k$ — расширение степени n поля k, $X_n = X \otimes k_n$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F} \otimes k_n$ — многообразие (схема) и пучок, полученные из X и $\mathcal{F}$ посредством расширения поля скаляров, то соответствующий морфизм Фробениуса $F_n: X_n \to X_n$ совпадает с n-й степенью F^n морфизма F.

Пусть теперь X — отделимая схема конечного типа над конечным полем k из q элементов, $\mathcal{F}$ — конструктивный $\mathbb{Q}_l$-пучок на X, l — простое число, отличное от характеристики поля k, X^{F^n} — множество неподвижных геометрич. точек морфизма F^n или, что то же самое, множество $X(k_n)$ геометрич. точек схемы X со значениями в поле k_n. Тогда для любого целого $n \geqslant 1$ имеет место следующая Л. ф. (или формула следа) (см. [6], [7]):

$$\sum_{x \in X^{F^n}} \operatorname{Tr}(F^{n*}, \mathcal{F}_x) =$$

$$= \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(F^{*n}, H^i_C(X, \mathcal{F})), \qquad (2)$$

где $\mathcal{F}_x$ — слой пучка $\mathcal{F}$ в точке x. В случае постоянного пучка $\mathcal{F} = \mathbb{Q}_l$ имеем $\operatorname{Tr}(F^{n*}, \mathbb{Q}_l) = 1$ и левая часть формулы (2) представляет собой не что иное, как число геометрич. точек схемы X со значениями в поле k_n. В частности, при $n = 1$ — это просто число точек схемы X со значениями в основном поле k. Если схема X является собственной над k (напр., если X — полное алгебраич. многообразие над k), то $H^i_C(X, \mathcal{F}) = H^i(H, \mathcal{F})$ и правая часть формулы (2) является альтернированной суммой следов эндоморфизма Фробениуса в обычных когомологиях схемы X.

Имеются (см. [7]) обобщения формулы (2).

Лит.: [1] Lefschetz S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1926, v. 28, № 1, p. 1—49; [2] его же, «Proc. Nat. Acad. Sci.

USA», 1927, v. 13, p. 614—22; [3] его же, «Ann. Math.» (2), 1937, v. 38, № 4, p. 819—22; [4] Kleiman S. L., в кн.: Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Amst.— P., 1968, p. 359—386; [5] Griffiths P., Harris J., Principles of algebraic geometry, N. Y., 1978; [6] Cohomologie étale. SGA 4½, B.— Hdlb.— N. Y., 1977; [7] Cohomologie l-adique et fonctions L, SGA 5, B.— Hdlb.— N. Y., 1977; [8] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976; [9] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.— Л., 1938.

В. А. Исковских.

ЛЕФШЕЦА ЧИСЛО — инвариант отображения цепного (коцепного) комплекса или топологич. пространства в себя. Пусть X — цепной комплекс абелевых групп (соответственно топологич. пространство), $f: X \to X$ — эндоморфизм степени 0 (соответственно непрерывное отображение), $H_i(X, \mathbb{Q})$ — *гомологий группы* объекта X с коэффициентами в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, причем

$$\sum_i \dim_{\mathbb{Q}} H_i(X, \mathbb{Q}) < \infty,$$

и пусть t_i — след линейного преобразования

$$f_*: H_i(X, \mathbb{Q}) \to H_i(X, \mathbb{Q}).$$

По определению, число Лефшеца отображения f есть

$$\Lambda(f) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i t_i.$$

В случае коцепного комплекса определение аналогично. В частности, Л. ч. тождественного отображения e_X равно *эйлеровой характеристике* $\chi(X)$ объекта X. Если X — цепной (коцепной) комплекс свободных абелевых групп или топологич. пространство, то число $\Lambda(f)$ всегда целое. Л. ч. было введено С. Лефшецем [1] для решения задачи о числе неподвижных точек непрерывного отображения (см. *Лефшеца формула*).

Для нахождения Л. ч. эндоморфизма f комплекса X, состоящего из конечномерных векторных пространств X над $\mathbb{Q}$, можно воспользоваться следующей формулой (к-рая иногда наз. формулой следа Хопфа)

$$\Lambda(f) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i T_i,$$

где T_i — след линейного преобразования $f: X_i \to X_i$. В частности, если X — конечное клеточное пространство, $\varphi: X \to X$ — его непрерывное отображение в себя и $\psi: X \to X$ — нек-рая клеточная аппроксимация отображения φ, то

$$\Lambda(\varphi) = \Lambda(\psi) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i T_i,$$

где T_i — след преобразования

$$\psi_{\#}: C_i(X, \mathbb{Q}) \to C_i(X, \mathbb{Q}),$$

индуцированного отображением ψ, а $C_i(X_i, \mathbb{Q})$ — группа рациональных i-мерных цепей клеточного пространства X.

Все сказанное выше допускает обобщение на случай произвольного поля коэффициентов.

Лит.: [1] Lefschetz S., «Trans Amer. Math. Soc.», 1926, v. 28, p. 1—49; [2] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.— Л., 1938.

Ю. Б. Рудяк.

ЛЖЕЦА ПАРАДОКС — см. *Антиномия.*

ЛИ p-АДИЧЕСКАЯ ГРУППА — *аналитическая группа* над полем $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел (более общо — над любым локально компактным неархимедовым полем K). Естественными примерами Ли p-а. г. являются группы Галуа нек-рых бесконечных расширений полей. Напр., если $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\nu})$ — поле, полученное присоединением к полю $\mathbb{Q}$ рациональных чисел первообразного корня ζ_{p^ν} степени p^ν из единицы, и $k = \mathbb{Q}(\zeta_p)$, $K = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} Q(\zeta_{p^\nu})$, то при $p \neq 2$ группа Галуа расширения

K/k изоморфна Ли p-а. г., $\mathbb{Z}_p$ — группе целых p-адических чисел.

Многие результаты теории обычных групп Ли (связь между группами и алгебрами Ли, конструкция и свойства экспоненциального отображения) имеют аналоги и в p-адическом случае. Эти результаты находят применение в алгебраич. теории чисел и в теории групп.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [2] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [3] Lazard M., «Publ. Math. IHES», 1965, t. 26, p. 389—603. *А. А. Кириллов.*

ЛИ АЛГЕБР МНОГООБРАЗИЕ над кольцом k — класс $\mathfrak{V}$ алгебр Ли над k, удовлетворяющих некрой фиксированной системе тождеств. К наиболее распространенным Ли а. м. относятся многообразия: $\mathfrak{A}$ — абелевых алгебр Ли, заданное тождеством $xy=0$, $\mathfrak{N}_c$ — нильпотентных класса c алгебр Ли, в к-рых любые произведения длины больше c равны нулю, $\mathfrak{S}_l$ — разрешимых длины $\leqslant l$ алгебр Ли, в к-рых производный ряд сводится к нулю не более чем за l шагов. Совокупность $v(k)$ всех алгебр Ли а. м. над k — группоид относительно умножения: $\mathfrak{W}=\mathfrak{U}\mathfrak{V}$, где $\mathfrak{W}$ — класс расширений алгебр из $\mathfrak{V}$ при помощи идеалов из $\mathfrak{U}$; $\mathfrak{S}_l=\mathfrak{A}^l$; алгебры из $\mathfrak{A}^2$ наз. метабелевыми.

Центральная проблема теории Ли а. м.— описание базисов тождеств Ли а. м., в частности с точки зрения их конечности или бесконечности (если кольцо k нётерово). В случае, если k — поле характеристики $p>0$, имеются примеры локально конечных Ли а. м., лежащих в $\mathfrak{A}^3$ и не обладающих конечным базисом тождеств. В случае поля k характеристики 0 примеров бесконечно базируемых многообразий пока нет (1982). Конечная базируемость сохраняется при умножении справа на нильпотентное многообразие или при объединении с таким многообразием. К числу шпехтовых (т. е. таких, в к-рых каждое многообразие конечно базируемо) Ли а. м. относятся Ли а. м. $\mathfrak{N}_l\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}\mathfrak{N}_l$ над любым нётеровым кольцом, $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}\cap\mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_c$ над любым полем характеристики $\neq 2$, Ли а. м. $\mathrm{var}(k_2)$, определенное тождествами, справедливыми в алгебре Ли k_2 матриц порядка 2 над полем k, $\mathrm{char}(k)=0$. Над полем k характеристики 0 нет пока примера конечномерной алгебры Ли A такой, что $\mathrm{var}(A)$ бесконечно базируемо, над бесконечным полем k характеристики $p>0$ такие примеры имеются. Над конечным полем или, общее, над любым конечным кольцом k с единицей тождества конечной алгебры Ли A следуют из своей конечной подсистемы.

Ли а. м. $\mathrm{var}(A)$, порожденное конечной алгеброй A, наз. многообразием Кросса и содержится в многообразии Кросса $\mathfrak{C}(f, m, c)$, состоящем из алгебр Ли, в к-рых все главные факторы имеют порядок $\leqslant m$, все нильпотентные факторы имеют класс $\leqslant c$, все внутренние дифференцирования $\mathrm{ad}\,x$ аннулируются унитарным многочленом $f\in k[t]$. Почти кроссовы многообразия (т. е. некроссовы многообразия, все собственные подмногообразия к-рых кроссовы) описаны в разрешимом случае, имеются примеры неразрешимых почти кроссовых многообразий. Группоид $v(k)$ над бесконечным полем — свободная полугруппа с 0 и 1, над конечным полем $v(k)$ может не быть ассоциативным. Решетка $\mathscr{L}(\mathfrak{V})$ подмногообразий Ли а. м. $\mathfrak{V}$ над полем k модулярна, но не дистрибутивна в общем случае. Дистрибутивность решетки $\mathscr{L}(\mathfrak{A}^2)$ имеет место лишь в случае бесконечного поля. Базисы тождеств конкретных алгебр Ли найдены лишь в немногих нетривиальных случаях: для k_2 ($\mathrm{char}(k)=0$ либо $\mathrm{char}(k)=2$), а также для некоторых метабелевых алгебр Ли. Важные результаты получены об алгебрах Ли с тождеством $(\mathrm{ad}\,x)^n=0$ (см. *Ли нильалгебра*).

Лит.: [1] Артамонов В. А., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 2, с. 135—67; [2] Amayo R., Stewart I., Infinite-dimensional Lie algebras, Leyden, 1974; [3] Бахтурин Ю. А., Lectures on Lie algebras, B., 1978.

Ю. А. Бахтурин.

ЛИ АЛГЕБРА, лиева алгебра,— унитарный k-модуль L над коммутативным кольцом k с единицей, к-рый снабжен билинейным отображением $(x, y) \mapsto [x, y]$ прямого произведения $L \times L$ в L, обладающим следующими двумя свойствами:

1) $[x, x]=0$ (откуда вытекает антикоммутативность $[x, y]=-[y, x]$);

2) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]]=0$ (тождество Якоби).

Таким образом, Ли а. является алгеброй над k (не обязательно ассоциативной); обычным образом определяются понятия подалгебры, идеала, факторалгебры и гомоморфизма алгебр Ли. Ли а. L наз. коммутативной, если $[x, y]=0$ для всех $x, y \in L$.

Наиболее важным является случай, когда k — поле (в особенности $k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), а L — векторное пространство (вообще говоря, бесконечномерное) над k.

Ли а. появились в математике в кон. 19 в. в связи с изучением *Ли групп* (см. также *Ли локальная группа*, *Ли группа преобразований*, *Ли теорема*), а в неявной форме несколько раньше в механике. Общей предпосылкой возникновения этого понятия было понятие «инфинитезимального преобразования», восходящее по меньшей мере ко времени возникновения исчисления бесконечно малых. Замкнутость интегралов класса C_2 уравнения Гамильтона относительно скобок Пуассона, удовлетворяющих тождеству Якоби,— одно из самых ранних замечаний, выраженное, собственно, на языке Ли а. (см. [8], [10]). Сам термин «Ли а.» был введен Г. Вейлем (H. Weyl) в 1934 (до этого времени использовались термины «инфинитезимальные преобразования рассматриваемой группы», или «инфинитезимальная группа»). С течением времени роль Ли а. возрастала пропорционально месту, занимаемому группами Ли в математике (особенно в геометрии), а также в классической и квантовой механике. Этим в первую очередь объясняется особое место Ли а. среди многих других многообразий универсальных алгебр. В наше время аппарат Ли а. воспринимается уже не только как полезное и мощное средство линеаризации теоретико-групповых задач (будь то в теории групп Ли или в значительной мере поглотившей ее и чрезвычайно разросшейся теории *алгебраических групп*, или же в стоящей несколько особняком теории *конечных групп*); это также источник красивых и трудных задач линейной алгебры.

Имеется несколько естественных источников, доставляющих важнейшие примеры Ли а.

1) В рамках общей алгебры значение Ли а. определяется прежде всего тем, что множество $\mathrm{Der}(A)$ всех *дифференцирований* любой k-алгебры A является Ли а. с операцией

$$[D_1, D_2]=D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1.$$

Дифференцирования Ли а. L вида

$$\mathrm{ad}\, x\colon\ y \mapsto [x, y],\ x, y \in L,$$

наз. внутренними дифференцированиями, или присоединенными эндоморфизмами. Они образуют в $\mathrm{Der}(L)$ подалгебру $\mathrm{ad}\, L$, а отображение $x \to \mathrm{ad}\, x$ является гомоморфизмом Ли а. $L \to \mathrm{Der}(L)$ (присоединенное представление Ли а. L); его образ $\mathrm{ad}\, L$ изоморфен факторалгебре алгебры L по ее центру

$$Z(L)=\{x \in L \mid [x, y]=0\ \forall y \in L\}.$$

2) Еще один существенный источник Ли а. связан со следующим простым наблюдением. Если L — ассо-

циативная алгебра над k с умножением $(x, y) \longmapsto xy$, то умножение в k-модуле L, задаваемое правилом

$$(x, y) \longmapsto [x, y] = xy - yx,$$

наделяет L структурой Ли а. над k. Говорят, что $(L, [\ ,\ ])$ — Ли а., ассоциированная с ассоциативной алгеброй $(L, \cdot)$. Так, классич. пример Ли а. $(L, [\ ,\ ])$ получится, если в качестве $(L, \cdot)$ взять (ассоциативную) алгебру $M_n(k)$ всех квадратных матриц порядка n над k.

Следующие четыре бесконечные серии подалгебр в Ли а. указанного типа наз. *классическими* (k — поле нулевой характеристики):

$$A_n = \{x \in M_{n+1}(k) \mid \operatorname{tr} x = 0\},\ n \geqslant 1;$$

$$B_n = \{x \in M_{2n+1}(k) \mid xB + B^t x = 0\},\ n \geqslant 2,$$

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_n \\ 0 & -E_n & 0 \end{Vmatrix},\ E_n = \begin{Vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{Vmatrix} \in M_n(k);$$

$$C_n = \{x \in M_{2n} \mid xC + C^t x = 0\},\ n \geqslant 3,\ C = \begin{Vmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{Vmatrix};$$

$$D_n = \{x \in M_{2n} \mid xD + D^t x = 0\},\ n \geqslant 4,\ D = \begin{Vmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{Vmatrix}.$$

При этом $\dim A_n = n(n+2)$, $\dim B_n = n(2n+1)$, $\dim C_n = n(2n+1)$, $\dim D_n = n(2n-1)$.

Если, кроме того, поле k алгебраически замкнуто, то эти Ли а. замечательны тем, что ими и еще пятью *Ли особыми алгебрами* G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 размерностей 14, 52, 78, 133 и 248 соответственно исчерпываются, с точностью до изоморфизма, все простые (т. е. некоммутативные и не содержащие идеалов, отличных от 0 и самой алгебры) конечномерные Ли а. над k.

3) Еще один источник Ли а.— векторные поля на многообразии (см. [13], [14]). Пусть F — кольцо C^∞-гладких функций на C^∞-гладком многообразии M. Векторное пространство $\operatorname{Vect}(M)$ всех C^∞-гладких векторных полей на M образует Ли а. относительно операции коммутирования (см. *Ли скобка*), играющую важную роль в теории многообразий; Ли а. $\operatorname{Vect}(M)$ совпадает с Ли а. $\operatorname{Der}(F)$. Эта алгебра, вообще говоря, бесконечномерна. Если M — группа Ли, то подпространство в $\operatorname{Vect}(M)$, состоящее из всех левоинвариантных векторных полей, является конечномерной подалгеброй и наз. *алгеброй Ли группы Ли* M; она играет важную роль в теории групп Ли, позволяя переформулировать многие свойства групп Ли в терминах Ли а. См. также *Ли алгебра алгебраической группы*, *Ли алгебра аналитической группы*.

Если в приведенном выше примере заменить кольцо F на коммутативную алгебру $\mathcal{O}_n(k) = k[[X_1, \ldots, X_n]]$ формальных степенных рядов над полем k, то вместо $\operatorname{Vect}(M)$ получается Ли а. W_n формальных векторных полей, состоящая из дифференциальных операторов

$$D = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial X_i},\quad f_i \in \mathcal{O}_n(k).$$

Подалгебры $S_n \subset W_{n+1}$, $H_n \subset W_{2n}$, состоящие из дифференцирований, аннулирующих соответственно внешние дифференциальные формы

$$\omega = dX_1 \wedge \ldots \wedge dX_{n+1},$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dX_i \wedge dX_{i+n},$$

а также подалгебра $K_n \subset W_{2n-1}$ дифференцирований, умножающих форму

$$\omega = dX_{2n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (X_i\, dX_{i+n-1} - X_{i+n-1}\, dX_i)$$

на элементы из $\mathfrak{G}_n(k)$, вместе с алгеброй W_n составляют важный класс простых бесконечномерных Ли а. (а л г е б р ы Л и к а р т а н о в с к о г о т и п а). Алгебра W_n наз. о б щ е й, S_n — с п е ц и а л ь н о й, H_n — г а м и л ь т о н о в о й, K_n — к о н т а к т н о й. Эти алгебры встречались еще у С. Ли (S. Lie) при изучении псевдогрупп преобразований ($k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), а затем исследовались по разным поводам Э. Картаном (E. Cartan) и др. (см. [15], [17], [18], [19]).

4) Следующая общая конструкция позволяет строить $\mathbb{Z}$-алгебру Ли L по любой группе G; она находит применение в теории групп (см. *Бёрнсайда проблема*, [16]). Пусть

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots$$

— нижний центральный ряд группы G. Тогда L — это прямая сумма аддитивно записанных факторгрупп G_i/G_{i+1}, причем, по определению, произведение элементов $\bar{x} \in G_i/G_{i+1}$ и $\bar{y} \in G_j/G_{j+1}$ есть элемент из G_{i+j}/G_{i+j-1}, являющийся классом коммутатора элементов $x \in G_i$ и $y \in G_j$, представляющих соответственно $\bar{x}$ и $\bar{y}$. На произвольные элементы из L эта операция распространяется по дистрибутивности. Имеются (см. [16]) нек-рые обобщения этой конструкции.

Строение алгебр Ли. Одним из общих результатов, показывающих, в частности, что конструкция 2) имеет в известном смысле универсальный характер, является *Биркгофа — Витта теорема*, согласно к-рой для любой Ли а. L над полем k существует такая ассоциативная k-алгебра U, что L изоморфно вкладывается в Ли а. $(U, [\ ,\ ])$, ассоциированную с U. Если при этом L конечномерна, то можно считать, что и U конечномерна (см. *Универсальная обертывающая алгебра*).

Пусть L — конечномерная Ли а. над полем k нулевой характеристики. Тогда L линейна, т. е. изоморфна подалгебре нек-рой Ли а. $M_n(k)$ (т е о р е м а А д о). В L имеется наибольший разрешимый идеал R, называемый р а д и к а л о м (см. *Ли разрешимая алгебра*). Кроме того, в L существует подалгебра S (называемая п о д а л г е б р о й Л е в и) такая, что L — прямая сумма векторных пространств S и R, причем любая другая подалгебра с таким свойством переводится в S автоморфизмом алгебры L (т е о р е м а Л е в и — М а л ь ц е в а). Подалгебра S является полупростой (т. е. ее радикал равен нулю), и она может быть охарактеризована как максимальная полупростая подалгебра в L. Таким образом, L является полупрямой суммой полупростой и разрешимой Ли а., что сводит задачу классификации конечномерных Ли а. над полем нулевой характеристики к описанию Ли а. этих двух типов. Хотя разрешимые Ли а. в нек-ром смысле «получаются» из тривиально устроенных одномерных (а именно, обладают цепочкой подалгебр $L = L_0 \supset L_1 \supset \dots \quad L_n = 0$ таких, что L_i — идеал в L_{i-1} и L_{i-1}/L_i одномерна); строение их настолько сложно, что к настоящему времени (1982) фактически отсутствует даже корректная постановка задачи о классификации разрешимых Ли а. Напротив, конечномерные полупростые Ли а. над полем нулевой характеристики допускают полное описание (см. *Ли полупростая алгебра*): всякая такая алгебра разлагается в прямую сумму простых идеалов (и обратно, прямая сумма простых Ли а.— полупроста). В случае алгебраически замкнутого поля все простые Ли а. явно перечислены (см. п. 2); в случае произвольного поля k имеется процедура их нахождения, с

помощью к-рой в ряде случаев (напр., при $k=\mathbb{R}$) также найдена явная классификация.

Конечномерные Ли а. над полем характеристики $p>0$ исследованы значительно менее полно (даже для алгебраически замкнутых полей). Эти Ли а. обладают многими специфич. свойствами. Напр., весьма нетривиальным оказался даже вопрос описания полупростых Ли а. в терминах простых алгебр (см. [23]). При любом p существуют параметрич. семейства простых Ли а., попарно неизоморфных друг другу. Теория Ли а. для этого случая находится в процессе становления, причудливым образом отражая в себе черты двух разных классов комплексных Ли а.— конечномерных простых и бесконечномерных транзитивных простых, соответствующих примитивным псевдогруппам Ли (см. [17], [18], [19]).

Изучение бесконечномерных Ли а. началось еще в 19 в. одновременно с изучением конечномерных. Такие Ли а. естественно появляются при классификации примитивных псевдогрупп преобразований, предпринятой в 1909 Э. Картаном [20]. Эти алгебры обладают фильтрацией, для к-рой ассоциированная градуированная Ли а. имеет вид $\bigoplus_{i=1}^{\infty} G_i$ и транзитивна. Бесконечномерные градуированные Ли а. являются предметом интенсивных исследований, в к-рых обнаруживаются связи этих Ли а. не только с классическими геометрич. вопросами, но и со многими другими областями математики (см. *Ли градуированная алгебра*, а также [17], [22]). Важные примеры бесконечномерных Ли а. появлялись в последнее время в теории уравнений математич. физики (напр., для уравнения Кортевега — де Фриса) и в формальном вариационном исчислении (см. [14]).

Абстрактная теория бесконечномерных Ли а. (см., напр., [9]) находится пока в начальной фазе своего развития. Для построения структурной теории Ли а. и для большинства приложений в физике важную роль играет теория представлений Ли а.

См. также *Супералгебра*, *Ли алгебр многообразие*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., [гл. 1—8], М., 1972—78; [2] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [3] Капланский И., Алгебры Ли и локально компактные группы, пер. с англ., М., 1974; [4] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп, пер. с англ., М., 1974; [5] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [6] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1962; [7] Серр Ж. П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [8] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958; [9] Amayo R. K., Stewart Ian, Infinite-dimensional Lie algebras, Leyden, 1974; [10] Humphreys J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, N. Y.— Hdlb.— B., 1972; [11] Seligman G. B., Modular Lie algebras, B.— Hdlb.— N. Y., 1967; [12] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [13] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973; [14] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, М., 1979; [15] Международный конгресс математиков. Ницца. 1970. Доклады советских математиков, М., 1972, с. 111—17; [16] Кострикин А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, с. 289—310; 1959, т. 23, с. 3—34; 1970, т. 34, с. 744—56; [17] Гийемин В., «Математика», 1966, т. 10, № 4, с. 3—31; [18] Кац В. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1968, т. 32, с. 1323—67; 1974, т. 38, с. 800—34; [19] Кострикин А. И., Шафаревич И. Р., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, с. 251—322; [20] Cartan E., «Ann. Scient. École norm. supér.», 1909, t. 26, p. 93—161; [21] Lazard M., там же, 1954, t. 71, p. 101—90; [22] Singer I. M., Sternberg S., «J. Analyse Math.», 1965, v. 15, p. 1—114; [23] Block R. E., «Ann. Math.», 1969, v. 90, № 3, 433—59.

А. И. Кострикин, В. Л. Попов.

ЛИ АЛГЕБРА АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГРУППЫ — аналог *Ли алгебры аналитической группы*, относящийся к случаю аффинных алгебраич. групп. Как и в аналитич. случае, Ли а. а. г. G есть касательное пространство к G в единице, а структура алгебры Ли определена в нем с помощью левоинвариантных дифференцирований алгебры функций на G. Точное определение состоит в следующем.

Пусть K — алгебраически замкнутое поле, G — аффинная алгебраич. K-группа, $A=K[G]$ — алгебра регулярных функций на G и $\mathrm{Lie}(G)$ — множество всех дифференцирований K-алгебры A, к-рые коммутируют с автоморфизмами алгебры A, определенными левыми сдвигами из G. Пространство $\mathrm{Lie}(G)$ является алгеброй Ли с операцией $[D_1, D_2]=D_1\circ D_2-D_2\circ D_1$ (см. *Ли линейная алгебра*), а операция $D^{[p]}=D\circ\ldots\circ D$ (p сомножителей) определяет на $\mathrm{Lie}(G)$ структуру p-алгебры Ли (p равно характеристике поля K, если она положительна, и равно 1, если она нулевая). Пусть $L(G)$ — касательное пространство к G в единице e, т. е. векторное пространство над K всех K-дифференцирований из A в A-модуль $A/\mathfrak{m}_e$, где $\mathfrak{m}_e$ — максимальный идеал точки e, и пусть $\varphi_e : A \to A/\mathfrak{m}_e$ канонич. гомоморфизм. Для любого $D\in\mathrm{Lie}(G)$ композиция $\varphi_e\circ D$ является элементом из $L(G)$, а отображение $\mathrm{Lie}(G) \to L(G)$, определенное формулой $D \to \varphi_e D$, является изоморфизмом векторных пространств над K. Это позволяет перенести с $\mathrm{Lie}(G)$ на $L(G)$ структуру p-алгебры Ли. Эта p-алгебра Ли $L(G)$ и наз. Ли а. а. г. G. Если k — подполе в K и G определена над k, то левоинвариантные k-дифференцирования k-алгебры $A_k\subset A$, определяющей k-структуру на G, образуют k-структуру на $\mathrm{Lie}(G)$, а указанный выше изоморфизм определен над k.

Пример. Пусть V — конечномерное векторное пространство над K и $G=GL(V)$ — алгебраич. группа всех автоморфизмов пространства V. Тогда касательное пространство к G в точке e естественно отождествляется с векторным пространством $\mathrm{End}\ V$ всех эндоморфизмов пространства V, а структура Ли а. а. г. G на $\mathrm{End}\ V$ задается формулами: $[X, Y] = XY - YX$, $X^{[p]}=X^p$. Полученная алгебра Ли обозначается $\mathfrak{gl}(V)$.

Ли а. а. г. обладают рядом свойств, аналогичных свойствам алгебр Ли аналитич. групп. Так, дифференциал гомоморфизма алгебраич. групп в единице есть гомоморфизм их алгебр Ли. Размерность Ли а. а. г. G равна размерности группы G. Ли а. а. г. G и ее связной компоненты единицы совпадают. Дифференциал присоединенного представления алгебраич. группы является присоединенным представлением ее алгебры Ли. Если H — алгебраич. подгруппа в алгебраич. группе G, то $L(H)$ есть подалгебра в $L(G)$. Более того, пусть J — идеал всех регулярных функций на G, обращающихся в нуль на H. Тогда, отождествляя $L(G)$ с $\mathrm{Lie}(G)$, можно описать $L(H)$ как множество всех таких элементов из $\mathrm{Lie}(G)$, к-рые аннулируют J. Это описание особенно удобно при рассмотрении линейных алгебраич. групп, т. е. алгебраич. подгрупп G в $\mathrm{GL}(V)$. А именно, пусть J — идеал $K[\mathrm{End}\ V]$, состоящий из элементов, равных нулю на G. Тогда $L(G)\subset\mathfrak{gl}(V)$ состоит в точности из таких эндоморфизмов X пространства V, что дифференцирование алгебры $K[\mathrm{End}\ V]$, порожденное эндоморфизмом $Y \longmapsto XY$ пространства $\mathrm{End}\ V$, переводит J в себя. Операции же в $L(G)$ индуцированы описанными выше операциями в $\mathfrak{gl}(V)$.

Если $p=1$, то связь между аффинными алгебраич. группами и их алгебрами Ли является по существу столь же тесной, как связь между аналитич. группами и их алгебрами Ли. Это позволяет в значительной степени сводить изучение аффинных алгебраич. групп к изучению их алгебр Ли и обратно. При этом алгебры Ли линейных алгебраич. групп (т. е. алгебраич. подгрупп в $\mathrm{GL}(V)$) выделяются среди всех подалгебр Ли в $\mathfrak{gl}(V)$ с помощью внутреннего критерия (см. *Ли алгебраическая алгебра*). В случае $p > 1$ указанная связь не является столь тесной и в значительной степени теряет свое значение. А именно, в этом случае в общем справедливыми остаются лишь результаты, позволяющие извлекать из свойств группы сведения о свойствах ее алгебры Ли. Напротив, многие теоремы, устанавливающие в случае $p=1$ эту связь в обратную сторону, перестают

быть справедливыми. Напр., могут существовать различные связные подгруппы данной группы, алгебры Ли к-рых совпадают; алгебра Ли неразрешимой алгебраич. группы может быть разрешимой (это так, напр., для группы матриц порядка 2 с определителем 1 при $p=2$) и т. п.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 2, М., 1958.
В. Л. Попов.

ЛИ АЛГЕБРА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ, алгебра Ли группы Ли G, определенной над полем k, полным относительно нек-рого нетривиального *абсолютного значения*,—алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G, рассматриваемой как *Ли локальная группа*. Таким образом, $\mathfrak{g}$ как векторное пространство отождествляется с касательным пространством к G в точке e. Операция умножения $[\ ,\ ]$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ может быть определена любым из следующих эквивалентных способов.

1) Пусть ad — дифференциал *присоединенного представления* группы G. Тогда $\mathrm{ad}X$ для любого вектора $X\in\mathfrak{g}$ является линейным преобразованием пространства $\mathfrak{g}$, причем $\mathrm{ad}X(Y)=[X, Y]$ для любого $Y\in\mathfrak{g}$.

2) Пусть $k=\mathbb{R}$, X и $Y\in\mathfrak{g}$ — два касательных вектора к G в точке e и $x(t)$ и $y(t)$ — гладкие кривые в G, для к-рых X и Y являются касательными векторами при $t=0$. Тогда $[X, Y]$ есть касательный вектор при $s=0$ к кривой $q(t)=x(s)y(s)x(s)^{-1}y(s)^{-1}$, где $s\geqslant 0$, а $s^2=t$.

3) Пусть $U(G)$ — ассоциативная k-алгебра обобщенных функций на G с носителем в e и с умножением, определяемым сверткой $*$. Пространство $\mathfrak{g}$ отождествляется с множеством примитивных элементов в биалгебре $U(G)$ и для любых X, $Y\in\mathfrak{g}$ вектор $X*Y-Y*X$ также лежит в $\mathfrak{g}$. Тогда $X*Y-Y*X=[X, Y]$.

4) Пусть $\mathscr{L}$ — векторное пространство всех векторных полей на G, инвариантных относительно левых сдвигов на элементы из G. Сопоставление векторному полю его значения в точке $e\in G$ является изоморфизмом векторных пространств $\mathscr{L}$ и $\mathfrak{g}$. С другой стороны, всякому векторному полю $L\in\mathscr{L}$ сопоставляется левоинвариантное дифференцирование k-алгебры A аналитич. функций на G по формуле $L(f)(g)=(df)_g(L_g)$ для любых $f\in A$, $g\in G$, и это сопоставление является изоморфизмом пространства $\mathscr{L}$ с векторным пространством D всех левоинвариантных дифференцирований алгебры A. Для любого $X\in\mathfrak{g}$ через $L_X\in\mathscr{L}$ обозначается левоинвариантное векторное поле, для к-рого $(L_X)_e=X$. Если X, $Y\in\mathfrak{g}$, то произведение $[X, Y]$ может быть определено как такой вектор из $\mathfrak{g}$, что поле $L_{[X, Y]}$ задает дифференцирование $L_X\cdot L_Y-L_Y\cdot L_X$ алгебры A.

Пример. Пусть G — аналитич. группа всех невырожденных матриц порядка n с коэффициентами в k. Тогда касательное пространство $\mathfrak{g}$ к G в единице отождествляется с пространством всех матриц порядка n с коэффициентами в k, а структура алгебры Ли на $\mathfrak{g}$ определяется формулой $[X, Y]=XY-YX$.

Сопоставление аналитич. группе ее алгебры Ли обладает важными функториальными свойствами и в значительной степени сводит изучение аналитич. групп к изучению их алгебр Ли. А именно, пусть G_1 и G_2 — аналитич. группы с алгебрами Ли $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$, $\varphi\colon G_1\to G_2$ — аналитич. гомоморфизм. Тогда $d\varphi_e\colon\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ гомоморфизм алгебр Ли. Ли а. а. г. $G_1\times G_2$ изоморфна $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$. Если $\mathfrak{g}$ — Ли а. а. г. G, H — подгруппа Ли в G (см. *Ли группа*) и $\mathfrak{h}$ — Ли а. а. г. H, то $\mathfrak{h}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, причем, если H нормальна, то $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Пусть характеристика поля k равна 0. Алгебра Ли пересечения подгрупп Ли совпадает с пересечением их алгебр Ли. Алгебра Ли ядра гомоморфизма φ аналитич. групп есть ядро гомоморфизма $d\varphi_e$ их алгебр Ли. Алгебра Ли факторгруппы G/H, где H — аналитич. нормальная подгруппа в G, есть факторалгебра алгеб-

ры Ли группы G по идеалу, отвечающему подгруппе H. Если $\mathfrak{g}$ — Ли а. а. г. G и $\mathfrak{h}$ — подалгебра в G, то существует единственная связная подгруппа Ли $H \subset G$ с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$; при этом H не обязательно замкнута в G. Ли а. а. г. разрешима (нильпотентна, полупроста) тогда и только тогда, когда сама группа разрешима (нильпотентна, полупроста).

Указанная связь между категориями аналитич. групп и алгебр Ли не является все же, в отличие от случая локальных групп Ли, эквивалентностью этих категорий. А именно, неизоморфные аналитич. группы могут иметь изоморфные алгебры Ли. Аналитич. группы с изоморфными алгебрами Ли наз. *локально изоморфными*. В случае поля k нулевой характеристики каждой конечномерной алгебре Ли над k отвечает нек-рый класс локально изоморфных аналитич. групп. Пусть $k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Среди всех локально изоморфных аналитич. групп имеется единственная с точностью до изоморфизма связная и односвязная группа; категория аналитич. групп такого типа эквивалентна категории конечномерных алгебр Ли над k. В частности, всякий гомоморфизм алгебр Ли индуцирован аналитич. гомоморфизмом соответствующих связных и односвязных аналитич. групп. Любая связная группа Ли, локально изоморфная данной связной и односвязной группе Ли G, имеет вид G/D, где D — дискретный нормальный делитель, лежащий в центре группы G.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [5] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948.

В. Л. Попов.

ЛИ p-АЛГЕБРА, ограниченная алгебра Ли,— алгебра L над полем k характеристики $p > 0$ (или, более общо, над кольцом простой характеристики $p > 0$), снабженная p-отображением $x \to x^{[p]}$ таким, что выполняются следующие соотношения:

$$\operatorname{ad}(x^{[p]}) = (\operatorname{ad} x)^{[p]},$$

$$(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]},$$

$$(x+y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \Lambda_p(x, y).$$

Здесь $\operatorname{ad} x : y \to [x, y]$ — внутреннее дифференцирование алгебры L, определяемое элементом $x \in L$ (оператор присоединенного представления), а $\Lambda_p(x, y)$ элемент из L, являющийся линейной комбинацией одночленов Ли

$$(\operatorname{ad} x_1 \dots \operatorname{ad} x_{p-1})\, x$$

с $x_i = x$ или y для всех $i = 1, \dots, p-1$.

Типичный пример Ли p-а. получается, если рассмотреть произвольную ассоциативную алгебру A над k как универсальную алгебру с двумя производными операциями:

i) $(x, y) \longrightarrow [x, y] = xy - yx$,

ii) $x \longrightarrow x^p$.

В частности, свойство $\operatorname{ad}(x^p) = (\operatorname{ad} x)^p$ является прямым следствием тождества

$$(\operatorname{ad} x)^n\, y = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} x^{n-j} y x^j$$

при $n = p$, когда $\binom{n}{j} = 0$, $j = 1, \dots, p-1$. Так как всякая *Ли алгебра* вложима в подходящим образом выбранную ассоциативную алгебру A с операциями i) — ii) (*теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта*), то часто $x^{[p]}$ заменяют, с нек-рой долей двусмысленности, на x^p.

Для всякой Ли p-а. L существует p-*универсальная* (*ограниченная универсальная*) *обертывающая ассоциативная алгебра* $U_p(L)$. Если $\dim_k L = n$, то $\dim_k U_p(L) = p^n$. Это же

замечание показывает, что для произвольной алгебры Ли имеет смысл говорить о ее наименьшей p-оболочке, или о p-замыкании.

Обычная подалгебра Ли M (идеал Ли) в L наз. p-подалгеброй (p-идеалом), если $x^{[p]} \in M$ для всех $x \in M$. Гомоморфизм $\varphi : L \to K$ Ли p-а. наз. p-гомоморфизмом, коль скоро

$$\varphi(x^{[p]}) = (\varphi(x))^{[p]}, \quad x \in L.$$

Если при этом K — линейная Ли p-а. над k, то говорят также о p-представлении φ алгебры L.

Задание p-структуры $x \to x^{[p]}$ на алгебре Ли L с базисом $\{e_1, e_2, \ldots\}$ и нулевым центром $Z(L)$ единственно и вполне определяется заданием образов $e_i^{[p]}$ базисных элементов e_i. С другой стороны, коммутативная алгебра Ли L, для к-рой всегда, очевидно, $\Lambda_p(x, y) = 0$, снабжается p-структурой путем рассмотрения пары (L, π), где π — произвольное p-полулинейное отображение

$$\pi(x+y) = \pi(x) + \pi(y), \quad \pi(\lambda x) = \lambda^p \pi(x), \quad \lambda \in k.$$

Над алгебраически замкнутым полем k всякая конечномерная коммутативная Ли p-а. L разлагается в прямую сумму $L = L_0 \oplus L_1$ тора

$$L_0 = \langle e_1, \ \ldots, \ e_r \mid e_i^{[p]} = e_i \rangle$$

и нильпотентной подалгебры L_1 с тождеством

$$x^{[p^m]} = (x^{[p^{m-1}]})^{[p]} = 0$$

для достаточно большого m (см. [1]).

Важным источником Ли p-а. служат теория алгебраич. групп, теория формальных групп и теория несепарабельных полей (см. [2]). Алгебра Ли $\mathrm{Der}_k(A)$ все дифференцирований произвольной алгебры A является p-подалгеброй в $\mathrm{End}_k(A)$. Если, в частности, $A = k[X]/X^p k[X]$, то $W_1 = \mathrm{Der}_k(A)$ натянута на дифференцирования $d_i : X \to X^{i+1}$, $i = -1, 0, 1, \ldots, p-2$, с правилом коммутирования

$$[d_i, d_j] = (j-i)\, d_{i+j} \quad \text{при} \quad i+j \leqslant p-2,$$
$$[d_i, d_j] = 0 \quad \text{при} \quad i+j > p+2,$$

и p-структурой

$$d_i^{[p]} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq 0, \quad d_0^{[p]} = d_0.$$

Этот пример простой Ли p-а. послужил поводом к поискам других простых алгебр. Все известные к настоящему времени (1982) конечномерные простые Ли p-а. над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 5$ исчерпываются алгебрами классич. типа (вместе с пятью исключительными). Это A_n, $n \geqslant 1$, B_n, $n \geqslant 2$, C_n, $n \geqslant 3$, D_n, $n \geqslant 4$, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 и алгебрами картановского типа W_n, $n \geqslant 1$, S_n, $n \geqslant 2$, H_n, $n \geqslant 1$, K_n, $n \geqslant 2$. Размерности последних четырех алгебр равны соответственно np^n, $n(p^{n+1}-1)$, $p^{2n}-2$ и $p^{2n-1}-\varepsilon$, где $\varepsilon = 0$ при $n+2 \not\equiv 0(p)$ и $\varepsilon = 1$ при $n+2 \equiv 0(p)$. Все эти алгебры определены над простым подполем поля k, так что неизоморфных простых p-алгебр фиксированной размерности — конечное число (как правило, 0, 1 или 2). Недоказанная пока (1982) гипотеза, возникшая в связи с работой [3], заключается в том, что других конечномерных простых Ли p-а. в этом случае не существует. При $p = 2$, 3, 5, однако, ситуация заведомо сложнее.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Seligman G. B., Modular Lie algebras, B.—Hdlb.—N. Y., 1967; [3] Кострикин А. И., Шафаревич И. Р., «Докл. АН СССР», 1966, т. 168, с. 740—42; [4] Zassenhaus H., «Hamb. Abh.», 1939, Bd 13, S. 1—100.

А. И. Кострикин.

ЛИ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА — 1) Алгебра Ли алгебраич. подгруппы (см. *Алгебраическая группа*) полной линейной группы всех автоморфизмов конечно-

мерного векторного пространства V над полем k. Если $\mathfrak{g}$ — произвольная подалгебра в алгебре Ли всех эндоморфизмов V, то существует наименьшая Ли а. а., содержащая $\mathfrak{g}$; она наз. *алгебраической оболочкой подалгебры Ли* $\mathfrak{g}$. Для алгебраичности алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над произвольным алгебраически замкнутым полем k необходимо, чтобы вместе с каждым линейным оператором $u \in \mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$ лежали его полупростая и нильпотентная компоненты s и n (см. *Жордана разложение*). Это условие определяет т. н. *почти алгебраические алгебры Ли*. Оно не является достаточным для того, чтобы $\mathfrak{g}$ была Ли а. а. В случае поля k характеристики 0 необходимое и достаточное условие алгебраичности алгебры Ли $\mathfrak{g}$ состоит в том, что вместе с n и $s = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_m)$ в $\mathfrak{g}$ лежат все операторы вида $\varphi(s) = \mathrm{diag}(\varphi(s_1), \ldots, \varphi(s_m))$, где φ — произвольное $\mathbb{Q}$-линейное отображение из k в k. Исследовано [3] строение Ли а. а. в случае поля характеристики $p > 0$.

2) Алгебра Ли L над коммутативным кольцом k, в к-рой для любого элемента $x \in L$-эндоморфизм $\mathrm{ad}\, x : y \to [x, y]$, заданный на L, является корнем нек-рого многочлена со старшим коэффициентом 1 и остальными коэффициентами из k. Конечномерная над полем k алгебра Ли является Ли а. а. Обратное неверно: над любым полем k существуют бесконечномерные Ли а. а. с конечным числом порождающих [4]. Ряд вопросов о Ли а. а. получает решение уже в классе *Ли нильалгебр*.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 2, М., 1958; [3] Seligman G., Modular Lie algebras, B.— Hdlb.— N. Y., 1967; [4] Голод Е. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 273—76.

Ю. А. Бахтурин.

ЛИ БАНАХОВА ГРУППА — множество G, снабженное одновременно структурой группы и структурой аналитич. банахова многообразия; эти две структуры согласованы в следующем смысле: отображение $(g, h) \to gh^{-1}$ из $G \times G$ в G является аналитическим. В случае, если банахово многообразие конечномерно, это понятие совпадает с обычным понятием группы Ли.

Примеры. Банахово пространство с операцией сложения, множество A^* обратимых элементов в банаховой алгебре A с операцией умножения, множество $C^k(M, G)$ k-гладких функций на гладком многообразии со значениями в группе Ли G с операцией поточечного умножения являются Ли б. г. С другой стороны, множество $\mathrm{Diff}^k M$ k-гладких взаимно однозначных отображений гладкого многообразия M на себя не является Ли б. г.: естественные структуры банахова многообразия и группы (относительно операции композиции) в этом случае не согласованы.

Для Ли б. г. остаются справедливыми нек-рые основные теоремы теории групп Ли: каждой Ли б. г. соответствует *банахова алгебра Ли*, по к-рой, в свою очередь, восстанавливается локальная Ли б. г. Известно, однако, что не всякая локальная Ли б. г. продолжается до глобальной [2]; окрестность единицы в Ли б. г. покрывается образом экспоненциального отображения; имеется соответствие между связными замкнутыми подгруппами Ли б. г. и замкнутыми подалгебрами соответствующей алгебры Ли.

Имеются различные обобщения понятия Ли б. г. (см. [3]), в к-рых структура банахова пространства заменяется структурой линейного топологич. пространства более общего типа.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [2] De la Harpe P., Classical Banach — Lie algebras and Banach — Lie groups of operators in Hilbert space, B.— [a. o.], 1972; [3] Omori H., Infinite dimensional Lie transformation groups, B.— [a. o.], 1974.

А. А. Кириллов.

ЛИ ВПОЛНЕ РАЗРЕШИМАЯ АЛГЕБРА, *треугольная алгебра Ли*,— конечномерная ал-

гебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем k, для к-рой собственные значения операторов присоединенного представления $\mathrm{ad}\ X$ принадлежат k для всех $X \in \mathfrak{g}$.

Ли в. р. а. разрешима, класс всех Ли в. р. а. содержит класс нильпотентных алгебр Ли и содержится в классе экспоненциальных алгебр Ли. Он замкнут относительно перехода к подалгебрам, факторалгебрам и конечным прямым суммам, но не замкнут относительно расширений.

Ли в. р. а. над совершенным полем обладают многими свойствами разрешимых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем (теорема Ли, наличие цепочки идеалов $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\}$, для к-рых $\dim \mathfrak{g}_i = \dim \mathfrak{g} - i$, и др.). В произвольной конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существуют максимальные вполне разрешимые подалгебры, они содержат нильрадикал. Если $k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ или если k совершенно и $\mathfrak{g}$ — алгебраич. линейная алгебра Ли, то все вполне разрешимые подалгебры сопряжены. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над k, отвечающая k-разложимой алгебраич. группе над совершенным полем k, есть Ли в. р. а.

Любая Ли в. р. а. над полем характеристики 0 изоморфно вкладывается в алгебру Ли верхних треугольных матриц с коэффициентами из k (которая сама есть Ли в. р. а.). Простейший пример Ли в. р. а., не являющейся нильпотентной,— это двумерная алгебра Ли с базисом X, Y и определяющим соотношением $[X, Y] = X$.

Лит. см. при ст. *Ли вполне разрешимая группа*.

В. В. Горбацевич.

ЛИ ВПОЛНЕ РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА, треугольная группа Ли,— связная вещественная группа Ли G, для любого элемента g к-рой собственные значения оператора присоединенного представления $\mathrm{Ad}\ g$ действительны.

Связная группа Ли G будет Ли в. р. г. тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ вполне разрешима, поэтому ряд свойств класса Ли в. р. г. параллелен свойствам *Ли вполне разрешимых алгебр*.

Для Ли в. р. г. справедлива следующая теорема о неподвижной точке [2]: всякая вполне разрешимая подгруппа Ли G проективной группы имеет неподвижную точку в каждом G-инвариантном замкнутом подмножестве действительного проективного пространства. Имеют место также другие аналоги свойств комплексных разрешимых групп Ли. Произвольная связная группа Ли G обладает максимальными связными вполне разрешимыми подгруппами Ли T, все они сопряжены в G (см. [2]). При изучении строения вещественных полупростых групп Ли подгруппа T часто используется как вещественный аналог борелевской подгруппы.

Односвязная Ли в. р. г. изоморфно вкладывается в группу вещественных верхних треугольных матриц над $\mathbb{R}$ с положительными диагональными элементами (к-рая сама есть Ли в. р. г.).

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с франц., М., 1972; [2] Винберг Э. Б., «Докл. АН СССР», 1961, т. 141, с. 270—73.

В. В. Горбацевич.

ЛИ ГРАДУИРОВАННАЯ АЛГЕБРА — алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем K, градуированная при помощи нек-рой абелевой группы A, т. е. разложенная в прямую сумму подпространств $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in A$, таким образом, что $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Если A — упорядоченная группа, то для каждой *фильтрованной алгебры* Ли ассоциированная с ней градуированная алгебра является Ли г. а.

Ли г. а. играют важную роль в классификации простых конечномерных алгебр Ли, йордановых алгебр и их обобщений, примитивных псевдогрупп преобразований (см. [3], [4]). Для любой полупростой вещественной алгебры Ли ее *Картана разложение* может рассматриваться как $\mathbb{Z}_2$-градуировка. Локальная классификация римановых симметрич. пространств сво-

дится к классификации $\mathbb{Z}_2$-градуированных простых комплексных алгебр Ли [6].

Некоторые конструкции градуированных алгебр Ли. 1) Пусть U — ассоциативная алгебра, снабженная возрастающей фильтрацией $(U_k : k \in \mathbb{Z})$, причем $[U_k, U_l] \subset U_{k+l-d}$, где d — фиксированное натуральное число, и $\mathfrak{u}_k = U_{k+d}/U_{k+d-1}$. Тогда операция коммутирования в U индуцирует в пространстве $\mathfrak{u} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{u}_k$ структуру $\mathbb{Z}$-градуированной алгебры Ли. Таким путем могут быть получены нек-рые алгебры Ли функций с *Пуассона скобкой* в качестве коммутатора. В следующих двух примерах $U_k = U_1^k$ при $k > 0$ и $U_k = 0$ при $k < 0$. а) Пусть U — алгебра линейных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, U_1 — подпространство, натянутое на ее образующие $p_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $q_i = x_i$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда $[U_k, U_l] \subset U_{k+l-2}$ и $\mathfrak{u}$ есть алгебра Ли многочленов от p_i, q_i с обычной скобкой Пуассона. б) Пусть U — универсальная обертывающая алгебра конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, причем $U_1 = \mathfrak{g}$. Тогда $[U_k, U_l] \subset U_{k+l-1}$ и $\mathfrak{u}$ канонически изоморфна (как векторное пространство) симметрич. алгебре над $\mathfrak{g}$, т. е. алгебре многочленов на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ (теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта). Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли связной группы Ли G, то коммутатор элементов из $\mathfrak{u}$ можно интерпретировать либо как скобку Пуассона для соответствующих левоинвариантных функций на кокасательном расслоении T^*G, либо как скобку Пуассона на каждой орбите коприсоединенного представления, определяемую посредством стандартной симплектич. структуры на этих орбитах.

2) Пусть $\operatorname{char} K \neq 2$, E есть n-мерное векторное пространство над K, снабженное невырожденной квадратичной формой Q; $e_1, \ldots, e_n$ — нек-рый ортогональный базис в E. Разложение *Клиффорда алгебры* $C(Q)$ в сумму одномерных подпространств $\langle e_{i_1} \ldots e_{i_k} \rangle$, $i_1 < \ldots < i_k$, является ее $\mathbb{Z}_2^n$-градуировкой. При $n = 2m$ элементы алгебры $C(Q)$ с нулевым следом образуют простую Ли г. а. типа A_N, $N = 2^m - 1$; ее градуировка обладает высокой степенью симметрии; в частности, все градуирующие подпространства равноправны. Аналогичные градуировки (при помощи различных конечных групп) имеются и у других простых алгебр Ли [1].

3) Каждой *псевдогруппе* Ли преобразований отвечает нек-рая алгебра Ли векторных полей. Росток l этой алгебры Ли в любой точке обладает естественной $\mathbb{Z}$-фильтрацией

$$l = l_{-1} \supset l_0 \supset l_1 \supset \ldots,$$

где к l_k относятся ростки тех векторных полей, координаты к-рых разлагаются в степенные ряды без членов степени меньше чем $k+1$. Ассоциированная Ли г. а. может быть интерпретирована как нек-рая алгебра Ли полиномиальных векторных полей.

Классификация простых градуированных алгебр Ли. Простым примитивным псевдогруппам Ли соответствуют следующие 4 серии простых бесконечномерных Ли г. а. (см. [5]):

W_n — алгебра Ли всех полиномиальных векторных полей в n-мерном аффинном пространстве;

S_n — ее подалгебра, состоящая из векторных полей с нулевой дивергенцией;

H_n, где $n = 2m$, — подалгебра, состоящая из векторных полей, аннулирующих дифференциальную форму

$$\sum_{i=1}^{m} dx_i \wedge dx_{m+i}$$

(гамильтоновых векторных полей);

K_n, где $n=2m+1$,— подалгебра, состоящая из векторных полей, умножающих дифференциальную форму

$$\sum_{i=1}^{m}(x_{m+i}\,dx_i - x_i\,dx_{m+i}) + dx_n$$

на функцию.

Над полями характеристики $p>0$ могут быть определены простые конечномерные Ли г. а., аналогичные W_n, S_n, $\tilde{H}_n$ и K_n (см. [5]).

Простые Ли г. а. другого типа получаются следующим образом [4]. Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(A)$ — алгебра Ли, определяемая при помощи неразложимой матрицы Картана $A=\|a_{ij}\|$, $i, j=1, \ldots, n$ (здесь и далее употребляются обозначения статьи *Картана матрица*). Алгебра $\mathfrak{g}$ снабжается $\mathbb{Z}^k$-градуировкой так, что $h_i\in\mathfrak{g}_0$, $e_i\in\mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $f_i\in\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$, где α_i — строка $(0\ldots1\ldots0)$, причем 1 стоит на i-м месте. Элементы $\alpha\in\mathbb{Z}^n$, для к-рых $\mathfrak{g}_\alpha\neq0$, наз. корнями, а α_i — простыми корнями. Всякий корень есть линейная комбинация простых корней с целыми коэффициентами одного знака и $\dim\mathfrak{g}_\alpha<\infty$ для любого $\alpha\in\mathbb{Z}^n$. Факторалгебра $\mathfrak{g}'(A)$ алгебры $\mathfrak{g}$ по ее центру, лежащему в $\mathfrak{g}_0$, проста как градуированная алгебра, т. е. не имеет нетривиальных градуирован. идеалов.

Пусть P — совокупность линейных комбинаций строк матрицы A с положительными коэффициентами. Имеет место один из следующих случаев:

(П) P содержит строку, все элементы к-рой положительны;

(Н) P содержит нулевую строку;

(О) P содержит строку, все элементы к-рой отрицательны.

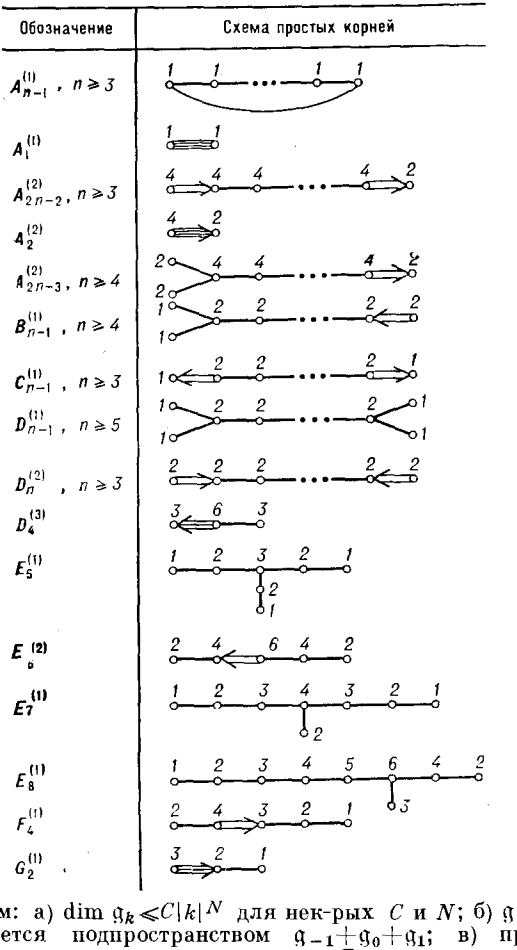
В случае (П) $\mathfrak{g}(A)=\mathfrak{g}'(A)$ — простая конечномерная алгебра Ли. В случае (О) $\mathfrak{g}(A)$ — простая бесконечномерная алгебра Ли. В случае (Н) алгебра $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}'(A)$ проста лишь как градуированная алгебра. Она может быть превращена в $K[u, u^{-1}]$-алгебру так, что: а) $u\mathfrak{g}'_\alpha=\mathfrak{g}'_{\alpha+\nu}$, где ν — нек-рая строка из положительных чисел; б) факторалгебра $\mathfrak{g}'/(1-u)\mathfrak{g}'=\bar{\mathfrak{g}}$ есть простая конечномерная алгебра Ли. Наибольший общий делитель всех компонент ν_i строки ν, равный 1, 2 или 3, наз. индексом алгебры $\mathfrak{g}'$.

В следующей таблице приведен список всех простых Ли г. а. с матрицей Картана типа (Н). Здесь алгебра $\mathfrak{g}'$ обозначается так же, как и $\bar{\mathfrak{g}}$, но с добавлением ее индекса, указываемого в скобках.

Схема простых корней описывает матрицу A. Ее вершины соответствуют простым корням; i-я и j-я вершины соединены $(a_{ij}a_{ji})$-кратным ребром, ориентированным от i-й вершины к j-й, если $|a_{ij}|>|a_{ji}|$, и неориентированным, если $|a_{ij}|=|a_{ji}|$. Возле вершин указаны числа ν_i.

С помощью Ли г. а. с матрицей Картана типа (Н) классифицируются $\mathbb{Z}_m$-градуированные простые конечномерные алгебры Ли (см. [4], [2]). А именно, пусть $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}'(A)$, где A удовлетворяет условию (Н), и $p:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}$ — такой гомоморфизм, что $p(\alpha_i)\geqslant0$ и $p(\nu)=m$. Тогда $\mathfrak{g}'_k=\sum_{p(\alpha)=k}\mathfrak{g}'_\alpha$ при любом $k\in\mathbb{Z}$ изоморфно отображается на подпространство $\bar{\mathfrak{g}}_k\subset\bar{\mathfrak{g}}$, зависящее только от вычета k по модулю m, и разложение $\bar{\mathfrak{g}}=\sum_{k=0}^{m-1}\bar{\mathfrak{g}}_k$ есть $\mathbb{Z}_m$-градуировка алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Если поле K алгебраически замкнуто, то описанным способом получаются, причем без повторений, все $\mathbb{Z}_m$-градуированные простые конечномерные алгебры Ли над K. Индекс алгебры $\mathfrak{g}'$ равен порядку автоморфизма $\theta: x\mapsto\left(\exp\frac{2\pi i k}{m}\right)x$, $x\in\bar{\mathfrak{g}}_k$, алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ по модулю группы внутренних автоморфизмов.

Имеется классификация простых $\mathbb{Z}$-градуированных алгебр Ли $\mathfrak{g}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathfrak{g}_k$, удовлетворяющих ус-



ловиям: а) $\dim \mathfrak{g}_k \leqslant C|k|^N$ для нек-рых C и N; б) $\mathfrak{g}$ порождается подпространством $\mathfrak{g}_{-1}+\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1$; в) представление $\mathfrak{g}_0$ на $\mathfrak{g}_{-1}$ неприводимо. В этом случае либо $\mathfrak{g}$ конечномерна, либо $\mathfrak{g}$ есть одна из алгебр W_n, S_n, H_n, K_n, либо $\mathfrak{g}$ есть алгебра $\mathfrak{g}'(A)$, определяемая матрицей Картана типа (H), снабженная подходящей $\mathbb{Z}$-градуировкой [4].

Иногда $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй Ли наз. *супералгебра* Ли.

Лит.: [1] Алексеевский А. В., «Функциональный анализ и его приложения», 1974, т. 8, № 4, с. 1—4; [2] Винберг Э. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1976, т. 40, № 3, с. 488—526; [3] Кантор И. Л., «Тр. семинара по векторному и тензорному анализу...», 1972, в. 16, с. 407—99; [4] Кац В. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1968, т. 32, № 6, с. 1323—67; [5] Кострикин А. И., Шафаревич И. Р., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, № 2, с. 252—322; [6] Helgason S., Differential geometry. Lie groups, and symmetric spaces, N. Y., 1978.

Э. Б. Винберг.

ЛИ ГРУППА — группа G, обладающая такой структурой *аналитического многообразия*, что отображение $\mu : (x, y) \to xy^{-1}$ прямого произведения $G \times G$ в G аналитично. Другими словами, Ли г.— это множество, наделенное согласованными структурами группы и аналитич. многообразия. Ли г. наз. вещественной, комплексной или p-адической в зависимости от поля, над к-рым рассматривается ее аналитич. многообразие. В дальнейшем, как правило, рассматриваются вещественные Ли г. (всякая комплексная Ли г. естественно наделяется структурой вещественной Ли г.— с помощью конструкции ограничения основного поля; о Ли г. над полями p-адических чисел см. *Ли p-адическая группа*, *Аналитическая группа*).

Примеры Ли г. Полная линейная группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел (см.

Линейная группа) и ее подгруппы, замкнутые в естественной евклидовой топологии.

Основные понятия теории Ли г. введены в математику в 70-е гг. 19 в. С. Ли (S. Lie). Ли г. возникли в связи с проблемой разрешимости дифференциальных уравнений в квадратурах и исследованием непрерывных групп преобразований. Успешное применение теории групп к решению алгебраич. уравнений высших степеней, выразившееся в создании теории Галуа, повлекло за собой попытку построения аналога теории Галуа для дифференциальных уравнений. И хотя группы в теории дифференциальных уравнений заняли несколько иное место, нежели в теории алгебраич. уравнений, это привело к созданию теории Ли г., а также теории алгебраич. групп, глубоко связанных со многими областями математики. Первоначально Ли г. определялись как локальные группы преобразований, т. е. как семейства локальных аналитич. преобразований n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$), аналитически зависящих от конечной системы параметров, причем требовалось, чтобы параметры произведения преобразований выражались через параметры сомножителей посредством аналитич. функций. Позже перешли к абстрактному рассмотрению Ли г., но также с локальной точки зрения (см. *Ли локальная группа)*. Систематич. исследование глобального строения Ли г. первыми начали Э. Картан (E. Cartan) и Г. Вейль (H. Weyl). Первое современное изложение теории Ли г. было дано в 1938 Л. С. Понтрягиным (см. [1]).

Возникает вопрос, не приведет ли замена аналитичности многообразия G и отображения μ дифференцируемостью к расширению класса Ли г.? Этот вопрос был решен еще С. Ли: если μ дважды непрерывно дифференцируемо, то G является Ли г. Значительно более сложной оказалась п я т а я п р о б л е м а Г и л ь б е р т а: пусть G есть n-мерное топологич. многообразие и отображение $\mu : (x, y) \to xy^{-1}$ непрерывно, будет ли G Ли г.? Для компактных групп эта проблема была решена положительно Дж. Нейманом (J. Neumann) в 1933, а для локально компактных абелевых групп — Л. С. Понтрягиным в 1934. В общем случае положительное решение было получено в 1952 А. М. Глисоном (A. M. Gleason), Д. Монтгомери и Л. Зиппином (см. [13], а также [18]). Таким образом, можно определить Ли г. как топологич. группу, топологич. пространство к-рой является конечномерным (или локально евклидовым) многообразием, что весьма важно для общей теории топологич. групп.

Подмножество H Ли г. G наз. п о д г р у п п о й (точнее, п о д г р у п п о й Л и), если H является подгруппой абстрактной группы G и подмногообразием аналитич. многообразия G. М о р ф и з м Л и г. G_1 Ли г. G_2 — это аналитич. отображение $f : G_1 \to G_2$, являющееся гомоморфизмом абстрактных групп; если к тому же f биективно, а f^{-1} аналитично, то f наз. и з о м о р ф и з м о м Л и г.; в случае локальной биективности f, говорят, что Ли г. G_1 и G_2 л о к а л ь н о и з о м о р ф н ы. Пусть H — замкнутая нормальная подгруппа Ли г. G. Тогда факторгруппа G/H наделяется такой структурой аналитич. многообразия, что G/H превращается в Ли г., а канонич. отображение $G \to G/H$ является морфизмом. Р а з м е р н о с т ь ю Ли г. G наз. размерность G как аналитич. многообразия. В дальнейшем рассматриваются только конечномерные Ли г., хотя многие результаты обобщаются на случай *Ли банаховых групп*.

Соответствие между группами и алгебрами Ли. Основным методом исследования в теории Ли г. является инфинитезимальный метод, созданный С. Ли. Этот метод позволяет в значительной мере редуцировать изучение такого сложного объекта, как Ли г., к изучению чисто алгебраич. объекта — *Ли алгебры*. Каж-

дой Ли г. G сопоставляется алгебра Ли $L(G)$, к-рая строится следующим образом (см. также *Ли алгебра аналитической группы*). Левоинвариантным векторным полем на G наз. векторное поле, инвариантное относительно дифференциалов левых сдвигов, т. е. X — левоинвариантное векторное поле, если $(dL_g)X(h)=X(gh)$ для любых $g, h\in G$, где $L_g(h)=gh$. Левоинвариантные векторные поля на G образуют векторное пространство, к-рое можно отождествлять с касательным пространством $T_e(G)$ в единице e группы G, сопоставляя полю X его значение в e. Если X, $Y\in T_e(G)$, то с к о б к а Л и $X\circ Y-Y\circ X$ также будет левоинвариантным полем и это задает в $T_e(G)$ билинейную операцию, относительно к-рой $T_e(G)$ становится алгеброй Ли $L(G)$ (здесь $\circ$ означает композицию векторных полей, рассматриваемых как дифференцирования алгебры бесконечно дифференцируемых действительно-значных функций на многообразии G). Можно дать более явную конструкцию операции коммутирования $[X, Y]$ в $L(G)$. Пусть $x(t)$, $y(t)$ — интегральные кривые полей X, Y в G, проходящие через единицу группы. Тогда $[X, Y]$ будет касательным вектором в точке e к кривой

$$z(s)=x(\sqrt{s})\,y(\sqrt{s})\,x(\sqrt{s})^{-1}\,y(\sqrt{s})^{-1}.$$

Восстановить группу Ли G по ее алгебре Ли $L(G)$ позволяет экспоненциальное отображение $\exp: L(G)\to G$, сопоставляющее полю $X\in L(G)$ элемент x (1) его интегральной кривой $x(t)$. Если G — линейная Ли г., т. е. подгруппа полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, то $L(G)$ отождествляется с подалгеброй полной матричной алгебры Ли $L(n, \mathbb{R})$ и экспоненциальное отображение принимает вид

$$\exp X=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}A^m.$$

Отображение $\exp: L(G)\to G$ аналитично и локально изоморфно, и поэтому определяет в окрестности единицы группы G локальную карту (к а н о н и ч е с к и е к о о р д и н а т ы). Согласно *Кэмпбелла — Хаусдорфа формуле* запись умножения в G в канонич. координатах, т. е. отображение

$$(X, Y)\longrightarrow \exp^{-1}(\exp X\exp Y),\ X, Y\in L(G),$$

выражается через операции в алгебре Ли $L(G)$. Таким образом, локально Ли г. полностью определяется своей алгеброй Ли.

Соответствие между группами и алгебрами Ли обладает глубокими функториальными свойствами. Ли г. определяется своей алгеброй Ли с точностью до локального изоморфизма; в частности, если Ли г. G_1 и G_2 связны и односвязны, то из изоморфизма их алгебр Ли следует изоморфизм $G_1\cong G_2$. Связные подгруппы Ли г. G взаимно однозначно соответствуют подалгебрам алгебры Ли $L(G)$. Пусть $f: G_1\to G_2$ — морфизм двух Ли г. Тогда дифференциал морфизма в единице оказывается гомоморфизмом алгебр Ли:

$$df_e: L(G_1)\longrightarrow L(G_2).$$

Вообще говоря, не всякий гомоморфизм $L(G_1)\to L(G_2)$ имеет вид df_e, однако в случае односвязной группы G_1 это так. Связная подгруппа H связной Ли г. G тогда и только тогда нормальна, когда $L(H)$ является идеалом в алгебре Ли $L(G)$; если к тому же H замкнута в G, то

$$L(G/H)\cong L(G)/L(H).$$

По построению алгебра Ли $L(G)$ данной Ли г. G является аналитически инвариантной. В действительности же $L(G)$ топологически инвариантна, что непосредственно вытекает из следующей т е о р е м ы К а р т а н а: непрерывное гомоморфное отображение (веще-

ственной) Ли г. G в Ли г. H является морфизмом. Для комплексных Ли г. последнее утверждение не всегда верно, хотя оно сохраняет силу для p-адических Ли г. (см. [3]). Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$ связной Ли г. G является Ли г., к-рая отождествляется с подгруппой группы $\mathrm{Aut}(L(G))$. В частности, если Ли г. G односвязна, то

$$\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(L(G)) \text{ и } L(\mathrm{Aut}(G)) \cong D(L(G)),$$

где $D(L(G))$ обозначает алгебру Ли дифференцирований алгебры $L(G)$. Соответствие

$$g \longrightarrow \mathrm{Ad}(g) = d_e(\mathrm{Int}(g)),$$

где $\mathrm{Int}(g)$ — внутренний автоморфизм, порожденный элементом $g \in G$, наз. присоединенным представлением Ли г. G; его дифференциал будет присоединенным представлением $x \to \mathrm{ad}x$ алгебры Ли $L(G)$.

Глобальное строение групп Ли. Важным результатом здесь является теорема существования глобальной Ли г. с заданной вещественной алгеброй Ли, доказанная в 1930 Э. Картаном. Он показал также, что замкнутая подгруппа вещественной Ли г. является подгруппой Ли. К этому времени выявилась особая роль двух типов Ли г.: полупростых и разрешимых (см. *Ли полупростая группа*, *Ли разрешимая группа*). Связная Ли г. G наз. полупростой, если она не содержит неединичных связных разрешимых нормальных подгрупп; если к тому же G не содержит и других нетривиальных связных нормальных подгрупп, то она наз. простой. Алгебра Ли $L(G)$ полупростой, простой или разрешимой Ли г. G является соответственно полупростой, простой или разрешимой алгеброй Ли. Исследование произвольных Ли г. в существенной степени сводится к изучению полупростых и разрешимых. Всякая Ли г. G обладает наибольшей связной разрешимой нормальной подгруппой, к-рая наз. разрешимым радикалом и обозначается $R(G)$. В группе G существуют максимальные полупростые подгруппы. Если S — одна из них, то $G = S \cdot R(G)$, причем все максимальные полупростые подгруппы сопряжены; если G односвязна, то $S \cap R(G) = (e)$ и произведение будет полупрямым (теорема Леви — Мальцева). Существование этого разложения доказано впервые Э. Леви (E. Levi) в 1905 для комплексных алгебр Ли, сопряженность полупростых компонент установлена А. И. Мальцевым в 1942 (см. [16], а также *Леви — Мальцева разложение*).

Наиболее общий факт о разрешимых Ли г. получен еще С. Ли: всякая связная разрешимая линейная группа над полем $\mathbb{C}$ приводится к треугольному виду, т. е. описание связных разрешимых Ли г. сводится к описанию подгрупп полной треугольной группы $T(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Детальное исследование разрешимых Ли г. провел А. И. Мальцев в [16].

При изучении строения полупростых Ли г. важную роль играют их максимальные компактные подгруппы, изученные Э. Картаном в тесной связи с теорией симметрич. пространств (см. [10]). Согласно классич. теореме Картана максимальные компактные подгруппы полупростой Ли г. G сопряжены; если B — максимальная компактная подгруппа в G, то существует такое подмногообразие $E \subset G$, аналитически изоморфное евклидову пространству, что $G = BE$, причем отображение $B \times E \to BE$, $(b, e) \to be$, является изоморфизмом аналитич. многообразий. Таким образом, топологич. строение группы G определяется топологич. строением группы B. А. И. Мальцев [16] распространил теорему Картана на произвольные связные Ли г. Другое разложение связной Ли г. в произведение максимальной компактной подгруппы и евклидова простран-

ства было найдено К. Ивасавой (см. *Ивасавы разложение*).

Линейная представимость. С самого начала развития теории Ли г. было ясно, что произвольные Ли г. близки к линейным группам Ли. С. Ли доказал, что во многих случаях Ли г. локально изоморфны линейным Ли г. Общая теорема была получена И. Д. Адо в 1935: всякая Ли г. локально изоморфна линейной (см. [15]). В то же время нетрудно указать примеры Ли г., не являющихся линейными: такой будет односвязная накрывающая группы $SL(2, \mathbb{R})$ или (в случае поля $\mathbb{C}$) комплексный компактный тор. Если G — односвязная разрешимая группа Ли, то всякая ее подгруппа Ли односвязна и изоморфна линейной группе Ли. В общем случае найден следующий критерий для линейной представимости [16]: связная Ли г. G тогда и только тогда является линейной, когда линейны ее радикал $R(G)$ и полупростая факторгруппа $G/R(G)$; в свою очередь, для линейной представимости радикала $R(G)$ необходимо и достаточно, чтобы его коммутант был односвязен, а линейность полупростой Ли г. $G/R(G)$ зависит от строения ее центра. Компактные, а также комплексные полупростые Ли г. не только линейны, но и являются *линейными алгебраическими группами* [12].

Классификация. Одной из главных проблем теории Ли г. является проблема классификации произвольных связных Ли г. с точностью до изоморфизма. В классе всех локально изоморфных связных Ли г., имеющих одну и ту же алгебру Ли, существует единственная односвязная Ли г. G_0, и всякая Ли г. G из этого класса изоморфна G_0/N, где N — нек-рая дискретная центральная нормальная подгруппа. Поэтому классификация Ли г. сводится к классификации конечномерных алгебр Ли и вычислению центров односвязных Ли г. С другой стороны, она сводится к классификации двух принципиально различных типов групп: полупростых и разрешимых (см. *Ли полупростая группа*, *Ли разрешимая группа*). На первый взгляд разрешимые Ли г. устроены проще и их классификация, казалось бы, не должна быть трудной. Однако это впечатление обманчиво и пока (1982) нет никакой надежды получить классификацию разрешимых Ли г. Полупростые Ли г., напротив, удалось полностью классифицировать. Полную классификацию комплексных полупростых алгебр Ли получил В. Киллинг (W. Killing) в 1888—90 (см. [1], [3]). Так как комплексная полупростая алгебра Ли является прямой суммой простых подалгебр, то достаточно классифицировать простые алгебры Ли. Оказалось, что существует лишь девять различных типов комплексных простых алгебр Ли, а именно, четыре бесконечные серии

$$A_n,\ n \geqslant 1,\ B_n,\ n \geqslant 2,\ C_n,\ n \geqslant 2,\ D_n,\ n \geqslant 4,$$

и пять исключительных алгебр

$$G_2,\ F_4,\ E_6,\ E_7,\ E_8$$

(см. также *Ли полупростая алгебра*). Бесконечным сериям комплексных простых алгебр Ли соответствуют классические линейные группы Ли. Соответствующие односвязные группы имеют вид: тип A_n—$SL(n+1, \mathbb{C})$, тип B_n—$\mathrm{Spin}(f_{2n+1})$, где $\mathrm{Spin}(f_{2n+1})$ обозначает *спинорную группу*, соответствующую невырожденной квадратичной форме f_{2n+1} размерности $2n+1$; тип C_n — *симплектическая группа* степени $2n$; тип D_n — $\mathrm{Spin}(f_{2n})$. Нетрудно вычисляются центры этих групп. Напр., центр $SL(n+1, \mathbb{C})$ — циклич. группа порядка $n+1$, а центры $\mathrm{Spin}(f_{2n+1})$ и симплектич. группы — циклич. группы 2-го порядка. Так получается классификация комплексных полупростых Ли г. Классификация вещественных полупростых Ли г. оказывается значительно сложнее и опирается на классификацию

их вещественных форм. Наиболее важен здесь факт существования у всякой комплексной полупростой группы G единственной компактной вещественной формы B; это означает, что алгебра Ли $L(G)$ изоморфна $L(B)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, т. е. получается комплексификацией алгебры Ли $L(B)$. Основываясь на этом, Э. Картан в 30-х гг. 20 в. получил полную классификацию вещественных форм комплексных полупростых Ли г. В терминах *Галуа когомологий* это равносильно описанию множества $H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Aut}(G))$ (см. также *Линейная алгебраическая группа*).

Впоследствии метод Киллинга был усовершенствован Э. Картаном и Г. Вейлем, что дало возможность решить ряд других классификационных проблем, а также развить важную теорию представлений Ли г. Получена классификация полупростых подгрупп классич. комплексных простых Ли г. (см. [17]).

Современное развитие и применения. В 50-х гг. 20 в. в теории Ли г. начался новый этап развития, что выразилось, в частности, в создании теории алгебраич. групп (см. *Линейная алгебраическая группа*). Еще ранее К. Шевалле (C. Chevalley, см. [12]) детально объяснил алгебраич. природу основных результатов теории Ли. Привлечение методов алгебраич. геометрии позволило по-новому осветить эти классич. результаты и открыло новые глубокие связи с теорией функций, теорией чисел и т. д. Значительное развитие получила теория p-адических групп Ли (см. [3], [6]). Ли г. связаны практически со всеми основными разделами математики: с геометрией и топологией — через теорию *Ли групп преобразований*, с анализом — через теорию линейных представлений и т. д. Чрезвычайно важны также разнообразные применения Ли г. в физике и механике.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [3] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., [гл. 1—8], М., 1972—78; [4] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [5] Вигнер Е., Теория групп и ее приложения к квантомеханической теории атомных спектров, пер. с англ., М., 1961; [6] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [7] Стейнберг Р., Лекции о группах Шевалле, пер. с англ., М., 1975; [8] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1962; [9] Хамермеш М., Теория групп и ее применение к физическим проблемам, пер. с англ., М., 1966; [10] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [11] Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, М.— Л., 1940; [12] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ. и франц., т. 1—3, М., 1948—58; [13] Hochschild G., The Structure of Lie Groups, S. F., 1965; [14] Montgomery D., Zippin L., Topological transformation groups, N. Y.— L., 1955; [15] Адо И. Д., «Изв. Физ.-матем. об-ва» (Казань), 1935, т. 7, с. 1—43; [16] Мальцев А. И., «Матем. сб.», 1945, т. 16, с. 163—90; [17] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1944, т. 8, № 4, с. 143—74; [18] Скляренко Е., в кн.: Проблемы Гильберта, М., 1969, с. 101—15.

В. П. Платонов.

ЛИ ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ — гладкое действие связной группы Ли G на гладком многообразии M, т. е. гладкое (класса C^∞) отображение $A: G\times M\to M$ такое, что:

$$\text{(I)}\quad A(g'g'', m) = A(g', A(g'', m)) \quad \forall g', g''\in G,\ m\in M;$$

$$\text{(II)}\quad A(e, m) = m \quad \forall m\in M$$

(e — единица группы G).

Ли г. п., удовлетворяющая также условию:

$$\text{(III)}\quad \text{если } A(g, m) = m \quad \forall m\in M, \text{ то } g = e,$$

наз. эффективной.

Примеры Ли г. п. Любое гладкое линейное представление группы Ли G в конечномерном векторном пространстве M; действие группы Ли G на себе с помощью левых или правых сдвигов $A(g, m)=gm$ или $A(g, m)=mg^{-1}$ соответственно ($g, m\in G$); действие группы Ли G на себе с помощью внутренних автоморфизмов $A(g, m)=gmg^{-1}$ ($g, m\in G$); *однопараметрическая группа преобразований*, т. е. гладкое действие группы $\mathbb{R}$ на многообразии M.

Наряду с определенными выше глобальными Ли г. п. рассматриваются также л о к а л ь н ы е Ли г. п., являвшиеся основным объектом классич. теории групп Ли [1]. При этом вместо G рассматривается локальная группа Ли, т. е. окрестность U единицы в нек-рой группе Ли, а вместо M — открытое подмножество $W\subset\mathbb{R}^n$.

Если G — Ли г. п. на M, то, выбрав подходящие окрестность $U\ni e$ в G и открытое подмножество $W\subset M$, получают локальную Ли г. п. Обратный переход — от локальной Ли г. п. к глобальной (г л о б а л и з а ц и я) — возможен не всегда. Однако если $\dim M\leqslant 4$ и W достаточно мало, то глобализация возможна (см. [2]).

Иногда рассматриваются Ли г. п. класса C^k, $1\leqslant k\leqslant\infty$, или C^ω (аналитические), т. е. предполагается принадлежность отображения A соответствующему классу. Если A непрерывно, то для его принадлежности классу C^k или C^ω достаточно, чтобы для любого $g\in G$ преобразование $A_g: m\to A(g, m)$ многообразия M принадлежало этому классу (см. [3]). В частности, задание Ли г. п. G на M эквивалентно заданию непрерывного гомоморфизма $G\to\mathrm{Diff}\,M$ в группу $\mathrm{Diff}\,M$ диффеоморфизмов многообразия M, снабженную естественной топологией.

Любой Ли г. п. соответствует гомоморфизм $A_*:\mathfrak{g}\to\Phi(M)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в алгебру Ли $\Phi(M)$ гладких векторных полей на M, сопоставляющий элементу $X\in\mathfrak{g}$ поле скоростей однопараметрич. группы преобразований

$$(t, m)\to A(\exp tX, m),$$

где $t\in\mathbb{R}$, $m\in M$, $\exp:\mathfrak{g}\to G$ — экспоненциальное отображение (см. [5]). Если G эффективна, то гомоморфизм A_* инъективен. Для связной группы G гомоморфизм A_* полностью определяет Ли г. п. Обратно, любому гомоморфизму $\beta:\mathfrak{g}\to\Phi(M)$ отвечает локальная Ли г. п. [6]. Если все векторные поля из $\beta(\mathfrak{g})$ п о л н ы (т. е. их интегральные кривые $x(t)$ определены для всех t), то существует глобальная Ли г. п. G на M, для к-рой $\mathrm{Im}\,A_*=\mathfrak{g}$. Достаточно потребовать, чтобы $\beta(\mathfrak{g})$ как алгебра Ли порождалась полными векторными полями; условие полноты автоматически выполнено, если M компактно [4].

Если G — Ли г. п. многообразия M, то стационарная подгруппа $G_m=\{g\in G\mid A(g, m)=m\}$ для любой точки $m\in M$ является замкнутой подгруппой Ли в G; ее называют также с т а б и л и з а т о р о м, или п о д г р у п п о й и з о т р о п и и, точки m. Соответствующая подалгебра Ли $\mathfrak{g}_m\subset\mathfrak{g}$ состоит из всех таких $X\in\mathfrak{g}$, что $A_*(X)_m=0$. Подалгебра $\mathfrak{g}_m$ непрерывно зависит от m в естественной топологии на множестве всех подалгебр в $\mathfrak{g}$ [7]. Орбита $G(m)=\{A(g, m),\ g\in G\}$ точки m является погруженным подмногообразием в M, диффеоморфным G/G_m. Если G компактна, то все орбиты являются компактными вложенными подмногообразиями. Примеры невложенных орбит дает действие группы $\mathbb{R}$ на торе

$$T^2=\{(z_1, z_2)\mid z_i\in\mathbb{C},\quad |z_i|=1,\quad i=1, 2\},$$

заданное формулой

$$A(t, (z_1, z_2))=(e^{it}z_1, e^{i\alpha t}z_2),$$

где $\alpha\in\mathbb{R}$ иррационально.

Ли г. п. $A_i: G\times M_i\to M_i$, $i=1, 2$, наз. п о д о б н ы м и, если существует такой диффеоморфизм $f: M_1\to M_2$, что $A_1(g, m)=A_2(g, f(m))$, $g\in G$, $m\in M_1$. Важной задачей теории групп преобразований является задача классификации Ли г. п. с точностью до подобия. В настоящее время (1982) она решена лишь в нек-рых частных случаях. Еще С. Ли [1] дал классификацию локальных Ли г. п. в областях пространства $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^2$ с

точностью до локального подобия. Частичная классификация проведена для Ли г. п. на трехмерных многообразиях. Хорошо изучены также компактные Ли г. п. О транзитивных Ли г. п. см. *Однородное пространство.*

Лит.: [1] Lie S., «Math. Ann.», 1880, Bd 16, S. 441—528; [2] Mostow G., «Ann. Math.», 1950, v. 52, p. 606—36; [3] Bochner S., Montgomery D., «Ann. Math.», 1945, v. 46, p. 685—94; [4] Palais R., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1957, v. 22, p. 1—123; [5] Зуланке Р., Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения, пер. с нем., М., 1975; [6] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [7] Richardson R., в кн.: Proceedings of the conference on transformation groups, New Orleans, 1967, B.— [a. o.], 1968, p. 429—40; [8] Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, М.— Л., 1940.

В. В. Горбацевич.

ЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ тензорного поля Q по направлению векторного поля X — главная линейная часть приращения тензорного поля Q при его преобразовании, к-рое индуцировано локальной однопараметрич. группой φ_t преобразований многообразия, порожденной полем X. Ли д. $\delta_X Q$ тензорного поля Q по направлению векторного поля X равен $(\mathcal{L}_X Q)\,dt$, где $\mathcal{L}_X Q$ — *Ли производная* тензорного поля Q по направлению X.

Понятие Ли д. допускает следующую физич. интерпретацию. Если однопараметрич. группа преобразований φ_t области евклидова пространства описывает стационарный поток жидкости с полем скоростей X, t — время, а Q есть тензорное поле, описывающее ту или иную характеристику жидкости (тензор скоростей деформации, тензор напряжений, плотность и т. п.), то Ли д. $\delta_X Q$ описывает главную линейную часть изменения со временем поля Q с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с жидкостью, т. е. в переменных Лагранжа.

Д. В. Алексеевский.

ЛИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ — естественная операция на дифференцируемом многообразии, сопоставляющая дифференцируемому векторному полю X и дифференцируемому геометрич. объекту Q на многообразии M нек-рый новый геометрич. объект $\mathcal{L}_X Q$, описывающий скорость изменения геометрич. объекта Q относительно однопараметрич. группы преобразований φ_t многообразия M, порожденной полем X. Геометрич. объект $\mathcal{L}_X Q$ наз. производной Ли геометрического объекта Q относительно векторного поля X.

В частном случае, когда Q есть векторнозначная функция на M, ее производная Ли $\mathcal{L}_X Q$ совпадает с производной $\partial_X Q$ функции Q по направлению векторного поля X и задается формулой

$$(\mathcal{L}_X Q)(x) = \frac{d}{dt}\, Q \circ \varphi_t(x)\Big|_{t=0}, \quad x \in M,$$

где φ_t — локальная однопараметрич. группа преобразований многообразия M, порожденная полем X, или в локальных координатах x^i — формулой

$$\mathcal{L}_X Q(x^i) = \sum\nolimits_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j} Q(x^i),$$

где

$$X = \sum\nolimits_j X^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

В общем случае определение Ли д. состоит в следующем. Пусть W — нек-рое $\mathrm{GL}^k(n)$-пространство, т. е. многообразие с фиксированным действием полной дифференциальной группы $\mathrm{GL}^k(n)$ порядка k (группы k-струй в нуле диффеоморфизмов $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(0) = 0$). Пусть $Q : P^k M \to W$ — геометрич. объект порядка k типа w на n-мерном многообразии M, рассматриваемый как $\mathrm{GL}^k(n)$-эквивариантное отображение главного $\mathrm{GL}^k(n)$-расслоения кореперов $P^k M$ k-го порядка на M в W. Локальная однопараметрич. группа преобра-

зований φ_t многообразия M, порожденная векторным полем X на M, индуцирует локальную однопараметрич. группу преобразований $\varphi_t^{(k)}$ многообразия кореперов P^kM. Ее поле скоростей

$$X^{(k)} = \frac{d}{dt}\,\varphi_t^{(k)}\Big|_{t=0}$$

наз. полным лифтом поля X на P^kM. Производная Ли геометрич. объекта Q типа M относительно векторного поля X на M определяется как геометрич. объект $\mathscr{L}_X Q$ типа TW (где TW — касательное расслоение многообразия W, рассматриваемое естественным образом как $\mathrm{GL}^k(n)$-пространство), задаваемый формулой

$$\mathscr{L}_X Q = \frac{d}{dt}\,Q \circ \varphi_t^{(k)}\Big|_{t=0}.$$

Значение производной Ли $\mathscr{L}_X Q$ в точке $p_k \in P^kM$ зависит, и притом линейно, только от 1-струи в точке p_k отображения Q и от значения в этой точке векторного поля $X^{(k)}$ (или, что эквивалентно, от k-струи поля X в соответствующей точке $x \in M$).

Если геометрич. объект Q линеен, т. е. соответствующее $\mathrm{GL}^k(n)$-пространство W является векторным пространством с линейным действием группы $\mathrm{GL}^k(n)$, то касательное многообразие TW естественным образом отождествляется с прямым произведением $W \times W$, и поэтому производную Ли

$$\mathscr{L}_X Q\colon\ P^kM \longrightarrow TW = W \times W$$

можно рассматривать как пару геометрич. объектов типа W. Первый из них есть само Q, а второй, обычно отождествляемый с самой производной Ли линейного геометрич. объекта Q, равен производной $\partial_{X^{(k)}} Q$ функции Q по направлению векторного поля $X^{(k)}$:

$$\mathscr{L}_X Q = (Q,\ \partial_{X^{(k)}} Q).$$

Таким образом, производную Ли линейного геометрич. объекта можно рассматривать как геометрич. объект того же типа, что и Q.

Локальные координаты x^i в многообразии M определяют локальные координаты x^i, y^i_j в многообразии P^1M кореперов 1-го порядка:

$$\theta \in P^1M,\quad \theta = \sum\nolimits_j y^i_j\, dx^j.$$

В этих координатах производная Ли любого геометрич. объекта $Q = Q(x^i,\ y^i_j)$ 1-го порядка (напр., тензорного поля) по направлению векторного поля

$$X = \sum\nolimits_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

задается формулой

$$(\mathscr{L}_X Q)\,(x^i,\ y^i_j) = \sum\nolimits_j \frac{\partial}{\partial x^i}\,Q - \sum\nolimits_{i,j,l} y^i_l\, X^l_j \frac{\partial}{\partial y^i_j}\,Q,$$

где

$$X^l_j = \frac{\partial}{\partial x^j}\,X^l.$$

Аналогичная формула справедлива для производной Ли геометрич. объекта любого порядка.

Производная Ли $\mathscr{L}_X$ в пространстве дифференциальных форм на многообразии M выражается через оператор внешнего дифференцирования d и оператор внутреннего умножения i_X (определяемый как свертка векторного поля с дифференциальной формой) с помощью следующей формулы гомотопии:

$$\mathscr{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d.$$

Обратно, оператор внешнего дифференцирования d,

действующий на p-форму ω, выражается через Ли д. по формуле

$$d\omega(X_1, \ldots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \mathcal{L}_{Xi}\omega \times$$

$$\times(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{p+1}) +$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega(\mathcal{L}_{X_i}X_j, X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{p+1}),$$

где $\hat{}$ означает, что соответствующий символ должен быть пропущен, $X_1, \ldots, X_{p+1}$ — векторные поля.

В отличие от *ковариантного дифференцирования*, требующего введения связности, операция Ли д. определяется структурой дифференцируемого многообразия, а производная Ли геометрич. объекта Q по направлению векторного поля X является конкомитантом геометрич. объектов X и Q.

Лит.: [1] Slebodziński W., «Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique», 1931, v. 17, p. 864—70; [2] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 429—65; [3] Yano K., The theory of Lie derivatives and its applications, Amst., 1957; [4] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [5] Вагнер В., «Докл. АН СССР», 1945, т. 46, с. 383—86; [6] Лаптев Б. Л., «Тр. Семинара по вект. и тенз. анализу», 1956, т. 10, с. 227—48; [7] Евтушик Л. Е., «Докл. АН СССР», 1960, т. 132, с. 998—1001; [8] Palais R. S., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1954, v. 5, p. 902—08.

Д. В. Алексеевский.

ЛИ КВАДРИКА — одна из *соприкасающихся квадрик* к поверхности в геометрии эквиаффинной или проективной группы. В гиперболич. точке M_0 она определяется следующим образом.

Пусть дано векторное поле $v^i(t)$ вдоль линии $L: u^i(t)$, к-рая является асимптотической (или, по крайней мере, имеет в M_0 касание 2-го порядка с асимптотической). Квадрика, содержащая три бесконечно близкие прямые, проходящие через три точки линии $u^i(t)$ в направлении векторов $v^i(t)r_i(t) = c^i\overset{\circ}{r}_i + c\overset{\circ}{N}$, $\overset{\circ}{r}_1, \overset{\circ}{r}_2, \overset{\circ}{N}$ — репер в M_0, N — аффинная нормаль, и наз. квадрикой Ли и. Ее уравнение имеет вид

$$g_{ij}\xi^i\xi^j + H\xi\xi - 2\xi = 0,$$

где $(\xi^1 : \xi^2 : \xi : 1)$ вместе с $(c^1 : c^2 : c : 1)$ — однородные координаты указанных прямых, g_{ij} — асимптотич. тензор, H — аффинная средняя кривизна.

Ли к. (наряду с квадрикой Вильчинского и квадрикой Фубини) принадлежат пучку *Дарбу квадрик*. Первая имеет уравнение

$$g_{ij}\xi^i\xi^j + \varkappa\xi\xi - 2\xi = 0,$$

для нее L — геодезическая 1-го рода, а вторая — уравнение

$$g_{ij}\xi^i\xi^j + \frac{2}{3}(H + \varkappa)\,\xi\xi - 2\xi = 0,$$

для нее L имеет M_0 касание 3-го порядка; здесь $\varkappa$ — гауссова кривизна тензора g_{ij}.

Понятие Ли к. введено в его письме к Ф. Клейну (F. Klein) от 18.12.1878 (см. [1]).

Лит.: [1] Lie S., Gesammelte Abhandlungen. Anmerkungen zum 3-ten Bd, Lpz.— Oslo, 1922, S. 718; [2] Широков П. А., Широков А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1959; [3] Фиников С. П., Проективно дифференциальная геометрия, М.—Л., 1937.

М. И. Войцеховский.

ЛИ КОЛЬЦО, лиево кольцо,— кольцо A, удовлетворяющее следующим условиям:

$$a^2 = 0$$

и

$$(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$$

(тождество Якоби), где a, b, c — любые элементы из кольца A. Первое из этих условий влечет антикоммутативность кольца A:

$$ba = -ab.$$

Ли к. образуют многообразие колец, в общем случае

неассоциативных. В него входят, однако, все кольца с нулевым умножением.

См. также *Неассоциативные кольца и алгебры.*

О. А. Иванова.

ЛИ КОМПАКТНАЯ ГРУППА — компактная группа, являющаяся конечномерной вещественной группой Ли. Ли к. г. могут быть охарактеризованы как конечномерные локально связные компактные топологич. группы.

Если G^0 — связная компонента единицы Ли к. г. G, то группа связных компонент G/G^0 конечна. Собственно к теории групп Ли относится изучение строения связных Ли к. г.

Следующие примеры связных Ли к. г. играют важную роль в общей структурной теории Ли к. г.

1) Мультипликативная группа T^1 всех комплексных чисел, равных по модулю 1.

2) Группа $\mathrm{SU}(n)$ всех комплексных унитарных матриц порядка n с определителем 1.

3) Группа $\mathrm{SO}(n)$ всех вещественных ортогональных матриц порядка n с определителем 1.

4) Группа $\mathrm{Sp}(n)$ всех матриц $X \in \mathrm{SU}(2n)$, для к-рых $XJX^T = J$, где $J = \begin{Vmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{Vmatrix}$, T — знак транспонирования и 1_n — единичная матрица порядка n.

Полная классификация связных Ли к. г. была получена в трудах Э. Картана [1] и Г. Вейля [2]. Она состоит в следующем.

Имеются два основных типа связных Ли к. г.

1) Связные коммутативные Ли к. г. Это в точности торы, т. е. группы вида $T^n = \underbrace{T^1 \times \ldots \times T^1}_{n \text{ раз}}$.

2) Связные полупростые Ли к. г. (см. *Ли полупростая группа*). Если G — связная полупростая Ли к. г., то универсальная накрывающая группа $\tilde{G}$ группы G также является Ли к. г. (теорема Вейля). Центр Z группы $\tilde{G}$ конечен, а все связные группы Ли, локально изоморфные G, компактны и исчерпываются с точностью до изоморфизма группами вида G/D, где $D \subset Z$. Алгебры Ли полупростых Ли к. г. могут быть внутренне охарактеризованы среди всех конечномерных вещественных алгебр Ли как алгебры с отрицательно определенной *Киллинга формой*.

Указанные два основных типа связных Ли к. г. определяют строение произвольных связных Ли к. г. А именно, последние с точностью до изоморфизма исчерпываются всевозможными факторгруппами вида $(G \times T)/D$, где G — связная односвязная Ли к. г. с центром Z, T — тор, а D — конечная подгруппа в группе $Z \times T$, пересекающаяся с T лишь по единице. Алгебры Ли произвольных Ли к. г. также могут быть внутренне охарактеризованы среди всех конечномерных вещественных алгебр Ли: это в точности алгебры Ли $\mathfrak{g}$, обладающие таким положительно определенным скалярным произведением $(\ ,\ )$, что $([x, y], z) + (y, [x, z]) = 0$ для любых $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Они наз. компактными алгебрами Ли.

Таким образом, классификация связных Ли к. г. сводится к классификации связных односвязных полупростых Ли к. г. (или, что то же, полупростых компактных алгебр Ли) и описанию их центров. Оказывается, что полупростые компактные алгебры Ли находятся во взаимно однозначном соответствии с полупростыми комплексными алгебрами Ли (и тем самым с приведенными *корневыми системами*). А именно, если $\mathfrak{g}$ — полупростая компактная алгебра Ли, то ее комплексификация $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ полупроста. Обратно, в любой полупростой алгебре Ли над $\mathbb{C}$ существует, и притом единственная с точностью до сопряженности, компактная вещественная форма. В частности, окончательный резуль-

тат классификации **простых компактных** алгебр Ли и соответствующих им связных односвязных Ли к. г. таков. Имеется 4 бесконечных серии т. н. к л а с с и ч е с к и х п р о с т ы х к о м п а к т н ы х а л г е б р Ли, соответствующих следующим сериям неприводимых приведенных систем корней: A_n, $n\geqslant 1$, B_n, $n\geqslant 2$, C_n, $n\geqslant 3$ и D_n, $n\geqslant 4$. Это соответственно алгебры Ли групп SU $(n+1)$, SO $(2n+1)$, Sp (n) и SO $(2n)$. Кроме них имеется еще лишь пять т. н. и с к л ю ч и т е л ь н ы х п р о с т ы х к о м п а к т н ы х а л г е б р Ли, соответствующих системам корней типов G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8. Всякая компактная простая алгебра Ли изоморфна одной из этих алгебр Ли, а сами они попарно неизоморфны друг другу. Ли к. г. SU (n) и Sp (n), $n\geqslant 1$, связны и односвязны. Группа SO (n), $n\geqslant 3$, связна, но неодносвязна. Ее универсальная накрывающая наз. с п и н о р н о й Л и к. г. и обозначается Spin (n). Центры связных односвязных полупростых Ли к. г. совпадают с центрами соответствующих односвязных комплексных групп Ли (см. *Ли полупростая группа*).

Всякая Ли к. г. допускает точное линейное представление; образ такого представления является вещественной алгебраич. группой. Любая Ли к. г. G обладает комплексификацией $G_{\mathbb{C}}$ (см. *Комплексификация группы Ли*). При этом $G_{\mathbb{C}}$ является комплексной редуктивной алгебраич. группой, аффинная алгебра A_G к-рой может быть описана как алгебра всех п р е д с т а в л я ю щ и х ф у н к ц и й н а G, т. е. таких непрерывных комплекснозначных функций, что линейная оболочка сдвигов f на элементы из G конечномерна. Алгебра A_G обладает естественной вещественной структурой и потому определяет нек-рую алгебраич. группу над $\mathbb{R}$. Вещественные точки этой группы образуют G, а комплексные — $G_{\mathbb{C}}$. Группа G является максимальной компактной подгруппой в $G_{\mathbb{C}}$. В результате получается взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных Ли к. г. и редуктивных алгебраич. групп над $\mathbb{C}$.

Всякая Ли к. г. является вещественной аналитич. группой. Комплексные компактные аналитич. группы наз. также к о м п л е к с н ы м и Л и к. г. Всякая связная комплексная Ли к. г. (как комплексная группа Ли) изоморфна комплексному тору $\mathbb{C}^n/\Gamma$, где Γ — дискретная подгруппа ранга $2n$ в $\mathbb{C}^n$, и (как вещественная группа Ли) изоморфна T^{2n}. Два комплексных тора $\mathbb{C}^n/\Gamma_1$ и $\mathbb{C}^n/\Gamma_2$ изоморфны (как комплексные группы Ли) тогда и только тогда, когда $\Gamma_2=g(\Gamma_1)$ для некрого $g\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Лит.: [1] К а р т а н Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства, пер. с франц., М., 1949; [2] В е й л ь Г., «Успехи матем. наук», 1938, в. 4, с. 201—46; [3] П о н т р я г и н Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [4] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1962; [5] Ж е л о б е н к о Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [6] Н а й м а р к М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [7] В и н б е р г Э. Б., О н и щ и к А. Л., Семинар по алгебраическим группам и группам Ли. 1967/68, М., 1969; [8] Б у р б а к и Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [9] С е р р Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [10] А д а м с Д ж., Лекции по группам Ли, пер. с англ., М., 1979. *В. Л. Попов.*

ЛИ ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА над полем k — алгебра Ли $\mathfrak{g}$, элементы к-рой являются линейными преобразованиями нек-рого векторного пространства V над k; сложение элементов и их умножение на элементы из k определяются обычным образом, а коммутатор $[x, y]$ элементов $x, y\in\mathfrak{g}$ задается формулой

$$[x, y]=xy-yx$$

(xy и yx — обычные произведения линейных преобразований). Ли л. а., состоящая из всех линейных преобразований пространства V, обозначается $\mathfrak{gl}(V)$. Если $V=k^n$, то $\mathfrak{gl}(V)$ естественно отождествляется с

множеством всех квадратных матриц порядка n над k и обозначается $\mathfrak{gl}(n, k)$. Произвольная Ли л. а.— это подалгебра нек-рой алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$.

Примеры. 1) Пусть V наделено структурой ассоциативной алгебры. Тогда все дифференцирования алгебры V образуют Ли л. а. Если V — алгебра Ли, то для фиксированного элемента $x \in V$ присоединенное к x линейное преобразование пространства V, определенное формулой $y \to [x, y]$, $y \in V$, будет дифференцированием алгебры V; оно обозначается $\operatorname{ad} x$. Множество

$$\operatorname{ad} V = \{\operatorname{ad} x \mid x \in V\}$$

является Ли л. а., она наз. присоединенной линейной алгеброй Ли, или алгеброй Ли внутренних дифференцирований алгебры V. 2) Пусть k — поле, полное относительно нек-рого нетривиального абсолютного значения, V — нормируемое полное пространство над k и G — линейная группа Ли преобразований пространства V, т. е. подгруппа Ли в группе Ли всех автоморфизмов пространства V. Тогда *Ли алгебра аналитической группы* G естественно отождествляется с подалгеброй Ли в $\mathfrak{gl}(V)$, т. е. является Ли л. а.

Проблема существования изоморфизма произвольной конечномерной алгебры Ли с нек-рой Ли л. а. возникла уже в первых работах по теории групп и алгебр Ли, но была положительно решена лишь в 1935 теоремой Адо (см. [4]): каждая конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем нулевой характеристики обладает точным конечномерным представлением ρ (и, более того, если $\mathfrak{n}$ — наибольший нильпотентный идеал в $\mathfrak{g}$, то представление ρ можно выбрать так, чтобы все элементы из $\rho(\mathfrak{n})$ были нильпотентны). Для групп Ли аналог этой теоремы, вообще говоря, не имеет места: напр., универсальная накрывающая группы вещественных унимодулярных матриц порядка 2 не допускает точного линейного представления.

См. также *Ли алгебраическая алгебра*.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Адо И. Д., «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 6, с. 159—73.

В. Л. Попов.

ЛИ ЛОКАЛЬНАЯ АЛГЕБРА — алгебра Ли, элементами к-рой являются гладкие функции на гладком вещественном многообразии M (или, более общо, гладкие сечения гладкого векторного расслоения E над M), а операция коммутирования непрерывна в C^∞-топологии и носит локальный характер, т. е.

$$\operatorname{supp}[f_1, f_2] \subset \operatorname{supp} f_1 \cap \operatorname{supp} f_2,$$

где $\operatorname{supp} f$ — носитель функции (сечения) f. Известна полная классификация Ли л. а. для расслоений E с одномерным слоем (в частности, для обычных функций) (см. [3]). А именно, операция коммутирования в этом случае является бидифференциальным оператором первого порядка, т. е. имеет вид

$$[f_1, f_2] = \sum_{i,j} c^{ij}(x)\, \partial_i f_1\, \partial_j f_2 + \sum_k a^k(x)\,(f_1 \partial_k f_2 - f_2 \partial_k f_1),$$

где $\partial_i = \partial/\partial x^i$ — частные производные по локальным координатам на M. Далее, пусть $P(x)$ — подпространство в касательном пространстве $T_x M$ к многообразию M в точке $x \in M$, порожденное векторами

$$a(x) = \sum_k a^k(x)\, \partial_k \quad \text{и} \quad c^i(x) = \sum_j c^{ij}(x)\, \partial_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда распределение $\{P(x),\ x \in M\}$ интегрируемо, так что многообразие M распадается в объединение $\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ интегральных многообразий. Операция коммутирования перестановочна с ограничением на

M_α, и возникающие таким образом структуры Ли л.а. на M_α транзитивны в том смысле, что $P(x)$ для любой точки x совпадает с касательным пространством к интегральному многообразию M_α, содержащему x.

Каждая транзитивная Ли л. а. локально определяется размерностью подстилающего многообразия с точностью до замены переменных в базе и слое. Для четномерного многообразия она изоморфна алгебре скобок Пуассона, а для нечетномерных — алгебре скобок Лагранжа (см. [1]).

Примером Ли л. а., иллюстрирующим общую теорию, является структура алгебры Ли в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, в к-рой

$$[f_1, f_2] = \sum_{i,j,k} c_k^{ij} x^k \partial_i f_1 \partial_j f_2,$$

где c_k^{ij} — структурные константы нек-рой n-мерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. [2]). В этом случае многообразие $M = \mathbb{R}^n$ естественно отождествляется с пространством $\mathfrak{g}^*$, двойственным к $\mathfrak{g}$, а разбиение на подмногообразия M_α совпадает с разбиением $\mathfrak{g}^*$ на орбиты *коприсоединенного представления*.

Ли л. а. возникают как алгебры Ли нек-рых бесконечномерных групп Ли. В частности, они являются алгебрами Ли для дифференциальных групп в смысле Дж. Ритта [4]. Из работы [6] вытекает описание всех Ли л. а., связанных с расслоениями на прямой с двумерным слоем. Все такие Ли л. а. являются расширениями алгебры скобок Лагранжа (которая в этом случае совпадает с алгеброй Ли векторных полей) с помощью тривиальной Ли л. а. с одномерным слоем. Анонсирована [6] классификация «простых» Ли л. а.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Математические методы классической физики, М., 1974; [2] Березин Ф. А., «Функциональный анализ и его приложения», 1967, т. 1, в. 2, с. 1—14; [3] Кириллов А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 4, с. 57—76; [4] Ritt J. F., «Ann. Math.», 1950, v. 52, p. 708—26; [5] его же, там же, 1951, v. 53, p. 491—519; [6] Weisfeiler B., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 84, № 1, p. 127—30.

А. А. Кириллов.

ЛИ ЛОКАЛЬНАЯ ГРУППА, аналитическая локальная группа,— аналитическое многообразие G над полем k, полным относительно нек-рого нетривиального абсолютного значения, снабженное отмеченным элементом e (единицей), открытым подмножеством $U \ni e$ и парой аналитич. отображений $(g, h) \mapsto gh$ многообразия $U \times U$ в G и $g \mapsto g^{-1}$ окрестности U в себя, для которых:

1) в некоторой окрестности точки e выполняется тождество $ge = eg$;

2) в некоторой окрестности точки e выполняется тождество $e = gg^{-1} = g^{-1}g$;

3) для некоторой окрестности $U' \subset U$ точки e выполняется включение $U'U' \subset U$, причем $g(hr) = (gh)r$, где g, h, r — любые элементы из U'.

Ли л. г. впервые появились в трудах С. Ли (S. Lie) и его школы (см. [1]) как локальные *Ли группы преобразований*.

Пусть G_1 и G_2 — две Ли л. г. с единицами e_1 и e_2 соответственно. Локальным гомоморфизмом G_1 в G_2 (обозначается $f : G_1 \to G_2$) наз. аналитич. отображение $f : U \to G_2$ нек-рой окрестности $U \ni e_1$ в G_1, для к-рого $f(e_1) = e_2$ и $f(gh) = f(g)\, f(h)$ для g, h из нек-рой окрестности $U_1 \subset U$ точки e_1. Определяемая естественным образом композиция локальных гомоморфизмов также есть локальный гомоморфизм. Локальные гомоморфизмы $G_1 \to G_2$, совпадающие в нек-рой окрестности точки e_1, наз. эквивалентными. Если существуют такие локальные гомоморфизмы $f : G_1 \to G_2$ и $f_2 : G_2 \to G_1$, что композиции $f_2 \circ f_1$ и $f_1 \circ f_2$ эквивалентны тождественным отображениям, то Ли л. г. G_1 и G_2 наз. эквивалентными.

Пример. Пусть $\overline{G}$ — аналитич. группа с единицей e и G — открытая окрестность точки e в $\overline{G}$. Тогда

аналитич. структура на $\overline{G}$ индуцирует аналитич. структуру на G, причем операции умножения и взятия обратного элемента в $\overline{G}$ превращают G в Ли л. г. (в частности, сама $\overline{G}$ может рассматриваться как Ли л. г.). Все Ли л. г. G, получаемые таким способом из фиксированной аналитич. группы $\overline{G}$, эквивалентны между собой.

Один из принципиальных вопросов теории групп Ли состоит в том, насколько общий характер имеет приведенный выше пример, т. е. будет ли всякая Ли л. г. (с точностью до эквивалентности) окрестностью некрой аналитич. группы. Ответ на этот вопрос положителен (см. [2], [3], [4]), в случае банаховых Ли л. г. ответ отрицателен (см. [4]).

Важнейшим средством изучения Ли л.г. является сопоставление Ли л. г. ее алгебры Ли. А именно, пусть G — Ли л. г. над полем k и e — ее единица. Выбор *карты с* аналитич. многообразия G в точке e позволяет отождествить пек-рую окрестность точки e в G с пек-рой окрестностью U нуля в n-мерном координатном пространстве k^n, так что U становится Ли л. г. Пусть U_0 — такая окрестность нуля в Ли л. г. U, что для любых x, $y \in U_0$ определено произведение $z=xy \in U$. Тогда в координатной форме умножение в Ли л. г. U в окрестности U_0 задается n аналитич. функциями

$$z_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$, $(z_1, \ldots, z_n)$ — соответственно координаты точек x, $y \in U_0$ и $z=xy \in U$. В достаточно малой окрестности нуля функция f_i представляется в виде суммы сходящегося степенного ряда (также обозначаемого далее через f_i), а наличие в U единицы и ассоциативного закона выражается следующими свойствами этих рядов, рассматриваемых как формальные степенные ряды от $2n$ переменных:

а) $f_i(x_1, \ldots, x_n; 0, \ldots, 0) = x_i$ и $f_i(0, \ldots, 0; y_1, \ldots, y_n) = y_i$ для всех i,

б) $f_i(u_1, \ldots, u_n; f_1(v_1, \ldots, v_n; w_1, \ldots, w_n), \ldots, f_n(v_1, \ldots, v_n; w_1, \ldots, w_n)) = f_i(f_1(u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n), \ldots, f_n(u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n); w_1, \ldots, w_n))$ для всех i.

Свойства а) и б) означают, что система формальных степенных рядов $F_c = (f_1, \ldots, f_n)$ является *формальной группой*. В частности, однородная компонента степени 2 каждого из рядов f_i является *билинейной формой* на k^n, т. е. имеет вид

$$\sum_{j,l} b_{jl}^i x_j y_l = b_i(x, y), \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n),$$

что позволяет определить на k^n умножение $[\ ,\ ]$ по правилу:

$$[x, y] = (b_1(x, y) - b_1(y, x), \ \ldots, \ b_n(x, y) - b_n(y, x)).$$

Относительно этого умножения k^n является алгеброй Ли. Указанная структура алгебры Ли переносится в касательное пространство $\mathfrak{g}$ к многообразию G в точке e с помощью определенного картой c изоморфизма $g \to k^n$. Формальные группы F_c и $F_{c'}$, определенные разными картами, изоморфны, а указанная структура алгебры Ли на $\mathfrak{g}$ не зависит от выбора карты c. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ наз. алгеброй Ли локальной группы Ли и. Для любого локального гомоморфизма Ли л. г. его дифференциал в единице является гомоморфизмом алгебр Ли, откуда следует, что сопоставление Ли л. г. ее алгебры Ли является функториальным. В частности, эквивалентные Ли л. г. имеют изоморфные алгебры Ли.

Если поле k имеет характеристику 0, указанная выше конструкция, восходящая к С. Ли [1], позволяет свести изучение свойств Ли л. г. к изучению соответствующих свойств их алгебр Ли. В этом случае алгебра Ли $\mathfrak{g}$ определяет Ли л. г. G однозначно с точностью до эквивалентности. А именно, карта c может быть выбра-

на так, что произведение xy в Ли л. г. U выражается в виде нек-рого сходящегося ряда (т. н. ряда Кэмпбелла — Хаусдорфа) от элементов пространства k^n, полученных из x и y с помощью операции коммутирования $[\ ,\ ]$ и умножения на элементы из k (см. *Кэмпбелла — Хаусдорфа формула*). Обратно, для произвольной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ над k ряд Кэмпбелла — Хаусдорфа сходится в нек-рой окрестности нуля в $\mathfrak{h}$ и определяет в этой окрестности структуру Ли л. г. с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$. Таким образом, для любой заданной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ существует единственная с точностью до эквивалентности Ли л. г., алгеброй Ли к-рой является $\mathfrak{h}$. Более того, всякий гомоморфизм алгебр Ли *индуцирован* нек-рым единственным гомоморфизмом соответствующих Ли л. г. Иначе говоря, сопоставление Ли л. г. ее алгебры Ли определяет эквивалентность категории Ли л. г. и категории конечномерных алгебр Ли над k. Кроме того, сопоставление Ли л. г. соответствующей формальной группы определяет эквивалентность категории Ли л. г. и категории формальных групп над k.

Алгебра Ли может быть определена и для любой банаховой Ли л. г.; основной результат об эквивалентности категорий Ли л. г. и алгебр Ли обобщается на этот случай (см. [2]).

Лит.: [1] Lie S., Engel F., Theorie der Transformationsgruppen, Bd 1—3, Lpz., 1888—93; [2] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [3] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [4] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [5] Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, М.— Л., 1940. *В. Л. Попов.*

ЛИ НИЛЬАЛГЕБРА — алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем k, определяемая наличием функции $n: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{N}$ такой, что $(\mathrm{ad}\ x)^{n(x,y)}(y)=0$, где $(\mathrm{ad}\ x)(y)=[x, y]$, для любых $x, y\in\mathfrak{g}$. Основной вопрос о Ли н.— условия на $\mathfrak{g}$, k, n, при к-рых $\mathfrak{g}$ (локально) нильпотентна (см. *Ли нильпотентная алгебра*). Конечномерная над k Ли н.— нильпотентна. С другой стороны, над любым полем существуют конечно порожденные ненильпотентные Ли н. [1]. Пусть n — константа. Ли н. локально нильпотентна, если $\mathrm{char}\,k=0$ или если $n\leqslant p+1$, где $p=\mathrm{char}\,k>0$ (теорема Кострикина [2]). Локальная нильпотентность имеет место и в случае, когда $\mathfrak{g}$ локально разрешима. Бесконечно порожденная Ли н. ненильпотентна при $n\geqslant p-2$ (см. [3]), а при $n\geqslant p+1$ ненильпотентность сохраняется и при условии разрешимости. Неизвестно (1982), нильпотентны ли Ли н., если $\mathrm{char}\ k=0$ (при $n\leqslant 4$ ответ положительный). Открыт (1982) вопрос о локальной нильпотентности Ли н. при $n>p+1$. Изучение Ли н. над полем k, $\mathrm{char}\ k=p>0$, тесно связано с *Бёрнсайда проблемой*.

Лит.: [1] Голод Е. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 273—76; [2] Кострикин А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 1, с. 3—34; [3] Размыслов Ю. П., Алгебра и логика, 1971, т. 10, № 1, с. 33—44; [4] Бахтурин Ю. А., Lectures on Lie algebras, B., 1978; [5] Braun A., «J. Algebra», 1974, v. 31, p. 287—92. *Ю. А. Бахтурин.*

ЛИ НИЛЬПОТЕНТНАЯ АЛГЕБРА — алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем K, удовлетворяющая одному из следующих эквивалентных условий:

1) существует конечная убывающая цепочка идеалов $\{\mathfrak{g}_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ алгебры $\mathfrak{g}$ таких, что $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_n=\{0\}$ и $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i]\subset\mathfrak{g}_{i+1}$ для $0\leqslant i<n$;

2) $C^k\mathfrak{g}=\{0\}$ (аналогично $C_k\mathfrak{g}=\{0\}$) для достаточно большого k, где $C^k\mathfrak{g}$ и $C_k\mathfrak{g}$ — члены соответственно нижнего и верхнего центральных рядов;

3) существует такое k, что $\mathrm{ad}x_1\ldots\mathrm{ad}\,x_k=0$ для любых $x_1, \ldots, x_k\in\mathfrak{g}$.

Абелева алгебра нильпотентна. Если V — конечномерное векторное пространство над K, а $F=\{V_i\}$ — флаг в нем, то

$$\mathfrak{n}(F)=\{x\in\mathrm{End}\,V \mid xV_i\subset V_{i-1} \text{ для всех } i\geqslant 1\}$$

является нильпотентной подалгеброй в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(V)$ всех линейных преобразований пространства V. Если в V выбрать базис, согласованный с флагом F, то в нем элементы алгебры $\mathfrak{n}(F)$ представятся верхними треугольными матрицами с нулями на главной диагонали. Если F — полный флаг (т. е. $\dim V_k=k$), то соответствующая матричная Ли н. а. $\mathfrak{n}(m, k)$ состоит из всех верхних треугольных матриц порядка $m=\dim V$ с нулями на главной диагонали.

Для любой неодномерной Ли н. а. коразмерность ее коммутатора $\operatorname{codim}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\geqslant 2$. В частности, если $\dim\mathfrak{g}\leqslant 2$, то $\mathfrak{g}$ абелева. Единственная неабелева трехмерная Ли н. а. $\mathfrak{q}$ изоморфна $\mathfrak{n}(3, K)$. Ли н. а. перечислены еще в нескольких малых размерностях (для $\dim\mathfrak{g}\leqslant 7$ при $K=\mathbb{C}$), но общего подхода к их классификации пока (1982) нет.

Ли н. а. (ранее их называли *специальными алгебрами Ли*, или *алгебрами Ли ранга 0*) встретились уже на первых шагах исследований С. Ли (S. Lie) по интегрированию дифференциальных уравнений. Классификация *Ли разрешимых алгебр* сведена в нек-ром смысле к перечислению Ли н. а. В произвольной конечномерной алгебре Ли существует наибольший нильпотентный идеал (*нильрадикал* в терминологии [2]). Рассматривается и другой нильпотентный идеал — пересечение ядер неприводимых конечномерных представлений (нильпотентный радикал) (см. [1], [4]). Если $\mathfrak{r}$ — радикал алгебры $\mathfrak{g}$, то нильпотентный радикал $\mathfrak{n}$ совпадает с

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\cap\mathfrak{r}.$$

Факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ редуктивна и $\mathfrak{n}$ есть минимальный из идеалов, обладающих этим свойством. В случае $\operatorname{char} K=0$ нильрадикал состоит из всех таких $x\in\mathfrak{r}$, что $\operatorname{ad} x$ нильпотентен.

При изучении редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$ естественно возникают ее нильпотентные подалгебры, являющиеся нильпотентными радикалами в *параболических подалгебрах* алгебры $\mathfrak{g}$. В случае $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(V)$ эти нильпотентные подалгебры совпадают с рассмотренными выше подалгебрами $\mathfrak{n}(F)$. Нильпотентный радикал борелевской подалгебры (см. *Бореля подгруппа*) в $\mathfrak{g}$ есть максимальная подалгебра в $\mathfrak{g}$, состоящая из нильпотентных элементов,— единственная с точностью до сопряженности. Более широкий класс Ли н. а. образуют произвольные идеалы параболич. подалгебр алгебры $\mathfrak{g}$, состоящие из нильпотентных элементов. В случае $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(V)$ эти Ли н. а. были классифицированы в [6] (*стандартные нуль-алгебры*), а в общем случае в [7].

Центр Ли н. а. нетривиален и любая Ли н. а. может быть получена рядом центральных расширений с помощью Ли н. а. Класс Ли н. а. замкнут относительно перехода к подалгебре, факторалгебре, центральному расширению и конечной прямой сумме. В частности, любая подалгебра в $\mathfrak{n}(m, K)$ нильпотентна. Обратно, произвольная конечномерная Ли н. а. изоморфна подалгебре в $\mathfrak{n}(m, K)$ при нек-ром m (если $\operatorname{char} K=0$) — это частный случай теоремы Адо (см. [1], [2]).

Если $\mathfrak{g}$ — произвольная конечномерная алгебра Ли, то любой ее нильпотентный идеал ортогонален ей относительно *Киллинга формы*, в частности для Ли н. а. эта форма тривиальна.

Одной из основных в теории Ли н. а. является *теорема Энгеля*: если $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ — конечномерное представление Ли нильпотентной алгебры $\mathfrak{g}$, причем $\rho(x)$ нильпотентно для любого $x\in\mathfrak{g}$, то существует такой полный флаг F, что $\rho(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{n}(F)$. Из теоремы Энгеля следует, что конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна тогда и только тогда, когда $\operatorname{ad}^n x=0$ при нек-ром n и всех $x\in\mathfrak{g}$, т. е. когда любой $x\in\mathfrak{g}$ является нильпотентным элементом.

В теореме Энгеля содержится описание нильпотентных представлений Ли н. а.; описание произвольных конечномерных представлений принадлежит Х. Цассенхаузу (H. Zassenhaus, см. [2]): если поле K алгебраически замкнуто, а V — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль, то $V=\bigoplus_{i=1}^{n} V_i$, где подмодули V_i таковы, что ограничение действия любого $x\in\mathfrak{g}$ на них есть сумма скалярного и нильпотентного операторов. Если V — конечномерное векторное пространство над полем K характеристики 0, то любая алгебраическая Ли н. а. $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(V)$ имеет вид $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$, где $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{n}$ — идеалы, состоящие соответственно из полупростых и нильпотентных линейных преобразований, принадлежащих алгебре $\mathfrak{g}$ [5].

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [2] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1961; [5] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958; [6] Гуревич Г. Б., «Матем. сб.», 1954, т. 35, с. 437—60; [7] Хакимджанов Ю. Б., «Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ.», 1974, № 6, с. 49—55.

В. В. Горбацевич.

ЛИ НИЛЬПОТЕНТНАЯ ГРУППА — группа Ли, нильпотентная как абстрактная группа. Абелева группа Ли нильпотентна. Если $F=\{V_i\}$ — флаг в конечномерном векторном пространстве V над полем K, то

$$N(F)=\{g\in \mathrm{GL}(V)\mid gv\equiv v \bmod V_i\ \forall\ v\in V_i,\ i\geqslant 1\}$$

будет нильпотентной алгебраич. группой над K; в базисе, согласованном с флагом F, ее элементы представляются верхними треугольными матрицами с единицами на главной диагонали. Если F — полный флаг (т. е. $\dim V_k=k$), то соответствующая $N(F)$ матричная Ли н. г. $N(n, k)$ состоит из всех матриц порядка $n=\dim V$ указанного выше вида.

Если K — полное нормированное поле, то $N(F)$ — Ли н. г. над K. Ее алгеброй Ли служит $\mathfrak{n}(F)$ (см. *Ли нильпотентная алгебра*). Вообще, алгебра Ли группы Ли G над полем K характеристики 0 нильпотентна тогда и только тогда, когда нильпотентна связная компонента единицы G_0 группы G. Это позволяет перенести на Ли н. г. свойства нильпотентных алгебр Ли (см. [2], [4], [5]). Групповой вариант теоремы Энгеля при этом допускает следующее усиление (теорема Колчина): если G — подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$, где V — конечномерное векторное пространство над произвольным полем K, а каждый $g\in G$ унипотентен, то существует такой полный флаг F в V, что $G\subset N(F)$ (при этом G автоматически оказывается нильпотентной) (см. [3]).

Ли н. г. разрешимы, поэтому свойства Ли разрешимых групп переносятся и на них, причем часто в усиленной форме, ибо всякая Ли н. г. треугольна. Связная группа Ли G нильпотентна тогда и только тогда, когда в канонич. координатах (см. *Ли группа*) групповая операция в G записывается полиномиально [4]. Всякая односвязная вещественная Ли н. г. G изоморфна алгебраич. группе, более того — алгебраич. подгруппе в $N(n, \mathbb{R})$. При этом точное представление группы G в $N(n, \mathbb{R})$ можно выбрать так, чтобы группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,G$ вкладывалась в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ — нормализатор образа группы G (см. [1]).

Если G — связная матричная вещественная Ли н. г., то она разлагается в прямое произведение компактной абелевой и односвязной групп Ли. Связная линейная алгебраич. группа G над полем характеристики 0 разлагается в прямое произведение абелева нормального делителя, состоящего из полупростых элементов, и нормального делителя, состоящего из унипотентных элементов [5].

Ранее Ли н. г. наз. специальными группами Ли, или группами Ли ранга 0. В теории представлений полупростых групп Ли при изучении дискретных подгрупп в таких группах существен-

но используются орисферич. группы Ли, являющиеся Ли н. г.

Лит.: [1] Birkhoff G., «Ann. Math.», 1937, v. 38, p. 526—32; [2] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [5] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958.

В. В. Горбацевич.

ЛИ ОСОБАЯ АЛГЕБРА — простая алгебра Ли (см. *Ли полупростая алгебра*), не являющаяся классической. Над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики существует всего 5 Ли о. а.: E_6, E_7, E_8, F_4 и G_2 размерностей 78, 133, 248, 52 и 14 соответственно. Индексы в обозначениях равны рангам этих алгебр Ли. Простейшие линейные представления этих Ли о. а. имеют размерности 27, 56, 248, 26 и 7 соответственно. Алгебра G_2 есть алгебра дифференцирований *Кэли—Диксона алгебры*, а F_4— алгебра дифференцирований единственной особой *йордановой алгебры*, к-рую можно представить как алгебру эрмитовых матриц третьего порядка над алгеброй Кэли—Диксона. Алгебра E_6 есть линейная оболочка дифференцирований и умножений на элементы особой йордановой алгебры. Алгебры E_7 и E_8 и формы всех Ли о. а. над алгебраически незамкнутыми полями также связаны с алгеброй Кэли — Диксона. Различные модели Ли о. а. получаются при рассмотрении их градуировок посредством циклич. групп. Связные группы Ли, соответствующие Ли о. а., наз. особыми группами Ли и часто обозначаются теми же буквами. Напр., комплексная группа G_2— это группа автоморфизмов алгебры Кэли—Диксона над $\mathbb{C}$; комплексная группа F_4— это группа автоморфизмов особой йордановой алгебры над $\mathbb{C}$.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] его же, Exceptional Lie Algebras, N. Y., 1971; [3] Фрейденталь Г., «Математика», 1957, т. 1, № 1, с. 117—53; [4] Розенфельд Б. А., в кн.: Algebraical and Topological Foundations of Geometry, Oxf.— [a. o.], 1962, p. 135—55; [5] Винберг Э. Б., в кн.: Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу..., в. 13, М., 1966, с. 7—9; [6] Tits J., «Judag. Math.», 1966, v. 28, № 2, p. 223—37; [7] его же, Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen, B.— [u. a.], 1967.

Э. Б. Винберг.

ЛИ ПОЛУПРОСТАЯ АЛГЕБРА — алгебра Ли, не имеющая ненулевых разрешимых идеалов (см. *Ли разрешимая алгебра*). В дальнейшем рассматриваются конечномерные Ли п. а. над полем k характеристики 0 (о Ли п. а. над полем ненулевой характеристики см. *Ли алгебра*).

Полупростота конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равносильна выполнению любого из следующих условий:

1) $\mathfrak{g}$ не содержит ненулевых абелевых идеалов;

2) *Киллинга форма* алгебры $\mathfrak{g}$ невырождена (критерий Картана);

3) $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму неабелевых простых идеалов;

4) всякое конечномерное линейное представление алгебры $\mathfrak{g}$ вполне приводимо (иначе: всякий конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль полупрост);

5) одномерные когомологии алгебры $\mathfrak{g}$ со значениями в любом конечномерном $\mathfrak{g}$-модуле тривиальны.

Любой идеал и любая факторалгебра Ли п. а. также полупросты. Разложение Ли п. а., указанное в условии 3), единственно. Частным случаем свойства 5) является следующее утверждение: все дифференцирования Ли п. а. являются внутренними. Свойство полупростоты алгебры Ли сохраняется как при расширении, так и при сужении основного поля.

Пусть $\mathfrak{g}$ — Ли п. а. над алгебраически замкнутым полем k. Присоединенное представление изоморфно отображает алгебру $\mathfrak{g}$ на линейную алгебру Ли $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$, к-рая является алгеброй Ли алгебраич. группы $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$ и тем самым *Ли алгебраической алгеброй*. Элемент $X \in \mathfrak{g}$ наз. полупростым

(нильпотентным), если ad X полупрост (соответственно нильпотентен). Это свойство элемента X сохраняется при любом гомоморфизме алгебры $\mathfrak{g}$ в другую Ли п. а. Связная компонента единицы $(\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g})^0$ совпадает с группой внутренних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$, т. е. порождается автоморфизмами вида $\exp(\mathrm{ad}\,X)$, $X\in\mathfrak{g}$.

При изучении Ли п. а. над алгебраически замкнутым полем k существенную роль играют корни Ли п. а., к-рые определяются следующим образом. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Для ненулевой линейной функции $\alpha\in\mathfrak{h}^*$ через $\mathfrak{g}_\alpha$ обозначается линейное подпространство в $\mathfrak{g}$, заданное условием:

$$\mathfrak{g}_\alpha=\{X\in\mathfrak{g}\mid[H,\,X]=\alpha(H)\,X,\ H\in\mathfrak{h}\}.$$

Если $\mathfrak{g}_\alpha\neq0$, то α наз. к о р н е м алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$. Множество Σ всех ненулевых корней наз. к о р н е в о й с и с т е м о й, или с и с т е м о й к о р н е й, алгебры $\mathfrak{g}$. Имеет место к о р н е в о е р а з л о ж е н и е:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum\nolimits_{\alpha\in\Sigma}\mathfrak{g}_\alpha.$$

Корневая система и корневое разложение Ли п. а. обладают следующими свойствами:

1) Σ порождает $\mathfrak{h}^*$ и является приведенной *корневой системой* в абстрактном смысле (в линейной оболочке системы Σ над полем действительных чисел). Система Σ неприводима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ проста.

2) Для любого $\alpha\in\Sigma$

$$\dim\mathfrak{g}_\alpha=\dim[\mathfrak{g}_\alpha,\ \mathfrak{g}_{-\alpha}]=1.$$

Существует единственный элемент $H_\alpha\in[\mathfrak{g}_\alpha,\ \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ такой, что $\alpha(H_\alpha)=2$.

3) Для каждого ненулевого $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$ существует единственный $Y_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ такой, что $[X_\alpha,\ Y_\alpha]=H_\alpha$, причем

$$[H_\alpha,\ X_\alpha]=2X_\alpha\ \text{ и }\ [H_\alpha,\ Y_\alpha]=-2Y_\alpha.$$

Кроме того,

$$\beta(H_\alpha)=\frac{2(\alpha,\,\beta)}{(\alpha,\,\alpha)},\ \alpha,\ \beta\in\Sigma,$$

где $(\ ,\ )$ — скалярное произведение, индуцированное формой Киллинга.

4) Если $\alpha,\ \beta\in\Sigma$ и $\alpha+\beta\neq0$, то $\mathfrak{g}^\alpha$ и $\mathfrak{g}^\beta$ ортогональны относительно формы Киллинга и $[\mathfrak{g}^\alpha,\ \mathfrak{g}^\beta]=\mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.

Базис $\{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n\}$ корневой системы Σ наз. также с и с т е м о й п р о с т ы х к о р н е й а л г е б р ы $\mathfrak{g}$. Пусть Σ_+ — система положительных корней относительно данного базиса и пусть $X_{-\alpha}=Y_\alpha(\alpha\in\Sigma_+)$. Тогда элементы

$$H_{\alpha_1},\ \ldots,\ H_{\alpha_k},\ X_\alpha\quad(\alpha\in\Sigma)$$

составляют базис алгебры $\mathfrak{g}$, наз. б а з и с о м К а р т а н а. С другой стороны, элементы

$$X_{\alpha_i},\ X_{-\alpha_i}\quad(i=1,\ \ldots,\ n)$$

составляют систему образующих алгебры $\mathfrak{g}$, причем определяющие соотношения имеют следующий вид:

$$\big[\big[X_{\alpha_i},\ X_{-\alpha_i}\big],\ X_{\alpha_j}\big]=n(i,\ j)\,X_{\alpha_j},$$

$$\big[\big[X_{\alpha_i},\ X_{-\alpha_i}\big],\ X_{-\alpha_j}\big]=-n(i,\ j)\,X_{\alpha_j},$$

$$\big(\mathrm{ad}\,X_{\alpha_i}\big)^{1-n(i,\ j)}X_{\alpha_j}=0,$$

$$\big(\mathrm{ad}\,X_{-\alpha_i}\big)^{1-n(i,\ j)}X_{-\alpha_j}=0;$$

здесь $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$ и

$$n(i,\ j)=\alpha_j(H_i)=\frac{2(\alpha_i,\ \alpha_j)}{(\alpha_j,\ \alpha_j)}.$$

Из свойства 4) следует равенство

$$[X_\alpha,\ X_\beta]=\begin{cases} N_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha+\beta\in\Sigma,\\ 0, & \text{если } \alpha+\beta\overline{\in}\Sigma,\end{cases}$$

где $N_{\alpha,\beta}\in k$. Элементы $X_\alpha\,(\alpha\in\Sigma_+)$ можно выбрать таким образом, чтобы

$$N_{\alpha,\beta}=-N_{-\alpha,-\beta}\ \text{ и }\ N_{\alpha,\beta}=\pm\,(p+1),$$

где p — наибольшее целое число такое, что $\beta-p\alpha\in\Sigma$. Соответствующий базис Картана наз. б а з и с о м Ш е в а л л е. Структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ в этом базисе являются целыми, что позволяет связать с $\mathfrak{g}$ алгебры Ли и алгебраич. группы (см. *Шевалле группа*) над полями произвольной характеристики. Если $k=\mathbb{C}$, то линейная оболочка над $\mathbb{R}$ векторов

$$iH_\alpha,\ X_\alpha-X_{-\alpha},\ i\,(X_\alpha+X_{-\alpha})\quad(\alpha\in\Sigma_+)$$

является компактной вещественной формой алгебры $\mathfrak{g}$.

Ли п. а. определяется с точностью до изоморфизма своей подалгеброй Картана и соответствующей корневой системой. Точнее, если $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — Ли п. а. над k, $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ — их подалгебры Картана, Σ_1 и Σ_2 — соответствующие корневые системы, то всякий изоморфизм $\mathfrak{h}_1\to\mathfrak{h}_2$, индуцирующий изоморфизм корневых систем Σ_1 и Σ_2, продолжается до изоморфизма $\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$. С другой стороны, любая приведенная корневая система может быть реализована как корневая система нек-рой Ли п. а. Таким образом, классификация Ли п. а. (соответственно простых неабелевых алгебр Ли) над алгебраически замкнутым полем k по существу совпадает с классификацией приведенных корневых систем (соответственно неприводимых приведенных корневых систем).

Простые алгебры Ли, отвечающие корневым системам типов $A-D$, наз. к л а с с и ч е с к и м и и имеют следующий вид.

Тип $A_n\,(n\geqslant 1)$. $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n+1,\ k)$ — алгебра линейных преобразований пространства k^{n+1} со следом 0; $\dim\mathfrak{g}=n(n+2)$.

Тип $B_n\,(n\geqslant 2)$. $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2n+1,\ k)$ — алгебра линейных преобразований пространства k^{2n+1}, кососимметрических относительно заданной невырожденной симметрической билинейной формы; $\dim\mathfrak{g}=n(2n+1)$.

Тип $C_n\,(n\geqslant 3)$. $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(n,\ k)$ — алгебра линейных преобразований пространства k^{2n}, кососимметрических относительно заданной невырожденной кососимметрической билинейной формы; $\dim\mathfrak{g}=n(2n+1)$.

Тип $D_n\,(n\geqslant 4)$. $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2n,\ k)$ — алгебра линейных преобразований пространства k^{2n}, кососимметрических относительно заданной невырожденной симметрической билинейной формы; $\dim\mathfrak{g}=n(2n-1)$.

Простые алгебры Ли, отвечающие корневым системам типов E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, наз. о с о б ы м и, или и с к л ю ч и т е л ь н ы м и (см. *Ли особая алгебра*).

Картана матрица Ли п. а. над алгебраическим замкнутым полем также определяет эту алгебру однозначно с точностью до изоморфизма. Матрицы Картана простых алгебр Ли имеют следующий вид:

$$A_n:\left\|\begin{array}{rrrrrr} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{array}\right\|,$$

$$B_n:\left\|\begin{array}{rrrrrr} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{array}\right\|,$$

$$C_n: \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$D_n: \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$E_6: \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$E_7: \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$E_8: \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$F_4: \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad G_2: \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Классификация расщепляемых Ли п. а. над произвольным полем k характеристики 0 (р а с щ е п л я е м о й наз. Ли п. а. $\mathfrak{g}$, обладающая такой подалгеброй Картана $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, что все характеристич. корни операторов $\mathrm{ad}X$, $X \in \mathfrak{h}$, лежат в k) выглядит аналогично случаю алгебраически замкнутого поля. А именно, каждой неприводимой приведенной корневой системе соответствует единственная расщепляемая Ли п. а. В частности, расщепляемые Ли п. а. типов A—D имеют указанный выше вид с той разницей, что в случаях B и D нужно рассматривать невырожденные симметрические билинейные формы индекса Витта n.

Проблема классификации произвольных Ли п. а. над k сводится к следующей задаче: перечислить с точностью до изоморфизма все k-формы $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$, т. е. такие k-подалгебры $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_k K$. Здесь K — алгебраически замкнутое расширение поля k, а $\mathfrak{g}$ — заданная Ли п. а. над K. Решение этой задачи также можно получить в терминах корневых систем (см. *Форма* алгебраической группы). В случае, когда $\mathfrak{g}$ — классическая простая алгебра Ли над k (отличная от D_4), существует другой метод классификации k-форм в $\mathfrak{g}$, основанный на рассмотрении простых ассоциативных алгебр (см. [3]).

В случае, когда $k = \mathbb{R}$, классификация Ли п. а. выглядит следующим образом (см. [6], [7], [8]). Всякая простая неабелева алгебра Ли над $\mathbb{R}$ либо является простой алгеброй Ли над $\mathbb{C}$ (рассматриваемой как алгебра над $\mathbb{R}$), либо есть вещественная форма простой алгебры Ли над $\mathbb{C}$. Классификация вещественных форм

$\mathfrak{g}_0$ в простых классич. алгебрах Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$ имеет следующий вид.

I. Тип A_n: $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, $n\geqslant 1$.
A_{I}: $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$.
A_{II}: $n+1=2m$ четно, $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{su}^*(2n)$ — подалгебра элементов из $\mathfrak{sl}(2m, \mathbb{C})$, сохраняющих нек-рую кватернионную структуру.
A_{III}: $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{su}(p, n+1-p)$ — подалгебра элементов из $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, кососимметрических относительно невырожденной эрмитовой формы положительного индекса p, $0\leqslant p\leqslant (n+1)/2$.

II. Тип B_n: $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$, $n\geqslant 2$.
B_{I}: $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{so}(p, 2n+1, -p)$ — алгебра линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$, кососимметрических относительно невырожденной симметрической билинейной формы положительного индекса p, $0\leqslant p\leqslant n$.

III. Тип C_n: $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$, $n\geqslant 3$.
C_{I}: $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ — алгебра линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^{2n}$, кососимметрических относительно невырожденной кососимметрической билинейной формы.
C_{II}: $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{sp}(p, n-p)$, $0\leqslant p\leqslant n/2$, — подалгебра в $\mathfrak{su}(2p, 2(n-p))$, состоящая из преобразований, сохраняющих нек-рую кватернионную структуру.

IV. Тип D_n: $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$, $n\geqslant 4$.
D_{I}: $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{so}(p, 2n-p)$ — алгебра линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^{2n}$, кососимметрических относительно невырожденной билинейной симметрич. формы положительного индекса p, $0\leqslant p\leqslant n$.
D_{III}: $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{so}^*(2n)$ — подалгебра в $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$, состоящая из преобразований, сохраняющих нек-рую кватернионную структуру.

Ли п. а. над полем $\mathbb{C}$ были впервые рассмотрены в работах В. Киллинга [1], к-рый дал их классификацию, хотя в его доказательствах имелись пробелы, восполненные Э. Картаном [2]. Уже в работах В. Киллинга и Э. Картана появились корни алгебры Ли как характеристич. корни оператора $\mathrm{ad}X$. Э. Картан дал также классификацию вещественных Л. п. а., установив глубокую связь между этими алгебрами и *глобально симметрическими римановыми пространствами*.

Лит.: [1] Killing W., «Math. Ann.», 1888, Bd 31, S. 252—90; 1889, Bd 33, S. 1—48, Bd 34, S. 57—122; 1890, Bd 36, S. 161—89; [2] Cartan E., Œuvres complètes, pt. 1, t. 1, P., 1952, p. 137—287; [3] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [4] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [5] Стейнберг Р., Лекции о группах Шевалле, пер. с англ., М., 1975; [6] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [7] Helgason S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, N. Y.— San Francisco — L., 1978; [8] Араки Ш., «Математика», 1966, т. 10, № 1, с. 90—126.
А. Л. Онищик.

ЛИ ПОЛУПРОСТАЯ ГРУППА — связная группа Ли, не содержащая нетривиальных связных разрешимых (или, что равносильно, связных абелевых) нормальных делителей. Связная группа Ли полупроста тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли полупроста. Связная группа Ли G наз. п р о с т о й, если ее алгебра Ли проста, т. е. если G не содержит нетривиальных связных нормальных делителей, отличных от G. Связная группа Ли является полупростой тогда и только тогда, когда она разлагается в локально прямое произведение простых неабелевых нормальных делителей.

Классификация Ли п. г. сводится к локальной классификации, т. е. к классификации *Ли полупростых алгебр*, а также к глобальной классификации групп Ли G, отвечающих заданной полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

В случае групп Ли над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел основной результат локальной классификации состоит в том, что всякая односвязная простая неабе-

лева комплексная группа Ли изоморфна одной из групп $SL_n(\mathbb{C})$, $n\geqslant 1$, $Spin_n(\mathbb{C})$, $n\geqslant 5$ (универсальная накрывающая группы $SO_n(\mathbb{C})$), $Sp_n(\mathbb{C})$, $n\geqslant 3$ (см. *Классическая группа*) или же одной из особых комплексных групп Ли (см. *Ли особая алгебра*). Глобальная классификация групп Ли, отвечающих полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$, выглядит следующим образом. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, Σ — система корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$. Каждой Ли п. г. G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ соответствует решетка $\Gamma(G)\subset\mathfrak{h}$, являющаяся ядром экспоненциального отображения $\exp\colon \mathfrak{h}\to G$. В частности, если G односвязна, то $\Gamma(G)$ совпадает с решеткой $\Gamma_0=\Gamma_0(\mathfrak{g})$, порожденной элементами $2\pi i H_\alpha$, $\alpha\in\Sigma$ (см. *Ли полупростая алгебра*), а если G — группа без центра (присоединенная группа), то $\Gamma(G)$ есть решетка

$$\Gamma_1=\Gamma_1(\mathfrak{g})=\{X\in\mathfrak{h}\mid \alpha(X)\in 2\pi i\mathbb{Z} \text{ для всех } \alpha\in\Sigma\}.$$

В общем случае $\Gamma_0\subset\Gamma(G)\subset\Gamma_1$. Для любой аддитивной подгруппы $M\subset\mathfrak{h}$, удовлетворяющей условию $\Gamma_0\subset M\subset\Gamma_1$, существует единственная с точностью до изоморфизма связная группа Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ такая, что $\Gamma(G)=M$. При этом центр группы G изоморфен $\Gamma_1/\Gamma(G)$, а фундаментальная группа

$$\pi_1(G)\cong\Gamma(G)/\Gamma_0.$$

Факторгруппа $Z_{\mathfrak{u}}=\Gamma_1/\Gamma_0$ (центр односвязной группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$) конечна и для различных типов простых алгебр Ли $\mathfrak{g}$ имеет следующий вид:

$\mathfrak{g}$	A_n	B_n	C_n	D_{2n}	D_{2n+1}	E_6	E_7	E_8, F_4, G_2
$Z_{\mathfrak{u}}$	$\mathbb{Z}_{n+1}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	0

Порядок группы Γ_1/Γ_0 совпадает с числом вершин расширенной диаграммы простых корней алгебры $\mathfrak{g}$, при отбрасывании к-рых получается диаграмма простых корней. Аналогичная классификация имеет место для компактных вещественных Ли п. г., каждая из к-рых вкладывается в единственную комплексную Ли п. г. в качестве максимальной компактной подгруппы (см. *Ли компактная группа*).

Глобальная классификация некомпактных вещественных Ли п. г. может быть проведена аналогично, но более сложным образом. В частности, центр $Z_{\mathfrak{g}}$ односвязной группы Ли, отвечающей полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{R}$, можно вычислить следующим способом. Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ — *Картана разложение*, где $\mathfrak{k}$ — максимальная компактная в $\mathfrak{g}$ подалгебра, а $\mathfrak{p}$ — ее ортогональное дополнение относительно формы Киллинга, θ — соответствующий инволютивный автоморфизм, продолженный в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, содержащая подалгебру Картана $\mathfrak{h}'\subset\mathfrak{k}$, θ_0 — автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, совпадающий с θ на корнях относительно $\mathfrak{h}$ и продолженный на корневые векторы соответствующим образом, $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$ — разложение Картана вещественной формы $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, отвечающей θ_0. Тогда $Z_{\mathfrak{g}}\cong\Gamma_1(\mathfrak{k}_0)/\Gamma_0[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$ (см. [3], где эта группа вычислена для всех типов простых алгебр $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{R}$).

Всякая комплексная Ли п. г. G обладает единственной структурой аффинной алгебраич. группы, согласованной с заданной на ней аналитич. структурой, причем любой аналитич. гомоморфизм группы G в алгебраич. группу является рациональным. Соответствующая алгебра регулярных функций на G совпадает с алгеброй голоморфных представляющих функций.

С другой стороны, некомпактная вещественная Ли п. г. не всегда допускает точное линейное представление — простейшим примером является односвязная группа Ли, соответствующая алгебре Ли $\gamma l(2, \mathbb{R})$. Если $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{R}$, то в центре Z_u односвязной группы G_0, отвечающей $\mathfrak{g}$, существует наименьшая подгруппа $\mathscr{L}(\mathfrak{g})$, называемая *линеаризатором*, такая, что $G_0/\mathscr{L}(\mathfrak{g})$ изоморфна линейной Ли п. г. Если $\mathfrak{u}=\mathfrak{k}+i\mathfrak{u}$ — компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, то

$$\mathscr{L}(\mathfrak{g}) \cong \Gamma_0(\mathfrak{u}) \cap \mathfrak{h}'/\Gamma_0([\mathfrak{k}, \mathfrak{k}])$$

(см. [3], где эта группа вычислена для всех типов простых алгебр Ли $\mathfrak{g}$).

Лит.: [1] Адамс Дж., Лекции по группам Ли, пер. с англ., М., 1979; [2] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [3] Сирота А. И., Солодовников А. С., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 3, с. 87—144.

А. Л. Онищик.

ЛИ ПРОИЗВОДНАЯ тензорного поля Q по направлению векторного поля X на многообразии M — тензорное поле $\mathscr{L}_X Q$ на многообразии M того же типа, что и Q, к-рое задается формулой

$$(\mathscr{L}_X Q)_x = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}((\varphi_t^* Q)_x - Q_x), \quad x \in M,$$

где φ_t^* — локальная однопараметрич. группа преобразований пространства тензорных полей, порожденная векторным полем X. В локальных координатах x^i Л. п. тензорного поля $Q=\left(Q^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l}\right)$ типа (k, l) по направлению векторного поля $X=(X^i)$ имеет координаты $\left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$:

$$(\mathscr{L}_X Q)^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} = X^i \partial_i Q^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{k} \partial_i X^{i_\alpha} Q^{i_1 \dots \widehat{i_\alpha} i i_{\alpha+1} \dots i_k}_{j_1 \dots j_k} +$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{l} \partial_{j_\beta} X^i Q^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots \widehat{j_\beta} i j_{\beta+1} \dots j_l}.$$

См. также *Ли дифференцирование.*

Д. В. Алексеевский.

ЛИ ПРОИЗВОДНАЯ ГРУППА — *коммутант* группы Ли. Для любой группы Ли G ее Ли п. г. $(G, G]$ является нормальной (не обязательно замкнутой) подгруппой Ли в G. Соответствующий идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G совпадает с коммутантом $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (называемым также *производной алгеброй* Ли для $\mathfrak{g}$). Коммутант односвязной (или связной линейной) группы Ли G всегда замкнут в G.

Лит.: [1] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948.

А. Л. Онищик.

ЛИ РАЗРЕШИМАЯ АЛГЕБРА — алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем K, удовлетворяющая одному из следующих эквивалентных условий:

1) члены производного ряда $D^k\mathfrak{g}$ для $\mathfrak{g}$ равны $\{0\}$ при достаточно большом k;

2) существует конечная убывающая цепочка идеалов $\{\mathfrak{g}_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ алгебры $\mathfrak{g}$ таких, что $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_n=\{0\}$ и $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$ (т. е. алгебры Ли $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ — абелевы) для всех $0 \leqslant i < n$;

3) существует конечная убывающая цепочка подалгебр $\{\mathfrak{g}'_i\}_{0 \leqslant i \leqslant m}$ таких, что $\mathfrak{g}'_0=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'_m=\{0\}$, $\mathfrak{g}'_{i+1}$ — идеал в $\mathfrak{g}'_i$ и $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ — одномерная (абелева) алгебра Ли для $0 \leqslant i < m$.

Нильпотентная алгебра Ли разрешима. Если $F=\{V_i\}$ — полный флаг в конечномерном векторном пространстве V над K, то

$$\mathfrak{b}(F) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid xV_i \subset V_i \text{ для всех } i\}$$

есть разрешимая подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(V)$ всех линейных преобразований пространства V. Если в V выбрать базис, согласованный с флагом F, то в нем элементы алгебры $\mathfrak{b}(F)$ представятся верхними треугольными матрицами; полученная матричная Ли р. а. обозначается $\mathfrak{t}(n, K)$, где $n=\dim V$.

Класс Ли р. а. замкнут относительно перехода к подалгебре, факторалгебре и расширению. В частности, любая подалгебра в $\mathfrak{t}(n, K)$ разрешима. Если $\mathrm{char}K=0$ и поле K алгебраически замкнуто, то любая конечномерная Ли р. а. изоморфна подалгебре в $\mathfrak{t}(n, K)$ при нек-ром n. Одним из основных свойств Ли р. а. является т е о р е м а Л и: пусть $\mathfrak{g}$ — Ли р. а. над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 и $\rho\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ — ее конечномерное линейное представление. Тогда в V существует такой полный флаг F, что $\rho(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{b}(F)$. В частности, если ρ неприводимо, то $\dim V=1$. Идеалы алгебры $\mathfrak{g}$ можно выбрать образующими полный флаг, т. е. такими, что $\dim\mathfrak{g}_i=\dim\mathfrak{g}-i$.

Конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем характеристики 0 разрешима тогда и только тогда, когда алгебра $D^2\mathfrak{g}=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ нильпотентна. Другой критерий разрешимости (к р и т е р и й К а р т а н а): алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда $D^1\mathfrak{g}$ ортогонально всей $\mathfrak{g}$ относительно *Киллинга формы* (или любой билинейной формы, ассоциированной с точным конечномерным представлением алгебры $\mathfrak{g}$).

Ли р. а. впервые рассмотрел С. Ли (S. Lie) в связи с изучением разрешимых групп Ли преобразований. Изучение Ли р. а. приобрело большое значение после введения понятия р а д и к а л а (т. е. наибольшего разрешимого идеала) произвольной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и доказано, что в случае $\mathrm{char}K=0$ алгебра $\mathfrak{g}$ является полупрямой суммой своего радикала и максимальной полупростой подалгебры (см. *Леви — Мальцева разложение*). Это позволило свести задачу классификации произвольных алгебр Ли к перечислению полупростых (что для $K=\mathbb{C}$ было сделано уже В. Киллингом) и разрешимых алгебр. Классификация же Ли р. а. проведена (для $K=\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$) лишь в размерностях $\leqslant 6$.

Если $\mathfrak{g}$ — *разрешимая* алгебраич. подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, где V — конечномерное пространство над полем K характеристики 0, то $\mathfrak{g}$ разлагается в полупрямое произведение нильпотентного идеала, образуемого всеми нильпотентными преобразованиями из $\mathfrak{g}$ и нек-рой абелевой подалгебры, состоящей из полупростых преобразований [6]. Аналогичное строение имеет вообще любая р а с щ е п л я е м а я Ли р. а., т. е. конечномерная Ли р. а. над K, каждый элемент x к-рой разлагается в сумму $x=s+n$, где $s, n\in\mathfrak{g}$, $[s, n]=0$, s полупрост, а n нильпотентен [8]. Каждой конечномерной Ли р. а. над K однозначно сопоставляется минимальная содержащая ее расщепляемая Ли р. а. (р а с щ е п л е н и е М а л ь ц е в а). Решена [8] также задача классификации Ли р. а., имеющих заданное расщепление Мальцева. Таким образом, задача классификации Ли р. а. сводится, в известном смысле, к изучению нильпотентных алгебр Ли.

Кроме радикала, в произвольной конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ выделяют максимальные разрешимые подалгебры. Если K — алгебраически замкнутое поле характеристики 0, то все такие подалгебры в $\mathfrak{g}$ (они наз. б о р е л е в с к и м и) сопряжены. Напр., $\mathfrak{t}(n, K)$ является борелевской подалгеброй в алгебре Ли всех матриц порядка n. Если K не является алгебраически замкнутым или $\mathrm{char}K$ конечна, то теорема Ли, вообще говоря, не верна. Однако она распространяется на случай, когда K совершенно и содержит характеристич. корни всех $\rho(x)$, $x\in\mathfrak{g}$. Если это условие выполнено для присоединенного представления Ли р. а. $\mathfrak{g}$,

то $\mathfrak{g}$ наз. треугольной. На треугольные алгебры Ли переносятся многие свойства Ли р. а. над алгебраически замкнутым полем. В частности, если char $K=0$, то все максимальные треугольные подалгебры в произвольной конечномерной алгебре Ли сопряжены (см. [1], [7]). Максимальные треугольные подалгебры используются при изучении полупростых алгебр Ли над алгебраически незамкнутым полем в качестве хорошего аналога борелевских подалгебр. Они играют также основную роль в описании связных равномерных подгрупп в группах Ли [9].

Лит.: [1] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; [2] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [3] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [4] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [5] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [6] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958; [7] Винберг Э. Б., «Докл. АН СССР», 1961, т. 141, с. 270—73; [8] Мальцев А. И., Избр. труды, т. 1, М., 1976, с. 155—76; [9] Онищик А. Л., «Матем. сб.», 1967, т. 74, с. 398—416.

В. В. Горбацевич.

ЛИ РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА — группа Ли, разрешимая как абстрактная группа. В дальнейшем рассматриваются вещественные или комплексные Ли р. г.

Нильпотентная, в частности абелева, группа Ли разрешима. Если $F=\{V_i\}$ — полный *флаг* в конечномерном векторном пространстве V (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то

$$B(F)=\{g\in \mathrm{GL}(V)\mid gV_i\subset V_i,\ \forall i\}$$

является разрешимой алгебраич. подгруппой в $\mathrm{GL}(V)$ и, в частности, Ли р. г. Если в V выбрать базис, согласованный с флагом F, то в нем элементы группы $B(F)$ *представятся невырожденными верхними* треугольными матрицами; полученная матричная Ли р. г. обозначается через $T(n, K)$, где $K=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G разрешима тогда и только тогда, когда разрешима связная компонента единицы $(G)_0$ группы G. Алгебрами Ли групп $B(F)$ и $T(n, K)$ являются соответственно $\mathfrak{t}(F)$ и $\mathfrak{t}(n, K)$ (см. *Ли разрешимая алгебра*). В силу соответствия между подалгебрами в $\mathfrak{g}$ и связными подгруппами Ли в G на Ли р. г. переносятся все свойства разрешимой алгебры Ли (см. [1], [3]).

Для Ли р. г. справедлив аналог теоремы Ли о разрешимых алгебрах Ли: если $\rho: G\to \mathrm{GL}(V)$ — конечномерное комплексное представление Ли р. г. G, то существует полный флаг F в V такой, что $\rho(G)\subset B(G)$. В частности, в V существует общий собственный вектор для всех $\rho(g)$, $g\in G$.

Ли р. г. были впервые рассмотрены С. Ли (S. Lie), предполагавшим, что непрерывные группы могут играть в теории интегрирования в квадратурах дифференциальных уравнений ту же роль, что группа Галуа в теории алгебраич. уравнений. Однако, вообще говоря, группа автоморфизмов дифференциального уравнения тривиальна, и поэтому только для линейных и нек-рых других уравнений в этом направлении получены содержательные результаты. Так, для этих уравнений выразимость решений через квадратуры и экспоненты от них фактически эквивалентна разрешимости соответствующей (матричной) группы Галуа [2]. Если же эта группа нильпотентна, то экспоненты от квадратур в решение не входят.

В силу теоремы Леви — Мальцева о разложении в полупрямое произведение произвольной связной односвязной группы Ли Ли р. г. играют существенную роль при изучении произвольных групп Ли. В произвольной связной группе Ли G рассматриваются также максимальные разрешимые подгруппы. Если $K=\mathbb{C}$, то они наз. борелевскими и сопряжены в группе G. Напр., $B(F)$ — борелевская подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$.

Односвязная Ли р. г. всегда имеет точное конечномерное представление, для неодносвязных это не всегда так. В односвязной Ли р. г. произвольная связная подгруппа замкнута и односвязна [6]. Экспоненциальное отображение exp: $\mathfrak{g} \to G$ даже для односвязной Ли р. г. не обязано быть ни инъективным, ни сюръективным. Ли р. г., для к-рых exp — диффеоморфизм, наз. э к с п о н е н ц и а л ь н ы м и (см. *Ли экспоненциальная группа*). Односвязная Ли р. г. диффеоморфна $\mathbb{R}^N$, а произвольная связная Ли р. г. — $\mathbb{R}^n \times T^m$, где T^m есть m-мерный тор.

Связная линейная Ли р. г. над $\mathbb{R}$ представляется в виде полупрямого произведения $K \cdot S$, где K — компактная абелева подгруппа, а S — односвязный нормальный делитель. Алгебраическая связная разрешимая группа над любым полем характеристики 0 разлагается в полупрямое произведение нормального делителя, состоящего из унипотентных элементов, и абелевой подгруппы, состоящей из полупростых элементов [3]. Для связных Ли р. г. можно определить [4] аналог расщепления Мальцева.

Если алгебра Ли связной группы Ли G треугольна (над $\mathbb{R}$), то G наз. т р е у г о л ь н о й. Для треугольных групп Ли справедлив аналог *Ли теоремы* о разрешимых алгебрах. Максимальные связные треугольные подгруппы в произвольной связной группе Ли сопряжены [5]. Связная треугольная группа Ли изоморфна подгруппе в $T(n, \mathbb{R})$ и является экспоненциальной группой, если она односвязна.

Лит.: [1] Б у р б а к и Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [2] К а п л а н с к и й И., Введение в дифференциальную алгебру, пер. с англ., М., 1959; [3] Ш е в а л л е К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958; [4] A u s l a n d e r L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1973, v. 79, p. 227—61; [5] В и н б е р г Э. Б., «Докл. АН СССР», 1961, т. 141, с. 270—73; [6] М а л ь ц е в А. И., Избр. труды, т. 1, М., 1976, с. 177—200.

В. В. Горбацевич.

ЛИ РЕДУКТИВНАЯ АЛГЕБРА — конечномерная алгебра Ли над полем k характеристики 0, присоединенное представление к-рой вполне приводимо. Свойство редуктивности алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равносильно любому из следующих свойств:

1) радикал $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ совпадает с центром $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$;

2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{g}_0$, где $\mathfrak{g}_0$ — полупростой идеал в $\mathfrak{g}$;

3) $\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{g}_i$, где $\mathfrak{g}_i$ — простые идеалы;

4) $\mathfrak{g}$ допускает точное вполне приводимое конечномерное линейное представление.

Свойство редуктивности алгебры Ли сохраняется как при расширении, так и при сужении основного поля k.

Важный класс Ли р. а. над $k = \mathbb{R}$ составляют компактные алгебры Ли (см. *Ли компактная группа*). Группу Ли, алгебра Ли к-рой редуктивна, часто наз. р е д у к т и в н о й г р у п п о й Л и. Если k алгебраически замкнуто, то алгебра Ли над k является редуктивной тогда и только тогда, когда она изоморфна алгебре Ли нек-рой редуктивной алгебраич. группы над k.

Обобщением понятия Ли р. а. является следующее понятие. Подалгебра $\mathfrak{h}$ конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над k наз. р е д у к т и в н о й в $\mathfrak{g}$, если присоединенное представление $\mathrm{ad}: \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ вполне приводимо. В этом случае $\mathfrak{h}$ будет Ли р. а. Если k алгебраически замкнуто, то для редуктивности подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ необходимо и достаточно следующее условие: $\mathrm{ad}\, \mathfrak{r}(\mathfrak{h})$ состоит из полупростых линейных преобразований.

Лит.: [1] С е р р Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969.

А. Л. Онищик.

ЛИ СВОБОДНАЯ АЛГЕБРА н а д к о л ь ц о м R — алгебра Ли $L = L(X)$ над R, в к-рой выделено

свободное порождающее множество X, любое отображение к-рого в произвольную алгебру G над R продолжается до гомоморфизма из L в G. Мощность множества X вполне определяет $L(X)$ и наз. ее р а н г о м. Ли с. а. есть свободный R-модуль (о базисах к-рого см. *Базисный коммутатор*). Подалгебра M Ли с. а. над полем сама является Ли с. а. (т е о р е м а Ш и р ш о в а [1]). Если же $R=\mathbb{Z}$, то это верно лишь при условии, что L/M — свободная абелева группа [2]. Конечно порожденные подалгебры в Ли с. а. над полем образуют подрешетку в решетке всех подалгебр [3]. Установлены [4] канонич. связи Ли с. а. со свободными группами и свободными ассоциативными алгебрами.

Лит.: [1] Ш и р ш о в А. И., «Матем. сб.», 1953, т. 33, № 2, с. 441—52; [2] W i t t E., «Math. Z.», 1956, Bd 64, S. 195—216; [3] К у к и н Г. П., «Алгебра и логика», 1977, т. 16, № 5, с. 577—85; [4] M a g n u s W., «J. reine und angew. Math.», 1937, Bd 177, S. 105—15. *Ю. А. Бахтурин.*

ЛИ СКОБКА — коммутатор векторных полей на дифференцируемом многообразии. Если интерпретировать векторные поля класса C^∞ на дифференцируемом (класса C^∞) многообразии M как дифференцирования алгебры $F(M)$ функций класса C^∞ на M, то Ли с. полей X и Y задается формулой

$$[X\ Y]f=X(Yf)-Y(Xf),$$

где $f\in F(M)$. Совокупность всех векторных полей класса C^∞ на M является алгеброй Ли относительно Ли с. *А. Л. Онищик.*

ЛИ ТЕОРЕМА — 1) Ли т.— одна из трех классич. теорем теории групп Ли, описывающих связь *Ли локальной группы* с ее алгеброй Ли. Ли т. составляют фундамент теории, развитой в 19 в. С. Ли (S. Lie) и его школой (см. [1]).

Пусть G — r-мерная вещественная эффективная локальная *Ли группа преобразований* области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, e — единица группы G и пусть в локальных координатах в окрестности множества $\{e\}\times\Omega$ в $G\times\Omega$ действие группы G на Ω задано набором аналитич. функций

$$y_i=f_i(g_1,\ \ldots,\ g_r;\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\quad i=1,\ \ldots,\ n. \tag{1}$$

где $g=(g_1,\ \ldots,\ g_r)\in G$, $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)\in\Omega$ и $g(x)=y=(y_1,\ \ldots,\ y_n)\in\Omega$. Указанное действие определяет на Ω r аналитич. векторных полей

$$X_i=\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}(x)\,\frac{\partial}{\partial x_j},\quad i=1,\ \ldots,\ r, \tag{2}$$

где $\xi_{ij}(x)=\dfrac{\partial f_j}{\partial g_i}(e,\ x)$.

Первая теорема Ли устанавливает, что функции f_j, $j=1,\ \ldots,\ n$, определяющие действие группы G, сами определяются по нек-рому вспомогательному набору аналитич. функций $\psi_{ki}(g)$, $k,\ i=1,\ \ldots,\ r$, на G, удовлетворяющих условию

$$\psi_{ki}(e)=\delta_{ki}, \tag{3}$$

δ_{ki} — символ Кронекера. Точнее, $(\psi_{ki}(g))$ — это матрица дифференциала правого сдвига на группе G на элемент g^{-1} в точке g, а набор функций (1) — это в точности решение системы уравнений

$$\frac{\partial f_j}{\partial g_i}(g,\ x)=\sum_{k=1}^{r}\xi_{kj}(f(g,\ x))\,\psi_{ki}(g),\ i=1,\ \ldots,\ r;\quad j=1,\ \ldots,\ n, \tag{4}$$

удовлетворяющее начальным условиям $f_j(e,\ x)=x$, $j=1,\ \ldots,\ n$).

Вторая теорема Ли описывает свойства функций $\xi_{ij}(x)$ и $\psi_{ki}(g)$. А именно, $\xi_{ij}(x)$ удовлетво-

ряют системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_{ik}\frac{\partial\xi_{jl}}{\partial x_k}-\xi_{jk}\frac{\partial\xi_{il}}{\partial x_k}\right)=\sum_{k=1}^{r}c_{ij}^{k}\xi_{kl}, \qquad (5)$$

$$1\leqslant i,\ j\leqslant r,\ 1\leqslant l\leqslant n$$

(эта система есть условие интегрируемости системы (4)), а функции $\psi_{kl}(g)$ — в системе уравнений

$$\frac{\partial\psi_{kl}}{\partial g_m}-\frac{\partial\psi_{km}}{\partial g_l}=\sum_{i,\ j=1}^{r}c_{ji}^{k}\psi_{im}\psi_{jl},\quad 1\leqslant k,\ l,\ m\leqslant r,$$

где c_{ij}^{k} — нек-рые константы. Соотношения (5) означают, что коммутатор (скобка Ли) $[X_i,\ X_j]$ векторных полей X_i и X_j является линейной комбинацией полей $X_1,\ \ldots,\ X_r$ с постоянными коэффициентами

$$[X_i,\ X_j]=\sum_{k=1}^{r}c_{ij}^{k}X_k, \qquad (6)$$

т. е. что линейная оболочка $\mathfrak{g}$ полей $X_1,\ \ldots,\ X_r$ является алгеброй относительно скобки Ли.

Обращение первой и второй теорем Ли состоит в следующем: если функции $f_1,\ \ldots,\ f_n$ дают решение системы (4), в к-рой матрица $\|\xi_{ij}\|$ имеет максимальный ранг, и выполнены условия (3) и (5), то формула (1) определяет локальную эффективную группу Ли преобразований. Эта локальная группа порождена однопараметрич. группами преобразований, заданными формулой (2).

Третья теорема Ли утверждает, что константы c_{ij}^{k} удовлетворяют следующим соотношениям:

$$c_{ij}^{k}=-c_{ji}^{k},$$

$$\sum_{l=1}^{r}(c_{il}^{m}c_{jk}^{l}+c_{kl}^{m}c_{ij}^{l}+c_{jl}^{m}c_{ki}^{l})=0,\ 1\leqslant i,\ j,\ k,\ l,\ m\leqslant r, \qquad (7)$$

т. е. $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли. Важное значение имеет обращение третьей теоремы Ли: если c_{ij}^{k} — любые константы, удовлетворяющие соотношениям (7), то существует система векторных полей $X_1,\ \ldots,\ X_r$, удовлетворяющих соотношениям (6), и эти векторные поля возникают с помощью описанной выше конструкции из нек-рой локальной группы Ли преобразований (иначе говоря, всякая конечномерная алгебра Ли есть алгебра Ли нек-рой локальной группы Ли преобразований). Иногда (см., напр., [4]) третьей теоремой Ли наз. утверждение о существовании для каждой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ глобальной группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (см. *Ли алгебра аналитической группы*).

2) Ли т. о разрешимых алгебрах Ли: пусть φ — линейное представление конечномерной разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{b}$ в векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем характеристики 0; тогда в V существует такой базис, в к-ром все операторы X из $\varphi(\mathfrak{b})$ записываются верхнетреугольными матрицами. Аналогичное утверждение справедливо и для линейного непрерывного представления связной топологической разрешимой группы в конечномерном комплексном векторном пространстве (теоретико-групповой аналог Ли т.); предположение о связности группы является существенным. Вариант теоретико-группового аналога Ли т. известен под названием *Ли — Колчина теорема*.

Лит.: [1] Lie S., Engel F., Theorie der Transformationsgruppen, Bd 1—3, Lpz., 1888—93; [2] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [3] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [4] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [5] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958; [6] Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, М.—Л., 1940.

В. Л. Попов.

ЛИ ТРОЙНАЯ СИСТЕМА — векторное пространство $\mathfrak{m}$ с трилинейной композицией

$$\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\to\mathfrak{m},\quad (X, Y, Z)\to[X, Y, Z],$$

удовлетворяющей следующим условиям:

$$[X, X, Y]=0,$$
$$[X, Y, Z]+[Y, Z, X]+[Z, X, Y]=0,$$
$$[X, Y, [Z, U, V]]=[[X, Y, Z], U, V]+[Z, [X, Y, U], V]+[Z, U, [X, Y, V]].$$

Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{m}\subset\mathfrak{g}$ — такое подпространство, что $[[X, Y], Z]\in\mathfrak{m}$ для любых $X, Y, Z\in\mathfrak{m}$, то операция

$$[X, Y, Z]=[[X, Y], Z]$$

превращает $\mathfrak{m}$ в Ли т. с. Обратно, всякая Ли т. с. может быть получена таким способом из нек-рой алгебры Ли.

Категория конечномерных Ли т. с. над полем $\mathbb{K}$ эквивалентна категории односвязных симметрических однородных пространств (см. *Симметрическое пространство*).

Лит.: [1] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [2] Loos O., Symmetric spaces, v. 1, N. Y.— Amst., 1969.

А. С. Феденко.

ЛИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА, алгебра Ли типа (E),— конечномерная вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}$, для любого элемента X к-рой оператор присоединенного представления $\mathrm{ad}X$ не имеет чисто мнимых собственных значений. Экспоненциальное отображение $\exp:\mathfrak{g}\to G$ в соответствующую алгебре $\mathfrak{g}$ односвязную группу Ли G является диффеоморфизмом, а G — *Ли экспоненциальной группой.*

Каждая Ли э. а. разрешима. Нильпотентная алгебра Ли над $\mathbb{R}$ есть Ли э. а. Класс Ли э. а. является промежуточным между классами всех разрешимых и вполне разрешимых алгебр Ли; он замкнут относительно перехода к подалгебрам, факторалгебрам и конечным прямым суммам, но не замкнут относительно расширений.

Простейшим примером Ли э. а., не являющейся вполне разрешимой алгеброй Ли, является трехмерная алгебра Ли с базисом X, Y, Z и умножением, заданным формулами $[X, Y]=0$, $[Z, X]=a_{11}X+a_{12}Y$, $[Z, Y]=a_{21}X+a_{22}Y$, где $[a_{ij}]$ — действительная матрица, имеющая комплексные, но не чисто мнимые собственные значения. Трехмерная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ с базисом X, Y, Z и определяющими соотношениями

$$[X, Y]=0,\quad [Z, X]=Y,\quad [Z, Y]=-X$$

разрешима, но не является Ли э. а.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ экспоненциальна тогда и только тогда, когда все корни алгебры $\mathfrak{g}$ имеют вид $\alpha+i\beta$, где α, β — вещественные линейные формы на $\mathfrak{g}$, причем β пропорциональна α (см. [1]), или же когда $\mathfrak{g}$ не имеет факторалгебр, содержащих подалгебру, изоморфную $\mathfrak{g}_0$.

Лит. см. при ст. *Ли экспоненциальная группа.*

В. В. Горбацевич.

ЛИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ГРУППА, группа Ли типа (E),—вещественная конечномерная группа Ли G, для к-рой экспоненциальное отображение $\exp:\mathfrak{g}\to G$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, является диффеоморфизмом.

Любая Ли э. г. разрешима, односвязна, а ее алгебра Ли является *Ли экспоненциальной алгеброй.* Класс Ли э. г. замкнут относительно перехода к связной подгруппе, факторгруппе по связному нормальному делителю и к конечному прямому произведению, но не замкнут относительно расширений. Всякая *Ли вполне разрешимая группа* (в частности, нильпотентная группа Ли) экспоненциальна, если она односвязна.

Пересечение связных подгрупп в Ли э. г. связно. Централизатор произвольного подмножества тоже связен. Связная группа Ли экспоненциальна тогда и только тогда, когда она не имеет факторгрупп, содержащих в качестве подгруппы универсальную накрывающую группы движений евклидовой плоскости.

Лит.: [1] Dixmier J., «Bull. Soc. Math. France», 1957, t. 85, p. 113—21; [2] Saitô M., «Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo Sci. Papers», 1957, v. 7, p. 1—11, p. 157—68. *В. В. Горбацевич.*

ЛИ — КОЛЧИНА ТЕОРЕМА: разрешимая подгруппа G группы $GL(V)$ (V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем) имеет нормальный делитель G_1 индекса не более ρ, где ρ зависит только от $\dim V$, такой, что в V существует флаг $F=\{V_i\}$, инвариантный относительно G_1. Другими словами, в V найдется базис, в к-ром элементы из G_1 записываются треугольными матрицами. Если G связна в топологии Зарискоro, то $G_1=G$; в этом случае Л.—К. т. является обобщением теоремы С. Ли (S. Lie), доказанной им для комплексных связных (в евклидовой топологии) разрешимых групп Ли (см. *Ли разрешимая группа*, *Ли теорема*). Это утверждение можно рассматривать также как частный случай *Бореля теоремы* о неподвижной точке.

Для произвольного поля справедлив следующий аналог Л.—К. т.: разрешимая группа матриц содержит нормальный делитель конечного индекса, коммутант к-рого нильпотентен.

Л.—К. т. была доказана Э. Колчиным [1] (для связных групп) и А. И. Мальцевым [2] (в общей формулировке). Ее наз. также иногда теоремой Колчина — Мальцева.

Лит.: [1] Kolchin E. R., «Ann. Math.», 1948, v. 49, № 4, p. 1—42; [2] Мальцев А. И., Избр. труды, т. 1, М., 1976, с. 294—313; [3] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977. *В. В. Горбацевич.*

ЛИНДЕБЕРГА — ФЕЛЛЕРА ТЕОРЕМА — теорема, устанавливающая условия асимптотич. нормальности функции распределения суммы независимых случайных величин, обладающих конечными дисперсиями. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с математич. ожиданиями $a_1, a_2, \ldots$ и конечными дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$, не все из к-рых равны нулю. Пусть

$$B_n^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2, \quad V_j(x)=\mathsf{P}\{X_j<x\}.$$

Для того чтобы

$$B_n^{-2}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sigma_j^2\longrightarrow 0$$

и

$$\mathsf{P}\left\{B_n^{-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j-a_j)<x\right\}\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,dt$$

для любого x при $n\to\infty$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия (условия Линдеберга):

$$B_n^{-2}\sum_{j=1}^{n}\int_{|x-a_j|\geqslant\varepsilon B_n}(x-a_j)^2\,dV_j(x)\longrightarrow 0$$

при $n\to\infty$ для любого $\varepsilon>0$. Достаточность была доказана Дж. Линдебергом [1], необходимость — В. Феллером [2].

Лит.: [1] Lindeberg J. W., «Math. Z.», 1922, Bd 15, S. 211—25; [2] Feller W., «Math. Z.», 1935, Bd 40, S. 521—559; [3] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [4] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972. *В. В. Петров.*

ЛИНДЕЛЁФА ГИПОТЕЗА о поведении ζ-функции Римана: для любого $\varepsilon>0$ выполняется

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|\zeta(1/2+it)|}{|t|^{\varepsilon}}=0$$

Высказана Э. Линделёфом [1]. Л. г. эквивалентна утверждению: при фиксированном $\sigma \in (1/2, 1)$ число нулей $\zeta(s)$, лежащих в области $\mathrm{Re}\, s > \sigma$, $T < \mathrm{Im}\, s < T+1$, есть $o(\ln T)$. Поэтому Л. г. является следствием гипотезы Римана о нулях $\zeta(s)$. Известно (1982), что

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{|\zeta(1/2 + it)|}{t^c} = 0,$$

где c — нек-рая постоянная, $0 < c < 6/37$.

Имеются обобщения Л. г. на L-функции Дирихле: для любого $\varepsilon > 0$ имеет место

$$L(1/2 + t, \chi) = O((k|t|+1)^{\varepsilon}),$$

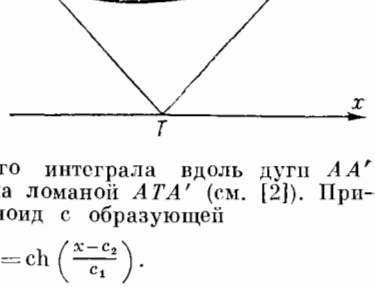
где k — модуль характера χ.

Лит.: [1] Lindelöf E., Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, P., 1905; [2] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функций Римана, пер. с англ., М., 1953, гл. XIII.

С. М. Воронин.

ЛИНДЕЛЁФА КОНСТРУКЦИЯ — геометрическое построение для исследования сопряженных точек в задаче о минимальной поверхности вращения (рис.). Л. к. остается пригодной для любой простейшей вариационной задачи на плоскости (x, y), для к-рой общий интеграл уравнения Эйлера можно представить в виде

$$\frac{y}{c_1} = f\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right).$$



При этом касательные к экстремали в сопряженных точках A и A' пересекаются в нек-рой точке на оси x, а значение варьируемого интеграла вдоль дуги AA' равно его значению на ломаной ATA' (см. [2]). Примером является катеноид с образующей

$$\frac{y}{c_1} = \mathrm{ch}\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right).$$

Лит.: [1] Lindelöf E., Leçons de calcul des variations, P., 1861; [2] Bolza O., «Bull. math. soc.», 1911, t. 18, N 3, p. 107—10; [3] Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen, B.— Lpz., 1935.

В. В. Охрименко.

ЛИНДЕЛЁФА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — полунепрерывный метод суммирования числовых и функциональных рядов, определенный последовательностью функций

$$g_0(\delta) = 1, \quad g_k(\delta) = \exp(-\delta k \ln k), \quad \delta > 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

суммируем м е т о д о м с у м м и р о в а н и я Л и н д е л ё ф а к сумме s, если

$$\lim_{\delta \to 0} \left[u_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\delta k \ln k)\, u_k \right] = s$$

и ряд под знаком предела сходится. Метод был введен Э. Линделёфом [1] для суммирования степенных рядов.

Л. м. с. является регулярным (см. *Регулярные методы суммирования*) и применяется как аппарат для аналитич. продолжения функций. Если $f(z)$ — главная ветвь аналитич. функции, регулярной в нуле и представимой рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

для малых z, то этот ряд суммируем Л. м. с. к $f(z)$ во всей звезде функции $f(z)$, причем равномерно во

всякой замкнутой ограниченной области, содержащейся внутри звезды.

Из методов суммирования, определенных преобразованием последовательности в последовательность полунепрерывными матрицами $a_k(\omega)$ типа

$$a_k(\omega) = \frac{c_{k+1}\omega^{k+1}}{E(\omega)},$$

где

$$E(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega^k$$

— целая функция, Э. Линделёфом рассматривался случай, когда

$$E(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\omega}{\ln(k+\beta)}\right]^k, \quad \beta > 1.$$

Матрицу $\| a_k(\omega) \|$ с такой целой функцией наз. м а т р и ц е й Л и н д е л ё ф а.

Лит.: [1] L i n d e l ö f E., «J. math.», 1903, t. 9, p. 213—221; [2] е г о ж е, Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, P., 1905; [3] Х а р д и Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [4] К у к Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960.

И. И. Волков.

ЛИНДЕЛЁФА ПРИНЦИП — основной качественный вариационный принцип в теории конформного отображения, найденный Э. Линделёфом [1]. Пусть односвязные области D и $\tilde{D}$ на плоскости комплексного переменного z таковы, что их границы Γ и $\tilde{\Gamma}$ соответственно состоят из конечного числа жордановых дуг, причем $\tilde{D}$ содержится в D, и пусть точка $z_0 \in \tilde{D} \subset D$. Пусть, кроме того, $w=f(z)$ и $w=\tilde{f}(z)$ — функции, реализующие конформное отображение соответственно D и $\tilde{D}$ на единичный круг $\Delta = \{w: |w|<1\}$, причем $f(z_0)=0$, $\tilde{f}(z_0)=0$. П р и н ц и п Л и н д е л ё ф а состоит в том, что при этих условиях: 1) прообраз $\tilde{D}_\rho$ области $|w|<\rho$, $0<\rho<1$, при отображении $w=\tilde{f}(z)$ лежит внутри прообраза D_ρ этой же области $|w|<\rho$ при отображении $w=f(z)$, причем соприкосновение их границ $\tilde{\Gamma}_\rho$ и Γ_ρ возможно лишь, если $\tilde{D}=D$; 2) $|\tilde{f}'(z_0)| \geqslant |f'(z_0)|$, причем знак равенства возможен лишь, если $\tilde{D}=D$; 3) если существует общая точка z_1 контуров $\tilde{\Gamma}$ и Γ, то

$$|\tilde{f}'(z_1)| \leqslant |f'(z_1)|,$$

причем знак равенства возможен лишь, если $\tilde{D}=D$. Иными словами, при вдавливании внутрь границы Γ области D: 1) все л и н и и у р о в н я Γ_ρ, т. е. прообразы окружностей $|w|=\rho$, сжимаются; 2) растяжение в точке z_0 увеличивается; 3) растяжение в неподвижных точках z_1 границы уменьшается.

Из приведенной формулировки Л. п. вытекает также, что длина образа дуги γ границы Γ, подвергшейся вдавливанию до дуги $\tilde{\gamma}$, всегда не превосходит длины образа $\tilde{\gamma}$ (длина $f(\gamma) \leqslant$ длины $\tilde{f}(\tilde{\gamma})$), причем равенство имеет место только в случае $\tilde{\Gamma}=\Gamma$. Это следствие Л. п. известно также как п р и н ц и п М о н т е л я.

В более общей ситуации, когда $\tilde{D}$ и D — конечносвязные области, ограниченные конечным числом жордановых кривых и расположенные соответственно в плоскостях z и w, $w=f(z)$ — мероморфная функция в $\tilde{D}$, значения к-рой лежат в D, Л. п. состоит в следующем. Если w_0 — точка образа $f(\tilde{D})$ области $\tilde{D}$; $\{z_\nu\}$, $\nu=0, 1, \ldots$,— множество точек $\tilde{D}$, для к-рых $f(z_\nu)=w_0$; m_ν — кратность нуля z_ν функции $f(z)-w_0$; $g(z, z_\nu)$ — *Грина функция* области $\tilde{D}$ с полюсом z_ν,

а $g(w, w_0)$ — функция Грина области D с полюсом w_0, то имеет место неравенство

$$g(w, w_0) \geqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} m_\nu \tilde{g}(z, z_\nu) \qquad (1)$$

для всех $z \in \tilde{D}$, $w = f(z)$. При этом если в (1) имеет место равенство хотя бы в одной точке $z \in \tilde{D}$, то оно выполняется всюду в $\tilde{D}$. В частности, неравенство

$$g(w, w_0) \geqslant \tilde{g}(z, z_0), \qquad (2)$$

вытекающее из (1), и было получено Э. Линделёфом в [1]. Оно означает, что образ области $\{z: \tilde{g}(z, z_0) > \lambda\}$ всегда расположен внутри области $\{w : g(w, w_0) > \lambda\}$.

Л. п. в общем виде (1) применим и для произвольных областей $\tilde{D}$, D, но заключение, относящееся к случаю равенства, здесь уже, вообще говоря, не справедливо. Л. п. позволяет получить многие количественные оценки изменения конформного отображения при вариации области (см. [3]). Он тесно связан с *подчинения принципом*, и его можно также рассматривать как обобщение *Шварца леммы*.

Лит.: [1] Lindelöf E., «Acta soc. scient. fennica», 1908, v. 35, № 7; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд., М., 1965; [4] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 2, М., 1962; [5] Лаврентьев М. А., Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, М., 1962.

Е. Д. Соломенцев.

ЛИНДЕЛЁФА ПРОСТРАНСТВО, финально компактное пространство,— топологическое пространство X такое, что всякое его открытое покрытие содержит счетное подпокрытие. Напр., всякое пространство со счетной базой есть Л. п.; всякое *квазикомпактное пространство* есть Л. п. Всякое замкнутое подпространство Л. п. есть Л. п. Для каждого непрерывного отображения f Л. п. в топологич. пространство X' подпространство $f(X')$ последнего — Л. п. Всякое отделимое пространство, являющееся объединением счетного семейства (би)компактных множеств,— Л. п. Всякое регулярное Л. п. паракомпактно. Произведение Л. п. и (би)компактного пространства есть Л. п.

М. И. Войцеховский.

ЛИНДЕЛЁФА ТЕОРЕМА об асимптотических значениях: 1) Пусть $w = f(z)$ — ограниченная регулярная аналитич. функция в единичном круге $D = \{z: |z| < 1\}$ и пусть α — асимптотич. значение $f(z)$ вдоль жорданового пути L, расположенного в D и оканчивающегося в точке $e^{i\theta_0}$, т. е. $f(z) \to \alpha$, когда $z \to e^{i\theta_0}$ вдоль L. Тогда α есть угловое предельное значение функции $f(z)$ в точке $e^{i\theta_0}$, т. е. $f(z)$ равномерно стремится к α, когда $z \to e^{i\theta_0}$ внутри любого угла с вершиной $e^{i\theta_0}$, образованного двумя хордами круга $|z| < 1$.

Эта Л. т. верна и в областях D других типов, причем условия на $f(z)$ удается значительно расширить. Достаточно, напр., потребовать, чтобы $f(z)$ была мероморфной функцией в D, не принимающей трех различных значений. Л. т. обобщается также для функций $f(z)$ многих комплексных переменных, $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Напр., если $f(z)$ — ограниченная голоморфная функция в шаре $D = \{z: |z| < 1\}$, имеющая асимптотич. значение α вдоль некасательного пути L в точке $\zeta \in \partial D$, то α есть некасательное предельное значение $f(z)$ в точке ζ (см. [4]).

2) Пусть $w = f(z)$ — ограниченная регулярная аналитич. функция в круге $D = \{z: |z| < 1\}$, имеющая вдоль двух различных путей L_1 и L_2, оканчивающихся в точке $e^{i\theta_0}$, асимптотич. значения α и β. Тогда $\alpha = \beta$ и $f(z) \to \alpha$ равномерно внутри угла между путями L_1 и L_2. Эта Л. т. верна и для областей D других типов.

Для неограниченных функций она, вообще говоря, неверна.

Л. т. найдены Э. Линделёфом [1].

Лит.: [1] Lindelöf E., «Acta Soc. scient. fennica», 1915, t. 46, № 4; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Коллингвуд Э. Ф., Ловатер А. Дж., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [4] Хенкин Г. М., Чирка Е. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 13—142.

Е. Д. Соломенцев.

ЛИНДЕМАНА ТЕОРЕМА: показательная функция e^z в любой алгебраич. точке $z\neq 0$ принимает трансцендентное значение; доказана Ф. Линдеманом (F. Lindemann, 1882). Л. т. называют также следующее более общее утверждение, сформулированное без доказательства Ф. Линдеманом и доказанное К. Вейерштрассом (K. Weierstrass) в 1885.

Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — алгебраич. числа, $|a_1|+\ldots+|a_m|\neq 0$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — попарно различимые алгебраич. числа, тогда

$$a_1e^{\alpha_1}+\ldots+a_me^{\alpha_m}\neq 0.$$

Это утверждение эквивалентно следующему: если $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — алгебраич. числа, линейно независимые над полем рациональных чисел, то числа $e^{\beta_1}, \ldots, e^{\beta_n}$ алгебраически независимы.

Метод доказательства Л. т. получил название метода Эрмита — Линдемана. Он представляет собой развитие метода Эрмита, при помощи к-рого в 1873 была доказана трансцендентность числа e, и основывается на применении *Эрмита тождества* к нек-рым специально построенным многочленам.

Из Л. т. может быть выведена трансцендентность числа π, отрицательное решение проблемы квадратуры круга, а также трансцендентность значений функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ при алгебраическом $z\neq 0$ и значений функций $\ln z$ при алгебраическом $z\neq 0, 1$.

Лит.: [1] Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952; [2] Фельдман Н. И., Шидловский А. Б., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 3, с. 3—81.

А. И. Галочкин.

ЛИНЕАРИЗАЦИИ МЕТОДЫ — методы, позволяющие свести решение нелинейных задач к последовательному решению родственных линейных задач.

Пусть рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$L(u)=f, \tag{1}$$

где оператор L отображает банахово пространство H в себя, $L(0)=0$, и дифференцируем по Фреше. Одним из классич. методов решения (1), связанным с линеаризацией (1), является итерационный метод Ньютона — Канторовича, в к-ром при известном приближении u^n новое приближение u^{n+1} определяется как решение линейного уравнения

$$L'_{u^n}(u^{n+1}-u^n)+L(u^n)=f; \tag{2}$$

основой метода служит аппроксимация $L(u^n+z)$ (при малых $\|z\|$) выражением $L'_{u^n}z$, где L'_{u^n} — производная Фреше оператора L в точке u^n. Различные модификации этого метода и соответствующие оценки скорости сходимости могут быть найдены в [1] — [4]. Само операторное уравнение (1) может соответствовать, напр., нелинейной краевой задаче для уравнения с частными производными (см. [2], [4], [5]), и тогда на каждом шаге в (2) должна решаться линейная краевая задача, что вызывает необходимость применения численных методов и той или иной дискретизации исходной задачи и родственных ей линейных задач. С вычислительной точки зрения более естественно рассматривать методы линеаризации после соответствующей дискретизации

исходной задачи, считая (1) операторным уравнением в конечномерном пространстве.

Другим примером Л. м. для приближенного решения (1) может служить итерационный метод секущих (ложного положения) (см. [2], [3]). Во многих случаях для задач (1), являющихся задачами математич. физики, линеаризацию $L(u^n+z)$ предпочитают проводить на основе физич. соображений, заменяя $L(u^n+z)$ на $M_{u^n}z$ с линейным оператором M_{u^n} (см. [5] — [11]). Тогда получаемые итерационные методы записываются в виде

$$M_{u^n}u^{n+1}=f-(L(u^n)-M_{u^n}u^n). \qquad (3)$$

Таковы, напр., методы упругих решений и переменных параметров для решения нелинейных задач теории упругости (см. [5] — [8]); при этом для метода упругих решений линейный оператор $M_{u^n}=M$ соответствует оператору линейной теории упругости. К ним же примыкают итерационный метод Качанова (см. [9], [10]) и метод последовательных нагружений (см. [6] — [8]), сочетающий в себе идеи линеаризации и продолжения по параметру. Иногда вместо методов (3) используются более общие итерационные методы типа

$$M_{u^n}(u^{n+1}-u^n)=-\gamma_n(L(u^n)-f) \qquad (4)$$

с итерационным параметром γ, подлежащим выбору.

При реализации упомянутых методов следует учитывать и приближенность решения систем (напр., как следствие применения вспомогательных итерационных методов) (см., напр., [1], [12], [13]). При рассмотрении нелинейных задач на собственные значения (задач нахождения точек бифуркации), напр. вида

$$L(u)=\lambda M(u),\quad L(0)=0,\quad M(0)=0, \qquad (5)$$

идея линеаризации (5), сводящая исследование задачи (5) к исследованию линейной задачи на собственные значения

$$L_0'z=\lambda M_0'z,$$

оказалась весьма плодотворной (см. [14] — [16]). Часто используется та или иная линеаризация и в сеточных методах решения нестационарных нелинейных задач (см., напр., [17] — [21]), проводимая за счет известных решений в моменты времени до t_n и дающая линейные уравнения для решения в следующий дискретный момент $t_{n+1}=t_n+\tau$ (τ — шаг по времени).

Лит.: [1] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, т. 1, М., 1969; [2] Коллатц Л., Функциональный анализ и вычислительная математика, пер. с нем., М., 1969; [3] Ортега Дж., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ., М., 1975; [4] Беллман Р., Калаба Р., Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, пер. с англ., М., 1968; [5] Победря Б. Е., в кн.: Упругость и неупругость, в. 3, М., 1973, с. 95—173; [6] Оден Дж., Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред, пер. с англ., М., 1976; [7] Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике, пер. с англ., М., 1975; [8] Свирский И. В., Методы типа Бубнова — Галеркина и последовательных приближений, М., 1968; [9] Михлин С. Г., Численная реализация вариационных методов, М., 1966; [10] Fučik S., Kratochvil A., Nečas I., «Acta Univ. Corolinae. Math. et Phys.», 1974, v. 15, № 1—2, p. 31—33; [11] Амосов А. А., Бахвалов Н. С., Осипик Ю. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1980, т. 20, № 1, с. 104—11; [12] Eisenstat S. C., Schultz M. H., Sherman A. H., «Lect. Notes Math.», 1974, № 430, p. 131—53; [13] Дьяконов Е. Г., в кн.: Численные методы механики сплошной среды, т. 7, № 5, М., 1976, с. 14—78; [14] Ворович И. И., в кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. К шестидесятилетию акад. Л. И. Седова, М., 1969; [15] Бергер М. С., в кн.: Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения, пер. с англ., М., 1974, с. 71—128; [16] Скрыпник И. В., Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка, К., 1973; [17] Ладыженская О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2 изд., М., 1970; [18] Дьяконов Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, в. 2 — Нестацио-

нарные задачи, М., 1972; [19] Ривкинд В. Я., Уральцева Н. Н., в кн.: Проблемы математического анализа, в. 3, Л., 1972, с. 69—111; [20] Fairweather G., Finite element Galerkin methods for differential equations, N. Y., 1978. [Lect. Notes pure and appl. math., v. 34]; [21] Luskin M., «SIAM J. Numer. Analysis», 1979, v. 16, № 2, p. 284—99.

Е. Г. Дьяконов.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА — частный случай *операторного кольца.*

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА — раздел алгебры, в к-ром изучаются векторные (линейные) пространства, линейные операторы (линейные отображения), линейные, билинейные и квадратичные функции (функционалы или формы) на векторных пространствах.

Исторически первым разделом Л. а. была теория *линейных уравнений* (алгебраических). В связи с решением систем линейных уравнений возникло понятие *определителя*. В 1750 было получено *Крамера правило* для решения системы линейных уравнений, в к-рой число уравнений равно числу неизвестных и определитель из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля. В 1849 был предложен *Гаусса метод* решения систем линейных уравнений с числовыми коэффициентами. Этот метод является простейшим по числу применяемых операций и используется с различными изменениями также для приближенного решения систем уравнений, коэффициенты к-рых также известны приближенно.

В связи с изучением систем линейных уравнений и их определителей появилось понятие *матрицы*. Понятие ранга матрицы, предложенное Г. Фробениусом (G. Frobenius) в 1877, позволило явно выразить условия совместности и определенности системы линейных уравнений в терминах коэффициентов этой системы (см. *Кронекера — Капелли теорема*). Тем самым в конце 19 в. было завершено построение общей теории систем линейных уравнений.

Если в 18 и 19 вв. основное содержание Л. а. составляли системы линейных уравнений и теория определителей, то в 20 в. центральное положение занимают понятие векторного пространства и связанные с ним понятия линейного преобразования, линейной, билинейной и полилинейной функции на векторном пространстве.

Векторным, или линейным, пространством над полем K наз. множество V элементов (называемых векторами), в к-ром заданы операции сложения векторов и умножения вектора на элементы из поля K, удовлетворяющие ряду аксиом (см. *Векторное пространство*). Рассматриваются также векторные пространства над телами. Одним из важнейших понятий теории векторных пространств является понятие линейного отображения, т. е. гомоморфизма векторных пространств над одним и тем же полем. Линейным оператором, или линейным преобразованием, наз. линейное отображение пространства в себя (т. е. эндоморфизм векторного пространства). Если пространство V конечномерно, то, выбирая в V базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и полагая

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

получают квадратную матрицу $A = \|a_{ij}\|$ порядка n, к-рая наз. матрицей линейного преобразования φ в данном базисе.

Векторное пространство V над полем K, снабженное дополнительной операцией умножения векторов, удовлетворяющей нек-рым аксиомам, наз. алгеброй над K (см. *Кольца и алгебры*, *Операторное кольцо*).

Все линейные преобразования пространства V относительно естественно определенных операций сложения, умножения и умножения линейных преобра-

зований на элементы поля K образуют алгебру над полем K. Все квадратные матрицы фиксированного порядка с элементами из поля K также образуют алгебру над K. Указанное выше соответствие между линейными преобразованиями пространства V и их матрицами в заданном базисе является изоморфизмом этих алгебр, что позволяет формулировать теоремы о линейных преобразованиях параллельно на матричном языке и при их доказательстве использовать теорию матриц.

Большое значение в теории линейных преобразований имеет выбор базиса, в к-ром матрица преобразования принимает в каком-то смысле простейший вид. В случае алгебраически замкнутого поля таким видом будет, напр., жорданова нормальная форма матрицы.

Важным случаем линейного отображения является линейная функция (линейный функционал) — линейное отображение V в K. Все линейные функции на V относительно естественным образом определенных операций сложения и умножения на элементы из поля K сами образуют векторное пространство V^* над K, наз. пространством, сопряженным с пространством V. Векторы пространства V можно в свою очередь рассматривать как линейные функции на сопряженном пространстве V^*, полагая $x(f)=f(x)$ для всех $x\in V$, $f\in V^*$. Если V конечномерно, то тем самым устанавливается естественный изоморфизм между V и V^{**}.

Обобщением понятия линейной функции является понятие полилинейной функции, т. е. функции со значениями в K, зависящей от нескольких аргументов (из к-рых одни принадлежат векторному пространству V, а другие — сопряженному пространству V^*), линейной по каждому аргументу. Эти функции наз. также тензорами. Их изучением занимается *полилинейная алгебра*. Частный случай полилинейных функций — билинейные функции (см. *Билинейное отображение*). Кососимметрич. полилинейные функции наз. также *внешними формами*.

На основе понятия векторного пространства определяются различные классич. пространства, изучаемые в геометрии: аффинные пространства, проективные пространства и др.

Теория векторных пространств имеет важные связи с теорией групп. Все автоморфизмы n-мерного векторного пространства V над полем K образуют группу относительно умножения, изоморфную группе невырожденных квадратных матриц порядка n с элементами из K. Гомоморфное отображение нек-рой группы G в эту группу автоморфизмов наз. линейным представлением группы G в пространстве V. Изучение свойств представлений составляет предмет теории линейных представлений групп.

Классич. теория линейных уравнений и определителей была обобщена на случай, когда вместо чисел или элементов поля рассматриваются элементы произвольного тела.

Естественным обобщением понятия векторного пространства над полем K является понятие *модуля* над произвольным кольцом. Основные теоремы Л. а. перестают быть верными при замене векторного пространства на модуль. Изучение возможностей таких обобщений, к-рые справедливы и для модулей, привело к возникновению *алгебраической K-теории*.

Лит.: [1] Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [2] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [3] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, 4 изд., М., 1971; [4] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 4 изд., М., 1975; [5] Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, 2 изд., М., 1974; [6] Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, 2 изд., М., 1956; [7] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966; [8] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [9] Бурбаки Н., Ал-

гебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [10] Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, пер. с англ., М., 1955.

И. В. Проскуряков.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА; численные методы — раздел вычислительной математики, посвященный математич. описанию и исследованию процессов численного решения задач линейной алгебры.

Среди задач Л. а. наибольшее значение имеют две: решение системы линейных алгебраич. уравнений и определение собственных значений и собственных векторов матрицы. Другие часто встречающиеся задачи: обращение матрицы, вычисление определителя и нахождение корней алгебраич. многочлена, как правило, не имеют самостоятельного значения в Л. а. и носят вспомогательный характер при решении основных задач Л. а.

Любой численный метод в Л. а. можно рассматривать как нек-рую последовательность выполнения арифметич. операций над элементами входных данных. Если при любых входных данных численный метод позволяет найти решение задачи за конечное число арифметич. операций, то такой метод наз. прямым. В противоположном случае численный метод наз. итерационным.

Прямые методы решения системы линейных алгебраических уравнений. Пусть дана система

$$Ax=b \qquad (1)$$

с матрицей системы A и правой частью b. Если матрица A невырожденная, то решение дается формулой $x=A^{-1}b$, где A^{-1} есть матрица, обратная к матрице A. Основная идея прямых методов заключается в преобразовании системы (1) в такую эквивалентную систему, для к-рой матрица системы легко обращается и, следовательно, легко находится решение исходной системы. Пусть обе части равенства (1) умножены слева на невырожденные матрицы $L_1, L_2, \ldots, L_k$. Тогда новая система

$$L_kL_{k-1}\ldots L_1Ax=L_kL_{k-1}\ldots L_1b \qquad (2)$$

эквивалентна системе (1). При этом матрицы L_i всегда можно подобрать такими, что матрица системы (2) будет достаточно простой, напр. треугольной, диагональной или унитарной. В этом случае легко вычисляются A^{-1} и $|A|$.

Одним из первых прямых методов является *Гаусса метод*. Он использует левые *треугольные матрицы* L_i и позволяет привести исходную систему уравнений к системе с правой треугольной матрицей. Этот метод легко реализуется на ЭВМ, его схема с выбором главного элемента позволяет решать системы с произвольной матрицей, а компактная схема — получать результаты с повышенной точностью за счет накопления скалярных произведений. Среди прямых методов, применяемых на практике, метод Гаусса требует минимального объема вычислительной работы.

Непосредственно к методу Гаусса примыкают метод Жордана и его модификация — метод оптимального исключения (см. [2]). Эти методы используют треугольные матрицы L_i как левые, так и правые и позволяют привести исходную систему к системе с диагональной матрицей. По своим характеристикам оба метода мало чем отличаются от метода Гаусса, но второй позволяет решать системы вдвое большего порядка при одной и той же памяти ЭВМ.

Перечисленные методы входят в группу т. н. методов исключения. Это название объясняется тем, что при каждом умножении на матрицу L_i в матрице системы исключается один или несколько элементов. Исключение можно производить не только с помощью треугольных матриц, но и с помощью унитарных. Различные модификации методов исключения по су-

ществу связаны с разложением матрицы системы (1) в произведение двух треугольных или треугольной и унитарной матриц.

Некоторые методы, такие как *окаймления метод*, *пополнения метод*, не являются методами исключения, хотя и близки к методу Гаусса.

Большое распространение получили методы, основанные на построении вспомогательной системы векторов, так или иначе связанных с матрицей исходной системы и ортогональных в нек-рой метрике. Одним из первых методов этой группы был метод ортогонализации строк. Матрицы L_i в нем — левые треугольные, матрица системы (2) — унитарная. Методы, основанные на ортогонализации, обладают многими достоинствами, но чувствительны к влиянию ошибок округления. На основе развития методов типа ортогонализации был создан весьма эффективный (при решении нек-рых систем с разреженными матрицами) сопряженных направлений метод (см. [9], [10]).

Прямые методы определения собственных значений и собственных векторов матрицы. Пусть для матрицы A требуется определить собственное значение λ и собственный вектор x, т. е. решить уравнение

$$Ax=\lambda x. \qquad (3)$$

При замене $x=Cy$, где C — невырожденная матрица, уравнение (3) перейдет в уравнение $By=\lambda y$ при $B=C^{-1}AC$. Прямые методы решения данной задачи состоят в том, что с помощью конечного числа подобных преобразований исходная матрица A приводится к матрице B настолько простого вида, чтобы для нее легко находились коэффициенты характеристич. многочлена и собственные векторы. При этом собственные значения находятся как корни характеристич. многочлена каким-либо из известных методов. Численные методы перехода от матрицы A к матрице B по существу мало чем отличаются от численных методов преобразования системы (1) в систему (2). Известно много методов подобного типа (методы Крылова, Данилевского, Хессенберга и т. д., см. [1]), однако они не нашли широкого применения на практике в силу значительной численной неустойчивости (см. [3]).

Различают полную проблему собственных значений, когда ищутся все собственные значения, и частичную проблему, когда отыскивают нек-рые из них; последняя задача более типична в случае сеточных задач, возникающих при аппроксимации дифференциальных и интегральных уравнений.

Итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений. Эти методы дают решение системы (1) в виде предела последовательности нек-рых векторов; построение их осуществляется посредством единообразного процесса, наз. процессом итераций. Основные итерационные процессы для решения системы (1) могут быть описаны посредством единообразного процесса следующей общей схемой. Строится последовательность векторов $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, . . ., $x^{(k)}$, . . . по рекуррентным формулам

$$x^{(k)}=x^{(k-1)}+H^{(k)}(b-Ax^{(k-1)}),$$

где $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, . . . — нек-рая последовательность матриц, $x^{(0)}$ — начальное приближение, вообще говоря, произвольное. Различный выбор последовательности матриц $H^{(k)}$ приводит к различным итерационным процессам.

Простейшими итерационными процессами являются стационарные процессы, в к-рых матрицы $H^{(k)}$ не зависят от номера шага k; их также наз. методами простой итерации (см. [5]). Если последовательность $H^{(k)}$ периодична, то процесс наз. циклическим. Всякий циклич. процесс может быть преобразован в стационарный, но обычно такое

преобразование усложняет метод. Нестационарные процессы, в частности циклические, используются для ускорения сходимости итерационных процессов (см. [5], [6]). Среди методов ускорения сходимости особое место занимают методы, использующие многочлены Чебышева (см. [5], [6]) и сопряженные направления (см. [10]).

Выбор матрицы H для стационарного процесса и матриц $H^{(k)}$ для нестационарного может осуществляться различными способами. Возможно построение матриц $H^{(k)}$ таким образом, чтобы итерационный процесс сходился к решению и по возможности быстро для широкого класса систем уравнений (см. [5]). Возможен и противоположный подход, когда при построении матриц $H^{(k)}$ максимально используются частные особенности данной системы для получения итерационного процесса с наибольшей скоростью сходимости (см. [6]). Второй способ построения матриц $H^{(k)}$ является наиболее распространенным.

Одним из наиболее распространенных принципов построения итерационных процессов является принцип релаксации (см. *Релаксации методы*). В этом случае матрицы $H^{(k)}$ выбираются из заранее описанного класса матриц так, чтобы на каждом шаге процесса уменьшалась какая-либо величина, характеризующая точность решения системы. Среди релаксационных методов наиболее разработаны координатные и градиентные методы. В координатных методах матрицы $H^{(k)}$ подобраны так, что на каждом шаге меняются одна или несколько компонент последовательных приближений. О точности приближенного решения x чаще всего судят по величине вектора невязки $r=Ax-b$.

В случае стационарных итерационных методов главный член погрешности можно оценить также с помощью δ^2-процесса (см. [5]).

Среди других итерационных методов можно отметить *простой итерации метод*, *переменных направлений метод*, методы полной и неполной релаксации и т. д. (см. [1], [6], [10]). Как правило, итерационные методы удобны для реализации на ЭВМ, однако в отличие от прямых методов они чаще всего обладают весьма ограниченной областью применения. В области же их применения итерационные методы нередко существенно превосходят прямые методы по объему вычислений. Поэтому вопрос сравнения прямых и итерационных методов может быть решен лишь при детальном изучении свойств конкретной системы. Наибольшее распространение нашли итерационные методы для решения систем, возникающих при разностной аппроксимации дифференциальных уравнений (см. [5], [6]).

Итерационные методы решения полной проблемы собственных значений. В итерационных методах собственные значения вычисляются как пределы нек-рых числовых последовательностей без предварительного определения коэффициентов характеристич. многочлена. Как правило, при этом одновременно находятся и собственные векторы или нек-рые другие векторы, связанные с собственными простыми соотношениями. Большинство итерационных методов менее чувствительны к ошибкам округления, чем прямые, но значительно более трудоемки. Развитие этих методов и их применение в практике вычислений стало возможным лишь после создания ЭВМ.

Среди итерационных методов особое место занимает метод вращений (*Якоби метод*) решения полной проблемы собственных значений действительной симметричной матрицы. Основан он на построении последовательности матриц, ортогонально подобных исходной матрице A и имеющих монотонно убывающие до нуля суммы квадратов всех внедиагональных элементов.

Метод вращений очень прост, легко реализуется на ЭВМ и всегда сходится. Независимо от расположения

собственных значений он обладает асимптотически квадратичной сходимостью. Наличие кратных и близких собственных значений не только не замедляет сходимость метода, но, напротив, приводит к ее ускорению. Метод вращений устойчив к влиянию ошибок округления результатов промежуточных вычислений. Свойства этого метода послужили причиной его распространения на решение полной проблемы матриц более общего вида. Без существенных изменений метод вращений переносится на эрмитовы и косоэрмитовы матрицы. Незначительное его изменение позволяет с успехом решать полную проблему для матриц A^*A и AA^* одновременно, не вычисляя сами произведения матриц. Эффективное распространение этого метода на произвольные матрицы простой структуры реализуется обобщенным методом вращений.

Среди итерационных методов решения полной проблемы собственных значений значительную группу составляют степенные методы. Большинство их вычислительных алгоритмов укладывается в следующие схемы:

$$\begin{array}{ll} AG = G_1S_1 & A = L_1R_1 \\ \cdots\cdots \quad \text{или} & \cdots\cdots \\ AG_{k-1} = G_kS_k & R_{k-1}L_{k-1} = L_kR_k \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

Здесь на каждом шаге матрица, стоящая в левой части равенства, раскладывается в произведение двух матриц. Пусть одна из них треугольная, а вторая унитарная или треугольная другого наименования. Тогда при нек-рых дополнительных предположениях матрицы $G_k^{-1}AG_k$ и R_kL_k сходятся к квазитреугольной матрице, подобной матрице A. Как правило, порядки диагональных клеток квазитреугольной матрицы невелики, поэтому полная проблема собственных значений для предельной матрицы решается достаточно просто.

Известно несколько методов такого типа. Одним из лучших среди них является QR-алгоритм (см. [7]). Вычислительные схемы степенных методов во многом совпадают с вычислительными схемами решения систем уравнений прямыми методами.

Исследование и классификация численных методов. Огромное количество численных методов Л. а. ставит актуальной задачей не столько создание новых, сколько исследование и классификацию существующих методов (одна из самых полных классификаций методов с точки зрения их математич. построения содержится в монографии [1]; описанию методов с точки зрения возможности их реализации на ЭВМ посвящены монографии [2], [3], [7]).

Первые фундаментальные работы по анализу устойчивости и ошибок округления в численных методах решения задач Л. а. появились лишь в 1947—48 и посвящены исследованию обращения матриц и решению систем уравнений методами типа Гаусса. Практич. ценность этих результатов была невелика. Существенный сдвиг в изучении данного вопроса произошел в середине 60-х гг. (см. [3]), когда был сделан решающий шаг к анализу и оценке эквивалентных возмущений. Реально вычисленное решение нек-рой задачи стало рассматриваться как точное решение той же задачи, но с возмущенными входными данными. Это возмущение, наз. эквивалентным, полностью характеризует влияние ошибок округления. Исследовано большое кол-во методов с точки зрения мажорантной оценки нормы эквивалентного возмущения (см. [3], [7]).

При фиксированном вычислительном алгоритме и способе округления вся совокупность ошибок округления является однозначной векторной функцией $\varphi_t(A)$, зависящей от числа разрядов t, с к-рыми ведется счет, и от входных данных A. Главный член

функции $\varphi_f(A)$ при $t \to \infty$ не имеет сколько-нибудь приемлемого явного выражения. Однако весьма эффективным оказалось исследование $\varphi_f(A)$ на классе случайно заданных входных данных. Оно показало, что наиболее вероятное значение отклонения вычисленного решения от точного за счет ошибок округления существенно меньше, чем максимально возможное (см. [7]).

Анализ влияния ошибок округления показал, что между лучшими методами нет принципиальной разницы с точки зрения устойчивости к ошибкам округления. Этот вывод заставляет по-новому взглянуть на проблему выбора того или иного численного метода в практич. деятельности вычислителя. Создание мощных ЭВМ существенно ослабило значение различия между методами в таких характеристиках, как объем требуемой памяти ЭВМ и количество арифметич. операций, и привело к возросшим требованиям на гарантию точности решения. В этих условиях наиболее предпочтительными становятся те методы, к-рые, не очень отличаясь от лучших по скорости и удобству реализации на ЭВМ, позволяют решать широкий класс задач как хорошо, так и плохо обусловленных и давать при этом оценку точности вычисленного решения.

Классификация и сравнение численных методов, о к-рых говорилось выше, относятся в основном к тому случаю, когда вся совокупность входных данных целиком помещается в оперативную память ЭВМ. Однако особый интерес представляют два крайних случая — решение задач Л. а. на малых и сверхмощных ЭВМ. Решение задач на таких ЭВМ имеет свою специфику. В первом случае — это малая память, ограниченная разрядная сетка и счет в режиме фиксированной запятой, во втором — наличие мультипрограммного режима работы ЭВМ, режима разделения времени и т. д.

Лит.: [1] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.— Л., 1963; [2] Воеводин В. В., Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы, М., 1966; [3] Уилкинсон Дж.- Х., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970; [4] Воеводин В. В., «Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ.», 1970, № 2, с. 69—82; [5] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [6] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [7] Воеводин В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977; [8] Фаддеева В. Н. [и др.], Вычислительные методы линейной алгебры. Библиографический указатель. 1828—1974 гг., Новосиб., 1976; [9] Воеводин В. В., Линейная алгебра, 2 изд., М., 1980; [10] Марчук Г. И., Кузнецов Ю. А., Итерационные методы и квадратичные функционалы, Новосиб., 1972.

В. В. Воеводин.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГРУППА — алгебраическая группа, бирационально изоморфная алгебраич. подгруппе *полной линейной группы*. Алгебраич. группа G линейна тогда и только тогда, когда алгебраич. многообразие G аффинно, т. е. изоморфно замкнутому (в топологии Зарисского) подмногообразию аффинного пространства.

Теория Л. а. г. возникла из потребностей решения линейных дифференциальных уравнений в квадратурах (теория Галуа дифференциальных уравнений) в конце 19 в. (С. Ли, S. Lie; Э. Пикар, E. Picard; Л. Маурер, L. Maurer), и первоначальное изучение Л. а. г. над полем комплексных чисел проводилось по аналогии с теорией групп Ли методом алгебр Ли. Л. а. г. G над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ может рассматриваться как аналитич. подгруппа группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Обычным образом определяемая алгебра *Ли группы* G будет тогда подалгеброй в алгебре Ли группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (т. е. в полной линейной алгебре Ли всех $(n \times n)$-матриц с комплексными коэффициентами). На возникающий здесь вопрос — какие подалгебры Ли полной линейной алгебры соответствуют алгебраическим (а не только аналитическим) подгруппам группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ — может быть дан исчерпывающий ответ (см. *Ли алгебраическая алгебра* 1)).

Методы теории групп и алгебр Ли в середине 20 в. были существенно усовершенствованы и обобщены К. Шевалле (C. Chevalley), что позволило ему применить их к изучению Л. а. г. над произвольными полями нулевой характеристики (см. [6]). Для полей ненулевой характеристики метод алгебр Ли является менее эффективным, так что естественно возникла необходимость глобального исследования Л. а. г. с помощью методов алгебраич. геометрии. Основы глобального исследования Л. а. г. были заложены А. Борелем (см. [2]), после чего теория Л. а. г. приобрела вид стройной дисциплины (см. [8]). Одной из основных проблем теории Л. а. г. является проблема классификации Л. а. г. с точностью до изоморфизма. Эта проблема в основном сводится к ее решению для двух типов Л. а. г.: полупростых и разрешимых. Произвольная Л. а. г. обладает такой максимальной связной разрешимой нормальной подгруппой H, что факторгруппа G/H является полупростой Л. а. г. Фундаментальным результатом является классификация Шевалле полупростых Л. а. г. над алгебраически замкнутыми полями любой характеристики (см. [7]). Эта классификация аналогична классификации Картана — Киллинга комплексных полупростых групп Ли. Классификация Шевалле основывается на том, что в полупростой алгебраич. группе строятся аналоги элементов теории Картана — Киллинга — картановская подгруппа, корни и т. д. Важную роль при этом играют подгруппы Бореля и максимальные алгебраич. торы.

Пусть G — полупростая Л. а. г. T — ее максимальный тор, $N_G(T)$ — нормализатор T в G, $W=N_G(T)/T$ — *Вейля группа* группы G. Тор T содержится лишь в конечном числе подгрупп Бореля группы G, к-рые транзитивно переставляются при сопряжении элементами из $N_G(T)$. При помощи подгрупп Бореля, содержащих T, строятся нек-рые мономорфизмы аддитивной группы поля в подгруппы Бореля (содержащие T), играющие роль корней. С помощью техники *Брюа разложений* доказывается, что указанная система структурных элементов допускает полную классификацию и определяет группу G с точностью до изоморфизма (см. [7]). Окончательная классификация полупростых групп не зависит от характеристики основного поля и поэтому совпадает с классификацией комплексных полупростых алгебраич. групп.

Классификация с точностью до k-изоморфизма полупростых Л. а. г., определенных над алгебраически незамкнутым полем k, значительно сложнее; она существенно зависит от поля k и сводится к классификации k-форм алгебраич. групп (см. *Форма* алгебраической группы). Множество k-форм алгебраич. группы G, определенной над алгебраич. замыканием K поля k, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством одномерных *Галуа когомологий* $H^1(k, \mathrm{Aut}(G))$, где $\mathrm{Aut}(G)$ — группа автоморфизмов G. В тех случаях, когда известна группа Галуа $\mathrm{Gal}(K/k)$ расширения K/k (напр., если k — поле действительных чисел или конечное поле), это дает значительную информацию о формах группы G. Но главная трудность в исследовании этой глубокой и пока (1982) еще далекой от своего решения проблемы ложится на изучение k-структуры полупростых Л. а. г.

В случае произвольного поля k максимальные k-разложимые торы играют роль, аналогичную роли максимальных алгебраич. торов в группе G над алгебраически замкнутым полем. k-разложимый тор — это тор, k-изоморфный прямому произведению k-определенных одномерных групп $\mathrm{GL}(1)$. Максимальные k-разложимые торы в G сопряжены посредством элементов из G_k и их размерность наз. k-р а н г о м G (что обозначается $\mathrm{rang}_k G$). Если $\mathrm{rang}_k G>0$, то G наз. k-и з о т р о п н о й, в противном случае — k-а н и-

зотропной. k-изотропность для полупростой группы G эквивалентна тому, что группа G_k имеет неединичные унипотентные элементы. Для простой односвязной группы G существовала *Кнезера — Титса гипотеза*, что при $\operatorname{rang}_k G>0$ группа G_k порождается унипотентными элементами (см. [13]), в общем случае решенная отрицательно (см. [16]). Роль подгруппы Бореля в случае произвольного поля k играет минимальная параболич. k-подгруппа, т. е. минимальная k-определенная подгруппа G, содержащая подгруппу Бореля. Естественно определяется корневая система относительно максимального k-разложимого тора в G и относительная группа Вейля (см. [3]). Если группа G обладает k-разложимым максимальным тором, то эти структурные элементы не зависят от поля k и определяют такие группы с точностью до k-изоморфизма. Группы, обладающие k-разложимыми максимальными торами, наз. k-р а з л о ж и м ы м и, или *Шевалле группами*. Именно К. Шевалле классифицировал k-разложимые алгебраич. группы и доказал, что всякая полупростая группа обладает единственной (с точностью до k-изоморфизма) k-формой такого типа (см. [7], [14]).

В общем случае А. Борелем и Ж. Титсом [3] доказано существование аналога разложения Брюа для группы G_k, в к-ром роль подгрупп Бореля играют минимальные параболич. k-подгруппы, сопряженные посредством элементов из G_k. Это позволяет в существенной мере редуцировать классификацию полупростых Л. а. г. положительного k-ранга к классификации полупростых групп k-ранга нуль, т. е. к классификации k-анизотропных групп. А именно, полупростая группа G определяется с точностью до k-изоморфизма своим классом изоморфизма над универсальным полем, своим k-индексом и полупростым k-анизотропным ядром (см. *Анизотропное ядро*) (см. [9]). В некоторых случаях удалось получить классификацию k-анизотропных полупростых групп. Так, напр., над конечным полем анизотропных полупростых групп не существует, а для широкого класса локальных полей k доказано (см. [15]), что всякая k-анизотропная простая Л. а. г. G является внутренней формой типа A_n, т. е. G_k в односвязном случае изоморфна $\mathrm{SL}(1, D)$, где D — тело конечной степени над k. В основе этих результатов лежит понятие *Титса системы*, представляющее глубокое аксиоматич. обобщение разложений Брюа в классич. случае.

Из других общих результатов следует отметить унирациональность многообразия редуктивной k-определенной Л. а. г., а также теорему Гротендика о существовании во всякой k-определенной Л. а. г. k-определенного максимального тора (см. [1], [10], [12]).

Если группа G определена над полем алгебраич. чисел или над полем алгебраич. функций одной переменной, то возникают проблемы об арифметич. свойствах G, изучением к-рых занимается *линейных алгебраических групп арифметическая теория* (см. [12]).

Идеи и техника Л. а. г. были применены к изучению произвольных линейных групп, что привело к созданию одного из основных методов в теории линейных групп (см. [11]).

Лит.: [1] Б о р е л ь А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] B o r e l A., «Ann. Math.», 1956, v. 64, № 1, p. 20—82; [3] Б о р е л ь А., Т и т с Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; № 2, с. 3—31; [4] С е р р Ж.-П., *Алгебраические группы и поля классов*, *пер. с франц.*, М., 1968; [5] е г о ж е, Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [6] Ш е в а л л е К., Теория групп Ли, пер. с англ. и франц., т. 1—3, М., 1948—58; [7] C h e v a l l e y C., Classification des groupes de Lie algébriques, t. 1—2, P., 1956—58; [8] Ш е в а л л е К., Теория алгебраических групп, в кн.: Международный математический конгресс в Эдинбурге, 1958 г., М., 1962, с. 74—92; [9] Т и т с Ж., «Математика», 1968, т. 12, № 2, с. 110—43; [10] D e m a z u r e M., G r o t h e n d i e c k A., Schémas en groupes, t. 1—3, B.— [u. a.], 1970; [11] П л а т о н о в В. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30, № 3, с. 573—620; [12]

Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 11, М., 1974, с. 5—36; [13] Tits J., «Ann. Math.», 1964, v. 80, p. 313—29; [14] Стейнберг Р., Лекции о группах Шевалле, пер. с англ., М., 1975; [15] Брюа Ф., Титс Ж., «Математика», 1968, т. 12, № 5, с. 3—18; [16] Платонов В. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1976, т. 40, № 2, с. 227—61; [17] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980.
В. П. Платонов.

ЛИНЕЙНАЯ ГИПОТЕЗА — статистическая гипотеза, согласно к-рой математич. ожидание a n-мерного нормального закона $N_n(a, \sigma^2 I)$ (где I — единичная матрица), лежащее в линейном подпространстве $\Pi^s \subset R^n$ размерности $s<n$, принадлежит линейному подпространству $\Pi^r \subset \Pi^s$ размерности $r<s$.

Многие задачи математич. статистики можно редуцировать к задаче проверки Л. г., к-рая часто формулируется в следующем т. н. каноническом виде. Пусть $X=(X_1, \ldots, X_n)$ — нормально распределенный вектор, компоненты к-рого независимы и

$\mathsf{E}X_i=a_i$ для $i=1, \ldots, s$, $\mathsf{E}X_i=0$ для $i=s+1, \ldots, n$

и

$$\mathsf{D}X_i=\sigma^2 \text{ для } i=1, \ldots, n,$$

причем величины $a_1, \ldots, a_s$, σ^2 неизвестны. Тогда гипотеза H_0, согласно к-рой

$$a_1=\ldots=a_r=0, \quad r<s<n,$$

является канонической линейной гипотезой.

Пример. Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ и $Z_1, \ldots, Z_m$ суть $n+m$ независимых случайных величин, подчиняющихся нормальным распределениям $N_1(a, \sigma^2)$ и $N_1(b, \sigma^2)$ соответственно, причем параметры a, b, σ^2 неизвестны. Тогда гипотеза H_0: $a=b=0$ является Л. г., в то время как гипотеза $a=a_0$, $b=b_0$ при $a_0 \neq b_0$ не является таковой.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964.
М. С. Никулин.

ЛИНЕЙНАЯ ГРУППА — группа линейных преобразований векторного пространства V конечной размерности n над нек-рым телом K. Выбор базиса в пространстве V реализует Л. г. как группу невырожденных квадратных матриц степени n над телом K. Тем самым устанавливается изоморфизм между линейными и матричными группами.

Группа всех автоморфизмов свободного K-модуля V наз. также полной линейной группой и обозначается $\mathrm{GL}(V)$, а группа всех обратимых матриц порядка n над K (также называемая полной Л. г.) обозначается $\mathrm{GL}(n, K)$ или $\mathrm{GL}_n(K)$. Всякая подгруппа группы $\mathrm{GL}(V)$ наз. линейной группой степени n. Наиболее развитая часть теории Л. г. относится к случаю, когда тело K коммутативно, т. е. является полем. Поэтому в дальнейшем (если не оговорено противное) рассматриваются только Л. г. над полем.

Теория Л. г. зародилась в середине 19 в. и развивалась в тесной связи с теорией групп Ли, теорией представлений групп и теорией Галуа. Начало систематич. исследованию Л. г. было положено работами К. Жордана (см. [1]). На первом этапе развития теории Л. г. в связи с потребностями теории Галуа изучались главным образом конечные Л. г., в особенности разрешимые и классические (см. *Классическая группа*). Было установлено и несколько общих фактов, связанных с приводимостью или неприводимостью Л. г. G, т. е. со свойствами G-модуля V. Для всякой Л. г. G существует композиционный ряд G-подмодулей

$$\{0\} \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = V,$$

т. е. такой ряд, что все фактормодули V_{i+1}/V_i неприводимы. Другими словами, всякая матричная группа сопряжена в $\mathrm{GL}_n(K)$ нек-рой группе квазитреугольного вида с неприводимыми диагональными блоками. Пусть G_0 — подгруппа в G, состоящая из всех элементов, действующих тождественно на факторах

V_{i+1}/V_i, $i=0, \ldots, m-1$. Тогда G_0 — нормальная нильпотентная подгруппа, элементы к-рой удовлетворяют (в K-алгебре $\mathrm{End}(V)$ всех линейных преобразований пространства V) уравнению $(x-1)^n=0$; такие Л. г. наз. унипотентными. Всякая унипотентная группа, рассматриваемая как матричная группа, сопряжена в $\mathrm{GL}(n, K)$ с нек-рой подгруппой группы верхних треугольных матриц с единичной диагональю. В существенной мере строение группы G по модулю G_0 определяется строением неприводимых Л. г. G_{i+1}, индуцируемых G в факторах V_{i+1}/V_i. Если Л. г. G неприводима над алгебраически замкнутым полем K, то G содержит n^2 линейно независимых над K элементов K-алгебры $\mathrm{End}(V)$, т. е. K-линейная оболочка G совпадает с $\mathrm{End}(V)$. Всякая нормальная подгруппа вполне приводимой Л. г. вполне приводима.

Бесконечные линейные группы. Хотя теория Л. г. имеет довольно большую историю, общие методы в ней были созданы сравнительно недавно. Исключение составляют только разрешимые и классические Л. г. Еще К. Жордан в 1870 исследовал структуру разрешимых Л. г. над конечными полями и получил ряд классификационных результатов об этих группах. Эти исследования получили дальнейшее развитие (см. [13]): детально изучено строение и классифицированы максимальные разрешимые и локально нильпотентные подгруппы в $\mathrm{GL}(n, K)$ над алгебраически замкнутым полем K. Основная структурная теорема о разрешимых Л. г. была получена А. И. Мальцевым (см. [8] с. 294—313) в 1951: разрешимая Л. г. Γ степени n над алгебраически замкнутым полем обладает такой нормальной подгруппой H конечного индекса, что H сопряжена подгруппе треугольной группы, а индекс $[\Gamma : H]$ меньше $\rho(n)$, где $\rho(n)$ — нек-рая эффективно определяемая функция от n; в частности, коммутант группы H является унипотентной группой и, с абстрактной точки зрения, группа Γ есть конечное расширение группы H с нильпотентным коммутантом.

Важный и весьма разветвленный раздел теории Л. г. представляют классич. группы (см., напр., [4], [7]).

Новый этап в развитии теории Л. г. начался в 60-е гг. 20 в., когда был создан общий метод исследования, базирующийся на технике алгебраич. групп (см. *Линейная алгебраическая группа*, а также [9], [18]). Этот метод позволил решить ряд проблем теории Л. г. Напр., с его помощью доказана теорема о свободных подгруппах Л. г. (см. [14]): всякая Л. г. над полем нулевой характеристики либо содержит неабелеву свободную подгруппу, либо обладает разрешимой подгруппой конечного индекса, и построена теория периодич. Л. г. (см. [9]) (оказалось, что основные структурные результаты теории конечных групп сохраняются и в более общем случае периодич. Л. г.).

Другой важный метод теории Л. г., т. н. метод аппроксимации, был впервые применен А. И. Мальцевым в 1940 (см. [8] с. 58—73). Он годится для исследования Л. г. над областями целостности конечного типа, в частности для Л. г. с конечным числом образующих. Суть метода заключается в следующем: пусть $\mathrm{GL}(n, F)$ — полная Л. г. над конечно порожденным подкольцом F поля K; тогда F по модулю максимальных идеалов аппроксимируется конечными полями F_i, что влечет аппроксимацию группы $\mathrm{GL}(n, F)$ конечными матричными группами $\mathrm{GL}(n, F_i)$. Для всякой подгруппы $\Gamma \subset \mathrm{GL}(n, F)$ получается индуцируемая аппроксимация конечными Л. г. Γ_i. Оказывается, во многих случаях свойства группы Γ в сильной степени определяются свойствами групп Γ_i. Этот метод был позднее усовершенствован (см. [18]), что привело к доказательству общей аппроксимационной теоремы, из к-рой выводится большинство результатов о бесконечных Л. г. с конечным числом образующих.

Конечные линейные группы. Наиболее крупным структурным результатом о конечных Л. г. до сих пор остается теорема Жордана (1878): существует такая целозначная функция $f(n)$, что каждая конечная Л. г. степени n над полем нулевой характеристики обладает абелевой нормальной подгруппой индекса меньше $f(n)$. Для полей положительной характеристики существуют бесконечные серии простых конечных групп степени n и поэтому непосредственное перенесение теоремы Жордана на этот случай невозможно. Тем не менее с помощью техники модулярных представлений конечных групп доказано, что существует целозначная функция $f(m, n)$ такая, что конечная Л. г. степени n над полем характеристики $p>0$, порядок силовской p-подгруппы к-рой не превосходит p^m, обладает абелевой нормальной подгруппой индекса меньше $f(m, n)$ (см. [16]).

Одной из главных проблем теории конечных Л. г. является проблема классификации простых конечных Л. г. С тех пор как в 1901 Л. Диксон изложил [2] основные факты о классич. простых конечных Л. г., было получено много новых результатов. Среди них центральное место занимают результаты К. Шевалле (см. [15]), применившего для исследования простых конечных Л. г. методы теории алгебраич. групп, что привело к открытию новых типов простых конечных Л. г. и позволило почти все известные простые конечные Л. г. получать единообразным методом (подробнее см. [11], [12]).

Линейные группы над телами и кольцами. Систематич. исследование Л. г. над некоммутативным телом K началось после работы Ж. Дьёдонне (J. Dieudonné, 1943, см. [5]), в к-рой была описана конструкция определителя над телом (см. *Определитель*). Подгруппа группы $\mathrm{GL}(n, K)$ с определителем 1 наз. специальной линейной группой и обозначается $\mathrm{SL}(n, K)$. Она порождается трансвекциями (преобразованиями t такими, что $\dim(1-t)V=1$ и $tv=v$ при $v\in(1-t)V$), и всякая подгруппа группы $\mathrm{GL}(n, K)$, инвариантная относительно $\mathrm{GL}(n, K)$, либо скалярна, либо содержит $\mathrm{SL}(n, K)$, за исключением случаев $n=2$, $|K|=2$, 3, когда группа $\mathrm{GL}(2, K)$ разрешима. Если тело K конечномерно над своим центром Z, то существует единственный определитель со значениями в Z, называемый приведенной нормой (см. [5]), причем $\mathrm{SL}(n, K)$ содержится в группе $\mathrm{UL}(n, K)$ элементов с приведенной нормой 1. Вопрос о совпадении этих групп, поставленный в 1943 (проблема Танаки — Артина), был решен отрицательно в [10]. Группа $\mathrm{UL}(n, K)$ и факторгруппа $\mathrm{SK}_1=\mathrm{UL}(n,K)/\mathrm{SL}(n, K)$, называемая приведенной группой Уайтхеда, играют важную роль в теории линейных алгебраич. групп и алгебраич. K-теории [5].

Основные вопросы теории Л. г. над кольцами относятся к описанию нормальных подгрупп полной Л. г. и других классич. групп. Прогресс в этой области теснейшим образом связан с развитием алгебраич. K-теории (см. [5]). Так, задача описания нормальных подгрупп группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, фактически эквивалентна *конгруэнц-проблеме* для группы $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ при $n>2$. А именно, всякая нескалярная нормальная подгруппа группы $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, $n>2$, имеет конечный индекс и является конгруэнц-подгруппой, в то время как группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ есть конечное расширение свободной группы и потому обладает разнообразными нормальными подгруппами бесконечного индекса.

Изучались также автоморфизмы классических Л. г. над кольцами (см. [3], [19]).

Лит.: [1] Jordan C., Traité des substitutions et des équations algébriques, P., 1870; [2] Dickson L. E., Linear groups, Lpz., 1901; [3] Автоморфизмы классических групп, пер. с англ. и франц., М., 1976; [4] Артин Э., Геометрическая алгебра,

пер. с англ., М., 1969; [5] Басс Х., Алгебраическая K-теория, пер. с англ., М., 1973; [6] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [7] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [8] Мальцев А. И., Избранные труды, т. 1—Классическая алгебра, М., 1976, с. 58—73, 294—313; [9] Платонов В. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30, № 3, с. 573—620; [10] его же, там же, 1976, т. 40, № 2, с. 227—61; [11] Семинар по алгебраическим группам, пер. с англ., М., 1973; [12] Стейнберг Р., Лекции о группах Шевалле, пер. с англ., М., 1975; [13] Супруненко Д. А., Группы матриц, М., 1972; [14] Титс Ж., «Математика», 1972, т. 16, № 2, с. 47—66; [15] Шевалле К., там же, 1958, т. 2, № 1, с. 3—53; [16] Brauer R., Feit W., «Ann. Math.», 1966, v. 84, № 1, p. 119—31; [17] Draxl P., Kneser M., SK_1 von Schiefkörpern, B.— Hdlb.— N. Y., 1980; [18] Wehrfritz B., Infinite linear groups, B.— Hdlb.— N. Y., 1973; [19] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1970, М., 1971, с. 75—110.

В. П. Платонов.

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ — см. в статье *Линейная независимость*.

ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ — способ приближенного вычисления значения функции $f(x)$, основанный на замене функции $f(x)$ линейной функцией

$$L(x)=a(x-x_1)+b,$$

параметры a и b к-рой выбираются таким образом, чтобы значения $L(x)$ совпадали со значениями $f(x)$ в заданных точках x_1 и x_2:

$$L(x_1)=f(x_1), \quad L(x_2)=f(x_2).$$

Этим условиям удовлетворяет единственная функция

$$L(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1),$$

приближающая заданную функцию $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ с погрешностью

$$f(x)-L(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_1)(x-x_2), \quad \xi\in[x_1, x_2].$$

Вычисления, необходимые для Л. и., легко реализуются при ручном счете, благодаря чему этот способ широко используется при интерполировании табличных данных.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966.

М. К. Самарин.

ЛИНЕЙНАЯ КЛАССИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа невырожденных линейных преобразований конечномерного векторного пространства E над телом K, являющаяся *классической группой* (см. также *Линейная группа*). Важнейшими типами Л. к. г. являются следующие: *полная линейная группа* $\mathrm{GL}_n(K)$, *специальная линейная группа* $\mathrm{SL}_n(K)$, *симплектическая группа* $\mathrm{Sp}_n(K)$, *ортогональная группа* $\mathrm{O}_n(K, f)$, *унитарная группа* $\mathrm{U}_n(K, f)$ (здесь $n=\dim E$, f — соответствующая полуторалинейная форма на E).

В. Л. Попов.

ЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА — задача определения в нек-рой области D переменных $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ решения $u(x)$ линейного дифференциального уравнения

$$(Lu)(x)=f(x), \quad x\in D,$$

удовлетворяющего на границе S этой области (или ее части) линейным краевым условиям

$$(Bu)(y)=\varphi(y), \quad y\in S.$$

См. также *Краевая задача*.

А. П. Солдатов.

ЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА; численные методы решения — методы, позволяющие получить решение Л. к. з. в виде таблицы его приближенных значений в точках сетки, не используя предварительной информации об ожидаемом виде решения. Для теории этих методов типично предположение о том, что решение исходной задачи существует и имеет достаточное число производных. Благодаря отсут-

ствию других предположений численные методы отличаются своей универсальностью.

Основой численных методов решения Л. к. з. является замена исходной системы уравнений ее сеточной аппроксимацией. В случае интегро-дифференциальных уравнений такая аппроксимация обычно строится с помощью разностных схем и квадратурных формул. При этом возникают следующие проблемы:

1) насколько быстро точное решение сеточной задачи сходится к решению исходной задачи при измельчении сетки;

2) насколько решение сеточной задачи чувствительно к изменениям исходных данных;

3) как найти, хотя бы приближенно, решение сеточной задачи.

При решении первой и второй проблем используется следующий аппарат. Пусть в замкнутой области D задано уравнение

$$Lu=f, \tag{1}$$

а на ее границе Γ, состоящей из компонент Γ_i,— граничные условия

$$l_iu=\varphi_i \text{ на } \Gamma_i, \quad i=1, 2, \ldots, s. \tag{2}$$

Здесь заданные непрерывные функции f, φ_i принадлежат нормированным линейным пространствам F, Φ_i соответственно, а линейные операторы L и l_i преобразуют нек-рое линейное подмножество W нормированного линейного пространства U функций, непрерывных в D, в F и Φ_i соответственно.

Пусть для аппроксимации уравнения (1) выбраны сетки D_h и $D_h^0\subset D$, зависящие от положительного параметра h; нормированные линейные пространства U_h и F_h функций u_h и f_h, определенных в точках сеток D_h и D_h^0 соответственно, а также линейный оператор L_h, преобразующий U_h в F_h. Для аппроксимации граничного условия (2) выбирается сетка $\Gamma_{ih}\subset\Gamma$, нормированное линейное пространство Φ_{ih} функций φ_{ih}, определенных в точках сетки Γ_{ih}, и линейный оператор l_{ih}, преобразующий U_h в Φ_{ih}. Кроме того, выбираются линейные операторы P_h и p_{ih}, преобразующие F и Φ_i в F_h и Φ_{ih} соответственно. В результате получается сеточная аппроксимация

$$L_hu_h=P_hf, \tag{3}$$

$$l_{ih}u_h=p_{ih}\varphi_i \text{ на } \Gamma_{ih}, \ i=1, 2, \ldots, s, \tag{4}$$

исходной задачи (1), (2). Пусть через $[u]_h$, $\{f\}_h$, $\{\varphi_i\}_{ih}$ обозначены следы функций u, f, φ_i из пространств U, F, Φ_i на сетках D_h, D_h^0, Γ_{ih} соответственно. Исследование сходимости сеточных аппроксимаций u_h к решению u исходной задачи при $h\to 0$ имеет смысл производить лишь в сеточных нормах, согласованных с нормами в пространствах U, F, Φ_i, т. е. при условии, что для любых функций u, f, φ_i выполняются предельные соотношения

$$\|[u]_h\|_{U_h}\longrightarrow\|u\|_U, \ \|\{f\}_h\|_{F_h}\longrightarrow\|f\|_F,$$
$$\|\{\varphi_i\}_{ih}\|_{\Phi_{ih}}\longrightarrow\|\varphi_i\|_{\Phi_i}.$$

Если $u\in W$, $f\in F$, $\varphi_i\in\Phi_i$, то величина

$$z(h)=\|L_h[u]_h-\{Lu\}\|_{F_h}+\|P_hf-\{f\}_h\|_{F_h}+$$
$$+\sum_{i=1}^{s}\|l_{ih}[u]_h-\{l_iu\}_h\|_{\Phi_{ih}}+\|P_{ih}\varphi_i-\{\varphi_i\}_{ih}\|_{\Phi_{ih}}$$

наз. погрешностью аппроксимации задачи (1), (2) задачей (3), (4). Если u — решение задачи (1), (2), то величина

$$\rho(h)=\|L_h[u]_h-P_hf\|_{F_h}+\sum_{i=1}^{s}\|l_{ih}[u]_h-p_{ih}\varphi_i\|_{P_{ih}}$$

наз. погрешностью аппроксимации на этом решении. Говорят, что задача (3), (4) аппроксимирует задачу (1), (2) (или аппроксимирует ее на решении u), если $z(h) \to 0$ (или $\rho(h) \to 0$) при $h \to 0$. Порядок малости величины $z(h)$ (или величины $\rho(h)$) наз. порядком аппроксимации (или порядком аппроксимации на решении u).

Пусть, напр., аппроксимируется уравнение теплопроводности. В квадранте $D(x \geqslant 0,\ t \geqslant 0)$ решается уравнение (1), где

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

при начальном условии $l_1 u = \varphi_1(x)$ на полуоси $\Gamma_1(t=0,\ x \geqslant 0)$ и граничном условии $l_2 u = \varphi_2(t)$ на полуоси $\Gamma_2(x=0,\ t \geqslant 0)$, где $l_1 u = u$, $l_2 u = \partial u/\partial x$, причем $\varphi_1'(0) = \varphi_2(0)$. В качестве F берется пространство непрерывных функций $f(t,\ x)$ с нормой

$$\| f \|_F = \sup_D | f(t,\ x) |,$$

а в качестве Φ_1 и Φ_2 — пространства непрерывных функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ с нормами

$$\| \varphi_1 \|_{\Phi_1} = \sup_{\Gamma_1} | \varphi_1(x) | \quad \text{и} \quad \| \varphi_2 \|_{\Phi_2} = \sup_{\Gamma_2} | \varphi_2(t) |$$

соответственно. Пространство U можно считать совпадающим с F, а в качестве W берется подмножество функций $u \in U$, имеющих непрерывные частные производные $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial x$, $\partial^2 u/\partial x^2$ в области D. Пусть D_h — множество точек $(n\tau,\ mh)$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; $m=-1,\ 0,\ 1,\ \ldots$, где шаги сетки связаны функциональной зависимостью вида $\tau = \tau(h)$ такой, что $\tau \to 0$ при $h \to 0$. Множество D_h^0 будет состоять из точек $((n+1/2)\tau,\ mh)$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. В качестве F_h и U_h выбираются пространства сеточных функций $f_h(t,\ x)$ и $u_h(t,\ x)$ с согласованными нормами

$$\| f_h \|_{F_h} = \sup_{D_h^0} | f_h(t,\ x) | \quad \text{и} \quad \| u_h \|_{U_h} = \sup_{D_h} | u_h(t,\ x) |.$$

Оператор L_h может быть определен соотношением

$$L_h u_h(t,\ x) = \frac{1}{\tau}\left[u_h\left(t+\frac{\tau}{2},\ x\right) - u_h\left(t-\frac{\tau}{2},\ x\right)\right] - \frac{1}{2h^2}\left[u_h\left(t+\frac{\tau}{2},\ x+h\right) - 2u_h\left(t+\frac{\tau}{2},\ x\right) + u_h\left(t+\frac{\tau}{2},\ x-h\right)\right] - \frac{1}{2h^2}\left[u_h\left(t-\frac{\tau}{2},\ x+h\right) - 2u_h\left(t-\frac{\tau}{2},\ x\right) + u_h\left(t-\frac{\tau}{2},\ x-h\right)\right],$$

и пусть

$$P_h f = \{f\}_h$$

$$\left(\text{или } P_h f(t,\ x) = \int_{x-h}^{x+h} f(t,\ \xi)\, d\xi\right).$$

Для аппроксимации начального условия берется сетка Γ_{1h}, состоящая из точек $(0,\ mh)$, $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; пространство Φ_{1h} сеточных функций $\varphi_{1h}(x)$ с согласованной нормой

$$\| \varphi_{1h} \|_{\Phi_{1h}} = \sup_{\Gamma_{1h}} | \varphi_{1h}(x) |$$

и

$$l_{1h} u_h(x) = u_h(0,\ x), \quad p_{1h}\varphi_1 = \{\varphi_1\}_{1h}.$$

Для аппроксимации граничного условия берется сетка Γ_{2h}, состоящая из точек $(n\tau,\ 0)$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; пространство Φ_{2h} сеточных функций $\varphi_{2h}(t)$ с согласованной нормой

$$\| \varphi_{2h} \|_{\Phi_{2h}} = \sup_{\Gamma_{2h}} | \varphi_{2h}(t) |,$$

оператор l_{2h}, определяемый равенством

$$l_{2h}u_h(t) = \frac{1}{2h}[u_h(t,\ h) - u_h(t,\ -h)],$$

и оператор $p_{2h}\varphi_2 = \{\varphi_2\}_{2h}$. Тогда

$$z(h) = \| L_h[u]_h - \{Lu\}_h \|_{F_h} + \| l_{2h}[u]_h - \{l_2 u\} \|$$

и $z(h) \to 0$ при $h \to 0$. Если в качестве W взять более узкое множество функций $u \in U$, имеющих, кроме указанных ранее, ограниченные частные производные $\partial^2 u/\partial t^2$ и $\partial^4 u/\partial x^4$ в области D, то при $\tau = h$ получают аппроксимацию второго порядка.

Сеточную задачу

$$L_h u_h = f_h, \tag{3'}$$

$$l_{ih}u_h = \varphi_{ih} \text{ на } \Gamma_{ih} \tag{4'}$$

наз. к о р р е к т н о й, если при достаточно малом h выполняются следующие условия: эта задача разрешима при любых данных функциях $f_h \in F_h$, $\varphi_{ih} \in \Phi_{ih}$; существует функция $\psi(\lambda)$, не зависящая от h, стремящаяся к нулю вместе с λ и такая, что

$$\| u_h \|_{U_h} \leqslant \psi\left(\| L_h u_h \|_{F_h} + \sum_{i=1}^{s} \| l_{ih}u_h \|_{\Phi_{ih}} \right) \tag{5}$$

для любой функции $u_h \in U_h$. Решение корректной сеточной задачи равномерно по h непрерывно зависит от данных функций. Корректность сеточной задачи является необходимым условием малой чувствительности ее решения к округлениям в процессе его вычисления. Если u — решение задачи (1), (2) и задача (3'), (4') корректна, то

$$\| u_h - [u]_h \|_{U_h} \leqslant \psi(\rho(h)). \tag{6}$$

Если, кроме того, задача (3), (4) аппроксимирует задачу (1), (2) на решении u, то

$$\| u_h - [u]_h \|_{U_h} \longrightarrow 0$$

при $h \to 0$. Если выполняются условия согласования норм, условие $z(h) \to 0$ и условие (5), то, полагая $u_h = [u]_h$ и переходя к пределу в неравенстве (5) при $h \to 0$, получают неравенство

$$\| u \|_U \leqslant \psi\left(\| Lu \|_F + \sum_{i=1}^{s} \| l_i u \|_{\Phi_i} \right), \tag{7}$$

справедливое для любой функции $u \in W$. Таким образом, для исследования корректности краевых задач вида (1), (2) можно использовать такой путь: сначала получить оценку (5), а из нее оценку (7). С помощью оценок типа (5) часто удается доказать существование решения u задачи (1), (2) как предела сеточной аппроксимации u_h при $h \to 0$.

Для полного решения проблемы нахождения приближенного решения задачи (1), (2) необходимо построить точный или приближенный метод нахождения решения аппроксимации (3), (4), обладающий свойством устойчивости к округлениям. При исследовании устойчивости полезно использовать понятие *замыкания вычислительного алгоритма.* В приведенном примере уравнение целесообразно решать *прогонки методом* по переменной x.

Оценка (6) погрешности сеточного метода обладает тем недостатком, что в выражение функции $\psi(\lambda)$ обычно входят производные от точного решения u. В нек-рых случаях удается априори (т. е. еще до решения задачи) оценить эти производные, однако такие оценки обычно оказываются грубыми. Несколько более точными являются оценки, в к-рых производные заменяются разностными отношениями приближенного решения u_h. В основном же практич. оценка погрешности сеточных методов производится при помощи повторного решения

задачи (3), (4) с различными h и последующего выделения главной части погрешности вида $h^{\gamma}[z]_h$, где γ — известный порядок малости погрешности. Так, если справедливо асимптотич. соотношение

$$\|[u]_h - u_h - h^{\gamma}[z]_h\|_{U_h} = o(h^{\gamma}),$$

то

$$[z]_h \sim (u_h - u_H)/(H^{\gamma} - h^{\gamma}).$$

Иногда удается получить уравнения для функции z, содержащие производные от точного решения u. Тогда можно решать их численно на более грубой сетке после решения исходной задачи и по получении главной части погрешности добавить ее к приближенному решению u_h и тем самым уточнить его.

В некоторых случаях при специальном выборе координатных функций вариационного или проекционного метода решения задачи (1), (2) получаются уравнения вида (3), (4), обеспечивающие сходимость не только к классическому, но и к обобщенному решению. Этот способ построения аппроксимаций, наз. иногда м е т о д о м к о н е ч н ы х э л е м е н т о в, предоставляет большую свободу в выборе сетки. Возможность целесообразно располагать узлы позволяет достигать требуемой точности при меньшем числе узлов сетки.

Лит.: [1] Б а б у ш к а И., В и т а с е к Э., П р а г е р М., Численные процессы решения дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1969; [2] Б а х в а л о в Н. С., Конспекты по курсу «Основы вычислительной математики», ч. 4, М., 1968; [3] е г о ж е, Численные методы, 2 изд., М., 1975; [4] В а р г а Р., Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе, пер. с англ., М., 1974; [5] Г а в у р и н М. К., Лекции по методам вычислений, М., 1971; [6] Г о д у н о в С. К., Р я б е н ь к и й В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977; [7] Д ь я к о н о в Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, в. 1—2, М., 1971—72; [8] К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [9] М а р ч у к Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [10] М и х л и н С. Г., С м о л и ц к и й Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М., 1965; [11] Р и х т м а й е р Р. Д., М о р т о н К., Разностные методы решения краевых задач, [пер. с англ.], М., 1972; [12] Р я б е н ь к и й В. С., Ф и л и п п о в А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, М., 1956; [13] С а м а р с к и й А. А., Теория разностных схем, М., 1977; [14] С а м а р с к и й А. А., Н и к о л а е в Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

А. Ф. Шапкин.

ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ — одно из основных понятий линейной алгебры. Пусть V — векторное пространство над полем k; векторы $a_1, \ldots, a_n$ наз. л и н е й н о н е з а в и с и м ы м и, если

$$k_1 a_1 + \ldots + k_n a_n \neq 0$$

для любого набора $k_i \in K$, кроме $k_1 = \ldots = k_n = 0$. В противном случае векторы $a_1, \ldots, a_n$ наз. л и н е й н о з а в и с и м ы м и. Векторы $a_1, \ldots, a_n$ линейно зависимы в том и только в том случае, когда по крайней мере один из них является линейной комбинацией остальных. Бесконечное подмножество векторов из V наз. линейно зависимым, если линейно зависимо его нек-рое конечное подмножество, и линейно независимым, если любое его конечное подмножество линейно независимо. Число элементов (мощность) максимального линейно независимого подмножества пространства не зависит от выбора этого подмножества и наз. р а н г о м, или р а з м е р н о с т ь ю, пространства, а само это подмножество — базисом (базой).

В частном случае, когда векторы $a_1, \ldots, a_n$ — элементы нек-рого числового поля K, а k — подполе в K, возникает понятие л и н е й н о й н е з а в и с и м о с т и ч и с е л. Л. н. чисел над полем рациональных чисел Q можно рассматривать также, как обобщение понятия иррациональности. Так, числа α и 1 линейно независимы тогда и только тогда, когда α иррационально.

Понятие линейной зависимости и независимости элементов вводится также в абелевых группах и модулях.

Линейная зависимость — частный случай более широкого понятия — абстрактного отношения зависимости на множестве. *О. А. Иванова.*

ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА — пересечение M всех подпространств, содержащих множество A векторного пространства E. При этом M наз. также подпространством, порожденным A. *М. И. Войцеховский.*

ЛИНЕЙНАЯ ОЦЕНКА — линейная функция от наблюдаемых случайных величин, используемая (при подстановке в нее конкретных значений наблюденных величин) в качестве приближенного значения (оценки) неизвестного параметра анализируемой стохастич. схемы (см. *Оценка статистическая*). Специальное выделение класса Л. о. оправдано следующими обстоятельствами. Л. о. легче поддаются статистич. анализу, в частности исследованию на состоятельность, несмещенность, эффективность, построению соответствующих доверительных интервалов и т. п. В то же время в достаточно широком диапазоне случаев поиск «наилучших» (в определенном смысле) оценок не выводит за пределы класса Л. о. Так, напр., статистич. анализ линейной регрессионной модели (см. *Линейная регрессия*) вида

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{\Theta}+\varepsilon$$

дает в качестве наилучшей (в смысле метода наименьших квадратов) оценки параметров $\boldsymbol{\Theta}$ оценку

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y},$$

к-рая является линейной относительно наблюденных значений исследуемой случайной величины $\boldsymbol{Y}$. Здесь Y есть n-мерный вектор-столбец наблюденных значений y_i, $i=1, \ldots, n$, исследуемого результирующего признака (случайной величины), $\boldsymbol{X}$ — матрица размера $n\times p$ (ранга p) наблюденных значений $x_i^{(k)}$, $i=1, \ldots, n$, $k=1, \ldots, p$, p неслучайных факторов-аргументов, от к-рых зависит результирующий признак $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{\Theta}$ есть p-мерный вектор-столбец неизвестных параметров Q_k, $k=1, \ldots, p$, и ε есть n-мерный случайный вектор-столбец остаточных компонент, удовлетворяющий условия $\mathsf{E}\varepsilon=0$, $\mathsf{E}(\varepsilon\varepsilon')=\sigma^2 I$ (I — единичная матрица).

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [3] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [4] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1963. *С. А. Айвазян.*

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ одной случайной переменной $\boldsymbol{Y}=(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(m)})'$ по другой $\boldsymbol{X}=(X^{(1)}, \ldots, X^{(p)})'$ — линейная по x m-мерная векторная форма, описывающая зависимость условного математич. ожидания (при условии $\boldsymbol{X}=x$) случайного вектора $\boldsymbol{Y}$ от значений $x=(x^{(1)}, \ldots, x^{(p)})'$. Соответствующие уравнения

$$y^{(k)}(x, b)=\mathsf{E}(Y^{(k)} \mid \boldsymbol{X}=x)=\sum_{j=0}^{p} b_{kj}x^{(j)}, \qquad (*)$$

$$x^{(0)}\equiv 1, \quad k=1, 2, \ldots, m,$$

наз. уравнениями линейной регрессии $\boldsymbol{Y}$ по $\boldsymbol{X}$, а параметры b_{kj} — коэффициентами регрессии (см. также *Регрессия*).

В приложениях допускается интерпретация переменной $\boldsymbol{X}$ как наблюдаемого параметра (не обязательно случайного), от к-рого зависит математич. ожидание исследуемого результирующего показателя $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})$. Кроме того, часто под Л. р. $Y^{(k)}$ по $\boldsymbol{X}$ понимают «наилучшую» (в определенном смысле) линейную аппроксимацию $Y^{(k)}$ посредством величин $\boldsymbol{X}$ или результат наилучшего

(в определенном смысле) выравнивания имеющейся системы экспериментальных точек («наблюдений») $(Y_i^{(k)}, X_i)$, $i=1, \ldots, n$, с помощью гиперплоскости в пространстве $(Y^{(k)}, X)$ в ситуациях, когда интерпретация совокупности этих точек как выборки из соответствующей генеральной совокупности может и не быть правомочной. При таком определении приходится различать разные варианты Л. р. в зависимости от выбора способа вычисления ошибки линейной аппроксимации $Y^{(k)}$ посредством величин X (или в зависимости от конкретного выбора критерия качества выравнивания). Наиболее распространенными критериями качества аппроксимации $Y^{(k)}$ с помощью линейных комбинаций X (линейного выравнивания точек $(Y_i^{(k)}, X_i)$) являются:

$$Q_1(b) = \mathsf{E}\left\{\omega^2(X)\cdot\left(Y^{(k)}(X) - \sum_{j=0}^{p} b_{kj}X^{(j)}\right)^2\right\},$$

$$\tilde{Q}_1(b) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2\left(Y_i^{(k)} - \sum_{j=0}^{p} b_{kj}X_i^{(j)}\right)^2,$$

$$Q_2(b) = \mathsf{E}\left\{\omega(X)\left|Y^{(k)}(X) - \sum_{j=0}^{p} b_{kj}X^{(j)}\right|\right\},$$

$$\tilde{Q}_2(b) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\left|Y_i^{(k)} - \sum_{j=0}^{p} b_{kj}X_i^{(j)}\right|,$$

$$Q_3(b) = \mathsf{E}\left\{\omega^2(X)\cdot\rho^2\left(Y^{(k)}(X),\ \sum_{j=0}^{p} b_{kj}X^{(j)}\right)\right\},$$

$$\tilde{Q}_3(b) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2\cdot\rho^2\left(Y_i^{(k)},\ \sum_{j=0}^{p} b_{kj}X_i^{(j)}\right).$$

В этих соотношениях выбор «весов» $\omega(X)$ или ω_i зависит от природы конкретной исследуемой схемы. Так, напр., если $Y^{(k)}(X)$ интерпретируются как случайные величины, дисперсия к-рых $\mathsf{D}Y^{(k)}(X)$ (или их оценки) известны, то $\omega^2(X)=[\mathsf{D}Y^{(k)}(X)]^{-1}$. В последних двух критериях «невязки» аппроксимации или выравнивания измеряются расстояниями $\rho(\cdot,\cdot)$ от $Y^{(k)}(X)$ или $Y_i^{(k)}$ до искомой гиперплоскости регрессии. Если коэффициенты b_{kj} определяются из условия минимизации величин $Q_1(b)$ или $\tilde{Q}_1(b)$, то Л. р. наз. с р е д н е й к в а д р а т и ч е с к о й; при использовании критериев $Q_2(b)$ и $\tilde{Q}_2(b)$ Л. р. наз. с р е д н е й м о д у л ь н о й (или с р е д н е й а б с о л ю т н о й); при использовании критериев $Q_3(b)$ и $\tilde{Q}_3(b)$ — о р т о г о н а л ь н о й.

В нек-рых случаях Л. р. в классич. смысле (*) совпадает с Л. р., определенной с использованием функционалов типа Q_i. Так, напр., если вектор $(X', Y^{(k)})$ подчиняется многомерному нормальному закону, то регрессия $Y^{(k)}$ по X в смысле (*) совпадает со средней квадратической Л. р. (при $\omega(X)\equiv 1$).

Лит.: [1] Л и н н и к Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962; [2] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] К е н д а л л М. Дж., С т ь ю а р т А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [4] Р а о С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968.

С. А. Айвазян.

ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ — 1) Л. с. на д и ф ф е р е н ц и р у е м о м м н о г о о б р а з и и M — дифференциально-геометрич. структура на M, связанная с *аффинной связностью* на M. В каждой аффинной связности определяется параллельное перенесение вектора, позволяющее для каждой кривой $L(x_0, x_1)$ в M определить линейное отображение касательных векторных пространств $T_{x_1}(M) \to T_{x_0}(M)$. В этом смысле аффинная связность определяет нек-рую Л. с. на M, к к-рой относятся все понятия и конструкции, связанные только с перенесением векторов и вообще тензоров. Л. с. на M является связностью в главном расслоении $B(M)$ базисов в касательных векторных пространствах

$T_x(M)$, $x \in M$, и определяется одним из следующих трех эквивалентных между собой способов:

1) объектом связности Γ^i_{jk}, преобразующимся на пересечениях областей локальных карт по формулам

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x_{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{jk} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i};$$

2) матрицей 1-форм ω^i_j на главном расслоенном пространстве $B(M)$, состоящем из всех базисов во всех касательных пространствах $T_x(M)$, $x \in M$, такой, что 2-формы

$$d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \Omega^i_j$$

в каждой локальной координатной системе выражаются в виде

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl} dx^k \wedge dx^l;$$

3) билинейным оператором ∇ ковариантного дифференцирования, к-рый двум векторным полям X, Y на M ставит в соответствие третье $\nabla_Y X$ и обладает свойствами:

$$\nabla_Y (fX) = (Yf) X + f \nabla_Y X,$$
$$\nabla_{fY} X = f \nabla_Y X,$$

где f — гладкая функция на M.

Каждая Л. с. на M определяет однозначно нек-рую аффинную связность на M, канонически присоединенную к ней, к-рая определяется путем развертки любой кривой $L(x_0, x_1)$ в M. Для получения этой развертки следует сначала определить $n = \dim M$ линейно независимых параллельных векторных полей $X_1, \ldots, X_n$ вдоль L, затем разложить по ним касательное к L векторное поле:

$$\dot{x}(t) = \mu^i(t) X_i(t)$$

и, наконец, найти в $T_{x_0}(M)$ решение $x(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = \mu^i(t) X_i(0)$$

при начальном значении $x(t) = 0$. В произвольной точке x_t кривой L аффинное отображение касательных аффинных пространств

$$(A_n)_{x_t} \longrightarrow (A_n)_{x_0}$$

определяется теперь отображением реперов

$$\{x_t, X_i(t)\} \longrightarrow \{y_t, X_i(0)\},$$

где $\overrightarrow{x_0 y_t} = x(t)$.

Л. с. часто отождествляется с аффинной связностью, канонически к ней присоединенной, используя взаимно однозначное соответствие между ними.

2) Л. с. в векторном расслоении — дифференциально-геометрич. структура на дифференцируемом векторном расслоении π: $X \to B$, к-рая каждой кусочно гладкой кривой L в B с началом x_0 и концом x_1 сопоставляет линейный изоморфизм слоев $\pi^{-1}(x_0)$ и $\pi^{-1}(x_1)$ как векторных пространств — параллельное перенесение вдоль L. Л. с. определяется горизонтальным распределением на главном расслоенном пространстве P базисов в слоях, к к-рому присоединено данное векторное расслоение. Аналитически Л. с. задается такой матрицей 1-форм ω^β_α на P, где $\alpha, \beta, \ldots$ пробегают множество значений, мощность к-рого равна размерности слоев, что 2-формы

$$d\omega^\beta_\alpha + \omega^\nu_\alpha \wedge \omega^\beta_\nu = \Omega^\beta_\alpha$$

полубазовы, т. е. над каждой локальной координатной

системой (x^i) на B выражаются в виде

$$\Omega_\alpha^\beta = \tfrac{1}{2} R_{\alpha ij}^\beta dx^i \wedge dx^j.$$

Горизонтальное распределение определяется при этом дифференциальной системой $\omega_\alpha^\beta = 0$ на P. 2-формы Ω_α^β наз. формами кривизны. Согласно теореме о голономии они определяют группу голономии Л. с.

3) Л. с. в расслоенном пространстве — связность, при к-рой касательные векторы горизонтальных кривых с началом в данной точке y расслоенного пространства E образуют векторное подпространство Δ_y в $T_y(E)$; Л. с. определяется горизонтальным распределением Δ: $y \mapsto \Delta y$.

Лит.: [1] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономии, пер. с франц., М., 1960; [2] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry, v. 1, N. Y.— L., 1963.

Ю. Г. Лумисте.

ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА — семейство эффективных линейно эквивалентных *дивизоров* на алгебраич. многообразии, параметризованное проективным пространством.

Пусть X — неособое алгебраич. многообразие над полем k, $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на X, $\Gamma(X, \mathscr{L})$ — пространство глобальных сечений пучка $\mathscr{L}$, а $L \subset \Gamma(X, \mathscr{L})$ — некоторое конечномерное подпространство. Если $\dim L > 0$, то дивизоры, определяемые нулями сечений из L, линейно эквивалентны и эффективны. Линейной системой наз. проективное пространство $|L| = P(L)$ одномерных подпространств в L, параметризующее эти дивизоры. Если $\dim \Gamma(X, \mathscr{L}) < \infty$, то Л. с. $|\Gamma(X, \mathscr{L})|$ наз. полной; она обозначается также $|L|$.

Пусть $s_0, \ldots, s_n$ — базис в L. Он определяет рациональное отображение $\varphi_L : X \to P^n$ по формуле

$$x \mapsto (s_0(x), \ \ldots, \ s_n(x)), \quad x \in X.$$

Обычно говорят, что φ_L задано Л. с. $|L|$. Образ $\varphi_L(X)$ не лежит ни в какой гиперплоскости в P^n (см. [2]). Обратно, каждое рациональное отображение ψ: $X \to P^m$, обладающее этим свойством, задается нек-рой Л. с.

Неподвижной компонентой Л. с. $|L|$ наз. такой эффективный дивизор D^* на X, что $D = D' + D^*$ для любого $D \in |L|$, где D' — эффективный дивизор. Когда D пробегает Л. с. $|L|$, дивизоры D' образуют нек-рую Л. с. $|L'|$ той же размерности, что и Л. с. $|L|$. Отображение $\varphi_{L'}$ совпадает с φ_L. Поэтому при рассмотрении отображения φ_L можно предполагать, что Л. с. $|L|$ не имеет неподвижных компонент. В этом случае φ_L не определено в точности на *базисном множестве* Л. с. $|L|$.

Примеры. 1) Пусть $X = P^2$ и $\mathscr{L} = \mathcal{O}_{P^2}(d)$, $d \geqslant 1$, тогда сечения $\Gamma(P^2, \mathcal{O}_{P^2}(d))$ отождествляются с формами степени d на P^2, а полная Л. с. $|\mathcal{O}_{P^2}(d)|$ — с множеством всех кривых степени d.

2) Стандартное квадратичное преобразование τ: $P^2 \to P^2$ (см. *Кремоново преобразование*) задается Л. с. коник, проходящих через точки (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0).

3) Инволюция Гейзера α: $P^2 \to P^2$ задается Л. с. кривых степени 8, проходящих с кратностью 3 через 7 точек в общем положении.

4) Инволюция Бертини β: $P^2 \to P^2$ задается Л. с. кривых степени 17, проходящих с кратностью 6 через 8 точек в общем положении.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [2] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [3] Zariski O., Algebraic surfaces, 2 ed., B.— Hdlb. — N. Y., 1971.

В. А. Исковских.

ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ — система n линейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha_{11}(t)\, x_1 + \ldots + \alpha_{1n}(t)\, x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \alpha_{n1}(t)\, x_1 + \ldots + \alpha_{nn}(t)\, x_n, \end{aligned} \tag{1}$$

где t — действительная переменная, $\alpha_{jh}(t)$, $x_h = x_h(t)$ — комплекснозначные функции, причем

$$\alpha_{jh}(t+T) = \alpha_{jh}(t) \text{ для любых } j,\ h. \tag{2}$$

Число $T>0$ наз. периодом коэффициентов системы (1). Систему (1) удобно записывать в виде одного векторного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x, \tag{3}$$

где

$$x^T = (x_1, \ldots, x_n), \quad A(t) = \| \alpha_{jh}(t) \|, \quad j,\ h = 1, \ldots, n.$$

Предполагается, что функции $\alpha_{jh}(t)$ определены для $t \in \mathbb{R}$, измеримы и интегрируемы по Лебегу на $[0,\ T]$ и почти всюду выполнены равенства (2), т. е. $A(t+T) = A(t)$. Решение уравнения (3) — вектор-функция $x = x(t)$ с абсолютно непрерывными компонентами такая, что (3) выполнено почти всюду. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$, a — заданные (произвольно) число и вектор. Существует и определяется единственным образом решение $x(t)$, удовлетворяющее условию $x(t_0) = a$. Матрица $X(t)$ порядка n с абсолютно непрерывными элементами наз. матрицантом (или эволюционной матрицей, или *Коши матрицей*) уравнения (3), если почти всюду на $\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\frac{dX}{dt} = A(t)\, X$$

$$X(0) = I,$$

где I — единичная $(n \times n)$-матрица. Матрицант $X(t)$ удовлетворяет соотношению

$$X(t+T) = X(t)\, X(T), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Матрица $X(T)$ наз. матрицей монодромии, а ее собственные значения ρ_j — мультипликаторами уравнения (3). Уравнение

$$\det [X(T) - \rho I] = 0 \tag{4}$$

для мультипликаторов ρ_j наз. характеристическим уравнением уравнения (3) (системы (1)). Каждому собственному вектору $a^{(0)}$ матрицы монодромии с мультипликатором ρ_0 соответствует решение $x^{(0)}(t) = X(t) a^{(0)}$ уравнения (3), удовлетворяющее условию

$$x^{(0)}(t+T) = \rho_0 x^{(0)}(t).$$

Имеет место теорема Флоке — Ляпунова: матрицант уравнения (3) с T-периодической матрицей $A(t)$ представим в виде

$$X(t) = F(t)\, e^{tK}, \tag{5}$$

где K — постоянная матрица, $F(t)$ — периодическая с периодом T, абсолютно непрерывная неособая для всех $t \in \mathbb{R}$ матрица-функция и $F(0) = I$. Обратно: если $F(t)$ и K — матрицы с указанными свойствами, то матрица (5) является матрицантом нек-рого уравнения (3) с T-периодической матрицей $A(t)$. Матрица K, наз. показательной матрицей, и матрица-функция $F(t)$ в представлении (5) определя-

ются неоднозначно. В случае действительных коэффициентов $\alpha_{jh}(t)$ в (5) $X(t)$ — действительная матрица, а $F(t)$ и K, вообще говоря,— комплексные матрицы. Для этого случая справедливо уточнение теоремы Флоке — Ляпунова: матрицант уравнения (3) с T-периодической действительной матрицей $A(t)$ представим в виде (5), где K — постоянная действительная матрица, $F(t)$ — действительная абсолютно непрерывная неособая для всех t матрица-функция, удовлетворяющие соотношениям

$$F(t+T)=F(t)L, \quad F(0)=I, \quad KL=LK,$$

где L — некоторая действительная матрица такая, что

$$L^2=I.$$

В частности, $F(t+2T)=F(t)$. Обратно: если $F(t)$, K, L — произвольные матрицы, обладающие указанными свойствами, то (5) — матрицант нек-рого уравнения (3) с T-периодической действительной матрицей $A(t)$.

Из (5) сразу следует т е о р е м а Ф л о к е, утверждающая, что уравнение (3) обладает фундаментальной системой решений, распадающейся на группы, каждая из к-рых имеет вид

$$x^{(1)}(t)=e^{\lambda t}u_1(t),$$
$$x^{(2)}(t)=e^{\lambda t}[tu_1(t)+u_2(t)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{(m)}(t)=e^{\lambda t}\left[\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}u_1(t)+\ldots+tu_{m-1}(t)+u_m(t)\right],$$

где $u_j(t)$ — абсолютно непрерывные T-периодические (вообще говоря, комплексные) вектор-функции. (Указанная группа решений соответствует одному $(m\times m)$-ящику жордановой формы матрицы K.) Если все элементарные делители матрицы K простые (в частности, если все корни характеристич. уравнения (4) простые), то имеется фундаментальная система решений вида

$$x^{(j)}(t)=e^{\lambda_j t}u_j(t), \quad u_j(t+T)=u_j(t), \quad j=1, \ldots, n.$$

Формула (5) означает приводимость уравнения (3) (см. *Приводимая линейная система*) к уравнению

$$\frac{dy}{dt}=Ky$$

посредством замены $x=F(t)y$ (т е о р е м а Л я п у н о в а).

Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — мультипликаторы уравнения (3) и K — произвольная показательная матрица, т. е.

$$e^{TK}=X(T). \tag{6}$$

Собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы K наз. х а р а к т е р и с т и ч е с к и м и п о к а з а т е л я м и уравнения (3). Из (6) имеем $e^{T\lambda_j}=\rho_j$, $j=1, \ldots, n$. Характеристич. показатель λ можно определить так же, как комплексное число, для к-рого уравнение (3) имеет решение, представимое в виде

$$x(t)=e^{\lambda t}u(t),$$

где $u(t)$ есть T-периодическая вектор-функция. Основные свойства решений, к-рыми обычно интересуются в приложениях, определяются характеристич. показателями или мультипликаторами заданного уравнения (см. табл.). В приложениях часто коэффициенты системы (1) зависят от параметров; в пространстве параметров нужно выделить области, для точек к-рых решения системы (1) обладают определенными свойствами (обычно это — первые четыре свойства, указанные в таблице, либо справедливость оценки $|x(t)|\leqslant \leqslant \text{const}\cdot e^{-\alpha t}$ с заданным α). Эти задачи сводятся, таким образом, к вычислению или к оценке характеристич. показателей (мультипликаторов) системы (1).

Уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t), \tag{7}$$

где $A(t)$, $f(t)$ — измеримые, интегрируемые по Лебегу на $[0, T]$ T-периодические матрица-функция и вектор-функция соответственно ($A(t+T)=A(t)$, $f(t+T)=f(t)$

Свойство решений	Характеристические показатели	Мультипликаторы
Устойчивость тривиального решения (ограниченность на $(0, \infty)$ всех решений)	Действительные части неположительны; в случае наличия нулевых или чисто мнимых характеристических показателей им соответствуют простые элементарные делители показательной матрицы	Расположены внутри или на единичной окружности; в последнем случае им соответствуют простые элементарные делители матрицы монодромии
Асимптотическая устойчивость тривиального решения ($\lvert x(t)\rvert \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow \infty$ для любого решения)	Действительные части отрицательны	Расположены внутри единичной окружности
Ограниченность всех решений на $(-\infty, +\infty)$	Чисто мнимые с простыми элементарными делителями показательной матрицы	Расположены на единичной окружности, всем им отвечают простые элементарные делители матрицы монодромии
Неустойчивость тривиального решения (наличие неограниченных на $(0, \infty)$ решений)	Имеется либо характеристический показатель с положительной действительной частью, либо чисто мнимый (в частности, нулевой) с непростым элементарным делителем показательной матрицы	Имеется мультипликатор либо вне единичной окружности, либо на единичной окружности с непростым элементарным делителем матрицы монодромии
Наличие T-периодического решения	Для некоторого характеристического показателя λ_j выполнено $\lambda_j T = 2\pi i m$ (m — целое)	Один из мультипликаторов равен единице
Наличие полупериодического решения, т. е. решения $x(t)$, для которого $x(t+T) = -x(t)$, $\forall t$	Для некоторого характеристического показателя λ_j выполнено $\lambda_j T = (2m+1)\,T$ (m — целое)	Имеется мультипликатор $\rho = -1$

почти всюду), наз. неоднородным линейным дифференциальным уравнением с периодическими коэффициентами. Если соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y \tag{8}$$

не имеет T-периодических решений, то уравнение (7) имеет и притом единственное T-периодическое решение. Оно определяется формулой

$$x(t) = [I - R(t, 0)]^{-1} \int_0^T R(t, T-\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau,$$

где $R(t,\ s)=Y(t+T)Y(t+s)^{-1}$, а $Y(t)$ — матрицант однородного уравнения (8), при этом $R(t+T,\ s)=R(t,\ s)$, $\det[I-R(t,\ 0)]\neq 0$.

Пусть уравнение (8) имеет $d\geqslant 1$ линейно независимых T-периодических решений $y_1(t),\ \ldots,\ y_d(t)$. Тогда сопряженное уравнение

$$\frac{dz}{dt}=-A(t)^*z$$

имеет также d линейно независимых T-периодических решений: $z_1(t),\ \ldots,\ z_d(t)$. Для того чтобы неоднородное уравнение (7) имело T-периодическое решение, необходимо и достаточно выполнения соотношений ортогональности

$$\int_0^T (f(t),\ z_j(t))\,dt=0,\quad j=1,\ \ldots,\ d. \tag{9}$$

При выполнении (9) произвольное T-периодическое решение уравнения (7) имеет вид

$$x(t)=x^{(0)}(t)+\gamma_1 y_1(t)+\ldots+\gamma_d y_d(t),$$

где $\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_d$ — произвольные числа, а $x^{(0)}(t)$ — нек-рое T-периодическое решение уравнения (7). При дополнительных условиях

$$\int_0^T (x(t),\ y_j(t))\,dt=0,\ j=1,\ \ldots,\ d,$$

T-периодическое решение $x(t)$ определяется однозначно; при этом существует такая не зависящая от $f(t)$ постоянная $\theta>0$, что

$$|x(t)|\leqslant\theta\left(\int_0^T |f(s)|^2\,ds\right)^{1/2},\quad t\in[0,\ T].$$

Пусть задано уравнение

$$\frac{dx}{dt}=A(t,\ \varepsilon)\,x \tag{10}$$

с матричным коэффициентом, голоморфно зависящим от комплексного «малого» параметра ε:

$$A(t,\ \varepsilon)=A_0(t)+\varepsilon A_1(t)+\varepsilon^2 A_2(t)+\ldots \tag{11}$$

Пусть при $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ сходится числовой ряд

$$\|A_0(\cdot)\|+\varepsilon\|A_1(\cdot)\|+\varepsilon^2\|A_2(\cdot)\|+\ldots,$$

где

$$\|A_j(\cdot)\|=\int_0^T |A_j(t)|\,dt,$$

что гарантирует сходимость (поэлементно) ряда (11) при $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ в пространстве $L(0,\ T)$. Тогда матрицант $X(t,\ \varepsilon)$ уравнения (10) для фиксированного $t\in[0,\ T]$ есть аналитич. функция от ε при $|\varepsilon|<\varepsilon_0$. Пусть $A_0(t)=C$ — постоянная матрица с собственными значениями λ_j, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Пусть $\rho_j(\varepsilon)$ — мультипликаторы уравнения (10), $\rho_j(0)=\exp(\lambda_j T)$. Если $\rho_h(0)=\exp(\alpha^{(0)}T)$ — мультипликатор кратности r ($h=h_1,\ \ldots,\ h_r$, h_j — некоторые числа из $1,\ 2,\ \ldots,\ n$), то

$$\lambda_h=\alpha^{(0)}+\frac{2\pi i}{T}m_h,\quad h=h_1,\ \ldots,\ h_r, \tag{12}$$

где m_h — целые числа. Если этому мультипликатору отвечают простые элементарные делители матрицы монодромии, или, иначе, если каждому λ_h, $h=h_1,\ \ldots,\ h_r$, отвечают простые элементарные делители матрицы C (напр., все числа λ_h различны), то $\alpha^{(0)}$ наз. r-кратным характеристическим показателем (уравнения (10) при $\varepsilon=0$) простого типа. Оказывается, что соответствующие r характеристич. показателей уравнения (10) с малым $\varepsilon>0$ в первом приближении вычисляются весьма просто. Именно, пусть a_h, b_h — соответствующие нор-

мированные собственные векторы матриц C и C^*:

$$Ca_h = \lambda_h a_h, \quad C^* b_h = \overline{\lambda}_h b_h,$$
$$(a_j, b_h) = \delta_{jh}, \; j, \; h = h_1, \ldots, h_r;$$

пусть

$$A_1(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_1^{(m)} \exp(2\pi i m t/T)$$

— ряд Фурье для $A_1(t)$ и пусть

$$\sigma_{jh} = \left(A_1^{(m_h - m_j)} a_j, \, b_h\right), \; j, \; h = h_1, \ldots, h_r,$$

где m_j — числа из (12). Тогда для соответствующих r характеристич. показателей $\alpha_h(\varepsilon)$, $h = h_1, \ldots, h_r$, уравнения (10), обращающихся в $\alpha^{(0)}$ при $\varepsilon = 0$, справедливы разложения в ряды по дробным степеням ε, начинающиеся с членов первого порядка:

$$\alpha_h(\varepsilon) = \alpha^{(0)} + \beta_h \varepsilon + O\left(\varepsilon^{1+1/q_h}\right), \; h = h_1, \ldots, h_r, \quad (13)$$

где β_h — корни (написанные столько раз, какова их кратность) уравнения

$$\det \| \sigma_{jh} - \beta \delta_{jh} \| = 0,$$

а q_h — натуральные числа, равные кратностям соответствующих β_h ($\delta_{jj} = 1$, $\delta_{jh} = 0$ при $j \neq h$). Если корень β_h простой, то $q_h = 1$ и соответствующая функция $\alpha_h(\varepsilon)$ аналитична при $\varepsilon = 0$. Из формулы (13) следует, что возможны случаи, когда «невозмущенная» (т. е. с $\varepsilon = 0$) система устойчива (все λ_j чисто мнимы и им соответствуют простые элементарные делители), но «возмущенная» система (малое $\varepsilon \neq 0$) неустойчива ($\mathrm{Re}\,\beta_h > 0$ хотя бы для одного β_h). Это явление потери устойчивости при сколь угодно малом периодич. изменении параметров (во времени) наз. параметрическим резонансом. Аналогичные, но более сложные формулы имеют место для характеристич. показателей непростого типа.

Пусть $\rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(q)}$ — различные мультипликаторы уравнения (3) и $n_1, \ldots, n_q$ — их кратности, $n_1 + \ldots + n_q = n$. Пусть точки $\rho^{(j)}$ на комплексной плоскости ζ окружены непересекающимися кругами $|\zeta - \rho^{(j)}| \leqslant R_j$ и из точки $\zeta = 0$ в точку $\zeta = \infty$ проведен непересекающий эти круги разрез. С помощью этого разреза определяются ветви логарифма $(\ln \zeta)_m$. Пусть каждому мультипликатору $\rho^{(j)}$ сопоставлено произвольное целое число m и $U = X(T, \varepsilon)$ — матрицант уравнения (10). Матрица $\ln U$ («матричный логарифм») может быть определена формулой

$$\ln U = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{q} \int_{\Gamma_j} (\zeta I - U)^{-1} (\ln \zeta)_{m_j} d\zeta, \quad (14)$$

где Γ_j — окружность $|\zeta - \rho^{(j)}| = R_j$. Набор чисел $m_1, \ldots, m_q$ определяет ветвь матричного логарифма. При этом $\exp(\ln U) = U$ для малых ε. Формула (14) при всевозможных $m_1, \ldots, m_j$ не охватывает, вообще говоря, всех значений матричного логарифма, т. е. всех решений Z уравнения $\exp Z = U$. Однако решение, даваемое формулой (14), обладает важным свойством голоморфности: элементы матрицы $\ln U$ в (14) суть голоморфные функции элементов матрицы U. Для уравнения (10) формула (5) принимает вид

$$X(t, \varepsilon) = F(t, \varepsilon) \exp[tK(\varepsilon)], \quad (15)$$

где $F(t+T, \varepsilon) = F(t, \varepsilon)$, $K(\varepsilon) = T^{-1} \ln X(T, \varepsilon)$. Если $\ln X(T, \varepsilon)$ определяется согласно (14), то

$$K(\varepsilon) = K_0 + \varepsilon K_1 + \ldots, \; F(t, \varepsilon) = F_0(t) + \varepsilon F_1(t) + \ldots \quad (16)$$

— ряды, сходящиеся при малых $|\varepsilon|$. Основная информация о поведении решений при $t \to +\infty$, к-рой обычно интересуются в приложениях, заключена в показательной матрице $K(\varepsilon)$. Ниже описан метод асимпто-

тич. интегрирования уравнения (10), т. е. метод последовательного определения коэффициентов K_j, $F_j(t)$ в (16).

Пусть в (11) $A_0(t)\equiv C$. При этом, хотя $X(t, 0)=\exp(tC)$, вообще говоря, не существует ветви матричного логарифма такой, что матрица $K(\varepsilon)$ аналитична при $\varepsilon=0$ и $K(0)=C$. Указанная ветвь логарифма будет существовать в так наз. нерезонансном случае, когда среди собственных значений λ_j матрицы C нет чисел, для к-рых

$$\lambda_j-\lambda_h=\frac{2\pi mi}{T}\neq 0$$

(m — целое число). В резонансном случае (когда такие собственные значения существуют) уравнение (10) подходящей заменой $x=P(t)y$, где $P(t+T)=P(t)$, сводится к аналогичному уравнению, для к-рого имеет место нерезонансный случай. Матрица $P(t)$ определяется по матрице C.

В нерезонансном случае в (16) $K_0=C$, $F_0(t)\equiv I$, а матрицы $F_j(t)$, K_j, $j=1, 2, \ldots$, находятся из уравнения

$$\frac{dF}{dt}=[C+\varepsilon A_1(t)+\varepsilon^2 A_2(t)+\ldots]F(t, \varepsilon)-F(t, \varepsilon)K(\varepsilon)$$

после приравнивания в этом уравнении коэффициентов при одинаковых степенях ε. Для определения $Z(t)=F_j(t)$ и $L=K_j$ получается матричное уравнение вида

$$\frac{dZ}{dt}=CZ-ZC+\Phi(t)-L, \qquad (17)$$

где $\Phi(t+T)=\Phi(t)$. Матрицы $Z(t)$ и L находятся, и притом однозначно (нерезонансный случай), из (17) и условия периодичности $Z(t+T)=Z(t)$.

Относительно специальных случаев системы (1) см. *Гамильтонова система линейная*, *Хилла уравнение*.

Лит.: [1] Штокало И. З., Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, К., 1960; [2] Еругин Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963; [3] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972.

В. А. Якубович.

ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ — система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=A(t)x+f(t), \quad x\in\mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

где $A(\cdot)\colon \mathbb{R}\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f(\cdot)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ — почти периодические отображения; в координатной записи:

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^n a_j^i(t)x^j+f^i(t), \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

где $a_j^i(t)$ и $f^i(t)$, $i, j=1, \ldots, n$,— почти периодич. числовые функции. Такие системы возникли в связи с появлением *Бора почти периодических функций* (см. [1]). Интерес к более узкому классу систем ($A(t)$ и $f(t)$ — квазипериодич. отображения) появился значительно раньше в связи с рассмотрением уравнений в вариациях вдоль условно периодич. решений уравнений небесной механики.

Если однородная система

$$\dot{x}=A(t)x \qquad (2)$$

есть система с интегральной разделенностью (см. *Интегральной разделенности условие*), то она почти периодическим по t *Ляпунова преобразованием* $x=L(t)y$ приводится к диагональной системе $\dot{y}=B(t)y$ с почти периодич. коэффициентами, т. е. к такой, что существует не зависящий от t базис в $\mathbb{R}^n$, состоящий из векторов, являющихся при каждом $t\in\mathbb{R}$ собственными

векторами оператора $B(t)$; в координатах по этому базису система $\dot{y}=B(t)y$ записывается в диагональном виде:

$$\dot{y}^i = b_i^i(t)\, y^i, \quad i=1, \ldots, n.$$

Множество систем с интегральной разделенностью открыто в пространстве систем (2) с почти периодич. коэффициентами, наделенном метрикой

$$d(A_1, A_2) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \| A_1(t) - A_2(t) \|.$$

Имеет место следующая теорема. Пусть $A(t)=C+\varepsilon D(t)$, где $C\in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, причем собственные значения C все действительны и различны, $D(\cdot)$ — почти периодич. отображение $\mathbb{R}\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Тогда найдется $\eta>0$ такое, что при всех ε таких, что $|\varepsilon|<\eta$, система (2) почти периодическим по t преобразованием Ляпунова приводится к диагональной системе с почти периодич. коэффициентами.

Для почти периодич. отображения $A(t)$: $\mathbb{R}\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ следующие четыре утверждения эквивалентны друг другу: 1) для всякого почти периодич. отображения $f(\cdot)$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ у системы (1) найдется почти периодич. решение; 2) имеет место экспоненциальная *дихотомия* решений системы (2); 3) ни одна из систем $\dot{x}=\tilde{A}(t)x$, где $\tilde{A}(t)=\lim\limits_{k\to\infty} A(t_k+t)$, не имеет ненулевых ограниченных решений; 4) для всякого ограниченного отображения $f(t)$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ у системы (1) найдется ограниченное решение.

Лит.: [1] Бор Г., Почти периодические функции, пер. с нем., М.— Л., 1934; [2] Favard J., Leçons sur les fonctions presque périodiques, P., 1933; [3] Еругин Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963; [4] Массера Х.-Л., Шеффер Х.-Х., Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства, пер. с англ., М., 1970; [5] Мухамадиев Э., «Докл. АН СССР», 1971, т. 196, № 1, с. 47—49; [6] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146.

В. М. Миллионщиков.

ЛИНЕЙНАЯ ТОПОЛОГИЯ на кольце A — кольцевая топология, для к-рой имеется фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из левых идеалов (в этом случае топология наз. линейной слева). Аналогично, топология на левом A-модуле E линейна, если имеется фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из подмодулей. Наибольшее распространение имеет *адическая топология*, базис к-рой задается степенями нек-рого идеала.

Отделимый линейно топологизированный A-модуль E наз. линейно компактным модулем, если любой базис фильтра, состоящий из аффинных линейных подмногообразий в E (т. е. подмножеств вида $x+E'$, где $x\in E$, а E' — подмодуль в E), имеет точку прикосновения. Любой модуль конечного типа над полным локальным нётеровым кольцом линейно компактен.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

В. И. Данилов.

ЛИНЕЙНАЯ ФОРМА — 1) Однородный многочлен первой степени.

2) *Линейная функция* (однородная) на векторном пространстве V над полем k со значениями в поле k.

ЛИНЕЙНАЯ ФОРМА ОТ ЛОГАРИФМОВ алгебраических чисел — выражение вида

$$L = \beta_1 \log \alpha_1 + \ldots + \beta_n \log \alpha_n.$$

Эффективные оценки снизу для $|L|$ в предположении, что коэффициенты $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — рациональные или алгебраич. числа, а $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ — фиксированные ветви логарифмов, линейно независимые над полем Q, играют большую роль в теории чисел.

Когда $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — рациональны, выполняется неравенство $|L| > e^{-c_1 B}$, где $B=\max |B_i|$, а $c_1>0$ и зависит

только от чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Методы, с помощью к-рых устанавливаются нетривиальные оценки снизу для $|L|$, принадлежат теории трансцендентных чисел. В случае $n=2$ ряд неравенств, справедливых для B, превосходящих нек-рую эффективно вычислимую границу, получен А. О. Гельфондом (1935—49). Лучшее из них имеет вид $|L| > e^{-\ln^{2+\varepsilon} B}$.

В 1948 им же доказано, что при любом n для всех достаточно больших B имеет место неравенство $|L| > e^{-\varepsilon B}$. Последний результат был, однако, лишь теоремой существования, а граница для B, начиная с к-рой выполнялось это неравенство, из доказательства не могла быть определена. Эффективные оценки $|L|$ при любом n были получены в 1966 А. Бейкером (см. [2]) на основании метода Гельфонда.

Пусть $n \geqslant 2$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — ненулевые алгебраич. числа, высоты и степени к-рых не превосходят соответственно A и d, $A \geqslant 4$, $d \geqslant 4$. Пусть, далее, $0 < \varepsilon < 1$ и $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ — главные значения логарифмов. Если существуют целые рациональные $b_1, \ldots, b_n$, $|b_i| \leqslant B$, такие, что

$$0 < |b_1 \log \alpha_1 + \ldots + b_n \log \alpha_n| < e^{-\varepsilon B},$$

то

$$B < (4^{n^2} \varepsilon^{-1} d^{2n} \log A)^{(2n+1)^2}.$$

В связи с различными задачами получено большое количество эффектных оценок Л. ф. от л. Степенная по порядку величины B оценка для $|L|$ впервые была получена в 1968 Н. И. Фельдманом [3].

Пусть $n \geqslant 2$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — алгебраич. числа, $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ — фиксированные ветви логарифмов, линейно независимые над Q. Существуют эффективные постоянные $c_2 > 0$, $\varkappa_1 > 0$ такие, что для любых алгебраич. чисел $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$, высота к-рых не превосходит B, имеет место неравенство

$$|\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \ldots + \beta_n \log \alpha_n| > c_2 B^{-\varkappa_1}$$

(постоянные c_2 и $\varkappa_1$ явно выписываются в зависимости от чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и степеней $\beta_0, \ldots, \beta_n$).

С помощью оценок Л. ф. от л. алгебраич. чисел найдены границы для решений различных классов диофантовых уравнений (уравнений Туэ, гиперэллиптич. уравнений, уравнений, задающих кривые рода 1, и др.). Оценки Л. ф. от л. позволили определить границы для дискриминантов мнимых квадратичных полей с числом классов 1 и 2. В теории чисел применяются также p-адические аналоги теорем об оценках Л. ф. от л. алгебраич. чисел.

Лит.: [1] Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952; [2] Baker A., в кн.: Actes du Congrès International des Mathématiciens, [Nice], 1970, t. 1, P., 1971, p. 19—26; [3] Фельдман Н. И., «Матем. сб.», 1968, т. 77, № 3, с. 423—36; [4] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 5, с. 973—90; [5] Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974. *Ю. В. Нестеренко.*

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ — функция вида $y = kx + b$. Основное свойство Л. ф.: приращение функции пропорционально приращению аргумента. Графически Л. ф. изображается прямой линией.

Л. ф. n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — функция вида

$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + a,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, a$ — некоторые фиксированные числа. Областью определения Л. ф. является все n-мерное пространство переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, действительных или комплексных. При $a=0$ Л. ф. наз. однородной, или линейной, формой.

Если все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n, a$ — действительные числа, то графиком Л. ф. в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ является n-мерная гиперплос-

кость $y=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+a$, в частности при $n=1$ — прямая линия на плоскости.

Термин «Л. ф.», или, точнее, линейная однородная функция, часто применяется для линейного отображения векторного пространства X над некоторым полем K в это поле, т. е. для такого отображения $f\colon X\to K$, что для любых элементов $x'\in X$, $x''\in X$ и любых $\alpha'\in K$, $\alpha''\in K$ справедливо равенство

$$f(\alpha'x'+\alpha''x'')=\alpha'f(x')+\alpha''f(x''),$$

причем в этом случае вместо термина «Л. ф.» используются также термины — л и н е й н ы й ф у н к ц и о н а л и л и н е й н а я ф о р м а. *Л. Д. Кудрявцев.*

ЛИНЕЙНО КОМПАКТНЫЙ МОДУЛЬ — топологический модуль над топологич. кольцом, обладающий базисом окрестностей нуля, состоящим из подмодулей, и в к-ром всякая центрированная система, состоящая из классов вычетов по замкнутым подмодулям, имеет непустое пересечение. Всякий Л. к. м. является полной топологич. группой.

Л. к. м. наз. л и н е й н о к о м п а к т н ы м м о д у л е м в у з к о м с м ы с л е, если всякий непрерывный гомоморфизм на топологич. модуль, обладающий базисом окрестностей нуля из подмодулей, открыт. Топологич. модуль является в узком смысле Л. к. м. тогда и только тогда, когда он — полная топологич. группа и всякий его фактормодуль по открытому подмодулю — *артинов модуль*. В частности, артинов модуль в дискретной топологии является Л. к. м. в узком смысле. Таким образом, Л. к. м. в узком смысле — топологич. аналоги артиновых модулей.

Прямые произведения, замкнутые подмодули, фактормодули по замкнутым подмодулям и непрерывные гомоморфные образы, обладающие базисом окрестностей нуля из подмодулей, Л. к. м. (Л. к. м. в узком смысле) сами будут Л. к. м. (Л. к. м. в узком смысле).

Лит.: [1] Л е ф ш е ц С., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1949; [2] Z e l i n s k y D., «Amer. J. Math.», 1953, v. 75, № 1, p. 79—90; [3] L e p t i n H., «Math. Z.», 1955, Bd 62, S. 241—67; 1957, Bd 66, S. 289—327. *В. И. Арнautов.*

ЛИНЕЙНО РАЗДЕЛЕННЫЕ РАСШИРЕНИЯ п о л я k — два подрасширения A и B нек-рого расширения Ω поля k такие, что подалгебра, порожденная A и B, в Ω устроена как тензорное произведение $A\otimes B$ над k. Пусть A и B — произвольные подкольца расширения Ω поля k, содержащие k, и C — подкольцо поля Ω, порожденное кольцами A и B. Всегда существует представление φ: $A\otimes B$ на алгебру C, ставящее в соответствие элементу $x\otimes y\in A\otimes B$, $x\in A$, $y\in B$, произведение xy из C. Алгебры A и B наз. л и н е й н о р а з д е л е н н ы м и над k, если представление φ является изоморфизмом $A\otimes B$ на C. В этом случае $A\cap B=k$. Для того чтобы A и B были линейно разделены над k, достаточно существования базиса алгебры B над k, к-рый независим над A. Если A конечное расширение поля k, то степень расширения $[B(A):B]$ не превосходит степени расширения $[A:k]$ и равенство имеет место в том и только в том случае, когда A/k и B/k линейно разделены.

Лит.: [1] Б у р б а к и Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965. *О. А. Иванова.*

ЛИНЕЙНО РЕГУЛЯРНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС — стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$, $-\infty<t<\infty$, для к-рого выполнено следующее условие регулярности:

$$\bigcap_t H_\xi(-\infty,\ t)=0,$$

где $H_\xi(-\infty,\ t)$ — замкнутая в среднем квадратичном линейная оболочка значений $\xi(s)$, $s\leqslant t$ (здесь предполагается, что $\mathsf{E}\xi(t)=0$). Регулярность означает невозможность (линейного) прогнозирования процесса $\xi(t)$ на слишком далекое будущее; точнее, если $\hat{\xi}(t+u)$

есть наилучший линейный прогноз для $\xi(t+u)$ по значениям $\xi(s)$, $s \leqslant t$:

$$\mathsf{E}\,|\xi(t+u)-\hat{\xi}(t+u)|^2 = \min_{\eta \in H_\xi(-\infty,\ t)} \mathsf{E}\,|\xi(t+u)-\eta|^2,$$

то

$$\lim_{u \to \infty} \hat{\xi}(t+u) = 0.$$

Необходимым и достаточным условием регулярности (одномерного) стационарного процесса является наличие спектральной плотности $f(\lambda)$ такой, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2}\, d\lambda > -\infty.$$

Аналитич. условия регулярности многомерных и бесконечномерных стационарных процессов выглядят сложнее. В общем случае, когда спектральная плотность $f(\lambda)$ представляет собой положительную операторную функцию в нек-ром гильбертовом пространстве, условие регулярности равносильно тому, что $f(\lambda)$ допускает факторизацию вида

$$f(\lambda) = \varphi^*(\lambda)\,\varphi(\lambda),$$

где $\varphi(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$,— граничное значение операторной функции $\varphi(\lambda+i\mu)$, $\mu \to 0$, аналитичной в нижней полуплоскости $z=\lambda+i\mu$, $\mu<0$.

Всякий стационарный в широком смысле процесс $\zeta(t)$ допускает разложение в ортогональную сумму

$$\zeta(t) = \xi(t)+\eta(t),$$

$$\mathsf{E}\xi(t)\,\overline{\eta(t)} = 0,$$

где $\xi(t)$ — линейно регулярный, а $\eta(t)$ — линейно сингулярный процесс, т. е. стационарный в широком смысле случайный процесс, для к-рого

$$\bigcap_t H_\eta(-\infty,\ t) = H_\eta(-\infty,\ \infty);$$

при этом

$$H_\xi(-\infty,\ t) \subset H_\xi(-\infty,\ t) \text{ и } H_\eta(-\infty,\ t) \subset H_\xi(-\infty,\ t)$$

при всех t.

Лит.: [1] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [2] его же, Теория обновляющих процессов, М., 1974.

Ю. А. Розанов.

ЛИНЕЙНО СВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, в к-ром любые две точки можно соединить непрерывным образом простой дуги, т. е. пространство X, для любых двух точек x_0 и x_1 к-рого существует такое *непрерывное отображение* $f\colon I \to X$ единичного отрезка $I=[0,\ 1]$, что $f(0)=x_0$ и $f(1)=x_1$. Эквивалентным образом, Л. с. п.— это пространство, в к-ром любые две точки можно соединить простой дугой, или, что то же самое,— это пространство, любое отображение нульмерной сферы в к-рое гомотопно постоянному отображению. Всякое Л. с. п. связно. Непрерывный образ Л. с. п. линейно связен.

Л. с. п. играют важную роль в гомотопич. топологии. Если пространство X линейно связно и x_0, $x_1 \in X$, то гомотопич. группы $\pi_n(X,\ x_0)$ и $\pi_n(X,\ x_1)$ изоморфны, причем этот изоморфизм определяется однозначно с точностью до действия группы $\pi_1(X,\ x_0)$. Если $p\colon E \to B$ — расслоение с линейно связной базой B, то любые два слоя имеют один и тот же *гомотопический тип*. Если $p\colon E \to B$ — слабое расслоение *(Серра расслоение)* над линейно связной базой B, то любые два слоя имеют один и тот же слабый гомотопич. тип.

Многомерным обобщением линейной связности является k-связность (связность в размерности k). Пространство X наз. связным в размерности k, если любое отображение r-мерной сферы S^r в X, где $r \leqslant k$, гомотопно постоянному отображению.

Лит.: [1] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971.

С. А. Богатый.

ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННАЯ ГРУППА — алгебраическая система G, являющаяся группой относительно операции умножения, линейно упорядоченным множеством относительно бинарного отношения порядка $\leqslant$ и удовлетворяющая аксиоме: для любых элементов x, y, $z \in G$ из $x \leqslant y$ следует $xz \leqslant yz$ и $zx \leqslant zy$.

Множество положительных элементов $P = \{x \in G,\ x \geqslant e\}$ Л. у. г. G обладает свойствами: 1) $PP \subseteq P$, 2) $P \cap P^{-1} = e$, 3) $g^{-1}Pg \subseteq P$, 4) $P \cup P^{-1} = G$. Обратно, если в группе G имеется множество P, удовлетворяющее свойствам 1) — 4), то G может быть превращена в Л. у. г., множество положительных элементов к-рой есть P.

Имеется большое число признаков упорядочиваемости группы. Упорядочиваемые группы являются группами без кручения с однозначным извлечением корня. Упорядочиваемыми являются все абелевы группы без кручения, нильпотентные группы без кручения, свободные группы и свободные разрешимые группы. Существуют простые и нехопфовы Л. у. г. Факторгруппа упорядочиваемой группы по ее центру упорядочиваема.

Прямое, *полное прямое* и *свободное произведения*, а также сплетение Л. у. г. могут быть линейно упорядочены с продолжением порядков сомножителей. Группа, аппроксимируемая упорядочиваемыми группами, сама упорядочиваема. Для упорядочиваемых групп справедлива локальная теорема (см. *Мальцева локальные теоремы*). Л. у. г. вкладывается в мультипликативную группу линейно упорядоченного тела и в простую Л. у. г. Класс упорядочиваемых групп — аксиоматизируемый. Л. у. г. является *топологической группой* с интервальной топологией. Л. у. г. является *архимедовой группой* тогда и только тогда, когда она не имеет нетривиальных выпуклых подгрупп. Любая архимедова Л. у. г. изоморфна нек-рой подгруппе аддитивной группы действительных чисел с естественным порядком. Множество всех выпуклых подгрупп Л. у. г. образует полную инфраинвариантную систему, факторы к-рой архимедовы, и, значит, Л. у. г. обладают разрешимыми нормальными системами (см. *Подгрупп система*).

Специфическими для теорин Л. у. г. являются вопросы, связанные с продолжением частичных порядков (см. *Доупорядочиваемая группа*). Имеется ряд обобщений понятия Л. у. г.

Лит.: [1] Кокорин А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972; [2] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965; [3] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965.

А. И. Кокорин, В. М. Копытов.

ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО, цепь,— частично упорядоченное множество, в к-ром для любых двух элементов a и b имеет место $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$. Подмножество Л. у. м. само является Л. у. м. Всякий максимальный (минимальный) элемент Л. у. м. оказывается наибольшим (наименьшим). Важнейший частный случай Л. у. м.— *вполне упорядоченные множества*. Среди подмножеств частично упорядоченного множества, являющихся Л. у. м., особенно важную роль играет *композиционный ряд*. Сечением Л.у.м. P наз. разбиение его на два подмножества A и B так, что $A \cup B = P$, $A \cap B$ — пусто, $A \subseteq B^{\nabla}$ и $B \subseteq A^{\Delta}$, где

$$B^{\nabla} = \{x \in P,\ x \leqslant b,\ \forall b \in B\},$$

$$A^{\Delta} = \{x \in P,\ x \geqslant a,\ \forall a \in A\}.$$

Классы A и B наз. нижним и верхним классами сечения. Различаются следующие типы сечений: скачок — в нижнем классе имеется наибольший элемент, а в верхнем — наименьший; дедекиндово сечение — в нижнем (верхнем) классе имеется наибольший (наименьший) элемент, но в верхнем

(нижнем) классе нет наименьшего (наибольшего); щ е л ь — в нижнем классе нет наибольшего элемента, а в верхнем — наименьшего. Л. у. м. наз. н е п р е р ы в н ы м, если все его сечения дедекиндовы. Подмножество D Л. у. м. P наз. п л о т н ы м, если каждый неодноэлементный интервал множества P содержит элементы, принадлежащие D. Л. у. м. действительных чисел может быть охарактеризовано как непрерывное Л. у. м. в к-ром нет ни наибольшего, ни наименьшего элементов, но содержится счетное плотное подмножество. Всякое счетное Л. у. м. изоморфно некоторому подмножеству Л. у. м. всех двоичных дробей отрезка $[0, 1]$. Решетка L изоморфна подмножеству Л. у. м. целых чисел тогда и только тогда, когда каждая ее подрешетка является ретрактом.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948; [2] е г о ж е, Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [3] Б у р б а к и Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965.

Л. А. Скорняков.

ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНВАРИАНТ — вектор $\xi \neq 0$ в пространстве E представления π группы G такой, что $\pi(g)\xi = \xi$ для всех $g \in G$. Л. п. и. алгебры Ли X — вектор $\xi \neq 0$ в пространстве E представления π такой, что $\pi(x)\xi = 0$ для всех $x \in X$. В частности, если π — представление линейной группы в пространстве полилинейных функций, данное определение Л. п. и. совпадает с классическим. Л. п. и., связанные с ограничениями неприводимых представлений группы на подгруппу, играют существенную роль в теории представлений групп и алгебр Ли.

Лит.: [1] В е й л ь Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [2] Ж е л о б е н к о Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970.

А. И. Штерн.

ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ЗАДАЧА, з а д а ч а Р и м а н а, з а д а ч а Г и л ь б е р т а, з а д а ч а Г и л ь б е р т а — П р и в а л о в а, з а д а ч а Р и м а н а — П р и в а л о в а,— одна из основных *граничных задач теории аналитических функций*, формулируемая в простейшем случае следующим образом. Пусть L — простой гладкий замкнутый контур, делящий плоскость на внутреннюю область D^+ и дополнительную к ней область D^-, содержащую бесконечно удаленную точку. Пусть на L заданы две функции $G(t)$ и $g(t)$, удовлетворяющие условию Гёльдера (условию H), причем $G(t) \neq 0$ всюду на L. Требуется найти две функции $\Phi^{\pm}(z)$, аналитические соответственно в $D^{\pm}$, непрерывные вплоть до контура, за исключением конечного числа точек t_k, где для них допустимы разрывы при соблюдении условия

$$|\Phi(z)| < \frac{A}{|z - t_k|^{\alpha_k}},$$

удовлетворяющие на контуре L краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \qquad (*)$$

при этом функция $G(t)$ наз. к о э ф ф и ц и е н т о м з а д а ч и. Целое число

$$\varkappa = \operatorname{Ind} G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_L d \arg G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int d \ln G(t)$$

наз. и н д е к с о м к о э ф ф и ц и е н т а $G(t)$ и одновременно и н д е к с о м Л. с. з. Пусть отыскивается решение, удовлетворяющее условию $\Phi^-(\infty) = 0$. Тогда при $\varkappa > 0$ однородная Л. с. з. (т. е. когда $g(t) \equiv 0$) и неоднородная Л. с. з. безусловно разрешимы; решения зависят линейно от $\varkappa$ произвольных постоянных и выражаются линейно через многочлен степени $\varkappa - 1$ с произвольными коэффициентами. При $\varkappa = 0$ однородная Л. с. з. имеет лишь тривиальное нулевое решение, а неоднородная задача разрешима безусловно и однозначно. При $\varkappa < 0$ однородная задача имеет лишь

нулевое решение, неоднородная задача — единственное решение лишь при выполнении $|\varkappa|$ условий разрешимости, к-рые могут быть выражены линейно через многочлен с произвольными коэффициентами.

Решение Л. с. з. во всех случаях представляется в замкнутой форме — в квадратурах через интегралы типа Коши. Предельные значения искомых функций на контуре необходимо удовлетворяют условию H. Перечисленные выше результаты без изменения переносятся на случай многосвязной области D^+, ограниченной конечным числом простых взаимно непересекающихся замкнутых кривых. Случай контура, составленного из разомкнутых кривых, представляет ту особенность, что на концах кривых контура решения Л. с. з., в зависимости от выбираемого класса решений, могут обращаться в бесконечность или оставаться ограниченными. Индекс зависит от выбираемого класса решений. Индекс в классе решений с допустимой на конце бесконечностью порядка меньше единицы (интегрируемая бесконечность) на единицу больше, чем индекс в классе ограниченных на этом конце решений. Соответственно этому на единицу увеличивается число линейно независимых решений или уменьшается число условий разрешимости. Аналогичное положение имеет место в случае, когда коэффициент $G(t)$ имеет разрывы 1-го рода; решение в точках разрыва ведет себя так же, как на концах контура.

В общем случае, когда контур состоит из конечного числа расположенных как угодно замкнутых и разомкнутых кривых, Л. с. з. решается теми же методами, что и упомянутые выше простые случаи; при этом получаются аналогичные результаты. Нек-рые трудности представляет исследование решения в точках, где встречается несколько кривых контура.

В случае, когда $G(t)$, $g(t)$ только непрерывны, но не удовлетворяют условию H, сформулированные выше результаты остаются в силе, за исключением того, что здесь предельные значения решений существуют лишь при стремлении к контуру по некасательным путям, при этом они не непрерывны, а $\Phi^{\pm}(t)\in L_p$ с любым $p>0$; если функция $G(t)$ непрерывна, $g(t)\in L_p$, то и $\Phi^{\pm}(t)\in L_p$. Наиболее общим предположением для коэффициента $G(t)$, при к-ром решена Л. с. з., является класс измеримых функций с нек-рым дополнительным условием на величину скачка аргумента; при этом $g(t)\in L_p$.

Рассматривались Л. с. з. с бесконечным индексом, в к-рых в качестве контуров брались простые гладкие кривые с одним или обоими концами, уходящими в бесконечность. Исследованы случаи: 1) степенного порядка роста, когда при $|t|\to\infty$ выполняются асимптотич. равенства

$$\operatorname{Ind} G(t)\sim\pm|t|^{\rho}$$

($0<\rho<\infty$ для случая одного бесконечного конца, $0<\rho<1$ для обоих бесконечных концов); 2) логарифмического порядка, когда при $|t|\to\infty$

$$\operatorname{Ind} G(t)\sim\pm|\ln^{\alpha}t|,\ 0<\alpha<\infty.$$

В обоих случаях при положительном бесконечном индексе число линейно независимых решений бесконечно и выражается через целую функцию, вид к-рой зависит от порядка индексов. При отрицательном бесконечном индексе однородная задача не имеет нетривиальных решений, а неоднородная разрешима лишь при выполнении бесконечного множества условий разрешимости. Главную трудность представляет выделение конечных решений.

Исследовалось решение Л. с. з. на римановой поверхности и равносильной ей задачи на фундаментальной области автоморфной функции, принадлежащей

нек-рой группе подстановок, в автоморфных функциях этого класса. Число решений или условий разрешимости зависит от индекса, а в нек-рых (особых) случаях также от рода поверхности или фундаментальной области.

Если в условии (*) считать G матрицей, а $\Phi^{\pm}$, g векторами (n-мерными), то возникает Л. с. з. для кусочно аналитического вектора. Этот случай значительно сложнее, чем рассмотренный выше скалярный случай ($n=1$). Исследование производится сведéнием к системе интегральных уравнений. Число линейно независимых решений или условий разрешимости зависит от n независимых величин, наз. частными индексами, зависимость к-рых от матрицы коэффициентов в явном виде не установлена. Важную роль играет индекс определителя матрицы G, наз. суммарным индексом задачи.

Впервые Л. с. з. (для кусочно аналитич. вектора) встречается у Б. Римана (B. Riemann, см. [1]) в связи с решением задачи о построении линейного дифференциального уравнения по заданной группе подстановок (группе монодромии). Однако в том примерно виде, как она сформулирована выше, Л. с. з. была впервые рассмотрена Д. Гильбертом (1905, см. [2]) при менее общих условиях; первые результаты (альтернативного характера) были получены им путем сведения к интегральному уравнению. И. Племель (1908, см. [3]), использовав впервые интегралы типа Коши, свел векторную Л. с. з. к интегральному уравнению и полностью решил поставленную Риманом задачу дифференциальных уравнений. Неоднородную Л. с. з. (в несколько иной постановке) впервые рассмотрел И. И. Привалов [4]; его результаты относятся главным образом к теоретико-функциональным обобщениям.

Л. с. з. имеет большое число приложений. Главные из них — в теории сингулярных интегральных уравнений. Даны обобщения в различных направлениях — т. н. Л. с. з. со сдвигом, сопряжением, дифференциальная, для обобщенных аналитич. функций и другие. Теория Л. с. з., ее обобщений и приложений наиболее полно отражена в [5], [6].

Лит.: [1] Риман Б., Сочинения, пер. с нем., М.— Л., 1948, с. 176—82; [2] Hilbert D., Grundzüge einer allgmeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 2 Aufl., Lpz.,— B., 1924; [3] Plemelj J., «Monatsh. Math.», 1908, Bd 19, S. 211—45; [4] Привалов И. И., «Матем. сб.», 1934, т. 41, № 4, с. 519—526; [5] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968, гл. 2; [6] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977. *Ф. Д. Гахов.*

ЛИНЕЙНОЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И СИСТЕМА — дифференциальное уравнение (и система) с частными производными вида

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\, D^\alpha u = f, \qquad (1)$$

у к-рого в любой точке $x=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ области его задания Ω среди действительных переменных $y_0, y_1, \ldots, y_n$ можно выделить (в случае надобности — после надлежащего аффинного преобразования независимых переменных) одно переменное, напр. $y_0=\lambda$, таким образом, чтобы для всех точек $Y=(y_1, \ldots, y_n)$ из n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ характеристическое уравнение (относительно λ)

$$\det \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\, y^\alpha \big|_{y_0=\lambda}, \quad y^\alpha = \left(y_0^{\alpha_0}, \ldots, y_n^{\alpha_n}\right) \qquad (2)$$

имело ровно Nm действительных корней. Здесь $\alpha=(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ — вектор с неотрицательными целочисленными координатами, $|\alpha|=\sum_{j=0}^n \alpha_j$ — порядок дифференциального оператора $D^\alpha=D_0^{\alpha_0} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_j=\partial/\partial x_j$, $j=0, 1, \ldots, n$, m — порядок системы (1), $a_\alpha(x)$ — заданная в области Ω квадратная действительная матрица порядка N, $u(x)=\|u_j(x)\|$, $j=1, \ldots,$

N — искомый вектор-столбец, $f(x)$ — заданный в Ω вектор с N компонентами.

Типичным примером является *волновое уравнение*

$$u_{x_0x_0} = \sum_{j=1}^{n} u_{x_jx_j}. \qquad (3)$$

К Л. г. у. и с. приводят многие задачи математич. физики.

Поверхность S: $\varphi(x)=0$ наз. характеристической в точке x, если $\operatorname{grad}\varphi \neq 0$ и $Q(x, \operatorname{grad}\varphi)=0$, где

$$Q(x, y) \equiv Q(x, y_0, Y) = \det \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, y^\alpha$$

— характеристич. форма системы (1). Если $Q(x, y)=0$, то говорят, что вектор y задает в точке x характеристическое направление. Поверхность S наз. характеристической поверхностью (или характеристикой) для системы (1), если

$$Q(x, \operatorname{grad}\varphi) = 0 \text{ для всех } x \in S.$$

Поверхность, не имеющая характеристич. направления нормали ни в одной точке, наз. свободной поверхностью. На свободной поверхности ранг характеристической матрицы

$$A(x, y) \equiv A(x, y_0, Y) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, y^\alpha, \quad y = \operatorname{grad}\varphi,$$

равен N, в то время как на характеристич. поверхности S он меньше N. Характеристика S наз. простой, если для нек-рого j и для всех $x \in S$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) Q(x, \operatorname{grad}\varphi) \neq 0.$$

В противном случае характеристику наз. кратной. Иногда характеристику наз. простой, если ранг матрицы $A(x, \operatorname{grad}\varphi)$ равен $N-1$.

Система (1) наз. гиперболической в точке x относительно гиперплоскости S_0: $x_0=0$, если матрица $A(x, 1, y)=a_{m,0}$, . . ., $_0$ невырожденная (т. е. поверхность S свободная) и все корни $\lambda=\lambda_k$, $k=1, \ldots, mN$, характеристич. уравнения $Q(x, \lambda, Y)=0$ действительные для всех точек $Y \in \mathbb{R}^n$. Система (1) наз. гиперболической в области Ω относительно S_0, если она гиперболична относительно S_0 в каждой точке $x \in \Omega$.

Важным классом гиперболич. уравнений и систем являются строго гиперболич. уравнения и системы, к-рые иногда наз. вполне гиперболическими системами, или гиперболическими в узком смысле. Система (1) наз. строго гиперболической системой, когда все корни $\lambda=\lambda_k$ характеристич. уравнения различны для *любого* ненулевого вектора $Y \in \mathbb{R}^n$. Характеристики строго гиперболич. уравнения (или системы) являются простыми. Строго гиперболические (относительно S_0) системы примечательны тем, что для них корректно поставлена задача Коши

$$D_0^k u\,|_{x_0=0} = \psi_k(x), \quad k=0, 1, \ldots, m-1, \qquad (4)$$

при одних только предположениях достаточной гладкости коэффициентов $a_\alpha(x)$, $f(x)$ системы (1) и начальных данных (начальных функций) $\psi_k(x)$, $x=(x_0, \ldots, x_n)$. Существуют примеры гиперболических, но не строго гиперболич. уравнений вида (1) (даже с постоянными коэффициентами при производных порядка m), для к-рых задача Коши поставлена некорректно.

Решение $u(x)$ задачи Коши (4) для волнового уравнения (3) выписывается в явном виде, и оно в случае, когда $n \equiv 0 \pmod 2$ и только тогда, обладает свойством:

значение $u(x)$ в вершине x^* характеристического конуса $|X-X^*|=x_0^*-x_0$, $X=(x_1, \ldots, x_n)$, зависит только от значения начальных данных $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$ и их производных на основании $|X-X^*|=x_0^*-x_0$, $x_0=0$, этого конуса (т. н. *Гюйгенса принцип*).

Для строго гиперболических относительно S_0 уравнений и систем исследован вопрос о диффузии волн и о лакунах. Исчерпывающий ответ дан в случае уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha u = 0, \quad a_\alpha = \text{const}.$$

Для одного (скалярного) уравнения с постоянными коэффициентами $a_\alpha(x)=a_\alpha=\text{const}$ определение строгой гиперболичности обобщено следующим образом. Уравнение (1) наз. гиперболическим относительно ненулевого вектора $y\in\mathbb{R}^{n+1}$, если

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha y^\alpha \neq 0$$

и существует такое действительное число λ_0, что для всех $\xi=(\xi_0, \ldots, \xi_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ и $\lambda>\lambda_0$

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha (\lambda y + i\xi)^\alpha \neq 0.$$

Из всех линейных уравнений с постоянными коэффициентами только для уравнений, гиперболических в этом смысле, задача Коши поставлена корректно при произвольных достаточно гладких начальных функциях, заданных на гиперплоскости

$$\sum_{j=0}^n x_j y_j = 0.$$

В частности, волновое уравнение (3) является гиперболическим в указанном смысле относительно любого вектора, для к-рого

$$y_0^2 > \sum_{j=1}^n y_j^2.$$

Существуют различные обобщения определения строго гиперболич. уравнений и систем. В основном это такие уравнения и системы, к-рые полностью характеризуются тем, что для них однозначно разрешима задача Коши с данными на свободной поверхности при любых достаточно гладких начальных функциях без всяких ограничений роста на бесконечности.

Другим важным классом линейных гиперболич. систем 1-го порядка является класс симметрических гиперболич. систем. Система

$$\sum_{j=0}^n a_j(x)\, u_{x_j} + b(x)\, u = f(x), \qquad (5)$$

где $a_j(x)$, $b(x)$ — заданные в области Ω квадратные матрицы порядка N, а $u(x)$ — искомый вектор из N компонент, наз. симметрической гиперболической системой в области Ω, если матрицы $a_j(x)$ симметрические (или симметризуемые одновременно одним и тем же преобразованием) и в каждой точке существует пространственно ориентированная гиперплоскость, т. е. гиперплоскость, нормаль к-рой $y=(y_0, \ldots, y_n)$ обладает тем свойством, что матрица $\sum_{j=0}^n y_j a_j(x)$ положительно определена. Если для симметрической гиперболич. системы (5) с достаточно гладкими коэффициентами заданные начальные функции и правая часть имеют интегрируемые с квадратом обобщенные частные производные порядка p, то существует единственное обобщенное решение задачи Коши с тем же числом интегрируемых с квадратом частных производных. К симметрическим гиперболич. системам сводится любое строго гиперболич. уравнение 2-го порядка.

Уравнение (1) 2-го порядка в классе регулярных в области Ω решений можно записать в виде

$$\sum_{k,\ j=0}^{n} a_{kj}(x)\, u_{x_k} u_{x_j} + \sum_{j=0}^{n} b_j(x)\, u_{x_j} + c(x)\, u = f(x), \qquad (6)$$

где $a_{kj}(x)=a_{jk}(x)$, $b_j(x)$, $c(x)$ и $f(x)$ — заданные в Ω действительные функции. Уравнение (6) гиперболично в области Ω, если в каждой точке этой области все характеристич. числа матрицы $a(x)=\|a_{jk}(x)\|$, $k,\ j=0, \ldots, n$, старших коэффициентов $a_{kj}(x)$ отличны от нуля, причем одно из этих чисел отличается по знаку от всех остальных. По отношению к уравнению (6), наряду с характеристич. поверхностью, выделяют два типа гладких поверхностей: пространственно ориентированные поверхности и временным образом ориентированные поверхности. Если поверхности заданы уравнением вида $\varphi(x)=0$, то на поверхности первого типа $Q(x,\ \mathrm{grad}\varphi)>0$, а на поверхности второго типа $Q(x,\ \mathrm{grad}\varphi)<0$, где

$$Q(x,\ y) = \sum_{k,\ j=0}^{n} a_{kj}(x)\, y_k y_j.$$

Задача Коши для гиперболич. уравнений с начальными данными на временным образом ориентированных поверхностях, вообще говоря, не является корректно поставленной.

Гиперболич. уравнение

$$u_{x_0 x_0} - \sum_{k,\ j=1}^{n} a_{kj}(x)\, u_{x_k x_j} + \sum_{j=0}^{n} b_j(x)\, u_{x_j} + c(x)\, u = f(x)$$

наз. равномерно (или регулярно) гиперболическим в области Ω, если существует такое положительное число ε, что

$$\sum_{k,\ j=1}^{n} a_{kj}(x)\, \xi_k \xi_j > \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2$$

для всех x из $\overline{\Omega}$ и любого ненулевого вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. При $n=1$ неравенство

$$a_{01}^2 - a_{00} a_{11} > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{\Omega}$$

представляет собой необходимое и достаточное условие равномерной гиперболичности уравнения (6) в области Ω. Уравнение колебания струны

$$u_{x_0 x_0} - u_{x_1 x_1} = 0$$

является типичным представителем линейных равномерно гиперболич. уравнений 2-го порядка с двумя независимыми переменными. Общее решение этого уравнения в любой выпуклой области Ω плоскости $\mathbb{R}^2$ дается *Д'Аламбера формулой*:

$$u(x) = f(x_0 + x_1) + g(x_0 - x_1),$$

где f и g — произвольные функции.

Гиперболич. уравнение (6) при $n=1$ после неособой действительной замены переменных x_0 и x_1 приводится к нормальному (каноническому) виду

$$u_{y_0 y_0} - u_{y_1 y_1} + A(y)\, u_{y_0} + B(y)\, u_{y_1} + C(y)\, u = F(y), \qquad (7)$$

$$y = (y_0,\ y_1).$$

Для гиперболич. систем, записанных в виде (7), где $A(y)$, $B(y)$ и $C(y)$ — заданные действительные квадратные матрицы порядка N, $F(y)$ — заданный, а u — искомый векторы с N компонентами, *Римана методом* полностью исследован вопрос о корректности задачи Коши с начальными данными на нехарактеристической (свободной) кривой и *Гурса задача* с данными на двух пересекающихся характеристиках.

Основными задачами для гиперболич. уравнений являются: *Коши задача*, *Коши характеристическая задача* и *смешанная задача* (см. также *Смешанная задача для гиперболического уравнения и системы*).

При исследовании основных задач важную роль играют фундаментальные решения, к-рые позволяют получать различные (интегральные) представления регулярных и обобщенных решений и установить их структурные и качественные свойства, в частности изучить вопрос о фронте волны и распространении разрывов.

Уравнение (6) наз. ультрагиперболическим уравнением в области Ω, если в каждой точке $x\in\Omega$ все характеристич. числа матрицы $a(x)$ отличны от нуля, причем по крайней мере два из них отличаются по знаку от всех остальных, число к-рых не ниже двух. Примером ультрагиперболич. уравнения является уравнение вида

$$\sum_{j=0}^{n}\left(u_{x_jx_j}-u_{y_jy_j}\right)=0,\ n\geqslant 1, \tag{8}$$

к-рое обладает следующим свойством: если $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (8) в области Ω евклидова пространства переменных $x=(x_0, \ldots, x_n)$, $y=(y_0, \ldots, y_n)$ и (x^*, y^*) — произвольная точка Ω, то среднее значение функции $u(x^*, y^*)$, вычисленное по сфере $\sum_{j=0}^{n}(x_j-x_j^*)^2=r^2$ с центром в точке $x^*=(x_0^*, \ldots, x_n^*)$ и радиуса r, равно среднему значению функции $u(x^*, y)$, вычисленному по сфере $\sum_{j=0}^{n}(y_j-y_j^*)^2=r^2$ с центром в точке $y^*=(y_0^*, \ldots, y_n^*)$ и того же радиуса r. Эта теорема широко применяется в теории линейных гиперболич. уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Лит.: [1] Hadamard J., Le problème de Cauchy, P., 1932; [2] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [3] Бицадзе А. В., Уравнения смешанного типа, М., 1959; [4] его же, Уравнения математической физики, М., 1976; [5] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [6] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, 2 изд., М., 1959; [7] Гординг Л., Задачи Коши для гиперболических уравнений, пер. с англ., М., 1961; [8] Дезин А. А., «Матем. сб.», 1959, т. 49, № 4, с. 459—84; [9] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., т. 2, М., 1964; [10] Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953; [11] Лере Ж., Гординг Л., Котаке Т., Задача Коши, пер. с франц., М., 1967; [12] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [13] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 20 изд., т. 2, М., 1967; [14] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972; [15] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965.

А. М. Нахушев.

ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ — уравнение вида

$$A_0(t)\dot{u}=A_1(t)u+g(t), \tag{1}$$

где $A_0(t)$, $A_1(t)$ при каждом t — линейные операторы в банаховом пространстве E, $g(t)$ — заданная, а $u(t)$ — искомая функции со значениями в E; производная $\dot{u}$ понимается как предел по норме E разностного отношения.

1. Линейное дифференциальное уравнение с ограниченным оператором. Пусть $A_0(t)$ и $A_1(t)$ при каждом t — ограниченные операторы, действующие в E. Если оператор $A_0(t)$ имеет при каждом t ограниченный обратный, то уравнение (1) разрешается относительно производной и принимает вид

$$\dot{u}=A(t)u+f(t), \tag{2}$$

где $A(t)$ — ограниченный оператор в пространстве E, $f(t)$ и $u(t)$ — функции со значениями в E. Если функции $A(t)$ и $f(t)$ непрерывны (или, более общо, изме-

римы и интегрируемы на каждом конечном промежутке), то решение задачи Коши:

$$\dot{u} = A(t)u, \quad u(s) = u_0, \tag{3}$$

существует при любом $u_0 \in E$ и задается формулой

$$u(t) = U(t, s)\, u_0,$$

где

$$U(t, s) = I + \int_s^t A(t_1)\, dt_1 + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \int_s^t \int_s^{t_n} \dots \int_s^{t_2} A(t_n) \dots A(t_1)\, dt_1 \dots dt_n \tag{4}$$

— *эволюционный оператор* уравнения $\dot{u} = A(t)u$. Решение задачи Коши для уравнения (2) определяется по формуле:

$$u(t) = U(t, s)\, u_0 + \int_s^t U(t, \tau)\, f(\tau)\, d\tau.$$

Из (4) вытекает оценка

$$\| U(t, s) \| \leqslant \exp \left\{ \int_s^t \| A(\tau) \|\, d\tau \right\}; \tag{5}$$

ее уточнение

$$\| U(t, s) \| \leqslant \exp \left\{ \int_s^t r_A(\tau)\, d\tau \right\}, \tag{5'}$$

где $r_A(\tau)$ — *спектральный радиус* оператора $A(\tau)$. Эволюционный оператор обладает свойствами

$$U(s, s) = I, \quad U(t, \tau)\, U(\tau, s) = U(t, s), \\ U(t, \tau) = [U(\tau, t)]^{-1}.$$

Основное внимание при изучении уравнения (2) уделяется поведению его решений на бесконечности в зависимости от поведения $A(t)$ и $f(t)$. При этом важной характеристикой уравнения является генеральный (или особый) показатель

$$\varkappa = \overline{\lim_{\tau,\, s \to \infty}} \frac{1}{\tau} \ln \| U(\tau + s, s) \|.$$

Детально изучены уравнения с периодическими и почти периодическими коэффициентами (см. *Качественная теория дифференциальных уравнений* в банаховом пространстве).

Уравнение (2) можно рассматривать и в комплексной плоскости. Если функции $A(t)$ и $f(t)$ голоморфны в односвязной области, содержащей точку s, то формулы (3), (4), (5), (5') остаются в силе, если под интегралами понимать интегралы по спрямляемому пути, соединяющему s и t.

Ряд других вопросов возникает в случае, когда исходное линейное уравнение неразрешимо относительно производной. Если оператор $A_0(t)$ ограниченно обратим всюду, за исключением одной точки, напр. $t=0$, то уравнение в пространстве E приводится к виду

$$a(t)\dot{u} = A(t)u + f(t), \tag{6}$$

где $a(t)$ — скалярная функция и $a(0)=0$. Здесь основное внимание уделяется изучению поведения решений в окрестности нуля, при этом различаются аналитический и неаналитический случаи.

Аналитический случай. Для простейшего уравнения

$$t\dot{u} = Au$$

с постоянным оператором A эволюционный оператор $U(t) = U(t, 0)$ имеет вид

$$U(t) = e^{A \ln t},$$

решения неоднозначны: при обходе вокруг нуля в положительном направлении они умножаются на оператор $e^{2\pi i A}$.

Если для уравнения с регулярной особенностью

$$t\dot{u} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} t^{(k)}\right) u, \qquad (7)$$

где ряд справа сходится в окрестности нуля, оператор $U(t)$ искать в виде ряда

$$U(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} U^{(k)} t^{(k)}\right) e^{A^{(0)} \ln t},$$

то для определения коэффициентов $U^{(k)}$ получается система уравнений

$$A^{(0)} U^{(0)} - U^{(0)} A^{(0)} = 0,$$

$$(A^{(0)} - kI)\, U^{(k)} - U^{(k)} A^{(0)} = -\sum_{j=1}^{k} A^{(j)} u^{(k-j)},\ k = 1, 2, \ldots$$

Для разрешимости этой системы, т. е. формальной разрешимости уравнения (7), достаточно, чтобы спектры операторов $A^{(0)}$ и $A^{(0)} - kI$ не пересекались или, что то же, чтобы в спектре оператора $A^{(0)}$ не было точек, отличающихся на целое число. При этом условии ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} U^{(k)} t^k$$

сходится в той же окрестности нуля, что и ряд для $A(t)$. Если теперь имеется конечное число целых чисел, представимых в виде разностей точек спектра оператора $A^{(0)}$, и каждое из них является изолированной точкой спектра трансформатора

$$\mathfrak{A} X = A^{(0)} X - X A^{(0)},$$

то существует решение вида

$$U(t) = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} U_k (\ln t)\, t^k\right) e^{A^{(0)} \ln t},\ 0 < |t| < \rho,$$

где U_k — целые функции аргумента $\ln t$, удовлетворяющие при каждом $\varepsilon > 0$ условию

$$\| U_k (\ln t) \| \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon |\ln t|}.$$

Если целые точки спектра трансформатора $\mathfrak{A}$ являются полюсами его резольвенты, то функции U_k — многочлены.

В случае иррегулярной особенности рассмотрено дифференциальное уравнение

$$t^m \dot{u} = \left(\sum_{k=0}^{m-1} A^{(k)} t^k\right) u$$

в банаховой алгебре $\mathfrak{B}$ (напр., в алгебре ограниченных операторов в банаховом пространстве E). При нек-рых ограничениях на оператор $A^{(0)}$ оно с помощью интегралов Лапласа сводится к уравнению с регулярной особенностью ($m = 1$) в алгебре матриц с элементами из алгебры $\mathfrak{B}$.

Неаналитический случай. Пусть в уравнении

$$t^n \dot{u} = A(t)\, u + f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

функции $A(t)$ и $f(t)$ бесконечно дифференцируемы. В конечномерном случае получен исчерпывающий результат; если уравнение имеет формальное решение в виде степенного ряда, то оно имеет бесконечно дифференцируемое на $[0, T]$ решение, для к-рого формальный ряд является рядом Тейлора в точке $t = 0$. В бесконечномерном случае имеется лишь ряд достаточных условий для существования бесконечно дифференцируемых решений.

Пусть $m > 1$. Если спектр оператора $A(0)$ не пересекается с мнимой осью, то существует семейство бесконечно дифференцируемых решений, зависящее от произвольного элемента g^-, принадлежащего инвариантному подпространству оператора $A(0)$, отвечающему

части спектра $A(0)$, лежащей в левой полуплоскости. Любое непрерывное на $[0, T]$ решение входит в это семейство. Если весь спектр $A(0)$ лежит в левой полуплоскости, то существует только одно бесконечно дифференцируемое решение.

Пусть $m=1$. Если отрицательные целые числа не принадлежат спектру оператора $A(0)$, то существует единственное бесконечно дифференцируемое решение. В аналогичных предположениях относительно оператора $A(0)$ рассмотрены уравнения вида (6), в к-рых $a(t)$ и $f(t)$ имеют конечную гладкость и такой же гладкостью обладают решения.

Своеобразная картина возникает, когда дифференциальное уравнение неразрешимо относительно производной при всех t, напр. когда A — постоянный необратимый оператор. Пусть в уравнении

$$A\dot{u} = Bu \tag{8}$$

операторы A и B — ограниченные в пространстве E, оператор A необратим и фредгольмов. Предполагается, что оператор $A+\varepsilon B$ непрерывно обратим при достаточно малых ε. Тогда существуют такие разложения в прямые суммы $E=N^{(1)}+M^{(1)}$ и $E=N^{(2)}+M^{(2)}$, что операторы A и B отображают $N^{(1)}$ в $N^{(2)}$ и $M^{(1)}$ в $M^{(2)}$. Оператор A обратим на $M^{(1)}$ и отображает на $M^{(2)}$. Подпространство $N^{(1)}$ конечномерно. Все решения уравнения (8) лежат в подпространстве $M^{(1)}$ и имеют вид $\exp(\tilde{A}^{-1}Bt)u_0$, где $\tilde{A}$ — сужение A на $M^{(1)}$, $u_0 \in M^{(1)}$. Для неоднородного уравнения $A\dot{u}=Bu+f(t)$ решение существует только при определенной гладкости $f(t)$ и нек-рых условиях согласования значений $f(t)$ и ее производных с начальными данными. Количество производных, к-рые должны иметь нек-рые компоненты $f(t)$, и количество условий согласования равны максимальной длине B-присоединенных цепочек оператора A. При выполнении указанных условий решение задачи Коши единственно.

Если оператор $A+\varepsilon B$ необратим при всех ε, то все решения уравнения (8) лежат в подпространстве, имеющем, вообще говоря, бесконечный дефект. Решение задачи Коши для него будет неединственным. От функции $f(t)$ в неоднородном уравнении требуется бесконечное число условий дифференцируемости и условий согласования.

2. Линейное дифференциальное уравнение с неограниченным оператором. Пусть $A_0(t)$ обратим при каждом t, так что уравнение (1) разрешается относительно производной и принимает вид

$$\dot{u} = A(t)\,u + f(t), \tag{9}$$

и пусть здесь $A(t)$ — неограниченный оператор в пространстве E с плотной в E областью определения $D(A(t))$, имеющий непустое *резольвентное множество*, $f(t)$ — заданная, а $u(t)$ — искомая функции со значениями в E.

Даже для простейшего уравнения $\dot{u}=Au$ с неограниченным оператором решения задачи Коши $u(0)=u_0$ могут не существовать, могут быть неединственными, могут быть непродолжимыми на всю полуось, поэтому основные исследования посвящены вопросам существования и единственности решений. Под решением уравнения $\dot{u}=Au$ на отрезке $[0, T]$ понимается функция, принимающая значения в $D(A)$, дифференцируемая на $[0, T]$ и удовлетворяющая уравнению. Иногда это определение является слишком жестким и вводится понятие о с л а б л е н н о г о р е ш е н и я, как функции, обладающей теми же свойствами на $(0, T]$, а в точке 0 лишь непрерывной.

Пусть оператор A имеет резольвенту

$$R(\lambda, A) = (A-\lambda I)^{-1}$$

при всех достаточно больших положительных λ и

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\ \lambda^{-1}\ln\|R(\lambda, A)\|=h<T.$$

Тогда ослабленное решение задачи

$$\dot{u}=Au,\ u(0)=u_0 \tag{10}$$

единственно на отрезке $[0, T-h]$ и может разветвляться при $t=T-h$. Если $h=0$, то решение единственно на всей полуоси. В смысле поведения $R(\lambda, A)$ при $\lambda\to\infty$ это утверждение является точным.

Если при каждом $u_0\in D(A)$ существует единственное непрерывно дифференцируемое на $[0, T]$ решение задачи (10), то это решение продолжается на всю полуось и представимо в виде $u(t)=U(t)u_0$, где $U(t)$ — сильно непрерывная на $[0, \infty)$ полугруппа ограниченных операторов, $U(0)=I$, для к-рой справедлива оценка $\|U(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$. Для того чтобы уравнение обладало таким свойством, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\|(\lambda-\omega)^m R^m(\lambda, A)\|\leqslant M \tag{11}$$

при всех $\lambda>\omega$ и $m=1, 2, \ldots$, где M не зависит от λ и m. Эти условия трудно проверяемы. Они выполнены, если $\|(\lambda-\omega)R(\lambda, A)\|\leqslant 1$ и тогда $\|U(t)\|\leqslant e^{\omega t}$. Если еще $\omega=0$, то $U(t)$ — полугруппа сжатий. Это будет тогда и только тогда, когда A — максимальный *диссипативный оператор*. При $u_0\notin D(A)$ функция $U(t)u_0$ не будет дифференцируемой (во всяком случае при $t=0$), ее часто наз. о б о б щ е н н ы м р е ш е н и е м уравнения (10). Решения уравнения $\dot{u}=Au$ можно строить как предел при $n\to\infty$ решений уравнений $\dot{u}=A_nu$ с ограниченными операторами при тех же начальных условиях. Для этого достаточно, чтобы операторы A_n коммутировали, сильно сходились к A на $D(A)$ и

$$\left\|e^{tA_n}\right\|\leqslant Me^{\omega t}.$$

При выполнении условий (11) этими свойствами обладают операторы $A_n=-nI-n^2R(\lambda, A)$ (о п е р а т о р ы И о с и д ы).

Другой метод построения решений уравнения $\dot{u}=Au$ основан на преобразовании Лапласа. Если резольвента оператора A определена на нек-ром контуре Γ, то функция

$$u(t)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}R(\lambda, A)u_0\,d\lambda \tag{12}$$

формально удовлетворяет уравнению

$$\dot{u}=Au+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}d\lambda u_0.$$

Если обеспечить сходимость интегралов, законность дифференцирования под знаком интеграла и обращения в нуль последнего интеграла, то $u(t)$ будет удовлетворять уравнению. Трудность состоит в том, что норма резольвенты не может на бесконечности убывать быстрее, чем $|\lambda|^{-1}$. Однако на нек-рых элементах она убывает быстрее. Напр., если $R(\lambda, A)$ определена при $\mathrm{Re}\lambda\geqslant\alpha$ и

$$\|R(\lambda, A)\|\leqslant M|\lambda|^k,\quad k\geqslant -1,$$

при достаточно больших $|\lambda|$, то для $\Gamma=(-i\infty, i\infty)$ формула (12) дает решение для любого $u_0\in D(A^{[k]+3})$. В более «плохом» случае, когда предыдущее неравенство выполнено лишь в области

$$\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant\alpha|\,\mathrm{Im}\,\lambda|^a,\ 0<a<1$$

(слабо гиперболич. уравнение), и Γ — граница этой области, получается решение лишь для u_0, принадле-

жащих пересечению областей определения всех степеней оператора A, с определенным поведением $\|A^n u_0\|$ при $n \to \infty$.

Значительно больше ослабленных решений получается в том случае, когда Г уходит в левую полуплоскость и можно использовать убывание на нем функции $|e^{\lambda t}|$. При этом, как правило, решения обладают повышенной гладкостью при $t>0$. Если резольвента ограничена на контуре Г: $\mathrm{Re}\lambda = -\psi(|\mathrm{Im}\lambda|)$, где $\psi(\tau)$ — гладкая неубывающая вогнутая функция, растущая на ∞ как $\ln\tau$, то функция (12) при любом $u_0 \in E$ становится дифференцируемой и удовлетворяет уравнению, начиная с нек-рого t_0, с дальнейшим увеличением t ее гладкость повышается. Если $\psi(\tau)$ растет как степень τ с показателем, меньшим единицы, то функция (12) бесконечно дифференцируема при $t>0$; если $\psi(\tau)$ растет как $\tau/\ln\tau$, то $u(t)$ принадлежит квазианалитич. классу функций; если растет как линейная функция, то $u(t)$ — аналитична. Во всех этих случаях она удовлетворяет уравнению $\dot{u} = Au$.

Существование резольвенты на контурах, уходящих в левую полуплоскость, можно, пользуясь разложением в ряд, получить из соответствующих оценок на вертикальных прямых. Если при $\mathrm{Re}\lambda \geqslant \gamma$

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant M(1+|\mathrm{Im}\,\lambda|)^{-\beta}, \quad 0<\beta<1, \qquad (13)$$

то для каждого $u_0 \in D(A)$ существует решение задачи (10). Все эти решения бесконечно дифференцируемы при $t>0$. Они представляются в виде $u(t) = U(t)u_0$, где $U(t)$ — бесконечно дифференцируемая полугруппа при $t>0$, имеющая, вообще говоря, особенность при $=0$. Для ее производных справедливы оценки

$$\|U^{(k)}(t)\| \leqslant M_k t^{1-(k+1)/\beta} e^{\omega t}.$$

Если оценка (13) выполнена при $\beta=1$, то все обобщенные решения уравнения $\dot{u} = Au$ аналитичны в нек-ром секторе, содержащем положительную полуось.

Уравнение $\dot{u} = Au$ наз. абстрактным параболическим, если существует единственное ослабленное решение на $[0, \infty]$, удовлетворяющее начальному условию $u(0) = u_0$ при любом $u_0 \in E$. Если

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant M|\lambda - \omega|^{-1} \text{ при } \mathrm{Re}\,\lambda > \omega, \qquad (14)$$

то уравнение является абстрактным параболическим. Все его обобщенные решения аналитичны в нек-ром секторе, содержащем положительную полуось, и справедливо неравенство

$$\|u(t)\| \leqslant t^{-1} C e^{\omega t} \|u_0\|,$$

где C не зависит от u_0. Обратно, если уравнение обладает перечисленными свойствами, то для оператора A выполнено (14).

Если задача (10) имеет единственное ослабленное решение при любом $u_0 \in D(A)$, производная к-рого суммируема на каждом конечном интервале, то эти решения представимы в виде $u(t) = U(t)u_0$, где $U(t)$ — сильно непрерывная полугруппа на $(0, \infty)$, а всякое ослабленное решение неоднородного уравнения $\dot{v} = Av + f(t)$ с нулевым начальным условием $u(0) = u_0$ представимо в виде

$$v(t) = \int_0^t U(t-s) f(s)\, ds. \qquad (15)$$

Функция $v(t)$ определена при любой непрерывной $f(t)$, поэтому она наз. обобщенным решением неоднородного уравнения. Для того чтобы обеспечить ее дифференцируемость, на функцию $f(t)$ налагаются условия гладкости, и тем «больше», чем «хуже» полугруппа $U(t)$. Так, в предыдущих условиях (15) будет ослабленным решением неоднородного уравнения, если

$f(t)$ дважды непрерывно дифференцируема; если выполнено (11), то (15) будет решением, если $f(t)$ непрерывно дифференцируема; если выполнено (13) при $\beta > 2/3$, то $v(t)$ будет ослабленным решением, если $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\gamma > 2\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)$. Вместо гладкости $f(t)$ по t можно требовать принадлежность значений $f(t)$ области определения соответствующей степени оператора A.

Для уравнения с переменным оператором

$$\dot{u} = A(t)\,u, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{16}$$

имеется несколько основных теорем существования и единственности решений (ослабленных решений) задачи Коши $u(s) = u_0$ на отрезке $s \leqslant t \leqslant T$. Если область определения $A(t)$ не зависит от t:

$$D(A(t)) \equiv D(A),$$

оператор $A(t)$ сильно непрерывен по t на $D(A)$ и

$$\| \lambda R(\lambda,\ A(t)) \| \leqslant 1$$

при $\lambda > 0$, то решение задачи Коши единственно. Если, кроме того, $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем на $D(A)$, то при всяком $u_0 \in D(A)$ решение существует и представимо в виде

$$u(t) = U(t,\ s)u_0,$$

где $U(t,\ s)$ — *эволюционный оператор* со свойствами:
1) $U(t,\ s)$ сильно непрерывен в треугольнике T_Δ: $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$;
2) $U(t,\ s) = U(t,\ \tau)U(\tau,\ s)$, $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, $U(s,\ s) = I$;
3) $U(t,\ s)$ отображает $D(A)$ в себя и оператор

$$A(t)U(t,\ s)A^{-1}(s)$$

ограничен и сильно непрерывен в T_Δ;
4) на $D(A)$ оператор $U(t,\ s)$ сильно дифференцируем по t и s и

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A(t)\,U, \quad \frac{\partial U}{\partial s} = -UA(s).$$

Конструирование оператора $U(t,\ s)$ проводится путем аппроксимации оператора $A(t)$ ограниченными операторами $A_n(t)$ и заменой последних кусочно постоянными операторами.

Предыдущие условия на оператор $A(t)$ во многих важных задачах не выполняются. Пусть для оператора $A(t)$ существуют такие константы M и ω, что

$$\| R(\lambda,\ A(t_k))\, R(\lambda, A(t_{k-1})) \ldots R(\lambda, A(t_1)) \| \leqslant M(\lambda - \omega)^k$$

для всех $\lambda > \omega$, $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k \leqslant T$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть в пространстве E плотно вложено банахово пространство F, содержащееся во всех $D(A(t))$, и обладающее свойствами: а) оператор $A(t)$ ограниченно действует из F в E и непрерывен по t по норме ограниченных операторов из F в E; б) существует изоморфизм S пространства F на пространство E такой, что

$$SA(t)S^{-1} = A(t) + B(t),$$

где $B(t)$ — ограниченная в E сильно измеримая операторная функция, для к-рой $\|B(t)\|$ интегрируема на $[0,\ T]$. Тогда существует эволюционный оператор $U(t,\ s)$, обладающий свойствами 1), 2), 3′) $U(t,\ s)F \subset F$ и $U(t,\ s)$ сильно непрерывен в F на T_Δ, 4′) на F оператор $U(t,\ s)$ сильно дифференцируем в смысле нормы E и $\frac{\partial U}{\partial t} = A(t)U$, $\frac{\partial U}{\partial s} = -UA(s)$. Сформулированное утверждение позволило получить теоремы существования для основных квазилинейных уравнений математич. физики гиперболич. типа.

В теории параболич. уравнений применяется м е т о д з а м о р о ж е н н ы х к о э ф ф и ц и е н т о в. Предполагается, что при каждом $t_0 \in [0,\ T]$ уравнению

$u=A(t_0)u$ отвечает полугрупповой оператор $U_{A(t_0)}t$. Искомый эволюционный оператор формально удовлетворяет интегральным уравнениям

$$U(t,\ s)=U_{A(t)}(t-s)+$$

$$+\int_s^t U_{A(t)}(t-s)\,[A(\tau)-A(t)]\,U(\tau,\ s)\,d\tau,$$

$$U(t,\ s)=U_{A(s)}\ t-s)+$$

$$+\int_s^t U(t,\ \tau)\,[A(\tau)-A(s)]\,U_{A(s)}(\tau-s)\,d\tau.$$

В условиях, когда ядра этих уравнений имеют слабые особенности, доказывается существование их решения и то, что $U(t,\ s)$ является эволюционным оператором. Наибольшие приложения нашло утверждение: если

$$D(A(t))\equiv D(A),\quad \|R(\lambda,\ A(t))\|<M(1+|\lambda|)^{-1}$$

при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$ и

$$\|[A(t)-A(s)]\,A^{-1}(0)\|\leqslant C\,|t-s|^{\rho}$$

(условие Гёльдера), то существует эволюционный оператор $U(t,\ s)$, дающий при каждом $u_0\in E$ ослабленное решение $U(t,\ s)u_0$ задачи Коши. Единственность решения имеется при условии лишь непрерывности оператора $A(t)A^{-1}(0)$ (в гильбертовом пространстве). Теорема существования, аналогичная приведенной выше, справедлива для оператора $A(t)$ с условием типа (13) при определенном соотношении между β и ρ.

Предположение о постоянстве $D(A(t))$ не позволяет в приложениях рассматривать краевые задачи с граничными условиями, зависящими от t. Пусть выполнено

$$\|R(\lambda,\ A(t))\|\leqslant M(1+|\lambda|)^{-1},\ \operatorname{Re}\lambda>0;$$

$$\left\|\frac{dA^{-1}(t}{dt}-\frac{dA^{-1}(s)}{ds}\right\|\leqslant K\,|t-s|^{\alpha},\ 0<\alpha\leqslant 1;$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}R(\lambda,\ A(t))\right\|\leqslant N|\lambda|^{\rho-1},\ 0\leqslant\rho<1,$$

в секторе $|\arg\lambda|\leqslant\pi-\varphi$, $\varphi<\pi/2$, тогда существует эволюционный оператор $U(t,\ s)$. Здесь постоянство $D(A(t))$ не предполагается. Имеется вариант последнего утверждения, приспособленный к рассмотрению параболич. задач в нецилиндрич. областях, в к-ром $D(A(t))$ при каждом t лежит в нек-ром подпространстве $E(t)$ пространства E.

Оператор $U(t,\ s)$ для уравнения (16) формально удовлетворяет интегральному уравнению

$$U(t,\ s)=I+\int_s^t A(\tau)\,U(\tau,\ s)\,d\tau. \tag{17}$$

В силу неограниченности оператора $A(t)$ это уравнение нельзя решить методом последовательных приближений. Пусть имеется семейство банаховых пространств E_α, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, обладающее свойством: $E_\beta\subset E_\alpha$ и $\|x\|_\alpha\leqslant\|x\|_\beta$ при $\alpha<\beta$. Предполагается, что оператор $A(t)$ ограничен как оператор из E_β в E_α:

$$\|A(t)\|_{E_\beta\to E_\alpha}\leqslant C(\beta-\alpha)^{-1}$$

и $A(t)$ непрерывен по t по норме пространства ограниченных операторов из E_β в E_α. Тогда в этом пространстве метод последовательных приближений для уравнения (17) будет сходиться при $|t-s|<(\beta-\alpha)(Ce)^{-1}$. Таким образом локально строится оператор $U(t,\ s)$ как ограниченный оператор из E_β в E_α. В приложениях этот подход дает теоремы типа Коши — Ковалевской.

Для неоднородного уравнения (9) при известном эволюционном операторе для уравнения $\dot u=A(t)u$ решение задачи Коши формально записывается в виде

$$u(t)=U(t,\ s)\,u_0+\int_s^t U(t,\ \tau)\,f(\tau)\,d\tau.$$

В различных случаях при той или иной гладкости $f(t)$ эта формула допускает обоснование.

Лит.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967; [3] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962; [4] Функциональный анализ, 2 изд., М., 1972; [5] Глушко В. П., Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения, Воронеж, 1972; [6] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970; [7] Зубова С. П., Чернышов К. И., в кн.: «Дифференциальные уравнения и их применения», Вильнюс, 1976, в. 14, с. 21—39; [8] Кузнецов А. Н., «Функциональный анализ и его прилож.», 1972, т. 6, № 2, с. 41—51; [9] Крейн С. Г., Лантев Г. И., «Дифференциальные уравнения», 1969, т. 5, № 8, с. 1458—69; [10] Любич Ю. И., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 3, с. 3—51; [11] Овсянников Л. В., «Докл. АН СССР», 1965, т. 163, № 4, с. 819—822; [12] Соболевский П. Е., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1961, т. 10, с. 297—350; [13] Beals R., в кн.: Proc. NATO Adv. Study Inst., Liège, 1976, p. 1—26; [14] Friedman A., «Arch. Rat. Mech. and Anal.», 1964, v. 17, № 5, p. 353—57; [15] Kato T., «J. Math. Soc. Japan», 1973, v. 25, № 4, p. 648—66; [16] Treves F., Basic linear partial differential equations, N. Y., 1975; [17] Miller J., «Acta math.», 1963, v. 110, № 3—4, p. 209—31.

С. Г. Крейн.

ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА обыкновенное — уравнение вида

$$x''+p(t)\,x'+q(t)\,x=r(t), \qquad (1)$$

где $x(t)$ — искомая функция, а $p(t)$, $q(t)$ и $r(t)$ — заданные функции, непрерывные на нек-ром промежутке (a, b). Для любых действительных чисел x_0, x_0' и $t_0\in(a, b)$ существует единственное решение $x(t)$ уравнения (1) с начальными условиями $x(t_0)=x_0$, $x'(t_0)=x'_0$, причем $x(t)$ определено для всех $t\in(a, b)$.

Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0, \qquad (2)$$

а $x_0(t)$ — частное решение неоднородного уравнения (1), то общее решение уравнения (1) дается формулой

$$x(t)=x_0(t)+C_1x_1(t)+C_2x_2(t),$$

где C_1 и C_2 — *произвольные постоянные*. Если известно одно ненулевое решение $x_1(t)$ уравнения (2), то второе его решение $x_2(t)$, линейно независимое с $x_1(t)$, дается формулой

$$x_2(t)=x_1(t)\int\frac{e^{-\int p(t)\,dt}}{x_1^2(t)}\,dt.$$

Если известны линейно независимые решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ уравнения (2), то частное решение $x_0(t)$ уравнения (1) можно найти методом *произвольных постоянных вариации*.

При изучении уравнения (2) большую роль играют его преобразования в уравнения других типов. Так, напр., заменой $x=x_1$, $x'=x_2$ уравнение (2) приводится к нормальной системе линейных уравнений 2-го порядка; заменой искомой функции

$$x=y\exp\left(-\frac{1}{2}\int p(t)\,dt\right)$$

уравнение (2) приводится к уравнению $y''+R(t)y=0$, где

$$R(t)=-\frac{1}{2}p'(t)-\frac{1}{4}p^2(t)+q(t)$$

наз. инвариантом уравнения (2); заменой $x'=yx$ уравнение (2) сводится к *Риккати уравнению*

$$y'+y^2+p(t)y+q(t)=0.$$

После умножения на

$$P(t)=\exp\left(\int p(t)\,dt\right)$$

уравнение (2) принимает самосопряженный вид

$$(P(t)x')'+P(t)q(t)x=0.$$

Уравнение (2) интегрируется в квадратурах лишь в отдельных случаях. Решения наиболее важных частных типов неинтегрируемых уравнений (2) входят в число специальных функций.

Справедлива теорема Штурма о разделении нулей: если $x_1(t)$, $x_2(t)$ — линейно независимые решения уравнения (2) и $t_1<t_2$ — соседние нули решения $x_1(t)$, то на интервале (t_1, t_2) имеется в точности один нуль решения $x_2(t)$.

Пусть в уравнениях

$$x''+q_1(t)x=0, \quad x''+q_2(t)x=0 \tag{3}$$

функции q_1 и q_2 непрерывны и $q_2(t)>q_1(t)$ на промежутке (a, b). Справедлива теорема сравнения: если $t_1<t_2$ — последовательные нули ненулевого решения первого уравнения (3), то на интервале (t_1, t_2) имеется хотя бы один нуль любого решения второго уравнения (3).

Линейная краевая задача для уравнения (1) ставится следующим образом: найти решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\alpha_1 x(a)+\beta_1 x'(a)=\gamma_1, \quad \alpha_2 x(b)+\beta_2 x'(b)=\gamma_2,$$

где α_i, β_i, γ_i — заданные постоянные и

$$\det\begin{Vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{Vmatrix}\neq 0.$$

Штурма — Лиувилля задача для уравнения

$$x''+\lambda q(t)x=0,$$

где $q(t)>0$ и непрерывна на $[a, b]$, ставится следующим образом: найти те значения параметра λ, при к-рых это уравнение имеет ненулевое решение $x(t)$, удовлетворяющее краевым условиям $x(a)=x(b)=0$. Эти значения λ наз. собственными значениями, а соответствующие решения — собственными функциями.

Если в уравнении (2) t и x комплексны, а функции $p(t)$ и $q(t)$ голоморфны в точке t_0, то для любых чисел x_0 и x_0' существует единственное голоморфное в точке t_0 комплексное решение $x(t)$ уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0)=x_0$, $x'(t_0)=x_0'$. Если в уравнении

$$x''+\frac{p(t)}{t-t_0}x'+\frac{q(t)}{(t-t_0)^2}x=0 \tag{4}$$

функции $p(t)$ и $q(t)$ голоморфны в точке t_0, причем хотя бы одно из чисел $p(t_0)$, $q(t_0)$, $q'(t_0)$ отлично от нуля, то точка t_0 наз. регулярной особой точкой для уравнения (4). В окрестности такой точки решение уравнения (4) отыскивается в виде обобщенного степенного ряда

$$x(t)=(t-t_0)^\rho\sum_{k=0}^{\infty}c_k(t-t_0)^k, \quad c_0\neq 0; \tag{5}$$

здесь ρ находится из определяющего уравнения

$$\rho(\rho-1)+p_0\rho+q_0=0,$$

где $p_0=p(t_0)$ и $q_0=q(t_0)$. Пусть корни $\rho_1\leqslant\rho_2$ этого уравнения действительны. Если $\rho_2-\rho_1$ не является целым, то существуют два линейно независимых решения вида (5): при $\rho=\rho_1$ и при $\rho=\rho_2$. Если $\rho_2-\rho_1$ — целое, то, вообще говоря, существует лишь одно решение в виде (5) при $\rho=\rho_2$; второе решение имеет более сложный вид (см. [3]—[6]).

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970; [2] Камке Э., Справоч-

ник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [3] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 1—2, М., 1953—1954; [4] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [5] Трикоми Ф., Дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1962; [6] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950. *Н. Н. Ладис.*

ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОЕ — дифференциальное уравнение, линейное относительно искомой функции одного независимого переменного и ее производных, т. е. уравнение вида

$$x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\, x' + a_n(t)\, x = f(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ — искомая, а $a_i(t)$, $f(t)$ — заданные функции; число n наз. порядком уравнения (1) (ниже излагается общая теория Л. д. у. о.; об уравнениях 2-го порядка см. также ст. *Линейное дифференциальное уравнение второго порядка*).

1) Если в уравнении (1) функции $a_1, \ldots, a_n, f$ непрерывны на промежутке (a, b), то для любых чисел x_0, x_0', $\ldots$, $x_0^{(n-1)}$ и $t_0 \in (a, b)$ существует единственное решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0', \ \ldots, \ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)},$$

причем это решение определено на всем промежутке (a, b).

Уравнение

$$x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\, x' + a_n(t)\, x = 0 \quad (2)$$

наз. однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению (1). Если $x(t)$ — решение уравнения (2) и

$$x(t_0) = x'(t_0) = \ldots = x^{(n-1)}(t_0) = 0,$$

то $x(t) \equiv 0$. Если $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ — решения уравнения (2), то и любая их линейная комбинация

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \ldots + C_m x_m(t)$$

является решением уравнения (2). Если n функций

$$x_1(t), \ \ldots, \ x_n(t) \quad (3)$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (2), то для всякого решения $x(t)$ уравнения (2) найдутся такие постоянные $C_1, \ldots, C_n$, что

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \ldots + C_n x_n(t). \quad (4)$$

Таким образом, если (3) — *фундаментальная система решений* уравнения (2), то его общее решение задается формулой (4), где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Для всякой невырожденной $n \times n$-матрицы $B = \|b_{ij}\|$ и всякого $t_0 \in (a, b)$ существует такая фундаментальная система решений (3) уравнения (2), что

$$x_i^{(n-j)}(t_0) = b_{ij}, \quad i, j = 1, \ \ldots, \ n.$$

Для функций (3) определитель

$$W(t) = \det \begin{Vmatrix} x_1(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{Vmatrix}$$

наз. определителем Вроньского, или *вронскианом*. Если (3) — фундаментальная система решений уравнения (2), то $W(t) \neq 0$ при всех $t \in (a, b)$. Если $W(t_0) = 0$ хотя бы в одной точке t_0, то $W(t) \equiv 0$ и решения (3) уравнения (2) в этом случае линейно зависимы. Для определителя Вроньского решений (3)

уравнения (2) справедлива *Лиувилля — Остроградского формула*:

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)\, d\tau\right).$$

Общее решение уравнения (1) является суммой общего решения однородного уравнения (2) и частного решения $x_0(t)$ неоднородного уравнения (1) и задается формулой

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \ldots + C_n x_n(t) + x_0(t),$$

где $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — фундаментальная система решений уравнения (2), а $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Если известна фундаментальная система решений (3) уравнения (2), то частное решение неоднородного уравнения (1) можно найти методом *произвольных постоянных вариации*.

2) Нормальной линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка наз. система

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_i + b_i(t), \quad i = 1, \ldots, n,$$

или в векторной форме

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \tag{5}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор-столбец, $A(t)$ — квадратная матрица порядка n, $b(t)$ — заданная вектор-функция. Далее предполагается, что $A(t)$ и $b(t)$ непрерывны на нек-ром промежутке (a, b). В этом случае для любых $t_0 \in (a, b)$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение $x(t)$ системы (5), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, причем это решение определено на всем промежутке (a, b).

Линейная система

$$\dot{x} = A(t)x \tag{6}$$

наз. **однородной**, соответствующей неоднородной системе (5). Если $x(t)$ — решение системы (6) и $x(t_0) = 0$, то $x(t) \equiv 0$; если $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ — решения, то и любая их линейная комбинация

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \ldots + C_m x_m(t)$$

является решением системы (6); если $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ — линейно независимые решения системы (6), то векторы $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ линейно независимы при любом $t \in (a, b)$. Если n вектор-функций

$$x_1(t), \ldots, x_n(t) \tag{7}$$

являются фундаментальной системой решений системы (6), то для всякого решения $x(t)$ системы (6) найдутся такие постоянные $C_1, \ldots, C_n$, что

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \ldots + C_n x_n(t). \tag{8}$$

Таким образом, формулой (8) задается общее решение системы (6). Для любых $t_0 \in (a, b)$ и линейно независимых векторов $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ существует такая фундаментальная система решений (7) системы (6), что

$$x_1(t_0) = a_1, \ldots, x_n(t_0) = a_n.$$

Для вектор-функций (7), являющихся решениями системы (6), определитель $W(t)$ матрицы

$$X(t) = \begin{Vmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{n1}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{Vmatrix}, \tag{9}$$

где первый индекс — номер решения, а второй — номер компоненты, наз. определителем Вронского, или вронскианом. Если (7) — фундаментальная система решений системы (6), то $W(t) \neq 0$ при всех $t \in (a, b)$, а матрица (9) наз. фундаментальной матрицей. Если решения (7) сис-

темы (6) линейно зависимы хотя бы в одной точке t_0, то они линейно зависимы при любом $t \in (a, b)$ и в этом случае $W(t) \equiv 0$. Для определителя Вроньского решений (7) системы (6) справедлива формула Лиувилля:

$$W = W(t_0) \exp\left(\int_t^t \operatorname{Sp}(A(\tau))\, d\tau\right),$$

где $\operatorname{Sp}(A(\tau)) = a_{11}(\tau) + \ldots + a_{nn}(\tau)$ — след матрицы $A(\tau)$. Матрица (9) удовлетворяет матричному уравнению $\dot{X} = A(t)\, X(t)$. Если $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (6), то для всякой другой фундаментальной матрицы $Y(t)$ этой же системы существует такая постоянная невырожденная $n \times n$-матрица C, что $Y(t) = X(t)C$. Если $X(t_0) = E$, где E — единичная матрица, то фундаментальная матрица $X(t)$ наз. нормированной в точке t_0 и формулой $x(t) = X(t)x_0$ задается решение системы (6), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Если матрица $A(t)$ перестановочна со своим интегралом, то фундаментальная матрица системы (6), нормированная в точке $t_0 \in (a, b)$, задается формулой

$$X(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(\tau)\, d\tau\right).$$

В частности, для постоянной матрицы A фундаментальная матрица, нормированная в точке t_0, задается формулой $X(t) = \exp(A(t - t_0))$.

Общее решение системы (5) является суммой общего решения однородной системы (6) и частного решения $x_0(t)$ неоднородной системы (5) и задается формулой

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \ldots + C_n x_n(t) + x_0(t),$$

где $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — фундаментальная система решений системы (6), а $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Если известна фундаментальная система решений (7) системы (6), то частное решение неоднородной системы (5) можно найти методом вариации произвольных постоянных. Если $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (6), то формулой

$$x(t) = X(t)\, X^{-1}(t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^t X(t)\, X^{-1}(\tau)\, b(\tau)\, d\tau$$

задается решение системы (5), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$.

3) Пусть в системах (5) и (6) $A(t)$ и $b(t)$ непрерывны на полуоси $[a, +\infty)$. Все решения системы (5) одновременно либо устойчивы, либо неустойчивы, поэтому система (5) наз. устойчивой (равномерно устойчивой асимптотически устойчивой), если все ее решения устойчивы (соответственно, равномерно, асимптотически устойчивы). Система (5) устойчива (равномерно, асимптотически устойчива) тогда и только тогда, когда устойчива (соответственно равномерно, асимптотически устойчива) система (6). Поэтому при исследовании вопросов устойчивости линейных дифференциальных систем достаточно ограничиться рассмотрением однородных систем.

Система (6) устойчива тогда и только тогда, когда все ее решения ограничены на полуоси $[a, +\infty)$. Система (6) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \tag{10}$$

для всех ее решений $x(t)$. Последнее равносильно выполнению соотношения (10) для n ее решений $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, образующих фундаментальную систему решений. Асимптотически устойчивая система (6) асимптотически устойчива в целом.

Линейная система с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax \tag{11}$$

устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A имеют неположительные действительные части (т. е. $\mathrm{Re}\lambda_i \leqslant 0$, $i=1, \ldots, n$); причем собственные значения с нулевой действительной частью имеют лишь простые элементарные делители. Система (11) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части.

4) Система

$$\dot{y} = -A^{\top}(t)\, y, \tag{12}$$

где $A^{\top}(t)$ — транспонированная матрица $A(t)$, наз. сопряженной системой для системы (6). Если $x(t)$ и $y(t)$ — произвольные решения систем (6) и (12) соответственно, то скалярное произведение

$$(x(t),\ y(t)) \equiv \mathrm{const}.$$

Если $X(t)$ и $Y(t)$ — фундаментальные матрицы решений систем (6) и (12) соответственно, то

$$Y^{\top}(t)\, X(t) = C,$$

где C — нек-рая невырожденная постоянная матрица.

5) Исследование различных специальных свойств линейных систем и, в частности, вопросов устойчивости связано с понятием *Ляпунова характеристического показателя* решения и развитым А. М. Ляпуновым первым методом в теории устойчивости (см. *Правильная линейная система*, *Приводимая линейная система*).

6) Две системы вида (6) наз. асимптотически эквивалентными, если между их решениями $x_1(t)$ и $x_2(t)$ можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что

$$\lim_{t \to \infty} (x_1(t) - x_2(t)) = 0.$$

Если система (11) с постоянной матрицей A устойчива, то она асимптотически эквивалентна системе $\dot{x} = (A + B(t))x$, где матрица $B(t)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и

$$\int_0^{\infty} \| B(t) \|\, dt < \infty. \tag{13}$$

При выполнении условия (13) система $\dot{x} = B(t)x$ асимптотически эквивалентна системе $\dot{x} = 0$.

Две системы вида (11) с постоянными коэффициентами наз. топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм h: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, переводящий ориентированные траектории одной системы на ориентированные траектории другой. Если квадратные матрицы A и B порядка n имеют одинаковое количество собственных значений с отрицательной действительной частью и не имеют собственных значений с нулевой действительной частью, то системы $\dot{x} = Ax$ и $\dot{x} = Bx$ топологически эквивалентны.

7) Пусть в системе (6) матрица $A(t)$ непрерывна и ограничена на всей действительной оси. Система (6) наз. обладающей свойством экспоненциальной дихотомии, если пространство $\mathbb{R}^n$ разлагается в прямую сумму: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \oplus \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, так, что для всякого решения $x(t)$ при $x(0) \in \mathbb{R}^{n_1}$ выполняется неравенство

$$\| x(t) \| \geqslant c e^{k(t - t_0)},$$

а при $x(0) \in \mathbb{R}^{n_2}$ неравенство

$$\| x(t) \| \leqslant c^{-1} e^{-k(t - t_0)}$$

для всех $t_0 \in \mathbb{R}$ и $t \geqslant t_0$, где $0 < c \leqslant 1$ и $k > 0$ — постоян-

ные. Свойством экспоненциальной дихотомии обладает, напр., система (11) с постоянной матрицей A, если A не имеет собственных значений с нулевой действительной частью (такая система наз. гиперболической). Если вектор-функция $b(t)$ ограниченна на всей действительной оси, то система (5) со свойством экспоненциальной дихотомии имеет единственное решение, ограниченное на всей прямой $\mathbb{R}$.

Лит.: [1] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970; [2] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970; [3] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971; [4] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М. — Л., 1950; [5] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967; [6] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова..., М., 1966; [7] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970.

Н. Н. Ладис.

ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ обыкновенное — уравнение вида

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t), \qquad (1)$$

где $x(t)$ — искомая функция, $a_1, \ldots, a_n$ — заданные действительные числа, $f(t)$ — заданная действительная функция.

Соответствующее (1) однородное уравнение

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = 0 \qquad (2)$$

интегрируется следующим образом. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — все различные корни характеристич. уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (3)$$

кратностей $l_1, \ldots, l_k$ соответственно, $l_1 + \ldots + l_k = n$. Тогда функции

$$e^{\lambda_j t},\ te^{\lambda_j t},\ \ldots,\ t^{l_j - 1} e^{\lambda_j t},\quad j = 1, \ldots, k, \qquad (4)$$

являются линейно независимыми (вообще говоря, комплексными) решениями уравнения (2), т. е. образуют фундаментальную систему решений. Общее решение уравнения (2) является линейной комбинацией с произвольными постоянными коэффициентами фундаментальной системы решений. Если $\lambda_j = \alpha_j + \beta_j i$ — комплексное число, то для всякого целого m, $0 \leqslant m \leqslant l_j - 1$, действительная часть $t^m e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t$ и мнимая часть $t^m e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t$ комплексного решения $t^m e^{\lambda_j t}$ являются линейно независимыми действительными решениями уравнения (2), а паре комплексно сопряженных корней $\alpha_j \pm \beta_j i$ кратности l_j соответствует $2l_j$ линейно независимых действительных решений

$$t^m e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t \quad \text{и} \quad t^m e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t,\ m = 0, 1, \ldots, l_j - 1.$$

Неоднородное уравнение (1) интегрируется методом *произвольных постоянных вариации*. В случае, когда f — квазимногочлен, т. е.

$$f(t) = e^{at} (p_m(t) \cos bt + q_m(t) \sin bt),$$

где p_m и q_m — многочлены степеней $\leqslant m$, а число $a + bi$ не является корнем уравнения (3), частное решение уравнения (1) ищется в виде

$$x_0(t) = e^{at} (P_m(t) \cos bt + Q_m(t) \sin bt). \qquad (5)$$

Здесь P_m и Q_m — многочлены степени m с неопределенными коэффициентами, к-рые находятся подстановкой (5) в (1). Если $a + bi$ — корень уравнения (3) кратности k, то частное решение уравнения (1) ищется в виде

$$x_0 = t^k e^{at} (P_m(t) \cos bt + Q_m(t) \sin bt)$$

методом неопределенных коэффициентов. Если $x_0(t)$ — частное решение неоднородного уравнения (1), а $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения (2), то общее решение уравнения (1) задается формулой

$$x(t) = x_0(t) + C_1 x_1(t) + \ldots + C_n x_n(t),$$

где C_1, ..., C_n — произвольные постоянные.

Однородная система линейных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\dot{x} = Ax, \qquad (6)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор, а A — постоянная действительная $n \times n$-матрица, интегрируется следующим образом. Если λ — действительное собственное значение кратности k матрицы A, то решения $x = (x_1, \ldots, x_n)$, соответствующие собственному значению λ, ищутся в виде

$$x_1 = P_1(t)\, e^{\lambda t}, \ \ldots, \ x_n = P_n(t)\, e^{\lambda t}. \qquad (7)$$

Здесь $P_1(t)$, ..., $P_n(t)$ — многочлены степени $k-1$ с неопределенными коэффициентами, к-рые находятся подстановкой (7) в (6); при этом существует в точности k линейно независимых решений вида (7). Если λ — комплексное собственное значение кратности k, то действительные и мнимые части комплексных решений вида (7) образуют $2k$ линейно независимых действительных решений системы (6), а пара комплексно сопряженных собственных значений λ и $\bar{\lambda}$ кратности k матрицы A порождает $2k$ линейно независимых действительных решения системы (6). Перебирая все собственные значения матрицы A, находят $2n$ линейно независимых решений, т. е. фундаментальную систему решений. Общее решение системы (6) является линейной комбинацией с произвольными постоянными коэффициентами решений, образующих фундаментальную систему.

Матрица $X(t) = e^{At}$ является фундаментальной матрицей системы (7), **нормированной в нуле**, т. к. $X(0) = E$ — единичная матрица. Здесь

$$e^{At} = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!},$$

причем этот матричный ряд абсолютно сходится для любой матрицы A и всех действительных t. Всякая другая фундаментальная матрица системы (6) имеет вид $e^{At}C$, где C — постоянная невырожденная матрица порядка n.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970; [2] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971; [3] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967.

Н. Н. Ладис.

ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ — уравнение вида

$$F(x, \ \ldots, \ p_{i_1 \ldots i_n}, \ \ldots) = 0,$$

где F — линейная функция действительных переменных,

$$p_{i_1 \ldots i_n} \equiv \frac{\partial^k}{\partial x_1^{i_1} \ldots dx_k^{i_n}},$$

i_1, ..., i_n — неотрицательные целочисленные индексы, $\sum_{j=1}^{n} i_j = k$, $k = 0, \ldots, m$, $m \geqslant 1$, и по крайней мере одна из производных

$$\frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \ldots i_n}}, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = m,$$

отлична от нуля.

Подробнее см. *Дифференциальное уравнение с частными производными.*

А. Б. Иванов.

ЛИНЕЙНОЕ ЗАМЫКАНИЕ — замыкание *линейной оболочки.*

ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение, в к-рое неизвестная функция $\varphi(s)$ входит в первой степени:

$$A(x)\varphi(x) + \int_D K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x),\ x \in D,$$

где A, K, f — заданные функции, D — область евклидова пространства, k, s — точки этого пространства, ds — элемент объема. Подробнее см. *Интегральное уравнение.*

А. Б. Иванов.

ЛИНЕЙНОЕ МНОГООБРАЗИЕ, аффинное подпространство,— подмножество M (линейного) *векторного пространства* E, являющееся сдвигом какого-либо его линейного подпространства L, т. е. множество M вида x_0+L при нек-ром $x_0 \subset M$. Множество M определяет L однозначно, тогда как x_0 определяется только по mod L:

$$x_0+L=x_1+N$$

в том и только в том случае, когда $L=N$ и $x_1-x_0 \in L$. Размерность M — это размерность подпространства L. Л. м., к-рому соответствует подпространство коразмерности 1, наз. гиперплоскостью.

М. И. Войцеховский.

ЛИНЕЙНОЕ НЕРАВЕНСТВО — неравенство вида

$$l(x)-a \equiv a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - a \leqslant 0 \qquad (1)$$

или вида

$$l(x)-a \equiv a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - a < 0, \qquad (2)$$

где $a_1, \ldots, a_n$, a — любые действительные числа, $x=(x_1, \ldots, x_n)$.

В более широком смысле — это неравенство вида

$$f(x)-a \leqslant 0 \qquad (3)$$

или вида

$$f(x)-a<0, \qquad (4)$$

где $f(x)$ — линейная (т. е. аддитивная и однородная) функция на действительном векторном пространстве $L(\mathbb{R})$ со значениями из поля $\mathbb{R}$ действительных чисел и $a \in \mathbb{R}$. Дальнейшее обобщение понятия Л. н. получается, если вместо поля $\mathbb{R}$ взять произвольное упорядоченное поле P. На основе именно такого обобщения построена современная теория Л. н. (см. [1]).

К исследованию систем Л. н. сводится ряд важных вопросов аналитич. механики, геометрии чисел, приближения функций. Весьма важные приложения находят результаты, относящиеся к системам Л. н., в экономич. исследованиях. В таких приложениях возникло, в частности, *линейное программирование.* К решению конкретных систем Л. н. сводятся многие практич. задачи технико-экономич. и планово-экономич. характера, что в значительной мере определило современное направление исследований в области Л. н.

На этом пути возник, в частности, основной принцип теории Л. н.— принцип граничных решений, установленный сначала (см. [4]) для конечных систем Л. н. в модульной форме, т. е. для систем вида

$$|\,l_j(x)-a_j\,| \equiv |\,a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n - a_j\,| \leqslant d_j, \qquad (5)$$

$j=1, 2, \ldots, m$, где все $a_{j1}, \ldots, a_{jn}$, a_j — в самом общем случае элементы поля комплексных чисел, а все d_j — неотрицательные действительные числа, $j=1, 2, \ldots, m$.

Принцип граничных решений заключается в следующем. В любой совместной системе вида (5) ранга $r>0$ можно выделить такую подсистему ранга r из r неравенств, что хотя бы одно решение последней, обращающее в равенства все ее неравенства,

удовлетворяет всем неравенствам системы (5), иначе говоря, является решением системы (5).

Принцип граничных решений был распространен (см. [5]) на системы вида

$$l_j(x) - a_j \equiv a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n - a_j \leqslant 0, \qquad (6)$$

$j=1, 2, \ldots, m$, над полем $\mathbb{R}$ (т. е. на системы с действительными $a_{j1}, \ldots, a_{jn}, a_j$, $j=1, 2, \ldots, m$) в виде следующего более сильного утверждения. В совместной системе (6) ранга $r>0$ можно выделить такую подсистему ранга r из r неравенств, что любое решение этой подсистемы, обращающее в равенства все ее неравенства, удовлетворяет всем неравенствам (6) (для систем вида (6) это утверждение оказывается эквивалентным предыдущему утверждению). Р а н г о м с и с т е м ы л и н е й н ы х н е р а в е н с т в наз. наибольшее число линейно независимых форм $l_j(x)$, входящих в ее неравенства.

Принцип граничных решений был распространен также на системы вида (6) над произвольным упорядоченным полем P и даже на более общие системы, составленные из конечного числа Л. н. вида (3) над полем P (см. [6]). Из этого принципа вытекает следующее условие совместности систем вида (6) над произвольным упорядоченным полем. Система (6) ранга $r>0$ тогда и только тогда совместна, когда в матрице ее коэффициентов существует такой отличный от нуля минор Δ порядка r, что для определителей Δ_j, $j=1, 2, \ldots, m$, получаемых при окаймлении его с помощью j-й строки этой матрицы и столбца элементов a_j, все отношения Δ_j/Δ неотрицательны. В случае совместной системы *линейных уравнений* $a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n - a_j = 0$, $j=1, 2, \ldots, m$, такие отношения равны нулю для любого отличного от нуля минора Δ порядка r матрицы ее коэффициентов.

Разработка теории Л. н. началась в конце 19 в. Одно из первых предложений общего характера, установленное в исследованиях [3] и [9], — т е о р е м а М и н к о в с к о г о — Ф а р к а ш а является и теперь одной из ключевых теорем теории Л. н.: если все решения совместной системы (6) над полем $\mathbb{R}$ удовлетворяют нек-рому неравенству

$$l(x) - b = b_1x_1 + \ldots + b_nx_n - b \leqslant 0,$$

$b, b_i \in \mathbb{R}$, $i=1, 2, \ldots, n$, то существуют такие неотрицательные числа $p_0, p_1, \ldots, p_m$, что имеет место тождественное относительно $x=(x_1, \ldots, x_n)$ соотношение

$$l(x) - b = \sum_{j=1}^{m} p_j (l_j(x) - a_j) - p_0.$$

В начале 20 в. в исследованиях Г. Ф. Вороного, посвященных квадратичным формам целочисленных переменных, возникла одна из основных задач теории Л. н. — задача изучения свойств выпуклого многогранника, определяемого в пространстве $\mathbb{R}^n$ решениями совместной конечной системы Л. н. отличного от нуля ранга. Основная теорема Вороного (см. [1]) выражает условия невырожденности такого многогранника или, иначе говоря, условия совместности конечной системы, составленной из неравенств вида (2). Задачей изучения многогранника решений систем вида (6) и результатами Г. Минковского [3] и Ж. Фаркаша [9] на долгое время определилось основное направление исследований по линейным неравенствам (см. [10]).

В дальнейшем выяснилось, что все результаты теории Л. н., относящиеся к конечным системам неравенств вида (6) и, в частности, упоминавшиеся выше результаты Минковского, Фаркаша и Вороного, могут быть выведены из принципа граничных решений дискретными методами, т. е. без использования топологич.

свойств поля $\mathbb{R}$ действительных чисел (или каких бы то ни было следствий этих свойств), причем дискретными методами был доказан и сам принцип граничных решений (см. [1] и [6]). Поэтому в качестве основного поля при построении теории конечных систем Л. н. оказалось возможным вместо поля $\mathbb{R}$ взять произвольное упорядоченное поле P. Таким образом, было подготовлено построение чисто алгебраич. теории Л. н., пользующейся только дискретными методами.

Продолжительное время теория Л. н. не имела эффективных методов для нахождения решения конечных систем Л. н. Метод, состоящий в непосредственном использовании принципа граничных решений, мало эффективен. Эффективные методы для нахождения отдельных решений конечной системы Л. н. (в частности, *симплексный метод*) появились с возникновением линейного программирования.

В 1960—65 был разработан т. н. метод свертывания систем линейных неравенств, позволяющий по любой конечной системе, составленной в общем случае из неравенств вида (3) и (4), в частности из неравенств вида (1) и (2), и по заданному подпространству связанного с ней пространства находить нек-рую новую конечную систему Л. н., множество решений к-рой совпадает с той или иной проекцией множества решений рассматриваемой системы на взятое подпространство (см. [1]). Разработанный на этой основе алгоритм фундаментального свертывания (особый алгоритм для последовательного исключения неизвестных из системы (6)) позволяет получать общие формулы, определяющие все множество решений совместной системы вида (6). Метод свертывания может быть использован в задачах линейного программирования для уменьшения числа неизвестных, а также для получения общих формул, определяющих все множество оптимальных решений (см. [1]). Показано также [7], что с помощью метода свертывания можно выделять максимальные совместные подсистемы в несовместной конечной системе Л. н., составленной в общем случае из неравенств вида (3) и (4), в частности из неравенств вида (1) и (2), что позволяет использовать его при одном из подходов к решению задач распознавания образов (см. [8]).

Среди бесконечных систем Л. н. выделен и изучен особый класс — полиэдрально замкнутые системы (см. [1]). В случае действительного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ полиэдрально замкнутые системы определяются как бесконечные системы вида $a_{\alpha 1}x_1+\ldots+a_{\alpha n}x_n-a_\alpha\leqslant 0$, $\alpha\in M$, с топологически замкнутым в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ сопряженным конусом, т. е. конусом, порожденным элементами

$$(a_{\alpha 1},\ \ldots,\ a_{\alpha n},\ -a_\alpha),\quad \alpha\in M,\ \text{и}\ (\theta,-1),$$

где θ — нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^n$. Бесконечные полиэдрально замкнутые системы Л. н. сохраняют ряд свойств конечных систем Л. н. и, в частности, для таких систем справедлива теорема Минковского — Фаркаша. Полиэдрально замкнутые системы Л. н. используются в теории приближения функций, в выпуклом программировании, в теории управления (см. [8]).

Лит.: [1] Черников С. Н., Линейные неравенства, М., 1968; [2] Линейные неравенства и смежные вопросы, пер. с англ., М., 1959; [3] Minkowski H., Geometrie der Zahlen, Lpz., 1896; [4] Черников С. Н., «Матем. сб.», 1944, т. 15, № 3, с. 437—48; [5] его же, «Успехи матем. наук», 1953, т. 8, № 2, с. 7—73; [6] его же, «Укр. матем. ж.», 1967, т. 19, № 1, с. 36—80; [7] его же, «Доповіді АН УРСР. Сер. А», 1969, № 1, с. 32—35; [8] Красовский Н. Н., Еремин И. И., «Укр. матем. ж.», 1973, т. 25, № 4, с. 465—78; [9] Farkas J., «J. reine und angew. Math.», 1902, v. 124, S. 1—27; [10] Dines L. L., McCoy N. H., «Trans. Roy. Soc. Canada. Sec. 3», 1933, v. 27, p. 37—70.

С. Н. Черников.

ЛИНЕЙНОЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И СИСТЕМА — дифференциальное уравнение (и система) с частными производными вида

$$\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial t^{k_i}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{ps_0+|s|\leqslant pk_j} A^{ij}_{s_0 s}(x,\ t)\,\frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}}\,\frac{\partial^{s}}{\partial x^{s}}\,u_j + f_i(x,t), \tag{1}$$

где $1\leqslant i\leqslant N$, $k_0,\ \ldots,\ k_N$ — натуральные, p — целое, $s=(s_1,\ \ldots,\ s_n)$, $|s|=s_1+\ldots+s_n$, рассматриваемое в области D переменных $(x,\ t)=(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)$. Система (1) наз. параболической (по Петровскому) в точке $(x^0,\ t^0)\in D$, если корни $\lambda_m(\xi,\ x,\ t)$, $1\leqslant m\leqslant k_1+\ldots+k_N$, многочлена по λ

$$\det\left(\sum_{ps_0+|s|=pk_j} A^{ij}_{s_0 s}\lambda^{s_0}\,(i\xi)^s - \delta_{ij}\lambda^{k_i}\right)$$

удовлетворяют неравенству

$$\sup_{m,\ |\xi|=1} \operatorname{Re}\lambda_m(\xi,\ x^0,\ t^0) < 0. \tag{2}$$

Здесь $(i\xi)^s=(i\xi_1)^{s_1}\ \ldots\ (i\xi_n)^{s_n}$ с мнимой единицей i и δ_{ij} — символ Кронекера.

Система (1) параболическая в D, если неравенство (2) выполняется для всех $(x,\ t)\in D$, и равномерно параболическая в D, если

$$\sup_{m,\ |\xi|=1,\ (x,\ t)\in D} \operatorname{Re}\lambda_m(\xi,\ x,\ t) < -\delta$$

с нек-рой постоянной $\delta>0$.

Для случая уравнения 2-го порядка

$$\sum_{i,\ j=0}^{n} c_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=0}^{n} c_i u_{x_i} + cu = h \tag{3}$$

можно дать другое определение параболичности. Для заданной точки $x^0=(x_0^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ существует аффинное преобразование, приводящее (3) к виду

$$\sum_{i,\ j=0}^{n} b_{ij}v_{x_i x_j} + \sum_{i=0}^{n} b_i v_{x_i} + bv = g,$$

где $b_{ij}(x^0)=0$ при $i\neq j$. Уравнение (3) параболическое в точке x^0, если одно из $b_{ii}(x^0)$ (пусть $b_{00}(x^0)=0$) равно нулю, остальные $b_{ii}(x^0)\neq 0$, $i>0$, и имеют одинаковые знаки и $b_0(x^0)\neq 0$. Уравнение (3) параболическое в области D, если оно параболическое в каждой ее точке. Если коэффициенты параболического в D уравнения (3) достаточно гладкие, то в окрестности каждой точки $x^0\in D$ невырожденной заменой переменных его можно привести к виду

$$u_t - \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = f \tag{4}$$

с положительно определенной формой $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$.

Типичным представителем параболич. уравнения является *теплопроводности уравнение*

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0, \tag{5}$$

основные свойства к-рого сохраняются и для общих параболич. уравнений.

Для уравнения (4) основными являются следующие задачи.

Задача Коши — Дирихле: найти функцию $u(x,\ t)$, к-рая при $x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$ удовлетворяет уравнению (4), а при $t=0$ — начальному условию

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Первая краевая задача, в к-рой уравнение (4) задано в цилиндре

$$\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0,\ T],$$

где Ω — нек-рая область пространства $\mathbb{R}^n$. Требуется найти функцию u, удовлетворяющую уравнению (4), начальному условию

$$u \mid_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega,$$

и краевому условию

$$u \mid_{x \in \partial\Omega,\ 0 \leqslant t \leqslant T} = \psi(x,\ t). \tag{6}$$

Вторая и третья краевые задачи отличаются от первой лишь условием (6), к-рое заменяется вторым краевым условием

$$\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{x \in \partial\Omega,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T} = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \nu_i = \psi(x,\ t)$$

или соответственно третьим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u\right)_{x \in \partial\Omega,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T} = \psi(x,\ t),$$

где ν_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — компоненты внешней нормали.

Классич. постановка указанных задач требует от решения непрерывности в замкнутой области, непрерывности вторых производных внутри и в случае второй и третьей краевых задач непрерывности первых производных вплоть до боковой поверхности цилиндра Ω. Кроме того, для задачи Коши — Дирихле, а в случае неограниченности Ω и для краевых задач требуется ограниченность решения u при $|x| \to \infty$ (или, более общо, надлежащим образом заданный рост $|u|$).

Пусть уравнение (4) равномерно параболическое, коэффициенты уравнения, начальных и краевых условий и граница области достаточно гладки. Тогда решения задачи Коши — Дирихле и первой краевой задачи существуют и единственны. Если $a \leqslant 0$, $\sigma > 0$ и выполнены необходимые условия согласования, то аналогичный результат справедлив и для второй и третьей краевых задач.

Единственность указанных задач следует из принципа максимума. Пусть коэффициенты уравнения (4) непрерывны в $\overline{Q}_T$, область Ω ограничена,

$$\Gamma = \partial Q_T \setminus \{(x,\ t) \mid x \in \Omega,\ t = T\}$$

и

$$M = \max_{\overline{Q}_T} a, \quad N = \max_{\overline{Q}_T} |f|.$$

Тогда для любого решения

$$u \in C(\overline{Q}_T) \cap C^2(\overline{Q}_T \setminus \Gamma)$$

уравнения (4) справедлива оценка

$$|u(x,\ t)| \leqslant e^{Mt}(Nt + \max_{\Gamma} |u|), \quad (x,\ t) \in Q_T.$$

Принцип максимума допускает распространение и на случай неограниченных областей. Кроме того, для параболич. уравнений имеет место аналог принципа Заремба — Жиро о знаке наклонной производной в точке экстремума, известного в теории эллиптич. уравнений.

В теории параболич. уравнений важную роль играют фундаментальные решения. В случае уравнения теплопроводности (5) им является функция

$$w(x,\ t,\ \xi,\ \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}},$$

при $t > \tau$ удовлетворяющая уравнению (5), причем для

любой ограниченной непрерывной в $\mathbb{R}^n$ функции $\varphi(x)$

$$\lim_{t\to\tau+0}\int_{\mathbb{R}^n} w(x,\ t,\ \xi,\ \tau)\,\varphi(\xi)\,d\xi=\varphi(x)$$

равномерно на компактных подмножествах точек $x\in\mathbb{R}^n$. В частности, при $\tau=0$ получается решение

$$u(x,\ t)=\int_{\mathbb{R}^n} w(x,\ t,\ \xi,\ 0)\,\varphi(\xi)\,d\xi \qquad (7)$$

задачи Коши — Дирихле. На значение решения u в точке $(x,\ t)$, $t>0$, влияют все значения функции. Это служит выражением того факта, что возмущения задачи Коши — Дирихле распространяются с бесконечной скоростью. В этом существенное отличие параболич. уравнений от гиперболических, где скорость распространения возмущений конечна.

Фундаментальные решения могут быть построены и для общих параболич. уравнений и систем при весьма широких предположениях относительно гладкости коэффициентов.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [2] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., 1967; [3] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [4] Эйдельман С. Д., Параболические системы, М., 1964; [5] Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А., «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, в. 3., с. 3—46. *А. П. Солдатов.*

ЛИНЕЙНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО, векторное подпространство,— непустое подмножество L (линейного) *векторного пространства* E над полем K такое, что L само является векторным пространством по отношению к определенным в E действиям сложения и умножения на скаляр. Множество $L+x_0$, где $x_0\in E$, наз. *линейным многообразием.* *М. И. Войцеховский.*

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — гомоморфизм π группы (соответственно алгебры, кольца, полугруппы) X в группу всех обратимых линейных операторов в векторном пространстве E (соответственно в алгебру, кольцо, мультипликативную полугруппу всех линейных операторов в E). Если E — топологич. векторное пространство, то Л. п. X в E наз. такое, образ к-рого содержит только непрерывные линейные операторы в E. Пространство E наз. пространством представления π, а операторы $\pi(x)$, $x\in X$,— операторами представления π.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978. *А. И. Штерн.*

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — отображение векторного пространства в себя, при к-ром образом суммы двух векторов является сумма их образов, а образом произведения вектора на число — произведение образа вектора на это число. Если V — векторное пространство, f — заданное в нем Л. п. и x, y — любые векторы пространства, λ — любое число (элемент поля), то

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad f(\lambda x)=\lambda f(x).$$

Если векторное пространство V имеет конечную размерность n; e_1, e_2, . . , e_n — его базис; x_1, x_2, . . . , x_n — координаты произвольного вектора x в этом базисе и y_1, y_2, . . . , y_n — координаты его образа $y=f(x)$, то координаты вектора y выражаются через координаты вектора x линейными однородными функциями

$$\begin{aligned}
y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\\
y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n.
\end{aligned}$$

Матрица

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{Vmatrix}$$

наз. матрицей Л. п. f в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. В ее столбцах стоят координаты образов базисных векторов. Если

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{Vmatrix}$$

— матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e_1', e_2', \ldots, e_n'$:

$$\begin{aligned} e_1' &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n, \\ e_2' &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n' &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n, \end{aligned}$$

то в базисе $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ матрица B Л. п. f будет $B = C^{-1}AC$.

С у м м о й двух Л. п. f и g наз. такое преобразование h, при к-ром для всякого вектора $x \in V$

$$h(x) = f(x) + g(x).$$

П р о и з в е д е н и е м Л. п. f н а ч и с л о λ наз. преобразование k, при к-ром $k(x) = \lambda f(x)$ для всякого вектора $x \in V$.

П р о и з в е д е н и е м Л. п. f н а Л. п. g наз. преобразование

$$l(x) = g(f(x)).$$

Сумма двух Л. п., произведение Л. п. на число, произведение двух Л. п. являются линейными преобразованиями. Л. п. образуют алгебру. В случае, когда конечномерное пространство имеет размерность n, алгебра его Л. п. изоморфна алгебре квадратных матриц порядка n, элементами к-рых являются элементы того поля, над к-рым построено векторное пространство.

Л. п. f, при к-ром векторное пространство отображается на себя, наз. о б р а т и м ы м, если существует такое преобразование f^{-1}, что

$$ff^{-1} = f^{-1}f = E,$$

где E — тождественное преобразование. Преобразование f^{-1} является Л. п. и наз. о б р а т н ы м п р е о б р а з о в а н и е м к преобразованию f. Л. п., заданное в конечномерном векторном пространстве, обратимо тогда и только тогда, когда определитель его матрицы в каком-нибудь (и тогда во всяком) базисе отличен от нуля. Если A — матрица обратимого Л. п., то матрица обратного ему Л. п. f^{-1} равна A^{-1}. Обратимые Л. п. образуют группу по отношению к операции умножения. В случае векторных пространств конечной размерности n эта группа изоморфна группе невырожденных квадратных матриц порядка n.

Подпространство V' векторного пространства V наз. и н в а р и а н т н ы м п о д п р о с т р а н с т в о м относительно Л. п. f, если $f(x) \in V'$ для всякого вектора $x \in V'$. Ненулевой вектор $x \in V$ наз. с о б с т в е н н ы м в е к т о р о м Л. п. f, соответствующим собственному значению λ, если $f(x) = \lambda x$. В случае пространства конечной размерности над полем комплексных чисел всякое Л. п. имеет собственный вектор (обладает одномерным инвариантным подпространством). В случае конечномерного пространства над полем действительных чисел у всякого Л. п. имеется одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Л. п. f, заданное в конечномерном векторном пространстве, наз. д и а г о н а л и з и р у е м ы м Л. п., если в пространстве V существует такой базис, в к-ром матрица этого преобразования имеет диагональную форму. Другими словами, Л. п. диагонализируемо, если пространство обладает базисом, состоящим из

собственных векторов этого Л. п. Однако не всякое Л. п. даже в пространстве над полем комплексных чисел обладает базисом из собственных векторов этого Л. п., напр. Л. п. двумерного пространства, заданное матрицей

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

у к-рой имеется единственное одномерное инвариантное подпространство с базисом $\{1, 0\}$.

В конечномерном векторном пространстве над полем комплексных чисел для всякого Л. п. существует такой базис, в к-ром матрица этого преобразования имеет клеточный вид, где по главной диагонали стоят жордановы клетки, а в остальных местах — нули. Жорданова клетка 1-го порядка состоит из одного числа λ; жорданова клетка порядка k есть квадратная матрица порядка k вида

$$\begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{Vmatrix}.$$

Числа λ являются собственными значениями матрицы Л. п. Одному и тому же λ могут соответствовать как несколько клеток одного и того же порядка, так и клетки различных порядков. Матрица, состоящая из жордановых клеток, наз. нормальной жордановой формой матрицы.

Л. п. f, заданное в евклидовом (унитарном) пространстве, наз. самосопряженным (соответственно эрмитовым), если для всяких двух векторов $x, y \in V$ имеет место равенство $(x, f(y)) = (y, f(x))$ (соответственно $(x, f(y)) = \overline{(y, f(x))}$).

Л. п., заданное в конечномерном евклидовом (унитарном) пространстве, будет самосопряженным (эрмитовым) тогда и только тогда, когда его матрица A в каком-нибудь (а тогда и во всяком) ортонормированном базисе является симметрической (соответственно эрмитовой). Самосопряженное (эрмитово) Л. п., заданное в конечномерном евклидовом (соответственно унитарном) пространстве, обладает ортонормированным базисом, в к-ром его матрица имеет диагональную форму. По главной диагонали стоят (всегда действительные) собственные значения матрицы A Л. п.

Л. п. f, заданное в евклидовом (унитарном) пространстве V, наз. изометрическим (соответственно унитарным), если для всякого вектора $x \in V$

$$\| f(x) \| = \| x \|.$$

Л. п., заданное в конечномерном евклидовом (унитарном) пространстве, изометрично (соответственно унитарно) тогда и только тогда, когда его матрица A в каком-нибудь (а тогда и во всяком) ортонормированном базисе была ортогональной (соответственно унитарной). Для всякого изометрич. Л. п., заданного в конечномерном евклидовом пространстве, существует ортонормированный базис, в к-ром матрица преобразования состоит из клеток 1-го и 2-го порядка, стоящих на ее главной диагонали. Клетки 1-го порядка суть действительные собственные значения матрицы A преобразования, равные $+1$ и -1, а клетки 2-го порядка имеют вид

$$\begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix},$$

где $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ — действительная часть и коэффициент при i комплексного собственного значения, $\lambda = \cos\varphi + i \sin\varphi$ матрицы A, на остальных местах матрицы A стоят нули. Для всякого унитарного пре-

образования, заданного в унитарном пространстве, существует ортонормированный базис, в к-ром матрица этого преобразования является диагональной, причем на главной диагонали стоят числа, по модулю равные 1.

Всякое Л. п., заданное в конечномерном евклидовом (унитарном) пространстве, является произведением самосопряженного и изометрич. Л. п. (соответственно эрмитова и унитарного).

Лит.: [1] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии..., М., 1968; [2] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, 4 изд., М., 1971; [3] Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., *Линейная алгебра и многомерная геометрия*, М., 1970; [4] Халмош П., Конечномерные векторные пространства, пер. с англ., М., 1963. *А. С. Пархоменко.*

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — математическая дисциплина, посвященная теории и методам решения задач об экстремумах линейных функций на множествах n-мерного векторного пространства, задаваемых системами линейных неравенств и равенств; Л. п.— один из разделов *математического программирования*. Типичной задачей Л. п. является следующая: найти максимум линейной функции

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m; \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

где c_j, a_{ij} и b_i — заданные числа.

Задачи Л. п. являются математич. моделями многочисленных задач технико-экономич. содержания. Примером может служить следующая задача планирования работы предприятия. Для производства однородных изделий необходимо использовать различные производственные факторы: сырье, рабочую силу, станочный парк, топливо, транспорт и т. д. Обычно имеется несколько отработанных технологич. способов производства, причем в этих способах затраты производственных факторов в единицу времени для выпуска изделий различны. Количество израсходованных производственных факторов и количество изготовленных изделий зависит от того, сколько времени предприятие будет работать по тому или иному технологич. способу. Ставится задача рационального распределения времени работы предприятия по различным технологич. способам, т. е. такого, при к-ром будет произведено максимальное количество изделий при заданных ограниченных затратах каждого производственного фактора. Формализуем задачу. Пусть имеется n технологич. способов производства изделий и m производственных факторов. Пусть c_j — количество изделий, выпускаемых в единицу времени при работе по j-му технологич. способу; a_{ij} — расход i-го производственного фактора в единицу времени при работе по j-му технологич. способу; b_i — имеющиеся ресурсы i-го производственного фактора и x_j — планируемое время работы по j-му технологич. способу. Величина

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

означает общий расход i-го производственного фактора при плане $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. И поскольку ресурсы ограничены величинами b_i, то возникают естественные условия (2) и (3). Ставится задача отыскания такого распределения времени (оптимального плана) $x^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ работы по каждому технологич. способу, при к-ром общий объем продукции $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ был бы максимальным, т. е. задача (1) — (3). Другим характерным примером прикладных задач Л. п. является *транспортная задача*.

Задачи Л. п. являются вспомогательными во многих методах решения нелинейных задач математич. программирования. Так, в методе возможных направлений (см. *Математическое программирование*) для отыскания направления спуска на каждой итерации необходимо решить соответствующую задачу Л. п.

Смысл термина «Л. п.» в том, что в Л. п. решаются задачи составления оптимальной программы (плана) действий. В связи с этим Л. п. можно рассматривать как один из математич. методов в *исследовании операций*.

В задачах Л. п. более общего вида по сравнению с (1) — (3) нек-рые (или все) из условий (2) могут быть равенствами, а на нек-рые (либо на все) переменные x_j не накладываются условия неотрицательности. Любая задача Л. п. может быть приведена к эквивалентной задаче вида (1) — (3).

Основу изучения свойств задач Л. п. составляет теория двойственности. Двойственной задачей Л. п. к задаче (1) — (3) наз. задача минимизации функции

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{4}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{5}$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{6}$$

Задачи (1) — (3) и (4) — (6) либо обе имеют решения, либо обе неразрешимы. Значения целевых функций (1) и (4) на решениях совпадают.

Одним из основных методов решения задач Л. п. является *симплексный метод*. Геометрически его идея состоит в следующем. Допустимое множество (2) и (3) представляет собой выпуклое многогранное множество (если оно ограничено, то — многомерный выпуклый многогранник). Если задача Л. п. имеет решение, то существует вершина x^* многогранного множества, являющаяся оптимальным планом. Симплексный метод состоит в таком направленном переборе вершин, при к-ром значение целевой функции возрастает от вершины к вершине. Каждой вершине соответствует система уравнений, выбираемая специальным образом из системы неравенств (2), (3), поэтому вычислительная процедура симплексного метода состоит в последовательном решении систем линейных алгебраич. уравнений. Простота алгоритма делает этот метод удобным для его реализации на ЭВМ. В Л. п. разработан целый ряд других конечных методов, напр. двойственный симплексный метод, когда решение прямой задачи (1) — (3) получают в результате применения симплексного метода к двойственной задаче (4) — (6). Наряду с терминами «симплексный метод» и «двойственный симплексный метод» приняты термины «метод последовательного улучшения плана» и «метод последовательного уточнения оценок».

При моделировании реальных явлений часто возникают задачи Л. п. больших размерностей. Содержание этого термина зависит от возможностей вычислительных алгоритмов и характеристик, используемых ЭВМ, таких, как объем оперативной памяти, скорость и др. Для решения задач больших размерностей создаются методы, учитывающие специфич. структуру матриц условий. В основе многих из них лежит идея декомпозиции — разложения системы ограничений на подсистемы, для каждой из к-рых необходимо решать подзадачу Л. п. меньшей размерности по сравнению с исходной задачей.

Для решения задачи Л. п. наряду с конечными методами применяются также итерационные методы построения последовательности приближений, пределом

к-рой является оптимальный план. К ним относятся методы, основанные на применении штрафных функций (см. *Штрафных функций метод*), итерационные методы теории игр, применение к-рых основано на эквивалентности любой матричной игры соответствующей паре двойственных задач Л. п., и ряд других методов.

Существенное место в Л. п. занимает проблема устойчивости. В реальных задачах (в особенности задачах технико-экономич. содержания) исходная информация обычно известна лишь с определенной степенью точности, и даже малые возмущения (погрешности) в исходных данных могут вызывать существенные отклонения возмущенного решения от истинного. При численной реализации того или иного конечного метода возникают ошибки округления, накопление к-рых, особенно в задачах большой размерности, может привести к значительным отклонениям полученного приближенного решения от истинного. Обе эти ситуации характеризуют свойство неустойчивости и присущи некорректно поставленным задачам. В Л. п. разработаны методы решения некорректных задач. Так, в методе регуляризации, используя нек-рую дополнительную информацию о решении, аппроксимируют исходную задачу параметрич. последовательностью устойчивых задач таким образом, чтобы последовательность их решений сходилась к решению исходной задачи.

Наряду с конечномерными задачами Л. п. рассматриваются также задачи Л. п. в бесконечномерных пространствах. К этим задачам относятся, напр., линейные задачи оптимального управления со смешанными ограничениями.

Лит.: [1] Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Линейное программирование, М., 1969; [2] Данциг Дж., Линейное программирование, его применения и обобщения, М., 1966; [3] Еремин И. И., Астафьев Н. Н., Введение в теорию линейного и выпуклого программирования, М., 1976; [4] Карманов В. Г., Математическое программирование, М., 1975; [5] Тер-Крикоров А. М., Оптимальное управление и математическая экономика, М., 1977.

В. Г. Карманов.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО — то же, что *векторное пространство*.

ЛИНЕЙНОЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — векторное (линейное) пространство L, являющееся топологич. пространством, в к-ром действия сложения и умножения на скаляр в L непрерывны относительно заданной в L топологии. См. *Топологическое векторное пространство.*

М. И. Войцеховский.

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$Ax=b, \qquad (1)$$

где A — *линейный оператор*, действующий из векторного пространства X в векторное пространство B, x — неизвестный элемент из X, b — заданный элемент из B (свободный член). Если $b=0$, то Л. у. наз. о д н о р о д н ы м. Р е ш е н и е м Л. у. наз. элемент x_0, обращающий (1) в тождество:

$$Ax_0\equiv b.$$

Простейший пример доставляет линейный оператор $A: x\to ax$ (*линейная функция*) и определяемое им *линейное уравнение* (алгебраическое):

$$ax=b, \qquad (2)$$

a, $b\in\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (или произвольному полю k); его решение существует тогда и только тогда, когда либо $a\neq 0$ (и тогда $x_0=b/a$), либо $a=b=0$ (и тогда x_0 — любое). Обобщением уравнения (2) является Л. у. вида

$$Ax\equiv f(x)=b, \qquad (3)$$

где $f(x)$ — *линейный функционал*, определенный на векторном пространстве X над полем k, $b\in k$. В частности, если размерность X конечна и равна n (так что

X изоморфно k^n), f имеет вид линейной формы нескольких переменных $x_1, \ldots, x_n \in k$ и уравнение (3) может быть записано в виде

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b, \quad a_i,\ b \in k. \qquad (4)$$

Если a_i одновременно не обращаются в нуль, то множество решений уравнения (4) заполняет $(n-1)$-мерное линейное многообразие (в однородном случае — линейное подпространство) в X. Если X бесконечномерно, то множество решений уравнения (3) — линейное многообразие коразмерности 1.

Несколько уравнений вида (4) образуют с и с т е м у Л. у.:

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j,\ j = 1, \ldots, m. \qquad (5)$$

При этом систему (5) можно интерпретировать как одно Л. у. вида (1), если принять в качестве X пространство k^n, в качестве B — пространство k^m, а оператор A задать матрицей $\|a_{ij}\|$, $i=1, \ldots, n$; $j=1, \ldots, m$. Вопрос о совместности системы Л. у. (5), т. е. вопрос о существовании решения системы Л. у., решается сравнением ранга матриц $\|a_{ij}\|$ и $\|a_{ij},\ b_j\|$.

Более сложно обстоит дело в случае, когда X и B являются бесконечномерными векторными пространствами. При этом играют существенную роль топологии пространств X и B и обусловливаемые ими те или иные свойства ограниченности, непрерывности и пр. оператора A. В общем случае существование и единственность решения Л. у. обусловлены обратимостью A (см. *Обратное отображение*). Однако эффективно обратить A удается далеко не всегда, и потому для исследования Л. у. приобретают важную роль качественные методы, позволяющие без решения Л. у. указать полезные в том или ином отношении свойства совокупности решений (в предположении, что они существуют), напр. единственность, априорные оценки и т. д. С другой стороны, оператор A может быть определен не на всем пространстве X, и уравнение (1) может не иметь решения ни при каких b. В этой ситуации разрешимость уравнения (1) устанавливается (во многих практически важных случаях) выбором надлежащего *расширения* оператора A.

Для конкретных типов Л. у., напр. для линейных дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и с частными производными, для линейных интегральных уравнений, разработаны специфические, в том числе и численные, методы решения и исследования. Наконец, в ряде случаев (напр., в задачах линейной регрессии) оказываются полезными значения $\tilde{x}_0$, в определенном смысле наиболее подходящие для роли решения Л. у. *М. И. Войцеховский.*

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ а л г е б р а и ч е с к о е — алгебраическое уравнение 1-й степени по совокупности неизвестных, т. е. уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b.$$

Всякая система Л. у. может быть записана в виде

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где m и n — натуральные числа; a_{ij} ($i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n$) наз. к о э ф ф и ц и е н т а м и при неизвестных и являются заданными; b_i ($i=1, 2, \ldots, m$) наз. с в о б о д н ы м и ч л е н а м и и также являются заданными; x_i ($i=1, 2, \ldots, n$) наз. н е и з в е с т н ы м и и являются искомыми. Р е ш е н и е м с и с т е м ы Л. у. (1) наз. такой набор значений $c_1, c_2, \ldots, c_n$, что каждое из уравнений системы обращается в тождество при подстановке c_i вместо соот-

ветствующих неизвестных. Для приложений наиболее важен тот случай, когда коэффициенты при неизвестных, свободные члены и значения неизвестных являются числами (комплексными, действительными или целыми), но можно рассматривать также случай, когда они лежат в произвольном поле P.

По числу решений системы Л. у. делятся на следующие типы:

совместная система — система Л. у., имеющая хотя бы одно решение;

несовместная система (или противоречивая) — система, не имеющая ни одного решения;

определенная система — система, имеющая единственное решение;

неопределенная система — система, имеющая более одного решения.

Если рассматриваются решения системы со значениями неизвестных в данном числовом (или любом бесконечном) поле, то каждая неопределенная система Л. у. имеет бесконечно много решений. В отличие от уравнений степени выше первой, тип системы Л. у. не меняется при расширении данного поля P. Так, при расширении поля несовместная система не может стать совместной, а определенная — неопределенной. Однако совокупность решений неопределенной системы при этом расширяется.

Простейший путь определения типа системы (1) и вычисления ее решений дает *Гаусса метод* исключения неизвестных. В случае $n=m$ система (1) тогда и только тогда является определенной, когда определитель, составленный из ее коэффициентов при неизвестных, отличен от нуля. В этом случае единственное решение системы находится по формулам Крамера (см. *Крамера правило*).

Для решения системы Л. у., коэффициенты к-рой содержат буквенные параметры, более удобным, чем метод Гаусса, является применение общей теории Л. у., связанной с понятием ранга матрицы. Ранг матрицы можно определить как максимальное число линейно независимых строк или столбцов. По теореме о ранге матрицы ранг системы строк матрицы равен рангу системы столбцов и равен наибольшему порядку отличных от нуля миноров этой матрицы. С системой Л. у. (1) связаны две матрицы: матрица

$$A=\| a_{ij} \|,$$

составленная из коэффициентов при неизвестных, и расширенная матрица

$$B=\| a_{ij},\ b_i \|,$$

получаемая из матрицы A добавлением столбца свободных членов. Критерий совместности системы (1) дает теорема Кронекера — Капелли: система Л. у. (1) тогда и только тогда совместна, когда ранг матрицы A равен рангу матрицы B.

Система Л. у. (1) тогда и только тогда имеет единственное решение, когда ранг матрицы A равен рангу матрицы B и равен n.

Неизвестные совместной системы Л. у. подразделяются на главные и свободные. При любых значениях свободных неизвестных существуют однозначно определенные значения главных неизвестных, дающие в совокупности решение данной системы. Выбор главных и свободных неизвестных не всегда однозначен. Именно, если ранг A равен рангу B и равен r, то любые r неизвестных, из коэффициентов при к-рых можно составить определитель $D\neq 0$, можно считать главными, а остальные — свободными. Определитель D в этом случае наз. главным (или базисным) минором системы. Его можно искать методом окаймления, начиная с миноров низших порядков. Он также не всегда определен однозначно. При вычисле-

нии решений надо взять лишь r уравнений, содержащих главный минор D, и выразить в общем виде (напр., используя формулы Крамера) главные неизвестные через свободные. Эти выражения наз. общим решением. Свободные неизвестные играют в нем роль свободных параметров. Придавая им любые значения, находят значения главных неизвестных, дающие вместе с выбранными значениями свободных неизвестных решение системы. Любое решение совместной системы может быть получено указанным путем при подходящих значениях свободных неизвестных. Если все коэффициенты при неизвестных и свободные члены лежат в поле P, то при выборе для свободных неизвестных значений из того же поля P получается решение со значениями всех неизвестных из того же поля P. При $r=n$ все неизвестные являются главными и общего решения не существует.

Система Л. у.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

полученная из системы (1) заменой свободных членов нулями, наз. однородной системой Л. у., соответствующей системе (1). Система (2) всегда совместна (т. к. ей удовлетворяет нулевое решение). Для того чтобы она имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы A был меньше числа неизвестных n. В частности, при $m=n$ квадратная однородная система Л. у. тогда и только тогда имеет ненулевое решение, когда ее определитель равен нулю.

Решения совместной системы Л. у. (1) и соответствующей однородной системы (2) связаны следующим образом: сумма решения системы (1) и решения системы (2) является решением системы (1); разность двух решений системы (1) — решением системы (2). Все решения системы (1) можно получить, прибавляя к каждому решению системы (2) одно и то же частное решение системы (1).

Геометрическая интерпретация решений системы Л. у. Любую строку из n элементов поля P можно рассматривать как строку координат вектора x n-мерного векторного пространства V над полем P в нек-ром фиксированном базисе. Для краткости формулировок вектор x отождествляется со строкой его координат. Все решения однородной системы (2) составляют подпространство U пространства V. Его размерность равна $n-r$, где n — число неизвестных, а r — ранг матрицы A системы. При $r<n$ подпространство U отлично от нулевого и его базис наз. также фундаментальной системой решений системы Л. у. (2). Обратно, для каждого подпространства U пространства V существует однородная система Л. у., решения к-рой составляют подпространство U. Множество векторов $Z=U+x_0$, получаемое прибавлением к каждому вектору подпространства U одного и того же вектора x_0, наз. линейным многообразием (или плоскостью, иногда гиперплоскостью) пространства V. Все решения совместной системы Л. у. (1) составляют нек-рое линейное многообразие Z; обратно, для любого линейного многообразия Z существует совместная система, решения к-рой составляют данное многообразие (см. [3]).

Решение систем линейных уравнений в целых числах. Пусть дана система уравнений (1), где все a_{ij} и b_i — целые числа. И пусть через d_k, $k=1, 2, \ldots, \min(m, n)$, обозначен наибольший общий делитель всех миноров порядка k матрицы A из коэффициентов при неизвестных, а через d'_k, $k=1, 2, \ldots, \min(m, n+1)$, — аналогич-

ное число для расширенной матрицы B. Если все миноры порядка k в матрице A (или B) равны нулю, то считают $d_k=0$ (соответственно $d'_k=0$). Для того чтобы целочисленная система Л. у. (1) имела целочисленное решение, необходимо и достаточно, чтобы d'_k нацело делилось на d_k, $k=1, 2, \ldots, \min(m, n)$, и при $m>n$ выполнялось равенство $d'_{n+1}=0$.

Для формулировки метода вычисления всех целочисленных решений систем Л. у. вводятся т. н. элементарные преобразования целочисленных матриц: 1) прибавление к i-й строке j-й строки ($i\neq j$), умноженной на целое число c; 2) умножение i-й строки на -1; 3) перестановка i-й и j-й строк и аналогичные преобразования столбцов. При элементарных преобразованиях строк система (1) переходит в эквивалентную систему и, значит, совокупность целочисленных решений не меняется. При элементарных преобразованиях столбцов матрицы A из коэффициентов при неизвестных происходят следующие преобразования неизвестных: если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — новые неизвестные, то

при преобразовании 1)

$$x_k=y_k\ (k\neq j),\quad x_j=y_j+cy_i;$$

при преобразовании 2)

$$x_k=y_k\ (k\neq i),\quad x_i=-y_i;$$

при преобразовании 3)

$$x_k=y_k\ (k\neq i,\ j),\ x_i=y_j,\ x_j=y_i.$$

При таких преобразованиях неизвестных целочисленные решения и только они переходят в целочисленные.

Систему (1), для к-рой ранг A равен рангу B и равен r, при помощи элементарных преобразований строк матрицы B и столбцов матрицы A, а также отбрасыванием нулевых уравнений можно привести к следующему канонич. виду

$$e_1y_1=b'_1,\ \ldots,\ e_ry_r=b'_r. \tag{3}$$

Числа e_i удовлетворяют дополнительным условиям:

$$e_i>0,\ i=1, 2, \ldots, r,$$

и

$$e_i \text{ делит } e_{i+1},\ i=1, 2, \ldots, r-1.$$

Для задачи решения системы в целых числах эти дополнительные условия несущественны.

Для существования целочисленных решений системы (3) необходимо и достаточно, чтобы числа

$$c_i=b'_i/e_i,\quad i=1, 2, \ldots, r,$$

были целыми. Неизвестные $y_1, y_2, \ldots, y_r$ определены однозначно, а при $r<n$ неизвестные $y_{r+1}, \ldots, y_n$ могут принимать любые целые значения.

Для вычисления решений исходной системы (1) надо все преобразования столбцов матрицы A применить в том же порядке к единичной матрице E порядка n. Полученная целочисленная матрица Q дает связь старых и новых неизвестных:

$$X=QY,$$

где

$$X=\begin{Vmatrix} x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{Vmatrix},\qquad Y=\begin{Vmatrix} y_1\\ y_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ y_n\end{Vmatrix}.$$

Затем надо положить $y_i=c_i$, $i=1, 2, \ldots, r$, а при $r<n$ неизвестным $y_{r+1}, \ldots, y_n$, играющим роль параметров, можно придавать любые целые значения.

Указанный метод решения системы (1) над кольцом целых чисел обобщается на любые евклидовы кольца и кольца главных идеалов.

Разыскание целочисленных решений уравнений и систем в общем случае — предмет теории *диофантовых уравнений*.

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [2] Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [3] Мишина А. П., Проскуряков И. В., Высшая алгебра. Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра, 2 изд., М., 1965.

И. В. Проскуряков.

ЛИНЕЙНОЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И СИСТЕМА — дифференциальное уравнение (и система) с частными производными вида

$$Lu=f,$$

где L — линейный эллиптич. оператор

$$Lu=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\,D^\alpha u(x). \qquad (1)$$

Оператор (1) с действительными коэффициентами $a_\alpha(x)$ эллиптичен в точке x, если характеристич. форма

$$\omega(x,\ \xi)=\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha$$

является определенной в этой точке. Здесь $x=(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс (набор целых неотрицательных чисел), $|\alpha|=\Sigma\alpha_i$, $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)\in\mathbb{R}^n$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$ и $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}$. В частности, порядок m оператора L должен быть четным $m=2m'$. С точностью до знака условие определенности форм записывается в виде

$$(-1)^{m'}\omega(x,\ \xi)\geqslant\delta|\xi|^m,\quad \delta>0. \qquad (2)$$

Оператор L эллиптичен в области D, если он эллиптичен в каждой точке $x\in D$, и равномерно эллиптичен в этой области, если $\delta>0$ в (2) не зависит от x.

В случае уравнения 2-го порядка

$$\sum_{i,\ j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial y_j}+\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a(x)\,u=f(x) \qquad (3)$$

это определение может быть переформулировано следующим образом. Уравнение (3) эллиптично в области D, если в каждой точке этой области путем замены независимых переменных оно допускает приведение к канонич. виду

$$\Delta u+\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a(x)u=f(x)$$

с оператором Лапласа

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

в главной части. В случае эллиптич. уравнения на плоскости при весьма широких предположениях относительно коэффициентов a_{ij} такое преобразование возможно не только в точке, но и во всей области (см. [1]).

Простейшим эллиптич. уравнением является *Лапласа уравнение*, его решения наз. *гармоническими функциями*. Решения линейного эллиптич. уравнения (л. э. у.) можно охарактеризовать тем, что они имеют много общих свойств с гармонич. функциями. В плоском случае все гармонич. функции описываются как реальные части аналитич. функций, они являются действительными аналитич. функциями двух переменных. Аналогичным свойством обладают решения общего л. э. у. $Lu=f$. Если коэффициенты $a_\alpha(x)$, $|\alpha|\leqslant m$, и правая часть $f(x)$ аналитичны по $x=(x_1, \ldots, x_n)$ в об-

ласти D, то и любое решение этого уравнения также аналитично.

Существуют и другие утверждения подобного типа. Напр., если коэффициенты и правая часть уравнения $Lu=f$ непрерывно дифференцируемы до порядка k и их k-е производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α, $0<\alpha<1$, то любое решение обладает производными до порядка $k+m$, удовлетворяющими условию Гёльдера с тем же показателем α. Принадлежность к классу Гёльдера здесь существенна. Если коэффициенты и правая часть просто непрерывны, то решения могут не иметь непрерывных производных порядка, равного порядку уравнения. Это верно даже для самого простого л. э. у.— *Пуассона уравнения*

$$\Delta u=f.$$

Вышесказанное относится к классич. решениям, т. е. решениям, имеющим непрерывные производные до порядка, равного порядку уравнения. Существуют различные обобщения понятия решения.

Напр., если коэффициенты $a_\alpha(x)$ достаточно гладки, то для оператора (1) можно определить сопряженный по Лагранжу оператор

$$L^*u=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(a_\alpha u).$$

Локально интегрируемая функция $u(x)$ наз. с л а б ы м р е ш е н и е м уравнения $Lu=f$, если для всех $\varphi\in C_0^\infty$ (бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем) выполнено тождество

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx=\int u(x)L^*\varphi(x)\,dx.$$

Тогда, если коэффициенты и правая часть уравнения $Lu=f$ непрерывны по Гёльдеру, то всякое слабое решение является классическим.

Для уравнения Лапласа простейшей корректно поставленной задачей является *Дирихле задача*. В общем случае уравнения с оператором (1) краевая задача состоит в отыскании в области D решения $u(x)$ уравнения $Lu=f$, удовлетворяющего $m'=m/2$ граничным условиям вида

$$(B_ju)(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}b_{\alpha j}(x)D^\alpha u(x)=\varphi_j(x),$$
$$x\in\partial D,\quad 1\leqslant j\leqslant m'.$$

Задаче Дирихле отвечают граничные операторы $b_j=\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j$, где $\frac{\partial}{\partial\nu}$ означает дифференцирование по направлению внешней нормали.

Для того чтобы краевая задача была нётеровой, граничные операторы B_j должны удовлетворять у с л о в и ю д о п о л н и т е л ь н о с т и Ш а п и р о — Л о п а т и н с к о г о (см. [2]) — алгебраич. условию, связывающему многочлены

$$\sum_{|\alpha|=m_j}b_{\alpha j}(x)\xi^\alpha,\quad 1\leqslant j\leqslant m',\ \sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

в точках границы $x\in\partial D$. Граничные операторы задачи Дирихле удовлетворяют этому условию по отношению к любому эллиптич. оператору L.

Если коэффициенты дифференциального оператора и решение рассматривать в классе комплексных функций, то эллиптичность оператора L в (1) определяется условием $\omega(x,\xi)\neq0$, $\xi\neq0$. Это определение допускает эллиптич. операторы нечетного порядка, как показывает пример о п е р а т о р а К о ш и — Р и м а н а: $\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}$. Кроме того, меняются свойства операторов чет-

ного порядка. Напр., для *Бицадзе уравнения* (см. [3]):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2i\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

задача Дирихле не является корректно поставленной: если D — единичный круг, то функции вида $u = f(z)(1-|z|^2)$ являются решениями однородной задачи Дирихле в области D для любой аналитич. функции $f(z)$.

Этот пример привел к необходимости выделять классы эллиптич. операторов, для к-рых сохраняется нётеровость задачи Дирихле. На этом пути возникло понятие сильно эллиптич. оператора (см. [4]). Оператор (1) — с и л ь н о э л л и п т и ч е с к и й о п е р а т о р, если для нек-рой комплексной функции $\gamma(x) \neq 0$ выполнено условие

$$\operatorname{Re}\gamma(x)\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \geqslant \delta|\xi|^m,\ \delta > 0.$$

В частности, порядок m — необходимо четное число.

Следующим более широким понятием явилось понятие собственной (правильной) эллиптичности. Оператор (1) — с о б с т в е н н о э л л и п т и ч е с к и й о п е р а т о р, если его порядок четен и для любой пары линейно независимых векторов ξ и ξ' многочлен по τ

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\,(\xi+\tau\xi')^\alpha$$

имеет ровно $m'=m/2$ корней с отрицательной мнимой частью и столько же — с положительной. Любой эллиптич. оператор при $n \geqslant 3$ собственно эллиптичен, так что определение по существу относится только к случаю $n=2$.

В теории л. э. у. значительную роль играют априорные оценки норм решений через нормы правых частей уравнения и граничных условий. Эти оценки начали систематически использоваться С. Н. Бернштейном (см. [6]) и свое дальнейшее развитие получили у Ю. Шаудера (см. [7]). Шаудеровские оценки относятся к решениям л. э. у. 2-го порядка в области D с непрерывными по Гёльдеру коэффициентами и бывают двух видов. Оценки первого вида (оценки «внутри») состоят в том, что на любом компакте $K \in D$ производные до 2-го порядка включительно и их гёльдеровские константы оцениваются через $\sup|u|$ и через модуль и гёльдеровскую константу правой части уравнения. Оценки второго вида (оценки «вплоть до границы») относятся к краевым задачам. Здесь оценивают те же величины, но уже в замыкании рассматриваемой области, и в оценке фигурируют нормы правых частей граничных условий.

Шаудеровские оценки получили дальнейшее распространение для общих л. э. у. и краевых задач (см. [7]). Вывод этих оценок основан на теории потенциала. С помощью разбиения единицы им придается локальный характер, и дело сводится к оценке норм сингулярных интегральных операторов, к-рые представляют собой свертку с функциями, связанными с фундаментальными решениями (оценки «внутри») или с функциями Грина соответствующей краевой задачи в нек-рой стандартной области (оценки «вплоть до границы»). Эти оценки, полученные первоначально в метрике пространств Гёльдера C^α, распространены на пространства Соболева W_p^l (L_p-оценки) и относятся к обобщенным решениям.

Для сильно эллиптич. операторов существует априорная оценка, наз. неравенством Гёрдинга, к-рая получена другими методами. Она лежит в основе функционального подхода к исследованию краевых задач (методы гильбертовых пространств).

В теории л. э. у. важное место занимают фундаментальные решения. Для оператора (1) с достаточно гладкими коэффициентами фундаментальное решение определяется как функция $J(x, y)$, удовлетворяющая условию

$$\int L^*\varphi(x)\, J(x, y)\, dx = \varphi(y)$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty$. С точки зрения теории обобщенных функций это означает равенство

$$LJ(x) = \delta(x-y),$$

где справа стоит дельта-функция Дирака.

Фундаментальные решения л. э. у. существуют для уравнений с аналитич. коэффициентами (и сами тогда аналитичны), для уравнений с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами (и также принадлежащие классу C^∞) и для ряда других уравнений с более слабыми ограничениями на коэффициенты. Для эллиптич. оператора L_0 с постоянными коэффициентами, состоящего из членов старшего порядка $m=2m'$, фундаментальное решение зависит только от разности аргументов и имеет вид ($y=0$):

$$J(x) = |x|^{m-n}\psi\left(\frac{x}{|x|}\right) + q(x)\ln|x|,$$

где $q(x)$ — многочлен степени $m-n$ при четном n и $m-n \geqslant 0$, в остальных случаях $q(x)=0$, $\psi(x)$ аналитична на сфере $|x|=1$ (см. [8]).

В частности, для оператора Лапласа ($m=2$) $q=0$, $\psi=\text{const}$ для $n>2$ и $q=\text{const}$, $\psi=0$ для $n=2$.

Фундаментальные решения позволяют строить различные явные представления для решений л. э. у. Они являются необходимым аппаратом при изучении краевых задач с помощью интегральных уравнений. Для уравнения 2-го порядка этот метод является классическим и дает наиболее точные результаты (см. [9]).

Многообразные применения в теории л. э. у. 2-го порядка получил принцип максимума. Функции a_{ij}, a_i, a предполагаются непрерывными, оператор (3) равномерно эллиптичным в нек-рой области D. Функция $u(x)$ непрерывна в замыкании $\bar{D}$ и принадлежит классу $C^2(D)$.

Принцип максимума в его сильной форме заключается в следующем. Пусть M — оператор L в (3), в котором $a \equiv 0$.

а) Если $Mu \geqslant 0$ и функция $u(x)$ достигает своего максимума во внутренней точке, то u постоянна.

б) Если $Mu \geqslant 0$ и максимум u достигается в нек-рой граничной точке x_0, к-рая расположена на поверхности нек-рого шара, целиком содержащегося в $\bar{D}$, то $u(x)$ либо постоянна, либо производная в точке x_0 по направлению внешней нормали $\partial u/\partial \nu$ положительна.

Аналогичные утверждения справедливы для оператора L с $a(x) \leqslant 0$, если в а) и б) под максимумом понимать положительный максимум. Принцип максимума является существенным элементом в доказательствах теорем единственности для решений ряда краевых задач. Он также имеет нек-рые аналоги в случае уравнений высшего порядка.

Лит.: [1] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959; [2] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [3] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях, пер. с англ., М., 1962; [4] Йон Ф., Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, пер. с англ., М., 1958; [5] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [6] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 3, М., 1960; [7] Schauder J., «Math. Z.», 1934, Bd 38, S. 257—82; [8] Лопатинский Я. Б., «Укр. матем. ж.», 1953, т. 5, № 2, с. 123—51; [9] Вишик М. И., «Матем. сб.», 1951, т. 29, № 3, с. 615—76.

А. П. Солдатов.

ЛИНЕЙНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ МЕРА чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — функция

$$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n \mid H) = L(H) = \min |a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n|,$$

где минимум берется по всевозможным наборам целых чисел $(a_1, \ldots, a_n)$, удовлетворяющим условиям:

$$|a_i| \leqslant H, \ |a_1| + \ldots + |a_n| > 0.$$

Известно, что

$$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n \mid H) < (|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|)\, H^{-\tau(n-1)},$$

где $\tau = 1$, если все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ действительные, и $\tau = 1/2$ — в противном случае. Получение оценок снизу $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n \mid H)$ по параметру H для конкретных наборов чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ является одной из задач теории *диофантовых приближений*. *Ю. В. Нестеренко.*

ЛИНЕЙНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР в узком смысле — оператор, действующий на функции, заданные на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, и принимающий значения в поле $k = \mathbb{R}$ или $k = \mathbb{C}$ по формуле

$$Au = v \equiv \sum_{i_1 + \ldots + i_n \leqslant m} a_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial^{i_1 + \ldots + i_n} u}{dx_1^{i_1} \ldots dx_n^{i_n}}, \quad (1)$$

где $a_{i_1 \ldots i_n}$ — функции со значениями в том же поле, наз. коэффициентами A. Если коэффициенты принимают значения во множестве матриц размера $t \times s$ над полем k, то Л. д. о. A определен на вектор-функциях $u = (u_1, \ldots, u_s)$ и преобразует их в вектор-функции $v = (v_1, \ldots, v_t)$. В случае $n = 1$ он наз. обыкновенным линейным дифференциальным оператором, а в случае $n > 1$ — линейным дифференциальным оператором с частными производными.

Пусть X — дифференцируемое многообразие, E и F — конечномерные векторные расслоения на X (все из класса C^∞). Пусть $\tilde{E}$, $\tilde{F}$ — пучки ростков сечений этих расслоений соответствующей гладкости. Л. д. о. в широком смысле $A : E \to F$ есть отображение пучков $\tilde{E} \to \tilde{F}$, удовлетворяющее условию: всякая точка $x \in X$ имеет координатную окрестность U, в пределах к-рой расслоения тривиальны, а отображение

$$A : \Gamma(U, E) \to \Gamma(U, F),$$

где $\Gamma(U, E)$ — пространство сечений над U расслоения E, действует по формуле (1), в к-рой использованы локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ и тривиализации

$$E|_U \cong U \times k^s, \quad F|_U \cong U \times k^t.$$

Минимальное число m, пригодное для формулы (1) во всех точках $x \in X$, наз. порядком Л. д. о. A. Напр., всякая ненулевая связность в расслоении E есть нек-рый Л. д. о. $E \to E \otimes \Omega^1(X)$ первого порядка. Другое, эквивалентное определение Л. д. о. $A : E \to F$ таково: это — линейный оператор $A : \Gamma(X, E) \to \Gamma(X, F)$, удовлетворяющий условию $\operatorname{supp} Au \subset \operatorname{supp} u$, где $\operatorname{supp} u$ — носитель u.

Л. д. о. может быть задан на более широких функциональных пространствах. Напр., если на X задана положительная мера, а на расслоениях E и F — нек-рое скалярное произведение, то определены пространства квадратично суммируемых сечений этих расслоений. Л. д. о., заданный локальными выражениями (1), определяет линейный неограниченный оператор $A : L_2(E) \to L_2(F)$. При нек-рых слабых предположениях последний может быть замкнут как оператор в гильбертовых пространствах. Это замыкание также носит название Л. д. о. Подобным же образом может быть построен оператор, действующий в пространствах Соболева или в пространствах более общих шкал.

Л. д. о. класса C^∞ может быть расширен до оператора в пространствах обобщенных сечений. Такое расширение может быть построено с помощью формально сопряженного оператора. Пусть E' — расслоение, сопряженное с E (т. е. $E'=\mathrm{Hom}(E, I)$, I — одномерное тривиальное расслоение), а Ω — расслоение нечетных дифференциальных форм на X максимальной степени. Определено билинейное отображение

$$(\cdot, \cdot)_E\colon \Gamma(X, E)\times\Gamma_0(X, E'\otimes\Omega)\longrightarrow k,$$

включающее интегрирование по X. Здесь $\Gamma_0(\ldots)$ — пространство сечений с компактными носителями. Формула

$$({}^tAv, u)_E=(v, Au)_F$$

однозначно определяет нек-рый линейный оператор

$${}^tA\colon\Gamma_0(X, F'\otimes\Omega)\longrightarrow\Gamma_0(X, E'\otimes\Omega).$$

Он порождается Л. д. о. ${}^tA : F'\otimes\Omega\to E'\otimes\Omega$, к-рый в пределах координатной окрестности U имеет выражение

$${}^tAu=\sum(-1)^{i_1+\ldots+i_n}\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n}({}^ta_{i_1\ldots i_n}{}^u)}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}},$$

если расслоение Ω тривиализовано выбором сечения $dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$. Л. д. о. ${}^tA$ наз. формально сопряженным по отношению к A.

В пространстве $\Gamma_0(X, E'\otimes\Omega)$ задается сходимость по следующему правилу: $f_k\to f$, если объединение носителей сечений f_k принадлежит компакту, и в любой координатной окрестности $U\subset X$, над к-рой имеется тривиализация E, вектор-функции f_k равномерно сходятся к f вместе со всеми частными производными по локальным координатам. Пространство всех линейных функционалов над $\Gamma_0(X, E'\otimes\Omega)$, непрерывных относительно указанной сходимости, наз. пространством обобщенных сечений E и обозначается $D'(E)$. Оператор ${}^tA$ переводит сходящиеся последовательности в сходящиеся и потому порождает сопряженный оператор $D'(E)\to D'(F)$. Последний совпадает с A на подпространстве $\Gamma(X, E)$ и наз. продолжением данного Л. д. о. на пространство обобщенных сечений. Рассматриваются также и другие расширения Л. д. о.: на пространства обобщенных сечений бесконечного порядка, на различные пространства гиперфункций и т. д.

Под Л. д. о. бесконечного порядка понимается оператор, действующий в том или ином пространстве аналитич. функций (сечений), заданный формулой (1), в к-рой суммирование производится по бесконечному множеству индексов $i_1, \ldots, i_n$.

Следующее свойство характеризует Л. д. о. Последовательность $\{f_k\}\subset\Gamma(X, E)$ объявляется сходящейся к сечению f, если f_k равномерно стремится к f вместе со всеми частными производными в любой координатной окрестности, имеющей компактное замыкание. Линейный оператор $A : \Gamma_0(X, E)\to\Gamma(X, F)$, переводящий сходящиеся последовательности в сходящиеся, является Л. д. о. порядка не выше m тогда и только тогда, когда для любых f, $g\in C^\infty(X)$ функция

$$\exp(-i\lambda g)\,A\,(f\exp(i\lambda g)) \qquad (2)$$

является полиномом по параметру λ степени не выше m. Если это условие заменить предположением, что (2) представляется асимптотич. степенным рядом, то получается определение линейного *псевдодифференциального оператора*.

Пусть многообразие X, а также расслоения E и F снабжены G-структурой, где G — нек-рая группа. Тогда

определено действие этой группы на любой Л. д. о. $A : E \to F$ по формуле

$$g^*(A)(u) = g(A(g^{-1}(u))).$$

Л. д. о. A наз. инвариантным относительно G, если $g^*(A) = A$ для всех $g \in G$.

Расслоение струй (джетов) есть объект, двойственный пространству Л. д. о. Пусть снова E — векторное расслоение на многообразии X класса C^∞. Расслоение m-струй сечений E есть векторное расслоение $J_m(E)$ на X, слой к-рого над точкой x равен $\tilde{E}_x/\tilde{E}_x(m)$, где $\tilde{E}_x$ — слой пучка $\tilde{E}$, а $\tilde{E}_x(m)$ — подпространство этого слоя, состоящее из ростков сечений, у к-рых в точке x обращаются в нуль все дифференциалы до порядка m включительно. Л. д. о. $d_m : E \to J_m(E)$, действующий по правилу: значение сечения $d_m(u)$ в точке x равно образу сечения u в факторпространстве $\tilde{E}_x/\tilde{E}_x(m)$, наз. универсальным. Пусть, далее, F — расслоение на X, а $a : J_m(E) \to F$ — гомоморфизм расслоений, т. е. Л. д. о. нулевого порядка. Композиция

$$E \xrightarrow{dm} J_m(E) \xrightarrow{a} F \tag{3}$$

есть Л. д. о. порядка не выше m. Обратно, всякий Л. д. о. порядка не выше m может быть представлен единственным способом в виде композиции (3).

Символ (главный символ) Л. д. о. $A : E \to F$ есть семейство линейных отображений

$$\sigma_A(x, \xi) : E_x \longrightarrow F_x,$$

зависящее от точки (x, ξ) кокасательного расслоения $T^*(X)$. Они действуют по формуле $e \to \frac{1}{m!} a(\xi^m e)$, где a — гомоморфизм, участвующий в факторизации (3), $e \in \tilde{E}_x$, а $\xi^m e$ — элемент $J_m(E)_x$, равный образу $f^m e$, где f — росток функции класса C^∞ такой, что $f(x) = 0$, $df(x) = \xi$. Если A имеет вид (1), то

$$\sigma_A(x, \xi) = \sum_{i_1 + \ldots + i_n = m} a_{i_1 \ldots i_n}(x)\, \xi_1^{i_1} \ldots \xi_n^{i_n},$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — координаты слоя расслоения $T^*(U) \cong U \times k^n$; таким образом, символ является однородной по ξ формой степени m. В соответствии с этой конструкцией символа вводится понятие характеристики. Характеристикой Л. д. о. A наз. точка $(x, \xi) \in T^*(X)$, в к-рой символ σ_A имеет ненулевое ядро.

Принятая в теории Л. д. о. классификация относится главным образом к Л. д. о., действующим в расслоениях одинаковой размерности, фактически к операторам вида (1), где коэффициенты суть квадратные матрицы. Л. д. о. наз. эллиптическим, если он не имеет действительных характеристик (x, ξ), $\xi \neq 0$. Этот класс характеризуется наилучшими локальными свойствами решений уравнения $Au = w$, а также корректностью краевых задач в ограниченных областях. Класс гиперболических Л. д. о. также выделяется условием, наложенным лишь на характеристики. Свойство гиперболичности тесно связано с корректностью задачи Коши с неаналитич. начальными данными. Класс Л. д. о. главного типа задается условием, наложенным лишь на символ. Для таких операторов развита теория локальной разрешимости и гладкости решений. Класс параболических Л. д. о. выделяется условием, касающимся не только символа, но и нек-рых младших членов. Для параболич. Л. д. о. характерна смешанная задача и задача Коши с условиями на бесконечности. Класс гипоэллиптических Л. д. о. задается следующим неформальным условием: всякое априори обобщенное решение уравнения $Au = w$ с правой частью из C^∞ само принадлежит C^∞. Известен ряд формальных условий

на выражение (1), обеспечивающих гипоэллиптичность оператора.

Помимо указанных основных типов Л. д. о., иногда говорят о Л. д. о. смешанного или переменного типа, о Л. д. о. составного типа и др. Рассматриваются также задачи в неограниченных областях с условиями на бесконечности, краевые задачи со свободной границей, задачи спектральной теории, задачи оптимального управления и др.

К о м п л е к с Л. д. о. есть последовательность Л. д. о.

$$E^*\dots \longrightarrow E_k \xrightarrow{A_k} E_{k+1} \xrightarrow{A_{k+1}} E_{k+2} \longrightarrow \dots,$$

в к-рой $A_{k+1}A_k=0$ для всех k. Когомология комплекса Л. д. о. E^* есть когомология комплекса векторных пространств $\Gamma(X, E^*)$. Пусть H^k — когомология этого комплекса в k-м члене. Сумма $\Sigma(-1)^k\dim H^k$ наз. и н д е к с о м данного к о м п л е к с а Л. д. о. Так, индекс эллиптич. комплекса Л. д. о. (т. е. такого, что лишь конечное число E_k отлично от нулевого, и комплекс, образованный символами Л. д. о. A_k, точен во всех точках $(x, \xi)\in T^*(X)$, $\xi\neq 0$) конечен в случае компактного X, и отыскание формул, выражающих индекс такого комплекса через его символ, является содержанием ряда исследований, объединяющих теорию Л. д. о. с алгебраич. геометрией и алгебраич. топологией (см. *Индекса формулы*).

Описанное определение символа не является вполне удовлетворительным для Л. д. о., действующих в расслоениях размерности, большей 1. Одной из причин этого является тот факт, что равенство $\sigma_{AB}=\sigma_A\circ\sigma_B$ может нарушаться. Следующая усложненная конструкция, заменяющая понятие символа, является более адекватной. Для всякого расслоения E на многообразии X класса C^∞ рассматривается пучок $D(E)$ ростков Л. д. о. $E\to I$, где I — одномерное тривиальное расслоение. По определению, значение этого пучка на открытом множестве $U\subset X$ есть совокупность всех Л. д. о. $E|_U\to I|_U$. Пусть $D_k(E)$ — его подпучок, образованный операторами порядка не выше k. В $D=\equiv D(I)$ имеется структура пучка (некоммутативных) алгебр, а в $D(E)$ — структура левого модуля над D, причем действие $a\in D$ на $b\in D(E)$ равно композиции ab. Данный Л. д. о. $A: E\to F$ определяет морфизм левых D-модулей $A': D(F)\to D(E)$ по закону композиции $a\to aA$. Пусть $M(A)$ — коядро этого морфизма. Имеется точная последовательность левых D-модулей

$$D(F) \xrightarrow{A'} D(E) \xrightarrow{P} M(A) \longrightarrow 0, \qquad (4)$$

$O(X)$-подмодули $M_k\equiv p(D_k(E))$, $k=0, 1, \dots$, образуют возрастающую фильтрацию в $M(A)$. Градуированный $O(X)$-модуль

$$\operatorname{gr} M(A)=\otimes_0^\infty M_k/M_{k-1},\ M_{-1}=0,$$

наз. с и м в о л и ч е с к и м м о д у л е м Л. д. о. A. Поскольку при любых k и l действие D_k на $M(A)$ переводит M_l в M_{l+k}, то в $\operatorname{gr}M(A)$ имеется структура градуированного модуля над градуированной алгеброй $\operatorname{gr} D\equiv\otimes_0^\infty D_k/D_{k-1}$. Аннулятор этого модуля есть однородный идеал в $\operatorname{gr} D$. Х а р а к т е р и с т и ч е с к о е м н о г о о б р а з и е оператора A есть множество корней этого идеала. Так как алгебра $\operatorname{gr} D$ изоморфна симметрич. алгебре касательного расслоения $T(X)$, то характеристич. многообразие канонически вкладывается в $T^*(X)$, причем его пересечение с каждым слоем есть алгебраич. конус.

Если многообразие X, а также данные расслоения имеют вещественно или комплексно аналитич. структуру, то характеристич. многообразие совпадает с множеством корней идеала $\operatorname{gr}(\operatorname{ann} M(A))$. В этом случае

оно является замкнутым аналитич. подмножеством в $T^*(X)$, причем если оно не пусто, то его размерность не меньше $\dim X$. В случае, когда эта размерность равна $\dim X$, Л. д. о. A наз. максимально переопределенным, или голономным.

Формальная теория общих Л. д. о. имеет дело с понятиями формальной интегрируемости и резольвенты. Свойство формальной интегрируемости, формулируемое в двойственных терминах струй, эквивалентно условию: $O(X)$-модуль $\mathrm{gr}\, M(A)$ локально свободен. Под резольвентой Л. д. о. A понимается последовательность, продолжающая (4)

$$\ldots \longrightarrow D(F_1) \xrightarrow{A_1'} D(F) \xrightarrow{A'} D(E) \longrightarrow M(A),$$

в к-рой все A_k, $k=1, 2, \ldots$, суть Л. д. о. В частности, A_1 наз. оператором совместности для A. Формальная интегрируемость обеспечивает локальное существование резольвенты.

В литературе используются термины «переопределенная» и «недоопределенная» система дифференциальных уравнений, однако удовлетворительное общее определение отсутствует. Нек-рым приближением к такому определению может служить следующее: существует ненулевой Л. д. о. B такой, что $BA \to 0$ (переопределенность), $AB=0$ (недоопределенность). Напр., Л. д. о. d, равный ограничению оператора внешнего дифференцирования на формах степени k на многообразии X размерности n, является недоопределенным при $k>0$, переопределенным при $k<n$ и голономным при $k=0$.

Основные задачи, изучаемые для общих Л. д. о.: разрешимость уравнения с правой частью $Au=w$ при выполнении условия совместности $A_1 u=0$, возможность продолжения решений уравнения $Au=0$ в большую область (эффект, связанный с переопределенностью), представление общего решения через решения специального вида. Последняя задача может быть сформулирована более конкретно для инвариантных операторов, напр. для Л. д. о. в $\mathbb{R}^n$ с постоянными или периодич. коэффициентами: записать представление группы G в пространстве решений в виде интеграла (в том или ином смысле) по всем неразложимым подпредставлениям. Для определения операторов с постоянными коэффициентами такое представление задается интегралом по экспонентам (экспоненциальное представление), для операторов с периодич. коэффициентами — интегралом по обобщенным решениям Флоке.

Определяются Л. д. о. и на произвольных алгебраич. структурах. Пусть R — коммутативное кольцо, E и F суть R-модули. Отображение множеств $A : E \to F$ наз. Л. д. о. порядка не выше m, если оно аддитивно и для любого элемента $a \in R$ отображение $aA - Aa$ является Л. д. о. порядка не выше $m-1$. При этом под Л. д. о. порядка не выше -1 понимается лишь нулевое отображение. В частности, Л. д. о. нулевого порядка есть гомоморфизм R-модулей и обратно. Всякое дифференцирование $v : R \to F$ является Л. д. о. 1-го порядка (или равно нулю). Если R есть алгебра над нек-рым полем k, то под Л. д. о. над R понимается Л. д. о. над кольцом R, к-рый является k-линейным отображением. Такой Л. д. о. обладает рядом формальных свойств обычных Л. д. о. Если R есть алгебра всех формальных степенных рядов над k или алгебра сходящихся степенных рядов над k, а E и F — свободные R-модули конечного типа, то всякий Л. д. о. $A : E \to F$ порядка не выше m имеет однозначную запись (1).

Пусть (X, O) — кольцованное пространство, E и F суть O-модули. Под Л. д. о. $A : E \to F$ понимается всякий морфизм пучков, к-рый в слоях над каждой точ-

кой $x \in X$ действует как Л. д. о. над кольцом (алгеброй) Ox. Л. д. о., действующие в модулях или пучках модулей, используются в ряде вопросов алгебраич. геометрии.

Лит.: [1] Peetre J., «Math. Scand.», 1960, v. 8, p. 116—120; [2] Хёрмандер Л., в кн.: Псевдодифференциальные операторы, пер. с англ., М., 1967, с. 63—87, 166—296, 297—367; [3] Бернштейн И. Н., «Функц. анализ и его прилож.», 1972, т. 6, в. 4, с. 26—40; [4] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [6] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965; [7] Паламодов В. П., Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, М., 1967; [8] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [9] Пале Р., Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе, пер. с англ., М., 1970; [10] Паламодов В. П., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1968, М., 1969, с. 5—37; [11] Спенсер Д., «Математика». 1970, т. 14, № 2, с. 66—90; № 3, с. 99—126; [12] Sato M., Kawai T., Kashiwara M., Microfunctions and psendodifferential equations, Kyoto, 1972. *В. П. Паламодов.*

ЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — метод суммирования, обладающий свойствами линейности:

1) если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ суммируем Л. м. с. к сумме A, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} ca_k$ суммируем этим методом к сумме cA;

2) если ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ суммируемы Л. м. с. соответственно к A и B, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)$ суммируем тем же методом к сумме $A+B$. Все наиболее распространенные методы суммирования линейны. В частности, линейными являются *матричный метод суммирования* и *полунепрерывный метод суммирования*. Существуют нелинейные методы суммирования. Напр., метод, в к-ром суммируемость ряда к сумме S определяется наличием предела S у последовательности $\{T_n\}$, где

$$T_n = \frac{s_{n+1}s_{n-1}-s_n^2}{s_{n+1}+s_{n-1}-2s_n}$$

(s_n — частичные суммы ряда), не является линейным.

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Кангро Г. Ф., в сб.: *Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12*, М., 1974, с. 5—70; [4] Барон С. А., Введение в теорию суммируемости рядов, 2 изд., Тал., 1977. *И. И. Волков.*

ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР, линейное преобразование,— отображение между двумя векторными пространствами, согласованное с их линейными структурами. Точнее, отображение $A : E \to F$, где E и F — векторные пространства над полем k, наз. линейным оператором из E в F, если

$$A(x+y)=Ax+Ay, \qquad A(\lambda x)=\lambda Ax$$

при всех $x, y \in E$, $\lambda \in k$. Простейшие примеры — нулевой Л. о. $\mathbf{o}$, переводящий все векторы в $O \in F$, и (в случае $E=F$) тождественный Л. о. $\mathbf{1}$, оставляющий векторы на месте.

Понятие Л. о., будучи наряду с понятием векторного пространства главным в линейной алгебре, играет роль в самых разнообразных областях математики и физики, прежде всего — в анализе и его приложениях.

Современное определение Л. о. впервые дал Дж. Пеано [1] (для $k=\mathbb{R}$). Оно было, однако, подготовлено предшествующим развитием математики, накопившей (начиная с линейной функции $y=ax$) огромное число примеров. В алгебре их неполный перечень включает линейные подстановки в системах линейных уравнений, умножение кватернионов и элементов грассмановой алгебры; в аналитич. геометрии — преобразования координат; в анализе — дифференциальные и интегральные преобразования и интеграл Фурье.

Вплоть до начала 20 в. систематически изучались лишь Л. о. между конечномерными пространствами над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Первые «бесконечномерные» на-

блюдения, к тому же касающиеся общих полей, были сделаны О. Тёплицем [3]. Л. о. между бесконечномерными пространствами E и F изучаются, как правило, в предположении их непрерывности относительно нек-рых топологий. Непрерывные Л. о., действующие в различных классах топологич. векторных пространств, в первую очередь банаховых и гильбертовых,— это основной объект изучения линейного функционального анализа.

В теории Л. о. два специальных случая $F=k$ и $F=E$ наиболее важны. В первом случае Л. о. наз. функционалом (см. *Линейный функционал*), во втором — линейным оператором, действующим в E, или эндоморфизмом.

Все Л. о. из E в F образуют векторное пространство $\mathscr{L}(E, F)$ (вместо $\mathscr{L}(E, E)$ пишется $\mathscr{L}(E)$) над k относительно сложения и умножения на скаляр, задаваемыми формулами

$$(A+B)\,x=Ax+Bx \text{ и } (\lambda A)\,x=A(\lambda x),\ A, B\in\mathscr{L}(E, F),$$

$x\in E$, $\lambda\in k$; нулем является $\mathbf{0}$. Умножение (композиция) AB Л. о. $A: E_1\to F_1$ и $B: E_2\to F_2$ определено лишь при $F_2=E_1$ как последовательное применение B и A. Относительно трех указанных операций $\mathscr{L}(E)$ — пример ассоциативной алгебры над k с единицей $\mathbf{1}$. Это «больше чем пример»: всякая ассоциативная алгебра над k вкладывается в $\mathscr{L}(E)$ для нек-рого E.

Векторные пространства над фиксированным полем (объекты) и Л. о. (морфизмы) образуют, вместе с законом композиции, категорию $\mathscr{L}in$. Следующие понятия суть специальные случаи (применительно к $\mathscr{L}in$) общекатегорных. Для Л. о. $A: E\to F$ его ядром наз. подпространство $\operatorname{Ker} A=\{x\in E: Ax=0\}$, образом — подпространство $\operatorname{Im} A=\{y\in F: y=Ax$ для нек-рого $x\in E\}$, коядром — факторпространство $\operatorname{Coker} A=F/\operatorname{Im} A$. Л. о. A наз. мономорфизмом, если $\operatorname{Ker} A=(0)$, и эпиморфизмом, если $\operatorname{Im} A=F$. Л. о. $B: F\to E$ наз. левым (соответственно правым) обратным к A, если BA тождественен в E (соответственно AB — в F). Л. о. A^{-1}, одновременно левый и правый обратный к A, наз. обратным к A. Л. о. (соответственно эндоморфизм), обладающий обратным, наз. изоморфизмом (соответственно автоморфизмом).

Категория $\mathscr{L}in$ является абелевой категорией относительно сложения Л. о.; в частности, Л. о. являющийся сразу моно- и эпиморфизмом, есть изоморфизм. Более того, в $\mathscr{L}in$ каждый мономорфизм обладает левым, а эпиморфизм — правым обратным. По аналогии с $\mathscr{L}in$ вводятся категории $\mathscr{B}an$ и $\mathscr{H}ilb$; объекты первой суть банаховы, а второй — гильбертовы пространства; морфизмами в обеих являются непрерывные Л. о. Обе категории аддитивны, но не абелевы. Изоморфизмы в них наз. топологическими изоморфизмами; это Л. о., имеющие непрерывные обратные.

Одной из важнейших типовых проблем «внутренней» теории Л. о. является проблема классификации эндоморфизмов (или хотя бы их нек-рых классов) по отношению к той или иной эквивалентности. Для Л. о. чистой алгебры рассматривается, как правило, общекатегорная эквивалентность эндоморфизмов в $\mathscr{L}in$; она наз. подобием. Иными словами, Л. о. A и B, действующие соответственно в E и F, подобны, если для нек-рого изоморфизма U диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{A} & E \\ {\scriptstyle U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U} \\ F & \xrightarrow{B} & F \end{array} \qquad \text{(D)}$$

коммутативна. Эквивалентность непрерывных Л. о.

в (общих) банаховых пространствах, наз. топологической эквивалентностью, также понимается в общекатегорном смысле — на этот раз в $\mathcal{B}an$; это означает коммутативность (D) для нек-рого топологич. изоморфизма U. Для Л. о. в гильбертовых пространствах за основу берется т. н. унитарная эквивалентность A и B, соответствующая требованию коммутативности диаграммы (D) для нек-рого унитарного (см. ниже) оператора U.

Помимо этого в теории Л. о. между пространствами с топологией важны задачи об аппроксимации различных классов Л. о. операторами сравнительно простого строения. Значительную роль играют задачи о нахождении общего вида Л. о. в конкретных, чаще всего функциональных, пространствах.

Среди инвариантов подобия наиболее важны спектр и количество инвариантных подпространств данной размерности. Пусть A — Л. о. в E. Его спектром наз. подмножество $\sigma(A)$ в k, состоящее из тех λ, для к-рых $\lambda\mathbf{1}-A$ не имеет обратного. Подпространство E_0 в E наз. инвариантным относительно A, если из $x\in E_0$ следует $Ax\in E_0$. Помимо ядра и образа Л. о. примерами служат одномерные подпространства, содержащие т. н. собственные векторы оператора, т. е. те $x\in E$, $x\neq 0$, для к-рых $Ax=\lambda x$, $\lambda\in k$. При этом элемент λ, наз. собственным значением Л. о. A, заведомо принадлежит его спектру.

Понятие Л. о. является специальным случаем понятия морфизма модулей, к-рое получается при замене поля на произвольное кольцо. Морфизмы модулей во многом не похожи по свойствам на Л. о., однако именно результаты о последних явились одним из стимулов к их изучению.

Линейные операторы в конечномерных пространствах (без дополнительной структуры). Основным аналитич. аппаратом таких Л. о. является матричная запись. Пусть E и F — пространства с фиксированными базисами e_j; $1\leqslant j\leqslant m$, и f_i; $1\leqslant i\leqslant n$, $A: E\to F$ — Л. о., $a_{ij}\in k$ есть i-й коэффициент разложения Ae_j по второму базису. Тогда $(m\times n)$-матрица $M_A=\|a_{ij}\|$ наз. матрицей Л. о. A в базисах e_j и f_i. При $E=F$ обычно употребляется матричная запись в совпадающих базисах (т. е. $e_i=f_i$; $1\leqslant i\leqslant m=n$). При переходе к другим базисам матрица Л. о. изменяется по простым формулам.

Различным характеристикам Л. о. отвечают, как правило, эффективно вычисляемые характеристики их матриц. Напр., $\dim \operatorname{Im} A=r(M_A)$ и $\dim \operatorname{Ker} A=\dim E-r(M_A)$, где r — ранг матрицы; в частности, A — изоморфизм, если и только если $\dim E=\dim F=r(M_A)$; последнее условие эквивалентно отличию от нуля определителя матрицы M_A. Алгебраич. операциям над Л. о. соответствуют одноименные операции над их матрицами, взятыми в фиксированных базисах.

Л. о. подобны тогда и только тогда, когда они могут быть записаны (каждый в «своем» базисе) одной и той же матрицей. Собственные значения Л. о. суть корни характеристич. многочлена его матрицы. Отсюда следует, что всякий Л. о. в конечномерном пространстве над алгебраически замкнутым полем (напр., $\mathbb{C}$) обладает хотя бы одним собственным вектором. Спектр Л. о. в конечномерном пространстве над любым полем есть множество его собственных значений.

Проблема классификации эндоморфизмов конечномерных пространств над алгебраич. замкнутым полем полностью решена, и классы подобия описаны в терминах спектров и инвариантных подпространств. Основным шагом здесь является следующая классич. теорема, открытая К. Жорданом (C. Jordan) (рассматривавшим поле $\mathbb{C}$). Матрица с фиксированным $\lambda\in k$ на главной диагонали, единицами непосредственно над

ней и нулями на остальных местах наз. жордановой клеткой, а блок-матрица с жордановыми клетками (разных размеров и с разными λ) на главной диагонали и нулями на остальных местах — жордановой матрицей. Тогда каждый эндоморфизм может быть записан в нек-ром базисе жордановой матрицей. Отыскание такого базиса наз. приведением Л. о. к жордановой форме. Поскольку Л. о., записанные жордановыми матрицами, подобны в том и только в том случае, когда эти матрицы совпадают с точностью до перестановки жордановых клеток, теорема означает, что жордановы матрицы доставляют, после соответствующего отождествления, полный набор инвариантов подобия.

Непрерывные линейные операторы в банаховых пространствах. Основы их теории заложены С. Банахом (см. [4]).

Примеры. 1) В l_p (здесь и далее $1 \leqslant p < \infty$): Л. о. умножения на ограниченную числовую последовательность; Л. о. левого (соответственно правого) сдвига, переводящий $\xi = \{\xi_i\} \in l_p$ в $\eta = \{\eta_i = \xi_{i+1}\}$ (соответственно в $\eta = \{\eta_i : \eta_0 = 0;\ \eta_i = \xi_{i-1},\ i > 0\}$).

2) В $L_p[a, b]$ или $C[a, b]$: Л. о. умножения на непрерывную функцию $\varphi(x)$, $x \in [a, b]$; Л. о. неопределенного интегрирования, переводящий $f(x)$ в

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

3) В $L_p(\mathbb{R})$: Л. о. сдвига на $t \in \mathbb{R}$, переводящий $f(x)$ в $g(x) = f(x + t)$.

4). Из $L_1(\mathbb{R})$ в $C_0(\mathbb{R})$: «классический» оператор Фурье, переводящий $f(x)$ в

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt.$$

Л. о. $A : E \to F$ между банаховыми пространствами непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен, т. е. образ каждого ограниченного множества в E ограничен в F, или, что эквивалентно, существует (конечное) число $\|A\| = \sup\{\|Ax\|,\ \|x\| \leqslant 1\}$, наз. операторной нормой (аналогичное утверждение верно и для любых нормированных пространств). Непрерывные Л. о. из E в F образуют в $L(E, F)$ подпространство $B(E, F)$, являющееся банаховым относительно нормы $\|A\|$. Подпространство $B(E, E)$, чаще обозначаемое $B(E)$, является и банаховой алгеброй относительно операторного умножения. Класс указанных алгебр универсален в том смысле, что всякая банахова алгебра топологически изоморфна подалгебре в $B(E)$ для нек-рого E. Подмножество в $B(E, F)$, состоящее из топологич. изоморфизмов, открыто и при $E = F$ содержит шар единичного радиуса с центром в $\mathbf{1}$.

Фундаментальную роль в «банаховой» теории Л. о. играют две теоремы, к-рые вместе с *Хана — Банаха теоремой* (см. также *Линейный функционал*) наз. тремя основными принципами линейного анализа. Простейшая форма «принципа равномерной ограниченности» — это теорема Банаха — Штейнхауза: если для непрерывных Л. о. $A_n : E \to F$, $n = 1, 2, \ldots$, при каждом $x \in E$ $\sup\limits_n \|A_n x\| < \infty$, то и $\sup\limits_n \|A_n\| < \infty$. Простейшая форма «принципа открытости отображения» — это теорема Банаха: если непрерывный Л. о. обладает обратным, то этот обратный оператор заведомо непрерывен. Требование «банаховости» (полноты) пространств существенно в обеих теоремах.

Спектр непрерывного Л. о. $A : E \to E$, рассматриваемый, как правило, для комплексных пространств, является непустым компактом в $\mathbb{C}$. В случае беско-

нечномерного пространства множество собственных значений Л. о., называемое точечным спектром, вообще говоря, составляет лишь часть $\sigma(A)$. Для остальных $\lambda\in\sigma(A)$ всегда $\operatorname{Im}(\lambda\mathbf{1}-A)\neq E$; эти числа распадаются на два множества — так наз. непрерывный спектр и остаточный спектр, смотря по тому, плотен $\operatorname{Im}(\lambda\mathbf{1}-A)$ в E или нет. Напр., спектром Л. о. умножения на $\varphi(x)=x$ является отрезок $[a, b]$, однако все его точки в случае пространств $L_p[a, b]$ принадлежат непрерывному, а в случае $C[a, b]$ — остаточному спектру.

Заданная на $\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$ операторнозначная функция $R(\lambda)=(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}$ наз. резольвентой Л. о. A. Она полезна, в частности, тем, что позволяет для каждой функции w, голоморфной в нек-рой окрестности U спектра, рассмотреть обозначаемый $w(A)$ Л. о.

$$\int_\Gamma w(\lambda)\,R(\lambda)\,d\lambda,$$

где Γ — гладкий контур в U, ограничивающий спектр. Так строится «голоморфное операторное исчисление»; что же касается «голоморфного мультиоператорного исчисления», т. е., говоря нестрого, придания разумного смысла понятию голоморфной функции от нескольких «операторных» переменных, то задача его построения оказалась намного труднее. Результаты, в нек-ром смысле близкие к окончательным, были получены с помощью методов гомологич. алгебры [5].

В теории Л. о. между банаховыми пространствами важна операция перехода от $A: E\to F$ к его т. н. сопряженному Л. о. $A^*: F^*\to E^*$, к-рый определяется формулой

$$A^*f(x)=f(Ax).$$

Эта операция обладает свойствами

$$(A+B)^*=A^*+B^*,\quad (\lambda A)^*=\lambda A^*,\quad (AB)^*=B^*A^*,$$
$$\|A^*\|=\|A\|$$

(в предположении, что левые части равенств имеют смысл). Если E и F рефлексивны, то $(A^*)^*=A$.

Некоторые важнейшие классы Л. о. в банаховых пространствах таковы.

1) $A: E\to F$ наз. компактным оператором, или вполне непрерывным, если он отображает любое ограниченное множество в E во вполне ограниченное (т. е. предкомпактное) множество в F. Всякий Л. о., аппроксимируемый в операторной норме конечномерными (имеющими конечномерный образ) Л. о., компактен. Для подавляющего большинства классич. банаховых пространств F верно и обратное: всякий компактный Л. о. из любого E в F аппроксимируется конечномерными. Так наз. проблема аппроксимации (верно ли это для всех F?) решена отрицательно [6].

Тождественный Л. о. в E компактен в том и только в том случае, когда E конечномерно (теорема Рисса). Спектр компактного Л. о.— не более чем счетное множество, содержащее O. Если спектр бесконечен, то O — его единственная предельная точка. Каждое $\lambda\in\sigma(A)$, $\lambda\neq 0$,— собственное значение, и соответствующие ему собственные векторы образуют конечномерное пространство.

2) $A: E\to F$ наз. ядерным оператором, если он представим в виде абсолютно сходящегося ряда в $B(E, F)$, состоящего из одномерных Л. о.; такой оператор необходимо компактен. С помощью ядерных Л. о. определяется важный для анализа класс топологич. векторных пространств — ядерные пространства.

3) $A: E\to F$ наз. фредгольмовым оператором, если его ядро и коядро конечномерны; образ такого Л. о. необходимо замкнут. Главная характеристика фредгольмова Л. о.— его индекс $\dim\operatorname{Ker}A$ —

dim Coker A. Множество фредгольмовых Л. о. открыто в $B(E, F)$, а индекс на нем (в отличие от отдельно взятых размерностей ядра и коядра)—локально постоянная функция. Предтечей теории фредгольмовых Л. о. явилась теория интегральных уравнений Э. Фредгольма (E. Fredholm), к-рый по существу доказал (и эту «геометрическую» подоплеку увидел Д. Гильберт, D. Hilbert), что Л. о. вида $\mathbf{1}+A$ с компактным A — фредгольмов и притом индекса нуль (см. *Фредгольма альтернатива*). Важные конкретные классы фредгольмовых Л. о. возникают при рассмотрении эллиптич. дифференциальных выражений на многообразиях. Задача о вычислении их индекса потребовала привлечения аппарата алгебраич. топологии [8].

Проблему классификации эндоморфизмов банаховых пространств, ввиду теоремы Жордана, дающей конечномерный образец ее решения, можно «в первом приближении» трактовать как проблему построения содержательного бесконечномерного аналога жордановой формы Л. о. Она, однако, далека от решения: не говоря о «достаточном» наборе инвариантных подпространств, до сих пор (1982) неизвестно, всякий ли оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, обладает хотя бы одним нетривиальным (отличным от (0) и H) инвариантным подпространством. Если Л. о. A, действующий в произвольном банаховом пространстве, не пропорционален $\mathbf{1}$ и перестановочен с нек-рым компактным Л. о., то у всех Л. о., перестановочных с A, есть нетривиальное инвариантное подпространство (см. [9]).

Помимо топологии нормированного пространства, в $B(E, F)$ есть и другие топологии, задающие в нем структуру локально выпуклого пространства. Наиболее важны сильная и слабая операторные топологии, задаваемые системами полунорм соответственно

$$\{p_x : p_x(A) = \| Ax \|,\ x \in E\}$$

и

$$\{p_{x,f} : p_{x,f}(A) = |f(Ax)|;\ x \in E,\ f \in F^*\}.$$

Теория непрерывных Л. о. в топологич. векторных пространствах (пример такого Л. о.— преобразование Фурье обобщенных функций) развилась на основе «банаховой» теории. Значительное место в ней занимает исследование возможностей обобщения классич. теорем Банаха и др.; оно привело к введению ряда важных классов пространств. Напр., теорема об эквивалентности непрерывности и ограниченности, теорема Банаха — Штейнхауза и теорема Банаха об обратном операторе не верны для произвольных, хотя бы и локально выпуклых, отделимых и полных пространств. В то же время первая из теорем верна, если E — борнологич. пространство, вторая — если E — бочечное пространство, а третья — если E совершенно полно, а F бочечно.

Непрерывные линейные операторы в гильбертовых пространствах (конечномерных и бесконечномерных). Их теория начала формироваться в работах Д. Гильберта [10] об интегральных уравнениях и бесконечных квадратичных формах.

Примеры. 1) Все примеры Л. о. в l_p, $L_p[a, b]$, $L_p(\mathbb{R})$, рассмотренные выше, при $p=2$.

2) Интегральный оператор в $L_2[a, b]$, переводящий $f(x)$ в

$$y(x) = \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy,$$

где K — интегрируемая с квадратом функция на множестве $a \leqslant x,\ y \leqslant b$. Такой Л. о. всегда компактен.

3) Оператор Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, однозначно определенный тем, что он совпадает с классич. оператором Фурье (см. выше) на $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$.

Понятия и факты приведены ниже в той форме, какую они имеют для пространств над $\mathbb{C}$: именно в комплексных пространствах теория оказалась наиболее важной и содержательной.

Особое положение «гильбертовой» теории Л. о. на фоне «банаховой» определяется резко возрастающей ролью понятия *сопряженного оператора*. Поскольку гильбертово пространство H и его сопряженное H^* антиизоморфны, Л. о. $A^* : H_2^* \to H_1^*$ естественно отождествляется с Л. о. из H_2 в H_1, однозначно определенным равенством $(Ax, y) = (x, A^*y)$; $x \in H_1$, $y \in H_2$; при таком отождествлении Л. о., сопряженный к эндоморфизму в H, снова действует в H. В $B(H)$ возникает важная дополнительная структура — операция перехода от A к A^*, обладающая свойствами инволюции, относительно к-рой $B(H)$ является C^*-алгеброй. На самом деле всякая C^*-алгебра изометрически $*$-изоморфна C^*-подалгебре в $B(H)$ для нек-рого H (т е о р е м а Г е л ь ф а н д а — Н а й м а р к а).

Для гильбертовых пространств характерны следующие классы Л. о.

Л. о. $A : H \to H$ наз. с а м о с о п р я ж е н н ы м о п е р а т о р о м, или э р м и т о в ы м о п е р а т о р о м, если $A^* = A$. Самосопряженный Л. о., равный своему квадрату, наз. п р о е к т о р о м; такой Л. о. реализуется как оператор ортогонального проектирования на замкнутое подпространство в H. Л. о. $A : H_1 \to H_2$ наз. у н и т а р н ы м о п е р а т о р о м (в случае поля $\mathbb{R}$ — о р т о г о н а л ь н ы м о п е р а т о р о м), если $A^* = A^{-1}$ или, что эквивалентно, $(Ax, Ay) = (x, y)$, $x, y \in H_1$ и $\operatorname{Im} A = H_2$. Л. о. унитарен тогда и только тогда, когда он является изоморфизмом, сохраняющим нормы. Самосопряженный и унитарный эндоморфизмы суть специальные случаи н о р м а л ь н о г о о п е р а т о р а: т. н. Л. о. $A : H \to H$ такой, что $A^*A = AA^*$.

Л. о. умножения на последовательность (соответственно функцию) в l_2 (соответственно $L_2[a, b]$) самосопряжен в том и только в том случае, если эта последовательность (функция) действительнозначна. Интегральный Л. о. самосопряжен, если и только если $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ почти всюду. В $L_2(\mathbb{R})$ операторы сдвига и оператор Фурье унитарны. В l_2 Л. о. левого и правого сдвига сопряжены друг другу и не нормальны. Спектр самосопряженного Л. о. лежит в $\mathbb{R}$, а спектр унитарного — на единичной окружности в $\mathbb{C}$. Спектр проектора $P \neq \mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ состоит из точек 0 и 1. Спектр нормального Л. о. может быть любым компактом в $\mathbb{C}$. Собственные векторы самосопряженного Л. о., соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Описанные классы Л. о. используются в целом ряде разделов математики и физики, в том числе в квантовой механике (где самосопряженные Л. о. интерпретируются как наблюдаемые), в теории представлений и гармонич. анализе, в теории дифференциальных уравнений и в теории динамич. систем.

Всю информацию о Л. о., действующем в конечномерном гильбертовом пространстве, доставляет его матричная запись в ортонормированном базисе. В такой записи переходу к сопряженному Л. о. соответствует взятие матрицы, комплексно сопряженной к транспонированной; как следствие, для матрицы $\|a_{ij}\|$ самосопряженного Л. о. $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$. Классич. теорема «о приведении к диагональному виду» утверждает, что каждый нормальный (в случае поля $\mathbb{R}$ — каждый самосопряженный) Л. о. может быть записан в нек-ром ортонормированном базисе диагональной матрицей. Вместе с тем фактом, что Л. о. унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они могут быть записаны (каждый в своем ортонормированном базисе) одинако-

выми матрицами, эта теорема означает, что наборы собственных значений с учетом их кратности образуют полную систему инвариантов унитарной эквивалентности для нормальных Л. о.

Теорема о приведении к диагональному виду оказалась «счастливее» теоремы Жордана в том отношении, что для нее найден содержательный бесконечномерный аналог: спектральная теорема для нормальных Л. о., открытая в 1912 (для самосопряженных Л. о.) Д. Гильбертом. Одна из ее формулировок: нормальный Л. о. однозначно представим в виде операторнозначного интеграла Стилтьеса $A=\int_{\sigma(A)}\lambda P(d\lambda)$, где $P(d\lambda)$ — счетно аддитивная и регулярная (в смысле, напр., сильной операторной топологии) функция на борелевских подмножествах в $\sigma(A)$, принимающая значения среди проекторов и такая, что $P(\sigma(A))=\mathbf{1}$ (см. *Спектральная мера*). Следствие: всякий нормальный Л. о. аппроксимируется линейными комбинациями проекторов.

На основе теоремы Гильберта получена полная классификация нормальных линейных операторов (в пространстве любой размерности) с точностью до унитарной эквивалентности [11]; в частности, оказывается, что каждый нормальный Л. о. унитарно эквивалентен оператору умножения на ограниченную измеримую функцию в $L_2(\Sigma)$, где Σ — нек-рое измеримое пространство с конечной мерой. Для компактных нормальных Л. о. в сепарабельном пространстве картина упрощается: такой Л. о. обладает ортонормированным базисом из своих собственных векторов и тем самым унитарно эквивалентен действующему в l_2 оператору умножения на последовательность (необходимо сходящуюся к нулю).

В случае нормального A спектральная теорема позволяет придать смысл выражению функции $f(A)$ для более широкого класса функций на спектре, чем голоморфные функции, напр. для непрерывной f Л. о. $f(A)$ определяется как $\int_{\sigma(A)}f(\lambda)P(d\lambda)$. При этом, если A самосопряжен, то Л. о. $\exp(iA)$ унитарен.

Основные усилия сосредоточены на изучении различных классов не нормальных Л. о., в первую очередь абстрактных вольтерровых операторов, сжимающих операторов и спектральных операторов (см. [11] — [13]). Хотя закономерностей, сравнимых по законченности со спектральной теоремой, пока (1982) не обнаружено, все же в этом направлении получены глубокие результаты.

Развитие анализа и его приложений, в первую очередь дифференциальных уравнений и квантовой механики, заставило выйти за рамки класса ограниченных (т. е. непрерывных) Л. о. Строго говоря, неограниченный оператор A в H не есть Л. о. в принятом здесь смысле, т. к. он задан не на всем H, а лишь на его, как правило, плотном подпространстве. Типичные примеры — Л. о. умножения на x и дифференцирования в $L^1(\mathbb{R})$. Для неограниченных Л. о. определены аналоги спектра, сопряженного Л. о. и рассмотренных выше классов Л. о. Хотя их теория сложнее теории ограниченных Л. о., ряд глубоких результатов последней нашел содержательные обобщения. Важнейшим среди них является аналог спектральной теоремы, найденный Дж. Нейманом (J. Neumann) для неограниченных самосопряженных операторов.

Лит.: [1] Peano G., Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, Torino, 1888; [2] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, 4 изд., М., 1971; [3] Toeplitz O., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1909, v. 28, p. 88—96; [4] Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1948; [5] Taylor J., «Adwances Math.», 1972, v. 9, № 2, p. 183—252; [6] Энфло П., «Математика», 1974, т. 18, № 1, с. 146—55; [7] Шефер Х., Топологические век-

торные пространства, пер. с англ., М., 1971; [8] Функциональный анализ, 2 изд., М., 1972 (Справоч. матем. б-ка); [9] Ломоносов В. И., «Функц. анализ и его прилож.», 1973, т. 7, № 3, с. 55—56; [10] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Lpz.— B., 1912; N. Y., 1953; [11] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [12] их же, Линейные операторы, пер. с англ., т. 2, М., 1966; [13] их же, Линейные операторы. Спектральные операторы, пер. с англ., М., 1974; [14] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., 1967; [15] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970; [16] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962.

А. Я. Хелемский.

ЛИНЕЙНЫЙ УГОЛ двугранного угла — угол между перпендикулярами к ребру двугранного угла, восстановленными в обеих гранях из одной точки.

ЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ, линейная форма, на векторном пространстве L над полем k — отображение $f: L \to k$ такое, что

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ f(\lambda x)=\lambda f(x)$$

для всех $x,\ y \in L,\ \lambda \in k$. Понятие Л. ф., будучи важным специальным случаем понятия *линейного оператора*, является одним из основных в линейной алгебре и играет значительную роль в анализе.

На множестве $L^{\#}$ Л. ф. на L определены операции сложения и умножения на скаляр по формулам

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ (\lambda f)(x)=\lambda f(x),\ f,\ g \in L^{\#},$$
$$x \in L,\ \lambda \in k.$$

Они задают в $L^{\#}$ структуру векторного пространства над k.

Ядром Л. ф. наз. подпространство $\operatorname{Ker} f=\{x \in L: f(x)=0\}$. Если $f \neq 0 \in L^{\#}$ (т. е. $f(x) \not\equiv 0 \in k$), то $\operatorname{Ker} f$ — гиперплоскость в L. Л. ф. с совпадающими ядрами пропорциональны.

Если $\{e_\nu;\ \nu \in \Lambda\}$ — базис в L, то для

$$x=\sum_{i=1}^{n} \lambda_{\nu_i} e_{\nu_i},\ \lambda_{\nu_i} \in k,\ f(x)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_{\nu_i} f(e_{\nu_i}).$$

Сопоставление $f \to \{f(x_\nu);\ \nu \in \Lambda\}$ есть изоморфизм $L^{\#}$ на k^{Λ}. Следствие: L изоморфно $L^{\#}$ тогда и только тогда, когда оно конечномерно. При переходе к новому базису в L элементы $f(e_\nu) \in k$ преобразуются по тем же формулам, что и векторы базиса.

Оператор $Q_L: L \to (L^{\#})^{\#}$, определенный равенством $Q_L x(f)=f(x)$, инъективен. Он является изоморфизмом тогда и только тогда, когда L конечномерно. Этот изоморфизм, в отличие от изоморфизма между L и $L^{\#}$, естествен.

Л. ф. на локально выпуклых пространствах, в частности нормированных пространствах,— важный объект изучения функционального анализа. Каждый непрерывный (как отображение топологич. пространств) Л. ф. f на локально выпуклом пространстве E ограничен, т. е.

$$\sup_{x \in M} |f(x)| < \infty$$

для всех ограниченных $M \subset E$. Если E — нормированное пространство, то верно и обратное; при этом оба свойства эквивалентны конечности числа

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|: \|x\| \leqslant 1\}.$$

Непрерывные Л. ф. на локально выпуклом пространстве E образуют подпространство E^* в $E^{\#}$, к-рое наз. сопряженным к E. В E^* рассматриваются различные топологии, в том числе слабая и сильная, к-рые отвечают соответственно за поточечную и за равномерную сходимость на ограниченных множествах. Если E — нормированное пространство, то E^* — банахово пространство относительно нормы $\|f\|$, а соот-

ветствующая топология совпадает с сильной. Единичный шар $\{f : \|f\| \leqslant 1\}$, рассматриваемый в слабой топологии, компактен.

Важные приложения к анализу имеет теорема Хана — Банаха, одна из формулировок к-рой такова: если $\|\cdot\|$ — преднорма на векторном пространстве E, f_0 — Л. ф., заданный на подпространстве E_0 в E и такой, что $|f_0(x)| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in E_0$, то f_0 может быть распространен на все E с сохранением линейности и указанной оценки. Следствие: любой непрерывный Л. ф., заданный на подпространстве E_0 в локально выпуклом пространстве E, может быть продолжен до непрерывного Л. ф. на E, а если E — нормированное пространство, то и с сохранением нормы. Отсюда для каждого $x \in E$, $x \neq 0$, найдется $f \in E$ с $f(x) \neq 0$.

Пусть E — нормированное пространство, а E^* и затем $(E^*)^*$ взяты с соответствующими нормами. Тогда оператор

$$R_E : E \longrightarrow (E^*)^*, \quad R_E x(f) = f(x)$$

— изометрическое вложение. Если при этом вложении E совпадает с $(E^*)^*$, то такое нормированное пространство, необходимо полное, наз. рефлексивным. Напр., $L_p[a, b]$ и l_p, $1 \leqslant p < \infty$, рефлексивны тогда и только тогда, когда $p > 1$. Аналогичное понятие рефлексивности есть и для общих локально выпуклых пространств.

Для многих конкретных локально выпуклых пространств описаны все Л. ф.: напр., сопряженное к гильбертову пространству H есть $\{f : f(x) = (x, x_0)\}$ для фиксированного $x_0 \in H$. Сопряженное к $C[a, b]$ есть $\{f : f(x) = \int_a^b x(t)\, d\mu(t)$ для фиксированной функции ограниченной вариации $\mu(t)\}$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981.

А. Я. Хелемский.

ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — теория, изучающая арифметич. свойства *линейных алгебраических групп*, определенных, как правило, над *глобальным полем*.

Одним из главных объектов изучения Л. а. г. а. т. являются арифметич. подгруппы алгебраич. группы G (см. *Арифметическая группа*), а одним из основных технич. инструментов — группа *аделей* G_A. На G_A можно определить нек-рым естественным образом меру, наз. *Тамагавы мерой*. Один из первых возникающих здесь вопросов: когда объем факторпространства группы G_A по подгруппе главных аделей G_A конечен? Полный ответ на него был получен А. Борелем (A. Borel). Оказалось, напр., что объем G_A/G_k всегда конечен для полупростой группы. Решению этого вопроса предшествовало построение теории приведения для арифметич. групп (см. [5], [6]).

Используя теорию приведения для подгрупп главных аделей, удалось во многих случаях вычислить объем G_A/G_k, к-рый наз. числом Тамагавы группы G. Напр., для ортогональной группы G число Тамагавы $F(G) = 2$, и это фактически эквивалентно основному результату аналитич. теории квадратичных форм (см. [1]). Изучение структуры арифметич. групп (начатое в [6]) было продолжено затем в разных направлениях. Прежде всего следует отметить исследования по *конгруэнц-проблеме*, по проблеме максимальности арифметич. подгрупп и проблеме рода в арифметич. группах.

Во всех основных вопросах Л. а. г. а. т. существенную роль играют теоремы аппроксимации, редуцирующие исследование арифметич. свойств алгебраич. групп, определенных над глобальными полями к иссле-

дованию арифметич. свойств алгебраич. групп, определенных над локальными полями. Наибольшее значение имеет проблема сильной аппроксимации (п. с. а.) в алгебраич. группах, к-рая состоит в следующем. Пусть $V=\{v\}$ — множество всех неэквивалентных нормирований поля k; k_v — пополнение k относительно v; O_v — кольцо целых элементов k_v; $\mathfrak{p}_v$ — максимальный идеал O_v. Для произвольного конечного подмножества $S\subset V$ через G_S обозначается подгруппа в G_A, у к-рой все v-компоненты при $v\notin S$ равны единице. Спрашивается: когда $\overline{G_S G_k}=G_A$? (Здесь черта означает замыкание в топологии G_A.) Если $S=\infty$ (∞ — множество всех архимедовых нормирований k), то эквивалентная формулировка этой проблемы: когда для любых $v_i\notin S$, $i=1, 2, \ldots, n$, любых $a_{v_i}\in G_{k_{v_i}}$ и положительных целых m_{v_i} имеет решение в группе G_k система сравнений

$$x\equiv a_{v_i}\left(\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}_{v_i}^{m_{v_i}}\right),$$

где $x\in G_{O_v}$ для $v\in S\cup\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

М. Эйхлер [13] решил проблему сильной аппроксимации для групп $\mathrm{SL}(n, D)$, где D — тело конечного k-ранга. Позднее различные частные случаи этой проблемы исследовали М. Кнезер (M. Kneser), Г. Шимура (G. Shimura), А. Вейль (A. Weil, см. [4]). Проблема сильной аппроксимации была решена (см. [9], [10]) для классич. групп над числовыми полями и найдены необходимые условия для ее положительного решения в общем случае; а именно: а) группа G должна быть односвязной как алгебраич. группа и б) если F — любая простая компонента полупростой части G, то группа F_S должна быть некомпактной. Необходимость этих условий доказана [14] для функционального поля. Наконец, была доказана [7] (см. также [16]) достаточность условий а) и б) как над числовыми, так и над функциональными полями, что дало полное решение п. с. а. В основе метода доказательства лежит редукция п. с. а. к доказательству *Кнезера — Титса гипотезы* о строении односвязных групп над локальными полями: если G есть k_v-простая односвязная k_v-изотропная группа, то G_{k_v} порождается унипотентными элементами или, эквивалентно, факторгруппа группы G_{k_v} по ее центру проста в абстрактном смысле. В качестве простейшего применения сильной аппроксимационной теоремы получается следующий факт: пусть G обладает свойством сильной аппроксимации относительно $S=\infty$; если O — кольцо целых элементов k, то

$$\overline{G}_O=\prod\nolimits_{v\notin S} G_{O_v};$$

это показывает, что арифметика G_O в значительной степени определяется арифметикой локальных компонент G_{O_v}.

Наряду с сильной аппроксимацией существенную роль в Л. а. г. а. т. играет свойство слабой аппроксимации (с. с. а.) алгебраич. группы G относительно S, к-рое состоит в том, что образ G_k при каноничн. проекции $G_k\to G_S$ плотен в G_S. Все односвязные группы обладают с. с. а. С другой стороны, имеются примеры полупростых групп и алгебраич. торов, не обладающих с. с. а. (см. [11], [2]). Тем не менее для широкого класса неодносвязных полупростых групп, в частности для присоединенных групп, выполнено с. с. а. [12]. Если G — алгебраич. тор и для всякого $v\in S$ тор G разложим над циклич. расширением поля k_v, то G обладает с. с. а. относительно S. В нек-рых случаях с. с. а. выполнено для алгебраич. групп над произвольным полем (см. [11]). Существовала гипотеза (см. [11]), что с. с. а. выполнено для

группы $SL(n, D)$, где D — тело конечного k-ранга над произвольным бесконечным полем k. Однако развитие приведенной K-теории привело к отрицательному ответу (см. [15]): для группы $SL(n, D)$ отклонение от слабой аппроксимации может быть сколь угодно большим.

Важную роль в Л. а. г. а. т. играют когомологич. методы, в частности принцип Хассе (см. *Галуа когомологии*).

Лит.: [1] Арифметические группы и автоморфные функции, пер. с англ. и франц., М., 1969; [2] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [3] Вейль А., Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972; [4] его же, «Математика», 1969, т. 13, № 6, с. 18—98; [5] Борель А., «Математика», 1964, т. 8, № 2, с. 3—17; [6] Борель А., Харишд-Чандра, «Математика», 1964, т. 8, № 2, с. 19—71; [7] Платонов В. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, № 6, с. 1211—19; 1970, т. 34, № 4, с. 775—77; [8] его же, «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 132, с. 162—68; [9] Kneser M., «J. reine und angew. Math.», 1965, Bd 218, S. 190—203; [10] его же, «Proc. Symp. Pure Math.», 1966, v. 9, p. 187—96; [11] его же, «Colloq. groupes algébriqus. Bruxelles», 1962, p. 41—52; [12] Harder G., «Inventiones Math.», 1967, v. 4, № 3, p. 165—91; [13] Eichler M., «J. reine und angew. Math.», 1938, Bd 179, S. 227—51; [14] Behr H., «J. reine und angew. Math.», 1968, Bd 229, S. 107—16; [15] Платонов В. П., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1976, т. 142, с. 198—207; [16] Prasad G., «Ann. Math.», 1977, v. 105, p. 553—72.

В. П. Платонов.

ЛИНЕЙЧАТАЯ ПОВЕРХНОСТЬ в дифференциальной геометрии — поверхность, образованная движением прямой линии. Прямые, принадлежащие этой поверхности, называются прямолинейными образующими, а каждая кривая, пересекающая все прямолинейные образующие,— направляющей кривой. Если $\rho=\rho(v)$ — радиус-вектор направляющей, а $m=m(v)$ — единичный вектор образующей, проходящей через $\rho(v)$, то радиус-вектор Л. п. есть

$$r=\rho(v)+um(v),$$

где u — координата точки на образующей. Линейный элемент Л. п.:

$$ds^2=du^2+2\,(m\rho')\,du\,dv+(\rho'^2+2\,(m'\rho')\,u+m'^2u^2)\,dv^2.$$

Л. п. характеризуется тем, что ее асимптотич. сеть — полугеодезическая. Л. п. всегда можно и притом единственным образом изогнуть так, что произвольная линия на ней станет асимптотической (теорема Бельтрами). Кроме того, если Л. п. F, не являющаяся развертывающейся, изгибается в Л. п. F^*, то либо их образующие соответствуют друг другу, либо обе они изгибаются в квадрику, на к-рой сеть, соответствующая семействам образующих,— асимптотическая (теорема Бонне).

Множество точек Л. п., в к-рых обращается в нуль геодезич. кривизна ортогональных траекторий образующих, наз. стрикционной линией Л. п. (или линией сжатия, т. к. через каждую точку ее — стрикционную точку — в пределе проходит общий перпендикуляр двух бесконечно сближающихся образующих). Координата стрикционной точки $u=-(\rho'm')/m'^2$; на *цилиндре* стрикционная линия не определена, на других *развертывающихся поверхностях* она является ребром возврата. Предел p отношения кратчайшего расстояния между двумя бесконечно сближающимися образующими Л. п. к углу между ними наз. параметром распределения Л. п.: $p=(mm'\rho)/m'^2$; развертывающаяся поверхность характеризуется тем, что для нее $p=0$. Гауссова кривизна Л. п.:

$$K=-\frac{p^2\,(m')^2}{\gamma},$$

где

$$\gamma=\rho'^2+2u\,(\rho'm')+u^2m'^2-(\rho'm)^2.$$

Единственная минимальная Л. п.— *геликоид*. Л. п. вращения — однополостный гиперболоид, быть может вырождающийся в цилиндр, конус или плоскость. Если

все прямолинейные образующие Л. п. параллельны одной плоскости, то она представляет собой *Каталана поверхность*.

Лит.: [1] Каган В. Ф., *Основы теории поверхностей в тензорном изложении*, ч. 1, М.— Л., 1947; [2] Шуликовский В. И., *Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении*, М., 1963. *И. Х. Сабитов.*

Л. п. в алгебраической геометрии — гладкая проективная поверхность F над алгебраически замкнутым полем k, бирационально эквивалентная поверхности $P^1\times C$, где P^1— проективная прямая, а C — нек-рая гладкая проективная кривая рода $g\geqslant 0$. Примером Л. п. служит проективизация $P_C(\mathcal{E})$ *локально свободного* в топологии Зариского пучка $\mathcal{E}$ ранга 2 на C.

Если существует гладкий морфизм $p : F\to C$, каждый слой к-рого изоморфен P^1, то F наз. геометрически линейчатой поверхностью с базой C. В случае, когда C — кривая рода 0, геометрически Л. п. наз. рациональной линейчатой поверхностью; в случае, когда род кривой C равен $g\geqslant 1$, — геометрически линейчатой поверхностью рода g. По теореме Нётера — Энрикеса морфизм p всегда имеет сечение s: $C\to F$ (см. [1], [2], [5]).

Свойства Л. п. (см. [1], [2], [6]):

1) Каждая геометрически Л. п. F с базой C имеет вид $P_C(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — нек-рый *локально свободный пучок* ранга 2 на C, причем

$$P_C(\mathcal{E})\cong P_C(\mathcal{E}')$$

над C тогда и только тогда, когда существует обратимый пучок $\mathcal{L}$ на C, что $\mathcal{E}\cong\mathcal{E}'\otimes\mathcal{L}$.

2) Все рациональные геометрически Л. п. с точностью до изоморфизма исчерпываются счетной серией поверхностей

$$F_n = P_{P^1}(\mathcal{O}_{P^1}\oplus\mathcal{O}_{P^1}(n)),$$

$n\geqslant 0$ — целое число, $\mathcal{O}_{P^1}(n)$ — обратимый пучок на P^1 степени n; причем, кроме поверхности Веронезе $V_4\subset P^5$, все поверхности степени n в P^{n+1} являются рациональными геометрически Л. п. или конусами над нормальными рациональными кривыми.

3) Если F — минимальная гладкая проективная поверхность над k, бирационально эквивалентная $P^1\times C$, где C — кривая рода $g\geqslant 1$, то F — геометрически Л. п. с базой C, причем кривая C определяется поверхностью F однозначно с точностью до изоморфизма.

4) Если F — геометрически Л. п. с базой C и $p : F\to C$ — соответствующий морфизм, то

а) $\mathrm{Pic}\,(F)\cong p^*\,\mathrm{Pic}\,(C)\oplus\mathbb{Z}S$,

где S — класс нек-рого сечения,

б) $q(F)=g$, $p_g(F)=0$, $P_n(F)=0$

для любого $n\geqslant 2$, и

$$K_F^2 = 8(1-g),$$

где g — род C, $q(F)=\dim H^1(F,\mathcal{O}_F)$ — иррегулярность, $p_g(F)=\dim H^2(F,\mathcal{O}_F)$ — геометрич. род, $P_n(F)=\dim H^\circ(F,\mathcal{O}_F(nK_F))$ есть n-кратный род, K_F — канонич. дивизор поверхности F.

5) Если F — геометрически Л. п. с базой C, S — класс нек-рого сечения морфизма $p : F\to C$, то существует такой обратимый пучок $\mathcal{L}$ на C, что обратимый пучок $\mathcal{M}=\mathcal{O}_F(S)\otimes p^*\mathcal{L}$ определяет изоморфное вложение $\varphi_{\mathcal{M}} : F\to P^N$, при к-ром слои морфизма p отображаются на прямые, лежащие на $F'=\varphi_{\mathcal{M}}(F)$ и заметающие F', т. е. F' является Л. п. в обычном смысле.

Л. п. составляют отдельный класс в классификации Энрикеса алгебраич. поверхностей (см. [1], [2], [3]). Они характеризуются любым из следующих эквивалентных критериев линейчатости (см. [1], [3], [4], [5], [7]):

1) кодаиры размерность $\varkappa(F)=-\infty$;

2) n-кратный род $P_n(F)=0$ для $n=12$;

3) для нек-рой (равносильно для любой) *минимальной модели* F^* поверхности F выполняется условие обрыва присоединения, т. е. для любого дивизора $D\in \mathrm{Div}(F^*)$ существует такое целое число n_0, что линейная система $|D+nK_F|$ пуста для всех $n\geqslant n_0$, где K_F — канонич. дивизор;

4) на нек-рой (равносильно на *любой*) минимальной модели F^* существует кривая E на F^* с $(E\cdot K_{F^*})<0$.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [2] Beauville A., «Astérisque», 1978, № 54; [3] Bombieri E., Husemoller D., «Proc. Symp. Pure Math.», 1975, v. 29, p. 329—420; [4] Bombieri E., Mumford D., в кн.: Complex analysis and algebraic geometry, Camb., 1977, p. 23—42; [5] Enriques F., Le superficie algebriche, Bologna, 1949; [6] Hartshorne R., Algebraic geometry, N. Y.— Hdlb.— B., 1977; [7] Kodaira K., «Amer. J. Math.», 1968, v. 90, № 4, p. 1048—66.

В. А. Исковских.

ЛИНЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО — многообразие нечетной размерности, возникающее как пространство орбит изометричных свободных действий циклич. групп $\mathbb{Z}_h$ на сфере S^{2n-1}. Удобно взять в качестве S^{2n-1} единичную сферу в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, в к-ром фиксирован базис.

Пусть $\mathbb{Z}_h$ действует на каждой координате z_k умножением на $\zeta_k=e^{\frac{2\pi i}{h}m_k}$, где m_k обратимо по модулю h, т. е. существуют числа l_k такие, что $m_kl_k\equiv 1\,(h)$. Это задает изометричное и свободное (благодаря условию обратимости $m_i \bmod h$) действие $\mathbb{Z}_h$ на S^{2n-1}, причем любое такое действие имеет описанный вид в подходящей системе координат. *Рейдемейстера кручение*, отвечающее корню ζ h-й степени из единицы, определяется для Л. п. $L=S^{2n-1}/\mathbb{Z}_h$, построенного этим способом, формулой $\pm\zeta^q\prod_{k=1}^{h}(\zeta^{lk}-1)$. Любое кусочно линейное гомеоморфное ему Л. п. $\overline{L}$ должно иметь равное (с точностью до $\pm\zeta^q$) кручение и оказывается, что наборы чисел $\{l_k\}$ и $\{\overline{l_k}\}$ должны совпадать. Таким образом, эти наборы характеризуют Л. п. однозначно с точностью до кусочно линейного гомеоморфизма и даже до изометрии, а с другой стороны, благодаря топологич. инвариантности кручения — и с точностью до гомеоморфизма. Л. п. асферично до размерности $2n-2$ (т. е. $\pi_iL=0$, $2\leqslant i\leqslant 2n-2$), а фундаментальная группа равна $\mathbb{Z}_h$ ввиду того факта, что универсальным накрывающим для $\overline{L}$ служит сфера S^{2n-1}. Гомологии L совпадают до размерности $2n-2$ с гомологиями группы $\mathbb{Z}_h$, т. е. равны $\mathbb{Z}_h$ во всех размерностях от 2 до $2n-2$ и $H_0(L)=H_{2n-1}(L)=\mathbb{Z}$. Прямой предел пространств L дает *Эйленберга — Маклейна пространство* типа $K(\mathbb{Z}_h,\ n)$. Два Л. п. гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают *зацепления коэффициенты* $l(a^j,\ a^{n-j})\in Q/\mathbb{Z}$, где a — образующая группы двумерных когомологий. С помощью этих инвариантов устанавливается существование среди Л. п. асимметричных многообразий.

В трехмерном случае Л. п. совпадают с многообразиями, имеющими *Хегора диаграмму* рода 1, и поэтому они являются *Зейферта многообразиями*. Фундаментальную область действия $\mathbb{Z}_h$ на S^3 удобно представлять себе в виде «линзы» — объединения шарового сегмента с его зеркальным образом — откуда и возникло название Л. п.

Лит.: [1] Пуанкаре А., Избранные труды, т. 2, 1972, с. 728; [2] де Рам Ж., «Матем. сб.», 1936, т. 1, с. 737—43; [3] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.—Л., 1938; [4] Milnor J., Burlet O., в кн.: Essays on Topology and Related topics, B., 1970, p. 12—17.

А. В. Чернавский.

ЛИНИЯ, к р и в а я,— геометрическое понятие, точное и в то же время достаточно общее определение

к-рого представляет значит. трудности и осуществляется в разных разделах геометрии различно.

В рамках элементарной геометрии понятие Л. не получает отчетливой формулировки и иногда определяется как «длина без ширины» или как «граница поверхности». По существу в элементарной геометрии изучение Л. сводится к рассмотрению примеров (прямая, отрезок, ломаная, окружность и др.). Не располагая общими методами, элементарная геометрия довольно глубоко проникла в изучение свойств конкретных Л. (конич. сечения, нек-рые алгебраич. Л. высших порядков и трансцендентные Л.), применяя в каждом случае специальные приемы.

В аналитич. геометрии Л. на плоскости определяется как множество точек, координаты к-рых удовлетворяют уравнению $F(x, y)=0$. При этом на функцию F должны быть наложены ограничения так, чтобы, с одной стороны, уравнение это имело бесконечное множество решений и, с другой стороны, чтобы это множество решений не заполняло «куска плоскости».

Важный класс Л. составляют те, для к-рых функция $F(x, y)$ есть многочлен от двух переменных; в этом случае Л., определяемая уравнением $F(x, y)=0$, наз. алгебраической. Алгебраич. Л., задаваемые уравнением 1-й степени, суть прямые. Уравнение 2-й степени, имеющее бесконечное множество решений, определяет эллипс, гиперболу, параболу или Л., распадающуюся на две прямые. Алгебраич. Л., определяемые уравнениями высших степеней, рассматриваются в алгебраич. геометрии. При этом большую стройность приобретает их теория, если рассмотрение ведется на комплексной проективной плоскости. В этом случае алгебраич. Л. определяется уравнением вида

$$F(x^1, x^2, x^3)=0,$$

где F — однородный многочлен трех переменных, являющихся проективными координатами точек.

Для тех разделов математики, в к-рых господствуют методы теории функций (анализ, дифференциальная геометрия и др.), естественное определение Л.— заданием ее параметрическими уравнениями. Так, в случае плоскости, Л., заданная параметрич. уравнениями

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции, определенные на отрезке $a\leqslant t\leqslant b$, есть множество точек (x, y), соответствующих всевозможным значениям параметра t при условии, что эти точки рассматриваются в определенном порядке: если точка M_1 соответствует значению параметра t_1, а точка M_2 — значению t_2, то M_1 считается предшествующей M_2 при $t_1<t_2$; точки, отвечающие различным значениям параметра, считаются различными. Уравнения $x=\varphi_1(t_1)$, $y=\psi_1(t_1)$, $t_1\in[a_1, b_1]$, задают ту же Л., что и уравнения (1), если существует такой гомеоморфизм $\lambda(t_1)=t$ отрезка $[a_1, b_1]$ на отрезок $[a, b]$, $\lambda(a_1)=a$, $\lambda(b_1)=b$, что $\varphi(\lambda(t_1))=\varphi_1(t_1)$ и $\psi(\lambda(t_1))=\psi_1(t_1)$. Аналогично Л. в произвольном топологич. пространстве X определяется параметрич. уравнением вида $x=\varphi(t)$, где φ — функция действительного переменного t, непрерывная на отрезке $[a, b]$, значения к-рой суть точки x пространства X.

Кроме такого подхода существует и другая точка зрения (К. Жордан, C. Jordan, 1882) на определение Л. параметрич. уравнениями: Л. наз. множество точек плоскости, координаты к-рых суть непрерывные функции $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ параметра t, заданные на отрезке $[a, b]$; теперь точки, соответствующие различным значениям параметра, но имеющие одни и те же координаты, уже не считаются различными, и множество, составляющее Л., уже не рассматривается как упоря-

доченное значениями t. Это определение обобщается на любое топологич. пространство: множество точек топологич. пространства, являющееся непрерывным образом отрезка, наз. ж о р д а н о в о й к р и в о й.

Однако построены такие непрерывные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, что множество точек, координаты к-рых определяются этими функциями, заполняют квадрат $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$ (см. *Пеано кривая*). Более общо, всякий локально связный континуум (т. е. континуум, каждая точка к-рого обладает сколь угодно малой связной окрестностью) является непрерывным образом отрезка (т е о р е м а М а з у р к е в и ч а). Таким образом, не только квадрат, но и куб любого числа измерений и даже бесконечномерный гильбертов кирпич являются непрерывными образами отрезка.

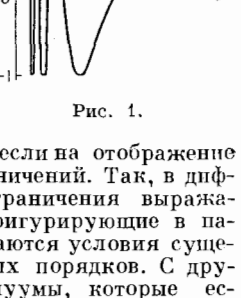


Рис. 1.

Вышеизложенное показывает, что Л. не может быть определена как непрерывный образ отрезка, если на отображение не наложить дополнительных ограничений. Так, в дифференциальной геометрии эти ограничения выражаются в том, что на функции, фигурирующие в параметрическом задании Л., налагаются условия существования производных различных порядков. С другой стороны, существуют континуумы, которые естественно рассматривать как Л., но к-рые, не будучи локально связными, не являются непрерывными образами отрезка. Таков, напр., континуум, определяемый условиями: $y = \sin \frac{1}{x}$, $0 < x \leqslant 1$, $x = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ (рис. 1).

Общее определение Л. для случая плоскости было дано (Г. Кантор, G. Cantor, 1870-е гг.) в связи с созданием теории точечных множеств. Плоский континуум, в любой окрестности каждой точки к-рого имеются точки плоскости, не принадлежащие континууму, наз. к а н т о р о в о й к р и в о й. Важный пример канторовой кривой доставляет к о в е р С е р п и н ь с к о г о, строящийся следующим образом. Квадрат Q со стороной 1 делят на девять равных квадратов прямыми, параллельными его сторонам, и удаляют все

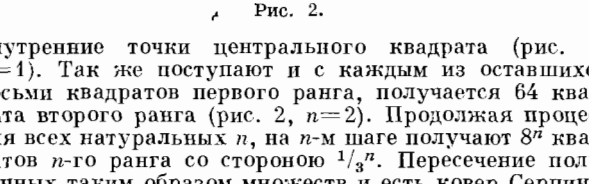


Рис. 2.

внутренние точки центрального квадрата (рис. 2, $n=1$). Так же поступают и с каждым из оставшихся восьми квадратов первого ранга, получается 64 квадрата второго ранга (рис. 2, $n=2$). Продолжая процесс для всех натуральных n, на n-м шаге получают 8^n квадратов n-го ранга со стороной $1/3^n$. Пересечение полученных таким образом множеств и есть ковер Серпиньского (рис. 2).

Какова бы ни была канторова кривая L, она может быть топологически вложена в ковер Серпиньского S, т. е. в S содержится континуум L', гомеоморфный Л. L. Ковер Серпиньского является локально связным континуумом и потому может быть получен как непрерывный образ отрезка.

В топологии пользуются понятием Л., введенным в 1921 П. С. Урысоном и являющимся наиболее общим (но не чрезмерно). Определение Л. формулируется следующим образом: л и н и е й наз. одномерный кон-

тинуум, т. е. связное компактное метрич. пространство C, каждая точка к-рого обладает сколь угодно малой окрестностью с границей размерности нуль. Другими словами, при любом $\varepsilon>0$ пространство C может быть представлено в виде суммы конечного числа замкнутых множеств диаметра, меньшего ε, обладающих тем свойством, что никакие три из этих множеств не имеют общей точки. Ковер Серпиньского удовлетворяет этому определению Л., так что всякая канторова кривая является также и Л. в смысле П. С. Урысона. Обратно, если плоский континуум является Л. в смысле П. С. Урысона, то он будет канторовой кривой. Определение Л., данное П. С. Урысоном, является внутренним: оно характеризуется лишь свойствами самого пространства C и не зависит от того, рассматривается ли это пространство само по себе или как подмножество другого топологич. пространства.

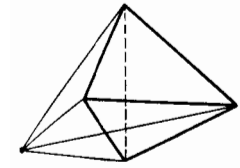


Рис. 3.

Существуют Л., к-рые не гомеоморфны никакому подмножеству плоскости. Такова, напр., Л., лежащая в трехмерном пространстве и состоящая из шести ребер тетраэдра и четырех отрезков, соединяющих какую-либо точку пространства, не лежащую ни на одной из его граней, с его вершинами (рис. 3). Но всякая Л. (в смысле П. С. Урысона) гомеоморфна нек-рому подмножеству трехмерного евклидова пространства (теорема Менгера). Континуум M, обладающий тем свойством, что какова бы ни была Л. C, в M найдется подконтинуум C', гомеоморфный континууму C, строится следующим образом. Куб K с ребром 1 делится плоскостями, параллельными его граням, на 27 равных кубов. Из куба K удаляются центральный куб и все прилежащие к нему по двумерным граням кубы этого подразделения. Получается множество K_1, состоящее из 20 оставшихся замкнутых кубов первого ранга. Поступая точно так же с каждым из кубов первого ранга, получим множество K_2, состоящее из 400 кубов второго ранга (рис. 4). Продолжая этот процесс бесконечно, получим последовательность континуумов $K_1\supset K_2\supset K_3\supset\ldots$, пересечение к-рых есть одномерный континуум M, наз. универсальной кривой Менгера.

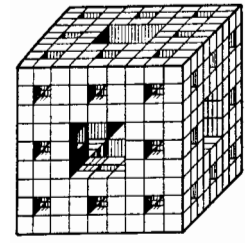


Рис. 4.

В исследовании Л. важную роль играет понятие индекса ветвления. Л. C в точке x имеет индекс ветвления $\mathfrak{m}$, если каково бы ни было число $\varepsilon>0$, существует открытое множество U диаметра, меньшего, чем ε, содержащее точку x, граница к-рого есть множество мощности, не превосходящей $\mathfrak{m}$, но для достаточно малого $\varepsilon'>0$ граница всякого открытого множества, содержащего точку x, диаметр к-рого меньше ε', имеет мощность, не меньшую, чем $\mathfrak{m}$. Точки Л. относительно их индекса ветвления классифицируются следующим образом.

1) Точки с индексом ветвления n, n — натуральное.

2) Точки неограниченного индекса ветвления ω. (Точка x Л. C имеет индекс ветвления ω, если каково бы ни было число $\varepsilon>0$, существует открытое множество, содержащее точку x, с диаметром, меньшим, чем ε, граница к-рого состоит из конечного множества точек; но каково бы ни было натуральное n, найдется такое $\varepsilon_n>0$, что граница всякого открытого множества,

содержащего x и имеющего диаметр меньший, чем ε_n, состоит не менее, чем из n точек.)

3) Точки счетного индекса ветвления $\aleph_0$.

4) Точки континуального индекса ветвления $\mathfrak{c}$.

Точка Л. C, индекс ветвления к-рой больше двух, наз. точкой ветвления; точка, индекс ветвления к-рой равен единице, наз. концевой точкой.

Примеры. а) Отрезок во всех своих внутренних точках имеет индекс ветвления, равный двум; индекс ветвления концов отрезка равен единице. б) Окружность в каждой своей точке имеет индекс ветвления два. в) Л., состоящая из n прямолинейных отрезков,

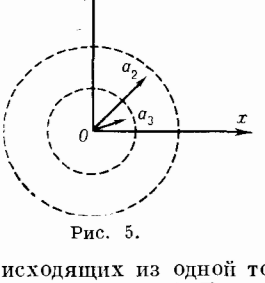


Рис. 5.

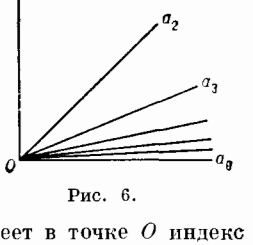


Рис. 6.

исходящих из одной точки O, имеет в точке O индекс ветвления n. г) Л., состоящая из отрезков Oa_1, Oa_2, ..., Oa_n, ..., выходящих из начала координат O, имеющих длины $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, ..., $\frac{1}{2^n}$, ... и образующих с осью Ox углы, соответственно равные $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2^2}$, ..., $\frac{\pi}{2^n}$, ..., имеет в точке O неограниченно возрастающий индекс ветвления ω (рис. 5). д) Л., состоящая из отрезка Oa_0 длины 1 и отрезков Oa_1, Oa_2, ..., Oa_n, ... длины 1, выходящих из точки O и образующих с отрезком Oa_0 углы, соответственно равные $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2^2}$, ..., $\frac{\pi}{2^n}$, ..., имеет в каждой точке отрезка Oa_0 счетный индекс ветвления $\aleph_0$ (рис. 6). е) Л., состоящая из отрезков, соединяющих точку O со всеми точками *канторова множества*, лежащего на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$,

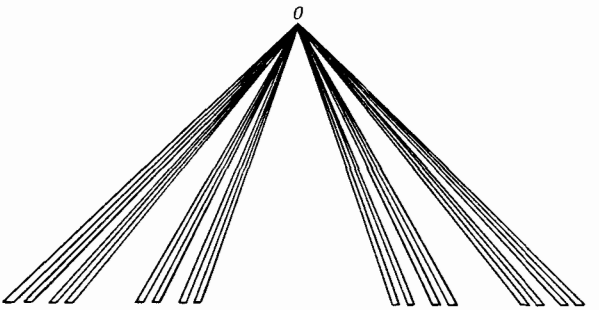


Рис. 7.

$y=0$, имеет во всех своих точках континуальный индекс ветвления $\mathfrak{c}$ (рис. 7). ж) Ковер Серпиньского также имеет во всех своих точках континуальный индекс ветвления.

Если у Л. совсем нет точек ветвления, т. е. если в каждой точке Л. индекс ветвления равен 1 или 2, то эта Л. есть либо простая дуга — топологич. образ отрезка, либо простая замкнутая линия — топологич. образ окружности. При этом, если индекс ветвления Л. во всех точках равен 2, то это — простая замкнутая Л., если же у Л., не имеющей

точек ветвления, есть концевые точки (при этом оказывается, что их непременно две), то она будет простой дугой. Если Л. имеет лишь конечное число точек ветвления, причем индекс ветвления каждой из них также конечен, то такая Л. может быть разбита на конечное число простых дуг, не имеющих попарно никаких других общих точек, кроме своих концов.

Окружность является единственной Л., все точки к-рой имеют один и тот же конечный индекс ветвления 2; других Л., имеющих во всех точках один и тот же конечный индекс ветвления, нет, более того, если все точки Л. L имеют индекс ветвления больший или равный n, то на Л. L найдется точка, индекс ветвления к-рой больше или равен $2n-2$, и при всяком натуральном n существует Л., состоящая только из точек, имеющих индекс ветвления n и $2n-2$ (теорема Урысона). Пример Л., состоящий только из точек с индексом ветвления 3 и 4, строится следующим образом.



Рис. 8.

В равностороннем треугольнике со стороною 1 проводятся три средние линии, и из него выбрасываются внутренние точки треугольника, ограниченного средними Л. С каждым из оставшихся трех треугольников первого ранга проделывается аналогичная операция, в результате к-рой получается девять треугольников второго ранга. Поступая с ними так же, получим 27 треугольников третьего ранга и так далее для всякого натурального n. Пересечение полученных в результате выполнения этих операций множеств есть линия C (рис. 8). Л., состоящая из точек с индексом ветвления 3 и 4,— это два континуума C_1 и C_2, каждый из к-рых гомеоморфен Л. C и к-рые не имеют никаких других общих точек, кроме точек, соответствующих вершинам основного треугольника континуума C.

Существуют также Л., имеющие во всех своих точках неограниченный индекс ветвления, счетный индекс ветвления и континуальный индекс ветвления.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948; [2] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 2, М., 1969; [3] Menger K., Kurventheorie, Lpz.— B., 1932; [4] Пархоменко А. С., Что такое линия, М., 1954; [5] Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 2, М.— Л., 1951; [6] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937.

А. С. Пархоменко.

ЛИНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА — плоская линия, декартовы прямоугольные координаты к-рой удовлетворяют алгебраич. уравнению 2-й степени

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0. \quad (*)$$

Уравнение (*) может и не определять действительного геометрич. образа, но для сохранения общности в таких случаях говорят, что оно определяет мнимую Л. в. п. В зависимости от значений коэффициентов уравнения (*) оно может быть преобразовано с помощью параллельного переноса и поворота системы координат на нек-рый угол к одному из 9 приведенных ниже каноннч. видов, каждому из к-рых соответствует определенный класс линий. Именно,

нераспадающиеся линии:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *эллипсы*,

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *гиперболы*,

$y^2=2px$ *параболы*,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ мнимые эллипсы;

распадающиеся линии:
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ пары мнимых пересекающихся прямых,
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ пары действительных пересекающихся прямых,
$x^2-a^2=0$ пары действительных параллельных прямых,
$x^2+a^2=0$ пары мнимых параллельных прямых,
$x^2=0$ пары совпадающих действительных прямых.
Л. в. п., имеющие единственный центр симметрии (центр Л. в. п.), наз. центральной линией. Координаты центра Л. в. п. определяются решением системы:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}=0. \end{aligned}\right\}$$

Л. в. п. без центра симметрии или с неопределенным центром наз. нецентральной линией.
Исследование вида Л. в. п. может быть проведено без приведения общего уравнения к канонич. виду. Это достигается совместным рассмотрением значений т. н. основных инвариантов Л. в. п.— выражений, составленных из коэффициентов уравнения (*), значения к-рых не меняются при параллельном переносе и повороте системы координат ($a_{ij}=a_{ji}$):

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix},\quad \delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\\ a_{21}a_{22}\end{vmatrix},\quad S=a_{11}+a_{22}$$

и семиинварианта (полуинварианта):

$$A=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}\\ a_{32}a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}a_{13}\\ a_{31}a_{33}\end{vmatrix},$$

к-рый является инвариантом относительно поворота системы координат (см. табл.).
Многие важные свойства Л. в. п. могут быть изучены при помощи характеристической квадратичной формы

$$\Phi(x,\ y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2,$$

соответствующей уравнению (*). В частности, нераспадающаяся Л. в. п. оказывается эллипсом, мнимым эллипсом, гиперболой или параболой в зависимости от того, будет ли $\Phi(x,\ y)$ положительно определенной, отрицательно определенной, неопределенной или полуопределенной квадратичной формой, что устанавливается по корням ее характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0 \text{ или } \lambda^2-S\lambda+\delta=0.$$

Три основных инварианта Δ, δ и S определяют Л. в. п. (кроме случая параллельных прямых) с точностью до движения евклидовой плоскости: если соответствующие инварианты Δ, δ и S двух линий равны, то такие линии могут быть совмещены движением. Иными словами, эти линии эквивалентны по отношению к группе движений плоскости (метрически эквивалентны).
Существует классификация Л. в. п. с точки зрения других групп преобразований. Так, относительно более общей (чем группа движений) группы аффинных преобразований эквивалентными являются любые две линии, определяемые уравнениями одного канонич. вида. Напр., две подобные Л. в. п. считаются эквивалентными. Связи между различными аффинными классами Л. в. п. позволяет установить классификация с точки зрения проективной геометрии, в к-рой беско-

нечно удаленные элементы не играют особой роли. Действительные нераспадающиеся Л. в. п.: эллипсы, гиперболы и параболы образуют один проективный класс — класс действительных овальных линий (овалов). Действительная овальная линия является эллипсом, гиперболой или параболой в зависимости от того, как она расположена относительно бесконечно удаленной прямой: эллипс пересекает несобственную прямую в двух мнимых точках, гипербола — в двух различных действительных точках, парабола касается несобственной прямой; существуют проективные преобразования, переводящие эти линии одна в другую. Существует 5 классов проективной эквивалентности Л. в. п. Именно,

невырождающиеся линии (x_1, x_2, x_3 — однородные координаты):

$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ действительный овал,

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ мнимый овал;

вырождающиеся линии:

$x_1^2-x_2^2=0$ пара действительных прямых,

$x_1^2+x_2^2=0$ пара мнимых прямых,

$x_1^2=0$ пара совпадающих прямых.

Кроме аналитич. способа определения Л. в. п. (заданием уравнения) существуют и другие способы. Напр., эллипс, гипербола и парабола могут быть получены как сечения конич. поверхности плоскостью (см. *Конические сечения*).

Исследование вида линий второго порядка с помощью инвариантов

Центральные линии $\delta \neq 0$	$\delta > 0$	Нераспадающиеся линии $\Delta \neq 0$	$\frac{\Delta}{S} < 0$	Действительные эллипсы	Распадающиеся линии $\Delta = 0$: Пары мнимых пересекающихся прямых (действительная точка)
			$\frac{\Delta}{S} > 0$	Мнимые эллипсы	
	$\delta < 0$	Гиперболы			Пары действительных пересекающихся прямых
Нецентральные линии $\delta = 0$	$\delta = 0$	Параболы	$A > 0$		Пары мнимых параллельных прямых
			$A < 0$		Пары действительных параллельных прямых
			$A = 0$		Пары совпадающих параллельных прямых

Лит.: [1] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии, М., 1968; [2] Ефимов Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 11 изд., М., 1972. *А. Б. Иванов.*

ЛИННИКА ДИСКРЕТНЫЙ ЭРГОДИЧЕСКИЙ МЕТОД — специальный метод аналитич. теории чисел, использующий некоммутативную арифметику и сводящий вопросы равномерности распределения целых точек многообразия к рассмотрению «потоков» целых точек на этом многообразии и операторов, к-рые создают эти «потоки». Основы метода заложены Ю. В. Линником [1]. Л. д. э. м. получил существенное развитие и приобрел «эргодические» черты по характеру своих результатов [2], [3]. Дискретный эргодич. метод применялся к вопросам представления чисел тернарными

квадратичными формами и к вопросам асимптотич. распределения целых точек по поверхности соответствующего эллипсоида или гиперболоида. Наиболее известный результат — теорема Линника об асимптотич. равномерности распределения целых точек по поверхности сферы растущего радиуса (см. [2] гл. IV).

Лит.: [1] Линник Ю. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1940, т. 4, № 4—5, с. 363—402; [2] его же, Эргодические свойства алгебраических полей, Л., 1967; [3] Малышев А. В., О представлении целых чисел положительными квадратичными формами, М. —Л., 1962 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 65); [4] его же, «Зап. науч. семинаров ЛОМИ», 1975, т. 50, с. 179—86; [5] его же, «Acta arithm.», 1975, v. 27, p. 555—98; [6] Peters M., там же, 1977, v. 34, p. 57—80. *А. В. Малышев.*

ЛИПШИЦА КОНСТАНТА для заданной в промежутке (a, b) функции $f(x)$ — нижняя грань постоянных $M>0$ в *Липшица условии*

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M|y-x|^{\alpha},\quad 0<\alpha\leqslant 1,\quad x,\ y\in(a,\ b).$$

А. В. Ефимов.

ЛИПШИЦА УСЛОВИЕ — ограничение на поведение приращения функции. Если для любых точек x и x', принадлежащих отрезку $[a, b]$, приращение функции f удовлетворяет неравенству

$$|f(x)-f(x')|\leqslant M|x-x'|^{\alpha}, \qquad (*)$$

где $0<\alpha\leqslant 1$ и M — нек-рая постоянная, то говорят, что функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет условию Липшица порядка α, и пишут: $f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, или $f\in \mathrm{Lip}_M\alpha$, или $f\in H^{\alpha}(M)$. Каждая функция, удовлетворяющая при каком-либо $\alpha>0$ Л. у. на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на $[a, b]$, а функции, удовлетворяющие Л. у. степени $\alpha=1$,— абсолютно непрерывны. Функция, имеющая на $[a, b]$ ограниченную производную, удовлетворяет на $[a, b]$ Л. у. с любым $\alpha\leqslant 1$.

Л. у. (*) эквивалентно условию

$$\omega(\delta,\ f)\leqslant M\delta^{\alpha},$$

где $\omega(\delta, f)$ — *непрерывности модуль* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Л. у. впервые рассматривалось Р. Липшицем [1] в качестве достаточного условия для сходимости ряда Фурье функции $f(x)$. Условие (*) в случае $0<\alpha<1$ наз. также *Гёльдера условием* степени α.

Лит.: [1] Lipschitz R., «J. reine und angew. Math.», 1864, Bd 63, S. 296—308; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1965; [3] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.— Л., 1949. *А. В. Ефимов.*

ЛИПШИЦА УСЛОВИЕ интегральное — ограничение на поведение приращения функции в интегральной метрике. Функция $f(x)$ из пространства $L^p(a, b)$ с $p\geqslant 1$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ интегральному Липшица условию порядка $\alpha>0$ с постоянной $M>0$, если

$$\left\{\int_a^{b-h}|f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}\leqslant Mh^{\alpha} \qquad (*)$$

при всех $h\in(0, b-a)$. В этом случае пишут $f\in \mathrm{Lip}_M(\alpha, p)$, или $f\in H_p^{\alpha}(M)$, или $f\in \mathrm{Lip}\,(\alpha, p)$, или $f\in H_p^{\alpha}$. Для случая периодич. функций (с периодом $b-a$) интегральное Л. у. определяется аналогично, только в неравенстве (*) верхний предел интегрирования $b-h$ следует заменить на b.

Лит.: [1] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1965; [2] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [3] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М., Интегральное представление функций и теоремы вложения, М., 1975. *А. В. Ефимов.*

ЛИСП — *алгоритмический язык*, разработанный в 1959—62 Дж. Маккарти [1]. Характеризуется весьма однородным синтаксисом, в к-ром как программа, так и ее объекты выглядят одинаково в виде т. н. списочной структуры — *графа*, в частности *дерева*, висячими вершинами к-рого являются атомы (см. ниже),

а остальными вершинами — с п и с к и, т. е. последовательности (*возможно*, пустые) элементов (списков или атомов), разделенных пробелами и взятых в скобки, напр.

$$(A\ X\ (35\ B)\ 44Z).$$

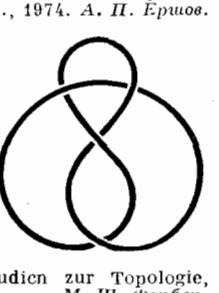
А т о м ы — это непустые слова в алфавите языка, не содержащие скобок, пробелов и обозначающие переменные, константы, функции или самих себя. Списки и атомы, для к-рых имеет смысл говорить об их значениях, наз. в ы р а ж е н и я м и. Первым элементом списка — выражения E — является атом, обозначающий функцию, или список, изображающий функцию. Остальные элементы списка E — это выражения, к-рые берутся в качестве аргументов функции, а значением E является результат взятия функции от ее аргументов. Значения переменных и константы понимаются обычным образом. Изображение функции имеет вид списка (lambda ($x1$, . . ., xn) exp), где lambda — фиксированный атом, ($x1$, . . ., xn) — список связанных переменных, обозначающих аргументы функции, а exp — выражение, вычисляющее значение функции и содержащее в себе $x1$, . . ., xn как свободные переменные.

Среди фундаментальных функций Л. имеются: car (l) и cdr (l), выдающие соответственно первый элемент списка l и его «хвост»; quote (l), выдающая l в качестве своего значения; cons (l m), «продолжающая» список l списком m; cond ((*p*1 *e*1) (*p*2 *e*2)), выбирающая в качестве своего значения значение выражений *e*1 или *e*2 в зависимости от того, какое по порядку из предикатных выражений *p*1 и *p*2 оказывается истинным. Фундаментальными предикатами являются: atom (l), проверяющий, является ли l атомом; eq ($l1$ $l2$), истинный, если $l1$ и $l2$ — равные друг другу атомы; null (l), истинный, если l оказывается пустым списком. Фундаментальные функции и предикаты образуют набор средств, достаточный, чтобы реализовать в Л. и другие конструкции алгоритмич. языков, напр. конструкцию присваивания переменной значения выражения или связывания с атомом обозначаемого им изображения функции. Программой в Л. является произвольный список, образованный выражениями.

Способность Л. легко образовывать произвольные списочные структуры, в частности с помощью рекурсивных определений, а также формировать выражения в ходе вычислений обусловила широкое распространение Л. как средства экспериментального программирования сложных логич. задач.

Лит.: [1] M c C a r t h y J., Recursive functions of symbolic expressions and their computation by machine, Pt. 1, CACM, 3 (Apr. 1960), p. 184; [2] Л а в р о в С. С., С и л а г а д з е Г. С., Автоматическая обработка данных. Язык лисп и его реализация, М., 1978; [3] Х и г м а н Б., Сравнительное изучение языков программирования, пер. с англ., М., 1974. *А. П. Ершов.*

ЛИСТИНГА УЗЕЛ — один из простейших петривиальных узлов (рис.). Л. у. обозначается символом 4_1 (см. *Узлов таблица*) и наз. иногда восьмеркой или четырехкратным узлом. Группа Л. у. имеет следующее копредставление $\langle x, y : yx^{-1}\,yxy^{-1} = x^{-1}yxy^{-1}x\rangle$, а полином Александера равен $\Delta_1 = t^2 - 3t + 1$. Рассмотрен И. Листингом [1].



Лит.: [1] L i s t i n g I. B., Vorstudien zur Topologie, Gött., 1847. *М. Ш. Фарбер.*

ЛИТЛВУДА ПРОБЛЕМА — 1) Л. п. для совместных диофантовых приближений — вопрос о существовании для любых действительных чисел α, β, $\varepsilon > 0$ натурального числа n такого, что $n\|\alpha n\|\|\beta n\| < \varepsilon$, где $\|\alpha\|$ — расстояние от α до ближайшего целого числа. В нек-рых случаях, напр. при рациональных α и β, для чисел α и β, одно из к-рых

представимо цепной дробью с неограниченными элементами, Л. п. имеет положительное решение.

2) Л. п. для интегралов — утверждение о том, что для произвольной возрастающей последовательности M натуральных чисел m_k, $k=1, 2, \ldots$, выполняется неравенство

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} \exp(2\pi i m_k x) \right| dx > f(n), \qquad (*)$$

где $f(n)=C \ln n$, $C>0$ — абсолютная константа, $n>n_0$. Получены либо более слабые по сравнению с (*) оценки для произвольных последовательностей M, либо оценки, близкие к (*) или даже совпадающие с этой оценкой, но для специальных последовательностей M.

Л. п. сформулированы Дж. Литлвудом (см. [1]); в общих случаях обе Л. п. не решены (1982).

Лит.: [1] Hardy G. H., Littlewood J. E., «J. London Math. Soc.», 1948, v. 23, p. 163—68; [2] Касселс Дж.- В.- С., Введение в геометрию чисел, пер. с англ., М., 1965.

Б. М. Бредихин.

ЛИУВИЛЛЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА — запись обыкновенного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + (q(x) + \lambda r(x))\, y = 0 \qquad (1)$$

в виде

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + (\lambda + \varphi(\xi))\, \eta = 0, \qquad (2)$$

где λ — параметр. Если $p(x)\in C^1$, $q(x)\in C$, $r(x)\in C^2$ и $r(x)>0$, то уравнение (1) приводится к Л. н. ф. (2) с помощью подстановки

$$\eta(\xi) = \Phi(x)\, y(x), \quad \xi = \int_a^x \sqrt{r(t)}\, dt,$$

$$\Phi(x) = \sqrt[4]{r(x)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x p(t)\, dt\right),$$

к-рая наз. преобразованием Лиувилля (введена в [1]). Л. н. ф. играет важную роль при исследовании асимптотич. поведения решений уравнения (1) для больших значений параметра λ или аргумента, при исследовании асимптотики собственных функций и собственных значений задачи Штурма — Лиувилля (см. [3]).

Лит.: [1] Liouville J., «J. math. pures et appl.», 1837, t. 2, p. 16—35; [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [3] Титчмарш Э. Ч., Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, пер. с англ., т. 1—2, М., 1960—61.

М. В. Федорюк.

ЛИУВИЛЛЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, уравнения геодезических к-рой допускают квадратичный интеграл $a_{ij}du^i du^j$, причем тензор a_{ij} отличен от метрич. тензора g_{ij} поверхности. Напр., поверхность постоянной гауссовой кривизны — Л. п. Для того чтобы поверхность допускала *геодезическое отображение* на плоскость, необходимо и достаточно, чтобы она являлась Л. п. (Дини теорема). См. также *Лиувилля сеть*.

И. Х. Сабитов.

ЛИУВИЛЛЯ СЕТЬ — сеть линий на поверхности, в параметрах к-рой линейный элемент поверхности имеет вид

$$ds^2 = (U+V)\,(du^2+dv^2),$$

где $U=U(u)$, $V=V(v)$. В каждом четырехугольнике, образованном двумя парами линий из различных семейств, две геодезич. диагонали имеют равную длину. Поверхности, несущие Л. с., являются *Лиувилля поверхностями*. К ним относятся, напр., центральные поверхности второго порядка. Л. с. введена Ж. Лиувиллем (J. Liouville, 1846, см. [1] приложение 3).

Лит.: [1] Monge G., Application de l'analyse à la géométrie, 5 éd., P., 1850; [2] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. Т. Базылев.

ЛИУВИЛЛЯ ТЕОРЕМА — 1) Л. т. об ограниченных целых аналитических функциях: если целая функция $f(z)$ комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$ ограничена, т. е.

$$|f(z)| \leqslant M < +\infty, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

то $f(z)$ есть константа. Это предложение, одно из основных в теории аналитич. функций, впервые, по-видимому, опубликовано в 1844 О. Коши [1] для случая $n=1$; Ж. Лиувилль (J. Liouville) излагал его на лекциях в 1847, откуда и произошло название.

Л. т. допускает обобщения в различных направлениях. Напр., если $f(z)$ — целая функция в $\mathbb{C}^n$ и

$$|f(z)| \leqslant M(1+|z|^m), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

для нек-рого целого $m \geqslant 0$, то $f(z)$ есть многочлен по переменным $(z_1, \ldots, z_n)$ степени не выше m. Далее, если $u(x)$ — действительная гармонич. функция во всем числовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, причем

$$u(x) \leqslant M(1+|x|^m) \text{ (или } -u(x) \leqslant M(1+|x|^m)),$$

$x \in \mathbb{R}^n$, то $u(x)$ есть гармонич. многочлен по переменным $(x_1, \ldots, x_n)$ степени не выше m (см. также [4]).

2) Л. т. о конформных отображениях: всякое конформное отображение области евклидова пространства E^n при $n \geqslant 3$ можно представить в виде конечного числа суперпозиций простейших отображений четырех видов — переноса, подобия, ортогонального преобразования и инверсии. Доказана Ж. Лиувиллем в 1850 (см. [2] добавление 6).

Эта Л. т. выявляет бедность класса конформных отображений в пространстве, и с этой точки зрения она весьма важна в теории аналитич. функций многих комплексных переменных и в теории *квазиконформных отображений*.

Лит.: [1] Cauchy A., «C. r. Acad. sci.», 1844, t. 19, p. 1377—84; [2] Monge G., Application de l'analyse à la géométrie, 5 éd., P., 1850, p. 609—16; [3] Бицадзе А. В., *Основы теории аналитических функций комплексного переменного*, 2 изд., М., 1972; [4] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

3) Л. т. о приближении алгебраических чисел — теорема, устанавливающая, что алгебраич. иррациональности не могут слишком хорошо приближаться рациональными числами. Именно, если α — алгебраич. число степени $n \geqslant 2$, а p и $q>0$ — любые целые рациональные числа, то имеет место неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n},$$

где C — положительная константа, зависящая только от α и выражаемая в явном виде через сопряженные с α величины.

С помощью этой теоремы Ж. Лиувилль [1] впервые построил неалгебраические (трансцендентные) числа. Таким числом является, напр., число

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}},$$

представляемое рядом с быстро убывающими членами.

При $n=2$ Л. т. дает неулучшаемый результат. Для $n \geqslant 3$ Л. т. неоднократно усиливалась. В 1909 А. Туэ [2] установил, что для алгебраич. чисел α степени $n \geqslant 3$ и $\nu > \frac{n}{2}+1$ справедливо неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^{\nu}}. \qquad (*)$$

К. Зигель [3] улучшил результат А. Туэ, показав, что неравенство (*) выполняется при (s — целое)

$$\nu > \min_{1 \leqslant s \leqslant n-1} \left(\frac{n}{s+1} + s\right),$$

в частности при $\nu > 2\sqrt{n}$. Позже Ф. Дайсон [4] доказал справедливость неравенства (*) при $\nu > \sqrt{2n}$. Наконец, К. Рот [5] установил, что неравенство (*) справедливо при любом $\nu > 2$. Результат К. Рота является наилучшим в своем роде, т. к. любое иррациональное число ξ, алгебраическое или нет, имеет бесконечно много рациональных приближений p/q, удовлетворяющих неравенству

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Все указанные выше усиления Л. т. имеют один существенный недостаток — они неэффективны, а именно: методы их доказательства не позволяют установить, каким образом постоянная $C = C(\alpha, \nu)$ в неравенстве (*) зависит от величин α и ν. Получены (см. [6], [7], [8]) эффективные усиления Л. т., но лишь для значений показателя ν, мало отличающихся от n.

Лит.: [1] Liouville J., «C. r. Acad. sci.», 1844, t. 18, p. 883—85, 910—11; [2] Thue A., «J. reine und angew. Math.», 1909, Bd 135, S. 284—305; [3] Siegel C., «Math. Z.», 1921, Bd 10, S. 173—213; [4] Dyson F. I., «Acta math.», 1947, t. 79, p. 225—40; [5] Roth K. F., «Mathematika», 1955, v. 2, p. 1—20; [6] Baker A., «Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A», 1968, v. 263, p. 173—91; [7] Спринджук В. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, с. 991—1007; [8] Фельдман Н. И., там же, с. 973—90. *С. А. Степанов.*

4) Л. т. о сохранении фазового объема: объем V любой области G $6N$-мерного фазового пространства (p, q) (пространства компонент импульсов $p = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$ и координат $q = (\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$ каждой из N частиц классич. системы с потенциальными силами взаимодействия) не изменяется с течением времени

$$V = \int_{(G)} dp\, dq = \text{const},$$

если все точки этой области двигаются согласно уравнениям классич. механики. Утверждение является следствием того, что якобиан перехода от переменных (p, q) (в момент времени t) к переменным (p', q') (в момент времени $t' > t$) согласно уравнениям движения (напр., в форме уравнений Гамильтона) равен единице. Величина V является одним из интегральных инвариантов Пуанкаре, а Л. т.— одним из следствий их существования. Л. т. используется в статистич. механике классич. систем (см. *Лиувилля уравнение*). Л. т. доказана Ж. Лиувиллем (J. Liouville, 1851).

И. А. Квасников.

ЛИУВИЛЛЯ УРАВНЕНИЕ — уравнение движения для функции распределения $w_N(p, q; t)$ по импульсам $p = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$ и координатам $q = (\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$ N-частичной классич. системы

$$\frac{\partial w_N}{\partial t} = \{H, w_N\}_{\text{кл.}} \equiv \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}_i} \frac{\partial w_N}{\partial \boldsymbol{p}_i} - \frac{\partial w_N}{\partial \boldsymbol{r}_i} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_i} \right),$$

где H — гамильтониан системы, а фигурными скобками обозначены классич. скобки Пуассона.

Если в фазовом пространстве (p, q) распределению $w_N(p, q; t)$ сопоставить плотность фазовых точек (каждая из к-рых соответствует определенному механич. состоянию данной системы N материальных точек), то в силу того, что траектории движения этих точек не пересекаются вследствие единственности решений уравнений движения механики, и того, что фазовый объем согласно *Лиувилля теореме* сохраняется, ансамбль этих точек образует в фазовом пространстве своеобразную несжимаемую жидкость, полная производная плотности к-рой w_N по времени равна нулю:

$$\frac{dw_N}{dt} = \frac{\partial w_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial w_N}{\partial \boldsymbol{r}_i} \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} + \frac{\partial w_N}{\partial \boldsymbol{p}_i} \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} \right) = 0.$$

Это приводит к Л. у., если только выразить согласно *Гамильтона уравнениям* производные от координат и

импульсов через соответствующие частные производные от гамильтониана.

Л. у. используется не только при рассмотрении общих вопросов статистич. механики, связанных с выяснением микроскопической и макроскопической структур состояния системы многих тел, процессов стремления к равновесию, проблем «перемешивания» в фазовом пространстве, эргодичности и т. д., но и в конкретных исследованиях, т. к. Л. у. является исходным уравнением при построении *Боголюбова цепочки уравнений*, а следовательно, и для различного типа кинетич. уравнений, с помощью к-рых решаются уже прикладные физич. задачи.

В случае квантовых систем роль Л. у. играет уравнение движения для статистич. оператора $\rho(t)$ (*плотности матрица*), к-рое в шрёдингеровском временном представлении имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H, \rho\}_{\text{кв.}} \equiv \frac{1}{i\hbar}[H\rho - \rho H],$$

где H — оператор Гамильтона, а фигурными скобками обозначены квантовые скобки Пуассона. Это квантовое Л. у. является следствием структуры смешанного состояния (описываемой данным статистич. оператором), в к-ром каждое из составляющих его чистых квантовомеханич. состояний эволюционирует согласно *Шрёдингера уравнению*.

Лит.: [1] Голдстейн Г., Классическая механика, пер. с англ., М., 1957; [2] Уленбек Д., Форд Дж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965; [3] Боголюбов Н. Н., Избр. труды, т. 2, К., 1970.

И. А. Квасников.

ЛИУВИЛЛЯ ФУНКЦИЯ — арифметическая функция $\lambda(n)$, определяемая равенством

$$\lambda(n) = (-1)^{\nu(n)},$$

где $\nu(n)$ — число всех простых сомножителей n. Л. ф. тесно связана с *Мёбиуса функцией* $\mu(n)$:

$$\lambda(n) = \sum_{d^2 \setminus n} \mu\left(\frac{n}{d^2}\right).$$

В теории чисел важна оценка суммы

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} \lambda(n)$$

при $x \to \infty$. Существует гипотеза, что

$$S(x) \ll \sqrt{x} \ln x.$$

Последний результат, полученный методом И. М. Виноградова, имеет вид

$$S(x) \ll x \exp(-c \ln^{3/5} x \ln^{-1/5} \ln x).$$

Л. ф. введена Ж. Лиувиллем (J. Liouville).

Лит.: [1] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [2] Чандрасекхаран К., Арифметические функции, пер. с англ., М., 1975.

А. Ф. Лаврик.

ЛИУВИЛЛЯ ЧИСЛО — действительное число α, для к-рого при любом $\nu \geqslant 1$ неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < q^{-\nu}$$

имеет бесконечно много целых решений p и q, удовлетворяющих условиям $q > 0$, $(p, q) = 1$. Трансцендентность Л. ч. вытекает из *Лиувилля теоремы*. Изучались Ж. Лиувиллем [1].

Примеры Л. ч.:

$$\alpha_1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n},$$

$$\alpha_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{-3^n},$$

$$\alpha_3 = \sum_{n=1}^{\infty} (10^{n!})^{-1}.$$

Лит.: [1] Liouville J., «C. r. Acad. sci.», 1844, t. 18, p. 883—85; [2] Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952.

С. В. Котов.

ЛИУВИЛЛЯ — ОСТРОГРАДСКОГО ФОРМУЛА, Л и у в и л л я ф о р м у л а,— соотношение, связывающее *вронскиан* системы решений и коэффициенты линейного обыкновенного дифференциального уравнения.

Пусть $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — произвольная система n решений линейной однородной системы n-го порядка

$$x' = A(t)\,x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с непрерывным на интервале I оператором $A(t)$, а

$$W(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = W(t)$$

— вронскиан этой системы решений. Л.—О. ф. имеет вид

$$\frac{d}{dt}\,W(t) = W(t)\cdot \operatorname{Sp} A(t), \quad t \in I, \tag{2}$$

или, что то же самое,

$$W(x_1(t), \ldots, x_n(t)) =$$

$$= W(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) \cdot \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(s)\,ds, \; t, \; t_0 \in I; \tag{3}$$

здесь $\operatorname{Sp} A(t)$ — след оператора $A(t)$. Л.—О. ф. можно записать с помощью *Коши оператора* $X(t, t_0)$ системы (1):

$$\det X(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(s)\,ds, \; t, \; t_0 \in I. \tag{4}$$

Геометрический смысл соотношения (4) (или (3)) состоит в том, что в результате преобразования $X(t, t_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ориентированный объем любого тела увеличивается в $\exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(s)ds$ раз.

Если рассматривается линейное однородное уравнение n-го порядка

$$p_0(t)\,y^{(n)} + p_1(t)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(t)\,y' + p_n(t)\,y = 0 \tag{5}$$

с непрерывными на интервале I коэффициентами, причем $p_0(t) \neq 0$ при $t \in I$, то Л.—О. ф. наз. равенство

$$W(y_1(t), \ldots, y_n(t)) =$$

$$= W(y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)) \cdot \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \frac{p_1(s)}{p_0(s)}\,ds\right], \; t, \; t_0 \in I, \tag{6}$$

где $W(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ — вронскиан системы n решений $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ уравнения (5). Л.—О. ф. (3), (6) обычно используются в случае, когда рассматриваемая система решений является фундаментальной. Напр., формула (6) позволяет найти в квадратурах общее решение линейного однородного уравнения 2-го порядка, если известно одно его частное нетривиальное решение.

Соотношение (6) для уравнения (5) при $n=2$ найдено Н. Абелем в 1827 (см. [1]), а при произвольном n — в 1838 Ж. Лиувиллем [2] и М. В. Остроградским [3]; равенство (3) получено Ж. Лиувиллем [2] и К. Якоби [4] (вследствие чего равенство (3) иногда наз. ф о р м у л о й Я к о б и).

Л.—О. ф. (2) допускает обобщение на нелинейную систему

$$x' = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

в предположении, что вектор-функция

$$f(t, x) = (f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n))$$

и матрица $\partial f/\partial x$ непрерывны. Если $\Omega_{t_0} \subset \mathbb{R}^n$ — множество конечной меры $\mu(t_0)$, а образ Ω_t этого множества при линейном отображении $X(t, t_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где $X(t, t_0)$ — оператор Коши системы (7), имеет меру $\mu(t)$, то

$$\frac{d\mu}{dt} = \int_{\Omega_t} \operatorname{div}_x f(t, x)\,dx;$$

здесь

$$\operatorname{div}_x f(t, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}\,.$$

Отсюда вытекает теорема Лиувилля о сохранении фазового объема, имеющая важные приложения в теории динамических систем и в статистической механике: поток гладкой автономной системы

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

не меняет объем любого тела в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{div} f(x) = 0$ при всех x; в частности, фазовый объем сохраняется потоком *гамильтоновой системы*.

Лит.: [1] Abel N. H., «J. reine und angew. Math.», 1827, Bd 2, S. 22—30; [2] Liouville J., «J. math. pures et appl.», 1838, t. 3, p. 342—49; [3] Остроградский М. В., Полн. собр. трудов, т. 3, К., 1961, с. 124—26; [4] Jacobi K., Gesammelte Werke, Bd 4, B., 1886; [5] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974; [6] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971.

Н. Х. Розов.

ЛОБАТТО КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — наивысшей алгебраич. степени точности квадратурная формула для промежутка $[a, b] = [-1, 1]$ и веса $p(x) = 1$ с двумя фиксированными узлами — концами промежутка $[-1, 1]$. Л. к. ф. имеет вид

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \cong A[f(-1) + f(1)] + \sum_{j=1}^{n} C_j f(x_j).$$

Узлы x_j — корни ортогонального на $[-1, 1]$ с весом $1-x^2$ многочлена $P_n^{(1,1)}(x)$ (многочлена Якоби), $A = 2/(n+1)(n+2)$, $C_j > 0$. Алгебраич. степень точности равна $2n+1$. Таблица узлов и коэффициентов Л. к. ф. для $n = 1(1)15$ (n меняется от 1 до 15 с интервалом 1) приведена в [2] (см. также [3]).

Формула установлена Р. Лобатто (см. [1]).

Лит.: [1] Lobatto R., Lessen over de differential en integral-rekening, v. 1—2, S'Gravenhage, 1851—52; [2] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967; [3] Michels H. H., «Math. Comp.», 1963, v. 17, p. 237—44.

И. П. Мысовских.

ЛОБАЧЕВСКОГО ГЕОМЕТРИЯ — геометрия, основанная на тех же основных посылках, что и *евклидова геометрия*, за исключением аксиомы о параллельных (см. *Пятый постулат*). В евклидовой геометрии согласно этой аксиоме на плоскости через точку P, лежащую вне прямой $A'A$, проходит только одна прямая $B'B$, не пересекающая $A'A$. Прямая $B'B$ наз. параллелью к $A'A$. При этом достаточно потребовать, чтобы таких прямых проходило не более одной, так как существование непересекающей прямой может быть доказано путем последовательного проведения прямых $PQ \perp A'A$ и $PB \perp PQ$. В Л. г. аксиома параллельности требует, чтобы через точку P (рис. 1) проходило более



Рис. 1.

одной прямой, не пересекающей $A'A$. Непересекающие прямые заполняют часть пучка с вершиной P, лежащую внутри пары вертикальных углов TPU и $U'PT'$, расположенных симметрично относительно перпендикуляра PQ. Прямые, образующие стороны вертикальных углов, отделяют пересекающие прямые от непересекающих и сами являются тоже непересекающими. Эти граничные прямые наз. параллелями в точке P к прямой $A'A$ соответственно в двух ее направлениях: $T'T$ параллельно $A'A$ в направлении $A'A$, а UU' параллельно $A'A$ в направлении AA'. Остальные непе-

рассекающие прямые наз. расходящимися прямыми с $A'A$ (подробнее см. ниже).

Угол α, $0<\alpha<\pi/2$, к-рый параллель к точке P образует с перпендикуляром PQ, $\angle QPT=\angle QPU'=\alpha$, наз. углом параллельности отрезка $PQ=a$ и обозначается через $\alpha\equiv\Pi(a)$. При $a=0$ угол $\alpha=\pi/2$; при увеличении a угол α уменьшается так, что для каждого заданного α, $0<\alpha<\pi/2$, существует определенное значение a. Эта зависимость наз. *Лобачевского функцией:*

$$\Pi(a)=2\operatorname{arc\,tg}(e^{-a/k}),$$

где k — некоторая константа, определяющая фиксированный по величине отрезок. Она получила название радиуса кривизны пространства Лобачевского. Подобно сферич. геометрии существует бесконечное множество пространств Лобачевского, различающихся величиной k.

Евклидова геометрия может быть получена как предельный случай Л. г., когда обе параллели, проходящие через P, сливаются в одну, т. е. когда множество всех прямых, проходящих через точку P и непересекающих данную прямую $A'A$, сводится к единственной прямой. Тогда угол $\alpha=\pi/2$ при любом a. Это условие эквивалентно требованию $k=\infty$. В малых областях пространства, т. е. когда линейные размеры фигур по отношению к k бесконечно малы, все соотношения Л. г. аппроксимируются получающимися в пределе соотношениями евклидовой геометрии.

Две различные прямые по плоскости образуют пару одного из трех типов.

Пересекающиеся прямые. Расстояние от точек одной прямой до другой прямой неограниченно увеличивается при удалении точки от пересечения прямых. Если прямые не перпендикулярны, то каждая проектируется ортогонально на другую в открытый отрезок конечной величины.

Параллельные прямые. На плоскости через данную точку проходит единственная прямая, параллельная данной прямой в заданном на последней направлении. Параллель в точке P сохраняет в каждой своей точке свойство быть параллелью той же прямой в том же направлении. Параллелизм обладает взаимностью (если $a\|b$ в определенном направлении, то и $b\|a$ в соответствующем направлении) и транзитивностью (если $a\|b$ и $c\|b$ в одном направлении, то $a\|c$ в соответствующем направлении). В направлении параллельности параллельные неограниченно сближаются, в противоположном направлении — неограниченно удаляются (в смысле расстояния от перемещающейся точки одной прямой до другой прямой). Ортогональная проекция одной прямой на другую является открытой полупрямой.

Расходящиеся прямые. Они имеют один общий перпендикуляр, отрезок к-рого дает минимальное расстояние. По обе стороны от перпендикуляра прямые неограниченно расходятся. Каждая прямая проектируется на другую в открытый отрезок конечной величины.

Трем типам прямых соответствуют на плоскости три типа пучков прямых, каждый из к-рых покрывает всю плоскость: пучок 1-го рода — множество всех прямых, проходящих через одну точку (центр пучка); пучок 2-го рода — множество всех прямых, перпендикулярных к одной прямой (база пучка); пучок 3-го рода — множество всех прямых, параллельных одной прямой в заданном направлении, включающее и эту прямую.

Ортогональные траектории прямых этих пучков образуют аналоги окружности евклидовой плоскости: окружность в собственном смысле; эквидистанта, или линия равных расстоя-

ний (если не рассматривать базу), к-рая вогнута в сторону базы; предельная линия, или орицикл, ее можно рассматривать как окружность с бесконечно удаленным центром. Предельные линии конгруэнтны. Они не замкнуты и вогнуты в сторону параллельности. Две предельные линии, порожденные одним пучком,— концентричны (высекают на прямых пучка равные отрезки). Отношение длин концентрич. дуг, заключенных между двумя прямыми пучка, убывает в сторону параллельности как показательная функция расстояния x между дугами:

$$s'/s = e^{-x/k}.$$

Каждый из аналогов окружности может скользить по самому себе, что порождает три типа однопараметрич. движений плоскости: вращение вокруг собственного центра; вращение вокруг идеального центра (одна траектория — база, остальные — эквидистанты); вращение вокруг бесконечно удаленного центра (все траектории — предельные линии).

Вращение аналогов окружностей вокруг прямой порождающего пучка приводит к аналогам сферы: собственно сфере, поверхности равных расстояний и орисфере, или предельной поверхности.

На сфере геометрия больших окружностей — обычная сферическая геометрия; на поверхности равных расстояний — геометрия эквидистант, являющаяся планиметрией Лобачевского, но с бо́льшим значением k; на предельной поверхности — евклидова геометрия предельных линий.

Связь между длинами дуг и хорд предельных линий и евклидовы тригонометрич. соотношения на предельной поверхности позволяют вывести тригонометрич. соотношения на плоскости, то есть тригонометрич. формулы для прямолинейных треугольников. Напр., формулу для площади σ треугольника:

$$\sigma = k^2(\pi - A - B - C);$$

для длины окружности:

$$l = 2\pi k \operatorname{sh}\frac{r}{k}.$$

Тригонометрич. формулы Л. г. могут быть получены из формул сферич. геометрии заменой радиуса R на мнимое число ki.

Доказательство непротиворечивости Л. г. проводится с помощью построения интерпретации (модели). Первой такой интерпретацией явилась *Бельтрами интерпретация*, где установлено, что в евклидовом пространстве внутренняя геометрия поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны локально совпадает с Л. г. (роль прямых играют геодезические линии поверхности). Поверхность такого типа называется псевдосферой.



Рис. 2.

Другая интерпретация Бельтрами состоит в геодезическом отображении поверхности постоянной отрицательной кривизны во внутренность круга. Однако интерпретации Бельтрами моделируют лишь часть плоскости Лобачевского. Первая интерпретация всей плоскости Лобачевского — *Клейна интерпретация*, в к-рой использована *проективная метрика* Кэли. В этой интерпретации (рис. 2) прямые линии пространства Лобачевского реализуются хордами абсолюта (без концевых точек), а расстояния и углы выражаются с помощью двойных отношений четверок точек (концы M, N отрезка и концевые точки $\tilde{U}$, $\tilde{T}$ хорды, на к-рой лежит отрезок) и соответствующих четверок прямых

[стороны угла и проходящие через вершину касательные (мнимые) к абсолюту]. Параллели через точку P к прямой MN реализуются прямыми PT и $P\tilde{U}$, пересекающими прямую MN в точках на абсолюте. Точки абсолюта моделируют «бесконечно удаленные точки», не являющиеся точками плоскости Лобачевского.

А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1882) при построении теории автоморфных функций пришел к двум другим моделям — в круге и на полуплоскости (*Пуанкаре интерпретация*). В первой модели (рис. 3) плоскость Лобачевского реализуется внутренностью круга, прямые — внутренними частями дуг окружностей, пересекающих основной круг ортогонально. Метрика вводится с помощью двойных отношений, причем величины углов на модели такие же, как и на плоскости Лобачевского (модель конформная).

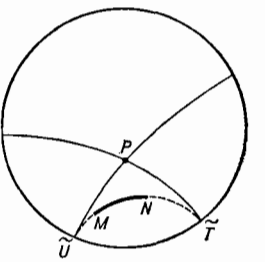


Рис. 3.

Введение тех или иных координат позволяет получать различные аналитич. модели плоскости Лобачевского. А. Пуанкаре была предложена (1887) модель Л. г. как геометрии плоских диаметральных сечений на одной из полостей двуполостного гиперболоида, к-рую можно трактовать и как геометрию сферы чисто мнимого радиуса в *псевдоевклидовом пространстве*. Указанные модели обобщаются на случай n-мерного пространства.

Как риманова геометрия, Л. г. есть геометрия риманова пространства постоянной отрицательной кривизны.

Источником создания Л. г. послужила проблема параллелей, т. е. попытки доказательства пятого постулата Евклида о параллельных. Н. И. Лобачевский (1826, опубл. 1829—30) показал, что допущение постулата, отличного от постулата Евклида, позволяет построить более общую, чем евклидова, Л. г. Независимо от Н. И. Лобачевского к этому открытию пришел Я. Больяй (J. Bolyai, 1832). Не получив открытой поддержки у К. Гаусса (C. Gauss), Я. Больяй не продолжил своих исследований.

К. Гаусс разрабатывал начала новой геометрии в значительно более ранние годы, но он не публиковал этих исследований и никогда не высказывался открыто об этих идеях. Однако в частной переписке он высоко оценил труды Я. Больяй и Н. И. Лобачевского, но открыто в печати все-таки не высказался.

Приложения геометрии Лобачевского. Н. И. Лобачевский уже в первой работе по Л. г. показал, опираясь на впервые измеренные астрономами в те годы годичные параллаксы звезд, что если в физич. пространстве реализуется его геометрия, то в пределах Солнечной системы отклонения от евклидовой геометрии будут на несколько порядков меньше возможных ошибок измерений. Таким образом, первым приложением Л. г. явилось обоснование практич. точности евклидовой геометрии.

Н. И. Лобачевский применял свою геометрию в математич. анализе. Переходя от одной системы координат к другой в своем пространстве, он нашел значения около 200 различных определенных интегралов. Др. математич. приложения были найдены А. Пуанкаре (1882), к-рый успешно применял Л. г. при разработке теории автоморфных функций.

Значение Л. г. для космологии было выявлено А. А. Фридманом. В 1922 он нашел решение уравнения Эйнштейна, из к-рого следовало, что Вселенная расширяется с течением времени. Это заключение впоследствии было подтверждено наблюдениями Э. Хаббла (E. Hubble, 1929), обнаружившего разбегание удаленных туманностей. Метрика, найденная А. А. Фридма-

ном, дает при фиксированном времени пространство Лобачевского. Пространство скоростей специальной теории относительности является пространством Лобачевского.

Л. г. с успехом используется при изучении столкновений элементарных частиц и при разработке др. вопросов ядерных исследований.

Зрительное (перцептивное) восприятие близких областей пространства человеком порождает эффект обратной перспективы, объясняемый тем, что геометрия этих областей перцептивного пространства близка к Л. г. с радиусом кривизны около 15 *м*.

Создание Л. г. явилось важным этапом в развитии учения о возможных свойствах пространства. Особенное значение это имело для оснований математики, т. к. принципы современного аксиоматич. метода вырабатывались в значительной степени благодаря появлению Л. г.

Лит.: [1] Лобачевский Н. И., Полн. собр. соч., т. 1—5, М.— Л., 1946—51; [2] Больаи Я., Appendix, пер. с латин., М.— Л., 1950; [3] Александров А. Д., Абстрактные пространства, в кн.: Математика, ее содержание, методы и значение, т. 3, М., 1956; [4] Егоров И. П., Введение в неевклидовы геометрии, Пенза, 1972; [5] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [6] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.— Л., 1949; [7] Лаптев Б. Л., Николай Иванович Лобачевский, Казань, 1976; [8] Норден А. П., Элементарное введение в геометрию Лобачевского, М., 1953; [9] Нут Ю. Ю., Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении, М., 1961; [10] Рашенбах Б. В., Пространственные построения в древнерусской живописи, М., 1975; [11] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969; [12] Широков П. А., Краткий очерк основ геометрии Лобачевского, Казань, 1964.

Б. Л. Лаптев.

ЛОБАЧЕВСКОГО МЕТОД, метод Греффе, метод Данделена,— метод для одновременного вычисления всех корней многочлена. Пусть корни $r_1, r_2, \ldots, r_n$ многочлена

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = a_0 (z - r_1)(z - r_2) \ldots (z - r_n), \quad a_0 \neq 0, \qquad (1)$$

удовлетворяют неравенствам

$$|r_1| \geqslant |r_2| \geqslant \ldots \geqslant |r_n|. \qquad (2)$$

В качестве приближений к корням могут быть взяты отношения a_i/a_{i-1}, $i=1, \ldots, n$.

Пусть теперь корни $f(z)$, хотя и не выполнено (2), все же различны по абсолютной величине. Л. м. заключается в применении к уравнению $f(z)=0$ процесса квадрирования, к-рый при достаточном числе повторений приводит к уравнению с корнями, удовлетворяющими условиям (2). Квадрирование состоит в переходе от очередного многочлена $f_k(z)$ к многочлену $f_{k+1}(z)$ той же степени, корни к-рого равны квадратам корней $f_k(z)$. Переход выполняется по рекуррентным формулам.

Применение Л. м. возможно и при наличии групп равных по абсолютной величине корней, хотя это приводит к осложнениям в логике и формулах метода. Достоинством метода является то, что не требуется знания начальных приближений к корням многочлена. В случае различных по абсолютной величине корней скорость сходимости процесса асимптотически квадратичная.

Л. м. является, однако, численно неустойчивым, т. к. процесс квадрирования приводит к очень быстрому накоплению вычислительной погрешности. В связи с этим предпринимались попытки придать Л. м. самоисправляющуюся форму. Так, напр., для вычисления корней многочлена (1) строится последовательность многочленов $g_k(z)$ степени $\leqslant n-1$, связанных соотношениями

$$g_{k+1}(z) = z g_k(z) - \varphi_k f(z), \quad k=0, 1, \ldots; \; g_0(z) \equiv 1;$$

отсюда

$$g_k(z) = z^k \pmod{f(z)}.$$

При каждом фиксированном k ищутся многочлены $g_{k,\,p}(z)$, определяемые следующим образом:

$$g_{k,\,1}(z) = g_k(z);$$

для $p \geqslant 2$ $g_{k,\,p}(z)$ есть многочлен вида

$$\psi_{p-2}(z)\, f(z) + \varphi_{p-1}(z)\, g_k(z),$$

имеющий степень $\leqslant n-p$. Если корни многочлена $f(z)$ удовлетворяют неравенствам

$$|r_1| \geqslant |r_2| \geqslant \ldots \geqslant |r_p| > |r_{p+1}| \geqslant \ldots \geqslant |r_n|,$$

то

$$\lim_{k \to \infty} g^{*}_{k,\,p} = f^{*}(z)/(z-r_1)(z-r_2)\ldots(z-r_p),$$

где $f^{*}(z)$ — многочлен $f(z)$, нормированный делением на коэффициент при старшем члене. Таким образом, из исходного многочлена выделяются множители, соответствующие группам равных по абсолютной величине корней (см. [3]). Л. м. предложен Н. И. Лобачевским в 1834 (см. [1]).

Лит.: [1] Лобачевский Н. И., Полн. собр. соч., т. 4, М.— Л., 1948; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [3] Sebastião e Silva J., «Portug. Math.», 1941, № 2, p. 271—79; [4] Householder A. S., Stewart G. W., «SIAM Rev.», 1971, v. 13, p. 38—46.

Х. Д. Икрамов.

ЛОБАЧЕВСКОГО ПРИЗНАК сходимости: числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными и монотонно стремящимися к нулю членами сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m},$$

где p_m — наибольший из номеров членов a_n, удовлетворяющих неравенству $a_n \geqslant 2^{-m}$, $n=1, 2, \ldots, p_m$.

Предложен Н. И. Лобачевским (1834—36).

В. И. Битюцков.

ЛОБАЧЕВСКОГО ПРОСТРАНСТВО — пространство, геометрия к-рого определяется аксиомами *Лобачевского геометрии*. В более широком смысле Л. п. понимается как неевклидово гиперболич. пространство, определение к-рого связано с понятиями геометрии *псевдоевклидова пространства*. Пусть ${}^{n}R_{n+1}$ — псевдоевклидово $(n+1)$-пространство индекса n; на n-сфере этого пространства рассматривается множество пар диаметрально *противоположных точек*. Множество элементов, изометричное множеству пар указанных выше точек n-сферы пространства ${}^{n}R_{n+1}$, наз. n-пространством Лобачевского и обозначается ${}^{1}S_n$. Такое определение Л. п. позволяет включить это пространство в проективную классификацию неевклидовых пространств. Пространство ${}^{1}S_n$ в проективном пространстве P_n изображается внутренней областью овальной $(n-1)$-квадрики, к-рая является пересечением n-сферы мнимого радиуса с бесконечно удаленной *плоскостью* пространства ${}^{n}R_{n+1}$, дополняющей это пространство до проективного пространства P_{n+1}. Точки овальной $(n-1)$-квадрики являются бесконечно удаленными точками пространства ${}^{1}S_n$, т. е. квадрика является *абсолютом* этого пространства. Внешняя область квадрики, дополняющая пространство ${}^{1}S_n$ до полного пространства P_n, наз. идеальной областью пространства ${}^{1}S_n$. Указанная интерпретация наз. проективной интерпретацией Кэли — Клейна. Она может быть получена также путем проектирования n-сферы мнимого радиуса пространства ${}^{n}R_{n+1}$ из ее центра на касательную n-плоскость, к-рая является евклидовым n-пространством; при этом пространство ${}^{1}S_n$ изображается внутренней областью n-шара в этой n-плоскости, граница n-шара является абсолютом пространства ${}^{1}S_n$ (иногда последнюю интерпретацию пространства ${}^{1}S_n$ в евклидовом пространстве R_n наз.

интерпретацией Бельтрами — Клейна).

Проективная интерпретация 3-пространства Лобачевского позволяет проверить выполнение аксиом геометрии Лобачевского, дать изображение всех фигур этой геометрии и установить их свойства. В частности, в указанной интерпретации просто устанавливаются геометрич. свойства 2-плоскости Лобачевского, вытекающие из аксиом геометрии Лобачевского.

Присоединением к пространству ${}^1S_n$ точек абсолюта и точек идеальной области определяется расширенное Л. п. m-плоскость, $m<n$, пересекающаяся с абсолютом, наз. собственной m-плоскостью; не пересекающая абсолюта — идеальной m-плоскостью; m-плоскость, касающаяся абсолюта,— изотропной m-плоскостью. Таким же образом классифицируются прямые пространства ${}^1S_n$. Полюсы собственных плоскостей являются идеальными точками, а собственные точки — полюсами идеальных плоскостей. Вообще, полярные $(n-m-1)$-плоскости собственных m-плоскостей Л. п. ${}^1S_n$ суть идеальные $(n-m-1)$-плоскости, и полярные $(n-m-1)$-плоскости идеальных m-плоскостей — собственные $(n-m-1)$-плоскости.

В пространстве ${}^1S_n$ в качестве координат точки X можно рассматривать координаты вектора $\boldsymbol{x}$ этой точки в пространстве ${}^nR_{n+1}$, принадлежащей n-сфере мнимого радиуса. Координаты вектора $\boldsymbol{x}$ *(Вейерштрасса координаты)* при этом должны удовлетворять условию

$$-(x^0)^2+\sum\nolimits_i (x^i)^2=-1, \quad i>0.$$

Используются также координаты Бельтрами

$$X^i=\frac{x^i}{x_0}, \quad i>0,$$

причем $\sum_i (X^i)^2<1$. В пространстве ${}^1S_n$ вводятся декартовы координаты $u^1, u^2, \ldots, u^n$, связанные с координатами x^i соотношениями

$$x^0=\operatorname{ch}\frac{u^1}{\sigma}\operatorname{ch}\frac{u^2}{\sigma}\ldots\operatorname{ch}\frac{u^n}{\sigma},$$

$$x^1=\operatorname{sh}\frac{u^1}{\sigma}\operatorname{ch}\frac{u^2}{\sigma}\ldots\operatorname{ch}\frac{u^n}{\sigma},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^i=\operatorname{sh}\frac{u^i}{\sigma}\operatorname{ch}\frac{u^{i+1}}{\sigma}\ldots\operatorname{ch}\frac{u^n}{\sigma},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^n=\operatorname{sh}\frac{u^n}{\sigma},$$

где $i\sigma$, $i^2=-1$,— радиус кривизны пространства ${}^1S_n$.

Расстояние δ между точками X и Y определяется соотношением

$$\operatorname{ch}\frac{\delta}{\sigma}=\frac{|\boldsymbol{x}E\boldsymbol{y}|}{\sigma^2},$$

где $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ — определенные выше векторы точек X и Y, E — линейный оператор, определяющий скалярное произведение в пространстве этих векторов.

Угол между двумя плоскостями Л. п. ${}^1S_n$ совпадает с углом между n-плоскостями псевдоевклидова пространства ${}^nR_{n+1}$, соответствующим этим плоскостям. Угол φ между плоскостями связан с расстоянием δ между полюсами этих плоскостей соотношением

$$\delta=\varphi\sigma i,$$

когда угол φ — действительный, а δ — чисто мнимое, и

$$\varphi=\frac{\delta}{\sigma}i,$$

когда угол φ — чисто мнимый, а расстояние δ — действительное.

Расстояние между точками и величины углов между плоскостями допускают выражения через двойное отношение точек с помощью точек абсолюта.

В Л. п. ${}^1S_n$ определяются сферы (шары), эквидистантные поверхности, орисферы (орициклы при $n=2$), m-симплексы и т. д.

Классификация движений Л. п. ${}^1S_n$ как коллинеаций, переводящих точки абсолюта (овальной квадрики) в себя, сводится к классификации вращений псевдоевклидова пространства ${}^nR_{n+1}$. Группа движений пространства ${}^1S_n$ изоморфна факторгруппе группы вращений пространства ${}^nR_{n+1}$ по ее подгруппе, состоящей из тождественного преобразования и отражения от точки; состоит из двух связных компонент, является группой Ли. Движения Л. п. ${}^1S_n$ описываются псевдоортогональными операторами индекса n. Для задания движения пространства ${}^1S_n$ достаточно указать, в какие точки переходят $n+1$ точек, не лежащих в одной $(n-1)$-плоскости.

Существует ряд конформных интерпретаций Л. п., одной из к-рых является *Пуанкаре интерпретация*. Возможна также конформная интерпретация пространства на его плоскости. Кроме указанных существуют интерпретации в комплексных пространствах. В частности, для пространства ${}^1S_3$ строятся *Котельникова интерпретации* многообразий прямых.

С помощью проективных интерпретаций наиболее полным образом классифицируются квадрики в пространстве ${}^1S_n$ и, в частности, на 2-плоскости ${}^1S_2$.

Пространство ${}^1S_n$ является римановым n-пространством постоянной отрицательной кривизны $-1/\sigma^2$, где σi — радиус кривизны пространства. Геометрия Л. п. в достаточно малых окрестностях точек близка к геометрии евклидова пространства такой же размерности.

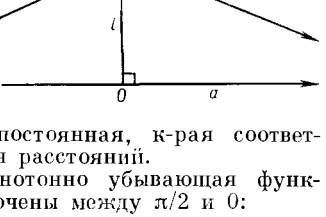
В целом пространство ${}^1S_n$ гомеоморфно пространству R_n, оно бесконечно простирается во всех направлениях. Всякая m-плоскость пространства ${}^1S_n$, $m<n$, является пространством ${}^1S_m$. Кроме того, прямые линии пространства ${}^1S_n$ являются его геодезич. линиями, а m-плоскости — вполне геодезич. m-поверхностями этого пространства.

В проективной классификации метрик неевклидовых пространств Л. п. также классифицируется по метрикам прямых, пучков плоскостей и m-плоскостей. В частности, на 2-плоскости Л. п. проективная метрика на прямой является гиперболической, а в пучках прямых — эллиптической.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [2] Клейн Ф., Неевклидова геометрия, пер. с нем., М.— Л., 1936; [3] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1—2, М.— Л., 1949—56; [4] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров.

ЛОБАЧЕВСКОГО ФУНКЦИЯ — 1) Угол параллельности в *Лобачевского геометрии* — функция, выражающая угол α между прямой u_1 (или u_2) (см. рис.) и отрезком OA, перпендикулярным к прямой a, параллельной u_1 (или u_2), через длину l отрезка OA:



$$\alpha=\Pi(l)=2\operatorname{arctg} e^{-l/R},$$

где R — положительная постоянная, к-рая соответствует масштабу измерения расстояний.

Л. ф.— непрерывная монотонно убывающая функция, значения к-рой заключены между $\pi/2$ и 0:

$$\lim_{l\to 0}\Pi(l)=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{l\to\infty}\Pi(l)=0.$$

Л. ф. введена Н. И. Лобачевским в 1826.

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.— Л., 1949; [2] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978.

2) Специальная функция, определяемая для действительного x равенством

$$L(x) = -\int_0^x \ln\cos t\, dt.$$

Л. ф. представляется в виде ряда

$$L(x) = x\ln 2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin 2kx}{k^2}.$$

Основные соотношения:

$$L(-x) = -L(x), \quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2,$$
$$L(\pi - x) = \pi\ln 2 - L(x),$$
$$L(\pi + x) = \pi\ln 2 + L(x).$$

Л.ф. введена Н. И. Лобачевским в 1829.

Лит.: [1] Рыжик И. М., Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 3 изд., М.— Л., 1951. *А. Б. Иванов.*

ЛОГАРИФМ числа N по основанию a — показатель степени m, в к-рую следует возвести число a (основание Л.), чтобы получить N; обозначается $\log_a N$, т. е. $m = \log_a N$, если $a^m = N$. Каждому положительному числу соответствует при данном основании единственный действительный Л. (Л. отрицательных чисел являются комплексными числами). Основные свойства Л.:

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N,$$
$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N,$$
$$\log_a N^k = k\log_a N,$$
$$\log_a \sqrt[k]{N} = \frac{1}{k}\log_a N$$

позволяют сводить умножение и деление чисел к сложению и вычитанию их Л., а возведение в степень и извлечение корня — к умножению и делению Л. на показатель степени или корня.

В соответствии с десятичным характером счета наиболее употребительны десятичные Л. ($a=10$), обозначаемые $\lg N$. Для рациональных чисел, отличных от 10^k с целым k, десятичные Л. суть трансцендентные числа, к-рые приближенно выражают в конечных десятичных дробях. Целую часть десятичного Л. наз. характеристикой, дробную — мантиссой. Так как $\lg(10^k N) = k + \lg N$, то десятичные Л. чисел, отличающихся множителем 10^k, имеют одинаковые мантиссы и различаются лишь характеристиками. Это свойство лежит в основе построения таблиц Л., к-рые содержат лишь мантиссы Л. целых чисел.

Большое значение имеют также натуральные Л., основанием к-рых служит трансцендентное число $e = 2{,}71828\ldots$; их обозначают $\ln N$. Переход от одного основания Л. к другому совершается по формуле $\log_b N = \log_a N / \log_a b$, множитель $1/\log_a b$ наз. модулем перехода (перевода) от основания a к основанию b. Формулы перехода от натуральных Л. к десятичным или обратно:

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e}, \quad \lg N = \frac{\ln N}{\ln 10},$$

$$\frac{1}{\lg e} = 2{,}30258\ldots, \quad \frac{1}{\ln 10} = 0{,}43429\ldots$$

См. также *Логарифмическая функция.*

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ БУМАГА — специальным образом разграфленная бумага; обычно изготовляется типографским способом (рис. 1): на каждой из осей прямоугольной системы координат откладываются де-

сятичные логарифмы чисел u (на оси абсцисс) и v (на оси ординат); затем через найденные точки (u, v) проводятся прямые, параллельные осям. Наряду с Л. б. применяется полулогарифмическая бумага (рис. 2): на одной из осей прямоугольной системы координат откладываются числа u, а на другой — десятичные логарифмы чисел v. Л. б. и полулогарифмич.

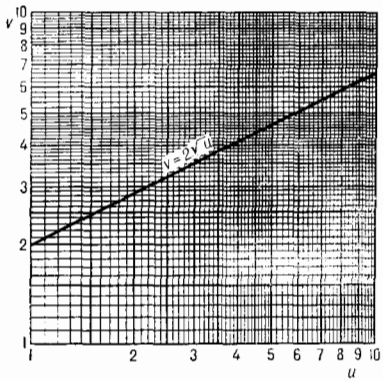


Рис. 1.

бумага служат для вычерчивания на них графиков функций, к-рые могут принимать более простую и наглядную форму и в ряде случаев выпрямляются. На Л. б. прямыми линиями изображаются функции,

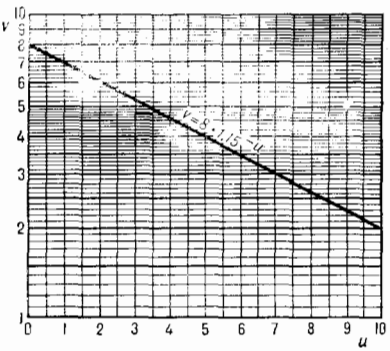


Рис. 2.

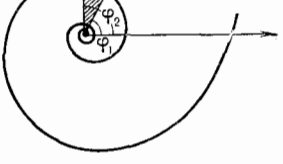
заданные уравнениями вида $v=au^b$, $u>0$, где $a>0$ и b — постоянные коэффициенты; на полулогарифмич. бумаге прямыми линиями изображаются функции, заданные уравнениями вида $v=ab^u$. *БСЭ-3.*

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ — см. в ст. *Емкость.*

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — производная от логарифма данной функции.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ — плоская трансцендентная кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид

$$\rho = a^{\varphi}, \quad a > 0.$$



При $a>1$ и $\varphi \to +\infty$ Л. с. развертывается против хода часовой стрелки, при $\varphi \to -\infty$ спираль закручивается по ходу часовой стрелки, стремясь к своей асимптотич. точке O (см. рис.). Если $a<1$, Л. с. закручивается против хода часовой стрелки. Угол, составляемый касательной в произвольной точке Л. с. с радиус-вектором точки касания, зависит лишь от параметра a.

Длина дуги между точками $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $M_2(\rho_2, \varphi_2)$:

$$l = \rho_2 \frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a} - \rho_1 \frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a}.$$

Радиус кривизны: $r = \rho\sqrt{1+\ln^2 a}$. Натуральное уравнение: $s = kr$, где $k = 1/\ln a$. Л. с. переходит в себя при линейных преобразованиях плоскости. Л. с. относится к т. н. псевдоспиралям (см. *Спирали*).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ТОЧКА ВЕТВЛЕНИЯ, точка ветвления бесконечного порядка,— частный вид *ветвления точки a* аналитич. функции $f(z)$ одного комплексного переменного z, когда ни при каком числе последовательных обходов в одном и том же направлении вокруг a аналитич. продолжение нек-рого элемента функции $f(z)$ не приводит к исходному элементу. Точнее, изолированная особая точка a наз. Л. т. в. для $f(z)$, если существуют: 1) кольцо $V = \{z: 0 < |z-a| < \rho\}$, в к-ром $f(z)$ аналитически продолжается по любому пути, 2) точка $z_1 \in V$ и какой-либо элемент функции $f(z)$ в виде степенного ряда $\Pi(z_1; r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z-z_1)^\nu$ с центром z_1 и радиусом сходимости $r>0$, аналитич. продолжение к-рого вдоль окружности $|z-a| = |z_1-a|$, проходимой сколько угодно раз в одном и том же направлении, никогда не приводит к исходному элементу $\Pi(z_1; r)$. В случае бесконечно удаленной Л. т. в. $a=\infty$ вместо V следует рассматривать окрестность $V' = \{z: |z| > \rho\}$. Л. т. в. относятся к классу *трансцендентных точек ветвления*. Поведение римановой поверхности R функции $f(z)$ при наличии Л. т. в. a характеризуется тем, что над a соединяются вместе бесконечно много листов той ветви R, к-рая определяется в V или V' элементом $\Pi(z_1; r)$.

См. также *Особая точка аналитической функции.*

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 8.

Е. Д. Соломенцев.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция, обратная к показательной функции. Л. ф. обозначается

$$y = \ln x; \qquad (1)$$

ее значение y, соответствующее значению аргумента x, наз. натуральным логарифмом числа x. В силу определения соотношение (1) равносильно

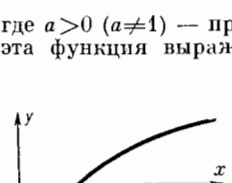
$$x = e^y. \qquad (2)$$

Так как $e^y > 0$ при любом действительном y, то Л. ф. определена только при $x>0$. В более общем смысле Л. ф. наз. функцию

$$y = \log_a x,$$

где $a>0$ ($a \neq 1$) — произвольное основание логарифмов; эта функция выражается через $\ln x$ по формуле:

$$\log_a x = M \ln x,$$



где $M = 1/\ln a$. Л. ф.— одна из основных элементарных функций; ее график (см. рис.) носит название логарифмики. Основные свойства Л. ф. вытекают из соответствующих свойств показательной функции и логарифмов; напр., Л. ф. удовлетворяет функциональному уравнению

$$\ln x + \ln y = \ln xy.$$

Л. ф. $y = \ln x$ является строго возрастающей функцией, причем $\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$. В каждой точке $x>0$ Л. ф. имеет производные всех порядков и в достаточно малой ее окрестности раскладывается в степенной ряд, т. е. является *аналитической функцией*.

Для $-1<x\leqslant 1$ справедливо разложение Л. ф. в степенной ряд:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots .$$

Производная Л. ф.:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},\quad (\log_a x)'=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\ln x}.$$

Многие интегралы выражаются через Л. ф.; напр.:

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)+C.$$

Впервые зависимость между переменными величинами, выражаемая Л. ф., рассматривалась Дж. Непером (J. Napier, 1614).

Л. ф. на комплексной плоскости является многозначной (бесконечнозначной) функцией, определенной при всех значениях аргумента $z\neq 0$, и обозначается $\ln z$. Однозначная ветвь этой функции, определяемая как

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z,$$

где $\arg z$ — главное значение аргумента комплексного числа z, $-\pi<\arg z\leqslant\pi$, носит название г л а в н о г о з н а ч е н и я Л. ф. Имеем

$$\operatorname{Ln} z=\ln z+2k\pi i,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\pm\dots$$

Все значения Л. ф. для отрицательных действительных z являются комплексными числами. Первая удовлетворительная теория Л. ф. в комплексной плоскости была дана Л. Эйлером (L.Euler, 1749), к-рый исходил из определения

$$\operatorname{Ln} z=\lim_{n\to\infty} n\,(z^{1/n}-1).$$

Лит.: [1] Н и к о л ь с к и й С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975; [2] М а р к у ш е в и ч А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967. *БСЭ-3.*

ЛОГАРИФМИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное, сосредоточенное на $(0,\infty)$ распределение вероятностей с плотностью

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\log e}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\,e^{-(\log x-a)^2/2\sigma^2}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\qquad (*)$$

где $-\infty<a<\infty$, $\sigma^2>0$. Случайная величина X подчиняется Л. н. р. с плотностью (*), если ее логарифм $\log X$ имеет *нормальное распределение* с параметрами a и σ^2. Таким образом, $a=\mathsf{E}\log X$ и $\sigma^2=\mathsf{D}\log X$. Л. н. р. является унимодальным распределением и имеет положительную асимметрию. Моменты случайной величины X с Л. н. р. с параметрами a и σ^2 выражаются формулой

$$\mathsf{E}X^k=e^{ka+k^2\sigma^2/2},$$

поэтому математич. ожидание и дисперсия равны соответственно

$$\mathsf{E}X=e^{a+\sigma^2/2}\ \text{ и }\ \mathsf{D}X=e^{2a+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right).$$

Л. н. р. служит одним из простейших примеров распределения, к-рое не определяется однозначно своими моментами. Свойства Л. н. р. определяются свойствами соответствующего нормального распределения. Важнейшее свойство Л. н. р.: произведение независимых случайных величин с Л. н. р. снова подчиняется Л. н. р. Имеет место аналог центральной предельной теоремы: распределение произведения n независимых положительных случайных величин при нек-рых общих условиях стремится к Л. н. р. при $n\to\infty$. Л. н. р. возникает как предельное распределение и в нек-рых других схемах (напр., в моделях дробления частиц, моделях роста и т. д.).

Лит.: [1] К о л м о г о р о в А. Н., «Докл. АН СССР», 1941, т. 31, № 2, с. 99—101; [2] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] A i t c h i s o n J., B r o w n J. A. C., The lognormal distribution, Camb., 1957.

А. В. Прохоров.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИ СУБГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — положительная функция $u(x)$ в области евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, логарифм к-рой $\log u(x)$ является *субгармонической функцией*. Напр., модуль $|f(z)|$ аналитич. функции комплексного переменного $f(z)$ является Л. с.ф., но существуют непрерывные Л. с.ф. в плоских областях, к-рые нельзя представить в виде модуля никакой аналитич. функции. Л. с. ф. составляют подкласс сильно субгармонич. функций. При $n=1$ им соответствуют логарифмически выпуклые функции.

Основное свойство Л. с.ф. состоит в том, что не только произведение, но и положительная линейная комбинация нескольких Л. с.ф. также является Л. с.ф.

Лит.: [1] Привалов И. И., Субгармонические функции, М.—Л., 1937, гл. 3.

Е. Д. Соломенцев.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ВЫЧЕТ мероморфной функции $w=f(z)$ в точке a расширенной плоскости комплексного переменного z — вычет

$$\operatorname{res}_a [f'(z)/f(z)]$$

логарифмич. производной $f'(z)/f(z)$ в точке a. Представив функцию $\ln f(z)$ в окрестности $V(a)$ точки $a\neq\infty$ в виде $\ln f(z)=A\ln(z-a)+\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — регулярная функция в $V(a)$, получают

$$\operatorname{res}_a [f'(z)/f(z)]=A.$$

Соответствующие формулы для случая $a=\infty$ имеют вид

$$\ln f(z)=A\ln(1/z)+\varphi(z),$$
$$\operatorname{res}_\infty [f'(z)/f(z)]=A.$$

Если a — нуль кратности m функции $f(z)$ или полюс кратности m, то Л. в. $f(z)$ в точке a равен соответственно m или $-m$; во всех остальных точках Л. в. равен нулю.

Если $f(z)$ — мероморфная функция в области D и Γ — спрямляемая жорданова кривая, расположенная в D и не проходящая ни через нули, ни через полюсы $f(z)$, то Л. в. функции $f(z)$ относительно контура Γ наз. интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=N-P, \qquad (1)$$

к-рый равен разности между числом нулей N функции $f(z)$ и числом полюсов P внутри Γ (с учетом их кратности). Геометрич. смысл формулы (1) состоит в том, что при обходе контура Γ в положительном направлении вектор $w=f(z)$ делает $N-P$ оборотов вокруг начала координат $w=0$ плоскости переменного w (см. *Аргумента принцип*). В частности, если $f(z)$ регулярна в D, т. е. $P=0$, из (1) получается формула для вычисления индекса точки $w=0$ относительно образа $\Gamma^*=f(\Gamma)$ пути Γ при помощи Л. в.:

$$\operatorname{ind}_0 \Gamma^*=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz. \qquad (2)$$

Формула (2) приводит к обобщению понятия Л. в. для регулярных функций многих комплексных переменных в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$. Пусть $w=f(z)=(f_1,\ldots,f_n)$: $D\to\mathbb{C}^n$ — голоморфное отображение такое, что якобиан $J_f(z)\not\equiv 0$ и множество нулей $E=f^{-1}(0)$ изолировано в D. Тогда для любой области $G\subset\overline{G}\subset D$, ограниченной простой гладкой замкнутой поверхностью Γ, не проходящей через нули f, имеем формулу для индекса точки $w=0$ относительно образа $\Gamma^*=f(\Gamma)$:

$$\operatorname{ind}_0 \Gamma^*=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{df_1\wedge\ldots\wedge df_n}{f_1\ldots f_n}=N, \qquad (3)$$

где интегрирование производится по n-мерному остову $\Gamma_\varepsilon=\{z\in G\colon |f_\nu(z)|=\varepsilon,\ \nu=1,\ldots,n\}$ при достаточно ма-

лом $\varepsilon>0$. Интеграл в формуле (3) выражает также сумму кратностей нулей отображения f в G (см. [2]).

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования числовых рядов. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ с частичными суммами s_n суммируем логарифмическим методом к сумме s, если логарифмические средние

$$\sigma_m = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1}} \left(s_0 + \frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{3} + \ldots + \frac{s_m}{m+1} \right)$$

при $m \to \infty$ сходятся к s. Л. м. с. есть *Рисса метод суммирования* (R, p_n) с $p_n = 1/(n+1)$. Он равносилен и совместен с методом суммирования Рисса $(R, \lambda, 1)$ при $\lambda_n = \ln(n+1)$ и сильнее *средних арифметических метода суммирования*.

Лит.: [1] Riesz M., «C. r. Acad. sci.», 1909, t. 149, p. 18—21; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951. *И. И. Волков.*

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ — потенциал с логарифмическим ядром $\ln \frac{1}{|x-y|}$, где $|x-y|$ — расстояние между точками x и y евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, т. е. потенциал вида

$$u(x) = \int \ln \frac{1}{|x-y|} \, d\mu(y), \qquad (1)$$

где интегрирование производится, вообще говоря, по произвольной борелевской мере μ на $\mathbb{R}^2$ с компактным носителем $S = S(\mu)$. Физически можно представить, что Л. п. возникает из *ньютонова потенциала* сил тяготения, когда распределение притягивающих масс в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ точек $y = (y_1, y_2, y_3)$ не зависит, напр., от координаты y_3. Общая масса при этом, разумеется, бесконечна, но если произвести регуляризацию получающейся силы притяжения F, к-рую можно считать действующей в плоскости $(x_1, x_2, 0)$, состоящую в отбрасывании бесконечного слагаемого, то потенциал конечной части силы F будет иметь как раз вид (1) (см. [2]). В отличие от ньютонова, логарифмич. ядро имеет особенность не только при $|x-y| \to 0$, но и при $|x-y| \to \infty$, что обусловливает нек-рые отличия в поведении Л. п. по сравнению с ньютоновым. Они проявляются главным образом при решении внешних краевых задач (см. *Внешняя и внутренняя краевые задачи*). Основные применения Л. п. находит при решении плоских *краевых задач* теории потенциала (см. также *Краевая задача* для эллиптического уравнения).

Основные свойства Л. п.: 1) вне носителя S меры μ Л. п. является регулярным решением *Лапласа уравнения* $\Delta u = 0$, т. е. $u(x)$ — гармонич. функция на открытом множестве $\mathbb{R}^2 \setminus S$, не регулярная, однако, на бесконечности; 2) если мера μ абсолютно непрерывна, т. е. интеграл (1) принимает вид

$$u(x) = \int_D \ln \frac{1}{|x-y|} f(y) \, d\sigma(y), \qquad (2)$$

где D — конечная область, $d\sigma(y)$ — элемент площади D и плотность $f(y)$ принадлежит классу $C^1(D \cup \partial D)$, то вторые производные $u(x)$ непрерывны в D и удовлетворяют *Пуассона уравнению* $\Delta u = -2\pi f(y)$.

Если интеграл в (2) распространен по замкнутой кривой Ляпунова L (см. *Ляпунова поверхности и кривые*), т. е.

$$u(x) = \int_L f(y) \ln \frac{1}{|x-y|} \, ds(y), \qquad (3)$$

то говорят о логарифмическом потенциале простого слоя, распределенного на L. Если при этом $f(y) \in C^1(L)$, то Л. п. простого слоя (3)

непрерывен всюду в $\mathbb{R}^2$. Его нормальная производная имеет пределы изнутри и извне L соответственно:

$$\lim_{x \to y_0} \frac{du}{dn_0}\Big|_i = \frac{du(y_0)}{dn_0} + \pi f(y_0),$$

$$\lim_{x \to y_0} \frac{du}{dn_0}\Big|_e = \frac{du(y_0)}{dn_0} - \pi f(y_0),$$

где

$$\frac{du(y_0)}{dn_0} = \int_L f(y) \frac{\cos(y-y_0, n_0)}{|y-y_0|}\, ds(y), \quad y_0 \in L, \qquad (4)$$

— т. н. прямое значение нормальной производной Л. п. простого слоя, $(y-y_0, n_0)$ — угол между вектором $y-y_0$ и внешней нормалью n_0 к L в точке $y_0 \in L$. Интеграл (4) непрерывен на L.

Логарифмический потенциал двойного слоя имеет вид

$$v(x) = \int_L g(y) \frac{\cos(y-x, n)}{|y-x|}\, ds(y), \qquad (5)$$

где n — внешняя нормаль к L в точке $y \in L$. Если $g(y) \in C^1(L)$, то Л. п. двойного слоя (5) является регулярной гармонич. функцией внутри и извне L и имеет пределы по нормали изнутри и извне L соответственно:

$$\lim_{x \to y_0} v(x)|_i = v(y_0) + \pi f(y_0),$$

$$\lim_{x \to y_0} v(x)|_e = v(y_0) - \pi f(y_0),$$

где

$$v(y_0) = \int_L g(y) \frac{\cos(y-y_0, n)}{|y-y_0|}\, ds(y), \quad y_0 \in L,$$

— прямое значение Л. п. двойного слоя в точке $y_0 \in L$. Нормальная производная Л. п. двойного слоя непрерывна при переходе через L.

Перечисленные граничные свойства Л. п. простого и двойного слоя вполне аналогичны соответствующим свойствам ньютонова потенциала (см. также *Потенциала теория*). Из выражения (5) видно, что Л. п. двойного слоя уже является регулярной на бесконечности гармонич. функцией.

Л. п. также непосредственно связан с *граничными задачами теории аналитических функций*, т. к. интеграл типа Коши выражается через Л. п. простого и двойного слоя (см. [3]).

Лит.: [1] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; [2] Вебстер А., Сеге Г., Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, пер. с нем., 2 изд., ч. 1—2, М.— Л., 1934; [3] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [4] La Vallée-Poussin Ch., Le potentiel logarithmique; balayage et représentation conforme, Louvain, 1949; [5] Evans G. C., The logarithmic potential, discontinuous. Dirichlet and Neumann problems, N. Y., 1927.

Е. Д. Соломенцев.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ: числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, сходится, если существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geqslant 1 + \alpha \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0,$$

и расходится, если

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant 1 \qquad \text{при} \quad n \geqslant n_0.$$

В. И. Битюцков.

ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ, прикладные исчисления,— формализации математич. теорий. Л.-м. и. задается своим языком и перечнем постулатов (эти элементы образуют *синтаксис*) и в большинстве случаев снабжается *семантикой*.

Существенными чертами, отличающими Л.-м. и. от аксиоматич. теорий традиционной математики, являются: 1) выявление используемых теорий логич. средств путем формулирования всех аксиом и *вывода правил*, позволяющих выводить одно суждение из другого; 2) переход от разговорного языка к точному *формальному языку*. Обычно Л.-м. и. строится на базе некрого *логического исчисления* (б а з и с н о г о л о г и ч е с к о г о и с ч и с л е н и я). Язык Л.-м. и. получается из языка этого логич. исчисления добавлением символов специальных функций и предикатов (и, быть может, удалением предикатных переменных и переменных для функций). Перечень постулатов Л.-м. и. получается путем добавления к перечню постулатов базисного логич. исчисления (понимаемых применительно к новому языку) нек-рых постулатов, описывающих свойства добавленных функций и предикатов. Напр., язык элементарной теории групп получается по этой схеме из языка классич. исчисления предикатов с равенством: добавляются символы $\cdot$ (умножение), inv (обращение) и e (единица), а выбрасываются все предикатные символы, кроме равенства. Дополнительный постулат

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (e\cdot x = x \,\&\, \mathrm{inv}\,(x)\cdot x = e \,\&\, (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z))$$

утверждает, что e — групповая единица, inv (x) — элемент, обратный к x, и умножение ассоциативно.

Л.-м.и., построенные на основе исчисления предикатов с равенством, служат для описания наиболее часто встречающихся математич. структур. Среди них *арифметика формальная*, формализованный анализ (с кванторами 1-го и 2-го порядков), *аксиоматические теории множеств* и т. д. Семантика Л.-м. и. задает интерпретацию переменных, математич. символов (символов предикатов и функций) и логич. операций. Этим определяются м о д е л и Л.-м. и. Из истинности формулы на любой модели, где истинны аксиомы нек-рого Л.-м. и., основанного на классич. исчислении предикатов с равенством, следует, в силу *Гёделя теоремы о полноте*, выводимость этой формулы в рассматриваемом Л.-м. и.

Простейшими по своей структуре являются б е с к в а н т о р н ы е Л.-м. и. Они употребляются чаще всего для описания свойств различных классов вычислимых функций. Язык бескванторного Л.-м. и. строится на основе языка исчисления высказываний с равенством или даже состоит из одних равенств. В первом случае логич. аппаратом Л.-м. и. служит классич. исчисление высказываний, во втором случае Л.-м. и. оформляется в виде исчисления равенств. Постулатами в обоих случаях считаются: 1) определяющие равенства рассматриваемых функций (напр., $x\cdot 0 = 0$, $x\cdot y' = x\cdot y + x$), 2) основные свойства равенства, 3) рассуждения методом математич. индукции (чаще всего по образцу «из $f(0) = g(0)$, $f(x') = h(x, f(x))$, $g(x') = h(x, g(x))$ можно вывести $f(x) = g(x)$»), 4) рассуждение, соответствующее $\forall$-удалению: «из $A(x)$ вывести $A(t)$» (правило подстановки вместо свободной предметной переменной). Пример — с и с т е м а П Р А (п р и м и т и в н о р е к у р с и в н а я а р и ф м е т и к а).

Предметные переменные ПРА (a), (aa), (aaa), . . .; функциональные переменные (f), (ff), (fff), . . .; натуральные числа 0, 0′, 0″, . . . Функциональные символы (функторы) строятся из исходных —′ («следующий за»), Z (тождественный 0), $[J, n, m]$ (m — местная функция, значение к-рой равно n-му аргументу), где n, m — натуральные числа, $n \leqslant m$, с помощью подстановки S и примитивной рекурсии R: если φ есть n-местный функтор, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ суть m-местные функторы, то $S[\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n]$ (результат подстановки $\psi_1, \ldots, \psi_n$ в φ) есть m-местный функтор; если φ есть n-местный функтор, ψ

есть $(n+2)$-местный функтор, то $R[\varphi, \psi]$ есть $(n+1)$-местный функтор [примитивная рекурсия:

$$R[\varphi, \psi](0, X) = \varphi(X); \quad R[\varphi, \psi](y', X) = \\ = \psi(y, X, R[\varphi, \psi](y, X))].$$

Термы ПРА: 0, предметные переменные и выражения вида s', $\varphi(s_1, \ldots, s_n)$, где s, $s_1, \ldots, s_n$ — термы, φ - функтор.

Формулы ПРА: $r=s$, где r, s — термы. Допустимые значения предметных переменных — натуральные числа, допустимые значения функциональных переменных — *примитивно рекурсивные функции* (иногда более широкие классы вычислимых функций).

При описании частичных (не всюду определенных) функций, кроме предиката равенства, появляется предикат $\uparrow$, или ! («определено»); $r=s$ интерпретируется в этом случае как «$!r \leftrightarrow !s$ и из $!r$ следует, что значение r равно значению s». Добавляются также средства для изображения функции, универсальной для рассматриваемого класса: либо символ для этой функции, либо правило: если t — терм, то $\langle t \rangle$ — функтор (номер к-рого в нек-рой заранее фиксированной нумерации рассматриваемого класса равен t). Постулаты $\forall$-удаления и $\exists$-введения модифицируются:

$$A(t) \,\&!\, t \longrightarrow \exists x A(x); \quad \forall x A(x) \,\&!\, t \longrightarrow A(t).$$

Добавляется аксиома $!t$, где t — предметная переменная или константа, а также аксиомы вида

$$!\varphi(t) \longrightarrow !t.$$

Употребляются также Л.-м. и. для описания вычислимых функционалов различных типов: 0 есть тип (объекты типа 0 — натуральные числа); если σ и τ — типы, то $(\sigma \to \tau)$ есть тип (операций, перерабатывающих объекты типа σ в объекты типа τ). Это — конечные типы (см. *Типов теория*). Рассматриваются также трансфинитные типы. Для каждого типа указываются переменные и константы этого типа, в их число обычно входит символ операции, все значения к-рой равны 0, а также объект $'$ типа $(0 \to 0)$. Для каждого σ в число констант типа $(\sigma \longrightarrow ((0 \longrightarrow (\sigma \longrightarrow \sigma)) \longrightarrow (0 \longrightarrow \sigma)))$ часто включают оператор примитивной рекурсии. Термами типа σ наз. переменные и константы типа σ, выражения вида $r(s)$, где r — терм типа $(\tau \to \sigma)$, s — терм типа τ, а также выражение вида $\lambda x r$, к-рое интерпретируется как обозначение функционала, перерабатывающего x в $r(x)$, где r типа β, x типа α и $\sigma = (\alpha \to \beta)$. Бескванторные Л.-м. и. для функционалов конечных типов используются для математич. изучения кванторных Л.-м. и. В частности, с помощью бескванторной системы примитивно рекурсивных функционалов удается доказать непротиворечивость формальной арифметики; добавление оператора т. н. бар-рекурсии позволяет доказать непротиворечивость формализованного анализа.

Важное свойство Л.-м. и.— д е д у к т и в н а я п о л н о т а: она означает, что каждая формула без свободных переменных выводима или опровержима. Из дедуктивной полноты Л.-м. и. следует разрешимость проблемы выводимости — существование алгоритма, позволяющего по каждой формуле узнать, выводима она или нет. Примером дедуктивно полного Л.-м. и. является теория алгебраически замкнутых полей (с и с т е м а Т а р с к о г о). Согласно *Гёделя теореме о неполноте* дедуктивно полные теории редки: всякое Л.-м. и., содержащее нек-рый весьма узкий фрагмент арифметики, дедуктивно неполно. Для еще более широкого класса Л.-м. и. проблема выводимости алгоритмически неразрешима.

Важная характеристика Л.-м. и.— его выразительная способность. Часто удается ввести выразительные

средства, не фигурирующие явно в языке рассматриваемого Л.-м. и. Так, в бескванторных языках удается ввести логич. связки и ограниченные кванторы:

$$x = y \;\&\; u = v \text{ означает } |x-y|+|u-v|=0,$$

$$\forall x_{\leqslant a}(f(x)=g(x)) \text{ означает } \sum_{x\leqslant a}|f(x)-g(x)|=0.$$

В языке формальной арифметики можно говорить о конечных множествах, частично рекурсивных функциях и т. д. Одни логич. связки выражаются через другие; так, в исчислениях 2-го порядка (в том числе основанных на интуиционистской логике) все связки выражаются через $\forall$ и $\rightarrow$, напр. $\exists x A(x)$ эквивалентно $\forall P(\forall x(Ax\rightarrow P)\rightarrow P)$. Принципиальные ограничения выразительной способности языка дает т е о р е м а Т а р с к о г о: при естественной нумерации формул языка, содержащего нек-рый минимум арифметики, невозможно указать формулу $T(x)$ этого языка такую, что $T(n)$ истинно тогда и только тогда, когда n — номер истинной формулы. Для Л.-м. и., основанных на конструктивной (интуиционистской) логике, часто имеет место теорема о «расщеплении» дизъюнкций: из выводимости замкнутой формулы $A\vee B$ следует выводимость одной из формул A, B. Для исследования структуры таких Л.-м. и. применяются различные аналоги понятия *реализуемости*. Вопросы непротиворечивости Л.-м. и., независимости отдельных постулатов, существования о т д е л е н н ы х а к с и о м а т и к (т. е. таких, что каждая выводимая формула A имеет вывод, использующий постулаты лишь для импликации и символов, входящих в A), существование интерпретаций одних Л.-м. и. в других исследуются в *доказательстве теории*.

Лит.: [1] Г и л ь б е р т Д., Б е р н а й с П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., М., 1979; [2] Н о в и к о в П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [3] К л и н и С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [4] Ч ё р ч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960; [5] Л и н д о н Р., Заметки по логике, пер. с англ., М., 1968.

Г. Е. Минц.

ЛОГИСТИКА — термин, употребляемый для обозначения систем логики, характеризующихся попыткой сведения логич. рассуждений к формальным вычислениям. В древности и в средние века термин «Л.» означал практич. операции арифметич. вычислений. Г. Лейбниц (G. Leibniz, кон. 17 в.) употреблял термин «Л.» для обозначения исчисления умозаключений. В нач. 20 в. под Л. понимали *математическую логику*.

В. Е. Плиско.

ЛОГИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей с функцией распределения $\psi(ax+b)$, где a — параметр масштаба, b — сдвига,

$$\psi(x)=(1+\exp(-x))^{-1}.$$

Функция $\psi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\psi}{dx}=\psi(1-\psi).$$

Л. р. близко к *нормальному распределению*:

$$\sup_x|\psi(1{,}7x)-\Phi(x)|<0{,}01,$$

где $\Phi(x)$ — функция нормального распределения с математич. ожиданием 0 и дисперсией 1. При проверке гипотезы о совпадении функций распределения двух выборок из Л. р. с альтернативой сдвига асимптотически оптимальным является *Вилкоксона критерий (Манна — Уитни критерий)*. Л. р. оказывается иногда более удобным, чем нормальное, при обработке данных и интерпретации выводов. В приложениях используется также многомерное Л. р.

Лит.: [1] К е н д а л л М. Д ж., С т ь ю а р т А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] К о к с Д. Р., Х и н к л и Д. В., Теоретическая статистика, пер. с англ., М., 1978.

А. И. Орлов.

ЛОГИЦИЗМ — одно из направлений в основаниях математики, ставящее целью обосновать математику путем сведения ее исходных понятий к понятиям логики. Мысль о сведении математики к логике высказывалась Г. Лейбницем (G. Leibniz, кон. 17 в.). Практическое осуществление логицистич. тезиса было предпринято в кон. 19 — нач. 20 вв. в работах Г. Фреге и Б. Рассела (см. [1], [2]). Взгляд на математику как на часть логики обусловлен тем, что любую математич. теорему в аксиоматич. системе можно рассматривать как нек-рое утверждение о логич. следовании. Остается только все встречающиеся в таких утверждениях константы определить через логич. термины. К концу 19 в. в математике различные виды чисел, включая комплексные, были определены в терминах натуральных чисел и операций над ними. Попытка сведения натуральных чисел к логич. понятиям была предпринята Г. Фреге. В интерпретации Г. Фреге натуральные числа были кардинальными числами нек-рых понятий. Однако система Фреге не свободна от противоречий. Это выяснилось, когда Б. Рассел обнаружил противоречие в канторовой теории множеств (*антиномия* Рассела), пытаясь свести ее к логике. Обнаруженное противоречие побудило Б. Рассела к пересмотру взглядов на логику, к-рую он сформулировал в виде разветвленной *типов теории*. Однако построение математики на основе теории типов потребовало принятия аксиом, к-рые неестественно считать чисто логическими. К ним относятся, напр., аксиома бесконечности, к-рая утверждает, что существует бесконечно много индивидов, т. е. объектов наинизшего типа. В целом попытка сведения математики к логике не удалась. Как показал К. Гёдель [3], никакая формализованная система логики не может быть адекватной базой математики.

Лит.: [1] Frege G., Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, Bd 1—2, Jena, 1893—1903; [2] Whitehead A. N., Russell B., Principia Mathematica, Camb., 1910; [3] Gödel K., «Monatsh. Math. und Phys.», 1931, Bd 38, S. 173—98; [4] Карри Х., Основания математической логики, пер. с англ., М., 1969; [5] Френкель А. А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966.

В. Е. Плиско.

ЛОГИЧЕСКАЯ АКСИОМА — формула логико-математич. языка, принимаемая в качестве аксиомы при построении формальной теории, истинная в любой структуре для данного языка в силу смысла логич. символов. Л. а. выбираются таким образом, чтобы множество *логических следствий* из аксиом в точности совпадало с множеством теорем. Так, при построении формализованной теории в нек-ром языке первого порядка L в качестве логич. аксиом могут быть выбраны все формулы, получающиеся подстановкой произвольных формул языка L вместо предикатных переменных в аксиомы исчисления предикатов.

Лит.: [1] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1971; [2] Шёнфилд Дж., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975.

В. Е. Плиско.

ЛОГИЧЕСКАЯ МАТРИЦА — система

$$\mathfrak{M}=\langle M;\ D,\ \&,\ \vee,\ \supset,\ \neg\rangle,$$

где M — непустое множество, $D\subseteq M$; $\&$, $\vee$, $\supset$ — двуместные, а $\neg$ — одноместная операции на M. Любую формулу логики высказываний, построенную из пропозициональных переменных $p_1, \ldots, p_n$ с помощью логич. связок $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, можно рассматривать как n-местную функцию на M, если $p_1, \ldots, p_n$ считать переменными с областью значений M, а логич. связки интерпретировать как соответствующие операции Л. м. $\mathfrak{M}$. Формула $\mathfrak{A}$ наз. общезначимой в $\mathfrak{M}$, если при любых значениях переменных в множестве M значение $\mathfrak{A}$ принадлежит D. Л. м. $\mathfrak{M}$ наз. характеристической для исчисления высказываний K, если в $\mathfrak{M}$ общезначимы те и только те формулы, к-рые

выводимы в K. Примером Л. м. может служить система

$$\langle\{0, 1\};\ \{1\},\ \&,\ \vee,\ \supset,\ \neg\rangle,$$

где

$$x \,\&\, y = \min\{x, y\},$$
$$x \vee y = \max\{x, y\},$$
$$x \supset y = \max\{1 - x, y\},$$
$$\neg x = 1 - x.$$

Эта Л. м. является характеристической для классич. исчисления высказываний. Как доказал К. Гёдель (K. Gödel), нельзя построить Л. м. с конечным множеством M, характеристическую для интуиционистского исчисления высказываний. *В. Е. Плиско.*

ЛОГИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ — способ построения сложного высказывания из данных высказываний, при к-ром *истинностное значение* сложного высказывания полностью определяется истинностными значениями исходных высказываний. Примерами Л. о. являются *конъюнкция*, *дизъюнкция*, *импликация*, *отрицание*. К Л. о. относятся также *кванторы*: они позволяют образовывать высказывания и высказывательные формы из данных высказывательных форм. *В. Е. Плиско.*

ЛОГИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА — выражение в языке формальной логики, являющееся аналогом предложения. Точное определение Л. ф. дается для каждого конкретного логич. языка. Как правило, определение формулы имеет индуктивный характер: выделяется класс выражений, называемых элементарными, или атомарными, формулами, и указываются правила, позволяющие из уже построенных формул строить новые формулы, используя символы *логических операций*. Напр., формулы логики высказываний определяются следующим образом. Всякая пропозициональная переменная есть (элементарная) формула. Если A и B — формулы, то выражения $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\neg A)$ — формулы. Формулы логики предикатов строятся из пропозициональных, предикатных и предметных переменных с использованием логич. связок, кванторов и вспомогательных символов (скобок и запятых). Элементарные формулы — это пропозициональные переменные и выражения вида $P(y_1, \ldots, y_n)$, где P есть n-местная предикатная переменная, $y_1, \ldots, y_n$ — предметные переменные. Формулы исчисления предикатов определяются следующим образом: а) всякая элементарная формула есть формула; б) если A и B — формулы, y — предметная переменная, то выражения $(\neg A)$, $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\forall yA)$, $(\exists yA)$ суть формулы. *В. Е. Плиско.*

ЛОГИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — n-местная функция, определенная на множестве *истинностных значений* {И, Л} и принимающая значения в этом множестве. С каждой *логической операцией* $\mathfrak{A}$ связана логич. функция $f_{\mathfrak{A}}$: если $V_1, \ldots, V_n$ — нек-рые истинностные значения, то $f_{\mathfrak{A}}(V_1, \ldots, V_n)$ есть истинностное значение высказывания $\mathfrak{A}(P_1, \ldots, P_n)$, где $P_1, \ldots, P_n$ — такие высказывания, что истинностное значение P_i равно V_i, $i = 1, \ldots, n$.

Иногда Л. ф. наз. всякая n-местная функция, определенная на нек-ром множестве M и принимающая значения в множестве {И, Л}. Такие функции используются в математич. логике как аналог понятия предиката. *В. Е. Плиско.*

ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ — формализации содержательных логич. теорий; выводимые объекты Л. и. интерпретируются как суждения, составленные из простейших (имеющих, вообще говоря, субъектно-предикатную структуру) при помощи пропозициональных связок и кванторов. Чаще всего используются связки «не», «и», «или», «если..., то...» и кванторы существования и всеобщности. От произвольных *исчислений*

Л. и. отличаются чисто логич. характером интерпретаций и правил вывода, от *логико-математических исчислений* — отсутствием в языке символов конкретных математич. предикатов и функций (за исключением символа «=», добавление к-рого интерпретируется как введение в рассмотрение равенства и не считается обычно нарушающим логич. характер исчисления). Сформулированные отличия носят относительный характер, т. к. Л. и. остаются чисто формальными системами, и любая возможная их интерпретация и семантика должны рассматриваться как нечто внешнее, имеющее эвристическую, а не доказательную ценность при изучении свойств исчисления.

Одно из важнейших Л. и.— к л а с с и ч е с к о е и с ч и с л е н и е п р е д и к а т о в с ф у н к ц и о н а л ь н ы м и з н а к а м и. Язык этого исчисления, помимо круглых скобок и логич. символов $\neg$, $\&$, $\vee$, $\supset$, $\exists$, $\forall$, содержит три потенциально бесконечных списка: список предметных переменных, предикатных переменных и функциональных переменных (каждая из предикатных и функциональных переменных снабжена информацией о своей размерности, причем для предикатных переменных наименьшая размерность 1, а для функциональных — 0). Понятие т е р м а: 1) всякая предметная переменная и всякая функциональная переменная размерности 0 есть терм; 2) если $T_1, \ldots, T_l$ — термы, а f — функциональная переменная размерности l, то $f(T_1, \ldots, T_l)$ тоже терм. Если $T_1, \ldots, T_k$ — термы, а P — предикатная переменная размерности k, то $P(T_1, \ldots, T_k)$ наз. а т о м а р н о й ф о р м у л о й. Понятие ф о р м у л ы: 1) всякая атомарная формула есть формула; 2) если F и G — формулы, а x — предметная переменная, то выражения

$$\neg F,\ (F \,\&\, G),\ (F \vee G),\ (F \supset G),\ \exists x F \text{ и } \forall x F$$

суть тоже формулы. Говорят, что в последних двух формулах все вхождения переменной x с в я з а н н ы е; вхождения переменных, к-рые в процессе построения формулы не связываются кванторами, наз. с в о б о д н ы м и вхождениями. Терм T наз. с в о б о д н ы м д л я x в F, если для любого свободного вхождения x в F неверно, что оно является вхождением в подформулу вида $\exists y G$ или $\forall y G$, где y — какая-либо из переменных, участвующих в построении T; $[F]^x_T$ означает результат подстановки T в F вместо всех свободных вхождений x.

Пусть x — произвольная предметная переменная, A, B, C и D — произвольные формулы, причем D не содержит x свободно, T — произвольный терм, свободный для x в A. Аксиомами рассматриваемого исчисления являются любые формулы следующих 10 видов (каждый из к-рых наз. с х е м о й а к с и о м):

1. $(A \supset (B \supset A))$,
2. $((A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)))$,
3. $(A \supset (B \supset (A \,\&\, B)))$,

4а. $((A \,\&\, B) \supset A)$, 4б. $((A \,\&\, B) \supset B)$,

5а. $(A \supset (A \vee B))$, 5б. $(B \supset (A \vee B))$,

6. $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$,
7. $((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$,
8. $(\neg \neg A \supset A)$,
9. $(\forall x A \supset [A]^x_T)$,
10. $([A]^x_T \supset \exists x A)$.

Кроме того, это исчисление имеет три правила вывода: «из A и $(A \supset B)$ можно получить B», «из $(D \supset A)$ можно получить $(D \supset \forall x A)$», «из $(A \supset D)$ можно получить $(\exists x A \supset D)$». Д о к а з у е м ы м и ф о р м у л а м и (или т е о р е м а м и) рассматриваемого исчисления наз. любые формулы, к-рые могут быть получены из аксиом

исчисления в результате применения (возможно, многократного) указанных правил (см. *Вывод* логический).

Основная интерпретация исчисления предикатов. Область значения предметных переменных — непустое множество предметов M, функциональных переменных — функции из M в M, предикатных переменных — функции из M в $\{0, 1\}$ (одно из значений интерпретируется как «истина», второе — как «ложь»); имеются в виду функции, определенные на любом наборе предметов, количество членов к-рого соответствует размерности переменной. Теперь для любой атомарной формулы, зафиксировав значение ее предикатной переменной и значения входящих в нее предметных и функциональных переменных, можно говорить об истинности или ложности этой формулы. Аналогично, используя таблицы истинности для пропозициональных связок и обычную интерпретацию кванторов (как бесконечных конъюнкций и дизъюнкций), можно судить об истинности произвольной формулы рассматриваемого языка при выбранном M и выбранных значениях входящих в нее предикатных, функциональных и свободных предметных переменных. Формула наз. общезначимой, если при любом таком выборе она оказывается истинной. Так, каковы бы ни были значения двуместной предикатной переменной P и одноместной функциональной переменной f, из того, что для нек-рого x формула $P(f(x), f(y))$ истинна при любом y, следует, что найдется z, для к-рого $P(z, f(z))$ истинна. Следовательно, формула

$$(\exists x \, \forall y \, P(f(x), f(y)) \supset \exists z P(z, f(z)))$$

общезначима. Можно доказать, что формула выводима в построенном исчислении тогда и только тогда, когда она общезначима. Приведенная интерпретация опирается на достаточно сложные теоретико-множественные абстракции и поэтому неприемлема с точки зрения нек-рых философий математики и метаматематич. теорий (напр., таких как *интуиционизм*, *финитизм*, *конструктивная математика*). В рамках этих теорий приходится вырабатывать другие представления о семантике Л. и.

Многочисленные Л. и. получаются видоизменением построенного выше Л. и. Так, добавление в язык символа «=» вместе со схемами аксиом

11. $(T = T)$,

12. $((T_1 = T_2) \supset ([A]^x_{T_1} = [A]^x_{T_2}))$

(здесь A и T произвольны, T_1 и T_2 свободны для x в A) приводит к классическому исчислению предикатов с равенством. Выбрасывание из языка функциональных переменных приводит к чистому (или узкому) исчислению предикатов. Схемы аксиом 1—8 в сочетании с первым правилом вывода дают классическое исчисление высказываний (т. к. субъектно-предикатная структура суждений не анализируется средствами исчислений высказываний, то обычно вместо различных типов переменных в языке этих исчислений употребляется лишь один тип — пропозициональные переменные, каждая из к-рых выступает как атомарная формула). Выбрасывание из всех упомянутых исчислений схемы 8 приводит к минимальным Л. и., а схем 7 и 8 — к позитивным Л. и. Возможны и другие частичные Л. и., напр. получившиеся фиксированием части логич. символов или части переменных языка (в сочетании с возможной перестройкой системы аксиом) с сохранением всех классически выводимых формул, составленных из этих символов и переменных; таковы *импликативное пропозициональное исчисление* (единственный символ $\supset$), чистое одно-

местное (сингулярное) исчисление предикатов (в языке содержатся лишь предметные и одноместные предикатные переменные) и др. Наиболее содержательные примеры частичных Л. и. составляют интуиционистские (конструктивные) исчисления, которые получаются из упомянутых классических заменой схемы 8 на схему 8′. $(A \supset (\neg A \supset B))$.

Названия Л. и. естественно складываются из упоминаемых терминов; так, схемы 1—7,8′, 11,12 определяют интуиционистское исчисление высказываний с равенством.

Рассматриваются также Л. и. с несколькими сортами переменных (и термов), причем не допускаются подстановки термов одного сорта вместо другого. В простых случаях области значения термов разных сортов интерпретируются как разные множества предметов (так, удобные формализации планиметрии могут опираться на Л. и. с предметными переменными двух сортов — «точки» и «прямые»). Но можно последовательно рассматривать сначала исчисление с единственной областью предметов, затем исчисление с дополнительной областью предметов — предикатов над 1-й областью (т. е. во втором исчислении допускаются кванторы по предикатным переменным первого) и т. д. Так возникают Л. и. высших порядков (ранее упоминавшиеся Л. и. имели 1-й порядок). Стремление формализовать логич. теории с более мощным запасом понятий приводит к ряду обобщений Л.и. Рассмотрение наряду с «истиной» и «ложью» различных степеней неопределенности приводит к различным формализациям *многозначных логик* и к исчислениям частичных предикатов. Последние Л. и. примыкают к исчислениям логич. следования и *строгой импликации исчислению*, к-рые возникли в результате попыток формализации реального употребления выражения «из A следует B» путем снятия парадоксов материальной импликации и отказа от табличного ее задания. Для формализации изучаемого в *модальной логике* различения «необходимых», «возможных» и «случайных» утверждений служат модальные Л. и.

Наряду с заданием Л. и. в терминах схем аксиом часто встречаются формулировки с конечным числом конкретных аксиом, но с добавлением различных правил подстановки вместо переменных. Для многих вопросов теории логического вывода удобны переформулировки Л. и. в виде *Генцена формальных систем*.

Исчисление вполне адекватно формализуемой теории, если выводимость в нем формулы эквивалентна ее тождественной истинности в основной интерпретации. Истинность выводимых формул связана с непротиворечивостью (корректностью) исчисления, выводимость всех истинных формул — с его полнотой. Все упомянутые Л. и. корректны, многие из них полны в том или ином смысле (см. *Гёделя теорема о полноте*). Но, по-видимому, лишь для классич. теорий 1-го порядка достигнута бесспорная адекватность формализаций нашим интуитивным представлениям об истинности. Важным свойством Л. и. является разрешимость (см. *Разрешения проблема*): почти все построенные исчисления высказываний разрешимы; напротив, все упомянутые исчисления предикатов (кроме одноместного) неразрешимы. Для неразрешимых Л. и. тем не менее возможны алгоритмы, к-рые для каждой выводимой формулы устанавливают ее выводимость, но могут не кончать работу для нек-рых невыводимых формул.

Лит.: [1] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., М., 1979; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [4] Чёрч А.,

Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960; [5] Математическая теория логического вывода. Сб. переводов, М., 1967. *С. Ю. Маслов.*

ЛОГИЧЕСКИЙ ЗАКОН в математической логике — *логическая формула*, к-рая является схемой истинных предложений, т. е. превращается в истинное высказывание при любой интерпретации входящих в нее переменных для высказываний и предикатов. Такие формулы наз. общезначимыми, или тавтологиями. Напр., тавтология $A \vee \neg A$ выражает *исключенного третьего закон.* *В. Е. Плиско.*

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ из данного множества посылок — высказывание, являющееся истинным при любой интерпретации нелогич. символов (т. е. *имен* объектов, функций, предикатов), при к-рой истинны посылки. Если высказывание A является Л. с. из множества высказываний Γ, то говорят, что Γ логически влечет A или что A логически следует из Γ.

Если Γ — множество предложений нек-рого формализованного логико-математич. языка 1-го порядка, A — предложение того же языка, то отношение «A — логич. следствие из Γ» означает, что всякая модель для Γ является моделью для A. Это отношение обозначается $\Gamma \models A$. Из *Гёделя теоремы о полноте* классического исчисления предикатов следует, что отношение $\Gamma \models A$ совпадает с отношением $\Gamma \vdash A$, т. е. $\Gamma \models A$ тогда и только тогда, когда предложение A выводимо из множества предложений Γ средствами классич. исчисления предикатов.

Лит.: [1] Расева Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972; [2] Gödel K., «Monatsh. Math. und Phys.», 1930, Bd 37, S. 349—60. *В. Е. Плиско.*

ЛОГНОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. *Логарифмически нормальное распределение.*

ЛОКАЛИЗАЦИИ ПРИНЦИП: для любого тригонометрич. ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю, сходимость или расходимость ряда в нек-рой точке зависит от поведения т. н. функции Римана в окрестности этой точки.

При этом функция Римана $F(x)$ данного тригонометрич. ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

— результат двукратного интегрирования его, т. е.

$$F(x) = \frac{a_0}{4} x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}.$$

Имеет место обобщение Л. п. для рядов с коэффициентами, не стремящимися к нулю (см. [2]).

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1, пер. с англ., М., 1965. *М. И. Войцеховский.*

ЛОКАЛИЗАЦИЯ в категориях — специальная конструкция, связанная со специальными радикальными подкатегориями; она впервые появилась в абелевых категориях для описания т. н. *Гротендика категорий* с помощью категорий модулей над ассоциативными кольцами с единицей. Пусть $\mathfrak{A}$ — абелева категория. Полная подкатегория $\mathfrak{A}'$ категории $\mathfrak{A}$ наз. плотной, если она содержит все подобъекты и факторобъекты своих объектов и замкнута относительно расширений, т. е. в точной последовательности

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

$B \in \mathrm{Ob}\mathfrak{A}'$ тогда и только тогда, когда A, $C \in \mathrm{Ob}\mathfrak{A}'$. Факторкатегория $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ строится следующим образом. Пусть $(R, \mu]$ — подобъект прямой суммы $A \oplus B (\pi_1, \pi_2)$,

где π_1, π_2— проекции, и пусть квадрат

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\mu\pi_2} & B \\ {\scriptstyle \mu\pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ A & \xrightarrow[\alpha]{} & C \end{array}$$

коуниверсален. Подобъект $(R, \mu]$ наз. $\mathfrak{A}'$-подобъектом, если Coker $\mu\pi_1$, Ker $\beta \in \mathrm{Ob}\mathfrak{A}'$. Два $\mathfrak{A}'$-подобъекта эквивалентны, если они содержат нек-рый $\mathfrak{A}'$-подобъект. Множество $H_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'}(A, B)$ состоит, по определению, из классов эквивалентных $\mathfrak{A}'$-подобъектов *прямой суммы* $A \oplus B$. Обычное умножение бинарных отношений в абелевой категории согласовано с введенной эквивалентностью, что позволяет определить факторкатегорию $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$. Эта факторкатегория оказывается абелевой категорией. Точный функтор $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ можно задать, сопоставляя каждому морфизму $\alpha : A \to B$ его график в $A \oplus B$. Подкатегория $\mathfrak{A}'$ наз. подкатегорией локализации, если функтор T обладает полным сопряженным справа функтором $S : \mathfrak{A}/\mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$. Подкатегория Л. всегда является подкатегорией всех радикальных объектов нек-рого наследственного радикала.

В категории абелевых групп подкатегория всех периодич. групп есть подкатегория Л. Факторкатегория любой категории модулей по подкатегории Л. является категорией Гротендика. Обратно, всякая категория Гротендика эквивалентна нек-рой факторкатегории подходящей категории модулей.

Понятие подкатегории Л. можно определить и для неабелевых категорий [3]. Однако в неабелевом случае таких подкатегорий обычно мало. Напр., в категории всех ассоциативных колец имеется только две тривиальные подкатегории Л.— вся категория и ее полная подкатегория, содержащая только нулевые кольца.

Лит.: [1] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [2] Gabriel P., «Bull. Soc. math. France», 1962, t. 90, p. 323—448; [3] Шульгейфер Е. Г., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1968, т. 19, с. 271—301.

М. Ш. Даленко.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ в коммутативной алгебре — переход от коммутативного кольца A к *частным кольцу* A $[S^{-1}]$, где S — нек-рое подмножество A. Кольцо $A[S^{-1}]$ можно определить как решение задачи об универсальном отображении A в кольцо, при к-ром все элементы множества S становятся обратимыми. Имеются, однако, и явные конструкции $A[S^{-1}]$:

1) как множества дробей вида a/s, где $a \in A$, а s является произведением элементов из S (при этом две дроби a/s и a'/s' считаются эквивалентными тогда и только тогда, когда найдется s'', являющийся произведением элементов из S и такой, что $s''(sa' - s'a) = 0$; складываются и умножаются дроби по обычным правилам);

2) как факторкольцо кольца многочленов $A[X_s]$, $s \in S$, по идеалу, порожденному многочленами $sX_s - 1$, $s \in S$;

3) как индуктивный предел индуктивной системы A-модулей (A_i, φ_{ij}), где i пробегает естественно упорядоченный свободный коммутативный моноид $N^{(S)}$. При этом все A_i изоморфны A, а гомоморфизмы $\varphi_{ij} : A_i \to A_j$ при $j = i + n_1 s_1 + \ldots + n_k s_k$ совпадают с умножением на $s_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot s_k^{n_k} \in A$.

Кольцо A канонически отображается в $A[S^{-1}]$ и превращает последнее кольцо в A-алгебру. Это отображение $A \to A[S^{-1}]$ инъективно тогда и только тогда, когда S не содержит ни одного делителя нуля в A. Напротив, если S содержит нильпотентный элемент, то $A[S^{-1}] = 0$.

Без потери общности множество S можно считать замкнутым относительно произведения (такое множество наз. мультипликативным, или мультипликативной системой). В этом случае кольцо $A[S^{-1}]$ обозначается также $S^{-1}A$ или A_S. Важнейшие примеры мультипликативных систем:

а) множество $\{s^n\}$ всех степеней элементов $s \in A$;

б) множество $A \setminus \mathfrak{P}$, то есть дополнение к простому идеалу $\mathfrak{P}$. Соответствующее кольцо частных является локальным и обозначается $A_{\mathfrak{P}}$;

в) множество R всех не делителей нуля в A.

Кольцо $R^{-1}A$ наз. полным кольцом частных кольца A. Если A целостно, $R^{-1}A = A_{(0)}$ является полем частных.

Операция локализации без труда переносится на произвольные A-модули M, если положить

$$M[S^{-1}] = M \otimes_A A[S^{-1}].$$

Переход от M к $M[S^{-1}]$ является точным функтором. Иначе говоря, A-модуль $A[S^{-1}]$ является плоским. Л. коммутирует с прямыми суммами и индуктивными пределами.

С геометрич. точки зрения Л. означает переход к открытому подмножеству. Точнее, для $s \in A$ спектр $\operatorname{Spec} A[s^{-1}]$ канонически отожествляется с открытым (в *Зариского топологии*) подмножеством $D(s) \subset \operatorname{Spec} A$, состоящим из простых идеалов $\mathfrak{P}$, не содержащих s. Более того, эта операция позволяет связать с каждым A-модулем M квазикогерентный пучок $\tilde{M}$ на аффинной схеме $\operatorname{Spec} A$, для к-рого

$$\Gamma(D(s), \tilde{M}) = M[s^{-1}].$$

На Л. можно смотреть как на операцию, позволяющую обратить морфизмы умножения на $s \in S$ в категории A-модулей. При таком подходе операция Л. допускает широкое обобщение на произвольные категории (см. *Локализация* в категориях).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

В. И. Данилов.

ЛОКАЛЬНАЯ ГРУБОСТЬ компактного инвариантного множества F гладкой динамич. системы — сохранение всех топологич. свойств системы в нек-рой окрестности F при любых достаточно малых (в смысле C^1) возмущениях системы. Точнее, Л. г. состоит в следующем: имеются такие окрестности $U \supset V \supset F$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при возмущении исходной системы в U, отстоящем от нее в C^1-метрике не более чем на δ, существует такое гомеоморфное вложение $V \to U$, к-рое сдвигает точки не более чем на ε и переводит отрезки траекторий исходной системы, лежащие в V, в нек-рые отрезки траекторий возмущенной системы. (Таким образом, Л. г., строго говоря, есть свойство не самого множества F, а системы, рассматриваемой в окрестности F.)

Если F — положение равновесия *потока* (или неподвижная точка каскада, т. е. динамич. системы с дискретным временем), то Л. г. F означает сохранение топологич. свойств системы при линеаризации в точке F. Почти очевидно, что необходимым условием Л. г. в этом случае является расположение собственных значений линеаризованной системы вне мнимой оси (соответственно непопадание их на единичную окружность). Это условие является и достаточным (теорема Гробмана — Хартмана, см. [1] гл. IX). Отсюда легко выводится необходимое и достаточное условие Л. г. периодической траектории потока: только один мультипликатор уравнения в вариациях лежит на единичной окружности. Имеются также результаты о Л. г. нек-рых *гиперболических множеств* (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [2] Аносов Д. В.,

в кн.: Тр. 5-й Международной конференции по нелинейным колебаниям, т. 2 — Качественные методы . . . , К., 1970, с. 39—45; [3] Robinson C., «Ann. Math.», 1974, v. 99, № 1, p. 154—75.
Д. В. Аносов.

ЛОКАЛЬНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — часть дифференциальной геометрии, изучающая свойства геометрич. образов, в частности линий и поверхностей, «в малом». Иными словами, строение геометрич. образа изучается в нек-рой малой окрестности произвольной его точки.

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве E^3 задана кривая γ своим уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t).$$

Изучение этой кривой сводится к нахождению величин, инвариантных относительно группы движений пространства E^3. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки M кривой не является инвариантным, но его производные

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}, \quad \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}, \ \ldots \qquad (*)$$

инвариантны. Дифференциальной окрестностью n-го порядка точки M кривой γ наз. совокупность всех понятий и свойств, связанных с кривой, к-рые выражаются через первые n векторов последовательности (*). Так, дифференциальной окрестности 1-го порядка принадлежат понятия касательной к кривой и ее нормальной плоскости. Дифференциальной окрестности 2-го порядка принадлежат понятия кривизны, соприкасающейся плоскости, трехгранника Френе, соприкасающейся окружности кривой. Понятие кручения кривой принадлежит дифференциальной окрестности 3-го порядка. Кривизна и кручение кривой образуют полную систему ее инвариантов в том смысле, что любой инвариант кривой есть функция кривизны и кручения и их производных любых порядков. Аналогично строится локальная теория поверхностей пространства E^3. Локальная теория кривых и поверхностей пространства E^3 — это наиболее старая часть Л. д. г., созданная в основном в 18—19 вв. Уже в 19 в. начали появляться различные обобщения этой теории. Одно из таких обобщений связано с понятием *однородного пространства*. В произвольном дифференциально-геометрическом однородном пространстве G/H можно строить локальную теорию кривых и поверхностей различных размерностей аналогично тому, как это указано выше для пространства E^3, а именно, как теорию инвариантов основной группы G. В этом направлении наибольшее развитие получили *аффинная дифференциальная геометрия* и *проективная дифференциальная геометрия*.

Обобщение понятия первой квадратичной формы поверхности пространства E^3 привело к теории римановых пространств. Локальная теория римановых пространств возникла еще в сер. 19 в. и продолжает развиваться, находя многочисленные приложения.

Понятие параллельного перенесения вектора вдоль кривой на поверхности пространства привело к теории пространств *аффинной связности*. В свою очередь это явилось началом развития общей теории *связностей*.

Лит.: [1] Фавар Ж., Курс локальной дифференциальной геометрии, пер. с франц., М., 1960.
А. С. Феденко.

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ нормального топологического пространства X — топологический инвариант $\operatorname{locdim} X$, определяемый следующим образом. Считается $\operatorname{locdim} X \leqslant n$, $n = -1, 0, 1, \ldots$, если для любой точки $x \in X$ найдется окрестность Ox, для *Лебега размерности* замыкания к-рой выполняется соотношение $\dim [Ox] \leqslant n$. Если $\operatorname{locdim} X \leqslant n$ для нек-рого n, то Л. р. пространства X конечна, пишется $\operatorname{locdim} X < +\infty$ и полагается

$$\operatorname{locdim} X = \min\{n\colon \operatorname{locdim} X \leqslant n\}.$$

Всегда $\operatorname{locdim} X \leqslant \dim X$; существуют нормальные пространства X с $\operatorname{locdim} X < \dim X$; в классе паракомпактов всегда $\operatorname{locdim} X = \dim X$. Если в определении Л. р. лебегову размерность $\dim [Ox]$ заменить на большую *индуктивную размерность* $\operatorname{Ind} [Ox]$, то получится определение локальной большой индуктивной размерности $\operatorname{locInd} X$.

ЛОКАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ТРАЕКТОРИЙ квадратичного дифференциала — описание поведения траекторий *квадратичного дифференциала* на ориентированной римановой поверхности в окрестности любой точки этой поверхности. Пусть R — ориентированная риманова поверхность, $Q(z)\,dz^2$ — квадратичный дифференциал на R; пусть C — множество всех нулей и простых полюсов $Q(z)dz^2$, а H — множество всех полюсов $Q(z)dz^2$ порядка $\geqslant 2$. Траектории $Q(z)dz^2$ образуют регулярное семейство кривых на $R \setminus (C \cup H)$. При нек-ром расширении понятия регулярного семейства кривых это остается верным и на $R \setminus H$. Поведение траекторий в окрестностях точек множества H является значительно более сложным. Полное описание Л. с. т. приводится ниже.

1) Для любой точки $P \in R \setminus (C \cup H)$ существуют окрестность N точки P на R и гомеоморфное отображение N на круг $|w| < 1$ ($w = u + iv$) такие, что максимальная открытая дуга каждой траектории из N переходит в отрезок, на к-ром v постоянно. Следовательно, через каждую точку из $R \setminus (C \cup H)$ проходит траектория дифференциала $Q(z)dz^2$, являющаяся либо открытой дугой, либо жордановой кривой на R.

2) Для любой точки $P \in C$ порядка μ ($\mu > 0$, если P — нуль, и $\mu = -1$, если P — простой полюс) существуют окрестность N точки P на R и гомеоморфное отображение N на круг $|w| < 1$ такие, что максимальная дуга каждой траектории из N переходит в открытую дугу, на к-рой $\operatorname{Im} w^{(\mu+2)/2}$ постоянна. Существуют $\mu + 2$ траекторий с концами в P и с предельными касательными направлениями, составляющими друг с другом равные углы величины $2\pi/(\mu + 2)$.

3) Пусть $P \in H$ — полюс порядка $\mu > 2$. Если нек-рая траектория имеет конец в P, то она стремится к P по одному из $\mu - 2$ направлений, расположенных под равными углами $2\pi/(\mu - 2)$. Существует окрестность N точки P на R со следующими свойствами: (1) каждая траектория, проходящая через нек-рую точку окрестности N, в каждом из направлений либо стремится к P, либо выходит из N; (2) существует окрестность N^* точки P, содержащаяся в N и такая, что каждая траектория, проходящая через нек-рую точку из N^*, хотя бы в одном направлении стремится к P, оставаясь в N^*; (3) если нек-рая траектория целиком лежит в N и поэтому в обоих направлениях стремится к P, то касательная к этой траектории при приближении к P в соответствующем направлении стремится к одному из двух смежных предельных положений. Жорданова кривая, полученная присоединением к этой траектории точки P, ограничивает область D, содержащую точки угла, образованного двумя соседними предельными касательными. Касательная к любой траектории, имеющей общие точки с D, стремится при приближении к P в двух направлениях соответственно к этим смежным предельным положениям. Область D отображается с помощью надлежащей ветви функции $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2}\,dz$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > c$ (c — действительное число); (4) для каждой пары смежных предельных положений существует траектория, обладающая свойствами, описанными в (3).

4) Пусть $P \in H$ — полюс 2-го порядка и z — локальный параметр, в терминах к-рого P представляется точкой $z = 0$. Пусть $[Q(z)]^{-1/2}$ имеет (при нек-ром выборе

ветви корня) следующее разложение в окрестности точки $z=0$:

$$[Q(z)]^{-1/2} = (a+ib)\, z\, \{1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots\},$$

где a, b — действительные, b_1, b_2, ... — комплексные постоянные. Строение образов траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$ в плоскости z определяется тем, какой из следующих трех случаев имеет место.

Случай I: $a\neq 0$, $b\neq 0$. Для достаточно малого $\alpha>0$ образ каждой траектории, пересекающей круг $|z|<\alpha$, в одном направлении стремится к $z=0$, а в другом — выходит из круга $|z|<\alpha$. И модуль, и аргумент z изменяются монотонно на образе траектории в круге $|z|<\alpha$. Каждый образ траектории закручивается около точки $z=0$ и ведет себя асимптотически, как логарифмич. спираль.

Случай II: $a\neq 0$, $b=0$. Для достаточно малого $\alpha>0$ образ каждой траектории, пересекающей круг $|z|<\alpha$, в одном направлении стремится к $z=0$, а в другом — выходит из круга $|z|<\alpha$. Модуль z изменяется монотонно на образе траектории в круге $|z|<\alpha$. Разные образы траекторий имеют разные предельные направления в точке $z=0$.

Случай III: $a=0$, $b\neq 0$. Для каждого $\varepsilon>0$ можно найти такое число $\alpha(\varepsilon)>0$, что при $0<\alpha\leqslant\alpha(\varepsilon)$ образ траектории, пересекающей окружность $|z|=\alpha$, представляет собой жорданову кривую, лежащую в круговом кольце $\alpha(1+\varepsilon)^{-1}<|z|<\alpha(1+\varepsilon)$.

Лит.: [1] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962.

Г. В. Кузьмина.

ЛОКАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ГРУППА — топологическая группа, в к-рой групповые операции определены лишь для элементов, достаточно близких к единице. Введение Л. т. г. было инспирировано изучением локальной структуры топологич. групп (т. е. их структуры в сколь угодно малой окрестности единицы) (см. [1]). Точное определение Л. т. г. состоит в следующем.

Пусть G — топологич. пространство, e — нек-рый его элемент, Θ и Ω — нек-рые открытые подмножества в G и $G\times G$ соответственно, $e\in\Theta$ и $i:\Theta\to G$, $m:\Omega\to G$ — нек-рые непрерывные отображения. Тогда система $(G, e, \Theta, \Omega, i, m)$ наз. Л. т. г., если выполнены условия:

1) (e, g) и $(g, e)\in\Omega$ для любого $g\in G$ и $m((e, g)) = m((g, e)) = g$;

2) если $g, h, t\in G$ и (g, h), (h, t), $((g, h), t)$, $(g, (h, t))\in\Omega$, то $m((m((g, h)), t)) = m((g, m((h, t))))$;

3) $(g, i(g))$ и $(i(g), g)\in\Omega$ для любого $g\in\Theta$ и $m((g, i(g))) = m((i(g), g)) = e$.

Обычно Л. т. г. $(G, e, \Theta, \Omega, i, m)$ обозначают просто через G; элемент $m((g, h))$ обозначают через gh и наз. произведением g и h; элемент $i(g)$ обозначают через g^{-1} и наз. обратным к g; элемент e наз. единицей Л. т. г. G. Если $(g, h)\in\Omega$, то говорят, что произведение g и h определено; если $g\in\Theta$, то говорят, что для g определен обратный элемент.

Эти (определенные не для любых элементов) операции на G индуцируют структуру Л. т. г. на любой окрестности единицы e в G. Пусть G_1 и G_2 — две Л. т. г. Локальным гомоморфизмом G_1 в G_2 наз. такое непрерывное отображение f нек-рой окрестности U_1 единицы e_1 Л. т. г. G_1 в нек-рую окрестность U_2 единицы e_2 Л. т. г. G_2, что $f(e_1)=e_2$ и для любых элементов $g, h\in U_1$, произведение к-рых в G_1 определено, произведение элементов $f(g)$ и $f(h)$ в G_2 также определено и $f(gh)=f(g)\,f(h)$. Два локальных гомоморфизма G_1 в G_2 наз. эквивалентными, если они совпадают в нек-рой окрестности единицы Л. т. г. G_1. Пусть локальный гомоморфизм f является гомеоморфизмом

окрестностей U_1 и U_2, а обратное отображение $f^{-1}: U_2 \to U_1$ является локальным гомоморфизмом Л. т. г. G_2 в Л. т. г. G_1. Тогда f наз. локальным изоморфизмом Л. т. г. G_1 и Л. т. г. G_2. Две Л. т. г., между к-рыми существует локальный изоморфизм, наз. локально изоморфными. Напр., любая Л. т. г. локально изоморфна любой своей окрестности единицы.

Примером Л. т. г. может служить любая топологич. группа (и, значит, любая ее окрестность единицы). В теории Л. т. г. принципиальным является вопрос о том, насколько общий характер имеет этот пример, т. е. является ли всякая Л. т. г. локально изоморфной некоторой топологич. группе. В общем случае ответ отрицателен (см. [4]), но в важном частном случае конечномерных *Ли локальных групп* — положителен.

Как и в теории топологич. групп, в теории Л. т. г. можно определить понятия (локальных) подгрупп, нормальных делителей, смежных классов, факторгрупп. Напр., пусть $(G, e, \Theta, \Omega, i, m)$ — Л. т. г., и H — такое подмножество в G содержащее e, что в нек-рой окрестности U единицы e в G множество $U \cap H$ замкнуто. Пусть также для любого $g \in H \cap \Theta$ элемент $i(g)$ принадлежит H, а множество

$$\Omega_H = \{(g, h) \in \Omega \cap (H \times H) \mid m((g, h)) \in H\}$$

открыто в $H \times H$ (в предположении, что H снабжено топологией, индуцированной с G). Тогда система

$$(H, e, \Theta \cap H, \Omega_H, i|_H, m|_{\Omega_H})$$

является Л. т. г., к-рая наз. локальной подгруппой в Л. т. г. G. Определения нормального делителя, смежных классов по подгруппе, факторгруппы см. в [1].

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Lie S., Engel F., Theorie der Transformationsgruppen, 2 Aufl., Bd 1—3, Lpz., 1930.

В. Л. Попов.

ЛОКАЛЬНАЯ УНИФОРМИЗАЦИЯ — нахождение для локального кольца бирационально эквивалентного ему регулярного локального кольца. Для неприводимого алгебраич. многообразия V над полем k разрешающей системой наз. семейство проективных неприводимых многообразий $\{V_\alpha\}$, бирационально эквивалентных V (т. е. таких, что поля рациональных функций $k(V_\alpha)$ и $k(V)$ изоморфны) и удовлетворяющих следующему условию: для любого нормирования v поля $k(V)$ найдется многообразие $V' \in \{V_\alpha\}$ такое, что центр P' нормирования v на V' является неособой точкой. Существование разрешающей системы (теорема локальной униформизации) доказано для любых многообразий над полем нулевой характеристики (см [1]), а также для двумерных многообразий над любым полем и трехмерных многообразий над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2,3 и 5 (см. [2]). Существование разрешающей системы для V, состоящей из одного многообразия, означает разрешение особенностей V и может быть получено из теоремы о Л. у. в размерности $\leqslant 3$. В общем случае из теоремы о Л. у. следует существование конечной разрешающей системы (см. [3]).

Лит.: [1] Zariski O., «Ann. Math.», 1940, v. 41, p. 852—96; [2] Abhyankar S., Resolution of singularities of embedden algebraic surfaces, N. Y.— L., 1966; [3] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 3, М., 1955; [4] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963.

В. И. Данилов.

ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, у каждой точки к-рого имеется окрестность с бикомпактным замыканием. Хаусдорфово Л. б. п. X является *вполне регулярным про-*

странством. Частично упорядоченное множество всех его хаусдорфовых *бикомпактных расширений* является полной решеткой. Ее минимальный элемент — *Александрова бикомпактное расширение* αX. Класс хаусдорфовых Л. б. п. совпадает с классом открытых подмножеств бикомпактов. Для хаусдорфова Л. б. п. X его нарост $bX \setminus X$ во всяком хаусдорфовом бикомпактном расширении bX бикомпактен. Всякое связное паракомпактное Л. б. п. является суммой счетного числа бикомпактных подмножеств.

Важнейший пример Л. б. п.— n-мерное евклидово пространство. Хаусдорфово топологическое векторное пространство E (не сводящееся к нулевому элементу) над полным недискретным нормированным телом k локально бикомпактно тогда и только тогда, когда k локально бикомпактно, а E конечномерно над k.

В. В. Федорчук.

ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛАЯ РЕШЕТКА, л о к а л ь н о в ы п у к л а я с т р у к т у р а,— действительное топологическое векторное пространство E, являющееся одновременно векторной решеткой, топология к-рого есть локально выпуклая топология, а отображения пространства $E \times E$ в E, определяемые формулами

$$(x, y) \to \sup(x, y),\ (x, y) \to \inf(x, y),\ (x, y) \in E,$$

непрерывны. Общие вопросы теории Л. в. р.— изучение связей между топологич. свойствами и свойствами порядка, в частности топологич. свойства полос и положительных конусов в Л. в. р. и связей между решеточными и топологич. свойствами полноты в Л. в. р.; изучение свойств Л. в. р., являющейся сильным сопряженным пространством к локально выпуклому пространству и свойств вложения Л. в. р. E в ее второе сопряженное пространство; построение теории продолжения положительных функционалов и линейных отображений Л. в. р.

Важнейший пример Л. в. р.— *банахова решетка.*

Лит.: [1] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [2] Дей М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [3] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971.

А. И. Штерн.

ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛАЯ ТОПОЛОГИЯ — такая (не обязательно отделимая) топология τ на действительном или комплексном топологическом векторном пространстве E, обладающая базисом из выпуклых окрестностей точек пространства E, что линейные операции в E непрерывны относительно топологии τ. Л. в. т. τ на векторном пространстве E аналитически определяется произвольным семейством *предноpм* $\{p_\alpha, \alpha \in A\}$ как топология, базис окрестностей нуля к-рой состоит из множеств вида $\{n^{-1}U\}$, где n пробегает натуральный ряд, а U — семейство конечных пересечений множеств вида $\{x \in E : p_\alpha(x) \leqslant 1\}$, $\alpha \in A$; такое семейство предноpм наз. п о р о ж д а ю щ и м д л я τ. Топология, индуцированная данной Л. в. т. на векторном подпространстве, фактортопология на факторпространстве и топология произведения Л. в. т. суть также Л. в. т. Топология τ на топологическом векторном пространстве E тогда и только тогда есть Л. в. т., когда τ есть топология равномерной сходимости на равностепенно непрерывных подмножествах *сопряженного пространства* E^*.

Пусть E и E_α, $\alpha \in A$,— векторные пространства над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, f_α (соответственно g_α) — линейное отображение E в E_α (соответственно E_α в E) и τ_α —Л. в. т. на E_α, $\alpha \in A$. Слабейшая из топологий на E, для к-рой все отображения f_α являются непрерывными отображениями пространства E в (E_α, τ_α), наз. п р о е к т и в н о й т о п о л о г и е й на E относительно семейства $\{(E_\alpha, \tau_\alpha, f_\alpha), \alpha \in A\}$; проективная топология есть Л. в. т. В частности, верхняя грань семейства Л. в. т. на данном векторном пространстве, индуцированная топология на подпространстве и топология произведения

Л. в. т. суть проективные топологии (и потому — Л. в. т.). Сильнейшая Л. в. т. на E, относительно к-рой все отображения g_α, $\alpha \in A$, являются непрерывными отображениями пространства (E_α, τ_α) в пространство E, наз. индуктивной топологией на E относительно семейства $\{(E_\alpha, \tau_\alpha, g_\alpha), \alpha \in A\}$. В частности, фактортопология данной Л. в. т. и топология прямой суммы Л. в. т. являются индуктивной топологией (и потому — Л. в. т.). Понятия проективной и индуктивной Л. в. т. позволяют определить операции проективного и индуктивного пределов в категории локально выпуклых пространств и их линейных отображений.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [2] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977.

А. И. Штерн.

ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОЕ ПРОСТРАНСТВО — отделимое топологическое векторное пространство над полем действительных или комплексных чисел, в к-ром любая окрестность нулевого элемента содержит выпуклую окрестность нулевого элемента; иначе говоря, топологическое векторное пространство E тогда и только тогда есть Л. в. п., когда топология в E есть отделимая *локально выпуклая топология*. Примерами Л. в. п. (и одновременно важными в теории и приложениях классами Л. в. п.) являются *нормированные пространства*, *счетно нормированные пространства*, *Фреше пространства*.

Ряд общих свойств Л. в. п. непосредственно следует из соответствующих свойств локально выпуклых топологий; в частности, подпространства и отделимые факторпространства Л. в. п., а также произведения семейств Л. в. п. суть Л. в. п. Пусть A — направленное вверх множество индексов, $\{E_\alpha, \alpha \in A\}$ — семейство Л. в. п. (над одним и тем же полем) с топологиями $\{\tau_\alpha, \alpha \in A\}$; пусть для любой пары (α, β), $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in A$, определено непрерывное линейное отображение $g_{\alpha\beta}: E_\beta \to E_\alpha$ и пусть E — подпространство произведения $\Pi_{\alpha \in A} E_\alpha$, элементы к-рого $x = (x_\alpha)$ удовлетворяют соотношениям $x_\alpha = g_{\alpha\beta}(x_\beta)$ для всех $\alpha \leqslant \beta$; пространство E наз. проективным пределом семейства $\{E_\alpha\}$ относительно отображений $\{g_{\alpha\beta}\}$ и обозначается $\lim g_{\alpha\beta} E_\beta$; топология в E есть проективная топология относительно семейства $\{E_\alpha, \tau_\alpha, f_\alpha\}$, где f_α — ограничение на подпространство E проекции $(\Pi_{\beta \in A} E_\beta) \to E_\alpha$. С другой стороны, пусть для любой пары (α, β), $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in A$, определено непрерывное линейное отображение $h_{\alpha\beta}: E_\alpha \to E_\beta$; пусть g_α, $\alpha \in A$, — канонич. вложение пространства E_α в прямую сумму $\oplus_{\alpha \in A} E_\alpha$ и H — подпространство в $\oplus_{\alpha \in A} E_\alpha$, порожденное образами всех пространств E_α при отображениях $g_\alpha - g_\beta \circ h_{\alpha\beta}$, где (α, β) пробегает все пары в $A \times A$, для к-рых $\alpha \leqslant \beta$. Если H замкнуто в $\oplus_{\alpha \in A} E_\alpha$, то Л. в. п. $(\oplus_{\alpha \in A} E_\alpha)/H$ наз. индуктивным пределом семейства Л. в. п. $\{E_\alpha\}$ относительно отображений $\{h_{\alpha\beta}\}$ и обозначается $\lim h_{\alpha\beta} E_\alpha$. Если $\{E_\alpha\}$ есть семейство подпространств векторного пространства E, упорядоченное по включению, и топология τ_β индуцирует τ_α на E_α при $\alpha \leqslant \beta$, то индуктивный предел семейства $\{E_\alpha\}$ наз. строгим. Л. в. п. метризуемо в том и только в том случае, когда его топология порождена последовательностью полунорм; Л. в. п. нормируемо тогда и только тогда, когда в нем существует ограниченное открытое множество (теорема Колмогорова). Всякое конечномерное подпространство в Л. в. п. имеет дополнительное замкнутое подпространство. Пополнение Л. в. п. есть Л. в. п., и всякое полное Л. в. п. изоморфно проективному пределу некоторого семейства банаховых пространств. Пространство $L(F, E)$ непрерывных линейных отображений топологическо-

го векторного пространства F в Л. в. п. E естественно снабжается структурой Л. в. п. (см. также *Операторная топология*) по данному семейству γ ограниченных подмножеств пространства F, линейная оболочка объединения к-рых плотна в F: базис окрестностей нуля соответствующей топологии есть семейство множеств $\{f : f \in L(F, E), f(s) \subset V\}$, где s пробегает семейство γ, а V пробегает базу окрестностей нуля в E.

Центральное место и основное содержание теории не только Л. в. п., но и топологических векторных пространств составляет изучение Л. в. п. в терминах его *сопряженного пространства*. Фундаментом этой теории двойственности для Л.в.п. является *Хана—Банаха теорема*, из к-рой, в частности, следует, что если E — Л. в. п., то его сопряженное пространство E' разделяет точки пространства E.

Существенной частью теории Л. в. п. является теория компактных выпуклых множеств в Л. в. п. Выпуклая оболочка со K и выпуклая закругленная оболочка предкомпактного множества K в Л. в. п. E предкомпактны; если E, кроме того, квазиполно, то замкнутая выпуклая оболочка $\overline{\text{co}}\, K$ множества K и его замкнутая выпуклая закругленная оболочка компактны. Если A, K непересекающиеся непустые выпуклые подмножества в Л. в. п. E, причем A замкнуто, а K компактно, то существует такой непрерывный действительный линейный функционал f на E, что для нек-рого действительного α неравенства $f(x) > \alpha$, $f(y) \leqslant \alpha$ выполняются для всех $x \in A$, $y \in K$ соответственно; в частности, любое непустое замкнутое выпуклое множество A в Л. в. п. есть пересечение всех содержащих его замкнутых полупространств. Непустое замкнутое выпуклое подмножество B замкнутого выпуклого множества A наз. гранью множества A, если любой замкнутый отрезок в A, внутренняя точка к-рого содержится в B, целиком лежит в B; точка $x \in A$ наз. крайней точкой множества A, если множество $\{x\}$ является гранью в A. Если K — компактное выпуклое множество в Л. в. п. E и ∂K — множество его крайних точек, то для множества $X \subset K$ следующие условия эквивалентны: 1) $\overline{\text{co}}\, X = K$; 2) $\overline{X} \subset \partial K$; 3) $\sup f(X) = \sup f(K)$ для любого непрерывного действительного линейного функционала f на E. В частности, $\overline{\text{co}}\, \partial K = K$ (теорема Крейна—Мильмана). Множество ∂K является бэровским пространством в индуцированной топологии (т.е. пересечение любой последовательности плотных в ∂K открытых подмножеств ∂K плотно в ∂K), и для любого $x \in K$ существует такая вероятностная мера μ на K, что $x = \int_K y d\mu(y)$ и мера μ обращается в нуль на всех бэровских подмножествах $X \subset K$, не пересекающихся с ∂K (а если K метризуемо, то $\mu(\partial K) = 1$). Всякое непрерывное отображение компактного выпуклого множества K в Л. в. п. в себя имеет неподвижную точку (теорема Шаудера — Тихонова); коммутативное семейство непрерывных аффинных преобразований множества K в себя (и равностепенная непрерывная группа непрерывных аффинных преобразований K в себя) имеет неподвижную точку.

Еще один важный раздел теории Л. в. п.— теория линейных операторов в Л. в. п.; в частности — теория компактных (наз. также вполне непрерывными), ядерных и фредгольмовых операторов. Теоремы о замкнутом графике и открытом отображении имеют в теории Л. в. п. далеко идущие обобщения. Л. в. п. E наз. обладающим свойством аппроксимации, если тождественное отображение пространства E в себя может быть равномерно аппроксимировано на предкомпактных множествах в E конечномерными непрерывными линейными отображениями про-

странства E в себя; если Л. в. п. обладает свойством аппроксимации, то оно обладает рядом других замечательных свойств и, в частности, в таком пространстве любой ядерный оператор имеет однозначно определенный след. Существуют сепарабельные банаховы пространства, не обладающие свойством аппроксимации, но банаховы пространства с базисом Шаудера и подпространства проективных пределов гильбертовых пространств обладают свойством аппроксимации. Некоторые варианты этого свойства представляют интерес в теории вполне непрерывных операторов и теории операторов Фредгольма.

Заметную роль в теории Л. в. п. играют методы гомологич. алгебры, связанные с изучением категории Л. в. п. и их непрерывных отображений, а также некрых подкатегорий этой категории. В частности, гомологич. методы позволили решить ряд задач, связанных с продолжением линейных отображений, с существованием линейного отображения в данное пространство, накрывающего отображение в факторпространство этого пространства, а также изучить свойства пополнений факторпространств E/F в связи с пополнением пространств E и F.

Другими существенными вопросами теории Л. в. п. являются: теория интегрирования вектор-функций со значениями в Л. в. п. (как правило, бочечном пространстве); теория дифференцирования нелинейных отображений Л. в. п.; теория топологических тензорных произведений Л. в. п. и связанная с ними теория операторов Фредгольма, ядерных операторов и ядерных пространств. Существует содержательная теория ряда специальных классов Л. в. п. таких, как бочечные пространства, борнологич. пространства (на к-рых любая полунорма, ограниченная на ограниченных множествах, непрерывна), рефлексивные и полурефлексивные пространства (канонич. отображение к-рых в сильное второе сопряженное пространство является соответственно топологическим или линейным изоморфизмом), ядерные пространства и т. д.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Studia math.», 1934, t. 5, p. 29—33; [2] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [3] его же, Интегрирование, пер. с франц., М., 1970, гл. 6—8; то же, 1977, гл. 3—5, 9; [4] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [5] Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [6] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [7] Пич А., Ядерные локально выпуклые пространства, пер. с нем., М., 1967; [8] Робертсон А.-П., Робертсон В.-Дж., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967; [9] Фелпс Р., Лекции о теоремах Шоке, пер. с англ., М., 1968; [10] Энфло П., «Математика», 1974, т. 18, № 1, с. 146—55; [11] Фрёлихер А., Бухер В., Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы, пер. с англ., М., 1970; [12] Паламодов В. П., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 1, с. 3—65.

А. И. Штерн.

ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ в точке M — функция, интегрируемая в том или ином смысле в нек-рой окрестности точки M. Если действительная функция f, определенная на отрезке $[a, b]$, есть точная конечная производная функции F, действительной и определенной на том же отрезке, то f локально интегрируема по Лебегу в точках нек-рого открытого всюду плотного на $[a, b]$ множества. В двумерном случае (см. [2]) существует действительная функция f, определенная на квадрате $[0,1]\times[0,1]$, являющаяся точной конечной повторной производной в любом порядке $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = f(x, y)$, к-рая не будет локально интегрируемой по Лебегу ни в одной точке квадрата.

Лит.: [1] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [2] Толстов Г. П., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1950, т. 35, с. 1—101.

И. А. Виноградова.

ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНОЕ ТЕЛО — множество K, наделенное алгебраич. структурой тела и локально

компактной топологией. При этом требуется, чтобы алгебраич. операции, т. е. сложение, умножение, переход к противоположному и обратному элементам (последний определен только на множестве ненулевых элементов $K^* = K \setminus 0$), были непрерывны в заданной топологии. Так как любое тело локально компактно относительно дискретной топологии, предполагается, что топология тела K не дискретна.

Изучение Л. к. т. основано на существовании меры Хаара в локально компактной группе K_+ (аддитивной группе тела). Пусть μ — нек-рая мера Хаара на K_+ и $S \subset K$ — нек-рый компакт в K положительной меры. Тогда формула

$$\mathrm{mod}_K(a) = \frac{\mu(aS)}{\mu(S)}$$

определяет гомоморфизм (модуль) мультипликативной группы K^* в мультипликативную группу R_+^* действительных положительных чисел. По определению полагают $\mathrm{mod}_K(0) = 0$.

Функция «модуль» удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{mod}_K(a+b) \leqslant A \sup(\mathrm{mod}_K(a),\ \mathrm{mod}_K(b))$$

с нек-рой константой $A > 0$. Если это неравенство выполняется для $A = 1$, то тело K наз. неархимедовым, или ультраметрическим. В противном случае K наз. архимедовым телом. Тело K архимедово тогда и только тогда, когда оно связно. Любое архимедово тело изоморфно либо полю действительных чисел, либо полю комплексных чисел, либо телу кватернионов.

Ультраметрическое тело K вполне несвязно. Функция «модуль» определяет неархимедову метрику на K. Любое такое тело является расширением конечной степени либо поля Q_p рациональных p-адических чисел для нек-рого простого p (в случае, когда K имеет характеристику 0), либо поля $F_p(X)$ формальных степенных рядов над полем F_p из p элементов (в случае, когда K имеет характеристику p). Поле Q_p (соответственно поле $F_p((X))$) лежит в центре тела K. В каждом из этих случаев тело K наз. p-телом, или p-полем.

Ультраметрическое тело K содержит единственное максимальное подкольцо R, определяемое условием

$$R = \{a \in K \mid \mathrm{mod}_K(a) \leqslant 1\}.$$

Это кольцо локально. Его максимальный идеал P определяется условием

$$P = \{a \in R \mid \mathrm{mod}_K(a) < 1\},$$

а все элементы с модулем 1 являются обратимыми в R. Идеал P — главный, а поле вычетов R/p — конечное поле характеристики p.

В случае, когда p-тело K не коммутативно, оно имеет размерность n^2 над своим центром K_0 и индекс ветвления n над K_0. Далее, существует промежуточное поле K_1 такое, что $K \supset K_1 \supset K_0$, K_1 — неразветвленное расширение K_0 степени n, и все автоморфизмы K_1 над K_0 индуцируются внутренними автоморфизмами тела K.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Вейль А., Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972; [3] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [4] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [5] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973.

Л. В. Кузьмин.

ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНАЯ АЛГЕБРА — алгебра, в к-рой всякая подалгебра с конечным числом образующих имеет конечную размерность над основным полем.

Л. к. а. удобно себе представлять как объединение возрастающей цепочки конечномерных подалгебр. Класс Л. к. а. замкнут относительно взятия гомоморфных образов и перехода к подалгебрам. Если ограничиться рас-

смотрением ассоциативных алгебр, то расширение Л. к. а. с помощью Л. к. а. снова будет Л. к. а. Поэтому во всякой алгебре сумма локально конечных идеалов представляет собою наибольший локально конечный идеал, содержащий все локально конечные идеалы и наз. локально конечным радикалом.

В ассоциативном случае всякая Л. к. а. является алгебраической. Обратное неверно (см. [6]). Тем не менее алгебраич. алгебра, удовлетворяющая полиномиальному тождеству, локально конечна. Неизвестно (1982), будет ли локально конечной алгебраич. алгебра с делением. Существует предположение, что конечно определенная алгебраич. алгебра конечномерна. Радикал Джекобсона локально конечной ассоциативной алгебры совпадает с верхним нильрадикалом. Радикал Джекобсона локально конечной йордановой алгебры также является нильидеалом. Всякая альтернативная или специальная йорданова алгебраич. алгебра ограниченного индекса (степени минимальных аннулирующих полиномов всех элементов ограничены в совокупности) над полем характеристики $\neq 2$ локально конечна. Разрешимая алгебраич. алгебра Ли (внутренние дифференцирования всех элементов алгебраические) локально конечна. Алгебраич. алгебра Ли ограниченного индекса локально конечна.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [3] Ширшов А. И., «Матем. сб.», 1957, т. 41, № 3, с. 381—94; [4] Mc Crimmon K., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1969, v. 62, № 3, p. 671—78; [5] Лю Шаосюэ, «Матем. сб.», 1956, т. 39, № 3, с. 385—96; [6] Голод Е. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 273—76.

В. Н. Латышев.

ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНАЯ ГРУППА — группа, в к-рой каждая конечно порожденная подгруппа конечна. Любая Л. к. г.— периодич. группа, но не наоборот (см. *Бёрнсайда проблема*). Расширение Л. к. г. с помощью Л. к. г. будет снова Л. к. г. Всякая Л. к. г. с условием минимальности для подгрупп (и даже для абелевых подгрупп) обладает абелевой подгруппой конечного индекса [3] (см. *Группа с условием конечности*). Л. к. г., все абелевы подгруппы к-рой имеют конечные ранги, сама имеет конечный ранг и содержит локально разрешимую подгруппу конечного индекса.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Черников С. Н., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 5, с. 45—96; [3] Шунков В. П., «Алгебра и логика», 1970, т. 9, № 5, с. 579—615; [4] его же, там же, 1971, т. 10, № 2, с. 199—225.

А. Л. Шмелькин.

ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа, в к-рой каждая конечно порожденная подполугруппа конечна. Всякая Л. к. п. будет *периодической полугруппой*. Обратное неверно: существуют даже периодич. группы, не являющиеся локально конечными (см. *Бёрнсайда проблема*). Задолго до решения проблемы Бёрнсайда для групп были построены примеры периодических, но не локально конечных полугрупп в классах полугрупп, далеких от групп, прежде всего — в классе *нильполугрупп*; таковы, напр., свободная полугруппа с двумя образующими в многообразии, заданном тождеством $x^3=0$, и свободная полугруппа с тремя образующими в многообразии, заданном тождеством $x^2=0$. Вместе с тем для ряда классов полугрупп условия периодичности и локальной конечности равносильны. Тривиальный пример доставляют коммутативные полугруппы. Связка Л. к. п. (см. *Связка полугрупп*) сама будет Л. к. п. [1], более того, полугруппа, обладающая разбиением на локально конечные группы, будет Л. к. п., в частности всякая *идемпотентов полугруппа* будет Л. к. п. [7]. Если n таково, что всякая группа с тождеством $x^n=1$ локально конечна, то всякая полугруппа с тождеством $x^{n+1}=x$ локально конечна [6]. Полугруппа, обладающая разбиением на Л. к. п., может не быть Л. к. п. [3], но если ρ — такая конгру-

энция на полугруппе S, что факторполугруппа S/ρ есть Л. к. п. и каждый ρ-класс, являющийся подполугруппой, есть Л. к. п., то и S будет Л. к. п. (см. [4], [5]); в частности, идеальное расширение Л. к. п. при помощи Л. к. п. само будет Л. к. п. Если S — периодич. полугруппа матриц над телом и все подгруппы из S локально конечны, то S локально конечна [8], откуда вытекает, что всякая периодич. полугруппа матриц над произвольным полем будет Л. к. п.

Лит.: [1] Шеврин Л. Н., «Докл. АН СССР», 1965, т. 162, № 4, с. 770—73; [2] Шнеперман Л. Б., «Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук», 1976, № 4, с. 22—28; [3] Браун Т. К., «Укр. матем. ж.», 1968, т. 20, № 6, с. 732—38; [4] Brown T. C., «Pacif. J. Math.», 1967, v. 22, № 1, p. 11—14; [5] его же, там же, 1971, v. 36, № 2, p. 285—89; [6] Green J. A., Rees D., «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1952, v. 48, pt 1, p. 35—40; [7] McLean D., «Amer. Math. Monthly», 1954, v. 61, № 2, p. 110—13; [8] McNaughton R., Zalcstein Y., «J. Algebra», 1975, v. 34, № 2, p. 292—99.

Л. Н. Шеврин.

ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНОЕ ПОКРЫТИЕ — покрытие топологич. пространства его подмножествами такое, что у каждой точки есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов этого покрытия. Не из всякого открытого покрытия прямой можно выделить Л. к. п.: достаточно рассмотреть монотонную последовательность интервалов неограниченно растущих по длине. Оказывается, возможность выделить из любого открытого покрытия пространства Л. к. п. равносильна его бикомпактности. Существенно новое содержание несет идея локальной конечности в соединении с понятием вписанности. Теорема Стоуна утверждает, что в любое открытое покрытие произвольного метрич. пространства можно вписать Л. к. п. Хаусдорфовы пространства, обладающие последним свойством, наз. паракомпактами. Л. к. п. важны не только своим участием в определении паракомпактности. Требование локальной конечности играет существенную роль в конструкциях, принадлежащих теории размерности, в формулировках и доказательствах разного рода аддиционных теорем. Существование в регулярном пространстве базы, распадающейся в объединение счетного семейства локально конечных открытых покрытий, равносильно метризуемости этого пространства. Открытые Л. к. п. нормальных пространств служат построению разбиения единицы на этом пространстве, подчиненного этому покрытию. С помощью разбиений единицы строятся, в частности, стандартные отображения многообразий в евклидовы пространства. Требование локальной конечности покрытия не обязательно соединять с предположением о его открытости. Локальная конечность покрытия пространства автоматически влечет, что в этом покрытии «достаточно много» множеств, близких по свойствам к открытым. Если в любое открытое покрытие регулярного пространства можно вписать какое-нибудь Л. к. п., то пространство паракомпактно. Рассматриваются также локально конечные семейства множеств в пространстве, определяемые аналогично, но не обязанные покрывать пространство. Специальный их случай представляют дискретные семейства множеств — такие семейства множеств, что у каждой точки всего пространства есть окрестность, пересекающая не более одного элемента этого семейства. Дискретные семейства важны в связи с изучением отделимости в пространстве. Так, выделяются коллективно нормальные пространства требованием: любое дискретное семейство множеств отделяется дискретным семейством окрестностей. С последним условием прямо связана задача комбинаторного продолжения локально конечных семейств множеств до локально конечных семейств открытых множеств.

Лит.: [1] Engeiking R., General Topology, Warsz., 1977; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974;

[3] Александров П. С., «C. r. Acad. sci.», 1924, t. 178, p. 185—87; [4] Stone A. H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1948, v. 54, p. 977—82; [5] Mihaei E., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 4, № 5, p. 831—38. *А. В. Архангельский.*

ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНОЕ СЕМЕЙСТВО множеств в топологическом пространстве — семейство F множеств такое, что у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным множеством элементов семейства F. Важны локально конечные семейства открытых множеств и локально конечные открытые покрытия. Так, регулярное пространство метризуемо в том и только в том случае, если оно обладает базой, распадающейся на счетное множество Л. к. с. В любое открытое покрытие метрич. пространства можно вписать локально конечное открытое покрытие. Пространства, обладающие этим свойством, наз. паракомпактными пространствами. *А. В. Архангельский.*

ЛОКАЛЬНО ЛИНЕЙНО СВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X, в к-ром для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности O_x существует меньшая окрестность $U_x \subset O_x$ такая, что для любых двух точек $x_0, x_1 \in U_x$ существует непрерывное отображение $f : I \to O_x$ единичного отрезка $I=[0, 1]$ в окрестность O_x с $f(0)=x_0$ и $f(1)=x_1$. Всякое Л. л. с. п. локально связно. Всякое открытое подмножество Л. л. с. п. локально линейно связно. Связное Л. л. с. п. является *линейно связным пространством*.

Л. л. с. п. играют важную роль в теории накрытий. Пусть $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ — накрытие, а Y — Л. л. с. п. Тогда необходимым и достаточным условием того, чтобы отображение $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ допускало поднятие, т. е. существовало такое отображение $g : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, что $f=pog$, является выполнение соотношения

$$f_{\#}(\pi_1(Y, y_0)) \subset P(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)),$$

где π_1 — фундаментальная группа. Если X — локально односвязное (локально 1-связное, см. ниже) пространство и $x_0 \in X$, то для любой подгруппы H группы $\pi_1(X, x_0)$ существует накрытие $p : (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to (X, x_0)$, для к-рого $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})) = H$.

Многомерным обобщением локальной линейной связности является локальная k-связность (локальная связность в размерности k). Пространство X наз. локально k-связным, если для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности O_x существует такая меньшая окрестность $U_x \subset O_x$, что любое отображение r-мерной сферы S^r в U_x, где $r \leqslant k$, гомотопно в O_x постоянному отображению. Метрич. пространство X локально k-связно тогда и только тогда, когда всякое отображение $f : A \to X$ с произвольного замкнутого подмножества A метрич. пространства Y с $\dim Y \leqslant k+1$ можно продолжить на нек-рую окрестность A в Y (теорема Куратовского — Дугунджи). *С. А. Богатый.*

ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНАЯ АЛГЕБРА — алгебра, всякая конечно порожденная подалгебра к-рой нильпотентна. Л. н. а. удобно себе представлять как объединение возрастающей цепочки нильпотентных подалгебр. Л. н. а. с ассоциативными степенями является нильалгеброй. Л. н. а. Ли является энгелевой. Класс Л. н. а. замкнут относительно взятия гомоморфных образов и перехода к подалгебрам.

В случае ассоциативных алгебр расширение Л. н. а. с помощью локально нильпотентной снова будет Л. н. а. Поэтому сумма всех локально нильпотентных идеалов ассоциативной алгебры представляет собою наибольший локально нильпотентный идеал, содержащий все локально нильпотентные идеалы и наз. радикалом Левицкого. Аналог радикала Левицкого можно

определить в энгелевой алгебре Ли ограниченного индекса. Локально нильпотентная алгебра не может быть простой.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [3] Кострикин А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, № 4, с. 515—40.

В. Н. Латышев.

ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНАЯ ГРУППА — группа, каждая конечно порожденная подгруппа к-рой нильпотентна (см. *Нильпотентная группа*). В Л. н. г. все элементы конечного порядка образуют нормальную подгруппу, являющуюся периодич. частью этой группы. Эта подгруппа разлагается в прямое произведение силовских подгрупп, а факторгруппа по ней не имеет кручения. Л. н. г. без кручения обладает свойством однозначности извлечения корня: если для элементов a и b при каком-либо целом $n\neq 0$ будет $a^n=b^n$, то $a=b$. Каждая Л. н. г. G без кручения обладает мальцевским пополнением, т. е. вкладывается в однозначно определенную Л. н. г. без кручения G^* такую, что в ней разрешимы все уравнения вида $x^n=g$, где $n\neq 0$, а g — любой элемент из G. Это пополнение функториально, т. е. любой гомоморфизм $f: G_1\to G_2$ Л. н. г. без кручения G_1 в G_2 однозначно продолжается до гомоморфизма $f^*: G_1^*\to G_2^*$.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977.

А. Л. Шмелькин.

ЛОКАЛЬНО НОРМАЛЬНАЯ ГРУППА — группа G, всякое конечное подмножество к-рой содержится в некотором конечном нормальном делителе группы G.

ЛОКАЛЬНО ПЛОСКОЕ ВЛОЖЕНИЕ — вложение q одного топологич. многообразия M^n в другое N^n, для к-рого для каждой точки $x\in M$ имеются карты в окрестности U точки x и в окрестности V точки qx в N, в к-рых ограничение q на U линейно отображает U в V. Иными словами, q локально линейно в надлежащих системах координат. Эквивалентно: имеются окрестность U точки $x\in M$ и окрестность V точки $qx\in N$ такие, что пару (V, qU) можно гомеоморфно отобразить на стандартную пару (D^n, D^m) или (D^n, D^m_+), где D^k — единичный шар пространства $\mathbb{R}^k$ с центром в начале, а D^k_+ — пересечение этого шара с полупространством $x_k\geqslant 0$.

Любое вложение окружности и дуги в плоскость является Л. п. в., однако окружность или дуга могут быть вложены в $\mathbb{R}^k$ при $k\geqslant 3$ не локально плоско (см. *Дикое вложение*, *Дикая сфера*). Любое гладкое вложение локально плоско в гладком смысле (т. е. в определении координаты можно выбрать гладкими). Кусочно линейное вложение может не быть локально плоским не только в кусочно линейном, но и в топологич. смысле, напр. конус с вершиной в $\mathbb{R}^4_+$ над замкнутой ломаной, заузленной в граничной плоскости $\mathbb{R}^3$. Для $n\neq 4$ и $m\neq n-2$ имеется гомотопич. критерий того, чтобы вложение было локально плоским: для каждой точки $x\in M$ и окрестности U точки qx имеется окрестность $V\subset U$ такая, что любая петля в $V\setminus qM$ гомотопна нулю в U/qM (локальная односвязность). Если $m=n-2$, то критерий имеется и при $n\neq 4$, но существенно сложнее. При $m=4$ вопрос остается невыясненным. При $m=n-1$ и $m=n-2$ Л. п. в. имеет топологическое нормальное расслоение.

А. В. Чернавский.

ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМАЯ АЛГЕБРА — алгебра, для к-рой всякая ее конечно порожденная подалгебра разрешима. Л. р. а. удобно представлять себе как объединение возрастающей цепочки разрешимых подалгебр. Класс Л. р. а. замкнут относительно перехода к подалгебрам и взятия гомоморфных образов.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964.

В. Н. Латышев.

ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА — группа, в к-рой каждая конечно порожденная подгруппа разрешима (см. *Разрешимая группа*). Класс Л. р. г. замкнут относительно взятия подгрупп и гомоморфных образов, но не замкнут относительно расширений.

Периодическая Л. р. г. локально конечна.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

А. Л. Шмелькин.

ЛОКАЛЬНО СВОБОДНАЯ ГРУППА — группа, каждая конечно порожденная подгруппа к-рой свободна (см. *Свободная группа*). Таким образом, счетная Л. с. г. является объединением возрастающей цепи свободных подгрупп.

Говорят, что Л. с. г. имеет конечный ранг n, если всякое ее конечное подмножество содержится в подходящей свободной подгруппе ранга n, причем n — наименьшее число с этим свойством. Класс Л. с. г. замкнут относительно свободного произведения, причем ранг свободного произведения Л. с. г. конечного ранга равен сумме рангов сомножителей.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

А. Л. Шмелькин.

ЛОКАЛЬНО СВОБОДНЫЙ ПУЧОК — пучок модулей, локально изоморфный прямой сумме нескольких экземпляров структурного пучка. Точнее, пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — *окольцованное пространство*. Пучок модулей $\mathcal{F}$ над $\mathcal{O}_X$ наз. л о к а л ь н о с в о б о д н ы м, если для каждой точки $x \in X$ существует такая открытая окрестность $U \subset X$, $x \in U$, что ограничение $\mathcal{F}|U$ пучка $\mathcal{F}$ на U является свободным пучком модулей над $\mathcal{O}_{X|U}$, т. е. изоморфно прямой сумме нек-рого множества $I(x)$ экземпляров структурного пучка $\mathcal{O}_{X|U}$. Если X связно и множество $I(x)$ конечно, напр. состоит из n элементов, то n не зависит от точки x и наз. рангом Л. с. п. $\mathcal{F}$. Пусть V — векторное расслоение ранга n на X и $\mathcal{F}$ — пучок ростков его сечений, тогда $\mathcal{F}$ — Л. с. п. ранга n. Обратно, для каждого Л. с. п. $\mathcal{F}$ ранга n существует векторное расслоение V ранга n на X такое, что $\mathcal{F}$ является пучком ростков его сечений (см. [1], [2]); тем самым существует естественное взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных Л. с. п. ранга n и классами изоморфных векторных расслоений ранга n на X.

П р и м е р: пусть X — гладкое связное алгебраич. многообразие размерности n, тогда пучок регулярных дифференциальных форм Ω^1_X является Л. с. п. ранга n.

Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ — связная аффинная схема — спектр коммутативного кольца A, $\mathcal{F}$ — Л. с. п. ранга n, $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ — A-модуль его глобальных сечений. Тогда A-модуль M проективен и отображение $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством классов (с точностью до изоморфизма) Л. с. п. ранга n и множеством классов (с точностью до изоморфизма) проективных A-модулей ранга n (см. [2]).

Лит.: [1] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [2] Hartshorne R., Algebraic geometry, N. Y.— Hdlb.— B., 1977.

В. А. Исковских.

ЛОКАЛЬНО СВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X, в к-ром для любой точки x и любой ее окрестности O_x имеется меньшая связная окрестность U_x. Всякое открытое подмножество Л. с. п. локально связно. Всякая компонента связности Л. с. п. открыто-замкнута. Пространство X локально связно тогда и только тогда, когда для всякого семейства $\{A_t\}$ подмножеств X имеет место включение

$$\operatorname{Fr}(\bigcup_t A_t) \subset \bigcup_t \overline{\operatorname{Fr}(A_t)}$$

(здесь $\operatorname{Fr} B$ — граница B, а $\overline{B}$ — замыкание B). Всякое *локально линейно связное пространство* локально связно. Частичное обращение этого утверждения: всякое полное метрич. Л. с. п. является локально линейно связ-

ным (теорема Мазуркевича — Мура — Менгера). *С. А. Богатый.*

ЛОКАЛЬНО СВЯЗНЫЙ КОНТИНУУМ — континуум, являющийся *локально связным пространством*. Примеры Л. с. к.: n-мерный куб, $n=0, 1, 2, \ldots$; *гильбертов кирпич*; все *тихоновские кубы*. Объединение графика функции

$$y=\sin\frac{1}{x}, \quad 0<x\leqslant 1,$$

с отрезком $I=\{(0, y) : -1\leqslant y\leqslant 1\}$ дает пример не локально связного (в точках отрезка I) континуума. Метризуемый континуум локально связан тогда и только тогда, когда он является непрерывным образом отрезка, т. е. линией в смысле Жордана. Любой метризуемый Л. с. к. линейно связан. Более того, любые две различные точки такого континуума K содержатся в простой дуге, лежащей в K.

Б. А. Пасынков.

ЛОКАЛЬНО ТРИВИАЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ — расслоение $\pi : X\to B$ со слоем F, для любой точки базы к-рого $b\in B$ существует окрестность $U\ni b$ и гомеоморфизм $\varphi_U : U\times F\to\pi^{-1}(U)$ такой, что $\pi\varphi_U(u, f)=u$, где $u\in U$, $f\in F$. Отображение $h_U=\varphi_U^{-1}$ наз. картой Л. т. р. Совокупность карт $\{h_U\}$, ассоциированная с покрытием базы $\{U\}$, образует атлас Л. т. р. Напр., *главное расслоение*, пространство к-рого локально компактно, а G — группа Ли, является Л. т. р., причем любая карта h_U удовлетворяет соотношению

$$h_U(gx)=gh_U(x), \quad x\in\pi^{-1}(U),$$

где G действует на $G\times U$ по формуле $g(g', u)=(gg', u)$. Для любого Л. т. р. $\pi : X\to B$ и непрерывного отображения $f : B'\to B$ *индуцированное расслоение* является Л. т. р.

Лит.: [1] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [2] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [3] Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, пер. с англ., М., 1964; [4] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970.

М. И. Войцеховский.

ЛОКАЛЬНОЕ ЗАЦЕПЛЕНИЕ — свойство расположения замкнутого множества Φ вблизи его точки a в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, заключающееся в существовании такого числа $\varepsilon>0$, что при любом положительном числе δ в открытом множестве $O(a, \delta)\setminus\Phi$ лежит q-мерный цикл Z^q, $q<n$, с целыми коэффициентами, обладающий свойством: всякий лежащий в $O(a, \varepsilon)$ компакт P, в к-ром цикл Z^q гомологичен нулю, имеет непустое пересечение с множеством Φ. При этом $O(a, \delta)$, $O(a, \varepsilon)$ суть шары с центром a и радиусами δ, ε. Не меняя содержания этого определения, можно ограничиться компактами P, являющимися полиэдрами. При $q=0$ понятие Л. з. переходит в понятие *локального разбиения*. Теорема Александрова о препятствиях: для того чтобы $\dim\Phi=p$, необходимо и достаточно, чтобы число $n-p-1$ было наименьшим целым числом q, для к-рого в $\mathbb{R}^n$ имеется q-мерное зацепление множества Φ вблизи какой-либо точки $a\in\Phi$. Доказана и аналогичная теорема о препятствиях «по модулю m», характеризующая множества Φ, имеющие равную p *гомологическую размерность* «по модулю m».

Далеко идущими обобщениями теорем о препятствиях являются теоремы о *гомологическом опоясывании* компактов.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975; [2] Ситников К., «Докл. АН СССР», 1951, т. 81, № 2, с. 153—56. *А. А. Мальцев.*

ЛОКАЛЬНОЕ КОЛЬЦО — коммутативное кольцо с единицей, имеющее единственный максимальный идеал. Если A — Л. к. с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, то факторкольцо $A/\mathfrak{m}$ является полем и наз. полем вычетов Л. к. A.

Примеры Л. к. Любое поле или кольцо нормирования является локальным. Локально и кольцо формальных степенных рядов $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ над полем k или над любым Л. к. Напротив, кольцо многочленов $k[X_1, \ldots, X_n]$ при $n \geqslant 1$ не локально. Пусть X — топологич. пространство (или дифференцируемое многообразие, или аналитич. пространство, или алгебраич. многообразие), а x — точка X. Пусть A — кольцо ростков в точке x непрерывных функций (соответственно дифференцируемых, аналитических или регулярных функций); тогда A — Л. к., максимальный идеал к-рого состоит из ростков функций, обращающихся в 0 в точке x.

К Л. к. приводят нек-рые общие теоретико-кольцевые конструкции, важнейшей из к-рых является *локализация*. Пусть A — коммутативное кольцо, а $\mathfrak{p}$ — простой идеал A. Кольцо $A_{\mathfrak{p}}$, к-рое состоит из дробей вида $\frac{a}{s}$, где $a \in A$, $s \in A - \mathfrak{p}$, является локальным и наз. локализацией кольца A в $\mathfrak{p}$. Максимальным идеалом кольца $A_{\mathfrak{p}}$ является идеал $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, а поле вычетов $A_{\mathfrak{p}}$ отождествляется с полем частных целостного факторкольца $A/\mathfrak{p}$. Другие конструкции, приводящие к Л. к.,— гензелизация или пополнение кольца относительно нек-рого максимального идеала. Любое факторкольцо Л. к. также локально.

Свойство кольца A (или A-модуля M, или A-алгебры B) наз. локальным свойством, если выполнение его для A (или M, или B) эквивалентно выполнению его для колец $A_{\mathfrak{p}}$ (соответственно модулей $M \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$, или алгебр $B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$) для всех простых идеалов $\mathfrak{p}$ кольца A (см. *Локальное свойство*).

Степени $\mathfrak{m}^n$ максимального идеала $\mathfrak{m}$ Л. к. A определяют базис окрестностей нуля так наз. топологии локального кольца (или $\mathfrak{m}$-адической топологии). Для нётерова Л. к. эта топология отделима (теорема Крулля), а любой его идеал является замкнутым.

Далее рассматриваются только нётеровы локальные кольца. Л. к. наз. полным локальным кольцом, если оно полно относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии; в этом случае $A = \varprojlim_n A/\mathfrak{m}^n$. В полном Л. к. $\mathfrak{m}$-адическая топология слабее любой другой отделимой топологии (теорема Шевалле). Любое полное Л. к. представляется как факторкольцо кольца $S[[X_1, \ldots, X_n]]$ формальных степенных рядов, где S — поле (в равнохарактеристическом случае) или полное кольцо дискретного нормирования (в случае разных характеристик). Эта теорема позволяет доказать, что полные Л. к. обладают рядом специфич. свойств, отсутствующих у произвольных нётеровых Л. к. (см. [5]), напр. полное Л. к. является *превосходным кольцом*.

Более тонкое, количественное исследование Л. к. A связано с применением понятия присоединенного градуированного кольца $\mathrm{Gr}(A) = \oplus_{n \geqslant 0} (\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1})$. Пусть $H_A(n)$ — размерность векторного пространства $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ над полем вычетов $A/\mathfrak{m}$; как функция целого аргумента n она наз. функцией Гильберта — Самюэля (или характеристической функцией) Л. к. A. При больших n эта функция совпадает с нек-рым многочленом $\overline{H}_A(n)$ от n, к-рый наз. многочленом Гильберта — Самюэля Л. к. A (см. также *Гильберта многочлен*). Этот факт можно выразить в терминах ряда Пуанкаре: формальный ряд

$$P_A(t) = \sum_{n \geqslant 0} H_A(n) \cdot t^n$$

является рациональной функцией вида $f(t)(1-t)^{-d(A)}$,

где $f(t)\in\mathbb{Z}[t]$ — многочлен, а $d(A)$—1 равно степени H_A. Целое число $d(A)$ совпадает с размерностью (по Круллю) $\dim A$ кольца A и является одним из важнейших инвариантов кольца. Кроме того, $d(A)$ равно наименьшему числу элементов $a_1, \ldots, a_d\in A$, для к-рых факторкольцо $A/(a_1, \ldots, a_d)$ артиново. Если эти элементы можно выбрать так, чтобы они порождали максимальный идеал $\mathfrak{m}$, то Л. к. A наз. р е г у л я р н ы м л о к а л ь н ы м к о л ь ц о м. Регулярность A эквивалентна тому, что $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)=\dim A$. Для d-мерного регулярного кольца A

$$H_A(n)=\binom{n+d-1}{d-1},$$

а $P_A(t)=(1-t)^{-d}$. Геометрически регулярность означает неособость соответствующей точки (аналитического или алгебраического) многообразия.

Помимо характеристич. функции H_A и связанных с ней размерности и кратности у Л. к. имеются различные инварианты гомологич. природы. Главным из них является глубина $\operatorname{prof} A$ (см. *Глубина модуля*); условие $\operatorname{prof} A=\dim A$ выделяет среди Л. к. так наз. *Коэна — Маколея кольца*. Неизвестно (1982), для всякого ли полного Л. к. A существует модуль M с $\operatorname{prof} M=\dim A$. Другими гомологич. инвариантами являются т. н. ч и с л а Б е т т и $b_i(A)$ Л. к. A, т. е. размерности k-пространств $\operatorname{Tor}_i^A(k, k)$, где k — поле вычетов A. Открыт вопрос о рациональности ряда Пуанкаре $\sum_{n\geqslant 0} b_n(A)t^n$, хотя для многих классов колец известен утвердительный ответ. Имеются также инварианты алгебро-геометрич. природы; при их определении используется разрешение особенности, соответствующей Л. к.

Аналогичная теория строится для п о л у л о к а л ь н ы х к о л е ц, т. е. колец, имеющих конечное число максимальных идеалов. Роль максимального идеала для них при этом играет *Джекобсона радикал*.

Лит.: [1] K r u l l W., «J. reine und angew. Math.», 1938, Bd 179, S. 204—26; [2] C h e v a l l e y C., «Ann. Math.», 1943, v. 44, p. 690—708; [3] C o h e n I. S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1946, v. 59, p. 54—106; [4] S a m u e l P., Algèbre locale, P., 1953; [5] N a g a t a M., Local rings, N. Y.— L., 1962; [6] З а р и с с к и й О., С а м ю э л ь П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [7] С е р р Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5, с. 3—93; [8] Б у р б а к и Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [9] А т ь я М.-Ф., М а к д о н а л ь д И., *Введение в коммутативную алгебру*, пер. с англ., М., 1972.

В. И. Данилов.

ЛОКАЛЬНОЕ ПОЛЕ — полное дискретно нормированное поле с конечным полем вычетов. Структура Л. п. хорошо известна: 1) если характеристика K равна 0, то K является конечным расширением поля $\mathbb{Q}_p$ *р-адических чисел*; 2) если характеристика K больше 0, то K изоморфно полю $k((T))$ формальных степенных рядов над конечным полем k. Локальными такие поля называются в противоположность глобальным полям (конечным расширениям полей $\mathbb{Q}$ или $k(T)$) и являются средством изучения последних. О когомологич. свойствах расширений Галуа локальных полей см. [1], а также ст. *Адель* и *Полей классов теория*.

Для построения теории полей классов многомерных схем используется обобщение понятия Л. п. А именно, структурой n-м е р н о г о л о к а л ь н о г о п о л я наз. последовательность $O_0, O_1, \ldots, O_n$ полных колец дискретного нормирования вместе с изоморфизмами

$$k(O_i)\xrightarrow{\sim} K(O_{i+1}),$$

где k — поле вычетов, а K — поле частных кольца O; при этом $k(O_n)$ должно быть конечным. Для n-мерных Л. п. построена структурная теория (см. [3]).

Лит.: [1] S e r r e J.-P., Corps locaux, P., 1962; [2] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [3] П а р ш и н А. Н., «Докл. АН СССР», 1978, т. 243, № 4, с. 855—58.

В. И. Данилов.

ЛОКАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ - мера приближения (в частности, наилучшего приближения) функции $f(x)$ на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, рассматриваемая как функция этого множества. Основной интерес представляет поведение Л. п. ф., когда mes $E \to 0$. В нек-рых случаях удается охарактеризовать в терминах Л. п. ф. степень гладкости приближаемой функции. Пусть $E_n(f;\ (\alpha,\ \beta))$ — наилучшее приближение функции $f(x) \in C\ [a,\ b]$ алгебраич. многочленами степени n на интервале $(\alpha,\ \beta)$, $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$. Справедливо следующее утверждение: условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция $f(x)$ имела непрерывную производную порядка $n+1$ во всех точках $[a,\ b]$, заключается в том, что

$$\frac{E_n(f;\ (\alpha,\ \beta))}{(\beta-\alpha)^{n+1}} \longrightarrow \lambda(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

равномерно при $\beta \to x$, $\alpha \to x$, $\alpha < x < \beta$, где непрерывная функция $\lambda(x)$ определяется равенством

$$(n+1)!\ 2^{2n+1}\ \lambda(x) = |\ f^{(n+1)}(x)\ |.$$

Лит.: [1] Райков Д. А., «Докл. АН СССР», 1939, т. 24, № 7; [2] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1954; [3] Брудный Ю. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1971, т. 24, с. 69—132.
Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

ЛОКАЛЬНОЕ РАЗБИЕНИЕ — свойство расположения замкнутого множества Φ в пространстве $\mathbb{R}^n$, заключающееся в существовании такой точки a (точка, в к-рой множество Φ разбивает пространство) и такого положительного числа ε, что при любом числе $\delta > 0$ в открытом множестве $O(a,\ \delta) \setminus \Phi$, где $O(a,\ \delta)$ — (открытый) шар радиуса δ с центром a, содержится пара точек, обладающая свойством: всякий лежащий в $O(a,\ \varepsilon)$ континуум, содержащий эту пару точек, имеет непустое пересечение с множеством Φ. К. Менгер (K. Menger) и П. С. Урысон доказали, что лежащее в плоскости замкнутое множество Φ тогда и только тогда имеет размерность 1, когда оно не содержит внутренних (относительно плоскости) точек и локально разбивает плоскость (хотя бы в одной точке a).

Аналогичная характеризация замкнутых $(n-1)$-мерных множеств в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ дана П. С. Александровым (см. *Локальное зацепление*).
А. А. Мальцев.

ЛОКАЛЬНОЕ СВОЙСТВО в коммутативной алгебре — свойство P коммутативного кольца A или A-модуля M, к-рое верно для кольца A (модуля M) тогда и только тогда, когда аналогичное свойство выполняется для локализаций кольца A (модуля M) относительно всех простых идеалов кольца A, т. е. свойство, к-рое выполняется глобально тогда и только тогда, когда оно выполняется всюду локально. Часто вместо множества всех простых идеалов можно ограничиться рассмотрением всех максимальных идеалов кольца A. Эта терминология становится понятной, если сопоставить кольцу A топологич. пространство Spec A (спектр кольца A), состоящее из всех простых идеалов A. Тогда утверждение «P верно для A» эквивалентно утверждению «P выполняется на всем пространстве Spec A», а утверждение «P верно для всех $A_{\mathfrak{p}}$» эквивалентно утверждению «каждая точка $\mathfrak{p}$ пространства Spec A обладает окрестностью, в к-рой выполняется P».

Примеры Л. с. Область целостности A целозамкнута в своем поле частных тогда и только тогда, когда целозамкнуты локализации $A_{\mathfrak{p}}$ для всех максимальных идеалов кольца A. Гомоморфизм A-модулей $f : M \to N$ является изоморфизмом (мономорфизмом, эпиморфизмом, нулевым) тогда и только тогда, когда отображение локализованных модулей $f_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ является таковым для всех максимальных идеалов кольца A.

Напротив, свойство A-модуля M быть свободным не является локальным.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *Л. В. Кузьмин.*

ЛОКАЛЬНОСТИ ПРИНЦИП — собирательное понятие, объединяющее ряд утверждений, относящихся в основном к эллиптическим (в нек-рых случаях к гипоэллиптическим) уравнениям (операторам) и вытекающих из точечного характера особенности фундаментального решения для этого класса уравнений. Напр., эллиптич. оператор $L(D, x)$ с переменными коэффициентами, записанный в виде

$$L(D, x) \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

представим, в соответствующем смысле, в окрестности точки x_0 как сумма

$$L(D, x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x_0) D^\alpha + L'(x),$$

где первое слагаемое — оператор с постоянными коэффициентами, а $L'(x)$ «достаточно мал» в указанной окрестности.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы, пер. с англ., т. 2, М., 1966. *А. А. Дезин.*

ЛОКАЛЬНЫЕ ГОМОЛОГИИ — *гомологии группы*

$$H_p^x = H_p^c(X, X \setminus x; G),$$

определенные в точках $x \in X$, где H_p^c — *гомологии с компактными носителями*. Эти группы совпадают с прямыми пределами

$$\varinjlim H_p^c(X, X \setminus U; G)$$

по открытым окрестностям U точки x, а для гомологически локально связных X — также с обратными пределами

$$\varprojlim H_{p-1}^c(U \setminus x; G).$$

Гомологическая размерность конечномерного метризуемого локально компактного пространства X над G совпадает с наибольшим значением n, для к-рого $H_n^x \neq 0$, причем множество таких точек $x \in X$ имеет размерность n.

Пусть C_* — дифференциальный пучок над X, определяемый сопоставлением каждому открытому множеству $U \subset X$ комплекса цепей $C_*(X, X \setminus U; G)$. Группы H_p^x являются слоями производных пучков $\mathcal{H}_p = H_p(C_*)$. Для обобщенных многообразий $H_p^x = 0$ при $p \neq n = \dim X$. В этом случае гомологич. последовательность с коэффициентами в G пары (X, A) совпадает с когомологиями пары $(X, X \setminus A)$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{H}_n$ (двойственность Пуанкаре — Лефшеца). Для локальных когомологий локально компактных пространств аналогичные факты не имеют места.

Лит.: [1] Скляренко Е. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 4, с. 831—43; [2] Харлап А. Э., «Матем. сб.», 1975, т. 96, № 3, с. 347—73. *Е. Г. Скляренко.*

ЛОКАЛЬНЫЕ И РЕЗИДУАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА — абстрактные (т. е. сохраняющиеся при изоморфизме) свойства алгебраич. систем или универсальных алгебр. Если P — нек-рое свойство алгебр, то говорят, что алгебра A локально обладает свойством P, если существует локальная система подалгебр алгебры A, каждая из к-рых обладает свойством P. Локальной системой подалгебр алгебры A наз. система непустых подалгебр, направленная по включению, объединение всех подалгебр к-рой совпадает с A. Если каждая алгебра нек-рого класса, к-рая локально обладает свойством P, в действительности сама обладает свойством P, то P наз. локальным свойством алгебр этого класса. Напр., свойство быть абелевой группой — локальное

свойство в классе всех групп, а свойство быть конечной группой — не локальное. Подробнее о локальности свойств см. *Мальцева локальные теоремы*.

Говорят, что алгебра A р е з и д у а л ь н о о б л а д а е т с в о й с т в о м P, если существует такое разделяющее семейство конгруэнций $(q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ на A, что каждая факторалгебра A/q_λ обладает свойством P. Семейство $(q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ наз. р а з д е л я ю щ и м с е м е й с т в о м к о н г р у э н ц и й, если пересечение всех q_λ есть максимальная (т. е. самая дробная) конгруэнция данной алгебры. Алгебра A резидуально обладает свойством P тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде подпрямого произведения однотипных с ней алгебр, обладающих свойством P. Свойство P наз. резидуальным в нек-ром классе алгебр, если всякая алгебра этого класса, резидуально обладающая свойством P, в действительности сама обладает свойством P. В классе всех групп свойство быть абелевой группой резидуально, а конечность не резидуальна. Всякое резидуальное свойство алгебр, сохраняющееся при переходе к гомоморфным образам, локально.

Лит.: [1] К о н П., *Универсальная алгебра*, пер. с англ., М., 1968.

О. А. Иванова.

ЛОКАЛЬНЫЕ КОГОМОЛОГИИ с о з н а ч е н и я м и в п у ч к е а б е л е в ы х г р у п п — когомологии со значениями в пучке, носители к-рых содержатся в заданном подмножестве. Пусть X — топологич. пространство, $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на X, Z — локально замкнутое подмножество в X, т. е. замкнутое подмножество нек-рого открытого в X подмножества V, тогда через $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ обозначают подгруппу в $\Gamma(V, F|V)$, состоящую из сечений пучка $\mathcal{F}|V$ с носителями в Z. Если фиксировать Z, то соответствие $F \to \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ определяет точный слева функтор из категории пучков абелевых групп на X в категорию абелевых групп. Значение соответствующего i-го правого производного функтора на пучке $\mathcal{F}$ обозначают через $H^i_Z(X, \mathcal{F})$ и наз. i-й группой локальных когомологий пространства X со значениями в $\mathcal{F}$ относительно Z. При этом

$$H^0_Z(X, \mathcal{F}) = \Gamma_Z(X, \mathcal{F}).$$

Пусть $H^0_Z(\mathcal{F})$ — пучок на X, отвечающий предпучку, к-рый сопоставляет любому открытому подмножеству $U \subset X$ группу $\Gamma_{Z \cap U}(U, \mathcal{F}|U)$. Соответствие $\mathcal{F} \to \mathcal{H}_Z(\mathcal{F})$ является точным слева функтором из категории пучков абелевых групп на X в нее же. Значение его i-го правого производного функтора на пучке $\mathcal{F}$ обозначается через $\mathcal{H}^i_Z(\mathcal{F})$ и наз. пучком i-х локальных когомологий пучка $\mathcal{F}$ относительно Z. Пучок $\mathcal{H}^i_Z(\mathcal{F})$ ассоциирован с предпучком, сопоставляющим открытому подмножеству $U \subset X$ группу $H^i_{Z \cap U}(U, \mathcal{F}|U)$.

Существует спектральная последовательность $E_r^{p,q}$, сходящаяся к $H^{p+q}_Z(X, \mathcal{F})$, у к-рой $E_r^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}^q_Z(\mathcal{F}))$ (см. [2], [3]).

Пусть Z — локально замкнутое подмножество в X, Z' — замкнутое подмножество в Z, $Z'' = Z \setminus Z'$, тогда имеют место точные последовательности:

$$0 \to H^0_{Z'}(X, \mathcal{F}) \to \ldots \to H^i_{Z'}(X, \mathcal{F}) \to$$

$$\to H^i_Z(X, \mathcal{F}) \to H^i_{Z''}(X, \mathcal{F}) \to H^{i+1}_{Z'}(X, \mathcal{F}) \to \quad (1)$$

$$0 \to \mathcal{H}^0_{Z'}(\mathcal{F}) \to \ldots \to \mathcal{H}^i_{Z'}(\mathcal{F}) \to$$

$$\to \mathcal{H}^i_Z(\mathcal{F}) \to \mathcal{H}^i_{Z''}(\mathcal{F}) \to \mathcal{H}^{i+1}_{Z'}(\mathcal{F}) \to \quad (2)$$

Если Z есть все X, а Z' — замкнутое подмножество в X, то последовательность (2) дает точную последовательность

$$0 \to \mathcal{H}^0_{Z'}(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to \mathcal{H}^0_{X \setminus Z}(\mathcal{F}) \to \mathcal{H}^1_{Z'}(\mathcal{F}) \to 0$$

и систему изоморфизмов

$$\mathcal{H}^i_{X\setminus Z'}(\mathcal{F}) \cong \mathcal{H}^{i+1}_{Z'}(\mathcal{F}), \quad i \geqslant 1.$$

Пучки $\mathcal{H}^i_{X\setminus Z'}(\mathcal{F})$ наз. i-ми лакунарными пучками пучка $\mathcal{F}$ и имеют важные приложения к вопросу о продолжении сечений и классов когомологий пучка $\mathcal{F}$, заданных на $X\setminus Z'$, на все X (см. [4]).

Если X — локально нётерова схема, $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на X, Z — замкнутая подсхема в X, то $\mathcal{H}^i_Z(\mathcal{F})$ — также квазикогерентные пучки на X. Если $\mathcal{Y}$ — когерентный пучок идеалов на X, задающий подсхему Z, то имеют место изоморфизмы

$$\varinjlim_n \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{Y}^n, \mathcal{F}) \cong \mathcal{H}^i_Z(\mathcal{F}).$$

Важными для приложений являются следующие критерии тривиальности и когерентности пучков локальных когомологий (см. [3], [4]).

Пусть X — локально нётерова схема или комплексное аналитич. пространство, Z — локально замкнутая подсхема или аналитич. подпространство в X, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей, $\mathcal{Y}$ — когерентный пучок идеалов, задающий Z. Пусть

$$\operatorname{prof}_Z \mathcal{F} = \min_{x\in Z} \operatorname{prof}_{\mathcal{Y}_{X,x}} \mathcal{F}_x,$$

где $\operatorname{prof}_{\mathcal{Y}_{X,x}} \mathcal{F}$ — длина максимальной регулярной для $\mathcal{F}_x$ последовательности элементов из $\mathcal{Y}_{X,x}$ или ∞, если $\mathcal{F}_x = 0$. Тогда равенство $\mathcal{H}^i_Z(\mathcal{F}) = 0$ для $i < n$ равносильно условию $\operatorname{prof}_Z \mathcal{F} \geqslant n$. Пусть $\operatorname{codh}_x \mathcal{F}_x = \operatorname{prof}_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{F}_x$ (где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал колец $\mathcal{O}_{X,x}$) и пусть $S_m(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \operatorname{codh}_x \mathcal{F} \geqslant m\}$. Если X — комплексное аналитич. пространство или алгебраич. многообразие, то все множества $S_m(\mathcal{F})$ являются аналитическими или соответственно алгебраическими. Если при этом $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X, а Z — соответственно аналитич. пространство или подмногообразие, то когерентность пучков $\mathcal{H}^i_Z(\mathcal{F})$ для $0 \leqslant i \leqslant q$ равносильно условию

$$\dim Z \cap \overline{S_{k+q+1}}\,(\mathcal{F} \mid X\setminus Z) \leqslant k$$

для всякого целого k.

В терминах Л. к. определяются гиперфункции, имеющие важные приложения в теории дифференциальных уравнений с частными производными [5]. Пусть Ω — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, к-рое естественным образом вложено в $\mathbb{C}^n$. Тогда $\mathcal{H}^p_\Omega(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = 0$ при $p \neq n$. Предпучок $\Omega \to H^n_\Omega(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ на $\mathbb{R}^n$ определяет вялый пучок, называемый пучком гиперфункций.

Аналог Л. к. существует и в теории этальных когомологий [3].

Лит.: [1] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология, Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 47—112; [2] Grothendieck A., Local cohomology, B.— Hdlb.— N. Y., 1967; [3] его же, Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, Amst.— P., [1968]; [4] Siu Y.-T., Trautmann G., Gap-sheaves and extension of coherent analytic subsheaves, B.— [a. o.], 1971; [5] Шапира П., Теория гиперфункций, пер. с франц., М., 1972; [6] Bănică C., Stănăşilă O., Metodc algebrice în teoria globală a spaţiilor complexe, Buc., 1974.

Д. А. Пономарев.

ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ теории вероятностей — предельные теоремы для плотностей, т. е. теоремы, устанавливающие сходимость плотностей последовательности распределений к плотности предельного распределения (если указанные плотности существуют), или классический вариант Л. п. т. — локальные теоремы для решетчатых распределений, простейшей из к-рых является локальная *Лапласа теорема.*

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих общую функцию распределения $F(x)$ с математич. ожиданием a и конечной положительной дисперсией σ^2. Пусть $F_n(x)$ функция распределения нормированной суммы

$$Z_n = (1/\sigma\sqrt{n}) \sum_{j=1}^{n} (X_j - a)$$

и $\Phi(x)$ — нормальная (0,1) функция распределения. Сделанные предположения обеспечивают выполнение соотношения $F_n(x) \to \Phi(x)$ при $n \to \infty$ для любого x. Можно показать, что это соотношение не влечет за собой сходимость плотности распределения $p_n(x)$ случайной величины Z_n к нормальной плотности

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

даже если распределение F имеет плотность. Если же Z_n имеет при нек-ром $n = n_0$ ограниченную плотность распределения $p_{n_0}(x)$, то

$$p_n(x) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad (*)$$

равномерно относительно x. Условие ограниченности плотности $p_{n_0}(x)$ для нек-рого n_0 необходимо для того, чтобы (*) имело место равномерно относительно x.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое невырожденное распределение, и X_1 с вероятностью 1 принимает значения вида $b + Nh$, $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где $h > 0$ и b — постоянные (т. е. X_1 имеет *решетчатое распределение* с шагом h).

Пусть X_1 имеет конечную дисперсию σ^2, $a = EX_1$ и

$$P_n(N) = \mathsf{P}\left\{\sum_{j=1}^{n} X_j = nb + Nh\right\}.$$

Для того чтобы

$$\sup_N \left| \sigma\sqrt{n}\, h^{-1} P_n(N) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{nb + Nh - na}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right\}\right| \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы шаг h был максимальным. Эта теорема Гнеденко представляет собой обобщение локальной теоремы Лапласа.

Л. п. т. для сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин могут служить основным математич. аппаратом классической статистич. механики и квантовой статистики (см. [7], [8]).

Л. п. т. глубоко изучены для сумм независимых случайных величин и векторов вместе с оценками скорости сходимости в этих теоремах. Наиболее полно исследован случай предельного нормального распределения (см. [3], гл. 7); ряд работ посвящен Л. п. т. для случая произвольного устойчивого распределения (см. [2]). Аналогичные исследования проведены также для сумм зависимых случайных величин, в частности для сумм случайных величин, образующих цепь Маркова (см. [5], [6]).

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [2] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [3] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [4] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [5] Сираждинов С. Х., Предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Ташкент, 1955; [6] Статулявичус В. А., «Литовский матем. сб.», 1961, т. 1, в. 1—2, с. 231—314; 1969, т. 9, в. 2, с. 345—62; [7] Хинчин А. Я., Математические основания статистической механики, М.— Л., 1943; [8] Хинчин А. Я., Математические основания квантовой статистики, М.— Л., 1951.

В. В. Петров.

ЛОКАЛЬНЫЙ ГОМЕОМОРФИЗМ — отображение $f : X \to Y$ топологич. пространств такое, что для каждой

точки $x \in X$ найдется окрестность O_x, к-рая посредством f отображается в Y гомеоморфно. Иногда в определение Л. г. автоматически включается требование $fX = Y$ и, кроме того, отображение f предполагается открытым. Примеры Л. г.: непрерывно дифференцируемое с отличным от нуля якобианом отображение открытого подмножества n-мерного евклидова пространства в n-мерное евклидово пространство; отображение накрытия и, в частности, естественное отображение топологич. группы на ее факторпространство по дискретной подгруппе. Если отображение $f : X \to Y$ полного по Чеху, в частности, хаусдорфова локально бикомпактного пространства на тихоновское пространство Y открыто и счетнократно, т. е. $|f^{-1}y| \leqslant \aleph_0$, $y \in Y$, то на нек-ром открытом и всюду плотном в X множестве отображение f является Л. г. *Б. А. Пасынков.*

ЛОКАЛЬНЫЙ УНИФОРМИЗИРУЮЩИЙ ПАРАМЕТР, локальная униформизирующая, локальный параметр,— комплексное переменное t, определенное как непрерывная функция $t_{p_0} = \varphi_{p_0}(p)$ точки p *римановой поверхности* R всюду в нек-рой окрестности $V(p_0)$ точки $p_0 \in R$, реализующая гомеоморфное отображение окрестности $V(p_0)$ на круг $D(p_0) = \{t \in \mathbb{C} : |t| < r(p_0)\}$, причем $\varphi_{p_0}(p_0) = 0$. При этом $V(p_0)$ наз. отмеченной, или параметрической, окрестностью, φ_{p_0}: $V(p_0) \to D(p_0)$ — отмеченным, или параметрическим, отображением, $D(p_0)$ — отмеченным, или параметрическим, кругом. При отмеченном отображении любая функция точки $g(p)$, определенная в отмеченной окрестности $V(p_0)$, переходит в функцию Л. у. п. t, т. е. $g(p) = g[\varphi_{p_0}^{-1}(t)] = G(t)$. Если $V(p_0)$ и $V(p_1)$ — две отмеченные окрестности такие, что $V(p_0) \cap V(p_1) \neq \varnothing$, t_{p_0} и t_{p_1} — соответствующие Л. у. п., то $t_{p_1} = \varphi_{p_1}[\varphi_{p_0}^{-1}(t_{p_0})]$ есть однолистная голоморфная функция на нек-рой подобласти $D(p_0)$, осуществляющая биголоморфное отображение этой подобласти в $D(p_1)$.

Если $R = R_F$ — риманова поверхность аналитич. функции $w = F(z)$ и p_0 — регулярный элемент $F(z)$ с проекцией $z_0 \neq \infty$, то $t_{p_0} = z - z_0$; $t_{p_0} = 1/z$ при $z_0 = \infty$. Если p_0 — особый, или алгебраический, элемент $F(z)$, соответствующий *ветвления точке* z_0 порядка $k-1 > 0$, то $t_{p_0} = \sqrt[k]{z - z_0}$ при $z_0 \neq \infty$ и $t_{p_0} = 1/\sqrt[k]{z}$ при $z_0 = \infty$. В отмеченной окрестности элемента p_0 Л. у. п. t фактически осуществляет при этом локальную *униформизацию*, вообще говоря, многозначного соотношения $w = F(z)$ по формулам (для примера, при $z_0 \neq \infty$):

$$z = z_0 + t^k, \quad w = F(z_0 + t^k) = w(t), \quad k \geqslant 1.$$

В случае, когда R — риманова поверхность с краем, для точек p_0, принадлежащих краю R, Л. у. п. $t_{p_0} = \varphi_{p_0}(p)$ отображает отмеченную окрестность $V(p_0)$ на полукруг

$$D(p_0) = \{t \in \mathbb{C} : |t| < r(p_0), \quad \operatorname{Im} t \geqslant 0\}.$$

Если R — *риманова область* над комплексным пространством $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, то Л. у. п.

$$t_{p_0} = \varphi_{p_0}(p) = (t_1, \ \ldots, \ t_n)_{p_0} = (\varphi_1(p), \ \ldots, \ \varphi_n(p))_{p_0}$$

осуществляет гомеоморфное отображение отмеченной окрестности $V(p_0)$ на поликруг

$$D(p_0) = \{t = (t_1, \ \ldots, \ t_n) \in \mathbb{C}^n : \\ : |t_1| < r_1(p_0), \ \ldots, \ |t_n| < r_n(p_0)\}.$$

При этом, если пересечение $V(p_0) \cap V(p_1)$ не пусто, то отображение $t_{p_1} = \varphi_{p_1}[\varphi_{p_0}^{-1}(t_{p_0})]$ биголоморфно отображает нек-рую подобласть $D(p_0)$ в $D(p_1)$.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [2] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

ЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ МЕТОД — один из прямых методов численного решения задач оптимального управления с ограничениями на фазовые координаты и управляющие функции, основанный на варьировании в пространстве состояний (см. [1] — [3]).

В Л. в. м. исходная задача оптимального управления, заданная в форме *Лагранжа задачи*, приводится в результате дискретизации по аргументу t и фазовому вектору x к задаче минимизации аддитивного функционала

$$I=\sum_{k=0}^{N-1} F^0(x_k,\ x_{k+1},\ u_k,\ t_k,\ t_{k+1}) \qquad (1)$$

при условиях

$$x_{k+1}-x_k=\tau F(x_k,\ x_{k+1},\ u_k,\ t_k,\ t_{k+1}),\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1, \qquad (2)$$

$$(x_k,\ u_k)\in G_k,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ N, \qquad (3)$$

где x_k, u_k — векторы фазовых координат и управлений в узле t_k (имеющие размерности соответственно n и m), G_k — заданные области $(n+m)$-мерного пространства (G_0 и G_N описывают граничные условия), $\tau=(T-t_0)/N$ — шаг разбиения исходного интервала $[t_0,\ T]$ для независимого переменного. Существенным для Л. в. м. является условие равенства размерностей $n=m$ векторов x и u, при к-ром построение элементарной операции оказывается достаточно простым. Под элементарной операцией понимается определение управления u_k, переводящего систему из точки $(t_k,\ x_k)$ в близкую точку $(t_{k+1},\ x_{k+1})$. При равенстве размерностей векторов x и u и при нек-рых дополнительных условиях управление u_k определяется на каждом интервале $(t_k,\ t_{k+1})$ из решения системы n уравнений (2), полученной в результате конечноразностной аппроксимации системы дифференциальных уравнений исходной вариационной задачи.

Пусть в качестве начального приближения задана нек-рая ломаная Γ_0 : $(x_0^0,\ \ldots,\ x_N^0)$, для к-рой выполнены условия (2), (3). Алгоритм Л. в. м. состоит в последовательном улучшении положения узлов, через к-рые проходит ломаная Γ_0, осуществляемом в результате поочередного локального варьирования каждой j-й компоненты вектора x_k. На каждом участке от t_k до t_{k+2}, $k=0,\ 1,\ \ldots$, при фиксированных x_k и x_{k+2} каждая j-я компонента вектора x_k поочередно варьируется с шагом $h_j>0$. Если в результате этого варьирования значение функционала (1) уменьшается (при выполнении условий (2), (3)), то аналогичное варьирование производится с очередной $(j+1)$-й компонентой вектора x_k, в противном случае j-я компонента варьируется с шагом $(-h_j)$. Такое локальное варьирование осуществляется последовательно для всех узлов ломаной Γ_0. В результате к моменту окончания итерации получается новая ломаная Γ_1, на к-рой функционал (1) принимает значение, не большее чем на начальном приближении Γ_0. Последующие итерации выполняются аналогично. При необходимости производится уменьшение шагов h_j и τ. Приближенное решение исходной вариационной задачи определяется путем интерполяции по найденным значениям управления на каждом шаге.

При $m=n=1$ решение, полученное Л. в. м. при заданных значениях τ и h, удовлетворяет конечноразностной аппроксимации уравнения Эйлера с точностью до членов порядка $\max(h,\ h/\tau,\ h/\tau^2)$ (см. [3]).

Если варьирование исходной ломаной Γ_0 не ограничивается поочередным варьированием ее узлов, а осу-

ществляется на более полном графе, соответствующем выбранным шагам τ и h_j и включающем ломаную Γ_0, то говорят о *блуждающей трубки методе*.

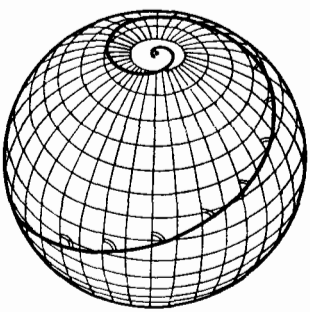
При $m<n$ выполнение элементарной операции связано с нек-рыми трудностями. В этом случае вместо Л. в. м. может применяться близкий к нему *бегущей волны метод*.

Л. в. м. непосредственно обобщается на вариационные задачи с неаддитивными функционалами, в к-рых ограничения носят характер изопериметрич. условий (см. [3]). Л. в. м. может быть распространен на вариационные задачи, в к-рых неизвестные функции зависят от нескольких независимых переменных и соответствующие функционалы задаются в виде интегралов по областям различной размерности (см. [2]).

Лит.: [1] Моисеев Н. Н., Численные методы в теории оптимальных систем, М., 1971; [2] Крылов И. А., Черноусько Ф. Л., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1966, т. 6, № 2, с. 203—17; [3] Баничук Н. В., Петров В. М., Черноусько Ф. Л., там же, 1969, т. 9, № 3, с. 548—57.

И. Б. Вапнярский.

ЛОКСОДРОМА, локсодромия,— линия на поверхности вращения, пересекающая все меридианы под постоянным углом α. Если α — острый или тупой угол, то Л. образует бесконечное число витков вокруг полюса, все приближаясь к нему. Для поверхности вращения, первая квадратичная форма к-рой записана в виде



$$ds^2=du^2+G(u)dv^2,$$

уравнение Л.:

$$c\ \operatorname{ctg}\alpha=\pm\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{G(u)}}.$$

Для сферы с первой квадратичной формой

$$ds^2=R^2(du^2+\cos^2 u\ dv^2)$$

уравнение Л.:

$$v\ \operatorname{ctg}\alpha=R\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2R}\right).$$

А. Б. Иванов.

ЛОММЕЛЯ МНОГОЧЛЕН — многочлен $R_{m,\nu}(z)$ степени m относительно z^{-1} для $m=0, 1, 2, \ldots$ и любого ν, определяемый равенством

$$R_{m,\nu}(z)=$$
$$=\frac{\pi z}{2\sin\nu\pi}\left[J_{\nu+m}(z)\ J_{-\nu+1}(z)+(-1)^m J_{-\nu-m}(z)\ J_{\nu-1}(z)\right]$$

или

$$R_{m,\nu}(z)=\frac{\Gamma(\nu+m)}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{2}{z}\right)^m\times$$
$$\times{}_2F_3\left(\frac{1-m}{2},\ -\frac{m}{2};\ \nu,\ -m,\ 1-\nu-m;\ -z^2\right).$$

При этом $J_\mu(z)$ — *Бесселя функция* и ${}_2F_3$ — гипергеометрический ряд, Л. м. удовлетворяют соотношениям:

$$J_{\nu+m}(z)=J_\nu(z)\ R_{m,\nu}(z)-J_{\nu-1}(z)\ R_{m-1,\nu-1}(z),$$

$$R_{0,\nu}(z)=1,\qquad m=1,\ 2,\ \ldots.$$

Лит.: [1] Magnus W., Oberhettinger F., Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2 Aufl., B.— Gött.— Hdlb., 1948.

А. Б. Иванов.

ЛОММЕЛЯ ФУНКЦИЯ — решение неоднородного *Бесселя уравнения*

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)\ y=x^\rho.$$

Если $\rho=\nu+2n$, где n — натуральное число, то

$$y=(-1)^{n-1}(n-1)!\,2^{\nu+2n-2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\times$$
$$\times\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\frac{\Gamma(\nu+n)}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}.$$

Если числа $\rho+\nu\geqslant 0$ и $\rho-\nu\geqslant 0$ не являются целыми, то

$$y=2^{\rho-2}\,\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu}{2}\right)\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\rho+2k}}{\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}+k+1\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu}{2}+k+1\right)}.$$

Если $\rho=\nu-2n$, где $n\geqslant 0$ — целое число, и ν не является целым числом $\leqslant n$, то

$$y=\frac{\Gamma(\nu-n)}{n!\,2^{-\nu+2n+2}}\left[2J_\nu(x)\ln\frac{x}{2}-\right.$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{\Gamma(\nu-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-2n+2k}-$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}+\frac{\Gamma'(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}\right)\right].$$

Здесь при $n=0$ первая сумма принимается равной нулю, $J_\nu(x)$ — *Бесселя функция*. Известны также Л. ф. от двух переменных.

См. также *Ангера функция*, *Вебера функция*, *Струве функция*.

Л. ф. изучалась Э. Ломмелем [1].

Лит.: [1] Lommel E., «Math. Ann.», 1880, Bd 16, S. 183—208; [2] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1, М., 1949, [3] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

ЛОНГМАНА МЕТОД — метод приближенного вычисления определенного интеграла

$$I\stackrel{\text{def}}{=}\int_a^b f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ имеет точно n корней x_i внутри промежутка $[a, b]$:

$$x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b=x_{n+1}$$

и удовлетворяет формулируемым ниже условиям. Пусть

$$v_i\stackrel{\text{def}}{=}(-1)^i\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\,dx,\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

тогда $I=S$, где

$$S\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j v_j.$$

Предполагается, что $f(x)$ сохраняет знак на промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ и имеет разные знаки на соседних промежутках, при этом $v_i\neq 0$, $i=0, 1, 2, \ldots, n$. Такую функцию $f(x)$ наз. к о л е б л ю щ е й с я. Вычисление I с помощью квадратурной формулы при большом n затруднительно, т. к. хорошее приближение колеблющейся функции на всем промежутке $[a, b]$ практически невозможно. Использование равенства $I=S$ приводит к вычислению всех интегралов v_j, что также нецелесообразно в случае большого n.

Приближенное вычисление I в Л. м. основано на равенстве ($n\geqslant p$)

$$S=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k 2^{-k-1}\Delta^k v_0+$$
$$+(-1)^n\sum_{k=0}^{p-1}2^{-k-1}\Delta^k v_{n-k}+$$
$$+2^{-p}(-1)^p\sum_{k=0}^{n-p}(-1)^k\Delta^p v_k. \qquad (1)$$

В равенство (1) входят конечные разности v_j как функции дискретного аргумента j:

$$\Delta v_j \stackrel{\text{def}}{=} v_{j+1} - v_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$\Delta^{r+1} v_j \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^r v_{j+1} - \Delta^r v_j,$$

$$r = 1, 2, \ldots, p-1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-r-1.$$

Если функция v_j такова, что в правой части (1) можно пренебречь слагаемыми, содержащими конечные разности порядка p, то приближенное равенство

$$S \cong \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k 2^{-k-1} \Delta^k v_0 + \\ + (-1)^n \sum_{k=0}^{p-1} 2^{-k-1} \Delta^k v_{n-k} \qquad (2)$$

можно использовать для вычисления S. Чтобы вычислить правую часть (2), достаточно знать p первых значений v_j, т. е. значения $v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}$, и p последних значений $v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{n-p+1}$. Л. м. и состоит в использовании равенства (2) для приближенного вычисления суммы S.

Если в интеграле I верхний предел интегрирования $b = +\infty$ и

$$I = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i v_i,$$

то вместо (1) следует воспользоваться равенством

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i v_i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i 2^{-i-1} \Delta^i v_0$$

(преобразование Эйлера) и ряд в правой части заменить частичной суммой.

Метод предложен И. Лонгманом [1].

Лит.: [1] Longman I. M., «Math. Comput.», 1960, v. 14, № 69, p. 53—59; [2] Davis P. J., Rabinowitz P., Methods of numerical integration, N. Y., 1975.

И. П. Мысовских.

ЛОПИТАЛЯ ПРАВИЛО — раскрытие неопределенностей вида $0/0$, ∞/∞ сведением предела отношения функций к пределу отношения производных рассматриваемых функций. Так, для случая, когда действительные функции f и g определены в проколотой правосторонней окрестности точки a числовой оси, Л. п. имеет вид

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (*)$$

Как в случае неопределенности типа $0/0$, т. е. когда

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0,$$

так и в случае ∞/∞, т. е. когда

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = \infty,$$

Л. п. справедливо при условиях, что функции f и g дифференцируемы на нек-ром интервале (a, b), $g'(x) \neq 0$ для всех точек $x \in (a, b)$ и существует конечный или бесконечный предел отношения производных

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(в случае неопределенности типа ∞/∞ этот предел, если он бесконечный, может быть только бесконечностью определенного знака); тогда существует и предел отношения функций $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и справедливо равенство (*). Это утверждение с естественными видоизменениями остается верным как для случая левостороннего, так и для случая двустороннего предела, а также тогда, когда $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

При практическом отыскании пределов отношения функций с помощью Л. п. иногда приходится применять его несколько раз подряд.

При сделанных выше предположениях существование предела отношения производных $f'(x)/g'(x)$ является достаточным условием существования предела отношения $f(x)/g(x)$ самих функций, но не необходимым.

Лит.: [1] Лопиталь Г. Ф., Анализ бесконечно малых, пер. с франц., М.— Л., 1935; [2] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев.

ЛОРАНА РЯД — обобщение степенного ряда по целым неотрицательным степеням разности $z-a$ или по целым неположительным степеням $z-a$ в виде

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k. \qquad (1)$$

Ряд (1) понимается как сумма двух рядов:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^k$$

— правильная часть Л. р. и

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k$$

— главная часть Л. р. Ряд (1) считается сходящимся тогда и только тогда, когда сходятся его правильная и главная части. Свойства Л. р.: 1) если область сходимости Л. р. содержит внутренние точки, то она представляет собой круговое кольцо $D=\{z\in\mathbb{C}: 0\leqslant r<|z-a|<R\leqslant+\infty\}$ с центром в точке $a\neq\infty$; 2) во всех внутренних точках кольца сходимости D ряд (1) сходится абсолютно; 3) как и для степенных рядов, поведение Л. р. в точках граничных окружностей $|z-a|=r$ и $|z-a|=R$ может быть самым разнообразным; 4) на любом компактном множестве $K\subset D$ ряд (1) сходится равномерно; 5) сумма ряда (1) в D есть аналитич. функция $f(z)$; 6) ряд (1) можно дифференцировать и интегрировать в D почленно; 7) коэффициенты c_k Л. р. определяются через его сумму $f(z)$ формулами

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{k+1}}, \qquad k=0,\ \pm 1,\ \ldots, \qquad (2)$$

где $\gamma=\{z: |z-a|=\rho,\ r<\rho<R\}$ — любая окружность с центром a, расположенная в D; 8) разложение в Л. р. единственно, т. е. если $f(z)\equiv\varphi(z)$ в D, то все коэффициенты их Л. р. по степеням $z-a$ совпадают.

Для случая центра в бесконечно удаленной точке $a=\infty$ Л. р. принимает вид

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k, \qquad (3)$$

причем теперь правильной частью является

$$\sum_{k=-\infty}^{0} c_k z^k,$$

а главной —

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k.$$

Область сходимости ряда (3) имеет вид

$$D'=\{z: 0\leqslant r<|z|<R\leqslant+\infty\},$$

а формулы (2) переходят в формулы

$$c_k=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^{k+1} f(z)\,dz, \quad k=0,\ \pm 1,\ \ldots,$$

где $\gamma=\{z: |z|=\rho,\ r<\rho<R\}$. В остальном все свойства те же, что и в случае конечного центра a.

Применение Л. р. основано главным образом на теореме Лорана (1843): любая однозначная аналитич. функция $f(z)$ в кольце $D=\{z: 0\leqslant r<|z-a|<R\leqslant+\infty\}$ представима в D сходящимся Л. р. (1). В частности, в проколотой окрестности $D=\{z: 0<$

$<|z-a|<R\}$ изолированной особой точки a однозначного характера аналитич. функция $f(z)$ представима Л. р., к-рый и служит основным инструментом исследования ее поведения в окрестности изолированной особой точки.

Для голоморфных функций $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ аналогом теоремы Лорана можно считать следующее предложение: всякую функцию $f(z)$, голоморфную в произведении D колец $D_\nu=\{z_\nu\subset\mathbb{C}\colon 0\leqslant r_\nu<|z_\nu-a_\nu|<R_\nu\leqslant+\infty\}$, можно представить в D в виде сходящегося кратного Л. р.

$$f(z)=\sum_{|k|=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k, \qquad (4)$$

в к-ром суммирование распространяется на все целочисленные мультииндексы

$$k=(k_1, k_2, \ldots, k_n), \quad |k|=k_1+k_2+\ldots+k_n,$$

$$(z-a)^k=(z_1-a_1)^{k_1}(z_2-a_2)^{k_2}\ldots(z_n-a_n)^{k_n},$$

$$c_k=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{k+n}},$$

где γ — произведение окружностей $\gamma_\nu=\{z_\nu\in\mathbb{C}\colon z_\nu=a_\nu+\rho_\nu e^{it};\ r_\nu<\rho_\nu<R_\nu,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$, $\nu=1, 2, \ldots, n$. Область сходимости ряда (4) логарифмически выпуклая и является относительно полной *кратно круговой областью*. Однако применение кратных Л. р. (4) ограничено, поскольку при $n\geqslant 2$ голоморфные функции $f(z)$ не могут иметь изолированных особенностей.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 4; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976, ч. 1, гл. 2, ч. 2, гл. 1.

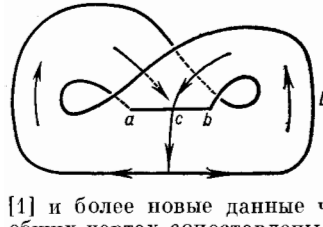
Е. Д. Соломенцев.

ЛОРЕНЦА АТТРАКТОР — компактное инвариантное множество L в трехмерном фазовом пространстве гладкого потока $\{S_t\}$, к-рое имеет указанную ниже сложную топологич. структуру и является асимптотически устойчивым (т. е. оно устойчиво по Ляпунову и все траектории из нек-рой окрестности L стремятся к L при $t\to\infty$); в понятие аттрактора, т. е. притягивающего множества, часто включают только последнее из этих двух свойств, однако как Л. а., так и другие практически важные аттракторы обладают обоими этими свойствами.

Л. а. впервые появился в численных экспериментах Э. Лоренца [1], исследовавшего поведение траекторий системы

$$\dot{x}=-\sigma x+\sigma y, \quad \dot{y}=rx-y-xz, \quad \dot{z}=-bz+xy \quad (*)$$

при нек-рых конкретных значениях параметров σ, r, b. (Эта система вначале была введена как первое нетривиальное галеркинское приближение для нек-рых гидродинамич. задач — чем и мотивировался выбор значений $\sigma=10$, $r=28$, $b=8/3$, но она возникает также и в других физич. вопросах, см. [2], [3].) В [4] результаты [1] и более новые данные численных экспериментов в общих чертах сопоставлены с теоретич. представлениями теории гладких динамич. систем, а в [5] результаты [1] интерпретированы как указание о существовании у системы (*) аттрактора (получившего назв. аттрактора Лоренца), к-рый во многом аналогичен *гиперболическим множествам*, но не является таковым (основное отличие связано с тем, что в состав Л. а. входит положение равновесия типа седло с одним положительным собственным значением; для системы (*) это положение равновесия — начало координат). Су-



ществование Л. а. и ряд его свойств следуют из определенных особенностей отображения последования на нек-рой поверхности П (для системы (*) используется плоскость $z=27$), точная формулировка к-рых, однако, весьма громоздка (см. [6], [9]) и при проверке к-рых для конкретных систем, включая (*), приходится прибегать к численному интегрированию. Соответственно, Л. а. посвящены исследования двух типов.

1) В исследованиях теоретич. характера с самого начала предполагается, что рассматриваемые потоки имеют на нек-рой поверхности П надлежащее отображение последования, и отсюда извлекаются следствия о свойствах Л. а. Его строение описывается следующим образом [8]. Рассмотрим «разветвленное многообразие» L_0, на к-ром при $t\geqslant 0$ задан поток φ_t, как указано на рисунке. Пусть отображение последования на линии разветвления ab является (равномерно) растягивающим, т. е. во всех точках (кроме c, где оно терпит разрыв) его производная больше нек-рого $\lambda>1$ (годится любое такое λ, но исследование упрощается при $\lambda>\sqrt{2}$, что совместимо с вычислительными данными о системе (*) при указанных σ, r, b). Пары $\{(L_0, \varphi_t)\}$ естественным образом образуют обратный спектр топологич. пространств и отображений; его предел и есть $(L, S_t|L)$. (Дальнейшее изучение структуры Л. а. [8], [11] основывается на этом описании, к-рое поэтому естественно включить в определение Л. а., особенно если не связывать определение со специальными свойствами отображения последования.) Л. а. обладают *топологической транзитивностью* и их периодич. траектории в совокупности плотны в L. При малом (в смысле C^1) возмущении потока с надлежащим отображением последования у возмущенного потока имеется Л. а., близкий к Л. а. исходного потока, но, вообще говоря, не гомеоморфный ему. В этом смысле Л. а. сохраняется при малых возмущениях (в теории гладких динамич. систем известны (1982) только два класса компактных инвариантных множеств с этим свойством и сколько-нибудь изученной структурой: Л. а. и локально максимальные *гиперболические множества*), но Л. а. (в отличие от последних) не обладают *локальной грубостью*.

2) Чтобы обнаружить Л. а. у конкретной системы типа (*) и уточнить его свойства, приходится наряду с различными теоретич. соображениями использовать численное интегрирование (см. [7], [9]). Таким путем были исследованы бифуркации, происходящие в системе (*) при изменении r или σ и приводящие к появлению Л. а. [9]. Естественно, численное интегрирование и само по себе дает нек-рую информацию об аттракторе (поскольку траектории со временем приближаются к нему, то на чертеже, изображающем последовательные точки пересечения просчитываемых траекторий с П, возле аттрактора эти точки расположены значительно «гуще», чем вдали от него, и это сразу бросается в глаза). Относящийся сюда материал весьма обширен; так, обнаружены новые области значений параметров, при к-рых система (*) имеет Л. а. [10]. Здесь, однако, остаются невыясненными детали топологич. структуры, к-рая может и отличаться от описанного выше строения «стандартных» Л. а.

Теоретич. интерпретации данных численных экспериментов для систем порядка выше трех пока (1982) не имеется.

Лит.: [1] Lorenz E. N., «J. Atmos. Sci.», 1963, v. 20, № 2, p. 130—41; [2] Монин А. С., «Успехи физич. наук», 1978, т. 125, в. 1, с. 97—122; [3] Рабинович М. И., там же, с. 123—68; [4] McLaughlin J. B., Martin P. C., «Phys. Rev. Letters», 1974, v. 33, p. 1189—92; «Phys. Rev. Ser. A», 1975, v. 12, № 1, p. 186—203; [5] Ruelle D., в кн.: Lecture Notes in Mathematik, № 565, [1976], p. 146—58; [6] Marsden J. E., McCrokes M., The Hopf bifurcation and its applications, B., 1976, p. 368; [7] Нелинейные волны, М., 1979, с. 176, 212; [8] Williams R. F., в кн.: Lecture Notes in Mathematik, № 615, [1977], p. 94—112; [9] Афраймо-

вич В. С., Быков В. В., Шильников Л. П., «Докл. АН СССР», 1977, т. 234, № 2, с. 336—39; [10] Morioka N., Shimizu T., «Phys. Letters», 1978, v. 66 A, № 6, p. 447—49; [11] Rand D., «Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1978, v. 83, № 3, p. 451—60.

Д. В. Аносов.

ЛОРЕНЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование координат, связывающее две *галилеевы системы координат* в каком-либо *псевдоевклидовом пространстве*; иными словами, Л. п. сохраняет квадрат т. н. интервала событий. Л. п. является аналогом ортогональных преобразований (или обобщением понятия движения) в евклидовом пространстве. Л. п. образуют группу, называемую группой Лоренца (или общей группой Лоренца), к-рая обозначается через L. Л. п. находят применение в четырехмерном пространстве-времени специальной теории относительности, для к-рого в галилеевых координатах x, y, z, t интервал имеет вид

$$s^2=c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2,$$

где c — скорость света в вакууме.

Часто рассматривают более узкие классы Л. п. Так, Л. п., сохраняющие знак координаты t, образуют т. н. полную группу Лоренца $L_\uparrow$. Л. п., матрицы к-рых имеют положительный определитель, наз. собственными преобразованиями Лоренца и образуют собственную группу Лоренца L_+. Пересечение $L_\uparrow$ и L_+ часто наз. просто группой Лоренца.

Общая группа Л. п. состоит из комбинаций пространственных отражений, отражений во времени, пространственных поворотов и преобразований, к-рые с физич. точки зрения являются преобразованиями перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой со скоростью V, а с математич. точки зрения — гиперболич. поворотом на угол ψ в плоскости с псевдоевклидовой метрикой. Наличие последнего типа преобразований является специфич. чертой группы Л. п.

Для перехода от галилеевой системы координат x', y', z', t' к галилеевой системе координат x, y, z, t, движущейся относительно первой со скоростью V параллельно оси x', указанные преобразования имеют вид

$$x=\frac{x'-Vt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}; \quad y=y', \quad z=z', \quad t=\frac{t'-\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Если ввести угол гиперболического поворота ψ по формулам

$$\operatorname{sh}\psi=-\frac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad \operatorname{ch}\psi=\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

то Л. п. примут вид

$$x=x'\operatorname{ch}\psi+ct'\operatorname{sh}\psi,\ ct=x'\operatorname{sh}\psi+ct'\operatorname{ch}\psi,\ y=y',\ z=z'.$$

Эти преобразования часто наз. просто Л. п. Они не образуют группу: действие трех гиперболич. поворотов с непараллельными векторами скоростей может дать обычный пространственный поворот — т. н. томасовская прецессия.

Часто к общим Л. п. добавляют переносы начала координат, получая при этом т. н. преобразования Пуанкаре, образующие группу Пуанкаре.

Свойства группы Л. п. сходны со свойствами ортогональных групп. Отличия связаны с наличием двух типов отражений (пространственных и временных) и с некомпактностью группы Л. п. (т. к. единичная сфера в псевдоевклидовом пространстве, т. е. множество точек, для к-рого модуль интервала до начала координат равен единице, некомпактна).

Физические приложения Л. п. связаны с Эйнштейна *относительности принципом*, согласно к-рому все

физич. законы, кроме законов гравитации, инвариантны относительно Л. п. В ряде случаев, напр. в аксиоматической квантовой теории поля, использование этого и других столь же общих постулатов позволяет делать далеко идущие выводы о видах функциональных зависимостей между различными физич. величинами.

В различных областях физики (в особенности, в теории элементарных частиц) находят широкое применение представления групп Л. п. В соответствии с принципом относительности Эйнштейна физич. величины с различными законами преобразований — векторы, спиноры, тензоры — преобразуются по тем или иным представлениям группы Л. п. При этом оказывается, что эти представления можно характеризовать двумя инвариантами, к-рые отождествляются с массой и спином частиц, описываемых этой физич. величиной.

Инфинитезимальные Л. п., т. е. повороты на бесконечно малый угол, часто используют для получения различных законов сохранения.

Находят применения также Л. п. в касательном пространстве псевдориманова пространства; эти преобразования относятся к т. н. локальным симметриям.

Л. п. получили свое название в связи с работами Г. Лоренца (H. Lorentz) по электронной теории, к-рые сыграли важную роль в формулировании этого понятия.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., т. 2, М., 1973; [2] Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, М., 1958; [3] Физический энциклопедический словарь, т. 3, М., 1963. *Д. Д. Соколов.*

ЛОРЕНЦА СИЛА — сила, действующая со стороны заданного электромагнитного поля на движущуюся заряженную частицу. Выражение для Л. с. $\boldsymbol{F}$ было впервые дано Г. Лоренцем (см. [1]):

$$\boldsymbol{F}=e\boldsymbol{E}+\frac{e}{c}[\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{B}], \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{E}$ — напряженность электрич. поля, $\boldsymbol{B}$ — магнитная индукция, $\boldsymbol{V}$ — скорость заряженной частицы относительно системы координат, в к-рой вычисляются величины $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{F}$; e — заряд частицы, c — скорость света в вакууме. Выражение для Л. с. является релятивистски инвариантным (т. е. справедливым в любой инерциальной системе отсчета); оно позволяет связать уравнения для электромагнитного поля с уравнениями движения заряженных частиц.

В постоянном и однородном магнитном поле движение частицы с массой m и зарядом e в нерелятивистском приближении ($V\ll c$) описывается уравнением

$$m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}=\frac{e}{c}[\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{B}]. \qquad (2)$$

В прямоугольной системе координат с осью z, направленной вдоль внешнего магнитного поля B, решение уравнения (2) имеет следующий вид

$$x=x_0+r\sin(\omega_0 t+\alpha),\quad y=y_0+r\cos(\omega_0 t+\alpha),$$
$$z=z_0+V_{oz}t,$$

где $\omega_0=eB/mc$ — ларморовская частота вращения частицы, $r=V_{ot}/\omega_0$ — радиус вращения частицы *(ларморовский радиус)*, α — начальная фаза вращения, V_0 — начальная скорость частицы. Таким образом, в однородном магнитном поле заряд движется по винтовой линии с осью вдоль магнитного поля.

Если электрич. поле $\boldsymbol{E}$ не равно нулю, то движение носит более сложный характер. Происходит перемещение центра вращения частицы поперек поля $\boldsymbol{B}$ (т. н. дрейф). Средняя величина дрейфа в векторном виде

$$\boldsymbol{V}=c\,[\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B}]/B^2.$$

Неусредненное движение частицы в плоскости xy в этом случае происходит по трохоиде.

Лит.: [1] Lorentz H. A., The theory of electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat, 2 ed., Lpz.— N. Y., 1916 (рус. пер.— Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения, 2 изд., М., 1956); [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973.

В. В. Парваил.

ЛУЗИНА ГИПОТЕЗА в теории множеств: мощность континуума есть мощность множества всех подмножеств, состоящих из счетных порядковых чисел, т. е. $2^{\aleph_0}=2^{\aleph_1}$. Л. г. совместна с системой аксиом Цермело — Френкеля теории множеств и аксиомой выбора. Н. Н. Лузин [1] рассматривал эту гипотезу как альтернативу к континуум-гипотезе, т. к. $2^{\aleph_0}=\aleph_1<2^{\aleph_1}$. Аксиома Мартина и отрицание континуум-гипотезы влекут Л. г. Отрицание Л. г. $2^{\aleph_0}<2^{\aleph_1}$ иногда также наз. гипотезой Лузина. Л. г., обозначаемая через (HL), или ее отрицание, к-рое обозначается через (LH), используется при доказательстве ряда теорем общей топологии. Напр., (LH) эквивалентна одному из следующих утверждений: всякий бикомпакт мощности, не превосходящей мощности континуума, имеет всюду *плотное подпространство*, удовлетворяющее 1-й аксиоме счетности; всякий диадический бикомпакт мощности, не превосходящей мощности континуума, метризуем. Из (LH) вытекают следующие предложения: всякое нормальное пространство, удовлетворяющее 1-й аксиоме счетности и *Суслина условию*, является коллективно нормальным; всякое сепарабельное нормальное пространство Мура метризуемо.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., «Fundam. math.», 1935, v. 25, p. 109—31; [2] Мостовский А., Конструктивные множества и их приложения, пер. с англ., М., 1973.

Б. А. Ефимов.

ЛУЗИНА КРИТЕРИЙ измеримости функции действительного переменного: для того чтобы функция $f(x)$ почти всюду конечная, заданная на отрезке $[a, b]$, была измеримой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовала непрерывная на $[a, b]$ функция $\varphi(x)$ такая, что мера множества

$$\{x \in [a, b]: f(x) \neq \varphi(x)\}$$

была меньше ε. Доказан Н. Н. Лузиным [1]. Другими словами, почти всюду конечная функция является измеримой тогда и только тогда, когда она становится непрерывной, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., «C. r. Acad. sci.», 1912, t. 154, p. 1688—90; [2] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974.

Б. А. Ефимов.

ЛУЗИНА МНОЖЕСТВО, проективное множество,— подмножество полного сепарабельного метрич. пространства, к-рое определяется по индукции следующим образом. Л. м. класса 0 — есть борелевские множества. Л. м. класса $2n+1$ — это непрерывные образы Л. м. класса $2n$. Л. м. класса $2n$ — это дополнения к Л. м. класса $2n-1$. В частности, Л. м. класса 1, т. е. непрерывные образы борелевских множеств, наз. аналитическими множествами, или А-множествами, или суслинскими множествами. Понятие Л. м. принадлежит Н. Н. Лузину [1]. Если P_i есть Л. м. класса n, то $\bigcup_{i=1}^{k} P_i$ и $\bigcap_{i=1}^{k} P_i$ — также Л. м. класса n. Если $P_i \subset X_i$ есть Л. м. класса n, лежащее в полном сепарабельном метрич. пространстве X_i, то прямое произведение (конечное или счетное) $\Pi_i P_i$ является Л. м. класса n в пространстве $\Pi_i X_i$. Л. м. нечетного класса n, расположенное в пространстве X, совпадает с проекцией множества класса $n-1$, расположенного в произведении $X \times X$. Пространство X иррациональных чисел интервала $[0, 1]$ содержит для любого $n>0$ Л. м. класса n, к-рое не является Л. м. класса $<n$; простран-

ство X содержит также множества, не являющиеся Л. м.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., «C. r. Acad. sci.», 1925, t. 180, p. 1318—20; [2] его же, Лекции об аналитических множествах и их приложениях, М., 1953; [3] Куратовский К., Топология, т. 1, М., 1966.

Б. А. Ефимов.

ЛУЗИНА ПРИМЕРЫ в теории функций комплексного переменного — примеры, характеризующие граничные *единственности свойства* аналитич. функций (см. [1], [2]).

1) Для любого множества E меры нуль на единичной окружности $\Gamma=\{z: |z|=1\}$ Н. Н. Лузин построил (1919, см. [1]) функцию $f(z)$, регулярную аналитическую и ограниченную в единичном круге $D=\{z: |z|<1\}$ и такую, что $f(z)$ не имеет радиальных граничных значений вдоль каждого из радиусов, оканчивающихся в точках E.

Аналогичный пример Н. Н. Лузина и И. И. Привалова (1925, см. [2], [3]) отличается лишь незначительными изменениями.

2) Н. Н. Лузин построил (1925, см. [2]) также регулярные аналитич. функции $f_1(z)$ и $f_2(z)\not\equiv 0$ в D, стремящиеся соответственно к бесконечности и нулю по всем радиусам, оканчивающимся в точках нек-рого множества полной меры 2π на Γ. Это множество E первой категории по Бэру на Γ.

См. также *Граничные свойства аналитических функций*, *Лузина — Привалова теоремы*, *Предельное множество*.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., Собр. соч., т. 1, М., 1953, с. 267—69; [2] его же, там же, с. 280—318; [3] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950; [4] Ловатер А., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259.

Е. Д. Соломенцев.

ЛУЗИНА ПРИНЦИПЫ ОТДЕЛИМОСТИ — две теоремы, доказанные Н. Н. Лузиным в 1930 (см. [1]) в дескриптивной теории множеств. Два множества E и E' без общих точек, лежащие в евклидовом пространстве, B-отделимы, если существуют два борелевских множества H и H' без общих точек, содержащие соответственно множества E и E'. Первый Л. п. о. состоит в том, что два непересекающихся аналитич. множества всегда B-отделимы. Так как существуют два непересекающихся аналитич. дополнения, к-рые B-неотделимы, то имеет смысл определение: два множества E_1 и E_2 без общих точек отделимы при помощи аналитич. дополнений, если существуют два непересекающихся множества H_1 и H_2, содержащие соответственно E_1 и E_2, каждое из к-рых есть аналитич. дополнение. Второй Л. п.о. состоит в том, что если удалить из двух аналитич. множеств их общую часть, то оставшиеся части всегда отделимы при помощи аналитич. дополнений.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., Лекции об аналитических множествах и их приложениях, М., 1953.

Б. А. Ефимов.

ЛУЗИНА ПРОБЛЕМА — 1) Проблема теории тригонометрич. рядов, состоявшая в доказательстве гипотезы Лузина о том, что ряд Фурье

$$a_0(f)+\sum_{n=1}\{a_n(f)\cos nx+b_n(f)\sin nx\} \qquad (*)$$

каждой измеримой по Лебегу функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0, 2\pi]$, с конечным интегралом

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx$$

сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$. Гипотеза высказана Н. Н. Лузиным в 1915 в его диссертации (см. [1] с. 219). Л. п. решена в 1966 в утвердительном смысле Л. Карлесоном (см. *Карлесона теорема*). До работы Л. Карлесона [2] не было даже известно, сходится ли

хотя бы в одной точке ряд Фурье каждой непрерывной на отрезке $[0,2\pi]$ функции.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, 2 изд., М.— Л., 1951; [2] Carleson L., «Acta math.», 1966, v. 116, p. 135—57. *Б. С. Кашин.*

2) Ряд фундаментальных задач теории множеств, поставленных Н. Н. Лузиным [1], для решения к-рых он предложил метод резольвент. Именно, нек-рая проблема P теории множеств поставлена в резольвенту, если можно назвать множество точек E такое, что проблема P решается положительно каждый раз, когда можно назвать точку из E, и решается отрицательно, если можно доказать, что множество E пусто. Само множество E наз. резольвентой проблемы P.

Проблема 1. Будут ли все аналитич. дополнения либо счетны, либо иметь мощность континуума? Резольвента E этой проблемы есть *Лузина множество* класса не выше 3, т. е. если можно указать точку из E, то существует несчетное аналитич. дополнение без совершенной части, а если E пусто, то таких аналитич. дополнений не существует.

Проблема 2. Существуют ли неизмеримые по Лебегу множества Лузина?

Проблема 3. Существует ли множество Лузина без *Бэра свойства?*

Н. Н. Лузин предполагал, что проблемы 1, 2, 3 неразрешимы. Эта гипотеза подтвердилась (см. [3], [4]). Установлены связи между этими проблемами. Напр., из существования неизмеримого множества типа A_2 следует существование несчетного множества типа CA, не содержащего совершенного подмножества. Получено [5] положительное решение Л. п. о частях натурального ряда, исходя из континуум-гипотезы или отрицания гипотезы Лузина.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., «C. r. Acad. sci.», 1925, t. 181, p. 279—81; [2] его же, Собр. соч., т. 2, М., 1958; [3] Новиков П. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 279—316; [4] Solovay R., «Ann. Math.», 1970, v. 92, № 1, p. 1—56; [5] Новак Й., «Чехосл. матем. ж.», 1953, т. 3, с. 385—95. *Б. А. Ефимов.*

ЛУЗИНА ПРОСТРАНСТВО — несчетное топологич. T_1-пространство, в к-ром каждое нигде не плотное подмножество счетно. Существование Л. п. на действительной прямой вытекает из континуум-гипотезы. Из отрицания континуум-гипотезы и аксиомы Мартина следует, что не существует Л. п. со счетной л-базой. В частности, с системой аксиом Цермело—Френкеля теории множеств и аксиомой выбора совместно утверждение, что любое сепарабельное метрич. пространство не содержит Л. п. Существование метризуемых Л. п. доказано при весьма широких предположениях о месте мощности континуума в шкале алефов. Любое Л. п. X, лежащее в сепарабельном метрич. пространстве Y, обладает следующим свойством: для любой последовательности $\{\lambda_n\}$ положительных чисел существует последовательность множеств $\{A_n\}$ такая, что $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ и $\delta(A_n)<\lambda_n$, где $\delta(A)$ — диаметр множества A. Оно инвариантно относительно непрерывных отображений. Любой непрерывный образ Л. п., лежащий в Y, имеет меру Лебега нуль и является нульмерным пространством. Более того, любой непрерывный образ Л. п., лежащий в Y, вполне несовершенен, т. е. не содержит канторова совершенного множества. Из континуум-гипотезы вытекает существование регулярного, наследственно сепарабельного, наследственно финально компактного, экстремально несвязного Л. п. счетного л-веса и мощности континуума.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., «C. r. Acad. sci.», 1914, t. 158, p. 1258—61; [2] Куратовский К., Топология, т. 1, М., 1966. *Б. А. Ефимов.*

ЛУЗИНА РЕШЕТО — произвольное отображение $W: Q_0\to 2^X$, к-рое каждой двоичной дроби $r\in Q_0$ ставит в соответствие нек-рое подмножество $W_r\subset X$.

Как правило, X предполагается полным сепарабельным метрич. пространством. Введено Н. Н. Лузиным [1]. Множество A точек $x \in X$ таких, что существует бесконечная последовательность $r_1 < r_2 < \ldots$, удовлетворяющая условию $x \in W_{r_1} \cap W_{r_2} \cap \ldots$, наз. п р о с е я н н ы м через Л. р. W. Для каждой A-операции существует Л. р. W такое, что результат этой A-операции просеивается через решето W. Основной результат, касающийся Л. р., состоит в том, что *Лузина множество* n-го класса (или проективный класс L_n) инвариантно относительно операции просеивания через Л. р. для $0 \neq n \neq 2$.

Лит.: [1] Л у з и н Н. Н., «Fundam. math.», 1927, t. 10, p. 1—95; [2] К у р а т о в с к и й К., Топология, т. 1, М., 1966.

Б. А. Ефимов.

ЛУЗИНА C-СВОЙСТВО — характеристическое свойство *измеримой функции*, конечной почти всюду на области определения. Функция $f(x)$, конечная почти всюду на $[0, 1]$, о б л а д а е т н а $[0, 1]$ C-с в о й с т в о м, если для любого $\varepsilon > 0$ существует на $[0, 1]$ совершенное множество Q с мерой $> 1 - \varepsilon$, на к-ром $f(x)$ непрерывна, если ее рассматривать только на Q. Понятие C-свойства было введено Н. Н. Лузиным [1], к-рый также доказал, что для того, чтобы функция обладала C-свойством, необходимо и достаточно, чтобы она была измерима и конечна почти всюду на E. Эта теорема Лузина (к р и т е р и й Л у з и н а) обобщается на случай функций многих переменных (см. [3], [4]) и является одной из основных теорем метрич. теории функций.

Лит.: [1] Л у з и н Н. Н., «Матем. сб.», 1912, т. 28, в. 2, с. 266—94; [2] е г о ж е, Собр. соч., т. 1, М., 1953; [3] С а к с С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [4] К а м к е Э., Интеграл Лебега — Стилтьеса, пер. с нем., М., 1959.

А. А. Конюшков.

ЛУЗИНА N-СВОЙСТВО, «н у л ь - с в о й с т в о», функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$: для любого множества $E \subset [a, b]$ с мерой mes $E = 0$ образ этого множества $f(E)$ также имеет меру нуль. Введено Н. Н. Лузиным в 1915 (см. [1]). Имеют место следующие утверждения.

1) Функция $f \not\equiv \text{const}$ на $[a, b]$ такая, что $f'(x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$, не обладает Л. N-с.

2) Если $f(x)$ не обладает Л. N-с., то на $[a, b]$ существует совершенное множество P меры нуль такое, что mes $f(P) > 0$.

3) Абсолютно непрерывная функция обладает Л. N-с.

4) Если $f(x)$ обладает Л. N-с. и имеет на $[a, b]$ ограниченное изменение, то f абсолютно непрерывна на $[a, b]$ (т е о р е м а Б а н а х а — З а р е ц к о г о).

5) Если $f(x)$ не убывает на $[a, b]$, причем $f'(x)$ конечна на $[a, b]$, то f обладает Л. N-с.

6) Для того чтобы для любого измеримого множества $E \subset [a, b]$ множество $f(E)$ было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы f обладала на $[a, b]$ Л. N-с.

7) Функция $f(x)$, обладающая Л. N-с, имеет $f'(x)$ на множестве, любая непустая порция к-рого имеет положительную меру.

8) Для любого совершенного нигде не плотного множества $P \subset [a, b]$ существует функция $f(x)$, обладающая Л. N-с. на $[a, b]$, у к-рой $f'(x)$ не существует в каждой точке множества P.

Понятие Л. N-с. обобщается на функции многих переменных и функции более общей природы, определенные на пространствах с мерой.

Лит.: [1] Л у з и н Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, 2 изд., М.—Л., 1951.

А. А. Конюшков.

ЛУЗИНА ТЕОРЕМА — 1) Л. т. в теории функций комплексного переменного (л о к а л ь н ы й п р и н ц и п к о н е ч н о й п л о щ а д и) — результат Н. Н. Лузина, обнаруживающий связь между граничными свойствами аналитич. функций в единичном круге и метрикой римановых поверхностей, на к-рые они отображают круг (см. [1], [2]).

Пусть V — любая область внутри единичного круга $D=\{z\colon |z|<1\}$ плоскости комплексного переменного z, примыкающая к нек-рой дуге σ единичной окружности $\Gamma=\{z\colon |z|=1\}$, а

$$w=f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

— регулярная аналитич. функция в D. Тогда, если площадь римановой поверхности, являющейся образом области V при отображении $w=f(z)$, конечна, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

сходится почти всюду на дуге σ.

В связи с этой теоремой Н. Н. Лузин сформулировал гипотезу, известную также как п р о б л е м а Л у з и н а. Точку $e^{i\theta_0}\in\Gamma$ наз. т о ч к о й Л у з и н а функции $w=f(z)$, если $w=f(z)$ отображает каждый круг, изнутри касающийся Γ в точке $e^{i\theta_0}$, на область бесконечной площади на римановой поверхности функции $w=f(z)$. Г и п о т е з а Л у з и н а состоит в том, что существуют ограниченные аналитич. функции в D такие, что каждая точка Γ является для них точкой Лузина. Гипотеза Лузина впервые была подтверждена полностью в 1955 (см. [3]).

Лит.: [1] Л у з и н Н. Н., «Докл. АН СССР», 1947, т. 56, № 5, с. 447—50; [2] е г о же, Собр. соч., т. 1, М., 1953, с. 318—30; [3] Л о в а т е р А., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259.

Е. Д. Соломенцев.

2) Л. т. в дескриптивной теории множеств можно условно разбить на три цикла. Первый и основной цикл направлен на изучение эффективных множеств (аналитических, борелевских, лузинских (проективных) множеств). Сюда относится *Лузина принципы отделимости* и теорема о существовании *Лузина множеств* любого класса. Второй цикл представляет собой изучение задач, лежащих на пути к решению континуум-гипотезы и проблемы мощности CA-множеств. Здесь выделяется теорема Лузина—Серпиньского о разбиении отрезка на $\aleph_1$ борелевских множеств, к-рое определяется соответствующим *Лузина решетом*, а также Л. т. о покрытии: пусть E и A — непересекающиеся аналитич. множества и

$$E\subset X\setminus A=\bigcup_{\alpha<\omega_1}A_\alpha$$

— разложение множества $X\setminus A$ на конституанты, тогда существует такой индекс $\alpha_0<\omega_1$, что

$$E\subset\bigcup_{\alpha<\alpha_0}A_\alpha.$$

Третий цикл содержит результаты, полученные с использованием аксиомы выбора. Сюда же примыкают философские работы по теории множеств. Здесь выделяются Л. т. о существовании несчетного множества 1-й категории на всяком совершенном множестве, о разбиении интервала на несчетное множество неизмеримых множеств. Завершает этот цикл Л. т. о частях натурального ряда, отражающие нек-рые свойства нароста $\beta N\setminus N$ *Стоуна — Чеха бикомпактного расширения* βN натурального ряда N.

Лит.: [1] Л у з и н Н. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1958.

Б. А. Ефимов.

ЛУЗИНА — ДАНЖУА ТЕОРЕМА — см. *Данжуа — Лузина теорема.*

ЛУЗИНА — ПРИВАЛОВА ТЕОРЕМЫ в т е о р и и ф у н к ц и й к о м п л е к с н о г о п е р е м е н н о г о — классические результаты Н. Н. Лузина и И. И. Привалова, выясняющие характер граничного *единственности свойства* аналитич. функций (см. [1]).

1) Пусть $f(z)$ — мероморфная функция комплексного переменного z в односвязной области D со спрямляемой границей Γ. Если $f(z)$ принимает угловые граничные значения нуль на множестве $E\subset\Gamma$ положительной меры Лебега на Γ, то $f(z)\equiv 0$ в D. Не существует

мероморфной в D функции, имеющей бесконечные угловые граничные значения на каком-либо множестве $E \subset \Gamma$ положительной меры.

2) Пусть $w=f(z)$ — мероморфная в единичном круге $D=\{z: |z|<1\}$ функция, отличная от константы и имеющая радиальные граничные значения (конечные или бесконечные) на множестве E, расположенном на дуге σ единичной окружности $\Gamma=\{z: |z|=1\}$, метрически плотном и второй категории по Бэру на σ. Тогда множество W ее радиальных граничных значений на E содержит по крайней мере две различные точки. Метрическая плотность E на σ означает, что любая порция E на σ имеет положительную меру. Отсюда следует, что если радиальные граничные значения $f(z)$ на множестве E указанного типа равны нулю, то $f(z)\equiv 0$ в D. Далее, не существует мероморфной функции в единичном круге, принимающей бесконечные радиальные граничные значения на множестве E указанного типа.

Н. Н. Лузин и И. И. Привалов (см. [1], [2]) построили примеры, показывающие, что условия метрич. плотности и 2-й категории по отдельности не являются достаточными для того, чтобы выполнялось утверждение теоремы 2.

См. также *Граничные свойства аналитических функций*, *Лузина примеры*, *Предельное множество*, *Привалова теорема*, *Риссов теорема*.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., Привалов И. И., «Ann. sci. École norm. supér.» (3), 1925, t. 42, p. 143—91; [2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [3] Ловатер А., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259.

Е. Д. Соломенцев.

ЛУПА — *квазигруппа* с единицей, т. е. с таким элементом e, что $xe=ex=x$ для любого элемента x из квазигруппы. Значение Л. в теории квазигрупп определяется следующей теоремой: всякая квазигруппа изотопна (см. *Изотопия*) нек-рой Л. Поэтому одной из основных задач теории квазигрупп является описание Л., к-рым изотопны квазигруппы данного класса.

С каждой Л. связаны три ядра. Множество

$$N_l=\{a \mid ax\cdot y=a\cdot xy, \quad \text{для всех } x,\ y \in Q\}$$

элементов из Л. $Q(\cdot)$ наз. левым ядром. Аналогично определяются среднее и правое ядра. Они всегда существуют в Л. Их пересечение наз. ядром лупы. Каждое ядро — ассоциативная подлупа, т. е. подгруппа в $Q(\cdot)$. Соответственные ядра изотопных Л. изоморфны. Существуют Л. с любыми наперед заданными ядрами. Л. $Q(\cdot)$, изотопная группе $Q(\cdot)$, является сама группой и изоморфна группе $Q(\cdot)$ (теорема Алберта). В частности, изотопные группы изоморфны. Нек-рые другие классы Л. также обладают этим свойством, напр. свободные лупы. Л. $Q(\cdot)$ наз. G-лупой, если любая Л., изотопная $Q(\cdot)$, будет ей изоморфна.

На Л. распространяются многие понятия и результаты теории групп. Однако нек-рые обычные свойства групп могут и не иметь места для Л. Так, в конечных Л. теорема Лагранжа (о том, что порядок подгруппы делит порядок группы), вообще говоря, не имеет места. Если тем не менее для Л. справедлива теорема Лагранжа, то такую Л. наз. лагранжевой. Если всякая подлупа Л. $Q(\cdot)$ лагранжева, то говорят, что $Q(\cdot)$ обладает свойством L'. Необходимым и достаточным условием, чтобы Л. $Q(\cdot)$ обладала свойством L', является следующее: $Q(\cdot)$ должна обладать такой нормальной цепью

$$Q=Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_n=e,$$

где Q_i нормальная подлупа в Q_{i-1}, что Q_{i-1}/Q_i для всех $i=1, 2, \ldots, n$ обладает свойством L'.

Наиболее изученным и наиболее близким к группам является класс *Муфанг луп*. Основная теорема о них (теорема Муфанг): если три элемента a, b, c такой Л. связаны ассоциативным законом, т. е.

$$ab \cdot c = a \cdot bc,$$

то они порождают ассоциативную подлупу, т. е. группу. В частности, всякая лупа Муфанг диассоциативна, т. е. любые ее два элемента порождают ассоциативную подлупу. Свойство Л. быть лупой Муфанг является универсальным, т. е. инвариантным при изотопии: любая Л., изотопная лупе Муфанг, сама является лупой Муфанг.

Одним из наиболее общих классов Л. является класс IP-луп, или луп со свойством обратимости. Они определяются тождествами

$$^{-1}x \cdot xy = y \quad \text{и} \quad yx \cdot x^{-1} = y.$$

Здесь ^{-1}x и x^{-1} соответственно левый и правый обратные элементы для x. Всякая лупа Муфанг будет IP-лупой. В IP-лупе ядра совпадают. Ядро лупы Муфанг является нормальной характеристической подлупой. Свойство Л. быть IP-лупой не является универсальным. Более того, если всякий изотоп нек-рой IP-лупы $Q(\cdot)$ есть IP-лупа, то $Q(\cdot)$ является лупой Муфанг.

Более общим, чем класс IP-луп, является класс WIP-луп, или луп со свойством ослабленной обратимости. Они определяются тождеством $x(yx)^{-1} = y^{-1}$. Это тождество универсально, если

$$(yx)\,(\theta_y z \cdot y) = (y \cdot xz)\,y$$

для всех x, y, $z \in Q$, где θ_y — нек-рый автоморфизм. В этом случае ядро WIP-лупы является нормальным и факторлупа по ядру будет лупой Муфанг. Частным случаем WIP-луп являются CI-луны, или скрещенно-обратимые лупы, определяемые тождеством $(xy)\,x^{-1} = y$.

Обобщением луп Муфанг являются (левые) лупы Бола, в них выполняется тождество

$$x(y \cdot xz) = (x \cdot yx)z.$$

Они инвариантны при изотопии и моноассоциативны, т. е. каждый элемент такой Л. порождает ассоциативную подлупу.

Важным понятием теории квазигрупп и Л. является понятие псевдоавтоморфизма. Подстановка φ Л. $Q(\cdot)$ наз. левым псевдоавтоморфизмом, если существует такой элемент $a \in Q$, что выполняется равенство

$$\varphi(xy) \cdot a = \varphi(x)\,(\varphi y \cdot a) \quad \text{для всех} \quad x,\ y \in Q,$$

и наз. правым псевдоавтоморфизмом, если существует такой элемент $b \in Q$, что

$$b \cdot \varphi(xy) = (b \cdot \varphi x)\,\varphi y \quad \text{для всех} \quad x,\ y \in Q.$$

Если φ — одновременно левый и правый псевдоавтоморфизм, то φ наз. псевдоавтоморфизмом, а элементы a и b — соответственно левым и правым компаньонами. В Л. автоморфизм — частный случай псевдоавтоморфизма. Каждый псевдоавтоморфизм IP-лупы индуцирует автоморфизм в ее ядре, а в коммутативной лупе Муфанг всякий псевдоавтоморфизм является автоморфизмом.

В теории Л. значительную роль играют внутренние подстановки. Подстановка α из ассоциированной группы G Л. $Q(\cdot)$ с единицей e наз. внутренней, если $\alpha e = e$. Совокупность I всех внутренних подстановок является подгруппой группы G и наз. группой внутренних подстановок. Группа I порождается подстановками трех видов:

$$L_{x,\,y} = L_{xy}^{-1} L_x L_y; \quad R_{x,\,y} = R_{xy}^{-1} R_y R_x, \quad T_x = R_x^{-1} L_x.$$

С помощью внутренних подстановок определяются A-л у п ы — лупы, для к-рых все внутренние подстановки являются автоморфизмами. Если A-лупа одновременно является IP-лупой, то она диассоциативна. Коммутативные диассоциативные A-лупы являются лупами Муфанг. Для коммутативных луп Муфанг внутренние подстановки являются автоморфизмами.

Нек-рые определения из теории групп переносятся и на Л. Так, Л. наз. г а м и л ь т о н о в о й, если всякая ее подлупа нормальна. Абелевы группы также считаются гамильтоновыми Л. Моноассоциативные гамильтоновы Л. с элементами конечного порядка являются прямыми произведениями гамильтоновых p-луп (p-лупа определяется аналогично p-группе). Диассоциативные гамильтоновы Л. будут либо абелевыми группами, либо прямым произведением $A\times T\times H$, где A — абелева группа, элементы к-рой имеют нечетный порядок, T — абелева группа экспоненты 2, а H — некоммутативная Л., удовлетворяющая нек-рым дополнительным условиям.

Л. $Q(\cdot)$ наз. л и н е й н о (ч а с т и ч н о) у п о р я д о ч е н н о й, если Q линейно (частично) упорядоченное множество (относительно $\leqslant$) и из $a\leqslant b$ следует

$$ac\leqslant bc,\quad ca\leqslant cb,$$

и обратно. Если в линейно упорядоченной Л. центр имеет конечный индекс, то $Q(\cdot)$ центрально нильпотентна. *Решеточно упорядоченные* Л. с *условием* минимальности для элементов являются свободными абелевыми группами.

Л. *изучались и с помощью ассоциированных групп.* Доказано, напр., что существует взаимно однозначное соответствие между нормальными подлупами Л. и нормальными *делителями* соответствующей *ассоциированной* группы.

Лит. см. при статье *Квазигруппа*. *В. Д. Белоусов.*

ЛУПА а н а л и т и ч е с к а я — аналитическое многообразие M, наделенное структурой Л., основные операции к-рой (умножение, левое и правое деление) являются аналитич. отображениями $M\times M$ в M. Если e — единица лупы M, $g(t)$, $h(t)$ — аналитич. пути, выходящие из e и имеющие в точке e касательные векторы a, b, то касательный вектор $c=ab$ в e к пути $k(t)$, где

$$k(t^2)=g(t)\,h(t)/[h(t)\,g(t)],$$

есть билинейная функция векторов a, b. Касательное пространство $T(M)$ в точке e с операцией умножения $c=ab$ наз. к а с а т е л ь н о й а л г е б р о й Л. M. Координаты $(x^1,\ldots,x^n)$ в нек-рой окрестности U элемента $e=(0,\ldots,0)$ наз. к а н о н и ч е с к и м и 1-г о р о д а, если для любого вектора $a=(a^1,\ldots,a^n)$ кривая $x(t)=(a^1t,\ldots,a^nt)$ является локальной однопараметрич. подгруппой ($|t|\leqslant\varepsilon$) с касательным вектором a в точке e (см. [1]). Аналитич. Л. с ассоциативными степенями обладает канонич. координатами 1-го рода [2]. В этом случае отображение $a\to x(1)$, определенное для достаточно малых a, позволяет отождествить U с окрестностью начала координат в $T(M)$ и наделить $T(M)$ строением локальной аналитич. лупы M_0. Если аналитич. лупа M альтернативна, т. е. любые два ее элемента порождают подгруппу, то касательная алгебра $T(M)$ бинарно лиева, а умножение $(x,\,y)\to x\circ y$ в M_0 выражается *Кэмпбелла — Хаусдорфа формулой*. Любая конечномерная бинарно лиева алгебра над полем $\mathbb{R}$ есть касательная алгебра одной и (с точностью до локальных изоморфизмов) только одной локальной альтернативной аналитич. Л. [1].

Наиболее полно изучены аналитические *Муфанг лупы*. Касательная алгебра аналитич. лупы Муфанг удовлетворяет тождествам

$$x^2=0,\ J(x,\,y,\,xz)=J(x,\,y,\,z)x,$$

где

$$J(x, y, z)=(xy)z+(yz)x+(zx)y;$$

такие алгебры наз. алгебрами Мальцева. Обратно, любая конечномерная алгебра Мальцева над $\mathbb{R}$ является касательной алгеброй нек-рой односвязной аналитич. лупы Муфанг M, определенной однозначно с точностью до изоморфизма (см. [2], [3]). Если M' — связная аналитич. лупа Муфанг с той же касательной алгеброй и, следовательно, локально изоморфная M, то существует эпиморфизм $M\to M'$, ядро к-рого H есть дискретная нормальная подгруппа в M; при этом фундаментальная группа $\pi(M')$ пространства M' изоморфна H. Если φ — локальный гомоморфизм односвязной аналитич. лупы Муфанг M в связную аналитич. лупу Муфанг M', то φ однозначно продолжается до гомоморфизма M в M'. Пространство односвязной аналитич. лупы Муфанг с разрешимой касательной алгеброй Мальцева аналитически изоморфно евклидову пространству $\mathbb{R}^n$ (см. [3]).

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Матем. сб.», 1955, т. 36, в. 3, с. 569—76; [2] Кузьмин Е. Н., «Алгебра и логика», 1971, т. 10, в. 1, с. 3—22; [3] Кердман Ф. С., «Докл. АН СССР», 1979, т. 249, в. 3, с. 533—36. *Е. Н. Кузьмин.*

ЛУЧ — то же, что *полупрямая*.

ЛУЧЕВАЯ ФУНКЦИЯ — действительная функция $F(x)$, заданная на n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющая следующим условиям: $F(x)$ непрерывна, неотрицательна и однородна (т. е. $F(\tau x)=\tau F(x)$ для любого действительного числа $\tau\geqslant 0$). Л. ф. $F(x)$ наз. положительной, если $F(x)>0$ для всех $x\neq 0$, и наз. симметрической, если $F(-x)=F(x)$. Л. ф. наз. выпуклой, если для любых $x, y\in\mathbb{R}^n$

$$F(x+y)\leqslant F(x)+F(y).$$

Для любой Л. ф. $F(x)$ найдется постоянная $c=c_F$, для к-рой

$$F(x)\leqslant c\,|\,x\,|, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Если $F(x)$ положительна, то найдется и постоянная $c'=c'_F>0$, для к-рой

$$F(x)\geqslant c'\,|\,x\,|, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Множество $\mathfrak{S}$ точек $x\in\mathbb{R}^n$ с условием

$$F(x)<1$$

является *звездным телом*. Обратно, для каждого открытого звездного тела $\mathfrak{S}$ найдется единственная Л. ф. $F_{\mathfrak{S}}(x)$, для к-рой

$$\mathfrak{S}=\{x\,|\,F_{\mathfrak{S}}(x)<1\}.$$

Звездное тело $\mathfrak{S}_F$ ограничено тогда и только тогда, когда его Л. ф. $F(x)$ положительна. Если $F(x)$ — симметрич. функция, то $\mathfrak{S}_F$ — симметрично относительно точки 0; верно и обратное. Звездное тело будет выпуклым телом тогда и только тогда, когда $F(x)$ — выпуклая Л. ф.

Лит.: [1] Касселс Дж.-В.-С., Введение в геометрию чисел, пер. с англ., М., 1965. *А. В. Малышев.*

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД — метод формального нахождения высокочастотной асимптотики решения задач теории дифракции и распространения волн. Л. м. состоит из совокупности приемов нахождения того или иного варианта *геометрического приближения* (г. п.) к решению соответствующей задачи.

Пусть, напр., волновой процесс описывается волновым уравнением

$$\frac{1}{c^2(x, y, z)}u_{tt}-\Delta u=0.$$

Подстановка ряда г. п. в волновое уравнение и приравнивание нулю коэффициентов при последовательных

степенях $1/\omega$ (параметр ω соответствует частоте колебаний) приводят к соотношениям

$$(\nabla\tau)^2 = c^{-2},\ 2\nabla\tau\nabla u_j + \Delta\tau u_j = \Delta u_{j-1},\ u_{-1} = 0,$$
$$j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

из к-рых первое — *эйконала уравнение*, остальные уравнения наз. уравнениями переноса. Это — рекуррентная последовательность линейных уравнений вдоль лучей, т. е. экстремалей функционала Ферма (см. *Ферма принцип*).

Если заданы поверхности Σ_s, на к-рых выполняются классические однородные краевые условия и вектор $\nabla\tau$ некасателен к Σ_s, то по заданному г. п. можно найти отраженное или отраженное и преломленное г. п., к-рые в сумме будут формально удовлетворять краевым условиям. Пусть, напр., на Σ выполняется краевое условие Дирихле $u|_\Sigma = 0$, тогда отраженное г. п. ищется в виде

$$u_{\text{отр}} \sim \exp[-i\omega(t - \tau_{\text{отр}})] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j^{\text{отр}}}{(-i\omega)^j}. \qquad (1)$$

Формальное выполнение краевого условия приводит к равенствам

$$\tau_{\text{отр}}|_\Sigma = \tau|_\Sigma,\quad u_j^{\text{отр}}|_\Sigma = -u_j|_\Sigma,\quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Из первого условия следует классич. закон отражения лучей: «угол падения равен углу отражения». Равенства для $u_j^{\text{отр}}$ задают начальные данные для уравнений переноса, к-рым удовлетворяют $u_j^{\text{отр}}$. Таким образом, задание «падающей волны» полностью определяет отраженную волну (1). Аналогично рассматривается задача преломления на границе раздела двух сред.

В окрестности особенностей поля лучей г. п. неприменимо и приходится пользоваться более сложными разложениями, напр. тем или иным вариантом метода эталонных задач и дифракционного пограничного слоя (из вариантов последнего, по-видимому, наиболее важным является метод параболич. уравнения).

Дополненный указанным образом Л. м. позволяет строить формально высокочастотные разложения достаточно широкого класса дифракционных задач. По-видимому, практически всегда такие разложения являются асимптотическими разложениями решений. В такой общности это утверждение не доказано, установлена его справедливость лишь в частных случаях (когда удается построить явное решение или получить равномерную по ω оценку нормы оператора, обратного к волновому при рассматриваемых условиях). Одномерным вариантом Л. м. является метод ВКБ, квантовомеханическим — *квазиклассическое приближение*. Л. м. успешно применяется при изучении высокочастотных волн любой природы (напр., упругих, электромагнитных). Более далеким аналогом Л. м. является Л. м. для волн Рэлея, распространяющихся вдоль поверхности упругого тела произвольной формы, для волн на поверхности тяжелой жидкости, слабо изогнутых упругих или акустич. слоев и т. п.

Одно из обобщений получается, если г. п. заменить рядом:

$$u \sim \exp[ip\psi(t, x)] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j(t, x)}{(-ip)^j}. \qquad (2)$$

Теорию таких разложений наз. пространственно-временной геометрич. оптикой, или теорией волн, модулированных как по частоте, так и по амплитуде. Разложения вида (2) применяют также и в том случае, когда уравнения, описывающие волновые процессы, не являются дифференциальными (диспергирующие среды). Разложения (2) используют как в случае дифференциальных, так и для псевдодифференциальных уравнений. Разработаны нелинейные аналоги (см. [2]).

Другие варианты Л. м. связаны с рассмотрением разрывных уравнений: во многих ситуациях разрывы описываются с помощью нестационарного варианта Л. м. и распространяются вдоль лучей. На нестационарном аналоге Л. м. основан т. н. метод Адамара исследования задачи Коши линейных гиперболич. уравнений 2-го порядка и его обобщения на системы линейных гиперболических дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений.

Лит.: [1] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [2] Уизем Дж. Б., Линейные и нелинейные волны, пер. с англ., М., 1977; [3] Боровиков В. А., Кинбер Б. Е., Геометрическая теория дифракции, М., 1978. *В. М. Бабич.*

ЛЬЕНАРА УРАВНЕНИЕ — нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$x''+f(x)\,x'+x=0. \qquad (*)$$

Это уравнение описывает динамику системы с одной степенью свободы при наличии линейной восстанавливающей силы и нелинейного затухания. Если функция $f(x)$ обладает следующим свойством:

$$f(x)<0 \quad \text{при малых } |x|,$$
$$f(x)>0 \quad \text{при больших } |x|,$$

т. е. если при малых амплитудах система поглощает энергию, а при больших происходит диссипация, то в системе можно ожидать самовозбуждение колебаний (возникновение *автоколебаний).* Впервые достаточные условия возникновения автоколебаний в системе (*) доказал А. Льенар [1].

Л. у. тесно связано с *Рэлея уравнением.* Важным частным случаем Л. у. является *Ван дер Поля уравнение.* Вместо уравнения (*) часто удобно рассматривать систему

$$x'=v,\ v'=-x-f(x)v$$

(автоколебательному процессу в системе (*) адекватен устойчивый предельный цикл на фазовой плоскости x, v) или эквивалентное ей уравнение

$$\frac{dv}{dx}=\frac{-x-f(x)\,v}{v}.$$

Если ввести новую переменную $y=x'+F(x)$, где $F(x)=\int_0^x f(\xi)\,d\xi$, то уравнение (*) переходит в систему

$$x'=y-F(x),\ y'=-x.$$

Более общими, чем Л. у., являются уравнения

$$x''+f(x)x'+g(x)=0,$$
$$x''+\varphi(x,\,x')x'+g(x)=0.$$

Основной интерес представляет выяснение возможно более широких достаточных условий, при к-рых эти уравнения имеют единственное устойчивое периодич. решение. Подробно изучалось также неоднородное Л. у.

$$x''+f(x)x'+x=e(t)$$

и его обобщения.

Лит.: [1] Liénard A., «Rev. gén. électr.», 1928, t. 23, p. 901—12, 946—54; [2] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [3] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 2, М., 1954; [4] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961; [5] Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р., Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений, пер. с нем., М., 1974. *Н. Х. Розов.*

ЛЬЕНАРА — ШИПАРА КРИТЕРИЙ — модификация *Рауса — Гурвица критерия*, сводящая все вычисления в нем к вычислению главных миноров только четного (или только нечетного) порядка матрицы Гурвица.

Пусть дан многочлен

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n, \quad a_0>0, \qquad (*)$$

H — его матрица Гурвица и Δ_i — ее главные миноры порядка i, $i=1, 2, \ldots, n$.

Критерий Льенара — Шипара: любое из следующих четырех условий является необходимым и достаточным для того, чтобы все корни многочлена * с действительными коэффициентами имели отрицательные действительные части:

1) $a_n > 0, \quad a_{n-2} > 0, \ \ldots, \ \Delta_1 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \ \ldots;$

2) $a_n > 0, \quad a_{n-2} > 0, \ \ldots, \ \Delta_2 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \ \ldots;$

3) $a_n > 0, \ a_{n-1} > 0, \ a_{n-3} > 0, \ \ldots, \ \Delta_1 > 0, \ \Delta_3 > 0, \ \ldots;$

4) $a_n > 0, \ a_{n-1} > 0, \ a_{n-3} > 0, \ \ldots, \ \Delta_2 > 0, \ \Delta_4 > 0, \ \ldots.$

Критерий установлен А. Льенаром и А. Шипаром [1].

Лит.: [1] Liénard A., Chipart H., «J. math. pures et appl.», 1914, t. 10, p. 291—346; [2] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967. *И. В. Проскуряков.*

ЛЮКСЕМБУРГА НОРМА — функция

$$\| x \|_{(M)} = \inf \{\lambda : \lambda > 0, \ \int_G M(\lambda^{-1} x(t)) \, dt \leqslant 1\},$$

где $M(u)$ — четная выпуклая функция, возрастающая при положительных U,

$$\lim_{u \to 0} u^{-1} M(u) = \lim u (M(u))^{-1} = 0,$$

$M(u) > 0$ при $u > 0$, G — ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Свойства этой нормы были изучены В. Люксембургом [1]. Л. н. эквивалентна норме Орлича (см. *Орлича пространство*) и

$$\| x \|_{(M)} \leqslant \| x \|_M \leqslant 2 \| x \|_{(M)}.$$

Если функции $M(u)$ и $N(u)$ дополнительны друг к другу (см. *Орлича класс*), то

$$\| x \|_M = \sup \left\{ \int_G x(t) \, y(t) \, dt : \| y \|_{(N)} \leqslant 1 \right\}.$$

Если $\chi_E(t)$ — характеристич. функция измеримого подмножества $E \subset G$, то

$$\| \chi_E \|_{(M)} = 1 / M^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{mes} E}\right).$$

Лит.: [1] Luxemburg W., Banach function spaces, [s. l.], 1955; [2] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958. *Е. М. Семенов.*

ЛЮРОТА ПРОБЛЕМА — проблема характеризации подполей поля рациональных функций.

В 1876 Ж. Люрот [1] (см. также [2]) доказал, что всякое подполе поля рациональных функций от одной переменной $k(x)$, содержащее поле k и отличное от k, изоморфно полю $k(x)$ (теорема Люрота). Вопрос о том, верно ли аналогичное утверждение для подполей R поля $k(x_1, \ldots, x_n)$, $R \supset k$, $R \neq k$, $n \geqslant 2$, известен как проблема Люрота.

Пусть X — алгебраич. многообразие, являющееся моделью (см. *Минимальная модель*) поля R, тогда вложение $R = k(X) \subset k(x_1, \ldots, x_n)$ определяет рациональное отображение $f : P^n \to X$, образ к-рого плотен в X. Многообразия, для к-рых существует такое отображение на них проективного пространства, наз. унирациональными. Рациональными наз. многообразия, бирационально изоморфные P^m. На геометрич. языке Л. п. может быть сформулирована следующим образом: является ли всякое унирациональное многообразие X рациональным? Без ограничения общности можно предполагать, что $\dim X = n$, т. е. что R имеет степень трансцендентности, равную n.

В случае $n=1$ положительное решение Л. п. для любого основного поля k дает сформулированная выше теорема Люрота. Для $n=2$ и алгебраически замкнутого поля k характеристики 0 проблема положи-

тельно решена Г. Кастельнуово (G. Castelnuovo) в 1893. Из критерия рациональности Г. Кастельнуово следует также положительное решение Л. п. для таких поверхностей X над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики, для к-рых существует сепарабельное отображение $f: P^2 \to X$ (см. [7]). Для несепарабельных отображений f существуют примеры, дающие отрицательное решение Л. п. для полей простой характеристики. В случае алгебраически незамкнутого поля k такими примерами являются минимальные кубич. поверхности в P^3, обладающие k-точками.

Для трехмерных многообразий Л. п. также решается отрицательно (см. [4], [5], [6]). Доказана [5] нерациональность трехмерной *кубической гиперповерхности*, к-рая, как известно, унирациональна. Для доказательства был найден новый метод, основанный на сравнении промежуточного якобиана кубики с якобианами кривых. Доказана [4] нерациональность гладких трехмерных квартик. Для конструкции контрпримеров использована [6] в качестве инварианта группа Брауэра многообразия (группа кручений в трехмерных когомологиях). Этот бирациональный инвариант использован также для построения контрпримеров во всех размерностях $n \geqslant 3$.

Лит.: [1] Lüroth J., «Math. Ann.», 1876, Bd 9, S. 163—65; [2] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [3] Манин Ю. И., Кубические формы, М., 1972; [4] Исковских В. А., Манин Ю. И., «Матем. сб.», 1971, т. 86, № 1, с. 140—66; [5] Клеменс К. Г., Гриффитс Ф. С., «Математика», 1972, т. 16, № 6, с. 3—32; 1973, т. 17, № 1, с. 3—41; [6] Artin M., Mumford D., «Proc. London Math. Soc.», 1972, v. 25, № 1, p. 75—95; [7] Zariski O., «Amer. J. Math.», 1958, v. 80, p. 146—84.

В. А. Исковских.

ЛЯПУНОВА ПОВЕРХНОСТИ И КРИВЫЕ — класс поверхностей и кривых, обладающих достаточно хорошими свойствами гладкости, введенный в теории потенциала А. М. Ляпуновым в кон. 19 — нач. 20 вв.

Поверхность S в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ наз. поверхностью Ляпунова, если выполнены следующие три условия (условия Ляпунова): 1) в каждой точке S существует определенная касательная плоскость и, следовательно, нормаль; 2) существует такое число $r>0$, одно и то же для всех точек S, что если взять часть Σ поверхности S, попавшую внутрь сферы Ляпунова $B(y_0, r)$ с центром в любой точке $y_0 \in S$ радиуса r, то прямые, параллельные нормали к S в точке y_0, встречают Σ не более чем один раз; 3) существуют такие два числа $A>0$ и λ, $0<\lambda\leqslant 1$, одни и те же для всей поверхности S, что для любых двух точек $y_1, y_2 \in S$ выполняется неравенство:

$$|\theta| < A\,|y_1 - y_2|^{\lambda}, \qquad (*)$$

где θ — угол между нормалями к S в точках y_1 и y_2. Иногда к этим трем условиям добавляются требования замкнутости S и того, чтобы телесный угол, под к-рым любая часть σ поверхности S видна из произвольной точки $x \in \mathbb{R}^3$, был равномерно ограничен.

Условия Ляпунова обобщаются для гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Аналогично, простая непрерывная кривая L на плоскости $\mathbb{R}^2$ наз. кривой Ляпунова, если она удовлетворяет следующим условиям: 1′) в каждой точке L существует определенная касательная и, следовательно, нормаль; 3′) существуют такие два числа $A>0$ и λ, $0<\lambda\leqslant 1$, одни и те же для всей кривой L, что для любых двух точек $y_1, y_2 \in L$ выполняется неравенство (*), где θ — угол между касательными или нормалями к L в точках y_1, y_2. Условие Ляпунова 2) здесь вытекает из 1′) и 3′). Кривые Ляпунова представляют собой подкласс простых гладких кривых.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле, в его кн.: Собр. соч., т. 1, М., 1954, с. 45—47; 48—100; [2] Соболев С. Л., Уравнения математи-

ческой физики, 4 изд., М., 1966; [3] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971, гл. 5; [4] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968, гл. 1. *Е. Д. Соломенцев.*

ЛЯПУНОВА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — гладко зависящее от параметра $t\in\mathbb{R}$ линейное невырожденное преобразование $L(t):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ (или $L(t):\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$), удовлетворяющее условию:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}[\|L(t)\|+\|L^{-1}(t)\|+\|\dot{L}(t)\|]<+\infty.$$

Введено А. М. Ляпуновым в 1892 (см. [1]). Л. п. широко используется в теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом во многих случаях от требования

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\dot{L}(t)\|<+\infty$$

можно отказаться.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.—Л., 1956, с. 7—263. *В. М. Миллионщиков.*

ЛЯПУНОВА СТОХАСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — неотрицательная функция $V(t,x)$, для к-рой пара $(V(t,X(t)),F_t)$ — супермартингал для нек-рого случайного процесса $X(t)$, F_t есть σ-алгебра событий, порожденных течением процесса X до момента t. Если $X(t)$ — марковский процесс, то Л. с. ф. есть функция, для к-рой стохастич. оператор Ляпунова

$$LV_{(t,x)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}M\{[V(t+h,X(t+h))-V(t,X(t))]/X(t)=x\}$$

неположителен. Оператор L есть инфинитезимальный оператор процесса $(t,X(t))$, и потому проверку условия $LV\leqslant 0$ легко осуществить для конкретных случаев. Оператор L переходит в обычный оператор Ляпунова $dV(t,X(t))/dt$, когда процесс X детерминированный, описываемый системой дифференциальных уравнений. С помощью Л. с. ф. удается проверить те или иные качественные свойства траекторий процесса $X(t)$; их роль в теории случайных процессов аналогична роли классич. *Ляпунова функций* в теории систем дифференциальных уравнений.

Часто Л. с. ф. наз. и такие, для к-рых функция $V(t,X(t))$ хотя и не является супермартингалом, но с ее помощью легко можно сформировать супермартингал. Ниже приведены типичные результаты качественного поведения траекторий марковских процессов в терминах Л. с. ф.

1) Если $X(t)$ — непрерывный справа строго марковский процесс в $\mathbb{R}^k$, определенный до момента τ первого выхода из любого компакта, и существуют Л. с. ф. $V(t,x)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^k$, и постоянная c такие, что

$$\inf_{t,\,|x|>R}V(t,x)\longrightarrow\infty\text{ при }R\longrightarrow\infty,\ LV\leqslant cV,$$

то

$$\mathsf{P}\{\tau<\infty\mid X(0)=x\}=1$$

для любого $x\in\mathbb{R}^k$, т. е. процесс X определен при всех $t>0$ (неограниченно продолжаем).

2) Для существования стационарного марковского процесса в $\mathbb{R}^k$, отвечающего *переходной функции* $P(t,x,A)$, достаточно существования функции $V(x)\geqslant 0$, для к-рой

$$\sup_{|x|>R}LV(x)\longrightarrow-\infty$$

при $R\to\infty$.

С помощью Л. с. ф. на марковские процессы переносятся основные теоремы прямого метода Ляпунова, эти функции нашли применение и для исследования процессов с дискретным временем.

Лит.: [1] Кушнер Г. Дж., Стохастическая устойчивость и управление, пер. с англ., М., 1969; [2] Хасьминский Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., 1969; [3] Калашников В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций, М., 1978.

Р. З. Хасьминский.

ЛЯПУНОВА ТЕОРЕМА — 1) Л. т. в теории вероятностей — теорема, устанавливающая весьма общие достаточные условия для сходимости распределений сумм независимых случайных величин к *нормальному распределению*. Точная формулировка Л. т. такова: пусть независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_k, \ldots$ имеют конечные математич. ожидания $\mathsf{E}X_k$, дисперсии $\mathsf{D}X_k$ и абсолютные моменты $\mathsf{E}\,|X_k - \mathsf{E}X_k|^{2+\delta}$, $\delta > 0$, и пусть $B_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}X_k$ — дисперсия суммы $X_1, \ldots, X_n$. Тогда если при нек-ром $\delta > 0$ выполнено условие

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\,|X_k - \mathsf{E}X_k|^{2+\delta}}{B_n^{1+\delta/2}} = 0, \qquad (1)$$

то вероятность неравенства

$$x_1 < \frac{\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathsf{E}X_k)}{\sqrt{B_n}} < x_2 \qquad (2)$$

стремится при $n \to \infty$ к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx \qquad (3)$$

равномерно относительно всех значений x_1 и x_2. Условие (1) наз. условием Ляпунова. Л. т. была сформулирована и доказана А. М. Ляпуновым (1901) и явилась завершающим этапом исследований П. Л. Чебышева, А. А. Маркова и А. М. Ляпунова по проблеме об условиях приложимости *центральной предельной теоремы* теории вероятностей. В дальнейшем были установлены условия, расширяющие условие Ляпунова и являющиеся не только достаточными, но и необходимыми. Окончательное решение вопроса в этом направлении было получено С. Н. Бернштейном, Дж. Линдебергом (J. Lindeberg) и В. Феллером (W. Feller). В Л. т. впервые была продемонстрирована сила метода характеристич. функций.

А. М. Ляпуновым была также дана оценка сверху при $\delta \leqslant 1$ для абсолютной величины разности Δ между вероятностью неравенства (2) и ее приближенным значением (3). Этой оценке можно придать следующий вид: при $\delta < 1$

$$|\Delta| \leqslant C_1 L_{n,\,\delta}$$

и при $\delta = 1$

$$|\Delta| \leqslant C_2 L_{n,\,1} \left| \log \frac{1}{L_{n,\,1}} \right|,$$

где C_1 и C_2 — абсолютные постоянные и $L_{n,\,\delta}$ — дробь (дробь Ляпунова), стоящая под знаком предела в (1). См. также *Бэрри — Эссеена неравенство*.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 1, М., 1954, с. 157—76; [2] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.— Л., 1946; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1967.

А. В. Прохоров.

2) Л. т. в теории потенциала — теоремы о поведении потенциалов и решения *Дирихле задачи*, полученные А. М. Ляпуновым в 1886—1902 (см. [1]). Теорема о теле наибольшего потенциала: если существует однородное тело T в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, *ньютонов потенциал* к-рого самого на себя, т. е. интеграл

$$E(T) = \int_T \int_T \frac{dx\,dy}{|x - y|}, \qquad (1)$$

при данном объеме достигает наибольшего значения, то это тело есть шар.

Интеграл (1) есть э н е р г и я однородного распределения масс плотности 1 в теле T. Позднее Т. Карлеман (T. Carleman, 1919) доказал, что такое тело T, для к-рого энергия $E(T)$ при данном объеме достигает своего наибольшего значения, действительно существует.

П е р в а я т е о р е м а о н о р м а л ь н ы х п р о и з в о д н ы х п о т е н ц и а л а д в о й н о г о с л о я: пусть S — замкнутая поверхность Ляпунова в $\mathbb{R}^3$, $f(y)$ — плотность масс, распределенных на S, причем выполняется одно из следующих двух условий: 1) $f(y)$ непрерывна на S, а показатель $\lambda=1$ в условии Ляпунова на угол θ между нормалями к S в точках $y_1, y_2 \in S$, т. е. $|\theta| < A|y_1-y_2|$ (см. *Ляпунова поверхности и кривые*); 2) $f(y)$ непрерывна по Гёльдеру с показателем 1, т. е. $|f(y_1)-f(y_2)| < A|y_1-y_2|$; тогда если *двойного слоя потенциал*

$$W(x) = \int_S f(y) \frac{\cos(y-x, n_y)}{|x-y|^2} dy \qquad (2)$$

имеет в точке $y_0 \in S$ одну из нормальных производных dW_i/dn_{y_0} изнутри S или dW_e/dn_{y_0} извне S, то он имеет и другую, причем эти производные совпадают.

В т о р а я т е о р е м а о н о р м а л ь н ы х п р о и з в о д н ы х п о т е н ц и а л а д в о й н о г о с л о я: в предположениях предыдущей теоремы пусть, кроме того, плотность $f(y)$ удовлетворяет у с л о в и ю Л я п у н о в а

$$\int_0^{2\pi} |f(\rho, \varphi) - f(y_0)| d\varphi < a\rho^{1+\nu}, \ a>0, \ \nu>0,$$

где (ρ, φ, z) — цилиндрич. координаты внутри сферы Ляпунова (см. *Ляпунова поверхности и кривые*) с началом в точке $y_0 \in S$ и осью Oz, направленной по нормали n_{y_0}. Тогда потенциал двойного слоя (2) имеет обе нормальные производные в точке y_0.

Т е о р е м а о п е р в ы х п р о и з в о д н ы х п о т е н ц и а л а п р о с т о г о с л о я: пусть S — замкнутая поверхность Ляпунова и плотность $f(y)$ непрерывна по Гёльдеру, т. е.

$$|f(y_1)-f(y_2)| < A|y_1-y_2|^\lambda, \quad 0<\lambda<1.$$

Тогда частные производные первого порядка $\partial V/\partial x_i$, $i=1, 2, 3$, $x=(x_1, x_2, x_3)$, *простого слоя потенциала*

$$V(x) = \int_S f(y) \frac{dy}{|x-y|}$$

непрерывны по Гёльдеру с тем же показателем λ в замкнутых внутренней $\bar{D}_i$ и внешней $\bar{D}_e$ областях.

В этой теореме гёльдерова непрерывность была только высказана А. М. Ляпуновым, доказательство было завершено Н. М. Гюнтером (см. [2]).

Эти теоремы послужили А. М. Ляпунову основой при построении строгой теории разрешимости задачи Дирихле методом интегральных уравнений. Развитию идей А. М. Ляпунова посвящена монография Н. М. Гюнтера (см. [2]); обобщения для потенциалов более общего вида см. в [3].

Лит.: [1] Л я п у н о в А. М., Собр. соч., т. 1, М., 1954, с. 26—32, 33—44, 45—100, 101—22; [2] Г ю н т е р Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [3] М и р а н д а К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957.

Е. Д. Соломенцев.

ЛЯПУНОВА ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ — теория устойчивости движения, построенная А. М. Ляпуновым в конце 19 — нач. 20 вв. (см. [1]). В основе ее лежат понятия *устойчивости по Ляпунову* и асимптотич. устойчивости (см. *Асимптотически устойчивое решение*), введенные А. М. Ляпуновым, теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению (на к-рой ос-

нован первый метод Ляпунова исследования устойчивости) и второй метод Ляпунова (см. *Ляпунова функция)*. Результаты и методы А. М. Ляпунова, разработанные им при построении теории устойчивости, получили важные и многочисленные применения в математике, в механике и технике. См. также *Устойчивости теория*.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956.

В. М. Миллионщиков.

ЛЯПУНОВА ФУНКЦИЯ — функция, определяемая следующим образом. Пусть x_0 — неподвижная точка системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(x,\ t)$$

(т. е. $f(x_0,\ t)\equiv 0$), где отображение $f(x,\ t):U\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^n$ непрерывно и непрерывно дифференцируемо по x (здесь U — нек-рая окрестность точки x_0 в $\mathbb{R}^n$); в координатах эта система записывается в виде

$$\dot{x}^i=f^i\ (x^1,\ \ldots,\ x^n,\ t),\quad i=1,\ \ldots,\ n.$$

Л. ф. наз. дифференцируемая функция $V(x):U\to\mathbb{R}$, обладающая свойствами:

1) $V\ (x)>0$ при $x\neq x_0$;

2) $V\ (x_0)=0$;

3) $$0\geqslant\frac{dV(x)}{dx}\ f\ (x,\ t)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V\ (x^1,\ \ldots,\ x^n)}{\partial x^i}\ f^i\ (x^1,\ \ldots,\ x^n,\ t).$$

Функция $V(x)$ введена А. М. Ляпуновым (см. [1]).

Имеет место лемма Ляпунова: если Л. ф. существует, то неподвижная точка устойчива по Ляпунову. На этой лемме основан один из методов исследования устойчивости (т. н. второй метод Ляпунова).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956, с. 7—263; [2] Барбашин Е. А., Функции Ляпунова, М., 1970.

В. М. Миллионщиков.

ЛЯПУНОВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПОКАЗАТЕЛЬ решения линейной системы — верхний предел

$$\lambda_{x\ (t)}=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\ \frac{1}{t}\ \ln|\ x(t)\ |,$$

где $x(t)\neq 0$ — решение линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=A\ (t)x;\qquad(1)$$

здесь $x\in\mathbb{R}^n$, $A\ (\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение $\mathbb{R}\to\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n)$ или $x\in\mathbb{C}^n$, $A\ (\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение $\mathbb{R}\to\mathrm{Hom}\ (\mathbb{C}^n,\ \mathbb{C}^n)$. В координатной записи

$$x\ (t)=(x^1\ (t),\ \ldots,\ x^{(n)}\ (t)),$$
$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n}a_j^i\ (t)\ x^j,\ i=1,\ \ldots,\ n,$$

где $a_j^i(t)$ — суммируемые на каждом отрезке функции, а

$$|\ x\ |=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\ x^i\ |^2}$$

(или любая другая эквивалентная норма; $\lambda_{x(t)}$ не зависит от выбора нормы в $\mathbb{R}^n$ или в $\mathbb{C}^n$).

Теорема Ляпунова. Пусть

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\ \frac{1}{t}\int_0^t\|\ A\ (\tau)\ \|\ d\tau<+\infty;$$

эквивалентно:

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\ \frac{1}{t}\int_0^t|\ a_j^i\ (\tau)\ |\ d\tau<+\infty,\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n.$$

Тогда для всякого решения $x(t)\neq 0$ системы (1) Л. х. п. $\lambda_{x(t)}$ — действительное число (т. е. $\neq\pm\infty$).

Для Л. х. п. ненулевых решений системы (1) справедливы утверждения:

1) $\lambda_{\alpha x(t)}=\lambda_{x(t)}$, $\alpha\neq 0$,

2) $\lambda_{(x_1(t)+x_2(t))}\leqslant\max(\lambda_{x_1(t)}, \lambda_{x_2(t)})$,

3) существуют линейно независимые решения $x_i(t)$, $i=1, \ldots, n$, системы (1), обладающие свойством: для всяких n линейно независимых решений $\hat{x_i}(t)$, $i=1, \ldots, n$, системы (1), занумерованных в порядке убывания Л. х. п., т. е. $\lambda_{\hat{x_i}(t)}\geqslant\lambda_{\hat{x_j}(t)}$ при $i\leqslant j$, выполняются неравенства

$$\lambda_{\hat{x_i}(t)}\geqslant\lambda_{x_i(t)}, \quad i=1, \ldots, n.$$

Фундаментальная система решений $x_i(t)$, $i=1, \ldots, n$, обладающих этим свойством, наз. н о р м а л ь н о й; при этом:

а) семейство чисел $\lambda_i(A)=\lambda_{x_i(t)}$, $i=1, \ldots, n$, не зависит от выбора нормальной фундаментальной системы $x_i(t)$, $i=1, \ldots, n$;

б) для всякого решения $x(t)\neq 0$ системы (1) Л. х. п. $\lambda_{x(t)}$ равен нек-рому $\lambda_i(A)$;

в) $\lambda_i(A)\geqslant\lambda_j(A)$, $i\leqslant j$.

Числа $\lambda_1(A)\geqslant \ldots \geqslant\lambda_n(A)$ наз. Л. х. п. системы (1); число $\lambda_1(A)$ наз. часто с т а р ш и м Л. х. п. системы (1).

Множество всех Л. х. п. ненулевых решений системы (1) наз. ее с п е к т р о м.

Ч а с т н ы е с л у ч а и. 1) Система с постоянными коэффициентами (т. е. $A(t)\equiv A(0)$). В этом случае $\lambda_i(A)$ равны действительным частям собственных значений оператора $A(0)$ (матрицы $\|a_j^i\|$).

2) Система с периодич. коэффициентами (т. е. $A(t+T)\equiv A(t)$, $T>0$). В этом случае

$$\lambda_i(A)=\frac{1}{T}\ln|\mu_i|,$$

где μ_i — *мультипликаторы* системы (1), занумерованные в порядке невозрастания их модулей (каждый берется столько раз, какова его кратность).

Роль Л. х. п. в теории устойчивости по Ляпунову основана на следующем утверждении: если $\lambda_1(A)<0$ (>0), то решения системы (1) асимптотически устойчивы (соответственно неустойчивы). Из того, что $\lambda_1(A)<0$, не следует, что нулевое решение системы

$$\dot{x}=A(t)x+O(|x|^2)$$

устойчиво по Ляпунову; однако если дополнительно известно, что система (1) *правильная линейная система*, то такое заключение справедливо (т е о р е м а Л я п у н о в а).

Пусть система $\dot{x}=B(t)x$ получена малым возмущением системы (1), удовлетворяющей условию

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|A(t)\|<+\infty,$$

т. е. расстояние между ними, определяемое формулой

$$d(A, B)=\sup_{t\in\mathbb{R}}\|A(t)-B(t)\|, \qquad (2)$$

мало́. При $n>1$ отсюда не следует, что величина

$$|\lambda_1(A)-\lambda_1(B)|$$

мала (следует, если система (1) имеет постоянные или периодич. коэффициенты, а также для нек-рых других систем); иными словами, функционалы $\lambda_i(A)$ не всюду непрерывны на пространстве систем (1) ($\sup_{t\in\mathbb{R}}\|A(t)\|<+\infty$), наделенном указанной метрикой (2).

Л. х. п. введены А. М. Ляпуновым, причем не только для решений системы (1), но и для произвольных функций на $\mathbb{R}^+$ (см. [1]).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956, с. 7—263; [2] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [3] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146.

В. М. Миллионщиков.

ЛЯПУНОВА — ШМИДТА УРАВНЕНИЕ — нелинейное интегральное уравнение вида

$$u(x) - \int_\Omega K(x, s)\, u(s)\, ds = U_{01}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \sum_{m+n\geqslant 2} U_{mn}\begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix}, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

где

$$U_{01}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = K_0(x)\, v(x) + \int_\Omega K_1(x, s)\, v(s)\, ds,$$

$$U_{mn}\begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{n_i} \int_\Omega \dots \int_\Omega K^{(\nu)}(x, s_1, \dots, s_i) \times$$

$$\times u^{\alpha_0}(x)\, u^{\alpha_1}(s_1) \dots u^{\alpha_i}(s_i)\, v^{\beta_0}(x)\, v^{\beta_1}(s_1) \dots v^{\beta_i}(s_i)\, ds_1 \dots ds_i,$$

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_i$ — неотрицательные целые числа,

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_i = m, \quad \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_i = n,$$

Ω — ограниченное замкнутое множество конечномерного евклидова пространства, v и функции K — заданные непрерывные функции своих аргументов $x, s, s_1, \dots, s_i \in \Omega$, u — искомая функция. Сумма, входящая в

правую часть равенства (1), может быть конечной или представлять бесконечный ряд. В последнем случае ряд наз. интегро-степенным рядом от двух функциональных аргументов. Предполагается, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно.

Если единица не является характеристич. числом ядра $K(x, s)$, то уравнение (1) при достаточно малом $|v(x)|$ в классе непрерывных функций имеет единственное малое решение, представимое в виде интегро-степенного ряда. Случай, когда единица есть характеристич. число ядра K, является более сложным. В этом случае строится нек-рая система уравнений — уравнение разветвления:

$$\omega_k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, v) = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \qquad (2)$$

где ω_k — известные степенные ряды, n — кратность характеристич. числа 1. Система (2) в общем случае имеет неединственное решение. Какова бы ни была фиксированная достаточно малая функция v, каждому малому непрерывному решению системы (2) (непрерывное решение системы (2) наз. малым, если $\xi_i(0)=0$) соответствует малое решение уравнения (1), представимое в виде интегро-степенного ряда.

Уравнение типа (1) впервые было рассмотрено А. М. Ляпуновым в 1906, а позднее — в более общем виде — Э. Шмидтом (E. Schmidt, 1908).

Лит.: [1] Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969; [2] Смирнов Н. С., Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений, Л.— М., 1936.

Б. В. Хведелидзе.

МАГИЧЕСКИЙ КВАДРАТ — квадратная $n\times n$-таблица $\|a_{ij}\|$ целых чисел от 1 до n^2, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,\,n+1-i} = s, \quad (*)$$

где $s=n(n^2+1)/2$. Рассматриваются также более общие М. к., в к-рых не требуется, чтобы $1\leqslant a_{ij}\leqslant n^2$.

Любое число a, $1\leqslant a\leqslant n^2$, однозначно характеризуется парой вычетов (α, β) по модулю n (цифрами по основанию n числа $a-1$), т. е. точкой двумерного пространства $(\mathbb{Z}/n)^2$ над кольцом $\mathbb{Z}/n$ вычетов по модулю n. Поскольку координаты (i, j) клеток квадрата также можно считать элементами пространства $(\mathbb{Z}/n)^2$, отсюда следует, что любое распределение чисел от 1 до n^2 в квадратную $n\times n$-таблицу $\|a_{ij}\|$ задается нек-рым отображением

$$(\mathbb{Z}/n)^2 \longrightarrow (\mathbb{Z}/n)^2,$$

т. е. парой функций $\alpha=\alpha(i,\ j)\in\mathbb{Z}/n$, $\beta=\beta(i,\ j)\in\mathbb{Z}/n$ от $i,\ j\in\mathbb{Z}/n$. Задача состоит в исследовании таких пар, дающих М. к. В общем виде это сделано (см. [1]) только при дополнительном предположении линейности функций α и β. Оказалось, в частности, что М. к. с линейными функциями α и β существуют только при нечетных n.

Уже в средние века был известен ряд алгоритмов построения М. к. нечетного порядка n. Каждый такой алгоритм характеризуется шестью вычетами i_0, j_0, p, q, $\bar{p}$, $\bar{q}$ и описывается следующими правилами: 1) число 1 вписывается в клетку (i_0, j_0); 2) если число a вписано в клетку (i, j), то число $a+1$ вписывается в клетку $(i+p, j+q)$, если эта клетка еще свободна от чисел, и в клетку $(i+\bar{p}, j+\bar{q})$, если клетка $(i+p, j+q)$ занята.

Вычеты i_0, j_0, p, q, $\bar{p}$, $\bar{q}$ не могут быть произвольны, но должны удовлетворять определенным условиям, обеспечивающим не только выполнение условий (*), но и выполнимость алгоритма, т. е. пустоту клетки $(i+\bar{p}, j+\bar{q})$, если занята клетка $(i+p, j+q)$. Эти условия легко находятся (см. [1] с. 41), причем оказывается, что М. к. тогда и только тогда может быть построен алгоритмом такого вида, когда описывающие этот квадрат функции α, β линейны.

Известно много других алгоритмов построения М. к. (приводящих к квадратам с нелинейными функциями α, β), но никакой общей их теории нет (1982). Неизвестно даже общее число М. к. порядка n (при $n\geqslant 5$; для $n=3$ существует, с точностью до очевидных симметрий, только один М. к., а для $n=4$ число М. к. равно 880).

Исследовались также М. к., обладающие дополнительными свойствами симметрии, лишь опять в очень специальных ситуациях (напр., при $n\leqslant 5$; см. [2]).

Лит.: [1] Постников М. М., Магические квадраты, М., 1964; [2] Гуревич Е. Я., Тайна древнего талисмана, М., 1969.

М. М. Постников.

МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, связанные с исследованием движения электропроводящих жидкостей и газов в присутствии магнитного поля.

МАЖОРАНТА И МИНОРАНТА — 1) Две функции, значения первой из к-рых не меньше, а второй не больше соответствующих значений данной функции (для всех рассматриваемых значений независимого переменного). 2) Для функций, представимых степенным рядом, под м а ж о р а н т о й понимают сумму степенного ряда с положительными коэффициентами, к-рые не меньше абсолютных величин соответствующих коэффициентов данного ряда. 3) Мажоранта (миноранта) нек-рого подмножества X упорядоченного множества E — элемент $y \in E$ такой, что для всякого $x \in X$ справедливо $y \geqslant x$ ($x \geqslant y$). 4) В теории интегрирования и в теории дифференциальных уравнений м а ж о р а н т о й (м и н о р а н т о й), или м а ж о р а н т н о й (м и н о р а н т н о й) ф у н к ц и е й, для нек-рой функции $f(t)$ наз. такая непрерывная функция, у к-рой в каждой точке t все *производные числа* не меньше (не больше), чем значения $f(t)$, и отличны от $-\infty (+\infty)$. Разность между любой мажорантой и любой минорантой является неубывающей функцией. Любая суммируемая на отрезке функция обладает абсолютно непрерывными М. и м., сколь угодно близкими к ее неопределенному интегралу Лебега. Понятие М. и м. может быть обобщено на случай аддитивной функции множества, а также на случай, когда производные числа понимаются в нек-ром обобщенном смысле.

Лит.: [1] Б у р б а к и Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965; [2] С а к с С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949.

В. А. Скворцов.

МАЙЕРА ЗАДАЧА — одна из основных задач вариационного исчисления на условный экстремум. М. з. состоит в следующем. Найти минимум функционала

$$J(y) = g(x_1,\ y(x_1),\ x_2,\ y(x_2)),\quad g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

при наличии дифференциальных ограничений типа равенств

$$\varphi(x,\ y,\ y') = 0,\quad \varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\quad m < n,$$

и граничных условий:

$$\psi(x_1,\ y(x_1),\ x_2,\ y(x_2)) = 0,\quad \psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p,$$
$$p < 2n + 2.$$

Подробнее см. *Больца задача.*

М. з. названа по имени А. Майера (A. Mayer), к-рый изучал необходимые условия ее решения (кон. 19 в.).

И. Б. Вапнярский.

МАКДОНАЛЬДА ФУНКЦИЯ, м о д и ф и ц и р о в а н н а я ц и л и н д р и ч е с к а я ф у н к ц и я, б е с с е л е в а ф у н к ц и я м н и м о г о а р г у м е н т а, — функция

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)},$$

где ν — произвольное нецелое действительное число,

$$I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}$$

— цилиндрич. функция чисто мнимого аргумента. Рассмотрена Х. Макдональдом [1]. Если n — целое число, то

$$K_n(z) = \lim_{\nu \to n} K_\nu(z).$$

М. ф. $K_\nu(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}-(z^2+\nu^2)\,y=0, \qquad (*)$$

стремящимся экспоненциально к нулю, когда $z\to\infty$, принимая положительные значения. Функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (*).

При $\nu\geqslant 0$ функция $K_\nu(z)$ имеет корни лишь в случае $\mathrm{Re}\,(z)<0$. Если $\pi/2<|\arg z|<\pi$, то число всех корней в этих двух квадрантах равно ближайшему к $\nu-\frac{1}{2}$ четному числу, если только $\nu-\frac{1}{2}$ не является целым; в последнем случае число всех корней равно $\nu-\frac{1}{2}$. При $\arg z=\pm\pi$ корней нет, если только $\nu-\frac{1}{2}$ не целое.

Ряды и асимптотич. представления:

$$K_{n+1/2}(z)=\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2}e^{-z}\sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!}{r!\;(n-r)!\;(2z)^r},$$

n — целое неотрицательное;

$$K_0(z)=$$
$$=-\ln\left(\frac{z}{2}\right)I_0(z)+\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\frac{1}{(m!)^2}\,\psi(m+1),$$
$$\psi(1)=-C,\ \psi(m+1)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-C,$$

$C=0{,}5772157\ldots$ — постоянная Эйлера;

$$K_n(z)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m\,(n-m-1)!}{m!\;(z/2)^{n-2m}}+$$
$$+(-1)^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{n+2m}}{m!\;(n+m)!}\times\left\{\ln(z/2)-\frac{1}{2}\psi(m+1)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\psi(n+m+1)\right\},$$

$n\geqslant 1$ — целое;

$$K_\nu(z)\sim\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2}e^{-z}\times$$
$$\times\left[1+\frac{4\nu^2-1^2}{1!8z}+\frac{(4\nu^2-1^2)\,(4\nu^2-3^2)}{2!(8z)^2}+\ldots\right],$$

z велико и $|\arg z|<\pi/2$.

Рекуррентные формулы:

$$K_{\nu-1}(z)-K_{\nu+1}(z)=-\frac{2\nu}{z}K_\nu(z),$$

$$K_{\nu-1}(z)+K_{\nu+1}(z)=-2\frac{dK_\nu(z)}{dz}.$$

Лит.: [1] Macdonald H. M., «Proc. London Math. Soc.», 1899, v. 30, p. 165—79; [2] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1, М., 1949.

В. И. Пагурова.

МАККИ БОРЕЛЕВСКАЯ СТРУКТУРА — некоторая борелевская структура (т. е. *борелевская система множеств)* на спектре $\hat{A}$ сепарабельной C^*-*алгебры* A, определяемая следующим образом. Пусть H_n, $n=1, 2, \ldots$, — гильбертово пространство размерности n, $\mathrm{Irr}_n(A)$ — множество ненулевых неприводимых представлений C^*-алгебры A в пространстве H_n, снабженное топологией простой слабой сходимости. Пусть множество $\mathrm{Irr}_n(A)$ снабжено борелевской системой множеств, подчиненной его топологии (т. е. наименьшей борелевской системой множеств, относительно к-рой все отображения $\pi\to(\pi(x)\xi,\eta)$, $x\in A$, $\xi,\eta\in H_n$, $\pi\in\mathrm{Irr}_n(A)$, — борелевские функции), и пусть $\mathrm{Irr}(A)$ — объединение подпространств $\mathrm{Irr}_n(A)$, $n=1, 2, \ldots$, снабженное борелевской системой множеств таких, что подмножество в $\mathrm{Irr}(A)$ тогда и только тогда является борелевским, когда его пересечение с каждым из множеств $\mathrm{Irr}_n(A)$ принадлежит соответствующей борелев-

ской системе множеств. Пусть φ — отображение борелевского пространства $\mathrm{Irr}(A)$ на спектр $\hat{A}$ C^*-алгебры A, сопоставляющее представлению его класс унитарной эквивалентности. Борелевская система множеств в $\hat{A}$, образованная множествами, полные прообразы к-рых при отображении φ принадлежат построенной борелевской системе множеств на $\mathrm{Irr}(A)$, и называется борелевской структурой Макки на $\hat{A}$. М. б. с. содержит все множества из борелевской системы множеств на $\hat{A}$, подчиненной топологии пространства $\hat{A}$; каждая точка в $\hat{A}$ является борелевским множеством в М. б. с. Следующие условия эквивалентны: 1) М. б. с. стандартна (т.е. изоморфна как борелевская система множеств борелевской системе подмножеств нек-рого полного сепарабельного метрич. пространства, подчиненной его топологии); 2) М. б. с. совпадает с борелевской системой множеств, подчиненной топологии в $\hat{A}$; 3) М. б. с. на $\hat{A}$ счетно отделима; 4) если A — CGR-алгебра, то М. б. с. может быть введена также на квазиспектре сепарабельной C^*-алгебры.

Лит.: [1] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [2] Gardner T., «Canad. J. Math.», 1971, v. 23, № 4, p. 674—78; [3] Halpern H., «Canad. J. Math.», 1974, v. 26, № 3, p. 621—28.

А. И. Штерн.

МАККИ ТОПОЛОГИЯ $\tau(F, G)$ в F, находящемся в двойственности с пространством G (над тем же полем), — топология равномерной сходимости на компактных в слабой топологии (определяемой двойственностью между F и G) выпуклых уравновешенных множествах из G. Введена Дж. Макки [1]. М. т. является сильнейшей из отделимых локально выпуклых топологий, согласованных с двойственностью между F и G (т. е. таких отделимых локально выпуклых топологий $\mathscr{T}$ в F, что совокупность непрерывных линейных функционалов на пространстве F, наделенном топологией $\mathscr{T}$, совпадает с G). Семейства множеств в $\mathscr{T}$, ограниченных относительно М. т. и слабой топологии, совпадают. Выпуклое множество в G равностепенно непрерывно при наделении пространства F топологией Макки в том и только в том случае, если оно относительно компактно в слабой топологии; если отделимое локально выпуклое пространство E бочечно или борнологично (в частности, метризуемо) и E' — его сопряженное, то М. т. в E (находящемся в двойственности с E') совпадает с исходной топологией в E; для пары пространств (F, G) в двойственности М. т. в $\mathscr{T}$ не обязательно бочечна или метризуема. Слабо непрерывное линейное отображение отделимого локально выпуклого пространства E в отделимое локально выпуклое пространство F непрерывно относительно М. т. $\tau(E, E')$ и $\tau(F, F')$. Локально выпуклое пространство E наз. пространством Макки, если топология в E есть $\tau(E, E')$. Пополнения, факторпространства и метризуемые подпространства, произведения, локально выпуклые прямые суммы и индуктивные пределы семейств пространств Макки являются пространствами Макки. Если E — пространство Макки и u — слабо непрерывное линейное отображение пространства E в локально выпуклое пространство F, образ к-рого является пространством Макки, то u — непрерывное линейное отображение E в F. Если E — квазиполное пространство Макки и пространство, сопряженное к пространству E, снабженному сильной E'-топологией, полурефлексивно, то E рефлексивно.

Лит.: [1] Mackey G. W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1946, v. 60, p. 519—37; [2] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [3] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971.

А. И. Штерн.

МАКЛОРЕНА РЯД для функции $f(z)$ — степенной ряд вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

Изучался К. Маклореном [1]. Если аналитическая в нуле функция $f(z)$ разлагается в степенной ряд, то этот ряд совпадает с М. р. В случае, когда функция зависит от m переменных, М. р. есть кратный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{z_1}^{(k_1)}(0) \dots f_{z_m}^{(k_m)}(0)}{k_1! \dots k_m!} z_1^{k_1} \dots z_m^{k_m},$$

суммирование в к-ром проводится по мультииндексам $k=(k_1, k_2, \dots, k_m)$, k_i — неотрицательные целые. М. р.— частный случай *Тейлора ряда*.

Лит.: [1] Mac Laurin C., A treatise of fluxions, v. 1—2, Edinburgh, 1742.

Л. Д. Кудрявцев.

МАКЛОРЕНА ФОРМУЛА — частный случай *Тейлора формулы*. Пусть функция $f(x)$ имеет n производных в точке $x=0$. Тогда в нек-рой окрестности U этой точки функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x), \quad x \in U,$$

где $r_n(x)$ — остаточный член n-го порядка, представимый в том или ином виде.

Термин «М. ф.» используется также для функций m переменных $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$. В этом случае в М. ф. под k понимается мультииндекс $k=(k_1, k_2, \dots, k_m)$ (см. *Маклорена ряд)*. Названа по имени К. Маклорена (C. Maclaurin).

Л. Д. Кудрявцев.

МАКСВЕЛЛА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей с плотностью вероятности

$$p(x)=\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{\sigma^3} e^{-x^2/2\sigma^2}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad (*)$$

зависящей от параметра $\sigma>0$. Функция распределения М. р. имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 2\Phi(x/\sigma) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} - 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного *нормального распределения*. М. р. имеет положительный коэффициент асимметрии; оно унимодально — единственная мода находится в точке $x=\sqrt{2}\sigma$. М. р. имеет конечные моменты любого порядка; математич. ожидание и дисперсия равны соответственно $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$ и $\frac{3\pi-8}{\pi}\sigma^2$.

Если X_1, X_2, X_3 — независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с параметрами 0 и σ^2, то случайная величина $\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2}$ имеет М. р. с плотностью (*). Иначе, М. р. может быть получено как распределение длины случайного вектора, координаты к-рого в декартовой системе координат в трехмерном пространстве независимы и нормально распределены с параметрами 0 и σ^2. М. р. при $\sigma=1$ совпадает с распределением квадратного корня из величины, имеющей χ^2-распределение с тремя степенями свободы (см. также *Рэлея распределение)*. М. р. широко известно как распределение скоростей частиц в статистич. механике и физике. Впервые установлено Дж. Максвеллом (J. Maxwell, 1859) при решении задачи о распределении скоростей молекул идеального газа.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1967.

А. В. Прохоров.

МАКСВЕЛЛА УРАВНЕНИЯ — уравнения электромагнитного поля в материальных средах; установлены в 60-х гг. 19 в. Дж. Максвеллом (J. Maxwell) на основе экспериментально найденных к тому времени законов электрических и магнитных явлений.

В классич. электродинамике для описания электромагнитного поля в среде вводятся четыре векторных поля: напряженность электрич. поля $\boldsymbol{E}$, электрич. индукция $\boldsymbol{D}$, напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$ и магнитная индукция $\boldsymbol{B}$, к-рые являются непрерывными и дифференцируемыми функциями $\boldsymbol{r}$ радиус-вектора точки 3-мерного пространства и времени t. Эти поля определяются с точностью до постоянных множителей, позволяющих выбрать соответствующую систему физич. единиц измерения абсолютной величины этих полей.

М. у. представляют собой систему неоднородных дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка для полей $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, к-рая в т. н. абсолютной системе физич. единиц Гаусса имеет вид:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}+\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \tag{1а}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}+\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0, \tag{1б}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0, \tag{1в}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}=4\pi\rho, \tag{1г}$$

где неоднородные члены $\rho(t, \boldsymbol{r})$ — заданное скалярное поле плотности электрич. заряда в среде и $\boldsymbol{j}(t, \boldsymbol{r})$ — векторное поле плотности электрич. тока (заряда, проходящего за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению движения зарядов) являются источниками поля, а $c=3\cdot10^{10}$ *см/сек* — постоянная, равная скорости распространения электромагнитных взаимодействий в вакууме. М. у. могут быть записаны также и в интегральной форме:

$$\left.\begin{aligned}
&\oint_L \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}=\frac{1}{c}\int_S\left(4\pi\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)d\boldsymbol{s},\\
&\oint_L \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}=-\frac{1}{c}\int_S\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,d\boldsymbol{s},\\
&\oint_S \boldsymbol{B}d\boldsymbol{s}=0,\\
&\oint_{(S)} \boldsymbol{D}d\boldsymbol{s}=4\pi\int_{(V)}\rho\,dV.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Поля $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{j}$ не являются независимыми, причем в согласии с экспериментальными фактами $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{j}$ зависят только от $\boldsymbol{E}$, а $\boldsymbol{B}$ зависит только от $\boldsymbol{H}$, т. е. имеют место следующие функциональные зависимости:

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E}),\quad \boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{E}),\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H}), \tag{3}$$

к-рые наз. уравнениями состояния, или материальными уравнениями среды. В рамках классической макроскопич. электродинамики уравнения состояния (3) должны быть заданы дополнительно (постулированы или определены по экспериментальным данным) и с их учетом система М. у. для двух независимых векторных полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ становится замкнутой. Конкретный вид уравнений состояния (3) определяется электрическими и магнитными свойствами данной среды и ее состоянием. В общем случае в уравнениях состояния (3) векторные поля $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{B}$ в точке $\boldsymbol{r}$ в момент времени t могут зависеть нелинейно от значений полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ соответственно во всех точках среды (нелокальный случай) во все любые моменты времени, предшествующие согласно физич. принципу причинности — данному моменту t (случай среды с последействием или с памятью). Большинство имеющих практич. интерес сред характеризуется локальной линейной зависимостью $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{j}$ от $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ от $\boldsymbol{H}$, и в этом случае М. у. оказываются линейными дифференциальными уравнениями, однако в приложениях встречаются и более сложные случаи (напр., в нелинейной оптике).

Уравнения состояния (3) могут быть рассчитаны в принципе с помощью микроскопич. электродинамики, если учесть законы движения отдельных частиц среды и их индивидуальные микроскопич. характеристики

(значения электрич. зарядов, масс). При этом значения макроскопич. полей $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$ определяются как усредненные значения микроскопич. полей, создаваемых отдельными движущимися заряженными частицами среды, и для них справедливы М. у.

На поверхности раздела различных сред должны быть выполнены граничные условия

$$[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_2]-[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1]=\frac{4\pi}{c}\,j_{\text{пов}},$$
$$[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_2]-[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1]=0,$$
$$(\boldsymbol{n}\boldsymbol{D}_2)-(\boldsymbol{n}\boldsymbol{D}_1)=4\pi\sigma,$$
$$(\boldsymbol{n}\boldsymbol{B}_2)-(\boldsymbol{n}\boldsymbol{B}_1)=0,$$

где $j_{\text{пов}}$ — плотность поверхностного тока, σ — плотность поверхностного заряда, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности раздела, индексы $_1$ и $_2$ отмечают значения полей с разных сторон поверхности раздела.

Следствием М. у. является уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0,$$

выражающее закон сохранения электрич. заряда.

М. у. инвариантны относительно преобразований Лоренца. Если в псевдоевклидовом пространстве 4-мерном пространстве-времени с координатами $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $x_4=ict$ ввести два антисимметричных 4-мерных тензора F_{kl} и G_{kl} $(k, l=1, 2, 3, 4)$ с компонентами

$$\left.\begin{aligned}&F_{12}=B_3,\ F_{23}=B_1,\ F_{31}=B_2,\ F_{4k}=iE_k,\ k=1,2,3,4,\\&G_{12}=H_3,\ G_{23}=H_1,\ G_{31}=H_2,\ G_{4k}=iD_k,\ k=1,2,3,4,\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

а также 4-мерный вектор тока j_k, $k=1, 2, 3, 4$, пространственные компоненты к-рого $j_1=j_x$, $j_2=j_y$, $j_3=j_z$ совпадают с компонентами тока $\boldsymbol{j}$ и четвертая компонента $j_4=ic\rho$ пропорциональна плотности заряда, то М. у. (1) могут быть записаны в релятивистски ковариантной форме:

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_m}+\frac{\partial F_{lm}}{\partial x_k}+\frac{\partial F_{mk}}{\partial x_l}=0,\quad k,\ l,\ m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\tag{5}$$

и

$$\sum_{l=1}^{4}\frac{\partial G_{kl}}{\partial x_l}=\frac{4\pi}{c}\,j_k,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ 4.\tag{6}$$

Уравнения (5) представляют собой 4-мерную форму записи М.у. (1*б*) и (1*в*), а уравнения (6) — 4-мерную форму записи М. у. (1*а*) и (1*г*).

Для электромагнитного поля в вакууме, по определению, $\boldsymbol{D}\equiv\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}\equiv\boldsymbol{H}$ и, следовательно, $G_{kl}\equiv F_{kl}$, и электромагнитное поле описывается лишь одним тензором F_{kl}. Если ввести 4-мерный вектор электромагнитного потенциала A_k, $k=1, 2, 3, 4$, пространственные компоненты к-рого $A_1=A_x$, $A_2=A_y$, $A_3=A_z$ образуют т. н. 3-мерный вектор-потенциал $\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{r})$, а четвертая временная компонента $A_4=i\varphi$ пропорциональна скалярному потенциалу поля $\varphi(t, \boldsymbol{r})$, то компоненты антисимметричного тензора электромагнитного поля F_{kl} можно выразить через компоненты 4-мерного вектора электромагнитного потенциала A_k согласно соотношению

$$F_{kl}=\frac{\partial A_k}{\partial x_l}-\frac{\partial A_l}{\partial x_k},\quad k,\ l=1,\ 2,\ 3,\ 4.\tag{7}$$

С учетом (7) уравнения (5) удовлетворяются тождественно, а уравнения (6) принимают вид

$$\sum_{l=1}^{4}\left(\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_l^2}-\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial A_l}{\partial x_l}\right)=\frac{4\pi}{c}\,j_k,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\tag{8}$$

т. е. неоднородных волновых уравнений для компоненты A_k. Введение в рассмотрение потенциала A_k позволяет записать М. у. в простой форме (8), однако потенциал A_k определен неоднозначно, что отражает инвариантность М. у. в форме (8) относительно градиентных преобразований. Указанная неоднозначность в определении потенциала A_k может быть устранена (см. *Градиентное преобразование*).

Согласно (4) и (7) физически наблюдаемые поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ можно выразить через вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$ и скалярный потенциал φ:

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}.$$

В случае, когда электромагнитное поле в вакууме является свободным, т. е. отсутствуют источники, М. у. (1) и (8) становятся однородными, и из М. у. (1) и (8) можно получить независимые однородные волновые уравнения для электрического и магнитного поля

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{E} - \Delta \boldsymbol{E} = 0; \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{H} - \Delta \boldsymbol{H} = 0,$$

где Δ — лапласиан и c — скорость распространения электромагнитных волн в вакууме.

М. у. для электромагнитного поля применимы лишь в классич. теории, т. к. в случае, когда переменные электрическое и магнитное поля имеют очень высокие частоты и очень малые длины волн (сравнимые с длинами порядка размеров атомов), становятся существенными квантовые эффекты, и теория электромагнитного поля и его источников должна строиться на основе квантовой электродинамики.

Лит.: [1] Максвелл Дж. К., Избр. соч. по теории электромагнитного поля, пер. с англ., М., 1954; [2] Тамм И. Е., Основы теории электричества, 7 изд., М., 1957; [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973; [4] их же, Электродинамика сплошных сред, М., 1957.

В. Д. Кукин.

МАКСИМАЛЬНАЯ КОМПАКТНАЯ ПОДГРУППА топологической группы G — компактная подгруппа $K \subset G$, к-рая не содержится в качестве собственной подгруппы ни в какой компактной подгруппе группы G. Напр., $K = \mathrm{SO}(n)$ для $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $K = \{e\}$ для разрешимой односвязной группы Ли G.

В произвольной группе G М. к. п. могут и не существовать (напр., если $G = \mathrm{GL}(V)$, где V — бесконечномерное гильбертово пространство), а если они существуют, то среди них могут быть неизоморфные.

Наиболее изучены М. к. п. групп Ли. Если G — связная группа Ли, то любая компактная подгруппа группы G содержится в нек-рой максимальной (в частности, М. к. п. обязательно существуют), и все М. к. п. в G связны и сопряжены между собой. Пространство группы G диффеоморфно $K \times \mathbb{R}^n$, поэтому большинство топологич. вопросов о группах Ли сводится к соответствующим вопросам о компактных группах Ли.

Лит.: [1] Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства, пер. с франц., М., 1949; [2] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964.

В. В. Горбацевич.

МАКСИМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА — собственная подгруппа группы G, не содержащаяся ни в какой другой собственной подгруппе группы G, т. е. максимальный элемент в множестве всех собственных подгрупп группы G, упорядоченных по включению. Существуют группы без М. п., напр. группа типа p^∞.

Обобщением понятия М. п. служит понятие подгруппы, максимальной по некоторому свойству σ, т. е. такой обладающей свойством σ собственной подгруппы H_0 группы G, что в G нет другой собственной подгруппы H, обладающей свойством σ и содержащей подгруппу H_0.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977.

Н. Н. Вильямс.

МАКСИМАЛЬНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА: если T — эндоморфизм пространства с мерой (X, μ) и $f \in L^1(X, \mu)$, а E — множество тех $x \in X$, для к-рых

$$\sup_{n \geqslant 0} \sum_{i=0}^{n} f(T^i x) \geqslant 0,$$

то

$$\int_E f \, d\mu \geqslant 0.$$

М. э. т. принадлежит К. Иосиде и Ш. Какутани [1], указавшим, что она может играть роль центрального этапа в доказательстве *Биркгофа эргодической теоремы* (у самого Дж. Биркгофа вместо М. э. т. применялись несколько иные соображения). В доказательствах появившихся позднее обобщений теоремы Биркгофа (а также при исследовании родственного вопроса о разложении фазового пространства на консервативную и диссипативную части в условиях, когда действуют эти обобщения) тоже используется соответствующим образом обобщенная М. э. т. Имеется обобщение М. э. т., принадлежащее Э. Хопфу (E. Hopf), и простое доказательство этого обобщения, предложенное А. Гарсиа (A. García) (см. [2]). См. также [3] и лит. при ст. *Биркгофа эргодическая теорема.*

Лит.: [1] Yosida K., Kakutani S., «Proc. Imp. Acad. Tokyo», 1939, v. 15, p. 165—68; [2] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] Вершик А. М., Юзвинский С. А., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 133—87.

Д. В. Аносов.

МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ МЕТОД — один из основных общих методов построения оценок неизвестного параметра в статистич. теории оценивания.

Пусть по наблюдению X с распределением P_θ, зависящим от неизвестного параметра $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, оценивается θ. Предполагая, что все меры P_θ абсолютно непрерывны относительно общей меры ν, определяют ф у н к ц и ю п р а в д о п о д о б и я равенством

$$L(\theta) = \frac{dP_\theta}{d\nu}(X).$$

М. п. м. рекомендует принять в качестве оценки для θ статистику $\hat{\theta}$, определяемую соотношением

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta^c} L(\theta).$$

Оценка $\hat{\theta}$ наз. о ц е н к о й м а к с и м а л ь н о г о (или наибольшего) п р а в д о п о д о б и я (о. м. п.). В широком классе случаев о. м. п. является решением у р а в н е н и й п р а в д о п о д о б и я

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log L(\theta) = 0, \quad i = 1, \ldots, k, \quad \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k). \quad (1)$$

П р и м е р 1. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — последовательность независимых случайных величин (наблюдений) с общим распределением $\mathcal{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$. Если существует плотность

$$f(x, \theta) = \frac{d\mathcal{P}_\theta}{dm}(x)$$

относительно нек-рой меры m, то

$$L(\theta) = \prod_{j=1}^{n} f(X_j; \theta),$$

и уравнения (1) имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log f(X_j; \theta) = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \quad (2)$$

Пример 2. Пусть в условиях 1-го примера $\mathcal{P}_\theta$ есть нормальное распределение с плотностью

$$(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

где $x\in\mathbb{R}^1$, $\theta=(a,\sigma^2)$, $-\infty<a<\infty$, $\sigma^2>0$. Уравнения (2) принимают вид

$$\sigma^{-2}\sum_{j=1}^n (X_j-a)=0,$$

$$(2\sigma^4)^{-1}\sum_{j=1}^n (X_j-a)^2-n(2\sigma^2)^{-1}=0;$$

о. м. п. выражается равенствами:

$$\hat{a}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j,\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (X_j-\overline{X})^2.$$

Пример 3. В условиях 1-го примера X_j принимают значения 0 и 1 с вероятностями соответственно $1-\theta$, θ. Тогда

$$L(\theta)=\prod_{j=1}^n \theta^{X_j}(1-\theta)^{1-X_j},$$

а о. м. п. $\hat{\theta}=\overline{X}$.

Пример 4. Пусть наблюдение $X=X_t$ есть диффузионный процесс со стохастическим дифференциалом

$$dX_t=\theta a_t(X_t)+dw_t,\quad X_0=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

где w_t — винеровский процесс, а θ — неизвестный одномерный параметр. Здесь (см. [3])

$$\log L(\theta)=\theta\int_0^T a_t(X_t)\,dX_t-\frac{\theta^2}{2}\int_0^T a_t^2(X_t)\,dt,$$

$$\hat{\theta}=\frac{\int_0^T a_t(X_t)\,dX_t}{\int_0^T a_t^2(X_t)\,dt}.$$

В основе М. п. м. не лежат никакие четко выраженные соображения оптимальности, и широко распространенная вера в его хорошие качества основана отчасти на большом успехе, с к-рым М. п. м. применялся к многочисленным конкретным задачам, отчасти на строго установленных асимптотически оптимальных свойствах. Напр., в ситуации 1-го примера в широких предположениях $\hat{\theta}_n\to\theta$ с P_θ-вероятностью 1. Если существует информационное количество Фишера

$$I(\theta)=\int\frac{|f'_\theta(x,\theta)|^2}{f(x,\theta)}\,m(dx),$$

то разность $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, I^{-1}(\theta))$ и $\hat{\theta}_n$ имеет в определенном смысле асимптотически минимальный средний квадрат уклонения от θ (см. [4]).

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [3] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [4] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979. *И. А. Ибрагимов.*

МАКСИМАЛЬНОЕ И МИНИМАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЯ симметрического оператора A — операторы $\overline{A}$ (замыкание оператора A) и A^* (сопряженный к A оператор) соответственно. Все замкнутые симметрич. расширения оператора A находятся между ними. Равенство М. и м. р. эквивалентно самосопряженности оператора A и является необходимым и достаточным условием единственности самосопряженного расширения. *А. И. Логинов, В. С. Шульман.*

МАКСИМАЛЬНЫЙ И МИНИМАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОРЫ — *максимальное и минимальное расширения* оператора, определяемого данным дифференциальным

выражением на подпространстве финитных функций. Области определения М. и м. о. могут быть конкретно описаны в ряде случаев, напр. для обыкновенного дифференциального оператора, для эллиптич. оператора, для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.

Лит.: [1] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965.

А. И. Логинов, В. С. Шульман.

МАКСИМАЛЬНЫЙ ИДЕАЛ — максимальный элемент в частично упорядоченном множестве тех или иных собственных идеалов соответствующей алгебраич. системы. М. и. играют существенную роль в теории колец. Всякое кольцо с единицей обладает левыми (а также правыми и двусторонними) М. и. Фактормодуль $M=R/I$ левого (соответственно правого) R-модуля R по левому (соответственно правому) М. и. I является неприводимым; гомоморфизм φ кольца R в тело эндоморфизмов модуля M — представление кольца R. Ядро всех таких представлений, т. е. множество элементов кольца, переходящих в нуль при всех его представлениях, наз. радикалом Джекобсона кольца R, оно совпадает с пересечением всех левых (а также всех правых) М. и.

В кольце $R=C[a, b]$ непрерывных действительных функций на отрезке $[a, b]$ множество всех функций, обращающихся в нуль в фиксированной точке x_0, является М. и. Такими идеалами исчерпываются все М. и. кольца R. Это соответствие между точками отрезка и М. и. кольца R привело к построению различных теорий, представляющих кольца, как кольца непрерывных функций на нек-ром топологич. пространстве.

Зарисского топология, вводимая на множестве простых идеалов Spec R кольца R, обладает слабыми свойствами отделимости (т. е. существуют незамкнутые точки). Аналогичная топология в некоммутативном случае вводится на множестве Spec R примитивных идеалов, являющихся аннуляторами неприводимых R-модулей. Множество М. и., а в некоммутативном случае — примитивных М. и., образует подпространство Spec $mR\subset$Spec R, к-рое удовлетворяет аксиоме отделимости T_1.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961.

В. Е. Говоров.

В теории полугрупп М. и. играют меньшую роль, нежели *минимальные идеалы*. Если M — максимальный двусторонний идеал (м. д. и.) полугруппы S, то либо $M=S\setminus\{a\}$, где a — нек-рый неразложимый элемент из S (т. е. $a\in S^2\setminus S$), либо M есть простой идеал (т. е. для любых идеалов A, B из $AB\subseteq M$ следует $A\subseteq M$ или $B\subseteq M$); отсюда следует, что в S всякий м. д. и. будет простым тогда и только тогда, когда $S^2=S$. В полугруппе S с м. д. и. простой идеал $P\neq S$ будет максимальным тогда (и, очевидно, только тогда), когда P содержит пересечение I всех м. д. и. из S. Факторполугруппа Риса S/I есть 0-*прямое объединение* полугрупп, каждая из к-рых либо 0-простая, либо двухэлементная нильпотентная.

Иногда полугруппа S с собственными левыми идеалами может иметь среди таких идеалов наибольший L^* (т. е. содержащий все другие собственные левые идеалы); это, напр., выполняется, если S обладает правой единицей. Если в этом случае множество $S\setminus L^*$ неодноэлементно, то оно является подполугруппой. В периодич. полугруппе S из существования L^* вытекает, что L^* будет (наибольшим собственным) двусторонним идеалом. Другой пример такой же ситуации доставляют подгруппы с отделяющейся групповой частью (см. *Обратимый элемент*), не являющиеся группами.

Лит.: [1] Schwarz Š., «Чехосл. матем. ж.», 1953, т. 3, № 2, с. 139—53; т. 4, с. 365—83; [2] его же, там же, 1969, т. 19, № 1, с. 72—9; [3] Grillet P. A., «Amer. Math. Monthly», 1969, v. 76, № 5, p. 503—09.

Л. Н. Шеврин.

МАКСИМАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ — *инвариантная статистика*, принимающая различные значения на различных орбитах, порожденных группой взаимно однозначных измеримых преобразований *выборочного пространства*. Таким образом, если $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ — выборочное пространство, а $G=\{g\}$ — группа взаимно однозначных $\mathfrak{B}$-измеримых преобразований $\mathfrak{X}$ на себя, то инвариантная статистика $T(x)$ является М. и., если из того, что $T(x_2)=T(x_1)$, следует, что $x_2=gx_1$ для некрого элемента $g\in G$. Напр., если $\mathfrak{X}=\mathbb{R}^n$, $x=(x_1, \ldots, x_n)^T$, $G=\{\Gamma\}$ — группа ортогональных преобразований $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $y=\Gamma x$, то статистика $T(x)=\sum x_i$ является М. и. Любая инвариантная статистика является функцией М. и.

М. и. используют при построении *инвариантных критериев*.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964; [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [3] Климов Г. П., Инвариантные выводы в статистике, М., 1973.

М. С. Никулин.

МАКСИМАЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ — характеристика взаимозависимости случайных величин X и Y, определяемая как точная верхняя грань значений коэффициентов корреляции между действительными случайными величинами $\varphi_1(X)$ и $\varphi_2(Y)$ — функциями от случайных величин X и Y такими, что $\mathsf{E}\varphi_1(X)=\mathsf{E}\varphi_2(Y)=0$ и $\mathsf{D}\varphi_1(X)=\mathsf{D}\varphi_2(Y)=1$:

$$\rho^*(X, Y)=\sup \mathsf{E}[\varphi_1(X)\varphi_2(Y)].$$

Если эта верхняя грань достигается при $\varphi_1=\varphi_1^*(X)$ и $\varphi_2=\varphi_2^*(Y)$, то М. к. к. между случайными величинами X и Y равен коэффициенту корреляции между величинами $\varphi_1^*(X)$ и $\varphi_2^*(Y)$. М. к. к. обладает тем свойством, что равенство $\rho^*(X, Y)=0$ необходимо и достаточно для независимости случайных величин X и Y. При линейной корреляции между величинами М. к. к. совпадает с обычным коэффициентом корреляции.

Лит.: [1] Сарманов О. В., «Докл. АН СССР», 1958, т. 120, № 4, с. 715—18; [2] его же, там же, 1946, т. 53, № 9, с. 781—84; [3] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973.

И. О. Сарманов.

МАКСИМАЛЬНЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ ТИП — тип максимальной спектральной меры μ (т. е. класс эквивалентных ей мер) *нормального оператора* A, действующего в гильбертовом пространстве H. Эта мера определяется (с точностью до эквивалентности) из следующего условия. Пусть $E(\lambda)$ — разложение единицы, фигурирующее в спектральном разложении нормального оператора $A=\int \lambda dE(\lambda)$, а $E(\Lambda)=\int_\Lambda dE(\lambda)$ (где Λ обозначает борелевское множество) — соответствующая «операторнозначная» мера; тогда $E(\Lambda)=0$ в точности для тех Λ, для к-рых $\mu(\Lambda)=0$. Любому $x\in H$ сопоставляется его спектральная мера $\mu_x(\Lambda)=(x, E(\Lambda)x)$; в этих терминах определение μ означает, что для любого x мера μ_x абсолютно непрерывна относительно μ и существует x_0, для к-рого μ_{x_0} эквивалентна μ (говорят, что x_0 принадлежит М. с. т.). Если H сепарабельно, то мера μ с такими свойствами всегда существует, но если H несепарабельно, то такой меры может и не быть; тогда A не имеет М. с. т. Это обстоятельство усложняет теорию унитарных инвариантов нормальных операторов в несепарабельном случае.

Лит.: [1] Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965.

Д. В. Аносов.

МАКСИМАЛЬНЫЙ ТОР — 1) М. т. линейной алгебраической группы G — алгебраическая подгруппа в G, являющаяся *алгебраическим тором* и не содержащаяся ни в какой большей подгруппе такого типа. Пусть, далее, группа G связна. Объеди-

нение всех М. т. группы G совпадает с множеством всех полупростых элементов группы G (см. *Жордана разложение)*, а пересечение — с множеством всех полупростых элементов центра группы G. Всякий М. т. содержится в нек-рой *Борееля подгруппе* группы G. Централизатор М. т. является *Картана подгруппой* группы G; он всегда связен. Любые два М. т. группы G сопряжены в G. Если группа G определена над полем k, то в G существует М. т., также определенный над k; его централизатор тоже определен над k.

Пусть G — *редуктивная группа*, определенная над полем k. Среди всех алгебраич. подгрупп в G, являющихся расщепимыми над k алгебраич. торами, также можно рассматривать максимальные подгруппы. Получающиеся таким образом максимальные k-расщепимые торы сопряжены над k. Общая размерность таких торов наз. k-р а н г о м группы G и обозначается $\mathrm{rk}_k G$. Максимальный k-расщепимый тор не является, вообще говоря, М. т., т. е. $\mathrm{rk}_k G$, вообще говоря, меньше р а н г а G (равного размерности М. т. в G). Если $\mathrm{rk}_k G=0$, то G наз. а н и з о т р о п н о й над k г р у п п о й, а если $\mathrm{rk}_k G$ совпадает с рангом G, то G наз. р а с щ е п и м о й над k г р у п п о й. Если k алгебраически замкнуто, то G всегда расщепима над k. В общем случае G всегда расщепима над сепарабельным замыканием k.

П р и м е р ы. Пусть k — поле и $\bar{k}$ — его алгебраич. замыкание. Группа $G=GL_n(\bar{k})$ невырожденных матриц порядка n с коэффициентами в $\bar{k}$ (см. *Классическая группа*, *Полная линейная группа)* определена и расщепима над простым подполем поля k. Подгруппа всех диагональных матриц является М. т. в G.

Пусть характеристика поля k отлична от 2. Пусть V — n-мерное векторное пространство над $\bar{k}$, а F — невырожденная квадратичная форма на V, определенная над k (последнее означает, что в нек-ром базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства V форма $F(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)$ является многочленом от $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами в k). Пусть G — группа всех невырожденных линейных преобразований пространства V, имеющих определитель 1 и сохраняющих форму F. Она определена над k. Пусть V_k — линейная оболочка над k векторов $e_1, \ldots, e_n$; она является k-формой пространства V. В V всегда существует базис $f_1, \ldots, f_n$, в к-ром форма имеет вид

$$F(x_1f_1+\ldots+x_nf_n)=x_1x_n+x_2x_{n-1}+\ldots+x_px_{n-p+1},$$

где $p=n/2$, если n четно, и $p=(n+1)/2$, если n нечетно. Подгруппа в G, состоящая из тех элементов, к-рые в этом базисе имеют матрицу вида $\|a_{ij}\|$, где $a_{ij}=0$ при $i\neq j$ и $a_{ii}a_{n-i+1,\,n-i+1}=1$ при $i=1, 2, \ldots, p$, является М. т. в G (так что ранг G равен целой части числа $n/2$). Указанный базис не лежит, вообще говоря, в V_k. Однако в V_k всегда существует базис $h_1, \ldots, h_n$, в к-ром квадратичная форма имеет вид

$$F(x_1h_1+\ldots+x_nh_n)=$$
$$=x_1x_n+x_2x_{n-1}+\ldots+x_qx_{n-q+1}+F_0(x_{q+1}, \ldots, x_{n-q}),$$
$$q\leqslant p,$$

где F_0 — квадратичная форма, не представляющая над k нуля (т. е. такая, что уравнение $F_0=0$ имеет в k только нулевое решение) (см. *Витта разложение*). Подгруппа в G, состоящая из всех элементов, к-рые в базисе $h_1, \ldots, h_n$ имеют матрицу вида $\|a_{ij}\|$, где $a_{ij}=0$ при $i\neq j$, $a_{ii}a_{n-i+1,\,n-i+1}=1$ при $i=1, \ldots, q$ и $a_{ii}=1$ при $i=q+1, \ldots, n-q$, является максимальным k-расщепимым тором в G (так что $\mathrm{rk}_k G=q$ и G расщепима тогда и только тогда, когда q равно целой части $n/2$).

Рассмотрение М. т. позволяет сопоставить редуктивной группе G нек-рую *корневую систему*, что является основой классификации редуктивных групп. А имен-

но, пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G и T — фиксированный М. т. в G. Присоединенное представление тора T в пространстве $\mathfrak{g}$ рационально и диагонализируемо, так что $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму весовых подпространств этого представления. Множество ненулевых весов этого представления (рассматриваемое как подмножество своей линейной оболочки в векторном пространстве $X(T)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$, где $X(T)$ — группа рациональных характеров тора T) оказывается (приведенной) корневой системой. Аналогично определяется и *относительная система корней*: если G определена над k, а S — максимальный k-расщепимый тор в G, то множество ненулевых весов присоединенного представления S в $\mathfrak{g}$ образует корневую систему (вообще говоря, неприведенную) в нек-ром подпространстве пространства $X(S)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. См. также *Вейля группа*, *Полупростая группа*.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Арифметические группы и автоморфные функции, пер. с англ. и франц., М., 1969.

2) М. т. связной вещественной группы Ли G — связная компактная коммутативная подгруппа Ли T в G, не содержащаяся ни в какой большей подгруппе такого типа. Как группа Ли, М. т. T изоморфен прямому произведению нескольких экземпляров связной одномерной компактной вещественной группы Ли, к-рая, с точностью до изоморфизма, существует только одна и может быть отождествлена с «окружностью» S (мультипликативной группой всех комплексных чисел, равных по модулю 1). Всякий М. т. группы G содержится в максимальной компактной подгруппе группы G; любые два М. т. группы G (так же, как и любые две ее максимальные компактные подгруппы) сопряжены в G. Это в известной степени сводит изучение М. т. к тому случаю, когда G компактна.

Пусть, далее, G является компактной группой. Объединение всех М. т. группы G совпадает с G, а пересечение — с центром G. Алгебра Ли М. т. T является максимальной коммутативной подалгеброй в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G, и всякая максимальная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$ так получается. Централизатор М. т. T в G совпадает с T. Присоединенное представление T в $\mathfrak{g}$ диагонализируемо, и все ненулевые веса этого представления образуют в пространстве $X(T)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$, где $X(T)$ — группа характеров тора T, корневую систему. Последнее обстоятельство служит основой классификации компактных групп Ли.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [3] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964. *В. Л. Попов.*

МАКСИМАЛЬНЫЙ ЧЛЕН РЯДА — член сходящегося числового или функционального ряда с положительными членами, значение к-рого не меньше значений всех членов этого ряда.

Применяя это понятие при изучении степенных рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

по комплексному переменному z с положительным радиусом сходимости R, $0<R\leqslant\infty$, имеют в виду максимальный член $\mu(r)$ ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k, \quad 0 < r = |z-a| < R;$$

таким образом,

$$|c_k| r^k \leqslant \mu(r), \quad k=0, 1, \ldots$$

Индекс $\nu(r)$ М. ч. р. $\mu(r)$ наз. центральным индексом:

$$\mu(r) = |c_{\nu(r)}| r^{\nu(r)}.$$

Если имеется несколько членов ряда, по модулю равных $\mu(r)$, то за центральный индекс принимается наибольший из индексов этих членов. Функция

$$y = \ln \mu(e^x), \quad -\infty < x < \infty,$$

— неубывающая и выпуклая; функция $\nu(r)$ — ступенчатая, возрастает в точках разрыва на натуральное число и всюду непрерывна справа.

Лит.: [1] Валирон Ж., Аналитические функции, пер. с франц., М., 1957; [2] Виттих Г. В., Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, пер. с нем., М., 1960.

Е. Д. Соломенцев.

МАКСИМИЗАЦИЯ И МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ конечного числа переменных — задача поиска экстремума функции $f(x)$, $x = (x^1, \ldots, x^n) \in X \subseteq \subseteq R^n$; под этой задачей понимается:

1) нахождение $\overline{f} = \sup\limits_{x \in X} f(x)$ или $\underline{f} = \inf\limits_{x \in X} f(x)$;

2) отыскание точек максимума или минимума, если $\overline{f}$ или $\underline{f}$ достигаются на допустимом множестве (см. *Максимум и минимум функции*);

3) построение максимизирующей последовательности $\{x_i\}$ или минимизирующей последовательности $\{x_i\}$ таких, что

$$\lim_{i \to \infty} f(x_i) = \overline{f}, \quad \lim_{j \to \infty} f(x_j) = \underline{f},$$

если $\overline{f}$ или $\underline{f}$ недостижимы на X.

Исследованием экстремумов функций дискретных аргументов занимается *дискретное программирование* и *целочисленное программирование*. Ниже освещены только методы М. и м. ф. непрерывных аргументов.

Классические (непрямые) методы М. и м. ф. применимы только для гладких функций. Они используют необходимое условие экстремума для поиска стационарных точек. Нули производных $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, n$, вычисляются на практике чаще всего одним из многочисленных методов последовательных приближений (см. [3]). С другой стороны, каждую задачу решения конечных функциональных уравнений вида

$$\varphi_m(x^1, \ldots, x^n) = 0, \quad m \leqslant n,$$

можно интерпретировать как задачу М. и м. ф., напр. функции

$$f(x) = \varphi_1^2(x) + \ldots + \varphi_m^2(x) \longrightarrow \min,$$

и применить для решения последней один из специфич. методов М. и м. ф.

Прямые методы М. и м. ф. основываются на непосредственном сравнении значений $f(x)$ в двух или нескольких точках.

Для практич. отыскания экстремумов применяются итеративные алгоритмы вида:

$$x_{i+1} = \hat{X}(i, x_i, x_{i-1}, \ldots, x_{i-j}),$$

где i — номер итерации, а $\hat{X}(\cdot)$ — нек-рый оператор. При этом обычно предполагается:

1) сходимость алгоритма в том или ином смысле, чаще всего в смысле

$$x_\infty = \overline{x}(x_\infty = \underline{x}) \text{ или } f(x_\infty) = \overline{f}(f(x_\infty) = \underline{f});$$

2) локальность итерационной процедуры, т. е. $j \ll i (j = o(i)$ при $i \to \infty)$; алгоритм «помнит» значения x только для итераций в нек-рой окрестности текущего положения x_i. При $j \equiv 0$ получается простой марковский вычислительный процесс без памяти.

Оператор $\hat{X}(\cdot)$ может быть детерминированным в детерминированных методах или содержать стохастич. параметры. В вычислительной практике часто сочетают стохастич. методы с детерминированными, напр. в

покоординатного спуска методе направление спуска может определяться случайным образом. Вероятностные характеристики стохастических параметров, в свою очередь, могут меняться от итерации к итерации (поиск с адаптацией и «самообучением», случайный поиск).

Широко применяют и комбинирование различных детерминированных методов, к к-рому относится последовательное и параллельное вычисление экстремума несколькими методами, композиции алгоритмов вида $\hat{X}=\hat{X}_2(\hat{X}_1(\cdot))$ и т. п. Напр., метод Левенберга — Марквардта

$$x_{i+1}=x_i-(\alpha_i\nabla\nabla f(x_j)+\beta_i I)^{-1}\nabla f(x_i),$$

к-рый при $\alpha_i=0$ совпадает с градиентным методом, а при $\beta_i=0$ с методом Ньютона.

Одномерная оптимизация, то есть М. и м. ф. $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^1$, помимо самостоятельного интереса, является необходимым этапом большинства применяемых методов. К специфически одномерным относятся, напр., *Фибоначчи метод*, *половинного деления метод* (дихотомии метод), *парабол метод*. Методами М. и м. ф. многих переменных являются *градиентный метод*, *наискорейшего спуска метод*, *покоординатного спуска метод*, *симплексный поиск*, *сканирования метод*, *сопряженных градиентов метод*, *тяжелого шарика метод*, *установления метод* и др.

Алгоритмы большинства из перечисленных методов укладываются в схему метода спуска (подъема):

$$x_{i+1}=x_i\mp\varkappa_i y_i,$$

причем $f(x_{i+1})\leqslant f(x_i)$ или $f(x_{i+1})\geqslant f(x_i)$ для всех i (условие релаксации). Они различаются между собой либо выбором вектора направления y_i спуска, либо выбором способов движения вдоль вектора спуска, определяемым шаговым множителем $\varkappa$.

Овражные методы разработаны для функций, рельеф к-рых имеет вид «оврагов с крутыми склонами» (см. *Овражных функций методы минимизации*). Ординарные (не овражные) методы, будучи примененными здесь, дают извилистый релаксационный путь, требующий чрезмерно больших затрат машинного времени для вычисления экстремума.

Сравнительная эффективность методов оценивается по многим и противоречивым критериям. Сюда входят: точность решения, скорость решения, надежность метода, время подготовки задачи к счету, сходимость алгоритма и др. Область применения каждого из апробированных методов весьма ограничена.

Для испытания методов разработаны наборы стандартных тест-функций, характерных для различных функциональных классов (см. [1]). Усиленно исследуется сходимость методов М. и м. ф. (см. [6], [8]). Однако сходимость — это качество, к-рое не является ни необходимым, ни достаточным для эффективного окончания вычислений.

Все перечисленные выше методы приводят к одному из локальных экстремумов, если начальное приближение принадлежит области притяжения точки этого экстремума. Нахождение глобального экстремума гарантируется лишь для выпуклых и родственных им унимодальных функций. Теория отыскания глобального экстремума находится (1982) в начальной стадии развития (см. *Многоэкстремальная задача*). Другим развивающимся направлением М. и м. ф. является оптимизация негладких функций (см. [4], [13], [16]). В частности, к негладкой функции, как правило, приводит задача минимизации функции максимума (см. *Максимин*; численные методы). По-видимому, все из общеупотребительных методов оптимизации имеют содержательный физический, экономический или биологический

смысл. Соответствующие исследования только разворачиваются (см. [9]) и приводят к созданию новых методов (см. также *Непрерывные аналоги итерационных методов*). Если значения исследуемой функции определяются статистически со стохастич. помехой, то для отыскания экстремума применяется один из методов *стохастической аппроксимации*. Сюда же примыкает и *планирование эксперимента*.

Экспериментальные методы М. и м. ф. используют воспроизведение различных физич. процессов для поиска экстремумов. К ним относится и моделирование на АВМ (см. [17]). Несмотря на удобство и дешевизну использования в простейших автоматич. оптимизаторах, последнее не обеспечивает высокой точности вычисления.

Графич. методы пригодны только для прикидочных расчетов и построения начального приближения для итеративных методов.

Если допустимое множество задано в виде функциональных условий

$$\varphi_m(x) \leqslant 0$$

(связи и ограничения, условный экстремум), то для поиска экстремумов применяются методы математич. программирования. Эта же задача может быть сведена к последовательности задач на безусловный экстремум с помощью штрафных и барьерных функций (см. *Штрафных функций метод*).

Лит.: [1] Аоки М., Введение в методы оптимизации, пер. с англ., М., 1977; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; 2 изд., т. 2, М., 1962; [4] Васильев Ф. П., Лекции по методам решения экстремальных задач, М., 1974; [5] Гупал А. М., Стохастические методы решения негладких экстремальных задач, К., 1979; [6] Карманов В. Г., Математическое программирование, М., 1975; [7] Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М., Методы оптимизации, М., 1978; [8] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах, М., 1975; [9] Разумихин Б. С., Физические модели и методы теории равновесия в программировании и экономике, М., 1975; [10] Растригин Л. А., Системы экстремального управления, М., 1974; [11] Саульев В. К., Самойлова И. И., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 11, М., 1973, с. 91—128; [12] Уайлд Д.-Дж., Методы поиска экстремума, пер. с англ., М., 1967; [13] Федоров В. В., Численные методы максимина, М., 1979; [14] Ортега Д., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ., М., 1975; [15] Современное состояние теории исследования операций, М., 1979; [16] Nonsmooth Optimization, Oxf., 1978; [17] Towards Global Optimisation, v. 1—2, Amst.—N. Y., 1975—78; [18] Евтушенко Ю. Г., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1971, т. 11, № 6, с. 1390—1403.

Ю. П. Иванилов, В. В. Охрименко.

МАКСИМИН — смешанные экстремумы

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y), \quad \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) \text{ и т. п.} \qquad (*)$$

М. можно интерпретировать (напр., в теории принятия решений, исследовании операций или теории игр) как наибольший выигрыш из тех, к-рые могут быть достигнуты принимающим решения субъектом в наихудших для него условиях, и, тем самым, как гарантированный выигрыш. Поэтому принятие решений, ориентирующее на М., может считаться разумным, оптимальным.

Значение М. не превосходит значения соответствующего *минимакса*. Условия их равенства весьма важны в теории игр (см. *Минимакса принцип*). Такими условиями являются, напр., наличие в X линейной структуры, выпуклость X в ней и вогнутость функции F по $x \in X$ при любом $y \in Y$ (или же линейность и выпуклость Y и выпуклость F по $y \in Y$ при любом $x \in X$).

Нахождение М. как математич. операция формально состоит в последовательном вычислении экстремумов, т. е. в решении стандартных («однокритериальных») задач оптимального программирования, и потому никаких концептуальных сложностей не содержит.

Однако даже в условиях «хорошо устроенного» множества Y и равностепенно по X непрерывной функции F на нем функция, выражающая соответствие значения x значениям y, на к-рых достигается (или «почти достигается») экстремум $\inf\limits_{y\in Y} F(x, y)$, может оказаться «плохо устроенной» и, в частности, разрывной функцией от x. В этих случаях аналитич. нахождение М. (*) становится затруднительным, и этот М. приходится определять численными методами (см. *Максимин, численные методы*). Сказанное относится и к нахождению минимаксов.

Н. Н. Воробьев.

МАКСИМИН; численные методы — раздел вычислительной математики, посвященный решению максиминных (минимаксных) задач. Задачи вычисления максиминов и минимаксов часто возникают в исследовании операций и теории игр, напр. при использовании *минимакса принципа* или *наибольшего гарантированного результата принципа*.

Исходной является задача вычисления *М.*:

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} F(x, y), \tag{1}$$

возникающая, напр., при решении антагонистич. игр с полной информацией. Ее естественным обобщением является задача нахождения М. со «связанными» переменными:

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in B(x)} F(x, y), \tag{2}$$

причем множество $B(x)$ часто задается в виде

$$B(x)=\{y\in Y \mid \varphi(x, y)\geqslant 0\}\neq\varnothing$$

для всякого $x\in X$. Эта задача оказывается основной в теории игр двух лиц с обменом информацией (см., напр., *Игра с иерархической структурой*). Итерирование исходной задачи приводит к задаче кратного, или последовательного, М.:

$$\sup_{x_1\in X_1}\inf_{y_1\in Y_1}\ \dots\ \sup_{x_n\in X_n}\inf_{y_n\in Y_n} F(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n), \tag{3}$$

к-рая связана с решением нек-рых динамич. игр. Представляют интерес стохастич. задачи вычисления М., а также минимаксные задачи оптимального управления.

В основе большинства способов решения минимаксных задач лежит градиентный метод или *штрафных функций метод*. При применении первого из них задачу (1) рассматривают как задачу оптимального программирования

$$\sup_{x\in X} f(x), \tag{4}$$

где

$$f(x)=\inf_{y\in Y} F(x, y). \tag{5}$$

Построение численных методов решения задачи (4) — (5) связано с дифференцируемостью по направлению функции минимума (5).

Если $X\subset\mathbb{R}^n$, Y — компакт в $\mathbb{R}^m$, $\frac{\partial f(x)}{\partial g}$ — производная по направлению $g\in\mathbb{R}^n$ (см [1] — [3]),

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f(x)}{\partial g}&=\min_{y\in Y(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x}F(x, y), g\right),\\ Y(x)&=\{y\in Y \mid F(x, y)=f(x)\},\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

то в случае конечного множества Y формула (6) позволяет построить итеративную последовательность x_1, x_2, ..., в к-рой $x_{k+1}=x_k+\alpha_k g_k$ для $k=0, 1, \dots$ и к-рая при нек-рых дополнительных предположениях сходится к точке, удовлетворяющей необходимому условию М.

При использовании метода штрафных функций задача (1) для непрерывной на произведении компакта

$X \subset \mathbb{R}^n$ и единичного куба $Y \subset \mathbb{R}^m$ функции $F(x, y)$ сводится к нахождению

$$\lim_{c \to \infty} \max_{u,\, x \in X} \mathscr{L}(x,\ u,\ c),$$

где

$$\mathscr{L}(x,\ u,\ c) = u - c \int_Y (\min(0,\ F(x,\ y) - u))^2\, dy \quad (7)$$

(u — вспомогательная переменная). При этом если пара $(u(c),\ x(c))$ реализует максимум

$$\max_{u,\, x \in X} \mathscr{L}(x,\ y,\ c),$$

то любая предельная точка $(u^*,\ x^*)$ последовательности $\{(u(c_k),\ x(c_k)) | c_k \to \infty\}$ дает величину

$$u^* = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x,\ y)$$

M. (1) и одну из оптимальных стратегий x^*, для к-рой

$$u^* = \min_{y \in Y} F(x^*,\ y)$$

(см. [4]). Тем самым решение задачи (1) с любой точностью сводится к отысканию максимума функции (7) при достаточно больших значениях штрафа c. Избежать трудностей, связанных с вычислением интегралов в (7), позволяет метод стохастич. градиента (см. [5], [8]):

$$\left.\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \alpha_k \xi_k(c_k), \\ u_{k+1} &= u_k + \alpha_k \eta_k(c_k), \end{aligned}\right\} \quad k = 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (8)$$

где $(\xi_k(c_k),\ \eta_k(c_k))$ — стохастич. градиент функции $\mathscr{L}(x,\ y,\ c_k)$, т. е. случайная величина, математич. ожидание к-рой совпадает с

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathscr{L}(x_k,\ u_k,\ c_k),\ \ \frac{\partial}{\partial u} \mathscr{L}(x_k,\ u_k,\ c_k)\right).$$

При нек-рых условиях, налагаемых на последовательности $\{\alpha_k\}$ и $\{c_k\}$ и функцию $F(x,\ y)$, для любого начального приближения $(x_1,\ y_1)$ последовательность, определяемая процессом (8), с вероятностью 1 сходится к множеству решений задачи нахождения М. (1).

Избежать больших значений параметра штрафа c в (7) позволяет т. н. «метод невязок» (см. [6]), представляющий собой еще один способ преобразования задачи (1). При этом величина u^* М. (1) определяется как максимальное значение u, для к-рого

$$\min_{x \in X} \Phi(x,\ u) = 0, \qquad (9)$$

где

$$\Phi(x,\ y) = \int_Y (\min(0,\ F(x,\ y) - u))^2\, dy.$$

Здесь значение x^*, реализующее

$$\min_{x \in X} \Phi(x,\ u^*),$$

дает оптимальную стратегию в задаче (1). Отыскивать наибольший корень u^* уравнения (9) можно, используя градиентные методы минимизации функции Φ по x.

Методы преобразования задач, основанные на методе штрафных функций, позволяют приближенно сводить к задачам на максимум минимаксные задачи со связанными переменными (2) (см. [7], [8]).

Экстремальные задачи, к-рые получаются при сведении минимаксных задач к задачам на максимум, весьма сложны, и их решение известными методами сопряжено с большими, подчас непреодолимыми для современных ЭВМ трудностями. В особенности это относится к проблеме отыскания последовательных М. из (3) при большой кратности.

Наряду с указанными общими подходами к решению минимаксных задач имеется ряд приемов, ориентиро-

ванных на те или иные частные классы задач, напр. на задачи теории игр двух лиц с передачей информации (см. [6]).

Лит.: [1] Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н., Введение в минимакс, М., 1972; [2] Данскин Дж. М., Теория максимина, пер. с англ., М., 1970; [3] Демьянов В. Ф., Минимакс: дифференцируемость по направлениям, Л., 1974; [4] Гермейер Ю. Б., Введение в теорию исследования операций, М., 1971; [5] Ермольев Ю. М., Методы стохастического программирования, М., 1976; [6] Гермейер Ю. Б., Игры с непротивоположными интересами, М., 1976; [7] Ерешко Ф. И., Злобин А. С., «Экономика и матем. методы», 1977, т.13, № 4, с. 703—13; [8] Федоров В. В., Численные методы максимина, М., 1979.

В. В. Федоров.

МАКСИМИНА ПРИНЦИП — см. *Минимакса принцип.*

МАКСИМИННЫЙ КРИТЕРИЙ — статистический критерий для проверки сложной гипотезы $H_0: \Theta \in \Theta_0 \subset \subset \Theta$ против сложной альтернативы $H_1: \Theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$, минимальное значение мощности к-рого является максимальным в классе всех статистич. критериев, предназначенных для проверки H_0 против H_1 и имеющих один и тот же размер α, $0<\alpha<1$. В задаче статистич. проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1 М. к. существует в основном, если сама эта задача является инвариантной относительно нек-рой группы преобразований G, а в соответствующем классе инвариантных критериев существует равномерно наиболее мощный критерий. М. к. существует, если семейство вероятностных распределений, определяемое нулевой и конкурирующей гипотезами H_0 и H_1, является абсолютно непрерывным относительно нек-рой σ-конечной меры.

Лит.: [1] Леман Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971.

М. С. Никулин.

МАКСИМУМ И МИНИМУМ ФУНКЦИИ — наибольшее и соответственно наименьшее значения функции, принимающей действительные значения. Точку области определения рассматриваемой функции, в к-рой она принимает максимум или минимум, наз. соответственно точкой максимума или точкой минимума (см. *Максимума и минимума точки*). Если нек-рая точка является точкой абсолютного (локального) максимума или минимума, строгого или нестрогого, то значение функции в этой точке наз. абсолютным (локальным), соответственно строгим или нестрогим максимумом или минимумом. Если функция непрерывна на компакте, то она всегда принимает на нем максимальное и минимальное значения.

М. и м. ф. называется ее экстремумом.

Л. Д. Кудрявцев.

МАКСИМУМА И МИНИМУМА ТОЧКИ — точки, в к-рых действительная функция принимает наибольшее или наименьшее значения на области определения; такие точки наз. также точками абсолютного максимума или абсолютного минимума. Если функция f определена на топологич. пространстве X, то точка x_0 наз. точкой локального максимума (локального минимума), если существует такая окрестность $U \subset X$ точки x_0, что для сужения рассматриваемой функции на этой окрестности точка x_0 является точкой абсолютного максимума (минимума). Различают точки строгого и нестрогого максимума (минимума) (как абсолютного, так и локального). Напр., точка $x_0 \in R$ наз. точкой нестрогого (строгого) локального максимума функции f, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \in U$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) < < f(x_0)$, $x \neq x_0$).

Для функций, определенных на конечномерных областях, в терминах дифференциального исчисления существуют условия и признаки того, чтобы данная точка была точкой локального максимума (минимума). Пусть функция f определена в нек-рой окрестности

точки x_0 числовой оси. Если x_0— точка нестрогого локального максимума (минимума) и в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то она равна нулю.

Если заданная функция f дифференцируема в окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки, в к-рой она непрерывна, и производная f' по каждую сторону от точки x_0 в этой окрестности сохраняет постоянный знак, то для того чтобы x_0 была точкой строгого локального максимума (локального минимума), необходимо и достаточно, чтобы производная меняла знак с плюса на минус, т. е. чтобы $f'(x)>0$ при $x<x_0$ и $f'(x)<0$ при $x>x_0$ (соответственно с минуса на плюс: $f'(x)<0$ при $x<x_0$ и $f'(x)>0$ при $x>x_0$). Однако не для всякой функции, дифференцируемой в окрестности точки x_0, можно говорить о перемене знака производной в этой точке.

Если функция f имеет в точке x_0 m производных, причем $f^{(k)}(x_0)=0$, $k=1, 2, \ldots, m-1$, $f^{(m)}(x_0)\neq 0$, то для того чтобы x_0 была точкой строгого локального максимума, необходимо и достаточно, чтобы m было четным и чтобы $f^{(m)}(x_0)<0$, и — локального минимума, чтобы m было четно и $f^{(m)}(x_0)>0$.

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в n-мерной окрестности точки $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ и дифференцируема в этой точке. Если $x^{(0)}$ является точкой нестрогого локального максимума (минимума), то дифференциал функции f в этой точке равен нулю. Это условие равносильно равенству нулю в этой точке всех частных производных 1-го порядка функции f. Если функция имеет 2-е непрерывные частные производные в точке $x^{(0)}$, все ее 1-е производные обращаются в $x^{(0)}$ в нуль, а дифференциал 2-го порядка в точке $x^{(0)}$ представляет собой отрицательную (положительную) квадратичную форму, то $x^{(0)}$ является точкой строгого локального максимума (минимума). Известны условия для М. и м. т. дифференцируемых функций, когда на область изменения аргументов наложены определенные ограничения: удовлетворяются уравнения связи. Необходимые и достаточные условиям максимума (минимума) действительной функции, область определения к-рой имеет более сложную структуру, изучаются в специальных разделах математики: напр., в *выпуклом анализе*, *математическом программировании* (см. также *Максимизация и минимизация функций*). М. и м. т. функций, определенных на многообразиях, изучаются в *вариационном исчислении в целом*, а М. и м. т. для функций, заданных на функциональных пространствах, т. е. для функционалов, в *вариационном исчислении*. Существуют также различные методы численного приближенного нахождения М. и м. т.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; [2] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1, 2, М., 1981; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975; [4] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., т. 1, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев.

МАКСИМУМА МОДУЛЯ ПРИНЦИП — теорема, выражающая одно из основных свойств модуля аналитич. функции. Пусть $f(z)$ — регулярная аналитическая, или голоморфная, функция n комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n\geqslant 1$, в области D комплексного числового пространства $\mathbb{C}^n$, отличная от константы, $f(z)\neq\text{const}$. М. м. п. в локальной форме утверждает, что ни в какой точке $z^0\in D$ не может достигаться локальный максимум модуля $f(z)$, т. е. не существует окрестности $V(z^0)$ точки z^0, в к-рой выполняется неравенство $|f(z)|\leqslant|f(z^0)|$, $z\in V(z^0)$. Если, кроме того, $f(z^0)\neq 0$, то z^0 не может быть и точкой локального минимума модуля $f(z)$. Равносильная формулировка М. м. п. в глобальной форме состоит в том, что при тех же условиях модуль аналитич. функции $f(z)$ не может достигать своей верхней грани

$$M=\sup\{|f(z)|: z\in D\}$$

ни в какой точке $z^0 \in D$. Следовательно, если $f(z)$ непрерывна в конечной замкнутой области D, то наибольшее значение M достигается только в граничных точках области D. Приведенные формулировки М. м. п. сохраняют силу и в том случае, если $f(z)$ — голоморфная функция на связном комплексном (аналитическом) многообразии, в частности на римановой поверхности или на римановой области D.

М. м. п. допускает обобщения в различных направлениях. Во-первых, вместо голоморфности $f(z)$ достаточно предположить только, что $f(z)=u(z)+iv(z)$ — (комплексная) *гармоническая функция*. Другое обобщение связано с тем, что для голоморфной функции $f(z)$ модуль $|f(z)|$ есть *логарифмически субгармоническая функция*. Если $f(z)$ — ограниченная голоморфная функция в конечной области $D \subset \mathbb{C}^n$ и условие

$$\limsup \{|f(z)| : z \to \zeta,\ z \in D\} \leqslant M$$

выполняется для всех точек $\zeta \in \partial D$, кроме точек нек-рого множества $E \subset \partial D$ внешней *емкости* нуль (в пространстве $\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{C}^n$), то $|f(z)| \leqslant M$ всюду в D. См. также *Двух констант теорема*, *Фрагмена — Линделёфа теорема*.

М. м. п. обобщается и на голоморфные отображения. Пусть $f : D \to \mathbb{C}^m$ — голоморфное отображение области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, впространство $\mathbb{C}^m$, т. е. $f=(f_1, \ldots, f_m)$, $m \geqslant 1$, f_j, $j=1, \ldots, m$, — голоморфные функции в D, $f(z) \neq \text{const}$ и $\|f\| = \sqrt{|f_1|^2+\ldots+|f_m|^2}$ — евклидова норма. Тогда ни в какой точке $z^0 \in D$ функция $\|f(z)\|$ не может достигать локального максимума. М. м. п. справедлив всякий раз, когда выполняется *сохранения области принцип*.

Лит.: [1] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., М., 1962; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

МАКСИМУМА ПРИНЦИП дискретный — принцип максимума Понтрягина для дискретных по времени процессов управления. Для такого процесса М. п. может не выполняться, хотя для его непрерывного аналога, получающегося заменой конечно разностного оператора $x_{t+1}-x_t$ на дифференциальный dx/dt, *Понтрягина принцип максимума* справедлив. Пусть, напр., имеется задача оптимального управления

$$\max J(x_{T+1}), \tag{1}$$

$$x_{t+1}=f_t(x_t,\ u_t), \tag{2}$$

$$u_t \in U,\ t=0,\ 1,\ \ldots,\ T, \tag{3}$$

$$x_0=a. \tag{4}$$

Задачу (1) — (4) можно трактовать как обычную задачу на экстремум при наличии ограничений. Тогда условия оптимальности траектории $\{x_t^*,\ u_t^*\}$ можно получить с помощью *Лагранжа функции*

$$L=J(x_{T+1})+\sum_{t=0}^{T}(p_{t+1}f_t(x_t,\ u_t)-p_{t+1}x_{t+1}),$$

где выражение

$$p_{t+1}f_t(x_t,\ u_t)=H_t$$

по аналогии с непрерывным случаем наз. *Гамильтона функцией*. Пусть функции J, f_t, $t=0, 1, \ldots, T$, дифференцируемы по совокупности переменных, а множество U ограничено и замкнуто. Тогда для того чтобы решение $\{x_t^*,\ u_t^*\}$ задачи (1) — (4) было оптимальным, необходимо существование *Лагранжа множителей* $\{p_{t+1}^*\}$ таких, что точка $(x_t^*,\ u_t^*,\ p_{t+1}^*)$ будет стационарной точкой функции Лагранжа, т. е. в этой точке выполняются условия

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial L}{\partial p}=0;\quad \delta_u L=\frac{\partial L}{\partial u}\,\delta u \leqslant 0$$

для всех допустимых вариаций управления δu. Первое условие приводит к уравнениям динамики дискретного процесса (2) и начальному условию (4). Второе — к граничному условию и сопряженной системе для импульсов $\{p_{t+1}\}$:

$$p_{T+1} = \partial J / \partial x_{T+1},$$

$$p_t = p_{t+1}\, \partial f / \partial x_t, \quad t = T, \ldots, 1, 0.$$

Третье условие — к условию для первой вариации функции Гамильтона:

$$\delta_u H_t = \frac{\partial H_t}{\partial u_t}\, \delta u_t \leqslant 0. \tag{5}$$

Однако условие (5) не означает, что функция Гамильтона на оптимальном управлении достигает максимума

$$H_t(x_t^*,\ u_t^*,\ p_{t+1}^*) = \max_{u \in U} H_t(x_t^*,\ u_t^*,\ p_{t+1}^*)$$

по всем управлениям, удовлетворяющим ограничениям (3); оно показывает, что u_t^* — стационарная точка функции Гамильтона. Если первая вариация функции Гамильтона $\frac{\partial H_t}{\partial u_t}\, \delta u_t$ обращается в нуль (это имеет место, в частности, когда u_t^* — внутренняя точка множества или когда в точке u_t^* существуют допустимые вариации управления δu_t, ортогональные $\partial H_t/\partial u_t$), то характер стационарной точки определяется следующими по порядку членами в разложении:

$$H_t(u_t^* + \varepsilon \delta u_t) - H_t(u_t^*) = \varepsilon\, \frac{\partial H_t}{\partial u_t}\, \delta u_t \leqslant 0.$$

Построены примеры, в к-рых оптимальное управление u_t^* является точкой локального максимума, локального минимума и даже седловой точкой функции Гамильтона. Таким образом, в общем случае для дискретных систем принцип максимума не имеет места.

Для систем, линейных по фазовым переменным

$$x_{t+1} = A(u_t)\, x_t + \varphi(u_t)$$

или по управлениям

$$x_{t+1} = g(x_t) + B(x_t)\, u_t,$$

при дополнительном условии линейности критерия $J = c_{T+1} x_{T+1}$ в первом или выпуклости множества U во втором случае принцип максимума выполняется (см. [1] — [5]).

Трактуя задачу оптимального управления линейной дискретной системой как задачу линейного программирования (см. [6], [7]), можно получить двойственную ей динамич. задачу с дискретным временем. Сопряженная система для импульсов дает уравнения динамики для двойственной динамич. задачи. На оптимальной траектории совпадают не только критерии, но и функции Гамильтона двойственных динамич. задач.

Лит.: [1] Фан Лянь-цэнь, Ван Чу-сен, Дискретный принцип максимума, пер. с англ., М., 1967; [2] Пропой А. И., Элементы теории оптимальных процессов, М., 1973; [3] Шеничный Б. Н., Необходимые условия экстремума, М., 1969; [4] Болтянский В. Г., Оптимальное управление дискретными системами, М., 1973; [5] Габасов Р., Кириллова Ф. М., «Автоматика и телемеханика», 1966, № 11, с. 46—51; [6] Иванилов Ю. П., «Прикл. матем. и программирование», Киш., 1971, в. 4, с. 31—40; [7] Иванилов Ю. П., Пропой А. И., «Докл. АН СССР», 1971, т. 198, № 5, с. 1011—1014.

Ю. П. Иванилов.

МАКСИМУМА ПРИНЦИП Понтрягина — см. *Понтрягина принцип максимума.*

МАЛАЯ КАТЕГОРИЯ — *категория* $\mathfrak{K}$, класс морфизмов $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$ к-рой является множеством. М. к. $\mathfrak{K}$ наз. U-категорией, если $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K} \subset U$, где U — *универсальное множество.* Для каждой М. к. $\mathfrak{K}$ и произвольной категории $\mathfrak{S}$ можно корректно говорить

о категории одноместных ковариантных (контравариантных) *функторов* из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{S}$. В частности, М. к. образуют *замкнутую категорию* Cat малых категорий — одну из основных категорий математики [1].

Лит.: [1] Lawvere F. W., The category of categories as a foundation for mathematics, в кн.: Proc. of the Conference on categorical algebra, La Jolla, 1965, B.— Hdlb.— N. Y., 1966.

М. Ш. Цаленко.

МАЛЕРА ПРОБЛЕМА — гипотеза в метрич. теории диофантовых приближений, высказанная К. Малером [1]: для почти всех (в смысле меры Лебега) чисел $\omega \in R$ неравенство

$$|P(\omega)| < [H(P)]^{-n-\varepsilon}$$

имеет конечное число решений в многочленах $P \in \mathbb{Z}[x]$ степени не выше n. Здесь $\varepsilon > 0$, n — натуральное и $H(P)$ — максимум модулей коэффициентов P. Эквивалентная формулировка: для почти всех $\omega \in R$ неравенство

$$\max(\|\omega q\|, \|\omega^2 q\|, \ldots, \|\omega^n q\|) < q^{-1/n-\varepsilon}$$

имеет конечное число решений в целых числах q ($\|\alpha\|$ — расстояние от α до ближайшего целого числа).

М. п. решена утвердительно в 1964 В. Г. Спринджуком [2]. Им же доказаны аналогичные утверждения для комплексных и p-адических чисел, а также степенных рядов над конечными полями.

Лит.: [1] Mahler K., «Math. Ann.», 1932, Bd 106, S. 131—39; [2] Спринджук В. Г., Проблема Малера в метрической теории чисел, Минск, 1967.

Ю. В. Нестеренко.

МАЛОГО ПАРАМЕТРА МЕТОД в теории дифференциальных уравнений — приемы построения приближенных решений дифференциальных уравнений и систем, зависящих от параметра.

1) М. п. м. для обыкновенных дифференциальных уравнений. Обыкновенные дифференциальные уравнения, к к-рым приводят прикладные задачи, обычно содержат один или несколько параметров. Параметр может входить также в начальные данные или граничные условия. Поскольку найти точное решение дифференциального уравнения можно лишь для отдельных весьма частных классов, возникла задача о построении приближенного решения. Одна из типичных постановок ее такова: уравнение и начальные (граничные) условия содержат параметр λ и решение известно (или его можно считать известным) при $\lambda = \lambda_0$; требуется построить приближенное решение при значениях параметра λ, близких к λ_0, т. е. построить асимптотику решения при $\varepsilon \to 0$, где $\varepsilon = \lambda - \lambda_0$ — малый параметр. М. п. м., возникший в связи с задачей трех тел небесной механики, восходит к Ж. Д'Аламберу (J. D'Alembert) и интенсивно развивается с кон. 19 в.

Ниже используются следующие обозначения: t — независимое переменное, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, I — отрезок $0 \leqslant t \leqslant T$, знак $\sim$ означает асимптотич. равенство. Все векторные и матричные функции, входящие в уравнения и в граничные условия, предполагаются гладкими (класса C^∞) по совокупности переменных в рассматриваемой области (по ε — при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ или $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$).

1. Задача Коши для системы n-го порядка:

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0(\varepsilon). \tag{1}$$

Пусть решение $\varphi_0(t)$ предельной задачи (т. е. задачи, получающейся из (1) при $\varepsilon = 0$) существует и единственно при $t \in I$. Тогда для решения $x(t, \varepsilon)$ задачи (1) справедливо асимптотич. разложение при $\varepsilon \to 0$

$$x(t, \varepsilon) \sim \varphi_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \varphi_j(t), \tag{2}$$

равномерное по $t \in I$. Этот факт вытекает из теоремы о гладкой зависимости от параметра решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Если

вектор-функции f и x_0 голоморфны при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $x = \varphi_0(t)$, $t \in I$, то ряд (2) сходится к решению $x(t, \varepsilon)$ при достаточно малых $|\varepsilon|$ равномерно по $t \in I$ (теорема Пуанкаре). Аналогичные результаты справедливы и для краевой задачи для системы вида (1), если решение соответствующей предельной задачи существует и единственно.

Различают два вида зависимости уравнения (или системы) от малого параметра — регулярную и сингулярную. Система в нормальной форме регулярно зависит от параметра ε, если все правые ее части — гладкие функции от ε при малых $\varepsilon \geqslant 0$; в противном случае система зависит от параметра ε сингулярно. При регулярной зависимости системы от ε решение задачи с параметром на конечном отрезке по t, как правило, равномерно стремится при $\varepsilon \to 0$ к решению предельной задачи.

2. В линейной теории рассматриваются сингулярно зависящие от параметра ε системы n-го порядка

$$\varepsilon \dot{x} = A(t, \varepsilon)\, x + f(t, \varepsilon),$$

где элементы $n \times n$-матрицы A и компоненты вектора f — комплекснозначные функции. Центральная задача линейной теории — построение такой фундаментальной системы решений (ф. с. р.) однородной системы (т. е. при $f \equiv 0$), для к-рой асимптотика при $\varepsilon \to +0$ известна на всем отрезке I.

Основным результатом линейной теории является следующая теорема Биркгофа. Пусть: 1) собственные значения $\lambda_j(t, 0)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, матрицы $A(t, 0)$ различны при $t \in I$; 2) величины

$$\operatorname{Re}(\lambda_j(t, 0) - \lambda_k(t, 0)),\ 1 \leqslant j,\ k \leqslant n,\ j \neq k,$$

не меняют знак. Тогда существует ф. с. р. $x_1(t, \varepsilon)$, ..., $x_n(t, \varepsilon)$ однородной системы

$$\varepsilon \dot{x} = A(t, \varepsilon)\, x,$$

для к-рой справедливо асимптотич. разложение при $\varepsilon \to 0$:

$$x_j(t, \varepsilon) \sim \exp\left[\varepsilon^{-1} \int_{t_0}^{t} \lambda_j(\tau, \varepsilon)\, d\tau\right] \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \varphi_{kj}(t), \quad (3)$$

$$1 \leqslant j \leqslant n.$$

Это разложение равномерно по $t \in I$ и его можно дифференцировать по t и по ε любое число раз. Если матрица A не зависит от ε, т. е. $A = A(t)$, то

$$\varphi_{0j}(t) = \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \left(e_j^*(\tau), \frac{de_j(\tau)}{d\tau}\right) d\tau\right] e_j(t),$$

где e_j^*, e_j — левые и правые собственные векторы матрицы $A(t)$, нормированные условием

$$\left(e_j^*(t), e_j(t)\right) \equiv 1,\ t \in I.$$

Решения, имеющие асимптотику вида (3), наз. также ВКБ-решениями (см. *ВКБ-метод*). Качественная структура этих решений такова. Если

$$\operatorname{Re} \lambda_j(t) < 0\ [\operatorname{Re} \lambda_j(t) > 0] \text{ при } t \in I,$$

то x_j есть вектор-функция типа пограничного слоя при $t_0 = 0$ ($t_0 = T$), т. е. заметно отлична от нуля только в ε-окрестности точки $t = 0$ ($t = T$). Если же $\operatorname{Re} \lambda_j(t) \equiv 0$, $t \in I$, то решение x_j сильно осциллирует при $\varepsilon \to +0$ и имеет порядок $O(1)$ на всем отрезке I.

Если матрица-функция $A(t, \varepsilon)$ голоморфна при $|t| \leqslant t_0$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ и условие 1) выполнено, то формула (3) справедлива при $\varepsilon \to +0$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, где $t_1 > 0$ достаточно мало. Трудной проблемой является построение асимптотики ф. с. р. при наличии на I точек поворота, т. е. точек, в к-рых матрица $A(t, 0)$ имеет кратное собственное значение. Эта проблема полностью решена только для отдельных типов точек пово-

рота (см. [1]). В окрестности точки поворота имеется переходная область, в к-рой решение устроено довольно сложно и в простейшем случае выражается через *Эйри функции*.

Аналогичные результаты (см. [1]) справедливы для скалярных уравнений вида

$$\varepsilon^n x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^j a_j(t, \varepsilon)\, x^{(j)} = 0,$$

где a_j — комплекснозначные функции; роль функций $\lambda_j(t, \varepsilon)$ играют корни характеристич. уравнения

$$\lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j a_j(t, \varepsilon) = 0.$$

ВКБ-решения возникают также и в нелинейных системах вида

$$\varepsilon \dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

ВКБ-асимптотика (3), в условиях теоремы Биркгофа, справедлива на бесконечном интервале $0 \leqslant t < \infty$ (т. е. разложение (3) — асимптотическое и при $\varepsilon \to +0$, и при $t \to +\infty$), если матрица $A(t, \varepsilon)$ достаточно правильно ведет себя при $t \to +\infty$, напр. быстро стремится к постоянной матрице с различными собственными значениями (см. [2]). К сингулярным задачам с малым параметром приводят многие вопросы спектрального анализа (см. [3]) и математич. физики.

3. Особый интерес представляет исследование нелинейных систем вида

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= f(x, y), \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{y} &= g(x, y), \quad y(0) = y_0, \quad y \in \mathbb{R}^m, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Первое уравнение описывает **быстрые движения**, второе — **медленные движения**. Напр., *Ван дер Поля уравнение* с помощью замены

$$y = \int_0^x (x^2 - 1)\, dx + \frac{1}{\lambda} \frac{dx}{dt}, \quad t_1 = \frac{t}{\lambda}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda^2}$$

приводится при больших значениях параметра λ к системе

$$\varepsilon \dot{x} = y - \frac{1}{3} x^3 + x, \quad \dot{y} = -x,$$

имеющей вид (4).

При $\varepsilon = 0$ уравнение быстрых движений вырождается в уравнение $f(x, y) = 0$. Пусть это уравнение имеет в нек-рой ограниченной замкнутой области D изменения y изолированный устойчивый непрерывный корень $x = \varphi(y)$ (т. е. действительные части всех собственных значений матрицы Якоби $\frac{\partial f}{\partial x}$ отрицательны при $x = \varphi(y)$, $y \in D$); пусть решения задачи (4) и вырожденной задачи

$$x = \varphi(y), \quad \dot{y} = g(x, y), \quad y(0) = y_0 \tag{5}$$

существуют и единственны при $t \in I$, причем получающаяся при решении задачи (5) функция $\bar{y}(t) \in D$ при $t \in I$. Если точка (x_0, y_0) принадлежит области влияния корня $x = \varphi(y)$, то

$$x(t, \varepsilon) \longrightarrow \bar{x}(t), \quad 0 < t \leqslant T,$$
$$y(t, \varepsilon) \longrightarrow \bar{y}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

при $\varepsilon \to +0$, где $(\bar{x}, \bar{y})$ — решение вырожденной задачи (**теорема Тихонова**). Вблизи точки $t = 0$ предельный переход $x(t, \varepsilon) \to \bar{x}(t)$ является неравномерным — возникает *пограничный слой*. Для задачи (4) построена асимптотика решения:

$$x(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \prod_k \left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{6}$$

а асимптотика для $y(t, \varepsilon)$ имеет аналогичный вид. В (6) первая сумма — регулярная часть асимптотики, вторая — пограничный слой. Регулярная часть асимптотики вычисляется стандартным способом: ряды вида (2) подставляются в систему (4), правые части разлагаются в ряды по степеням ε и затем приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях ε. Для вычисления погранслойной части асимптотики в окрестности точки $t=0$ вводится новая переменная $\tau=t/\varepsilon$ (быстрое время) и применяется описанная выше процедура. Возникает нек-рый интервал на оси t, на к-ром пригодно и регулярное (или внешнее) разложение, и погранслойное (или внутреннее) разложение. Функции x_k, Π_k определяются из условия совпадения этих разложений (т. н. метод сращивания, см. [4], [5]).

Аналогичные результаты справедливы в случае, когда правые части системы (4) явно зависят от t, для скалярных уравнений вида

$$\varepsilon x^{(n)} = f(t,\ x,\ \dot{x},\ \ldots,\ x^{(n-1)}) \tag{7}$$

и для краевых задач для таких систем и уравнений (см. *Дифференциальные уравнения с малым параметром при производных*, [6], [7]).

При приближении решения задачи (4) к точке срыва, где теряется устойчивость (напр., где одно из собственных значений матрицы $\partial f/\partial x$ при $x=\varphi(y)$ обращается в нуль), ряды вида (5) теряют асимптотич. характер. В окрестности точки срыва асимптотика имеет совершенно иной характер (см. [8]). Исследование окрестностей точки срыва особенно существенно для построения асимптотич. теории *релаксационных колебаний*.

4. Задачи небесной механики и теории нелинейных колебаний приводят, в частности, к необходимости исследовать поведение решения задачи (1) не на конечном интервале, а на большом, порядка ε^{-1} или более высокого, интервале по t. Для исследования этих задач широко применяется метод усреднения (см. *Крылова — Боголюбова метод усреднения*, *Малые знаменатели*, [9] — [11]).

5. Асимптотика решений уравнений вида (7) исследуется, в частности, с помощью т. н. метода многих масштабов (см. [4], [5]); этот метод является обобщением ВКБ-метода. Рассмотрим этот метод на примере скалярного уравнения

$$\varepsilon^2 x'' + f(t,\ x) = 0, \tag{8}$$

к-рое имеет периодич. решения (см. [12]). Решение ищется в виде

$$x = \varphi(T,\ t,\ \varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \varphi_j(T,\ t), \quad T = \frac{s(t)}{\varepsilon} \tag{9}$$

(функции T, t наз. масштабами). Если уравнение (8) — линейное, то $\varphi_j = e^T \psi_j(t)$ и (9) есть ВКБ-решение. В нелинейном случае уравнения первых двух приближений имеют вид

$$\dot{S}^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial T^2} + f(t,\ \varphi_0) = 0,$$

$$\dot{S}^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T^2} + \frac{\partial f(t,\ \varphi_0)}{\partial x} \varphi_1 = -2\dot{S} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t\, \partial T} - \ddot{S} \frac{\partial \varphi_0}{\partial T},$$

причем первое уравнение содержит две неизвестные функции S и φ_0. Пусть это уравнение имеет периодическое по t решение $\varphi_0 = \varphi_0(t, T)$. Тогда недостающее уравнение, из к-рого определяется S, находится из условия периодичности по t решения φ_1 и имеет вид

$$\dot{S} \oint \left(\frac{\partial \varphi_0(t,\ T)}{\partial T} \right)^2 dT = E \equiv \text{const},$$

где интеграл берется по периоду решения φ.

Лит.: [1] Вазов В., Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1968; [2] Федорюк М. В., «Матем. сб.», 1969, т. 79, № 4, с. 477—516; [3] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [4] Коул Д.-Д., Методы возмущений в прикладной математике, пер. с англ., М., 1972; [5] Найфэ А. Х., Методы возмущений, пер. с англ., М., 1976; [6] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., 1973; [7] их же, Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях, М., 1978; [8] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975; [9] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974; [10] Волосов В. М., Моргунов Б. И., Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, М., 1971; [11] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 6, с. 91—192; [12] Кузмак Г. Е., «Прикл. матем. и мех.», 1959, т. 23, № 3, с. 515—26; [13] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [14] Джакалья Г. Е., Методы теории возмущений для нелинейных систем, пер. с англ., М., 1979; [15] Моисеев Н. Н., Асимптотические методы нелинейной механики, М., 1969; [16] Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Федорюк М. В., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 5—73.

Н. Х. Розов, М. В. Федорюк.

2) **М. п. м. для дифференциальных уравнений с частными производными.** Как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, решения дифференциальных уравнений с частными производными могут зависеть от малого параметра ε (предполагается, что $\varepsilon>0$) регулярно или сингулярно. Грубо говоря, регулярная зависимость наблюдается тогда, когда старшие члены дифференциального оператора не зависят от ε, а младшие члены — гладкие функции ε при малых ε. Тогда и решение является гладкой функцией ε. Если же при $\varepsilon \to 0$ обращается в нуль какой-либо из старших членов в уравнении с частными производными, то решение, как правило, зависит от ε сингулярно. В этом случае часто говорят об уравнении с частными производными «с малым параметром при старших производных». Подобная классификация несколько условна, т. к. само выделение старших членов не всегда очевидно; к тому же параметр может входить и в граничные условия. Кроме того, сингулярность может возникнуть в случае неограниченной области, даже если малый параметр стоит при младших производных (на бесконечности они играют в определенном смысле такую же или даже более главную роль, чем старшие).

Пусть, напр., имеется эллиптич. уравнение с частными производными 2-го порядка в ограниченной области $G\subset\mathbb{R}^n$. Решение задачи

$$\Delta u+\sum_{j=1}^{n} a_j(x,\ \varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x_j}+b(x,\ \varepsilon)\,u=f(x,\ \varepsilon),$$
$$u\,|_{\partial G}=\varphi(x,\ \varepsilon)$$

есть гладкая функция ε при малых ε, если граница гладкая, a_j, b, f, φ — гладкие функции от x и ε и предельная краевая задача

$$\Delta u+\sum_{j=1}^{n} a_j(x,\ 0)\frac{\partial u}{\partial x_j}+b(x,\ 0)\,u=f(x,\ 0),$$
$$u\,|_{\partial G}=\varphi(x,\ 0)$$

однозначно разрешима для любых гладких функций $f(x,\ 0)$, $\varphi(x,\ 0)$. Решение разлагается в асимптотич. ряд по степеням ε:

$$u(x,\ \varepsilon)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(x), \tag{1}$$

коэффициенты к-рого $u_k(x)$ — решения однотипных краевых задач и легко вычисляются в *возмущений теории*.

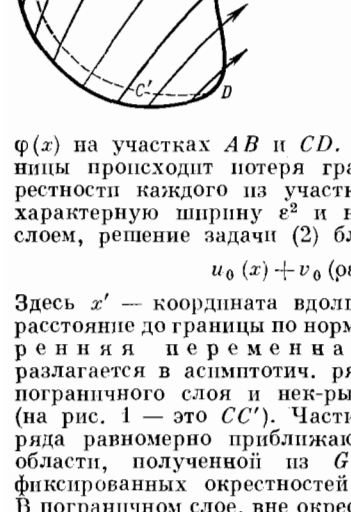
Совсем иная ситуация имеет место, напр., для краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} L_\varepsilon u\equiv\varepsilon^2\Delta u+\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+b(x)\,u=f(x),\\ u\,|_{\partial G}=\varphi(x),\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

т. к. при $\varepsilon=0$ порядок уравнения понижается. Предельная задача имеет вид

$$\left.\begin{aligned} L_0 u \equiv \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + b(x)\,u = f(x), \\ u\,|_{\partial G} = \varphi(x) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

и, вообще говоря, неразрешима. Пусть $n=2$, характеристики предельного уравнения имеют вид, указанный на рис., и их ориентация индуцирована векторным полем $\{a_j(x)\}$. Если решение предельного уравнения известно в некрой точке, то оно известно вдоль всей характеристики, проходящей через эту точку; поэтому краевая задача (3) неразрешима для любых $\varphi(x)$. При $\varepsilon \to 0$ решение задачи (2) стремится к решению $u_0(x)$ предельного уравнения $L_0 u_0 = f$, к-рое равно $\varphi(x)$ на участках AB и CD. На остальной части границы происходит потеря граничных условий. В окрестности каждого из участков AD и BC, имеющих характерную ширину ε^2 и называемую пограничным слоем, решение задачи (2) близко к сумме



$$u_0(x) + v_0(\rho\varepsilon^{-2},\ x').$$

Здесь x' — координата вдоль границы $AD\,(BC)$, ρ — расстояние до границы по нормали, а $\rho\varepsilon^{-2}$ — т. н. в н у т р е н н я я п е р е м е н н а я. Решение задачи (2) разлагается в асимптотич. ряд вида (1) всюду, кроме пограничного слоя и нек-рых особых характеристик (на рис. 1 — это CC'). Частичные суммы асимптотич. ряда равномерно приближают решение задачи (2) в области, полученной из G выбрасыванием любых фиксированных окрестностей линий AD, BC и CC'. В пограничном слое, вне окрестностей точек A, B, C, D, C', к асимптотич. ряду (1) добавляется асимптотич. ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} v_{2k}(\rho\varepsilon^{-2},\ x').$$

Функции $v_{2k}(\xi,\ x')$ экспоненциально убывают при $\xi \to \infty$. Первый асимптотич. ряд обычно наз. в н е ш н и м а с и м п т о т и ч е с к и м р я д о м, а второй — в н у т р е н н и м а с и м п т о т и ч е с к и м р я д о м, а функции $v_{2k}(\xi,\ x')$ — ф у н к ц и я м и п о г р а н и ч н о г о с л о я. Эта терминология, как и сами задачи, происходят из проблем обтекания тел жидкостью с малой вязкостью (см. *Гидродинамики математические задачи*, а также [1] — [4]). Указанный способ наз. м е т о д о м п о г р а н и ч н о г о с л о я, и он по существу не отличается от такого же метода для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В окрестностях точек A, B, C, D, в к-рых характеристики оператора L_0 касаются границы, и вблизи линии CC' асимптотика решения носит более сложный характер. Усложнения возникают и в случае, когда граница не всюду гладкая (имеются угловые точки, а при $n>2$ — ребра). В нек-рых простых случаях можно построить асимптотику добавлением дополнительных функций пограничного слоя, зависящих уже от большего числа переменных, но по-прежнему экспоненциально стремящихся к нулю на бесконечности. Но, как правило, картина сложнее: как коэффициенты $u_k(x)$ внешнего разложения, так и коэффициенты $v_k(\xi,\ x')$ внутреннего разложения имеют сильные особенности в особых точках (на рис.— это точки A, B, C, D). Асимптотика решения, равномерная в замкнутой области $\bar{G}$, может быть построена методом многих мас-

штабов (методом согласования асимптотич. рядов, методом сращивания асимптотич. рядов [5]). Нек-рые задачи для уравнений с частными производными могут быть исследованы другим вариантом метода многих масштабов (метод подъема): решение рассматривается как функция основных независимых переменных и вспомогательных «быстрых» переменных. В результате повышается размерность исходной задачи, но упрощается зависимость от параметров (см. [6]).

Если поле характеристик предельного оператора L_0 имеет стационарные точки, то задача сильно усложняется. Напр., если $f(x)\equiv 0$, $b(x)\equiv 0$ и все характеристики направлены внутрь области, то решение задачи (2) при $\varepsilon \to 0$ стремится к постоянной. Нахождение этой постоянной и построение асимптотич. ряда решения — трудная, лишь частично решенная задача (см. [7]). Уравнение (2) описывает случайные возмущения динамич. системы $\dot{x}=a(x)$. Проблемы в этой области также были одним из первоисточников развития М. п. м. в теории уравнений с частными производными (см. [8]).

Если $a_j(x)\equiv 0$ в уравнении (2), а $b(x)<0$, то асимптотич. ряд легко находится: всюду вдали от границы асимптотич. ряд имеет вид (1), а в пограничном слое вблизи границы добавляется асимптотич. ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\xi,\ x'),$$

где теперь $\xi=\rho\varepsilon^{-1}$.

Задача резко усложняется, если $a_j(x)\equiv 0$, $b(x)>0$ В этом случае решения сильно осциллируют; асимптотич. методы — *ВКБ-метод*, *квазиклассическое приближение*, *параболического уравнения метод* и др.

Имеется класс задач, в к-рых вырождается граница области при $\varepsilon \to 0$. Для определенности ниже рассмотрена задача

$$(\Delta + k^2)\, u(x) = 0,\ \ x \in G_\varepsilon,\ \ u|_{\partial G_\varepsilon} = \varphi(x), \qquad (4)$$

где G_ε — внешность ограниченной области D_ε в $\mathbb{R}^n$ и $k>0$; на бесконечности ставятся *излучения условия*. Пусть, напр., $D_\varepsilon = \varepsilon D$, D — фиксированная область, содержащая точку $x=0$; тогда D_ε стягивается в точку $x=0$ и задача (4) не имеет предельной. Величина $\lambda = 2\pi/k$ имеет смысл длины волны; в данном случае $\lambda \gg d_\varepsilon$, где d_ε — диаметр области D_ε, и в этом случае говорят о рассеянии длинных волн на препятствии D_ε (или *гидродинамическое приближение*, или рэлеевское приближение). Имеются две перекрывающиеся зоны: ближняя, содержащая ∂G_ε, ее размеры стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, и дальняя — внешность области, к-рая стягивается в точку $x=0$ при $\varepsilon \to 0$. Асимптотич. ряд решения имеет различный вид в этих зонах. Наиболее трудной оказывается первая краевая задача при $n=2$; внутреннее асимптотич. разложение имеет вид

$$u(x,\ \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{N} \varepsilon^k \mu^l v_{kl}(\xi),$$

где $\xi=\varepsilon^{-1}x$, $\mu=(\ln\varepsilon+\alpha)^{-1}$ и α — нек-рая постоянная (см. [9]). Длинноволновое приближение исследовано в основном для уравнения Гельмгольца и для системы Максвелла (см. [10], [11]).

Другой вариант возникает, когда D_ε стягивается к отрезку L при $\varepsilon \to 0$; в этом случае предельная задача имеется при $n=2$ и отсутствует при $n>2$. Такого типа задачи (в том числе и для уравнения Лапласа, и для линейных гиперболич. уравнений, и для нелинейных уравнений с частными производными) возникают в гидродинамике и аэродинамике, в теории дифракции волн (обтекание тонкого тела потоком жидкости или газа). Задача (4) исследована при $n=2$ (см.

[12]); при $n=3$ она исследована, если $k=0$ и D_ε есть тело вращения (см. [13]).

Уравнения с частными производными, содержащие малый параметр, естественно возникают при излучении нелинейных колебаний, когда возмущение имеет порядок ε, но решение исследуется на большом отрезке *времени порядка* ε^{-1}. *Если вместо системы материальных точек* рассматривается непрерывная среда, то возникают уравнения с частными производными, к к-рым применяются обобщения метода усреднения (см. [14]).

Лит.: [1] Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, пер. с нем., М., 1969; [2] Ван-Дайк М., Методы возмущений в механике жидкости, пер. с англ., М., 1967; [3] Вишик М. И., Люстерник Л. А., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 5, с. 3—122; [4] Треногин В. А., там же, 1970, т. 25, в. 4, с. 123—56; [5] Найфэ А. Х., Методы возмущений, пер. с англ., М., 1976; [6] Ломов С. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1972, т. 36, № 3, с. 635—51; [7] Вентцель Л. Д., Фрейдлин М. И., Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., 1979; [8] Понтрягин Л., Андронов А., Витт А., «Ж. эксперимент. и теоретич. физики», 1933, т. 3, № 3, с. 165—80; [9] Ильина А. М., «Матем. сб.», 1977, т. 103, № 2, с. 265—84; [10] Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К., Теория дифракции, пер. с нем., М., 1964; [11] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 2, М., 1960; [12] Ильин А. М., «Матем. сб.», 1976, т. 99, № 4, с. 514—37; [13] Коул Д. Д., Методы возмущений в прикладной математике, пер. с англ., М., 1972; [14] Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И., Асимптотические решения уравнений в частных производных, К., 1976.

А. М. Ильин, М. В. Федорюк.

МАЛЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ — *делители вида*

$$i\langle P,\ \Omega\rangle+\langle Q,\ \Lambda\rangle \equiv$$
$$\equiv ip_1\omega_1+\ldots+ip_m\omega_m+q_1\lambda_1+\ldots+q_n\lambda_n, \qquad (1)$$

появляющиеся у коэффициентов рядов при интегрировании дифференциальных уравнений посредством рядов Тейлора, Фурье или Пуассона; здесь $P=(p_1, \ldots, p_m)$, $Q=(q_1, \ldots, q_n)$ — *целочисленные*, $\Omega=(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — действительный и $\Lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — комплексный векторы, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение. При этом существование решения и такие его качества, как аналитичность, гладкость и т. п., существенно зависят от арифметич. природы чисел ω_j, λ_k и таких же качеств (аналитичность, гладкость и т. п.) дифференциальных уравнений. Ниже указаны условия на векторы Ω и Λ, к-рые обеспечивают аналитичность решения соответствующей аналитич. задачи. Эти условия различны для задач линейных и нелинейных.

1. Линейные задачи. а) Ряд Тейлора. Решение ξ уравнения

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\xi}{\partial x_k}\lambda_k x_k=\varphi(X)\equiv$$
$$\equiv\sum_{\langle Q,\ \Lambda\rangle\neq 0,\ q_k\geqslant 0}\varphi_Q x_1^{q_1}\ldots x_n^{q_n},$$

где $X=(x_1, \ldots, x_n)$, а функция φ аналитична в точке $X=0$ (причем $\varphi(0)=0$) и разлагается в указанный ряд Тейлора, дается рядом Тейлора

$$\xi=\sum\frac{\varphi_Q}{\langle Q,\ \Lambda\rangle}x_1^{q_1}\ldots x_n^{q_n}.$$

Этот ряд сходится в нек-рой окрестности нуля, если существуют такие числа ε, $\nu>0$, что

$$|\langle Q,\ \Lambda\rangle|\geqslant\varepsilon e^{-\nu|Q|},\ |Q|=|q_1|+\ldots+|q_n|, \qquad (2)$$

для всех целочисленных $Q\geqslant 0$, $\langle Q,\ \Lambda\rangle\neq 0$. Это условие неулучшаемо в классе всех аналитич. функций φ; оно необходимо для сходимости ряда ξ.

б) Ряд Фурье. Решение η уравнения

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\eta}{\partial y_j}\omega_j=\psi(Y)\equiv$$
$$\equiv\sum_{\langle P,\ Q\rangle\neq 0}\psi_P\exp i\langle P,\ Y\rangle, \qquad (3)$$

где $Y=(y_1, \ldots, y_m)$, правая часть к-рого разложена в ряд Фурье, дается рядом Фурье

$$\eta=\sum \frac{\psi_P}{i\langle P, \Omega\rangle} \exp i\langle P, Y\rangle,$$

к-рый сходится в нек-рой полосе $|\mathrm{Im}Y|<\varepsilon_0$, если функция ψ аналитична и

$$\lim_{|P|\to\infty} \frac{\ln|\langle P, \Omega\rangle|}{|P|}\geqslant 0, \qquad (4)$$

где предел берется по всем целочисленным P, $\langle P, \Omega\rangle\neq 0$. Это условие неулучшаемо в классе всех аналитич. функций ψ вида (3).

Уравнение (3) встречается в задаче приведения системы обыкновенных дифференциальных уравнений на торе (см. [1], там вместо условия (4) ошибочно дано (2)). Аналогично обстоит дело при интегрировании по t условно периодич. функции $\psi(\Omega t)$. Подобные линейные задачи возникают в каждом приближении при итерационном решении нелинейных задач (в теории возмущений).

Если условия (2) или (4) не выполнены, то неформальное решение соответствующей задачи может не быть аналитическим, гладким или даже не существует вовсе (в зависимости от арифметич. природы векторов Λ и Ω), хотя формальные решения — ряды ξ и η всегда существуют (см. [1]).

2. Нелинейные задачи. В таких задачах М. з. (1) появляются не поодиночке, а в виде произведений.

а) Р я д ы Т е й л о р а. Рассмотрим систему вблизи неподвижной точки $X=0$:

$$\dot{x}_j=\lambda_j x_j+x_j\varphi_j(X),\ j=1, \ldots, n, \qquad (5)$$

где φ_j — сходящиеся ряды Тейлора без свободных членов. Пусть $\langle Q, \Lambda\rangle\neq 0$ для целочисленных $Q\geqslant 0$, $Q\neq 0$. Тогда существует формальная обратимая замена координат

$$x_j=u_j+u_j\xi_j(U),\ j=1, \ldots, n,$$

где ξ_j — также ряды Тейлора без свободных членов, к-рая приводит систему (5) к нормальной форме

$$\dot{u}_j=\lambda_j u_j,\ j=1, \ldots, n. \qquad (5')$$

Ряды ξ_j сходятся в нек-рой окрестности нуля, если

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\ln\beta_l}{2^l}>-\infty, \qquad (6)$$

где $\beta_l=\min|\langle Q, \Lambda\rangle|$ по $|Q|<2^l$, $\langle Q, \Lambda\rangle\neq 0$, $Q\geqslant 0$ (см. [2]).

Впервые нелинейную задачу такого типа решил К. Зигель (C. Siegel, 1942; см. [2], [3]) при более жестком условии:

$$|\langle Q, \Lambda\rangle|\geqslant\varepsilon|Q|^{-\nu}. \qquad (7)$$

При этом условии $\beta_l\geqslant\ln\varepsilon-l\nu\ \ln 2$ и ряд (6) сходится. Условие (2) эквивалентно ограниченности членов ряда (6); оно необходимо для сходимости рядов ξ_j при произвольных аналитических φ_j. Но пока (1982) неизвестно, что происходит в «щели» между условиями (2) и (6) (см. более сложные резонансные ситуации в [2]). Если условие (2) не выполнено, то между решениями системы (5) и ее нормальной формы (5′) может не быть аналитического, гладкого и даже топологич. соответствия.

б) Р я д ы П у а с с о н а. Пусть аналитич. система

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_j&=\lambda_j x_j+x_j\sum\varphi_{jPQ}X^Q\exp i\langle P, Y\rangle,\\ \dot{y}_k&=\omega_k+\sum\psi_{kPQ}X^Q\exp i\langle P, Y\rangle,\\ X^Q&=x_1^{q_1}\ldots x_n^{q_n},\ j=1, \ldots, n;\ k=1, \ldots, m, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

правые части к-рой разложены в ряды Пуассона вблизи инвариантного тора $X=0$ (т. е. в ряды Тейлора по X и ряды Фурье по Y), имеет формальное интегральное многообразие

$$x_i = \eta_j\,(x_{r+1},\ \ldots,\ x_n,\ Y),\quad j=1,\ \ldots,\ r, \tag{9}$$

где η_j — также ряды Пуассона. Спрашивается, когда это многообразие будет аналитическим (т. е. когда ряды η_j будут абсолютно сходиться для достаточно малых $|X|$ и $|\mathrm{Im}\,Y|$). При этом среди координат x_j могут быть и малые параметры, для них $\lambda_j=0$. Впервые такая задача решена А. Н. Колмогоровым [4] для гамильтоновой системы (8) с m степенями свободы и одним малым параметром x_n (т. е. $m+1=n$ и $\Lambda=0$): при условии

$$|\langle P,\ \Omega\rangle| \geqslant \varepsilon\,|P|^{-\nu} \tag{10}$$

была доказана аналитичность многообразия (9) с $r=m$, состоящего из инвариантных торов. Там же для доказательства сходимости рядов Пуассона η_j был впервые предложен «метод Ньютона», ставший основным в исследовании нелинейных задач. Условие (10) и его аналог

$$|i\langle P,\ \Omega\rangle + \langle Q\ ,\Lambda\rangle| \geqslant \varepsilon\,(|P|+|Q|)^{-\nu}$$

использовались затем в задачах такого же типа (см. [5] — [7]). Условия (2) и (4) здесь также необходимы для сходимости рядов (9) (см. более сложные вырожденные ситуации в [7]). Если эти условия не выполнены, то может не быть аналитического (и даже непрерывного) инвариантного многообразия вида (9).

Самое жесткое из ограничений (2), (6), (7) — условие (7) — при $\nu>n-1$ выполнено для почти всех (по мере Лебега) векторов Λ. Свойства типа (2), (6), (7) для векторов Λ изучаются в теории диофантовых приближений. Достаточно хорошо изучен двумерный случай. Пусть q_l — знаменатель l-й подходящей дроби цепной дроби числа $\lambda=\lambda_2/\lambda_1<0$. Тогда условие (6) эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\ln q_{l+1}}{q_l},$$

а условие (2) — ограниченности его членов.

Рассматривались М. з. (1) с переменными векторами Ω и Λ (см. [6]).

М. з. впервые встретились в задачах небесной механики, и основные линейные задачи были решены в 1884 Г. Брунсом (H. Bruns). Вообще в Солнечной системе имеется много «острых соизмеримостей» между частотами, следствием к-рых являются М. з. (1). Напр., малый знаменатель $2\omega_1-5\omega_2=0{,}007\ldots$, где ω_1 и ω_2 — частоты движения Юпитера и Сатурна соответственно, приводит к появлению больших взаимных возмущений в движении этих планет. Другой пример: щели в поясе астероидов и в кольце Сатурна соответствуют резонансам с частотой возмущающего тела (Юпитера и Мимаса соответственно).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1953, т. 93, № 5, с. 763—66; [2] Брюно А. Д., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1971, т. 25, с. 119—262; 1972, т. 26, с. 199—239; [3] Зигель К. Л., Лекции по небесной механике, пер. с нем., М., 1959; [4] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1954, т. 98, № 4, с. 527—30; [5] Мозер Ю., Лекции о гамильтоновых системах, пер. с англ., М., 1973; [6] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 6, с. 91—192; [7] Брюно А. Д., Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений, М., 1979. *А. Д. Брюно.*

МАЛЫЙ ОБРАЗ множества $A\subset X$ при отображении f: $X\to Y$ — множество $f^{\#}A$ всех точек $y\in Y$, для к-рых $f^{-1}y\subset A$. Эквивалентное определение: $f^{\#}A=Y\setminus f(X\setminus A)$. Посредством М. о. можно охарактеризовать замкнутые и неприводимые отображения. Непрерывное отображение f: $X\to Y$ замкнуто

тогда и только тогда, когда для всякого открытого множества $U \subset X$ его М. о. $f^{\#}U$ открыт. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ на Y замкнуто и неприводимо тогда и только тогда, когда М. о. всякого непустого открытого множества $U \subset X$ является непустым открытым множеством.

В. В. Федорчук.

МАЛЫЙ ОБЪЕКТ категории — понятие, выделяющее такие объекты категории, к-рым присущи свойства математич. структур с конечным числом образующих (конечномерных линейных пространств, конечно порожденных групп и т. д.). Пусть $\mathfrak{K}$ — категория с копроизведениями. Объект $U \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$ наз. м а л ы м, если для любого морфизма

$$\varphi\colon U \longrightarrow \prod\nolimits^{*}_{i \in I} U_i\,(\sigma_i),$$

где $U_i = U$, $i \in I$, σ_i — вложения копроизведения, найдется конечное подмножество индексов $1, 2, \ldots, n$ и такой морфизм

$$\varphi'\colon U \longrightarrow U_1 * \ldots * U_n\,(\sigma'_i),$$

что выполнено равенство

$$U \xrightarrow{\varphi} \prod\nolimits^{*}_{i \in I} U_i = U \xrightarrow{\varphi'} U_1 * \ldots * U_n \xrightarrow{\sigma} \prod\nolimits^{*}_{i \in I} U_i,$$

в к-ром морфизм σ однозначно определяется равенствами $\sigma'_i \sigma = \sigma_i$, $i = 1, \ldots, n$. Иногда дается более сильное определение, в к-ром не предполагается, что все множители копроизведения $\prod^{*}_{i \in I} U_i$ совпадают с U.

В многообразиях универсальных алгебр следующие условия равносильны: а) алгебра A является М. о. категории; б) алгебра имеет конечное число образующих; в) основной ковариантный функтор $H_A(X) = H(A, X)$ перестановочен с копределами (прямыми пределами) направленных семейств мономорфизмов. Свойство в) часто принимается за определение конечно порожденного объекта произвольной категории.

М. Ш. Цаленко.

МАЛЬЦЕВА АЛГЕБРА, м у ф а н г-л и е в а а л г е б р а,— линейная алгебра над полем, удовлетворяющая тождествам

$$x^2 = 0, \quad J(x, y, xz) = J(x, y, z)x,$$

где $J(x, y, z) = (xy)z + (zx)y + (yz)x$ — якобиан элементов x, y, z. М. а. представляют собой естественное обобщение алгебр Ли. Любая М. а. является *бинарно лиевой алгеброй*.

М. а. были введены А. И. Мальцевым [1] и названы им муфанг-лиевыми алгебрами ввиду их связи с аналитич. лупами Муфанг. Касательная алгебра локальной аналитич. лупы Муфанг является М. а. Верно также и обратное: любая конечномерная М. а. над полным нормированным полем характеристики 0 является касательной алгеброй нек-рой локальной аналитич. лупы Муфанг.

Имеется тесная связь между М. а. и альтернативными алгебрами (см. *Альтернативные кольца и алгебры*). Коммутаторная алгебра произвольной альтернативной алгебры, т. е. алгебра, получаемая заменой основного умножения на операцию коммутирования

$$[x, y] = xy - yx,$$

является М. а.

Всякая простая М. а. характеристики $p \neq 2$ либо лиева, либо есть 7-мерная алгебра над своим центроидом. Всякая первичная М. а. (при $p \neq 2$) либо лиева, либо вкладывается в качестве подкольца в подходящую 7-мерную простую алгебру над нек-рым полем. Произвольная полупервичная М. а. (при $p \neq 2$) изоморфно вкладывается в качестве подалгебры в

коммутаторную алгебру нек-рой альтернативной алгебры. Вопрос о вложении произвольной М. а. в коммутаторную алгебру альтернативой алгебры открыт (1982).

Пусть $Z(A)$ — лиев центр М. а. A:

$$Z(A)=\{n\in A \mid J(n, a, b)=0 \text{ для всех } a, b\in A\}.$$

Для любого идеала I произвольной полупервичной М. а. A (при $p\neq 2$) $Z(I)=Z(A)\cap I$.

Свойства алгебраич. М. а. аналогичны свойствам алгебраич. алгебр Ли. В произвольной алгебраич. М. а. (при $p\neq 2$) существует локально конечный радикал, т. е. максимальный локально конечный идеал, факторалгебра по к-рому не содержит локально конечных идеалов. М. а. характеристики $p\geqslant n$ или $p=0$, удовлетворяющие n-му условию Энгеля (см. *Энгелева алгебра*), локально нильпотентны. Различие между М. а. и алгебрами Ли проявляется при переходе от локальной нильпотентности к глобальной. Имеется пример М. а. ($p=0$), удовлетворяющей 3-му условию Энгеля, разрешимой индекса 2, но не нильпотентной.

Для М. а. имеется аналог теоремы Энгеля, играющей большую роль в структурной теории алгебр Ли: М. а., удовлетворяющая условию Энгеля и условию максимальности для подалгебр, нильпотентна. Этот результат справедлив даже в более общем случае — для бинарно лиевых алгебр.

Во всякой свободной М. а. (при $p\neq 2$) имеется ненулевой лиев центр. Свободная М. а. (при $p\neq 2$) с тремя и более образующими не является первичной алгеброй. Свободная М. а. (при $p=0$) с девятью и более образующими содержит тривиальные идеалы.

Если R_n — многообразие М. а., порожденное свободной М. а. от n образующих и $p=0$, то цепочка многообразий

$$R_1\subseteq R_2\subseteq \ldots \subseteq R_n\subseteq \ldots$$

не стабилизируется ни на каком конечном шаге.

Значительно развита теория конечномерных М. а. и их представлений. Основные результаты этой теории аналогичны результатам теории алгебр Ли. Имеются аналоги классич. теорем Ли: если ρ — расщепляемое представление разрешимой М. а. характеристики 0, то все матрицы $\rho(x)$ могут быть приведены одновременно к треугольному виду; если ρ — расщепляемое представление нильпотентной М. а. в пространстве V, то V разлагается в прямую сумму весовых подпространств V_α, и все матрицы ограничений операторов $\rho(x)$ на V_α могут быть приведены одновременно к треугольному виду с числом $\alpha(x)$ на главной диагонали.

Следующие результаты аналогичны критериям Картана разрешимости и полупростоты алгебр Ли: если ρ — точное представление М. а. A ($p=0$) и билинейная форма на A, ассоциированная с представлением ρ, тривиальна, то алгебра A разрешима; если ρ — представление полупростой М. а., то форма следа, ассоциированная с ρ, невырождена. Если киллингова форма алгебры A невырождена, то A полупроста.

Любое представление полупростой М. а. с $p=0$ вполне приводимо. Если S — радикал (максимальный разрешимый идеал) М. а. A, N — нильрадикал (максимальный нильпотентный идеал), то для любого дифференцирования D алгебры A $SD\subseteq N$.

Произвольная конечномерная М. а. A характеристики 0 есть прямая сумма (как линейных пространств) своего радикала S и полупростой подалгебры B, изоморфной факторалгебре алгебры A по радикалу S, и любые для полупростых фактора сопряжены внутренним автоморфизмом (аналог теоремы Леви — Мальцева — Хариш-Чандра, известной для алгебр Ли).

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Матем. сб.», 1955, т. 36, № 3, с. 569—76; [2] Sagle A. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1961, v. 101, № 3, p. 426—58; [3] Кузьмин Е. Н., «Алгебра и логика», 1968, т. 7, № 2, с. 42—47; [4] его же, там же, № 4, с. 48—69; [5] его же, там же, 1971, т. 10, № 1, с. 3—22; [6] его же, там же, 1977, т. 16, № 4, с. 424—31; [7] Филиппов В. Т., там же, 1976, т. 15, № 1, с. 89—109; [8] его же, там же, 1977, т. 16, № 1, с. 101—108; [9] Гришков А. Н., там же, № 4, с. 389—96; [10] Шестаков И. П., там же, № 2, с. 227—46.

В. Т. Филиппов.

МАЛЬЦЕВА ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ — теоремы о перенесении свойств с локальных частей *модели* на всю модель, установленные А. И. Мальцевым. Система $\{M_i | i \in I\}$ подмножеств множества наз. его локальным покрытием, если каждый элемент из этого множества содержится в нек-ром M_i и любые два подмножества M_i, M_j содержатся в нек-ром третьем подмножестве M_k. Примеры локальных покрытий: система всех конечных подмножеств данного множества, система всех конечно порожденных подгрупп данной группы. Модель M локально обладает свойством σ, если существует локальное покрытие модели M, состоящее из подмоделей со свойством σ. Для свойства моделей σ (и соответствующего класса моделей) *справедлива локальная теорема, если всякая* модель, локально обладающая свойством σ, обладает этим свойством в целом.

Источником самых разнообразных локальных теорем является следующая основная локальная теорема (или теорема компактности узкого исчисления предикатов) Мальцева [1]: если совместна *каждая конечная подсистема* нек-рой *бесконечной* системы аксиом узкого исчисления предикатов, то совместна и вся система. А. И. Мальцев [2] указал общий метод получения конкретных локальных теорем теории групп с помощью основной локальной теоремы, положив этим начало *моделей теории*. Позднее, усовершенствовав свой метод, он доказал [3] локальную теорему для любого свойства, записываемого т. н. квазиуниверсальными аксиомами. Вопрос о справедливости локальной теоремы для свойства σ, к-рый решался кустарно для каждого σ, был тем самым сведен к общему и чисто «грамматическому» вопросу: нельзя ли записать σ квазиуниверсальными аксиомами?

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Матем. сб.», 1936, т. 1, № 3, с. 323—36; [2] его же, «Уч. записки Ивановского гос. пед. ин-та», 1941, т. 1, в. 1, с. 3—9; [3] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959; т. 23, № 3, с. 313—36; [4] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977.

Ю. И. Мерзляков.

МАЛЬЦЕВСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ — операция на классе всех групп (обозначаемая $\circ$), наследственная при переходе к подгруппам сомножителей, т. е. если

$$G = \prod\nolimits^{\circ}_{i \in I} G_i$$

и в каждом сомножителе G_i выбрана подгруппа H_i, то подгруппы H_i, $i \in I$, в G должны порождать подгруппу H, являющуюся там же произведением H_i

$$H = \prod\nolimits^{\circ}_{i \in I} H_i.$$

Прямое и свободное произведения групп являются мальцевскими. Существуют и другие М. п., однако до сих пор (1982) не решена проблема Мальцева о существовании (отличного от прямого и свободного) М. п., удовлетворяющего закону ассоциативности и нек-рым другим естественным условиям (термин М. п. возник в связи с этой проблемой).

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

А. Л. Шмелькин.

МАМФОРДА ГИПОТЕЗА — гипотеза о том, что всякая полупростая алгебраич. группа G геометрически редуктивна, т. е. обладает следующим свойством: для любого рационального представления

группы G в конечномерном векторном пространстве V и любого неподвижного относительно G ненулевого вектора $v \in V$ существует G-инвариантный однородный многочлен f положительной степени на пространстве V, для к-рого $f(v) \neq 0$.

Гипотеза была сформулирована Д. Мамфордом [1] (в несколько отличном от предыдущего, но эквивалентном ему виде) с целью найти такое свойство полупростых групп, определенных над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики, к-рое могло бы служить равноценной — с точки зрения геометрич. *инвариантов теории* — заменой классич. свойства полной приводимости рациональных линейных представлений полупростых групп, определенных над полем нулевой характеристики (это последнее свойство не имеет места в случае положительной характеристики основного поля), и позволило бы снять ограничение на характеристику основного поля в ряде центральных результатов геометрич. теории инвариантов (в первую очередь, в теореме о конечной порожденности алгебры инвариантов редуктивной группы автоморфизмов алгебры конечного типа над полем, см. *Гильберта теорема* об инвариантах).

Если характеристика основного поля k равна нулю, то доказательство М. г. дается классич. теоремой Вейля о полной приводимости рациональных представлений полупростых групп (см. [2]): в этом случае к инвариантной прямой $L = kv$ в пространстве V имеется инвариантное дополнение Γ (т. е. такая инвариантная однородная гиперповерхность Γ степени 1 в V, что $L \cap \Gamma = 0$), и в качестве f можно взять линейную форму, являющуюся уравнением Γ. В случае поля k положительной характеристики p М. г. обобщает этот факт, также утверждая, что существует инвариантная однородная гиперповерхность Γ в V, для к-рой $L \cap \Gamma = 0$, но только степень Γ не обязательно равна 1 (в оригинальной постановке М. г. утверждает также, что эта степень равна p^n для пек-рого целого n).

М. г. эквивалентна также утверждению о том, что для любого регулярного действия полупростой группы G на аффинном алгебраич. многообразии X и любых двух замкнутых непересекающихся инвариантных подмножеств X_1 и X_2 в X существует инвариантная регулярная функция h на X, для к-рой $h(X_1) = 0$ и $h(X_2) = 1$ (т. е. X_1 и X_2 разделяются регулярными инвариантами, см. [3]).

Впервые М. г. доказана в [4] (включая и гипотезу о степени формы); это доказательство распространено в [5] на общий случай редуктивных групповых схем над кольцом.

Доказательство М. г. вместе с результатами работ [6], [10] позволило, во-первых, придать окончательную форму обобщению теоремы Гильберта об инвариантах: если R — алгебра конечного типа над полем k, G — редуктивная рациональная группа ее k-автоморфизмов и R^G — подалгебра всех G-инвариантных элементов в R, то R^G — также алгебра конечного типа над k; и, во-вторых, позволило установить, что линейная алгебраич. группа над полем произвольной характеристики геометрически редуктивна тогда и только тогда, когда она редуктивна. М. г. имеет приложения в геометрич. теории инвариантов и теории модулей (см. [7] — [9]).

Лит.: [1] Mumford D., Geometric Invariant Theory, B. [a. o.], 1965; [2] Fogarty J., Invariant theory, N. Y.—Amst., 1969; [3] Дьедонне Ж., Кероль Дж., Мамфорд Д., Геометрическая теория инвариантов, пер. с англ., М., 1974; [4] Haboush W. J., «Ann. Math.», 1975, v. 102, p. 67—83; [5] Seshadri C. S., «Adv. Math.» 1977, № 26, p. 225—74; [6] Nagata M., «J. Math. Kyoto Univ.», 1964, № 3, p. 369—77; [7] Seshadri C. S., в кн.: Algebraic geometry. Papers presented at the Bombay colloquium. 1968, L., 1969, p. 347—71; [8] Popp H., Moduli theory and classification theory of algebraic varieties, B. [a. o.], 1977; [9] Seshadri C. S.,

«Proc. Symp. Pure Math.», 1975, v. 29, p. 263—304; [10] Nagata M., Miyata T., «J. Math. Kyoto Univ.», 1962, № 3, p. 379—82. *В. Л. Попов.*

МАНГОЛЬДТА ФУНКЦИЯ — арифметическая функция, определяемая равенствами

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, & \text{если } n=p^m,\ p\text{—простое},\ m\geqslant 1,\\ 0, & \text{если } n\neq p^m.\end{cases}$$

Функция $\Lambda(n)$ обладает следующими свойствами:

$$\sum_{d\mid n}\Lambda(n)=\ln n,$$

$$\Lambda(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)\ln\frac{n}{d},$$

где сумма берется по всем делителям d числа n. М. ф. тесно связана с *дзета-функцией* Римана $\zeta(s)$, а именно, производящим рядом для $\Lambda(n)$ является логарифмич. производная $\zeta(s)$:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum\frac{\Lambda(n)}{n^s}\quad(\operatorname{Re}s>1).$$

М. ф. предложена Х. Мангольдтом (H. Mangoldt) 1894). *С. А. Стечкин.*

МАННА ТЕОРЕМА — теорема, дающая оценку плотности суммы двух последовательностей. Пусть $A=\{0, a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots\}$ — возрастающая последовательность целых чисел и

$$A(n)=\sum\nolimits_{0<a_i\leqslant n, a_i\in A}1.$$

Плотностью последовательности A наз. величина

$$d(A)=\inf_n\frac{A(n)}{n}.$$

Арифметической суммой двух последовательностей A и B наз. последовательность $C=A+B$, состоящая из всевозможных сумм $c=a+b$, где $a\in A$ и $b\in B$. М. т. утверждает, что

$$d(A+B)\geqslant\min\{d(A)+d(B),\ 1\}.$$

Из М. т. следует, что если A — последовательность положительной плотности, меньшей 1, а B — другая последовательность положительной плотности, то от сложения A с B плотность увеличивается. Другим важным следствием М. т. является утверждение: всякая последовательность положительной плотности есть базис натурального ряда. М. т. существенно усиливает аналогичную теорему Шнирельмана (см. *Шнирельмана метод*). Доказана Х. Манном [1].

Лит.: [1] Mann H. B., «Ann. Math.», 1942, v. 43, p. 523—527; [2] Ostmann H.-H., Additive Zahlentheorie, Bd 1—2, B., 1956; [3] Гельфонд А. О., Линник Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962. *В. М. Бредихин.*

МАННА — УИТНИ КРИТЕРИЙ — критерий для проверки гипотезы H_0 об однородности двух выборок $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$, все $n+m$ элементов к-рых взаимно независимы и подчиняются непрерывным распределениям. Этот критерий, предложенный Х. Манном и Д. Уитни [1], построен на статистике

$$U=W-\frac{1}{2}m(m+1)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\delta_{ij},$$

где W — статистика *Вилкоксона критерия*, предназначенного для проверки этой же гипотезы H_0, численно равная сумме рангов элементов второй выборки в общем вариационном ряду, а

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } X_i<Y_j,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Таким образом, статистика U считает общее число тех случаев, в к-рых элементы второй выборки превосхо-

дят элементы первой выборки. Из определения статистики U следует, что если гипотеза H_0 верна, то

$$\mathsf{E}U=\frac{nm}{2},\quad \mathsf{D}U=\frac{nm\,(n+m+1)}{12}, \qquad (*)$$

и, кроме того, эта статистика обладает всеми свойствами статистики Вилкоксона W, в том числе асимптотической нормальностью с параметрами (*), чем и следует пользоваться при использовании М.— У. к. на практике, если только $\min\{n,\ m\}>25$.

Лит.: Mann H. B., Whitney D. R., «Ann. Math. Statistics», 1947, v. 18, p. 50—60.
М. С. Никулин.

МАРГИНАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, частное распределение,— распределение случайной величины или множества случайных величин, рассматриваемых в качестве компоненты или множества компонент нек-рого случайного вектора (см. *Многомерное распределение*) с заданным распределением. Иначе, М. р. является проекцией распределения случайного вектора $X=(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ на любую ось x_1 или подпространство, определяемое переменными $x_{i_1},\ \ldots,\ x_{i_k}$, и полностью определяется по распределению этого вектора. Напр., если $F(x_1,\ x_2)$ — функция распределения $X=(X_1,\ X_2)$ в $\mathbb{R}^2$, то функция распределения X_1 равна $F_1(x_1)=F(x_1,\ +\infty)$; если двумерное распределение абсолютно непрерывно и $p(x_1,\ x_2)$ — его плотность, то плотность М. р. X_1 равна

$$p_1(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}p\,(x_1,\ x_2)\,dx_2.$$

Аналогично вычисляется М. р. для любой компоненты или множества компонент вектора $X=(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ при любом n. Если распределение X нормально, то все М. р. также нормальны. В том случае, когда величины $X_1,\ \ldots,\ X_n$ взаимно независимы, по М. р. компонент $X_1,\ \ldots,\ X_n$ вектора X однозначно определяется его распределение:

$$F\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_i\,(x_i)$$

и

$$p\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\prod_{i=1}^{n}p_i\,(x_i).$$

Аналогично определяется М. р. по отношению к распределению вероятностей, заданному на произведении пространств, более общих, чем числовая прямая.

Лит.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., [2 изд.], М., 1975.
А. В. Прохоров.

МАРКОВА КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — см. *Наивысшей алгебраической степени точности квадратурная формула.*

МАРКОВА КРИТЕРИЙ наилучшего интегрального приближения — теорема, позволяющая в нек-рых случаях эффективно указать многочлен и величину наилучшего интегрального приближения функции $f(x)$. Установлен А. А. Марковым в 1898 (см. [1]). Пусть $\{\varphi_k(x)\}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$,— система непрерывных на отрезке $[a,\ b]$ линейно независимых функций, а непрерывная функция $\psi(x)$ меняет знак в точках $x_1<x_2\ <\ldots<x_r$ интервала $(a,\ b)$ и такова, что

$$\int_a^b\varphi_k\,(x)\,\operatorname{sign}\psi\,(x)\,dx=0,\ \ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Если для многочлена

$$P_n^*(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k^*\varphi_k\,(x)$$

разность $f(x)-P_n^*(x)$ меняет знак в точках x_k, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ r$, и только в них, то $P_n^*(x)$ является многочле-

ном н
$f(x)$ и

$$\inf_{\{c_k\}} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right| dx =$$

$$= \int_a^b \left| f(x) - P_n^*(x) \right| dx = \left| \int_a^b f(x) \operatorname{sign} \psi(x)\, dx \right|.$$

Для системы функций $1, \cos x, \ldots, \cos nx$, рассматриваемых на отрезке $[0, \pi]$, в качестве функции $\psi(x)$ можно взять $\cos(n+1)x$; для системы $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$,— функцию $\sin(n+1)x$, а для системы $1, x, \ldots, x^n$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, можно положить $\psi(x) = \sin(n+2)\arccos x$.

Лит.: [1] Марков А. А., Избр. труды, М.— Л., 1948; [2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [3] Даугавет И. К., Введение в теорию приближения функций, Л., 1977.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

МАРКОВА НЕРАВЕНСТВО для производной от алгебраического многочлена — неравенство, дающее оценку максимального значения этой производной через наибольшее значение самого многочлена. Пусть $P_n(x)$ — алгебраич. многочлен степени не выше n и

$$M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |P_n(x)|.$$

Тогда для любого x из отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$|P_n'(x)| \leqslant \frac{2Mn^2}{b-a}. \qquad (*)$$

Неравенство (*) получено А. А. Марковым в 1889 (см. [1]). М. н. является точным. Так, если $a=-1$, $b=1$,

$$P_n(x) = \cos n \arccos x,$$

то

$$M = 1, \quad P_n'(1) = n^2$$

и в неравенстве (*) достигается знак равенства.

Для производной любого порядка $r \leqslant n$ из М. н. следует соотношение

$$|P_n^{(r)}(x)| \leqslant \frac{M 2^r}{(b-a)^r} n^2 (n-1)^2 \ldots (n-r+1)^2, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

к-рое при $r \geqslant 2$ уже не является точным. Точное неравенство для $P_n^{(r)}(x)$ получено В. А. Марковым [2]:

$$|P_n^{(r)}(x)| \leqslant \frac{M 2^r n^2 (n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots(n^2-(r-1)^2)}{(b-a)^r (2r-1)!!}.$$

Лит.: [1] Марков А. А., Избр. труды, М.— Л., 1948; [2] Марков В. А., О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке, СПБ, 1892; [3] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.— Л., 1949.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

МАРКОВА ПРОБЛЕМА СПЕКТРА — проблема теории чисел, возникшая в связи с задачей о распределении нормированных значений арифметич. минимумов неопределенных бинарных квадратичных форм. Пусть

$$f = f(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

$$\delta(f) = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$$

и

$$m(f) = \inf |f(x, y)|, \quad x, y \in \mathbb{Z}^2, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

— однородный арифметич. минимум формы f. Число

$$\mu = \mu(f) = \sqrt{\delta(f)}/m(f), \quad \mu \leqslant +\infty,$$

наз. постоянной Маркова формы f. Множество $M = \{\mu(f)\}$, когда f пробегает все действительные неопределенные квадратичные формы, наз. спектром Маркова. Постоянную и спектр Маркова определяют по-разному, в частности А. А. Марков в

[1] рассматривал множество $\{2/\mu(f)\}$. Известно, что $\mu(f)$ — инвариант луча F классов форм, т. е. множества

$$F=\{f' \mid f' \simeq \tau f\ (\mathbb{Z}),\ \tau\in\mathbb{R},\ \tau>0\},$$

т. к. $\mu(f')=\mu(f)=\mu(F)$. Каждому лучу классов F взаимно однозначно сопоставляется двоякобесконечная (бесконечная в обе стороны) последовательность

$$I_F=\{\ldots,\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ \ldots \mid a_k\in\mathbb{Z}\}$$

так, что если обозначить

$$\mu_k(I_F)=[a_k;\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots]+[0;\ a_{k-1},\ a_{k-2},\ \ldots]$$

(знак $[;\ \ldots]$ — обозначение цепной дроби), то

$$\mu(F)=\sup_{k\in\mathbb{Z}}\mu(I_F).$$

Проблему Маркова можно сформулировать следующим образом: 1) описать спектр Маркова M, 2) для каждого $\mu\in M$ описать множество форм $f=f(x,\ y)$ (или лучей классов F), для к-рых $\mu(f)=\mu(F)=\mu$. Проблема решена А. А. Марковым для начальной части спектра M, определяемой условием $\mu(f)<3$. Эта часть спектра является дискретным множеством

$$M\cap[0,\ 3)=\left\{\sqrt{9-\frac{4}{m^2}}\ \middle|\ m^2+n^2+p^2=\right.$$
$$\left.=3mnp,\ m,\ n,\ p\in N\right\}=\left\{\sqrt{5},\ \sqrt{8},\ \frac{\sqrt{221}}{5},\ \ldots\right\}$$

с единственной предельной точкой 3 (точка конденсации множества M); m, n, p пробегают все целые положительные решения диофантова уравнения Маркова

$$m^2+n^2+p^2=3mnp,\quad m\geqslant n\geqslant p>0. \qquad (*)$$

При этом каждой точке этой части спектра отвечает ровно один луч классов F_m, задаваемый формой Маркова $f_m=f_m(x,\ y)$, с условием

$$\mu(F_m)=\sqrt{9-\frac{4}{m^2}}.$$

Решение $(m,\ n,\ p)$ диофантова уравнения $(*)$ наз. тройкой Маркова; число m — числом Маркова. Форма Маркова f_m следующим образом сопоставляется числу Маркова $m=\max(m,\ n,\ p)$: пусть $r,\ s\in\mathbb{Z}$ определены условиями

$$nr\equiv p\ (\mathrm{mod}\ m),\quad 0\leqslant r<m,$$
$$r^2+1=ms;$$

тогда, по определению,

$$f_m=f_m(x,\ y)=x^2+\left(3-\frac{2r}{m}\right)xy+\frac{s-3r}{m}y^2.$$

Множество M — замкнуто, и имеется такое число $\mu_0=4{,}5278\ldots$, что $[\mu_0,\ +\infty]\subset M$, и к μ_0 примыкает интервал смежности множества M.

Проблема Маркова тесно связана с проблемой Лагранжа — Гурвица рациональных приближений к действительному числу θ. Величина

$$\lambda=\lambda(\theta)=\sup\tau,\quad \lambda\leqslant+\infty,$$

где точная верхняя граница берется по всем $\tau\in\mathbb{R}$, $\tau>0$, для к-рых неравенство

$$\left|\theta-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{\tau q^2}$$

имеет бесконечное множество решений $p,\ q\in\mathbb{Z}$, $q>0$, наз. постоянной Лагранжа. Множество $L=\{\lambda(\theta)\mid\theta\in\mathbb{R}\}$ наз. спектром Лагранжа. Первым результатом в теории спектра Лагранжа естественно считать теорему Лагранжа: все

подходящие дроби разложения числа θ в цепную дробь удовлетворяют неравенству

$$\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

Если $\theta'\sim\theta$, т. е. если

$$\theta'=\frac{a\theta+b}{c\theta+d},\quad a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Z},\quad |ad-bc|=1,$$

то $\lambda(\theta')=\lambda(\theta)=\lambda(\Theta)$, где $\Theta=\{\theta'|\theta'\sim\theta\}$ — класс эквивалентных чисел. Если θ разложено в цепную дробь $\theta=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots]$, то

$$\lambda(\theta)=\lim_{k\to\infty}\sup\lambda_k(\theta),\ \lambda_k(\theta)=[0;\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots]+$$
$$+[a_k;\ a_{k-1},\ \ldots,\ a_1],\quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Таким образом, проблему Лагранжа — Гурвица можно сформулировать так: 1) описать спектр Лагранжа L; 2) для каждого $\lambda\in L$ описать множество чисел θ (или классов Θ), для к-рых $\lambda(\theta)=\lambda(\Theta)=\lambda$.

Для $\lambda(\theta)<3$ эта задача сводится к проблеме Маркова, причем

$$Z\cap[0,\ 3)=M\cap[0,\ 3),$$

и каждому $\lambda\in L$, $\lambda<3$, отвечает ровно один класс чисел θ, описываемых формой Маркова f_m. Доказано, что L, как и M,— замкнутое множество, что $L\subset M$, но $L\neq M$, что

$$Z\cap[\mu_0,\ +\infty]=M\cap[\mu_0,\ +\infty]=[\mu_0,\ +\infty],$$

причем к μ_0 примыкает интервал смежности множества L. Исследования по структуре L и по связи L и M описаны в [6]. Об обобщениях и аналогах проблемы спектра Маркова и о «явлении изоляции» см. [2], [3], [7].

Лит.: [1] Марков А. А., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 5, с. 7—51; [2] Касселс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1961; [3] Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, М.— Л., 1947; [4] Горшков Д. С., «Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР», 1977, т. 67, с. 39—85; [5] Фрейман Г. А., Диофантовы приближения и геометрия чисел. (Задача Маркова), Калинин, 1975; [6] Малышев А. В., «Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР», 1977, т. 67, с. 5—38; [7] Венков Б. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1945, т. 9, с. 429—94.

А. В. Малышев.

МАРКОВА СИСТЕМА ФУНКЦИЙ — система линейно независимых действительных непрерывных функций $\{\varphi_\nu(x)\}$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n\ (n\leqslant\infty)$, заданных на конечном отрезке $[a,\ b]$ и удовлетворяющих условию: для любого конечного $k\leqslant n$ функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_k(x)$ образуют на интервале $(a,\ b)$ *Чебышева систему.*

Примеры М. с. ф.:

а) $1,\ x,\ x^2,\ \ldots$— относительно любого отрезка $[a,\ b]$;

б) $1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots$— относительно отрезка $[0,\ \pi]$;

в) $\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots$— относительно отрезка $[0,\ \pi]$.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

МАРКОВА СПЕКТР — см. *Маркова проблема спектра.*

МАРКОВА ФОРМА — неопределенная бинарная квадратичная форма $f=f(x,\ y)$, для к-рой постоянная Маркова $\mu(f)<3$ (см. *Маркова проблема спектра*).

А. В. Малышев.

МАРКОВА ЦЕПИ НУЛЕВОЙ КЛАСС СОСТОЯНИЙ — множество K состояний однородной цепи Маркова $\xi(t)$ с множеством состояний S такое, что:

$$\mathsf{P}\{\exists t>0:\xi(t)=j\mid\xi(0)=i\}=1$$

для любых $i,\ j\in K$,

$$p_{il}(t)=\mathsf{P}\{\xi(t)=l\mid\xi(0)=i\}=0$$

для любых $i\in K$, $l\in S\setminus K$, $t>0$ и

$$\mathsf{E}\,\tau_{ii}=\infty \qquad (*)$$

для любого $i \in K$, где τ_{ii} — время возвращения в состояние i:

$$\tau_{ii} = \min \{t > 0 : \xi(t) = i \,(\xi(0) = i)\}$$

для цепей Маркова с дискретным временем и

$$\tau_{ii} = \inf \{t > 0 : \xi(t) = i \,(\xi(0) = i,\ \xi(0+) \neq i)\}$$

для цепей Маркова с непрерывным временем.

Как и в случае положительного класса состояний (когда (*) заменено условием $\mathsf{E}\tau_{ii} < \infty$), состояния, принадлежащие одному нулевому классу, обладают рядом общих свойств; напр., для любых состояний i, j из нулевого класса K

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = 0.$$

Примером цепи Маркова, множество состояний к-рой образует один нулевой класс, является симметричное случайное блуждание на множестве целых чисел:

$$\xi(0) = 0, \quad \xi(t) = \xi(t-1) + \eta(t), \quad t = 1, 2, \ldots,$$

где $\eta(1)$, $\eta(2)$, . . .— независимые случайные величины,

$$\mathsf{P}\{\eta(i) = 1\} = \mathsf{P}\{\eta(i) = -1\} = 1/2, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Лит.: [1] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964.

А. М. Зубков.

МАРКОВА ЦЕПИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ КЛАСС СОСТОЯНИЙ — такое множество K состояний однородной цепи Маркова $\xi(t)$ с множеством состояний S, что для переходных вероятностей

$$p_{ij}(t) = \mathsf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}$$

цепи $\xi(t)$ выполняются условия:

$$\sup_t p_{ij}(t) > 0 \text{ при любых } i,\ j \in K,$$

$p_{il}(t) = 0$ при любых $i \in K$, $l \in S \setminus K$, $t > 0$ и

$$\mathsf{E}\tau_{ii} < \infty \text{ при любом } i \in K,$$

где τ_{ii} — время возвращения в состояние i:

$$\tau_{ii} = \min \{t > 0 : \xi(t) = i \,(\xi(0) = i)\}$$

для цепей Маркова с дискретным временем и

$$\tau_{ii} = \inf \{t > 0 : \xi(t) = i \,(\xi(0) = i,\ \xi(0+) \neq i)\}$$

для цепей Маркова с непрерывным временем. В случае $\mathsf{E}\tau_{ii} = \infty$ класс K наз. нулевым классом состояний.

Состояния, принадлежащие одному и тому же положительному классу K, обладают рядом общих свойств. Напр., в случае дискретного времени при любых i, $j \in K$ существует

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{t=1}^{n} p_{ij}(t) = p_j^* > 0;$$

если

$$d_i = \max \{d : \mathsf{P}\{\tau_{ii} \text{ делится на } d\} = 1\}$$

— период состояния i, то $d_i = d_j = d$ для любых i, $j \in K$ и d наз. периодом класса K; для любого $i \in K$ существует

$$\lim_{t \to \infty} p_{ii}(td) = dp_i^* > 0.$$

Цепь Маркова с дискретным временем, все состояния к-рой образуют один положительный класс периода 1, является примером *Маркова цепи эргодической.*

Лит.: [1] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [2] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956.

А. М. Зубков.

МАРКОВА ЦЕПЬ — *марковский процесс* с конечным или счетным множеством состояний. Теория М. ц. возникла на основе исследований А. А. Маркова, к-рый в 1907 положил начало изучению последовательностей зависимых испытаний и связанных с ними сумм случайных величин [1].

Пусть пространство состояний — множество натуральных чисел N или его конечное подмножество. Пусть $\xi(t)$ — состояние М. ц. в момент времени t. Основным для М. ц. является *марковское свойство*, к-рое для М. ц. с дискретным временем (т. е. в случае, когда время t принимает лишь целые неотрицательные значения) определяется следующим образом: для любых $t,\ j\in N$, любых целых неотрицательных $t_1<t_2<\ldots<t_k<t$ и любых натуральных $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k$ имеет место равенство

$$\mathsf{P}\{\xi(t)=j \mid \xi(t_1)=i_1,\ \ldots,\ \xi(t_k)=i_k\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\xi(t)=j \mid \xi(t_k)=i_k\}. \qquad (1)$$

Марковское свойство (1) *можно переформулировать* следующим образом. Момент времени t и связанные с ним события вида $\{\xi(t)=j\}$ назовем «настоящим» процесса; события, определяемые значениями $\xi(u)$ с $u<t$,— «прошлым» процесса; события, определяемые значениями $\xi(u)$ с $u>t$,— «будущим» процесса. Тогда свойство (1) равносильно следующему: для любого $t\in N$ при фиксированном «настоящем» $\xi(t)=j$ любые «прошлое» A и «будущее» B события условно независимы, т. е.

$$\mathsf{P}\{A\cap B \mid \xi(t)=j\}=$$
$$=\mathsf{P}\{A \mid \xi(t)=j\}\,\mathsf{P}\{B \mid \xi(t)=j\}.$$

Для вероятностного описания М. ц. $\xi(t)$ большую роль играют *переходные вероятности*

$$\mathsf{P}\{\xi(t+1)=j \mid \xi(t)=i\}. \qquad (2)$$

В случае, когда переходные вероятности (2) не зависят от t, М. ц. наз. о д н о р о д н о й (во времени); в противном случае — н е о д н о р о д н о й. Далее рассматриваются лишь однородные М. ц. Пусть

$$p_{ij}=\mathsf{P}\{\xi(t+1)=j \mid \xi(t)=i\}.$$

Матрица $\mathbf{P}=\|p_{ij}\|$ с элементами p_{ij} наз. м а т р и ц е й п е р е х о д н ы х в е р о я т н о с т е й. Вероятность любой траектории $\xi(k)=i_k,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ t$, выражается через переходные вероятности p_{ij} и начальное распределение $\mathsf{P}\{\xi(0)=i\}$ следующим образом:

$$\mathsf{P}\{\xi(k)=i_k,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ t\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\xi(0)=i_0\}\prod_{k=1}^{t}p_{i_{k-1}i_k}.$$

Наряду с переходными вероятностями p_{ij} в М. ц. рассматриваются также переходные вероятности $p_{ij}(t)$ за t шагов:

$$p_{ij}(t)=\mathsf{P}\{\xi(t_0+t)=j \mid \xi(t_0)=i\}.$$

Эти переходные вероятности удовлетворяют *Колмогорова — Чепмена уравнению*

$$p_{ij}(t_1+t_2)=\sum_k p_{ik}(t_1)\,p_{kj}(t_2).$$

С помощью переходных вероятностей можно произвести следующую классификацию состояний. Два состояния i и j наз. с о о б щ а ю щ и м и с я, если найдутся такие $t_1>0$, $t_2>0$, что $p_{ij}(t_1)>0$ и $p_{ji}(t_2)>0$. Состояние k наз. н е с у щ е с т в е н н ы м, если найдется такое состояние l, что $p_{kl}(t_1)>0$ для нек-рого $t_1\geqslant 1$ и $p_{lk}(t)\equiv 0$ для всех $t\in N$. Все остальные состояния наз. с у щ е с т в е н н ы м и. Таким образом, все множество состояний М. ц. разбивается на несущественные и существенные состояния. Множество всех существенных состояний разбивается на непересекающиеся классы сообщающихся состояний так, что любые два состояния из одного класса сообщаются между собой, а для любых двух состояний i и j из разных классов $p_{ij}(t)\equiv 0$, $p_{ji}(t)\equiv 0$. М. ц., все состояния к-рой составляют один класс сообщающихся

состояний, наз. неразложимой (см. *Маркова цепь неразложимая*); в противном случае М. ц. наз. разложимой (см. *Маркова цепь разложимая*). Если множество состояний конечно, то разбиение его на эти классы в значительной степени определяет асимптотич. свойства М. ц. Напр., для конечной неразложимой М. ц. всегда существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T}p_{ij}(t)=p_j, \tag{3}$$

причем $\sum_j p_j=1$. Если, кроме того, М. ц. непериодическая, т. е. при нек-ром t_0 для всех $t\geqslant t_0$ и всех состояний i и j $p_{ij}(t)>0$ (см. также *Маркова цепь периодическая*), то имеет место более сильное утверждение

$$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=p_j \tag{4}$$

(см. также *Маркова цепь эргодическая*).

Если множество состояний М. ц. счетно, то ее асимптотич. свойства зависят от более тонких свойств классов сообщающихся состояний. Ряд

$$\sum_t p_{ii}(t) \tag{5}$$

расходится или сходится сразу для всех состояний данного класса. Класс состояний наз. возвратным, если для любого состояния i этого класса ряд (5) расходится, и невозвратным, если ряд (5) сходится. В возвратном классе с вероятностью 1 М. ц. возвращается в любое свое состояние, в невозвратном классе вероятность возвращения меньше 1. Если среднее время возвращения в возвратном классе конечно, то класс наз. положительным; в противном случае класс наз. нулевым (см. *Маркова цепи положительный класс состояний*, *Маркова цепи нулевой класс состояний*). Если i и j принадлежат одному положительному классу состояний, то существует предел (3), а в непериодическом случае и предел (4). Если j принадлежит нулевому классу состояний или несущественно, то $p_{ij}(t)\to 0$, $t\to\infty$.

Пусть $f(\cdot)$ — действительная функция, определенная на состояниях М. ц. $\xi(t)$. Если М. ц. неразложима и ее состояния образуют положительный класс, то для сумм

$$\eta_t=\sum_{u=0}^{t}f(\xi(u))$$

справедлива центральная предельная теорема:

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\left\{\frac{\eta_t-At}{\sqrt{Bt}}<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du \tag{6}$$

при нек-рых A и $B>0$. Для выполнения (6) достаточно дополнительно потребовать $\mathsf{D}\eta_t\sim Bt$, $t\to\infty$, $B>0$.

Если время t принимает любые значения из $[0,\infty)$, то М. ц. является М. ц. с непрерывным временем, к-рая определяется аналогично с помощью марковского свойства (1). Обычно для М. ц. с непрерывным временем требуют дополнительно, чтобы существовали конечные правые производные $\left.\frac{dp_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}=q_{ij}$, к-рые наз. плотностями вероятностей перехода. Для конечной М. ц. с непрерывным временем из уравнения Колмогорова — Чепмена можно получить две системы дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt}=\sum_k p_{ik}(t)\,q_{kj} \tag{7}$$

и

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt}=\sum_k q_{ik}p_{kj}(t), \tag{8}$$

к к-рым присоединяются начальные условия $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. При нек-рых дополнительных предположениях системы уравнений (7) и (8) справедливы и для счетных М. ц.

Если М. ц. с непрерывным временем имеет *стационарное распределение* $\mathsf{P}\{\xi(t)=i\}=p_i$ (т. е. распределение $\xi(t)$, не зависящее от времени t), то это распределение $\{p_i\}$ удовлетворяет следующей системе линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\sum p_i=1,\\&\sum_i p_iq_{ij}=0,\quad j=1,\ 2,\ \dots\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

М. ц. широко используются при решении различных прикладных задач. Напр., в теории массового обслуживания для расчета распределения вероятностей числа занятых приборов в системе $M|M|n$ с отказами (т. е. в системе, состоящей из n приборов с пуассоновским потоком требований и показательным законом времени обслуживания) используется конечная М. ц. с непрерывным временем, состояниями $0,\ 1,\ \dots,\ n$ и со следующими плотностями вероятностей перехода:

$$q_{i,\,i+1}=\lambda,\ 0\leqslant i<n,\quad q_{i,\,i-1}=i\mu,\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

$$q_{ii}=-(\lambda+i\mu),\quad 0\leqslant i\leqslant n,\quad q_{nn}=-n\mu,\quad q_{ij}=0,$$

если $|i-j|>1$ (здесь λ — интенсивность пуассоновского потока требований, μ^{-1} — среднее время обслуживания). С помощью (9) в этом случае определяется следующее стационарное распределение числа занятых приборов:

$$p_i=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\frac{1}{i!}\Big/\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{1}{k!},\quad i=0,\ 1,\ \dots,\ n,$$

$$p_i=0,\quad i>n,$$

к-рое наз. распределением Эрланга.

См. также *Маркова цепь сложная*, *Маркова цепь возвратная*, *Поглощающее состояние*, *Стохастическая матрица*, *Переход с запрещениями*.

Лит.: [1] Марков А. А., «Изв. Петерб. АН» (6), 1907, т. 1, № 3, с. 61—80; [2] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [4] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1967.

Б. А. Севастьянов.

МАРКОВА ЦЕПЬ ВОЗВРАТНАЯ — цепь Маркова, в к-рой случайная траектория $\xi(t)$, выходящая из любого состояния $\xi(0)=i$, с вероятностью 1 возвращается когда-нибудь в это же состояние. В терминах переходных вероятностей $p_{ij}(t)$ возвратность цепи Маркова с дискретным временем эквивалентна расходимости при любом i ряда

$$\sum_{t=0}^{\infty}p_{ii}(t).$$

В М. ц. в. траектория $\xi(t)$, $0\leqslant t<\infty$, $\xi(0)=i$, с вероятностью 1 возвращается в состояние i бесконечное число раз. В М. ц. в. нет несущественных состояний, а все существенные состояния разбиваются на возвратные классы. Примером М. ц. в. может служить симметричное случайное блуждание по целочисленной решетке прямой или плоскости. В симметричном блуждании по прямой частица из положения x переходит в положения $x\pm1$ с вероятностями $^1/_2$; в симметричном блуждании по плоскости частица из точки $(x,\ y)$ с вероятностями $^1/_4$ переходит в одну из четырех соседних точек $(x\pm1,\ y)$, $(x,\ y\pm1)$. В этих примерах частица, начавшая блуждание из какой-либо точки, с вероятностью 1 возвращается в эту точку. Симметрич-

ное блуждание по целочисленной решетке трехмерного пространства, когда вероятности перехода из (x, y, z) в соседние точки $(x\pm1, y, z)$, $(x, y\pm1, z)$, $(x, y, z\pm1)$ равны $^1/_6$, невозвратно. В этом случае вероятность возвращения частицы в начальную точку равна приближенно 0,35.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1967.

Б. А. Севастьянов.

МАРКОВА ЦЕПЬ НЕРАЗЛОЖИМАЯ — цепь Маркова, переходные вероятности $p_{ij}(t)$ к-рой обладают следующим свойством: для любых состояний i и j существует такой момент времени t_{ij}, что $p_{ij}(t_{ij})>0$. Неразложимость цепи Маркова равносильна неразложимости матрицы переходных вероятностей $\mathbf{P}=\|p_{ij}\|$ для цепей Маркова с дискретным временем и матрицы плотностей вероятностей перехода $Q=\|q_{ij}\|$, $q_{ij}=\left.\frac{dp_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}$, для цепей Маркова с непрерывным временем. Множество состояний неразложимой цепи Маркова состоит из одного класса сообщающихся состояний.

Б. А. Севастьянов.

МАРКОВА ЦЕПЬ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ — неразложимая цепь Маркова $\xi(n)$, $n=1, 2, \ldots$, однородная во времени, в к-рой каждое состояние i имеет период, больший единицы, т. е.

$$d_i=\text{Н. о. д. }\{n:\mathbf{P}\{\xi(n)=i\mid\xi(0)=i\}>0\}>1.$$

В *Маркова цепи неразложимой* все состояния имеют одинаковые периоды. Если $d=1$, то цепь Маркова наз. непериодической.

В. П. Чистяков.

МАРКОВА ЦЕПЬ РАЗЛОЖИМАЯ — цепь Маркова, переходные вероятности $p_{ij}(t)$ к-рой обладают следующим свойством: существуют такие состояния $i\neq j$, что $p_{ij}(t)=0$ для всех $t\geqslant0$. Разложимость цепи Маркова равносильна разложимости матрицы переходных вероятностей $\mathbf{P}=\|p_{ij}\|$ для цепей Маркова с дискретным временем и матрицы плотностей вероятностей перехода $Q=\|q_{ij}\|$, $q_{ij}=\left.\frac{dp_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}$, для цепей Маркова с непрерывным временем. Множество состояний М. ц. р. либо содержит несущественные состояния, либо состоит более чем из одного класса сообщающихся состояний.

Б. А. Севастьянов.

МАРКОВА ЦЕПЬ СЛОЖНАЯ — последовательность случайных величин ξ_n, обладающая следующими свойствами:

1) множество значений ξ_n конечно или счетно,

2) при любом n и любых значениях $i_0, i_1, \ldots, i_n$

$$\mathbf{P}\{\xi_n=i_n\mid\xi_0=i_0,\ \xi_1=i_1,\ \ldots,\ \xi_{n-s}=i_{n-s},\ \ldots,\ \xi_{n-1}=i_{n-1}\}=\mathbf{P}\{\xi_n=i_n\mid\xi_{n-s}=i_{n-s},\ \ldots,\ \xi_{n-1}=i_{n-1}\}. \quad (*)$$

Сложная цепь Маркова, удовлетворяющая (*), наз. s-сложной. При $s=1$ условие (*) является обычным *марковским свойством*. Изучение s-сложных цепей Маркова можно свести к изучению обычных цепей Маркова. Для этого рассматривается последовательность случайных величин η_n, значения к-рых находятся во взаимно однозначном соответствии со значениями вектора

$$(\xi_{n-s+1},\ \xi_{n-s+2},\ \ldots,\ \xi_{n-1},\ \xi_n).$$

Последовательность случайных величин η_n образует обычную *Маркова цепь*.

Лит.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956.

В. П. Чистяков.

МАРКОВА ЦЕПЬ ЭРГОДИЧЕСКАЯ — однородная по времени цепь Маркова $\xi(t)$, обладающая следующим свойством: существуют (не зависящие от i) величины

$$p_j=\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t),\quad \sum_j p_j=1, \qquad (1)$$

где

$$p_{ij}(t) = \mathsf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}$$

— *переходные вероятности*. Распределение $\{p_j\}$ на множестве состояний цепи $\xi(t)$ наз. стационарным распределением: если $\mathsf{P}\{\xi(0)=j\}=p_j$ при всех j, то $\mathsf{P}\{\xi(t)=j\}=p_j$ при всех $t\geqslant 0$ и j. Вместе с основным свойством цепи Маркова

$$\mathsf{P}\{\xi(t)=j\} = \sum_i \mathsf{P}\{\xi(0)=i\}\, p_{ij}(t)$$

это позволяет находить $\{p_j\}$, не вычисляя пределов в (1).

Пусть

$$\tau_{jj} = \min\{t \geqslant 1 : \xi(t) = j \ (\xi(0) = j)\}$$

— момент первого возвращения в состояние j (для цепи Маркова с дискретным временем), тогда

$$\mathsf{E}\tau_{jj} = p_j^{-1};$$

аналогичное (более сложное) соотношение имеет место для цепи Маркова с непрерывным временем.

Траектории М. ц. э. удовлетворяют эргодич. теореме: если $f(\cdot)$ — функция на множестве состояний цепи $\xi(t)$, то в случае дискретного времени

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{t\to\infty} n^{-1}\sum_{t=0}^{n} f(\xi(t)) = \sum_j p_j f(j)\right\} = 1,$$

в случае непрерывного времени первая сумма в левой части заменяется интегралом.

Цепь Маркова, для к-рой существуют такие $\rho<1$ и $C_{ij}<\infty$, что при всех i, j, t

$$|p_{ij}(t) - p_j| \leqslant C_{ij}\rho^t, \qquad (2)$$

наз. геометрически эргодической. Достаточным условием для геометрич. эргодичности М. ц. э. является условие Дёблина (см., напр., [1]), к-рое в рассматриваемом здесь случае дискретных (конечных или счетных) цепей Маркова может быть сформулировано так: существуют такие $n<\infty$ и состояние j, что $\inf\limits_i p_{ij}(n)=\delta>0$. Если выполнено условие Дёблина, то для констант в (2) справедливо соотношение $\sup\limits_{i,\,j} C_{ij}=C<\infty$.

Необходимым и достаточным условием геометрич. эргодичности счетной цепи Маркова с дискретным временем является следующее (см. [3]): существуют такие числа $f(j)$, $q<1$ и конечное множество B состояний цепи, что

$$\mathsf{E}\{f(\xi(1)) \mid \xi(0)=i\} \leqslant q f(i), \quad i \notin B,$$

$$\max_{i\in B} \mathsf{E}\{f(\xi(1)) \mid \xi(0)=i\} < \infty.$$

Лит.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [3] Попов Н. Н., «Докл. АН СССР», 1977, т. 234, № 2, с. 316—19. *А. М. Зубков.*

МАРКОВСКИЙ МОМЕНТ — понятие, используемое в теории вероятностей для случайных величин, обладающих свойством независимости от «будущего». Точнее, пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — нек-рое измеримое пространство с выделенным на нем неубывающим семейством $(\mathcal{F}_t)$, $t\in T$, σ-подалгебр $\mathcal{F}$ ($T=[0,\infty]$ в случае непрерывного времени и $T=\{0,1,\ldots\}$ в случае дискретного времени). Случайная величина $\tau=\tau(\omega)$ со значениями в $T\cup\{+\infty\}$ наз. марковским моментом (относительно семейства $(\mathcal{F}_t)$, $t\in T$), если при каждом $t\in T$ событие $\{\tau(\omega)\leqslant t\}$ принадлежит $\mathcal{F}_t$. В случае дискретного времени это эквивалентно тому, что для любого $n\in\{0,1,\ldots\}$ событие $\{\tau(\omega)=n\}$ принадлежит $\mathcal{F}_n$.

Примеры. 1) Пусть $X(t)$, $t\in T$,— действительный случайный процесс, заданный на $(\Omega, \mathcal{F})$, и

$\mathcal{F}_t = \sigma\{\omega : X(s),\ s \leqslant t\}$. Тогда случайные величины

$$\tau(\omega) = \inf\{t \geqslant 0 : X(t) \in B\}$$

и

$$\sigma(\omega) = \inf\{t > 0 : X(t) \in B\},$$

т. е. моменты (первого и первого после $+0$) достижения (борелевского) множества B, являются М. м. (в случае $\{\cdot\} = \varnothing$ полагают $\inf \varnothing = \infty$).

2) Если $W(t)$, $t \geqslant 0$,— стандартный винеровский процесс, то М. м.

$$\tau = \inf\{t \geqslant 0 : W(t) \geqslant a\}, \quad a > 0,$$

имеет плотность распределения вероятностей

$$p(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^{3/2}}} e^{-a^2/2t}.$$

При этом $\mathsf{P}\{\tau < \infty\} = 1$, но $\mathsf{E}\tau = \infty$.

3) Случайная величина

$$\gamma = \inf\{t > 0 : X(s) \in B,\ \ s \geqslant t\},$$

являющаяся первым моментом, после к-рого процесс X_t остается в множестве B, является примером немарковского момента (случайной величины, зависящей от «будущего»).

С помощью понятия М. м. формулируется строго марковское свойство *марковских процессов*. М. м. и моменты остановки (т. е. конечные М. м.) играют важную роль в общей теории случайных процессов и статистическом последовательном анализе.

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

А. Н. Ширяев.

МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС, процесс без последействия,— *случайный процесс*, эволюция к-рого после любого заданного значения временного параметра t не зависит от эволюции, предшествовавшей t, при условии, что значение процесса в этот момент фиксировано (короче: «будущее» и «прошлое» процесса не зависят друг от друга при известном «настоящем»).

Определяющее М. п. свойство принято наз. марковским; впервые оно было сформулировано А. А. Марковым [1]. Однако уже в работе Л. Башелье [2] можно усмотреть попытку трактовать броуновское движение как М. п., попытку, получившую обоснование после исследований Н. Винера (N. Wiener, 1923). Основы общей теории М. п. с непрерывным временем были заложены А. Н. Колмогоровым [3].

Марковское свойство. Имеются существенно отличающиеся друг от друга определения М. п. Одним из наиболее распространенных является следующее. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) задан случайный процесс $X(t)$, $t \in T$, со значениями из измеримого пространства $(E, \mathscr{B})$, где T — подмножество действительной оси $\mathbb{R}$. Пусть N_t (соответственно N^t) есть σ-алгебра в Ω, порожденная величинами $X(s)$ при $s \leqslant t$ ($s \geqslant t$), где $s \in T$. Другими словами, N_t (соответственно N^t) — это совокупность событий, связанных с эволюцией процесса до момента t (начиная с t). Процесс $X(t)$ наз. марковским процессом, если (почти наверное) для всех $t \in T$, $\Lambda_1 \in N_t$ и $\Lambda_2 \in N^t$ выполняется марковское свойство:

$$\mathsf{P}\{\Lambda_1 \Lambda_2 \mid X(t)\} = \mathsf{P}\{\Lambda_1 \mid X(t)\}\,\mathsf{P}\{\Lambda_2 \mid X(t)\} \qquad (1)$$

или, что то же самое, если для любых $t \in T$ и $\Lambda \in N^t$

$$\mathsf{P}\{\Lambda \mid N_t\} = \mathsf{P}\{\Lambda \mid X(t)\}. \qquad (2)$$

М. п., для к-рого T содержится в множестве натуральных чисел, наз. *Маркова цепью* (впрочем, последний термин чаще всего ассоциируется со случаем не более чем счетного E). Если T является интервалом в $\mathbb{R}$,

а E не более чем счетно, М. п. наз. цепью Маркова с непрерывным временем. Примеры М. п. с непрерывным временем доставляются диффузионными процессами и процессами с независимыми приращениями, в том числе пуассоновским и винеровским.

В дальнейшем для определенности речь будет идти только о случае $T=[0, \infty)$. Формулы (1) и (2) дают ясную интерпретацию принципа независимости «прошлого» и «будущего» при известном «настоящем», но основанное на них определение М. п. оказалось недостаточно гибким в тех многочисленных ситуациях, когда приходится рассматривать не одно, а набор условий типа (1) или (2), отвечающих различным, хотя и согласованным определенным образом, мерам P. Такого рода соображения привели к принятию следующего определения (см. [9], [11]).

Пусть заданы:

а) измеримое пространство $(E, \mathscr{B})$, где σ-алгебра $\mathscr{B}$ содержит все одноточечные множества в E;

б) измеримое пространство (Ω, F), снабженное семейством σ-алгебр $F_t^s \subset F$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty$, таких, что $F_t^s \subset F_v^u$, если $[s, t] \subset [u, v]$;

в) функция («траектория») $x_t = x_t(\omega)$, определяющая при любых $t \in [0, \infty)$ и $\omega \in [0, t]$ измеримое отображение (Ω, F_t^v) в $(E, \mathscr{B})$;

г) для каждых $s \geqslant 0$ и $x \in E$ вероятностная мера $\mathsf{P}_{s, x}$ на σ-алгебре F_∞^s такая, что функция $P(s, .\ ; t, B) = \mathsf{P}_{s, .}\{x_t \in B\}$ измерима относительно $\mathscr{B}$, если $s \in [0, t]$ и $B \in \mathscr{B}$.

Набор $X(t) = (x_t, F_t^s, \mathsf{P}_{s, x})$ наз. (необрывающимся) марковским процессом, заданным в $(E, \mathscr{B})$, если $\mathsf{P}_{s, x}$-почти наверное

$$\mathsf{P}_{s, x}\{\Lambda \mid F_t^s\} = \mathsf{P}_{t, x_t}\{\Lambda\}, \tag{3}$$

каковы бы ни были $0 \leqslant s \leqslant t$ и $\Lambda \in N^t$. Здесь Ω — пространство элементарных событий, $(E, \mathscr{B})$ — фазовое пространство или пространство состояний, $P(s, x, t, B)$ — *переходная функция* или вероятность перехода процесса $X(t)$. Если E наделено топологией, а $\mathscr{B}$ — совокупность борелевских множеств в E, то принято говорить, что М. п. задан в E. Обычно в определение М. п. включают требование, чтобы $P(s, x; s, \{x\}) \equiv 1$, и тогда $\mathsf{P}_{s, x}\{\Lambda\}$ с $\Lambda \in F_\infty^s$ истолковывается как вероятность Λ при условии, что $x_s = x$.

Возникает вопрос: всякую ли марковскую переходную функцию $P(s, x; t, B)$, заданную в измеримом пространстве $(E, \mathscr{B})$, можно рассматривать как переходную функцию нек-рого М. п. Ответ положителен, если, напр., E является сепарабельным локально компактным пространством, а $\mathscr{B}$ — совокупностью борелевских множеств в E. Более того, пусть E — полное метрич. пространство и пусть

$$\lim_{h \downarrow 0} \alpha_\varepsilon(h) = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$, где

$$\alpha_\varepsilon(h) = \sup\{P(s, x; t, V_\varepsilon(x)) : x \in E,\ \ 0 < t - s < h\},$$

а $V_\varepsilon(x)$ — дополнение ε-окрестности точки x. Тогда соответствующий М. п. можно считать непрерывным справа и имеющим пределы слева (т. е. таковым можно выбрать его траектории). Существование же непрерывного М. п. обеспечивается условием $\alpha_\varepsilon(h) = o(h)$ при $h \downarrow 0$ (см. [9], [11]).

В теории М. п. основное внимание уделяется однородным (по времени) процессам. Соответствующее определение предполагает заданной систему объектов а) — г) с той разницей, что для фигурировавших в

ее описании параметров s и u теперь допускается лишь значение 0. Упрощаются и обозначения:

$$\mathsf{P}_x = \mathsf{P}_{0x}, \quad F_t = F_t^0, \quad P(t, x, B) = P(0, x; t, B),$$
$$x \in E, \quad t \geqslant 0, \quad B \in \mathscr{B}.$$

Далее, постулируется однородность пространства Ω, т. е. требуется, чтобы для любых $\omega \in \Omega$ и $s \geqslant 0$ существовало такое $\omega' \in \Omega$, что $x_t(\omega') = x_{t+s}(\omega)$ при $t \geqslant 0$. Благодаря этому на σ-алгебре N, наименьшей из σ-алгебр в Ω, содержащих любое событие вида $\{\omega : x_s \in B\}$, задаются операторы временного сдвига θ_t, к-рые сохраняют операции объединения, пересечения и вычитания множеств и для к-рых

$$\theta_t \{\omega : x_s \in B\} = \{\omega : x_{t+s} \in B\},$$

где $s, t \geqslant 0$, $B \in \mathscr{B}$.

Набор $X(t) = (x_t, F_t, \mathsf{P}_x)$ наз. (н е о б р ы в а ю щ и м с я) о д н о р о д н ы м м а р к о в с к и м п р о ц е с с о м, заданным в $(E, \mathscr{B})$, если P_x-почти наверное

$$\mathsf{P}_x \{\theta_t \Lambda \mid F_t\} = \mathsf{P}_{x_t} \{\Lambda\} \tag{4}$$

для $x \in E$, $t \geqslant 0$ и $\Lambda \in N$. Переходной функцией процесса $X(t)$ считается $P(t, x, B)$, причем, если нет специальных оговорок, дополнительно требуют, чтобы $P(0, x, \{x\}) \equiv 1$. Полезно иметь в виду, что при проверке (4) достаточно рассматривать лишь множества Λ вида $\Lambda = \{\omega : x_s \in B\}$, где $s \geqslant 0$, $B \in \mathscr{B}$, и что в (4) всегда F_t можно заменить σ-алгеброй $\overline{F}_t$, равной пересечению пополнений F_t по всевозможным мерам $\mathsf{P}_x \{x \in E\}$. Нередко в $\mathscr{B}$ фиксируют вероятностную меру μ («начальное распределение») и рассматривают марковскую случайную функцию $(x_t, F_t, \mathsf{P}_\mu)$, где P_μ — мера на F_∞, заданная равенством

$$\mathsf{P}_\mu \{\cdot\} = \int \mathsf{P}_x \{\cdot\} \, \mu(dx).$$

М. п. $X(t) = (x_t, F_t, \mathsf{P}_x)$ наз. п р о г р е с с и в н о и з м е р и м ы м, если при каждом $t > 0$ функция $x(s, \omega) = x_s(\omega)$ индуцирует измеримое отображение $([0, t] \times \Omega, \mathscr{B}_t \times F_t)$ в $(E, \mathscr{B})$, где $\mathscr{B}_t$ есть σ-алгебра борелевских подмножеств в $[0, t]$. Непрерывные справа М. п. прогрессивно измеримы. Существует способ сводить неоднородный случай к однородному (см. [11]), и в дальнейшем речь будет идти об однородных М. п.

Строго марковское свойство. Пусть в измеримом пространстве $(E, \mathscr{B})$ задан М. п. $X(t) = (x_t, F_t, \mathsf{P}_x)$. Функция $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ наз. *марковским моментом*, если $\{\omega : \tau \leqslant t\} \in F_t$ для всех $t \geqslant 0$. При этом множество $\Lambda \subset \Omega_\tau = \{\omega : \tau < \infty\}$ относят к семейству F_τ, если $\Lambda \cap \{\omega : \tau < t\} \in F_t$ при $t \geqslant 0$ (чаще всего F_τ интерпретируют как совокупность событий, связанных с эволюцией $X(t)$ до момента τ). Для $\Lambda \in N$ полагают

$$\theta_\tau \Lambda = \bigcup_{t \geqslant 0} [\theta_t \Lambda \cap \{\omega : \tau = t\}].$$

Прогрессивно измеримый М. п. X наз. с т р о г о м а р к о в с к и м п р о ц е с с о м (с. м. п.), если для любого марковского момента τ и всех $t \geqslant 0$, $x \in E$ и $\Lambda \in N$ соотношение

$$\mathsf{P}_x \{\theta_\tau \Lambda \mid F_\tau\} = \mathsf{P}_{x_\tau} \{\Lambda\} \tag{5}$$

(с т р о г о м а р к о в с к о е с в о й с т в о) выполняется P_x-почти наверное на множестве Ω_τ. При проверке (5) достаточно рассматривать лишь множества вида $\Lambda = \{\omega : x_s \in B\}$, где $s \geqslant 0$, $B \in \mathscr{B}$; в этом случае $\theta_\tau \Lambda = \{\omega : x_{s+\tau} \in B\}$. С. м. п. является, напр., любой непрерывный справа феллеровский М. п. в топологич. пространстве E. М. п. наз. ф е л л е р о в с к и м м а р к о в с к и м п р о ц е с с о м, если функция

$$P^t f(\cdot) = \int f(y) \, P(t, \cdot; dy)$$

непрерывна всякий раз, когда f непрерывна и ограничена.

В классе с. м. п. выделяются те или иные подклассы. Пусть марковская переходная функция $P(t, x, B)$, заданная в метрическом локально компактном пространстве E, стохастически непрерывна:

$$\lim_{t \downarrow 0} P(t, x, U) = 1$$

для любой окрестности U каждой точки $x \in E$. Тогда если операторы P^t переводят в себя класс непрерывных и обращающихся в 0 в бесконечности функций, то функции $P(t, x, B)$ отвечает стандартный М. п. X, т. е. непрерывный справа с. м. п., для к-рого 1) $F_t = \bar{F}_t$ при $t \in [0, \infty)$ и $F_t = \bigcap_{s>t} F_s$ при $t \in [0, \infty)$ и 2) $\lim_{n \to \infty} x_{\tau_n} = x_\tau$ P_x-почти наверное на множестве $\{\omega : \tau < \infty\}$, где $\tau = \lim_{n \to \infty} \tau_n$, а $\tau_n (n \geqslant 1)$ — неубывающие с ростом n марковские моменты.

Обрывающийся марковский процесс. Нередко физич. системы целесообразно описывать с помощью необрывающегося М. п., но лишь на временном интервале случайной длины. Кроме того, даже простые преобразования М. п. могут привести к процессу с траекториями, заданными на случайном интервале (см. *Функционал* от марковского процесса). Руководствуясь этими соображениями, вводят понятие обрывающегося М. п.

Пусть $\tilde{X}(t) = (\tilde{x}_t, \tilde{F}_t, \tilde{\mathsf{P}}_x)$ — однородный М. п. в фазовом пространстве $(\tilde{E}, \tilde{B})$, имеющий переходную функцию $\tilde{P}(t, x, B)$, и пусть существуют точка $e \in \tilde{E}$ и функция $\zeta : \Omega \to [0, \infty]$ такие, что $\tilde{x}_t(\omega) = e$ при $\zeta(\omega) \leqslant t$ и $\tilde{x}_t(\omega) \neq e$ в противном случае (если нет специальных оговорок, считают $\zeta > 0$). Новая траектория $x_t(\omega)$ задается лишь для $t \in [0, \zeta(\omega))$ посредством равенства $x_t(\omega) = \tilde{x}_t(\omega)$, а F_t определяется как след $\tilde{F}_t$ в множестве $\{\omega : \zeta > t\}$.

Набор $X(t) = (x_t, \zeta, F_t, \tilde{\mathsf{P}}_x)$, где $x \in E = \tilde{E} \setminus \{e\}$, наз. обрывающимся марковским процессом (о. м. п.), полученным из $\tilde{X}(t)$ с помощью обрыва (или убивания) в момент ζ. Величина ζ наз. моментом обрыва, или временем жизни, о. м. п. Фазовым пространством нового процесса служит $(E, \mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ есть след σ-алгебры $\tilde{\mathcal{B}}$ в E. Переходная функция о. м. п. — это сужение $\tilde{P}(t, x, B)$ на множество $t \geqslant 0$, $x \in E$, $B \in \mathcal{B}$. Процесс $X(t)$ наз. строго марковским процессом, или стандартным марковским процессом, если соответствующим свойством обладает $\tilde{X}(t)$. Необрывающийся М. п. можно рассматривать как о. м. п. с моментом обрыва $\zeta \equiv \infty$. Неоднородный о. м. п. определяется аналогичным образом. *М. Г. Шур.*

Марковские процессы и дифференциальные уравнения. М. п. типа броуновского движения тесно связаны с дифференциальными уравнениями параболич. типа. Переходная плотность $p(s, x, t, y)$ диффузионного процесса удовлетворяет при нек-рых дополнительных предположениях обратному и прямому дифференциальным уравнениям Колмогорова:

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \sum_{k=1}^{n} a_k(s, x) \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{k, j=1}^{n} b_{kj}(s, x) \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial s} + L(s, x) p = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k} (a_k(t, y) p) + \frac{1}{2} \sum_{k, j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} (b_{kj}(t, y) p) = L^*(t, y) p. \tag{7}$$

Функция $p(s, x, t, y)$ есть функция Грина уравнений (6) — (7), и первые известные способы построения диффузионных процессов были основаны на теоремах существования этой функции для дифференциальных уравнений (6) — (7). Для однородного по времени процесса оператор $L(s, x)=L(x)$ на гладких функциях совпадает с характеристич. оператором М. п. (см. *Переходных операторов полугруппа*).

Математич. ожидания различных функционалов от диффузионных процессов служат решениями соответствующих краевых задач для дифференциального уравнения (1). Пусть $\mathsf{E}_{s,x}(\cdot)$ — математич. ожидание по мере $\mathsf{P}_{s,x}$. Тогда функция $\mathsf{E}_{s,x}\varphi(X(T))=u_1(s, x)$ удовлетворяет при $s<T$ уравнению (6) и условию $u_1(T, x)=\varphi(x)$.

Аналогично, функция

$$u_2(s, x)=\mathsf{E}_{s,x}\int_s^T f(t, X(t))\,dt$$

удовлетворяет при $s<T$ уравнению

$$\frac{\partial u_2}{\partial s}+L(s, x)u_2=-f(s, x)$$

и условию $u_2(T, x)=0$.

Пусть τ — момент первого достижения границы ∂D области $D\subset\mathbb{R}^n$ траекторией процесса $X(t)$, $\tau\wedge T=\min(\tau, T)$. Тогда при нек-рых условиях функция

$$u_3(s, x)=\mathsf{E}_{s,x}\int_s^{\tau\wedge T} f(t, X(t))\,dt+$$
$$+\mathsf{E}_{s,x}\varphi(\tau\wedge T, X(\tau\wedge T))$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial s}+L(s, x)u=-f$$

и принимает значения φ на множестве

$$\Gamma=\{s<T,\ x\in\partial D\}\cup\{s=T,\ x\in D\}.$$

Решение 1-й краевой задачи для общего линейного параболич. уравнения 2-го порядка

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial u}{\partial s}+L(s, x)u+c(s, x)u=-f(s, x),\\ u|_\Gamma=\varphi\end{array}\right\}\qquad(8)$$

при довольно общих предположениях может быть записано в виде

$$u(s, x)=\mathsf{E}_{s,x}\int_s^{\tau\wedge T}\exp\left\{\int_s^v c(t, X(t))\,dt\right\}\times$$
$$\times f(v, X(v))\,dv+\mathsf{E}_{s,x}\left\{\exp\left\{\int_s^{\tau\wedge T} c(t, X(t))\,dt\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\varphi(\tau\wedge T, X(\tau\wedge T))\right\}.\qquad(9)$$

В случае, когда оператор L и функции c, f не зависят от s, аналогичное (9) представление возможно и для решения линейного эллиптич. уравнения. Точнее, функция

$$u(x)=\mathsf{E}_x\int_0^\tau\exp\left\{\int_0^v c(X(t))\,dt\right\}f(X(v))\,dv+$$
$$+\mathsf{E}_x\left\{\exp\left\{\int_0^\tau c(X(t))\,dt\right\}\varphi(X(\tau))\right\}\qquad(10)$$

при нек-рых предположениях есть решение задачи

$$L(x)u+c(x)u=-f(x),\quad u|_{\partial D}=\varphi.\qquad(11)$$

В случае, когда оператор L вырождается ($\det b(s, x)=0$) или граница ∂D недостаточно «хорошая», граничные значения могут и не приниматься функциями (9), (10) в отдельных точках или на целых множествах. Понятие регулярной граничной точки для оператора L имеет вероятностную интерпретацию. В регулярных точках границы граничные значения достигаются

функциями (9), (10). Решение задач (8), (11) позволяет изучать свойства соответствующих диффузионных процессов и функционалов от них.

Существуют методы построения М. п., не опирающиеся на построение решений уравнений (6), (7), напр. метод *стохастических дифференциальных уравнений*, абсолютно непрерывная замена меры и др. Это обстоятельство вместе с формулами (9), (10) позволяет вероятностным путем строить и изучать свойства краевых задач для уравнения (8), а также свойства решений соответствующего эллиптич. уравнения.

Так как решение стохастического дифференциального уравнения нечувствительно к вырождению матрицы $b(s, x)$, то вероятностные методы применялись для построения решений вырождающихся эллиптических и параболических дифференциальных уравнений. Распространение принципа усреднения Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова на стохастические дифференциальные уравнения позволило с помощью (9) получить соответствующие результаты для эллиптических и параболических дифференциальных уравнений. Нек-рые трудные задачи исследования свойств решений уравнений такого типа с малым параметром при старшей производной оказалось возможным решить с помощью вероятностных соображений. Вероятностный смысл имеет и решение 2-й краевой задачи для уравнения (6). Постановка краевых задач для неограниченной области тесно связана с возвратностью соответствующего диффузионного процесса.

В случае однородного по времени процесса (L не зависит от s) положительное решение уравнения $L^*q=0$ с точностью до мультипликативной постоянной совпадает при нек-рых предположениях со стационарной плотностью распределения М. п. Вероятностные соображения оказываются полезными и при рассмотрении краевых задач для нелинейных параболич. уравнений.

Р. З. Хасьминский.

Лит.: [1] Марков А. А., «Изв. физ.-мат. об-ва Казан. ун-та», 1906, т. 15, № 4, с. 135—56; [2] Bachelier L., «Ann. scient. École norm. supér.», 1900, v. 17, p. 21—86; [3] Колмогоров А. Н., «Math. Ann.», 1931, Bd 104, S. 415—458; рус. пер.— «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 5—41; [4] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [5] Feller W., «Ann. Math.», 1954, v. 60, p. 417—36; [6] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 1, с. 149—55; [7] Хант Дж.-А., Марковские процессы и потенциалы, пер. с англ., М., 1962; [8] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [9] Дынкин Е. Б., Основания теории марковских процессов, М., 1959; [10] его же, Марковские процессы, М., 1963; [11] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [12] Фрейдлин М. И., в кн.: Итоги науки. Теория вероятностей, математическая статистика.— Теоретическая кибернетика. 1966, М., 1967, с. 7—58; [13] Хасьминский Р. З., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 1, с. 3—25; [14] Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И., Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., 1979; [15] Blumenthal R. M., Getoor R. K., Markov processes and potential theory, N.Y.— L., 1968; [16] Getoor R. K., Markov processes: Ray processes and right processes, B., 1975; [17] Кузнецов С. Е., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 2, с. 389—93.

МАРКОВСКИЙ СТАЦИОНАРНЫЙ ПРОЦЕСС — марковский процесс, являющийся *стационарным случайным процессом*. М. с. п., отвечающий однородной марковской *переходной функции*, существует тогда и только тогда, когда существует стационарное начальное распределение $\mu(A)$, отвечающее этой функции, т. е. $\mu(A)$ удовлетворяет уравнению

$$\mu(A)=\int_X \mathsf{P}(x, t, A)\,\mu(dx).$$

Если фазовое пространство процесса X — конечное множество, то стационарное начальное распределение существует всегда, независимо от того, рассматривается процесс с дискретным ($t=0, 1, 2, \ldots$) или непрерывным временем. Для процесса с дискретным временем и счетным множеством X условие существования

стационарного распределения найдено А. Н. Колмогоровым [1]: для этого необходимо и достаточно, чтобы нашелся такой класс сообщающихся состояний $Y \subset X$, что математич. ожидание времени попадания из $y_1 \in Y$ в $y_2 \in Y$ было конечно для любых $y_i \in Y$. Этот критерий обобщается на строго марковские процессы с произвольным фазовым пространством X: для существования стационарного процесса достаточно, чтобы существовал компакт $K \subset X$ такой, что математич. ожидание времени достижения K из x конечно для всех $x \in X$. Справедливо следующее достаточное условие существования М. с. п. в терминах *Ляпунова стохастических функций*: если существует функция $V(x) \geqslant 0$, для к-рой $LV(x) \leqslant -1$ при $x \notin K$, то М. с. п., отвечающий марковской переходной функции $\mathsf{P}(x, t, A)$, существует.

В случае, когда стационарное начальное распределение μ единственно, соответствующий стационарный процесс эргодичен. В этом случае среднее по Чезаро переходных вероятностей слабо сходится к μ. При нек-рых дополнительных условиях

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}(x, t, A) = \mu(A) \quad \text{(слабо)}.$$

Стационарное начальное распределение удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова $L^*\mu = 0$, где L^* — оператор, сопряженный к инфинитезимальному оператору процесса. Напр., для диффузионных процессов L^* — сопряженный оператор к производящему дифференциальному оператору процесса. В этом случае μ имеет плотность p, относительно лебеговой меры, удовлетворяющую уравнению $L^*p = 0$. Для одномерного случая это уравнение решается в квадратурах.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний, М., 1937; [2] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] Севастьянов Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 1, с. 106—16. *Р. З. Хасьминский.*

МАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО для действительного случайного процесса $X(t)$, $t \in T \subset \mathbb{R}$, — свойство, заключающееся в том, что для любого набора $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1}$ моментов времени из T и любого борелевского множества B с вероятностью 1

$$\mathsf{P}\{X(t_{n+1}) \in B \mid X(t_n), \ldots, X(t_1)\} = \mathsf{P}\{X(t_{n+1}) \mid X(t_n)\}, \qquad (*)$$

т. е. условное распределение вероятностей для $X(t_{n+1})$ относительно величин $X(t_n), \ldots, X(t_1)$ совпадает (почти наверное) с условным распределением $X(t_{n+1})$ относительно $X(t_n)$. Это свойство интерпретируется как независимость «будущего» $X(t_{n+1})$ от «прошлого» $(X(t_{n-1}), \ldots, X(t_1))$ при фиксированном «настоящем» $X(t_n)$. Случайные процессы, удовлетворяющие свойству (*), наз. *марковскими процессами*. М. с. допускает (при нек-рых дополнительных предположениях) усиление, известное под названием «строго марковского свойства». В случае дискретного времени $T = \{1, 2, \ldots\}$ строго марковское свойство, справедливое всегда для (марковских) последовательностей, удовлетворяющих свойству (*), означает, что для всякого момента остановки τ (относительно семейства (F_n), $n \geqslant 1$, с $F_n = \sigma\{\omega : X(1), \ldots, X(n)\}$ с вероятностью единица

$$\mathsf{P}\{X(\tau+1) \in B \mid X(\tau), \ldots, X(1)\} = \mathsf{P}\{X(\tau+1) \in B \mid X(\tau)\}.$$

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973. *А. Н. Ширяев.*

МАРТИНА ГРАНИЦА в теории марковских процессов — граница фазового пространства марковского процесса или его образа в нек-ром компакте, строящемся по схеме, подобной схеме Мартина (см. [1]).

Впервые вероятностное истолкование конструкции Мартина было предложено Дж. Дубом (см. [4]), рассмотревшим случай дискретных цепей Маркова.

Пусть $P(t, x, B)$ — *переходная функция* однородного марковского процесса $X=(x_t, \zeta, F_t, \mathsf{P}_x)$, заданного в сепарабельном локально компактном пространстве E, где $t\geqslant 0$, $x\in E$, $B\in\mathscr{B}$, а $\mathscr{B}$ — семейство борелевских множеств в E. Функция $g_\alpha(x, y)\geqslant 0$, определенная для $\alpha\geqslant 0$, $x\in E$, $y\in E$ и являющаяся $(\mathscr{B}\times\mathscr{B})$-измеримой при фиксированном α, наз. функцией Грина, если для каждого $B\in\mathscr{B}$

$$\int_B g_\alpha(x, y)\, m(dy) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P(t, x, B)\, dt,$$

где m — нек-рая мера на $\mathscr{B}$. Чтобы избежать неоднозначности в определении функции Грина, в нем дополнительно требуют, напр., чтобы при любом выборе непрерывной функции $f(x)$ с компактным носителем функция

$$g_\alpha(\cdot) = \int_E f(x)\, g_\alpha(x, \cdot)\, m(dx)$$

была Λ-непрерывной (последнее означает существование непрерывной слева по t функции $F(t, \omega)$ такой, что

$$\mathsf{P}_x\{F(t, \omega)\neq g_\alpha(x_t(\omega))\} = 0, \quad x\in E, \quad t>0).$$

Фиксируя меру γ на $\mathscr{B}$ и постулируя наличие функции Грина, определяют ядро Мартина

$$K_y^\alpha(x) = g_\alpha(x, y)\, q^{-1}(y),$$

где

$$q(y) = \int_E g_0(x, y)\, \gamma(dx)$$

(при этом приходится ввести нек-рые ограничения, обеспечивающие, в частности, положительность и Λ-непрерывность $q(y)$). Если γ — единичная мера, сосредоточенная в нек-рой точке, а X — *винеровский процесс*, обрываемый в момент первого выхода из нек-рой области, то определение $K_y^0(x)$ сводится к своему аналогу из [1]. При широких условиях устанавливается существование компакта $\mathscr{E}$ («компакта Мартина»), мер $K_y^\alpha(dx)$ на $\mathscr{B}$ ($\alpha\geqslant 0$, $y\in\mathscr{E}$) и отображения $i: E\to\mathscr{E}$, для к-рых а) $i(E)$ плотно в $\mathscr{E}$; б) функции

$$K_y^\alpha(f) = \int_{\mathscr{E}} f(x)\, K_y^\alpha(dx)$$

разделяют точки и непрерывны в $\mathscr{E}$, если f пробегает совокупность непрерывных в E функций с компактными носителями, и в) мера $K_{i(y)}^\alpha(dx)$ совпадает с $K_y^\alpha(x)m(dx)$, если $y\in E$. Граница множества $i(E)$ в $\mathscr{E}$ наз. границей Мартина или границей-выходом (при изучении разложений эксцессивных мер возникает двойственный объект — граница-вход, см. [3], [4]).

Для описания свойств компакта $\mathscr{E}$ удобно привлечь h-процессы в смысле Дуба: каждой *эксцессивной функции* h можно соотнести переходную функцию

$$P^h(t, x, B) = h^{-1}(x)\int_B h(y)\, P(t, x, dy)$$

в $(E^h, \mathscr{B}^h)$, где $E^h=\{x\in E: 0<h(x)<\infty\}$, а $\mathscr{B}^h=\{A\in\mathscr{B}: A\subset E^h\}$; соответствующий ей марковский процесс и есть h-процесс. Все h-процессы вместе с X реализуются на одном и том же пространстве элементарных событий, так что они различаются лишь семействами мер $\{\mathsf{P}_x^h\}$. В $\mathscr{E}$ строится модификация x_t — непрерывный слева процесс z_t ($0<t\leqslant\zeta$), для к-рого $\mathsf{P}_x^h\{z_t\neq i(x_t)\}\equiv 0$, если

$h \in L^1(\gamma)$. В топологии компакта $\mathscr{E}$ предел $z_\zeta = \lim\limits_{t \uparrow \zeta} z_t$ существует почти наверное.

Существует множество $U \subset \mathscr{E}$ («пространство выходов») такое, что, во-первых, $\mathsf{P}_x^h\{z_\zeta \in U\} \equiv 1$ для всех $h(x)$ указанного вида, во-вторых, мера K_y^α при $y \in U$ имеет плотность $k_y^\alpha(\cdot)$ по мере m ($\alpha \geqslant 0$), причем в качестве $k_y^0(\cdot)$ можно взять эксцессивную функцию со спектральной мерой, совпадающей с сосредоточенной в y единичной мерой, и, в-третьих, $h(x)$ допускает единственное интегральное разложение вида

$$h(x) = \int_U k_y^0(x)\, \mu(dx).$$

Мера μ из этого разложения наз. спектральной мерой функции h; она дается формулой

$$\mu(B) = \int_E h(x)\, \mathsf{P}_x^h\{z_\zeta \in B\}\, \gamma(dx),$$

где B — борелевское множество в $\mathscr{E}$.

В теории марковских процессов применяются и компактификации иных типов, особенно такие, в к-рых любая функция вида

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \int_E f(y)\, P(t, x, dy), \quad \alpha > 0, \quad x \in E,$$

допускает непрерывное продолжение для достаточно обширного набора функций f.

Лит.: [1] Martin R. S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 49, p. 137—72; [2] Motoo M., в кн.: Proceedings of the fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, v. 2, pt 2, Berk.—Los Ang., 1967, p. 75—110; [3] Kunita H., Watanabe T., там же, p. 131—64; [4] Doob J. L., «J. Math. and Mech.», 1959, v. 8, № 3, 433—58; [5] Watanabe T., «Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A», 1960, v. 33, № 1, p. 39—108; [6] Хант Дж. А., «Математика», 1961, т. 5, № 5, с. 121—149; [7] Хеннекен П. Л., Тортра А., Теория вероятностей и некоторые ее приложения, пер. с франц., М., 1974; [8] Kunita H., Watanabe T., «Ill. J. Math.», 1965, v. 9, № 3, p. 485—526; [9] Шур М. Г., «Тр. Моск. ин-та электронного машиностроения», 1970, в. 5, с. 192—251; [10] Jeulin T., «Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb.», 1978, Bd 42, № 3, S. 229—60; [11] Дынкин Е. Б., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 4, с. 89—152.

М. Г. Шур.

МАРТИНА ГРАНИЦА в теории потенциала — идеальная граница *Грина пространства* Ω (см. также *Кольцевая граница*), позволяющая построить характеристич. представление положительных гармонич. функций на Ω. Пусть Ω — локально компактное, но не компактное топологич. пространство, Φ — семейство непрерывных функций $f: \Omega \to [-\infty, +\infty]$. Теорема Константинеску — Корня [2] утверждает, что существует единственное с точностью до гомеоморфизма компактное пространство $\hat{\Omega}$ со следующими свойствами: 1) Ω есть подпространство $\hat{\Omega}$, всюду плотное в $\hat{\Omega}$; 2) каждая функция $f \in \Phi$ непрерывно продолжается на $\hat{\Omega}$ до функции $\hat{f}$, разделяющей точки идеальной границы $\Delta = \hat{\Omega} \setminus \Omega$ пространства Ω относительно семейства Φ; 3) Ω есть открытое множество в $\hat{\Omega}$.

Пусть теперь Ω — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, или, вообще, пространство Грина; $G = G(x, y)$ — *Грина функция* Ω с полюсом $y \in \Omega$, точка $y_0 \in \Omega$ фиксирована. Пространство Мартина, или компактификация Мартина, $\hat{\Omega}$ области Ω получается по теореме Константинеску — Корня в том случае, если в качестве семейства Φ принимается

$$\Phi = \left\{ x \in \Omega \longrightarrow K(x, y) = \frac{G(x, y)}{G(x, y_0)};\ y \in \Omega \right\},$$

причем, по определению, $K(x_0, y_0) = 1$. М. г.— это соответствующая идеальная граница $\Delta = \hat{\Omega} \setminus \Omega$.

Топология Мартина T — это топология пространства Мартина $\hat{\Omega}$. Пространства Мартина $\hat{\Omega}'$, $\hat{\Omega}''$, соответствующие выбору различных точек $y_0', y_0'' \in \Omega$, гомеоморфны между собой. Функция $\hat{K}(\xi, y): \Delta \times \Omega \to [0, +\infty]$, являющаяся продолжением $K(x, y)$,— гармоническая по y и непрерывная по совокупности переменных (ξ, y); $\hat{\Omega}$ — метризуемое пространство. Основная теорема Мартина [1] утверждает: класс всех положительных гармонич. функций $u(y) \geqslant 0$ на Ω характеризуется представлением Мартина:

$$u(y) = \int \hat{K}(\xi, y)\, d\mu(\xi), \qquad (*)$$

где μ — нек-рая положительная мера Радона на Δ. В представлении (*) мера μ определяется по функции u неоднозначно. Гармонич. функция $v \geqslant 0$ наз. минимальной в Ω, если каждая гармонич. функция w такая, что $0 \leqslant w \leqslant v$ в Ω, пропорциональна v. Минимальные гармонич. функции $v \not\equiv 0$ пропорциональны $\hat{K}(\xi, y)$, соответствующие точки $\xi \subset \Delta$ наз. минимальными, множество всех минимальных точек $\Delta_1 \subset \Delta$ наз. минимальной границей Мартина. Подчиняя меру μ в (*) дополнительному условию, чтобы она была сосредоточена на Δ_1, получают каноническое представление Мартина:

$$u(y) = \int \hat{K}(\xi, y)\, d\mu_1(\xi),$$

в к-ром мера $\mu_1 \geqslant 0$ определяется по u однозначно.

Примеры. 1) Если $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < R\}$ — шар радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, то

$$\hat{K}(\xi, y) = \frac{R^{n-2}(R^2 - |y|^2)}{|\xi - y|^2}$$

есть ядро Пуассона, $\hat{\Omega}$ совпадает с евклидовым замыканием, $\hat{\Omega} = \bar{\Omega}$, М. г. Δ есть сфера $\{\xi \in \mathbb{R}^n: |\xi| = R\}$, все точки к-рой минимальные. Представление (*) в этом случае сводится к формуле Пуассона — Герглотца (см. *Интегральное представление аналитической функции, Пуассона интеграл*).

2) М. г. Δ совпадает с евклидовой границей $\Gamma = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ всякий раз, когда Γ есть достаточно гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

3) Если Ω — односвязная плоская область, то М. г. Δ совпадает с множеством *граничных элементов*, или простых концов по Каратеодори. Таким образом, элементы М. г. $\xi \in \Delta$ можно рассматривать как обобщение понятия простых концов для размерностей $n \geqslant 2$.

Лит.: [1] Martin R. S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 49, p. 137—72; [2] Constantinescu C., Cornea A., Ideale Ränder Riemannscher Flächen, B. [u. a.], 1963; [3] Брело М., О топологиях и границах в теории потенциала, пер. с англ., М., 1974.

Е. Д. Соломенцев.

МАРТИНГАЛ — стохастическая последовательность $X = (X_t, F_t)$, $t \in T \subseteq [0, \infty)$, заданная на вероятностном пространстве (Ω, F, P) с выделенным на нем неубывающим семейством σ-алгебр $(F_t)_{t \in T}$, $F_s \subseteq F_t \subseteq F$, $s \leqslant t$, такая, что $\mathsf{E}|X_t| < \infty$, X_t являются F_t-измеримыми и

$$E(X_t \mid F_s) = X_s \qquad (1)$$

(с вероятностью 1, или почти наверное). В случае дискретного времени $T = \{1, 2, \ldots\}$, в случае непрерывного времени $T = [0, \infty)$. Родственными понятиями являются стохастич. последовательности, образующие субмартингал, для к-рых

$$\mathsf{E}(X_t \mid F_s) \geqslant X_s,$$

и супермартингал, для к-рых

$$\mathsf{E}(X_t \mid F_s) \leqslant X_s.$$

Пример 1. Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с $\mathsf{E}\xi_i=0$, то $X=(X_n, F_n)$ с $X_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$, $F_n=\sigma\{\omega:\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ является М., $n\geqslant 1$.

Пример 2. Пусть $Y=(Y_n, F_n)$ — М. (субмартингал), $V=(V_n, F_n)$ — нек-рая предсказуемая последовательность (т. е. V_n являются не только F_n-измеримыми, но и F_{n-1}-измеримыми, $n\geqslant 1$, $F_0=\{\varnothing, \Omega\}$ и

$$(VY)_n=V_1Y_1+\sum_{k=2}^{n} V_k\,\Delta Y_k, \quad \Delta Y_k=Y_k-Y_{k-1}.$$

Тогда если величины $(VY)_n$ интегрируемы, то стохастич. последовательность $((VY)_n, F_n)$ образует М. (субмартингал). В частности, если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, соответствующих схеме Бернулли

$$\mathsf{P}\{\xi_i=\pm 1\}=1/2, \quad Y_k=\xi_1+\ldots+\xi_k,$$
$$F_k=\sigma\{\omega:\xi_1, \ldots, \xi_k\}$$

$$V_k=\begin{cases} 2, & \text{если } \xi_1=\ldots=\xi_{k-1}=1; \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{2}$$

то $((VY)_n, F_n)$ образует М. Эта стохастич. последовательность служит математич. моделью игры, в к-рой игрок выигрывает единицу капитала, если $\xi_k=+1$, и проигрывает единицу, если $\xi_k=-1$, а V_k — величина его ставки в k-й партии. Игровой смысл функции V_k, определяемой равенством (2), состоит в том, что игрок увеличивает ставку вдвое при проигрыше и прекращает игру при первом выигрыше. Такая система игры в игровой практике носит название М., что и послужило причиной возникновения математич. термина «мартингал».

Один из основных фактов теории М. состоит в том, что структура М. (субмартингалов) $X=(X_t, F_t)$ сохраняется при случайной замене времени. Точная формулировка этого факта (называемого теоремой о преобразовании свободного выбора) состоит в следующем: если τ_1 и τ_2 — два конечных марковских момента, $\mathsf{P}\{\tau_1\leqslant\tau_2\}=1$ и

$$\mathsf{E}\,|X_{\tau_i}|<\infty, \quad \varliminf_t \int_{\{\tau_i>t\}} |X_t|\,d\mathsf{P}=0, \tag{3}$$

то $\mathsf{E}\,(X_{\tau_2}\,|\,F_{\tau_1})_{(\geqslant)}=X_{\tau_1}$ (с вероятностью 1, или почти наверное), где

$$F_{\tau_1}=\{A\in F: A\cap\{\tau_1\leqslant t\}\in F_t, \quad \forall t\in T\}.$$

В качестве частного случая отсюда следует *Вальда тождество*:

$$\mathsf{E}\,(\xi_1+\ldots+\xi_\tau)=\mathsf{E}\xi_1\mathsf{E}\tau.$$

К числу основных результатов теории М. относятся неравенства Дуба: если $X=(X_n, F_n)$ — неотрицательный субмартингал,

$$X_n^*=\max_{1\leqslant j\leqslant n} X_j,$$

$$\|X_n\|_p=(\mathsf{E}\,|X_n|^p)^{1/p}, \quad p\geqslant 1, \quad n\geqslant 1,$$

то

$$\mathsf{P}\{X_n^*\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathsf{E}X_n}{\varepsilon}, \tag{4}$$

$$\|X_n\|_p\leqslant\|X_n^*\|_p\leqslant\frac{p}{p-1}\|X_n\|_p, \quad p>1, \tag{5}$$

$$\|X_n^*\|_p\leqslant\frac{e}{e-1}\,[1+\|X_n\ln^+ X_n\|_p], \quad p=1. \tag{6}$$

Если $X=(X_n, F_n)$ — М., то для случая $p>1$ справедливы неравенства Буркхольдера (обобщающие неравенства Хинчина и Марцинкевича —

Зигмунда для сумм независимых случайных величин):

$$A_p \| \sqrt{[X]_n} \|_p \leqslant \| X_n \|_p \leqslant B_p \| \sqrt{[X]_n} \|_p, \qquad (7)$$

где A_p и B_p — нек-рые универсальные константы (не зависящие от X и от n), в качестве к-рых можно взять

$$A_p = \left[18p^{3/2}/(p-1)\right]^{-1}, \quad B_p = 18p^{3/2}/(p-1)^{1/2}$$

и

$$[X]_n = \sum_{i=1}^{n} (\Delta X_i)^2, \quad X_0 = 0.$$

С учетом (5) из (7) следует, что $(p>1)$

$$A_p \| \sqrt{[X]_n} \|_p \leqslant \| X_n^* \|_p \leqslant \tilde{B}_p \| \sqrt{[X]_n} \|_p, \qquad (8)$$

где

$$\tilde{B}_p = 18p^{5/2}/(p-1)^{3/2}.$$

На случай $p=1$ обобщаются неравенства (8). Именно, имеют место неравенства Дэвиса: существуют такие универсальные постоянные A и B, что

$$A \| \sqrt{[X]_n} \|_1 \leqslant \| X_n^* \|_1 \leqslant B \| \sqrt{[X]_n} \|_1.$$

Для доказательства разного рода теорем о сходимости субмартингалов с вероятностью единица ключевую роль играет неравенство Дуба для математического ожидания $\mathsf{E}\beta_n(a, b)$ числа пересечений $\beta_n(a, b)$ субмартингалов $X=(X_n, F_n)$ интервала $[a, b]$ снизу вверх за n шагов

$$\mathsf{E}\beta_n(a, b) \leqslant \frac{\mathsf{E}|X_n| + |a|}{b-a}. \qquad (9)$$

Основной результат о сходимости субмартингалов содержится в теореме Дуба: если $X=(X_n, F_n)$ — субмартингал и $\sup_n E|X_n| < \infty$, то с вероятностью единица существует $\lim_{n\to\infty} X_n (= X_\infty)$ и $\mathsf{E}|X_\infty| < \infty$. Если субмартингал X равномерно интегрируемый, то помимо сходимости с вероятностью единица имеет место и сходимость в смысле L_1, т. е.

$$\mathsf{E}|X_n - X_\infty| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Следствием этого результата является теорема Леви о непрерывности условных математических ожиданий: если $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, то

$$\mathsf{E}(\xi \mid F_n) \longrightarrow \mathsf{E}(\xi \mid F_\infty),$$

где $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots$ и $F_\infty = \sigma(\bigcup_n F_n)$.

Естественным обобщением М. является понятие локального мартингала, т. е. такой стохастич. последовательности $X=(X_t, F_t)$, для к-рой найдется последовательность $(\tau_m)_{m\geqslant 1}$ конечных марковских моментов, $\tau_m \uparrow \infty$ (с вероятностью 1 или почти наверное), $m \geqslant 1$, таких, что для каждого $m \geqslant 1$ «остановленные» последовательности

$$X^{\tau_m} = \left(X_{t\wedge\tau_m} I(\tau_m > 0), F_t\right)$$

являются М. В случае дискретного времени каждый локальный М. $X=(X_n, F_n)$ есть мартингальное преобразование, т. е. представим в виде $X_n = (VY)_n$, где V — нек-рая предсказуемая последовательность, а Y — нек-рый М.

Каждый субмартингал $X=(X_t, F_t)$ допускает и притом единственное разложение Дуба — Мейера $X_t = M_t + A_t$, где $M=(M_t, F_t)$ — М., а $A=(A_t, F_t)$ — предсказуемый процесс. В частности, если $m=(m_t, F_t)$ — квадратично-интегрируемый М., то его квадрат $m^2=(m_t^2, F_t)$ является субмартингалом, для к-рого в его разложении Дуба — Мейера $m_t^2 = M_t + \langle m\rangle_t$ процесс $\langle m\rangle = (\langle m\rangle_t, F_t)$ наз. квадратической характеристикой мартингала m. Для каждого квадратично-интегрируемого М. m и предска-

зуемого процесса $V=(V_t,\ F_t)$ таких, что $\int_0^t V_s^2 d\langle m\rangle_s < \infty$ (с вероятностью 1, или почти наверное), $t>0$, можно определить стохастич. интеграл

$$(Vm)_t=\int_0^t V_s dm_s,$$

к-рый является локальным М. В случае винеровского процесса $W=(W_t,\ F_t)$, являющегося квадратично-интегрируемым М., $\langle m\rangle_t=t$ и стохастич. интеграл $(VW)_t$ есть не что иное, как стохастич. интеграл Ито по винеровскому процессу.

В случае непрерывного времени неравенства Дуба, Буркхольдера и Дэвиса также остаются в силе (для процессов непрерывных справа и имеющих пределы слева).

Лит.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971. *А. Н. Ширяев.*

МАРЦИНКЕВИЧА ПРОСТРАНСТВО — банахово пространство M_ψ всех измеримых на полуоси $(0,\ \infty)$ функций (классов) с конечной нормой

$$\|x\|_{M_\psi}=\sup_{0<h<\infty}[\psi(h)]^{-1}\int_0^h x^*(s)\,ds, \qquad (1)$$

где $x^*(s)$ — перестановка функции $x(t)$, т. е. невозрастающая непрерывная слева функция, равноизмеримая с $|x(t)|$, а $\psi(t)$ — нек-рая положительная неубывающая на $(0,\ \infty)$ функция, для к-рой $\psi(t)/t$ не возрастает (в частности, $\psi(t)$ — неубывающая вогнутая функция); введено И. Марцинкевичем [1].

Если $\psi(t)$ ограничена снизу и сверху положительными константами, то пространство M_ψ изоморфно L^1. Во всех других случаях оно не сепарабельно. Пространство M_ψ является интерполяционным между L^1 и L^∞ с интерполяционной константой 1.

На пространстве M_ψ определен функционал

$$F(x)=\sup_{0<t<\infty} t[\psi(t)]^{-1}x^*(t),$$

к-рый всегда не превосходит $\|x\|_{M_\psi}$. Функционал $F(x)$ не обладает свойствами нормы; он эквивалентен норме $\|x\|_{M_\psi}$ тогда и только тогда, когда при $s>1$

$$\inf_{0<t<\infty}\frac{\psi(st)}{\psi(t)}>1$$

(в частности, для $\psi(t)=t^\alpha$ при $0<\alpha\leqslant 1$).

Пространство M_ψ возникло впервые в интерполяционной теореме Марцинкевича (с функционалом $F(x)$) и связано с *интерполированием операторов* слабого типа. Оно обладает экстремальным свойством: является наиболее широким среди всех симметричных пространств E, для к-рых фундаментальная функция совпадает с $h/\psi(h)$, т. е. $\|\chi_{(0,\ h)}\|_E=h/\psi(h)$, где $\chi_{(0,\ h)}$ — характеристич. функция интервала $(0,\ h)$. Если

$$\psi(+0)=0,\quad \psi(\infty)=\infty, \qquad (2)$$

то M_ψ изоморфно (изометрично, если ψ вогнута) сопряженному пространству к пространству Лоренца с нормой

$$\|y\|_{\Lambda_\psi}=\int_0^\infty y^*(s)\,d\tilde{\psi}(s),$$

где $\tilde{\psi}(s)$ — наименьшая вогнутая мажоранта $\psi(s)$. При условиях (2) в M_ψ выделяется подпространство M_ψ^0, состоящее из всех функций из M_ψ, для к-рых

$$\lim_{h\to 0,\ \infty}[\psi(h)]^{-1}\int_0^h x^*(t)\,dt=0.$$

Если, кроме того, $\lim\limits_{t\to 0}\psi(t)/t=\infty$, то подпространство

M^0_ψ совпадает с замыканием в M_ψ множества всех финитных ограниченных функций. При этом сопряженное к пространству M^0_ψ изоморфно пространству Лоренца и, следовательно, M_ψ изоморфно второму сопряженному пространству к M^0_ψ.

Если $\mathfrak{M}$ — пространство, на σ-алгебре измеримых множеств к-рого определена σ-конечная мера μ, то для каждой измеримой функции $x(m)$ определена ее перестановка $x^*(s)$, $0<s<\infty$, так что можно ввести М. п. $M_\psi(\mathfrak{M}, \mu)$ с нормой (1).

Лит.: [1] Marcinkiewicz J., «C. r. Acad. sci.», 1939, t. 208, p. 1272—73; [2] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., Интерполяция линейных операторов, М., 1978; [3] Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974.

С. Г. Крейн.

МАССА — физическая величина, определяющая инертные и гравитационные свойства материи. В классич. механике инертная масса — постоянный для данного тела коэффициент пропорциональности между силой и ускорением во втором законе Ньютона. Гравитационная масса определяется как коэффициент пропорциональности в законе всемирного тяготения. Согласно принципу эквивалентности инертная и гравитационная М. пропорциональны друг другу, а при обычном выборе систем единиц — равны. В классич. физике М. аддитивна — М. системы равна сумме М. ее частей. В специальной теории относительности М. (т. н. масса покоя) может быть определена как коэффициент пропорциональности в формуле, связывающей импульс тела p и его скорость v

$$p=\frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

где c — скорость света в вакууме. Иногда вводят величину

$$m_{\text{дв.}}=\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

наз. массой движения тела. Можно считать, что в теории относительности импульс и скорость связаны классич. формулой $p=m_{\text{дв.}}\cdot v$, но М. зависит от скорости. М. тела связана с его энергией E соотношением $E=mc^2$. В относительности теории М. не аддитивна: М. устойчивой системы меньше суммы М. ее частей на величину $\Delta m=\Delta E/c^2$, где ΔE — энергия связи системы, равная той энергии, к-рая выделилась при образовании системы. Величина Δm наз. дефектом массы. М. покоя всех известных физич. тел неотрицательна (равна нулю, напр. М. покоя фотона), однако иногда телам приписывается отрицательная масса.

Д. Д. Соколов.

МАССА И КОМАССА — сопряженные *нормы* в нек-рых двойственных друг другу векторных пространствах.

1) Масса r-вектора α — число

$$|\alpha|_0=\inf\left\{\sum_i|\alpha_i|:\alpha=\sum\alpha_i,\ \alpha_i\text{ — простые }r\text{-векторы}\right\}.$$

Комасса r-ковектора ω — число

$$|\omega|_0=\sup_\alpha\{|\omega\cdot\alpha|,\ \alpha\text{ — простые }r\text{-векторы},\ |\alpha|=1\}.$$

Здесь $|\cdot|$ — стандартная норма r-вектора, $\omega\cdot\alpha$ — скалярное произведение вектора и ковектора.

Масса $|\alpha|_0$ и комасса $|\omega|_0$ — сопряженные нормы соответственно в пространствах r-векторов $V_{[r]}$ и r-ковекторов $V^{[r]}$, при этом:

а) $$|\omega|_0=\sup_\alpha\{|\omega\cdot\alpha|:|\alpha|_0=1\},$$

$$|\alpha|_0=\sup_\omega\{|\omega\cdot\alpha|:|\omega|_0=1\};$$

б) $$|\alpha|_0\geqslant\alpha,\quad|\omega|_0\geqslant\omega,$$

и равенства имеют место в том и только в том случае, когда $\alpha(\omega)$ — простой r-(ко)вектор;

в) $|\alpha\vee\beta|_0\leqslant|\alpha|_0|\beta|_0$, $|\omega\vee\zeta|_0\leqslant B|\omega|_0|\zeta|_0$

для внешних произведений $\vee$, причем для простого поликовектора ω (или ξ) $B=1$, а в общем случае $B=C_r^{r+s}$, если $\omega\in V^{[r]}$, $\xi\in V^{[s]}$;

г) $|\omega\wedge\alpha|_0\leqslant\tilde{B}|\omega|_0|\alpha|_0$

для внутренних произведений $\wedge$, причем $\tilde{B}=1$ при $r\geqslant s$ и $\tilde{B}=C_s^r$ при $r\leqslant s$, $\omega\in V^{[r]}$, $\alpha\in V_{[s]}$.

Эти определения позволяют определить М. и к. для сечений соответствующих расслоений, стандартными слоями к-рых являются $V^{[r]}$ и $V_{[r]}$. Напр., к о м а с с а ф о р м ы ω в области $G\subset E^n$ равна

$$|\omega|_0=\sup\{|\omega(p)|_0,\ p\in G\}.$$

2) М а с с а п о л и э д р а л ь н о й ц е п и $A=\sum a_i\sigma_i^r$ равна

$$|A|=\sum|a_i|\,|\sigma_i^r|,$$

где $|\sigma_i^r|$ — объем клетки σ_i^r. Для произвольной цепи массу (конечную или бесконечную) можно определить несколькими способами, к-рые для бемольной цепи (см. *Бемольная норма*) и диезной цепи (см. *Диезная норма*) дают одно и то же значение массы.

3) К о м а с с а (бемольной, в частности диезной) к о ц е п и X определяется стандартным образом:

$$|X|=\sup_{A\neq 0}\frac{|X\cdot A|}{|A|},$$

где A — полиэдральная цепь, $X\cdot A$ — значение коцепи X на цепи A.

Лит. см. при ст. *Бемольная норма*. *М. И. Войцеховский.*

МАССИВНОЕ МНОЖЕСТВО — множество M топологич. пространства X, являющееся пересечением счетного числа открытых плотных в X подмножеств. Если каждое М. м. плотно в X, то X оказывается *Бэра пространством*. *М. И. Войцеховский.*

МАССОВАЯ ПРОБЛЕМА, а л г о р и т м и ч е с к а я п р о б л е м а,— проблема нахождения алгоритма для решения бесконечной серии однотипных задач, зависящих от нек-рого параметра. Простейшие примеры М. п.: сложить два данных десятичных числа, умножить два данных числа, проверить, является данное целое число простым или нет, найти производную данной функции, разложить данную функцию в степенной ряд и т. д. Если искомый алгоритм не существует, то говорят, что рассматриваемая М. п. неразрешима.

Проблему нахождения алгоритма, решающего данную М. п., иногда называют п р о б л е м о й р а з р е ш и м о с т и. Этот несколько неудачный термин исторически впервые появился в связи с проблемой распознавания выводимости формул в классическом исчислении предикатов. Вообще же говоря, под проблемой разрешимости данной М. п. естественно считать вопрос о том, разрешима или нет эта М. п., т. е. существует или нет искомый алгоритм.

См. также *Алгоритмическая проблема*. *С. И. Адян.*

МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СИСТЕМА — понятие, к-рое включает в себя случайный «входящий» поток требований (вызовов, клиентов), нуждающихся в «обслуживании», и механизм (алгоритм), осуществляющий это «обслуживание».

Типичным примером М. о. с. являются автоматич. телефонные станции, на к-рые случайным образом поступают требования — вызовы абонентов (входящий поток вызовов), а механизм обслуживания состоит из

фиксированного числа n каналов (линий) связи, каждый из к-рых остается занятым под обслуживание очередного вызова случайное время, равное длительности разговора. Если все n каналов заняты, то вызов получает «отказ». Механизм (алгоритм) обслуживания может включать в себя также указания, на какую из свободных линий следует направлять очередной вызов, предложение ждать, если требуемый абонент занят, и др.

Существуют и системы другого типа, когда каждое требование непременно должно быть обслужено, как это имеет место, напр., в потоке самолетов, прибывающих в аэропорт для посадки, или в потоке задач (программ), к-рые должны быть реализованы на электронно-вычислительной машине.

«Случайную» часть М. о. с. удобно описывать с помощью случайных последовательностей или процессов. Наиболее простые М. о. с. можно описывать двумерными управляющими случайными последовательностями

$$\{\tau_j^e,\ \tau_j^s;\ 0 \leqslant j < \infty\}$$

неотрицательных случайных величин. Последовательность $\{\tau_j^e\}$ определяет поток вызовов e: она указывает случайные моменты времени

$$\tau_0^e,\ \tau_0^e+\tau_1^e,\ \tau_0^e+\tau_1^e+\tau_2^e,\ \ldots,$$

в к-рые в систему поступают требования, подлежащие обслуживанию. Эквивалентным образом входной поток можно характеризовать случайным процессом $\{e(t);\ t \geqslant 0\}$; значение $e(t)$ указывает число вызовов, поступивших в систему к моменту времени t. Вторая последовательность $\{\tau_j^s\}$ описывает процесс обслуживания s: случайная величина τ_j^s означает время, к-рое тратится на обслуживание вызова с номером j. Обслуженные вызовы выбывают из рассмотрения.

Весьма распространено описание управляющих последовательностей с помощью маркированных точечных процессов, в к-рых τ_j^e представляют собой интервалы между точками, а τ_j^s — марки этих точек.

Задание управляющей последовательности не определяет однозначно поведение системы. Необходимо задать еще алгоритм обслуживания — правило, которое определяет моменты начала обслуживания и поведение вызовов в зависимости от состояния системы.

Многообразие алгоритмов обслуживания порождает чрезвычайно много различных видов систем обслуживания. Ниже приведена классификация простейших из них.

I. Системы с ожиданием (или системы с очередью). Вызовы, поступившие в систему и не принятые немедленно к обслуживанию, накапливаются, образуя «очередь», ожидающую обслуживания. В дальнейшем вызовы обслуживаются в порядке поступления. Система занята в момент времени t, если в этот момент есть очередь или происходит обслуживание очередного вызова. В противном случае система наз. свободной в момент времени t. Различают два типа систем с очередью.

I_1. Обычные системы. Если система свободна, то она начинает действовать (обслуживать очередной вызов) немедленно при поступлении вызова. Если система занята, то обслуживание очередного вызова начинается после окончания обслуживания предыдущего. Такие системы наз. также полнодоступными.

I_2. Системы с автономным обслуживанием. Здесь обслуживание начинается только в моменты времени $0,\ \tau_1^s,\ \tau_1^s+\tau_2^s,\ \ldots$

II. Системы с ограниченной очередью. Считают, что длина $q(t)$ очереди в момент t равна $n \geqslant 1$, если один вызов в этот момент находится на обслуживании и $n-1$ вызовов ждут обслуживания. Пусть $q_n = q(\tau_0^e + \ldots + \tau_{n-1}^e)$ длина очереди в момент прихода n-го вызова (без учета этого вызова). В системах с ограниченной очередью вызов с номером n «получает отказ» и выбывает из рассмотрения, если в момент его прихода длина q_n очереди оказывается равной максимальному допустимому значению $N \geqslant 1$. Число N является существенной характеристикой системы. Если $N = \infty$, то получаются обычные системы с неограниченной очередью.

Рассматривают также системы со случайной ограниченной очередью и системы со случайным ограниченным временем ожидания.

III. Системы с ограниченной очередью в случае $N = 1$ наз. системами с отказами. Для систем с отказами автономное обслуживание обычно не рассматривается.

В каждом из рассмотренных простейших видов систем задание управляющей последовательности полностью определяет эволюцию системы. Другими словами, для каждого элементарного события ω и любого t однозначно определено состояние системы к моменту времени t.

Помимо перечисленных выше типов систем обслуживания, возможны и другие, более сложные системы. Они связаны с более сложными управляющими последовательностями и алгоритмами обслуживания.

IV. Групповой входной поток и групповое обслуживание. Управление такими системами может происходить с помощью четырехмерных управляющих последовательностей

$$\{\tau_j^e, \nu_j^e, \tau_j^s, \nu_j^s;\ j \geqslant 0\},$$

где ν_j^e и ν_j^s — неотрицательны и целочисленны. Смысл новых переменных следующий: вызовы поступают группами объемов $\nu_0^e, \nu_1^e, \ldots$ (соответственно в моменты времени $\tau_0^e, \tau_0^e + \tau_1^e, \ldots$); обслуживание также происходит группами: в первой партии обслуживается ν_0^s вызовов, во второй ν_1^s вызовов и т. д. (объемы этих групп могут быть и меньше, если в очереди не окажется достаточного количества вызовов). При этом на обслуживание k-й партии тратится время τ_k^s.

Для систем с групповым входом и обслуживанием возможны те же алгоритмы обслуживания, к-рые были описаны выше.

V. Многоканальные системы. В таких системах обслуживание может вестись одновременно в $m \geqslant 1$ каналах, так что обслуживание очередного вызова (или партии вызовов при групповом обслуживании) может начаться прежде, чем закончится обслуживание предыдущей. Алгоритмы обслуживания многоканальных систем выглядят аналогично для всех рассмотренных типов обслуживания (каждый канал действует как самостоятельное обслуживающее устройство). Надо лишь дополнить эти алгоритмы указаниями, в какой канал должны направляться вызовы, если свободными оказались одновременно несколько каналов. При этом по-прежнему на обслуживание i-й партии (объема $\leqslant \nu_i^s$) тратится время τ_i^s.

Многоканальная система наз. системой с отказами, если вызовы, в момент прихода к-рых все каналы оказались занятыми, получают отказ и выбывают из рассмотрения.

Иногда для того чтобы упростить природу управляющих последовательностей для многоканальных

систем, удобно задавать не две, а $m+1$ управляющих двумерных последовательностей

$$(\tau_i^e,\ \nu_i^e),\ (\tau_i^{s1},\ \nu_i^{s1}),\ \ldots,\ (\tau_i^{sm},\ \nu_i^{sm}),$$

так что k-й канал обслуживания управляется последовательностью $(\tau_i^{sk},\ \nu_i^{sk})$, $k=1,\ \ldots,\ m$. Напр., τ_i^{sk} есть время обслуживания партии вызовов, к-рая является i-й в k-м канале.

Приведенная классификация охватывает далеко не все виды систем обслуживания. Широкое распространение имеют, напр., системы, у к-рых вызовы подразделяются на два или более типов и одни типы имеют приоритет в обслуживании перед другими (такая ситуация возникает, когда стоимость простоя одних вызовов выше, чем у других). Характеризация таких систем требует введения в рассмотрение нескольких входящих потоков вызовов — по числу типов требований. К системам с приоритетным обслуживанием можно отнести также системы, у к-рых обслуживающее устройство требует перерывов в работе. Закон появления и длительности перерывов можно характеризовать специальным входным потоком.

В литературе по *массового обслуживания теории* рассмотрены и др. специальные виды систем обслуживания. Однако при этом следует иметь в виду, что:

1) основные и наиболее распространенные типы М. о. с. находятся в рамках приведенной выше классификации;

2) методы исследования М. о. с. для различных систем, как правило, отличаются мало и в достаточной степени иллюстрируются методами изучения «основных» систем; в основе этих методов лежит аппарат теории вероятностей, как общие его разделы, так и специально разработанные.

Основной целью изучения является исследование распределений различных параметров, характеризующих состояние системы (напр., длины очереди, времени ожидания начала обслуживания, вероятности данному вызову получить отказ и т. д.). Главный интерес при этом представляют эргодич. теоремы, описывающие поведение указанных характеристик через большой промежуток времени. Напр., одной из характеристик эффективности работы автоматической телефонной станции является доля вызовов, получивших отказ, т. е. предел p при $t\to\infty$ (если он существует) отношения $r(t)/e(t)$ числа $r(t)$ вызовов, потерянных за время t, к общему числу $e(t)$ вызовов, поступивших за это время. Этот предел можно с достаточными на то основаниями называть в е р о я т н о с т ь ю о т к а з а. Показателями, характеризующими системы с ожиданием, являются предельные при $n\to\infty$ распределения вероятностей $\mathsf{P}\{w_n<x\}$ и $\mathsf{P}\{q_n<x\}$ для времени w_n, к-рое n-й вызов ожидал начала обслуживания с момента прихода, и для длины q_n очереди в момент появления в системе n-го вызова.

Метод исследования часто состоит в отыскании марковских процессов или последовательностей, характеризующих состояние системы. Если, напр., случайные величины τ_j^e и τ_j^s показательно распределены и при разных индексах независимы, то «процесс очереди» $q(t)$ будет марковским и допускает описание с помощью простых дифференциальных уравнений для стационарного распределения. В других случаях обычно пытаются построить случайные моменты времени $t_1,\ t_2,\ \ldots$ такие, что $q(t_n)$ или значения других характеристик (напр., времени ожидания), взятые в моменты $t_1,\ t_2,\ \ldots$, образовывали бы цепь Маркова. Это т. н. метод вложенной цепи Маркова. Этот метод часто используется в модифицированном виде, когда строятся полумарковские процессы, описывающие интересующие нас состояния системы.

В более сложных случаях приходится использовать асимптотич. методы (см. *Массового обслуживания теория*) или прибегать к моделированию случайных процессов, описывающих поведение М. о. с., по *Монте-Карло методу*.

В статьях *Массового обслуживания система* с ожиданием и одним каналом обслуживания, *Массового обслуживания система* с ожиданием многоканальная, *Массового обслуживания система* с отказами, *Массового обслуживания система* (входящий поток вызовов) более подробно рассматриваются основные виды систем обслуживания и входные потоки. В этих статьях приняты следующие обозначения.

E — класс последовательностей независимых случайных величин с показательным распределением. Запись $\{\tau_j^e\}\in E$ означает, что

$$\mathsf{P}\{\tau_j^e > x\} = e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0.$$

Запись $\{\xi_j\}\in G_I$ означает, что случайные величины ξ_j независимы и одинаково распределены (само распределение может быть произвольным). Соотношения вида $\{\tau_j^e\}\in E$ или $\{\tau_j^s\}\in G_I$ обычно предполагают также, что управляющая последовательность $\{\tau_j^e\}$ не зависит от остальных управляющих последовательностей.

Класс стационарных в узком смысле последовательностей обозначен G_S.

Приведенные обозначения могут применяться и к многомерным последовательностям. Напр., $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}\in G_I$ означает, что двумерная последовательность стационарна и составлена из независимых векторов.

Для простоты изложения, как правило, ограничиваются рассмотрением «ординарных» входных и выходных процессов, когда $\nu_j^e \equiv \nu_j^s \equiv 1$ (вызовы поступают и обслуживаются по одному). Возможности обобщений на «неординарный» случай (вызовы поступают и обслуживаются группами: $\nu_j^e \not\equiv 1$ или $\nu_j^s \not\equiv 1$) оговаривают отдельно.

Кроме того, природа управляющих последовательностей будет простой и однородной, если выделять из них начальные условия. Именно, рассматривают управляющие последовательности $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}$ при $1 \leqslant j < \infty$ и считают, что $q(0)=0$, а первый вызов пришел в систему в момент $\tau_0^e = 0$. Если управление задается входным процессом $e(t)$, то фиксация τ_0^e не производится.

Лит. см. при ст. *Массового обслуживания теория*.

А. А. Боровков.

МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СИСТЕМА; в х о д я щ и й п о т о к в ы з о в о в — случайный процесс, заданный тем или иным образом и описывающий поступление вызовов в систему обслуживания. Входящий поток определяется обычно случайной последовательностью $\{\tau_j^e, \nu_j^e\}$, где τ_j^e, $j=1, 2, \ldots$, указывают интервалы между поступлениями в систему групп требований объемов соответственно $\nu_1^e \geqslant 1$, $\nu_2^e \geqslant 1, \ldots$ Если $\nu_j^e \equiv 1$, то поток наз. о р д и н а р н ы м. Эквивалентным образом входящий поток можно задавать с помощью точечного процесса или процесса $\{e(t); t \geqslant 0\}$, указывающего количество вызовов, поступивших в систему к моменту времени t. Можно считать для определенности, что $e(t) = e(t-0)$.

Наиболее распространенное требование, к-рое обычно предъявляется к входному потоку, состоит в его стационарности. Это условие может быть двояким: либо требуется стационарность в узком смысле последовательности $\{\tau_j^e, \nu_j^e\}$ (обозначается $\{\tau_j^e, \nu_j^e\}\in G_S$), либо требуется, чтобы процесс $e(t)$ был процессом со стационарными в узком смысле приращениями (обо-

значается $\{e(t)\}\in G_{IS}$). Эти два требования, вообще говоря, не совпадают.

Интенсивностью стационарного потока наз. число

$$\mu = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathsf{E}\,(e(t)-e(0))}{t}.$$

Если $\{e(t)\}\in G_{IS}$, то

$$\mu = \mathsf{E}\,(e(t+1)-e(t)) = \mathsf{E}\,(e(1)-e(0)),$$

так что μ равно среднему числу вызовов, поступивших в систему за единицу времени. Если последовательность $\{\tau_j^e\}$ стационарна и эргодична и $\{\nu_j^e\}\in G_J$, то

$$\mu = \frac{\mathsf{E}\nu_j^e}{\mathsf{E}\tau_j^e}.$$

В остальных случаях связь μ с распределением последовательности $\{\tau_j^e,\ \nu_j^e\}\in G_S$ может быть более сложной.

Пусть дан процесс $\{e(t)\}\in G_{IS}$ с интенсивностью μ и с начальным значением $e(0)=0$. С числом μ тесно связан другой параметр входного потока, определяемый равенством

$$\alpha = \lim_{t\to 0} \frac{\mathsf{P}\{e(t)\geqslant 1\}}{t}.$$

Этот предел всегда существует и $\alpha\leqslant\mu$. Если $\mu<\infty$, то $\alpha=\mu$ тогда и только тогда, когда входной поток ординарен.

При изучении свойств входного потока часто используются т. н. функции Пальма

$$\varphi_k(t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{\mathsf{P}\{e(t+\tau)-e(\tau)=k,\ e(\tau)\geqslant 1\}}{\mathsf{P}\{e(\tau)\geqslant 1\}}, \qquad (1)$$

$$k=0,\ 1,\ \ldots$$

(здесь $e(0)=0$), к-рые имеют смысл условных вероятностей того, что на интервале $(0, t)$ появится k вызовов при условии, что в момент времени 0 пришел вызов. С распределением $e(t)$ функции $\varphi_k(t)$ связаны равенствами

$$\mathsf{P}\{e(t)=0\} = 1-\lambda\int_0^t \varphi_0(u)\,du,$$

$$\mathsf{P}\{e(t)=k\} = \lambda\int_0^t [\varphi_{k-1}(u)-\varphi_k(u)]\,du.$$

Если $\{\tau_j^e\}\in G_J$, то

$$\varphi_0(t) = \mathsf{P}\{\tau_j^e\geqslant t\},$$

$$\sum_{j=0}^{k}\varphi_j(t) = \mathsf{P}\{\tau_1^e+\ldots+\tau_{k+1}^e\geqslant t\}.$$

Значительную роль в теории массового обслуживания играют т. н. простейшие, или пуассоновские, входные потоки — стационарные входные потоки, для к-рых $\nu_j^e\equiv 1$, $\{\tau_j^e\}\in E$. Чтобы определить простейший поток в терминах процесса $e(t)$, требуют, чтобы процесс $\{e(t)\}$ был пуассоновским. Приращения этого процесса на непересекающихся интервалах времени независимы и имеют распределение Пуассона с параметрами, пропорциональными длинам интервалов.

Находят широкое применение (особенно в телефонии) также и неоднородные пуассоновские потоки, к-рые характеризуются процессами $e(t)$ с независимыми приращениями, распределенными по закону Пуассона

$$\mathsf{P}\{e(t+u)-e(t)=k\} =$$

$$= \frac{e^{-(A(t+u)-A(t))}}{k!}(A(t+u)-A(t))^k,$$

где $A(t)$ — ведущая функция процесса (в однородном случае $A(t)=\alpha t$).

Особая роль пуассоновских процессов в теории массового обслуживания во многом объясняется основной предельной теоремой для входящих потоков, к-рая устанавливает, что в широких предположениях сумма большого числа произвольных независимых стационарных входных потоков малой интенсивности сходится к пуассоновскому процессу. Частое использование предположения о том, что входной поток пуассоновский, обусловливается тем, что во многих приложениях реальные входные потоки образуются именно таким способом (напр., поток вызовов, поступающих на телефонную станцию, представляет собой сумму слабых потоков, исходящих от отдельных абонентов).

Ниже приведена основная предельная теорема в двух формах. Первая относится к суммам произвольных (нестационарных) входных потоков.

Пусть даны возрастающие вместе с n совокупности независимых процессов $e_{1,n}(t), \ldots, e_{n,n}(t)$, $n=1, 2, \ldots$, зависящих от параметра n (т. е. рассматривается схема серий), и введены следующие обозначения

$$A_n(t, u) = \sum_{r=1}^{n} \mathsf{P}\{e_{r,n}(t) - e_{r,n}(u) \geqslant 1\},$$

$$B_n(t, u) = \sum_{r=1}^{n} \mathsf{P}\{e_{r,n}(t) - e_{r,n}(u) \geqslant 2\}.$$

Пусть, кроме того, при любом фиксированном $t>0$ выполнено условие

$$\mathsf{P}\{e_{r,n}(t) - e_{r,n}(0) \geqslant 1\} \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$ равномерно по r (это и есть условие малой интенсивности потоков $e_{r,n}(t)$). Тогда, для того чтобы конечномерные распределения процесса

$$e_n(t) = \sum_{r=1}^{n} e_{r,n}(t)$$

сходились к распределениям пуассоновского процесса с ведущей функцией $A(t)$, необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$

$$A_n(t, u) \longrightarrow A(t) - A(u), \quad B_n(t, u) \longrightarrow 0.$$

Если в рассматриваемой схеме серий, процессы $e_{r+n}(t) \in G_{IS}$ и ординарны, то имеет место также следующее утверждение. Пусть $\mu_{r,n}$ — интенсивность $e_{r,n}(t)$ и при $n \to \infty$

$$\sum_{r=1}^{n} \mu_{r,n} \longrightarrow \alpha.$$

Тогда для сходимости конечномерных распределений процессов $e_n(t)$ к распределениям пуассоновского процесса $e(t)$ с параметром α необходимо и достаточно, чтобы при каждом t

$$\sum_{r=1}^{n} \mu_{r,n} \int_0^t \varphi_0^{(r)}(u)\, du \longrightarrow \alpha t, \qquad (2)$$

где $\varphi_0^r(u)$ — функция Пальма для процесса $e_{r,n}(t)$, определенная равенством (1). Если при $n \to \infty$

$$\left(1 - \varphi_0^{(r)}(t)\right) \longrightarrow 0$$

равномерно по r, то условие (2) очевидно будет выполнено.

Лит. см. при ст. *Массового обслуживания теория.*

А. А. Боровков.

МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СИСТЕМА с ожиданием и одним каналом обслуживания — система массового обслуживания, алгоритм к-рой предусматривает, что вызовы, не принятые немедленно к обслуживанию (заставшие систему занятой), накапливаются в очереди; при этом обслуживание следующего вызова (или партии вызовов) может начаться лишь после того, как окончится обслуживание предыдущего (или предыдущей партии, если вызовы

обслуживаются группами). Основные определения и обозначения см. в ст. *Массового обслуживания система.*

Наиболее естественными характеристиками состояния систем с очередью являются следующие: а) время w_n ожидания начала обслуживания требования с номером n и виртуальное время $w(t)$ ожидания, к-рое определяется как время, необходимое для освобождения системы от вызовов, пришедших до момента времени t; б) длина q_n очереди в момент прихода n-го вызова и *длина* $q(t)$ очереди в момент времени t.

1) В «ординарном» случае ($\nu_j^e \equiv 1$) значения w_n связаны рекуррентным соотношением

$$w_{n+1} = \max(0,\ w_n + \xi_n), \quad \xi_n = \tau_n^s - \tau_n^e. \tag{1}$$

Такого же типа уравнениями (для времени ожидания или для длины очереди) могут описываться системы с ожиданием и в «неординарном» случае, когда ν_j^e, ν_j^s отличны от единицы. Напр., для длины q_n очереди справедливы соотношения

$$q_{n+1} = \max(0,\ q_n + \nu_n^e - \beta_n), \tag{2}$$

где β_n — число вызовов, к-рое может быть обслужено за время τ_n^e при бесперебойной работе системы. Если $\{\tau_j^s\} \in E$, $\{\nu_j^s\} \in G_1$, то распределение β_n можно найти из соотношений

$$\mathsf{E}_{\tau_n^e} e^{i\lambda\beta_n} = \exp\left[\tau_n^e \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (e^{i\lambda k} - 1)\, \mathsf{P}\{\nu_j^s = k\}\right],$$

где α — показатель распределения τ_j^s.

Если обозначить $X_0 = 0$, $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, то решение уравнения (1) имеет вид

$$w_{n+1} = X_n - \min(-w_1,\ X_1,\ \ldots,\ X_n) = \max(X_n + w_1,\ X_n - X_1,\ \ldots,\ X_n - X_{n-1},\ 0). \tag{3}$$

Отсюда следует, что если $\{\xi_n\} \in G_S$ и $\mathsf{P}\{X_n \in \Delta\} \to 0$ при любом фиксированном интервале Δ и $n \to \infty$, то существует предельное распределение времени ожидания:

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{w_n > x\} = \mathsf{P}\{Y > x\},$$

где

$$Y = \sup_{k \geqslant 0} Y_k, \quad Y_k = \xi_{-k} + \ldots + \xi_{-1}, \quad Y_0 = 0.$$

Здесь величины ξ_{-k} — элементы последовательности $\{\xi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, являющейся расширением $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ до последовательности, стационарной на всей оси. В дальнейшем будет предполагаться что такое расширение произведено над всеми управляющими последовательностями.

Значения

$$w^k = \sup(0,\ \xi_k,\ \xi_k + \xi_{k-1},\ \xi_k + \xi_{k-1} + \xi_{k-2},\ \ldots)$$

удовлетворяют уравнению (1) и имеют распределение, совпадающее с предельным распределением w_n. Это — стационарный процесс времени ожидания.

Пусть последовательность $\{\xi_n\} \in G_S$ и эргодична ($X_n/n \to \mathsf{E}\xi_1$ с вероятностью 1). Тогда

$$\mathsf{P}\{Y < \infty\} = \mathsf{P}\{w^k < \infty\} = 1,$$

если $\mathsf{E}\xi_k < 0$ или если $\mathsf{E}\xi_k = 0$ и $\xi_k = \eta_{k+1} - \eta_k$, где $\{\eta_k\} \in G_S$. В остальных случаях

$$\mathsf{P}\{Y = \infty\} = \mathsf{P}\{w^k = \infty\} = 1.$$

Если $\{\xi_n\} \in G_1$, то

$$\mathsf{P}\{Y < \infty\} = 1$$

тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}\xi_k < 0$ (тривиальный случай $\xi_k = 0$ исключается).

2) Как уже отмечалось, другой возможной характеристикой состояния системы является виртуальное время $w(t)$ ожидания. Грубо говоря, это — время, к-рое прождал бы начала своего обслуживания вызов, пришедший в момент t. Пусть $S(t)$ есть сумма времен обслуживания вызовов, поступивших в систему до момента времени t, $X(t)=S(t)-t$. Аналогом равенства (3) здесь является соотношение

$$w(t)=X(t)-\inf_{0\leqslant u\leqslant t}(0,\ X(u)). \qquad (4)$$

Пусть G_{IS} — класс процессов со стационарными в узком смысле приращениями и G_{II} — класс процессов с независимыми приращениями (G_{II} и G_{IS} здесь можно понимать и более узко; напр., можно считать, что G_{II} — класс обобщенных пуассоновских процессов с положительными скачками и сносом -1). Если процесс $\{X(t);\ t\geqslant 0\}\in G_{IS}$, то он может быть расширен до процесса $\{X(t);\ -\infty<t<\infty\}$, заданного на всей оси и также принадлежащего G_{IS}. В этом случае существует

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{w(t)>x\}=\mathsf{P}\{\overline{Y}>x\},$$

где

$$\overline{Y}=\sup_{u\geqslant 0}Y(t),\qquad Y(t)=X(0)-X(-t).$$

Если, кроме того,

$$\mathsf{E}(X(1)-X(0))=\mathsf{E}(Y(1)-Y(0))=a<0,$$

то распределение процесса

$$w_t(u)=\{w(t+u);\ u\geqslant 0\}$$

сходится при $t\to\infty$ к распределению процесса

$$w^s(u)=\sup_{v\leqslant u}(X(u)-X(v)),$$

к-рый является собственным стационарным процессом виртуального времени ожидания. Сходимость здесь имеет место в сильной форме:

$$\mathsf{P}\{w_t\in B\}\longrightarrow\mathsf{P}\{w^s\in B\}$$

для любого измеримого B.

Далее, если $\{X(t)\}\in G_{IS}$ и $a<0$, то существует условная функция восстановления $H_0(x)$ процесса $X(t)$:

$$H_0(x)=\int_0^\infty\mathsf{P}\{0\leqslant X(u)-X(0)<x\mid X(0)=$$

$$=\inf_{v\leqslant 0}X(v)\Big\}\,du<\infty;$$

при этом

$$\left.\begin{aligned}&\mathsf{P}\{w^s(u)\geqslant x\}=-a\,\frac{dH_0(x)}{dx},\\&\mathsf{P}\{w^s(t)=0\}=-a.\end{aligned}\right\}$$

Приведенные формулы сохраняются и в случае $\nu_j^e\not\equiv 1$.

Для систем, у к-рых $\{\tau_j^s-\tau_j^e\}\in G_I$, существуют простые связи между распределениями w^k и $w^s(t)$.

3) Эргодические теоремы для длины очереди могут быть получены с помощью соответствующих теорем для времени ожидания. Пусть, напр., последовательность $\{\tau_j^e,\ \tau_j^s\}\in G_S$ эргодична (метрически транзитивна). Если, кроме того, $\mathsf{E}(\tau_j^s-\tau_j^e)<0$, то существует предельное (стационарное) распределение q_n такое, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{q_n>k\}=\mathsf{P}\{w^0>\tau_1^e+\ldots+\tau_k^e\}.$$

Если же $\{\tau_j^e\} \in G_I$, $\{\tau_j^s\} \in G_I$ и распределение τ_j^e нерешетчато, то существует

$$\lim_{\tau \to \infty} \mathsf{P}\{q(t) > k+1\} = \mathsf{P}\left\{w^0 > \tau_1^e + \ldots + \tau_k^e + \gamma\right\}, \quad k \geqslant 0,$$

$$\lim_{\tau \to 0} \mathsf{P}\{q(t) = 0\} = -a/\mathsf{E}\tau^e,$$

где все компоненты под знаком вероятности в правой части независимы, γ имеет плотность, равную

$$\mathsf{P}\left\{\tau_j^e > x\right\}/\mathsf{E}\tau^e,$$

$$w^0 = \sup(0, \xi_0, \xi_0 + \xi_{-1}, \ldots), \quad \xi_j = \tau_j^s - \tau_j^e.$$

Если $\{\tau_j^e\} \in E$, то предельные распределения q_n и $q(t)$ совпадают.

4) Если $\{\tau_j^e\} \in E$, $\{\tau_j^s\} \in G_I$ (допускается также, что $\nu_j^e \not\equiv 1$, $\{\nu_j^e\} \in G_I$), то можно получить точные формулы и для допредельного распределения $w(t)$:

$$\mathsf{P}\{w(t) < x\} = \mathsf{P}\{Y(t) < x\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \mathsf{E}(Y(u)/u; \quad Y(u) < 0)\, \mathsf{P}\{Y(t-u) < x\}\, du,$$

$$\mathsf{P}\{w(t) = 0\} = -\mathsf{E}(Y(t)/t, \quad Y(t) < 0).$$

При $a < 0$ и $t \to \infty$ имеет место формула Хинчина для стационарного распределения:

$$\mathsf{E}e^{i\lambda w^s(u)} = \frac{1 - \alpha \mathsf{E}\theta}{1 - \alpha \dfrac{\varphi(\lambda) - 1}{i\lambda}}, \quad \varphi(\lambda) = \mathsf{E}e^{i\lambda\theta},$$

где θ — величина скачка процесса $X(t)$ ($\theta = \tau_j^s$, если $\nu_j^e \equiv 1$), α — показатель распределения τ_j^e.

Пусть T_j, $j = 1, 2, \ldots$, — периоды занятости системы (т. е. длины интервалов времени в течение к-рых $w(t) > 0$). Тогда для рассматриваемых систем

$$\mathsf{P}\{T_j \in (u, u + du)\} = \frac{1}{\alpha u} \mathsf{P}\{X(u) \in (0, du)\}.$$

5) Для систем, у к-рых $\{\tau_j^e, \tau_j^s\} \in G_I$ (допускается, также $\nu_j^e \not\equiv 1$, $\{\tau_j^e, \tau_j^s, \nu_j^e\} \in G_I$) распределение w^k совпадает с распределением величины

$$Y = \sup(0, \xi_1, \xi_1 + \xi_2, \ldots).$$

По известному распределению ξ_j распределение Y может быть найдено следующим образом. Если $\mathsf{P}\{Y < \infty\} = 1$ (это всегда при $\mathsf{E}\xi_j < 0$), то справедливо следующее факторизационное тождество

$$1 - \mathsf{E}e^{i\lambda\xi} = (1-p)\,(1 - \mathsf{E}e^{i\lambda\chi})/\mathsf{E}e^{i\lambda Y}, \quad \operatorname{Im}\lambda = 0,$$

где $p = \mathsf{P}\{Y > 0\}$, $\chi \leqslant 0$ — величина первой неположительной суммы среди ξ_1, $\xi_1 + \xi_2$, ... Это соотношение позволяет отождествить с $\mathsf{E}e^{i\lambda Y}$ отношение $w_+(\lambda)/w_+(0)$ в любом тождестве

$$1 - \mathsf{E}e^{i\lambda\xi} = w_-(\lambda)/w_+(\lambda), \quad \operatorname{Im}\lambda = 0, \tag{5}$$

в к-ром функции $w_\pm(\lambda)$ допускают представление

$$w_\pm(\lambda) = \int_0^{\pm\infty} e^{i\lambda t}\, dV_\pm(t)$$

($V_\pm$ — функции ограниченной вариации). Равенство (5) осуществляет т. н. V-факторизацию функции $1 - \mathsf{E}e^{i\lambda\xi}$. Оно позволяет указать следующие случаи, когда возможно отыскание $\mathsf{E}e^{i\lambda Y}$ в явном виде.

Предполагают, что $-\infty < \mathsf{E}\xi < 0$, и обозначают

$$f(\lambda) = \mathsf{E}e^{i\lambda\xi}, \quad f_+(\lambda) = e^{i\lambda\tau^s}, \quad f_-(\lambda) = e^{-i\lambda\tau^e},$$

так что $f(\lambda) = f_+(\lambda)\, f_-(\lambda)$.

А) Если f_+ — рациональная функция: $f_+ = P_m/Q_n$, где P_m и Q_n — многочлены степеней m и n соответст-

венно, то функция $(1-f)Q_n$ в области $\mathrm{Im}\lambda<0$ имеет ровно n нулей $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и

$$w_+(\lambda) = Q_n(\lambda)/\Pi_{k=1}^n(\lambda-\lambda_k),$$

$$\mathsf{E}e^{i\lambda Y} = w_+(\lambda)/w_+(0).$$

Это означает, что если распределение τ^s представимо в виде

$$\mathsf{P}\{\tau^s > x\} = \sum\nolimits_k P_k(x)\, e^{-\alpha_k x}, \quad \mathrm{Re}\,\alpha_k > 0,$$

где $P_k(x)$ — многочлены, то такого же вида представление (при других α_k и P_k, определяемых нулями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$) будет иметь место и для $\mathsf{P}\{Y>x\}$.

В) Если $f_- = P_m/Q_n$ — рациональная функция, то функция $(1-f)Q_n$ в области $\mathrm{Im}\lambda>0$ имеет $n-1$ нулей $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ и

$$w_+(\lambda) = i\lambda \prod\nolimits_{k=1}^{n-1}(\lambda-\lambda_k)/Q_n(\lambda)\,(1-f(\lambda)).$$

Кроме этих формул, дающих явное выражение для распределения Y, можно также в широком классе случаев описать асимптотич. поведение $\mathsf{P}\{Y>x\}$ при $x\to\infty$. Именно, если

$$\gamma = \sup(\mu : \mathsf{E}e^{\mu\xi} < \infty) > 0$$

и $\mathsf{E}e^{\gamma\xi}>1$, то определен единственный корень $q>0$ уравнения $\mathsf{E}e^{q\xi}=1$. В этом случае при $x\to\infty$

$$\mathsf{P}\{Y > x\} = c_1 e^{-qx}(1+o(1)).$$

Если же $\gamma=0$, $-\infty<\mathsf{E}\xi<0$, то

$$\mathsf{P}\{Y > x\} = c_2 \int_x^\infty \mathsf{P}\{\xi > t\}\,dt\,(1+o(1)).$$

Постоянные c_1 и c_2 найдены в явном виде.

Результаты, аналогичные изложенным в пп. 2)—5), справедливы и для систем с дискретным временем, когда время t и случайные величины управляющих последовательностей принимают лишь целочисленные значения.

6) Теоремы устойчивости выясняют условия, при к-рых малое изменение конечномерных распределений управляющих последовательностей влечет за собой малое изменение стационарного распределения времени ожидания или длины очереди. Важность вопроса об устойчивости систем обслуживания объясняется тем, что обычно в реальных задачах пользуются теми или иными предположениями о природе управляющей последовательности (напр., предполагается, что ξ_j независимы или что τ_j^e распределены по показательному закону), в то время как на самом деле эти предположения выполняются лишь приближенно. Спрашивается, будет ли решение таких «идеализированных» задач близко к решению истинной задачи.

Чтобы получить точную постановку проблемы рассматривают схему серий, когда уравнением (1) управляют стационарные последовательности (серия последовательностей) $\xi^{(n)} = \{\xi_j^{(n)}, -\infty<j<\infty\}$, $n=1, 2, \ldots$ Кроме того, рассматривают стационарную последовательность $\xi=\{\xi_j;\ -\infty<j<\infty\}$ и обозначают

$$Y^{(n)} = \sup_{k\geqslant 0} Y_k^{(n)},\ Y_k^{(n)} = \sum\nolimits_{j=1}^n \xi_{-j}^{(n)}.$$

Ответ на поставленный выше вопрос дает следующее утверждение.

Пусть конечномерные распределения $\xi^{(n)}$ слабо сходятся к соответствующим распределениям последовательности ξ, относительно к-рой предполагается, что она эргодична и $\mathsf{E}\xi_j<0$. Тогда для слабой сходимости

$$\mathsf{P}\{Y^{(n)} < t\} \Rightarrow \mathsf{P}\{Y < t\} \qquad (6)$$

(т. е. для сходимости распределений стационарных времен ожидания) достаточно, чтобы

$$\mathsf{E}\left(\xi_j^{(n)};\quad \xi_j^{(n)} \geqslant 0\right) \longrightarrow \mathsf{E}\left(\xi_j;\ \xi_j \geqslant 0\right).$$

Сформулированное условие сходимости близко к необходимому.

Если управляющие последовательности $\{\tau_j^{(n)e},\ \tau_j^{(n)s}\}$ и $\{\tau_j^e,\ \tau_j^s\}$ таковы, что $\tau_j^{(n)e}$ и $\tau_j^{(n)s}$ независимы, а распределения $\{\tau_j^{(n)e},\ \tau_j^{(n)s}\}$ слабо сходятся к распределениям $\{\tau_j^e,\ \tau_j^s\}$, то для выполнения (6) достаточно, чтобы

$$\mathsf{E}\tau_j^{(n)s} \longrightarrow \mathsf{E}\tau_j^s.$$

Аналогично обстоит дело со стационарным распределением виртуального времени $w^s(t)$ ожидания. Если конечномерные распределения процессов $Y^{(n)}(t) \in G_{IS}$ сходятся к распределениям $Y(t) \in G_{IS}$ и последовательность $\{\eta_k = Y(k+1) - Y(k)\}$ эргодична, $\mathsf{E}\eta_k = a < 0$, то для сходимости распределений

$$\sup_{t \geqslant 0} Y^{(n)}(t) \quad \text{и} \quad \sup_{t \geqslant 0} Y(t)$$

достаточно, чтобы

$$\mathsf{E}\left\{\eta_k^{(n)};\quad \eta_k^{(n)} \geqslant 0\right\} \longrightarrow \mathsf{E}\left\{\eta_k;\ \eta_k \geqslant 0\right\}.$$

7) Асимптотич. методы исследования одноканальных систем (они включают в себя и теоремы устойчивости) дают приближенные формулы для случая больших и малых нагрузок. Пусть $\{Y(t)\} \in G_{IS}$. Тогда говорят, что система имеет большую нагрузку, если

$$a = \mathsf{E}\left(Y(t+1) - Y(t)\right) < 0$$

близко к 0, и малую нагрузку, если a близко к -1.

Точная постановка задачи связана здесь как и в п. 6) с введением схемы серий. Именно, для случая больших нагрузок рассматривают процессы $X^a(t)$, зависящие от параметра $a \to 0$. Пусть $X^a(t)$ удовлетворяют условиям слабой зависимости, обеспечивающим при $t \to \infty$ выполнение условий

$$\mathsf{E}\left(|\, X^a(t) - X^a(0) - at\,|^{2+\gamma}/A\right) < ct^{1+\gamma/2},$$

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\left\{\frac{X^a(t) - X^a(0) - at}{\sigma\sqrt{t}} < x \mid A\right\} = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du$$

равномерно по a, где

$$\gamma > 0, \quad c > 0, \quad \sigma > 0, \quad A = \left\{X^a(0) = \inf_{v \leqslant 0} X^a(v)\right\}.$$

Тогда для стационарного виртуального времени $w^s(t)$ при $a \to 0$ справедливо

$$\mathsf{P}\left\{w^s(t) > x/|\,a\,|\right\} \longrightarrow e^{-2x/\sigma^2}.$$

Аналогичный результат будет иметь место и для стационарного распределения w^k.

Если условия большой нагрузки наложить на последовательности $\{\xi^{(n)} = \tau_j^{(n)e} - \tau_j^{(n)e}\} \in G_I$ (также в схеме серий по параметру n), потребовав, чтобы

$$0 > \alpha_n = \mathsf{E}\xi_j^{(n)} \longrightarrow 0, \qquad \mathsf{D}\xi_j^{(n)} \longrightarrow \sigma^2 > 0, \tag{7}$$

то весьма полно можно описать также и распределение допредельного времени w_n ожидания, включая т. н. переходные явления. Именно, пусть в дополнение к (7)

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{E}\left[(\xi_j^{(n)})^2;\quad |\,\xi_j^{(n)}\,| > \varepsilon\sqrt{n}\right] = 0$$

при любом $\varepsilon > 0$. Тогда если $\alpha = \alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$ не меняя знака, так что $n\alpha^2 \to v^2$, то

$$\mathsf{P}\left\{w_n < x/|\,\alpha\,|\right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathsf{P}\left\{w(u) < (x - u\ \operatorname{sign} n\alpha)/\sigma;\quad 0 \leqslant u \leqslant v^2\right\}, \tag{8}$$

где $w(u)$ — стандартный винеровский процесс. Значение правой части (8) вычислено в явном виде. Если $n\alpha^2 \to 0$, то

$$\mathsf{P}\{w_n < x\sqrt{n}\} \to \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x/\sigma} e^{-u^2/2}\, du.$$

Если $n\alpha^2 \to \infty$, $\alpha < 0$, то

$$\mathsf{P}\{w_n > x/|\alpha|\} \to e^{-2x/\sigma^2}.$$

Если $n\alpha^2 \to \infty$, $\alpha > 0$, то

$$\mathsf{P}\{w_n < \alpha n + x\sqrt{n}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sigma} e^{-u^2/2}\, du.$$

8) Системы с ограниченной очередью характеризуются тем, что вызовы, пришедшие в систему и заставшие очередь объема $n \geqslant N$, получают отказ и выбывают из рассмотрения. В этом случае $q_n \leqslant N$, а вероятность $\mathsf{P}\{q_n = N\}$ будет также вероятностью того, что n-й вызов получил отказ.

Уравнения (2) здесь следует заменить на уравнение вида

$$q_{n+1} = \min(N, \max(0, q_n + \eta_n)), \qquad n \geqslant 0.$$

Пусть $\{\eta_n\} \in G_S$ и последовательность $\{\eta_n\}$ метрически транзитивна. Пусть, кроме того, выполнено следующее условие: или $\mathsf{E}\eta_1 \neq 0$ или $\mathsf{E}\eta_1 = 0$, но во втором случае η_n не представимы в виде $\eta_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$, где $\{\gamma_n\} \in G_S$. При выполнении этих условий существует предельное распределение q_n при $n \to \infty$.

Если, кроме того, $\{\eta_n\} \in G_I$ (это имеет место, напр., в случае, когда $\{\tau_j^s\} \in E$, а остальные управляющие последовательности принадлежат G_I), то можно найти явный вид стационарного распределения для q_n при $n \to \infty$, поскольку в этом случае q_n связаны в простую однородную цепь Маркова с конечным числом состояний.

Существует также следующее представление для стационарного распределения:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{q_n = k\} = \mathsf{P}\{\chi(k-N, k) = k\}\, \mathsf{P}\{\chi(-N, 1) \leqslant -N\} + \\ + \mathsf{P}\{\chi(k-N, k) = k-N\}\, \mathsf{P}\{\chi(-1, N) \geqslant N\}, \quad (9)$$

где $\chi(-l, m)$ — положение частицы, вышедшей из 0 и блуждающей со скачками η_k, $k = 1, 2, \ldots$, в момент ее первого выхода за пределы интервала $(-l, m)$. Если $\nu_n^e \equiv 1$ (т. е. если $\mathsf{P}\{\eta_n \leqslant 1\} = 1$), то вероятности (9) могут быть явным образом выражены через распределения τ_j^e и ν_j^s.

9) В системах с автономным обслуживанием обслуживание вызовов в отличие от обычных систем с ожиданием может начинаться лишь в моменты времени 0, τ^s, $\tau_1^s + \tau_2^s$, $\ldots$, где τ_j^s — элементы управляющей последовательности. Таким образом, вызов, заставший систему свободной, должен ждать до начала очередного этапа обслуживания.

Наряду с процессом $\{e(t)\}$, описывающим входящий поток, рассматривают процесс $\{s(t)\}$, где $s(t)$ определяется как число вызовов, к-рое приняла бы на обслуживание система к моменту t при бесконечной очереди. Обозначив через $q(t)$ длину очереди в момент t, не считая вызовов уже находящихся на обслуживании, и положив $X(t) = e(t) - s(t)$, получают

$$q(t) = q(0) + X(t) - \inf_{0 \leqslant u \leqslant t} (0, X(u) + q(0)) = \\ = \sup_{0 \leqslant u \leqslant t} (q(0) + X(t), \quad X(t) - X(u)).$$

Это равенство аналогично соотношению (4) и приводит к следующему результату. Если процесс $\{X(t)\} \in G_{IS}$ и эргодичен,

$$\mathsf{E}(X(1) - X(0)) < 0,$$

то распределение процессов $\{X_1(u)=X(t+u);\ u\geqslant 0\}$ сходится при $t\to\infty$ к распределению стационарного процесса

$$\overline{X}(u)=\sup_{v\leqslant u}(X(u)-X(v)).$$

Если $\{\tau_j^s\}\in E$ или $\{\tau_j^e\}\in E$, а остальные управляющие подпоследовательности принадлежат G_1, то можно указать явные формулы для распределения $\overline{X}(u)$.

Лит. см. при ст. *Массового обслуживания теория.*

А. А. Боровков.

МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СИСТЕМА с ожиданием многоканальная — система массового обслуживания, алгоритм к-рой предусматривает накапливание вызовов в очереди, если в момент их прихода система оказалась занятой; при этом обслуживание вызовов ведется в нескольких каналах одновременно. Основные определения и обозначения см. в ст. *Массового обслуживания система.*

Функционирование многоканальных систем с очередью, управляемых последовательностью $\{\tau_j^e,\ \tau_j^s\}$, происходит следующим образом. Вызовы прибывают в моменты времени $0,\ \tau_1^e,\ \tau_1^e+\tau_2^e,\ \ldots$. На обслуживание вызова с номером j тратится время τ_j^s, в каком бы из $m\geqslant 1$ каналов ни обслуживался этот вызов. Пришедшие вызовы тут же направляются (в порядке поступления) в любой свободный канал, если каналы не все заняты, или ждут, когда освободится какой-нибудь из каналов, куда и поступают на обслуживание. Пусть для простоты в момент времени $t=0$ система свободна.

1) Для наглядности изложения использованы следующие обозначения: $\boldsymbol{w}_n=(w_{n,1},\ \ldots,\ w_{n,m})$ — вектор времени ожидания n-го вызова, где $w_{n,i}$ — время, к-рое должен ждать этот вызов до освобождения i каналов от вызовов, пришедших раньше, чем он; так что $w_{n,1}$ — «истинное» время ожидания. Пусть, кроме того, $x^+=\max(0,\ x)$, $\boldsymbol{x}^+=(x_1^+,\ \ldots,\ x_m^+)$, $\boldsymbol{e}=(1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, $\boldsymbol{i}=(1,\ 1,\ \ldots,\ 1)$, а вектор $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ получен из $\boldsymbol{x}$ упорядочиванием по возрастанию его координат (так что первая координата $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ равна $\min(x_1,\ \ldots,\ x_m)$). Тогда имеет место следующее рекуррентное соотношение для $\boldsymbol{w}_n$, обобщающее свой одномерный аналог

$$w_{n+1}=\left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{w}_n+\tau_n^s\boldsymbol{e})-\tau_n^e\boldsymbol{i}\right]^+. \qquad (1)$$

Если последовательность $\{\tau_j^e,\ \tau_j^s\}\in G_S$ и $\mathsf{E}(\tau_n^s-m\tau_n^e)<0$, то существует собственная последовательность $\{w^k\}\in G_S$, удовлетворяющая (1) и такая, что функция распределения $\boldsymbol{w}_n$ при $n\to\infty$ монотонно сходится к функции распределения $\boldsymbol{w}^0$. Это утверждение допускает обобщение на случай $\nu_j^e\not\equiv 1$ и распространяется также на длину q_n очереди в момент прихода n-го вызова (под q_n понимают очередь, включая вызовы, находящиеся на обслуживании). Существуют формулы, связывающие предельные распределения для $\boldsymbol{w}_n$ и q_n.

Если $\{\tau_j^e\}\in G_1$, $\{\tau_j^s\}\in G_1$, то (1) позволяет записать интегральное уравнение для стационарного распределения $\boldsymbol{w}^0$. В этом случае можно указать также простые связи между стационарными распределениями длины очереди и времени ожидания. Именно, если w_k^0 означает k-ю координату вектора $\boldsymbol{w}^0$, то при $k\geqslant m-1$ существуют

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{q_n>k\}=\mathsf{P}\left\{w_1^e>\tau_1^e+\ldots+\tau_{k-m+1}^e\right\}.$$

Если $m>k\geqslant 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{q_n\geqslant m-k\}=\mathsf{P}\left\{w_{k+1}^0>0\right\}.$$

Здесь все случайные величины, стоящие под знаком вероятности, независимы.

Если, кроме того, распределение τ_j^e нерешетчато, то аналогичные формулы верны и для предельного распределения $q(t)$. Если $\{\tau_j^e\} \in E$, то

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{q_n = k\} = \lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{q(t) = k\}.$$

2) Если $\{\tau_j^e\} \in G_I$, $\{\tau_j^s\} \in E$, то можно указать явные формулы для предельных распределений q_n, $q(t)$, w_n. Пусть α — показатель распределения τ_j^s и $\alpha m \mathsf{E}\tau^e > 1$. Тогда числа

$$p_k = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{q_n = k\}$$

описываются как известного вида рациональные функции от значений μ и $\psi(-j\alpha)$, $j = 1, \ldots, m$, где μ — единственный корень в области $|\mu| < 1$ уравнения

$$\mu = \psi((\mu - 1)\, m\alpha), \quad \psi(\mu) = \mathsf{E}e^{\mu\tau^e}.$$

Если $k > m$, то

$$p_k = A\mu^{k-m},$$

причем A от k не зависит. Для предельного распределения времени ожидания

$$W(x) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{w_{n,1} > x\}$$

имеет место равенство

$$W(x) = \frac{Ae^{-m\alpha(1-\mu)x}}{1-\mu}.$$

Если τ_j^e — нерешетчатая случайная величина, то существуют

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{q(t) = k\} = P_k,$$

где

$$P_k = p_{k-1}/k\alpha\mathsf{E}\tau^e \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k < m,$$

$$P_k = p_{k-1}/m\alpha\mathsf{E}\tau^e \quad \text{при} \quad k \geqslant m.$$

В случае $\{\tau_j^e\} \in E$, $\{\tau_j^s\} \in E$

$$p_k = \frac{p_0}{k!m^k}\lambda^k \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

$$p_k = \frac{p_0}{m!m^m}\lambda^k \quad \text{при} \quad k \geqslant m,$$

где

$$\lambda = [\alpha m \mathsf{E}\tau^e]^{-1} < 1.$$

3) Теоремы устойчивости (о непрерывной зависимости стационарного распределения w^0 от распределений τ_j^e и τ_j^s) получены в менее общей форме, чем для одноканальных систем, и связаны с условием о существовании т. н. обновляющих событий. Однако в случае $\{\tau_j^e\} \in G_I$, $\{\tau_j^s\} \in G_I$, $\mathsf{E}(\tau_n^s - m\tau_n^e) < 0$ это условие с необходимостью выполнено. Если для таких систем в схеме серий распределения $\tau_j^{(n)e}$ и $\tau_j^{(n)s}$ слабо сходятся соответственно к распределениям τ_j^e и τ_j^s и, кроме того, $\mathsf{E}\tau_j^{(n)s} \to \mathsf{E}\tau_j^s$, то распределение $w^{(n)0}$ будет слабо сходится к распределению w^0.

4) Асимптотич. методы исследования многоканальных систем для больших нагрузок дают результаты, аналогичные соответствующим результатам для одноканальных систем.

Пусть в схеме серий для управляющих последовательностей $\{\tau_j^e\} \in G_I$, $\{\tau_j^s\} \in G_I$ выполнено условие

$$\delta = 1/\mathsf{E}\tau^e - m/\mathsf{E}\tau^s \to 0$$

(δ равно разности между средним количеством вызовов, поступивших в систему, и средним количеством вызовов, к-рое система может обслужить за единицу времени; если $\nu_j^e \not\equiv 1$, $\nu_j^s \not\equiv 1$, то в качестве параметра δ можно выбрать число $\mathsf{E}\nu^e/\mathsf{E}\tau^e - m\mathsf{E}\nu^s/\mathsf{E}\tau^s$, имеющее тот же смысл). Тогда если

$$\frac{\mathsf{D}\tau^e}{(\mathsf{E}\tau^e)^3} + m\frac{\mathsf{D}\tau^s}{(\mathsf{E}\tau^s)^3} \longrightarrow \sigma^2 > 0$$

и $\mathsf{E}|\tau^e|^{2+\varepsilon}$, $\mathsf{E}|\tau^s|^{2+\varepsilon}$ равномерно ограничены при нек-ром $\varepsilon > 0$, то для длины $q(t)$ очереди в момент времени t справедливы при $t \to \infty$, $\delta \to 0$ следующие соотношения:

при $\delta\sqrt{t} \to v$, $v \geqslant -\infty$,

$$\lim_{\delta \to 0} \mathsf{P}\{q(t) < x/|\delta|\} =$$

$$= \mathsf{P}\{w(u) < (x - u \operatorname{sign}\delta)/\sigma; \quad 0 \leqslant u \leqslant v^2\},$$

где $w(u)$ — стандартный винеровский процесс;
при $\delta\sqrt{t} \longrightarrow 0$

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{q(t) < x\sqrt{t}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x/\sigma} e^{-u^2/2}\, du;$$

при $\delta\sqrt{t} \longrightarrow \infty$, $\delta > 0$,

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{q(t) < \delta t + x\sqrt{t}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sigma} e^{-u^2/2} du.$$

Аналогичные соотношения верны для длины q_n очереди и для времени w_n ожидания.

Другое возможное направление асимптотич. исследований для многоканальных систем состоит в изучении систем с интенсивным входным потоком и неограниченно возрастающим (вместе с $\mathsf{E}(e(1) - e(0))$) числом каналов обслуживания.

5) Поведение многоканальных систем с бесконечным числом каналов обслуживания, управляемых последовательностью $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}$, описывается так же, как поведение многоканальных систем с очередью, с той лишь разницей, что здесь всегда есть свободные каналы и, следовательно, время ожидания для любого вызова равно 0. В качестве характеристики состояния системы рассматривают число q_n занятых линий в момент прихода n-го вызова или число $q(t)$ занятых линий в момент времени t (как и везде выше q_n и $q(t)$ — длины очереди и $q_1 = 0$).

Пусть $\{\tau_j^e, \tau_j^s\} \in G_S$ и, кроме того, последовательность $\{\tau_j^e\}$ метрически транзитивна. Тогда если $\mathsf{E}\tau_j^s < \infty$, то распределение последовательности $\{q_{n+k};\ k \geqslant 0\}$ при $n \to \infty$ монотонно сходится к распределению собственной стационарной последовательности

$$q^k = \sum_{l=0}^{\infty} I\{\tau_{k-l}^s > \tau_{k-l}^e + \ldots + \tau_{k-1}^e + \tau_k^e\}, \qquad (2)$$

где $I\{A\}$ индикатор события A. Условие $\mathsf{E}\tau_j^s < \infty$ близко к необходимому условию для конечности (2).

6) Для систем, у к-рых $m = \infty$, $\{\tau_j^e\} \in G_I$, $\{\tau_j^s\} \in G_I$, распределение стационарной длины q^k очереди можно описать с помощью уравнений. Для этого следует ввести величины

$$q^0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} I\{\tau_k^s > x + \tau_0^e + \ldots + \tau_k^e\}.$$

Число $q^0(x)$ указывает, сколько вызовов осталось в системе, работающей в стационарном режиме, спустя время x после прихода нек-рого вызова, но без учета данного вызова и всех вызовов, поступающих после него.

Обозначив

$$P_j(x) = \mathsf{P}\{q^0(x) = j\}, \quad j = 0, 1, \ldots,$$
$$P(x) = \mathsf{P}\{\tau^s > x\}, \quad F(x) = \mathsf{P}\{\tau^e < x\},$$

получают

$$\mathsf{P}\{q^k = j\} = \mathsf{P}\{q^0(0) = j\} = P_j(0);$$

система функций $P_j(x)$ удовлетворяет уравнениям

$$P_k(x) = \int_0^\infty dF(t)\, P(t+x)\, P_{k-1}(t+x) +$$
$$+ \int_0^\infty dF(t)\,(1 - P(t+x))\, P_k(t+x), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Здесь $P_{-1}(x)$ следует положить, равной 0. Каждые из первых $k+1$ уравнений этой системы относительно $P_0(x), \ldots, P_k(x)$ имеют единственное решение в классе функций ограниченной вариации, обладающих свойствами

$$P_0(x) \longrightarrow 1, \quad P_i(x) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad i \geqslant 1, \; x \longrightarrow \infty.$$

Аналогичные утверждения справедливы для распределения процесса $q(t)$.

Если $\{\tau_j^e\} \in E$, $\{\tau_j^s\} \in G_I$, то

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{q(t) = k\} = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{q_n = k\} = \frac{(a\alpha)^k}{k!}\, e^{-a\alpha},$$

где $a = \mathsf{E}\tau_j^s$, α — показатель распределения τ_j^e.

Если $\{\tau_j^e\} \in G_I$, $\{\tau_j^s\} \in E$, то

$$p_k = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{q_n = k\} = \sum_{j=k}^{\infty} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} C_j,$$

где

$$C_0 = 1, \quad C_j = \prod_{l=1}^{j} \frac{\psi(-l\alpha)}{1 - \psi(-l\alpha)},$$

$$j = 1, 2, \ldots, \quad \psi(\lambda) = \mathsf{E}e^{\lambda\tau^e},$$

α — показатель распределения τ_j^s. Если, кроме того, τ_j^e — нерешетчатые случайные величины, то

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{q(t) = k\} = p_{k-1}/k\alpha\, \mathsf{E}\tau^e, \quad k = 1, 2, \ldots$$

7) Теоремы устойчивости в случае $m = \infty$, как и в предыдущих разделах, выясняют условия, при к-рых малое изменение управляющих последовательностей влечет за собой малое изменение стационарного распределения числа q^k занятых линий.

Для схемы серий, когда система управляется стационарными последовательностями $\{\tau^{(n)l}, \tau^{(n)s}\}$, зависящими от параметра $n = 1, 2, \ldots$, пусть выполнены следующие условия.

(A) Существует последовательность $\{\tau_j^e, \tau_j^s\} \in G_S$ такая, что $\{\tau_j^e\}$ метрически транзитивна, $\mathsf{E}\tau_j^s < \infty$ и конечномерные распределения $\{\tau_j^{(n)e}, \tau_j^{(n)s}\}$ сходятся при $n \to \infty$ к распределениям $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}$.

(B) $\mathsf{E}\tau_j^{(n)s} \to \mathsf{E}\tau_j^s$ при $n \to \infty$.

(C) Распределения $\tau_{-j}^s - \sum_{k=-j}^{0} \tau_k^e$ при всех $j \geqslant 0$ непрерывны в точке 0.

Теорема устойчивости утверждает тогда, что при выполнении условий (A), (B), (C) распределения последовательностей $\{q^{(n)k}\}$ длин очередей (к-рые определяются равенством (2) с управляющими последовательностями $\{\tau_j^{(n)e}, \tau_j^{(n)s}\}$) сходятся при $n \to \infty$ к распределениям $\{q^k\}$.

Все три условия (A), (B), (C), присутствующие в этом утверждении, существенны; отказ хотя бы от одного из них сразу позволяет строить примеры, где сходимость распределений $\{q^{(n)k}\}$ отсутствует.

8) Асимптотич. анализ систем с бесконечным числом каналов обслуживания становится естественным и эффективным при изучении т. н. нагруженных систем, когда велика интенсивность входного потока. Несомненным преимуществом асимптотич. подхода является большая общность и универсальность установленных закономерностей.

Пусть входной поток $e(t)=e_T(t)$, означающий число вызовов, поступавших в систему к моменту времени t, зависит от параметра $T\to\infty$ (схема серий), так что $e_T(t)\to\infty$ при $T\to\infty$ для каждого фиксированного $t>0$, и, кроме того, существуют неубывающая функция $m(t)$, функция $B(T)\to\infty$ при $T\to\infty$ и непрерывный случайный процесс $\xi(t)$, заданный на $[0,\ t_0]$, такие, что распределения $f(\xi_T(t))$, где

$$\xi_T(t)=\frac{e_T(t)-Tm(t)}{B(t)}$$

слабо сходятся при $T\to\infty$ к распределению $f(\xi(t))$ для любого измеримого и непрерывного относительно равномерной метрики функционала f.

Если, напр., $\{\tau_j\}\in G_I$ и управление системой происходит с помощью последовательности $\tau_j^e=\tau_j/T$, то сформулированные условия будут выполнены при любом t_0, при этом

$$m(t)=t/\mathsf{E}\tau_j,\quad B^2(T)=T\mathsf{D}\tau_j/(\mathsf{E}\tau_j)^3,$$

$\xi(t)$ — стандартный винеровский процесс.

Относительно обслуживающего устройства предполагают, что $\{\tau_j^s\}\in G_I$. Тогда:

1) Если $B(T)/\sqrt{T}\to\infty$, то конечномерные распределения нормированного процесса очереди

$$z_1(t)=\frac{q(t)-TQ(t)}{B(t)},$$

$$Q(t)=\int_0^t G(t-u)\,dm(u),\quad G(t)=\mathsf{P}\{\tau_j^s\geqslant t\}$$

слабо сходятся при $T\to\infty$ к распределениям процесса

$$\zeta_1(t)=\int_0^t G(t-u)\,d\xi(u).$$

2) Если $B(T)/\sqrt{T}\to\sigma\geqslant 0$, то конечномерные распределения процесса

$$z_2(t)=\frac{q(t)-TQ(t)}{\sqrt{T}}$$

слабо сходятся к конечномерным распределениям процесса

$$\zeta_2(t)=\theta(t)+\sigma\int_0^t G(t-u)\,d\xi(u),$$

где $\theta(t)$ — центрированный гауссовский процесс, не зависящий от $\xi(t)$, с ковариационной функцией

$$\mathsf{E}\Theta(t)\,\Theta(t+u)=\int_0^t G(t+u-v)\,(1-G(t-v))\,dm(v).$$

Если потребовать от функций $m(t)$ или $G(t)$ нек-рой гладкости, то сходимость процессов $z_i(t)$ к процессам $\zeta_i(t)$, $i=1,\ 2$, будет иметь место и в более сильном смысле (напр., сходимость распределений $f(z_i(t))$ к $f(\zeta_i(t))$ при $T\to\infty$ для всех функционалов, непрерывных относительно равномерной метрики).

Лит. см. при ст. *Массового обслуживания теория.*

А. А. Боровков.

МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СИСТЕМА с отказами — система массового обслуживания, алгоритм к-рой предусматривает выбывание вызовов, в момент прихода к-рых все каналы оказались занятыми. Основные определения и обозначения см. в ст. *Массового обслуживания система.*

1) Естественными характеристиками состояния М. о. с. с отказами являются число q_n (или $q(t)$) занятых линий в момент прихода n-го вызова (в момент времени t). Однако, в отличие от систем с бесконечным числом каналов обслуживания, здесь всегда $q_n \leqslant m$, где m — число каналов в системе. Если в момент прихода n-го вызова оказывается $q_n = m$, то этот вызов получает отказ и выбывает из рассмотрения. Если же $q_n < m$, то вызов направляется на обслуживание в один из свободных каналов.

Предположив, что управляющая последовательность $\{\tau_j^e,\ \tau_j^s\} \in G_S$ метрически транзитивна, $\mathsf{E}\tau_j^s < \infty$, можно сформулировать эргодич. теорему для систем с отказами, используя систему с бесконечным числом каналов обслуживания, управляемую той же последовательностью. Для такой системы существует собственная стационарная последовательность $\{Q^k\}$ длины очереди. Величину Q^0 можно представлять как число занятых линий стационарной системы в момент прихода нек-рого вызова. Обозначив условно номер этого вызова через γ, определяют Q_l^0 как число линий, занятых вызовами, пришедшими до вызова γ_0, в момент прихода вызова с номером $\gamma + l$, так что $Q_0^0 = Q^0$, $Q_l^0 \leqslant Q^0$. Тогда если вероятность события

$$A = \left\{ Q_k^0 \leqslant m - 1 - k, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1 \right\}$$

положительна, то распределения последовательностей $\{q_{n+k};\ k \geqslant 0\}$ длин очереди для систем с отказами будут сходиться при $n \to \infty$ к распределению нек-рой стационарной последовательности $\{q^k;\ k \geqslant 0\}$. Смысл события A весьма прост: оно состоит в «обновлении» системы: после него в системе будут находиться лишь вызовы с номерами γ и выше.

Приведенная теорема есть частный случай более общего утверждения, использующего т. н. метод обновлений. Если $\{\tau_j^e\} \in G_I$, $\{\tau_j^s\} \in G_I$, то для выполнения сформулированных условий достаточно, чтобы

$$\mathsf{P}\left\{\tau_j^s \leqslant m\tau_j^e\right\} > 0, \quad \mathsf{E}\tau_j^s < \infty.$$

Утверждение, аналогичное сформулированному выше, будет иметь место и относительно сходимости при $t \to \infty$ процессов $\{q(t+u);\ u \geqslant 0\}$ к стационарному процессу $\{q^s(u);\ u \geqslant 0\}$ длины очереди. При этом помимо приведенных условий дополнительно требуется, чтобы входной процесс $e(t)$ (число поступивших вызовов к моменту времени t) был процессом со стационарными приращениями.

2) Если $\{\tau_j^e\} \in E$, $\{\tau_j^s\} \in G$, то справедливы формулы Эрланга

$$\mathsf{P}\{q^k = j\} = \mathsf{P}\{q^s(u) = j\} = c\,\frac{(\alpha a)^j}{j!},$$

где $a = \mathsf{E}\tau_j^s$, α — показатель распределения τ_j^e, а

$$c = \left[\sum_{j=0}^{m} \frac{(\alpha a)^j}{j}\right]^{-1}.$$

Если $\{\tau_j^e\} \in G_I$, $\{\tau_j^s\} \in E$, то последовательность q_n связана в простую однородную цепь Маркова с конечным числом $(m+1)$ состояний. В этом случае вероятности

$$p_j = \mathsf{P}\{q^0 = j\} = \lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{q_n = j\}$$

также можно найти в явном виде. Если, кроме того, распределение τ_j^e нерешетчато и $\mathsf{E}\tau_j^e < \infty$, то

$$\mathsf{P}\{q^s(0) = j\} = \lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{q(t) = j\} = \frac{p_{k-1}}{k\alpha\,\mathsf{E}\tau_j^e},$$

где α — показатель распределения τ_j^s.

Эти утверждения указывают условия существования и явный вид для стационарной вероятности отказа, равной

$$\mathsf{P}\{q^0=m\}=\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{q_n=m\}.$$

3) Теоремы устойчивости для систем с отказами вполне аналогичны теоремам устойчивости для систем с бесконечным числом каналов. Пусть даны последовательности $\{\tau_j^{(n)e}, \tau_j^{(n)s}\}$, $n=1, 2, \ldots$, управляющие системами с отказами и удовлетворяющие следующему условию:

(A) существует последовательность $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}$, к распределениям к-рой сходятся при $n\to\infty$ конечномерные распределения $\{\tau_j^{(n)e}, \tau_j^{(n)s}\}$. Кроме того, все названные последовательности удовлетворяют условиям (см., напр., п. 1), обеспечивающим существование стационарных последовательностей длины очереди. Чтобы имела место сходимость распределений этих стационарных последовательностей длины очереди, к-рые обозначены $\{q^{(n)k};\ k\geqslant 0\}$ и $\{q^k;\ k\geqslant 0\}$, следует ввести еще два условия:

(*B*) $\quad \mathsf{E}\tau^{(n)s}\longrightarrow \mathsf{E}\tau^s$ при $n\longrightarrow\infty$;

(*C*) распределения

$$\tau_{-j}^s-\sum_{k=-j}^{0}\tau_k^e$$

при всех $j\geqslant 0$ непрерывны в точке 0.

При выполнении условий (A), (B), (C) конечномерные распределения последовательностей $\{q^{(n)k};\ k\geqslant 0\}$ слабо сходятся к распределениям $\{q^k;\ k\geqslant 0\}$.

4) Асимптотич. методы исследования систем с отказами могут быть эффективными также при изучении систем с интенсивным входным потоком или с большим числом каналов обслуживания.

Исследование систем с интенсивным входом связано с получением результатов в предположениях, близких к тем, к-рые рассматриваются при асимптотич. анализе систем с бесконечным числом каналов обслуживания. Изучение систем с большим числом каналов проводится как путем асимптотич. анализа явных формул, к-рые становятся малоэффективными при больших m, так и с помощью изучения близости распределения q^k к распределению числа занятых линий в аналогичной системе, но с бесконечным числом каналов обслуживания.

Напр., для систем с последовательностями $\{\tau_j^e\}\in G_I$, $\{\tau_j^s\}\in E$ стационарная вероятность отказа равна

$$p_m=\left(\sum_{j=0}^{m}A_j\right)^{-1},$$

где

$$A_0=1,\quad A_j=\binom{m}{j}\prod_{k=1}^{j}\frac{1-\varphi(k/m)}{\varphi(k/m)},\quad \varphi(t)=\mathsf{E}e^{-tm\alpha\tau_j^e},$$

α — показатель распределения τ_j^s. Эти соотношения при больших m становятся малопригодными для отыскания числовых значений p_m. В то же время оказывается, что при $m\to\infty$ действуют достаточно простые формулы, к-рые устанавливают асимптотич. поведение p_m и к-рые, следовательно, можно использовать для приближенных вычислений вероятности отказа. При этом определяющую роль играет параметр $\rho=\mathsf{E}m\alpha\tau_j^e$, характеризующий отношение среднего числа $1/\mathsf{E}\tau_j^e$ вызовов, поступивших в систему, к среднему числу вызовов $m/\mathsf{E}\tau_j^s=m\alpha$, к-рое может обслужить система за единицу времени. Если $\rho<1$, то система обычно полностью загружена, если $\rho>1$, то система недогружена. Если $\rho<1-\varepsilon$ при $m\to\infty$ и нек-ром $\varepsilon>0$, то $p_m/(1-\rho)\to 1$. Если $\mathsf{E}(m\alpha\tau_j^e)^2<c<\infty$ при $m\to\infty$, то при-

веденное соотношение для p_m сохраняется и при $\rho \to 1$, если только $(1-\rho)\sqrt{m} \to \infty$. Если же $(1-\rho)\sqrt{m} \to$ $\to$ const, то p_m ведет себя асимптотически как $b/\sqrt{m}$, где постоянная b найдена в явном виде. Найдено также асимптотич. поведение p_m и в случае $(1-\rho)\sqrt{m} \to -\infty$.

5) Несколько более полно могут быть изучены одноканальные системы с отказами (когда $m=1$). Пусть, напр., $\{\tau_j^e, \tau_j^s\} \in G_I$. Случайную величину η определяют равенством

$$\eta = \max\,(k : X_k \geqslant \tau_1^s),$$

где $X_k = \tau_1^e + \ldots + \tau_k^e$. Тогда, для того чтобы при любом начальном условии существовал предел

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\,\{q_m = 1\} = p_1,$$

необходимо и достаточно, чтобы наибольший общий делитель возможных значений η равнялся 1. При этом $p_1 = 1 - 1/\mathsf{E}\eta$. Если τ^e нерешетчата, то всегда существует

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\,\{q(t) = 1\} = \frac{\mathsf{E}\tau^s}{\mathsf{E}\tau^e \mathsf{E}\eta}.$$

При более широком понимании вероятности отказа как предела отношения $\pi_n = r_n/n$, где r_n — число необслуженных вызовов среди первых n поступивших, условия существования $\lim \pi_n$ будут более широкими. Напр., для случая $\{\tau_j^e, \tau_j^s\} \in G_I$ предел π_n существует всегда и равен $1 - 1/\mathsf{E}\eta$.

Лит. см. при ст. *Массового обслуживания теория.*

А. А. Боровков.

МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ТЕОРИЯ, теория очередей,— раздел теории вероятностей, изучающий математич. модели разного рода реальных *массового обслуживания систем*. Эти модели представляют собой случайные процессы специального вида, к-рые наз. иногда процессами обслуживания. Чаще всего используется описательное определение этих процессов, поскольку формальное их построение оказывается весьма сложным и не всегда эффективным.

М. о. т. использует главным образом аппарат теории вероятностей. Основные задачи М. о. т. обычно состоят в том, чтобы на основании «локальных» свойств рассматриваемых случайных процессов изучить их стационарные характеристики (если таковые существуют) или поведение этих характеристик за большой промежуток времени. Одна из главных конечных целей исследований в этой области состоит в выборе наиболее разумной организации систем массового обслуживания.

Напр., для такого типичного объекта М. о. т., как автоматические телефонные станции (см. *Массового обслуживания система* с отказами), одной из основных характеристик является доля вызовов получивших отказ, т. е. предел p при $t \to \infty$ (если он существует) отношения $r(t)/e(t)$ числа $r(t)$ вызовов, получивших отказ за время t, к общему числу $e(t)$ вызовов, поступивших за это время. При этом предполагаются известными распределение интервалов времени $\tau_1^e, \tau_2^e, \ldots$ между поступлениями вызовов и распределение времени обслуживания $\tau_1^s, \tau_2^s, \ldots$ этих вызовов. Задание распределения случайной (управляющей) последовательности $\{\tau_j^e, \tau_j^s;\ j \geqslant 1, \ldots\}$ вместе с описанием алгоритма, по к-рому происходит эволюция системы массового обслуживания, и составляют исходные данные, характеризующие «локальные свойства» процесса обслуживания.

Аналогичным образом для *массового обслуживания систем* с ожиданием многоканальных изучаются предельные при $n \to \infty$ распределения вероятностей $\mathsf{P}\{w_n < x\}$ и $\mathsf{P}\{q_n < x\}$ для времени w_n, к-рое n-й по счету вызов, поступивший в систему, ожидал начала своего обслуживания с момента прихода, и для длины

q_n очереди в момент появления в системе n-го вызова. Рассматриваются также предельные распределения $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{q(t)<x\}$ для длины очереди в момент времени t и др. При этом исходным опять является задание управляющей последовательности случайных величин (распределение интервалов и времени обслуживания) и алгоритм, определяющий работу системы массового обслуживания.

Для сравнительно простых систем массового обслуживания и при нек-рых предположениях относительно управляющей последовательности случайных величин удается найти требуемые характеристики аналитич. методами. Однако число таких систем не велико. Характер условий, накладываемых на управляющие последовательности, можно продемонстрировать на примере системы массового обслуживания с отказами (автоматические телефонные станции). Пусть: 1) случайные величины τ_j^e показательно распределены:

$$\mathsf{P}\{\tau_j^e > x\} = e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0,$$

т. е. входящий поток является пуассоновским; 2) величины τ_j^s независимы, одинаково распределены и не зависят от $\{\tau_j^e\}$. Тогда определенная выше вероятность отказа p существует и равна

$$p = \rho^n/n! \left(\sum_{k=0}^{n} \rho^k/k!\right)^{-1},$$

где ρ равно отношению математич. ожиданий

$$\rho = \mathsf{E}\tau_j^s/\mathsf{E}\tau_j^e = \alpha \mathsf{E}\tau_j^s.$$

Для рассматриваемой системы отказ от одного из условий 1) — 2) значительно усложняет или делает невозможным отыскание явных формул для числа p.

В основе аналитич. подхода в поисках явных выражений для искомых характеристик лежит прием, связанный с построением марковских процессов, описывающих состояние системы. Этот тип процессов достаточно хорошо изучен, и решение задачи в этом случае сводится к составлению и решению соответствующих уравнений для стационарных распределений (инвариантной меры). Такой подход часто используется в модифицированном виде, когда строятся полумарковские процессы или вложенные марковские процессы (свойство марковости выполняется лишь в нек-рые случайные моменты времени).

Для более сложных систем массового обслуживания точные аналитич. методы, как правило, не эффективны и приходится использовать асимптотич. методы исследования или моделировать соответствующие случайные процессы с помощью *Монте-Карло метода*. Асимптотич. методы уместны в тех случаях, когда рассматриваемая система близка (в смысле ее локальных свойств) к другой системе, к-рая либо достаточно хорошо изучена и допускает вычисление нужных характеристик, либо эта система является в каком-то смысле критической. Направление асимптотич. исследований в первом случае описывается теоремами устойчивости (или непрерывности). Во втором случае стационарные характеристики часто не существуют, но для них удается устанавливать «собирательные» предельные теоремы, т. е. такие, в к-рых предельное поведение определяется не индивидуальными свойствами управляющих последовательностей, а лишь несколькими их числовыми параметрами. Примером второго типа асимптотич. результатов могут служить т. н. теоремы о нагруженных одноканальных системах с ожиданием. Они устанавливают следующее. Пусть интервалы τ_j^e, $j=1, 2, \ldots$, между поступлениями вызовов и временем обслуживания τ_j^s, $j=1, 2, \ldots$, образуют независимые друг от друга

последовательности независимых одинаково распределенных величин и пусть математич. ожидание

$$a = \mathsf{E}\,(\tau_j^s - \tau_j^e)$$

разности случайных величин τ_j^s и τ_j^e положительно. Тогда существует невырожденное предельное распределение

$$w(x) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\,\{w_n \geqslant x\}$$

для времени w_n ожидания n-го вызова. Кроме того, пусть случайные величины τ_j^e, τ_j^s меняются так, что $a \to 0$, оставаясь положительным, дисперсия $\mathsf{D}(\tau_j^s - \tau_j^e)$ сходится к положительному пределу $\sigma^2 < \infty$, а математич. ожидание $\mathsf{E}[\tau_j^s - \tau_j^e]^{2+\gamma}$ равномерно ограничено при нек-ром $\gamma > 0$. Тогда при каждом фиксированном z

$$w(z/a) \longrightarrow e^{-2z/\sigma^2}. \qquad (*)$$

Это соотношение дает возможность приближенно вычислять $w(x)$ при малых значениях a. Предельная система, соответствующая значению $a = 0$, является критической в том смысле, что для нее не существует невырожденного предельного распределения $w(x)$, и для каждого $x > 0$ выполняется $w(x) = 1$ (время ожидания n-го клиента неограниченно растет с ростом n). Соотношение $(*)$ может быть распространено на широкий класс систем обслуживания с ожиданием при очень общих предположениях на управляющие последовательности.

Возникновение М. о. т. было вызвано интересом к новым математич. задачам, возникающим в организации телефонных сетей. Первые публикации по этому поводу принадлежат А. Эрлангу (A. Erlang) и относятся к 20-м гг. 20 в. Дальнейшее развитие М. о. т. получила в 40—50-е гг. в работах К. Пальма (C. Palm), Ф. Поллачека (F. Pollaczek), А. Я. Хинчина и др. Последнему принадлежит и термин «массового обслуживания теория». В СССР эти работы по М. о. т. были продолжены Б. В. Гнеденко с группой его учеников и др.

Развитие М. о. т. стимулируется как расширением круга ее приложений, так и математич. содержательностью возникающих при этом задач. Являясь формально частью теории случайных процессов, М. о. т. выделилась в самостоятельную область исследований со своим кругом проблем и своими подходами к их решению.

Лит.: [1] Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963; [2] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, М., 1966; [3] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [4] его же, Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980.

А. А. Боровков.

МАССОВЫЙ ОПЕРАТОР, оператор массы,— оператор, учитывающий взаимодействие частицы с ее собственным полем и другими полями. Пусть состояние системы описывается величиной

$$\Psi(x) = \Psi_0(x)\,\psi(x),$$

где $\psi(x)$ — оператор поля, действующий на волновую функцию Ψ_0 (вектор состояния), x — четырехмерная координата. Если $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$[L(x) + M(x)]\,\Psi(x) = 0, \qquad (*)$$

где оператор $L(x)$ соответствует свободной частице, а $M(x)$ учитывает ее взаимодействие с собственным полем и др. полями, то оператор $M(x)$ наз. массовым оператором. М. о. является интегральным оператором с ядром $M(x, x')$:

$$M(x)\,\Psi(x) = \int M(x, x')\,\Psi(x')\,dx'.$$

М. о. тесно связан с одночастичной *Грина функцией* $G(x, x')$, к-рая является решением уравнения, подоб-

ного (*), но с δ-образным источником в правой части

$$[L(x)+M(x)]G(x,\ x')=\delta(x-x'),$$

где $\delta(x-x')$ — четырехмерная дельта-функция.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957; [2] Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962.

А. Б. Иванов.

МАСШТАБНЫЙ ПАРАМЕТР — один из т. н. параметров расположения, многообразием значений к-рых описывается семейство распределений вероятностей одного типа. Если распределение в $\mathbb{R}$ с функцией распределения $F(x)$ принадлежит тому же типу, что и фиксированное распределение с функцией распределения $F_0(x)$, то $F(x)=F_0\left(\frac{x-b}{a}\right)$. Здесь $a>0$ — М. п., а b — параметр сдвига (или центрирующий параметр). Смысл М. п. разъясняется следующим образом: если F_0 и F — функции распределения случайных величин X_0 и X соответственно, то переход от X_0 к $X=aX_0$ (при $b=0$) представляет собой изменение единицы измерения.

А. В. Прохоров.

МАТЕМАТИКА — наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. В неразрывной связи с запросами техники и естествознания запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых М., непрерывно расширяется, так что это общее определение М. наполняется все более богатым содержанием.

Ясное понимание самостоятельного положения М. как особой науки стало возможным только после накопления достаточно большого фактич. материала и возникло впервые в Др. Греции в 6—5 вв. до н. э. Развитие М. до этого времени естественно отнести к периоду зарождения математики, а к 6—5 вв. до н. э. приурочить начало периода элементарной математики. В течение этих двух первых периодов математич. исследования имеют дело почти исключительно с весьма ограниченным запасом основных понятий, возникших еще на очень ранних ступенях историч. развития в связи с самыми простыми запросами хозяйственной жизни. Первые задачи механики и физики могли еще удовлетворяться этим же запасом основных математич. понятий.

В 17 в. новые запросы естествознания и техники заставляют математиков сосредоточить свое внимание на создании методов, позволяющих математически изучать движение, процессы изменения величин, преобразования геометрич. фигур. С употребления переменных величин в аналитич. геометрии и создания дифференциального и интегрального исчисления начинается период математики переменных величин.

Дальнейшее расширение круга количественных отношений и пространственных форм, изучаемых М., привело в нач. 19 в. к необходимости отнестись к процессу расширения предмета математич. исследований сознательно, поставив перед собой задачу систематич. изучения с достаточно общей точки зрения возможных типов количественных отношений и пространственных форм. Создание «воображаемой геометрии» Лобачевского было первым значительным шагом в этом направлении. Развитие подобного рода исследований внесло в М. столь важные новые черты, что М. 19 и 20 вв. естественно отнести к особому периоду современной математики.

1. Зарождение математики. Счет предметов на самых ранних ступенях развития культуры привел к созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел. Только на основе разработанной системы устного счисления возникают письменные системы счисления и постепенно вырабатываются приемы выполнения над

натуральными числами четырех арифметич. действий. Потребности измерения (количества зерна, длины дороги и т. п.) приводят к появлению названий и обозначений простейших дробных чисел и к разработке приемов выполнения арифметич. действий над дробями. Таким образом накапливается материал, складывающийся постепенно в древнейшую математич. науку — *арифметику*. Измерение площадей и объемов, потребности строительной техники, а несколько позднее астрономии вызывают развитие начатков *геометрии*. Эти процессы шли у многих народов в значительной степени независимо и параллельно. Особенное значение для дальнейшего развития науки имело накопление арифметич. и геометрич. знаний в Египте и Вавилонии. В Вавилонии на основе развитой техники арифметич. вычислений появились также начатки *алгебры*, а в связи с запросами астрономии — начатки *тригонометрии*.

2. Период элементарной математики. Только после накопления большого конкретного материала в виде разрозненных приемов арифметич. вычислений, способов определения площадей и объемов и т. п. возникает М. как самостоятельная наука с ясным пониманием своеобразия ее метода и необходимости систематич. развития ее основных понятий и предложений в достаточно общей форме. В применении к арифметике и алгебре указанный процесс начался уже в Вавилонии. Однако вполне определилось это новое течение, заключавшееся в систематическом и логически последовательном построении основ математич. науки, в Др. Греции. Созданная древними греками система изложения элементарной геометрии на два тысячелетия вперед сделалась образцом дедуктивного построения математич. теории. Из арифметики постепенно вырастает *чисел теория*. Создается систематич. учение о величинах и измерении. Процесс формирования (в связи с задачей измерения величин) понятия действительного числа (см. *Число*) оказывается весьма длительным. Дело в том, что понятия иррационального и отрицательного чисел относятся к более сложным математич. абстракциям, к-рые, в отличие от понятий натурального числа, дроби или геометрич. фигуры, не имеют достаточно прочной опоры в донаучном общечеловеческом опыте. Создание алгебры как буквенного исчисления завершается лишь в конце рассматриваемого периода. Период элементарной математики заканчивается (в Зап. Европе в нач. 17 в.), когда центр тяжести математич. интересов переносится в область М. переменных величин.

3. Период создания математики переменных величин. С 17 в. начинается существенно новый период развития М. Круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых теперь М., уже не исчерпывается числами, величинами и геометрич. фигурами. В основном это было обусловлено явным введением в М. идей движения и изменения. Уже в алгебре в скрытом виде содержится идея зависимости между величинами (значение суммы зависит от значений слагаемых и т. д.). Однако чтобы охватить количественные отношения в процессе их изменения, надо было самые зависимости между величинами сделать самостоятельным объектом изучения. Поэтому на первый план выдвигается понятие *функции*, играющее в дальнейшем такую же роль основного и самостоятельного предмета изучения, как ранее понятия величины или числа. Изучение переменных величин и функциональных зависимостей приводит далее к основным понятиям математич. анализа, вводящим в М. в явном виде идею бесконечного, к понятиям предела, производной, дифференциала и интеграла. Создается анализ бесконечно малых, в первую очередь в виде *дифференциального исчисления* и *интегрального исчисления*, позволяющий связывать конечные изменения переменных величин с их поведением в непосредственной близости отдельных принимаемых ими зна-

чений. Основные законы механики и физики записываются в форме дифференциальных уравнений, и задача интегрирования этих уравнений выдвигается в качестве одной из важнейших задач М. Разыскание неизвестных функций, определенных условиями другого рода (условиями минимума или максимума нек-рых связанных с ними величин), составляет предмет *вариационного исчисления*. Таким образом, наряду с уравнениями, в к-рых неизвестными являются числа, появляются уравнения, в к-рых неизвестны и подлежат определению функции.

Предмет изучения геометрии также существенно расширяется с проникновением в геометрию идей движения и преобразования фигур. Геометрия начинает изучать движения и преобразования сами по себе. Напр., в *проективной геометрии* одним из основных объектов изучения являются сами проективные преобразования плоскости или пространства. Впрочем, сознательное развитие этих идей относится лишь к кон. 18 и нач. 19 вв. Гораздо раньше, с созданием в 17 в. *аналитической геометрии*, принципиально изменилось отношение геометрии к остальной М.: был найден универсальный способ перевода вопросов геометрии на язык алгебры и анализа и решения их чисто алгебраич. и аналитич. методами, а с другой стороны, открылась широкая возможность изображения (иллюстрирования) алгебраич. и аналитич. фактов геометрически, напр. при графич. изображении функциональных зависимостей.

4. Современная математика. Все созданные в 17 и 18 вв. разделы математич. анализа продолжали с большой интенсивностью развиваться в 19 и 20 вв. Чрезвычайно расширился за это время и круг их применения к задачам, выдвигаемым естествознанием и техникой. Однако помимо этого количественного роста с кон. 18 и в нач. 19 вв. в развитии М. наблюдается и ряд существенно новых черт.

Накопленный в 17 и 18 вв. огромный фактич. материал привел к необходимости углубленного логич. анализа и объединения его с новых точек зрения. Связь М. с естествознанием, оставаясь по существу не менее тесной, приобретает теперь более сложные формы. Большие новые теории возникают не только в результате непосредственных запросов естествознания и техники, но также из внутренних потребностей самой М. Таково в основном было развитие *функций комплексного переменного теории*, занявшей в нач. и сер. 19 в. центральное положение во всем математич. анализе. Другим замечательным примером теории, возникшей в результате внутреннего развития самой М., явилась *Лобачевского геометрия*.

В более непосредственной и непрерывной зависимости от запросов механики и физики происходило формирование векторного и тензорного исчислений. Перенесение векторных и тензорных представлений на бесконечномерные величины происходит в рамках *функционального анализа* и тесно связывается с потребностями современной физики.

Таким образом, в результате как внутренних потребностей М., так и новых запросов естествознания круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых М., чрезвычайно расширяется; в него входят отношения, существующие между элементами произвольной группы, векторами, операторами в функциональных пространствах, все разнообразие форм пространств любого числа измерений и т. п.

Существенная новизна начавшегося в 19 в. этапа развития М. состоит в том, что вопросы необходимого расширения круга подлежащих изучению количественных отношений и пространственных форм становятся предметом сознательного и активного интереса математиков. Если прежде, напр., введение в употребление отрицательных и комплексных чисел и точная формули-

ровка правил действий с ними требовали длительной работы, то теперь развитие М. потребовало выработки приемов сознательного и планомерного создания новых геометрич. и алгебраич. систем.

Чрезвычайное расширение предмета М. привлекло в 19 в. усиленное внимание к вопросам ее «обоснования», т. е. критич. пересмотру ее исходных положений (аксиом), построению строгой системы определений и доказательств, а также критич. рассмотрению логич. приемов, употребляемых при этих доказательствах. Стандарт требований к логич. строгости, предъявляемых к практич. работе математиков над развитием отдельных математич. теорий, сложился только к кон. 19 в. Глубокий и тщательный анализ требований к логич. строгости доказательств, строения математич. теорий, вопросов алгоритмич. разрешимости и неразрешимости математич. проблем составляет предмет *математической логики*.

В нач. 19 в. происходит новое значит. расширение области приложений математич. анализа. Если до этого времени основными отделами физики, требовавшими большого математич. аппарата, оставались механика и оптика, то теперь к ним присоединяются электродинамика, теория магнетизма и термодинамика. Получают широкое развитие важнейшие разделы механики непрерывных сред. Быстро растут и математич. запросы техники. В качестве основного аппарата новых областей механики и математич. физики усиленно разрабатывается теория *дифференциальных уравнений обыкновенных*, *дифференциальных уравнений с частными производными* и *математической физики уравнений*.

Теория дифференциальных уравнений послужила отправным пунктом исследований по топологии многообразий. Здесь получили свое начало «комбинаторные», «гомологические» и «гомотопические» методы *алгебраической топологии*. Другое направление в топологии возникло на почве *множеств теории* и функционального анализа и привело к систематич. построению теории общих *топологических пространств*.

Существенным дополнением к методам дифференциальных уравнений при изучении природы и решении технич. задач являются методы *вероятностей теории*. Если в нач. 19 в. главными потребителями вероятностных методов были теория артиллерийской стрельбы и теория ошибок, то в кон. 19 и в нач. 20 вв. теория вероятностей получает много новых применений благодаря созданию теории случайных процессов и развитию аппарата *математической статистики*.

Теория чисел, представлявшая собрание отдельных результатов и идей, с 19 в. развивалась в различных направлениях как стройная теория (см. *Алгебраическая теория чисел*, *Аналитическая теория чисел*, *Диофантовы приближения*).

Центр тяжести алгебраич. исследований переносится в новые области алгебры: теорию групп, полей, колец, общих алгебраич. систем. На границе между алгеброй и геометрией возникает теория непрерывных групп, методы к-рой позднее проникают во все новые области М. и естествознания.

Элементарная и проективная геометрия привлекают внимание математиков гл. образом под углом зрения изучения их логич. и аксиоматич. основ. Но основными отделами геометрии, где сосредоточиваются наиболее значительные научные силы, становятся *дифференциальная геометрия*, *алгебраическая геометрия*, *римановa геометрия*.

В результате систематич. построения математич. анализа на основе строгой арифметич. теории иррациональных чисел и теории множеств возникла *функций действительного переменного теория*.

Практич. использование результатов теоретического математич. исследования требует получения ответа на

поставленную задачу в числовой форме. Между тем даже после исчерпывающего теоретич. разбора задачи это часто оказывается весьма трудным делом. Зародившиеся в кон. 19 и в нач. 20 вв. численные методы анализа и алгебры выросли в связи с созданием и использованием ЭВМ в самостоятельную ветвь М.— *вычислительную математику*.

Отмеченные основные особенности современной М. и перечисленные основные направления исследований М. по разделам сложились в нач. 20 в. В значительной мере это деление на разделы сохраняется, несмотря на стремительное развитие М. в 20 в. Однако потребности развития самой М., «математизация» различных областей науки, проникновение математич. методов во многие сферы практич. деятельности, быстрый прогресс вычислит. техники привели к перемещению основных усилий математиков внутри сложившихся разделов М. и к появлению целого ряда новых математич. дисциплин (см., напр., *Автоматов теория*, *Информации теория*, *Игр теория*, *Исследование операций*, а также *Кибернетика*, *Математическая экономика*). На основе задач теории *управляющих систем*, комбинаторного анализа, теории графов, теории кодирования возник *дискретный анализ*. Вопросы о наилучшем (в том или ином смысле) управлении физич. или механич. системами, описываемыми дифференциальными ур-ниями, привели к созданию *оптимального управления математической теории*.

Исследования в области общих проблем управления и связанных с ними областях М. в соединении с прогрессом вычислит. техники дают основу для автоматизации новых сфер человеческой деятельности.

По материалам статьи А. Н. Колмогорова [1].

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Математика, в кн.: Большая Советская Энциклопедия, 2 изд., т. 26, М., 1954; [2] Виноградов И. М., Математика и научный прогресс, в кн.: Ленин и современная наука, кн. 2, М., 1970; [3] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., М., 1979; [4] Математика, ее содержание, методы и значение, т. 1—3, М., 1956; [5] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. 1—3, М., 1970—72; [6] Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1978; [7] Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций, М., 1981; [8] Стройк Д. Я., Краткий очерк истории математики, пер. с нем., 3 изд., М., 1978; [9] Марджанишвили К. К., Математика в Академии наук СССР, «Вестн. АН СССР», 1974, № 6; [10] Weyl H., A Half-century of mathematies, «Amer. Math. Monthly», 1951, v. 58, № 8.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ — метод доказательства математич. утверждений, основанный на принципе математической индукции: утверждение $A(x)$, зависящее от натурального параметра x, считается доказанным, если доказано $A(1)$ и для любого натурального n из предположения, что верно $A(n)$, выведено, что верно также $A(n+1)$.

Доказательство утверждения $A(1)$ составляет первый шаг (или базис) индукции, а доказательство $A(n+1)$ в предположении, что верно $A(n)$, наз. индукционным переходом. При этом x наз. параметром индукции, а предположение $A(n)$ при доказательстве $A(n+1)$ наз. индуктивным предположением. Принцип М. и. является также основанием для *индуктивных определений*. Простейшим примером такого определения является определение свойства: «быть словом длины n в данном алфавите

$$\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k\}». \qquad (*)$$

Базис индукции: каждая буква алфавита (*) есть слово длины 1. Индукционный переход: если E — слово длины n, то каждое слово Ea_i, где $1 \leqslant i \leqslant k$, есть слово длины $n+1$. Индукция может начинаться с нулевого шага.

Часто бывает так, что $A(1)$ и $A(n+1)$ доказываются аналогичными рассуждениями. В таких случаях удобно пользоваться следующей эквивалентной формой

принципа М. и. Если для всякого n из предположения: $A(x)$ верно при любом натуральном $x<n$ — следует, что $A(x)$ верно также при $x=n$, то утверждение $A(x)$ верно при любом натуральном x. В такой форме принцип М. и. может быть применен для доказательства утверждений $A(x)$, в к-рых параметр x пробегает то или иное множество, вполне упорядоченное по нек-рому трансфинитному типу (*трансфинитная индукция*). В качестве простых примеров трансфинитной индукции отметим индукцию по параметру, пробегающему множество всех слов в данном алфавите, упорядоченное лексикографически, и индукцию по построению формул в данном логико-математич. исчислении.

Иногда для доказательства нек-рого утверждения $A(n)$ индукцией по n приходится одновременно с $A(n)$ доказывать индукцией по n ряд других утверждений, без к-рых индукцию для $A(n)$ не удается провести. В формальной арифметике можно указать такие утверждения $A(n)$, для к-рых в рамках рассматриваемого исчисления индукция не может быть проведена без добавления новых вспомогательных утверждений, зависящих от n (см. [3]). В таких случаях мы имеем дело с доказательством ряда утверждений совместной математической индукцией. Все эти утверждения формально можно объединить в одну конъюнкцию, однако практически такое объединение только усложнило бы рассмотрение, т. к. при этом исчезла бы возможность неформальных осмысленных ссылок на определенные индуктивные предположения.

В нек-рых конкретных математич. исследованиях число понятий и утверждений, определяемых и доказываемых сложной совместной индукцией, исчисляется трехзначной цифрой (см. [4]). В этом случае ввиду наличия в индуктивном доказательстве большого числа перекрестных ссылок на индуктивные предположения, для содержательного (неформального) понимания любого (даже самого простого) определения или утверждения при данном достаточно большом значении параметра индукции читатель должен быть знаком с содержанием всех вводимых совместной индукцией понятий и многих свойств этих понятий для меньших значений параметра индукции. По-видимому, единственным корректным с логич. точки зрения выходом из возникающего здесь логич. круга является аксиоматич. изложение всей рассматриваемой системы понятий. Таким образом, большое число понятий, определяемых совместной индукцией, приводит к необходимости применения *аксиоматического метода* в индуктивном определении и доказательстве. Это — наглядный пример необходимости аксиоматич. метода для решения конкретных математич. задач, а не только вопросов, относящихся к основаниям математики.

Лит.: [1] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., М., 1979; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] Цинман Л. Л., «Матем. сб.», 1968, т. 77, № 1, с. 71—104; [4] Адян С. И., Проблема Бернсайда и тождества в группах, М., 1975.

С. И. Адян.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИНГВИСТИКА — математическая дисциплина, предметом к-рой является разработка и изучение понятий, образующих основу формального аппарата для описания строения естественных языков (т. е. метаязыка лингвистики). Возникновение М. л. можно отнести приблизительно к 50-м гг. 20 в.; она была вызвана к жизни прежде всего внутренними потребностями теоретич. лингвистики, в к-рой к этому времени назрела необходимость уточнения основных понятий, а также задачами, связанными с автоматизацией переработки языковой информации (см. *Автоматический перевод*). В М. л. широко используются методы теории алгоритмов, теории автоматов и алгебры. Сохраняя свое прикладное значение, М. л. постоянно эволюционирует по пути превращения в тео-

ретическую математич. дисциплину, являющуюся по сути дела одним из ответвлений математич. логики. В то же время круг приложений М. л. расширился — ее методы нашли применение в теории программирования.

Лингвистич. концепции, лежащие в основе формальных методов описания строения языка, принадлежат *структурной лингвистике*. Главнейшая из этих концепций — представление о языке как о «системе чистых отношений», сближающее язык с абстрактными системами, изучаемыми в математике. Это представление конкретизируется в концепции функционирования языка как преобразования нек-рых абстрактных объектов — «смыслов» — в объекты другой природы — «тексты» и обратно. Такая концепция приводит к мысли об изучении указанного преобразования (после уточнения понятий «смысла» и «текста») математич. средствами. Использование этого подхода затруднительно, если пытаться рассматривать преобразование «в целом», ввиду его чрезвычайной сложности, а также ввиду трудности формализации понятия «смысла». Однако содержательные соображения подсказывают расчленение преобразования на этапы. Напр., при одном из наиболее грубых членений нек-рый этап может состоять в переходе от «смыслов» предложений к «синтаксическим структурам без линейного порядка» — наборам элементов предложений, соединенных «синтаксическими связями», но еще не расположенных в линейные последовательности; на следующем этапе получаются линейные последовательности слов, потом они превращаются в цепочки звуков. При более тонких членениях вводятся синтаксич. структуры нескольких уровней, все более отдаляющиеся от «смыслового» и приближающиеся к «текстовому»; «послесинтаксические» этапы также подвергаются дальнейшему расчленению. Такие этапы уже легче описывать математически, уточняя представления об объектах промежуточных уровней и моделируя переходы от одних уровней к другим эффективными отображениями. Правда, рассматриваемое преобразование неоднозначно, и таковы же все или почти все (в зависимости от способа членения) промежуточные этапы; это связано с одной из важнейших особенностей языка — наличием в нем явления с и н о н и м и и, т. е. возможности выражать одно и то же содержание разными способами. Поэтому приходится строить не детерминированные эффективные системы (алгоритмы), а недетерминированные (исчисления), позволяющие либо для данного объекта нек-рого уровня перечислять отвечающие ему объекты соседнего уровня или объекты (того же уровня), ему синонимичные, либо перечислять множество «правильных» объектов заданного уровня (т. е. таких, к-рые известным регулярным способом сопоставляются объектам предыдущего уровня), либо перечислять множество пар отвечающих друг другу объектов двух заданных соседних уровней (напр., «предложение + его синтаксическая структура») и т. п. Такого рода исчисления известны как *грамматики* формальные. Одновременно с формальными грамматиками, моделирующими преобразования языковых объектов, возникают конструкции, предназначенные для формального описания самих этих объектов. Кроме того, на множествах объектов одного уровня возникают классификации и отношения, во многом сходные с категориями традиционной грамматики (такими, как часть речи, род, падеж и т. п.) и в ряде случаев совпадающие с ними; без введения таких классификаций и отношений реальное построение формальных грамматик для естественных языков фактически невозможно.

Таким образом, можно выделить три аспекта формального описания языка: описание строения языковых объектов различных уровней, описание нек-рых специальных отношений и классификаций на множествах

этих объектов и описание преобразований одних объектов в другие, а также строения множеств «правильных» объектов. Этим аспектам отвечают три основных раздела М. л.: 1) разработка и изучение способов описания строения отрезков речи; 2) изучение лингвистически значимых отношений и классификаций на множествах языковых объектов (построенные для этой цели формальные системы обычно называют *аналитическими моделями языка*); 3) теория формальных грамматик.

Для описания строения отрезков речи используются синтаксич. структуры, представляющие собой графы или биграфы специального вида, обычно с помеченными вершинами и/или дугами. Лучше всего разработана теория описания «поверхностных» уровней (т. е. наиболее далеких от «смыслового»); на этих уровнях структуры обычно являются деревьями. Интенсивно разрабатываются способы описания более «глубинных» уровней. Для этого, в частности, предложен аппарат т. н. лексических функций, играющих при описании смысловой сочетаемости слов роль, сходную с той, к-рую традиционные категории рода, падежа, числа и т. п. играют при описании синтаксич. сочетаемости. Средств строгого описания «смыслового» уровня пока нет, но многим исследователям представляется вероятным, что на таком пути «последовательного приближения» можно надеяться выработать подход к формальному описанию смысла. Это не исключает и иных подходов; в частности, много исследований посвящено способам выражения в естественных языках предикатов, пропозициональных связок, кванторов, «переводу» с формально-логич. языков на естественные и обратно. Сюда же примыкают работы по конструированию так наз. семантических языков, в к-рых смыслы сопоставляются текстам простыми и строго формальными способами.

Аналитич. модели языка важны, в частности, ввиду того, что они позволяют уточнить логич. природу многих понятий и категорий традиционного языковедения. Эти модели не всегда носят характер эффективных процедур, поскольку в них могут входить такие понятия, как (бесконечное) множество грамматически правильных предложений нек-рого языка, считающееся заданным. Однако в ряде моделей все исходные данные представляют собой конечные множества и финитные отношения; в этих случаях входящие в модель процедуры эффективны. К теории аналитич. моделей языка примыкает теория лингвистической дешифровки: ее предметом является построение процедур, применяемых, подобно аналитич. моделям, к «неупорядоченным» эмпирич. данным о языке, но всегда эффективных и позволяющих получать не только абстрактные определения, но и конкретные сведения о строении конкретных языков (напр., алгоритмы, осуществляющие автоматич. разбиение множества фонем языка на классы гласных и согласных без использования каких-либо сведений о языке, кроме нек-рого достаточно длинного текста).

Теория формальных грамматик занимает в М. л. центральное место, т. к. она позволяет моделировать наиболее существенный аспект функционирования языка — переработку смыслов в тексты и обратно — и благодаря этому служит связующим звеном между остальными разделами М. л. По характеру своего аппарата теория формальных грамматик во многом близка к теории алгоритмов и теории автоматов. Более других разработаны те типы формальных грамматик, к-рые служат для характеризации множества грамматически правильных предложений языка и приписывания этим предложениям синтаксич. структур. Предложения при этом моделируются цепочками (словами) в конечном алфавите, элементы к-рого интерпретируются как слова ес-

тественного языка (поэтому в М. л. термин «цепочка» предпочитают термину «слово», а алфавит часто называют также с л о в а р е м), и моделью множества грамматически правильных предложений служит нек-рый формальный язык. К этому типу относятся, в частности, *грамматики порождающие*. Порождающая грамматика представляет собой по существу частный случай исчисления Поста: она состоит из конечного алфавита, разделенного на две части — основной и вспомогательный алфавиты, конечного множества п р а в и л в ы в о д а, представляющих собой правила подстановки вида $\varphi \to \psi$ (φ, ψ — цепочки) и одной аксиомы (обычно состоящей из одного вспомогательного символа, называемого н а ч а л ь н ы м). (Формальный) язык, порождаемый такой грамматикой,— это множество цепочек в основном алфавите, выводимых из аксиомы. Наиболее важный для лингвистич. приложений класс порождающих грамматик — *грамматики составляющих*, у к-рых каждое правило имеет вид $\xi_1 A \xi_2 \to \xi_1 \theta \xi_2$, где ξ_1, ξ_2, θ — цепочки в объединении основного и вспомогательного алфавитов, A — вспомогательный символ и θ непуста. Грамматика составляющих позволяет естественным образом сопоставлять цепочкам порождаемого ею языка размеченные системы составляющих. Этот класс грамматик наиболее важен и в чисто математич. отношении, т. к. языки, порождаемые грамматиками составляющих, представляют собой простой и весьма важный подкласс класса примитивно рекурсивных множеств. Среди грамматик составляющих в свою очередь особенно важны как в теоретическом, так и в прикладном аспектах *грамматики бесконтекстные*, у к-рых правила имеют вид $A \to \theta$, где A — вспомогательный символ. К бесконтекстным грамматикам близки *грамматики доминационные*, также порождающие формальные языки, но сопоставляющие цепочкам этих языков деревья подчинения, и *грамматики категориальные*, характеризующиеся особым способом задания информации о синтаксич. свойствах слов. Принципиально иной тип формальных грамматик представляют собой *грамматики трансформационные*; они служат для осуществления преобразований синтаксич. структур, не «привязанных», вообще говоря, к цепочкам; эти грамматики представляются наиболее перспективными для описания строения естественных языков, т. к. позволяют рассматривать синтаксические и линейные отношения между словами раздельно, что лучше отражает языковую реальность.

Теория формальных грамматик наряду с «традиционными» для нее лингвистич. приложениями нашла применение в теории программирования для описания языков программирования и трансляторов. Особенно широко применяются для этих целей бесконтекстные грамматики, но используются и грамматики более общего вида.

Лит.: [1] Х о м с к и й Н., в кн.: Новое в лингвистике, в. 2, М., 1962, с. 412—527; [2] Г л а д к и й А. В., М е л ь ч у к И. А., Элементы математической лингвистики, М., 1969.

А. В. Гладкий.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, т е о р е т и ч е с к а я л о г и к а, с и м в о л и ч е с к а я л о г и к а,— раздел математики, посвященный изучению математич. доказательств и вопросов оснований математики.

Исторический очерк. Идея построения универсального языка для всей математики и формализации на базе такого языка математич. доказательств выдвигалась в 17 в. Г. Лейбницем (G. Leibniz). Но только в сер. 19 в. появились первые научные работы по алгебраизации аристотелевой логики [Дж. Буль (G. Boole, 1847) и О. де Морган (A. de Morgan, 1858)]. После того как Г. Фреге (G. Frege, 1879) и Ч. Пирс (C. Peirce, 1885) ввели в язык алгебры логики предикаты, предметные переменные и кванторы, возникла реальная

возможность применить этот язык к вопросам оснований математики.

С другой стороны, создание в 19 в. неевклидовой геометрии сильно поколебало уверенность математиков в абсолютной надежности геометрич. интуиции, на к-рой была основана евклидова геометрия. Сомнениям в надежности геометрич. интуиции способствовало также то, что в результате развития исчисления бесконечно малых математики натолкнулись на неожиданные примеры всюду непрерывных функций без производных. Появилась потребность отделить понятие действительного числа от неясного понятия «величины», к-рое было основано на геометрич. интуиции. Эта задача была решена разными путями в работах К. Вейерштрасса (K. Weierstraß), Р. Дедекинда (R. Dedekind) и Г. Кантора (G. Cantor). Они показали возможность «арифметизации» анализа и теории функций, в результате чего в качестве фундамента всей классич. математики стала рассматриваться арифметика целых чисел. Затем была предпринята аксиоматизация арифметики [Р. Дедекинд (1888) и Дж. Пеано (G. Peano, 1891)]. При этом Дж. Пеано создал более удобную символику для логич. языка. Позже этот язык был усовершенствован в совместном труде Б. Рассела (B. Russell) и А. Уайтхеда (A. Whitehead) «Принципы математики» (1910), где была предпринята попытка сведения всей математики к логике. Но эта попытка не увенчалась успехом, т. к. оказалось невозможным вывести из чисто логич. аксиом существование бесконечных множеств. Хотя логистич. программа Фреге — Рассела в основаниях математики так и не достигла своей главной цели — сведения математики к логике, в их работах был создан богатый логич. аппарат, без к-рого оформление М. л. как полноценной математич. дисциплины было бы невозможно.

На рубеже 19—20 вв. были обнаружены *антиномии*, связанные с основными понятиями теории множеств. Наиболее сильное впечатление на современников произвела опубликованная в 1903 антиномия Рассела. Пусть M есть множество всех таких множеств, каждое из к-рых не является своим собственным элементом. Легко убедиться, что M является своим элементом тогда и только тогда, когда M не является своим элементом. Конечно, можно пытаться выйти из создавшегося противоречия, сделав заключение, что такого множества M не бывает. Однако, если не может существовать множество, состоящее в точности из всех элементов, удовлетворяющих такому четко определенному условию, к-рое мы имеем в приведенном выше определении множества M, то где гарантия того, что в нашей повседневной работе мы не столкнемся с множествами, к-рые также не могут существовать? И каким, вообще, условиям должно удовлетворять определение множества для того, чтобы оно существовало? Ясно было одно: нужно как-то ограничить канторовскую теорию множеств.

Л. Брауэр (L. Brouwer, 1908) выступил против применения правил классич. логики к бесконечным множествам. В выдвинутой им интуиционистской программе предлагалось отказаться от рассмотрения *абстракции актуальной бесконечности*, т. е. бесконечных множеств как завершенных совокупностей. Допуская существование сколь угодно больших натуральных чисел, интуиционисты выступают против рассмотрения натурального ряда как завершенного множества. Они считают, что в математике всякое доказательство существования того или иного объекта должно быть конструктивным, т. е. должно сопровождаться построением этого объекта. Если предположение о том, что искомый объект не существует, приведено к противоречию, то это, по мнению интуиционистов, не может рассматриваться как доказательство существования. Особой критике со стороны интуиционистов подвергся *исключенного*

третьего закон. Ввиду того, что этот закон первоначально рассматривался применительно к конечным множествам и, учитывая, что многие свойства конечных множеств не выполняются для бесконечных множеств (напр., что всякая собственная часть меньше целого), интуиционисты считают неправомерным применение этого закона к бесконечным множествам. Так, напр., чтобы утверждать, что проблема Ферма имеет положительное решение или имеет отрицательное решение, интуиционист должен указать соответствующее решение этой проблемы. А пока проблема Ферма не решена, эта дизъюнкция считается неправомерной. Такое же требование предъявляется к пониманию всякой дизъюнкции. Это требование интуиционистов может создать затруднения и в случае рассмотрения задач, связанных с конечными множествами. Представим себе, что кто-то, закрыв глаза, достает шар из урны, в к-рой имеются три черных и три белых шара, и тут же бросает этот шар обратно. Если никто не видел этот шар, то мы не имеем возможности узнать, какого он был цвета. Однако вряд ли можно всерьез оспаривать достоверность утверждения, что этот шар был либо черного, либо белого цвета.

Интуиционисты построили свою математику, имеющую интересные своеобразные особенности. Но она оказалась более сложной и громоздкой, чем классич. математика. Положительный вклад интуиционистов в исследование вопросов оснований математики выразился в том, что они еще раз решительным образом подчеркнули различие между конструктивным и неконструктивным в математике, они провели тщательный анализ многих трудностей, с к-рыми столкнулась математика в своем развитии, и тем самым способствовали их преодолению.

Д. Гильберт (D. Hilbert, см. добавления VII—X в [9]) наметил другой путь преодоления трудностей, возникших в основаниях математики на рубеже 19—20 вв. Этот путь, основанный на применении аксиоматич. метода рассмотрения формальных моделей содержательной математики и на исследовании вопросов непротиворечивости таких моделей надежными финитными средствами, получил в математике название ф и н и т и з м а Г и л ь б е р т а. Признавая ненадежность геометрич. интуиции, Д. Гильберт прежде всего предпринимает тщательный пересмотр евклидовой геометрии, освобождая ее от обращения к интуиции. Результатом такой переработки явились его «Основания геометрии» (1899).

Вопросы непротиворечивости различных теорий по существу рассматривались и до Д. Гильберта. Так, построенная Ф. Клейном (F. Klein, 1871) проективная модель неевклидовой геометрии Лобачевского сводит вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского к непротиворечивости евклидовой геометрии. Непротиворечивость евклидовой геометрии аналогично можно свести к непротиворечивости анализа, т. е. теории действительных чисел. Однако не видно было, какими средствами можно строить модели анализа и арифметики для доказательства их непротиворечивости. Заслуга Д. Гильберта состоит в том, что он указал прямой путь для исследования этого вопроса. Непротиворечивость данной теории означает, что в ней не может быть получено п р о т и в о р е ч и е, т. е. не может быть доказано нек-рое утверждение A и его отрицание $\neg A$. Д. Гильберт предложил представить рассматриваемую теорию в виде формальной аксиоматич. системы, в к-рой будут выводимы все те и только те утверждения, к-рые являются теоремами нашей теории. Тогда для доказательства непротиворечивости достаточно установить невыводимость в рассматриваемой теории нек-рых утверждений. Таким образом, математич. теория, непротиворечивость к-рой мы хотим доказать, становится

предметом изучения нек-рой математич. науки, к-рую Д. Гильберт назвал метаматематикой, или теорией доказательств.

Д. Гильберт писал, что парадоксы теории множеств вызваны не законом исключенного третьего, а «скорее тем, что математики пользуются недопустимыми и бессмысленными образованиями понятий, к-рые в моей теории доказательств исключаются сами собой. ...Отнять у математиков закон исключенного третьего — это то же, что забрать у астрономов телескоп или запретить боксерам использовать кулаки» (см. [9] с. 383). Д. Гильберт предлагает различать «действительные» и «идеальные» предложения классич. математики. Первые имеют содержательный смысл, а вторые не обязаны иметь содержательный смысл. Предложения, соответствующие употреблению актуальной бесконечности, идеальны. Идеальные предложения присоединяются к действительным для того, чтобы простые правила логики были применимы и к рассуждениям о бесконечных множествах. Это существенно упрощает структуру всей теории подобно тому, как при рассмотрении проективной геометрии на плоскости добавляется бесконечно удаленная прямая, пересекающая любые две параллельные прямые в нек-рой точке.

Выдвинутая Д. Гильбертом программа обоснования математики и его энтузиазм вдохновили современников на интенсивную разработку *аксиоматического метода*. Именно с предпринятой в начале 20 в. Д. Гильбертом и его последователями разработкой теории доказательств на базе развитого в работах Г. Фреге, Дж. Пеано и Б. Рассела логич. языка следует связывать становление М. л. как самостоятельной математич. дисциплины.

Предмет и основные разделы математической логики, связь с другими областями математики. Предмет современной М. л. разнообразен. Прежде всего следует отметить исследование логич. и логико-математич. исчислений, из к-рых основным является классич. исчисление предикатов. Еще в 1930 К. Гёдель (K. Gödel) доказал теорему о полноте исчисления предикатов, согласно к-рой множество всех чисто логич. утверждений математики совпадает с множеством всех выводимых в исчислении предикатов формул (см. *Гёделя теорема о полноте*). Эта теорема показала, что исчисление предикатов является той логич. системой, на базе к-рой можно формализовать математику. На базе исчисления предикатов строятся различные логико-математич. теории (см. *Логико-математические исчисления*), представляющие собой формализацию содержательных математич. теорий — арифметики, анализа, теории множеств, теории групп и др. Наряду с *элементарными теориями* рассматриваются также теории высших порядков, в к-рых допускаются также кванторы по предикатам, предикаты от предикатов и т. д. Традиционными вопросами, к-рые исследуются для тех или иных формальных логич. систем, являются исследования структуры выводов в этих системах, выводимость тех или иных формул, вопросы непротиворечивости и полноты рассматриваемых систем.

Доказанная в 1931 *Гёделя теорема о неполноте* арифметики поколебала оптимистич. надежды Д. Гильберта на полное решение вопросов оснований математики на указанном пути. Согласно этой теореме, если формальная система, содержащая арифметику, непротиворечива, то утверждение о ее непротиворечивости, выразимое в этой системе, не может быть доказано средствами, формализуемыми в ней. Это означает, что с вопросами оснований математики дело обстоит не так просто, как хотелось или казалось Д. Гильберту вначале. Но уже К. Гёдель заметил, что непротиворечивость арифметики можно доказывать, пользуясь достаточно надежными конструктивными средствами, хотя и выходящими

за рамки средств, формализуемых в арифметике. Аналогичные доказательства непротиворечивости арифметики были получены Г. Генценом (G. Gentzen, 1936) и П. С. Новиковым (1943).

В результате анализа канторовской теории множеств и связанных с ней парадоксов были построены различные системы *аксиоматической теории множеств*, в к-рых принимается то или иное ограничение на образование множеств, чтобы исключить возникновение известных антиномий. В этих аксиоматич. системах могут быть развиты довольно обширные разделы математики. Вопрос о непротиворечивости достаточно богатых аксиоматич. систем теории множеств остается открытым. Из наиболее значительных результатов, полученных в аксиоматич. теории множеств, следует отметить результат К. Гёделя о непротиворечивости *континуум-гипотезы* и *выбора аксиомы* в системе Бернайса — Гёделя Σ (1939) и результат П. Коэна (P. Cohen, 1963) о независимости этих аксиом от аксиом системы Цермело—Френкеля ZF. Отметим, что эти две системы аксиом Σ и ZF равнонепротиворечивы. Для доказательства своих результатов К. Гёдель ввел важное понятие конструктивного множества (см. *Конструктивное по Гёделю множество*) и показал существование модели системы Σ, состоящей из таких множеств. Метод К. Гёделя был использован П. С. Новиковым для доказательства непротиворечивости нек-рых других утверждений дескриптивной теории множеств (1951). Для построения моделей теории множеств ZF, в к-рых выполняются отрицания континуум-гипотезы или аксиомы выбора, П. Коэн ввел так наз. *вынуждения метод*, к-рый впоследствии был усовершенствован и стал основным методом построения моделей теории множеств, удовлетворяющих тем или иным свойствам.

Одним из наиболее замечательных достижений М. л. явилась разработка понятия *общерекурсивной функции* и формулировка *Чёрча тезиса*, утверждающего, что понятие общерекурсивной функции является уточнением интуитивного понятия *алгоритма*. Из других эквивалентных уточнений понятия алгоритма наибольшее распространение получили понятия *Тьюринга машины* и *нормального алгорифма* Маркова. По существу вся математика связана с теми или иными алгоритмами. Но только после уточнения понятия алгоритма появилась возможность обнаружить существование неразрешимых *алгоритмических проблем* в математике. Неразрешимые алгоритмич. проблемы были обнаружены во многих разделах математики (алгебра, теория чисел, топология, теория вероятностей и др.), причем оказалось, что они могут быть связаны с очень распространенными и фундаментальными понятиями математики. Исследование алгоритмич. проблем в той или иной области математики, как правило, сопровождается проникновением идей и методов М. л. в эту область, что приводит к решению также и других проблем, уже не имеющих алгоритмич. характера.

Разработка точного понятия алгоритма дала возможность уточнить понятие эффективности и развивать на базе такого уточнения конструктивное направление в математике (см. *Конструктивная математика*), воплотившее в себе нек-рые черты интуиционистского направления, но существенно отличающееся от последнего. Были созданы основы конструктивного анализа, конструктивной топологии, конструктивной теории вероятностей и др.

В самой теории алгоритмов можно выделить исследования в области рекурсивной арифметики, куда входят различные классификации рекурсивных и рекурсивно-перечислимых множеств, степени неразрешимости рекурсивно-перечислимых множеств, исследования сложности записи алгоритмов и сложности алгоритмич. вычислений (по времени и по зоне, см. *Алгоритма слож-*

кость). Обширным развивающимся разделом теории алгоритмов является теория *нумераций*.

Как отмечалось выше, аксиоматич. метод оказал большое влияние на развитие многих разделов математики. Особенно значительным было проникновение этого метода в алгебру. Так, на стыке М. л. и алгебры возникла общая теория *алгебраических систем*, или *моделей теория*. Это направление было заложено в работах А. И. Мальцева, А. Тарского (A. Tarski) и их учеников. Здесь можно отметить исследования по элементарным теориям классов моделей, в частности вопросы разрешимости этих теорий, аксиоматизируемость классов моделей, изоморфизм моделей, вопросы категоричности и полноты классов моделей.

Важное место в теории моделей занимает исследование нестандартных моделей арифметики и анализа. Еще на заре развития дифференциального исчисления в работах Г. Лейбница (G. Leibniz) и И. Ньютона (I. Newton) бесконечно малые и бесконечно большие величины рассматривались как числа. Позже появилось понятие переменной величины, и математики отказались от употребления бесконечно малых чисел, модуль к-рых отличен от нуля и меньше любого положительного действительного числа, т. к. их употребление потребовало бы отказа от аксиомы Архимеда. И только через три столетия в результате развития методов М. л. удалось установить, что (нестандартный) анализ с бесконечно малыми и бесконечно большими числами непротиворечив относительно обычного (стандартного) анализа действительных чисел.

Не обошлась без влияния аксиоматич. метода и интуиционистская математика. Так, еще в 1930 А. Гейтинг (A. Heyting) ввел в рассмотрение формальные системы *интуиционистской логики* высказываний и предикатов (конструктивные исчисления высказываний и предикатов). Позже были введены формальные системы интуиционистского анализа (см., напр., [8]). Многие исследования по интуиционистской логике и математике имеют дело с формальными системами. Подвергались специальному изучению также так наз. *промежуточные логики* (или суперинтуиционистские), т. е. логики, лежащие между классической и интуиционистской логиками. Понятие реализуемости формул по Клини представляет одну из попыток интерпретировать понятие интуиционистской истинности с точки зрения классич. математики. Однако оказалось, что не всякая реализуемая формула исчисления высказываний выводима в интуиционистском (конструктивном) исчислении высказываний.

Подверглась формализации также и *модальная логика*. Однако, несмотря на наличие большого числа работ по формальным системам модальной логики и по их семантике (*Крипке модели*), можно сказать, что здесь происходит процесс накопления пока еще разрозненных фактов.

М. л. имеет большое прикладное значение; с каждым годом растет глубокое проникновение идей и методов М. л. в кибернетику, в вычислительную математику, в структурную лингвистику.

Лит.: [1] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., М., 1979; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., 2 изд., М., 1976; [4] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [5] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А., Математическая логика, М., 1979; [6] Шенфилд Д. Р., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975; [7] Новиков П. С., Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., 1977; [8] Клини С. К., Весли Р., Основания интуиционистской математики с точки зрения теории рекурсивных функций, пер. с англ., М., 1978; [9] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М., 1948; [10] Френкель А.-А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [11] Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1978;

[12] Mostowski A., Thirty years of foundational studies, Hels., 1965.

См. также лит. при статьях об отдельных разделах М. л.

С. И. Адян.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ — приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математич. символики. М. м.— мощный метод познания внешнего мира, а также прогнозирования и управления. Анализ М. м. позволяет проникнуть в сущность изучаемых явлений. Процесс математического моделирования, т. е. изучения явления с помощью М. м., можно подразделить на 4 этапа.

Первый этап — формулирование законов, связывающих основные объекты модели. Этот этап требует широкого знания фактов, относящихся к изучаемым явлениям, и глубокого проникновения в их взаимосвязи. Эта стадия завершается записью в математич. терминах сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели.

Второй этап — исследование математич. задач, к к-рым приводят М. м. Основным вопросом здесь является решение прямой задачи, т. е. получение в результате анализа модели выходных данных (теоретич. следствий) для дальнейшего их сопоставления с результатами наблюдений изучаемых явлений. На этом этапе важную роль приобретают математич. аппарат, необходимый для анализа М. м., и вычислительная техника — мощное средство для получения количественной выходной информации как результата решения сложных математич. задач. Часто математич. задачи, возникающие на основе различных М. м. явлений, бывают одинаковыми (напр., основная задача *линейного программирования* отражает ситуации различной природы). Это дает основание рассматривать такие типичные математич. задачи, как самостоятельный объект, абстрагируясь от изучаемых явлений.

Третий этап — выяснение того, удовлетворяет ли принятая (гипотетическая) модель критерию практики, т. е. выяснение вопроса о том, согласуются ли результаты наблюдений с теоретич. следствиями модели в пределах точности наблюдений. Если модель была вполне определена — все параметры ее были заданы, то определение уклонений теоретич. следствий от наблюдений дает решение прямой задачи с последующей оценкой уклонений. Если уклонения выходят за пределы точности наблюдений, то модель не может быть принята. Часто при построении модели нек-рые ее характеристики остаются неопределенными. Задачи, в к-рых определяются характеристики модели (параметрические, функциональные) таким образом, чтобы выходная информация была сопоставима в пределах точности наблюдений с результатами наблюдений изучаемых явлений, наз. обратными задачами. Если М. м. такова, что ни при каком выборе характеристик этим условиям нельзя удовлетворить, то модель непригодна для исследования рассматриваемых явлений. Применение критерия практики к оценке М. м. позволяет делать вывод о правильности положений, лежащих в основе подлежащей изучению (гипотетической) модели. Этот метод является единственным методом изучения недоступных нам непосредственно явлений макро- и микромира.

Четвертый этап — последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и модернизация модели. В процессе развития науки и техники данные об изучаемых явлениях все более и более уточняются и наступает момент, когда выводы, получаемые на основании принятой М. м., не соответствуют нашим знаниям о явлении. Таким образом, возникает необходимость построения новой, более совершенной М. м.

Типичным примером, иллюстрирующим характерные этапы в построении М. м., является модель Солнечной системы. Наблюдения звездного неба начались в глубокой древности. Первичный анализ этих наблюдений позволил выделить планеты из всего многообразия небесных светил. Таким образом, первым шагом было выделение объектов изучения. Вторым шагом явилось определение закономерностей их движений. (Вообще, определения объектов и их взаимосвязей являются исходными положениями — «аксиомами» — гипотетич. модели.) Модели Солнечной системы в процессе своего развития прошли через ряд последовательных усовершенствований. Первой была модель Птолемея (2 в. н. э.), исходившая из положения, что планеты и Солнце совершают движения вокруг Земли (геоцентрич. модель), и описывавшая эти движения с помощью правил (формул), многократно усложнявшихся по мере накопления наблюдений.

Развитие мореплавания поставило перед астрономией новые требования к точности наблюдений. Н. Коперником (N. Kopernik) в 1543 была предложена принципиально новая основа законов движения планет, полагавшая, что планеты вращаются вокруг Солнца по окружностям (гелиоцентрич. система). Это была качественно новая (но не математически) модель Солнечной системы. Однако не существовало параметров системы (радиусов окружностей и угловых скоростей движения), приводящих количественные выводы теории в должное соответствие с наблюдениями, так что Н. Коперник был вынужден вводить поправки в движения планет по окружностям (эпициклы).

Следующим шагом в развитии модели Солнечной системы были исследования И. Кеплера (I. Kepler, нач. 17 в.), к-рый сформулировал законы движения планет. Положения Н. Коперника и И. Кеплера давали кинематич. описание движения каждой планеты обособленно, не затрагивая еще причин, обусловливающих эти движения.

Принципиально новым шагом были работы И. Ньютона (I. Newton), предложившего во 2-й пол. 17 в. динамич. модель Солнечной системы, основанную на законе всемирного тяготения. Динамич. модель согласуется с кинематич. моделью, предложенной И. Кеплером, т. к. из динамич. системы двух тел «Солнце — планета» следуют законы Кеплера.

К 40-м гг. 19 в. выводы динамич. модели, объектами к-рой были видимые планеты, вошли в противоречие с накопленными к тому времени наблюдениями. Именно, наблюдаемое движение планеты Уран уклонялось от теоретически вычисляемого движения. У. Леверье (U. Le Verrier) в 1846 расширил систему наблюдаемых планет новой гипотетич. планетой, названной им Нептуном, и, пользуясь новой моделью Солнечной системы, определил массу и закон движения новой планеты так, что в новой системе противоречие в движении Урана было снято. Планета Нептун была открыта в месте, указанном У. Леверье. Аналогичным методом, используя расхождения в теоретической и наблюдаемой траектории Нептуна, в 1930 была открыта планета Плутон.

Метод математич. моделирования, сводящий исследование явлений внешнего мира к математич. задачам, занимает ведущее место среди других методов исследования, особенно в связи с появлением ЭВМ. Он позволяет проектировать новые технич. средства, работающие в оптимальных режимах, для решения сложных задач науки и техники; проектировать новые явления. М. м. проявили себя как важное средство управления. Они применяются в самых различных областях знания, стали необходимым аппаратом в области экономич. планирования и являются важным элементом автоматизированных систем управления. *А. Н. Тихонов.*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА — раздел математики, посвященный математич. методам систематизации, обработки и использования статистич. данных для научных и практич. выводов. При этом статистич. данными наз. сведения о числе объектов в какой-либо более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками.

Предмет и метод математической статистики. Статистич. описание совокупности объектов занимает промежуточное положение между индивидуальным описанием каждого из объектов совокупности, с одной стороны, и описанием совокупности по ее общим свойствам, совсем не требующим ее расчленения на отдельные объекты, с другой. По сравнению с первым способом статистич. данные всегда в большей или меньшей степени обезличены и имеют лишь ограниченную ценность в случаях, когда существенны именно индивидуальные данные (напр., учитель, знакомясь с классом, получит лишь весьма предварительную ориентировку о положении дела из одной статистики числа выставленных его предшественником отличных, хороших, удовлетворительных и неудовлетворительных оценок). С другой стороны, по сравнению с данными о наблюдаемых извне суммарных свойствах совокупности статистич. данные позволяют глубже проникнуть в существо дела. Напр., данные гранулометрич. анализа породы (т. е. данные о распределении образующих породу частиц по размерам) дают ценную дополнит. информацию по сравнению с испытанием нерасчлененных образов породы, позволяя в нек-рой мере объяснить свойства породы, условия ее образования и пр.

Метод исследования, опирающийся на рассмотрение статистич. данных о тех или иных совокупностях объектов, наз. с т а т и с т и ч е с к и м. Статистич. метод применяется в самых различных областях знания. Однако черты статистич. метода в применении к объектам различной природы столь своеобразны, что было бы бессмысленно объединять, напр., социально-экономич. статистику, физич. статистику, звездную статистику и т. п. в одну науку.

Общие черты статистич. метода в различных областях знания сводятся к подсчету числа объектов, входящих в те или иные группы, рассмотрению распределения количественных признаков, применению выборочного метода (в случаях, когда детальное исследование всех объектов обширной совокупности затруднительно), использованию теории вероятностей при оценке достаточности числа наблюдений для тех или иных выводов и т. п. Эта формальная математич. сторона статистич. методов исследования, безразличная к специфич. природе изучаемых объектов, и составляет предмет М. с.

Связь математической статистики с теорией вероятностей. Связь М. с. с теорией вероятностей имеет в разных случаях различный характер. *Вероятностей теория* изучает не любые массовые явления, а явления случайные и именно «вероятностно случайные», т. е. такие, для к-рых имеет смысл говорить о соответствующих им распределениях вероятностей. Тем не менее теория вероятностей играет определенную роль и при статистич. изучении массовых явлений любой природы, к-рые могут не относиться к категории вероятностно случайных. Это осуществляется через основанные на теории вероятностей теорию *выборочного метода* и *ошибок теорию*. В этих случаях вероятностным закономерностям подчинены не сами изучаемые явления, а приемы их исследования.

Более важную роль играет теория вероятностей при статистич. исследовании вероятностно случайных явлений. Здесь в полной мере находят применение такие основанные на теории вероятностей разделы М. с., как *статистических гипотез проверка*, *статистическое оценивание* распределений вероятностей и входящих в них

параметров и т. д. Область же применения этих более глубоких статистич. методов значительно уже, т. к. здесь требуется, чтобы сами изучаемые явления были подчинены достаточно определенным вероятностным закономерностям. Напр., статистич. изучение режима турбулентных водных потоков или флюктуаций в радиоприемных устройствах производится на основе теории стационарных случайных процессов. Однако применение той же теории к анализу экономических временных рядов может привести к грубым ошибкам в виду того, что входящее в определение стационарного процесса допущение наличия сохраняющихся в течение длительного времени неизменных распределений вероятностей в этом случае, как правило, совершенно неприемлемо.

Вероятностные закономерности получают статистич. выражение (вероятности осуществляются приближенно в виде частот, а математич. ожидания — в виде средних) в силу закона больших чисел.

Простейшие приемы статистического описания. Изучаемая совокупность из n объектов может по какому-либо качественному признаку A разбиваться на классы A_1, A_2, ... , A_r. Соответствующее этому разбиению статистич. распределение задается при помощи указания численностей (частот) n_1, n_2, ... , n_r (где $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$) отдельных классов. Вместо численностей n_i часто указывают соответствующие относительные частоты (частости) $h_i = n_i/n$ (удовлетворяющие, очевидно, соотношению $\sum_{i=1}^{r} h_i = 1$). Если изучению подлежит нек-рый количественный признак, то его распределение в совокупности из n объектов можно задать, перечислив непосредственно наблюденные значения признака: x_1, x_2, ... , x_n, напр., в порядке их возрастания. Однако при больших n такой способ громоздок и в то же время не выявляет отчетливо существенных свойств распределения. При сколько-либо больших n на практике обычно совсем не составляют полных таблиц наблюденных значений x_i, а исходят во всей дальнейшей работе из таблиц, содержащих лишь численность классов, получающихся при группировке наблюденных значений по надлежаще выбранным интервалам.

Обычно группировка по 10—20 интервалам, в каждый из к-рых попадает не более 15—20% значений x_i, оказывается достаточной для довольно полного выявления всех существенных свойств распределения и надежного вычисления по групповым численностям основных характеристик распределения (см. о них ниже). Составленная по таким группированным данным *гистограмма* наглядно изображает распределение. Гистограмма, составленная на основе группировки с маленькими интервалами, обычно многовершинная и не отражает наглядно существенных свойств распределения.

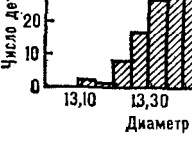


Рис. 1.

В качестве примера на рис. 1 дана гистограмма распределения 200 диаметров нек-рой детали (в мм), обнаруженного при статистич. исследовании массовой продукции при длине интервала группировки 0,05 мм, а на рис. 2 — гистограмма того же распределения при интервале 0,01 мм. С другой стороны, группировка по слишком крупным интервалам может привести к потере ясного представления о характере распределения и к грубым ошибкам при вычислении среднего и других характеристик распределения (см. соответствующую гистограмму на рис. 3).

В пределах М. с. вопрос об интервалах группировки может быть рассмотрен только с формальной стороны:

полноты математич. описания распределения, точности вычисления средних по сгруппированным данным и т. д.

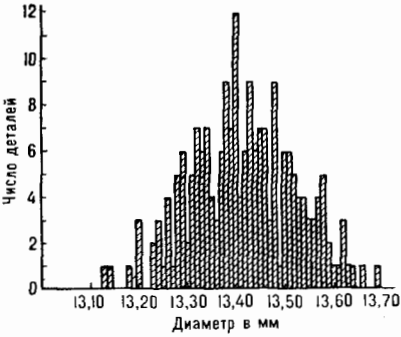


Рис. 2.

Простейшими сводными характеристиками распределения одного количественного признака являются среднее

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

и среднее квадратичное отклонение

$$D=S/\sqrt{n},$$

где

$$S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2.$$

При вычислении $\overline{x}$, S^2 и D по группированным данным пользуются формулами

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}n_k a_k=\sum_{k=1}^{r}h_k a_k,$$

$$S^2=\sum_{k=1}^{r}n_k(a_k-\overline{x})^2=\sum_{k=1}^{r}n_k a_k^2-n\overline{x}^2$$

или

$$D^2=\sum_{k=1}^{r}h_k a_k^2-\overline{x}^2,$$

где r — число интервалов группировки, a_k — их середины. Если материал сгруппирован по слишком крупным интервалам, то такой подсчет дает слишком грубые результаты. Иногда в таких случаях полезно прибегать к специальным поправкам на группировку. Однако эти поправки имеет смысл вводить лишь при условии выполнения определенных вероятностных предположений.



Рис. 3.

О совместных распределениях двух и большего числа признаков см. статьи *Корреляция*, *Регрессия*.

Связь статистических распределений с вероятностными. Оценка параметров. Проверка вероятностных гипотез. Выше были изложены лишь нек-рые избранные простейшие приемы статистич. описания, представляющего собой довольно обширную дисциплину с хорошо разработанной системой понятий и техникой вычислений. Приемы статистич. описания интересны, однако не сами по себе, а в качестве средства для получения из статистич. материала выводов о закономерностях, к-рым подчиняются изучаемые явления, и о причинах, приводящих в каждом отдельном случае к тем или иным наблюденным статистич. распределениям.

Напр., данные, нанесенные на графики на рис. 1, 2, 3, собраны с целью установления точности изготовления деталей, расчетный диаметр к-рых равен 13,40 мм, при нормальном ходе производства. Простейшим допущением, к-рое может быть в этом случае обосновано нек-рыми теоретич. соображениями, является предположение, что диаметры отдельных деталей можно рассматривать как случайные величины X, подчиненные нормальному распределению вероятностей:

$$\mathsf{P}\{X < x\} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-(t-a)^2/2\sigma^2}dt. \qquad (1)$$

Если это допущение верно, то параметры a и σ^2 — среднее и дисперсию вероятностного распределения — можно с достаточной точностью оценить по соответствующим характеристикам статистич. распределения (т. к. число наблюдений $n=200$ достаточно велико). В качестве оценки для теоретич. дисперсии σ^2 предпочитают не статистич. дисперсию

$$D^2 = S^2/n,$$

а *несмещенную оценку*

$$s^2 = S^2/(n-1).$$

Для теоретич. среднего квадратичного отклонения σ не существует общего (пригодного при любом распределении вероятностей) выражения несмещенной оценки. В качестве оценки (вообще говоря, смещенной) для σ чаще всего употребляют s. Точность оценок $\bar{x}$ и s для a и σ указывается соответствующими дисперсиями, к-рые в случае нормального распределения (1) имеют вид

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \sigma^2/n \sim s^2/n,$$

$$\sigma^2_{s^2} = 2\sigma^4/(n-1) \sim 2s^4/n,$$

$$\sigma^2_s \sim \sigma^2/2n \sim s^2/2n,$$

где знак $\sim$ обозначает приближенное равенство при больших n. Таким образом, уславливаясь прибавлять к оценкам со знаком $\pm$ их среднее квадратичное отклонение, имеем при больших n в предположении нормального распределения (1):

$$a = \bar{x} \pm s/\sqrt{n}, \quad \sigma = s \pm s/\sqrt{2n}. \qquad (2)$$

Объем выборки $n=200$ достаточен для законности пользования этими формулами теории больших выборок.

Дальнейшие сведения об оценке параметров теоретич. распределений вероятностей см. в статьях *Статистическая оценка*, *Доверительное оценивание*.

Все основанные на теории вероятностей правила статистич. оценки параметров и проверки гипотез действуют лишь с определенным *значимости уровнем* $\omega<1$, т. е. могут приводить к ошибочным результатам с вероятностью $\alpha=1-\omega$. Напр., если в предположении нормального распределения и известной теоретич. дисперсии σ^2 производить оценку a по $\bar{x}$ по правилу

$$\bar{x} - k\sigma/\sqrt{n} < a < \bar{x} + k\sigma/\sqrt{n},$$

то вероятность ошибки будет равна α, связанному с k соотношением:

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_k^\infty e^{-x^2/2}dx.$$

Вопрос о рациональном выборе уровня значимости в данных конкретных условиях (напр., при разработке правил статистического контроля качества массовой продукции) является весьма существенным. При этом желанию применять правила лишь с высоким (близким к единице) уровнем значимости противостоит то обстоятельство, что при ограниченном числе наблюдений такие правила позволяют сделать лишь очень бедные вы-

воды (не дают возможности установить неравенство вероятностей даже при заметном неравенстве частот и т. д.).

Дальнейшие задачи математической статистики. Упоминавшиеся выше способы оценки параметров и проверки гипотез основаны на предположении, что число наблюдений, необходимых для достижения заданной точности выводов, определяют заранее (до проведения испытаний). Однако часто априорное определение числа наблюдений нецелесообразно, т. к., не фиксируя число опытов заранее, а определяя его в ходе эксперимента, можно уменьшить его математич. ожидание. Сначала это обстоятельство было подмечено на примере выбора одной из двух гипотез по последовательности независимых испытаний. Соответствующая процедура (впервые предложенная в связи с задачами приемочного статистического контроля) состоит в следующем: на каждом шаге по результатам уже проведенных наблюдений решают а) провести ли следующее испытание, или б) прекратить испытания и принять первую гипотезу, или в) прекратить испытания и принять вторую гипотезу. При надлежащем подборе количественных характеристик подобной процедуры можно добиться (при той же точности выводов) сокращения числа наблюдений в среднем почти вдвое по сравнению с процедурой выборки фиксированного объема (см. *Последовательный анализ*). Развитие методов последовательного анализа привело, с одной стороны, к изучению *управляемых случайных процессов*, с другой — к появлению *статистических решений теории*. Эта теория исходит из того, что результаты последовательно проводимых наблюдений служат основой принятия нек-рых решений (промежуточных — продолжать испытания или нет, и окончательных — в случае прекращения испытаний). В задачах оценки параметров окончательные решения суть числа (значение оценок), в задачах проверки гипотез — принимаемые гипотезы. Цель теории — указать правила принятия решений, минимизирующих средний риск или убыток (риск зависит и от вероятностных распределений результатов наблюдений, и от принимаемого окончательного решения, и от расходов на проведение испытаний и т. п.).

Вопросы целесообразного распределения усилий при проведении статистич. анализа явлений рассматриваются в теории планирования эксперимента, ставшей важной частью современной М. с.

Наряду с развитием и уточнением общих понятий М. с. развиваются и ее отд. разделы, такие как *дисперсионный анализ*, *ковариационный анализ*, *многомерный статистический анализ*, *статистический анализ случайных процессов*, *факторный анализ*. Появились новые оценки в регрессионном анализе (см. также *Стохастическая аппроксимация*). Большую роль в задачах М. с. играет *бейесовский подход* к статистич. задачам.

Историческая справка. Первые начала М. с. можно найти уже в сочинениях создателей теории вероятностей — Я. Бернулли (J. Bernoulli), П. Лапласа (P. Laplace) и С. Пуассона (S. Poisson). В России методы М. с. в применении к демографии и страховому делу развивал на основе теории вероятностей В. Я. Буняковский (1846). Решающее значение для всего дальнейшего развития М. с. имели работы русской классич. школы теории вероятностей 2-й пол. 19 — нач. 20 вв. (П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов, С. Н. Бернштейн). Многие вопросы теории статистич. оценок были по существу разработаны на основе теории ошибок и метода наименьших квадратов [К. Гаусс (C. Gauss) и А. А. Марков]. Работы А. Кетле (A. Quételet), Ф. Гальтона (F. Galton) и К. Пирсона (K. Pearson) имели большое значение, но по уровню использования достижений теории вероятностей отставали от работ русской школы. К. Пирсоном была широко раз-

вернута работа по составлению таблиц функций, необходимых для применения методов М. с. Эта важная работа была продолжена во многих научных центрах (в СССР она велась усилиями Е. Е. Слуцкого, Н. В. Смирнова и Л. Н. Большева). В создании теории малых выборок, общей теории статистич. оценок и проверки гипотез (освобожденной от предположений о наличии априорных распределений), последовательного анализа весьма значительна роль представителей англо-американской школы [Стьюдент (Student, псевд. У. С. Госсета, W. S. Gosset), Р. Фишер (R. Fisher), Э. Пирсон (E. Pearson), Ю. Нейман (J. Neyman)], деятельность к-рых началась в 20-х гг. 20 в. В СССР значительные результаты в области М. с. получены В. И. Романовским, А. Н. Колмогоровым, Е. Е. Слуцким, к-рому принадлежат важные работы по статистике связанных стационарных рядов, Н. В. Смирновым, заложившим основы теории непараметрич. методов М. с., Ю. В. Линником, обогатившим аналитич. аппарат М. с. новыми методами. На основе М. с. особенно интенсивно разрабатываются статистич. методы исследования и контроля массового производства, статистич. методы в области физики, гидрологии, климатологии, звездной астрономии, биологии, медицины и др.

Лит.: [1] Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, [2 изд.], М., 1968; [3] Ван-дер-Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., (2 изд.), М., 1975; [5] Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями, пер. с англ., М., 1956; [6] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [7] их же, Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [8] их же, Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

См. также лит. при статьях о разделах М. с.

А. Н. Колмогоров, Ю. В. Прохоров.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА — теория математических моделей физических явлений; занимает особое положение и в математике, и в физике, находясь на стыке этих наук.

М. ф. тесно связана с физикой в той части, к-рая касается построения математич. модели, и в то же время М. ф.— раздел математики, поскольку методы исследования моделей являются математическими. В понятие методов М. ф. включаются те математич. методы, к-рые применяются для построения и изучения математич. моделей, описывающих большие классы физических явлений.

Методы М. ф. как теории математич. моделей физики начали интенсивно разрабатываться в трудах И. Ньютона (I. Newton) по созданию основ классич. механики, всемирного тяготения, теории света. Дальнейшее развитие методов М. ф. и их успешное применение к изучению математич. моделей огромного круга различных физич. явлений связаны с именами Ж. Лагранжа (J. Lagrange), Л. Эйлера (L. Euler), Ж. Фурье (J. Fourier), К. Гаусса (C. Gauss), Б. Римана (B. Riemann), М. В. Остроградского и многих др. ученых. Большой вклад в развитие методов М. ф. внесли А. М. Ляпунов и В. А. Стеклов.

Начиная со 2-й пол. 19 в. методы М. ф. успешно применялись для изучения математич. моделей физич. явлений, связанных с различными физич. полями и волновыми процессами в электродинамике, акустике, теории упругости, гидро- и аэродинамике и ряде других направлений исследования физич. явлений в сплошных средах. Математич. модели этого класса явлений наиболее часто описываются при помощи дифференциальных уравнений с частными производными, получивших название *математической физики уравнений.*

Помимо дифференциальных уравнений М. ф., при описании математич. моделей физики применение на-

ходят интегральные уравнения и интегро-дифференциальные уравнения, вариационные и теоретико-вероятностные методы, теория потенциала, методы теории функций комплексного переменного и ряд других разделов математики. В связи с бурным развитием вычислительной математики особое значение для исследования математич. моделей физики приобретают прямые численные методы, использующие ЭВМ (конечноразностные методы и др. вычислительные алгоритмы краевых задач), что позволило методами М. ф. эффективно решать новые задачи газовой динамики, теории переноса, физики плазмы, в том числе и обратные задачи этих важнейших направлений физич. исследований.

Теоретич. исследования в области квантовой физики и теории относительности, широкое использование ЭВМ в различных областях М. ф., включая и обратные (некорректно поставленные) задачи, потребовали значительного расширения используемого М. ф. арсенала математич. методов. Наряду с традиционными разделами математики стали широко применяться теория операторов, теория обобщенных функций, теория функций многих комплексных переменных, топологич. и алгебраич. методы. Это интенсивное взаимодействие теоретич. физики, математики и использования ЭВМ в научных исследованиях привело к значительному расширению тематики, созданию новых классов моделей и подняло на новый уровень современную М. ф. Все это внесло большой вклад в развитие научно-технич. прогресса.

Постановка задач М. ф. заключается в построении математич. моделей, описывающих основные закономерности изучаемого класса физич. явлений. Такая постановка состоит в выводе уравнений (дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных или алгебраических), к-рым удовлетворяют величины, характеризующие физич. процесс. При этом исходят из основных физич. законов, учитывающих только наиболее существенные черты явления, отвлекаясь от ряда его второстепенных характеристик. Такими законами являются обычно законы сохранения, напр., количества движения, энергии, числа частиц и т. д. Это приводит к тому, что для описания процессов различной физич. природы, но имеющих общие характерные черты, оказываются применимыми одни и те же математич. модели. Напр., математич. задачи для простейшего уравнения гиперболич. типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

полученного первоначально Ж. Д'Аламбером (J.D'Alembert, 1747) для описания свободных колебаний однородной струны, оказываются применимыми и для описания широкого круга волновых процессов акустики, гидродинамики, электродинамики и других областей физики. Аналогично, уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

краевые задачи для к-рого первоначально изучались П. Лапласом (P. Laplace, кон. 18 в.) в связи с построением теории тяготения, в дальнейшем нашло применение при решении многих проблем электростатики, теории упругости, задач установившегося движения идеальной жидкости и т. д. Каждой математич. модели физики соответствует целый класс физич. процессов.

Для М. ф. характерно также то, что многие общие методы, используемые для решения задач М. ф., развились из частных способов решения конкретных физич. задач и в своем первоначальном виде не имели строгого математич. обоснования и достаточной завершенности. Это относится к таким известным методам решения задач М. ф., как методы Ритца и Галеркина, к методам

теории возмущений, преобразований Фурье и многим другим, включая метод разделения переменных. Эффективное применение всех этих методов для решения конкретных задач является одной из причин для их строгого математич. обоснования и обобщения, приводящего в ряде случаев к возникновению новых математич. направлений.

Воздействие М. ф. на различные разделы математики проявляется в том, что развитие М. ф., отражающее требования естественных наук и запросы практики, влечет за собой переориентацию направленности исследований в нек-рых уже сложившихся разделах математики. Постановка задач М. ф., связанная с разработкой математич. моделей реальных физич. явлений, привела к изменению основной проблематики теории дифференциальных уравнений с частными производными. Возникла теория *краевых задач*, позволившая впоследствии связать дифференциальные уравнения с частными производными с интегральными уравнениями и вариационными методами.

Изучение математич. моделей физики математич. методами не только позволяет получить количественные характеристики физич. явлений и рассчитать с заданной степенью точности ход реальных процессов, но и дает возможность глубокого проникновения в самую суть физич. явлений, выявления скрытых закономерностей, предсказания новых эффектов. Стремление к более детальному изучению физич. явлений приводит к все большему усложнению описывающих эти явления математич. моделей, что в свою очередь делает невозможным применение аналитич. методов исследования этих моделей. Это объясняется, в частности, тем, что математич. модели реальных физич. процессов являются, как правило, нелинейными, т. е. описываются нелинейными уравнениями М. ф. Для детального исследования таких моделей успешно применяются прямые численные методы с использованием ЭВМ. Для типичных задач М. ф. применение численных методов сводится к замене уравнений М. ф. для функций непрерывного аргумента алгебраич. уравнениями для сеточных функций, заданных на дискретном множестве точек (на сетке). Иными словами, вместо непрерывной модели среды вводится ее дискретный аналог. Применение численных методов в ряде случаев позволяет заменить сложный, трудоемкий и дорогостоящий физич. эксперимент значительно более экономичным математическим (численным) экспериментом. Достаточно полно проведенный математич. эксперимент является основой для выбора оптимальных условий реального физич. эксперимента, выбора параметров сложных физич. установок, определения условий проявления новых физич. эффектов и т. д. Таким образом, численные методы необычайно расширяют область эффективного использования математич. моделей физич. явлений.

Математич. модель физич. явления, как всякая модель, не может передать всех черт явления. Установить адекватность принятой модели исследуемому явлению можно только при помощи критерия практики, сопоставляя результаты теоретич. исследований принятой модели с данными экспериментов.

Во многих случаях об адекватности принятой модели можно судить на основании решения обратных задач М. ф., когда о свойствах изучаемых явлений природы, недоступных для непосредственного наблюдения, делаются заключения по результатам их косвенных физич. проявлений.

Для М. ф. характерно стремление строить такие математич. модели, к-рые не только дают описание и объяснение уже установленных физич. закономерностей изучаемого круга явлений, но и позволяют предсказать еще не открытые закономерности. Классич. примером такой модели является теория всемирного тяготения

Ньютона, позволившая не только объяснить движение известных к моменту ее создания тел Солнечной системы, но и предсказать существование новых планет. С другой стороны, появляющиеся новые экспериментальные данные не всегда могут быть объяснены в рамках принятой модели. Для их объяснения требуется усложнение модели.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [3] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; [4] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1958.

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, А. Г. Свешников.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА — математическая дисциплина, предметом к-рой являются модели экономич. объектов и процессов и методы их исследования. Однако понятия, результаты, методы М. э. удобно и принято излагать в тесной связи с их экономич. происхождением, интерпретацией и практич. приложениями. Особенно существенна связь с экономич. наукой и практикой.

М. э. как часть математики начала развиваться только в 20 в. Ранее были лишь эпизодич. исследования, к-рые нельзя в строгом смысле отнести к математике.

Особенности экономико-математического моделирования. Особенность экономич. моделирования состоит в исключительном разнообразии и разнородности предмета моделирования. В экономике присутствуют элементы управляемости и стихийности, жесткой определенности и существенной неоднозначности и свободы выбора, процессы технич. характера и социальные процессы, где на первый план выдвигается поведение человека. Разные уровни экономики (напр., цех и народное хозяйство) требуют существенно различного описания. Все это приводит к большой разнородности моделей математич. аппарата. Тонким вопросом является форма отражения типа социально-экономич. системы, к-рая моделируется, учет общественного строя. Нередко оказывается, что абстрактная математич. модель того или иного экономич. объекта или процесса с успехом применима и к капиталистической, и к социалистической экономике. Все дело в способе использования, интерпретации результатов анализа.

Производство, эффективное производство. Экономика имеет дело с благами, или продуктами, к-рые понимаются в М. э. чрезвычайно широко. Для них применяется общий термин *ингредиенты*. Ингредиентами являются услуги, природные ресурсы, отрицательно воздействующие на человека факторы окружающей среды, характеристика комфортности от имеющейся системы безопасности и т. д. Обычно считается, что число ингредиентов конечно и пространство продуктов есть $\mathbb{R}^l$ — евклидово пространство, где l — число ингредиентов. Точка z из $\mathbb{R}^l$ при надлежащих условиях может рассматриваться как «производственный» способ, положительные компоненты указывают объемы выпуска соответствующих ингредиентов, а отрицательные — затраты. Слово «производственный» взято в кавычки, поскольку производство понимается в самом широком смысле. Множество наличных (заданных, существующих) производственных возможностей есть $Z \subset \mathbb{R}^l$. Способ производства $\bar{z} \in Z$ *эффективен*, если не существует $z \in Z$ такой, что $z \geqslant \bar{z}$ и хотя бы для одной компоненты выполняется строгое неравенство. Задача выявления эффективных способов — одна из важнейших в экономике. Обычно предполагается, и это во многих случаях хорошо согласуется с действительностью, что Z — выпуклый компакт. С помощью расширения пространства продуктов задача анализа эффективных способов при этом может быть сведена к случаю, когда Z — выпуклый замкнутый конус.

Типичной задачей выявления эффективного способа является основная задача производственного планирования. Задано множество производственных способов $Z \subset \mathbb{R}^l$ и вектор потребностей и ресурсных ограничений $b \in \mathbb{R}^{l-1}$. Требуется найти способ $\bar{z}=(b, \bar{\mu}) \in Z$ такой, что $\bar{\mu} \geqslant \mu$ для всех $(b, \mu) \in Z$. Если Z — выпуклый замкнутый конус, то это есть общая задача *выпуклого программирования*. Если Z задан конечным числом образующих (так наз. базисных способов), то это общая задача *линейного программирования*. Решение $\bar{z}$ лежит на границе Z. Пусть π — коэффициенты *опорной гиперплоскости* для Z в точке $\bar{z}$, т. е. $\pi z \leqslant 0$ для всех $z \in Z$ и $\bar{z}\pi=0$. Основная теорема выпуклого программирования находит условия, при к-рых $\pi_l > 0$. Напр., достаточно условия: существует вектор $(b, \mu) \in \operatorname{int} Z$ (так наз. условие Слейтера). Коэффициенты π, характеризующие эффективный способ $\bar{z}$, имеют важный экономич. смысл. Они интерпретируются как цены, соизмеряющие эффективность затрат и выпуска отдельных ингредиентов. Способ эффективен тогда и только тогда, когда стоимость выпуска равна стоимости затрат. Данная теория эффективных способов производства и их характеризации с помощью π оказала революционизирующее влияние на теорию и практику планирования социалистич. экономики. Она легла в основу объективных количественных методов определения цен и общественных оценок ресурсов, дающих возможность выбора наиболее эффективных экономич. решений в условиях социалистич. хозяйства. Теория естественным образом обобщается на бесконечное число ингредиентов. Тогда пространство ингредиентов оказывается подходящим образом выбранным функциональным пространством.

Эффективный рост. Ингредиенты, относящиеся к разным моментам или интервалам времени, формально можно считать различными. Поэтому описание производства в динамике в принципе укладывается в изложенную выше схему, состоящую из объектов $\{X, Z, b\}$, где X — пространство ингредиентов, Z — множество производственных возможностей, b — задания требований и ограничений на экономику. Однако изучение собственно динамич. аспекта производства требует более специальных форм описания производственных возможностей.

Производственные возможности достаточно общей модели экономич. динамики задаются с помощью точечно-множественного отображения (многозначной функции) $a : \mathbb{R}^l_+ \to 2^{\mathbb{R}^l_+}$. Здесь $\mathbb{R}^l_+$ — (фазовое) пространство экономики, $x \in \mathbb{R}^l_+$ интерпретируется как состояние экономики в тот или иной момент времени, где x_k — количество продукта k, имеющегося в наличии в этот момент. Множество $a(x)$ состоит из всех состояний экономики, в к-рые она может перейти за единичный временной интервал из состояния x. Будем называть

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2l}_+ \mid y \in a(x)\}$$

графиком отображения a. Точки (x, y) — допустимые производственные процессы.

Рассматриваются различные варианты задания возможных траекторий развития экономики. В частности, потребление населения учитывается либо в самом отображении a, либо выделяется в явном виде. Напр., во втором случае допустимой траекторией является последовательность $(X, C)=(x(t), c(t+1))_{t=0}^{\infty}$ такая, что $x(t+1)+c(t+1) \in a(x(t))$, $c(t) \geqslant 0$ для всех t. Изучаются различные понятия эффективности траекторий. Траектория $(\bar{X}, \bar{C})$ эффективна по потреблению, если не существует другой допустимой траекто-

рии (X, C), выходящей из того же начального состояния, для к-рой $C \geqslant \bar{C}$. Траектория $(\bar{X}, \bar{C})$ **внутренне эффективна**, если не существует другой допустимой траектории (X, C), выходящей из того же начального состояния, момента времени t_0 и числа $\lambda > 1$, что

$$\lambda \bar{x}(t_0) = x(t_0).$$

Оптимальность траектории обычно определяется в зависимости от функции полезности $u : \mathbb{R}_+^l \to \mathbb{R}_+$ и коэффициента приведения полезности во времени $\mu \geqslant 1$ (о функции полезности см. ниже). Траектория $(\bar{X}, \bar{C})$ наз. (u, μ)-**оптимальной**, если

$$\lim_{t \to \infty} \left(\sum_{\tau=0}^{t} u(\bar{c}(\tau)) \mu^{-\tau} - \sum_{\tau=0}^{t} u(c(\tau)) \mu^{-\tau} \right) \geqslant 0$$

для любой допустимой траектории (X, C), *выходящей из того же начального состояния*. Имеется ряд довольно общих теорем существования для соответствующих траекторий.

Эффективные в различных смыслах траектории характеризуются последовательностью цен точно так же, как эффективный способ $\bar{z}$ характеризовался ценами (коэффициентами опорной гиперплоскости) л. Т. е. если для эффективного способа стоимость затрат равна стоимости выпуска в оптимальных ценах, то на эффективной траектории стоимость состояний постоянна и максимальна, а на всех других допустимых траекториях не может возрастать.

Все приведенные определения легко обобщаются на случай, когда производственное отображение a, функция u и коэффициент μ зависят от времени. Само время может быть непрерывным или вообще параметр t может пробегать множество довольно произвольного вида.

С экономич. точки зрения интерес представляют траектории, на к-рых достигается максимально возможный темп роста экономики, к-рый она может выдержать сколь угодно долго. Оказывается, что при неизменных во времени a и u такие траектории являются **стационарными**, т. е. имеют вид

$$x(t) = x(0) \alpha^t, \quad c(t) = c(0) \alpha^t,$$

где α — темп роста (расширения) экономики. Стационарные эффективные в том или ином смысле, а также стационарные оптимальные траектории наз. **магистралями**.

При весьма широких предположениях имеют место теоремы о магистрали, утверждающие, что всякая эффективная траектория, независимо от начального состояния, с течением времени приближается к магистрали. Имеется большое число различных теорем о магистрали, различающихся определением эффективности или оптимальности, способом измерения расстояния до магистрали, типом сходимости, наконец, конечным или бесконечным временным интервалом.

Модель экономич. динамики, у к-рой производственные возможности задаются многогранным выпуклым конусом, наз. **моделью Неймана**. Частным случаем модели Неймана является **замкнутая модель Леонтьева**, или (по другой терминологии) **замкнутый динамический межотраслевой баланс** (термин «замкнутый» используется здесь как характеристика свойства экономики, состоящего в отсутствии невоспроизводимых продуктов), к-рый задается тремя матрицами с неотрицательными элементами Φ, A и B порядка $l \times l$. Процесс $(x, y) \in Z$ тогда и только тогда, когда найдутся векторы v, $w \in \mathbb{R}_+^l$ такие, что выполнены неравенства:

$$x \leqslant v\Phi, \quad v \geqslant vA + wB, \quad y \leqslant v\Phi + w.$$

Модель межотраслевого баланса получила большое распространение из-за удобства получения исходной информации для ее построения.

Модели экономич. динамики рассматриваются также в непрерывном времени. Одними из первых стали изучать как раз модели с непрерывным временем. В частности, ряд работ был посвящен простейшей однопродуктовой модели, задаваемой уравнением

$$\dot{x} = f(x) - c,$$

где x — объем фондов, приходящихся на единицу трудовых ресурсов, c — потребление на душу населения, f — производственная функция (возрастающая, вогнутая). Неотрицательные функции $(x(t), c(t))_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяющие этому уравнению, характеризуют допустимую траекторию. Для заданной функции полезности u и коэффициента дисконтирования μ определяется оптимальная траектория. Оптимальные траектории (и только они) удовлетворяют аналогу уравнения Эйлера

$$u'(c)\dot{x} = u(\bar{c}) - u(c),$$

где $\bar{c}$ — максимальное число, удовлетворяющее условию $f(x) - c = x$.

Модель Леонтьева также была сначала сформулирована в непрерывном времени в виде системы дифференциальных уравнений

$$X = AX + B\dot{X} + C,$$

где X — потоки продуктов, A и B — матрицы текущих и капитальных затрат соответственно, C — потоки конечного потребления.

Эффективные и оптимальные траектории в моделях с непрерывным временем изучаются с помощью методов вариационного исчисления, оптимального управления, математич. программирования в бесконечномерных пространствах. Рассматриваются также модели, допустимые траектории в к-рых задаются дифференциальными включениями вида $\dot{x} \in a(x)$, где a — производственное отображение.

Рациональное поведение потребителей. Вкусы и цели потребителей, к-рые определяют их рациональное поведение, даются в виде нек-рой системы предпочтений в пространстве продуктов. А именно, для каждого потребителя i определено точечно-множественное отображение $P_i : Z \to 2^X$, где Z — нек-рое пространство ситуаций, в к-рых может оказаться потребитель в процессе выбора, X — множество векторов, доступных потребителю, $X \subset \mathbb{R}^l$. В частности, Z может включать в себя в качестве подпространства $\mathbb{R}^l$. Содержательно множество $P_i(z|x)$ состоит из всех векторов $\tilde{x} \in X$, к-рые (строго) предпочитаются вектору x в ситуации z. Напр., отображение P_i может быть задано в виде функции полезности u, где $u(x)$ показывает полезность от потребления набора продуктов x. Тогда

$$Z = \mathbb{R}^l_+, \quad P_i(z) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^l_+ \mid u(\tilde{x}) > u(x)\}.$$

Пусть в описание ситуации z входят цены π на все продукты и денежный доход потребителя d. Тогда $B_i(z) = \{x \in X \mid x\pi \leqslant d\}$ есть множество наборов, к-рые потребитель может приобрести в ситуации z. Это множество наз. бюджетным. Рациональность поведения потребителя заключается в том, что он выбирает такие наборы x из $B_i(z)$, для к-рых $P_i(z|x) \cap B_i(z) = \varnothing$. Пусть $D(z)$ — множество наборов продуктов, выбираемых потребителем i в ситуации z; D_i наз. отображением (или функцией в случае, когда $D_i(z)$ состоит из одной точки) спроса. Имеется ряд исследований, посвященных выяснению свойств отображений P_i, B_i, D_i. В частности, довольно подробно изучен случай, когда отображения P_i могут быть заданы в виде функций. Определены условия, при к-рых отображения

B_i и D_i являются непрерывными. Особый интерес представляет изучение свойств функции спроса D_i. Дело в том, что иногда удобнее считать в качестве первичных именно функции спроса D_i, а не предпочтения P_i, поскольку их легче построить по имеющейся информации о поведении потребителей. Напр., в экономике (торговая статистика) могут наблюдаться величины, приближенно оценивающие частные производные

$$\frac{\partial D_{ik}(z)}{\partial \pi_\rho}, \quad \frac{\partial D_{ik}(z)}{\partial d},$$

где π_ρ — цена на продукт ρ, d — доход.

К теории рационального поведения потребителей примыкает теория группового выбора, имеющая дело, как правило, с дискретными вариантами. Обычно предполагается, что имеется конечное число участников группы и конечное число, напр., альтернативных вариантов. Задача состоит в выборе группового решения о выборе одного из вариантов при заданных отношениях предпочтения между вариантами для каждого участника. Групповой выбор обеспечивает различные схемы голосования, рассматриваются также аксиоматический и теоретико-игровой подходы.

Согласование интересов. Носителями интересов являются отдельные части экономич. системы, а также общество в целом. В качестве таких частей выступают потребители (группы потребителей): предприятия, министерства, территориальные органы управления, плановые и финансовые органы и т. п. Различают два взаимно переплетающихся подхода к проблеме согласования интересов — аналитический, или конструктивный, и синтетический, или дескриптивный. Согласно первому подходу в качестве исходного принимается глобальный критерий оптимальности (формализация интересов всего общества в целом). Задача состоит в том, чтобы вывести локальные (частные) критерии из общего, учитывая при этом частные интересы. При втором подходе исходными являются как раз частные интересы и задача заключается в объединении их в единую непротиворечивую систему, функционирование к-рой приводит к результатам, удовлетворительным с точки зрения всего общества в целом.

К первому подходу впрямую относятся декомпозиционные методы математич. программирования. Пусть, напр., в экономике имеется m производителей и каждый производитель j задается множеством производственных возможностей Y_j, где $Y_j \subset \mathbb{R}^l$ и является выпуклым компактом. Задана целевая функция V всего общества в целом, где $V: \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}_+$ — вогнутая функция. Экономика должна быть организована таким образом, чтобы решалась задача выпуклого программирования: найти $\bar{y}$ из условий $y \geqslant 0$, $y \in \sum_j Y_j$, $V(y) \to \max$. По теореме о характеристике эффективных способов производства существуют цены $p \in \mathbb{R}^l_+$ $(p \neq 0)$ такие, что

$$\bar{y}^{(j)}\, p = \max_{y^{(j)} \in Y_j} y^{(j)} p \quad \text{для всех } j, \quad \bar{y} = \sum_j \bar{y}^{(j)}.$$

Величина $y^{(j)}p$ интерпретируется как прибыль j-го производителя при ценах p. Отсюда следует, что критерий максимизации прибыли у каждого из производителей не противоречит общей цели, если действующие цены определены соответствующим образом. Схемы, относящиеся ко второму подходу, получили большое развитие в рамках моделей экономич. равновесия.

Экономическое равновесие. Предполагается, что экономика состоит из отдельных частей, являющихся носителями собственных интересов: производителей, занумерованных индексами $j=1, \ldots, m$, и потребителей, занумерованных индексами $i=1, \ldots, n$. Производитель j описывается множеством производственных

возможностей $Y_j \subset \mathbb{R}^l$ и отображением $F_j : Z \to 2^{Y_j}$, задающим его систему предпочтений. Здесь Z — множество возможных состояний экономики, конкретизируемое ниже. Потребитель i описывается множеством возможных наборов продуктов, доступных для потребления, $X_i \subset \mathbb{R}^l$, начальным запасом продуктов $w^{(i)} \in \mathbb{R}^l_+$, предпочтением $P_i : Z \to 2^{X_i}$ и, наконец, функцией $\alpha_i : Z \to \mathbb{R}$ распределения доходов, где $\alpha_i(z)$ показывает количество денег, поступающих потребителю i в состоянии z. Множество возможных цен в экономике есть Q. Тогда множество возможных состояний есть $Z = \prod_i X_i \times \prod_j Y_j \times Q$. Бюджетное отображение B_i определяется здесь так:

$$B_i(z) = \{\tilde{x}^{(i)} \in X_i \mid \tilde{x}^{(i)} p \leqslant \alpha_i(z) + w^{(i)} p\}.$$

Состояние равновесия описанной экономики есть $\bar{z} \in Z$, удовлетворяющее условиям

$$\sum_i \bar{x}^{(i)} = \sum_j \bar{y}^{(j)} + \sum_i w^{(i)},$$

$$\bar{x}^{(i)} \in B_i(\bar{z}), \quad B_i(\bar{z}) \cap P_i(\bar{z}) = \varnothing, \quad Y_j \cap F_j(\bar{z}) = \varnothing.$$

По существу состояние равновесия экономики совпадает с определением решения *бескоалиционной игры* многих лиц в смысле Неймана — Нэша с дополнительным условием, чтобы выполнялся баланс по всем продуктам.

Существование состояния равновесия доказано при весьма общих условиях для исходной экономики. Гораздо более жесткие условия необходимо накладывать для того, чтобы состояние равновесия было оптимальным, т. е. доставляло решение нек-рой глобальной оптимизационной задаче с целевой функцией, зависящей *от* интересов потребителей. Напр., пусть P_i задано вогнутой непрерывной функцией $u_i : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}_+$, а F_j задано функцией $py^{(j)}$,

$$\alpha_i(z) = \sum_j \theta_{ij} y^{(j)} p, \quad \theta_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_j \theta_{ij} = 1,$$

$$Q = \left\{ p \in \mathbb{R}^l_+ \;\middle|\; \sum_{k=1}^{l} p_k = 1 \right\},$$

где Y_j, X_i — выпуклые компакты, $0 \in Y_j$, $w^{(i)} \in \operatorname{int} X_i$. Любое подмножество $S = \{i_1, \ldots, i_r\}$ индексов потребителей образует подэкономику исходной экономики, в к-рой каждому потребителю i_s из S соответствует (один и только один) производитель, множество производственных возможностей к-рого есть

$$\hat{Y}_{i_s} = \sum_{j=1}^{m} \theta_{i_s, j} Y_j.$$

Функции распределения доходов при этом имеют вид

$$\alpha_{i_s}(z) = y^{(i_s)} p.$$

Состояние $z \in Z$ наз. с б а л а н с и р о в а н н ы м, если

$$\sum_i x^{(i)} \leqslant \sum_j y^{(j)} + \sum_i w^{(i)}.$$

Говорят, что сбалансированное состояние z исходной экономики блокируется коалицией потребителей S, если в подэкономике, определяемой коалицией S, существует такое сбалансированное состояние $\bar{z}^{(s)}$, что $u_{i_s}(\bar{x}^{(i_s)}) \geqslant u_{i_s}(x^{(i_s)})$ для $s = 1, \ldots, r$ и хотя бы для одного индекса имеет место строгое неравенство. Я д р о м э к о н о м и к и наз. множество всех сбалансированных состояний, к-рые не блокируются никакой коалицией потребителей. Для экономики с описанными свойствами имеет место теорема: всякое состояние равновесия принадлежит ядру. Обратное неверно, однако най-

ден ряд достаточных условий, при к-рых множество состояний равновесия и ядро близки друг к другу или вообще совпадают. В частности, если число потребителей стремится к бесконечности и влияние каждого потребителя на состояние экономики становится все более малым, то множество состояний равновесия стремится к ядру. Совпадение ядра и множества состояний равновесия имеет место в экономике с бесконечным (континуальным) числом потребителей (теорема Аумана).

Пусть экономика является моделью рынка (т. е. отсутствуют производители), множество участников (потребителей) к-рой является замкнутым единичным отрезком $[0, 1]$, обозначаемым далее T. Состояние экономики есть $z=(x, p)$, где $p \in \{p \in \mathbb{R}_+^l \mid \sum_k p_k = 1\}$, x есть функция, отображающая T в $\mathbb{R}_+^l$, каждая компонента к-рой интегрируема по Лебегу на отрезке T. Начальное распределение продуктов между участниками задано функцией w, $\int_T w > 0$, таким образом сбалансированное состояние z таково, что $\int x = \int w$. Коалиция участников — это измеримое по Лебегу подмножество множества T. Если подмножество имеет меру 0, то соответствующая коалиция наз. нулевой. Ядро — это множество всех сбалансированных состояний, к-рые не блокируются ни одной ненулевой коалицией. Состояние $\bar{z}=(\bar{x}, \bar{p})$ является равновесием, если для почти каждого участника t

$$u_t(\bar{x}(t)) = \max u_t(x(t)),$$
$$x(t) \in \{x \mid xp \leqslant pw(t)\}.$$

Теорема Аумана утверждает, что в описанной экономике ядро и множество состояний равновесия совпадают.

Интерес представляет вопрос о структуре множества состояний равновесия, в частности когда это множество конечно или состоит из одной точки. Здесь имеет место теорема Дебре. Пусть множество моделей рынка $W = \{(w^{(i)}, D_i)_{i=1}^n\}$, где $w^{(i)} \in \mathbb{R}_+^l$ суть начальные запасы продуктов у участника i, вектор $w=(w^{(1)}, \ldots, w^{(n)})$ является параметром, определяющим конкретную модель из множества W, $w \in \mathbb{R}_+^{n \cdot l}$. Отображение $D_i : Q \times M \to \mathbb{R}_+^l$ представляет собой функцию спроса для i-го участника. Функции $D_1, \ldots, D_n$ заданы (не меняются) для всего множества экономик W. Пусть W_0, $W_0 \subset W$,— совокупность экономик, у к-рых множество состояний равновесия бесконечно. Теорема Дебре утверждает, что если функции $D_1, \ldots, D_n$ непрерывно дифференцируемы и отсутствуют точки насыщения хотя бы для одного из участников, то замыкание множества W_0 имеет (лебегову) меру нуль в пространстве W.

О численных методах. М. э. имеет тесную связь с вычислительной математикой. Линейное программирование, линейные экономич. модели оказали большое влияние на вычислительные методы линейной алгебры. По существу благодаря линейному программированию неравенства в вычислительной математике стали столь же употребительны, как и уравнения.

Трудным и многоплановым вопросом является вычисление экономич. равновесия. Напр., много работ посвящено условиям сходимости к равновесию системы дифференциальных уравнений

$$\dot{p} = F(p), \qquad (*)$$

где p — вектор цен, F — функция избыточного спроса, т. е. разность функций спроса и предложения. Равновесные цены $\bar{p}$, по определению, обеспечивают равенство спроса и предложения: $F(\bar{p})=0$. Функция избыточ-

ного спроса F задается либо непосредственно, либо через более первичные понятия соответствующей модели равновесия. С. Смейлом [8] изучена существенно более общая динамич. система, чем (*), применительно к модели рынка; наряду с изменением во времени цен p рассмотрено изменение состояния x; при этом допустимая траектория $(p(t), x(t))_{t=0}^{\infty}$ удовлетворяет некрым дифференциальным включениям вида $\dot{p} \in K(p)$, $\dot{x} \in C(p)$, где $K(p)$ и $C(p)$ — множества возможных направлений изменения p и x, определенные через модель рынка.

Экономич. равновесие, решение игры, решение той или иной экстремальной задачи могут быть определены как неподвижные точки подходящим образом сформулированного точечно-множественного отображения. В рамках исследований по М. э. разрабатываются численные методы поиска неподвижных точек разных классов отображений. Наиболее известен метод Скарфа, к-рый является комбинацией идей леммы Шпернера и симплекс-метода решения задач линейного программирования.

Смежные вопросы. М. э. тесно связана со многими математич. дисциплинами. Иногда трудно определить, где границы между М. э. и математич. статистикой или выпуклым анализом, функциональным анализом, топологией и т. д. Можно указать, напр., на развитие теории положительных матриц, положительных линейных (и однородных) операторов, спектральных свойств суперлинейных точечно-множественных отображений под влиянием потребностей М. э.

Лит.: [1] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [2] Канторович Л. В., Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, М., 1959; [3] Никайдо Х., Выпуклые структуры и математическая экономика, пер. с англ., М., 1972; [4] Макаров В. Л., Рубинов А. М., Математическая теория экономической динамики и равновесия, М., 1973; [5] Миркин Б. Г., Проблема группового выбора [информации], М., 1974; [6] Scarf H., The Computation of Economic Equilibria, L., 1973; [7] Данциг Дж., Линейное программирование, его применения и обобщения, пер. с англ., М., 1966; [8] Smale S., «J. math. Economics», 1976, № 2, p. 107—20.

Л. В. Канторович, В. Л. Макаров.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ — часть математики, в к-рой *функции* и их обобщения изучаются методом *пределов*. Понятие предела тесно связано с понятием бесконечно малой величины, поэтому можно также сказать, что М. а. изучает функции и их обобщения методом бесконечно малых.

Название «М. а.» — сокращенное видоизменение старого названия этой части математики — «Анализ бесконечно малых»; последнее полнее раскрывает содержание, но оно — тоже сокращенное (название «Анализ посредством бесконечно малых» охарактеризовало бы предмет более точно). В классическом М. а. объектами изучения (анализа) являются прежде всего функции. «Прежде всего» потому, что развитие М. а. привело к возможности изучения его методами более сложных образований, чем функция,— функционалов, операторов и т. д.

В природе и технике всюду встречаются движения, процессы, к-рые описываются функциями; законы явлений природы также обычно описываются функциями. Отсюда объективная важность М. а. как средства изучения функций.

М. а. в широком понимании этого термина охватывает весьма большую часть математики. В него входят *дифференциальное исчисление*, *интегральное исчисление*, *функций действительного переменного теория*, *функций комплексного переменного теория*, *приближения теория*, теория *дифференциальных уравнений обыкновенных*, теория *дифференциальных уравнений с частными производными*, теория *интегральных уравнений*, *дифференциальная геометрия*, *вариационное исчисление*,

функциональный анализ и нек-рые другие математич. дисциплины. Современные *чисел теория* и *вероятностей теория* применяют и развивают методы М. а.

Все же термин М. а. часто употребляется для наименования только основ математического анализа, объединяющих в себе теорию *действительного числа*, теорию пределов, теорию *рядов*, дифференциальное и интегральное исчисление и их непосредственные приложения, такие как теория максимумов и минимумов, теория *неявных функций*, *Фурье ряды*, *Фурье интегралы*.

Функция. В М. а. исходят из определения функции по Лобачевскому и Дирихле. Если каждому числу x из нек-рого множества F чисел в силу к.-л. закона приведено в соответствие число y, то этим определена функция

$$y=f(x)$$

от одного переменного x. Аналогично определяется функция

$$f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$$

от n переменных, где $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — точка n-мерного пространства; рассматривают также функции

$$f(x)=f(x_1, x_2, \ldots)$$

от точек $x=(x_1, x_2, \ldots)$ нек-рого бесконечномерного пространства, к-рые, впрочем, чаще называют функционалами.

Элементарные функции. Фундаментальное значение в М. а. играют *элементарные функции*. На практике в основном оперируют с элементарными функциями, ими приближают функции более сложной природы. Элементарные функции можно рассматривать не только для действительных, но и комплексных x; тогда представления об этих функциях становятся в определенном смысле законченными. В связи с этим возникла важная ветвь М. а., наз. теорией функций комплексного переменного, или теорией *аналитических функций*.

Действительное число. Понятие функции существенно базируется на понятии действительного (рационального и иррационального) числа. Оно окончательно сформировалось только в конце 19 в. В частности, установлена логически безупречная связь между числами и точками геометрич. прямой, к-рая привела к формальному обоснованию идей Р. Декарта (R. Descartes, сер. 17 в.), к-рый ввел в математику прямоугольные системы координат и представление в них функций графиками.

Предел. В М. а. методом изучения функций является предел. Различают предел последовательности и предел функции. Эти понятия окончательно сформировались только в 19 в., хотя представление о них имели еще др.-греч. ученые. Достаточно сказать, что Архимед (3 в. до н. э.) умел вычислять площадь сегмента параболы при помощи процесса, к-рый мы назвали бы предельным переходом (см. *Исчерпывания метод*).

Непрерывные функции. Важный класс функций, изучаемых в М. а., образуют *непрерывные функции*. Одно из возможных определений этого понятия: функция $y=f(x)$ от одного переменного x, заданная на интервале (a, b), наз. непрерывной в точке x, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x+\Delta x)-f(x)]=0.$$

Функция непрерывна на интервале (a, b), если она непрерывна во всех его точках; тогда ее график представляет собой кривую, непрерывную в житейском понимании этого слова.

Производная и дифференциал. Среди непрерывных функций следует выделить функции, имеющие *производную*. Производная от функции

$$y=f(x), \quad a<x<b,$$

в точке x есть скорость изменения ее в этой точке, т. е. предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x). \qquad (1)$$

Если y есть координата точки, движущейся по оси ординат в момент времени x, то $f'(x)$ есть мгновенная скорость точки в момент времени x.

По знаку производной $f'(x)$ судят о характере изменения $f(x)$: если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на интервале (c, d), то функция f возрастает (убывает) на этом интервале. Если же функция f в точке x достигает локального экстремума (максимума или минимума) и имеет в этой точке производную, то последняя равна нулю в этой точке $f'(x_0) = 0$.

Равенство (1) можно заменить эквивалентным равенством

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x), \quad \varepsilon(\Delta x) \longrightarrow 0, \quad \Delta x \longrightarrow 0,$$

или

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \Delta x\,\varepsilon(\Delta x),$$

где $\varepsilon(\Delta x)$ есть бесконечно малая, когда $\Delta x \to 0$; т. е. если функция f имеет производную в точке x, то приращение ее в этой точке разлагается на два слагаемых. Из них первое

$$dy = f'(x)\,\Delta x \qquad (2)$$

есть линейная функция от Δx (пропорциональная Δx), второе — стремится к нулю быстрее, чем Δx.

Величина (2) наз. *дифференциалом* функции, соответствующим приращению Δx. При малых Δx можно считать Δy, приближенно равным dy:

$$\Delta y \approx dy.$$

Приведенные рассуждения о дифференциале характерны для М. а. Они распространяются на функции многих переменных и на функционалы.

Напр., если функция

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x)$$

от n переменных имеет непрерывные *частные производные* в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то ее приращение Δz, соответствующее приращениям $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ независимых переменных, можно записать в виде

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \Delta x_k + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k^2}\,\varepsilon(\Delta x), \qquad (3)$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то есть если все $\Delta x_k \to 0$. Здесь первый член в правой части (3) есть дифференциал dz функции f. Он линейно зависит от $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, а второй член стремится к нулю при $\Delta x \to 0$ быстрее, чем Δx.

Пусть задан функционал (см. ст. *Вариационное исчисление*)

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, x')\,dt,$$

распространенный на классы $\mathfrak{M}$ функций $x(t)$, имеющих на отрезке $[t_0, t_1]$ непрерывную производную и удовлетворяющих граничным условиям $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, где x_0, x_1 — данные числа; пусть, далее, $\mathfrak{M}_0$ — класс функций $h(t)$, имеющих непрерывную производную на $[t_0, t_1]$ и таких, что $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Очевидно, если $x(t) \in \mathfrak{M}$ и $h(t) \in \mathfrak{M}_0$, то $x(t) + h(t) \in \mathfrak{M}$.

В вариационном исчислении доказывается, что при известных условиях на L приращение функционала $J(x)$ может быть записано в виде

$$J(x+h) - J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) \right) h(t)\,dt + o(\|h\|) \qquad (4)$$

при $\|h\| \to 0$, где

$$\|h\| = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} |h(t)| + \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} |h'(t)|,$$

и, таким образом, второй член правой части (4) стремится к нулю быстрее, чем $\|h\|$, а первый член линейно зависит от $h \in \mathfrak{M}_0$. Первый член в (4) наз. вариацией функционала и обозначается $\delta J(x, h)$.

Интеграл. Наряду с производной интеграл имеет фундаментальное значение в М. а. Различают неопределенный и определенный интегралы.

Неопределенный интеграл тесно связан с первообразной функцией. Функцию $F(x)$ наз. *первообразной от функции f на интервале (a, b), если на* этом интервале $F'(x) = f(x)$.

Определенный интеграл (Римана) от функции f на отрезке $[a, b]$ есть предел

$$\lim \sum_{j=0}^{N-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) = \int_a^b f(x)\,dx$$

при $\max(x_{j+1} - x_j) \to 0$; здесь $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$.

Если функция f положительна и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то интеграл от нее на этом отрезке равен площади фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$.

Класс интегрируемых по Риману функций содержит все непрерывные на $[a, b]$ функции и нек-рые разрывные функции. Но все они необходимо ограничены. Для неограниченных функций, растущих не очень быстро, а также для нек-рых функций, заданных на бесконечных интервалах, вводят так наз. *несобственные интегралы*, требующие для своего определения двойного перехода к пределу.

Понятие интеграла Римана для функции одного переменного распространяется на функции многих переменных (см. *Кратный интеграл*).

С другой стороны, потребности М. а. привели к обобщению интеграла совсем в другом направлении, имеется в виду *Лебега интеграл* или более общий *Лебега—Стилтьеса интеграл*. Существенным в определении этих интегралов является введение для нек-рых множеств, называемых измеримыми, понятия их меры и на этом основании — понятия измеримой функции. Для измеримых функций и вводится интеграл Лебега — Стилтьеса. При этом рассматривается широкий диапазон разных мер и соответствующих им классов измеримых множеств и функций. Это дает возможность приспособить тот или иной интеграл к определенной конкретной задаче.

Формула Ньютона — Лейбница. Между производной и интегралом имеется связь, выражаемая формулой (теоремой) Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Здесь $f(x)$ непрерывная на $[a, b]$ функция, а $F(x)$ — ее первообразная.

Формула и ряд Тейлора. Наряду с производной и интегралом важнейшим понятием (орудием исследования) в М. а. являются *Тейлора формула* и *Тейлора ряд*. Если функция $f(x)$, $a < x < b$, имеет в окрестности точки x_0 непрерывные производные до порядка n включительно, то ее можно приблизить в этой окрестности многочленом

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

наз. ее многочленом Тейлора (степени n) *по степеням $x - x_0$*:

$$f(x) \approx P_n(x)$$

(формула Тейлора); при этом ошибка приближения

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

стремится к нулю при $x \to x_0$ быстрее, чем $(x-x_0)^n$:

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Таким образом, функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 может быть приближена с любой степенью точности весьма простой функцией (многочленом), требующей для своего вычисления только арифметич. операций — сложения, вычитания и умножения.

Особенно важными являются так наз. аналитические в определенной окрестности x_0 функции, имеющие бесконечное число производных, такие, что для них в этой окрестности $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$; они могут быть представлены в виде бесконечного степенного ряда Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

Разложения Тейлора при определенных условиях возможны и для функций многих переменных, а также функционалов и операторов.

Историческая справка. До 17 в. М. а. представлял собой совокупность решений разрозненных частных задач; напр., в интегральном исчислении — это задачи на вычисление площадей фигур, объемов тел с кривыми границами, работы переменной силы и т. д. Каждая задача или частная группа задач решалась своим методом, подчас сложным и громоздким (о предыстории М. а. см. статью *Бесконечно малых исчисление*). М. а. как единое и систематич. целое сложился в трудах И. Ньютона (I. Newton), Г. Лейбница (G. Leibniz), Л. Эйлера (L. Euler), Ж. Лагранжа (J. Lagrange) и др. ученых 17—18 вв., а его база — теория пределов — была разработана О. Коши (A. Cauchy) в нач. 19 в. Глубокий анализ исходных понятий М. а. был связан с развитием в 19—20 вв. теории множеств, теории меры, теории функций действительного переменного и привел к разнообразным обобщениям.

Лит.: [1] Ла Валле-Пуссен Ш.-Ж. де, Курс анализа бесконечно малых, пер. с франц., т. 1—2, М., 1933; [2] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; 2 изд., ч. 2, М., 1980; [3] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., Математический анализ, М., 1979; [4] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1—2, М., 1973; [5] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975; [6] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., ч. 1—2, 2 изд., М., 1962—63; [7] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., т. 1—2, М., 1970; 5 изд., т. 3, М., 1970.

С. М. Никольский.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭВМ, программное обеспечение,— совокупность программ и программных комплексов, посредством к-рых происходит преобразование алгоритмов программы пользователя, записанных на алгоритмич. языках высокого уровня, в последовательность команд, понимаемых электроникой ЭВМ, организуется автоматич. прохождение задач пользователей на ЭВМ, обеспечивается эффективное использование оборудования ЭВМ (см. [1] — [4]).

Появление М. о. было вызвано необходимостью повышения производительности труда программистов и специалистов, эксплуатирующих ЭВМ. Действительно, команды вычислительной машины представляют собой с точки зрения возможности записи алгоритма весьма элементарные операции, и запись алгоритма (программирование) в виде последовательности этих команд является трудоемкой работой. Это стимулировало создание средств *автоматизации программирования*. Происходило укрупнение операций, понимаемых электроникой машины, но это не решило проблемы. Даже у сов-

ременных ЭВМ команды, как правило, представляют собой элементарные операции. Существенно больший успех был достигнут на пути создания программных средств, облегчающих программирование. Первым шагом было создание М. о., позволяющего программировать на автокоде. Программа на автокоде фактически представляет собой ту же последовательность команд ЭВМ, но записанных символическими обозначениями — в мнемоническом виде. Преобразование мнемонич. кода программы в команды машины осуществляют специальные программы — а с с е м б л е р ы. Затем появились м а к р о а с с е м б л е р ы, к-рые дали возможность использовать в текстах программ макрооператоры, обеспечивающие выполнение группы команд машины.

Следующим этапом автоматизации программирования было создание *алгоритмических языков* высокого уровня. Имеется свыше тысячи алгоритмич. языков различного назначения, применение к-рых существенно сокращает затраты на разработку и создание программ. Первым, получившим широкое распространение, стал язык *фортран*. Затем появились языки *алгол*, *алгамс*, а в СССР и язык *альфа*, предназначенные в основном для проведения научно-технич. расчетов. Для записи алгоритмов обработки экономич. информации был создан язык *кобол*. Алголоподобный язык паскаль имеет средства для описания структуры данных. Для работы с текстовой информацией предназначены языки *лисп*, снобол, амбит, сдл и др. Для описания алгоритмов проведения аналитич. преобразований на ЭВМ получила широкое распространение система Reduce, а в СССР и язык аналитик (см. [5]). Как развитие и обобщение языков фортран, алгол и кобол появились языки *ПЛ/1* и *алгол-68*.

Параллельно с развитием языковых средств велись работы по созданию библиотек стандартных программ. Имеются тысячи подпрограмм, программ и программных комплексов, в к-рых реализованы алгоритмы общего и специального назначения с использованием методов вычислительной математики. Среди них: вычисление элементарных и специальных функций, линейная алгебра, счет интегралов, численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, метод наименьших квадратов и др. Стандартные программы организованы в виде библиотек подпрограмм, записанных на магнитные ленты или диски, так что они легко доступны. Для вызова подпрограммы достаточно поставить в программе оператор обращения к ней. Наиболее часто применяемые подпрограммы хранятся в виде стандартных модулей загрузки на языке, весьма близком к кодам ЭВМ. Как правило, трансляторы с алгоритмич. языков выдают результат своей работы в виде последовательности отдельных подпрограмм и процедур, к-рые сразу же после трансляции записываются во временную библиотеку в виде стандартных модулей загрузки. Последующее объединение отдельных подпрограмм в рабочую программу в кодах ЭВМ с соответствующей настройкой осуществляет загрузчик либо перед началом счета (статич. загрузчик), либо во время счета в момент вызова конкретной подпрограммы (динамич. загрузчик). В нек-рых системах объединение отдельных оттранслированных ранее частей программ в единую программу осуществляет т. н. редактор связей, а загрузчик только располагает готовую программу в памяти машины.

Наряду с пополнением библиотеки стандартных подпрограмм все большее распространение получает практика создания пакетов прикладных программ, рассчитанных на решение не отдельной задачи, а целого класса задач. Пакет программ представляет собой совокупность подпрограмм, работающих под управлением головной программы. Режим работы пакета задается посредством специализированного *проблемно-ориенти-*

рованного языка, чаще всего являющегося подмножеством обычного профессионального языка или жаргона.

Современные ЭВМ наряду со средствами, облегчающими написание и отладку программ, оснащаются также программными комплексами, обеспечивающими эффективное использование самих ЭВМ путем организации автоматич. прохождения задач (управление заданиями), управления данными, динамич. распределения памяти, внешних устройств (управления ресурсами). Совокупность этих программных средств наз. операционной системой (ОС) ЭВМ (см. [1]—[4], [6]). ОС стали неотъемлемой частью вычислительных систем. Без ОС невозможно функционирование ЭВМ, т. к. управление работой внешних устройств, обмен информацией, организация взаимодействия отдельных элементов ЭВМ в значительной мере осуществляются посредством программ, входящих в ОС. Под управлением ОС функционируют трансляторы с алгоритмич. языков, системы программ, облегчающих программирование и отладку (в том числе и в диалоговом режиме), а также обеспечивающих работу с графич. информацией. ОС предоставляют средства для работы с большими массивами данных, для ведения файлов (последовательность групп данных, как правило, одинаковой структуры), создания баз данных и различного рода информационно-поисковых систем. ОС обеспечивает использование ЭВМ в составе многомашинных комплексов, в сетях ЭВМ. Кроме языковых средств, облегчающих программирование, пользователю также предоставляется возможность управления работой ОС посредством управляющих операторов (перфокарт), к-рые вводятся в ЭВМ вместе с программой.

В зависимости от режима работы, к-рый обеспечивается ОС, различают три типа использования ЭВМ.

1) Пакетная обработка программ заключается в автоматич. прохождении (решении) потоков задач на ЭВМ, в том числе и в мультипрограммном режиме. Примерами ОС, обеспечивающих такой режим работы, являются ОС ЕС и ДОС ЕС для машин единой серии (см. [1], [8]) и машин фирмы ИБМ; системы ОС ДУБНА и ОС ДИСПАК для БЭСМ-6 (см. [9]); система NOS/BE для машин фирмы Control Data.

2) Режим разделения времени дает возможность одновременно обслуживать многих пользователей, работающих с терминалов, связанных с ЭВМ, в том числе находящихся на больших расстояниях от нее. В качестве примеров ОС, обеспечивающих работу в таком режиме, можно назвать одну из ранних экспериментальных систем MULTICS и систему TSS/360 для машин ИБМ. В крупных вычислительных системах режим разделения времени, как правило, обеспечивается операционными системами, к-рые одновременно ведут счет и в режиме пакетной обработки. При этом взаимодействие с ОС происходит посредством специальных подсистем, работающих под управлением основной ОС. В NOS/BE это — система Intercom, в ОС ДУБНА — мультитайп, в ОС ДИСПАК — система ДИМОН (см. [10]), в ОС ЕС — ДУУВЗ и СРВ (см. [11]).

При работе с терминалов на ЭВМ, ведущей счет в пакетном режиме, пользователям предоставляются в режиме разделения времени только средства для набора, редактирования программ и их запуска на счет. Трансляция программ и счет идут в обычном режиме пакетной обработки, как правило, с высшим приоритетом. Пользователи имеют возможность просмотреть результат прохождения задач и, если необходимо, заново их отредактировать и вновь запустить на счет. Программа может обращаться к терминалу и в реальном времени, как к внешнему устройству ЭВМ, для ввода-вывода информации в режиме диалога.

Системы режима разделения времени часто оснащаются трансляторами, работающими в режиме интерпре-

тации, когда отдельная инструкция (оператор языка) преобразуется в коды ЭВМ и выполняется сразу же после ее набора на терминале.

3) Операционные системы реального времени обеспечивают функционирование ЭВМ на линии с внешним оборудованием, к-рое в произвольные моменты времени может посылать в ЭВМ информацию, требующую оперативной обработки в момент ее поступления. ОС такого типа предназначены для управления экспериментальными и технологич. установками, работающими на линии с ЭВМ (см. [12], [13], [14], [15]). Нередко в роли ОС реального времени выступают соответствующим образом доработанные ОС пакетного режима. ЭВМ, предназначенные для работы на линии с оборудованием (управляющие ЭВМ), имеют технические и программные средства, облегчающие создание программ и их функционирование в реальном времени.

Понятия и терминология в области М. о. и системного программирования еще не четко установились. Ранее в состав ОС включались трансляторы, теперь большинство исследователей относят их к прикладным программам, работающим под управлением ОС. Разными учеными название компонент ОС, а часто и разбиение ОС на отдельные компоненты делается по-разному. Это связано главным образом с быстрым развитием этой области науки и непрерывным появлением новых понятий.

Кроме рассмотренного выше М. о. ЭВМ общего назначения (операционные системы и прикладные пакеты общего назначения), имеется и продолжает активно создаваться М. о., нацеленное на решение конкретных проблем в различных отраслях науки, техники и народного хозяйства. Программные проблемно-ориентированные комплексы создаются с использованием языковых средств и других возможностей, предоставляемых ОС ЭВМ. Объем этого М. о. намного превосходит объем М. о. ЭВМ общего назначения.

В крупных институтах ядерной физики и физики высоких энергий используются десятки (иногда более сотни) ЭВМ разного класса в основном для управления и съема информации с экспериментальных установок. Для каждой такой установки созданы специализированные ОС реального времени или разделения времени (см. [16]). Специализированные ОС обеспечивают функционирование не только ЭВМ, но и сложных электронно-механич. систем. Большие комплексы программ под управлением этих ОС контролируют правильность работы аппаратуры, съем информации, ее обработку, сжатие и накопление. Экспериментатору предоставляются богатые средства диалогового графич. взаимодействия с системой.

Часть систем работает в режиме автоматич. опознавания событий и их изображений. Кроме специализированных ОС, в состав М. о. экспериментов также входят большие комплексы программ, предназначенные для обработки экспериментальной информации. Система программ для обработки фильмовой информации имеет объем в десятки тысяч операторов фортрана, она создана в рамках модульной системы программирования ГИДРА (см. [17]). Система ГИДРА предоставляет пользователю средства для редактирования, организации хранения различных версий программ, для создания версий программ для конкретной трековой камеры, эксперимента и типа доступной электронной машины. В системе нашли воплощение все современные достижения программирования: модульный принцип, структурное программирование, самодокументирование, динамич. распределение оперативной памяти, удобные средства генерации. Создание конкретной версии программы сводится к написанию последовательности строк, указывающих тип измерительного устройства, этап об-

работки и форму выдачи информации, и к заданию числовой информации, описывающей параметры трековой камеры (константы оптич. системы, карта магнитного поля) и топологию изучаемых событий. Результатом работы системы является текст программы на фортране, сгенерированный из модулей, хранящихся в системе или введенных пользователем.

Не только для ядерной физики, но и для многих других отраслей науки и техники созданы большие проблемно-ориентированные комплексы программ (см. [18]). Среди них комплексы программ для обработки информации в молекулярной биологии и кристаллофизике (см. [19]), электро- (ЭПАК) и сейморазведке (СЕЙСПАК) полезных ископаемых (см. [20]), программные комплексы для автоматизации проектирования (см. [21]), для автоматизированных систем управления(АСУ) в народном хозяйстве и многие др. Как правило, создание программы для решения той или другой задачи с использованием проблемно-ориентированных систем сводится к подготовке ее описания на языке, являющемся управляющим, входным языком системы и построенным на основе определений и понятий, используемых в данной области науки, техники.

Таким образом, М. о. ЭВМ можно представить в виде двух уровней.

Первый уровень — комплекс программ, входящих в ОС или работающих под ее непосредственным управлением, к-рый является общим М. о., поставляемым вместе с вычислительной системой. Кроме программ собственно ОС, в общее М. о. входят в первую очередь трансляторы с машинно-ориентированных и широко распространенных процедурно-ориентированных алгоритмич. языков, а также библиотеки стандартных подпрограмм общего назначения.

Второй уровень представлен проблемно-ориентированными программными комплексами. Они являются, как правило, надстройкой над общим М. о. первого уровня и создаются с использованием языковых средств и др. возможностей, представляемых М. о. первого уровня. Проблемно-ориентированное М. о. по общей организации и назначению можно разбить на два типа. Первый — это программные комплексы, создаваемые на универсальных ЭВМ общего назначения с использованием средств, представляемых М. о. Они предназначены для решения определенных классов задач или обработки данных. С точки зрения связи с ОС ЭВМ эти комплексы являются обычными прикладными программами. Второй тип представлен специализированными ОС реального времени или управляющими программами, к-рые создаются как с использованием средств, предоставляемых стандартными ОС ЭВМ, так и без их использования. Это М. о. управляет сложными электронными и электромеханич. системами, в к-рых ЭВМ составляют только часть из всего оборудования системы.

Лит.: [1] Королев Л. Н., Структуры ЭВМ и их математическое обеспечение, 2 изд., М., 1978; [2] Криницкий Н. А., Миронов Г. А., Фролов Г. Д., Программирование и алгоритмические языки, 2 изд., М., 1979; [3] Флорес А., Программное обеспечение, пер. с англ., М., 1971; [4] Донован Дж., Системное программирование, пер. с англ., М., 1975; [5] Глушков В. М. [и др.], «Кибернетика», 1971, № 3, с. 102—34; [6] Катцан Г. (мл.), Операционные системы, пер. с англ., М., 1976; [7] Вельбицкий И. В., Технология производства программ на базе *R*-метаязыка, в кн.: Системное и теоретическое программирование, т. 1, Киш., 1974; [8] Система математического обеспечения ЕС ЭВМ, М., 1974; [9] Мазный Г. Л., Программирование на БЭСМ-6 в системе «Дубна», М., 1978; [10] Усов С. А., Диалоговый монитор Димон, М., 1979; [11] Пеледов Г. В., Райков Л. Д., в кн.: Вычислительная техника социалистических стран, в. 2, М., 1977, с. 78—82; [12] Глушков В. М., Автоматизированные системы управления, в кн.: Тр. Всесоюзной конференции по программированию «ВКП-2», Новосиб., 1970; [13] Виленкин С. Я., Трахтенгерц Э. А., Математическое обеспечение управляющих вычислительных машин, М., 1972; [14] Мартин Дж., Программирование для вычислительных систем реального времени, пер. с англ., М., 1975; [15] Тезисы докла-

дов [1-го Всесоюзного симпозиума по математическому обеспечению вычислительных систем, работающих в реальном масштабе времени], К., 1972; [16] Говорун Н. Н., Иванченко З. М., «Программирование», 1976, №4, с. 52—65; [17] Говорун Н. Н. [и др.], «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 1975, т. 6, в. 3, с. 742—75; [18] Сергиенко И. В., Парасюк Й. Н., Тукалевская Н. И., Автоматизированные системы обработки данных, К., 1976; [19] Рентгеновский структурный анализ, в кн.: БСЭ, 3 изд., т. 22, с. 23—27; [20] Безрук И. А., Сафонов А. С., в кн.: Прикладная геофизика, в. 98, М., 1980; [21] Глушков В. М., Капитонова Ю. В., Лятичевский А. А., «Кибернетика», 1970, № 4, с. 1—6. *Н. Н. Говорун.*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ, среднее значение, случайной величины — числовая характеристика распределения вероятностей случайной величины. Самым общим образом М. о. случайной величины $X(\omega)$, $\omega\in\Omega$, определяется как интеграл Лебега по отношению к *вероятностной мере* P в исходном *вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$:

$$\mathsf{E}X(\omega)=\int_\Omega X(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega). \qquad (*)$$

М. о. может быть вычислено и как интеграл Лебега от x по *распределению вероятностей* P_X величины X:

$$\mathsf{E}X(\omega)=\int_{\mathfrak{X}} xP_X(dx),$$

где $\mathfrak{X}$ — множество всех возможных значений X. М. о. функций от случайной величины X выражается через распределение P_X: напр., если X — случайная величина со значениями в $\mathbb{R}^1$ и $f(x)$ — однозначная борелевская функция x, то

$$\mathsf{E}f(X)=\int_\Omega f(X(\omega))\,\mathsf{P}(d\omega)=\int_{\mathbb{R}^1} f(x)\,P_X(dx).$$

Если $F(x)$ — функция распределения X, то М. о. представимо интегралом Лебега — Стилтьеса (или Римана — Стилтьеса)

$$\mathsf{E}X=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x),$$

при этом интегрируемость X в смысле (*) равносильна конечности интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x).$$

В частных случаях, если X имеет дискретное распределение с возможными значениями x_k, $k=1, 2, \ldots$, и соответствующими вероятностями $p_k=\mathsf{P}\{\omega: X(\omega)=x_k\}$, то

$$\mathsf{E}X=\sum\nolimits_k x_kp_k;$$

если X имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью вероятности $p(x)$, то

$$\mathsf{E}X=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx;$$

при этом существование М. о. равносильно абсолютной сходимости соответствующего ряда или интеграла.

Основные свойства М. о.:

а) $\mathsf{E}X_1\leqslant\mathsf{E}X_2$, если $X_1(\omega)\leqslant X_2(\omega)$, $\omega\in\Omega$;

б) $\mathsf{E}C=C$ для любого действительного C;

в) $\mathsf{E}(\alpha X_1+\beta X_2)=\alpha\mathsf{E}X_1+\beta\mathsf{E}X_2$ для любых действительных α и β;

г) $\mathsf{E}(\sum_{n=1}^{\infty} X_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{E}X_n$, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{E}|X_n|$;

д) $g(\mathsf{E}X)\leqslant\mathsf{E}g(X)$ для выпуклых функций $g(x)$;

е) любая ограниченная случайная величина имеет конечное М. о.

Кроме того,

ж) $\mathsf{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathsf{E}X_k$ для взаимно независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$.

Естественным образом можно определить понятие случайной величины с бесконечным М. о. Типичным примером служат времена возвращения в нек-рых случайных блужданиях (см., напр., *Бернулли блуждание*).

С помощью М. о. определяются многие числовые и функциональные характеристики распределения (как М. о. соответствующих функций от случайной величины), напр. *производящая функция*, *характеристическая функция*, *моменты* любого порядка, в частности *дисперсия*, *ковариация*.

М. о. есть характеристика расположения значений случайной величины (среднее значение ее распределения). В этом качестве М. о. служит нек-рым «типичным» параметром распределения и его роль аналогична роли статич. момента — координаты центра тяжести распределения массы — в механике. От прочих характеристик расположения, с помощью к-рых распределение описывается в общих чертах,— *медиан*, *мод*, М. о. отличается тем большим значением, к-рое оно и соответствующая ему характеристика рассеяния — дисперсия — имеют в предельных теоремах теории вероятностей. С наибольшей полнотой смысл М. о. раскрывается *больших чисел законом* (см. также *Чебышева неравенство*) и *больших чисел усиленным законом*. В частности, для последовательности взаимно независимых и одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ с конечными М. о. $a=\mathsf{E}X_k$ при $n\to\infty$ для любого $\varepsilon>0$

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-a\right|>\varepsilon\right)\longrightarrow 0,$$

и, более того,

$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\longrightarrow a\longrightarrow \text{с вероятностью единица.}$$

Понятие М. о. как ожидаемого значения случайной величины впервые наметилось в 18 в. в связи с теорией азартных игр. Первоначально термин «М. о.» был введен как ожидаемый выигрыш игрока, равный $\sum x_k p_k$ для возможных выигрышей $x_1, \ldots, x_n$ и соответствующих вероятностей $p_1, \ldots, p_n$. Особые заслуги в обобщении и использовании понятия М. о. в современном его значении имеет П. Л. Чебышев.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., тт. 1—2, М., 1967; [3] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. *А. В. Прохоров.*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — математическая дисциплина, посвященная теории и методам решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах конечномерного векторного пространства, определяемых линейными и нелинейными ограничениями (равенствами и неравенствами). М. п.— раздел науки об *исследовании операций*, охватывающий широкий класс задач управления, математич. моделями к-рых являются конечномерные экстремальные задачи. Задачи М. п. находят применение в различных областях человеческой деятельности, где необходим выбор одного из возможных образов действий, напр. при решении многочисленных проблем управления и планирования производственных процессов, в задачах проектирования и перспективного планирования. Наименование «М. п.» связано с тем, что целью решения задач является выбор п р о г р а м м ы действий.

Математич. формулировка задачи М. п.: минимизировать скалярную функцию векторного аргумента $\varphi(x)$ на множестве

$$X=\{x: q_i(x)\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, k;\ h_j(x)=0,\ j=1, 2, \ldots, m\},$$

где $q_i(x)$ и $h_j(x)$ — скалярные функции. Функцию $\varphi(x)$ наз. ц е л е в о й ф у н к ц и е й, ф у н к ц и е й

цели, а также критерием качества, множество X — допустимым множеством, или множеством планов, решение x^* задачи М. п.— оптимальной точкой (вектором), точкой глобального минимума, а также оптимальным планом.

В М. п. принято выделять следующие разделы. *Линейное программирование*: целевая функция $\varphi(x)$ и ограничения $q_i(x)$ и $h_j(x)$ линейны; *квадратичное программирование*: целевая функция квадратична и выпукла, допустимое множество определяется линейными равенствами и неравенствами; выпуклое программирование: целевая функция и допустимое множество выпуклы; *дискретное программирование*: решение ищется лишь в дискретных, напр. целочисленных, точках множества X; стохастическое программирование: в отличие от детерминированных задач здесь входная информация носит элемент неопределенности. Напр., в стохастич. задачах о минимизации линейной функции

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при линейных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, \quad i=1, 2, \ldots,$$

либо все величины c_j, a_{ij}, b_i, либо часть из них случайны. Задачи линейного, квадратичного и выпуклого программирования обладают общим свойством: всякая точка локального минимума является оптимальной точкой. Значительно более сложными и менее изученными являются так. наз. многоэкстремальные задачи — задачи, для к-рых указанное свойство не выполняется.

В основе теории выпуклого программирования, и в частности линейного и квадратичного, лежит теорема Куна — Такера о необходимых и достаточных условиях существования оптимальной точки x^*: для того чтобы точка x^* была оптимальной, т. е.

$$\varphi(x^*) = \min_{x \in X} \varphi(x),$$

$$X = \{x : f_i(x) \geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, k\},$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала такая точка $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_k^*)$, чтобы пара точек x^*, y^* образовывала седло функции Лагранжа

$$L(x, y) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{k} y_i f_i(x).$$

Последнее означает, что

$$L(x^*, y) \leqslant L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*)$$

для любых x и всех $y \geqslant 0$. Если ограничения $f_i(x)$ нелинейны, то теорема справедлива при нек-рых дополнительных предположениях о допустимом множестве, напр. в предположении существования такой точки $x \in X$, что $f_i(x) > 0$, $i=1, 2, \ldots, k$,— условия регулярности Слейтера.

Если функции $\varphi(x)$ и $f_i(x)$ дифференцируемы, то следующие соотношения определяют седловую точку

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_j} x_j = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial y_i} \leqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, k;$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial y_i} y_i = 0; \quad y_i \geqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, k.$$

Таким образом, задача выпуклого программирования сводится к решению системы уравнений и неравенств.

На основе теоремы Куна — Такера разработаны различные итерационные методы минимизации, сводящиеся к поиску седловой точки функции Лагранжа.

В М. п. одно из главных мест принадлежит вычислительным методам решения экстремальных задач. Широкое распространение среди этих методов получил метод возможных направлений. В этом методе последовательность $\{x_m\}$ точек множества X строится по формуле $x_{p+1}=x_p+\alpha_p s_p$. На каждой итерации для вычисления точки x_{p+1} решаются задачи выбора направления (вектора) s_p и длины шага (числа) α_p. В качестве s_p выбирают то из возможных направлений (направлений в точке x_p, малое перемещение вдоль каждого из к-рых не выводит из множества X), к-рое составляет острый угол с направлением $g(x_p)$ скорейшего убывания целевой функции (с вектором $g(x_p=-\left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=x_p}$, если $\varphi(x)$ — дифференцируемая функция). Таким образом, вдоль этого направления функция $\psi_p(\alpha)=\varphi(x_p+\alpha s_p)$ убывает. Число α_p выбирают так, чтобы выполнялись условия $x_{p+1}\in X$ и $\varphi(x_{p+1})<\varphi(x_p)$. Для вычисления s_p в точке x_p определяют конус возможных направлений, к-рый задается системой линейных неравенств, и формулируют задачу (линейного программирования) отыскания такого возможного направления, по к-рому целевая функция убывает быстрее всего. Решение этой задачи без труда получают, напр., по стандартной программе симплексного метода. Величину шага α_p вычисляют, решая задачу минимизации одномерной функции $\psi_p(\alpha)$. При весьма общих предположениях доказано, что расстояние между точками x_p и множеством стационарных точек исходной задачи (т. е. множеством точек, в к-рых выполняются необходимые условия локального минимума функции $\varphi(x)$ на множестве X) стремится к нулю при $p\to\infty$. В случае, если исходная задача является задачей выпуклого программирования, то x_p при $p\to\infty$ стремится к множеству решений (оптимальных точек) исходной задачи. Метод возможных направлений допускает приближенное решение указанных задач определения s_p и α_p, и в этом смысле он устойчив по отношению к погрешностям вычислений.

Для допустимых множеств специальной структуры (с точки зрения простоты решения задачи выбора направления s_p) находят применение методы минимизации, отличные от метода возможных направлений. Так, в методе проекции градиента в качестве направления спуска в точке x_p выбирают $s_p=y_p-x_p$, где y_p — проекция точки $v_p=x_p+g(x_p)$, $g(x_p)=-\left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=x_p}$, на множество X.

Если множество X задано линейными ограничениями, весьма перспективным является метод условного градиента: в точке x_p линеаризуют целевую функцию, строя функцию $l(x)=\varphi(x_p)+\langle g(x_p), x_p-x\rangle$, затем, минимизируя $l(x)$ на множестве X, находят точку ее минимума y_p, после чего полагают $s_p=y_p-x_p$.

Успешно разрабатываются методы минимизации негладких функций. Одним из представителей этого класса методов является метод обобщенного градиента. Обобщенным градиентом в точке x_p наз. любой вектор $\tilde{g}(x_p)$, удовлетворяющий для любой точки $y\in X$ неравенству $\varphi(y)-\varphi(x_p)\geqslant\langle\tilde{g}(x_p), y-x_p\rangle$. Этот метод отличается от метода проекции градиента тем, что в качестве проектируемой точки выбирают точку $v_p=x_p-\tilde{g}(x_p)$.

Весьма распространены также стохастические методы минимизации. В простейшем варианте метода случайного спуска в качестве s_p выбирают случайную точку на n-мерной единичной сфере с центром в начале координат, и если s_p является возможным направлением и, кроме того,

функция $\varphi(x)$ убывает вдоль этого направления, то осуществляют шаг, т. е. переходят к точке x_{p+1}. В противном случае процедуру выбора s_p повторяют.

Характерной особенностью вычислительной стороны методов решений задач М. п. является то, что применение этих методов неразрывно связано с использованием ЭВМ, в первую очередь потому, что задачи М. п., формализующие ситуации управления реальными системами, являются задачами большого объема, недоступными для ручного счета.

Одним из распространенных методов исследования задач М. п. является *штрафных функций метод*. Суть этого метода состоит в замене исходной задачи М. п. такой последовательностью параметрич. задач безусловной минимизации, что при стремлении параметра к бесконечности (в иных случаях — к нулю) решения этих задач стремятся к решению исходной задачи М. п. Заметим, что в задачах безусловной минимизации любое направление является возможным, вследствие чего отыскание вектора s_p сопряжено с меньшей затратой усилий по сравнению с аналогичной задачей в методе возможных направлений (напр., в методе скорейшего спуска выбирают $s_p = -\left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=x_p}$). То же самое относится и к задаче отыскания числа α_p.

Важным направлением исследований в М. п. являются проблемы устойчивости. Здесь существенное значение имеет изучение класса устойчивых задач — задач, для к-рых малые возмущения (погрешности) в исходной информации влекут за собой малые возмущения и в решении. В случае неустойчивых задач большая роль отводится процедуре аппроксимации неустойчивой задачи последовательностью устойчивых задач — так наз. процессу регуляризации.

Наряду с конечномерными задачами М. п. рассматриваются также задачи М. п. в бесконечномерных пространствах. К этим задачам относятся различные экстремальные задачи математич. экономики, техники, задачи оптимизации физич. характеристик ядерных реакторов и др. В терминах М. п. в соответствующих функциональных пространствах формулируются зазадачи *вариационного исчисления* и *оптимального управления*.

М. п. как наука сформировалось в 50—70-х гг. 20 в. Это в первую очередь связано с развитием ЭВМ, а следовательно, с возможностью проводить математич. обработку больших потоков информации и на этой основе решать задачи управления и планирования, где применение математич. методов связано в первую очередь с построением математич. моделей и соответствующих им экстремальных задач, в том числе задач М. п.

Лит.: [1] Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М., Методы оптимизации, М., 1978; [2] Карманов В. Г., Математическое программирование, М., 1975; [3] Полак Э., Численные методы оптимизации. Единый подход, пер. с англ., М., 1974; [4] Ермольев Ю. М., Методы стохастического программирования, М., 1976.

В. Г. Карманов.

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ УРАВНЕНИЯ — уравнения, описывающие математические модели физических явлений. М. ф. у.— часть предмета *математической физики*. Многие явления физики и механики (гидро- и газодинамики, упругости, электродинамики, оптики, теории переноса, физики плазмы, квантовой физики, теории гравитации и т. д.) описываются краевыми задачами для дифференциальных уравнений. Эти задачи составляют весьма широкий класс М. ф. у.

Для полного описания эволюции физич. процесса, помимо уравнений, необходимо, во-первых, задать картину процесса в нек-рый фиксированный момент времени (начальные условия) и, во-вторых, задать режим на границе той среды, где протекает

этот процесс (граничные условия). Начальные и граничные условия образуют краевые условия, а дифференциальные уравнения вместе с соответствующими краевыми условиями — краевую задачу математич. физики.

Ниже приведены нек-рые примеры уравнений и соответствующих краевых задач.

Уравнение колебаний

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + f(x, t) \tag{1}$$

описывает малые колебания струн, стержней, мембран, акустические и электромагнитные колебания. В уравнении (1) пространственные переменные $x=(x_1, \ldots, x_n)$ изменяются в области $G \subset \mathbb{R}^n$, $n=1, 2, 3$, где развивается рассматриваемый физич. процесс; при этом в соответствии с физич. смыслом входящих величин должно быть $\rho>0$, $p>0$ и $q \geqslant 0$. Кроме того, полагают ρ, $q \in C(\bar{G})$ и $p \in C^1(\bar{G})$. При этих условиях уравнение (1) — *гиперболического типа уравнение*.

При $\rho=1$, $p=a^2=\text{const}$ и $q=0$ уравнение (1) превращается в *волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x, t), \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа.

Уравнение диффузии

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + f(x, t) \tag{3}$$

описывает процессы диффузии частиц и распространения тепла в среде. Уравнение (3) — *параболического типа уравнение*. При $\rho=1$, $p=a^2=\text{const}$ и $q=0$ уравнение (3) превращается в *теплопроводности уравнение*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, t). \tag{4}$$

Для стационарных процессов, когда отсутствует зависимость от времени t, уравнения колебаний (1) и диффузии (3) принимают вид

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f(x). \tag{5}$$

Уравнение (5) — *эллиптического типа уравнение*. При $p=1$ и $q=0$ уравнение (5) наз. *Пуассона уравнением*:

$$\Delta u = -f(x), \tag{6}$$

а при $f=0$ — *Лапласа уравнением*

$$\Delta u = 0. \tag{7}$$

Уравнениям (6) и (7) удовлетворяют различного рода потенциалы: ньютонов (кулонов) потенциал, потенциал течения несжимаемой жидкости и т. д.

Если в волновом уравнении (2) внешнее возмущение f — периодическое с частотой ω,

$$f(x, t) = a^2 f(x) e^{i\omega t},$$

то амплитуда $u(x)$ периодич. решения с той же частотой ω

$$u(x, t) = u(x) e^{i\omega t}$$

удовлетворяет *Гельмгольца уравнению*

$$\Delta u + k^2 u = -f(x), \quad k^2 = \omega^2/a^2. \tag{8}$$

К уравнению Гельмгольца приводят задачи на рассеяние (дифракцию).

Для полного описания процесса колебаний необходимо задать начальное возмущение и начальную скорость

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \bar{G}, \tag{9}$$

а для процесса диффузии — только начальное возмущение

$$u\,|_{t=0}=u_0(x), \quad x\in\overline{G}. \tag{10}$$

Кроме того, на границе S области G необходимо удовлетворить заданному режиму. В простейших случаях физически осмысленные граничные условия для уравнений (1), (3), (5) описываются соотношением

$$k\frac{\partial u}{\partial n}+hu\Big|_S=v(x,\,t), \quad t>0, \tag{11}$$

где k и h — заданные неотрицательные функции, не обращающиеся в нуль одновременно, n — внешняя нормаль к поверхности S и v — заданная функция.

Напр., для струны условие

$$u\,|_{x=x_0}=0$$

означает, что конец струны x_0 закреплен, а условие

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_0}=0$$

означает, что конец x_0 свободен. Для теплопроводности условие

$$u\,|_S=v_0(x,\,t) \tag{12}$$

означает, что на границе S области G поддерживается заданный температурный режим, а условие

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=v_1(x,\,t) \tag{13}$$

задает поток тепла через S. В случае неограниченных областей, напр. внешности ограниченной области, кроме условия на границе задается также условие на бесконечности. Так, для уравнения Пуассона (6) в пространстве ($n=3$) таким условием является условие

$$u(x)=o(1), \quad |x|\longrightarrow\infty, \tag{14}$$

а на плоскости ($n=2$) — условие

$$u(x)=O(1), \quad |x|\longrightarrow\infty. \tag{15}$$

Для уравнения Гельмгольца (8) на бесконечности задаются *излучения условия* Зоммерфельда

$$u(x)=O(|x|^{-1}),$$
$$\frac{\partial u(x)}{\partial |x|}\mp iku(x)=o(|x|^{-1}), \quad |x|\longrightarrow\infty, \tag{16}$$

причем знак «—» соответствует расходящимся, а знак «+»— сходящимся волнам.

Краевая задача, к-рая содержит только начальные условия (и стало быть, не содержит граничных условий, так что область G — все пространство $\mathbb{R}^n$), наз. *Коши задачей*. Для уравнения колебаний (1) задача Коши (1), (9) ставится следующим образом: найти функцию $u(x,\,t)$ класса $C^2(t>0)\cap C^1(t\geqslant 0)$, удовлетворяющую уравнению (1) при $t>0$ и начальным условиям (9) на плоскости $t=0$. Аналогично ставится и задача Коши (3), (10) для уравнения диффузии (3).

Если в краевой задаче присутствуют и начальные и граничные условия, то такая задача наз. с м е ш а н н о й з а д а ч е й. Для уравнения колебаний (1) смешанная задача (1), (9), (11) ставится так: найти функцию $u(x,\,t)$ класса

$$C^2(G\times(0,\,\infty))\cap C^1(\overline{G}\times[0,\,\infty)),$$

удовлетворяющую уравнению (1) в цилиндре $G\times(0,\,\infty)$, начальным условиям (9) на его нижнем основании $\overline{G}\times\{0\}$ и граничному условию (11) на его боковой поверхности $S\times[0,\,\infty)$. Аналогично ставится смешанная задача (3), (10), (11) для уравнения диффузии (3). Существуют и другие постановки краевых задач, напр. *Гурса задача*, *Трикоми задача*.

Для стационарного уравнения (5) начальные условия отсутствуют и соответствующая краевая задача ставится так: найти функцию $u(x)$ класса $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, удовлетворяющую уравнению (5) в области G и граничному условию на границе S области G:

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + hu \Big|_S = v(x). \qquad (11')$$

Для уравнения (5) краевая задача с граничным условием

$$u|_S = v_0(x) \qquad (12')$$

наз. *Дирихле задачей*, а с граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = v_1(x) \qquad (13')$$

— *Неймана задачей*. Различают внешние и внутренние краевые задачи Дирихле и Неймана. Для внешних задач кроме граничных условий необходимо задавать условия на бесконечности типа (14), (15), (16).

К краевым задачам для уравнения (5) относятся также задачи на собственные значения: найти те значения параметра λ (собственные значения), при к-рых однородное уравнение

$$Lu \equiv -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda \rho u \qquad (17)$$

имеет нетривиальные решения (собственные функции), удовлетворяющие однородному граничному условию

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + hu \Big|_S = 0. \qquad (18)$$

Если G — ограниченная область с достаточно гладкой границей S, то существует счетное число неотрицательных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ задачи (17), (18) ($0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots, \lambda \to \infty$), каждое λ_k — конечной кратности, соответствующие собственные функции $u_k(x)$, $Lu_k = \rho u_k$, $k = 1, 2, \ldots$, образуют полную ортонормированную систему функций в $L_2(G; \rho)$; при этом всякая функция класса $C^2(\overline{G})$, удовлетворяющая граничному условию (18), разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по системе собственных функций $\{u_k\}$.

Изложенные постановки краевых задач предполагают достаточную гладкость решения как внутри области, так и вплоть до границы. Такие постановки краевых задач наз. к л а с с и ч е с к и м и. Однако во многих физически интересных задачах приходится отказываться от таких требований гладкости. Внутри области решение может быть *обобщенной функцией* и удовлетворять уравнению в смысле обобщенных функций, краевые условия могут удовлетворяться в каком-либо обобщенном смысле (почти везде, в L_p, в слабом смысле и т. д.). Такие постановки краевых задач наз. о б о б щ е н н ы м и п о с т а н о в к а м и, а соответствующие решения — о б о б щ е н н ы м и р е ш е н и я м и. Напр., обобщенная задача Коши для волнового уравнения ставится следующим образом. Пусть u — классич. решение задачи Коши (2), (9). Функции u и f продолжаются нулем на $t < 0$ и обозначаются через $\tilde{u}$ и $\tilde{f}$ соответственно. Тогда функция $\tilde{u}$ будет удовлетворять в смысле обобщенных функций во всем пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = a^2 \Delta \tilde{u} + u_0(x) \times \delta'(t) + u_1(x) \times \delta(t) + \tilde{f}(x, t). \qquad (19)$$

При этом начальные возмущения u_0 и u_1 играют роль мгновенно действующих внешних источников типа двойного слоя, $u_0(x) \times \delta'(t)$, и простого слоя, $u_1(x) \times \delta(t)$. Сказанное позволяет ввести следующее определение. О б о б щ е н н о й з а д а ч е й К о ш и для волнового уравнения с источником $F \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$, $F = 0$ при $t < 0$, наз. задача об отыскании тех обобщен-

ных решений $u(x,\ t)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + F(x,\ t), \qquad (19')$$

к-рые обращаются в нуль при $t<0$. Аналогично ставится обобщенная задача Коши и для уравнения теплопроводности (4).

Поскольку краевые задачи математич. физики описывают реальные физич. процессы, то они должны удовлетворять следующим естественным требованиям, сформулированным Ж. Адамаром (J. Hadamard).

1) Решение должно существовать в нек-ром классе функций M_1.

2) Решение должно быть единственным в, возможно, другом классе функций M_2.

3) Решение должно непрерывно зависеть от данных задачи (начальных и граничных данных, свободных членов, коэффициентов уравнения и т. д.). Требование непрерывной зависимости решения возникает в связи с тем, что данные физич. задачи, как правило, определяются из эксперимента приближенно, и поэтому необходимо быть уверенным в том, что решение задачи не будет существенно зависеть от погрешностей измерений этих данных.

Задача, удовлетворяющая перечисленным требованиям 1)—3), наз. корректно поставленной, а множество функций $M_1 \cap M_2$ — классом корректности. Хотя требования 1)—3) на первый взгляд кажутся естественными, их, тем не менее, необходимо доказывать в рамках принятой математич. модели. Доказательство корректности — это первая апробация математич. модели,— модель непротиворечива, не содержит паразитных решений и мало чувствительна к погрешностям измерений.

Нахождение корректных постановок краевых задач математич. физики и методов построения их решений (точных или приближенных) и составляет одно из главных содержаний предмета М. ф. у. Известно, что все перечисленные выше краевые задачи поставлены корректно.

Пример. Задача Коши $y'=f(x,\ y)$, $y(x_0)=y_0$ поставлена корректно, если $f\in C^1$.

Задача, не удовлетворяющая хотя бы одному из условий 1)—3), наз. *некорректной задачей*. Некорректные задачи приобретают в современной математич. физике все возрастающее значение: сюда в первую очередь относятся обратные задачи, а также задачи, связанные с обработкой и интерпретацией результатов наблюдений.

Примером некорректно поставленной задачи может служить задача Коши для уравнения Лапласа (пример Адамара):

$$\Delta u(x,\ y)=0, \quad u\,|_{y=0}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=\frac{\sin kx}{k}.$$

Решение

$$u(x,\ y)=\frac{1}{k^2}\sin kx\ \mathrm{sh}\ ky \overset{x}{\not\Rightarrow} 0, \quad k\longrightarrow\infty,$$

однако

$$\frac{\sin kx}{k} \overset{x}{\Rightarrow} 0, \quad k\longrightarrow\infty.$$

Для приближенного решения некорректных задач существует *регуляризации метод*, использующий дополнительную информацию о решении и сводящийся к решению ряда корректно поставленных задач.

Важную роль в М. ф. у. играет понятие *Грина функции*. Функцией Грина линейного дифференциального оператора

$$L(x,\ t;\ D)=\sum\nolimits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,\ t)\,D^\alpha,$$

$$D=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x_n},\ \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

с заданными (однородными) краевыми условиями на границе области изменения переменных $(x,\ t)$ наз. функция $G(x,\ t;\ \xi,\ \tau)$, удовлетворяющая при каждом $(\xi,\ \tau)$ из этой области уравнению

$$L\ (x,\ t;\ D)\ G\ (x,\ t;\ \xi,\ \tau) = \delta\ (x-\xi,\ t-\tau). \qquad (20)$$

В физич. ситуациях функция Грина $G(x,\ t;\ \xi,\ \tau)$ описывает возмущение от точечного (в точке ξ) мгновенного (в момент τ) источника интенсивности 1 (с учетом неоднородности среды и краевого эффекта). В случае постоянных коэффициентов и отсутствия границы функция Грина при $\xi=0$ и $\tau=0$ наз. фундаментальным решением и обозначается $E(x,\ t)$,

$$L\ (D)\ E\ (x,\ t) = \delta\ (x,\ t). \qquad (20')$$

Доказано существование фундаментального решения из D' и S' для любого оператора $L(D)\not\equiv 0$.

Примеры фундаментальных решений. Волновое уравнение

$$E_1\ (x,\ t) = \frac{\theta\ (at-|\ x\ |)}{2a}\ ,\quad E_2\ (x,\ t) = \frac{\theta\ (at-|\ x\ |)}{2\pi a\ \sqrt{a^2t^2-|\ x\ |^2}}\ ,$$

$$E_3\ (x,\ t) = \frac{1}{2\pi a}\ \delta_+\ (a^2t^2-|\ x\ |^2),$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда: $\theta(t)=0$ при $t<0$; $\theta(t)=1$ при $t\geqslant 0$.

Уравнение теплопроводности:

$$E_n\ (x,\ t) = \frac{\theta\ (t)}{(2a\ \sqrt{\pi t})^n}\ e^{-|\ x\ |^2/4a^2t}.$$

Уравнение Лапласа:

$$E_1\ (x) = \frac{1}{2}\ |\ x\ |,\quad E_2\ (x) = \frac{1}{2\pi}\ \ln |\ x\ |,\quad E_3\ (x) = -\frac{1}{4\pi\ |\ x\ |}\ .$$

С помощью фундаментального решения $E(x,\ t)$ решение $u(x,\ t)$ уравнения

$$L\ (D)\ u = F\ (x,\ t) \qquad (21)$$

с произвольной правой частью $F\in D'$ выражается во всем пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ сверткой

$$u = F * E, \qquad (22)$$

если она существует в D'.

В физич. ситуациях смысл формулы (22) следующий: это есть суммарное наложение элементарных возмущений $F(\xi,\ \tau)E(x-\xi,\ t-\tau)$ от точечных источников $F(\xi,\ \tau)\delta(x-\xi,\ t-\tau)$, на к-рые разлагается источник $F(x,\ t)$ в силу тождества $F=F*\delta$. При этом свертка $F*E$ играет роль соответствующего потенциала с источником (плотностью) F. В этом состоит сущность метода точечного источника решения линейных задач математич. физики.

В частности, решения обобщенной задачи Коши для волнового уравнения (и уравнения теплопроводности) выражается волновым (тепловым) потенциалом

$$u = F * E_n. \qquad (22')$$

Из формулы (22′) при надлежащих предположениях о гладкости источника

$$F\ (x,\ t) = u_0\ (x)\ \delta'\ (t) + u_1\ (x)\ \delta\ (t) + f\ (x,\ t)$$

следуют классич. формулы решения задач Коши. Напр., для волнового уравнения в пространстве — *Кирхгофа формула*:

$$u\ (x,\ t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_{|\ x-\xi\ |\ <\ at} f\left(\xi,\ t-\frac{|\ x-\xi\ |}{a}\right)\frac{d\xi}{|\ x-\xi\ |} + \\ + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\ x-\xi\ |\ =\ at} u_1\ (\xi)\ dS + \\ + \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int_{|\ x-\xi\ |\ =\ at} u_0\ (\xi)\ dS\right]. \qquad (23)$$

Для уравнения теплопроводности — *Пуассона формула*:

$$u(x,\ t)=\int_0^t\int\frac{f(\xi,\ \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n}\,e^{-|x-\xi|^2/4a^2(t-\tau)}\,d\xi\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int u_0(\xi)\,e^{-|x-\xi|^2/4a^2t}\,d\xi. \qquad (24)$$

Таким же путем, строя функцию Грина для уравнения Лапласа для шара, получают решение внутренней задачи Дирихле для (трехмерного) шара $|x|<R$ в виде *Пуассона интеграла*:

$$u(x)=\frac{1}{4\pi R}\int_{|\xi|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-\xi|^3}\,u_0(\xi)\,dS_\xi. \qquad (25)$$

Для исследования и приближенного решения смешанных задач используется *Фурье метод* (разделения переменных) при условии, что коэффициенты в уравнении и в граничном условии не зависят от времени t. Идея метода, применительно, напр., к задаче (3), (10), (18) состоит в следующем: искомое решение $u(x,\ t)$ и правая часть $f(x,\ t)$ разлагаются в ряд Фурье по собственным функциям $\{u_k\}$ краевой задачи (17), (18)

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k(t)\,u_k(x),\ f(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(t)\,u_k(x). \qquad (26)$$

Подставляя формально эти ряды в уравнение (3), для неизвестных функций $b_k(t)$ получают уравнение:

$$b_k'(t)+\lambda_k b_k(t)=c_k(t),\quad k=1,\ 2,\ \ldots \qquad (27)$$

При этом, чтобы ряд (26) для u удовлетворял начальному условию (10), необходимо положить

$$b_k(0)=\int_G\rho(x)\,u_0(x)\,u_k(x)\,dx=a_k. \qquad (28)$$

Решая задачу Коши (27), (28), получают формальное решение задачи (3), (10), (18) в виде ряда:

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_ke^{-\lambda_kt}+\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}c_k(\tau)\,d\tau\right]u_k(x). \qquad (29)$$

Возникает задача обоснования метода Фурье: когда формальный ряд (29) даст классическое или обобщенное решение задачи (3), (10), (18)?

При обосновании метода Фурье и, вообще, при установлении корректности смешанной задачи для уравнения диффузии (3) используется *максимума принцип*.

Аналогично метод Фурье применяется и к смешанной задаче (1), (9), (18) для уравнения колебаний. В этом случае оказывается полезным метод *энергии интеграла*.

Метод разделения переменных находит применение также и для решения краевых задач для уравнения эллиптич. типа (5), в частности для вычисления собственных функций и собственных значений при условии, что область G обладает достаточной симметрией.

Для исследования и приближенного решения краевых задач для уравнения (5) широко используются вариационные методы. Так, напр., для задачи на собственные значения (17), (18) (при $\rho=1$) собственные значения λ_k удовлетворяют вариационному принципу:

$$\lambda_k=\inf_{(u,\ u_i)=0,\ i=1,\ \ldots,\ k-1}\frac{(Lu,\ u)}{\|u\|^2}, \qquad (30)$$

где функции сравнения $u(x)$ предполагаются из класса $C^2(\bar{G})$ и удовлетворяют граничному условию (18); при этом inf в (30) реализуется на любой собственной функции, соответствующей собственному значению λ_k, и только на них.

При исследовании краевых задач для уравнения (5) (в частности, для гармонич. функций) применяется принцип максимума.

Перечисленные краевые задачи далеко не исчерпывают все многообразие краевых задач математич. физики — это есть простейшие классич. примеры краевых задач. Краевые задачи, описывающие реальные физич. процессы, могут быть весьма сложными: это могут быть системы уравнений, уравнения высших порядков, нелинейные уравнения. Сюда в первую очередь относятся: уравнение Шрёдингера, уравнения гидродинамики, переноса, магнитной гидродинамики, уравнения Максвелла, теории упругости, уравнения Дирака, уравнения Эйнштейна, уравнения Янга — Миллса и др.

В связи с поисками нетривиальных моделей, описывающих взаимодействие квантовых полей, возрос интерес к классическим нелинейным уравнениям:

$$u_t' - 6uu_x' + u_{xxx}''' = 0 \qquad (31)$$

— *Кортевега — де Фриса уравнение*;

$$u_{tt}'' - u_{xx}'' = gf(u), \quad g > 0,$$

— нелинейное волновое уравнение (Лиувилля при $f = e^u$; Sine-Гордона при $f = -\sin u$);

$$iu_t' + u_{xx}'' + \nu |u|^2 u = 0, \quad \nu > 0,$$

— нелинейное уравнение Шрёдингера.

Характерной чертой таких уравнений является наличие решений типа «уединенной волны» (*солитонов*). Напр., для уравнения (31) таким решением является

$$u(x, t) = \frac{a}{2\operatorname{ch}^2\left[\frac{\sqrt{a}}{2}(x - at - x_0)\right]}, \quad a > 0, \ x_0 — \text{любые}.$$

Это решение обладает конечной энергией.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [3] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, М., 1974; [4] Хермандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965; [5] Адамар Ж., Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, пер. с франц., М., 1978; [6] Уизем Дж., Линейные и нелинейные волны, пер. с англ., М., 1977; [7] Михайлов В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных, М., 1976; [8] Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики, М., 1973; [9] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., 2 изд., т. 2, М.—Л., 1951; [10] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979. *В. С. Владимиров.*

МАТРИЦ АЛГЕБРА, матричная алгебра,— подалгебра полной матричной алгебры F_n всех $(n \times n)$-матриц над полем F. Операции в F_n определяются следующим образом:

$$\lambda a = \| \lambda a_{ij} \|, \quad a + b = \| a_{ij} + b_{ij} \|,$$

$$ab = c = \| c_{ij} \|, \quad c_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu j}$$

для $\lambda \in F$, $a = \|a_{ij}\|$, $b = \|b_{ij}\| \in F_n$. Алгебра F_n изоморфна алгебре всех эндоморфизмов n-мерного линейного пространства над F. Размерность F_n над F равна n^2. Любая ассоциативная алгебра с единицей, размерность к-рой над F не больше n, изоморфна нек-рой подалгебре в F_n. Ассоциативная алгебра без единицы, размерности меньше n над F, также изоморфно вкладывается в F_n. В силу теоремы Веддербёрна алгебра F_n проста, т. е. имеет лишь тривиальные двусторонние идеалы. Центр алгебры F_n состоит из всех скалярных $(n \times n)$-матриц над F. Группа обратимых элементов алгебры F_n есть полная линейная группа $\mathrm{GL}(n, F)$. Каждый автоморфизм h алгебры F_n является внутренним:

$$h(x) = txt^{-1}, \quad x \in F_n, \quad t \in \mathrm{GL}(n, F).$$

Неприводимая М. а. проста. Если М. а. A абсолютно неприводима (напр., когда поле F алгебраически замкнуто), то $A=F_n$ при $n>1$ (теорема Бёрнсайда). М. а. полупроста тогда и только тогда, когда она вполне приводима.

С точностью до сопряженности в F_n имеется единственная максимальная нильпотентная подалгебра — алгебра всех верхних треугольных матриц с нулевой диагональю. В алгебре F_n тогда и только тогда имеется коммутативная подалгебра размерности r, когда

$$r \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]+1$$

(теорема Шура). Для поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ множество классов сопряженных максимальных коммутативных подалгебр алгебры $\mathbb{C}_n$ при $n\leqslant 6$ конечно, а при $n>6$ бесконечно.

В алгебре F_n выполняется стандартное тождество степени $2n$:

$$\sum\nolimits_{\sigma\in S_{2n}} \pm x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2n)}=0,$$

где S_{2n} — симметрич. группа, и никакое тождество меньшей степени не выполняется.

Лит.: [1] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [2] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [3] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [4] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [5] Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И., Перестановочные матрицы, Минск, 1966.

Д. А. Супруненко.

МАТРИЦ КОЛЬЦО, полное кольцо матриц,— кольцо всех квадратных матриц фиксированного порядка над кольцом R. Кольцо $(n\times n)$-матриц над R обозначается R_n или $M_n(R)$. Всюду ниже R — ассоциативное кольцо с единицей 1.

Кольцо R_n изоморфно кольцу $\mathrm{End}\ M$ всех эндоморфизмов свободного правого R-модуля M, обладающего n-элементным базисом. Матрица $E_n=\mathrm{diag}\ [1, \ldots, 1]$ — единица в R_n. Ассоциативное кольцо A с единицей 1 тогда и только тогда изоморфно R_n, когда в A есть множество из n^2 элементов e_{ij}, $i, j=1, \ldots, n$, подчиненное следующим условиям:

1) $e_{ij}e_{kl}=\delta_{jk}e_{il}$, $\sum_{i=1}^{n} e_{ii}e_{ii}=1$,

2) централизатор множества элементов e_{ij} в A изоморфен кольцу R.

Центр кольца R_n совпадает с $Z(R)E_n$, где $Z(R)$ — центр R; при $n>1$ кольцо R_n некоммутативно.

Мультипликативная группа кольца R_n (группа всех обратимых элементов) наз. полной линейной группой и обозначается $\mathrm{GL}(n, R)$. Матрица из R_n обратима в R_n тогда и только тогда, когда ее столбцы составляют базис свободного правого модуля всех $(n\times 1)$-матриц над R. Если R коммутативно, то обратимость матрицы a в R_n равносильна обратимости ее определителя $\det a$ в R. Имеет место равенство $(R_m)_n=R_{mn}$.

Кольцо R_n тогда и только тогда просто, когда просто R, ибо двусторонние идеалы в R_n имеют вид k_n, где k — двусторонний идеал в R. Артиново кольцо тогда и только тогда просто, когда оно изоморфно М. к. над телом (теорема Веддерберна — Артина). $J(M_n(R))=M_n(J(R))$, где $J(R)$ — радикал *Джекобсона кольца* R. Следовательно, для полупростого кольца R М. к. над R также полупросто. Если R регулярно (т. е. для любого $a\in R$ в R есть такое b, что $aba=a$), то и R_n регулярно. Если R — кольцо с инвариантным базисным числом, т. е. число базисных элементов каждого свободного R-модуля не зависит от выбора базиса, то R_n также кольцо с инвариантным базисным числом. Кольца R и R_n эквивалентны в смысле Мориты (см. *Мориты эквивалентность*): кате-

гория R-модулей эквивалентна категории R_n-модулей. Однако из того, что проективные R-модули свободны, еще не следует, что будут свободны и проективные R_n-модули. Так, если R — поле, а $n>1$, то существуют несвободные конечно порожденные проективные R_n-модули.

Лит.: [1] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1, М., 1977; [2] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971; [3] Бокуть Л. А., Ассоциативные кольца, ч. 1, Новосиб., 1977.

Д. А. Супруненко.

МАТРИЦА — прямоугольная таблица

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \qquad (1)$$

состоящая из m строк и n столбцов, элементы к-рой a_{ij} принадлежат нек-рому множеству K. Таблица (1) наз. также $(m\times n)$-м а т р и ц е й н а д K, или м а т р и ц е й р а з м е р а $m\times n$ н а д K. Пусть $M_{m,n}(K)$ — совокупность всех $(m\times n)$-матриц над K. Если $m=n$, то (1) наз. к в а д р а т н о й м а т р и ц е й п о р я д к а n. Множество $M_n(K)$ — совокупность всех квадратных М. порядка n над K.

Для М. пользуются также обозначениями

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \|a_{ij}\|.$$

В наиболее важных случаях в качестве K выступают поле действительных чисел, поле комплексных чисел, произвольное поле, кольцо многочленов, кольцо целых чисел, кольцо функций, произвольное ассоциативное кольцо. Операции сложения и умножения, определенные на K, естественным образом переносятся на М. над K и возникает м а т р и ч н о е и с ч и с л е н и е — предмет теории М.

Понятие М. впервые появилось в середине 19 в. в работах У. Гамильтона (W. Hamilton) и А. Кэли (A. Cayley). Фундаментальные результаты в теории М. принадлежат К. Вейерштрассу (K. Weierstrass), К. Жордану (C. Jordan), Г. Фробениусу (G. Frobenius). И. А. Лаппо-Данилевский развил теорию аналитич. функций многих матричных переменных и применил ее к изучению систем линейных дифференциальных уравнений.

Действия над матрицами. Пусть K — ассоциативное кольцо, $A=\|a_{ij}\|$, $B=\|b_{ij}\|\in M_{m,n}(K)$. Тогда с у м м а М. A и B, по определению, равна

$$A+B=\|a_{ij}+b_{ij}\|.$$

При этом $A+B\in M_{m,n}(K)$ и сложение М. ассоциативно и коммутативно. Н у л е в о й М. из $M_{m,n}(K)$ наз. М. 0, все элементы к-рой равны нулю. Для всякой $A\in M_{m,n}(K)$

$$A+0=0+A=A.$$

Пусть $A=\|a_{ij}\|\in M_{m,k}(K)$, $B=\|b_{ij}\|\in M_{k,n}(K)$. П р о и з в е д е н и е М. A и B определяется по правилу

$$AB=\|c_{\mu\nu}\|\in M_{m,n}(K),$$

где

$$c_{\mu\nu}=\sum_{j=1}^{k} a_{\mu j}b_{j\nu}.$$

Произведение двух М. из $M_n(K)$ всегда определено и принадлежит $M_n(K)$. Умножение М. ассоциативно: если $A\in M_{m,k}(K)$, $B\in M_{k,n}(K)$, $C\in M_{n,p}(K)$, то

$$(AB)C=A(BC)$$

и $ABC\in M_{m,p}(K)$. Верен и дистрибутивный закон: для $A\in M_{m,n}(K)$, B, $C\in M_{n,m}(K)$

$$A(B+C)=AB+AC, \quad (B+C)A=BA+CA. \qquad (2)$$

В частности, (2) верно и для A, B, $C \in M_n(K)$. Следовательно, $M_n(K)$ — ассоциативное кольцо. Если K — кольцо с единицей 1, то М.

$$E_n = \begin{Vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

будет единицей кольца $M_n(K)$:

$$E_n A = A E_n = A$$

для всех $A \in M_n(K)$. Умножение М. некоммутативно: при $n \geqslant 2$ для любого ассоциативного кольца K с единицей найдутся такие М. A и B в $M_n(K)$, что $AB \neq BA$.

Пусть $\alpha \in K$, $A = \|a_{ij}\| \in M_{m,n}(K)$; произведение М. A на элемент (число) α, по определению, равно $\alpha A = \|\alpha a_{ij}\|$. Тогда

$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A, \ \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A, \ \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B.$$

Пусть K — кольцо с единицей. М. e_{ij} определяется как М. в $M_{m,n}(A)$, единственный ненулевой элемент к-рой равен 1 и расположен на позиции (i, j), $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Для любой $A = \|a_{ij}\|$ из $M_{m,n}(K)$

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_{ij}.$$

Если K — поле, то $M_{m,n}(K)$ — векторное пространство над K размерности mn, а М. e_{ij} составляют один из базисов этого пространства.

Клеточная матрица. Пусть $m = m_1 + \dots + m_k$, $n = n_1 + \dots + n_l$, где m_μ и n_ν — целые положительные числа. Тогда М. $A \in M_{m,n}(K)$ можно записать в виде

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1l} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & \dots & A_{kl} \end{Vmatrix}, \qquad (3)$$

где $A_{\mu\nu} \in M_{m_\mu, n_\nu}(K)$, $\mu = 1, \dots, k$, $\nu = 1, \dots, l$; М. (3) наз. клеточной. Пусть $B \in M_{n,p}(K)$, $p = p_1 + \dots + p_t$, $p_i > 0$ и B записана в виде

$$B = \begin{Vmatrix} B_{11} & \dots & B_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{l1} & \dots & B_{lt} \end{Vmatrix}, \quad B_{ij} \in M_{n_i, p_j}(K).$$

Тогда

$$AB = C = \begin{Vmatrix} C_{11} & \dots & C_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{k1} & \dots & C_{kt} \end{Vmatrix}, \quad C_{\mu j} = \sum_{i=1}^{l} A_{\mu i} B_{ij}.$$

Напр., если $n = kl$, то $M_n(K)$ можно рассматривать как $M_n(\Sigma)$, где $\Sigma = M_l(K)$.

М. A из $M_n(K)$ вида

$$\begin{Vmatrix} A_1 & 0_{12} & \dots & 0_{1k} \\ 0_{21} & A_2 & \dots & 0_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{k1} & 0_{k2} & \dots & A_k \end{Vmatrix},$$

где $a_i \in M_{n_i}(K)$, а 0_{ij} — нулевая М. из $M_{n_i, n_j}(K)$, обозначается $\operatorname{diag}[A_1, \dots, A_k]$ и наз. клеточно-диагональной. Причем

$$\operatorname{diag}[A_1, \dots, A_k] + \operatorname{diag}[B_1, \dots, B_k] = \operatorname{diag}[A_1 + B_1, \dots, A_k + B_k],$$
$$\operatorname{diag}[A_1, \dots, A_k] \operatorname{diag}[B_1, \dots, B_k] = \operatorname{diag}[A_1 B_1, \dots, A_k B_k],$$

если порядки A_i и B_i совпадают для $i = 1, \dots, k$.

Квадратные матрицы над полем. Пусть K — поле, $A \in M_n(K)$, $\det A$ — *определитель* матрицы A. М. A

наз. невырожденной, если $\det A \neq 0$. М. $A^{-1} \in M_n(K)$ наз. обратной к A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$. Обратимость A в $M_n(K)$ равносильна невырожденности и

$$A^{-1} = \| c_j \|, \quad c_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A},$$

где A_{ji} — *алгебраическое дополнение* элемента a_{ji}; $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$. Для A и B из $M_n(K)$

$$AB = E_n \Longleftrightarrow BA = E_n.$$

Совокупность всех обратимых М. из $M_n(K)$ образует группу относительно умножения, к-рая наз. полной линейной группой и обозначается $\mathrm{GL}(n, K)$. Степени М. A определяются следующим образом:

$$A^0 = E_n; \ A^k = A^{k-1}A$$

для $k > 0$, а если A обратима, то $A^{-k} = (A^{-1})^k$. Для многочлена

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_t x^t, \ f(x) \in K[x],$$

определяется матричный многочлен

$$f(A) = \alpha_0 E_n + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_t A^t.$$

Всякая М. из $M_n(K)$ задает нек-рое линейное преобразование n-мерного векторного пространства V над K. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ базис в V, а $\sigma : V \to V$ — линейное преобразование пространства V. Тогда σ однозначно определяется последовательностью векторов

$$u_1 = \sigma(v_1), \ \ldots, \ u_n = \sigma(v_n).$$

При этом

$$\left.\begin{array}{l} \sigma(v_1) = v_1 a_{11} + \ldots + v_n a_{n1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma(v_n) = v_1 a_{1n} + \ldots + v_n a_{nn}, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

где $a_{ij} \in K$. Матрица $A = \| a_{ij} \|$ наз. М. преобразования σ в базисе $v_1, \ldots, v_n$. При фиксированном базисе М. $A + B$ будет М. преобразования $\sigma + \tau$, а AB — М. преобразования $\sigma\tau$, где B — М. линейного преобразования τ. Равенства (4) можно записать в виде

$$[\sigma(v_1), \ \ldots, \ \sigma(v_n)] = [v_1, \ \ldots, \ v_n] A.$$

Пусть $w_1, \ldots, w_n$ — тоже базис в V. Тогда $[w_1, \ldots, w_n] = [v_1, \ \ldots, \ v_n] T$, $T \in \mathrm{GL}(n, K)$, а $T^{-1}AT$ — М. σ в базисе $w_1, \ldots, w_n$. М. A и B из $M_n(K)$ наз. подобными, если в $\mathrm{GL}(n, K)$ найдется такая М. T, что $B = T^{-1}AT$. При этом $\det A = \det T^{-1}AT$ и *ранги* матриц A и B совпадают. Линейное преобразование σ наз. невырожденным, если $\sigma(V) = V$; σ тогда и только тогда невырождено, когда его М. невырождена. Если V трактовать как пространство столбцов $M_{n,1}(K)$, то линейное преобразование пространства V представляет собой умножение столбцов $v \in V$ на М. A из $M_n(K)$ слева: $\sigma(v) = Av$, и М. преобразования σ в базисе

$$v_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \ \ldots, \ v_n = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

совпадает с A. М. $A \in M_n(K)$ тогда и только тогда вырождена, когда в $M_{n,1}(K)$ существует такой столбец $v \neq 0$, что $Av = 0$.

Транспонирование и матрицы специального вида. Пусть $A = \| a_{ij} \| \in M_{m,n}(K)$. Тогда М. $A^\top = \| a_{ij}^\top \| \in$

$\in M_{n,m}(K)$, где $a_{ij}^{\top}=a_{ji}$, наз. транспонированной к A. Матрица $A^{\top}$ обозначается также ${}^tA$ и A'. Пусть $A=\|a_{ij}\|\in M_{m,n}(\mathbb{C})$. Тогда М. $\overline{A}=\|\overline{a_{ij}}\|$, где $\overline{a_{ij}}$ — число, комплексно-сопряженное с a_{ij}, наз. комплексно-сопряженной с A. Матрица $A^*=\overline{A}^{\top}$, где $A\in M_n(\mathbb{C})$, наз. эрмитово-сопряженной с A. Многие М., используемые в приложениях, имеют специальные названия.

Название матрицы	Определяющее условие	Название матрицы	Определяющее условие
Симметрическая	$A^{\top}=A$.	Унипотентная	$(A-E_n)^n=0$.
Кососимметрическая	$A^{\top}=-A$.	Стохастическая	$A=\|a_{ij}\|\in M_n(\mathbb{R})$, $a_{ij}\geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$, $i=1,\ldots,n$.
Ортогональная	$A^{\top}=A^{-1}$.		
Эрмитова	$A^*=A$.		
Унитарная	$A^*=A^{-1}$.	Двоякостохастическая (0,1)-матрица	М. A и $A^{\top}$ стохастические. Каждый элемент A равен либо 0, либо 1.
Нормальная	$A^*A=AA^*$.		

Полиномиальные матрицы. Пусть K — поле, $K[x]$ — кольцо всех многочленов от x с коэффициентами из K. М. над $K[x]$ наз. полиномиальной. Для М. из кольца $M_n(K[x])$ вводятся элементарные операции: 1) умножение строки или столбца М. на ненулевой элемент поля K, 2) прибавление к строке (столбцу) другой строки (столбца) М., умноженной на многочлен из $K[x]$. М. A и B из $M_n(K[x])$ наз. эквивалентными ($A\sim B$), если B можно получить из A с помощью конечного числа элементарных операций.

Пусть

$$N=\operatorname{diag}[f_1(x),\ \ldots,\ f_r(x),\ 0,\ \ldots,\ 0]\in M_n(K[x]),$$

где: 1) $f_i(x)\neq 0$, 2) $f_j(x)$ делится на $f_i(x)$ при $j>i$, 3) коэффициенты старших членов многочленов $f_i(x)$ равны 1. Тогда N наз. канонической полиномиальной М. В каждом классе эквивалентных М. кольца $M_n(K[x])$ содержится единственная канонич. М. Многочлены

$$f_1(x),\ \ldots,\ f_r(x),$$

где

$$N=\operatorname{diag}[f_1(x),\ \ldots,\ f_r(x),\ 0,\ \ldots,\ 0]$$

— каноническая М., а $A\sim N$, наз. инвариантными множителями М. A; число r совпадает с рангом М. A. Матрица A из $M_n(K[x])$ тогда и только тогда имеет обратную в $M_n(K[x])$, когда $A\sim E_n$. В свою очередь $A\sim E_n \iff \det A\in K\setminus 0$. Матрицы A и B из $M_n(K[x])$ тогда и только тогда эквивалентны, когда

$$B=PAQ,$$

где $P,\ Q\in M_n(K[x])$, $P\sim Q\sim E_n$.

Пусть $A\in M_n(K)$. Матрица

$$xE_n-A\in M_n(K[x])$$

наз. характеристической матрицей матрицы A, а $\det(xE_n-A)$ — характеристическим многочленом М. A. Для любого многочлена вида

$$f(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_{n-1}x^{n-1}+x^n\in K[x]$$

в $M_n(K)$ существует М. F, для к-рой

$$\det(xE_n-F)=f(x).$$

Такова, напр., матрица

$$F=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{Vmatrix}$$

Характеристич. многочлены двух подобных М. совпадают. Однако из совпадения характеристич. многочленов двух М. еще не вытекает подобие этих М. Критерий подобия: A и B из $M_n(K)$ тогда и только тогда подобны, когда полиномиальные М. xE_n-A и xE_n-B эквивалентны. Множество всех M. из $M_n(K)$, имеющих заданный характеристич. многочлен $f(x)$, разбивается на конечное число классов подобных М., это множество состоит из одного класса тогда и только тогда, когда $f(x)$ не имеет кратных множителей в $K[x]$.

Пусть $A\in M_n(K)$, $v\in M_{n,1}(K)$, $v\neq 0$ и $Av=\lambda v$, где $\lambda\in K$. Тогда v наз. собственным вектором М. A, а λ — собственным значением. Элемент λ из K тогда и только тогда является собственным значением М. A, когда λ — корень характеристич. многочлена М. A. Совокупность всех столбцов $u\in M_{n,1}(K)$ таких, что $Au=\lambda u$, где λ — фиксированное собственное значение М. A, является подпространством пространства $M_{n,1}(K)$. Размерность этого подпространства равна дефекту d М. λE_n-A ($d=n-r$, где r — ранг М. λE_n-A). Число d не превышает кратности корня λ, но не обязательно совпадает с ней. Матрица A из $M_n(K)$ тогда и только тогда подобна нек-рой диагональной М., когда A имеет n линейно независимых собственных векторов. Если для $A\in M_n(K)$

$$\det(xE_n-A)=(x-\lambda_1)^{n_1}\ \dots\ (x-\lambda_t)^{n_t},\quad \lambda_j\in K,$$

и λ_j различны, то верно следующее: A тогда и только тогда подобна диагональной М., когда для каждого λ_j, $j=1,\ \dots,\ t$, дефект М. $\lambda_j E_n-A$ совпадает с n_j. В частности, М., имеющая n различных собственных значений, подобна диагональной. Для алгебраически замкнутого поля любая М. из $M_n(K)$ подобна нек-рой треугольной М. из $M_n(K)$. Теорема Гамильтона — Кэли: пусть $f(x)$ — характеристич. многочлен М. A, тогда $f(A)$ — нулевая М.

Минимальным многочленом М. $A\in M_n(K)$ наз. многочлен $m(x)\in K[x]$ такой, что: 1) $m(A)=0$, 2) коэффициент старшего члена $m(x)$ равен 1, 3) если $0\neq\psi(x)\in K[x]$, а степень $\psi(x)$ меньше степени $m(x)$, то $\psi(A)\neq 0$. Всякая М. обладает единственным минимальным многочленом. Если $g(x)\in K[x]$ и $g(A)=0$, то $g(x)$ делится на минимальный многочлен $m(x)$ М. A. Минимальный многочлен М. A совпадает с последним инвариантным множителем М. xE_n-A, а характеристич. многочлен — с произведением всех инвариантных множителей. Минимальный многочлен М. равен

$$\frac{\det(xE_n-A)}{d_{n-1}(x)},$$

где $d_{n-1}(x)$ — наибольший общий делитель миноров порядка $n-1$ М. xE_n-A. М. A из $M_n(K)$ тогда и только тогда подобна диагональной М. над полем K, когда ее минимальный многочлен есть произведение различных линейных множителей из кольца $K[x]$.

М. $A\in M_n(K)$ наз. нильпотентной, если $A^k=0$ для нек-рого целого k. М. нильпотентна тогда и только тогда, когда $\det(xE_n-A)=x^n$. Любая нильпотентная М. из $M_n(K)$ подобна нек-рой треугольной М. с нулевой диагональю.

Лит.: [1] Воеводин В. В., Линейная алгебра, М., 1974; [2] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967; [3] Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [4]

Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [5] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 3 изд., М., 1970; [6] Мишина А. П., Проскуряков И. В., Высшая алгебра, 2 изд., М., 1965; [7] Тышкевич Р. И., Феденко А. С., Линейная алгебра и аналитическая геометрия, 2 изд., Минск, 1976; [8] Беллман Р., Введение в теорию матриц, пер. с англ., 2 изд., М., 1976; [9] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [10] Ланкастер П., Теория матриц, пер. с англ., М., 1978; [11] Маркус М., Минк Х., Обзор по теории матриц и матричных неравенств, пер. с англ., М., 1972.

Д. А. Супруненко.

МАТРИЦАНТ — фундаментальная матрица $X(t)$ решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (*)$$

нормированная в точке t_0. М. является единственным непрерывным решением матричной начальной задачи

$$\dot{X} = A(t)X, \quad X(t_0) = I$$

(I — единичная матрица), если матричная функция $A(t)$ локально суммируема на нек-ром интервале $J \subset \mathbb{R}$, $t \in J$.

Для любой матрицы $M(t)$, составленной из столбцов-решений $x_1, \ldots, x_m$ системы $(*)$, где m — натуральное число, справедливо представление $M(t) = X(t)M(t_0)$. В частности, любое решение $x(t)$ системы $(*)$ записывается в виде $x(t) = X(t)x(t_0)$.

Для М. справедливы разложение

$$X(t) = I + \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} A(s) \int_{t_0}^{s} A(r)\,dr\,ds + \ldots,$$

сходящееся абсолютно для всякого $t \in J$ и равномерно на каждом конечном отрезке из J, и *Лиувилля — Остроградского формула*

$$\det X(t) = \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{sp} A(s)\,ds.$$

Если матрица $A(t)$ удовлетворяет условию Лаппо-Данилевского

$$A(t) \cdot \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds \cdot A(t),$$

то

$$X(t) = \exp \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds.$$

В частности, если $A(t) \equiv A$ — постоянная матрица, то

$$X(t) = e^{A(t - t_0)}.$$

Если $X_A(t)$ есть М. системы $(*)$ с матрицей $A(t)$, то

$$X_{A+B}(t) = X_A(t)\,X_D(t),$$

где

$$D(t) = [X_A(t)]^{-1} B(t)\,X_A(t).$$

М. позволяет записать любое решение неоднородной системы

$$\dot{x} = A(t)\,x + b(t)$$

с локально суммируемой на J функцией $b(t)$ по формуле Коши:

$$x(t) = X(t)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} C(t, s)\,b(s)\,ds, \quad t \in J,$$

при этом

$$C(t, s) = X(t)\,[X(s)]^{-1}$$

наз. матрицей Коши системы $(*)$. Матрица Коши $C(t, s)$ непрерывна по совокупности аргументов на $J \times J$ и для любых t, s, r из J обладает свойствами:

1) $C(t, s) = C(t, t_0)\,[C(s, t_0)]^{-1}$;

2) $C(t, s) = C(t, r)\,C(r, s)$;

3) $C(s, t) = [C(t, s)]^{-1}$;

4) $C(t, t) = I$;

5) $|C(t, s)| \leqslant \exp \int_s^t |A(r)|\, dr, \quad s \leqslant t$,

где $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^n$;

6) если $H(t, s)$ — матрица Коши сопряженной системы

$$\dot{x} = -A^*(t)\, x,$$

то

$$H(t, s) = [C^*(t, s)]^{-1}.$$

Лит.: [1] Бурбаки Н., Функции действительного переменного. Элементарная теория, пер. с франц., М., 1965; [2] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966; [3] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967; [4] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972. *Ю. В. Комленко.*

МАТРИЧНАЯ ГРУППА — группа квадратных $(n \times n)$-матриц с элементами из ассоциативного кольца с единицей относительно обычного умножения матриц. См. *Линейная группа.*

МАТРИЧНАЯ ИГРА — *антагонистическая игра*, в к-рой каждый игрок имеет конечное число чистых стратегий. Если игрок I имеет m стратегий, а игрок II имеет n стратегий, то М. и. может быть задана $(m \times n)$-матрицей $A = \|a_{ij}\|$, где a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, есть выигрыш игрока I, если он выбирает стратегию i, а игрок II — стратегию j. Согласно общему принципу оптимальности в антагонистич. играх (см. также *Минимакса принцип*), игрок I стремится выбрать такую стратегию i_0, на к-рой достигается

$$\max_i \min_j a_{ij} = \underline{v};$$

а игрок II стремится выбрать стратегию j_0, на к-рой достигается

$$\min_j \max_i a_{ij} = \bar{v}.$$

Если $\underline{v} = \bar{v}$, то пара (i_0, j_0) составляет *седловую точку* игры; число $a_{i_0 j_0}$ есть значение игры, а стратегии i_0, j_0 суть оптимальные чистые стратегии. Если $\underline{v} \neq \bar{v}$ (т. е. решения в чистых стратегиях нет), то всегда $\underline{v} < \bar{v}$. В этом случае оптимальные стратегии игроков следует искать среди их смешанных *стратегий*. Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ (соответственно $Y \subset \mathbb{R}^n$) — множество смешанных стратегий игрока I (соответственно игрока II). Тогда игрок I будет стремиться к стратегии x^*, на к-рой достигается

$$\underline{v}^* = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} xAy^{\top},$$

а игрок II — к стратегии y^*, на к-рой достигается

$$\bar{v}^* = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} xAy^{\top}$$

(символом $^{\top}$ обозначено транспонирование). Основная теорема теории М. и. (теорема Неймана о минимаксе) утверждает, что $\underline{v}^* = \bar{v}^* = v$, т. е. для любой М. и. существуют оптимальные смешанные стратегии x^*, y^* и значение игры v.

Для численного решения М. и. (т. е. нахождения оптимальных стратегий и значения игры) чаще всего используют возможность сведения М. и. к задаче *линейного программирования*. Менее эффективен итеративный метод Брауна — Робинсон, к-рый состоит в фиктивном «разыгрывании» М. и., причем игроки на каждом шаге выбирают наилучшие чистые стратегии в условиях «накопленной» смешанной стратегии противника. М. и., в к-рых один

из игроков имеет только две стратегии, просто решаются графич. методом.

М. и. могут служить математич. моделями многих простейших конфликтных ситуаций из области экономики, математич. статистики, военного дела, биологии. В приложениях в качестве одного из игроков нередко рассматривают «природу», под к-рой понимается вся совокупность внешних обстоятельств, неизвестных принимающему решение лицу (другому игроку).

Лит.: [1] Матричные игры. Сб. статей, М., 1961; [2] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [3] Оуэн Г., Теория игр, пер. с англ., М., 1971; [4] Воробьев Н. Н., Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков, Л., 1974.

А. А. Корбут.

МАТРИЧНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, неизвестной в к-ром является функциональная матрица, входящая в уравнение вместе со своей производной.

Пусть рассматривается линейное М. д. у. вида

$$X' = A(t)\,X, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $A(t)$ есть $(n \times n)$-матрица-функция с локально интегрируемыми по Лебегу элементами, и пусть $X(t)$ — абсолютно непрерывное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $X(t_0) = I$, I — единичная матрица. Тогда вектор-функция $x(t) = X(t)h$, $h \in \mathbb{R}^n$, является решением линейной системы

$$x' = A(t)\,x, \tag{2}$$

удовлетворяющим условию $x(t_0) = h$. Обратно, если $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{R}^n$ и $x_i(t)$ — решение системы (2), удовлетворяющее условию $x_i(t_0) = h_i$, $i = 1, \ldots, n$, то функциональная матрица $X(t)$, столбцами к-рой служат решения $x_i(t)$, является решением М. д. у. (1). Если при этом векторы $h_1, \ldots, h_n$ линейно независимы, то $\det X(t) \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Уравнение (1) является частным случаем следующего М. д. у. (возникающего в теории устойчивости)

$$X' = A(t)X - XB(t) + C(t). \tag{3}$$

Решение М. д. у. (3) с начальным условием $X(t_0) = X_0$ дается равенством

$$X(t) = U(t, t_0)\,X_0 V(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} U(t, s)\,C(s)\,V(s, t)\,ds,$$

где $U(t, s)$ — решение М. д. у. (1) с условием $X(s, s) = I$, а $V(t, s)$ — решение М. д. у. $X' = B(t)X$ с условием $X(s, s) = I$.

В различных прикладных задачах (теории стабилизации, оптимального управления, фильтрации управляемых систем и др.) большую роль играет т. н. матричное дифференциальное уравнение Риккати

$$X' = A(t)X - XB(t) + C(t) + XD(t)X.$$

Напр., если матричное уравнение Риккати

$$X' = -(F(t) + \lambda I)^{\top} X - X(F(t) + \lambda I) - I + XG(t)\,G^{\top}(t)\,X,$$

где $^{\top}$ означает транспонирование, имеет при $\lambda \geqslant 0$ ограниченное на прямой $\mathbb{R}$ решение $X(t)$ и для всех $h \in \mathbb{R}^n$, всех $t \in \mathbb{R}$ и нек-рого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $h^{\top} X(t) h \geqslant \varepsilon h^{\top} h$, то любое решение управляемой системы

$$x' = F(t)\,x + G(t)\,u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

замкнутой обратной связью $u = -\frac{1}{2} G^{\top}(t) X(t) x$, удовлетворяет неравенству

$$|x(t)| \leqslant M\,|x(s)|\exp[-\lambda(t-s)], \quad s \leqslant t,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, а постоянная M не зависит от s.

Лит.: [1] Лаппо-Данилевский И. А., Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1957; [2] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970; [3] Аткинсон Ф. В., Дискретные и непрерывные граничные задачи, пер. с англ., М., 1968; [4] Reid W. T., Riccati differential equations, N. Y.—L., 1972 (Math. Sci. and Eng., v. 86); [5] Захаров Ит кин М. Х., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 3, с. 83—120. *Е. Л. Тонков.*

МАТРИЧНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ МЕТОД, метод матричной прогонки,— метод решения конечноразностных систем, аппроксимирующих краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в одномерных задачах и для уравнений эллиптич. типа в двумерных задачах.

Решение трехточечной разностной схемы

$$A_iY_{i-1}-C_iY_i+B_iY_{i+1}=-F_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

где $Y_i=\{y_{1,i},\ y_{2,i},\ \ldots,\ y_{n,i}\}$ — искомая сеточная вектор-функция, F_i — вектор правой части, A_i, B_i, C_i — заданные квадратные матрицы, при краевых условиях

$$-C_0Y_0+B_0Y_1=-F_0,\quad A_NY_{N-1}-C_NY_N=-F_N$$

ищется так же, как в скалярном случае, в виде

$$Y_i=R_{i+1}Y_{i+1}+Q_{i+1},\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1. \qquad (*)$$

Прогоночные коэффициенты, матрица R_{i+1} и вектор Q_{i+1} определяются рекуррентными соотношениями («прямая прогонка»)

$$R_{i+1}=(C_i-A_iR_i)^{-1}B_i,$$

$$Q_{i+1}=(C_i-A_iR_i)^{-1}(A_iQ_i+F_i),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

а R_1, Q_1 — левым краевым условием:

$$R_1=C_0^{-1}B_0,\ Q_1=C_0^{-1}F_0.$$

Y_i считаются по формуле (*) («обратная прогонка»), а

$$Y_N=(C_N-A_NR_N)^{-1}(A_NQ_N+F_N).$$

Устойчивость этого метода по отношению к ошибкам округления имеет место при условиях

$$\|C_0^{-1}B_0\|<1,\ \|C_N^{-1}A_N\|<1,\ \|C_i^{-1}B_i\|+\|C_i^{-1}A_i\|<1,$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

из к-рых следует, что $\|R_i\|<1$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ N$ (см. [1]). Имеется другая форма условий устойчивости (см. [2], [3]). М. ф. м. применяется и к двухточечным разностным схемам (см. [3]). Используется вариант, в к-ром обращение матриц заменено ортогонализацией (см. [4]).

Лит.: [1] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [2] Огнева В. В., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1967, т. 7, № 4, с. 803—12; [3] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [4] Годунов С. К., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1962, т. 2, № 6, с. 972—82. *Т. А. Гермогенова.*

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования ряда и последовательности с помощью бесконечной матрицы. Посредством бесконечной матрицы $\|a_{nk}\|$, $n,\ k=1,\ 2,\ \ldots$, данная последовательность $\{s_n\}$ преобразуется в последовательность $\{\sigma_n\}$:

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}s_k.$$

Если ряд справа сходится для всех $n=1,\ 2,\ \ldots$ и последовательность $\{\sigma_n\}$ имеет предел s при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=s,$$

то последовательность $\{s_n\}$ наз. суммируемой методом, определенным матрицей $\|a_{nk}\|$, или просто суммируемой матрицей $\|a_{nk}\|$, а число s — ее пределом в смысле этого метода

суммирования. Если $\{s_n\}$ рассматривается как последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \tag{1}$$

то этот ряд наз. суммируемым к сумме s матрицей $\|a_{nk}\|$.

М. м. с. для ряда может быть также определен и непосредственным преобразованием ряда (1) в последовательность $\{\gamma_n\}$:

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{\infty} g_{nk} u_k, \tag{2}$$

где $\|g_{nk}\|$ — данная матрица. В этом случае ряд (1) наз. суммируемым к сумме s, если для всех $n=1, 2, \ldots$ сходится ряд справа в (2) и

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_n = s.$$

Менее распространены М. м. с., определенные преобразованием ряда (1) в ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \tag{3}$$

где

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} u_k,$$

и преобразованием последовательности $\{s_n\}$ в ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n, \tag{4}$$

где

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk} s_k, \; n = 1, 2, \ldots,$$

при помощи соответственно матриц $\|\alpha_{nk}\|$ и $\|\beta_{nk}\|$. В этих случаях ряд (1) с частичными суммами s_n суммируем к сумме s, если ряд (3) сходится к s или соответственно ряд (4) сходится к s.

Матрицу метода суммирования, все элементы к-рой неотрицательны, наз. положительной матрицей. К М. м. с. относятся, напр., *Вороного метод суммирования*, *Чезаро метод суммирования*, *Эйлера метод суммирования*, *Риса метод суммирования* (R, p_n), *Хаусдорфа метод суммирования* и другие (см. *Суммирования методы*).

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70; [4] Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, 2 изд., Таллин, 1977.

И. И. Волков.

МАТРОИД — *гиперграф* специального вида. М. определяется заданием множества V элементов и семейства $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \ldots\}$ подмножеств множества V, называемых независимыми множествами, для к-рых выполняются следующие аксиомы: 1) пустое множество независимо; 2) каждое подмножество независимого множества независимо; 3) для всякого подмножества $A \subseteq E$ все независимые множества М., содержащиеся в A и являющиеся максимальными по включению относительно A, имеют одинаковое число элементов.

Примеры. 1) Множество V строк произвольной прямоугольной матрицы и семейство $\mathcal{E}$ всех подмножеств множества V, составленных из линейно независимых строк, образуют М. 2) Пусть $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots\}$ — множество всех остовных лесов (см. *Дерево*) графа G, а $R(L_i)$ — множество ребер леса L_i, $i=1, 2, \ldots$. Тогда множество ребер V графа G и семейство $\mathcal{E} = \{R(L_i), i=1, 2, \ldots\}$ образуют М. 3) Пусть G — *граф двудольный* с долями W', W''. Подмножество $V \subseteq W'$ вершин, для к-рого существует паросочетание P графа G такое, что каждая вершина $v \in V$ инцидентна нек-рому

ребру паросочетания P, наз. трансверсалью. Множество V и множество всех трансверсалей графа G образуют т. н. трансверсальный матроид.

М. можно задать также множеством V элементов и семейством $C=\{C_1, C_2, \ldots\}$ непустых подмножеств $C_i \subseteq V$, называемых циклами и удовлетворяющих следующим аксиомам: никакое собственное подмножество цикла не является циклом; если $v \in C_i \cap C_j$, то $C_i \cup C_j \setminus \{v\}$ содержит цикл. Независимыми множествами этого М. являются подмножества $E \subseteq V$, не содержащие циклов.

Если G — граф, то множество его ребер и семейство простых циклов образуют т. н. циклический матроид. Если в качестве циклов М. взять коциклы (разрезы, см. *Графа связность*) графа G, то полученный таким образом М. наз. коциклическим. М. двух последних типов наз. графическими. Понятие «М.» используется в теории графов и комбинаторике при доказательстве нек-рых утверждений о *покрытиях и упаковках*, паросочетаниях.

Лит.: [1] Whitney H., «Amer. J. Math.», 1935, v. 57, p. 509—33; [2] Tutte W. T., «J. Res. Nat. Bur. Standards. Sec. B», 1965, v. 69, № 1—2, p. 1—47; [3] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973. *А. А. Сапоженко.*

МАТЬЁ ГРУППА — конечная группа, изоморфная одной из пяти групп, открытых Э. Матьё [1]. Серия М. г. состоит из групп, обозначаемых

$$M_{11},\ M_{12},\ M_{22},\ M_{23},\ M_{24};$$

они представимы как группы подстановок на множествах из 11, 12, 22, 23, 24 элементов соответственно. Группы M_{12} и M_{24} являются пятикратно транзитивными. M_{11} реализуется естественным образом как стабилизатор в M_{12} элемента множества, на к-ром действует M_{12}, M_{23} — как стабилизатор элемента в M_{24}, M_{22} — как стабилизатор элемента в M_{23}. Порядки М. г. равны соответственно

7 920, 95 040, 443 520, 10 200 960, 244 823 040.

При рассмотрении М. г. часто пользуются (см. [2]) представлением ее в виде группы автоморфизмов соответствующей системы Штейнера $S(l, m, n)$, т. е. множества из n элементов, в к-ром выделена система $\binom{n}{l}/\binom{m}{l}$ подмножеств, называемых блоками, состоящих из m элементов множества, причем каждые l элементов содержатся в одном и только в одном блоке. Автоморфизмом системы Штейнера наз. подстановка множества ее элементов, переводящая блок в блок. Группа M_{11} является группой автоморфизмов системы Штейнера $S(4, 5, 11)$, группа M_{12} — системы $S(5, 6, 12)$, группа M_{22} — системы $S(3, 6, 22)$, группа M_{23} — системы $S(4, 7, 23)$, группа M_{24} — системы $S(5, 8, 24)$.

М. г. были первыми (и на протяжении более 80 лет единственными) известными спорадическими конечными простыми группами.

Лит.: [1] Mathieu É., «J. math. pures et appl.», 1861, t. 6, p. 241—323; 1873, t. 18, p. 25—46; [2] Witt E., «Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg», 1938, Bd 12, S. 256—64, 265—75; [3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 14, М., 1976, с. 5—56. *С. П. Струнков.*

МАТЬЁ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (a + b\cos 2z)\,u = 0,\quad z \in \mathbb{R},$$

с действительными коэффициентами. Введено Э. Матьё [1] при исследовании колебаний эллиптич. мембраны; частный случай *Хилла уравнения*.

Фундаментальная система решений М. у. имеет вид

$$u_1(z) = e^{\alpha z}\varphi(z),\ u_2(z) = u_1(-z) \qquad (*)$$

при $\alpha \neq ni$, n — целое, где $\varphi(z)$ есть π-периодическая функция, а *Ляпунова характеристический показатель* α либо действительный, либо чисто мнимый. При

Im $\alpha=0$ одно из решений неограниченно возрастает, а другое стремится к нулю для $z\to+\infty$ (зоны неустойчивости на плоскости ab параметров), при Re $\alpha=0$ эти решения ограничены (зоны устойчивости). На границе этих зон (случай, исключенный в (*)) одна из функций фундаментальной системы решений М. у. либо π-периодична, либо 2π-периодична (последняя наз. *Матьё функцией*), а вторая получается из первой умножением на z. Зоны неустойчивости имеют вид криволинейных треугольников с вершинами в точках $a=n^2$, $b=0$, $n=0, 1, 2, \ldots$ (см. [2], [4]).

М. у. имеет и другую форму (см. [3]).

Лит.: [1] Mathieu É., Cours de physique mathématique, P., 1873; [2] Стретт М. Д. О., Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, пер. с нем., Хар.—К., 1935; [3] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [4] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972.

В. М. Старжинский.

МАТЬЁ ФУНКЦИИ — 2π-периодические решения *Матьё уравнения*

$$\frac{d^2u}{dz^2}+(a+16q\cos 2z)\,u=0,\quad z\in\mathbb{R},$$

к-рые существуют только тогда, когда точка $(a,\ q)$ на плоскости параметров лежит на границе зон устойчивости. М. ф. четна или нечетна и единственна с точностью до множителя; второе линейно независимое решение линейно растет по z при $|z|\to\infty$, если $q\neq0$. Четные М. ф.— собственные функции интегрального уравнения

$$G(z)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos z\cos t}G(t)\,dt,\quad k=\sqrt{32q}.$$

Аналогичное уравнение имеется для нечетных М. ф. Обозначения М. ф.:

$$\mathrm{ce}_0(z,\ q),\ \mathrm{ce}_1(z,\ q),\ \ldots;\ \mathrm{se}_1(z,\ q),\ \mathrm{se}_2(z,\ q),\ \ldots$$

При $q\to0$ эти функции приводятся к тригонометрич. системе

$$1,\ \cos z,\ \ldots;\ \sin z,\ \sin 2z,\ \ldots$$

и обладают теми же свойствами ортогональности на интервале $(-\pi,\ \pi)$. М. ф. разлагаются в ряды Фурье, к-рые сходятся при малых $|q|\leqslant r_n$; коэффициенты рядов — сходящиеся ряды по степеням q, напр.

$$\mathrm{ce}_0(z,\ q)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[2^{n+1}q^n/(n!)^2-\right.$$
$$\left.-\frac{n\,(3n+4)\,2^{n+3}q^{n+2}}{((n+1)!)^2}+O\left(q^{n+4}\right)\right]\cos 2nz.$$

Лит.: [1] Уиттекер Э.-Т., Ватсон Д.-Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963; [2] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье, пер. с англ., М., 1967; [3] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 1, М., 1953; [4] Стретт М. Д. О., Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, пер. с нем., Хар.—К., 1935; [5] Мак-Лахлан Н. В., Теория и приложения функций Матье, пер. с англ., М., 1953.

М. В. Федорюк.

МАУРЕРА — КАРТАНА ФОРМА — левоинвариантная 1-форма на группе Ли G, т. е. дифференциальная форма ω степени 1 на G, удовлетворяющая условию $l_a^*\omega=\omega$ для любого левого сдвига $l_g: x\to gx$, $g,\ x\in G$. М.— К. ф. на G находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными формами на касательном пространстве $T_e(G)$ в точке e; точнее, соответствие, сопоставляющее каждой М.— К. ф. ω ее значение ω_e из $T_e(G)^*$, является изоморфизмом пространства М.— К. ф. на $T_e(G)^*$. Дифференциал М.— К. ф. есть левоинвариантная 2-форма на G, определяемая формулой

$$d\omega(X,\ Y)=-\omega([X,\ Y]),\qquad(1)$$

где X, Y — любые левоинвариантные векторные поля на G. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — базис в $T_e(G)$ и пусть ω_i, $i=1, \ldots, n$,— такая М.— К. ф., что

$$(\omega_i)_e(X_j)=\delta_{ij}, \quad j=1, \ldots, n.$$

Тогда

$$d\omega_i=-\sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}^{i}\,\omega_j\wedge\omega_k, \qquad (2)$$

где c_{jk}^{i} — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, состоящей из левоинвариантных векторных полей на G, в базисе $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n$ таком, что

$$(\tilde{X}_i)_e=X_i, \quad i=1, \ldots, n.$$

Равенства (2) (или (1)) наз. уравнениями Маурера — Картана. Первым их получил (в иной, но эквивалентной форме) Л. Маурер [1]. Формы ω_i были введены Э. Картаном в 1904 (см. [2]).

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — канонич. координаты в окрестности точки e на G, определенные базисом $X_1, \ldots, X_n$. Тогда формы ω_i записываются в виде

$$\omega_i=\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\,dx_j,$$

причем матрица

$$A(x_1, \ldots, x_n)=(A_{ij}(x_1, \ldots, x_n))$$

вычисляется по формуле

$$A(x_1, \ldots, x_n)=\frac{1-e^{-\operatorname{ad} X}}{\operatorname{ad} X},$$

где $X=\sum_{i=1}^{n} x_i\tilde{X}_i$, ad — присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Далее, пусть θ есть $\mathfrak{g}$-значная 1-форма на G, сопоставляющая каждому касательному вектору к G единственное левоинвариантное векторное поле, содержащее этот вектор (каноническая левая дифференциальная форма). Тогда

$$\theta=\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\omega_i$$

и

$$d\theta+\frac{1}{2}[\theta, \theta]=0,$$

что является еще одной записью уравнений Маурера — Картана.

Лит.: [1] Maurer L., «Sitzungsber. math. physik. Kl. Bayerischen Akad. Wiss.» (München), 1899, Bd 18, S. 103—50; [2] Cartan E., Œuvres complètes, pt. 2, vol. 2, P., 1953, p. 571—624; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, т. 1, М., 1948; [4] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [5] Helgason S., Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, N. Y.— San Fr. — L., 1978.

А. Л. Онищик.

МАХА ПРИНЦИП — утверждение, согласно к-рому инертные свойства каждого физич. тела определяются всеми остальными физич. телами во Вселенной. В классич. механике, напротив, считается, что инертные свойства тела, напр. его масса, не зависят от наличия или отсутствия других тел. М. п. был сформулирован Э. Махом (E. Mach, 1896, см. [1]) при критич. анализе оснований классич. механики, однако им не была приведена точная математич. формулировка этого принципа. Имеется ряд неэквивалентных математич. формулировок М.п.

Лит.: [1] Мах Э., Механика, пер. с нем., СПБ, 1909; [2] Эйнштейн А., Собр. научных трудов, т. 4, М., 1967.

Д. Д. Соколов.

МАХА ЧИСЛО — *один из основных критериев аэродинамич. подобия, когда нельзя пренебрегать сжимаемостью газа.* М. ч. $M=v/a$ равно отношению скорости течения газа v к скорости звука a в той же точке потока (или отношению скорости тела в газе к скорости звука в этой среде). М. ч. наз. по имени Э. Маха (E. Mach).

По материалам БСЭ-3.

МАХАЛАНОБИСА РАССТОЯНИЕ — величина

$$\rho(X, Y \mid A) = \{(X-Y)^T A (X-Y)\}^{1/2},$$

где X, Y — векторы, A — матрица (^{T} — транспонирование). М. р. используется в многомерном статистич. анализе, в частности при проверке гипотез и классификации наблюдений. Введено П. Махаланобисом [1], к-рый использовал в качестве расстояния между двумя нормальными распределениями с математич. ожиданиями μ_1 и μ_2 и общей ковариационной матрицей Σ величину

$$\rho(\mu_1, \mu_2 \mid \Sigma^{-1}).$$

М. р. между двумя выборками (из распределений с одинаковыми ковариационными матрицами) или между выборкой и распределением определяется путем замены соответствующих теоретич. моментов выборочными. В качестве оценки М. р. между распределениями применяется М. р. между извлеченными из них выборками, а в случае использования линейной дискриминантной функции — статистика $\Phi^{-1}(\alpha)+\Phi^{-1}(\beta)$, где α — частота правильной классификации в первой совокупности, β — во второй, Φ — функция нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

Лит.: [1] Mahalanobis P. C., «J. Asiatic Soc. of Bengal», 1930, v. 26, p. 541—88; [2] Ерože, «Proc. Nat. Inst. Sci. India (Calcutta)», (1936), v. 12, p. 49—55; [3] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [4] Айвазян С. А., Бежаева З. И., Староверов О. В., Классификация многомерных наблюдений, М., 1974.

А. И. Орлов.

МАЦУСИМЫ КРИТЕРИЙ: однородное пространство G/H, где G — аффинная редуктивная алгебраич. группа, определенная над алгебраически замкнутым полем k, а H — ее замкнутая подгруппа, является аффинным алгебраич. многообразием тогда и только тогда, когда H — редуктивная группа. Впервые найден И. Мацусимой [1] для случая, когда k — поле комплексных чисел. Позже появились доказательства, пригодные для любого алгебраически замкнутого поля нулевой характеристики (см. [2]—[4]). В случае, когда характеристика k положительна, доказательство М. к. было получено лишь после доказательства *Мамфорда гипотезы* (см. [5], [6]).

Лит.: [1] Matsushima Y., «Nagoya Math. J.», 1960, v. 16, p. 205—18; [2] Bialynicki-Birula A., «Amer. J. Math.», 1963, v. 85, p. 577—82; [3] Luna D., «Bull. Soc. math. France», 1973, mém. 33, p. 81—105; [4] Borel A., Harish-Chandra, «Ann. Math.», 1962, v. 75, p. 485—535; [5] Нисневич Е. А., «Функц. анализ и его прилож.», 1977, т. 11, № 1, с. 73—74; [6] Richardson R. W., «Bull. London Math. Soc.», 1977, v. 9, p. 38—41.

В. Л. Попов.

МАШИНА (в математике) — абстрактное устройство, осуществляющее переработку *информации*. Употребительны также термины «абстрактная машина», «автомат». Абстрактные М. являются частным случаем *управляющих систем*. Возникновение их связано с анализом понятия *алгоритма*, начавшегося в середине 30-х гг. 20 в., с развитием ЭВМ и с построением математич. моделей биологич. систем. Наибольшее распространение получили М., перерабатывающие дискретную информацию, типичными представителями к-рых являются *автомат конечный* и *Тьюринга машина*. Абстрактные М. обладают большой наглядностью, возможностью легко осуществлять различные композиции, элементарностью шагов работы. Изучение М. проводится в рамках *алгоритмов теории*, математич. *кибернетики* и преследует цели анализа и формализации понятия алгоритма, математич. моделирования реальных устройств и процессов. Существует плодотворная связь между абстрактными М. и реально существующими ЭВМ. Идеи построения ЭВМ, программирования на ЭВМ в значительной мере

опираются на соответствующие идеи из теории алгоритмов, математич. кибернетики. В свою очередь практика работы с ЭВМ ставит новые задачи, подсказывает модели М., наиболее удобные для их решения.

Общим для всех абстрактных М. является наличие конечного управляющего устройства, к-рое может находиться в одном из состояний $q_1, \ldots, q_k$. М. имеет потенциально неограниченную внешнюю память и устройства для считывания и записывания информации во внешнюю память. Считывание (записывание) информации происходит, как правило, локальным образом. Функционирование М. определяется программой, к-рая состоит из команд вида $q_i a \to q_j b$, где q_i, q_j — состояния управляющего устройства, a — упорядоченная информация локального характера из внешней памяти, b — запись изменений содержимого внешней памяти и положения считывающих устройств в ней. Работа М. протекает в дискретном времени. На каждом шаге t работы М. из внешней памяти в управляющее устройство с помощью считывающего устройства поступает информация a. Если на шаге t управляющее устройство М. находится в состоянии q_i и программа М. содержит команду $q_i a \to q_j b$, то на следующем шаге $t+1$ управляющее устройство будет находиться в состоянии q_j, а содержимое внешней памяти и положение считывающих устройств будет изменено согласно b. Обычно среди состояний управляющего устройства выделяются одно или несколько начальных и одно или несколько заключительных. Перед началом работы управляющее устройство приводится в начальное состояние, конец работы определяется заключительным состоянием.

Во многих случаях абстрактные М. конструируются для вычисления числовых (словарных) функций и предикатов. Вычислимость функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ на машине M понимается следующим образом. Для произвольного набора аргументов $(x_1, \ldots, x_n)$ указывается начальная конфигурация $K_1(x_1, \ldots, x_n)$ машины M, к-рая представляет собой заполнение внешней памяти и положение читающих устройств в ней, отвечающие аргументам $x_1, \ldots, x_n$. Определяется, какие конфигурации машины M считать заключительными, т. е. соответствующими окончанию процесса вычисления функции f на машине M. Определяется, как по заключительным конфигурациям получить значения вычисляемой функции. Процесс вычисления значения $f(x_1, \ldots, x_n)$ состоит в серии переходов в соответствии с программой машины M от начальной конфигурации $K_1(x_1, \ldots, x_n)$ к непосредственно следующей $K_2(x_1, \ldots, x_n)$ и т. д. до тех пор, пока не будет достигнута заключительная конфигурация. Если значение $f(x_1, \ldots, x_n)$ не определено, то машина M, отправляясь от начальной конфигурации $K_1(x_1, \ldots, x_n)$, никогда не попадет в заключительную конфигурацию. В этом случае процесс вычисления может происходить бесконечно долго.

Часто за основу определяемой абстрактной М. берется обычная машина Тьюринга, а отличия состоят в добавлении новых или ограничении имеющихся возможностей последней. Модификации машины Тьюринга обычно происходят по следующим трем направлениям.

1. **Организация внешней памяти.** Наибольшее распространение получило введение нескольких лент (многоленточные машины Тьюринга). Изучаются также М. с односторонними и многомерными лентами, с внешней памятью в виде бесконечного *графа* (напр., в виде бесконечного двоичного *дерева*). Другой подход состоит в замене традиционной ленты регистрами или счетчиками, способными содержать произвольные натуральные (целые) числа или слова произвольной длины. Так обстоит дело с машинами Шеферд-

сона — Стургиса [6], машиной Минского [3] и машиной с произвольным доступом к памяти.

2. **Хранение, преобразование и получение информации из внешней памяти.** Рассматриваются М., у к-рых часть информации из внешней памяти, не поступающая в управляющее устройство в течение нек-рого времени, зависящего от входа, становится в дальнейшем вообще недоступной для читающих устройств М. На близкой идее основано определение машин Тьюринга с лентами магазинного типа (магазинные автоматы).

Для М., к-рые воспринимают и преобразуют информацию из внешней памяти побуквенно, типичным ограничением является запрет печатать одни символы вместо нек-рых других. Таковы, в частности, нестирающие машины Тьюринга и двусторонние автоматы, эквивалентные конечным автоматам. Сюда же относят важный класс абстрактных М.— конечные автоматы. Однако более распространенными являются ограничения на объем внешней памяти, время работы и т. п. Напр., линейно ограниченные автоматы представляют собой обычные машины Тьюринга, у к-рых длина используемой в вычислении ленты ограничена линейной функцией от длины входа.

Часто получение информации из внешней памяти происходит с помощью нескольких головок. Более общий подход состоит в том, что на внешней памяти М. определяются общерекурсивные предикаты. Набор значений этих предикатов представляет собой информацию, к-рая поступает в управляющее устройство М. Эта идея используется в машинах Шефердсона — Стургиса, у к-рых вдобавок запись информации во внешнюю память может осуществляться с помощью произвольных общерекурсивных функций.

3. **Способ функционирования.** Здесь различают детерминированные, недетерминированные и вероятностные М. У детерминированных М. каждый шаг работы однозначно определяется состоянием управляющего устройства и информацией из внешней памяти, полученной с помощью читающих устройств. Программа недетерминированной М. может содержать различные команды с одинаковыми левыми частями. Поэтому для недетерминированной М. при заданном входе рассматривают не одно, а множество всех вычислений, согласованных с программой. Вероятностная М. представляет собой М., к-рая либо снабжена датчиком случайных чисел, либо имеет программу, в к-рой переходы от одних команд к другим осуществляются с заданными вероятностями.

В недетерминированном случае обычно рассматривают вычисления предикатов. Если недетерминированная машина M вычисляет предикат $p(x_1, \ldots, x_n)$, то $p(x_1, \ldots, x_n)$ истинен тогда и только тогда, когда среди всех возможных вычислений машины M, начинающихся с конфигурации $K_1(x_1, \ldots, x_n)$, существует вычисление, содержащее заключительную конфигурацию.

В целом вычислительные возможности детерминированных, недетерминированных и вероятностных машин представляются одинаковыми. Однако в отдельных узких классах М. недетерминированные и вероятностные М. могут оказаться мощнее детерминированных. Для многих типов абстрактных М. с ограничениями на объем внешней памяти или время работы проблема «детерминизации» недетерминированных машин является интересной открытой проблемой (1982).

См. также *Вычислительная машина абстрактная.*

Лит.: [1] Автоматы. Сб. статей под ред. К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, пер. с англ., М., 1956; [2] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [3] Минский М., Вычисления и автоматы, пер. с англ., М., 1971; [4] Проблемы математической логики. Сб. переводов, М., 1970; [5] Сложность вычислений и алгоритмов. Сб. переводов, М., 1974;

[6] Shepherdson J. C., Sturgis H. E., «J. Assoc. Comput. Machinery», 1963, v. 10, № 2, p. 217—55.

С. С. Марченков.

МАШИННО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ЯЗЫК — язык программирования, позволяющий при составлении программ учитывать особенности системы команд и представления информации в объектной вычислительной машине. М.-о. я., в отличие от универсальных *проблемно-ориентированных языков* программирования, осуществляющих отображение множества P входных программ во множество M машинных программ, стремятся отображать P на M.

Простейшими М.-о. я. являются ассемблеры, к-рые, полностью сохраняя структуру машинной программы, позволяют использовать символич. обозначения для команд и адресов памяти, а также собирать программы из нескольких отдельно написанных кусков. Дополнительные возможности по текстовым подстановкам и другим простым преобразованиям при сборке программного текста предоставляются макроассемблерами. М.-о. я. высокого уровня, аналогично универсальным языкам, имеют фразовую структуру, допуская составные объекты и определяемые операции, однако содержат дополнительно средства описания элементарных объектов и базовых операций в терминах машинных конструкций.

Лит.: [1] Джермейн К., Программирование на IBM/360, пер. с англ., 2 изд., М., 1973; [2] Браун П., Макропроцессоры и мобильность программного обеспечения, пер. с англ., М., 1977; [3] Катков В. Л., Рар А. Ф., *Программирование на языке* ЭПСИЛОН, Новосиб., 1972.

А. П. Ершов.

МАЯТНИКА КОЛЕБАНИЙ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{x} = -a \sin x, \qquad (*)$$

где a — положительная константа. М. к. у. возникает при изучении свободных колебаний в поле тяжести математич. маятника — материальной точки, имеющей одну степень свободы и находящейся на конце нерастяжимого и несжимаемого невесомого подвеса, другой конец к-рого закреплен на шарнире, допускающем вращение маятника в вертикальной плоскости. Неизвестная функция $x(t)$ — это угол отклонения маятника в момент t от нижнего положения равновесия, выраженный в радианах;

$$a = g/l,$$

где l — длина подвеса, g — ускорение свободного падения. Уравнение малых колебаний маятника около нижнего положения равновесия имеет вид:

$$\ddot{x} = -ax.$$

Качественное изучение М. к. у. производится с помощью закона сохранения энергии, связывающего положение и скорость маятника:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - a \cos x = E,$$

где $E = \text{const}$ — полная энергия маятника. Масштаб времени можно выбрать так, чтобы было $a = 1$. При этом значению полной энергии $E < 1$ соответствует колебательное движение маятника (скорость периодически меняет знак), а значению $E > 1$ соответствует вращательное движение (скорость сохраняет знак). Решение $x(t)$ М. к. у. (*) с начальным условием $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \alpha$ при $E = \alpha^2/2 < 1$ удовлетворяет соотношению

$$\sin \frac{1}{2} x(t) = \frac{\alpha}{2} \operatorname{sn} t,$$

где *Якоби эллиптическая функция* sn имеет модуль $\alpha/2$.

Большое прикладное значение имеют уравнения, близкие к М. к. у. Наличие малого трения, зависящего

от положения и скорости маятника, приводит к уравнению

$$\ddot{x} = -a \sin x + \varepsilon f(x, \dot{x});$$

малые колебания маятника с трением описываются уравнением:

$$\ddot{x} = -ax + \varepsilon f(x, \dot{x}),$$

частным случаем к-рого является *Ван дер Поля уравнение*. Колебание маятника при периодич. изменении длины подвеса (движение качелей) описывается *Хилла уравнением*, важный частный случай к-рого — *Матьё уравнение*.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 2 изд., М., 1975; [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [3] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959.

Ю. С. Ильяшенко.

МГНОВЕННОЕ СОСТОЯНИЕ для однородной цепи Маркова со счетным множеством состояний — состояние (напр., i), для к-рого плотность вероятности перехода

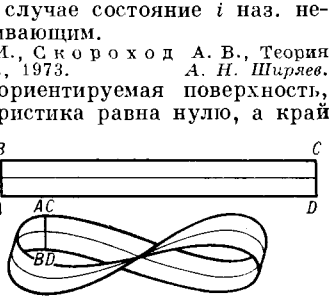
$$a_{ii} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h},$$

где $p_{ii}(h)$ — вероятность перехода из i в i за время h, равна $-\infty$. В противном случае состояние i наз. немгновенным, или задерживающим.

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

А. Н. Ширяев.

МЁБИУСА ЛИСТ — неориентируемая поверхность, у к-рой эйлерова характеристика равна нулю, а край представляет собой замкнутую линию. М. л. может быть получен отождествлением двух противоположных сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$ так, что точки A и B совмещаются соответственно с точками C и D (см. рис.). М. л. в евклидовом пространстве E^3 является односторонней поверхностью (см. *Односторонние и двусторонние поверхности*).



М. л. был рассмотрен (в 1858—65) независимо друг от друга А. Мёбиусом (A. Möbius) и И. Листингом (I. Listing).

А. Б. Иванов.

МЁБИУСА ПЛОСКОСТЬ, круговая плоскость, инверсная плоскость,— плоскость, элементы к-рой составляют два непересекающихся множества — множество точек и множество окружностей, с симметричным отношением инцидентности (связывающим точку и окружность). Отношение инцидентности удовлетворяет следующим аксиомам:

1) каждые три различные точки инцидентны одной и только одной окружности;

2) через точку, не инцидентную окружности, проходит одна и только одна окружность, пересекающая данную окружность в данной точке;

3) существуют по крайней мере четыре различные точки, не инцидентные одной окружности. Каждая окружность инцидентна по крайней мере трем различным точкам.

Из М. п. можно получить аффинную плоскость, если назвать одну из точек М. п. несобственной, а окружности, инцидентные этой точке,— прямыми.

В трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}_3$ точки *овоида* o и плоскости, пересекающей овоид в более чем одной точке, с тем же отношением инцидентности, что и в $\mathbb{P}_3$, образуют М. п. $M(o)$ (см. [1]). М. п. наз. *овалоподобной*, если она изоморфна $M(o)$ для нек-рого овоида o. Среди овалоподобных М. п. наиболее известна модель $M(S)$, где S — сфера в трехмерном евклидовом

пространстве, т. е. плоскость, изоморфная $M(c)$, где c — нелинейчатая квадрика в трехмерном проективном пространстве над полем действительных чисел.

М. п. наз. конечной, если она состоит из конечного числа точек и окружностей. На всех окружностях конечной М. п. лежит одинаковое число точек и через каждую точку плоскости проходит одинаковое число окружностей. Число, на единицу меньшее числа точек на окружности, наз. порядком плоскости. М. п. порядка n содержит n^2+1 точек и $n(n^2+1)$ окружностей; через каждую точку плоскости проходит $n(n+1)$ окружностей. Наиболее известна следующая модель М. п. порядка $n=p^h$. Точками плоскости являются элементы поля Галуа $\mathrm{GF}(p^{2h})$ и несобственная точка $\{\infty\}$, а окружностями — образы множества $K=\mathrm{GF}(p^h)\cup\{\infty\}$ относительно группы подстановок вида

$$x\longrightarrow\frac{x^{\alpha}a+c}{x^{\alpha}b+d},\quad a,\ b,\ c,\ d\in\mathrm{GF}(p^{2h}),\quad ad\neq bc,$$

$$\alpha\in\mathrm{aut\,GF}(p^{2h}).$$

Необходимым условием существования М. п. порядка n является существование конечной аффинной плоскости того же порядка. Доказана единственность М. п. порядка $n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 11$ (см. [5]). Если М. п. порядка n содержит собственную подплоскость порядка m, то $m\equiv n\pmod 2$ и $m^2+m\leqslant n$ (см. [2]).

Проводилась классификация М. п. (см. [3], [4]). М. п. названа по имени А. Мёбиуса (A. Möbius, 1855), заложившего основы теории окружностей.

Лит.: [1] Dembowski P., Finite geometries, B., 1968; [2] Dembowski P., Hughes D. R., «J. London Math. Soc.», 1965, v. 40, p. 171—82; [3] Hering Ch., «Math. Z.», 1965, Bd 87, S. 252—62; [4] Krier N., в кн.: Proceedings of International Conference on Projective Planes, Wash., 1973, p. 157—63; [5] Истомина Л. И., в сб.: Кибернетико-математические методы исследования процессов и структур, Пермь, 1976, с. 81—83.

В. В. Афанасьев.

МЁБИУСА РЯД — функциональный ряд вида

$$F(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{f(sx)}{s^n}.\qquad(*)$$

М. р. исследован А. Мёбиусом [1], к-рый нашел для ряда (*) формулу обращения:

$$f(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\mu(s)\frac{F(sx)}{s^n},$$

где $\mu(s)$ — *Мёбиуса функция*. А. Мёбиус рассмотрел также формулы обращения для конечных сумм по делителям заданного натурального числа n:

$$F(n)=\sum_{d\mid n}f(d),\quad f(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)F\left(\frac{n}{d}\right).$$

Другая формула обращения: если $P(n)$ — вполне мультипликативная функция, для к-рой $P(1)=1$, а $f(x)$ функция, определенная при всех действительных $x>0$, то из

$$g(x)=\sum_{n\leqslant x}P(n)f\left(\frac{x}{n}\right)$$

следует

$$f(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)P(n)g\left(\frac{x}{n}\right).$$

Лит.: [1] Möbius A. F., «J. reine und angew. Math.», 1832, Bd 9, S. 105—23; [2] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [3] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967.

Б. М. Бредихин.

МЁБИУСА ФУНКЦИЯ — арифметическая функция натурального аргумента: $\mu(1)=1$, $\mu(n)=0$, если n делится на квадрат простого числа, в противном случае $\mu(n)=(-1)^k$, где k — количество простых множителей числа n. Введена А. Мёбиусом (A. Möbius, 1832).

М. ф.— мультипликативная функция; $\sum_{d\mid n}\mu(d)=0$, если $n>1$. М. ф. используется при изучении других

арифметич. функций, она содержится в формуле обращения (см., напр., *Мёбиуса ряд*). Для среднего значения М. ф. известна оценка [2]

$$\frac{1}{x}\left|\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\right|\leqslant \exp\left\{-c\ln^{3/5}x\,(\ln\ln x)^{-1/5}\right\},$$

где c — постоянная. Из стремления среднего значения к нулю при $x\to\infty$ следует асимптотич. закон *распределения простых чисел* в натуральном ряде.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981; [2] Walfisz A., Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie, B., 1963. *Н. И. Климов.*

МЕДИАНА треугольника — прямая (или ее отрезок внутри треугольника), соединяющая вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Три М. треугольника пересекаются в одной точке, к-рая называется центром тяжести треугольника, центроидом, или барицентром. Эта точка делит каждую М. на две части, отношение между к-рыми равно 2 : 1, считая первый отрезок от вершины. *П. С. Моденов.*

МЕДИАНА — одна из числовых характеристик распределения вероятностей, частный случай *квантили*. Для действительной случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ М. наз. число m, к-рое удовлетворяет условиям $F(m)\leqslant 1/2$ и $F(m+0)\geqslant 1/2$. Любая случайная величина имеет по крайней мере одну М. Если $F(x)=1/2$ при всех x из замкнутого интервала, то каждая точка этого интервала есть М. Если $F(x)$ строго монотонная функция, то М. единственна. В симметричном случае М., если она единственна, совпадает с математич. ожиданием, если последнее существует. Тот факт, что М. существует всегда, используется для центрирования случайных величин (см., напр., *Леви неравенство*). В математич. статистике для оценки М. распределения по независимым результатам наблюдений $X_1, \ldots, X_n$ используют т. н. выборочную медиану — М. соответствующего вариационного ряда $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$: величину $X_{(k+1)}$, если $n=2k+1$ — нечетное, и $\frac{1}{2}[X_{(k)}+X_{(k+1)}]$, если $n=2k$ — четное.

Лит.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. *А. В. Прохоров.*

МЕДИАНТА двух дробей a/b и c/d с положительными знаменателями — дробь $(a+c)/(b+d)$. М. двух дробей заключена между ними, т. е. если $(a/b)\geqslant(c/d)$, $b>0$, $d>0$, то $\frac{a}{b}\leqslant\frac{a+c}{b+d}\leqslant\frac{c}{d}$. Конечная последовательность дробей, каждая промежуточная из к-рых является М. соседних с ней, наз. рядом Фарея. М. двух соседних подходящих дробей разложения действительного числа α в цепную дробь заключена между числом α и подходящей дробью меньшего порядка. Таким образом, если P_n/Q_n и P_{n+1}/Q_{n+1} — подходящие дроби порядков n и $n+1$ разложения числа α в цепную дробь, то

$$\left|\alpha-\frac{P_n}{Q_n}\right|>\left|\frac{P_n+P_{n+1}}{Q_n+Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}\right|=\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n+1})}.$$

Лит.: [1] Хинчин А. Я., Цепные дроби, 4 изд., М., 1978. *В. И. Нечаев.*

МЕЙЕРА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F(x)=\int_0^\infty e^{-xt/2}(xt)^{-\mu-1/2}W_{\mu+1/2,\,\nu}(xt)\,f(t)\,dt,$$

где $W_{\mu,\,\nu}(x)$ — *Уиттекера функция*. Формула обращения имеет вид

$$f(t)=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(1-\mu+\nu)}{\Gamma(1+2\nu)}\times$$

$$\times\int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda}e^{xt/2}(xt)^{\mu-1/2}M_{\mu-1/2,\,\nu}(xt)\,F(x)\,dx,$$

где $M_{\mu,\,\nu}(x)$ — функция Уиттекера.

При $\mu=\pm\nu$ М. п. переходит в *Лапласа преобразование*; при $\mu=-1/2$ в K_ν-преобразование:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-xt/2}\ (xt)^{1/2}K_\nu(xt/2)\,f(t)\,dt,$$

где $K_\nu(x)$ — *Макдональда функция*.

К М. п. сводится преобразование Варма:

$$F(x)=\int_0^\infty (xt)^{\nu-1/2}\ e^{-xt/2}W_{\mu,\ \nu}(xt)\,f(t)\,dt.$$

Мейера K-преобразование (Мейера—Бесселя преобразование) — интегральное преобразование вида

$$F(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty K_\nu(xt)\,\sqrt{xt}\,f(t)\,dt.$$

Если функция $f(t)$ локально интегрируема на $(0,\ \infty)$, имеет ограниченное изменение в окрестности точки $t=t_0>0$ и сходится интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}\,|f(t)|\,dt,\ \ \beta>\alpha\geqslant 0,$$

то имеет место формула обращения

$$\frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda}I_\nu(t_0x)\,(t_0x)^{1/2}F(x)\,dx.$$

При $\nu=\pm 1/2$ K-преобразование Мейера переходит в преобразование Лапласа.

М. п. введено К. Мейером [1], K-преобразование Мейера — им же [2].

Лит.: [1] Meijer C. S., «Proc. Koninkl. Nederl. acad. wet.», 1941, v. 44, p. 727—37; [2] его же, там же, 1940, v. 43, p. 599—608, 702—11; [3] Брычков Ю. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования обобщенных функций, М., 1977; [4] Итоги науки. Математический анализ. 1966, М., 1967, с. 7—82.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

МЕЙЕРА ТЕОРЕМА: пусть $f(z)$ — мероморфная функция в единичном круге $D=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$, тогда все точки окружности $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=1\}$, исключая, быть может, множество первой категории на Γ, являются либо точками Фату, либо точками Мейера. При этом точка $e^{i\theta}$ окружности Γ наз. точкой Фату для $f(z)$, если существует *угловое граничное значение* $\lim f(z)=A$ при $z\to e^{i\theta}$ по любому некасательному пути. Точка $e^{i\theta}$ наз. точкой Мейера (или обладает свойством Мейера), если: 1) полное *предельное множество* $C(e^{i\theta};\ f)$ функции $f(z)$ в точке $e^{i\theta}$ субтотально, т. е. не совпадает со всей расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$; 2) множество всех предельных значений вдоль любой хорды круга D, проведенной в точку $e^{i\theta}$, совпадает с $C(e^{i\theta};\ f)$. Теорема была доказана К. Мейером [1].

М. т. является аналогом в терминах категории множеств *Плеснера теоремы*, формулирующейся в терминах теории меры. Уточнение М. т. см. в [3].

Лит.: [1] Meier K., «Math. Ann.», 1961, Bd 142, S. 328—344; [2] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [3] Гаврилов В. И., Канатников А. Н., «Докл. АН СССР», 1977, т. 233, № 1, с. 15—17.

Е. Д. Соломенцев.

МЕЛЕРА КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — наивысшей алгебраич. степени точности квадратурная формула для промежутка $[-1,1]$ и веса $1/\sqrt{1-x^2}$, имеющая вид

$$\int_{-1}^{1}\left(1/\sqrt{1-x^2}\right)f(x)\,dx\approx\frac{\pi}{N}\sum_{k=1}^{N}f\left(\cos\frac{2k-1}{2N}\pi\right). \tag{1}$$

Узлы — корни многочлена Чебышева

$$T_N(x)=\cos N\arccos x,$$

коэффициенты одинаковы и равны π/N. Алгебраич. степень точности равна $2N-1$. Формула (1) установлена Ф. Мелером [1].

Квадратурная формула наивысшей алгебраич. степени точности с весом $1/\sqrt{1-x^2}$ и с $2N+1$ узлами, у к-рой N фиксированных узлов совпадают с узлами квадратурной формулы (1), такова:

$$\int_{-1}^{1} \left(1/\sqrt{1-x^2}\right) f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{2N}\left[\frac{f(-1)+f(1)}{2}+\sum_{k=1}^{2N-1} f\left(\cos\frac{k\pi}{2N}\right)\right]. \qquad (2)$$

Квадратурной формулой (2) пользуются для уточнения приближенного значения интеграла, полученного с помощью квадратурной формулы (1), при этом значения подинтегральной функции в узлах формулы (1) уже вычислены, так что необходимо вычислить ее значения лишь в $N+1$ дополнительных узлах. Квадратурная формула (2) представляет собой также наивысшей алгебраич. степени точности квадратурную формулу с весом $1/\sqrt{1-x^2}$, у к-рой фиксированными узлами являются концы промежутка $[-1, 1]$ и, следовательно, остальные узлы суть корни ортогонального относительно промежутка $[-1,1]$ и веса $\sqrt{1-x^2}$ многочлена степени $2N-1$ — многочлена Чебышева $U_{2N-1}(x)$ 2-го рода. Алгебраич. степень точности квадратурной формулы (2) равна $4N-1$.

Иногда формулу (1) наз. квадратурной формулой Эрмита.

Лит.: [1] Mehler F. G., «J. reine und angew. Math.», 1864, Bd 63, S. 152—57; [2] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967. *И. П. Мысовских.*

МЕЛЕРА — ФОКА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F(x)=\int_0^\infty P_{i\tau-1/2}(x)\,f(\tau)\,d\tau,\quad 1\leqslant x<\infty, \qquad (1)$$

где $P_\nu(x)$ — сферич. функция Лежандра 1-го рода. Если $f(\tau)\in L[0,\infty)$, $|f'(\tau)|$ — локально интегрируема на $[0,\infty)$ и $f(0)=0$, то имеет место формула обращения

$$f(\tau)=\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau\int_1^\infty P_{i\tau-1/2}(x)\,F(x)\,dx. \qquad (2)$$

Равенство Парсеваля. Пусть М.—Ф. п. определено равенствами

$$G(\tau)=\int_1^\infty \sqrt{\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau}\,P_{i\tau-1/2}(x)\,g(x)\,dx,$$

$$g(x)=\int_0^\infty \sqrt{\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau}\,P_{i\tau-1/2}(x)\,G(\tau)\,d\tau.$$

Если $g_i(x)$, $i=1, 2$,— произвольные действительные функции и выполняются условия

$$g_i(x)\,x^{-1/2}\ln(1+x)\in L(1,\infty),\ g_i(x)\in L_2(1,\infty),$$

то

$$\int_0^\infty G_1(\tau)\,G_2(\tau)\,d\tau=\int_1^\infty g_1(x)\,g_2(x)\,dx.$$

Обобщенное М.— Ф. п. и формула его обращения имеют вид

$$F(x)=\int_0^\infty P^{(k)}_{i\tau-1/2}(x)\,f(\tau)\,d\tau, \qquad (3)$$

$$f(\tau)=\frac{1}{\pi}\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-i\tau\right)\times$$

$$\times\int_1^\infty P^{(k)}_{i\tau-1/2}(x)\,F(x)\,dx, \qquad (4)$$

где $P^{(k)}_\nu(x)$ — присоединенные функции Лежандра 1-го рода. При $k=0$ формулы (3), (4) переходят в (1), (2), при $k=1/2$, $y=\mathrm{ch}\,\alpha$ формулы (3), (4) приводят к косинус-преобразованию Фурье, а при $k=-1/2$, $y=\mathrm{ch}\,\alpha$ к синус-преобразованию Фурье. Преобразования (1) и (2) введены Ф. Мелером [1], основные теоремы доказаны В. А. Фоком [2].

Лит.: [1] Mehler F. G., «Math. Ann.», 1881, Bd 18, S. 161—94; [2] Фок В. А., «Докл. АН СССР», 1943, т. 39, с. 279—283; [3] Итоги науки. Математический анализ. 1966, М., 1967, с. 7—82. *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.*

МЕЛЛИНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — одно из интегральных преобразований. Оно определяется формулой

$$M(p)=\int_0^\infty f(t)\,t^{p-1}\,dt,\quad p=\sigma+i\tau,$$

сводится к Лапласа преобразованию подстановкой $t=e^{-z}$. М. п. применяется к решению определенного класса плоских задач на гармонич. функции в секториальной области, задач теории упругости и пр.

Теорема обращения. Пусть $\tau^{\sigma-1}f(\tau)\in L(0,\infty)$, причем функция $f(\tau)$ имеет ограниченное изменение в окрестности точки $\tau=t$. Тогда

$$\frac{1}{2}\,[f(t+0)-f(t-0)]=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\sigma-i\lambda}^{\sigma+i\lambda}M(s)\,t^{-s}ds.$$

Теорема представления. Пусть функция $M(\sigma+iu)$ суммируема по u на $(-\infty,+\infty)$ и имеет ограниченное изменение в окрестности точки $u=t$; тогда

$$\frac{1}{2}\,[M(\sigma+i(t+0))+M(\sigma+i(t-0))]=$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\int_{1/\lambda}^{\lambda}f(x)\,x^{\sigma+it-1}\,dx,$$

где

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}M(s)x^{-s}ds.$$

Лит.: [1] Mellin H., «Acta Soc. sci. fennica», 1896, v. 21, № 1, S. 1—115; [2] его же, «Acta math.», 1902, v. 25, S. 139—164; [3] Титчмарш Е. К., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.—Л., 1948; [4] Диткин В. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, 2 изд., М., 1974. *П. И. Лизоркин.*

МЕНГЕРА КРИВАЯ — пример линии, содержащей топологич. образ любой линии (и, более того, любого одномерного метризуемого пространства счетного веса). Поэтому она наз. универсальной кривой. Построена К. Менгером [1] (конструкцию М. к. см. в ст. *Линия*). М. к. топологически характеризуется [3] как одномерный локально связный метризуемый континуум K, не имеющий локально разбивающих точек (т. е. для любой связной окрестности O любой точки $x\in K$ множество $O\setminus\{x\}$ связно) и не имеющий непустых открытых и вложимых в плоскость подмножеств.

Лит.: [1] Menger K., Kurventheorie, Lpz., 1932; [2] Пархоменко А. С., Что такое линия, М., 1954; [3] Anderson R., «Ann. Math.», 1958, v. 68, № 1, p. 1—16. *В. А. Пасынков.*



МЕНЕЛАЯ ТЕОРЕМА — теорема о соотношении между длинами отрезков на сторонах треугольника, пересеченного прямой. Именно, если прямая пересекает стороны треугольника ABC (или их продолжения) в точках C', A' и B', то справедливо соотношение

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB}{B'A}=-1.$$

М. т. есть частный случай *Карно теоремы*; она допускает обобщение на случай многоугольника. Пусть прямая l пересекает стороны A_1A_2, A_2A_3, . . ., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 многоугольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$ соответственно в точках a_1, a_2, . . ., a_{n-1}, a_n. В таком случае справедливо соотношение

$$\frac{A_1a_1}{a_1A_2}\cdot\frac{A_2a_2}{a_2A_3}\cdot\ldots\cdot\frac{A_{n-1}a_{n-1}}{a_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_na_n}{a_nA_n}=\pm 1,$$

где знак минус соответствует случаю нечетного n, а знак плюс — четного n.

М. т. была доказана Менелаем (1 в. н. э.) и, повидимому, была известна Евклиду (3 в. до н. э.).

П. С. Моденов.

МЁНЬЕ ТЕОРЕМА: кривизна k кривой γ, лежащей на поверхности, кривизна k_N нормального сечения, плоскость к-рого проходит через касательную к кривой γ в данной ее точке P, и угол α между соприкасающейся плоскостью кривой γ в точке P и плоскостью N нормального сечения связаны соотношением

$$k_N = k \cos \alpha.$$

В частности, кривизна любого наклонного сечения поверхности выражается через кривизну нормального сечения с той же касательной.

Теорема доказана Ж. Мёнье в 1776 (опубл. в [1]).

Лит.: [1] Meusnier J., «Mém. prés. sav. étrangers. Ac. sci.», 1785, t. 10, p. 477—510.

Д. Д. Соколов.

МЕНЬШОВА ПРИМЕР НУЛЬ-РЯДА — первый нетривиальный пример тригонометрич. ряда, сходящегося к нулю всюду вне нек-рого совершенного множества меры нуль; построен Д. Е. Меньшовым [1]. Ряды такого типа наз. нуль-рядами. С этим понятием естественно связан вопрос о единственности разложения функции в тригонометрич. ряд (см. *Единственности множество*).

Лит.: [1] Меньшов Д. Е., «C. r. Acad. sci.», 1916, t. 163, p. 433—36; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, с. 804—06.

М. И. Войцеховский.

МЕНЬШОВА — РАДЕМАХЕРА ТЕОРЕМА — теорема о сходимости ортогональных рядов почти всюду: если система функций $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована на отрезке $[a, b]$, то при условии

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \qquad (*)$$

сходится почти всюду на $[a, b]$. Эта теорема доказана независимо Д. Е. Меньшовым [1] и Х. Радемахером [2]. Д. Е. Меньшов доказал, что ее утверждение окончательно в следующем смысле. Если монотонно возрастающая последовательность положительных чисел $\omega(n)$ удовлетворяет условию $\omega(n) = o(\log^2 n)$, то найдется всюду расходящийся ортогональный ряд (*), коэффициенты к-рого удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega(n) < \infty.$$

Лит.: [1] Menchoff D., «Fundam. math.», 1923, t. 4, p. 82—105; [2] Rademacher H., «Math. Ann.», 1922, Bd 87, S. 112—38; [3] Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963, с. 87, 94.

Б. И. Голубов.

МЕРА, мера множества,— обобщение понятия длины отрезка, площади фигуры, объема тела, интуитивно соответствующее массе множества при нек-ром распределении массы по пространству. Понятие М. множества возникло в теории функций действительного переменного в связи с изучением и усовершенствованием понятия интеграла.

Определения и общие свойства. Пусть X — нек-рое множество и $\mathcal{E}$ — нек-рый класс его подмножеств. Неотрицательная (не обязательно конечная) функция множеств λ, определенная на $\mathcal{E}$, наз. аддитивной, конечно аддитивной или счетно аддитивной, если

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(E_i),$$

когда

$$E_i \in \mathcal{E},\ \bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{E},\ E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j,$$

соответственно при $n=2$, n — любом конечном и $n \leqslant \infty$.

Совокупность $\mathcal{P}$ подмножеств множества X наз. полукольцом множеств, если:

1) $\varnothing \in \mathcal{P}$,

2) $E_1, E_2 \in \mathcal{P} \Rightarrow E_1 \cap E_2 \in \mathcal{P}$,

3) $E, E_1 \in \mathcal{P}, E_1 \subset E \Rightarrow$

существует представление $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $E_i \in \mathcal{P}$, $i = 1, \ldots, n$, $n < \infty$. Совокупность $\mathcal{R}$ подмножеств множества X наз. кольцом множеств, если:

1) $\varnothing \in \mathcal{R}$,

2) $E_1, E_2 \in \mathcal{R} \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{P}$, $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{R}$.

Пример полукольца: $X = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{P}$ — совокупность интервалов вида

$$\{x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : a_i \leqslant x_i < b_i,\ i = 1, \ldots, k\}.$$

Совокупность всевозможных конечных объединений таких интервалов является кольцом.

Совокупность $\mathcal{S}$ подмножеств множества X наз. σ-кольцом, если

1) $\varnothing \in \mathcal{S}$,

2) $E_1, E_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{S}$,

3) $E_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, \ldots, \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{S}$.

Всякое σ-кольцо является кольцом; всякое кольцо является полукольцом.

Конечно аддитивной мерой наз. неотрицательная конечно аддитивная функция множеств m такая, что $m(\varnothing) = 0$. Областью определения $\mathcal{E}_m$ конечно аддитивной М. может быть полукольцо, кольцо или σ-кольцо. В определении конечно аддитивной меры на кольце или σ-кольце условие конечной аддитивности можно ослабить до аддитивности — при этом получается то же понятие.

Если m — конечно аддитивная М. множества E, $E_1, \ldots, E_n$ принадлежат области ее определения и $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, то

$$m(E) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(E_i).$$

Конечно аддитивная М. m_2 с областью определения $\mathcal{E}_{m_2}$ наз. продолжением конечно аддитивной меры М. m_1 с областью определения $\mathcal{E}_{m_1}$, если $\mathcal{E}_{m_2} \supset \mathcal{E}_{m_1}$ и $m_2(E) = m_1(E)$ при $E \in \mathcal{E}_{m_1}$.

Всякая конечно аддитивная М. m, определенная на полукольце $\mathcal{P}$, может быть однозначно продолжена до конечно аддитивной М. m' на наименьшем кольце $\mathcal{R}(\mathcal{P})$, содержащем $\mathcal{P}$. Это продолжение определяется следующим образом: любое $E \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$ представимо в виде $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, $E_i \in \mathcal{P}$, $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$; $m'(E)$ полагают равным

$$\sum_{i=1}^{n} m(E_i).$$

Конечно аддитивная М., обладающая свойством счетной аддитивности, наз. мерой. Пример меры: пусть X произвольное ненустое множество, $\mathcal{E}_m$ — σ-кольцо, кольцо или полукольцо подмножеств X, $\{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное подмножество X, $p_1, p_2, \ldots$ — неотрицательные числа. Тогда функция

$$\mu(E) = \sum_n p_n \delta_{x_n}(E),$$

где $\delta_x(E) = 1$ при $x \in E$ и $\delta_x(E) = 0$ при $x \notin E$, является М., определенной на $\mathcal{E}_\mu$. Меры δ_x наз. элементарными, или вырожденными, мерами. Не всякая конечно аддитивная М. является М. Напр., если X есть множество рациональных точек отрезка $[0, 1]$, $\mathcal{P}$ — полукольцо пересечений всевозможных

подинтервалов $[0, 1]$ с X и для любых $a, b, 0 \leqslant a \leqslant b < 1$,

$$m((a, b) \cap X) = m([a, b) \cap X) = m((a, b] \cap X) = \\ = m([a, b] \cap X) = b - a,$$

то m конечна, но не счетно аддитивна на $\mathscr{P}$.

(Конечно аддитивная) М. m с областью определения $\mathscr{E}_m$ наз. конечной (соответственно σ-конечной), если $m(E) < \infty$ для любого $E \in \mathscr{E}_m$ (соответственно, если для любого $E \in \mathscr{E}_m$ существует последовательность множеств $\{E_i\}$ из $\mathscr{E}_m$ такая, что $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $m(E_i) < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$). (Конечно аддитивная) М. m наз. вполне конечной (вполне σ-конечной), если она конечна (соответственно σ-конечна) и $X \in \mathscr{E}_m$.

Пара $(X, \mathscr{S})$, где X — множество и $\mathscr{S}$ есть σ-кольцо его подмножеств такое, что $\bigcup_{E \in \mathscr{S}} E = X$, наз. измеримым пространством. Тройка $(X, \mathscr{S}, \mu)$, где $(X, \mathscr{S})$ — измеримое пространство и μ есть М. на $\mathscr{S}$, наз. пространством с мерой. Пространство с вполне конечной М. μ, нормированной условием $\mu(X) = 1$, наз. вероятностным пространством. В абстрактной теории М., где исходным является измеримое пространство $(X, \mathscr{S})$ или пространство с М. $(X, \mathscr{S}, \mu)$, множества из $\mathscr{S}$ наз. измеримыми множествами.

Свойства пространства с мерой. Пусть $\{E_i\}$ — произвольная последовательность измеримых множеств, тогда

1) $\mu(\liminf\limits_{i \to \infty} E_i) \leqslant \liminf\limits_{i \to \infty} \mu(E_i)$,

2) если $\mu\left(\bigcup_{i=i_0}^{\infty} E_i\right) < \infty$

для нек-рого i_0, то

$$\mu\left(\limsup_{i \to \infty} E_i\right) \geqslant \limsup_{i \to \infty} \mu(E_i),$$

3) если $\lim\limits_{i \to \infty} E_i$ существует и выполнено условие из 2), то

$$\mu\left(\lim_{i \to \infty} E_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(E_i).$$

Определенная на кольце конечно аддитивная М. является М. тогда и только тогда, когда

$$m\left(\lim_{i \to \infty} E_i\right) = \lim_{i \to \infty} m(E_i)$$

для любой монотонно возрастающей последовательности $\{E_i\}$ множеств из $\mathscr{R}$ такой, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{R}$.

Пусть $(X, \mathscr{S}_1, \mu_1)$ — пространство с М., $(X_2, \mathscr{S}_2)$ — измеримое пространство и T — измеримое отображение X_1 в X_2, т. е.

$$T^{-1}(E) = \{x \in X_1 : Tx \in E\} \in \mathscr{S}_1$$

для любого $E \in \mathscr{S}_2$. Мерой, порожденной отображением T (обозначается μT^{-1}), наз. М. на $\mathscr{S}_2$, определяемая соотношением

$$\mu T^{-1}(E) = \mu(T^{-1}E).$$

Пусть $(X, \mathscr{S}, \mu)$ — измеримое пространство и $X_1 \subset X$. Пусть на множествах E из σ-кольца $\mathscr{S} \cap X_1 = \{E \cap X_1, E \in \mathscr{S}_1\}$

$$\mu_{X_1}(E) = \inf_{E \subset F \in \mathscr{S}} \mu(F).$$

Тогда $(X_1, \mathscr{S} \cap X_1, \mu_{X_1})$ есть измеримое пространство; М. μ_{X_1} наз. ограничением меры μ на X_1.

Атомом пространства с М. $(X, \mathscr{S}, \mu)$ (или меры μ) наз. всякое множество $E \in \mathscr{S}$ положительной меры такое, что если $F \subset E$, $F \in \mathscr{S}$, то $\mu(F) = 0$ либо $\mu(F) = \mu(E)$. Пространство с М., не содержащее атомов, наз. неатомическим, или непрерывным

(сама М. при этом тоже наз. неатомической, или непрерывной). Если $(X, \mathscr{S}, \mu)$ — пространство с неатомич. σ-конечной М. и $E_1 \in \mathscr{S}$, то для любого $\alpha \leqslant \mu(E_1)$ (возможно, равного ∞) существует такой элемент $E_2 \in \mathscr{S}$, что $E_2 \subset E_1$ и $\mu(E_2) = \alpha$.

Пространство с М. $(X, \mathscr{S}, \mu)$ (или мера μ) наз. полным, если из $E \in \mathscr{S}$, $F \subset E$, $\mu(E) = 0$ следует, что $E \in \mathscr{S}$. Всякое пространство с М. $(X, \mathscr{S}, \mu)$ можно пополнить, если к $\mathscr{S}$ присоединить множества вида $E \cup N$, где $E \in \mathscr{S}$, $N \subset N'$, $N' \in \mathscr{S}$, $\mu(N') = 0$, и положив для них $\bar{\mu}(E \cup N) = \mu(E)$. Класс множеств указанного вида образует σ-кольцо, при этом μ — полная М. на нем. Множества нулевой М. наз. нулевыми множествами. Если множество точек из X, для к-рых нек-рое свойство Q не выполняется, является нулевым множеством, то говорят, что свойство Q выполняется почти всюду.

Продолжение мер. М. μ_2 есть продолжение M. μ_1, если μ_1 есть продолжение мер μ_1 в классе конечно аддитивных М. (см. выше). Всякую определенную на полукольце $\mathscr{P}$ М. можно однозначно продолжить до М. на кольце $\mathscr{R}(\mathscr{P})$, порожденном $\mathscr{P}$ (продолжение осуществляется с помощью той же конструкции, что и в случае конечно аддитивных М.). Далее, всякую М. μ, определенную на кольце $\mathscr{R}$, можно продолжить до М. μ' на порожденном $\mathscr{R}$ σ-кольце $\mathscr{S}(\mathscr{R})$; если μ σ-конечна, то это продолжение единственно и σ-конечно. Значение μ' на множестве $E \in \mathscr{S}(\mathscr{R})$ можно задать формулой

$$\mu'(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) : E_i \in \mathscr{R}, \; i = 1, 2, \ldots, \; E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}. \qquad (*)$$

Наследственным классом подмножеств множества X наз. всякий класс, содержащий вместе с каждым своим множеством любое его подмножество. Внешней мерой наз. функция множеств m^*, определенная на наследственном σ-кольце $\mathscr{H}$ (классе множеств, являющемся одновременно наследственным классом и σ-кольцом) и обладающая следующими свойствами:

1) $0 \leqslant m^*(E) \leqslant \infty$, $m^*(\varnothing) = 0$,

2) $E \subset F \Rightarrow m^*(E) \leqslant m^*(F)$,

3) $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i)$.

По М. μ на кольце $\mathscr{R}$ можно построить внешнюю М. μ^* на наследственном σ-кольце $\mathscr{H}(\mathscr{R})$, порожденном $\mathscr{R}$ ($\mathscr{H}(\mathscr{R})$ состоит из всех множеств, к-рые могут быть покрыты объединением счетного числа множеств из $\mathscr{R}$), по формуле

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) : E_i \in \mathscr{R}, \; i = 1, 2, \ldots, \; E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}.$$

Внешняя М. μ^* наз. внешней мерой, индуцированной мерой μ.

Пусть m^* — внешняя М. на наследственном σ-кольце $\mathscr{H}$ подмножеств X. Множество $E \in \mathscr{H}$ наз. m^*-измеримым, если

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (X \setminus E))$$

для любого $A \in \mathscr{H}$. Совокупность $\bar{\mathscr{S}}$ m^*-измеримых множеств образует σ-кольцо, содержащее все множества нулевой внешней М., а функция множеств $\bar{m}$ на $\bar{\mathscr{S}}$, определяемая равенством $\bar{m}(E) = m^*(E)$, является полной мерой. М. $\bar{m}$ наз. мерой, индуцированной внешней мерой m^*.

Пусть μ есть М. на кольце $\mathscr{R}$, μ^* — внешняя М. на $\mathscr{H}(\mathscr{R})$, индуцированная М. μ. Пусть $\mathscr{S}$ — совокупность μ^*-измеримых множеств, $\bar{\mu}$ есть М. на $\mathscr{S}$, индуцированная внешней М. μ^*. Тогда М. $\bar{\mu}$ есть продолжение М. μ, и поскольку $\mathscr{S}(R)\subset\mathscr{S}$, то функция μ' на $\mathscr{S}(\mathscr{R})$, задаваемая формулой (*), тоже М., продолжающая μ. Если исходная М. μ на $\mathscr{R}$ σ-конечна, то пространство $(X, \mathscr{S}, \bar{\mu})$ является пополнением пространства $(X, \mathscr{S}(\mathscr{R}), \mu')$, см. (*). Если M. μ задана на σ-кольце $\mathscr{S}$, то индуцированная ею внешняя М. μ^* на наследственном σ-кольце $\mathscr{H}(\mathscr{S})$, порожденном $\mathscr{S}$, дается формулой

$$\mu^*(E)=\inf\{\mu(F): E\subset F,\ F\in\mathscr{S}\}.$$

Наряду с внешней М. μ^* вводится понятие внутренней меры μ_*, индуцированной мерой μ на $\mathscr{S}$, именно:

$$\mu_*(E)=\sup\{\mu(F): E\supset F,\ F\in\mathscr{S}\},\ E\in\mathscr{H}(\mathscr{S}).$$

Для всякого множества E из $\mathscr{H}(\mathscr{S})$ определяются его измеримое ядро E' и измеримая оболочка E'' как множества из $\mathscr{S}$ такие, что $E'\subset E\subset E''$ и $\mu(F')=\mu(F'')=0$ для любых F', $F''\in\mathscr{S}$ таких, что $F'\subset E\setminus E'$, $F''\subset E''\setminus E$. Измеримое ядро всегда существует, а измеримая оболочка существует всякий раз, когда E имеет σ-конечную внешнюю М.; при этом $\mu_*(E)=\mu(E')$, $\mu^*(E)=\mu(E'')$. Пусть μ есть М. на кольце $\mathscr{R}$ и μ' — ее продолжение на порожденное $\mathscr{R}$ σ-кольцо $\mathscr{S}(\mathscr{R})$. Внутреннюю М. μ'_* на подмножествах множества E конечной μ-меры можно выразить в терминах внешней М. μ^* (а стало быть, и μ):

$$\mu_*(A)=\mu(E)-\mu^*(E\setminus A),\ A\subset E.$$

Кроме того, множество F из наследственного σ-кольца $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ с конечной внешней μ^*-мерой μ^*-измеримо тогда и только тогда, когда $\mu^*(F)=\mu'_*(F)$. В случае, когда исходная М. μ на $\mathscr{R}$ вполне конечна, справедливо следующее необходимое и достаточное условие μ^*-измеримости множества $E\subset X$

$$\mu(X)=\mu^*(E)=\mu^*(X\setminus E).$$

Для вполне конечных мер на $\mathscr{R}$ это условие нередко берется в качестве определения μ^*-измеримости E.

Если $(X, \mathscr{S}, \mu)$ — измеримое пространство с σ-конечной М. и $X_1, \ldots, X_n$ — конечное число множеств из наследственного σ-кольца $\mathscr{H}(\mathscr{S})$, порожденном $\mathscr{S}$, то на σ-кольце $\mathscr{S}$, порожденном $\mathscr{S}$ и множествами $X_1, \ldots, X_n$, можно определить М. $\tilde{\mu}$, совпадающую на $\mathscr{S}$ с μ.

Меры Жордана, Лебега и Лебега — Стилтьеса. Примером продолжения М. является мера Лебега в $\mathbb{R}^k$. Интервалы вида

$$I=\{(x_1, \ldots, x_n): a_i\leqslant x_i<b_i,\ i=1, \ldots, k\}$$

образуют полукольцо $\mathscr{P}$ в $\mathbb{R}^k$. Пусть для каждого такого интервала

$$\lambda(I)=\prod_{i=1}^{k}(b_i-a_i)$$

[$\lambda(I)$ совпадает с объемом I]. Функция λ σ-конечна и счетно аддитивна на $\mathscr{P}$ и однозначно продолжается до М. λ' на σ-кольце $\mathscr{S}$, порожденном $\mathscr{P}$, к-рое совпадает с σ-кольцом *борелевских множеств* (или множеств, измеримых по Борелю) в $\mathbb{R}^k$; М. λ' впервые была определена Э. Борелем (E. Borel, 1898) (см. *Бореля мера*). Пополнение $\bar{\lambda}$ М. λ' (определенное на $\mathscr{S}$) наз. мерой Лебега, введенной в 1902 А. Лебегом (H. Lebesgue) (см. *Лебега мера*). Множества из области определения $\mathscr{S}$ меры $\bar{\lambda}$ наз. измеримыми по

Лебегу. Ограниченное множество $E\subset\mathbb{R}^k$ принадлежит $\bar{\mathscr{S}}$ тогда и только тогда, когда $\bar{\lambda}(I)=\lambda^*(E)+\lambda^*(I\setminus E)$, где $I\in\mathscr{P}$ — какой-либо интервал, содержащий E, при этом $\bar{\lambda}(E)=\lambda^*(E)$. Множество $E\subset\mathbb{R}^k$ принадлежит $\bar{\mathscr{S}}$ тогда и только тогда, когда $E\cap\mathscr{S}_{r_n}\in\bar{\mathscr{S}}$ при всех n для нек-рой последовательности $\{r_n\}$, $r_n>0$, $n=1, 2, \ldots$, $r_n\to\infty$, где $\mathscr{S}_r=\{x\in\mathbb{R}^k,\ \|x\|\leqslant r\}$. Мощность совокупности всех борелевских множеств в $\mathbb{R}$ есть $\mathfrak{c}$ (мощность континуума), а мощность совокупности всех множеств, измеримых по Лебегу, есть $2^{\mathfrak{c}}$, так что включение $\mathscr{S}\subset\bar{\mathscr{S}}$ строгое, т. е. есть множества, измеримые по Лебегу и неизмеримые по Борелю.

Мера Лебега $\bar{\lambda}$ инвариантна относительно ортогональных линейных преобразований A пространства $\mathbb{R}^k$ и относительно сдвигов на $x\in\mathbb{R}^k$, т. е. $\bar{\lambda}(AE+x)=\bar{\lambda}(E)$ для любого $E\in\mathscr{S}$.

Используя аксиому произвольного выбора, можно показать, что существуют множества, неизмеримые по Лебегу. Напр., на прямой таковым является множество, к-рое получится, если взять по одной точке из каждого класса смежности R по аддитивной подгруппе рациональных чисел.

Мерам Бореля и Лебега в $\mathbb{R}^k$ исторически предшествовала М., определенная К. Жорданом (K. Jordan, 1892) (см. *Жордана мера*). Определение меры Жордана идейно весьма близко к классич. определению площади и объема, восходящему к древним грекам: множество $E\subset\mathbb{R}^k$ наз. измеримым по Жордану, если найдутся множества, являющиеся конечными объединениями непересекающихся прямоугольников, одно — содержащееся в E, другое — содержащее E, разность объемов (определяемых очевидным образом) к-рых сколь угодно мала. Мерой Жордана такого множества E наз. нижняя грань объемов множеств — конечных объединений прямоугольников, накрывающих E. Множество, измеримое по Жордану, измеримо и по Лебегу, и его мера Жордана совпадает с его мерой Лебега. Область определения меры Жордана является кольцом, но не σ-кольцом, и это сильно сужает границы ее применимости.

Мера Лебега является частным случаем более общей меры Лебега — Стилтьеса. Последняя определяется посредством определенной на $\mathbb{R}^k$ действительной функции F такой, что

1) $-\infty<F<\infty$,

2) $\Delta_{b_1-a_1}\ \ldots\ \Delta_{b_k-a_k}F(a_1, \ldots, a_k)\geqslant 0$

при $a_i<b_i$, $i=1, \ldots, k$, где $\Delta_{b_i-a_i}$ — разностный оператор с шагом b_i-a_i, взятый в точке a_i применительно к i-й координате,

3) $F(a_1, \ldots, a_k)\uparrow F(b_1, \ldots, b_k)$ при $a_i\uparrow b_i$, $i=1, \ldots, k$.

По заданной функции F М. μ_F интервала

$$I=\{(x_1, \ldots, x_k): a_i\leqslant x_i<b;\ i=1, \ldots, k\}$$

определяется формулой

$$\mu_F(I)=\Delta_{b_1-a_1}\ldots\Delta_{b_k-a_k}F(a_1, \ldots, a_k),$$

оказывается счетно аддитивной на полукольце всех таких интервалов и продолжается на σ-алгебру борелевских множеств; пополнение этого продолжения и есть мера Лебега — Стилтьеса, отвечающая функции F. В частном случае, когда

$$F(x_1, \ldots, x_k)=x_1\ \ldots\ x_k,$$

получается мера Лебега.

Меры в произведениях пространств. Произведением измеримых пространств $(X_1, \mathscr{S}_1)$ и $(X_2, \mathscr{S}_2)$ наз. измеримое пространство, образованное

множеством $X_1\times X_2=\{(x_1,\ x_2):x_1\in X_1,\ x_2\in X_2\}$ (произведением множеств X_1 и X_2) и σ-кольцом $\mathscr{S}_1\times\mathscr{S}_2$ его подмножеств (произведением σ-колец $\mathscr{S}_1$ и $\mathscr{S}_2$), порожденным полукольцом $\mathscr{P}$ множеств вида

$$E_1\times E_2=\{(x_1,\ x_2):x_1\in E_1\in\mathscr{S}_1,\ x_2\in E_2\in\mathscr{S}_2\}.$$

Если $(X_1,\ \mathscr{S}_1,\ \mu_1)$, $(X_2,\ \mathscr{S}_2,\ \mu_2)$ — пространства с М., то формула

$$\mu\,(E_1\times E_2)=\mu_1\,(E_1)\,\mu_2\,(E_2),\ E_1\in\mathscr{S}_1,\ E_2\in\mathscr{S}_2$$

определяет М. на $\mathscr{P}$; когда М. μ_1 и μ_2 σ-конечны, М. μ однозначно продолжается до М. на $\mathscr{S}_1\times\mathscr{S}_2$, обозначаемой $\mu_1\times\mu_2$. Мера $\mu_1\times\mu_2$ и пространство $(X_1\times X_2,\ \mathscr{S}_1\times\mathscr{S}_2,\ \mu_1\times\mu_2)$ наз. соответственно произведением мер μ_1 и μ_2 и произведением пространств с мерой $(X_1,\ \mathscr{S}_1,\ \mu_1)$ и $(X_2,\ \mathscr{S}_2,\ \mu_2)$. Пополнение произведения меры Лебега в $\mathbb{R}^k$ и меры Лебега в $\mathbb{R}^l$ есть мера Лебега в $\mathbb{R}^{k+l}$. Аналогично определяется произведение любого конечного числа пространств с М.

Пусть $(X_i,\ \mathscr{S}_i,\ \mu_i)$, $i\in I$,— произвольная совокупность пространств с М. таких, что $\mu_i(X_i)=1$. Пространство-произведение $X=\prod_{i\in I}X_i$, по определению, есть множество всех функций на I, принимающих при каждом $i\in I$ значение $x_i\in X_i$. Измеримым прямоугольником в X наз. множество вида $\prod_{i\in I}E_i$, где $E_i\in\mathscr{S}_i$ и лишь конечное число E_i отлично от X_i. Семейство измеримых прямоугольников образует полукольцо $\mathscr{P}$. Порожденное $\mathscr{P}$ σ-кольцо обозначается $\prod_{i\in I}\mathscr{S}_i$ и наз. произведением σ-колец $\mathscr{S}_i$. Пусть μ — функция на $\mathscr{P}$, определенная равенством $\mu(E)=\prod_{i\in I}\mu_i(E_i)$ для $E=\prod_{i\in I}E_i$. Так, определенная функция μ является М., к-рая может быть однозначно продолжена до М., обозначаемой $\prod_{i\in I}\mu_i$, на $\prod_{i\in I}\mathscr{S}_i$. Пространство $\left(\prod_{i\in I}X_i,\ \prod_{i\in I}\mathscr{S}_i,\ \prod_{i\in I}\mu_i\right)$ наз. произведением пространств $(X_i,\ \mathscr{S}_i,\ \mu_i)$, $i\in I$.

Произведение пространств с М. в произвольном числе является частным случаем следующей более общей схемы, играющей важную роль в теории вероятностей. Пусть $(X_i,\ \mathscr{S}_i)$, $i\in I$,— семейство измеримых пространств ($\mathscr{S}_i$ есть σ-алгебра) и пусть для каждого конечного множества $I_1\subset I$ в измеримом пространстве $\left(\prod_{i\in I_1}X_i,\ \prod_{i\in I_1}\mathscr{S}_i\right)$ задана вероятностная М. μ_{I_1} (произведение М. соответствует тому случаю, когда $\mu_{I_1}=\prod_{i\in I_1}\mu_i$ для любого конечного $I_1\subset I$). Пусть М. μ_{I_1} и μ_{I_2} согласованы в том смысле, что если $I_1\subset I_2$ и p_{21} проекция $\prod_{i\in I_2}X_i$ на $\prod_{i\in I_1}X_i$, то $\mu_{I_1}(E)=\mu_{I_2}p_{21}^{-1}(E)$ для всех $E\subset\prod_{i\in I_1}\mathscr{S}_i$ (по определению, p_{21} есть такое отображение $\prod_{i\in I_2}X_i$ на $\prod_{i\in I_1}X_i$, что $(p_{21}(x))_i=x_i$ при всех $i\in I_1$). Существует ли вероятностная М. на $\prod_{i\in I}\mathscr{S}_i$ такая, что для любого конечного $I_1\subset I$ и любого $E\in\prod_{i\in I_1}\mathscr{S}_i$ справедливо равенство $\mu_{I_1}(E)=\mu p^{-1}(E)$, где p — проекция $\prod_{i\in I}X_i$ на $\prod_{i\in I_1}X_i$? Оказывается, что такая М. существует не всегда, для ее существования нужны дополнительные условия. Одним из таких условий является совершенность М. μ_i (отвечающих одноточечным множествам $i\in I$). Понятие совершенной М. впервые было введено Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоровым [6]. Пространство с вполне конечной М. $(X,\ \mathscr{S},\ \mu)$ и сама М. μ наз. совершенными, если для всякой $\mathscr{S}$-измеримой действительной функции f найдется такое борелевское множество $B\subset f(X)$, что $\mu(f^{-1}(B))=\mu(X)$. В рамках

совершенных М. невозможен целый ряд «патологических» явлений, возникающих в общей теории М.

Меры в топологических пространствах. При изучении М. в топологич. пространствах обычно рассматривают М., определенные на множествах, так или иначе связанных с топологией пространства. Один из типичных подходов состоит в следующем. Пусть X — произвольное топологич. пространство и $\mathcal{Z}$ — класс множеств вида $f^{-1}(F)$, где f — действительная непрерывная функция на X и $F\in\mathbb{R}^1$ — замкнутое множество. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра, порожденная классом $\mathcal{Z}$, $\mathcal{B}$ есть σ-алгебра, порожденная $\mathcal{Z}$ ($\mathcal{B}$ наз. σ-алгеброй бэровских множеств), и пусть $\mathfrak{M}$ — класс вполне конечных конечно аддитивных М. m на $\mathfrak{A}$, регулярных в том смысле, что

$$m(E)=\sup\{m(Z): Z\subset E,\ Z\in\mathcal{Z}\}$$

для любого $E\in\mathfrak{A}$. В $\mathfrak{M}$ выделяют подмножества $\mathfrak{M}_\sigma$, $\mathfrak{M}_\tau$, $\mathfrak{M}_t$, образованные (конечно аддитивными) М., обладающими дополнительными свойствами гладкости. По определению, $\mu\in\mathfrak{M}_\sigma$, если $\mu(Z_n)\downarrow 0$ для любой последовательности $Z_n\downarrow\varnothing$, $Z_n\in\mathcal{Z}$ (это свойство равносильно счетной аддитивности μ; М. из $\mathfrak{M}_\sigma$ могут быть однозначно продолжены на $\mathcal{B}$, и в дальнейшем они считаются заданными на $\mathcal{B}$), $\mu\in\mathfrak{M}_\tau$, если $\mu(Z_\alpha)\downarrow 0$ для любой сети $Z_\alpha\downarrow\varnothing$, $Z_\alpha\in\mathcal{Z}$ и $\mu\in\mathfrak{M}_t$, если для любого $\varepsilon>0$ существует компакт K такой, что $\mu(E)<\delta$, когда $E\subset X\setminus K$, $E\in\mathfrak{A}$.

Имеют место включения $\mathfrak{M}\supset\mathfrak{M}_\sigma\supset\mathfrak{M}_\tau\supset\mathfrak{M}_t$. М. из $\mathfrak{M}_\sigma$ наз. бэровскими мерами.

Существует тесная связь между М. из $\mathfrak{M}$ и линейными функционалами на пространстве $C(X)$ ограниченных непрерывных функций на X. Именно, формула

$$\Lambda(f)=\int_X f\,dm$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между М. $m\in\mathfrak{M}$ и неотрицательными линейными функционалами Λ на $C(X)$ (неотрицательность означает, что $\Lambda(f)\geqslant 0$, когда $f(x)\geqslant 0$, $x\in X$). Более того, для любого $Z\in\mathcal{Z}$

$$m(Z)=\inf\{\Lambda(f): \chi_Z\leqslant f\leqslant 1\},$$

где χ_Z — индикатор множества Z. При этом М. из $\mathfrak{M}_\sigma$ отвечают σ-гладкие функционалы Λ (т. е. такие, что $\Lambda(f_n)\to 0$, когда $f_n\downarrow 0$ в $C(X)$), М. из $\mathfrak{M}_\tau$ отвечают τ-гладкие функционалы Λ (т. е. такие, что $\Lambda(f_\alpha)\to 0$ для любой сети $f_\alpha\downarrow 0$ в $C(X)$) и М. из $\mathfrak{M}_t$ соответствуют плотные функционалы Λ (т. е. такие, что $\Lambda(f_\alpha)\to 0$ для любой сети f_α в $C(X)$ такой, что $\|f_\alpha\|\leqslant 1$ при всех α и $f_\alpha\to 0$ равномерно на компактных подмножествах; здесь $\|\cdot\|$ — равномерная норма).

В пространстве $\mathfrak{M}$ обычно рассматривается слабая топология w; в этой топологии базисными окрестностями являются множества вида

$$U(m_0;\ f_1,\ \ldots,\ f_n,\ \varepsilon)=$$
$$=\left\{m:\left|\int_X f_k\,(dm-dm_0)\right|<\varepsilon,\right.$$
$$\left.k=1,\ \ldots,\ n,\ f_1,\ \ldots,\ f_n\in C(X)\right\}.$$

В топологии w $\mathfrak{M}$ есть вполне регулярное хаусдорфово пространство. Сходимость в топологии w обычно обозначается знаком $\Rightarrow$. Для сходимости сети $m_\alpha\Rightarrow m$ необходимо и достаточно, чтобы $m_\alpha(X)\to m(X)$ и $\limsup m_\alpha(Z)\leqslant m(Z)$ для всех $Z\in\mathcal{Z}$. Другим необходимым и достаточным условием является $m_\alpha(E)\to m(E)$ для всех $E\in\mathfrak{A}$ таких, что существует Z_1, $Z_2\in\mathcal{Z}$, для к-рых $X\setminus E\subset Z_1$, $E\subset Z_2$ и $m(Z_1\cap Z_2)=0$. Если пространство X вполне регулярно и хаусдорфово, то $\mathfrak{M}_\tau$ метризуемо

тогда и только тогда, когда метризуемо X. Если X — метрич. пространство, то $\mathfrak{M}_\tau$ метризуемо как сепарабельное метрич. пространство тогда и только тогда, когда X сепарабельно, и $\mathfrak{M}_\tau$ метризуемо как полное метрич. пространство тогда и только тогда, когда X метризуемо как полное метрич. пространство. Когда X метризуемо, $\mathfrak{M}_\sigma$ метризуемо тогда и только тогда, когда оно метризуемо *Леви — Прохорова метрикой*.

Пространство $\mathfrak{M}_\sigma$ секвенциально замкнуто в $\mathfrak{M}$ (теорема Александрова). Множество $A \subset \mathfrak{M}$ наз. плотным, если $\sup\{m(X) : m \in A\} < \infty$ и если для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт K такой, что $m(E) < \delta$, когда $E \subset X \setminus K$, $m \in A$, $E \in \mathfrak{A}$. Если $A \subset \mathfrak{M}_\sigma$ плотно, то A относительно компактно в $\mathfrak{M}_\sigma$; обратно, если X метризуемо и топологически полно, $A \subset \mathfrak{M}_\sigma$ относительно компактно и каждая мера из A сосредоточена на нек-ром сепарабельном подмножестве, то A плотно (теорема Прохорова).

При определенных условиях М. из $\mathfrak{M}_\sigma$ могут быть продолжены до борелевских М., т. е. М., определенных на σ-алгебре борелевских множеств (см. *Борелевское множество, Бореля мера*). Так, если X — нормальное хаусдорфово счетно паракомпактное пространство, то каждая М. $\mu \in \mathfrak{M}_\sigma$ может быть однозначно продолжена до регулярной борелевской М. Если X — вполне регулярно и хаусдорфово, то всякая τ-гладкая (плотная) бэровская М. может быть однозначно продолжена до регулярной τ-гладкой (плотной) борелевской М.

Носителем бэровской (борелевской) М. наз. наименьшее множество Z из $\mathfrak{Z}$ (наименьшее замкнутое множество), М. к-рого совпадает с М. всего пространства. У τ-гладких М. носители всегда существуют.

Нередко при рассмотрении М. в топологич. пространствах (особенно — в локально компактных хаусдорфовых пространствах) борелевские и бэровские М. считают заданными на более узких классах множеств — на σ-кольцах, порожденных соответственно компактными множествами и компактными G_δ-множествами.

Пусть G — локально компактная хаусдорфова топологич. группа. Левой мерой Хаара в G наз. М., определенная на σ-кольце, порожденном всеми компактными множествами, не равная тождественно нулю и такая, что $\mu(xE) = \mu(E)$ для любых $x \in G$ и E из области определения μ. Правая мера Хаара определяется аналогично заменой условия $\mu(xE) = \mu(E)$ на условие $\mu(Ex) = \mu(E)$. В любой группе рассматриваемого типа существует и единственна (с точностью до мультипликативной положительной постоянной) левая мера Хаара. Всякая левая мера Хаара регулярна в том смысле, что $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E\}$, где K — компактные множества. Аналогичными свойствами обладает и правая мера Хаара. Мера Лебега в $\mathbb{R}^k$ является частным случаем *Хаара меры*. См. также ст. *Мера* в топологическом векторном пространстве.

Изоморфизм пространств с мерой. Пусть $(X, \mathcal{S}, \mu)$ — пространство с М. Назовем множества $E, E' \in \mathcal{S}$ равными ($E = E'[\mu]$), если $\mu(E \Delta E') = 0$ (здесь $E \Delta E'$ — симметрич. разность E и E'). Класс множеств $\mathcal{S}$ с таким определением равенства обозначим $\mathcal{S}_\mu$. В $\mathcal{S}_\mu$ корректно определены теоретико-множественные операции, проводимые в конечном (или счетном) числе; напр., если $E_1 = E_1'[\mu]$ и $E_2 = E_2'[\mu]$, то $E_1 \cup E_2 = E_1' \cup E_2'[\mu]$. Мера μ переносится очевидным образом на $\mathcal{S}_\mu$.

Пусть $\tilde{\mathcal{S}}_\mu$ — подмножество $\mathcal{S}_\mu$, состоящее из множеств конечной М. Функция $\rho(E, E') = \mu(E \Delta E')$ на $\tilde{\mathcal{S}}_\mu \times \tilde{\mathcal{S}}_\mu$ является метрикой. Пространство с М. $(X, \mathcal{S}, \mu)$ наз. сепарабельным, если $\tilde{\mathcal{S}}_\mu$ с метрикой ρ сепарабельно. Если $(X, \mathcal{S}, \mu)$ — пространство с σ-конечной М. и σ-кольцо $\mathcal{S}$ имеет счетное число образующих (т. е.

существует счетное множество $\{E_n\}\subset\mathscr{S}$ такое, что $\mathscr{S}$ есть наименьшее содержащее его σ-кольцо), то метрич. пространство $\tilde{\mathscr{S}}\mu$ сепарабельно.

Два пространства с М. $(X_1, \mathscr{S}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathscr{S}_2, \mu_2)$ наз. *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение φ из $(\mathscr{S}_1)_{\mu_1}$ на $(\mathscr{S}_2)_{\mu_2}$ такое, что

$$\varphi(E\setminus F)=\varphi(E)\setminus\varphi(F),\ \varphi(E\cup F)=\varphi(E)\cup\varphi(F)$$

и $\mu_1(E)=\mu_2(\varphi(E))$ для любых E, $F\in(\mathscr{S}_1)_{\mu_1}$. Пусть теперь $(X, \mathscr{S}, \mu)$ — произвольное пространство с вполне конечной М. Существует разбиение X на непересекающиеся множества X_n, $n=1, 2, \ldots$, из $\mathscr{S}$ такое, что ограничение μ на X_n изоморфно либо М., сосредоточенной в одной точке, либо М., с точностью до положительного множителя равной прямому произведению $\Pi_{i\in I}(U_i, \mathcal{U}_i, u_i)$, где $U_i=\{0, 1\}$, $u_i(\{0\})=u_i(\{1\})=1/2$, а множество I может иметь произвольную мощность (теорема Магарам — Колмогорова). Если пространство $(X, \mathscr{S}, \mu)$ сепарабельно, неатомическое и $\mu(X)=1$, то оно изоморфно пространству $\Pi_{i\in I}(U_i, \mathcal{U}_i, u_i)$, где I счетно, к-рое в свою очередь изоморфно единичному интервалу с мерой Лебега.

Наряду с теорией М. как функции подмножеств нек-рого множества развита также теория М. как функции элементов булева кольца (или *булевой алгебры*); эти теории во многом параллельны. Другая распространенная конструкция М. восходит к У. Юнгу (W. Young) и П. Даниелю (P. Daniell) (см. [12]). Помимо теории положительных М., имеются также развитые теории М., значения к-рых действительны, комплексны или, вообще, принадлежат нек-рым алгебраич. структурам.

Лит.: [1] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [2] Халмош П. Р., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [3] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [4] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [5] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [6] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949; [7] Варадарайн В. С., «Матем. сб.», 1961, т. 55, № 1, с. 35—100; [8] Parthasarathy K. R., Probability measures on metric spaces, N. Y.—L., 1967; [9] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [10] Сикорский Р., Булевы алгебры, пер. с англ., М., 1969; [11] Владимиров Д. А., Булевы алгебры, М., 1969; [12] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах, пер. с франц., М., 1977; [13] Diestel J., Uhl J., Vector measures, Providence, 1977.

В. В. Сазонов.

МЕРА в топологическом векторном пространстве — термин, употребляемый применительно к мере, заданной в топологическом векторном пространстве, когда хотят подчеркнуть те свойства этой меры, к-рые связаны с линейной и топологич. структурой этого пространства. Общей проблемой при построении М. в топологич. векторном пространстве является задача продолжения *предмеры* до М. Пусть E — (действительное или комплексное) локально выпуклое пространство, $\mathfrak{A}(E)$ — алгебра его *цилиндрических множеств* и на алгебре $\mathfrak{A}(E)$ определена предмера. Задача состоит в продолжении этой предмеры до счетно аддитивной М., определенной на σ-алгебре $\mathfrak{B}_0(E)$ — наименьшей σ-алгебре, содержащей алгебру $\mathfrak{A}(E)$; $\mathfrak{B}_0(E)$ — самая узкая из всех σ-алгебр (слабоборелевской, борелевской и т. д.), естественно связанных с топологией E; для большого класса пространств E эти σ-алгебры совпадают. В частном, но наиболее важном случае, когда пространство $E=V'$, т. е. является сопряженным к нек-рому локально выпуклому пространству V, рассматриваемому в слабой $*$-топологии (так что $E'=V$), для продолжимости предмеры μ в V' до М. достаточно, чтобы ее характери-

стич. функционал (преобразование Фурье)

$$\chi(\varphi) = \int_{V'} \exp\{ix(\varphi)\}\, d\mu(x),\ x \in V',\ \varphi \in V,$$

был непрерывен в т. н. топологии Сазонова в пространстве V (т. е. топологии, порожденной всеми непрерывными гильбертовыми полунормами в V), и в ряде случаев, напр. когда V — *Фреше пространство*, необходимо, чтобы характеристич. функционал был непрерывен в исходной топологии V. Так, когда V — *ядерное пространство*, топология Сазонова совпадает с исходной топологией, и любая предмера на V' с непрерывным характеристич. функционалом продолжается до М. В случае, когда предмера определена в гильбертовом пространстве H, сформулированное выше достаточное условие ее продолжимости до М. является и необходимым. Кроме этого общего критерия продолжимости предмеры до М. существуют частные результаты такого рода, приложимые к тому или иному классу М. (или классу пространств). Напр., гауссова предмера на V', где V' — локально выпуклое пространство (т. е. предмера, сужение к-рой на любую σ-алгебру $\mathfrak{B}(L) \subset \mathfrak{U}(V')$, $L \subset V$, $\dim L < \infty$, является гауссовым распределением с корреляционным функционалом $B(\varphi_1, \varphi_2,)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in V$), продолжается до М., если существует выпуклая окрестность нуля в V, ε-энтропия к-рой в метрике, порожденной скалярным произведением $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = B(\varphi_1, \varphi_2)$, меньше двух.

Для слабой сходимости последовательности (вероятностных) М. в сопряженном пространстве V' достаточны поточечная сходимость характеристич. функционалов этих М. (она же и необходима) и равностепенная непрерывность их в нуле относительно топологии Сазонова в V, а необходима равностепенная непрерывность этих функционалов относительно исходной топологии V. В случае, когда V — гильбертово пространство, известны необходимые и достаточные условия слабой компактности семейства М. в V, также выражающиеся в терминах их характеристич. функционалов. Вопрос о квазиинвариантности М. в топологическом векторном пространстве (см. *Квазиинвариантная мера*) относительно нек-рой совокупности сдвигов (множества квазиинвариантности) этого пространства (известно, что для ряда бесконечномерных векторных пространств множество квазиинвариантности ненулевой М. не может совпадать со всем пространством), а также вопрос о критериях абсолютной непрерывности одной М. относительно другой исследованы лишь (1982) для гауссовых М. Изучение М. в топологических векторных пространствах связано главным образом с *интегралами по траекториям*, а также с теорией обобщенных случайных полей и в значительной степени стимулируется приложениями этих теорий к физике и механике.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [2] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах, пер. с франц., М., 1977; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [4] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [5] Судаков В. Н., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1976, т. 141; [6] Смолянов О. Г., Фомин С. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 4, с. 3—56.

Р. А. Минлос.

МЕРГЕЛЯНА ТЕОРЕМА — теорема о возможности равномерной полиномиальной аппроксимации функций комплексного переменного. Пусть K — компакт со связным дополнением на плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z. Тогда всякая функция f, непрерывная на K и голоморфная в его внутренних точках, равномерно на K приближается многочленами от z.

Эта теорема была доказана С. Н. Мергеляном (см. [1], [2]); она завершила большой цикл исследований

по теории приближений в комплексной плоскости и имеет много применений в различных разделах комплексного анализа.

В случае, когда K не имеет внутренних точек, это утверждение было доказано М. А. Лаврентьевым [3]; а для случая, когда K — замкнутая область со связным дополнением, соответствующая теорема доказана М. В. Келдышем [4].

Из М. т. вытекает следующее утверждение. Пусть K — произвольный компакт на плоскости $\mathbb{C}$. Для того чтобы функция f, непрерывная на K и голоморфная внутри K, равномерно приближалась многочленами от z, необходимо и достаточно, чтобы f голоморфно продолжалась во все ограниченные связные компоненты множества $\mathbb{C}\setminus K$.

Задача о приближении многочленами является частным случаем задачи о приближении рациональными функциями с полюсами вне K. С. Н. Мергелян доказал также несколько достаточных условий рациональной аппроксимации (см. [2]). Полное решение этой задачи (для компактов $K\subset\mathbb{C}$) получено в терминах *аналитических емкостей* (см. [5]).

К М. т. примыкает большой цикл работ о полиномиальных, рациональных и голоморфных приближениях в пространстве многих комплексных переменных $\mathbb{C}^n$. Здесь получены пока только частные результаты для специальных типов компактов.

Лит.: [1] Мергелян С. Н., «Докл. АН СССР», 1951, т. 78, № 3, с. 405—08; [2] его же, «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 2, с. 31—122; [3] Лаврентьев М. А., Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynomes, P., 1936; [4] Келдыш М. В., «Матем. сб.», 1945, т. 16, № 3, с. 249—57; [5] Витушкин А. Г., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 6, с. 141—99; [6] Некоторые вопросы теории приближений, пер. с англ., М., 1963; [7] Гамелин Т. В., Равномерные алгебры, пер. с англ., М., 1973. *Е. М. Чирка.*

МЕРОМОРФНАЯ ФУНКЦИЯ одного комплексного переменного в области $\Omega\subset\mathbb{C}$ (или на римановой поверхности Ω) — голоморфная функция в области $\Omega\setminus\{a_1, a_2, \ldots\}$, к-рая в каждой особой точке a_ν имеет *полюс* (т. е. a_ν — изолированная точка множества $\{a_1, a_2, \ldots\}$, не имеющего предельных точек в Ω, и $\lim\limits_{z\to a_\nu}|f(z)|=\infty$). Совокупность $M(\Omega)$ всех М. ф. в Ω является полем относительно обычных поточечных операций с последующим доопределением в устранимых особенностях.

Отношение φ/ψ любых голоморфных в Ω функций, $\psi\not\equiv 0$, является М. ф. в Ω. Обратно, всякая М. ф. в области $\Omega\subset\mathbb{C}$ (и на некомпактной римановой поверхности Ω) представляется в виде $f=\varphi/\psi$, $\psi\not\equiv 0$, где φ, ψ голоморфны и не имеют общих нулей в Ω. Таким образом, на некомпактной римановой поверхности поле $M(\Omega)$ совпадает с полем отношений кольца $O(\Omega)$ голоморфных функций в Ω.

Всякая М. ф. $f\in M(\Omega)$ определяет непрерывное отображение $\tilde f$ области Ω в сферу Римана $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, к-рое является *голоморфным отображением* относительно стандартной комплексной структуры $\mathbb{C}\cup\{\infty\}\approx\mathbb{C}P_1$. Обратно, всякое голоморфное отображение $\tilde f\colon \Omega\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, $\tilde f\not\equiv\infty$, определяет М. ф. f в Ω: множество полюсов f совпадает с дискретным множеством $\tilde f^{-1}(\infty)$ и $f(z)=\tilde f(z)\in\mathbb{C}$, если $z\in\Omega\setminus f^{-1}(\infty)$. Таким образом, М. ф. одного комплексного переменного можно отождествлять с голоморфными отображениями ($\not\equiv\infty$) в сферу Римана.

Основные задачи теории М. ф. — это вопросы существования (и построения) М. ф. с данными особенностями.

I. Задано замкнутое дискретное подмножество $a_1, a_2, \ldots\subset\Omega$ и в каждой точке a_ν — главная часть

разложения Лорана

$$f_\nu(z)=\sum_{j=1}^{n_\nu} c_{\nu j}\,(z-a_\nu)^{-j};$$

требуется найти М. ф. $f\in M(\Omega)$ с этими главными частями, т. е. такую, что f голоморфна в $\Omega\setminus\{a_1, a_2, \ldots\}$ и $f-f_\nu$ голоморфна в окрестности a_ν для каждого ν. Если число точек a_ν конечно, то (в области $\Omega\subset\mathbb{C}$) задача решается тривиально функцией $\sum f_\nu$. В общем случае эту задачу решает т е о р е м а Миттаг-Леффлера: на всякой некомпактной римановой поверхности существует М. ф. с заданными главными частями f_ν, $\nu=1, 2, \ldots$. На компактной римановой поверхности (напр., на торе) эта задача в общем неразрешима — нужны дополнительные условия согласования главных частей.

Вторую основную задачу удобно формулировать в терминах *дивизоров*, т. е. отображений $D:\Omega\to\mathbb{Z}$ таких, что для всякого компакта $K\subset\Omega$ число точек $z\in K$, в к-рых $D(z)\neq 0$, конечно (число $D(z)$ наз. кратностью D в точке z). Дивизор наглядно можно записать в виде формальной суммы $\sum k_\nu a_\nu$, где $a_\nu\in\Omega$ — точки, в к-рых $D(a_\nu)=:k_\nu\neq 0$; в случае конечного числа слагаемых число $\sum k_\nu=:\deg D$ наз. с т е п е н ь ю д и в и з о р а D. Для М. ф. f ее дивизор (f) равен 0 во всех точках, кроме нулей и полюсов f, где его кратность полагается равной соответственно порядку нуля или полюса (порядки полюсов отрицательны).

II. В точках замкнутого дискретного подмножества $\{a_1, a_2, \ldots\}\subset\Omega$ заданы «кратности» — целые числа $k_\nu\neq 0$. Требуется найти М. ф. с нулями и полюсами данных кратностей, т. е. такую, что f голоморфна в $\Omega\setminus\{a_1, a_2, \ldots\}$ и $f(z)\,(z-a_\nu)^{-k_\nu}$ голоморфна и не равна нулю в окрестности a_ν, $\nu=1, 2, \ldots$. В случае конечного числа точек a_ν (и $\Omega\subset\mathbb{C}$) такой будет, напр., $f(z)=\Pi(z-a_\nu)^{k_\nu}$. В общем случае задачу решает т е о р е м а В е й е р ш т р а с с а: на некомпактной римановой поверхности Ω для любого заданного дивизора D существует М. ф. f, дивизор к-рой (f) совпадает с D. Для компактной римановой поверхности Ω голоморфное отображение в сферу Римана, определяемое непостоянной М. ф. f, является разветвленным накрытием, и поэтому каждое значение функция f принимает одинаково часто, в частности число нулей f равно числу ее полюсов (с учетом кратностей). Таким образом, условие $\deg(f)=0$ необходимо для разрешимости задачи II на компактной римановой поверхности. В общем оно не достаточно; необходимое и достаточное условие существования М. ф. с данным дивизором дает т е о р е м а А б е л я (см. [2]).

Функции $f\in M(\Omega)$, удовлетворяющие условию $(f)+D\geqslant 0$ для данного дивизора D на компактной римановой поверхности Ω, образуют конечномерное линейное пространство O_D (над полем $\mathbb{C}$); если $\deg D<0$, то $O_D=\{0\}$.

Т е о р е м а Р и м а н а — Р о х а утверждает, что

$$\dim O_D-\dim O_{K-D}=\deg D-g+1,$$

где K — т. н. канонич. дивизор и g — род римановой поверхности Ω. Из этого соотношения получаются многие теоремы существования (если $\dim O_{K-D}+\deg D>g-2$, то $\dim O_D\geqslant 2$ и, значит, в O_D имеются непостоянные М. ф.). Напр., на всякой компактной римановой поверхности Ω рода g существует М. ф., осуществляющая не более чем $(g+1)$-листное разветвленное накрытие $f:\Omega\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

Большое место в теории М. ф. одного комплексного переменного занимает *распределения значений теория* (теория Неванлинны), изучающая распределение корней

уравнений $f(z)=a$, $a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, при подходе к границе области.

Мероморфная функция нескольких комплексных переменных. Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^n$ (или комплексное n-мерное многообразие) и $P\subset\Omega$ — (комплексное) аналитич. подмножество коразмерности 1 (или пустое). Голоморфная функция f, определенная в $\Omega\setminus P$, наз. мероморфной функцией в Ω, если для каждой точки $p\in P$ найдется сколь угодно малая окрестность $U\ni p$ в Ω и голоморфные в U функции φ, ψ без общих необратимых в $O(U)$ множителей такие, что $f=\varphi/\psi$ в $U\setminus P$. Множество $P=P_f$ наз. *полярным множеством* М. ф. f. Его подмножество $N=N_f$, к-рое локально определяется условием $\varphi=\psi=0$, наз. множеством (точек) неопределенности М. ф. f; это аналитич. подмножество Ω (комплексной) коразмерности $\geqslant 2$. В каждой точке $p\in N$ функция f не определена по существу: предельные значения $f(z)$ при $z\to p$, $z\in\Omega\setminus P$, заполняют всю сферу Римана $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. С другой стороны, в точках множества $P\setminus N$ существует $\lim\limits_{z\to p} f(z)=\infty$, и после доопределения $f(p)=\infty$ для $p\in P\setminus N$ получается голоморфное отображение $\Omega\setminus N$ в сферу Римана. Обратно, если N — произвольное комплексное аналитич. подмножество Ω коразмерности $\geqslant 2$ (возможно, пустое), то любое голоморфное отображение $f:\Omega\setminus N\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ определяет М. ф. в Ω, равную f в $\Omega\setminus P$, где $P=N\cup f^{-1}(\infty)$ оказывается аналитич. подмножеством Ω коразмерности 1 или пустым. Таким образом, М. ф. f в Ω — это голоморфное отображение в сферу Римана, определенное вне аналитич. подмножества $N_f\subset\Omega$ коразмерности $\geqslant 2$.

Третье, полностью локализованное, определение М. ф. (эквивалентное приведенным выше) формулируется в терминах пучков. Пусть O — пучок ростков голоморфных функций на Ω и M_z для каждой точки $z\in\Omega$ есть поле отношений кольца O_z (слоя пучка O над точкой z). Тогда $M=\bigcup M_z$ естественно наделяется структурой пучка полей, к-рый наз. пучком ростков М. ф. в Ω. М. ф. в Ω определяется как глобальное сечение M, т. е. непрерывное отображение $f: z\to f_z$ такое, что $f_z\in M_z$ для всех $z\in\Omega$. Множества P_f и N_f определяются так: если $f_z=\varphi_z/\psi_z$, где φ_z, $\psi_z\in O_z$, $\psi_z\neq 0$, то можно считать, что φ_z и ψ_z взаимно просты, т. е. не имеют общих необратимых в O_z множителей; тогда $z\in P$, если $\psi_z(z)=0$, и $z\in N$, если $\psi_z(z)=\varphi_z(z)=0$. Значение так определенной М. ф. f в точке $z\notin P$, по определению, равно $\varphi_z(z)/\psi_z(z)$.

Как и в одномерном случае, совокупность всех М. ф. в Ω образует поле $M(\Omega)$ относительно поточечных алгебраич. операций с последующим доопределением в устранимых особенностях.

Замыкание $Z=Z_f$ множества нулей М. ф. f, т. е. множества $\{z\in\Omega\setminus P_f: f(z)=0\}$, является аналитич. подмножеством Ω коразмерности 1 (или пустым), множество неопределенности $N=Z\cap P$. На Z_f и P_f можно определить порядки (кратности) нулей и полюсов М. ф. f. Если p — регулярная точка аналитич. множества $Z\cup P$, то в нек-рой окрестности $U\ni p$ множество $(Z\cup P)\cap U$ связно и задается уравнением $g=0$, $g\in O(U)$, причем $dg\neq 0$ всюду в U. Поэтому существует максимальное целое число $k(p)$ такое, что функция $fg^{-k(p)}$ голоморфно продолжается в U; это число наз. порядком (нуля, если $p\in Z$, и полюса, если $p\in P$) М. ф. f в точке p. Функция $k(p)$ локально постоянна на множестве регулярных точек $Z\cup P$. Поэтому каждой М. ф. f в Ω можно сопоставить ее дивизор $(f)=\sum k_\nu A_\nu$, где A_ν — неприводимые компоненты $Z_f\cup P_f$ и k_ν — кратность (порядок) f в регулярных точках $Z\cup P$, принадлежащих A_ν (другие обозначения: $(f)=D_f=\Delta_f$ и т. п.). На компактном комплексном многообразии

М. ф. определяется своим дивизором однозначно с точностью до постоянного множителя.

Задачи, к-рые в одномерном случае решают теоремы Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса, в многомерном случае наз. соответственно первой (аддитивной) и второй (мультипликативной) *Кузена проблемами*. Ввиду сложности полярного множества P_f понятие главной части М. ф. f в общем не определено, и проблемы Кузена формулируются так.

I. Дано открытое покрытие $\{U_\nu\}$ многообразия Ω и в каждом U_ν задана М. ф. f_ν; требуется найти М. ф. $f \in M(\Omega)$ такую, что $f-f_\nu \in O(U_\nu)$ для всех ν.

II. Для данного дивизора $D=\sum k_\nu A_\nu$ на Ω найти М. ф. $f \in M(\Omega)$ такую, что $(f)=D$.

Условия разрешимости этих задач в многомерном случае гораздо более жесткие, чем в одномерном.

Задача о представлении М. ф. в виде отношения двух голоморфных функций наз. п р о б л е м о й П у а н к а р е. У с и л е н н а я п р о б л е м а П у а н к а р е — представимость М. ф. в виде отношения голоморфных функций, ростки к-рых в каждой точке $z \in \Omega$ взаимно просты в O_z. Проблема Пуанкаре неразрешима на связном компактном комплексном многообразии, если на нем есть непостоянные М. ф. Однако она разрешима в любой области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, более того, в любой области на *Штейна многообразии* (см. [7]). Разрешимость усиленной проблемы Пуанкаре следует из разрешимости проблемы II Кузена (обратное неверно).

Функции $f_1, \ldots, f_k \in M(\Omega)$ наз. а л г е б р а и ч е с к и з а в и с и м ы м и, если существует многочлен $F \not\equiv 0$ от k переменных с комплексными коэффициентами такой, что $F(f_1(z), \ldots, f_k(z)) \equiv 0$ в общей области определения функций f_ν. Максимальное число алгебраически независимых М. ф. на Ω наз. с т е п е н ь ю т р а н с ц е н д е н т н о с т и поля $M(\Omega)$. На любом компактном комплексном многообразии это число не превосходит его (комплексной) размерности (т е о р е м а З и г е л я), более того, это поле имеет конечное число образующих (см. [6]).

На конкретных комплексных многообразиях М. ф. могут обладать дополнительными свойствами. Так, в проективном комплексном пространстве $\mathbb{C}P_n$ множество неопределенности любой непостоянной М. ф. непусто. Всякая М. ф. на проективном алгебраич. многообразии рациональна, т. е. представляется в виде отношения p/q однородных многочленов от однородных координат. На алгебраич. многообразиях поле $M(\Omega)$ достаточно богато. С другой стороны, существуют комплексные многообразия (напр., нек-рые неалгебраич. торы), на к-рых всякая М. ф. постоянна. Многомерные обобщения теоремы Римана — Роха не столь эффективны, и теоремы существования различных классов М. ф. получаются лишь для нек-рых классов комплексных многообразий.

См. также *Вейерштрасса теорема*, *Миттаг-Леффлера теорема*, *Римана — Роха теорема*.

Лит.: [1] Н е в а н л и н н а Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941; [2] Ф о р с т е р О., Римановы поверхности, пер. с нем., М., 1980; [3] Х е й м а н У.-К., Мероморфные функции, пер. с англ., М., 1966; [4] Ш а б а т Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1—2, М., 1976; [5] Х е р м а н д е р Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968; [6] Ш а ф а р е в и ч И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [7] K a j i w a r a J., S a k a i E., «Nagoya Math. J.», 1967, v. 29, p. 75—84.

Е. М. Чирка.

МЕРОМОРФНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ к о м п л е к с н ы х п р о с т р а н с т в — обобщение понятия *мероморфной функции*. Пусть X и Y — комплексные пространства, A — открытое подмножество в X такое, что $X \setminus A$ — нигде не плотное аналитич. подмножество, и пусть дано аналитич. отображение $f: A \to Y$. Отображение f наз. м е р о м о р ф н ы м о т о б р а ж е н и-

е м пространства X в Y, если замыкание Γ_f графика A^* отображения f в $X\times Y$ является аналитич. подмножеством в $X\times Y$, причем проекция $\pi:\Gamma_f\to X$ — собственное отображение. Множество Γ_f наз. графиком мероморфного отображения f. Отображение $\pi:\Gamma_f\to X$ сюръективно и определяет биективное отображение множеств неприводимых компонент. Если $A_0^f\subset X$ — наибольшее открытое подмножество, на к-рое f можно продолжить в качестве аналитич. отображения, то $I_f=X\setminus A_0^f$ — аналитическое нигде не плотное подмножество пространства X, наз. множеством неопределенности отображения f. Множество $\pi^{-1}(A_0^f)=A_0^{f*}$ открыто и плотно в Γ_f, причем $A^*\subseteq A_0^{f*}$ и $\Gamma_f\setminus A_0^{f*}$ аналитично и нигде не плотно в Γ_f. Ограничение $\pi:A_0^{f*}\to A_0^f$ есть изоморфизм аналитич. пространств. Если X — нормальное комплексное пространство, то $\operatorname{codim} I_f\geqslant 2$ и $\dim_z\pi^{-1}(x)>0$ тогда и только тогда, когда $z\in\pi^{-1}(x)$ и $x\in I_f$. Если X не нормально, то $\pi^{-1}(x)$ может состоять из конечного числа точек даже в случае, когда $x\in I_f$. В случае $Y=\mathbb{C}P^1$ понятие М. о. сводится к понятию мероморфной функции.

Пусть $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, $k:X\to Z$ — мероморфные отображения комплексных пространств. Говорят, что композиция $g\circ f$ отображений f и g определена и равна k, если существует открытое всюду плотное подмножество U в X такое, что $U\subseteq A_0^f$, $f(U)\subset A_0^g$, $U\subset A_0^k$ и что $k|U=g\circ f|U$. Мероморфное отображение $f:X\to Y$ наз. бимероморфным, если существует мероморфное отображение $g:Y\to X$ такое, что $f\circ g=1_Y$ и $g\circ f=1_X$. Композиция бимероморфных отображений $X\to Y$ и $Y\to Z$ всегда определена.

Лит.: [1] Andreotti A., Stoll W., Analytic and algebraic dependence of meromorphic functions, B. — [a. o.], 1971; [2] Remmert R., «Math. Ann.», 1957, Bd 133, № 3, S. 328—70.

Д. А. Пономарев.

МЕРСЕННА ЧИСЛО — простое число вида $M_n=2^n-1$, где $n=1, 2, 3, \ldots$. М. ч. рассматривались в 17 в. М. Мерсенном (M. Mersenne). Числа M_n могут быть простыми только при простых значениях n. При $n=2, 3, 5, 7$ получаются соответственно простые числа $M_n=3, 7, 31, 127$. Однако при $n=11$ число M_n будет составным. В дальнейшем при простых значениях n среди чисел M_n встречаются как простые, так и составные числа. Быстрый рост чисел M_n затрудняет их исследование. При рассмотрении конкретных чисел M_n было доказано, напр., что М. ч. являются числа M_{31} (Л. Эйлер, L. Euler, 1750) и M_{61} (И. М. Первушин, 1883). С помощью вычислительных машин был найден ряд других весьма больших М. ч., напр. число M_{11213} является М. ч. Остается нерешенной (1982) проблема о существовании бесконечного множества М. ч. Эта проблема тесно связана с вопросом о существовании совершенных чисел.

Лит.: [1] Хассе Г., Лекция по теории чисел, пер. с нем., М., 1953; [2] Бухштаб А. А., Теория чисел, 2 изд., М., 1966.

Б. М. Бредихин.

МЕРСЕРА ТЕОРЕМА: билинейный ряд

$$\sum\nolimits_m \varphi_m(s)\,\overline{\varphi_m(t)}/\lambda_m$$

эрмитова положительно определенного непрерывного в $D\times D$ ядра $K(s, t)$, где D — замыкание ограниченной области в евклидовом пространстве R_r, абсолютно и равномерно сходится в $D\times D$ к ядру $K(s, t)$. Здесь λ_m — характеристич. числа ядра $K(s, t)$, $\varphi_m(s)$ — соответствующие им ортонормированные собственные функции. Интегральный оператор $T:L_2(D)\to L_2(D)$

$$Tf(s)=\int_D K(s,\ t)\,f(t)\,dt=\sum\nolimits_m \frac{1}{\lambda_m}(f,\ \varphi_m)\,\varphi_m$$

с ядром K, удовлетворяющим условиям М. т.,— ядерный и его след $\sum_m 1/\lambda_m$ вычисляется по формуле:

$$\sum_m 1/\lambda_m = \int_D K(s, s)\, ds.$$

М. т. допускает обобщение на случай разрывных ограниченных ядер.

Теорема доказана Дж. Мерсером [1].

Лит.: [1] Mercer J., «Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.», 1909, v. 209, p. 415—46; [2] его же, «Proc. Roy. Soc. London. Ser. A», 1910, v. 83, p. 69—70; [3] Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 3 изд., М., 1965; [4] Трикоми Ф., Интегральные уравнения, пер. с англ., М., 1960; [5] Красносельский М. А. [и др.], Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966.

В. Б. Коротков.

МЕТАБЕЛЕВА ГРУППА — двуступенно *разрешимая группа*, т. е. группа, коммутант к-рой абелев. Все М. г. образуют многообразие (см. *Групп многообразие*), определяемое тождеством

$$[[x, y], [z, t]] = 1.$$

Особый интерес представляют конечно порожденные М. г. Все они финитно аппроксимируемы (см. *Финитно аппроксимируемая группа*) и удовлетворяют условию максимальности (см. *Обрыва цепей условие*) для нормальных подгрупп. Аналогичными свойствами обладают обобщения этих групп — конечно порожденные группы, у к-рых факторгруппа по абелевой нормальной подгруппе полициклическая (см. *Полициклическая группа*).

Иногда под М. г. понимают *нильпотентную группу* класса нильпотентности 2.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977.

А. Л. Шмелькин.

МЕТАЛОГИКА — логика, используемая в рассуждениях о формальной аксиоматич. теории в рамках нек-рой *метатеории*. В основаниях математики к метатеории часто предъявляются специфич. требования, связанные с отказом от нек-рых употребительных математич. абстракций с целью повышения философской убедительности метатеории. Примерами таких подвергающихся критике абстракций являются *абстракция актуальной бесконечности*, абстракция отчуждения, ответственная за появление *антиномий*, и др. Это, как правило, приводит к тому, что в метатеории используется логика, отличная от классической, напр. *модальная логика* или интуиционистская логика, если метатеория строится в рамках *интуиционизма*.

С другой стороны, в *доказательств теории* интуиционистские и другие неклассические логич. теории часто исследуются и традиционными математич. средствами без всяких специфич. ограничений, напр. средствами теории множеств. В этом случае в роли М. выступает классич. логика.

А. Г. Драгалин.

МЕТАМАТЕМАТИКА — совокупность математич. теорий, используемых при изучении формальных теорий (исчислений). М., относящаяся к изучению данной формальной теории, составляет то, что наз. *метатеорией* формальной теории.

В близком смысле термин «М.» используется как синоним *доказательств теории*.

А. Г. Драгалин.

МЕТАТЕОРЕМА — утверждение об изучаемой формальной аксиоматич. теории, полученное в рамках определенной *метатеории*.

А. Г. Драгалин.

МЕТАТЕОРИЯ — совокупность математич. средств и методов, предназначенных для описания и определения нек-рой формальной аксиоматич. теории, а также для исследования ее свойств. М. является важной составной частью метода формализации — одного из центральных методов математич. логики.

Суть этого метода можно кратко охарактеризовать следующим образом. Допустим, нас интересует нек-рая

содержательная математич. теория T_1. Это может быть сложная теория, *семантика* к-рой недостаточно интуитивно ясна (напр., это может быть теория множеств, математич. анализ, арифметика 2-го порядка и т. п.). Нас интересует, является ли T_1 непротиворечивой теорией или совместен ли с T_1 нек-рый математич. *принцип* (напр., *выбора аксиома*). С целью выяснения этого вопроса вначале формулируется точный логико-математич. язык Ω такой, что все интересующие нас утверждения T_1 записываются в виде формул языка Ω. Затем логич. принципы, употреблявшиеся в теории для получения новых фактов, формализуются в виде аксиом и чисто формальных правил вывода, позволяющих выводить новые формулы языка Ω из аксиом и уже выведенных формул. Таким образом, возникает ф о р м а л ь н а я с и с т е м а (или, иначе, ф о р м а л ь н а я а к с и о м а т и ч е с к а я т е о р и я, и с ч и с л е н и е) $\tilde{T}_1$, точно описывающая нек-рый интересующий нас фрагмент содержательной теории T_1. Существенно при этом, что формулировка $\tilde{T}_1$ не требует исчерпывающего проникновения в, быть может, весьма сложную семантику T_1. Исчисление $\tilde{T}_1$ строится по простым законам как чисто знаковая система и для понимания устройства этой знаковой системы нет нужды вникать в смысл выводимых в ней формул.

Такой подход открывает, во-первых, возможность строго математически сформулировать интересующие нас проблемы, относящиеся к выводимости нек-рых формул в $\tilde{T}_1$ и, во-вторых, исследовать $\tilde{T}_1$ средствами нек-рой содержательной теории T_2. В этой ситуации $\tilde{T}_1$ наз. п р е д м е т н о й т е о р и е й, а T_2 — ее м е т а т е о р и е й.

С точки зрения оснований математики важно, чтобы T_2 была в нек-ром отношении более надежной теорией, чем T_1, так что исследование $\tilde{T}_1$ средствами T_2 можно было бы рассматривать как действительное разъяснение и обоснование неясных деталей семантики T_1 с помощью более убедительной теории T_2. В этой связи особенное предпочтение отдается достаточно надежным М., отражающим финитные установки в математике, теориям, построенным в рамках интуиционизма или конструктивной математики. Впрочем, вне оснований математики это ограничение не является обязательным. Если нас интересует не столько вопрос об интуитивной ясности T_1, сколько просто факт о выводимости или невыводимости нек-рых формул в $\tilde{T}_1$, естественно исследовать $\tilde{T}_1$ средствами любой исторически сложившейся и убедительной для исследователя математич. теории T_2, не накладывая никаких априорных ограничений.

Можно далее исследовать аналогичным образом и метатеорию T_2, построив формальную систему $\tilde{T}_2$ и изучая уже $\tilde{T}_2$ средствами нек-рой м е т а м е т а т е о р и и T_3. Такого рода исследования характерны для *доказательств теории*.

Лит.: [1] К л и н и С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

А. Г. Драгалин.

МЕТАЦИКЛИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа, обладающая циклической нормальной подгруппой, фактор-группа по к-рой также циклическая. Всякая конечная группа, порядок к-рой свободен от квадратов (т. е. не делится на квадрат какого-либо числа), является М. г. Обобщением М. г. являются *полициклические группы*.

А. Л. Шмелькин.

МЕТАЯЗЫК — логико-математический язык, используемый для формулировки *метатеории*. В более широком смысле, М.— неформализованный язык, на к-ром формулируются утверждения *метаматематики*.

А. Г. Драгалин.

МЕТЕОРОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи в области физики, химии и биологии атмосферы, решаемые с помощью математич. методов. Большинство М. м. з. метеорологии характеризуются сложностью и большим объемом перерабатываемой информации, поэтому для решения этих задач наряду с аналитич. методами широко используются методы численного моделирования на ЭВМ.

Математич. задачи физики атмосферы — преимущественно задачи гидротермодинамики стратифицированной жидкости с характерными особенностями, создаваемыми вращением Земли и неоднородностями рельефа и температуры поверхности Земли. Теоретич. основой математич. моделей являются законы сохранения массы, импульса и энергии, к-рые вместе с законами термодинамики и химии описывают процессы, протекающие в атмосфере, и взаимодействие атмосферы с океаном и поверхностью Земли. В математич. выражении — это системы многомерных нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, к-рые решаются в предположении, что внешним источником энергии является Солнце. Кроме функций, описывающих состояние и режим атмосферы (температура, давление, плотность, скорость ветра и др.), эти уравнения содержат ряд параметров. Под параметрами обычно понимаются коэффициенты уравнений, в нестационарных задачах — начальные значения функций, описывающих состояние атмосферы, характеристики поверхности Земли, внешние источники и др. Начальные условия определяются по результатам измерений в реальной физич. системе «атмосфера — Земля». Процесс математич. моделирования состоит из нескольких этапов: качественный анализ математич. модели (корректность постановки задачи, разрешимость ее в физически разумных классах функций и др.), построение дискретных ее аналогов, разработка вычислительных алгоритмов и программ для реализации дискретных моделей на ЭВМ, исследование чувствительности модели к вариациям параметров, оценка параметров по априорной информации и данным измерений и др. Структура математич. моделей зависит от пространственно-временных масштабов исследуемых процессов в атмосфере и способов их описания.

Численное моделирование является одним из основных средств для решения задач прогноза погоды и теории климата. Особенно большое значение приобретает проблема численного моделирования при изучении вариаций климата под влиянием естественных и антропогенных факторов и при оценке влияния деятельности человека на окружающую среду. Выбор и обоснование физич. моделей для данного класса задач тесно связаны с исследованием фундаментальных вопросов устойчивости, предсказуемости и чувствительности физич. системы, состоящей из атмосферы, океана, снежного покрова, континентов и биосферы, к-рую обычно наз. климатич. системой. Предсказуемость определяет возможности научно-детерминированного подхода к предсказанию физич. процессов и тем самым определяет возможности построения математич. моделей для описания и предсказания поведения климатич. системы или ее частей. Чувствительность характеризует степень устойчивости этой системы по отношению к вариациям внешних воздействий и внутренних параметров. Если воздействия антропогенных факторов интерпретировать как возмущения, вносимые в систему, то оценку их влияния можно рассматривать как один из прикладных аспектов теории чувствительности.

Задачей краткосрочного прогноза погоды (от нескольких часов до нескольких суток) является задача нахождения нестационарного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений гидротермодинамики

атмосферы с заданными краевыми и начальными условиями. В задачах долгосрочного прогноза погоды определяются нек-рые обобщенные или осредненные характеристики поведения атмосферы. Численный эксперимент по общей циркуляции атмосферы состоит в интегрировании соответствующих уравнений на длительный срок при идеализированных начальных данных. Нахождение стационарного решения или решения с годовым периодом есть численный эксперимент по климатич. фону.

Атмосферные процессы имеют волновую структуру. Построение отдельных типов атмосферных волн осуществляется методами нелинейной механики с использованием асимптотич. разложений в ряды по степеням малого параметра. Математич. теория атмосферных волн для линеаризованных моделей хорошо разработана. Среди решений уравнений гидродинамики выделено несколько классов волн (акустические, гравитационные, волны Росби). Среди нелинейных волн изучены лишь отдельные примеры (гравитационные волны Герстнера, нелинейные волны Росби и др.). Для выяснения структуры атмосферных движений широко используются численные методы решения задач на собственные значения и собственные функции для операторов гидротермодинамики и их дискретных аналогов. Математич. задачей атмосферной акустики является изучение распространения волн в слоистых средах. При этом используются аналитические (метод ВКБ и др.) и численные методы. Важную роль, особенно в связи с изучением и моделированием динамики циклонов и фронтов в атмосфере, имеют исследования гидродинамич. неустойчивости атмосферных волн и взаимодействие волн различных масштабов.

В области атмосферной оптики возникают специфические обратные задачи из класса условно-корректных задач. Типичным примером может быть задача восстановления параметров атмосферы по данным дистанционного зондирования со спутников. Процессы многократного рассеяния света в атмосфере исследуются различными асимптотическими и численными методами. Для решения уравнения переноса излучения в атмосфере используются численные методы. Особенно эффективным является метод Монте-Карло.

Многие теоретические и прикладные задачи метеорологии связаны с проблемой атмосферной турбулентности. Спектр масштабов турбулентности в атмосфере чрезвычайно широк. Турбулентность играет определяющую роль во взаимодействии атмосферы с океаном и с поверхностью Земли, в диффузии атмосферных примесей, в болтанке самолетов и других летательных аппаратов, в вибрации зданий под напором ветра, флуктуации световых и радиосигналов от наземных и космич. источников и т. д. Имеется несколько подходов к созданию математич. моделей турбулентности и способов ее параметризации.

При решении задач метеорологии возникает ряд проблем, характерных для сложных задач математич. физики. Это прежде всего подготовка входных данных (объективный анализ, статистич. обработка временны́х рядов на сетке измерений, пространственно-временной анализ и согласование метеорологич. полей), а также использование методов теории чувствительности и оптимизации для идентификации параметров моделей по данным измерений. Математич. модели в метеорологии имеют большое число степеней свободы, и поэтому возникает проблема их уменьшения (напр., посредством параметризации или за счет использования информативных обобщенных переменных).

К М. м. з. относятся задачи, связанные с изучением и оценкой влияния деятельности человека на атмосферу. Это — задачи моделирования микроклимата горо-

дов и индустриальных районов с учетом антропогенных факторов, оценка загрязнения атмосферы промышленными выбросами, оценка влияния изменений поверхности Земли на динамику и термич. режим атмосферы и др. Проблема выбора эффективной хозяйственной политики формализуется с помощью методов теории оптимизации, примененной к задачам метеорологии. В частности, задача оптимального размещения промышленных комплексов с учетом санитарно-допустимых норм загрязнения окружающей среды формулируется математически как вариационная задача с ограничениями.

Комплекс математич. задач, включающий практически все перечисленные выше, возникает в связи с проблемой мониторинга при реализации режима слежения за атмосферными процессами локального и глобального масштабов.

Лит.: [1] Белов П. Н., Практические методы численного прогноза погоды, 2 изд., Л., 1967; [2] Блинова Е. Н., «Докл. АН СССР», 1943, т. 39, № 7, с. 284—87; [3] Гандин Л. С., Объективный анализ метеорологических полей, Л., 1963; [4] Голицын Г. С., Введение в динамику планетных атмосфер, Л., 1973; [5] Кибель И. А., Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды, М., 1957; [6] Кондратьев К. Я., Актинометрия, Л., 1965; [7] Лайхтман Д. Л., Физика пограничного слоя атмосферы, 2 изд., Л., 1970; [8] Лоренц Э. Н., Природа и теория общей циркуляции атмосферы, пер. с англ., Л., 1970; [9] Малкевич М. С., Оптические исследования атмосферы со спутников, М., 1973; [10] Марчук Г. И., Численные методы в прогнозе погоды, Л., 1967; [11] Матвеев Л. Т., Основы общей метеорологии. Физика атмосферы, Л., 1965; [12] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1—2, М., 1965—67; [13] Нелинейные системы гидродинамического типа, М., 1974; [14] Томпсон Ф. Д., Анализ и предсказание погоды численными методами, пер. с англ., М., 1962; [15] Эккарт К., Гидродинамика океана и атмосферы, пер. с англ., М., 1963; [16] Юдин М. И., Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды, Л., 1963.

Г. И. Марчук.

МЕТРИЗУЕМОЕ ПРОСТРАНСТВО — пространство, топология к-рого порождается нек-рой метрикой по правилу: точка принадлежит замыканию множества в том и только в том случае, если она лежит на нулевом расстоянии от этого множества. Если такая метрика существует, то она не единственна — за исключением того случая, когда пространство пусто или состоит из одной лишь точки. В частности, топология каждого М. п. порождается нек-рой ограниченной метрикой. В М. п. выполняются сильные *отделимости аксиомы*: они нормальны и даже коллективно нормальны. Каждое М. п. паракомпактно. Все М. п. удовлетворяют первой аксиоме счетности. Но ни одно из названных условий, ни их совокупность недостаточны для метризуемости пространства. Достаточное условие метризуемости было найдено П. С. Урысоном (1923): каждое *нормальное пространство* (и даже каждое *регулярное пространство* — А. Н. Тихонов, 1925) со счетной *базой* метризуемо. Первый общий критерий метризуемости пространства был предложен в 1923 П. С. Александровым и П. С. Урысоном (см. [1]). На его основе были выработаны два следующих более совершенных критерия метризуемости: 1) пространство метризуемо в том и только в том случае, когда оно коллективно нормально и обладает счетным измельчающимся множеством открытых покрытий; 2) пространство метризуемо, если и только если оно обладает счетным фундаментальным множеством открытых покрытий и удовлетворяет T_1-аксиоме отделимости (критерий Стоуна — Архангельского). При этом множество ξ открытых покрытий пространства X наз. фундаментальным, если для каждой точки $x \in X$, каждой ее окрестности Ox найдутся покрытие $\gamma \in \xi$ и окрестность O_1x точки x такие, что каждый элемент покрытия γ, пересекающийся с O_1x, содержится в Ox. Указанные критерии связаны со следующим принципиально важным свойством неограниченной делимости, или звездной нормальности, метризу-

емых пространств. В каждое открытое покрытие γ М. п. X можно вписать открытое покрытие γ' такое, что, какова бы ни была точка $x \in X$, найдется $U \in \gamma$, для к-рого $\bigcup \{W \in \gamma' : x \in W\} \subset U$.

На другой важной концепции — локальной конечности — основаны общие метризационные критерии. Критерий Нагаты — Смирнова: пространство X метризуемо в том и только в том случае, если оно регулярно и обладает базой, распадающейся на счетное множество *локально конечных семейств* множеств. Критерий Бинга аналогичен, но в нем вместо локально конечных фигурируют *дискретные семейства множеств*. Удобные варианты приведенных выше основных критериев метризуемости связаны с понятиями равномерной базы и регулярной базы. База $\mathscr{B}$ пространства X наз. регулярной (равномерной), если для всякой точки $x \in X$ и любой ее окрестности Ox найдется окрестность $O_1 x$ этой точки такая, что число элементов базы $\mathscr{B}$, пересекающих одновременно $O_1 x$ и дополнение к Ox, конечно (соответственно, если множество $\{U \in \mathscr{B} : U \ni x,\ U \not\subset Ox\}$ конечно). Пространство X метризуемо тогда и только тогда, когда оно коллективно нормально и обладает равномерной базой. Наконец, для метризуемости T_1-пространства необходимо и достаточно, чтобы оно обладало регулярной базой. Регулярные базы удобны тем, что они вскрывают механизм паракомпактности произвольного М. п.: чтобы вписать в произвольное открытое покрытие γ пространства X, обладающего регулярной базой $\mathscr{B}$, локально конечное открытое покрытие, достаточно взять совокупность всех максимальных элементов семейства

$$\mathscr{B}_\gamma = \{U \in \mathscr{B}: \text{существует } W \in \gamma \text{ такое, что } U \subset W\}.$$

Метризационные критерии достигают простоты в ряде специальных классов пространств. Так, для метризуемости бикомпакта X любое из следующих четырех условий необходимо и достаточно: а) X обладает счетной базой; б) X обладает точечно-счетной базой; в) в X есть счетная *сеть*; г) диагональ в $X \times X$ имеет тип G_δ. Для метризуемости пространства топологич. группы необходимо и достаточно, чтобы в последнем выполнялась первая аксиома счетности — причем тогда пространство метризуемо инвариантной метрикой (напр., по отношению к умножению слева).

Характерным свойством М. п. является совпадение для них ряда мощностных характеристик. В частности, для М. п. совпадают число Суслина, число Линделёфа, плотность, протяженность, вес. Несовпадение этих чисел свидетельствует о неметризуемости соответствующих пространств.

Не всякое М. п. метризуемо полной метрикой; таково, напр., пространство рациональных чисел. Пространство метризуемо полной метрикой в том и только в том случае, если оно метризуемо и является множеством типа G_δ в нек-ром содержащем его бикомпакте. Важным топологич. свойством пространств, метризуемых полной метрикой, является свойство Бэра: пересечение любого счетного семейства всюду плотных открытых множеств всюду плотно.

К М. п. наиболее близки по свойствам т. н. моровские пространства — вполне регулярные пространства, обладающие счетным измельчающимся семейством открытых покрытий, и кружевные пространства.

Широкий спектр обобщений концепции М. п. получается, если варьировать аксиомы метрики, ослабляя их в том или ином отношении и рассматривая порожденные такими ν-метриками топологии. На этом пути получаются симметризуемые пространства — путем отказа от аксиомы треугольника. В эту схему укладываются и моровские пространства. Дру-

гое важное обобщение концепции метризуемости связано с рассмотрением «метрик» со значениями в полуполях и других алгебраических образованиях общей природы.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., *Основы общей топологии в задачах и упражнениях*, М., 1974; [2] Engelking R., General topology, Warsz., 1977; [3] Антоновский М. Я., Болтянский В. Г., Сарымсаков Т. А., *Метрические пространства над полуполями*, Ташк., 1961.

А. В. Архангельский.

МЕТРИКА, расстояние на множестве X,— определенная на декартовом произведении $X\times X$ функция ρ с неотрицательными действительными значениями, удовлетворяющая при любых $x, y\in X$ условиям:

1) $\rho(x, y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$ (аксиома тождества);

2) $\rho(x, y)+\rho(y, z)\geqslant\rho(x, z)$ (аксиома треугольника);

3) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$ (аксиома симметрии).

Множество X, на к-ром может быть введена М., наз. метризуемым. Множество X, наделенное некоторой М., наз. метрическим пространством.

Примеры. 1) На любом множестве имеется дискретная метрика:

$$\rho=1\ (x=y)\ \text{ и }\ \rho=0\ (x\neq y).$$

2) В пространстве $\mathbb{R}^n$ возможны разные М., среди них:

$$\rho(x,\ y)=\sqrt{\sum(x_i-y_i)^2},$$

$$\rho(x,\ y)=\sup_i|x_i-y_i|,$$

$$\rho(x,\ y)=\sum|x_i-y_i|,$$

здесь $\{x_i\},\ \{y_i\}\in\mathbb{R}^n$.

3) В римановом пространстве М. определяется *метрическим тензором* или дифференциальной квадратичной формой (в нек-ром смысле это — аналог первой М. из примера 2)). Обобщение М. этого типа см. в ст. *Финслерово пространство*.

4) В функциональных пространствах над (би)компактом X также вводятся разные М., напр. равномерная метрика

$$\rho(f, g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$$

(аналог второй М., из примера 2)), интегральная метрика

$$\rho(f, g)=\int_X|f-g|\,dx.$$

5) В нормированном пространстве над $\mathbb{R}$ М. определяется через норму $|\cdot|$:

$$\rho(x,\ y)=|x-y|.$$

В нормированном кольце — более сложная формула:

$$\rho(x, y)=|x+y|-|xy|.$$

6) В метрич. пространстве вводится другая М.— т. н. *внутренняя метрика*.

7) В пространстве замкнутых подмножеств метрич. пространства определяется *хаусдорфова метрика*.

Следует заметить, что в традиционном определении М. условие 3) и требование неотрицательности излишни, т. е. вытекают уже из достаточности условия 1) и условия 2).

Если вместо 1) выполняется лишь условие:

1′) $\rho(x, y)=0$, если $x=y$ (так что при $\rho=0$ не всегда $x=y$), функция ρ наз. псевдометрикой [2], [3], или отклонением [4].

М. (и даже псевдометрика) позволяет определить ряд дополнительных структур на множестве X. Прежде все-

го, это — топология (см. *Топологическое пространство*), кроме того — равномерная (см. *Равномерное пространство*) или близостная (см. *Близости пространство*) структуры. Термин М. используется также и для обозначения более общих понятий, к-рые не обладают всеми свойствами 1) — 3), таковы, напр., *индефинитная метрика*, *симметрика* и т. д.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Келли Дж.-Л., Общая топология, пер. с англ., М., 1968; [3] Куратовский К., Топология, [пер. с англ.], т. 1, М., 1966; [4] Бурбаки Н., Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь, пер. с франц., М., 1975.

М. И. Войцеховский.

МЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ, оператор наилучшего приближения,— многозначное отображение $P_M: x \to P_M x$, ставящее в соответствие каждому элементу x метрич. пространства $X=(X, \rho)$ совокупность

$$P_M x = \{m \in M : \rho(x, m) = \rho(x, M)\}$$

наилучшего приближения элементов из множества $M \subset X$. Если M — *чебышевское множество*, то М. п.— однозначное отображение. Задачу построения элемента наилучшего приближения часто решают приближенно, т. е. находят элемент из множества

$$P_M^t x = \{m \in M : \rho(x, m) \leqslant t + \rho(x, M)\},$$

где $t>0$ достаточно мало. По свойствам отображения $P_M^t : x \to P_M^t x$ иногда можно судить о множестве M. Так, если для любого элемента x нормированного пространства X существует число $t=t(x)>0$ такое, что $P_M^t x$ выпукло (связно), то множество M выпукло (соответственно связно).

С точки зрения приложений полезно знать, обладает ли М. п. такими свойствами, как линейность, непрерывность, равномерная непрерывность и т. д. М. п. на чебышевское подпространство нормированного пространства X, вообще говоря, не линейна. Если М. п. на каждое подпространство фиксированной размерности является однозначной и линейной, то X линейно изометрично пространству с внутренним произведением. М. п. на непустое *аппроксимативно компактное множество* в метрич. пространстве полунепрерывна сверху, в частности, в нормированном пространстве М. п. на конечномерное чебышевское подпространство непрерывна; полунепрерывности снизу М. п. может не быть, если это подпространство не чебышевское. Существует рефлексивное строго выпуклое пространство и в нем бесконечномерное подпространство, М. п. на к-рое разрывна. Для М. п. на любое замкнутое выпуклое множество M гильбертова пространства выполняется условие Липшица

$$\| P_M x - P_M y \| \leqslant K \| x - y \|$$

с константой $K=1$.

Свойство непрерывности М. п. и ее обобщений находит применение в некорректных задачах, задаче о выпуклости чебышевских множеств, при построении элементов наилучшего приближения и т. д.

Лит.: [1] Singer I., The theory of best approximation and functional analysis, Phil., 1974; [2] Власов Л. П., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 6, с. 3—66; [3] Бердышев В. И., в кн.: Теория приближения функций. Тр. Международной конференции по теории приближения функций. Калуга. 1975, М., 1977, с. 37—41.

В. И. Бердышев.

МЕТРИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ — числовая характеристика компакта, определяемая с помощью покрытия «эталонами меры», число к-рых и определяет М. р. Пусть F — компакт, $N_F(\varepsilon)$ — минимальное число множеств с диаметром, не превосходящим ε, необходимое для того, чтобы они покрывали F. Эта зависящая от метрики F функция принимает целочисленные значения для всех $\varepsilon>0$ и неограниченно возрастает при

$\varepsilon \to 0$; она наз. функцией объема F. Метрическим порядком компакта F наз. число

$$k = \underline{\lim} \left(- \frac{\ln N_F(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \right).$$

Эта величина не является еще топологич. инвариантом. Так, метрич. порядок жордановой дуги с евклидовой метрикой равен 1, а для жордановой дуги, проходящей через совершенно вполне несвязное множество в $\mathbb{R}^n$ положительной меры, эта величина равна n. Однако нижняя граница метрич. порядков для всех метрик компакта F (наз. метрической размерностью) равна его *Лебега размерности* (теорема Понтрягина — Шнирельмана, 1931, см. прил. к [1]).

Лит.: [1] Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ., М., 1948.

М. И. Войцеховский.

МЕТРИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ — линейная связность в векторном расслоении $\pi : X \to B$, снабженном билинейной метрикой в слоях, при к-рой параллельное перенесение вдоль произвольно кусочно гладкой линии в B сохраняет метрику, т. е. скалярное произведение векторов остается постоянным при их параллельном перенесении. Если билинейная метрика задается тензорным полем $g_{\alpha\beta}$, а линейная связность — матрицей 1-форм ω_α^β, то эта связность является метрической, если

$$dg_{\alpha\beta} = g_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma + g_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma.$$

В случае невырожденной симметрической билинейной метрики, когда $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, $\det |g_{\alpha\beta}| \neq 0$, М. с. является *евклидовой связностью*. В случае невырожденной коссимметрич. метрики М. с. наз. симплектической связностью в векторном расслоении.

При проективизации векторного расслоения, когда симметрическая билинейная метрика порождает нек-рую проективную метрику в каждом слое (как в проективном пространстве), роль М. с. играет проективнометрич. связность.

Ю. Г. Лумисте.

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ — то же, что *эргодическая теория*.

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ — раздел теории функций действительного переменного, в к-ром свойства функций изучаются на основе понятия *меры* множества.

Исследованиями многих математиков 19 в. была создана новая математич. дисциплина — теория функций действительного переменного. К кон. 19 в. четко выкристаллизовались нек-рые проблемы, требовавшие своего решения: проблема меры множества, длин кривых и площадей поверхностей, представления функций рядами (в частности, тригонометрическими), примитивной и интеграла, взаимосвязи интегрирования и дифференцирования, почленного интегрирования рядов и др. Решение этих проблем имело общематематич. значение; в этом направлении работали крупнейшие математики, чем, в частности, и объясняется бурное развитие М. т. ф. в 1-й трети 20 в. Основы М. т. ф. были заложены Э. Борелем (E. Borel), Р. Бэром (R. Baire), А. Лебегом (H. Lebesgue) и др.

В 1902 А. Лебег ввел чрезвычайно важное понятие меры множеств (*Лебега меры*). На основе этого понятия им была создана теория интеграла (*Лебега интеграла*). Эти два основных понятия — мера и интеграл — составляют фундамент М. т. ф., к-рая занимается изучением свойств функций, производных, интегралов, функциональных рядов (в частности, тригонометрич. рядов и общих ортогональных рядов), площадей поверхностей и т. п.

Многие основные свойства меры и интеграла Лебега были установлены в нач. 20 в. самим А. Лебегом (счетная аддитивность меры и интеграла, предельный переход под знаком интеграла, дифференцирование неопределенного интеграла и др.). Кроме того, А. Лебег дал

многочисленные приложения этих исследований к различным вопросам математич. анализа (площади поверхностей, разнообразные свойства тригонометрич. рядов, сингулярных интегралов и др.). Дж. Витали (G. Vitali, 1904) независимо открыл меру, тождественную мере Лебега, а несколько позже У. Юнг (W. Young, 1905) также построил интеграл и меру, эквивалентные интегралу и мере Лебега. Однако они не развили свою теорию и не дали ей в этот период существенных приложений. Начало развития М. т. ф. в России следует отнести к нач. 20 в., хотя первые крупные результаты в этой области были получены русскими математиками во 2-м десятилетии 20 в. (Д. Ф. Егоров, Н. Н. Лузин), когда произошло становление нового крупного центра исследований по М. т. ф. Создателем и руководителем школы М. т. ф. в СССР был Н. Н. Лузин.

Развитие М. т. ф. можно охарактеризовать двумя большими направлениями. Первое направление: на базе меры множества и интеграла Лебега, а также их обобщений исследуются как общие свойства функций, интегралов, тригонометрич. рядов, ортогональных рядов и т. п., так и их более конкретные тонкие свойства, выявление и изучение к-рых при помощи методов классич. анализа было труднодоступным. Это направление и представляет, собственно, М. т. ф. Второе, не менее важное направление, состоит в проникновении методов М. т. ф. в другие разделы математики, а также в создании на базе ее идей других новых областей математики, к-рые в свою очередь оказывают стимулирующее влияние на теорию функций.

На базе М. т. ф. началось детальное изучение *граничных свойств аналитических функций*; была создана *метрическая теория чисел*, методы к-рой неразрывно связаны с М. т. ф. Велико влияние теории функций на создание функционального анализа.

Ниже отмечаются нек-рые характерные результаты по М. т. ф., каждый из к-рых знаменовал собой решение того или иного узлового вопроса, повлекшего в дальнейшем многочисленные исследования. Так, в 1911 Д. Ф. Егоров доказал, что всякая сходящаяся последовательность измеримых функций является равномерно сходящейся, если пренебречь нек-рым множеством сколь угодно малой меры (см. *Егорова теорема*). Н. Н. Лузин (1912) установил, что всякая измеримая функция становится непрерывной, если пренебречь некоторым множеством сколь угодно малой меры (см. *Лузина С-свойство*). Эти два результата трудно переоценить, т. к., с одной стороны, ими устанавливается определенная взаимосвязь между основными понятиями М. т. ф. и классич. анализа, а с другой — они являются фундаментом, на к-ром очень часто строятся многие исследования по теории функций.

Н. Н. Лузин доказал (1915) существование примитивных в классе измеримых функций. Именно, он показал, что для всякой конечной измеримой функции $f(x)$ существует непрерывная функция $F(x)$ такая, что $F'(x)=f(x)$ почти всюду. На основе этого утверждения он решил задачу Дирихле в классе измеримых функций. Это послужило началом активного развития московской школы теории функций комплексного переменного и, особенно, началом изучения граничных свойств аналитич. функций.

Интеграл Лебега не разрешает проблемы нахождения примитивной $F(x)$ по точной конечной производной $F'(x)=f(x)$. Эту проблему решил А. Данжуа (A. Denjoy, 1912) на основе специального интеграла (узкий интеграл Данжуа), к-рый естественно обобщает интеграл Лебега и не противоречит ему (см. *Данжуа интеграл*). В 1916 А. Данжуа и А. Я. Хинчин построили еще более общий интеграл, к-рый носит название интеграла Данжуа в широком смысле и к-рый связан с *аппроксимативной дифференцируемостью*.

В начале 3-го десятилетия 20 в. Д. Е. Меньшов и Х. Радемахер (H. Rademacher) установили, что последовательность $\log^2 n$ является множителем Вейля для сходимости почти всюду рядов по любым ортонормированным системам. Кроме того (и это является особенно важным и принципиальным), Д. Е. Меньшов доказал (1923), что указанное выше утверждение теряет силу, если последовательность $\{\log^2 n\}$ заменить на любую последовательность $\{\omega(n)\}$ с $\omega(n)=o(\log^2 n)$ при $n\to\infty$. Эти результаты стали тем фундаментом, на к-ром основывались и основываются многочисленные исследования по теории сходимости и суммируемости ортогональных рядов.

В 1926 А. Н. Колмогоров построил пример всюду расходящегося тригонометрич. ряда Фурье от суммируемой функции. В то же время длительный период оставалась нерешенной проблема сходимости почти всюду тригонометрич. рядов Фурье от функций $f\in L^2$, поставленная Н. Н. Лузиным в 1914. Положительное решение этой проблемы было дано Л. Карлесоном (L. Carleson) лишь в 1966 (см. *Карлесона теорема*). П. Дюбуа-Реймоном (P. du Bois-Reymond), А. Лебегом и Ш. Валле Пуссеном (Ch. la Vallée Poussin) был решен вопрос о восстановлении коэффициентов тригонометрич. рядов, сходящихся к суммируемым функциям. В 40-х гг. 20 в. А. Данжуа построил интеграл, при помощи к-рого им была решена проблема восстановления коэффициентов по сумме произвольных всюду сходящихся тригонометрич. рядов. В это же время Д. Е. Меньшов доказал, что всякая конечная измеримая функция представима нек-рым почти всюду сходящимся тригонометрич. рядом.

Г. Кантором (G. Cantor), У. Юнгом, Н. К. Бари и др. были заложены основы теории единственности тригонометрич. рядов.

Лит.: [1] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.—Л., 1934; [2] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М., 1951; [3] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [4] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [5] Халмош П. Р., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [6] Паплаускас А. Б., Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега, М., 1966; [7] Есин И. Н., Развитие понятия интеграла, М., 1966; [8] Меньшов Д. Е., Ульянов П. Л., «Вестн. Моск. ун-та. Матем., мех.», 1967, № 5, с. 24—36; [9] Колмогоров А. Н., Теория функций действительного переменного, в кн.: Наука в СССР за пятнадцать лет. Математика, М.—Л., 1932; [10] Метрическая теория функций действительного переменного, в кн.: Математика в СССР за тридцать лет, М.—Л., 1948; [11] Лозинский С. М., Натансон И. П., Метрическая и конструктивная теория функций вещественной переменной, в кн.: Математика в СССР за сорок лет, т. 1, М., 1959; [12] Ульянов П. Л., Метрическая теория функций, в кн.: История отечественной математики, т. 3, К., 1968; [13] Итоги науки. Математический анализ. 1970, М., 1971.

П. Л. Ульянов.

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ — раздел теории чисел, в к-ром изучаются и метрически (т. е. на основе теории *меры*) характеризуются множества чисел, обладающих определенными арифметич. свойствами. М. т. ч. тесно связана с теорией вероятностей, что иногда дает возможность использовать ее методы и результаты для анализа теоретико-числовых моделей.

Многие задачи, касающиеся арифметич. свойств отдельных чисел, допускают также метрич. постановку; напр., наряду с вопросом о том, будет ли равномерно распределена последовательность дробных долей $\{\alpha n\}$, $n=1, 2, \ldots$, при $\alpha=\sqrt{2}$ или $\ln 3$, можно ставить вопрос о том, какова мера Лебега тех α из интервала $(0,1)$, для к-рых эта последовательность равномерно распределена. Такое метрич. обобщение задачи часто оказывается весьма полезным и дает возможность представить явление в целом. Иногда на основе метрич. рассуждений без особого труда удается доказать существование чисел с определенными арифметич. свойствами, тогда как прямое построение таких чисел бывает сложным (нормальные числа Бореля, числа с определенными свойствами аппроксимации и т. п.).

Наиболее значительные достижения М. т. ч. относятся к *диофантовых приближений метрической теории*, к теории равномерного распределения числовых последовательностей, к теории *цепных дробей* и др. областям теории чисел.

Одной из первых теорем М. т. ч. является т е о р е м а Б о р е л я (E. Borel, 1909): почти все (в смысле меры Лебега) действительные числа α интервала (0, 1) нормальны в системе счисления с любым целым основанием g. В другой равносильной формулировке эта теорема утверждает, что дробные доли $\{\alpha g^n\}$, $n=1, 2, \ldots$, равномерно распределены на интервале (0, 1). Теорема Бореля обобщалась и углублялась многими математиками. Плодотворной оказалась точка зрения, основанная на том, что «цифры» $0, 1, \ldots, g-1$, встречающиеся в разложении α в системе счисления с основанием g (g-ичной системе), являются независимыми случайными величинами. Явно или неявно основываясь на этом обстоятельстве и применяя методы, разработанные в теории вероятностей для отыскания асимптотич. законов распределения сумм независимых и слабо зависимых случайных величин, были решены основные вопросы, касающиеся распределения «цифр» $0, 1, \ldots, g-1$, и произвольных групп «цифр» в g-ичном разложении чисел α, «случайно» выбираемых в интервале (0,1). Напр., полагая

$$\alpha=\frac{a_1}{g}+\frac{a_2}{g^2}+\ldots,$$

где a_i — числа ряда $0, 1, \ldots, g-1$, находят, что $a_i=a_i(\alpha)$ можно рассматривать как независимые случайные величины, определенные на интервале (0, 1) с мерой Лебега на этом интервале в качестве вероятностной меры. Если a — любое число ряда $0, 1, \ldots, g-1$, $k_n(\alpha)$ — число тех $i\leqslant n$, для к-рых $a_i(\alpha)=a$ при данном α, то

$$(k_n(\alpha)-n/g)\,g/\sqrt{n(g-1)}$$

распределяется асимптотически по нормальному закону, т. е. при любом действительном x мера множества тех α, для к-рых

$$k_n(\alpha)-n/g<\frac{x}{g}\sqrt{n(g-1)}$$

при $n\to\infty$ стремится к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,dt.$$

Г. Вейль (H. Weyl, 1916) доказал, что если a_n, $n=1, 2, \ldots$, — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, то для почти всех α дробные доли $\{\alpha a_n\}$ равномерно распределены на интервале (0, 1). В предположении, что a_n являются значениями нек-рой функции, определенной на бесконечном интервале $(1, \infty)$ и обладающей специальными аналитич. условиями, эта теорема допускает уточнения, касающиеся «качества» равномерного распределения. И. Коксма [8] доказал общую теорему о *распределении дробных долей* функции двух переменных $f(\alpha, n)$, где α — действительное переменное, принимающее почти все значения из интервала $(1, \infty)$, а $n=1, 2, \ldots$. Напр., дробные доли $\{\alpha^n\}$ для почти всех $\alpha>1$ равномерно распределены на интервале (0, 1).

Помимо вопросов, связанных с нормальными числами Бореля, одним из основных объектов М. т. ч. в начале ее развития была метрич. теория цепных дробей. Пусть α — действительное число из интервала (0, 1), $\alpha=[0, a_1, \ldots]$ — его разложение в цепную дробь, $r_n(\alpha)=[a_n, a_{n+1}, \ldots]$, $q_n(\alpha)$ — знаменатель n-й подходящей дроби $[0, a_1, \ldots, a_n]$. А. Я. Хинчин установил (1935), что для почти всех α при $n\to\infty$

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\to K=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+1)}\right)^{\ln k/\ln 2}=$$
$$=2{,}68545\ldots,$$

и существует такая абсолютная постоянная γ, что для почти всех α будет $\sqrt[n]{q_n(\alpha)} \to \gamma$ при $n \to \infty$. П. Леви (P. Lévy) нашел, что $\gamma = \exp(\pi^2/12 \ln 2)$. Кроме того, А. Я. Хинчин [5] использовал полученные им результаты о метрич. свойствах цепных дробей для доказательства теоремы о приближении чисел рациональными. Пусть $f(x)$ — положительная непрерывная функция положительного аргумента x, причем $xf(x)$ — невозрастающая функция. Тогда неравенство

$$|\alpha - p/q| < f(q)/q \qquad (*)$$

имеет для почти всех α бесконечное множество решений в целых p и q ($q>0$), если при нек-ром $c>0$ интеграл

$$\int_c^\infty f(x)\,dx$$

расходится; напротив, неравенство (*) имеет для почти всех α не более конечного числа решений в целых p и q ($q>0$), если интеграл сходится для всех $c>0$.

Эта теорема переосмысливалась и обобщалась с различных точек зрения. Она стала исходным пунктом интенсивного развития метрич. теории диофантовых приближений. П. Эрдёш [7], завершая серию работ своих предшественников, получил следующие результаты. Необходимое и достаточное условие того, что для почти всех α бесконечное число $q_i(\alpha)$ содержится в произвольной последовательности $n_1 < n_2 < \ldots$, есть

$$\sum_{i=1}^\infty \varphi(n_i)\, n_i^{-2} = \infty,$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера. При этом же условии для почти всех α неравенство

$$|\alpha - m/n_i| < \varepsilon/n_i^2, \quad (m,\ n_i) = 1,$$

где m — целое, $\varepsilon>0$ — любое, имеет бесконечное число решений. Эти результаты близки к гипотезе (1982): если $n_1 < n_2 < \ldots$ — произвольная последовательность целых чисел, $\delta_i > 0$ — любые, то неравенство

$$|\alpha - m/n_i| < \delta_i/n_i, \quad (m,\ n_i) = 1,$$

имеет бесконечное число решений для почти всех α тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{\delta_i \varphi(n_i)}{n_i} = \infty.$$

Р. О. Кузьмин доказал (1928), что при любом $x \in (0, 1)$ мера $m_n(x)$ множества тех α, для к-рых $r_n(\alpha) - a_n < x$, равна

$$\ln(1+x)/\ln 2 + O\left(e^{-\lambda\sqrt{n}}\right),$$

где $\lambda>0$ — абсолютная постоянная. Асимптотич. соотношение

$$m_n(x) \sim \ln(1+x)/\ln 2 \quad (n \to \infty)$$

было известно К. Гауссу (C. Gauss), но он не опубликовал его, а в одном из писем к П. Лапласу (P. Laplace) указывал, что было бы весьма желательно оценить разность $m_n(x) - \ln(1+x)/\ln 2$. Оценка Кузьмина $O(e^{-\lambda\sqrt{n}})$ была улучшена П. Леви (1929) до $O(e^{-\lambda n})$. Метод Кузьмина явился источником многих других метрич. теорем о цепных дробях.

Современная трактовка метрич. вопросов, связанных с нормальными числами Бореля и с теорией цепных дробей, использует идеи эргодич. теории. Это основано на том, что отображения интервала (0, 1) на себя $\alpha \to \{\alpha g\}$ и $\alpha \to \{1/\alpha\}$, тесно связанные с разложением α в g-ичную дробь и цепную дробь соответственно, являются сохраняющими меру и эргодическими: первое сохраняет меру Лебега, второе — меру $\mu(A)$, опреде-

ляемую для каждого измеримого множества A из $(0, 1)$ формулой

$$\mu(A) = \frac{1}{\ln 2} \int_A \frac{dx}{1+x}.$$

С этой точки зрения теорема Гаусса — Кузьмина без оценки остаточного члена непосредственно следует из индивидуальной эргодич. теоремы Биркгофа. Соображения эргодич. теории оказываются полезными и при оценке остатков в нек-рых предельных теоремах. Напр., результаты А. Я. Хинчина допускают (см. [10]) уточнение:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = K + O\left(n^{-1/2} (\ln n)^{3/2+\varepsilon}\right),$$

$$\sqrt[n]{q_n(\alpha)} = \exp(\pi^2/12 \ln 2) + O\left(n^{1/2} (\ln n)^{2+\varepsilon}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно. Идеи эргодич. теории оказываются полезными и во многих других задачах М. т. ч. (линейные диофантовы приближения, распределение значений матричной показательной функции, алгоритм Якоби — Перрона и др.).

В нек-рых случаях метрич. характеристика числовых множеств, основанная на мере Лебега, оказывается слишком грубой, и тогда применяют более тонкие характеристики, напр. размерности Хаусдорфа. Такой подход оказывается особенно полезным в теории диофантовых приближений и теории трансцендентных чисел. Напр., было установлено [6], что при любых фиксированных n и $w \geqslant n+1$ множество тех действительных чисел x, для к-рых неравенство

$$|x - \alpha| < h_\alpha^{-w}$$

имеет бесконечное число решений в алгебраич. числах α степени n и высоты h_α, имеет размерность Хаусдорфа, равную $(n+1)/w$. Если $w < n+1$, то соответствующее неравенство имеет бесконечное число решений для почти всех x, в то время как предполагается, что это верно для всех x (гипотеза Вирзинга). Аналогичные результаты известны для комплексных чисел. Они непосредственно связаны с фундаментальными вопросами классификации трансцендентных чисел [3].

С метрич. точки зрения анализируются не только задачи, касающиеся действительных и комплексных чисел, но также p-адических чисел, аделей, формальных степенных рядов и т. д. и вообще элементов всех пространств, в к-рых введена мера и в к-рых ставится «арифметическая» задача. В частности, для p-адических чисел верны аналоги многих метрич. теорем теории равномерного распределения и теории диофантовых приближений действительных чисел, несмотря на то, что область p-адических чисел отличается своей метрикой и топологией (см. [3], [9]).

Метрич. подход оказывается эффективным при решении «некорректно» поставленных задач, когда недостаток информации об объекте исследования компенсируется допущением «случайного» выбора этого объекта из нек-рого множества сходных объектов. При этом, конечно, не удается исследовать первоначальный объект, что иногда в принципе невозможно из-за недостатка информации о нем, но получаются выводы, что «почти все» объекты из рассматриваемого множества обладают определенными свойствами. Напр., пусть $A^* = \{1 < a_1^* < a_2^* < \dots\}$ — последовательность натуральных чисел, возрастающая не быстрее нек-рой степени, т. е. $a_i < i^\mu$, $\mu = \text{const}$. Ставится вопрос, существует ли такое число r, что любое натуральное число можно представить суммой не более чем r слагаемых из A^*. Ясно, что имеющейся информации о последовательности A^* недостаточно для решения задачи.

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество последовательностей $A = \{1 < a_1 < a_2 < \dots\}$ целых чисел, где каждое a_i «слу-

чайно» выбирается из отрезка $[a_i^*, a_{i+1}^*)$. На $\mathfrak{A}$ можно определить меру Лебега и доказать, что для почти всех A существует искомое число $r<\infty$ (см. [4]).

Весьма содержательной и глубокой является связь между «глобальными» утверждениями М. т. ч. и их «индивидуальными» реализациями. Несмотря на то, что почти все элементы нек-рого множества обладают определенным свойством, бывает очень трудно установить, что данный конкретный элемент этого множества обладает этим же свойством. Напр., Э. Борель высказал предположение, что такие числа, как $\sqrt{2}$, e, π, $\ln 3$ и т. д., нормальны, и хотя почти все числа нормальны, до сих пор (1982) неизвестно, является ли нормальным хотя бы одно из этих чисел. Во многих случаях доказать метрич. теорему легче, чем подобную «индивидуальную». Однако это не означает, что в М. т. ч. нет глубоких проблем, т. к. многие проблемы М. т. ч. тесно связаны с нек-рыми «индивидуальными» проблемами, что иногда обнаруживается достаточно быстро. С другой стороны, решение «индивидуальных» проблем обнаруживает их связь с метрическими.

Идеи М. т. ч. играют фундаментальную роль во многих разделах аналитич. теории чисел, в особенности тогда, когда используется интегрирование по нек-рой мере. В этих случаях вывод какой-либо метрич. теоремы не является целью исследования, но метрич. соображения используются как промежуточный этап рассуждений. Они могут быть одним из главных принципов, лежащих в основе рассуждения, хотя окончательная формулировка результата не будет содержать никаких метрич. понятий. Примером систематич. использования такого рода рассуждений является метод Харди — Литлвуда — Виноградова, в к-ром существенную роль играют метрич. свойства приближения чисел рациональными дробями («большие» и «малые» дуги Харди — Литлвуда). Это обстоятельство позволило И. М. Виноградову формулировать свои новые теоремы об оценках сумм Вейля как нек-рые метрич. теоремы [1]. Кроме того, метод И. М. Виноградова оценок сумм Вейля носит ярко выраженный метрич. характер, где устанавливается связь между «глобальной» оценкой интеграла и «индивидуальной» оценкой конкретной суммы. Примеров такого рода в теории чисел мало.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [2] Постников А. Г., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1966, т. 82, с. 3—111; [3] Спринджук В. Г., *Проблема Малера в метрической теории чисел*, Минск, 1967; [4] его же, «Известия АН БССР. Сер. Физ.-матем. наук», 1970, № 1, с. 5—14; [5] Хинчин А. Я., Цепные дроби, 4 изд., М., 1978; [6] Baker A., Schmidt W., «Proc. London Math. Soc.», (3), 1970, v. 21, p. 1—11; [7] Erdös P., «J. Number Theory», 1970, v. 2, p. 425—41; [8] Koksma J. F., Diophantische Approximationen, B., 1936; [9] Lutz E., Sur les approximations diophantiennes linéaires p-adiques, P., 1955; [10] Philipp W., «Pacific J. Math.», 1967, v. 20, № 1, 109—27; Цигслер И., Хельмберг Г., «Математика», 1963, т. 7, № 3, с. 3—46.

В. Г. Спринджук.

МЕТРИЧЕСКАЯ ТРАНЗИТИВНОСТЬ динамической системы $\{T_t\}$ с (квази) инвариантной мерой μ — свойство системы $\{T_t\}$, состоящее в том, что любое измеримое подмножество A фазового пространства W, инвариантное относительно T_t (в том смысле, что оно совпадает со всеми своими прообразами $(T_t)^{-1}A$), либо имеет меру нуль, либо с точностью до множества меры нуль совпадает с W. Формально более сильный вариант этого свойства получится, если в определении вместо инвариантных множеств говорить о множествах, инвариантных по mod 0 (такое множество A при любом t может отличаться от $(T_t)^{-1}A$ на множество меры нуль). Эти два варианта эквивалентны, если μ является σ-конечной и «время» t пробегает локально компактную группу со счетной базой (см. доказательство для потоков в [1]), но для произвольных групп преобразований это не так (см. пример, приведенный по другому поводу, в [2]).

Вместо М. т. говорят также о метрической неразложимости, или эргодичности. Если у данной системы рассматривается несколько (квази) инвариантных мер и μ — одна из них, то, вместо того чтобы говорить о М. т. (эргодичности) системы по отношению к мере μ, говорят о М. т. (эргодичности) меры μ. Разложимость нормированной инвариантной меры μ естественно понимать иначе — как возможность представления μ в виде $a_1\mu_1+a_2\mu_2$, где μ_i — нормированные инвариантные меры, отличные от μ, и $a_i>0$. Неразложимость μ эквивалентна второму (более сильному) варианту М. т. (см. [2], [3]).

Если в W введена топология, то при естественных предположениях (см. обсуждение для потоков в [1]) из М. т. следует, что для почти всех $w\in W$ траектория точки w всюду плотна (в этом смысле из М. т. следует *топологическая транзитивность*). Обратное неверно.

Начиная с Дж. Неймана [4], получен ряд результатов о разложении неэргодич. систем на эргодич. компоненты. Традиционный в чисто метрич. теории вариант (W — *Лебега пространство*, соответственно речь идет только об одной (квази) инвариантной мере) см. в [5], [6], [11]. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов [7] получили для топологич. потоков и каскадов с компактным метрическим W более сильные результаты двоякого рода (см. также [8], [9]): 1) разложение инвариантных нормированных мер, совместимых с топологией, на эргодич. меры; 2) «геометрическая» реализация сразу всех этих разложений посредством *эргодических множеств*. Относительно обобщения этих результатов на другие группы преобразований известно, что 1) справедливо в более широких предположениях, чем 2) (см. [2], [3]). Имеются также аналогичные результаты для динамич. систем (пока только каскадов и потоков) в подходящих *измеримых пространствах* и (или) для квазиинвариантных мер (см. [9] — [11]).

М. т. разбиения ξ пространства с мерой (W, μ) — свойство разбиения ξ, состоящее в том, что любое измеримое подмножество $A\subset W$, целиком состоящее из элементов ξ, либо имеет меру нуль, либо с точностью до множества меры нуль совпадает со всем W. Вместо М. т. говорят также об абсолютной неизмеримости ξ. М. т. динамич. системы, образованной группой преобразований, так что траектории образуют разбиение фазового пространства, совпадает с М. т. этого разбиения. Если же преобразования, образующие динамич. систему, необратимы, то ее М. т. тоже сводится к М. т. некрого разбиения, хотя оно описывается сложнее: его элемент, содержащий некрую точку, состоит из всех ее образов и всех прообразов этих образов.

Лит.: [1] Хопф Э., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 1, с. 113—82; [2] Фомин С. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 3, с. 261—74; [3] Боголюбов Н. Н., Избр. труды, т. 1, К., 1969, с. 561—69; [4] Neumann J., «Ann. Math.», 1932, v. 33, № 3, p. 587—642; № 4, p. 789—92; [5] Рохлин В. А., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 2, с. 57—128; [6] его же, «Матем. сб.», 1949, т. 25, № 2, с. 235—49; [7] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., в кн.: Боголюбов Н. Н., Избр. труды, т. 1, К., 1969, с. 411—63; [8] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1949; [9] Окстоби Дж., «Успехи матем. наук», 1953, т. 8, в. 3, с. 75—97; [10] Кифер Ю. И., Пирогов С. А., там же, 1972, т. 27, в. 1, с. 77—80; [11] их же, там же, в. 5, с. 239—40. *Д. В. Аносов.*

МЕТРИЧЕСКИЙ ИЗОМОРФИЗМ пространств с мерой $(X_1, \mathfrak{B}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{B}_2, \mu_2)$ — биективное отображение $f: X_1\to X_2$, при к-ром образы и прообразы измеримых множеств измеримы и имеют ту же меру (здесь $\mathfrak{B}_i$ — нек-рая булева σ-алгебра или σ-кольцо подмножеств пространства X_i, называемых измеримыми, а μ_i — заданная на $\mathfrak{B}_i$ мера). Более общее понятие — (метрический) гомоморфизм этих пространств, т. е. такое отображение $f: X_1\to X_2$, что

прообразы измеримых множеств измеримы и имеют ту же меру. При $(X_1, \mathfrak{B}_1, \mu_1)=(X_2, \mathfrak{B}_2, \mu_2)$ вместо изоморфизма или гомоморфизма говорят о (м е т р и ч е с к о м) а в т о м о р ф и з м е или э н д о м о р ф и з м е.

В соответствии с обычной в теории меры тенденцией пренебрегать множествами меры нуль вводятся (и преимущественно используются) варианты всех этих понятий «по mod 0». Напр., пусть $N_i \subset X_i$, $\mu(N_i)=0$, $i=1, 2$, и $f: X_1 \setminus N_1 \to X_2 \setminus N_2$ — М. и.; тогда говорят, что f есть изоморфизм исходных пространств с мерой по mod 0. (Оговорку «по mod 0» часто опускают.)

Для ряда объектов, заданных в X_i (подмножеств, функций, преобразований, а также их систем), имеет смысл утверждение, что при М. и. f эти объекты переходят друг в друга. Тогда говорят, что f есть М. и. соответствующих объектов. Можно говорить также об их М. п. по mod 0. При этом подразумевается, что при нек-рых N_i меры нуль соответствующие объекты O_i могут рассматриваться как нек-рые объекты O_i' в $X_i \setminus N_i$ (для преобразований это означает, что $X_i \setminus N_i$ инвариантны относительно этих преобразований, а для подмножеств и функций это имеет смысл при любых N_i — надо взять пересечения рассматриваемых подмножеств с $X_i \setminus N_i$ и ограничения функций на $X_i \setminus N_i$) и что f есть М. и. объектов O_i'. Класс всех метрически изоморфных по mod 0 друг другу объектов называют (м е т р и ч е с к и м) т и п о м; говорят, что два объекта из этого класса имеют одинаковый тип.

С $(X_i, \mathfrak{B}_i, \mu_i)$ ассоциируются гильбертово пространство $L^2(X_i, \mu_i)$, в к-ром дополнительно к обычной структуре гильбертова пространства имеется еще операция обычного перемножения функций (определенная, правда, не всюду, ибо произведение функций из L^2 не всегда принадлежит L^2), и булева σ-алгебра с мерой $\mathfrak{M}_i$, получающаяся из $\mathfrak{B}_i$ отождествлением множеств, симметрич. разность к-рых имеет меру нуль (т. е. факторизацией по идеалу, состоящему из множеств меры нуль). М. и. mod 0 f индуцирует изоморфизм булевых σ-алгебр с мерой $\mathfrak{M}_i$ и унитарный изоморфизм гильбертовых пространств $L^2(X_i, \mu_i)$, к-рый м у л ь т и п л и к а т и в е н, т. е. переводит произведение (когда оно определено) в произведение образов сомножителей. Если $(X_i, \mathfrak{B}_i, \mu_i)$ — *Лебега пространство*, то верно и обратное: всякий изоморфизм булевых σ-алгебр с мерой $\mathfrak{M}_i$ или мультипликативный унитарный изоморфизм пространств $L^2(X_i, \mu_i)$ индуцируется нек-рым М. и. по mod 0.

Лит.: [1] Р о х л и н В. А., «Матем. сб.», 1949, т. 25, № 1, с. 107—50.

Д. В. Аносов.

МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР, о с н о в н о й т е н з о р, ф у н д а м е н т а л ь н ы й т е н з о р, — поле дважды ковариантного симметрич. тензора $g=g(X, Y)$ на n-мерном дифференцируемом многообразии M^n, $n \geqslant 2$. Задание на M^n М. т. вводит в касательном к M^n в точке $p \in M^n$ векторном пространстве M_p^n скалярное произведение $\langle X, Y\rangle$ контравариантных векторов $X, Y \in M_p^n$, определяемое как билинейная функция $g_p(X, Y)$, где g_p — значение поля g в точке p. В координатной записи:

$$\langle X, Y\rangle = g_{ij}(p)\, X^i Y^j, \quad X=\{X^i\}, \quad Y=\{Y^j\}, \quad 0 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Метрика пространства M_p^n с введенным в нем скалярным произведением принимается в бесконечно малом за метрику многообразия M^n, что выражается в выборе дифференциальной квадратичной формы

$$ds^2 = g_{ij}(p)\, dx^i\, dx^j \qquad (*)$$

квадратом дифференциала длины дуги кривой M^n, исходящей из p в направлении $dx^1, \ldots, dx^n$. По ее геометрич. смыслу форму (*) наз. м е т р и ч е с к о й, или п е р в о й о с н о в н о й, ф о р м о й на M^n,

соответствующей М. т. g. Обратно, если на M^n задана симметрическая квадратичная форма вида (*), то ей сопоставляется поле дважды ковариантного тензора $g(X, Y)=g_{ij}X^i\otimes Y^j$, соответствующая метрич. форма к-рого совпадает с g. Таким образом, задание на M^n М. т. g равносильно заданию на M^n метрики с квадратом линейного элемента вида (*). М. т. полностью определяет внутреннюю геометрию M^n.

Совокупность М. т. g и определяемых ими метрик подразделяется на два класса — вырожденные метрики, когда $\det(g_{ij})=0$, и невырожденные, когда $\det(g_{ij})\neq 0$. Многообразие M^n с вырожденной метрикой (*) наз. изотропным. Среди невырожденных М. т., в свою очередь, различаются р и м а н о в М. т., для к-рого квадратичная форма (*) является положительно определенной, и п с е в д о р и м а н о в М. т., когда форма (*) является знакопеременной. Риманова (псевдориманова) метрика, вводимая на M^n через риманов (псевдориманов) М. т., определяет на M^n риманову (соответственно псевдориманову) геометрию.

Обычно под М. т. без специального на то указания понимается риманов М. т.; но если, рассматривая невырожденный М. т., хотят подчеркнуть, что речь идет именно о римановом, а не псевдоримановом М. т., то об этом М. т. говорят как о собственно римановом М. т. Собственно риманов М. т. может быть введен на любом паракомпактном дифференцируемом многообразии.

Лит.: [1] Э й з е н х а р т Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [2] Р а ш е в с к и й П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [3] Г р о м о л Д., К л и н г е н б е р г В., М е й е р В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971.

И. Х. Сабитов.

МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — множество X вместе с нек-рой *метрикой* ρ на нем. Теоретико-множественный подход к изучению фигур (пространств) основан на исследовании взаимного расположения составляющих их элементарных частей. Одной из фундаментальных характеристик взаимного расположения точек пространства является расстояние между ними. Этот подход к пространственным отношениям и приводит к понятию М. п., впервые выделенному М. Фреше [2] в связи с рассмотрением функциональных пространств. Оказалось, что естественную метрику несут на себе множества объектов самой разной природы. Как М.п. могут рассматриваться множества состояний, функций и отображений, любые подмножества евклидовых пространств и гильбертова пространства. Рассмотрение метрик важно при исследовании сходимости (рядов, функций), при решении вопросов аппроксимации.

Развитие теории М. п. шло по следующим важнейшим направлениям.

О б щ а я т е о р и я М. п. В ней исследуются свойства М. п., инвариантные относительно изометрий — взаимно однозначных отображений на, сохраняющих расстояние. К числу таких свойств относятся полнота, ограниченность, вполне ограниченность, диаметр. Свойства этого типа наз. м е т р и ч е с к и м и.

Т о п о л о г и ч е с к а я т е о р и я М. п. Предметом ее являются свойства М. п., сохраняющиеся при гомеоморфизмах. Среди них — компактность, сепарабельность, связность, свойство Бэра, нульмерность. Свойства этого типа наз. т о п о л о г и ч е с к и м и.

Т е о р и я п р о с т р а н с т в, н а к-р ы х з а д а н а м е т р и к а, согласованная с какой-либо дополнительной алгебраич. структурой (напр., векторного пространства или группы). Сюда относятся евклидовы пространства, предгильбертовы и *гильбертовы пространства* (любого веса), *банаховы пространства*, *банаховы алгебры*, банаховы решетки, счетно нормированные пространства. Имеющиеся здесь факты существенно связаны с рассмотрением важных в идейном отношении свойств метрик или норм, но по со-

держанию целиком принадлежат соответствующим областям алгебры и функционального анализа.

Рассмотрение специальных метрик играет важную роль при исследовании неевклидовых геометрий, в дифференциальной геометрии, механике и физике. Центральное место здесь занимает понятие римановой метрики риманова пространства (см. *Римановa геометрия*). Более широкий подход к изучению поверхностей и фигур, возникающих в дифференциальной геометрии, связан с концепцией G-пространства, получающейся добавлением к аксиомам метрики нек-рых условий (см. *Геодезических геометрия*), создающих основу для рассмотрения геодезических в G-пространстве, обеспечивая их существование и правильные свойства. Характерным здесь является отказ от пользования методами дифференциального исчисления, при этом обнаруживается, что многое в дифференциальной геометрии не связано с условиями дифференцируемости, а определяется только геометрич. аксиомами. Геометрия геодезических представляет интерес не только как обобщение римановой геометрии, но и как попытка заменить вычисления рассуждениями, сделать исследование геометрич. объектов более геометричным.

На каждом множестве X может быть определена метрика ρ_T по следующему правилу: $\rho_T(x, y)=0$, если $x=y$, и $\rho_T(x, y)=1$, если $x\neq y$. Эта метрика наз. т р и в и а л ь н о й. Каждая метрика ρ на множестве X позволяет естественным образом ввести на X топологию $\mathcal{T}_\rho$. Концепция топологич. пространства заключает в себе аксиоматизацию отношения абсолютной близости точки к множеству, тогда как концепцией М. п. формализуется отношение сравнительной близости между точками. Р а с с т о я н и е $\rho(x, A)$ от точки x до множества A в М. п. $\{X, \rho\}$ определяется как $\inf\{\rho(x, y) : y\in A\}$. Точка x объявляется абсолютно близкой ко множеству A, если $\rho(x, A)=0$. З а м ы к а н и е м $[A]$ множества A в $\{X, \rho\}$ наз. множество всех точек из X, абсолютно близких к A. Однозначно отвечающая этой операции топология на множестве X и наз. т о п о л о г и е й, п о р о ж д е н н о й на X м е т р и к о й ρ. Тривиальной метрике на X отвечает дискретная топология — все множества замкнуты.

В исследовании М. п. (особенно их топологич. свойств) важная роль принадлежит понятию сходящейся последовательности. Это объясняется тем, что топология каждого М. п. может быть полностью описана на языке последовательностей.

Пусть $\xi=\{x_n,\ n=1, 2, \ldots\}$ — последовательность точек в М. п. $\{X, \rho\}$. Она наз. с х о д я щ е й с я к точке $x\in X$, если для каждого $\varepsilon>0$ найдется целое число N такое, что $\rho(x, x_n)<\varepsilon$ при всех $n>N$. Последовательность ξ наз. ф у н д а м е н т а л ь н о й, если для каждого $\varepsilon>0$ найдется целое число N такое, что $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$ при всех $m,\ n>N$.

Важным метрич. свойством является полнота — М. п. $\{X, \rho\}$ наз. п о л н ы м, если каждая фундаментальная последовательность в нем сходится к нек-рой его точке. Пространство $\{X, \rho_T\}$ полно. Полнота М. п. не является топологич. свойством: М. п., гомеоморфное полному М. п., может не быть полным, напр. действительная прямая $\mathbb{R}$ с обычной метрикой $\rho(x, y)=|x-y|$ гомеоморфна интервалу $(0, 1)=\{x\in\mathbb{R}: 0<x<1\}$, наделенному той же метрикой, однако первое М. п. полно, а второе — нет.

Примерами полных М. п. могут служить евклидовы и банаховы пространства. Важным свойством полных М. п., сохраняющимся при гомеоморфизмах, является *Бэра свойство*, в силу к-рого каждое полное М. п. без изолированных точек несчетно. Поэтому обычная топология пространства рациональных чисел не порождается никакой полной метрикой. Однако каждое М. п. может быть представлено как часть нек-рого полного

М. п. посредством стандартной конструкции пополнения. Две фундаментальные последовательности $\xi=\{x_n\}$ и $\eta=\{y_n\}$ в М. п. $\{X, \rho\}$ наз. эквивалентными, если

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n)=0.$$

Пусть $\tilde{X}$ — множество всех возникающих классов эквивалентности. Метрика $\tilde{\rho}$ на $\tilde{X}$ вводится правилом: если $a', a''\in\tilde{X}$ и $a'\ni\xi'=\{x_n'\}$, $a''\ni\xi''=\{x_n''\}$, то

$$\tilde{\rho}(a', a'')=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n', x_n'').$$

Для $x\in X$ пусть $i(x)=\{x_n\}$, где $x_n=x$ при всех n. Тогда $\{\tilde{X}, \tilde{\rho}\}$ — полное М. п. и $i\colon X\to\tilde{X}$ — изометрич. отображение пространства X, ρ на всюду плотное подпространство в $\{\tilde{X}, \tilde{\rho}\}$ (в связи с чем $\{\tilde{X}, \tilde{\rho}\}$ и наз. пополнением пространства $\{X, \rho\}$).

С рассмотрением пополнений связана *Лаврентьева теорема* о продолжении гомеоморфизмов. Из нее следует, что свойство М. п. быть множеством типа G_δ в своем пополнении топологически инвариантно (в отличие от неинвариантности самой метрич. полноты относительно гомеоморфизмов).

Метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X наз. топологически эквивалентными, если совпадают порожденные ими топологии $\mathcal{T}_{\rho_1}$ и $\mathcal{T}_{\rho_2}$. На конечном множестве все метрики эквивалентны — они порождают дискретную топологию. Теорема Александрова — Хаусдорфа: метрика ρ на множестве X топологически эквивалентна нек-рой полной метрике в том и только в том случае, если X является множеством типа G_δ в пополнении М. п. $\{X, \rho\}$. В частности, пространство иррациональных чисел с обычной метрикой (не полное относительно ее) гомеоморфно полному метрич. пространству Бэра, точками к-рого являются всевозможные бесконечные последовательности $\{n_i\}$ натуральных чисел, а расстояние задается правилом: $\rho(\{n_i\}, \{m_i\})=1/k$, где k таково, что $n_k\neq m_k$ и $n_i=m_i$ при всех $i<k$.

Важен следующий пример полного М. п.: пространство $C_{[0,1]}$, составленное из всех непрерывных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, и несущее на себе метрику, определенную правилом

$$\rho(f, g)=\max\{|f(x)-g(x)|\colon x\in[0, 1]\}$$

для всех $f, g\in C_{[0,1]}$. Пространство $C_{[0,1]}$ сепарабельно — в нем есть счетное всюду плотное множество. Оказывается, каждое сепарабельное М. п. изометрично нек-рому подпространству $C_{[0,1]}$ (теорема Банаха — Мазура). Этот результат означает, в частности, что все метрики, порождающие сепарабельные топологии, оправданы (ибо изометричное пространство может быть получено сужением естественной метрики множества непрерывных функций).

Подмножество Y полного М. п. $\{X, \rho\}$, наделенное той же метрикой ρ (точнее, ее сужением на $Y\times Y$), является полным М. п., если и только если Y замкнуто в $\{X, \rho\}$.

Существует фундаментальная связь между понятиями полноты и компактности М. п. Компактность М. п. X, ρ равносильна любому из следующих условий: 1) любая последовательность в $\{X, \rho\}$ содержит сходящуюся предпоследовательность; 2) каждое счетное открытое покрытие пространства $\{X, \rho\}$ содержит конечное подпокрытие; 3) в любом открытом покрытии пространства $\{X, \rho\}$ найдется конечное подпокрытие; 4) каждая убывающая последовательность непустых замкнутых в $\{X, \rho\}$ множеств имеет непустое пересечение; 5) каждое замкнутое дискретное подпространство пространства $\{X, \rho\}$ конечно.

Простейшие примеры компактных М. п.: конечные дискретные пространства, любой отрезок (с концами), квадрат, окружность, сфера. Вообще, подпространство евклидова пространства E^n, взятое в обычной метрике, компактно в том и только в том случае, если оно замкнуто в E^n и ограничено.

Не все из перечисленных условий равносильны за пределами класса М. п. (см. *Бикомпактное пространство*). А. Лебег (H. Lebesgue, 1911) установил, что для каждого открытого покрытия γ компактного М. п. $\{X, \rho\}$ существует число $\delta>0$ такое, что всякое множество $A\subset X$ диаметра $\leqslant\delta$ содержится в некотором элементе покрытия γ. Отсюда следует фундаментальное свойство компактных М. п., характеризующее их в классе всех М. п.: всякое непрерывное отображение такого пространства в произвольное М. п. равномерно непрерывно. Далее, М. п. компактно в том и только в том случае, если каждая непрерывная действительная функция на нем ограничена (и достигает наименьшего и наибольшего значений).

Каждое компактное М. п. полно, но обратное неверно; простейшим примером служит бесконечное дискретное пространство, наделенное тривиальной метрикой. Но имеет место следующая характеристика: М. п. компактно в том и только в том случае, если всякое гомеоморфное ему М. п. полно.

Интуитивно очевидно, что компактность включает, помимо полноты, условие типа ограниченности, что подтверждается рассмотрением компактных подпространств в E^n. В общем случае М. п. $\{X, \rho\}$ наз. ограниченным, если существует действительное число a такое, что $\rho(x, y)<a$ для всех $x, y\in X$. Каждое компактное М. п. ограничено. Пространство $\{X, \rho_T\}$ полно и ограничено, но не компактно, если X бесконечно, так что полнота и ограниченность в совокупности недостаточны для компактности М. п. Вообще, всякая метрика на любом множестве топологически эквивалентна нек-рой ограниченной метрике — полной, если заданная метрика полна. В связи с этим получает важное значение понятие вполне ограниченности. М. п. $\{X, \rho\}$ наз. в п о л н е о г р а н и ч е н н ы м, если для каждого $\varepsilon>0$ существует конечное множество $A_\varepsilon\subset X$ такое, что $\rho(x, A_\varepsilon)<\varepsilon$ при всех $x\in X$. Множество A_ε наз. при этом ε-с е т ь ю в $\{X, \rho\}$. М. п. $\{X, \rho\}$ компактно, если и только если оно полно и вполне ограничено, и $\{X, \rho\}$ вполне ограничено в том и только в том случае, если оно изометрично подпространству нек-рого компактного М. п. Точнее, вполне ограниченность М. п. $\{X, \rho\}$ равносильна компактности его пополнения $\{\tilde{X}, \tilde{\rho}\}$. Каждое подпространство вполне ограниченного М. п. вполне ограничено. Все вполне ограниченные М. п. (в частности, все компактные М. п.) сепарабельны и обладают счетной базой. Компактность, вообще говоря, не наследуется подпространствами; множество $A\subset X$ компактно в М. п. $\{X, \rho\}$, если замыкание A в $\{X, \rho\}$ является компактным М. п. Если $\{X, \rho\}$ полно, то компактность множества $A\subset X$ в $\{X, \rho\}$ равносильна вполне ограниченности A, наделенного метрикой ρ.

Важную роль в функциональном анализе играет критерий компактности произвольного множества A непрерывных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, в М. п. $C_{[0,1]}$, заключенный в следующей т е о р е м е А р ц е л а — А с к о л и: множество A компактно в $C_{[0,1]}$, если и только если выполняются условия: 1) существует число M такое, что $|f(x)|<M$ при всех $x\in[0, 1]$ и всех $f\in A$; 2) для каждого $\varepsilon>0$ найдется $\gamma>0$ такое, что $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ для всех $f\in A$ и всех $x', x''\in[0, 1]$, для к-рых $|x'-x''|<\delta$.

Отображение f М. п. $\{X, \rho\}$ в себя наз. с ж и м а ю щ и м, если существует действительное число $\lambda<1$

такое, что

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda\rho(x, y)$$

при всех $x, y \in X$. Важной теоремой о полных М. п. является принцип сжимающих (сжатых) отображений: для каждого такого отображения (непустого) полного М. п. $\{X, \rho\}$ в себя существует ровно одна *неподвижная точка*.

Топологич. теория М. п. значительно проще общей теории топологич. пространств. Ниже приводятся наиболее важные топологич. свойства М. п. $\{X, \rho\}$ — имеются ввиду свойства топологии $\mathcal{T}_\rho$, порожденной метрикой.

Каждое М. п. нормально и даже коллективно нормально. Это позволяет продолжать непрерывные действительные функции с замкнутых подмножеств М. п. на все пространство. Более сильное утверждение: для каждого замкнутого подмножества Y М. п. $\{X, \rho\}$ существует линейное отображение φ пространства всех непрерывных действительных функций на $\{Y, \rho\}$ в пространство всех непрерывных действительных функций на $\{X, \rho\}$ такое, что (каково бы ни было f) $\varphi(f)$ является продолжением функции f и

$$\sup\{|f(x)| : x \in Y\} = \sup\{|\varphi(f)(x)| : x \in X\}$$

(теорема Дугунджи). Эта теорема связана с теоремой Хаусдорфа о продолжении метрики: если замкнутое подпространство Y метризуемого пространства X уже метризовано метрикой ρ_1 (порождающей на Y топологию подпространства X), то можно продолжить ρ_1 до метрики ρ на всем X, порождающей исходную топологию на X. Аналогичные утверждения справедливы для вполне ограниченных метрик и полных метрик.

Исследование топологич. свойств М. п. в большей степени основывается на следующей теореме Стоуна: М. п. паракомпактно, т. е. в любое его открытое покрытие γ можно вписать локально конечное открытое покрытие λ (локальная конечность означает наличие у каждой точки окрестности, задевающей лишь конечное множество элементов покрытия λ). На теореме о паракомпактности М. п. основан метризационный критерий Нагаты — Смирнова (см. *Метризуемое пространство*).

Для М. п. имеют место важные теоремы об эквивалентности топологич. свойств, различаемых в рамках общей топологии. Так, совпадают следующие кардинальнозначные инварианты: плотность, вес, число Суслина, число Линделёфа. Для М. п. равносильны: счетная компактность, псевдокомпактность и бикомпактность. Для М. п. совпадают размерности dim (в смысле покрытий) и Ind (большая индуктивная), а для сепарабельных М. п. с dim и Ind совпадает и малая индуктивная размерность ind (см. *Размерности теория*).

Каждое М. п. $\{X, \rho\}$ звездно нормально: в любое открытое покрытие γ пространства $\{X, \rho\}$ можно вписать открытое покрытие λ звездно, т. е. так, что для каждой точки $x \in X$ найдется $U \in \gamma$, содержащее всякое $V \in \lambda$, для к-рого $x \in V$. С этой теоремой связан критерий метризуемости (Стоуна—Архангельского). Критерием метризуемости регулярного пространства вполне ограниченной метрикой является наличие в этом пространстве счетной базы — но даже счетное регулярное пространство может быть не метризуемо. Простейший пример получается присоединением к дискретному натуральному ряду какой-нибудь одной точки из нароста *Стоуна — Чеха бикомпактного расширения* натурального ряда. Неожиданный характер носит критерий метризуемости метризуемого пространства X полной метрикой — для этого необходимо и достаточно, чтобы X было множеством типа G_δ в каком-нибудь (а тогда и в любом) бикомпактном

хаусдорфовом расширении пространства X. Впрочем, бикомпактные хаусдорфовы расширения М. п. несут полную информацию о топологии последних, как это видно из теоремы Чеха: М. п. гомеоморфны в том и только в том случае, если гомеоморфны их расширения Стоуна — Чеха.

М. п. может не иметь счетной базы, но всегда удовлетворяет первой аксиоме счетности — имеет счетную базу в каждой точке. Более того, каждый компакт в М. п. имеет счетную базу окрестностей. Сверх того, в каждом М. п. существует такая база, что каждая точка пространства принадлежит лишь счетному множеству ее элементов — точечно-счетная база, но это свойство слабее метризуемости даже в присутствии паракомпактности и хаусдорфовости. Не обязано быть метризуемым и регулярное сепарабельное пространство с первой аксиомой счетности.

Просто выглядит условие метризуемости отделимой топологич. группы — для этого необходимо и достаточно, чтобы пространство группы удовлетворяло первой аксиоме счетности, причем на группе тогда существуют как левоинвариантная, так и правоинвариантная метрики, порождающие ее топологию.

С каждым М. п. $\{X, \rho\}$ стандартным образом связано другое М. п., а именно пространство $F(X)$ всех его непустых замкнутых подмножеств, несущее на себе метрику Хаусдорфа, определяемую следующей формулой:

$$\rho_H(A, B)=\max\{\sup\{\rho(a, B): a\in A\},\ \sup\{\rho(b, A): b\in B\}\}.$$

Пространство $\{X, \rho\}$ изометрично замкнутому подпространству полученного М. п. $\{F(X), \rho_H\}$. Если метрика ρ полна, то и метрика ρ_H полна. Но из топологич. эквивалентности метрик ρ' и ρ'', заданных на X, не следует, вообще говоря, что отвечающие им метрики Хаусдорфа ρ'_H и ρ''_H топологически эквивалентны.

Непрерывный образ М. п. может быть не гомеоморфен никакому М. п., даже удовлетворяя аксиоме отделимости Хаусдорфа. Это относится и к факторпространствам М. п. Напр., если на плоскости «склеить» в точку фиксированную прямую, взяв в качестве отдельных элементов разбиения все точки плоскости, не попавшие на эту прямую, то получится неметризуемое нормальное сепарабельное пространство — в особой его точке не выполняется первая аксиома счетности. Имеется общий критерий метризуемости факторпространства М. п. (см. [6]). В частности, пространство *непрерывного разбиения* М. п. на компакты всегда метризуемо. Всякое хаусдорфово пространство, являющееся непрерывным образом компактного М. п., метризуемо и компактно — это частное проявление общего положения о неповышении веса топологич. пространства при непрерывном отображении на бикомпакт. Но и когда образ Y М. п. $\{X, \rho\}$ метризуем, метрику, осуществляющую метризацию Y, не удается получить из метрики ρ посредством какой-либо формулы. Вместо метрики на $Y\times Y$ по ρ естественно определяется функция d посредством правила: $d(y', y'')$ для любых $y', y''\in Y$ равно расстоянию в смысле ρ между прообразами точек y' и y'' при рассматриваемом отображении. Часто (напр., если Y — пространство разбиения М. п. на компакты) d хорошо согласуется с топологией Y и является симметрикой. Последнее означает, что $d(y', y'')=d(y'', y')$ для всех $y', y''\in Y$, $d(y', y'')=0$, если и только если $y'=y''$. Симметрика d, так определенная, почти никогда не удовлетворяет аксиоме треугольника, но если разбиение на компакты непрерывно, то d обладает топологич. свойствами, с успехом заменяющими аксиому треугольника и гарантирующими метризуемость образа «настоящей» метрикой. Топологич. пространство, являющееся образом М. п. при непрерывном, открытом и замкнутом отображении,

само гомеоморфно нек-рому М. п. Однако при непрерывных открытых отображениях метризуемость сохраняется не всегда — все пространства с первой аксиомой счетности и только они представимы как образы М. п. при непрерывных открытых отображениях.

Среди обобщений М. п. наиболее важны псевдометрич. пространства, пространства с симметрикой и пространства с 0-метрикой [7]. Они определяются аксиоматически посредством естественных ослаблений системы аксиом М. п. Но расстояние здесь по-прежнему выражается неотрицательной действительным числом. Можно рассматривать обобщенные метрики со значениями в упорядоченных полугруппах, полуполях и т. д. (см. [8]). На этом пути можно осуществить обобщенную метризацию произвольного вполне регулярного пространства.

Фундаментальным обобщением концепции М. п. является понятие *равномерного пространства.* Далее идут чисто топологич. расширения класса М. п., среди к-рых важны классы пространств с равномерной базой, моровских пространств, перистых и паракомпактных перистых пространств, кружевных пространств. Класс паракомпактов является слишком широким обобщением класса М. п., чтобы считаться таковым: паракомпактность не сохраняется даже при возведении в квадрат. Напротив, класс паракомпактных перистых пространств является удачным одновременным обобщением класса пространств, гомеоморфных М. п., и класса бикомпактов. В ином направлении обобщают понятие метрики $\varkappa$-метрики и δ-метрики [4]. Концепция статистич. М. п., введенная К. Менгером (K. Menger), в топологич. отношении оказалась равноценной понятию пространства с симметрикой.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Fréchet M., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1906, v. 22; [3] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [4] Щепин Е. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 5, с. 191—226; [5] Engelking R., General topology, Warsz., 1977; [6] Архангельский А. В., «Докл. АН СССР», 1964, т. 155, № 2, с. 247—50; [7] Недев С. Й., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1971, т. 24, с. 201—36; [8] Антоновский М. Я., Болтянский В. Г., Сарымсаков Т. А., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4, с. 185—218; [9] Недев С. Й., Чобан М. М., «Сердика», 1975, т. 1, с. 12—28.

А. В. Архангельский.

МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР МЕТОД, механических кубатур метод,— метод решения интегральных уравнений, основывающийся на замене интеграла суммой при помощи квадратурных (кубатурных) формул. Пусть рассматривается уравнение

$$x(t)=\int_\Omega K(t,\ s)\,x(s)\,ds+y(t), \tag{1}$$

где $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ — ограниченная открытая область. С использованием какого-либо квадратурного (кубатурного) процесса

$$\int_\Omega z(s)\,ds=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jn}z(s_{jn})+\varphi_n(z)$$

составляют систему линейных уравнений

$$x_{in}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jn}K(s_{in},\ s_{jn})\,x_{jn}+y(s_{in}),\ \ i=1,\ \ldots,\ n, \tag{2}$$

относительно $x_{in}\approx x(s_{in})$, $i=1,\ \ldots,\ n$.

Пусть свободный член y и ядро K непрерывны соответственно на $\bar\Omega$ и $\bar\Omega\times\bar\Omega$ ($\bar\Omega$ — замыкание Ω) и пусть уравнение (1) имеет единственное решение $x(t)$. Пусть $\varphi_n(z)\to 0$ при $n\to\infty$ для любой непрерывной на $\bar\Omega$ функции $z(t)$. Тогда при достаточно больших n система (2) однозначно разрешима и

$$c_1\varepsilon_n\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\,x_{in}-x(s_{in})\,|\leqslant c_2\varepsilon_n,\ \ n\geqslant n_0,$$

где c_1 и c_2— нек-рые положительные постоянные,

$$\varepsilon_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | \varphi_n (K (s_{in}, s)\ x (s)) | \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$.

М. к. м. может быть применен для решения нелинейных интегральных уравнений [3] и проблемы собственных значений для линейных интегральных операторов. Метод сходится и для нек-рого класса уравнений с разрывными ядрами [4].

Лит.: [1] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы, т. 2, М., 1977; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962; [3] Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [4] Вайникко Г. М., «Сиб. матем. ж.», 1971, т. 12, № 1, с. 40—53; [5] Прёсдорф З., Некоторые классы сингулярных уравнений, пер. с нем., М., 1979.

Г. М. Вайникко.

МЕШАЮЩИЙ ПАРАМЕТР — любой неизвестный параметр вероятностного распределения в статистич. задаче, связанной с изучением других параметров данного распределения. Точнее, пусть по реализации случайной величины X, принимающей значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k, \theta_{k+1}, \ldots, \theta_n) \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$, необходимо сделать статистич. выводы о параметрах $\theta_1, \ldots, \theta_k$. Тогда $\theta_{k+1}, \ldots, \theta_n$ суть М. п. в данной задаче. Напр., пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся нормальному закону $\Phi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)$, параметры к-рого ξ и σ^2 неизвестны, и пусть проверяется гипотеза H_0: $\xi = \xi_0$, где ξ_0— нек-рое фиксированное число. Неизвестная дисперсия σ^2 является М. п. в задаче проверки гипотезы H_0. Другой важный пример задачи с М. п. дает *Беренса — Фишера проблема*. Естественно, что при решении статистич. задач с М. п. желательно уметь получать статистич. выводы, не зависящие от этих параметров. В теории статистич. проверки гипотез этого часто добиваются за счет сужения класса всех критериев, предназначенных для проверки нек-рой гипотезы H_0 при наличии М. п., до класса *подобных критериев*.

Лит.: [1] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966.

М. С. Никулин.

МИКРОРАССЛОЕНИЕ — отображение $p : E \to X$, являющееся ретракцией (т. е. существует $g : X \to E$, для к-рого $pg = 1_X$), локально тривиальное в том смысле, что для каждой точки $x \in X$ имеется представление нек-рой окрестности U точки gx в E в виде прямого произведения $U = V \times \mathbb{R}^n$, при к-ром $p|_U$ оказывается проекцией на сомножитель v. Если для каждой такой окрестности U на каждом слое $(p|_U)^{-1}(x)$ фиксирована кусочно линейная структура, причем проекция U на $\mathbb{R}^n$ кусочно линейна на каждом слое и для двух окрестностей U_1 и U_2 и всякой точки $x \in p(U_1) \cap p(U_2)$ структуры на $(p|_{U_1})^{-1}(x)$ и $(p|_{U_2})^{-1}(x)$ совпадают в нек-рой окрестности точки gx, то такое М. наз. к у с о ч н о л и н е й н ы м. Аналогично можно вводить и другие структуры.

Понятие М. было введено с целью определить аналог *касательного расслоения* для топологического или кусочно линейного многообразия N. Именно, здесь $E = N \times N$, $p(x, y) = y$, $g(x) = (x, x)$. Каждое топологич. М. эквивалентно единственному локально тривиальному расслоению со слоем $\mathbb{R}^n$ соответствующей размерности, т. е. имеется гомеоморфизм h нек-рой окрестности W множества gX в E на окрестность $\overline{W}$ нулевого сечения нек-рого расслоения $\overline{p} : E \to X$ со слоем $\mathbb{R}^n$. Этот факт верен и для кусочно линейных М. Несмотря на то, что в связи с этой теоремой понятие М. потеряло теоретич. интерес, оно еще используется в конкретных задачах.

А. В. Чернавский.

МИЛНА МЕТОД — конечноразностный метод решения задачи Коши для системы обыкновенных диф-

ференциальных уравнений 1-го порядка:

$$y'=f(x,\ y),\ y(a)=b.$$

В М. м. используется конечноразностная формула:

$$y_i-y_{i-2}=2hf(x_{i-1},\ y_{i-1}),$$

где

$$x_i=a+ih,\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Для вычисления по этой формуле необходимо каким-либо иным способом найти дополнительное начальное значение $y_1\approx y(x_1)$. М. м. имеет 2-й порядок точности, устойчив по Далквисту, т. е. все решения однородного разностного уравнения $y_i-y_{i-2}=0$ ограничены равномерно по h при $i=0,\ 1,\ \ldots,\ \left[\frac{A-a}{h}\right]$ для любого фиксированного отрезка $[a,\ A]$. Для устойчивости по Далквисту достаточно, чтобы простые корни характеристич. многочлена левой части разностного уравнения не превосходили по модулю единицы, а кратные —были по модулю строго меньше единицы. В данном случае характеристич. многочлен $\rho(\lambda)=\lambda^2-1$ имеет корни $\lambda=\pm1$ и, следовательно, удовлетворяет указанному условию устойчивости. Однако при решении систем уравнений $y'=Ay$ с матрицей A, имеющей отрицательные собственные значения, происходит быстрый рост вычислительной погрешности.

Предсказывающе-исправляющий М. м. использует пару конечноразностных формул: предсказывающую

$$\bar{y}_i=y_{i-4}+\frac{4h}{3}(2f_{i-3}+f_{i-2}+2f_{i-1}),\ i=4,\ 5,\ \ldots,$$

и исправляющую

$$\bar{\bar{y}}_i=y_{i-2}+\frac{h}{3}(f_i+4f_{i-1}+f_{i-2}),\ i=4,\ 5,\ \ldots,$$

где

$$f_i=f(x_i,\ y_i),\quad \bar{f}_i=f(x_i,\ \bar{y}_i).$$

В качестве приближенного выражения погрешности берется величина

$$\varepsilon_i=\frac{1}{29}(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}}_i).$$

Дополнительные начальные значения $y_j\approx y(x_j)$, $j=1,\ 2,\ 3$, вычисляются каким-либо иным способом, напр. методом Рунге — Кутта, имеющим четвертый порядок точности. Метод предложен в [3].

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З., Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные уравнения, М., 1962; [3] Милн В. Э., Численное решение дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1955.

В. В. Поспелов.

МИЛНА ПРОБЛЕМА — проблема теории переноса излучения о решении односкоростного кинетич. уравнения переноса квантов или частиц для полупространства. Впервые интегральное уравнение М. п. с источником на бесконечности при нулевом потоке падающего извне излучения было выведено Э. Милном [1] для случая изотропного рассеяния квантов, распространяющихся без поглощения в звездной атмосфере.

Уравнение Милна имеет вид

$$B(x)=\frac{1}{2}\int_0^\infty B(t)\,E_1(|x-t|)\,dt. \qquad (1)$$

Здесь $B(x)$ — плотность излучения (или частиц),

$$E_1(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x/\mu}}{\mu}\,d\mu$$

— интегро-показательная функция ($E_1(x)=-\mathrm{Ei}(-x)$).

В нейтронной физике М. п. используется для постановки приближенных граничных условий при ре-

шении уравнений диффузионного приближения в ограниченной области; при этом учитываются захват нейтронов в среде, анизотропия рассеяния и кривизна границы.

Здесь М. п. состоит в решении интегро-дифференциального уравнения

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu, \mu') \psi(x, \mu') d\mu'$$

с краевым условием на границе полупространства, заполненного веществом, с вакуумом

$$\psi(0, \mu) = 0 \text{ для } 0 < \mu \leqslant 1, \qquad (2)$$

где c есть среднее число вторичных нейтронов, приходящееся на одно соударение с ядром ($c<1$ в рассеивающем и поглощающем нейтроны веществе), $p(\mu, \mu')$ — индикатриса рассеяния ($p(\mu, \mu')=1$ при изотропном рассеянии). Аналогично ставится сферическая или цилиндрическая М. п. о распределении нейтронов в пространстве вне поглощающей сферы или цилиндра.

Решение М. п. удобно проводить, применяя преобразование Лапласа к интегро-дифференциальному уравнению переноса (см. [3]) и используя для решения получающихся функциональных уравнений *Винера — Хопфа метод*.

Для решения М. п. было предложено использовать разложение по обобщенным собственным функциям и методы решения сингулярных интегральных уравнений (см. [4]). Решение М. п. при $p(\mu, \mu')=1$, $c<1$ ищется в виде

$$\psi(x,\mu) = \psi_{0-}(x,\mu) + a_{0+}\psi_{0+}(x,\mu) + \int_0^1 A(\nu)\psi_\nu(x, \mu)d\nu,$$

где

$$\psi_\nu(x, \mu) = \varphi_\nu(\mu)\, e^{-x/\nu},$$

$$\varphi_\nu(\mu) = (c\nu/2)\, P\frac{1}{\nu-\mu} + \lambda(\nu)\, \delta(\nu-\mu)$$

— собственные функции непрерывного спектра, P — символ главного значения по Коши, $\delta(\nu-\mu)$ есть δ-функция Дирака,

$$\lambda(\nu) = 1 - \nu c \operatorname{Arth} \nu, \quad \psi_{0\pm} = \varphi_{0\pm}(\mu)\, e^{\mp x/\nu_0}.$$

Дискретные собственные значения $\pm\nu_0$ суть корни характеристич. уравнения

$$\nu c \operatorname{Arth} \frac{1}{\nu} = 1,$$

— собственные функции дискретного спектра имеют вид

$$\varphi_{0\pm}(\mu) = \pm \left(\frac{c\nu_0}{2}\right) \frac{1}{\pm\nu_0 - \mu}.$$

Система собственных функций $\varphi_{0+}(\mu)$ и $\varphi_\nu(\mu)$, $0 \leqslant \nu \leqslant 1$, оказывается полной в пространстве обобщенных функций на отрезке $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ и ортогональной с весом $W(\mu)$, к-рый находится как решение сингулярного интегрального уравнения (см. [4]).

Граничное условие (2) М. п. дает ($\mu \geqslant 0$):

$$-\varphi_{0-}(\mu) = a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) + \int_0^1 A(\nu)\varphi_\nu(\mu)\, d\nu,$$

то есть a_{0+} и $A(\nu)$ определяются как коэффициенты разложения функции

$$\varphi_{0-}(\mu) = (c\nu_0/2)\frac{1}{\nu_0+\mu}.$$

Асимптотич. плотность нейтронов

$$B_{ac}(x) = 2\pi \int_{-1}^{+1} [\psi_{0-}(x, \mu) + a_{0+}\psi_{0+}(x, \mu)]\, d\mu =$$

$$= 4\pi e^{-x_0/\nu_0} \operatorname{sh} \frac{x+x_0}{\nu_0}$$

обращается в нуль при

$$x = -x_0 = (v_0/2)\,(\ln a_{0+} - i\pi).$$

Для $c=1$ $p(\mu, \mu')=1$, постоянная Хопфа $x_0=0{,}710446$.

Лит.: [1] Milne E. A., «Mon. Notices Roy. Astron. Soc.», 1921, v. 81, p. 361—75; [2] Hopf E., Mathematical problems of radiative equilibrium, Camb., 1934; [3] Снеддон И., Преобразование Фурье, пер. с англ., М., 1955; [4] Кейз К.-М., Цвайфель П.-Ф., Линейная теория переноса, пер. с англ., М., 1972.

В. А. Чуянов.

МИЛНОРА СФЕРА — гладкое многообразие, гомеоморфное (кусочно линейно изоморфное) сфере S^n, но не диффеоморфное ей. Впервые пример такого многообразия был построен Дж. Милнором в 1956 (см. [1]); этот же пример — первый пример гомеоморфных, но не диффеоморфных многообразий.

Построение М. с. Любое гладкое замкнутое многообразие, гомотопически эквивалентное сфере S^n, при $n\geqslant 5$ гомеоморфно (и даже кусочно линейно изоморфно) сфере S^n (см. *Пуанкаре гипотеза* обобщенная, *h-кобордизм*). Сигнатура замкнутого гладкого почти *параллелизуемого многообразия* размерности $4k$ делится на число σ_k, экспоненциально растущее с ростом k. Для любого k имеется параллелизуемое многообразие P^{4k} сигнатуры 8 (именно, *древовидное многообразие* Милнора), край к-рого $M=\partial P$ есть при $k\geqslant 1$ гомотопическая сфера (см. [2]). Если бы M было диффеоморфно сфере S^{4k-1}, то многообразие W^{4k}, полученное из P^{4k} добавлением конуса над краем, было бы гладким почти параллелизуемым замкнутым многообразием сигнатуры 8. Таким образом, M есть М. с.

Имеется и др. пример М. с. (см. [5]).

Классификация М. с. Имеется 28 различных (не диффеоморфных) 7-мерных М. с. (в эти 28 многообразий включена стандартная сфера S^7, и в дальнейшем термин «М. с.» используется и для обозначения стандартной сферы S^n).

Множество всех гладкостей на кусочно линейной сфере (точнее, сглаживаний, но для сфер это одно и то же) эквивалентно множеству элементов группы $\pi_i\,(PL/0)$. Последняя группа при $i<7$ тривиальна, так что любая М. с. размерности, меньшей 7, диффеоморфна стандартной.

Пусть θ_n — множество классов h-кобордантности n-мерных гладких многообразий, гомотопически эквивалентных сфере S^n. Операция *связной суммы* превращает это множество в группу, где нуль — класс h-кобордантности сферы S^n. При $n>5$ элементы группы θ_n находятся во взаимно однозначном соответствии с классами диффеоморфности n-мерных М. с. Для вычисления групп θ_n, $n>5$, задается (см. [3]) тривиализация стабильного нормального расслоения (оснащение) М. с. M^n. Это возможно, так как M^n стабильно параллелизуемо. Полученное оснащенное многообразие определяет элемент стабильной гомотопич. группы $\prod_n = \lim\limits_{i} \pi_{i+n}(S^i)$. Этот элемент зависит, вообще говоря, от выбора оснащения ($\theta_n \to \prod_n$ — «многозначное отображение»). Пусть $\theta_n(\partial\pi)$ — подгруппа в θ_n, состоящая из М. с., ограничивающих параллелизуемые многообразия. Построенное многозначное отображение индуцирует гомоморфизм $\alpha : \theta_n/\theta_n(\partial\pi) \to \mathrm{Coker}\ I$, где $I : \pi_n(\mathrm{SO}) \to \prod_n$ — стационарный *Уайтхеда гомоморфизм* и α — изоморфизм. Вычисление группы $\theta_n/(\theta_n(\partial\pi))$ сводится к задаче (нерешенной, 1982) вычисления группы $\prod_n$ и вычисления группы $\theta_n(\partial\pi)$, что делается посредством *Морса перестроек* пленки (при сохранении края). Пусть $[M^n] \in \theta(\partial\pi)$, то есть $M^n = \partial W^{n+1}$ и W^{n+1} параллелизуемо. Если W — стягиваемое многообразие, то после вырезания в W маленького диска многообра-

зие M h-кобордантно S^n, то есть $[M^n]=0\in\theta_n$. Если n четно, то можно так изменить W посредством перестроек Морса, что новое многообразие W' с $\partial W'=M$ будет стягиваемым (здесь требуется параллелизуемость многообразия W и условие $n>5$). Итак, $\theta_{2n}(\partial\pi)=0$.

Случай $n+1=4k$. Если сигнатура $\sigma(W)$ многообразия W есть 0, то W можно перестройками Морса превратить в стягиваемое многообразие, так что в этом случае M есть стандартная сфера. Если $M=\partial W$ и $M'=\partial W'$, то $M\#(-M')=\partial(W\#(-W))$ и $\sigma(W\#(-W'))=\sigma(W)-\sigma(W')$ (здесь $A\#B$ — связная сумма многообразий A и B). Если $\sigma(W)=\sigma(W')$, то $[M]=[M']$, так что инвариант $\sigma(W)$ однозначно определяет элемент $[M]\in\theta_n$. Если $[M]=0\in\theta_{4k-1}(\partial\pi)$ и $M=\partial W$, то $\sigma(W)$ делится на σ_k. Обратно, для любого $k>1$ существует гладкое замкнутое многообразие B^{4k} с $\sigma(B^{4k})=\sigma_k$, поэтому если $M=\partial W$ и $\sigma(W)=n\sigma_k$, то $M=\partial(W\#(-nB^{4k}))$, где $W\#\#(-nB^{4k})$ параллелизуемо и $\sigma(W\#(-nB^{4k}))=0$. Элемент $[M]\in\theta_{4k-1}(\partial\pi)$ полностью определяется вычетом $\sigma(W)\bmod\sigma_k$, и разные вычеты определяют разные многообразия. Так как $\sigma(W)$ принимает любое значение, кратное 8, то $\operatorname{ord}\theta_{4k-1}(\partial\pi)=\sigma_{nk}/8$.

Случай $n=4k+1$. Пусть $M=\partial W^{4k+2}$. Если *Кервера инвариант* многообразия W есть нуль, то есть $\psi(W)=0$, то W перестраивается до стягиваемого многообразия, то есть $[M]=0$. Пусть теперь $\psi(W)\neq0$. Так как при $4k+2\neq2^i-2$ не существует гладкого замкнутого почти параллелизуемого (что в размерности $4k+2$ равносильно параллелизуемости) многообразия с инвариантом Кервера, не равным нулю, то M не диффеоморфно S^{4k+1}. В этом случае $\theta_{4k+1}(\partial\pi)\neq0$, то есть $\theta_{4k+1}(\partial\pi)=\mathbb{Z}_2$. При $4k+2=2^i-2$ и тех значениях i, где существует многообразие с ненулевым инвариантом Кервера, $M\approx S^{4k+1}$, то есть $\theta_{4k+1}(\partial\pi)=0$, но вопрос об описании всех таких не решен (1982), хотя при $i\leqslant6$ ответ положителен. Итак, $\theta_{4k+1}(\partial\pi)$ есть $\mathbb{Z}_2$ или 0.

Имеется другое представление М. с. Пусть в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$ W — алгебраическое многообразие с уравнением

$$z_1^{a_1}+z_2^{a_2}+\ldots+z_{n+1}^{a_{n+1}}=0$$

и S_ε есть $(2n+1)$-мерная сфера радиуса ε (малого) с центром в начале координат. При подходящих значениях a_k $M=W\cap S_\varepsilon$ есть М. с. (см. [4]). Напр., при $n=4$ и $a_1=6k-1$, $a_2=3$, $a_3=a_4=a_5=2$ и $k=1, 2, \ldots, 28$ получаются все 28 7-мерных М. с.

Лит.: [1] Милнор Дж., «Математика», 1957, т. 1, № 3, с. 35—42; [2] Milnor J., Kervaire M., в кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1958, Camb., 1960, p. 454—58; [3] их же, «Ann. Math.», 1963, v. 77, № 3, p. 504—37; [4] Милнор Дж., Особые точки комплексных гиперповерхностей, пер. с англ., М., 1971; [5] Милнор Дж., Сташеф Дж., Характеристические классы, пер. с англ., М., 1979.

Ю. Б. Рудяк.

МИНИМАКС — смешанный экстремум

$$\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}F(x,y),\quad \min_{y\in Y}\max_{x\in X}F(x,y)$$

и т. п. (см. также *Максимин*); может интерпретироваться (напр., в теории принятия решений, *исследовании операций* или статистике) как наименьшие потери из тех, к-рые нельзя предотвратить принимающему решения субъекту в наихудших для него обстоятельствах.

Н. Н. Воробьев.

МИНИМАКСА ПРИНЦИП — принцип оптимальности в *антагонистических играх*, выражающий стремление каждого из игроков к получению наибольшего гарантированного выигрыша. М. п. реализуем в антагонистич. игре $\Gamma=\langle A, B, H\rangle$, если справедливо равенство

$$v=\max_{a\in A}\inf_{b\in B}H(a,b)=\min_{b\in B}\sup_{a\in A}H(a,b),\qquad(*)$$

т. е. если существуют значение игры, равное v, и оптимальные стратегии у обоих игроков.

Для *матричных игр* и нек-рых классов бесконечных антагонистич. игр (см. *Бесконечная игра*) М. п. реализуем в смешанных стратегиях. Известно, что равенство (*) равносильно выполнению неравенств (см. *Седловая точка*):

$$H(a, b^*) \leqslant H(a^*, b^*) \leqslant H(a^*, b)$$

для всех $a \in A$, $b \in B$, где a^*, b^* — стратегии, на к-рых достигаются внешние экстремумы в (*). Таким образом, М. п. математически выражает интуитивно понимаемую идею устойчивости, т. к. ни одному из игроков невыгодно отклоняться от своих оптимальных стратегий a^* (соответственно b^*). Вместе с тем М. п. гарантирует игроку I (II) получение выигрыша (проигрыша), не меньшего (не большего), чем значение игры. Было дано аксиоматич. обоснование М. п. для матричных игр (см. [1]).

Лит.: [1] Вилкас Э., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 3, с. 324—27. *Е. Б. Яновская.*

МИНИМАКСНАЯ ОЦЕНКА — статистическая оценка, к-рая получена в результате конкретизации понятия *минимаксности статистической процедуры* в задаче статистич. оценивания.

Пример 1. Пусть случайная величина X подчиняется биномиальному закону, параметры к-рого суть n и θ, причем θ, $0<\theta<1$, неизвестен. Статистика

$$t = \frac{X}{n}\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} + \frac{1}{2(1+\sqrt{n})}$$

является М. о. для параметра θ относительно функции потерь

$$L(\theta, t) = (\theta - t)^2.$$

Пример 2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, к-рые подчиняются одному и тому же вероятностному закону, имеющему непрерывную плотность вероятности $f(x-\theta)$, $|x|<\infty$, $|\theta|<\infty$. Оценка Питмена

$$t = t(X_1, \ldots, X_n) = X_{(1)} - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \prod_{i=2}^{n} f(x+X_i)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \prod_{i=2}^{n} f(x+X_i)\,dx}$$

является М. о. для неизвестного параметра сдвига θ относительно функции потерь $L(\theta, t)=(\theta-t)^2$, где $X_{(1)}$ — первый член вариационного ряда, построенного по выборке $X_1, \ldots, X_n$. В частности, если $X_1, \ldots, X_n \sim N(\theta, 1)$, то $t=(X_1+\ldots+X_n)/n$.

Лит.: [1] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [2] Кокс Д., Хинкли Д., Теоретическая статистика, пер. с англ., М., 1978. *М. С. Никулин.*

МИНИМАКСНОЕ СВОЙСТВО собственных значений — специального типа соотношения, связывающие собственные значения вполне непрерывного самосопряженного оператора A с максимальным и минимальным значениями соответствующей ему квадратичной формы (Ax, x). Пусть A — самосопряженный вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H. Спектр оператора A состоит из конечного или счетного множества действительных собственных значений λ_n, имеющих единственную предельную точку, равную нулю. Соответствующие ненулевым собственным значениям корневые подпространства состоят из собственных векторов и конечномерны; собственные подпространства, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны; оператор A имеет полную систему собственных векторов. Спектральное разложение оператора A имеет вид: $A=\Sigma\lambda_i P_i$, где λ_i — различные собственные значения, P_i — проекторы на соответствующие собственные подпространства, причем ряд сходится по операторной норме. Норма оператора A совпадает с максимальным по модулю соб-

ственным значением и совпадает с $\max\limits_{x \in H,\ |x|=1} |(Ax, x)|$; при этом максимум достигается на соответствующем собственном векторе.

Пусть $\lambda_1^+ \geqslant \lambda_2^+ \geqslant \ldots$ — положительные собственные значения оператора A, причем каждое собственное значение повторяется столько раз, сколько его кратность. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^+ &= \max_{x \in H} \frac{(Ax, x)}{|x|^2}, \\ \lambda_{n+1}^+ &= \min_{y_1, \ldots, y_n} \max_{\substack{(x, y_i)=0 \\ i=1, \ldots, n}} \frac{(Ax, x)}{|x|^2}, \quad n \geqslant 1, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $x, y_1, \ldots, y_n$ — произвольные ненулевые векторы пространства H. Аналогичные соотношения справедливы для отрицательных собственных значений $\lambda_1^- \geqslant \lambda_2^- \geqslant \ldots$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^- &= \min_{x \in H} \frac{(Ax, x)}{|x|^2}, \\ \lambda_{n+1}^- &= \max_{y_1, \ldots, y_n} \min_{\substack{(x, y_i)=0 \\ i=1, \ldots, n}} \frac{(Ax, x)}{|x|^2}, \quad n \geqslant 1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Соотношения (1) и (2) применяются для нахождения собственных значений интегральных операторов с симметричным ядром. Если A и B — самосопряженные вполне непрерывные операторы, $A \leqslant B$ (т. е. $(Ax, x) \leqslant (Bx, x)$), λ_n, μ_n — последовательности их положительных собственных значений, занумерованных в порядке убывания, причем каждое значение повторяется столько раз, какова его кратность, то $\lambda_n \leqslant \mu_n$.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж.-Т., Линейные операторы, пер. с англ., т. 2, М., 1966. *А. И. Логинов.*

МИНИМАКСНОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРОЦЕДУРЫ — один из вариантов оптимальности в математич. статистике, согласно к-рому статистич. процедура объявляется оптимальной в минимаксном смысле, если она минимизирует максимальный риск. В терминах решающих функций понятие М. с. п. определяется следующим образом. Пусть случайная величина X принимает значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$, и пусть $\Delta = \{\delta\}$ — класс решающих функций, с помощью к-рых по реализации случайной величины X надлежит выбрать решение d из пространства решений D, т. е. $\delta(\cdot) : \mathfrak{X} \to D$, при этом задана некая функция потерь $L(\theta, d)$, определенная на $\Theta \times D$. В таком случае статистич. процедура $\delta^* \in \Delta$ наз. м и н и м а к с н о й в задаче принятия статистич. решения относительно функции потерь $L(\theta, d)$, если при всех $\delta \in \Delta$ выполняется соотношение

$$\sup_{\theta \in \Theta} \mathsf{E}_\theta L(\theta, \delta^*(X)) \leqslant \sup_{\theta \in \Theta} \mathsf{E}_\theta L(\theta, \delta(X)),$$

где

$$\mathsf{E}_\theta L(\theta, \delta(X)) = R(\theta, \delta) = \int_{\mathfrak{X}} L(\theta, \delta(x))\, dP_\theta(x)$$

— функция риска, отвечающая статистич. процедуре (решающему правилу) δ, при этом решение $d^* = \delta^*(x)$, отвечающее наблюденной реализации x и минимаксной процедуре δ^*, наз. м и н и м а к с н ы м. Так как величина

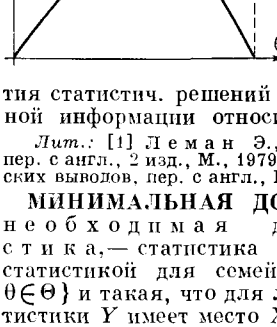
$$\sup_{\theta \in \Theta} \mathsf{E}_\theta L(\theta, \delta(X))$$

показывает ожидаемые потери, к-рые можно понести при использовании процедуры $\delta \in \Delta$, то М. с. п. δ^* означает, что если руководствоваться процедурой δ^*

в задаче выбора решения d из пространства решений D, то наибольший ожидаемый риск

$$\sup_{\theta \in \Theta} R(\theta, \delta^*)$$

будет настолько малым, насколько это возможно. Принцип М. с. п. не всегда приводит к разумным выводам (см. рис.); в данном случае следует ориентироваться на процедуру δ_1, а не на δ_2, хотя



$$\sup_{\theta \in \Theta} R(\theta, \delta_1) > \sup_{\theta \in \Theta} R(\theta, \delta_2).$$

Понятие М. с. п. является полезным в задачах принятия статистич. решений в условиях отсутствия априорной информации относительно параметра θ.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.
М. С. Никулин.

МИНИМАЛЬНАЯ ДОСТАТОЧНАЯ СТАТИСТИКА, необходимая достаточная статистика,— статистика X, являющаяся достаточной статистикой для семейства распределений $\mathcal{P}=\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ и такая, что для любой другой достаточной статистики Y имеет место $X=g(Y)$, где g — нек-рая измеримая функция. Достаточная статистика минимальна тогда и только тогда, когда порождаемая ею достаточная σ-алгебра минимальна, т. е. содержится в любой другой достаточной σ-алгебре.

Используется также понятие $\mathcal{P}$-минимальной достаточной статистики (σ-алгебры). Достаточная σ-алгебра $\mathcal{B}_0$ (и соответствующая статистика) наз. $\mathcal{P}$-минимальной, если $\mathcal{B}_0$ содержится в пополнении $\overline{\mathcal{B}}$ любой достаточной σ-алгебры $\mathcal{B}$ относительно семейства распределений $\mathcal{P}$. Если семейство $\mathcal{P}$ доминировано σ-конечной мерой μ, то σ-алгебра $\mathcal{B}_0$, порождаемая семейством плотностей

$$\left\{ p_\theta(\omega) = \frac{dP}{d\mu}(\omega);\ \theta \in \Theta \right\},$$

является достаточной и $\mathcal{P}$-минимальной.

Общий пример М. д. с. дает направляющая статистика $T=(T_1, \ldots, T_n)$ экспоненциального семейства

$$p_\theta(\omega) = C(\theta) \exp \sum_j Q_j(\theta)\, T_j(\omega)$$

в предположении точности канонич. параметризации этого семейства.

Лит.: [1] Барра Ж.-Р., Основные понятия математической статистики, пер. с франц., М., 1974; [2] Шметтерер Л., Введение в математическую статистику, пер. с нем., М., 1976.
А. С. Холево.

МИНИМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ — алгебраическое многообразие с условием минимальности относительно существования бирациональных морфизмов на неособые многообразия. Точнее, пусть B — класс всех бирационально эквивалентных неособых проективных многообразий над алгебраически замкнутым полем k, поля функций к-рых изоморфны заданному конечно порожденному расширению K над k. Многообразия из класса B наз. проективными моделями этого класса, или проективными моделями поля K/k. Многообразие $X \in B$ наз. относительно минимальной моделью, если всякий бирациональный морфизм $f: X \to X'$, где $X' \in B$, является изоморфизмом. Иначе говоря, относительно М. м.— это минимальные элементы в B относительно частичного порядка, определяемого следующим отношением доминирования: X_1 доминирует X_2, если существует бирациональный морфизм $h: X_1 \to X_2$. Если относительно М. м. единственна в B, то она наз. минимальной моделью.

В каждом классе бирационально эквивалентных кривых существует единственная (с точностью до изоморфизма) неособая проективная кривая. Так что всякая неособая проективная кривая является М. м. В общем случае, если класс B не пуст, то в нем существует хотя бы одна относительно М. м. Непустота класса B известна (благодаря теоремам о разрешении особенностей) для многообразий любой размерности в характеристике 0 и для многообразий размерности $n\leqslant 3$ в характеристике $p>5$.

Основные результаты о М. м. алгебраич. поверхностей заключаются в следующих утверждениях.

1) Неособая проективная поверхность X тогда и только тогда является относительно М. м., когда она не содержит исключительных кривых первого рода (см. *Исключительное подмногообразие*).

2) Всякая неособая полная поверхность обладает бирациональным морфизмом на относительно М. м.

3) В каждом непустом классе B бирационально эквивалентных поверхностей, кроме классов рациональных и линейчатых поверхностей, существует (и притом единственная) М. м.

4) Если B — класс *линейчатых поверхностей* с кривой C рода $g>0$ в качестве базы, то все относительно М. м. в B исчерпываются геометрически линейчатыми поверхностями $\pi : X\to C$.

5) Если B — класс рациональных поверхностей, то все относительно М. м. в B исчерпываются проективной плоскостью P^2 и серией минимальных рациональных линейчатых поверхностей $F_n=P(\mathcal{O}_{P^1}+\mathcal{O}_{P^1}(n))$ для всех целых $n\geqslant 2$.

Имеется (см. [6], [7]) обобщение теории М. м. поверхностей на регулярные двумерные схемы. Описаны (см. [2]) М. м. рациональных поверхностей, определенных над произвольным полем.

О М. м. для многообразий размерности $n\geqslant 3$ почти ничего не известно (1982).

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [2] Исковских В. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1979, т. 43, № 1, с. 19—43; [3] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [4] Bombieri E., Husemoller D., Classification and embeddings of surfaces. Proc. symp. pure math., v. 29 — Algebraic geometry arcata 1974, Rhode Island, 1975, p. 329—420; [5] Hartshorne R., Algebraic geometry, N. Y.—Hdlb.—B., 1977; [6] Lichtenbaum S., «Amer. J. Math.», 1968, v. 90, № 2, p. 380—405; [7] Shafarevitch I., Lectures on minimal models and birational transformations of twodimensional schemes, Bombey, 1966.

В. А. Исковских.

МИНИМАЛЬНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА — неединичная нормальная подгруппа H такая, что между ней и единичной подгруппой нет других нормальных подгрупп всей группы. М. н. п. имеются далеко не во всякой группе. Если группа конечна, то любая ее М. н. п. является прямым произведением изоморфных простых групп. Если М. н. п. у группы G существует и единственна, то она наз. м о н о л и т о м (иногда с е р д ц е в и н о й), а сама группа G наз. м о н о л и т и ч н о й.

Лит.: [1] К у р о ш А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

А. Л. Шмелькин.

МИНИМАЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, у к-рой средняя кривизна H равна нулю во всех точках.

Первые исследования о М. п. восходят к Ж. Лагранжу (J. Lagrange, 1768), к-рый рассмотрел следующую вариационную задачу: найти поверхность наименьшей площади, натянутую на данный контур. Предполагая искомую поверхность задаваемой в виде $z=z(x, y)$, Ж. Лагранж получил, что $z(x, y)$ необходимо должна удовлетворять т. н. у р а в н е н и ю Э й л е р а — Л а г р а н ж а

$$(1+q^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2pq\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+(1+p^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \qquad (1)$$

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Позже Г. Монж (G. Monge, 1776) обнаружил, что условие минимальности площади приводит к условию $H=0$, и поэтому за поверхностями с $H=0$ закрепилось название «минимальные». В действительности, однако, нужно различать понятия М. п. и поверхности наименьшей площади, т. к. условие минимальности $H=0$ представляет собой лишь необходимое условие минимальности площади, вытекающее из равенства нулю 1-й вариации площади поверхности среди всех поверхностей класса C^2 с заданной границей. Для проверки достижения в указанном классе хотя бы относительного (локального) минимума приходится исследовать 2-ю вариацию площади поверхности.

Теория М. п. имеет богатую историю — ею занимались почти все крупные математики 19—20 вв. Ее задачи стимулировали развитие многих смежных областей математики. Первые общие методы интегрирования уравнения Эйлера — Лагранжа были предложены Г. Монжем (1784) и А. Лежандром (A. Legendre, 1787) в виде т. н. формул Монжа, полученных через комплексные характеристики уравнения (1):

$$x=A(t)+A_1(\tau),\ y=B(t)+B_1(\tau),\ z=C(t)+C_1(\tau),$$

где t и τ — комплексные переменные, $A(t),\ \ldots,\ C_1(\tau)$ — голоморфные функции, удовлетворяющие условиям

$$A'^2(t)+B'^2(t)+C'^2(t)=0,\ A_1'^2(\tau)+B_1'^2(\tau)+C_1'^2(\tau)=0.$$

Однако эти методы в силу недостаточного еще развития теории функций комплексного переменного долгое время оставались без применения [в 1832 С. Пуассон (S. Poisson) писал, что из формул Монжа трудно извлечь какую-либо пользу, т. к. они усложнены введением комплексных переменных].

Новые результаты о М. п. стали появляться лишь с начала 30-х гг. 19 в. С. Пуассон анонсировал (1832) решение им вариационной задачи Лагранжа в случае, когда край поверхности близок к плоской кривой. Вскоре к известным уже М. п.— *катеноиду* [Л. Эйлер (L. Euler, 1774), Ж. Мёнье (J. Meusnier, 1776)] и *геликоиду* (Ж. Мёнье, 1776) — была добавлена третья М. п.— *Шерка поверхность* (H. Scherk, 1834). В 1842 Э. Каталан (E. Catalan) доказал, что геликоид является единственной линейчатой М. п.; в 1844 была поставлена и решена *Бьёрлинга задача*; в 50-х гг. 19 в. в серии работ О. Бонне (O. Bonnet) были даны новые доказательства известных к тому времени фактов теории М. п. и найдены другие свойства М. п. (единственность катеноида как М. п. вращения, конформность сферич. отображения М. п. и др.).

В 1866 были открыты формулы Вейерштрасса:

$$x=x_0+\operatorname{Re}\int_0^w (f^2-g^2)\,dw,$$

$$y=y_0+\operatorname{Re}\int_0^w i\,(f^2+g^2)\,dw,$$

$$z=z_0+2\operatorname{Re}\int_0^w fg\,dw,$$

представляющие односвязную М. п. S (x, y, z) через голоморфные функции $f(w)$ и $g(w)$, определенные в круге или во всей плоскости изменения внутренних *изотермических координат* (u, v), $w=u+iv$. Эти формулы эквивалентны или содержат как частные случаи все другие найденные до этого параметрич. представления М. п. [Б. Риман (B. Riemann, 1860), А. Эннепер (A. Enneper, 1864), К. М. Петерсон, 1866, и др.] и дают регулярную М. п. только в случае, когда f и g не имеют общих нулей, а в случае совпадения нулей функций f и g поверхность является т. н. обобщенной М. п. с вырождающейся в общих нулях f и g метрикой

$$ds^2=(|f|^2+|g|^2)\,(du^2+dv^2).$$

В этих точках появляются *ветвления точки* М. п. С помощью формул Вейерштрасса появилась возможность явного построения и изучения многих конкретных М. п., в частности алгебраич. М. п., получаемых при алгебраич. функциях f и g.

В 1874 Г. Шварц (H. Schwarz) получил представление М. п. в изотермич. координатах (u, v) в виде

$$r(w) = r(u+iv) = \mathrm{Re}\left[F(w) - i\int_0^w n(w)\,dF(w)\right],$$

где $F(w)$ и $n(w)$ — трехмерные векторы с голоморфными компонентами, совпадающими соответственно с $r(u, 0)$ и единичной нормалью $n(u, 0)$ к М. п. При $\mathrm{Im}\ w=0$ эта формула дает решение задачи Бьёрлинга в явном виде и позволяет распространить на М. п. принцип симметрии Шварца.

В эти же годы С. Ли (S. Lie, 1878) развил свою интерпретацию формул Монжа, сопоставив каждой М. п. с гармонич. радиус-вектором $r(w)$ комплексно-аналитич. кривую

$$z = R(w) \in \mathbb{C}^3,\ \mathrm{Re}\,R(w) = \tfrac{1}{2}\,r(w)$$

и представив М. п. как поверхность переноса кривой $R(w)$ и её комплексно-сопряженной кривой $\overline{R(w)}$, что послужило отправной точкой для установления плодотворных связей между теорией М. п. и аналитич. кривых. Таким образом, труды К. Вейерштрасса, С. Ли, Б. Римана, Г. Шварца и др. привели к концу 19 в. к широкому использованию в теории М. п. методов и результатов теории функций комплексного переменного.

В своих опытах Ж. Плато (J. Plateau, 1849) пришел к физич. реализации М. п. в виде мыльных пленок, натянутых на проволочные каркасы различной формы. Его опыты оживили интерес к старой проблеме нахождения М. п. по ее заданному граничному контуру. Эту проблему стали называть *Плато задачей*. Первые ее решения были получены для различных случаев полигональных контуров, при этом, в частности, была открыта *Римана — Шварца поверхность*.

В 1816 в теории М. п. появилась новая з а д а ч а Ж е р г о н н а: найти М. п., если часть ее границы задана, а остальная часть должна располагаться на нек-рой заранее заданной поверхности; эта задача стала наз. задачей о М. п. с о с в о б о д н о й г р а н и ц е й. Первые результаты по ее решению также относятся к случаям, когда заданная часть границы состоит из отрезков прямых, а остальная ее часть должна находиться на заданных плоскостях (более подробно см. в [1], [2]).

С начала 20 в. усилился интерес к изучению М. п. «в целом». Изучалась задача Дирихле для уравнения Эйлера — Лагранжа [А. Корн (A. Korn, 1909), С. Н. Бернштейн, 1900]; была получена *Бернштейна теорема* о М. п.; вообще с началом работ С. Н. Бернштейна в теорию М. п. вошли методы теории дифференциальных уравнений с частными производными. Г. Либман (H. Liebmann, 1919) установил связь между М. п. и бесконечно малыми изгибаниями сферы. Венцом достижений 1-й пол. 20 в. в теории М. п. было полное решение задачи Плато, сначала в случае односвязных поверхностей, а затем и для двумерных поверхностей произвольного топологич. типа в евклидовом и римановом пространстве (см. [1] — [5]). Результаты о М. п. были распространены на случай решений более общих вариационных задач (обобщающих вариационную задачу для минимума поверхности), более общих дифференциальных уравнений (обобщающих уравнение Эйлера — Лагранжа для М. п.) и на случай более общего класса поверхностей (папр., с постоянной средней кривизной) (см. [3], [6], [7]).

Среди имеющихся результатов и ведущихся исследований по М. п. можно выделить несколько направлений.

1) Внутренняя геометрия М. п. Не для всякого риманова многообразия неположительной кривизны существует изометрич. погружение в евклидово пространство E^n, $n\geqslant 3$, в виде нек-рой М. п. Критерий существования М. п. в E^3 с данной метрикой заключается в следующей теореме Риччи: для того чтобы данная метрика ds^2 была изометрична метрике нек-рой М. п. в E^3, необходимо и достаточно, чтобы ее кривизна K была неотрицательна, а в точках, где $K<0$, метрика $d\sigma^2=\sqrt{-K}\,ds^2$ была евклидова. На основании этого критерия удается охарактеризовать все изгибания М. п., удовлетворяющей условиям теоремы Риччи, в классе всех М. п. из E^n, $n\geqslant 3$. Прежде всего, имея в E^n М. п. F, заданную в изотермич. координатах (u, v) гармонич. функциями $x_k(u, v)=\operatorname{Re}\Phi_k(w)$, $w=u+iv$, $1\leqslant k\leqslant n$, $\Phi_k(w)$ — голоморфные функции, строят так наз. ассоциированные с F и друг с другом М. п. F_α с компонентами радиус-вектора $x_k=\operatorname{Re}(\Phi_k(w)e^{-i\alpha})$, $F=F_0$. Ассоциированные М. п. F_α все оказываются изометричными друг другу, а в случае $n=3$ их изгибания друг в друга при изменении α обладают следующим характеристич. свойством: нормали к F_α в соответствующих по изометрии точках параллельны, причем изгибания М. п. F в E^3 в классе М. п. исчерпываются семейством ассоциированных с F М. п.; напр., катеноид и геликоид — две ассоциированные (а значит, изометричные) М. п. с параметрами $\alpha=0$ и $\alpha=\pi/2$. Далее, по данной М. п. F в E^n можно построить изометричную ей М. п. $G\subset E^{2n}$ с радиус-вектором $\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, $y_k=\operatorname{Im}\Phi_k$, а затем, отправляясь от G, строится нек-рое специальное двухпараметрич. семейство изометричных F М. п. $G_{\alpha,\beta}\in E^{2n}$. В итоге оказывается, что если нек-рая М. п. $M\in E^{2n}$ удовлетворяет условиям теоремы Риччи, то существует М. п. $F\subset E^3$, изометричная M, причем: 1) или $M\subset E^3$ и тогда она входит в семейство ассоциированных с F М. п.; 2) или $M\in E^6$ (и не принадлежит E^5) и она входит в упомянутое выше семейство $G_{\alpha\beta}$.

Однако уже в E^4 существуют М. п., метрики к-рых не удовлетворяют условиям теоремы Риччи. Поэтому возникает задача описания всех метрик, порождаемых двумерными М. п. в E^n, $n\geqslant 4$, и изгибаний этих М. п.; эта задача также решена с достаточной полнотой в терминах нек-рых классов голоморфных отображений. Имеется также ряд результатов о внутренней характеристике метрик двумерных М. п. в сферах S^n, $n\geqslant 3$ (см. [8]).

Что касается метрик многомерных М. п., то здесь пока нет сколько-нибудь существенно продвинутых результатов, а вопросы единственности и изгибаний М. п. исчерпываются главным образом описанием возможных видов компактных минимальных подмногообразий n-мерной сферы. Изгибания М. п. на поверхности другого внешнего строения также изучены недостаточно полно даже для E^3.

Другой круг проблем внутренней геометрии М. п. составляют изопериметрич. неравенства, к-рые, впрочем, в наиболее точных и интересных формах зависят от внешнего строения М. п. (см. [9]).

2) Локальные свойства М. п. Сюда можно отнести результаты об аналитичности М. п. (само определение М. п. требует принадлежности ее лишь классу C^2) и решений ряда вариационных задач, утверждение о том, что достаточно малая область М. п. реализует абсолютный минимум площади среди всех поверхностей с той же границей, что и рассматриваемая область, теоремы об устранимости изолированных или

маломощных особенностей решений уравнения М. п. и его обобщений, изучение строения обобщенных М. п. в окрестности их точек ветвления, исследования особенностей М. п. и решений так наз. эллиптических вариационных задач в многомерных евклидовых и римановых пространствах (см. [2], [3], [6], [10], [12]).

3) Изучение конкретных М. п. или М. п. при априори заданных свойствах края, плоских сечений, сферич. отображения и т. п. Напр., теорема о выпуклости горизонтальных сечений двусвязной М. п. с выпуклыми горизонтальными краями; теорема о совпадении с катеноидом полной М. п., расположенной между плоскостями $z=C_1$ и $z=C_2$, $-\infty<C_1<C_2<\infty$, и имеющей звездные сечения $z=\text{const}$; детальное изучение классич. М. п.— Эннепера, Шерка, Римана — Шварца и др. Особо нужно отметить исследования минимальных конусов в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 4$, приведшие к построению контрпримера для теоремы Бернштейна в E^n, $n\geqslant 9$, и к нахождению примера нерегулярного решения задачи Плато для гиперповерхностей в E^8. Конкретные примеры различных М. п. начались изучаться также и в многомерных римановых пространствах (см. [1], [2], [6], [12], [13]).

4) Развитие теории М. п. в E^n, $n\geqslant 3$, по аналогии с функциями комплексного переменного в C^1. Здесь можно назвать результаты о граничных свойствах М. п.— теорема об аналитич. продолжении М. п. через регулярную аналитич. дугу границы, теоремы о гладкости М. п. в зависимости от гладкости ее границы (напр., если граница класса $C^{n,\alpha}$, $n\geqslant 1$, $0<\alpha<1$, то М. п. принадлежит тому же классу); работы по построению для М. п. аналога теории Неванлинны о распределении значений мероморфных функций (см. [2], [6], [13]).

5) Работы об уравнении Эйлера — Лагранжа. Наряду с изучением «в целом» решений этого уравнения и его обобщения для n-мерных М. п. $(x_1, \ldots, x_n, f_1(x), \ldots, f_k(x))$ в E^{n+k}, $k\geqslant 1$,

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} g^{ij}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^j}, \tag{2}$$

(где $f=(f_1, \ldots, f_k)$, g^{ij} — контравариантные компоненты метрич. тензора g_{ij}), большое количество работ посвящено локальному поведению решений уравнения Эйлера — Лагранжа и его обобщения (2). Это — вопросы устранимости особенностей при коразмерностях $k=1$, существование нерегулярных решений при больших коразмерностях, и особенно — исследование задачи Дирихле. Эту задачу можно по-другому трактовать как задачу Плато по определению М. п. с заданным контуром и с дополнительным условием однозначной проектируемости М. п. на ту же плоскость, что и граничный контур. Такая трактовка позволяет во многих случаях получать выводы о задаче Дирихле на основании известных результатов о задаче Плато (напр., существование и единственность решения задачи Дирихле в E^3 для случая выпуклой области D получается как следствие одной теоремы Радо о задаче Плато).

В общем случае установлено, что для разрешимости задачи Дирихле в коразмерности 1 для любой непрерывной граничной функции необходимо и достаточно, чтобы вектор средней кривизны края ∂D был направлен внутрь области D (при $n=2$ это означает выпуклость области D); при этом решение задачи единственно. Что касается невыпуклых областей, то, напр., доказано, что для любой невыпуклой области D с жордановой границей ∂D можно найти такую непрерывную функцию $\varphi(p)$, $p\in\partial D$, что для нее соответствующая задача Дирихле будет неразрешимой. В больших коразмерностях задача Дирихле может быть неразрешимой даже для случая, когда область совпадает с шаром в E^n.

Задача Дирихле рассматривалась также во внешности области D. Здесь получаются новые факты (напр., теряется единственность решения, не всегда получается разрешимость и т. д.). Имеются также результаты в случае постановки задачи Дирихле с неполными или частично неограниченными граничными значениями (см. [2], [6]—[8], [14]).

6) **Полные М. п.** Под полными М. п. понимаются М. п., полные как метрич. пространства относительно своей внутренней метрики. Полные М. п. бывают компактные (без границы) и некомпактные, или открытые. В исследованиях полных М. п. интерес направлен главным образом на изучение связей, существующих между глобальными метрич., геометрич. и топологич. свойствами поверхностей.

Наиболее продвинуто изучение двумерных полных М. п. в E^3, $n\geqslant 3$, для к-рых большинство результатов получается применением методов теории функций комплексного переменного. В частности, показано существование в E^3 полной М. п. любого заранее заданного рода g и связности k; получены теоремы о связях между интегральной кривизной $\iint KdS$ и топологическим и конформным типами полной М. п. (напр., $\iint KdS\leqslant 2\pi(\chi-k)$, где χ — эйлерова характеристика поверхности, k — число компонент ее границы; если $\left|\iint Kds\right|<\infty$, то поверхность S конформно эквивалентна римановой поверхности с конечным числом выколотых точек, если полная М. п. S бесконечно связна или конформно гиперболич. типа, то ее интегральная кривизна бесконечна, и нормали к S принимают все направления бесконечное число раз, за возможным исключением множества направлений нулевой емкости, и т. д.); изучена структура сферич. отображения (напр., полная М. п. в E^3 есть или плоскость, или ее сферич. образ не содержит, самое большее, множество емкости нуль, полная М. п. в E^3, $n\geqslant 3$, является либо плоскостью, либо ее образ при обобщенном сферич. отображении пересекается со всюду плотным множеством гиперплоскостей, для любого $n\leqslant 4$ в E^3 существуют полные М. п., сферич. образ к-рых не содержит ровно n заранее заданных точек, и т. д.); найдены поверхности, полностью определяемые их интегральной кривизной и топологич. типом (это катеноид и *Эннепера поверхность*); показана внешняя неограниченность в E^n, $n\geqslant 3$, полных М. п. с ограниченной интегральной кривизной.

Результаты о компактных М. п. относятся в основном к полным М. п., расположенным в сферах $S^n\subset E^{n+1}$. Интерес именно к этим М. п. объясняется, помимо трудностей случая общего риманова пространства, еще и наличием важных связей между минимальными конусами в E^{n+1} и М. п. в S^n (каждый гиперконус в E^{n+1}, определяемый своей вершиной O и пересечением со сферой S^n с центром в O, является минимальным тогда и только тогда, когда его пересечение с S^n будет М. п. в S^n). Исследуемые здесь вопросы в основном те же, что и для полных М. п. в E^n. Напр., показано, что любое компактное двумерное многообразие, за исключением проективной плоскости, может быть реализовано в виде полной М. п. в S^3; в S^3 получен аналог теоремы Бернштейна: если нормали к полной М. п. лежат в открытой полусфере, то эта М. п. совпадает с экваториальной гиперсферой; найдены и другие признаки совпадения полной М. п. в S^n с гиперсферой, исследованы возможные виды и вопросы единственности полных М. п. в S^n в зависимости от величины их скалярной кривизны и т. д. (см. [2], [6], [8], [13]).

7) Построение различного рода **обобщений** М. п., а также уравнений и вариационных задач, решения к-рых сохраняют свойства М. п., здесь к классич. тео-

рии М. п. непосредственно примыкают работы о поверхностях с заданной средней кривизной, с квазиконформным сферич. отображением, работы о квазилинейных эллиптич. уравнениях со многими свойствами уравнения Эйлера — Лагранжа двух и большего числа переменных; более далекие обобщения сделаны в теориях, связывающих М. п. с множествами, минимизирующими интегральные потоки или различные меры Хаусдорфа, и т. п. (см. [2], [6], [7], [10], [11]).

8) Работы о задаче Плато для двумерных и многомерных М. п. (см. *Плато задача*, *Плато многомерная задача*).

Из приведенного перечня исследуемых задач и полученных результатов видно, что диапазон вопросов теории М. п. весьма велик, соответственно разнообразны и применяемые в ней методы. Если в классич. исследованиях в основном применялись методы дифференциальной геометрии, теории функций комплексного переменного и дифференциальных уравнений, то сейчас возрастает роль методов топологии, теории меры и функционального анализа, особенно в исследованиях М. п. в многомерных пространствах.

Лит.: [1] Курант Ф., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, пер. с англ., М., 1953; [2] Nitsche J. C. C., Vorlesungen über Minimalflächen, B.—[u. a.], 1975; [3] Radó T., On the problem of Plateau, B., 1933; [4] Douglas J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1931, v. 33, p. 263—321; [5] Morrey C., «Ann. Math.», 1948, v. 49, p. 807—851; [6] Ниче И. С. С., «Математика», 1967, т. 11, № 3, с. 37—100; [7] Осселман Р., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 4, с. 55—136; [8] его же, «Математика», 1971, т. 15, № 2, с. 104—25; [9] его же, «Bull. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 84, № 6, p. 1182—1238; [10] Federer H., Geometric measure theory, B.—[u. a.], 1969; [11] Morrey C., Multiple integrals in the calculus of variations, B.—[u. a.], 1966; [12] Фоменко А. Т., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1972, т. 36, № 5, с. 1049—79; [13] Lawson H. «Ann. Math.», 1970, v. 92, № 2, p. 335—74; [14] Lawson H., Osserman R., «Acta math.», 1977, v. 139, № 1—2, p. 1—17; [15] Аминов Ю. А., «Укр. геом. сб.», 1976, в. 19, с. 3—9.

И. Х. Сабитов.

МИНИМАЛЬНАЯ ПРОСТАЯ ГРУППА — неабелева простая группа, все собственные подгруппы к-рой разрешимы. Полное описание конечных М. п. г. получено (см. [1], [2]) попутно с классификацией всех конечных групп, все локальные подгруппы (т. е. нормализаторы p-подгрупп) к-рых разрешимы. А именно, конечная М. п. г. изоморфна одной из следующих проективных специальных линейных групп:

PSL(2,2p), p — любое простое;

PSL(2,3p), p — любое нечетное;

PSL(2, p), $p\neq 3$ — простое,

удовлетворяющее сравнению $p^2+1=0 \pmod 5$;

PSL(3,3),

или

Судзуки группе Sz(2p), p — любое нечетное простое. В частности, каждая конечная М. п. г. порождается двумя элементами.

Лит.: [1] Thompson J. G., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1968, v. 74, p. 383—437; [2] его же, «Pacif. J. Math.», 1970, v. 33, p. 451—536; 1971, v. 39, p. 483—534; 1973, v. 48, p. 511—92; 1974, v. 50, p. 215—97; v. 51, p. 573—630.

С. П. Струнков.

МИНИМАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО—1) М. м. в римановом пространстве — обобщение *минимальной поверхности*. М. м. есть k-мерное замкнутое подмножество X_0 в римановом пространстве M^n, $n>k$, такое, что за исключением подмножества Z k-мерной *хаусдорфовой меры* нуль множество $X_0 \setminus Z$ является дифференцируемой k-мерной минимальной поверхностью (т. е. экстремалью функционала k-мерного объема Λ^k, определенного на k-мерных поверхностях, вложенных в M^n). Понятие «М. м.» объединяет в себе несколько математич. понятий, призванных обслуживать так наз. многомерную *Плато задачу*.

А. Т. Фоменко.

2) М. м. топологической динамической системы $\{S_t\}$ — такое непустое замкнутое инвариантное (т. е. целиком состоящее из траекторий) подмножество F фазового пространства W

системы, к-рое не имеет собственных замкнутых инвариантных подмножеств. Последнее эквивалентно тому, что каждая из лежащих в F траекторий всюду плотна в F. Понятие М. м. ввел Дж. Биркгоф (G. Birkhoff, см. [1]) применительно к случаю потока («время» t пробегает действительные числа). Он доказал (см. [1], [2]), что если F — компактное М. м. и $w \in F$, то для любой окрестности U точки w множество тех t, для к-рых $S_t w \in U$, относительно плотно (т. е. имеется такое l, что в каждом «отрезке времени» $[s, s+l]$ длины l содержится хоть одно t с $S_t w \in U$); обратно, если W — полное метрич. пространство и точка w обладает указанным выше свойством, то замыкание траектории $\{S_t w\}$ — компактное М. м. (то же самое справедливо и для *каскадов*; о более общих группах преобразований см., напр., [3] или [4]). Сформулированное свойство точки w (и ее траектории) Дж. Биркгоф назвал р е к у р р е н т н о с т ь ю этой точки (и траектории), употребителен также предложенный У. Готшалком и Г. Хедлундом [3] другой вариант терминологии, в к-ром это свойство наз. п о ч т и - п е р и о д и ч н о с т ь ю т о ч к и w. Если $F = W$, то саму динамич. систему называют м и н и м а л ь н о й.

Если нек-рая траектория имеет компактное замыкание, то в нем содержится нек-рое М. м. F (для полугрупп непрерывных преобразований $\{S_t\}$ с неотрицательными действительными или целыми t справедлив аналог этого результата, причем на F преобразования S_t уже обратимы [5]). Однако исследование предельного поведения траекторий динамич. системы не сводится к изучению одних только М. м. последней. Очень просто устроено М. м. гладкого потока класса C^2 на двумерной замкнутой поверхности — это либо точка, либо замкнутая траектория, либо вся поверхность, к-рая в этом случае является тором (т е о р е м а Ш в а р ц а, см. [6]). В общем случае строение М. м. может быть весьма сложным (в связи с этим, дополнительно к сказанному в [2]—[4], надо указать, что минимальность динамич. системы не накладывает никаких ограничений на ее эргодич. свойства по отношению к имеющимся у нее инвариантным мерам [7]). М. м. — основной объект изучения в *топологической динамике*.

Лит.: [1] Б и р к г о ф Д ж. Д., Динамические системы, пер. с англ., М.—Л., 1941; [2] Н е м ы ц к и й В. В., С т е п а н о в В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1949; [3] G o t t s c h a l k W. H., H e d l u n d G. A., Topological dynamics, Providence, 1955; [4] Б р о н ш т е й н И. У., Расширения минимальных групп преобразований, Кишинев, 1975; [5] Л е в и т а н Б. М., Ж и к о в В. В., Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения, М., 1978; [6] Х а р т м а н Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [7] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975, с. 129—262. *Д.В. Аносов.*

МИНИМАЛЬНОЕ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, м и н и м а л ь н о е и с ч и с л е н и е в ы с к а з ы в а н и й,— логическое исчисление, получающееся из *позитивного пропозиционального исчисления* П добавлением новой связки $\neg$ (отрицание) и схемы аксиом

$$(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A),$$

к-рая наз. з а к о н о м п р и в е д е н и я к а б с у р д у.

М. п. и. отличается тем, что в нем не всякая формула выводима из «лжи», т. е. формулы вида $\neg A \& A$. М. п. и. можно получить из исчисления П и другим способом: добавлением к языку вместо связки $\neg$ новой пропозициональной константы $\bot$ (ложь) без добавления новых схем аксиом. Отрицанием $\neg A$ формулы A здесь служит формула $A \supset \bot$.

Лит.: [1] Ч ё р ч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960. *С. К. Соболев.*

МИНИМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ч а с т н ы х с у м м о р т о г о н а л ь н ы х р а з л о ж е н и й: для любой функции $f(x) \in L^2[a, b]$, для любой ортонормированной

на $[a, b]$ системы $\{\varphi_n(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и для любого n имеет место равенство:

$$\inf_{\{a_k\}_{k=1}^n} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right| dx = \int_a^b |f(x) - S_n(f, x)|^2 dx,$$

где

$$S_n(f, x) = \sum_{k=1}^n c_k(f) \varphi_k$$

— n-я частная сумма разложения $f(x)$ по системе $\{\varphi_k(x)\}$, т. е.

$$c_k(f) = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx.$$

Этот минимум достигается только на сумме $S_n(f, x)$, при этом

$$\int_a^b |f(x) - S_n(f, x)|^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^n |c_k(f)|^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля для полных систем, а также нек-рые другие основные свойства ортогональных разложений по существу являются следствиями этого равенства.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958. *А. А. Талалян.*

МИНИМАЛЬНОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, минимальное исчисление предикатов,— исчисление предикатов, задаваемое всеми схемами аксиом *минимального пропозиционального исчисления* и обычными кванторными схемами аксиом и правилами вывода, т. е.

$$\forall x A(x) \supset A(t), \quad A(t) \supset \exists x A x$$

(t — произвольный терм), *модус поненс* и

$$\frac{C \supset A(a)}{C \supset \forall x A(x)}, \quad \frac{A(a) \supset C}{\exists x A(x) \supset C}$$

(переменная a не входит в $A(x)$ и в C).

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960. *С. К. Соболев.*

МИНИМАЛЬНЫЙ ИДЕАЛ — минимальный элемент частично упорядоченного множества идеалов определенного типа нек-рой алгебраич. системы. Поскольку порядок в множестве идеалов определяется отношением включения, М. и.— идеал, не содержащий отличных от себя идеалов того же типа. Для мультиоператорных групп (в частности, для колец) и для решеток, в отличие от полугрупп, всегда предполагается, что рассматриваемое частично упорядоченное множество идеалов не содержит нулевого идеала. Если класс идеалов специально не оговорен, то под М. и. понимают минимальный элемент в множестве всех (ненулевых) двусторонних идеалов.

Минимальный двусторонний идеал, если такой существует в полугруппе S, будет единственным минимальным двусторонним идеалом и является наименьшим двусторонним идеалом; он наз. ядром полугруппы S. Не всякая полугруппа обладает ядром (пример — бесконечная *моногенная полугруппа*), но, напр., ядро есть у любой конечной полугруппы. Ядро является идеально простой полугруппой (см. *Простая полугруппа*). Если ядро полугруппы S есть группа, то S наз. гомогруппой. Полугруппа S будет гомогруппой тогда и только тогда, когда в S существует элемент z, делящийся слева и справа на любой элемент из S (то есть $z \in xS \cap Sx$ для любого $x \in S$); в этом случае ядро состоит из всех таких элементов. Гомогруппой будет, напр., всякая конечная коммутативная полугруппа.

Если полугруппа S обладает минимальным левым идеалом (м. л. и.) L, то для любого $x \in S$ произведение Lx также будет м. л. и., причем всякий м. л. и. может быть получен таким образом. Каждый м. л. и. есть простая слева полугруппа. В полугруппе с м. л. и. каждый левый идеал содержит нек-рый м. л. и., объединение всех м. л. и. (к-рые попарно не пересекаются) является ядром полугруппы. Если полугруппа S обладает м. л. и. L и минимальным правым идеалом (м. п. и.) R, то $R \cap L = RL$ есть подгруппа в S, и $L = Se$, $R = eS$, где e — единица этой подгруппы, произведение LR совпадает с ядром полугруппы S, являющимся в этом случае *вполне простой полугруппой*.

Для полугрупп с нулем содержательным является рассмотрение ненулевых идеалов, и минимальный элемент в соответствующем частично упорядоченном множестве идеалов наз. 0-м и н и м а л ь н ы м (л е в ы м, п р а в ы м, д в у с т о р о н н и м) и д е а л о м. Свойства 0-минимальных идеалов (0-м. и.) во многом повторяют свойства М. и., с нек-рыми естественными оговорками. Напр., 0-минимальный двусторонний идеал не обязательно единствен и не обязательно будет 0-простой полугруппой; он может быть и полугруппой с нулевым умножением (см. *Нильпотентная полугруппа*). Объединение всех 0-минимальных левых идеалов (соответственно 0-минимальных правых идеалов) полугруппы с нулем наз. ее л е в ы м (соответственно п р а в ы м) ц о к о л е м (по определению, цоколь равен нулю, если соответствующих 0-м. и. в полугруппе нет). Полугруппа совпадает со своими левым и правым цоколями тогда и только тогда, когда она есть 0-прямое объединение вполне 0-простых полугрупп и полугруппы с нулевым умножением.

Рассмотрение тех или иных М. и. и 0-м. и. играет существенную роль в структурной теории ряда важных классов полугрупп (см., напр., *Вполне простая полугруппа*, *Регулярная полугруппа*, а также [1] § 2.5, 2.7, гл. 6, §§ 7.7, 8.2, 8.3; [2] гл. V). *Л. Н. Шеврин.*

Кольца (как и полугруппы) не обязаны обладать М. и. (простейший пример — кольцо целых чисел), и М. и. в кольце, если он существует, не обязан быть единственным. Сумма всех (левых, правых, двусторонних) М. и. кольца наз. (соответственно л е в ы м, п р а в ы м, д в у с т о р о н н и м) ц о к о л е м к о л ь ц а. Все *артиновы кольца*, очевидно, обладают ненулевым цоколем. Наличие М. и. *в примитивном кольце* делает его близким к матричному в следующем смысле: примитивное кольцо с ненулевым цоколем изоморфно нек-рому плотному подкольцу кольца всех линейных преобразований нек-рого векторного пространства над телом, содержащему все преобразования конечного ранга [3]. *В. Е. Говоров.*

Лит.: [1] К л и ф ф о р д А., П р е с т о н Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., М., 1972; [2] Л я п и н Е. С., Полугруппы, М., 1960; [3] Д ж е к о б с о н Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961.

МИНИМАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИЙ МЕТОД — метод решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax = b$, в к-ром решение x представляется в виде линейной комбинации базисных векторов, ортогональных в нек-рой метрике, связанной с матрицей системы.

В случае симметричной матрицы A ортогональная система векторов $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ строится по трехчленным рекуррентным формулам

$$p_{n+1} = Ap_k - \alpha_k p_k - \beta_k p_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-2, \quad (1)$$

$p_1 = Ap_0 - \alpha_0 p$, p_0 — произвольный вектор, где

$$\alpha_k = \frac{(Ap_k,\ p_k)}{(p_k,\ p_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-2,$$

$$\beta_k = \frac{(p_k,\ p_k)}{(p_{k-1},\ p_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Решение системы $Ax=b$ находится по формулам $x=\sum_{k=0}^{n-1} c_k p_k$, а коэффициенты c_k дают решение системы

$$\left.\begin{aligned} &c_{i-1}+\alpha_i c_i+\beta_{i+1}c_{i+1}=\frac{(b,\ p_i)}{(p_i,\ p_i)},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-2,\\ &\alpha_0 c_0+\beta_1 c_1=\frac{(b,\ p_0)}{(p_0,\ p_0)},\quad c_{n-2}+\alpha_{n-1}c_{n-1}=\frac{(b,\ p_{n-1})}{(p_{n-1},\ p_{n-1})}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

В случае вырождения в алгоритме ортогонализации, т. е. когда $p_2=0$ при $r<n$, выбирают новый начальный вектор $p_0^{(1)}$, ортогональный $p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_{r-1}$, и достраивают систему базисных векторов до полной системы.

Для случая несимметричной матрицы разработан биортогональный алгоритм.

Если матрица A симметрична и положительно определена, то построение A-ортогональной системы векторов $p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_{n-1}$ по формулам (1) с

$$\alpha_k=\frac{(Ap_k,\ Ap_k)}{(Ap_k,\ p_k)},\quad \beta_k=\frac{(Ap_k,\ p_k)}{(Ap_{k-1},\ p_{k-1})}$$

позволяет избежать решения вспомогательной системы (2) и получить явное выражение для коэффициентов c_k : $c_k=\frac{(b,\ p_k)}{(Ap_k,\ p_k)}$. При этом методу A-минимальных итераций можно придать итерационную форму

$$x_{k+1}=x_k+c_{k+1}p_{k+1},\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-2,\ x_0=c_0p_0,$$

причем $x=x_{n-1}$. Такая модификация метода не требует повторного использования всех векторов $p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_{k-1}$. М. и. м. используется также для решения полной проблемы собственных значений и для нахождения обратной матрицы.

Лит.: [1] Lanczos C., «J. Res. Nat. Bur. Stand.», 1950, v. 45, № 4, p. 255—88; [2] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1960.

Е. С. Николаев.

МИНИМАЛЬНЫХ НЕВЯЗОК МЕТОД — итерационный метод решения линейного операторного уравнения

$$Au=f \quad (1)$$

с самосопряженным положительно определенным ограниченным оператором A, действующим в гильбертовом пространстве H, и заданным элементом $f\in H$. Формулы М. н. м. имеют вид

$$u^{k+1}=u^k-\alpha_k(Au^k-f),\quad k=0,\ 1,\ \ldots, \quad (2)$$

где параметр

$$\alpha_k=(A\xi^k,\ \xi^k)/(A\xi^k,\ A\xi^k) \quad (3)$$

выбирается на каждом шаге $k\geqslant 0$ из условия максимальной минимизации нормы невязки $\xi^{k+1}=Au^{k+1}-f$; т. е. требуется выполнение соотношения

$$\|\xi^k-\alpha_k A\xi^k\|=\inf_{\alpha}\|\xi^k-\alpha A\xi^k\|. \quad (4)$$

Если спектр оператора A принадлежит отрезку $[m,\ M]$ действительной оси, где $m\leqslant M$ — положительные числа, то последовательные приближения $\{u^k\}$ метода (2)—(3) сходятся к решению u^* уравнения (1) со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем $q=(M-m)/(M+m)<1$.

Различные способы определения в H скалярного произведения приводят к различным итерационным методам. В частности, при специальных скалярных произведениях формулы М. н. м. совпадают с формулами *наискорейшего спуска метода* и метода минимальных ошибок (см. [2]).

Условия сходимости М. н. м. могут быть ослаблены по сравнению с перечисленными выше: если рассматривать на нек-рых подмножествах из H. Напр., если рассматривать М. н. м. только в действительных простран-

ствах, то можно отказаться от требования самосопряженности оператора A (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Красносельский М. А., Крейн С. Г., «Матем. сб.», 1952, № 31, с. 315—34; [2] Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [3] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [4] Марчук Г. И., Кузнецов Ю. А., Итерационные методы и квадратичные функционалы, Новосиб., 1972. *Ю. А. Кузнецов.*

МИНИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ — раздел современной вычислительной математики, посвященный конструированию и исследованию методов, позволяющих находить приближенное с заранее указываемой точностью $\varepsilon>0$ решение поставленной задачи P из класса $\{P\}$ при наименьших затратах вычислительной работы (при наименьшем объеме вычислений). Этот раздел вычислительной математики может быть отнесен к более общему, имеющему дело с задачей оптимизации методов (см., напр., [1], [2]), в к-ром наряду с указанной проблемой М. в. р. рассматривается и двойственная по отношению к ней проблема нахождения среди приближенных методов, требующих примерно одинаковой допустимой вычислительной работы, метода, обладающего максимальной точностью (наименьшей погрешностью). Последняя проблема характерна, напр., для задач численного интегрирования, в к-рых фиксируется число узлов интегрирования, служащее мерой совершаемой вычислительной работы.

Пусть $\varepsilon\geqslant 0$ (обычно $\varepsilon>0$, при $\varepsilon=0$ ищется точное решение P) — требуемая точность решения задачи P из заданного класса $\{P\}$ родственных задач, а m — допустимый метод для отыскания решения любой задачи из $\{P\}$, и множество таких методов обозначено через $\{m\}$. Пусть число $W_m(P,\varepsilon)>0$ характеризует затраты вычислительной работы в методе m, позволяющие найти решение P с точностью ε, а

$$W_m(\{P\},\varepsilon)=\sup_{P\in\{P\}} W_m(\{P\},\varepsilon).$$

Тогда задача минимизации состоит в отыскании такого метода m_0, что

$$W_{m_0}(\{P\},\varepsilon)=\inf_{m\in\{m\}} W_m(\{P\},\varepsilon),$$

то есть по существу ищется оптимальный метод решения не одной фиксированной задачи P, а целого класса задач (оптимизация на классе). Чаще же всего М. в. р. производится в асимптотич. смысле при $\varepsilon\to 0$, $N\to\infty$, где N — параметр, определяющий «размерность» решаемой задачи.

Метод m_0 наз. оптимальным по порядку, если затраты вычислительной работы в нем не превышают более чем в конечное число раз величину $\underline{W}(\{P\},\varepsilon)$ — полученных оценок снизу затрат вычислительной работы в любом возможном методе; метод m_0 наз. логарифмически оптимальным, если

$$\ln W_{m_0}(\{P\},\varepsilon)=(1+o(1))\ln \underline{W}(\{P\},\varepsilon).$$

Вычислительная же работа $W_m(P,\varepsilon)$ обычно характеризуется числом арифметич. действий, производимых в методе m для достижения точности ε при его реализации на условной ЭВМ. До какой-то степени это является оправданным упрощением, поскольку во многих методах логич. операций на реальных ЭВМ совершается лишь в конечное число раз больше, чем арифметических. От допустимых методов, как правило, требуют их устойчивости по отношению к ошибкам округления. Важно, чтобы и асимптотич. рост количества используемых ячеек машинной памяти не был в этих методах чересчур большим.

При конкретизации указанных задач М. в. р. должно быть уточнено и описание класса $\{P\}$ и указано метрич.

пространство H, с помощью к-рого определяется точность решения исходной задачи.

Решение многих таких конкретных проблем минимизации представляет не только теоретич. интерес, но и имеет большое прикладное значение, позволяя часто решать задачи на ЭВМ при сравнительно небольших затратах машинного времени. Особенно это важно или для задач, требующих большого объема вычислений, что характерно, напр., для многомерных задач математич. физики (см. [2]—[10]), или для задач, подобных задачам вычисления элементарных функций и нахождения дискретных преобразований Фурье (см. [1], [11]), являющихся стандартными, и многократно используемых для решения других, более сложных. Указанные задачи М. в. р. достаточно сложны и во многих случаях их решения получены лишь частично или даже пока (1982) совсем не известны.

На практике при решении задач не очень большой размерности и не с очень большой точностью иногда метод с худшими асимптотич. характеристиками может потребовать меньше машинного времени. Часто же если затраты вычислительной работы приемлемы, то руководствуются при выборе метода прежде всего соображениями его простоты и надежности.

Пусть исходная задача конечномерна и существуют методы, дающие точное решение за конечное число арифметич. действий, если эти действия совершаются без ошибок округления. В качестве примеров можно взять задачу вычисления значения многочлена $p_N(x)$ степени N при заданном значении x с $|x|\leqslant 1$, перемножения двух квадратных матриц порядка N, решения определенной системы линейных алгебраич. уравнений $Ax=b$ с квадратной матрицей порядка N и задачу нахождения дискретного преобразования Фурье (см. [1], [11]):

$$v_n=\sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-\frac{2\pi n}{N} i}, \quad n=0, 1, \ldots, N-1, \qquad (1)$$

где i — мнимая единица, вектор $u=(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1})$ задан и ищется вектор $v=(v_0, v_1, \ldots, v_{N-1})$, $N=2^r$, $r=0, 1, 2, \ldots$. Никаких конкретных ограничений на вид $p_N(x)$, $x\in[-1,1]$, A, b, число r и вектор u не накладывается, и поэтому в каждой из этих задач допустимый класс $\{P\}$ состоит из всех задач такого вида. В подобных задачах N выступает в роли параметра и особое внимание уделяется поведению затрат вычислительной работы $W_m(P, 0)\equiv W_m(P)$ при $N\to\infty$. Для первой из этих задач метод Горнера, записывающий $p_N(x)$ в виде

$$a_0+x(a_1+x(\ldots+x(a_{N-1}+xa_N))\ldots),$$

позволяет вычислить $p_N(x)$ за N умножений и N сложений. Доказано (см. [11]), что этот метод является оптимальным; не существует метода, к-рый требовал бы меньшего суммарного числа сложений и вычитаний или меньшего числа умножений и делений; устойчивость его приемлема, если $\sum_i |a_i|$ не велика (см. [1]).

Для второй и третьей задач существует большое число методов, дающих их решения при $N\to\infty$ за $W(N)\asymp N^3$ арифметич. действий (см. [1]) и реально применяемых на практике. Наименьшие же затраты вычислительной работы среди всех пока известных методов достигаются на методе с оценкой $W(N)\asymp N^{\log_2 7}$ (см. [11]). Этот метод достаточно сложен и по ряду причин интересен пока только с теоретич. точки зрения. Не известно (1982), является ли он даже логарифмически оптимальным. Имеется гипотеза, что у логарифмически оптимального метода с числом арифметич. действий $W(N)$ должно быть

$$\ln W(N)=2\ln N+o(\ln N).$$

Для задачи же (1), являющейся предметом гармонич. анализа, простейшие методы требуют $\asymp N^2$ арифметич.

действий с комплексными числами. В 1965 был предложен метод, позволяющий находить вектор за $W(N) \asymp \asymp N \ln N$ арифметич. действий (см. [1], [11]), получивший название *метода быстрого дискретного преобразования Фурье*. Этот метод является логарифмически оптимальным; он широко применяется и на практике. Имеется большое число подобных задач минимизации, решенных и нерешенных (см. [11], [12]); оптимальные по порядку или логарифмически оптимальные оценки затрат вычислительной работы для нахождения решения подобных задач могут рассматриваться как показатель их сложности.

М. в. р. при решении сеточных систем уравнений, возникающих или в разностных методах, или в проекционно-разностных (методах конечных элементов) для приближенного решения краевых задач для уравнений и систем уравнений сильно эллиптич. типа, имеет особое теоретическое и прикладное значение и обычно осуществляется асимптотически при $N \to \infty$, где N — число неизвестных в системе, и при $\varepsilon \to 0$. Для решения простейших разностных аналогов нек-рых краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике или параллелепипеде успешно применяются нек-рые прямые методы, являющиеся логарифмически оптимальными и требующие затраты $O(N \ln N)$ арифметич. действий (см. [3], [5], [13], [14]). Известен в случае прямоугольника (см. [15]) и оптимальный по порядку метод, требующий $O(N)$ действий. Используя же итерационные методы, удается получить логарифмически оптимальные оценки типа

$$W = O(N \ln N |\ln \varepsilon|),$$

где ε — точность решения системы в той или иной метрике, для довольно широкого класса дискретных краевых задач на параллелепипедной сетке для линейных и нелинейных сильно эллиптич. систем, рассматриваемых в нек-рых идеальных областях (см. [2] — [10], [16], [17]) (напр., на плоскости Q может быть образована из конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, а в случае трехмерного пространства Q должна конечным числом плоских разрезов, параллельных заданной координатной плоскости, разбиваться на параллелепипеды с гранями, параллельными координатным плоскостям). Для более сложных областей Ω использование сеток, топологически эквивалентных указанным сеткам идеальных областей Q, и нек-рых типов проекционно-разностных методов позволяет часто получить системы уравнений, решаемые столь же эффективно, что и в случае идеальных областей (см. [3], [8], [10], [16], [17]). При этом правые части этих систем могли быть любыми векторами; если же учитывать, что они порождались специальным образом как нек-рые функционалы от достаточно гладких функций, то удается построить методы с затратами работы $O(N \ln N)$ и даже $O(N)$ при условии, что $\varepsilon \asymp N^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Методы последнего типа для решения задачи на заданной сетке используют последовательность подобных же задач на более редких сетках.

Существуют методы, позволяющие найти с точностью ε младшие собственное значение и соответствующую собственную функцию для нек-рых сеточных аналогов эллиптич. задач на собственные значения, при затрате $O(N \ln N |\ln \varepsilon|)$ или даже $O(N \ln N)$ (при $\varepsilon \asymp N^{-\alpha}$, $\alpha > 0$) действий (см. [9]).

Пусть задача P состоит в решении корректного операторного уравнения

$$L(u) = f, \qquad (2)$$

оператор L действует из H в F, где H и F — бесконечномерные банаховы пространства. Пусть класс $\{P\}$ состоит из таких задач с различными f, при к-рых ре-

шения уравнения (2) принадлежат нек-рому компакту U. Обычно U задается условием:

$$\|u\|_{H'} \leqslant R, \tag{3}$$

где H' — нек-рое банахово пространство, вложенное в H. Если $u \in U$ ищется с точностью $\varepsilon > 0$ в норме H, то часто известны информационные оценки, равномерные относительно всех $u \in U$ наименьшей размерности $N \equiv N(\varepsilon)$ вектора $v_N \equiv (v_1, v_2, \ldots, v_N)$, задание к-рого позволяет получить элемент

$$\hat{v}_N \equiv \sum_{i=1}^{N} v_i \psi_i(z) \in H \quad \text{с} \quad \|u - \hat{v}_N\|_H \leqslant \varepsilon \tag{4}$$

(см. [1], [2], [6], [7], [18], [19]). Эти оценки снизу для $N(\varepsilon)$ дают и очевидные оценки снизу для необходимых затрат вычислительной работы в любом допустимом методе. Для ряда краевых задач сильно эллиптич. систем построены варианты проекционно-разностных методов, приводящих к алгебраич. системам уравнений

$$L_N(\bar{u}_N) = \bar{f}_N \tag{5}$$

с N неизвестными, для к-рых, во-первых, известны оптимальные по порядку итерационные методы приближенного решения и, во-вторых, соответствующие восполнения $\hat{u}_N$ вектора $\bar{u}_N$ (см. [4]) являются ε-аппроксимациями в H решения уравнения (2), причем $N \leqslant k N(\varepsilon)$, где k — константа, не зависящая от ε (см. [6] — [8], [10], [17]). Если не учитывать работу на формирование (5), то такие методы приводят к оценкам затраты вычислительной работы, минимальным по порядку. Напр., для случая эллиптич. уравнения 2-го порядка $H = W_2^1(\Omega)$, $H' = W_2^2(\Omega)$ ($W_2^k(\Omega)$ — пространство С. Л. Соболева [20]), если Ω — область на плоскости, достижимы оценки затрат числа арифметич. действий $\asymp \varepsilon^{-2}$. Вычислительную работу на формирование (5) тоже часто можно оценить как $O(N \ln N)$, если брать информацию о заданных функциях в соответствующих пространствах. В частности, в упомянутом примере f должна рассматриваться как элемент $F = W_2^{-1}(\Omega)$, но не $L_2(\Omega)$ (см. [8], [17]). Подобного рода оценки получены и для нек-рых дифференциальных задач на собственные значения (см. [9]).

Рассматривались нек-рые вопросы М. в. р. при решении интегральных уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений и нестационарных уравнений с частными производными (см., напр., [1] — [4], [21] — [23]).

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] его же, в сб.: Международный конгресс математиков в Ницце, 1970, М., 1972, с. 27—33; [3] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, М., 1977; [4] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [5] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [6] Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А., в сб.: Дифференциальные уравнения и их применения, Вильнюс, в. 5, 1973; в. 8, 1974; [7] Дьяконов Е. Г., «Численные методы механики сплошной среды», Новосиб., 1976, т. 7, № 5, с. 14—78; [8] его же, в кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике, Новосиб., 1978, с. 149—64; [9] Дьяконов Е. Г., Орехов М. Ю., «Матем. заметки», 1980, т. 27, № 5; [10] Корнеев В. Г., Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности, Л., 1977; [11] Borodin A., Munro I., The Computational Complexity of Algebraic and Numeric Problems, N. Y., 1975; [12] Analytic Computational Complexity, N. Y., 1976; [13] Concus P., Golub G., «SIAM J. Numer. Anal.», 1973, v. 10, p. 1103—20; [14] Barker R. J., в кн.: Mathematical models and numerical methods (Banach Center Publications), Warsz., 1978, v. 3, p. 255—68; [15] Bank R. E., Rose D. J., «Proc. Symp. Carnegie-Mellon Univ.», N. Y., 1976, p. 201—49; [16] Кузнецов Ю. А., в кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике, Новосиб., 1978, с. 178—212; [17] Дьяконов Е. Г., в кн.: Численные методы в математической физике, Новосиб., 1979, с. 45—68; [18] Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики, М., 1979, с. 45—118; [19] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [20] Собо-

лев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962; [21] Емельянов К. В., Ильин А. М., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1967, т. 7, № 4, с. 905—10; [22] Иванов В. В., в кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, М., 1972, с. 209—19; [23] Акопян Ю. Р., Оганесян Л. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1977, т. 17, № 1, с. 109—18. *Е. Г. Дьяконов.*

МИНИМИЗАЦИЯ ПЛОЩАДИ — задача о минимуме площади $A(F)$ римановой поверхности, на к-рую данная область B плоскости z отображается взаимно однозначно регулярными в ней функциями F данного класса R, т. е. задача о нахождении

$$\min_{F\in R} A(F) \equiv \min_{F\in R} \iint_B |F'(z)|^2 d\sigma \qquad (*)$$

($d\sigma$ — элемент площади). Под интегралом в (*), взятым по области B, понимается предел интегралов, взятых по областям B_n, $n=1, 2, \ldots$, исчерпывающим область B, т. е. таким, что $\overline{B}_n \subset B$, $B_n \subset B_{n+1}$ и что любое замкнутое множество $E \subset B$, начиная с нек-рого n, лежит в B_n.

В случае, когда R — класс функций $F(z)$, $F(0)=0$, $F'(0)=1$, регулярных в данной односвязной области B, содержащей точку $z=0$ и имеющей более одной граничной точки, минимум A площади $A(F)$ образа области B в классе R дает единственная функция, однолистно отображающая область B на полный круг $|z|<r$, где r — конформный радиус области B в точке $z=0$, причем $A=\pi r^2$.

Рассматривалась также задача о минимальной площади образа многосвязной области (см. [1] с. 225, 594).

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966. *Е. Г. Голузина.*

МИНИМИЗИРУЮЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность элементов y_n из множества M, для к-рой соответствующая последовательность значений нек-рой функции $\varphi(y_n)$ стремится к точной нижней грани ее значений на M, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = \inf_{y\in M} \varphi(y).$$

Компактность М. п., т. е. существование подпоследовательности, сходящейся к элементу из M, в сочетании с полунепрерывностью снизу функции φ обеспечивает существование оптимального элемента

$$y^n \in M, \ \varphi(y^n) = \min_{y\in M} \varphi(y).$$

В теории приближений М. п. $y_n \in M$ для данного элемента из метрич. пространства $X=(X, \rho)$ — последовательность, для к-рой

$$\rho(x, y_n) \longrightarrow \rho(x, M) = \inf\{\rho(x, y) : y \in M\}.$$

См. *Аппроксимативно компактное множество.* *Ю. Н. Субботин.*

МИНИМИЗИРУЮЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность элементов $\{z_n\}$, $z_n \in Z$, минимизирующая непрерывный функционал $I[z]$, $z \in Z$:

$$I[z_n] \longrightarrow \inf_{z\in Z} I[z], \ n \longrightarrow \infty.$$

Задачи минимизации функционалов принято разделять на две группы. К первой относят нахождение минимального значения функционала, при к-ром несущественно, на каких элементах z достигается искомый минимум. В этом случае в качестве приближенных решений можно использовать значения функционала на любой М. п. Другая группа задач состоит в отыскании элемента z^*, на к-ром функционал $I[z]$ достигает своего наименьшего значения:

$$\inf_{z\in Z} I[z] = I[z^*] = I^*. \qquad (1)$$

При этом существуют М. п., не сходящиеся к элементу z^*.

Пусть задача минимизации (1) имеет единственное решение z^* и $\{z_n\}$ — М. п., т. е. такая последовательность, что

$$\lim_{n\to\infty} I[z_n] = I^*. \qquad (2)$$

Задача минимизации (1) наз. у с т о й ч и в о й, если всякая М. п. (2) сходится к элементу $z^* \in Z$.

При решении устойчивых задач М. п. находится построением последовательности итераций таких, что по z_n (n-й итерации) находится «направление» y_n, а затем выбирается элемент

$$z_{n+1} = z_n - f(\rho_n)\, y_n$$

из множества элементов $z_n - f(\rho) y_n$, минимизирующих функцию $I[z_n - f(\rho)\, y_n]$ переменной ρ.

Методы построения М. п. для устойчивых задач (1) распадаются на три семейства. В первом производные не используются; это — прямые методы. Второе семейство использует первые производные функционала; такие методы обычно наз. методами спуска. Третью группу методов составляют алгоритмы с использованием вторых производных функционала.

В задачах минимизации функционалов, не обладающих свойством устойчивости, для построения последовательностей $\{z_n\}$, сходящихся к элементу z^*, применяют методы регуляризации.

Лит.: [1] Т и х о н о в А. Н., А р с е н и н В. Я., Методы решения некорректных задач, М., 1974; [2] С е а Ж., Оптимизация. Теория и алгоритмы, пер. с франц., М., 1973.

Ю. В. Ракитский.

МИНИМУМ — см. *Максимум и минимум функции, Максимума и минимума точки.*

МИНКОВСКОГО ГЕОМЕТРИЯ — геометрия конечномерного *нормированного пространства*, т. е. аффинного пространства, в к-ром введена м е т р и к а М и н к о в с к о г о — инвариантная относительно параллельных переносов метрика, при к-рой роль единичной сферы играет фиксированное центрально-симметричное выпуклое тело.

В. А. Залгаллер.

МИНКОВСКОГО ГИПОТЕЗА — предположение, согласно к-рому для действительных линейных форм

$$L_j(\bar{x}) = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ с отличным от нуля определителем Δ при любых действительных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ существуют целые $x_1, \ldots, x_n$ такие, что будет выполнено неравенство

$$\prod_{j=1}^{n} |L_j(\bar{x}) - \alpha_j| \leqslant 2^{-n} |\Delta|. \qquad (*)$$

Эта гипотеза была доказана Г. Минковским (H. Minkowski, 1910) в случае $n=2$. Известны (1982) доказательства гипотезы для $n \leqslant 5$, а при $n > 5$ справедливость неравенства (*) доказана при нек-рых дополнительных ограничениях (см. [2]).

Лит.: [1] К а с с е л с Д ж. В. С., Введение в геометрию чисел, пер. с англ., М., 1965; [2] С к у б е н к о Б. Ф., в кн.: Исследования по теории чисел. 2, Л., 1973, с. 6—36 («Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР», т. 33).

Э. П. Ковалевская.

МИНКОВСКОГО НЕРАВЕНСТВО — 1) Собственно М. н.: если действительные числа x_i, $y_i \geqslant 0$ при $i=1, \ldots, n$ и $p>1$, то

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}. \qquad (1)$$

Выведено Г. Минковским [1]. При $p<1$, $p\neq 0$ неравенство заменяется на противоположное (для $p<0$ следует считать $x_i, y_i > 0$). В каждом из этих случаев равенство имеет место тогда и только тогда, когда строки $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ пропорциональны. При $p=2$ М. н.

наз. неравенством треугольника. М. н. допускает обобщения в различных направлениях (они также носят названия неравенств Минковского). Ниже приводятся нек-рые из них.

2) М. н. для сумм. Пусть $x_{ij} \geqslant 0$ для $i=1, \ldots, n$ и $j=1, \ldots, m$ и $p>1$, тогда

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\right)^{p}\right]^{1/p} \leqslant \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{p}\right)^{1/p}. \quad (2)$$

Знак неравенства меняется на обратный при $p<1$, $p\neq 0$ и для $p<1$ полагается $x_{ij}>0$. В каждом из этих случаев равенство имеет место тогда и только тогда, когда строки $\{x_{i1}\}, \ldots, \{x_{im}\}$ пропорциональны. Существуют также обобщения неравенств (1) на кратные и бесконечные суммы. Однако при использовании предельных процессов особого внимания требует формулировка случаев *возможного* равенства (см. [2]).

Неравенства (1) и (2) однородны относительно $\sum$, и потому они имеют аналоги для различных средних, напр., если $M_\varphi(x_i)=\varphi^{-1}\{\sum \varphi(x_i)\}$, где $\varphi=\ln t$, то

$$M_\varphi\left(\frac{x_i+y_i}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} M_\varphi(x_i)+\frac{1}{2} M_\varphi(y_i);$$

подробнее см. в [2].

3) М. н. для интегралов аналогично неравенству (2) и имеет место опять же вследствие однородности относительно $\int$. Пусть $f(x), g(x)$ — интегрируемые функции в нек-рой области $X\subset\mathbb{R}^n$ относительно элемента объема dV, тогда при $p>1$

$$\left(\int_X |f+g|^p\, dV\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_X |f|^p\, dV\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p\, dV\right)^{1/p}. \quad (3)$$

Естественно получается обобщение неравенства (3) для большего числа функций. Дальнейшее обобщение: если $k>1$, то

$$\left(\int\left(\int f(x, y)\, dy\right)^{1/k} dx\right)^{1/k} \leqslant \int\left(\int f^k(x, y)\, dx\right)^{1/k} dy,$$

$f(x, y)=\varphi(x)\psi(y)$, причем равенство имеет место лишь в случае $f(x, y)=\varphi(x)\psi(y)$.

4) Другие неравенства типа М. н.:

а) для произведений: если $x_i, y_i \geqslant 0$, то

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{1/n} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}+\left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^{1/n};$$

б) неравенство Малера: пусть $F(x)$ — обобщенная норма в E^n, $G(y)$ — ее полярная функция. Тогда

$$(x, y) \leqslant F(x)G(y),$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение;

в) для определителей: если A, B — неотрицательные эрмитовы матрицы над $\mathbb{C}$, то

$$(\det(A+B))^{1/n} \geqslant (\det A)^{1/n}+(\det B)^{1/n}.$$

5) Наконец, с именем Г. Минковского связываются и др. неравенства, в особенности в выпуклом анализе и теории чисел, напр. *Брунна — Минковского теорема.*

Лит.: [1] Minkowski H., Geometrie der Zahlen, 1, Lpz., 1896, § 115—17; [2] Харди Г. Г., Литтльвуд Дж., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; [3] Беккенбах Э. Ф., Беллман Р., Неравенства, пер. с англ., М., 1965; [4] Маркус М., Минк Х., Обзор по теории матриц и матричных неравенств, пер. с англ., М., 1972.

М. И. Войцеховский.

МИНКОВСКОГО ПРОБЛЕМА: существует ли замкнутая выпуклая гиперповерхность F, у к-рой гауссова кривизна $K(\xi)$ является заданной функцией единич-

ного вектора внешней нормали ξ. Поставлена Г. Минковским [1], к-рому принадлежит обобщенное решение проблемы в том смысле, что оно не содержит никакой информации о характере регулярности F, даже если $K(\xi)$ — аналитич. функция. Он доказал, что если заданная на единичной гиперсфере S непрерывная положительная функция $K(\xi)$ удовлетворяет условию

$$\int_S \xi \frac{ds}{K(\xi)} = 0, \qquad (1)$$

то существует и притом единственная (с точностью до параллельного переноса) замкнутая выпуклая поверхность F, для к-рой $K(\xi)$ является гауссовой кривизной в точке с внешней нормалью ξ.

Регулярное решение М. п. дано А. В. Погореловым в 1971 (см. [2]), им же рассмотрены нек-рые вопросы геометрии и теории дифференциальных уравнений, примыкающие к этой проблеме. Именно он доказал, что если $K(\xi)$ принадлежит классу C^m, $m \geqslant 3$, то получаемая поверхность F принадлежит классу $C^{m+1,\,\alpha}$, $\alpha > 0$, а в случае аналитичности $K(\xi)$ поверхность F также оказывается аналитической.

Естественное обобщение М. п. состоит в решении вопроса о существовании выпуклой гиперповерхности с заданной элементарной симметрич. функцией главных кривизн $\varphi_\nu(\xi)$ любого данного порядка ν, $\nu \leqslant n = \dim F$. В частности, при $\nu = 1$ это — проблема Кристоффеля о восстановлении поверхности по средней кривизне. Необходимое условие разрешимости этой обобщенной М. п. аналогично (*) имеет вид

$$\int_S \xi \varphi_\nu(\xi)\, dS = 0.$$

Однако это условие недостаточно (А. Д. Александров, 1938, см. [3]). Вот примеры достаточных условий:

$$\int_S \xi\, \Phi_\nu(\xi)\, dS = 0,$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2(\nu-1)} \max\left(\Phi_{\nu,t} - \Phi''_{\nu,t}\right) < \Phi_{\nu,t}(\xi),$$

где $\Phi_{\nu,t} = \left(\dfrac{\varphi_{\nu,t}}{C_n^\nu}\right)^{1/n}$, $\varphi_{\nu,t} = t\varphi_\nu + 1 - t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

При этом регулярность F та же, что и в М. п. Эти результаты с помощью аппроксимаций оказываются справедливыми и для функций $\varphi(\xi)$, обладающих свойствами неотрицательности, симметрии и вогнутости.

Лит.: [1] Minkowski H., «Math. Ann.», 1903, Bd 57, S. 447—95; [2] Погорелов А. В., Многомерная проблема Минковского, М., 1971; [3] Буземан Г., Выпуклые поверхности, пер. с англ., М., 1964.

М. И. Войцеховский.

МИНКОВСКОГО ПРОСТРАНСТВО — четырехмерное *псевдоевклидово пространство* сигнатуры (1, 3), предложенное Г. Минковским (H. Minkowski, 1908) в качестве геометрич. интерпретации пространства-времени специальной теории относительности (см. [1]). Каждому событию соответствует точка М. п., три координаты к-рой представляют собой координаты трехмерного пространства; четвертая — координата ct, где c — скорость света, t — время события. Связь между пространственными расстояниями и промежутками времени, разделяющими события, характеризуется квадратом т. н. интервала:

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.$$

Интервал в М. п. играет роль, аналогичную роли расстояния в геометрии евклидовых пространств. Вектор с положительным квадратом интервала наз. *временноподобным вектором*, с отрицательным квадратом интервала — *пространственноподобным вектором*. *Линия*, касательный вектор к к-рой в каждой ее точке времениподобен, наз. *времениподобной линией*. Аналогично

определяются пространственноподобные и изотропные линии. Событие в данный момент времени в данной точке наз. мировой точкой; множество мировых точек, описывающее развитие какого-либо процесса или явления во времени, наз. мировой линией. Если вектор, соединяющий мировые точки, времениподобен, то существует система отсчета, в к-рой события происходят в одной и той же точке трехмерного пространства. Время, разделяющее события в этой системе отсчета, равно $\Delta t=\tau=s/c$, где τ — т. н. собственное время. Ни в какой системе отсчета эти события не могут быть одновременными (т. е. имеющими равные координаты t). Если вектор, соединяющий мировые точки двух событий, пространственноподобен, то существует система отсчета, в к-рой эти два события происходят одновременно; они не связаны причинно-следственной связью; модуль интервала определяет пространственное расстояние между этими точками (событиями) в этой системе отсчета. Касательный вектор к мировой линии является времениподобным вектором. Касательный вектор к световому лучу является изотропным вектором.

Движениями М. п., т. е. преобразованиями, сохраняющими интервал, являются *Лоренца преобразования*.

Обобщение М. п.— *псевдориманово пространство*, к-рое используется при построении теории тяготения.

Лит.: [1] Минковский Г., Пространство и время, в кн.: Принцип относительности, М., 1973; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973; [3] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961; [4] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [5] Синг Дж. Л., Общая теория относительности, пер. с англ., М., 1963.

Д. Д. Соколов.

МИНКОВСКОГО ТЕОРЕМА — 1) М. т. о выпуклом теле — одна из теорем геометрии чисел, послужившая основой выделения геометрии чисел в раздел теории чисел. Установлена Г. Минковским в 1896 (см. [1]). Пусть $\mathfrak{K}$ — замкнутое выпуклое тело, симметричное относительно начала координат O, имеющее объем $V(\mathfrak{K})$. Тогда всякая точечная решетка Λ определителя $d(\Lambda)$, для к-рой

$$V(\mathfrak{K}) \geqslant 2^n d(\Lambda),$$

имеет в $\mathfrak{K}$ точку, отличную от O.

Равносильная формулировка теоремы Минковского

$$\Delta(\mathfrak{K}) \geqslant 2^{-n} V(\mathfrak{K}),$$

где $\Delta(\mathfrak{K})$ — критич. определитель тела $\mathfrak{K}$. Обобщением теоремы Минковского на невыпуклые множества является теорема Блихфельдта (см. *Геометрия чисел*). Теоремы Минковского и Блихфельдта позволяют оценивать сверху арифметич. минимумы лучевых функций.

Лит.: [1] Minkowski H., Geometrie der Zahlen, Lpz., 1896; Lpz.—B., 1910; N. Y., 1953.

А. В. Малышев.

2) М. т. о линейных неравенствах: система неравенств

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\right| \leqslant c_1, \quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| < c_i, \quad 2 \leqslant i \leqslant n,$$

где a_{ij}, c_i — действительные числа, имеет целое решение $(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, если $c_1 \ldots c_n \geqslant |\det(a_{ij})|$. Установлена Г. Минковским в 1896 (см. [1]). М. т. является следствием более общей теоремы Минковского о выпуклом теле (см. п. 1).

Лит.: [1] Minkowski H., Geometrie der Zahlen, Lpz., 1896; Lpz.—B., 1910; N. Y., 1953; [2] его же, Diophantische Approximationen, Lpz., 1907; [3] Кассельс Дж. В. С., Введение в геометрию чисел, пер. с англ., М., 1965.

Э. И. Ковалевская.

МИНОР порядка k — определитель матрицы, элементы к-рой стоят в данной прямоугольной матрице на пересечении k разных столбцов и k разных строк.

Если номера отмеченных строк совпадают с номерами отмеченных столбцов, то М. наз. главным, а если отмечены первые k строк и первые k столбцов — угловым. Базисным минором матрицы наз. любой ее ненулевой М. максимального порядка. Для того чтобы М. был базисным, необходимо и достаточно, чтобы все окаймляющие его М. (т. е. содержащие его М. на единицу большего порядка) были равны нулю. Система строк (столбцов) матрицы, связанных с базисным М., является максимальной линейно независимой подсистемой системы всех строк (столбцов) матрицы. *В. Н. Ремесленников.*

МИНОРАНТА — см. *Мажоранта и миноранта.*

МИНУТА — единица измерения плоских углов, равная 1/60 части градуса, обозначается знаком $'$. М. делится на 60 секунд ($60''$). Метрическая М.— 1/10000 часть прямого угла, обозначается знаком ^{c}. Метрическая М. делится на 100 метрических секунд (100^{cc}).

МИРОВАЯ ЛИНИЯ — линия в пространстве-времени, являющаяся пространственно-временной траекторией материальной точки. Пусть в нек-рой области пространства-времени введена локальная система координат t, x, y, z, и пусть точка $P(t, x, y, z)$ лежит на М. л. γ. Точку P наз. мировой точкой, она описывает событие, состоящее в том, что материальная точка в данный момент времени t имеет пространственные координаты x, y, z. Абстракция события и связанные с ним абстракции мировой точки и М. л. являются одними из основных понятий теории относительности, дополняющими абстракцию материальной точки, заимствованную из классич. механики. Обычно рассматривают гладкие (или кусочно гладкие) мировые линии. М. л. материальной точки с положительной массой покоя является времениподобной кривой. М. л. материальной точки с нулевой массой покоя (такая материальная точка является неквантовой моделью фотона и др. элементарных частиц нулевой массы покоя) является изотропной линией. Произвольная точка пространства-времени рассматривается в качестве мировой точки, т. е. (возможного) события, а каждая времениподобная или изотропная линия — в качестве М. л. нек-рой материальной точки. М. л. материальной точки, не испытывающей воздействия негравитационных сил, является согласно *геодезических гипотезе* нек-рой геодезической пространства-времени. Единичный касательный вектор $\dot{\gamma}$ к М. л. γ наз. четырехмерным вектором скорости; в локальных координатах он имеет вид

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right),$$

где

$$v=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right).$$

См. также *Минковского пространство.*

Д. Д. Соколов.

МИРОВАЯ ФУНКЦИЯ — значение интеграла

$$\Omega(P', P) = \Omega(x', x)=\frac{1}{2}(u-u_0)\int_{u_0}^{u_1} g_{ij}U^iU^j\,du,$$

взятого вдоль геодезической Γ, соединяющей две точки $P'(x')$ и $P(x)$ пространства-времени. При этом Γ задана уравнениями $x^i=\xi^i(u)$, где u — канонич. параметр, а $U^i=\frac{d\xi^i}{du}$. М. ф. равна с точностью до знака половине квадрата меры геодезической, соединяющей P' и P, и является двухточечным инвариантом в том смысле, что ее величина не изменяется, когда незави-

симо преобразуются координатные системы в окрестностях P' и P.

В плоском пространстве-времени существует такая система координат, что

$$\Omega(x', x) = \frac{1}{2} g^0_{ij} (x^{i'} - x^i)(x^{j'} - x^j),$$

где

$$g^0_{ij} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, -1).$$

Лит.: [1] Синг Дж., Общая теория относительности, пер. с англ., М., 1963.

М. И. Войцеховский.

МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ЗВЕЗДА — то же, что *звезда элемента функции.*

МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — полунепрерывный метод суммирования числовых и функциональных рядов, определенный последовательностью функций

$$g_k(\delta) = \frac{1}{\Gamma(1+\delta k)}, \quad \delta > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

суммируем методом Миттаг-Леффлера к сумме s, если

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{\Gamma(1+\delta k)} = s$$

и ряд под знаком предела сходится. Метод был первоначально введен Г. Миттаг-Леффлером (G. Mittag-Leffler, [1]) для ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

М.-Л. м. с. является регулярным (см. *Регулярные методы суммирования*) и применяется как аппарат для аналитич. продолжения функций. Если $f(z)$ — главная ветвь аналитич. функции, регулярной в нуле и представимой рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

для малых z, то этот ряд суммируем М.-Л. м. с. к $f(z)$ во всей звезде функции $f(z)$, причем равномерно в любой замкнутой ограниченной области, содержащейся внутри звезды.

Из методов суммирования, определенных преобразованием последовательности в последовательность полунепрерывными матрицами $a_k(\omega)$ типа

$$a_k(\omega) = \frac{c_{k+1}\omega^{k+1}}{E(\omega)},$$

где

$$E(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega^k$$

— целая функция, Г. Миттаг-Леффлером рассматривался случай, когда

$$E(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^k}{\Gamma(1+\alpha k)}.$$

Матрицу $a_k(\omega)$ с такой целой функцией наз. матрицей Миттаг-Леффлера.

Лит.: [1] Atti del IV Congresso Internationale, v. 1, Roma, 1908, p. 67—85; [2] Mittag-Leffler G., «Acta math.», 1905, v. 29, p. 101—81; [3] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [4] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960.

И. И. Волков.

МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ТЕОРЕМА — 1) М.-Л. т. о разложении мероморфной функции (см. [1], [2]) — одна из основных теорем теории аналитических функций, дающая для мероморфных функций

аналог разложения рациональной функции на простейшие дроби. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел

$$|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

и $\{g_n(z)\}$ — последовательность рациональных функций вида

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{l_n} \frac{c_{nk}}{(z-a_n)^k}, \tag{1}$$

так что точка a_n является единственным полюсом соответствующей функции $g_n(z)$. Тогда существуют мероморфные функции $f(z)$ в плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z, имеющие полюсы в точках a_n и только в них с заданными главными частями (1) *Лорана рядов*, соответствующих точкам a_n. Все эти функции $f(z)$ представимы в виде разложения Миттаг-Леффлера:

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [g_n(z) + p_n(z)], \tag{2}$$

где $p_n(z)$ — нек-рые многочлены, подбираемые по a_n и $g_n(z)$ так, чтобы ряд (2) равномерно (после выбрасывания конечного числа членов) сходился на любом компакте $K \subset \mathbb{C}$, $h(z)$ — произвольная целая функция.

Из М.-Л. т. вытекает, что любая наперед заданная мероморфная функция $f(z)$ в $\mathbb{C}$ с полюсами a_n и соответствующими главными частями $g_n(z)$ разложений $f(z)$ в ряды Лорана в окрестности a_n разлагается в ряд (2), где целая функция $h(z)$ определяется по $f(z)$. Г. Миттаг-Леффлер указал общую конструкцию многочленов $p_n(z)$, отыскание же целой функции $h(z)$ по данной $f(z)$ иногда представляет собой более трудную задачу. Для получения разложения (2) можно применить методы теории *вычетов* (см. также [3] — [5]).

Справедливо обобщение приведенной теоремы, также принадлежащее Г. Миттаг-Леффлеру и состоящее в том, что каковы бы ни были область D расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, последовательность $\{a_n\}$ точек $a_n \in D$, все предельные точки к-рой находятся на границе ∂D, и соответствующие главные части (1), существует мероморфная в D функция $f(z)$, имеющая полюсы в точках a_n и только в них с заданными главными частями (1). В такой форме М.-Л. т. обобщается и для открытых римановых поверхностей D (см. [7]); о существовании мероморфных функций с заданными особенностями на компактных римановых поверхностях см. *Абелев дифференциал*, *Дифференциал на римановой поверхности*, *Римана—Роха теорема*. М.-Л. т. верна и для абстрактных мероморфных функций g_n, $f: D \to F$, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, со значениями в банаховом пространстве F (см. [8]).

Другое обобщение М.-Л. т. состоит в том, что для любых последовательности $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$, $|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, и соответствующих функций

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{nk}}{(z-a_n)^k},$$

являющихся целыми функциями относительно переменного $w_n = 1/(z-a_n)$, существует однозначная аналитическая функция $f(z)$, имеющая особые точки a_n и только их с главными частями $g_n(z)$ (см. [3]).

Для аналитических функций многих комплексных переменных обобщением задачи Миттаг-Леффлера о построении функции с заданными особенностями является первая (аддитивная) *Кузена проблема*. В связи с этим часто оказывается полезной следующая равносильная формулировка М.-Л. т. Пусть $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$, где Ω_j — открытые множества в $\mathbb{C}$, и пусть даны мероморфные функции g_j соответственно на множествах Ω_j, причем

разности $g_j - g_k$ суть регулярные функции на пересечениях $\Omega_j \cap \Omega_k$ при всех j и k. Тогда на Ω существует мероморфная функция f такая, что разности $f - g_j$ регулярны на Ω_j для всех j (см. [5], [6]).

2) М.-Л. т. о разложении однозначной ветви аналитической функции в звезде — см. *Звезда элемента функции.*

Лит.: [1] Mittag-Leffler G., En metod att analytisk framställa en funktion at rationel karakter...— Öfversigt Kongl. Vetenskaps-Akad. Förhandlingar, 1876, v. 33, № 6, p. 3—16; [2] его же, «Acta math.», 1884, v. 4, p. 1—79; [3] Гурса Э., Курс математического анализа, пер. с франц., 3 изд., т. 2, М.—Л., 1936; [4] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [5] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [6] Хёрмандер Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968; [7] Behnke H., Sommer F., Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 3 Aufl., B., 1965; [8] Шварц Л., Анализ, пер. с франц., т. 2, М., 1972.

Е. Д. Соломенцев.

МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ФУНКЦИЯ — целая функция $E_\rho(z)$ комплексного переменного z, введенная Г. Миттаг-Леффлером [1] как обобщение показательной функции:

$$E_\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k/\rho)}, \quad 1 \leqslant \rho < +\infty.$$

В связи с тем, что М.-Л. ф. и более общая функция типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z;\ \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu+k/\rho)}, \quad \mu,\ \rho \in \mathbb{C},$$

широко используются в интегральных представлениях и преобразованиях аналитич. функций, их свойства, в частности асимптотика, изучены весьма подробно (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Mittag-Leffler G., «Acta math.», 1905, v. 29, p. 101—81; [2] Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966; [3] Гольдберг А. А., Островский И. В., Распределение значений мероморфных функций, М., 1970.

Е. Д. Соломенцев.

МИХАЙЛОВА КРИТЕРИЙ: все корни многочлена

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

с действительными коэффициентами имеют строго отрицательные действительные части тогда и только тогда, когда комплекснозначная функция $z = P(i\omega)$ действительного переменного $\omega \in [0,\ \infty)$ описывает в комплексной плоскости z кривую (годограф Михайлова), начинающуюся на положительной действительной полуоси, не попадающую в начало координат и последовательно проходящую против хода часовой стрелки n квадрантов (эквивалентное условие: когда радиус-вектор $P(i\omega)$ при возрастании ω от 0 до $+\infty$ нигде не обращается в нуль и монотонно поворачивается в положительном направлении на угол $\pi n/2$).

Этот критерий впервые был предложен А. В. Михайловым [1]. Он равносилен *Рауса — Гурвица критерию*, однако носит геометрич. характер и не требует проверки детерминантных неравенств (см. [2], [3]). М. к. дает необходимое и достаточное условие асимптотич. устойчивости линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = 0$$

с постоянными коэффициентами или линейной системы

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

с постоянной матрицей A, характеристич. многочлен к-рой совпадает с $P(z)$ (см. [4]).

М. к.— один из частотных критериев устойчивости линейных систем автоматич. регулирования (примыкающий, напр., к *Найквиста критерию*). Известны обобщения М. к. на системы автоматич. регулирования с запаздыванием, на импульсные системы (см. [5]), а

также аналоги М. к. для нелинейных систем управления (см. [6]).

Лит.: [1] Михайлов А. В., «Автоматика и телемеханика», 1938, № 3, с. 27—81; [2] Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н., Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций, М.—Л., 1949 («Тр. Матем. ин-та АН СССР», т. 26); [3] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973; [4] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967; [5] Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э., Математические основы теории управляемых систем, М., 1969; [6] Блакьер О., Анализ нелинейных систем, пер. с англ., М., 1969.

Н. Х. Розов.

МНИМАЯ ЕДИНИЦА — комплексное число i, квадрат к-рого равен минус единице: $i^2=-1$.

МНИМОЕ ЧИСЛО — число вида $x+iy$, где i — мнимая единица, x и y — действительные числа и $y\neq 0$, т. е. *комплексное число*, не являющееся действительным; М. ч. вида iy наз. чистомнимым (иногда только такие числа наз. М. ч.).

МНОГОГРАННАЯ МЕТРИКА — *внутренняя метрика* связного симплициального комплекса из евклидовых симплексов, в к-ром склеиваемые грани изометричны и склеивание производится по изометрии. Расстоянием между точками комплекса служит нижняя грань длин ломаных, соединяющих эти точки, и таких, что каждое из звеньев умещается в одном из симплексов. Примером М. м. служит внутренняя метрика на поверхности выпуклого многогранника в E^3. М. м. может рассматриваться также на комплексе из симплексов пространства постоянной кривизны.

М. м. допускают синтетич. приемы исследования. Обычно М. м. рассматривают для комплексов, являющихся многообразиями или многообразиями с краем. В теории выпуклых поверхностей и *двумерных многообразий ограниченной кривизны* приближение посредством М. м. служит универсальным аппаратом исследования (см. [1], [2]). Для изучения выпуклых поверхностей успешно привлекались также трехмерные М. м. (см. [3]). На М. м. размерности $n>2$ обобщены нек-рые из результатов римановой геометрии в целом (см. [4], [5]).

Лит.: [1] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.— Л., 1948; [2] Александров А. Д., Залгаллер В. А., Двумерные многообразия ограниченной кривизны, М.— Л., 1962 («Тр. Матем. ин-та АН СССР», т. 63); [3] Волков Ю. А., «Вестн. Ленингр. ун-та», 1960, № 19, с. 75—86; [4] Милка А. Д., «Укр. геометр. сб.», 1968, № 5—6, с. 103—14; 1970, № 7, с. 68—77; [5] Stone D. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1976, v. 215, № 488, p. 1—44.

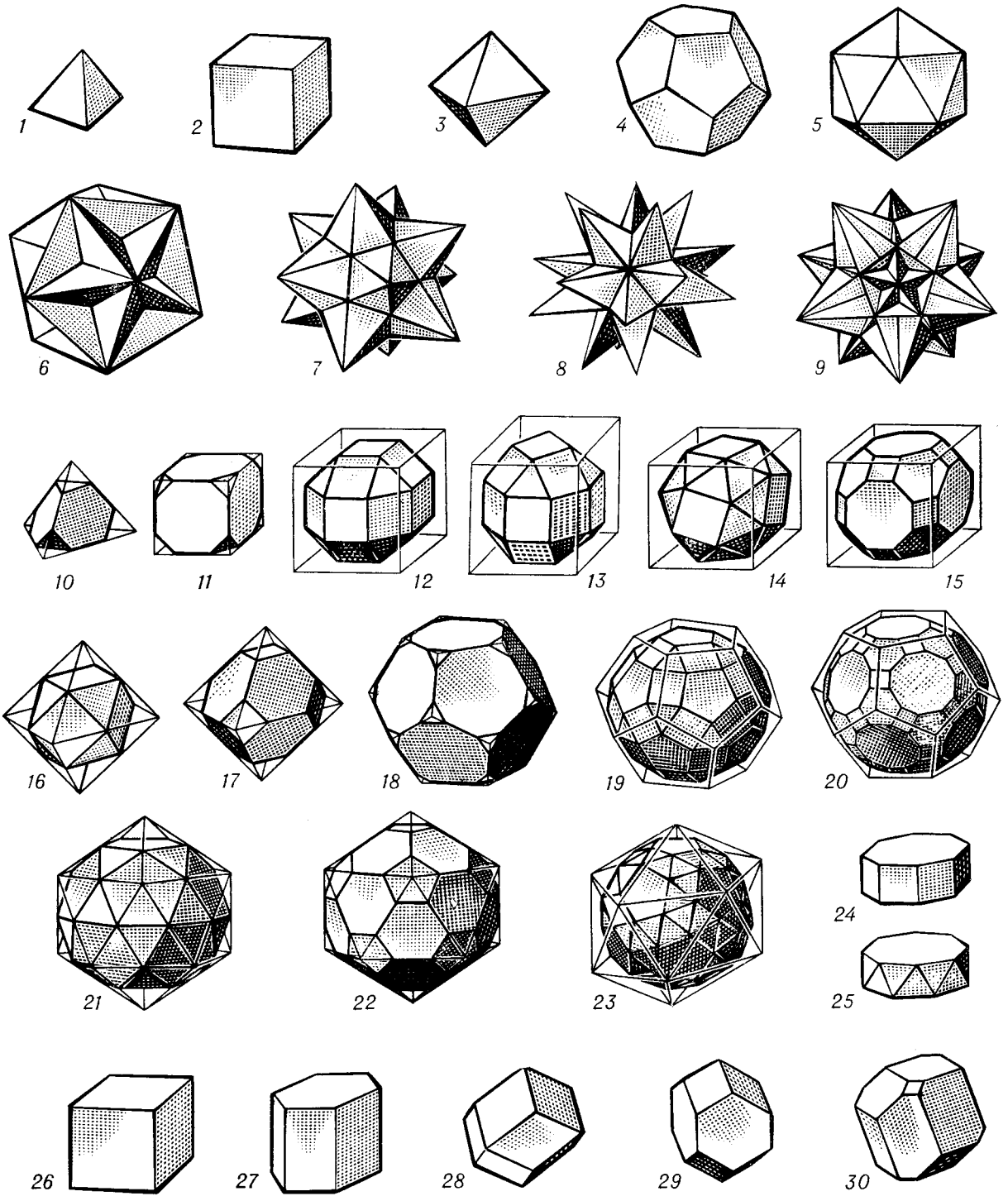
В. А. Залгаллер.

МНОГОГРАННИК — совокупность конечного числа плоских многоугольников такая, что: 1) каждая сторона любого из многоугольников есть одновременно сторона другого (но только одного), называемого смежным с первым (по этой стороне); 2) от любого из многоугольников, составляющих М., можно дойти до любого из них, переходя к смежному с ним, а от этого, в свою очередь, к смежному с ним, и т. д. Эти многоугольники наз. гранями, их стороны — ребрами, а их вершины — вершинами М.

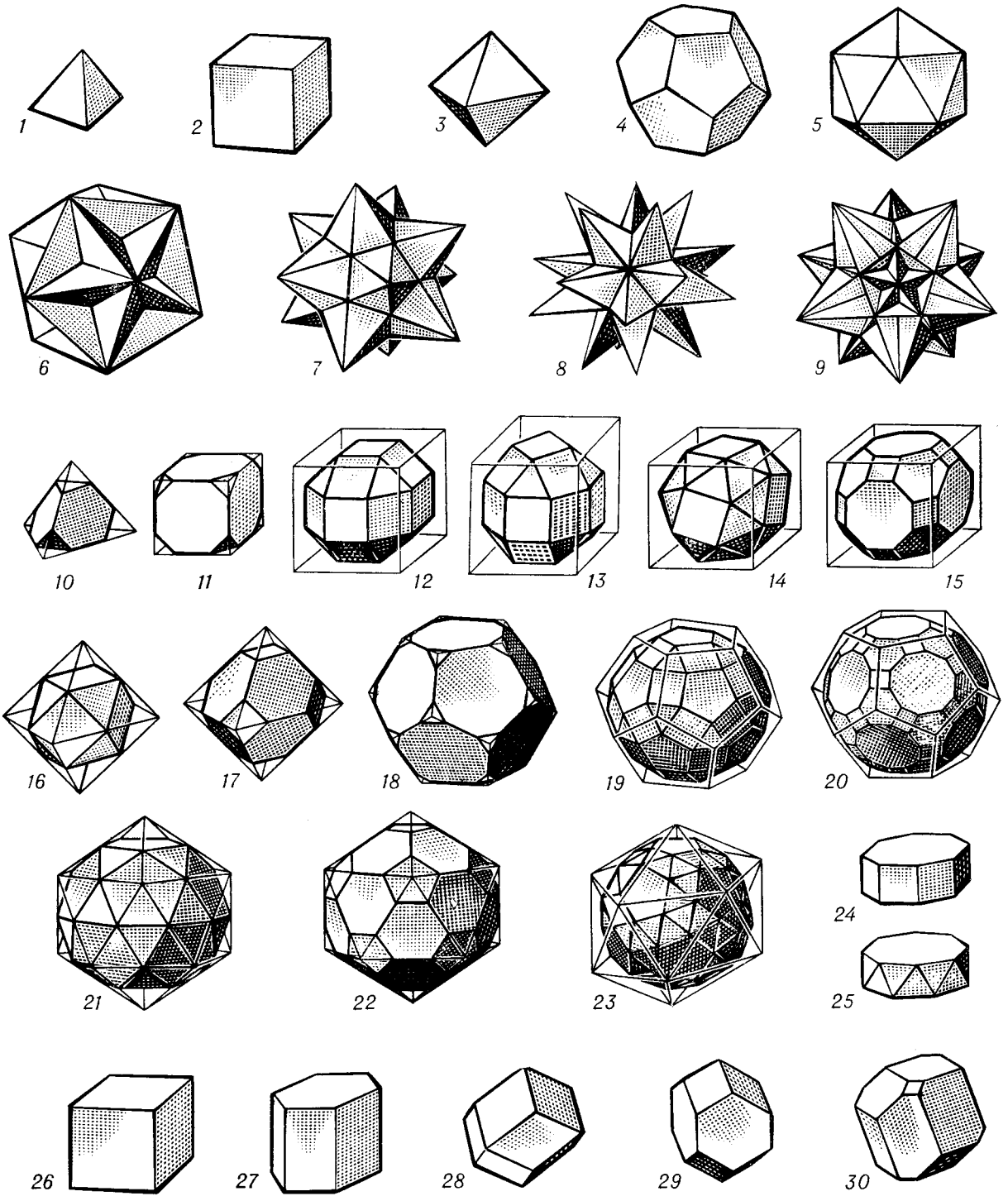
Приведенное определение М. получает различный смысл в зависимости от того, как определить *многоугольник*. Если под многоугольником понимают плоские замкнутые ломаные (хотя бы и самопересекающиеся), то приходят к первому определению М. Основная часть статьи построена на основе второго определения М., при к-ром его грани являются многоугольниками, понимаемыми как части плоскости, ограниченные ломаными. С этой точки зрения М. есть поверхность, составленная из многоугольных кусков. Если эта поверхность сама себя не пересекает, то она есть полная поверхность нек-рого геометрич. тела, к-рое также наз. М.; отсюда возникает третья точка зрения на М. как на геометрич. тела, причем допускается также существование у этих тел «дырок», ограниченных конечным числом плоских граней.

Простейшими примерами М. являются призмы и пи-

рамиды. М. наз. n-угольной пирамидой, если он имеет одной своей гранью (основанием) какой-либо n-угольник, а остальные грани — треугольники с общей вершиной, не лежащей в плоскости основания. Треугольная пирамида наз. также тетраэдром. М. наз. n-угольной призмой, если он имеет двумя своими гранями (основаниями) равные n-угольники (не лежащие в одной плоскости), получающиеся друг из друга параллельным переносом, а остальные грани — параллелограммы, противоположными сторонами к-рых являются соответственные стороны оснований. Для всякого М. нулевого рода эйлерова характеристика (число вершин минус число ребер плюс число граней) равна двум; символически: $B-P+\Gamma=2$ (теорема Эйлера). Для М. рода p справедливо соотношение $B-P+\Gamma=2-2p$.



рамиды. М. наз. n-угольной пирамидой, если он имеет одной своей гранью (основанием) какой-либо n-угольник, а остальные грани — треугольники с общей вершиной, не лежащей в плоскости основания. Треугольная пирамида наз. также тетраэдром. М. наз. n-угольной призмой, если он имеет двумя своими гранями (основаниями) равные n-угольники (не лежащие в одной плоскости), получающиеся друг из друга параллельным переносом, а остальные грани — параллелограммы, противоположными сторонами к-рых являются соответственные стороны оснований. Для всякого М. нулевого рода эйлерова характеристика (число вершин минус число ребер плюс число граней) равна двум; символически: $B-P+\Gamma=2$ (теорема Эйлера). Для М. рода p справедливо соотношение $B-P+\Gamma=2-2p$.



Выпуклым многогранником наз. выпуклая оболочка конечного числа точек, т. е. такой М., к-рый лежит по одну сторону от плоскости любой его грани. Внутренняя его часть есть выпуклое тело. Если поверхность выпуклого тела многогранная, то соответствующий М.— выпуклый. Наиболее важны следующие выпуклые М.

Правильные многогранники (тела Платона) — такие выпуклые М., все грани к-рых суть одинаковые правильные многоугольники и все многогранные углы при вершинах правильные и равные (см. рис. 1—5).

Изогоны и изоэдры — выпуклые М., все многогранные углы к-рых равны (изогоны) или равны все грани (изоэдры); причем группа поворотов (с отражениями) изогона (изоэдра) вокруг центра тяжести переводит любую его вершину (грань) в любую другую его вершину (грань). Каждый из изоэдров может быть реализован так, что все его грани суть правильные многоугольники. Полученные так М. наз. полуправильными многогранниками (телами Архимеда) (см. рис. 10—25).

Параллелоэдры (выпуклые) — М., рассматриваемые как тела, параллельным пересечением к-рых можно заполнить все бесконечное пространство так, чтобы они не входили друг в друга и не оставляли пустот между собой, т. е. образовали разбиение пространства (см. рис. 26—30).

Основываясь на первом (указанном в начале статьи) определении М., можно указать еще четыре правильных невыпуклых М. (тела Пуансо). В этих М. либо грани пересекают друг друга, либо сами грани — самопересекающиеся многоугольники (см. рис. 6—9). Для изучения вопросов, связанных с площадями поверхностей и объемами таких М., удобно пользоваться именно первым определением М.

Если у М. можно так ориентировать грани, чтобы каждое ребро в тех двух гранях, к-рые смежны по этому ребру, имело бы обратные направления, то его наз. ориентируемым, в противном случае — неориентируемым. Для ориентируемого М. (даже если он — самопересекающийся и его грани — самопересекающиеся многоугольники) можно ввести понятия площади поверхности и величины объема. Площадью ориентируемого М. наз. сумму площадей его граней. При определении объема следует иметь в виду, что совокупность внутренних кусков граней М. разделяет пространство на определенное число связных кусков, из к-рых один по отношению к М. бесконечный (внешний), а остальные конечные (внутренние). Если из внешней по отношению к М. точки провести отрезок в какую-либо внутреннюю точку внутреннего куска, то сумму «коэффициентов» тех внутренних кусков граней М., к-рые пересечет этот отрезок, наз. коэффициентом рассматриваемого внутреннего куска М. (она не зависит от выбора внешней точки); такой коэффициент есть целое положительное, отрицательное число или нуль. Сумму обычных объемов всех внутренних кусков М., умноженных на эти их коэффициенты, наз. объемом М.

Рассматриваются и n-мерные М. Некоторые из указанных определений имеют n-мерное обобщение. В частности, найдены все выпуклые правильные М., при $n=4$ их оказалось 6, а при всех бо́льших n всего 3: обобщение тетраэдра, куба и октаэдра. В то же время, напр., неизвестны (1982) все 4-мерные изоэдры и изогоны.

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4 — Геометрия, М., 1963; [2] Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, пер. с нем., 3 изд., М.— Л., 1981; [3] Александров А. Д., Выпуклые многогранники, М.— Л., 1950; [4] Люстерник Л. А., Выпуклые фигуры и многогранники, М., 1956; [5] Brückner M., Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte, Lpz., 1900.

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

МНОГОГРАННИКА ГРУППА — группа $\mathrm{Sym}\ P$ симметрии многогранника P в n-мерном евклидовом про-

странстве En, т. е. группа всех движений пространства E^n, переводящих P в себя. Многогранник P наз. правильным, если группа Sym P транзитивно действует на множестве его «флагов» — наборов

$$F=\{\Gamma_0,\ \Gamma_1,\ \ldots,\ \Gamma_{n-1}\},$$

где Γ_k есть k-мерная замкнутая грань и $\Gamma_{k-1}\subset\Gamma_k$. Группа симметрии правильного многогранника порождается отражениями (см. *Отражений группа*). Ее фундаментальной областью является симплициальный конус K, вершина к-рого совпадает с центром многогранника P, а ребра проходят через центры граней, составляющих какой-либо флаг F. Тем самым образующие отражения $r_1, \ldots, r_n$ группы Sym P получают естественную нумерацию: r_k есть отражение относительно той гиперплоскости, ограничивающей K, к-рая не проходит через центр грани Γ_{k-1}. Образующие r_k и r_l при $|k-l|\geqslant 2$ коммутируют, а порядок r_kr_{k+1} равен p_k — числу k-мерных (или $(k-1)$-мерных) граней многогранника Γ_{k+1}, содержащих грань Γ_{k-2} (если считать, что $\Gamma_k=P$, а $\Gamma_{-1}=\varnothing$). Последовательность $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ наз. символом Шлефли многогранника. Трехмерные правильные многогранники (тела Платона) имеют следующие символы Шлефли: тетраэдр — $\{3,3\}$, куб — $\{4,3\}$, октаэдр — $\{3,4\}$, додекаэдр — $\{5,3\}$, икосаэдр — $\{3,5\}$.

Символ Шлефли определяет правильный многогранник с точностью до подобия. Обращению символа Шлефли соответствует переход к взаимному многограннику, вершинами к-рого служат центры $(n-1)$-мерных граней многогранника P. Взаимные многогранники имеют одинаковые группы симметрии.

Все возможные символы Шлефли правильных многогранников можно получить из классификации конечных групп отражений, выделив из них те, граф Кокстера к-рых линеен. При $n\geqslant 5$ в E^n существует лишь 3 правильных многогранника: симплекс, куб и многогранник взаимный кубу (аналог октаэдра). Их символы Шлефли суть $\{3, \ldots, 3\}$, $\{4,3, \ldots, 3\}$ и $\{3, \ldots, 3, 4\}$. В 4-мерном пространстве имеется 6 правильных многогранников: $\{3, 3, 3\}$, $\{4, 3, 3\}$, $\{3, 3, 4\}$, $\{3, 4, 3\}$, $\{5, 3, 3\}$ и $\{3, 3, 5\}$. Каждая грань правильного многогранника P также является правильным многогранником, причем ее символ Шлефли есть начальный отрезок символа Шлефли самого многогранника P. Напр., 3-мерная грань многогранника $\{5, 3, 3\}$ имеет символ Шлефли $\{5, 3\}$, т. е. является додекаэдром.

Лит.: [1] Coxeter H. S. M., Regular Polytopes, 2 ed., N. Y.— L., 1963; [2] Розенфельд Б. А., Многомерные пространства, М., 1966.

Э. Б. Винберг.

МНОГОГРАННЫЙ УГОЛ — часть пространства, ограниченная одной полостью многогранной конич. поверхности, направляющая к-рой — плоский многоугольник без самопересечений. Грани этой поверхности наз. гранями М. у., вершина — вершиной М. у. Многогранный угол наз. правильным, если равны все его линейные углы и все его двугранные углы. Мерой М. у. является площадь, ограниченная сферич. многоугольником (см. рис.), полученным пересечением граней М. у., сферой с радиусом, равным единице, и с центром в вершине М. у.



МНОГОГРУППОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ — один из методов приближенного описания и изучения системы большого числа взаимодействующих частиц (газ, жидкость), применяемый в статистич. физике.

Этот метод основан на предположении, что всякая (или почти всякая) конфигурация частиц разбивается на конечные группы частиц — кластеры, расположенные достаточно далеко и почти не взаимодейст-

вующие друг с другом. Иными словами, система взаимодействующих частиц представляется в виде газа кластеров, к-рым запрещено слишком сближаться. Следующий шаг состоит в пренебрежении этим запретом, а также в том, что из рассмотрения исключаются кластеры очень больших размеров или очень сложной формы (в этом собственно и состоит М. п.).

Основное допущение о разложении конфигурации на кластеры, лежащее в основе метода, верно в случае малой плотности частиц и короткодействующих сил между ними. Оправдано ли это допущение в других случаях — неизвестно (1982). Применяемые же в М. п. аппроксимации, по-видимому, дают хорошее приближение также лишь при малых значениях плотности и становятся слишком грубыми в случае фазового перехода, когда одинаково существенную роль начинают играть кластеры всех размеров.

Лит.: [1] Band W., «J. Chem. Phys.», 1939, v. 7, p. 324—26; [2] Frenkel J., там же, p. 200; [3] Минлос Р. А., Синай Я. Г., «Матем. сб.», 1967, т. 73, в. 3, с. 375—448; [4] Хилл Т., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1960.

Р. А. Минлос.

МНОГОЗНАЧНАЯ ЛОГИКА — раздел *математической логики*, изучающий математич. модели логики высказываний. Эти модели отражают две основные черты последней — множественность значений истинности высказываний и возможность построения новых более сложных высказываний из заданных при помощи логич. операций, к-рые позволяют также по значениям истинности исходных высказываний устанавливать значение истинности сложного высказывания. Примерами многозначных высказываний являются суждения с модальным исходом («да», «нет», «может быть») и суждения вероятностного характера, а примерами логич. операций — логич. связки типа «и», «или», «если..., то». В общем случае модели М. л. представляют собой обобщения *алгебры логики*. Важно отметить, что в алгебре логики высказывания принимают только два значения истинности («да», «нет»), в связи с чем она в общем случае не может отразить всего многообразия логич. построений, встречающихся на практике. При достаточно широком толковании М. л. в нее иногда включают также *логические исчисления*.

Исторически первыми моделями М. л. явились двузначная логика Дж. Буля (G. Boole, сер. 19 в.), называемая также алгеброй логики, трехзначная логика Я. Лукасевича (J. Łucasiewicz, 1920) и m-значная логика Э. Поста (E. Post, 1921). Изучение этих моделей составило важный этап в создании теории М. л.

Основные модели многозначной логики. М. л. обладает определенной спецификой, состоящей в рассмотрении задач и подходов, возникающих при исследовании М. л. с позиций математич. логики, математич. кибернетики и алгебры. Так, с позиций математич. кибернетики модели М. л. рассматриваются как языки, описывающие функционирование сложных управляющих систем, компоненты к-рых могут находиться в нек-ром числе различных состояний, а с точки зрения алгебры модели М. л. представляют *алгебраические системы*, имеющие наряду с прикладным и теоретич. интерес.

Построение моделей М. л. осуществляется по аналогии с построением двузначной логики. Так, индивидуальные высказывания логики, разбитые на классы с одним и тем же значением истинности, приводят к понятию множества E — констант модели, к-рые фактически отождествляют все индивидуальные высказывания, заменяя их соответствующими значениями истинности; переменные высказывания приводят к переменным величинам $x_1, x_2, \ldots$, которые в качестве значений принимают элементы из множества E; логич. связки приводят к множеству M элементарных функций (операций), к-рые, как и их аргументы, принимают значения из E. Сложные высказывания, построенные из ин-

дивидуальных и переменных высказываний, а также логич. связок, приводят к множеству $\langle M\rangle$ формул над M. Значение истинности из E сложного высказывания является функцией от соответствующих значений истинности высказываний, входящих в данное сложное высказывание. В модели эта функция приписывается формуле, соответствующей данному сложному высказыванию; говорят также, что формула *реализует* эту функцию. Функции, отображающие *кортежи* элементов из E в E, наз. *функциями m-значной логики*, где m обозначает мощность множества E. Множество всех функций m-значной логики обозначают через P_m. Множество формул $\langle M\rangle$ приводит к множеству $[M]$ функций, реализуемых формулами из $\langle M\rangle$ и наз. *суперпозициями* (или *композициями*) над M. Множество $[M]$ наз. *замыканием множества* M. Задание конкретной модели М. л. M_E считается эквивалентным указанию множеств E, M, $\langle M\rangle$ и $[M]$, при этом говорят, что модель порождается множеством M; если M конечно, говорят, что модель является *конечно порожденной*. Эта модель наз. *формульной моделью*, а также *m-значной логикой*.

Своеобразие подхода математич. кибернетики к М. л. состоит в рассмотрении моделей М. л. как управляющих систем. Элементарные функции при этом являются элементами, производящими определенные операции, а формулы интерпретируются как схемы, построенные из элементов и также осуществляющие переработку входной информации в выходную. Такого рода управляющие системы, известные в кибернетике как *схемы из функциональных элементов* (без ветвления), широко используются в теоретич. и практич. вопросах кибернетики.

Вместе с тем существует ряд задач логики и кибернетики, к-рый связан с изучением соответствий между множествами M и $[M]$ и при к-ром роль множества $\langle M\rangle$ несколько затушевывается, сводясь к способу определения второго множества по первому. В этом случае приходят к другой модели М. л., представляющей собой алгебру, элементами к-рой являются функции, принимающие в качестве значений, как и их аргументы, элементы из E. В качестве операций в этих алгебрах обычно используется специальный набор операций, эквивалентный в смысле соответствий M и $[M]$ множеству формул, построенных из функций множества M, т. е. получению сложных функций из заданных путем подстановки одних функций вместо аргументов других. Эти алгебры наз. *алгебрами m-значных логик*. Конкретно это может быть достигнуто, напр., введением следующих унарных операций: ζ, τ, Δ, ∇ и бинарной операции $*$. В предположении, что каждая функция f из P_E с учетом фиктивных переменных зависит от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где n определяется функцией f, эти операции могут быть заданы так:

$$(\zeta f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1),$$
$$(\tau f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n),$$
$$(\Delta f)(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

если $n>1$, и $\zeta f=\tau f=\Delta f=f$, если $n=1$;

$$(\nabla f)(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$$

и для $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_m)$

$$(f * g)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m-1}) =$$
$$= f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}).$$

Возникающие алгебры $M_E=\langle M, \zeta, \tau, \Delta, \nabla, *\rangle$ иногда наз. *алгебрами Поста*.

Проблематика многозначной логики. К числу задач, характерных для формульной модели М. л., относится задача «об описании», т. е. вопрос об указании для за-

данного множества $M_2 \subseteq [M_1]$ всех формул из $\langle M_1 \rangle$, реализующих функции из M_2. Частным случаем такой задачи является важный вопрос математич. логики об указании всех формул, реализующих заданную константу, что, напр., для исчисления высказываний эквивалентно построению всех тождественно истинных высказываний.

Пограничным вопросом между математич. логикой и алгеброй, примыкающим к задаче об описании, является задача о тождественных преобразованиях. В ней при заданном множестве M требуется выделить в нек-ром смысле простейшее подмножество пар равных, т. е. реализующих одну и ту же функцию, формул из $\langle M \rangle$ (тождеств), позволяющее путем подстановки выделенных равных формул одной вместо другой получить из любой формулы все формулы, равные ей (полную систему тождеств).

Аналогичное место занимает т. н. проблема полноты, состоящая в указании всех таких подмножеств M_1 заданного замкнутого, т. е. совпадающего со своим замыканием, множества M, для к-рых выполнено равенство $[M_1] = M$, т. е. имеет место свойство полноты (или свойство функциональной полноты) M_1 в M. К этой задаче примыкает задача о базисах, состоящая в указании всех полных в M подмножеств M_1, никакое собственное подмножество к-рых уже не полно в M (базисы называют также полными независимыми системами функций). Выделяют два подхода к решению задачи о полноте — алгоритмический и алгебраический. В первом случае ставится вопрос о существовании алгоритма, устанавливающего полноту или неполноту систем функций, описанных на нек-ром языке; во втором — переходят к изучению свойств решетки подалгебр данной алгебры m-значной логики и решают задачу о полноте, используя эти свойства. Важным понятием при алгебраич. подходе является понятие критериальной системы подалгебр. Система N подалгебр алгебры $M = \langle M, \zeta, \tau, \Lambda, \nabla, \Rightarrow \rangle$ наз. критериальной, если любое множество $M' \subseteq M$ является полным тогда и только тогда, когда оно не является подмножеством ни одной подалгебры из N. Таково, напр., множество всех собственных подалгебр алгебры M. В общем случае последняя критериальная система является избыточной. Всякая критериальная система содержит все максимальные подалгебры алгебры M (или предполные классы), и это позволяет перейти к рассмотрению более экономных критериальных систем, к-рые не содержат подалгебр максимальных подалгебр. Таким образом, в задачах о полноте можно ограничиться использованием критериальных систем вида $N = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, где Σ_1 — множество всех максимальных подалгебр, а множество Σ_2 состоит из нек-рых таких подалгебр, к-рые не являются подалгебрами никакой максимальной подалгебры. В случае пустоты Σ_2 задача о полноте сводится к описанию максимальных подалгебр алгебры N.

Глобальной задачей для М. л. является описание решетки замкнутых классов данной модели М. л.

Характерный для теории управляющих систем вопрос о сложности этих систем естественно возникает и по отношению к формулам и функциям из М. л. Типичной при таком подходе является следующая задача о сложности реализации. На множестве всех элементарных формул нек-рым способом вводится числовая мера (сложность формул), к-рая затем распространяется на множество всех формул, напр. путем суммирования мер всех тех элементарных формул, к-рые участвуют в построении заданной формулы. Требуется для заданной функции указать ту формулу (простейшую), к-рая реализует эту функцию и имеет наименьшую сложность, а также выяснить, как

эта сложность зависит от нек-рых свойств рассматриваемой функции. Исследуются различные обобщения этой задачи.

Широкий круг вопросов связан с реализацией функций формулами с наперед заданными свойствами. Сюда относятся задача о реализации функций алгебры логики *дизъюнктивными нормальными формами* и связанная с этим задача минимизации; а также задача о реализации функций формулами в нек-ром смысле **ограниченной глубины** (т. е. такими формулами, в к-рых цепочка подставляемых друг в друга формул имеет ограниченную длину, такое ограничение связано с надежностью и скоростью вычислений), задача о **декомпозиции**, т. е. о реализации функций от переменных при помощи формул, построенных из элементарных формул, реализующих функции от меньшего числа переменных, и ряд других.

Решения всех перечисленных выше задач существенно зависят от мощности множества E и множества M, порождающего заданную модель М. л.

Важнейшие примеры многозначных логик. К числу наиболее важных примеров М. л. относятся конечнозначные логики (т. е. m-значные логики, для к-рых m конечно). Для них обычно полагают, что $E=E_m=\{0, 1, \ldots, m-1\}$, а m-значную логику M_E обозначают M_m. Наиболее глубоко исследован случай $m=2$, при этом функции двузначной логики наз. также *булевыми функциями*. Важнейшим результатом здесь является полное описание Э. Постом (E. Post, см. [1]) решетки замкнутых классов. Множество их оказалось счетным, а каждый класс и решетки их по включению строятся эффективно. Эти классы наз. **классами Поста**. Всякий замкнутый класс имеет конечный базис, и его мощность не превосходит 4. Из этих результатов получаются решения задач о выразимости, полноте и базисах, а также задачи о тождественных преобразованиях. Относительно полных конечных систем для «почти всех» функций указано поведение меры сложности простейших формул, реализующих эти функции, и построен соответствующий алгоритм синтеза формул (см. [2]). Изучены задачи о построении оптимальных по сложности формул, реализующих функции надежно и достаточно хорошо по быстродействию, а также вопросы сложности реализации для большого числа специальных классов функций и отдельных функций.

Одним из глубоко исследованных вопросов для двузначной логики является также **задача минимизации**. В ней изучается специальный язык задания функций двузначной логики — язык дизъюнктивных нормальных форм (д. н. ф.). Вводится понятие **сложности** д. н. ф.— число букв в ней — и изучаются задачи поиска, строения и метрич. свойств «простейших» в смысле этой меры д. н. ф., реализующих заданную функцию (см. [3]). Задача о декомпозиции для булевых функций состоит в выяснении условий, при к-рых заданная функция от n переменных может быть реализована формулой, построенной из функций от меньшего числа переменных, причем все функции, подставляемые друг в друга в процессе построения формулы, не зависят от общих переменных. Такие формулы наз. **бесповторными**. Показано, что не существует конечной системы функций такой, что каждая функция может быть реализована бесповторной формулой над этой системой, и даже что «почти все» функции не допускают реализации бесповторными формулами. В целом двузначные логики, в силу нек-рых их особенностей, являются главным объектом, на к-ром просматриваются общие постановки задач.

Для произвольных конечнозначных логик, к-рые при $m>2$ существенно отличаются от двузначной логики, имеются эффективные решения задач о выразимости для конечных систем. Показано, что при $m\geqslant 3$ сущест-

вуют m-значные логики с конечным базисом и в то же время не имеющие конечной полной системы тождеств (см. [4]), тогда как в двузначной логике каждый замкнутый класс имеет конечную полную систему тождеств (см. [5]). Для конечнозначных логик с конечным базисом имеется эффективное решение задачи о полноте. Оно достигается следующим путем. Говорят, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет множество $K=\{g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_s(x_1, \ldots, x_n)\}$, если для любого набора $g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_k}$, где $g_{i_j} \in K$, имеет место $f(g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_n}) \in K$. Множество K наз. п р а в и л ь н ы м, если селекторная функция $g_j(x_1, \ldots, x_n)=x_j$ содержится в K при всех j, $1 \leqslant j \leqslant n$, и каждая функция из K сохраняет K. Если $M=[K]$, то в M выбирают все системы K' с такими свойствами: функции в них зависят только от $x_1, \ldots, x_n$, добавление к ним всех селекторных функций делает их правильными, они не содержат в качестве подмножества K. Указанная процедура выделения всех правильных множеств $K_1, \ldots, K_t$, $t \leqslant 2^{m^n}$, является эффективной. Критериальной системой является $\{U(K_1), U(K_2), \ldots, U(K_t)\}$, где $U(K_i)$ (класс сохранения K_i) состоит из всех функций из M, сохраняющих K_i, $1 \leqslant i \leqslant t$. Невключение произвольного конечного множества $K \subseteq M$ в каждый из классов $U(K_i)$ проверяется также эффективно. Каждый предполный класс является одним из классов сохранения, а множество всех предполных классов в этом случае образует критериальную систему. Показано, что при $m \geqslant 3$ в P_m имеется континуум замкнутых классов, существуют замкнутые классы с базисами заданной конечной или счетной мощности, а также такие классы, к-рые не имеют базисов, при этом сами семейства классов без базисов или со счетным базисом континуальны. Примерами классов без базиса или имеющих счетный базис являются $[\{f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots\}]$ и $[\{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}]$, где: $f_n \equiv 0$ при $n=0$, а при $n>0$ функция $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ равна 0 на всех наборах, кроме $(2, \ldots, 2)$, на к-ром равна 1; $g_n(x_1, \ldots, x_n)$ равна 0 на всех наборах, кроме наборов вида $(2, \ldots, 2, 1, 2, \ldots, 2)$, на к-рых равна 1 (см. [6]).

Особый интерес представляет задача о полноте в m-значной логике P_m. В P_m существуют конечные полные системы, что позволяет из каждой полной системы выделить конечную полную подсистему и свести задачу к изучению полноты конечных систем. Существуют также полные системы, состоящие из одной функции, такие функции наз. ш е ф ф е р о в ы м и. Примером их может служить ф у н к ц и я В е б б а $\max(x_1, x_2)+1 \pmod m$. В силу конечной порожденности в P_m эффективно решается задача о полноте.

В P_m явно построены все предполные классы, являющиеся классами сохранения специальных предикатов. Указание этих предикатов составляет содержание теоремы о полноте в конечнозначных логиках (см. [7]). Говорят, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ с о х р а н я е т п р е д и к а т R: $(E_m)^h \to \{0, 1\}$, если формула

$$R(z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{1h}) \& \ldots \& R(z_{n1}, z_{n2}, \ldots, z_{nh}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow R(f(z_{11}, z_{21}, \ldots, z_{n1}), \ldots, f(z_{1h}, z_{2h}, \ldots, z_{nh}))$$

тождественно равна 1 при всех значениях переменных z_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant h$. Класс $U(R)$ всех функций, сохраняющих предикат R, наз. к л а с с о м с о х р а н е н и я п р е д и к а т а R. Показано, что для каждого предполного класса N можно выбрать такой предикат R, зависящий не более чем от $m+2$ переменных, а при $m \geqslant 3$ не более чем от m переменных, что $N=U(R)$. Эти предикаты могут быть разбиты на шесть семейств: H, S, E, L, Z, U. Семейства H, S и E состоят из всех двуместных предикатов отношения порядка на E_m, имеющих по одному максимальному и минимальному элементу,— в первом случае; задающих подстановки

на E_m, разлагающиеся в циклы одинаковой простой длины (без инвариантных элементов),— во втором случае; и задающих нетождественные и неуниверсальные отношения эквивалентности на E_m — в третьем случае. Семейство L не пусто при $m=p^h$, p — простое, и состоит из всех четырехместных предикатов $R_G(y_1, y_2, y_3, y_4)$ таких, что $R_G(y_1, y_2, y_3, y_4)=1$ эквивалентно $y_1+y_2=y_3+y_4$, где G — абелева группа, в к-рой каждый ненулевой элемент имеет порядок p. Предикат $R(y_1, \ldots, y_h)$, $1\leqslant h\leqslant m$, рефлексивен, если из того, что не все числа $a_1, a_2, \ldots, a_h$ различны, следует, что $R(a_1, a_2, \ldots, a_h)=1$, и симметричен, если для любой подстановки s чисел $1, 2, \ldots, h$ имеет место $R(y_1, \ldots, y_h)=R(y_{s(1)}, \ldots, y_{s(h)})$. Множество элементов $c\in E_m$ таких, что $R(a_1, \ldots, a_{h-1}, c)=1$ для любых $a_1, \ldots, a_{h-1}$, наз. центром симметричного предиката R. Предикат $R(y_1, \ldots, y_h)$ является центральным, если он рефлексивен, симметричен и имеет центр c такой, что $\varnothing\subset c\subset E_m$. Семейство Z состоит из всех h-местных центральных предикатов таких, что $1\leqslant h\leqslant m$. Для a из E_{h^k} полагают $a=\sum_{l=0}^{k-1}[a]_l\cdot h^l$, где $[a]_l\in E_h$. Семейство U состоит из всех предикатов $R(y_1, \ldots, y_h)$ таких, что при $3\leqslant h\leqslant m$ и $h^k\leqslant m$, $k\geqslant 1$, для нек-рой сюръекции φ: $E_m\to E_{h^k}$ равенство $R(a_1, \ldots, a_h)=1$ эквивалентно тому, что набор $([\varphi(a_1)]_l, \ldots, [\varphi(a_n)]_l)$ неразнозначен при любом $l=0, 1, \ldots, k-1$. Установлено, что предикаты из разных семейств задают разные предполные классы, и указаны условия, когда предикаты из одного и того же семейства задают одинаковые классы. Показано, что число предполных классов асимптотически равно $\delta(m)\cdot m\cdot 2^{C_{m-1}^{[m-1/2]}}$, где $\delta(m)=1$, если m четно, и $\delta(m)=2$, если m нечетно (т. е. это число растет достаточно быстро), что указывает на малую практич. эффективность критериальных систем (см. [8]). Рассматриваются различные модификации задачи о полноте, сводящиеся к исследованию систем с нек-рыми заранее известными свойствами, напр. систем, содержащих множество P_m^1 всех одноместных функций или же множество S_m всех подстановок. В первом случае система при $m>2$, а во втором при $m>4$ является полной тогда и только тогда, когда она содержит существенную функцию, т. е. функцию, зависящую более чем от одного переменного и принимающую все m значений (см. [9], [10]). С ними связана задача указания всех таких подмножеств T множеств P_m^1 и S_m, каждое из к-рых вместе с любой существенной функцией образует полную систему. Показано, что подмножество $T\subseteq P_m^1$ всех одноместных функций, не принимающих хотя бы одного значения, является таковым, а подмножество $T\subseteq P_m^1$ всех одноместных функций, не принимающих хотя бы двух значений, вообще говоря, таковым уже не является. При $m>4$ таковыми являются те и только те подмножества T, к-рые 4-транзитивны при $m=2^k$, 3-транзитивны при $m=p^k$, p — простое, $p\neq 2$, 2-транзитивны при остальных m. Эти условия после естественного обобщения транзитивности сохраняются и для произвольных систем функций, к-рые принимают все m значений (см. [11]).

Для систем, состоящих из одной функции, критерием полноты является условие 2-транзитивности. Произвольное множество функций при $m>2$ является полным тогда и только тогда, когда оно m-транзитивно и степень транзитивности не может быть понижена.

От конечных полных систем путем операции отождествления можно перейти к рассмотрению более простого класса полных систем, наз. простыми базисами. Под простым базисом понимается такая конечная полная система, к-рая теряет свойство полноты после отождествления любой пары существенных пере-

менных у любой функции этой системы. Существует лишь конечное число q простых базисов и $\log q \sim m^{m^{m-1}-(m-1)!}$ [12]. Число переменных у функций из простых базисов не превосходит m^{m-1}, и существует функция, входящая в простой базис и существенно зависящая от m^{m-1} переменных. Указаны представления М. л. P_k в P_m, т. е. гомоморфизмы P_k в P_m [13]; построены также нек-рые аналоги теории минимизации для произвольных конечнозначных логик.

Первыми примерами конечнозначных логик явились трехзначная логика Лукасевича, к-рая порождается функциями $1-x$, $\min(1, 1-x_1+x_2)$, где x_1, x_2 принимают значения 0, 1/2, 1, и m-значная логика Поста, к-рая порождается функциями $x_1+1 \pmod m$, $\max(x_1, x_2)$, где x_1, x_2 принимают значения 0, 1, ... , $m-1$. К конечнозначным логикам примыкают алгебры многозначных функций, на которые в значительной мере переносятся проблематика и методы исследования конечнозначных логик.

Примерами других М. л. являются счетнозначные и континуумзначные логики (т. е. такие m-значные логики, для к-рых мощность m является соответственно счетной или континуальной). Эти модели играют важную роль в математич. логике, теории моделей и в математич. анализе. Для счетнозначных логик установлена гиперконтинуальность множеств предполных (а значит и множества всех) замкнутых классов и найдено решение задачи о полноте систем, содержащих множество $P^1_{\aleph_0}$ всех одноместных функций [14]. В отличие от конечнозначных логик P_m при $m>2$, где имеется только один предполный класс, содержащий все одноместные функции, в $P_{\aleph_0}$ существуют два таких предполных класса и указанная система функций является полной тогда и только тогда, когда она не содержится в этих классах. Если обобщить понятие существенной функции и считать, что таковой является всякая функция, образующая полную систему вместе с $P^1_{\aleph_0}$, то так же, как и в конечнозначных логиках, возникает задача описания всех тех подмножеств множества $P^1_{\aleph_0}$, к-рые содержат все множество $S_{\aleph_0}$ подстановок из $P_{\aleph_0}$ и вместе с любой существенной функцией образуют полную систему. Показано, что пересечение всех таких замкнутых подмножеств само обладает указанным свойством. Это пересечение, к-рое отлично от $S_{\aleph_0}$, эффективно описано в теоретико-множественных терминах.

В счетнозначных и континуумзначных логиках особую роль играют различные их подклассы. Таковыми являются в первом случае предельные логики, а во втором — М. л. непрерывных функций. Предельные логики представляют собой счетные замкнутые классы функций М. л. $P_{\aleph_0}$, содержащие гомоморфные прообразы всех конечнозначных логик. Существует континуум различных и даже конечно порожденных попарно неизоморфных предельных логик. Установлено, что в общем случае для предельных логик задача о полноте не эквивалентна отысканию всех предполных классов. Мощность множества предполных классов в предельных логиках может быть равной любому натуральному числу, а также быть счетной или континуальной (см. [15]). Для М. л. непрерывных функций показана полнота всех двуместных функций и получены нек-рые аналоги теоремы о полноте систем, состоящих из всех одноместных и многоместной функций. Установлено также, что всякую непрерывную функцию можно представить в виде суммы специально выбранных непрерывных одноместных функций. Показано, что для k раз дифференцируемых функций от n

переменных, вообще говоря, невозможно представление их с помощью суперпозиций функций той же гладкости, но зависящих от меньшего числа переменных (см. [16]).

К М. л. могут быть отнесены также и такие алгебры функций, в к-рых запас операций несколько отличается от описанного выше. Таковы алгебры неоднородных конечнозначных функций (их аргументы принимают конечное число значений из своих областей), рекурсивных и частично-рекурсивных функций, алгебры автоматных отображений и ряд других.

Лит.: [1] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста, М., 1966; [2] Лупанов О. Б., «Проблемы кибернетики», 1965, в. 14, с. 31—110; [3] Журавлев Ю. И., «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8, с. 5—44; [4] Линдон Р. К., «Кибернетич. сб.», 1960, в. 1, с. 234—45; [5] Мурский В. Л., «Докл. АН СССР», 1965, т. 163, № 4, с. 815—18; [6] Янов Ю. И., Мучник А. А., «Докл. АН СССР», 1959, т. 127, № 1, с. 44—46; [7] Rosenberg J., Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken, Praha, 1970; [8] Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В., «Докл. АН СССР», 1969, т. 186, № 3, с. 509—12; [9] Яблонский С. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 51, с. 5—142; [10] Саломаа А., «Кибернетич. сб.», 1964, в. 8, с. 7—32; [11] Кудрявцев В. Б., «Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik» (EIK), 1973, Bd 9, Hft 1/2, S. 81—105; [12] Алексеев В. Б., «Дискретный анализ», 1971, № 19, с. 3—10; [13] Мальцев А. И., «Алгебра и логика», 1966, т. 5, в. 2, с. 5—24; [14] Гаврилов Г. П., «Проблемы кибернетики», 1965, в. 15, с. 5—64; [15] Деметрович Я., «Проблемы кибернетики», 1975, в. 30, с. 5—42; [16] Витушкин А. Г., в кн.: Тр. Международного конгресса математиков, М., 1968, с. 322—28.

В. Б. Кудрявцев.

МНОГОЗНАЧНАЯ ФУНКЦИЯ — функция f, к-рая ставит в соответствие каждому элементу $x \in X$ нек-рое подмножество $f(x)$ множества Y: $f(x) \subset Y$, причем существует хотя бы одно $y \in Y$, состоящее не менее чем из двух элементов. См. также *Многозначное отображение.*

Л. Д. Кудрявцев.

МНОГОЗНАЧНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, точечно-множественное отображение,— отображение $\Gamma: X \to Y$, ставящее в соответствие каждому элементу x множества X нек-рое подмножество $\Gamma(x)$ множества Y. Если для каждого $x \in X$ множество $\Gamma(x)$ состоит из одного элемента, то отображение Γ наз. однозначным. М. о. Γ можно трактовать как однозначное отображение X в 2^Y, т. е. во множество всех подмножеств множества Y.

Для двух М. о. $\Gamma_i: X \to Y$, $i=1, 2$, естественным образом определяется включение $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, если $\Gamma_1(x) \subset \Gamma_2(x)$ для всех $x \in X$. Для любого семейства М. о. $\Gamma_\alpha: X \to Y$, $\alpha \in A$, определяется объединение и пересечение: $\Gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$, если $\Gamma(x) = \bigcup_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha(x)$ для всех $x \in X$, и $\Gamma = \bigcap_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$, если $\Gamma(x) = \bigcap_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha(x)$ для всех $x \in X$. Для любого семейства М. о. $\Gamma_\alpha: X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, М. о. $\Gamma = \prod_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha : X \to \Gamma_\alpha \in \in A Y_\alpha$ наз. декартовым произведением М. о. Γ_α, если $\Gamma(x) = \prod_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha(x)$. Сечением М. о. Γ наз. такое однозначное отображение $f: X \to Y$, что $f(x) \in \Gamma(x)$ для всех $x \in X$. Графиком М. о. Γ наз. множество $G(\Gamma) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \Gamma(x)\}$.

М. о. Γ топологич. пространства X в топологич. пространство Y наз. полунепрерывным сверху, если для всякого открытого множества $U \subset Y$ множество $\Gamma^+(u) = \{x \in X : \Gamma(x) \subset U,\ \Gamma(x) \neq \varnothing\}$ открыто в X, или эквивалентно: для любой точки $x \in X$ и любой окрестности U множества $\Gamma(x)$ найдется окрестность Ox точки x такая, что $\Gamma(Ox) \subset U$, если $\Gamma(Ox) = \bigcup \{\Gamma(y);\ y \in Ox\}$. М. о. Γ топологич. пространства X в топологич. пространство Y наз. полунепрерывным снизу, если для любого открытого множества $U \subset Y$ множество $\Gamma^-(U) = \{x \in X : \Gamma(x) \cap U \neq \varnothing\}$ открыто в X. Если для М. о. Γ выполнены оба свойства одновременно, то оно наз. непрерывным М. о.

Пусть Y — топологич. векторное пространство. М. о.

$\Gamma: X \to Y$ наз. выпукло компактнозначным, если $\Gamma(x)$ является выпуклым компактом для всех $x \in X$. Для конечного множества М. о. $\Gamma_i: X \to Y$, $i \in I$, определяется алгебраич. сумма $\Gamma = \sum_{i \in I} \Gamma_i$ с помощью равенства: $\Gamma(x) = \sum_{i \in I} \Gamma_i(x)$. Пересечение любого (конечного) семейства полунепрерывных сверху (непрерывных) М. о. является полунепрерывным сверху (непрерывным) отображением. Декартово произведение конечного семейства полунепрерывных сверху М. о. является полунепрерывным сверху отображением. Алгебраич. сумма конечного семейства полунепрерывных сверху (выпукло компактнозначных) отображений является полунепрерывным сверху (выпукло компактнозначным). Пересечение и декартово произведение любого семейства выпукло компактнозначных отображений является выпукло компактнозначным. Пусть X — паракомпактное пространство и Y — метрич. линейное локально выпуклое пространство.

Пусть $\Gamma: X \to Y$ — М. о., являющееся полунепрерывным сверху и таким, что множество $\Gamma(x)$ замкнуто в Y для каждого $x \in X$. Тогда М. о. Γ допускает непрерывное сечение. Пусть $(X, \mathfrak{A})$ и $(Y, \mathfrak{B})$ — пространства с заданными на них σ-алгебрами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$; М. о. $\Gamma: (X, \mathfrak{A}) \to (Y, \mathfrak{B})$ наз. измеримым, если график $G(\Gamma)$ принадлежит наименьшей σ-алгебре $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ произведения $X \times Y$, содержащей все множества вида $A \times B$, если $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$. Если Γ — измеримое М. о. пространства $(X, \mathfrak{A})$ в полное сепарабельное метрич. пространство $(Y, \mathfrak{B})$, причем $\mathfrak{B}$ — борелевская σ-алгебра Y, то существует измеримое сечение f М. о. Γ.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 1—2, М., 1966—69.
Б. А. Ефимов.

МНОГОЗНАЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ связной топологической группы G — обычное представление π такой связной топологич. группы G', что группа G изоморфна (как топологич. группа) факторгруппе группы G' по ее дискретному нормальному делителю N, к-рый не содержится в ядре представления π. М. п. наз. n-значным, если $\pi(N)$ содержит в точности n элементов. Отождествлением элементов группы G с элементами группы G'/N получается, что для множеств $\pi(g)$, $g \in G = G'/N$, справедливы соотношения $\pi(e) \ni 1$, $\pi(g_1, g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2)$, $g_1, g_2 \in G$. Существование М. п. связной локально линейно связной топологич. группы G возможно лишь у неодносвязных групп. Важнейший пример М. п.— *спинорное представление* комплексной ортогональной группы $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$, $n \geqslant 2$; это представление является двузначным представлением группы $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ и определяется точным представлением универсальной накрывающей группы для $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976.
А. И. Штерн.

МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ ФУНКЦИИ — функции, совокупность к-рых вместе с соответствующими операциями над ними образует *многозначную логику*. М. л. ф., как и их аргументы, принимают в качестве значений элементы одного и того же множества, состоящего из констант многозначной логики.
В. Б. Кудрявцев.

МНОГОКРАТНАЯ РЕКУРСИЯ — вид рекурсии, в к-рой участвуют сразу несколько переменных. Наборы значений этих переменных упорядочиваются лексикографически. Под это определение подходят многочисленные конкретные рекурсивные описания. Если в таком описании искомая функция не подставляется сама в себя, то оно сводится к примитивной рекурсии. В общем случае М. р. выводит за рамки примитивно рекурсивных функций, т. к. посредством двукратной рекурсии (ведущейся по двум переменным) можно построить функцию, универсальную для примитивно рекурсивных

функций (аналогично, для k-рекурсивных функций существует $(k+1)$-кратная универсальная функция). Всевозможные разновидности k-кратной рекурсии можно свести к следующей нормальной форме:

$$\varphi(n_1, \ldots, n_k) = 0, \text{ если } n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k = 0,$$
$$\varphi(n_1+1, \ldots, n_k+1) = \beta(n_1, \ldots, n_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_k),$$

где

$$\varphi_i = \varphi((n_1+1, \ldots, n_{i-1}+1, n_i,$$
$$\gamma_1^{(i)}(n_1, \ldots, n_k, \varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k)),$$
$$\ldots, \gamma_{k-1}^{(i)}(n_1, \ldots, n_k, \varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k))).$$

Лит.: [1] Петер Р., Рекурсивные функции, пер. с нем., М., 1954.

Н. В. Белякин.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА — математическая модель принятия оптимального решения одновременно по нескольким критериям. Эти критерии могут отражать оценки различных качеств объекта (или процесса), по поводу к-рых принимается решение, или оценки одной и той же его характеристики, но с различных точек зрения. Теория М. з. относится к числу математич. методов *исследования операций*.

Формально М. з. задается множеством X «допустимых решений» и набором целевых функций $f_1, \ldots, f_n$ на X, принимающих действительные значения. Сущность М. з. состоит в нахождении оптимального ее решения, т. е. такого $x \in X$, к-рое в том или ином смысле максимизирует значения всех функций f_i, $i=1, \ldots, n$. Существование решения, буквально максимизирующего все целевые функции, является редким исключением. Поэтому в теории М. з. понятие оптимальности получает различные и притом нетривиальные истолкования. Содержание теории М. з. состоит в выработке таких концепций оптимальности, доказательстве их реализуемости (т. е. существования оптимальных в соответствующем смысле решений) и нахождении этих реализаций (т. е. в фактич. решении задачи).

Наиболее прямолинейным подходом к решению М. з. является сведение ее к обычной («однокритериальной») задаче математич. программирования путем замены системы целевых функций $f_1, \ldots, f_n$ на одну «сводную» функцию $F(f_1, \ldots, f_n)$. В ее роли могут выступать «взвешенные суммы» $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, $\lambda_i \geqslant 0$, «взвешенные максимумы» $\max_i \lambda_i f_i$ и др. «свертки» исходных целевых функций. Такой подход концептуально и технически представляется самым удобным. Основным его недостатком является трудно выполнимое требование содержательной сопоставимости значений различных целевых функций, а также неопределенность (и нередко произвольность) в выборе функции F и, в частности, «весов» λ_i. Для их установления нередко рекомендуется прибегать к экспертным оценкам.

Частный случай описанного подхода состоит в выделении «решающего критерия», т. е. в том, чтобы все веса λ_i, за исключением нек-рого λ_{i_0}, полагать равными нулю. Тогда М. з. перейдет в обычную задачу математич. программирования, а множество ее оптимальных решений можно рассматривать как множество допустимых решений новой М. з. с целевыми функциями f_i, $i \neq i_0$.

В качестве решений М. з. можно рассматривать решения, оптимальные по Парето, т. е. решения, не поддающиеся улучшению по какому-либо критерию, иначе как за счет ухудшения по другим критериям (иначе говоря, такие $x \in X$, что для любого $y \in X$ из $f_i(x) < f_i(y)$ следует $f_j(y) < f_j(x)$ при нек-ром j). Недостатком этого подхода является множественность оптимальных по Парето решений. Этот недостаток преодолевается предложенным Дж. Нэшем (J. Nash) методом «арбитражных решений», существенно ограничивающим число выбираемых решений среди оптимальных по Парето. Он состоит в установлении на основании

содержательных соображений нек-рых минимальных допустимых значений f_i^0 и в последующем нахождении допустимого x, максимизирующего $\prod_{i=1}^{n}(f_i(x)-f_i^0)$ (см. также *Арбитражная схема*).

М. з. можно рассматривать как игру (см. *Игр теория*) и подходить к ее решению на основе различных теоретико-игровых методов. Напр., если допустимое решение x выбирается с целью максимизировать одну из целевых функций $f_1, \ldots, f_n$, но какую именно — для принимающего решение субъекта неизвестно, то можно воспользоваться взвешенной суммой этих функций, взяв в качестве весов компоненты смешанной стратегии «природы». Возможны трактовки М. з. как *бескоалиционной игры*, в том числе с позиций кооперативной теории (см. *Кооперативная игра*), и применения связанных с этим принципов оптимальности.

Лит.: [1] Льюс Р. Д., Райффа Х., Игры и решения, пер. с англ., М., 1961.

Н. Н. Воробьев.

МНОГОЛИСТНАЯ ОБЛАСТЬ — область S *римановой поверхности* R, рассматриваемой как накрывающая поверхность над плоскостью комплексного переменного $\mathbb{C}$, такая, что над каждой точкой ее проекции $D\subset\mathbb{C}$ расположены не менее двух точек S; *ветвления точка* R порядка $k-1$ считается при этом за k точек. Напр., аналитич. функция $w=z^2$ отображает взаимно однозначно круг $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ на двулистную область (двулистный круг) $S=\{w\in R:|w|<1\}$ римановой поверхности R этой функции; всюду, кроме начала координат, это отображение конформно.

Для аналитич. функций многих комплексных переменных также возникают многолистные *римановы области* над комплексным пространством $\mathbb{C}^n$.

Е. Д. Соломенцев.

МНОГОЛИСТНАЯ ФУНКЦИЯ — понятие, естественным образом обобщающее понятие *однолистной функции*. Функция $f(z)$, регулярная или мероморфная в области D комплексной плоскости z, наз. p-л и с т н о й в D ($p=1, 2, \ldots$), если она принимает в этой области каждое свое значение не более p раз, т. е. если число корней уравнения $f(z)=w$ в области D при любом w не превосходит p. Геометрически это означает, что над каждой точкой плоскости w лежит не более p точек *римановой поверхности*, на к-рую функция $w=f(z)$ отображает область D. При $p=1$ функция $f(z)$ является однолистной в области D.

Наряду с этим простейшим классом p-листных функций большую роль в теории М. ф. играют функции, p-листные в нек-ром обобщенном смысле, «p-листные в среднем». Пусть функция $f(z)$ регулярна или мероморфна в области D плоскости z, $n(w)$ — число корней уравнения $f(z)=w$ в D и p — положительное число. Функция $f(z)$ наз. p-л и с т н о й в с р е д н е м п о о к р у ж н о с т и в D, если для всех $R>0$ выполняется условие:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n\left(Re^{i\varphi}\right)d\varphi\leqslant p.$$

Геометрически это означает, что линейная мера дуг, принадлежащих римановой поверхности, на к-рую функция $w=f(z)$ отображает область D, и проектирующихся в любую окружность $|w|=R$, не превосходит p длин таких окружностей. Функция $f(z)$ наз. p-л и с т н о й в с р е д н е м п о п л о щ а д и в D, если

$$\int_0^R\left(\int_0^{2\pi} n\left(\rho e^{i\varphi}\right)d\varphi\right)\rho\,d\rho\leqslant p\pi R^2$$

для всех $R>0$. Геометрически это означает, что площадь проектирующейся в любой круг $|w|<R$ части римановой поверхности, на к-рую функция $w=f(z)$ отображает область D, не превосходит p площадей таких кругов. Из этих определений следует, что функция, p-листная в нек-рой области, является в ней и p-листной в сред-

нем по окружности, а функция, p-листная в среднем по окружности, является p-листной в среднем по площади. Функция, p-листная в среднем, может оказаться бесконечнолистной.

М. ф., как и однолистные, изучаются в различных направлениях: с точки зрения характеристики искажения области при ее отображениях этими функциями, оценки коэффициентов рядов, представляющих эти функции, и т. д. Они обладают многими экстремальными свойствами, аналогичными экстремальным свойствам однолистных функций. Напр., имеются следующие обобщения на случай p-листных функций двух классич. результатов теории однолистных функций — *площадей принципа* и оценки второго коэффициента (см. *Бибербаха гипотеза*).

Если функция

$$F(\zeta)=\sum_{m=1}^{p}\alpha_m\zeta^m+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\zeta^n},\ \alpha_p\neq 0,\ |\zeta|>1, \quad (1)$$

p-листна и регулярна в области $|\zeta|>1$, за исключением полюса в точке $\zeta=\infty$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|^2\leqslant\sum_{m=1}^{p}m|\alpha_m|^2. \quad (2)$$

Если функция

$$f(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\dots \quad (3)$$

регулярна и p-листна в круге $|z|<1$, то

$$|a_{p+1}|\leqslant 2p. \quad (4)$$

Неравенства (2) и (4) не могут быть улучшены. Эти два результата относятся к наиболее ранним основным результатам теории p-листных функций. Неравенство (2) доказано также для функций вида (1), p-листных в среднем по площади в $|\zeta|>1$, а неравенство (4) — для функций вида (3), p-листных в среднем по площади в $|z|<1$.

Значительно продвинуть исследование класса p-листных функций позволило рассмотрение его как подкласса функций, p-листных в среднем. Получены для p-листных функций и точные аналоги основных теорем искажения и покрытия, известных для однолистных функций (см. *Искажения теоремы*, *Покрытия теоремы*), именно: для функций $f(z)$ вида (3), p-листных в среднем по окружности в круге $|z|<1$, верны точные оценки:

$$\frac{|z|^p}{(1+|z|)^{2p}}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|^p}{(1-|z|)^{2p}},$$

$$|f'(z)|<p|z|^{p-1}\cdot\frac{1+|z|}{(1-|z|)^{2p+1}},\quad |z|<1;$$

функция $f(z)$ принимает в $|z|<1$ каждое значение w с $|w|<1/4^p$ ровно p раз (прямой аналог теоремы покрытия Кёбе). Этим последним свойством обладают и функции $f(z)$ вида (3), p-листные в среднем по площади в $|z|<1$. Для функций, p-листных в среднем по окружности, получен ряд неулучшаемых результатов, характеризующих рост их коэффициентов. Так, для функции вида

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, \quad (5)$$

p-листной в среднем по окружности в круге $|z|<1$, $p>0$, существует, и притом конечный, предел

$$\alpha=\lim_{r\to 1-0}(1-r)^{2p}\max_{|z|=r}|f(z)|$$

и

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|/n^{2p-1}=\alpha/\Gamma(2p)$$

при $p>1/4$. Всякий раз, когда получается оценка для α, отсюда следует и соответствующая точная оценка

асимптотич. роста коэффициентов. В частности, если $f(z)$ имеет вид (3), то последнее равенство принимает вид

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{n^{2p-1}}=\frac{\alpha}{(2p-1)!},$$

где $\alpha<1$, за исключением того случая, когда $f(z)=z^p(1-ze^{i\theta})^{-2p}$ (θ — вещественно). Далее, для функций вида (3), p-листных в среднем по окружности в круге $|z|<1$, получена точная оценка:

$$|a_{p+2}|\leqslant p\,(2p+1),$$

а для подкласса p-листных функций такого вида была указана точная оценка и следующего коэффициента:

$$|a_{p+3}|\leqslant\frac{2}{3}\,p\,(p+1)\,(2p+1).$$

Два последних неравенства являются для М. ф. аналогами оценок $|a_3|\leqslant 3$ и $|a_4|\leqslant 4$, известных для однолистных функций (см. *Бибербаха гипотеза*). Так как экстремальными функциями приведенных выше оценок оказываются p-листные функции, то все эти результаты не могут быть улучшены и в классе p-листных функций.

Для функций вида (5), p-листных в среднем по площади в круге $|z|<1$, известны следующие оценки их коэффициентов для всех $n\geqslant 1$:

$$|a_n|<A(p)\,\mu_p n^{2p-1}\quad(p>1/4),\tag{6}$$

$$|a_n|<A\,|a_0|\,n^{-1/2}\log(n+1)\quad(p=1/4),\tag{7}$$

$$|a_n|<A(p)\,|a_0|\left[\frac{\log(n+1)}{n}\right]^{1/2}\quad(0<p<1/4),\tag{8}$$

$$||a_{n+1}|-|a_n||<A(p)\,\mu_p n^{2p-2}\quad(p\geqslant 1)\tag{9}$$

и оценка

$$\max_{|z|=r}|f(z)|<A(p)\,\mu_p(1-r)^{-2p}\quad(0<r<1);\tag{10}$$

здесь $A(p)$ зависит только от p, $\mu_p=\max\limits_{0\leqslant\nu\leqslant p}|a_\nu|$. Порядок величин в (6), (9) и (10) не может быть улучшен.

Имеется также следующий аналог для М. ф. теоремы, известной для однолистных мероморфных функций: в классе всех функций

$$F(\zeta)=\zeta^p\left(1+\frac{a_1}{\zeta}+\dots\right),$$

p-листных и регулярных в области $|\zeta|>1$, за исключением полюса в $\zeta=\infty$, имеющих в фиксированной точке $\zeta_0\neq\infty$ этой области разложение

$$F(\zeta)=F(\zeta_0)+\frac{F^{(p)}(\zeta_0)}{p!}(\zeta-\zeta_0)^p+\dots,$$

областью значений функционала

$$w=\log[F^{(p)}(\zeta_0)/p!]$$

является круг

$$|w|\leqslant -p\log\left(1-\frac{1}{|\zeta_0|^2}\right).$$

Кроме указанных выше основных классов М. ф., значительное место в исследованиях занимают более специальные классы М. ф., напр. функции типично вещественные порядка p, p-листно звездные, p-листно выпуклые, p-листно близкие к выпуклым, ограниченные p-листные и др., являющиеся обобщениями соответственно *типично вещественных функций*, *звездообразных функций*, *выпуклых функций*, близких к выпуклым, ограниченных однолистных и других функций.

Функция

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n\tag{11}$$

наз. типично вещественной порядка

p в круге $|z|<1$, если она регулярна в нем, имеет вещественные коэффициенты a_n и обладает свойством: существует такое число $\delta=\delta(f)$, $0<\delta<1$, что для всякого r из промежутка $1-\delta<r<1$ мнимая часть $\operatorname{Im}\{f(z)\}$ меняет свой знак на окружности $|z|=r$ точно $2p$ раз. При этом $f(z)$ может быть более чем p-листной в $|z|<1$. Для коэффициентов такой функции имеет место точная оценка:

$$|a_n| \leqslant \sum_{k=1}^{p} \frac{2k(n+p)!}{(n^2-k^2)\,(p-k)!\,(p+k)!\,(n-p-1)!}\,|a_k|, \quad (12)$$
$$n > p.$$

Одним из аналогов гипотезы Бибербаха для функций вида (11), регулярных и p-листных в круге $|z|<1$, является гипотеза Гудмена о справедливости для их коэффициентов a_n неравенства (12). В частности, эта гипотеза Гудмена верна для p-листных типично вещественных функций порядка p в $|z|<1$. Доказано, что она верна также для одного из классов p-листных функций, являющегося обобщением класса однолистных функций, выпуклых в направлении мнимой оси. Другим аналогом гипотезы Бибербаха для p-листных функций является следующая гипотеза Гудмена. Пусть функция

$$f(z) = z^2 + \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n z^n, \quad q \geqslant 1,$$

регулярна и p-листна, $p=1, 2, \ldots$, в круге $|z|<1$, и пусть она имеет t нулей $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ в области $0<|z|<1$, $t \leqslant p-q$. Гипотеза состоит в том, что $|a_n| \leqslant B_n$, $n>q$, где B_n — коэффициенты разложения

$$\frac{z^q}{(1-z)^{2q}}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2(p-q-t)}\frac{1}{(1-z)^{2t}}\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{t}\left(1+\frac{z}{|\alpha_j|}\right)(1+|\alpha_j|\,z) \equiv$$
$$\equiv z^q + \sum_{n=q+1}^{\infty} B_n z^n, \quad |z|<1.$$

Для типично вещественных функций порядка p в $|z|<1$ это неравенство доказано.

Классы p-листно звездных и p-листно выпуклых функций, соответственно $S(p)$ и $C(p)$, определяются следующим образом. Функция $f(z)$ принадлежит классу $S(p)$ ($p=1, 2, \ldots$), если она регулярна в круге $|z|<1$, $f(0)=0$ и если существует такое число ρ, $0<\rho<1$, что

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0,$$
$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} d\theta = 2p\pi, \qquad \theta = \arg z$$

для $\rho<|z|<1$. Функция $f(z)$ принадлежит классу $C(p)$ ($p=1, 2, \ldots$), если она регулярна в круге $|z|<1$, $f(0)=0$ и если существует такое ρ, что

$$1+\operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0,$$
$$\int_0^{2\pi}\left[1+\operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}\right]d\theta = 2p\pi, \quad \theta = \arg z$$

для $\rho<|z|<1$. Для функций этих двух классов получен ряд точных оценок.

Классы $S(p)$ и $C(p)$ оказываются подклассами более широкого класса p-листных функций — функций p-листно близких к выпуклым. Функция

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

регулярная в круге $|z|<1$, наз. p-листно близкой к выпуклой, если она удовлетворяет одному из следующих условий:

(А) существ
такие, что

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zF'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \quad (\rho < |z| < 1), \tag{13}$$

(Б) $F(z)$ регулярна на $|z|=1$ и существует функция $f(z)\in S(p)$, также регулярная на $|z|=1$, такая, что на $|z|=1$ выполняется неравенство (13). Для функций $F(z)$ этого класса найдены точные оценки снизу и сверху $|F'(z)|$ и доказана справедливость неравенства (12) — при $n=p+1$ для всех функций этого класса и при всех $n\geqslant p+1$ для его функций с вещественными коэффициентами. Точные оценки, обобщающие нек-рые результаты для ограниченных однолистных функций, получены и для ограниченных функций, p-листных в соответствующем обобщенном смысле. Так, был найден радиус p-листности в классе регулярных и ограниченных в круге функций, именно: если функция $f(z)$ регулярна и ограничена по модулю единицей в круге $|z|<1$, нормирована условиями $f(0)=0$, $f'(0)=a_1$, $0<|a_1|<1$, то радиус ρ наибольшего круга $|z|<\rho$, в к-ром она p-листна, определяется из уравнения

$$\frac{(p+1)\rho^p(1-\rho^2)}{1-\rho^{2p+2}} = |a_1|, \quad 0<\rho<1.$$

Эта теорема обобщает на случай $p>1$ теорему Ландау о радиусе однолистности функций, регулярных и ограниченных в круге $|z|<1$.

Известны различные достаточные условия для того, чтобы функция, регулярная в области, была в ней p-листной. Напр., если $f(z)$ регулярна в выпуклой области D и существуют такое вещественное θ и такое целое k, $0\leqslant k\leqslant p-1$, что

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta}\frac{d^p}{dz^p}[z^k f(z)]\right\} > 0, \quad z\in D,$$

то $f(z)$ p-листна в D.

М. ф. исследуются также и в многосвязных областях. Многие оценки здесь выражаются через функции, отображающие данную многосвязную область на канонические римановы поверхности, и через *Бергмана ядро-функцию*. Первым основным результатом, относящимся к вопросу существования конформных отображений многосвязной области на многолистные канонич. поверхности, явилась следующая теорема Грунского: пусть D — конечносвязная область плоскости z с внутренней точкой $z=\infty$ и с отличными от точек граничными компонентами и $Q_p(z)$ — любой заданный полином степени p, $p\geqslant 1$; тогда для любого заданного θ, $0\leqslant\theta<\pi$, существует единственная функция $\Phi_\theta(z)$, регулярная в области D, за исключением полюса в $z=\infty$, главная часть к-рой в $z=\infty$ (с включением в нее свободного члена) совпадает с $Q_p(z)$ и к-рая ставит в соответствие каждой граничной компоненте области D прямолинейный отрезок наклона θ к вещественной оси. Иначе говоря, функция $w=\Phi_\theta(z)$ отображает область D на полную p-листную плоскость w с параллельными разрезами наклона θ. Доказано существование конформных отображений данной конечносвязной области и на другие канонические многолистные поверхности; установлены экстремальные свойства М. ф., аналогичные нек-рым экстремальным свойствам однолистных функций. Выявлен просто характеризуемый геометрически наиболее общий класс М. ф., мероморфных в конечносвязной области, для к-рых верна теорема площадей.

Основными методами исследования М. ф. являются: *контурного интегрирования метод*, *симметризации метод*, метод *квадратичных дифференциалов*.

Вариационный метод в теории М. ф. менее эффективен, чем в теории однолистных функций.

Лит.: [1] Голузин Г. М., «Матем. сб.», 1940, т. 8, в. 2, с. 277—83; [2] Хейман В. К., Многолистные функции, пер.

с англ., М., 1960; [3] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [4] Pethe K., «Bull. Acad. Polon. Sci.», 1972, v. 20, № 3, p. 219—20; [5] Livingston A. E., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 115, № 3, p. 161—79; [6] Leach R. J., «Pacific J. Math.», 1978, v. 74, № 1, p. 133—42; [7] Krzyż J., «Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sec. A», 1958, v. 12, № 2, p. 23—28, № 3, p. 29—38; [8] Ozaki S., «Sci. Rep. Tokio Bunrika Daigaku», A, 1935, v. 2, № 40, p. 167—88; [9] Аленицын Ю.Е., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1973, т. 37, № 5, с. 1132—54; [10] Singh S. K., «Math. Student», 1962, v. 30, № 1—2, p. 79—90; [11] Goodman A. W., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1968, v. 74, № 6, p. 1035—50.

Ю. Е. Аленицын.

МНОГОМЕРНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА. вариационная задача с частными производными,— задача вариационного исчисления, в к-рой требуется определить экстремум функционала, зависящего от функций многих независимых переменных. Обычные вариационные задачи, в к-рых рассматриваются функционалы от функций одной независимой переменной, можно назвать в этом смысле одномерными вариационными задачами.

Примером двумерной вариационной задачи может служить задача, в к-рой требуется определить функцию двух независимых переменных $u(x, y)$, непрерывную вместе со своими частными производными 1-го порядка, доставляющую экстремум функционалу

$$I(u) = \int\int_D F(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy \qquad (1)$$

при граничном условии

$$u(x, y)\,|_l = u_0(x, y), \qquad (2)$$

где l — замкнутый контур, ограничивающий область D $u_0(x, y)$ — заданная функция, $F(x, y, u, u_x, u_y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция по совокупности своих аргументов. Пусть $u(x, y)$ есть решение задачи (1), (2). Подстановка функций сравнения $u(x, y) + \alpha\eta(x, y)$, где $\eta(x, y)|_l = 0$, α — числовой параметр, в функционал (1), дифференцирование по α и приравнивание $\alpha = 0$ позволяет получить следующее выражение для первой вариации функционала

$$\delta I = \int\int_D (F_u \eta + F_{u_x}\eta_x + F_{u_y}\eta_y)\, dx\, dy. \qquad (3)$$

Если $u(x, y)$ имеет непрерывные производные 2-го порядка, то легко показать, что необходимым условием равенства нулю первой вариации δI является выполнение условия

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) наз. уравнением Эйлера — Остроградского (иногда — уравнением Остроградского). Этому уравнению должна удовлетворять функция $u(x, y)$, доставляющая экстремум функционалу (1) при граничных условиях (2). Уравнение Эйлера — Остроградского является аналогом уравнения Эйлера для одномерных вариационных задач. В развернутом виде (4) представляет собой уравнение с частными производными 2-го порядка.

В случае тройного интеграла и функции $u(x, y, z)$, зависящей от трех независимых переменных, уравнение Эйлера — Остроградского принимает вид:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} - \frac{\partial}{\partial z} F_{u_z} = 0.$$

Следующее условие является аналогом *Лежандра условия*. Для того чтобы функция $u(x, y)$ доставляла хотя бы слабый экстремум функционалу (1), необходимо, чтобы в каждой внутренней точке области D выполнялось условие

$$F_{u_x u_x} F_{u_y u_y} - F^2_{u_x u_y} \geqslant 0.$$

Для минимума необходимо $F_{u_x u_x} \geqslant 0$, а для максимума $F_{u_x u_x} \leqslant 0$.

Рассматриваются также разрывные М. в. з. (см. [4]).

Лит.: [1] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., 2 изд., т. 2, М.— Л., 1951; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958; [3] Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955; [4] Керимов М. К., «Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН Груз. ССР», 1951, т. 18, с. 209—19.

И. Б. Вапнярский.

МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — геометрия пространств размерности, большей трех; термин применяется к тем пространствам, геометрия к-рых была первоначально развита для случая трех измерений и только потом обобщена на число измерений $n>3$, прежде всего евклидово пространство, а также пространства Лобачевского, Римана, проективное, аффинное, псевдоевклидово. (Общие же римановы и др. пространства были определены сразу для n измерений.) В настоящее время разделение трехмерной и многомерной геометрий имеет главным образом историческое и педагогич. значение, т. к. задачи ставятся и решаются для любого числа измерений, когда и поскольку это осмысленно. Построение геометрии указанных пространств для n измерений проводится по аналогии со случаем трех измерений. При этом можно исходить из обобщения непосредственно геометрич. оснований трехмерной геометрии, из той или иной системы ее аксиом или из обобщения аналитич. геометрии, перенося ее основные выводы со случая трех координат на произвольное n. Именно так и начиналось построение n-мерной евклидовой геометрии.

Исторически представление о более чем трехмерном пространстве зарождалось постепенно, первоначально на почве геометрич. представления степеней: a^2 — «квадрат», a^3 — «куб», но a^4 и т. д. уже не имеет наглядного представления, и говорили a^4 — «биквадрат», a^5 — «кубо-квадрат» и т. д. (еще у Диофанта в 3 в. и далее у ряда средневековых авторов). Мысль о многомерном пространстве выражал И. Кант (I. Kant, 1746), а о присоединении к пространству времени в качестве 4-й координаты писал Ж. Д'Аламбер (J. D'Alembert, 1764). Построение же n-мерной геометрии было осуществлено А. Кэли (A. Cayley, 1843), Г. Грассманом (H. Grassmann, 1844) и Л. Шлефли (L. Schläfli, 1852). Первоначальные сомнения и мистика, связанные со смешением этих обобщений с физич. пространством, были преодолены, и n-мерное пространство как плодотворное формально-математич. понятие скоро полностью укрепилось в математике.

Евклидово пространство произвольного числа измерений $n\geqslant 3$ (не исключая случая бесконечномерного) проще всего определить как такое, в к-ром выделены подмножества — прямые и плоскости, имеются обычные отношения: принадлежности, порядка, конгруэнтности (или определены расстояния, или движения) и выполняются все обычные аксиомы, кроме следующей: две плоскости, имеющие общую точку, имеют по крайней мере еще одну. Если это выполнено, то пространство трехмерно, если же не выполнено, так что есть две плоскости с единственной общей точкой, то пространство, как минимум, четырехмерно.

Понятие плоскости обобщается следующим образом: плоскостью наз. такое множество точек, к-рое вместе с любыми двумя своими точками содержит и проходящую через них прямую. В этом смысле все пространство тоже является плоскостью. Пересечение всех плоскостей, содержащих данное множество точек M, будет плоскостью, «натянутой на M» (аффинной оболочкой M). Если плоскость натягивается на $m+1$ точку, но не натягивается на меньшее их число, то она наз. m-мерной, или, короче, m-плоскостью.

Точка есть 0-плоскость, прямая — 1-плоскость, обычная плоскость — 2-плоскость, трехмерное пространство — 3-плоскость. Пространство наз. n-мерным, если оно является n-плоскостью. То есть, для определения n-мерного евклидова пространства E_n при любом данном $n \geqslant 3$ достаточно добавить аксиому: пространство есть n-плоскость. В нем есть m-плоскости с $0 \leqslant m \leqslant n-1$. Каждая m-плоскость с $m \geqslant 2$ является m-мерным евклидовым пространством E_m. Так как 4 точки всегда содержатся в 3-плоскости, то и любые две прямые содержатся в 3-плоскости, т. е. в E_3.

В E_n через любую точку можно провести n, и не более, взаимно перпендикулярных прямых и ввести соответственно прямоугольные координаты $x_1, \ldots, x_n$; в них длина любого отрезка XY выражается формулой

$$XY = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}. \qquad (*)$$

Формулу (*) можно положить в основу координатного определения E_n, равносильного предыдущему. Именно: E_n есть такое множество, в к-ром введены координаты $x_1, \ldots, x_n$ (принимающие все возможные значения) и каждой паре точек $X(x_1, \ldots, x_n)$, $Y(y_1, \ldots, y_n)$ сопоставляется число — «расстояние» формулой (*); при этом к геометрии E_n относятся те и только те определения и утверждения, к-рые могут быть формулированы через отношения расстояний. Напр., отрезок AB есть множество всех точек X, для к-рых $AX + XB = AB$, а прямая AB — всех тех X, для к-рых $\pm AX \pm XB = AB$.

Векторное исчисление строится в E_n так же, как в E_3 (исходя из геометрических или координатных определений); разница лишь в том, что в E_n вектор имеет n составляющих (соответственно n векторов могут быть независимыми). Напр., скалярное произведение:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\alpha = \sum a_i b_i.$$

Только векторное произведение при $n > 3$ не может быть определено, т. к. 2-плоскость имеет перпендикуляры разных направлений (проведенные из одной точки они заполняют $(n-2)$-плоскость). Вместо векторного произведения пользуются понятием бивектора. Сочетание непосредственно геометрических, координатных и векторных методов дает наиболее полный арсенал средств развития геометрии E_n. Геометрич. подход позволяет сразу перенести в E_n планиметрию и стереометрию, т. е. геометрию на 2- и 3-плоскостях, и далее построить стереометрию самого E_n, к-рая естественно обобщает стереометрию E_3: теорема о перпендикулярах, параллельных плоскостях и др. Напр., прямая, перпендикулярная m прямым в m-плоскости, перпендикулярна ко всякой прямой в ней. Многие определения и доказательства даются для E_n индукцией по n. Напр., n-мерный многогранник, или n-многогранник, есть тело (замкнутая ограниченная область в E_n), граница к-рого состоит из конечного числа $(n-1)$-многогранников. Простейшие многогранники: призма заполняется равными параллельными отрезками, проведенными из всех точек $(n-1)$-многогранника, пирамида — отрезками, проведенными из одной точки во все точки $(n-1)$-многогранника; простейшие из них: n-куб — прямая призма, грани к-рой суть $(n-1)$-кубы (2-кубы — квадрат); n-симплекс с $(n-1)$-симплексом в основании (2-симплекс — треугольник). Объем определяется так же, как в E_3, соответственно в E_n имеется n объемов: 1-объем — длина, 2-объем — площадь и т. д. У призмы n-объем $V = Sh$, у пирамиды $V = \frac{1}{n} Sh$, где S есть $(n-1)$-объем основания, h — высота. Обширную и развитую область геометрии E_n представляет теория выпуклых тел.

Можно различать три рода фактов М. г.: 1) те, к-рые являются прямым обобщением фактов из E_3 (напр., только что приведенные теоремы об объемах); 2) те,

к-рым соответствуют аналогичные факты для разных размерностей $m \leqslant n$ (напр., выпуклое тело с центром симметрии однозначно определяется m-объемами своих m-мерных проекций при любом данном $m \geqslant 1$ и $m < n$); 3) те, в к-рых обнаруживаются существенные различия в разных E_n (напр., число правильных многогранников в $E_3 = 5$, в $E_4 = 7$, в E_n при $n \geqslant 5$ их всего 3: симплекс, куб и двойственный кубу аналог октаэдра; другой пример: выпуклый многогранный (не трехгранный) угол в E_3 изгибаем, в E_n при $n > 3$ всегда неизгибаем; существенно различаются теории поверхностей в E_3 и в E_n с $n > 3$).

Совершенно аналогично E_n определяются пространство Лобачевского Λ_n и аффинное пространство A_n. В пространстве Λ_n выполняются все те же аксиомы, что в E_n, с заменой аксиомы параллельности на противоположную, а в A_n — все аксиомы E_n за вычетом аксиом конгруэнтности, вместе с чем исключается и само понятие конгруэнтности. Аналогично, изменением аксиом сочетания можно определить n-мерное проективное пространство P_n. Другой способ определения всех этих пространств состоит в том, что в них вводятся координаты, задается группа их преобразований и геометрическими считаются те и только те соотношения, к-рые инвариантны относительно этой группы. В случае E_n — это группа подобий (сочетания ортогональных преобразований, переносов и умножений всех координат на число $\neq 0$); для A_n — это группа всех линейных (неоднородных) преобразований; см. также *Проективная геометрия*, *Лобачевского геометрия*.

Псевдоевклидовы пространства можно определить в координатах: E_n^{n-m} есть множество, в к-ром введены координаты $x_1, \ldots, x_n$ и «интервалы» между точками X, Y:

$$(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_m - y_m)^2 - \\ - (x_{m-1} - y_{m-1})^2 - \ldots - (x_n - y_n)^2;$$

геометрическими считаются определения и утверждения, формулируемые через отношения интервалов; иначе — те, к-рые инвариантны относительно группы преобразований, сохраняющих отношения интервалов. В частной теории относительности пространство-время определяется как E_4^1: в нем интервалы

$$c^2 (t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2,$$

где t — время, x, y, z — пространственные координаты в данной системе отсчета и $c = \text{const}$ — скорость света.

А. Д. Александров.

МНОГОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей на σ-алгебре борелевских множеств s-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^s$. О М. р. обычно говорят как о распределении многомерной случайной величины или случайного вектора $X = (X_1, \ldots, X_s)$, понимая под этим совместное распределение действительных случайных величин $X_1(\omega), \ldots, X_s(\omega)$, заданных на одном и том же пространстве элементарных событий Ω (можно рассматривать $X_1, \ldots, X_s$ как координатные величины в пространстве $\Omega = \mathbb{R}^s$). М. р. однозначно определяется функцией распределения — функцией

$$F(x_1, \ldots, x_s) = \mathsf{P}\{X_1 < x_1, \ldots, X_s < x_s\}$$

действительных переменных $x_1, \ldots, x_s$.

Так же, как и в одномерном случае, наиболее распространенными М. р. являются дискретные и абсолютно непрерывные распределения. В дискретном случае М. р. сосредоточено на конечном или счетном множестве точек $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_1})$ пространства $\mathbb{R}^s$, так что

$$\mathsf{P}\{X_1 = x_{i_1}, \ldots, X_s = x_{i_s}\} = p_{i_1 \ldots i_s} \geqslant 0,$$

$$\sum_{i_1 \ldots i_s} p_{i_1 \ldots i_s} = 1$$

(см., напр., *Полиномиальное распределение*). В абсолютно непрерывном случае почти всюду (по мере Лебега) в $\mathbb{R}^s$

$$\frac{\partial^s F(x_1, \ldots, x_s)}{\partial x_1 \ldots \partial x_s} = p(x_1, \ldots, x_s),$$

где $p(x_1, \ldots, x_s) \geqslant 0$ — плотность М. р.:

$$\mathsf{P}\{X \in A\} = \int_A p(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s,$$

для любого A из σ-алгебры борелевских множеств пространства $\mathbb{R}^s$ и

$$\int_{\mathbb{R}^s} p(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = 1.$$

Распределение любой случайной величины X_i (а также при любом $m<s$ распределение величин $X_{i_1}, \ldots, X_{i_s}$) по отношению к М. р. наз. частным, или *маргинальным распределением*. Маргинальные распределения полностью определяются заданным М. р. В том случае, когда величины $X_1, \ldots, X_s$ независимы, то

$$F(x_1, \ldots, x_s) = F_1(x_1) \ldots F_s(x_s)$$

и

$$p(x_1, \ldots, x_s) = p_1(x_1) \ldots p_s(x_s),$$

где $F_i(x)$ и $p_i(x)$ соответственно маргинальные функции распределения и плотности случайных величин X_i.

Математич. ожидание любой функции $f(X_1, \ldots, X_s)$ от $X_1, \ldots, X_s$ определяется интегралом от этой функции по М. р., в частности в абсолютно непрерывном случае интегралом

$$\mathsf{E} f(X_1, \ldots, X_s) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^s} f(x_1, \ldots, x_s)\, p(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s.$$

Характеристич. функция М. р. есть функция вектора $t=(t_1, \ldots, t_s)$, равная

$$\varphi(t) = \mathsf{E} e^{itx'},$$

где $tx' = t_1x_1 + \ldots + t_sx_s$. Основными характеристиками М. р. служат моменты: $\mathsf{E}X_1^{k_1} \ldots X_s^{k_s}$ — смешанные моменты и $\mathsf{E}(X_1 - \mathsf{E}X_1)^{k_1} \ldots (X_s - \mathsf{E}X_s)^{k_s}$ — центральные смешанные моменты, где $k_1 + \ldots + k_s$ — порядок соответствующего момента. Роль математич. ожидания и дисперсии для М. р. выполняют вектор $\mathsf{E}X = (\mathsf{E}X_1, \ldots, \mathsf{E}X_s)$ и совокупность центральных смешанных моментов 2-го порядка, образующих ковариационную матрицу. Если $\mathsf{E}(X_i - \mathsf{E}X_i)(X_j - \mathsf{E}X_j) = 0$ при всех i, j, $i \neq j$, то случайные величины $X_1, \ldots, X_s$ наз. попарно некоррелированными (ковариационная матрица диагональна). Если ранг r ковариационной матрицы меньше s, то М. р. наз. *вырожденным распределением*; в этом случае М. р. сосредоточено на нек-ром линейном многообразии в $\mathbb{R}^s$ размерности r.

О методах исследования зависимости между $X_1, \ldots, X_s$ см. статьи *Корреляция*, *Регрессия*. *А. В. Прохоров.*

МНОГОМЕРНЫЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ — раздел математич. статистики, посвященный математич. методам построения оптимальных планов сбора, систематизации и обработки многомерных статистич. данных, направленным на выявление характера и структуры взаимосвязей между компонентами исследуемого многомерного признака и предназначенным для получения научных и практич. выводов. Под многомерным признаком понимается p-мерный вектор $x=(x_1, \ldots, x_p)$ показателей (признаков, переменных) $x_1, \ldots, x_p$, среди к-рых могут быть: количественные,

т. е. скалярно измеряющие в определенной шкале степень проявления изучаемого свойства объекта, порядковые (или ординальные), т. е. позволяющие упорядочивать анализируемые объекты по степени проявления в них изучаемого свойства; и классификационные (или номинальные), т. е. позволяющие разбивать исследуемую совокупность объектов на не поддающиеся упорядочиванию однородные (по анализируемому свойству) классы. Результаты измерения этих показателей

$$\{x_{\cdot i}\}_1^n = \{(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{pi})'\}_1^n \qquad (1)$$

на каждом из n объектов исследуемой совокупности образуют последовательность многомерных наблюдений, или исходный массив многомерных данных для проведения М. с. а. Значительная часть М. с. а. обслуживает ситуации, в к-рых исследуемый многомерный признак x интерпретируется как многомерная случайная величина и соответственно последовательность многомерных наблюдений (1) — как выборка из генеральной совокупности. В этом случае выбор методов обработки исходных статистич. данных и анализ их свойств производится на основе тех или иных допущений относительно природы многомерного (совместного) закона распределения вероятностей $\mathsf{P}(x)$.

По содержанию М. с. а. может быть условно разбит на три основных подраздела: М. с. а. многомерных распределений и их основных характеристик; М. с. а. характера и структуры взаимосвязей между компонентами исследуемого многомерного признака; М. с. а. геометрич. структуры исследуемой совокупности многомерных наблюдений.

Многомерный статистический анализ многомерных распределений и их основных характеристик охватывает лишь ситуации, в к-рых обрабатываемые наблюдения (1) имеют вероятностную природу, т. е. интерпретируются как выборка из соответствующей генеральной совокупности. К основным задачам этого подраздела относятся: статистич. оценивание исследуемых многомерных распределений, их основных числовых характеристик и параметров; исследование свойств используемых статистич. оценок; исследование распределений вероятностей для ряда статистик, с помощью к-рых строятся статистич. критерии проверки различных гипотез о вероятностной природе анализируемых многомерных данных. Основные результаты относятся к частному случаю, когда исследуемый признак x подчинен многомерному нормальному закону распределения $N_p(\mu, V)$, функция плотности к-рого $f(x|\mu, V)$ задается соотношением

$$f(x \mid \mu, V) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \mid V \mid^{1/2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)' V^{-1}(x-\mu)\right\}, \qquad (2)$$

где $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)'$ — вектор математич. ожиданий компонент случайной величины x, т. е. $\mu_l = \mathsf{E}x_l$, $l = 1, 2, \ldots, p$, а $V = \|v_{ij}\|_{i,j=1}^p$ — ковариационная матрица случайного вектора x, т. е. $v_{ij} = \mathsf{E}(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)$ — ковариации компонент вектора x (рассматривается невырожденный случай, когда ранг $V = p$; в противном случае, т. е. при ранге $V = p' < p$, все результаты остаются справедливыми, но применительно к подпространству меньшей размерности p', в к-рой оказывается сосредоточенным распределение вероятностей исследуемого случайного вектора x).

Так, если (1) — последовательность независимых наблюдений, образующих случайную выборку из $N_p(\mu, V)$, то оценками максимального правдоподобия для параметров μ и V, участвующих в (2), являются

соответственно статистики (см. [1], [2])

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_{\cdot i} \tag{3}$$

и

$$\hat{\boldsymbol{V}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x}_{\cdot i} - \hat{\boldsymbol{\mu}})\,(\boldsymbol{x}_{\cdot i} - \hat{\boldsymbol{\mu}})', \tag{4}$$

причем случайный вектор $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ подчиняется p-мерному нормальному закону $N_p(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\boldsymbol{V})$ и не зависит от $\hat{\boldsymbol{V}}$, а совместное распределение элементов матрицы $\hat{\boldsymbol{Q}} = n\hat{\boldsymbol{V}}$ описывается т. н. распределением Уишарта (см. [4]), плотность к-рого

$$w(\hat{\boldsymbol{Q}} \mid \boldsymbol{V};\ n) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{|\hat{\boldsymbol{Q}}|^{(n-p-2)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{V}^{-1}\hat{\boldsymbol{Q}})\right\}}{2^{(n-1)p/2}\,\pi^{p(p-1)/4}\,|\boldsymbol{V}|^{(n-1)/2} \prod_{j=1}^{p} \Gamma\left\{\frac{n-j}{2}\right\}}, \\ \text{если } \hat{\boldsymbol{Q}} \text{ — положительно определена;} \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

В рамках этой же схемы исследованы распределения и моменты таких выборочных характеристик многомерной случайной величины, как коэффициенты парной, частной и множественной корреляции, обобщенная дисперсия (т. е. статистика $|\hat{\boldsymbol{V}}|$), обобщенная T^2-статистике Хотеллинга (см. [5]). В частности (см. [1]), если определить в качестве выборочной ковариационной матрицы $\boldsymbol{S}_n$ подправленную «на несмещенность» оценку $\hat{\boldsymbol{V}}$, а именно:

$$\boldsymbol{S}_n = \frac{n}{n-1}\,\hat{\boldsymbol{V}}, \tag{5}$$

то распределение случайной величины $\sqrt{n}(|\boldsymbol{S}_n| / |\boldsymbol{V}| - 1)$ стремится к $N_1(0, 2p)$ при $n \to \infty$, а случайные величины

$$\frac{n-p}{p(n-1)}\,T^2 = \frac{n-p}{p(n-1)}\,n\,(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu})'\,\boldsymbol{S}_n^{-1}\,(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}) \tag{6}$$

и

$$\frac{n_1+n_2-p-1}{(n_1+n_2-2)\,p}\,\tilde{T}^2 =$$

$$= \frac{n_1+n_2-p-1}{(n_1+n_2-2)\,p}\,\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}\,(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_1} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_2})'\,\boldsymbol{S}_{n_1+n_2}^{-1}\,(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_1} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_2}) \tag{7}$$

подчиняются F-распределениям с числами степеней свободы соответственно $(p,\ n-p)$ и $(p,\ n_1+n_2-p-1)$. В соотношении (7) n_1 и n_2 — объемы двух независимых выборок вида (1), извлеченных из одной и той же генеральной совокупности $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{V})$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_i}$ и $\boldsymbol{S}_{n_i}$ — оценки вида (3) и (4)—(5), построенные по i-й выборке, а

$$\boldsymbol{S}_{n_1+n_2} = \frac{1}{n_1+n_2-2}\,[(n_1-1)\,\boldsymbol{S}_{n_1} + (n_2-1)\,\boldsymbol{S}_{n_2}]$$

— общая выборочная ковариационная матрица, построенная по оценкам $\boldsymbol{S}_{n_1}$ и $\boldsymbol{S}_{n_2}$.

Многомерный статистический анализ характера и структуры взаимосвязей компонент исследуемого многомерного признака объединяет в себе понятия и результаты, обслуживающие такие методы и модели М. с. а., как множественная регрессия, многомерный *дисперсионный анализ* и *ковариационный анализ*, *факторный анализ* и метод главных компонент, анализ канонич. корреляций. Результаты, составляющие содержание этого подраздела, могут быть условно разделены на два основных типа.

1) Построение наилучших (в определенном смысле) статистич. оценок для параметров упомянутых моделей и анализ их свойств (точности, а в вероятностной постановке — законов их распределения, доверительных

областей и т. д.). Так, пусть исследуемый многомерный признак x интерпретируется как векторная случайная величина, подчиненная p-мерному нормальному распределению $N_p(\mu, V)$, и расчленен на два подвектора-столбца $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ размерности q и $p-q$ соответственно. Это определяет и соответствующее расчленение вектора математич. ожиданий μ, теоретической и выборочной ковариационных матриц V и $\hat{V}$, а именно:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{V}_{11} & \hat{V}_{12} \\ \hat{V}_{21} & \hat{V}_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда (см. [1], [2]) условное распределение подвектора $x^{(1)}$ (при условии, что второй подвектор принял фиксированное значение $x^{(2)}$) будет также нормальным $N_q(\mu^{(1)} + B(x^{(2)} - \mu^{(2)}), \Sigma)$. При этом оценками максимального правдоподобия $\hat{B}$ и $\hat{\Sigma}$ для матриц регрессионных коэффициентов B и ковариаций Σ этой классической многомерной модели множественной регрессии

$$\mathsf{E}(x^{(1)} \mid x^{(2)}) = \mu^{(1)} + B(x^{(2)} - \mu^{(2)}) \qquad (8)$$

будут взаимно независимые статистики соответственно

$$\hat{B} = \hat{V}_{12}\hat{V}_{22}^{-1} \quad \text{и} \quad \hat{\Sigma} = \hat{V}_{11} - \hat{V}_{12}\hat{V}_{22}^{-1}\hat{V}_{21};$$

здесь распределение оценки $\hat{B}$ подчинено нормальному закону $N_{q(p-q)}(B, V_B)$, а оценки $n\hat{\Sigma}$ — закону Уишарта с параметрами Σ и $n-(p-q)$ (элементы ковариационной матрицы V_B выражаются в терминах элементов матрицы V).

Основные результаты по построению оценок параметров и исследованию их свойств в моделях факторного анализа, главных компонент и канонич. корреляций относятся к анализу вероятностно-статистич. свойств собственных (характеристических) значений и векторов различных выборочных ковариационных матриц.

В схемах, не укладывающихся в рамки классич. нормальной модели и тем более в рамки какой-либо вероятностной модели, основные результаты относятся к построению алгоритмов (и исследованию их свойств) вычисления оценок параметров, наилучших с точки зрения нек-рого экзогенно заданного функционала качества (или адекватности) модели.

2) Построение статистич. критериев для проверки различных гипотез о структуре исследуемых взаимосвязей. В рамках многомерной нормальной модели (последовательности наблюдений вида (1) интерпретируются как случайные выборки из соответствующих многомерных нормальных генеральных совокупностей) построены, напр., статистич. критерии для проверки следующих гипотез.

I. Гипотезы $\mu = \mu^*$ о равенстве вектора математич. ожиданий исследуемых показателей заданному конкретному вектору μ^*; проверяется с помощью T^2-статистики Хотеллинга с подстановкой в формулу (6) $\mu = \mu^*$.

II. Гипотезы $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$ о равенстве векторов математич. ожиданий в двух генеральных совокупностях (с одинаковыми, но неизвестными ковариационными матрицами), представленных двумя выборками; проверяется с помощью статистики $\tilde{T}^2$ (см. [7]).

III. Гипотезы $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \ldots = \mu^{(k)} = \mu$ о равенстве векторов математич. ожиданий в нескольких генеральных совокупностях (с одинаковыми, но неизвестными ковариационными матрицами), представленных своими выборками; проверяется с помощью статистики

$$U_{p,\,k-1,\,n-k} = \frac{\left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(x_{\cdot i}^{(j)} - \hat{\mu}^{(j)} \right) \left(x_{\cdot i}^{(j)} - \hat{\mu}^{(j)} \right)' \right|}{\left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(x_{\cdot i}^{(j)} - \hat{\mu} \right) \left(x_{\cdot i}^{(j)} - \hat{\mu} \right)' \right|},$$

в к-рой $\boldsymbol{x}_{\cdot i}^{(j)}$ есть i-е p-мерное наблюдение в выборке объема n_j, представляющей j-ю генеральную совокупность, а $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(j)}$ и $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ — оценки вида (3), построенные соответственно отдельно по каждой из выборок и по объединенной выборке объема $n=n_1+\ldots+n_k$.

IV. Гипотезы $\boldsymbol{\mu}^{(1)}=\boldsymbol{\mu}^{(2)}=\ldots=\boldsymbol{\mu}^{(k)}=\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{V}_1=\ldots=\boldsymbol{V}_k=\boldsymbol{V}$ об эквивалентности нескольких нормальных генеральных совокупностей, представленных своими выборками $\{\boldsymbol{x}_{\cdot i}^{(j)}\}_{i=1}^{n_j}$, $j=1, 2, \ldots, k$; проверяется с помощью статистики

$$\lambda=\frac{\prod_{j=1}^{k}|n_j\hat{\boldsymbol{V}}_j|^{(n_j-1)/2}}{\left|\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\boldsymbol{x}_{\cdot i}^{(j)}-\hat{\boldsymbol{\mu}}\right)\left(\boldsymbol{x}_{\cdot i}^{(j)}-\boldsymbol{\mu}\right)'\right|^{(n-k)/2}},$$

в к-рой $\hat{\boldsymbol{V}}_j$ — оценка вида (4), построенная отдельно по наблюдениям j-й выборки, $j=1, 2, \ldots, k$.

V. Гипотезы о взаимной независимости подвекторов-столбцов $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)}$ размерностей соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_m$, на к-рые расчленен исходный p-мерный вектор исследуемых показателей $\boldsymbol{x}$, $p_1+p_2+\ldots+p_m=p$; проверяется с помощью статистики

$$\psi=\frac{|n\hat{\boldsymbol{V}}|}{\prod_{i=1}^{m}|n_i\hat{\boldsymbol{V}}_i|},$$

в к-рой $\hat{\boldsymbol{V}}$ и $\hat{\boldsymbol{V}}_i$ — выборочные ковариационные матрицы вида (4) для всего вектора $\boldsymbol{x}$ и для его подвектора $\boldsymbol{x}^{(i)}$ соответственно.

Многомерный статистический анализ геометрической структуры исследуемой совокупности многомерных наблюдений объединяет в себе понятия и результаты таких моделей и схем, как *дискриминантный анализ*, смеси вероятностных распределений, кластер-анализ и таксономия, многомерное шкалирование. Узловым во всех этих схемах является понятие расстояния (меры близости, меры сходства) между анализируемыми элементами. При этом анализируемыми могут быть как реальные объекты, на каждом из к-рых фиксируются значения показателей $\boldsymbol{x}$,— тогда геометрич. образом i-го обследованного объекта будет точка $\boldsymbol{x}_{\cdot i}=(x_{1i}, \ldots, x_{pi})'$ в соответствующем p-мерном пространстве, так и сами показатели $\boldsymbol{x}_{l\cdot}$, $l=1, 2, \ldots, p$,— тогда геометрич. образом l-го показателя будет точка $\boldsymbol{x}_{l\cdot}=(x_{l1}, x_{l2}, \ldots, x_{ln})$ в соответствующем n-мерном пространстве.

Методы и результаты дискриминантного анализа (см. [1], [2], [7]) направлены на решение следующей задачи. Известно о существовании определенного числа $k\geqslant 2$ генеральных совокупностей и у исследователя имеется по одной выборке из каждой совокупности («обучающие выборки»). Требуется построить основанное на имеющихся обучающих выборках наилучшее в определенном смысле классифицирующее правило, позволяющее приписать нек-рый новый элемент (наблюдение $\boldsymbol{x}$) к своей генеральной совокупности в ситуации, когда исследователю заранее не известно, к какой из совокупностей этот элемент принадлежит. Обычно под классифицирующим правилом понимается последовательность действий: по вычислению скалярной функции от исследуемых показателей, по значениям к-рой принимается решение об отнесении элемента к одному из классов (построение дискриминантной функции); по упорядочению самих показателей по степени их информативности с точки зрения правильного отнесения элементов к классам; по вычислению соответствующих вероятностей ошибочной классификации.

Задача анализа смесей распределений вероятностей (см. [7]) чаще всего (но не всегда) возникает также в связи с исследованием «геометрической структуры»

рассматриваемой совокупности. При этом понятие r-го однородного класса формализуется с помощью генеральной совокупности, описываемой нек-рым (как правило, унимодальным) законом распределения $\mathsf{P}(x|\theta_r)$, так что распределение общей генеральной совокупности, из к-рой извлечена выборка (1), описывается смесью распределений вида

$$\mathsf{P}(x) = \sum_{r=1}^{k} \pi_r \mathsf{P}(x \mid \theta_r),$$

где π_r — априорная вероятность (удельный вес элементов) r-го класса в общей генеральной совокупности. Задача состоит в «хорошем» статистич. оценивании (по выборке $\{x_{\cdot i}\}_1^n$) неизвестных параметров θ_r, π_r, а иногда и k. Это, в частности, позволяет свести задачу классификации элементов к схеме дискриминантного анализа, хотя в данном случае отсутствовали обучающие выборки.

Методы и результаты кластер-анализа (классификации, таксономии, распознавании образов «без учителя», см. [2], [6], [7]) направлены на решение следующей задачи. Геометрич. структура анализируемой совокупности элементов задана либо координатами соответствующих точек (т. е. матрицей $\|x_{ij}\|$, $i=1, \ldots, p$; $j=1, \ldots, n$), либо набором геометрич. характеристик их взаимного расположения, напр. матрицей попарных расстояний $\|\rho_{ij}\|_{i,j=1}^n$. Требуется разбить исследуемую совокупность элементов на сравнительно небольшое (заранее известное или нет) число классов так, чтобы элементы одного класса находились на небольшом расстоянии друг от друга, в то время как разные классы были бы по возможности достаточно взаимоудалены один от другого и не разбивались бы на столь же удаленные друг от друга части.

Задача многомерного шкалирования (см. [6]) относится к ситуации, когда исследуемая совокупность элементов задана с помощью матрицы попарных расстояний $\|\rho_{ij}\|_{i,j=1}^n$ и заключается в приписывании каждому из элементов заданного числа (p) координат таким образом, чтобы структура попарных взаимных расстояний между элементами, измеренных с помощью этих вспомогательных координат, в среднем наименее отличались бы от заданной. Следует заметить, что основные результаты и методы кластер-анализа и многомерного шкалирования развиваются обычно без каких-либо допущений о вероятностной природе исходных данных.

Прикладное назначение многомерного статистического анализа состоит в основном в обслуживании следующих трех проблем.

Проблема статистического исследования зависимостей между анализируемыми показателями. Предполагая, что исследуемый набор статистически регистрируемых показателей x разбит, исходя из содержательного смысла этих показателей и окончательных целей исследования, на q-мерный подвектор $x^{(1)}$ предсказываемых (зависимых) переменных и $(p-q)$-мерный подвектор $x^{(2)}$ предсказывающих (независимых) переменных, можно сказать, что проблема состоит в определении на основании выборки (1) такой q-мерной векторной функции $f(x^{(2)})$ из класса допустимых решений F, к-рая давала бы наилучшую, в определенном смысле, аппроксимацию поведения подвектора показателей $x^{(1)}$. В зависимости от конкретного вида функционала качества аппроксимации и природы анализируемых показателей приходят к тем или иным схемам множественной регрессии, дисперсионного, ковариационного или конфлюентного анализа.

Проблема классификации элементов (объектов или показателей) в общей (нестрогой) постановке заключается в том, чтобы всю анализируемую совокупность элементов, статистически представленную в виде матрицы $\|x_{ij}\|$, $i=1, \ldots, p$; $j=1, \ldots, n$, или матрицы

$\|\rho_{ij}\|$, $i, j=1, \ldots, n$, разбить на сравнительно небольшое число однородных, в определенном смысле, групп [7]. В зависимости от природы априорной информации и конкретного вида функционала, задающего критерий качества классификации, приходят к тем или иным схемам дискриминантного анализа, кластер-анализа (таксономии, распознавания образов «без учителя»), расщепления смесей распределений.

Проблема снижения размерности исследуемого факторного пространства и отбора наиболее информативных показателей заключается в определении такого набора сравнительно небольшого числа $m \ll p$ показателей $z=(z_1, z_2, \ldots, z_m)'$, найденного в классе допустимых преобразований $Z(x)$ исходных показателей $x=(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, на к-ром достигается верхняя грань нек-рой экзогенно заданной меры информативности m-мерной системы признаков (см. [7]). Конкретизация функционала, задающего мер у автоинформативности (т. е. нацеленное на максимальное сохранение информации, содержащейся в статистич. массиве (1) относительно самих исходных признаков), приводит, в частности, к различным схемам факторного анализа и главных компонент, к методам экстремальной группировки признаков. Функционалы, задающие мер у внешней информативности, т. е. нацеленные на извлечение из (1) максимальной информации относительно нек-рых других, не содержащихся непосредственно в x, показателей или явлений, приводят к различным методам отбора наиболее информативных показателей в схемах статистич. исследования зависимостей и дискриминантного анализа.

Основной математический инструментарий М. с. а. составляют специальные методы теории систем линейных уравнений и теории матриц (методы решения простой и обобщенной задачи о собственных значениях и векторах; простое обращение и псевдообращение матриц; процедуры диагонализации матриц и т. д.) и нек-рые оптимизационные алгоритмы (методы покоординатного спуска, сопряженных градиентов, ветвей и границ, различные версии случайного поиска и стохастич. аппроксимации и т. д.).

Лит.: [1] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] Большев Л. Н., «Bull. Int. Stat. Inst.», 1969, № 43, p. 425—41; [4] Wishart J., «Biometrika», 1928, v. 20A, p. 32—52; [5] Hotelling H., «Ann. Math. Stat.», 1931, v. 2, p. 360—78; [6] Kruskal J. B., «Psychometrika», 1964, v. 29, p. 1—27; [7] Айвазян С. А., Бежаева З. И., Староверов О. В., Классификация многомерных наблюдений, М., 1974.

С. А. Айвазян.

МНОГОМЕРНЫЙ УЗЕЛ — изотопический класс вложений сферы в сферу. Более точно, n-мерным узлом коразмерности q наз. пара $K=(S^{n+q}, k^n)$, состоящая из ориентированной сферы S^{n+q} и ее ориентированного локально плоского подмногообразия k^n, гомеоморфного сфере S^n. Два узла $K_1=(S^{n+q}, k_1^n)$ и $K_2=(S^{n+q}, k_2^n)$ наз. эквивалентными, если существует *изотопия* сферы S^{n+q}, переводящая k_1^n на k_2^n с сохранением ориентации. В зависимости от того, в какой категории (Diff, PL или Top) понимаются термины «подмногообразие» и «изотопия» в предыдущих определениях, говорится о гладких, кусочно линейных или топологич. М. у. соответственно. В гладком случае подмногообразие k^n может иметь и нестандартную дифференцируемую структуру. n-мерный узел коразмерности q, изотопный стандартному вложению, наз. т р и в и а л ь н ы м, или н е з а у з л е н н ы м, узлом.

Изучение М. у. коразмерности 1 связано с *Шёнфлиса гипотезой*. Всякий топологич. узел коразмерности 1 тривиален. Это же верно и для кусочно линейных и гладких узлов, если $n \neq 3, 4$.

Кусочно линейные и топологич. М. у. коразмерности $q \geqslant 3$ тривиальны. В гладком случае это не так. Множе-

ство изотопич. классов гладких n-мерных узлов коразмерности $q \geqslant 3$ совпадает при $n \geqslant 5$ с множеством $\theta^{n+q, n}$ классов кобордизмов узлов (два М. у. $K_1 = (S^{n+q}, k_1^n)$ и $K_2 = (S^{n+q}, k_2^n)$ наз. кобордантными, если существует гладкое $(n+1)$-мерное подмногообразие $W \subset S^{n+q} \times I$, трансверсально выходящее на $\partial(S^{n+q} \times I)$, причем $\partial W = (k_1^n \times 0) \cup (-k_2^n \times 1)$ и W является *h-кобордизмом* между $k_1^n \times 0$ и $k_2^n \times 1$). Множество $\theta^{n+q, n}$ является абелевой группой относительно связного суммирования. В этой группе противоположным к классу М. у. (S^{n+q}, k^n) является класс кобордизмов узла $(-S^{n+q}, -k^n)$, где минус означает обращение ориентации. Имеется естественный гомоморфизм $\theta^{n+q, n} \to \theta^n$, где θ^n — группа n-мерных гомотопич. сфер; этот гомоморфизм сопоставляет узлу (S^{n+q}, k^n) дифференцируемую структуру сферы k^n. Ядро этого гомоморфизма, обозначаемое $\Sigma^{n+q, n}$, совпадает с множеством изотопич. классов стандартной сферы S^n в S^{n+q}. Если $2q > n+3$, то группа $\Sigma^{n+q, n}$ тривиальна. Если $2q \leqslant n+3$ и $(n+1) \not\equiv 0 \pmod 4$, то группы $\Sigma^{n+q, n}$ и $\theta^{n+q, n}$ конечны. В случае, когда $2q \leqslant n+3$ и $(n+1) \equiv 0 \pmod 4$, группы $\theta^{n+q, n}$ и $\Sigma^{n+q, n}$ являются конечно порожденными абелевыми группами ранга 1 (см. [1], [2]). Вычислено также множество классов конкордантных гладких вложений S^n в S^{n+q} при $q > 2$ (см. [3]).

Изучение М. у. коразмерности 2, к-рые в дальнейшем будут наз. просто узлами, проходит почти аналогично во всех трех категориях (Diff, Pl, Top). При $n \geqslant 5$ всякий топологич. узел переводится изотопией в гладкий. Однако существуют топологич. трехмерные узлы в S^5, не эквивалентные и даже не кобордантные гладким узлам (см. [4]).

Множество изотопич. классов n-мерных узлов (каждой категории) образует абелеву полугруппу относительно связного суммирования. Известно, что при $n = 1$ в этой полугруппе всякий элемент представляется в виде конечной суммы простых, т. е. нетривиальным образом неразложимых элементов, и такое разложение единственно.

n-мерный узел $K = (S^{n+2}, k^n)$ тривиален тогда и только тогда, когда $\pi_i(S^{n+2} - k^n) = \pi_i(S^1)$ при всех $i \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Дана (см. [6]) алгебраич. классификация узлов K, у к-рых $\pi_i(S^{n+2} - k^2) = \pi_i(S^1)$ при всех $i \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right] - 1$ и число n нечетно (узлы типа L): при $n \geqslant 5$ множество изотопич. классов таких узлов находится во взаимно однозначном соответствии с множеством S-эквивалентных классов *Зейферта матриц*. Узлы типа L важны с точки зрения приложений в алгебраич. геометрии, т. к. среди них находятся все узлы, получаемые с помощью следующей конструкции (см. [15]). Пусть $f(z_1, \ldots, z_{q+1})$ — комплексный многочлен ненулевой степени, имеющий 0 в качестве изолированной особой точки и $f(0) = 0$. Пересечение k гиперповерхности $V = f^{-1}(0)$ с малой сферой S^{2q+1} с центром в нуле является $(q-2)$-связным $(2q-1)$-мерным многообразием. Многообразие k гомеоморфно сфере S^{2q-1} тогда и только тогда, когда $|\Delta(1)| = 1$, где $\Delta(t)$ — полином Александера. В этом случае возникает узел (S^{2q+1}, k). Такие узлы наз. алгебраическими, все они являются узлами типа L.

Внешностью гладкого узла $K = (S^{n+2}, k^n)$ наз. дополнение X открытой трубчатой окрестности k^n в S^{n+2}. При $n \geqslant 2$ для всякого n-мерного узла K существует такой узел $\tau(K)$, что всякий узел, внешность к-рого диффеоморфна внешности узла K, эквивалентен либо K, либо $\tau(K)$. Если X_1, X_2 — внешности двух гладких n-мерных узлов, $n \geqslant 3$, и $\pi_1(X_1) = \pi_1(X_2) = \mathbb{Z}$, то следующие утверждения равносильны (см. [7]): 1) X_1 и X_2 диффеоморфны, 2) пары $(X_1, \partial X_1)$ и $(X_2, \partial X_2)$ гомотопически эквивалентны. Эти результаты сводят проблему

классификации узлов к гомотопич. классификации пар $(X, \partial X)$ и к решению вопроса о том, определяет ли внешность тип узла, т. е. верно ли равенство $K=\tau(K)$? Известно, что это равенство справедливо для узлов типа L (см. [6]), для узлов, получаемых конструкцией Артина и конструкцией сверхзакручивания (см. [8]). Однако найдены двумерные узлы в S^4, для к-рых $K\neq\neq\tau(K)$ (см. [9]).

Изучение гомотопич. типа внешности X усложняется из-за ее неодносвязности. Если G — группа узла (т. е. $G=\pi_1(X)$), то $G/[G, G]=\mathbb{Z}$, $H_2(G)=0$, вес группы G (т. е. минимальное число элементов, не содержащихся ни в одном собственном нормальном делителе) равен 1. При $n\geqslant 3$ эти свойства полностью описывают класс групп n-мерных узлов (см. [10]). Группы одномерных и двумерных узлов обладают рядом дополнительных свойств (см. *Узлов теория*, *Двумерный узел*).

Поскольку $H^1(X;\ \mathbb{Z})=\mathbb{Z}$, внешность X обладает единственным бесконечным циклическим накрытием $p\colon \tilde{X}\to X$, к-рое наз. б е с к о н е ч н ы м ц и к л и ч е с к и м н а к р ы т и е м у з л а. Гомологии $H_*(\tilde{X};\ \mathbb{Z})$ являются $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-модулями. Их *Александера инварианты* являются инвариантами узла. Об алгебраич. свойствах модулей $H_*(\tilde{X};\ \mathbb{Z})$ см. [10]—[13].

Благодаря тому обстоятельству, что на бесконечном циклическом накрытии группа $\mathbb{Z}$ действует без неподвижных точек, $(n+2)$-мерное некомпактное многообразие $\tilde{X}$ обладает рядом гомологич. свойств компактных $(n+1)$-мерных многообразий. В частности, на гомологиях многообразия $\tilde{X}$ с коэффициентами в поле F существует невырожденное спаривание

$$H_n(\tilde{X};\ F)\otimes H_{n+1-k}(\tilde{X};\ F)\longrightarrow F,\quad k=1,\ \ldots,\ n,$$

по свойствам напоминающее спаривание, определяемое *пересечения индексом* в $(n+1)$-мерных компактных многообразиях. Имеется также спаривание

$$T_k\tilde{X}\otimes T_{n-k}\tilde{X}\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\quad k=1,\ \ldots,\ n-1,$$

аналогичное *зацепления коэффициентам* в $(n+1)$-мерных многообразиях (см. [13]), где $T_j\tilde{X}=\operatorname{Tors} H_j(\tilde{X};\ \mathbb{Z})$. Эти гомологич. спаривания порождают инварианты гомотопич. типа пары $(X, \partial X)$. Для получения алгебраич. инвариантов используются также конечнолистные циклические разветвленные накрытия (см. [14]).

Задача классификации узлов коразмерности 2 с точностью до кобордизма — отношения эквивалентности более грубого, чем изотопич. тип,— полностью решена при $n>1$ (см. *Узлов кобордизм*).

Лит.: [1] H a e f l i g e r A., «Ann. Math.», 1962, v. 75, p. 452—66; [2] e r o ж e, там же, 1966, v. 83, p. 402—36; [3] L e v i n e J., там же, 1965, v. 82, p. 15—51; [4] C a p p e l l S., S h a n e s o n J., «Topology», 1973, v. 12, p. 33—40; [5] C o c и н с к и й А. Б., «Матем. сб.», 1970, т. 81, № 1, с. 145—58; [6] L e v i n e J., «Comm. math. helv.», 1970, v. 45, p. 185—98; [7] L a s h o f R., S h a n e s o n J., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 75, p. 171—75; [8] C a p p e l l S., в кн.: Topology of Manifolds, Chi., 1971, p. 358—83; [9] C a p p e l l S., S h a n e s o n J., «Ann. Math.», 1976, v. 103, p. 349—53; [10] K e r v a i r e M., «Bull. soc. math. France», 1965, t. 93, p. 225—71; [11] L e v i n e J., «Ann. Math.», 1966, v. 84, p. 537—54; [12] e r o ж e, в кн.: Knots, groups and 3-manifolds, Princeton, 1975, p. 25—34; [13] Ф а р б е р М. Ш., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1977, т. 41, с. 794—828; [14] B и р о О. Я., там же, 1973, т. 37, с. 1241—58; [15] M и л н о р Д ж., Особые точки комплексных гиперповерхностей, пер. с англ., М., 1971.

М. Ш. Фарбер.

МНОГОМЕСТНЫЙ ФУНКТОР, м у л ь т и ф у н к т о р,— функция от нескольких аргументов, определенная на категориях, принимающая значения в категории и задающая одноместный функтор по каждому аргументу. Более точно, пусть даны n категорий $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, ..., $\mathfrak{K}_n$. Построим декартово произведение категорий $\mathfrak{K}=\overline{\mathfrak{K}}_1\times\overline{\mathfrak{K}}_2\times\ldots\times\overline{\mathfrak{K}}_n$, где каждая категория $\overline{\mathfrak{K}}_i$ либо совпадает с $\mathfrak{K}_i$, либо с дуальной категорией $\mathfrak{K}_i^*$.

Одноместный ковариантный функтор F из $\mathfrak{K}$ со значениями в категории $\mathfrak{C}$ наз. *n-местным функтором*, заданным на категориях $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n$ со значениями в категории $\mathfrak{C}$. Функтор F ковариантен по тем аргументам, к-рые соответствуют множителям $\mathfrak{K}_i$ в произведении $\mathfrak{K}$, и контравариантен по остальным аргументам.

Выпишем явно соотношения, к-рым должно удовлетворять отображение F: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{C}$ (для простоты $n=2$ и первый аргумент считается контравариантным, а второй — ковариантным). Функтор F: $\mathfrak{K}_1^* \times \mathfrak{K}_2 \to \mathfrak{C}$ сопоставляет каждой паре объектов (A, B), где $A \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{K}_1$, $B \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{K}_2$, объект $F(A, B) \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{C}$ и каждой паре морфизмов (α, β), где

$$\alpha : A \longrightarrow A_1 \in \mathrm{Mor}\, \mathfrak{K}_1, \quad \beta : B \longrightarrow B_1 \in \mathrm{Mor}\, \mathfrak{K}_2,$$

морфизм

$$F(\alpha, \beta) : F(A_1, B) \longrightarrow F(A, B_1) \in \mathrm{Mor}\, \mathfrak{C}.$$

При этом выполняются следующие условия:
1) $F(1_A, 1_B) = 1_{F(A, B)}$ для любой пары объектов A, B;
2) если $\alpha: A \to A_1$, $\alpha_1 : A_1 \to A_2$, $\alpha, \alpha_1 \in \mathrm{Mor}\, \mathfrak{K}_1$,

$$\beta : B \longrightarrow B_1, \quad \beta_1 : B_1 \longrightarrow B_2, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathrm{Mor}\, \mathfrak{K}_2,$$

то

$$F(\alpha\alpha_1, \beta\beta_1) = F(\alpha_1, \beta)\, F(\alpha, \beta_1).$$

Примеры М. ф.

1) Пусть $\mathfrak{K}$ — категория с конечными произведениями. Тогда произведение n объектов можно рассматривать как n-местный ковариантный по всем аргументам функтор, определенный на декартовой степени $\mathfrak{K}^n = \mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \times \ldots \times \mathfrak{K}$ (n раз) и принимающий значения в $\mathfrak{K}$. Аналогичные функторы можно построить для копроизведений, тензорных произведений и т. д.

2) Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольная категория. Сопоставим каждой паре объектов A, B из $\mathfrak{K}$ множество морфизмов $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ и каждой паре морфизмов $\alpha : A \to A_1$, $\beta : B \to B_1$ отображение множеств $H_{\mathfrak{K}}(\alpha, \beta) : H_{\mathfrak{K}}(A_1, B) \to H_{\mathfrak{K}}(A, B_1)$, заданное следующим образом:

$$\text{если } \varphi : A_1 \longrightarrow B, \text{ то } H_{\mathfrak{K}}(\alpha, \beta)(\varphi) = \alpha\varphi\beta.$$

Описанное построение задает двуместный функтор из $\mathfrak{K}^* \times \mathfrak{K}$ в категорию множеств, контравариантный по первому аргументу и ковариантный по второму.

Если $\mathfrak{K}$ — аддитивная категория, то можно считать, что построенный функтор принимает значения в категории абелевых групп.

3) Пусть $\mathfrak{K}$ — категория с конечными произведениями. Рассмотрим произведение как двуместный функтор $\times$: $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$. Тогда, комбинируя примеры 1) и 2), можно построить трехместные функторы $H_{\mathfrak{K}}(A, B \times C)$ и $H_{\mathfrak{K}}(A \times B, C)$. Первый функтор естественно эквивалентен функтору $H_{\mathfrak{K}}(A, B) \times H_{\mathfrak{K}}(A, C)$. В случае категории множеств $\mathfrak{C}$ второй функтор естественно эквивалентен функтору $H_{\mathfrak{C}}(A, H_{\mathfrak{C}}(B, C))$.

4) Пусть ϑ — малая категория и $F(\vartheta, \mathfrak{C})$ — категория диаграмм над категорией множеств $\mathfrak{C}$ со схемой ϑ, т. е. категория одноместных ковариантных функторов и их естественных преобразований. Построим двуместный ковариантный по обоим аргументам функтор $E : \mathfrak{K} \times F(\vartheta, \mathfrak{C}) \longrightarrow \mathfrak{C}$; если $A \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{K}$ и $F \in \mathrm{Ob}\, F(\vartheta, \mathfrak{C})$, то $E(A, F) = F(A)$; если $\alpha : A \to B \in \mathrm{Mor}\, \mathfrak{K}$ и $\sigma : F \to G$ — естественное преобразование, то $E(\alpha, \sigma) = F(\alpha)\sigma_B = \sigma_A G(\alpha)$. Функтор E называют функтором «вычисления значений». Этот функтор естественно эквивалентен функтору $\mathrm{Nat}(H_A, F) : \mathfrak{K} \times F(\upsilon, \mathfrak{C}) \to \mathfrak{C}$, к-рый сопоставляет объекту $A \in \mathfrak{K}$ и функтору $F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{C}$ множество естественных преобразований основного функтора H_A в F (лемма Йонеды).

М. Ш. Цаленко.

МНОГООБРАЗИЕ — геометрический объект, локально имеющий строение (топологическое, гладкое, гомологическое или иное) числового пространства $\mathbb{R}^n$ или другого векторного пространства. Это фундаментальное понятие математики уточняет и обобщает на любое число измерений понятия линии и поверхности. Введение этого понятия вызвано разнообразными потребностями как самой математики, так и др. наук. В математике М. возникают прежде всего как совокупности решений невырожденных систем уравнений, а также как различные совокупности геометрических и др. объектов, допускающих введение локальной параметризации (см. ниже), напр., совокупность плоскостей размерности k в $\mathbb{R}^n$. Они появляются также как решение многомерных вариационных задач (мыльные пленки), как интегральные многообразия пфаффовых систем и динамических систем, как группы геометрических преобразований и их однородные пространства и др. В физике они играют роль моделей пространства-времени, в механике служат фазовыми пространствами, уровнями энергии и проч., в экономике поверхностями безразличия, в психологии пространством ощущений (напр., цветов) и т. д.

Хотя исходная идея, кладущаяся в основу определения М., относится к их локальному строению («такому же, как у $\mathbb{R}^n$»), эта идея позволяет выделить целый ряд характерных именно для М. глобальных черт: (не) ориентируемость, гомологическая *Пуанкаре двойственность*, возможность определения *степени отображения* одного М. на другое той же размерности и проч. Особое значение имеет введение *касательного расслоения* и связанных с ним инвариантов.

Локальное строение М. позволяет также привлечь к их изучению геометрическую технику: приведение в *общее положение*, построение *Морса функций* и проч., к-рая служит для геометрического изучения глобального строения М., ог о, грубо говоря, заключается в представлении возможно более простым образом М. в виде объединения простых кусков, симплексов или ручек.

При использовании понятия М. также обычно совершается переход от локального к глобальному. Первым шагом является введение п а р а м е т р и з а ц и и, т. е. представление «пространства состояний» данной задачи областью числового пространства. Это дает возможность описать каждое состояние набором чисел — координатами соответствующей точки (координатный метод). В целом пространство состояний может не допускать подобного описания, т. е. может не иметь гомеоморфизма на область в $\mathbb{R}^n$. Если не прибегать к параметризации с вырождениями (как в полярных координатах и их обобщениях), то возможны два пути: либо введение сначала большего, чем необходимо, числа параметров, и выделение истинного пространства неявно системой уравнений («уравнения состояния»), либо пространство параметризуется по частям локально, «в малом». Например, множество прямых на плоскости покрыто двумя подмножествами: Π_1, состоящее из прямых с уравнениями вида $y=\bar{k}x+b$, и Π_2, состоящее из прямых с уравнениями вида $x=\bar{k}y+\bar{b}$; оба они гомеоморфны $\mathbb{R}^2$ с параметризацией парами (k, b) и $(\bar{k}, \bar{b})$ соответственно. Однако в целом это множество гомеоморфно открытому листу Мёбиуса.

Когда М. естественно появляются в той или иной области, они обязательно несут какую-либо дополнительную структуру, к-рая и служит предметом изучения в этой области. Однако важную роль играет и топологич. строение, к-рое ограничивает априорные возможности. Наоборот, в топологии локальные и глобальные свойства М. изучают, привлекая дополнительные структуры (напр., гладкую) в качестве инструментов.

Фундаментом общего понятия М. является определение топологического многообразия как топологич. пространства, в к-ром каждая точка имеет окрестность $\mathfrak{X}$ и гомеоморфизм $\varphi\colon \mathfrak{X} \to U$ на область в $\mathbb{R}^n$ или в полупространстве $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_n \geqslant 0\}$; гомеоморфизм φ наз. локальной параметризацией или картой, в $\mathfrak{X}$. Размерность $n = \dim M$ является инвариантом связного М. Для несвязного М. обычно берут компоненты одной размерности. М. распадается на внутренность $\operatorname{Int} M$ и край ∂M: точки края отвечают в своих картах точкам границы $\mathbb{R}^n_+$ в $\mathbb{R}^n$. Край является $(n-1)$-мерным М. без края и может быть пустым. Связное М. без края наз. открытым, если оно некомпактно, и замкнутым, если оно компактно. Простейшими примерами четырех возможных типов М. служат $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_+$, шар B^n и его граничная сфера S^{n-1}. Хотя нехаусдорфовы М. встречаются в некоторых ситуациях (напр., пространства пучков), обычно принимают, что М. хаусдорфово, паракомпактно, имеет счетную базу, в частности, метризуемо.

Глобальное задание М. осуществляется атласом — набором карт, покрывающих М. Для использования М. в математич. анализе нужно, чтобы пересчет координат от одной карты к другой был дифференцируемым. Поэтому чаще всего рассматривают *дифференцируемые многообразия*. Более общим образом вводится понятие Г-строения на М., задаваемого атласами $\{\varphi_i : \mathfrak{X}_i \to U_i\}$, в к-рых координатные переходы $h_{ij} = \varphi_j \varphi_i^{-1}$ между картами являются гомеоморфизмами, входящими в систему Г-отображений областей в $\mathbb{R}^n_+$, замкнутую относительно композиций. Если Г состоит из непрерывно дифференцируемых r раз отображений, то говорят, что класс гладкости М. есть C^r. Аналогично определяются *аналитические многообразия*, кусочно линейные, липшицевы и др. типы М. Два Г-атласа задают одно Г-строение, если их объединение есть Г-атлас. Классификация Г-строений является важнейшей проблемой геометрии М. Отображение $f : M \to N$ одного Г-многообразия в другое наз. Г-отображением, если локально оно имеет «координатное представление» $f_{ij} = \varphi_j f \varphi_i^{-1}$, где φ_j, φ_i — карты в M и N, а $f_{ij} \in \Gamma$. В частности, имеется понятие Г-гомеоморфизма (C^r-диффеоморфизма в случае $\Gamma = C^r$).

Поскольку в математич. анализе М. важны как носители дифференцируемых отображений, их иногда определяют (см. [12]) через запас гладких функций, определенных в окрестностях точек (см. *Росток*). Развитие этой идеи привело к понятию предмногообразия, или *окольцованного пространства* (пучка колец), и далее к понятию *схемы*. Заменяя $\mathbb{R}^n$ на другие векторные и иные пространства, приходят к различным обобщениям понятия М., таким, как напр. комплексно-аналитические М. Бесконечномерные М. возникают в математич. анализе и топологии как пространства отображений и сечений расслоений, как пространства гомеоморфизмов, замкнутых подмножеств и пр. Их локальными моделями служат векторные пространства (банаховы и иные) и такие пространства, как *гильбертов кирпич*. Понятие гладких и иных строений на бесконечномерных М. изучено недостаточно. Трудности здесь возникают из-за отсутствия технических теорем типа аппроксимаций, существования разбиения единицы (мал запас гладких функций), теоремы о неявной функции и т. п.

М. возникают как подмножества $\mathbb{R}^n$ при неявном задании их в виде множеств решений систем уравнений (и неравенств в случае непустого края). Этим М. задается сразу, а не по частям, как в случае задания атласом. Однако необходимы условия невырожденно-

сти, иначе всякое замкнутое множество можно задать одним уравнением. Существование локальной параметризации обеспечивается по теореме о неявной функции условием максимальности ранга *Якоби матрицы* данной системы. Уравнения служат языком для выражения средствами математич. анализа свойств М., служащих для определения М. Напр., свойство ортогональности $(n\times n)$-матрицы записывается системой из $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнений относительно элементов матрицы. Система оказывается невырожденной, а группа ортогональных матриц гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^{n^2}$.

В механич. системе с уже введенными координатами меньшие системы выделяются уравнениями или неравенствами, выражающими ограничения или «связи». Если условие невырожденности системы $F_i=0$ выполнено во всех точках М., то градиенты функций F_i образуют о с н а щ е н и е (k-репер, ортогональный к касательной плоскости в точке М. и непрерывно зависящий от этой точки). М., допускающие оснащение, образуют довольно узкий класс с т а б и л ь н о п а р а л л е л и з у е м ы х М. (напр., они имеют *ориентацию*). Но локально любое дифференцируемое М. в $\mathbb{R}^n$ может быть задано невырожденной системой, а с помощью разбиения единицы можно построить и систему постоянного (а не максимального) ранга, задающую М.

Для М., заданного атласом, возникает задача реализации его как подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ с учетом того или иного Г-строения. Любое топологическое, гладкое или кусочно линейное М. M в к л а д ы в а е т с я, т. е. Г-гомеоморфно подмногообразию, в $\mathbb{R}^{2n}$, а в $\mathbb{R}^{2n+1}$ множество вложений плотно в пространстве всех непрерывных отображений. Для других классов вопрос существенно сложнее. Интенсивно он изучается, напр., для римановых многообразий. *Алгебраические многообразия*, реализующиеся в комплексном проективном пространстве (заменяющем здесь $\mathbb{R}^n$), составляют очень специальный класс *Ходжа многообразий*. Если допускать вырожденность системы уравнений, то возникают М. с о с о б е н н о с т я м и. В алгебраич. геометрии обе идеи комбинируют: *алгебраическое пространство* определяется склейкой частей, к-рые локально задаются полиномиальными системами с вырождениями. В теории кобордизмов в топологии под названием М. с особенностями рассматривают пространства, устроенные локально как произведения конусов над М. Дальнейшие обобщения связаны с рассмотрением непрерывных семейств М. (см. *Расслоенное пространство*, *Слоение*, *Стратификация*).

Изучение М. чисто топологическими методами чрезвычайно сложно и до последнего времени оно ограничивалось локальными свойствами М., т. е. в сущности свойствами $\mathbb{R}^n$ (*непрерывное разбиение*, *дикое вложение* и пр.). Глобальное изучение М. и по необходимости требует привлечения или гомологических и других средств алгебраической топологии, или гладких, кусочно линейных и иных строений. Основное гомологическое свойство М.— Пуанкаре двойственность, сохраняющаяся и для *гомологических многообразий* и служащая для таких обобщений понятия М. как Пуанкаре комплексы. Гомологическую природу имеет и степень отображения, фундаментальное понятие, определяемое также для п с е в д о м н о г о о б р а з и й — пространств (обычно, комплексов), обладающих открытыми связными плотными подмножествами, являющимися М.

Геометрическое изучение М., основанное на использовании различных строений, исходит прежде всего из локальной эквивалентности М. с $\mathbb{R}^n$ и из возможности благодаря этому аппроксимации отображений гладкими или кусочно линейными, приведения их в общее положение и пр. Начальной задачей здесь является пред-

ставление М. в виде пространства, склеенного из простых кусков. Первоначальной идеей было понятие *триангуляции* М., развившееся в широкое понятие *комплекса*. Трудные проблемы триангулируемости и эквивалентности триангуляций были прояснены в 60—70-х гг. 20 в. (см. *Топология многообразий*). Более гибким инструментом оказалось разбиение М. на ручки, эквивалентное рассмотрению функций Морса. С помощью техники постепенного упрощения такого разбиения были доказаны важные теоремы (об h-кобордизме, обобщенная *Пуанкаре гипотеза* и др.). Эта техника послужила также геометрич. основой для теорем классификации гладких и кусочно линейных строений на заданном гомотопич. типе М. Эти теоремы потребовали, однако, привлечения тонких инвариантов, связанных с касательным расслоением М. (см. ниже). Большое значение имело также открытие новых гомологич. теорий: *К-теории* и особенно теорий *кобордизмов*. Два М. кобордантны, если они вместе ограничивают третье М. При этом учитывается тот или иной тип строения. Это отношение эквивалентности легло в основу первоначального определения гомологий, когда циклы рассматривались наивно как кусочно гладкие М. В теории кобордизмов эта идея восстанавливается, но подмногообразия заменяются отображениями М. Особую роль в вопросах классификации строений на М. играет фундаментальная группа, благодаря к-рой устанавливается связь этих вопросов с алгебраической К-теорией.

Важнейший инвариант гладкого М. M — его касательное расслоение τM. Предметом анализа на М. служит изучение сечений τM и различных ассоциированных с ним расслоений. С топологической точки зрения τM характеризуется существованием *экспоненциального отображения* $\exp : \tau M \to M$, диффеоморфно отображающего малые шары в слоях $\tau_x M$ на окрестности соответствующих точек $x \in M$. Его можно описать как проекцию трубчатой окрестности диагонали в $M \times M$ на сомножитель. В такой форме определение τM переносится на топологический, кусочно линейный и др. случаи (см. *Микрорасслоение*).

Различные редукции структурной группы касательного расслоения наз. с т р у к т у р а м и на М. Если можно подобрать атлас такой, что матрицы Якоби его координатных переходов принадлежат уменьшенной структурной группе и определяют тем самым эту редукцию, то такая структура наз. и н т е г р и р у е м о й. Вопросы классификации структур и их интегрируемости относятся к основным вопросам *дифференциальной геометрии многообразий*. В топологии М. вопрос о классификации гладких, кусочно линейных и иных строений сводится в основном к классификации соответствующих структур на касательном расслоении и приводится тем самым к гомотопич. задачам.

Важная роль касательного расслоения состоит в том, что с ним инвариантно связываются когомологич. классы (см. *Характеристический класс*) в той или иной гомологической теории, несущие в себе наиболее существенную информацию о глобальном строении М. и связывающие свойства различных строений и структур на М. с его топологическими свойствами.

Исследование топологии М. в этом направлении до 70-х гг. было по-существу использованием гладких и кусочно линейных строений на М. (точнее, на *гомотопическом типе* М.). Переход к чисто топологическим результатам стал возможным лишь после доказательства трудных и глубоких теорем, начиная с доказательства топологической инвариантности характеристических (рациональных) классов (см. *Топология многообразий*). В конце 70-х г. с этим направлением слилось и упомянутое выше направление чисто топологического изучения М. Ярким примером служит доказательство гипотезы о том, что двойная *надстройка* над гомологи-

ческой трехмерной сферой есть многообразие (сфера). Это позволило дать топологическую характеризацию М. (известную до этих пор лишь для одномерных многообразий и *двумерных многообразий*), прояснить вопрос о том, какие полиэдры являются М. (препятствием здесь служит лишь недоказанная пока (1982) *Пуанкаре гипотеза* в размерностях 3 и 4) и др., см. *Топология многообразий* и [19].

Исторический очерк. Начальный период изучения М. связан с анализом понятия многомерной параметризации, с исследованиями по геометрии физич. мира (земной поверхности) и по геометрич. аксиоматике. Два способа задания М. в $\mathbb{R}^n$ (локальная параметризация и уравнения) были рассмотрены впервые К. Гауссом (K. Gauss, см. [1] с. 127) для случая поверхностей в $\mathbb{R}^3$, а в многомерном случае А. Пуанкаре (H. Poincaré, см. [3], с. 459). Ю. Плюккер [5] изучал локальные координаты в М., составленных из кривых, поверхностей и т. п. Г. Грассман пришел в [6] к общей идее «многомерной протяженности», к-рая была под названием «многообразие» введена в математику Б. Риманом (B. Riemann) в его знаменитой лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (см. [1] с. 30). Свойства различных специальных координат изучались К. Якоби (C. Jacobi), Г. Ламе (G. Lamé) и др. (см. [8]).

К. Гаусс (см. [1] с. 123) начал в связи со своими работами по геодезии систематич. изучение поверхностей, введя понятие внутренней геометрии и тем самым о М., не зависящем от объемлющего числового пространства, и фактически понятие структуры на М. Его идеи были вполне поняты лишь в теории характеристич. классов, построенной в середине 20 в. Б. Риман перенес идеи К. Гаусса на многомерные М. На основе римановой геометрии был создан трудами Риччи, Леви-Чивита, Кристоффеля и др. тензорный анализ, дальнейшее развитие к-рого шло в тесной связи с теорией относительности. Другая геометрическая линия развития понятия М. берет начало в открытии возможности неевклидовых геометрий и в построении геометрии на основе понятия движения (Г. Гельмгольц, H. Helmholtz, см. [1] с. 366). Эта идея была превращена в широкую программу теоретико-группового построения геометрии Ф. Клейном (F. Klein, см. [1] с. 399 и [8]) и привела к глубоким работам С. Ли (S. Lie) по теории непрерывных групп. Линия Гельмгольца — Клейна — Ли долгое время оставалась в стороне от линии Гаусса — Римана — Риччи, заимствовав у нее понятие кривизны, но интересуясь лишь *Клейна пространствами*. Однако здесь были поставлены важные вопросы о глобальном строении групп Ли и их однородных пространств и тем самым привлечено внимание к глобальному строению М. Важным фактом было произведшее глубокое впечатление открытие Клейном *эллиптической геометрии*, локально эквивалентной сферической, но глобально имеющей существенно иные свойства, а также открытие Мёбиусом и Клейном явления неориентируемости.

Синтез обоих направлений произошел в работах Э. Картана (E. Cartan, см. [1] с. 483). Отправляясь от исследований Г. Дарбу (G. Darboux) по теории поверхностей, он рассмотрел *подвижного репера метод* для произвольного М. в $\mathbb{R}^n$ и пришел к теории уравнений структуры — далекого обобщения теории Дарбу, включившего в себя теорию С. Ли. В картановском понятии G-структуры соединились идеи римановой геометрии и теории действия групп Ли. По существу Э. Картан ввел понятие касательного расслоения и его структурной группы, окончательно оформленного лишь в 40-х гг. 20 в. (см. [13]). Это понятие позволило также объединить математич. анализ на М. с топологич. изучением М. Основой послужил изоморфизм де Рама (см. *Рама теорема*) — окончательное оформление принад-

лежащей Пуанкаре идеи (см. [3] с. 472) о связи между вещественными когомологиями и дифференциальными формами. Важнейшим следующим шагом было введение характеристических классов и их выражение как интегралов от форм, выражающихся через форму кривизны (примером здесь служит выражение эйлеровой характеристики в теореме Гаусса — Бонне в форме Дика, см. [14] с. 186).

Топологическое изучение М. началось с открытия *римановых поверхностей* в связи с представлением комплексно аналитических функций интегралами как попытка избавиться от многозначности этих функций. «Периоды» интегралов привели к понятию чисел связности и в конечном счете к гомологиям. Мысль о многомерном обобщении этого понятия и идея о глобальном гомологическом изучении М. принадлежит Риману (см. [2] с. 294). Это изучение было начато А. Пуанкаре, сделавшим ряд важных открытий и доказавшим *Пуанкаре двойственность*. Стимулирующую роль имело последовавшее за открытием Римана изучение двумерных многообразий (в первую очередь Мёбиусом и К. Жорданом, см. [14] с. 244), приведшее к полной их классификации. Окончательно это оказалось возможным проделать лишь после прояснения понятия «чистого» гомеоморфизма (А. Пуанкаре, например, пользовался в сущности кусочно гладкими гомеоморфизмами). Это прояснение явилось одним из итогов анализа непрерывности числового континуума, предпринятого в конце 19 в. Наибольшее значение имели в этом направлении постановка 5-й проблемы Гильберта и работы Л. Брауэра (L. Brouwer, [9]), доказавшего теоремы (инвариантность области, инвариантность размерности), к-рые позволили Г. Вейлю [4] сформулировать приятие топологич. М. Однако в высших размерностях топологическое изучение М. долгое время велось в рамках гладких и кусочно линейных строений. Гладкие строения, введенные в книге [20], были проанализированы в основном Х. Уитни [21], а также Г. Уайтхедом и др. Кусочно линейные структуры были введены Л. Брауэром и проанализированы Дж. Александером [22] и также М. Ньюменом (M. Newman) и Г. Уайтхедом. Долгое время они рассматривались лишь как вспомогательное средство топологического изучения М. Лишь в конце 50-х гг. была открыта неединственность гладких строений уже на сферах и в конце 60-х гг. возможность неединственности кусочно линейных строений (например, на торах). После 50-х гг. 20 в. изучение М. проходило под знаком объединения идей топологии и анализа, основанного в первую очередь на понятии характеристич. классов (см. [17]).

Лит.: [1] **Об основаниях геометрии**, М., 1956; [2] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948; [3] Пуанкаре А., Избр. тр., пер. с франц., т. 2, М., 1972; [4] Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche, 3 Aufl., Stuttg., 1955; [5] Pluecker J., Neue Geometrie des Raumer . . ., Abt. 1—2, Lpz., 1868—69; [6] Grassmann H., Die Ausdehnungslehre von 1844, Lpz., 1894; [7] Kronecker L., «Monatsber. Preuss. Akad. Wiss.», 1869, S. 159—226; [8] Клейн Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.— Л., 1939; [9] Brouwer L. E. J., «Math. Ann.», 1911, Bd 70, S. 161—65; 1911, Bd 71, S. 97—115; 1912, Bd 72, S. 55—6; [10] Weyl H., Mathematische Analyse des Raumproblems, B., 1923; [11] Стинрод Н. Е., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [12] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948; [13] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [14] Хирш М., Дифференциальная топология, пер. с англ., М., 1979; [15] Манкрс Дж., в кн.: Милнор Дж., Сташеф Дж., Характеристические классы, пер. с англ., М., 1979, с. 270—358; [16] Nijenhuis A., Theory of the geometric object, Amst., 1952; [17] Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1973; [18] Сулливан Д., Геометрическая топология, пер. с англ., М., 1975; [19] Cannon J. W., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 84, № 5, p. 832—66; [20] Веблен О., Уайтхед Дж., Основания дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1940; [21] Whitney H., «Ann. Math.», 1936, v. 37, p. 645—80; [22] Alexander J. W., «Trans. Amer., Math. Soc.», 1926, v. 28, p. 301—29.

См. также лит. при статьях *Дифференциальная гео-*

метрия многообразий, Дифференциальная топология, Дифференцируемое многообразие. *А. В. Чернавский.*

МНОГООБРАЗИЕ категорий — понятие, аналогичное понятию многообразия универсальных алгебр. Пусть $\mathfrak{K}$ — бикатегория с произведениями. Полная подкатегория $\mathfrak{M}$ категории $\mathfrak{K}$ наз. многообразием, если она удовлетворяет следующим условиям: а) если $\mu: A \to B$ — допустимый мономорфизм и $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$, то $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$; б) если $\nu: A \to B$ — допустимый эпиморфизм и $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$, то $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$; в) если $A_i \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$, $i \in I$, то $A = \prod_{i \in I}^{x} A_i \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$.

Если бикатегория $\mathfrak{K}$ локально мала слева, т. е. допустимые подобъекты любого объекта образуют множество, то всякое М. является рефлективной подкатегорией категории $\mathfrak{K}$. Это значит, что функтор вложения $\mathrm{Id}_{\mathfrak{M},\,\mathfrak{K}}: \mathfrak{M} \to \mathfrak{K}$ обладает сопряженным слева функтором $S: \mathfrak{K} \to \mathfrak{M}$. Единица этого сопряжения — естественное преобразование $\varepsilon: \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \to T = S\mathrm{Id}_{\mathfrak{M},\,\mathfrak{K}}$ обладает тем свойством, что для каждого $A \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$ морфизм $\varepsilon_A: A \to T(A)$ является допустимым эпиморфизмом. Во многих важных случаях функтор T оказывается точным справа, т. е. он переводит коядро ν пары морфизмов $\alpha, \beta: A \to B$ в коядро пары морфизмов $T(\alpha)$, $T(\beta)$, если (α, β) — ядерная пара морфизма ν. Более того, точность справа и наличие естественного преобразования $\varepsilon: \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \to T$ являются характеристич. свойствами функтора T.

Всякое М. наследует многие свойства объемлющей категории. Оно снабжается структурой бикатегории и является биполной категорией, если исходная категория биполна.

В категориях с нормальными кообразами, как и в случае многообразий групп, можно определить произведение М. Строение возникающего при этом группоида М. изучено только в ряде частных случаев.

Лит.: [1] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974; [2] Fröhlich A., «Quart. J. Math.», 1960, v. 11, № 43, p. 211—28. *М. Ш. Цаленко.*

МНОГОСВЯЗНАЯ ОБЛАСТЬ линейно связного пространства — область D, в к-рой существуют замкнутые пути, не гомотопные нулю, или, иначе говоря, *фундаментальная группа* к-рой не тривиальна. Это означает, что в D существуют замкнутые пути, к-рые нельзя непрерывно деформировать в точку, оставаясь все время в М. о. D, или, иначе, М. о. D — это область, не являющаяся *односвязной областью*.

Порядком связности плоской области D пространства $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ (или компактификаций этих пространств $\overline{\mathbb{R}}$ или $\overline{\mathbb{C}}$) наз. число (гомологически) независимых одномерных циклов, т. е. одномерное *Бетти число* p^1 области D. Если число k связных компонент границы плоской области D, рассматриваемой как область компактифицированного пространства $\overline{\mathbb{R}^2}$ или $\overline{\mathbb{C}}$, конечно, то $p^1 = k$, в противном случае полагают $p^1 = \infty$. В случае $p^1 = 1$ D есть односвязная область, в случае $p^1 < \infty$ — конечносвязная область (применяются также термины двусвязная область, трехсвязная область, ..., k-связная область), в случае $p^1 = \infty$ D — бесконечносвязная область. Все плоские конечносвязные области, порядки связности k к-рых равны, гомеоморфны между собой. Удаляя из такой области D все точки $k-1$ разрезов, т. е. жордановых дуг, соединяющих попарно связные компоненты границы, всегда можно получить односвязную область $D^* \subset D$. О конформных типах плоских М. о. см. ст. *Римановых поверхностей конформные классы.*

Топологич. типы областей пространств $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, или $\mathbb{C}^m$, $m \geqslant 2$, гораздо более разнообразны и не могут быть охарактеризованы каким-либо одним числом. При этом

иногда термин «*М. о.*» (с различными оговорками) употребляется и в тех случаях, когда фундаментальная группа тривиальна, но не тривиальна какая-либо из групп гомологии высшей размерности. *Е. Д. Соломенцев.*

МНОГОУГОЛЬНИК — 1) Замкнутая ломаная линия, *именно: если* A_1, A_2, ... , A_n — различные точки, никакие последовательные три из к-рых не лежат на одной прямой, то совокупность отрезков $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ... , $[A_nA_1]$ наз. многоугольником (см. рис. 1). М. могут быть пространственными или плоскими (ниже рассматриваются плоские М.).

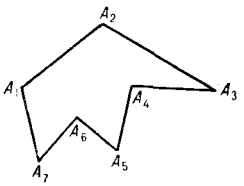


Рис. 1.

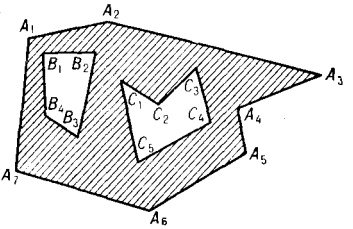


Рис. 2.

2) Связная (многосвязная) область, граница к-рой состоит из конечного числа отрезков и является замкнутой ломаной линией (или состоит из нескольких замкнутых ломаных, в этом случае М. иногда наз. многоугольной фигурой, см. рис. 2). Многоугольник в смысле первого определения наз. одномерным М., а в смысле второго определения — двумерным М.

Вершины ломаной линии (точки A_i) наз. вершинами М., отрезки $[A_iA_{i+1}]$ — его сторонами. Две стороны, имеющие общую вершину, наз. смежными, а две вершины ломаной — концы одного отрезка ломаной — наз. смежными вершинами М. Если граница М. является простой ломаной линией, так что несмежные ее стороны не имеют общих точек (внутренних или концевых), то М. наз. простым. Если граница двумерного М. не является простой, то она наз. самопересекающейся (рис. 3) (самопересекающийся М. в смысле первого определения). В этом случае М. является объединением простых М. Самопересекающаяся ломаная линия делит плоскость на определенное число кусков, один из к-рых — бесконечный. Если в качестве границы М. рассматриваются и лучи, то определяется бесконечный М., имеющий своей границей конечное число отрезков и лучей.

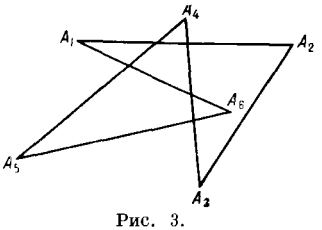


Рис. 3.

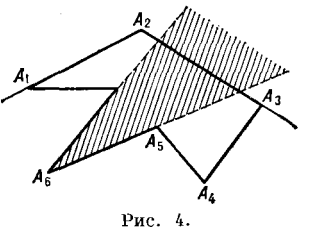


Рис. 4.

Всякий простой М. (или граница простого М.) делит плоскость на внутреннюю (конечную) и внешнюю (бесконечную) области (теорема Жордана). Простой М. может иметь весьма сложное строение границы. Для выяснения принадлежности какой-либо точки внешней или внутренней области достаточно провести из этой точки луч, не проходящий через вершины М.: если число пересечений луча с границей М. четное, то исследуемая точка лежит во внешней области, если нечетное — во внутренней.

Угол, образованный лучами, имеющими начало в некрой вершине М. и содержащими обе смежные стороны этой вершины, наз. внутренним углом (уг-

лом) М., если этот угол имеет непустое пересечение с внутренней областью М. и этому пересечению принадлежит рассматриваемая вершина М. (см. рис. 4). Сумма внутренних углов простого n-угольника равна $180°$ $(n-2)$. Простой М. имеет хотя бы один внутренний угол, меньший развернутого.

Прямая, проходящая через две несмежные вершины М., наз. диагональной, а отрезок с концами в несмежных вершинах М. наз. диагональю М.

М. наз. ориентируемым, если можно указать порядок обхода его вершин так, что конец одной стороны является началом следующей. Границу М. в этом случае наз. многоугольным (ориентированным) замкнутым путем на плоскости. Ориентированный простой двумерный М. при обходе границы всегда остается либо только слева от границы, либо только справа от нее; области М. с самопересекающейся границей могут оказаться по разные стороны от нее.

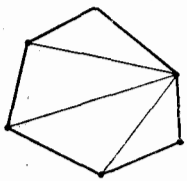


Рис. 5.

Простой М. наз. правильным (метрически правильным), если все его углы конгруэнтны между собой как конгруэнтны и все стороны (имеют равные длины). Около правильного М. можно описать окружность и можно вписать окружность в правильный М. Радиус вписанной окружности является апофемой правильного М. Правильные М. с одинаковым числом сторон подобны друг другу. В приведенной таблице указаны радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности и площадь нек-рых правильных многоугольников (a — длина стороны М.).

Число сторон	Радиус описанной окружности	Радиус вписанной окружности	Площадь
3	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
4	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	a^2
5	$\frac{a}{10}\sqrt{10(5+\sqrt{5})}$	$\frac{a}{10}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$
6	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
8	$\frac{a}{2}\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$	$\frac{a}{2}(1+\sqrt{2})$	$2a^2(1+\sqrt{2})$
10	$\frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

М. наз. выпуклым, если он располагается по одну сторону относительно прямой, содержащей любую сторону М. Выпуклый М.— всегда простой. Правильный М. является выпуклым. В выпуклом М. число диагоналей равно $\frac{1}{2}n(n-3)$ (n — число сторон), из каждой вершины можно провести $n-3$ диагоналей, к-рые делят М. на $n-2$ треугольников (рис. 5).

Угол, смежный с внутренним углом выпуклого М., наз. внешним. Сумма внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, выпуклого М. составляет полный угол ($360°$). Внешний угол наз. поворотом границы М. в вершине.

Самопересекающийся М., все стороны к-рого конгруэнтны и все углы конгруэнтны, наз. звездчатым

(звездчато-правильным). Звездчатые М. существуют при числе сторон начиная с пяти, их можно рассматривать как определенную совокупность диагоналей правильного n-угольника.

Полуправильным наз. М., у к-рого конгруэнтны только все углы или конгруэнтны только все стороны. Полуправильный М. с четным числом вершин наз. равноугольно-полуправильным, если у него все углы конгруэнтны, а стороны конгруэнтны через одну (простейший пример — прямоугольник). Всегда существует окружность, проходящая через все вершины равноугольно-полуправильного М. Существуют также две окружности, из к-рых каждая касается сторон равноугольно-полуправильного М. через одну. Полуправильный М. с четным числом вершин наз. равносторонне-полуправильным, если все его стороны конгруэнтны, а углы конгруэнтны через один (простейший пример — ромб). В равносторонне-полуправильный М. можно вписать окружность так, что она будет касаться всех его сторон; существуют две окружности, из к-рых каждая проходит через вершины этого М., взятые через одну. Построение равноугольно-полуправильных и равносторонне-полуправильных М. осуществляется с помощью правильных М.

Правильный М. может быть построен циркулем и линейкой в случае, если число его сторон $n=2^m p_1 p_2 \dots p_\kappa$, где p_i — целые простые различные числа вида $p=2^{2^\sigma}+1$, σ — целое положительное число (теорема Гаусса). Известны пять чисел указанного вида: 3, 5, 17, 257, 65537. Никакие другие правильные М. не могут быть построены циркулем и линейкой. Таким образом, можно построить циркулем и линейкой правильные n-угольники, если $n=3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 32, 34, \dots$, и нельзя построить циркулем и линейкой, если $n=7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, \dots$. Задача построения правильного n-угольника эквивалентна задаче деления окружности на n равных частей.

Построение звездчатых n-угольников осуществляется также с помощью деления окружности на равные части: если соединить отрезками делящие точки окружности через каждые p делений (p — целое число, взаимно-простое с n, $p<n$), то получается звездчатый n-угольник. Напр., при $n=15$ существуют 3 различные звездчатые 15-угольники. На рис. 6 изображены правильные и звездчатые М. для $n=3, 4, 5, 6, 7$.

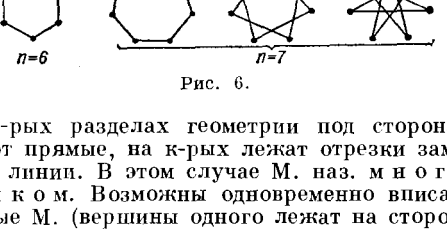


Рис. 6.

В век-рых разделах геометрии под сторонами М. понимают прямые, на к-рых лежат отрезки замкнутой ломаной линии. В этом случае М. наз. многосторонником. Возможны одновременно вписанные и описанные М. (вершины одного лежат на стороне другого) и даже одновременно описанные и вписанные сами в себя многосторонники (см., напр., *Конфигурация*).

Площадь любого М. может быть вычислена путем разложения на треугольники, квадраты и т. д. Площади ориентированного простого М. приписывается знак плюс, если при обходе границы внутренняя область остается слева, и минус, если область останется справа.

В случае, когда граница М. является многоугольным замкнутым самопересекающимся путем, делящим плоскость на куски, то площадь такого М. может быть опре-

делена с помощью т. н. коэффициента куска: если из нек-рой точки во внешней области М. провести отрезок в точку, лежащую внутри данного куска, и граница М. пересекает этот отрезок p раз слева направо и q раз справа налево, то $p-q$ наз. коэффициентом куска. Этот коэффициент не зависит от выбора указанных двух точек. Площадью ориентированного М. (площадью многоугольного пути) в этом случае является сумма площадей каждого куска, умноженных на соответствующий коэффициент куска.

Если на плоскости введена декартова прямоугольная система координат xOy, то площадь ориентированного М. вычисляется при помощи интеграла $\int y dx$, где y — ордината точек границы М., обходимой один раз. В полярных координатах (ρ, φ) площадь М. вычисляется при помощи интеграла $\frac{1}{2}\oint \rho^2 d\varphi$, где ρ пробегает один раз границу М.

М. может быть криволинейным, его граница состоит из конечного числа кусков кривых. Такие М. существуют и на кривых поверхностях. Если граница М. на поверхности состоит из кусков дуг геодезич. линий этой поверхности, то М. наз. геодезическим. В случае, когда М. ограничен отрезками асимптотич. линий поверхности, то М. наз. асимптотическим, и т. д. Для криволинейных М. определяется внутренний угол при вершине, к-рый связан с поворотом границы в вершине и составляет с ним развернутый угол (поверхности предполагаются регулярными). Простые М. на поверхности могут иметь всего две стороны и две вершины (напр., геодезич. двуугольник на сфере).

М. может быть определен и как нек-рый набор векторов, к-рые рассматриваются как радиус-векторы вершин М. (n — угольника), т. е. точка (вершина) сопоставляется с нек-рым вектором. Свойства n-угольника переводятся на язык векторной алгебры, что открывает возможность применения алгебраич. методов в исследовании классов М. Определяется, в частности, сумма М., произведение М. на нек-рое число из коммутативного поля (характеристика к-рого взаимно проста с числом вершин М.), циклич. классы n-угольников, циклич. отображения и их алгебра и т. п. На этом пути оказывается возможным устанавливать многие общие свойства n-угольников (см., напр., [3]).

М. определяется также и с помощью понятия *выпуклой оболочки*, к-рая является выпуклым М. Именно, фигура Ф наз. М., если ее можно разложить на выпуклые М.:

$$\Phi = \bigcup_i F_i, \quad F_i \cap F_j = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

где F_i — выпуклые М.

Лит.: [1] Перепелкин Д. И., Курс элементарной геометрии, ч. 1, М.— Л., 1948; [2] Адамар Ж., Элементарная геометрия, пер. с франц., 4 изд., ч. 1, М., 1957; [3] Бахман Ф., Шмидт З., n-Угольники, пер. с нем., М., 1973; [4] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4 — Геометрия, М., 1963.

Л. А. Сидоров.

МНОГОУГОЛЬНОЕ ЧИСЛО — см. *Арифметический ряд.*

МНОГОЧЛЕН, полином,— выражение вида

$$f(x, y, \ldots, w) = Ax^k y^l \ldots w^m + Bx^n y^p \ldots w^q + \ldots$$
$$\ldots + Dx^r y^s \ldots w^t,$$

где $x, y, \ldots, w$ — переменные, а $A, B, \ldots, D$ (коэффициенты М.) и $k, l, \ldots, t$ (показатели степеней — целые неотрицательные числа) — постоянные. Отдельные слагаемые вида

$$Ax^k y^l \ldots w^m$$

наз. членами М. Порядок членов, а также порядок множителей в каждом члене можно менять произвольно; точно так же можно вводить или опускать члены с

нулевыми коэффициентами, а в каждом отдельном члене — степени с нулевыми показателями. В случае, когда М. имеет один, два или три члена, его наз. одночленом, двучленом или трехчленом.

Относительно коэффициентов М. предполагается, что они принадлежат нек-рому *полю*, напр. полю рациональных, действительных или комплексных чисел.

Два члена М. наз. п о д о б н ы м и, если в них показатели степеней при одинаковых переменных попарно равны. Подобные между собой члены

$$A'x^k y^l \ldots w^m, \quad B'x^k y^l \ldots w^m, \ldots, D'x^k y^l \ldots w^m$$

можно заменить одним

$$(A' + B' + \ldots + D')\, x^k y^l \ldots w^m$$

(п р и в е д е н и е подобных членов). Два М. наз. равными, если после приведения подобных все члены с отличными от нуля коэффициентами оказываются попарно одинаковыми (но, может быть, записанными в разном порядке), а также если все коэффициенты этих М. оказываются равными нулю. В последнем случае М. наз. т о ж д е с т в е н н ы м н у л е м и обозначают знаком 0.

Сумму показателей степеней какого-либо члена М. наз. с т е п е н ь ю этого члена. Если М. не тождественный нуль, то среди членов с отличными от нуля коэффициентами (предполагается, что все подобные члены приведены) имеются один или несколько наибольшей степени; эту наибольшую степень наз. с т е п е н ь ю М. Тождественный нуль не имеет степени. М. нулевой степени сводится к одному члену A (постоянному, не равному нулю).

М. от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наз. *симметрическим многочленом*, если он не меняется ни при какой перестановке неизвестных. М., все члены к-рого одинаковой степени, наз. о д н о р о д н ы м м н о г о ч л е н о м, или ф о р м о й; формы первой, второй и третьей степеней наз. линейными, квадратичными, кубическими, а по числу переменных (два, три) — двоичными (бинарными), тройничными (тернарными) (напр., $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3$ есть тройничная квадратичная форма).

С т е п е н ь ю многочлена $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ по отношению к одному из переменных x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, наз. наивысший показатель, с к-рым x_i входит в члены этого М. (эта степень может быть и нулевой). Из двух членов М. тот считается выше (относительно данной нумерации переменных), у к-рого показатель при x_1 больше, а если эти показатели равны, то тот, у к-рого показатели при x_2 больше, и т. д. Если все члены М. расположены в таком порядке, что каждый следующий член ниже предыдущего, то говорят, что члены этого М. расположены л е к с и к о г р а ф и ч е с к и. Тот член, к-рый при этом стоит на первом месте, наз. в ы с ш и м ч л е н о м м н о г о ч л е н а. М. от одного переменного, члены к-рого расположены в лексикографич. порядке, имеет вид

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — коэффициенты.

К о р н е м м н о г о ч л е н а от одного неизвестного над полем k наз. решение *алгебраического уравнения*

$$f(x) = 0.$$

Корни М. связаны с его коэффициентами формулами Виета (см. *Виета теорема*).

Совокупность всевозможных различных М. от n переменных с коэффициентами из данного поля образует *кольцо* относительно естественным образом определяемых операций сложения и умножения. Рассматриваются также кольца М. от бесконечного множества переменных. *Многочленов кольца* являются ассоциа-

тивно-коммутативными кольцами **без делителей нуля** (т. е. произведение М., не равных 0, не может дать 0).

Если для двух многочленов P и Q можно найти такой многочлен R, что $P=QR$, то говорят, что P делится на Q; Q наз. делителем, а R — частным. Если P *не делится на* Q, *но оба* М. *содержат одно и то же* переменное, напр. x, и степень P по отношению к x есть n, а степень Q есть m и $n\geqslant m\geqslant 1$, то можно найти такие многочлены p, R и S, что $pP=QR+S$, причем p совсем не содержит x, а в S переменное x содержится в степени ниже m. В случае, когда x является единственным переменным, можно p считать равным 1; тогда операцию отыскания R и S по P и Q наз. делением с остатком; деление с остатком можно производить с помощью *Горнера схемы*.

Посредством повторного применения этой операции можно находить наибольший общий делитель P и Q, т. е. такой делитель P и Q, к-рый делится на любой общий делитель этих М. (см. *Евклида алгоритм*). Два М., наибольший общий делитель к-рых равен 1, наз. в з а и м н о п р о с т ы м и.

М., к-рый можно представить в виде произведения М. низших степеней с коэффициентами из данного поля, наз. п р и в о д и м ы м (в данном поле), в противном случае — н е п р и в о д и м ы м. Неприводимые М. играют в кольце М. роль, сходную с ролью простых чисел в кольце целых чисел. Напр., верна теорема: если произведение PQ делится на неприводимый многочлен R, а P на R не делится, то Q должен делиться на R. Каждый М., степени большей нуля, разлагается в данном поле в произведение неприводимых множителей единственным образом (с точностью до множителей нулевой степени). Напр., многочлен x^4+1, неприводимый в поле рациональных чисел, разлагается на два множителя в поле действительных чисел и на четыре множителя в поле комплексных чисел. Вообще, каждый М. от одного переменного x разлагается в поле действительных чисел на множители первой и второй степени, в поле комплексных чисел — на множители первой степени (*алгебры основная теорема*). Для двух и большего числа переменных этого уже нельзя утверждать. Над любым полем k для любого $n\geqslant 2$ существуют М. от n переменных, неприводимые в любом расширении поля k. Такие М. наз. а б с о л ю т н о н е п р и в о д и м ы м и. Напр., многочлен $x^3+yz^2+z^3$ неприводим в любом числовом поле.

Если переменным x, y, . . ., w придать определенные числовые значения (напр., действительные или комплексные), то М. также получит определенное числовое значение. Таким образом, каждый М. можно рассматривать как функцию соответствующих переменных. Эта функция непрерывна и дифференцируема при любых значениях переменных; ее можно характеризовать как ц е л у ю р а ц и о н а л ь н у ю ф у н к ц и ю, т. е. функцию, получающуюся из переменных и нек-рых постоянных (коэффициентов) посредством выполнения в определенном порядке действий сложения, вычитания и умножения. Целые рациональные функции входят в более широкий класс р а ц и о н а л ь н ы х ф у н к ц и й, где к перечисленным действиям присоединяется деление: любую рациональную функцию можно представить в виде частного двух М. Наконец, рациональные функции содержатся в классе *алгебраических функций*.

К числу важнейших свойств М. относится то, что любую непрерывную функцию можно с произвольно малой ошибкой заменить М. (см. *Вейерштрасса теорема*).

Специальные системы М.— *ортогональные многочлены* — используются в теории приближения как средство представления функций в виде рядов.

В элементарной алгебре М. иногда наз. такие алгебраич. выражения, в к-рых последним действием является сложение или вычитание.

Лит.: [1] Мишина А. П., Проскуряков И. В., Высшая алгебра. Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра, 2 изд., М., 1965; [2] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [3] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965.

А. И. Маркушевич.

МНОГОЧЛЕНОВ КОЛЬЦО — кольцо, элементами к-рого являются многочлены с коэффициентами из нек-рого фиксированного поля k. Рассматриваются также М. к. над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом R, напр. над кольцом целых чисел. М. к. от конечного множества переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над R принято обозначать через $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Можно говорить и о М. к. от любого бесконечного множества переменных, считая, что каждый отдельный многочлен зависит лишь от нек-рого конечного числа переменных. М. к. над кольцом R является (коммутативной) *свободной алгеброй* с единицей над R; множество переменных служит системой свободных образующих этой алгебры.

М. к. над произвольной областью целостности само является областью целостности. М. к. от любого конечного числа переменных над любым факториальным кольцом R само является факториальным.

Для М. к. над полем k от конечного числа переменных имеет место *Гильберта теорема* о базисе: всякий идеал в $k[x_1, \ldots, x_n]$ может быть порожден (как идеал) конечным числом элементов. Кольцо многочленов от одного переменного $k[x]$ является *главных идеалов кольцом*, т. е. любой его идеал может быть порожден одним элементом. Более того, $k[x]$ является *евклидовым кольцом*. Это свойство $k[x]$ дает возможность исчерпывающим образом описать конечно порожденные модули над ним и, в частности, привести к канонич. виду линейный оператор в конечномерном векторном пространстве (см. *Жорданова матрица*). При $n>1$ кольцо $k[x_1, \ldots, x_n]$ не является кольцом главных идеалов.

Пусть S — нек-рая ассоциативно-коммутативная k-алгебра с единицей, $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — элемент декартовой степени S^n, тогда существует единственный гомоморфизм М. к. от n переменных в S

$$\varphi_a : k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to S,$$

при к-ром $\varphi_a(x_i)=a_i$ для всех $i=1, \ldots, n$, а $\varphi_a(1)$ — единица S. Образ многочлена $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ при этом гомоморфизме наз. его значением в точке a. Точка $a \in S^n$ наз. нулем системы многочленов $F \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, если значение каждого многочлена из F в этой точке есть $0 \in S$. Для М. к. имеет место *Гильберта теорема* о нулях: пусть $\mathfrak{A}$ — идеал кольца $R=k[x_1, \ldots, x_n]$, M — множество нулей идеала $\mathfrak{A}$ в $\bar{k}^n$, где $\bar{k}$ — алгебраич. замыкание поля k, g — многочлен из R, обращающийся в нуль во всех точках из M, тогда существует натуральное число m такое, что $g^m \in \mathfrak{A}$.

Пусть A — произвольный модуль над кольцом $R=k[x_1, \ldots, x_n]$. Тогда существуют свободные R-модули $X_0, X_1, \ldots, X_n$ такие, что последовательность гомоморфизмов

$$\{0\} \leftarrow A \leftarrow X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \ldots \leftarrow X_n \leftarrow \{0\}$$

точна, т. е. ядро предыдущего гомоморфизма является образом последующего. Это утверждение — одна из возможных формулировок *Гильберта теоремы* о сизигиях для М. к.

Конечно порожденный проективный модуль над М. к. от конечного числа переменных с коэффициентами из кольца главных идеалов свободен (см. [5], [6]); это есть решение проблемы Серра.

Лишь в нек-рых частных случаях имеются ответы на следующие вопросы: 1) не порождается ли группа

автоморфизмов М. к. элементарными автоморфизмами; 2) не порождается ли $k[x_1, \ldots, x_n]$ произвольным множеством $f_1, \ldots, f_n$ таким, что $\det\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\|$—ненулевая константа; 3) если $S \otimes k[y]$ изоморфно $k[x_1, \ldots, x_n]$, не будет ли S изоморфно $k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$?

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [3] Hilbert D., «Math. Ann.», 1893, Bd 42, S. 313—73; [4] его же, «Math. Ann.», 1890, Bd 36, S. 473—534; [5] Суслин А. А., «Докл. АН СССР», 1976, т. 229, с. 1063—66; [6] Quillen D., «Invent. math.», 1976, v. 36, p. 167—71.

Ю. А. Бахтурин.

МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА — экстремальная задача, имеющая несколько или неизвестное число локальных экстремумов.

Проблема отыскания глобального экстремума $f(x)$, $x=(x^1, \ldots, x^n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, решена для основных классов унимодальных функций (прежде всего для выпуклых и родственных им, см. *Выпуклое программирование*). Для мультимодальных функций, даже для гладких и медленно меняющихся, в настоящее время (1982) отсутствуют методы достоверного вычисления глобального экстремума за исключением сканирования по траекториям, образующим всюду плотное множество в допустимом множестве X. На практике трудоемкое сканирование комбинируют с алгоритмами поиска локального экстремума: с помощью сканирования и априорных сведений об $f(x)$ (оценок производных, функциональных уравнений и неравенств и др.) оконтуривается область притяжения каждого локального экстремума и мертвые зоны, где конкретный локальный алгоритм теряет эффективность (напр., для градиентного метода мертвыми зонами являются окрестность седловой точки и «дно оврага»). Затем экстремумы оцениваются или ищутся с помощью локальных методов и сравниваются между собой.

Для функций, удовлетворяющих условию Липшица

$$(\forall x,\ x' \in X)\ (\exists l < \infty) \mid f(x) - f(x') \mid \leqslant l \| x - x' \|,$$

наиболее универсальным является метод покрытий (перебор на неравномерной сетке), к-рый к тому же легко реализуем в многомерном случае.

Для нахождения локальных экстремумов, близких к глобальному, в приложениях используются эмпирические «эвристические» способы, к-рые можно назвать квазиглобальными:

1. Алгоритмы типа *тяжелого шарика метода* или овражных методов (см. *Овражных функций методы минимизации*), способные «проскакивать» через нек-рые локальные экстремумы или «огибать» области их притяжения.

2. Случайный перебор значений $f(x)$ с помощью *Монте-Карло метода*.

3. Модификация локальных методов путем введения стохастич. параметров. Напр., траектория рандомизированного градиентного метода

$$\dot{x} = \pm \nabla f(x) + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — случайный процесс типа белого шума, при нек-рых условиях способна попадать из точки локального в точку глобального экстремума.

4. «Огрубление» функции путем ее аппроксимации последовательностью унимодальных функций. Аппроксимация может производиться по значениям $f(x)$ в нек-рых точках, разложением по параметрам, входящим в аналитич. выражение функции, мажорантами или минорантами и т. п.

5. Поиск локального экстремума осредненной функции $\overline{f(x)}$ (скользящее среднее)

$$\overline{f(x)} = \int_X p(x, \xi) f(\xi)\, d\xi, \qquad p(x, \xi) \geqslant 0; \quad \int_X p(x, \xi)\, d\xi = 1. \tag{1}$$

Примеры:

1. $\overline{f(x)} = \frac{1}{2T}\int_{x-T}^{x+T} f(\xi)\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad x \pm T \in X.$

2. $\overline{f(x)} = \int_X e^{-(x-\xi)^2} f(\xi)\,d\xi \Big/ \int_X e^{-(x-\xi)^2}\,d\xi, \quad x \mp \xi \in X.$

Физич. смысл такого усреднения заключается в «сглаживании» исходной функции и «отфильтровании» от нее колеблющихся слагаемых.

Если $\overline{f(x)} \cong \text{const}\,(x)$ (быстроосциллирующая функция $f(x)$), то перед усреднением исходную функцию можно «продетектировать» с помощью нелинейного преобразования, напр.

$$\overline{\overline{f(x)}} = \int_X p(x, \xi)\,|f(\xi)|\,d\xi. \qquad (2)$$

В качестве взвешивающей при усреднении функции $p(x, \xi)$ можно взять и

$$p_n(x, \xi) = \frac{|f(x-\xi)|^n}{\int_X |f(x)|^n\,dx}, \quad n \geqslant 0,$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{M\ X} |f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\int_X |f(x)|^n\,dM_x}{\int_X dM(x)}}.$$

Последнее соотношение возможно также использовать для получения оценок существенных максимума и минимума.

Формулы (1) и (2) можно интерпретировать как формулы математич. ожиданий для функции случайной величины ξ, распределенной с плотностью вероятностей $p(x, \xi)$. Поэтому данную М. з. можно трактовать как задачу *стохастического программирования* и применять к ней его методы.

После нахождения экстремума аппроксимирующей или усредненной функции (о б з о р н ы й п о и с к) можно произвести в окрестности найденной точки д е т а л ь н ы й п о и с к экстремума исходной функции $f(x)$.

Глобальную оптимизацию отдельных функций можно произвести с помощью частных специфич. приемов. Напр., построить такую динамич. систему, для к-рой точка глобального экстремума является асимптотически устойчивой точкой покоя.

Одним из источников идей новых методов (квази) глобальной оптимизации является моделирование процессов в физических и биологических системах.

Громоздкие вычислительные процессы нелокального поиска можно оптимизировать по ряду показателей с учетом ограничений на вычислительные средства, априорной и последовательно накапливаемой информации об исследуемой функции $f(x)$, вероятностных характеристиках случайных факторов и пр. Один из подходов, к-рые здесь пытаются применить, основан на теории статистич. решений.

Помимо отыскания глобального экстремума возникают и иные М. з., напр. определение колебания функции, перечисление и отыскание всех локальных экстремумов в заданной области.

Для многочленов разработаны весьма эффективные правила подсчета и отделения корней производных.

Для точек экстремума трансцендентных функций здесь могут быть полезны соображения типа *Ролля теоремы* или *сравнения теорем* для решений дифференциальных уравнений.

Число стационарных точек аналитич. функции может быть оценено с помощью *аргумента принципа*.

Если функция имеет бесконечную последовательность экстремумов, то на практике вычисляется непосредственно несколько из них, а остальные — с помощью асимптотич. разложения (напр., Г-функция).

Квазиклассич. приближение для дифференциальных уравнений можно рассматривать как асимптотич. разложение решения уравнения по числу его экстремумов.

О М. з. в бесконечномерном случае см. *Вариационное исчисление в целом*. Дискретные аналоги освещены в ст. *Целочисленное программирование* и *Дискретное программирование*.

Лит. см. при ст. *Максимизация и минимизация функций*.

Ю. П. Иванилов, В. В. Охрименко.

МНОЖЕСТВ КАТЕГОРИЯ — категория, объектами к-рой являются всевозможные множества, морфизмами — всевозможные отображения множеств друг в друга, и умножение морфизмов определяется как последовательное выполнение отображений $\alpha : A \to B$ и $\beta : B \to C$. Если теоретико-категорные рассмотрения проводятся внутри фиксированного *универсального множества* U, то под М. к. понимают категорию, объектами к-рой являются всевозможные множества, принадлежащие U, а морфизмы и их умножение вводятся, как и выше. М. к. обозначают либо $\mathfrak{S}$, либо Ens, либо St, либо Me.

Пустое множество $\varnothing$ является левым нулем (инициальным объектом), а одноэлементное множество — правым нулем (терминальным объектом) М. к. Всякое непустое множество является образующим объектом, всякое множество, содержащее не менее двух элементов,— кообразующим (коинтегральным) объектом М. к. Всякий мономорфизм с непустым началом есть обратимое справа инъективное отображение, всякий эпиморфизм есть обратимое слева сюръективное отображение. М. к. обладает единственной бикатегорной структурой.

М. к. является локально малой биполной категорией. В частности, произведение семейства множеств совпадает с декартовым произведением этого семейства, копроизведение семейства множеств совпадает с разъединенным объединением этого семейства. Декартово произведение, рассматриваемое как бифунктор, Hom-функтор $H : \mathfrak{S}^* \times \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ и одноэлементное множество снабжают М. к. структурой *замкнутой категории*. Всякая категория относительная категория над М. к. Двухэлементное множество снабжает М. к. дополнительной структурой (абстрактного) *топоса*.

Категория $\mathfrak{N}$ тогда и только тогда эквивалентна М. к., когда в $\mathfrak{N}$ имеется формально присоединенный левый нуль Λ, а полная подкатегория $\mathfrak{N} \setminus \Lambda$ является категорией с регулярными кообразами с унарным образующим объектом, для каждого объекта A к-рой существует произведение $A \times A$ и каждое отношение эквивалентности

$$(\mu),\ \mu = \mu\pi_1\ (\times)\ \mu\pi_2 : R \longrightarrow A \times A\ (\pi_1, \pi_2)$$

индуцировано ядерной парой $(\mu\pi_1, \mu\pi_2)$ нек-рого морфизма. Объект U наз. у н а р н ы м, если существуют любые копроизведения

$$\Pi^*_{i \in I} U_i,\quad U_i = U,$$

и если всякий морфизм

$$\alpha : U \longrightarrow \Pi^*_{i \in I} U_i\,(\sigma_i)$$

представим в виде $\alpha = \alpha' \sigma_i$ для единственного i. О других характеризациях М. к. см. [2], [3].

Категории, изоморфные подкатегориям М. к., наз. к о н к р е т н ы м и. О необходимых и достаточных условиях конкретности категории см. [1].

Лит.: [1] F r e y d P., «J. Pure and Appl. Algebra», 1973, v. 3, № 2, p. 171—91; [2] L a w v e r e F. W., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1964, v. 52, № 6, p. 1506—11; [3] С к о р н я к о в Л. А., «Матем. сб.», 1969, т. 80, № 4, с. 492—502.

М. Ш. Цаленко.

МНОЖЕСТВ ТЕОРИЯ н а и в н а я — учение о свойствах множеств, преимущественно бесконечных, э л и м и н и р у ю щ е е свойства элементов, составляющих эти множества. Понятие множества принадлежит к

числу первоначальных математич. понятий и может быть пояснено только при помощи примеров. Так, можно говорить о множестве людей, живущих на нашей планете в данный момент времени, о множестве точек данной геометрич. фигуры, о множестве решений данного дифференциального уравнения. Люди, живущие на нашей планете в данный момент времени, точки данной геометрич. фигуры, решение данного дифференциального уравнения являются элементами соответствующего множества. Множество A считается заданным, если указано характеристич. свойство элементов этого множества, т. е. такое свойство, к-рым обладают все элементы этого множества и только они. Одним из основных понятий М. т. является понятие принадлежности элемента множеству. В качестве обозначения того, что предмет a принадлежит множеству A, пишут $a \in A$. (Если a не принадлежит A, то пишут $a \overline{\in} A$, $a \notin A$.) Может случиться, что характеристич. свойством, определяющим множество A, не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что множество A пустое и пишут $A = \varnothing$. Напр., множество действительных решений уравнения $x^2 = -1$ пустое. Если каждый элемент множества A является в то же время элементом множества B, то множество A наз. п о д м н о ж е с т в о м множества B и пишут $A \subset B$. Если одновременно выполнено $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что множества A и B р а в н ы и пишут $A = B$. О б ъ е д и н е н и е м $A \cup B$ множеств A и B наз. множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B. П е р е с е ч е н и е м $A \cap B$ множеств A и B наз. множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B. Операции объединения и пересечения коммутативны, ассоциативны и взаимно дистрибутивны. Например, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Во многих разделах М. т. рассматриваются только такие множества, к-рые содержатся в нек-ром фиксированном множестве X. Если A — подмножество X и P — свойство, характеризующее элементы из A, то пишут $A = \{x \in X: P(x) \text{ — истина}\}$. Напр., если X — множество всех действительных чисел, а A — подмножество положительных чисел, то $A = \{x \in X: x > 0\}$. Если $A \subset X$, то множество $X \setminus A = \{x \in X : x \overline{\in} A\}$ наз. д о п о л н е н и е м множества A. Операции объединения, пересечения и дополнения связаны т. н. з а к о н а м и д е М о р г а н а. Напр., $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$. Раздел М. т., к-рый занимается исследованием операций над множествами (не только конечных, но и бесконечных операций), наз. а л г е б р о й м н о ж е с т в. Алгебра множеств в свою очередь является частным случаем теории *булевых алгебр*.

М. т. была создана работами математиков 19 в., к-рые ставили себе целью разработку оснований математич. анализа. Уже в первых работах в этой области [Б. Больцано (B. Bolzano), П. Дюбуа-Реймон (P. Du Bois-Reymond), Р. Дедекинд (R. Dedekind)], в к-рых рассматривались числовые множества или множества функций, ставился вопрос о количественном сравнении бесконечных множеств. Является ли бесконечность множества чисто отрицательным свойством, не допускающим расчленения, или же существуют различные ступени математич. бесконечности, бесконечные множества различной количественной силы, различной «мощности»? Ответ на этот вопрос дал Г. Кантор (G. Cantor, 1871—83), к-рый представил почти современное изложение теории *кардинальных чисел* и *порядковых чисел* и теории *вполне упорядоченных множеств*. Возможность сравнительной количественной оценки множеств опирается на понятие взаимно однозначного соответствия (или биекции) между двумя множествами. Пусть каждому элементу множества A соответ-

ствует в силу какого бы то ни было правила или закона нек-рый определенный элемент множества B, если при этом каждый элемент множества B оказывается поставленным в соответствие одному и только одному элементу множества A, то говорят, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие (или биективное отображение, или биекция). Между двумя конечными множествами можно установить биекцию тогда и только тогда, когда оба множества состоят из одного и того же числа элементов. В обобщении этого факта Г. Кантор определил количественную эквивалентность, или равномощность, как возможность установить между ними взаимно однозначное соответствие. Если множество A равномощно множеству B, то множества A и B имеют одно и то же кардинальное число. Ценность понятия мощности множества определяется существованием неравномощных бесконечных множеств. Напр., множество всех действительных чисел и множество всех натуральных чисел имеют разные мощности. Первое имеет мощность континуума, а второе — счетное множество. В каждом бесконечном множестве A имеется собственное подмножество, равномощное всему A, в то же время как ни в одном конечном множестве такой правильной части найти нельзя. Поэтому наличие правильной части, равномощной целому, можно принять за определение бесконечного множества.

Заслуга Г. Кантора состоит не только в решении проблемы мощности множества, но и в том решительном шаге, к-рый сделал он, рассмотрев множества, состоящие из элементов произвольной природы. О том, что шаг к общности был трудным, свидетельствуют, во-первых, различные противоречия (*антиномии*), открытые разными учеными к началу 20 в. и приведшие к созданию *аксиоматической теории множеств*, и, во-вторых, то, что естественным образом возникшие задачи (напр., *континуум-гипотеза*) оказались неразрешимыми.

Дальнейший вклад в М. т. внес Ф. Хаусдорф (F. Hausdorff), разработав теорию линейно упорядоченных множеств и применив М. т. к топологии, он заложил основы теории *топологических пространств* (или общей топологии). Далее, A-операция, возникшая при исследовании борелевских множеств, привела к созданию *дескриптивной теории множеств*. Из ряда задач комбинаторной математики и теории графов возникла комбинаторная теория множеств. Наконец, открытия, сделанные К. Гёделем (K. Gödel) и П. Коэном (P. Cohen) в аксиоматич. теории множеств существенно повлияли на методы и развитие М. т.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948; [2] Больцано Б., Парадоксы бесконечного, пер. с нем., Одесса, 1911; [3] Учение о множествах Георга Кантора, СПБ, 1914 (Новые идеи в математике. Сб. № 6); [4] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [5] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970; [6] Бурбаки Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965.

Б. А. Ефимов.

МНОЖЕСТВЕННОЕ СРАВНЕНИЕ — задача проверки гипотезы относительно значений скалярного произведения $\theta^{\perp} \cdot c$ вектора $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, координаты к-рого суть неизвестные параметры, на заданный вектор $c = (c_1, \ldots, c_k)^{\perp}$. В статистич. исследованиях задача М. с. часто возникает при проведении *дисперсионного анализа*, где, как правило, вектор c выбирается таким образом, что $c_1 + \ldots + c_k = 0$, а само скалярное произведение $\theta^{\perp} \cdot c$ в таком случае наз. *контрастом*. В предположении, что $\theta_1, \ldots, \theta_k$ суть неизвестные математич. ожидания одномерных нормальных законов, Дж. У. Тьюки (J. W. Tukey) и Г. Шеффе (H. Scheffé) предложили T-метод и S-метод соответственно для

оценивания контрастов, к-рые являются основными методами в задаче построения доверительных интервалов для контрастов.

Лит.: [1] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

М. С. Никулин.

МНОЖЕСТВЕННЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ — мера линейной зависимости между одной и нек-рой совокупностью случайных величин. Точнее, если $(X_1, \ldots, X_k)$ случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^k$, то М. к. к. между X_1 и $X_2, \ldots, X_k$ определяется как обычный коэффициент корреляции между X_1 и наилучшим линейным приближением X_1 по $X_2, \ldots, X_k$, т. е. регрессией $\mathsf{E}(X_1|X_2, \ldots, X_k)$ величины X_1 по $X_2, \ldots, X_k$. М. к. к. обладает тем свойством, что если при $\mathsf{E}X_1 = \ldots \mathsf{E} = X_k = 0$

$$X_1^* = \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k$$

есть регрессия X_1 по $X_2, \ldots, X_k$, то среди всех линейных комбинаций величин $X_2, \ldots, X_k$ величина X_1^* имеет наибольшую корреляцию с X_1; в этом смысле М. к. к.— частный случай канонич. коэффициента корреляции. При $k=2$ М. к. к. равен обычному коэффициенту корреляции ρ_{12} между X_1 и X_2. М. к. к. между X_1 и $X_2, \ldots, X_k$ обозначается $\rho_{1\cdot(2\ldots k)}$ и выражается через элементы корреляционной матрицы $R = \|\rho_{ij}\|$, $i, j = 1, \ldots, k$, следующим образом

$$\rho^2_{1\cdot(2\ldots k)} = 1 - \frac{|R|}{R_{11}},$$

где $|R|$ — определитель R, а R_{11} алгебраич. дополнение элемента $\rho_{11} = 1$; при этом $0 \leqslant \rho_{1\cdot(2\ldots k)} \leqslant 1$. Если $\rho_{1\cdot(2\ldots k)} = 1$, то величина X_1 с вероятностью 1 равна нек-рой линейной комбинации величин $X_2, \ldots, X_k$, т. е. совместное распределение величин $X_1, \ldots, X_k$ сосредоточено в нек-рой гиперплоскости пространства $\mathbb{R}^k$. С другой стороны, $\rho_{1\cdot(2\ldots k)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\rho_{12} = \ldots = \rho_{1k} = 0$, т. е. когда X_1 не коррелирована ни с одной из величин $X_2, \ldots, X_n$. Для вычисления М. к. к. можно также использовать формулу

$$\rho^2_{1\cdot(2\ldots k)} = 1 - \frac{\sigma^2_{1\cdot(2\ldots k)}}{\sigma_1^2},$$

где σ_1^2 — дисперсия X_1, а

$$\sigma^2_{1\cdot(2\ldots k)} = \mathsf{E}\,(X_1 - \mathsf{E}\,(X_1 \mid X_2, \ldots, X_k))^2$$

— дисперсия X_1 относительно регрессии.

Выборочным аналогом М. к. к. $\rho_{1\cdot(2\ldots k)}$ является

$$r_{1\cdot(2\ldots k)} = \sqrt{1 - \frac{s^2_{1\cdot(2\ldots k)}}{s_1^2}},$$

где $s^2_{1\cdot(2\ldots k)}$ и s_1^2 — оценки $\sigma^2_{1\cdot(2\ldots k)}$ и σ_1^2 по выборке объема n. Для проверки гипотезы об отсутствии связи используются выборочные распределения $r_{1\cdot(2\ldots k)}$. При условии, что выборка произведена из многомерной нормальной совокупности, величина $r^2_{1\cdot(2\ldots k)}$ имеет бета-распределение с параметрами $\left(\frac{k-1}{2}, \frac{n-k}{2}\right)$, если $\rho_{1\cdot(2\ldots k)} = 0$; если $\rho_{1\cdot(2\ldots k)} \neq 0$, то величина $nr^2_{1\cdot(2\ldots k)}$ при $n \to \infty$ имеет в пределе нецентральное «хи-квадрат»-распределение с $k-1$ степенями свободы и параметром нецентральности $nr^2_{1\cdot(2\ldots k)}$.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

А. В. Прохоров.

МНОЖЕСТВО — *набор, совокупность, собрание* каких-либо объектов, наз. его э л е м е н т а м и, обладающих общим для всех их характеристич. свойством. «Множество есть многое, мыслимое нами как единое» (Г. Кантор). Это не является в полном смысле логич. определением понятия М., а всего лишь пояснением (ибо определить понятие — значит найти такое родовое понятие, в к-рое данное понятие входит в качестве вида, но М.— это, пожалуй, самое широкое понятие математики и логики). При этом можно либо дать перечень элементов М.— его п е р е ч и с л е н и е, либо дать правило для определения того, принадлежит или нет данный объект рассматриваемому М.— его о п и с а н и е (впрочем, первое приемлемо, лишь когда речь идет о конечных М.).

Для содержательного развития «наивной» *множеств теории* такого пояснения вполне достаточно, ибо для математич. теории существенны определенные соотношения между элементами М. (или между самими М.), а не их природа. При описании же тех М., к-рые могут быть элементами других М., во избежание т. н. *антиномий*, вводится, напр., термин «класс». И тогда, говоря более формально, теория М. имеет дело с объектами, наз. *классами*, для к-рых определено отношение принадлежности, а само М. определяется как класс, являющийся элементом нек-рого класса.

В последнее время все более вырисовывается объединяющая роль теории *категорий* (и, в частности, понятия *универсального множества*), построение к-рой основывается на *аксиоматической теории множеств*, позволяющей рассматривать, напр., такие «большие» совокупности, как категория всех множеств, групп, топологич. пространств и т. д.

Лит.: [1] Учение о множествах Георга Кантора. СПБ, 1914 (Новые идеи в математике. Сб. № 6); [2] Ш и х а н о в и ч Ю. А., Введение в современную математику, М., 1965; [3] К о н д а к о в Н. И., *Логический словарь-справочник*, 2 изд., М., 1975; [4] Б у р б а к и Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965; [5] Н о в и к о в П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [6] К о н П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [7] Ш е н ф и л д Д ж., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975.

М. И. Войцеховский.

МНОЖЕСТВО ТИПА $F_\sigma(G_\delta)$, F_σ-м н о ж е с т в о (G_δ-м н о ж е с т в о),— объединение (пересечение) счетного числа замкнутых (открытых) множеств. См. *Борелевское множество.*

A-МНОЖЕСТВО, а н а л и т и ч е с к о е м н о ж е с т в о, в полном сепарабельном метрическом пространстве — непрерывный образ борелевского множества. Так как любое борелевское множество является непрерывным образом множества иррациональных чисел, то A-м. можно определить как непрерывный образ множества иррациональных чисел. Счетное пересечение и счетное объединение A-м. является A-м. Любое A-м. измеримо в смысле Лебега. Свойство быть A-м. инвариантно относительно измеримых по Борелю отображений, а также относительно A-*операции*. Более того, для того чтобы множество было A-м., необходимо и достаточно, чтобы оно представляло собой результат A-операции, примененной к нек-рой системе замкнутых множеств. Существуют примеры A-м., к-рые не являются борелевскими; так, в пространстве 2^I всех замкнутых подмножеств отрезка I действительных чисел множество замкнутых несчетных множеств является A-м., но не является борелевским. Любое несчетное A-м. топологически содержит канторов совершенное множество. Таким образом, A-м. «реализует» континуум-гипотезу: их мощность либо конечна, либо $\aleph_0$, либо $2^{\aleph_0}$. Для A-м. справедливы *Лузина принципы отделимости.*

Лит.: [1] К у р а т о в с к и й К., Топология, пер. с англ., т. 1, М., 1966; [2] Л у з и н Н. Н., Лекции об аналитических множествах и их приложениях, М., 1953.

Б. А. Ефимов.

***CA*-МНОЖЕСТВО** — дополнение к *A-множеству*, лежащему в полном сепарабельном метрич. пространстве X, т. е. $P \subset X$ есть *CA*-м., если $X \setminus P$ является *A*-множеством или, другими словами, *AC*-м. есть *проективное множество* класса 2. Существует пример *CA*-м., не являющегося *A*-множеством. Любое *A*-множество является взаимно однозначным и непрерывным образом нек-рого *CA*-м. (теорема Мазуркевича).

Точка y наз. значением порядка 1 отображения f, если существует одна и только одна точка такая, что $y=f(x)$. Значения порядка 1 B-измеримого отображения f произвольного борелевского множества образуют *CA*-м. (теорема Лузина). Имеет место и обратная теорема: пусть C — нек-рое *CA*-м., принадлежащее пространству X; тогда существует непрерывная функция f, определенная на замкнутом подмножестве пространства иррациональных чисел, такая, что C есть множество точек порядка 1 функции f. Теорема Куратовского о редукции: пусть дана бесконечная последовательность *CA*-м. $U^1, U^2, \ldots$, тогда существует такая последовательность непересекающихся *CA*-м. $V^1, V^2, \ldots$, что $V^n \subset U^n$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 1, М., 1966.

Б. А. Ефимов.

МОДА — одна из числовых характеристик распределения вероятностей случайной величины. Для случайной величины, имеющей плотность вероятности $p(x)$, М. наз. любая точка x_0 максимума $p(x)$. М. определяется и для дискретных распределений: если значения x_k и случайной величины X с распределением $p_k = \mathsf{P}\{X=x_k\}$ расположены в порядке возрастания, то точка x_m наз. модой, если $p_m \geqslant p_{m-1}$ и $p_m \geqslant p_{m+1}$.

Распределения с одной, двумя или большим числом М. наз. соответственно унимодальными (или одновершинными), бимодальными и мультимодальными. Наиболее важными в теории вероятностей и математич. статистике являются *унимодальные распределения*. Наряду с математич. ожиданием и медианой М. служит характеристикой расположения значений случайной величины. Для унимодального и симметричного относительно нек-рой точки a распределения М. равна a и совпадает с медианой и математич. ожиданием, если последнее существует.

А. В. Прохоров.

МОДАЛЬНАЯ ЛОГИКА — область логики, в к-рой наряду с обычными высказываниями рассматриваются модальные высказывания, т. е. высказывания типа «необходимо, что...», «возможно, что...» и т. п. В математич. логике рассматриваются различные формальные системы М. л., выявляется взаимосвязь между этими системами, изучаются их интерпретации.

Элементы М. л. имелись по существу еще у Аристотеля (4 в. до н. э.), а от него перешли в классич. философию. Впервые М. л. была формализована К. Льюисом [1], к-рый построил пять пропозициональных систем М. л., получивших в литературе обозначения S1—S5 (их формулировки приведены ниже). Затем были построены и исследованы другие системы М. л. Большое разнообразие систем М. л. объясняется тем, что понятия «возможно» и «необходимо» можно уточнять различными способами и, кроме того, по-разному трактовать сложные *модальности* типа «необходимо возможно» и «взаимоотношения» модальностей с логич. связками. Большинство изучавшихся систем М. л. опирается на классич. логику, однако рассматриваются и системы, основанные на интуционистской логике (см., напр., [6]).

Ниже описывается несколько наиболее хорошо изученных пропозициональных систем М. л. Язык каждой из этих систем получается из языка классич. исчис-

ления высказываний P добавлением новых одноместных связок (модальных операторов) $\Box$ (необходимо) и $\Diamond$ (возможно). Поскольку почти во всех системах имеет место соотношение

$$\Diamond A \equiv \neg \Box \neg A, \qquad (*)$$

то в качестве исходного берется один модальный оператор, напр. $\Box$, а другой определяется через него с помощью соотношения (*).

Система S1. Схемы аксиом:

1) все формулы вида $\Box A$, где A — выводимая в P формула,

2) $\Box (\Box A \supset A)$,

3) $\Box (\Box (A \supset B) \& \Box (B \supset C) \supset \Box (A \supset C))$.

Правила вывода:

I) $\dfrac{A \quad A \supset B}{B}$ (*модус поненс*),

II) $\dfrac{\Box A}{A}$,

III) $\dfrac{\Box (A \supset B) \Box (B \supset A)}{\Box (\Box A \supset \Box B)}$.

Система S2: S1$+\{\Box (\Box A \supset \Box (A \vee B))\}$.

Система S3: S2$+\{\Box (\Box (A \supset B) \supset \Box (\Box A \supset \Box B))\}$.

Система K. Схемы аксиом:

1) все схемы аксиом исчисления высказываний P,

2) $\Box (A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$.

Правила вывода: модус поненс и $\dfrac{A}{\Box A}$ ($\Box$-введение).

Система T: K$+\{\Box A \supset A\}=$
$=$S2$+\{$правило $\Box$-введения$\}$.

Система B: T$+\{A \supset \Box \Diamond A\}$.

Система S4: S3$+\{\Box (\Box A \supset \Box \Box A)\}=$
$= T+\{\Box A \supset \Box \Box A\}$.

Система S5: S4$+\{\Box (A \supset \Box \Diamond A)\}$.

Среди вышеупомянутых систем важное значение имеет S4, т. к. в ней интерпретируется интуиционистское исчисление высказываний I, т. е. по всякой пропозициональной (немодальной) формуле A можно построить такую формулу A^* модальной логики, что

$$I \vdash A \Longleftrightarrow \text{S4} \vdash A^*.$$

В связи с этим особый интерес представляет система Гжегорчика (см. [5]):

$$\text{G} = \text{S4} + \{\Box (\Box (\Box (A \supset \Box A) \supset A) \supset A)\},$$

для к-рой верна теорема о переводе: для любого множества схем аксиом Γ и любой формулы A

$$I + \Gamma \vdash A \Longleftrightarrow \text{S4} + \Gamma^* \vdash A^* \Longleftrightarrow \text{G} + \Gamma^* \vdash A^*,$$

где $\Gamma^* = \{B^* | B \in \Gamma\}$, причем G — самая сильная система с таким свойством. Эта теорема позволяет переносить нек-рые свойства (напр., полноту или разрешимость) с расширений системы S4 (или G) на *промежуточные логики*.

Для каждой пропозициональной системы М. л. S можно рассмотреть соответствующую предикатную систему, к-рая получается добавлением к языку системы S предметных переменных, предикатных символов и кванторов $\forall$, $\exists$ (или одного из них). Также добавляются обычные схемы аксиом и правила вывода для кванторов. Кроме того, иногда добавляют и другие аксиомы, описывающие действие модальных операторов на кванторы, напр. т. н. формулу Баркан:

$$\forall x \Box A(x) \supset \Box \forall x A(x).$$

Алгебраич. интерпретация систем М. л. задается нек-рой алгеброй (называемой также матрицей)

$$\mathfrak{M} = \langle M, D; \&^*, \vee^*, \supset^*, \neg^*, \Box^* \rangle,$$

где M — множество *истинностных значений*, D — множество выделенных истинностных значений, $D \subset M$, а $\&^*$, $\vee^*$, $\supset^*$, $\neg^*$, $\Box^*$ — операции на M, соответствующие связкам $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\Box$. Формула наз. общезначимой на алгебре $\mathfrak{M}$, если при всякой оценке ее пропозициональных переменных элементами M она принимает выделенное значение. Система М. л. S наз. полной относительно класса алгебр $\mathscr{K}$, если всякая формула выводима в S тогда и только тогда, когда она общезначима на всякой алгебре из $\mathscr{K}$. Напр., система S4 полна относительно класса конечных т. н. топологических булевых алгебр (см. [3]). Вообще, система S наз. финитно аппроксимируемой, если она полна относительно конечных алгебр. Если система конечно аксиоматизируема и финитно аппроксимируема, то она разрешима, т. е. для нее алгоритмически разрешима проблема распознавания выводимости. Матрица $\mathfrak{M}$ наз. характеристической, или адекватной, для системы S, если S полна относительно $\{\mathfrak{M}\}$. Никакая из упомянутых выше пропозициональных систем М. л. не имеет конечной адекватной матрицы, но каждая из этих систем финитно аппроксимируема и поэтому разрешима. С другой стороны, всякое расширение системы S5 имеет конечную адекватную матрицу с одним выделенным значением. Свойством финитной аппроксимируемости обладают также все расширения системы

$$S4.3 = S4 + \{\Box(\Box A \supset \Box B) \vee \Box(\Box B \supset \Box A)\}.$$

Важным инструментом изучения М. л. являются *Крипке модели*, имеющие вид (W, R, θ), где W — множество «миров», «ситуаций», R — нек-рое отношение на W, θ — оценка пропозициональных переменных подмножествами W. Для $s, t \in W$ отношение sRt можно трактовать как «мир t возможен в мире s». Пару (W, R) наз. структурой Крипке, или остовом (встречается также термин шкала). Формула A наз. общезначимой на остове (W, R), если для всякой оценки θ формула A истинна в модели Крипке (W, R, θ). Система S наз. полной по Крипке, если всякая не выводимая в S формула опровержима на нек-рой структуре Крипке, на к-рой общезначимы все выводимые в S формулы. Напр., система T полна относительно структур (W, R), где R — рефлексивное отношение; S4 полна относительно структур с рефлексивным и транзитивным отношением. Среди конечно аксиоматизируемых расширений системы S4 существуют такие, к-рые не полны по Крипке (см. [7]).

Для предикатных систем М. л. модели Крипке имеют вид (W, R, D, ψ, θ), где $D = \{D_s\}_{s \in W}$, D_s — универсум мира s, ψ — интерпретация предикатных символов в D, а θ — оценка, сопоставляющая каждой предметной переменной нек-рый элемент множества $\bigcup_{s \in W} D_s$. Для систем, содержащих формулу Баркан, надо также потребовать, чтобы

$$sRt \Rightarrow D_t \subseteq D_s.$$

Модели Крипке имеют, как правило, более наглядную структуру, чем алгебраич. модели, поэтому часто они удобнее для изучения различных систем М. л.

Лит.: [1] Lewis C. I., Langford C. H., Symbolic Logic, 2 ed., N. Y., 1959; [2] Фейс Р., Модальная логика, [пер. с англ.], М., 1974; [3] Расева Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972; [4] Минц Г. Е., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1968, т. 98, с. 88—111; [5] Grzegorczyk A., «Fundam. math.», 1967, t. 60, № 2, p. 223—31; [6] Bull R. A., «Notre Dame J. Form. Logic», 1965, t. 6, p. 142—46; [7] Fine K., «Theoria», 1974, v. 40, pt 1, p. 23—29; [8] Gabbay D. M., «Ann. Math. Log.», 1975, v. 8, № 3, p. 237—95.

С. К. Соболев.

МОДАЛЬНОСТЬ — свойство суждения, характеризующее степень его достоверности. Различные М. и взаимосвязь между ними изучаются *модальной логикой*.

М. «необходимо» и «возможно» были введены в логику еще Аристотелем (4 в. до н. э.), к-рый, однако, не придавал им точного смысла. Эти М. наз. основными и обозначаются соответственно символами $\Box$ и $\Diamond$ (иногда L и M). Различные комбинации основных М. и отрицания $\neg$ также являются М. Двойственной к М. Q наз. М. $\overline{Q}$, получаемая из Q заменой каждого вхождения $\Box$ на $\Diamond$, и обратно. В подавляющем большинстве систем модальной логики для М. Q и двойственной ей М. $\overline{Q}$ имеет место эквивалентность

$$Q\neg A \Longleftrightarrow \neg\overline{Q}A. \qquad (*)$$

В принципе можно образовать бесконечное число комбинаций из $\Box$, $\Diamond$ и $\neg$, однако часто в конкретных системах число попарно не эквивалентных М. оказывается ограниченным (ввиду соотношения (*) и наличия аксиом, упрощающих нек-рые М. или сводящих одни М. к другим). Напр., в системе S3 имеется ровно 40 различных М., а в системе S4 их только 12:

$$\Box A,\ \Box\Diamond A,\ \Box\Diamond\Box A,\ \neg\Box A,\ \neg\Box\Diamond A,\ \neg\Box\Diamond\Box A,$$

а также М., двойственные этим. В системе S5 имеется всего 4 М.: $\Box A$, $\Diamond A$, $\neg\Box A$, $\neg\Diamond A$. С другой стороны, в системе T модальной логики, а также в S1 и S2 число М. бесконечно и, более того, нет редукций М., т. е. две положительные (не содержащие знака $\neg$) М. Q_1 и Q_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда $Q_1 = Q_2$.

Иногда к М. относят (формализованные в соответствующих теориях) такие понятия, как «истинно», «доказуемо», «опровержимо», а также связанные со временем «будет», «всегда было» и т. п.

Лит. см. при ст. *Модальная логика.* *С. К. Соболев.*

МОДЕЛЕЙ ТЕОРИЯ — раздел математической логики, изучающий математические *модели*.

Начало М. т. относится к 30-м гг. 20 в., когда были доказаны следующие две основные теоремы.

Теорема 1 (теорема Гёделя — Мальцева). Если каждая конечная подсовокупность совокупности T высказываний языка 1-й ступени совместима, то совместна и вся совокупность T (см. [1]).

Теорема 2 (теорема Лёвенхейма — Сколема — Мальцева). Если совокупность высказываний языка 1-й ступени сигнатуры Ω имеет бесконечную модель, то она имеет модель любой бесконечной мощности, не меньшей мощности сигнатуры Ω.

Теорема 1, называемая теоремой компактности, получила широкое применение в алгебре. На основе этой теоремы А. И. Мальцев создал метод доказательства локальных теорем алгебры (см. *Мальцева локальные теоремы*).

Пусть A — алгебраич. система сигнатуры Ω, $|A|$ — основное множество системы A, $X \subseteq |A|$, $\langle \Omega, X\rangle$ обозначает сигнатуру, получаемую из Ω добавлением символов выделенных элементов c_a для всех $a \in X$, а (A, X) обозначает алгебраич. систему сигнатуры $\langle \Omega, X\rangle$, к-рая является обогащением алгебраич. системы A и в к-рой для каждого $a \in X$ символ c_a интерпретируется элементом a. Множество $O(A)$ всех замкнутых формул сигнатуры $\langle \Omega, |A|\rangle$ языка 1-й ступени, истинных в системе $(A, |A|)$, наз. описанием алгебраической системы A, а множество $D(A)$ тех формул из $O(A)$, к-рые являются либо атомными, либо отрицаниями атомных, наз. диаграммой A. Алгебраич. система B наз. элементарным расширением алгебраич. системы A, если $|A| \subseteq |B|$ и $(B, |A|)$ есть модель для $O(A)$. В этом случае A наз. элементарной подсистемой B. Напр., множество рациональных чисел вместе с обычным отношением порядка является элементарной подсистемой системы действительных чисел с обычным отношением порядка.

Подсистема A алгебраич. системы B сигнатуры Ω тогда и только тогда является элементарной подсистемой системы B, когда для каждой замкнутой формулы $(\exists v)\Phi(v)$ языка 1-й ступени сигнатуры $\langle\Omega, |A|\rangle$, истинной в $(B, |A|)$, найдется такой $a\in|A|$, что $\Phi(c_a)$ истинна в $(B, |A|)$. Из этого критерия сразу следует, что объединение возрастающей цепочки элементарных подсистем является элементарным расширением каждой из этих систем. Если замкнутая $\forall\exists$-формула языка 1-й ступени истинна в каждой системе возрастающей цепочки систем, то эта формула истинна и в объединении этой цепочки (см. [1]).

Пусть сигнатура Ω содержит символ U одноместного отношения. Говорят, что модель A теории T сигнатуры Ω имеет т и п (α, β), если мощность A равна α, а мощность $U(A)=\{a\in|A|\,|\,A\models U(a)\}$ равна β. Т е о р е м а В о т а: если элементарная теория T счетной сигнатуры имеет модель типа (α, β), где $\alpha>\beta$, то T имеет модель типа $(\aleph_1, \aleph_0)$ (см. [7], [10]). В предположении, что справедлива обобщенная гипотеза континуума, элементарная теория счетной сигнатуры имеет модель типа $(\aleph_{\alpha+2}, \aleph_{\alpha+1})$ для каждого α, если она имеет модель типа $(\aleph_1, \aleph_0)$ (см. [10]). При этом же предположении теория $\mathrm{Th}(A)$, где сигнатура A есть $\langle+, \cdot, 0, 1, <, U\rangle$, $|A|$ — множество всех действительных чисел, $U(A)$ — множество целых чисел, а $+$, $\cdot$, 0, 1, $<$ определены обычным образом, не имеет модели типа $(\aleph_2, \aleph_0)$.

Пусть (A, P) обозначает обогащение алгебраич. системы A при помощи предиката P, а $\langle\Omega, P\rangle$ — сигнатуру, полученную из Ω присоединением предикатного символа P. Во многих случаях важно понять, когда в каждой системе из класса K алгебраич. систем сигнатуры $\langle\Omega, P\rangle$ предикат P задается формулой языка 1-й ступени сигнатуры Ω. Частичный ответ на этот вопрос дает т е о р е м а Б е т а: тогда и только тогда существует формула $\Phi(x)$ языка 1-й ступени сигнатуры Ω такая, что формула $(\forall x)(\Phi(x)\leftrightarrow P(x))$ истинна на всех системах аксиоматизируемого класса K сигнатуры $\langle\Omega, P\rangle$, когда множество $\{P|(A, P)\in K\}$ содержит не более одного элемента для каждой алгебраич. системы A сигнатуры Ω (см. [2]).

Многие исследования по М. т. связаны с изучением свойств, сохраняющихся при операциях над алгебраич. системами. К числу важнейших операций относятся гомоморфизмы, прямые и фильтрованные произведения.

Говорят, что высказывание Φ у с т о й ч и в о относительно гомоморфизмов, если из истинности Φ в алгебраич. системе A следует истинность Φ во всех эпиморфных образах A. Формула Φ языка 1-й ступени наз. п о л о ж и т е л ь н о й, если Φ не содержит знаков отрицания и импликации. Доказано (см. [1]), что высказывание Φ языка 1-й ступени устойчиво относительно гомоморфизмов тогда и только тогда, когда Φ эквивалентно положительному высказыванию. Аналогичная теорема верна и для языка $L_{\omega_1\omega}$.

Формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ языка 1-й ступени сигнатуры Ω наз. х о р н о в с к о й, если она может быть получена конъюнкциями и навешиванием кванторов из формул вида $(\Phi_1\&\ldots\&\Phi_s)\to\Phi$, $\neg(\Phi_1\&\ldots\&\Phi_s)$, где $\Phi_1, \ldots, \Phi_s, \Phi$ — атомные формулы языка 1-й ступени сигнатуры Ω. Примерами хорновских формул являются тождества и квазитождества. Центральной в теории ультрапроизведений является т е о р е м а Л о с я (J. Łoś): всякая формула языка 1-й ступени фильтруется по любому *ультрафильтру* (см. [1]). Формула языка 1-й ступени условно фильтруется по любому фильтру тогда и только тогда, когда эта формула эквивалентна хорновской формуле. Имеет место теорема (см. [9]): алгебраич. системы A и B сигнатуры

Ω тогда и только тогда элементарно эквивалентны, когда существует такой ультрафильтр D на множестве I, что A^I/D и B^I/D изоморфны. Мощность фильтрованного произведения бесконечна, если для каждого натурального n число сомножителей мощности n конечно. Если для каждого натурального n множество тех индексов, для к-рых соответствующий сомножитель имеет мощность n, не принадлежит D, то мощность ультрапроизведения по неглавному ультрафильтру D на счетном множестве I равна континууму. Для каждого бесконечного I мощности α существует такой фильтр D на I, что для каждого фильтра D_1 на I, содержащего D, и каждого бесконечного множества A мощность A^I/D_1 не меньше 2^α (см. [1]).

Много применений находит т е о р е м а о с у щ е с т в о в а н и и м о д е л е й с б о л ь ш и м ч и с л о м а в т о м о р ф и з м о в (см. [3]): для любого линейно упорядоченного множества X в аксиоматизируемом классе K алгебраич. систем, содержащем бесконечную систему, существует такая система A, что $X \subseteq |A|$ и каждое сохраняющее порядок однозначное отображение X на X продолжается до автоморфизма A.

Важными понятиями М. т. являются понятия универсальной, однородной и насыщенной систем. Пусть A и B — алгебраич. системы сигнатуры Ω. Отображение f множества $X \subseteq |A|$ во множество $Y \subseteq |B|$ наз. э л е м е н т а р н ы м, если для каждой формулы $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ языка 1-й ступени сигнатуры Ω и любых $a_1, \ldots, a_n \in X$ имеет место эквивалентность $A \models \Phi(a_1, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow B \models \Phi(fa_1, \ldots, fa_n)$. Система A наз. α-у н и в е р с а л ь н о й, если для каждой системы B, элементарно эквивалентной системе A и имеющей мощность, не превосходящую α, существует элементарное отображение $|B|$ в $|A|$. Система A наз. α-о д н о р о д н о й, если для любого множества $X \subseteq |A|$, мощность к-рого меньше α, каждое элементарное отображение X в $|A|$ продолжается до элементарного отображения $|A|$ на $|A|$ (т. е. до автоморфизма A). Система A сигнатуры Ω наз. α-н а с ы щ е н н о й, если для каждого множества $X \subseteq |A|$, мощность к-рого меньше α, и каждой совокупности Σ формул языка 1-й ступени сигнатуры $\langle \Omega, X \rangle$, не содержащих свободных переменных, отличных от x_0, из конечной выполнимости Σ в (A, X) следует выполнимость Σ в (A, X). Система A наз. у н и в е р с а л ь н о й (соответственно о д н о р о д н о й или н а с ы щ е н н о й), если A является α-универсальной (соответственно α-однородной или α-насыщенной), где α есть мощность $|A|$. Система тогда и только тогда насыщена, когда она одновременно универсальна и однородна. Две элементарно эквивалентные насыщенные системы одной мощности изоморфны (см. [3]). Все несчетные модели категоричной в несчетных мощностях элементарной теории счетной сигнатуры насыщены (т е о р е м а М о р л и, см. [3], [8]). Большое число примеров α-насыщенных систем доставляют ультрапроизведения. Напр., если D — неглавный ультрафильтр на счетном множестве I, то $\prod_{i \in I} A_i/D$ является $\aleph_1$-насыщенной системой для любых алгебраич. систем $A_i (i \in I)$ счетной сигнатуры Ω.

Основными задачами М. т. являются изучение выразительной возможности формализованного языка и изучение классов структур, определимых средствами этого языка. Найдены нек-рые важные свойства стабильных теорий, еще более детально изучены классы категоричных и суперстабильных теорий.

Основным аппаратом при изучении стабильных теорий является классификация формул и локально совместных множеств формул в этих теориях. Такая классификация осуществляется путем приписывания

формулам рангов. Эти ранги обычно принимают в качестве значений ординалы, а рангующие функции задаются с помощью специальных топологий или другим способом. Изучение рангующих функций и их усовершенствование — богатый источник информации о теориях.

В изучении классов моделей выясняют число различных с точностью до изоморфизма моделей теории в рассматриваемой мощности и наличие специальных моделей, напр. простых, минимальных, насыщенных, однородных, универсальных, конструктивизируемых и т. п., и создают способы их построения.

Классич. примерами применения методов М. т. в математич. анализе являются работы А. Робинсона (A. Robinson) и его школы, сформировавшиеся в самостоятельную науку — *нестандартный анализ*; благодаря работам А. И. Мальцева и его школы развивается применение методов М. т. в топологич. алгебре; новейшие результаты о свойствах стабильных теорий находят использование при изучении конкретных алгебраич. вопросов.

Перечисленные выше проблемы встают и при изучении различных неэлементарных языков, напр., получаемых добавлением новых кванторов, введением в рассмотрение бесконечных выражений, модальностей и т. п.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [2] Робинсон А., Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры, пер. с англ., М., 1967; [3] Тайцлин М. А., Теория моделей, Новосиб., 1970; [4] Ершов Ю. Л., Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., 1980; [5] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А., Математическая логика, М., 1979; [6] Ершов Ю. Л. [и др.], «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 4, с. 37—108; [7] Мальцев А. И., Тр. Четвертого Всесоюзного математического съезда, т. 1, Л., 1963, с. 169—98; [8] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч., Теория моделей, пер. с англ., М., 1977; [9] Сакс Д ж., Теория насыщенных моделей, пер. с англ., М., 1976; [10] Vaught R. L., в сб.: Infinistic methods, N. Y. [a. o.], 1961, p. 303—21; [11] Morley M., Vaught R., «Math. scand.», 1962, v. 11, fasc. 1, p. 37—57; [12] Morley M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 114, № 2, p. 514—38; [13] Shelah S., Classification theory and the number of non-isomorphic models, Amst., 1978; [14] Bell I. L., Slomson A. B., Models and ultraproducts. An introduction, Amst.— L., 1969.

А. Д. Тайманов, М. А. Тайцлин.

МОДЕЛЬ — интерпретация *формального языка*. Основным формальным языком является язык L_Ω 1-го порядка (или 1-й ступени) данной сигнатуры Ω, включающей предикатные символы R_i, $i \in I$, функциональные символы f_j, $j \in J$, и константы c_k, $k \in K$. Модель языка L_Ω есть *алгебраическая система* сигнатуры Ω.

Пусть Σ — нек-рое множество замкнутых формул языка L_Ω. Модель для Σ есть М. языка L_Ω, в к-рой истинны все формулы из Σ. Множество Σ наз. совместным, если оно имеет хотя бы одну М. Класс всех М. для Σ обозначается $\mathrm{Mod}\,\Sigma$. Совместность множества Σ означает, что $\mathrm{Mod}\,\Sigma \neq \varnothing$.

Класс K моделей языка L_Ω наз. аксиоматизируемым, если существует такое множество Σ замкнутых формул языка L_Ω, что $K = \mathrm{Mod}\,\Sigma$. Множество $T(K)$ всех замкнутых формул языка L_Ω, истинных в каждой М. из данного класса K моделей языка L_Ω, наз. *элементарной теорией* класса K. Таким образом, класс K моделей языка L_Ω аксиоматизируем тогда и только тогда, когда $K = \mathrm{Mod}\,T(K)$. Если класс K состоит из М., изоморфных данной М., то его элементарная теория наз. элементарной теорией этой модели.

Пусть $\mathcal{A}$ — нек-рая М. языка L_Ω, имеющая основное множество A. Каждому элементу $a \in A$ сопоставляют константу c_a и рассматривают язык $L_{\Omega A}$ 1-го порядка сигнатуры ΩA, к-рая получается из Ω добав-

лением констант c_a, $a \in A$. Язык $L_{\Omega A}$ наз. диаграммным языком модели $\boldsymbol{A}$. Множество $O(\boldsymbol{A})$ всех замкнутых формул языка $L_{\Omega A}$, истинных в $\boldsymbol{A}$ при замене каждой константы c_a соответствующим элементом a из A, наз. описанием (или элементарной диаграммой) М. $\boldsymbol{A}$. Множество $D(\boldsymbol{A})$ тех формул из $O(\boldsymbol{A})$, к-рые являются атомными или отрицаниями атомных формул, наз. диаграммой М. $\boldsymbol{A}$.

Наряду с М. языка 1-го порядка рассматривают также М. других типов (логики с бесконечными формулами, многосортной логики, логики 2-го порядка, *многозначной логики*, *интуиционистской логики* и *модальной логики*).

Лит. см. при ст. *Моделей теория*. *Д. М. Смирнов.*

МОДЕЛЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ — типовая абстрактная или конкретная задача, соответствующая проблеме численного решения нек-рого класса математич. или прикладных задач. Напр., в теории квадратур рассматривают задачу вычисления интегралов от функций, удовлетворяющих нек-рому условию $\|f^{(n)}\| \leqslant A$. Отработка методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений исторически производилась путем исследования свойств методов на моделях из последовательности усложняющихся моделей (отрезок интегрирования $[0, X]$):

1) уравнение $y' = 0$;

2) уравнение $y' = my$, $|m|X$ — порядка 1 (модели 1) и 2) соответствуют задаче интегрирования систем с гладкими решениями на небольших промежутках времени);

3*а*) уравнение $y' = my$, $m < 0$, $|m|X \gg 1$; эта модель соответствует задаче интегрирования на больших промежутках времени систем с устойчивыми решениями;

3*б*) уравнение $y' = x^{\lambda}$; модель уравнения с особенностями производных решения;

4) система $y_1' = m_1 y_1$, $y_2' = m_2 y_2$, $0 > m_1 > m_2$, $|m_2|X \gg |m_1|X$, $|m_1|X$ — порядка 1; модель т. н. *жесткой дифференциальной системы*, у к-рой одни компоненты решения меняются относительно медленно, а другие быстро.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975. *Н. С. Бахвалов.*

МОДЕЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ — см. *Математическая модель*.

МОДИФИКАЦИЯ аналитического пространства — аналитическое отображение $f\colon X \to Y$ аналитических пространств такое, что для нек-рых аналитических множеств $S \subset X$ и $T \subset Y$ меньших размерностей выполняются условия:

$$f\colon X \setminus S \longrightarrow Y \setminus T \text{ — изоморфизм}$$

и

$$f(S) = T.$$

Модификация f наз. также стягиванием аналитич. множества S на T. Примерами М. являются *моноидальные преобразования*.

См. также *Исключительное аналитическое множество*, *Исключительное подмногообразие*.

Лит.: [1] Behnke H., Stein K., «Math. Ann.», 1951, Bd 124, H. 1, S. 1—16. *А. Л. Онищик.*

МОДУЛЕЙ КАТЕГОРИЯ — категория mod-R, объекты к-рой — правые унитарные модули над произвольным ассоциативным кольцом R с единицей, а морфизмы — гомоморфизмы R-модулей. Эта категория является важнейшим примером *абелевой категории*. Более того, для всякой малой абелевой категории существует полное точное вложение в нек-рую М. к.

Если $R = \mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, то mod-R есть категория абелевых групп, а если $R = D$-тело (поле), то mod-R есть категория векторных пространств над D.

Свойства М. к. mod-R отражают ряд важных свойств кольца R (см. *Гомологическая классификация колец*), с этой категорией связан ряд важных гомологич. инвариантов кольца, в частности его *гомологические размерности*. Центр М. к. mod-R (т. е. множество естественных преобразований тождественного функтора категории) изоморфен центру кольца R.

В теории колец, гомологич. алгебре и алгебраич. K-теории изучаются различные подкатегории М. к., в частности подкатегория конечно порожденных проективных R-модулей и ассоциированные с ней K-функторы (см. *Алгебраическая K-теория*). По аналогии с двойственностью Понтрягина изучаются двойственности между полными подкатегориями М. к., в частности между подкатегориями конечно порожденных модулей. Напр., установлено, что если R и S — нётеровы кольца и имеет место двойственность между конечно порожденными правыми R-модулями и конечно порожденными левыми S-модулями, то существует бимодуль ${}_SU_R$ такой, что данная двойственность эквивалентна двойственности, определяемой функторами

$$\mathrm{Hom}_R(\text{-}, U) \text{ и } \mathrm{Hom}_S(\text{-}, U),$$

кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}\,U_R$ изоморфно S, а $\mathrm{End}_S U$ изоморфно R, бимодуль U — конечно порожденный инъективный кообразующий (и как R-модуль, и как S-модуль), кольцо R полусовершенно. Наиболее важным классом колец, возникающим при рассмотрении двойственности модулей, является класс *квазифробениусовых колец*. Артиново слева кольцо R будет квазифробениусовым тогда и только тогда, когда отображение

$$M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, R)$$

определяет двойственность категорий левых и правых конечно порожденных R-модулей.

Лит.: [1] Басс Х., Алгебраическая K-теория, пер. с англ., М., 1973; [2] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [3] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, т. 1—2, пер. с англ., М., 1977—79.

А. В. Михалев.

МОДУЛЕЙ ПРОБЛЕМА — классическая проблема о рациональности или унирациональности многообразия модулей алгебраич. кривых рода g.

Римановы поверхности рода g (рассматриваемые с точностью до изоморфизма) зависят от $3g-3$ комплексных параметров — модулей (см. *Модули римановой поверхности*). Множество классов неособых проективных кривых рода g над алгебраически замкнутым полем k обладает структурой квазипроективного алгебраич. многообразия M_g (см. [3] — [5]).

Многообразие M_g в случаях $g=0$ и 1 устроено просто: M_0 состоит из одной точки, а M_1 изоморфно аффинной прямой A^1. Поэтому М. п. относится к кривым рода $g\geqslant 2$ и формулируется следующим образом: является ли рациональным или хотя бы унирациональным многообразие модулей M_g кривых рода $g\geqslant 2$? Рациональность M_g установлена только для $g=2$ (см. [2], там же явно описано многообразие M_2).

Для доказательства унирациональности многообразий M_g построен [6] общий метод, к-рым, в частности, доказана унирациональность M_g для всех $g\leqslant 10$. Доказана унирациональность M_{12}.

Часто М. п. трактуется более широко (см., напр., [5]): к ней относят весь комплекс задач, связанных с существованием пространств модулей тех или иных алгебраич. объектов (многообразий, векторных расслоений, эндоморфизмов и т. д.), с изучением их различных алгебро-геометрич. свойств и с техникой компактификации пространств модулей (см. *Модулей теория*).

Лит.: [1] Hartshorne R., Algebraic geometry, N. Y., 1977; [2] Igusa J., «Ann. Math.», 1960, v. 72, № 3, p. 612—49; [3] Mumford D., Geometric invariant theory, B.— [a.o.],

1965; [4] его же, «L'enseignement math.», 1977, t. 23, № 1—2, p. 39—110; [5] Popp H., Moduli theory and classification theory of algebraic varieties, B.— Hdlb.— N.Y., 1977; [6] Severi F., «Atti della R. Acc. Naz. Lincei Rend.», 1915, v. 24, p. 877—88.
В. А. Исковских.

МОДУЛЕЙ ТЕОРИЯ — теория, изучающая непрерывные семейства объектов алгебраич. геометрии.

Пусть A — класс объектов алгебраич. геометрии (многообразий, схем, векторных расслоений и т. п.), на к-ром задано нек-рое отношение эквивалентности R. Основная задача классификации (описания множества классов A/R) состоит из следующих двух частей: 1) описание дискретных инвариантов, к-рые обычно позволяют разбить A/R в счетное число подмножеств, объекты к-рых уже непрерывно зависят от параметров; 2) задание и изучение алгебро-геометрич. структур на множествах параметров. Вторая часть составляет содержание М. т.

М. т. возникла при изучении эллиптич. функций: существует непрерывное семейство различных полей эллиптич. функций (или их моделей — неизоморфных эллиптич. кривых над $\mathbb{C}$), параметризованное комплексными числами. Б. Риман (B. Riemann), к-рому принадлежит и сам термин «модули», показал, что поля алгебраич. функций над $\mathbb{C}$ (или их моделей — компактных римановых поверхностей) рода $g \geqslant 2$ зависят от $3g-3$ непрерывных комплексных параметров — модулей.

Основные понятия М. т. Пусть S — нек-рая *схема* (комплексное или алгебраич. пространство). Семейство объектов, параметризованных схемой S (или, как часто говорят, «над S», или «с базой S»),— это набор объектов

$$\{X_s \mid s \in S, \quad X_s \in A\},$$

снабженный дополнительной структурой, согласованной со структурой базы S. Эта структура в каждом конкретном случае задается явно. Функтор семейств — это контравариантный функтор $\mathscr{M}$ из категории схем (или пространств) в категорию множеств, определяемый следующим образом: $\mathscr{M}(S)$ — множество классов изоморфных семейств над S. Каждому морфизму $f\colon T \to S$ сопоставляется отображение $f^*\colon \mathscr{M}(S) \to \mathscr{M}(T)$ посредством взятия индуцированного семейства.

Пусть M — объект в категории схем (комплексных или алгебраич. пространств) и h_M — функтор точек в этой категории, т. е. $h_M = \mathrm{Hom}(S, M)$. Если функтор семейств $\mathscr{M}$ представим, т. е. $\mathscr{M} = h_M$ для нек-рого M, то существует универсальное семейство с базой $\mathscr{M}$, и M наз. тонкой схемой (соответственно тонким комплексным или алгебраическим пространством) модулей. Функтор $\mathscr{M}$ представим в очень немногих случаях, в связи с чем было введено также понятие грубой схемы модулей; M наз. грубой схемой модулей, если существует морфизм функторов $\varphi\colon \mathscr{M} \to h_M$, обладающий свойствами: а) если $S = \mathrm{Spec}\, K = pt$ — одна точка (где K — алгебраически замкнутое поле), то отображение $\varphi\colon \mathscr{M}(pt) \to h_M(pt)$ биективно, иначе говоря, множество геометрич. точек схемы M находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством классов эквивалентности параметризуемых объектов; б) для каждой схемы N и морфизма функторов $\psi\colon \mathscr{M} \to h_N$ существует единственный морфизм $\chi\colon h_M \to h_N$ такой, что $\psi = \chi \circ \varphi$. Аналогично определяются грубая схема комплексного и алгебраического пространств модулей.

Грубая схема модулей хотя и параметризует однозначно классы изучаемых объектов с заданными дискретными инвариантами, но естественное семейство над ней не обладает (в отличие от семейства над тонкой схемой модулей) сильным свойством универсальности.

Грубая схема (пространство) модулей существует уже в достаточно большом числе случаев.

Примеры. 1) Модули алгебраических кривых. Пусть $A/R=\mathfrak{M}_g$ (соответственно $\overline{\mathfrak{M}}_g$) — множество классов изоморфных проективных неособых кривых (соответственно стабильных кривых) рода $g\geqslant 2$ над алгебраически замкнутым полем K. Семейство над S — это гладкий (плоский) собственный морфизм схем $f:X\to S$, слоями к-рого являются гладкие (стабильные) кривые рода g. Тогда существует грубая (но не тонкая) схема модулей M_g (соответственно M_g), являющаяся квазипроективным (проективным) неприводимым и нормальным многообразием над K. (см. [3], [5], [6]).

2) Модули алгебраических кривых с якобиевой жесткостью. Пусть $f:X\to S$ — гладкое семейство проективных кривых (соответственно плоское семейство стабильных кривых) рода $g\geqslant 1$, n — целое число, обратимое на S, и $R^1f_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ — первый прямой образ постоянного пучка $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ в этальной топологии. Тогда $R^1f_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ локально свободен, имеет ранг $2g$ и снабжен локально невырожденной симплектич. формой со значением в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, с точностью до обратимого элемента из $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Якобиева структура уровня n на X — это задание симплектич. изоморфизма

$$R^1f_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\xrightarrow{\sim}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}.$$

Пусть $\mathscr{M}_{g,n}$ (соответственно $\overline{\mathscr{M}}_{g,n}$) — функтор семейств гладких (стабильных) кривых рода $g\geqslant 2$ с якобиевой жесткостью уровня n. Тогда при $n\geqslant 3$ функтор $\mathscr{M}_{g,n}$ (соответственно $\overline{\mathscr{M}}_{g,n}$) представим квазипроективной (проективной) схемой $M_{g,n}$ (соответственно $\overline{M}_{g,n}$) над $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/n,\xi_n]$, где ξ_n — первообразный корень n-й степени из 1, т. е. существует тонкая схема модулей $M_{g,n}$ (соответственно $\overline{M}_{g,n}$) для гладких (стабильных) кривых рода $g\geqslant 2$ над полем характеристики взаимно простой с n, снабженных якобиевой жесткостью уровня n. Для достаточно больших n схема $M_{g,n}$ является гладкой [5].

3) Поляризованные алгебраические многообразия. Поляризованным семейством наз. пара $(X/S,\mathfrak{L}/S)$, где X/S — гладкое семейство многообразий, т. е. гладкий собственный морфизм $f:X\to S$, а $\mathfrak{L}/S$ — класс относительно обильного обратимого пучка $\mathscr{L}_{X/S}$ в $\operatorname{Hom}(S,\operatorname{Pic}X/S)$ по модулю $\operatorname{Hom}(S,\operatorname{Pic}^{\circ}X/S)$, где $\operatorname{Pic}X/S$ — относительная схема Пикара, а $\operatorname{Pic}^{\circ}X/S$ — ее связная компонента нулевого сечения. В этом случае строится функтор поляризованных семейств $\mathscr{M}_h$ с заданным многочленом Гильберта h. Без дополнительных ограничений этот функтор не представим. Существование грубого пространства модулей известно (1982) лишь в отдельных случаях.

Для поляризованных алгебраич. многообразий также существует понятие жесткости уровня n.

4) Векторные расслоения. Пусть A/R — множество классов векторных расслоений ранга n на алгебраич. многообразии X. Семейство над S — это векторное расслоение E на $X\times S$. Грубое пространство модулей $\bar{M}_{d,n}$ существует здесь как нормальное проективное многообразие для полустабильных векторных расслоений ранга n и степени d на неособой проективной алгебраич. кривой X над алгебраически замкнутым полем K. Стабильные векторные расслоения в $\bar{M}_{d,n}$ параметризуются открытым гладким подмногообразием $M_{d,n}\subset\bar{M}_{d,n}$. Если d и n взаимно просты, то $M_{d,n}=\bar{M}_{d,n}$. Аналогичные результаты получены и для стабильных векторных расслоений на алгебраич. поверхности. Более того, в этом случае существует тонкая схема модулей (см. [7], [10] — [14]).

Локальная и глобальная теории. Локальная теория возникла как теория деформаций комплексных структур (см. *Деформация* 1) и 2)). Основными методами глобальной теории являются теория представимых функторов и геометрич. теория инвариантов, теория алгебраич. стеков и алгебраизация формальных модулей.

Метод построения глобального пространства модулей восходит к классической *инвариантов теории*. Он заключается в следующем. Строится достаточно большое семейство $X \to H$, содержащее представителей всех классов эквивалентности изучаемых объектов, причем такое, что отношение эквивалентности на H сводится к действию алгебраич. группы G. Затем развивается теория действия алгебраич. групп на алгебраич. многообразиях (схемах, пространствах) с целью выяснения условий существования фактора H/G в соответствующей категории. Основным инструментом построения семейства $X \to H$ является теория *Гильберта схем*. При таком подходе трудности построения семейства $X \to H$ сводятся к проблеме одновременного погружения изучаемых объектов в проективное пространство. Важным результатом о возможности такого одновременного погружения является теорема Мацусаки. Трудной проблемой остается и проблема существования фактора H/G. Имеются понятия категорного и геометрич. факторов. Конструкция грубого пространства модулей сводится к задаче о существовании геометрич. фактора, при этом используется понятие стабильности точек, соответствующее понятию орбиты общего положения. Результаты о действиях редуктивных групп на алгебраич. многообразиях над полями характеристики 0 распространяются и на случай полей характеристики $p>0$.

Другой подход к глобальной М. т.— метод алгебраич. стеков, т. е. метод глобализации локальной теории деформаций. Первый шаг в исследовании представимости глобального функтора семейств при таком подходе — установление алгебраизуемости формальной версальной деформации для каждого объекта X_0. Трудностью для построения глобального пространства модулей является то, что не всегда факторизация базы семейства по отношению эквивалентности будет отделимым пространством. В таких случаях заменой объекта, представляющего функтор $\mathscr{M}$, служит алгебраич. стек, изучение свойств к-рого позволяет получить нек-рую информацию о пространстве модулей.

Один из подходов к глобальной М. т. над $\mathbb{C}$ — это теория *отображения периодов*. Основным объектом здесь является классифицирующее пространство D поляризованных *Ходжа структур* веса k для заданных чисел Ходжа. Для семейства $X \to S$ поляризованных алгебраич. многообразий над $\mathbb{C}$ периоды определяют отображение S в соответствующее классифицирующее пространство D структур Ходжа. Проблема модулей сводится к изучению условий биективности отображений периодов. Наличие локальной (глобальной) инъективности для отображения периодов — это т. н. локальная (глобальная) проблема Торелли. На этом пути существование грубых пространств модулей доказано для кривых, абелевых многообразий и $K3$-поверхностей.

Задача компактификации многообразия модулей M заключается в нахождении естественного и полного (проективного или компактного в теории над полем $\mathbb{C}$) многообразия $\overline{M}$, содержащего M в качестве плотного открытого подмножества, а также в описании и геометрич. интерпретации границы $\overline{M} \setminus M$. В примере 1) естественной компактификацией грубого многообразия модулей M_g кривых рода $g \geqslant 2$ служит проективное многообразие модулей $\overline{M}_g$ стабильных кривых. В примере 4) многообразие стабильных векторных расслоений

ранга n и степени d на алгебраич. кривой само является проективным и гладким, если $(d, n)=1$. Для поляризованных абелевых многообразий над $\mathbb{C}$ известны несколько способов компактификации многообразий модулей.

Лит.: [1] Artin M., Algebraization of formal moduli I. Global Analysis, Tokyo, 1969, p. 21—71; [2] его же, «Invent. math.», 1974, v. 27, p. 165—89; [3] Делинь П., Мамфорд Д., «Математика», 1972, т. 16, № 3, с. 13—53; [4] Дьёдонне Ж., Кэррол Дж., Мамфорд Д., Геометрическая теория инвариантов, пер. с англ., М., 1974; [5] Mumford D., Geometric invariant theory, B.— [a.o.], 1965; [6] его же, «L'enseignement math.», 1977, v. 23; [7] Gieseker D., «Invent. math.», 1977, v. 43, p. 233—82; [8] его же, «Ann. Math.», 1977, v. 106, p. 45—60; [9] Matsusaka T., «Amer. J. Math.», 1972, v. 94, № 4, p. 1027—77; [10] Newstead P. E., Lectures on introduction to moduli problems and orbit spaces, B.—[a.o.], 1978; [11] Okonek C., Schcider M., Spindler H., Vector budles on complex projective spaces, Boston, 1980; [12] Popp H., Moduli theory and classification theory of algebraic varieties, B.—[a. o.], 1977; [13] Seshadri C. S., «Ann. Math.», 1967, v. 85, p. 302—36; [14] Тюрин А. Н., «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, в. 6, с. 59—88.

В. А. Исковских.

МОДУЛИ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ — численные характеристики (параметры), одни и те же для всех конформно эквивалентных римановых поверхностей, в своей совокупности характеризующие конформный класс эквивалентности данной римановой поверхности. При этом две римановы поверхности R_1 и R_2 наз. конформно эквивалентными, если существует конформное отображение R_1 на R_2. Напр., конформные классы компактных римановых поверхностей топологич. рода $g>1$ характеризуются $6g-6$ действительными М. р. п.; риманова поверхность типа тора ($g=1$) характеризуется двумя модулями; n-связная плоская область, рассматриваемая как риманова поверхность с краем, при $n\geqslant 3$ характеризуется $3n-6$ модулями. О структуре пространства М. р. п. см. *Римановых поверхностей конформные классы.*

Необходимым условием конформной эквивалентности двух плоских областей является одинаковая связность этих областей. Согласно *Римана теореме* все односвязные области с более чем одной граничной точкой конформно эквивалентны друг другу: каждую такую область можно конформно отобразить на одну и ту же канонич. область, в качестве к-рой обычно рассматривают единичный круг. Для областей связности n, $n\geqslant 2$, точного эквивалента теоремы Римана не существует: нельзя указать какую-либо фиксированную область, на к-рую можно однолистно и конформно отобразить все области данного порядка связности. Это привело к более гибкому определению канонич. n-связной области, к-рое указывает общую геометрич. структуру этой области, но не фиксирует ее модулей (см. *Конформное отображение*).

Каждая двусвязная область D плоскости z с невырожденными граничными континуумами может быть конформно отображена на нек-рое круговое кольцо $r<|w|<R$, $0<r<R<\infty$. Отношение R/r радиусов граничных окружностей этого кольца является конформным инвариантом и наз. модулем двусвязной области D. Пусть D — область связности n, $n\geqslant 3$, с невырожденной границей. Область D можно конформно отобразить на нек-рую n-связную круговую область Δ, представляющую собой круговое кольцо $r<|w|<R$ с $n-2$ выброшенными кругами, ограниченными окружностями $C_k=\{w:|w-w_k|=r_k\}$, $k=1, \ldots, n-2$; окружности C_k, $k=1, \ldots, n-2$, лежат в кольце $r<|w|<R$ и попарно не имеют общих точек. При этом можно считать, что $R=1$ и $w_1>0$. Тогда область Δ зависит от $3n-6$ действительных параметров: от $n-1$ чисел r, $r_1, \ldots, r_{n-2}$ и от $2n-5$ действительных параметров, определяющих центры w_k окружностей C_k, $k=1, \ldots, n-2$. Эти $3n-6$ действительных параметров

и являются модулями n-связной области D в случае $n \geqslant 3$.

В качестве модулей n-связной области D можно взять и другие μ действительных параметров ($\mu=1$, если $n=2$, и $\mu=3n-6$, если $n \geqslant 3$), определяющих конформное отображение области D на нек-рую канонич. n-связную область другого вида.

Лит.: [1] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960, с. 74, 325; [2] Берс Л., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 4, с. 153—98; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [4] Курант Р., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, пер. с англ., М., 1953. *Г. В. Кузьмина, Е. Д. Соломенцев.*

МОДУЛЬ — числовая характеристика какого-либо математич. объекта. Обычно значение М.— неотрицательное действительное число — элемент $\mathbb{R}^+$, обладающий нек-рыми характеристич. свойствами, обусловленными свойствами множества Ω рассматриваемых объектов. Понятие М. фигурирует в различных разделах математики, хотя иногда и под другими названиями — *абсолютное значение*, *норма* и т. п. Все они, в сущности, являются обобщениями понятия *абсолютной величины* действительного или комплексного числа (но термин М. обычно означает обобщение специального вида). При этом функция $\Omega \to \mathbb{R}^+$ оказывается морфизмом нек-рой структуры в Ω на одну из (алгебраических) структур в $\mathbb{R}^+$, среди к-рых важнейшие — это порядок, аддитивность и мультипликативность. При этом необходимо сохранение основных свойств абсолютной величины (см. ниже α) — ε)). В более абстрактных ситуациях вместо $\mathbb{R}^+$ естественно использовать упорядоченные полукольца (такой концепции М. удовлетворяют, напр., *мера*, *емкость*, *масса* и т. д.). Наконец, термином М. обозначаются числовые характеристики и др. объектов: таковы, напр., модуль плоской области, *модуль кольца*, *модули римановой поверхности*, *непрерывности модуль*, *гладкости модуль* (и даже — М. в теории упругости (сжатия, сдвига)). Однако во всех таких случаях можно ввести величины, функционально зависящие от такого М. и более адекватно отражающие природу рассматриваемых объектов (напр., экстремальную длину вместо М. семейства кривых).

Примеры. 1) М. элемента x *полуупорядоченного пространства* P — число

$$|x| = x^+ + x^-,$$

где x^+ (x^-) — положительная (отрицательная) часть x. При этом, как и для действительных чисел,

α) $|x| \geqslant x, \ -x; \quad |x| = |-x|$;

β) $|x| = 0 \iff x = 0 \quad (0$ — нуль в $P)$.

2) М. элемента x отделимого *предгильбертова пространства* H, в частности конечномерного векторного пространства,— число

$$|x| = \langle x, x\rangle^{1/2},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в H. Это — одна из норм в H, и потому

γ) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;

δ) $|\lambda x| = |\lambda||x|$, λ — скаляр.

3) М. элемента x локально компактного тела — число

$$|x| = \mu(xS)/\mu(S) \quad (x \neq 0) \text{ или } 0 \quad (x = 0),$$

где μ — мера Хаара на аддитивной группе K, S — измеримое множество в ней. При этом, как и для чисел из $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$,

ε) $|xy| = |x||y|$.

Обобщением этого понятия является *модуль автоморфизма*.

4) М. эндоморфизма A векторного пространства V над полем K (частный случай М. автоморфизма) — число $\mathrm{mod}_V\ (A)$, оказывающееся равным просто $\mathrm{mod}_K\ (\det A)=|\det A|$, где $|\cdot|$ означает М. элемента из примера 3). *М. И. Войцеховский.*

МОДУЛЬ — абелева группа с кольцом операторов. М. является обобщением (линейного) векторного пространства над полем K для случая, когда K заменяется нек-рым кольцом.

Пусть задано кольцо A. Аддитивная абелева группа M наз. л е в ы м A-м о д у л е м, если определено отображение $A\times M\to M$, значение к-рого на паре (a, m) для $a\in A$, $m\in M$ записывается как am, причем выполняются аксиомы:

1) $a(m_1+m_2)=am_1+am_2$,
2) $(a_1+a_2)m=a_1m+a_2m$,
3) $a_1(a_2m)=(a_1a_2)m$.

Если кольцо A обладает единицей, то обычно требуют дополнительно, чтобы для любого $m\in M$ выполнялось равенство $1m=m$. М. с этим свойством наз. у н и т а р н ы м, или у н и т а л ь н ы м.

Аналогично определяются п р а в ы е A-м о д у л и; при этом аксиома 3) заменяется условием $(ma_1)a_2=m(a_1a_2)$. Любой правый A-модуль можно рассматривать как левый A^0-модуль над кольцом A^0, антиизоморфным кольцу A, поэтому любому утверждению о правых A-модулях соответствует нек-рое утверждение о левых A^0-модулях и наоборот. В случае, когда кольцо A коммутативно, любой левый A-модуль можно рассматривать как правый A-модуль, и различие между левыми и правыми М. исчезает. Ниже будут рассматриваться только левые A-модули.

Простейшие примеры М. (конечные абелевы группы, т.е. $\mathbb{Z}$-м о д у л и) появляются уже у К. Гаусса (C. Gauss) как группы классов бинарных квадратичных форм. Общее понятие М. встречается впервые в 60—80-х гг. 19 в. в работах Р. Дедекинда (R. Dedekind) и Л. Кронекера (L. Kronecker), посвященных арифметике полей алгебраич. чисел и алгебраич. функций. Проводившееся примерно в это же время исследование конечномерных ассоциативных алгебр, и в частности групповых алгебр конечных групп (Б. Пирс, B. Peirce, Ф. Фробениус, F. Frobenius), привело к изучению идеалов нек-рых некоммутативных колец. Первоначально теория М. развивалась преимущественно как теория идеалов нек-рого кольца. Лишь позднее в работах Э. Нётер (E. Noether) и В. Крулля (W. Krull) было замечено, что многие результаты удобнее формулировать и доказывать в терминах произвольных М., а не только идеалов. Последующее развитие теории М. связано с применением методов и идей теории категорий, в частности методов гомологич. алгебры.

П р и м е р ы м о д у л е й. 1) Любая абелева группа M является М. над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Для $a\in\mathbb{Z}$ и $m\in M$ произведение am определяется как результат сложения m a раз.

2) В случае, когда A — поле, понятие унитарного A-модуля в точности эквивалентно понятию линейного векторного пространства над A.

3) Координатное n-мерное векторное пространство V над полем K можно рассматривать как М. над кольцом $M_n(K)$ всех $(n\times n)$-матриц с коэффициентами из K. Для $v\in V$ и $X\in M_n(K)$ произведение Xv определяется как умножение матрицы X на столбец координат вектора v.

4) Ассоциативное кольцо A является левым A-модулем. Умножение элементов кольца на элементы М. совпадает с обычным умножением в A.

5) Дифференциальные формы на гладком многообразии X снабжены естественной структурой М. над кольцом всех гладких функций на X.

6) С любой абелевой группой M связано ассоциативное кольцо с единицей $\mathrm{End}(M)$ всех эндоморфизмов группы M. Группа M снабжена естественной структурой $\mathrm{End}(M)$-модуля.

Если на M задана структура A-модуля для нек-рого кольца A, то отображение $m \to am$ является эндоморфизмом M для любого $a \in M$. Сопоставляя элементу $a \in A$ порождаемый им эндоморфизм M, получают гомоморфизм φ кольца A в $\mathrm{End}(M)$. Наоборот, любой гомоморфизм $\varphi: A \to \mathrm{End}(M)$ определяет на M структуру A-модуля. Таким образом, задание структуры A-модуля на абелевой группе M равносильно заданию гомоморфизма $\varphi: A \to \mathrm{End}(M)$. Такой гомоморфизм наз. также представлением кольца A, а M наз. модулем представления. С любым представлением φ связан двусторонний идеал $\mathrm{Ann}(M) = \mathrm{Ker}\,\varphi$, состоящий из элементов $a \in A$ таких, что $am = 0$ для всех $m \in M$. Этот идеал наз. аннулятором модуля M. В случае, когда $\mathrm{Ann}(M) = 0$, представление наз. точным, M — точным модулем.

Очевидно, что модуль M можно рассматривать также как М. над факторкольцом $A/\mathrm{Ann}(M)$. В частности, хотя определение М. и не предполагает ассоциативности кольца A, кольцо $A/\mathrm{Ann}(M)$ всегда ассоциативно. Поэтому в большинстве случаев достаточно ограничиться рассмотрением М. над ассоциативными кольцами. Ниже, везде, где не оговорено противное, кольцо A будет предполагаться ассоциативным.

G-модули. Пусть G — нек-рая группа. Аддитивная абелева группа M наз. левым G-модулем, если задано отображение $G \times M \to M$, значение к-рого на паре (g, m), где $g \in G$, $m \in M$, записывается как gm, причем для любого $g \in G$ отображение $m \to gm$ является эндоморфизмом группы M, для любых $g_1, g_2 \in G$, $m \in M$, $(g_1 g_2)m = g_1(g_2 m)$ и для всех $m \in M$, $1m = m$, где 1 — единица группы G. Для любого $g \in G$ отображение $m \mapsto gm$ является автоморфизмом группы M.

Аналогично можно определить правые G-модули. При $gm = mg^{-1}$ любой правый G-модуль будет левым G-модулем.

Примеры G-модулей. 1) Пусть K — расширение Галуа нек-рого поля k с группой Галуа G. Тогда аддитивная и мультипликативная группы поля K снабжены естественной структурой G-модуля. Если k — поле алгебраич. чисел, то G-модулями также являются аддитивная группа кольца целых чисел поля K, группа единиц поля K, группа дивизоров и группа классов дивизоров поля K, и т. д. М. над группой Галуа наз. также модулями Галуа.

2) Пусть задано нек-рое расширение абелевой группы M, т. е. точная последовательность групп

$$1 \to M \to F \to G \to 1,$$

где M — абелев нормальный делитель группы F и G — произвольная группа. Тогда группу M можно снабдить естественной структурой G-модуля, положив для $g \in M$, $m \in M$, $gm = \bar{g} m \bar{g}^{-1}$, где $\bar{g}$ — нек-рый прообраз элемента g в группе F.

В тех случаях, когда групповая операция в абелевой группе M записывается мультипликативно (напр., M — мультипликативная группа нек-рого поля), вместо записи gm используют также запись m^g, т. е. операторы из группы G записывают как показатели.

Пусть задан G-модуль M. Сопоставляя элементу $g \in G$ автоморфизм $m \mapsto gm$ группы M, получают гомоморфизм группы G в группу обратимых элементов кольца $\mathrm{End}(M)$. Наоборот, любой гомоморфизм группы G в группу обратимых элементов кольца $\mathrm{End}(M)$ задает на M структуру G-модуля.

Понятия М. над кольцом и G-модуля тесно связаны. Именно, любой G-модуль M можно рассматривать как

М. над групповым кольцом $\mathbb{Z}G$, если распространить действие группы G на M по линейности, т. е. положить

$$\left(\sum a_i g_i\right) m = \sum a_i (g_i m),$$

где $a_i \in Z$, $g_i \in G$, $m \in M$. Наоборот, если на M задана структура унитарного $\mathbb{Z}G$-модуля, то M можно рассматривать как G-модуль.

В случае, когда M является K-модулем над нек-рым коммутативным кольцом K и одновременно G-модулем, причем действие элементов группы G на M перестановочно с действием элементов K, M можно снабдить структурой KG-модуля, распространяя действие с G на KG по линейности. Напр., если V — линейное векторное пространство над полем K, то задание структуры KG-модуля на V эквивалентно заданию представления G в пространстве V.

Используя стандартную инволюцию $g \to g^{-1}$ в группе G, любой левый G-модуль M можно превратить в правый G-модуль, положив $mg = g^{-1}m$ для $m \in M$, $g \in G$. Аналогично, любой правый G-модуль можно превратить в левый G-модуль.

Модуль над алгеброй Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над коммутативным кольцом K и M — нек-рый K-модуль. Задание структуры $\mathfrak{g}$-модуля на M состоит в задании K-эндоморфизма $m \mapsto gm$ группы M для каждого $g \in \mathfrak{g}$, причем требуется выполнение аксиомы

$$[g_1, g_2]m = g_1(g_2 m) - g_2(g_1 m)$$

для любых $g_1, g_2 \in \mathfrak{g}$, $m \in M$. Это определение отличается от данного ранее определения A-модуля. Задание на M структуры $\mathfrak{g}$-модуля равносильно заданию K-гомоморфизма $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли кольца $\mathrm{End}(M)$. Модуль M над алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ можно рассматривать также как М. в обычном смысле над универсальной обертывающей алгеброй алгебры $\mathfrak{g}$.

Конструкции в теории модулей. Исходя из заданных A-модулей, можно получать новые A-модули при помощи ряда стандартных построений. Так, с любым модулем M связана *решетка* всех его подмодулей. Напр., если кольцо A рассматривать как левый М. над собой, то его левые подмодули — это в точности левые идеалы кольца A. Ряд важных типов М. определяется в терминах решетки подмодулей. Напр., условие обрыва убывающих (возрастающих) цепей подмодулей определяет *артиновы модули* (*нётеровы модули*). Условие отсутствия нетривиальных подмодулей, т. е. подмодулей, отличных от 0 и всего М., выделяет *неприводимые модули*.

Для модуля M и любого его подмодуля N факторгруппу M/N можно снабдить структурой A-модуля. Этот модуль наз. ф а к т о р м о д у л е м M по N.

Гомоморфизм A-модулей определяется как гомоморфизм абелевых групп $f: M \to N$, перестановочный с умножением на элементы кольца A, т. е. удовлетворяющий условию $f(am) = af(m)$ для всех $m \in M$, $a \in A$. Если заданы два гомоморфизма $f_1, f_2: M \to N$, то их сумма, определяемая формулой $(f_1 + f_2)(m) = f_1(m) + f_2(m)$, снова будет гомоморфизмом A-модулей. Это сложение задает на множестве $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ всех гомоморфизмов модуля M в N строение абелевой группы. Для любого гомоморфизма $f: M \to N$ определены подмодули $\mathrm{Ker}\, f$ (ядро f) и $\mathrm{Im}\, f$ (образ f), а также фактормодули $\mathrm{Coker}\, f = N/\mathrm{Im}\, f$ (коядро f) и $\mathrm{Coim}\, f = M/\mathrm{Ker}\, f$ (кообраз f). М. $\mathrm{Im}\, f$ и $\mathrm{Coim}\, f$ канонически изоморфны, поэтому их обычно отождествляют. Напр., для любого левого идеала J кольца A определен фактормодуль A/J. М. A/J неприводим тогда и только тогда, когда J — максимальный левый идеал. Если M — нек-рый неприводимый A-модуль, не аннулируемый кольцом A, то M изоморфен М. A/J для нек-рого максимального левого идеала J.

Для любого семейства A-модулей $\{M_i\}$, где i пробегает нек-рое множество индексов J, в категории A-модулей существуют прямая сумма и прямое произведение семейства $\{M_i\}$. При этом элементы прямого произведения $\prod_{i\in J} M_i$ можно интерпретировать как векторы $(\ldots, m_i, \ldots)$, компоненты к-рых заиндексированы множеством J, причем для каждого индекса i, $m_i \in M_i$. Сложение таких векторов и умножение их на элементы кольца определяются покомпонентно. Прямую сумму $\coprod_{i\in J} M_i$ семейства $\{M_i\}$ можно интерпретировать как подмодуль прямого произведения, состоящий из векторов, у к-рых все компоненты, кроме конечного числа, равны нулю.

Для проективной (индуктивной) системы A-модулей проективный (индуктивный) предел этой системы можно естественным образом снабдить структурой A-модуля. Прямое произведение и прямая сумма М. могут рассматриваться как частные случаи понятий проективного и индуктивного пределов.

Образующие и соотношения. Пусть X — нек-рое подмножество A-модуля M. Подмодулем, порожденным множеством X, наз. пересечение всех подмодулей модуля M, содержащих X. Если этот подмодуль совпадает с M, то X наз. семейством (или системой) образующих модуля M. М., допускающий конечное семейство образующих, наз. конечно порожденным модулем. Напр., в нётеровом кольце любой идеал является конечно порожденным М., прямая сумма конечного числа конечно порожденных М. снова конечно порождена. Любой фактормодуль конечно порожденного М. также конечно порожден. Для построения системы образующих модуля M часто оказывается полезной лемма Накаямы: для любого идеала $\mathfrak{A}$, содержащегося в радикале кольца A, из условия $\mathfrak{A}M=M$ следует $M=0$. В частности, в условиях леммы Накаямы элементы $m_1, \ldots, m_r$ являются системой образующих для M, если их образы порождают модуль $M/\mathfrak{A}M$. Это соображение особенно часто используется в случае, когда A — локальное кольцо и $\mathfrak{A}$ — максимальный идеал в A.

Пусть M — модуль с системой образующих $\{x_i\}_{i\in J}$. Тогда отображение $\varphi: y_i \to x_i$ определяет эпиморфизм φ свободного A-модуля F с образующими $\{y_i\}_{i\in J}$ на M (М. F можно определить как множество формальных конечных сумм $\Sigma a_i y_i$, $a_i \in A$, отображение φ распространяется с образующих на элементы М. F по линейности). Элементы М. $R=\operatorname{Ker}\varphi$ наз. соотношениями между образующими $\{x_i\}$ модуля M. Если модуль M можно представить как фактормодуль конечно порожденного свободного М. F так, чтобы М. соотношений R также был конечно порожден, что M наз. конечно представимым модулем. Напр., над нётеровым кольцом A любой конечно порожденный М. конечно представим. В общем случае конечная представимость не следует из конечной порожденности.

Замена кольца. Существуют стандартные конструкции, позволяющие рассматривать A-модуль M как М. над нек-рым другим кольцом. Напр., пусть задан гомоморфизм колец $\varphi: B \to A$. Тогда, полагая $bm=\varphi(b)m$, можно рассматривать M как B-модуль. Если модуль M — унитарный A-модуль, и гомоморфизм φ переводит единицу в единицу, то M станет унитарным B-модулем.

Пусть задан нек-рый гомоморфизм колец $\varphi: A \to B$ и A-модуль M. Тогда B можно снабдить структурой (B, A)-модуля, полагая $ba=b\varphi(a)$ для $b\in B$, $a\in A$, и можно рассмотреть левый B-модуль $B\otimes_A M$. Говорят, что этот М. получен из M расширением скаляров.

Категория модулей. Класс всех М. над заданным кольцом A с гомоморфизмами М. в качестве морфизмов образует *абелеву категорию*, обозначаемую $A=\mathrm{mod}$. Из функторов, определенных на этой категории, наиболее важны функторы Hom (гомоморфизмы) и $\otimes$ (тензорное произведение). Функтор Hom принимает значения в категории абелевых групп и сопоставляет паре A-модулей M, N, группу $\mathrm{Hom}_A(M, N)$. Для $f:M_1 \to M$ и $\varphi:N \to N_1$ очевидным образом определяются отображения

$$f':\mathrm{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_1, N)$$

и

$$\varphi':\mathrm{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N_1),$$

т. е. функтор Hom контравариантен по первому аргументу и ковариантен по второму. В случае, когда M или N несет структуру бимодуля, группа $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ обладает дополнительной модульной структурой. Если N есть (A,B)-модуль, то $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ — правый B-модуль, а если M есть (A, B)-бимодуль, то $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ — левый B-модуль.

Функтор $\otimes_A$ ставит в соответствие паре M, N, где M — правый A-модуль, а N — левый A-модуль, тензорное произведение $M\otimes_A N$ модулей M и N над кольцом A. Этот функтор принимает значения в категории абелевых групп и ковариантен как по M, так и по N. В случае, когда M или N — бимодули, группу $M\otimes_A N$ можно снабдить дополнительной структурой. Именно, если M есть (B, A)-модуль, то $M\otimes_A N$ есть B-модуль, а если N есть (A, B)-бимодуль, то $M\otimes_A N$ — правый B-модуль. Изучение функторов Hom и $\otimes$, а также их производных функторов является одной из основных задач гомологич. алгебры.

Многие важные типы М. характеризуются в терминах функторов Hom и $\otimes$. Так, *проективный модуль* M определяется требованием, чтобы функтор $\mathrm{Hom}_A(M, X)$ (от X) был точным. Аналогично, *инъективный модуль* N определяется требованием точности $\mathrm{Hom}_A(X, N)$ (от X). *Плоский модуль* M определяется требованием точности функтора $M\otimes_A X$.

М. над данным кольцом A можно рассматривать с двух точек зрения.

1) Можно изучать М. с точки зрения их внутренней структуры. Основной задачей здесь является полная классификация М., т. е. построение для каждого М. системы инвариантов, характеризующей этот М. с точностью до изоморфизма, и умение по заданному набору инвариантов строить М. с этими инвариантами. Для нек-рых типов колец такое описание возможно. Напр., если M — конечно порожденный М. над групповым кольцом KG конечной группы G, где K — нек-рое поле, характеристика к-рого взаимно проста с порядком G, то M представим в виде конечной прямой суммы неприводимых подмодулей (модуль M вполне приводим). Это представление определено однозначно с точностью до изоморфизма (сами неприводимые подмодули в общем случае не определяются однозначно). Все неприводимые подмодули также допускают простое описание: все они содержатся в регулярном представлении группы G и находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми характерами этой группы. Также простое описание допускают М. над кольцом главных идеалов и над дедекиндовым кольцом. Именно, любой конечно порожденный модуль M над кольцом главных идеалов A изоморфен конечной прямой сумме М. вида $A/\mathfrak{A}_i$, где $\mathfrak{A}_i$ — нек-рые идеалы кольца A (возможно, нулевые), причем $\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{A}_2\subseteq\ldots\subseteq\mathfrak{A}_m\neq A$ и идеалы $\mathfrak{A}_i$ однозначно определяются последним условием. Таким образом, набор инвариантов $\{\mathfrak{A}_i\}$ полностью определяет модуль M. Если M — конечно порожденный М. над дедекиндовым кольцом

A, то $M=M_1\oplus M_2$, где M_2 — периодич. М., а M_1 — М. без кручения (выбор модуля M_1 не однозначен). Модуль M_2 аннулируется нек-рым идеалом $\mathfrak{A}$ кольца A и, следовательно, является М. над кольцом главных идеалов $A/\mathfrak{A}$ и допускает описание, указанное выше, а модуль M_1 представим в виде $\oplus^n A\oplus\mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ — нек-рый идеал A, а $\oplus^n$ — прямая сумма n раз. Модуль M_1 с точностью до изоморфизма однозначно определяется двумя инвариантами: числом n и классом идеала $\mathfrak{B}$ в группе классов идеалов.

2) Другой подход к изучению М. состоит в изучении категории $A=\mathrm{mod}$ и данного модуля M как объекта этой категории. Такое изучение является предметом гомологич. алгебры и алгебраич. K-теории. На этом пути было получено много важных и глубоких результатов.

Часто рассматривают М., несущие нек-рую дополнительную структуру. Так рассматриваются *градуированные модули*, *фильтрованные модули*, *топологические модули*, модули с *полуторалинейной формой* и т. д.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] его же, Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [3] его же, Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [4] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [5] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [6] Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [7] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [8] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [9] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [10] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [11] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [12] Басс Х., Алгебраическая K-теория, пер. с англ., М., 1973; [13] Милнор Дж., Введение в алгебраическую K-теорию, пер. с англ., М., 1974.

Л. В. Кузьмин.

МОДУЛЬ АВТОМОРФИЗМА — действительное положительное число, ставящееся в соответствие автоморфизму локально компактной группы. Если G — такая группа и α — нек-рый автоморфизм группы G как топологич. группы, то модуль автоморфизма α определяется формулой

$$\mathrm{mod}_G(\alpha)=\frac{\mu(\alpha S)}{\mu(S)},$$

где μ — левоинвариантная мера Хаара на группе G и S — любое компактное подмножество группы G положительной меры (причем $\mathrm{mod}_G(\alpha)$ не зависит от S). Если G компактна или дискретна, то всегда $\mathrm{mod}_G(\alpha)=1$, т. к. для компактной группы можно положить $S=G$, а для дискретной $S=\sigma$, где σ — любой элемент G.

Если α и β — два автоморфизма группы G, то

$$\mathrm{mod}_G(\alpha\cdot\beta)=\mathrm{mod}_G(\alpha)\,\mathrm{mod}_G(\beta).$$

Если Γ — нек-рая топологич. группа, к-рая непрерывно действует на группу G автоморфизмами, то $\mathrm{mod}_G(\alpha)$ определяет непрерывный гомоморфизм $\Gamma\to R_+^*$, где R_+^* — мультипликативная группа действительных положительных чисел. В частности, сопоставляя каждому элементу $\sigma\in G$ порождаемый им внутренний автоморфизм группы G и рассматривая модуль этого автоморфизма, получают непрерывный гомоморфизм G в группу R_+^*. Этот гомоморфизм тривиален тогда и только тогда, когда левоинвариантная мера Хаара на группе G является одновременно и правоинвариантной. Группы, удовлетворяющие последнему условию, наз. унимодулярными.

Другой пример — локально компактное тело K, каждый ненулевой элемент α к-рого определяет автоморфизм умножения на α аддитивной группы тела K. Функция $\mathrm{mod}_K(\alpha)$ используется при изучении структуры локально компактных тел.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления, пер. с франц., М., 1970; [2] Вейль А., Интегрирование в топологи-

ческих группах и его применения, пер. с франц., М., 1950; [3] его же, Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972.

Л. В. Кузьмин.

МОДУЛЬ БЕЗ КРУЧЕНИЯ — модуль M над кольцом A без делителей нуля такой, что из равенства $am=0$, где $a\in A$ и $m\in M$, следует $a=0$ или $m=0$. Примерами таких модулей (левых) являются само кольцо A, а также все его ненулевые левые идеалы. Подмодуль М. б. к., а также прямая сумма и прямое произведение М. б. к.— также М. б. к. Если кольцо A коммутативно, то для любого модуля M определен подмодуль кручения

$$T(M)=\{m\in M \mid \exists a\in A,\quad a\neq 0,\ am=0\}.$$

Тогда фактормодуль $M/T(M)$ является М. б. к.

Л. В. Кузьмин.

МОДУЛЬ КОЛЬЦА — величина, обратная экстремальной длине семейства замкнутых кривых в кольце $r_1<|z|<r_2$, разделяющих граничные окружности; М. к. равен

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

С помощью конформного отображения на соответствующее кольцо K получается модуль m_G кольцевой области G. Оказывается, что $m_G=\frac{1}{2\pi}D(u)$, где $D(u)$ — *Дирихле интеграл* от действительной части функции u, отображающей G на K: $\{1<|w|<e^{m_G}\}$. (Таким образом, данная кольцевая область отображается на кольцо с определенным отношением радиусов граничных окружностей. Этот факт может быть принят за другое определение М. к., обобщение к-рого ведет к понятию модуля плоской области.)

Обобщением понятия модуля кольцевой области является модуль m_γ граничного элемента γ открытой римановой поверхности R относительно его окрестности. В зависимости от того, конечна или бесконечна величина m_γ, граничный элемент имеет гиперболич. или параболич. тип, а R обладает или нет *Грина функцией*.

Для односвязной области D гиперболич. типа определяется т. н. приведенный модуль m_{z_0} относительно $z_0\in D$ как предел

$$\lim_{r\to 0}\left(m(r)+\frac{1}{2\pi}\ln r\right),$$

где $m(r)$ — модуль кольцевой области $D(r)=D\cap\{|z-z_0|>r\}$. Оказывается, что $m_{z_0}=\frac{1}{2\pi}\ln R$, где R — *конформный радиус* D относительно $z_0\in D$.

М. П. Войцеховский.

МОДУЛЬ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ — конформно инвариантная числовая характеристика семейства кривых; величина, обратная *экстремальной длине* этого семейства.

МОДУЛЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА — параметр k, входящий в выражение эллиптич. интеграла в нормальной форме Лежандра, напр. в неполный эллиптич. интеграл 1-го рода

$$F(\varphi,\ k)=\int_0^{\varphi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}. \qquad (*)$$

Число k^2 иногда наз. лежандровым модулем, $k'=\sqrt{1-k^2}$ наз. дополнительным модулем. В приложениях обычно имеет место нормальный случай, когда $0<k<1$; при этом острый угол θ такой, что $\sin\theta=k$, наз. модулярным углом. Модуль k входит и в выражения *Якоби эллиптических функций*, возникающих при обращении эллиптич. интегралов вида (*).

Е. Д. Соломенцев.

МОДУЛЯРНАЯ ГРУППА — группа Γ всех дробно-линейных преобразований γ вида

$$z \longrightarrow \gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1, \qquad (1)$$

где a, b, c, d — целые рациональные числа. М. г. отождествляется с факторгруппой $\mathrm{SL}_2(Z)/\{\pm E\}$, где $E=\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|$, и является *дискретной подгруппой* в группе Ли $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})=\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm E\}$. Здесь $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (соответственно $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) — группа матриц $\left\|\begin{matrix}a & b\\ c & d\end{matrix}\right\|$, a, b, c, d — действительные (соответственно целые) числа, $ad-bc=1$. М. г. является *дискретной группой* преобразований верхней комплексной полуплоскости $H=\{z=x+iy \mid y>0\}$ (плоскости Лобачевского) и допускает представление образующими $T: z \to z+1$ и $S: z \to -1/z$ и соотношениями $S^2=(ST)^3=1$, т. е. является свободным произведением циклич. группы порядка 2, порожденной S, и циклич. группы порядка 3, порожденной ST (см. [2]).

Интерес к М. г. связан с изучением *модулярных функций*, *римановой поверхностью* к-рых является факторпространство H/Γ, отождествляемое с фундаментальной областью G М. г. Компактификация $X_\Gamma=(H/\Gamma)\cup\infty$ аналитически изоморфна комплексной проективной прямой, причем изоморфизм задается основной модулярной функцией $J(z)$. Фундаментальная область G имеет конечную площадь Лобачевского

$$\int_G y^{-2}\,dx\,dy=\frac{\pi}{3},$$

т. е. М. г. есть фуксова группа 1-го рода (см. [3]). Для решетки $L=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}z$, $z\in H$, решетка $L_1=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\gamma(z)$, $\gamma=\left\|\begin{matrix}a & b\\ c & d\end{matrix}\right\|\in\Gamma$, эквивалентна L, т. е. получается из L умножением элементов последней на ненулевое комплексное число $\lambda=(cz+d)^{-1}$.

Каждой решетке соответствует комплексный тор $\mathbb{C}/L$, аналитически эквивалентный неособой кубич. кривой (эллиптич. кривой). Это дает взаимнооднозначное соответствие между точками факторпространства H/Γ, классами эквивалентных решеток и классами (аналитически) эквивалентных эллиптич. кривых (см. [3]).

Исследование подгруппы М. г. представляет интерес в теории *модулярных форм* и *алгебраических кривых*. Главной конгруэнц-подгруппой $\Gamma(N)$ М. г. уровня $N\geqslant 1$ (N — целое число) наз. группа преобразований $\gamma(z)$ вида (1), у к-рых $a\equiv d\equiv 1 \pmod N$, $c\equiv b\equiv 0 \pmod N$. Подгруппа $\tilde\Gamma\subset\Gamma$ наз. конгруэнц-подгруппой, если $\tilde\Gamma\supset\Gamma(N)$ для нек-рого числа N; наименьшее такое N наз. уровнем $\tilde\Gamma$. Примеры конгруэнц-подгрупп уровня N: группа $\Gamma_0(N)$ преобразований (1) с c, делящимся на N, группа $\Gamma_1(N)$ преобразований (1) с $a\equiv d\equiv 1 \bmod N$ и $c\equiv 0 \bmod N$. Индекс подгруппы $\Gamma(N)$ в М. г. равен $(N^3/2)\prod_{p\mid N}(1-p^{-2})$, если $N>2$, p — простые числа и 6, если $N=2$, поэтому каждая конгруэнц-подгруппа имеет конечный индекс в М. г.

Каждой подгруппе $\tilde\Gamma$ конечного индекса в М. г. соответствует полная алгебраич. кривая $X_{\tilde\Gamma}$ (*модулярная кривая*), полученная из факторпространства $H/\tilde\Gamma$, и накрытие $X_{\tilde\Gamma}\to X_\Gamma$. Изучение ветвления этого накрытия позволяет найти для конгруэнц-подгрупп Γ образующие и соотношения, род кривой $X_{\tilde\Gamma}$ и доказать, что существуют подгруппы конечного индекса в М. г., не являющиеся конгруэнц-подгруппами (см. [3], [8], [7] т. 2). Изучение представлений М. г. началось в

работах (см. [4], [6]) в связи с теорией модулярных форм. Такие представления интенсивно изучаются в рамках теории автоморфных форм (см. [7]). Многие результаты, относящиеся к М. г., переносятся на случай арифметич. подгрупп в алгебраич. группах Ли.

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [2] Серр Ж.-П., Курс арифметики, пер. с франц., М., 1972; [3] Шимура Г., Введение в арифметическую теорию автоморфных функций, пер. с англ., М., 1973; [4] Hecke E., Mathematische Werke, 2 Aufl., Gött., 1970, S. 789—918; [5] Klein F., Fricke R., Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Bd 1—2, Lpz., 1890—92; [6] Kloosterman H. D., «Ann. Math.», 1946, v. 47, p. 317—447; [7] Modular functions of one variable, [v.] 1—6, B.— Hdlb.— N. Y., 1973—77; [8] Rankin R., Modular forms and functions, Camb., 1977.

А. А. Панчишкин.

МОДУЛЯРНАЯ КРИВАЯ — полная алгебраич. кривая $X_{\tilde{\Gamma}}$, униформизуемая подгруппой $\tilde{\Gamma}$ конечного индекса модулярной группы Γ; точнее, М. к. есть полная алгебраич. кривая, получаемая из факторпространства $H/\tilde{\Gamma}$, где H — верхняя полуплоскость, присоединением конечного числа параболич. точек (классов эквивалентности относительно $\tilde{\Gamma}$ рациональных точек границы области H). Наиболее известные примеры подгрупп $\tilde{\Gamma}$ конечного индекса в Γ — конгруэнц-подгруппы, содержащие для нек-рого целого $N\geqslant 1$ главную конгруэнц-подгруппу $\Gamma(N)$ уровня N, представимую матрицами

$$A\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),\quad A\equiv \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \bmod N$$

(см. *Модулярная группа*). Наименьшее такое N наз. уровнем подгруппы $\tilde{\Gamma}$. В частности, подгруппа $\Gamma_0(N)$, представимая матрицами, к-рые сравнимы с верхними треугольными матрицами по mod N, имеет уровень N. Каждой подгруппе $\tilde{\Gamma}$ конечного индекса соответствует накрытие М. к. $X_{\tilde{\Gamma}}\to X_{\Gamma}$, к-рое разветвлено только над образами точек $z=i$, $z=(1+i\sqrt{3})/2$, $z=\infty$. Для конгруэнц-подгрупп $\tilde{\Gamma}$ ветвление этого накрытия позволяет определить род М. к. $X_{\tilde{\Gamma}}$, доказать существование подгрупп $\tilde{\Gamma}$ конечного индекса в Γ, не являющихся конгруэнц-подгруппами (см. [4] т. 2 и [2]). Род кривой $X_{\Gamma(N)}$ равен 0 для $N\leqslant 2$ и равен

$$1+\frac{N^2(N-6)}{24}\prod_{p\mid N}(1-p^{-2}),$$

p — простые, при $N>2$. М. к. всегда определена над полем алгебраич. чисел (обычно над $\mathbb{Q}$ или его круговым расширением). Рациональные функции на М. к. поднимаются до модулярных функций (высшего уровня) и образуют поле; автоморфизмы этого поля изучены (см. [2]). Голоморфная дифференциальная форма на М. к. $X_{\tilde{\Gamma}}$ задается на H дифференциалом $f(z)dz$ (где $f(z)$ — голоморфная функция), инвариантным относительно преобразований $z\to\gamma(z)$ из $\tilde{\Gamma}$; при этом $f(z)$ есть модулярная форма веса 2 относительно $\tilde{\Gamma}$. Дзета-функция М. к. есть произведение *Меллина преобразований* модулярных форм и, следовательно, она имеет мероморфное продолжение и удовлетворяет функциональному уравнению. Этот факт послужил отправной точкой теории Ленглендса — Вейля о связи модулярных форм и рядов Дирихле (см. [7], [8]). В частности, есть предположение, что каждая эллиптич. кривая над полем $\mathbb{Q}$ (кондуктора N) униформизуется модулярными функциями уровня N. Гомологии М. к. связаны с модулярными символами, что позволяет исследовать арифметику значений дзетафункции М. к. в центре критич. полосы и построить p-адическую дзета-функцию М. к. (см. [1]).

М. к. параметризует семейство эллиптич. кривых, являясь их многообразием модулей (см. [7] т. 2). В частности, для $\tilde{\Gamma}=\Gamma(N)$ точки z факторпространства $H/\Gamma(N)$ взаимно однозначно соответствуют парам, состоящим из эллиптич. кривой E_z (аналитически эквивалентной комплексному тору $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}z)$) и точки порядка N на E_z (образа точки z/N).

Над каждой М. к. $X_{\tilde{\Gamma}}$ имеется естественное алгебраич. расслоение $E_{\tilde{\Gamma}} \to X_{\tilde{\Gamma}}$ на эллиптич. кривые, компактифицированное вырожденными кривыми над параболич. точками М. к. $X_{\tilde{\Gamma}}$. Его расслоенные степени $E_{\tilde{\Gamma}}^{(w)}$, где w — целое $\geqslant 1$, наз. многообразиями Куги (см. [3], [5]). Дзета-функции многообразий $E_{\Gamma}^{(w)}$ связаны с преобразованиями Меллина модулярных форм, а их гомологии — с периодами модулярных форм (см. [3], [7]).

Рациональные точки на М. к. соответствуют эллиптич. кривым, имеющим рациональные точки конечного порядка (или рациональные подгруппы точек), их описание (см. [6]) позволило решить проблему кручения эллиптич. кривых над $\mathbb{Q}$.

Исследование геометрии и арифметики М. к. основано на использовании группы автоморфизмов проективного предела кривых $X_{\tilde{\Gamma}}$ по убывающим $\tilde{\Gamma}$, к-рая (по существу) совпадает с группой $\mathrm{SL}_2(A)$ над кольцом A рациональных аделей. На каждой М. к. $X_{\tilde{\Gamma}}$ это дает нетривиальное кольцо соответствий $R_{\tilde{\Gamma}}$ (кольцо Гекке), имеющее приложения в теории *модулярных форм* (см. [2]).

Лит.: [1] Манин Ю. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1972, т. 36, № 1, с. 19—66; [2] Шимура Г., Введение в арифметическую теорию автоморфных функций, пер. с англ., М., 1973; [3] Шокуров В. В., «Матем. сб.», 1976, т. 101, № 1, с. 131—157; [4] Klein F., Fricke R., Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Bd 1—2, Lpz., 1890—92; [5] Kuga M., Shimura G., «Ann. Math.», 1965, v. 82, p. 478—539; [6] Mazur B., Serre J.-P., в кн.: Séminaire Bourbaki, 1974/75, B.—[u. a.], 1976, p. 238—55; [7] Modular functions of one variable, [v.] 1—6, B.— Hdlb.— N. Y., 1973—77; [8] Weil A., «Math. Ann.», 1967, Bd 168, S. 149—56.

А. А. Панчишкин, А. Н. Паршин.

МОДУЛЯРНАЯ РЕШЕТКА, модулярная структура,— то же, что *дедекиндова решетка.*

МОДУЛЯРНАЯ ФОРМА одного комплексного переменного, эллиптическая модулярная форма,— функция f на верхней полуплоскости $H=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}\, z>0\}$, удовлетворяющая при нек-ром фиксированном k условию автоморфности:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^k f(z) \qquad (1)$$

для любого элемента $\left\|\begin{matrix} a & b \\ c & d\end{matrix}\right\|$ группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ целочисленных матриц с определителем $ad-bc=1$, и такая, что

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n,$$

где $q=\exp(2\pi i z)$, $z\in H$, $a_n\in\mathbb{C}$. Целое число $k\geqslant 0$ наз. весом М. ф. f. Если $a_0=0$, то М. ф. f наз. параболической модулярной формой. Имеется также [8] определение М. ф. для всех действительных значений k.

Пример М. ф. веса $k\geqslant 4$ дает ряд Эйзенштейна (см. [4])

$$G_k(z)=\sum\nolimits^{*}_{m_1,\ m_2\in\mathbb{Z}} (m_1+m_2 z)^{-k},$$

где звездочка означает, что при суммировании пара

$(m_1,\ m_2)=(0,\ 0)$ отбрасывается. При этом $G_k(z)\equiv 0$ для нечетных k и

$$G_k(z)=\frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\left[-\frac{B_k}{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)\,q^n\right],$$

где $\sigma_{k-1}(n)=\sum_{d\mid n}d^{k-1}$, а B_k — число Бернулли.

Множество М. ф. веса k есть комплексное векторное пространство, обозначаемое M_k; при этом $M_kM_l\subset M_{k+l}$. Прямая сумма $\bigoplus_{k=0}^{\infty}M_k$ образует градуированную алгебру, к-рая изоморфна кольцу многочленов от независимых переменных G_4 и G_6 (см. [3]).

Для каждого $z\in H$ *комплексный тор* $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}z)$ аналитически изоморфен эллиптич. кривой, задаваемой уравнением

$$y^2=4x^3-g_2(z)x-g_3(z), \qquad (2)$$

где $g_2(z)=60G_4(z)$, $g_3(z)=140G_6(z)$. Дискриминант кубич. многочлена в правой части равенства (2) есть параболич. М. ф. веса 12:

$$2^{-4}\left(g_2^3-27g_3^2\right)=2^{-4}(2\pi)^{12}\,q\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)^{24}=$$

$$=2^{-4}(2\pi)^{12}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\,q^n,$$

где $\tau(n)$ — функция Рамануджана (см. [1]).

Для каждого целого $N\geqslant 1$ вводятся м о д у л я р н ы е ф о р м ы в ы с ш е г о у р о в н я N, удовлетворяющие условию (1) лишь для элементов $\left\|\begin{matrix}a & b\\ c & d\end{matrix}\right\|$ конгруэнц-подгруппы $\tilde{\Gamma}$ уровня N модулярной группы. В этом случае с М. ф. f связан голоморфный дифференциал $f(z)(dz)^{k/2}$ на модулярной кривой $X_{\tilde{\Gamma}}$. Известный пример М. ф. высшего уровня дают тэта-ряды $f(z)$ целочисленных положительно определенных квадратичных форм $F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$:

$$f(z)=\sum_{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m\in\mathbb{Z}}\exp\left(2\pi iF(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)\right),$$

к-рые суть М. ф. высшего уровня веса $k=m/2$. В этом примере a_n есть целое число, равное числу решений диофантова уравнения $F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)=n$.

Теория М. ф. позволяет получать оценки, а иногда и точные формулы для чисел типа a_n (такие, как сравнение Рамануджана $\tau(n)\equiv\sum_{d\mid n}d^{11}\bmod 691$), а также исследовать их свойства делимости (см. [7]). Получена наилучшая оценка для чисел типа a_n (см. [2]).

Важные арифметич. приложения М. ф. связаны с рядами Дирихле

$$L_f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s}$$

преобразований Меллина М. ф. f. Такие ряды Дирихле поддаются детальному изучению (оценки коэффициентов, свойства аналитичности, функциональное уравнение, разложения в эйлеровские произведения) ввиду наличия на модулярных кривых нетривиального кольца соответствий R. Для кривой X_{Γ} это кольцо порождается соответствиями $T_n(z)=\sum_{\gamma}\gamma(z)$, где γ пробегает все представители элементов фактормножества

$$\{A\in M_2(\mathbb{Z}):\det A=n\}/\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z}).$$

Соответствия индуцируют действующие на пространстве М. ф. линейные операторы (о п е р а т о р ы Г е к к е), к-рые самосопряжены относительно скалярного произведения Петерсона (см. [3], [7]). М. ф., являющиеся собственными функциями операторов Гекке, характеризуются тем, что их преобразования Меллина разлагаются в эйлеровское произведение.

Другие продвижения в теории М. ф. связаны с изучением модулярных кривых и ассоциированных с ними расслоений — многообразий Куги, а также с

теорией бесконечномерных представлений адельных алгебраич. групп. При этом теория М. ф. одного переменного успешно переносится на случай многих переменных (см. [6]). Обзор теоретико-числовых приложений М. ф. дан в [5].

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [2] Делинь П., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 5, с. 159—90; [3] Ленг С., Введение в теорию модулярных форм, пер. с англ., М., 1979; [4] Серр Ж.-П., Курс арифметики, пер. с франц., М., 1972; [5] Итоги науки и техники, Алгебра. Топология, Геометрия, т. 15, М., 1977; [6] Modular functions of one variable, [v.] 1—6, B.— Hdlb.— N. Y., 1973—77; [7] Ogg A., Modular forms and Dirichlet series, N. Y., 1969; [8] Rankin R., Modular forms and functions, Camb., 1977.

А. А. Панчишкин.

МОДУЛЯРНАЯ ФУНКЦИЯ, эллиптическая модулярная функция, одного комплексного переменного — *автоморфная функция* комплексного переменного $z=x+iy$, ассоциированная с группой Γ всех дробно-линейных преобразований γ вида

$$z \longrightarrow \gamma(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1, \tag{1}$$

где a, b, c, d — целые действительные числа (эта группа наз. модулярной). Преобразования группы Γ переводят действительную ось в себя, и областью определения М. ф. можно считать верхнюю полуплоскость $\{z: \operatorname{Im} z>0\}$. Группа Γ порождается двумя образующими $z \to z+1$, $z \to -1/z$. Фундаментальная область G модулярной группы изображена на рис. 1; это — криволинейный четырехугольник $ABCDA$ с вершинами $A(\infty)$, $B(-1/2+i\sqrt{3}/2)$, $C(i)$, $D(1/2+i\sqrt{3}/2)$, две стороны к-рого AB и DA — отрезки прямых соответственно $x=-1/2$ и $x=1/2$, а BD — дуга окружности $|z|=1$. Участки границы AB и BC включаются в G, а CD и DA не включаются. Образы области G при всевозможных отображениях группы Γ покрывают всю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ без пересечений.

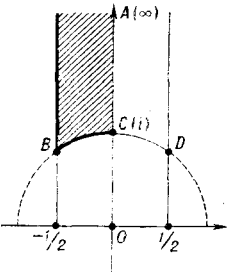


Рис. 1.

Изучение М. ф. началось в 19 в. в связи с изучением эллиптич. функций и предшествовало появлению общей теории автоморфных функций. В теории М. ф. в качестве основных модулярных форм используются следующие *тета-ряды*:

$$g_2(z)=60\sum\nolimits^{*}_{m_1,\ m_2\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m_1+m_2z)^4}=$$

$$=(2\pi)^4\left\{\frac{1}{12}+20\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3h^{2n}}{1-h^{2n}}\right\},$$

$$g_3(z)=140\sum\nolimits^{*}_{m_1,\ m_2\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m_1+m_2z)^6}=$$

$$=(2\pi)^6\left\{\frac{1}{216}-\frac{7}{3}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5h^{2n}}{1-h^{2n}}\right\},$$

$$\Delta(z)=g_2^3(z)-27g_3^2(z),$$

где $h=e^{i\pi z}$, а звездочка означает, что нулевая пара $(m_1,\ m_2)=(0,\ 0)$ отбрасывается. Согласно терминологии К. Вейерштрасса (K. Weierstrass) это — относительные инварианты, играющие важную роль в его теории эллиптич. функций (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*), а Δ наз. также дискриминантом. С точки зрения теории автоморфных функций это — автоморфные формы соответственно веса 2, 3 и 6, ассоциированные с модулярной группой. Основная М. ф. имеет вид

$$J(z)=\frac{g_2^3(z)}{\Delta(z)}=1+\frac{27g_3^2(z)}{\Delta(z)}. \tag{2}$$

Функция $J(z)$ наз. также а б с о л ю т н ы м и н в а р и а н т о м. Она регулярна в верхней полуплоскости, а внутри фундаментальной области G принимает каждое конечное значение, кроме 0 и 1, в точности один раз; кроме того, $J(-1/2+i\sqrt{3}/2)=0$, $J(i)=1$.

В теории эллиптич. функций М. ф. $J(z)$ играет важную роль, позволяя по заданным вейерштрассовым относительным инвариантам $a=g_2$, $b=g_3$, $a^3-27b^2\neq 0$, определить периоды $2\omega_1$, $2\omega_3$, а следовательно, и построить все эллиптич. функции Вейерштрасса. Если τ — единственное в фундаментальной области решение уравнения

$$J(\tau)=a^3/(a^3-27b^2),$$

то при $a\neq 0$, $b\neq 0$ имеем $\omega_1^2=a/b$, $\omega_3=\omega_1\tau$; при $a=0$ имеем $\tau=-1/2+i\sqrt{3}/2$, и ω_1 определяется из уравнения

$$\omega_1^6=\frac{140}{b}\sum\nolimits^{*}_{m_1,\ m_2\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m_1+m_2\tau)^6},\quad \omega_3=\omega_1\tau;$$

при $b=0$ имеем $\tau=i$, и ω_1 определяется из уравнения

$$\omega_1^4=\frac{60}{a}\sum\nolimits^{*}_{m_1,\ m_2\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m_1+m_2\tau)^4},\quad \omega_3=\omega_1\tau.$$

Для построения *Якоби эллиптических функций* удобнее, вместо $J(z)$, функция

$$\lambda(z)=k^2(z)=1-\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-h^{2n-1}}{1+h^{2n+1}}\right)^8,\qquad h=e^{\pi iz},\qquad (3)$$

также называемая М. ф. На самом деле $\lambda(z)$ является автоморфной функцией только относительно подгруппы Γ_2 модулярной группы Γ, причем к Γ_2 относятся все те преобразования вида (1), у к-рых (в качестве дополнительного условия) a и d — нечетные числа, b и c — четные. Фундаментальная область G_2 группы Γ_2 изображена на рис. 2; это — криволинейный четырехугольник $ABOCA$ с вершинами $A(\infty)$, $B(-1)$, 0, $C(1)$, две стороны к-рого AB и CA — отрезки прямых соответственно $x=-1$ и $x=1$, а BO и OC — дуги окружностей соответственно $|z+1/2|=1/2$ и $|z-1/2|=1/2$. Участки границы слева от мнимой оси включаются в G_2, а OC и CA не включаются. Функция $\lambda(z)$ также регулярна в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$. Внутри области G_2 она принимает каждое конечное значение, кроме 0 и 1, в точности один раз; кроме того, $\lambda(\infty)=0$ и $\lambda(0)=1$. При заданном модуле эллиптич. функций Якоби k для их построения необходима величина $\tau=\omega_3/\omega_1$ или $h=e^{\pi i\tau}$, к-рая однозначно определяется из уравнения $\lambda(\tau)=k^2$. Практически, в нормальном случае $0<k<1$ определяют сначала $\varepsilon=(1-\sqrt{k'})/2(1+\sqrt{k'})$, где $k'=\sqrt{1-k^2}$, а затем строят решение этого уравнения в виде ряда $h=\varepsilon+2\varepsilon^5+15\varepsilon^9+150\varepsilon^{13}+O(\varepsilon^{17})$. М. ф. $\lambda=\lambda(z)$ и $J(z)$ связаны формулой

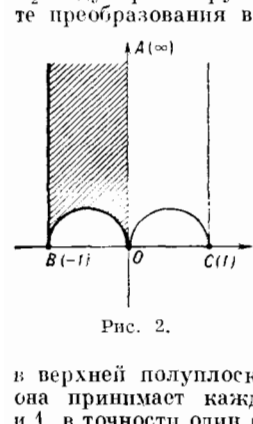


Рис. 2.

$$J(z)=\frac{4}{27}\cdot\frac{\lambda^2-\lambda+1}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

М. ф. $w=J(z)$ дает наиболее удобное представление конформных классов римановых поверхностей эллиптич. функций, когда род $g=1$ и эйлерова характеристика $\chi=0$. Каждому значению w соответствует решение $\tau=\omega_3/\omega_1$ уравнения $J(\tau)=w$, определяющее конформный класс и соответствующее поле эллиптич. функций. Напр., $w=0$ соответствует параллелограмм периодов в виде ромба с углами 120° и 60°, а $w=1$ — квадрат.

М. ф. применяются также при изучении *конформных отображений*, *граничных свойств аналитических функций* и *предельных множеств*. М. ф. $w=J(z)$ дает конформное отображение левой половины фундаментальной области G (рис. 1), т. е. криволинейного треугольника $ABCA$, на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$, причем точки B, C, A переходят соответственно в 0, 1, ∞. М. ф. $w=\lambda(z)$ отображает конформно криволинейный треугольник $ABOA$ (рис. 2) на верхнюю полуплоскость, причем точки B, O, A переходят соответственно в 0, 1, ∞.

В геометрич. вопросах часто удобнее принять за область определения М. ф. единичный круг. При этом модулярная группа (1) переходит в модулярную группу автоморфизмов единичного круга. Напр., удобно применить дробно-линейное преобразование

$$\zeta=\zeta(z)=\frac{i\,(z-e^{i\pi/3})}{z-e^{-i\pi/3}},$$

переводящее верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ в единичный круг $|\zeta|<1$, причем точки 0, 1, ∞ переходят соответственно в точки $A(e^{-i5\pi/6})$, $B(e^{-i\pi/6})$, $C(i)$ на единичной окружности $|\zeta|=1$ (рис. 3). Тогда сложная функция $w=\mu(\zeta)=\lambda(z(\zeta))$ есть М. ф., регулярная в единичном круге и принимающая в нем все значения, кроме 0, 1, ∞. Она отображает конформно криволинейный треугольник $ABCA$ (рис. 3) на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$. Именно эта М. ф. $\mu(\zeta)$ используется при доказательстве *Пикара теорем* и в ряде других геометрических вопросов.

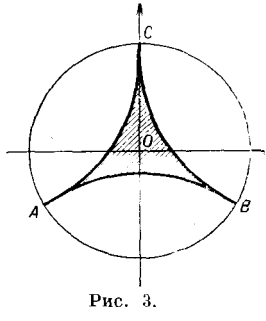


Рис. 3.

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. [с нем.], М., 1968; [2] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970; [3] Форд Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.— Л., 1936; [4] Klein F., Fricke R., Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Bd 1—2, Lpz., 1890—92. *Е. Д. Соломенцев.*

МОДУЛЯРНЫЙ ИДЕАЛ — правый (левый) идеал J кольца R, обладающий следующим свойством: в кольце R найдется хотя бы один такой элемент e, что для всех x из R разность $x-ex$ принадлежит J (соответственно $x-xe\in J$). Элемент e наз. левой (правой) единицей по модулю идеала J. В кольце с единицей всякий идеал является модулярным. Всякий собственный модулярный правый (левый) идеал можно вложить в максимальный правый (левый) идеал, к-рый автоматически будет модулярным. Пересечение всех максимальных модулярных правых идеалов ассоциативного кольца совпадает с пересечением всех максимальных левых идеалов модулярных и является *Джекобсона радикалом* этого кольца. М. и. иногда наз. также регулярными идеалами.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961. *К. А. Жевлаков.*

МОДУС ПОНЕНС (modus ponens), правило отделения,— *вывода правило* в формальных логич. системах. Правило М. п. записывается в виде схемы

$$\frac{A\quad A\supset B}{B},$$

где A и B — обозначения для формул формальной логич. системы, а $\supset$ — логич. связка *импликации*. М. п. разрешает выводить B из посылок A (малая посылка) и $A\supset B$ (большая посылка). Если в нек-рой интерпретации формальной системы формулы A и $A\supset B$ истинны, то по смыслу импликации истинна формула B. М. п. вместе с другими правилами

вывода и аксиомами формальной системы определяет класс формул, выводимых из множества формул M, как наименьший класс, содержащий формулы из M, аксиомы и замкнутый относительно правил вывода.

М. п. можно рассматривать как операцию над выводами данной формальной системы, позволяющую образовывать вывод формулы B из вывода α формулы A и вывода β формулы $A \supset B$. *В. Н. Гришин.*

МОМЕНТ — числовая характеристика распределения вероятностей. Момент порядка k ($k>0$ — целое) случайной величины X определяется как математич. ожидание $\mathsf{E}X^k$, если оно существует. Если $F(x)$ функция распределения случайной величины X, то

$$\mathsf{E}X^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, dF(x). \qquad (*)$$

При определении М. в теории вероятностей используется прямая аналогия с соответствующим понятием, играющим важную роль в механике: формулой (*) определяется М. распределения масс. М. 1-го порядка (статич. момент в механике) случайной величины X — математич. ожидание $\mathsf{E}X$. Величина $\mathsf{E}(X-a)^k$ наз. моментом порядка k относительно a, $\mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)^k$ — центральным моментом порядка k. Центральный М. 2-го порядка $\mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)^2$ наз. *дисперсией* $\mathsf{D}X$ (М. инерции в механике). Величина $\mathsf{E}|X|^k$ наз. *абсолютным моментом* порядка k (абсолютный М. определяется и для нецелых k). Аналогично определяется М. совместного распределения случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ (см. *Многомерное распределение*): для любых целых $k_i \geqslant 0$, $k_1+\ldots+k_n=k$ математич. ожидание $\mathsf{E}(X_1^{k_1}, \ldots, X_n^{k_n})$ наз. смешанным моментом порядка k, а $\mathsf{E}(X_1-\mathsf{E}X_1)^{k_1}\ldots(X_n-\mathsf{E}X_n)^{k_n}$ — центральным смешанным моментом порядка k. Смешанный М. $\mathsf{E}(X_1-\mathsf{E}X_1)(X_2-\mathsf{E}X_2)$ наз. *ковариацией* и служит одной из основных характеристик зависимости между случайными величинами (см. *Корреляция*). Многие свойства М. (в частности, неравенства для М.) являются следствием того факта, что для любой случайной величины X функция $g(k)=\log \mathsf{E}|X|^k$ выпукла по k в каждом конечном интервале, где эта функция определена; $(\mathsf{E}|X|^k)^{1/k}$ является неубывающей функцией от k. Моменты $\mathsf{E}X^k$ и $\mathsf{E}(X-a)^k$ существуют тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}|X|^k<\infty$. Из существования М. $\mathsf{E}|X|^{k_0}$ вытекает существование всех М. порядка $k \leqslant k_0$. Если $\mathsf{E}|X_i|^k<\infty$ при всех $i=1, \ldots, n$, то существуют смешанные М. $\mathsf{E}X_1^{k_1}\ldots X_n^{k_n}$ для всех целых $k_i \geqslant 0$, $k_1+\ldots+k_n \leqslant k$. В нек-рых случаях для определения М. бывает полезна т. н. производящая функция моментов — функция $M(t)$, для к-рой М. распределения служат коэффициентами при разложении ее по степеням: для целочисленных случайных величин эта функция связана с производящей функцией $P(s)$ соотношением $M(t)=P(e^t)$. Если $\mathsf{E}|X|^k<\infty$, то характеристич. функция $f(t)$ случайной величины X имеет непрерывные производные до порядка k включительно, при этом М. порядка k является коэффициентом при $(it)^k/k!$ в разложении $f(t)$ по степеням t

$$\mathsf{E}X^k = (-i)^k \frac{d^k}{dt^k} f(t)\Big|_{t=0}.$$

Если существует производная характеристич. функции порядка $2k$ в нуле, то $\mathsf{E}|X|^{2k}<\infty$.

О связи М. с семиинвариантами см. ст. *Семиинвариант*.

Если известны М. распределения, то можно сделать нек-рые утверждения о вероятностях отклонения слу-

чайной величины от ее математич. ожидания в терминах неравенств; наиболее известны *Чебышева неравенство*

$$\mathsf{P}\{|X-\mathsf{E}X|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2},\quad \varepsilon>0,$$

и его обобщения.

Задача, состоящая в определении распределения вероятностей последовательностью его М., носит название *моментов проблемы*. Впервые эта задача была рассмотрена П. Л. Чебышевым (1874) в связи с исследованиями по предельным теоремам. Для того чтобы распределение вероятностей случайной величины X однозначно определялось своими М. $\alpha_k=\mathsf{E}X^k$, достаточно, напр., выполнение условия Карлемана

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_{2k})^{-1/2k}=\infty.$$

Аналогичное утверждение справедливо и для М. случайных векторов.

Использование М. при доказательстве предельных теорем основывается на следующем факте. Пусть F_n, $n=1, 2, \ldots$, последовательность функций распределения, все М. к-рых $\alpha_k(n)$ конечны, и пусть при каждом целом $k\geqslant 1$ имеет место сходимость

$$\alpha_k(n)\longrightarrow\alpha_k\quad\text{при}\quad n\longrightarrow\infty,$$

где α_k конечны. Тогда существует подпоследовательность F_{n_j}, слабо сходящаяся к функции распределения F, имеющей α_k своими М. Если М. определяют F однозначно, то последовательность F_n слабо сходится к F. На этом основан т. н. *моментов метод*, используемый, в частности, в математич. статистике при изучении отклонений эмпирич. распределения от теоретического и для статистич. оценки параметров распределения (о выборочных М. как об оценках М. нек-рого распределения см. *Эмпирическое распределение*).

А. В. Прохоров.

МОМЕНТОВ МЕТОД — метод определения распределения вероятностей по его *моментам*. В теоретич. отношении М. м. основан на единственности решения *моментов проблемы*: если $\alpha_0=1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$,— нек-рые постоянные, то при каких условиях существует единственное распределение P такое, что

$$\alpha_n=\int x^nP(dx)$$

суть моменты распределения P при всех n? Существуют различные типы условий, достаточных для того, чтобы распределение однозначно определялось своими моментами, напр. условие Карлемана

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{2n})^{-1/2n}=\infty.$$

Использование М. м. при доказательстве предельных теорем теории вероятностей и математич. статистики основано на соответствии между сходимостью распределений и моментов: если $F_n(x)$ — последовательность функций распределения с конечными моментами $\alpha_k(n)$ любого порядка $k\geqslant 1$ и $\alpha_k(n)\to\beta_k$ при $n\to\infty$ и каждом k, то β_k — моменты нек-рой функции распределения $F(x)$; если $F(x)$ однозначно определяется своими моментами, то при $n\to\infty$ $F_n(x)$ слабо сходится к $F(x)$. Впервые М. м. для случая сходимости к нормальному распределению был разработан П. Л. Чебышевым (1887), а доказательство центральной предельной теоремы М. м. было осуществлено А. А. Марковым (1898).

М. м. в математич. статистике — один из общих методов нахождения статистич. оценок для неизвестных параметров распределения вероятностей по ре-

зультатам наблюдений. Впервые в этих целях М. м. был использован К. Пирсоном (K. Pearson, 1894) при решении задачи аппроксимации эмпирич. распределений с помощью системы распределений Пирсона. Процедура М. м. такова: определяются моменты эмпирич. распределения (выборочные моменты) и в количестве, равном числу оцениваемых параметров, приравниваются к соответствующим моментам распределения вероятностей, являющимся функциями от неизвестных параметров; полученная система уравнений решается относительно параметров, и полученные решения суть искомые оценки. На практике М. м. приводит часто к весьма простым вычислениям. При нек-рых довольно общих условиях М. м. позволяет найти оценки, к-рые асимптотически нормальны, имеют математич. ожидание, лишь величиной порядка $1/n$ отличающееся от истинного значения параметра, и стандартное отклонение — порядка $1/\sqrt{n}$. Однако оценки, найденные по М. м., не являются наилучшими из возможных с точки зрения их эффективности — их дисперсия не является минимальной. В случае нормального распределения М. м. приводит к оценкам, совпадающим с оценками *максимального правдоподобия метода*, т. е. к асимптотически несмещенным и асимптотически эффективным оценкам.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., [2 изд.], М., 1975; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966. *А. В. Прохоров.*

МОМЕНТОВ МЕТОД — то же, что *Галеркина метод.*

МОМЕНТОВ ПРОБЛЕМА — одна из интерполяционных задач в действительной или комплексной области.

Первая четкая постановка начального варианта М. п. в действительной области принадлежит Т. Стилтьесу (T. Stieltjes, 1894). Им в связи с исследованиями цепных дробей поставлена и фактически решена следующая задача: дана последовательность действительных чисел $\{\mu_n\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, найти ограниченную и неубывающую на $[0, +\infty)$ функцию $\psi(x)$ такую, что

$$\int_0^\infty x^n\, d\psi(x) = \mu_n, \quad n=0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Как и в каждой интерполяционной задаче, решение М. п. (1) распадается на два этапа.

Задача А. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех последовательностей действительных чисел $\{\mu_n\}$, для каждой из к-рых бесконечная система уравнений (1) имеет по крайней мере одно решение $\psi(x)$ с указанными выше свойствами; найти необходимые и достаточные (конструктивные) условия, к-рым должны удовлетворять числа μ_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, для того чтобы $\{\mu_n\}\in\mathfrak{M}$.

Задача В. Найти множество всех решений в классе ограниченных и неубывающих на $[0, +\infty)$ функций $\psi(x)$, удовлетворяющих бесконечной системе уравнений (1) при заданных μ_n, $n=0, 1, 2, \ldots, \{\mu_n\}\in\mathfrak{M}$.

Левые части равенства (1) названы Т. Стилтьесом «моментами». Этот термин заимствован им из механики. Если интерпретировать $d\psi(x)$ как массу, размещенную на $[x, x+dx]$, то интеграл $\int_0^X d\psi(t)$ — масса, размещенная на $[0, X]$. И тогда интегралы (1) для $n=1$ и $n=2$ представляют собой соответственно первый (статический) и второй (инерции) моменты относительно начала координат $x=0$ всей массы $\int_0^\infty d\psi(x)$ (она отвечает значению $n=0$ в (1)), размещенной на $[0, \infty)$. Обобщая эти понятия, Т. Стилтьес называл интеграл

$$\int_0^\infty x^n\, d\psi(x)$$

моментом n-го порядка (относительно $x=0$) данной массы $\int_0^\infty d\psi(x)$, распределение к-рой на $[0, +\infty)$ характеризуется функцией $\psi(x)$.

Т. Стилтьес связал решение М. п. (1) следующим образом с «природой» цепной (или непрерывной) дроби, отвечающей интегралу

$$I(z, \psi) = \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x} \sim$$

$$\sim \frac{\mu_0}{z} - \frac{\mu_1}{z^2} + \frac{\mu_2}{z^3} - \frac{\mu_3}{z^4} + \dots, \qquad (2)$$

а точнее — формальному ряду

$$\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{\mu_n}{z^{n+1}}.$$

Интегралам $I(z, \psi)$ соответствует цепная дробь

$$I(z, \psi) \sim \frac{1}{|a_1 z} + \frac{1}{|a_2} + \frac{1}{|a_3 z} + \frac{1}{|a_4} + \dots, \qquad (3)$$

а также «тесно примыкающая» к (3) цепная дробь

$$I(z, \psi) \sim \frac{\lambda_1}{|z+c_1} - \frac{\lambda_2}{|z+c_2} - \frac{\lambda_3}{|z+c_3} - \dots \qquad (4)$$

Цепная дробь (4) получается из (3) в результате «сокращений» вида

$$z - \frac{\alpha}{|1} - \frac{\beta}{|z-\gamma} = z - \alpha - \frac{\alpha\beta}{z-(\beta+\gamma)}.$$

Опираясь на теорию цепных дробей, Т. Стилтьес доказал, что в определенном смысле необходимым и достаточным условием разрешимости системы (1) (что эквивалентно $\{\mu_n\} \in \mathfrak{M}$) является положительность всех a_n в формуле (3), что, в свою очередь,— следствие положительности λ_n и c_n в (4). В терминах μ_n эти условия равносильны положительности определителей

$$\Delta_n = \det \| \mu_{i+j} \|_{i+j=0}^n$$

и

$$\Delta_n^{(1)} = \det \| \mu_{i+j+1} \|_{i+j=0}^n.$$

М. п. (1) наз. определенной для данной последовательности $\{\mu_n\}$, $\{\mu_n\} \in \mathfrak{M}$, если система (1) имеет единственное решение $\psi(x)$. В противном случае показано, что если при заданных μ_n, $\{\mu_n\} \in \mathfrak{M}$, система (1) имеет более одного решения, то тогда необходимо система (1) имеет бесконечное множество решений.

Пример: две функции

$$\psi_1(x) = \int_0^x t^{-\ln t}\, dt$$

и

$$\psi_2(x) = \int_0^x t^{-\ln t} [1 - \theta \sin(\pi \ln t)]\, dt, \quad \theta \in [0, 1],$$

имеют равные моменты

$$\int_0^\infty x^n\, d\psi_1(x) = \int_0^\infty x^n\, d\psi_2(x)$$

при всех $n=0, 1, 2, \dots$.

Т. Стилтьес привел эффективное построение нек-рых решений М. п. (1), к-рые, разумеется, все в известном смысле совпадают, если М. п. (1) является определенной. В случае же, когда М. п. (1) неопределенна, решения Т. Стилтьеса обладают рядом экстремальных свойств. Затем Т. Стилтьес показал, что М. п. (1) является определенной или цепной в зависимости от сходимости или расходимости цепной дроби (3) (что равносильно сходимости или расходимости ряда $\Sigma_{n=0}^\infty a_n$).

При этом дробь (3) может быть сходящейся к $I(z, \psi)$ в то время, как ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu_n}{z^{n+1}}$$

может расходиться для всех z, $z \in \mathbb{C}$.

До работы Т. Стилтьеса [1] М. п. в действительной области рассматривалась в менее общей и менее четкой постановке; таковы, напр., серия работ П. Л. Чебышева [2] и А. А. Маркова [3]. Ими в основном была исследована следующая задача: дать описание свойств класса U функций, определенных на $(-\infty, +\infty)$, такого, что соотношения

$$p(x) \in U$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2}\, dx; \qquad (5)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots,$$

приводят к тождеству

$$p(x) = e^{-x^2}.$$

Другими словами, здесь идет речь о максимально полной и конструктивной характеристике класса единственности U интерполяционной задачи (5). Решение М. п. (5) играет важную роль в теории вероятностей и математич. статистике. Имеют важное значение также многочлены $\omega_n(x)$, являющиеся знаменателями последовательных приближений (т. н. аппроксимант) цепной дроби (4). Изучение свойств систем многочленов $\{\omega_n(x)\}$ впоследствии открыло широкое поле исследований в теории ортогональных многочленов.

Г. Гамбургером (G. Hamburger, 1920) М. п. (1) была обобщена на случай всей действительной оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, при этом рассмотрение отрицательных значений x внесло ряд особенностей и не было тривиальным. Г. Гамбургер, существенно используя принцип выбора Хелли, исследовал необходимые и достаточные условия разрешимости системы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, d\psi(x) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (6)$$

решив полностью задачу о сходимости цепных дробей (3) и (4), порожденных (6). Объединение задач А и В, относящихся к (6), называют проблемой моментов (6). Г. Гамбургер нашел критерий существования единственного решения М. п. (6). При этом М. п. (6) может быть неопределенной в то время, как соответствующая М. п. (1) (с теми же μ_n) является определенной (имеет единственное решение). Р. Неванлинна (R. Nevanlinna, 1922) представил решение М. п. (6) с помощью интегралов

$$I(z, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(x)}{z - x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

и изучил свойства этих решений. Ему принадлежит важное замечание о т. н. «экстремальных решениях» М. п. (6).

М. Рисс (M. Riesz, 1921) нашел решение М. п. (6), опираясь на теорию квазиортогональных многочленов, состоящих из линейных комбинаций вида $A_n \omega_n(x) + A_{n-1} \omega_{n-1}(x)$, где A_k — константы, а $\omega_k(x)$ — знаменатель k-й аппроксиманты цепной дроби (4), отвечающей М. п. (6). Он заметил тесную связь между решениями М. п. (6) и справедливостью формулы Парсеваля для системы ортогональных многочленов $\{\omega_n(x)\}$. Т. Карлеман (T. Carleman, 1923—26) установил связь между М. п. (6), теорией квазианалитич. функций и теорией квадратичных форм от счетного множества переменных. Ему же принадлежит наиболее общий критерий определенности М. п. (6). Ф. Хаусдорф (F. Hausdorff, 1923) нашел критерий разрешимости

М. п. (6) ($\Longleftrightarrow \{\mu_n\} \in \mathfrak{M}$) при условии, что функция $\psi(x)$ в (6) постоянна вне заданного интервала. Он дал эффективную конструкцию решения $\psi(x)$ М. п. (6)(к-рое при сделанных им предположениях, отмеченных выше, всегда единственно); это дает возможность найти критерии того, чтобы решение $\psi(x)$ М. п. (6) дополнительно обладало рядом специальных свойств (было непрерывным, дифференцируемым и т. п.). Т. Карлеман, а затем М. Стоун (M. Stone, 1932) провели весьма полное исследование М. п. (6), базируясь на результатах теории квадратичных форм Якоби и теории сингулярных интегральных уравнений. Э. К. Хэвиленд (E. K. Haviland, 1935) и Х. Крамер (H. Cramer, 1937) распространили теорию Рисса М. п. (6) на многомерный случай.

Рассмотрены также многочисленные различные обобщения М. п. В основном упомянутые обобщения являлись вариациями (или комбинациями) следующих двух направлений:

замена степеней x^n в интегралах (6) «моментными» последовательностями функций $\{\varphi_n(x)\}$ другого вида, и замена левых частей равенств (6) интегралами иной природы (напр., изучался случай, когда $d\psi(x)$ заменено на $\varphi(x)dx$, где $\varphi(x) \in L_p$, $p \geqslant 1$) или даже операторами, действующими в абстрактных пространствах.

Так, в связи с первым направлением находится т. н. тригонометрическая проблема моментов, к-рая состоит в следующем: дана бесконечная числовая последовательность $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$; найти неубывающую на $[-\pi, \pi]$ функцию $\psi(x)$, удовлетворяющую соотношениям

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, d\psi(x) = c_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad (7)$$

т. е. решить задачи A и B для системы (7).

Точные формулировки нек-рых предложений из теории М. п. в действительной области таковы. Пусть $\mathbb{R}^n$ есть n-мерное евклидово пространство. Функция множества $\Phi(e)$, определенная на семействе $\mathbb{B} = \{e\}$ всех борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$, наз. функцией распределения, если $\Phi(e) \geqslant 0$ для всех $e \in \mathbb{B}$, и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Phi(e_i) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{\infty} e_i\right),$$

если $e_i \cap e_j = \varnothing$, $i \neq j$, где $e_i \in \mathbb{B}$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots$.

Спектром $\sigma(\Phi)$ функции распределения Φ наз. множество всех точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\Phi(G) > 0$ для произвольного открытого множества G, $G \in \mathbb{R}^n$, содержащего x. Пусть

$$\{\mu_{i_1 i_2 \ldots i_n}\}, \quad i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (8)$$

— n-кратная бесконечная последовательность действительных чисел. Спрашивается, каковы необходимые и достаточные условия, к-рым должны удовлетворять числа (8) для того, чтобы существовала функция распределения Φ со спектром $\sigma(\Phi)$, содержащемся в наперед заданном замкнутом множестве F, являющаяся решением системы

$$\int_{\mathbb{R}^n} t_1^{i_1} t_2^{i_2} \ldots t_n^{i_n}\, d\Phi = \mu_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \quad i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (9)$$

(задача A для системы (9)). Аналогичным образом формулируется задача B для системы (9). Объединение задач A и B для системы (9) наз. F-проблемой моментов. F-М. п. (9) определена, если ее решение в нек-ром смысле единственно. В противном случае F-М. п. (9) наз. неопределенной.

Теорема. Необходимым и достаточным условием разрешимости F-М. п. (9) в $\mathbb{R}^2$ является выполнение

условия:

$$\sum a_i b_j \mu_{ij} \geqslant 0$$

для любого многочлена

$$P(u, v) = \sum a_i b_j u^i v^j,$$

принимающего неотрицательные значения при всех (u, v), $(u, v) \in F$.

Эта теорема является основой получения условий разрешимости (т. е. решения задачи А) различных вариаций М. п. (9). Вот нек-рые из них.

Т е о р е м а 1. Для того чтобы М. п. (6) ($F = \mathbb{R}$) имела решение, необходимо, чтобы

$$\Delta_n = \det \| \mu_{i+j} \|_{i+j=0}^{n} \geqslant 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Для существования решения М. п. (6) со спектром, отличным от конечного числа точек, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta_n > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Для существования решения М. п. (6) со спектром, состоящим в точности из $k+1$ различных точек, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta_0 > 0, \ \Delta_1 > 0, \ \ldots, \ \Delta_k > 0, \ \Delta_{k+1} = \Delta_{k+2} = \ldots = 0.$$

В последнем случае М. п. (6) всегда является определенной.

Т е о р е м а 2. Для того чтобы М. п. (1) ($F = [0, \infty)$) была разрешима, необходимо, чтобы

$$\Delta_n = \det \| \mu_{i+j} \|_{i, \ j=0}^{n} \geqslant 0$$

и

$$\Delta_n^{(1)} = \det \| \mu_{i+j+1} \|_{i, \ j=0}^{n} \geqslant 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Для существования решения М. п. (1) со спектром, отличным от конечного числа точек, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\Delta_n > 0 \text{ и } \Delta_n^{(1)} > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Найдены также необходимые и достаточные условия существования решения М. п. (1) со спектром $\sigma(\psi)$, состоящем в точности из $k+1$ различных точек, отличных от $x = 0$. Эти условия подобны приведенным в заключительной части теоремы 1.

Т е о р е м а 3. Необходимым и достаточным условием разрешимости хаусдорфовой М. п. в $\mathbb{R}$:

$$\int_0^1 x^n \, d\Phi = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad F = [0, 1],$$

является выполнение соотношений $\Delta^k \mu_\nu \geqslant 0$ для всех k, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ (здесь через Δ^k обозначена операция взятия k-й разности).

Т е о р е м а 4. Необходимым и достаточным условием разрешимости хаусдорфовой М. п. в $\mathbb{R}^2$:

$$\int_0^1 \int_0^1 u^i v^j \, d\Phi = \mu_{ij}, \quad i, \ j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$F = [0, 1] \times [0, 1],$$

является выполнение соотношений

$$\Delta_1^n \Delta_2^m \mu_{ij} \geqslant 0, \quad n, \ m, \ i, \ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Т е о р е м а 5. М. п. (6) определенна, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_{2n}^{-1/2n} = +\infty. \tag{10}$$

Известны (см., напр., [4]) необходимые и достаточные условия, к-рым должны удовлетворять μ_n для того, чтобы М. п. (6) (М. п. (1)) была определенной; однако они менее обозримы по сравнению с условием

(10), носящим достаточный характер, а их формулировка несколько громоздка.

М. п. в комплексной области наз. обширный класс интерполяционных задач, описываемый следующим образом. Пусть D — открытая односвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\infty \notin D$; $A(D)$ — пространство функций, аналитических в D, с топологией, определяемой равномерной сходимостью на произвольном компакте K, $K \subset D$; пусть $A^*(D)$ — пространство всех функций $\gamma(z)$, аналитических в окрестности $V^\infty = V^\infty(\gamma)$ бесконечно удаленной точки, причем $\gamma(\infty)=0$ и $\operatorname{supp}\gamma \subset D$ для любой γ, $\gamma \subset A^*(D)$ (последняя запись эквивалентна тому, что множество особенностей функции γ, $\gamma \in A^*(D)$ лежит в D). Топология в $A^*(D)$ определяется равномерной сходимостью на одной из кривых семейства простых замкнутых жордановых кривых $\{\Gamma_\alpha\} \subset D$, обладающего свойством: для произвольного компакта K, $K \subset D$ существует $\Gamma_{\alpha_0} = \Gamma_{\alpha_0}(K) \in \{\Gamma_\alpha\}$ такая, что $K \subset \operatorname{int}\Gamma_{\alpha_0}(D)$ (здесь через $\operatorname{int}\Gamma_{\alpha_0}$ обозначена открытая односвязная область с границей Γ_{α_0}, являющаяся «внутренней» по отношению к Γ_{α_0}). Известно, что пространства $A(D)$ и $A^*(D)$ — взаимно сопряженные.

М. п. в комплексной области такова. Пусть заданы целое число p, $p>1$; функции $0 \not\equiv A_s(D) \subset A(D)$, $s=0, 1, \ldots, p-1$, однолистная в D функция $W(z) \in A(D)$ и совокупность из p последовательностей комплексных чисел

$$\alpha_p = \{\{\alpha_{ns}\},\ n=0, 1, 2, \ldots;\ s=0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Спрашивается, существует ли функция $\gamma(z)\gamma(z) \in A^*(D)$, для к-рой имеют место равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma [W(z)]^{np} A_s(z)\,\gamma(z)\,dz = a_{ns}, \qquad (11)$$

$$n=0, 1, \ldots;\ s=0, 1, \ldots, p-1,$$

где

$$\operatorname{supp}\gamma \subset \operatorname{int}\Gamma \subset \Gamma \subset \operatorname{int}\Gamma \subset D?$$

Вообще говоря, не для всякой заранее взятой совокупности α_p бесконечная система уравнений (11) имеет хотя бы одно решение $\gamma(z)$, $\gamma(z) \in A^*(D)$. Поэтому совокупность α_p наз. D-допустимой, если существует (хотя бы одна) $\gamma(z) \in A^*(D)$, удовлетворяющая соотношениям (11).

З а д а ч а А. Найти необходимые и достаточные условия (конструктивного характера) D-допустимости совокупности α_p.

З а д а ч а В. Пусть α_p D-допустима. Спрашивается, как по числам a_{ns}, находящимся в правых частях равенств (11), отыскать все множество функций $\gamma(z)$, $\gamma(z) \in A^*(D)$, удовлетворяющих соотношениям (11)?

Объединение задач А и В наз. М. п. в комплексной области. Задача В для случая, когда $p=1$, а $A_0(z) \equiv 1$, впервые была рассмотрена в 1937 А. О. Гельфондом [6]; им было указано на принципиальную возможность решения задачи В (при $p=1$ и $A_0(z) \equiv 1$ система (11) всегда имеет единственное решение при D-допустимых правых частях a_{ns}). Исследованы многочисленные частные случаи задач А и В (см. [7] — [10]). Использование аппарата теории краевых задач позволило провести (см. [11] — [14]) достаточно полное исследование М. п. в комплексной области.

Область G, $G \subset \mathbb{C}$, наз. $2\pi/p$-инвариантной [$G \in \operatorname{Inv}(2\pi/p)$], если $\exp(2\pi i/p)G \equiv G$.

Исчерпывающее решение М. п. в комплексной области D при весьма естественных предположениях относительно функций $A_s(z)$, $s=0, 1, 2, \ldots, p-1$, дано [10] для случая $W(D)=G \in \operatorname{Inv}(2\pi/p)$, а также для областей, образы к-рых $W(D)$ погружаемы в нек-рую область G, $G \in \operatorname{Inv}(2\pi/p)$. Привлечение теории краевых задач к решению М. п. в комплексной области

позволило найти в квадратурах полное решение задачи В для областей указанных типов. В частности, при $p=1$ всякая область G принадлежит классу $\mathrm{Inv}(2\pi/p)$. Также найдены необходимые и достаточные условия единственности решения системы (11) для важных в приложениях областей D, W-образы к-рых не являются погружаемыми. Здесь принципиально различны два случая: $0\in W(D)$ и $0\notin W(D)$ (в последней из отмеченных возможностей вопрос о единственности решения системы (11) исчерпывающе исследован в предположении, что $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$). Возможны различные вариации М. п. (11), относящиеся к поведению соответствующих функций на Г.

К М. п. в комплексной области с помощью преобразования Бореля и его обобщений (см. *Сравнения функция*) сводится ряд широко известных интерполяционных задач, напр.:

$$F^{(n)}(hn)=a_n;\ F^{(n)}(\omega^n)=a_n;$$
$$F(\omega^n)=a_n;\ \Delta^n F(hn)=a_n;$$
$$F^{(np+l_s)}(\alpha_s)=a_{ns},$$
$$n=0,\ 1,\ \ldots,\ s=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1,\ 0\leqslant l_s\leqslant 1;$$
$$\Delta^{2n+l_s}F(\alpha_s+2hn)=a_{ns},\ s=0,\ 1;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Кроме того, многие из теорем о целозначных функциях сводятся к весьма частным случаям задачи А.

Лит.: [1] Стилтьес Т. И., Исследования о непрерывных дробях, пер. с франц., Хар.— К., 1936; [2] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 3, М.— Л., 1948; [3] Марков А. А., Избр. труды по теории непрерывных дробей..., М.— Л., 1948; [4] Shohat J. A., Tamarkin J. D., The Problem of Moments, N. Y., 1950; [5] Ахиезер Н. И., Классическая проблема моментов..., М., 1961; [6] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, 3 изд., М., 1967; [7] Buck R. C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1948, v. 64, p. 283—98; [8] его же, «Duke Math. J.», 1948, v. 15, p. 879—91; [9] его же, «Comment. math. helv.», 1953, t. 27, p. 75—80; [10] Лохин И. Ф., «Матем. сб.», 1954, т. 35, № 2, с. 223—230; [11] Казьмин Ю. А., «Докл. АН СССР», 1970, т. 194, с. 1251—54; [12] его же, там же, 1972, т. 204, № 6, с. 1309—1312; [13] его же, там же, т. 205, №1, с. 19—22; [14] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967; [15] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977; [16] Крейн М. Г., Нудельман А. А., Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, М., 1973. *Ю. А. Казьмин.*

МОНЖА КОНУС, направляющий конус,— огибающая касательных плоскостей к интегральной поверхности в точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ дифференциального уравнения

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0, \qquad (*)$$

где $p=\partial z/\partial x$, $q=\partial z/\partial y$. Если функция F нелинейна по p, q, то имеет место общий случай: касательные плоскости образуют однопараметрич. семейство плоскостей, проходящих через фиксированную точку; его огибающей является конус. Если функция F линейна по p, q, то получается пучок плоскостей, проходящих через прямую, т. е. М. к. вырождается в т. н. ось Монжа. Направления образующих М. к., соответствующего нек-рой точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, наз. характеристическими направлениями. Линия на интегральной поверхности, касающаяся в каждой своей точке соответствующей образующей М. к., наз. характеристической линией, характеристикой, фокальной кривой, или кривой Монжа.



Геометрич. трактовку (см. рис.) уравнения (*) как поля конусов направлений дал Г. Монж (G. Monge, 1807). *А. Б. Иванов.*

МОНЖА УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение вида

$$F(x,\ y,\ z,\ dx,\ dy,\ dz)=0.$$

Г. Монж (G. Monge, см. [1]) изучал такие уравнения в связи с построением геометрич. теории дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка. Частным случаем М. у. является *Пфаффа уравнение*.

Напр., если рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными 1-го порядка для неизвестной функции z двух независимых переменных x, y:

$$\Phi\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

то направления образующих *Монжа конуса* (характеристич. направления) в нек-рой точке подчиняются М. у., к-рое можно записать в форме

$$M\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx}\right)=0.$$

Это соотношение представляет собой одно обыкновенное дифференциальное уравнение с двумя неизвестными функциями, т. е. является простейшим случаем недоопределенной системы. Часто М. у. наз. произвольная недоопределенная система обыкновенных дифференциальных уравнений, в к-рой число уравнений меньше числа неизвестных функций.

Лит.: [1] Монж Г., Приложение анализа к геометрии, пер. с франц., М.— Л., 1936; [2] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [3] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.— Л., 1947. *Н. Х. Розов.*

МОНЖА — АМПЕРА УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными 2-го порядка вида

$$rt-s^2=ar+2bs+ct+\varphi,$$

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

коэффициенты к-рого зависят от переменных x, y, неизвестной функции $z(x,\ y)$ и ее первых производных

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Тип М.— А. у. зависит от знака выражения

$$\Delta=\varphi+ac-b^2.$$

Если $\Delta>0$, М.—А. у. есть уравнение эллиптич. типа, если $\Delta<0$.— гиперболического, если $\Delta=0$ — параболического. М.—А. у. инвариантно относительно преобразования прикосновения. В частности, преобразование

$$\xi=p,\quad \eta=q,\quad \zeta=z-px-qy$$

переводит уравнение

$$rt-s^2=\varphi(p,\ q)$$

в уравнение

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=\frac{1}{\varphi(\xi,\ \eta)}.$$

Развитие теории М.—А. у. связано главным образом с решением различных задач геометрии, к-рые в аналитич. постановке сводятся к рассмотрению таких уравнений. Напр., построение поверхности с данным линейным элементом сводится к решению уравнения Дарбу, к-рое является М.—А. у. В случае полугеодезич. параметризации (линейный элемент $ds^2=du^2+c^2dv^2$) это уравнение имеет вид

$$r\left(t+cc_u p-\frac{c_v}{c}q\right)-\left(s-\frac{c_u}{c}q\right)^2+$$

$$+\frac{c_{uu}}{c}(c^2-c^2p^2-q^2)=0.$$

Тип уравнения Дарбу зависит от знака гауссовой кривизны $k=-c_{uu}/c$. В случае гиперболич. типа уравнения Дарбу (гауссова кривизна отрицательна) характеристиками являются асимптотич. линии. Применение теоремы Коши — Ковалевской к уравнению Дарбу дает теорему существования поверхности с данным линейным элементом, коэффициенты к-рого являются аналитич. функциями.

Особенно высокого уровня развития теория М.—А. у. эллиптич. типа получила благодаря введению понятия обобщенного решения и применению геометрич. методов его изучения. В простейшем случае уравнения $rt-s^2=\varphi$ обобщенное решение определяется как выпуклая функция $z(x, y)$, удовлетворяющая равенству

$$\int\int_{M^*} dp\,dq=\int\int_{M}\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\,dx\,dy,$$

где M — произвольное борелевское множество плоскости xy в области, где рассматривается решение, а M^* — т. н. нормальное изображение множества M, к-рое состоит из тех точек плоскости pq, для к-рых p и q являются угловыми коэффициентами опорных плоскостей поверхности $z=z(x, y)$ в точках (x, y, z), проектирующихся в M. Регулярное (дважды дифференцируемое) решение является обобщенным. Обобщенное решение в случае непрерывной положительной функции φ является гладким, однако вторые производные могут не существовать. Построение обобщенного решения в своей существенной части сводится к чисто геометрич. задаче о построении бесконечного выпуклого многогранника с заданными направлениями конечных граней и заданной функцией на этих гранях. В частности, если правая часть φ уравнения зависит только от x и y, этой функцией является площадь грани. Предельным переходом от таких многогранников получается график обобщенного решения уравнения. Для обобщенных решений получаются достаточно общие теоремы существования и единственности решения задачи Дирихле. В частности, имеет место следующая теорема. Задача Дирихле для уравнения

$$rt-s^2=\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$$

в выпуклой области G разрешима при любых непрерывных граничных значениях, если кривизна кривой, ограничивающей область G, положительна, функция φ непрерывна, положительна, неубывающая по z и при $p^2+q^2\to\infty$ имеет порядок роста не более p^2+q^2. При заданном направлении выпуклости это решение является единственным.

Существенным результатом теории М.—А. у. эллиптич. типа является т е о р е м а о р е г у л я р н о с т и о б о б щ е н н ы х р е ш е н и й. Для простейшего уравнения

$$rt-s^2=\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$$

эта теорема гласит: при $\varphi>0$, $\varphi_z>0$ всякое обобщенное решение с регулярной правой частью (φ) является регулярным. Именно, если φ есть k раз дифференцируемая функция ($k\geqslant 3$), то обобщенное решение по крайней мере $k+1$ раз дифференцируемо. Если φ — аналитич. функция, то обобщенное решение — аналитическое.

Среди общих М.—А. у. эллиптич. типа наиболее изучены с и л ь н о э л л и п т и ч е с к и е у р а в н е н и я. Это — уравнения, у к-рых $\varphi>0$ и квадратичная форма

$$a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2$$

неотрицательна. Основные результаты, приведенные для простейшего М.—А. у., распространены на случай сильно эллиптич. уравнений. Для них введено понятие обобщенного решения, при весьма общих

условиях доказано существование и единственность решения задачи Дирихле, а также доказана регулярность обобщенного решения в зависимости от регулярности коэффициентов уравнения. Уравнение Дарбу для линейного элемента с положительной кривизной, вообще говоря, не является сильно эллиптическим. Его обобщенное решение определяется как z-координата поверхности, реализующей данный линейный элемент. Уравнение Дарбу имеет обобщенное решение в любой области, выпуклой в смысле заданной метрики (геодезич. кривизна края положительна). В любой такой области при достаточно общих условиях доказывается разрешимость задачи Дирихле. Обобщенное решение является регулярным, если коэффициенты линейного элемента являются регулярными. Обобщенное решение — аналитическое, если коэффициенты — аналитические.

Важные результаты получены для М.—А. у. эллиптич. типа на многообразиях, гомеоморфных сфере. К таким уравнениям приводят, в частности, две классич. проблемы: *Вейля проблема* и *Минковского проблема*. Решения этих проблем, полученные предельным переходом от многогранников, являются обобщенными. Регулярность этих решений получается из теорем о регулярности обобщенных решений.

М.—А. у. рассматривались Г. Монжем (G. Monge, 1784) и А. Ампером (A. Ampère, 1820).

Лит.: [1] Гурса Э., Курс математического анализа, пер. с франц., т. 3, ч. 1, М.— Л., 1933; [2] Погорелов А. В., Об уравнениях Монжа — Ампера эллиптического типа, Хар., 1960; [3] его же, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.

А. В. Погорелов.

МОНОГЕННАЯ ПОЛУГРУППА, циклическая полугруппа,— полугруппа, порожденная одним элементом. М. п., порожденная элементом a, обозначается обычно $\langle a\rangle$ (иногда $[a]$) и состоит из всевозможных степеней a^k с натуральными показателями. Если все эти степени различны, то $\langle a\rangle$ изоморфна аддитивной полугруппе натуральных чисел. В противном случае $\langle a\rangle$ конечна, и тогда число ее элементов наз. порядком полугруппы $\langle a\rangle$, а также порядком элемента a. Если $\langle a\rangle$ бесконечна, то говорят, что элемент a имеет бесконечный порядок. Для конечной М. п. $A=\langle a\rangle$ существует наименьшее число h с тем свойством, что $a^h=a^k$ при нек-ром $k>h$; число h наз. индексом элемента a (а также полугруппы A). Если при этом d — наименьшее число с тем свойством, что $a^h=a^{h+d}$, то d наз. периодом элемента a (полугруппы A). Пара (h, d) наз. типом элемента a (полугруппы A). Для любых натуральных чисел h и d существует М. п. типа (h, d); две конечные М. п. изоморфны тогда и только тогда, когда их типы совпадают. Если (h, d) — тип М. п. $A=\langle a\rangle$, то элементы $a, \ldots, a^{h+d-1}$ различны, и, следовательно, порядок A равен $h+d-1$; множество

$$G=\{a^h,\ a^{h+1},\ \ldots,\ a^{h+d-1}\}$$

является в A наибольшей подгруппой и наименьшим идеалом; единица e группы G будет единственным идемпотентом в A, причем $e=a^{ld}$ при любом l таком, что $ld\geqslant h$; группа G — *циклическая группа*, ее порождающим элементом будет, напр., ae. Идемпотент конечной М. п. является в ней единицей (нулем) тогда и только тогда, когда ее индекс (соответственно период) равен 1; это эквивалентно тому, что данная М. п. есть группа (соответственно *нильпотентная полугруппа*). Всякая подполугруппа бесконечной М. п. является конечно порожденной полугруппой.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960.

Л. Н. Шеврин.

МОНОГЕННАЯ ФУНКЦИЯ — функция комплексного переменного, имеющая конечную производную.

Точнее, функция $f(z)$, определенная на множестве E комплексной плоскости $\mathbb{C}$, наз. м о н о г е н н о й (относительно множества E) в конечной неизолированной точке $\zeta \in E$, если она имеет в этой точке конечную производную $f'_E(\zeta)$ по переменному $z \in E$:

$$f'_E(\zeta) = \lim_{z \to \zeta,\ z \in E} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}.$$

Функция, моногенная в каждой неизолированной точке множества E, наз. м о н о г е н н о й н а E.

Если $E = G$ — область плоскости $\mathbb{C}$, то функция, моногенная на G, наз. *аналитической функцией* в области G.

Если E не является областью, то моногенные на E функции, вообще говоря, уже не обладают характерными свойствами аналитич. функций. Однако если множество E, не содержащее в своем составе областей, является достаточно «массивным» вблизи большинства своих точек (точнее, если дополнение к E в плоскости $\mathbb{C}$ является достаточно разреженным вблизи большинства точек $\zeta \in E$), то функции, моногенные на E, обладают в ослабленном виде многими свойствами аналитич. функций. В попытках разобраться в глубинных связях между основными свойствами аналитич. функций понятие аналитич. функции обобщалось различными путями: посредством обобщения ее области определения, обобщения самого понятия производной, ослабления условий Коши — Римана, ослабления условий теоремы Мореры и т. п. (см. [13] § 6). С этой же целью для «тощих» множеств E, напр. для отрезка $E = [a, b] \subset \subset (-\infty, \infty)$, выделялись т. н. *квазианалитические классы* функций. Изучались также функции, определенные на нигде не плотных достаточно массивных компактах E, близкие к аналитич. функциям в том смысле, что они могут быть с любой точностью равномерно на E приближены аналитич. функциями или, что то же самое, рациональными функциями переменной z.

Ниже приведены нек-рые результаты из перечисленных направлений.

1. Функции, моногенные в области. Если $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ (при этом $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — действительнозначные функции), то для аналитичности $f(z)$ в области G достаточно (и необходимо) выполнения в каждой точке $x + iy \in G$ одновременно двух условий: 1) $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют полные дифференциалы $du(x, y)$ и $dv(x, y)$ по совокупности действительных переменных (x, y); 2) выполнены условия Коши — Римана:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

Условия этой теоремы ослаблялись и обобщались. Напр., показано, что требование существования полных дифференциалов у u и v можно заменить существенно более слабым условием ограниченности u и v в G и, сохранив требование существования первых частных производных функций u и v всюду в G, потребовать выполнение условий Коши — Римана лишь почти всюду в G (в смысле плоской меры Лебега) (см. [6]).

Пусть $L(z)$ — какая-либо пара различных прямых, пересекающихся в точке z, $R(z)$ — какая-либо тройка выходящих из z попарно неколлинеарных лучей и $E(z)$ — какое-либо измеримое множество, имеющее z своей точкой плотности в смысле Лебега. Аналитичность непрерывной в G функции $f(z)$ обеспечивается каждым из следующих условий в отдельности (см. [3] — [5]): а) всюду в G существует $f'_{L(z)}(z) \neq \infty$; б) всюду в G существует $f'_{R(z)}(z) \neq \infty$; в) всюду в G существует $f'_{E(z)}(z) \neq \infty$. Здесь каждое из множеств $L(z)$, $R(z)$, $E(z)$ — свое для каждой точки. Следует заметить, что

$f'_{E(z)}(z)$ зависит от f и z, но не зависит от $E(z)$; производная

$$f'_{as}(z) = f'_{E(z)}(z)$$

наз. асимптотической (аппроксимативной) производной, а функция, имеющая асимптотич. производную в точке z (соответственно в области G), наз. асимптотически моногенной в точке z (соответственно в G). Вместо условия б) достаточно потребовать существования предела для

$$\arg((f(z')-f(z))/(z'-z)) \text{ при } z' \to z,\ z' \in R(z).$$

2. Функции, моногенные на нигде не плотных множествах. Э. Борель [8] построил такое совершенное связное множество (континуум) E без внутренних точек и такую расширяющуюся последовательность $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E$ совершенных множеств, что площадь $\mathrm{mes}_2 E$ множества E положительна,

$$\mathrm{mes}_2\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0,$$

и из моногенности $f(z)$ на E (или хотя бы на каждом множестве E_n, $n=1, 2, \ldots$) следует бесконечная дифференцируемость $f(z)$ по $z \in E_{n_0}$ при каждом фиксированном n_0. Можно указать нек-рые сравнительно общие достаточные условия на E, чтобы E обладало этим свойством или более слабым свойством k-кратной дифференцируемости по $z \in E_n$, где k — наперед заданное натуральное число. Найдены также достаточные условия на нигде не плотный континуум E для того, чтобы для функций, моногенных на нем, были справедливы аналоги интегральной теоремы Коши, разложения в ряд Тейлора и различные формы теоремы единственности, напр. такая: если моногенные на E функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают на нек-рой порции множества E (т. е. на непустом пересечении E с нек-рым открытым кругом), то $f_1(z) \equiv f_2(z)$ на E (см. [9]).

3. Функции, близкие к аналитическим. Как известно, любая аналитическая в области G функция $f(z)$ является пределом нек-рой последовательности рациональных функций $r_n(z)$, к-рая сходится к $f(z)$ равномерно на каждом компакте $K \subset G$. Рассматривая достаточно массивный нигде не плотный континуум E и класс $R(E)$ функций $f(z)$, $z \in E$, для каждой из к-рых существует последовательность рациональных функций $r_n(z, f)$, равномерно сходящаяся к $f(z)$, получают еще одно обобщение понятия области и понятия функции $f(z)$, аналитической на E. Если E — нигде не плотное множество на $\mathbb{C}$, то всегда найдется функция $f \in R(E)$, не имеющая производной $f'_E(z)$ ни в одной точке $z \in E$ (см. [10]). Однако для каждого m, $2 \leqslant m \leqslant \infty$, можно указать условие на E, при выполнении к-рого каждая функция $f \in R(E)$ будет иметь производные $f^{(k)}_E(z)$, где $1 \leqslant k < m$, а E_n замкнуто, $E_n \subset E$, $\mathbf{mes}_2(E \setminus E_n) < 1/n$ (см. [11]). М. В. Келдыш построил пример нигде не плотного континуума E, на к-ром для функций f_1, $f_2 \in R(E)$ справедлива теорема единственности в форме, приведенной в конце п. 2 (см. также [12]). (По поводу моногенных свойств функций из $R(E)$ в терминах функционального анализа см. [12] ч. I, § 17.) Исследовалась также зависимость моногенных свойств функций $f \in R(E)$ от скорости приближения ее посредством рациональных функций.

Лит.: [1] Федоров В. С., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 2, с. 7—16; [2] Bohr H., «Math. Z.», 1918, Bd 1, S. 403—20; [3] Меньшов Д. Е., «Fundam. math.», 1935, v. 25, p. 59—97; [4] его же, Les conditions de monogénéité, P., 1936; [5] его же, «Матем. сб.», 1936, т. 1, с. 189—210; [6] Толстов Г. П., О криволинейном и повторном интеграле, М.— Л., 1950 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 35); [7] Трохимчук Ю. Ю., Непрерывные отображения и условия моногенности, М., 1963; [8] Borel E., Leçons sur les fonctions monogè-

nes uniformes d'une variable complexe, P., 1917; [9] Селезнев А. И., «Докл. АН СССР», 1956, т. 108, № 4, с. 591—94; [10] Долженко Е. П., там же, 1959, т. 125, № 5, с. 970—973; [11] его же, там же, 1962, т. 143, № 4, с. 771—74; [12] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 143—250; [13] Бермант А. Ф., Маркушевич А. И., в кн.: Математика в СССР за тридцать лет. 1917—1947, М.— Л., 1948, с. 401—406. *Е. П. Долженко.*

МОНОГЕННОСТИ МНОЖЕСТВО — множество всех производных чисел данной функции комплексного переменного в данной точке. Точнее, пусть E — множество на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ζ — неизолированная его точка, $f(z)$ — комплекснозначная функция переменного $z\in E$. Комплексное число a (собственное или равное ∞) наз. производным числом функции f в точке ζ относительно множества E, если существует последовательность $z_n\in E$ со свойствами: $z_n\neq\zeta$, $z_n\to\zeta$,

$$\frac{f(z_n)-f(\zeta)}{z_n-\zeta}\longrightarrow a \text{ при } n\longrightarrow\infty.$$

Множество $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)$ всех производных чисел функции f в точке ζ относительно E наз. множеством моногенности функции f в точке ζ относительно E (см. [1]). Множество $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)$ состоит из единственной конечной точки a тогда и только тогда, когда $f(z)$ — *моногенная функция* в точке ζ относительно E и $f'_E(\zeta)=a$. Множество $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)$ всегда замкнуто, и для каждого замкнутого множества A расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, каждого множества $E\subset\mathbb{C}$ и каждой конечной неизолированной точки ζ этого множества найдется такая функция $f(z)$, $z\in E$, что $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)=A$. Если ζ — внутренняя точка E, то для любой непрерывной в нек-рой окрестности этой точки функции $f(z)$ множество $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)$ является замкнутым и связным (континуумом) на $\overline{\mathbb{C}}$, и обратно, для любого континуума $K\subset\overline{\mathbb{C}}$ найдется функция $f(z)$, непрерывная в нек-рой окрестности ζ, для к-рой $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)=K$. Если функция $f(z)=f(x+iy)=u(x, y)+iv(x, y)$ дифференцируема по совокупности действительных переменных (x, y) во внутренней точке $\zeta=\xi+i\eta$ множества E, то $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)$ представляет собой окружность $\gamma(r, c)=\{w:|w-c|=r\}$ (возможно, вырожденную в точку при $r=0$) с центром $c=\partial f(\zeta)/\partial z$ и радиусом $r=|\partial f(\zeta)/\partial\bar z|$, где

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

— т. н. формальные производные. Верно и обратное: каждая окружность является М. м. для нек-рой функции f, дифференцируемой по (x, y) в заданной внутренней точке ζ множества E.

Если $f(z)$ непрерывна в области G, то почти в каждой точке $\zeta\in G$ множество $\mathfrak{M}(\zeta, f, G)$ есть либо нек-рая окружность $\gamma(r, c)$, $0\leqslant r<\infty$, либо $\overline{\mathbb{C}}$ (см. [2]). В общем случае произвольного (необязательно измеримого) множества E и произвольной (необязательно измеримой) конечной функции $f(z)$, $z\in E$, почти в каждой точке $\zeta\in E$ имеет место один из следующих трех случаев: а) $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)=\gamma(r, c)$, $c\in\mathbb{C}$, $0\leqslant r<\infty$; б) $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)=\overline{\mathbb{C}}$; в) $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)=\gamma(r, c)\cup\infty$, $c\in\mathbb{C}$, $0\leqslant r<\infty$. При этом почти в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)=f(x+iy)$ по совокупности $(x, y)\in E$ выполнен случай а), почти же в каждой точке непрерывности функции $f(z)$ — один из первых двух случаев. Каждый из случаев а) — в) в отдельности может реализоваться почти в каждой точке $\zeta\in E$.

Лит.: [1] Федоров В. С., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 2, с. 7—16; [2] Трохимчук Ю. Ю., Непрерывные отображения и условия моногенности, М., 1963; [3] Долженко Е. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, с. 347—60.
Е. П. Долженко.

МОНОДРОМИИ ГРУППА обыкновенного линейного дифференциального уравнения или линейной системы уравнений — группа $(n\times n)$-матриц, к-рая отвечает системе n-го порядка

$$\dot{x}=A(t)x \qquad (*)$$

и определяется следующим образом. Пусть матрица $A(t)$ голоморфна в области $G\subset\mathbb{C}$, точка $t_0\in G$ и $X(t)$ — фундаментальная матрица системы $(*)$, заданная в малой окрестности t_0. Если $\gamma\subset G$ — замкнутая кривая с началом в точке t_0, то при аналитич. продолжении вдоль γ, $X(t)\to X(t)C_\gamma$, где C_γ — постоянная $(n\times n)$-матрица. Если кривые γ_1, γ_2 гомотопны в G, то $C_{\gamma_1}=C_{\gamma_2}$; если $\gamma=\gamma_1\gamma_2$, то $C_\gamma=C_{\gamma_1}C_{\gamma_2}$. Отображение $\gamma\to C_\gamma$ есть гомоморфизм *фундаментальной группы* области G:

$$\pi^1(G,\ t_0)\to \mathrm{GL}(n,\ C),$$

где $\mathrm{GL}(n,\ C)$ — группа $(n\times n)$-матриц с комплексными элементами; образ этого гомоморфизма наз. группой монодромии $M(t_0,\ G)$ системы $(*)$. При этом

$$M(t_1,\ G)=T^{-1}M(t_0,\ G)T,$$

где T — постоянная матрица. М. г. вычислена для уравнений Эйлера, Папперитца (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950; [2] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Хар., 1939.
М. В. Федорюк.

МОНОДРОМИИ МАТРИЦА — постоянная $(n\times n)$-матрица $X(\omega)$, к-рая является значением в точке $t=\omega$ фундаментальной матрицы $X(t)$, нормированной в нуле, линейной системы дифференциальных уравнений

$$x'=A(t)\,x,\ t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n,$$

с ω-периодической матрицей $A(t)$, суммируемой на каждом компактном промежутке из $\mathbb{R}$. *Ю. В. Комленко.*

МОНОДРОМИИ ОПЕРАТОР — линейный ограниченный оператор $U(T)$, ставящий в соответствие начальному значению $x(0)=x_0$ решения дифференциального уравнения $\dot{x}=A(t)x$ в банаховом пространстве с ограниченным оператором $A(t)$, непрерывно и периодически с периодом T зависящим от t, его значение в момент времени T: $x(T)=U(T)x_0$. Для всякого решения справедливо: $x(t+T)=U(T)x(t)$. В конечномерном случае оператору $U(T)$ отвечает *монодромии матрица*. Расположение спектра М. о. влияет на существование периодич. решений уравнения, на поведение его решений на бесконечности, на приводимость уравнения к уравнению с постоянными коэффициентами, на наличие экспоненциальной дихотомии. В терминах спектра М. о. решается также вопрос о существовании и единственности периодич. решений неоднородного уравнения $\dot{x}=A(t)x+f(t)$ с периодическими $A(t)$ и $f(t)$. См. также *Качественная теория дифференциальных уравнений* в банаховом пространстве. *С. Г. Крейн.*

МОНОДРОМИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование слоев (или их гомотопич. инвариантов) расслоенного пространства, соответствующее нек-рому пути в базе. Более точно, пусть $p:E\to B$ — локально тривиальное расслоение и пусть $\gamma:[0,\ 1]\to B$ — путь в B с началом в точке $a=\gamma(0)$ и концом в $b=\gamma(1)$. Тривиализация расслоения γ^*E определяет гомеоморфизм T_γ слоя $p^{-1}(a)$ на слой $p^{-1}(b)$, $T_\gamma:p^{-1}(a)\to p^{-1}(b)$. При изменении тривиализации γ^*E гомеоморфизм T_γ заменяется на гомотопически эквивалентный го-

меоморфизм; это же происходит и при замене пути γ гомотопным путем. Гомотопич. тип гомеоморфизма T_γ и наз. преобразованием монодромии, соответствующим пути γ. Когда $a=b$, т. е. когда путь γ является петлей, М. п. T_γ — гомеоморфизм слоя $F=p^{-1}(a)$ в себя (определенный, опять-таки, с точностью до гомотопии). Это отображение, а также гомоморфизмы, индуцированные им в гомологиях и когомологиях слоя F, также наз. М. п. Сопоставление петле γ преобразования T_γ задает представление фундаментальной группы $\pi_1(B, a)$ на $H^*(F)$.

Понятие М. п. возникло при изучении многозначных аналитич. функций (см. *Монодромии теорема*). Если $S \to P^1(\mathbb{C})$ — риманова поверхность такой функции, то выбрасыванием из сферы Римана $P^1(\mathbb{C})$ особых точек функции получается неразветвленное накрытие. М. п. в этом случае наз. также преобразованием наложения или скольжения.

Наиболее часто М. п. возникает в следующей ситуации. Пусть $D=\{z\in\mathbb{C},\ |z|<1\}$ — диск в комплексной плоскости, X — аналитич. пространство, а $f:X\to D$ — собственное голоморфное отображение, X_t — слой $f^{-1}(t)$, $t\in D$, $D^*=D\setminus\{0\}$ и $X^*=f^{-1}(D^*)$. Уменьшая, если нужно, радиус D, можно добиться, чтобы расслоение $f:X^*\to D^*$ стало локально тривиальным. М. п. T, связанное с обходом вокруг O в D, наз. монодромией семейства $f:X\to D$ в точке $O\in D$; оно действует в когомологиях (или гомологиях) слоя X_t, где $t\in D^*$. Более других изучен случай, когда пространство X гладкое, как и все слои X_t, $t\neq 0$. Действие монодромии T на пространстве $H^*(X_t, \mathbb{Q})$ в этом случае квазиунипотентно [4], т. е. существуют целые положительные числа k и N такие, что $(T^k-1)^N=0$. В свойствах монодромии проявляются многие характерные черты вырождения семейства $f:X\to D$. Монодромия семейства $X\to D$ тесно связана со смешанной структурой Ходжа в когомологиях $H^*(X_0)$ и $H^*(X_t)$ (см. [5] — [7]).

В случае, когда особенности $f:X\to D$ изолированы, М. п. может быть локализовано. Пусть x — особая точка отображения f (или, что то же, слоя X_0) и пусть B — шар достаточно малого радиуса в X с центром в x. Уменьшая, если нужно, радиус D, можно определить локальную тривиализацию расслоения $B\cap f^{-1}(D^*)\to D^*$, согласованную на границе с тривиализацией расслоения $\partial B\cap f^{-1}(D)\to D$. Это дает диффеоморфизм T многообразия «исчезающих циклов» $V_t=B\cap X_t$ в себя, тождественный на его крае ∂V_t и называемый локальной монодромией f в точке x. Действие М. п. на когомологиях $H^*(V_t)$ отражает важнейшее свойство особенности отображения f в точке x (см. [1], [2], [7]). Известно, что многообразие V_t гомотопически эквивалентно букету μ n-мерных сфер, где $n+1=\dim X$, а μ — число Милнора ростка f в x.

Простейшим является случай особенности Морса, когда функция f в окрестности точки x приводится к виду $f=z_0^2+z_1^2+\ldots+z_n^2$. В этом случае $\mu=1$, а внутренность V_t^0 многообразия V_t диффеоморфна касательному расслоению к n-мерной сфере S^n. Исчезающим циклом δ наз. образующая группы когомологий с компактными носителями $H_c^n(V_t^0, \mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$, определенная с точностью до знака. Вообще, если $f:X\to D$ — собственное голоморфное отображение (как выше, имеющее единственную морсовскую особенность в точке x), то исчезающим в точке x циклом δ_x наз. также образ цикла $\delta\in H_c^n(V_t^0)$ при естественном отображении $H_c^n(V_t^0)\to H^n(X_t)$. В этом случае гомо-

морфизм специализации $r_t^* : H^i(X_0) \to H^i(X_t)$ является изоморфизмом при $i \neq n$, $n+1$, и последовательность

$$0 \longrightarrow H^n(X_0) \longrightarrow H^n(X_t) \xrightarrow{(\ ,\delta_x)} \mathbb{Z} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{n+1}(X_0) \longrightarrow H^{n+1}(X_t) \longrightarrow 0$$

точна. М. п. T действует на $H^i(X_t)$ тривиально при $i \neq n$, а его действие на $H^n(X_t)$ задается формулами Пикара—Лефшеца: для $z \in H^n(X_t)$

$$T_z = z \pm (z,\ \delta_x)\,\delta_x.$$

Знаки в этой формуле и значения (δ_x, δ_x) собраны в таблице.

$n \bmod 4$	0	1	2	3
$\pm$	$-$	$-$	$+$	$+$
(δ_x, δ_x)	2	0	-2	0

М. п. T сохраняет форму пересечения на $H^n(X_t)$.

Исчезающие циклы и М. п. используются в теории Пикара — Лефшеца, сравнивающей когомологии проективного комплексного многообразия и его гиперплоского сечения. Пусть $X \subset P^N$ — гладкое многообразие размерности $n+1$, а $\{X_t\}$, $t \in P^1$, — пучок гиперплоских сечений многообразия X с базисным множеством (осью пучка) $Y \subset X$; и пусть выполняются следующие условия: а) Y — гладкое подмногообразие в X; б) существует такое конечное множество $S \subset P^1$, что X_t гладкое при $t \in P^1 - S$; в) для $s \in S$ многообразие X_s имеет единственную невырожденную квадратичную особую точку x_s, причем $x_s \in Y$. Пучки с такими свойствами (пучки Лефшеца) всегда существуют. Пусть $\sigma : \bar{X} \to X$ — моноидальное преобразование с центром в оси пучка Y, а $f : \bar{X} \to P^1$ — морфизм, определяемый пучком $\{X_t\}$; при этом $f^{-1}(t) \cong X_t$ для всех $t \in P^1$. Фиксируется точка $o \in P^1 - S$; тогда М. п. задает действие фундаментальной группы $\pi_1(P^1 - S,\ o)$ на $H^i(X_0)$ (нетривиальное лишь при $i = n$). Для описания действия монодромии на $H^n(X_0)$ выбираются точки s', расположенные около $s \in S$, и пути γ_s, ведущие из o в s'. Пусть $\gamma_s \in \pi_1(P^1 - S,\ o)$ — петля, устроенная так: сначала она идет по γ_s', затем обходит один раз вокруг s и, наконец, возвращается по γ_s' в o. Кроме того, пусть δ_s — исчезающий в точке x_s цикл (точнее, нужно взять исчезающий цикл в $H^n(X_{s'})$ и перенести его в $H^n(X_0)$ при помощи М. п., соответствующего пути γ_s'). Пусть, наконец, $E \subset H^n(X_0, \mathbb{Q})$ — подпространство, порожденное исчезающими циклами δ_s, $s \in S$ (пространство исчезающих когомологий). Тогда имеют место следующие утверждения:

1) группа $\pi_1(P^1 - S,\ o)$ порождается элементами γ_s, $s \in S$;

2) действие γ_s задается формулой

$$\gamma_s(z) = z \pm (z,\ \delta_s)\delta_s;$$

3) пространство $E \subset H^n(X_0)$ инвариантно относительно действия группы монодромии $\pi_1(P^1 - S,\ o)$;

4) подпространство инвариантных относительно монодромии элементов $H^n(X_0)$ совпадает с ортогональным дополнением к E относительно формы пересечения на $H^n(X_0)$, а также с образами естественных гомоморфизмов $H^n(\bar{X}) \to H^n(X_0)$ и $H^n(X) \to H^n(X_0)$;

5) исчезающие циклы $\pm\delta_s$ сопряжены (с точностью до знака) относительно действия $\pi_1(P^1 - S,\ o)$;

6) действие $\pi_1(P^1 - S,\ o)$ на E абсолютно неприводимо.

Формализм исчезающих циклов, М. п. и теория Пикара — Лефшеца построены также для l-адических когомологий алгебраич. многообразий над любым полем (см. [3]).

Лит.: [1] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, в. 2, с. 11—49; [2] Милнор Дж., Особые точки комплексных гиперповерхностей, пер. с англ., М., 1971; [3] Groupes de monodromie en géométrie algébrique, B.— Hdlb.— N. Y., 1973 (Lect. Notes Math., № 340); [4] Clemens C. H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 136, p. 93—108; Schmid W., «Invent. Math.», 1973, Bd 22, S. 211—319; [6] Steenbrink J., «Invent. Math.», 1976, Bd 31, S. 229—57; [7] Symposium in Mathematics, Oslo, 1976, p. 524—63; [8] Lefschetz S., L'Analysis situs et la géométrie algébrique, P., 1924; [9] Лефшец С., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, № 6, с. 193—215.

В. И. Данилов.

МОНОДРОМИИ ТЕОРЕМА — достаточный признак однозначности *ветви аналитической функции*. Пусть D — односвязная область комплексного числового пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$. Тогда, если нек-рый элемент аналитич. функции $\Sigma(z^0; r)$ с центром $z^0 \in D$ аналитически продолжаем вдоль любого пути, расположенного в D, то возникающая при этом аналитич. продолжении ветвь аналитич. функции $f(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)$ однозначна в D. Иначе говоря, ветвь аналитич. функции $f(z)$, определяемая односвязной областью D и элементом $\Sigma(z^0; r)$ с центром $z^0 \in D$, обязательно однозначна. Другая равносильная формулировка: если элемент $\Sigma(z^0; r)$ аналитически продолжается вдоль всех путей, принадлежащих произвольной области $D \subset \mathbb{C}^n$, то результат этого продолжения в любую точку $z^* \in D$ (т. е. элемент аналитич. функции $\Sigma(z^*; r^*)$ с центром z^*) *один и тот же для всех гомотопных путей* в D, соединяющих точки z^0 и z^*.

М. т. справедлива и для аналитич. функций $f(z)$, определенных в областях D на римановых поверхностях или на римановых областях. См. также *Полная аналитическая функция*.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [2] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1, М., 1962; [3] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

МОНОДРОМНАЯ ФУНКЦИЯ в области D комплексной плоскости — однозначная и непрерывная функция в области D (исключая, быть может, полюсы). Термин «М. ф.» применялся О. Коши (A. Cauchy) в связи с необходимостью подразделения класса *аналитических функций* на М. ф. и многозначные аналитич. функции; в настоящее время (1982) он вышел из употребления.

См. также *Монодромии теорема*.

Е. Д. Соломенцев.

МОНОИД — термин, используемый для сокращения словосочетания «полугруппа с единицей». Таким образом, моноидом наз. множество M, на к-ром задана бинарная ассоциативная операция, обычно именуемая умножением, и в к-ром существует такой элемент e, что $ex=x=xe$ для любого $x \in M$. Элемент e наз. единицей и часто обозначается 1. В любом М. имеется ровно одна единица. Если заданная в М. операция коммутативна, то ее часто наз. сложением, а единицу — нулем М. и обозначают 0.

Примеры М. 1) Множество всех отображений произвольного множества S в себя является М. относительно операции последовательного выполнения (суперпозиции) отображений. Единицей служит тождественное отображение. 2) Множество эндоморфизмов любой универсальной алгебры A является М. относительно операции суперпозиции, единица — тождественный эндоморфизм. 3) Всякая группа является М.

Всякую полугруппу P без единицы можно вложить в М. Для этого достаточно выбрать символ 1, не принадлежащий P, и на множестве $P \cup \{1\}$ задать умножение следующим образом: $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot x = x = x \cdot 1$ для любого $x \in P$, на элементах из P операция остается прежней. Всякий М. можно представить как М. всех эндоморфизмов нек-рой универсальной алгебры.

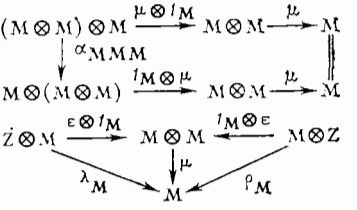
Произвольный М. можно рассматривать также как категорию с одним объектом. Это позволяет сопоста-

вить моноид M дуальный (двойственный) моноиду M^{Op}. Элементы обоих М. совпадают, а произведение x и y в M^{Op} полагается равным произведению yx в M.

Развитие теории М. и сопряженных функторов выявило полезность определения М. в т. н. моноидальных категориях. Пусть в категории $\mathfrak{M}$ задан бифунктор $\otimes: \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, выделен объект Z и фиксированы естественные изоморфизмы

$$\alpha_{ABC}: (A \otimes B) \otimes C \longrightarrow A \otimes (B \otimes C),$$
$$\lambda_A: Z \otimes A \longrightarrow A, \ \rho_A: A \otimes Z \longrightarrow A,$$

удовлетворяющие условиям когерентности. Объект M наз. М. категории $\mathfrak{M}$, если существуют такие морфизмы $\mu: M \otimes M \to M$ и $\varepsilon: Z \to M$, что следующие диаграммы коммутативны:



Если в качестве $\mathfrak{M}$ взять категорию множеств, в качестве $\otimes$ — декартово произведение, в качестве Z — любое одноточечное множество, а изоморфизмы α, λ и ρ выбрать естественным образом ($\alpha((a, b), c)) = (a, (b, c))$, $\lambda(z, a) = a = \rho(a, z)$, то второе определение М. оказывается равносильным исходному определению.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [2] Mac Lane S., Categories for the working mathematician, N. Y. [a. o.], 1971.

М. Ш. Цаленко.

МОНОИДАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, раздутие, σ-процесс,— специального вида *бирациональный морфизм* алгебраич. многообразий или бимероморфный морфизм аналитич. пространств. Пусть, напр., X — алгебраич. многообразие (или произвольная схема), а $D \subset X$ — замкнутое подмногообразие, задаваемое пучком идеалов J. Моноидальным преобразованием X с центром в D наз. X-схема $X' = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n \geqslant 0} J^n)$ — проективный спектр градуированного пучка O_X-алгебр $\bigoplus_{n \geqslant 0} J^n$. Если $f: X' \to X$ — структурный морфизм X-схемы X', то пучок идеалов $f^*(J) = J \cdot O_{X'}$ на X' (определяющий исключительную подсхему $f^{-1}(D)$ в X') обратим. Это значит, что $f^{-1}(D)$ является *дивизором* в X'; кроме того, f индуцирует изоморфизм между $X' - f(D)$ и $X - D$. М. п. $f: X' \to X$ схемы X с центром в D характеризуется следующим свойством универсальности [1]: пучок идеалов $f^*(J)$ обратим и для любого морфизма $g: X'' \to X$, для к-рого $g^*(J)$ обратим, существует единственный морфизм $h: X'' \to X'$ такой, что $g = f \circ h$.

Аналогично определяется и характеризуется М. п. алгебраич. или аналитич. пространства X с центром в замкнутом подпространстве $D \subset X$.

Важный класс М. п. составляют допустимые моноидальные преобразования, к-рые выделяются тем условием, что центр D таких преобразований неособый, а X — нормально плоская схема вдоль D. Последнее означает, что все пучки J^n/J^{n+1} являются плоскими (O_X/J)-модулями. Важность допустимых М. п. объясняется тем, что они не ухудшают особенности многообразия. Более того, доказано (см. [1]), что подходящая последовательность допустимых М. п. улучшает особенности, что позволило доказать теорему о разрешении особенностей алгебраич. многообразий над полем нулевой характеристики.

Особенно просто устроены допустимые М. п. неособых многообразий. Если $f: X' \to X$ М. п. с неособым центром $D \subset X$, то X' снова неособое, а исключительное подмногообразие $f^{-1}(D)$ канонически изоморфно проективизации конормального пучка к D в X. В частном случае, когда D состоит из одной точки, М. п.

заключается в «раздутии» этой точки в целое проективное пространство касательных направлений. О поведении различных инвариантов неособых многообразий (таких как кольцо Чжоу, когомологии, K-функтор, классы Чжэня) при допустимом М. п. см. [2] — [5].

Лит.: [1] Хиронака Х., «Математика», 1965, т. 9, № 6, с. 2—70; [2] Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, B.— Hdlb.— L., 1967; [3] Cohomologie l-adique et fonctions L (SGA-5), B.— Hdlb.— L., 1977; [4] Porteous I., «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1960, v. 56, № 2, p. 118—24; [5] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 5, с. 3—86.

В. И. Данилов.

МОНОМИАЛЬНАЯ ГРУППА ПОДСТАНОВОК — подгруппа группы $\mathrm{GL}(m, \mathbb{Z}[H])$ всех обратимых матриц порядка m над целочисленным групповым кольцом $\mathbb{Z}[H]$ (см. *Групповая алгебра*) нек-рой группы H, состоящая из всевозможных матриц, содержащих в каждой строке и каждом столбце точно один ненулевой элемент из H. Каждой такой матрице, содержащей на (i, j)-м месте ненулевой элемент $h_{ij} \in H$, может быть поставлена в соответствие нек-рая мономиальная подстановка, т. е. отображение $\psi: u_i \to h_{ij} u_j$, где $j = j(i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, а $u_i \to u_j$ — подстановка конечного множества $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$. Произведение таких отображений вычисляется по формуле

$$\psi_1 \psi_2 : u_i \longrightarrow (h_{ij} h_{ik})\, u_k$$

($\psi_1 : u_i \to h_{ij} u_j$, $\psi_2 : u_j \to h_{jk} u_k$), и ему будет соответствовать произведение матриц, сопоставляемых отображениям ψ_1 и ψ_2. В М. г. п. изоморфно вкладывается любая группа G, содержащая H в качестве подгруппы индекса m. М. г. п. является (прямым) сплетением группы H с симметрич. группой $S(m)$ степени m.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977; [2] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

Н. Н. Вильямс.

МОНОМИАЛЬНАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица над ассоциативным кольцом с единицей, каждая строка и каждый столбец к-рой содержат только один ненулевой элемент. Если ненулевые элементы М. м. равны 1, то эта матрица наз. матрицей-подстановкой. Любая М. м. есть произведение матрицы-подстановки и диагональной матрицы.

Д. А. Супруненко.

МОНОМИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ конечной группы G — такое представление ρ группы G в конечномерном векторном пространстве V, что в нек-ром базисе $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ этого пространства матрица $M^{(e)}_{\rho(g)}$ оператора $\rho(g)$ для любого элемента $g \in G$ имеет точно один ненулевой элемент в каждой строке и в каждом столбце. Иногда М. п. наз. непосредственно матричное представление $g \longmapsto M^{(e)}_{\rho(g)}$. М. п. является частным случаем импримитивного представления (см. *Импримитивная группа*). А именно, набор одномерных подпространств в V, порожденных векторами $e_1, \ldots, e_n$, является системой импримитивности для ρ. Наоборот, если для нек-рого представления φ группы G в векторном пространстве W существует система импримитивности, состоящая из одномерных подпространств, то φ — М. п. Пусть H — какая-либо подгруппа в G. Примером М. п. может служить представление G, индуцированное каким-нибудь одномерным представлением подгруппы H (см. *Индуцированное представление*). Такие представления наз. также индуцированными М. п. (см. [1]). Не всякое М. п. ρ является индуцированным М. п. (однако, если М. п. ρ неприводимо, то оно будет индуцированным М. п.). Данное выше определение М. п. возникло в классич. теории представлений конечных групп. Часто, однако, это определение изменяют, называя М. п. произвольное представление группы G, индуцированное одномерным представлением какой-либо подгруппы H в G. В таком виде определение М. п. имеет смысл уже не только для конечных групп и их

конечномерных представлений, но и, напр., для групп Ли и их представлений в гильбертовых пространствах (подгруппа H при этом предполагается замкнутой). Для достаточно широкого класса групп конструкция М. п. оказывается достаточной для описания всех унитарных неприводимых представлений. А именно, группы, все унитарные неприводимые представления к-рых мономиальны, наз. мономиальными группами, или M-группами. К их числу относятся, напр., все конечные нильпотентные группы и все связные нильпотентные группы Ли. Все конечные M-группы, а также все мономиальные группы Ли разрешимы (см. [2]).

Лит.: [1] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [2] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978.

В. Л. Попов.

МОНОМОРФИЗМ в категории — морфизм $\mu\colon A \to B$ категории $\mathfrak{K}$, для к-рого из всякого равенства $\alpha\mu=\beta\mu$ (α, β из $\mathfrak{K}$) следует, что $\alpha=\beta$ (другими словами, на μ можно сокращать справа). Другое эквивалентное определение М.: для любого объекта X категории $\mathfrak{K}$ индуцируемое морфизмом μ отображение множеств

$$\mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(X, B)$$

должно быть инъективным. Произведение двух М. является М. Каждый левый делитель М. есть М. Класс всех объектов и класс всех М. произвольной категории $\mathfrak{K}$ составляют подкатегорию категории $\mathfrak{K}$ (обозначаемую обычно Mon $\mathfrak{K}$).

В категории множеств роль М. играют *инъекции*. Двойственным к понятию М. является понятие *эпиморфизма*.

Лит.: [1] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974; [2] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972.

О. А. Иванова.

МОНОСПЛАЙН — разность между функцией x^n и полиномиальным *сплайном* $S_{n-1}(x)$ степени $n-1$. М. возникают при изучении квадратурных формул для дифференцируемых функций.

Ю. Н. Субботин.

МОНОТОННАЯ БУЛЕВА ФУНКЦИЯ — булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, обладающая следующим свойством: если для нек-рых наборов $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta}=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\beta_j \in \{0, 1\}$, выполнено условие $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для всех i (в этом случае пишут $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$), то $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta})$. Напр., функция $f(x_1, x_2)=x_1 \oplus x_2$ (сложение по модулю 2) не является монотонной, т. к. $(0, 1) \leqslant (1, 1)$, но $1=f(0, 1) > f(1, 1)=0$.

Примеры М. б. ф.: константы 0 и 1, тождественная функция $f(x)=x$, дизъюнкция $x_1 \vee x_2$, конъюнкция $x_1 \& x_2$ и т. д. Примеры немонотонных булевых функций: отрицание $\bar{x}$, импликация $x_1 \to x_2$ и т. д. Любая функция, полученная с помощью операции суперпозиции из М. б. ф., сама является монотонной. Другими словами, класс всех М. б. ф. является замкнутым. Более того, класс всех М. б. ф. является одним из пяти максимальных (предполных) классов в множестве всех булевых функций, т. е. не существует замкнутого класса булевых функций, содержащего все М. б. ф. и отличного от класса М. б. ф. и класса всех булевых функций. Сокращенная дизъюнктивная нормальная форма любой М. б. ф., отличной от констант 0 и 1, не содержит отрицаний переменных. Множество функций $\{0, 1, x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2\}$ является полной системой (и, более того, базисом) в классе всех М. б. ф.

Для числа $\psi(n)$ М. б. ф., зависящих от n переменных, известно, что

$$\psi(n) = 2^{C_n^{[n/2]}(1+\varepsilon(n))},$$

где $0 < \varepsilon(n) < c\frac{\log n}{n}$, c — нек-рая константа (см. [2]).

Для сложности реализации класса М. б. ф. схемами из функциональных элементов и контактными схемами получены более низкие значения, чем для сложности реализации произвольных булевых функций (см. *Синтеза задачи*). Нек-рые дискретные экстремальные задачи сводятся к задаче расшифровки М. б. ф. В этой задаче требуется, зная, что нек-рая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является М. б. ф., выяснить ее значения на всех наборах, задав как можно меньше вопросов вида: «Чему равно значение $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ на нек-ром наборе $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$?». Был предложен [3] алгоритм, к-рый требует для расшифровки произвольной М. б. ф. задания не более $C_n^{[n/2]}+C_n^{[n/2]+1}$ вопросов. С другой стороны, не существует алгоритма расшифровки, к-рый отличал бы функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n)=\begin{cases} 0, \text{ если } \sum_{i=1}^n x_i \leqslant [n/2], \\ 1, \text{ если } \sum_{i=1}^n x_i \geqslant [n/2]+1 \end{cases}$$

от всех остальных М. б. ф. менее чем за $C_n^{[n/2]}+C_n^{[n/2]+1}$ вопросов.

Обобщением понятия М. б. ф. являются монотонные функции k-значной логики. Если на множестве $E_k=\{0, 1, \ldots, k-1\}$ задано произвольное частичное упорядочение S (пишут $\leqslant_S$), то, по определению, для любых двух наборов $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta}=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\alpha_i \in E_k$, $\beta_j \in E_k$, запись $\tilde{\alpha} \preceq_S \tilde{\beta}$ означает, что $\alpha_i \leqslant_S \beta_i$ для всех i. Функция k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ (т. е. определенная и принимающая значение на E_k) наз. монотонной относительно S, если для любых наборов $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta}=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ из условия $\tilde{\alpha} \preceq_S \tilde{\beta}$ вытекает $f(\tilde{\alpha}) \leqslant_S f(\tilde{\beta})$. Класс всех функций, монотонных относительно нек-рого частичного упорядочения S на E_k, всегда является замкнутым классом; он является предполным классом в k-значной логике в том и только в том случае, если в S имеются ровно один минимальный и ровно один максимальный элементы. Для числа $\psi_S(n)$ функций k-значной логики, зависящих от n переменных и монотонных относительно S, при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$\log_2 \psi_S(n) \sim C(S) \frac{k^n}{\sqrt{n}},$$

где $C(S)$ — константа, эффективно вычисляемая по данному частичному упорядочению S (см. [5]).

Лит.: [1] Яблонский С. В., Введение в дискретную математику, М., 1979; [2] Клейтмен Д., «Кибернетич. сб.», 1970, в. 7, с. 43—52; [3] Ансел Ж., там же, 1968, в. 5, с. 47—52, 53—57, 58—63; [4] Мартынюк В. В., «Проблемы кибернетики», 1960, в. 3, с. 49—60; [5] Алексеев В. Б., там же, 1974, в. 28, с. 5—24.

В. Б. Алексеев.

МОНОТОННАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — такая последовательность x_n, что для всех $n=1, 2, \ldots$ выполняется

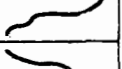
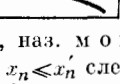
$x_n < x_{n+1}$ (строго возрастающая последовательность),
$x_n \leqslant x_{n+1}$ (неубывающая последовательность),
$x_n > x_{n+1}$ (строго убывающая последовательность),
$x_n \geqslant x_{n+1}$ (невозрастающая последовательность).

МОНОТОННАЯ ФУНКЦИЯ — функция одного переменного, определенная на нек-ром подмножестве действительных чисел, приращение к-рой $\Delta f(x)=f(x')-f(x)$ при $\Delta x=x'-x>0$ не меняет знака, т. е. либо всегда неотрицательно, либо всегда неположительно. Если $\Delta f(x)$ строго больше (меньше) нуля, когда $\Delta x>0$, то М. ф. наз. строго монотонной (см. *Возрастающая функция*, *Убывающая функция*). Различные типы М. ф. представлены в таблице.

Если функция f в каждой точке нек-рого промежутка имеет производную, к-рая не меняет знака (соответ-

ственно сохраняет постоянный знак), то функция f м о н о т о н н а (с т р о г о м о н о т о н н а) на этом п р о м е ж у т к е.

Понятие М. ф. действительного переменного обобщается на функции различных классов. Напр., функция

$\Delta f(x)\geqslant 0$	Возрастающая (неубывающая)	
$\Delta f(x)\leqslant 0$	Убывающая (неубывающая)	
$\Delta f(x)>0$	Строго возрастающая	
$\Delta f(x)<0$	Строго убывающая	

$f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на $\mathbb{R}^n$, наз. м о н о т о н н о й, если из условия $x_1\leqslant x_1', \ldots, x_n\leqslant x_n'$ следует, что всегда $f(x_1, \ldots, x_n)\leqslant f(x_1', \ldots, x_n')$ или всегда $f(x_1', \ldots, x_n)\geqslant f(x_1', \ldots, x_n')$. Подобным же образом определяется М. ф. *алгебры логики*.

М. ф. многих переменных, возрастающие или убывающие относительно нек-рой точки, определяются следующим образом. Пусть функция f определена на n-мерном замкнутом кубе Q^n, $x_0\in Q^n$, $E_t=\{x: f(x)=t, x\in Q^n\}$ — множество уровня функции f. Функция f наз. в о з р а с т а ю щ е й (соответственно у б ы в а ю щ е й) относительно точки x_0, если для любого числа t и любой точки $x'\in Q^n\setminus E_t$, не отделенной в кубе Q^n множеством E_t от x_0, имеет место $f(x')<t$ (соответственно $f(x')>t$), а для любой точки $x''\in Q^n\setminus E_t$, отделенной в кубе Q^n множеством E_t от x_0, имеет место $f(x'')>t$ (соответственно $f(x'')<t$). Функции, возрастающие или убывающие относительно нек-рой точки, наз. м о н о т о н н ы м и о т н о с и т е л ь н о э т о й т о ч к и.

Л. Д. Кудрявцев.

МОНОТОННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — то же, что *изотонное отображение*.

МОНОТОННЫЙ ОПЕРАТОР — одно из понятий нелинейного функционального анализа.

Пусть E — банахово пространство, E^* — его сопряженное, (y, x) — значение линейного функционала $y\in E^*$ на элементе $x\in E$. Оператор A, вообще говоря, нелинейный и действующий из E в E^*, наз. м о н о т о н н ы м, если

$$\operatorname{Re}(Ax_1-Ax_2,\ x_1-x_2)\geqslant 0 \qquad (1)$$

для любых $x_1, x_2\in E$. Оператор A наз. п о л у н е п р е р ы в н ы м, если для любых $u, v, w\in E$ числовая функция $(A(u+tv), w)$ непрерывна по t. Примером полунепрерывного М. о. является градиент выпуклого дифференцируемого в смысле Гато функционала. Многие функционалы вариационного исчисления выпуклы и потому порождают М. о.; они полезны при решении нелинейных интегральных уравнений и именно к ним впервые применялись.

Различные приложения М. о. к вопросам разрешимости нелинейных уравнений основаны на следующей теореме (см. [1], [2]). Пусть E — рефлексивное банахово пространство и A — полунепрерывный М. о., обладающий свойством коэрцитивности,

$$\lim_{\|u\|\to\infty}\frac{\operatorname{Re}(Au,\ u)}{\|u\|}=\infty.$$

Тогда для любого $f\in E$ уравнение $Au=f$ имеет хотя бы одно решение.

Определенный на множестве $D\subset E$ оператор A со значениями в E^* наз. м о н о т о н н ы м на D, если неравенство (1) имеет место для любых $x_1, x_2\in D$, и м а к с и м а л ь н ы м м о н о т о н н ы м, если он монотонный на D и не имеет строгого монотонного расширения.

Исследование уравнений с М. о. во многом стимулировалось задачами теории квазилинейных эллиптич. и параболич. уравнений. Так, напр., краевые задачи для квазилинейных параболич. уравнений приводят к уравнению вида

$$Ax+Ax=f \qquad (2)$$

в подходящем банаховом пространстве E. Такое же уравнение естественным образом возникает и при исследовании задачи Коши для абстрактных *эволюционных уравнений* с нелинейными операторами в банаховых пространствах. Если пространство E рефлексивно, A — ограниченный, полунепрерывный и коэрцитивный М. о., а Λ — линейный максимальный М. о. с плотной в E областью определения, то уравнение (2) разрешимо при любом $f\in E^*$. Идеи монотонности применялись также в задаче о почти периодических решениях нелинейных параболич. уравнений.

Лит.: [1] Browder F., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1963, v. 69, p. 858—61; [2] Minty G. J., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1963, v. 50, p. 1038—41; [3] Вайнберг М. М., Качуровский Р. И., «Докл. АН СССР», 1959, т. 129, № 6, с. 1199—1202; [4] Вайнберг М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972; [5] Лионс Ж.-Л., Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, пер. с франц., М., 1972; [6] Левитан Б. М., Жиков В. В., Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения, М., 1978; [7] Качуровский Р. И., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 2, с. 121—168.

В. В. Жиков.

МОНТЕ-КАРЛО МЕТОД, метод статистических испытаний,— численный метод, основанный на моделировании случайных величин и построении статистич. оценок для искомых величин. Принято считать, что М.-К. м. возник в 1949 (см. [1]), когда в связи с работами по созданию атомных реакторов Дж. Нейман (J. Neumann) и С. Улам (S. Ulam) предложили использовать аппарат теории вероятностей для решения прикладных задач с помощью ЭВМ. М.-К. м. получил свое название по имени города Монте-Карло, известного своими игорными заведениями.

Моделирование случайных величин с заданными распределениями. Как правило, такое моделирование осуществляется путем преобразования одного или нескольких независимых значений случайного числа α, распределенного равномерно в интервале (0, 1). Последовательности «выборочных» значений α обычно получают на ЭВМ с помощью теоретико-числовых алгоритмов, среди к-рых наибольшее распространение получил т. н. метод вычетов, напр. в таком виде:

$$u_0=1,\ u_n\equiv u_{n-1}\cdot 5^{2p+1}\ (\mathrm{mod}\ 2^m),\ \alpha_n=u_n\cdot 2^{-m}.$$

Здесь m — число разрядов мантиссы ЭВМ, а

$$p=\max\{q:5^{2q+1}<2^m\}.$$

Числа такого типа наз. псевдослучайными числами; они проверяются статистич. тестами и решением типовых задач (см. [2] — [6]). Длина периода для указанного варианта метода вычетов равна 2^{m-2}. В М.-К. м. используются также физич. генераторы и таблицы случайных чисел, а также квазислучайные числа. Существуют М.-К. м. с малым числом разыгрываемых параметров (см. [7]).

Стандартный метод моделирования дискретной случайной величины ξ с распределением $P\{\xi=x_k\}=p_k$, $k=0, 1, \ldots$, состоит в следующем: полагают $\xi=x_m$, если для выбранного значения α выполняется соотношение

$$\sum_{k=0}^{m-1} p_k\leqslant\alpha<\sum_{k=0}^{m} p_k.$$

Стандартный метод моделирования непрерывной случайной величины (иногда наз. методом обратной функции) состоит в использовании легко проверяемого представления: $\xi=F^{-1}(\alpha)$, где F — функ-

ция распределения с заданной плотностью $f(x)$. Иногда полезна *рандомизация* моделирования (иначе — м е т о д с у п е р п о з и ц и и) на основе выражения

$$f(x)=\sum_k p_k f_k(x);$$

при этом сначала выбирают номер m с распределением $P\{m=k\}=p_k$, а затем получают выборочное значение ξ из распределения с плотностью $f_m(x)$. При других способах рандомизации нек-рые параметры детерминированного способа решения задачи рассматривают как случайные величины (см. [7] — [9]).

Другим общим методом моделирования непрерывной случайной величины является м е т о д и с к л ю ч е н и я (м е т о д о т б о р а), в основе к-рого лежит утверждение: если точка (ξ, η) распределена равномерно в области $G=\{(x,\ y):\ 0\leqslant y\leqslant g(x)\}$, то $f_\xi(x)=g(x)/\bar{G}$. В методе исключения выбирают точку (ξ_0, η) равномерно по области $G_1\supset G$ и полагают $\xi=\xi_0$, если $(\xi_0, \eta)\in G$; в противном случае повторяют выбор (ξ_0, η) и т. д. Напр., если $a\leqslant\xi\leqslant b$ и $g(x)=cf(x)\leqslant R$, то можно полагать $\xi_0=a+(b-a)\alpha_1$, $\eta=R\alpha_2$. Среднее число операций в методе исключения пропорционально величине $\bar{G}_1/\bar{G}$.

Для многих случайных величин получены специальные представления вида $\xi=\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Напр., случайные величины

$$\sqrt{-2\ln\alpha_1}\cdot\cos 2\pi\alpha_2 \text{ и } \sqrt{-2\ln\alpha_2}\cdot\sin 2\pi\alpha_2$$

имеют стандартное нормальное распределение и независимы; случайная величина $\ln(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$ имеет гамма-распределение с параметром n; случайная величина $\max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ распределена с плотностью nx^{n-1}, $0\leqslant x\leqslant 1$; случайная величина $\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\alpha_k}{p+k-1}\right)$ имеет бета-распределение с параметрами p, n (см. [3] — [6]).

Стандартный алгоритм моделирования непрерывного случайного вектора $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ состоит в последовательном выборе значений его компонент из условных распределений соответственно представлению

$$f_\xi(x_1, \ldots, x_n)=f_1(x_1)\,f_2(x_2\mid x_1)\ldots f_n(x_n\mid x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Метод исключения переносится на многомерный случай без изменений, надо лишь в его формулировке рассматривать ξ, ξ_0 и x как векторы. Многомерный нормальный вектор можно моделировать с помощью специального линейного преобразования вектора независимых стандартных нормальных случайных величин. Разработаны также специальные приемы приближенного моделирования стационарных гауссовских процессов (см., напр., [3], [6]).

Если в расчете по М.-К. м. моделируются случайные величины, определяемые реальным содержанием явления, то расчет представляет собой прямое моделирование (имитацию) этого явления. Разработано моделирование на ЭВМ процессов переноса, рассеяния и размножения частиц: нейтронов, гамма-квантов, фотонов, электронов и др. (см., напр., [11] — [18]); моделирование эволюции ансамблей молекул для решения различных задач классической и квантовой статистич. физики (см., напр., [10], [18]); моделирование массового обслуживания и производственных процессов (см., напр., [2], [6], [18]); моделирование различных случайных процессов в технике, гидрологии, метеорологии, геологии, химии, биологии и т. д. (см. [18]). Алгоритмы моделирования обычно тщательно обрабатывают, напр. табулируют сложные функции, изменяют стандартные процедуры и т. д. Тем не менее часто прямое моделирование не может обеспечить требуемой точности оценок искомых ве-

личин. Разработано много способов повышения эффективности моделирования.

Алгоритмы М.-К. м. для оценки многократных интегралов. Пусть необходимо оценить интеграл $J=\int h(x)dx$ по мере Лебега в евклидовом s-мерном пространстве X и $f_\xi(x)$ — плотность вероятности такая, что J можно записать в виде математич. ожидания следующим образом:

$$J=\int_X f_\xi(x)\frac{h(x)}{f_\xi(x)}\,dx=\mathsf{E}\zeta,$$

где $\zeta=h(\xi)/f_\xi(\xi)$. Моделируя ξ на ЭВМ, можно получить N выборочных значений $x_1, \ldots, x_N$. В смысле закона больших чисел

$$J\approx J_N=\frac{\sum_{k=1}^{N} h(x_k)/f(x_k)}{N}.$$

Одновременно можно оценить среднеквадратичную погрешность J_N, т. е. величину $\sigma_N=(\mathsf{D}\zeta/N)^{1/2}$, и приближенно построить подходящий доверительный интервал для J. Выбором плотности f можно распорядиться для получения оценки с возможно меньшей дисперсией. Напр., если $0<m_1\leqslant h/f\leqslant m_2<+\infty$, то $\mathsf{D}\zeta\leqslant(m_2-m_1)^2/4$, и если $f=h/J$, то $\mathsf{D}\zeta=0$. Соответствующие алгоритмы наз. существенной выборкой (выборкой по важности). Другая общая модификация — метод выделения главной части — строится в тех случаях, когда определена функция $h_0\approx h$ с известным значением интеграла. Иногда полезны сочетания М.-К. м. с классич. квадратурами — т. н. случайные квадратурные формулы, основная идея к-рых состоит в том, что узлы и коэффициенты какой-либо квадратурной суммы (напр., интерполяционной) выбираются случайно из распределения, обеспечивающего несмещенность получаемой оценки интеграла [3]. Частными случаями этих формул являются: т. н. метод слоистой выборки, в к-ром узлы выбираются по одному в каждой части фиксированного разбиения области интегрирования, а коэффициенты пропорциональны соответствующим объемам; так наз. метод симметричной выборки, к-рый в случае интегрирования по интервалу (0, 1) определяется выражением (см. [10])

$$2J=\mathsf{E}[(h(\xi)+h(1-\xi))/f_\xi(\xi)].$$

При этом порядок скорости сходимости М.-К. м. повышается и в нек-рых случаях становится максимально возможным на рассматриваемом классе задач.

В общем случае область интегрирования разбивается на параллелепипеды. В каждом параллелепипеде значение интеграла вычисляется через среднее значение в случайной точке и точке, симметричной ей относительно центра параллелепипеда.

Ряд модификаций М.-К. м. основан на (может быть, формальном) представлении искомой величины в виде двукратного интеграла:

$$J=\int_X\int_Y f(x,\ y)\ h(x,\ y)\,dx\,dy=\mathsf{E}\zeta,$$

где $\zeta=h(\xi,\eta)$, а вектор (ξ,η) распределен с плотностью $f(x,\ y)$. Известно, что $\mathsf{E}\zeta=\mathsf{E}\mathsf{E}(\zeta|\xi)$ и

$$\mathsf{D}\zeta=\mathsf{D}\mathsf{E}(\zeta\mid\xi)+\mathsf{E}\mathsf{D}(\zeta\mid\xi)=A_1+A_2, \qquad (1)$$

где $\mathsf{E}(\zeta|\xi)$ — условное математич. ожидание, а $\mathsf{D}(\zeta|\xi)$ — условная дисперсия ζ для фиксированного значения ξ. Формула (1) широко используется в М.-К. м. В частности, она показывает, что $\mathsf{D}\mathsf{E}(\zeta|\xi)<\mathsf{D}\zeta$, т. е. аналитич. осреднение по какой-либо переменной увели-

чивает точность М.-К. м. Однако при этом может значительно возрасти объем вычислений. Для ЭВМ время, необходимое для достижения заданной погрешности, пропорционально величине $t\mathsf{D}\zeta$, где t — среднее время получения одного значения ζ. По этому критерию оптимизируется метод расщепления, простейший вариант к-рого состоит в использовании несмещенной оценки:

$$\zeta_n = \left[\sum_{k=1}^{n} h(\xi,\ \eta_k)\right]\Big/ n,$$

где $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — условно независимы и распределены как η при фиксированном значении ξ. С помощью (1) можно получить оптимальное значение

$$n = [(A_2/A_1)\ (t_1/t_2)]^{1/2},$$

где t_1, t_2 — средние времена ЭВМ, соответствующие выборкам ξ, η (см., напр., [4]).

Если подинтегральная функция зависит от параметра, то целесообразно использовать метод зависимых испытаний, т. е. оценивать интегралы для различных значений параметра по одним и тем же случайным узлам [20]. Важным свойством М.-К. м. является сравнительно относительно слабая зависимость среднеквадратич. погрешности σ_N от числа измерений, причем порядок сходимости по числу узлов N всегда один и тот же: $N^{-1/2}$. Это позволяет оценивать (после предварительных преобразований задачи) интегралы очень высокой и даже бесконечной кратности. Напр., разработана методика оценки интегралов Винера [19].

Алгоритмы М.-К. м. для решений интегральных уравнений 2-го рода. Пусть необходимо оценить линейный функционал $J_h = (\varphi, h)$, где $\varphi = K\varphi + f$, причем для интегрального оператора K с ядром $k(x', x)$ выполняется условие, обеспечивающее сходимость ряда Неймана: $\|K^{n_0}\| < 1$. Цепь Маркова $\{x_n\}$ определяется начальной плотностью $\pi(x)$ и переходной плотностью $p(x', x) = p(x' \to x)$; вероятность обрыва цепи в точке x' равна

$$g(x') = 1 - \int p(x,' x)\, dx;$$

N — случайный номер последнего состояния. Далее определяется функционал от траектории цепи, математич. ожидание к-рого равно J_h. Чаще всего используется т. н. оценка по столкновениям

$$\xi = \sum_{n=0}^{N} Q_n h(x_n),$$

где

$$Q_0 = \frac{f(x_0)}{\pi(x_0)},\quad Q_n = Q_{n-1}\frac{k(x_{n-1},\ x_n)}{p(x_{n-1},\ x_n)}.$$

Если $p(x', x) \neq 0$ при $k(x', x) \neq 0$ и $\pi(x) \neq 0$ при $f(x) \neq 0$, то при нек-ром дополнительном условии

$$\mathsf{E}\xi = \sum_{n=0}^{\infty} (K^n f,\ h) = (\varphi,\ h) = \int_X \varphi(x)\, h(x)\, dx$$

(см. [3]—[5]). Возможность достижения малой дисперсии в знакопостоянном случае показывает следующее утверждение: если

$$\pi(x) = \frac{f(x)\,\varphi^*(x)}{(f,\ \varphi^*)} \quad \text{и} \quad p(x',\ x) = \frac{h(x',\ x)\,\varphi^*(x)}{[K^*\varphi^*](x')},$$

где $\varphi^* = K^*\varphi^* + h$, то $\mathsf{D}\xi = 0$, а $\mathsf{E}\xi = J_h$ (см. [4]). Моделируя подходящую цепь Маркова на ЭВМ, получают статистич. оценки линейных функционалов от решения интегрального уравнения 2-го рода. Это дает возможность и локальной оценки решения на основе представления: $\varphi(x) = (\varphi, h_x) + f(x)$, где $h_x(x') = k(x', x)$. В ряде случаев при решении таких задач наряду с М.-К. м. применяются теоретико-числовые методы (см. [21]).

М.-К. м. оценка 1-го собственного значения интегрального оператора осуществляется итерационным методом на основе соотношения [22]:

$$\mathsf{E}\,[Q_n h(x_n)] = (K^n f,\ h).$$

Все рассмотренные результаты почти автоматически распространяются на системы линейных алгебраич. уравнений вида $x + Hx = h$ (см. [23]).

Модификации М.-К. м. в теории переноса излучения (см. [11]—[17]). Для плотности среднего числа столкновений частиц в фазовом пространстве координат $\boldsymbol{r}$ и скоростей $\boldsymbol{\omega}$ справедливо интегральное уравнение 2-го рода, ядро к-рого в односкоростном случае имеет вид

$$\frac{\sigma_s(r')\, g(\mu) \exp(-\tau(r', r))\, \sigma(r)}{\sigma(r')\, 2\pi\, |r'-r|^2}\, \delta\left(\boldsymbol{\omega} - \frac{r-r'}{|r-r'|}\right).$$

Здесь $\sigma_s(r)$ — коэффициент (сечение) рассеяния, $\sigma(r)$ — коэффициент ослабления, $g(\mu)$ — индикатриса рассеяния, $\tau(r', r)$ — оптич. длина пути от r' до r (см. [3], [4]). Для построения оценок с малой дисперсией используются, напр., асимптотич. решения сопряженного уравнения переноса [4]; простейший алгоритм такого типа представляет собой т. н. экспоненциальное преобразование (см. [4], [11]). Разработаны модификации локальной оценки потока частиц (см. [3], [4], [11]—[13], [17], [18]). С помощью моделирования одной цепи Маркова (напр., физич. процесса переноса в нек-рой среде) можно одновременно получать зависимые оценки функционалов для различных значений параметров; дифференцируя «веса» Q_n, иногда можно строить несмещенные оценки соответствующих производных (см. [4], [12]). Это дает возможность использовать М.-К. м. при решении нек-рых обратных задач [12]. Для решения ряда задач теории переноса эффективно используется «расщепление» траекторий и аналитич. осреднение [11]. Моделирование траекторий частиц в сложных средах иногда существенно упрощается методом максимального сечения (см. [3]—[5]).

Алгоритмы М.-К. м. для решения уравнений эллиптического типа строятся на основе соответствующих интегральных соотношений. Напр., стандартная пятиточечная разностная аппроксимация для уравнения Лапласа имеет вид формулы полного математич. ожидания, соответствующей симметричному блужданию по сетке с поглощением на границе (см., напр., [2], [3]). Непрерывным аналогом этой формулы является соотношение

$$u(P) = \int_{S(P)} u(\boldsymbol{r}(s))\, ds \Big/ \int_{S(P)} ds, \qquad (2)$$

где интеграл берется по поверхности сферы, целиком лежащей в заданной области, с центром в точке P. Формула (2) и другие аналогичные соотношения дают возможность использовать процесс изотропного «блуждания по сферам» для решения эллиптич. и параболич. уравнений (см. [24], [4]). М.-К. м. эффективен, напр., для оценки решения многомерной краевой задачи в одной точке.

Моделирование марковских ветвящихся процессов позволяет строить оценки решения нек-рых нелинейных уравнений, напр. уравнения Больцмана в теории разреженных газов [3].

Лит.: [1] Neumann J., «NBS Appl. Math. series», 1951, № 12, p. 36—38; [2] Бусленко Н. П. [и др.], Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), М., 1962; [3] Ермаков С. М., Метод Монте-Карло и смежные вопросы, М., 1971; [4] Михайлов Г. А., Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло, Новосиб., 1971; [5] Соболь И. М., Численные методы Монте-Карло, М., 1973; [6] Полляк Ю. Г., Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах, М., 1971; [7] Бахвалов Н. С., в сб.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и

квадратурные формулы, М., 1964, с. 5—63; [8] его же, «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1961, т. 1, № 1, с. 64—77; [9] его же, «Вестник МГУ. Сер. матем., механики, астрономии, физ., хим.», 1959, № 4, с. 3—18; [10] Hammersley J. M., Handscomb D. C., Monte Carlo methods, L.—N. Y., 1964; [11] Метод Монте-Карло в проблеме переноса излучений, М., 1967; [12] Марчук Г. И. [и др.], Метод Монте-Карло в атмосферной оптике, Новосиб., 1976; [13] Спаньье Дж., Гелбард Э., Метод Монте-Карло и задачи переноса нейтронов, пер. с англ., М., 1972; [14] Чавчанидзе В. В., «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1955, т. 19, № 6, с. 629—38; [15] Прохождение излучений через неоднородности в защите, М., 1968; [16] Франк-Каменецкий А. Д., «Атомная энергия», 1964, т. 16, № 2, с. 119—22; [17] Kalos M. H., «Nuclear Sci. and Eng.», 1968, v. 33, p. 284—90; [18] Методы Монте-Карло и их применения. Тезисы докл. на III Всесоюзн. конф. по методам Монте-Карло, Новосиб., 1971; [19] Гельфанд И. М., Фролов А. С., Ченцов Н. Н., «Изв. вузов. Сер. матем.», 1958, № 5, с. 32—45; [20] Фролов А. С., Ченцов Н. Н., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 4, с. 714—17; [21] Коробов Н. М., Теоретико-числовые методы в приближенном анализе, М., 1963; [22] Владимиров В. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 1, с. 113—30; [23] Curtiss J. H., «J. Math. Phys.», 1954, v. 32, № 4, p. 209—32; [24] Muller M. E., «Ann. Math. Stat.», 1956, v. 27, № 3, p. 560—89.

Г. А. Михайлов.

МОНТЕЛЯ ПРОСТРАНСТВО — *бочечное пространство* (в частности, *Фреше пространство*), в к-ром каждое замкнутое ограниченное множество компактно. Пространство $H(G)$ всех голоморфных функций в области G с топологией равномерной сходимости на компактах является пространством Фреше и в силу *Монтеля теоремы* 2 всякая ограниченная последовательность голоморфных функций компактна в $H(G)$, так что $H(G)$ — М. п. Пространство $C^\infty(\Omega)=\mathscr{E}(\Omega)$ всех бесконечно дифференцируемых в области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ функций, пространство $D(\Omega)$ финитных функций, пространство $S(\mathbb{R}^n)$ быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций — также М. п. в естественных топологиях.

М. п. рефлексивно. Сильно сопряженное пространство к М. п. является М. п., в частности пространства обобщенных функций $\mathscr{E}'(\Omega)$, $D'(\Omega)$, $S'(\Omega)$ — М. п. Нормированное пространство является М. п. в том и только в том случае, когда оно конечномерно.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [2] Робертсон А.-П., Робертсон В.-Дж., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967; [3] Эдвардс Р.-Э., Функциональный анализ. Теория и приложения, пер. с англ., М., 1969.

С. Г. Крейн.

МОНТЕЛЯ ТЕОРЕМА — 1) М. т. о приближении аналитических функций многочленами: если D — открытое множество точек комплексной плоскости z, не содержащее точку $z=\infty$, а $f(z)$ — однозначная функция, аналитическая в каждой точке $z\in D$, то существует последовательность многочленов $\{P_n(z)\}$, сходящаяся к $f(z)$ в каждой точке $z\in D$. Эта теорема является одной из основных в теории приближения функций комплексного переменного; получена П. Монтелем [1].

2) М. т. об условиях компактности семейства голоморфных функций (принцип компактности, см. [2]): пусть $\varphi=\{f(z)\}$ — бесконечное семейство голоморфных функций в области D комплексной плоскости z; тогда для того чтобы семейство φ было компактным, т. е. чтобы из любой последовательности $\{f_k(z)\}\subset\varphi$ можно было выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри D, необходимо и достаточно, чтобы φ было равномерно ограничено внутри D. Эта М. т. обобщается на области D в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$ (см. *Компактности принцип*).

3) М. т. об условиях нормальности семейства голоморфных функций (принцип нормальности, см. [2]): пусть $\varphi=\{f(z)\}$ — бесконечное семейство голоморфных функций в области D комплексной плоскости z. Если существуют два различных значения a и b, к-рые не принимаются ни одной функцией $f(z)\in\varphi$, то φ — нормальное семейство, т. е. из любой последовательности $\{f_k(z)\}\subset\varphi$

можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри D к голоморфной функции или к ∞. Условие этой М. т. можно несколько ослабить: достаточно потребовать, чтобы все функции $f(z)\in\varphi$ не принимали одного из значений, напр. a, а другое значение b принимали не более m раз, $1\leqslant m<\infty$. Эта М. т. обобщается на случай областей D в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$.

Лит.: [1] Montel P., Leçons sur les séries de polynomes à une variable, P., 1910; [2] Монтель П., Нормальные семейства аналитических функций, пер. с франц., М.— Л., 1936.

Е. Д. Соломенцев.

МОПЕРТЮИ ПРИНЦИП — принцип наименьшего действия, первая словесная формулировка к-рого дана П. Мопертюи (P. Maupertuis). Первоначально (1744) П. Мопертюи вывел из М. п. законы отражения и преломления света, согласующиеся, по его словам, «с важным принципом, по к-рому природа при осуществлении своих действий идет всегда наиболее простыми путями» (см. [1]), а затем (1746) объявил его универсальным законом движения и равновесия: «Общий принцип. Когда в природе происходит нек-рое изменение, количество действия, необходимое для этого изменения, является наименьшим возможным. Количество действия есть произведение массы тел на их скорость и на расстояние, к-рое они пробегают» (см. [2]). Универсальность М. п. обосновывалась П. Мопертюи туманными рассуждениями метафизич. характера с помощью телеологич. и теологич. аргументов, к-рые в последовавшей затем дискуссии о М. п. вызвали резкие возражения со стороны ряда его современников. Кроме законов распространения света П. Мопертюи вывел из М. п. лишь известные законы удара тел и равновесия рычага. По мнению Ж. Лагранжа (J. Lagrange), «указанные применения носят слишком специальный характер, чтобы на них можно было построить доказательство общего принципа; кроме того, они несколько неопределенны и произвольны, что придает некоторую ненадежность и выводам, которые можно было бы сделать на основании их о точности самого принципа» (см. [3]).

Первая математич. идея принципа наименьшего действия для частного случая изолированных тел принадлежит Л. Эйлеру (L. Euler). Он показал (1744), что под действием центральных сил тела описывают траектории, для к-рых интеграл $\int v ds$ достигает минимума или максимума (см. [4]); здесь v — скорость, ds — элемент кривой.

Для общего случая движения любой системы тел, действующих одно на другое каким угодно образом так, что полная механич. энергия системы сохраняется, принцип наименьшего действия установил Ж. Лагранж (1760). Исходя из законов механики, он доказал, что сумма произведений масс на интегралы скоростей, умноженных на элементы пройденных путей, является всегда максимумом или минимумом (см. [5]), т. е.

$$\delta \sum_i m_i \int v_i ds_i = 0.$$

«Этот принцип, будучи соединен с принципом живых сил и развит по правилам вариационного исчисления, дает тотчас же все уравнения, необходимые для разрешения каждой проблемы; отсюда возникает столь же простой, как и общий, метод разрешения проблем, касающихся движения тел» (см. [3]).

Принцип наименьшего действия в форме Лагранжа *(Лагранжа принцип)* принято математически записывать в форме равенства (14) (см. *Вариационные принципы классической механики*). Исключением времени из (14) с помощью интеграла энергии (13) К. Якоби (C. Jacobi, 1837) представил принцип наименьшего действия в форме (16) (см. также *Якоби принцип*).

Лит.: [1] Мопертюи П., в кн.: Вариационные принципы механики, М., 1959, с. 23—30; [2] его же, там же, с. 41—55;

[3] Лагранж Ж., Аналитическая механика, пер. с франц., т. 1, М.— Л., 1950; [4] Эйлер Л., в кн.: Вариационные принципы механики, М., 1959, с. 31—40; [5] Lagrange J., Œuvres, t. 1, P., 1867, p. 335—62; [6] Jacobi C., «C. r. Acad. sci.», 1837, t. 5, p. 61—67.

В. В. Румянцев.

МОРДЕЛЛА ГИПОТЕЗА — гипотеза о конечности множества рациональных точек на алгебраич. кривой рода $g>1$. Выдвинута Л. Морделлом [1] для случая, когда основное поле K — поле рациональных чисел. В настоящее время под М. г. понимается утверждение о конечности множества рациональных точек $X(L)$ неприводимой алгебраич. кривой X рода $g>1$, определенной над полем K конечного типа над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, в любом конечном расширении L/K. В такой форме М. г. не доказана (1982) ни для одной кривой. Получена редукция М. г. к наиболее трудному случаю, когда K — поле алгебраич. чисел (см. [3]). Известен ряд частных результатов, относящихся к М. г. Так, доказано [2], что множество $X(K)$ конечно, если ранг группы K-изоморфизмов из X в эллиптич. кривую Y больше ранга группы $Y(K)$. Установлена [7] конечность $X(K)$ для широкого класса *модулярных кривых* и их поля определения K. Найдена [8] оценка роста высот

$$h(x_n) \geqslant \exp(an+b)$$

рациональных точек $x_n \in X(K)$, показывающая, что они расположены гораздо «реже», чем на кривых рода $g \leqslant 1$. Доказано также, что М. г. является следствием гипотезы Шафаревича о конечности числа алгебраич. кривых, имеющих заданный род $g>1$, поле определения (конечное расширение $\mathbb{Q}$) и множество точек плохой редукции (см. [4], а также *Зигеля теорема* о целых точках).

Геометрич. аналогом М. г. является утверждение о конечности числа сечений у расслоения

$$f: V \to B,$$

где V — неособая проективная поверхность, B — кривая, а общий слой отображения f — неприводимая кривая рода $g>1$. Это утверждение верно, если расслоение непостоянно, т. е. не является прямым произведением после нек-рого накрытия базы B, и характеристика основного поля k равна 0 (см. [3], [6]). Для постоянных расслоений можно утверждать лишь конечность числа классов, состоящих из сечений, алгебраически эквивалентных как кривые на V. Если же характеристика поля k положительна, то геометрич. аналог М. г. для постоянных расслоений неверен [4].

Лит.: [1] Mordell L. J., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1922, v. 21, p. 179—92; [2] Демьяненко В. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30, № 6, с. 1373—96; [3] Манин Ю. И., там же, 1963, т. 27, № 6, с. 1395—1440; [4] Паршин А. Н., в кн.: Actes du Congrès International des mathématiciens. 1970, t. 1, P., 1971, p. 467—71; [5] Grauert H., «Publ. Math. IHES», 1965, № 25, p. 131—50; [6] Lang S., Diophantine geometry, N. Y.— L., 1962; [7] Mazur B., в кн.: Modular functions of one variable, [v. 5], B.— Hdlb.— N. Y., 1977, p. 107—48; [8] Mumford D., «Amer. J. Math.», 1965, v. 87, № 4, p. 1007—16.

А. Н. Паршин.

МОРЕРЫ ТЕОРЕМА: если (однозначная) функция $f(z)$ комплексного переменного z в области D непрерывна и интеграл от нее по любому замкнутому спрямляемому контуру $\Gamma \subset D$ равен нулю, т. е.

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0, \quad \Gamma \subset D, \qquad (*)$$

то $f(z)$ — аналитич. функция в D. Эта теорема была получена Дж. Морерой [1].

Условие сформулированной М. т. можно ослабить, ограничившись требованием, чтобы обращались в нуль интегралы (*), взятые по границе $\Gamma = \partial\Delta$ любого треугольника Δ, компактно принадлежащего области D, т. е. такого, что $\Delta \subset \overline{\Delta} \subset D$. М. т. представляет собой (неполное) обращение *Коши интегральной теоремы* и является одной из основных теорем теории аналитич. функций.

М. т. обобщается на случай функций многих комплексных переменных. Пусть функция $f(z)=f(z_1, \ldots, z_n)$ комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$, $n\geqslant 1$, непрерывна в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ и такова, что обращается в нуль интеграл от нее, взятый по границе ∂T_ν любой компактно принадлежащей D призматич. области вида

$$T_\nu=[a_1, z_1]\times\ldots\times[a_{\nu-1}, z_{\nu-1}]\times\Delta_\nu\times$$
$$\times[a_{\nu+1}, z_{\nu+1}]\times\ldots\times[a_n, z_n], \quad \nu=1, 2, \ldots, n,$$

где $[a_\mu, z_\mu]$, $\mu\neq\nu$, $\mu=1, \ldots, n$,— прямолинейные отрезки в плоскостях $\mathbb{C}(z_\mu)$ с концами a_μ и z_μ, а Δ_ν — треугольник в плоскости $\mathbb{C}(z_\nu)$. Тогда $f(z)$ — голоморфная функция в D.

Лит.: [1] Morera G., «Rend. Ist. Lomb.», 1886, t. 19, p. 304—308; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [4] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

МОРИТЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ — отношение эквивалентности на классе всех колец, определяемое следующим образом: кольца R и S наз. Морита-эквивалентными, если категории левых (правых) R- и S-модулей эквивалентны. Важнейший пример М. э. колец: кольцо R и кольцо всех $(n\times n)$-матриц над ним. Для существования М. э. между кольцами R и S необходимо и достаточно, чтобы в категории левых R-модулей существовал такой конечно порожденный проективный образующий U, что его кольцо эндоморфизмов изоморфно кольцу S. При этом левому R-модулю A ставится в соответствие левый S-модуль $\mathrm{Hom}_R(U, A)$. Среди свойств, сохраняющихся при переходе к кольцу, эквивалентному в смысле Мориты: артиновость, нётеровость, первичность, простота, классич. полупростота, регулярность, самоинъективность, наследственность, примитивность.

Наряду с М. э. рассматривается двойственность в смысле Мориты, связывающая нек-рые подкатегории категорий левых R-модулей и правых S-модулей (чаще всего подкатегории конечно порожденных модулей). Однако само существование такой двойственности накладывает определенные ограничения на кольца R и S. В частности, при $R=S$ это ведет к тому, что R — *квазифробениусово кольцо*.

Общая концепция М. э. была разработана К. Моритой [1].

Лит.: [1] Morita K., «Sci. Repts Tokyo Kyoiku Dajgaku A», 1958, v. 6, p. 83—142; [2] Басс Х., Алгебраическая K-теория, пер. с англ., М., 1973; [3] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [4] Cohn P., Morita equivalence and duality, L., 1976.

Л. А. Скорняков.

МОРСА ИНДЕКС — число, сопоставляемое *критической точке* гладкой функции на многообразии или геодезической на римановом (или финслеровом) многообразии.

1) М. и. критической точки p гладкой функции f на многообразии M равен, по определению, отрицательному индексу инерции *гессиана* функции f в точке p, т. е. размерности максимального из подпространств касательного пространства TM_p многообразия M в точке p, на к-ром гессиан отрицательно определен. Это определение имеет смысл и для дважды дифференцируемой (по Фреше) функции на бесконечномерном банаховом многообразии. Отличие состоит лишь в том, что для индекса допускается значение $+\infty$. В этом случае целесообразно ввести понятие коиндекса критич. точки p функции f как положительного индекса инерции гессиана (2-го дифференциала Фреше) функции f в точке p.

2) Пусть V_0 и V_1 — два гладких подмногообразия полного риманова пространства M. Для кусочно гладкого пути $\omega: [0, 1]\to M$ с $\omega(i)\in V_i$, $i=0, 1$, трансверсального к V_0 и V_1 на своих концах $\omega(0)$ и $\omega(1)$, аналогом касательного пространства является векторное

пространство $T_\omega = T_{\omega, V_0, V_1}$ всех таких кусочно гладких векторных полей W вдоль ω, что $W(\omega(i)) \in (TV_i)_{\omega(i)}$, $i=0, 1$. Для любой геодезической $\gamma : [0, 1] \to M$ с $\gamma(i) \in V_i$, ортогональной в своих концах $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ к V_0 и V_1 соответственно, 2-я вариация $\delta^2 E$ функционала действия (см. *Морса теория*) определяет симметричный билинейный функционал E_{**} на T_γ (аналог гессиана). М. и. геодезической равен, по определению, отрицательному индексу инерации этого функционала. Нулевое пространство N_γ гессиана E_{**} на T_γ (множество $X \in T_\gamma$, для к-рого $E_{**}(X, Y) = 0$ для всех $Y \in T_\gamma$) в точности состоит из *Якоби полей* $J \in T_\gamma$. При $N_\gamma \neq 0$ геодезическая наз. (V_0, V_1)-в ы р о ж д е н н о й, и $\dim N_\gamma$ наз. с т е п е н ь ю в ы р о ж д е н и я геодезической.

Геометрич. интерпретация М. и. в общем случае весьма тяжеловесна и, по-видимому (1982), не окончательна [2]. Поэтому здесь рассматривается случай, когда V_1 является точкой $q \in M$. Пусть ν — *нормальное расслоение* к многообразию $V = V_0$ в многообразии M, а $\nu(p)$ — его слой над точкой $p \in V$. Сужение *экспоненциального отображения* $TM \to M$ определяет отображение $\exp : \nu \to M$. Геодезическая $\gamma(t) = \exp(t\xi)$, $\xi \in \nu(p)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, тогда и только тогда $(V, \exp \xi)$-вырождена, когда ядро дифференциала $d\xi \exp : T\nu_\xi \to TM_{\exp \xi}$ отображения exp в точке ξ отлично от нуля; при этом размерность этого ядра равна степени вырождения геодезической γ. Точка $s = \gamma(t_0)$, $0 < t_0 \leqslant 1$, наз. ф о к а л ь н о й т о ч к о й многообразия V вдоль геодезической γ, если геодезическая $\gamma' : t \to \gamma(t/t_0)$ (V, s)-вырождена; степень вырождения геодезической γ' наз. к р а т н о с т ь ю ф о к а л ь н о й т о ч к и s. По *Сарда теореме* множество фокальных точек имеет меру нуль, так что типичная геодезическая невырождена. Если V тоже состоит из одной точки $p \in M$ (случай $p = q$ не исключается), то фокальная точка наз. с о п р я ж е н н о й с p вдоль геодезической γ. Т е о р е м а М о р с а о б и н д е к с е [1] утверждает, что М. и. геодезической конечен и равен числу сосчитанных с учетом кратности фокальных точек $\gamma(t)$ многообразия V, $0 < t \leqslant 1$.

Лит.: [1] M o r s e M., The calculus of variations in the large, N. Y., 1934; [2] A m b r o s e W., «Ann. Math.», 1961, v. 73, p. 49—86.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк.

МОРСА ЛЕММА — утверждение, описывающее строение ростка дважды непрерывно дифференцируемой функции. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — функция класса C^2, имеющая точку $0 \in \mathbb{R}^n$ своей невырожденной *критической точкой*. Тогда в нек-рой окрестности U точки O существует такая система локальных координат (карта) $x_1, \ldots, x_n$ с центром в O, что для всех $x \in U$ имеет место равенство

$$f(x) = f(0) - x_1^2 - \ldots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \ldots + x_n^2.$$

При этом число λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant n$, является *Морса индексом* критич. точки O функции f. Справедлив также аналог М. л. для функций $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^1$, именно: если f голоморфна в нек-рой окрестности своей невырожденной критич. точки (в другой терминологии — точки перевала, см. *Перевала метод*) $0 \in \mathbb{C}^n$, то в нек-рой окрестности U точки O существует такая система локальных координат $z_1, \ldots, z_n$, что

$$f(x) = f(0) + z_1^2 + \ldots + z_n^2.$$

М. л. справедлива и для функций $f : E \to \mathbb{R}$ на сепарабельном (бесконечномерном) гильбертовом пространстве E. Пусть f дважды дифференцируема (по Фреше) в нек-рой окрестности своей невырожденной критич. точки $0 \in E$. Тогда существуют такая выпуклая окрестность нуля $V \subset E$, такая окрестность нуля $U \subset E$ и такой диффеоморфизм (карта) $\theta : U \to V$ с $\theta(0) = 0$, что для всех $x \in U$ имеет место равенство

$$f(x) = \| P(\theta(x)) \|^2 - \| (I - P)(\theta(x)) \|^2,$$

где $P \to E : E$ — непрерывный ортогональный проек-

тор, а I — тождественный оператор. При этом размерность $\dim \operatorname{Im}(I-P)$ совпадает с индексом Морса критич. точки $0 \in E$ функции f, а размерность $\dim \operatorname{im} P$ — с ее коиндексом.

Лит.: [1] Morse M., The calculus of variations in the large, N. Y., 1934.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк.

МОРСА НЕРАВЕНСТВА — вытекающие из теории Морса неравенства, связывающие число *критических точек* функции Морса на многообразии с его гомологич. инвариантами.

Пусть f — *Морса функция* на гладком n-мерном многообразии (без края) M, имеющая конечное число критич. точек. Тогда *гомологий группы* $H_\lambda(M)$ конечно порождены и потому определены их ранги $r_\lambda = rk(H_\lambda(M))$ и периодич. ранги $t_\lambda = t(H_\lambda(M))$ (периодический ранг абелевой группы A с конечным числом образующих — минимальное число циклич. групп, в прямую сумму к-рых может быть разложена максимальная периодич. подгруппа группы A). М. н. связывают число m_λ критич. точек функции f, имеющих *Морса индекс* λ, с этими рангами, и имеют вид:

$$r_\lambda + t_\lambda + t_{\lambda-1} \leqslant m_\lambda, \quad \lambda = 0, 1, \ldots, n;$$

$$\sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-i} r_i \leqslant \sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-i} m_i, \quad \lambda = 0, 1, \ldots, n.$$

При $\lambda = n$ последнее М. н. всегда является равенством, так что

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i m_i = \chi(M),$$

где $\chi(M)$ — *эйлерова характеристика* многообразия M.

М. н. имеют место и для функций Морса триад (W, V_0, V_1), достаточно заменить группы $H_\lambda(M)$ группами относительных гомологий $H_\lambda(W, V_0)$.

Согласно М. н. многообразие, имеющее «большие» группы гомологий, не допускает функций Морса с малым числом критич. точек. Замечательно, что даваемые М. н. оценки точны: на замкнутом односвязном многообразии размерности $\geqslant 6$ существует функция Морса, для к-рой М. н. являются равенствами (Смейла теорема, см. [2]). В частности, на любом замкнутом многообразии, гомотопически эквивалентном сфере S^n с $n \geqslant 6$, существует функция Морса с двумя критич. точками, откуда непосредственно следует (см. *Морса теория*), что многообразие M гомеоморфно сфере S^n (см. *Пуанкаре гипотеза*). Аналогичное применение теоремы Смейла позволяет доказать и теоремы об h- и s-кобордизмах.

Аналоги М. н. имеют место также для функций Морса $f : X \to \mathbb{R}$ на бесконечномерных гильбертовых многообразиях и связывают (для любых регулярных значений $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, функции f) числа $m_\lambda(a, b)$ лежащих в $f^{-1}[a, b]$ критич. точек конечного индекса λ с рангом $r_\lambda(a, b)$ и периодич. рангом $t_\lambda(a, b)$ группы $H_\lambda(M^b, M^a)$, где $M^c = f^{-1}(-\infty, c]$. Именно,

$$r_\lambda(a, b) + t_\lambda(a, b) + t_{\lambda-1}(a, b) \leqslant m_\lambda,$$

$$\sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-i} r_i(a, b) \leqslant \sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-i} m_i;$$

$$\lambda = 0, 1, \ldots,$$

При достаточно больших λ последнее неравенство становится равенством.

Лит.: [1] Morse M., The calculus of variations in the large, N. Y., 1934; [2] Смейл С., «Математика», 1964, т. 8, № 4, с. 95—108.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк.

МОРСА ПЕРЕСТРОЙКА, хирургия,— преобразование гладких многообразий, к-рому подвергается многообразие уровня гладкой функции при переходе через невырожденную *критическую точку*; важнейшая конструкция в топологии многообразий.

Пусть V — гладкое n-мерное многообразие (без края), в к-рое (гладко) вложена $(\lambda-1)$-мерная сфера $S^{\lambda-1}$.

Предположим, что *нормальное расслоение* сферы $S^{\lambda-1}$ в многообразии V тривиально, т. е. что замкнутая *трубчатая окрестность* T сферы $S^{\lambda-1}$ в V разлагается в прямое произведение $T=S^{\lambda-1}\times D^{n-\lambda+1}$, где $D^{n-\lambda+1}$ — диск размерности $n-\lambda+1$. Выбрав такое разложение, вырежем из V внутренность окрестности T. Получится многообразие, край к-рого разложен в произведение $S^{\lambda-1}\times S^{n-\lambda}$ сфер. Но точно такой же край имеет многообразие $D^{\lambda}\times S^{n-\lambda}$. Отождествив края многообразий $V\setminus \operatorname{int} T$ и $D^{\lambda}\times S^{n-\lambda}$ по диффеоморфизму, сохраняющему структуру прямого произведения $S^{\lambda-1}\times S^{n-\lambda}$, снова получим многообразие V' без края, к-рое и наз. р е з у л ь т а т о м п е р е с т р о й к и М о р с а многообразия V вдоль сферы $S^{\lambda-1}$.

Для осуществления М. п. необходимо задать разложение окрестности T сферы $S^{\lambda-1}$ в прямое произведение, т. е. т р и в и а л и з а ц и ю нормального расслоения сферы $S^{\lambda-1}$ в многообразии V, при этом разные тривиализации (оснащения) могут давать существенно различные (даже гомотопически) многообразия V'.

Число λ наз. и н д е к с о м М. п., а пара $(\lambda, n-\lambda+1)$ ее т и п о м. Если V' получается из V М. п. типа $(\lambda, n-\lambda+1)$, то V получается из V' М. п. типа $(n-\lambda+1, \lambda)$. При $\lambda=0$ многообразие V' является дизъюнктным объединением многообразия V (к-рое может быть в этом случае пустым) и сферы S^n. Конструкция М. п. может быть проведена также для кусочно линейных и топологич. многообразий.

П р и м е р. При $V=S^2$ и $\lambda=2$ в результате М. п. получается дизъюнктное объединение двух сфер, а при $\lambda=1$ — тор. При $V=S^3$ и $\lambda=2$ получается произведение $S^1\times S^2$. Случай $V=S^3$ и $\lambda=1$ сложнее: если сфера $S^{\lambda-1}=S^1$ вложена в S^3 стандартным образом (большая окружность), то в зависимости от выбора ее тривиализации нормального расслоения получаются всевозможные *линзовые пространства*; если же допустить заузливание сферы S^1, то получается еще больший набор трехмерных многообразий.

Если V является краем $(n+1)$-мерного многообразия M, то V^1 будет краем многообразия M', полученного из M приклеиванием ручки индекса M'. В частности, если f — гладкая функция на многообразии M и $a<b$ — такие числа, что множество $f^{-1}[a, b]$ компактно и содержит единственную критич. точку p, к-рая невырождена, то многообразие $V^b=f^{-1}(b)$ получается из многообразия $V^a=f^{-1}(a)$ М. п. индекса λ, где λ — *Морса индекс* критич. точки p. Более общим образом, любая перестройка V' многообразия V индекса λ определяет нек-рый *бордизм* $(W; V, V')$ (получающийся из произведения $V\times[0, 1]$ приклеиванием ручки индекса λ к его «правому краю» $V\times\{1\}$), и на триаде $(W; V, V')$ существует *Морса функция*, обладающая единственной критич. точкой индекса λ, причем любой бордизм $(W; V, V')$, на к-ром существует такого рода функция Морса, получается этим способом. Отсюда (и из существования на триадах функций Морса) следует, что два многообразия тогда и только тогда бордантны, когда одно из них получается из другого конечной последовательностью М. п.

При известных предосторожностях в обращении с ориентациями результат М. п. ориентированного многообразия будет снова ориентированным многообразием. Вообще, для любой структурной серии (B, φ) (см. *(B, φ)-структуры*) можно определить понятие (B, φ)-п е р е с т р о й к и М о р с а; при этом два многообразия тогда и только тогда (B, φ)-бордантны, когда они связаны друг с другом конечной последовательностью (B, φ)-М. п.

Важная роль М. п. в топологии многообразий объясняется тем, что они позволяют «деликатно» (не нарушая тех или иных свойств многообразия) уничтожать «лишние» гомотопич. группы (обычно используемая с этой

целью в теории гомотопий операция «приклеивания клетки» мгновенно выводит из класса многообразий). Практически все теоремы классификации структур на многообразиях основываются на изучении вопроса, когда для отображения $f : M \to X$ замкнутого многообразия M в клеточное пространство X существуют такой бордизм $(W; M, N)$ и такое отображение $F : W \to X$, что $F|_M = f$, а $F|_N : N \to X$ является гомотопич. эквивалентностью. Естественный путь решения этой задачи состоит в том, чтобы последовательностью М. п. уничтожить ядра гомоморфизмов $f_* : \pi_i(M) \to \pi_i(X)$ (где π_i — гомотопич. группы). Если это удается, то результирующее отображение будет гомотопич. эквивалентностью. Изучение соответствующих препятствий (лежащих в т. н. группах Уолла, см. [4]) явилось одним из главнейших стимулов в развитии *алгебраической К-теории*.

Лит.: [1] Morse M., The calculus of variations in the large, N. Y., 1934; [2] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 365—474; [3] Kervaire M. A., Milnor J. W., «Ann. Math.», 1963, v. 77, p. 504—37; [4] Мищенко А. С., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 69—134.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк.

МОРСА ТЕОРИЯ — общее название для трех различных теорий, основывающихся на идеях М. Морса [1] и описывающих связь алгебро-топологич. свойств топологич. пространства с экстремальными свойствами функций (функционалов) на нем. М. т. является разделом *вариационного исчисления в целом*; однако последнее шире: напр., оно включает в себя теорию *категорий* в смысле Люстерника — Шнирельмана.

1) М. т. *критических точек* гладких функций f на гладком многообразии M (сокращенно — М. т. 1) разбивается на две части: локальную и глобальную. К локальной части относятся понятия критич. точки гладкой функции, *гессиана* функции в ее критич. точке, *Морса индекса* критич. точки и т. п. Основным результатом ее является *Морса лемма*, описывающая строение гладкой функции в окрестности невырожденной критич. точки.

Изучение гладких функций в окрестностях вырожденных точек не относится собственно к М. т. и выделяется в отдельную теорию *особенностей дифференцируемых отображений*.

Основными утверждениями глобальной М. т. являются следующие. Пусть f — функция на гладком многообразии M. Если множество $f^{-1}(a)$ не содержит критич. точек функции f и не пересекается с краем многообразия M, то $M^a = f^{-1}(-\infty, a)$ является гладким многообразием с краем $f^{-1}(a)$. Если множество $f^{-1}[a, b]$ компактно, не пересекается с краем многообразия M и не содержит критич. точек функции f, то существует такая гладкая изотопия $h_t : M \to M$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ (осуществляемая сдвигом по траекториям градиента функции f), что $h_0 = id_M$ и h_1 диффеоморфно отображает M^b на M^a. В частности, M^a диффеоморфно M^b и включение $M^a \subset M^b$ является гомотопич. эквивалентностью.

Если множество $f^{-1}[a, b]$ компактно, не пересекается с краем многообразия M и содержит ровно одну критич. точку $p \in f^{-1}(a, b)$, имеющую индекс Морса λ, то M^b диффеоморфно многообразию, полученному из M^a приклеиванием ручки индекса λ. В частности, если p — единственная точка глобального минимума функции f, то при малом $\varepsilon > 0$ множество $M^{f(p)+\varepsilon}$ диффеоморфно диску D^n, где $n = \dim M$. Отсюда следует, что если M — замкнутое гладкое многообразие, обладающее функцией с ровно двумя критич. точками (причем обе невырожденные), то M получается склейкой двух гладких дисков по их общей границе и потому гомеоморфно (но, вообще говоря, не диффеоморфно) сфере S^n.

Поскольку приклеивание ручки индекса λ гомотопически эквивалентно приклеиванию клетки размерности λ, отсюда непосредственно вытекает следующая о с-

новная теорема М. т. 1: каждой *Морса функции* f на гладком многообразии M (без края) отвечает гомотопически эквивалентное многообразию M *клеточное пространство*, клетки к-рого находятся в биективном соответствии с критич. точками функции f, причем размерность клетки равна индексу соответствующей критич. точки. *Морса неравенства* являются непосредственным следствием этой теоремы. Аналогичная теорема справедлива и для функций Морса триад (W, V_0, V_1).

2) М. т. геодезических на римановом многообразии (сокращенно — М. т. 2) описывает гомотопич. тип петель пространства ΩM гладкого многообразия M с римановой метрикой g_{ij}. Ее цель — перенести на случай этого пространства (вернее, его подходящей модели) результаты М. т. 1. Роль функции f играет при этом определенный на пространстве $\mathrm{PS}(M)$ кусочно гладких путей $\omega : t \to \omega(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; функционал действия E (иногда неправильно наз. функционалом энергии [5]), значения к-рого на пути $\omega \in \mathrm{PS}(M)$ определяются в локальных координатах $x^1, \ldots, x^h$ формулой

$$E(\omega) = \int_0^1 g_{ij}\, dx^i dx^j.$$

В первоначальном построении М. т. рассматривался функционал длины

$$L(\omega) = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}\, dx^i\, dx^j}\ ,$$

но по многим технич. причинам функционал E оказывается предпочтительнее. Вместе с тем экстремали функционала E (т. е. пути $\omega \in \mathrm{PS}(M)$, для к-рых определенный вариацией δE функционала E линейный функционал E_* на пространстве T_ω равен нулю) совпадают с геодезическими метрики g_{ij} (экстремалями функционала длины L) в их натуральной параметризации.

Пусть p, q — две (не обязательно различные) точки из M и $\Omega^{\mathrm{PS}}(M;\ p,\ q) \subset \mathrm{PS}(M)$ — пространство кусочно гладких путей, соединяющих p с q. Для каждого $l \in \mathbb{R}$ полагается

$$\Omega_l = \Omega_l^{PS}(M;\ p,\ q) = E^{-1}[0,\ l] \bigcap \Omega^{PS}(M;\ p,\ q).$$

Если риманово многообразие M полно, то пространство $\Omega_l^0 = E^{-1}[0,\ l) \bigcap \Omega_l$ (внутренность множества Ω_l) деформационно ретрагируется на нек-рое гладкое многообразие B, точками к-рого являются «ломаные геодезические» с фиксированным числом звеньев, соединяющие p с q (так что, в частности, B содержит все геодезические из $\mathring{\Omega}_l$). При этом функция $E' = E|_B : B \to \mathbb{R}$ гладкая; для любого $a < l$ множество $B^a = (E')^{-1}[0,\ a]$ компактно и является деформационным ретрактом множества Ω_a; критич. точки функции E' совпадают с экстремалями функционала $E : \mathring{\Omega}_l \to \mathbb{R}$ и представляют собой геодезические, соединяющие p с q и имеющие длину $< \sqrt{l}$; индекс Морса критич. точки функции E' равен индексу Морса соответствующей геодезической; нулевое пространство N_γ функционала E_{**} на геодезической $\gamma \in \mathring{\Omega}_l$ конечномерно и изоморфно нулевому пространству гессиана функции E' в соответствующей критич. точке; в частности, если p и q не сопряжены ни на одной соединяющей их геодезической γ, то E' — функция Морса. Применяя М. т. 1 и переходя к пределу при $l \to \infty$ и замечая, что пространство $\Omega^{\mathrm{PS}}(M;\ p,\ q)$ гомотопически эквивалентно пространству $\Omega(M;\ p,\ q)$ всех непрерывных путей, соединяющих p с q, получаем следующую основную теорему М. т. 2: пусть M — полное риманово многообразие и p, q — две его точки, не сопряженные ни на какой соединяющей их геодезической. Пространство $\Omega(M;\ p,\ q)$ всех путей, соединяющих p с q, гомотопически эквивалентно клеточному пространству, клетки размерности λ к-рого находятся в биективном соответствии с геодезическими индекса λ, соединяющими p с q. Так как гомотопич. тип простран-

ства $\Omega(M;\ p,\ q)$ не зависит от выбора точек p и q, то теорема даст, в частности, описание гомотопич. типа пространства петель ΩM.

Известно [10], что для нестягиваемого многообразия M пространство ΩM имеет нетривиальные группы гомологий в сколь угодно больших размерностях. В силу основной теоремы М. т. 2 отсюда следует, что несопряженные точки в полном римановом нестягиваемом многообразии соединены бесконечным числом геодезических (на примере сферы видно, что, вообще говоря, эти геодезические могут быть отрезками одной периодической геодезической).

В даваемом основной теоремой описании гомотопич. типа фигурируют (хотя и неявно) поля Якоби, поэтому М. т. устанавливает связь между кривизной многообразия и его топологией. Напр., если M — полное односвязное риманово многообразие, кривизна к-рого по всем двумерным направлениям неположительна, то любое поле Якоби, обращающееся в нуль в двух точках геодезической, является тождественно нулевым. Поэтому пространство петель ΩM такого многообразия имеет тип нульмерного клеточного пространства и, следовательно (ввиду односвязности M), стягиваемо. Поэтому M также стягиваемо, т. е. гомотопически эквивалентно пространству $\mathbb{R}^n$. Более тонкое использование соображений М. т. показывает, что M даже диффеоморфно пространству $\mathbb{R}^n$ (см. [3], [5]).

Весьма эффективным оказалось применение М. т. к топологии групп Ли [3]. Напр., для любой односвязной группы Ли G пространство ΩG имеет гомотопич. тип клеточного пространства без нечетномерных клеток. Апофеозом здесь является теорема Ботта о периодичности, играющая основополагающую роль в K-теории и, следовательно, во всей дифференциальной топологии. Пусть U — предел последовательности вложенных унитарных групп $\dots U_n \subset U_{n+1} \subset \dots$, а O — предел последовательности вложенных ортогональных групп $\dots O_n \subset O_{n+1} \subset \dots$. Теорема периодичности Ботта утверждает, что имеют место гомотопич. эквивалентности $\Omega^2 U \sim U$, $\Omega^8 O \sim O$, где Ω^n есть n-кратная итерация функтора перехода к пространству петель. Эта теорема позволяет вычислить гомотопич. группы $\pi_i U$ и $\pi_i O$ и, следовательно, гомотопич. группы $\pi_i U_n$ и $\pi_j O_n$ при $i<2n$, $j<n$.

М. т. 2 обобщается также на случай, когда вместо точек p, q рассматриваются гладкие подмногообразия V_0, V_1 многообразия M. Изучается функционал действия на пространство $\Omega^{\mathrm{PS}}(M;\ V_0,\ V_1)$ всех кусочно гладких путей $\omega : t \to \omega(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\omega(l) \in V_i$, $i=0,\ 1$, трансверсальных на концах к V_0 и V_1, и устанавливается связь экстремалей этого фуикционала с гомотопич. типом пространства $\Omega(M;\ V_0,\ V_1)$. Соответствующая основная теорема аналогична сформулированной выше основной теореме М. т. 2; трудность состоит в геометрич. интерпретации индекса Морса геодезической.

3) Естественным развитием М. т. 2 является М. т. критич. точек гладких функций на банаховых (бесконечномерных) многообразиях — М. т. 3, представляющая собой уже не аналог, а непосредственное обобщение М. т. 1. К настоящему времени (1982) М. т. 3 находится в стадии становления и построена лишь в весьма предварительном контексте при очень сильных (и явно не необходимых) условиях на модельное банахово пространство (типа сепарабельности и гильбертовости), когда не возникает специфических функционально-аналитич. трудностей [9], хотя имеются и попытки построения М. т. 3 в довольно общей ситуации. Поэтому в современном виде М. т. 3 является почти дословным повторением М. т. 1. Единственное заслуживающее быть отмеченным отличие состоит в том, что в М. т. 3 условие компактности множеств $f^{-1}[a,\ b]$ заменяется условием C Пале — Смейла (см. *Морса функция*), к-рое, впрочем, выпол-

няется не во всех интересных ситуациях. Кроме того, хотя для банаховых многообразий приходится приклеивать и ручки бесконечного индекса, в силу гомотопич. тривиальности бесконечномерных сфер эти ручки на гомотопич. тип не влияют. Поэтому в основной теореме М. т. 3 участвуют лишь критич. точки конечного индекса.

Лит.: [1] Morse M., The calculus of variations in the large, N. Y., 1934; [2] Милнор Дж., Теория Морса, пер. с англ., М., 1965; [3] его же, Теорема об h-кобордизме, пер. с англ., М., 1969; [4] Зейферт Г., Трельфалль В., Вариационное исчисление в целом, пер. с нем., М., 1947; [5] Громолл Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [6] Бишоп Р.-Л., Криттенден Р.-Дж., Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967; [7] Постников М. М., Введение в теорию Морса, М., 1971; [8] его же, Вариационная теория геодезических, М., 1965; [9] Иллс Дж., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 3, с. 157—210; [10] Серр Ж.-П., Сингулярные гомологии расслоенных пространств, в кн.: Расслоенные пространства и их приложения, пер. с франц., М., 1958, с. 9—98.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк.

МОРСА ФУНКЦИЯ — гладкая функция, обладающая нек-рыми специальными свойствами. М. ф. возникают и используются в *Морса теории*.

Пусть W — гладкое гильбертово полное (относительно нек-рой римановой метрики) многообразие (напр., конечномерное), край к-рого ∂W является несвязным объединением (возможно, пустых) многообразий V_0 и V_1. М. ф. тройки $(W; V_0, V_1)$ — такая гладкая (класса C^2 по Фреше) функция $f: W \to [a, b]$, $-\infty < a, b < +\infty$ (или $f: W \to [a, \infty]$) при $V_1 = \varnothing$, что:

1) $f^{-1}(a) = V_0$, $f^{-1}(b) = V_1$;

2) все *критические точки* функции f лежат в $W \setminus \partial W = f^{-1}[a, b]$ и невырождены;

3) условие C Пале — Смейла (см. [2], [3]): на любом замкнутом множестве $S \subset W$, где функция f ограничена, а нижняя грань функции $x \to \|df(x)\|$ равна нулю, существует критич. точка функции f.

Напр., если функция f собственная, т. е. все множества $f^{-1}[c, d]$, $-\infty < c, d < \infty$, компактны (что возможно только при $\dim W < \infty$), то f удовлетворяет условию C. М. ф. достигает минимума (глобального) на каждой компоненте связности многообразия W. Если многообразие V конечномерно, то для $k \geqslant 2$ множество М. ф. класса C^k является множеством 2-й категории (а если W компактно, то даже плотным открытым множеством) в пространстве всех функций

$$f: (W; V_0, V_1) \to ([a, b], a, b)$$

в C^k-топологии.

Лит.: [1] Morse M., The calculus of variations in the large, N. Y., 1934; [2] Palais R., «Topology», 1963, v. 2, p. 299—340; [3] Smale S., «Ann. Math.», 1964, v. 80, p. 382—96.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк.

МОРСА — СМЕЙЛА СИСТЕМА динамическая — гладкий *поток* $\{S_t\}$ или *каскад* $\{S^n\}$ (порожденный диффеоморфизмом S, к-рый в этом случае наз. диффеоморфизмом Морса — Смейла) на компактном (обычно замкнутом) дифференцируемом m-мерном многообразии M^m, имеющий следующие свойства.

1) Система имеет конечное число периодич. траекторий (включая сюда в случае каскада и неподвижные точки) и (в случае потока) положений равновесия.

2) Каждая траектория из перечисленных в 1) обладает *локальной грубостью* (обычно в определении фигурируют эквивалентные этому свойства соответствующих линеаризованных систем). Это гарантирует существование у траектории устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий W^s и W^u (если траектория устойчива или вполне неустойчива, то считается, что W^u, соответственно W^s, сводится к ней самой); размерность W^u наз. ее индексом. Индекс обобщает понятие *Морса индекса* невырожденной критической (стационарной) точки w_0 гладкой функции $f: M \to \mathbb{R}$, ибо

последний совпадает с индексом w_0 как положения равновесия *градиентной динамической системы*

$$\dot{w} = -\operatorname{grad} f(w), \qquad (1)$$

где градиент берется по отношению к какой-нибудь римановой метрике на M.

3) Инвариантные многообразия траекторий из перечисленных в 1) пересекаются трансверсально (т. е. если $w \in W_1^s \cap W_2^u$, то касательные пространства $T_w W_1^s + T_w W_2^u = T_w M$).

4) Все остальные траектории при $t \to \pm\infty$ или при $n \to \pm\infty$ стремятся к траекториям из перечисленных в 1).

5) Если M имеет край, то нужны еще нек-рые условия о поведении системы вблизи края. Для потоков (до сих пор в этом случае только они и рассматривались) обычно требуют, чтобы вектор фазовой скорости был всюду трансверсален к краю.

М.— С. с. являются *грубыми системами* [1]. Именно в связи с изучением последних впервые рассматривались частные случаи М.— С. с.— потоки в плоских областях (см. более позднее подробное изложение в [2]) и каскады на окружности (см. [4] — [6]). В общем случае М.— С. с. введены С. Смейлом [7], ограничившимся тогда М. — С. с. на замкнутом M, для к-рых были доказаны следующие неравенства Морса — Смейла. Пусть m_i для каскада — число периодич. точек индекса i, а в случае потока — сумма числа положений равновесия индекса i и числа периодич. траекторий индексов i и $i+1$; тогда при $i=0, 1, \ldots, m$

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^j m_{i-j} \geqslant \sum_{j=0}^{i} (-1)^j b_{i-j}, \qquad (2)$$

где b_i есть i-е *Бетти число* многообразия M (если среди W^u, W^s, введенных в 2), имеются неориентируемые, то числа Бетти надо брать над полем характеристики два). При $i=m$ неравенство (2) обращается в равенство.

Неравенства (2) обобщают обычные *Морса неравенства* для гладкой функции $f : M \to \mathbb{R}$ с невырожденными критич. точками. Именно, неравенства Морса можно получить применением (2) к системе (1) (к-рая, правда, не обязательно является М.— С. с., так что требуется небольшое дополнительное рассуждение, см. [7],[8]).

Исследовался вопрос, когда в данном классе изотопий диффеоморфизмов существует диффеоморфизм Морса — Смейла (см. [9], [10]), а для M^m с нулевой эйлеровой характеристикой — и аналогичный вопрос о гомотопич. классе неособых векторных полей (здесь при $m \geqslant 4$ ответ всегда положительный, см. [11]). Для потоков при $m=2$ (см. [12], [13]) и нек-рых специальных типов потоков при $m \geqslant 3$ (см. [14], [15]) выяснено, какие топологич. инварианты определяют топологич. эквивалентность двух М.— С. с. [В двумерном случае этот вопрос решен для более широкого класса потоков (см. [3], [16]), а случай $m=1$ тривиален.]

Лит.: [1] Пэйлис Дж., Смейл С., «Математика», 1969, т. 13, № 2, с. 145—55; [2] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, М., 1967; [3] их же, Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966; [4] Майер А. Г., «Уч. зап. Горьк. гос. ун-та», 1939, в. 12, с. 215—29; [5] Плисс В. А., «Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем.», 1960, № 13, в. 3, с. 15—23; [6] Арнольд В. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1961, т. 25, № 1, с. 21—86; 1964, т. 28, № 2, с. 479—480; [7] Смейл С., «Математика», 1967, т. 11, № 4, с. 79—87; [8] Smale S., «Ann. Math.», 1961, v. 74, № 1, p. 199—206; [9] Шуб М., в кн.: Гладкие динамические системы, М., 1977, с. 118—39; [10] Шуб М., Сулливан Д., там же, с. 140—180; [11] Asimov D., «Ann. Math.», 1975, v. 102, № 1, p. 55—65; [12] Peixoto M., «C. r. Acad. sci.», 1971, t. 272, № 3, p. A 262—265; [13] его же, в кн.: Dynamical systems, N. Y.—L., 1973, p. 389—419; [14] Уманский Я. Л., «Докл. АН СССР», 1976, т. 230, № 6, с. 1286—89; [15] Пилюгин С. Ю., «Дифференциальные уравнения», 1978, т. 14, № 2, с. 245—54; [16] Neumann D., O'Brien Th., «J. differential equations», 1976, v. 22, № 1, p. 89—110.

Д. В. Аносов.

МОРФИЗМ категории — термин, используемый для обозначения элементов произвольной категории, играющих роль отображений множеств друг в друга, гомоморфизмов групп, колец, алгебр, непрерывных отображений топологич. пространств и т. п. М. категории — неопределяемое понятие. Каждая категория состоит из элементов двух классов, наз. классом объектов и классом морфизмов соответственно. Класс М. категории $\mathfrak{K}$ обычно обозначается $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$.

Любой М. α категории $\mathfrak{K}$ имеет однозначно определенное начало — объект A и однозначно определенный конец — объект B. Все М. с общими началом A и концом B образуют подмножество $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ класса $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$. Тот факт, что М. α имеет начало A и конец B, можно записать обычным образом: $\alpha \in H_{\mathfrak{K}}(A, B)$, или с помощью стрелок: $\alpha : A \to B$, $A \xrightarrow{\alpha} B$ и т. п.

Деление элементов категории на М. и объекты имеет смысл только в пределах фиксированной категории, т. к. М. одной категории могут быть объектами другой и наоборот. М. любой категории образуют систему, замкнутую относительно частичной бинарной операции — умножения. В зависимости от свойств М. по отношению к этой операции выделяются специальные классы М., напр. *мономорфизм*, *эпиморфизм*, *биморфизм*, *изоморфизм*, нулевой морфизм, *нормальный мономорфизм*, *нормальный эпиморфизм* и т. д. *М. Ш. Цаленко.*

МОТИВОВ ТЕОРИЯ — обобщение различных теорий *когомологий* алгебраич. многообразий. М. т. систематически обобщает идею использования якобиана алгебраич. кривой X в качестве замены когомологий $H^1(X, \mathbb{Q})$ в классич. теории соответствий и использовании этой теории для изучения дзета-функции кривой X над конечным полем. М. т. универсальна в том смысле, что всякая геометрич. теория когомологий типа классич. сингулярных когомологий алгебраич. многообразий над полем $\mathbb{C}$ с постоянными коэффициентами, l-адических когомологий для различных простых чисел l, отличных от характеристики основного поля, кристаллич. когомологий и т. п. (см. *Вейля когомологии*) является функтором на категории мотивов.

Пусть $V(k)$ — категория гладких проективных многообразий над полем k и $X \to C(X)$ — контравариантный функтор глобальной теории пересечений из $V(k)$ в категорию коммутативных Λ-алгебр, где Λ — нек-рое фиксированное кольцо. Напр., $C(X)$ — кольцо Чжоу классов алгебраич. циклов на X по модулю подходящего (рационального, алгебраического, численного и т. п.) отношения эквивалентности, или $C(X)=K(X)$ — кольцо Гротендика, или $C(X)=H^{ev}(X)$ — кольцо классов когомологий четной размерности и т. д. Категория $V(k)$ и функтор $X \to C(X)$ позволяют определить новую категорию — категорию соответствий $CV(k)$, объектами к-рой являются многообразия $X \in V(k)$, обозначаемые через $\overline{X}$, а морфизмы определяются формулой

$$\mathrm{Hom}\,(\overline{X}, \overline{Y}) = C(X \times Y)$$

с обычным законом композиции соответствий (см. [1]). Пусть функтор C принимает значения в категории коммутативных градуированных Λ-алгебр $A(\Lambda)$, тогда категория $CV(k)$ будет Λ-аддитивной категорией градуированных соответствий. Более того, $CV(k)$ будет обладать прямыми суммами и тензорными произведениями.

Категория, объектами к-рой являются многообразия из $V(k)$, а морфизмами — соответствия степени 0, обозначается $CV^0(k)$. Из $V(k)$ определен естественный функтор в $CV^0(k)$, и функтор C продолжается до функтора T из $CV^0(k)$ в $A(\Lambda)$. Категория $CV^0(k)$, как и $CV(k)$, не является абелевой. Рассматривается ее псевдоабелево пополнение — категория $M_C^+(k)$, к-рая получается из $CV^0(k)$ формальным добавлением образов всех проекто-

ров p. Точнее, объектами $M_C^+(k)$ являются пары $(\bar{X}, p)$, где $\bar{X} \in CV^0(k)$ и $p \in \mathrm{Hom}(\bar{X}, X)$, $p^2 = p$, а $\mathrm{Hom}((\bar{X}, p), (\bar{Y}, q))$ — это множество соответствий $f : \bar{X} \to \bar{Y}$ таких, что $f \circ p = q \circ f$, по модулю соответствий g с $g \circ p = p \circ g = 0$. Категория $CV^0(k)$ вкладывается в $M_C^+(k)$ посредством функтора $\bar{X} \to (\bar{X}, id)$. Естественный функтор $h : V(k) \to M_C^+(k)$ наз. функтором мотивных когомологий, а $M_C^+(k)$ — категорией эффективных мотивов.

Пусть $p = (1 \times e)$, где e — класс любой рациональной точки на проективной прямой P^1, а $L = (P^1, p)$. Тогда

$$h(P^n) = 1 \oplus L \oplus L^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus L^{\otimes n}.$$

Если $X = P(E)$ — проективизация локально свободного пучка E ранга r на Y, то

$$h(X) = \bigoplus_{i=0}^{r-1} \left(h(Y) \otimes L^{\otimes i}\right).$$

Вычислены также мотивы моноидального преобразования с неособым центром и мотивы кривых (см. [1]), мотивы абелева многообразия (см. [2]) и мотивы гиперповерхностей Вейля.

Категория мотивов $M_C(k)$ получается из $M_C^+(k)$ формальным добавлением отрицательных степеней мотива L. По аналогии с l-адическими когомологиями, $T = L^{\otimes -1}$ наз. мотивом Тейта. Операция тензорного умножения на мотив T наз. скручиванием с помощью мотива Тейта. Скручивание позволяет определить понятие уровня мотива, как в l-адических когомологиях. Любой функтор когомологий Вейля пропускается через функтор $h : V(k) \to M_C(k)$. Имеется гипотеза, что $M_C(k)$ в нек-ром смысле не зависит от теории пересечений C и что сам функтор $X \to h(X)$ является (универсальной) теорией когомологий Вейля. Эта гипотеза тесно связана со стандартными гипотезами Гротендика (см. [5]) об алгебраич. циклах (также пока, 1982, не доказанными).

Лит.: [1] Манин Ю. И., «Матем. сб.», 1968, т. 77, № 4, с. 475—507; [2] Шерменёв А. М., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, № 3, с. 215—16; [3] Domazure M., Motives des variétés algèbrique, Sèm. Bourbaki, 365, P., 1969; [4] Kleiman S. L., Motives, «Proceeding of the 5-th Nordic Summer-School in Math. *Algebraic geometry*», *Oslo*, 1970, p. 52—82; [5] его же, Algebraic cycles and the Weil conjectures, в кн.: Dix exposés sur la cohomologie des schèmas, Amst. — P., 1968.

В. А. Исковских.

МОЩНОСТИ КРИТЕРИЯ ФУНКЦИЯ — функция, характеризующая качество *статистического критерия*. Пусть по реализации x случайного вектора X, принимающего значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$, надлежит проверить гипотезу H_0, согласно к-рой распределение вероятностей P_θ случайного вектора X принадлежит подмножеству $H_0 = \{\mathsf{P}_\theta, \theta \in \Theta_0 \subset \Theta\}$, против альтернативы H_1, согласно к-рой

$$\mathsf{P}_\theta \in H_1 = \{\mathsf{P}_\theta, \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0\},$$

и пусть $\varphi(\cdot)$ — критич. функция статистич. критерия, предназначенного для проверки H_0 против H_1. Тогда

$$\beta(\theta) = \int_{\mathfrak{X}} \varphi(x)\, dP_\theta(x), \quad \theta \in \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1, \qquad (*)$$

наз. функцией мощности статистического критерия, имеющего критич. функцию φ. Из $(*)$ следует, что М. к. ф. $\beta(\theta)$ показывает, с какими вероятностями статистич. критерий, предназначенный для проверки H_0 против H_1, отклоняет проверяемую гипотезу H_0, если X подчиняется закону P_θ, $\theta \in \Theta$.

В теории проверки статистических гипотез, основанной Ю. Нейманом (J. Neyman) и Э. Пирсоном (E. Pearson), задача проверки сложной гипотезы H_0 против

сложной альтернативы H_1 формулируется в терминах М. к. ф. и заключается в построении статистич. критерия максимизирующего М. к. ф. $\beta(\theta)$, когда $\theta\in\Theta_1$ при условии, что $\beta(\theta)\leqslant\alpha$ для всех $\theta\in\Theta_0$, где число α ($0<\alpha<1$), наз. уровнем значимости критерия,— заданная допустимая вероятность ошибочного отклонения гипотезы H_0, когда она в действительности верна.

Лит.: [1] Леман Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Ван-дер-Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960.

М. С. Никулин.

МОЩНОСТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА топологического пространства — функция, сопоставляющая этому пространству бесконечное *кардинальное число* и принимающая одинаковые значения на гомеоморфных пространствах. М. х. наз. также кардинальными инвариантами. Областью определения М. х. может служить класс всех топологич. пространств или нек-рый его подкласс. Следующие М. х. были выделены уже на первом этапе развития общей топологии. Пусть X — произвольное топологич. пространство. Его мощность $|X|$ есть мощность множества всех его точек — тривиальный инвариант. Вес $w(X)$ — минимум мощностей всевозможных *баз* пространства X. Плотность $d(X)$ — минимум мощностей всюду плотных в X множеств. Число Суслина $c(X)$ — наименьший бесконечный кардинал τ такой, что мощность всякого семейства попарно не пересекающихся непустых открытых множеств в X не превосходит τ. Число Линделёфа $l(X)$ — наименьший бесконечный кардинал τ такой, что из всякого открытого покрытия пространства X можно выделить подпокрытие мощности $\leqslant\tau$. Эти простые понятия сразу доказали свою важность, войдя решающим образом в формулировки фундаментальных теорем и проблем. Примеры: регулярное пространство счетного веса метризуемо (теорема Урысона — Тихонова, 1925), бикомпакт метризуем в том и только в том случае, если вес его счетен; для пространства X любой бикомпактной группы число Суслина счетно; число Линделёфа $l(X)$ счетно (т. е. равно $\aleph_0$) для всякого пространства X счетного веса. Проблема Суслина: верно ли, что всякий связный упорядоченный бикомпакт X такой, что $c(X)=\aleph_0$ гомеоморфен обычному отрезку $[0, 1]$, сводится к вопросу о соотношении между двумя М. х.: плотностью и числом Суслина. Для положительного решения проблемы Суслина достаточно в указанных выше предположениях установить, что $d(X)\leqslant c(X)$. Вопрос о сравнении М. х. между собой — решение к-рого, как видно из приведенного примера, может иметь ключевое значение для окончательного заключения о строении пространства — занимает центральное место в теории М. х. Причина этому находится в самой природе понятия М. х.: значениями М. х. являются кардинальные числа, совокупность к-рых вполне упорядочена по величине. Следовательно, любые две М. х. φ_1 и φ_2 можно пытаться сравнить по величине. Возникает серия взаимосвязанных вопросов. Верно ли, что для любого X $\varphi_1(X)\leqslant\varphi_2(X)$, для каких X $\varphi_1(X)\leqslant\varphi_2(X)$, когда $\varphi_1(X)=\varphi_2(X)$, и т. д.

С кардинальными числами можно производить вычисления: перемножать их, складывать, возводить в степень. Соответственно, можно производить вычисления и с кардинальными инвариантами — перемножать и складывать их как функции и т. д. Это открывает новые возможности для сравнения М. х.— с помощью вычислений. Всегда

$$c(X)\leqslant d(X)\leqslant w(X),\quad l(X)\leqslant w(X),$$

— т. е. число Суслина не превосходит плотности, плотность не превосходит веса и число Линделёфа не пре-

восходит веса. Но плотность и число Линделёфа в этом смысле не сравнимы: существуют пространства X, Y, Z, для к-рых

$$d(X)<l(X),\ l(Y)\leqslant d(Y)=c(Y),\ l(Z)=d(Z)=c(Z).$$

Неожиданной на первый взгляд представляется несравнимость мощности и веса: существуют нормальные счетные T_1-пространства несчетного веса. Но всегда $d(X)\leqslant |X|$ и $l(X)\leqslant|X|$. Для всякого T_0-пространства X, $|X|\leqslant\exp(w(X))$ (пишут $\exp\tau$ вместо 2^τ). Для всякого хаусдорфова пространства X, $|X|\leqslant\exp(\exp(d(X)))$. Всегда $w(X)\leqslant\exp|X|$.

В задачу сравнения могут быть естественно вовлечены не два, а большее число М. х. На этом пути получаются особенно тонкие, красивые и часто неожиданные результаты, поражающие своей общностью: для каждого хаусдорфова пространства X, $|X|\leqslant\exp(c(X)\cdot\chi(X))$, где $\chi(X)$ — наименьший бесконечный кардинал τ такой, что в каждой точке пространства X имеется база мощности $\leqslant\tau$ (см. [1], [2]). Исследования в теории М. х. стимулировала проблема оценки мощности бикомпакта с первой аксиомой счетности, оставшаяся нерешенной с 1923 по 1969. Оказалось: для каждого хаусдорфова пространства X, $|X|\leqslant\exp(l(X)\cdot\chi(X))$ (теорема Архангельского, см. [2], [4]).

Вычисления М. х. возникают во всех разделах общей топологии в силу теоретико-множественной природы последней. Поэтому и применения теория М. х. находит практически во всех областях общей топологии и при любых подходах к исследованию пространств.

В частности, при изучении пространств методом покрытий на первый план выступают число Линделёфа, плотность и число Суслина. При исследовании и классификации пространств методом непрерывных отображений (в частности, при построении теории диадич. бикомпактов и теории абсолютов) возникли и сыграли ключевую роль новые М. х.: спрэд и π-вес. Спрэд $s(X)$ пространства X есть точная верхняя грань мощностей дискретных подпространств пространства X, а π-вес $\pi w(X)$ этого пространства — минимум мощностей всевозможных семейств γ (наз. π-базами) непустых открытых в X множеств таких, что для каждого непустого открытого в X множества U найдется $V\in\gamma$ такое, что $V\subset U$. При исследовании пространств методом обратных спектров важную роль играют число Суслина, характер, вес. Но имеется подход к общей топологии, при к-ром М. х. выступают и как главное средство исследования строения пространств, и как основной язык, на к-ром выражаются свойства пространств из тех или иных классов и, наконец, как средство классификации и выделения новых естественных классов топологич. пространств. В основе и здесь лежит задача сравнения М. х. Основной вопрос ставится следующим образом. Дан класс $\mathcal{P}$ топологич. пространств, к-рым ограничивается область определения М. х. Как выглядят основные соотношения между кардинальными инвариантами в этих условиях? Развивая теорию М. х. для класса $\mathcal{P}$, мы как бы получаем «кардинальный портрет» класса $\mathcal{P}$. Сравнение кардинальных портретов каких-либо классов $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ дает возможность судить о соотношениях между этими классами, а также доставляет эффективные средства доказательства для конкретных пространств принадлежности их тому или иному классу.

Этот подход демонстрируется на примере класса метризуемых пространств. Характерной чертой здесь является совпадение для этого класса ряда основных М. х.: число Суслина равно плотности, весу и числу Линделёфа. Этот факт часто применяется, напр. чтобы доказать, что нек-рое пространство неметризуемо, достаточно показать, что на нем различаются хотя бы два из названных выше инвариантов.

Если в классе метризуемых пространств теория М. х. отличается главным образом упрощениями, то в классе бикомпактов она совершенно и нетривиальным образом меняет свой вид. Ответственны за это фундаментальные положения этой теории — совпадение для бикомпактов характера и псевдохарактера, веса и сетевого веса. При этом *псевдохарактером* $\psi(x, X)$ пространства X в точке x наз. наименьшее число открытых множеств, дающих эту точку в пересечении, а *характером* $\chi(x, X)$ пространства X в точке x наз. минимум мощностей баз пространства в этой точке. *Сетевым весом* $nw(X)$ наз. минимум мощностей семейств S множеств в X, удовлетворяющих условию: если $x\in X$ и $x\in U\subset X$, где U открыто в X, то найдется $P\in S$, для к-рого $x\in P\subset U$ (такие семейства наз. *сетями* в X). Для всякого бикомпакта X верно следующее: 1) $\psi(x, X)=\chi(x, X)$ для всех $x\in X$; 2) $nw(X)=w(X)$. Поэтому при непрерывном отображении на бикомпакт вес не может возрастать, и если бикомпакт X представлен в виде объединения двух своих подпространств X_1 и X_2, то вес $X_1\cup X_2$ не превосходит максимума весов X_1 и X_2 (*аддиционная теорема для веса*). По той же причине вес бикомпакта всегда не превосходит его мощности — в частности, всякий счетный бикомпакт метризуем. Ни одно из перечисленных выше положений теории М. х. в классе бикомпактов не распространяется на класс всех вполне регулярных пространств. Важным специфич. результатом является следующий: если X — бикомпакт, τ — кардинал, $\tau\geqslant\aleph_0$ и $\chi(x, X)\geqslant\tau$ для всех $x\in X$, то $|X|\geqslant\exp\tau$ (*теорема Чеха — Поспишила*). Почти все критерии метризуемости бикомпактов также являются теоремами о М. х. Так, метризуемость бикомпакта X равносильна любому из следующих условий: а) $w(X)=\aleph_0$; б) $nw(X)=\aleph_0$; в) диагональ в $X\times X$ является множеством типа G_δ; г) X обладает точечно-счетной базой.

В исследовании строения бикомпактов важная роль принадлежит тесноте. *Теснотой* $t(X)$ (см. [2], [4]) пространства X наз. наименьший кардинал $\tau\geqslant\aleph_0$ такой, что если $x\in X$, $A\subset X$ и $x\in[A]$, то найдется $B\subset A$, для к-рого $x\in[B]$ и $|B|\leqslant\tau$. Теснота не возрастает при возведении бикомпакта в любую конечную степень (в классе вполне регулярных пространств это — не так).

Если теснота бикомпакта X не превосходит τ, то для каждой точки $x\in X$ найдется семейство γ непустых открытых в X множеств такое, что $|\gamma|\leqslant\tau$ и каждая окрестность O_x точки x содержит элемент семейства γ. Поэтому л-вес каждого сепарабельного бикомпакта счетной тесноты равен $\aleph_0$. Спрэд бикомпакта мажорирует его тесноту.

Особыми свойствами диадич. бикомпактов также в большой степени управляют теоремы о М. х. Так, для всякого диадич. бикомпакта его вес совпадает со спрэдом и с теснотой. К числу диадич. бикомпактов относятся пространства любых бикомпактных групп, так что, в частности, каждая бикомпактная группа счетной тесноты метризуема.

Для теории диадич. бикомпактов и других разделов теории М. х. важное значение имеет вопрос о поведении последних при операции умножения. Существенную роль играют здесь следующие две теоремы, первая из к-рых влечет вторую. Если F — семейство пространства такое, что $d(X)\leqslant\tau$ для каждого $X\in F$ и $|F|\leqslant\exp\tau$, то плотность произведения всех пространств из F не превосходит τ (см. [1]—[4]). Если X — произведение какого-нибудь множества пространств, плотность каждого из к-рых не превосходит τ, то $c(X)\leqslant\tau$. В последнем утверждении нет никаких ограничений на число сомножителей. В частности, получается, что число Суслина любого тихоновского куба (произведения произвольного множества отрезков) счетно. Таким образом, условие

$c(X)=\aleph_0$ не несет в себе ограничения на мощность пространства.

Многие просто формулируемые вопросы о поведении М. х. при операции умножения оказываются весьма деликатными. Например, верно ли, что всегда $c(X\times X)=c(X)$ оказывается связанным с гипотезой Суслина и континуум-гипотезой?

Напротив, поведение М. х. при переходе от пространства X к его образу Y при непрерывном отображении $f: X\to Y$, где $f(X)=Y$, подчиняется в основном простым общим правилам.

Напр., всегда $c(Y)\leqslant c(X)$, $d(Y)\leqslant d(X)$, $nw(Y)\leqslant nw(X)$, $l(Y)\leqslant l(X)$. Если f факторно, то $t(Y)\leqslant t(X)$. То обстоятельство, что основу теории М. х. составляет система простых универсальных правил этого рода, также можно рассматривать как одну из причин, обеспечивающих широкую применимость этой теории.

Значительная информация о строении пространств получается при рассмотрении вопроса: как ведут себя М. х. при переходе к подпространству. Те М. х. φ, для к-рых из $Y\subset X$ всегда следует, что $\varphi(Y)\leqslant\varphi(X)$, наз. м о н о т о н н ы м и. К ним относятся: вес, сетевой вес, теснота, характер, спрэд. Немонотонны число Суслина, плотность, число Линделёфа. Возникают следующие вопросы: каковы те пространства X, для к-рых $c(Y)\leqslant\tau$ для всех $Y\subset X$; каковы те X, для к-рых $d(Y)\leqslant\tau$ для всех $Y\subset X$; как отражается на топологии пространства X требование: $l(Y)\leqslant\tau$ для всех $Y\subset X$. Ответ на первый вопрос прост: сформулированное условие означает, что спрэд X не превосходит τ. Но двумя последующими требованиями выделяются новые классы пространств. Исследование их оказалось зависящим от специальных гипотез теории множеств — в частности, от аксиомы Мартина.

Своеобразный характер приобретает теория М. х. на пространствах топологич. групп. Так, критерий метризуемости сводится здесь просто к требованию счетности характера. На языке М. х. формулируются важные свойства линейных топологич. пространств, в частности пространств $C(X)$ непрерывных действительных функций на пространстве X. Сюда относятся теоремы о бикомпактах Эберлейна (каждый бикомпакт Эберлейна является пространством Фреше — Урысона, вес бикомпакта Эберлейна равен его числу Суслина), теорема: если X — бикомпакт, то теснота пространства $C(X)$ в топологии поточечной сходимости счетна.

Между рядом М. х. пространств X и $C(X)$ имеет место соответствие типа двойственности.

Лит.: [1] J u h á s z I., Cardinal functions in topology, Amst., 1971; [2] А р х а н г е л ь с к и й А. В., П о н о м а р е в В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [3] E n g e l k i n g R., General topology, Warsz., 1977; [4] А р х а н г е л ь с к и й А. В., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 6, с. 29—84; [5] E n g e l k i n g R., General topology, Warsz., 1977.

А. В. Архангельский.

МОЩНОСТЬ, к а р д и н а л ь н о е ч и с л о, множества A — такое свойство этого множества, к-рое присуще любому множеству B, эквивалентному A. При этом два множества наз. э к в и в а л е н т н ы м и (или р а в н о м о щ н ы м и), если между ними возможно установить взаимно однозначное соответствие. Таким образом, «определяя через абстракцию», можно сказать, что М.— это то, что есть общего у всех эквивалентных множеств. Так как у всех эквивалентных между собою конечных множеств этим общим является количество элементов, или одинаковое число, из к-рых они состоят, то в применении к бесконечным множествам понятие М. является аналогом понятия количества. М. есть фундаментальное понятие теории множеств, принадлежащее Г. Кантору (G. Cantor). Множества, эквивалентные множеству всех натуральных чисел, наз. с ч е т н ы м и. Соответствующая М. обозначается $\aleph_0$ (алеф-нуль). М. множеств, эквивалентных множеству

всех действительных чисел, наз. М. континуума и обозначается $\mathfrak{c}$ или $2^{\aleph_0}$. Напр., счетную М. имеет множество всех алгебраич. чисел, а М. континуума имеет множество всех замкнутых подмножеств n-мерного евклидова пространства. Теорема Кантора — Бернштейна: если из двух множеств A и B каждое эквивалентно части другого, то эти два множества эквивалентны. В этом случае говорят, что множества A и B имеют одинаковую М. Если множество A эквивалентно части множества B, тогда как множество B не эквивалентно никакой части множества A, то говорят, что М. множества B больше М. множества A. Теорема Кантора: М. множества всех подмножеств любого непустого множества A больше М. множества A. Эта теорема дает возможность построить иерархию М. (см. *Кардинальное число*).

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977. *Б. А. Ефимов.*

МОЩНОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ — вероятность, с к-рой *статистический критерий*, предназначенный для проверки простой гипотезы H_0 против сложной альтернативы H_1, отклоняет H_0, когда в действительности верна гипотеза H_1. В случае, когда гипотеза H_1, конкурирующая с проверяемой гипотезой H_0, является сложной (при этом сама гипотеза H_0 может быть как простой, так и сложной, что символически записывают следующим образом: $H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$, $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$), М. с. к., предназначенного для проверки H_0 против H_1, определяется как сужение функции мощности $\beta(\theta)$, $\theta \in \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$, этого статистич. критерия на множество Θ_1.

Кроме этого определения широко распространено следующее: М. с. к., предназначенного для проверки гипотезы $H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ против сложной альтернативы $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$, есть $\inf\limits_{\theta \in \Theta_1} \beta(\theta)$, где $\beta(\theta)$ — функция мощности этого статистич. критерия (см. *Мощности критерия функция*).

Лит.: [1] Леман Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [3] Ван-дер-Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. *М. С. Никулин.*

МУАВРА ФОРМУЛА — формула, выражающая правило для возведения в степень *n комплексного числа*, представленного в тригонометрич. форме

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Согласно М. ф. модуль ρ комплексного числа возводится в эту степень, а аргумент φ умножается на показатель степени

$$z^n = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

М. ф. была найдена А. Муавром (A. Moivre, 1707), современная ее запись предложена Л. Эйлером (L. Euler, 1748).

М. ф. может быть использована для выражения $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через степени $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \ldots,$$

$$\sin n\varphi = C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \ldots$$

Обращение М. ф. приводит к формуле для извлечения корня из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots,$$

к-рую также иногда наз. М. ф. *БСЭ-з.*

МУАВРА — ЛАПЛАСА ТЕОРЕМА — см. *Лапласа теорема.*

МУЛЬТИАЛГЕБРА — множество, на к-ром задана система (вообще говоря, частичных) мультиопераций. Частичной мультиоперацией на множестве A наз. частичное отображение $f: A^n \to A^m$ декартовых степеней множества A, где n, $m \geqslant 0$. При этом под A^0 понимается одноэлементное множество. Гомоморфизмом $g: A \to B$ мультиалгебр с одной и той же системой мультиопераций наз. такое отображение g, что если f — мультиоперация, отображающая n-ю декартову степень в m-ю, то

$$g^m(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(g(x_1), \ldots, g(x_n))$$

для всех $x_i \in A$. Понятие М. является обобщением понятия *универсальной алгебры*. В то же время М. является частным случаем *алгебраической системы*, поскольку отображение $f: A^n \to A^m$ можно отождествить с $(n+m)$-арным отношением $(x, f(x))$ на A, $x \in A^n$. Наиболее естественно М. возникают в связи с функторным пониманием универсальных алгебр (см. [1]). Именно, пусть C — *категория*, объектами к-рой являются натуральные числа и нуль, причем объект $m+n$ есть прямое произведение объектов m и n. Тогда функтор F из C в категорию множеств, перестановочный с прямыми произведениями, есть М. на множестве $F(1) = A$ с системой мультиопераций $F(f): A^n \to A^m$, где $f: n \to m$ в C. Гомоморфизмами в этом случае будут служить в точности естественные преобразования функторов.

Лит.: [1] Lawvere F. W., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1963, v. 50, № 5, p. 869—72; [2] Белоусов В. Д., Алгебраические сети и квазигруппы, Киш., 1971. *В. А. Артамонов.*

МУЛЬТИГРАФ — *граф*, в к-ром допускаются кратные ребра.

МУЛЬТИМОДАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, многовершинное распределение,— распределение вероятностей с несколькими *модами* или, что то же самое, с несколькими относительными максимумами, соответствующими этим модам. В отличие от *унимодальных распределений* М. р. встречаются сравнительно редко и, как правило, представляют собой смеси распределений вероятностей. *А. В. Прохоров.*

МУЛЬТИОПЕРАТОРНАЯ ГРУППА, Ω-группа,— универсальная алгебра, являющаяся группой относительно операции сложения $+$ (не обязательно коммутативной), в которой задана система операций Ω-арностей $\geqslant 1$. Предполагается, что нулевой элемент 0 аддитивной группы является подалгеброй, т. е. $0 \ldots 0\omega = 0$ для всех $\omega \in \Omega$. Таким образом, М. г. объединяет понятия группы, линейной алгебры и кольца. Идеалом Ω-группы наз. такой нормальный делитель N в аддитивной группе A, что

$$-(x_1, \ldots, x_n\omega) + (x_1, \ldots, x_{i-1}(a + x_i)x_{i+1} \ldots x_n\omega) \in N$$

для всех $a \in N$, $x_i \in A$, $\omega \in \Omega$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Конгруэнции на М. г. описываются разложениями на смежные классы по идеалам.

Пусть A, B, C суть Ω-подгруппы в Ω-группе G (т. е. подалгебры универсальной алгебры G), причем C порождена A и B. Взаимным коммутантом $[A, B]$ подгрупп A и B наз. идеал в C, порожденный всеми элементами вида

$$-a - b + a + b,$$

$$-(a_1 \ldots a_n\omega) - (b_1 \ldots b_n\omega) + (a_1 + b_1) \ldots (a_n + b_n)\omega,$$

где a, $a_i \in A$, b, $b_i \in B$, $\omega \in \Omega$. Пусть $G' = [G, G]$. М. г. наз. абелевой, если $G' = 0$. Индуктивно определяются идеалы $G_{i+1} = [G_i, G]$, где $G_1 = G'$, и $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$, где $G^{(1)} = G'$. М. г. G наз. нильтентной, если $G_i = 0$, и разрешимой, если $G^{(i)} = 0$ для нек-рого i. На эти классы М. г. переносятся многие свойства соответствующих классов групп и колец. М. г. A наз. мультиоператорной (линейной) Ω-алгеброй над коммутативно-ассоциативным кольцом k с единицей, если сложение в A коммута-

тивно, $\Omega_1 = k$ и все операции из Ω полилинейны над k (см. [2]—[6]).

Лит.: [1] Higgins Ph. J., «Proc. London Math. Soc.», 1956, v. 6, p. 366—416; [2] Курош А. Г., «Сиб. матем. ж.», 1960, т. 1, № 1, с. 62—70; [3] его же, Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [4] его же, Общая алгебра. Лекции 1969—1970 учебного года, М., 1974; [5] его же, «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 1, с. 3—15; [6] Баранович Т. М., Бургин М. С., там же, 1975, т. 30, в. 4, с. 61—106; [7] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 14, М., 1976, с. 191—248; [8] Кольца, [т. 1], Новосиб., 1973, с. 41—45.

В. А. Артамонов.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — арифметическая функция одного аргумента $f(m)$, удовлетворяющая условию

$$f(mn) = f(m) \cdot f(n) \qquad (*)$$

для любой пары взаимно простых чисел m, n. Обычно предполагается, что $f(m)$ не равна тождественно нулю (что равносильно условию $f(1)=1$). М. а. ф. наз. сильно мультипликативной, если $f(p^\alpha) = f(p)$ для всех простых p и всех натуральных α. Если условие (*) выполняется для произвольных двух чисел m, n, а не обязательно взаимно простых, то $f(m)$ наз. вполне мультипликативной; в этом случае $f(p^\alpha) = [f(p)]^\alpha$.

Примеры М. а. ф.: функция $\tau(m)$ — число натуральных делителей натурального m, функция $\sigma(m)$ — сумма натуральных делителей натурального m; *Эйлера функция* $\varphi(m)$, *Мёбиуса функция* $\mu(m)$. Функция $\frac{\varphi(m)}{m}$ является сильно М. а. ф., степенная функция $f(m) = m^s$ — вполне М. а. ф.

Й. П. Кубилюс.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ГРУППА тела — группа, элементами к-рой являются все ненулевые элементы данного тела, а операция совпадает с операцией умножения в теле. М. г. поля — абелева группа.

О. А. Иванова.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ПОЛУГРУППА ассоциативного кольца — полугруппа, образуемая всеми элементами данного ассоциативного кольца относительно умножения. Неассоциативное кольцо по умножению является лишь группоидом, называемым мультипликативным группоидом кольца.

О. А. Иванова.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ РЕШЕТКА — *полная решетка* $L = \langle L, \vee, \wedge \rangle$ с дополнительной бинарной коммутативной и ассоциативной операцией, наз. умножением (и обозначаемой $\cdot$), такой, что наибольший элемент решетки играет роль мультипликативной единицы и

$$b \cdot (\vee_{\alpha \in J} b_\alpha) = \vee_{\alpha \in J} b \cdot b_\alpha$$

для любых b, $b_\alpha \in L$ и произвольного множества индексов J. Теория М. р. возникла как результат применения теоретико-структурных методов к изучению решеток идеалов коммутативных колец (см. [2]), и поэтому большинство понятий и результатов имеет аналоги (или приложения) в коммутативных кольцах (см. [1]).

Пусть L — М. р. и a, $b \in L$, тогда $a:b = \vee \{x \mid x \in L, x \cdot b \leqslant a\}$. Элемент $e \in L$ наз. $\vee$-главным (соответственно $\wedge$-главным), если $(a \vee (b \cdot e)) : e = (a:e) \vee b$ (соответственно $(a \wedge (b:e)) \cdot e = (a \cdot e) \wedge b$) для любых a, $b \in L$; $\vee$-главный и $\wedge$-главный одновременно элемент наз. главным. Нётеровой решеткой наз. модулярная и удовлетворяющая условию обрыва возрастающих цепей М. р., в к-рой каждый элемент является объединением нек-рых главных элементов. Полная решетка M наз. модулем над мультипликативной решеткой L, если для любых $\lambda \in L$, $a \in M$ определено произведение $\lambda a \in M$, причем

$$(\lambda_1 \lambda_2)\, a = \lambda_1 (\lambda_2 a),\ 1a = a,\ 0_L a = 0_M,$$

$$(\vee_{\alpha \in I} \lambda_\alpha)\, (\vee_{\beta \in J} a_\beta) = \vee_{\alpha,\, \beta} \lambda_\alpha a_\beta$$

(здесь $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_\alpha \in L$, a, $a_\beta \in M$, 1 — наибольший элемент L и M, 0_L, 0_M — нули решеток L и M соответственно).

Наиболее изученный класс М. р.— нётеровы решетки. Здесь можно выделить следующие направления. 1) Вопросы представления нётеровой решетки как решетки идеалов подходящего нётерова кольца (известно, что решетка идеалов любого нётерова кольца — нётерова, однако существуют нётеровы решетки, к-рые не могут быть даже вложены в решетку идеалов нётерова кольца [3]). 2) Изучение нётеровых модулей над М. р. 3) Изучение понятий и свойств, к-рые переносятся на нётеровы решетки из теории идеалов нётеровых колец (понятия простого и примарного элементов, размерности, собственного максимального элемента, полулокальной и локальной решетки). Описаны [4] дистрибутивные регулярные локальные нётеровы М. р. Построена теория локализации и ассоциированных простых элементов для гораздо более широкого, чем нётеровы, класса М. р., включающего в себя решетки идеалов произвольных коммутативных колец.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Dilworth R. P., «Pacific J. Math.», 1962, v. 12, p. 481—98; [3] Bogart K., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 22, № 1, p. 129—33; [4] Егожев, «Mich. Math. J.», 1968, v. 15, № 2, p. 167—76; 1969, v. 16, № 3, p. 215—23; [5] Фофанова Т. С., в сб.: Упорядоченные множества и решетки, в. 3, Саратов, 1975, с. 22—40. *Т. С. Фофанова.*

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ СИСТЕМА — ортонормированная на $[a, b]$ система функций $\{\varphi_n(x)\}$, удовлетворяющая условиям:

1) вместе с двумя функциями $\varphi_k(x)$ и $\varphi_l(x)$ система $\{\varphi_n(x)\}$ содержит и их произведение $\varphi_n(x)=\varphi_k(x)\varphi_l(x)$;

2) вместе с каждой функцией $\varphi_k(x)$ система $\{\varphi_n(x)\}$ содержит и функцию $\varphi_m(x)=1/\varphi_k(x)$.

Примеры М. с.: показательная система $\{e^{i2\pi nx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, ортогональная на отрезке $[0, 1]$, *Уолша система* функций.

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958, с. 459—74; [2] Harmuth H., Transmission of information by orthogonal functions, 2 ed., B.— N. Y., 1972; [3] Applications of Walsh functions. 1971. Proc. of the symposium [National technical information service], Wash., 1971. *А. В. Ефимов.*

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЙ ИНТЕГРАЛ — предел произведений вида

$$\Pi_\Delta = e^{A(s_n)(s_n - s_{n-1})} e^{A(s_{n-1})(s_{n-1} - s_{n-2})} \dots e^{A(s_1)(s_1 - s_0)},$$

где $A(s)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция со значениями в пространстве ограниченных операторов в банаховом пространстве E, Δ — разбиение отрезка $[a, b]$ точками $s_0=a, s_1, \dots, s_n=b$. Предел берется, когда диаметр разбиения $|\Delta| \to 0$ и обозначается

$$\overleftarrow{\int_a^b} \exp A(s)\, ds.$$

Если операторы $A(t)$ коммутируют при различных t, то

$$\overleftarrow{\int_a^b} \exp A(s)\, ds = e^{\int_a^b A(s)\, ds}$$

М. и. является удобной формой представления *эволюционного оператора* $U(t, \tau)$ для дифференциального уравнения $X=A(t)X$ (см. [1]). При этом

$$U(t, \tau) = \int_\tau^t A(s)\, ds. \qquad (1)$$

Произведение, пределом к-рого является последний М. и., также является эволюционным оператором для уравнения с кусочно постоянным оператором $\tilde{A}(t)=A(s_k)$ при $s_{k-1}<t\leqslant s_k$.

Если $A(s)$ и $B(s)$ — две непрерывные оператор-функции, то справедлива формула

$$\int_a^b \exp(A(s)+B(s))\,ds = \lim_{|\Delta|\to 0} \overleftarrow{\prod_{k=1}^{n}} e^{A(s_k)(s_k-s_{k-1})} e^{B(s_k)(s_k-s_{k-1})}, \quad (2)$$

где знак $\overleftarrow{\ }$ над произведением означает, что множители с меньшими номерами пишутся правее множителей с большими.

Формулы (1), (2) допускают обобщения на нек-рые классы дифференциальных уравнений с неограниченными оператор-функциями, откуда получаются представления решений дифференциальных уравнений с частными производными параболического и шрёдингерова типов в виде интегралов по траекториям (континуальных интегралов) (см. [2]).

Формулы типа (2) лежат также в основе нек-рых численных методов решения уравнений.

Если $f(t)$ — скалярная непрерывная функция, а $F(t)$ операторнозначная непрерывная функция ограниченной вариации, то существует предел

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \overleftarrow{\prod_{k=1}^{n}} e^{f(s_k)(F(s_k)-F(s_{k-1}))} = \overleftarrow{\int_a^b} \exp(f(t)\,dF(t)),$$

наз. мультипликативным интегралом Стилтьеса. Эти интегралы нашли применение в теории J-нерастягивающих матриц и операторов (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970; [2] Далецкий Ю. Л., «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, в. 5, с. 3—115; [3] Потапов В. П., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1955, т. 4, с. 125—236; [4] Гинзбург Ю. П., «Матем. исследования», (Кишинев), 1967, т. 2, № 2, с. 52—83.
С. Г. Крейн.

МУЛЬТИПЛИКАТОР ГРУППЫ, представленной в виде факторгруппы F/R свободной группы F,— факторгруппа

$$R \cap F'/[R, F],$$

где F' — коммутант группы F, а $[R, F]$ — взаимный коммутант R и F. Мультипликатор группы не зависит от способа представления группы в виде факторгруппы свободной группы. Он совпадает со второй группой гомологий группы F/R с целочисленными коэффициентами. При изучении М. г. важным является вопрос о его нетривиальности. *А. Л. Шмелькин.*

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ первого и второго рода — собственные значения *монодромии оператора* канонич. уравнений.

В комплексном гильбертовом пространстве уравнения вида $x=iJH(t)x$, где J и $H(t)$ — самосопряженные операторы, $J^2=I$ и $H(t)$ периодичен, наз. каноническими. В конечномерном случае собственные числа оператора монодромии $U(T)$ для этого уравнения наз. мультипликаторами. Если все решения канонич. уравнения являются ограниченными на всей оси (уравнение устойчиво), то М. лежат на единичной окружности. Если рассмотреть канонич. уравнение $\dot{x}=i\lambda JH(t)x$ с действительным параметром, то все М. делятся на две группы: М. 1-го (2-го) рода, к-рые движутся против (по) часовой стрелке при увеличении параметра λ.

Канонич. уравнение наз. сильно устойчивым, если оно устойчиво и остается устойчивым при достаточно малых вариациях оператора $H(t)$. Для сильной устойчивости необходимо и достаточно, чтобы все М. лежали на единичной окружности и чтобы не было совпадающих М. разного рода.

Теория М. 1-го и 2-го родов позволила получить ряд тонких признаков устойчивости и оценок зон устойчивости для канонич. уравнений. В терминах М. проведена гомотопич. классификация устойчивых и неустойчивых канонич. уравнений.

Лит.: [1] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970; [2] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972.

С. Г. Крейн.

МУЛЬТИПОЛЯ ПОТЕНЦИАЛ — гармоническая функция в области $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, являющаяся частной производной какого-либо порядка $|m| \geqslant 1$ от главного фундаментального решения уравнения Лапласа, т. е. функция вида

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \frac{1}{r^{n-2}} \quad \text{при} \quad n \geqslant 3,$$

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} \ln \frac{1}{r} \quad \text{при} \quad n = 2,$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\,, \quad |m| = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

Пусть для краткости $n=3$; при $|m|=1$ потенциалы диполей имеют вид

$$-\frac{x_1}{r^3} = -\frac{\cos\alpha}{r^2}\,, \quad -\frac{x_2}{r^3} = -\frac{\cos\beta}{r^2}\,, \quad -\frac{x_3}{r^3} = -\frac{\cos\gamma}{r^2}\,,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы радиус-вектора точки наблюдения (x_1, x_2, x_3). Функция $-x_1/r^3$, напр., истолковывается как потенциал диполя с моментом 1 и осью Ox_1, то есть как предел при $a \to 0+$ суммы ньютоновых потенциалов массы $-1/2a$, помещенной в точке $(a, 0, 0)$, и массы $1/2a$, помещенной в точке $(-a, 0, 0)$; иначе эту функцию можно представить себе как магнитный потенциал маленького магнита, расположенного вдоль оси Ox_1 в начале координат. Аналогично, функции $-x_2/r^3$ и $-x_3/r^3$ суть потенциалы диполей с осями соответственно Ox_2 и Ox_3. Составляя линейные комбинации этих функций, можно получить потенциал произвольно ориентированного диполя с любым моментом μ. При $|m|=2$ имеют место квадруполей потенциалы, получаемые предельным переходом для определенных систем четырех точечных масс, сумма которых всегда равна нулю, и т. д.

Ньютонов потенциал $U(x_1, x_2, x_3)$ ограниченного тела G плотности $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$, расположенного так, что $0 \in G$, можно разложить в ряд по М. п.

$$U(x_1, x_2, x_3) = \iiint_G \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(x_1-\xi)^2 + (x_2-\eta)^2 + (x_3-\zeta)^2}} =$$

$$= \frac{M}{r} + \sum_{|m|=1}^{\infty} \frac{(-1)^{|m|}}{m_1!\, m_2!\, m_3!}\, a_{m_1 m_2 m_3} \times$$

$$\times \frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \partial x_3^{m_3}} \frac{1}{r}\,, \qquad (1)$$

где

$$M = \iiint_G \rho(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

— общая масса тела G, а коэффициенты

$$a_{m_1 m_2 m_3} = \iiint_G \xi^{m_1} \eta^{m_2} \zeta^{m_3} \rho(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

наз. при $|m|=1$ дипольными моментами, при $|m|=2$ — квадрупольными моментами и, вообще, при всех $|m| \geqslant 1$ — мультипольными моментами. Ряд (1) отличается от

разложения потенциала $U(x_1, x_2, x_3)$ по сферич. функциям

$$U(r, \theta, \lambda) = \frac{M}{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=-m}^{m} q_{ml} \frac{Y_{ml}(\theta, \lambda)}{r^{m+1}} \quad (2)$$

перегруппировкой членов, и члены ряда (2) можно также истолковывать как потенциалы специальным образом ориентированных мультиполей (см. [1]). Поэтому коэффициенты q_{ml} также часто наз. соответственно д и п о л ь н ы м и, к в а д р у п о л ь н ы м и и, вообще, м у л ь т и п о л ь н ы м и м о м е н т а м и.

Разложения типа (1) и (2) применяются для описания и приближенного представления скалярных или векторных потенциалов не только в связи с фундаментальным решением уравнения Лапласа, но и уравнения Гельмгольца (см. [2]).

В гидродинамике плоских течений идеальной несжимаемой жидкости находят также применение комплексные М. п. вида

$$\frac{\mu e^{i\alpha}}{z^m}, \quad m \geqslant 1,$$

где z — комплексное переменное, μ и α — соответственно момент и угол ориентации мультиполя. Получающийся при $m=1$, $\mu=1$ и $\alpha=0$ дипольный потенциал истолковывается как предел при $a \to 0+$ суммы комплексных потенциалов источника мощности 1 в точке $z=a>0$ и стока мощности 1 в точке $z=-a$. Разложению (1) здесь соответствует разложение комплексного потенциала скоростей потока, обтекающего плоское тело G, в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$w = f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m e^{i\alpha_m}}{z^m}.$$

При этом действие обтекаемого тела G заменяется суммарным действием М. п., помещенных в начале координат (см. [3]).

Лит.: [1] М о р с Ф. М., Ф е ш б а х Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 2, М., 1960; [2] Д ж е к с о н Д ж., Классическая электродинамика, пер. с англ., М., 1965; [3] М и л н-Т о м с о н Л.-М., Теоретическая гидродинамика, пер. с англ., М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

МУРА ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство M с единственной нетривиальной приведенной группой гомологий

$$\tilde{H}_k(M) = G, \quad \tilde{H}_i(M) = 0, \quad i \neq k.$$

Если $K(\mathbb{Z}, n)$ — *Эйленберга — Маклейна пространство* группы $\mathbb{Z}$ целых чисел, а $M_k(G)$ — М. п. с $\tilde{H}_k(M_k(G)) = G$, то

$$\lim_{N \to \infty} \left[\sum^{N+k} X, K(\mathbb{Z}, N+n) \wedge M_k(G) \right] \cong H^n(X, G),$$

т. е. $\{K(\mathbb{Z}, n) \wedge M_k(G)\}$ — спектр теории когомологий $H^*(\ , G)$. Это позволяет распространить понятие когомологий с произвольными коэффициентами на обобщенные теории когомологий. Для любого спектра E спектр $E \wedge M_k(G)$ определяет теорию когомологий $(E \wedge M_k(G))^*$, наз. т е о р и е й E^*-к о г о м о л о г и й с г р у п п о й к о э ф ф и ц и е н т о в G. Для определения обобщенных теорий гомологий с коэффициентами в группе G используется т. н. к о - М у р а п р о с т р а н с т в о $M^k(G)$, характеризуемое равенствами

$$\tilde{H}^k(M^k(G)) = G, \quad \tilde{H}^i(M^k(G)) = 0, \quad i \neq k.$$

Напр., группа $\pi_i(X; G) = [M^k(G), X]$ наз. г о м о т о п и ч е с к о й г р у п п о й п р о с т р а н с т в а X с к о э ф ф и ц и е н т а м и в G. Однако пространство $M^k(G)$ существует не для всех пар (G, k). Если группа G конечно порождена, то $M^k(G)$ существует.

Лит.: [1] М о о г е J. C., «Ann. Math.», 1954, v. 59, № 3, p. 549—57.

А. Ф. Харшиладзе.

МУФАНГ ЛУПА — лупа, в к-рой выполняются следующие (эквивалентные между собой) тождества:

$$x(y\cdot xz)=(xy\cdot x)z,$$
$$(zx\cdot y)x=z(x\cdot yx),$$
$$xy\cdot zx=x(yz\cdot x).$$

Эти лупы были введены и изучены Р. Муфанг [1]. Она, в частности, доказала следующую теорему, показывающую близость этого класса луп к группам: если три элемента a, b, c М. л. связаны ассоциативным соотношением $ab\cdot c=a\cdot bc$, то они порождают ассоциативную подлупу, т. е. группу (т е о р е м а М у ф а н г). Следствием этой теоремы является д и а с с о ц и а т и в н о с т ь М. л., т. е. любые два элемента лупы порождают ассоциативную подлупу.

Для коммутативных М. л., к-рые определяются одним тождеством

$$x^2\cdot yz=xy\cdot xz,$$

верна следующая теорема: всякая коммутативная М. л. с n образующими центрально нильпотентна класса нильпотентности не более $n-1$ (см. [2]). Центральная нильпотентность определяется аналогично нильпотентности в группах.

Если нек-рая лупа изотопна М. л., то она сама есть М. л., т. е. свойство быть М. л. универсально. Более того, изотопные коммутативные М. л. изоморфны.

Лит.: [1] M o u f a n g R., «Math. Ann.», 1935, Bd 110, S. 416—30; [2] B r u c k R. H., A survey of binary systems, B.— Hdlb.— Gött., 1958.

В. Д. Белоусов.

МЮНЦА ТЕОРЕМА, т е о р е м а о п о л н о т е с и с т е м ы с т е п е н е й $\{x^{\lambda_k}\}$ н а о т р е з к е $[a, b]$, $0<a<b<\infty$: пусть $0<\lambda_1<\lambda_2<\dots$; для того чтобы для любой функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$, и любого $\varepsilon>0$ нашлась линейная комбинация

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k x^{\lambda_k}$$

такая, что

$$\|f-P\|_{\mathbb{C}}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(x)|<\varepsilon,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}=\infty. \qquad (*)$$

В случае отрезка $[a, b]$, $a=0$, к системе $\{x^{\lambda_k}\}$ присоединяют единицу и для полноты пополненной системы

условие (*) остается по-прежнему необходимым и достаточным. Условие $a \geqslant 0$ существенно: так, система $\{x^{2k}\}_{k=0}^{\infty}$ (для нее выполняется условие (*)) не полна на $[-1, 1]$ (нечетную функцию нельзя приблизить с любой точностью комбинацией четных степеней).

Условие (*) необходимо и достаточно для полноты $\{x^{\lambda_k}\}$, $-1/p < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, на $[a, b]$, $a \geqslant 0$, в метрике L_p, $p > 1$, т. е. чтобы для каждой функции $f(x) \in L_p(a, b)$ и любого $\varepsilon > 0$ нашлась линейная комбинация $P(x)$ такая, что

$$\|f - P\|_{L_p} = \left| \int_a^b |f(x) - P(x)|^p \, dx \right|^{1/p} < \varepsilon.$$

Теорема получена Х. Мюнцем [1].

Лит.: [1] Müntz H., Approximationssatz von Weierstrass [Festschrift H. A. Schwarz], [B.], 1914; [2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965.

А. Ф. Леонтьев.

МЯГКИЙ ПУЧОК — пучок множеств $\mathcal{F}$ на топологич. пространстве X, любое сечение к-рого над нек-рым замкнутым подмножеством в X может быть продолжено до сечения пучка $\mathcal{F}$ над всем X. Напр., М. п. являются: пучок ростков разрывных сечений произвольного пучка множеств на X; любой *вялый пучок* $\mathcal{F}$ на паракомпактном пространстве X; любой *тонкий пучок* $\mathcal{F}$ абелевых групп на паракомпактном пространстве X. Свойство мягкости пучка $\mathcal{F}$ на паракомпактном пространстве X локально: пучок $\mathcal{F}$ является М. п. тогда и только тогда, когда любая точка $x \in X$ обладает такой открытой окрестностью U, что $\mathcal{F}|U$ — М. п. на U. М. п. на паракомпактном пространстве индуцирует М. п. на любом замкнутом (а если X метризуемо, то и на любом локально замкнутом) подпространстве. Пучок модулей над М. п. колец является М. п.

Если

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \ldots$$

— точная последовательность М. п. абелевых групп на паракомпактном пространстве X, то соответствующая последовательность групп сечений

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0(X) \longrightarrow \mathcal{F}^1(X) \longrightarrow \ldots$$

тоже точна. Когомологии $H^p(X, \mathcal{F})$ любого М. п. $\mathcal{F}$ абелевых групп на паракомпактном пространстве X тривиальны при $p > 0$.

Лит.: [1] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [2] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976.

А. Л. Онищик.

НАБЛЮДЕНИЙ ОБРАБОТКА — применение к результатам наблюдений математич. методов для построения выводов об истинных значениях искомых величин. Всякий результат наблюдений, связанных с измерениями, содержит ошибки (погрешности) различного происхождения. По своему характеру ошибки делятся на три группы: грубые, систематические и случайные (о грубых ошибках см. ст. *Ошибок теория*; в дальнейшем будет предполагаться, что наблюдения не содержат грубых ошибок). Обычно результат измерения Y нек-рой величины μ считают случайной величиной; тогда ошибка измерения $\delta=Y-\mu$ будет также случайной величиной. Пусть $b=\mathsf{E}\delta$ — математич. *ожидание ошибки*. Тогда

$$Y=\mu+b+(\delta-b).$$

Величина b наз. с и с т е м а т и ч е с к о й о ш и б к о й, а $\delta-b$ — с л у ч а й н о й о ш и б к о й; математич. ожидание $\delta-b$ равно нулю. Систематич. ошибка b часто бывает известна заранее и в этом случае легко устраняется. Напр., в астрономии при измерении величины угла между направлением на светило и плоскостью горизонта систематич. ошибка является суммой двух ошибок: систематич. ошибки, к-рую дает прибор при отсчете данного угла (инструментальная ошибка) и систематич. ошибки, обусловленной рефракцией, т. е. преломлением лучей света в атмосфере. Инструментальная ошибка определяется с помощью таблицы или графика поправок для данного прибора; ошибку, связанную с рефракцией (для зенитных расстояний меньших 80°), достаточно точно можно вычислить теоретически.

Влияние случайных ошибок оценивается с помощью методов теории ошибок. Если Y_1, Y_2, ..., Y_n — результаты n независимых измерений величины μ, произведенных в одинаковых условиях и одинаковыми средствами, то обычно полагают

$$\mu\approx\overline{Y}-b=[(Y_1+Y_2+\ldots+Y_n)/n]-b, \qquad (1)$$

где b — систематич. ошибка.

В том случае, когда требуется вычислить значение нек-рой функции $f(y)$ в точке $y=\mu$, причем величина μ оценивается по n независимым наблюдениям Y_1, Y_2, ..., Y_n, приближенно полагают

$$f(\mu)\approx f(\overline{Y}-b). \qquad (2)$$

Пусть B — математич. ожидание величины

$$\Delta=f(\overline{Y}-b)-f(\mu),$$

тогда

$$f(\overline{Y}-b)=f(\mu)+B+(\Delta-B).$$

Поэтому B — систематич. ошибка и $(\Delta-B)$ — случайная ошибка приближенного равенства (2). Если случайные ошибки независимых наблюдений Y_1, Y_2, ..., Y_n подчиняются одному и тому же распределению и функция $f(y)$ в окрестности точки $y=\mu$ мало отличается от линейной, то $B\approx 0$ и

$$\Delta\approx f'(\mu)\,\overline{(\delta-b)},$$

где $\overline{(\delta-b)}$ — арифметич. среднее случайных ошибок исходных наблюдений. Это означает, что если

$$\mathsf{E}(\delta_i-b)^2=\sigma^2,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

то

$$\mathsf{E}\,(\Delta - B)^2 \approx \mathsf{E}\Delta^2 \approx [f'\,(\mu)]^2\,\sigma^2/n \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$.

В случае нескольких неизвестных параметров Н. о. часто осуществляется с помощью метода наименьших квадратов.

Если изучается зависимость между случайными величинами X и Y на основе совокупности n независимых наблюдений, каждое из к-рых есть вектор (X_i, Y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, подчиняющийся исследуемому совместному распределению величин X и Y, то соответствующая Н. о. выполняется с помощью теории корреляции.

При Н. о. приходится делать нек-рые предположения и допущения о характере функциональной зависимости, о распределении случайных ошибок и т. д., поэтому Н. о. должна включать в себя проверку согласия сделанных допущений с результатами использованных и др. наблюдений. См. *Статистических гипотез проверка.*

Лит.: [1] Уиттекер Э., Робинсон Г., Математическая обработка результатов наблюдений, пер. с англ., 2 изд., Л.— М., 1935; [2] Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистичсской теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962.

Л. Н. Большев.

НАВЬЕ — СТОКСА УРАВНЕНИЯ — основные уравнения движения вязкой жидкости, представляющие математическое выражение законов сохранения импульса и массы. Для неустановившегося течения сжимаемой жидкости Н.— С. у. в декартовой системе координат могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned}
\rho\frac{du}{dt} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{w}\right)\right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right], \\
\rho\frac{dv}{dt} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{w}\right)\right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right], \\
\rho\frac{dw}{dt} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{w}\right)\right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right], \\
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где $\boldsymbol{w}$ — вектор скорости с проекциями u, v, w на соответствующие оси координат x, y, z; p — давление, ρ — плотность, μ — коэффициент вязкости; X, Y, Z — проекции вектора массовой силы K на координатные оси; $\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \boldsymbol{w}\ \operatorname{grad}\ \boldsymbol{w}$ — субстанциональная производная. При выводе уравнений (1) использован обобщенный закон трения Ньютона, предполагающий, что для движущихся жидкостей и газов напряжения пропорциональны скоростям деформаций. Для исследования сжимаемых течений к уравнениям (1) необходимо добавить уравнение состояния, связывающее между собой давление, плотность и температуру, и уравнение энергии.

Уравнения (1), составляющие основу гидродинамики, впервые были получены Л. Навье [1] и С. Пуассоном [2]

на основе соображений о действии межмолекулярных сил. Б. Сен-Венан [3] и Дж. Г. Стокс [4] вывели эти уравнения, допуская только, что нормальные и касательные напряжения линейно связаны со скоростями деформаций.

Для течений несжимаемой изотермич. жидкости ($\rho=\text{const}$) уравнения (1) в векторной форме могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned} \rho\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} &= \boldsymbol{K}-\operatorname{grad} p+\mu\Delta\boldsymbol{w}, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{w} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

При анализе Н.— С. у., как правило, рассматриваются в безразмерной форме, к-рая получается путем отнесения всех величин, входящих в уравнения, к соответствующим характерным величинам. Так, в случае стационарных течений несжимаемой жидкости при отсутствии массовых сил в Н.— С. у. появляется один определяющий безразмерный параметр, наз. *Рейнольдса числом*:

$$\mathrm{Re}=\rho Vl/\mu=Vl/\nu,$$

где V и l — характерные скорости и линейный размер, ν — кинематическая вязкость.

Для исследования двумерных несжимаемых течений часто используются Н.— С. у. в форме Гельмгольца:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\xi, \\ \Delta\psi &= -\xi, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где ψ — функция тока и ξ — вихрь связаны с проекциями скорости u и v следующим образом:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \xi=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Основные краевые задачи для стационарных Н.— С. у. связаны с исследованием течений в замкнутых полостях, каналах, течений со свободными поверхностями, с обтеканием тел, течений в струях и следах за телами. При этом интегрирование Н.— С. у. проводится в областях (конечных или бесконечных), на границе к-рых ставятся условия из соображений физич. характера (условия прилипания или скольжения на поверхности тел, вдува или отсоса на проницаемых поверхностях, условия внешнего потока вдали от обтекаемого тела, условия на свободной границе и др.). Для нестационарных задач помимо граничных условий должны задаваться начальные условия.

Строгий математич. анализ разрешимости краевых задач гидроаэромеханики для Н.— С. у. сжимаемого газа отсутствует (1982). Имеются нек-рые результаты в математич. теории динамики вязкой несжимаемой жидкости (см. *Гидродинамики математические задачи*).

Первоначально усилия исследователей были направлены на отыскание точных решений. Напр., для несжимаемой жидкости имеются точные решения для установившихся течений: в плоском канале при заданном постоянном перепаде давления (т е ч е н и е П у а з ё й л я); между двумя параллельными плоскими стенками, одна из к-рых покоится, а другая движется в своей плоскости с постоянной скоростью (т е ч е н и е К у э т т а); в прямолинейной трубе с круглым поперечным сечением при постоянном перепаде давления (т е ч е н и е Х а г е н а — П у а з ё й л я). Найдены также нек-рые автомодельные решения, среди них: плоскопараллельное (и осесимметричное) течение вблизи критической точки (т е ч е н и е Х о у а р т а); течения в суживающемся и расширяющемся каналах (т е ч е н и е Г а м е л я).

П р и б л и ж е н н ы е р е ш е н и я Н.— С. у. основаны на упрощающих предположениях. Здесь сле-

дует отметить решения при очень малых числах Рейнольдса ($Re \ll 1$), соответствующие так наз. ползущим движениям, среди к-рых наиболее известно т е ч е н и е С т о к с а около шара. Предельный случай очень больших чисел Рейнольдса приводит к теории гидродинамического пограничного слоя. Уравнения пограничного слоя позволили решить большой круг практически важных задач на основе широко разработанных приближенных и численных методов.

Для решения нек-рых классов задач динамики вязких жидкостей и газов разработаны достаточно эффективные алгоритмы, основанные на использовании разностных схем. Напр., для задачи расчета ламинарных течений вязких несжимаемых жидкостей в областях простой формы (или около тел простой формы). Наибольшее распространение здесь получили разностные методы для уравнений в форме (3), хотя для этой системы и имеются трудности, связанные с определением граничных условий для ξ. Первые результаты по решению стационарного варианта системы (3) были получены с помощью простейших явных пятиточечных схем и итерационных методов (см. [6]). Решение стационарных задач динамики вязкой несжимаемой жидкости большей частью основано на использовании метода установления и применении явных и неявных схем для системы (3). Среди явных схем используются двухслойные по времени схемы с симметричной аппроксимацией первых производных центральными разностями и решением второго уравнения из (3) на каждом временном слое с помощью метода Зейделя, а также трехслойная схема, в к-рой конвективные члены аппроксимируются по схеме «крест», а диффузионные — по схеме Дюфорта — Франкеля. С помощью уже этих схем были получены нек-рые результаты при решении стационарных задач о ламинарных двумерных течениях в суживающемся и расширяющемся каналах, в прямоугольной выемке с движущейся крышкой, а также нестационарной задаче обтекания в канале плоской пластины, расположенной перпендикулярно к направлению потока.

Неявные схемы, как правило, основаны на применении метода дробных шагов (см. [8]). Общая структура таких схем для уравнения (3) может быть представлена, напр., в виде

$$\frac{\xi^{n+1/2}-\xi^n}{0{,}5\tau} = L_{1\xi}\xi^{n+1/2} + L_{2\xi}\xi^n,$$

$$\frac{\xi^{n+1}-\xi^{n+1/2}}{0{,}5\tau} = L_{1\xi}\xi^{n+1/2} + L_{2\xi}\xi^{n+1},$$

$$\frac{\psi^{s+1/2,\,n+1}-\psi^{s,\,n+1}}{0{,}5\sigma} +$$

$$+ L_{1\psi}\psi^{s+1/2,\,n+1} + L_{2\psi}\psi^{s,\,n+1} = -\xi^{n+1},$$

$$\frac{\psi^{s+1,\,n+1}-\psi^{s+1/2,\,n+1}}{0{,}5\sigma} +$$

$$+ L_{1\psi}\varphi^{s+1/2,\,n+1} + L_{2\psi}\psi^{s+1,\,n+1} = -\xi^{n+1},$$

где $L_{1\xi}$, $L_{2\xi}$, $L_{1\psi}$, $L_{2\psi}$ — разностные одномерные операторы:

$$L_{1\xi} = \frac{\delta^2\xi}{\delta x^2} - \frac{\delta\psi}{\delta y}\frac{\delta\xi}{\delta x}, \quad L_{2\xi} = \frac{\delta^2\xi}{\delta y^2} + \frac{\delta\psi}{\delta x}\frac{\delta\xi}{\delta y},$$

$$L_{1\psi} = \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}, \quad L_{2\psi} = \frac{\delta^2\psi}{\delta y^2}.$$

В этих формулах τ — временной шаг, σ — итерационный параметр, s, $s+1/2$, $s+1$ — итерационные индексы при решении уравнения Пуассона из (3) на $(n+1)$-временном слое итерационным методом; $\frac{\delta^2}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^2}{\delta y^2}$, $\frac{\delta}{\delta x}$, $\frac{\delta}{\delta y}$ — разностные операторы, аппроксимирующие соответствующие вторые и первые производные. Первое уравнение из (3) используется для нахождения значе-

ний ξ, а второе — значений ψ на последующем временном слое. Аппроксимация вторых производных, как правило, симметричная, а аппроксимация первых производных в уравнении для ξ проводится или симметричными разностями, или односторонними разностями против потока с учетом знака скорости. Хорошо зарекомендовала себя схема в [9] с применением монотонной аппроксимации (см. [10]). Эта схема для первого уравнения (3) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{\xi^{n+1}-\xi^n}{\tau}+\frac{u-|u|}{2}\left(\frac{\delta\xi}{\delta x}\right)^+ + \frac{u+|u|}{2}\left(\frac{\delta\xi}{\delta x}\right)^- + \\ + \frac{v-|v|}{2}\left(\frac{\delta\xi}{\delta y}\right)^+ + \frac{v+|v|}{2}\left(\frac{\delta\xi}{\delta y}\right)^- = \\ = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{1+\frac{|u|h}{2}}\frac{\delta^2\xi}{\delta x^2}+\frac{1}{1+\frac{|v|l}{2}}\frac{\delta^2\xi}{\delta y^2}\right),\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где h и l — шаги сетки по x и y,

$$\left(\frac{\delta\xi}{\delta x}\right)^+ = \frac{\xi^{n+1}_{i+1}-\xi^{n+1}_{i,j}}{h},\quad \left(\frac{\delta\xi}{\delta x}\right)^- = \frac{\xi^{n+1}_{i,j}-\xi^{n+1}_{i-1,j}}{h},$$

$$\left(\frac{\delta\xi}{\delta y}\right)^+ = \frac{\xi^{n+1}_{i,j+1}-\xi^{n+1}_{i,j}}{l},\quad \left(\frac{\delta\xi}{\delta y}\right)^- = \frac{\xi^{n+1}_{i,j}-\xi^{n+1}_{i,j-1}}{l}.$$

Разностные уравнения (4) обычно приводятся к трехдиагональному виду и совместно с соотношениями, аппроксимирующими граничные условия, решаются методом прогонки. При решении стационарных задач методом установления может применяться либо поочередное решение уравнений (4) (без внутренних итераций для определения ψ), либо одновременное решение соответствующих уравнений из (4) для совместного нахождения ξ и ψ с помощью векторной прогонки. Трудности, связанные с постановкой граничных условий для уравнений (3), заключаются в том, что обычные граничные условия прилипания на твердых стенках для Н.— С. у. дают условия только для ψ. Для численного решения уравнения для ξ формально требуют граничные условия для вихря. Эти условия могут быть получены на каждом временном слое либо приближенно на границе области, либо путем интегрирования уравнения для ξ только в области, расположенной внутри основной области интегрирования [9].

Для исследования двумерных течений уравнения в форме (2) используются реже и, как правило, с некоторой регуляризацией уравнения неразрывности. Вариационно-сеточные методы, и в частности метод конечных элементов, нашли свое применение для решения уравнений динамики вязкой жидкости в форме (2) и (3).

С помощью разностных методов исследовались разнообразные задачи течения вязких несжимаемых жидкостей. Среди них задачи обтекания эллиптического и кругового цилиндра (в том числе вращающегося), пластины конечной толщины (в том числе под углом атаки), цилиндрич. торца, капли, плоской ступени и др. Изучались также течения в каверне, в плоском и цилиндрич. канале, в канале с препятствиями на стенках, течения со свободной поверхностью, течения естественной, вынужденной и смешанной конвекции.

Применение разностных методов для расчета течений вязкого сжимаемого газа на основе полных Н.— С. у. сопряжено с нек-рыми дополнительными трудностями по сравнению с расчетами течений несжимаемой вязкой жидкости. Это связано с тем, что в течениях сжимаемого газа существуют не только области пограничных слоев, но и другие области больших градиентов искомых функций, к-рые соответствуют ударным волнам и волнам разрежения в невязких течениях газа. Сложность самой системы Н.— С. у. для сжимаемого вязкого газа предъ-

является повышенные требования к быстродействию и памяти ЭВМ. Использование явных схем в этом случае приводит к более простым алгоритмам. Примером явной схемы, хорошо зарекомендовавшей себя для расчета стационарных течений методом установления, является схема, к-рая для простого модельного уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (5)$$

может быть записана в виде

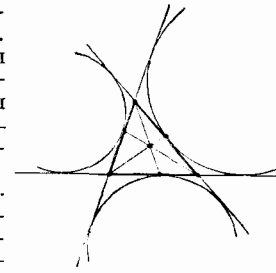
$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + \nu\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}.$$

Эта схема аппроксимирует (5) на гладком установившемся решении с порядком $O(h^2)$ и устойчива при $\tau < h/a$. Условие устойчивости не зависит от ν. Это означает, что при применении этой схемы к Н.— С. у. условие устойчивости не зависит от числа Рейнольдса. Тем не менее ограничение на итерационный шаг по времени для явных схем является существенным. Неявные схемы, как правило, не обладают такими ограничениями и абсолютно устойчивы для соответствующих линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Неявные схемы для расчета двумерных течений вязкого газа используются в сочетании с методом дробных шагов. Построены (1982) различные разностные схемы метода переменных направлений: с полной и неполной аппроксимацией на промежуточных слоях, дивергентные и недивергентные (см. [11]), схемы повышенного порядка точности (выше второго) относительно шагов сетки по пространству (см. [12]). Численное моделирование течений вязкого газа на основе Н.— С. у. связано с расчетом течений сложной структуры и с использованием достаточно подробных сеток, что невозможно в силу ограниченности памяти ЭВМ без применения метода взаимно перекрывающихся областей (см. [13]). Разностные методы решения Н.— С. у. применялись для исследования большого числа задач динамики вязкого газа. Среди них задачи — сверхзвукового обтекания затупленных тел (сферы, торца кругового цилиндра), составных тел (сфера — конус, сфера — цилиндр), клина, передней кромки плоской пластины. Рассмотрены также течения в следах за телами конечных размеров, течения в соплах и воздухозаборниках, течения в полости при внешнем до- и сверхзвуковом потоке, исследовалось взаимодействие пограничного слоя с ударной волной, структура ударной волны в плазме и др. задачи. Перечисленные течения предполагались, как правило, ламинарными.

Лит.: [1] Navier, «Mém. Acad., sci.», 1827, t. 7, p. 375—94; [2] Poisson S. D., «J. Ecole polytechn.», 1831, t. 13, p. 1—174; [3] Saint-Venant, «C. r. Acad. sci.», 1843, t. 17; [4] Stokes G. G., «Trans. Cambr. Phil. Soc.», 1849, v. 8, p. 287—319; [5] Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, пер. с нем., М., 1974; [6] Том А., Эйплт К., Числовые расчеты полей в технике и физике, пер. с англ., М.— Л., 1964; [7] Брайловская И. Ю., Кускова Т. В., Чудов Л. А., в кн.: Вычислительные методы и программирование, в. 11, М., 1968, с. 3—18; [8] Яненко Н. Н., Методы дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967; [9] Полежаев В. И., Грязнов В. Л., «Докл. АН СССР», 1974, т. 219, № 2, с. 301—04; [10] Самарский А. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1965, т. 5, с. 548—51; [11] Ковеня В. М., Яненко Н. Н., Метод расщепления в задачах газовой динамики, Новосиб., 1981; [12] Толстых А. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1978, т. 18, № 1, с. 139—53; [13] Кокошинская Н. С., Павлов Б. М., Пасконов В. М., Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом, М., 1980; [14] Темам Р., Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ, пер. с англ., М., 1981; [15] Численное исследование современных задач газовой динамики, М., 1974; [16] Роуч П. Дж., Вычислительная гидродинамика, пер. с англ., М., 1980; [17] Reyret R., Viviand H., «Lect. Notes Comput. Sci.», 1974, № 11, p. 160—84; [18] Burggraf O. R., «Lect. Notes Phys.», 1976, [№ 59], p. 52—64.

В. М. Пасконов.

НАГЕЛЯ ТОЧКА — точка пересечения прямых (см. рис.), соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с внеописанными окружностями. Названа по имени Х. Нагеля (Ch. Nagel, 1836).



А. Б. Иванов.

НАГРУЖЕННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение, которое в одномерном случае имеет вид

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds - \lambda \sum_{j=1}^{m} K_1(x, s_j)\varphi(s_j) = f(x), \qquad (1)$$

где φ — искомая, f — заданная в $[a, b]$ непрерывные функции, $s_j \in [a, b]$, $j=1, \ldots, m$,— заданные фиксированные точки, K, K_1 — заданные непрерывные в квадрате $[a, b]\times[a, b]$ функции. В том случае, когда

$$K_1(x, s_j) = a_j K(x, s_j),$$

где a_j — положительные постоянные, уравнение (1) можно представить в виде

$$\varphi(x) - \lambda {}^{*}\!\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x), \quad x \in [a, b], \qquad (2)$$

где новый символ интегрирования от произвольной конечной интегрируемой функции ψ определяется по формуле (см. [1]):

$${}^{*}\!\int_a^b \psi(s)\,ds = \int_a^b \psi(s)\,ds + \sum_{j=1}^{m} a_j \psi(s_j).$$

Для уравнения (2) остается в силе теория *Фредгольма уравнений*, а также в случае симметричного ядра теория *интегральных уравнений с симметричным ядром*.

В случае многомерных Н. и. у. искомая функция может участвовать под интегралами, к-рые распространены на многообразиях различных размерностей. Напр., в двумерном случае Н. и. у. может иметь вид

$$\varphi(x) - \lambda \iint_D K_1(x, y)\varphi(y)\,d\sigma_y + \lambda \int_\Gamma K_2(x, y)\varphi(y)\,ds_y + \lambda \sum_{j=1}^{m} K_3(x, y_j)\varphi(y_j) = f(x), \quad x \in D,$$

где D — нек-рая область на плоскости, Γ — ее граница, y_j — фиксированные точки, принадлежащие замкнутой области $D \cup \Gamma$. Это уравнение также можно записать в обычной форме

$$\varphi(x) - \lambda \iint_{D\cup\Gamma} K(x, y)\varphi(y)\,d\omega_y = f(x),$$

если соответствующим образом определить функцию K и элемент объема $d\omega_y$ (см. [4]), причем и в этом случае остается в силе теория интегральных уравнений Фредгольма.

Лит.: [1] Kneser A., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1914, t. 37, p. 169—97; [2] Lichtenstein L., «Studia math.», 1931, t. 3, p. 212—25; [3] Гюнтер Н. М., там же, 1933, t. 4, p. 8—14; [4] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 6 изд., т. 4, ч. 1, М., 1974.

Б. В. Хведелидзе.

НАДГРАФИК функции — подмножество в декартовом произведении $\mathbb{R}\times X$, состоящее из точек (α, x), лежащих «над» графиком функции $f: X \to \mathbb{R}$, определенной на нек-ром множестве X и принимающей значения в расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$; Н. иногда наз. эпиграфом и обозначается epi f:

$$\operatorname{epi} f = \{(\alpha, x) \in \mathbb{R}\times X \mid \alpha \geqslant f(x)\}.$$

Проекция Н. функции f на X наз. эффективной областью f и обозначается $\operatorname{dom} f$:

$$\operatorname{dom} f = \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}.$$

Функция f наз. собственной, если

$$f(x) > -\infty, \ \forall x, \text{ и } \operatorname{dom} f \neq \varnothing.$$

Выпуклые функции $f: X \to \mathbb{R}$, определенные на векторном пространстве X, характеризуются тем, что $\operatorname{epi} f$ — выпуклое подмножество в $\mathbb{R} \times X$; замкнутые функции $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, определенные на топологич. пространстве X, характеризуются тем, что $\operatorname{epi} f$ — замкнутое множество.

В. М. Тихомиров.

НАДЕЖНОСТИ ТЕОРИЯ — инженерное направление применений математич. методов, в к-ром разрабатываются: а) приемы расчета надежности технич. систем, б) методы оценки надежности изготовленных изделий, в) способы оптимизации и повышения эффективности функционирования сложных технич. систем и составляющих их элементов в процессе эксплуатации (включая в это понятие также хранение и перевозку). В Н. т. вводятся количественные показатели надежности на основе построения соответствующих математич. моделей. При этом учитываются такие факторы, как назначение технич. системы, условия, в к-рых ей придется работать, а также экономич. факторы. В Н. т. используются разнообразные математич. методы, но особое место среди них занимают теория вероятностей и математич. статистика. Это обусловлено тем, что события, описывающие количественные и качественные показатели надежности (отказ, длительность безотказной работы, длительность ремонта, стоимость восстановления и т. п.), случайны. Широкое применение находят также методы теории оптимизации, математич. логики и др.

Понятие надежности включает в себя: 1) безотказность, 2) долговечность, 3) приспособленность к ремонту. Нередко, однако, решающее значение имеет лишь первая характеристика. Так, для всех технич. устройств одноразового использования третье свойство не требуется совсем.

Основным понятием Н. т. является понятие отказа, т. е. постепенной или внезапной потери устройством работоспособности. Формализованное описание этого понятия базируется на следующей общей схеме построения математич. моделей Н. т. Предполагается, что состояние технич. системы определяется точкой x в фазовом пространстве $X = \{x\}$ состояний. Эволюция состояний этой системы во времени описывается процессом $x(t)$, вообще говоря, случайным. В X выделяется подмножество X_0 состояний, соответствующих наступлению отказа. Безотказность — свойство системы непрерывно сохранять работоспособность. Количественно безотказность измеряется временем от данного момента до момента попадания в X_0. Долговечность — свойство технич. системы сохранять работоспособность с необходимыми перерывами для ремонтов и технич. обслуживания при условии экономич. целесообразности дальнейшей эксплуатации. Ремонтоприспособленность технич. системы определяется удобством ее технич. обслуживания и проведения ремонтных работ; количественно измеряется затратами или же временем на поддержание технич. системы в работоспособном состоянии.

Важнейшим количественным показателем надежности является вероятность безотказной работы $R(t)$ технич. системы в течение времени t, т. е. вероятность того, что за время t процесс $x(t)$ не достигнет подмножества X_0. Функция распределения наступления отказа до момента t равна $F(t) = 1 - R(t)$. Если существует плотность распределения $f(t) = F'(t)$, то функция $\lambda(t) = f(t)/R(t)$ наз. функцией интен-

сивности отказа. Вероятностный смысл $\lambda(t)$ состоит в том, что это есть условная плотность распределения отказа при условии, что технич. система проработала безотказно время t. Таким образом, $\lambda(t)dt$ является вероятностью того, что система откажет в промежутке времени $(t, t+dt)$ при условии, что она не отказала до момента t.

В Н. т. используются различные классы функций $R(t)$. Если $-\ln R(t)$ есть выпуклая функция, то функция распределения наступления отказов наз. функцией распределения с возрастающей интенсивностью отказа; класс таких функций распределения обозначается ВФИ. Если же $-\ln R(t)$ есть вогнутая функция, то функция распределения наступления отказа наз. функцией распределения с убывающей интенсивностью отказа; соответствующий класс функций распределения обозначается УФИ. В Н. т. используются и другие непараметрич. классы функций распределения, напр. класс ВФИС (возрастающая функция интенсивности отказа в среднем): для распределений этого класса функция

$$\frac{1}{t}\int_0^t \lambda(s)\,ds$$

возрастает; класс НЛС (новое лучше старого): функции распределения этого класса удовлетворяют условию

$$F(t+s)\geqslant F(t)F(s)$$

для любых t, $s>0$, т. е. распределение отказов при условии, что технич. система уже проработала время t выше, чем безусловное. Это и означает, что для проработавшей технич. системы отказы поступают чаще, чем для новой. Для нек-рых классов функций распределения доказаны теоремы об инвариантности функции распределения наступления отказов при образовании определенных структур (последовательного или параллельного соединения элементов и т. д.). Широкое применение в Н. т. находят модели, в к-рых функция $R(t)$ задается параметрически. В качестве функций распределения внезапных отказов часто используется экспоненциальное распределение

$$F(t)=1-e^{-\lambda t},\ t>0,\ F(t)=0,\ t\leqslant 0,$$

распределение Вейбулла

$$F(t)=1-\exp[-(at)^p],\quad t>0,\ F(t)=0,\ t<0,$$

и др.

Для увеличения надежности технич. систем используются различные приемы: резервирование, профилактич. осмотры и ремонты, эксплуатация при пониженных нагрузках. Под резервированием понимается метод повышения надежности путем введения избыточности того или иного рода — дополнительных элементов, узлов, устройств, к-рые не требуются для функционирования технич. системы, дополнительного времени на выполнение работы, использование избыточной информации и пр. В связи с этим рассматриваются следующие типы резервирования: структурное (дополнительные элементы), временное (дополнительное время), информационное, функциональное (использующее способность элементов технич. системы выполнять дополнительные функции), нагрузочное. Структурный резерв может находиться в трех следующих состояниях: а) ненагруженном, б) нагруженном, в) облегченном. В нагруженном резерве резервный элемент несет такую же нагрузку, как и основной (рабочий), и интенсивность отказов резервного элемента та же, что у основного. В ненагруженном резерве элемент совсем не несет нагрузки, что соответствует отсутствию отказов. В облегченном резерве элемент несет нагрузку меньшую, чем основной, поэтому для него интенсивность отказов меньше,

чем для основного. Значительное увеличение надежности дает восстановление отказавших элементов — р е з е р в и р о в а н и е с в о с с т а н о в л е н и е м. Если элемент имеет один резервный, находящийся в ненагруженном состоянии, функция распределения длительности безотказной работы каждого из элементов есть $F(t)$, функция распределения длительности восстановления есть $G(t)$, переключатели абсолютно надежны и переключение на работу, на восстановление и в резерв происходит мгновенно, то для длительности безотказной работы дублированной системы (т. е. от начала работы до момента, когда оба элемента окажутся в состоянии отказа) имеет место формула

$$T = a\left(1 + \frac{1}{1-\gamma}\right),$$

где

$$a = \int_0^\infty x\, dF(x), \quad \gamma = \int_0^\infty G(x)\, dF(x).$$

Исследование резервированных систем явилось источником ряда чисто математич. исследований — развитие теории линейчатых и полумарковских процессов, предельных теорем для сумм случайного числа случайных величин и др.

П р о ф и л а к т и ч е с к о е о б с л у ж и в а н и е применяется в моменты, когда технич. система еще работоспособна, но имеется основание считать, что появилась повышенная вероятность отказа. Обычно задачи профилактики связаны с решением вопросов оптимизации: как выбрать моменты начала профилактич. обслуживания, чтобы суммарные потери на проведение профилактики и на ущерб от возможного отказа до моментов профилактик за данный промежуток времени T были минимальны; как организовать профилактич. обслуживание, чтобы вероятность безотказной работы за данный промежуток времени была максимальной и т. д. Для нек-рых функций распределения длительностей безотказной работы системы, в том числе для всех распределений класса УФИ, профилактика не увеличивает среднего времени безотказной работы. У функций распределения класса УФИ $\lambda(t)$ является невозрастающей функцией. К ним, в частности, относится функция распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x > 0,\ F(x) = 0,\ x \leqslant 0,$$

при любом постоянном $\lambda > 0$. Ряд оптимизационных задач возникает в связи с поиском неисправностей в сложной системе: как производить поиск неисправности, чтобы затратить на ее обнаружение в среднем наименьшее время; в какой последовательности для этой цели следует проверять работоспособность составляющих систему узлов и элементов и т. д.

Существенное место в Н. т. занимают задачи получения статистич. выводов о функции распределения наступления отказа на основе данных о результатах стендовых испытаний. Простейшие математич. модели с т е н д о в ы х и с п ы т а н и й следующие. Пусть N — число ячеек для испытаний изделий. В процессе испытаний отказавшие изделия не заменяются новыми (класс испытаний Б) или заменяются новыми (класс испытаний В). Продолжительность испытаний определяется правилом остановки, напр. заданием предельного времени испытаний T, предельного числа r наблюдаемых отказов и др. Существенной характеристикой испытаний является с у м м а р н а я н а р а б о т к а $S(t)$, т. е. сумма времен безотказной работы всех испытываемых изделий на интервале $(0, t)$. При испытаниях п о п л а н у $[NБ(r)]$ испытывают N изделий, к-рые при отказах не заменяются новыми. Наблюдения продолжаются до r-го отказа. По п л а н у $[NБ(N)]$ испытания продолжаются до отказа всех N испытываемых изделий, при использовании п л а н а $[NБ(r, T)]$

N изделий испытываются до момента $t=\min(t_r, T)$, где t_r — момент отказа r-го отказавшего объекта. По моментам отказов $t_1, \ldots, t_r$ требуется проверить гипотезы о виде функции распределения наступления отказа, напр. о ее принадлежности классу ВФИ или УФИ и др.; требуется оценить ее параметры. Для оценки функции интенсивности отказа используются методы получения изотонных оценок. При испытаниях по плану $[N\bar{B}(r)]$ точечная несмещенная оценка параметра λ экспоненциального распределения имеет вид

$$\hat{\lambda}=(r-1)/S(t_r),$$

где суммарная наработка

$$S(t_r)=t_1+\ldots+t_r+(N-r)\,t_r.$$

Статистич. задачи стендовых испытаний разнообразны и требуют привлечения таких разделов математич. статистики, как теория оценивания и теория проверки статистич. гипотез.

Осложняющим обстоятельством является зависимость вероятности безотказной работы от режима ε проведения испытаний:

$$R(t)=R(t,\ \varepsilon).$$

Более тяжелый режим (повышение температуры, амплитуды вибраций и т. п.) как бы приближает моменты наступления отказов. Проблема пересчета показателей надежности с одних режимов ε на другие ε^* является одной из актуальных задач Н. т. Применяются планы испытаний, в к-рых режимы меняются с течением времени (примерами могут служить планы со ступенчатым нагружением). Разрабатываются математич. модели пересчета результатов ускоренных испытаний на нормальные режимы. Один из подходов к пересчету основан на гипотезе, согласно к-рой испытания в течение времени t_1 в режиме ε_1 эквивалентны испытаниям в режиме ε_2, если время t_2 выбрано из условия $R(t_1,\ \varepsilon_1)=R(t_2,\ \varepsilon_2)$.

В Н. т. проводится расчет показателей функционирования систем, составленных из компонент, не являющихся абсолютно надежными. Одна из задач — оценка надежности системы по результатам стендовых испытаний компонент. Пусть система представлена в виде последовательной цепочки компонент разных типов (резервирования нет). Тогда нижняя γ-доверительная граница вероятности безотказной работы системы $R(t)$, все компоненты к-рой испытывались время t и отказы не наблюдались, совпадает с нижней γ-доверительной границей вероятности безотказной работы компонент того типа, к-рые испытывались в наименьшем числе.

Одним из примеров оптимизации в Н. т. являются задачи оптимального резервирования. Пусть $R_i(t)$ — вероятности безотказной работы элементов i-го типа, x_i — их число. Вероятность безотказной работы системы

$$R(t)=\prod_{i=1}^{m}\left(1-(1-R_i(t))^{x_i}\right).$$

Требуется подобрать такие числа x_i, $i=1, 2, \ldots, m$, чтобы $R(t)$ было максимальным и были выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{m} w_{ij}x_i \leqslant w_i,\ \ j=1,\ \ldots,\ l,$$

к-рые трактуются как ограничения на суммарный вес, объем, общую стоимость элементов и т. п.

Расчет количественных показателей надежности систем с учетом возможности восстановления отказавших компонент во многом аналогичен расчету систем в *массового обслуживания теории*. Моментам поступления заявок в систему соответствуют моменты отказов, а длительностям обслуживания — длительности восста-

новления. Простейшая математич. модель соответствует процессу восстановления (см. *Восстановления теория*). Поскольку основные математич. модели Н. т., учитывающие восстановление отказавших элементов, не допускают явных аналитич. решений, в Н. т. интенсивно развивается направление, связанное с использованием асимптотич. методов. При этом предполагается, что восстановление является «быстрым», т. е. заданные показатели восстановления (напр., среднее время) становятся бесконечно малыми по отношению к аналогичным показателям интервалов безотказной работы.

Лит.: [1] Барзилович Е. Ю., Каштанов В. А., Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем, М., 1971; [2] Барлоу Р., Прошан Ф., Математическая теория надежности, пер. с англ., М., 1969; [3] Barlow R. E., Proschan F., Statistical theory of reliability and lifetesting: Probability models., N. Y., 1975; [4] Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д., Математические методы в теории надежности, М., 1965; [5] Коваленко И. Н., Исследования по анализу надежности сложных систем, К., 1975; [6] Козлов Б. А., Ушаков И. А., Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики, М., 1975; [7] Шор Я. Б., Статистические методы анализа и контроля качества и надежности, М., 1962. *Ю. К. Беляев, Б. В. Гнеденко.*

НАДЕЖНОСТЬ И КОНТРОЛЬ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ, проблемы надежности управляющих систем,— одно из направлений теории *управляющих систем*, к-рое изучает управляющие системы, подверженные помехам.

Пусть $\mathfrak{U}=\{U\}$ — нек-рый класс управляющих систем (у. с.) и пусть имеется источник помех, или источник неисправностей, к-рый, воздействуя на у. с. U, переводит ее в у. с. $U_1, \ldots, U_r$ из нек-рого класса $\mathfrak{U}'$. Если допустить, что источник помех может также сохранять у. с. неизменной, напр. $U_1=U$, то $\mathfrak{U}\subseteq\mathfrak{U}'$. Пусть каждая у. с. из $\mathfrak{U}'$ вполне определяется своей схемой Σ, тогда воздействие источника помех сводится к воздействию на ее схему Σ. Источник неисправностей преобразует схему, что может проявляться: а) путем нарушения работы элементов, т. е. изменением элементов; б) путем изменения соединений элементов и т. п. В результате действия источника неисправностей исходная схема Σ у. с. U переходит в «неисправные» состояния $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$, где $\Sigma_1=\Sigma$, определяющие соответственно у. с. $U_1, \ldots, U_r$. Пусть этим схемам соответствуют функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$, наз. также функциями неисправностей (здесь $\Phi_1=\Phi$ характеризует функционирование у. с. U). Обычно источник неисправностей дополнительно характеризуется либо распределением вероятностей ошибок, либо ограничениями на возможное число элементарных неисправностей.

Проблемы надежности рассматриваются в основном для трех классов у. с.: *схем из функциональных элементов*, *контактных схем* и *автоматов*.

Пусть $\mathfrak{U}$ — класс схем из функциональных элементов, принадлежащих данному базису Б, где $\text{Б}=\text{Б}_1\cup\text{Б}_2$ и $\text{Б}_1=\{F_1, \ldots, F_s\}$. В случае, если источник неисправностей воздействует только на элементы схемы, то он преобразует элементы F_i из Б_1, $i=1, \ldots, s$, в элементы с таким же числом входов, как и F_i, но, быть может, с иным функционированием, а элементы из Б_2 оставляет неизменными. Таким образом, Б_1 состоит из ненадежных, а Б_2 — из надежных элементов. В этом случае источник можно характеризовать вероятностями $p_1, \ldots, p_s$ выхода из строя соответственно элементов $F_1, \ldots, F_s$. Напр., Б_1 состоит из инверторов, конъюнкторов и дизъюнкторов, а Б_2 — из элементов голосования, реализующих соответственно функции $\bar{x}$, $x_1\&x_2$, $x_1\vee x_2$ и $h(x_1, x_2, x_3)=x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3$. При этом можно положить, что $p_1=p_2=p_3=p$ — вероятность выхода из строя элементов из Б_1.

В случае, когда $\mathfrak{U}$ — класс контактных схем, рассматривают источник неисправностей, к-рый в качестве элементарных неисправностей дает либо короткое

замыкание контакта, либо разрыв контакта. При этом дополнительно предполагают, что для контактных схем, реализующих функции от n переменных, возможно не более $m(n)$ элементарных повреждений.

В проблематике Н. и к. у. с. можно выделить три направления.

I. Построение надежных схем из ненадежных элементов. Это направление развито для двух классов у. с.: контактных схем и схем из функциональных элементов. В случае схем из функциональных элементов схема Σ характеризуется пек-рой вероятностью p тех случаев, когда она функционирует неправильно. Здесь рассматривают два основных вопроса.

1) Какими свойствами должен обладать базис Б, чтобы для любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и любого $\varepsilon>0$ можно было построить схему Σ, реализующую f и такую, что вероятность p ее неправильной работы была бы меньше ε, т. е. каждая булева функция допускала бы сколь угодно надежную реализацию.

Установлено, что существуют базисы, в к-рых для любой функции возможна сколь угодно надежная реализация. Примером такого базиса является базис Б (см. выше): $Б_1$ состоит из инверторов, конъюнкторов и дизъюнкторов с вероятностью ошибки $p<1/3$, а $Б_2$ состоит из абсолютно надежного элемента голосования. Найдены необходимые и достаточные условия на базис Б, при к-рых возможно построение сколь угодно надежных схем *для всех* булевых функций.

2) Построение метода синтеза минимальных (или в том или ином смысле близких к минимальным) схем, реализующих булевы функции, ненадежность к-рых не превосходит заданной величины ε. Оказывается (напр., для предыдущего базиса с $p<1/9$), что можно построить метод синтеза схем, к-рый для большинства булевых функций и данного ε дает асимптотически (по n) минимальные схемы. В частности, для функции Шеннона $L(n, \varepsilon)$, выражающей минимальное число элементов из Б (см. пример выше), достаточное для реализации любой булевой функции от n переменных с ненадежностью, не большей ε, получена асимптотика

$$L(n, \varepsilon) \sim \frac{1}{2}\,\frac{2^n}{n}.$$

II. Построение самокорректирующихся схем. Это направление наиболее полно изучено для двух классов у. с.— контактных схем и схем из функциональных элементов. Здесь источник неисправностей характеризуется ограничениями на число элементарных повреждений. Считается, что в пределах рассмотрений дальнейших изменений в схеме не происходит. Схема Σ, реализующая функцию Φ, наз. *самокорректирующейся относительно данного источника неисправностей*, если $\Phi_i=\Phi$, $i=1, \ldots, r$. Другими словами, самокорректирующаяся схема функционирует правильно, несмотря на воздействие источника неисправностей. Напр., контактная схема на рис. 1, реализующая функцию $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, является самокорректирующейся относительно источника, вызывающего не более одного разрыва контакта.

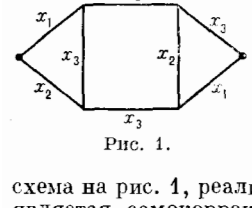


Рис. 1.

Основными задачами этого направления являются: 1) выяснение условий, при к-рых существуют самокорректирующиеся схемы, и 2) разработка методов синтеза минимальных (или в том или ином смысле близких к минимальным) самокорректирующихся схем. Ниже показано решение этих задач на примере контактных схем с источником неисправностей, вызывающим не более $m(n)$ замыканий и разрывов.

Оказывается, что для любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно построить самокорректирующуюся от-

носительно этого источника неисправностей схему. Для этого достаточно взять любую контактную схему Σ, реализующую f, и в ней каждый контакт x^σ заменить на подсхему, состоящую из $m+1$ последовательно соединенных одинаковых блоков, каждый из к-рых является параллельным соединением $m+1$ экземпляров данного контакта x^σ. Такую схему наз. т р и в и а л ь н о й с а м о к о р р е к т и р у ю щ е й с я с х е м о й. Построенная самокорректирующаяся схема будет в $(m+1)^2$ раз сложнее исходной. Предыдущий пример (рис. 1) показывает, что существуют и нетривиальные самокорректирующиеся схемы.

Задача построения самокорректирующихся схем — специальная задача синтеза у. с. с дополнительными требованиями. Главный результат здесь состоит в том, что для большинства булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно построить самокорректирующуюся схему (относительно нек-рого класса источников), сложность к-рой асимптотически (при $n \to \infty$) равна сложности минимальной схемы, реализующей f без требования самокоррекции. Здесь показано, что при нек-рых ограничениях на порядок роста $m(n)$ имеет место следующая асимптотика для функции Шеннона

$$L_m(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

III. Контроль управляющих систем. Это направление наиболее полно изучено для трех классов у. с.: контактных схем, схем из функциональных элементов и автоматов. Рассмотрение проблем контроля у. с. предполагает: 1) наличие источника неисправностей, к-рый, совершив воздействие на у. с., в течение нек-рого промежутка удерживает неисправное состояние исходной у. с. и не производит других повреждений; 2) задание цели контроля. Последняя определяется как распознавание нек-рого свойства данной у. с. Напр., выяснение, является ли данная у. с. исправной или нет (задача о проверке), или, в случае, если у. с. неисправна, нахождение неисправности (задача о диагностике); 3) фиксацию средств контроля. Контроль может происходить либо без вмешательства в схему, либо допускается возможность вмешательства. Напр., замена элементов на эталонные, перестановка однотипных блоков, использование дополнительных контрольных точек в схеме и т. п. Средства контроля включают в себя также процедуру получения информации о контролируемом объекте. Ими являются эксперименты, к-рые делятся на безусловные и условные. В б е з у с л о в н ы х э к с п е р и м е н т а х последовательности, подаваемые на вход контролирующего устройства, определяются заранее и не зависят от последовательности на его выходе. В у с л о в н ы х э к с п е р и м е н т а х каждый последующий символ входной последовательности может выбираться в зависимости от символов, появившихся на выходе в предшествующие моменты времени.

Совокупность экспериментов, позволяющая распознать данное свойство, наз. т е с т о м. Так как обычно существует много различных тестов, распознающих требуемое свойство, то на множестве тестов вводят меру сложности и ищут тест, имеющий минимальную сложность. Основная задача состоит здесь в том, чтобы для каждого свойства уметь строить минимальные или близкие к ним тесты. Эта задача является частью более общей проблемы — построения компактных алгоритмов распознавания тех или иных свойств.

Проследим решение этих задач на примере контактных схем и схем из функциональных элементов для случая, когда нет вмешательства в схему. Исходным пунктом здесь являются функции неисправностей $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ схемы Σ, реализующей Φ, причем $\Phi_1 = \Phi$. При этом возможен случай $\Phi_i = \Phi_j$ для нек-рых пар (i, j), что означа-

ет неразличимость i-й и j-й неисправностей. Таким образом, множество функций $\{\Phi_i\}$ разбивается на классы эквивалентности $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ такие, что Φ_i и Φ_j принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда $\Phi_i = \Phi_j$, причем Φ_1 принадлежит классу φ_1. Неисправности, приводящие к функциям из одного класса, неразличимы. Классы $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ приводят к таблице функций неисправностей.

Пример. Контактная схема (рис. 2) реализует функцию

$$\Phi = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3,$$

источник помех вызывает не более одного разрыва. Здесь $\Phi_1 = \Phi_2$, $\Phi_3 = \Phi_4$, $\Phi_5 = \Phi_6$, $\Phi_7 = \Phi_8$, $\Phi_9 = \Phi_{10}$ и $\Phi_{11} = \Phi_{12}$. Таким образом, имеем семь классов: $\varphi_1 = \{\Phi\}$, $\varphi_2 = \{\Phi_1, \Phi_2\}$, $\ldots$, $\varphi_7 = \{\Phi_{11}, \Phi_{12}\}$, к-рые дают таблицу функций неисправностей (см. таблицу). Свойство, подлежащее распознаванию, обычно задают через подмножество $\mathfrak{N}$ пар (i, j) номеров классов функций неисправностей, к-рые требуется отличать. Если, напр., $\mathfrak{N} = \{(1, i)\}$, $i = 2, \ldots, l$, то свойство выражает отличимость исправной схемы от любого неисправного состояния (задача проверки). Если $\mathfrak{N} = \{(i, j)\}$, $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant l$, то требуется уметь отличать каждое состояние схемы от любого другого (задача о диагностике). Наконец, если $\mathfrak{N} = \{(i, j)\}$ и $1 \leqslant i \leqslant l_0 < j \leqslant l$, то имеют дело с задачей о диагностике «блока», т. е. с задачей выяснения, в какой части схемы находится поврежденный элемент.

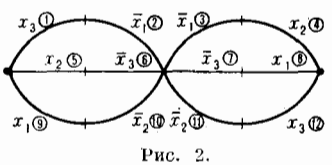


Рис. 2.

Наборы	$x_1 x_2 x_3$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
e_1	001	1	0	1	1	1	1	0
e_2	011	1	0	0	1	1	1	1
e_3	010	1	1	0	0	1	1	1
e_4	110	1	1	1	0	0	1	1
e_5	100	1	1	1	1	0	0	1
e_6	101	1	1	1	1	1	0	0
e_7	000	0	0	0	0	0	0	0
e_8	111	0	0	0	0	0	0	0

Пусть $\{e_1, \ldots, e_k\}$ — множество наборов, на к-рых определены функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$. Совокупность наборов $T = \{e\}$ из $\{e_1, \ldots, e_k\}$ наз. тестом для данной таблицы функций неисправностей относительно подмножества $\mathfrak{N}$, если для любой пары (i, j) из $\mathfrak{N}$ существует набор e из T такой, что $\varphi_i(e) \neq \varphi_j(e)$. Тест T наз. минимальным, если он содержит наименьшее число наборов. Тест T наз. тупиковым, если при удалении любого набора e из T получается подмножество наборов, не являющееся тестом. Множество $\{e_1, \ldots, e_k\}$ является тестом (тривиальным тестом). Минимальный тест является тупиковым. Проблема нахождения минимального теста связана с необходимостью сокращения времени контроля.

Существует алгоритм для нахождения всех тупиковых (значит и минимальных) тестов. Пусть $\{e_1^{ij}, \ldots, e_{\nu(i,j)}^{ij}\}$ — множество всех наборов, на к-рых отличаются φ_i и φ_j. Если в выражении

$$\&_{(i,j) \in \mathfrak{N}} \left(e_1^{ij} \vee \ldots \vee e_{\nu(i,j)}^{ij}\right)$$

совершить умножение по правилам булевой алгебры и затем удалить «поглощаемые» члены, пользуясь соотношением $A \& B \vee A = A$, то оставшиеся произведения будут соответствовать тупиковым тестам. Так, если для рассмотренного выше примера взять задачу проверки

$$\mathfrak{N} = \{(1, 2), (1, 3), \ldots, (1, 7)\},$$

то указанный алгоритм дает:

$$(e_1 \vee e_2)\,(e_2 \vee e_3)\,(e_3 \vee e_4)\,(e_4 \vee e_5)'(e_5 \vee e_6)\,(e_6 \vee e_1) =$$
$$= (e_2 \vee e_1 e_3)\,(e_4 \vee e_3 e_5)\,(e_6 \vee e_1 e_5) =$$
$$= e_1 e_3 e_5 \vee e_2 e_4 e_6 \vee e_1 e_2 e_4 e_5 \vee e_1 e_3 e_4 e_6 \vee e_2 e_3 e_5 e_6.$$

Имеется пять тупиковых тестов: $T_1 = \{e_1, e_3, e_5\}$, $T_2 = \{e_2, e_4, e_6\}$, $T_3 = \{e_1, e_2, e_4, e_5\}$, $T_4 = \{e_1, e_3, e_4, e_6\}$, $T_5 = \{e_2, e_3, e_5, e_6\}$, из к-рых T_1 и T_2 являются минимальными. Описанный алгоритм может быть применен для обнаружения ошибок при монтаже в соединениях элементов. Данный алгоритм с небольшими модификациями годится также для построения тупиковых кратных экспериментов для автоматов. Эффективность алгоритма построения тупиковых тестов резко падает с увеличением размеров таблицы функций неисправностей. Повышение эффективности связано с учетом строения таблицы, а также с учетом информации о структуре схемы. В этом направлении построена серия методов. Другие аспекты Н. и к. у. с. развиваются в рамках теории вероятностей.

Лит.: [1] Чегис И. А., Яблонский С. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 51, с. 270—360; [2] Соловьев Н. А., Тесты, Новосиб., 1978; [3] Потапов Ю. Г., Яблонский С. В., «Докл. АН СССР», 1960, т. 134, № 3, с. 544—47; [4] Неймаи Дж., в кн.: Автоматы, М., 1956, с. 68—139; [5] Мур Э. Ф., Шеннон К. Э., Кибернетический сборник, в. 1, М., 1960, с. 109—48. *С. В. Яблонский.*

НАДСТРОЙКА над топологическим пространством (клеточным разбиением) X — пространство (клеточное разбиение)

$$[(X \times [0, 1])/(X \times \{0\})]/(X \times \{1\}),$$

где $[0, 1]$ — единичный отрезок, а косая черта обозначает операцию отождествления подпространства с одной точкой. Надстройкой над *пунктированным пространством* (X, x_0) наз. пунктированное пространство

$$S^1 \wedge X =$$
$$= (X \times [0, 1])/[(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (x_0 \times [0, 1])].$$

Оно наз. также приведенной, или стянутой, надстройкой. Н. обозначается символом SX (а иногда ΣX). Соответствие $X \to SX$ определяет функтор из категории топологических (пунктированных) пространств в себя.

Функториальность Н. позволяет определить гомоморфизм $\pi_n(X) \to \pi_{n+1}(SX)$, к-рый также наз. надстройкой. Этот гомоморфизм совпадает с композицией гомоморфизма, индуцированного вложением $X \to \Omega SX$ и изоморфизма Гуревича $\pi_n(\Omega SX) \cong \pi_{n+1}(SX)$ (здесь Ω — операция взятия *петель пространства*). Для любой *гомологии теории* h_* (когомологий h^*) имеет место изоморфизм

$$\delta\colon \tilde{h}^n(X) \cong \tilde{h}^{n+1}(SX) = h^{n+1}(CX, X),$$

совпадающий со связывающим гомоморфизмом точной последовательности пары (CX, X), где CX — конус над X. Образ класса $x \in h^n(X)$ при этом изоморфизме наз. надстройкой над x и обозначается δx (или Sx).

Надстройкой над *когомологической операцией* a наз. когомологич. операция, действие к-рой на $\tilde{h}^*$ совпадает с $\delta^{-1} a \delta$, а на $h^*(pt)$ — с a. *А. Ф. Харшиладзе.*

НАИБОЛЕЕ МОЩНЫЙ КРИТЕРИЙ — статистический критерий, имеющий наибольшую мощность среди всех критериев с заданным *значимости уровнем*. Пусть по результатам наблюдений надлежит проверить простую гипотезу H_0 против простой альтернативы H_1 и пусть задана допустимая вероятность α ошибки первого рода, к-рую можно совершить в результате отклонения проверяемой гипотезы H_0 по статистич. критерию, построенному для проверки H_0 против H_1,

когда в действительности гипотеза H_0 справедлива. В теории проверки статистич. гипотез наилучшим критерием среди всех статистич. критериев, предназначенных для проверки H_0 против H_1 и имеющих одну и ту же вероятность ошибки первого рода или, что то же самое, один и тот же уровень значимости α, является тот критерий, к-рый имеет наибольшую мощность; т. е. наилучший критерий с наибольшей вероятностью отклоняет проверяемую гипотезу H_0, когда справедлива конкурирующая гипотеза H_1. Именно этот наилучший критерий наз. Н. м. к. уровня α среди всех статистич. критериев уровня α, предназначенных для проверки простой гипотезы H_0 против простой альтернативы H_1. Так как мощность статистич. критерия равна дополнению до единицы вероятности ошибки второго рода, к-рую можно совершить, принимая H_0, когда она в действительности неверна, то понятие Н. м. к. часто формулируют в терминах вероятностей ошибок первого и второго рода: Н. м. к.— статистич. критерий, предназначенный для проверки простой гипотезы против простой альтернативы и к-рый имеет наименьшую вероятность ошибки второго рода среди всех статистич. критериев с заданной вероятностью ошибки первого рода. Решение задачи о построении Н. м. к. в случае простых гипотез дается *Неймана — Пирсона леммой*, согласно к-рой *отношения правдоподобия критерий* является Н. м. к.

В случае, когда конкурирующие гипотезы H_0 и H_1 являются сложными, задача построения Н. м. к. формулируется в терминах *равномерно наиболее мощного критерия*, если таковой существует.

Лит.: [1] Леман Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Neyman J., Pearson E., «Phil. Trans. Roy. Soc. London, A», 1933, v. 231, p. 289—337.

М. С. Никулин.

НАИБОЛЬШЕГО ГАРАНТИРОВАННОГО РЕЗУЛЬТАТА ПРИНЦИП — один из основных принципов принятия решения, используемый в *исследовании операций* и *игр теории*. Н. г. р. п. реализуется в стремлении выбрать такую стратегию, чтобы минимальный выигрыш, получаемый в результате ее применения, был максимальным (см. *Максимин*). В ряде случаев Н. г. р. п. может быть получен как следствие в нек-рой системе аксиом, отдельные аксиомы к-рой указывают на те естественные свойства, к-рыми должен обладать всякий «разумный» принцип оптимального поведения (см. [5]). Конкретизация Н. г. р. п. в различных ситуациях приводит к постановке целого ряда задач на максимин.

Исследование операций, т. е. совокупности действий, ведущих к достижению поставленной цели, проводится исследователем операции в интересах оперирующей стороны, к-рая стремится к достижению цели, математически выражаемой желанием увеличить к р и т е р и й э ф ф е к т и в н о с т и — функцию $f(x, y)$, где x — выбор оперирующей стороны, y — неконтролируемый оперирующей стороной фактор. Выбор конкретных значений $x \in X$ в зависимости от информированности оперирующей стороны и исследователя операции о значениях y определяет стратегию $\tilde{x} = x(y)$ оперирующей стороны.

Исходя из информированности исследователя о значениях y, неконтролируемые факторы y подразделяются на три группы: фиксированные факторы, значения к-рых известны; случайные факторы, т. е. случайные процессы с известными законами распределения; неопределенные факторы, для к-рых известна только область Y, к-рой они принадлежат, или область, к-рой принадлежат их законы распределения.

Оценка эффективности стратегий и выбор из них осуществляются исследователем операций на основе получения максимально гарантированной величины критерия эффективности при предполагающейся информи-

рованности оперирующей стороны о неконтролируемых факторах. Если $\tilde{x}$ — стратегия оперирующей стороны, то ее оценкой, когда известно лишь, что $y \in Y$, наз. величина

$$\inf_{y \in Y} f(\tilde{x}, y).$$

Наибольший гарантированный результат (н. г. р.) определяется как величина

$$\sup_{\tilde{x}} \inf_{y \in Y} f(\tilde{x}, y); \qquad (*)$$

стратегия $\tilde{x}^*$, для к-рой

$$\inf_{y \in Y} f(\tilde{x}^*, y) = \sup_{\tilde{x}} \inf_{y \in Y} f(\tilde{x}, y),$$

является оптимальной в рассматриваемой операции.

В случае, когда оперирующая сторона не ожидает информации о конкретных значениях $y \in Y$, т. е. $x(y) = x$, н. г. р. определяется величиной

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y)$$

(см. *Минимакса принцип*).

Если значение y известно точно, то для (*) выполняется равенство

$$\sup_{x(y)} \inf_{y \in Y} f(x(y), y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y).$$

Если значения y формируются активным противником, исследователь операции и оперирующая сторона информированы о критерии эффективности противника $\varphi(\tilde{x}, y)$, $y \in Y$, и при этом y выбирается противником из условия $\max_{y \in Y} \varphi(\tilde{x}(y), y)$, то н. г. р. определяется величиной

$$\sup_{\tilde{x}} \inf_{y \in Y_1(\tilde{x})} f(\tilde{x}, y),$$

где

$$Y_1(\tilde{x}) = \{y \in Y \mid \varphi(x(y), y) = \max_{y \in Y} \varphi(x(y), y)\}.$$

Конкретизация Н. г. р. п. в играх с фиксированной последовательностью ходов игроков и в операциях, когда информация о неопределенных факторах уточняется во времени, приводит к решению весьма сложных минимаксных задач (напр., *дифференциальных игр*).

Пусть в операции, наряду с неопределенным фактором y, $y \in Y$, есть случайный фактор z, $z \in Z$, с известным законом распределения P, и оперирующая сторона производит осреднение по случайностям. В этом случае критерием эффективности является математич. ожидание

$$\overline{f}(\tilde{x}, y) = \int_Z f(\tilde{x}, y, z)\, dP(z),$$

что означает для оперирующей стороны согласие с определенным риском. Как правило, введение $\overline{f}$ применяется в многократно повторяющихся операциях.

Если y при повторениях не меняет своего значения и $\tilde{x} = x(y)$, то н. г. р. равен

$$\sup_{\tilde{x}} \inf_{y \in Y} \overline{f}(\tilde{x}, y).$$

Если же от повторения к повторению y меняется произвольным образом, то н. г. р. имеет вид

$$\sup_{\tilde{x}} \int_Z \inf_{y \in Y} f(\tilde{x}, y, z)\, dP(z).$$

В других случаях (а также в других классах стратегий, напр. вида $\tilde{x} = x(y, z)$) н. г. р. выражается иными комбинациями операций взятия экстремума и интегрирования (см. [1], [3]).

Смешанной стратегией наз. вероятностная мера Ψ на X. Если, как выше, оперирующая сторона согласна на осреднение критерия эффективности

$$f(\Psi, y) = \int_X f(x, y)\, d\Psi(x),$$

то н. г. р. равен

$$\sup_{\Psi} \inf_{y \in Y} f(\Psi, y).$$

Большое значение имеет задача вычисления оптимальн. смешанных стратегий (см. *Антагонистическая игра*).

В многошаговых операциях с конечным числом n шагов критерий эффективности имеет вид

$$f(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n),$$

где $x_i \in X_i$ — выбор оперирующей стороны, а $y_i \in Y_i$ — значение неконтролируемого фактора на i-м шаге. Н. г. р. в многошаговых операциях записывается, как правило, в виде кратного (последовательного) максимина. Так, в антагонистич. игре с полной информацией н. г. р. равен

$$\sup_{x_1 \in X_1} \inf_{y_1 \in Y_1} \ldots \sup_{x_n \in X_n} \inf_{y_n \in Y_n} f(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n).$$

К подобным минимаксным задачам приводят и нек-рые проблемы теории дифференциальных игр.

Для нечетко формулируемой цели оперирующей стороны, когда, напр., имеется набор критериев эффективности $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ и неопределенным фактором для исследователя операций является номер i, данный принцип приводит к свертке критериев, и н. г. р. равен

$$\max_x \min_i (f_i(x) - f_i^0),$$

где f_i^0 — уровень, к-рый желательно обеспечить по i-й компоненте. Если величина н. г. р. неотрицательна, желательные уровни достижимы.

Последовательное применение Н. г. р. п. в разных условиях информированности оперирующей стороны позволяет единым образом оценить эффективность стратегий и построить полную теорию принятия решения в условиях неопределенности.

Лит.: [1] Гермейер Ю. Б., Введение в теорию исследования операций, М., 1971; [2] Воробьев Н. Н., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 2, с. 81—140; [3] Гермейер Ю. Б., Игры с непротивоположными интересами, М., 1976; [4] Вентцель Е. С., Исследование операций, М., 1972; [5] Вилкас Э., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, № 3, с. 324—327.

Ф. И. Ерешко, В. В. Федоров.

НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ — наибольший из общих делителей целых, в частности натуральных, чисел $a_1, \ldots, a_n$. Если данные числа не все равны нулю, то такой делитель существует. Н. о. д. чисел $a_1, \ldots, a_n$ обычно обозначают символом $(a_1, \ldots, a_n)$.

Свойства Н. о. д.:

1) Н. о. д. чисел $a_1, \ldots, a_n$ делится на любой общий делитель этих чисел;

2) $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = ((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1})$;

3) если целые числа $a_1, \ldots, a_n$ представлены в виде

$$a_1 = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s} s, \ldots, a_n = p_1^{\nu_1} \ldots p_s^{\nu_s} s,$$

где $p_1, \ldots, p_s$ — различные простые, $\alpha_i \geqslant 0, \ldots, \nu_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, s$, и $\delta_i = \min(\alpha_i, \ldots, \nu_i)$, то

$$(a_1, \ldots, a_n) = p_1^{\delta_1} \ldots p_s^{\delta_s} s.$$

Н. о. д. двух натуральных чисел можно найти при помощи *Евклида алгоритма*. Число шагов, необходимых для отыскания Н. о. д. двух чисел, превосходит не более чем в пять раз число цифр наименьшего из них, записанного в десятичной системе счисления.

Н. о. д. элементов области целостности наз. тот из общих делителей данных элементов, к-рый делится на

любой из их общих делителей. Так, Н. о. д. двух многочленов над данным полем — тот их общий делитель, к-рый делится на любой из их общих делителей. Если Н. о. д. двух элементов области целостности существует, то он единствен с точностью до обратимого множителя. Н. о. д. идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ данного кольца наз. идеал $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, порожденный объединением множеств $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ (см. *Факториальное кольцо*).

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981; [2] Бухштаб А. А., Теория чисел, 2 изд., М., 1966; [3] Маркушевич А. И., Деление с остатком в арифметике и алгебре, М.— Л., 1949; [4] Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М., Современная математика, пер. с франц., М., 1966; [5] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

А. А. Бухштаб, В. И. Нечаев.

НАИВЫСШЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — формула вида

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx \approx \sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j), \qquad (1)$$

где весовая функция $p(x)$ предполагается неотрицательной на $[a, b]$ и такой, что существуют интегралы

$$\mu_k \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_a^b p(x)\, x^k\, dx, \quad k=0, 1, 2\ldots,$$

при этом $\mu_0>0$. Узлами x_j квадратурной формулы (1) являются корни ортогонального на $[a, b]$ с весом $p(x)$ многочлена степени N, а коэффициенты определяются тем, что квадратурная формула является интерполяционной. Такая квадратурная формула имеет алгебраич. степень точности $2N-1$, т. е. она является точной для всех алгебраич. многочленов $f(x)$ степени не выше $2N-1$ и не точна для x^{2N}, и наз. квадратурной формулой гауссова типа.

Имеется следующее обобщение квадратурных формул наивысшей алгебраич. степени точности. Пусть в квадратурной формуле

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx \approx \sum_{j=1}^{m} A_j f(a_j) + \sum_{j=1}^{n} C_j f(x_j) \qquad (2)$$

с числом узлов $N=m+n$ узлы $a_1, \ldots, a_m$ заданы заранее (фиксированные узлы), а узлы $x_1, \ldots, x_n$ выбираются так, чтобы квадратурная формула имела наивысшую алгебраич. степень точности. Пусть

$$\sigma(x) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \prod_{j=1}^{m}(x-a_j), \quad \omega(x) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \prod_{j=1}^{n}(x-x_j).$$

Чтобы квадратурная формула (2) была точна для всех многочленов степени не выше $m+2n-1$, необходимо и достаточно, чтобы она была интерполяционной и многочлен $\omega(x)$ был ортогонален на $[a, b]$ с весом $\sigma(x)p(x)$ ко всем многочленам степени не выше $n-1$. Это приводит вопрос о существовании квадратурной формулы, точной для всех многочленов степени не выше $m+2n-1$, к нахождению многочлена $\omega(x)$ степени n, ортогонального на $[a, b]$ с весом $\sigma(x)p(x)$, и выяснению свойств его корней. Если корни $\omega(x)$ действительные, простые, принадлежат $[a, b]$ и их совокупность имеет пустое пересечение с совокупностью фиксированных узлов, то требуемая квадратурная формула существует. Если, кроме того,

$$\int_a^b p(x)\, \sigma(x)\, \omega^2(x)\, dx \neq 0,$$

то ее алгебраич. степень точности равна $m+2n-1$.

При указанных выше предположениях о весовой функции $p(x)$ ортогональный на $[a, b]$ с весом $\sigma(x)p(x)$ многочлен $\omega(x)$ степени n определяется однозначно (с точностью до отличного от нуля постоянного множителя) в следующих частных случаях.

1) $m=1$, n — любое. Берется один фиксированный узел, совпадающий с концом промежутка $[a, b]$, при этом выбранный конец промежутка должен быть конечным числом.

2) $m=2$, n — любое. В качестве фиксированных узлов берутся оба конца промежутка $[a, b]$, к-рый считается конечным.

3) m — любое, $n=m+1$. В качестве фиксированных узлов берутся корни ортогонального на $[a, b]$ с весом $p(x)$ многочлена $P_m(x)$.

В случаях 1) и 2) многочлен $\omega(x)$ является ортогональным относительно веса $\sigma(x)p(x)$, сохраняющего знак на промежутке интегрирования $[a, b]$, поэтому его корни действительные, простые, лежат внутри (a, b) и, следовательно, не совпадают с a и b. Квадратурная формула (2) существует, ее коэффициенты положительны и алгебраич. степень точности равна $m+2n-1$. Квадратурные формулы, соответствующие случаям 1) и 2), наз. формулами Маркова.

В случае 3) вес $\sigma(x)p(x)$ меняет знак на $[a, b]$, и это осложняет исследование корней $\omega(x)$. Если $[a, b]=[-1, 1]$ и $p(x)=(1-x^2)^\alpha$, где $-1/2<\alpha\leqslant 3/2$, то корни $\omega(x)$ лежат внутри $(-1, 1)$ и разделяются корнями $P_m(x)$: между любыми двумя соседними корнями $\omega(x)$ лежит точно один корень многочлена $P_m(x)$ (см. [2]). Для рассматриваемого веса квадратурная формула (2) существует и точна для всех многочленов степени не выше $3m+1$; однако нельзя утверждать, что алгебраич. степень точности равна $3m+1$. При $\alpha=-1/2$ и $\alpha=1/2$ узлы и коэффициенты квадратурной формулы можно указать явно (см. [3]), при этом алгебраич. степень точности в первом случае повышается до $4m-1$, а во втором — до $4m+1$. Для $p(x)=1$ и промежутка $[0, 1]$ вычислены (см. [4]) узлы и коэффициенты квадратурной формулы (2) (с фиксированными узлами типа 3)) при $m=1(1)40$ (m меняется от 1 до 40 с интервалом 1); алгебраич. степень точности равна $3m+1$ при m четном и равна $3m+2$ при m нечетном. Квадратурная формула (2) с фиксированными узлами типа 3) существует также для промежутка $[-1, 1]$ и веса $(1-x)^\alpha(1+x)^{-\alpha}$ при $\alpha=\pm 1/2$, при этом узлы и коэффициенты можно указать явно (см. [3]).

Лит.: [1] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967; [2] Szegö G., «Math. Ann.», 1934, Bd 110, H. 4, S. 501—13; [3] Мысовских И. П., «Изв. АН БССР. Сер. фіз.-тэхніч. навук», 1964, № 4, с. 125—27; [4] Кронрод А. С., Узлы и веса квадратурных формул. Шестнадцатизначные таблицы, М., 1964. *И. П. Мысовских.*

НАИЛУЧШАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА, оптимальная квадратурная формула,— формула приближенного интегрирования, обеспечивающая на заданном классе функций минимальную погрешность среди всех формул определенного типа. Пусть рассматривается квадратурная формула

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{m} p_{ki} f^{(i)}(x_k)+R(f), \quad (*)$$

где $\rho(x)$ — весовая функция. Остаток (погрешность) $R(f)=R(f,\ X_n,\ P_{nm})$ зависит как от функции $f(x)$, так и от вектора (X_n, P_{nm}) узлов x_k (обычно предполагается, что $x_k\in[a, b]$) и коэффициентов p_{ki}, $k=1, 2, \ldots, n$, $i=0, 1, \ldots, m$. При фиксированных $n\geqslant 1$ и $m\geqslant 0$ через A обозначим нек-рое множество векторов (X_n, P_{nm}) (и, следовательно, квадратурных формул), определяемое теми или иными ограничениями на узлы и коэффициенты (в частности, можно рассматривать множество $A=A(X_n)$ коэффициентов p_{ki} при фиксированном векторе узлов X_n). Пусть $\mathfrak{M}$ — нек-рый класс функций $f(x)$, причем предполагается, что для $f\in\mathfrak{M}$ интеграл и сумма в $(*)$ имеют смысл. Н. к. ф. вида $(*)$ для класса $\mathfrak{M}$ относительно множества A определяется вектором (X_n^*, P_{nm}^*), для к-рого

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}} |R(f,\ X_n^*,\ P_{nm}^*)| =$$

$$= \inf_{(X_n,\ P_{nm})\subset A} \sup_{f\in\mathfrak{M}} |R(f,\ X_n,\ P_{nm})|.$$

Задача отыскания Н. к. ф. тесно связана с нек-рыми задачами *сплайн-аппроксимации*; в ряде случаев она сводится к минимизации нормы моносплайна (см. [1]). Известны Н. к. ф. и соответствующие точные оценки остатка для многих важных классов непрерывных и дифференцируемых функций. С более общей точки зрения отыскание Н. к. ф. и доставляемой ею на классе $\mathfrak{M}$ погрешности можно рассматривать как задачу оптимального восстановления функционала

$$J(f)=\int_a^b \rho(x) f(x)\,dx,$$

где $f\in\mathfrak{M}$, по информации $\{f^{(i)}(x_k)\}$, $k=1, 2, \ldots, n$, $i=0, 1, \ldots, m$. Понятие Н. к. ф. естественным образом обобщается на случай функций многих переменных, т. е. на кубатурные формулы.

Лит.: [1] Никольский С. М., Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979; [2] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967; [3] Лоран П. Ж., Аппроксимация и оптимизация, пер. с франц., М., 1975; [4] Женсыкбаев А. А., «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, в. 4, с. 107—59.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕН, наилучшего приближения полином,— многочлен, осуществляющий наилучшее приближение функции $x(t)$ в той или иной метрике среди всех многочленов, построенных по той же (конечной) системе функций. Если X — линейное нормированное пространство функций (напр., $C[a, b]$ или $L_p(a, b)$, $p\geqslant 1$),

$$U_n=\{u_1(t), \ldots, u_n(t)\}$$

— система линейно независимых функций из X, то для любой $x\in X$ (обобщенный) Н. п. м.

$$\tilde{u}(t)=\tilde{u}(x, t)=\sum_{k=1}^{n}\tilde{c}_k u_k(t), \qquad (*)$$

определяемый соотношением

$$\|x-\tilde{u}\|=\min_{\{c_k\}}\Big\|x-\sum_{k=1}^{n}c_k u_k\Big\|,$$

существует. Единственность Н. п. м. для всех $x\in X$ имеет место, во всяком случае, если X — пространство со строго выпуклой нормой (т. е. из $\|x\|=\|y\|$ и $x\neq y$ следует, что $\|x+y\|<\|x\|+\|y\|$). Таким является пространство $L_p(a, b)$ при $1<p<\infty$. В пространстве $C[a, b]$, норма к-рого не является строго выпуклой, Н. п. м. для любой $x\in C[a, b]$ единствен, если система U_n является чебышевской на $[a, b]$, т. е. каждый многочлен

$$u(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k u_k(t)\not\equiv 0$$

имеет на отрезке $[a, b]$ не более чем $n-1$ нулей. В частности, единственность имеет место для алгебраич. многочленов в $C[a, b]$, а также для тригонометрич. полиномов в пространстве $C_{2\pi}$ непрерывных на всей оси 2π-периодических функций с равномерной метрикой. Если Н. п. м. существует и единствен для любой $x\in X$, то он непрерывно зависит от x.

Известны критерии, указывающие необходимые и достаточные признаки Н. п. м. в пространствах C и L_p. Справедлива, напр., теорема Чебышева: если система U_n является чебышевской, то для того, чтобы многочлен (*) являлся для функции $x\in C[a, b]$ Н. п. м. в метрике пространства $C[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы нашлась система из $n+1$ точек $t_i V_i$: $a\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_{n+1}\leqslant b$, в к-рых разность

$$\Delta(t)=x(t)-\tilde{u}(t)$$

принимает значения

$$\pm\max_{a\leqslant t\leqslant b}|\Delta(t)|,$$

причем

$$\Delta(t_{i+1}) = -\Delta(t_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Многочлен (*) является Н. п. м. для функции $x(t) \in L_p[a, b]$, $p > 1$, в метрике этого пространства тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b u_k(t) \,|\, x(t) - \tilde{u}(t) \,|^{p-1} \operatorname{sign}[x(t) - \tilde{u}(t)]\, dt = 0,$$

$k = 1, 2, \ldots, n$. В случае $p = 1$, т. е. в пространстве $L_1[a, b]$, условия

$$\int_a^b u_k(t) \operatorname{sign}[x(t) - \tilde{u}(t)]\, dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

достаточны, а если мера множества тех точек t из (a, b), где $x(t) = \tilde{u}(t)$, равна нулю, то и необходимы, чтобы $\tilde{u}(t)$ был Н. п. м. для $x \in L_1[a, b]$; см. также *Маркова критерий*.

Существуют алгоритмы приближенного построения многочленов наилучшего равномерного приближения (см., напр., [3], [5]).

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [2] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [3] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [4] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [5] Лоран П. Ж., Аппроксимация и оптимизация, пер. с франц., М., 1975; [6] Ремез Е. Я., Основы численных методов чебышевского приближения, К., 1969.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТ — элемент U_0 данного множества F, доставляющий заданному элементу x метрич. пространства X *наилучшее приближение*, т. е. такой, что

$$\rho(x, u_0) = \inf\{\rho(x, u) : u \in F\}.$$

Понятие Н. п. э. обобщает классич. понятие *наилучшего приближения многочлена*. Основные вопросы, касающиеся Н. п. э.: существование и единственность Н. п. э., характеристич. свойства Н. п. э. (см. *Чебышева теорема*), свойства оператора, сопоставляющего каждому $x \in X$ множество Н. п. э. (см. *Метрическая проекция*, *Аппроксимативно компактное множество*), численные методы построения Н. п. э.

Ю. Н. Субботин.

НАИЛУЧШЕЕ ПОЛНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ — наилучшее приближение функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ k переменных ($k \geqslant 2$) алгебраическими или тригонометрич. многочленами. Пусть X — пространство C или L_p 2π-периодических по каждому переменному функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, непрерывных либо суммируемых со степенью p ($p \geqslant 1$) на k-мерном кубе периодов.

Н. п. п. функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in X$ тригонометрич. полиномами есть величина

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(f)_X = \inf_{T_{n_1, n_2, \ldots, n_k}} \| f - T_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \|_X,$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным тригонометрич. полиномам порядка n_i от переменных x_i ($1 \leqslant i \leqslant k$). Наряду с Н.п.п. функции f рассматриваются частные наилучшие приближения этой функции.

Наилучшее частное приближение функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in X$ — есть наилучшее приближение функциями $T_{n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots, n_{\nu_r}}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in X$, являющимися тригонометрич. полиномами степени $n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots, n_{\nu_r}$ ($1 \leqslant r < k$) соответственно от фиксированных переменных $x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots, x_{\nu_r}$ с коэффициентами, зависящими от остальных $k - r$ переменных, т. е. величина

$$E_{n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots, n_{\nu_r}, \infty}(f)_X = \inf_{T_{n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots, n_{\nu_r}}} \| f - T_{n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots, n_{\nu_r}} \|_X.$$

Очевидно, что

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_r, \ldots, n_k}(f)_X \geqslant E_{n_1, n_2, \ldots, n_r, \infty}(f)_X.$$

Для непрерывных функций двух переменных С. Н. Бернштейн [1] доказал неравенство

$$E_{n_1, n_2}(f)_C \leqslant A \ln(2+\min\{n_1, n_2\})\,(E_{n_1,\infty}(f)_C + E_{n_2,\infty}(f)_C), \tag{1}$$

где A — абсолютная константа. Установлено [3], что в неравенстве (1) (и в аналогичном соотношении для пространства L_1) нельзя заменить $\ln(2+\min\{n_1, n_2\})$ на множитель, растущий при $\min\{n_1, n_2\} \to \infty$ медленнее.

В пространстве L_p $(p>1)$ имеет место неравенство

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(f)_{L_p} \leqslant A_{p,k} \sum_{i=1}^{k} E_{n_i,\infty}(f)_{L_p}, \tag{2}$$

где постоянная $A_{p,k}$ зависит только от p и k.

Аналогично определяются Н. п. п. и наилучшее частное приближение функций, заданных в замкнутой ограниченной области $\Omega \subset R_k$ алгебраическими многочленами, и в этом случае известны неравенства вида (1), (2).

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1954; [2] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [3] Темляков В. Н., «Докл. АН СССР», 1975, т. 223, № 5, с. 1079—82.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ функции $x(t)$ функциями $u(t)$ из фиксированного множества F — величина

$$E(x, F) = \inf_{u \in F} \mu(x, u),$$

где $\mu(x, u)$ — погрешность приближения (см. *Приближения функций мера*). Можно говорить о Н. п. в произвольном метрич. пространстве X, когда $\mu(x, u)$ определяется расстоянием между элементами x и u, в этом случае $E(x, F)$ — расстояние от элемента x до множества F. Если X — линейное нормированное пространство, то при фиксированном $F \subset X$ Н. п.

$$E(x, F) = \inf_{u \in F} \|x-u\| \tag{1}$$

можно рассматривать как заданный на X функционал (функционал наилучшего приближения).

Функционал Н. п. непрерывен, каково бы ни было множество F. Если F — подпространство, то функционал Н. п. является полунормой, т. е.

$$E(x_1+x_2, F) \leqslant E(x_1, F) + E(x_2, F)$$

и

$$E(\lambda x, F) = |\lambda| E(x, F)$$

для любого $\lambda \in \mathbb{R}^1$. В случае, когда F — конечномерное подпространство, в F для любого $x \in X$ существует элемент u_0 (элемент наилучшего приближения), на к-ром в (1) реализуется нижняя грань:

$$E(x, F) = \|x-u_0\|.$$

В пространстве X со строго выпуклой нормой элемент Н. п. единствен.

С помощью теорем двойственности Н. п. в линейном нормированном пространстве X может быть выражено через верхнюю грань значений нек-рых функционалов из сопряженного пространства X^* (см., напр., [5], [8]). Если F — замкнутое выпуклое множество в X, то для любого $x \in X$

$$E(x, F) = \sup_{f \in X^*,\ \|f\| \leqslant 1} [f(x) - \sup_{u \in F} f(u)]; \tag{2}$$

в частности, когда F — подпространство, то

$$E(x, F) = \sup_{f \in F^\perp,\ \|f\| \leqslant 1} f(x), \tag{3}$$

где $F^\perp$ — множество функционалов f из X^* таких, что

$f(u)=0$ для любого $u \in F$. В функциональных пространствах C и L_p правые части (2) и (3) конкретизируются с учетом формы линейного функционала. В гильбертовом пространстве H Н. п. элемента $x \in H$ n-мерным подпространством F_n реализуется оператором ортогонального проектирования на F_n и может быть вычислено:

$$E(x, F_n) = \sqrt{\frac{G(x, u_1, \ldots, u_n)}{G(u_1, \ldots, u_n)}},$$

где $u_1, \ldots, u_n$ — базис F_n, а $G(u_1, \ldots, u_n)$ — определитель Грама, составленный из скалярных произведений (u_i, u_j), $i, j=1, \ldots, n$. Если базис $\{u_k\}$ ортонормирован, то

$$E^2(x, F_n) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (x, u_k)^2.$$

В пространстве $C=C[a, b]$ для величины наилучшего равномерного приближения функции $x(t) \in C$ n-мерным чебышевским подпространством $F_n \subset C$ справедлива оценка (т е о р е м а В а л л е П у с с е н а): если для нек-рой функции $u(t) \in F_n$ существует $n+1$ точек t_k, $a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} \leqslant b$, в к-рых разность

$$\Delta(t) = x(t) - u(t)$$

принимает значения с последовательно чередующимися знаками, то

$$E(x, F_n) \geqslant \min_{1 \leqslant k \leqslant n+1} |\Delta(t_k)|.$$

О Н. п. в пространстве $L_1(a, b)$ см. *Маркова критерий*. В ряде важных случаев Н. п. функций конечномерным подпространством можно оценить сверху через дифференциально-разностные характеристики (напр., модуль непрерывности) приближаемой функции или ее производных.

Понятие наилучшего равномерного приближения непрерывных функций многочленами ввел П. Л. Чебышев (1854), к-рый разработал теоретич. основы Н. п. и установил критерий многочлена Н. п. в метрике пространства C (см. *Наилучшего приближения многочлен*).

Н а и л у ч ш е е п р и б л и ж е н и е к л а с с а ф у н к ц и й — верхняя грань Н. п. функций $f(t)$ из заданного класса $\mathfrak{M}$ фиксированным множеством функций F, т. е. величина

$$E(\mathfrak{M}, F) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} E(f, F) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{\varphi \in F} \mu(f, \varphi).$$

Величина $E(\mathfrak{M}, F)$ характеризует максимальное отклонение (относительно выбранной метрики) класса $\mathfrak{M}$ от приближающего множества F и показывает, на какую минимально возможную погрешность можно рассчитывать, приближая произвольную функцию $f(t) \in \mathfrak{M}$ функциями из F.

Пусть $\mathfrak{M}$ принадлежит функциональному линейному нормированному пространству X, $U=\{u_1(t), u_2(t), \ldots\}$ — линейно независимая система функций из X и F_n, $n=1, 2, \ldots$, — подпространства, порожденные первыми n элементами этой системы. Исследование числовой последовательности $E(\mathfrak{M}, F_n)$, $n=1, 2, \ldots$, позволяет судить как о структурных и гладкостных характеристиках функций класса $\mathfrak{M}$, так и об аппроксимативных свойствах системы U относительно класса $\mathfrak{M}$. Если X — банахово пространство функций и система U замкнута в X, т. е. $\overline{\bigcup F_n} = X$, то $E(\mathfrak{M}, F_n) \to 0$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ является компактным в X множеством.

В ряде важных случаев, напр. когда F_n — подпространства тригонометрич. полиномов или периодич. сплайнов, а класс $\mathfrak{M}$ задается ограничениями на норму или модуль непрерывности нек-рой производной $f^{(r)}(t)$, величины $E(\mathfrak{M}, F_n)$ точно вычислены [5]. В непериодич. случае имеются результаты, дающие точную асимптотику $E(\mathfrak{M}, F_n)$ при $n \to \infty$.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.—Л., 1947; [2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [3] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [4] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [5] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [6] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [7] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [8] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [9] Лоран П. Ж., Аппроксимация и оптимизация, пер. с франц., М., 1975.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В СРЕДНЕМ — наилучшее приближение функции $x(t)$ функциями $u(t)$ из фиксированного множества F, когда мера (погрешность) приближения выражается с помощью интегральной метрики (см. *Наилучшее приближение*, *Приближение в среднем*).

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

НАИЛУЧШИЙ ЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД — линейный метод приближения, обеспечивающий на заданном множестве $\mathfrak{M}$ приближаемых элементов наименьшую, по сравнению с другими линейными методами, погрешность. В линейном нормированном пространстве X линейный метод приближения элементов $x \in \mathfrak{M} \subset X$ элементами фиксированного подпространства $F \subset X$ задается линейным оператором, отображающим все пространство X или нек-рое, содержащее $\mathfrak{M}$, линейное многообразие в F. Если $\mathscr{L}$ — совокупность всех таких операторов, то Н. л. м. для множества $\mathfrak{M}$ (если он существует) определяется оператором $\tilde{A} \in \mathscr{L}$, для к-рого

$$\sup_{x \in \mathfrak{M}} \| x - \tilde{A}x \| = \inf_{A \in \mathscr{L}} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \| x - Ax \|.$$

Метод, определяемый оператором A из $\mathscr{L}$, заведомо является Н. л. м. для $\mathfrak{M}$ относительно приближающего множества F, если для всех $x \in \mathfrak{M}$

$$\| x - Ax \| \leqslant \sup_{x \in \mathfrak{M}} E(x, F)$$

($E(x, F)$ — *наилучшее приближение* элемента x множеством F) и, тем более, если для всех $x \in X$

$$\| x - Ax \| = E(x, F).$$

Последний факт имеет место, когда X — гильбертово пространство, $F = F_n$ есть n-мерное ($n = 1, 2, \ldots$) его подпространство, A — линейный оператор ортогонального проектирования на F_n, т. е.

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\, e_k,$$

где $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис в F_n.

Пусть X — банахово пространство заданных на всей действительной оси функций с нормой, инвариантной относительно сдвига: $\|x(\cdot + \tau)\| = \|x(\cdot)\|$ (этому условию удовлетворяет, напр., норма пространств $C = C[0, 2\pi]$ и $L_p = L_p(0, 2\pi)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 2π-периодических функций), $F = T_n$ — подпространство тригонометрич. полиномов порядка n. Для класса $\mathfrak{M}$ функций $x(t)$ из X, содержащего вместе с $x(t)$ также и $x(t + \alpha)$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}^1$, существуют Н. л. м. (относительно T_n), в частности Н. л. м. вида

$$A(x;\ t;\ \mu,\ \nu) = \frac{\mu_0 a_0}{2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \{\mu_k (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + \nu_k (a_k \sin kt - b_k \cos kt)\}, \qquad (*)$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $x(t)$ по тригонометрич. системе, μ_k и ν_k — нек-рые числа.

На классах $W_\infty M$ (и $W_1^r M$), $r = 1, 2, \ldots$, 2π-периодических функций $x(t)$, у к-рых производная $x^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна, а $x^{(r)}(t)$ по норме в L_∞ (соответственно в L_1) ограничена числом M, Н. л. м.

вида (*) дает в метрике пространства C (соответственно L_1) ту же погрешность (на всем классе), что и наилучшее приближение подпространством T_n; аналогичный факт имеет место для таких классов при любом дробном $r>0$ (производная $x^{(r)}(t)$ понимается в смысле Вейля). При целых $r=1, 2, \ldots$ Н. л. м. вида (*) строится только с помощью коэффициентов μ_k (все $\nu_k=0$).

Если $F=S_n^r$ — подпространство 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r дефекта 1 по разбиению $k\pi/n$, $k=0, \pm 1, \ldots$, то для классов $W_\infty^{r+1}M$ (и $W_1^{r+1}M$), $r=1, 2, \ldots$, Н. л. м. в L_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$ (соответственно в L_1), доставляют сплайны из S_n^r, интерполирующие функцию $x(t)$ в точках $k\pi/n+[1+(-1)^r]\pi/4n$.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [2] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [3] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ—числовая последовательность $\{E(x, F_n)\}$, $n=1, 2, \ldots$, где $E(x, F_n)$ — *наилучшее приближение* элемента x линейного нормированного пространства X элементами n-мерного подпространства $F_n\subset X$, причем $F_1\subset F_2\subset\ldots$, так что $E(x, F_1)\geqslant E(x, F_2)\geqslant\ldots$. Обычно F_n есть линейная оболочка первых n элементов нек-рой фиксированной системы $\{u_1, u_2, \ldots\}$ линейно независимых элементов из X.

В случае, когда $X=C[a, b]$, $F_n=F_n^A$ — подпространство алгебраич. многочленов степени $n-1$, Н. п. п. впервые рассматривалась в 50-х гг. 19 в. П. Л. Чебышевым; тот факт, что

$$E(x, F_n^A)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

для любой функции $x(t)\in C[a, b]$, установлен в 1885 К. Вейерштрассом (K. Weierstrass). В общем случае соотношение

$$\lim_{n\to\infty} E(x, F_n) \text{ для всех } x\in X$$

выполняется всегда, когда объединение подпространств F_n, $n=1, 2, \ldots$, всюду плотно в X, т. е.

$$\overline{\bigcup F_n}=X$$

(по существу это эквивалентные утверждения). Однако последовательность $E(x, F_n)$ может стремиться к нулю как угодно медленно. Это вытекает из теоремы Бернштейна: если $\{F_n\}$ — последовательность подпространств размерности $n=1, 2, \ldots$ линейного нормированного пространства X, причем $F_1\subset F_2\subset\ldots$ и $\overline{\bigcup F_n}=X$, то какова бы ни была монотонно стремящаяся к нулю числовая последовательность $\{\mu_n\}$, $\mu_n\geqslant 0$, существует элемент $x\in X$ такой, что $E(x, F_n)=\mu_n$, $n=1, 2, \ldots$. В функциональных пространствах C и L_p скорость стремления к нулю Н. п. п. зависит как от системы подпространств F_n, так и от гладкостных характеристик приближаемой функции x (модуля непрерывности, существования производных до определенного порядка и пр.) и может быть оценена через эти характеристики. Обратно, зная скорость стремления к нулю последовательности $E(x, F_n)$, можно судить о гладкости функции $x(t)$ (см. *Приближение функций*; прямые и обратные теоремы).

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1954; [2] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [3] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

НАИМЕНЕЕ БЛАГОПРИЯТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — априорное распределение, максимизирующее функцию риска в статистич. задаче принятия решения.

Пусть по реализации случайной величины X, принимающей значения в выборочном пространстве ($\mathfrak{X}$,

$\mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}$, P_θ), $\theta \in \Theta$, надлежит принять решение d из пространства решений $(\mathfrak{D}, \mathfrak{B}_{\mathfrak{D}})$, при этом предполагается, что неизвестный параметр θ является случайной величиной, принимающей значения в выборочном пространстве $(\Theta, \mathfrak{B}_\theta, \pi_t)$, $t \in T$. Пусть функция $L(\theta, d)$ выражает потери, к-рые возникают при принятии решения d, если истинное значение параметра есть θ. Априорное распределение π_{t*} из семейства $\{\pi_t, t \in T\}$ наз. наименее благоприятным для решения d в статистической задаче принятия решения при бейесовском подходе, если

$$\sup_{t \in T} \rho(\pi_t, d) = \rho(\pi_{t*}, d),$$

где

$$\rho(\pi_t, d) = \int_\Theta \int_{\mathfrak{X}} L(\theta, d(x))\, dP_0(x)\, d\pi_t(\theta)$$

— функция риска, выражающая средние потери от принятия решения d. Н. б. р. π_{t*} позволяет вычислить самые «тяжелые» (в среднем) потери $\rho(\pi_{t*}, d)$, возникающие при принятии решения d. В практич. деятельности ориентируются, как правило, не на Н. б. р., а наоборот, стараются принять такое решение, к-рое предохранило бы от максимальных потерь при изменении параметра θ, что приводит к поиску минимаксного решения d^*, минимизирующего максимальный риск, т. е.

$$\inf_{d \in \mathfrak{D}} \sup_{t \in T} \rho(\pi_t, d) = \sup_{t \in T} \rho(\pi_t, d^*).$$

В задаче проверки сложной статистич. гипотезы против простой альтернативы при бейесовском подходе Н. б. р. определяется с помощью редукции Вальда, к-рая заключается в следующем. Пусть по реализации случайной величины X надлежит проверить сложную гипотезу H_0, согласно к-рой закон распределения X принадлежит семейству $H_0 = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, против простой альтернативы H_1, согласно к-рой случайная величина X подчиняется закону Q, и пусть

$$p_\theta(x) = \frac{dP_\theta(x)}{d\mu(x)} \quad \text{и} \quad q(x) = \frac{dQ(x)}{d\mu(x)}$$

где $\mu(\cdot)$ — нек-рая σ-конечная мера на $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}_{\mathfrak{X}})$, $\{\pi_t, t \in T\}$ — семейство априорных распределений на $(\Theta, \mathfrak{B}_\Theta)$. Тогда для любого $t \in T$ сложной гипотезе H_0 можно сопоставить простую гипотезу H_t, согласно к-рой случайная величина X подчиняется вероятностному закону, имеющему плотность вероятности

$$f_t(x) = \int_\Theta p_\theta(x)\, d\pi_t(\theta).$$

Согласно *Неймана — Пирсона лемме* для проверки простой гипотезы H_t против простой альтернативы H_1 существует *наиболее мощный критерий*, построенный на отношении правдоподобия. Пусть β_t — мощность этого критерия, тогда Н. б. р. есть то априорное распределение π_{t*} из семейства $\{\pi_t, t \in T\}$, для к-рого выполняется неравенство $\beta_{t*} \leqslant \beta_t$ для всех $t \in T$. Н. б. р. обладает тем свойством, что плотность вероятности $f_{t*}(x)$ случайной величины X при гипотезе H_{t*} «наименее удалена» от альтернативной плотности $q(x)$, т. е. гипотеза H_{t*} является самой «близкой» из семейства $\{H_t, t \in T\}$ к конкурирующей гипотезе H_1. См. *Бейесовский подход*.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

М. С. Никулин.

НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЙСЯ ОТ НУЛЯ МНОГОЧЛЕН — алгебраический многочлен степени n со старшим коэффициентом, равным единице, имеющий минимальную норму в пространстве $C[a, b]$ или $L_p[a, b]$.

П. Л. Чебышев [1] установил, что среди всех много членов вида

$$Q_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (1)$$

минимальную норму в пространстве $C[a, b]$ имеет единственный многочлен

$$T_n(x) = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n \cos n \arccos \frac{2x-a-b}{b-a},$$

причем

$$\| T_n \|_{C[a, b]} = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n.$$

Многочлен

$$U_n(x) = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} \frac{\sin(n+1) \arccos \frac{2x-a-b}{b-a}}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$$

является единственным Н. у. от н. м. в пространстве $L_1[a, b]$ среди всех многочленов вида (1), при этом

$$\| U_n \|_{L_1[a, b]} = 4\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}.$$

В пространстве $L_p[a, b]$, $1 < p < \infty$, Н. у. от н. м. существует и единствен, известен ряд его свойств (см. [2], [5]).

На множестве многочленов вида (1) интеграл

$$\int_a^b Q_n^2(x)\, \rho(x)\, dx, \quad \rho(x) > 0, \qquad (2)$$

будет минимальным тогда и только тогда, когда $Q_n(x)$ ортогонален с весом $\rho(x)$ на интервале (a, b) всем многочленам степени $n-1$. Если

$$a = -1,\ b = 1,\ \rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta,$$

где $\alpha, \beta > -1$, то интеграл (2) минимизируется *Якоби многочленом* (при $\alpha = \beta = 0$ *Лежандра многочленом*) степени n со старшим коэффициентом, равным единице.

Среди тригонометрич. полиномов вида

$$a \cos nx + b \sin nx + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где a и b фиксированы, минимальную норму в пространствах $C[0, 2\pi]$ и $L_p[0, 2\pi]$ при любом $p \geqslant 1$ имеет полином

$$a \cos nx + b \sin nx.$$

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947; [2] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [3] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [4] Сегё Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [5] Никольский С. М., Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979; [6] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1976.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

НАИМЕНЬШЕГО ЧИСЛА ОПЕРАТОР, μ-оператор, оператор минимизации,— способ построения новых функций из других функций, состоящий в следующем. Пусть g есть $(n+1)$-местная арифметич. функция, т. е. функция, аргументы к-рой так же, как и она сама, принимают значения в множестве натуральных чисел. Функция g предполагается частичной функцией, т. е. определенной не обязательно для всех значений аргументов. Говорят, что n-местная арифметич. функция f получается из функции g с помощью Н. ч. о., если выполнено условие: для любых натуральных чисел $k_1, \ldots, k_n, k$

$$f(k_1, \ldots, k_n) = k$$

тогда и только тогда, когда для всех $l < k$ значения $g(k_1, \ldots, k_n, l)$ определены и отличны от нуля, а значение $g(k_1, \ldots, k_n, k)$ определено и равно нулю. Если f получается из функции g с помощью Н. ч. о., то пишут:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y\, [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0].$$

Важным свойством Н. ч. о. является то, что с его помощью из *вычислимой функции* g всегда получается частичная вычислимая функция f. Именно, если имеется алгоритм для вычисления g, то значение $f(x_1, \ldots, x_n)$ может вычисляться следующим образом. Вычисляем $g(x_1, \ldots, x_n, 0)$. Если процесс вычисления закончится, т. е. значение $g(x_1, \ldots, x_n, 0)$ определено, и $g(x_1, \ldots, x_n, 0)=0$, то полагаем $f(x_1, \ldots, x_n)=0$, а если $g(x_1, \ldots, x_n, 0)\neq 0$, то начинаем вычислять $g(x_1, \ldots, x_n, 1)$. Если процесс закончится и $g(x_1, \ldots, x_n, 1)=0$, то полагаем $f(x_1, \ldots, x_n)=1$, а если $g(x_1, \ldots, x_n, 1)\neq 0$, то переходим к вычислению $g(x_1, \ldots, x_n, 2)$ и т. д. Процесс вычисления закончится, если найдется такое y, что для всех $z<y$ значение $g(x_1, \ldots, x_n, z)$ определено и отлично от нуля, а $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ определено и равно нулю. Тогда $f(x_1, \ldots, x_n)=y$.

Н. ч. о. играет важную роль в определении класса *частично рекурсивных функций*. *В. Е. Плиско.*

НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ — наименьшее положительное из общих кратных целых, в частности натуральных, чисел $a_1, \ldots, a_n$. Н. о. к. чисел $a_1, \ldots, a_n$ существует, если $a_1 \ldots a_n\neq 0$. Н. о. к. чисел $a_1, \ldots, a_n$ обычно обозначают символом $[a_1, \ldots, a_n]$.

Свойства Н. о. к.:

1) Н. о. к. чисел $a_1, \ldots, a_n$ — делитель любого общего кратного этих чисел;

2) $[a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}]=[[a_1, \ldots, a_n], a_{n+1}]$;

3) если целые числа $a_1, \ldots, a_n$ представлены в виде

$$a_1=p_1^{\alpha_1}\ldots p_s^{\alpha_s}, \ \ldots, \ a_n=p_1^{\nu_1}\ldots p_s^{\nu_s},$$

где $p_1, \ldots, p_s$ — различные простые, $\alpha_i\geqslant 0, \ldots, \nu_i\geqslant 0$, $i=1, \ldots, s$, и $\mu_i=\max(\alpha_i, \ldots, \nu_i)$, то

$$[a_1, \ldots, a_n]=p_1^{\mu_1}\ldots p_s^{\mu_s};$$

4) если $ab>0$, то $[a, b]\cdot(a, b)=a\cdot b$, где (a, b) — *наибольший общий делитель* для a и b.

Последнее свойство позволяет находить Н. о. к. двух чисел при помощи *Евклида алгоритма*. Понятие Н. о. к. может быть введено для элементов области целостности, а также для идеалов коммутативного кольца.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981; [2] Бухштаб А. А., Теория чисел, 2 изд., М., 1966; [3] Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М., Современная математика, пер. с франц., М., 1966.

В. И. Нечаев, А. А. Бухштаб.

НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ МЕТОД — один из методов *ошибок теории* для оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащим случайные ошибки. Н. к. м. применяется также для приближенного представления заданной функции другими (более простыми) функциями и часто оказывается полезным при обработке наблюдений. Н. к. м. предложен К. Гауссом (C. Gauss, 1794—95) и А. Лежандром (A. Legendre, 1805—06). Строгое обоснование и установление границ содержательной применимости Н. к. м. даны А. А. Марковым и А. Н. Колмогоровым. В простейшем случае линейных связей (см. ниже) и наблюдений, не содержащих систематич. ошибок, а подверженных лишь случайным ошибкам, оценки неизвестных величин, полученные с помощью Н. к. м., являются линейными функциями от наблюденных значений. Эти оценки не имеют систематич. ошибок, т. е. являются несмещенными (см. *Несмещенная оценка*). Если случайные ошибки наблюдений независимы и подчиняются нормальному распределению, то Н. к. м. дает оценки неизвестных с наименьшей дисперсией, т. е. эти оценки являются эффективными (см. *Статистическое оценивание*). В этом смысле Н. к. м. является наилучшим среди всех остальных методов, позволяющих находить несмещенные оценки. Однако если распределение случайных ошибок существенно отличается от нормального, то Н. к. м. может и не быть наилучшим.

При обосновании Н. к. м. (по Гауссу) предполагается, что «убыток» от замены точного (неизвестного) значения нек-рой величины μ ее приближенным значением X, вычисленным по результатам наблюдений, пропорционален квадрату ошибки $(X-\mu)^2$; оптимальной оценкой считается такая лишенная систематич. ошибки величина X, для к-рой среднее значение $\mathsf{E}(X-\mu)^2$ «убытка» минимально. Именно это требование и составляет основу Н. к. м. В общем случае отыскание оптимальной в смысле Н. к. м. оценки X — задача весьма сложная, поэтому практически эту задачу сужают и в качестве X выбирают линейную функцию от результатов наблюдений, лишенную систематич. ошибки, и такую, для к-рой среднее значение убытка минимально в классе всех линейных функций. Если случайные ошибки наблюдений подчиняются нормальному распределению и оцениваемая величина μ зависит от средних значений результатов наблюдений линейно (случай, весьма часто встречающийся в приложениях Н. к. м.), то решение этой задачи будет одновременно являться и решением общей задачи. При этом оптимальная оценка X также подчиняется нормальному распределению со средним значением μ и, следовательно, плотность вероятности случайной величины X

$$p(x;\ \mu,\ \sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

достигает максимума в точке $x=\mu$ (это свойство и выражает точное содержание распространенного в теории ошибок утверждения: «оценка X, вычисленная согласно Н. к. м.,— наиболее вероятное значение неизвестного параметра μ»).

Случай одного неизвестного. Пусть для оценки значения неизвестной величины μ произведено n независимых наблюдений, давших результаты $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, т. е. $Y_1=\mu+\delta_1$, $Y_2=\mu+\delta_2$, ..., $Y_n=\mu+\delta_n$, где $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ — случайные ошибки (по определению, принятому в классич. теории ошибок, случайные ошибки — независимые случайные величины с нулевым математич. ожиданием: $\mathsf{E}\delta_i=0$; если же $\mathsf{E}\delta_i\neq 0$, то $\mathsf{E}\delta_i$ наз. систематическими ошибками). Согласно Н. к. м. в качестве оценки величины μ принимают такое X, для к-рого будет наименьшей сумма квадратов (отсюда и само название метода):

$$S(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i\,(X-Y_i)^2,$$

где

$$p_i=k/\sigma_i^2 \text{ и } \sigma_i^2=\mathsf{D}\delta_i=\mathsf{E}\delta_i^2$$

(коэффициент $k>0$ можно выбирать произвольно). Величину p_i наз. весом, а σ_i — квадратичным отклонением измерения с номером i. В частности, если все измерения равноточны, то $\sigma_1=\sigma_2=\ldots=\sigma_n$, и в этом случае можно положить $p_1=p_2=\ldots=p_n=1$; если же каждое Y_i — арифметич. среднее из n_i равноточных измерений, то полагают $p_i=n_i$.

Сумма $S(X)$ будет наименьшей, если в качестве X выбрать взвешенное среднее:

$$X=\overline{Y}=\frac{1}{P}\sum p_iY_i, \text{ где } P=\sum p_i.$$

Оценка $\overline{Y}$ величины μ лишена систематич. ошибки, имеет вес P и дисперсию $D\overline{Y}=k/P$. В частности, если все измерения равноточны, то Y — арифметич. среднее результатов измерений:

$$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum Y_i \text{ и } \mathsf{D}\overline{Y}=\sigma^2/n.$$

При нек-рых общих предположениях можно показать, что если количество наблюдений n достаточно велико, то распределение оценки $\overline{Y}$ мало отличается от

нормального с математич. ожиданием μ и дисперсией k/P. В этом случае абсолютная погрешность приближенного равенства $\mu \approx \overline{Y}$ меньше $t\sqrt{k/P}$ с вероятностью, близкой к значению интеграла

$$I(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-u^2/2} du \qquad (1)$$

(напр., $I(1{,}96) = 0{,}950$; $I(2{,}58) = 0{,}990$; $I(3{,}00) = 0{,}997$).

Если веса измерений p_i заданы, а множитель k до наблюдений остается неопределенным, то этот множитель и дисперсия оценки $\overline{Y}$ могут быть оценены по формулам:

$$k \approx S(\overline{Y})/(n-1)$$

и

$$D\overline{Y} = k/P \approx s^2 = S(\overline{Y})/[(n-1)P]$$

(обе оценки лишены систематич. ошибок).

В том практически важном случае, когда ошибки δ_i подчиняются нормальному распределению, можно найти точное значение вероятности, с к-рой абсолютная погрешность приближенного равенства $\mu \approx \overline{Y}$ окажется меньше ts (t — произвольное положительное число):

$$I_{n-1}(t) = C_{n-1} \int_0^t \left(1 + \frac{v^2}{n-1}\right)^{-n/2} dv, \qquad (2)$$

где постоянная C_{n-1} выбрана таким образом, чтобы выполнялось условие $I_{n-1}(\infty) = 1$ (*Стьюдента распределение* с $n-1$ степенями свободы). При больших n формулу (2) можно заменить формулой (1). Однако применение формулы (1) при небольших n привело бы к грубым ошибкам. Так, напр., согласно (1) значению $I = 0{,}99$ соответствует $t = 2{,}58$; истинные значения t, определяемые при малых n как решения соответствующих уравнений $I_{n-1}(t) = 0{,}99$, приведены в таблице:

n	2	3	4	5	10	20	30
t	63,66	9,92	5,84	4,60	3,25	2,86	2,76

Пример. Для определения массы нек-рого тела произведено 10 независимых равноточных взвешиваний, давших результаты Y_i (в $г$):

Y_i	18,41	18,42	18,43	18,44	18,45	18,46
n_i	1	3	3	1	1	1

(здесь n_i — число случаев, в к-рых наблюдалась масса Y_i; $n = \Sigma n_i = 10$). Так как все взвешивания равноточные, то следует положить $p_i = n_i$ и в качестве оценки для неизвестного веса μ выбрать величину $Y = \Sigma n_i Y_i / \Sigma n_i = 18{,}431$. Задавая, напр., $I_9 = 0{,}95$, по таблицам распределения Стьюдента с девятью степенями свободы можно найти, что $t = 2{,}262$, и поэтому в качестве предельной абсолютной погрешности приближенного равенства $\mu \approx 18{,}431$ следует принять величину

$$ts = t\sqrt{\sum n_i (Y_i - \overline{Y})^2/90} = 2{,}262 \cdot 0{,}0048 = 0{,}011.$$

Таким образом, $18{,}420 < \mu < 18{,}422$.

Случай нескольких неизвестных (линейные связи). Пусть n результатов измерений $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ связаны с m неизвестными величинами $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ($m < n$) независимыми линейными соотношениями

$$Y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + \delta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (3)$$

где a_{ij} — известные коэффициенты, а δ_i — независимые случайные ошибки измерений. Требуется оценить неиз-

вестные величины x_j (эту задачу можно рассматривать как обобщение предыдущей, в к-рой

$$\mu = x_1 \text{ и } m = a_{i1} = 1;\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Так как $\mathsf{E}\delta_i = 0$, то средние значения результатов измерений $y_i = \mathsf{E}Y_i$ связаны с неизвестными величинами $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линейными уравнениями (линейные связи):

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{4}$$

Следовательно, искомые величины x_i представляют собой решение системы (4), уравнения к-рой предполагаются совместными. Точные значения измеряемых величин y_i и случайные ошибки δ_i обычно неизвестны, поэтому вместо систем (3) и (4) принято записывать так наз. условные уравнения

$$Y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Согласно Н. к. м. в качестве оценок для неизвестных x_j применяют такие величины X_j, для к-рых сумма квадратов отклонений

$$S = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(Y_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}X_j \right)^2$$

будет наименьшей (как и в предыдущем случае, p_i — вес измерения, Y_i — величина, обратно пропорциональная дисперсии случайной ошибки δ_i). Условные уравнения, как правило, несовместны, т. е. при любых значениях X_j разности

$$\Delta_i = Y_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}X_j, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

не могут, вообще говоря, все обратиться в нуль. Н. к. м. предписывает в качестве оценок выбрать такие значения X_j, к-рые минимизируют сумму S. В тех исключительных случаях, когда условные уравнения совместны и, значит, обладают решением, это решение совпадает с оценками, полученными согласно Н. к. м.

Сумма квадратов S представляет собой квадратичный многочлен относительно переменных X_j; этот многочлен достигает минимума при таких значениях $X_1, X_2, \ldots, X_m$, при к-рых обращаются в нуль все первые частные производные:

$$\frac{\partial S}{\partial X_j} = -2\sum_{i=1}^{n} p_i\Delta_i = 0, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Отсюда следует, что оценки X_j, полученные согласно Н. к. м., должны удовлетворять системе т. н. нормальных уравнений, к-рая в обозначениях, предложенных К. Гауссом, имеет вид

$$\sum_{j=1}^{m} [pa_ja_l]\, X_j = [pYa_l], \quad l = 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{5}$$

где

$$[pa_ja_l] = \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} a_{il}$$

и

$$[pYa_l] = \sum_{i=1}^{n} p_i Y_i a_{il}.$$

Оценки, получающиеся в результате решения системы нормальных уравнений, лишены систематич. ошибок ($\mathsf{E}X_j = x_j$); дисперсии $\mathsf{D}X_j$ величин X_j равны kd_{jj}/d, где d — определитель системы (5), а d_{jj} — минор, соответствующий диагональному элементу $[pa_ja_j]$ (иными словами, d_{jj}/d — вес оценки X_j). Если множитель пропорциональности k (k наз. дисперсией на единицу веса) заранее неизвестен, то для его оценки, а также для оценки дисперсии $\mathsf{D}X_j$ служат формулы

$$k \approx S/(n-m) \quad \text{и} \quad \mathsf{D}X_j \approx s_j^2 = Sd_{jj}/d\,(n-m)$$

(S — минимальное значение исходной суммы квадра-

тов). При нек-рых общих предположениях можно показать, что если количество наблюдений n достаточно велико, то абсолютная погрешность приближенного равенства $x_j \approx X_j$ меньше ts_j с вероятностью, близкой к значению интеграла (1). Если случайные ошибки наблюдений δ_i подчиняются нормальному распределению, то все отношения $(X_j - x_j)/s_j$ распределены по закону Стьюдента с $n-m$ степенями свободы (точная оценка абсолютной погрешности приближенного равенства производится здесь с помощью интеграла (2) так же, как в случае одного неизвестного). Кроме того, минимальное значение суммы S в вероятностном смысле не зависит от $X_1, X_2, \ldots, X_m$, и потому приближенные значения дисперсий оценок $\mathsf{D}X_j \approx s_j^2$ не зависят от самих оценок X_j.

Один из наиболее типичных случаев применения Н. к. м.— «выравнивание» таких результатов наблюдений Y_j, для к-рых в уравнениях (3) $a_{ij} = a_j(t_i)$, где $a_j(t)$ — известные функции нек-рого параметра t (если t — время, то $t_1, t_2, \ldots$ — те моменты времени, в к-рые производились наблюдения). Особенно часто встречается в приложениях случай т. н. параболической интерполяции, когда $a_j(t)$ — многочлены (напр., $a_1(t) - 1$, $a_2(t) = t$, $a_3(t) = t^2$, ...); если $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \ldots = t_n - t_{n-1}$, а наблюдения равноточные, то для вычисления оценок X_j можно воспользоваться таблицами ортогональных многочленов. Другой важный для приложений случай — т. н. гармоническая интерполяция, когда в качестве $a_j(t)$ выбирают тригонометрич. функции (напр., $a_j(t) = \cos(j-1)t$, $j = 1, 2, \ldots, m$).

Пример. Для оценки точности одного из методов химич. анализа этим методом определялась концентрация CaO в десяти эталонных пробах заранее известного состава. Результаты наблюдений указаны в таблице (i — номер эксперимента, t_i — истинная концентрация CaO, T_i — концентрация CaO, определенная в результате химич. анализа, $Y_i = T_i - t_i$ — ошибка химич. анализа):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	12,5	16	20	25	31	36	40	40
−0,3	−0,2	−0,4	−0,4	−0,2	−0,5	+0,1	−0,5	−0,6	−0,5

Если результаты химич. анализа не имеют систематич. ошибок, то $\mathsf{E}Y_i = 0$. Если же такие ошибки имеются, то в первом приближении их можно представить в виде: $\mathsf{E}Y_i = \alpha + \beta t_i$ (α наз. постоянной ошибкой, а βt_i — методической ошибкой) или, что то же самое,

$$\mathsf{E}Y_i = (\alpha + \beta\bar{t}) + \beta(t_i - \bar{t}),$$

где

$$\bar{t} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} t_i = 23{,}25.$$

Для отыскания оценок α и β достаточно оценить величины $x_1 = \alpha + \beta\bar{t}$ и $x_2 = \beta$. Условные уравнения в данном случае имеют вид

$$Y_i = x_1 + x_2(t_i - \bar{t}), \quad i = 1, 2, \ldots, 10,$$

поэтому $a_{i1} = 1$, $a_{i2} = t_i - \bar{t}$ (согласно предположению о равноточности наблюдений все $p_i = 1$). Так как $[a_1 a_2] = [a_2 a_1] = \Sigma(t_i - \bar{t}) = 0$, то система нормальных уравнений записывается особенно просто:

$$[a_1 a_1]\, X_1 = [Y a_1];\ [a_2 a_2]\, X_2 = [Y a_2],$$

где

$$[a_1a_1]=10,\ [a_2a_2]=\sum(t_i-\bar{t})^2=1569,$$

$$[Ya_1]=\sum Y_i=-3{,}5,$$

$$[Ya_2]=\sum Y_i\,(t_i-\bar{t})=-8{,}225.$$

Дисперсии компонент решения этой системы суть

$$\mathsf{D}X_1=\frac{k}{[a_1a_1]}=\frac{k}{10}\quad\text{и}\quad \mathsf{D}X_2=\frac{k}{[a_2a_2]}=\frac{k}{1569},$$

где k — неизвестная дисперсия на единицу веса (в данном случае k — дисперсия *любой* из величин Y_i). Так как в этом примере компоненты решения принимают значения $X_1=-0{,}35$, и $X_2=-0{,}00524$, то

$$k\approx S/(n-m)=$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{10}[Y_i-X_1-X_2(t_i-\bar{t})]^2=0{,}0427,$$

$$\mathsf{D}X_1\approx s_1^2=0{,}00427,\ \mathsf{D}X_2\approx s_2^2=0{,}000272,$$

$$s_1=0{,}065,\quad s_2=0{,}00522.$$

Если случайные ошибки наблюдений подчиняются нормальному распределению, то отношения $|X_j-x_j|/s_j$, $j=1, 2$, распределены по закону Стьюдента. В частности, если результаты наблюдений лишены систематич. ошибок, то $x_1=x_1=0$, и, значит, закону Стьюдента должны подчиняться отношения $|X_1|/s_1$ и $|X_2|/s_2$. С помощью таблиц распределения Стьюдента с $n-m=8$ степенями свободы можно убедиться, что если действительно $x_1=x_2=0$, то с вероятностью 0,999 каждое из этих отношений не должно превосходить 5,04 и с вероятностью 0,95 не должно превосходить 2,31. В данном случае $|X_1|/s_1=5{,}38>5{,}04$, поэтому гипотезу отсутствия систематич. ошибок целесообразно отвергнуть; в то же время следует признать, что гипотеза об отсутствии методич. ошибки ($x_2=0$) не противоречит результатам наблюдений, т. к. $|X_2|/s_2=1{,}004<2{,}31$. Таким образом, можно заключить, что для определения t по результату наблюдения T целесообразно пользоваться приближенной формулой $t=T+0{,}35$.

Случай нескольких неизвестных (нелинейные связи). Пусть n результатов измерений Y_i связаны с m неизвестными x_j ($m<n$) функциональной зависимостью $Y_i=f_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)+\delta_i$; $i=1, 2, \ldots, n$, где δ_i — независимые случайные ошибки, а функции f_i (в общем случае нелинейные) дифференцируемы. Согласно Н. к. м. в качестве оценок для x_j принимают такие величины X_j, для к-рых сумма квадратов

$$S=\sum_{i=1}^{n}p_i\,[Y_i-f_i\,(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m)]^2$$

будет наименьшей. Так как функции f_i нелинейные, то решение нормальных уравнений $\partial S/\partial X_j=0$ в этом случае может представлять значительные трудности. Иногда нелинейные связи каким-либо преобразованием могут быть приведены к линейным.

Напр., при намагничивании железа напряженность магнитного поля H связана с магнитной индукцией B эмпирич. формулой $B=H/(x_1+Hx_2)$ (коэффициенты x_1 и x_2 определяются по измеренным значениям B_i при заданных H_i). Индукция B — нелинейная функция от x_1 и x_2. Однако обратная величина индукции зависит от x_1 и x_2 линейно. Применение Н. к. м. к исходному и преобразованному равенствам дает, вообще говоря, различные оценки для неизвестных x_1 и x_2, но если дисперсия случайных ошибок измерения индукции значительно меньше измеряемых величин B_i, то $\mathsf{D}(1/B)\approx\approx B^{-4}$. Поэтому величинам $1/B_i$ следует приписать веса $(1/B_i)^4$; естественно ожидать, что при этих условиях различие оценок в нелинейном и линейном случаях будет практически несущественным.

В тех случаях, когда не удается тождественными преобразованиями заменить нелинейные уравнения линейными, пользуются другим способом линеаризации. Из заданных n уравнений отбирают какие-либо m уравнений, решение к-рых $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_m^0$ принимают за нулевое приближение для неизвестных x_j. Если положить $\xi_j = X_j - X_j^0$, то систему условных уравнений можно записать в виде:

$$Y_i = f_i(X_1^0 + \xi_1, X_2^0 + \xi_2, \ldots, X_m^0 + \xi_m), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Разлагая правые части в ряд по степеням ξ_j и ограничиваясь линейными членами, получают

$$Y_i - (f_i)_0 = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0 \xi_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $(f_i)_0$ и $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0$ — значение функции f_i и ее производных по x_j при $x_1 = X_1^0, x_2 = X_2^0, \ldots, x_m = X_m^0$. Эта система уравнений линейна, и поэтому для оценки неизвестных ξ_j легко может быть применен Н. к. м. Оценив ξ_j, получают первое приближение для неизвестных $X_j^1 = X_j^0 + \xi_j$. Величины X_j^1 берут за исходное приближение, и всю операцию повторяют, пока с заданной точностью не совпадут два последовательных приближения. Если дисперсии ошибок δ_i уменьшаются, то процесс сходится.

Очень часто при малых $D\delta_i$ оказывается вполне достаточным уже первое приближение: не имеет смысла требовать нахождения X_j с точностью, значительно превышающей $\sqrt{DX_j}$.

Во многих практически важных случаях (и в частности, при оценке сложных нелинейных связей) количество неизвестных параметров бывает весьма большим, и поэтому реализация Н. к. м. оказывается эффективной лишь при использовании современной вычислительной техники.

Лит.: [1] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [2] Колмогоров А. Н., «Успехи матем. наук», 1946, т. 1, в. 1, с. 57—70; [3] Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962; [4] Налимов В. В., Применение математической статистики при анализе вещества, М., 1960; [5] Helmert F. R., Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 3 Aufl., Lpz.— B., 1924.

Л. Н. Большев.

НАИМЕНЬШИХ РЕАКЦИЙ ПРИНЦИП — следствие из *Гаусса принципа*, получаемое из последнего с помощью уравнений, выражающих второй закон Ньютона для точек несвободной системы (см. [1]). Согласно Н. р. п. для действительного движения системы величина

$$\sum_{\nu} \frac{R_\nu^2}{2m_\nu}$$

есть минимум в классе мыслимых по Гауссу движений. Здесь R_ν — реакции связей, m_ν — массы точек системы.

Лит.: [1] Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, М., 1962, с. 493.

В. В. Румянцев.

НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА МЕТОД — частный случай метода спуска, когда направление g^k, указывающее спуск, выбирается противоположным $\operatorname{grad} f(x^k)$. Формулы Н. с. м. имеют вид

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k f'(x^k), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где параметры $\{\alpha_k\}$ выбираются из условия максимального убывания на каждом шаге функции $f(x)$. Если функция f дважды непрерывно дифференцируема и матрица f'' ее вторых производных удовлетворяет при любых x, y неравенству

$$m \| y \|^2 \leqslant (f''(x)\, y,\, y) \leqslant M \| y \|^2$$

с константами $M \geqslant m > 0$, то (см. [2], [4]) последовательность $\{x^k\}$ сходится к решению x^* задачи минимизации

функции f со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем $q<1$.

Широкое применение Н. с. м. нашел при решении систем линейных алгебраич. уравнений $Ax=f$ с эрмитовой и положительно определенной матрицей A. В действительном случае задача решения этой системы эквивалентна нахождению вектора x^*, минимизирующего в пространстве n-мерных векторов функционал

$$f(x)=(Ax,\ x)-2(x,\ f). \qquad (*)$$

Применительно к (*) формулы Н. с. м. принимают вид

$$x^{k+1}=x^k-\alpha_k(Ax^k-f),\quad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

причем значение α_k определяется из условия минимума функционала (*) по формуле

$$\alpha_k=(\xi^k,\ \xi^k)/(A\xi^k,\ \xi^k),\ \xi^k=Ax^k-f.$$

Если спектр матрицы A принадлежит отрезку действительной оси $[m,\ M]$, где $M\geqslant m>0$, то последовательность $\{x^*\}$ сходится к решению x^* со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем $q=(M-m)/(M+m)$.

Н. с. м. может быть применен для решения операторного уравнения $Au=f$ с самосопряженным положительно определенным ограниченным оператором A. Если оператор A не удовлетворяет наложенным условиям, задачу можно симметрировать, сведя к задаче

$$A^*Au=A^*f,$$

и уже затем применить Н. с. м. (см. также *Минимальных невязок метод*).

Лит.: [1] Канторович Л. В., «Докл. АН СССР», 1947, т. 56, № 3, с. 233—36; [2] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [3] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.— Л., 1963; [4] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах, М., 1975; [5] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., т. 1, М., 1975. *Ю. А. Кузнецов.*

НАЙКВИСТА КРИТЕРИЙ — необходимое и достаточное условие устойчивости замкнутой линейной системы автоматич. регулирования (системы с обратной связью), формулируемое в терминах свойств разомкнутой системы (системы с разомкнутой цепью обратной связи).

Пусть рассматривается нек-рая линейная система автоматич. регулирования с обратной связью и пусть

$$W(p)=\frac{M(p)}{N(p)}$$

— *передаточная функция* соответствующей разомкнутой системы, причем степень многочлена $M(z)$ не выше степени многочлена $N(z)$. Комплекснозначная функция $z=W(i\omega)$ действительного переменного $\omega\in[0,\ \infty)$ (амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы) описывает в комплексной плоскости z кривую, наз. диаграммой Найквиста. Пусть характеристич. многочлен $N(z)$ разомкнутой системы имеет k, $0\leqslant k\leqslant n$, корней с положительными и $n-k$ корней с отрицательными действительными частями. Н. к. гласит: замкнутая система автоматич. регулирования асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда диаграмма Найквиста охватывает точку $z=-1$ против хода часовой стрелки $k/2$ раз (эквивалентное условие: когда вектор с началом -1 и концом $W(i\omega)$ при возрастании ω от 0 до $+\infty$ поворачивается в положительном направлении на угол πk).

Этот критерий впервые был предложен Х. Найквистом [1] для усилителей с обратной связью; он представляет собой один из частотных критериев устойчивости линейных систем автоматич. регулирования (примыкающий, напр., к *Михайлова критерию*, см. [2], [3]). Важно отметить, что если уравнения нек-рых элементов системы неизвестны, то диаграмму Найквиста можно построить экспериментально, подавая гармонич. сигнал с

измеряющейся частотой на вход при разомкнутой цепи обратной связи [4]. Известны обобщения Н. к. на системы автоматич. регулирования с запаздыванием и на импульсные системы (см. [5]).

Лит.: [1] Nyquist H., «Bell System Techn. J.», 1932, v. 11, № 1, p. 126—47; [2] Булгаков Б. В., Колебания, М., 1954; [3] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973; [4] Ройтенберг Я. Н., Автоматическое управление, 2 изд., М., 1978; [5] Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э., Математические основы теории управляемых систем, М., 1969. *Н. Х. Розов.*

НАКЛОННАЯ к прямой l — прямая, пересекающая прямую l под углом, отличным от прямого. Н. к плоскости — прямая, пересекающая эту плоскость под углом, отличным от прямого. *БСЭ-3.*

НАКОПЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ при численном решении алгебраических уравнений — суммарное влияние округлений, сделанных на отдельных шагах вычислительного процесса, на точность полученного решения линейной алгебраич. системы. Наиболее распространенным способом априорной оценки суммарного влияния ошибок округления в численных методах линейной алгебры является схема т. н. обратного анализа. В применении к решению системы линейных алгебраич. уравнений

$$Ax=b \tag{1}$$

схема обратного анализа заключается в следующем. Вычисленное прямым методом M решение x_M не удовлетворяет (1), но может быть представлено как точное решение возмущенной системы

$$(A+F_M)\,x=b+k_M. \tag{2}$$

Качество прямого метода оценивается по наилучшей априорной оценке, к-рую можно дать для норм матрицы F_M и вектора k_M. Такие «наилучшие» F_M и k_M наз. соответственно матрицей и вектором эквивалентного возмущения для метода M.

Если оценки для F_M и k_M имеются, то теоретически ошибка приближенного решения x_M может быть оценена неравенством

$$\frac{\|x-x_M\|}{\|x\|}\leqslant\frac{\operatorname{cond}(A)}{1-\|A^{-1}\|\|F_M\|}\left(\frac{\|F_M\|}{\|A\|}+\frac{\|k_M\|}{\|b\|}\right). \tag{3}$$

Здесь $\operatorname{cond}(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$ — число обусловленности матрицы A, а матричная норма в (3) предполагается подчиненной векторной норме $\|\ \|$.

В действительности оценка для $\|A^{-1}\|$ редко бывает известна, и основной смысл (2) состоит в возможности сравнения качества различных методов. Ниже приводится вид нек-рых типичных оценок для матрицы F_M.

Для методов с ортогональными преобразованиями и арифметики с плавающей запятой (в системе (1) A и b считаются действительными)

$$\|F_M\|_E\leqslant f(n)\cdot\|A\|_E\cdot\varepsilon. \tag{4}$$

В этой оценке ε — относительная точность арифметич. операций в ЭВМ, $\|A\|_E=\left(\Sigma a_{ij}^2\right)^{1/2}$ — евклидова матричная норма, $f(n)$ — функция вида Cn^k, где n — порядок системы. Точные значения константы C и показателя k определяются такими деталями вычислительного процесса, как способ округления, использование операции накопления скалярных произведений и т. д. Наиболее часто $k=1$ или $3/2$.

В случае методов типа Гаусса в правую часть оценки (4) входит еще множитель $g(A)$, отражающий возможность роста элементов матрицы A на промежуточных шагах метода по сравнению с первоначальным уровнем (такой рост отсутствует в ортогональных методах). Чтобы уменьшить значение $g(A)$, применяют различные способы выбора ведущего элемента, препятствующие возрастанию элементов матрицы.

Для *квадратного корня метода*, к-рый применяется обычно в случае положительно определенной матрицы A, получена наиболее сильная оценка

$$\|F_M\|_E \leqslant C\|A\|_E \cdot \varepsilon.$$

Существуют прямые методы (Жордана, окаймления, сопряженных градиентов), для к-рых непосредственное применение схемы обратного анализа не приводит к эффективным оценкам. В этих случаях при исследовании Н. п. применяются и иные соображения (см. [6]—[9]).

Лит.: [1] Givens W., «U. S. Atomic Energy Commiss. Repts. Ser. OR NL», 1954, № 1574; [2] Wilkinson J. H., Rounding errors in algebraic processes, L., 1963; [3] Уилкинсон Дж.-Х., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970; [4] Воеводин В. В., Ошибки округления и устойчивость в прямых методах линейной алгебры, М., 1969; [5] его же, Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977; [6] Peters G., Wilkinson J. H., «Communs Assoc. Comput. Math.», 1975, v. 18, № 1, p. 20—24; [7] Broyden C. G., «J. Inst. Math. and Appl.», 1974, v. 14, № 2, p. 131—40; [8] Reid J. K., в кн.: Large Sparse Sets of Linear Equations, L.— N. Y., 1971, p. 231—254; [9] Икрамов Х. Д., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1978, т. 18, № 3, с. 531—45. *Х. Д. Икрамов.*

Н. п. округления или погрешности метода возникает при решении задач, где решение является результатом большого числа последовательно выполняемых арифметич. операций.

Значительная часть таких задач связана с решением алгебраич. задач, линейных или нелинейных (см. выше). В свою очередь среди алгебраич. задач наиболее распространены задачи, возникающие при аппроксимации дифференциальных уравнений. Этим задачам свойственны нек-рые специфич. особенности.

Н. п. метода решения задачи происходит по тем же или по более простым законам, что и Н. п. вычислительной погрешности; Н. п. метода исследуется при оценке метода решения задачи.

При исследовании накопления вычислительной погрешности различают два подхода. В первом случае считают, что вычислительные погрешности на каждом шаге вносятся самым неблагоприятным образом и получают мажорантную оценку погрешности. Во втором случае считают, что эти погрешности случайны с определенным законом распределения.

Характер Н. п. зависит от решаемой задачи, метода решения и ряда других факторов, на первый взгляд могущих показаться несущественными; сюда относятся форма записи чисел в ЭВМ (с фиксированной запятой или с плавающей запятой), порядок выполнения арифметич. операций и т. д. Напр., в задаче вычисления суммы N чисел

$$A_N = a_1 + \ldots + a_N$$

существенен порядок выполнения операций. Пусть вычисления производятся на машине с плавающей запятой с t двоичными разрядами и все числа лежат в пределах $1/2 < |a_n| \leqslant 1$. При непосредственном вычислении A_N с помощью рекуррентной формулы

$$A_{n+1} = A_n + a_n, \quad n = 1, \ \ldots, \ N-1,$$

мажорантная оценка погрешности имеет порядок $2^{-t}N$. Можно поступить иначе (см. [1]). При вычислении попарных сумм $A_k^1 = a_{2k-1} + a_{2k}$ (если $N = 2l+1$ нечетно) полагают $A_{l+1}^1 = a_{2l+1}$. Далее вычисляются их попарные суммы $A_k^2 = A_{2k-1}^1 + A_{2k}^1$ и т. д. При $2^{m-1} < N \leqslant 2^m$ после m шагов образования попарных сумм по формулам

$$A_k^q = A_{2k-1}^{q-1} + A_{2k}^{q-1}, \quad A_k^0 \equiv a_k,$$

получают $A_1^m = A_N$; мажорантная оценка погрешности порядка $2^{-t}\log_2 N$.

В типичных задачах величины a_m вычисляются по формулам, в частности рекуррентным, или поступают последовательно в оперативную память ЭВМ; в этих

случаях применение описанного приема приводит к увеличению загрузки памяти ЭВМ. Однако можно организовать последовательность вычислений так, что загрузка оперативной памяти не будет превосходить $\sim\log_2 N$ ячеек.

При численном решении дифференциальных уравнений возможны следующие случаи. При стремлении шага сетки h к нулю погрешность растет как $(a(h))^{h^{-q}}$, где $q>0$, а $\overline{\lim\limits_{h\to 0}}\,|a(h)|>1$. Такие методы решения задач относят к классу неустойчивых. Их применение носит эпизодич. характер.

Для устойчивых методов характерен рост погрешности как $A(h)h^{-q}$, где $\overline{\lim\limits_{h\to 0}}\,|A(h)|<\infty$. Оценка погрешности таких методов обычно производится следующим образом. Строится уравнение относительно возмущения, вносимого или округлением, или погрешностями метода и затем исследуется решение этого уравнения (см. [2], [3]).

В более сложных случаях применяется метод эквивалентных возмущений (см. [1], [4]), развитый в отношении задачи исследования накопления вычислительной погрешности при решении дифференциальных уравнений (см. [3], [5], [6]). Вычисления по нек-рой расчетной схеме с округлениями рассматриваются как вычисления без округлений, но для уравнения с возмущенными коэффициентами. Сравнивая решение исходного сеточного уравнения с решением уравнения с возмущенными коэффициентами получают оценку погрешности.

Уделяется существенное внимание выбору метода по возможности с меньшими значениями q и $A(h)$. При фиксированном методе решения задачи расчетные формулы обычно удается преобразовать к виду, где $q\leqslant 1$ (см. [3], [5]). Это особенно существенно в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, где число шагов в отдельных случаях оказывается очень большим.

Величина $A(h)$ может сильно расти с ростом промежутка интегрирования. Поэтому стараются применять методы по возможности с меньшим значением $A(h)$. В случае задачи Коши ошибка округления на каждом конкретном шаге по отношению к последующим шагам может рассматриваться как ошибка в начальном условии. Поэтому нижняя грань $A(h)$ зависит от характеристики расхождения близких решений дифференциального уравнения, определяемого уравнением в вариациях.

В случае численного решения обыкновенного дифференциального уравнения $y'=f(x,\ y)$ уравнение в вариациях имеет вид

$$\eta'=f_y(x,\ y)\,\eta+S,$$

и потому при решении задачи на отрезке $(x_0,\ X)$ нельзя рассчитывать на константу $A(h)$ в мажорантной оценке вычислительной погрешности существенно лучшую, чем

$$\int_{x_0}^{X} e^{\int_x^X f_y(t,\ y(t))\,dt}\,dx.$$

Поэтому при решении этой задачи наиболее употребительны одношаговые методы типа Рунге — Кутта или методы типа Адамса (см. [3], [7]), где Н. п. в основном определяется решением уравнения в вариациях.

Для ряда методов главный член погрешности метода накапливается по подобному закону, в то время как вычислительная погрешность накапливается существенно быстрее (см. [3]). Область практич. применимости таких методов оказывается существенно уже.

Накопление вычислительной погрешности существенно зависит от метода, применяемого для решения сеточной задачи. Напр., при решении сеточных краевых за-

дач, соответствующих обыкновенным дифференциальным уравнениям, методами стрельбы и прогонки Н. п. имеет характер $A(h)h^{-q}$, где q одно и то же. Значения $A(h)$ у этих методов могут отличаться настолько, что в определенной ситуации один из методов становится неприменимым. При решении методом пристрелки сеточной краевой задачи для уравнения Лапласа Н. п. имеет характер $c^{1/h}$, $c>1$, а в случае метода прогонки Ah^{-q}. При вероятностном подходе к исследованию Н. п. в одних случаях априорно предполагают какой-то закон распределения погрешности (см. [2]), в других случаях вводят меру на пространстве рассматриваемых задач и, исходя из этой меры, получают закон распределения погрешностей округления (см. [8], [9]).

При умеренной точности решения задачи мажорантные и вероятностные подходы к оценке накопления вычислительной погрешности обычно дают качественно одинаковые результаты: или в обоих случаях Н. п. происходит в допустимых пределах, или в обоих случаях Н. п. превосходит такие пределы.

Лит.: [1] Воеводин В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977; [2] Шура-Бура М. Р., «Прикл. матем. и механ.», 1952, т. 16, № 5, с. 575—88; [3] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [4] Уилкинсон Дж. Х., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970; [5] Бахвалов Н. С., в кн.: Вычислительные методы и программирование, в. 1, М., 1962, с. 69—79; [6] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977; [7] Бахвалов Н. С., «Докл. АН СССР», 1955, т. 104, № 5, с. 683—86; [8] его же, «Ж. вычислит. матем. и матем. физики», 1964; т. 4, № 3, с. 399—404; [9] Лапшин Е. А., там же, 1971, т. 11, № 6, с. 1425—36.

Н. С. Бахвалов.

НАКОПЛЕНИЯ ТОЧКА множества A — точка x топологич. пространства X такая, что в любой ее окрестности есть отличная от x точка множества A. У множества A в пространстве может быть много Н. т., но может не быть ни одной. Напр., любое действительное число является Н. т. для множества всех рациональных чисел по отношению к обычной топологии. В дискретном пространстве ни у одного множества нет ни одной Н. т. Множество всех Н. т. множества A в пространстве X наз. производным множеством (от A). В T_1-пространстве любая окрестность Н. т. множества содержит бесконечно много точек этого множества.

Следует отличать понятие Н. т. от понятий *прикосновения точки* и *полного накопления точки*. В частности, всякая точка множества является его точкой прикосновения, точкой же накопления его она может и не быть (пример — дискретное пространство).

А. В. Архангельский.

НАКРЫВАЮЩАЯ ГОМОТОПИЯ для гомотопии F_t отображения $F_0 : Z_t \to Y$ при заданном отображении $p : X \to Y$ — гомотопия $G_t : Z \to X$ такая, что $pG_t = F_t$. При этом, если накрывающее отображение G_0 для отображения F_0 было задано заранее, то G_t продолжает G_0. Аксиома накрывающей гомотопии в сильной форме требует, чтобы для данного отображения $p : X \to Y$ любой гомотопии $F_t : Z \to Y$ с паракомпактным Z и любого $G_0 (pG_0 = F_0)$ имелось бы продолжение G_0 до Н. г. G_t. В этом случае p наз. расслоением Гуревича. Наиболее важным примером их служат *локально тривиальные расслоения*. Если в этом определении требовать лишь, чтобы Z было конечным полиэдром, то p наз. расслоением Серра.

Пусть X и Y линейно связны и p_A — пространство путей в A (т. е. непрерывных отображений $q : [0, 1] \to A$). Пусть задано непрерывное отображение

$$\mu : D \longrightarrow P_X,$$

где

$$D = \{(x, q) \mid x \in X,\ q \in P_Y,\ p(x) = q(0)\} \subset X \times P_Y,$$

и такое, что $\mu(x, q)$ начинается в точке x и накрывает q. Тогда формула $G_t(x) = \mu(G_0(x), F_t(x))$ дает продолжение

накрывающего отображения G_0 до Н. г. G_f. В частности, такое отображение M единственным образом определяется для *накрытий*, а также для гладкого векторного расслоения с фиксированной связностью. Выполнение аксиомы Н. г. в форме Серра позволяет построить точную гомотопич. последовательность расслоения (см. *Гомотопическая группа*). *А. В. Чернавский.*

НАКРЫВАЮЩАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — то же, что двумерное *накрытие*.

НАКРЫТИЕ — отображение $p : X \to Y$ пространства X на пространство Y, при к-ром прообраз нек-рой окрестности $U(y)$ каждой точки $y \in Y$ распадается на открытые подмножества, гомеоморфно отображающиеся посредством p на $U(y)$. Эквивалентно: p — *локально тривиальное расслоение* с дискретным слоем.

Обычно Н. рассматривается в предположении связности X и Y и также локальной связности и локальной односвязности Y. При этих предположениях устанавливается связь между фундаментальными группами $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(Y, y_0)$: если $p(x_0)=y_0$, то индуцированный гомоморфизм p_* отображает $\pi_1(X, x_0)$ изоморфно на подгруппу в $\pi_1(Y, y_0)$ и, меняя точку x_0 в $p^{-1}(y)$, можно получить в точности все подгруппы из нек-рого класса сопряженных подгрупп. Если этот класс состоит из одной подгруппы H (т. е. H — нормальный делитель), то Н. наз. регулярным. В этом случае возникает свободное действие группы $G=\pi_1(Y, y_0)/H$ на X, причем p оказывается факторотображением на пространство орбит Y. Это действие порождается поднятием петель: если петле $q : [0, 1] \to Y$, $q(0)=q(1)=y_0$, сопоставить единственный путь $\overline{q} : [0, 1] \to X$, для к-рого $\overline{q}(0)=x_0$ и $p\overline{q}=q$, то точка $\overline{q}(1)$ будет зависеть только от класса этой петли в G и от точки x_0. Таким образом, элементу из G отвечает перестановка точек в $p^{-1}(y_0)$. Эта перестановка не имеет неподвижных точек, если $\gamma \neq 1$, и непрерывно зависит от точки y_0. Возникает гомеоморфизм X.

В общем случае эта конструкция определяет лишь перестановку в $p^{-1}(y)$, т. е. имеется действие $\pi_1(Y, y_0)$ на $p^{-1}(y)$, наз. монодромией накрытия. Частным случаем регулярного Н. является *универсальное накрытие*, для к-рого $G=\pi_1(Y, y_0)$. Вообще, по каждой группе $H \subset \pi_1(Y, y_0)$ однозначно строится Н. $p : X, x_0 \to Y, y_0$, для к-рого $p_*(\pi_1(X, x_0))=H$. В качестве точек X берутся классы путей $q : [0, 1] \to Y$, $q(0)=x_0$: два пути q_1 и q_2 отождествляются, если $q_1(1)=q_2(1)$ и петля $q_1 q_2^{-1}$ лежит в элементе из H. Точка $q(1)$ для путей из одного класса считается образом этого класса, что определяет p. Топология в X однозначно задается требованием, чтобы p оказалось Н.: при этом существенна локальная односвязность Y. Для любого отображения f линейно связного пространства Z, z_0 в Y, y_0 поднятие его до отображения $\overline{f} : Z, z_0 \to X, x_0$ существует тогда и только тогда, когда $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset H$. Между накрытиями Y имеется отношение частичного порядка (накрытие накрытия есть накрытие), двойственное включению подгрупп в $\pi_1(Y, y_0)$. В частности, универсальное Н. является единственным максимальным элементом.

Примеры. Параметризация окружности $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ задает ее Н. числовой прямой $\varphi \in \mathbb{R}$, к-рое часто записывают в комплексной форме $e^{i\varphi}$ и наз. экспоненциальным. Аналогично, тор накрывается плоскостью. При отождествлении диаметрально противоположных точек сферы возникает Н. сферой проективного пространства соответствующей размерности. Вообще, свободные действия дискретных групп — обычный источник регулярных Н. (над пространством орбит, хотя и не всякое такое действие задает Н. (пространство орбит может оказаться неотделимым)), но это так для конечных групп. *А. В. Чернавский.*

НАЛОЖЕНИЯ ОБЛАСТЬ, область над $\mathbb{C}^n$,— пара (X, π), где X — линейно связное хаусдорфово пространство, $\pi : X \to \mathbb{C}^n$ — локальный гомеоморфизм, наз. проекцией. Н. о. возникают при аналитич. продолжении голоморфных функций. Каждой аналитической (вообще говоря, многозначной) в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функции f отвечает ее Н. о. $\tilde{D}$ с проекцией $\pi : \tilde{D} \to D$ точно так же, как каждой аналитич. функции одного комплексного переменного соответствует риманова поверхность; на $\tilde{D}$ функция f однозначна. Н. о. наз. также римановой областью.

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.

В. В. Жаринов.

НАПРАВЛЕНИЕ — бинарное отношение $\leqslant$ на множестве A такое, что 1) если $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ для любых $x, y, z \in A$; 2) для любого $x \in A$ всегда $x \leqslant x$; 3) каковы бы ни были x, $y \in A$, существует $z \in A$ такое, что $x \leqslant z$, $y \leqslant z$ (свойство Мура — Смита).

В. И. Пономарев.

НАПРАВЛЕНИЙ ПОЛЕ — геометрическая интерпретация множества линейных элементов, соответствующих системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Линейным элементом наз. набор чисел $t, x_1, \ldots, x_n, f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n)$, (2) где $(t, x_1, \ldots, x_n)$ — точка области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, в к-рой определены правые части системы (1). Линейный элемент (2) можно представить себе как совокупность точки $(t, x_1, \ldots, x_n) \in G$ и соответствующего ей направления с направляющими косинусами

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{n} f_k^2\right)^{-1/2}, \; f_i \left(1 + \sum_{k=1}^{n} f_k^2\right)^{-1/2}, \; i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

к-рое изображается отрезком малой длины, проходящим через эту точку параллельно вектору

$$(1, f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n)).$$

Для системы в симметричной форме

$$\frac{dt}{f_0(t, x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_1}{f_1(t, x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, \ldots, x_n)},$$

в отличие от системы (1), среди направлений поля возможны и ортогональные оси t.

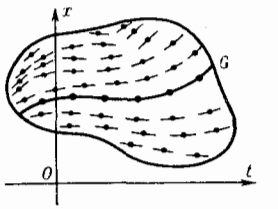
Любая *интегральная кривая* системы (1) в каждой своей точке касается отвечающего этой точке направления поля; всякая кривая, обладающая таким свойством, является интегральной кривой системы (1). Таким образом, задание Н. п. эквивалентно заданию системы (1), а задача интегрирования системы (1) состоит в отыскании таких кривых в $(n+1)$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, касательные к к-рым в каждой точке имеют направление, определяемое формулами (3), т. е. имеют направление, совпадающее с направлением поля в этой точке.

Особенно наглядной геометрич. картина становится при $n=1$. В этом случае через каждую точку (t, x) области определения $G \subset \mathbb{R}^2$ правой части уравнения 1-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{4}$$

можно провести отрезок малой длины с угловым коэффициентом $f(t, x)$, так что (ориентированный) угол между осью t и этим отрезком равен $\operatorname{arctg} f(t, x)$ (см. рис.). Часто дифференциальное уравнение (4) рассматривается в совокупности с дифференциальным уравнением

$$\frac{dt}{dx} = F(t, x), \tag{5}$$



где $F(t, x)=1/f(t, x)$ для точек $(t, x)\in G$, в к-рых $f(t, x)\neq\neq 0$, и $F(t, x)=0$ для точек $(t, x)\in\mathbb{R}^2\setminus G$, в к-рых функцию $F(t, x)$ можно доопределить этим значением по непрерывности. Тем самым для пары уравнений (4), (5) область G расширяется до области G_0 за счет пополнения точками, в к-рых направление параллельно оси x, а интегральным кривым разрешается иметь и точки с вертикальной касательной.

Если в области G для уравнения (4) (или в области G_0 для пары уравнений (4), (5)) изобразить Н. п. достаточно подробно, то по построенным отрезкам можно составить примерное качественное представление о картине поведения интегральных кривых. Это соображение лежит в основе приближенного графич. метода решения уравнения (4) — *метода изоклин*, в к-ром построение Н. п. осуществляется с помощью *изоклин*. На использовании геометрич. связи Н. п. и интегральных кривых базируется приближенный численный метод решения уравнения (4) — *Эйлера метод*.

Для автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений более удобна и наглядна геометрич. интерпретация в виде векторного поля — поля фазовых скоростей в фазовом пространстве системы.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974; [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [3] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 1—2, М., 1953—54.

Н. Х. Розов.

НАПРАВЛЕННОЕ МНОЖЕСТВО — множество A, наделенное *направлением*. Всякое (частично) упорядоченное множество, каждое конечное подмножество к-рого имеет верхнюю (нижнюю) грань, является Н. м. и тогда A наз. *направленным вверх* (*вниз*) множеством. Напр., множество всех открытых покрытий $\{\gamma\}$ топологич. пространства является Н. м., в нем $\gamma'\leqslant\gamma''$, если γ' вписано в γ''; другой пример Н. м.— *предфильтр*, т. е. семейство δ непустых множеств такое, что если U, $V\in\delta$, то существует $W\in\delta$, для к-рого $W\subset U\cap V$. Основное назначение Н. м. (равно как и *фильтров*) — служить множеством номеров при определении обобщенных последовательностей точек, или *направленностей*, в топологич. пространствах, сходимости их и т. д.

А. В. Архангельский.

НАПРАВЛЕННОСТЬ, *обобщенная последовательность*, — отображение *направленного множества* A (в топологическое) пространство X, т. е. соответствие, по к-рому каждому $\alpha\in A$ сопоставляется нек-рое $x_\alpha\in X$. В терминах «Н.» характеризуются *отделимости аксиомы*, свойства типа *компактности*, осуществляются различные построения (напр., *бикомпактные расширения*) и т. д. Так, Н. $\{x_\alpha : \alpha\in A, \leqslant\}$ топологич. пространства X сходится (иногда добавляется: по *направлению* $\leqslant$) к точке $x\in X$ в пространстве X, если для каждой окрестности O_x найдется $\beta\in A$ такое, что $x_\alpha\in O_x$ при $\beta\leqslant\alpha\in A$. Это — *сходимость по Муру — Смиту* [3] (она представляется более отвечающей интуитивным представлениям, чем теория сходимости, построенная на понятии *фильтра*).

Обычная последовательность — частный случай Н., когда множество A состоит из всех натуральных чисел.

Лит.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., М., 1968; [2] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, т. 1— Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1977; [3] Moore E., Smith H., «Amer. J. Math.», 1922, v. 44, p. 102—21.

В. И. Пономарев.

НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ МЕТОД — специальный метод для вывода теоремы о разложении по собственным функциям самосопряженного диффе-

ренциального оператора. В частном случае сингулярного дифференциального оператора второго порядка на полуоси соответствующая теорема была впервые получена Г. Вейлем [1]. Общая теорема для случая дифференциального оператора порядка $2n$ была доказана М. Г. Крейном [2] методом, получившим название Н. ф. м. Соответствующий результат формулируется следующим образом (см. [3]). Пусть $l(y)$ — самосопряженное дифференциальное выражение порядка $2n$ на интервале (a, b), $u_1(x, \lambda)$, ... , $u_{2n}(x, \lambda)$ — система решений уравнения

$$l(y) = \lambda y,$$

удовлетворяющая начальным условиям:

$$u_j^{[k-1]}(x_0) = \begin{cases} 1 \text{ при } j = k, \\ 0 \text{ при } j \neq k, \end{cases}$$

где x_0 — фиксированная точка интервала (a, b), а $u_j^{[k-1]}$ есть $(k-1)$-я квазипроизводная функции u_j. Тогда для всякого самосопряженного расширения L оператора, порожденного выражением $l(y)$, существует матричная функция распределения

$$\sigma(\lambda) = (\sigma_{jk}(\lambda)), \ j, \ k = 1, \ \ldots, \ 2n,$$

такая, что для любой функции $f(x) \in L^2(a, b)$ справедливы формулы:

$$\varphi_j(\lambda) = \int_a^b f(x)\, u_j(x, \lambda)\, dx, \qquad (1)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j, k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda)\, u_k(x, \lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda), \qquad (2)$$

причем интегралы в формулах (1) и (2) сходятся в смысле метрик в L^2_σ и $L^2(a, b)$ соответственно. При этом имеет место аналог равенства Парсеваля

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j, k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda)\, \overline{\varphi_k(\lambda)}\, d\sigma_{jk}(\lambda).$$

Функционалы $\varphi(\lambda)$, заданные на финитных функциях из $L^2(a, b)$, наз. *направляющими функционалами* дифференциального выражения $l(y)$.

Обобщение и развитие Н. ф. м. привело к понятию оснащенного гильбертова пространства и разложения по обобщенным собственным элементам (см. [4], [5], [6]).

Лит.: [1] Weyl H., «Math. Ann.», 1910, Bd 68, S. 220—269; [2] Крейн М., «Докл. АН СССР», 1946, т. 53, № 1, с. 3—6; [3] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [4] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965; [5] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Некоторые вопросы дифференциальных уравнений, М., 1958; [6] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые вопросы гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [7] Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, М.— Л., 1950.

А. И. Логинов.

НАПРЯЖЕНИЙ ТЕНЗОР — тензор, определяющий распределение внутренних напряжений в деформируемом теле. Н. т.— симметричный тензор 2-го ранга σ_{ij}. Компонента σ_{ik} Н. т. есть i-я компонента силы, действующей на единицу поверхности, перпендикулярную к оси x_k. Так, на единичную площадку, перпендикулярную к оси x, действуют нормальная к ней (направленная вдоль оси x) сила σ_{xx} и тангенциальные (направленные по осям y и z) силы σ_{yx} и σ_{zx}. Напряженное состояние, заданное компонентами Н. т., может быть разложено на два напряженных состояния. Первое из них характеризуется компонентами т. н. *сферического (шарового) тензора напряжений*:

$$\sigma'_{ij} = \frac{1}{3}\, \delta_{ij} \sigma_{ll}.$$

Второе напряженное состояние характеризуется компо-

нентами девиатора тензора напряжений:

$$\sigma''_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\sigma_{ll}.$$

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория упругости, 3 изд., М., 1965. *А. Б. Иванов.*

НАРОСТ пространства X — множество $Y \setminus X$, где Y — *бикомпактное расширение* X. Свойства Н. связаны со свойствами X: бикомпактность Н. эквивалентна локальной бикомпактности X, нульмерность Н. в нек-рых расширениях связана обычно со свойством периферич. бикомпактности X, существование компактного метризуемого расширения с Н. размерности $\leqslant k$ обеспечивает наличие в X открытой базы, в к-рой компактно пересечение границ любых $k+1$ различных множеств, и т. п. Если всякий связный бикомпакт в $Y \setminus X$ состоит из одной точки (напр., $\operatorname{ind}(Y \setminus X) = 0$), Н. наз. пунктиформным. Если существует хотя бы одно бикомпактное расширение с пунктиформным Н., то среди таких расширений найдется максимальное μX, причем оно является минимальным совершенным расширением. *Е. Г. Скляренко.*

НАСЛЕДСТВЕННО НЕРАЗЛОЖИМЫЙ КОНТИНУУМ, континуум Кнастера,— неразложимый континуум, в к-ром неразложим и каждый собственный подконтинуум. *А. А. Мальцев.*

НАТУРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ кривой — система равенств

$$k_1 = \varphi(s),\ k_2 = \psi(s),$$

задающих кривизну k_1 и кручение k_2 кривой как функции натурального параметра s на кривой. Для любых регулярных функций $\varphi(s) \geqslant 0$ и $\psi(s)$ существует единственная с точностью до движения в пространстве кривая с кривизной $\varphi(s)$ и кручением $\psi(s)$. Необходимым и достаточным условием того, что кривая является плоской, служит тождественное обращение в нуль кручения. Необходимым и достаточным условием совпадения кривой с прямой или ее отрезком является тождественное обращение кривизны в нуль. *Д. Д. Соколов.*

НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО — одно из основных понятий математики. Н. ч. может быть истолковано как *кардинальное число* непустого конечного множества. Множество $N = \{1, 2, \ldots\}$ всех Н. ч. и операции над ними: сложение $(+)$ и умножение $(\cdot)$ образуют систему Н. ч. $\langle N, +, \cdot, 1\rangle$. В этой системе обе бинарные операции ассоциативны, коммутативны и связаны законом дистрибутивности; 1 — нейтральный элемент умножения, т. е. $a \cdot 1 = a$ для любого Н. ч. a; сложение не имеет нейтральных элементов и более того $a + b \neq a$ для любых Н. ч. a и b. При этом выполняется условие (аксиома индукции): любое подмножество множества N, содержащее 1 и вместе с каждым элементом a сумму $a+1$, совпадает с N. См. *Натуральный ряд*, *Арифметика формальная*.

Лит.: [1] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. 1, М., 1970; [2] Нечаев В. И., Числовые системы, М., 1975. *А. А. Бухштаб, В. И. Нечаев.*

НАТУРАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР на спрямляемой кривой — такой параметр s на кривой γ с параметрич. уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, для к-рого длина дуги кривой между точками $\boldsymbol{r}(s_1)$ и $\boldsymbol{r}(s_2)$ равна $|s_1 - s_2|$. Параметризация кривой с помощью Н. п. наз. естественной параметризацией. Естественная параметризация k раз дифференцируемой (аналитической) кривой без особых точек является также k раз дифференцируемой (аналитической). *Д. Д. Соколов.*

НАТУРАЛЬНЫЙ РЕПЕР, трехгранник (или репер) Френе, естественный трехгранник,— фигура, составленная из касательной, главной нормали, бинормали и трех плоскостей, попарно содержащих эти прямые. Если ребра Н. р. в данной точке кривой принять за оси прямоугольной

ной декартовой системы координат, то уравнение кривой в естественной параметризации (см. *Натуральный параметр*) имеет в окрестности этой точки вид:

$$x = s + \ldots,\ y = \frac{k_1}{2} s^2 + \ldots,\ z = -\frac{k_1 k_2}{6} s^3 + \ldots,$$

где k_1 и k_2 — кривизна и кручение кривой в указанной точке.

А. Б. Иванов.

НАТУРАЛЬНЫЙ РЯД — непустое множество $N = \{1, \ldots\}$, в к-ром определена унарная операция S (т. е. S — однозначное отображение N в N), удовлетворяющая условиям (Пеано аксиомы):

1) для любого a из N:

$$1 \neq Sa;$$

2) для любых a и b из N: если

$$Sa = Sb,$$

то

$$a = b;$$

3) любое подмножество N, к-рое содержит 1 и вместе с каждым элементом a элемент Sa, совпадает с N.

Элемент Sa множества N обычно наз. элементом, непосредственно следующим за a. Н. р. представляет собой *вполне упорядоченное множество*. Можно доказать, что следующие условия:

$$a + 1 = Sa, \quad a + Sb = S(a + b),$$
$$a \cdot 1 = a, \qquad a \cdot Sb = ab + a,$$

где a и b — любые элементы из N, определяют во множестве N бинарные операции $(+)$ и $(\cdot)$. Система $\langle N, +, \cdot, 1\rangle$ является системой *натуральных чисел*.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979.

А. А. Бухштаб, В. И. Нечаев.

«НАЧАЛА» ЕВКЛИДА (Στοιχεῖα) — научное произведение, написанное в 3 в. до н. э., содержащее основы античной математики: элементарной геометрии, теории чисел, алгебры, общей теории отношений и метода определения площадей и объемов, включавшего элементы теории пределов. «Н.» Е.— образец дедуктивной системы, содержащей исходные предложения геометрии и других разделов математики, на основе к-рых все теории развиваются строго логически.

«Н.» Е. составлены по определенной схеме, сложившейся еще до Евклида и кратко изложенной в сочинениях Аристотеля: сначала приводятся определения, постулаты и аксиомы, затем формулировки теорем и их доказательства. Помимо теорем в «Н.» Е. имеются и проблемы, решаемые построением или с помощью арифметич. алгоритмов. Вслед за определением основных геометрич. понятий и объектов Евклид доказывает существование остальных объектов геометрии (напр., равностороннего треугольника) путем их построения, к-рое выполняется на основании пяти постулатов. В постулатах утверждается возможность выполнения следующих элементарных построений: 1) через две точки можно провести прямую; 2) отрезок прямой можно неограниченно продолжить; 3) данным радиусом из данной точки можно провести окружность; 4) все прямые углы равны между собой (этим обеспечивается единственность продолжения прямой); 5) если две прямые, лежащие в одной плоскости, пересечены третьей и если сумма внутренних односторонних углов меньше суммы двух прямых, то прямые пересекутся при неограниченном их продолжении с той стороны, с к-рой эта сумма меньше. Все постулаты (кроме 4-го, к-рый заменяется требованием, чтобы через две точки проходила единственная прямая) вошли в качестве аксиом в современные курсы оснований геометрии. Особенно интересна судьба 5-го постулата. Еще в древности математики пытались его доказать. Аналогичные попытки продолжались

вплоть до работ Н. И. Лобачевского (см. *Лобачевского геометрия*), построившего первую систему неевклидовой геометрии, в к-рой этот постулат не имеет места. За постулатами в «Н.» Е. приводятся аксиомы — предложения о свойствах отношений равенства и неравенства между величинами: 1) равные одному и тому же равны между собой, 2) если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны, 3) если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны, 4) совмещающиеся друг с другом равны между собой, 5) целое больше части (в нек-рых списках «Н.» Е. к этому добавляют еще четыре аксиомы).

«Н.» Е. состоят из тринадцати книг (отделов или частей). В книге I рассматриваются основные свойства треугольников, прямоугольников, параллелограммов и производится сравнение их площадей. Заканчивается книга теоремой Пифагора. В книге II излагается т. н. геометрич. алгебра, т. е. строится геометрич. аппарат для решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям. При этом величины изображаются отрезками, а произведение двух величин — площадями. Алгебраич. символика в «Н.» Е. отсутствует. В книге III рассматриваются свойства круга, его касательных и хорд (эти проблемы были исследованы Гиппократом Хиосским во 2-й пол. 5 в. до н. э.), в книге IV — правильные многоугольники. В книге V дается общая теория отношений величин, созданная Евдоксом Книдским (4 в. до н. э.); она отличается особенной логич. завершенностью и в основном эквивалентна теории дедекиндовых сечений, являющейся одним из обоснований учения о действительных числах. Общая теория отношений является основой учения о подобии (книга VI) и метода исчерпывания (книга XII), также восходящих к Евдоксу. В книгах VII—IX изложены начала теории чисел, основанные на алгоритме нахождения наибольшего общего делителя. В эти книги входит теория делимости, включая теоремы об однозначности разложения целого числа на простые множители и бесконечности числа простых чисел, а также строится учение об отношении целых чисел, эквивалентное по существу теории рациональных чисел. В книге X на этой основе дается классификация квадратичных и биквадратичных иррациональностей и обосновываются нек-рые правила их преобразования. Результаты книги X применяются в книге XIII для определения ребер пяти правильных многогранников. Значительная часть книг X и XIII (а вероятно, и VII) принадлежит Теэтету (начало 4 в. до н. э.). В книге XI излагаются начала стереометрии. В книге XII определяются с помощью метода исчерпывания отношение площадей двух кругов и отношений объемов пирамиды и призмы, конуса и цилиндра. Эти теоремы были впервые доказаны Евдоксом. Наконец, в книге XIII определяется отношение объемов двух шаров, строятся пять правильных многогранников и доказывается, что иных правильных тел не существует. Последующими греч. математиками к «Н.» Е. были присоединены книги XIV и XV, не принадлежащие Евклиду. Они часто и теперь издаются совместно с основным текстом «Н.» Е. Содержание их не представляет большого научного интереса.

«Н.» Е. получили широкую известность уже в древности. Архимед, Аполлоний Пергский и другие ученые опирались на них при своих исследованиях в области математики и механики. В кон. 8 — нач. 9 вв. появляются переводы «Н.» Е. на арабский язык. Первый перевод на латинский язык был сделан с арабского в 1-й четверти 12 в. Старинные списки «Н.» Е. отличаются существенными разночтениями; подлинный текст их точно не восстановлен. Первое печатное издание «Н.» Е. в переводе на латинский язык появилось в 1482 с чертежами на полях книги. Наилучшим считается издание Й. Хейберга (5 тт., 1883—88), в к-ром приводится как

греческий текст, так и его латинский перевод. На русском языке имеются следующие переводы: И. Астарова — «Евклидовы елементы», сокращенные проф. А. Фархварсоном (8 кн., 1739, пер. с латин.), Н. Курганова — «Евклидовы елементы геометрии» (8 кн., 1769, пер. с франц.), П. Суворова и В. Никитина — «Евклидовы стихии» (осьм книг, 1—6, 11, 12; 1784, пер. с греч.), Ф. Петрушевского — «Эвклидовых начал восемь книг, а именно: первые шесть, одиннадцатая и двенадцатая, содержащие в себе основания геометрии» (1819, пер. с греч.), Ф. Петрушевского — «Эвклидовых начал три книги, а именно: седьмая, осьмая и девятая, содержащие общую теорию чисел древних геометров» (1835, пер. с греч.), М. Е. Ващенко-Захарченко — «Начала Евклида» (1880), Д. Д. Мордухай-Болтовского — «Начала Евклида» (3 тт., 1948—50, пер. с греч.).

По материалам одноименной статьи И. Г. Башмаковой и А. И. Маркушевича из БСЭ-2.

НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ — условия при постановке задачи Коши для дифференциальных уравнений. Для обыкновенного дифференциального уравнения, разрешенного относительно старшей производной:

$$u^{(m)} = F(t, u, u', \ldots, u^{(m-1)}), \qquad (1)$$

Н. у. состоят в задании производных (данных Коши)

$$u(t_0) = u_0,\ u'(t_0) = u_0',\ \ldots,\ u^{(m-1)}(t_0) = u_0^{(m-1)}, \qquad (2)$$

где $(t_0, u_0, u_0', \ldots, u_0^{(m-1)})$ — произвольная фиксированная точка области определения функции F; эта точка наз. начальной точкой искомого решения. Задачу Коши (1), (2) часто наз. также начальной задачей.

Для дифференциального уравнения с частными производными, записанного в нормальной форме относительно выделенной переменной t:

$$Lu = \frac{\partial^m u}{\partial t^m} - F\left(x, t, \frac{\partial^{\alpha+k} u}{\partial x^\alpha\, \partial t^k}\right) = 0,$$

$$|\alpha| + k \leqslant N,\ 0 \leqslant k < m,\ x = (x_1, \ldots, x_n),$$

Н. у. состоят в задании производных (данные Коши):

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x),\ k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

от искомого решения $u(x, t)$ этого уравнения на гиперплоскости $t=0$ (носителя начальных условий).

А. П. Солдатов.

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии, в к-ром пространственные фигуры, а также методы решения и исследования пространственных задач изучаются при помощи построения их изображений на плоскости. Построение изображений осуществляется при помощи центрального или параллельного проектирования фигуры (натуры, объекта, оригинала) на плоскость *проекций*. Наиболее распространенным видом технич. чертежа является комплексный чертеж, к-рый строится с помощью ортогональной проекции. Сущность этого способа заключается в следующем: выбирают две взаимно перпендикулярные плоскости проекций $П_1$ и $П_2$. Плоскость $П_1$ наз. горизонтальной плоскостью проекций, а плоскость $П_2$ — фронтальной плоскостью проекций. Произвольную точку A пространства ортогонально проектируют на эти плоскости (см. рис. 1); получают

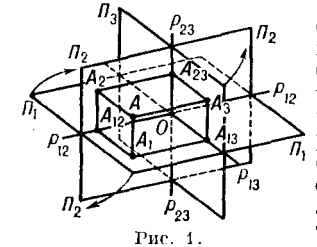


Рис. 1.

горизонтальную проекцию A_1 и фронтальную проекцию A_2. Часто бывает полезным добавить третью — профильную проекцию A_3 — на профильную плоскость Π_3, перпендикулярную к плоскостям Π_1 и Π_2. Для получения комплексного чертежа, состоящего из трех указанных проекций, плоскости Π_1 и Π_3 совмещают с плоскостью Π_2 («главной» плоскостью) путем вращения их вокруг линий p_{12} и p_{23} пересечения этих плоскостей с плоскостью Π_2 (см. рис. 2). Обычно на практике не указывается положение осей проекций p_{12} и p_{13}, т. е. положение проекций определяется с точностью до параллельного переноса.

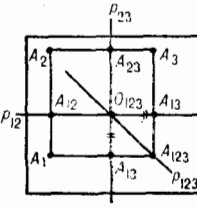


Рис. 2.

Для построения более наглядных изображений в Н. г. применяется *аксонометрия*. Для изображения объектов, обладающих большой протяженностью, применяют изображения, выполненные в центральной проекции — перспективе.

Лит.: [1] Монж Г., Начертательная геометрия, пер. с франц., М., 1947; [2] Глаголев Н. А., Начертательная геометрия, 3 изд., М., 1953; [3] Курс начертательной геометрии, М., 1956. *А. Б. Иванов.*

НЕАБЕЛЕВО ЧИСЛОВОЕ ПОЛЕ — поле алгебраич. чисел, имеющее неабелеву *Галуа группу* над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, или же поле, не являющееся нормальным над $\mathbb{Q}$. Иногда вместо $\mathbb{Q}$ рассматривается нек-рое другое основное поле k алгебраич. чисел и термин «неабелевость» понимается как неабелевость (в определенном выше смысле) над k. *Л. В. Кузьмин.*

НЕАБЕЛЕВЫ КОГОМОЛОГИИ — когомологии со значениями в неабелевой группе, пучке неабелевых групп и т. д. Наиболее известные примеры Н. к.— это когомологии групп, топологич. пространств и, более общо, топологизированных категорий в размерностях 0, 1. Единый подход к Н. к. дает следующее понятие. Пусть C^0, C^1 — группы, C^2 — множество с отмеченной точкой e, $\mathrm{Aff}\, C^1$ — голоморф группы C^1, $\mathrm{Aut}\, C^2$ — группа преобразований множества C^2, сохраняющих e. Тогда неабелев коцепной комплекс — это набор

$$C^* = (C^0, C^1, C^2, \rho, \sigma, \delta),$$

где $\rho : C^0 \to \mathrm{Aff}\, C^1$, $\sigma : C^0 \to \mathrm{Aut}\, C^2$ — гомоморфизмы, а $\delta : C^1 \to C^2$ — такое отображение, что

$$\delta(e) = e \quad \text{и} \quad \delta(\rho(a)\, b) = \sigma(a)\, \delta(b),\ a \in C^0,\ b \in C^1.$$

Определяются 0-мерная группа когомологий

$$H^0(C^*) = \rho^{-1}(\mathrm{Aut}\, C^1)$$

и 1-мерное множество (с отмеченной точкой) когомологий

$$H^1(C^*) = Z^1/\rho,$$

где $Z^1 = \delta^{-1}(e) \subseteq C^1$, а факторизация проводится при помощи действия ρ группы C^0.

Примеры. 1) Пусть X — топологич. пространство с пучком групп $\mathcal{F}$, $\mathcal{U}$ — его покрытие; тогда имеется комплекс Чеха

$$C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = (C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}),\ C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}),\ C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F})),$$

где $C^i(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ определяются так же, как в абелевом случае (см. *Когомологии*),

$$(\sigma(a)(c))_{ijk} = a_i c_{ijk} a_i^{-1},$$
$$(\delta b)_{ijk} = b_{ij} b_{jk} b_{ik}^{-1},$$
$$a \in C^0,\ b \in C^1,\ c \in C^2.$$

Когомологии $H^i(C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$, $i = 0, 1$, при переходе к пределу по покрытиям дают когомологии $H^i(X, \mathcal{F})$, $i = 0, 1$, пространства X со зна-

чениями в $\mathcal{F}$. При этом $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$. Если $\mathcal{F}$ — пучок ростков непрерывных отображений со значениями в топологич. группе G, то $H^1(X, \mathcal{F})$ интерпретируется как множество классов изоморфных топологических главных расслоений над X со структурной группой G. В аналогичных терминах получается классификация гладких и голоморфных главных расслоений. Таким же способом определяются Н. к. топологизированной категории; по поводу их интерпретации см. *Главный G-объект*.

2) Пусть G — нек-рая группа и A — (не обязательно абелева) G-группа, т. е. операторная группа с группой операторов G. Пусть результат действия оператора $g \in G$ на элемент $a \in A$ обозначается a^g. Комплекс $C^*(G, A)$ определяется формулами:

$$C^k = \mathrm{Map}(G^k, A), \quad k = 0, 1, 2,$$

$$(\rho(a)(b))(g) = ab(g)(a^g)^{-1},$$

$$(\sigma(a)(c))(g, h) = a^g c(g, h)(a^g)^{-1},$$

$$\delta(b)(g, h) = b(g)^{-1} b(gh)(b(h)^g)^{-1},$$

$$a \in C^0, \quad b \in C^1, \quad c \in C^2, \quad g \in G.$$

Группа $H^0(G, A) = H^0(C^*(G, A))$ совпадает с подгруппой A^G неподвижных точек в A относительно G, а множество $H^1(G, A) = H^1(C^*(G, A))$ есть множество классов эквивалентных скрещенных гомоморфизмов $G \to A$ и интерпретируется как множество классов изоморфных *главных однородных пространств* над A. По поводу приложений и конкретных вычислений Н. к. групп см. *Галуа когомологии*. Аналогично определяются Н. к. категорий и полугрупп.

3) Пусть X — гладкое многообразие, G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Неабелев комплекс де Рама $R_G^*(X)$ определяется следующим образом:

$R_G^0(X)$ — группа всех гладких функций $X \to G$;

$$R_G^k(X), \quad k = 1, 2,$$

— пространство внешних k-форм на X со значениями в $\mathfrak{g}$;

$$\rho(f)(\alpha) = df \cdot f^{-1} + (\mathrm{Ad}\, f)\,\alpha;$$

$$\sigma(f)(\beta) = (\mathrm{Ad}\, f)\,\beta,$$

$$\delta\alpha = d\alpha - \frac{1}{2}[\alpha, \alpha],$$

$$f \in R_G^0, \quad \alpha \in R_G^1, \quad \beta \in R_G^2.$$

Множество $H^1(R_G(X))$ есть множество классов вполне интегрируемых уравнений вида $df \cdot f^{-1} = \alpha$, $\alpha = R_G^1$, относительно калибровочных преобразований. Аналог теоремы де Рама дает интерпретацию этого множества как нек-рого подмножества в множестве $H^1(\pi_1(M), G)$ классов сопряженных гомоморфизмов $\pi_1(M) \to G$. В случае комплексного многообразия M и комплексной группы Ли G определяются также неабелевы голоморфный комплекс де Рама и комплекс Дольбо, тесно связанные с задачей классификации голоморфных расслоений [3]. Неабелевы комплексы дифференциальных форм являются также важным аппаратом в теории псевдогрупповых структур на многообразиях [7].

С каждым подкомплексом неабелева коцепного комплекса связана точная последовательность когомологий. Напр., для комплекса $C^*(G, A)$ из примера 2) и его подкомплекса $C^*(G, B)$, где B есть G-инвариантная подгруппа в A, она имеет вид

$$e \longrightarrow H^0(G, B) \longrightarrow H^0(G, A) \longrightarrow (A/B)^G \longrightarrow H^1(G, B) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(G, A).$$

Если B — нормальный делитель в A, то последовательность можно продолжить до члена $H^1(G, A/B)$, а если B лежит в центре, то — и до $H^2(G, A)$. Эта последовательность точна в категории множеств с отмеченными точ-

ками. Кроме того, существует аппарат («подкручивание» или «скручивание» коцепного комплекса), позволяющий описывать прообразы всех, а не только отмеченных элементов (см. [1], [6], [3]). Можно построить также спектральную последовательность, связанную с двойным неабелевым комплексом, и соответствующую краевую точную последовательность [4].

Кроме описанных выше 0-мерных и 1-мерных, существуют также 2-мерные Н. к. Классич. примером являются 2-мерные когомологии группы G со значениями в нек-рой группе A, к-рые определяются следующим образом. Через $\mathcal{Z}^2(G, A)$ обозначается множество всех пар (m, φ), где $m: G\times G \longrightarrow A$, $\varphi: G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, A$ — такие отображения, что

$$\varphi(g_1)\varphi(g_2)\varphi(g_1g_2)^{-1} = \mathrm{Int}\, m(g_1, g_2),$$

$$m(g_1, g_2)\, m(g_1g_2, g_3) = \varphi(g_1)(m(g_2, g_3))\, m(g_1, g_2\, g_3);$$

здесь $\mathrm{Int}\, a$ — внутренний автоморфизм, порожденный элементом $a\in A$. В $\mathcal{Z}^2(G, A)$ определяется отношение эквивалентности: $(m, \varphi)\sim(m', \varphi')$, если существует такое отображение $h: G \to A$, что

$$\varphi'(g) = (\mathrm{Int}\, h(g))\,\varphi(g)$$

и

$$m'(g_1, g_2) = h(g_1)(\varphi(g_1)(h(g_2)))\, m(g_1, g_2)\, h(g_1, g_2)^{-1}.$$

Классы этой эквивалентности и составляют множество когомологий $\mathcal{H}^2(G, A)$. Они находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентных расширений группы A при помощи G (см. *Расширение группы*).

Соответствие $(m, \varphi) \to \varphi$ дает отображение θ множества $\mathcal{H}^2(G, A)$ в множество всех гомоморфизмов

$$G \longrightarrow \mathrm{Out}\, A = \mathrm{Aut}\, A/\mathrm{Int}\, A;$$

пусть $H^2_\alpha(G, A) = \theta^{-1}(\alpha)$ для $\alpha\in\mathrm{Out}\, A$. Если фиксировать $\alpha\in\mathrm{Out}\, A$, то на центре $Z(A)$ группы A будет задана структура G-модуля и тем самым определены группы когомологий $H^k(G, Z(A))$. Оказывается, что непустота множества $H^2_\alpha(G, A)$ равносильна тривиальности нек-рого класса из $H^3(G, Z(A))$. Далее, при этом условии группа $H^2(G, Z(A))$ просто транзитивно действует на множестве $H^2_\alpha(G, A)$.

Это определение двумерных когомологий можно обобщить, перенеся его на топологизированные категории (см. [2], где даны также приложения этого понятия). Общая алгебраич. схема, приводящая к двумерным когомологиям, указана в [4]; так же, как и в описанном выше частном случае, их вычисление сводится к вычислению одномерных неабелевых и обычных абелевых когомологий.

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [2] Giraud J., Cohomologie non abélienne, B.— Hdlb.— N. Y., 1971; [3] Онищик А. Л., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1967, т. 17, с. 45—88; [4] Толпыго А. К., в сб.: Вопросы теории групп и гомологической алгебры, в. 1, Ярославль, 1977, с. 156—97; [5] Dedecker P., в кн.: Category theory, homology theory and their applications, v. 2, B.— Hdlb.— N. Y., 1969, p. 32—64; [6] Frenkel J., «Bull. Soc. math. France», 1957, t. 85, № 2, p. 135—220; [7] Goldschmidt H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 84, № 4, p. 531—46; [8] Springer T. A., в кн.: Proceedings of Symposia in pure mathematics, Providence, v. 9, 1966, p. 164—82.

А. Л. Онищик, А. К. Толпыго.

НЕАРХИМЕДОВА ГЕОМЕТРИЯ — совокупность геометрич. предложений, вытекающих из групп аксиом: инцидентности, порядка, конгруэнтности и параллельности системы Гильберта аксиом евклидовой геометрии, и не связанных с аксиомами непрерывности (с аксиомами Архимеда и полноты). В узком смысле Н. г. описывает геометрич. свойства прямой, на к-рой не верна аксиома Архимеда (неархимедова прямая).

Для исследования геометрич. соотношений в Н. г. вводится исчисление отрезков — неархимедова числовая система, рассматриваемая как специальная комп-

лексная числовая система. Определяются понятия отрезка, отношения отрезков, сложение и умножение отрезков. В частности, вводится дезаргова числовая система — неархимедова система, в к-рой умножение отрезков некоммутативно. С помощью этих числовых систем в Н. г. строится теория подобия фигур, теория площадей и т. д. Теория площадей многоугольников, лежащая в основе теории измерения площадей фигур на неархимедовой плоскости, опирается на понятие равновеликости многоугольников по дополнению, к-рое в Н. г. является более общим по отношению к понятию равносоставленности (равновеликости по разложению на пары конгруэнтных треугольников).

В Н. г. существуют треугольники, имеющие соответственно равные меры высот и оснований, равновеликие по дополнению, но не равносоставленные. Равновеликие по дополнению многоугольники в Н. г. имеют одинаковую меру площади, и два многоугольника с одинаковой мерой площади всегда равновелики по дополнению. Для прямоугольных треугольников в Н. г. имеет место теорема Пифагора.

С помощью исчисления отрезков в неархимедовом пространстве вводится система аффинных (или проективных) координат. Напр., на плоскости выбираются две прямые — оси координат, проходящие через фиксированную точку, на каждой из осей отмечаются единичные отрезки. В этой системе аффинных координат уравнение прямой является линейным, т. е. имеет вид $ax+by+c=0$, где x, y — числа (отрезки), определяют координаты точек на прямой, a, b, c — фиксированные числа (отрезки), причем умножение фиксированных отрезков на отрезки x и y производится всегда слева, и, вообще говоря, уравнение $xa+yb+c=0$ в этой системе координат не представляет прямую.

Система геометрич. предложений, составляющих Н. г., может быть реализована на модели из конечного набора основных объектов: «точек», «прямых» и т. д. (здесь на каждой «прямой» не предполагается существование бесконечного множества «точек»). Построение числовых моделей Н. г. приводит к т. н. трансфинитным (неархимедовым) пространствам Гильберта. Такое числовое пространство на прямой наз. линейным пространством Веронезе.

Числовая реализация Н. г., в к-рой коммутативный закон умножения не является необходимым, играет также важную роль в построении *непаскалевой геометрии* (см. также *Недезаргова геометрия*).

Значение Н. г. определяется ее ролью в исследовании независимости и непротиворечивости системы Гильберта аксиом евклидова пространства. Реализация на числовой модели групп аксиом инцидентности, порядка, конгруэнтности и параллельности доказывает как их независимость от аксиом полноты, так и непротиворечивость самой Н. г. С другой стороны, выясняется и роль аксиом непрерывности в построении евклидовой геометрии на основе аксиом Гильберта. В частности, без аксиом непрерывности невозможно доказать эквивалентность евклидовой аксиомы параллельности предложению о равенстве суммы внутренних углов любого треугольника двум прямым углам.

Геометрич. построения на неархимедовой плоскости всегда осуществимы с помощью линейки с отмеченным эталоном длины (отмеченным отрезком).

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948.

Л. А. Сидоров.

НЕАССОЦИАТИВНЫЕ КОЛЬЦА И АЛГЕБРЫ — множества с двумя бинарными операциями $+$ и $\cdot$, удовлетворяющими всем аксиомам *ассоциативных колец и алгебр*, кроме, быть может, аксиомы ассоциативности умножения. Первые примеры неассоциативных колец (Н. к.) и неассоциативных алгебр (Н. а.), не являю-

щихся ассоциативными, появились в сер. 19 в. (*Кэли числа* и вообще *гиперкомплексные числа*). Если в ассоциативном кольце (алгебре) рассматривается (вместо обычного) умножение $[a, b]=ab-ba$, то получается Н. к. (Н. а.), являющееся кольцом Ли (алгеброй Ли). Еще один важный класс Н. к. (Н. а.) — йордановы кольца (алгебры): если в ассоциативной алгебре над полем характеристики $\neq 2$ (или над коммутативным кольцом операторов с 1 и 1/2) ввести операцию $a \cdot b = \frac{ab+ba}{2}$, то полученное кольцо является йордановым.

Теория Н. к. и а. развилась в самостоятельное направление алгебры, имеющее много точек соприкосновения с другими частями математики, а также с физикой, механикой, биологией и др. Центральная часть теории Н. к. и а.— это теория т. н. колец и алгебр, близких к ассоциативным: лиевых, альтернативных, йордановых, мальцевских колец и алгебр и нек-рых их обобщений (см. *Ли алгебра*, *Альтернативные кольца и алгебры*, *Йорданова алгебра*, *Мальцева алгебра*).

Один из важнейших вопросов, к-рый ставится при изучении того или иного класса Н. а.,— это вопрос об описании простых алгебр как конечномерных, так и бесконечномерных. При этом описание понимается по модулю какого-то «классического» класса, содержащегося в данном (так, для альтернативных колец описание простых алгебр дается по модулю ассоциативных колец, для мальцевских — по модулю лиевых, для йордановых — по модулю специальных йордановых и т. д.). С этой точки зрения различные классы Н. а. можно разделить на те, в к-рых «много» простых алгебр, и те, в к-рых их «мало». Типичными классами алгебр, в к-рых много простых алгебр, являются классы ассоциативных, лиевых и специальных йордановых алгебр. Именно, в этих классах справедлива следующая теорема вложения: любая ассоциативная (лиева, специальная йорданова) алгебра над полем вложима в простую алгебру того же типа. Много простых алгебр в нек-рых классах алгебр, далеких от ассоциативных,— в классах всех алгебр, коммутативных (антикоммутативных) алгебр. В них также справедлива теорема вложения, аналогичная предыдущей.

Задача описания конечномерных простых ассоциативных, лиевых, альтернативных и йордановых алгебр — предмет классич. части теории этих алгебр. В дальнейшем основные результаты о строении простых конечномерных ассоциативных (альтернативных, йордановых) алгебр были перенесены на артиновы кольца того же типа, т. е. на кольца с условием минимальности для односторонних идеалов; в случае йордановых колец под односторонним идеалом понимается квадратичный идеал (см. *Йорданова алгебра*).

Вызывают интерес классы алгебр, в к-рых «мало» простых алгебр. Типичные примеры таких классов — классы альтернативных, мальцевских и йордановых алгебр. В классе альтернативных алгебр, по модулю ассоциативных, простыми являются только (восьмимерные) алгебры Кэли — Диксона над ассоциативно-коммутативным центром. В классе мальцевских алгебр, по модулю лиевых, простыми являются только (семимерные) (относительно операции коммутирования $[a, b]$) алгебры, присоединенные к алгебрам Кэли — Диксона. В классе йордановых алгебр, по модулю специальных, простыми являются (двадцатисемимерные) алгебры Альберта над своим ассоциативным центром (алгебры серии E) (см. *Йорданова алгебра*). В более широких классах, таких, как правоальтернативные и бинарно лиевы алгебры, описание простых алгебр еще (1982) не закончено. Известно, что не существует конечномерных простых бинарно лиевых алгебр над полем характеристики 0, отличных от мальцевских, однако

неизвестно, справедлив ли этот результат в бесконечномерном случае. В классе правоальтернативных алгебр известно, что хотя все конечномерные простые алгебры из этого класса альтернативны, существуют бесконечномерные простые правоальтернативные алгебры, не являющиеся альтернативными. Все простые алгебры ассоциативны для т. н. (γ, δ)-алгебр (при $(\gamma, \delta) \neq (1, 1)$); эти алгебры естественно возникают из условия, что квадрат идеала есть идеал. Известно описание всех йордановых алгебр с двумя порождающими: любая йорданова алгебра с двумя порождающими является специальной (т е о р е м а Ш и р ш о в а). Описаны (по модулю ассоциативных алгебр с делением) все йордановы алгебры с делением.

В классах альтернативных, мальцевских и йордановых алгебр описаны все п е р в и ч н ы е к о л ь ц а (т. е. алгебры, группоид двусторонних идеалов к-рых не содержит делителей нуля). Именно, первичное альтернативное кольцо (с 1/6 в коммутативном кольце операторов) либо ассоциативно, либо есть кольцо Кэли — Диксона. Первичное мальцевское кольцо либо является лиевым, либо его центральное замыкание есть (семимерная) алгебра, присоединенная к алгебре Кэли — Диксона. Первичная невырожденная йорданова алгебра либо специальна, либо является кольцом Алберта (йордановo кольцо A наз. к о л ь ц о м А л б е р т а, если его ассоциативный центр Z состоит из регулярных элементов и алгебра $Z^{-1}A$ — (двадцатисемимерная) алгебра Алберта над своим центром $Z^{-1}Z$).

В нек-ром смысле противоположными к простым и первичным алгебрам являются н и л ь а л г е б р ы. В случае алгебр с ассоциативными степенями, не являющихся антикоммутативными (таких, как ассоциативные, альтернативные, йордановы и др.), нильалгебры определяются как алгебры, в к-рых каждый элемент в нек-рой степени равен нулю; в случае антикоммутативных алгебр (т. е. алгебр с тождеством $x^2=0$, напр. лиевых, мальцевских и бинарно лиевых алгебр) нильалгебры — это то же, что и э н г е л е в ы а л г е б р ы, т. е. алгебры с условием

$$\forall x,\ y \exists n\ (\overbrace{(xy)\ldots y}^{n}) = 0.$$

В альтернативных (в частности, ассоциативных) алгебрах любая нильалгебра ограниченного индекса (т. е. с тождеством $x^n=0$) является локально нильпотентной, а если в ней нет m-кручения (т. е. $mx=0 \Rightarrow x=0$) при $m \leqslant n$, то она разрешима (для ассоциативных — нильпотентна). П р о б л е м а Ш и р ш о в а о локальной нильпотентности йордановых нильалгебр ограниченного индекса решена положительно. Неизвестно (1982), существует ли простое ассоциативное нилькольцо.

В случае алгебр Ли вопрос о локальной нильпотентности энгелевых алгебр Ли решается т е о р е м о й К о с т р и к и н а: любая алгебра Ли с тождеством $\underbrace{[\ldots[xy]\ldots y]}_{n}=0$ над полем характеристики $p>n$ является локально нильпотентной. Из этой теоремы следует положительное решение ослабленной проблемы Бёрнсайда для групп показателя p. Вообще, круг проблем, связанный с локальной нильпотентностью нильалгебр, наз. п р о б л е м а м и б ё р н с а й д о в с к о г о т и п а. К проблемам бёрнсайдовского типа относится также п р о б л е м а К у р о ш а о локальной конечности алгебраич. алгебр. Альтернативная (в частности, ассоциативная) алгебраич. **алге**бра A ограниченной степени (т. е. степени многочленов, к-рым удовлетворяют элементы алгебры A, ограничены в совокупности) локально конечна. В общем случае проблемы бёрнсайдовского типа (такие, как проблема локальной нильпотентности ассоциативных нильколец и др.) имеют отрицательное решение.

Изучались свободные алгебры и свободные произведения алгебр в различных многообразиях. В многообразии всех Н. а. любая подалгебра свободной алгебры сама свободна, а любая подалгебра свободного произведения алгебр есть свободное произведение своих пересечений с сомножителями и нек-рой свободной алгебры (т е о р е м ы К у р о ш а). Теоремы этого типа справедливы также в многообразиях коммутативных (антикоммутативных) алгебр. Наиболее интересны эти вопросы в случае алгебр Ли. Любая подалгебра свободной алгебры Ли является свободной алгеброй Ли (т е о р е м а Ш и р ш о в а). Вместе с тем для подалгебр свободного произведения алгебр Ли теорема типа теоремы Куроша уже не верна, однако эти подалгебры тем не менее могут быть описаны в терминах порождающих элементов идеала, по к-рому дополнительно нужно профакторизовать свободное произведение пересечений и свободной подалгебры. Изучены свободные альтернативные алгебры — их радикал Жевлакова (квазирегулярный радикал), центры (ассоциативные и коммутативные) этих алгебр, факторалгебры по радикалу Жевлакова и др. В отличие от свободных ассоциативных алгебр, свободные альтернативные алгебры с $n \geqslant 4$ порождающими имеют делители нуля и, более того, тривиальные идеалы (ненулевые идеалы, квадрат к-рых равен нулю). Известны также тривиальные идеалы в свободных мальцевских алгебрах с $n \geqslant 5$ порождающими, а напр., о свободных йордановых алгебрах с $n \geqslant 3$ порождающими известно только, что они содержат делители нуля.

Изучение свободных алгебр тесно связано с вопросами о тождествах в различных классах алгебр. Сюда относится также и вопрос о базисном ранге многообразия (б а з и с н ы й р а н г — наименьшее натуральное число n такое, что данное многообразие порождается свободной алгеброй с n порождающими; если такого n не существует, то базисный ранг, по определению, равен бесконечности). Базисный ранг многообразий ассоциативных и лиевых алгебр равен двум, а для альтернативных и мальцевских — бесконечности.

Общая теория многообразий и классов Н. а. изучает классы алгебр, лежащие за пределами классических, и их различные взаимосвязи. Характерным является, напр., следующий результат: оказалось, что введенные в разное время и разными исследователями многообразия достижимых, обобщенно достижимых и обобщенно стандартных алгебр на самом деле входят в восьмиэлементную подрешетку решетки всех многообразий Н. а., к-рая складывается также из многообразий йордановых, коммутативных, ассоциативных, ассоциативно-коммутативных и альтернативных алгебр. Многообразие, порожденное конечным ассоциативным (альтернативным, лиевым, мальцевским и йордановым) кольцом, является конечно базируемым, в то же время существует конечное Н. к. (алгебра над конечным полем), порождающее не конечно базируемое многообразие. Существует алгебра Ли над бесконечным полем с этим свойством. Вместе с тем неизвестно (1982) ни одного не конечно базируемого многообразия ассоциативных алгебр (п р о б л е м а Ш п е х т а), а также многообразия алгебр Ли над полем характеристики нуль.

Алгоритмич. проблемы теории Н. к. и Н. а. возникли под влиянием математич. логики. Оказалась разрешимой проблема равенства в многообразии всех Н. а. (т е о р е м а Ж у к о в а). Аналогичный результат справедлив и для коммутативных (антикоммутативных) алгебр. Известно, что алгебры Ли с одним соотношением имеют разрешимую проблему равенства. Вместе с этим существуют конечно определенные алгебры Ли с неразрешимой проблемой равенства. Изучалась проблема равенства в многообразии разрешимых алгебр Ли дан-

ной ступени разрешимости n. Для $n=2$ эта проблема разрешима, а для $n\geqslant 3$ — не разрешима. Доказано, что любую рекурсивно определенную алгебру Ли (ассоциативную алгебру) над простым полем можно вложить в конечно определенную алгебру Ли (ассоциативную алгебру).

Лит.: [1] Ширшов А. И., «Успехи матем. наук», 1958, т. 13, в. 6, с. 3—20; [2] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И., Кольца, близкие к ассоциативным, М., 1978; [3] Кострикин А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 1, с. 3—34; [4] Бокуть Л. А., «Colloq. math.», 1966, v. 14, p. 349—53; [5] его же, «Сердика», 1977, т. 3, с. 299—308; [6] Кузьмин Е. Н., «Алгебра и логика», 1968, т. 7, № 4, с. 48—69; [7] Филиппов В. Т., там же, 1976, т. 15, № 2, с. 235—42; [8] его же, там же, 1977, т. 16, № 1, с. 101—08; [9] Кукин Г. П., там же, 1978, т. 17, № 4, с. 402—15; [10] его же, там же, 1972, т. 11, № 1, с. 59—86; [11] Львов И. В., там же, 1973, т. 12, № 3, с. 269—97; [12] Дорофеев Г. В., там же, 1976, т. 15, № 3, с. 267—91; [13] Голод Е. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, с. 273—76; [14] Курош А. Г., «Матем. сб.», 1955, т. 37, с. 251—64; [15] Ширшов А. И., там же, 1953, т. 33, с. 441—52; [16] Jacobson N., Structure and representations of Jordan algebras, Providence, 1968; [17] Зельманов Е. И., «Докл. АН СССР», 1979, т. 249, № 1, с. 30—33. *Л. А. Бокуть.*

НЕАТОМИЧЕСКАЯ ИГРА — игра, в к-рой на множестве всех игроков I задана σ-алгебра подмножеств $\mathscr{C}$ и на $\mathscr{C}$ существует такая *неатомическая мера*, что множества игроков $C\in\mathscr{C}$, имеющие нулевую меру, не оказывают влияния на исход игры. Н. и. служат моделями ситуаций, в к-рых имеются большие количества очень «малых» индивидуумов, подобных потребителям в экономич. системе, и развитие теории Н. и. было тесно связано с изучением моделей экономик с большим числом участников (см. [1]). Н. и. подчиняются общей классификации, принятой в *игр теории*, и основные теоретико-игровые принципы оптимальности (см. *Ядро* в теории игр, *Шепли вектор*) естественным образом на них распространяются. При этом стратегич. принципы оптимальности в Н. и. реализуются, как правило, без обычных предположений о выпуклости (см. [2]), и различные принципы оптимальности в Н. и. оказываются более тесно связанными между собой; напр., для широкого класса неатомич. моделей типа рынков множество конкурентных равновесий совпадает с c-ядром, к-рое состоит из единственного элемента, совпадающего со значением игры (аналогом вектора Шепли для Н. и., см. [1]). Разрабатываются два направления — кооперативная теория Н. и. (см. [1], [3], [4]) и теория бескоалиционных Н. и. (см. [2]).

Кооперативная неатомическая игра, по аналогии с обычной *кооперативной игрой*, задается в виде тройки $\langle J, v, H\rangle$, где $J=(I, \mathscr{C})$ — измеримое пространство игроков, элементы $C=\mathscr{C}$ наз. коалициями, v — действительнозначная функция на $\mathscr{C}$, наз. характеристической функцией, а H — нек-рое подмножество множества FA всех конечно аддитивных мер ограниченной вариации на $\mathscr{C}$ (обычно предполагается, что $\mu(I)=v(I)$ для всех $\mu\in H$). В простейшем случае v является функцией от неатомич. меры на $\mathscr{C}$. Предполагается, что пространство J стандартно, а функция множества v имеет ограниченную вариацию (т. е. представима в виде разности двух монотонных функций). Описаны [1] различные подпространства пространства BV всех функций ограниченной вариации на $\mathscr{C}$, для к-рых можно построить аналог вектора Шепли (как положительный линейный оператор со значениями в FA).

Понятия сбалансированной игры, игры рынка, игры без побочных платежей (см. *Кооперативная игра*) и связанные с ними результаты переносятся на кооперативные Н. и. (см. [3], [4]).

Определение бескоалиционной неатомической игры аналогично определению классич. понятия *бескоалиционной игры*. Для бескоалиционных Н. и. известны аналог *Нэша теоремы*, а также

общие результаты о существовании ситуаций равновесия без предположений о выпуклости, к-рые не имеют места для игр с конечным числом участников (см. [2]).

Лит.: [1] Ауман Р., Шепли Л., Значения для неатомических игр, пер. с англ., М., 1977; [2] Кирута А. Я., в кн.: Математические методы в социальных науках, в. 6, Вильнюс, 1975, с. 18—71; [3] Розенмюллер И., Кооперативные игры и рынки, пер. с нем., М., 1974; [4] Rosenmüller J., «Operat. Res. Verfahren», 1975, Bd 20, S. 107—28.

А. Я. Кирута, Е. Б. Яновская.

НЕАТОМИЧЕСКАЯ МЕРА — мера μ на измеримом пространстве $\langle X, \mathscr{S}\rangle$, для к-рой нет атомов положительной меры, т. е. множеств $A\in\mathscr{S}$ с $\mu(A)>0$, а при $B\subset A$ из $\mu(B)>0$ следует $B=A$. *Н. Н. Воробьев.*

НЕБЛУЖДАЮЩАЯ ТОЧКА динамической системы — точка фазового пространства этой системы, не являющаяся *блуждающей точкой*.

НЕВАНЛИННЫ ТЕОРЕМЫ — две основные теоремы, доказанные Р. Неванлинной (см. [1], [2]) и лежащие в основе теории распределения значений мероморфных функций (см. *Распределения значений теория*). Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в круге

$$K_R=\{z:|z|<R\leqslant\infty\},$$

при этом случай $R=\infty$ означает, что функция $f(z)$ мероморфна во всей открытой комплексной плоскости. Для каждого r, $0\leqslant r<R$, функция приближения $f(z)$ к числу a определяется так:

$$m(r,\infty,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta,$$

$$m(r,a,f)=m\left(r,\infty,\frac{1}{f-a}\right),\quad a\neq\infty,$$

а считающая функция числа a-точек $f(z)$ определяется формулой

$$N(r,a,f)=\int_0^r\frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}\,dt+n(0,a,f)\ln r,$$

где $n(t,a,f)$ означает число a-точек $f(z)$, с учетом их кратностей, попавших в круг $\{z:|z|\leqslant t\}$.

Функция $T(r,f)=m(r,\infty,f)+N(r,\infty,f)$ наз. неванлинновской характеристикой функции $f(z)$.

Первая теорема Неванлинны. Для произвольной мероморфной в круге K_R функции $f(z)$, для каждого r, $0\leqslant r<R$, и для любого комплексного числа a выполняется соотношение

$$m(r,a,f)+N(r,a,f)=T(r,f)+\varphi(r,a),\qquad(1)$$

где

$$|\varphi(r,a)|\leqslant\ln^+|a|+|\ln|c||+\ln 2,$$

а c означает первый отличный от нуля коэффициент в ряде Лорана в окрестности нуля функции $f(z)-a$, если $f(0)=a\neq\infty$, и функции $f(z)$, если $f(0)=\infty$. Таким образом, для функций с неограниченно растущей при $r\to R$ характеристикой $T(r,f)$ сумма $m(r,a,f)+N(r,a,f)$ для различных значений a, с точностью до ограниченного слагаемого $\varphi(r,a)$, сохраняет значение $T(r,f)$. В этом смысле все значения a для произвольной мероморфной в круге K_R функции $f(z)$ являются равноправными значениями. По этой причине в теории распределения значений мероморфных функций интересуются вопросами асимптотич. поведения одного слагаемого $m(r,a,f)$ или $N(r,a,f)$ в инвариантной сумме (1).

Вторая теорема Неванлинны показывает, что в сумме (1) для почти всех точек a основную роль играет функция $N(r,a,f)$. Эта теорема утверждает следующее.

Для произвольной мероморфной в круге $K_R=\{z:|z|<R\leqslant\infty\}$ функции $f(z)$ и для каждых q, $q\geqslant 3$, различ-

ных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{q}$ из расширенной комплексной плоскости имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{q} m(r, a_k, f) \leqslant 2T(r, f) - N_1(r, f) + S(r, f), \quad (2)$$

где

$$N_1(r, f) = 2N(r, \infty, f) - N(r, \infty, f'),$$

а величина $S(r, f)$ обладает следующими свойствами. 1) Если $R=\infty$, т. е. $f(z)$ мероморфна во всей открытой комплексной плоскости, то при $r \to \infty$

$$S(r, f) = O(\ln(r \cdot T(r, f)))$$

для всех значений r, за возможным исключением некоторого множества E такого, что

$$\int_{E \cap [1, \infty)} \frac{dr}{r} < \infty.$$

2) Если $R<\infty$, то при $r \to R$

$$S(r, f) = O\left(\ln\left(\frac{R}{R-r} T\left(r, f\right)\right)\right)$$

для всех значений r, за возможным исключением некоторого множества E такого, что

$$\int_{E} \frac{dr}{R-r} < \infty.$$

Функция $N_1(r, f)$ не убывает с ростом r, поэтому правая часть в соотношении (2) при $r \to R$ вне нек-рого исключительного множества E не может возрастать быстрее, чем $2T(r, f)$.

Лит.: [1] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941; [2] Nevanlinna R., Le Théorème de Picard—Borel et la théorie des fonctions méromorphes, P., 1929; [3] Weyl H., Weyl J., Meromorphic functions and analytic curves, Princeton, 1943; [4] Ahlfors L., «Acta Soc. scient. fennica. Nova ser. A», 1941, v. 3, № 4, p. 1—31; [5] Cartan H., «Mathematica» (Cluj), 1933, v. 7, p. 5—31; [6] Гриффитс Ф., Кинг Дж., Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий, пер. с англ., М., 1976; [7] Петренко В. П., Рост мероморфных функций, Хар., 1978.

В. П. Петренко.

НЕВАНЛИННЫ — ПИКА ПРОБЛЕМА — проблема для класса $\mathfrak{H}$ аналитич. функций в области G комплексной плоскости (или, более общо, римановой поверхности), заключающаяся в нахождении условий, необходимых и достаточных для разрешимости в классе функций $\mathfrak{H}$ интерполяционной задачи

$$f(z_\alpha) = w_\alpha, \quad (1)$$

где $\{z_\alpha\}$ — подмножество точек области G, $\{w_\alpha\}$ — нек-рое множество комплексных чисел, а α, как правило, пробегает счетное (иногда конечное или даже несчетное) множество индексов. Классич. результат Г. Пика [1] и Р. Неванлинны [2] (соответственно для конечных и счетных подмножеств $\{z_\alpha\} \subset G$) дает решение Н.—П. п., напр., для класса B_1 аналитич. функций в единичном круге, ограниченных по модулю единицей, в виде условия неотрицательности квадратичных форм

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} \frac{1 - w_j \overline{w}_k}{1 - z_j \overline{z}_k} \xi_j \overline{\xi}_k, \quad n \in \mathbb{N}, \ \xi_j \in \mathbb{C}.$$

Первоначальное доказательство этого, а также вполне аналогичных и сводящихся к нему результатов для ряда других классов функций $\mathfrak{H}$ (см. [3]) проводилось алгебраическими и теоретико-функциональными методами. Более поздние доказательства, основывающиеся, напр., на сведении Н.—П. п. к нек-рой проблеме моментов (см. [4]) или же полученные с точки зрения теории гильбертовых пространств (см. [5]), позволили охватить случай несчетных подмножеств $\{z_\alpha\} \subset G$ и наметить пути возможных обобщений.

Естественным развитием Н. — П. п., потребовавшим привлечения функционально-аналитич. методов иссле-

дования, явился вопрос о разрешимости интерполяционной задачи (1) на классе W правых частей $\{w_\alpha\}$; в этом случае, как правило, $\{z_\alpha\}$ является счетным множеством (последовательностью) точек области G, а в качестве W выступают различные пространства последовательностей комплексных чисел. Применительно к классу H^∞ ограниченных аналитич. функций в единичном круге и пространству l^∞ ограниченных последовательностей полное описание соответствующих последовательностей точек $\{z_\alpha\}$ (т. н. универсальные интерполяционные последовательности) было получено (см. [6]) в виде условия

$$\prod_{j=1,\ j\neq k}^{\infty}\left|\frac{z_j-z_k}{1-z_j\bar{z}_k}\right|\geqslant\delta>0,\quad k\in\mathbb{N}. \qquad (2)$$

Этот результат сыграл важную роль в описании структуры пространства максимальных идеалов алгебры H^∞ (см. [7]) и одновременно явился отправным моментом для многочисленных исследований Н.—П. п. (в указанной обобщенной постановке) для классов Харди H^q и пространств l^p (включая весовые пространства). Оказалось, что при $q=\infty$ решение Н.— П. п. не зависит от p и дается условием (2), а при $q<\infty$ необходимо меняется при изменении q и p (см. [8]). Другое обобщение Н.— П. п. связано с интерполяционной задачей $\varphi_\alpha(f)=w_\alpha$, где $\{\varphi_\alpha\}$ — нек-рая система функционалов в классе $\mathfrak{H}$. Возникающую при этом задачу описания множества $\{\{\varphi_\alpha(f)\}:f\in\mathfrak{H}\}$ можно рассматривать также как обобщение известной *коэффициентов проблемы* для классов аналитич. функций.

Лит.: [1] Pick G., «Math. Ann.», 1916, Bd 77, S. 7—23; [2] Nevanlinna R., «Ann. Acad. sci. fenn. Ser. A», 1929, v. 32, № 7, p. 1—15; [3] Крейн М. Г., Нудельман А. А., Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, М., 1973; [4] Крейн М. Г., Рехтман П. Г., «Тр. Одесского гос. ун-та», 1938, т. 2, с. 63—68; [5] Sz-Nagy B., Korányi A., «Acta math. Acad. sci. hung.», 1956, v. 7, p. 295—303; [6] Carleson L., «Amer. J. Math.», 1958, v. 80, № 4, p. 921—30; [7] его же, «Ann. Math.», 1962, v. 76, p. 547—59; [8] Шведенко С. В., «Матем. заметки», 1977, т. 21, № 4, с. 503—08.
С. В. Шведенко.

НЕВОЗМОЖНОЕ СОБЫТИЕ — событие, к-рое в рамках данных условий не осуществляется ни при каких обстоятельствах. Если $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, то Н. с.— это событие $\varnothing\in\mathcal{A}$, не наступающее ни с одним из элементарных исходов $\omega\in\Omega$ (пустое множество). Н. с. является дополнением к *достоверному событию* Ω в рассматриваемой вероятностной модели и поэтому Н. с. приписывают вероятность нуль: $\mathsf{P}(\varnothing)=0$. *А. В. Прохоров.*

НЕВЫРОЖДЕННАЯ МАТРИЦА, неособенная матрица,— квадратная матрица, определитель к-рой отличен от нуля. Для квадратной матрицы A над полем невырожденность эквивалентна каждому из следующих условий: 1) A — обратима; 2) строки (столбцы) матрицы A линейно независимы; 3) элементарными преобразованиями строк (столбцов) матрицу A можно привести к единичной матрице. *О. А. Иванова.*

НЕВЫРОЖДЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — линейное представление π группы (кольца, алгебры, полугруппы) X в векторном пространстве E такое, что из равенства $\pi(x)\xi=0$ для нек-рого $\xi\in E$ и всех $x\in X$ следует $\xi=0$. *А. И. Штерн.*

НЕВЫЧЕТ степени n по модулю m — число a, для к-рого *сравнение* $x^n\equiv a\pmod m$ не имеет решения; см. *Вычет.*

НЕВЯЗКА приближенного решения — одна из характеристик качества приближенного решения $\bar{u}$ операторного уравнения $P(u)=0$ (напр., линейной алгебраич. системы, дифференциального уравнения). Невязкой наз. величину $P(\bar{u})$ или нек-рую ее норму $\|P(\bar{u})\|_2$. Если известна оценка

$$\|u_1-u_2\|_1\leqslant C\|P(u_1)-P(u_2)\|_2,$$

то погрешность решения можно оценить через Н.

$$\| \bar{u} - u \|_1 \leqslant C \| P(\bar{u}) \|_2.$$

Если такой оценки нет, то Н. является косвенной характеристикой качества приближенного решения.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; 2 изд., т. 2, М., 1962; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975.

Н. С. Бахвалов.

НЕГОЛОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ — системы материальных точек, стесненные связями, среди к-рых имеются кинематич. связи, накладывающие ограничения на скорости (но не на положения) точек системы в ее возможных положениях (см. *Голономная система*), задаваемые неинтегрируемыми дифференциальными соотношениями вида

$$\varphi_s(x_1, \ldots, x_{3N}, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{3N}, t) = 0, \qquad (1)$$

$$s = 1, \ldots, m, \quad \varphi_s(x, \dot{x}, t) \in C^1,$$

к-рые не могут быть заменены эквивалентными конечными соотношениями между координатами. Здесь x_ν — декартовы координаты точек, t — время, N — число точек системы. В большинстве случаев рассматриваются линейные относительно скоростей $\dot{x}_i$ связи (1) вида

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{s_i}\, dx_i + A_s\, dt = 0; \; A_{s_i}(x, t), \; A_s(x, t) \in C^1.$$

Связи (1) наз. стационарными, если $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv 0$. Связи (1) налагают ограничения также на ускорения w_ν точек системы вида

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial t} = \sum_{\nu=1}^{N} \operatorname{grad}_{r_\nu} \varphi_s \cdot w_s + \ldots = 0.$$

Следуя Н. Г. Четаеву [2], принимают, что возможные перемещения систем, стесненных нелинейными связями (1), удовлетворяют условиям вида

$$\sum_{\nu=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \dot{x}_\nu} \delta x_\nu = 0, \quad s = 1, \ldots, m. \qquad (2)$$

В случае линейных связей отсюда следуют общепринятые соотношения

$$\sum_{\nu=1}^{3N} A_{s_i} \delta x_i = 0.$$

В отличие от голономных систем перемещение между соседними бесконечно близкими возможными положениями Н. с. может быть невозможным (см. [1]).

В обобщенных лагранжевых координатах уравнения (1) и (2) записываются в виде

$$\Phi_s(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) = 0, \; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi_s}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = 0,$$

$$s = 1, \ldots, m.$$

Для Н. с. число $n - m$ ее степеней свободы меньше числа n независимых координат q_i на число m неинтегрируемых уравнений связей.

Выведено много различных видов дифференциальных уравнений движения Н. с., напр. *Лагранжа уравнения* первого рода, *Аппеля уравнения* в лагранжевых координатах и квазикоординатах, уравнения Чаплыгина и Воронца в лагранжевых координатах, *Больцмана уравнения* и уравнения Гамеля в квазикоординатах и др. (см. [3]).

Для Н. с. характерно, что в число дифференциальных уравнений их движения в общем случае входят уравнения связей.

Лит.: [1] Hertz H., Gesammelte Werke, Bd 3 — Die Prinzipien der Mechanik, Lpz., 1894; в рус. пер.— Принципы механики, изложенные в новой связи, М., 1959; [2] Четаев Н., «Изв. Физ.-матем. об-ва при Казан. ун-те»,(3), 1932,

т. 6, с. 68—71; [3] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А., Динамика неголономных систем, М., 1967. *В. В. Румянцев.*

НЕДЕЗАРГОВА ГЕОМЕТРИЯ — геометрия на плоскости, в к-рой *Дезарга предложение* может не иметь места. В этом случае плоскость наз. недезарговой плоскостью. Теорема Дезарга не может быть доказана в плоскости на основе лишь проективных аксиом плоскости без привлечения аксиом конгруэнтности (метрических аксиом) или без привлечения пространственных аксиом. Напр., в геометрии плоскости, построенной на основе всех плоскостных аксиом системы Гильберта, за исключением аксиомы конгруэнтности треугольников, теорема Дезарга не может быть получена как их следствие. Геометрия этой плоскости является недезарговой, она не может рассматриваться как часть пространственной геометрии, в которой выполняются все аксиомы системы Гильберта, кроме указанной аксиомы конгруэнтности. Недезаргова проективная 2-плоскость не вкладывается в проективные пространства высших размерностей (см. [1], [4], [5]).

Возможность построения Н. г. плоскости позволяет выяснить независимость различных групп аксиом системы Гильберта, а также выяснить роль теоремы Дезарга как независимой дополнительной аксиомы плоской проективной геометрии (см. [2]).

Рассматриваются и так наз. недезарговы системы, в к-рых теорема Дезарга не выполняется как конфигурационное предложение (см. *Конфигурация*). Недезарговы системы существуют, в частности, на нек-рых поверхностях и вообще на нек-рых римановых многообразиях, являющихся прямыми пространствами. Простой пример дает параболоид $z=xy$, на к-ром недезаргову систему образуют точки и соединяющие их кратчайшие. Другой пример дает тор: существуют его метризации без сопряженных точек, в к-рых геодезические универсального накрывающего пространства образуют недезаргову систему (см. также [5], [6]).

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Скорняков Л. А., «Успехи матем. наук», 1951, т. 6, в. 6, с. 112—54; [3] Буземан Г., Геометрия геодезических, пер. с англ., М., 1962; [4] Mohrmann H., Festschrift D. Hilbert, B., 1922; [5] Bieberbach L., Einleitung in die höhere Geometrie, Lpz.— B., 1933; [6] Narayana Rao M. L., Kuppuswamy Rao K., «J. Combin. Theory, Ser. A», 1975, v. 19, p. 247—55. *Л. А. Сидоров.*

НЕДЕЛИМЫХ МЕТОД — возникшее в кон. 16 в. наименование совокупности довольно разнородных приемов определения отношений площадей или объемов фигур. В основе Н. м. лежит сравнение «неделимых» элементов (или же совокупностей элементов), так или иначе образующих фигуры, отношение размеров к-рых требуется найти. Само понятие «о неделимых» в разные времена различные ученые понимали по-разному.

Н. м. ведет начало от древнегреч. науки. Демокрит (4 в. до н. э.), по-видимому, рассматривал тела как «суммы» чрезвычайно большого числа чрезвычайно малых «неделимых» атомов; Архимед (3 в. до н. э.) нашел площади и объемы многих фигур, сочетая принципы учения о рычаге с представлением, что плоская фигура состоит из бесчисленного количества параллельных отрезков прямых, а геометрич. тело — из бесчисленного количества параллельных плоских сечений. Однако в древности же подобные представления и методы подверглись серьезной критике. Архимед, напр., считал обязательным передоказывать результаты, полученные с помощью Н. м., методом исчерпывания (см. *Исчерпывания метод*). Идеи Н. м. были возрождены в математич. исследованиях на рубеже 16—17 вв. И. Кеплером (I. Kepler) и особенно Б. Кавальери (B. Cavalieri), с именем к-рого и связывают чаще всего Н. м. Развитый Б. Кавальери Н. м. был затем суще-

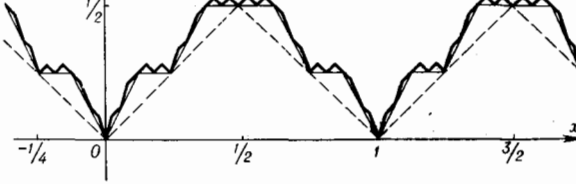
ственно преобразован и послужил одним из этапов в создании интегрального исчисления. См. *Бесконечно малых исчисление.* *БСЭ-3.*

НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ — функция, не имеющая *дифференциала.* В случае функций одного переменного Н. ф.— это функция, не имеющая производной. Напр., функция $f(x)=|x|$ не дифференцируема в точке $x=0$, вместе с тем она дифференцируема в этой точке как слева, так и справа, т. е. имеет в этой точке левую и правую производные. Непрерывная функция $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$ не только не дифференцируема в точке $x=0$, но и не имеет в этой точке производной (ни конечной, ни бесконечной) ни справа, ни слева.

Первые примеры непрерывных на всей числовой оси функций, во всех точках, не имеющих конечных производных, были указаны Б. Больцано (B. Bolzano) в 1830 (опубл. в 1930) и К. Вейерштрассом (K. Weierstrass) в 1860 (опубл. в 1872). Функция Вейерштрасса задается рядом

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos(b^n\pi x),$$

где $0<a<1$, b — нечетное натуральное число, $ab>1+3\pi/2$. Более простой пример, основанный на той же идее, в к-ром периодич. функции типа $\cos\omega x$ заменены периодич. ломаными, был построен Б. Л. Ван дер Варденом (B. L. Van der Waerden). Пусть $u_0(x)$ — функция, равная для каждого действительного числа x



абсолютной величине разности между числом x и ближайшим к нему целым числом. Эта функция линейна на каждом отрезке вида $[n/2, (n+1)/2]$, где n — целое; она непрерывна и имеет период, равный единице. Пусть

$$u_k(x)=u_0(4^k x)/4^k,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

тогда функция Ван дер Вардена задается равенством

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

Эта функция непрерывна на всей числовой оси и ни в одной точке не имеет конечной производной. Первые три частные суммы полученного ряда изображены на рисунке.

Для функций более одного переменного дифференцируемость в точке не эквивалентна существованию в этой точке частных производных; существуют недифференцируемые функции, имеющие частные производные. Напр., функция

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2>0,\\ 0 & \text{при } x=y=0\end{cases}$$

во всех точках плоскости непрерывна и имеет частные производные, однако в точке (0, 0) не дифференцируема. *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕДООПРЕДЕЛЕННАЯ СИСТЕМА — система дифференциальных уравнений, число уравнений к-рой меньше числа неизвестных. См. также *Переопределенная система.* *А. П. Солдатов.*

НЕЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — пространство, свойства к-рого базируются на системе аксиом, отличной от евклидовой. Геометрия Н. п. является *неевклидовой*

геометрией. В зависимости от аксиоматики, на основе к-рой развертываются неевклидовы геометрии Н. п., можно классифицировать Н. п. по различным признакам. С одной стороны, Н. п. может являться конечномерным векторным пространством со скалярным произведением, к-рое выражается в декартовых координатах по формуле

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i - \sum_{i=k+1}^{n} x_i y_i.$$

В этом случае Н. п. представляет собой *псевдоевклидово пространство*. С другой стороны, Н. п. может быть охарактеризовано как нек-рое n-мерное многообразие с определенной структурой, описываемой системой аксиом, отличной от евклидовой.

Н. п. могут классифицироваться и с точки зрения дифференциально-геометрических свойств как римановы пространства с постоянной кривизной (в том числе нулевой кривизны, но топологически отличные от евклидовых пространств). *Л. А. Сидоров.*

НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ — в буквальном понимании — все геометрич. системы, отличные от геометрии Евклида; однако обычно термин «Н. г.» применяется лишь к геометрич. системам (отличным от геометрии Евклида), в к-рых определено движение фигур, причем с той же степенью свободы, что и в геометрии Евклида. Степень свободы движения фигур в евклидовой плоскости характеризуется тем, что каждая фигура без изменения расстояний между ее точками может быть перемещена так, чтобы любая выбранная ее точка заняла любое заранее назначенное положение; кроме того, каждая фигура может вращаться вокруг любой своей точки. В евклидовом трехмерном пространстве каждая фигура может быть перемещена так, чтобы любая выбранная ее точка заняла любое заранее назначенное положение; кроме того, каждая фигура может вращаться вокруг любой оси, проходящей через любую ее точку.

Среди Н. г. особое значение имеют *Лобачевского геометрия* и *Римана геометрия*, к-рые чаще всего и подразумеваются, когда говорят о Н. г. Геометрия Лобачевского — первая геометрич. система, отличная от геометрии Евклида, и первая более общая теория (включающая евклидову геометрию как предельный случай). Геометрия Римана, открытая позднее, в нек-рых отношениях противоположна геометрии Лобачевского, но вместе с тем служит ей необходимым дополнением. Совместное исследование геометрий Евклида, Лобачевского и Римана позволило в должной мере выяснить особенности каждой из них, а также их связи друг с другом и с другими геометрич. системами. Ниже обе Н. г. и геометрия Евклида сопоставляются как синтетич. теории, затем в плане дифференциальной геометрии и, наконец, в плане теории групп.

Неевклидовы геометрии как синтетические теории. Геометрия Лобачевского строится на основе тех же аксиом, что и евклидова, за исключением только одной аксиомы о параллельных. Именно, согласно аксиоме о параллельных евклидовой геометрии через точку, не лежащую на данной прямой a, проходит точно одна прямая, к-рая лежит в одной плоскости с прямой a и не пересекает эту прямую; в геометрии Лобачевского принимается, что таких прямых более одной (затем доказывается, что их бесконечно много).

В геометрии Римана принимается аксиома: каждая прямая, лежащая в одной плоскости с данной прямой, пересекает эту прямую. Эта аксиома противоречит системе аксиом евклидовой геометрии с исключением аксиомы о параллельных. Таким образом, система аксиом, лежащая в основе геометрии Римана, необходимо должна отличаться от системы аксиом евклидовой геометрии

не только заменой одной аксиомы о параллельных другим утверждением, но и части остальных аксиом. Различными в этих геометриях являются аксиомы, к-рые служат для обоснования т. н. отношений порядка геометрич. элементов. Сущность дела в следующем: в евклидовой геометрии и в геометрии Лобачевского порядок точек на прямой является линейным, т. е. подобным порядку во множестве действительных чисел; в геометрии Римана порядок точек на прямой является циклическим, т. е. подобным порядку во множестве точек окружности. Кроме того, в геометриях Евклида и Лобачевского каждая прямая, лежащая в данной плоскости, разделяет эту плоскость на две части; в геометрии Римана прямая не разделяет плоскость на две части, т. е. любые две точки плоскости, не лежащие на данной прямой, можно соединить в этой плоскости непрерывной дугой, не пересекая данную прямую (топологич. моделью плоскости Римана служит проективная плоскость).

Требования аксиом, определяющих движение фигур, для всех трех геометрий одинаковы.

Примеры теорем Н. г.

1) В геометрии Лобачевского сумма внутренних углов любого треугольника меньше двух прямых; в геометрии Римана эта сумма больше двух прямых (в евклидовой геометрии она равна двум прямым).

2) В геометрии Лобачевского площадь треугольника выражается формулой

$$S = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma), \qquad (1)$$

где α, β, γ — внутренние углы треугольника, R — постоянная, к-рая определяется выбором единицы измерения площадей. В геометрии Римана имеет место формула

$$S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \qquad (2)$$

при аналогичном значении символов (в евклидовой геометрии зависимости между площадью треугольника и суммой его углов нет).

3) В геометрии Лобачевского между сторонами и углами треугольника существует ряд зависимостей, напр.:

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} - \operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos\alpha, \qquad (3)$$

где sh, ch — гиперболические синус и косинус, a, b, c — стороны треугольника, α, β, γ — противолежащие им углы, R — постоянная, определяемая выбором масштаба; для прямоугольного треугольника (с гипотенузой c и прямым углом γ) имеет место, напр., равенство

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta. \qquad (4)$$

При нек-ром согласовании линейного масштаба и единицы измерения площадей постоянная R в формулах (1), (3), (4) будет одинаковой. Число R наз. р а д и у с о м к р и в и з н ы п л о с к о с т и (или п р о с т р а н с т в а) Л о б а ч е в с к о г о. Число R при данном масштабе выражает определенный отрезок в плоскости (пространстве) Лобачевского, к-рый также называют радиусом кривизны. Если масштаб меняется, то меняется число R, но радиус кривизны, как отрезок, остается неизменным. Если радиус кривизны принять за масштабный отрезок, то $R = 1$. В геометрии Римана существуют сходные равенства:

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha \qquad (5)$$

(для произвольного треугольника) и

$$\cos\frac{c}{R} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \qquad (6)$$

(для прямоугольного) при аналогичном значении символов. Число R наз. радиусом кривизны плоскости (или пространства) Римана. Как видно из формул (4) и (6), в каждой из Н. г. гипотенуза прямоугольного треугольника определяется его углами; более того, в Н. г. стороны любого треугольника определяются его углами, т. е. не существует подобных треугольников, кроме равных (в евклидовой геометрии нет формул, аналогичных формулам (4) и (6), и нет никаких других формул, выражающих линейные величины через угловые). При замене R на iR формулы (1), (3), (4) превращаются в формулы (2), (5), (6); вообще, при замене R на iR все метрич. формулы геометрии Лобачевского (сохраняющие при этой замене геометрич. смысл) переходят в соответствующие формулы геометрии Римана. При $R\to\infty$ и те и другие дают в пределе формулы евклидовой геометрии (либо теряют смысл). Стремление к бесконечности величины R означает, что масштабный отрезок является бесконечно малым по сравнению с радиусом кривизны (как с отрезком). То обстоятельство, что при этом формулы Н. г. переходят в пределе в формулы евклидовой геометрии, означает, что для малых (по сравнению с радиусом кривизны) неевклидовых фигур соотношения между их элементами мало отличаются от евклидовых.

Неевклидовы геометрии в плане дифференциальной геометрии. В каждой из Н. г. дифференциальные свойства плоскости аналогичны дифференциальным свойствам поверхностей евклидова пространства; именно: в неевклидовой плоскости могут быть введены внутренние координаты u, v так, что дифференциал ds дуги кривой, соответствующей дифференциалам du, dv координат, определяется равенством:

$$ds^2 = E du^2 + 2F\, du dv + G dv^2. \qquad (7)$$

Пусть, в частности, в качестве координаты u произвольной точки M берется длина перпендикуляра, опущенного из M на фиксированную прямую, а в качестве координаты v — расстояние от фиксированной точки O этой прямой до основания указанного перпендикуляра; величины u, v следует брать со знаком, подобно обычным декартовым координатам. Тогда формула (7) для плоскости Лобачевского будет иметь вид

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2, \qquad (8)$$

а для плоскости Римана

$$ds^2 = du^2 + \cos^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2, \qquad (9)$$

R — та же постоянная, к-рая входит в формулы предыдущего раздела (радиус кривизны). Правые части (8) и (9) суть метрич. формы поверхностей евклидова пространства, имеющих соответственно постоянную отрицательную кривизну $K=-1/R^2$ (как, напр., псевдосфера) и постоянную положительную кривизну $K=1/R^2$ (как, напр., сфера). Поэтому внутренняя геометрия достаточно малой части плоскости Лобачевского совпадает с внутренней геометрией на соответствующей части поверхности постоянной отрицательной кривизны. Аналогично, внутренняя геометрия достаточно малых частей плоскости Римана реализуется на поверхностях постоянной положительной кривизны (поверхностей, к-рые реализуют геометрию всей плоскости Лобачевского, в евклидовом пространстве нет). При замене R на iR метрическая форма (8) переходит в метрическую форму (9).

Так как метрич. форма определяет внутреннюю геометрию поверхности, то при такой замене и другие метрич. соотношения геометрии Лобачевского переходят в метрич. соотношения геометрии Римана (что уже было

отмечено выше). При $R=\infty$ каждое из равенств (8) и (9) дает

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

т. е. метрич. форму евклидовой плоскости.

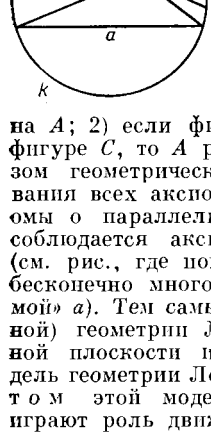
Трехмерные неевклидовы пространства по своим дифференциальным свойствам относятся к числу римановых пространств в широком смысле и выделяются среди них прежде всего тем, что имеют постоянную риманову кривизну. Как в двумерном, так и в трехмерном случае постоянство кривизны обеспечивает однородность пространства, т. е. возможность движения фигур в нем, причем с той же степенью свободы, как (соответственно) на евклидовой плоскости или в евклидовом пространстве. Пространство Лобачевского имеет отрицательную кривизну, равную $-1/R^2$, пространство Римана — положительную кривизну, равную $1/R^2$ (R — радиус кривизны). Евклидово пространство занимает промежуточное положение и является пространством нулевой кривизны.

Пространства постоянной римановой кривизны могут иметь весьма разнообразное строение в смысле топологии. Среди всех пространств постоянной отрицательной кривизны пространство Лобачевского однозначно выделяется двумя своими свойствами: оно полно (в смысле полноты метрич. пространства) и топологически эквивалентно обычному евклидову пространству. Пространство Римана среди всех пространств положительной кривизны однозначно выделяется свойством топологич. эквивалентности проективному пространству. Аналогичными условиями выделяются многомерные пространства Лобачевского и Римана среди многомерных пространств постоянной римановой кривизны.

Неевклидовы геометрии в плане теории групп. Пусть на проективной плоскости введены проективные однородные координаты (x_1, x_2, x_3) и задана нек-рая овальная линия 2-го порядка, обозначаемая дальше буквой k, напр.

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Каждое проективное отображение проективной плоскости на себя, к-рое оставляет на месте линию k, наз. автоморфизмом относительно k. Каждый автоморфизм отображает внутренние точки линии k также во внутренние ее точки. Множество всех автоморфизмов относительно линии k составляет группу. Условимся рассматривать только точки проективной плоскости, лежащие внутри k; хорды линии k будем называть «прямыми». Две фигуры будем считать равными, если одна из них переводится в другую нек-рым автоморфизмом. Так как автоморфизмы составляют группу, то имеют место основные свойства равенства фигур: 1) если фигура A равна фигуре B, то B равна A; 2) если фигура A равна фигуре B, а B равна фигуре C, то A равна C. В получаемой таким образом геометрической теории будут соблюдены требования всех аксиом евклидовой геометрии, кроме аксиомы о параллельных; вместо этой последней аксиомы соблюдается аксиома о параллельных Лобачевского (см. рис., где показано, что через точку P проходит бесконечно много «прямых», не пересекающих «прямой» a). Тем самым получается истолкование (двумерной) геометрии Лобачевского при помощи проективной плоскости или, как говорят, проективная модель геометрии Лобачевского; линия k наз. абсолютом этой модели. Автоморфизмы относительно k играют роль движений. Поэтому геометрию Лобачевского можно рассматривать как теорию, изучающую свойства фигур и связанные с фигурами величины, к-рые остаются неизменными при автоморфизмах; ко-



роче говоря, геометрию Лобачевского можно рассматривать как теорию инвариантов группы автоморфизмов относительно овального абсолюта.

Геометрия Римана (двумерная) допускает сходное истолкование; именно, она является теорией инвариантов относительно нулевого абсолюта

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0. \qquad (10)$$

При этом в качестве точек и прямых модели берутся все точки и прямые проективной плоскости, автоморфизмы определяются чисто алгебраически, как линейные преобразования, к-рые переводят уравнение (10) в уравнение того же вида.

Евклидову геометрию также можно рассматривать как теорию инвариантов нек-рой группы проективных преобразований, именно, группы автоморфизмов относительно вырожденного абсолюта

$$x_1^2+x_2^2=0,\ x_3=0,$$

т. е. относительно мнимых точек $(1, i, 0)$, $(1, -i, 0)$; эти точки наз. к р у г о в ы м и т о ч к а м и. Предметом модели являются все точки проективной плоскости, кроме точек прямой $x_3=0$, и все прямые проективной плоскости, кроме прямой $x_3=0$. В последнем случае автоморфизмы играют роль подобных преобразований, а не движений, как в случае Н. г.

Рассмотренные модели относятся к двумерным геометриям; проективные модели высших размерностей строятся аналогично.

Соответственно характеру уравнений абсолютов геометрия Лобачевского наз. г и п е р б о л и ч е с к о й, геометрия Римана — э л л и п т и ч е с к о й, геометрия Евклида — п а р а б о л и ч е с к о й.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., Что такое неевклидова геометрия, М., 1950; [2] К л е й н Ф., Неевклидова геометрия, пер. с нем., М.— Л., 1936; [3] Е ф и м о в Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978. *Н. В. Ефимов.*

НЕЗАВИСИМОСТЬ в т е о р и и в е р о я т н о с т е й — одно из важнейших понятий этой теории. Иногда используют термины с т а т и с т и ч е с к а я н е з а в и с и м о с т ь, с т о х а с т и ч е с к а я н е з а в и с и м о с т ь. Предположение о Н. рассматриваемых событий, испытаний и случайных величин было обычной предпосылкой в задачах, к-рые рассматривались в математической *вероятностей теории* со времени ее возникновения.

Для двух случайных событий понятие Н. вводится следующим образом. Пусть A и B — два случайных события, $\mathsf{P}(A)$ и $\mathsf{P}(B)$ — их вероятности. У с л о в н у ю в е р о я т н о с т ь события B при условии осуществления события A определяют формулой

$$\mathsf{P}(B/A)=\frac{\mathsf{P}(A\cap B)}{\mathsf{P}(A)},$$

где $\mathsf{P}(A\cap B)$ — вероятность совместного осуществления событий A и B. События A и B наз. н е з а в и с и м ы м и, если

$$\mathsf{P}(A\cap B)=\mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B). \qquad (1)$$

При $\mathsf{P}(A)>0$ это равносильно соотношению

$$\mathsf{P}(B/A)=\mathsf{P}(B). \qquad (2)$$

Смысл данного определения Н. можно пояснить следующим образом. Предполагая, что производится большое число N испытаний, и переходя в (2) от вероятностей к частотам, можно заключить, что между частотой события B во всех N испытаниях и частотой его появления в тех испытаниях, в к-рых наступает A, должно иметь место приближенное равенство. Н. событий указывает таким образом либо на отсутствие связи между наступлением одного из этих событий и наступлением другого, либо на несущественный характер этой связи. Так, событие, заключающееся в том, что наудачу выб-

ранное лицо имеет фамилию, начинающуюся, напр., с буквы «А», и событие, заключающееся в том, что этому лицу достанется выигрыш в очередном тираже лотереи,— независимы.

Определение Н. n случайных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n>2$, может быть дано в нескольких равносильных вариантах. Согласно одному из них эти события наз. н е з а в и с и м ы м и, если для любого m, $2\leqslant m\leqslant n$, и для произвольных попарно различных натуральных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_m\leqslant n$ вероятность совместного осуществления событий $A_{k_1}, \ldots, A_{k_m}$ равна произведению их вероятностей

$$\mathsf{P}(A_{k_1}\cap\ldots\cap A_{k_m})=\mathsf{P}(A_{k_1})\ldots\mathsf{P}(A_{k_m}). \qquad (3)$$

Отсюда, как и ранее, можно вывести, что условная вероятность каждого из рассматриваемых событий при условии, что какие-либо из остальных наступили, равна его «безусловной» вероятности.

Иногда наряду с Н. (взаимной Н.) событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ рассматривают так наз. п о п а р н у ю Н., означающую, что любые два из этих событий A_i и A_j, $i\neq j$, независимы. Н. событий влечет их попарную Н., а обратное, вообще говоря, неверно.

В период, предшествовавший аксиоматич. построению теории вероятностей, содержание понятия Н. не воспринималось достаточно отчетливо. «Понятие о независимых событиях можно считать вполне ясным в известных теоретических вопросах; в других же вопросах это понятие, конечно, может совершенно затемняться вместе с затемнением основного понятия о вероятности»,— писал А. А. Марков (см. [1] с. 24).

В рамках аксиоматич. подхода понятие Н. наиболее естественно вводится следующим образом. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — какое-либо вероятностное пространство, где Ω — множество элементарных событий, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра событий, P — определенная на $\mathcal{A}$ вероятностная мера. Сначала определяют Н. классов событий (здесь будут рассмотрены т о л ь к о к л а с с ы $\mathcal{B}$, являющиеся σ-подалгебрами σ-алгебры $\mathcal{A}$). Классы $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n$ наз. н е з а в и с и м ы м и (относительно P), если любые события $A_1\in\mathcal{B}_1, \ldots, A_n\in\mathcal{B}_n$ независимы в смысле равенства (3); классы $\mathcal{B}_t$ ($t\in T$, где T — произвольное множество индексов) наз. н е з а в и с и м ы м и, если при любом целом $n\geqslant 2$ и любых попарно различных $t_1, \ldots, t_n\in T$ классы $\mathcal{B}_{t_1}, \ldots, \mathcal{B}_{t_n}$ независимы. Н. событий A_k, $1\leqslant k\leqslant n$, равносильна Н. классов

$$\mathcal{B}_k=\{\varnothing, A_k, \overline{A_k}, \Omega\}.$$

Для испытаний Н.— это Н. порождаемых ими σ-алгебр.

Для случайных величин X_t, $t\in T$, Н. определяют как Н. σ-подалгебр $\mathcal{B}(X_t)$, где $\mathcal{B}(X_t)$ — прообраз относительно отображения X_t σ-алгебры борелевских множеств на числовой прямой. Н. случайных событий $A_1, \ldots, A_n$ равносильна Н. их индикаторов I_{A_k}, т. е. случайных величин, определяемых формулами

$$I_{A_k}(\omega)=1 \quad \text{для} \quad \omega\in A_k$$

и

$$I_{A_k}(\omega)=0 \quad \text{для} \quad \omega\notin A_k.$$

Для Н. с л у ч а й н ы х в е л и ч и н $X_1, \ldots, X_n$ необходимы и достаточны следующие условия.

1) Для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ функция распределения

$$F_{X_1\ldots X_n}(a_1, \ldots, a_n)=\mathsf{P}\{\omega: X_1(\omega)<a_1, \ldots, X_n(\omega)<a_n\}$$

равна произведению соответствующих функций распределения:

$$F_{X_1\ldots X_n}(a_1, \ldots, a_n)=F_{X_1}(a_1)\ldots F_{X_n}(a_n).$$

2) При наличии плотностей $p_{X_1, \ldots, X_n}(a_1, \ldots, a_n)$ плотность для почти всех по лебеговой мере в $\mathbb{R}^n$ значений $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ равна произведению $p_{X_1}(a_1) \ldots p_{X_n}(a_n)$ соответствующих плотностей.

3) Характеристич. функция

$$f_{X_1 \ldots X_n}(u_1, \ldots, u_n) = \mathsf{E} e^{iu_1 X_1 + \ldots + iu_n X_n}$$

для всех действительных чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n$ равна произведению $f_{X_1}(u_1) \ldots f_{X_n}(u_n)$, $f_{X_k}(u_k) = \mathsf{E} e^{iu_k X_k}$, соответствующих характеристич. функций.

На гипотезе Н. тех или иных событий и случайных величин основаны важнейшие схемы теории вероятностей: последовательности независимых случайных величин (см., напр., *Бернулли блуждание*, *Больших чисел закон*, *Предельные теоремы* теории вероятностей), случайные процессы с независимыми приращениями (см., напр., *Винеровский процесс*, *Случайный процесс*) и т. д. (см. также *Нуль-единица закон*).

Общие замечания к понятию независимости.

1) Независимость функций от независимых случайных величин. Из данной Н. случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ можно вывести довольно очевидные (и вполне соответствующие интуитивно ожидаемым от понятия Н.) следствия; напр., функции от $X_1, \ldots, X_k$ и от $X_{k+1}, \ldots, X_n$, $1 \leqslant k < n$, будут независимыми случайными величинами. Н. другого типа функций может иметь место только при специальных дополнительных предположениях и может служить для характеризации определенных классов распределений. Напр., если $X_1, \ldots, X_n$ независимы, одинаково распределены и имеют нормальное распределение, то функции

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \tag{4}$$

и

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2 \tag{5}$$

(статистич. оценки математич. ожидания и дисперсии X_k соответственно) являются независимыми случайными величинами. Верно и обратное утверждение: из Н. функций (4) и (5) вытекает нормальность распределений X_k. Точно так же, если известно, что две линейные формы

$$Y_1 = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j \quad \text{и} \quad Y_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j X_j$$

являются независимыми случайными величинами и ни один из коэффициентов a_j и b_j не равен нулю, то все X_j имеют нормальное распределение (из подобного рода теорем может быть при минимальных допущениях выведен, напр., закон Максвелла для распределения скоростей молекул). Приведенные утверждения служат примерами т. н. характеризационных теорем, наиболее полно изученных Ю. В. Линником и его школой.

2) Существование независимых случайных величин на заданном вероятностном пространстве. Если множество элементарных событий Ω состоит из трех элементов, каждому из к-рых приписана вероятность, равная $1/2$, то на Ω не существует независимых случайных величин, отличных от констант. Если в качестве вероятностного пространства взят отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега m, то для любой последовательности функций распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... найдутся определенные на $[0, 1]$ измеримые функции $X_k(\omega)$, являющиеся по отношению к m независимыми случайными величинами и такие, что

$$m\{\omega : 0 \leqslant \omega \leqslant 1, \quad X_k(\omega) < x\} = F_k(x).$$

Простейшим примером такого рода статистически неза-

висимых функций на [0, 1] служат знаки двоичного разложения ω, $0 \leqslant \omega \leqslant 1$, или связанные с ними функции Радемахера

$$r_k(\omega) = \operatorname{sign} \sin(2\pi \cdot 2^{k-1}\omega), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Следует отметить, что существование к а к о г о - н и б у д ь вероятностного пространства, на к-ром определены независимые случайные величины с заданными распределениями, вытекает из теоремы Колмогорова о вероятностях в бесконечномерных пространствах (см. [3] гл. III, § 4).

3) Н е з а в и с и м ы е с л у ч а й н ы е в е л и ч и н ы к а к и с т о ч н и к д р у г и х с х е м. Пусть $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин и $h(x, y)$ — (борелевская) функция двух переменных. Полагая

$$X_1 = h(Y_0, Y_1), \; X_2 = h(X_1, Y_2), \; \ldots,$$

$$X_n = h(X_{n-1}, Y_n), \; \ldots,$$

получают последовательность случайных величин, образующих *Маркова цепь*. Подобным же образом можно получать *марковские процессы*, напр. из винеровского процесса при помощи стохастических дифференциальных уравнений. Из гауссовских случайных мер с независимыми значениями можно, используя преобразование Фурье, построить гауссовские стационарные случайные процессы и т. д.

4) С л а б а я з а в и с и м о с т ь. Асимптотич. законы теории вероятностей, установленные для последовательностей независимых случайных величин, обычно могут быть распространены и на последовательности т. н. слабо зависимых величин, т. е. на последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, где надлежащим образом измеренная зависимость между «удаленными» друг от друга отрезками последовательности «мала» (в простейших случаях это могут быть последовательности m-зависимых величин, где X_k и X_l при $|k-l| > m$ независимы, или последовательности величин, образующих *Маркова цепь эргодическую*, и т. п.). Один из основных приемов доказательства соответствующих теорем — сведение рассматриваемого случая к случаю Н.

5) Н е з а в и с и м о с т ь в т е о р и и ч и с е л. Пусть $p \geqslant 2$ и $q \geqslant 2$ — два взаимно простых натуральных числа. Пусть N — натуральное число, и пусть наудачу выбирают одно из чисел от 1 до N (вероятность для каждого считают равной $1/N$). Пусть A_p (соответственно A_q) событие, состоящее в том, что выбранное число делится нацело на p (соответственно q). Тогда

$$\mathsf{P}(A_p) = \frac{1}{N}\left[\frac{N}{p}\right], \; \mathsf{P}(A_q) = \frac{1}{N}\left[\frac{N}{q}\right],$$

$$\mathsf{P}(A_p \cap A_q) = \frac{1}{N}\left[\frac{N}{pq}\right]$$

и при $N \to \infty$ события A_p и A_q становятся «почти независимыми». Значительно более глубокий факт, состоящий в том, что при $N \to \infty$ можно выбрать $S = S_N \to \infty$ так, что события $A_2, A_3, \ldots, A_{p_S}$ (A_j есть j-е простое число) в совокупности «почти независимы», служит основой для исследования распределения значений арифметич. функций, см. *Чисел теория*; вероятностные методы. Имеются и другие разделы теории чисел, где идея Н. явно или неявно присутствует.

6) О проверке гипотезы Н. по результатам наблюдений см. *Статистических гипотез проверка.*

Лит.: [1] М а р к о в А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [2] К о л м о г о р о в А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [3] е г о ж е, Теория вероятностей, в кн.: Математика, ее содержание, методы и значения, М., 1956; [4] К а ц М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963; [5] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., М., 1967. *Ю. В. Прохоров.*

НЕЗАВИСИМОСТЬ СИСТЕМЫ АКСИОМ — свойство системы аксиом данной аксиоматич. теории, состоящее в том, что каждая аксиома является независимой, т. е. не является логическим следствием из множества остальных аксиом этой теории. Система аксиом, обладающая этим свойством, наз. независимой.

Независимость той или иной аксиомы данной аксиоматич. теории означает, что эту аксиому можно без противоречия заменить ее отрицанием. Иными словами, аксиома независима в том и только в том случае, если имеется *интерпретация*, при к-рой эта аксиома ложна, а все остальные аксиомы данной теории истинны. Построение такой интерпретации является классич. методом доказательства независимости.

При построении аксиоматич. теории в виде *формальной системы*, где отношение логич. следования формализуется в виде понятия выводимости, аксиома считается независимой, если она не может быть выведена из других аксиом с помощью правил вывода данной формальной системы. Для широкого класса формальных систем (т. н. теорий 1-го порядка) независимость относительно выводимости совпадает с независимостью относительно логич. следования.

По отношению к формальным системам и вообще *исчислениям* имеет смысл говорить о независимости правил вывода. Правило вывода наз. независимым, если существует теорема данного исчисления, которая не может быть выведена без использования этого правила.

Н. с. а. сама по себе не является обязательным свойством аксиоматич. теории. Она лишь свидетельствует о том, что совокупность исходных положений теории не является избыточной, и представляет нек-рые технич. удобства. Однако исследования, посвященные Н. с. а., и доказательства независимости способствуют лучшему пониманию изучаемой теории. Достаточно вспомнить, какое влияние на развитие математики оказал вопрос о независимости пятого постулата Евклида в системе аксиом геометрии.

Лит.: [1] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [2] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., М., 1979; [3] Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966.

В. Е. Плиско.

НЕЗАВИСИМЫЕ ИЗМЕРИМЫЕ РАЗБИЕНИЯ пространства с нормированной мерой μ — такие два измеримых разбиения ξ и η, что если $B(\xi)$ и $B(\eta)$ — булевы σ-алгебры измеримых множеств, целиком состоящие из элементов разбиений ξ и η соответственно, то элементы одной из них независимы от элементов другой в том смысле, как это понимается в теории вероятностей: $\mu(A \cap B) = \mu(A)\,\mu(B)$ при $A \in B(\xi)$, $B \in B(\eta)$. Если при этом измеримое разбиение, являющееся подразбиением обоих разбиений ξ и η, совпадает по mod 0 с разбиением на отдельные точки, то ξ и η наз. независимыми дополнениями друг друга. Известны условия того, чтобы измеримое разбиение *Лебега пространства* имело независимое дополнение.

Лит.: [1] Рохлин В. А., «Матем. сб.», 1949, т. 25, № 1, с. 107—50; [2] Ершов М. П., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 1, с. 187—88.

Д. В. Аносов.

НЕЗАВИСИМЫЕ МЕРЫ — меры μ и ν, определенные на локально компактном пространстве T такие, что $\inf(\mu, \nu) = 0$.

Для того чтобы две меры μ и ν были независимы, необходимо и достаточно, чтобы в T существовали такие непересекающиеся множества M и N, что μ сосредоточена на M, а ν на N.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры, интегрирование мер, пер. с франц., М., 1967.

М. И. Войцеховский.

НЕЗАВИСИМЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМА — последовательность измеримых функций $\{f_i(x)\}$ таких, что

$$\mu\{x: f_1(x) < \alpha_1, \ldots, f_n(x) < \alpha_n\} = \prod_{i=1}^{n} \mu\{x: f_i(x) < \alpha_i\}$$

для любого n и любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Наиболее простой пример Н. ф. с. — *Радемахера система*.

Критерий (Колмогорова) сходимости почти всюду ряда Н. ф. с.: для того чтобы ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ сходился почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы для нек-рого $C > 0$ сходились три ряда:

$$\sum_i \mu\{x: f_i(x) > C\}, \quad \sum_i \int f_i^C(x)\,dx,$$

$$\sum_i \int (f_i^C(x))^2\,dx - \left(\int f_i^C(x)\,dx\right)^2,$$

где

$$f_i^C(x) = \begin{cases} f_i(x), & |f_i(x)| \leqslant C, \\ 0, & |f_i(x)| < C. \end{cases}$$

Е. М. Семенов.

НЕИЗМЕРИМОЕ МНОЖЕСТВО — множество, не являющееся *измеримым множеством*. Подробнее: множество X, принадлежащее наследственному σ-кольцу $H(S)$, неизмеримо, если

$$\mu^*(X) > \mu_*(X);$$

здесь S есть σ-кольцо, на к-ром задана мера μ, а μ^* и μ_* — внешняя и внутренняя меры соответственно (см. *Мера*).

Для интуитивного овладения понятием Н. м. полезно следующее «эффективное построение» его.

Пример 1. Пусть

$$K = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

— единичный квадрат,

$$\hat{E} = \{(x, y): x \in E, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

— множество, соответствующее измеримому по Лебегу множеству E меры $m(E)$, и пусть $\mu(\hat{E}) \underset{=}{\text{def}} m(E)$. Тогда множество

$$X = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1, \ y = 1/2\}$$

будет Н. м., причем $\mu^*(X) = 1$, $\mu_*(X) = 0$.

Наиболее ранняя и простейшая конструкция Н. м. принадлежит Дж. Витали (G. Vitali, 1905).

Пример 2. Пусть $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел. Тогда множество X (множество Витали), имеющее согласно аксиоме выбора с каждым из множеств вида $\mathbb{Q}+a$, где a — любое действительное число, ровно по одному общему элементу, является Н. м. Ни одно из множеств Витали не обладает *Бэра свойством*.

Пример 3. Пусть B, (C) — множество чисел вида $n+m\xi$, ξ — иррациональное число, m, n — целые, с четным n (с нечетным n), а X_0 — множество, полученное также с помощью аксиомы выбора из классов эквивалентности множества действительных чисел по отношению:

$$x \sim y, \text{ если } x - y \in A = B \cup C.$$

Пусть $X = X_0 + B$. Тогда для всякого измеримого множества E имеют место равенства:

$$\mu_*(X \cap E) = 0, \quad \mu^*(X \cap E) = \mu(E).$$

На возможности ввести полное упорядочение во множестве мощности континуума основана еще одна конструкция Н. м.

Пример 4. Существует множество $B \subset \mathbb{R}$ такое, что B и $\mathbb{R} \setminus B$ пересекаются с каждым несчетным замкнутым множеством. Любое такое множество (множество Бернштейна) неизмеримо (и не об-

ладает свойством Бэра). В частности, любое множество положительной внешней меры содержит Н. м.

Помимо инвариантности относительно сдвига (пример 2) и топологич. свойств (пример 3) есть причины и теоретико-множественной природы, по к-рым невозможно определить нетривиальную меру для всех подмножеств данного множества, в этом, напр., состоит т е о р е м а У л а м а (см. [2]) для множеств ограниченной мощности.

Неизвестен (1982) ни один конкретный пример Н. м., для построения к-рого не использовалась бы аксиома выбора.

Лит.: [1] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] О к с т о б и Д ж., Мера и категория, пер. с англ., М., 1974; [3] Г е л б а у м Б., О л м с т е д Д ж., Контрпримеры в анализе, пер. с англ., М., 1967. *М. И. Войцеховский.*

НЕЙВИРТА УЗЕЛ — полигональный узел (S^3, k^1), группа к-рого обладает конечно порожденным коммутантом. Дополнение $S^3 \setminus k^1$ Н. у. есть пространство расслоения над окружностью, причем слой F является связной поверхностью, род к-рой равен роду узла. Коммутант G' группы $G = \pi_1(S^3 \setminus k^1)$ Н. у. является свободной группой ранга $2g$, где g — род узла. Коэффициент при старшем члене полинома Александера Н. у. равен 1, а степень этого многочлена равна $2g$. Все торические узлы являются Н. у. Всякий альтернирующий узел, старший коэффициент полинома Александера к-рого равен ± 1, также Н. у.

Н. у. введены Л. Нейвиртом (см. [1]).

Лит.: [1] N e u w i r t h L., Knot groups, Princenton (N. Y.), 1965. *М. Ш. Фарбер.*

НЕЙЛЯ ПАРАБОЛА — название *полукубической параболы* по имени У. Нейла (W. Neil), к-рый нашел в 1657 длину ее дуги.

НЕЙМАНА АЛГЕБРА — подалгебра A алгебры $\mathcal{B}(H)$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H, самосопряженная (т. е. содержащая вместе с каждым оператором T сопряженный к нему оператор T^*) и совпадающая со своим бикоммутантом (т. е. содержащая те и только те операторы $T \subset \mathcal{B}(H)$, к-рые перестановочны с каждым оператором, перестановочным со всеми операторами из A). Эти алгебры были введены Дж. Нейманом [1]. Согласно т е о р е м е Н е й м а н а самосопряженная алгебра $A \subset \mathcal{B}(H)$ тогда и только тогда является Н. а., когда алгебра A (или ее единичный шар) замкнута в слабой, сильной, ультраслабой или ультрасильной, но не равномерной операторной топологии. Данная симметричная банахова алгебра B тогда и только тогда изометрически изоморфна нек-рой Н. а., когда B есть *C*-алгебра*, изометричная нек-рому сопряженному пространству; банахово пространство E, удовлетворяющее условию $E^* = B$, определено однозначно с точностью до изометрич. изоморфизма и может быть отождествлено с пространством ультраслабонепрерывных линейных форм на изометрически изоморфной B Н. а., это пространство обозначается B_* и наз. п р е д д в о й с т в е н н ы м п р о с т р а н с т в о м для B. Такие симметричные банаховы алгебры наз. W^*-а л г е б р а м и. Пусть A Н. а. в гильбертовом пространстве H, A' — ее коммутант, $Z = A \cap A'$ — центр алгебры, P — проектор в A, P' — проектор в A'. Подпространство $P'H$ инвариантно относительно A, и семейство ограничений операторов из A на подпространство $P'H$ образует Н. а. в пространстве $P'H$; эта алгебра обозначается AP' и наз. и н д у ц и р о в а н н о й, а отображение $T \to T|_{P'H}$ наз. и н д у к ц и е й A на AP; семейство ограничений операторов вида PTP, $T \in A$, на подпространство PH образует Н. а. A_P в пространстве PH, эта алгебра наз. р е д у ц и р о в а н н о й. Если $P = P' \in Z$, то редуцированная и индуцированная Н. а. совпадают. Изометрический изоморфизм Н. а. наз. а л г е б р а и ч е с к и м; Н. а. в гильбертовом простран-

стве H наз. пространственно изоморфной Н. а. B в пространстве K, если существует унитарный оператор U, отображающий H на K и удовлетворяющий условию $B=UAU^{-1}$. Пересечение любого семейства Н. а. в данном гильбертовом пространстве есть Н. а.; наименьшая Н. а., содержащая данное множество M, наз. Н. а., порожденной множеством M. Пусть H_i, $i\in I$,— гильбертовы пространства, $H=\sum\nolimits^{\oplus}H_i$ — их прямая сумма, A_i — Н. а. в H_i, A — Н. а. в пространстве H, порожденная такими операторами T из $\mathcal{B}(H)$, что каждое подпространство H_i инвариантно относительно T и ограничение T на H_i принадлежит A_i; Н. а. наз. прямым произведением Н. а. A_i и обозначается $A=\times_{i\in I}A_i$. Для Н. а. определены также операции тензорного произведения и бесконечного тензорного произведения. Н. а. наз. *фактором*, если ее центр состоит из операторов, кратных единичному.

Пусть A — Н. а., A^+ — множество положительных операторов из A. Весом на A наз. аддитивное отображение φ множества A в $[0, \infty]$, однородное относительно умножений на положительные числа. Вес φ наз. следом, если $\varphi(UTU^{-1})=\varphi(T)$ для всех $T\in A^+$ и всех унитарных операторов U из A. След наз. конечным, если $\varphi(T)<\infty$ для всех $T\in A$; полуконечным, если для любого $S\in A^+$ величина $\varphi(S)$ есть верхняя грань чисел вида $\varphi(T)$, где $\varphi(T)<\infty$ и $0\leqslant T\leqslant S$; точным, если из условия $\varphi(T)=0$, $T\in A^+$, следует $T=0$; нормальным, если для любого возрастающего семейства T_α элементов из A^+ с точной верхней границей T величина $\varphi(T)$ является верхней гранью чисел $\varphi(T_\alpha)$. Н. а. A наз. конечной, если на A существует семейство нормальных конечных следов, разделяющее точки A; собственно бесконечной, если на A не существует ненулевых конечных следов; полуконечной, если на A существует точный нормальный полуконечный след, чисто бесконечной, или алгеброй типа III, если на A не существует ненулевых нормальных полуконечных следов. Н. а. наз. дискретной, или алгеброй типа I, если она алгебраически изоморфна Н. а., коммутант к-рой коммутативен; такая алгебра полуконечна. Н. а. наз. непрерывной, если для любого ненулевого центрального проектора P Н. а. A_P не является дискретной. Непрерывная полуконечная алгебра наз. алгеброй типа II. Конечная алгебра типа II наз. Н. а. типа II_1; собственно бесконечная алгебра типа II наз. Н. а. типа II_∞. Принадлежность Н. а. к определенному типу равносильна принадлежности ее коммутанта тому же типу, но коммутант конечной Н. а. не обязательно является конечной Н. а.

Пусть A — Н. а., P, Q — проекторы в A, P и Q наз. эквивалентными, $P\sim Q$, если существует такой элемент $U\in A$, что $P=U^*U$, $Q=UU^*$. Пусть $P\prec Q$, если существует такой проектор $P_1\in A$, что $P\sim P_1$ и $P_1\leqslant Q$; отношение $\prec$ есть отношение частичного порядка. Классификация Н. а. по типам I и т. д. может быть проведена в терминах этого отношения, в частности: проектор $P\in A$ наз. конечным, если из условий $P_1\in A$, $P_1\sim P$, $P_1\leqslant P$ следует, что $P_1=P$; Н. а. конечна тогда и только тогда, когда единичный проектор конечен, и полуконечна, если и только если точная верхняя граница семейства конечных проекторов есть единичный проектор.

Н. а. A полуконечна тогда и только тогда, когда она может быть реализована как левая Н. а. нек-рой совершенной *гильбертовой алгебры*; элементами соответствующей гильбертовой алгебры являются такие элементы $x\in A$, что $\varphi(x^*x)<\infty$, где φ — точный нормальный полуконечный след на A. Для алгебр типа III

соответствующая реализация может быть получена с помощью обобщенных гильбертовых *алгебр* и весов на Н. а.

Пусть H_p — фиксированное гильбертово пространство размерности p, $p=1, 2, \ldots, \aleph_0$, Z — борелевское пространство, μ — положительная мера на Z, $Z=\bigcup_{p=1}^{\aleph_0} Z_p$ — разбиение Z на непересекающиеся измеримые подмножества, $L_2(Z_p, \mu, H_p)$ — гильбертово пространство суммируемых с квадратом μ-измеримых отображений пространства Z_p в H_p,

$$H=\oplus_{p=1}^{\infty} L_2(Z_p, \mu, H_p).$$

Пусть $H(\zeta)=H_p$ при $\zeta\in Z_p$; если $f\in H$, то $f=\sum f_p$, где $f_p\in L_2(Z_p, \mu, H_p)$; пусть $f(\zeta)=f_p(\zeta)$ при $\zeta\in Z_p$; отображение $\zeta\to T(\zeta)$, где $T(\zeta)$ — непрерывный линейный оператор в гильбертовом пространстве $H(\zeta)$, наз. и з м е р и м ы м п о л е м о п е р а т о р о в, если для любого $f\in H$ функция $\zeta\to T(\zeta)f(\zeta)$ измерима на каждом множестве Z_p. Если $\zeta\to T(\zeta)$ — измеримое поле операторов и функция $\zeta\to\|T(\zeta)\|$ существенно ограничена на Z, то для любого $f\in H$ существует единственный вектор $g\in H$ такой, что $g(\zeta)=T(\zeta)f(\zeta)$ μ-почти всюду. Отображение $T: H\to H$, определенное формулой $Tf=g$ для всех $f\in H$, является ограниченным линейным оператором в H, и

$$\|T\|=\operatorname*{ess\,sup}_{\zeta\in Z}\|T(\zeta)\|.$$

Такой оператор T в H наз. р а з л о ж и м ы м. Пусть для любого $\zeta\in Z$ определена Н. а. $A(\zeta)$ в пространстве $H(\zeta)$; отображение $\zeta\to A(\zeta)$ наз. и з м е р и м ы м п о л е м Н. а., если существует такая последовательность $\{\zeta\to T_n(\zeta)\}$ измеримых операторных полей, что при любом $\zeta\in Z$ Н. а. $A(\zeta)$ порождается операторами $T_n(\zeta)$. Множество всех таких разложимых операторов T в H, что $T(\zeta)\in A(\zeta)$ при каждом $\zeta\in Z$, есть Н. а. в H, обозначаемая

$$A=\int^{\oplus} A(\zeta)\,d\mu(\zeta),$$

она наз. п р я м ы м и н т е г р а л о м Н. а. $A(\zeta)$ по мере μ. Любая Н. а. в сепарабельном гильбертовом пространстве изоморфна нек-рому прямому интегралу факторов. Произвольная Н. а. может быть подвергнута алгебраич. разложению, в связи с чем теория факторов и представляет интерес для общей теории Н. а.

Н. а. естественно возникают в задачах, связанных с операторами в гильбертовом пространстве, и имеют многочисленные приложения как в самой теории операторов и теории представлений групп и алгебр, так и в теории динамич. систем, статистич. физике и квантовой теории поля.

Лит.: [1] M u r r a y F., N e u m a n n J., «Ann. Math.», 1936, v. 37, p. 116—229; «Trans. Amer. Math. Soc.», 1937, v. 41, p. 208—48; [2] N e u m a n n J., «Ann. Math.», 1943, v. 44, p. 716—808; [3] D i x m i e r J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, 2 éd., P., 1969; [4] Д и к с м ь е Ж., С*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [5] S a k a i S., C*-algebras and W*-algebras, B., 1971; [6] N e u m a n n J., «Comp. math.», 1938, v. 6, p. 1—77; «Ann. Math.», 1940, v. 41, p. 94—161; [7] G u i c h a r d e t A., «Ann. scient. École norm. supér.», 1966, t. 83, p. 1—52; [8] Т а к е с а к и М., «Математика», 1974, т. 18, № 3, с. 84—120, № 4, с. 34—63; [9] Z s i d ó L., Topological decompositions of operator algebras, Vienna, 1974; [10] Н а й м а р к М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968.

А. И. Штерн.

НЕЙМАНА ЗАДАЧА — то же, что *вторая краевая задача*. Названа по имени К. Неймана (K. Neumann, 1877), к-рый впервые систематически исследовал ее.

НЕЙМАНА МЕТОД ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ — один из методов *доверительного оценивания*, позволяющий получать *интервальные оценки* для неизвестных параметров вероятностных законов по результатам наблюдений. Предложен и развит Ю. Ней-

маном (см. [1], [2]). Суть метода заключается в следующем. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайные величины, совместная функция распределения к-рых $F(x, \theta)$ зависит от параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$, $x=(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Далее, пусть в качестве точечной оценки параметра θ используется статистика $T=T(X_1, \ldots, X_n)$, функция распределения к-рой есть $G(t, \theta)$, $\theta \in \Theta$. Тогда для любого числа P из интервала $0{,}5<P<1$ можно определить систему из двух уравнений относительно переменной θ:

$$G(T, \theta)=\begin{cases} P, \\ 1-P. \end{cases} \qquad (*)$$

При определенных условиях регулярности функции $F(x, \theta)$, к-рые выполняются почти во всех интересных для практики случаях, система (*) имеет единственное решение

$$\underline{\theta}=\underline{\theta}(T), \quad \bar{\theta}=\bar{\theta}(T), \quad \bar{\theta}, \underline{\theta} \in \Theta,$$

такое, что

$$\mathsf{P}\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta} \mid \theta\} \geqslant 2P-1.$$

Множество $(\underline{\theta}, \bar{\theta}) \subset \Theta$ наз. доверительным интервалом (доверительной оценкой) для неизвестного параметра θ с доверительной вероятностью $2P-1$. Статистики $\underline{\theta}$ и $\bar{\theta}$ наз. нижним и верхним доверительными пределами, отвечающими выбранному коэффициенту доверия P. В свою очередь, число

$$p=\inf_{\theta \in \Theta} \mathsf{P}\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta} \mid \theta\}$$

наз. коэффициентом доверия доверительного интервала $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$. Таким образом, Н. м. д. и. приводит к интервальным оценкам, коэффициент доверия к-рых $p \geqslant 2P-1$.

Пример 1. Пусть независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ подчиняются одному и тому же нормальному закону $\Phi(x-\theta)$, математич. ожидание к-рого θ неизвестно. В этом случае наилучшей оценкой для θ является достаточная статистика $X=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, к-рая распределена по нормальному закону $\Phi[\sqrt{n}(x-\theta)]$. Фиксируя P из интервала $0{,}5<P<1$ и решая уравнения

$$\Phi\left[\sqrt{n}\,(\bar{X}-\theta)\right]=P, \quad \Phi\left[\sqrt{n}\,(\bar{X}-\theta)\right]=1-P,$$

находят нижний и верхний доверительные пределы

$$\underline{\theta}=\bar{X}-\frac{1}{\sqrt{n}}\,\Phi^{-1}(P), \quad \bar{\theta}=\bar{X}-\frac{1}{\sqrt{n}}\,\Phi^{-1}(1-P),$$

отвечающие выбранному коэффициенту доверия P. Так как

$$\Phi^{-1}(y)+\Phi^{-1}(1-y) \equiv 0, \quad y \in [0, 1],$$

то доверительный интервал для неизвестного математич. ожидания θ нормального закона $\Phi(x-\theta)$ имеет вид

$$\left(\bar{X}-\frac{1}{\sqrt{n}}\,\Phi^{-1}(P), \quad \bar{X}+\frac{1}{\sqrt{n}}\,\Phi^{-1}(P)\right),$$

причем коэффициент доверия его в точности равен $2P-1$.

Пример 2. Пусть μ — случайная величина, подчиняющаяся биномиальному закону с параметрами n и θ, т. е. для любого целого $m=0, 1, 2, \ldots, n$

$$\mathsf{P}\{\mu \leqslant m \mid n, \theta\}=\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}=$$

$$=I_x(n-m, m+1), \quad 0<\theta<1,$$

где

$$I_x(a,\ b) = \frac{1}{\mathrm{B}(a,\ b)} \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$$

— неполная бета-функция ($0 \leqslant x \leqslant 1$, $a>0$, $b>0$). Если параметр «успеха» θ неизвестен, то для определения доверительных пределов нужно согласно Н. м. д. и. решить уравнения

$$I_{1-\theta}(n-\mu,\ \mu+1) = \begin{cases} P, \\ 1-P, \end{cases}$$

где $0{,}5<P<1$. По таблицам математич. статистики определяют корни $\overline{\theta}$ и $\underline{\theta}$ этих уравнений, являющиеся соответственно верхним и нижним доверительными пределами с коэффициентом доверия P. Полученный таким образом доверительный интервал $(\underline{\theta},\ \overline{\theta})$ имеет коэффициент, в точности равный $2P-1$. Очевидно, что если в эксперименте получают $\mu=0$, то в этом случае $\underline{\theta}=0$, если же $\mu=n$, то $\overline{\theta}=1$.

Н. м. д. и. существенно отличается от бейесовского метода и метода, основанного на фидуциальном подходе Фишера. В Н. м. д. и. неизвестный параметр θ функции распределения $F(x,\ \theta)$ трактуется как постоянная величина, а сам доверительный интервал $(\underline{\theta}(T),\ \overline{\theta}(T))$ строится до эксперимента, в ходе к-рого вычисляется значение статистики T. Следовательно, согласно Н. м. д. и. вероятность одновременного выполнения неравенств $\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}$ есть *априорная вероятность* того, что доверительный интервал $(\underline{\theta},\ \overline{\theta})$ «накрывает» неизвестное истинное значение параметра θ. Очевидно, что на самом деле доверительный метод Неймана остается в силе, если θ является случайной величиной, так как в Н. м. д. и. интервальная оценка строится до проведения эксперимента и, следовательно, не зависит от *априорного распределения* параметра. Н. м. д. и. выгодно отличается от бейесовского и фидуциального подходов своей независимостью от априорной информации о параметре θ, и при этом, в отличие от метода Фишера, логически безупречен. В общем случае Н. м. д. и. приводит к целой системе доверительных интервалов для неизвестного параметра, в связи с чем возникает задача построения оптимальной интервальной оценки, обладающей, напр., свойствами несмещенности, селективности или подобия, к-рая находит свое решение в рамках теории проверки статистич. гипотез.

Лит.: [1] Neyman J., «Ann. Math. Statistics», 1935, v. 6, p. 111—16; [2] его же, «Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.», 1937, v. 236, p. 333—80; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [4] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, № 1, с. 187—92; [5] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979. *М. С. Никулин.*

НЕЙМАНА РЯД — ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}(z),$$

где $J_{\nu+n}$ — *Бесселя функции* (цилиндрич. функции 1-го рода), ν — нек-рое число (действительное или комплексное). К. Нейман [1] рассмотрел частный случай, когда ν — целое число. Он показал, что если $f(z)$ — аналитич. функция в замкнутом круге с центром в начале координат, z — внутренняя точка круга, C — граница круга, то имеет место равенство

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z),$$

где

$$a_0 = f(0), \quad a_n = \frac{1}{\pi i} \int_C O_n(t)\, f(t)\, dt;$$

O_n— многочлен степени $n+1$ относительно $1/t$:

$$O_0(t)=1/t,$$

$$O_n(t)=\frac{1}{2t^{n+1}}\int_0^\infty e^{-x}\left[(x+\sqrt{x^2+t^2})^n+\right.$$
$$\left.+(x-\sqrt{x^2+t^2})^n\right]dx,\quad n\geqslant 1;$$

он обычно наз. многочленом Неймана n-го порядка (сам К. Нейман эту функцию называл бесселевой функцией 2-го порядка, ныне этим термином пользуются для обозначения одного из решений уравнения Бесселя).

Примеры представления функций с помощью Н. р.:

$$\cos(z\sin\varphi)=J_0(z)+2\sum_{n=1}^\infty J_{2n}(z)\cos 2n\varphi,$$

$$\sin(z\cos\varphi)=2\sum_{n=1}^\infty J_{2n-1}(z)\sin(2n-1)\varphi,$$

$$\left(\frac{z}{2}\right)^\mu=\sum_{n=0}^\infty\frac{(\mu+2n)\,\Gamma(\mu+n)}{n!}J_{\mu+2n}(z),$$

где μ — любое не целое отрицательное число, Γ — *гамма-функция*.

В теории интегральных уравнений Фредгольма

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds=f(x),\quad x\in[a,\ b],\qquad(1)$$

рядом Неймана наз. разложение резольвенты $R(x,\ s;\ \lambda)$ ядра K:

$$R(x,\ s;\ \lambda)=\sum_{n=1}^\infty\lambda^n K_n(x,\ s),\qquad(2)$$

где K_n — интерированные ядра (ядра K), определяемые рекуррентными формулами

$$K_1(x,\ s)=K(x,\ s),$$
$$K_n(x,\ s)=\int_a^b K_{n-1}(x,\ t)\,K(t,\ s)\,dt,\quad n\geqslant 2.$$

С помощью формулы (2) решение уравнения (1) при малых λ представляется равенством

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{k=1}^\infty\lambda^n\int_a^b K_n(x,\ s)\,f(s)\,ds.\qquad(3)$$

Последний ряд также наз. рядом Неймана. Ряд (3) был рассмотрен К. Нейманом [2] в случае уравнения (1), к к-рому сводится задача Дирихле в теории потенциала.

Пусть A — ограниченный линейный оператор, отображающий банахово пространство X в себя, и пусть норма $\|A\|<1$. Тогда оператор $I-A$, где I — тождественный оператор, имеет единственный обратный ограниченный линейный оператор $(I-A)^{-1}$, допускающий разложение

$$(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^\infty A^n,\qquad(4)$$

к-рое в теории линейных операторов наз. рядом Неймана. Ряд (3) можно рассматривать как частный случай ряда (4).

Лит.: [1] Neumann K., Theorie der Besselschen Functionen, Lpz., 1867; [2] его же, Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential, Lpz., 1877; [3] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1, М., 1949; [4] Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, 2 изд., Л.— М., 1935; [5] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [6] Трикоми Ф., Интегральные уравнения, пер. с англ., М., 1960.

Б. В. Хведелидзе.

НЕЙМАНА СТРУКТУРА — структура, определяемая статистикой, не зависящей от достаточной статистики. Понятие Н. с. введено Ю. Нейманом (J. Neyman, см. [1]) в связи с задачей построения подобных критериев в теории проверки статистич. гипотез, при этом сам термин «Н. с.» употребляют по отношению к структуре статистич. критерия, если его критич. функция имеет Н. с. Пусть по реализации случайной величины X, принимающей значения в выборочном пространстве

$(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, P_\theta)$, $\theta \in \Theta$, надлежит проверить сложную гипотезу $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$, причем для семейства $\{P_\theta, \theta \in \Theta_0\}$ существует достаточная статистика T с распределением из семейства $\{P_\theta^T, \theta \in \Theta_0\}$. В этом случае любой статистич. критерий уровня α, предназначенный для проверки гипотезы H_0, имеет Н. с., если его критич. функция φ удовлетворяет условию:

$$\mathsf{E}\{\varphi(X) \mid T = t\} = \alpha \text{ почти всюду по мере } \mathsf{P}_\theta^T,\ \theta \in \Theta_0. \quad (1)$$

Очевидно, что если статистич. критерий имеет Н. с., то он является подобным по отношению к семейству $\{P_\theta,\ \theta \in \Theta_0\}$, так как

$$\mathsf{E}_\theta\{\varphi(X)\} = \mathsf{E}_\theta\{\mathsf{E}\{\varphi(X) \mid T = t\}\} = \alpha$$

для всех $\theta \in \Theta_0$.

Выполнение условия (1) по существу сводит задачу проверки сложной гипотезы H_0 к задаче проверки простой гипотезы H_0 при каждом фиксированном значении t достаточной статистики T.

Пример. Пусть независимые случайные величины X_1 и X_2 подчиняются законам Пуассона, параметры к-рых λ_1 и λ_2 неизвестны, и пусть проверяется гипотеза $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$ против альтернативы $H_1 : \lambda_1 \neq \lambda_2$. В силу независимости X_1 и X_2 статистика $T = X_1 + X_2$ подчиняется закону Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$, а условные распределения случайных величин X_1 и X_2 при условии $T = t$ суть биномиальные распределения с параметрами t, $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ и t, $\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$ соответственно, т. е.

$$\mathsf{P}\{X_i = k \mid T = t\} = \binom{t}{k} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{t-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, t. \quad (2)$$

При справедливости гипотезы H_0 статистика T является достаточной для неизвестного общего значения $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, а из (2) следует, что если гипотеза H_0 имеет место, то условное распределение случайной величины X_1 при фиксированном значении достаточной статистики $T = t$ является биномиальным с параметрами t и $1/2$, т. е. при H_0

$$\mathsf{P}\{X_1 = k \mid T = t\} = \binom{t}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^t, \quad k = 0, 1, \ldots, t.$$

Таким образом, в этом случае задача проверки сложной гипотезы H_0 свелась к задаче проверки простой гипотезы H_0^t, согласно к-рой условное распределение случайной величины X_1 (при фиксированной сумме $X_1 + X_2 = t$) является биномиальным с параметрами t и $1/2$. Для проверки гипотезы H_0^t можно воспользоваться, напр., *знаков критерием*.

Понятие Н. с. имеет большое значение в задаче проверки сложных статистич. гипотез, т. к. именно среди критериев, имеющих Н. с., часто находится *наиболее мощный критерий*. Э. Леман (E. Lehmann) и Г. Шеффе (H. Scheffé) показали, что статистич. критерий для проверки сложной гипотезы $H_0 : \theta \in \Theta_0$ имеет Н. с. по отношению к достаточной статистике T тогда и только тогда, когда семейство $\{P_\theta^T, \theta \in \Theta_0\}$, индуцированное статистикой T, является ограниченно полным. На основе понятия Н. с. разработаны общие методы построения подобных критериев. См. *Распределений полное семейство*, *Подобный критерий*.

Лит.: [1] Нейман Дж., Текущие задачи математической статистики, [пер. с англ.]. Международный математический конгресс в Амстердаме. 1954, М., 1961; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966.

М. С. Никулин.

НЕЙМАНА ТЕОРЕМА эргодическая: для изометрич. оператора U в гильбертовом пространстве H и любого $h \in H$ существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k h = \overline{h}$$

(понимаемый в смысле сходимости по норме в H). Для непрерывной однопараметрич. группы унитарных преобразований $\{U_t\}$ в H и любого $h \in H$ существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_t h dt = \overline{h}$$

(понимаемый в том же смысле). При этом $\overline{h}$ есть ортогональная проекция h на пространство инвариантных относительно U (или $\{U_t\}$) элементов H.

Н. т. сформулирована и доказана Дж. Нейманом [1], имевшим в виду в первую очередь ее применения в эргодич. теории, когда в пространстве с мерой (X, μ) задан эндоморфизм T (или *измеримый поток* $\{T_t\}$), $H = L^2(X, \mu)$ и U есть оператор сдвига:

$$Uh(x) = h(Tx) \quad \text{или} \quad U_t h(x) = h(T_t(x)).$$

В этом случае Н. т. означает, что временны́е средние функции $h(x)$, т. е. средние значения $h(T^k x)$ или $h(T_t x)$ на отрезке времени $0 \leqslant k < n$ или $0 \leqslant t \leqslant T$, при удлинении этого отрезка сходятся к $\overline{h}(x)$ в среднем квадратичном по x (что часто подчеркивается термином mean ergodic theorem). В частности, при достаточной длине интервала осреднения временно́е среднее функции $h(x)$ для большинства x близко к $\overline{h}(x)$. Поэтому Н. т. (и ее обобщения) часто (в особенности применительно к данному случаю) наз. статистической эргодической теоремой, в отличие от индивидуальной эргодической теоремы, т. е. *Биркгофа эргодической теоремы* (и ее обобщений). Из последней (и — при $\mu(X) = \infty$ — из используемых при ее доказательстве рассуждений) в данном случае можно вывести Н. т. Однако в общем случае, когда H не реализовано как $L^2(X, \mu)$ и оператор U или U_t не связан с какими-то преобразованиями в X, Н. т. не следует из теоремы Биркгофа.

Первоначальное доказательство Н. т. опиралось на спектральное разложение унитарных операторов. Позднее появился ряд других доказательств (простейшее из них принадлежит Ф. Риссу, F. Riesz, см. [2]) и обобщений для более широких классов групп и полугрупп операторов в банаховых пространствах (см. [3], [4]).

Н. т. и ее обобщения принадлежат к числу *операторных эргодических теорем*.

Лит.: [1] Neumann J., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1932, v. 18, p. 70—82; [2] Халмош П. Р., Лекции по эргодической теории, пер. с англ., М., 1959; [3] Вершик А. М., Юзвинский С. А., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 133—87; [4] Каток А. Б., Синай Я. Г., Степин А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975, с. 129—262.

Д. В. Аносов.

НЕЙМАНА ФУНКЦИИ — *цилиндрические функции* 2-го рода. Н. ф. $N_p(x)$ [иногда применяется обозначение $Y_p(x)$] могут быть определены через *Бесселя функции* $J_p(x)$ следующим образом:

$$N_p(x) = \lim_{k \to p} \frac{J_k(x)\cos k\pi - J_{-k}(x)}{\sin k\pi}.$$

Н. ф. действительны при действительном положительном x и стремятся к нулю при $x \to \infty$. При больших x справедливо асимптотич. представление

$$N_p(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{1}{2} p\pi - \frac{\pi}{4}\right).$$

Н. ф. связаны рекуррентными формулами

$$N_{p-1}(x) + N_{p+1}(x) = (2p/x) N_p(x),$$
$$N_{p-1}(x) - N_{p+1}(x) = 2N_p'(x).$$

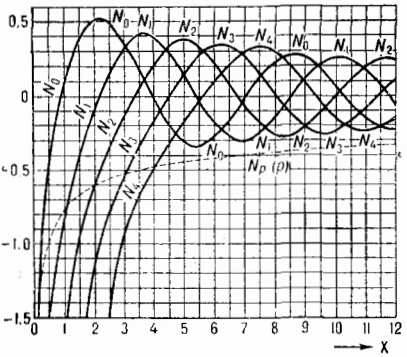
При $p = n$ целых:

$$N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x);$$

для малых x:

$$N_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{2}{\gamma x}\right), \quad N_n(x) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n,$$

где $\ln \gamma = C = 0{,}5772\ \ldots$ — постоянная Эйлера.



Графики функций Неймана.

Н. ф. для «полуцелого» порядка $p = n + 1/2$ выражаются через тригонометрич. функции, в частности

$$N_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x, \quad N_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Н. ф. предложены К. Нейманом (K. Neumann, 1867).

Лит. см. при ст. *Цилиндрические функции*. *В. И. Битюцков.*

НЕЙМАНА — ПИРСОНА ЛЕММА — лемма, утверждающая, что в задаче статистич. проверки простой гипотезы H_0 против простой альтернативы H_1 *отношения правдоподобия критерий* является *наиболее мощным критерием* среди всех статистич. критериев, имеющих один и тот же заданный *значимости уровень*. Н.— П. л. доказана Ю. Нейманом и Э. Пирсоном [1]. Н.— П. л. часто наз. фундаментальной леммой математической статистики. См. также *Статистических гипотез проверка*.

Лит.: [1] Neuman J., Pearson E. S., «Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A», 1933, v. 231, p. 289—337; [2] Леман Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979. *М. С. Никулин.*

НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА УРАВНЕНИЕ — *дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом*, в к-рое старшая производная входит при более чем одном значении аргумента, в том числе при основном (непреобразованном), и это последнее значение является наибольшим из присутствующих в уравнении. Напр., уравнение

$$x'(t) = f(t,\ x(\alpha(t)),\ x'(\beta(t))) \qquad (*)$$

есть Н. т. у. при $\alpha(t) \leqslant t$, $\beta(t) < t$.

Для Н. т. у. разрешима начальная задача; так, если для Н. т. у. $(*)$ с возрастающей $\beta(t)$ задать

$$x = \varphi(t), \quad t \leqslant t_0,$$

то при

$$f \in C^{m,\ n,\ n}, \quad \alpha,\ \beta \in C^m,\ \varphi \in C^p,\ m,\ n \geqslant 0,\ p \geqslant 1,$$

существует (при $n \geqslant 1$ — единственное) кусочно гладкое решение, к-рое при выполнении $k = 1 + \min\{m,\ n,\ p-1\}$ условий согласования, т. е. условий типа

$$\varphi'(t_0) = f(t_0,\ \varphi(\alpha(t_0)),\ \varphi'(\beta(t_0))),$$

принадлежит C^k. Н. т. у.— один из наиболее изученных классов уравнений с отклоняющимся аргументом. Н. т. у. естественно появляются в прикладных задачах, в постановку к-рых входит то или иное свойство повторяемости. *А. Д. Мышкис.*

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ — теория моделей, отличающаяся от классической тем, что либо *формальный язык*, с к-рым она имеет дело, отличен от

языка первого порядка $L_{\omega\omega}$, либо логика, лежащая в ее основе, отлична от классической (двузначной). В дальнейшем, если не оговорено противное, логика считается двузначной.

В теории моделей языка L наиболее важными являются следующие проблемы.

а) Аксиоматизируемость множества тождественно истинных формул. Если существует эффективная нумерация формул языка L натуральными числами, то проблема уточняется: будет ли множество номеров тождественно истинных формул рекурсивно перечислимым?

б) Язык L наз. (α, β)-к о м п а к т н ы м, если для любого множества Σ высказываний языка L мощности $\leqslant\alpha$ из выполнимости каждого подмножества $\Sigma'\subseteq\Sigma$ мощности $<\beta$ следует выполнимость Σ. Проблема компактности состоит в описании пар кардиналов $\langle\alpha, \beta\rangle$, для к-рых L является (α, β)-компактным.

в) Если формулы языка L образуют множество (несобственный класс), то существует такой кардинал α, что всякое множество высказываний языка L, имеющее модель мощности $\beta\geqslant\alpha$, имеет модели сколь угодно больших мощностей. Наименьший такой кардинал наз. ч и с л о м Х а н ф а языка L. Для $L_{\omega\omega}$ оно равно счетной мощности ω. Проблема заключается в вычислении числа Ханфа для L и в установлении условий существования моделей малых мощностей.

Ниже перечислены наиболее изученные неклассич. языки и для каждого из них отмечены нек-рые решения проблем а) — в).

1) Я з ы к L_2 л о г и к и в т о р о й с т у п е н и. Он получается из $L_{\omega\omega}$ добавлением переменных для предикатов и разрешением навешивания на них кванторов. Высказывание Ф языка L_2 наз. и с т и н н ы м в системе $\langle A, F_1, \ldots, F_n, \ldots\rangle$ (где A — модель сигнатуры Ф, а F_n, $n\geqslant 1$,— множества n-местных предикатов на A), если Ф истинно в A при ограничении кванторов по n-местным предикатам множествами F_n. Если при этом F_n, $n\geqslant 1$, совпадают с множествами всех n-местных предикатов на A, то говорят, что Ф истинно в модели A. Существует высказывание языка L_2, характеризующее арифметику натуральных чисел с точностью до изоморфизма. Из *Гёделя теоремы о неполноте* арифметики следует, что множество высказываний языка L_2, истинных во всех моделях, не аксиоматизируемо. Однако существует естественное обобщение Σ_2 аксиоматики исчисления предикатов первой ступени, для к-рого справедлива т е о р е м а Х е н к и н а о п о л н о т е: из Σ_2 выводимы те и только те высказывания языка L_2, к-рые истинны во всех системах $\langle A, F_1, \ldots, F_n \ldots\rangle$, удовлетворяющих аксиомам Σ_2. В этом случае имеется а н а л о г т е о р е м ы Л ё в е н х е й м а — С к о л е м а для $L_{\omega\omega}$: если высказывание Ф языка L_2 истинно вместе с аксиомами Σ_2 в нек-рой системе, то Ф и Σ_2 истинны в системе $\langle A, F_1, \ldots, F_n, \ldots\rangle$, где A и F_n, $n\geqslant 1$, не более чем счетные. Нек-рые вопросы теории моделей языка L_2 связаны с проблемами теории множеств и неразрешимы в аксиоматике теории множеств Цермело — Френкеля.

2) Я з ы к $L_{\alpha\beta}$ (α, β — кардиналы). Формулы этого языка строятся из формул языка 1-го порядка с помощью конъюнкций и дизъюнкций множеств формул мощности $<\alpha$, отрицания и кванторной приставки по предметным переменным длины $<\beta$. Истинность формулы в модели определяется, аналогично языку 1-го порядка, индукцией по построению формулы. Кардинал α наз. к о м п а к т н ы м, если для любого кардинала γ язык $L_{\alpha\alpha}$ является (γ, α)-компактным. Среди языков $L_{\alpha\beta}$ после $L_{\omega\omega}$ наиболее изучен $L_{\omega_1\omega}$. Всякую счетную модель счетной сигнатуры можно охарактеризовать высказыванием языка $L_{\omega_1\omega}$ с точностью до изоморфизма. Язык $L_{\omega_1\omega}$ для любого α является (α, ω_1)-компактным. Число Ханфа для $L_{\omega_1\omega}$ равно $2^{\omega,\,\omega_1}$, где

$2^{\alpha,\nu}$ определяется индукцией по ординалу ν: $2^{\alpha,0}=\alpha$, $2^{\alpha,\delta+1}=2^{\alpha,\delta}$ и $2^{\alpha,\delta}=\sum_{\mu<\delta}2^{\alpha,\mu}$, если δ — предельный ординал.

3) Язык $\mathscr{L}_\alpha$ с квантором «существует по крайней мере ω_α». Язык $\mathscr{L}_\alpha$ получается из $L_{\omega\omega}$ добавлением нового квантора Q^α. Истинность формулы определяется индукцией по длине формулы. При этом формула $(Q^\alpha x)\Phi(x)$ истинна в модели A, если мощность множества $\{a|a\in A,\ \Phi(a)$ истинна в $A\}$ не меньше ω_α. Пусть V_α обозначает множество формул языка $\mathscr{L}_\alpha$, истинных во всех моделях мощности $\geqslant\omega_\alpha$. Множество V_0 не аксиоматизируемо, V_1 аксиоматизируемо. Язык $\mathscr{L}_0$ не (ω,ω)-компактен. Однако некая компактность имеет место в языках $\mathscr{L}_\alpha$. Пусть $\omega_\beta<<\omega_\alpha$ означает, что из $\lambda<\omega_\beta$ и $\gamma_i<\omega_\beta\,(i\in\lambda)$ следует $\prod_{i\in\lambda}\gamma_i<\omega_\alpha$. Если $\omega_\beta<<\omega_\alpha$, то $\mathscr{L}_\alpha$ будет (ω_β,ω)-компактным. Число Ханфа для $\mathscr{L}_1$ равно $2^{\omega,\omega}$.

До сих пор рассматривались модели, в к-рых любое высказывание языка L сигнатуры σ было либо истинным, либо ложным. Рассмотрим теперь модель A сигнатуры σ, в к-рой n-местные предикаты понимаются не как подмножества A^n, а как отображения A^n в множество X. Если на X определены операции, соответствующие логич. связкам языка L и кванторам (понимаемым как бесконечноместные операции), то можно определить значение истинности $\|\Phi\|^A\in X$ любого высказывания Φ языка L в модели A. Таким образом, получается теория моделей с множеством значений истинности X. Наиболее плодотворной оказывается теория, когда X — компактное хаусдорфово топологич. пространство или полная булева алгебра. В этих случаях работают многие методы классич. теории моделей. В случае, когда X — полная булева алгебра, конъюнкция, дизъюнкция и отрицание определяются как пересечение, объединение и дополнение соответственно. Значение $\|(\forall x)\Phi(x)\|^A$ определяется как пересечение всех элементов вида $\|\Phi(a)\|^A$, $a\in A$. Булевозначные модели нашли широкое применение в доказательствах совместности различных предложений теории множеств с основными аксиомами аксиоматич. теории множеств.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960; [2] Кейслер Г. Д., Чэн Чень-чунь, Теория непрерывных моделей, пер. с англ., М., 1971.

Е. А. Палютин, А. Д. Тайманов.

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ, точнее — некорректно поставленные задачи,— задачи, для к-рых не удовлетворяется хотя бы одно из приводимых ниже условий, характеризующих корректно поставленные задачи [короче — корректные задачи (к. з.)]. Задача определения решения $z=R(U)$ из метрич. пространства Z (с расстоянием $\rho_Z(\ ,\ )$) по «исходным данным» u из метрич. пространства U (с расстоянием $\rho_U(\ ,\ )$) наз. корректно поставленной на паре пространств (Z,U), если: а) для всякого $u\in U$ существует решение $z\in Z$; б) решение определяется однозначно; в) задача устойчива на пространствах (Z,U), что означает: для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для любых $u_1,u_2\in U$ из неравенства $\rho_U(u_1,u_2)\leqslant\delta(\varepsilon)$ следует неравенство $\rho_Z(z_1,z_2)\leqslant\varepsilon$, где $z_1=R(u_1)$, $z_2=R(u_2)$.

Понятие к. з. принадлежит Ж. Адамару (J. Hadamard, 1923), высказавшему точку зрения, что всякая математич. задача, соответствующая какой-либо физич. или технич. задаче, должна быть корректной. В самом деле, какую физич. интерпретацию может иметь решение, если как угодно малым изменениям исходных данных могут соответствовать большие изменения решения? К таким задачам затруднительно применять приближенные методы решения. Это поставило под сомнение целесообразность изучения Н. з.

Однако такая точка зрения, естественная в применении к нек-рым явлениям, развивающимся во времени, не может быть перенесена на все задачи. В самом деле, неустойчивыми в метрике C, а следовательно и Н. з., являются задачи: решения интегральных уравнений 1-го рода; дифференцирования функций, известных приближенно; численного суммирования рядов Фурье, когда их коэффициенты известны приближенно в метрике l_2; задача Коши для уравнения Лапласа; задача аналитич. продолжения функций; обратные задачи гравиметрии. Некорректными являются также задачи решения систем линейных алгебраич. уравнений в условиях равного нулю определителя системы (а также плохо обусловленные системы); минимизации функционалов, имеющих несходящиеся минимизирующие последовательности; нек-рые задачи линейного программирования и оптимального управления; проектирования оптимальных систем, конструкций (синтез антенн и других физич. систем); задачи об управлении объектами, описываемые дифференциальными уравнениями (в частности, дифференциальные игры). К перечисленным задачам приводят самые различные физич. и технич. проблемы (см. [7]).

К Н. з. относится широкий класс т. н. обратных задач, возникающих в физике, технике и других отраслях знаний, в частности — задачи обработки результатов физич. экспериментов. Пусть z — количественная характеристика изучаемого явления (объекта). В физич. эксперименте часто величина z недоступна непосредственному измерению, а измеряется нек-рое ее проявление $Az=u$. Для интерпретации результатов измерений необходимо определять z по u, т. е. решать уравнение вида

$$Az=u. \tag{1}$$

Задачи решения уравнений (1) часто наз. задачами распознавания образов. Задачи, приводящие к задачам минимизации функционалов (задачи синтеза антенн и других систем и конструкций, задачи оптимального управления и многие др.), наз. также задачами синтеза.

Пусть в задаче обработки результатов физич. экспериментов изучаемый объект (явление) характеризуется элементом z (функцией, вектором), принадлежащим множеству возможных решений Z метрич. пространства $\tilde{Z}$. Пусть z_T недоступен для прямого измерения и измеряется его проявление $Az_T=u_T$, $u_T\in AZ$, где AZ — образ Z при его отображении с помощью оператора A. Очевидно, $z_T=A^{-1}u_T$, где A^{-1} — оператор, обратный оператору A. Так как элемент u_T получают путем измерений, то он бывает известен лишь приближенно. Пусть $\tilde{u}$ — это приближенное значение. В этих условиях речь может идти лишь о нахождении приближенного (к z_T) «решения» уравнения

$$Az=\tilde{u}. \tag{2}$$

Оператор A во многих случаях таков, что обратный ему оператор A^{-1} не является непрерывным, напр. когда A — вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве, в частности интегральный оператор вида

$$\int_a^b K(x,\ s)\,z(s)\,ds.$$

В этих условиях нельзя, следуя классич. концепциям, брать в качестве приближенного к z_T «решения» точное решение уравнения (2), т. е. элемент $z=A^{-1}\tilde{u}$, так как: а) такого решения может не существовать на Z, поскольку $\tilde{u}$ может не принадлежать множеству AZ; б) такое решение, если даже оно существует, не будет обладать свойством устойчивости к малым изменениям $\tilde{u}$ (поскольку обратный оператор A^{-1} не является не-

прерывным) и, следовательно, не может быть физически интерпретируемым. Задача (2) является Н. з.

Численные методы решения некорректных задач. Для Н. з. вида (1) возникает вопрос: что понимается под приближенным решением таких задач? При этом необходимо так определить приближенное решение, чтобы оно было устойчивым к малым изменениям исходной информации. Второй вопрос: каковы алгоритмы построения таких решений. Исчерпывающие ответы на эти основные вопросы впервые даны А. Н. Тихоновым (см. [1], [2]).

Метод подбора. В нек-рых случаях приближенные решения уравнений (1) находятся методом подбора. Он состоит в том, что из класса возможных решений $M \subset Z$ подбирают элемент $\tilde{z}$, для к-рого $A\tilde{z}$ приближает правую часть уравнения (1) с требуемой точностью. В качестве искомого приближенного решения берут элемент $\tilde{z}$. Возникает вопрос: когда этот метод применим, т. е. когда из неравенства

$$\rho_U(A\tilde{z},\ Az_T) \leqslant \delta$$

следует, что

$$\rho_Z(z,\ z_T) \leqslant \varepsilon(\delta),$$

где $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Это имеет место при условии однозначной разрешимости уравнения (1) и при условии, что множество M — компакт (см. [3]). На основе этих соображений сформулировано понятие корректности по Тихонову, наз. также условной корректностью (см. [4]). В применении к уравнению (1) задача наз. корректной по Тихонову, если известно, что для точного значения правой части $u = u_T$ существует единственное решение z_T уравнения (1), принадлежащее заданному компакту M. В этом случае A^{-1} непрерывен на множестве M, и если вместо элемента u_T известен элемент u_δ такой, что $\rho_U(u_\delta,\ u_T) \leqslant \delta$ и $u_\delta \in AM$, то в качестве приближенного решения уравнения (1) с правой частью $u = u_\delta$ можно брать элемент $z_\delta = A^{-1}u_\delta$. При $\delta \to 0$ z_δ будет стремиться к z_T.

Во многих случаях приближенно известная правая часть $\tilde{u}$ не принадлежит множеству AM. В этих условиях уравнение (1) не имеет классич. решения. В качестве приближенного решения берется обобщенное решение, называемое квазирешением (см. [5]). Элемент $\tilde{z} \in M$, минимизирующий при данном $\tilde{u}$ функционал $\rho_U(Az,\ \tilde{u})$ на множестве M, наз. квазирешением уравнения (1) на M (см. [6]). Если M — компакт, то квазирешение существует для любого $\tilde{u} \in U$, и если, кроме того, $\tilde{u} \in AM$, то квазирешение $\tilde{z}$ совпадает с классическим (точным) решением уравнения (1). Существование квазирешения гарантируется лишь при условии компактности множества возможных решений M.

Метод регуляризации. Для ряда прикладных задач, приводящих к уравнению (1), характерна ситуация, когда множество возможных решений Z не является компактом, оператор A^{-1} не является непрерывным на AZ и изменения правой части уравнения (1), связанные с ее приближенным характером, могут выводить ее за пределы множества AZ. Такие задачи наз. существенно некорректными задачами. Разработан подход к решению Н. з., позволяющий строить с помощью ЭВМ приближенные решения существенно Н. з. вида (1), устойчивые к малым изменениям исходных данных. К исходным данным задач вида (1) относится как правая часть u, так и оператор A.

В дальнейшем для простоты изложения предполагается, как правило, что оператор A известен точно. В основе подхода лежит понятие регуляризирующего оператора (см. [2], [7]). Оператор $R(u,\ \delta)$ из U в Z наз.

регуляризирующим оператором для уравнения $Az=u$ (в окрестности $u=u_T$), если он обладает свойствами: 1) существует такое $\delta_1>0$, что оператор $R(u, \delta)$ определен для всякого δ, $0\leqslant\delta\leqslant\delta_1$, и любого $u_\delta\in U$ такого, что $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta$; 2) для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta_0=\delta_0(\varepsilon, u_T)\leqslant\delta_1$ такое, что из неравенства $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta\leqslant\delta_0$ следует неравенство $\rho_Z(z_\delta, z_T)\leqslant\varepsilon$, где $z_\delta=R(u_\delta, \delta)$.

Иногда удобнее пользоваться другим определением регуляризирующего оператора, в к-ром содержится приведенное определение. Оператор $R(u, \alpha)$ из U в Z, зависящий от параметра α, наз. регуляризирующим оператором для уравнения $Az=u$ (в окрестности $u=u_T$), если он обладает свойствами: 1) существует такое число $\sigma_1>0$, что оператор $R(u, \alpha)$ определен для всякого $\alpha>0$ и любого $u_\delta\in U$, для к-рого $\rho_U(u_\delta, u_T)<\delta\leqslant\delta_1$; 2) существует такая функция от δ, $\alpha=\alpha(\delta)$, что для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta(\varepsilon)\leqslant\delta_1$ такое, что если $u_\delta\in U$ и $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta(\varepsilon)$, то $\rho_Z(z_\delta, z_T)<\varepsilon$, где $z_\delta=R(u_\delta, \alpha(\delta))$. В этом определении не предполагается однозначность оператора $R(u, \alpha(\delta))$.

Если $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta$, то в качестве приближенного решения уравнения (1) с приближенно известной правой частью u_δ можно брать элемент $z_\alpha=R(u_\delta, \alpha)$, полученный с помощью регуляризирующего оператора $R(u, \alpha)$, где $\alpha=\alpha(\delta)$ согласовано с погрешностью исходных данных u_δ (см. [1], [2], [7]). Это решение наз. регуляризованным решением уравнения (1). Числовой параметр α наз. параметром регуляризации. При $\delta\to0$ регуляризированное приближенное решение $z_{\alpha(\delta)}=R(u_\delta, \alpha(\delta))$ стремится (в метрике Z) к точному решению z_T.

Таким образом, задача нахождения приближенных решений уравнения (1), устойчивых к малым изменениям правой части, сводится: а) к нахождению регуляризирующего оператора; б) к определению параметра регуляризации α по дополнительной информации о задаче, напр. по величине погрешности, с к-рой задается правая часть u.

Построение регуляризирующих операторов. Предполагается, что уравнение $Az=u_T$ имеет единственное решение z_T. Пусть вместо уравнения $Az=u_T$ решается уравнение $Az=u_\delta$, причем $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta$. Так как $\rho_U(Az_T, u_\delta)\leqslant\delta$, то приближенное решение уравнения $Az=u_\delta$ ищется в классе Z_δ элементов z_δ таких, что $\rho_U(Az, u_\delta)\leqslant\delta$. Множество Z_δ есть множество возможных решений. В качестве приближенного решения нельзя брать произвольный элемент z_δ из Z_δ, т. к. такое «решение» не единственно и оно не будет, вообще говоря, непрерывным по δ. В качестве принципа отбора возможных решений, обеспечивающего получение такого элемента (или элементов) из Z_δ, к-рый непрерывно зависел бы от δ и при $\delta\to0$ стремился бы к z_T, используется т. н. вариационный принцип (см. [1]). Пусть $\Omega[z]$ — непрерывный неотрицательный функционал, определенный на всюду плотном на Z подмножестве F_1 множества Z и такой, что: а) $z_T\in F_1$; б) для всякого $d>0$ множество элементов z из F_1, для к-рых $\Omega[z]\leqslant d$, является компактным на F. Функционалы $\Omega[z]$, обладающие такими св-вами, наз. стабилизирующими функционалами для задачи (1). Пусть $\Omega[z]$ — стабилизирующий функционал, определенный на подмножестве F_1 множества Z (F_1 может совпадать с Z). Среди элементов множества $F_{1,\delta}=F_1\cap Z_\delta$ ищется такой (такие), к-рый минимизирует функционал $\Omega[z]$ на $F_{1,\delta}$. Доказывается существование такого элемента z_δ (см. [7]). Его можно рассматривать как результат применения нек-рого оператора $R_1(u_\delta, \delta)$ к правой части уравнения $Az=u_\delta$, то есть $z_\delta=R_1(u_\delta, \delta)$. Оператор $R_1(u, \delta)$ является регуляризирующим для уравнения (1). Фактич. отыскание элемента z_δ можно осуществлять следующим образом:

при незначительных дополнительных ограничениях на $\Omega[z]$ (при условии квазимонотонности $\Omega[z]$, см. [7]) доказывается, что $\inf \Omega[z]$ достигается на элементах z_δ, для к-рых $\rho_U(Az_\delta, u_\delta)=\delta$. Элемент z_δ является решением задачи на минимум функционала $\Omega[z]$ при условии $\rho_U(Az, u_\delta)=\delta$, т. е. решением задачи на условный экстремум, к-рую можно решать методом неопределенных множителей Лагранжа и сводящейся к минимизации функционала

$$M^\alpha[z, u_\delta]=\rho_U^2(Az, u_\delta)+\alpha\Omega[z].$$

При любом $\alpha>0$ доказывается существование элемента z_α, минимизирующего $M^\alpha[z, u_\delta]$. Параметр α определяется из условия $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta)=\delta$. Если существует такое α, что $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta)=\delta$, то исходная вариационная задача эквивалентна задаче минимизации функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$, к-рая может быть решена различными способами на ЭВМ (напр., путем решения соответствующего уравнения Эйлера для $M^\alpha[z, u_\delta]$). Элемент z_α, минимизирующий функционал $M_\alpha[z, u_\delta]$, можно рассматривать как результат применения к правой части уравнения $Az=u_\delta$ нек-рого оператора $R_2(u_\delta, \alpha)$, зависящего от параметра α, т. е. $z_\alpha=R_2(u_\delta, \alpha)$, в к-ром α определяется по невязке из соотношения $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta)=\delta$. Оператор $R_2[u, \alpha]$ является регуляризирующим оператором для уравнения (1). Эквивалентность исходной вариационной задачи на нахождение минимума функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ имеет место, напр., для линейных операторов A. Для нелинейных операторов A это может быть и не так (см. [8]).

Функционал $M^\alpha[z, u_\delta]$, наз. с г л а ж и в а ю щ и м ф у н к ц и о н а л о м, можно ввести в рассмотрение формально, не связывая его с задачей на условный экстремум функционала $\Omega[z]$, и искать элемент z_α, минимизирующий его на множестве $F_{1,\delta}$. При этом возникает задача нахождения параметра регуляризации α как такой функции от δ, $\alpha=\alpha(\delta)$, для к-рой оператор $R_2(u, \alpha(\delta))$, определяющий элемент $z_\alpha=R_2(u_\delta, \alpha(\delta))$, был бы регуляризирующим для уравнения (1). При определенных условиях (напр., если известно, что $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta$ и A — линейный оператор) такая функция существует и может быть найдена из соотношения $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta)=\delta$. Возможны и другие способы нахождения $\alpha(\delta)$.

Пусть T_{δ_1} — класс неотрицательных неубывающих и непрерывных на отрезке $[0, \delta_1]$ функций; z_T есть решение уравнения (1) с правой частью $u=u_T$ и A — непрерывный оператор из Z в U. Тогда, каковы бы ни были положительное число $\varepsilon>0$ и функции $\beta_1(\delta)$, $\beta_2(\delta)$ из класса T_{δ_1} такие, что $\beta_2(0)=0$ и $\delta^2/\beta_1(\sigma)\leqslant\beta_2(\delta)$, существует такое $\delta_0=\delta_0(\varepsilon, \beta_1, \beta_2)$, что для $u_\delta\in U$ и $\delta\leqslant\delta_0$ из неравенства $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta$ следует неравенство $\rho_Z(z_\alpha^\delta, z_T)\leqslant\varepsilon$, где $z_\alpha^\delta=R_2(u_\delta, \alpha)$, для всех α, удовлетворяющих неравенствам $\delta^2/\beta_1(\delta)\leqslant\alpha\leqslant\beta_2(\delta)$.

Способы нахождения параметра регуляризации определяются характером имеющейся дополнительной информации о задаче. Если известна погрешность правой части уравнения u_δ, т. е. $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta$, то согласно предыдущему естественно определять α по невязке, т. е. из соотношения $\rho_U(Az_\alpha^\delta, u_\delta)=\varphi(\alpha)=\delta$.

Функция $\varphi(\alpha)$ является монотонной и полунепрерывной справа и слева при каждом $\alpha>0$. Если оператор A линейный, Z — гильбертово пространство и $\Omega[z]$ — строго выпуклый функционал (напр., квадратичный), то элемент z_α^δ единственный и $\varphi(\alpha)$ однозначная функция. В этих условиях для всякого положительного числа $\delta<\rho_U(Az_0, u_\delta)$, где $z_0\in\{z;\ \Omega[z]=\inf_{y\in F_1}\Omega[y]\}$, существует $\alpha(\delta)$ такое, что $\rho_U(Az_{\alpha(\delta)}^\delta, u_\delta)=\delta$ (см. [7]).

Для нелинейного оператора A уравнение $\varphi(\alpha)=\delta$ может не иметь решения (см. [8]).

Метод регуляризации тесно связан с построением *сплайнов*. Так, напр., задача нахождения функции $z(x)$ с кусочно непрерывной на $[a, b]$ производной 2-го порядка, минимизирующей функционал $\Omega[z]=\int_a^b (z'')^2\,dx$ и принимающей заданные значения $\{z_i\}$ на сетке $\{x_i\}$, эквивалентна построению сплайна 2-го порядка.

Регуляризирующий оператор можно строить с помощью интеграла по спектральной мере оператора (см. [7], [9]), для уравнений типа свертки — с помощью классич. интегральных преобразований (см. [10], [7]), методом квазиобращений (см. [11]), с помощью метода итераций (см. [12]). Указаны (см. [13]) необходимые и достаточные условия существования регуляризирующего оператора.

Пусть приближенно задана не только правая часть уравнения (1), но и оператор A, таким образом вместо точных исходных данных (A, u_T) имеются (A_h, u_δ), где

$$\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta,$$

$$h=\sup_{\substack{z\in F,\\ \Omega[z]\neq 0}}\frac{\rho_U(A_h z, Az)}{\{\Omega[z]\}^{1/2}}<\infty.$$

В этих условиях процедура получения приближенного решения будет той же, только вместо функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ надо рассматривать функционал

$$M^\alpha[z, u_\delta, A_h]=\rho_U^2(A_h z, u_\delta)+\alpha\Omega[z],$$

а параметр α определять, напр., из соотношения (см. [7]):

$$\rho_U^2(A_h z, u_\delta)=(\delta+h\{\Omega[z_\alpha]\}^{1/2})^2.$$

Если уравнение (1) имеет бесконечное множество решений, то вводится понятие н о р м а л ь н о г о р е ш е н и я. Пусть пространство Z нормировано, тогда в качестве такового можно брать, напр., решение $\bar{z}$, норма уклонения к-рого от заданного элемента $z_0\in Z$ минимальна, т. е.

$$\|\bar{z}-z_0\|_Z=\inf_{z\in Z}\|z-z_0\|_Z.$$

Приближение к нормальному решению, устойчивое к малым изменениям исходных данных уравнения (1), находится описанным выше методом регуляризации. К числу таких задач с бесконечным числом решений относятся вырожденные системы линейных алгебраич. уравнений. Так наз. плохо обусловленные системы линейных алгебраич. уравнений можно рассматривать как системы, полученные из вырожденных путем замены оператора A его приближением A_h. В качестве нормального решения совместной вырожденной системы можно брать решение системы $\bar{z}$ с минимальной нормой $\|z\|$. В сглаживающем функционале в качестве $\Omega[z]$ можно брать функционал $\Omega[z]=\|z\|^2$. Приближенные решения плохо обусловленных систем также находятся методом регуляризации с $\Omega[z]=\|z^2\|$ (см. [7]).

Аналогично решается задача нахождения решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода на спектре, т. е. в случае, когда параметр λ уравнения равен одному из собственных значений ядра.

Н е у с т о й ч и в ы е з а д а ч и м и н и м и з а ц и и ф у н к ц и о н а л о в. Ряд практически важных задач приводится к задачам минимизации функционалов $f[z]$. Различается два типа таких задач. К первому относятся те из них, в к-рых надо находить минимальное (или максимальное) значение функционала. К этому типу относятся многие задачи проектирования оптимальных систем, конструкций. Для этих задач несущественно, на каких элементах достигается искомый ми-

нимум. Поэтому в качестве приближенных решений таких задач можно брать значения функционала $f[z]$ на любой минимизирующей последовательности $\{z_n\}$.

Ко второму типу относятся задачи, в к-рых надо найти элементы z, на к-рых достигается минимум функционала $f[z]$. Их называют з а д а ч а м и м и н и м и з а ц и и п о а р г у м е н т у. Среди них встречаются такие, в к-рых минимизирующие последовательности могут быть несходящимися. В этих задачах нельзя брать в качестве приближенных решений элементы минимизирующих последовательностей. Такие задачи наз. н е у с т о й ч и в ы м и, или н е к о р р е к т н о п о с т а в л е н н ы м и. К ним относятся, напр., задачи оптимального управления, в к-рых оптимизируемый (целевой) функционал зависит только от фазовых переменных.

Пусть на метрич. пространстве Z задан непрерывный функционал $f[z]$ и существует элемент $z_0 \in Z$, минимизирующий $f[z]$. Минимизирующую последовательность $\{z_n\}$ функционала $f[z]$ наз. р е г у л я р и з о в а н н о й, если существует компактное в Z множество $\tilde{Z}$, содержащее $\{z_n\}$. Если задача минимизации функционала $f[z]$ имеет единственное решение z_0, то регуляризованная минимизирующая последовательность сходится к z_0, и в этих условиях для решения неустойчивой задачи минимизации функционала достаточно указать алгоритмы построения регуляризованных минимизирующих последовательностей. Это можно сделать путем использования стабилизирующих функционалов $\Omega[z]$.

Пусть $\Omega[z]$ — стабилизирующий функционал, определенный на множестве $F_1 \subset Z$; $\inf\limits_{z \in Z} f[z] = f[z_0]$ и $z_0 \in F_1$. Часто вместо $f[z]$ имеется его δ-приближение $f_\delta[z]$ по отношению к $\Omega[z]$, т. е. такой функционал, что для всякого $z \in F_1$:

$$|f_\delta[z] - f[z]| \leqslant \delta\Omega[z].$$

При любом $\alpha > 0$ задача минимизации функционала

$$M^\alpha[z, f_\delta] = f_\delta[z] + \alpha\Omega[z]$$

по аргументу устойчива.

Пусть $\{\delta_n\}$ и $\{\alpha_n\}$ — сходящиеся к нулю последовательности такие, что $\delta_n/\alpha_n \leqslant q < 1$ для всякого n и $\{z_{\alpha_n, \delta}\}$ — последовательность элементов, минимизирующих функционалы $M^{\alpha_n}[z, f_{\delta_n}]$. Эта последовательность является регуляризованной минимизирующей последовательностью для функционала $f^\delta[z]$ (см. [7]) и, следовательно, сходится к элементу z_0 при $n \to \infty$. В качестве приближенных решений задачи можно брать элементы z_{α_n, δ_n}.

Аналогично строятся приближенные решения Н. з. оптимального управления.

В прикладных Н. з. исходные данные часто содержат случайные погрешности. Для построения приближенных решений таких задач возможен как детерминированный, так и вероятностный подходы (см. [7], [15]).

Лит.: [1] Т и х о н о в А. Н., «Докл. АН СССР», 1963, т. 151, № 3, с. 501—04; [2] е г о ж е, там же, т. 153, № 1, с. 49—52; [3] е г о ж е, там же, 1943, т. 39, № 5, с. 195—98; [4] Л а в р е н т ь е в М. М., *О некоторых некорректных задачах математической физики*, Новосиб., 1962; [5] И в а н о в В. К., «Матем. сб.», 1963, т. 61, № 2, с. 211—23; [6] е г о ж е, «Докл. АН СССР», 1962, т. 145, № 2, с. 270—72; [7] Т и х о н о в А. Н., А р с е н и н В. Я., Методы решения некорректных задач, 2 изд., М., 1979; [8] Г о н ч а р с к и й А. В., Л е о н о в А. С., Я г о л а А. Г., «Докл. АН СССР», 1974, т. 214, № 3, с. 499—500; [9] Б а к у ш и н с к и й А. Б., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1967, т. 7, № 3, с. 672—77; [10] А р с е н и н В. Я., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 133, с. 33—51; [11] Л а т т е с Р., Л и о н с Ж.-Л., Метод квазиобращения и его приложения, пер. с франц., М., 1970; [12] К р я н е в А. В., «Докл. АН СССР», 1973, т. 210, № 1, с. 20—22; [13] В и н о к у р о в В. А., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1971, т. 11, № 5, с. 1097—112; [14] Т и х о н о в А. Н., там же, 1966, т. 6, № 4, с. 631—34; [15] Л а в р е н т ь е в М. М., В а с и л ь е в В. Г., «Сиб. матем. ж.», 1966; т. 7, № 3, с. 559—76.

В. Я. Арсенин, А. Н. Тихонов.

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ теории функций комплексного переменного — первоначально (Н. з. по Адамару) задачи для дифференциальных уравнений с характером неустойчивости, аналогичным неустойчивости задачи Коши для уравнения Лапласа. Для задач этого типа строится пример Адамара — вариации данных, сколь угодно малые вместе с любым конечным числом своих производных, к-рым соответствуют конечные вариации решений (см. [2], [5]). Ныне термин «Н. з.» понимается значительно шире (см. [1], [6]).

Задачи аналитич. продолжения теории функций комплексного переменного (одного) являются Н. з. по Адамару. Такую задачу для функций одного комплексного переменного в общем виде можно сформулировать следующим образом. Задана область D комплексной плоскости и заданы два множества A, B, принадлежащие замыканию D : $A \subset B \subset \overline{D}$. На множестве A задана аналитич. функция $f(z)$, регулярная в области D. Требуется определить функцию $f(z)$ на множестве B. Относительно функции $f(z)$, кроме регулярности в D, может быть задана дополнительная информация, напр.

$$|f(z)| \leqslant C, \quad z \in \overline{D}, \qquad (*)$$

где C — заданная константа.

Классич. задачами аналитич. продолжения являются следующие: 1) A — подобласть области D; 2) A — часть границы Γ области D; предполагается, что Γ — непрерывно (кусочно) дифференцируемая замкнутая кривая, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $A = \Gamma_1$; 3) A — множество, имеющее предельную точку внутри D.

Теоремы единственности отмеченных задач были доказаны в 19 в. (они приводятся в учебниках по теории функций комплексного переменного). Задача 2 эквивалентна задаче Коши для уравнения Лапласа.

Оценки условной устойчивости задач аналитич. продолжения типа 1), 2) наз. теоремами о трех константах (оценка изменения решения задачи через изменение данных при условии типа (*)). Задачи аналитич. продолжения являются линейными, и к ним применимы универсальные методы регуляризации линейных Н. з. (см. [3], [6]). Для задачи 2) разработаны специальные методы регуляризации, основанные на построении функций Карлемана (см. [3]).

Задачи аналитич. продолжения связаны с широким кругом прикладных проблем. Часто из физич. законов следует, что различные физич. поля являются аналитич. функциями по нек-рым переменным. Требуется по значениям поля на нек-ром множестве (на к-ром производятся измерения) определить поле на более широком множестве. Нек-рые из этих прикладных задач следующие.

1. Задача определения гравитационного и магнитного поля над поверхностью Земли по значениям поля на поверхности. Эта задача используется при разведке месторождений полезных ископаемых.

2. Задача определения потенциала течения идеальной жидкости, фильтрации постоянного электрич. тока внутри нек-рого тела по значениям потенциала и потока на части поверхности (см. [4]).

3. Задача определения финитной функции по значениям преобразования Фурье этой функции, известным на конечном отрезке.

С точки зрения приложений значит. интерес представляет задача определения аналитич. функции по ее значениям на конечных множествах. Решение этой задачи не единственно. Однако если множество в нек-ром смысле близко к множеству единственности, возможно приближенное решение с малой погрешностью.

Для функций нескольких комплексных переменных существуют как корректные, так и некорректные за-

дачи аналитич. продолжения. Для задач аналитич. продолжения с множеств внутри области регулярности известен следующий общий результат: для того чтобы множество было множеством единственности, необходимо и достаточно, чтобы это множество не являлось объединением конечного числа аналитич. многообразий.

Лит.: [1] Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П., Теория линейных некорректных задач и ее приложения, М., 1978; [2] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [3] Лаврентьев М. М., О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосиб., 1962; [4] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1958; [5] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; [6] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, М., 1974; [7] Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, 2 изд., ч. 1, М., 1962.

М. М. Лаврентьев.

НЕКРАСОВА ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — нелинейное интегральное уравнение вида

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b [\varphi(y)+R(\lambda,\ y,\ \varphi(y))]\,K(x,\ y)\,dy, \quad (*)$$

где R, K — известные функции, причем K — симметричная функция, φ — искомая функция, λ — числовой параметр. Интегральные уравнения такого типа были получены А. И. Некрасовым (см. [1]) при решении задач, возникающих в теории волн на поверхности жидкости. А. И. Некрасов в определенных условиях строит решение уравнения (*) в виде ряда по степеням малого параметра, сходимость к-рого доказывается методом мажорант.

Иногда уравнения типа (*) наз. *Гаммерштейна уравнением*, хотя А. И. Некрасов [2] свои исследования опубликовал раньше А. Гаммерштейна [3].

Лит.: [1] Некрасов А. И., Собр. соч., т. 1, М., 1961; [2] его же, «Изв. Иваново-Возн. политехн. ин-та», 1922, № 6, с. 155—71; [3] Hammerstein A., «Acta math.», 1930, Bd 54, S. 117—76.

Б. В. Хведелидзе.

НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА — определение в нек-рой области D переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$ решения $u(x)$ дифференциального уравнения

$$(Lu)(x)=f(x), \quad x\in D,$$

по заданным краевым условиям на границе S этой области (или ее части)

$$(Bu)(y)=\varphi(y), \quad y\in S,$$

где, по крайней мере, один из операторов L или B является нелинейным.

См. также *Краевая задача.*

А. П. Солдатов.

НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА; численные методы решения — методы, заменяющие решение краевой задачи решением дискретной задачи (см. *Линейная краевая задача*; численные методы решения и *Нелинейное уравнение*; численные методы решения). Во многих случаях, особенно при рассмотрении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описание численных методов обычно проводится без указания дискретизации исходной задачи, но такая дискретизация неявно все же подразумевается и осуществляется по относительно известным образцам.

Пусть, напр., рассматривается двухточечная краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y'=f(x,\ y) \text{ при } 0<x<X, \quad (1)$$

$$B(y(0))=0, \quad D(y(X))=0, \quad (2)$$

где

$$y\equiv(y_1, \ldots, y_l)^T,\ f\equiv(f_1, \ldots, f_l)^T,\ B=(B_1, \ldots, B_{l-r})^T,$$
$$D\equiv(D_1, \ldots, D_r)^T, \quad 0\leqslant r\leqslant l.$$

Пусть вектор $G(y) \equiv (G_1(y), \ldots, G_r(y))$ таков, что система уравнений

$$B(y) = 0, \quad G(y) = g \tag{3}$$

однозначно определяет вектор $y = \alpha(g)$ при каждом векторе $g \equiv (g_1, \ldots, g_r)^T$; напр., часто целесообразно взять

$$G_1(y) \equiv y_{l-r+1}, \ \ldots, \ G_r(y) \equiv y_l.$$

Тогда задача (1), (2) может быть сведена к системе (операторному уравнению)

$$\psi(g) = 0, \tag{4}$$

где $\psi(g) \equiv D(\omega(g))$, $\omega(g)$ — значение при $x = X$ решения уравнения (1) при начальном условии $y(0) = \alpha(g)$. При этом для получения значений $\psi(g)$ необходимо численно решать (см. [1], [2]) соответствующие системы дифференциальных уравнений, что и будет означать дискретизацию исходной задачи. Для решения системы (4) можно применять различные итерационные методы решения нелинейных уравнений. Найдя решение g^* уравнения (4), можно определить вектор $y^* = \alpha(g^*)$ из системы (3) и, решая уравнение (1) при начальном условии $y(0) = y^*$, получить решение задачи (1), (2). В ряде методов наряду со значениями функции ψ используются и значения ее производной, отыскиваемые либо путем интегрирования уравнения

$$\eta' = \frac{\partial f}{\partial y}\,\eta \tag{5}$$

(уравнения в вариациях для (1)), либо с помощью каких-либо формул численного дифференцирования. Указанный способ редукции краевой задачи к уравнению (4), наз. м е т о д о м п р и с т р е л к и, применим к задачам более общего вида

$$y' = f(x, y, g) \text{ при } 0 < x < X,$$
$$y(0) = \alpha(y), \ D(y(X(g), g)) = 0,$$

явно содержащим векторный параметр g, в частности к задачам на собственные значения; здесь функция $\alpha(g)$ считается заданной. Однако если решения уравнения (5) сильно растут вместе с x, то погрешность численного интегрирования приводит к большим ошибкам в значениях функции $\psi(g)$ и ее производной и в конечном счете к большой погрешности получаемого решения.

В методе линеаризации (см., напр., [1], [3]) приближения к решению задачи (1), (2) определяются как решения последовательности линейных уравнений

$$y'_{n+1} = A_n(x)(y_{n+1} - y_n) + f(x, y_n) \quad \text{при} \quad 0 < x < X \tag{6}$$

с линейными краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} B_n(y_{n+1}(0) - y_n(0)) + B(y_n(0)) &= 0, \\ D_n(y_{n+1}(X) - y_n(X) + D(y_n(X)) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где $A_n(x)$ — квадратная функциональная матрица порядка l, B_n и D_n — числовые матрицы размеров $(l-r) \times n$ и $r \times l$, $n = 0, 1, \ldots$. Начальное приближение $y_n(x)$ считается известным. В случае метода Ньютона — Канторовича уравнения (6), (7) приобретают вид

$$y'_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_n)(y_{n+1} - y_n) + f(x, y_n(x)) \text{ при } 0 < x < X, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial y}(y_n(0))(y_{n+1}(0) - y_n(0)) + B(y_n(0)) &= 0, \\ \frac{\partial D}{\partial y}(y_n(X))(y_{n+1}(X) - y_n(X)) + D(y_n(X)) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если $f(x, y)$, $B(y)$, $D(y)$ дважды непрерывно дифференцируемы по y, задачи (8), (9) корректны и $y_0(x)$ достаточно близко к искомому решению $y(x)$, то

$$\|y_n - y\|_C \leqslant K^{-1}(K\|y_0 - y\|_C)^{2^n},$$

где $K>0$ — постоянная, $\|y\|_C = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant X} |y(x)|$ (см. [1]).

Упомянутые методы обобщаются и на случай более общих условий вида

$$A(y(X_0),\ y(X_1),\ \ldots,\ y(X_m)) = 0,$$

где

$$A \equiv (A_1,\ \ldots,\ A_l)^T,\ 0 = X_0 < X_1 < \ldots < X_m \equiv X.$$

Многие важные теоретические и прикладные задачи приводят к необходимости решать Н. к. з. (и родственные к ним проблемы) для уравнений и систем уравнений эллиптич. типа (см., напр., [4] — [8]). Для такого класса задач основными численными методами являются проекционные методы (проекционно-разностные, вариационно-разностные, конечных элементов) и разностные методы (см. [7] — [14]). Их конструкции во многом аналогичны конструкциям соответствующих методов для линейных краевых задач (см. *Лапласа уравнение;* численные методы решения; *Пуассона уравнение*; численные методы решения), но получаемые в этих методах дискретные (сеточные) аналоги краевых задач, являющиеся системами нелинейных уравнений

$$L_N(\overline{u}_N) = \overline{f}_N, \tag{10}$$

где

$$\overline{u}_N \equiv (u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_N)^T \text{ и } \overline{f}_N \equiv (f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_N)^T,$$

часто вызывают дополнительные значительные трудности как в плане анализа самих систем и близости в том или ином смысле их решений к решению исходной задачи, так и в плане затрат вычислительной работы на формирование самих систем (10) и отыскание их решений. Специфика нелинейности краевой задачи заставляет особое внимание уделять выбору банаховых пространств и их сеточных аналогов, в к-рых и сама задача и ее конечномерные аппроксимации поддаются анализу (см., напр., [5] — [12], [15]). Но наиболее подробно изучены особенно в алгоритмич. плане лишь численные методы для классов нелинейных задач, родственных в нек-ром смысле линейным задачам (слабонелинейные уравнения, уравнения с ограниченной нелинейностью) и позволяющих обойтись использованием гильбертовых пространств и их конечномерных аналогов (евклидовых пространств).

Пусть $H_N \equiv H$ — евклидово пространство вектор-функций $\overline{u}_N \equiv u$ со скалярным произведением $(u,\ v) \equiv \equiv \sum_{i=1}^{N} u_i v_i$, а $l(H)$ — пространство линейных самосопряженных положительно определенных операторов, отображающих H в H; наряду с H будет использоваться и евклидово пространство H_B, $B \in l(H)$, отличающееся от H лишь видом скалярного произведения:

$$(u,\ v)_{H_B} \equiv (u,\ v)_B \equiv (Bu,\ v),\ \|u\|_B \equiv (Bu,\ u)^{1/2}.$$

Пусть, далее,

$$S_B(r) \equiv \{u;\ \|u\|_B \leqslant r\},\quad r > 0.$$

Если оператор L_N непрерывен на $S_B(r)$ и таков, что для любого u с $\|u\|_B = r$ справедливо неравенство

$$(L_N u) - \overline{f}_N,\ u) \geqslant 0, \tag{11}$$

то система (10) имеет по крайней мере одно решение из $S_B(r)$. Это утверждение (см., напр., [8], [9]) является одним из следствий классич. теорем существования решений у нелинейных операторных уравнений, основанных на топологич. принципах (см., напр., [14]) и на монотонности операторов (см., напр., [6], [11], [14]). В частности, если L_N непрерывен всюду и

$$(L_N(u),\ u) \geqslant \delta \|u\|_B^2,\quad \delta > 0, \tag{12}$$

для любого u, то система (10) всегда имеет решение и любое ее решение принадлежит $S_B(r)$ с $r=\delta^{-1}\|\overline{f}_N\|_{B^{-1}}$. Если же для любых u, v, w справедливы неравенства

$$(L_N(u)-L_N(v),\ u-v)\geqslant\delta_0\|u-v\|_B^2,\ \delta_0>0, \quad (13)$$

$$|(L_N(u)-L_N(v),\ w)|\leqslant\delta_1\|u-v\|_B\|w\|_B, \quad (14)$$

означающие сильную монотонность и Липшиц-непрерывность оператора L_N, то система (10) и ее единственное решение может быть найдено с помощью итерационного метода

$$Au^{n+1}=Au^n-\gamma(L_N(u^n)-\overline{f}_N), \quad (15)$$

где $A\in L(H)$ и итерационный параметр $\gamma>0$ определяется константами типа δ_0 и δ_1, получаемыми при замене в (13) и (14) оператора B на A (см., напр., [8], [9]). Поэтому для разностных методов оценки погрешности получаются как следствие корректности системы (10) и наличия аппроксимации исходной краевой задачи разностной краевой задачей (10). Часто весьма целесообразен такой выбор оператора B, что пространство H_B становится дискретным (сеточным) аналогом соответствующего пространства Соболева (напр., $W_2^1(\Omega)$ для уравнений 2-го порядка) и тем самым делается возможным использование или самих теорем вложения (в случае проекционных аппроксимаций), или их сеточных аналогов (см., напр., [5] — [9]) для проверки неравенств типа (12) — (14). Проекционные методы и, в частности, проекционно-разностные (вариационно-разностные) методы обладают тем достоинством, что неравенства (12) — (14) следуют из соответствующих неравенств для дифференциальных операторов, а задача оценки погрешности метода легко сводится к задаче аппроксимации решения исходной задачи элементами выбранного конечномерного подпространства (см. [6] — [9], [11]). Вместо справедливости неравенств (13), (14) во всем пространстве достаточно их справедливости, напр., в нек-ром шаре из H_B, окружающем искомое решение. Иногда полезны неравенства, получаемые из (12) — (14) заменой скалярных произведений в левых частях на скалярные произведения в H_B, а норм $\|z\|_B$ в правых частях на $\|Bz\|$. Для ряда задач на основе априорных оценок их решения возможна замена их эквивалентными краевыми задачами, для к-рых неравенства типа (12) — (14) будут выполнены (см. [15]).

При выполнении неравенств (13), (14) итерационный метод (15) с $A=B$ сходится при любом начальном приближении, и если константы δ_0 и δ_1 не зависят от N, то он позволяет получить решение системы (10) с точностью ε за $O(|\ln\varepsilon|)$ итераций (обычно $\varepsilon\asymp N^\alpha$, $\alpha<0$). За счет удачной конструкции сеточного метода иногда удается так выбрать оператор B, что решение системы (10) с точностью N^α при помощи итерационного метода типа (15) осуществляется при затрате лишь $O(N\ln^2 N)$ или даже $O(N\ln N)$ арифметич. действий (см. *Минимизация вычислительной работы*). Использование последовательности сгущающихся сеток позволяет довести эти оценки до $O(N\ln N)$ и $O(N)$ действий и тем самым получить асимптотически оптимальные по трудоемкости численные методы решения нек-рых нелинейных эллиптических краевых задач. При этом предполагалось, что само вычисление невязки $L(u^n)-\overline{f}_N$ требует не больше KN действий. Все же для нек-рых задач (при больших K) целесообразно уменьшить частоту таких вычислений. Этого можно добиться за счет нахождения более точного начального приближения, использования той или иной линеаризации L_N и методов типа продолжения по параметру (см. *Нелинейное уравнение*; численные методы решения). Чаще же всего *линеаризации методы* в сочетании с методами продол-

жения по параметру используются в наиболее трудных ситуациях, когда, напр., условие (13) может не выполняться. К нелинейным краевым задачам эллиптич. типа могут быть отнесены и нек-рые задачи на собственные значения (см., напр., [8], [12], [14]); конструкция соответствующих численных методов во многом аналогична уже упомянутым.

Нек-рые стационарные краевые задачи могут быть приближенно заменены краевыми задачами для сильно эллиптич. систем с малым параметром (см., напр., [17]). Численные же методы для нестационарных Н. к. з., включающих в себя задачи для уравнений и систем параболич. типа, гиперболич. типа, смешанного типа и др., хотя и используют дискретные аналоги эллиптич. операторов, подобные выше рассмотренным, но для них наиболее характерно расслоение приближенного метода по отдельным временным слоям.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Шаманский В. Е., Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ, ч. 2, К., 1966; [3] Беллман Р., Калаба Р., Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, пер. с англ., М., 1968; [4] Березовский А. А., Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики, 2 изд., ч.1, К., 1976; [5] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., 1964; [6] Лионс Ж.-Л., Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, пер. с франц., М., 1972; [7] Гловинский Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р., Численное исследование вариационных неравенств, пер. с франц., М., 1979; [8] Дьяконов Е. Г., в кн.: Численные методы механики сплошной среды, т. 7, в. 5, Новосиб., 1976, с. 14—78; [9] его же, в кн.: Разностные методы решения краевых задач, в. I — Стационарные задачи, М., 1971; [10] Марчевский М. М., Ляшко А. Д., Разностные схемы для нелинейных задач математической физики, ч. 1, Казань, 1976; [11] Варга Р., Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе, пер. с англ., М., 1974; [12] Стренг Г., Фикс Дж., Теория метода конечных элементов, пер. с англ., М., 1977; [13] Оден Дж., Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред, пер. с англ., М., 1976; [14] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [15] Ривкинд В. Я., Уральцева Н. Н., в кн.: Проблемы математического анализа, в. 3, Л., 1972, с. 69—111; [16] Амосов А. А., Бахвалов Н. С., Осипик Ю. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1980, т. 20, № 1, с. 104—11; [17] Соболевский П. Е., Васильев В. В., в кн.: Численные методы механики сплошной среды, т. 9, в. 5, Новосиб., 1978, с. 115—39.

Е. Г. Дьяконов, А. Ф. Шапкин

НЕЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ — *дифференциально-геометрическая структура*, задаваемая на категории гладких расслоенных пространств, ассоциированных с нек-рым главным G-расслоением, к-рая фиксирует определенный для данной Н. с. изоморфизм слоев (параллельный перенос) вдоль каждой кусочно гладкой кривой базы расслоения данной категории, согласованный с изоморфизмом соответствующих слоев главного G-расслоения. При этом предполагается, что указанная структура не тождественна ставшему классическим понятию *линейной связности*, к-рое определяется тем или иным G-инвариантным *горизонтальным распределением*. Иной смысл [5] имеет термин Н. с., состоящий в том, что определяемый горизонтальным распределением перенос векторных слоев расслоения теряет линейный характер, т. е. не является изоморфизмом этих слоев.

Необходимость введения и исследование Н. с. диктовалась потребностями изучения различных дифференциально-геометрич. структур высших порядков (таких, как напр. *Кавагути пространства*). Основы общей теории Н. с. достаточно развиты, исследованы и получили приложения нек-рые специальные типы Н. с. (см. [2] — [4]).

Пусть $\pi : X(B, G) \to B$ гладкое главное G-расслоение со структурной группой Ли G и канонич. проекцией π на базу B, а $K(X)$ — категория всех ассоциированных с X расслоений. Изоморфизмом слоя $G_x = \pi^{-1}(x)$ на слой $G_y = \pi^{-1}(y)$, $x, y \in B$, наз. отображение $i : G_x \to G_y$, коммутирующее с действием группы G на X. Любой изоморфизм i может быть задан формулой

$i(\xi_0 g) = i(\xi_0)\, g$, $\xi_0 \in X$, $g \in G$, и, следовательно, является диффеоморфизмом слоев G_x и G_y. Множество $\Gamma(X)$ всех изоморфизмов между всевозможными слоями главного расслоения X является гладким расслоением со структурой группоида над базой $B \times B$ (группоид — категория с обратимыми элементами). Изоморфизм $i \in \Gamma(X)$ порождает соответствующий изоморфизм слоев над точками x, $y \in B$ любого ассоциированного расслоения $Y \in K(X)$ и тем самым группоид $\Gamma(X)$ обслуживает всю категорию $K(X)$.

Пусть $\Lambda(B)$ — категория всех кусочно гладких кривых базового многообразия B. С в я з н о с т ь ю в к а т е г о р и и $K(X)$ гладких расслоений в самом общем смысле наз. любой функтор

$$\gamma : \Lambda(B) \to \Gamma(X),$$

тождественный по базе $B \times B$. Пусть $\alpha \times \beta : \Gamma(X) \to B \times B$ — канонич. проекция группоида $\Gamma(X)$ на свою базу $B \times B$, определяемая тем условием, что если $\Gamma(X) \ni i : G_x \to G_y'$, то $\alpha(i) = x$, $\beta(i) = y$. Тем самым многообразие B отождествляется с подмногообразием $\tilde{B} \subset \Gamma(X)$ всех левых и правых единиц группоида $\Gamma(X)$. Пусть $\Pi(X)$ — векторное расслоение над $B = \tilde{B}$, образованное слоями вида $T_e[\alpha^{-1}(e)]$, $e \in \tilde{B}$, а $T^p(B)$ — расслоенное над B пространство p-скоростей многообразия B (элементами $T^p(B)$ являются регулярные p-струи всевозможных гладких отображений $\mathbb{R} \to B$ с источником $o \in \mathbb{R}$). Расслоения $\Pi(X)$ и $T^p(B)$ обладают канонич. проекциями на касательное расслоение $T(B)$

$$\pi' : \Pi(X) \longrightarrow T(B), \quad \pi^p : T^p(B) \longrightarrow T(B).$$

Связность γ наз. н е л и н е й н о й с в я з н о с т ь ю п о р я д к а $p = 1, 2, 3, \ldots$, если p — наименьшее число, для к-рого функтор γ определяет гладкое отображение

$$\gamma^p : T^p(B) \longrightarrow \Pi(X)$$

такое, что $\pi' \cdot \gamma^p = \pi^p$. Функтор γ в свою очередь определяется соответствующим ему отображением γ^p. В случае, когда $p = 1$ и отображение $T(B) \to \Pi(X)$ послойно линейное, связность вырождается в линейную связность на категории $K(X)$. В изучении свойств Н. с. и в их классификации фундаментальную роль играют структурные уравнения отображений $\gamma^p : T^p(B) \to \Pi(X)$, записанные в форме уравнений Пфаффа, связывающих дифференциалы относительных координат геометрич. объектов, описывающих расслоения $T^p(B)$ и $\Pi(X)$. В терминах коэффициентов структурных уравнений с помощью операций их дифференциального продолжения и охватов установлено [2], что Н. с. γ^p в $X(B, G)$ порождает линейную связность специальной структуры в главном G-расслоении $X(B, G) \otimes_B T^p(B)$ над базой $T^p(B)$, и этой линейной связностью полностью характеризуется. Найдены формы указанной линейной связности и их структурные уравнения. Доказан нелинейный аналог теоремы о группе голономии, в определении к-рой участвуют не только кривизна, но и линейная оболочка распределения горизонтальных конусов, заменяющих в нелинейном случае подпространства горизонтального распределения линейной связности.

Лит.: [1] В а г н е р В. В., «Тр. семинара по векторному и тензорному анализу», 1950, в. 8, с. 11—72; [2] Е в т у ш и к Л. Е., «Изв. ВУЗов. Математика», 1969, № 2, с. 32—44; [3] е г о ж е, «Сиб. матем. ж.», 1973, т. 14, № 3, с. 536—48; [4] Е в т у ш и к Л. Е., Т р е т ь я к о в В. Б., «Тр. геометр. семинара», 1974, т. 6, с. 243—55; [5] K a w a g u c h i A., «Tensor. New ser.», 1952, v. 2, p. 123—42.

Л. Е. Евтушик.

НЕЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение (обыкновенное или с частными производными), в к-рое по крайней мере одна из производных неизвестной функции (включая и производную нулевого порядка — саму неизвест-

ную функцию) входит нелинейно. Этот термин обычно употребляют, когда хотят специально подчеркнуть, что рассматриваемое дифференциальное уравнение $H=0$ не является линейным, т. е. его левая часть H не представляет собой *линейную форму* от производных неизвестной функции с коэффициентами, зависящими только от независимых переменных.

Иногда под Н. д. у. понимается наиболее общее уравнение определенного вида. Напр., нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка наз. уравнение

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0$$

с произвольной функцией $f(x, y, u)$; при этом линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка соответствует частному случаю

$$f(x, y, u)=a(x)u+b(x)y.$$

Н. д. у. с частными производными 1-го порядка для неизвестной функции z от n независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ имеет вид

$$F\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0,$$

где F — произвольная функция своих аргументов; в случае

$$F=\sum_{i=1}^{n} A_i\,(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ z)\,\frac{\partial z}{\partial x_i}+B\,(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ z)$$

такое уравнение наз. квазилинейным, а в случае

$$F=\sum_{i=1}^{n} A_i\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,\frac{\partial z}{\partial x_i}+ \\ +B\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,z+C\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

— линейным. *Н. Х. Розов.*

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение, содержащее неизвестную функцию нелинейно. Ниже приведены основные классы Н. и. у., к-рые часто встречаются при исследовании различных прикладных задач и теория к-рых в определенной постановке достаточно хорошо разработана.

Важным примером Н. и. у. является *Урысона уравнение*

$$\varphi(x)=\lambda\int_{\Omega} K\,[x,\ s,\ \varphi\,(s)]\,ds,\quad x\in\Omega, \tag{1}$$

где Ω — замкнутое ограниченное множество конечномерного евклидова пространства, $K[x, s, t]$ — заданная функция, наз. ядром, определенная при $x, s, \in \Omega$, $-\infty<t<\infty$, λ — числовой параметр, φ — искомая функция.

П. С. Урысон (см. [2]) при определенных предположениях дал полное исследование спектра собственных значений уравнения (1), допускающих положительные собственные функции. Было показано, что положительные собственные функции $\varphi(x, \lambda)$ соответствуют значениям λ только из нек-рого интервала (α, β), причем $\varphi(x, \lambda)$ является монотонно возрастающей функцией λ и $\varphi(x, \alpha)=0$, $\varphi(x, \beta)=\infty$.

Частным случаем уравнения Урысона является *Гаммерштейна уравнение:*

$$\varphi\,(x)=\lambda\int_{\Omega} K\,(x,\ s)\,f\,[s,\ \varphi\,(s)]\,ds,\quad x\in\Omega, \tag{2}$$

где $K(x, s)$, $f(s, t)$ — известные функции. Теоремы существования и единственности впервые были установлены А. Гаммерштейном (см. [9]). Он исследовал уравнение (2) в предположении, что действительная функция $f(s, t)$ непрерывна по совокупности аргументов и что самосопряженный в $L_2(\Omega)$ линейный интегральный

оператор, порожденный ядром K, является положительным и действует вполне непрерывно из $L_2(\Omega)$ в пространство непрерывных функций.

Другим примером Н. и. у. является *Ляпунова — Шмидта уравнение:*

$$\sum_{\alpha,\,\beta}\int_\Omega\cdots\int_\Omega K_{\alpha,\,\beta}(x,\,s_1,\,\ldots,\,s_i)\times$$
$$\times\varphi^{\alpha_0}(x)\,\varphi^{\alpha_1}(s_i)\ldots\varphi^{\alpha_i}(s_i)\times$$
$$\times v^{\beta_0}(x)\,v^{\beta_1}(s_1)\ldots v^{\beta_i}(s_i)\,ds_1\ldots ds_i=0,\quad x\in\Omega, \qquad (3)$$

в к-рых функции $K_{\alpha,\,\beta}$ и v — заданные, φ — искомая, число i фиксировано, и суммирование распространено на всевозможные векторы $\alpha(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_i)$, $\beta(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_i)$ с неотрицательными целочисленными компонентами. Левая часть равенства (3) наз. интегро-степенным рядом от двух функциональных аргументов v, φ.

Уравнение типа (3) впервые рассмотрел А. М. Ляпунов (см. [1]), а позднее, в более общем виде, Э. Шмидт (см. [8]). В их исследованиях были заложены основы теории ветвления Н. и. у., целью к-рой является решение следующей задачи. Пусть ищется решение нелинейной задачи, зависящее от некоторых параметров, причем для некоторых их значений решение может разветвляться. Возникают вопросы о нахождении самого решения и тех значений параметров, при которых оно разветвляется, о числе ветвей и о представлении каждой ветви как функции параметров (см. [6]).

Теория Н. и. у. является частью общей теории нелинейных операторных уравнений. Именно, интегральные уравнения рассматриваются как конкретные иллюстрации соответствующих операторных уравнений. Для этого требуется выяснение общих свойств (непрерывность, полная непрерывность и т. д.) конкретных интегральных операторов, входящих в уравнение (см. [3] — [7]).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., «Записки Академии Наук», СПБ, 1906, с. 1—225; [2] Урысон П. С., «Матем. сб.», 1923, т. 31, с. 236—55; [3] Вайнберг М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956; [4] Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956; [5] Красносельский М. А. [и др.], Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966; [6] Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969; [7] Вайнберг М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972; [8] Schmidt E., «Math. Ann.», 1908, Bd 65, S. 370—99; [9] Hammerstein A., «Acta math.», 1930, v. 54, p. 117—76.

Б. В. Хведелидзе.

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — раздел *математического программирования*, посвященный теории и методам решения задач оптимизации нелинейных функций на множествах, задаваемых нелинейными ограничениями (равенствами и неравенствами).

Основная трудность решения задач Н. п. состоит в том, что эти задачи являются многоэкстремальными, и известные численные методы их решения гарантируют в общем случае сходимость минимизирующих последовательностей лишь к точкам локальных экстремумов.

Наиболее изученным разделом Н. п. является *выпуклое программирование*, задачи к-рого характеризуются тем, что любая точка локального минимума является точкой глобального минимума.

Лит.: [1] Зангвилл У. И., Нелинейное программирование. Единый подход, пер. с англ., М., 1973; [2] Карманов В. Г., Математическое программирование, М., 1975; [3] Полак Э., Численные методы оптимизации. Единый подход, пер. с англ., М., 1974.

В. Г. Карманов.

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ; численные методы решения — итерационные методы решения нелинейных уравнений.

Под нелинейными уравнениями понимаются (см. [1] — [3]) алгебраические и трансцендентные уравнения вида

$$\varphi(x)=0, \tag{1}$$

где x — действительное число, $\varphi(x)$ — нелинейная функция, а под системой нелинейных уравнений — система вида

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_N)=0,\\ &\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_N)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_N(x_1, x_2, \ldots, x_N)=0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

не являющаяся системой линейных алгебраич. уравнений; решением системы (2) является N-мерный вектор $x\equiv(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Уравнение (1) и система (2) могут трактоваться как нелинейное операторное уравнение

$$L(u)=f \tag{3}$$

с нелинейным оператором L, действующим из векторного конечномерного пространства H_N в H_N.

Численными методами решения Н. у. (3) наз. итерационные методы, определяемые переходом от уже известного приближения u^n на n-й итерации к новому приближению u^{n+1} и позволяющие при достаточно большом числе итераций найти решение уравнения (3) с нужной точностью ε. Важнейшие итерационные методы приближенного решения уравнения (3) как относительно общего вида, так и специального вида, характерного для дискретных (сеточных) методов решения краевых задач для уравнений и систем уравнений с частными производными сильно эллиптич. типа, и являются предметом рассмотрения настоящей статьи. Нелинейные операторные уравнения, связанные с рассмотрением бесконечномерных пространств (см., напр., [4] — [8]), являются весьма широким математич. понятием, содержащим в себе как частные случаи, напр., нелинейные интегральные уравнения и нелинейные краевые задачи. Численные методы их приближенного решения включают в себя также методы их аппроксимации конечномерными уравнениями; эти методы рассматриваются отдельно.

Одним из важнейших методов решения уравнения (3) является м е т о д п р о с т о й и т е р а ц и и, предполагающий возможность замены уравнения (3) эквивалентной системой

$$u=P(u), \tag{4}$$

где $u=(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ — элемент конечномерного нормированного пространства H_N, а оператор P, отображающий H_N в H_N, является оператором сжатия:

$$\exists q<1,\ \forall u,\ v\ \|P(u)-P(v)\|\leqslant q\|u-v\|. \tag{5}$$

Тогда в силу общего принципа сжатых отображений (см. [1] — [4]) уравнение (1) имеет единственное решение, итерационный метод простой итерации

$$u^{n+1}=P(u^n), \quad n=0, 1, \ldots, \tag{6}$$

сходится при любом начальном приближении u^0, и для погрешности z^n на n-й итерации справедлива оценка

$$\|z^n\|\leqslant q^n(1-q)^{-1}\|u^0-u^1\|.$$

Пусть нек-рое решение $\overline{u}$ системы (3) удается окружить шаром $S(\overline{u}, R)\equiv\{v;\ \|v-\overline{u}\|\leqslant R\}$, и система (3), рассматриваемая вместе с дополнительным условием

$$u\in S(\overline{u}, R), \tag{7}$$

эквивалентна системе (4), рассматриваемой вместе с условием (7), причем неравенство (5) справедливо для $u=\overline{u}$ и любого $v=\overline{u}+z$ с $\|z\|\leqslant R$. Тогда при выборе начального приближения u^0 из $S(\overline{u}, R)$ в методе (6) тоже

гарантируется сходимость u^n к $\bar{u}$ с оценкой погрешности $\|z^n\| \leqslant q^n R$.

Для дважды непрерывно дифференцируемых функций φ_i при наличии хорошего начального приближения к решению системы (2) часто эффективным методом повышения точности является м е т о д Н ь ю т о н а — К а н т о р о в и ч а. В этом методе уравнение $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_N)=0$ из (2), определяющее нек-рую поверхность P_i, заменяется уравнением касательной плоскости к P_i, проводимой через точку x^n, где x^n— ранее полученное приближение к решению (2) (см. [1] — [5]). При нек-рых дополнительных условиях метод Ньютона — Канторовича приводит к оценке погрешности типа

$$\| z^n \| \leqslant c_1 (c \| z^0 \|)^{2^n},$$

где c_1 и c — нек-рые константы. На каждой итерации этого метода необходимо решать систему линейных алгебраич. уравнений с матрицей $A^{(n)}$ при неизвестных

$$A^{(n)} \equiv \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{x = x^n}.$$

Иногда эту матрицу сохраняют на нескольких итерациях, иногда производные $\partial \varphi_i / \partial x_j$ заменяют разностными аппроксимациями.

Метод Ньютона — Канторовича относится к группе методов линеаризации (3). Другим методом из этой группы является метод секущих (см. [3]).

Большое число итерационных методов (так наз. м е т о д о в с п у с к а) (см. [1] — [3], [9], [10]) основано на замене задачи решения уравнения (3) задачей минимизации нек-рого функционала $I(u)$. Напр., в качестве $I(u)$ можно взять

$$I(u) \equiv \| L(u) - f \|^2. \tag{8}$$

В ряде случаев, когда исходные Н. у. сами являлись уравнениями Эйлера для задачи минимизации нек-рого функционала $I(u)$, такая вариационная формулировка задачи является еще более естественной; операторы L в подобных ситуациях являются градиентами функционалов $I(u)$ и наз. п о т е н ц и а л ь н ы м и о п е р а т о р а м и (см. [5], [6]). Среди различных вариантов методов спуска можно назвать метод покоординатного спуска, различные градиентные методы и, в частности, метод наискорейшего спуска, метод сопряженных градиентов и др., а также и их модификации (см. [2], [9], [10] и др.). Ряд итерационных методов для решения уравнений (3), описывающих нек-рое стационарное состояние, можно трактовать как дискретизации соответствующих нестационарных задач. Поэтому методы из этого класса называют *установления методами* (см., напр., [2]). Примером таких нестационарных задач являются задачи, описываемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$A_1 \frac{d^2u}{dt^2} + A_2 \frac{du}{dt} + L(u) - f = 0.$$

Введение дополнительной независимой переменной характерно и для м е т о д а д и ф ф е р е н ц и р о в а н и я п о п а р а м е т р у (см. [5], [11]). Его суть состоит во введении вспомогательного параметра $\lambda \in [0, 1]$, выборе непрерывно дифференцируемых функций $F_i(x, \lambda)$ и замене системы (2) на систему

$$F_i(x, \lambda) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{9}$$

при $\lambda = 0$ система (9) должна легко решаться, а функции $F_i(x, 1)$ должны совпадать с $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Система (9), вообще говоря, определяет

$$x(\lambda) \equiv (x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots, x_N(\lambda))$$

как функцию от λ, и искомое решение системы (2) совпадает с $x(1)$. Если систему (9) продифференцировать

по λ, то получится система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{d\lambda} + \frac{\partial F_i}{\partial \lambda} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \quad (10)$$

Если на отрезке $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ решить для нее задачу Коши с начальным условием, являющимся решением системы

$$F_i(x, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

то будет найдено и нек-рое решение системы (2). Дискретизация (10) по λ и приводит к численному методу для решения системы (2).

В методе продолжения по параметру система (9) решается при $\lambda = \tau, 2\tau, \ldots, m\tau, m\tau = 1$, причем при каждом указанном значении λ применяется нек-рый итерационный метод с начальным приближением, совпадающим с приближенно полученным решением системы при предыдущем значении λ. Оба названных метода по сути дела являются итерационными методами решения системы (2) со специальной процедурой нахождения хорошего начального приближения.

Для случая систем большую трудность представляет задача локализации решения. Так как большинство итерационных методов сходится лишь при наличии достаточно хорошего приближения к решению, описанные выше два метода часто позволяют избавиться от необходимости непосредственной локализации решения. Для локализации также часто используются теоремы, основанные на топологич. принципах и монотонности операторов (см. [4] — [8]).

Для решения уравнений (1), являющихся простейшими частными случаями (3), число известных и применяемых на практике итерационных методов очень велико (см., напр., [1] — [3], [12]). Помимо уже рассмотренных можно указать, напр., итерационные методы высших порядков (см. [1]), включающие в себя метод Ньютона как частный случай, и большое число итерационных методов, специально ориентированных на нахождение действительных или комплексных корней многочленов

$$p_n(z) \equiv a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0,$$

где a_i — действительные или комплексные числа (см. [1], [12]).

Проблема локализации решения уравнения (1) сводится к отысканию интервала, на концах к-рого непрерывная функция φ принимает значения разных знаков. Для случая, когда φ является многочленом, она теряет свою остроту, т. к. известны теоретич. оценки (см. [1]) и имеются методы нахождения всех корней с нужной точностью без задания хороших приближений к ним (см. [12]).

Итерационные методы для решения уравнений (3), возникающих в сеточных аналогах нелинейных краевых задач для уравнений с частными производными, являются частными случаями методов решения сеточных систем (см., напр., [3], [13] — [18]). Одним из наиболее интенсивно применяемых методов решения уравнения (3), вероятно, является модифицированный метод простой итерации, записываемый в виде

$$Bu^{n+1} = Bu^n - \gamma (L(u^n) - f), \quad (11)$$

где уравнение (3) рассматривается как операторное уравнение в N-мерном евклидовом пространстве $H_N = H$; $B \in S$, где S — обозначение множества линейных симметричных и положительных операторов, отображающих H в H. Целесообразно изучение таких методов проводить не в пространстве H, а в пространстве H_B с новым скалярным произведением:

$$(u, v)_{H_B} \equiv (Bu, v), \quad \|u\| \equiv (Bu, u),$$

где (u, v) — скалярное произведение в H.

Если оператор L таков, что для него выполнены условия строгой монотонности и Липшиц-непрерывности

$$\forall u,\ v\quad (L(u)-L(v),\ u-v)\geqslant \delta_0\|u-v\|_B^2,\ \delta_0>0, \quad (12)$$

$$\forall u,\ v\quad \|L(u)-L(v)\|_{B^{-1}}^2\leqslant \delta_2\|u-v\|_B^2, \quad (13)$$

то уравнение (3) имеет единственное решение, метод (11) при подходящем выборе γ сходится при любом u^0 с оценкой погрешности:

$$\|z^n\|_B\leqslant q^n\|z^0\|_B, \quad (14)$$

где $q\equiv q(\delta_0,\ \delta_2,\ \gamma)<1$ (см. [13], [15]).

В более общем варианте этой теоремы достаточно требовать выполнения (12), (13) для решения u и всех v, принадлежащих шару $S_B(u,\ R)\equiv\{v;\ \|v-u\|_B\leqslant R\}$, и принадлежности u^0 этому шару (см. [13]). В этом случае и константы δ_0, δ_2 могут зависеть от R. Для проверки таких условий достаточно, напр., с помощью априорных оценок локализовать u, получая $\|u\|_B\leqslant R_0$, а затем, если (12) и (13) выполнены для любых u и v из $S_B(0,\ R_1)$, $R_1>R_0$, взять $S_B(u,\ R)\equiv S_B(u,\ R_1-R_0)$. В (14) константу q можно уменьшить, если оператор L дифференцируем и для его производной L'_v, представленной в виде суммы симметрич. части $L'_{v,\ c}$ и кососимметрич. части $L'_{v\ a}$ известны неравенства

$$\forall v\in S_B(u,\ R)\quad \sigma_0 B\leqslant L'_{v,\ c}\leqslant\sigma_1 B,\ \sigma_0>0;$$

$$\forall w\ \|L'_{v,\ a}w\|_{B^{-1}}^2\leqslant\sigma_2\|w\|_B^2.$$

Тогда $q\equiv q(\gamma,\ \sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2)$ (см. [11], [13], [15]). Иногда при рассмотрении некоторых типов нелинейностей вместо (12) и (13) целесообразно использовать неравенства типа

$$(L(u)-L(v),\ B(u-v))\geqslant\overline{\delta_0}\|B(u-v)\|^2,\ \overline{\delta_0}>0;$$

$$\|L(u)-L(v)\|^2\leqslant\overline{\delta_2}\|B(u-v)\|^2$$

(см. [13]). В качестве операторов B в (11) используются, напр., расщепляющиеся разностные операторы (метод переменных направлений) и факторизуемые разностные операторы (попеременно-треугольный метод, метод неполной матричной факторизации) и др. Наиболее привлекательно с асимптотич. точки зрения использование операторов B таких, что константы δ_i или $\overline{\delta_i}$ не зависят от размерности пространства H_N (см. [13]), а сами операторы B достаточно просты. На этом пути удалось в ряде случаев строить итерационные методы, позволяющие находить решение уравнения (3) с точностью ε при затрате всего $O(N\ln N|\ln\varepsilon|)$ (или даже $O(N\ln N)$) арифметич. действий при $\varepsilon\asymp N^{-\alpha}$, $\alpha>0$ (см. [13], [14]), если затраты вычислительной работы на вычисление $L(u^n)$ при заданном u^n можно оценить как $O(N)$. При проверке указанных условий типа (12), (13) во многих случаях большую помощь оказывают сеточные (разностные) аналоги теорем вложения С. Л. Соболева (см. [19]). Важно учитывать и специфику нелинейности. Так, напр., для случая, когда $L(u)=\Lambda u+Pu$, где Λ — линейный положительный оператор, а P — квадратически нелинейный, обладающий свойством «кососимметрии» ($\forall u\,(P(u),u)=0$), удается часто получить константу $\delta_2(R)$ в любом шаре $S_B(0,\ R)$, а δ_0— зависящую только от $\|u\|_B$; тогда сходимость (11) имеет место для любого u^0 (см. [20]). В ряде случаев на основе априорных оценок можно заменить исходную задачу ей эквивалентной, для к-рой нужные условия уже выполняются во всем пространстве (см. [21]).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Ортега Дж., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ., М., 1975; [4] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [5]

Михлин С. Г., Численная реализация вариационных методов, М., 1966; [6] Вайнберг М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов, М., 1972; [7] Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К., Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения, пер. с нем., М., 1978; [8] Лионс Ж.-Л., Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, пер. с франц., М., 1972; [9] Васильев Ф. П., Лекции по методам решения экстремальных задач, М., 1974; [10] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах, М., 1975; [11] Яковлев М. Н., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1965, т. 84, с. 8—40; [12] Воеводин В. В., Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы, М., 1966; [13] Дьяконов Е. Г., в кн.: Численные методы механики сплошной среды, т. 7, № 5, Новосиб., 1976, с. 14—78; [14] его же, в кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике. Материалы Всесоюзной конференции, Новосиб., 1978, с. 149—64; [15] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [16] Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р., Численное исследование вариационных неравенств, пер. с франц., М., 1979; [17] Келлер Г., в кн.: Разностные и вариационно-разностные методы, Новосиб., 1977, с. 8—36; [18] Кобельков Г. М., «Докл. АН СССР», 1978, т. 243, № 4, с. 843—46; [19] Дьяконов Е. Г., в кн.: Применение функциональных методов к краевым задачам математической физики, Новосиб., 1972, с. 55—62; [20] его же, «Acta Univ. Carolinae. Math. et Phys.», 1974, v. 15, № 1—2, p. 11—15; [21] Ривкинд В. Я., Уральцева Н. Н., в кн.: Проблемы математического анализа, в. 3, Л., 1972, с. 69—111.

Е. Г. Дьяконов.

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ — уравнение вида

$$F(x,\ u,\ \ldots,\ D^{\alpha}u)=0, \tag{1}$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}^n$, $u=(u_1, \ldots, u_m)\in\mathbb{R}^m$, $F=(F_1, \ldots, F_k)\in\mathbb{R}^k$, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ есть мультииндекс с целыми неотрицательными $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $D^{\alpha}=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$, где $D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1, \ldots, n$. Аналогично определяется Н. у. с ч. п. в случае комплекснозначных функций. Если $k>1$, то векторное Н. у. с ч. п. обычно наз. системой Н. у. с ч. п. Порядком уравнения (1) наз. наивысший порядок производной, входящей в это уравнение.

Из существенно нелинейных уравнений наиболее известным является *Монжа — Ампера уравнение*

$$\det\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\right|+\sum\nolimits_{i,\ j=1}^{n}A_{ij}(x,\ u,\ Du)\times \\ \times\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+B(x,\ u,\ Du)=0; \tag{2}$$

здесь и ниже $Du=(D_1 u, \ldots, D_n u)$.

Если $k=m$ и функция F дифференцируема относительно своих «старших» переменных, соответствующих старшим производным, то тип уравнения (2) определяется типом главной линейной относительно старших производных частью функции F (см. *Дифференциальное уравнение с частными производными*). При этом производным по соответствующим переменным, либо соответствующим дифференциальным операциям, в общем случае, присваивается соответствующий определенный вес. Напр., в нелинейном уравнении теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=f\left(x_1,\ x_2,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)$$

с $\frac{\partial f}{\partial p_{22}}>0$, $p_{22}\leftrightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, производная $\frac{\partial u}{\partial p_{22}}$ имеет вес равный двум.

Так как линеаризация уравнения (1) относительно старших производных проводится в окрестности фиксированного решения, то в отличие от линейного уравнения тип уравнения (1) (даже в фиксированной точке x) может зависеть от этого фиксируемого решения. Напр., уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial u}{\partial x_2^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2}=f(x_1,\ x_2) \tag{3}$$

является уравнением эллиптич. типа на решениях с $\frac{\partial u}{\partial x_2} > 0$ и уравнением гиперболич. типа на решениях с $\frac{\partial u}{\partial x_2} < 0$.

Тип уравнения определяет постановку корректных краевых (смешанных) задач для этого уравнения и методы их исследования.

Если функция F является линейной относительно старших производных, то уравнение (1) наз. к в а з и л и н е й н ы м у р а в н е н и е м. Напр., уравнение (3) является квазилинейным уравнением. В противном случае уравнение наз. с у щ е с т в е н н о н е л и н е й н ы м у р а в н е н и е м. Напр., уравнение Монжа — Ампера (2) является существенно нелинейным.

Если коэффициенты квазилинейного уравнения при старших производных не зависят от искомого решения (и его производных), то это уравнение наз. с л а б о н е л и н е й н ы м у р а в н е н и е м. Напр., уравнение

$$\Delta u = f(x, u, Du) \qquad (4)$$

является слабо нелинейным уравнением.

Разделение Н. у. с ч. п. на квазилинейные и слабо нелинейные носит условный характер и не отражает внутреннего существа самих уравнений. Слабо нелинейное уравнение может обладать более сильными нелинейными свойствами, нежели квазилинейное и даже существенно нелинейное уравнение. Напр., существуют слабо нелинейные уравнения вида (4), к-рые при заданном граничном условии Дирихле в ограниченной области обладают счетным множеством разных решений.

Уравнения вида (1) могут рассматриваться во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ либо в нек-рой области этого пространства. В первом случае функциональный класс решений включает условия поведения решений на бесконечности. В случае области на границе этой области либо на части ее ставятся определенные граничные условия либо одно граничное условие. Эти граничные условия также могут содержать нелинейные операторы.

Н. у. с ч. п. вместе с граничным условием (условиями) порождает нелинейную задачу. Эта нелинейная задача рассматривается в соответствующем пространстве функций. Выбор этого функционального пространства решений определяется структурой нелинейного дифференциального оператора F, задаваемого в области, и структурой граничных операторов. Выбор функционального пространства для нелинейной задачи является существенным моментом при исследовании этой задачи. Напр., нелинейной задаче

$$\sum_{|\alpha|=m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (|D^\alpha u|^{p-1} \operatorname{sgn} D^\alpha u) = f(x) \quad \text{с } p > 1$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и

$$D^\beta u = 0, \ |\beta| \leqslant m-1 \text{ на границе } \partial\Omega$$

соответствует пространство Соболева $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$. Эта задача при любой функции f из сопряженного пространства $W_{p'}^{-m}(\Omega) = (\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))^*$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$, имеет единственное решение u из $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$. Здесь и ниже $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ есть замыкание множества всех бесконечнодифференцируемых финитных в Ω функций в пространстве Соболева $W_p^m(\Omega)$.

При исследовании задач для Н. у. с ч. п. рассматриваются вопросы о существовании решения, о числе решений, об отсутствии решения, о разрушении решения, о бифуркации (ветвлении) решения, об асимптотике решения при аргументе, стремящемся к границе, в частности к бесконечности, в случае неограниченных областей. Теория таких задач имеет два аспекта: локальный и глобальный.

Локальная теория относительно полно развита для общих нелинейных задач, принадлежащих либо к эллиптич. типу, либо к параболич. типу, либо к гиперболич. типу. Эта теория основана на теореме о неявной функции из нелинейного функционального анализа и общей теории линейных задач соответствующего типа.

В случае краевых (смешанных) задач для нелинейных параболич. либо гиперболич. уравнений эта локальная теория позволяет установить разрешимость задачи либо на достаточно малом временном промежутке, либо на фиксированном временном промежутке при условии достаточно малого отклонения (в соответствующей метрике) данных задачи от данных известного решения (как правило нулевого решения) близкой задачи.

Глобальная теория нелинейных задач развита менее полно и только для отдельных классов уравнений.

Нелинейные уравнения с частными производными первого порядка. Для широкого класса квазилинейных скалярных уравнений первого порядка вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_i(t,\ x,\ u)+\psi(t,\ x,\ u)=0 \qquad (5)$$

установлена теорема существования и единственности решения задачи Коши с начальным условием при $t=0$ для всех $t>0$.

Для более узкого класса уравнений вида (5) рассмотрены также вопросы асимптотики решений таких задач при $t\to+\infty$ и краевые задачи.

Теория систем квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка развита менее полно (см. *Квазилинейные гиперболические уравнения и системы*).

Нелинейные уравнения с частными производными второго порядка.

Уравнения эллиптич. типа и параболич. типа. Относительно полно развита теория разрешимости в целом краевых задач для широкого класса квазилинейных скалярных уравнений эллиптич. типа второго порядка, имеющих вид

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,\ u,\ Du)+a(x,\ u,\ Du)=0, \qquad (6)$$

либо

$$\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}(x,\ u,\ Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+a(x,\ u,\ Du)=0 \qquad (7)$$

при условии существования априорной оценки $\max\limits_x|u(x)|$. При этом коэффициенты уравнений удовлетворяют определенным условиям.

Аналогично положение и с теорией разрешимости в целом краевых (смешанных) задач для широкого класса квазилинейных скалярных уравнений параболич. типа второго порядка, имеющих вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,\ u,\ Du)+a(x,\ u,\ Du), \qquad (8)$$

либо

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}(x,\ u,\ Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+a(x,\ u,\ Du). \qquad (9)$$

Эта теория разрешимости основана на теории априорных оценок и методе Лере — Шаудера.

Получение априорной исходной оценки $\max\limits_x|u(x)|$ для определенных классов нелинейных уравнений (6) — (9) основано либо на *максимума принципе*, либо на специальных интегральных неравенствах и соответствующих *вложения теоремах* функциональных пространств.

Теория разрешимости в целом краевых задач для существенно нелинейных скалярных уравнений эллип-

тич. типа развита для узкого класса таких уравнений в случае двух независимых переменных.

Разрешимость в целом краевой (смешанной) задачи для существенно нелинейных скалярных уравнений параболич. типа установлена для широкого класса уравнений параболич. типа вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

в случае одной пространственной переменной $x \in \mathbb{R}$.

Вопросы разрешимости в целом задач для систем квазилинейных уравнений эллиптич. типа либо параболич. типа рассмотрены для отдельных узких классов таких систем.

Одним из эффективных методов в исследовании Н. у. с ч. п. второго порядка, принадлежащих либо к эллиптич., либо к параболич. типу, является метод верхних и нижних решений. Напр., пусть поставлена краевая задача

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,\ u,\ Du) \text{ в ограниченной области } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u = 0 \text{ на границе } \partial\Omega \text{ класса } C^2 \end{cases} \tag{10}$$

с непрерывной функцией f, определенной на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и такой, что выполнено условие Бернштейна

$$|f(x,\ u,\ \xi)| \leqslant M(|u|)\cdot(1+|\xi|^2)$$

при всех $(x,\ u,\ \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ с возрастающей функцией $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} | t \geqslant 0\}$. Тогда если существуют функции $u^+,\ u^- \in W_p^2(\Omega)$ с $p > n$ такие, что $-\Delta u^+ \geqslant f(x,\ u^+,\ Du^+)$ почти всюду в Ω, $u^+ \geqslant 0$ на $\partial\Omega$, $-\Delta u^- \leqslant f(x,\ u^-,\ Du^-)$ почти всюду в Ω, $u^- \leqslant 0$ на $\partial\Omega$ (u^+ — верхнее решение задачи (10), u^- — нижнее решение задачи (10)), и $u^+(x) \geqslant u^-(x)$ в Ω, то существует решение $u \in W_p^2(\Omega)$ задачи (10) и $u^-(x) \leqslant u(x) \leqslant u^+(x)$ в Ω. Правильный выбор верхних и нижних решений исходных нелинейных задач, основанный на решениях модельных задач, дает возможность устанавливать не только разрешимость и нижнее число решений, но и получать тонкие априорные оценки и асимптотику для этих решений исходных нелинейных задач.

Исследование поведения в целом решений краевых (смешанных) задач для нелинейных параболич. уравнений, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, связано с исследованием стационарных решений краевых задач для соответствующих нелинейных эллиптич. уравнений.

В связи с тем, что краевые задачи для нелинейных эллиптич. уравнений не всегда имеют решение и для краевых (смешанных) задач для нелинейных параболич. и гиперболич. уравнений не при всех $t > 0$ существует решение, развивается теория отсутствия решений задач для Н. у. с ч. п.

Уравнения гиперболич. типа. Эти уравнения занимают особое место среди Н. у. с ч. п. второго порядка. «Потеря одной производной» при обращении гиперболич. оператора второго порядка приводит к принципиальным трудностям при исследовании нелинейных гиперболич. уравнений. Даже для создания локальной теории нелинейных гиперболич. уравнений и систем потребовалось развитие специальной теории о неявных функциях в нелинейном функциональном анализе, так как классич. теорема о неявной функции из функционального анализа оказалась здесь неприменимой.

Для (существенно) квазилинейных гиперболич. уравнений второго порядка с числом независимых переменных больше двух вопрос о разрешимости в целом даже задачи Коши не исследован.

В случае двух независимых переменных ($t \in \mathbb{R}_1$, $x \in \mathbb{R}$) разрешимость задачи Коши в целом установлена

для отдельных уравнений вида

$$u_{tt} - a^2(u_x)\,u_{xx} = f(t,\ x,\ u_t,\ u_x),$$

сводимых к специальным квазилинейным гиперболич. системам — законам сохранения (см. *Квазилинейные гиперболические уравнения и системы*).

В случае квазилинейных гиперболич. уравнений вида

$$u_{tt} - a^2\left(\int_\Omega |Du|^2\,dx\right)\Delta u = f(t,\ x) \text{ в } \Omega\times[0,\ T]$$

установлена разрешимость в целом (для любого $T>0$) смешанной задачи с условиями: $u=0$ на $\partial\Omega\times[0,\ T]$ и $u=\varphi$, $u_t=\psi$ при $t=0$, $x\in\Omega$ в определенном классе бесконечно гладких по x функций. Здесь Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ и $|Du|^2=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$.

Разрешимость в целом задачи Коши, а также краевой (смешанной) задачи установлена для широкого класса слабо нелинейных гиперболич. уравнений вида

$$u_{tt} - \Delta u = f(t,\ x,\ u,\ u_t,\ Du),\quad t>0,\ x\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^n.$$

Особое место в теории нелинейных гиперболич. уравнений занимает вопрос о существовании периодических по t решений краевых задач для этих уравнений. Даже для слабо нелинейных уравнений этот вопрос рассмотрен только для уравнений вида

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,\ x,\ u)$$

в случае двух переменных $t\in\mathbb{R}$ и $x\in[a,\ b]\subset\mathbb{R}$. Сложность этого вопроса обусловлена бесконечномерностью ядра соответствующей линейной задачи.

Слабо нелинейные и квазилинейные гиперболич. уравнения, содержащие диссипативные слагаемые, исследованы более полно.

Нелинейные уравнения с частными производными высшего порядка. Разрешимость краевых (смешанных) задач исследована для широкого класса квазилинейных уравнений дивергентного вида

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha(x,\ u,\ \ldots,\ D^\beta u) = f(x),\quad |\beta|\leqslant m, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha(t,\ x,\ u,\ \ldots,\ D^\beta u) = f(t,\ x),\quad |\beta|\leqslant m.$$

При этом относительно функций A_α предполагается выполненным ряд условий, к-рые обеспечивают, что нелинейные операторы будут определены в соответствующих функциональных пространствах и обладать рядом свойств. Напр., для разрешимости краевой задачи в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ с условиями

$$D^\omega u = 0,\ |\omega|\leqslant m-1 \text{ на границе } \partial\Omega \tag{12}$$

для уравнения (11) достаточно выполнение условий:

1) Функции $A_\alpha(x,\ \xi_0,\ \ldots,\ \xi_\beta)$, $\xi_\beta\leftrightarrow D^\beta u$, являются измеримыми по x при всех $\xi_0,\ \ldots,\ \xi_\beta$, непрерывными по $(\xi_0,\ \ldots,\ \xi_\beta)$ почти при всех $x\in\Omega$ и удовлетворяют неравенству

$$|A_\alpha(x,\ \xi_0,\ \ldots,\ \xi_\beta)|\leqslant K\Big(1+\sum_{|\gamma|\leqslant m}|\xi_\gamma|^{p-1}\Big)$$

с $p>1$ и $K>0$, $|\alpha|\leqslant m$.

2) Выполнено следующее условие коэрцитивности: для любой функции u из пространства Соболева $\mathring{W}_p^m(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega A_\alpha(x,\ u,\ \ldots,\ D^\beta u)\,D^\alpha u\,dx \geqslant$$
$$\geqslant a_0\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega |D^\alpha u|^p\,dx - K \quad \text{с} \quad a_0>0.$$

3) Выполнено условие монотонности: для любых функций u и v из $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega (A_\alpha(x, u, \ldots, D^\beta u) - A_\alpha(x, v, \ldots, D^\beta v))(D^\alpha u - D^\alpha v))\, dx \geqslant 0.$$

Тогда при выполнении условий 1) —3) краевая задача (12) для уравнения (11) при любой функции f из сопряженного пространства $(\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))^*$ имеет решение u из $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$.

Все эти условия можно существенно расширить. Напр., для дифференциальных операторов вида (11) с граничными условиями (12), к-рые являются нечетными и однородными в главном при нек-рых условиях, но без условия коэрцитивности, справедлива альтернатива Фредгольма: если соответствующая краевая задача с нулевыми граничными условиями (12) для уравнения (11) с $f=0$ имеет только тривиальное решение, то эта задача разрешима при любой функции f из соответствующего сопряженного пространства.

Для широкого класса краевых (смешанных) задач для Н. у. с ч. п. развита теория нормальной разрешимости, к-рая обобщает теорию нормальной разрешимости (по Хаусдорфу) линейных операторных уравнений на нелинейный случай. Эта теория дает достаточные условия разрешимости краевых (смешанных) задач для нелинейных уравнений и систем уравнений параболич. типа и для слабо нелинейных уравнений и систем гиперболич. типа.

В теории краевых задач для нелинейных уравнений эллиптич. типа особое место занимает вопрос о существовании собственных функций. Теория собственных функций краевых задач для квазилинейных уравнений эллиптич. типа развита для достаточно широкого класса задач. В частности, на широкий класс задач перенесена абстрактная теория Люстерника — Шнирельмана о существовании счетного множества собственных функций.

Особое место в теории нелинейных уравнений эллиптич. типа высшего порядка и в теории систем нелинейных уравнений эллиптич. типа с числом независимых переменных, большим двух, занимает вопрос о регулярности решений этих уравнений и систем.

В случае скалярного квазилинейного равномерно эллиптич. уравнения второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами, удовлетворяющими вместе со своими первыми производными определенным условиям роста, решение обладает гладкостью внутри области на две производные, превышающие гладкость правой части из соответствующего пространства.

В случае квазилинейных уравнений эллиптич. типа порядка выше двух и систем квазилинейных уравнений эллиптич. типа второго либо более высокого порядка с числом независимых переменных, большим двух, соответствующая гладкость решений имеет место не всюду внутри области, а почти всюду. При дополнительных условиях удается уточнить размерность этой нулевой (хаусдорфовой) меры, на множествах к-рой, вообще говоря, гладкость решений теряется. Для специального класса квазилинейных эллиптич. систем с ограниченными нелинейностями установлена регулярность решений всюду в области.

Развита теория краевых задач для широкого класса квазилинейных уравнений дивергентного вида бесконечного порядка.

Теория точных решений. К методам точных решений относятся: метод, основанный на групповом анализе Н. у. с ч. п.; метод, основанный на преобразованиях Ли — Беклунда; метод, основанный на обратной задаче теории рассеяния, и нек-рые др.

Метод обратной задачи рассеяния позволил исследовать ряд физически важных уравнений, таких, как нелинейные уравнения Кортевега — де Фриса:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0;$$

нелинейное уравнение синус-Гордона:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0;$$

нелинейное уравнение Шрёдингера:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \varkappa |\psi|^2 \psi = 0$$

и ряд других с одной пространственной переменной $x \in \mathbb{R}$. С помощью этого метода удалось рассмотреть отдельные нелинейные уравнения типа уравнения Кортевега — де Фриса с двумя пространственными переменными.

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [2] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 2 изд., М., 1973; [3] Gilbarg D., Trudinger N. S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, B.— N. Y., 1977; [4] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., 1967; [5] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [6] Ниренберг Л., Лекции по нелинейному функциональному анализу, пер. с англ., М., 1977; [7] Лионс Ж.-Л., Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, пер. с франц., М., 1972; [8] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений..., М., 1978; [9] Скрыпник И. В., Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка, К., 1973; [10] Fučík S., Nečas J., Souček J., Souček V., Spectral Analysis of Nonlinear Operators, B., 1973; [11] Овсянников Л. В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978; [12] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П., Теория солитонов. Метод обратной задачи, М., 1980; [13] Вишик М. И., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1963, т. 12, с. 125—64; [14] Giaquinta M., Modica G., «Manuscripta math.», 1979, v. 28, № 1—3, p. 109—58; [15] Дубинский Ю. А., «Матем. сб.», 1975, т. 98, № 2, с. 163—84; [16] Kazdan J. L., Kramer R., «Comm. pure and appl. Math.», 1978, v. 31, № 5, p. 619—45; [17] Кошелев А. И., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 4, с. 3—49; [18] Кружков С. Н., «Матем. сб.», 1970, т. 81, № 2, с. 228—55; [19] его же, «Тр. Моск. матем. об-ва», 1967, т. 16, с. 329—46; [20] Олейник О. А., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 2, с. 165—70; [21] Похожаев С. И., «Матем. сб.», 1970, т. 82, № 2, с. 192—212; [22] его же, «Матем. сб.», 1975, т. 96, № 1, с. 152—66; [23] его же, «Матем. сб.», 1980, т. 113, № 2, с. 324—38.

С. И. Похожаев.

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ — колебания в физич. системах, описываемые нелинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + \mu X(t, x, \mu) + f(t), \qquad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, X содержит члены не ниже 2-й степени по компонентам вектора x, $f(t)$ — вектор-функция времени t, $\mu > 0$ — малый параметр (либо $\mu = 1$ и $X = X(t, x)$). Возможные обобщения связаны с рассмотрением разрывных систем, воздействий с разрывными характеристиками (напр., типа гистерезиса), запаздывания и случайных воздействий, интегро-дифференциальных и дифференциально-операторных уравнений, колебательных систем с распределенными параметрами, описываемыми дифференциальными уравнениями с частными производными, а также с использованием методов оптимального управления нелинейными колебательными системами. Основные общие задачи Н. к.: отыскание положений равновесия, стационарных режимов, в частности периодич. движений, автоколебаний и исследование их устойчивости, проблемы синхронизации и стабилизации Н. к.

Все физич. системы, строго говоря, являются нелинейными. Одна из наиболее характерных особенностей Н. к.— это нарушение в них принципа суперпозиции колебаний: результат каждого из воздействий в присутствии другого оказывается иным, чем в случае отсутствия другого воздействия.

Квазилинейные системы — системы (1) при $\mu>0$. Основным методом исследования является *малого параметра метод*. Прежде всего это метод Пуанкаре — Линдштедта определения периодич. решений квазилинейных систем, аналитических по параметру при его достаточно малых значениях, либо в виде рядов по степеням μ (см. [1] гл. IX), либо в виде рядов по степеням μ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — добавок к начальным значениям компонент вектора x (см. [1] гл. III). О дальнейшем развитии этого метода см., напр., в [2] — [4].

Другим из методов малого параметра является метод *осреднения*. Вместе с тем в исследование квазилинейных систем проникали и новые методы: асимптотич. методы (см. [5], [6]), метод V-функций (см. [7]), базирующийся на фундаментальных результатах А. М. Ляпунова — Н. Г. Четаева, и др.

Существенно нелинейные системы, в к-рых отсутствует заранее предписываемый малый параметр ($\mu=1$ и $X=X(t, x)$ в (1)). Для систем Ляпунова

$$\dot{x}=Ax+X(x), \tag{2}$$

где

$$A=\lambda J_2+P, \quad J_2=\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

причем среди собственных чисел $(k\times k)$-матрицы P нет кратных корню $\pm\lambda i$, $X(x)$ — аналитич. вектор-функция x, разложение к-рой начинается с членов не ниже 2-го порядка, и имеет место аналитический первый интеграл специального вида, А. М. Ляпунов (см. [8] § 42) предложил метод отыскания периодич. решений в виде ряда по степеням произвольной постоянной c (за к-рую может быть принято начальное значение одной из двух критич. переменных x_1 либо x_2).

Для систем, близких к системам Ляпунова,

$$\dot{x}=Ax+X(x)+\mu F(t, x, \mu),$$

где A и $X(x)$ того же вида, что и в (2), F — аналитич. вектор-функция x и малого параметра μ, непрерывная и 2π-периодическая по t, также предложен метод определения периодич. решений (см. [4] гл. VIII). Системы типа Ляпунова (2), в к-рых матрица A имеет l нулевых собственных значений с простыми элементарными делителями, два — чисто мнимых собственных значения $\pm\lambda i$ и не имеет собственных значений, кратных $\pm\lambda i$, $X(x)$ — такая же, как и в (2), могут быть сведены к системам Ляпунова (см. [9] § IV.2). Исследовались также н. к. в системах Ляпунова и в т. н. системах Ляпунова с демпфированием, а также решалась общая задача о перекачке энергии в них (см. [9] гл. I, III, IV).

Пусть существенно нелинейная автономная система приведена к жорданову виду ее линейной части

$$\dot{x}_\nu=\lambda_\nu x_\nu+\delta_\nu x_{\nu+1}+$$
$$+x_\nu\sum_{Q\in\mathfrak{M}_\nu} f_{\nu Q}x_1^{q_1}\ldots x_n^{q_n}, \quad \nu=1, \ldots, n; \ \delta_n=0, \tag{3}$$

где вектор $\Lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ по предположению имеет хотя бы одну ненулевую компоненту; $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ равны нулю или единице соответственно при отсутствии или наличии непростых элементарных делителей матрицы линейной части, $f_{\nu Q}$ — коэффициенты; множество $\mathfrak{M}_\nu$ значений вектора $Q=(q_1, \ldots, q_n)$ с целочисленными компонентами таково:

$$q_1, \ldots, q_{\nu-1}, q_{\nu+1}, \ldots, q_n\geqslant 0,$$
$$q_\nu\geqslant -1, \ q_1+\ldots+q_n\geqslant 1.$$

Тогда существует нормализующее преобразование:

$$x_\nu=y_\nu+y_\nu\sum_{Q\in\mathfrak{M}_\nu} h_{\nu Q}y_1^{q_1}\ldots y_n^{q_n}, \quad \nu=1, \ldots, n, \tag{4}$$

приводящее (3) к в уравнений

$$\dot{y}_\nu = \lambda_\nu y_\nu + \delta_\nu y_{\nu+1} + \\ + y_\nu \sum_{Q \in \mathfrak{M}_\nu,\ (\Lambda, Q)=0} g_{\nu Q} y_1^{q_1} \dots y_n^{q_n},\ \nu = 1, \dots, n;\ \delta = 0, \tag{5}$$

и такое, что $g_{\nu Q} = 0$, если $(\Lambda, Q) \neq 0$. Таким образом, нормальная форма (5) содержит лишь резонансные члены, т. е. коэффициенты $g_{\nu Q}$ в (5) могут быть отличны от нуля лишь для тех Q, для к-рых выполнено р е з о н а н с н о е у р а в н е н и е

$$(\Lambda, Q) \equiv \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_n q_n = 0,$$

играющее существенную роль в теории колебаний. Сходимость и расходимость нормализующего преобразования (4) исследована (см. [10] ч. I, гл. II, III); дано вычисление коэффициентов $h_{\nu Q}$, $g_{\nu Q}$ (посредством их симметризации) (см. [9] § 5.3). В ряде задач о Н. к. существенно нелинейных автономных систем оказался эффективным метод нормальных форм (см. [10], [9] гл. VI—VIII).

Из других методов исследования существенно нелинейных систем применяются метод точечных отображений (см. [2], [11]), стробоскопич. метод [12] и функционально-аналитич. методы [13].

К а ч е с т в е н н ы е м е т о д ы Н. к. Исходными здесь являются исследования вида интегральных кривых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, проведенные А. Пуанкаре (H. Poincaré, см. [14]). Приложения для задач Н. к., описываемых автономными системами 2-го порядка см. в [2], [15]. Изучены [16] вопросы существования периодич. решений и их устойчивости в большом для многомерных систем; рассмотрены [13] почти периодические Н. к. Приложения теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при нек-рых производных к задачам релаксационных Н. к. см. в [17].

Важные аспекты Н. к. и лит. см. в статьях *Возмущений теория*, *Колебаний теория*.

Лит.: [1] П у а н к а р е А., Избр. труды, пер. с франц., т. 1, М., 1971; [2] А н д р о н о в А. А., В и т т А. А., Х а й к и н С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [3] Б у л г а к о в Б. В., Колебания, М., 1954; [4] М а л к и н И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, М., 1956; [5] Б о г о л ю б о в Н. Н., Избр. труды, т. 1, К., 1969; [6] Б о г о л ю б о в Н. Н., М и т р о п о л ь с к и й Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974; [7] К а м е н к о в Г. В., Избр. труды, т. 1—2, М., 1971—72; [8] Л я п у н о в А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956, с. 7—263; [9] С т а р ж и н с к и й В. М., Прикладные методы нелинейных колебаний, М., 1977; [10] Б р ю н о А. Д., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1971, т. 25, с. 119—262; 1972, т. 26, с. 199—239; [11] Н е й м а р к Ю. И., Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний, М., 1972; [12] M i n o r s k y N., Introduction to non-linear mechanics, Ann Arbor, 1947; [13] К р а с н о с е л ь с к и й М. А., Б у р д В. Ш., К о л е с о в Ю. С., Нелинейные почти периодические колебания, М., 1970; [14] П у а н к а р е А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М. —Л., 1947; [15] Б у т е н и н Н. В., Н е й м а р к Ю. И., Ф у ф а е в Н. А., Введение в теорию нелинейных колебаний, М., 1976; [16] П л и с с В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, М.—Л., 1964; [17] М и щ е н к о Е. Ф., Р о з о в Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975.

В. М. Старжинский.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР — отображение A векторного (как правило) пространства X в векторное пространство Y над общим полем скаляров, не обладающее свойством линейности, т. е. такое, что, вообще говоря,

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \neq \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2.$$

Если Y есть множество действительных чисел $\mathbb{R}$ или комплексных чисел $\mathbb{C}$, то Н. о. наз. *нелинейным функционалом*. Простейшим примером Н. о. (нелинейного функционала) служит действительная функция действительного аргумента, отличная от линейной функции.

Одним из важных источников возникновения Н. о. являются задачи математич. физики. Если при составлении локального математич. описания процесса учитываются малые не только первого, но и высших порядков, то возникают уравнения с Н. о. К нелинейным операторным уравнениям приводят также нек-рые задачи математич. экономики, авторегулирования, теории управления и т. д.

Примеры нелинейных операторов.

$$1)\ Ax=\int_a^b K(t,\ s,\ x(s))\,ds,$$

где $K(t,\ s,\ u)$, $a\leqslant t,\ s\leqslant b$, $-\infty<u<\infty$,— такая функция, что $g(t)=\int_a^b K(t,\ s,\ x(s))\,ds$ есть непрерывная на $[a,\ b]$ функция для любой функции $x(s)\in C(a,\ b)$ (напр., $K(t,\ s,\ u)$ непрерывна на $a\leqslant t,\ s\leqslant b$, $-\infty<u<\infty$). Если $K(t,\ s,\ u)$ нелинейна по u, то A — нелинейный оператор Урысона, отображающий $C[a,\ b]$ в $C[a,\ b]$. При других ограничениях на $K(t,\ s,\ u)$ оператор Урысона действует в других пространствах, напр. в $L_2[a,\ b]$, или отображает одно пространство Орлича $L_{M_1}[a,\ b]$ в другое $L_{M_2}[a,\ b]$.

$$2)\ Bx=\int_a^b K(t,\ s)\,g(s,\ x(s))\,ds,$$

где $g(t,\ u)$ — нелинейная по u функция, определенная на $a\leqslant t\leqslant b$, $-\infty<u<\infty$. При соответствующих ограничениях на $g(t,\ u)$ оператор B действует из одного функционального пространства в другое и наз. нелинейным оператором Гаммерштейна.

$$3)\ F(x)=f(t,\ x(t))$$

— оператор суперпозиции, наз. также оператором Немыцкого, преобразующий при соответствующих ограничениях на нелинейную по 2-му аргументу функцию пространство измеримых функций $x(t)$ в себя.

$$4)\ D(x)=\sum\nolimits_{|k|\leqslant m} D^k(a_k(t,\ x,\ Dx,\ \ldots,\ D^kx))$$

— нелинейный дифференциальный оператор порядка $2m$ дивергентного вида, действующий в пространстве Соболева $W_p^{2m}(G)$ при соответствующих ограничениях на нелинейные функции $a_k(t,\ u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_m)$. Здесь k — мультииндекс $(k_1,\ \ldots,\ k_n)$, $|k|=k_1+\ldots+k_n$, $D^k=\dfrac{\partial^{|k|}}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\ldots\partial t_n^{k_n}}$ и G — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$.

$$5)\ J(x)=\int_a^b K(t,\ s,\ x(s),\ x'(s))\,ds$$

— нелинейный интегро-дифференциальный оператор, действующий при соответствующих ограничениях на функцию $K(t,\ s,\ u_0,\ u_1)$ в пространстве $C^1[a,\ b]$ непрерывно дифференцируемых функций.

На Н. о., действующие из одного топологического векторного пространства X в другое топологическое векторное пространство Y, переносятся многие понятия и операции математич. анализа действительных функций действительного переменного. Так, Н. о. $A: M\to Y$, $M\subset X$ наз. ограниченным, если $A(B\cap M)$ — ограниченное множество в Y для любого ограниченного множества $B\subset X$; Н. о. A непрерывен в точке $x\in M$, если прообраз $A^{-1}(U_{Ax})$ окрестности U_{Ax} точки Ax содержит $M\cap U_x$ для нек-рой окрестности точки x. Как и для функций, Н. о., непрерывный в каждой точке компактного множества M, ограничен на этом множестве. В отличие от линейных операторов, для Н. о., действующих в нормированных пространствах, из ограниченности оператора A на нек-ром шаре не следует непрерывность A на этом шаре.

Однако в нек-рых случаях из непрерывности (ограниченности) Н. о. на шаре следует непрерывность (ограниченность) оператора во всей области его определения.

Среди Н. о., действующих из X в Y, можно выделить нек-рые важные классы.

1) Полилинейные операторы $A: X\times X\times\ldots\times X\to Y$, линейные по каждому аргументу. Пространство $L_n(X, Y)$ (I) всех n-линейных операторов изоморфно пространству $L\{X[\ldots L(X, Y), \ldots]\}$ (II), где $L(X, Y)$ — пространство всех линейных операторов из X в Y. Если X и Y — нормированные пространства, то пространства (I) и (II) изометричны. Если A симметричен по всем аргументам, то $\tilde{A}(x, x, \ldots, x)$ обозначается $\tilde{A}x^n$ и наз. однородным оператором n-й степени.

2) В пространствах, наделенных частичной упорядоченностью,— изотонные операторы A и антитонные операторы $\tilde{A}$, характеризующиеся соответственно условиями $x\leqslant y\Rightarrow Ax\leqslant Ay$ и $x\leqslant y\Rightarrow Ax\geqslant\tilde{A}y$.

3) В гильбертовом пространстве H — монотонные операторы M, определяемые условием $\langle Mx-My, x-y\rangle\geqslant 0$ для любых $x, y\in H$.

4) Компактные операторы, преобразующие ограниченные подмножества своей области определения в предкомпактные множества, в том числе вполне непрерывные операторы, являющиеся одновременно компактными и непрерывными.

Для Н. о. нетривиальными и полезными являются понятия дифференциала и производной. Оператор A, действующий из открытого множества G нормированного векторного пространства X в нормированное векторное пространство Y, наз. дифференцируемым по Фреше в точке $x\in G$, если существует линейный непрерывный оператор $A'(x): X\to Y$ такой, что для любого $h\in X$, для к-рого $x+h\in G$, имеет место

$$A(x+h)-A(x)=A'(x)h+\omega,$$

где $\omega/\|h\|\to 0$ при $h\to 0$. В этом случае линейная по h часть $A'(x)h$ приращения $A(x+h)-A(x)$ наз. дифференциалом Фреше оператора A в точке x и обозначается $dA(x, h)$, а $\omega=\omega(A, x, h)$ наз. остатком приращения. Линейный ограниченный оператор $A'(x)$ наз. производной Фреше оператора A в точке x. Помимо дифференцируемости по Фреше вводится дифференцируемость по Гато. Именно, оператор A наз. дифференцируемым по Гато в точке x, если существует

$$\lim_{t\to 0}\frac{A(x+th)-A(x)}{t}=DA(x, h),$$

наз. дифференциалом Гато оператора A в точке x. Дифференциал Гато однороден по h, т. е. $DA(x, \lambda h)=\lambda DA(x, h)$. Если $DA(x, h)$ линеен по h и $DA(x, h)=A'_0(x)h$, то линейный оператор $A'_0(x)$ наз. производной Гато оператора A. Из дифференцируемости по Фреше следует дифференцируемость по Гато и равенство $A'_0(x)=A'(x)$. Из дифференцируемости по Гато не следует в общем случае дифференцируемость по Фреше, но если $DA(x, h)$ существует в окрестности точки x, непрерывен по h и равномерно непрерывен по x, то A дифференцируем по Фреше в точке x. Для нелинейных функционалов $f: G\to\mathbb{R}$ дифференциалы и производные Фреше и Гато определяются аналогично. При этом производная Гато f'_0 наз. градиентом функционала f и является оператором из G в X^*. Если $Ax=\operatorname{grad} f(x)$ для нек-рого нелинейного функционала f, то оператор A наз. потенциальным.

Для операторов, действующих в отделимых топологических векторных пространствах, возможно несколько

определений дифференцируемости. Пусть $\mathfrak{M}$ — нек-рая совокупность ограниченных множеств топологического векторного пространства X. Отображение $\omega : G\times X\to Y$ наз. $\mathfrak{M}$-м а л ы м, если *для любого* $M\in\mathfrak{M}$ имеет место $\omega(x, \mathrm{th})/t\to 0$ при $t\to 0$ равномерно по $h\in\mathfrak{M}$. Отображение $A : G\to Y$ ($G\subset X$ и открыто) наз. $\mathfrak{M}$ - д и ф ф е р е н ц и р у е м ы м в точке $x\in G$, если

$$A(x+h)-Ax=A'(x)h+\omega(A, x, h),$$

где ω есть $\mathfrak{M}$-малое отображение. Чаще всего в качестве $\mathfrak{M}$ берется либо совокупность всех ограниченных множеств, либо совокупность всех компактных множеств, либо совокупность всех конечных множеств пространства X. Для Н. о. в нормированных пространствах первый случай приводит к дифференцируемости по Фреше, третий — к дифференцируемости по Гато.

Обычным образом, как производные от производных, определяются производные высших порядков $A^{(n)}(x)$ и $A_0^{(n)}(x)$ оператора A. Это — полилинейные симметрич. отображения. Дифференциалом n-го порядка будет при этом однородная форма n-й степени $A^{(n)}(x)h^n$. Возможны иные определения высших производных. Пусть, напр., X и Y — нормированные векторные пространства, $G\subset X$ — открыто, $x\in G$. Если для любого h такого, что $x+h\in G$,

$$A(x+h)-A(x)=a_0(x)+a_1(x)\,h+\ldots+a_n(x)\,h^n+\omega, \quad (*)$$

где $\omega=o(\|h\|^n)$, то полилинейная форма $k!a_k(x)$ наз. п р о и з в о д н о й k-г о п о р я д к а. Выражение $(*)$ наз. при этом о г р а н и ч е н н ы м р а з л о ж е н и е м n-г о п о р я д к а разности $A(x+h)-A(x)$. При выполнении соответствующих ограничений различные определения высших производных эквивалентны.

Если в пространстве X задана скалярная счетно аддитивная мера, то Н. о. можно интегрировать, понимая $\int A(x)dx$ в смысле *Бохнера интеграла.*

Для Н. о. $A : M\to Y$, как и в случае линейного, значения параметра λ такие, что $(I-\lambda A)^{-1}$ существует и непрерывен на $A(M)$, естественно назвать р е г у л я р н ы м и, а остальные точки λ отнести к с п е к т р у. По своим свойствам спектр Н. о. A может резко отличаться от спектров линейных операторов. Так, спектр вполне непрерывного Н. о. может иметь непрерывные участки; из собственного элемента x_0 оператора A, т. е. такого, что $x_0=\lambda_0 Ax_0$, могут выходить ветви собственных элементов, и т. п.

Лит.: [1] Л ю с т е р н и к Л. А., С о б о л е в В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [3] В а й н б е р г М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956; [4] К р а с н о с е л ь с к и й М. А., З а б р е й к о П. П., Геометрические методы нелинейного анализа, М., 1975; [5] Г а е в с к и й Х., Г р ё г е р К., З а х а р и а с К., Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения, пер. с нем., М., 1978.

В. И. Соболев.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ — порожденная радоновской мерой μ функция $U_\mu(x)$ точки x евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, $N\geqslant 2$, нелинейно зависящая от порождающей меры.

Напр., при исследовании свойств решений дифференциальных уравнений с частными производными и граничных свойств аналитич. функций оказываются полезными Н. п. следующего вида:

$$U_\mu(x)=U_\mu(x;\ p,\ l)=$$

$$=\int\left[\int\frac{d\mu(z)}{|y-z|^{N-l}}\right]^{1/(p-1)}\frac{dy}{|x-y|^{N-l}}, \quad x\in\mathbb{R}^N, \quad (*)$$

где $|x-y|$ — расстояние между точками x и y, μ — радоновская мера с компактным носителем, p и l — действительные числа, $1<p<\infty$, $0<l<\infty$.

При $p=2$ Н. п. (*) обращаются в линейные *Рисса потенциалы*, при $p=2$ и $l=1$ — в классический *ньютонов потенциал*. Для Н. п. (*) строятся понятия емкости и энергии, доказываются аналоги нек-рых основных теорем *потенциала теории* (см. [1]).

Лит.: [1] Мазья В. Г., Хавин В. П., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 6, с. 67—138. *Е. Д. Соломенцев.*

НЕЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ — частный случай *нелинейного оператора*, определенного на действительном (комплексном) векторном пространстве X, значениями к-рого являются действительные (комплексные) числа. Примерами Н. ф. могут служить функционалы вариационного исчисления

$$f(x)=\int_a^b F(t,\ x(t),\ x'(t))\,dt;$$

выпуклые функционалы, определяемые условием

$$f(\lambda y+(1-\lambda)x)\leqslant\lambda f(y)+(1-\lambda)f(x),$$

где $x,\ y\in X$, $0\leqslant\lambda\leqslant1$, напр. $f(x)=\|x\|$ — норма элемента нормированного пространства. *В. И. Соболев.*

НЕЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ — один из разделов функционального анализа, изучающий нелинейные отображения (*нелинейные операторы*) бесконечномерных векторных пространств, а также нек-рые классы нелинейных пространств и их отображения. Основными разделами Н. ф. а. являются следующие.

1) Дифференциальное исчисление нелинейных отображений банаховых, топологических векторных и нек-рых других более общих пространств, включая теоремы о локальном обращении дифференцируемого отображения и теорему о неявной функции.

2) Нахождение условий действия, непрерывности, компактности нелинейного оператора, действующего из одного бесконечномерного конкретного пространства в другое.

3) Принципы неподвижной точки для различных классов нелинейных операторов (*сжимающих*, компактных, уплотняющих, монотонных и др.); применение этих принципов для доказательства существования решений различных нелинейных уравнений.

4) Изучение нелинейных монотонных, вогнутых, выпуклых, имеющих монотонную миноранту и др. операторов в пространствах, наделенных структурой упорядоченного векторного пространства.

5) Исследование спектральных свойств нелинейных операторов (точки бифуркации, непрерывные ветви собственных элементов и пр.) в бесконечномерных векторных пространствах.

6) Приближенное решение нелинейных операторных уравнений.

7) Изучение пространств, линейных в малом, и банаховых многообразий — *глобальный анализ*.

8) Исследование на экстремум нелинейных функционалов и вариационные методы изучения нелинейных операторов.

Лит.: [1] Вайнберг М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972; [2] Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К., Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения, пер. с нем., М., 1978; [3] Иллс Дж., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 3, с. 157—210; [4] Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962; [5] Красносельский М. А., Забрейко П. П., Геометрические методы нелинейного анализа, М., 1975; [6] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., т. 1, М., 1967; [7] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [8] Ниренберг Л., Лекции по нелинейному функциональному анализу, пер. с англ., М., 1977; [9] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962. *В. И. Соболев.*

НЕОБХОДИМАЯ ДОСТАТОЧНАЯ СТАТИСТИКА — см. *Минимальная достаточная статистика.*

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ — условия правильности утверждения A, без выполнения к-рых утверждение A заведомо не может быть верным (необходимые условия), и, соответственно, при выполнении к-рых утверждение A заведомо верно (достаточные условия). Часто выражение «необходимо и достаточно» заменяется выражением «тогда и только тогда» или же выражением «в том и только в том случае». Н. и д. у. обладают большой познавательной ценностью. В сложных математич. проблемах разыскание удобных для пользования Н. и д. у. бывает иногда чрезвычайно трудным. В таких случаях достаточные условия стараются сделать возможно более широкими, т. е. охватывающими возможно большее число случаев, в к-рых интересующий нас факт все еще имеет место, а необходимые условия — возможно более узкими, т. е. охватывающими возможно меньше лишних случаев, в к-рых изучаемый факт уже не имеет места. Таким образом, достаточные условия постепенно сближаются с необходимыми. *БСЭ-3.*

НЕОГРАНИЧЕННЫЙ ОПЕРАТОР — отображение A множества M топологического векторного пространства X в топологическое векторное пространство Y такое, что существует ограниченное множество $N \subset M$, образ к-рого $A(N)$ есть неограниченное множество в Y.

Простейшим примером Н. о. является оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$, определенный на множестве $C_1[a, b]$ всех непрерывно дифференцируемых функций пространства $C[a, b]$ всех функций, непрерывных на $a \leqslant t \leqslant b$, так как оператор $\frac{d}{dt}$ переводит ограниченное множество $\{\sin nt\}$ в неограниченное множество $\{n \cos nt\}$. Н. о. A необходимо разрывен в нек-рых (а если A линеен, то и во всех) точках своей области определения. Поэтому важным классом Н. о. являются *замкнутые операторы*, обладающие свойством, в нек-рой степени заменяющим свойство непрерывности.

Пусть A и B — Н. о. с областями определения D_A и D_B. Если $D_A \cap D_B \neq \varnothing$, то на этом пересечении определен оператор $(\alpha A + \beta B)x = \alpha Ax + \beta Bx$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), и аналогично, если $D_A \cap A^{-1}(D_B) \neq \varnothing$, то определен оператор $(BA)x = B(Ax)$. В частности, таким образом определяются степени A^k, $k = 1, 2, \ldots$, Н. о. A. Оператор B наз. р а с ш и р е н и е м оператора A, $B > A$, если $D_A \subset D_B$ и $Bx = Ax$ для $x \in D_A$. Так, $B(A_1 + A_2) \supset BA_1 + BA_2$. Перестановочность двух операторов обычно рассматривается для того случая, когда один из операторов ограничен: Н. о. A перестановочен с ограниченным оператором B, если $BA \subset AB$.

Для линейных Н. о. определяется понятие сопряженного оператора. Пусть Н. о. A, заданный на множестве D_A, плотном в топологическом векторном пространстве X, действует в топологическое векторное пространство Y. Если X^* и Y^* — пространства, сильно сопряженные соответственно с X и Y, и D_{A^*} — совокупность линейных функционалов $\varphi \in Y^*$, для к-рых существует линейный функционал $f \in X^*$ такой, что $\langle Ax, \varphi \rangle = \langle x, f \rangle$ при всех $x \in D_A$, то соответствие $\varphi \leftrightarrow f$ определяет на D_{A^*} (к-рое, впрочем, может состоять лишь из нулевого элемента) пространства Y^* оператор A^*, наз. оператором, с о п р я ж е н н ы м с A.

Лит.: [1] И о с и д а К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д ж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [3] Р и с с Ф., С е к е ф а л ь в и - Н а д ь Б., Лекции по функциональному анализу, 2 изд., пер. с франц., М., 1979; [4] Л ю с т е р н и к Л. А., С о б о л е в В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [5] Н е й м а н Дж., Математические основы квантовой механики, пер. с нем., М., 1964.

В. И. Соболев.

НЕОПРЕДЕЛЕННОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, содержащее более одного неизвестного. Систему урав-

нений, в к-рой число неизвестных больше числа уравнений, наз. неопределенной системой уравнений. Н. у. и неопределенные системы уравнений имеют, как правило, бесконечное число решений. Термин «Н. у.» употребляется в теории чисел, где интересуются решениями Н. у., удовлетворяющих тем или иным арифметич. условиям (обычно ищут решения Н. у. в целых или рациональных числах). Изучение таких решений составляет предмет теории *диофантовых уравнений*. *БСЭ-3.*

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ РАСКРЫТИЕ — методы вычисления пределов функций, заданных формулами, к-рые в результате формальной подстановки в них предельных значений аргумента теряют смысл, т. е. переходят в выражения типа

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,$$

по к-рым нельзя судить о том, существуют или нет искомые пределы, не говоря уже о нахождении их значений, если они существуют. Основным инструментом для раскрытия неопределенностей служит *Тейлора формула*, с помощью к-рой выделяется главная часть функции. Так, в случае неопределенности типа 0/0, для того чтобы найти предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

где

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0,$$

функции f и g представляют по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 (если это возможно) до первого не равного нулю члена:

$$f(x)=a(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\quad a\neq 0,$$
$$g(x)=b(x-x_0)^m+o((x-x_0)^m),\quad b\neq 0,$$

в результате получается, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{n-m}=\begin{cases}0, & \text{если } n>m,\\ \frac{a}{b}, & \text{если } n=m,\\ \infty, & \text{если } n<m.\end{cases}$$

В случае неопределенности типа ∞/∞ для нахождения предела

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

где

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty,$$

применяют преобразование

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}},$$

сводящее задачу к раскрытию неопределенности типа 0/0.

Неопределенности типа $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ также целесообразно приводить к виду 0/0 следующими преобразованиями:

$$f(x)\,g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},\quad f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\,\frac{1}{g(x)}}$$

соответственно.

Для раскрытия неопределенностей типа 0^0, ∞^0, 1^∞ целесообразно первоначально прологарифмировать выражения, предел к-рых требуется найти.

Другим общим методом раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ и сводимых к ним является *Лопиталя правило.* *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИНЦИП, принцип Гейзенберга,— один из важнейших принципов квантовой механики, утверждающий, что дисперсии значений двух физич. величин a и b, описываемых некоммутирующими операторами $\hat{a}$ и $\hat{b}$, коммутатор $[\hat{a}, \hat{b}]$ к-рых отделен от нуля, в любом состоянии физич. системы не могут одновременно быть очень малыми.

Точнее, пусть $\varphi \in H$, $\|\varphi\| = 1$,— состояние физич. системы (H — гильбертово пространство таких состояний, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в H) и $\Delta_\varphi^a = [(\hat{a}^2\varphi, \varphi) - (\hat{a}\varphi, \varphi)^2]^{1/2}$ — дисперсия величины a в состоянии φ; аналогично определяется Δ_φ^b. Всегда верно неравенство

$$\Delta_\varphi^a \Delta_\varphi^b \geqslant \frac{1}{2} |([\hat{a}, \hat{b}]\varphi, \varphi)|.$$

В частности, координаты x, y, z квантовой частицы и составляющие ее импульса p_x, p_y, p_z при всех стандартных способах квантования (что означает выбор пространства H и правила сопоставления физич. величинам самосопряженных операторов, действующих в H) представляются операторами $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ и $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$ такими, что

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] = [\hat{p}_y, \hat{y}] = [\hat{p}_z, z] = i\hbar E,$$

где E — единичный оператор в H, а $\hbar$ — т. н. постоянная Планка. Таким образом, для любого $\varphi \in H$

$$\Delta_\varphi^{p_x} \Delta_\varphi^x \geqslant \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta_\varphi^{p_y} \Delta_\varphi^y \geqslant \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta_\varphi^{p_z} \Delta_\varphi^z \geqslant \frac{\hbar}{2}.$$

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 3 изд., М., 1974. *Р. А. Минлос.*

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл

$$\int f(x)\, dx \qquad (*)$$

от заданной функции одного переменного, определенной на нек-ром промежутке — совокупность всех первообразных данной функции на этом промежутке. Если функция f определена на нек-ром промежутке Δ числовой оси и F — нек-рая ее первообразная на Δ, т. е. $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in \Delta$, то всякая другая первообразная функция f на Δ имеет вид $F + C$, где C — нек-рая постоянная. Следовательно, Н. и. (*) состоит из всевозможных функций вида $F + C$.

Неопределенным интегралом Лебега от суммируемой на отрезке $[a, b]$ функции f наз. совокупность всех функций вида

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + C.$$

В этом случае равенство $F'(x) = f(x)$ выполняется, вообще говоря, лишь почти всюду на отрезке $[a, b]$.

Неопределенным интегралом Лебега (в широком смысле) от суммируемой функции f, определенной на измеримом пространстве X с мерой μ, наз. функция множеств

$$\int_E f(x)\, d_\mu x,$$

определенная на множестве всех измеримых множеств E пространства X.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975; [3] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971. *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕТОД — нахождение искомой функции в виде точной или приближенной линейной комбинации (конечной или бесконечной) известных функций. Указанная линейная комбинация берется с неизвестными коэффициентами, к-рые определяются тем или иным способом из условий рассматриваемой задачи. Обычно для них получается система алгебраич. уравнений.

Классич. примером Н. к. м. является его использование для разложения правильной рациональной дроби в комплексной или действительной области на элементарные дроби. Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ алгебраич. многочлены с комплексными коэффициентами, причем степень n многочлена $P(z)$ меньше степени m многочлена $Q(z)$, коэффициент при старшем члене многочлена $Q(z)$ равен 1, z_i — корень многочлена $Q(z)$ кратности α_i, $i=1, 2, \ldots, k$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_k=n$ и, следовательно,

$$Q(z)=(z-z_1)^{\alpha_1}\ldots(z-z_k)^{\alpha_k}.$$

Правильная рациональная дробь $P(z)/Q(z)$ представима и притом единственным образом в виде

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{\alpha_i}\frac{A_{i\nu}}{(z-z_i)^{\nu}}, \qquad (1)$$

где $A_{i\nu}$ — неизвестные пока комплексные числа (их всего m). Для их отыскания обе части равенства приводят к общему знаменателю. После его отбрасывания и приведения в правой части подобных членов получается равенство, в каждой части к-рого стоят многочлены степени не выше чем $m-1$: в левой части с известными коэффициентами, в правой — в виде линейных комбинаций неизвестных чисел $A_{i\nu}$. Приравниванием коэффициентов у одинаковых степеней переменного z получается система m линейных уравнений относительно $A_{i\nu}$, к-рая в силу существования и единственности разложения (1) имеет и притом единственное решение. Иногда бывает удобно использовать несколько иные приемы нахождения коэффициентов $A_{i\nu}$. Напр., пусть все корни многочлена $Q(z)$ простые и, следовательно, разложение (1) имеет вид

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{z-z_i}.$$

После приведения к общему знаменателю обеих частей и его отбрасывания получается равенство

$$P(z)=\sum_{i=1}^{m}A_i\prod_{k=1,\ k\neq i}^{m}(z-z_k).$$

Полагая в нем последовательно $z=z_i$, $i=1, 2, \ldots, m$, сразу получают

$$A_i=P(z_i)/\prod_{i=1,\ k\neq i}^{m}(z_i-z_k).$$

В общем случае бывает полезно комбинировать оба указанных приема нахождения коэффициентов $A_{i\nu}$.

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами,

$$Q(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_k)^{\alpha_k}\times$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_lx+q_l)^{\beta_l},$$

где $x_1, \ldots, x_k$ — действительные корни многочлена $Q(x)$ соответственно кратностей $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, а квадратный трехчлен $x^2+p_jx+q_j$ с действительными коэффициентами p_j, q_j является произведением $(x-z_j)(x-\overline{z_j})$, где z_j — существенно комплексный корень кратности β_j, $j=1, 2, \ldots, l$, многочлена $Q(z)$ и

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i+2\sum_{j=1}^{l}\beta_j=m.$$

Тогда для правильной рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ существует и притом единственное разложение вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i\mu}}{(x-x_i)^{\mu}} + \\ + \sum_{j=1}^{l} \sum_{\nu=1}^{\beta_j} \frac{M_{j\nu}x + N_{j\nu}}{(x^2+p_jx+q_j)^{\nu}}, \qquad (2)$$

где коэффициенты $A_{i\mu}$, $\mu=1, 2, \ldots, \alpha_i$, $i=1, 2, \ldots, k$, $M_{j\nu}$ и $N_{j\nu}$, $\nu=1, 2, \ldots, \beta_j$, $j=1, 2, \ldots, l$, суть действительные числа. Метод их отыскания тот же, что и в описанном выше комплексном случае: равенство (2) приводится к общему знаменателю, после отбрасывания к-рого приравниваются коэффициенты у одинаковых степеней переменной x в обеих частях равенства. В результате получается система m уравнений с m неизвестными $A_{i\mu}$, $M_{j\nu}$ и $N_{j\nu}$, имеющая единственное решение.

Разложение правильных рациональных дробей на элементарные применяется, напр., для разложения рациональных дробей в ряд Лорана (в частности, в ряд Тейлора), для интегрирования рациональных дробей. Н. к. м. используется также при интегрировании рациональных дробей с помощью *Остроградского метода*, при интегрировании функций вида $P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}$. В этом случае интеграл имеет вид

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \\ = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (3)$$

где степень многочлена $Q(x)$ на единицу меньше степени многочлена $P(x)$. Для нахождения коэффициентов многочлена $Q(x)$ и числа λ равенство (3) дифференцируется. После приведения к общему знаменателю и его отбрасывания приравниваются коэффициенты у одинаковых степеней переменной x. В результате снова получается система линейных уравнений с единственным решением. Подобные методы интегрирования могут быть применены и в нек-рых других случаях.

Н. к. м. применяется при отыскании решений дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными) в виде степенных рядов. Для этого в окрестности рассматриваемой точки степенной ряд с неопределенными коэффициентами подставляется в данное уравнение. Иногда в результате для коэффициентов ряда получаются соотношения, из к-рых с помощью заданных начальных или граничных условий удается найти эти коэффициенты, а следовательно, и решение уравнения в виде ряда. Напр., решая таким образом *гипергеометрическое уравнение*, можно получить разложение в ряд *гипергеометрической функции*.

Н. к. м. применяется и в др. способах решения дифференциальных уравнений, напр. *Галеркина метода*, *Ритца метода*, *Треффца метода*; используется в численных методах: в методе Крылова получения коэффициентов векового уравнения, при приближенном решении интегральных уравнений. *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕТОД построения численных алгоритмов — специальный метод построения алгоритмов, основанный на требовании, чтобы алгоритм был точен или имел погрешность определенного порядка точности на нек-ром множестве задач.

Типичным примером задач, к-рые наряду с другими методами могут решаться Н. к. м., являются следующие (см. [1], [2]). Известны значения функции $f(P_1), \ldots, f(P_N)$. Требуется построить формулу для приближения функции:

$$f(P) \approx g(f(P_1), \ldots, f(P_N), P);$$

формулу для вычисления производной:

$$Df \approx g_D(f(P_1), \ldots, f(P_N), P);$$

формулу для вычисления интеграла:

$$I(f) = \int_\Omega f(P)\, p(P)\, dP \approx g_I(f(P_1), \ldots, f(P_N)).$$

Для решения последней из этих задач задаются нек-рой формой приближенного решения, напр. линейной

$$g_I = \sum_{n=1}^{N} C_n f(P_n),$$

и определяют коэффициенты C_n из требования, чтобы приближенная формула $I(f) \approx g$ была точной для функций из нек-рой совокупности, напр. вида

$$f(P) = \sum_{m=1}^{M} a_m \omega_m(P),$$

где $\omega_m(P)$ фиксированы, a_m произвольны. Как правило, берут $M=N$. Чтобы равенство

$$I\left(\sum_{m=1}^{M} a_m \omega_m\right) = \sum_{n=1}^{N} C_n \left(\sum_{m=1}^{M} a_m\, \omega_m(P_n)\right)$$

выполнялось при всех a_m, достаточно выполнения соотношений

$$I(\omega_m) = \sum_{n=1}^{N} C_n \omega_m(P_n), \quad m=1, \ldots, M.$$

Отсюда определяют (если это возможно) искомые C_n.

Иногда задаются более сложной формой зависимости. Напр., при приближении функций часто известно, что рассматриваемая функция хорошо приближается функциями вида

$$g(a_1, \ldots, a_M, P),$$

где a_m неизвестны. Параметры a_m подбирают из системы уравнений

$$g(a_1, \ldots, a_M, P_n) = f(P_n), \quad n=1, \ldots, N.$$

В случае формул численного интегрирования в качестве неизвестных параметров часто выступают и координаты узлов интегрирования. Напр., в квадратурных формулах Гаусса вида

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, p(x)\, dx \approx \sum_{n=1}^{N} C_n f(P_n)$$

рассматриваются как свободные параметры координаты узлов P_n; благодаря этому удается построить квадратуры, точные для многочленов степени $2N-1$. При конструировании аппроксимаций дифференциальных уравнений с помощью Н. к. м. требуют, чтобы при подстановке в конечноразностную схему решения задачи получалась величина рассогласования (*невязка*) требуемого порядка малости по отношению к шагу сетки. Такой прием положен в основу способов построения методов Рунге — Кутта и конечноразностных методов (см. [1], [2]).

Особенно широко Н. к. м. используется при построении аппроксимаций уравнений с частными производными (см. [3]).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; 2 изд., т. 2, М., 1962; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы. Введение в теорию, 2 изд., М., 1977. *Н. С. Бахвалов.*

НЕОРИЕНТИРУЕМОЕ МНОГООБРАЗИЕ — многообразие, не допускающее *ориентации*. Таковы, напр., *Мёбиуса лист*, *Клейна поверхность*, проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ четной размерности. *М. И. Войцеховский.*

НЕОСОБАЯ ГРАНИЧНАЯ ТОЧКА, правильная граничная точка,— *достижимая граничная точка* ζ области определения D однозначной аналитич. функции $f(z)$ комплексного переменного z такая, что $f(z)$ аналитически продолжается в ζ вдоль

любого пути, ведущего из D в ζ. Иначе говоря, Н. г. т.— это достижимая граничная точка, не являющаяся особой граничной точкой. См. также *Особая точка аналитической функции.* *Е. Д. Соломенцев.*

НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ПРОМЕЖУТОК, промежуток несопряженности,— связный промежуток J числовой оси $\mathbb{R}$ такой, что любое нетривиальное решение $x=x(t)$ линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка с действительными коэффициентами

$$x^{(n)}+a_1(t)\,x^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)\,x=0, \qquad (*)$$

имеет на нем самое большее $n-1$ нулей, считая m-кратный нуль за m нулей. Свойства решений уравнения (*) на Н. п. хорошо изучены (см., напр., [1] — [3]). Имеются различные обобщения понятия Н. п. для линейных систем дифференциальных уравнений, для нелинейных дифференциальных уравнений, а также для других типов уравнений (разностных, с отклоняющимся аргументом).

Лит.: [1] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [2] Левин А. Ю., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 2, с. 43—96; [3] Coppel W. A., Disconjugacy, B.— N. Y., 1971.

Ю. В. Комленко.

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СТАТИСТИКИ — методы математич. статистики, не предполагающие знания функционального вида генеральных распределений. Название «непараметрические методы» подчеркивает их отличие от классических — параметрических — методов, в к-рых предполагается, что генеральное распределение известно с точностью до конечного числа параметров, и к-рые позволяют по результатам наблюдений оценивать неизвестные значения этих параметров и проверять гипотезы относительно их значений.

Пример. Пусть $X_1, \ldots, X_m$ и $Y_1, \ldots, Y_n$— две независимые выборки, извлеченные из совокупностей с непрерывными генеральными функциями распределения F и G; и пусть проверяется гипотеза H_0 о равенстве распределений F и G против альтернативы сдвига, т. е. гипотезы

$$H_1 : G(t)=F(t-\theta)$$

для всех t и нек-рого $\theta\neq 0$. В классич. варианте этой задачи предполагается, что функции распределения F и G нормальны, и для проверки рассматриваемой гипотезы используется *Стьюдента критерий*. При непараметрич. постановке задачи о виде F и G не делается никаких предположений, кроме непрерывности. Типичным непараметрич. критерием для проверки гипотезы H_0 против H_1 является *Вилкоксона критерий*, основанный на сумме рангов элементов первой выборки в общем вариационном ряду. Гипотезу о равенстве распределений отвергают, если вычисленная по наблюдениям статистика критерия оказывается слишком большой или слишком малой. Статистика критерия Вилкоксона проста для вычислений, а ее распределение при H_0 не зависит от F. Критич. значения, отвечающие заданному *значимости уровню* при небольших значениях m и n, находят по таблицам (см., напр., [1]); при больших m и n пользуются нормальной аппроксимацией.

В ряде случаев важно не столько проверить гипотезу об отсутствии сдвига, сколько оценить этот сдвиг θ, к-рый может интерпретироваться, напр., как изменение урожайности при смене способа обработки почвы или дополнительное время сна при применении снотворного. Оценка параметра θ посредством величины $\overline{Y}-\overline{X}$, к-рая вполне удовлетворительна в нормальном случае, является очень неустойчивой к отклонениям от нормальности и может даже не быть состоятельной. Гораздо лучшими свойствами в этом отношении обла-

дает непараметрич. оценка θ (см. [2]): медиана набора mn чисел $Y_j - X_i$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$. Эта оценка тесно связана с критерием Вилкоксона. Можно сказать, что она находится в том же отношении к оценке $\overline{Y}-\overline{X}$, в каком критерий Вилкоксона находится к критерию Стьюдента.

Несмотря на многообразие задач, решаемых с помощью непараметрич. методов, эти задачи можно условно разделить на две большие части: задачи проверки гипотез и задачи оценки неизвестных распределений и параметров, к-рые понимаются как нек-рые функционалы от этих распределений.

Непараметрич. проверка статистич. гипотез — наиболее развитая часть Н. м. с. Требуется построить процедуру (критерий), позволяющую принять или отвергнуть проверяемую гипотезу при заданной альтернативе. Типичным примером является проверка согласия, другими важными для приложений примерами являются проверка симметрии, независимости и случайности.

Задача проверки согласия состоит в том, что по выборке из совокупности с генеральной функцией распределения G требуется проверить гипотезу о том, что $G=F$, где F — заданная непрерывная функция распределения. Непараметрич. характер задачи проявляется здесь в непараметричности альтернативы, к-рая может быть сформулирована, напр., в одностороннем варианте: $F<G$ или $F>G$, либо в двустороннем: $F\neq G$.

Задача проверки симметрии заключается в проверке симметрии генеральной функции распределения G относительно заданной точки x_0, т. е. равенства

$$G(x_0+t)+G(x_0-t)=1.$$

В качестве альтернатив могут выступать односторонние условия

$$G(x_0+t)+G(x_0-t)\geqslant 1,$$

$$G(x_0+t)+G(x_0-t)\leqslant 1$$

со строгим неравенством хотя бы для одного t либо двустороннее условие того же типа.

Задача проверки независимости возникает в тех случаях, когда необходимо проверить, являются ли независимыми два признака, наблюдаемые у одного и того же объекта, по независимым наблюдениям над такими объектами. Сходным образом формулируется и гипотеза случайности, когда предполагается, что элементы выборки — независимые и одинаково распределенные величины. Наряду с альтернативами общего вида встречаются случаи, когда оказывается возможным указать, чем именно будут отличаться распределения элементов выборки при альтернативе; так возникают, напр., альтернативы тренда и регрессии.

Способы алгоритмич. построения непараметрич. процедур с заданными свойствами разработаны пока недостаточно, и большую роль в выборе подходящей процедуры играют обычно интуиция и эвристич. соображения. На этом пути накоплено большое количество способов и приемов решения часто встречающихся непараметрич. задач (см. [3]).

Большая группа непараметрич. критериев основана на использовании эмпирич. функции распределения. Пусть F_n — эмпирич. функция распределения, построенная по выборке объема n из совокупности с генеральной функцией распределения F. В силу теоремы Гливенко — Кантелли

$$\sup_t |F_n(t)-F(t)| \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n\longrightarrow\infty$$

с вероятностью 1. Таким образом, эмпирическая и истинная функции распределения с вероятностью 1

неограниченно сближаются, и на мере их близости можно основывать критерии согласия с гипотезой об истинной функции распределения.

Первыми критериями этого типа были *Колмогорова критерий* и *Крамера — Мизеса критерий*, предложенные в начале 30-х гг. 20 в. и основанные соответственно на статистиках

$$D_n = \sqrt{n}\sup_t |F_n(t) - F(t)|$$

и

$$\omega_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty}(F_n(t) - F(t))^2\,dF(t).$$

Следует отметить, что обе эти статистики имеют распределения, не зависящие от генеральной функции распределения F, если только последняя непрерывна. Их предельные распределения, найденные в середине 30-х гг. А. Н. Колмогоровым и Н. В. Смирновым, табулированы, что позволяет приближенно найти границу критич. области, отвечающей заданному уровню значимости (см. [1]).

Предложено и изучено много вариантов критериев согласия, основанных на разности F_n и F, напр. *Реньи критерий*, критерии Андерсона — Дарлинга, Ватсона и др. (см. [4]). Для успешного их применения в случае больших выборок необходимо в первую очередь знать соответствующие предельные распределения. Последние могут быть найдены с помощью подхода, в соответствии с к-рым статистика критерия представляется в виде непрерывного функционала от эмпирич. процесса

$$\xi_n(t) = \sqrt{n}\,(G_n(t) - t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где $G_n(t)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке объема n из равномерного распределения на $[0, 1]$. Процесс $\xi_n(t)$ слабо сходится в пространстве $D[0,1]$ к нек-рому гауссовскому процессу, т. н. броуновскому мосту (см. [6]). Поэтому предельное распределение изучаемой статистики совпадает с распределением соответствующего функционала от броуновского моста, к-рое вычисляется с помощью стандартных методов.

Существуют модификации статистик D_n и ω_n^2, предназначенные для проверки гипотез о распределении в многомерном случае, а также для проверки гипотез независимости и симметрии. В этих случаях возникает ряд дополнительных трудностей. Напр., в многомерном случае все рассмотренные статистики теряют свойство универсальности (независимости от исходного распределения). Наиболее важен случай равномерного распределения на единичном кубе, поскольку выборку из многомерного распределения можно тем или иным способом превратить в выборку из равномерного распределения. Однако ни точное, ни предельное распределения статистики Колмогорова неизвестны (1982) даже в этом простом случае. Сходные затруднения появляются и в том случае, когда проверяется не простая, а сложная гипотеза о распределении, т. е. если предполагается, что генеральная функция распределения имеет вид $F(t, \theta)$, где θ — неизвестный параметр, одномерный или многомерный. В этом случае естественно оценить θ по выборке, напр. посредством оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}_n$, и сравнивать $F_n(t)$ с $F(t, \hat{\theta}_n)$. Статистики D_n, ω_n^2 и их разновидности можно построить, как и в случае простой гипотезы. Однако распределения этих статистик — как точные, так и предельные — оказываются снова зависящими от вида F, а во многих случаях — и от неизвестного истинного значения θ. Задача вычисления этих распределений трудна и точный вид их неизвестен, хотя для статистик типа ω_n^2 в ряде случаев удается составить таблицы предельного распределения (см. [5]).

Для нек-рых других статистик известны процентные точки, вычисленные экспериментальным путем.

Наряду с рассмотренными выше критериями согласия строятся их двухвыборочные и многовыборочные аналоги, к-рые могут использоваться как для проверки согласия, так и для проверки однородности нескольких выборок (см. *Смирнова критерий*).

Общим свойством критериев согласия и однородности, основанных на эмпирич. функции распределения, является состоятельность против любых альтернатив. Однако выбор той или иной статистики в практич. задаче затруднен недостаточной изученностью их мощностных свойств. При больших объемах выборок можно опираться на значения асимптотич. относительной эффективности (АОЭ) по Питмену, вычисленные для ряда наиболее простых статистик (см. [7]).

Другую группу непараметрич. критериев образуют *ранговые критерии*. Наиболее раннее использование рангового критерия знаков встречается у Дж. Арбетнотта (J. Arbuthnott, 1710), к-рый использовал его при анализе статистич. данных о рождаемости мальчиков и девочек для получения «аргументов в пользу божественного провидения». Однако современный период развития ранговых критериев начинается в кон. 30-х гг. 20 в. После опубликования в 1945 работы Ф. Вилкоксона (F. Wilcoxon), в к-рой был предложен ранговый критерий, носящий его имя, ранговые методы вступают в период интенсивного развития.

Использование ранговых процедур основано на следующем соображении. Поскольку вектор рангов вместе с вектором порядковых статистик содержит всю информацию, содержащуюся в выборке, то нек-рая доля этой информации содержится только в ранговом векторе. Поэтому можно строить статистич. процедуры, основываясь только на рангах и не используя знание самих выборочных значений. Преимуществом таких процедур является вычислительная простота, вытекающая из целочисленности рангов. Другой важной особенностью ранговых процедур является их применимость и в тех случаях, когда наблюдения носят не количественный, а качественный характер, лишь бы они допускали упорядочение, что особенно важно в исследованиях по социологии, психологии и медицине. Наконец, распределения ранговых статистик при основной гипотезе не зависят от генерального распределения, что позволяет раз и навсегда вычислить эти распределения.

По мере развития ранговых методов выяснилось, что доля информации, содержащаяся в векторе рангов, может оказаться значительной, что обеспечивает этим процедурам высокую эффективность. В рассмотренном выше примере, связанном с проверкой однородности двух выборок, расширение области применимости критерия приводит к потере в мощности, и в нормальном случае критерий Стьюдента имеет бо́льшую мощность, нежели любой ранговый критерий. Однако при большом числе наблюдений критерий Вилкоксона мало проигрывает критерию Стьюдента. Оказывается, что в нормальном случае АОЭ критерия Вилкоксона по отношению к критерию Стьюдента равна $3/\pi = 0{,}955$. Если же генеральное распределение отлично от нормального, то указанная АОЭ может быть сколь угодно большой, но никогда не опускается ниже значения 0,864 (см. [4]). Более того, существует ранговый критерий (т. н. критерий нормальных меток), АОЭ к-рого по отношению к критерию Стьюдента равна 1 в нормальном случае и превосходит 1 при любом отклонении от нормальности. Таким образом, этот критерий асимптотически оказывается предпочтительнее критерия Стьюдента.

Другой пример связан с проверкой гипотезы симметрии. Пусть выборка $X_1, \ldots, X_n$ извлечена из совокупности с генеральной плотностью f и проверяется ги-

потеза о симметричности f относительно нуля снова при альтернативе сдвига. Наиболее простым критерием в этой задаче является *знаков критерий*, основанный на числе положительных значений среди X_i. Знаково-ранговый критерий Вилкоксона основан на статистике $\sum_{X_i>0} R_i^+$, где R_i^+ — ранг элемента X_i в вариационном ряду для $|X_1|, \ldots, |X_n|$. Статистика этого критерия использует не только информацию о знаках наблюдений, но и информацию о их величине. Поэтому можно рассчитывать, что критерий Вилкоксона окажется более эффективным, чем критерий знаков. Действительно, АОЭ этих критериев по отношению к критерию Стьюдента равна соответственно $3/\pi=0{,}955$ и $2/\pi=0{,}637$ (в нормальном случае). Таким образом, критерий Вилкоксона в 1,5 раза превосходит критерий знаков и мало уступает критерию Стьюдента.

Еще один пример связан с проверкой гипотезы независимости. Пусть имеется ряд объектов, каждый из к-рых обладает двумя признаками, количественными или качественными (математические и музыкальные способности учащегося, цвет и спелость ягоды, и т. д.). Предполагается, что наблюдения над качественными признаками могут быть упорядочены. Требуется по n независимым наблюдениям над объектами проверить гипотезу о независимости признаков против, напр., альтернативы их положительной зависимости. Пусть R_i и S_i ранги признаков, соответствующие i-му наблюдению. Естественный критерий для проверки независимости основан на коэффициенте ранговой корреляции Спирмена r_s, к-рый может быть вычислен по формуле

$$r_s = 1 - \frac{6\sum (R_i - S_i)^2}{n^3 - n}.$$

Гипотеза независимости отвергается при больших, т. е. близких к 1, значениях r_s. Критич. значения при малых n находят по таблицам, при больших n пользуются нормальной аппроксимацией. АОЭ критерия, основанного на r_s, по отношению к критерию, основанному на выборочном коэффициенте корреляции, снова довольно высока и равна $9/\pi^2=0{,}912$ (см. [9]).

Поскольку для проверки каждой непараметрич. гипотезы существует много ранговых критериев, предложенных часто из эвристич. соображений, выбор критерия следует основывать на каких-либо соображениях оптимальности. Как известно, равномерно наиболее мощные критерии в классе всех возможных альтернатив редко существуют даже в параметрич. случае. Поэтому роль оптимальных ранговых критериев для конечных объемов выборок выполняют локально наиболее мощные критерии. Так, напр., критерий Вилкоксона является локально наиболее мощным в двухвыборочной задаче проверки однородности против альтернативы сдвига для логистич. распределения с плотностью $e^x(1+e^x)^{-2}$, а критерий нормальных меток — в той же задаче для нормального распределения. В асимптотич. теории для отражения свойства оптимальности используются те или иные понятия асимптотич. эффективности, причем локально наиболее мощные критерии обычно оказываются и асимптотически оптимальными (см. [8]).

В теории ранговых критериев предполагают, что распределения наблюдений непрерывны, так что наблюдения могут быть упорядочены без совпадений, и ранговые статистики определяются однозначно. Однако на практике наблюдения всегда округляются, и поэтому совпадения будут иногда появляться. Наиболее употребительны следующие два способа преодоления этой трудности. Первый состоит в том, чтобы упорядочить совпавшие наблюдения случайным образом. При втором методе каждому из группы совпавших наблюдений припи-

сывается средний ранг этой группы. Достоинства обоих методов исследованы пока недостаточно.

Непараметрич. оценивание представляет собой раздел непараметрич. статистики, имеющий дело с задачами оценки неизвестных распределений или функционалов от них таких, как квантили, моменты, мода, энтропия, информация по Фишеру и т. д.

Общепринятой оценкой неизвестной функции распределения является эмпирич. функция распределения. Сильная равномерная состоятельность ее как оценки неизвестной функции распределения следует из теоремы Гливенко — Кантелли, а минимаксный характер установлен в [10]. Состоятельное же оценивание неизвестной плотности распределения представляет собой более сложную задачу. Для корректной постановки задачи оценивания необходима дополнительная априорная информация о классе плотностей F, к к-рому принадлежит оцениваемая плотность f. В классич. постановке априорное семейство плотностей задается в параметрич. форме и определяется конечномерным вектором неизвестных параметров. При непараметрич. постановке задача приобретает бесконечномерный характер, и точность оценивания неизвестной плотности существенно зависит (см. [11]) от геометрич. характеристик «массивности» класса F. В качестве последних используются, напр., n-мерный поперечник и n-мерный внутренний радиус класса F.

Наиболее распространенными оценками неизвестной плотности f являются оценки

$$f_n(t)=\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{t-X_i}{h_n}\right),$$

где X_i — наблюдения, функция K абсолютно интегрируема и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(x)\,dx=1,$$

а последовательность h_n такова, что $h_n\to 0$, $nh_n\to\infty$. В нек-рых случаях используются другие непараметрич. оценки плотности: более простые (гистограмма, полигон частот) или более сложные, напр. проекционные оценки Ченцова. Вопрос о точности приближения этими оценками неизвестной плотности в зависимости от свойств класса F хорошо изучен (см. [11], [12]).

Эмпирич. функцию распределения и непараметрич. оценку плотности можно использовать для оценки функционалов от неизвестных генеральных распределений; для этого достаточно подставить в выражение для оцениваемого функционала вместо неизвестного распределения его оценку. Сама идея и начало ее реализации восходит к работам Р. Мизеса (R. Mises) 30—40-х гг. 20 в. Доказано, что при нек-рых ограничениях на класс оцениваемых функционалов и на непараметрич. класс распределений существует минимаксная граница снизу качества непараметрич. оценок (см. [12]). Непараметрич. оценивание тесно связано с проблемой построения робастных оценок.

Лит.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [2] Hodges J., Lehmann E., «Ann. Math. Stat.», 1963, v. 34, № 2, p. 598—611; [3] Walsh J. E., Handbook of nonparametric statistics, v. 1—3, Princeton, 1962, 1965, 1968; [4] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [5] Мартынов Г. В., Критерии омега — квадрат, М., 1978; [6] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [7] Wieand H., «Ann. Stat.», 1976, v. 4, № 5, p. 1003—11; [8] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [9] Кендэл М., Ранговые корреляции, пер. с англ., М., 1975; [10] Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J., «Ann. Math. Stat.», 1956, v. 27, № 3, p. 642—69; [11] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [12] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [13] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [14] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [15] Шметтерер Л., Введение в

математическую статистику, пер. с нем., М., 1976; [16] Lehmann E., Nonparametrics: statistical methods based on ranks, S. F.— N. Y., 1975. *Я. Ю. Никитин.*

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ — *статистический критерий* для проверки гипотезы $H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ против альтернативы $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$, когда сама задача статистич. проверки H_0 против H_1 является непараметрической, т. е., по крайней мере, одно из двух параметрич. множеств Θ_0 и Θ_1 не является топологически эквивалентным подмножеству евклидова пространства. Наряду с этим определением широко распространено другое, согласно к-рому статистич. критерий наз. непараметрическим, если статистич. выводы, получаемые с помощью этого критерия, не зависят от распределений вероятностей случайных величин, по результатам наблюдений к-рых проверяют H_0 против H_1. В этом случае вместо термина Н. к. часто употребляют термин «критерий, свободный от распределения». *Колмогорова критерий* является классич. примером Н. к. См. также *Непараметрические методы статистики*, *Колмогорова — Смирнова критерий*.

Лит.: [1] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, [2 изд.], М., 1968; [3] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [4] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973. *М. С. Никулин.*

НЕПАСКАЛЕВА ГЕОМЕТРИЯ — геометрия с некоммутативным умножением. Вследствие того, что в аффинной геометрии свойство коммутативности умножения эквивалентно *Паскаля теореме*, то непаскалевой обычно наз. геометрию, в к-рой не имеет места предложение: пусть на каждой из двух пересекающихся прямых даны три точки A, B, C и соответственно A_1, B_1, C_1, отличные от точки пересечения данных прямых; если CB_1 параллельна BC_1 и CA_1 параллельна AC_1, то BA_1 будет параллельна AB_1; эту теорему иногда наз. теоремой Паппа, она является частным случаем теоремы Паппа — Паскаля из теории конич. сечений.

Возможность построения Н. г. вытекает из того, что указанная теорема Паскаля не является следствием аксиом инцидентности, порядка, параллельности при условии исключения метрич. аксиом в системе аксиом Гильберта. С другой стороны, существование Н. г. связано также с возможностью построения геометрии над некоммутативным телом, то есть Н. г. является в то же время и *неархимедовой геометрией*.

Значение Н. г. определяется ролью теоремы Паскаля в исследованиях, связанных с установлением независимости системы аксиом, логич. связи между предложениями.

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Bieberbach L., Einleitung in die höhere Geometrie, Lpz.— B., 1933; [3] Скорняков Л. А., «Успехи матем. наук», 1951, т. 6, в. 6, с. 112—54. *Л. А. Сидоров.*

НЕПЕРОВО ЧИСЛО — см. *e* (число).

НЕПОДВИЖНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА — общая особая точка z_0 всех решений дифференциального уравнения $F(z, w, w')=0$ (F — аналитич. функция), рассматриваемых как функции $w(z)$ комплексного переменного z, начальные условия к-рых пробегают нек-рую область в пространстве (z, w).

Лит.: [1] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950. *Ю. С. Ильяшенко.*

НЕПОДВИЖНАЯ ТОЧКА — 1) Н. т. отображения F множества X — такая точка $x \in X$, что $F(x)=x$. Доказательства существования Н. т. и методы нахождения Н. т.— важные задачи математики, т. к. решение всякого уравнения $f(x)=0$ путем преобразования его к виду $x \pm f(x)=x$ сводится к нахождению Н. т. отображения $F=I \pm f$, где I — тождественный оператор. В зависимости от того, какой структурой наделе-

но множество X и каковы свойства отображения F, возникают те или иные принципы неподвижной точки. Наибольший интерес представляют случаи, когда X — топологич. пространство и F — непрерывный в том или ином смысле оператор.

Простейшим из таких принципов является принцип сжимающих отображений. Пусть X — полное метрич. пространство и оператор $F: X \to X$ таков, что

$$\rho(F(x),\ F(y)) \leqslant q\rho(x, y),\ 0<q<1. \tag{1}$$

Тогда оператор F имеет в точности одну Н. т. $\overline{x}$, к-рая может быть получена как предел последовательных приближений $x_n = F(x_{n-1})$, $n=1, 2, \ldots$, где $x_0 \in X$ произвольно. Этим принципом не только устанавливается существование Н. т., но и указывается способ ее нахождения, причем довольно просто оценивается быстрота сходимости последовательности $\{x_n\}$ к $\overline{x}$. В общем случае условие (1) нельзя заменить условием

$$\rho(F(x),\ F(y)) < \rho(x, y), \tag{2}$$

но если X компактно, то условие (2) по-прежнему обеспечивает наличие у оператора F единственной Н. т.

Более общим является принцип обобщенного сжатия. Пусть, как и выше, X — полное метрич. пространство, $F: X \to X$ и

$$\rho(F(x), F(y)) \leqslant q(\alpha, \beta,)\rho(x, y) \tag{3}$$

при $\alpha \leqslant \rho(x, y) \leqslant \beta$, где $q(\alpha, \beta) < 1$ для $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$. Тогда F имеет единственную Н. т. Если X — банахово пространство, то условие (1) есть не что иное, как условие Липшица для оператора F с константой, меньшей единицы. Принцип сжимающих отображений широко используется для доказательства существования и единственности решений алгебраических, дифференциальных, интегральных и других уравнений и для приближенного нахождения решений этих уравнений.

Существуют другие условия топологич. характера, обеспечивающие существование Н. т. у оператора F. Наиболее известным из них является принцип Шаудера. Пусть X — банахово пространство и F — вполне непрерывный оператор, отображающий ограниченное выпуклое замкнутое множество $C \subset X$ на свою часть. Тогда F имеет в C хотя бы одну Н. т. Однако в этом случае вопрос о числе Н. т. остается открытым, и нет указаний о способе их нахождения.

Пример (теорема Пеано). Пусть функция $f(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных в области $|t-t_0| \leqslant a$, $|x-x_0| \leqslant b$ и $\beta = \max |f(t,x)|$ в этой области. Если $h = \min\{a, b/\beta\}$, то на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$ существует хотя бы одно решение уравнения

$$x'(t) = f(t, x) \tag{4}$$

такое, что

$$x(t_0) = x_0. \tag{5}$$

Уравнение (4) вместе с условием (5) эквивалентно интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\ x(\tau))\, d\tau.$$

Оператор

$$F(x) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\ x(\tau))\, d\tau$$

в условиях теоремы отображает шар $\|x-x_0\| \leqslant b$ пространства $C[t_0-h, t_0+h]$ в себя и вполне непрерывен на этом шаре. Поэтому в силу принципа Шаудера существует Н. т. оператора F, к-рая и является решением задачи Коши (см. [4], [5]).

Обобщением принципа Шаудера является принцип Тихонова. Пусть X — отделимое локально вы-

пуклое пространство и F — непрерывный оператор, отображающий выпуклое компактное множество $C \subset X$ в себя. Тогда F имеет на C хотя бы одну Н. т. Существуют и другие обобщения принципа Шаудера, в том числе на многозначные отображения, однако во всех случаях необходимо предполагать выпуклость множества C, без чего теорема Шаудера и ее обобщения становятся неверными. Возможно комбинирование принципа Шаудера и принципа сжимающих отображений. Пусть оператор F, преобразующий ограниченное замкнутое выпуклое множество C банахова пространства X в себя, можно представить в виде $F=F_1+F_2$, где F_1 — вполне непрерывный и F_2 — сжимающий операторы. Тогда F имеет в C хотя бы одну Н. т.

Принципы шаудеровского типа могут быть следующим образом распространены на некомпактные операторы. Пусть M — ограниченное множество полного метрич. пространства X. Мерой некомпактности $\chi(M)$ этого множества наз. точная нижняя граница значений тех $\varepsilon>0$, при к-рых существует конечная ε-сеть для M. Для компактных множеств $\chi(M)=0$. Оператор $F: X \to X$ наз. уплотняющим, если $\chi(F(M))<\chi(M)$ для любого некомпактного ограниченного множества $M \subset X$. Пусть уплотняющий оператор F преобразует ограниченное выпуклое замкнутое множество $C \subset X$ в себя. Тогда F имеет в C хотя бы одну Н. т. В банаховых пространствах можно вводить и другие меры некомпактности, варьируя к-рые, можно получать разные варианты теоремы, позволяющие доказывать существование решений различных дифференциальных, интегральных и иных уравнений с не вполне непрерывными операторами.

Привлечение более тонких топологич. понятий позволяет сформулировать более сильные признаки существования Н. т. Пусть на границе ∂M ограниченной области M банахова пространства X задано невырожденное векторное поле Φ, т. е. каждой точке $x \in \partial M$ поставлен в соответствие ненулевой вектор $\Phi(x)$. Такому полю при выполнении нек-рых условий можно соотнести целое число, наз. вращением $\gamma(\Phi, \partial M)$ поля Φ на ∂M. Пусть сначала X конечномерно и Φ непрерывно на ∂M. Тогда $\gamma(\Phi, \partial M)$ определяется как топологич. степень отображения $\psi(x)=\Phi(x)/\|\Phi(x)\|$ множества ∂M на единичную сферу $\|x\|=1$. Пусть теперь X — банахово бесконечномерное пространство и $\Phi(x)=x-F(x)$, где F — вполне непрерывный на $\overline{M}$ оператор. Такие поля наз. вполне непрерывными.

Пусть конечномерное подпространство $X_n \subset X$ достаточно хорошо аппроксимирует $F(\overline{M})$ и P_n — оператор проектирования $F(\overline{M})$ на X_n. Если $\|P_nF(x)-F(x)\|$ достаточно мало для $x \in \partial M$, то поле $\Phi_n=I\partial-P_nF$ также невырождено на $\partial M \cap X_n$ и его вращение γ_n не зависит от выбора аппроксимирующих подпространств X_n и оператора P_n. Это число γ_n наз. вращением вполне непрерывного векторного поля Φ на границе ∂M и обозначается $\gamma(\Phi, \partial M)$. Важным свойством вращения является то, что оно не меняется при гомотопных преобразованиях поля Φ.

Принцип Лере — Шаудера. Пусть на замыкании $\overline{M}$ ограниченной области M банахова пространства X задано вполне непрерывное векторное поле Φ, невырожденное на ∂M, и пусть $\gamma(\Phi, \partial M) \neq 0$. Тогда Φ обращается в нуль по крайней мере в одной точке $x \in M$, т. е. оператор F имеет в M хотя бы одну Н. т. Инвариантность вращения при гомотопных преобразованиях позволяет вычислять вращение следующим образом. По заданному полю $\Phi(x)$ строится континуум полей $\Phi(x, \lambda)$, $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$, так, что все эти поля гомотопны друг другу и $\Phi(x, \lambda_0)=\Phi(x)$ при нек-ром $\lambda_0 \in [\alpha, \beta]$. Если при другом $\lambda \in [\alpha, \beta]$ вращение поля

$\Phi(x, \lambda)$ легко вычисляется и равно k, то также $\gamma(\Phi, \partial M)=k$. Этим приемом, использовавшим степень отображения для установления наличия Н. т. у вполне непрерывных операторов, получено доказательство существования решений ряда довольно сложных дифференциальных уравнений с частными производными высших порядков.

Усиливая требования, предъявляемые к пространству, можно ослабить ограничения, налагаемые на оператор. Напр., оператор F наз. нерастягивающим, если $\rho(F(x), F(y)) \leqslant \rho(x, y)$. Пусть банахово пространство равномерно выпукло (напр., гильбертово) и F — нерастягивающий оператор, преобразующий ограниченное замкнутое выпуклое множество $C \subset X$ в себя. Тогда F имеет на C хотя бы одну Н. т.

Все предыдущие принципы Н. т. предполагали непрерывность оператора F. Если наделить X структурой частично упорядоченного множества, то в нек-рых случаях требование непрерывности можно опустить.

Принцип Биркгофа — Тарского. Пусть X — полная решетка и F — изотонный оператор из X в X. Тогда F имеет по крайней мере одну Н. т. Имеет место следующий вариант этого принципа. Пусть X — условно полная решетка, т. е. всякое ограниченное подмножество множества X имеет в X точную верхнюю и нижнюю границы. Если F — изотонный оператор, отображающий порядковый интервал $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\} \subset X$ в себя, то F имеет на $[a, b]$ по крайней мере одну Н. т.

Комбинирование топологич. условий с порядковыми приводит к новым принципам Н. т. Напр., пусть X — частично упорядоченное банахово пространство и F — непрерывный изотонный оператор, отображающий порядковый интервал $[a, b]$ в себя. Если полуупорядочение пространства X правильное, т. е. всякая монотонно возрастающая порядково ограниченная последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится по норме пространства X, то оператор F имеет на $[a, b]$ хотя бы одну Н. т. При этом условия теоремы не требуют решеточной упорядоченности пространства X, т. е. не для всяких двух элементов x, $y \in X$ должен в X существовать их sup и inf. Наконец, Н. т. линейного оператора F есть собственный элемент этого оператора, соответствующий собственному значению, равному единице.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956; [3] Красносельский М. А., Забрейко П. П., Геометрические методы нелинейного анализа, М., 1975; [4] Немыцкий В. В., «Успехи матем. наук», 1936, в. 1, с. 141—74; [5] Лерэй Ж., Шаудер Ю., там же, 1946, т. 1, в. 3—4, с. 71—95; [5] Садовский Б. Н., там же, 1972, т. 27, в. 1, с. 81—146. *В. И. Соболев.*

2) Н. т. дробно-линейного преобразования A замкнутой комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ — точка $\rho \in \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющая уравнению

$$\rho = \frac{a\rho + b}{c\rho + d},$$

где

$$A : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad z \longrightarrow w = A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

есть дробно-линейное преобразование, a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc \neq 0$, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Если $A \neq I$ (I — тождественное преобразование $w = z$), то A имеет одну или две Н. т. С помощью Н. т. можно классифицировать *дробно-линейные отображения* (I из рассмотрения исключается). *О. М. Фоменко.*

3) Н. т. системы обыкновенных дифференциальных уравнений или динамической системы — см. *Равновесия положение.*

НЕПОЛНАЯ БЕТА-ФУНКЦИЯ — функция, определяемая формулой

$$I_x(a,\ b)=\frac{1}{\mathrm{B}(a,\ b)}\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt,$$

$$0\leqslant x\leqslant 1,\ a>0,\ b>0,$$

где

$$\mathrm{B}(a,\ b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Если a — целое, то

$$1-I_x(a,\ b)=\frac{(1-x)^b}{\mathrm{B}(a,\ b)}\sum_{i=0}^{a-1}(-1)^i C_{a-1}^i\frac{(1-x)^i}{b+i}=$$

$$=(1-x)^{a+b-1}\sum_{i=0}^{a-1}C_{a+b-1}^i\left(\frac{x}{1-x}\right)^i.$$

Представление в виде ряда:

$$I_x(a,\ b)=\frac{x^a(1-x)^b}{a\mathrm{B}(a,\ b)}\left\{1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{B}(a+1,\ n+1)}{\mathrm{B}(a+b,\ n+1)}x^{n+1}\right\},$$

$$0<x<1;$$

в виде непрерывной дроби:

$$I_x(a,\ b)=\frac{x^a(1-x)^b}{a\mathrm{B}(a,\ b)}\left\{\frac{1}{1+}\,\frac{d_1}{1+}\,\frac{d_2}{1+}\cdots\right\},$$

где

$$d_{2m+1}=-\frac{(a+m)(a+b+m)\,x}{(a+2m)(a+2m+1)},\quad d_{2m}=\frac{m(b-m)\,x}{(a+2m-1)(a+2m)}.$$

Асимптотич. представление при больших a и b

$$I_x(a,\ b)=\Phi\left\{3\,\frac{(bx)^{1/3}\left(1-\frac{1}{9b}\right)-[a(1-x)]^{1/3}\left(1-\frac{1}{9a}\right)}{\sqrt{[a(1-x)]^{2/3}/a+(bx)^{2/3}/b}}\right\}+$$

$$+O\left(\frac{1}{\min(a,\ b)}\right),$$

где

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-t^2/2}\,dt.$$

Асимптотич. представление при больших b и ограниченных a:

$$I_x(a,\ b)=I(x(2b+a-1)/(2-x),\ a)+O(b^{-2}),$$

где

$$I(z,\ a)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^z e^{-t}t^{a-1}\,dt.$$

Связь с гипергеометрич. функцией:

$$I_x(a,\ b)=\frac{x^a}{a\mathrm{B}(a,\ b)}F(a,\ 1-b;\ a+1;\ x).$$

Рекуррентные соотношения:

$$I_x(a,\ b)=1-I_{1-x}(b,\ a),$$

$$I_x(a,\ b)=xI_x(a-1,\ b)+(1-x)\,I_x(a,\ b-1),$$

$$I_x(a,\ a)=\frac{1}{2}\,I_{1-y}\left(a,\ \frac{1}{2}\right),\quad y=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,\quad 0<x\leqslant\frac{1}{2}.$$

Лит.: [1] Справочник по специальным функциям, пер. с англ., М., 1979; [2] Пирсон К., Таблицы неполной бета-функции, пер. с англ., М., 1974.

В. И. Пагурова.

НЕПОЛНАЯ ГАММА-ФУНКЦИЯ — функция, определяемая формулой

$$I(x,\ m)=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^x e^{-t}t^{m-1}\,dt,\quad x\geqslant 0,\ m>0,$$

где

$$\Gamma(m)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{m-1}\,dt$$ — гамма-функция.

Если $n\geqslant 0$ — целое, то

$$I(x,\ n+1)=1-e^{-x}\sum_{m=0}^{n}\frac{x^m}{m!}.$$

Представление в виде ряда:

$$I(x,\ m)=\frac{e^{-x}x^m}{\Gamma(m+1)}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(m+1)\ \dots\ (m+k)}\right\};$$

в виде непрерывной дроби:

$$I(x,\ m)=1-\frac{x^m e^{-x}}{\Gamma(m)}\left\{\frac{1}{x+}\,\frac{1-m}{1+}\,\frac{1}{x+}\,\frac{2-m}{1+}\,\frac{2}{x+}\ \dots\right\}.$$

Асимптотич. представление при больших x:

$$I(x,\ m)=$$

$$=1-\frac{x^{m-1}e^{-x}}{\Gamma(m)}\left\{\sum_{i=0}^{M-1}\frac{(-1)^i\,\Gamma(1-m+i)}{x^i\Gamma(1-m)}+O\left(x^{-M}\right)\right\}.$$

Асимптотич. представление при больших m:

$$I(x,\ m)=\Phi\left(2\sqrt{x}-\sqrt{m-1}\right)+O\left(m^{-1/2}\right),$$

$$I(x,\ m)=\Phi\left[3\sqrt{m}\left(\sqrt[3]{\frac{x}{m}}-1+\frac{1}{9m}\right)\right]+O\left(m^{-1}\right),$$

где

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-t^2/2}\,dt.$$

Связь с вырожденной гипергеометрич. функцией:

$$I(x,\ m)=\frac{x^m}{\Gamma(m+1)}\,{}_1F_1(m,\ m+1,\ -x).$$

Связь с многочленами Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$:

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}I(x,\ n+\alpha)=(-1)^n\,n!\,\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)}\,x^{\alpha-1}e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x).$$

Рекуррентное соотношение

$$mI(x,\ m+1)+xI(x,\ m-1)=(x+m)\,I(x,\ m).$$

Лит.: [1] Справочник по специальным функциям, пер. с англ., М., 1979; [2] Пагурова В. И., Таблицы неполной гамма-функции, М., 1963.

В. И. Пагурова.

НЕПРАВИЛЬНОСТИ КОЭФФИЦИЕНТЫ линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — неотрицательные функции $\sigma(A)$, равные нулю в том и только в том случае, если система

$$\dot{x}=A(t)\,x, \qquad (*)$$

где $A(\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение $\mathbb{R}^+\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n)$ (или $\mathbb{R}^+\to \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n,\ \mathbb{C}^n)$),— *правильная линейная система.* Наиболее известны (и наиболее просто определяются) следующие Н. к.

1) Коэффициент неправильности Ляпунова [1]

$$\sigma_{\Lambda}(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A)-\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{tr}\,A(\tau)\,d\tau,$$

где $\lambda_i(A)$ — *Ляпунова характеристические показатели* системы (*), занумерованные в порядке невозрастания, а $\mathrm{tr}\,A(t)$ — след отображения $A(t)$.

2) Коэффициент неправильности Перрона [2]

$$\sigma_{\Pi}(A)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\lambda_i(A)+\lambda_{n+1-i}(-A^*)\right),$$

где $A^*(t)$ — отображение, сопряженное к $A(t)$.

Если система (*) есть система уравнений в вариациях гамильтоновой системы

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}&=\frac{\partial H}{\partial p}, \qquad p\in\mathbb{R}^k,\\ \dot{p}&=-\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad q\in\mathbb{R}^k,\end{aligned}\right\}$$

то $n=2k$ и

$$\lambda_i(-A^*)=\lambda_i(A), \quad i=1,\ \dots,\ n;$$

поэтому для правильности системы уравнений в вариа-

циях гамильтоновой системы необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda_i(A) = -\lambda_{n+1-i}(A), \quad i = 1, \ldots, k$$

(теорема Персидского)

Имеются также другие Н. к. (см. [4] — [6]).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М., 1956; [2] Perron O., «Math. Z.», 1929/1930, Bd 31, S. 748—66; [3] Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, 2 изд., М., 1966, § 79; [4] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова..., М., 1966; [5] Изобов Н. А., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146; [6] Прохорова Р. А., «Дифференц. уравнения», 1976, т. 12, № 3, с. 475—83; № 4, с. 766—69.

В. М. Миллионщиков.

НЕПРЕДИКАТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ — определение, осмысленность к-рого предполагает наличие определяемого объекта.

Образование множества всех множеств непредикативно. Определение наименьшей верхней грани произвольного множества действительных чисел также непредикативно. Любое Н. о. можно рассматривать как свойство, выделяющее нужный объект из нек-рой заданной совокупности. Так как при этом остается проблема существования выделяемого объекта, то вместо Н. о. можно говорить о непредикативных свойствах. Если фиксирован язык, на к-ром выражаются свойства, то понятие непредикативности уточняется следующим образом. Свойство (точнее, языковое выражение, выражающее это свойство) наз. *непредикативным*, если оно содержит связанную переменную, в область изменения к-рой попадает определяемый объект. Свойство наз. *предикативным*, если оно не содержит таких связанных переменных.

Понятие непредикативности возникло в связи с обнаружением теоретико-множественных парадоксов, а сам термин принадлежит А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1906), впервые выдвинувшему возражения против Н. о.

Обнаруженные в начале 20 в. *антиномии* содержат непредикативность. Напр., в парадоксе Рассела множество R всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента, определяется формулой:

$$\forall x\,(x \in R \iff \neg x \in x),$$

где x — переменная, пробегающая все множества. В этой формуле R является возможным значением переменной x. В математике Н. о. широко распространены. Напр., объединение S всех множеств натурального ряда, удовлетворяющих условию φ, задается формулой

$$\forall n\,(n \in S \iff \exists M\,(\varphi(M) \,\&\, n \in M)), \qquad (*)$$

где n — переменная по натуральному ряду, M — переменная по подмножествам натурального ряда. В приведенной формуле S является возможным значением связанной переменной M. Непредикативный способ задания объекта часто удается заменить предикативным. Напр., если в качестве свойства $\varphi(M)$ взять формулу $M = A \vee M = B$, где A и B — некоторые фиксированные множества, то формула $(*)$ эквивалентна предикативной формуле

$$\forall n\,(n \in S \iff n \in A \vee n \in B),$$

выражающей, что S есть объединение множеств A и B.

Б. Рассел (B. Russell) предпринял попытку построения математики на предикативной основе. В его разветвленной теории типов множества выстраиваются в иерархию, в соответствии с определяющими их выражениями. Напр., множество S из формулы $(*)$ должно относиться к более высокому уровню в иерархии, чем уровень переменной M и уровни переменных, содержащихся в формуле φ. На предикативной основе не удается построить анализ в полном объеме. Приходится снабжать формулировки оговорками об уровнях рассматриваемых объектов. Б. Рассел был вынужден ввe-

сти аксиому сводимости, стирающую фактически различие между уровнями. Однако предикативная теория при наличии арифметич. аксиом позволяет строить анализ, достаточный для многих приложений (см. [4]).

Феномен непредикативности существенно основан на абсолютном характере понимания слова «все» (все без каких-либо ограничений, решительно все). Распределение множеств по уровням представляет собой попытку ограничить этот абсолютный характер. Наиболее радикальная ревизия способа мышления, основанного на абсолютном понимании понятия «все», предпринимается интуционистским и конструктивным направлениями в математике.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960; [2] Френкель А.-А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [3] Гильберт Д., Аккерман В., Основы теоретической логики, пер. с нем., М., 1947; [4] Takeuti G., Two applications of logic to mathematics, Tokyo, 1978. *В. Н. Гришин.*

НЕПРЕРЫВНАЯ ГРУППА — в работах основоположников теории групп Ли (S. Lie; А. Пуанкаре, H. Poincaré; Э. Картан, E. Cartan; Г. Вейль, H. Weyl, и др.)—группа гладких или аналитических локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, гладко или аналитически зависящих от параметров. В случае конечного числа числовых параметров Н. г. называлась конечной, что соответствует современному понятию конечномерной *Ли группы*. При наличии функциональных параметров говорили о бесконечной Н. г., что соответствует современному понятию *псевдогруппы* преобразований. В настоящее время (1982) термин «Н. г.» часто обозначает *топологическую группу* [2].

Лит.: [1] Lie S., Scheffers G., Vorlesungen über continuierliche Gruppen..., Lpz., 1893; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [3] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976. *А. Л. Онищик.*

НЕПРЕРЫВНАЯ ДРОБЬ — то же, что *цепная дробь*, т. е. выражение вида

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{\ddots}{\ddots+\cfrac{b_n}{a_n+\ddots}}}$$

где

$$\{a_n\}_{n=0}^{\omega},\quad \{b_n\}_{n=1}^{\omega}$$

— конечные или бесконечные последовательности комплексных чисел. Для Н. д. употребляется обозначение

$$a_0+\frac{b_1}{|\,a_1}+\ldots+\frac{b_n}{|\,a_n}+\ldots$$

Обычно предполагается, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таковы, что для всех n, $0\leqslant n\leqslant\omega+1$,

$$Q_n=a_nQ_{n-1}+b_nQ_{n-2}\neq 0$$

(Q_n определяются рекуррентно, причем $Q_{-2}=1$, $Q_{-1}=0$). *О. А. Иванова.*

НЕПРЕРЫВНАЯ СЕРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ, основная серия представлений,— семейство неприводимых унитарных представлений локально компактной группы G, входящих в разложение *регулярного представления* группы G, но не принадлежащих *дискретной серии* представлений этой группы. Если G — действительная полупростая группа Ли, $G=KAN$ — ее *Ивасавы разложение*, M — централизатор группы A в K, то основной невырожденной Н. с. п. группы G наз. семейство непрерывных унитарных представлений группы G, индуцированных конечномерными неприводимыми унитарными представлениями группы $B=MAN$, тривиальными на N.

Дополнительной (соответственно вырожденной) Н. с. п. такой группы G наз. семейство неприводимых унитарных представлений группы G, входящих в *дополнительную серию* представлений (соответственно в *вырожденную серию представлений*) группы G и не являющихся изолированными точками этой серии (как подмножества двойственного пространства группы G). Аналитич. продолжение основной невырожденной Н. с. п. есть семейство (вообще говоря, неунитарных) представлений группы G, индуцированных всевозможными конечномерными неприводимыми представлениями группы B, тривиальными на N; это семейство играет решающую роль в теории представлений действительных полупростых групп Ли и гармонич. анализе на этих группах; в частности, любое вполне неприводимое представление группы G в гильбертовом пространстве инфинитезимально эквивалентно подпредставлению нек-рого факторпредставления одного из представлений аналитич. продолжения основной невырожденной Н. с. п. См. также *Бесконечномерное представление* групп Ли.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Унитарные представления классических групп, М.— Л., 1950; [2] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [3] Warner G., Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, v. 1—2, B.— [a. o.], 1972. *А. И. Штерн.*

НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ — одно из основных понятий математического анализа.

Пусть действительная функция f определена на нек-ром подмножестве E действительных чисел $\mathbb{R}$, т. е. $f: E \to \mathbb{R}$. Функция f наз. непрерывной в точке $x_0 \in E$ (или, подробнее, непрерывной в точке x_0 по множеству E), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех точек $x \in E$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Если обозначить

$$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

и

$$V(f(x_0), \varepsilon) = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

соответственно δ- и ε-окрестности точек x_0 и $f(x_0)$, то данное определение можно перефразировать следующим образом: функция f наз. непрерывной в точке $x_0 \in E$, если для любой ε-окрестности $V = V(f(x_0), \varepsilon)$ точки $f(x_0)$ существует такая δ-окрестность $U = U(x_0, \delta)$ точки x_0, что $f(U \cap E) \subset V$.

Используя понятие предела, можно сказать, что функция f непрерывна в точке x_0, если в этой точке существует ее предел по множеству E и этот предел равен $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in E} f(x) = f(x_0).$$

Это равносильно тому, что

$$\lim_{\Delta x \to 0,\ x \in E} \Delta y = 0,$$

где $\Delta x = x - x_0$, $x \in E$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, т. е. бесконечно малому приращению аргумента в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции.

В терминах предела последовательности определение Н. ф. в точке x_0: функция f непрерывна в точке x_0, если для любой последовательности точек $x_n \in E$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, имеет место

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Все приведенные определения Н. ф. в точке эквивалентны между собой.

Если функция f непрерывна в точке x_0 по множеству $E \cap \{x : x \geqslant x_0\}$ (соответственно по множеству $E \cap \{x : x \leqslant x_0\}$), то функция f наз. непрерывной справа (слева) в точке x_0.

Все основные *элементарные функции* являются непрерывными во всех точках их областей определения. Важным свойством Н. ф. является замкнутость класса непрерывных функций относительно арифметич. операций и операции композиции функций. Более точно, если действительные функции $f : E \to \mathbb{R}$ и $g : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, непрерывны в точке $x_0 \in E$, то их сумма $f+g$ и произведение fg, а при $g(x_0) \neq 0$ и частное f/g (заведомо определенное в пересечении нек-рой окрестности точки x_0 с множеством E) непрерывны в точке x_0. Если, как и выше, функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in E$, а функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, такова, что $\varphi(D) \subset E$ и, следовательно, имеет смысл композиция $f \circ \varphi$, причем существует такое $t_0 \in D$, что $\varphi(t_0) = x_0$ и функция φ непрерывна в точке t_0, то композиция $f \circ \varphi$ также непрерывна в точке t_0. Таким образом, в этом случае

$$\lim_{t \to t_0} f[\varphi(t)] = f\left[\lim_{t \to t_0} \varphi(t)\right] = f[\varphi(t_0)],$$

т. е. в этом смысле операция предельного перехода перестановочна с операцией взятия Н. ф. Из перечисленных свойств Н. ф. следует, что не только основные, но и любые элементарные функции непрерывны в области их определения. Сохраняется свойство непрерывности и при равномерном предельном переходе: если последовательность функций $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве E и каждая функция f_n непрерывна в точке $x_0 \in E$, $n = 1, 2, \ldots$, то и предельная функция

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n$$

непрерывна в этой точке.

Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в каждой точке множества E, то она наз. непрерывной на множестве E. Если $x_0 \in E' \subset E$ и функция f непрерывна в точке x_0, то сужение функции f на множестве E' также непрерывно при $x = x_0$. Обратное, вообще говоря, неверно. Напр., сужение *Дирихле функции* как на множестве рациональных, так и иррациональных точек непрерывно, а сама функция Дирихле разрывна во всех точках.

Важный класс действительных Н. ф. одного переменного образуют функции, непрерывные на отрезках. Они обладают следующими свойствами.

Первая теорема Вейерштрасса: функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем.

Вторая теорема Вейерштрасса: функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Теорема Коши о промежуточных значениях: функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем любое значение, заключенное между значениями, к-рые она принимает на концах отрезка.

Теорема об обратной функции: если функция непрерывна и строго монотонна на отрезке, то у нее существует однозначная обратная функция, к-рая также определена на нек-ром отрезке, строго монотонна и непрерывна на нем.

Теорема Кантора о равномерной непрерывности: функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

Всякая функция, непрерывная на отрезке, может быть равномерно сколь угодно точно приближена алгебраич. многочленом, а всякая функция f, непрерывная на отрезке $[0, 2\pi]$ и такая, что $f(0) = f(2\pi)$, может быть равномерно сколь угодно точно приближена тригонометрич. полиномами (см. *Вейерштрасса теорема* о приближении функций).

Понятие Н. ф. обобщается на более общие виды функций, прежде всего на функции многих переменных. Сформулированное выше определение Н. ф. формально сохраняется, если под E понимать подмножество n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, под $|x-x_0|$ — расстояние в этом пространстве между точками $x\in E$ и $x_0\in E$, под $U(x_0, \delta)$ — δ-окрестность в $\mathbb{R}^n$ точки x_0, а под

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

понимать предел последовательности точек в пространстве $\mathbb{R}^n$. Функция $f: E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^n$, многих переменных $x_1, \ldots, x_n$, непрерывная в точке $x_0=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\in E$, наз. также *непрерывной в этой точке по совокупности переменных* $x_1, \ldots, x_n$, в отличие от функций многих переменных, непрерывных по отдельным переменным. Функция $f: E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^n$, наз. *непрерывной в точке* x_0, напр., *по переменной* x_1, если в точке $x_1^{(0)}$ непрерывно сужение функции f на множестве

$$E\cap\{x=(x_1, \ldots, x_n): x_2=x_2^{(0)}, \ldots, x_n=x_n^{(0)}\},$$

т. е. в точке $x_1^{(0)}$ непрерывна функция $f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ одного переменного x_1. Функция $f: E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, может быть непрерывной в точке x по каждому переменному $x_1, x_2, \ldots, x_n$, но может не быть непрерывной в этой точке по совокупности переменных.

Определение Н. ф. непосредственно переносится на комплекснозначные функции. Следует лишь в данном выше определении под $|f(x) - f(x_0)|$ понимать абсолютную величину комплексного числа $f(x)-f(x_0)$, а под

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

— предел в комплексной плоскости.

Все эти определения являются частным случаем более общего понятия Н. ф. f, областью определения которой является некоторое топологическое пространство X и значения которой принадлежат некоторому топологическому пространству Y (см. *Непрерывное отображение*).

На непрерывные отображения топологич. пространств переносятся многие свойства действительных Н. ф. одного переменного. Обобщение упомянутых выше теорем Вейерштрасса: непрерывный образ бикомпактного топологич. пространства в хаусдорфовом топологич. пространстве является бикомпактом. Обобщение теоремы Коши о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции: непрерывный образ в топологич. пространстве связного топологич. пространства также связен. Обобщение теоремы о функции, обратной к непрерывной строго монотонной функции: взаимно однозначное непрерывное отображение бикомпакта на топологич. хаусдорфово пространство есть гомеоморфизм. Обобщение теоремы о пределе равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций: если $f_n: X\to Y$ — равномерно сходящаяся последовательность непрерывных в точке $x_0\in X$ отображений топологич. пространства X в метрич. пространство Y, то предельное отображение $f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ также непрерывно в точке x_0.

Обобщением теоремы Вейерштрасса о приближении функций непрерывных на отрезке многочленами является *Вейерштрасса — Стоуна теорема*.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975; [4] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971. *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕПРЕРЫВНОЕ МНОЖЕСТВО — (линейно) *упорядоченное множество* X, все собственные сечения к-рого являются д е д е к и н д о в ы м и с е ч е н и я м и, т. е. при любом разбиении X на два непустых подмножества X' и X'' таком, что каждый элемент из X' предшествует каждому элементу из X'', либо в X' есть наибольший элемент, но в X'' нет наименьшего элемента, либо в X' нет наибольшего элемента, но в X'' есть наименьший элемент. *М. И. Войцеховский.*

НЕПРЕРЫВНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение $f : X \to Y$ топологич. пространства X в топологич. пространство Y такое, что для всякой точки $x_0 \in X$ и для всякой окрестности $V = V(f(x_0))$ ее образа $f(x_0)$ существует такая окрестность $U = U(x_0)$ точки x_0, что $f(U) \subset V$. Это определение является перефразировкой окрестностного определения непрерывности функций действительного переменного (см. *Непрерывная функция*). Существует много эквивалентных определений непрерывности. Так, для непрерывности отображения $f : X \to Y$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих условий:

а) прообраз $f^{-1}G$ всякого открытого в Y множества G открыт в X;

б) прообраз $f^{-1}F$ всякого замкнутого в Y множества F замкнут в X;

в) $f[A] \subset [fA]$ для всякого множества $A \subset X$ (образ замыкания содержится в замыкании образа).

Понятие непрерывной функции, корректно сформулированное еще Б. Больцано (B. Bolzano) и О. Коши (A. Cauchy), сыграло большую роль в математике 19 в. Функция Вейерштрасса, не дифференцируемая ни в одной точке, «канторовская лестница», кривая Пеано указали на необходимость рассмотрения более частных случаев непрерывности. Необходимость выделения специальных классов Н. о. еще более возросла, когда стали рассматривать Н. о. более общих объектов — топологич. пространств. Можно отметить следующие важнейшие типы Н. о.: топологич. отображения или *гомеоморфизмы*, *совершенные отображения*, *замкнутые отображения*, *открытые отображения*, *факторные отображения*.

Если даны два Н. о. $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$, то их композиция $g \circ f : X \to Z$, т. е. сквозное отображение $X \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} Z$, непрерывна. Очевидно непрерывно и всякое тождественное отображение $I_X : X \to X$. Поэтому топологич. пространства и Н. о. образуют категорию.

Одним из методов топологии является метод взаимной классификации пространств и отображений. Его сущность состоит в следующем: выделяются три основные, тесно связанные между собой задачи. 1) В каком случае каждое пространство нек-рого фиксированного класса $\mathcal{A}$ может быть отображено на нек-рое пространство класса $\mathcal{B}$ посредством Н. о., принадлежащего классу $\mathcal{L}$? 2) Какими внутренними свойствами характеризуются пространства, принадлежащие классам MC, являющимся образами пространств из класса C при Н. о. из класса M? 3) Пусть $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — обозначение множества Н. о., областью определения к-рых служат пространства из класса $\mathcal{A}$, а областью значений — пространства из класса $\mathcal{B}$, и $\mathcal{L}$ — нек-рый другой класс отображений. Каковы свойства отображений из класса $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cap \mathcal{L}$?

Эти общие формулировки охватывают, в частности, следующий вопрос: какие топологич. свойства сохраняются теми или иными отображениями при переходе от пространства к его образу или прообразу. 1) Всякое n-мерное в смысле dim пространство может быть существенно отображено (см. *Существенное отображение*) на n-мерный куб. 2) Точечно-счетная база сохраняется при совершенных (даже при бифакторных) отображениях. 3) Всякое замкнутое отображение f из класса

Hom $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, где $\mathcal{A}$ — класс n-мерных пространств со счетной базой, $\mathcal{B}$ — класс нульмерных пространств со счетной базой, по крайней мере $(n+1)$-кратно.

Первые конкретные задачи этого рода были решены более полувека назад. Таковы, напр., представление произвольного компакта в виде непрерывного образа канторова совершенного множества (теорема Александрова); характеристика метрич. пространств со счетной базой как открытых непрерывных образов подпространств пространства иррациональных чисел (теорема Хаусдорфа); описание локально связных континуумов как непрерывных образов отрезка. Решение этих задач не только позволило ответить на вопросы о взаимоотношениях между различными известными ранее классами пространств, но и вызвало появление новых интересных классов пространств. Таковы, напр., диадические бикомпакты, паракомпактные p-пространства, совершенно n-мерные пространства, псевдокомпактные пространства.

Понятие действительной непрерывной функции, т. е. Н. о. топологич. пространства в $\mathbb{R}$, лежащее в основании теории функций, играет большую роль и в общей топологии. Здесь прежде всего стоит отметить *Урысона лемму*, теорему Брауэра — Урысона о продолжении непрерывных функций с замкнутых подмножеств нормальных пространств, определение А. Н. Тихоновым *вполне регулярных пространств*, *Вейерштрасса — Стоуна теорему*. Эти и другие исследования привели к созданию теории колец непрерывных функций, методы к-рой оказались достаточно плодотворными в общей топологии.

Существенную часть теории размерности составляет изучение поведения размерностных характеристик пространств при переходе к образу или прообразу относительно отображений тех или иных классов. Большую роль здесь играют ε-сдвиги, ε-отображения и ω-отображения, существенные отображения, конечнократные отображения, счетнократные отображения, нульмерные отображения, n-мерные отображения и др. При этом метод Н. о. приводит к взаимному обогащению и проникновению друг в друга таких совершенно различных по своему происхождению областей общей топологии, как имеющая наглядно-геометрич. смысл теория размерности и абстрактная по характеру теория кардинальнозначных инвариантов.

Одной из характеристик размерности является возможность продолжения с замкнутого подмножества Н. о. в n-мерную сферу. Эта теорема является одним из вариантов теоремы о продолжении отображений, которая, как и тесно связанная с ней теорема о неподвижной точке, имеет кардинальное значение для таких разделов современной математики, как топология, алгебра, теория функций и функциональный анализ, дифференциальные уравнения.

Одним из наиболее изученных классов Н. о. является класс *совершенных неприводимых отображений*. Теорема об *абсолюте* регулярного пространства породила целый ряд исследований в этой области. В частности, понятие абсолюта было распространено на класс всех хаусдорфовых пространств. С понятием Н. о. оказалось тесно связанным понятие θ-близости, к-рое дало возможность внутреннего описания всех совершенных неприводимых прообразов произвольного бикомпакта. Распространение теории неприводимых Н. о. на класс всех хаусдорфовых пространств показало, что Н. о. не хватает для изучения нерегулярных пространств и что более естественно здесь рассматривать θ-непрерывные отображения.

Выделение равномерно непрерывных функций из класса всех числовых функций одной или нескольких действительных переменных стало одной из отправных

точек исследований, приведших к созданию *равномерной топологии.*

Н. о. того или иного типа лежат в основе теории ретрактов, спайнов, гомологий. Большую роль в современной математике играют различные аспекты теории *многозначных отображений.* Интересны богатством идейного содержания вопросы Н. о. евклидовых пространств.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968; [3] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [4] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [5] Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А., Общая топология, М., 1979.

В. В. Федорчук.

НЕПРЕРЫВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — линейное представление π топологич. группы (полугруппы, алгебры) X в топологич. векторном пространстве E такое, что отображение φ пространства $E\times X$ в E, определяемое формулой $\varphi(\xi, x)=\pi(x)\xi$, $\xi\in E$, $x\in X$, непрерывно. Если отображение φ непрерывно по каждому аргументу, то в нек-рых случаях (напр., если X — локально компактная группа, а E — банахово пространство) φ автоматически непрерывно по совокупности переменных, т. е. π — Н. п.

А. И. Штерн.

НЕПРЕРЫВНОЕ РАЗБИЕНИЕ топологического пространства X — покрытие γ пространства X попарно непересекающимися непустыми множествами, удовлетворяющее условию: каковы бы ни были $F\in\gamma$ и окрестность U множества F в X, найдется окрестность V множества F в X, содержащаяся в U и являющаяся объединением нек-рого множества элементов семейства γ. Разбиение непрерывно в том и только в том случае, если отвечающее ему *факторное отображение* пространства X на пространство этого разбиения замкнуто. Непрерывное отображение $f: X\to Y$ пространства X на пространство Y замкнуто в том и только в том случае, если разбиение $\gamma_f=\{f^{-1}(y), y\in Y\}$ пространства X непрерывно.

Н. р. часто встречаются в теории *бикомпактных пространств.* Каждое непрерывное отображение бикомпактного пространства на хаусдорфово пространство замкнуто. Поэтому каждое непрерывное отображение бикомпактного пространства X на хаусдорфово пространство Y порождает Н. р. пространства X на прообразы точек. По той же причине для непрерывности разбиения бикомпакта достаточно (и необходимо), чтобы пространство этого разбиения удовлетворяло аксиоме отделимости Хаусдорфа. Достоинством Н. р. пространства на замкнутые множества является сохранение такими разбиениями нормальности и паракомпактности. Напротив, пространство Н. р. метризуемого пространства может быть не метризуемо. Простейший пример такой ситуации — пространство разбиения плоскости, единственный нетривиальный элемент к-рого — фиксированная прямая.

Как и вообще разбиения, Н. р. служат важным средством построения новых топологич. пространств из уже имеющихся, а также представления более сложных топологич. пространств в виде пространств Н. р. более простых или более стандартных пространств. Так, всякий метризуемый бикомпакт является пространством Н. р. *канторова множества.* Каждый локально связный связный метризуемый бикомпакт можно представить как пространство Н. р. отрезка. Н. р. естественным образом входят в нек-рые конкретные конструкции; так, напр., *проективная плоскость*, рассматриваемая как топологич. пространство, является пространством Н. р. обычной сферы на пары диаметрально противоположных точек. Аналогично, n-мерное проективное пространство с топологич. точки зрения является пространством Н. р. n-мерной сферы, лежащей в

$(n+1)$-мерном евклидовом пространстве, на пары диаметрально противоположных точек. На этом языке, как пространство нек-рого Н. р. прямоугольника, аккуратно определяется лист Мёбиуса и строятся другие геометрич. объекты.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

НЕПРЕРЫВНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей, не имеющее атомов. Если атомы суть отдельные точки, то Н. р. противоположно *дискретному распределению* (см. также *Атомическое распределение*). Вместе с дискретным распределением Н. р. образует основные типы распределений. По теореме Жордана любое распределение вероятностей есть смесь дискретного распределения и Н. р. Напр., пусть $F(x)$ — функция распределения, соответствующая нек-рому распределению на прямой, тогда $F=pF_1+(1-p)F_2$, где $0\leqslant p\leqslant 1$, а $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — функции распределения, отвечающие дискретному и непрерывному типу. Н. р. соответствует непрерывная функция распределения. Значительный вес среди Н. р. имеют абсолютно непрерывные распределения. К этому типу распределений относятся распределения P на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$, представимые при любом $A\in\mathcal{A}$ в виде

$$\mathsf{P}(A)=\int_A p(x)\,\mu(dx),$$

где $p(x)\geqslant 0$, $\int_\Omega p(x)\mu(dx)=1$. Функция $p(x)$ наз. плотностью распределения относительно меры μ (обычно μ — мера Лебега). На прямой для соответствующей функции распределения $F(x)$ имеет место представление

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(u)\,du,$$

при этом почти всюду (по мере Лебега) $F'(x)=p(x)$. Распределение абсолютно непрерывно тогда и только тогда, когда соответствующая функция распределения абсолютно непрерывна (как функция действительного переменного). Противоположность абсолютно непрерывным распределениям составляют Н. р., сосредоточенные на множествах, имеющих меру нуль. Такие распределения наз. *сингулярными распределениями* по отношению к нек-рой мере. По теореме Лебега о разложении любое Н. р. является смесью двух распределений, из к-рых одно абсолютно непрерывно, а другое сингулярно по отношению к заданной мере.

Наиболее важны следующие Н. р.: *арксинуса распределение*, *бета-распределение*, *гамма-распределение*, *Коши распределение*, *нормальное распределение*, *равномерное распределение*, *показательное распределение*, *Стьюдента распределение*, *«хи-квадрат» распределение*.

Лит.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967.

А. В. Прохоров.

НЕПРЕРЫВНОЕ СЕЧЕНИЕ — непрерывное отображение $h: f(X)\to X$ образа $f(X)$ непрерывного отображения $f: X\to Y$ топологич. пространств X, Y такое, что $f\circ h$ — тождественное отображение $f(X)$.

М. И. Войцеховский.

НЕПРЕРЫВНОСТИ АКСИОМА — аксиома, выражающая тем или иным образом непрерывность множества *действительных чисел*. Н. а. действительных чисел может быть сформулирована, напр., в терминах сечений действительных чисел: всякое сечение действительных чисел определяется нек-рым числом (аксиома Дедекинда); в терминах вложенных отрезков: всякое семейство вложенных отрезков имеет непустое пересечение (аксиома Кантора); в терминах верхней или нижней грани множеств: всякое непустое ограниченное сверху множество имеет конечную верхнюю

грань, а всякое ограниченное снизу — нижнюю грань (а к с и о м а В е й е р ш т р а с с а). *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕПРЕРЫВНОСТИ МОДУЛЬ — одна из основных характеристик непрерывных функций. Н. м. непрерывной на отрезке функции $f(x)$ определяется как

$$\omega(\delta, f) = \max_{|h| \leqslant \delta} \max_{x} |f(x+h) - f(x)|.$$

Определение Н. м. введено А. Лебегом (A. Lebesgue) в 1910, хотя по существу понятие было известно и ранее. Если Н. м. функции $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\omega(\delta, f) \leqslant M\delta^{\alpha},$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$, то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет *Липшица условию* порядка α.

Для того чтобы неотрицательная функция $\omega(\delta)$ была Н. м. нек-рой непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы она обладала следующими свойствами: $\omega(0)=0$, $\omega(\delta)$ не убывает, $\omega(\delta)$ непрерывна, $\omega(\delta+\eta) \leqslant \omega(\delta)+\omega(\eta)$, $\delta, \eta > 0$.

Рассматриваются также Н. м. высших порядков

$$\omega_k(\delta, f) = \max_{|h| \leqslant \delta} \max_{x} |\Delta_h^k f(x)|,$$

где

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i f(x+ih)$$

— конечная разность k-го порядка функции $f(x)$, и Н. м. в произвольных пространствах функций, напр. интегральный Н. м. функции $f(x)$, интегрируемой на отрезке $[a, b]$ со степенью $p \geqslant 1$

$$\omega^{(p)}(\delta, f) = \sup_{0 < h \leqslant \delta} \left\{ \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}. \quad (*)$$

Для 2π-периодической функции интеграл в выражении (*) берется по отрезку $[0, 2\pi]$.

Лит.: [1] З и г м у н д А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., [2 изд.], т. 1, М., 1965; [2] А х и е з е р Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [3] Д з я д ы к В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977. *А. В. Ефимов.*

НЕПРЕРЫВНОСТИ ТЕОРЕМА, п р и н ц и п н е п р е р ы в н о с т и: пусть G — *голоморфности область* в $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, и $S_k \subset G$ и $T_k \subset G$, $k = 1, 2, \ldots$, — любые последовательности множеств, для к-рых имеет место п р и н ц и п м а к с и м у м а о т н о с и т е л ь н о м о д у л е й ф у н к ц и и f, голоморфной в G, т. е.

$$|f(z)| \leqslant \max_{z \in T_k} |f(z)|, \quad z \in S_k, \ k = 1, 2, \ldots;$$

тогда если S_k сходятся к нек-рому ограниченному множеству S, а T_k — к множеству T и $T \subset\subset S$, то $S \subset\subset G$. Если в качестве S_k взять аналитич. гиперповерхности и в качестве T_k — их границы ∂S_k, то получают т е о р е м у Б е е н к е — З о м м е р а (см. [1]). Отсюда следует, что всякая область голоморфности псевдовыпукла. Применительно к конкретной функции нек-рые модификации Н. т. известны как теоремы о «диске». Напр., т. н. с и л ь н а я т е о р е м а о «д и с к е» утверждает следующее. Пусть в $\mathbb{C}^{n-1}$ задана жорданова кривая вида

$$\tilde{z}(t) = \tilde{z}_0 + \tilde{b}\lambda(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \ \tilde{b} \in \mathbb{C}^{n-1}, \ \tilde{z} = (z_2, \ldots, z_n).$$

Пусть $D(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — семейство областей в плоскости z_1, обладающее тем свойством, что для любого компакта $K \subset D(0)$ найдется число $\eta = \eta(K)$, для к-рого $K \subset D(t)$ при всех $0 \leqslant t < \eta$. Тогда если $f(z)$ голоморфна в точках «дисков»

$$[z = (z_1, \tilde{z}): \ z_1 \in D(t), \ \tilde{z} = \tilde{z}(t), \ 0 < t \leqslant 1]$$

и в одной точке предельного «диска»

$$[z = (z_1, \tilde{z}): \ z_1 \in D(0), \ \tilde{z} = \tilde{z}(0)],$$

то $f(z)$ голоморфна и во всех точках предельного «диска». Теоремы о «диске» весьма полезны при голоморфном расширении областей и при построении *голоморфности оболочек*, напр. при доказательстве теоремы Бохнера об оболочке голоморфности трубчатой области, при доказательстве теорем Осгуда — Брауна, «о вложенном ребре», «об острие клина», «о C-выпуклой оболочке» и др.

Лит.: [1] Behnke H., Thullen P., Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, B., 1934; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.

В. С. Владимиров.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ — одно из важнейших математических понятий, обычно употребляемое применительно к понятию отображения (см. *Непрерывная функция*, *Непрерывное отображение*, *Непрерывный оператор*). В частности, можно изучать Н. нек-рой алгебраич. операции в заданном множестве относительно имеющейся в нем топологии. При наличии Н. рассматриваемой операции термин «Н.» применяется и к самому множеству (напр., *Непрерывная группа*). Термин «Н.» употребляется также в смысле невозможности «пополнения по непрерывности» нек-рого математич. объекта, напр. метрич. пространства; в этом смысле говорят о Н. множества действительных чисел. *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕПРЕРЫВНЫЕ АНАЛОГИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ — непрерывные модели, позволяющие исследовать вопросы существования решений нелинейных уравнений, проводить с помощью развитого аппарата непрерывного анализа предварительные исследования сходимости и оптимальности итерационных методов, получать новые классы итерационных методов.

Можно установить соответствие между методами решения стационарных задач путем установления (см. *Установления метод*) и нек-рыми итерационными методами (см. [1], [2]). Напр., для решения линейного уравнения

$$Au = f \tag{1}$$

с положительно определенным самосопряженным оператором A известны сходящиеся при достаточно малых $\tau_k > 0$ двучленные итерационные методы вида

$$(u^{k+1} - u^k)/\tau_k = -(Au^k - f),\ u^0 = v. \tag{2}$$

Если ввести непрерывное время t, а величины u^k рассматривать как значение нек-рой функции $u(t)$ при $t = t_k$, где

$$t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots,\ t_k \to \infty \text{ при } k \to \infty;$$

если положить $\tau_k = \rho(t_k)\,(t_k - t_{k-1})$, где непрерывная функция $\rho(t) > 0$ при $t \geqslant 0$, то при переходе к пределу в (2) при $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k \to 0$ получают Н. а. и. м. (2):

$$\frac{du}{dt} = -\rho(t)\,(Au - f),\ u(0) = v. \tag{3}$$

И если

$$\int_0^t \rho(t)\,dt \to \infty$$

при $t \to \infty$, то $u(t)$ стремится к $u(\infty)$ — решению уравнения (1).

Двучленным градиентным итерационным методам минимизации функции $F(u)$:

$$u^{k+1} = u^k - \tau_k \operatorname{grad} F(u^k),\quad u^0 = v, \tag{4}$$

аналогичным образом можно сопоставить Н. а. и. м. вида

$$\frac{du}{dt} = -\rho(t) \operatorname{grad} F(u),\quad u(0) = v. \tag{5}$$

Здесь функция $\rho(t)$ влияет лишь на параметризацию линии наискорейшего спуска. Для решения уравнения

(1) можно взять $F(u)=(Au,\ u)-2(f,\ u)$, тогда формулы (4) примут вид (2), а уравнение (5) — вид (3).

Трехчленные итерационные методы:

$$u^{k+1}=u^k-\alpha_k(Au^k-f)-\beta_k(u^k-u^{k-1}) \qquad (6)$$

с помощью преобразований можно записать в виде

$$2[(u^{k+1}-u^k)/\Delta t_k-(u^k-u^{k-1})/\Delta t_{k-1}]/(t_{k+1}-t_{k-1})+$$
$$+\gamma_k(u^{k+1}-u^{k-1})/(t_{k+1}-t_{k-1})+\mu_k u_k=-\rho_k(Au^k-f), \qquad (7)$$

где величины γ_k, μ_k, ρ_k, t_k определяются (неоднозначно) по параметрам α_k, β_k метода (6). Переход в (7) к пределу при $\Delta t_k\to 0$ приводит к Н. а. и. м. вида

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\gamma(t)\frac{du}{dt}+\mu(t)\,u=-\rho(t)(Au-f). \qquad (8)$$

Метод установления с использованием уравнения типа (8) носит название м е т о д а т я ж е л о г о ш а р и к а (см. [2]). Существуют итерационные методы, для к-рых Н. а. и. м. содержат дифференциальные операторы более высоких порядков (см. [3]).

Источником получения дифференциальных уравнений, играющих роль Н. а. и. м., может быть м е т о д п р о д о л ж е н и я п о п а р а м е т р у (см. [4], [5]). В этом методе для нахождения решения уравнения

$$\varphi(u)=0 \qquad (9)$$

строят уравнение

$$\Phi(u,\ \lambda)=0, \qquad (10)$$

зависящее от параметра λ и такое, что при $\lambda=0$ решение (10) известно: $u(0)=u^0$, а при $\lambda=1$ решения уравнений (9), (10) совпадают. Напр., можно взять

$$\Phi(u,\ \lambda)=\varphi(u)-(1-\lambda)\varphi(u^0). \qquad (11)$$

Дифференцируя уравнение (10) по параметру и считая $u=u(\lambda)$, получают дифференциальное уравнение для $u(\lambda)$; оно для случая (11) примет вид

$$\frac{du}{d\lambda}=-\varphi'(u)^{-1}\varphi(u^0). \qquad (12)$$

Разбивая отрезок $[0,\ 1]$ на n частей точками $\lambda_0=0<\lambda_1<\ldots<\lambda_{n-1}<\lambda_n=1$ и применяя к уравнению (12) одну из формул численного интегрирования по точкам λ_k (метод Эйлера, Рунге — Кутта и т. п.), получают рекуррентные соотношения между величинами $u^k=u(\lambda_k)$, к-рые используют для построения формул итерационного метода. Так, после применения метода Эйлера уравнение (12) заменится соотношениями

$$u^k=u^{k-1}-\Delta\lambda_k\varphi'(u^{k-1})^{-1}\varphi(u^0), \qquad (13)$$

где $\Delta\lambda_k=\lambda_k-\lambda_{k-1}$, к-рые определяют следующий двуступенчатый итерационный метод, содержащий внутренний и внешний циклы итераций:

$$u_k^i=u_{k-1}^i-\Delta\lambda_k\varphi'(u_{k-1}^i)^{-1}\varphi(u_0^i),$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad u_0^i=y_n^{i-1},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ u_0^0=u^0. \qquad (14)$$

При $\Delta\lambda_1=1$, $n=1$ этот метод превращается в классич. метод Ньютона. Н. а. и. м. Ньютона может быть получен и другим путем: в формуле (11) заменяется переменная $\lambda=1-e^{-t}$. Тогда дифференциальное уравнение (12) принимает вид

$$\frac{du}{dt}=-\varphi'(u)^{-1}\varphi(u),\ u(0)=u^0. \qquad (15)$$

Численное интегрирование уравнения (15) методом Эйлера по точкам t_k приводит к итерационному методу

$$u^k=u^{k-1}-\Delta t_{k-1}\varphi'(u^{k-1})^{-1}\varphi(u^{k-1}),$$

совпадающему при $\Delta t_{k-1}=1$ с классич. методом Ньютона.

Н. а. и. м. решения краевых задач для дифференциальных уравнений математич. физики являются, как правило, смешанными задачами для уравнений с частными производными специального вида (напр., с быстро осциллирующими коэффициентами или с малыми коэффициентами при старших производных).

См. также ст. *Замыкание вычислительного алгоритма.*

Лит.: [1] Гавурин М. К., «Изв. ВУЗов. Математика», 1958, № 5(6), с. 18—31; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., т. 1, М., 1975; [3] Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, М., 1971; [4] Ортега Дж., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ., М., 1975; [5] Давиденко Д. Ф., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1975, т. 15, № 1, с. 30—47.

В. И. Лебедев.

НЕПРЕРЫВНЫЙ ОПЕРАТОР — непрерывное отображение A множества M топологического и, как правило, векторного пространства X в такое же пространство Y, а именно: 1) отображение $A : M \to Y$, $M \subset X$, непрерывно в точке $x_0 \in M$, если для любой окрестности $V \subset Y$ точки Ax_0 найдется окрестность $U \subset X$ точки x_0 такая, что $A(M \cap U) \subset V$; 2) отображение $A : M \to Y$ непрерывно на множестве M, если оно непрерывно в каждой точке этого множества.

Для того чтобы оператор $A : M \to Y$ был непрерывен на M, необходимо и достаточно, чтобы для любого открытого (замкнутого) множества $H \subset Y$ полный прообраз $A^{-1}(H)$ был следом на M открытого (замкнутого) множества в X, т. е. $A^{-1}(H) = M \cap G$, где G открыто (замкнуто) в X. Для Н. о. справедливо цепное правило: пусть $A : M \to Y$, $M \subset X$, и A непрерывно на M (в точке $x_0 \in M$), а $B : N \to Z$, $N \subset Y$, и B непрерывно на N (в точке $y_0 \in N$); если $Q = M \cap A^{-1}(N)$ непусто ($y_0 = Ax_0$), то $B \circ A$ непрерывно на Q (в точке x_0).

В случае, когда X и Y — топологические векторные пространства, и A — линейный Н. о. на линейном подмногообразии $L \subset X$ со значениями в Y, то из непрерывности A в любой точке L, напр. в нуле, следует непрерывность A на всем L. Непрерывный на многообразии L топологического векторного пространства X оператор ограничен на этом множестве, т. е. образ любого ограниченного подмножества $N \subset L$ есть ограниченное множество в Y. Если X и Y отделимы, то из компактности N следует компактность $A(N)$.

Оператор A **равномерно непрерывен** на M, если для любой окрестности нуля $V \subset Y$ существует окрестность нуля $U \subset X$ такая, что из $x - y \in U$ следует $Ax - Ay \in V$. Оператор линейный и непрерывный на линейном многообразии топологического векторного пространства автоматически равномерно непрерывен на этом многообразии.

Помимо непрерывности вводится понятие счетной непрерывности оператора. Оператор $A : M \to Y$ **счетно непрерывен в точке** $x_0 \in M$, если для любой последовательности $x_n \to x_0$, $\{x_n\} \subset M$, имеет место $Ax_n \to Ax_0$. Для случая метризуемых пространств понятия счетной непрерывности и непрерывности совпадают.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977.

В. И. Соболев.

НЕПРЕРЫВНЫЙ ПОТОК — 1) Н. п. в *эргодической теории* — такое семейство $\{T^t\}$ (t пробегает действительную ось $\mathbb{R}$) автоморфизмов по mod 0 *пространства с мерой* (M, μ), что: а) при любых t, $s \in \mathbb{R}$ равенство $T^t T^s(x) = T^{t+s}(x)$ имеет место для всех $x \in M$, кроме, быть может, тех x, к-рые принадлежат нек-рому исключительному множеству меры нуль (оно может зависеть от t, s); иначе говоря, $T^t T^s = T^{t+s}$ mod 0; б) для любого измеримого $A \subset M$ мера симметрич. разности $\mu(A \Delta T^t A)$ непрерывно зависит от t. Пусть $\mathfrak{A}$ — совокупность всех автоморфизмов mod 0 пространства (M, μ) с обычным отождествлением: если T и S совпадают почти всюду,

то они определяют один и тот же элемент из $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ снабдить слабой топологией (см. [1]), то условие б) означает непрерывность отображения $\mathbb{R}\to\mathfrak{A}$, переводящего t в T^t.

Если (M, μ) — *Лебега пространство*, то понятие Н. п. практически совпадает с понятием *измеримого потока:* последний всегда есть Н. п. (см. [2]), а для любого Н. п. $\{T^t\}$ существует такой измеримый поток $\{S^t\}$, что $T^t = S^t \bmod 0$ при всех t (см. [3]; родственный результат доказан в [4], см. также исправление в [5]). Обращение к тому или иному из этих понятий зависит от характера рассматриваемого вопроса и используемых приемов.

2) В другом смысле термин «Н. п.» может употребляться с целью подчеркнуть, что рассматриваемый поток относится к *топологической динамике*. В этом смысле Н. п. есть такая совокупность гомеоморфизмов $\{T^t\}$ топологич. пространства M, что $T^t(T^s(x)) = T^{t+s}(x)$ для всех $t, s\in\mathbb{R}$, $x\in M$; отображение $M\times\mathbb{R}\to M$, переводящее (x, t) в $T^t x$, непрерывно.

Во избежание смешения с п. 1) лучше в данном случае говорить о топологическом потоке; а в п. 1)— о метрической непрерывности.

Лит.: [1] Халмош П. Р., Лекции по эргодической теории, пер. с англ., М., 1959; [2] Хопф Э., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 1, с. 113—82; [3] Вершик А. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1965, т. 29, № 1, с. 127—36; [4] Mackey G. W., «Illinois J. Math.», 1962, v. 6, № 2, p. 327—35; [5] Ramsay A., «Advances Math.», 1971, v. 6, № 3, p. 253—322.

Д. В. Аносов.

НЕПРЕРЫВНЫЙ ФУНКТОР — синоним понятия «функтор, перестановочный с пределами». Пусть $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{C}$ — категории с пределами. Одноместный ковариантный функтор $F : \mathfrak{R}\to\mathfrak{C}$ наз. непрерывным, если для любой диаграммы $J : \mathfrak{D}\to\mathfrak{R}$ с произвольной малой схемой $\mathfrak{D}$ выполнено равенство $F(\lim J) = \lim JF$. Более подробно последнее равенство означает следующее: если $(A; \mu_D, D\in\mathfrak{D})$ — предел диаграммы J, причем μ_D: $A\to J(D)$, $D\in \mathrm{Ob}\mathfrak{D}$,— морфизмы, входящие в определение предела, то $(F(A); F(\mu_D), D\in\mathrm{Ob}\mathfrak{D})$ предел диаграммы $JF : \mathfrak{D}\to\mathfrak{C}$.

Функтор $F : \mathfrak{R}\to\mathfrak{C}$ непрерывен тогда и только тогда, когда он перестановочен с произведениями любых семейств объектов и ядрами пар морфизмов. Всякий основной функтор $H_A(X) = H_{\mathfrak{R}}(A, X)$ из категории $\mathfrak{R}$ в категорию множеств непрерывен.

М. Ш. Цаленко.

НЕПРЕРЫВНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ — *непрерывный оператор*, отображающий топологическое п, как правило, векторное пространство X в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Поэтому определение и признаки непрерывности произвольного оператора сохраняются с соответствующей спецификацией и для функционалов. Так, напр.:

1) для того чтобы функционал $f : M\to\mathbb{C}$, где M — подмножество топологического пространства X, был непрерывен в точке $x_0\in M$, для любого $\varepsilon>0$ должна существовать окрестность U точки x_0 такая, что $|f(x) - f(x_0)|<\varepsilon$ при $x\in U$ (определение непрерывности функционала);

2) функционал, непрерывный на компактном множестве отделимого топологического векторного пространства, ограничен на этом множестве и достигает на нем своих точных границ (теорема Вейерштрасса);

3) так как всякий ненулевой линейный функционал отображает банахово пространство X на все $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), то он осуществляет открытое отображение, т. е. образ любого открытого множества $G\subset X$ есть открытое множество в $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

В. И. Соболев.

НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ПРОСТРАНСТВО — нормированное пространство $C(X)$ ограниченных непрерывных на топологич. пространстве X функций $f : X\to\mathbb{C}$ с нормой $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Сходимость последо-

вательности f_n в пространстве $C(X)$ означает равномерную сходимость. Пространство $C(X)$ является коммутативной *банаховой алгеброй* с единицей. Если X — бикомпакт, то всякая непрерывная на нем функция $f: X \to \mathbb{C}$ ограничена и, следовательно, пространство $C(X)$ совпадает с пространством всех непрерывных на X функций.

В случае, когда $X=[a, b]$ — отрезок действительных чисел, пространство $C(X)$ обозначается $C[a, b]$. Множество всех целых неотрицательных степеней $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ образует согласно *Вейерштрасса теореме* о приближении непрерывных функций многочленами полную систему в пространстве $C[a, b]$ (это означает, что множество линейных комбинаций указанных степеней, т. е. многочлены, образует в $C[a, b]$ всюду плотное множество), следовательно, пространство $C[a, b]$ сепарабельно. В пространстве $C[a, b]$ существует базис, напр. *Фабера — Шаудера система* функций образует базис в пространстве $C[0, 1]$. Критерий компактности в пространстве $C[a, b]$ дается соответствующей теоремой Арцела: для того чтобы нек-рое семейство функций $f \in C[a, b]$ было компактным относительно пространства $C[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы это семейство было равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Этот критерий обобщается на случай метрич. пространства $C(X, Y)$ непрерывных отображений метрич. компакта X в метрич. компакт Y. Для компактности замкнутого подмножества A пространства $C(X, Y)$ необходимо и достаточно, чтобы входящие в A отображения были равностепенно непрерывны. Расстояние между отображениями f и g из пространства $C(X, Y)$ задается формулой

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x)).$$

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981. *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕПРИВОДИМАЯ МАТРИЧНАЯ ГРУППА — группа G матриц размера $n \times n$ над полем k, к-рую нельзя привести путем одновременного сопряжения в общей линейной группе $\mathrm{GL}_n(k)$ к полураспавшемуся виду

$$\begin{Vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{Vmatrix},$$

где A, B — квадратные клетки фиксированных размеров. Более точно, G наз. неприводимой над полем k. На языке преобразований: группа G линейных преобразований конечномерного векторного пространства V наз. неприводимой, если V — минимальное G-инвариантное подпространство (отличное от нуля). Неприводимые абелевы группы матриц над алгебраически замкнутым полем одномерны. Группа матриц над полем, неприводимая над любым его расширением, наз. абсолютно неприводимой. Если поле k алгебраически замкнуто, то для всякой группы $G \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ следующие условия равносильны: 1) G неприводима над k, 2) G содержит n^2 матриц, линейно независимых над k, 3) G абсолютно неприводима. Таким образом, абсолютная неприводимость над полем равносильна неприводимости над его алгебраическим замыканием.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [2] Мерзляков Ю. И., Рациональные группы, М., 1980. *Ю. И. Мерзляков.*

НЕПРИВОДИМОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — аналитическое пространство, к-рое нельзя представить в виде объединения локально конечного семейства его аналитич. подпространств. Н. а. п. является обобщением понятия неприводимого *аналитического множества*. Всякое аналитич. пространство можно единственным образом представить в виде несократи-

мого объединения локально конечного семейства его неприводимых аналитич. подпространств, называемых его неприводимыми компонентами (разложение пространства на неприводимые компоненты). Комплексное аналитич. многообразие неприводимо тогда и только тогда, когда оно связно; неприводимые компоненты многообразия — это его компоненты связности. Росток аналитич. пространства в данной его точке наз. неприводимым, если его нельзя представить в виде объединения конечного числа ростков аналитич. подпространства в этой же точке. Всякий росток аналитич. пространства в точке единственным образом представляется в виде объединения конечного числа своих неприводимых подростков. Росток приведенного комплексного пространства $(X, \mathcal{O})$ в точке $x \in X$ неприводим тогда и только тогда, когда локальное кольцо $\mathcal{O}_x$ не имеет делителей нуля. Комплексное пространство, ростки к-рого во всех его точках неприводимы, является неприводимым тогда и только тогда, когда оно связно; неприводимые компоненты такого пространства суть его компоненты связности.

Лит.: [1] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [2] Эрве М., Функции многих комплексных переменных. Локальная теория, пер. с англ., М., 1965.

Д. А. Пономарев.

НЕПРИВОДИМОЕ МНОГООБРАЗИЕ — алгебраическое многообразие, являющееся *неприводимым топологическим пространством* в топологии Зарисского. Иначе говоря, Н. м.— алгебраич. многообразие, к-рое нельзя представить в виде объединения двух собственных замкнутых алгебраич. подмногообразий. Аналогично определяется неприводимость схемы. Для гладкого (и даже нормального) многообразия понятия неприводимости и связности совпадают. Каждое неприводимое многообразие обладает единственной *общей точкой*.

По аналогии с разложением топологич. пространства на неприводимые компоненты любое алгебраич. многообразие является объединением конечного числа неприводимых замкнутых подмногообразий. Алгебраическим фундаментом такого представления (доставляющим заодно и более точную формулировку) является *примарное разложение* в коммутативных нётеровых кольцах.

Произведение Н. м. над алгебраически замкнутым полем также неприводимо. Для произвольного основного поля этот факт уже не верен. Полезен также следующий вариант понятия Н. м.: многообразие X над полем k наз. геометрически неприводимым, если для любого расширения k' поля k неприводимым остается многообразие $X \otimes_k k'$, полученное из X заменой базы.

В. И. Данилов.

НЕПРИВОДИМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — непрерывное отображение топологич. пространства X на топологич. пространство Y такое, что образ всякого замкнутого в X множества, отличного от X, отличен от Y. Если $f: X \to Y$ — непрерывное отображение, причем $f(X) = Y$ и все прообразы точек при f бикомпактны, то существует замкнутое в X подпространство X_1 такое, что $f(X_1) Y$ и сужение f на X_1 является Н. о. Яркий эффект дает соединение требований неприводимости отображения и его замкнутости. Пространства, соединенные таким отображением, не отличимы по ряду важных характеристик: в частности, по числу Суслина и π-весу. Но главное значение замкнутым Н. о. дает центральная роль, к-рую они играют в теории абсолютов.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

НЕПРИВОДИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — (линейное) представление π группы (алгебры, кольца, полугруппы) X в векторном пространстве (или топологическом векторном пространстве) E, единственными (замк-

нутыми) инвариантными подпространствами к-рого являются (O) и E. Часто Н. п. в топологическом векторном пространстве наз. топологически неприводимым представлением; если π — представление в топологическом векторном пространстве E, являющееся Н. п. как представление в векторном пространстве E, то представление π наз. алгебраически неприводимым представлением. Алгебраически Н. п. является топологически Н. п.; обратное, вообще говоря, неверно. Есть ряд понятий, близких к понятию Н. п., в том числе — операторно неприводимое представление, вполне неприводимое представление (представление, семейство операторов к-рого образует вполне неприводимое множество). Вполне Н. п. является (топологически) Н. п. и операторно Н. п.; обратные утверждения, вообще говоря, неверны. *А. И. Штерн.*

НЕПРИВОДИМОЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, к-рое нельзя представить как объединение двух собственных замкнутых подпространств. Эквивалентным образом Н. т. п. можно определить, потребовав, чтобы любое его открытое подмножество было связным или чтобы любое открытое непустое подмножество было всюду плотным. Образ Н. т. п. при непрерывном отображении является Н. т. п. Произведение Н. т. п. снова Н. т. п. Понятие неприводимости представляет интерес лишь для неотделимых топологич. пространств; оно постоянно используется в алгебраич. геометрии, имеющей дело с неотделимой топологией Зарисского.

Неприводимой компонентой топологич. пространства X наз. любое максимальное неприводимое подмножество в X. Неприводимые компоненты замкнуты и их объединение дает все X. *В. И. Данилов.*

НЕПРИВОДИМЫЙ КОНТИНУУМ — невырожденный континуум, неприводимый между нек-рой парой своих точек, т. е. не содержащий никакого собственного подконтинуума, содержащего эти точки. *А. А. Мальцев.*

НЕПРИВОДИМЫЙ МНОГОЧЛЕН — многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)=f$ от n переменных над полем k, являющийся простым элементом кольца $k[x_1, \ldots, x_n]$, т. е. непредставимый в виде произведения $f=gh$, где g и h — многочлены с коэффициентами из k, отличные от константы (неприводимость над k). Многочлен наз. абсолютно неприводимым, если он неприводим над алгебраич. замыканием поля коэффициентов. Абсолютно Н. м. одной переменной — это многочлены 1-й степени и только они. В случае нескольких переменных существуют абсолютно Н. м. сколь угодно высокой степени, напр. любой многочлен вида $f(x_1, \ldots, x_{n-1})+x_n$ абсолютно неприводим.

Кольцо многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$ факториально: любой многочлен разлагается в произведение Н. м., причем это разложение определено однозначно с точностью до постоянных множителей. Над полем действительных чисел любой Н. м. одной переменной имеет степень 1 или 2, причем многочлен 2-й степени неприводим тогда и только тогда, когда он имеет отрицательный дискриминант. Над любым полем алгебраич. чисел существуют Н. м. сколь угодно высокой степени; напр., многочлен x^n+px+p, где $n>1$ и p — нек-рое простое число, неприводим в силу критерия Эйзенштейна (см. *Алгебраическое уравнение*).

Пусть A — целозамкнутое кольцо с полем частных k и $f(x)\in A[x]$ — многочлен одной переменной со старшим коэффициентом 1. Если $f(x)=g(x)h(x)$ в $k[x]$, причем $g(x)$ и $h(x)$ имеют старший коэффициент 1, то $g(x),\ h(x)\in A[x]$.

Редукционный критерий неприводимости. Пусть задан гомоморфизм областей целостности $\sigma: A \to B$. Если степень многочлена $\sigma(f(x))$

совпадает со степенью многочлена $f(x)$ и $\sigma(f(x))$ неприводим над полем частных области B, то не существует разложения $f(x)=g(x)h(x)$, где $g(x)$ и $h(x)\in A[x]$ и $g(x)$, $h(x)$ отличны от константы. Напр., многочлен $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ со старшим коэффициентом 1 прост в $\mathbb{Z}[x]$ (и, следовательно, неприводим в $\mathbb{Q}[x]$), если для нек-рого простого p неприводим многочлен $\sigma(f(x))$, полученный из $f(x)$ редукцией коэффициентов по модулю p.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1—2, М., 1963. *Л. В. Кузьмин.*

НЕПРИВОДИМЫЙ МОДУЛЬ, простой модуль,— ненулевой унитарный модуль M над кольцом R с единицей, содержащий лишь два подмодуля — нулевой и сам M.

Примеры: 1) если $R=\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, то неприводимые R-модули — это абелевы группы простого порядка; 2) если R — тело, то неприводимые R-модули — это одномерные векторные пространства над R; 3) если D — тело, V — левое векторное пространство над D, $R=\mathrm{End}_D V$ — кольцо линейных преобразований пространства V (или плотное подкольцо этого кольца), то правый R-модуль неприводим; 4) если G — группа, k — поле, то неприводимые представления группы G над k — это в точности Н. м. над групповой алгеброй kG.

Правый R-модуль M неприводим тогда и только тогда, когда он изоморфен R/I, где I — нек-рый максимальный правый идеал в R. Если A, B — неприводимые R-модули, $f\in\mathrm{Hom}_R(A, B)$, то либо $f=0$, либо f — изоморфизм (откуда следует, что кольцо эндоморфизмов Н. м. является телом). Если же R — алгебра над алгебраически замкнутым полем k, A и B — Н. м. над R, то (лемма Шура)

$$\mathrm{Hom}_R(A, B)=\begin{cases} k, & \text{если } A\cong B,\\ \{0\} & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Понятие Н. м. является одним из основных в теории колец и теории представлений групп. С его помощью определяются *композиционный ряд* и *цоколь* модуля, *Джекобсона радикал* модуля и кольца, *вполне приводимый модуль*. Н. м. участвуют в определении ряда важных классов колец: *классически полупростых колец*, *примитивных колец* и др.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Картис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [3] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971; [4] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79. *А. В. Михалев.*

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ — свойство *формальной системы*, состоящее в том, что не каждая формула этой системы доказуема в ней. Формальные системы, обладающие этим свойством, наз. непротиворечивыми, или формально непротиворечивыми. В противном случае формальная система наз. противоречивой, или несовместной. Для широкого класса формальных систем, язык к-рых содержит знак отрицания $\neg$, Н. эквивалентна свойству: «не существует такой формулы φ, что φ и $\neg\varphi$ обе доказуемы». Класс формул данной формальной системы наз. непротиворечивым, если не всякая формула этой системы выводима из данного класса. Формальная система наз. содержательно непротиворечивой, если существует модель, в к-рой истинны все теоремы этой системы. Если формальная система содержательно непротиворечива, то она формально непротиворечива. Для формальных систем, основанных на классическом исчислении предикатов, справедливо и обратное утверждение: в силу *Гёделя теоремы о полноте* классического исчисления предикатов, всякая такая непротиворечивая система имеет модель. Таким

образом, один из способов доказательства Н. формальной системы состоит в построении модели. Другой (метаматематический) метод доказательства Н., предложенный в начале 20 в. Д. Гильбертом (D. Hilbert), состоит в том, что утверждение о Н. нек-рой формальной системы рассматривается как высказывание о доказательствах, возможных в этой системе. Теория, объектами к-рой являются произвольные математич. доказательства, наз. *доказательств теорией*, или метаматематикой. Примером применения метаматематич. метода может служить предложенное Г. Генценом (G. Gentzen) доказательство Н. формальной системы арифметики (см. *Генцена формальная система*).

Любое доказательство Н. использует средства той или иной математич. теории, а потому лишь сводит вопрос о Н. одной теории к вопросу о Н. другой теории. При этом говорят также, что первая теория непротиворечива относительно второй теории. Большое значение имеет вторая теорема Гёделя, к-рая утверждает, что Н. формальной теории, содержащей арифметику, невозможно доказать с помощью средств самой рассматриваемой теории (при условии, что эта теория действительно непротиворечива).

Лит.: [1] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., М., 1979; [2] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [3] Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [4] Генцен Г., в кн.: Математическая теория логического вывода, М., 1967, с. 77—153; [5] Минц Г. Е., в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 13, М., 1975, с. 5—49; [6] Gödel K., «Monatsch. Math. und Physik», 1930, Bd 37, S. 349—60.

В. Е. Плиско.

НЕРАВЕНСТВО — отношение, связывающее два числа a_1 и a_2 посредством одного из знаков: $<$ (меньше), $\leqslant$ (меньше или равно), $>$ (больше), $\geqslant$ (больше или равно), $\neq$ (неравно), то есть

$$a_1<a_2,\ a_1\leqslant a_2,\ a_1>a_2,\ a_1\geqslant a_2,\ a_1\neq a_2.$$

Иногда несколько Н. записываются вместе, напр.

$$a<b<c.$$

Н. обладают многими свойствами, общими с равенствами. Так, Н. остается справедливым, если к обеим частям его прибавить (или от обеих частей отнять) одно и то же число. Точно так же можно умножить обе части Н. на одно и то же положительное число. Однако если обе части Н. умножить на отрицательное число, то смысл Н. изменится на противоположный (т. е. знак $>$ заменяется на $<$, а $<$ на $>$). Из неравенств $A<B$ и $C<D$ следует $A+C<B+D$ и $A-D<B-C$, т. е. одноименные Н. ($A<B$ и $C<D$) можно почленно складывать, а разноименные Н. ($A<B$ и $D>C$) — почленно вычитать. Если числа A, B, C и D положительны, то из неравенств $A<B$ и $C<D$ следует также $AC<BD$ и $\frac{A}{D}<\frac{B}{C}$, т. е. одноименные Н. (между положительными числами) можно почленно перемножать, а разноименные — почленно делить.

Н., в к-рые входят величины, принимающие различные числовые значения, могут быть верны для одних значений этих величин и неверны для других. Так, неравенство $x^2-4x+3>0$ верно при $x=4$ и неверно при $x=2$. Для Н. этого типа возникает вопрос об их решении, т. е. об определении границ, в к-рых следует брать входящие в Н. величины для того, чтобы Н. были справедливы. Так, переписывая неравенство $x^2-4x+3>0$ в виде: $(x-1)(x-3)>0$, замечают, что оно будет верно для всех x, удовлетворяющих одному из следующих неравенств: $x<1$, $x>3$, к-рые и являются решением данного Н.

Ниже приводятся нек-рые Н., выполняющиеся тождественно в той или иной области изменения входящих в них переменных.

1) Неравенство для модулей. Для любых действительных или комплексных чисел a_1, a_2, ..., a_n справедливо Н.

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|.$$

2) Неравенство для средних. Наиболее известны Н., связывающие гармоническое, геометрическое, арифметическое и квадратичное средние:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}};$$

здесь все числа a_1, a_2, ..., a_n — положительны.

3) Неравенства для сумм и их интегральные аналоги. Таковы, напр., *Буняковского неравенство*, *Гёльдера неравенство*, *Гильберта неравенство*, *Коши неравенство*.

4) Неравенства для степеней чисел. Наиболее известно здесь *Минковского неравенство* и его обобщения на случай рядов и интегралов.

5) Неравенства для некоторых классов последовательностей и функций. Примерами могут служить *Чебышева неравенство* для монотонных последовательностей и *Иенсена неравенство* для выпуклых функций.

6) Неравенство для определителей. Напр., неравенство Адамара — см. *Адамара теорема* об определителях.

7) Линейные неравенства. Рассматривается система Н. вида

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n\geqslant b_i,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Совокупность решений этой системы Н. представляет собой нек-рый выпуклый многогранник в n-мерном пространстве $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$; задача теории *линейных неравенств* состоит в том, чтобы изучить свойства этого многогранника.

Н. имеют существенное значение для всех разделов математики. В теории чисел целый раздел этой дисциплины — *диофантовы приближения* — полностью основан на Н.; аналитич. теория чисел тоже часто оперирует с Н. (см., напр., *Виноградова оценки*). В геометрии Н. постоянно встречаются в теории выпуклых тел и в изопериметрич. задаче (см. *Изопериметрическое неравенство*, *Изопериметрическое неравенство классическое*). В теории вероятностей многие законы формулируются с помощью Н. (см., напр., *Чебышева неравенство* и его обобщение *Колмогорова неравенство*). В теории дифференциальных уравнений используются т. н. *дифференциальные неравенства*. В теории функций постоянно употребляются различные Н. для производных от многочленов и тригонометрич. полиномов (см., напр., *Бернштейна неравенство*, *Джексона неравенство*); о Н., связанных с вложением классов дифференцируемых функций, см. *Колмогорова неравенство*, *Вложения теоремы*. В функциональном анализе при определении нормы в функциональном пространстве требуется, чтобы она удовлетворяла Н. треугольника $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$. Многие классич. Н. в сущности определяют значения нормы линейного функционала или линейного оператора в том или ином пространстве или дают оценки для них (см., напр., *Бесселя неравенство*, *Минковского неравенство*). В вычислительной математике Н. применяются для оценки погрешности приближенного решения задачи.

Лит.: Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; Беккенбах Э., Беллман Р., Неравенства, пер. с англ., М., 1965.

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

НЕРАЗВЕТВЛЕННЫЙ ИДЕАЛ — простой идеал $\mathfrak{P}$ поля алгебраич. чисел K, лежащий над таким простым числом p, что главный идеал (p) имеет в поле K разложение в произведение простых идеалов вида

$$(p)=\mathfrak{P}_1^{e_1}\dots\mathfrak{P}_s^{e_s},$$

где

$$\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P} \quad \text{и} \quad \mathfrak{P}_2,\ \dots,\ \mathfrak{P}_s\neq\mathfrak{P},$$

причем $e_1=1$. Точнее этот идеал наз. а б с о л ю т н о н е р а з в е т в л е н н ы м. В общем случае, пусть A — дедекиндово кольцо с полем частных k, K — конечное расширение поля k и B — целое замыкание A в K. Простой идеал $\mathfrak{P}$ кольца B, лежащий над идеалом $\mathfrak{P}$ кольца A, наз. н е р а з в е т в л е н н ы м в р а с ш и р е н и и K/k, если

$$\mathfrak{P}B=\mathfrak{P}_1^{e_1}\dots\mathfrak{P}_s^{e_s},$$

где $\mathfrak{P}_1,\ \dots,\ \mathfrak{P}_s$ — попарно различные простые идеалы кольца B, $\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}$ и $e_1=1$. Если все идеалы $\mathfrak{P}_1,\ \dots,\ \mathfrak{P}_s$ не разветвлены, то иногда говорят, что идеал $\mathfrak{P}$ остается неразветвленным в K/k. Для расширения Галуа K/k неразветвленность идеала $\mathfrak{P}$ кольца B эквивалентна тому, что подгруппа разложения $\mathfrak{P}$ в группе Галуа $G(K/k)$ совпадает с группой Галуа расширения полей вычетов $(B/\mathfrak{P})/(A/\mathfrak{P})$. В любых конечных расширениях полей алгебраич. чисел все идеалы, кроме конечного числа, не разветвлены.

Лит.: [1] Б о р е в и ч З. И., Ш а ф а р е в и ч И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Л е н г С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966; [3] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969. *Л. В. Кузьмин.*

НЕРАЗВЕТВЛЕННЫЙ ХАРАКТЕР — характер группы Галуа $G(K/k)$ расширения Галуа локальных полей K/k, тривиальный на подгруппе инерции. Любой Н. х. можно рассматривать как характер группы Галуа расширения K_{Hp}/k, где K_{Hp} — максимальное неразветвленное подполе в расширении K/k. Н. х. образуют подгруппу в группе всех характеров. Н е р а з в е т в л е н н ы м х а р а к т е р о м наз. также характер мультипликативной группы k^* локального поля k, тривиальный на группе единиц поля k. Это определение согласовано с предыдущим, т. к. согласно основной теореме локальной теории полей классов для любого абелева расширения локальных полей K/k определен канонич. гомоморфизм взаимности $\theta: k^*\to G(K/k)$, позволяющий отождествить характеры группы $G(K/k)$ с нек-рой подгруппой в группе характеров группы k^*.

Для расширения Галуа глобальных полей K/k характер χ группы Галуа $G(K/k)$ наз. н е р а з в е т в л е н н ы м в т о ч к е $\mathfrak{P}$ поля k, если он остается неразветвленным в указанном выше смысле и при ограничении на подгруппу разложения любой точки $\mathfrak{P}$ поля K, лежащей над $\mathfrak{P}$. Аналогично, характер χ группы классов иделей $C(k)$ поля k наз. н е р а з в е т в л е н н ы м в $\mathfrak{P}$, если его ограничение на подгруппу единиц пополнения $k_{\mathfrak{P}}$ поля k относительно $\mathfrak{P}$ тривиально, где группа $k_{\mathfrak{P}}^*$ вложена стандартным образом в $C(k)$. Из глобальной теории полей классов следует, что оба эти определения неразветвленности в точке $\mathfrak{P}$ согласованы, как и в локальном случае.

Лит.: [1] В е й л ь А., Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972. *Л. В. Кузьмин.*

НЕРАЗЛОЖИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — представление группы (или алгебры, кольца, полугруппы и т. д.), неэквивалентное прямой сумме ненулевых представлений той же группы (соответственно алгебры и т. д.). Таким образом, Н. п. образуют класс представлений, к-рые должны рассматриваться как простейшие представления соответствующей алгебраич. системы и являются тем классом представлений, с помощью к-рого следует изучать структуру алгебраич. системы, ее теорию представлений и гармонич. анализ на этой

системе. Представление топологич. группы (соответственно алгебры и т. д.) в топологическом векторном пространстве наз. Н. п., если оно не эквивалентно топологической прямой сумме ненулевых представлений той же алгебраич. системы.

Всякое *неприводимое представление* есть Н. п. Класс конечномерных Н. п. группы $\mathbb{R}$ и разложение данного конечномерного представления группы $\mathbb{R}$ на Н. п. непосредственно связаны с жордановой нормальной формой матрицы и с теорией линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Классификация Н. п. даже таких групп, как $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{Z}^n$, $n>1$, далека (1982) от завершения. Н. п. полупрямых произведений групп — в частности Н. п. разрешимых групп Ли — могут быть приводимы (даже в конечномерном случае). С другой стороны, конечномерные Н. п. действительных полупростых групп Ли неприводимы, но эти группы имеют приводимые бесконечномерные Н. п., принадлежащие, в частности, аналитич. продолжению основной *непрерывной серии представлений* таких групп.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [3] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [4] Гельфанд И. М., Пономарев В. А., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 2, с. 3—60.

А. И. Штерн.

НЕРАЗЛОЖИМОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — невырожденное распределение вероятностей, не представимое в виде свертки невырожденных распределений. Случайную величину, распределение к-рой неразложимо, невозможно представить в виде суммы независимых непостоянных случайных величин.

Примерами Н. р. могут служить *арксинуса распределение*, *бета-распределение* при условии $n+m<2$, *Уишарта распределение*, любое распределение в $\mathbb{R}^k$, $k\geqslant 2$, сосредоточенное на строго выпуклой замкнутой гиперповерхности. Множество Н. р. достаточно богато и является плотным во множестве всех распределений в топологии слабой сходимости.

В сверточной полугруппе распределений вероятностей Н. р. играют роль, в нек-рой степени аналогичную роли простых чисел в арифметике (см. *Хинчина теорема* о факторизации распределений), но не каждое распределение имеет делитель, являющийся Н. р.

Лит.: [1] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972; [2] Лившиц Л. З., Островский И. В., Чистяков Г. П., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 12, М., 1975, с. 5—42; [3] Parthasarathy K. R., Rao R. R., Varadhan S. R. S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1962, v. 102, p. 200—17.

И. В. Островский.

НЕРАЗЛОЖИМЫЙ КОНТИНУУМ — невырожденный континуум, к-рый нельзя представить в виде объединения двух собственных подконтинуумов.

А. А. Мальцев.

НЕРАЗРЕШИМОСТИ СТЕПЕНЬ — класс эквивалентности $\equiv_T$, индуцированной отношением $\leqslant_T$ тьюринговой сводимости на подмножествах натурального ряда ($A\equiv_T B$, если $A\leqslant_T B$ и $B\leqslant_T A$). Иначе говоря, два множества принадлежат одной Н. с., если для каждого из них существует эффективная разрешающая процедура при возможности время от времени получать от «оракула» ответы на возникающие по ходу вычислений вопросы о принадлежности того или иного числа другому из рассматриваемых множеств (см. также *Алгоритмическая сводимость*). Н. с. определяют также как класс эквивалентности на множестве всюду определенных функций (отображающих натуральный ряд в себя), индуцированной отношением $\leqslant_R$ относительной рекурсивности (функция f рекурсивна относительно функции g, если для f существует рекурсивное определение, в к-ром в число исходных функций, помимо обычных, входит g); в этом случае

Н. с. данной функции наз. также ее степенью невычислимости. Н. с. наз. также тьюринговыми степенями, или Т-степенями. Множество всех Н. с. при обоих подходах оказывается верхней полурешеткой (полуструктурой), причем получающиеся полурешетки Н. с. множеств и функций изоморфны, и в этом смысле приведенные определения эквивалентны.

Строение полурешетки Н. с. изучено довольно подробно (см. [1] — [3]). Элементарная теория полурешетки Н. с. неразрешима [6].

На множестве Н. с. определена операция скачка, сопоставляющая степени неразрешимости a Н. с. a', наибольшую среди Н. с., рекурсивно перечислимых относительно a (множество B рекурсивно перечислимо относительно множества A, если B есть проекция рекурсивного относительно A множества, а Н. с. b наз. рекурсивно перечислимой относительно Н. с. a, если b содержит множество B, рекурсивно перечислимое относительно нек-рого $A \in a$). Операция скачка монотонна: из $a \leqslant b$ следует $a' \leqslant b'$ (но не обратно). Для всякой Н. с. $a \geqslant 0'$ существует такая Н. с. b, что $a = b'$. Н. с. $0^{(n)}$ являются наибольшими, достижимыми в классах Σ_n и Π_n арифметич. множеств.

Особый интерес представляют рекурсивно перечислимые Н. с. (Н. с. рекурсивно перечислимых множеств), образующие подполурешетку в полурешетке всех Н. с. Наибольшей среди рекурсивно перечислимых Н. с. является $0'$ (Н. с. полного множества). Вопрос о существовании рекурсивно перечислимых Н. с., отличных от 0 и $0'$ (т. н. проблема Поста), решен положительно (см. [4], [5]). При решении этой проблемы был развит *приоритета метод*. Полурешетка рекурсивно перечислимых Н. с. (в отличие от полурешетки всех Н. с.) плотна, причем в нее может быть вложено произвольное счетное частично упорядоченное множество. Для многих типов массовых проблем, возникающих в математике и состоящих в отыскании разрешающего алгоритма для некоторого множества (таких, как проблема тождества в теории групп, проблема разрешения конечно аксиоматизируемой элементарной теории и др.), доказано существование неразрешимых проблем соответствующего типа, имеющих произвольную рекурсивно перечислимую Н. с.

Исследовались Н. с. важнейших типов рекурсивно перечислимых множеств (так, все *креативные множества* имеют Н. с. $0'$, простые множества могут иметь любую ненулевую рекурсивно перечислимую Н. с., максимальные — любую рекурсивно перечислимую Н. с. a, для к-рой $a' = 0''$).

Понятие степени вводится и для других типов алгоритмич. сводимости, отличных от тьюринговой (в частности, 1-, m-, tt-степени и др.), причем исследовался вопрос о распадении Н. с. на эти, «более мелкие», степени. Нек-рые из этих промежуточных типов сводимости оказываются связанными с оценкой сложности работы и задания алгоритмов (см. также *Алгоритмическая теория информации*).

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [2] Шенфилд Дж., Степени неразрешимости, пер. с англ., М., 1977; [3] Sacks G. E., Degrees of unsolvability, Princeton (N. Y.), 1963; [4] Мучник А. А., «Докл. АН СССР», 1956, т. 108, № 2, с. 194—97; [5] Friedberg R. M., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1957, v. 43, p. 236—38; [6] Lachlan A. H., «Z. math. Log. und Grundl. Math.», 1968, Bd 14, S. 457—72.

В. А. Душский.

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ — невозможность решения данной задачи точно очерченными средствами. Ниже рассмотрены важнейшие примеры Н. в математике.

Алгоритмическая неразрешимость. В различных областях математики возникают проблемы,

в к-рых требуется найти единую механич. процедуру (*алгоритм*), с помощью к-рой можно было бы решить любую задачу из данного бесконечного класса однотипных задач. Такие проблемы наз. массовыми проблемами. Примером может служить 10-я проблема Гильберта, состоящая в построении алгоритма, к-рый позволил бы для любого заданного многочлена с целыми коэффициентами узнать, существуют ли целые значения переменных, обращающие этот многочлен в нуль. Многие массовые проблемы долгое время не поддавались решению; впоследствии оказалось, что трудность их решения имеет принципиальный характер. Это удалось установить лишь после того, как в 30-х гг. 20 в. в математич. логике было выработано точное понятие алгоритма и для нек-рых массовых проблем было доказано, что искомые в них алгоритмы не существуют. Такие массовые проблемы наз. неразрешимыми, или алгоритмически неразрешимыми. Неразрешимыми оказались многие другие алгоритмич. проблемы из различных областей математики, в частности 10-я проблема Гильберта (см. также *Алгоритмическая проблема*).

Установление алгоритмической Н. данной массовой проблемы показывает, что для решения каждой конкретной задачи из рассматриваемого класса требуется свой специфический для этой задачи метод, т. к. единого метода решения всех этих задач не существует.

Неразрешимые предложения. Одним из способов построения математич. теории является *аксиоматический метод*. При аксиоматич. построении теории ряд ее положений принимается в качестве исходных, или аксиом, а другие получаются как их следствия. В работах Д. Гильберта (D. Hilbert) и его школы понятие аксиоматич. теории было уточнено в виде понятия *формальной системы*. Намеченная Д. Гильбертом программа обоснования математики предусматривала, в частности, формализацию основных разделов математики — арифметики, анализа, теории множеств, т. е. построение формальной системы, из аксиом к-рой можно было бы вывести практически все математич. теоремы. Однако в 1931 К. Гёдель (K. Gödel) показал, что всякая формальная система арифметики неполна в том смысле, что можно указать предложение, к-рое в этой системе нельзя ни доказать, ни опровергнуть (т. е. доказать его отрицание). Такие предложения наз. неразрешимыми, или формально неразрешимыми, в данной системе. В частности, для всякой непротиворечивой формальной системы, содержащей достаточно богатую часть арифметики, утверждение о непротиворечивости этой системы оказывается неразрешимым в ней (см. *Гёделя теорема о неполноте*).

Н. предложения в данной формальной системе означает, что невозможно убедиться в его истинности или ложности на основании лишь тех представлений об исследуемом объекте, к-рые выражены в аксиомах и правилах вывода. Часто оказывается возможным расширить формальную систему за счет новых аксиом таким образом, чтобы нек-рое конкретное неразрешимое в ней предложение можно было доказать или опровергнуть в получившейся системе. Обнаружение в аксиоматич. теории неразрешимых предложений имеет важное значение для развития этой теории, т. к. стимулирует поиск новых фундаментальных положений, к-рые можно было бы принять в качестве аксиом.

Примером Н. в элементарной математике является Н. таких геометрич. задач на построение, как *трисекция угла* и *квадратура круга* при помощи циркуля и линейки.

Лит.: [1] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., М., 1979.

В. Е. Плиско.

НЕРАЗРЫВНОСТИ УРАВНЕНИЕ — одно из основных уравнений гидродинамики, выражающее закон сохранения массы для любого объема движущейся жидкости (газа). В переменных Эйлера Н. у. имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0,$$

где ρ — плотность жидкости, $\boldsymbol{v}$ — ее скорость в данной точке, v_x, v_y, v_z — проекции скорости на координатные оси. Если жидкость несжимаема ($\rho = \text{const}$), Н. у. принимает вид:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Для установившегося одномерного течения в трубе, канале и т. п. с площадью поперечного сечения Н. у. дает закон постоянства расхода $\rho S v = \text{const}$. *БСЭ-3.*

НЕРВ семейства множеств α — *симплициальный комплекс* $K(\alpha)$, симплексами к-рого являются конечные непустые подмножества из α, пересечение к-рых непусто. В частности, вершины $K(\alpha)$ суть элементы из α, не являющиеся пустыми множествами. *М. И. Войцеховский.*

НЕРОНА МОДЕЛЬ абелева многообразия — групповая схема, сопоставляемая абелеву многообразию и обладающая нек-рым свойством минимальности. Если R — локальное гензелево кольцо дискретного нормирования с полем вычетов k и полем частных K, A — абелево многообразие размерности d над полем K, то моделью Нерона многообразия A наз. гладкая коммутативная групповая схема $\mathfrak{A}$ над кольцом R, общий слой к-рой $\mathfrak{A}_K$ — изоморфен многообразию A, а канонич. гомоморфизм $\mathfrak{A}(R) \to \mathfrak{A}_K(K)$ является изоморфизмом. Это понятие было введено А. Нероном [1] в случае совершенного поля k. В локальном случае Н. м. существует и определена однозначно с точностью до R-изоморфизма. Н. м. обладает следующим свойством минимальности: для любой гладкой R-схемы $\mathfrak{X}$ и любого морфизма $\varphi : \mathfrak{A}_K \to \mathfrak{X}$ общих слоев существует однозначно определенный морфизм $\overline{\varphi} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{X}$ R-схем, индуцирующий морфизм φ.

Если S — одномерная регулярная нётерова схема, η — ее общая точка, $i : \eta \to S$ — ее канонич. вложение, A — абелево многообразие над $k(\eta)$, то Н. м. многообразия A определяется как гладкая квазипроективная групповая схема $\mathfrak{A}$ над S, представляющая пучок i_*A относительно плоской топологии Гротендика на S (см. [4]).

Об обобщении понятия Н. м. на произвольные схемы см. [3].

Лит.: [1] Néron A., Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, P., 1964 (Publ. Math. INES, N 21); [2] Мазур Б., «Математика», 1973, т. 17, № 2, с. 3—57; [3] Raynaud M., «C. r. Acad. sci., Ser. A.», 1966, t. 262, p. 345—47; [4] его же, в кн.: Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Amst.— P., 1968, p. 12—30; [5] Groupes de monodromie en géométrie algébrique, v. 1, B., 1972.

НЕРОНА—СЕВЕРИ ГРУППА — группа классов дивизоров по отношению алгебраич. эквивалентности на неособом проективном многообразии.

Пусть X — неособое проективное многообразие размерности $\geqslant 2$, определенное над алгебраически замкнутым полем k, $D(X)$ — группа дивизоров многообразия X, а $D_a(X)$ — подгруппа алгебраически эквивалентных нулю дивизоров. Факторгруппа $D(X)/D_a(X)$ наз. группой Нерона — Севери многообразия X и обозначается $\mathrm{NS}(X)$. Теорема Нерона — Севери утверждает, что абелева группа $\mathrm{NS}(X)$ имеет конечное число образующих.

В случае $k = \mathbb{C}$ Ф. Севери в цикле статей о теории базы (см., напр., [1]) предложил доказательство этой теоремы, использующее топологические и трансцендентные средства. Первое абстрактное доказательство

(годное для поля k любой характеристики) принадлежит А. Нерону (см. [2], [3], а также [4]).

Ранг группы $\mathrm{NS}(X)$ совпадает с алгебраич. числом Бетти группы дивизоров на X, т. е. с алгебраич. рангом многообразия X. Это число наз. также числом Пикара многообразия X. Элементы конечной периодич. подгруппы $\mathrm{NS}_{\mathrm{tors}}(X)$ наз. делителями Севери, а порядок этой подгруппы — числом Севери; группа $\mathrm{NS}_{\mathrm{tors}}(X)$ является бирациональным инвариантом (см. [6]).

Имеются обобщения теоремы Нерона — Севери на другие группы классов алгебраических циклов (см. [1] (классическая теория) и [7] (современная теория)).

Лит.: [1] Severi F., «Mem. Accad. Ital.», 1934, t. 5, p. 239—83; [2] Néron A., «Bull. Soc. math. France», 1952, t. 80, p. 101—66; [3] его же, «Coll Géom. algébric. Liége», 1952, p. 119—26; [4] Lang S., Néron A., «Amer. J. Math.», 1959, v. 81, N 1, 95—118; [5] Hartshorne R., Algebraic geometry, N. Y., 1977; [6] Бальдассарри М., *Алгебраические многообразия*, пер. с англ., М., 1961; [7] *Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия*, т. 12, М., 1974, с. 77—170.

В. А. Исковских.

НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР — линейный оператор в гильбертовом пространстве, спектральный анализ которого не укладывается в рамки теории *самосопряженных операторов* и ее простейших обобщений: теории *унитарных операторов* и теории *нормальных операторов*. Н. о. возникают при рассмотрении процессов, протекающих без сохранения энергии: в задачах с трением, в теории открытых резонаторов, в задачах неупругого рассеяния и др. К исследованию Н. о. приводят и нек-рые самосопряженные задачи, в к-рых при разделении переменных возникает операторнозначная функция $\mathscr{L}(\lambda)$, нелинейно зависящая от спектрального параметра λ. Многие из предложений, относящиеся к теории Н. о., справедливы и для операторов, действующих в произвольных банаховых пространствах, F-пространствах, топологических векторных пространствах и т. д.

Наиболее распространенным методом изучения Н. о. является метод оценки *резольвенты*, использующий теорию аналитич. функций, теорию асимптотич. разложений и др.

Первыми работами, относящимися к теории Н. о., были работы Г. Биркгофа (G. Birkhof), Я. Д. Тамаркина, В. А. Стеклова и др. по исследованию задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти ученые применяли метод Коши контурного интегрирования резольвенты.

Для дифференциальных Н. о. с частными производными долгое время отсутствовали эффективные методы изучения. Объясняется это сложным строением резольвенты оператора, как аналитич. функции.

В развитии общей теории Н. о. (и, в частности, операторов с частными производными) большую роль сыграла работа М. В. Келдыша [1] (см. также [2]). В ней изучено уравнение

$$y = \mathscr{L}(\lambda)\, y, \qquad (1)$$

где y — элемент некоторого гильбертова пространства H, а оператор $\mathscr{L}(\lambda)$ допускает представление

$$\mathscr{L}(\lambda) = B_0 + \lambda H_0 B_1 + \ldots + \lambda^{n-1} H_0^{n-1} B_{n-1} + \lambda^n H_0^n.$$

Здесь H_0 — вполне непрерывный обратимый самосопряженный оператор конечного порядка, B_j, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, — произвольные вполне непрерывные операторы. (Вполне непрерывный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве, называется оператором конечного порядка, если $\sum s_k^{\rho}(A) < \infty$ при нек-ром $0 < \rho < \infty$; через $s_k(A)$ обозначены сингулярные числа A, т. е. собственные значения оператора $(AA^*)^{1/2}$.) Собственные значения уравнения (1) — те значения λ, при к-рых это уравнение имеет нетриви-

альные решения y; эти решения наз. собственными векторами.

При сделанных выше предположениях спектр уравнения (1) дискретен. Вследствие несамосопряженности оператора $\mathscr{L}(\lambda)$, наряду с собственными векторами, естественно, возникают (при наличии кратного спектра) присоединенные векторы. В работе [1] строится цепочка присоединенных векторов $y_1, y_2, \ldots, y_k$, отвечающих собственному значению λ и собственному вектору y по правилу

$$y_\nu = \mathscr{L}(\lambda)\, y_\nu + \frac{1}{1!}\frac{\partial \mathscr{L}(\lambda)}{\partial \lambda} y_{\nu-1} + \ldots + \frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu \mathscr{L}(\lambda)}{\partial \lambda^\nu} y, \quad (2)$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, k.$$

Система собственных и присоединенных векторов оператора $\mathscr{L}(\lambda)$ наз. n-кратно полной, если любые n векторов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ пространства H можно аппроксимировать по норме H с любой точностью конечными линейными комбинациями вида

$$\sum_k c_k \left[\frac{d^\nu v_k(t)}{dt^\nu}\right]_{t=0}$$

с одними и теми же коэффициентами c_k. Здесь $v_k(t)$ вектор-функция вида

$$e^{\lambda t}\left(y_k + \frac{t}{1!}\, y_{k-1} + \ldots + \frac{t^k}{k!}\, y\right).$$

Определение n-кратной полноты, естественно, связано с решением задачи Коши для соответствующего уравнению (1) нестационарного уравнения.

Согласно теореме М. В. Келдыша, при сделанных предположениях относительно коэффициентов $\mathscr{L}(\lambda)$ система всех собственных и присоединенных векторов оператора $\mathscr{L}(\lambda)$ n-кратно полна в H. В работе [1] было также показано, что собственные значения $\mathscr{L}(\lambda)$ асимптотически приближаются к лучам $\arg \lambda = \sqrt{\pi}/n$. При доказательстве полноты М. В. Келдыш развил новый метод оценки резольвенты абстрактного вполне непрерывного Н. о. конечного порядка. При этом выявилась особая роль, к-рую играют в проблеме полноты вольтерровы операторы — вполне непрерывные операторы с единственной точкой спектра в нуле. Для доказательства асимптотич. поведения собственных значений М. В. Келдыш [3] использовал установленную им новую тауберову теорему.

Исследования М. В. Келдыша были продолжены многими учеными. Его теорема распространена [4] на случай, когда в уравнении (1) оператор $\mathscr{L}(\lambda)$ рационально зависит от λ.

Было рассмотрено (см. [5] — [7]) уравнение $M(\lambda)y = 0$ с $M(\lambda) = I + \lambda B + \lambda^2 C$, где C — вполне непрерывный положительно определенный оператор, а B — ограниченный самосопряженный оператор. Обобщение теоремы Понтрягина (см. [8]) о существовании у J-самосопряженного оператора A максимального J-неотрицательного инвариантного подпространства позволило (см. [6] и [7]) установить, в важных для приложений ситуациях, двухкратную полноту всех собственных и присоединенных векторов $M(\lambda)$, а также однократную полноту подсистемы, соответствующую спектру, расположенному в левой (правой) полуплоскости. Эти результаты получили дальнейшее развитие.

Установлена (см. [9]) суммируемость рядов Фурье по собственным и присоединенным векторам вполне непрерывного оператора A конечного порядка ρ, у к-рого значения квадратичной формы (Ax, x) лежат в секторе комплексной плоскости, раствора меньшего π/ρ (по поводу приложений этой теоремы и ее дальнейших обобщений см. [10] и библиографию там).

Вопрос о том, когда система собственных и присоединенных векторов образует базис в гильбертовом прост-

ранстве, изучался в ряде работ (см. [11]). Наиболее общие условия, при к-рых система собственных и присоединенных векторов диссипативного вполне непрерывного оператора образует базис, найдена в [12].

В случае сингулярных дифференциальных операторов с дискретным спектром получен (см. в [11] и [13]) ряд тонких результатов о полноте собственных и присоединенных функций оператора Штурма—Лиувилля с комплексным потенциалом. Важные результаты получены в случае эллиптич. операторов (см. [14]). Дано обобщение теоремы Келдыша на случай обобщенных собственных и присоединенных функций несамосопряженных эллиптич. операторов (см. [15], [16]).

Попытка перенести теорему о приведении конечномерного оператора к жордановой форме на бесконечномерный случай привела к построению треугольного интегрального представления. Для вполне непрерывных операторов $B=B_R+iB_I$, где B_R и B_I — самосопряженные и B_I имеет конечный порядок, получен аналог теоремы Шура об унитарной эквивалентности оператора B треугольному (см. [17]). Особое место в проблеме треугольного представления заняли вольтерровы операторы.

В проблеме треугольного представления существенную роль сыграла теорема Неймана о существовании у линейного вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве нетривиального инвариантного подпространства; у произвольного ограниченного линейного оператора в банаховом пространстве нетривиального инвариантного подпространства может не быть; соответствующий вопрос для случая гильбертова пространства остается открытым (1982). Вольтерров оператор наз. одноклеточным, если из каждых двух его инвариантных подпространств Q_1 и Q_2, либо $Q_1\subset Q_2$, либо $Q_2\subset Q_1$. Найдено [18] необходимое и достаточное условие однолистности оператора B в предположении, что B_I — ядерный неотрицательно определенный: это условие формулируется в терминах роста резольвенты оператора B при $\lambda\to 0$. Указано [19] простое достаточное условие одноклеточности.

Н. о. с непрерывным спектром впервые были исследованы М. А. Наймарком (см. [20], [21]), к-рый получил разложение в интеграл Фурье, связанное с несамосопряженной задачей

$$l(y)=-y''+p(x)\,y=\lambda y,\quad 0\leqslant x<\infty, \tag{3}$$

$$y'(0)-\theta y(0)=0, \tag{4}$$

где $p(x)$ — комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty (1+x^2)\,|\,p(x)\,|\,dx<\infty, \tag{5}$$

θ — комплексное число. Из результатов работы [20], в частности, следует, что в окрестности точек действительной оси, обращающих функцию $A(s)=\omega'_x(0,\ s)-$ $-\theta\omega(0,s)$ в нуль ($s=\sqrt{\lambda}$), спектральные проекторы оператора (3)—(4) неограничены (через $\omega(x,\ s)$ обозначено решение уравнения (3), удовлетворяющее условию $\omega(x,\ s)e^{-ixs}\to 1$ при $x\to+\infty$ — решение Иоста); действительные нули функции $A(s)$ названы в [20] спектральными особенностями. Получено (см. [22]) обобщение результатов работы [20] на случай уравнения Шредингера в трехмерном пространстве. В развитие работы [20] было показано (см. [23]), что в общем случае (без ограничения типа (5)) спектральная функция дифференциального оператора должна рассматриваться как линейный непрерывный функционал, заданный на некотором топологическом пространстве.

Исследовалась (см. [24]) система несамосопряженных уравнений с особыми точками, положение к-рых зави-

сит от спектрального параметра. Эти системы встречаются в безмоментной теории оболочек. Для таких систем установлены асимптотич. свойства решений, а также доказаны теоремы разрешимости типа теоремы Коши. Установлены теоремы полноты системы собственных и присоединенных функций несамосопряженных интегро-дифференциальных операторов, порождающих нерегулярную задачу.

Важной задачей теории дифференциальных Н. о. является задача о разложении ядра оператора Грина в биортогональный ряд по собственным и присоединенным функциям, а также проблема их базисности. Я. Д. Тамаркин [25] исследовал разложения суммируемой функции в ряд по собственным и присоединенным функциям регулярной задачи, а также вопросы равносходимости с тригонометрич. рядом Фурье. Позже было показано (см. [26], [27]), что для нерегулярных задач равносходимость с тригонометрическим рядом не имеет места.

Для усиленно регулярных условий система собственных и присоединенных функций образует базис в L_2. Показано (см. [28], [29]), что указанная система образует не только базис, но и так наз. базис Рисса.

Развит в (см. [30]) важный метод изучения условий базисности и равномерной сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям обыкновенного Н. о. Этот метод является дальнейшим развитием идей, примененных при исследовании самосопряженных задач. Предложена новая трактовка собственных и присоединенных функций, что позволило отказаться от конкретного вида граничных условий; рассмотрены общие обыкновенные дифференциальные операторы или пучки таких операторов и установлены необходимые и достаточные условия базисности собственных и присоединенных функций таких операторов, а также критерии равносходимости. Метод основан лишь на формуле среднего значения для собственных и присоединенных функций (см. также [31]). Оказалось также, что если у оператора число присоединенных функций бесконечно, то свойство базисности зависит от выбора последних (см. [32]).

Для несамосопряженных эллиптич. операторов имеет место (см. [33]) сходимость некоторой последовательности средних типа Пуассона частичных сумм биортогонального ряда, т. е. предложен способ суммирования.

Разложения по собственным и присоединенным функциям нерегулярных задач впервые получены для задачи вида $y''=\lambda y$, $y(0)=y'(0)=y(1)=0$. Доказано (см. [26]), что в равномерно сходящиеся ряды такого вида могут быть разложены функции, удовлетворяющие нек-рым условиям аналитичности.

К числу фундаментальных относятся исследования (см. [34]), в к-рых изучается вопрос о возмущении спектра оператора Лапласа при изменении области. При этом впервые была выявлена роль емкости варьируемого множества на спектр оператора. Эти методы с успехом применяются при исследовании несамосопряженных задач.

В теории Н. о. успешно применяются методы регуляризации, основы к-рых были заложены в [35]. Пример — вопрос регуляризованных следов Н. о. Первой работой по теории следов была статья [36], где был вычислен регуляризованный след оператора Штурма — Лиувилля. Наиболее общие результаты в теории следов операторов получены в статьях [37], [38]. Оказалось, что формулы следов обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов, зависящих сложным образом от спектрального параметра, могут быть получены как следствия из формул регуляризованных сумм корней некоторого класса целых функций. (По поводу следов для сингулярных операторов и операторов с частными производными см. [38], [39].)

К числу важных работ, в к-рых развиты новые методы и идеи теории Н. о., относится также обзорный доклад [40].

Построение окончательной теории Н. о. далеко от завершения (1982). С одной стороны, в самой этой теории формируются новые направления исследования, напр. теория рассеяния [41], построение теории операторов сжатия [42], метод канонического оператора Маслова [43], теория спектральных операторов [44] и др., а с другой стороны — исследования прикладных задач, механики, математической физики подсказывают новые пути развития этой теории.

Лит.: [1] Келдыш М. В., «Докл. АН СССР», 1951, т. 77, № 1, с. 11—14; [2] его же, «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 4, с. 15—41; [3] его же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 77—86; [4] Аллахвердиев Дж. Э., «Докл. АН СССР», 1957, т. 115, № 2, с. 207—10; [5] Лангер Г., «Докл. АН СССР», 1960, т. 134, № 2, с. 263—66; [6] Крейн М. Г., там же, 1964, т. 154, № 5, с. 1023—26; [7] Крейн М. Г., Лангер Г. К., в кн.: Приложения теории функций в механике сплошной среды, М., 1965 (Тр. Международного симпозиума, т. 2); [8] Понтрягин Л. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1944, т. 8, с. 243—80; [9] Лидский В. Б., «Докл. АН СССР», 1956, т. 110, № 2, с. 172—75; [10] Агранович М. С., «Функц. анализ и его приложения», 1976, т. 10, № 3, с. 1—12; [11] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1965; [12] Кацнельсон В. Э., «Функц. анализ и его приложения», 1967, т. 1, № 2, с. 39—51; [13] Лидский В. Б., «Докл. АН СССР», 1957, т. 113, № 1, с. 28—31; [14] Костюченко А. Г., там же, 1964, т. 158, № 1, с. 41—44; [15] Пономарев С. М., «Дифф. уравнения», 1974, т. 10, № 12, с. 2294—96; [16] Круковский Н. М., там же, 1976, т. 12, № 10, с. 1832—51; [17] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., 1967; [18] Бродский М. С., Кисилевский Г. Э., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30, № 6, с. 1213—28; [19] Никольский Н. К., «Докл. АН СССР», 1967, т. 172, № 2, с. 287—90; [20] Наймарк М. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1954, т. 3, с. 181—270; [21] его же, Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [22] Гасымов М. Г., «Докл. АН АзССР», 1966, т. 22, № 10, с. 9—12; [23] Марченко В. А., «Матем. сб.», 1960, т. 52, с. 739—88; [24] Садовничий В. А., «Тр. Семинара им. И. Г. Петровского», 1976, в. 2, с. 211—21; [25] Тамаркин Я. Д., О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений..., Пг., 1917; [26] Ward L. E., «Ann. Math.», 1925, v. 26, p. 21—36; его же, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1932, v. 34, p. 417—34; [27] Хромов А. П., «Тр. Второй науч. конференции математич. кафедр педагогич. вузов Поволжья» (Куйбышев), 1962, в. 1, с. 109—13; [28] Михайлов В. П., «Докл. АН СССР», 1962, т. 144, № 5, с. 981—84; [29] Кесселъман Г. М., «Изв. ВУЗов. Математика», 1964, № 2, с. 82—93; [30] Ильин В. А., «Докл. АН СССР», 1976, т. 230, № 1, с. 30—33; [31] Моисеев Е. И., там же, 1977, т. 233, № 6, с. 1042—45; [32] Тихомиров В. В., «Матем. сб.», 1977, т. 102, № 1, с. 33—55; [33] Лидский В. Б., «Матем. сб.», 1962, т. 57, № 2, с. 137—50; [34] Самарский А. А., «Успехи матем. наук», 1950, т. 5, в. 3, с. 133—34; [35] Тихонов А. Н., «Докл. АН СССР», 1963, т. 153, № 1, с. 49—52; 1943, т. 39, № 5, с. 195—98; [36] Гельфанд И. М., Левитан Б. М., там же, 1953, т. 88, № 4, с. 593—96; [37] Лидский В. Б., Садовничий В. А., там же, 1967, т. 176, № 2, с. 259—62; [38] Садовничий В. А., «Дифф. уравнения», 1974, т. 10, № 7, с. 1276—85; [39] Садовничий В. А., Любишкин В. А., «Докл. АН СССР», 1981, т. 261, № 2, с. 290—93; [40] Келдыш М. В., Лидский В. Б., в кн.: Тр. Четвертого Всесоюзного математического съезда, т. 1, Л., 1963, с. 101—20; [41] Лакс П. Д., Филлипс Р. С., Теория рассеяния для автоморфных функций, пер. с англ., М., 1979; [42] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970; [43] Маслов В. П., Операторные методы, М., 1973; [44] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 3, М., 1974.

В. А. Садовничий.

НЕСГЛАЖИВАЕМОЕ МНОГООБРАЗИЕ — кусочно линейное или топологическое многообразие, не допускающее гладкой структуры.

Сглаживанием кусочно линейного многообразия X наз. кусочно линейный изоморфизм $f : M \to X$, где M — гладкое многообразие. Многообразие, не допускающее сглаживания, и наз. несглаживаемым многообразием. Сказанное с нек-рыми изменениями применимо и к топологическим многообразиям.

Пример Н. м. Пусть W^{4k}, $k>1$, — $4k$-мерное многообразие Милнора (см. *Древовидное многообразие*). В частности, W^{4k} параллелизуемо, его сигнатура рав-

на 8, и его край $M=\partial W^{4k}$ гомотопически эквивалентен сфере S^{4k-1}. Подклейка к W конуса CM над ∂W приводит к пространству P^{4k}. При этом, так как M есть кусочно линейная сфера (см. обобщенная *Пуанкаре гипотеза*), то CM кусочно линейный диск, так что P — кусочно линейное многообразие. С другой стороны, P есть Н. м., так как его сигнатура равна 8, а сигнатура гладкого почти параллелизуемого (т. е. параллелизуемого после выкалывания точки) 4-х мерного многообразия кратна числу σ_k, экспоненциально растущему с ростом k. Многообразие M не диффеоморфно сфере S^{k-1}, т. е. M — *Милнора сфера*.

Критерий сглаживаемости кусочно линейного многообразия. Пусть O_n — ортогональная группа, а PL_n — группа сохраняющих начало кусочно линейных гомеоморфизмов $\mathbb{R}^n$ (см. *Кусочно линейная топология*). Включение $O_n \to PL_n$ индуцирует расслоение $BO_n \to BPL$, где BG — *классифицирующее пространство* группы G. При $n \to \infty$ получается расслоение $p : BO \to BPL$, слой к-рого обозначается через M/O. Кусочно линейное многообразие X обладает линейным стабильным нормальным расслоением ν, классифицируемым отображением $\nu : X \to BPL$. Если же X является гладким (сглаживаемым) многообразием, то оно обладает векторным стабильным нормальным расслоением $\overline{\nu}$, классифицируемым отображением $\overline{\nu} : X \to BO$, причем $p\circ\overline{\nu}=\nu$. Это условие также и достаточно, т. е. замкнутое кусочно линейное многообразие X сглаживаемо тогда и только тогда, когда его кусочно линейное стабильное нормальное расслоение допускает векторную редукцию, т. е. когда отображение $\nu : X \to BPL$ «поднимается» в BO (существует такое $\overline{\nu} : X \to BO$, что $p\circ\overline{\nu}=\nu$).

Два сглаживания $f : M \to X$ и $g : N \to X$ наз. эквивалентными, если существует диффеоморфизм $h : M \to N$ с $f=gh$ (см. *Структура на многообразии*). Множество $\mathrm{ts}(X)$ классов эквивалентности сглаживаний находится в естественном взаимно однозначном соответствии с классами послойной гомотопности поднятий $\overline{\nu} : X \to BO$ отображения $\nu : X \to BO$. Иными словами, для сглаживаемого X множество $\mathrm{ts}(X)=[X, PL/O]$.

Лит.: [1] Kervaire M., «Comment. math. helv.», 1960, t. 34, p. 257—70; [2] Милнор Дж., Сташеф Дж., Характеристические классы, пер. с англ., М., 1979.

Ю. И. Рудяк.

НЕСМЕШАННЫЙ ИДЕАЛ — идеал $\mathfrak{m}$ области целостности R (конечно порожденной над нек-рым полем k), обладающий следующим свойством: все простые идеалы $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$, ассоциированные с примарными идеалами $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_s$ из примарного разложения

$$\mathfrak{m}=\mathfrak{Q}_1\cap\ldots\cap\mathfrak{Q}_s,$$

имеют одну и ту же размерность, т. е. факторкольца $R/\mathfrak{P}_i$ имеют одну и ту же размерность Крулля для всех i. Эта общая размерность наз. размерностью несмешанного идеала $\mathfrak{m}$.

Если R — кольцо регулярных функций на нек-ром аффинном многообразии X, то его идеал $\mathfrak{m}$ — Н. и. тогда и только тогда, когда все неприводимые компоненты подмногообразия $Y\subset X$, определяемого идеалом $\mathfrak{m}$, имеют одну и ту же размерность. *Л. В. Кузьмин.*

НЕСМЕЩЕННАЯ ОЦЕНКА — статистическая оценка, математич. ожидание к-рой совпадает с оцениваемой величиной. Пусть по реализации случайной величины X, принимающей значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta\in\Theta$, надлежит оценить функцию $f : \Theta \to \Omega$, отображающую параметрич. множество Θ в нек-рое множество Ω, и пусть в качестве оценки функции $f(\theta)$ выбрана статистика $T=T(X)$. Если статистич. оценка T такова, что равенство

$$\mathsf{E}_\theta\{T\}=\int_{\mathfrak{X}} T(x)\,d\mathsf{P}_\theta(x)=f(\theta)$$

выполняется для всех $\theta\in\Theta$, то T наз. несмещенной оценкой функции $f(\theta)$. Про Н. о. часто говорят, что она лишена систематич. ошибки.

Пример 1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайные величины, имеющие одно и то же математич. ожидание θ, т. е.

$$\mathsf{E}\{X_1\}=\mathsf{E}\{X_2\}=\ldots=\mathsf{E}\{X_n\}=\theta.$$

В таком случае статистика

$$T=c_1X_1+c_2X_2+\ldots+c_nX_n,\ c_1+c_2+\ldots+c_n=1$$

является Н. о. математич. ожидания θ. В частности, среднее арифметическое наблюдений $\overline{X}=(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n$ является Н. о. для θ. В данном примере $f(\theta)\equiv\theta$.

Пример 2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же вероятностному закону, функция распределения к-рого есть $F(x)$, т. е.

$$\mathsf{P}\{X_i<x\}=F(x),\ |x|<\infty,\ i=1, 2, \ldots, n.$$

В таком случае функция эмпирич. распределения $F_n(x)$, построенная по наблюдениям $X_1, X_2, \ldots, X_n$, является Н. о. функции распределения $F(x)$, т. е. $\mathsf{E}\{F_n(x)\}=F(x),\ |x|<\infty$.

Пример 3. Пусть $T=T(X)$ — Н. о. параметра θ, т. е. $\mathsf{E}\{T\}=\theta$, и пусть $f(\theta)=a\theta+b$ — линейная функция. В таком случае статистика $aT+b$ является Н. о. для $f(\theta)$.

Следующий пример показывает, что имеются такие случаи, в к-рых Н. о. существуют и даже единственны, но при этом они могут оказаться бессмысленными.

Пример 4. Пусть X — случайная величина, подчиняющаяся геометрич. распределению, параметр успеха к-рого есть θ, т. е. для любого натурального числа k

$$\mathsf{P}\{X=k\mid\theta\}=\theta(1-\theta)^{k-1},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

Если $T=T(X)$ — Н. о. параметра θ, то она должна удовлетворять уравнению несмещенности $\mathsf{E}\{T\}=\theta$ или, что то же самое, уравнению

$$\sum_{k=1}^{\infty}T(k)\,\theta(1-\theta)^{k-1}=\theta,$$

единственное решение к-рого есть

$$T(X)=\begin{cases}1, & X=1,\\ 0, & X\geqslant 2.\end{cases}$$

Очевидно, что статистика T является хорошей только, если θ очень близко к 1 либо к 0, в противном случае T не несет никакой полезной информации о параметре θ.

Пример 5. Пусть случайная величина X подчиняется биномиальному закону с параметрами n и θ, т. е. для любого $k=0, 1, \ldots, n$

$$\mathsf{P}\{X=k\mid n,\ \theta\}=\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k},\quad 0<\theta<1.$$

Известно, что наилучшей Н. о. (в смысле минимума квадратичного риска) параметра успеха θ является статистика $T=X/n$. Тем не менее, если θ — иррациональное число, то $\mathsf{P}\{T=\theta\}=0$. Этот пример отражает одно общее свойство случайных величин, заключающееся в том, что случайная величина, вообще говоря, не обязана принимать значение, совпадающее с ее математич. ожиданием. И наконец, возможны случаи, когда Н. о. вообще не существуют. Так, если в условиях примера 5 в качестве оцениваемой функции выбрать $f(\theta)=1/\theta$, то (см. пример 6) не существует Н. о. $T(X)$ для $1/\theta$.

Приведенные примеры демонстрируют, что само по себе понятие Н. о., при всей своей естественности, не помогает экспериментатору избавиться от всех ос-

ложнений, к-рые могут ждать его при построении статистич. оценок, так как Н. о. может оказаться как очень хорошей, так и совершенно бессмысленной, она может быть неединственной, а может вовсе не существовать. Кроме того, Н. о., как и всякая точечная оценка, обладает еще следующим недостатком: она дает лишь нек-рое приближенное значение для истинного значения оцениваемой величины, к-рое как было неизвестным до эксперимента, таковым и остается после его проведения. Вообще, в задаче построения точечных статистич. оценок нет серьезных обоснований к тому, чтобы во всех случаях стремиться к получению Н. о., если не считать того, что при изучении Н. о. возникает простая и стройная теория. Так, напр., *Рао — Крамера неравенство* имеет простой вид для Н. о. Именно, если $T=T(X)$ — Н. о. для функции $f(\theta)$, то при довольно широких условиях регулярности семейства $\{\mathsf{P}_\theta\}$ и функции $f(\theta)$ из неравенства Рао — Крамера следует, что

$$\mathsf{D}\{T\}=\mathsf{E}\{[T-f(\theta)]^2\}\geqslant\frac{1}{I(\theta)}f'(\theta), \qquad (1)$$

где $I(\theta)$ — информационное количество Фишера. Таким образом, существует нижняя граница для дисперсий Н. о. функции $f(\theta)$, и этой границей служит $f'(\theta)/I(\theta)$. В частности, если $f(\theta)\equiv\theta$, то из (1) следует, что

$$\mathsf{D}\{T\}\geqslant 1/I(\theta).$$

Статистич. оценка, для к-рой в неравенстве Рао — Крамера достигается равенство, наз. э ф ф е к т и в н о й. Так, статистика $T=X/n$, рассмотренная в примере 5, является эффективной Н. о. параметра успеха θ биномиального закона, т. к.

$$\mathsf{D}\{T\}=\frac{1}{n}\theta(1-\theta)$$

и

$$I(\theta)=\mathsf{E}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\left[\theta^X(1-\theta)^{n-X}\right]\right]^2\right\}=\frac{n}{\theta(1-\theta)},$$

т. е. $T=X/n$ является наилучшей точечной оценкой параметра в смысле минимума квадратичного риска в классе всех Н. о.

Естественно, что для экспериментатора представляет интерес тот случай, когда класс Н. о. достаточно богат, чтобы иметь возможность выбора наилучшей в каком-то смысле Н. о. В этой связи большую роль играет *Рао — Блэкуэлла — Колмогорова теорема*, позволяющая строить Н. о. с наименьшей дисперсией. Эта теорема утверждает, что если семейство $\{\mathsf{P}_\theta\}$ имеет достаточную статистику $\Psi=\Psi(X)$, а $T=T(X)$ — произвольная Н. о. функции $f(\theta)$, то статистика $T^*=\mathsf{E}_\theta\{T|\Psi\}$, получающаяся в результате осреднения T при фиксированной достаточной статистике Ψ, имеет риск, не превосходящий риска статистики T относительно произвольной выпуклой функции потерь при всех $\theta\in\Theta$. Если при этом семейство $\{\mathsf{P}_\theta\}$ является полным, то статистика T^* определяется единственным образом. То есть из теоремы Рао — Блэкуэлла — Колмогорова следует, что Н. о. нужно искать лишь в терминах достаточных статистик, если они существуют. Практич. ценность теоремы Рао — Блэкуэлла — Колмогорова заключается в том, что она дает рецепт построения наилучших Н. о., а именно: нужно построить произвольную Н. о. для $f(\theta)$, а затем осреднить ее по достаточной статистике.

П р и м е р 6. Пусть случайная величина X имеет распределение Паскаля (отрицательное биномиальное распределение) с параметрами r и θ ($r\geqslant 2$, $0<\theta<1$), т. е.

$$\mathsf{P}\{X=k\,|\,r,\theta\}=\binom{r+k-1}{k}\theta^r(1-\theta)^k,\quad k=r,\ r+1,\ldots$$

В этом случае статистика $T=(r-1)/(X-1)$ является Н. о. параметра θ. Так как статистика T выражена в терминах достаточной статистики X, а система функций $1, x, x^2, \ldots$ является полной на отрезке $[0, 1]$, то T является единственной Н. о., а следовательно, наилучшей оценкой для θ.

Пример 7. Пусть X — случайная величина, подчиняющаяся биномиальному закону с параметрами n и θ. Производящая функция $Q(z)$ этого биномиального закона выражается формулой

$$Q(z)=\mathsf{E}\{z^X\}=(z\theta+q)^n, \quad q=1-\theta,$$

откуда следует, что для любого целого числа $k=1, 2, \ldots, n$

$$Q^{(k)}(z)=n(n-1)\ldots(n-k+1)(z\theta+q)^{n-k}\theta^k=$$
$$=n^{[k]}(z\theta+q)^{n-k}\theta^k.$$

С другой стороны,

$$Q^{(k)}(1)=\mathsf{E}\{X(X-1)\ldots(X-k+1)\}=\mathsf{E}\{X^{[k]}\},$$

откуда следует, что

$$\mathsf{E}\left\{\frac{1}{n^{[k]}}X^{[k]}\right\}=\theta^k,$$

т. е. статистика

$$T_k(X)=\frac{1}{n^{[k]}}X^{[k]} \tag{2}$$

является Н. о. для θ^k, причем в силу того, что $T_k(X)$ выражена в терминах достаточной статистики X, а также в силу полноты системы функций $1, x, x^2, \ldots$ на отрезке $[0, 1]$ следует, что $T_k(X)$ — единственная, а значит, и наилучшая Н. о. для θ^k.

В связи с этим примером возникает следующий вопрос: какие функции $f(\theta)$ от параметра θ допускают несмещенное оценивание. А. Н. Колмогоров показал [1], что только для многочленов степени $m\leqslant n$ существуют Н. о. Так, если

$$f(\theta)=a_0+a_1\theta+\ldots+a_m\theta^m, \quad 1\leqslant m\leqslant n,$$

то из (2) следует, что статистика

$$T=a_0+\sum_{k=1}^{m}a_kT_k(X)$$

является единственной Н. о. для $f(\theta)$. Из этого результата, в частности, следует, что для функции $f(\theta)=1/\theta$ не существует Н. о.

Пример 8. Пусть X — случайная величина, подчиняющаяся закону Пуассона с параметром θ, т. е. для любого целого числа $k=0, 1, 2, \ldots$

$$\mathsf{P}\{X=k\mid\theta\}=\frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}, \quad \theta>0.$$

В силу того, что $\mathsf{E}\{X\}=\theta$, само наблюдение X является Н. о. своего математич. ожидания θ. В свою очередь, напр., Н. о. функции $f(\theta)=\theta^2$ является $X(X-1)$. Вообще, статистика

$$X^{[r]}=X(X-1)(X-2)\ldots(X-r+1), \quad r=1, 2, \ldots,$$

является Н. о. функции $f(\theta)=\theta^r$. Из этого факта, в частности, следует, что статистика

$$T(X)=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^rX^{[r]}$$

является Н. о. функции $f(\theta)=(1+\theta)^{-1}$, $0<\theta<1$. Вообще, если функция $f(\theta)$ допускает несмещенное оценивание, то для нее должно выполняться уравнение несмещенности $\mathsf{E}\{T(X)\}=f(\theta)$, к-рое равносильно следующему:

$$\sum_{k=0}^{\infty}T(k)\frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}=f(\theta),$$

откуда получается, что Н. о. существует для любой функции $f(\theta)$, допускающей разложение в степенной ряд в своей области определения $\Theta \subset R_1^+$.

Пример 9. Пусть независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ подчиняются одному и тому же закону Пуассона с параметром θ, $\theta > 0$. Производящая функция этого закона, выражающаяся формулой

$$g_z(\theta) = \exp\{\theta(z-1)\},$$

является целой аналитич. функцией, и, следовательно, для нее существует единственная Н. о. Достаточной статистикой в этом случае является $X = X_1 + \ldots + X_n$, к-рая подчиняется закону Пуассона с параметром $n\theta$. Если $T(X)$ — Н. о. для $g_z(\theta)$, то она должна удовлетворять уравнению несмещенности

$$\mathsf{E}_\theta\{T(X)\} = g_z(\theta) = e^{\theta(z-1)},$$

откуда следует, что

$$T(X) = \begin{cases} \binom{X}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{X-k}, & 0 \leqslant k \leqslant X, \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

т. е. Н. о. для производящей функции закона Пуассона является производящая функция биномиального закона с параметрами X и $1/n$.

Примеры 6—9 демонстрируют, что в нек-рых случаях, довольно часто встречающихся на практике, именно благодаря понятию Н. о. задача построения наилучших оценок оказывается легко разрешимой, если ограничиться классом Н. о. А. Н. Колмогоров [1] рассмотрел вопрос построения Н. о., в частности задачу построения Н. о. функции распределения нормального закона, параметры к-рого неизвестны. Э. Леману (E. Lehmann) принадлежит более общее определение Н. о. Согласно определению Э. Лемана (см. [2]) статистич. оценка $T = T(X)$ параметра θ наз. несмещенной относительно функции потерь $L(\theta, T)$, если

$$\mathsf{E}_\theta\{L(\theta', T(X))\} \geqslant \mathsf{E}_\theta\{L(\theta, T(X))\} \text{ для всех } \theta, \theta' \in \Theta.$$

Имеется модификация этого определения (см. [3]). Ю. В. Линником и его учениками (см. [4]) была установлена независимость наилучшей Н. о. от функции потерь при довольно широких предположениях.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 4, с. 303—26; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Клебанов Л. Б., «Теория вероятн. и ее применения», 1976, т. 21, № 3, с. 584—98; [4] Клебанов Л. Б., Линник Ю. В., Рухин А. Л., «Докл. АН СССР», 1971, т. 200, № 5, с. 1024—25; [5] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.

М. С. Никулин.

НЕСМЕЩЕННЫЙ КРИТЕРИЙ — статистический критерий размера α, $0 < \alpha < 1$, для проверки сложной гипотезы $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ против сложной альтернативы $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$, функция мощности к-рого $\beta(\cdot)$ удовлетворяет неравенствам:

$$\beta(\theta) \leqslant \alpha, \text{ если } \theta \in \Theta_0,$$

$$\beta(\theta) \geqslant \alpha, \text{ если } \theta \in \Theta_1.$$

Во многих задачах статистич. проверки гипотез не существуют равномерно *наиболее мощные критерии*, но если ограничиться классом Н. к., то задача построения равномерно наиболее мощного критерия может иметь положительное решение. Если в задаче проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1 существует равномерно наиболее мощный критерий, то он является Н. к., так как мощность такого критерия не может быть меньше мощности т. н. бесполезного критерия, критич. функция к-рого $\varphi(\cdot)$ постоянна и равна размеру критерия α, т. е. $\varphi(X) = \alpha$, где X — случайная величина, по реализации к-рой проверяют гипотезу H_0 против альтернативы H_1.

Пример. *Знаков критерий* является равномерно наиболее мощным Н. к. в задаче проверки гипотезы H_0, согласно к-рой неизвестное истинное значение параметра p биномиального распределения равно $1/2$, против альтернативы H_1: $p \neq 1/2$.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

М. С. Никулин.

НЕСОБСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — то же, что *вырожденное распределение.*

НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл от неограниченной функции или от функции по неограниченному множеству. Пусть функция f определена на конечном или бесконечном полуинтервале $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, и для любого $\eta \in [a, b)$ функция f интегрируема по Риману (по Лебегу) на отрезке $[a, \eta]$. Тогда предел

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x)\,dx \tag{1}$$

(в случае $b = +\infty$ условие $\eta \to b-0$ понимается как $\eta \to +\infty$) наз. несобственным интегралом

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если предел (1) существует, то говорят, что Н. и. сходится, если не существует — расходится. Напр., Н. и.

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad a > 0,$$

при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha \leqslant 1$ расходится. Если же $b < +\infty$, то

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Если $b < +\infty$ и функция f интегрируема по Риману (по Лебегу) на отрезке $[a, b]$, то Н. и. (1) совпадает с определенным интегралом.

Аналогично при соответствующих предположениях определяют Н. и. по промежутку $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to a+0} \int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Если функция f интегрируема по Риману (по Лебегу) на каждом отрезке $[\xi, \eta] \subset (a, b)$, $c \in (a, b)$ и существуют Н. и.

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_c^b f(x)\,dx,$$

то Н. и.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

определяется как сумма

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

и не зависит от выбора точки c.

Если на интервале (a, b) имеется конечное число точек x_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$ таких, что функция f интегрируема по Риману (по Лебегу) на каждом отрезке $[\xi, \eta]$, не содержащем ни одной точки x_k, и для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ существуют Н. и.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx,$$

то Н. и.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx.$$

Это определение не зависит от выбора точек x_k.

На Н. и. переносятся общие свойства интегралов: линейность, аддитивность относительно промежутков, по к-рым производится интегрирование, правило интегрирования неравенств, теоремы о среднем, интегрирование по частям и замены переменного, формула Ньютона — Лейбница. Напр., если функция f почти всюду на $[a, b)$ совпадает с производной функции F, к-рая абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[a, \eta]$, $a<\eta<b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a).$$

Для выяснения сходимости Н. и. от знакопостоянных функций применяется п р и з н а к с р а в н е н и я: напр., для Н. и. вида (1) при выполнении условия

$$f(x) = O(g(x)),$$

$x \to b-0$, $f(x)\geqslant 0$, $g(x)\geqslant 0$, $x\in[a, b)$, из сходимости Н. и.

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

следует сходимость Н. и.

$$\int_a^b f(x)\,dx;$$

функция $g(x)$ наз. в этом случае ф у н к ц и е й с р а в н е н и я. В качестве функции сравнения для интегралов (1) в случае конечного предела интегрирования b часто используются функции $1/(b-x)^\alpha$; для интегралов вида (2) в случае конечности предела интегрирования a — функции $1/(x-a)^\alpha$, при наличии одного или двух бесконечных пределов интегрирования — функции $1/|x|^\alpha$. Из признака сравнения следует, напр., если для неотрицательной функции f, определенной при $x\geqslant a$, существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = k,$$

то при $\alpha>1$ и $0\leqslant k<+\infty$ Н. и.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

вида (1) сходится, а при $\alpha\leqslant 1$ и $0<k\leqslant+\infty$ Н. и. расходится.

Необходимое и достаточное условие сходимости Н. и. дает критерий Коши. Так, Н. и. вида (1) сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\eta\in[a, b)$, что для всех $\eta'\in(\eta, b)$, $\eta''\in(\eta, b)$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Н. и.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

наз. а б с о л ю т н о с х о д я щ и м с я, если сходится Н. и.

$$\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Если Н. и. абсолютно сходится, то он сходится и совпадает с интегралом Лебега. Существуют Н. и. сходящиеся, но не абсолютно. Напр., для конечного промежутка Н. и.:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx,$$

а для бесконечного:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Существуют различные признаки для установления сходимости Н. и. Так, если функции f и g определены

для $x \geqslant a$, функция f имеет на полуоси $x \geqslant a$ ограниченную первообразную, а g — монотонная функция, стремящаяся к нулю при $x \to +\infty$, то Н. и.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$$

сходится. Другой признак: если Н. и.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

сходится, а функция g монотонна и ограничена при $x \geqslant a$, то Н. и.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$$

сходится.

Сходимость Н. и. можно выразить в терминах сходящихся рядов: напр., для того чтобы Н. и. (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $b_n \to b$, $a \leqslant b_n < b$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)\, dx,$$

причем в случае его сходимости сумма ряда совпадает с Н. и. (1).

Понятие Н. и. обобщается для функций многих переменных. Пусть функция f определена на открытом (ограниченном или неограниченном) множестве G n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и интегрируема по Риману на любом измеримом по Жордану множестве E, $\overline{E} \subset G$. Функцию f наз. **интегрируемой в несобственном смысле** по множеству G, если для любой последовательности измеримых по Жордану множеств E_k таких, что $\overline{E_k} \subset G$, $E_k \subset E_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = G$, существует предел

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{E_k} f(x)\, dx,$$

не зависящий от выбора указанной последовательности E_k. Этот предел, если он существует, наз. Н. и.

$$\int_G f(x)\, dx$$

и, как в одномерном случае, говорят, что этот интеграл сходится. Он существует тогда и только тогда, когда существует интеграл

$$\int_G |f(x)|\, dx.$$

В этом случае Н. и.

$$\int_G f(x)\, dG$$

совпадает с интегралом Лебега. Это обстоятельство связано с тем, что при $n = 1$ и данном выше определении Н. и. переход к пределу осуществлялся по весьма специальному классу измеримых по Жордану множеств, а именно по отрезкам. В качестве же E_k были взяты произвольные измеримые по Жордану множества. Впрочем, при $n \geqslant 2$ сделанное утверждение остается в силе и в том случае, когда в качестве множеств E_k взяты только измеримые по Жордану области. Таким образом, в этом случае понятие Н. и. не приводит к новому понятию по сравнению с интегралом Лебега.

Для Н. и. от функции многих переменных справедлив признак сравнения, аналогичный одномерному случаю. В качестве интегралов сравнения берут

$$\int_{r \leqslant 1} \frac{dx}{r^{\alpha}} \quad \text{и} \quad \int_{r \geqslant 1} \frac{dx}{r^{\alpha}},$$

где

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}.$$

Первый сходится при $\alpha<n$ и расходится при $\alpha\geqslant n$, второй сходится при $\alpha>n$ и расходится при $\alpha\leqslant n$.

К Н. и. относятся интегралы в смысле главного значения. Пусть функция f определена на открытом множестве $G\subset\mathbb{R}^n$, кроме, быть может, точки $x\in G$, и пусть для любого $\varepsilon>0$ функция f интегрируема (по Риману или по Лебегу) на множестве $G\setminus U(x,\ \varepsilon)$, где $U(x,\ \varepsilon)$ есть ε-окрестность точки x. Тогда если существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{G\setminus U(x,\ \varepsilon)}f(x)\,dx,$$

то его наз. интегралом в смысле главного значения и обозначают

$$\text{v. p.}\int_G f(x)\,dx.$$

Если интеграл

$$\int_G f(x)\,dx$$

существует как Н. и., то он существует и в смысле главного значения. Обратное, вообще говоря, неверно. Напр., Н. и.

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}$$

расходится, а

$$\text{v. p.}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}=0.$$

Аналогично определяют интегралы в смысле главного значения в бесконечно удаленной точке.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, т. 2, М., 1973; [2] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 2. М., 1981; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975. *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕСОВМЕСТИМОСТЬ — свойство *формальной системы*, противоположное свойству *непротиворечивости*: формальная система наз. несовместимой, или несовместной, если она не является непротиворечивой. Если нек-рый класс формул в языке данной формальной системы не является непротиворечивым, то говорят, что он несовместим с данной формальной системой. В частности, если класс, состоящий из одной формулы, несовместим с формальной системой, эта формула наз. несовместимой с данной системой. Н. формулы означает, что если ее включить в множество аксиом, то получится несовместимая формальная система.

Несовместимые формальные системы не имеют содержательной интерпретации.

Обнаружение Н. отрицания нек-рой формулы с данной формальной системой составляет т. н. метод доказательства от противного: для широкого класса формальных систем из Н. формулы φ следует выводимость ее отрицания. *В. Е. Плиско.*

НЕСОИЗМЕРИМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ — см. *Соизмеримые и несоизмеримые величины.*

НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ — раздел математич. логики, посвященный приложению теории нестандартных моделей к исследованиям в традиционных областях математики: математич. анализе, теории функций, теории дифференциальных уравнений, топологии и др. В общих чертах основной метод Н. а. можно описать следующим образом. Рассматривается нек-рая математич. структура M и строится логико-математич. язык 1-го порядка, отражающий аспекты этой структуры, интересующие исследователя. Затем методами теории моделей строится нестандартная модель

теории структуры M, являющаяся собственным расширением M. При надлежащем построении новые, нестандартные, элементы модели могут быть истолкованы как предельные, «идеальные» элементы первоначальной структуры. Напр., если первоначально рассматривалось упорядоченное поле действительных чисел, то нестандартные элементы модели естественно рассматривать как «инфинитезимальные», т. е. бесконечно большие или бесконечно малые, но отличные от нуля действительные числа. При этом все обычные отношения между действительными числами автоматически переносятся и на нестандартные элементы с сохранением всех их свойств, выразимых в логико-математич. языке. Подобным образом в теории фильтров на данном множестве нестандартный элемент определяет непустое пересечение всех элементов фильтра; в топологии возникает семейство нестандартных точек, расположенных «бесконечно близко» к данной точке. Истолкование нестандартных элементов модели часто позволяет дать удобные критерии для обычных понятий в терминах нестандартных элементов. Напр., можно доказать, что стандартная действительная функция $f(x)$ непрерывна в стандартной точке x_0 тогда и только тогда, когда $f(x)$ бесконечно близка к $f(x_0)$ для всех (и нестандартных) точек x, бесконечно близких к x_0. Полученные критерии могут быть с успехом применены к доказательству обычных математич. результатов.

Результаты, полученные методами Н. а., могут быть естественно передоказаны и обычным образом, но рассмотрение нестандартной модели имеет то значительное преимущество, что позволяет актуально вводить в рассуждение «идеальные» элементы, что позволяет давать прозрачные формулировки для многих понятий, связанных с предельными переходами от конечного к бесконечному. В Н. а. на строгой математической основе реализуется до некоторой степени идея Г. Лейбница (G. Leibniz) и его последователей о существовании бесконечно малых величин, отличных от нуля,— идея, к-рая в последующем развитии математич. анализа была заменена точным понятием предела переменной величины.

С помощью Н. а. был обнаружен ряд новых фактов. Многие классич. доказательства заметно выигрывают в наглядности при изложении их методами нестандартного анализа. Н. а. был с успехом использован для построения точной теории нек-рых полуэмпирич. методов механики и физики.

Лит.: [1] Robinson A., Non-standard analysis, Amst., 1966; [2] Девис М., Прикладной нестандартный анализ, пер. с англ., М., 1980.

А. Г. Драгалин.

НЕСУЩЕСТВЕННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — непрерывное отображение $f : X \to Q^n$ топологич. пространства X в n-мерный шар Q^n такое, что существует непрерывное отображение $g : X \to Q^n$, совпадающее с f на прообразе $f^{-1}S^{n-1}$ границы S^{n-1} шара Q^n и переводящее X в S^{n-1} (т. е. $gX \subseteq S^{n-1}$). Для нормального хаусдорфова пространства X тогда и только тогда $\dim X < n$, когда любое непрерывное отображение $f : X \to Q^n$, $n = 1, 2, \ldots$, есть Н. о. (теорема Александрова).

Непрерывное отображение топологич. пространства в n-мерную сферу наз. несущественным, если оно гомотопно постоянному отображению.

Б. А. Пасынков.

НЕСЧЕТНОЕ МНОЖЕСТВО — бесконечное множество, не являющееся счетным множеством, т. е. неэквивалентное множеству натуральных чисел. Напр., множество действительных чисел, в отличие от множества рациональных, является Н. м.

М. И. Войцеховский.

НЁТЕР ПРОБЛЕМА — вопрос о рациональности поля инвариантов конечной группы, действующей автоморфизмами поля рациональных функций. Подробнее, пусть $K = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ — поле рациональных функций

от n переменных с коэффициентами в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, т. е. K — чисто трансцендентное расширение поля $\mathbb{Q}$ степени трансцендентности n. И пусть G — конечная группа, действующая автоморфизмами поля K посредством перестановок переменных $x_1, \ldots, x_n$. Будет ли подполе K^G в K, состоящее из всех неподвижных относительно G элементов, само полем рациональных функций от n (других) переменных с коэффициентами в $\mathbb{Q}$? Эта проблема была поставлена Э. Нётер [1] в связи с рассмотрением *Галуа теории обратной задачи*. В случае положительного решения Н. п. можно было бы построить расширение *Галуа поля* $\mathbb{Q}$ с заданной конечной группой Галуа G (см. [5]). Н. п. также тесно связана с *Люрота проблемой*.

Н. п. в общем случае решается отрицательно. Первый пример *нерационального поля* K^G *был построен* в [2], причем в этом примере группа G порождена циклич. перестановкой переменных. В [3] было установлено, что необходимое условие рациональности поля K^G, найденное в [2], является и достаточным. Вопрос о рациональности поля K^G в случае абелевой группы G тесно связан с теорией *алгебраических торов* (см. [4]).

Часто *под* Н. п. понимают более *общую* проблему, получающуюся заменой в оригинальной Н. п. поля $\mathbb{Q}$ произвольным полем k. Эта проблема решена положительно, напр., в случае, когда k алгебраически замкнуто, а G абелева.

Лит.: [1] Noether E., «Math. Ann.», 1917/1918, Bd 78, S. 221—29; [2] Swan R. G., «Invent. math.», 1969, v. 7, fasc. 2, p. 148; [3] Воскресенский В. Е., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, с. 1037; [4] его же, Алгебраические торы, М., 1977; [5] Чеботарев Н. Г., Теория Галуа, М.— Л., 1936, с. 18—32 и 90—94. *В. Л. Попов.*

НЁТЕР ТЕОРЕМА — 1) Первая теорема Нётер — теорема, устанавливающая связь между инфинитезимальными симметриями функционала вида

$$A(u(x)) = \int L(x, u(x), u_{,j}(x))\, d^n x,$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — независимые переменные, $u(x) = (u^1(x), \ldots, u^N(x))$ — функции, определенные в нек-рой области $D \subset \mathbb{R}^n$, $u_{,j} = \frac{\partial}{\partial x^j} u(x)$ — их частные производные, L — нек-рая функция (функция Лагранжа), и законами сохранения для соответствующей системы уравнений Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\delta L}{\delta u^a} \equiv \frac{\partial L}{\partial u^a} - \frac{d}{dx^i}\frac{\partial L}{\partial u^a_{,i}} = 0,$$

дающей необходимые условия экстремума функционала A. Именно, инфинитезимальной симметрии Z, т. е. векторному полю

$$Z = X^i(x)\, \partial/\partial x^i + U^a(x, u)\, \partial/\partial u^a,$$

к-рое порождает однопараметрич. группу преобразований, сохраняющую функционал A, соответствует закон сохранения

$$\nu_Z = \left[LX^i + (U^a - u^a_{,j} X^j) \frac{\partial L}{\partial u^a_{,i}} \right] dx^1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx}^i \wedge \ldots dx^n$$

(где значок $\hat{}$ означает пропуск соответствующего множителя), т. е. зависящая от функции $u(x)$ $(n-1)$-форма, к-рая замкнута, если $u(x)$ удовлетворяет уравнениям Эйлера — Лагранжа.

В теории поля $n=4$ координаты x интерпретируются как координаты пространства-времени, функционал A наз. действием, а функция $u(x)$ — полем. Поля $u(x)$, доставляющие экстремум функционалу действия, соответствуют физически реализуемым полям с данной функцией Лагранжа. Если такое поле $u(x)$ обращается в нуль на границе области D, то в силу теоремы Стокса интеграл от закона сохранения ν по гиперповерхности $D \cap \{x' = c\}$ не зависит от выбора числа c. В частности,

если x^1 — координата времени, то этот интеграл дает величину, сохраняющуюся с течением времени.

Инвариантность функций Лагранжа различных физич. полей относительно параллельных переносов и преобразований Лоренца (являющаяся следствием однородности и изотропности пространства-времени Минковского) приводит по Н. т. к тензору энергии-импульса и тензору момента количества движения поля и к соответствующим им законам сохранения энергии, импульса и момента количества движения. Инвариантность функционала действия электромагнитного поля относительно градиентных преобразований приводит к закону сохранения электрич. заряда. Аналогично из инвариантности лагранжиана того или иного поля относительно калибровочных преобразований получаются законы сохранения различных зарядов.

В классич. механике $n=1$ и координата x^1 интерпретируется как время. Если функция Лагранжа не зависит явно от x^1, то векторное поле $\partial/\partial x^1$ является симметрией и Н. т. приводит к закону сохранения энергии. Для механич. системы, движение к-рой описывается движением по геодезическим нек-рой римановой метрики, симметриями соответствующего функционала действия будут киллинговы поля. В этом случае закон сохранения, даваемый Н. т., геометрически означает, что величина проекции киллингова поля на направление геодезической постоянна вдоль этой геодезической. Общая современная формулировка Н. т. на языке расслоенных пространств состоит в следующем. Пусть $\pi : E \to M$ — расслоение над n-мерным многообразием M с фиксированной n-формой объема $\omega \in \Lambda^n(M)$, а $\pi_k : J^kE \to M$ — расслоение k-струй сечений расслоения π. Если x^i — локальные координаты в M, в к-рых форма ω имеет вид $\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, а x^i, u^a — локальные координаты в E, то в J^kE возникают локальные координаты x^i, u^a, u^a_α, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant k$. Значение координаты u^a_α на k-струе $j^k_{x_0} u(x)$ сечения $u(x)$ расслоения π равно

$$u^a_{,\alpha}(x_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \circ \ldots \circ \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{\alpha_n} u^a(x_0).$$

Гладкая функция $L : J^kE \to \mathbb{R}$ определяет функционал действия A, сопоставляющий сечению $s : x \to u(x)$ число

$$A(s) = \int_M L(x, u(x), u_{,\alpha}(x))\,\omega.$$

Экстремальные для этого функционала сечения $u(x)$ (в задаче с закрепленными концами) удовлетворяют уравнениям Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\delta L}{\delta u^a} \equiv \sum_{\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ |\alpha| \leqslant k} (-1)^{|\alpha|} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \frac{\partial L}{\partial u^a_{,\alpha}} = 0,$$

где

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} = \left(\frac{d}{dx_1}\right)^{\alpha_1} \circ \ldots \circ \left(\frac{d}{dx^n}\right)^{\alpha_n}$$

— полные производные. Инфинитезимальный автоморфизм расслоения π, т. е. векторное поле Z на E вида

$$Z = X^i(x)\,\partial/\partial x^i + U^a(x, u)\,\partial/\partial u^a,$$

наз. инфинитезимальной симметрией функционала A, если производная Ли от n-формы Лагранжа $L\omega \in \Lambda^n(J^kE)$ по направлению векторного поля $Z^{(k)}$, являющегося продолжением поля Z на J^kE, равна нулю:

$$Z^{(k)}(L\omega) = 0.$$

Для производной Ли справедлива следующая фундаментальная формула Нётер:

$$Z^{(k)}(L\omega) = \left[\overline{U}^a \frac{\delta L}{\delta u^a} + \frac{d}{dx^i} J^i\right] \omega,$$

где

$$\overline{U}^a = U^a - u_i^a X^i,\ J^i = LX^i + F^i,$$

а F^i — компоненты нек-рого векторного поля, зависящие от $\overline{U}^a$, L и их производных. В частности, $F^i = \overline{U}^a \frac{\partial L}{\partial u_i^a}$ при $k=1$. Если поле Z является инфинитезимальной симметрией, то

$$-\overline{U}^a \frac{\delta L}{\delta u^a} = \frac{d}{dx^i} J^i,$$

т. е. нек-рая линейная комбинация вариационных производных $\delta L/\delta u^a$ функции Лагранжа L является дивергенцией векторного поля $J = J^i \partial/\partial x^i$. В таком виде Н. т. впервые была сформулирована Э. Нётер (E. Noether). Дивергенция поля J (наз. т о к о м Н ё т е р) обращается в нуль на экстремалях функционала действия, а двойственная к нему $(n-1)$-форма $\nu_Z = J \lrcorner \omega$, получающаяся из ω внутренним умножением на J, замкнута, т. е. является законом сохранения.

Имеются важные обобщения Н. т. (см., напр., [5]—[7]). Они основаны на расширении понятия инфинитезимальной симметрии. Вместо векторных полей на E, к-рым отвечают однопараметрич. группы преобразований, рассматриваются векторные поля на E, коэффициенты к-рых зависят от сечений $u(x)$ и их сколь угодно высоких производных. Такие поля Y уже не определяют никаких однопараметрич. групп преобразований, однако и для них можно чисто алгебраически определить понятие производной Ли. Поле Y наз. а л г е б р а и ч е с к о й и н ф и н и т е з и м а л ь н о й с и м м е т р и е й, если производная Ли от формы Лагранжа по направлению этого поля равна нулю или, более общо, обращается в нуль на экстремалях функционала действия. Обобщенная теорема Нётер сопоставляет каждой алгебраич. симметрии закон сохранения. В применении к различным уравнениям математич. физики таким образом получается большое число новых важных законов сохранения.

2) В т о р а я т е о р е м а Н ё т е р утверждает, что если функционал действия допускает бесконечномерную алгебру Ли инфинитезимальных симметрий, коэффициенты к-рых линейно зависят от p произвольных функций $\varphi^1(x)$, ..., $\varphi^p(x)$ и их производных до порядка m, то вариационные производные $\frac{\delta L}{\delta u^a}$ функции Лагранжа L удовлетворяют системе из p дифференциальных уравнений порядка m. Именно, если

$$Z = \varphi^s U_s^a \partial/\partial u^a + \varphi^s_{,\sigma}(x)\, U_s^{\sigma a}\, \partial/\partial u^a,$$

где

$$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n),\ |\sigma| = \sigma_1 + \ldots + \sigma_n \leqslant k$$

есть инфинитезимальная симметрия при любых гладких функциях $\varphi^s(x)$, $s=1, \ldots, p$, то справедливы тождества

$$U_s^a \frac{\partial L}{\delta u^a} + (-1)^{|\sigma|} \frac{d^\sigma}{dx^\sigma} \left(U_s^{\sigma a} \frac{\delta L}{\delta u^a} \right) = 0, \quad s = 1, \ldots, p.$$

Эта теорема находит применения, напр., в теории калибровочных полей.

Первая и вторая Н. т. доказаны Э. Нётер (E. Noether, 1918, см. [1]).

Лит.: [1] Н е т е р Э., в кн.: Вариационные принципы механики, М., 1959, с. 611—30; [2] Б о г о л ю б о в Н. Н., Ш и р к о в Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 2 изд., М., 1973; [3] Г е л ь ф а н д И. М., Ф о м и н С. В., Вариационное исчисление, М., 1961; [4] А р н о л ь д В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [5] О в с я н н и к о в Л. В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978; [6] М а н и н Ю. И., в кн.: Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, т. 11, М., 1978, с. 5—152; [7] В и н о г р а д о в А. М., «Докл. АН СССР», 1977, т. 236, № 2, с. 284—87; [8] Л ы ч а г и н В. В., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 1, с. 137—65.

Д. В. Алексеевский.

3) Н. т. о нормализации: в любой конечно порожденной коммутативной целостной k-алгебре A, имеющей над полем k степень трансцендентности d, найдутся такие d элементов $x_1, \ldots, x_d$, что A цела над подалгеброй B, порожденной этими элементами. Если k-алгебра A обладает градуировкой вида $A=\oplus_{i\geqslant 0}A_i$, $A_0=k$, то элементы $x_1, \ldots, x_d$ могут быть выбраны однородными.

Эта теорема (иногда называемая также леммой Нётер о нормализации) доказана Э. Нётер [1]; в градуированном случае она была сформулирована еще Д. Гильбертом [2].

Элементы $x_1, \ldots, x_d$ алгебраически независимы над k, так что B — алгебра многочленов от переменных с коэффициентами из k. Если поле k бесконечно, то элементы $x_1, \ldots, x_d$ можно выбрать из линейных комбинаций образующих алгебры A над k. В случае алгебраически замкнутого поля k Н. т. допускает следующую геометрич. формулировку: любое неприводимое аффинное d-мерное алгебраич. многообразие X является конечнолистным (разветвленным) накрытием аффинного d-мерного пространства A^d, точнее, обладает конечным морфизмом на A^d. Более того, если X — замкнутое подмножество в k^n, то указанный морфизм может быть реализован как сужение на X нек-рого линейного отображения пространства k^n на его d-мерное линейное подпространство.

Алгебра A, как B-модуль, конечно порождена. Подалгебра B выбирается неоднозначно, однако ряд свойств B-модуля A не зависят от ее выбора. Напр., если A градуирована, как выше в условиях теоремы, а элементы $x_1, \ldots, x_d$ однородны (так что B тоже градуирована), то свойство алгебры A быть свободным B-модулем не зависит от выбора B.

Лит.: [1] Noether E., «Math. Ann.», 1927, Bd 96, S. 26—61; [2] Hilbert D., «Math. Ann», 1893, Bd 42, S. 313—73; [3] Атья М., Макдональд И., Введение в коммутативную алгебру, пер. с англ., М., 1972; [4] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [5] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1—2, М., 1963; [6] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

В. Л. Попов.

НЁТЕРА — ЭНРИКЕСА ТЕОРЕМА о канонических кривых — теорема о проективной нормальности *канонической кривой* и об определяемости ее квадратичными уравнениями.

Пусть $X\subset P^{g-1}$ — гладкая канонич. кривая (негиперэллиптическая) рода $g\geqslant 3$ над алгебраически замкнутым полем k и I_X — однородный идеал в кольце $k[x_0, \ldots, x_{g-1}]$, определяющий X в P^{g-1}. Теорема Нётера — Энрикеса (наз. иногда также теоремой Нётера — Энрикеса — Петри) утверждает, что:

1) X проективно нормальна в P^{g-1};

2) если $g=3$, то X — плоская кривая степени 4, а если $g\geqslant 4$, то градуированный идеал I_X порождается компонентами степени 2 и 3 (и это означает, что кривая X является пересечением квадрик и кубик в P^{g-1}, через нее проходящих);

3) идеал I_X порождается компонентами степени 2 во всех случаях, кроме следующих: а) X — тригональная кривая, т. е. обладает линейным рядом (системой) g^1_3 размерности 1 и степени 3, б) X — кривая рода 6, изоморфная плоской кривой степени 5;

4) в исключительных случаях а) и б) квадрики, проходящие через X, высекают поверхность F, являющуюся соответственно: а) неособой рациональной линейчатой поверхностью степени $g-2$ в P^{g-1}, $g\geqslant 5$, причем ряд g^1_3 на X высекается линейной системой прямых на F, а при $g=4$ — квадрикой в P^3 (возможно конусом), б) поверхностью Веронезе V_4 в P^5.

Эта теорема (в несколько иной, алгебраич. формулировке) была установлена М. Нётером [1]. Геометрич.

изложение было дано Ф. Энрикесом (F. Enriques, о его результатах см. [2]; современное изложение в [3], [4], обобщение в [5]).

Лит.: [1] Nöther M., «Math. Ann.», 1880, Bd 17, S. 263—84; [2] Babbage D. W., «J. London Math. Soc.», 1939, v. 14, № 4, p. 310—14; [3] Saint-Donat B., «Math. Ann.», 1973, Bd 206, S. 157—75; [4] Шокуров В. В., «Матем. сб.», 1971, т. 86, № 3, с. 367—408; [5] Arbarello E., Sernesi E., «Invent. math.», 1978, v. 49, p. 99—119.

В. А. Исковских.

НЁТЕРОВ МОДУЛЬ — модуль, любой подмодуль к-рого обладает конечной системой образующих. Эквивалентные условия: любая строго возрастающая цепочка подмодулей обрывается на конечном номере; любое непустое множество подмодулей, упорядоченное относительно включения, содержит максимальный элемент. Подмодуль и фактормодуль Н. м. также нётеровы. Если в точной последовательности модулей

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

модули M' и M'' нётеровы, то M также нётеров. Модуль над *нётеровым кольцом* нётеров тогда и только тогда, когда он имеет конечное число образующих.

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

Л. В. Кузьмин.

НЁТЕРОВ ОПЕРАТОР — линейный оператор, одновременно n-нормальный и d-нормальный (см. *Нормально разрешимый оператор*). Иначе говоря, Н. о. A — это нормально разрешимый оператор с конечной d-характеристикой ($n(A)<+\infty$, $d(A)<+\infty$). Индекс $\chi(A)$ Н. о. A также является конечным числом. Простейший пример Н. о.— линейный оператор действующий из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^l$. Название по имени Ф. Нётера [1], с работ к-рого теория Н. о. развивается параллельно теории сингулярных интегральных уравнений. Линейные операторы, порождаемые общими краевыми задачами для эллиптич. уравнений, часто являются Н. о.

На практике обычно удается проверить справедливость следующих предложений (теоремы Нётера):

1) либо уравнение $Ax=0$ не имеет нетривиальных решений, либо оно имеет конечное число n линейно независимых решений;

2) либо неоднородное уравнение $Ax=y$ разрешимо при любой правой части y, либо для его разрешимости необходимо и достаточно, чтобы $\langle y, \psi_i\rangle=0$, $i=1, \ldots, m$, где $\{\psi_i\}^m$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения или формально сопряженной однородной задачи.

Из 1), 2) следует, что A — Н. о.

Свойство нётеровости устойчиво: если A — Н. о., а B — линейный оператор достаточно малой нормы или вполне непрерывный, то $A+B$ — также Н. о., при этом $\chi(A+B)=\chi(A)$.

Пусть $A \in L(X, Y)$, где $L(X, Y)$ — пространство линейных операторов из X в Y, и является Н. о. Тогда имеют место прямые разложения

$$X=N(A)\dotplus \hat{X}, \quad Y=Z\dotplus R(A),$$

где $N(A)$ — подпространство нулей A, $R(A)$ — область значений A, $\dim Z=d(A)$. Общее решение уравнения $Ax=y$, $y\in R(A)$, имеет вид $x=\hat{A}^{-1}y+v$, где $\hat{A}=L(\hat{X}, R(A))$, $\hat{A}=A$ на $\hat{X}$ (сужение A), а $v\in N(A)$ — произвольно. Если A — Н. о. с d-характеристикой (n, m), то A^* Н. о. с d-характеристикой (m, n).

Лит.: [1] Noether F., «Math. Ann.», 1921, Bd 82, S. 42—63; [2] Крейн С. Г., Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971; [3] Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969.

В. А. Треногин.

НЁТЕРОВА ГРУППА, группа с условием максимальности для подгрупп,— группа, в к-рой любая строго возрастающая цепочка подгрупп обрывается на конечном номере. Названа в

честь Э. Нётер (E. Noether), к-рая изучала кольца с условием максимальности для идеалов — *нётеровы кольца*. Подгруппа и факторгруппа Н. г. также обладают этим свойством. Построены примеры Н. г., не являющихся конечными расширениями полициклических групп [1].

Лит.: [1] Ольшанский А. Ю., «Докл. АН СССР», 1979, т. 245, № 4, с. 785—87. *В. Н. Ремесленников.*

НЁТЕРОВА ИНДУКЦИЯ — принцип рассуждений, применимый к частично упорядоченному множеству, в к-ром любое непустое подмножество содержит минимальный элемент, напр. к множеству замкнутых подмножеств в нек-ром *нётеровом пространстве*. Пусть M — такое множество и F — его подмножество, обладающее тем свойством, что для любого $a \in F$ найдется строго меньший элемент $b \in F$. Тогда F пусто. Напр., пусть M — множество всех замкнутых подмножеств нек-рого нётерова пространства и F — множество тех замкнутых подмножеств, к-рые нельзя представить в виде конечного объединения неприводимых компонент. Если $Y \subset F$, то Y *приводимо*, т. е. $Y = Y_1 \cup Y_2$, где Y_1, Y_2 замкнуты, оба строго содержатся в Y и хоть одно из них принадлежит F. Следовательно F пусто.

Обращение порядка позволяет применять Н. и. также к частично упорядоченным множествам, любое непустое подмножество которых содержит максимальный элемент, например к решетке идеалов в *нётеровом кольце*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *Л. В. Кузьмин.*

НЁТЕРОВА СХЕМА — схема, допускающая конечное открытое покрытие спектрами *нётеровых колец*. Аффинная Н. с.— в точности спектр нётерова кольца. Топологич. пространство Н. с. X является нётеровым топологич. пространством, а все локальные кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ нётеровы. Если каждая точка схемы обладает открытой аффинной нётеровой окрестностью, схема наз. локально нётеровой. Квазикомпактная локально Н. с. есть Н. с. Примером Н. с. является схема конечного типа над полем (алгебраич. многообразие) или над любым нётеровым кольцом. *В. И. Данилов.*

НЁТЕРОВО ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение, для к-рого справедливы теоремы Нётера (см. ниже). Пусть X — банахово пространство, A — линейный ограниченный оператор (отображение), отображающий X в себя: $A : X \to X$, A^* — сопряженный с A оператор,

$$Ax = y \qquad (1)$$

— линейное уравнение, где x — искомый, а y — заданный элементы пространства X. Пусть, далее, $R(A)$ — совокупность всех $y \in X$, для к-рых уравнение (1) разрешимо (область значений оператора A), и $N(A)$ — совокупность всех решений соответствующего однородного уравнения

$$Ax = 0 \qquad (2)$$

(нуль-пространство, или ядро оператора A). Отображение A (уравнение (1)) наз. *нётеровым оператором* (нётеровым уравнением), если выполняются следующие условия.

1) Определенный на всем банаховом пространстве оператор A (уравнение (1)) является нормально разрешимым, т. е. уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть y ортогональна всем решениям сопряженного однородного уравнения

$$A^*\varphi = 0, \ \varphi \in X^*, \qquad (3)$$

т. е. $(\varphi, y) = 0$ для любого $\varphi \in N(A^*)$.

2) Однородные уравнения (2) и (3) могут иметь лишь конечное число линейно независимых решений; число

$$\varkappa_A = k - k^*,$$

где $k=\dim N(A)$, $k^*=\dim N(A^*)$, наз. индексом оператора A (индексом уравнения (1)).

Нётеров оператор с нулевым индексом наз. фредгольмовым оператором (абстрактным), а соответствующее уравнение (1) — фредгольмовым уравнением. Напр., если V — вполне непрерывный оператор $V: X \to X$, то уравнение

$$x - Vx = y \qquad (4)$$

будет фредгольмовым. Его наз. каноническим уравнением Фредгольма. Если в уравнении (4) вполне непрерывное отображение в нек-ром функциональном пространстве является интегральным оператором

$$(Vx)(s) = \int K(s, t)\, x(t)\, dt,$$

то уравнение наз. интегральным уравнением Фредгольма. Аналогично, если в уравнении Нётера (1) линейное отображение задается с помощью интегральных операторов, то его наз. нётеровым интегральным уравнением.

Ф. Нётер [1] рассмотрел интегральные уравнения с *Гильберта ядром*

$$(A\varphi)(s) = a(s)\,\varphi(s) + \frac{b(s)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,\varphi(t)\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} K(s, t)\,\varphi(t)\,dt = f(t), \qquad (5)$$

где несобственный интеграл понимается в смысле главного значения. Для уравнения (5) он установил справедливость трех теорем, называемых ныне теоремами Нётера (предполагается, что заданные и искомая функции действительны, непрерывны в смысле Гёльдера и $a^2(s)+b^2(s)\neq 0$):

1) уравнение нормально разрешимо;
2) уравнение имеет конечный индекс;
3) индекс вычисляется по формуле:

$$\varkappa_A = \frac{1}{\pi}\left[\arg(a - ib)\right]_{-\pi}^{\pi},$$

где $\left[\ \right]_{-\pi}^{\pi}$ обозначает приращение функции, заключенной в скобки.

Теорема 3) впервые указала на существование таких линейных сопряженных интегральных уравнений, к-рые могут иметь различное число линейно независимых решений. Кроме того, из этой теоремы вытекает, что индекс уравнения (5) не зависит от его вполне непрерывной части.

Оператор Нётера иногда наз. фредгольмовым, обобщенно фредгольмовым, Ф-оператором, F-оператором.

Лит.: [1] Noether F., «Math. Ann.», 1921, Bd 82, S. 42—63; [2] Никольский С. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1943, т. 7, № 3, с. 147—66; [3] Аткинсон Ф. В., «Матем. сб.», 1951, т. 28, № 1, с. 3—14; [4] Крейн С. Г., Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971; [5] Крачковский С. Н., Диканский А. С., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1968, М., 1969, с. 39—71; [6] Данилюк И. И., Нерегулярные граничные задачи на плоскости, М., 1975; [7] Прёсдорф З., Некоторые классы сингулярных уравнений, пер. с нем., М., 1979. *Б. В. Хведелидзе.*

НЁТЕРОВО КОЛЬЦО левое (правое) — кольцо A, удовлетворяющее одному из следующих эквивалентных условий:

1) A — левый (правый) *нётеров модуль* над собой;
2) любой левый (правый) идеал в A имеет конечный базис;
3) любая строго возрастающая цепочка левых (правых) идеалов в A обрывается на конечном номере.

Примером Н. к. может служить любое кольцо главных идеалов, в к-рых любой идеал имеет одну образующую.

Н. к. названы по имени Э. Нётер (E. Noether), систематически исследовавшей такие кольца и перенесшей на них ряд результатов, известных ранее только при более жестких ограничениях (напр., теорию примарного разложения Ласкера).

Кольцо нётерово справа не обязано быть нётеровым слева и наоборот. Напр., пусть A — кольцо матриц вида $\begin{Vmatrix} a & \alpha \\ 0 & \beta \end{Vmatrix}$, где a — целое рациональное число и α, β — рациональные числа с обычным сложением и умножением. Тогда A нётерово справа, но не нётерово слева, т. к. левый идеал элементов вида $\begin{Vmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ не имеет конечного базиса.

Факторкольцо и конечная прямая сумма Н. к. снова нётеровы, но подкольцо Н. к. может не быть нётеровым. Напр., кольцо многочленов над нек-рым полем от бесконечного числа переменных не является нётеровым, хотя оно содержится в своем поле частных, к-рое нётерово.

Если A — нётерово слева кольцо, то кольцо многочленов $A[x]$ также нётерово слева. Аналогичное свойство справедливо и для кольца формальных степенных рядов над Н. к. В частности, кольца многочленов вида $K[X_1, \ldots, X_n]$ или $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, где K — нек-рое поле, а $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, а также любые их факторкольца являются нётеровыми. Любое *артиново кольцо* нётерово. Локализация коммутативного Н. к. A относительно нек-рой мультипликативной системы S снова является Н. к. В коммутативном Н. к. A для любого идеала $\mathfrak{m}$ такого, что все элементы вида $1+m$, где $m \in \mathfrak{m}$, не являются делителями нуля, выполняется соотношение $\bigcap_{k=1} \mathfrak{m}^k = 0$. Это соотношение означает, что любой такой идеал $\mathfrak{m}$ определяет на A отделимую $\mathfrak{m}$-адическую топологию. В коммутативном Н. к. любой идеал представим в виде несократимого пересечения конечного числа примарных идеалов. Хотя такое представление не однозначно, но однозначно определены число идеалов в представлении и множество простых идеалов, ассоциированных с данными примарными идеалами.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1, М., 1977.
Л. В. Кузьмин.

НЁТЕРОВО ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X, удовлетворяющее условию обрыва убывающих цепочек замкнутых подмножеств. Эквивалентное условие: любое непустое семейство замкнутых подмножеств в X, упорядоченное относительно включения, имеет минимальный элемент. Любое подпространство Н. п. снова нётерово. Если пространство X допускает конечное покрытие нётеровыми подпространствами, то X само нётерово. Пространство X нётерово тогда и только тогда, когда любое открытое подмножество в X квазикомпактно. Н. п. X является объединением конечного числа своих неприводимых компонент.

Примеры Н. п. доставляют спектры коммутативных колец. Для кольца A пространство $\mathrm{Spec}(A)$ (спектр A) нётерово тогда и только тогда, когда A — *нётерово кольцо*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.
Л. В. Кузьмин.

НЕФОРМАЛЬНЫЙ АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД — аксиоматический метод, не фиксирующий жестко применяемого языка и тем самым не фиксирующий границы содержательного понимания предмета, но требующий аксиоматич. определения всех специальных для данного предмета исследования понятий. Этот термин не имеет общепринятого толкования.

История развития аксиоматич. метода характеризуется все возрастающей степенью формализации. Н. а. м. — определенная ступень в этом процессе.

Первоначальное, данное Евклидом, аксиоматич. построение геометрии отличалось дедуктивным характером изложения, при к-ром в основу клались определения (пояснения) и аксиомы (очевидные утверждения). Из них, опираясь на здравый смысл и очевидность, выводились следствия. При этом в выводе неявно иногда использовались не зафиксированные в аксиомах предположения геометрич. характера, особенно относящиеся к движению в пространстве и взаимному расположению прямых и точек. Впоследствии были выявлены геометрич. понятия и регламентирующие их употребление аксиомы, неявно используемые Евклидом и его последователями. При этом возникал вопрос: действительно ли выявлены все аксиомы. Руководящий принцип для решения этого вопроса сформулировал Д. Гильберт (D. Hilbert): «Следует добиться того, чтобы с равным успехом можно было говорить вместо точек, прямых и плоскостей о столах, стульях и пивных кружках». Если доказательство не теряет доказательной силы после такой замены, то действительно все используемые в этом доказательстве специальные предположения зафиксированы в аксиомах. Достигаемая при таком подходе степень формализации представляет собой уровень формализации, характерный для Н. а. м. Эталоном здесь может служить классич. труд Д. Гильберта «Основания геометрии» [1].

Н. а. м. применяется не только для придания определенной завершенности аксиоматически излагаемой конкретной теории. Он представляет собой действенное орудие математич. исследования. Поскольку при изучении системы объектов по этому методу не используется их специфика, или «природа», то доказанные утверждения переносятся на любую систему объектов, удовлетворяющую рассматриваемым аксиомам. Согласно Н. а. м., аксиомы — это неявные определения первоначальных понятий (а не очевидные истины). Что представляют собой изучаемые объекты — неважно. Все, что нужно о них знать, сформулировано в аксиомах. Предметом изучения аксиоматич. теории служит любая ее *интерпретация*.

Н. а. м., кроме непременного аксиоматич. определения всех специальных понятий, имеет и другую характерную особенность. Это свободное, неконтролируемое аксиомами, основанное на содержательном понимании использование идей и понятий, к-рые можно применить к любой мыслимой интерпретации, независимо от ее содержания. В частности, широко используются теоретико-множественные и логич. понятия и принципы, а также понятия, связанные с идеей счета, и др. Проникновение в аксиоматич. метод рассуждений, основанных на содержательном понимании и здравом смысле, а не на аксиомах, объясняется нефиксированностью языка, на к-ром формулируются и доказываются свойства аксиоматически заданной системы объектов. Фиксирование языка ведет к понятию формальной аксиоматич. системы (см. *Аксиоматический метод*) и создает материальную основу для выявления и четкого описания допустимых логич. принципов, для контролируемого употребления теоретико-множественных и других общих или не специальных для исследуемой области понятий. Если в языке нет средств (слов) для передачи теоретико-множественных понятий, то этим отсеиваются все доказательства, основанные на использовании таких средств. Если в языке есть средства для выражения нек-рых теоретико-множественных понятий, то их применение в доказательствах можно ограничить определенными правилами или аксиомами.

Фиксируя различным образом язык, получают различные теории основного объекта рассмотрения. Напр., рассматривая язык узкого исчисления предикатов для теории групп, получают элементарную теорию групп, в к-рой нельзя сформулировать какого-либо утвержде-

ния о подгруппах. Если перейти к языку исчисления предикатов второй ступени, то появляется возможность рассматривать свойства, в к-рых фигурирует понятие подгруппы. Формализацией Н. а. м. в теории групп служит переход к языку системы Цермело — Френкеля с ее аксиоматикой.

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., [т. 1], М., 1979. *В. Н. Гришин.*

НЕФРЕДГОЛЬМОВО ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение, для к-рого неверны те или иные *Фредгольма теоремы*. Иногда Н. и. у. наз. особым интегральным уравнением.

Так, напр., интегральное уравнение Фурье

$$\varphi(x)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin(xs)\,\varphi(s)\,ds=0 \qquad (1)$$

имеет решение

$$\varphi_a(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-ax}+\frac{x}{a^2+x^2},$$

где a — произвольное положительное число; собственному значению $\sqrt{2/\pi}$ уравнения (1) соответствует бесконечное множество линейно независимых решений, т. е. для уравнения (1) перестает быть справедливой теорема Фредгольма о том, что однородное уравнение имеет конечное число линейно независимых решений.

В случае интегрального уравнения Лалеско — Пикара

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-s|}\varphi(s)\,ds=0 \qquad (2)$$

любое $\lambda\in(0,\ +\infty)$ является собственным значением, а именно, любому положительному числу λ соответствуют два линейно независимых решения:

$$\varphi_\lambda^{(1)}(x)=e^{\sqrt{1-2\lambda}\,x},\quad \varphi_\lambda^{(2)}(x)=e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,x}.$$

Следовательно, для уравнения (2) перестает быть справедливой теорема Фредгольма о том, что множество собственных значений уравнения не более чем счетно.

Подробно разработаны теории двух классов Н. и. у.: уравнений, в к-рых искомая функция содержится под знаком несобственного интеграла в смысле главного значения *(сингулярные интегральные уравнения)*; уравнения, в к-рых искомая функция содержится под знаком интегрального преобразования свертки *(интегральные уравнения типа свертки)*. Для таких уравнений, вообще говоря, нарушается равенство чисел линейно независимых решений однородных союзных (сопряженных) уравнений, а также альтернатива Фредгольма.

Лит.: [1] Привалов И. И., Интегральные уравнения, 2 изд., М.— Л., 1937; [2] Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1951. См. также лит. при статьях *Интегральное уравнение типа свертки* и *Сингулярные интегральные уравнения*. *Б. В. Хведелидзе.*

НЕХОПФОВА ГРУППА — группа, допускающая эндоморфизм на себя с нетривиальным ядром, т. е. изоморфная нек-рой своей собственной факторгруппе (в противном случае группа наз. хопфовой). Термин происходит от проблемы Хопфа (H. Hopf, 1932) о существовании таких групп с конечным множеством порождающих. Оказалось, что существуют даже конечно определенные Н. г. Примером конечно порожденной Н. г. является группа с порождающими x, y и одним определяющим соотношением

$$x^{-1}y^2x=y^3.$$

Бесконечно порожденные Н. г. строятся совсем просто, таково, напр., прямое произведение бесконечного числа изоморфных между собой групп.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп, пер. с англ., М., 1974.

А. Л. Шмелькин.

НЕЦЕНТРАЛЬНОЕ «ХИ-КВАДРАТ» РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, нецентральное χ^2-распределение, — непрерывное, сосредоточенное на положительной полуоси $0<x<\infty$ распределение вероятностей с плотностью

$$p(x)=\frac{e^{-\frac{x+\lambda}{2}}\,x^{\frac{n-2}{2}}}{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda^r x^r}{(2r)!}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+r\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+r\right)},$$

где n — число степеней свободы, а λ — параметр нецентральности. При $\lambda=0$ эта плотность совпадает с плотностью обычного (центрального) *«хи-квадрат» распределения*. Характеристич. функция Н. «х.-к.» р. выражается формулой

$$\varphi(t)=(1-2it)^{-n/2}\exp\left\{\frac{\lambda it}{1-2it}\right\};$$

математич. ожидание и дисперсия равны соответственно $n+\lambda$ и $2(n+2\lambda)$. Н. «х.-к.» р. принадлежит классу *безгранично делимых распределений*.

Обычно Н. «х.-к.» р. появляется как распределение суммы квадратов независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, имеющих нормальное распределение с отличными от нуля средними m_i и единичными дисперсиями, точнее, сумма $X_1^2+\ldots+X_n^2$ имеет Н. «х.-к.» р. с n степенями свободы и параметром нецентральности $\lambda=\sum_{i=1}^{n}m_i^2$. Сумма нескольких взаимно независимых случайных величин с Н. «х.-к.» р. имеет распределение этого же типа, и его параметры суть суммы соответствующих параметров слагаемых.

Если число n четное, то функция распределения Н. «х.-к.» р. $F_n(x;\lambda)$ (всегда равная нулю при $x\leqslant 0$) при $x>0$ равна

$$F_n(x;\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m+\frac{n}{2}}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m\left(\frac{x}{2}\right)^k}{m!\,k!}\,e^{-\frac{\lambda+x}{2}}.$$

Эта формула устанавливает связь между Н. «х.-к.» р. и *Пуассона распределением*. Именно, если X и Y имеют распределения Пуассона с параметрами $\frac{x}{2}$ и $\frac{\lambda}{2}$ соответственно, то для любого целого $s>0$

$$\mathsf{P}\{X-Y\geqslant s\}=F_{2s}(x;\lambda).$$

Н. «х.-к.» р. часто возникает в задачах математич. статистики, посвященных исследованию мощности критериев типа «хи-квадрат». Так как существующие таблицы Н. «х.-к.» р. недостаточно полны, то в статистич. приложениях широко используют различные приближения с помощью «хи-квадрат» распределения и нормального распределения.

Лит.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [3] Patnaik P. B., «Biometrika», 1949, v. 36, p. 202.

А. В. Прохоров.

НЕЧЕТНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, меняющая знак при изменении знака независимого переменного, т. е. функция, удовлетворяющая условию $f(-x)=-f(x)$. График Н. ф. симметричен относительно начала координат.

НЕЧЕТНОЕ ЧИСЛО — целое число, не делящееся (без остатка) на 2.

НЕЭФФЕКТИВНАЯ СТАТИСТИКА — *статистическая оценка*, дисперсия к-рой больше дисперсии эффективной оценки. Иначе говоря, для Н. с. в *Рао — Крамера неравенстве* равенство не достигается хотя бы при одном значении оцениваемого параметра. Мерой качества Н. с. служит величина e, наз. ее эффективностью и равная отношению дисперсии эффектив-

ной оценки к дисперсии Н. с. Эффективность e неотрицательна и не превосходит 1. Величина $1/e$ показывает, во сколько раз нужно увеличить число наблюдений при использовании Н. с. по сравнению с эффективной статистикой, чтобы считать эквивалентными результаты применения этих двух статистик. Напр., медиана μ_n эмпирич. распределения, построенного по n независимым нормально $N(\theta, \sigma^2)$ распределенным случайным величинам $X_1, \ldots, X_n$, асимптотически нормально распределена с параметрами θ и $\sigma^2\pi/2n$ и является неэффективной порядковой статистикой для математич. ожидания θ. Эффективной статистикой в данном случае является оценка $\overline{X}=(X_1+\ldots+X_n)/n$, к-рая распределена по нормальному закону с $N(\theta, \sigma^2/n)$. Эффективность e статистики μ_n равна

$$e=\mathsf{D}(\overline{X})/\mathsf{D}(\mu_n)=\frac{2}{\pi}.$$

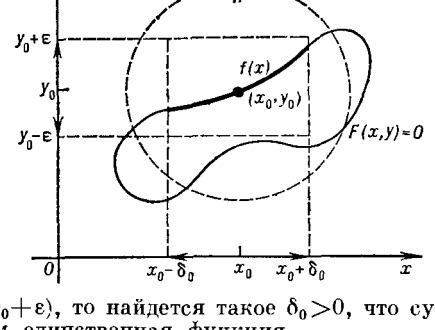
Следовательно, при использовании статистики μ_n в среднем необходимо в $\pi/2\approx 1{,}57$ раза больше наблюдений по сравнению со статистикой $\overline{X}$, чтобы получить одну и ту же точность в оценке неизвестного математич. ожидания θ.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

М. С. Никулин.

НЕЯВНАЯ ФУНКЦИЯ — функция $f: E\to Y$, заданная уравнением $F(x, y)=z_0$, где $F: X\times Y\to Z$, $x\in X$, $y\in Y$, $E\subset X$, X, Y и Z — нек-рые множества, т. е. такая функция f, что при любом $x\in E$ имеет место $F(x, f(x))=z_0$. Если X, Y и Z — топологич. пространства и для нек-рой точки $(x_0, y_0)\in X\times Y$ выполняется условие $F(x_0, y_0)=z_0$, то при определенных условиях в нек-рой окрестности точки (x_0, y_0) уравнение $F(x, y)=z_0$ однозначно разрешимо относительно одной из переменных. Свойства решения этого уравнения описываются теоремами о Н. ф.

Простейшая теорема о Н. ф. состоит в следующем. Пусть X и Y — подмножества числовой прямой $\mathbb{R}$, $x_0\in X$, $y_0\in Y$, (x_0, y_0) — внутренняя точка множества $X\times Y$ на плоскости; тогда если функция F непрерывна в нек-рой окрестности точки (x_0, y_0), $F(x_0, y_0)=0$ и существуют такие $\delta>0$ и $\varepsilon>0$, что при любом фиксированном $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ функция $F(x, y)$ как функция переменного y строго монотонна на интервале



$(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$, то найдется такое $\delta_0>0$, что существует и притом единственная функция

$$f: (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\longrightarrow(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$$

такая, что $F(x, f(x))=0$ для всех $x\in(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$, причем функция $f(x)$ непрерывна и $f(x_0)=y_0$. Условия этой теоремы выполняются, если функция $F(x, y)$ непрерывна в окрестности точки (x_0, y_0), существует частная производная F_y, непрерывная в точке (x_0, y_0), $F(x_0, y_0)=0$, а $F_y(x_0, y_0)\neq 0$. Если, кроме того, существует и частная производная F_x, также непрерывная

в точке (x_0, y_0), то Н. ф. f дифференцируема в точке x_0, причем

$$\frac{df(x_0)}{dx} = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Эта теорема обобщается на случай системы уравнений, т. е. когда F является векторной функцией. Пусть $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ суть n- и m-мерные евклидовы пространства с фиксированными системами координат, точки к-рых соответственно $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_m)$. Пусть F отображает нек-рую окрестность W точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$, в пространство $\mathbb{R}^m$ и F_i, $i=1, 2, \ldots, m$,— координатные функции (от $n+m$ переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$) отображения F, т. е. $F=(F_1, \ldots, F_m)$. Если отображение F дифференцируемо на W, $F(x_0, y_0)=0$, а якобиан

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0,$$

то существуют окрестности U и V точек x_0 и y_0 соответственно в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, $U \times V \subset W$ и единственное отображение $f: U \to V$ такие, что для всех $x \in U$ выполняется условие $F(x, f(x))=0 \in \mathbb{R}^m$. При этом $f(x_0)=y_0$, отображение f дифференцируемо на U, а если $f=(f_1, \ldots, f_m)$, то явное выражение для частных производных $\partial f_j/\partial x_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, m$, находится из системы m линейных относительно этих производных уравнений

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0,$$

$k=1, 2, \ldots, m$, i фиксировано ($i=1, 2, \ldots, n$). Иногда основное утверждение теоремы формулируется следующим образом: существуют окрестности U и W_0 точек x_0 и (x_0, y_0) в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $W_0 \subset W$, и единственное отображение $f: U \to \mathbb{R}^m$ такие, что для всех $x \in U$ выполняются условия $(x, f(x)) \in W_0$, $F(x, f(x))=0$. Иначе говоря, условия

$$(x, y) \in W_0, \quad F(x, y) = 0$$

равносильны условиям $x \in U$, $y=f(x)$. В этом случае говорят, что уравнение $F(x, y)=0$ однозначно разрешимо в окрестности W_0 точки (x_0, y_0).

Сформулированная классич. теорема о Н. ф. обобщается на случай более общих пространств следующим образом. Пусть X — топологич. пространство, Y и Z — аффинные нормированные пространства над полем действительных или комплексных чисел, т. е. аффинные пространства над указанными полями, к-рым сопоставлены соответственно нормированные векторные пространства $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{Z}$, причем $\boldsymbol{Y}$ — полное пространство, $\mathscr{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ — множество линейных непрерывных отображений пространства $\boldsymbol{Y}$ в пространство $\boldsymbol{Z}$, W — открытое множество в произведении пространств $X \times Y$ и $(x_0, y_0) \in W$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$.

Пусть $F: W \to Z$ — непрерывное отображение W в Z и $F(x_0, y_0)=z_0$. Если при каждом фиксированном x и $(x, y) \subset W$ отображение F имеет частную *Фреше производную* $F_y \in \mathscr{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$, причем $F_y(x, y): W \to \mathscr{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ является непрерывным отображением W в $\mathscr{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$, а линейное отображение $F_y(x_0, y_0): \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ имеет непрерывное обратное линейное отображение (т. е. является обратимым элементом пространства $\mathscr{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$), то существуют такие открытые соответственно в пространствах X и Y множества $U \subset X$ и $V \subset Y$, $x_0 \in U$, $y_0 \in V$, что для любого $x \in U$ существует и притом единственный элемент $y \in V$, обозначаемый $y=f(x)$ и удовлетворяющий условиям:

$$f(x) \in V \text{ и } F(x, f(x)) = z_0.$$

При этом так определенная функция $y=f(x)$ является непрерывным отображением U в V и $y_0=f(x_0)$.

Если X также является аффинным нормированным пространством, то при определенных условиях Н. ф. $f: x \mapsto y$, удовлетворяющая уравнению

$$F(x, y) = z_0, \qquad (1)$$

также дифференцируема. Именно, пусть X, Y, Z — аффинные нормированные пространства, W — открытое множество из $X \times Y$, $F: W \to Z$, $F(x_0, y_0) = z_0$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, и пусть f — неявное отображение, задаваемое уравнением (1) и отображающее нек-рую окрестность U точки x_0 в открытое подмножество V пространства Y, $U \times V \subset W$. Таким образом, для всех $x \in U$ имеет место

$$f(x) \in V, \quad F(x, f(x)) = z_0. \qquad (2)$$

Пусть, кроме того, отображение f непрерывно в точке x_0 и $f(x_0) = y_0$. Тогда если отображение F дифференцируемо в точке (x_0, y_0) и его частные производные Фреше $F_x(x_0, y_0)$ и $F_y(x_0, y_0)$ являются линейными непрерывными операторами, отображающими соответственно векторные пространства $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, сопоставленные аффинным пространствам X и Y, в векторное пространство $\boldsymbol{Z}$, сопоставленное аффинному пространству Z, причем оператор $F_y(x_0, y_0)$ является обратимым элементом пространства $\mathscr{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$, то отображение f дифференцируемо в точке x_0 и его производная Фреше задается формулой

$$f'(x_0) = -F_y^{-1}(x_0, y_0) \circ F_x(x_0, y_0).$$

Эта формула получается в результате формального дифференцирования функции (2):

$$F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0) \circ f'(x_0) = 0 \in \mathscr{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$$

и умножения слева этого равенства на $F_y^{-1}(x_0, y_0)$.

Если, кроме того, отображение $F: W \to Z$ непрерывно дифференцируемо на W, Н. ф. $f: U \to V$ непрерывна на U, $U \times V \subset W$ и для любого $x \in U$ частная производная Фреше $F_y(x, f(x))$ является обратимым элементом пространства $\mathscr{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$, то отображение f — непрерывно дифференцируемое отображение U в V.

Можно указать и в общем случае условия существования и единственности Н. ф. в терминах непрерывности производной Фреше: если пространство Z полно, отображение $F: W \to Z$ непрерывно дифференцируемо на W, $F(x_0, y_0) = z_0$ и частная производная Фреше $F_y(x_0, y_0)$ является обратимым элементом пространства $\mathscr{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$, то уравнение (1) однозначно разрешимо в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0), т. е. существуют окрестности U и V точек x_0 и y_0 соответственно в пространствах X и Y, $U \times V \subset W$ и единственная Н. ф. $f: U \to V$, удовлетворяющая условиям (2). При этом отображение f непрерывно дифференцируемо на U. В таком виде теорема о Н. ф. для нормированных пространств представляет собой прямое обобщение соответствующей классич. теоремы о Н. ф. для одного скалярного уравнения с двумя переменными.

Если, кроме того, функция $F: W \to Z$ непрерывно дифференцируема в окрестности W точки (x_0, y_0) k раз ($k = 1, 2, \ldots$), то Н. ф. $f: U \to V$ также k раз непрерывно дифференцируема.

Более далекие обобщения классич. теоремы о Н. ф. на случай дифференциальных операторов даны Дж. Нэшем (J. Nash) (см. *Нэша теорема*).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975; [4] Шварц Л., Анализ, пер. с франц., т. 1, М., 1972; [5] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971.

Л. Д. Кудрявцев.

НЕЯВНАЯ ФУНКЦИЯ в алгебраической геометрии — функция, задаваемая алгебраич. уравнением. Пусть $F(X_1, \ldots, X_n, Y)$ — многочлен от $X_1, \ldots, X_n, Y$ (напр., с комплексными коэффициентами). Тогда многообразие $V(F)\subset\mathbb{C}^{n+1}$ нулей этого многочлена можно рассматривать как график нек-рого соответствия $y : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Это соответствие и называют, допуская известную неточность, функцией, неявно заданной уравнением $F(x, y)=0$. Вообще говоря, соответствие y многозначное и не всюду определенное и поэтому не является функцией в обычном смысле. Имеется два способа превратить это соответствие в функцию. Первый, восходящий к Б. Риману (B. Riemann), заключается в том, что *областью определения* Н. ф. y считают не $\mathbb{C}^n$, а многообразие $V(F)$, конечнолистно накрывающее $\mathbb{C}^n$. Этот прием приводит к очень содержательному понятию *римановой поверхности*. При таком подходе понятие Н. ф. смыкается с понятием *алгебраической функции*.

Другой способ состоит в том, чтобы представить $V(F)$ локально как график однозначной функции. Различные теоремы о Н. ф. утверждают существование открытых $U\subset\mathbb{C}^n$ и $W\subset\mathbb{C}$, для к-рых $(U\times W)\cap V(F)$ является графиком гладкой в том или ином смысле функции $y : U \to W$ (см. *Неявная функция*). Однако открытые подмножества U и W, как правило, не являются открытыми в топологии Зарисского и лишены смысла в абстрактной алгебраич. геометрии. Поэтому указанный способ модифицируется следующим образом. Формальным ростком (или ветвью) в точке $a\subset\mathbb{C}^n$ Н. ф., заданной уравнением $F(X, Y)=0$, наз. формальный степенной ряд $y\in\mathbb{C}[[X_1-a_1, \ldots, X_n-a_n]]$ такой, что $F(X, y)=0$. Вообще, степенной ряд y, удовлетворяющий полиномиальному уравнению $F(X, Y)=0$, наз. алгебраическим степенным рядом. Алгебраический степенной ряд сходится в некоторой окрестности точки a.

Пусть A — локальное нётерово кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Элемент y из пополнения $\hat{A}$ локального кольца A наз. алгебраическим над A, если $F(y)=0$ для нек-рого многочлена $F(Y)\in A[Y]$. Множество алгебраических над A элементов $\hat{A}$ образует кольцо $\tilde{A}$. Следующий вариант теоремы о Н. ф. показывает, что алгебраич. функций достаточно много. Пусть

$$f(Y)=(f_1(Y_1, \ldots, Y_m), \ldots, f_m(Y_1, \ldots, Y_m))$$

— набор m многочленов из $A[Y_1, \ldots, Y_m]$ и пусть $\bar{y}^0=(\bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_m^0)$ — элементы поля вычетов $A/\mathfrak{m}$ такие, что:

1) $\bar{f}(\bar{y}^0)=0$ (черта сверху означает редукцию по модулю $\mathfrak{m}$);

2)

$$\overline{\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right)}(\bar{y}^0)\neq 0.$$

Тогда существуют алгебраические над A элементы $y=(y_1, \ldots, y_m)$ такие, что $f(y)=0$ и $\bar{y}=\bar{y}^0$. Другими словами, A — *гензелево кольцо*.

Другой результат того же типа — теорема Артина об аппроксимации (см. [2]). Пусть A — локальное кольцо, являющееся локализацией алгебры конечного типа над полем. Пусть, далее, задана система $f(Y)=0$ полиномиальных уравнений с коэффициентами из A (или из $\tilde{A}$) и $\hat{y}$ — вектор с коэффициентами из пополнения $\hat{A}$ такой, что $f(\hat{y})=0$. Тогда найдется вектор $\tilde{y}$ с коэффициентами из $\tilde{A}$, сколь угодно близкий к $\hat{y}$ и такой, что $f(\tilde{y})=0$. Вариант этой теоремы верен [3] и для систем аналитич. уравнений.

Лит.: [1] Артин М., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 1, с. 181—205; [2] Artin M., «Publ. Math. IHES», 1969, № 36, p. 23—58; [3] его же, «Invent. math.», 1968, v. 5, p. 277—91.

В. И. Данилов.

НЕЯВНЫЙ ОПЕРАТОР — решение $y=f(x)$ нелинейного операторного уравнения $F(x, y)=0$, в к-ром x играет роль параметра, а y — неизвестного. Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $F(x, y)$ — нелинейный оператор, непрерывный в окрестности Ω точки $(x_0, y_0)\in X+Y$ и отображающий Ω в окрестность нуля в Z. Если *Фреше производная* $F_y(x, y)$ непрерывна в Ω, существует и ограничен оператор $[F_y(x_0, y_0)]^{-1}$, а $F(x_0, y_0)=0$, то найдутся числа $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ такие, что при $\|x-x_0\|<\delta$ в шаре $\|y-y_0\|<\varepsilon$ уравнение $F(x, y)=0$ имеет единственное решение $y=f(x)$. При этом Н. о. $f(x)$ непрерывен по x и $f(x_0)=y_0$. Если дополнительно $F(x, y)$ n раз дифференцируем в Ω, то и $f(x)$ n раз дифференцируем. Если $F(x, y)$ — *аналитический оператор* в Ω, то и $f(x)$ — аналитический. Эти утверждения обобщают известные предложения о неявных функциях. О вырожденных случаях см. *Ветвление решений* нелинейных уравнений.

Лит.: [1] Hildebrandt T. H., Graves L. M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1927, v. 29, p.127—53; [2] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [3] Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969; [4] Ниренберг Л., Лекции по нелинейному функциональному анализу, пер. с англ., М., 1977.

В. А. Треногин.

НИГДЕ НЕ ПЛОТНОЕ МНОЖЕСТВО топологического пространства X — множество A, определяемое следующим свойством: каждое непустое открытое множество $\Gamma\subset X$ содержит непустое открытое множество $\Gamma_0\subset\Gamma$ такое, что $A\cap\Gamma_0=\varnothing$. Другими словами, A — Н. не п. м., если оно не плотно ни в каком непустом открытом множестве. *М. И. Войцеховский.*

НИЖНИЙ ПРЕДЕЛ последовательности множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ в топологическом пространстве X — совокупность точек $p\in X$, любая окрестность к-рых пересекается со всеми элементами последовательности, начиная с нек-рого N.

Н. п. числовой последовательности см. в ст. *Верхний и нижний пределы.* *А. А. Мальцев.*

НИЖНЯЯ ГРАНЬ множества — см. *Верхняя и нижняя грани.*

НИЖНЯЯ ГРАНЬ семейства топологий F (заданных на одном множестве X) — теоретико-множественное пересечение этого семейства топологий, т. е. $\bigcap F$. Обозначается $\wedge F$. Всегда $\wedge F$ — топология на X. Если топологии $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ заданы на множестве X и $\mathscr{T}_1$ содержится в $\mathscr{T}_2$ (как множество), то пишут $\mathscr{T}_1\leqslant\mathscr{T}_2$.

Топология $\wedge F$ обладает свойством: если $\mathscr{T}'$ — топология на X и $\mathscr{T}'\leqslant\mathscr{T}$ для всех $\mathscr{T}\in F$, то $\mathscr{T}'\leqslant\wedge F$. Свободная сумма пространств, получающихся при наделении множества X всеми отдельно взятыми топологиями из семейства F, канонически отображается на пространство X, $\wedge F$. Важным свойством этого отображения является его факторность. На этой основе доказываются общие теоремы о сохранении ряда свойств при операции пересечения топологий.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

НИКОЛЬСКОГО ПРОСТРАНСТВО — банахово пространство $H_p^r(\Omega)$, состоящее из функций, определенных на открытом множестве Ω n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и обладающих определенными разностно-дифференциальными свойствами, характеризующимися вектором $r=(r_1, \ldots, r_n)$, $r_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$, в метрике L_p, $1\leqslant p\leqslant+\infty$. Введены С. М. Никольским.

Н. п. $H_p^r(\Omega)$ можно описать в терминах свойств разностей от частных производных порядка r_i^* по переменной x_i, где $r_i=r_i^*+\alpha_i$, r_i^* — целое, $0<\alpha_i\leqslant1$, $i=1, 2, \ldots, n$;

если через $\Delta^s_{h_i} f$ обозначить разность порядка $s=1, 2, \ldots$ с шагом h_i по переменной x_i функции f, то

$$f \in H^r_p(M_1, \ldots, M_n; \Omega), M_i > 0,$$

тогда и только тогда, когда функция f имеет в Ω обобщенные частные производные

$$f^{(r_i^*)}_{x_i} = \partial^{r_i^*} f / \partial x_i^{r_i^*},$$

$i=1, 2, \ldots, n$, и при $0<\alpha_i<1$ имеет место неравенство

$$\left\| \Delta^1_{h_i} f^{(r_i^*)}_{x_i} \right\|_{L_p(\Omega_{|h_i|})} \leqslant M_i |h_i|^{\alpha_i},$$

а при $\alpha=1$ — неравенство

$$\left\| \Delta^2_{h_i} f^{(r_i^*)}_{x_i} \right\|_{L_p(\Omega_{2|h_i|})} \leqslant M_i |h_i|,$$

где Ω_η — множество точек $x \in \Omega$, удаленных от границы множества Ω больше чем на $\eta>0$, а h_i — произвольно.

Пространство $H^r_p(\Omega) = H^{r_1, \ldots, r_n}_p(\Omega)$ определяется как объединение всех $H^r_p(M_1, \ldots, M_n; \Omega)$ при всевозможных $M_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Если $\Omega \neq \varnothing$, то при любых $r_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ Н. п. $H^{r_1, \ldots, r_n}_p(\Omega)$ не пусто и в нем существуют функции, не принадлежащие Н. п. $H^{r_1, \ldots, r_{i-1}, r_i+\varepsilon, r_{i+1}, \ldots, r_n, \ldots}_p$ ни при каком $\varepsilon>0$ и ни при каком $i=1, 2, \ldots, n$.

В случае $p=\infty$, не целых r_i и непрерывности рассматриваемых производных Н. п. является *гёльдеровым пространством*. Понятие Н. п. обобщается на случай функций, определенных на достаточно гладких многообразиях (см. [2]).

Имеется описание Н. п. $H^{r_1, \ldots, r_k}_p(\Omega)$ в терминах свойств разностей от частных производных, меньших чем r_i^* порядков, в частности в терминах свойств разностей достаточно высокого порядка от самой функции.

Пусть $H^r_p(\Omega)$ — изотропное пространство, т. е. $r_1 = \ldots = r_n = r$. Если область Ω такова, что любую функцию f класса $H^r_p(\Omega)$ можно продолжить с сохранением класса на все пространство $\mathbb{R}^n$, т. е. так, что продолженная функция будет принадлежать классу $H^r_p(\mathbb{R}^n)$ (это всегда имеет место, если граница области достаточно гладкая), то для того, чтобы $f \in H^r_p(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы для любых целых неотрицательных k и s таких, что $0<r-s<k$, у функции f существовали все частные производные $f^{(s)}$ порядка s и существовала постоянная $M>0$, для к-рой выполнялись неравенства

$$\| \Delta^k_h f^{(s)} \|_{L_p(\Omega_{k(h)})} \leqslant M |h|^{r-s}, \qquad (1)$$

где $h=(h_1, \ldots, h_n)$, $\Delta^k_h f^{(s)}$ — разность k-го порядка с векторным шагом h от функции $f^{(s)}$. Условие (1) эквивалентно аналогичному условию для модуля непрерывности производной $f^{(s)}$: существует такое $M>0$, что

$$\Omega^k(f^{(s)}, \delta) \leqslant M \delta^{r-s}, \quad \delta > 0,$$

где

$$\Omega^k(f^{(s)}, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|h|=1} \sup_{0 \leqslant t \leqslant \delta} \| \Delta^k_{th} f^{(s)} \|_{L_p(\Omega_{kt})} \leqslant M \delta^{r-s}.$$

Если для функции $f \in H^r_p(\Omega)$ через M_f обозначить нижнюю грань всех M, для к-рых выполняется условие (1) для всех $h \in \mathbb{R}^n$ и всех частных производных допустимого порядка s, то

$$\| f \| \stackrel{\text{def}}{=} \| f \|_{L_p(\Omega)} + M_f$$

является нормой в Н. п. $H_p^r(\Omega)$, причем нормы, получающиеся при различных допустимых парах k, s, эквивалентны между собой.

Н. п., состоящее из функций, определенных на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, можно охарактеризовать в терминах наилучших приближений функций из этого пространства с помощью целых функций экспоненциального типа. Пусть $E_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(f)_p$ — наилучшее приближение в метрике $L_p(\mathbb{R}^n)$ функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ при помощи целых функций $q_{\nu_1 \ldots \nu_n}(x_1, \ldots, x_n) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ экспоненциального типа степеней $\nu_1, \ldots, \nu_n$ соответственно по переменным $x_1, \ldots, x_n$. Для Н. п. справедливы следующие прямая и обратная теоремы типа теорем Бернштейна, Джексона, Зигмунда.

Если функция $f \in H_p^{r_1, \ldots, r_n}(M_1, \ldots, M_n; \mathbb{R}^n)$, то для любых $\nu_i > 0$ выполняется неравенство

$$E_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(f) \leqslant c \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{\nu_i^{r_i}} \tag{2}$$

(постоянная $c > 0$ не зависит от функции f).

Наоборот, если для функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство (2) для $\nu_i = a_i^k$, $k = 0, 1, \ldots$, $a_i > 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и q является целой функцией степени единица по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$, для к-рой

$$\| f - q \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \sum_{i=1}^{n} M_i$$

(она существует в силу (2) при $k = 0$), то

$$f - q \in H_p^{r_1, \ldots, r_n}(M_1^*, \ldots, M_n^*; \mathbb{R}^n),$$

где

$$M_i^* = c_i \sum_{j=1}^{n} M_j, \tag{3}$$

причем постоянные $c > 0$ в (2) и $c_i > 0$ в (3) не зависят от M_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В случае периодической по всем переменным функций f аналогичное описание Н. п. делается посредством наилучших приближений функций через тригонометрич. полиномы вместо целых функций экспоненциального типа (см. [1], [4]).

Н. п. могут быть описаны с помощью оператора Бесселя — Макдональда, применяемого к нек-рому классу обобщенных функций (*см. Вложения теоремы*).

Для пространств $H_p^{r_1, \ldots, r_n}(\Omega)$ С. М. Никольским доказаны транзитивные теоремы вложения для разных размерностей и метрик (см. [3] и *Вложения теоремы*), перенесенные в дальнейшем на более общие классы функций. Эти теоремы показывают, что Н. п. образуют замкнутую систему относительно граничных значений входящих в них функций: следы функций из Н. п. на гладких многообразиях в определенном смысле полностью описываются в терминах Н. п.

Свойства Н. п. дали возможность получить необходимые и достаточные условия разрешимости *Дирихле задачи* в соответствующих Н. п. в терминах принадлежности граничной функции также к нек-рому Н. п.: для того чтобы гармонич. функция u принадлежала классу $H_p^r(\Omega)$, $r > 1/p$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, необходимо и достаточно, чтобы граничные значения $u|_{\partial\Omega}$ принадлежали к классу $H_p^{r-1/p}(\partial\Omega)$. Отсюда при $p = 2$ следует, в частности, что если $u|_{\partial\Omega} \in H_2^{\rho}(\partial\Omega)$, $\rho > 1/2$, то *Дирихле интеграл* $D(u)$ от функции u по области Ω конечен и потому задачу Дирихле можно решить прямым вариационным методом. Из теорем вложения для Н. п. следует, что если для функции u ее интеграл Дирихле по области Ω конечен, то $u|_{\partial\Omega} \in H_2^{1/2}(\partial\Omega)$ (см. [6]).

Обобщением Н. п. является пространство Бесова $B^{r_1, \ldots, r_n}_{p\theta}$.

Лит.: [1] Никольский С. М., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 244—78; [2] его же, «Матем. сб.», 1953, т. 33, № 2, с. 261—326; [3] его же, «Докл. АН СССР», 1958, т. 118, № 1, с. 35—37; [4] его же, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [5] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М., Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., 1975; [6] Никольский С. М., «Докл. АН СССР», 1953, т. 88, в. 3, с. 409—11.

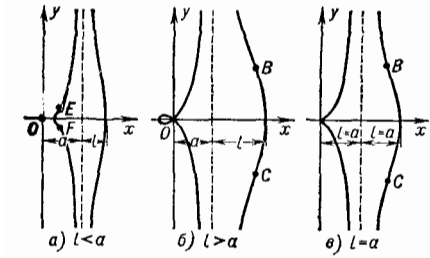
Л. Д. Кудрявцев.

НИКОМЕДА КОНХОИДА — плоская алгебраич. кривая 4-го порядка, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид

$$(x^2+y^2)(y-a)^2-l^2y^2=0;$$

в полярных координатах:

$$\rho=\frac{a}{\sin\varphi}\pm l.$$



Внешняя ветвь (см. рис.). Асимптота $x=a$. Две точки перегиба B и C.

Внутренняя ветвь. Асимптота $x=a$. Начало координат — двойная точка, характер к-рой зависит от величин a и l: при $l<a$ — изолированная точка, кривая имеет еще две точки перегиба E, F; при $l>a$ — узловая точка; при $l=a$ — возврата точка. Н. к.— *конхоида* прямой $x=a$.

Н. к. названа по имени Никомеда (3 в. до н. э.), к-рый применял ее для решения задачи о трисекции угла.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

НИЛЬАЛГЕБРА — алгебра с ассоциативными степенями (в частности, ассоциативная), в к-рой всякий элемент нильпотентен. Частным случаем Н. являются нильпотентная и локально нильпотентная алгебра. В ассоциативном случае построение Н., не являющихся локально нильпотентными, представляет собой трудную задачу; по существу известен лишь один пример такой алгебры (см. [5]).

Класс Н. замкнут относительно взятия гомоморфных образов и перехода к подалгебрам. Кроме того, расширение Н. с помощью Н. снова оказывается Н. Поэтому во всякой алгебре сумма всех нильидеалов является наибольшим нильидеалом, содержащим всякий нильидеал. Он наз. верхним нильрадикалом алгебры, факторалгебра по нему не содержит ненулевых нильидеалов. Вопрос о том, будет ли сумма односторонних нильидеалов односторонним нильидеалом, составляет содержание проблемы Кёте. Неизвестно также (1982), существуют ли простые нильколька. Выполнение условий «бернсайдовского типа» для Н. часто влечет ее нильпотентность или локальную нильпотентность; нётерова Н. нильпотентна; артинова Н. (в частности, конечномерная) нильпотентна; Н. ограниченного индекса (индексы нильпотентности элементов ограничены в совокупности) над полем нулевой характеристики нильпотентна (теорема Хигмена); Н., удовлетворяющая полиномиальному тождеству, локально нильпотентна. Не выяснено (1982), будет ли нильпотентной конечно определенная нильалгебра.

Особый интерес представляют условия, при к-рых радикал Джекобсона Rad A алгебры A над полем k совпадает с нильрадикалом. Вот нек-рые из них: A артинова, в частности конечномерная, алгебра (Rad A даже нильпотентен); card $k>\dim_k A$, в частности если A конечно порождена над k и k несчетно; алгебраич. алгебра A; A конечно порожденная над k алгебра с по-

линомиальным тождеством и k бесконечно. Радикал конечно порожденной алгебры с полиномиальным тождеством над полем нулевой характеристики нильпотентен. Этот факт эквивалентен условию выполнимости в такой алгебре нек-рого стандартного тождества.

Некоторые из сформулированных утверждений имеют аналоги в неассоциативных алгебрах. Так, в альтернативном кольце с условием максимальности для правых идеалов, не имеющем элементов порядка 2 и 3 в аддитивной группе, всякий односторонний нильидеал нильпотентен. В йордановой алгебре A над полем k радикал Джекобсона $\mathrm{Rad}\, A$ является нильидеалом, если выполнено одно из следующих условий: $\mathrm{card}\, k > 2 + \dim A$; A — алгебраич. алгебра. Всякое альтернативное или специальное йорданово нилькольцо ограниченного индекса без элементов 2-го порядка в аддитивной группе локально нильпотентно (теорема Ширшова). Конечномерная обобщенно стандартная Н. нильпотентна.

Всякая антикоммутативная алгебра является Н. в определенном выше смысле, поэтому в классе антикоммутативных колец понятие Н. бессодержательно. Однако полезными оказываются различные аналоги этого понятия. Так, в классе колец Ли аналогом Н. являются энгелевы алгебры, т. е. алгебры, в к-рых внутренние дифференцирования элементов нильпотентны. Энгелева алгебра не обязана быть локально нильпотентной, однако если индексы нильпотентности внутренних дифференцирований ограничены в совокупности и основное поле имеет нулевую характеристику, то энгелева алгебра локально нильпотентна. Неизвестно (1982), будет ли она при этих ограничениях нильпотентной (проблема Хиггинса).

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [3] Кострикин А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, № 4, с. 515—40; [4] Ширшов А. И., «Матем. сб.», 1957, т. 41, № 3, с. 381—94; [5] Голод Е. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 273—76; [6] Higman G., «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1956, v. 52, p. 1—4; [7] Higgins P., там же, 1954, v. 50, p. 8—15; [8] Жевлаков К. А., «Алгебра и логика», 1967, т. 6, № 4, с. 11—17; [9] McGrimmon K., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1969, v. 62, № 3, p. 671—78. *В. Н. Латышев.*

НИЛЬГРУППА — группа, в к-рой любые два элемента x, y связаны соотношением

$$[[\ldots[[x, y]\, y], \ldots]\, y] = 1,$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор

$$[a, b] = a^{-1} b^{-1} ab,$$

причем в определении число коммутирований n зависит, вообще говоря, от пары x, y. В случае, если число n ограничено для всех x, y из данной группы, группа наз. энгелевой. Всякая *локально нильпотентная группа* является Н. Обратное в общем случае неверно, но верно при нек-рых дополнительных предположениях, напр. при условии локальной разрешимости группы. Вопрос о локальной нильпотентности энгелевой группы открыт (1981).

Термин «Н.» иногда употребляется в ином смысле. А именно, нильгруппой наз. группу, в к-рой всякая циклич. подгруппа субнормальна, т. е. включается в нек-рый субнормальный ряд группы (см. *Нормальный ряд* группы).

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

А. Л. Шмелькин.

НИЛЬМНОГООБРАЗИЕ — компактное факторпространство связной нильпотентной группы Ли (иногда, впрочем, компактности не требуется).

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1949, т. 13, № 1, с. 9—32.

Д. В. Аносов.

НИЛЬПОЛУГРУППА — полугруппа с нулем, некоторая степень каждого элемента к-рой равна нулю. Н. составляют один из важнейших классов *периодических*

полугрупп: это в точности периодич. полугруппы с единственным идемпотентом, являющимся нулем. Более узкий класс составляют л о к а л ь н о н и л ь п о т е н т н ы е п о л у г р у п п ы (л. н. п., то есть полугруппы, каждая конечно порожденная подполугруппа к-рых нильпотентна, см. *Нильпотентная полугруппа*). Для любого $n>1$ существует полугруппа с тождеством $x^n=0$, не являющаяся л. н. п. (см., напр., [1] гл. VIII, § 4). Конечная Н. нильпотентна, и л. н. п.— это в точности локально конечные Н. (см. *Локально конечная полугруппа*). Еще более узкий класс составляют п о л у г р у п п ы с в о з р а с т а ю щ и м а н н у л я т о р н ы м р я д о м (в. а. р.). Полугруппа S наз. полугруппой с в. а. р., если она обладает начинающимся с нуля возрастающим идеальным рядом (см. *Идеальный ряд* полугруппы), для любых двух соседних членов A_α, $A_{\alpha+1}$ к-рого имеет место

$$SA_{\alpha+1}\cup A_{\alpha+1}S\subseteq A_\alpha.$$

Н. будет полугруппой с в. а. р. тогда и только тогда, когда она обладает возрастающим рядом идеалов, все факторы к-рого конечны. Всякая полугруппа с в. а. р. имеет единственное неприводимое порождающее множество, состоящее из ее неразложимых элементов. Произвольная же л. н п. может совпадать со своим квадратом. Наложение на Н. многих условий конечности (см. *Полугруппа с условием конечности*) влечет конечность полугруппы; таковы, напр., условие минимальности для идеалов, условие максимальности для правых (левых) идеалов. Если все нильпотентные подполугруппы Н. S конечны, то и S конечна.

Лит.: [1] Д ж е к о б с о н Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Ш е в р и н Л. Н., «Матем. сб.», 1961, т. 53, № 3, с. 367—86; [3] е г о ж е, там же, т. 55, № 4, с. 473—480.
Л. Н. Шеврин.

НИЛЬПОТЕНТНАЯ АЛГЕБРА — алгебра, для к-рой существует такое натуральное число n, что любое произведение n элементов алгебры равно нулю. Если при этом существует произведение $n-1$ элементов, не равное нулю, то n наз. и н д е к с о м н и л ь п о т е н т н о с т и Н. а.

Примерами Н. а. являются: алгебры с нулевым умножением, алгебра строго верхнетреугольных матриц, прямые суммы Н. а., индексы нильпотентности к-рых ограничены в совокупности, тензорное произведение двух алгебр, из к-рых одна нильпотентна.

Класс Н. а. замкнут относительно взятия гомоморфных образов и перехода к подалгебрам. В ассоциативной алгебре сумма конечного числа нильпотентных идеалов является нильпотентным идеалом, а сумма произвольного множества нильпотентных идеалов является, вообще говоря, локально нильпотентным идеалом. Конечномерная алгебра над полем нулевой характеристики, обладающая базисом, состоящим из нильпотентных элементов, нильпотентна. Если алгебра удовлетворяет полиномиальному тождеству степени d, то всякое ее нильпотентное подкольцо в степени $[d/2]$ принадлежит сумме нильпотентных идеалов. Производная алгебра конечномерной алгебры Ли над полем нулевой характеристики нильпотентна. Нильпотентные подалгебры, совпадающие со своим нормализатором (п о д а л г е б р ы К а р т а н а), играют существенную роль в классификации простых алгебр Ли конечной размерности. Н. а. Ли обладает внешним автоморфизмом. Алгебра Ли с регулярным автоморфизмом (т. е. автоморфизмом, не имеющим неподвижных элементов, кроме нулевого) простого периода нильпотентна.

Лит.: [1] Д ж е к о б с о н Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] е г о ж е, Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [3] A l b e r t A. A., Structure of algebras, [3 ed.], Providence, [1968]; [4] J a c o b s o n N., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1955, v. 6, № 2, p. 281—83; [5] H i g m a n G., «J. Lond. Math. Soc.», 1957, v. 32, № 3, p. 321—34.
В. Н. Латышев.

НИЛЬПОТЕНТНАЯ ГРУППА — группа, обладающая *нормальным рядом*

$$G = A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_k \supseteq A_{k+1} = \{1\}$$

таким, что каждый его фактор A_i/A_{i+1} лежит в центре факторгруппы G/A_{i+1} (такой ряд наз. центральным). Длина наиболее короткого центрального ряда Н. г. наз. ее классом (или ступенью) нильпотентности. В любой Н. г. нижний (а также верхний) центральный ряд (см. *Подгрупп ряд*) обрывается на единичной подгруппе и имеет длину, равную классу нильпотентности группы.

Конечные Н. г. исчерпываются прямыми произведениями p-групп, т. е. групп порядков p^k, где p — простое число. В любой Н. г. элементы конечных порядков образуют подгруппу, факторгруппа по к-рой не имеет кручения. Конечно порожденные Н. г. без кручения исчерпываются группами целочисленных треугольных матриц с единицами на главной диагонали и их подгруппами. Любая конечно порожденная Н. г. без кручения аппроксимируется конечными p-группами для любого простого p. Конечно порожденные Н. г. являются *полициклическими группами*, более того, они имеют центральный ряд с циклич. факторами.

Все Н. г. класса нильпотентности не больше c образуют многообразие (см. *Групп многообразие*), определяемое тождеством

$$[[\ldots[[x_1, x_2]\, x_3], \ldots]\, x_{c+1}] = 1.$$

Свободные группы этого многообразия наз. свободными нильпотентными группами. О пополнении Н. г. без кручения см. *Локально нильпотентная группа*.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977. *А. Л. Шмелькин.*

НИЛЬПОТЕНТНАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа S с нулем, для к-рой существует такое n, что $S^n = 0$; это эквивалентно выполнению в S тождества

$$x_1 \ldots x_n = y_1 \ldots y_n.$$

Наименьшее для данной полугруппы число n с указанным свойством наз. ступенью (иногда классом) нильпотентности Н. п. Если $S^2 = 0$, то S наз. полугруппой с нулевым умножением. Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: 1) S есть Н. п., 2) S обладает конечным аннуляторным рядом (т. е. возрастающим аннуляторным рядом конечной длины, см. *Нильполугруппа*), 3) существует такое k, что любая подполугруппа из S может быть включена в идеальный ряд длины $\leqslant k$ полугруппы S.

Более широким является понятие нильпотентной полугруппы в смысле Мальцева [2]. Так называется полугруппа, удовлетворяющая для нек-рого n тождеству

$$X_n = Y_n,$$

где слова X_n, Y_n определяются по индукции следующим образом: $X_0 = x$, $Y_0 = y$, $X_n = X_{n-1} u_n Y_{n-1}$, $Y_n = Y_{n-1} u_n X_{n-1}$, x, y, u_1, …, u_n — переменные. Группа будет Н. п. в смысле Мальцева тогда и только тогда, когда она нильпотентна в обычном теоретико-групповом смысле (см. *Нильпотентная группа*), причем выполнение тождества $X_n = Y_n$ эквивалентно тому, что ступень ее нильпотентности $\leqslant n$. Всякая полугруппа с законом сокращения, удовлетворяющая тождеству $X_n = Y_n$, вложима в группу, удовлетворяющую тому же тождеству.

Лит.: [1] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [2] Мальцев А. И., «Уч. зап. Ивановского гос. пед. ин-та», 1953, т. 4, с. 107—11; [3] Шеврин Л. Н., «Матем. сб.», 1961, т. 53, № 3, с. 367—86; [4] его же, там же, 1963, т. 61, № 2, с. 253—56. *Л. Н. Шеврин.*

НИЛЬ ПОТЕНТНЫЙ ИДЕАЛ — односторонний или двусторонний идеал M кольца или полугруппы с нулем A такой, что для нек-рого натурального n выполняется $M^n=\{0\}$, т. е. произведение любых n элементов идеала M равно нулю. Напр., в кольце Z/p^nZ вычетов по модулю p^n, где p — нек-рое простое число, все идеалы, отличные от самого кольца, нильпотентны. В групповом кольце $F_p[G]$ конечной p-группы G над полем из p элементов идеал, порожденный элементами вида $\sigma-1$, где $\sigma\in G$, нильпотентен. В кольце верхних треугольных матриц над нек-рым полем матрицы, у к-рых на главной диагонали стоят нули, образуют Н. и.

Любой элемент Н. и. нильпотентен. Любой Н. и. является одновременно нильидеалом и содержится в радикале *Джекобсона кольца*. В артиновых кольцах радикал Джекобсона нильпотентен, и понятия Н. и. и нильидеала совпадают. Последнее свойство справедливо и для *нётеровых колец*. В нётеровом слева кольце любой левый (правый) нильидеал нильпотентен.

Все Н. и. коммутативного кольца содержатся в нильрадикале, к-рый в общем случае может быть не нильпотентным, а лишь нильидеалом. Простой пример такой ситуации доставляет прямая сумма колец Z/p^nZ по всем натуральным n. В коммутативном кольце любой *нильпотентный элемент* a содержится в нек-ром Н. и., напр. в главном идеале, порожденном a. В некоммутативном кольце могут существовать нильпотентные элементы, к-рые не содержатся ни в одном Н. и. (и даже нильидеале). Напр., в полном кольце матриц над полем имеются нильпотентные элементы, в частности нильпотентны упоминавшиеся выше матрицы, у к-рых ненулевые элементы стоят только над главной диагональю, но это кольцо просто и, следовательно, не имеет ненулевых Н. и.

В конечномерной алгебре Ли G существует максимальный Н. и., состоящий из элементов $x\in G$, для к-рых эндоморфизм $y\to[x, y]$ для $y\in G$ нильпотентен.

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [3] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1, М., 1977; [4] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [5] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976.

Л. В. Кузьмин.

НИЛЬПОТЕНТНЫЙ ЭЛЕМЕНТ, нильпотент,— элемент a кольца или полугруппы с нулем A, удовлетворяющий равенству $a^n=0$ для нек-рого натурального n. Минимальное значение n, для к-рого справедливо это равенство, наз. индексом нильпотентности элемента a. Напр., в кольце вычетов по модулю p^n, где p — нек-рое простое число, класс вычетов числа p — нильпотент индекса n, матрица $\begin{Vmatrix}0&1\\0&0\end{Vmatrix}$ является нильпотентом индекса 2 в кольце (2×2)-матриц с коэффициентами в нек-ром поле K, в групповой алгебре $F_p[G]$, где F_p — поле из p элементов, а G — циклич. группа порядка p с образующей σ, элемент $1-\sigma$ является нильпотентом индекса p.

Если a — Н. э. индекса n, то справедливо равенство

$$1=(1-a)\,(1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}),$$

т. е. элемент $(1-a)$ обратим в кольце A и обратный к нему элемент записывается в виде многочлена от a.

В коммутативном кольце A элемент a нильпотентен тогда и только тогда, когда он содержится во всех простых идеалах кольца. Все Н. э. образуют идеал J, наз. нильрадикалом кольца и совпадающий с пересечением всех простых идеалов кольца A. Кольцо A/J уже не имеет Н. э., отличных от нуля.

При интерпретации коммутативного кольца A как кольца функций на пространстве Spec A (спектре A) нильпотентам соответствуют функции, тождественно равные нулю. Тем не менее рассмотрение нильпотентов часто оказывается полезным в алгебраич. геометрии,

т. к. они позволяют получить чисто алгебраич. аналог ряда понятий, типичных для анализа и дифференциальной геометрии (бесконечно малые деформации и т. п.).

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [3] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

Л. В. Кузьмин.

НИЛЬПОТОК — поток на *нильмногообразии* $M=G/H$, определяемый действием на M какой-нибудь однопараметрич. подгруппы g_t нильпотентной группы Ли G: если M состоит из смежных классов gH, то под действием Н. такой класс за время t переходит в класс $g_t gH$.

Лит.: [1] Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф., Потоки на однородных пространствах, пер. с англ., М., 1966.

Д. В. Аносов.

НИТЬ обратного спектра $\{X_\alpha, \omega_\alpha^\beta; \alpha\in\mathfrak{A}\}$ топологических пространств X_α — такая система $x=\{x_\alpha\}$ точек $x_\alpha\in X_\alpha$ (по одной точке из каждого X_α), т. е. такая точка произведения $\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}}X_\alpha$ множеств X_α, что $\omega_\alpha^\beta(x_\beta)=x_\alpha$ всякий раз, когда $\beta>\alpha$.

Б. А. Пасынков.

НОМОГРАФИЯ — раздел математики, в к-ром изучаются способы графич. представления функциональных зависимостей. Получающиеся при этом чертежи наз. номограммами. Каждая номограмма строится для определенной функциональной зависимости в заданных пределах изменения переменных. На номограммах вычислительная работа заменяется выполнением простейших геометрич. операций, указанных в ключе пользования номограммой, и считыванием ответов.

Точность получения ответов по номограммам зависит от вида номографированной зависимости, пределов изменения переменных, размеров чертежа и выбранного типа номограммы. В среднем номограммы могут обеспечить получение ответов с 2—3 верными значащими цифрами. Когда точность номограмм недостаточна, их можно использовать для прикидочных расчетов, для нахождения нулевых приближений, для контроля вычислений с целью обнаружения грубых ошибок.

Номограммы можно применять и для исследования функциональных зависимостей, положенных в их основу. Часто такое исследование выполняется на номограммах значительно проще и нагляднее, чем иными способами. С помощью номограмм можно исследовать влияние различных переменных на искомую переменную, дать наглядную геометрич. интерпретацию каким-либо ранее известным свойствам данной зависимости, установить ранее неизвестные ее особенности. Номографические методы исследования можно, напр., применять в задачах на подбор параметров эмпирич. формул по результатам наблюдений, на аппроксимацию одной функции другой, на нахождение экстремальных значений функции.

Значения переменных изображаются на номограммах помеченными точками и помеченными линиями. Множество помеченных точек, зависящее от одной переменной, наз. шкалой. Уравнения шкалы переменной α_1 в прямоугольной системе координат xOy записываются в виде

$$x=f_1,\quad y=g_1,$$

где f_1 и g_1 — функции $f(\alpha_1)$ и $g(\alpha_1)$. Схема шкалы α_1 приведена на рис. 1.

Множество помеченных точек, зависящее от двух переменных, наз. бинарным полем. Бинарное поле обычно оформляется в виде сетки, состоящей из двух семейств помеченных линий. Точка в бинарном поле определяется как точка пересечения линий с заданными пометками. В системе прямоугольных координат xOy бинарное поле переменных α_1 и α_2 задается уравнениями

$$x=f_{12},\quad y=g_{12},$$

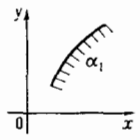


Рис. 1.

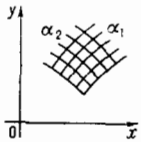


Рис. 2.

где f_{12} и g_{12} — функции $f_{12}(\alpha_1, \alpha_2)$ и $g_{12}(\alpha_1, \alpha_2)$. Предполагается, что функции f_{12} и g_{12} таковы, что в заданной области изменения переменных каждой паре значений α_1 и α_2 отвечает только одна пара значений x и y. Схема бинарного поля (α_1, α_2) приведена на рис. 2.

Шкалы, семейства помеченных линий и бинарные поля в номограммах оформляются так, чтобы было удобно находить точки и линии с заданными пометками и определять пометки ответных точек и линий.

Элементарными номограммами наз. номограммы, в к-рых ответ или ответы находятся в результате выполнения одной геометрич. операции (определение точки на шкале или в бинарном поле; проведение прямой через две точки; построение окружности по известному центру и радиусу; деление отрезка в заданном отношении; проведение прямой, параллельной данной; откладывание отрезка, длина к-рого равна длине данного отрезка; построение параллелограмма по трем его известным вершинам; наложение одной плоскости на другую).

К элементарным номограммам относятся: график функции; сдвоенная шкала; сетчатая; из выравненных точек; из равноудаленных точек; циркульная; с параллельным индексом; барицентрическая; ромбоидальная, с ориентированным транспарантом и с транспарантом общего вида.

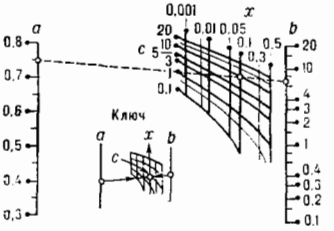


Рис. 3.

На рис. 3 приведена элементарная номограмма из выравненных точек для определения величины x из уравнения

$$x^{a-1} = b\,\frac{\ln(c-x)}{c-x-1}\,,$$

применяющегося при термическом расчете вентиляторных противоточных градирен. Номограмма построена в пределах: $0{,}3 \leqslant a \leqslant 0{,}8$; $0{,}1 \leqslant b \leqslant 20$; $0{,}1 \leqslant c \leqslant 20$; $0{,}001 \leqslant x \leqslant 0{,}5$. Переменные a и b представлены на номограмме шкалами; переменные c и x — бинарным полем. На номограмме показано решение числового примера (дано: $a=0{,}75$; $b=7$; $c=10$; ответ: $x=0{,}1$).

Элементарные номограммы имеют простое геометрич. обоснование: номографич. интерпретация условия расположения трех точек на одной прямой приводит к номограмме из выравненных точек; формулы расстояния между двумя точками — к номограмме из равноудаленных точек и к циркульной; формул для координат точки, делящей отрезок в заданном отношении, — к барицентрич. номограмме; условия параллельности двух прямых — к номограмме с параллельным индексом; формул, определяющих координаты четвертой вершины параллелограмма по трем его заданным вершинам, — к ромбоидальной номограмме; формул преобразования прямоугольных координат без поворота и с поворотом осей — к номограммам на двух плоскостях (с ориентированным транспарантом и с транспарантом общего вида).

Каждому виду элементарной номограммы соответствует своя канонич. форма зависимости, к-рую можно изобразить номограммой. Нек-рые канонич. формы допускают построение элементарных номограмм различного типа.

Наиболее общая канонич. форма, представимая элементарной номограммой из выравненных точек, имеет

вид

$$\frac{f_{34}-f_{12}}{g_{34}-g_{12}}=\frac{f_{56}-f_{12}}{g_{56}-g_{12}}.$$

Соответствующая номограмма состоит из трех бинарных полей (α_1, α_2), (α_3, α_4) и (α_5, α_6), связанных одним выравниванием.

Ниже приведены часто встречающиеся на практике канонич. формы для отдельных уравнений и систем уравнений, представимые номограммами того или иного типа.

Канонич. формы для отдельных уравнений: а) с тремя переменными:

$$f_1=f_{23},\ f_1f_3+f_2g_3+h_3=0,\ f_1+f_2=f_3,\ f_1=f_2f_3;$$

б) с четырьмя переменными:

$$f_{12}=f_{34},\ f_1f_{34}+f_2g_{34}+h_{34}=0,\ f_{12}=f_3+f_4;$$

в) с пятью переменными:

$$f_{12}=f_{34}+f_{35},\ f_1+f_2+f_3+f_4+f_5=0,$$
$$f_5=F(f_{12}+f_{34},\ g_{12}+g_{34});$$

г) с шестью переменными:

$$f_{12}+f_{13}=f_{45}+f_{46},\ f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6=0;$$

д) с семью переменными:

$$f_7=F(f_{12}+f_{34}+f_{56},\ g_{12}+g_{34}+g_{56}),$$
$$f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7=0;$$

канонич. формы для систем уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} f_3=f_{12},\\ g_4=g_{12}; \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} f_{12}+f_{34}=f_{56},\\ g_{12}+g_{34}=f_{56}; \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} f_{12}-f_{56}=f_{34}-f_{78},\\ g_{12}-g_{56}=g_{34}-g_{78}; \end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{l} f_{12}-f_7=f_{34}-f_8=f_{56}-f_9,\\ g_{12}-g_7=g_{34}-g_8=g_{56}-g_9. \end{array}\right\}$$

Составными номограммами наз. номограммы, состоящие из элементарных номограмм одного или разных типов. Введение составных номограмм значительно расширяет класс номографируемых зависимостей. Сводку канонич. форм, представимых элементарными и составными номограммами, см. в [3], [4].

Всегда номографируемы зависимости с тремя переменными. Зависимости с четырьмя и бо́льшим числом переменных допускают построение номограмм лишь в частных случаях.

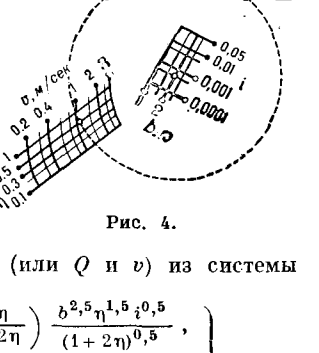


Рис. 4.

Для расширения круга номографируемых зависимостей применяют приближенное номографирование. Оно основано на замене с нек-рой допустимой погрешностью данной зависимости номографируемой.

На рис. 4 приведена приближенная номограмма из равноудаленных точек для определения величин η и v (или Q и v) из системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} Q=\left(76{,}9+17{,}72\lg\dfrac{b\eta}{1+2\eta}\right)\dfrac{b^{2,5}\eta^{1,5}i^{0,5}}{(1+2\eta)^{0,5}},\\ v=\left(76{,}9+17{,}72\lg\dfrac{b\eta}{1+2\eta}\right)\dfrac{b^{0,5}\eta^{0,5}i^{0,5}}{(1+2\eta)^{0,5}}, \end{array}\right\}$$

применяющейся при гидравлич. расчете прямоугольных лотков. Эта система для возможности номографирования была приближенно заменена системой:

$$Q=\frac{76b^{2,616}\eta^{1,616}i^{0,5}}{(1+2\eta)^{0,616}},\qquad v=\frac{76b^{0,616}\eta^{0,616}i^{0,5}}{(1+2\eta)^{0,616}}$$

с относительной погрешностью в величинах Q и v, не превышающей 2,5%. Штриховая окружность на номограмме соответствует решению числового примера (дано: $i=0{,}0005$; $b=2$ м; $Q=2{,}2$ м³/сек; ответы: $\eta=0{,}5$ и $v=1{,}1$ м/сек).

В нек-рых случаях методы приближенного номографирования дают возможность представлять номограммами таблицы с несколькими входами.

Для номографирования данной зависимости ее приводят точно или приближенно к номографируемому виду и записывают уравнения элементов номограммы в прямоугольной системе координат. Входящие в эти уравнения параметры преобразования (а иногда и произвольные функции) подбирают так, чтобы придать номограмме удобный для пользования вид. Далее рассчитывают таблицы координат отдельных элементов номограммы, а затем вычерчивают номограмму.

Получила развитие машинная номография (см. [4]): разработаны системы процедур и стандартных программ для автоматич. расчета и построения элементов номограмм с помощью ЭВМ и графопостроителя, а также стандартные программы для автоматич. конструирования, расчета и вычерчивания номограмм различных типов.

Основными проблемами теоретич. Н. являются проблемы представимости и единственности. Суть первой проблемы состоит в том, чтобы выяснить, можно ли заданное уравнение или систему уравнений привести к той или иной канонич. форме, и если возможно, то указать алгоритм такого приведения. Получены решения этой проблемы для нек-рых канонич. форм. Они сложны и на практике не применяются. Суть второй проблемы заключается в том, чтобы выяснить, единственным ли способом приводится данная зависимость к канонич. форме, и если не единственным, то указать все возможные способы и установить возможности преобразования номограмм в каждом из них.

Лит.: [1] Пентковский М. В., Номография, М.—Л., 1949; [2] Невский Б. А., Справочная книга по номографии, М.—Л., 1951; [3] Хованский Г. С., Основы номографии, М., 1976; [4] его же, Номография и ее возможности, М., 1977.

Г. С. Хованский.

НОРМА — 1) Отображение $x \to \|x\|$ векторного пространства X над полем действительных или комплексных чисел в совокупность действительных чисел, подчиненное условиям:

$$\|x\| \geqslant 0, \text{ причем } \|x\|=0 \text{ только при } x=0;$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \text{ для каждого скаляра } \lambda;$$

$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ для всех x, $y \in X$ (аксиома треугольника). При этом число $\|x\|$ наз. нормой элемента x.

Векторное пространство X с отмеченной Н. наз. нормированным пространством. Н. индуцирует на X *метрику* по формуле $\operatorname{dist}(x, y)=\|x-y\|$, а следовательно и топологию, совместимую с этой метрикой. Тем самым нормированное пространство наделяется естественной структурой топологического векторного пространства. Нормированное пространство, полное относительно указанной метрики, наз. банаховым пространством. Каждое нормированное пространство обладает банаховым пополнением.

Отделимое (хаусдорфово) топологическое векторное пространство наз. нормируемым, если его топология совместима с нек-рой Н. Нормируемость равносильна существованию выпуклой ограниченной окрестности нуля (теорема Колмогорова, 1934). Н. в нормированном векторном пространстве X тогда и только тогда порождается скалярным произведением (т. е. пространство X изометрически изоморфно *предгильбертову пространству*), когда для всех x, $y \in X$

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

Две Н. $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, заданные на одном и том же векторном пространстве X, наз. эквивалентными, если они индуцируют одну и ту же топологию. Это равносильно существованию таких констант C_1 и C_2, что

$$\|x\|_1 \leqslant C_1\|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1 \text{ для всех } x \in X.$$

Если пространство X полно относительно обеих Н., то их эквивалентность является следствием согласованности. При этом согласованность означает, что выполнение предельных соотношений

$$\|x_n - a\|_1 \to 0, \quad \|x_n - b\|_2 \to 0$$

влечет за собой равенство $a=b$.

Не на каждом топологическом векторном пространстве, даже в предположении локальной выпуклости, существует непрерывная Н. Напр., непрерывной Н. нет на бесконечном произведении прямых с топологией покоординатной сходимости. Отсутствие непрерывной Н. может служить очевидным препятствием к непрерывному погружению одних топологич. пространств в другие.

Если Y — замкнутое подпространство в нормированном пространстве X, то факторпространство X/Y классов смежности по Y наделяется Н.

$$\|\tilde{x}\| = \inf\{\|x\| : x \in \tilde{x}\},$$

относительно к-рой оно становится нормированным пространством. Н. образа элемента x относительно естественной проекции $X \to X/Y$ наз. факторнормой элемента x по подпространству Y.

Совокупность X^* непрерывных линейных функционалов ψ на нормированном пространстве X образует банахово пространство относительно Н.

$$\|\psi\| = \sup\{|\psi(x)| : \|x\| \leqslant 1\}.$$

Н. всех функционалов достигаются в подходящих точках единичного шара исходного пространства тогда и только тогда, когда пространство рефлексивно.

Совокупность $L(X, Y)$ линейных непрерывных (ограниченных) операторов A из нормированного пространства X в нормированное пространство Y превращается в нормированное пространство путем введения операторной нормы:

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leqslant 1\}.$$

Относительно этой Н. пространство $L(X, Y)$ полно, если полно Y. При полном $X=Y$ пространство $L(X)=L(X, X)$ с умножением (суперпозицией) операторов становится *банаховой алгеброй*, поскольку операторная Н. удовлетворяет условию

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|, \quad \|I\| = 1,$$

где I — тождественный оператор (единица алгебры). Интересны и другие эквивалентные Н. на $L(X)$, подчиненные тому же условию. Такие Н. наз. алгебраическими, или кольцевыми. Алгебраич. Н. можно получить, эквивалентно перенормируя X и беря соответствующую операторную Н., однако даже при $\dim X=2$ на этом пути получаются не все алгебраич. Н. на $L(X)$.

Преднормой, или полунормой, на векторном пространстве X наз. отображение p со свойствами Н., кроме свойства невырожденности: равенство $p(x)=0$ не исключает $x \neq 0$. Если $\dim X < \infty$, то ненулевая преднорма p на $L(X)$, подчиненная условию $p(AB) \leqslant p(A)p(B)$, фактически оказывается Н. (т. к. в этом случае $L(X)$ не имеет нетривиальных двусторонних идеалов). С другой стороны, для бесконечномерных нормированных пространств это уже не так. Если X — банахова алгебра над $\mathbb{C}$, то спектральный радиус

$$|x| = \lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n}$$

является полунормой тогда и только тогда, когда он равномерно непрерывен на X, и это условие равносильно коммутативности факторалгебры по радикалу.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [3] Шилов Г. Е., Математический анализ. (Специальный курс), 2 изд., М., 1961; [4] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [5] Рудин У., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1975; [6] Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [7] Глазман И. М., Любич Ю. И., Конечномерный линейный анализ в задачах, М., 1969; [8] Aupetit B., Propriétés Spectrales des Algèbres de Banach, B.—Hdlb.—N. Y., 1979; [9] Кириллов А. А., Гвишиани А. Д., Теоремы и задачи функционального анализа, М., 1979. *Е. А. Горин.*

2) Н.— то же, что *абсолютное значение* на теле или кольце (см. также *Нормирование*).

3) Н. группы — совокупность элементов группы, перестановочных со всеми подгруппами, т. е. пересечение *нормализаторов* всех подгрупп. Н. содержит *центр* группы и содержится во втором *гиперцентре* Z_2. Для группы без центра Н. равна единичной подгруппе E.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967. *О. А. Иванова.*

НОРМАЛИЗАТОР подмножества M группы G в подгруппе H той же группы G — множество

$$N_H(M)=\{h \mid h\in H,\ h^{-1}Mh=M\},$$

т. е. множество всех таких элементов h подгруппы H, для к-рых при любом $m\in M$ элемент $h^{-1}mh$ (сопряженный с m посредством h) также принадлежит M. При любых M и H нормализатор $N_H(M)$ является подгруппой в H. Чаще всего рассматриваются Н. подгрупп группы G во всей группе G. Подгруппа A группы G тогда и только тогда инвариантна в G, когда $N_G(A)=G$. Н. множества, состоящего из одного элемента, совпадает с его *централизатором*. При любых H и M мощность класса подмножества, сопряженных с M элементами из H (т. е. подмножеств вида $h^{-1}Mh$, $h\in H$), равна индексу $|H : N_H(M)|$.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977. *Н. Н. Вильямс.*

НОРМАЛИЗАТОРНОЕ УСЛОВИЕ для подгрупп — условие на группу, заключающееся в том, что всякая ее собственная подгруппа строго содержится в своем нормализаторе. Всякая группа, удовлетворяющая Н. у.,— *локально нильпотентная группа*. С другой стороны, Н. у. удовлетворяют все нильпотентные группы и даже группы, обладающие возрастающим центральным рядом (*ZA*-группы). Однако существуют группы с Н. у., имеющие тривиальный центр. Таким образом, класс групп с Н. у. является строго промежуточным между классами *ZA*-групп и локально нильпотентных групп.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967. *А. Л. Шмелькин.*

НОРМАЛИЗАЦИИ ПРИНЦИП — см. *Нормальный алгорифм.*

НОРМАЛЬ к кривой линии (поверхности) в данной ее точке — прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная к *касательной* прямой (*касательной плоскости*) в этой точке кривой (поверхности). Плоская гладкая кривая имеет в каждой точке единственную Н., расположенную в плоскости кривой. Если кривая на плоскости в прямоугольных координатах определяется уравнением $y=f(x)$, то уравнение Н. к кривой в точке (x_0, y_0) имеет вид:

$$(x-x_0)+(y-y_0)f'(x_0)=0.$$

Пространственная кривая имеет в каждой своей точке бесконечное множество Н., заполняющих нек-рую плоскость (*нормальную плоскость*). Н., лежащая в *соприкасающейся плоскости*, наз. *главной нормалью*; Н., перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, наз. *бинормалью.*

Н. к поверхности, заданной уравнением $z=f(x, y)$, в точке (x_0, y_0, z_0) определяется уравнением

$$\frac{x-x_0}{-\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{-\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{1}.$$

Если уравнение поверхности имеет вид $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, то векторное уравнение Н.:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+\lambda[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v].$$

БСЭ-3.

НОРМАЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — 1) То же, что стационарный (в узком смысле) *гауссовский процесс*, рассматриваемый как динамич. система.

2) В 40—50-х гг. 20 в. так иногда называли динамич. системы (измеримые потоки и каскады) в *Лебега пространстве* (последнее в то время называли нормальным пространством с мерой).

Д. В. Аносов.

НОРМАЛЬНАЯ КРИВИЗНА регулярной поверхности — величина, характеризующая отклонение поверхности в направлении l от своей касательной плоскости в точке P, совпадающая по абсолютной величине с кривизной соответствующего нормального сечения. Н. к. в направлении l равна

$$k_l=(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{N})\,k,$$

где k — кривизна нормального сечения в направлении l, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор главной нормали нормального сечения, $\boldsymbol{N}$ — единичный вектор нормали поверхности. Н. к. поверхности в данном направлении совпадает с Н. к. соприкасающегося параболоида в том же направлении. Н. к. поверхности, параметризованной параметрами u, v, может быть выражена через значения первой и второй квадратичных форм поверхности, вычисленных для значений $(du : dv)$, соответствующих направлению l по формуле

$$k_l=\frac{II}{I}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}.$$

Кривизна регулярной кривой, лежащей на поверхности, связана с Н. к. поверхности в направлении l, касательном к кривой, и с геодезич. кривизной k_g этой кривой соотношением

$$k\boldsymbol{n}=k_g[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}]+k_l\boldsymbol{N}$$

(см. также *Мёнье теорема*). С помощью Н. к. конструируется *Дюпена индикатриса*, гауссова и средняя кривизны поверхности и многие другие понятия локальной геометрии поверхности.

Д. Д. Соколов.

НОРМАЛЬНАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица A, перестановочная со своей сопряженной (т. е. $AA^*=A^*A$).

НОРМАЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ пространственной кривой в данной ее точке M — плоскость, проходящая через M перпендикулярно к *касательной* прямой в той же точке. Н. п. содержит все *нормали* к кривой, проходящие через данную точку. Если кривая задана в прямоугольных координатах уравнениями

$$x=f(t),\quad y=g(t),\quad z=h(t),$$

то уравнение Н. п. в точке $M(x_0, y_0, z_0)$, соответствующей значению t_0 параметра t, может быть записано в виде

$$(x-x_0)\frac{df(t_0)}{dt}+(y-y_0)\frac{dg(t_0)}{dt}+(z-z_0)\frac{dh(t_0)}{dt}=0.$$

Если уравнение кривой имеет вид $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, то уравнение Н. п.:

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0.$$

БСЭ-3.

НОРМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА — то же, что *нормальный делитель*.

НОРМАЛЬНАЯ ПОДПОЛУГРУППА полугруппы S — подполугруппа H, удовлетворяющая следующему условию: для любых $x, y \in S^1$ (по поводу обозначения S^1 см. *Нормальный комплекс*) таких, что $xy \in S$, и любого $h \in H$ включения $xhy \in H$ и $xy \in H$ эквивалентны. Подмножество полугруппы S будет Н. п. тогда и только тогда, когда оно является полным прообразом единицы при нек-ром гомоморфизме полугруппы S на полугруппу с единицей.

Лит.: [1] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960.

Л. Н. Шеврин.

НОРМАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — производная функции в направлении нормали к заданному многообразию.

Л. Д. Кудрявцев.

НОРМАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ интегральных уравнений — свойство линейного интегрального уравнения быть разрешимым тогда и только тогда, когда его правая часть ортогональна всем решениям соответствующего сопряженного однородного уравнения. При соответствующих условиях Н. р. обладают *Фредгольма уравнения*, *сингулярные интегральные уравнения*, *интегральные уравнения типа свертки*.

Б. В. Хведелидзе.

НОРМАЛЬНАЯ СХЕМА — схема, все локальные кольца к-рой являются нормальными кольцами (т. е. приведенными и целозамкнутыми в полном кольце частных). Н. с. локально неприводима; для такой схемы понятия связной и неприводимой компоненты совпадают. Множество особых точек нётеровой Н. с. имеет коразмерность, бо́льшую 1. Имеется следующий критерий нормальности [1]: нётерова схема X нормальна тогда и только тогда, когда выполняются два условия: 1) для любой точки $x \in X$ коразмерности $\leqslant 1$ локальное кольцо $O_{X,x}$ регулярно; 2) для любой точки $x \in X$ коразмерности >1 глубина кольца $O_{X,x}$ больше 1. Для любой приведенной схемы X существует канонически связанная с ней Н. с. X^H (нормализация). X-схема X^H является целой, хотя и не всегда конечной над X. Однако если схема X превосходная (см. *Превосходное кольцо*), напр. если X — схема конечного типа над полем, то X^H является конечной над X.

Лит.: [1] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5, с. 3—93.

В. И. Данилов.

НОРМАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ — сходимость ряда

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \qquad (1)$$

составленного из ограниченных отображений $u_k : X \to Y$ множества X в нормированное пространство Y, такая, что сходится ряд с положительными членами $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|$, составленный из норм отображений

$$\|u_k\| = \sup \{\|u_k(x)\| : x \in X\}.$$

Из Н. с. ряда (1) вытекает абсолютная и равномерная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, состоящего из элементов пространства Y; обратное заключение неверно. Напр., если $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть действительная функция, определяемая равенствами: $u_k(x) = \sin \pi x/k$ при $k \leqslant x \leqslant k+1$ и $u_k(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus [k, k+1]$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится абсолютно и равномерно, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ расходится.

Пусть, в частности, $u_k : \mathbb{R} \to Y$ — кусочно непрерывные функции на нек-ром некомпактном интервале $I \subset \mathbb{R}$ и имеет место Н. с. ряда (1), тогда возможно почленное интегрирование на интервале I:

$$\int_I f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I u_k(t)\, dt.$$

Несобственный интеграл

$$\int_I f(t;\lambda)\,dt,\ \lambda\in A, \qquad (2)$$

наз. нормально сходящимся на множестве A, если существует кусочно непрерывная положительная функция $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что для любого $x\in I$ и любого $\lambda\in A$ выполняется неравенство $\|f(x;\lambda)\|\leqslant g(x)$ и интеграл $\int_I g(t)dt$ сходится. Из Н. с. интеграла (2) следует его абсолютная и равномерная сходимость; обратное заключение неверно.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология, пер. с франц., М., 1975; [2] его же, Функции действительного переменного. Элементарная теория, пер. с франц., М., 1965; [3] Шварц Л., Анализ, пер. с франц., т. 1, М., 1972. *Е. Д. Соломенцев.*

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА — 1) Н. ф. матрицы A — матрица N заранее определенного специального вида, получаемая из A с помощью преобразований определенного типа. В зависимости от рассматриваемого типа преобразований, от области K, к к-рой принадлежат коэффициенты A, от вида A и, наконец, от специфики решаемой задачи (напр., от желания расширять или не расширять K при переходе от A к N, от необходимости определить N по A однозначно или, наоборот, с нек-рым произволом) рассматриваются и различные Н. ф. Часто вместо термина «Н. ф.» употребляют термины «каноническая форма», «канонический вид». К числу классических Н. ф. относятся следующие (ниже через $M_{m\times n}(K)$ обозначается множество всех матриц из m строк и n столбцов с коэффициентами из K).

Нормальная форма Смита. Пусть K — либо кольцо $\mathbb{Z}$ целых рациональных чисел, либо кольцо $F[\lambda]$ многочленов от λ с коэффициентами из поля F. Матрица $B\in M_{m\times n}(K)$ наз. эквивалентной матрице $A\in M_{m\times n}(K)$, если найдутся такие обратимые матрицы $C\in M_{m\times m}(K)$ и $D\in M_{n\times n}(K)$, что $B=CAD$. Матрица B эквивалентна A тогда и только тогда, когда B может быть получена из A с помощью последовательности элементарных строчных и столбцовых преобразований, т. е. преобразований следующих трех типов: а) перестановка строк (столбцов); б) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца) с множителем из K; в) умножение строки (столбца) на обратимый элемент кольца K. Для преобразований этого типа справедливо следующее утверждение: всякая матрица $A\in M_{m\times n}(K)$ эквивалентна матрице $N\in M_{m\times n}(K)$ вида

$$N=\begin{Vmatrix} d_1 & & & & 0\\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_r & \\ & & & & 0\\ & & & & & \ddots\\ 0 & & & & & & 0 \end{Vmatrix},$$

где $d_i\neq 0$ при всех i, d_i делит d_{i+1} при $i=1,\ \ldots,\ r-1$, и если $K=\mathbb{Z}$, то все d_i положительны, а если $K=F[\lambda]$, то старшие коэффициенты всех многочленов d_i равны 1. Указанная матрица N наз. нормальной формой Смита матрицы A. Элементы d_i наз. инвариантными множителями матрицы A, а число r — ее рангом. Нормальная форма Смита определена по A однозначно и может быть найдена следующим образом. Ранг A равен порядку наименьшего ненулевого минора матрицы A. Пусть $i\leqslant j\leqslant r$; тогда среди всех миноров порядка j матрицы A имеется хоть один ненулевой. Пусть Δ_j,

$j=1, \ldots, r$,— наибольший общий делитель всех ненулевых миноров порядка j матрицы A (нормированный условием, что $\Delta_j>0$ при $K=\mathbb{Z}$ и что старший коэффициент многочлена Δ_j равен 1 при $K=F[\lambda]$) и пусть $\Delta_0=1$. Тогда $d_j=\Delta_j/\Delta_{j-1}$, $j=1, \ldots, r$. Инвариантные множители являются полным набором инвариантов классов эквивалентных матриц: две матрицы из $M_{m\times n}(K)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда у них совпадают ранги и инвариантные множители с равными номерами.

Инвариантные множители $d_1, \ldots, d_r$ раскладываются (единственным способом с точностью до порядка сомножителей) в произведение степеней неприводимых в кольце K элементов $e_1, \ldots, e_s$ (являющихся нек-рыми целыми положительными числами, большими 1, если $K=\mathbb{Z}$, и нек-рыми многочленами положительной степени со старшим коэффициентом 1, если $K=F[\lambda]$),

$$d_i=e_1^{n_{i1}}e_2^{n_{i2}}\ldots e_s^{n_{is}}, \quad i=1, \ldots, r,$$

где n_{ij} — целые неотрицательные числа. Каждый множитель $e_j^{n_{ij}}$, для к-рого $n_{ij}>0$, наз. элементарным делителем матрицы A (над K). Каждый элементарный делитель входит в совокупность $\mathcal{E}_{A,K}$ всех элементарных делителей матрицы A столько раз, в разложении скольких инвариантных множителей он встречается. Элементарные делители, в отличие от инвариантных множителей, зависят от того, над каким кольцом K рассматривается A: если $K=F[\lambda]$, а $\tilde{F}$ — нек-рое расширение поля F и $\tilde{K}=\tilde{F}[\lambda]$, то матрица $A\in M_{m\times n}(K)\subset M_{m\times n}(\tilde{K})$ имеет, вообще говоря, различные элементарные делители (но одинаковые инвариантные множители) в зависимости от того, рассматривается ли A как элемент $M_{m\times n}(K)$ или как элемент $M_{m\times n}(\tilde{K})$. Инвариантные множители восстанавливаются по полному набору элементарных делителей и наоборот.

Практический способ нахождения нормальной формы Смита см., напр., в [1].

Указанный основной результат о нормальной форме Смита получен для $K=\mathbb{Z}$ (см. [7]), для $K=F[\lambda]$ (см. [8]). Практически без изменений теория нормальных форм Смита переносится на случай, когда K — любое кольцо главных идеалов (см. [3], [6]). Нормальная форма Смита имеет важные приложения, напр. на ней по существу основывается структурная теория конечно порожденных модулей над кольцами главных идеалов (см. [3], [6]) и, в частности, теория конечно порожденных абелевых групп и теория жордановой Н. ф. (см. ниже).

Естественная нормальная форма. Пусть K — поле. Две квадратные матрицы A и $B\in M_{n\times n}(K)$ наз. подобными над K, если найдется такая невырожденная матрица $C\in M_{n\times n}(K)$, что $B=CAC^{-1}$. Имеется тесная связь между подобием и эквивалентностью: матрицы A и $B\in M_{n\times n}(K)$ подобны тогда и только тогда, когда матрицы $\lambda E-A$ и $\lambda E-B$, где E — единичная матрица, эквивалентны. Таким образом, для подобия A и B необходимо и достаточно совпадения инвариантных множителей или, что то же,— наборов элементарных делителей над $K[\lambda]$ у матриц $\lambda E-A$ и $\lambda E-B$. Практический способ нахождения матрицы C для подобных матриц A и B см. в [1], [4].

Матрица $\lambda E-A$ наз. характеристической матрицей матрицы $A\in M_{n\times n}(K)$, а инвариантные множители $\lambda E-A$ наз. инвариантами подобия матрицы A; их n штук. Пусть $d_1, \ldots, d_n$ — инварианты подобия матрицы A. Многочлен d_n равен определителю матрицы $\lambda E-A$ и наз. характеристическим многочленом матрицы A. Пусть $d_1=\ldots=d_q=1$, а степень d_j при $j\geqslant q+1$ больше 1.

Тогда справедливо утверждение: матрица A подобна над K блочнодиагональной матрице $N_1 \in M_{n\times n}(K)$ вида

$$N_1 = \begin{Vmatrix} L(d_{q+1}) & & & 0 \\ & L(d_{q+2}) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & L(d_n) \end{Vmatrix},$$

где через $L(f)$ для многочлена

$$f = \lambda^p + \alpha_1\lambda^{p-1} + \ldots + \alpha_p$$

обозначена т. н. сопровождающая матрица многочлена

$$L(f) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -\alpha_p & -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2} & \ldots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}.$$

Матрица N_1 определена по A однозначно и наз. первой естественной Н. ф. матрицы A (см. [1], [2]).

Пусть теперь $\mathfrak{E}_{A,\,K[\lambda]}$ — набор всех элементарных делителей матрицы $\lambda E - A$. Тогда справедливо следующее основное утверждение: матрица A подобна над K блочнодиагональной матрице N_2, блоки к-рой — это сопровождающие матрицы всевозможных элементарных делителей $e_j^n ij \in \mathfrak{E}_{A,\,K[\lambda]}$ матрицы $\lambda E - A$:

$$N_2 = \begin{Vmatrix} \ddots & & 0 \\ & L(e_j^n ij) & \\ & & \ddots \\ 0 & & \ddots \end{Vmatrix}.$$

Матрица N_2 определена по A лишь с точностью до порядка следования клеток по главной диагонали; она наз. второй естественной Н. ф. матрицы A (см. [1], [2]), а также ее фробениусовой, рациональной, канонической и квазиестественной Н. ф. (см. [4]). В отличие от первой естественной Н. ф., вторая естественная Н. ф., вообще говоря, меняется при переходе от поля K к его расширению.

Жорданова нормальная форма. Пусть K — поле, $A \in M_{n\times n}(K)$ и $\mathfrak{E}_{A,\,K[\lambda]} = \{e_i^n ij\}$ — набор всех элементарных делителей матрицы $\lambda E - A$ над $K[\lambda]$. Пусть K обладает тем свойством, что характеристич. многочлен d_n матрицы A раскладывается в $K[\lambda]$ на линейные множители (так будет, напр., если K — поле комплексных чисел или, более общо, любое алгебраически замкнутое поле). Тогда каждый из многочленов e_i имеет вид $\lambda - a_i$ для нек-рого $a_i \in K$, а элементарный делитель $e_i^n ij$ соответственно имеет вид $(\lambda - a_i)^n ij$. Матрица $J(f)$ из $M_{s\times s}(K)$ вида

$$J(f) = \begin{Vmatrix} a & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a \end{Vmatrix},$$

где $f = (\lambda - a)^s$, $a \in K$, наз. гиперсопровождающей матрицей многочлена f (см. [1]), или жордановой клеткой порядка s с собственным числом a. Справедливо следующее фундаментальное утверждение: матрица A подобна над K блочнодиагональной матрице $J \in M_{n\times n}(K)$,

блоки к-рой — это гиперсопровождающие матрицы всевозможных элементарных делителей матрицы $\lambda E - A$:

$$J = \begin{Vmatrix} \cdot & & 0 \\ & \cdot & \\ & & J\left(e_i^n{}_{ij}\right) \\ & & & \cdot \\ 0 & & & & \cdot \end{Vmatrix}.$$

Матрица J определена лишь с точностью до порядка следования клеток на главной диагонали; она является *жордановой матрицей* и наз. *жордановой* Н. ф. матрицы A. Если K не обладает указанным выше свойством, то A нельзя привести над K к жордановой Н. ф. (но можно над нек-рым конечным расширением K). О так наз. обобщенной жордановой Н. ф., приведение к к-рой возможно уже над любым полем K, см. [4].

Помимо различных теорий Н. ф. для произвольных матриц возможны соответствующие теории и для матриц какого-либо специального вида. Классическими примерами являются теории Н. ф. симметрич. и кососимметрич. матриц. А именно, пусть K — поле. Две матрицы A, $B \in M_{n\times n}(K)$ наз. конгруэнтными (см. [1]), если найдется такая невырожденная матрица $C \in M_{n\times n}(K)$, что $B = CAC^T$. Н. ф. относительно отношения конгруэнтности наиболее исследованы для классов симметрич. и кососимметрич. матриц. Пусть Char $K \neq 2$ и A — кососимметрич. матрица, т. е. $A^T = -A$. Тогда A конгруэнтна однозначно определенной матрице H вида

$$H = \begin{Vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & 0 \end{Vmatrix},$$

к-рая может рассматриваться как Н. ф. A относительно отношения конгруэнтности. Если же A — симметрич. матрица, т. е. $A^T = A$, то она конгруэнтна матрице D вида

$$D = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & & & & 0 \\ & \varepsilon_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \varepsilon_r & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \cdot \\ 0 & & & & & & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\varepsilon_i \neq 0$ при всех i. Число r равно рангу A и определено однозначно, а дальнейшее уточнение выбора элементов ε_i зависит от свойств поля K. Так, если K алгебраически замкнуто, то можно считать, что $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_r = 1$; если K — поле действительных чисел, то можно считать, что $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_p = 1$ и $\varepsilon_{p+1} = \ldots = \varepsilon_r = -1$ для нек-рого p. Этими свойствами D уже определена однозначно и может рассматриваться как Н. ф. A относи-

тельно отношения конгруэнтности. О Н. ф. симметрич. матриц для ряда других полей, а также об эрмитовых аналогах этой теории см. [6], [10] и ст. *Квадратичная форма*.

Объединяющим обстоятельством в рассмотренных (а также и других) теориях Н. ф. является то, что допустимые преобразования над рассматриваемым множеством матриц определяются действием нек-рой группы, так что классы матриц, переводимых друг в друга с помощью этих преобразований,— *орбиты* этой группы, а указание Н. ф. есть выделение в каждой орбите нек-рого канонич. представителя. Так, классы эквивалентных матриц — орбиты группы $G=\mathrm{GL}_m(K)\times\mathrm{GL}_n(K)$ (где $\mathrm{GL}_s(K)$ — группы обратимых квадратных матриц порядка s с коэффициентами из K), действующей на $M_{m\times n}(K)$ по правилу $A\to CAD^{-1}$, где $(CD)\in G$. Классы подобных матриц — это орбиты группы $\mathrm{GL}_n(K)$ на $M_{m\times n}(K)$, действующей по правилу: $A\to CAC^{-1}$, где $C\in\mathrm{GL}_n(K)$. Классы конгруэнтных симметрич. или кососимметрич. матриц — это орбиты группы $\mathrm{GL}_n(K)$ на множестве всех симметрич. или кососимметрич. матриц порядка n, действующей по правилу $A\to CAC^T$, где $C\in\mathrm{GL}_n(K)$. С этой точки зрения каждая теория Н. ф. является конкретным примером решения части общей задачи орбитального разложения для действия нек-рой группы преобразований.

Лит.: [1] Маркус М., Минк Х., Обзор по теории матриц и матричных неравенств, пер. с англ., М., 1972; [2] Ланкастер П., Теория матриц, пер. с англ., М., 1978; [3] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [4] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 4 изд., М., 1975; [5] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [6] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [7] Smith H. J., The Collected Mathematical Paper, v. 1, Oxf., 1894, p. 367—409; [8] Frobenius G., «J. reine und angew. Math.», 1879, Bd 86, S. 146—208; [9] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966; [10] Серр Ж.-П., Курс арифметики, пер. с франц., М., 1972.

В. Л. Попов.

2) Н. ф. оператора — представление с точностью до изоморфизма *самосопряженного оператора* A, действующего в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, в виде ортогональной суммы операторов умножения на независимую переменную.

Пусть, сначала, A — циклический оператор; это означает, что существует элемент $h_0\in\mathscr{H}$ такой, что любой элемент $h\in\mathscr{H}$ однозначно представим в виде $F(A)h_0$, где $F(\xi)$ — нек-рая функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\xi)|^2\,d\,(E_\xi h_0,\ h_0)<\infty,$$

здесь E_ξ, $-\infty<\xi<\infty$,— спектральная функция оператора A. Пусть $\mathscr{L}^2_\rho$ — пространство функций, суммируемых с квадратом на $(-\infty,+\infty)$ с весом $\rho(\xi)=(E_\xi h_0,\ h_0)$, и $K_\rho F=\xi F(\xi)$ — оператор умножения на независимую переменную с областью определения

$$D_{K_\rho}=\left\{F(\xi):\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\,|F(\xi)|^2\,d\rho(\xi)<\infty\right\}.$$

Тогда операторы A и K_ρ изоморфны, $A\simeq K$, т. е. существует изоморфное и изометрич. отображение $U:\mathscr{H}\to\mathscr{L}^2_\rho$ такое, что $UD_A=D_{K_\rho}$ и $A=U^{-1}K_\rho U$.

Пусть, теперь, A — произвольный самосопряженный оператор. Тогда H можно разложить в ортогональную сумму инвариантных подпространств H_α, на каждом из к-рых A индуцирует циклич. операторы A_α, так что $H=\sum\oplus H_\alpha$, $A=\sum\oplus A_\alpha$ и $A_\alpha\simeq K_{\rho_\alpha}$. Если на $\mathscr{L}^2=\sum\oplus\mathscr{L}^2_{\rho_\alpha}$ задать оператор $K=\sum\oplus K_{\rho_\alpha}$, то $A\simeq K$.

Оператор K наз. нормальной формой, или каноническим представлением, оператора A. Теорема о канонич. представлении рас-

пространяется на случай произвольных *нормальных операторов*.

Лит.: [1] Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965; [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966.

В. И. Соболев.

3) Н. ф. оператора — представление оператора A, действующего в *Фока пространстве*, построенном над нек-рым пространством $L_2(M, \sigma)$, где (M, σ) — пространство с мерой, в виде суммы

$$A = \sum\nolimits_{m,\, n \geqslant 0} \int K_{n,\, m}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) \times$$
$$\times a^*(x_1) \ldots a^*(x_n)\, a(y_1) \ldots a(y_m) \prod\nolimits_{i=1}^{n} d\sigma(x_i) \times$$
$$\times \prod\nolimits_{j=1}^{m} d\sigma(y_j), \qquad (1)$$

где $\{a(x), a^*(x), x \in M\}$ — операторнозначные обобщенные функции, порождающие семейства операторов уничтожения $\{a(f), f \in L_2(M, \sigma)\}$ и рождения $\{a^*(f), f \in L_2(M, \sigma)\}$:

$$a(f) = \int_M a(x) f(x)\, d\sigma(x), \quad a^*(f) = \int_M a^*(x) \bar{f}(x)\, d\sigma(x).$$

В выражении (1) в каждом слагаемом множители $a(y_j)$, $j = 1, \ldots, m$, стоят правее всех множителей $a^*(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, функции (возможно обобщенные) $K_{n,\, m}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$ от двух наборов переменных $(x_1, \ldots, x_n) \in M^n$, $(y_1, \ldots, y_m) \in M^m$, $n, m = 0, 1, 2, \ldots$, в случае симметричного (бозонного) пространства Фока симметричны по переменным каждого из наборов в отдельности, а в случае антисимметричного (фермионного) пространства Фока — антисимметричны по этим переменным.

Для любого ограниченного оператора A нормальная форма существует и единственна.

Представление (1) можно переписать в виде, непосредственно содержащем операторы уничтожения и рождения:

$$A = \sum\nolimits_{m,\, n} \sum\nolimits_{(i_1, \ldots, i_n);\ j_1, \ldots, j_m} c_{i_1 \ldots i_n j_1 \ldots j_m} \times$$
$$\times a^*(f_{i_1}) \ldots a^*(f_{i_n}) a(f_{j_1}) \ldots a(f_{j_m}), \qquad (2)$$

где $\{f_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$ — нек-рый ортонормированный базис в $L_2(M, \sigma)$, и суммирование в (2) происходит по всем парам конечных наборов $\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_n}\}$, $\{f_{j_1}, \ldots, f_{j_m}\}$ элементов этого базиса.

В случае произвольного (сепарабельного) гильбертова пространства H Н. ф. оператора A, действующего в пространстве Фока $\Gamma(H)$, построенном над H, определяется при фиксированном базисе $\{f_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$ в H с помощью выражения (2), где $a(f)$, $a^*(f)$, $f \in H$, — семейства операторов уничтожения и рождения, действующих в $\Gamma(H)$.

Лит.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965.

Р. А. Минлос.

4) Н. ф. рекурсивной функции — способ задания n-местной рекурсивной функции φ в виде

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = g(\mu z (f(x_1, \ldots, x_n, z) = 0)), \qquad (*)$$

где f есть $(n+1)$-местная примитивно рекурсивная функция, g — одноместная примитивно рекурсивная функция, $\mu z (f(x_1, \ldots, x_n, z) = 0)$ — результат применения *наименьшего числа оператора* к функции f. Теорема Клини о Н. ф. утверждает: существует такая примитивно рекурсивная функция g, что каждая рекурсивная функция φ представима в виде (*) с подходящей функцией f, зависящей от φ, т. е.

$$(\exists g)\,(\forall \varphi)\,(\exists f)\,(\forall x_1, \ldots, x_n)\,[\varphi(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= g(\mu z (f(x_1, \ldots, x_n, z) = 0))].$$

Теорема о Н. ф. является одной из важнейших теорем в теории рекурсивных функций.

А. А. Марков [2] получил характеристику тех функций g, к-рые могут использоваться в теореме о Н. ф. в представлении (*). Функция g тогда и только тогда может использоваться в качестве функции, существование к-рой утверждается в теореме о Н. ф., когда уравнение $g(x) = n$ при любом n имеет бесконечно много решений. Такие функции наз. ф у н к ц и я м и б о л ь ш о г о р а з м а х а.

Лит.: [1] М а л ь ц е в А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [2] М а р к о в А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1949, т. 13, № 5, с. 417—24. *В. Е. Плиско.*

5) Н. ф. с и с т е м ы д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы х у р а в н е н и й

$$\dot{x}_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

вблизи инвариантного многообразия M — такая формальная система

$$\dot{y}_i = \psi_i(y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

к-рая получается из (1) обратимой формальной заменой координат

$$x_i = \xi_i(y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

и в к-рой ряды Тейлора — Фурье ψ_i содержат только *резонансные члены*. Впервые Н. ф. для одного случая встречается в диссертации А. Пуанкаре (H. Poincaré, см. [1]). Посредством Н. ф. (2) нек-рые системы (1) интегрируются, многие исследуются на устойчивость и интегрируются приближенно, для систем (1) отыскиваются периодич. решения и семейства условно периодич. решений, изучаются их *бифуркации*.

Н. ф. в окрестности неподвижной точки. Пусть M — неподвижная точка $X \equiv (x_1, \ldots, x_n) = 0$ системы (1) (т. е. $\varphi_i(0) = 0$), функции φ_i аналитичны в ней и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы $\|\partial\varphi_i/\partial x_j\|$ при $X = 0$. Пусть $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0$. Тогда в полной окрестности точки $X = 0$ система (1) имеет следующую Н. ф. (2): матрица $\|\partial\psi_i/\partial y_j\|$ при $Y \equiv (y_1, \ldots, y_n) = 0$ имеет Н. ф. (напр., жорданову), а ряды Тейлора

$$\psi_i = y_i \sum_{Q \in N_i} g_{iQ} Y^Q, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

содержат только резонансные члены, для к-рых

$$(Q, \Lambda) \equiv q_1\lambda_1 + \ldots + q_n\lambda_n = 0. \tag{5}$$

Здесь $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, $Y^Q = y_1^{q_1} \ldots y_n^{q_n}$,

$$N_i = \{Q : \text{целые } q_j \geqslant 0,\ q_i \geqslant -1,\ q_1 + \ldots + q_n \geqslant 0\}.$$

Если уравнение (5) не имеет в $N = N_1 \cup \ldots \cup N_n$ решений $Q \neq 0$, то Н. ф. (2) является линейной:

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Всякая система (1) с $\Lambda \neq 0$ в окрестности неподвижной точки приводится к своей Н. ф. (2) нек-рым формальным преобразованием (3), где ξ_i — степенные ряды (возможно, расходящиеся), $\xi_i(0) = 0$ и $\det\|\partial\xi_i/\partial y_j\| \neq 0$ при $Y = 0$.

Вообще говоря, нормализующее преобразование (3) и Н. ф. (2) (т. е. коэффициенты g_{iQ} в (4)) неоднозначно определяются исходной системой (1). Н. ф. (2) сохраняет многие свойства системы (1): вещественность, симметричность, гамильтоновость и др. (см. [2], [3]). Если в исходной системе имеются малые параметры, то их можно включить в число координат x_j, тогда $\dot{x}_j = 0$. При нормализующем преобразовании такие координаты не меняются (см. [3]).

Если k — число линейно независимых решений $Q \in N$ уравнения (5), то с помощью преобразования

$$y_i = z_1^{\alpha_{i1}} z_2^{\alpha_{i2}} \ldots z_n^{\alpha_{in}}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где α_{ij} — целые и $\det\|\alpha_{ij}\|=\pm 1$, Н. ф. (2) переводится в систему вида

$$\dot{z}_i = z_i f_i(z_1, \ldots, z_k), \quad i=1, \ldots, n$$

(см. [2], [3]). Решение этой системы сводится к решению подсистемы из первых k уравнений и к $n-k$ квадратурам. Подсистему надо исследовать в окрестности сложной особой точки $z_1 = \ldots = z_k = 0$, ибо $f_1, \ldots, f_k$ не содержат линейных членов. Это можно сделать с помощью локального метода (см. [3]).

Рассматривался вопрос (см. [2]): при каких условиях на Н. ф. (2) сходится (аналитично) нормализующее преобразование аналитической системы (1)? Пусть

$$\omega_k = \min |(Q, \Lambda)|$$

по таким $Q \in N$, для к-рых

$$(Q, \Lambda) \neq 0, \quad q_1 + \ldots + q_n < 2^k.$$

Условие ω: $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \ln \omega_k^{-1} < \infty$.

Условие $\bar{\omega}$: $\overline{\lim}\, 2^{-k} \ln \omega_k^{-1} < \infty$ при $k \to \infty$.

Условие $\bar{\omega}$ слабее условия ω. Оба они выполнены для почти всех Λ (по мере Лебега) и являются очень слабыми арифметич. ограничениями на Λ.

Условие А в случае $\mathrm{Re}\Lambda = 0$ (общий случай см. в [2]): существует такой степенной ряд $a(Y)$, что в (4) $\psi_i = \lambda_i y_i a$, $i = 1, \ldots, n$.

Если у аналитич. системы (1) Λ удовлетворяет условию ω и Н. ф. (2) удовлетворяет условию А, то существует аналитич. преобразование системы (1) к нек-рой Н. ф. Если Н. ф. (2) получается из нек-рой аналитич. системы и не удовлетворяет хотя бы одному из условий $\bar{\omega}$ и А, то существует такая аналитич. система (1), к-рая имеет (2) своей Н. ф. и всякое преобразование к-рой к Н. ф. расходится (не аналитично).

Таким образом, поставленный выше вопрос решен для всех Н. ф., кроме тех, у к-рых Λ удовлетворяет условию ω и не удовлетворяет условию $\bar{\omega}$, а остальные коэффициенты Н. ф. удовлетворяют условию А. Условие А является очень жестким ограничением на коэффициенты Н. ф., и для больших n оно выполнено, вообще говоря, только в вырожденных случаях. Т. е. основная причина расходимости преобразований к Н. ф.— это не *малые знаменатели*, а невырожденность Н. ф.

Но и в случаях расходимости нормализующего преобразования (3) по Н. ф. (2) можно изучить свойства решений системы (1). Так, для вещественной системы (1) гладкое преобразование к Н. ф. (2) существует и в тех случаях, когда нет аналитического. Большинство результатов о гладкой нормализации получено при условии, что все $\mathrm{Re}\lambda_j \neq 0$. При этом условии с помощью замены $X \to V$ конечного класса гладкости систему (1) можно привести к укороченной Н. ф.

$$\dot{v}_i = \tilde{\psi}_i(V), \quad i=1, \ldots, n, \tag{6}$$

где $\tilde{\psi}_i$ — многочлены степени m (см. [4] — [6]). Если в нормализующем преобразовании (3) отбросить все члены степени выше m, то получится преобразование

$$x_i = \tilde{\xi}_i(U), \quad i=1, \ldots, n \tag{7}$$

($\tilde{\xi}_i$ — многочлены), к-рое приводит (1) к виду

$$\dot{u}_i = \tilde{\psi}_i(U) + \bar{\varphi}_i(U), \quad i=1, \ldots, n, \tag{8}$$

где $\tilde{\psi}_i$ — многочлены, содержащие только резонансные члены, $\bar{\varphi}_i$ — сходящиеся степенные ряды, содержащие только члены степени выше m. Решения укороченной Н. ф. (6) служат приближениями для решений системы (8) и после преобразования (7) дают приближения решений исходной системы (1). Во многих случаях для

(6) удается построить такую *Ляпунова функцию* (или *Четаева функцию*) $f(V)$, что

$$|f(V)| \leqslant c_1 |V|^\nu \text{ и } \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial v_j} \tilde{\varphi}_j \right| > c_2 |V|^{\nu+m},$$

где c_1 и c_2 — положительные постоянные. Тогда $f(U)$ будет функцией Ляпунова (Четаева) для системы (8), т. е. точка $X = 0$ будет устойчивой (неустойчивой). Напр., если все $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$, то можно взять $m = 1$, $f = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$ и получится теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению (см. [7]; другие примеры см. в обзоре [8]).

По Н. ф. (2) можно находить инвариантные аналитические множества системы (1). В дальнейшем для простоты изложения предполагается, что $\mathrm{Re}\Lambda = 0$. По Н. ф. (2) выделяется формальное множество

$$\mathcal{A} = \{Y : \psi_i = \lambda_i y_i a, \quad i = 1, \ldots, n\},$$

где a — свободный параметр. На множестве $\mathcal{A}$ выполняется условие А. Пусть K — объединение таких подпространств вида $\{Y : y_i = 0, \quad i = i_1, \ldots, i_l\}$, что соответствующие собственные значения λ_j, $j \neq i_1, \ldots, i_l$, $1 \leqslant j \leqslant n$, попарно соизмеримы. Формальное множество $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cap K$ аналитично в системе (1). Из $\mathcal{A}$ выделяется подмножество $\mathcal{B}$, к-рое аналитично в системе (1), если выполнено условие ω (см. [3]). На множествах $\tilde{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{B}$ лежат периодич. решения и семейства условно периодич. решений системы (1). Рассматривая множества $\tilde{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{B}$ в системах с малыми параметрами, можно изучить все аналитич. возмущения и бифуркации таких решений (см. [9]).

Обобщения. Если систему (1) приводить не к Н. ф. (2), а к системе, правые части к-рой содержат нек-рые нерезонансные члены, то упрощение получается менее значительным, зато можно улучшить качество преобразования. Так, приведение к «полунормальной форме» будет аналитическим при ослабленном условии А (см. [2]). Другой вариант — преобразование, нормализующее систему (1) лишь на нек-рых подмногообразиях (напр., на нек-рых координатных подпространствах; см. [2]). Комбинации этих подходов позволяют доказать для системы (1) существование инвариантных подмногообразий и решений определенного вида (см. [9]).

Пусть система (1) определена и аналитична в окрестности инвариантного многообразия M размерности $k+l$, к-рое расслаивается на l-мерные инвариантные торы. Тогда вблизи M можно ввести такие локальные координаты

$$S = (s_1, \ldots, s_k), \quad Y = (y_1, \ldots, y_l), \quad Z = (z_1, \ldots, z_m), \quad k+l+m = n,$$

что $Z = 0$ на M, y_j имеют период 2π, S пробегает нек-рую область H, и система (1) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{S} &= \Phi^{(1)}(S, Y, Z), \\ \dot{Y} &= \Omega(S, Y) + \Phi^{(2)}(S, Y, Z), \\ \dot{Z} &= A(S, Y) Z + \Phi^{(3)}(S, Y, Z), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $\Phi^{(j)} = O(|Z|)$, $j = 1,2$, $\Phi^{(3)} = O(|Z|^2)$, A — матрица. Если $\Omega = \mathrm{const}$ и матрица A треугольна с постоянной главной диагональю $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то (при слабом ограничении на малые знаменатели) существует формальное преобразование локальных координат S, Y, $Z \to U$, V, W, к-рое приводит систему (9) к Н. ф.

$$\left.\begin{aligned} \dot{U} &= \sum \psi^{(1)}_{PQ}(U) W^Q \exp i(P, V), \\ \dot{V} &= \sum \psi^{(2)}_{PQ}(U) W^Q \exp i(P, V), \\ \dot{w}_j &= w_j \sum g_{jPQ}(U) W^Q \exp (P, V), \quad j = 1, \ldots, m, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где $P \in \mathbb{Z}^l$, $Q \in \mathbb{N}^m$, $U \in H$ и $i(P, \Omega) + (Q, \Lambda) = 0$.

Если среди координат Z есть малый параметр, то систему (9) можно осреднить *Крылова — Боголюбова методом усреднения* (см. [10]), и осредненная система будет Н. ф. Вообще, теорию возмущений можно рассматривать как частный случай теории Н. ф., когда одна из координат является малым параметром (см. [11]).

На системы (9) и (10) переносятся теоремы о сходимости нормализующей замены, теоремы о существовании аналитических инвариантных множеств и т. д. Здесь наиболее изучен случай, когда M — периодич. решение, т. е. $k = 0$, $l = 1$. В этом случае теория Н. ф. во многом идентична случаю, когда M — неподвижная точка. А. Пуанкаре предложил рассматривать точечное преобразование нормального сечения за период. В связи с этим возникла теория Н. ф. точечных отображений, к-рая параллельна соответствующей теории для систем (1). Другие обобщения Н. ф. см. в [3], [6], [12], [13].

Лит.: [1] Пуанкаре А., Избр. труды, пер. с франц., т. 3, М., 1974; [2] Брюно А. Д., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1971, т. 25, с. 119—262; 1972, т. 26, с. 199—239; [3] его же, Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений, М., 1979; [4] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [5] Самовол В. С., «Докл. АН СССР», 1972, т. 206, № 3, с. 545—48; [6] Белицкий Г. Р., Нормальные формы, инварианты и локальные отображения, К., 1979; [7] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, 2 изд., М.— Л., 1935; [8] Куницын А. Л., Маркеев А. П., Итоги науки и техники. Сер. Общая механика, т. 4, М., 1979, с. 58—139; [9] Bibi'kov J. N., Local theory of nonlinear analytic ordinary differential equations, B. [a. o.], 1979; [10] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974; [11] Брюно А. Д., «Proc. VIII Intern. Conf. on Nonlinear Oscillations», Prague, 1979, v. 1, p. 177—82; [12] Костін В. В., Ле Дінь Тхюі, «Доповіді АН УРСР. Сер. А», 1975, № 11, с. 982—85; [13] Zehnder E. J., «Manus. math.», 1978, v. 23, p. 363—71.

А. Д. Брюно.

НОРМАЛЬНАЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — такая фундаментальная система решений $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ этой системы уравнений, что для любой другой фундаментальной системы решений $\hat{x}_1(t), \ldots, \hat{x}_n(t)$ той же системы уравнений имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{\hat{x}_i(t)} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_{x_i(t)};$$

здесь

$$\lambda_{y(t)} = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |y(t)|$$

— *Ляпунова характеристический показатель* решения $y(t)$. Н. ф. с. р. введены А. М. Ляпуновым [1], к-рый доказал, что они существуют у всякой линейной системы

$$\dot{x} = A(t)\, x,$$

где $A(\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение

$$\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \text{ (или } \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)),$$

удовлетворяющее дополнительному условию

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \| A(\tau) \|\, d\tau < +\infty.$$

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М., 1956.

В. М. Миллионщиков.

НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЙ ОПЕРАТОР — линейный оператор с замкнутой областью значений. Пусть A — линейный оператор с плотной в банаховом пространстве X областью определения и с областью значений $R(A)$ в банаховом пространстве Y. Тогда A — Н. р. о., если $\overline{R(A)} = R(A)$, т. е. если $R(A)$ является замкнутым подпространством в Y. Пусть A^* — опера-

тор, сопряженный к A. Для того чтобы A был Н. р. о., необходимо и достаточно, чтобы $R(A)=^{\perp}N(A^*)$, т. е. чтобы область значений A являлась ортогональным дополнением к подпространству нулей оператора A^*.

Пусть дано уравнение с Н. р. о.

$$Ax=y \qquad (*)$$

(нормально разрешимое уравнение). Если $N(A^*)=\{0\}$, т. е. однородное сопряженное уравнение $A^*\psi=0$ имеет только тривиальное решение, то $R(A)=Y$. Если же $N(A^*)\neq\{0\}$, то для разрешимости (*) необходимо и достаточно, чтобы $\langle y,\psi\rangle=0$ для всех решений уравнения $A^*\psi=0$.

Пусть ниже A — замкнутый оператор. Н. р. о. A наз. n-нормальным, если его подпространство нулей $N(A)$ конечномерно ($n(A)=\dim N(A)<+\infty$). Н. р. о. A наз. d-нормальным, если его дефектное подпространство конечномерно ($d(A)=\dim{}^{\perp}R(A)<+\infty$). n-нормальные и d-нормальные операторы наз. иногда полуфредгольмовыми. Для того чтобы оператор A был n-нормальным, необходимо и достаточно, чтобы прообраз каждого компактного множества из $R(A)$ был локально компактным.

Пусть X компактно вложено в банахово пространство X_0. Для n-нормальности A необходимо и достаточно наличие априорной оценки

$$\|x\|_X\leqslant a\|x\|_{X_0}+b\|Ax\|_Y,\ x\in D(A).$$

Оказывается, оператор A d-нормален тогда и только тогда, когда A^* n-нормален. При этом $n(A)=d(A^*)$. Следовательно, если X^* компактно вложено в банахово пространство Z, то для d-нормальности A необходимо и достаточно наличие априорной оценки

$$\|f\|_{Y^*}\leqslant a\|f\|_Z+b\|A^*f\|_{X^*},\quad f\in D(A^*).$$

Пара чисел $(n(A), d(A))$ наз. d-характеристикой оператора A. Если Н. р. о. A n-нормален или d-нормален, то число

$$\chi(A)=n(A)-d(A)$$

наз. индексом оператора A. Свойства n-нормальности и d-нормальности устойчивы: если A — n-нормален (d-нормален), а B — линейный оператор малой нормы или вполне непрерывный, то $A+B$ n-нормален (d-нормален).

Лит.: [1] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937, с. 266—90; [2] Аткинсон Ф., «Матем. сб.», 1951, т. 28, № 1, с. 3—14; [3] Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971.

В. А. Треногин.

НОРМАЛЬНО РАСПОЛОЖЕННОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО — такое подпространство A в пространстве X, что для каждой его открытой окрестности U в X существует множество H, являющееся объединением счетного семейства замкнутых в X множеств и удовлетворяющее условию $A\subset H\subset U$. Если A нормально расположено в пространстве X, а пространство X является Н. р. п. в пространстве Y, то A нормально расположено в Y. Н. р. п. в *нормальном пространстве* само является нормальным пространством в индуцированной топологии — этим и объясняется название. Финальная компактность пространства равносильна его нормальной расположенности в каком-нибудь (а тогда и в любом) *бикомпактном расширении* этого пространства. Вообще, Н. р. п. в финально компактном пространстве само финально компактно.

Лит.: [1] Смирнов Ю. М., «Матем. сб.», 1951, т. 29, с. 173—76.

А. В. Архангельский.

НОРМАЛЬНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ ЗОНА — область вида $0\leqslant x\leqslant\psi(n)$, для к-рой

$$\frac{\mathsf{P}\{Z_n\geqslant x\}}{\mathsf{P}\{Y\geqslant x\}}\longrightarrow 1 \quad\text{или}\quad \frac{\mathsf{P}\{Z_n\leqslant -x\}}{\mathsf{P}\{Y\leqslant -x\}}\longrightarrow 1$$

при $n \to \infty$, где $\psi(n) \uparrow \infty$, $\{Z_n\}$ — последовательность случайных величин, Y — случайная величина, имеющая *нормальное распределение*. Изучены Н. п. з. в случае, когда

$$Z_n = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (X_j - a),$$

где $\{X_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математич. ожиданием a и конечной положительной дисперсией σ^2.

Лит.: [1] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965.

В. В. Петров.

НОРМАЛЬНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — аналитическое пространство, локальные кольца всех точек к-рого нормальны, т. е. являются целозамкнутыми областями целостности. Точка x аналитич. пространства X наз. нормальной (говорят также, что X нормально в точке x), если локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ нормально. В окрестности такой точки пространство обладает приведенной и неприводимой локальной моделью. Любая простая (неособая) точка является нормальной. Простейший пример Н. а. п. — *аналитическое многообразие*.

В дальнейшем основное (полное недискретно нормированное) поле k предполагается алгебраически замкнутым. В этом случае получены наиболее полные результаты о Н. а. п. (см. [1]) и построена теория нормализации [2], к-рая естественным образом связывает с произвольным приведенным аналитическим пространством некоторое Н. а. п. Пусть $N(X)$ — множество точек аналитич. пространства X, не являющихся нормальными, а $S(X)$ — множество особых точек в X. Тогда:

1) $N(X)$ и $S(X)$ — замкнутые аналитич. подмножества в X, причем $N(X) \subset S(X)$;

2) для $x \in X \setminus N(X)$ выполняется неравенство

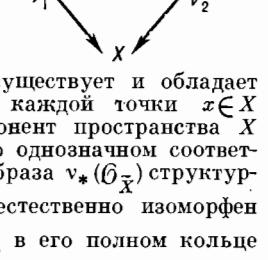
$$\dim_x S(X) \leqslant \dim_x X - 2$$

(т. е. Н. а. п. гладко в коразмерности 1);

3) если X является полным пересечением в точке x и выполнено предыдущее неравенство, то X нормально в этой точке.

Нормализацией приведенного аналитич. пространства X наз. пара $(\tilde{X}, \nu)$, где $\tilde{X}$ — Н. а. п., а $\nu: \tilde{X} \to X$ — конечное сюръективное аналитич. отображение, индуцирующее изоморфизм открытых множеств

$$\tilde{X} \setminus \nu^{-1}(N(X)) \rightarrow X \setminus N(X).$$



Нормализация определена однозначно с точностью до изоморфизма, т. е. если $(\tilde{X}_1, \nu_1)$ и $(\tilde{X}_2, \nu_2)$ — две нормализации, то существует единственный аналитич. изоморфизм $\varphi: \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ такой, что диаграмма коммутативна. Нормализация существует и обладает следующими свойствами. Для каждой точки $x \in X$ множество неприводимых компонент пространства X в точке x находится во взаимно однозначном соответствии с $\nu^{-1}(x)$. Слой прямого образа $\nu_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ структурного пучка $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ в точке $x \in X$ естественно изоморфен целому замыканию кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ в его полном кольце частных.

Понятие Н. а. п. над $\mathbb{C}$ может быть введено в терминах аналитич. продолжения голоморфных функций [3]. Именно, приведенное комплексное пространство нормально тогда и только тогда, когда для него справедлива первая теорема Римана об устранении особенностей: если $U \subset X$ — открытое

подмножество, а $A \subset U$ — замкнутое аналитич. подмножество, не содержащее неприводимых компонент множества U, то любая функция, голоморфная на $U \setminus A$ и локально ограниченная на U, допускает единственное аналитич. продолжение до голоморфной функции на U. Для нормальных комплексных пространств верна также и в т о р а я т е о р е м а Р и м а н а об устранении особенностей: если $\operatorname{codim}_x A \geqslant 2$ в каждой точке $x \in A$, то упомянутое аналитич. продолжение возможно без требования ограниченности функции. Приведенное комплексное пространство X нормально тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $U \subset X$ отображение ограничения голоморфных функций

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(U \setminus S(X), \mathcal{O}_X)$$

биективно. Свойство нормальности можно сформулировать также на языке локальных когомологий — оно равносильно равенству $\mathcal{H}^1_{S(X)}\mathcal{O}_X = 0$ (см. [5]). Для любого приведенного комплексного пространства X можно определить пучок колец $\tilde{\mathcal{O}}_X$ ростков с л а б о г о л о м о р ф н ы х ф у н к ц и й, т. е. функций, удовлетворяющих условиям первой теоремы Римана. Оказывается, что кольцо $\tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$ конечно как $\mathcal{O}_{X,x}$-модуль и равно целому замыканию кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ в его полном кольце частных. Иными словами, $\mathcal{O}_X = \nu_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$, где $\nu : \tilde{X} \to X$ — отображение нормализации.

Нормальное комплексное пространство можно охарактеризовать также следующим образом: комплексное пространство нормально тогда и только тогда, когда каждая его точка обладает окрестностью, допускающей аналитич. наложение на область пространства $\mathbb{C}^n$ (см. [3], [8]).

Приведенное комплексное пространство X является *Штейна пространством* тогда и только тогда, когда этим свойством обладает его нормализация $\tilde{X}$ (см. [4]). На нормальные комплексные пространства может быть распространено понятие метрики Ходжа (см. *Кэлера метрика*). На компактные нормальные пространства с такой метрикой переносится теорема Кодаиры о проективном вложении [6].

В алгебраич. геометрии рассматриваются аналоги Н. а. п.— нормальные алгебраич. многообразия (см. *Нормальная схема*). Для алгебраич. многообразий над полным недискретным нормированным полем оба понятия совпадают (см. [7], [1]).

Лит.: [1] A b h y a n k a r S. S., Local analytic geometry, N. Y.— L., 1964; [2] H o u z e l C., в кн.: Séminaire H. Cartan, 13 année. 1960/61, t. 2, P., 1963, exp. 18—21; [3] G r a u e r t H., R e m m e r t R., «Math. Ann.», 1958, Bd 136, S. 245—318; [4] N a r a s i m h a n R., «Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa», 1962, v. 16, p. 327—33; [5] S i n Y. T., T r a u t m a n n G., Gap-sheaves and extension of coherent analytic subsheaves, B.—Hdlb.— N. Y., 1971; [6] Г р а у э р т Г., в кн.: Комплексные пространства. Сб. пер., М., 1965, с. 45—104; [7] З а р и с с к и й О., С а м ю э л ь П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [8] Ф у к с Б. А., Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., ч. 1, 1962.

Д. Н. Ахиезер.

НОРМАЛЬНОЕ p-ДОПОЛНЕНИЕ к о н е ч н о й г р у п п ы G — нормальный делитель A группы G такой, что $G = AS$ и $A \cap S = 1$, где S — нек-рая силовская p-подгруппа в G (см. *Силовская подгруппа*). Группа G обладает нормальным p-дополнением, если нек-рая силовская p-подгруппа S группы G лежит в центре своего нормализатора (т е о р е м а Б ё р н с а й д а). Необходимое и достаточное условие существования нормального p-дополнения в группе G дается т е о р е м о й Ф р о б е н и у с а: группа G обладает нормальным p-дополнением тогда и только тогда, когда либо для любой неединичной p-подгруппы H группы G факторгруппа $N_G(H)/C_G(H)$ есть p-группа (где $N_G(H)$ — нормализатор H в G, а $C_G(H)$ — централизатор H в G),

либо подгруппа $N_G(H)$ для любой неединичной p-подгруппы H группы G обладает нормальным p-дополнением.

Лит.: [1] Gorenstein D., Finite groups, N. Y., 1968.

Н. Н. Вильямс.

НОРМАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме T_4 (см. *Отделимости аксиома*), т. е. такое топологич. пространство, в к-ром одноточечные множества замкнуты и любые два дизъюнктные замкнутые множества отделимы окрестностями (т. е. содержатся в дизъюнктных открытых множествах). Н. п. образуют частный случай *вполне регулярных пространств* (тихоновских), особенно важный для *размерности теории*. Всякое замкнутое подпространство Н. п. нормально (нормальность наследуется по замкнутым множествам). Пространства, все подпространства к-рых нормальны, наз. наследственно нормальными. Для наследственной нормальности достаточно, чтобы все его открытые подпространства были Н. п. Для наследственной нормальности пространства необходимо и достаточно, чтобы были отделимы окрестностями всякие два множества, из к-рых ни одно не содержит точек соприкосновения другого. Н. п. наз. совершенно нормальным, если в нем каждое замкнутое множество является пересечением счетного числа открытых множеств. Всякое совершенно Н. п. есть наследственно Н. п.

Произведение двух Н. п. не обязано быть Н. п., и даже произведение Н. п. на отрезок может быть не нормальным.

Существуют важные классы пространств, более общие, чем нормальные, и менее общие, чем вполне регулярные. Среди этих пространств, близких к нормальным, первыми [2] были т. н. квазинормальные, или l-нормальные, пространства. Это — тихоновские пространства, в к-рых отделимы окрестностями всякие два дизъюнктные l-множества, т. е. множества, являющиеся пересечением конечного числа замкнутых *канонических множеств*. Тихоновские пространства, в к-рых отделимы окрестностями всякие два дизъюнктные замкнутые канонич. множества, наз. $\varkappa$-нормальными [3]; $\varkappa$-нормальные пространства, в к-рых каждое замкнутое канонич. множество является пересечением счетного числа открытых канонич. множеств, наз. совершенно $\varkappa$-нормальными. Классы тихоновских $\varkappa$-нормальных, квазинормальных и, наконец, совершенно $\varkappa$-нормальных пространств идут последовательно убывая, причем никакие два из этих классов не совпадают между собою.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Зайцев В. И., «Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ.», 1967, № 3, с. 48—57; [3] Щепин Е. В., «Сиб. матем. ж.», 1972, т. 13, № 5, с. 1182—1196.

П. С. Александров.

НОРМАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО в нек-рой точке P к поверхности F^m пространства V^n — ортогональное дополнение N_pF к касательному пространству T_pF (см. *Аналитическое пространство*) в точке P поверхности F. Размерность Н. п. равна $n-m$ (коразмерность поверхности F). Любое его одномерное подпространство наз. *нормалью* к поверхности F в точке P. Если F — гладкая гиперповерхность, то в каждой точке F существует единственная нормаль.

А. Б. Иванов.

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — одно из важнейших распределений вероятностей. Термин «Н. р.», принадлежащий К. Пирсону (K. Pearson) (более старые названия *Гаусса закон*, *Гаусса — Лапласа распределение*), применяют как по отношению к распределениям вероятностей *случайных величин*, так и по отношению к совместным распределениям вероятностей нескольких случайных величин (т. е. к распределениям конечномерных случайных векторов), а также *случай-*

ных элементов и *случайных процессов*. Общее определение Н. р. сводится к одномерному случаю.

Распределение вероятностей случайной величины X наз. нормальным, если оно имеет плотность вероятности

$$p(x;\ a,\ \sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}. \qquad (*)$$

Семейство Н. р. (*) зависит, т. о., от двух параметров a и $\sigma>0$. При этом математич. ожидание X равно a, дисперсия X равна σ^2, а характеристич. функция имеет вид

$$f(t)=\mathsf{E}e^{itX}=e^{iat-\sigma^2t^2/2}.$$

Кривая Н. р. $y=p(x;\ a,\ \sigma)$ симметрична относительно ординаты, проходящей через точку $x=a$, и имеет в этой точке единственный максимум, равный $1/\sqrt{2\pi}\sigma$. С уменьшением σ кривая Н. р. становится все более островершинной. Изменение a при постоянном σ не меняет форму кривой, а вызывает лишь ее смещение по оси абсцисс. Площадь, заключенная под кривой Н. р., всегда равна единице. При $a=0$, $\sigma=1$ соответствующая функция распределения равна

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du.$$

В общем случае функция распределения Н. р. (*) $F(x;\ a,\ \sigma)$ может быть вычислена по формуле $F(x;\ a,\ \sigma)=\Phi(t)$, где $t=(x-a)/\sigma$. Для функции $\Phi(t)$ (и нескольких ее производных) составлены обширные таблицы (см., напр., [1], [2] и ст. *Интеграл вероятности*). Для Н. р. вероятность неравенства $|X-a|>k\sigma$, равная $1-\Phi(k)+\Phi(-k)$, убывает весьма быстро с ростом k (см. табл.).

k	Вероятность	k	Вероятность
1	0,31731	3	$0{,}26998\cdot10^{-2}$
2	$0{,}45500\cdot10^{-1}$	4	$0{,}63342\cdot10^{-4}$

Во многих практич. вопросах при рассмотрении Н. р. пренебрегают поэтому возможностью отклонений от a, превышающих 3σ,— т. н. правило трех сигма (соответствующая вероятность, как видно из табл., меньше 0,003). Вероятное отклонение для Н. р. равно $0{,}67449\sigma$.

Н. р. встречается в большом числе приложений. Издавна известны попытки объяснения этого обстоятельства. Теоретич. обоснование исключительной роли Н. р. дают *предельные теоремы* теории вероятностей (см. также *Лапласа теорема*, *Ляпунова теорема*). Качественно соответствующий результат может быть объяснен следующим образом: Н. р. служит хорошим приближением каждый раз, когда рассматриваемая случайная величина представляет собой сумму большого числа независимых случайных величин, максимальная из к-рых мала по сравнению со всей суммой (см. *Центральная предельная теорема*).

Н. р. может появляться также как точное решение нек-рых задач (в рамках принятой математич. модели явления). Так обстоит дело в теории случайных процессов (в одной из основных моделей броуновского движения). Классич. примеры возникновения Н. р. как точного принадлежат К. Гауссу (C. Gauss, закон распределения ошибок наблюдения) и Дж. Максвеллу (J. Maxwell, закон распределения скоростей молекул) (см. также *Независимость*, *Характеризационная теорема*).

Распределение случайного вектора $X=(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ в $\mathbb{R}^n$ или совместное распределение случайных величин $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ наз. Н. р. (многомерным нормальным), если при любом фиксированном $t\in\mathbb{R}^n$ скалярное произведение $(t,\ X)$ имеет или Н. р., или равно константе (как иногда говорят,

имеет Н. р. с дисперсией, равной нулю). Для случайных элементов со значениями из какого-либо векторного пространства E это определение сохраняется с заменой t на любой элемент l сопряженного пространства E^* и скалярного произведения (t, X) на линейный функционал $l(X)$. Совместное распределение нескольких случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеет характеристическую функцию

$$f(t)=\exp\left\{i\mathsf{E}(t,\ X)-\frac{1}{2}Q(t)\right\},$$

$$t=(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)\in\mathbb{R}^n,$$

где

$$\mathsf{E}(t,\ X)=t_1\mathsf{E}X_1+t_2\mathsf{E}X_2+\ldots+t_n\mathsf{E}X_n$$

— линейная форма,

$$Q(t)=\mathsf{E}(t,\ X-\mathsf{E}X)^2=\sum_{k,\ l=1}^{n}\sigma_{kl}t_kt_l$$

— неотрицательно определенная квадратичная форма и $\|\sigma_{kl}\|$ — ковариационная матрица вектора X. В случае положительной определенности соответствующее Н. р. имеет плотность вероятности

$$p(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=C\exp\{-Q^{-1}(x_1-a_1,\ x_2-a_2,\ \ldots,\ x_n-a_n)\},$$

где Q^{-1} — квадратичная форма, обратная Q, параметры $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны математич. ожиданиям $X_1, X_2, \ldots, X_n$ соответственно, а постоянная

$$C=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det\|\sigma_{kl}\|}}.$$

Общее количество параметров, задающих Н. р., равно

$$(n+1)(n+2)/2-1$$

и быстро растет с ростом n (оно равно 2 при $n=1$, 20 при $n=5$ и 65 при $n=10$). Многомерное Н. р. служит основной моделью *многомерного статистического анализа*. Оно используется также в теории случайных процессов (где рассматриваются Н. р. в бесконечномерных пространствах, см. *Случайный элемент*, а также *Винера мера*, *Винеровский процесс*, *Гауссовский процесс*).

Из важных свойств Н. р. необходимо отметить следующие. Сумма X независимых случайных величин X_1 и X_2, имеющих Н. р., имеет Н. р.; обратно, если $X=X_1+X_2$ имеет Н. р. и X_1 и X_2 независимы, то X_1 и X_2 имеют Н. р. (теорема Крамера). Это свойство обладает определенной «устойчивостью»: если распределение X «близко» к Н. р., то и распределения X_1 и X_2 «близки» к Н. р. С Н. р. связаны нек-рые другие важные распределения (см. *Логарифмически нормальное распределение*, *Нецентральное «хи-квадрат» распределение*, *Стьюдента распределение*, *Уишарта распределение*, *Фишера z-распределение*, *Хотеллинга T^2-распределение*, *«Хи-квадрат» распределение*). Для приближенного представления распределений, близких к Н. р., широко применяются ряды типа *Эджворта рядов* и *Грама — Шарлье рядов*.

О вопросах, связанных с оценкой параметров Н. р. по результатам наблюдений, см. ст. *Несмещенная оценка*. О проверке гипотезы нормальности см. *Непараметрические методы статистики*. См. также *Вероятностная бумага*.

Лит.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [2] Таблицы нормального интеграла вероятностей, нормальной плотности и ее нормированных производных, М., 1960; [3] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [5] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [6] Их же, Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

Ю. В. Прохоров.

НОРМАЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ подмногообразия — расслоение, состоящее из касательных век-

торов к объемлющему многообразию, нормальных к подмногообразию. Если X — риманово многообразие, Y — его (погруженное) подмногообразие, T_X и T_Y — касательные расслоения над X и Y, то Н. р. $N_{Y/X}$ подмногообразия Y есть подрасслоение в $T_X|Y$, составленное векторами $u \in T_{X,y}$, $y \in Y$, ортогональными к $T_{Y,y}$.

С помощью Н. р. строятся, напр., трубчатые окрестности подмногообразий. Н. р. над Y, рассматриваемое с точностью до эквивалентности, не зависит от выбора римановой метрики на X, поскольку может быть определено без помощи метрики как факторрасслоение $T_X|Y/T_Y$. Несколько более общей является конструкция Н. р. произвольного погружения $f : Y \to X$ дифференцируемых многообразий:

$$N_{Y/X} = f^*T_X/T_Y.$$

Аналогично определяется Н. р. $N_{Y/X}$ неособого алгебраич. подмногообразия Y в неособом алгебраич. многообразии $\overline{X}$ или Н. р. аналитич. подмногообразия Y в аналитич. многообразии X; оно является алгебраическим (соответственно аналитическим) векторным расслоением над Y, ранг к-рого есть codim Y. Если, в частности, codim $Y=1$, то расслоение $N_{Y/X}$ изоморфно ограничению на Y расслоения над X, определяемого дивизором Y.

В случае, когда Y — аналитич. подпространство аналитич. пространства (X, O_X), Н. р. подпространства Y иногда называют аналитич. семейство векторных пространств $N_{Y/X} \to Y$, двойственное к конормальному пучку $N^*_{Y/X}$ (см. *Нормальный пучок*). О приложениях Н. р. к вопросу о стягиваемости подмногообразий см. *Исключительное аналитическое множество*, *Исключительное подмногообразие*.

Лит.: [1] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 132—56; [2] Милнор Дж., Сташеф Дж., Характеристические классы, пер. с англ., М., 1979; [3] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [4] Хирш М., Дифференциальная топология, пер. с англ., М., 1979; [5] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

А. Л. Онищик.

НОРМАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ поля — алгебраическое расширение L поля K, удовлетворяющее одному из следующих эквивалентных условий:

1) любое вложение поля L в алгебраич. замыкание $\overline{K}$ поля K является автоморфизмом поля L;

2) L — поле разложения нек-рого семейства многочленов с коэффициентами из K;

3) любой неприводимый над K многочлен $f(x)$ с коэффициентами из K, имеющий корень в L, распадается в L на линейные множители.

Для любого алгебраич. расширения F/K существует максимальное промежуточное подполе L, нормальное над K, причем $L = \bigcap_\sigma F^\sigma$, где σ — всевозможные вложения поля F в $\overline{K}$. Существует также однозначно определенное минимальное Н. р. поля K, содержащее F. Это поле является композитом всех полей F^σ. Оно наз. нормальным замыканием поля F относительно K. Если L_1 и L_2 — нормальные расширения поля K, то пересечение $L_1 \cap L_2$ и композит $L_1 \cdot L_2$ снова нормальны над K. Однако даже если расширения L/K' и K'/K нормальны, расширение L/K может и не быть нормальным.

Для полей характеристики 0 любое нормальное расширение является расширением Галуа. В общем случае Н. р. является расширением Галуа тогда и только тогда, когда оно сепарабельно.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Постников М. М., Теория Галуа, М., 1963.

Л. В. Кузьмин.

НОРМАЛЬНОЕ СЕМЕЙСТВО аналитических функций в области — такое семейство S од-

нозначных аналитич. функций $f(z)$ комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$ в области D пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, что из любой последовательности функций из S можно выделить подпоследовательность $\{f_\nu(z)\}$, равномерно сходящуюся внутри D к аналитич. функции или к бесконечности. При этом, по определению, подпоследовательность $\{f_\nu(z)\}$ равномерно внутри D сходится к бесконечности, если для любых компакта $K\subset D$ и числа $M>0$ можно указать такой номер $N=N(K, M)$, что $|f_\nu(z)|>M$ для всех $\nu>M$, $z\in K$.

Семейство S наз. нормальным семейством в точке $z^0\in D$, если S нормально в нек-ром шаре с центром z^0. Семейство S нормально в области D тогда и только тогда, когда оно нормально в каждой точке $z^0\in D$. Всякое компактное семейство голоморфных функций является Н. с.; обратное заключение неверно (см. *Компактности принцип*). Если семейство S голоморфных функций в области $D\subset\mathbb{C}^n$ таково, что ни одна из функций $f(z)\in S$ не принимает двух определенных значений, то S есть Н. с. в D (теорема Монтеля). Этот признак Н. с. значительно упрощает исследование аналитич. функций в окрестности *существенно особой точки* (см. также *Пикара теорема*).

Нормальное семейство мероморфных функций в области $D\subset\mathbb{C}=\mathbb{C}^1$ определяется аналогично: S есть Н. с. мероморфных функций в D, если из любой последовательности функций из S можно выделить подпоследовательность $\{f_\nu(z)\}$, равномерно внутри D сходящуюся к мероморфной функции $f(z)$ или к бесконечности. При этом, по определению, $\{f_\nu(z)\}$ равномерно внутри D сходится к $f(z)$ (случай $f(z)\equiv\infty$ включается), если для любых компакта $K\subset D$ и числа $\varepsilon>0$ существуют номер $N=N(\varepsilon, K)$ и круг $B=B(z^0, r)$ радиуса $r=r(\varepsilon, K)$ с центром в любой точке $z^0\in K$ такие, что при $\nu>N$ выполняется

$$|f_\nu(z)-f(z)|<\varepsilon, \quad z\in B,$$

когда $f(z^0)\neq\infty$, или

$$\left|\frac{1}{f_\nu(z)}-\frac{1}{f(z)}\right|<\varepsilon, \ z\in B,$$

когда $f(z^0)=\infty$. Если семейство S мероморфных функций в области $D\subset\mathbb{C}$ таково, что ни одна из функций $f(z)\in S$ не принимает трех определенных значений, то S есть Н. с. (теорема Монтеля). Семейство S мероморфных функций есть Н. с. в области $D\subset\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда

$$\sup\{\rho(f(z)): f(z)\in S\}<\infty$$

на каждом компакте $K\subset D$, где

$$\rho(f(z))=\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

— т. н. сферическая производная функции $f(z)$.

Начиная с 30-х гг. 20 в. Н. с. приобрели большое значение в исследованиях *граничных свойств аналитических функций* (см. также *Предельное множество*, [3], [4]). Мероморфная функция $f(z)$ в односвязной области $D\subset\mathbb{C}$ наз. нормальной функцией в области D, если семейство $\{f(\gamma(z))\}$ есть Н. с. в D; здесь $\gamma(z)$ пробегает семейство всех конформных автоморфизмов области D. Функция $f(z)$ наз. нормальной в многосвязной области D, если она нормальна на универсальной накрывающей поверхности D. Если мероморфная в D функция $f(z)$ опускает три значения, то $f(z)$ — нормальная функция. Для того чтобы $f(z)$, $f(z)\neq\text{const}$, была нормальной в единичном круге $G=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}<\frac{c}{1-|z|^2}, \ z\in G, \ c=c(f)=\text{const}.$$

Для нормальной мероморфной функции $f(z)$ в единичном круге G из существования *асимптотического значения* α в граничной точке $\zeta \in \Gamma = \{\zeta \in \mathbb{C}: |\zeta| = 1\}$ следует, что α — *угловое граничное значение* $f(z)$ в ζ. Однако мероморфная нормальная функция в круге G может и не иметь вовсе асимптотич. значений. Напротив, если $f(z)$ — голоморфная нормальная функция в G, то даже угловые граничные значения существуют на множестве точек единичной окружности Γ, плотном на Γ.

Лит.: [1] Монтель П., Нормальные семейства аналитических функций, пер. с франц., М.— Л., 1936; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [3] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [4] Ловатер А., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259. *Е. Д. Соломенцев.*

НОРМАЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ гладкой поверхности Φ в точке P в направлении l — сечение поверхности Φ плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности в точке P и через направление l в касательной плоскости к Φ в точке P. Задачу об изучении локальной структуры поверхности можно свести к задаче об изучении локальной структуры семейства кривых — Н. с. поверхности в данной точке и в различных направлениях (см. *Кривизна*, *Нормальная кривизна*). Метод исследования локальной структуры поверхности с помощью Н. с. допускает обобщения на случай поверхностей произвольной размерности и с произвольной коразмерностью. *Д. Д. Соколов.*

НОРМАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, нормированное уравнение, прямой на плоскости — уравнение вида

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

где x, y — декартовы прямоугольные координаты плоскости; $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ — координаты единичного вектора $\{\cos \alpha, \sin \alpha\}$, перпендикулярного к прямой; $p > 0$ — расстояние от начала координат до прямой. К Н. у. уравнение прямой вида

$$Ax + By + C = 0$$

приводится умножением на нормирующий множитель λ, модуль к-рого есть $1/\sqrt{A^2+B^2}$, а знак противоположен знаку C (при $C=0$ знак λ можно выбирать произвольно).

Аналогично случаю прямой, уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

приводится к Н. у.

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора, перпендикулярного к плоскости, умножением на нормирующий множитель λ, модуль к-рого есть $1/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, а знак λ противоположен знаку D. *А. Б. Иванов.*

НОРМАЛЬНОЕ ЧИСЛО — действительное число α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, обладающее следующим свойством: для каждого натурального s любая заданная s-членная скобка $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s)$, состоящая из знаков $0, 1, \ldots, g-1$, появляется в последовательности

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots, \qquad (1)$$

получающейся при разложении числа α в бесконечную g-ичную дробь

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{g} + \frac{\alpha_2}{g^2} + \frac{\alpha_3}{g^3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{g^n} + \ldots,$$

с асимптотич. частотой $1/g^s$.

Подробнее, пусть $g > 1$ — натуральное число и

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)\,(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{s+1})\,(\alpha_3, \ldots, \alpha_{s+2}) \ldots \qquad (2)$$

— бесконечная последовательность s-членных скобок, соответствующая последовательности (1). Через $N(n, \delta)$ обозначается число появлений скобки $\delta=(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s)$ среди первых n скобок последовательности (2). Число

$$\alpha=\frac{\alpha_1}{g}+\frac{\alpha_2}{g^2}+\ldots$$

наз. нормальным, если для любого натурального s и любой заданной s-членной скобки δ, состоящей из знаков $0, 1, \ldots, g-1$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(n, \delta)}{n}=\frac{1}{g^s}.$$

Понятие Н. ч. для $n=10$ было введено Э. Борелем (см. [1], [2] с. 197). Э. Борель называл действительное число α слабо нормальным к основанию g, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(n, \delta)}{n}=\frac{1}{g},$$

где $N(n, \delta)$ — число появлений знака δ, $0\leqslant\delta\leqslant g-1$, среди первых n членов последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, и называл α нормальным, если числа $\alpha, g\alpha, g^2\alpha, \ldots$ слабо нормальны к основаниям $g, g^2, g^3, \ldots$ Он установил также, что для Н. ч.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(n, \delta)}{n}=\frac{1}{g^s}$$

при любом s и любой заданной s-членной скобке $\delta=(\delta_1, \ldots, \delta_s)$. Позднее было показано (см. [3], [4], а также [8]), что выполнимость последнего соотношения эквивалентна борелевскому определению Н. ч.

Число α наз. абсолютно нормальным, если оно нормально по отношению ко всякому натуральному основанию $g>1$. Существование нормальных и абсолютно Н. ч. было установлено Э. Борелем на основе теории меры. Построение Н. ч. в явном виде впервые было осуществлено в [5]. Ранее (см. [6], [7]) был указан эффективный процесс построения абсолютно Н. ч. О других способах построения Н. ч. и о связи понятия Н. ч. с понятием случайности см. [8].

Равномерное распределение дробных долей $\{\alpha g^x\}$, $x=1, 2, 3, \ldots$, на отрезке $[0, 1]$ эквивалентно тому, что α — нормальное число.

Лит.: [1] Borel E., «Rend. circ. math. Palermo», 1909, t. 27, p. 247—71; [2] его же, Léçons sur la théorie des fonctions, 3 éd., P., 1928; [3] Pillai S., «Proc. Indian Acad. Sci. Sec. A», 1940, v. 12, p. 179—84; [4] Niven I., Zuckerman H., «Pacific J. Math.», 1951, v. 1, p. 103—09; [5] Champernowne D. G., «J. London Math. Soc.», 1933, v. 8, p. 254—60; [6] Sierpinski W., «Bull. Soc. math. France», 1917, t. 45, p. 127—32; [7] Lebesque H., там же, p. 132—44; [8] Постников А. Г., Арифметическое моделирование случайных процессов, М., 1960 («Тр. Матем. ин-та АН СССР», т. 57).

С. А. Степанов.

НОРМАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ЭЛЛИПС — геометрическая конструкция, к-рая характеризует распределение кривизн в нек-рой точке регулярной поверхности M^2 в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Пусть P — точка поверхности M^2 и N_l есть $(n-1)$-мерное подпространство, содержащее нормальное дополнение N и M^2 в P и касательное к M^2 в точке P направление l. Сечение M^2 подпространством N_l наз. нормальным сечением γ_l в точке P. Вектор $\frac{d^2\gamma_l}{ds^2}$, лежащий в N, где s — натуральный параметр на сечении γ_l, наз. вектором нормальной кривизны M^2 в направлении l. Концы векторов нормальной кривизны образуют эллипс нормальной кривизны.

Для того чтобы двумерная поверхность M^2 с ненулевой гауссовой кривизной в E^n лежала в нек-ром трехмерном подпространстве E^3, необходимо и достаточно,

чтобы ее Н. к. э. во всех точках P вырождался в отрезок, проходящий через P (см. [2]).

Аналогично определяется индикатриса кривизны для подмногообразия M^m произвольной размерности m. Она является $(m-1)$-мерной алгебраич. поверхностью степени 2^{m-1}. Векторы нормальной кривизны образуют конус, к-рый вместе с касательным пространством к M^m определяет подпространство E^{m_1}, наз. областью кривизны M^2 в точке P. Размерность m_1 удовлетворяет условиям

$$m_1 \leqslant \frac{m(m+3)}{2}, \quad m_1 \leqslant n.$$

Точки, для к-рых $m_1=m+1$, наз. аксиальными точками, $m_1=m+2$ — планарными точками, $m_1=m+3$ — специальными точками. Иногда для подмногообразий с большой коразмерностью рассматривают *Дюпена индикатрису*, построение к-рой вполне аналогично построению индикатрисы Дюпена для поверхности в трехмерном пространстве.

Лит.: [1] Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, пер. с нем., т. 2, М.— Л., 1948; [2] Аминов Ю. А., «Укр. геометр. сб.», 1975, в. 17, с. 3—22.

Д. Д. Соколов.

НОРМАЛЬНЫЙ АЛГОРИФМ — название, закрепившееся за *алгоритмами* некоторого точно охарактеризованного типа. Наряду с *рекурсивными функциями* и *Тьюринга машинами* Н. а. получили известность в качестве одного из наиболее удобных уточнений общего интуитивного представления об алгоритме. Понятие Н. а. было выработано в 1947 А. А. Марковым в ходе его исследований по проблеме тождества для ассоциативных систем (см. *Ассоциативное исчисление*). Детально определение и общая теория Н. а. изложены в [1] (гл. I—V).

Всякий Н. а. $\mathfrak{A}$, являясь алгоритмом в нек-ром *алфавите* A, порождает в нем детерминированный процесс переработки *слов*. Указание этого алфавита входит в определение Н. а. $\mathfrak{A}$ в качестве обязательной составной части, и в рассматриваемой ситуации про Н. а. $\mathfrak{A}$ говорят, что он является Н. а. в алфавите A. Любой Н. а. в фиксированном алфавите A вполне определяется указанием его схемы — упорядоченного конечного списка формул подстановки в A. Каждая такая формула по существу представляет собой упорядоченную пару (U, V) слов в A. Слово U наз. левой частью этой формулы, а V — ее правой частью. Среди формул данной схемы нек-рые выделяются специально и объявляются заключительными. Обычно в схеме Н. а. заключительная формула записывается в виде $U\to\cdot V$, а незаключительная — в виде $U\to V$.

Н. а. $\mathfrak{A}$ в алфавите A есть предписание строить, исходя из произвольного слова P в A, последовательность слов P_i согласно следующему правилу. Слово P берется в качестве начального члена P_0 этой последовательности, и процесс ее построения продолжается далее. Пусть для нек-рого $i\geqslant 0$ слово P_i построено и процесс построения рассматриваемой последовательности еще не завершился. Если в схеме Н. а. $\mathfrak{A}$ нет формул, левые части к-рых входили бы в P_i, то P_{i+1} полагают равным P_i, и процесс построения последовательности на этом считается закончившимся. Если же в схеме $\mathfrak{A}$ имеются формулы с левыми частями, входящими в P_i, то в качестве P_{i+1} берется результат подстановки правой части первой из таких формул вместо первого *вхождения* ее левой части в слово P_i; при этом процесс построения последовательности считается завершившимся, если примененная на этом шаге формула подстановки была заключительной, и продолжающимся в противном случае. Если процесс построения упомянутой последовательности обрывается, то говорят, что рассматриваемый Н. а. $\mathfrak{A}$ применим к слову P. Последний член Q этой

последовательности считается результатом применения Н. а. $\mathfrak{A}$ к слову P и обозначается символом $\mathfrak{A}(P)$. При этом говорят, что $\mathfrak{A}$ перерабатывает P в Q, и пишут $\mathfrak{A}(P)=Q$. Н. а. в каком-либо расширении алфавита A наз. Н. а. над этим алфавитом.

Имеются веские основания считать, что уточнение общего представления об *алгоритме в алфавите*, произведенное с помощью понятия Н. а., является адекватным. Именно, считается, что для всякого алгоритма $\mathfrak{A}$ в каком-либо алфавите A может быть построен Н. а. $\mathfrak{B}$ над этим алфавитом, перерабатывающий произвольное слово P в A в тот же самый результат, в к-рый перерабатывает его исходный алгоритм $\mathfrak{A}$. Это соглашение известно в теории алгоритмов под названием принципа нормализации. Уточнение понятия алгоритма, осуществленное на основе понятия Н. а., оказывается эквивалентным другим известным уточнениям (см., напр., [2]). Вследствие этого принцип нормализации оказывается равносильным *Чёрча тезису*, предлагающему считать понятие частично рекурсивной функции адекватным уточнением понятия вычислимой арифметич. функции.

Возникшие первоначально в связи с алгебраич. проблематикой Н. а. оказались удобным рабочим аппаратом во многих исследованиях, требующих точного понятия алгоритма,— особенно тогда, когда основные объекты рассмотрения имеют неарифметич. природу и допускают удобное представление в виде слов в нек-рых алфавитах (такова, напр., ситуация в *конструктивном анализе*).

Лит.: [1] Марков А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 42); [2] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1971.

Н. М. Нагорный.

НОРМАЛЬНЫЙ ДЕЛИТЕЛЬ, нормальная подгруппа, инвариантная подгруппа,— подгруппа H группы G, для к-рой левостороннее разложение группы G по подгруппе H совпадает с правосторонним, т. е. такая подгруппа, что для любого элемента $a\in G$ смежные классы aH и Ha равны (в смысле совпадения этих множеств). Если подгруппа H является Н. д. группы G, то говорят также, что H нормальна в G, и пишут $H\trianglelefteq G$. Если $H\trianglelefteq G$ и $H\neq G$, то пишут $H\triangleleft G$. Подгруппа H нормальна в группе G тогда и только тогда, когда вместе с каждым своим элементом h она содержит все с ним сопряженные в группе G (см. *Сопряженный элемент*), т. е. $H^G\subseteq H$. Н. д. может быть определен также как подгруппа, к-рая совпадает со всеми своими сопряженными подгруппами, вследствие чего он наз. также самосопряженной подгруппой.

При любом гомоморфизме $\varphi: G\to G'$ множество T элементов группы G, отображающихся в единицу группы G' (ядро гомоморфизма φ), является Н. д. группы G, и обратно, всякий Н. д. группы G есть ядро нек-рого гомоморфизма, в частности Н. д. T служит ядром канонич. гомоморфизма на *факторгруппу* G/T.

Пересечение любого множества Н. д., а также подгруппа, порожденная любой системой Н. д. группы G, сами являются Н. д. группы G.

О. А. Иванова.

НОРМАЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС полугруппы S — непустое подмножество $N\subseteq S$, удовлетворяющее следующему условию: для любых x, $y\in S^1$ (здесь $S^1=S$, если S содержит единицу, и S^1 есть полугруппа, получаемая из S присоединением единицы, если S не содержит единицу) и любых a, $b\in N$ из $xay\in N$ следует $xby\in N$. Подмножество N будет Н. к. полугруппы S тогда и только тогда, когда N является классом нек-рой конгруэнции на S.

Лит.: [1] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960.

Л. Н. Шеврин.

НОРМАЛЬНЫЙ МОНОМОРФИЗМ — морфизм, обладающий характеристическим свойством вложения группы (кольца) в группу (кольцо) в качестве нормального делителя (идеала). Пусть $\mathfrak{K}$ — категория с нулевыми морфизмами. *Морфизм* $\mu : U \to A$ *наз.* нормальным мономорфизмом, если всякий морфизм $\varphi : X \to A$, для которого из $\mu\alpha = 0$, $\alpha : A \to Y$, всегда следует $\varphi\alpha = 0$, однозначно представим в виде $\varphi = \varphi'\mu$. *Ядро* любого морфизма является Н. м. Обратное в общем случае неверно, однако при существовании в категории *коядер* морфизмов всякий Н. м. оказывается ядром своего коядра. В любой *абелевой категории* всякий мономорфизм нормален. Понятие Н. м. двойственно понятию *нормального эпиморфизма*.

М. Ш. Цаленко.

НОРМАЛЬНЫЙ НУЛЬМЕРНЫЙ ЦИКЛ, цикл индекса нуль,— цикл $z = \sum_{i=1}^{n} a_i t_i^0$ такой, что $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$. Гомологичный нулю цикл всегда нормален; факторгруппа группы нормальных циклов по подгруппе циклов, гомологичных нулю, наз. приведенной нульмерной группой гомологий. Для связного комплекса приведенная группа — нулевая, что удобно во всякого рода определениях ацикличности. *Истинный цикл* $z^0 = \{z_1^0, \ldots, z_k^0, \ldots\}$ наз. нормальным, если нормален каждый из циклов z_k^0.

А. А. Малцев.

НОРМАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — замкнутый линейный оператор A, определенный на плотном в гильбертовом пространстве H линейном многообразии D_A, такой, что $A^*A = AA^*$, где A^* — оператор, сопряженный с A. Если A — Н. о., то $D_{A^*} = D_A$ и $\|A^*\| = \|A\|$. Обратно, выполнение этих условий обеспечивает нормальность A. Если A — Н. о., то: A^* также нормален; $\alpha A + \beta I$ — Н. о. при любых α, $\beta \in \mathbb{C}$; A^{-1} нормален в случае, когда этот оператор существует; если $AB = BA$, где B — ограниченный линейный оператор, то также $A^*B = BA^*$.

Для Н. о. A имеют место:

1) мультипликативное разложение

$$A = U\sqrt{A^*A} = \sqrt{AA^*}U, \quad A^* = U^{-1}\sqrt{AA^*} = \sqrt{A^*A}U^{-1},$$

где U — унитарный оператор, однозначно определяемый на ортогональном дополнении подпространства нулей операторов A и A^*;

2) аддитивное разложение

$$A = A_1 + iA_2, \quad A^* = A_1 - iA_2,$$

где A_1 и A_2 — однозначно определяемые самосопряженные операторы, перестановочные между собой.

Из аддитивного разложения следует, что для упорядоченной пары (A, A^*) существует единственная двумерная спектральная функция $E(\Delta_\xi)$, где Δ_ξ — двумерный интервал $\Delta_\zeta = \Delta_\xi \times \Delta_\eta$, $\zeta = \xi + i\eta$, такая, что

$$A = \int_{\Delta_\infty} \zeta dE(\Delta_\zeta), \quad A^* = \int_{\Delta_\infty} \bar{\zeta} dE(\Delta_\zeta).$$

Из этого разложения следует также, что Н. о. A является функцией нек-рого самосопряженного оператора C, $A = F(C)$. Обратно, всякая функция любого самосопряженного оператора есть Н. о.

Важным свойством Н. о. является равенство $\|A^n\| = \|A\|^n$, из к-рого следует, что спектральный радиус Н. о. A совпадает с его нормой $\|A\|$. Собственные элементы Н. о., соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Лит.: [1] Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965; [2] Рудин У., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1975.

В. И. Соболев.

НОРМАЛЬНЫЙ ПУЧОК — аналог *нормального расслоения* в теории пучков. Пусть

$$(f, f^{\#}):(Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

— морфизм окольцованных пространств такой, что гомоморфизм $f^{\#}: f^*\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$ сюръективен, и пусть $\mathcal{I} = \operatorname{Ker} f^{\#}$. Тогда $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ есть пучок идеалов в $f^*\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \cong \mathcal{O}_Y$ и поэтому является $\mathcal{O}_Y$-модулем. Пучок $\mathcal{N}^*_{Y/X} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ наз. конормальным пучком морфизма f, а двойственный $\mathcal{O}_Y$-модуль $\mathcal{N}_{Y/X} = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N}^*_{Y/X}, \mathcal{O}_Y)$ — нормальным пучком морфизма f. Эти пучки обычно рассматриваются в следующих частных случаях.

1) X, Y — дифференцируемые (напр., класса C^∞) многообразия, $f: Y \to X$ — погружение. Имеется точная последовательность $\mathcal{O}_Y$-модулей

$$0 \to \mathcal{N}^*_{Y/X} \xrightarrow{\delta} f^*\Omega^1_X \to \Omega^1_Y \to 0,$$

где Ω^1_X, Ω^1_Y — пучки ростков гладких 1-форм на X и Y, а δ определяется дифференцированием функций. Двойственная точная последовательность

$$0 \to \mathcal{T}_Y \to f^*\mathcal{T}_X \to \mathcal{N}_{Y/X} \to 0,$$

где $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{T}_Y$ — касательные пучки на X, Y, показывает, что $\mathcal{N}_{Y/X}$ изоморфен пучку ростков гладких сечений *нормального расслоения* погружения f. Если Y — погруженное подмногообразие, то $\mathcal{N}_{Y/X}$ и $\mathcal{N}^*_{Y/X}$ наз. нормальным и конормальным пучками подмногообразия Y.

2) $(X, \mathcal{O}_X)$ — неприводимая отделимая схема конечного типа над алгебраически замкнутым полем k, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — ее замкнутая подсхема, $f: Y \to X$ — вложение. Тогда $\mathcal{N}_{Y/X}$ и $\mathcal{N}^*_{Y/X}$ наз. нормальным и конормальным пучками подсхемы Y. Имеется также последовательность $\mathcal{O}_Y$-модулей

$$\mathcal{N}^*_{Y/X} \xrightarrow{\delta} \Omega_X \otimes \mathcal{O}_Y \to \Omega_Y \to 0, \qquad (*)$$

где Ω_X, Ω_Y — пучки дифференциалов на X, Y. Пучки $\mathcal{N}^*_{Y/X}$ и $\mathcal{N}_{Y/X}$ квазикогерентны, а если X — нётерова схема, то они когерентны. Если X — неособое многообразие над k, то Y является неособым многообразием тогда и только тогда, когда пучок $\mathcal{N}^*_{Y/X}$ локально свободен или когда в $(*)$ гомоморфизм δ инъективен. В этом случае получается двойственная точная последовательность

$$0 \to \mathcal{T}_Y \to \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{O}_Y \to \mathcal{N}_{Y/X} \to 0,$$

так что Н. п. $\mathcal{N}_{Y/X}$ — локально свободный пучок ранга $r = \operatorname{codim} Y$, отвечающий нормальному расслоению над Y. В частности, если $r = 1$, то $\mathcal{N}_{Y/X}$ — обратимый пучок, отвечающий дивизору Y.

В терминах Н. п. выражается самопересечение $Y \cdot Y$ неособого подмногообразия $Y \subset X$. А именно, $Y \cdot Y = f_* c_r(\mathcal{N}_{Y/X})$, где c_r есть r-й *Чжэня класс*, $f_*: A(Y) \to A(X)$ — гомоморфизм *Чжоу колец*, отвечающий вложению $f: Y \to X$.

3) $(X, \mathcal{O}_X)$ — комплексное пространство, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — его замкнутое аналитич. подпространство, f — вложение. Пучки $\mathcal{N}_{Y/X}$ и $\mathcal{N}^*_{Y/X}$ наз. нормальным и конормальным пучками подпространства Y; они когерентны. Если X — аналитич. многообразие, а Y — его аналитич. подмногообразие, то $\mathcal{N}_{Y/X}$ есть пучок ростков голоморфных сечений нормального расслоения над Y.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Hartshorne R., Algebraic geometry, N. Y.—Hdlb.—B., 1977.

А. Л. Онищик.

НОРМАЛЬНЫЙ РЯД группы — ряд нормальных подгрупп

$$G=H_1\supseteq H_2\supseteq\ldots\supseteq H_n\supset H_{n+1}=\{1\}$$

группы G (см. *Подгрупп ряд*). Если каждый член ряда нормален не во всей группе, а только в предыдущем члене, то такой ряд наз. субнормальным. Кроме конечных рассматриваются также бесконечные убывающие и бесконечные возрастающие нормальные и субнормальные ряды — их члены нумеруются уже порядковыми числами (трансфинитами). Рассматриваются и более общие нормальные и субнормальные системы, члены которых нумеруются элементами упорядоченного множества.

Фактором ряда наз. факторгруппа нек-рого члена ряда по следующему (или предыдущему, если ряд записан в порядке возрастания членов) члену. Длиной ряда наз. количество его факторов, отличных от единицы. Неуплотняемый далее Н. р. наз. главным, а субнормальный — композиционным. Факторы этих рядов наз. соответственно главными и композиционными факторами. Два нормальных (субнормальных) ряда наз. изоморфными, если между их факторами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие друг другу факторы изоморфны. Любые два нормальных (субнормальных) ряда обладают изоморфными уплотнениями. В частности, любые два главных (композиционных) ряда изоморфны (*Жордана — Гёльдера теорема*).

Параллельно существует и другая терминология, а именно: нормальным рядом наз. то, что выше названо субнормальным, а для приведенного здесь понятия «нормальный ряд» используется термин — «инвариантный ряд». *А. Л. Шмелькин.*

НОРМАЛЬНЫЙ ЭПИМОРФИЗМ — морфизм, обладающий характеристич. свойством естественного отображения группы на факторгруппу или кольца на факторкольцо. Пусть $\mathfrak{K}$ категория с нулевыми морфизмами. Морфизм $\nu: A\to V$ наз. нормальным эпиморфизмом, если всякий морфизм $\varphi: A\to Y$, для к-рого из $\alpha\nu=0$, $\alpha: X\to A$, всегда следует $\alpha\varphi=0$, однозначно представим в виде $\varphi=\nu\varphi'$. *Коядро* любого морфизма является Н.э. Обратное утверждение в общем случае неверно, однако при существовании в категории ядер морфизмов всякий Н. э. оказывается коядром. В *абелевой категории* всякий эпиморфизм нормален. Двойственным к понятию Н. э. является понятие *нормального мономорфизма*. *М. Ш. Цаленко.*

НОРМЕННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение $N_{K/k}$ поля K в поле k, где K — конечное расширение поля k, ставящее в соответствие элементу $\alpha\in K$ элемент $N_{K/k}(\alpha)$, являющийся определителем матрицы k-линейного отображения $K\to K$, переводящего $x\in K$ в αx. Элемент $N_{K/k}(\alpha)$ наз. нормой элемента α.

Равенство $N_{K/k}(\alpha)=0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha=0$. Для любых $\alpha,\ \beta\in K$

$$N_{K/k}(\alpha\beta)=N_{K/k}(\alpha)\,N_{K/k}(\beta),$$

т. е. $N_{K/k}$ индуцирует гомоморфизм мультипликативных групп $K^*\to k^*$, к-рый также наз. норменным отображением. Для любого $\alpha\in k$

$$N_{K/k}(\alpha)=\alpha^n,\ \text{где } n=[K:k].$$

Группа $N_{K/k}(K^*)$ наз. норменной подгруппой в k^*, или группой норм (из поля K в поле k). Если $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ — характеристич. многочлен элемента $\alpha\in K$ относительно поля k, то

$$N_{K/k}(\alpha)=(-1)^n a_0.$$

Пусть расширение K/k сепарабельно. Тогда для любого α из K

$$N_{K/k}(\alpha) = \Pi_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha),$$

где σ_i — все k-изоморфизмы поля K в алгебраич. замыкание $\bar{k}$ поля k.

Н. о. обладает свойством транзитивности. Если L/K и K/k — конечные расширения, то

$$N_{L/k}(\alpha) = N_{K/k}(N_{L/K}(\alpha))$$

для любого α из L.

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972.

Л. В. Кузьмин.

НОРМЕННЫЙ ВЫЧЕТ, символ нормен ного вычета, символ Гильберта,— функция, сопоставляющая упорядоченной паре элементов x, y мультипликативной группы K^* нек-рого *локального поля* K элемент $(x, y) \in K^*$, являющийся корнем из единицы. Эта функция может быть определена следующим образом. Пусть $\zeta_n \in K$ — нек-рый первообразный корень степени n из единицы. Максимальное абелево расширение L поля K с группой Галуа $G(L/K)$ показателя n получается присоединением к K корней $\sqrt[n]{a}$ для всех $a \in K^*$. С другой стороны, существует канонич. изоморфизм (основной изоморфизм локальной *полей классов теории*)

$$\theta : K/K^{*n} \to G(L/K).$$

Норменный вычет для пары x, y определяется из соотношения

$$\theta(y)(\sqrt[n]{x}) = (x, y)\sqrt[n]{x}.$$

В частном случае, для квадратичных полей, понятие символа Н. в. было введено Д. Гильбертом (D. Hilbert). Существует явное и использующее только локальную теорию полей классов определение Н. в. [4].

Свойства символа (x, y):

1) билинейность: $(x_1 x_2, y) = (x_1, y)(x_2, y)$, $(x, y_1 y_2) = (x, y_1)(x, y_2)$;

2) кососимметричность: $(x, y)(y, x) = 1$;

3) невырожденность: из $(x, y) = 1$ для всех $x \in K^*$ следует, что $y \in K^{*n}$; из $(x, y) = 1$ для всех $y \in K^*$ следует, что $x \in K^{*n}$;

4) если $x + y = 1$, то $(x, y) = 1$;

5) если σ — автоморфизм поля K, то

$$(\sigma x, \sigma y) = \sigma(x, y);$$

6) пусть K' — конечное расширение поля K, $a \in K'^*$ и $b \in K^*$. Тогда

$$(a, b) = (N_{K'/K}(a), b),$$

где в левой части формулы символ Н. в. рассматривается для поля K', в правой части — для поля K, а $N_{K'/K}$ — *нормменное отображение* из K' в K;

7) из $(x, y) = 1$ следует, что y является нормой из расширения $K(\sqrt[n]{x})$ (это свойство дало название символу).

Функция (x, y) индуцирует невырожденное билинейное спаривание

$$K^*/K^{*n} \times K^*/K^{*n} \to \mu(n),$$

где $\mu(n)$ — группа корней из единицы, порожденная ζ_n. Пусть задано отображение $\Psi : K^* \times K^* \to A$ в некоторую абелеву группу A, удовлетворяющее условиям 1), 4) и условию непрерывности: для любого $y \in K^*$ множество $\{x \in K^* | \Psi(x, y) = 1\}$ замкнуто в K^*. Символ Н. в. обладает следующим свойством универсальности [3]: существует гомоморфизм $\varphi : \mu(n) \to A$ такой, что для любых $x, y \in K^*$

$$\Psi(x, y) = \varphi((x, y)).$$

Это свойство служит основой аксиоматич. определения Н. в.

Если F — *глобальное поле*, а K — пополнение поля F относительно нек-рой точки v, то символом Н. в. называют также функцию $(x, y)_v$, определенную на $F^* \times F^*$, получающуюся композицией (локального) символа Н. в. (x, y) с естественным вложением $F^* \to K^*$.

Иногда символом Н. в. наз. автоморфизм $\theta(x)$ максимального абелева расширения поля K, соответствующий элементу $x \in K^*$ в силу локальной теории полей классов.

Лит.: [1] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [2] Кох Х., Теория Галуа p-расширений, пер. с нем., М., 1973; [3] Милнор Дж., Введение в алгебраическую K-теорию, пер. с англ., М., 1974; [4] Шафаревич И. Р., «Матем. сб.», 1950, т. 26, № 1, с. 113—46. *Л. В. Кузьмин.*

НОРМИРОВАНИЕ, логарифмическое нормирование, оценка поля,— отображение $v: K \to \Gamma_\infty$ поля K в $\Gamma_\infty = \Gamma \cup \{\infty\}$, где Γ — линейно упорядоченная абелева группа, а присоединяемый элемент ∞ считается больше любого элемента из группы Γ и $x + \infty = \infty + x = \infty$ для любого $x \in \Gamma$. При этом Н. должно удовлетворять следующим условиям:

1) $v(0) = \infty$, $v(x) < \infty$ при $x \neq 0$;
2) $v(a \cdot b) = v(a) + v(b)$;
3) $v(a - b) \geqslant \min(v(a), v(b))$.

Образ $K^* = K - \{0\}$ при отображении v является подгруппой группы Γ и называется группой значений нормирования v. Всюду в дальнейшем будет предполагаться, что $v(K^*)$ совпадает с Γ.

Теми же аксиомами определяется логарифмическое нормирование колец. Всякое кольцо с неархимедовым *абсолютным значением* может быть превращено в логарифмически нормированное кольцо, если в группоиде значений перейти от мультипликативной записи к аддитивной и заменить упорядоченность на инверсную. Элемент 0 при этом естественно обозначить символом ∞. Обратный переход от кольца с логарифмическим Н. к кольцу с неархимедовым абсолютным значением также возможен. Если в кольце было задано неархимедово *вещественное нормирование*, то соответствующий переход можно получить, заменяя любое положительное действительное число α числом $-\lg \alpha$. Получающееся при этом логарифмическое Н. также принято называть вещественным.

Нормирования $v_1: K \to \Gamma_\infty^1$ и $v_2: K \to \Gamma_\infty^2$ наз. эквивалентными, если существует такой изоморфизм $\varphi: \Gamma^1 \to \Gamma^2$ упорядоченных групп, что для всех ненулевых элементов $x \in K$

$$v_2(x) = \varphi(v_1(x)).$$

Множество таких элементов x поля K, что $v(x) \geqslant 0$, является подкольцом A поля K и наз. кольцом нормирования v в поле K. Кольцо Н. всегда является *локальным кольцом*. Элементы поля K, для которых $v(x) > 0$, образуют максимальный идеал m_v кольца A; он наз. идеалом нормирования v. Факторкольцо A/m, являющееся полем, наз. полем вычетов нормирования v.

Пусть в поле K заданы Н. v_1 и v_2. Кольца этих Н., рассматриваемые как подкольца поля K, тогда и только тогда совпадают, когда эти Н. эквивалентны. Таким образом, обозрение всех (с точностью до эквивалентности) Н. поля K сводится к обозрению всех таких подколец, которые могут служить для этого поля кольцами Н. Описание таких подколец дает следующая теорема: подкольцо A поля K тогда и только тогда может служить для этого поля кольцом Н., когда для всякого ненулевого элемента $x \in K$, хотя бы один из элементов x, x^{-1} принадлежит к A. Кольцо Н., таким образом, может быть абстрактно определено как це-

лостное кольцо (*область целостности*), удовлетворяющее условию сформулированной выше теоремы по отношению к своему полю частных. Всякое такое кольцо служит кольцом т. н. канонического нормирования для своего поля частных, группой значений канонического Н. является группа K^*/U, где U — мультипликативная группа обратимых элементов кольца A, упорядоченная отношением делимости.

Кольца Н. можно определить еще одним способом. Если $A \subset B \subseteq K$ — два локальных кольца с максимальными идеалами m и n соответственно, то говорят, что B доминирует A, если $m \subset n$. Отношение доминирования является отношением частичного порядка на множестве подколец поля K. Максимальные элементы этого множества и только они являются кольцами Н. поля K. Если A — кольцо Н., а $B \supset A$ — кольцо с тем же полем частных, что и A, то B также кольцо Н. и B является локализацией кольца A по нек-рому простому идеалу.

Примеры нормирований.

1) Нормирование поля, определяемое формулой:

$$v(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0, \\ \infty, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

наз. несобственным, или тривиальным, Н. Таково любое Н. конечного поля. Ему соответствует точка $\mathrm{id} : K \to K$ (тождественное отображение K).

2) Пусть k — нек-рое поле и $K = k((t))$ — поле формальных степенных рядов над k. Сопоставление ряду $a_n t^n + a_{n-1} t^{n+1} + \ldots$, где $a_n \neq 0$, его порядка n (а нулевому ряду — ∞) продолжается до Н. с группой значений $\mathbb{Z}$ (аддитивная группа целых чисел) и кольцом Н. $k[[t]]$. Ассоциированная точка сопоставляет ряду $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$ из $k[[t]]$ свободный член a_0.

Н. со значениями в группе $\mathbb{Z}$ наз. дискретным; о их кольцах Н. см. *Дискретного нормирования кольцо*. Описание всех Н. поля рациональных чисел см. в [4].

Для любой линейно упорядоченной абелевой группы Γ существует Н. некоторого поля, группа значений к-рого изоморфна Γ.

Идеалы колец нормирования. Множество идеалов кольца Н. линейно упорядочено относительно включения, любой идеал конечного типа — главный, т. е. кольцо Н. является *Безу кольцом*. Более полно описание строения идеалов кольца Н. можно дать в терминах группы значений Н.

Подмножество M линейно упорядоченного множества наз. мажорным (или мажорантом), если из соотношений $x \in M$ и $y > x$ следует, что $y \in M$. Пусть A — кольцо Н. v поля K с группой значений Γ, Γ^+ — подполугруппа положительных элементов Γ и M — мажорное множество в Γ^+. Отображение $M \to \alpha(M) = \{x | x \in K, v(x) \in M \cup \{\infty\}\}$ является биективным (взаимно однозначным) отображением множества мажорных подмножеств из Γ^+ на множество идеалов кольца A. При этом главным идеалам соответствуют мажоры, обладающие минимальным элементом. Простым идеалам тоже соответствуют мажоры специального вида, а именно: мажоры вида $M_H = \Gamma^+ - H^+$, где H^+ — положительная часть нек-рой выпуклой подгруппы H группы Γ. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между простыми идеалами A и выпуклыми подгруппами группы значений Γ.

Пусть p — простой идеал, соответствующий выпуклой подгруппе H, тогда композиция отображений $K \xrightarrow{v} \Gamma \to \Gamma/H$ будет Н. поля K с кольцом Н. A_p и идеалом Н. pA_p; кроме того, на поле A_p/pA_p индуцируется Н. со значениями в группе H и кольцом Н. A/p. Тем самым Н. расщепляется на более простые. Пусть A — кольцо Н., тогда простой спектр A без нуля ($\mathrm{Spec}\, A - (0)$) является линейно упорядоченным множеством и его

тип наз. высотой, или рангом, соответствующего Н. Если Spec A конечен, то высота Н. есть число элементов в Spec $A-(0)$, и это число совпадает с числом выпуклых подгрупп группы Γ, отличных от самой Γ. Н. конечного ранга сводятся к Н. ранга 1. Последние характеризуются тем, что их группа значений — *архимедова группа*, т. е. изоморфна нек-рой подгруппе аддитивной группы $\mathbb{R}$ действительных чисел. В этом случае отображение $x \to \exp(-v(x))$ является ультраметрическим абсолютным значением поля K.

Важное свойство колец Н.— целозамкнутость. Более того, для произвольного целостного кольца A его целое замыкание равно пересечению всех колец Н., содержащих A. Кольцо Н. вполне целозамкнуто тогда и только тогда, когда его Н. вещественное, т. е. имеет ранг 1. Кольцо Н. нётерово тогда и только тогда, когда Н. дискретно.

Связь нормирования и топологии. Пусть $v: K \to \Gamma_\infty$ Н. поля K и $V_\gamma = \{x | x \in K,\ v(x) > \gamma\}$, где $\gamma \in \Gamma$. Совокупность всех V_γ, $\gamma \in \Gamma$, образует фундаментальную систему окрестностей нуля топологии τ_v поля K, называемой топологией, определяемой нормированием v. Топология τ_v отделима и несвязна. Топология, индуцируемая τ_v на кольце A, как правило, отлична от топологии локального кольца. Для нетривиального Н. поля K топология τ_v локально компактна тогда и только тогда, когда Н. v дискретно, кольцо Н. полное, а поле вычетов Н. v конечно; кольцо A при этом будет компактно. Пополнение $\hat{K}$ поля K относительно топологии τ_v является полем; Н. v продолжается по непрерывности до Н. $\hat{v}: K \to \Gamma_\infty$, и топология $\hat{K}$ совпадает с $\tau_{\hat{v}}$. Кольцо $\hat{A}$ нормирования $\hat{v}$ является пополнением кольца A нормирования v.

Нормирования v_1 и v_2 поля K наз. независимыми, если топологии τ_{v_1} и τ_{v_2} различны; это эквивалентно тому, что кольца нормирований A_{v_1} и A_{v_2} порождают поле K. Неэквивалентные нормирования высоты 1 всегда независимы. Имеет место теорема аппроксимации для нормирований: пусть $v_i: K \to \Gamma_\infty^i$, $1 \leqslant i \leqslant n$,— независимые нормирования, $a_i \in K$, $\alpha_i \in \Gamma^i$, тогда найдется такой элемент x поля K, что $v_i(x - a_i) \geqslant \alpha_i$ для всех i.

Продолжения нормирований. Если $v': L \to \Gamma'_\infty$ — Н. поля L, а K — подполе L, то ограничение $v = v'|K$ нормирования v' на поле K является Н. поля K, а его группа значений Γ — подгруппой группы Γ'; v' наз. при этом продолжением Н. v. Обратно, если v — Н., а L расширение поля K, то всегда существует Н. поля L, продолжающее v. Индекс $[\Gamma' : \Gamma]$ подгруппы Γ в группе Γ' наз. индексом ветвления Н. v' относительно v и обозначается $e(v'/v)$. Поле вычетов k_v нормирования v отождествляется с подполем поля вычетов $k_{v'}$, степень расширения $[k_{v'} : k_v]$ обозначается $f(v'/v)$ и наз. степенью вычетов Н. v' относительно v. Продолжение v' нормирования v наз. непосредственным, если $e(v'/v) = f(v'/v) = 1$.

Пусть L — расширение поля K, а $\{v_i \mid i \in I\}$ — множество всех продолжений Н. v на L. Если L — конечное расширение поля K степени n, то множество всех продолжений v конечно, и

$$\sum_{i \in I} e(v_i/v)\, f(v_i/v) \leqslant n.$$

В ряде случаев это неравенство можно заменить на равенство, напр. когда v дискретно и либо K полно, либо L сепарабельно над K. Если L — нормальное расширение K, то продолжения v на L переводятся друг в друга K-автоморфизмами L, в частности если L — радикальное расширение K, то v имеет единствен-

ное продолжение. В случае произвольного бесконечного расширения $K \subset L$ или продолжения v' нормирования v степень трансцендентности L над K больше или равна сумме

$$S(v'/v)+r(v'/v),$$

где $S(v'/v)$ — степень трансцендентности расширения поля вычетов v' над полем вычетов v, а $r(v'/v)$ — размерность пространства $(\Gamma_{v'}/\Gamma_v)\otimes\mathbb{Q}$.

Понятие «Н.» ввел и изучил В. Крулль [1]. Это понятие широко используется также в алгебраич. геометрии. Так, в терминах «колец Н.» строится абстрактная риманова поверхность поля (см. [3]).

Лит.: [1] Krull W., «J. reine und angew. Math.», 1932, Bd 167, S. 160—96; [2] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [3] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [4] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973.

В. И. Данилов.

НОРМИРОВАННАЯ АЛГЕБРА — алгебра над полем действительных или комплексных чисел, являющаяся одновременно *нормированным пространством*, умножение в к-рой подчиняется определенным условиям непрерывности. Простейшее из таких условий — раздельная непрерывность. Раздельная непрерывность, вообще говоря, слабее непрерывности по совокупности сомножителей. Если, напр., на множестве всех финитных последовательностей $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, \ldots)$ алгебраич. операции задать покоординатно, а норму — формулой $\|x\|=\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|k^{-2}$, то возникает алгебра, в к-рой умножение раздельно непрерывно, но не непрерывно по совокупности. Непрерывность умножения в Н. а. по совокупности сомножителей равносильна существованию такой константы C, что $\|xy\|\leqslant C\|x\|\|y\|$. В этом и только в этом случае пополнение обладает структурой Н. а., расширяющей исходную, и является *банаховой алгеброй*.

Е. А. Горин.

НОРМИРОВАННАЯ СИСТЕМА — система $\{x_i\}$ элементов банахова пространства B, нормы к-рых равны единице, т. е. $\|x_i\|_B=1$. В частности, система $\{f_i(x)\}$ функций, принадлежащих пространству $L^2[a, b]$, наз. Н. с., если

$$\int_a^b f_i^2(x)\,dx=1.$$

Нормирование в банаховом пространстве B системы $\{x_i\}$ отличных от нуля элементов этого пространства означает определение нормированной в B системы вида $\{\lambda_i x_i\}$, где λ_i — отличные от нуля числа, наз. нормирующими множителями. В качестве последовательности нормирующих множителей можно взять $\lambda_i=1/\|x_i\|_B$.

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [2] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977.

А. А. Талалян.

НОРМИРОВАННОЕ КОЛЬЦО — 1) то же, что нормированная или *банахова алгебра*.

2) Кольцо с заданным на нем *нормированием*.

НОРМИРОВАННОЕ ПОЛЕ — поле, на к-ром задано *нормирование* (см. также *Абсолютное значение* на теле).

НОРМИРОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО — *векторное пространство* над полем действительных и комплексных чисел с отмеченной *нормой*.

Е. А. Горин.

НОСИТЕЛЬ МЕРЫ μ — множество $S(\mu)=G\setminus G_0(\mu)$, где G — локально (би) компактное пространство, на к-ром определена мера μ, $G_0(\mu)$ — наибольшее открытое множество, для к-рого $\mu(G_0)=0$. Другими словами, $S(\mu)$ — наименьшее замкнутое множество, на к-ром сосредоточена мера μ (при этом μ сосредоточена на E, если $\mu(G\setminus E)=0$). Если $S(\mu)$ компакт, то мера μ наз. финитной.

М. И. Войцеховский.

НОСИТЕЛЬ МОДУЛЯ M над коммутативным кольцом A — множество всех простых идеа-

лов $\mathfrak{g}$ кольца A, для к-рых локализованные модули $M_{\mathfrak{g}}$ ненулевые. Это множество обозначается Supp (M). Оно является подмножеством спектра кольца. Напр., для конечной абелевой группы M, рассматриваемой как модуль над кольцом целых чисел, Supp (M) состоит из всех простых идеалов (p), где p делит порядок M. Для произвольного модуля M множество Supp (M) пусто тогда и только тогда, когда $M=0$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *Л. В. Кузьмин.*

НОСИТЕЛЬ ФУНКЦИИ f — наименьшее замкнутое множество $S=\operatorname{supp} f\subset X$ такое, что значения числовой функции f, определенной на топологич. пространстве X, равны нулю всюду на дополнении $CS=X\setminus S$. Иначе, S есть замыкание множества всех точек $x\in X$, в к-рых $f(x)\neq 0$. *Е. Д. Соломенцев.*

НУЛЕВОЙ ОБЪЕКТ категории — такой объект (обозначаемый обычно 0), что для каждого объекта X этой категории множества $H(X, 0)$ и $H(0, X)$ одноэлементны. Н. о., если он существует в данной категории, определен однозначно с точностью до изоморфизма. В категории множеств с отмеченной точкой Н. о. является одноэлементное множество, в категории групп — единичная группа, в категории модулей — нулевой модуль и т. д. Не всякая категория содержит Н. о., но его всегда можно формально присоединить к любой заданной категории. Всякая категория с Н. о. есть категория с нулевыми морфизмами. *М. Ш. Цаленко.*

НУЛЬ — 1) Число, обладающее тем свойством, что любое (действительное или комплексное) число при сложении с ним не меняется. Обозначается символом 0. Произведение любого числа на Н. равно Н.:

$$a\cdot 0=0\cdot a=0.$$

Если произведение двух чисел равно Н., то один из сомножителей равен Н. (т. е. из $ab=0$ следует, что или $a=0$, или $b=0$). Деление на Н. не определено. Непосредственным обобщением этого понятия является понятие Н. абелевой группы.

2) Н. абелевой группы — элемент абелевой группы A (в аддитивной записи), также обозначаемый символом 0 и удовлетворяющий аксиоме $0+a=a$ для всех $a\in A$. Н. абелевой группы определен однозначно.

3) Н. кольца (в частности, тела, поля) — Н. его аддитивной группы. Н. кольца (как и число 0) относительно операции умножения обладает свойством поглощения: $a\cdot 0=0\cdot a=0$. Однако в произвольном кольце произведение двух ненулевых элементов может быть равно Н. Такие элементы наз. *делителями нуля.* Поля, тела и области целостности делителей Н. не имеют.

4) Левый Н. полугруппы A (в мультипликативной записи) — элемент $0\in A$, удовлетворяющий аксиоме $0\cdot a=0$ для всех $a\in A$. Правый Н. определяется двойственной аксиомой. Двусторонний Н. (т. е. левый и правый одновременно) в полугруппе может быть только один. Н. кольца является также Н. мультипликативной полугруппы этого кольца.

5) Н. решетки — наименьший элемент этой решетки. Полная решетка всегда обладает Н., он — пересечение всех ее элементов.

6) Н. алгебраической системы — элемент, отмечаемый нульарной операцией (см. *Алгебраическая операция*, *Алгебраическая система*). В большинстве рассмотренных выше примеров Н. является единственным в данной системе и даже образует нулевую подсистему.

Н. наз. также нулевым элементом.

7) Н. категории — см. в ст. *Нулевой объект* категории.

8) Н. функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, принимающей значения в нек-рой абелевой группе (кольце, поле, теле)

A, — набор значений переменных $(x_1, \ldots, x_n)$, при к-ром $f(x_1, \ldots, x_n)=0$. *О. А. Иванова, Л. В. Кузьмин.*

НУЛЬ — ЕДИНИЦА ЗАКОН — утверждение в теории вероятностей о том, что всякое событие (т. н. «остаточное событие»), наступление к-рого определяется лишь сколь угодно удаленными элементами последовательности независимых случайных событий или случайных величин, имеет вероятность нуль или единица. Этот закон распространяется на системы случайных величин, зависящих от непрерывного параметра (см. ниже).

Для отдельных остаточных событий равенство их вероятностей нулю или единице было установлено в нач. 20 в. Так, если $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — нек-рая последовательность независимых событий, то для остаточного события A, состоящего в том, что наступает бесконечно много событий A_k:

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

обязательность одного из равенств

$$P(A)=0 \text{ или } P(A)=1$$

была отмечена Э. Борелем [1]. Простым подсчетом было показано, что

$$P(A)=0, \text{ если } \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$

и

$$P(A)=1, \text{ если } \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$$

(см. *Бореля — Кантелли лемма*).

Далее, если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, то вероятность сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ может быть равна только нулю или единице; этот факт (одновременно с критерием, позволяющим различать эти два случая) был установлен А. Н. Колмогоровым (1928, см. [2], [5]).

Изучались и остаточные события, связанные с аналитич. свойствами сумм функциональных рядов, напр. степенных рядов со случайными членами. Так, расплывчатому утверждению Э. Бореля (1896) о том, что при «произвольных коэффициентах» граница круга сходимости степенного ряда является естественной границей представляемой им аналитич. функции, была придана Х. Штейнхаузом [3] следующая точная форма. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — независимые равномерно распределенные на $(0, 1)$ случайные величины, a_k — заданные числа и пусть ряд

$$f(z; X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i X_k} z^{k-1}$$

имеет радиус сходимости $R>0$; тогда (остаточное) событие, состоящее в том, что функция f не продолжима через границу круга $|z|\leqslant R$, имеет вероятность, равную единице. Б. Йессен [4] доказал, что любое остаточное событие, связанное с последовательностью независимых равномерно распределенных на $(0, 1)$ случайных величин, имеет вероятность, равную нулю или единице.

Общая теорема о вероятностях, равных нулю или единице, была сформулирована А. Н. Колмогоровым (см. [5]) следующим образом. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — какая-либо последовательность случайных величин, а $f(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ — бэровская функция переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ такая, что условная вероятность

$$\mathsf{P}\{f(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)=0 \mid X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

соотношения

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)=0$$

при известных n первых величинах $X_1, X_2, \ldots, X_n$ остается равной абсолютной (безусловной) вероятности

$$\mathsf{P}\{f(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)=0\} \qquad (*)$$

для каждого n. При этих условиях вероятность (*) равна нулю или единице. Для независимых $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ отсюда вытекает Н.—е. з., как он сформулирован в начале статьи.

Указанная теорема Колмогорова вытекает, как показал П. Леви (1937, см. [6]), из более общего свойства условных вероятностей, состоящего в том, что

$$\lim \mathsf{P}\{f(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)=0 \mid X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

почти наверное равен или единице или нулю (в соответствии с тем, будет ли $f(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)=0$ или нет). В свою очередь, это утверждение вытекает из теорем о мартингалах (см. [7] гл. III, § 1; гл. VII, §§ 4,5,7 и комментарии к ним; в § 11 имеется аналог Н.— е. з. для случайных процессов с независимыми приращениями; из него вытекает, в частности, что выборочные функции сепарабельного гауссовского процесса с непрерывной корреляционной функцией с вероятностью 1 непрерывны в каждой точке либо с вероятностью 1 имеют разрыв второго рода в каждой точке, см. [8]).

Для специального случая последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимых и одинаково распределенных случайных величин было показано (см. [9]), что вероятность не только любого остаточного, но и любого инвариантного относительно перестановок конечного числа членов последовательности события равна нулю или единице.

Лит.: [1] Borel E., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1909, v. 27, p. 247—71; [2] Колмогоров А. Н., «Math. Ann.», 1928, Bd 99, S. 309—19; [3] Steinhaus H., «Math. Z.», 1929, Bd 31, S. 408—16; [4] Jessen B., «Acta math.», 1934, v. 63, p. 249—323; [5] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [6] Levy P., Théorie de l'addition des variable aléatoires, 2 éd., P., 1954; [7] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [8] Добрушин Р. Л., «Теория вероятн. и ее применения», 1960, т. 5, № 1, с. 132—34; [9] Hewitt E., Savage L. J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1955, v. 80, № 2, p. 470—501.

А. В. Прохоров, Ю. В. Прохоров.

НУЛЬМЕРНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — непрерывное отображение $f: X \to Y$ (X, Y — топологич. пространства) такое, что $f^{-1}(y)$ — нульмерное множество (в смысле ind) для всякого $y \in Y$. Применение Н. о. и близких к ним позволяет свести исследование данного пространства к изучению другого, более простого. Так, многие размерностные свойства и другие кардинальнозначные инварианты переходят от X к Y (или, чаще, от Y к X).

Пример 1. Всякое метрич. пространство X с $\dim X \leqslant n$ допускает вполне Н. о. в пространство Y со счетной базой, причем $\dim Y \leqslant n$ (теорема Катетова). При этом полная нульмерность означает, что для любого $\varepsilon>0$ и любого $y \in f(X)$ существует окрестность $U_y \subset Y$, прообраз $f^{-1}(U_y)$ к-рой распадается в дискретную в X систему открытых в X множеств диаметра $<\varepsilon$.

Пример 2. Если Н. о. $f: X \to Y$, где X — нормальное локально связное пространство, является *совершенным отображением*, то вес X совпадает с весом Y.

Лит.: [1] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973.

М. И. Войцеховский.

НУЛЬМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО в смысле ind — пространство, обладающее базой из множеств одновременно открытых и замкнутых в нем. Каждое *дискретное пространство* нульмерно, однако Н. п. может не иметь изолированных точек (пример — пространство рациональных чисел $\mathbb{Q}$). Все нульмерные пространства вполне регулярны. Нульмерность пространства наследуется его подпространствами и влечет сильную несвязность пространства: единственными связными множествами в Н. п. являются одноточечное

и пустое. Однако последнее свойство, наз. вполне несвязностью, не равносильно нульмерности. Существуют ненульмерные пространства, в к-рых каждая точка представима в виде пересечения нек-рого семейства открыто-замкнутых множеств, но среди таких пространств нет бикомпактов.

Иногда нульмерность пространства понимается более узко. Пространство наз. нульмерным в смысле dim, если во всякое его конечное открытое покрытие можно вписать открытое покрытие, элементы к-рого не пересекаются. Пространство наз. нульмерным в смысле Ind, если любая окрестность любого его замкнутого подмножества содержит открыто-замкнутую окрестность этого подмножества. В классе T_1-пространств нульмерность в смысле ind вытекает как из нульмерности в смысле dim, так и из нульмерности в смысле Ind. В классе *метризуемых пространств* со счетной базой, а также в классе бикомпактов указанные три определения нульмерности равносильны. Для всех метризуемых пространств нульмерность в смысле dim равносильна нульмерности в смысле Ind, однако известен пример нульмерного в смысле ind метризуемого пространства, к-рое не нульмерно в смысле Ind. Ни нульмерность в смысле dim, ни нульмерность в смысле Ind не наследуется, вообще говоря, подпространствами. Среди T_1-пространств Н. п. в смысле ind характеризуются с точностью до гомеоморфизма как подпространства обобщенных канторовых дисконтинуумов D^τ — произведений *двоеточий*. Любые *вполне регулярные пространства* можно получить как образы Н. п. при достаточно хороших отображениях, напр. при *совершенных отображениях* и при непрерывных *открытых отображениях* с бикомпактными прообразами точек. Однако непрерывные отображения, открытые и замкнутые одновременно, сохраняют нульмерность в смысле ind и в смысле Ind. Неизвестно (1981), каждое ли вполне регулярное пространство содержит всюду плотное нульмерное подпространство.

Лит.: [1] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности..., М., 1973.

А. В. Архангельский.

НУЛЬ-СИСТЕМА — инволюционная корреляция n-мерного проективного пространства, оператор к-рой является антисимметричным. Пусть Н.-с. имеет вид

$$'u = Ax,$$

тогда скалярное произведение $'ux$, равное

$$(x, Ax) = -(x, Ax),$$

обращается в нуль.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Многомерные пространства, М., 1966.

Д. Д. Соколов.

НУМЕРАЦИЯ — основное понятие раздела теории алгоритмов — теории нумераций, изучающей общие свойства классов объектов, занумерованных с помощью каких-либо *конструктивных объектов*. В роли конструктивных объектов, служащих номерами элементов рассматриваемых классов, чаще всего выступают натуральные числа.

Идея Н. объектов нечисловой природы (напр., логич. формул) натуральными числами и перенесение содержательных утверждений об этих объектах в область формальной арифметики натуральных чисел впервые были использованы К. Гёделем (K. Gödel) при доказательстве *Гёделя теоремы о неполноте* арифметики Пеано. В дальнейшем эти идеи были использованы для Н. фундаментальных объектов теории алгоритмов таких, как *Тьюринга машин*, *частично рекурсивных функций* и рекурсивно перечислимых множеств. Наделение этих классов объектов подходящими Н. позволило во многих случаях выяснить более отчетливо природу этих объектов, выявить ряд их важных и новых свойств. Так возникла идея о систематич. изучении Н. произвольных множеств. При реализации этой идеи

было замечено, что многие известные результаты теории алгоритмов оказываются следствиями общих закономерностей теории Н. (о построении теории Н., создании ее специфич. понятий и методов, о формировании перспективных направлений в теории Н. см. [1] — [4]). В частности, был плодотворно использован язык теории *категорий*, позволивший взглянуть на проблематику теории Н. с новой точки зрения (см. [4]).

Нумерованным множеством наз. пара $\mathfrak{A}=\langle A, \nu\rangle$, где A — нек-рое счетное множество, а ν — некоторое отображение множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ на A. Отображение ν наз. нумерацией множества A. Если $\nu(n)=a$, то n наз. номером объекта a при нумерации ν. Н. ν_1 множества A сводится к Н. ν_2 множества A (отношение сводимости Н. обозначается $\leqslant$), если существует одноместная общерекурсивная функция f такая, что $\nu_1(n)=\nu_2(f(n))$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Нумерации ν_1 и ν_2 множества A наз. эквивалентными, если $\nu_1\leqslant\nu_2$ и $\nu_2\leqslant\nu_1$. С точки зрения теории Н. эквивалентные Н. одного и того же множества неразличимы. По этой причине объектом исследования обычно является множество $L(A)$ — множество классов эквивалентных Н. множества A, частично упорядоченное отношением сводимости Н. $\leqslant$. Часто рассматривается и множество $L(A, \nu)$ — множество классов эквивалентных Н. множества A, сводящихся к Н. ν. Множества $L(A)$ и $L(A, \nu)$ во многих случаях служат нек-рой «мерой сложности» множества A.

При сравнении Н. двух множеств A и B основным понятием является понятие морфизма. Морфизмом из нумерованного множества $\mathfrak{A}=\langle A, \nu_1\rangle$ в нумерованное множество $\mathfrak{B}=\langle B, \nu_2\rangle$ наз. всякое отображение μ из A в B, для к-рого существует одноместная общерекурсивная функция f такая, что $\mu\nu_1(n)=\nu_2(f(n))$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Через $\mathrm{Mor}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ обозначают множество всевозможных морфизмов из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. С изучением множеств Mor, в частности с выяснением возможности наделения этого множества «хорошими» Н., тесно связаны многие вопросы общей теории алгоритмов.

Категория $\mathfrak{N}$ нумерованных множеств состоит из нумерованных множеств и морфизмов. Исследование свойств этой категории $\mathfrak{N}$ является основной задачей теории Н. Исходным пунктом такого исследования часто является изучение связей нумерованных множеств с важнейшими конкретными Н. — нумерацией Клини φ всех одноместных частично рекурсивных функций и нумерацией Поста π всех рекурсивно перечислимых множеств. В теории алгоритмов доказано существование двуместной частично рекурсивной функции $U(x, y)$, универсальной для класса всех одноместных частично рекурсивных функций, т. е. такой, что для любой частично рекурсивной функции $f(x)$ можно найти число a такое, что $f(x)=U(a, x)$. Нумерация Клини φ задается тогда следующим образом: $\varphi_x(y)=U(x, y)$. Если π_x обозначает область значений функции φ_x, то получаем нумерацию Поста π всех рекурсивно перечислимых множеств.

Фундаментальную роль при исследовании категории $\mathfrak{N}$ играет введенное А. И. Мальцевым понятие полной Н., к-рое в самой общей форме синтезировало главные свойства нумераций Клини φ и Поста π. Н. ν множества A наз. полной, если среди элементов множества A имеется такой выделенный элемент a, что для любой одноместной частично рекурсивной функции f существует одноместная общерекурсивная функция h такая, что

$$\nu h(x)=\begin{cases}\nu f(x), & \text{если значение } f(x) \text{ определено,}\\ a & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Полные Н. играют роль «инъективных» элементов категории $\mathfrak{N}$ и наличие у A полных Н. свидетельствует

о значительной универсальности и важности класса объектов A. В частности, и нумерация Клини φ частично рекурсивных функций, и нумерация Поста π рекурсивно перечислимых множеств суть полные Н. (в первом случае выделенным элементом a является нигде не определенная функция, а во втором — пустое множество). Важным направлением в исследовании категории $\mathfrak{N}$ является также выделение и изучение различных видов подобъектов нумерованных множеств (см. [4]).

Часть теории Н., связанная с изучением нумераций Клини и Поста, а также их подобъектов, наиболее разработана, т. к. в этих случаях использование методов теории алгоритмов наиболее эффективно. Здесь в первую очередь изучаются т. н. вычислимые Н. Если множество A, напр., является семейством рекурсивно перечислимых множеств, то Н. ν этого семейства наз. в ы ч и с л и м о й, если отношение $x \in \nu(y)$ само является рекурсивно перечислимым. Множество классов эквивалентных вычислимых Н. семейства A обозначают $L^\circ(A)$. Это множество, как и $L(A)$, частично упорядочивается отношением сводимости Н. $\leqslant$. Максимальный элемент множества $L^\circ(A)$, если он существует, наз. г л а в н о й в ы ч и с л и м о й н у м е р а ц и е й семейства A. В частности, нумерации Клини и Поста являются главными вычислимыми Н. для соответствующих семейств Φ (всех одноместных частично рекурсивных функций) и P (всех рекурсивно перечислимых множеств). Большое число работ в теории Н. посвящено изучению множеств $L^\circ(\Phi)$ и $L^\circ(P)$. При этом нужно учесть, что многие свойства частично рекурсивных функций и рекурсивно перечислимых множеств, выявленные в теории алгоритмов, по существу являются отражениями алгебраич. свойств множеств $L^\circ(\Phi)$ и $L^\circ(P)$. Так, напр., легко укладываются в схему теории Н. изучаемые в теории алгоритмов и играющие там важную роль так наз. m-степени множеств. Если рассматривать семейство A, состоящее всего из двух множеств $\varnothing$ и $\{0\}$, то m-с т е п е н и м н о ж е с т в есть не что иное, как $L(A)$, а m-с т е п е н и р е к у р с и в н о п е р е ч и с л и м ы х м н о ж е с т в суть $L^\circ(A)$. Имеется полное алгебраич. описание устройства множеств $L(A)$ и $L^\circ(A)$ (см. [4]).

Пусть A — нек-рое семейство рекурсивно перечислимых множеств (для частично рекурсивных функций рассматриваемые понятия вводятся аналогично). И н д е к с н ы м (или н о м е р н ы м) м н о ж е с т в о м семейства A наз. множество

$$\theta A = \{x \mid \pi_x \in A\}$$

номеров рекурсивно перечислимых множеств семейства A в нумерации Поста. В теории Н. изучаются индексные множества θA для различных семейств A. Так, теорема Райса — Шапиро дает описание тех семейств A, для к-рых множество θA рекурсивно перечислимо. Такие семейства в теории Н. носят название в п о л н е п е р е ч и с л и м ы х к л а с с о в. Даны также описания других видов подобъектов нумерации Поста — специальных стандартных классов, факторизаций и ретрактов. Большую роль играют т. н. стандартные классы.

Семейство S рекурсивно перечислимых множеств наз. с т а н д а р т н ы м к л а с с о м, если существует общерекурсивная функция f такая, что: $S = \{\pi(f(0)), \pi(f(1)), \ldots\}$; при этом, если $\pi(x) \in S$, то $\pi(x) = \pi(f(x))$. Стандартные классы тесно связаны с полными Н. В настоящее время (1982) нет удовлетворительного описания стандартных классов. Такое описание могло бы пролить свет на многие вопросы теории алгоритмов. В теории Н. также рассматривались главные, эффективно-главные и другие виды подобъектов нумерации Поста (см. [4]).

Алгоритмич. аналогом понятия *алгебраической системы*, т. е. множества с заданными на нем функциями

и предикатами, является понятие нумерованной, или конструктивной, алгебраической системы. Идея состоит в следующем. Рассматриваемое множество A наделяется Н. Вместо функций и предикатов, заданных на объектах множества A, рассматриваются «переводы» этих функций и предикатов, оперирующие соответствующим образом с натуральными числами как с номерами объектов множества A. Если при этом можно добиться того, чтобы эти «переводы» функций и предикатов были общерекурсивными, то говорят, что данная алгебраич. система конструктивизируема. Первое систематич. изучение теории конструктивных алгебраич. систем было предпринято А. И. Мальцевым [3].

Следует отметить два наиболее ярких применения теории Н. к задачам теории алгоритмов: завершение построения теории Майхилла об универсальных объектах и построение теории вычислимых функционалов конечных типов (см. [4]). Методы и результаты теории Н. могут быть использованы в смежных к математич. логике и теории алгоритмов науках, в частности в программировании. Так, с помощью теории Н. могут быть решены нек-рые вопросы семантики языков программирования.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [2] его же, «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 3, с. 3—60; [3] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [4] Ершов Ю. Л., Теория нумераций, М., 1977.

И. А. Лавров.

НУМЕРИЧЕСКИ ВЫРАЗИМЫЙ ПРЕДИКАТ — арифметический предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$, обладающий по отношению к данной *формальной системе* S арифметики следующим свойством: существует такая формула $F(x_1, \ldots, x_n)$ в языке *арифметики формальной*, что для любых натуральных чисел $k_1, \ldots, k_n$

1) если $P(k_1, \ldots, k_n)$ истинно, то $\vdash_S F(k_1, \ldots, k_n)$,

2) если $P(k_1, \ldots, k_n)$ ложно, то $\vdash_S \neg F(k_1, \ldots, k_n)$,

где $\vdash_S$ означает выводимость в системе S, а $F(k_1, \ldots, k_n)$ — результат подстановки в формулу $F(x_1, \ldots, x_n)$ вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ — термов, изображающих числа $k_1, \ldots, k_n$. В этом случае говорят, что формула $F(x_1, \ldots, x_n)$ нумерически выражает предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$. Для формальной системы S арифметики имеет место утверждение: в S нумерически выразимы все рекурсивные предикаты и только они.

n-местная арифметич. функция f наз. нумерически представимой в формальной системе S арифметики, если существует такая арифметич. формула $F(x_1, \ldots, x_n, y)$, что для любых натуральных чисел $k_1, \ldots, k_n, l$

1) если $f(k_1, \ldots, k_n) = l$, то $\vdash_S F(k_1, \ldots, k_n, l)$,

2) $\vdash_S \exists y F(k_1, \ldots, k_n, y) \,\&\, \forall x \forall y (F(k_1, \ldots, k_n, x) \,\&\, F(k_1, \ldots, k_n, y) \supset x = y)$.

В обычных формальных системах арифметики нумерически представимы все *общерекурсивные функции* и только они.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

В. Е. Плиско.

НУМЕРОВАННАЯ МОДЕЛЬ — пара $(\mathfrak{M}, \nu)$, где $\mathfrak{M}$ — модель нек-рой фиксированной сигнатуры σ_0 и ν — *нумерация* основного множества M модели $\mathfrak{M}$. Наиболее развитым направлением в изучении Н. м. является *конструктивных моделей теория*. Другим направлением в теории Н. м. является исследование проблемы сложности Н. м., под к-рой понимается сложность множеств натуральных чисел $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \nu))$, либо множества $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}_0(\mathfrak{M}, \nu))$. В качестве γ здесь берется нек-рая гёделева нумерация всех формул сигнатуры $\sigma \leftrightarrows \sigma_0 \cup \{c_0, \ldots, c_n, \ldots\}$, где константы c_n не принадлежат сигнатуре σ_0, а $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \nu)$ — это множество всех замкнутых формул сигнатуры σ истинных на системе $\mathfrak{M}_\nu$, к-рая получается из системы $\mathfrak{M}$ обо-

тащением сигнатуры σ_0 до σ, причем значение константы c_n полагает равным элементу $\nu(n)$, а $\mathrm{Th}_0(\mathfrak{M}, \nu)$ означает соответственно, множество всех бескванторных предложений, истинных на системе $\mathfrak{M}_\nu$.

Различные специальные модели *элементарных теорий* играют важную роль в математич. логике и алгебре. Один из важных вопросов — проблема их сложности. Получены следующие результаты. Пусть Σ_n^A, Π_n^A, Δ_n^A и $\Sigma_n^{1,A}$, $\Pi_n^{1,A}$, $\Delta_n^{1,A}$ обозначают соответственно арифметическую и аналитическую *иерархии* относительно множества A.

Если теория T рекурсивна относительно A и имеет простую модель $\mathfrak{M}$, то существует нумерация ν модели $\mathfrak{M}$ такая, что $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \nu)) \in \Delta_2^A$, то есть $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \nu))$ рекурсивно относительно множества A' всех гёделевых номеров x таких вычислимых относительно A функций φ_x^A, для к-рых $\varphi_x^A(x)$ определено.

Если теория T рекурсивна относительно A и имеет счетную насыщенную модель $\mathfrak{M}$, то существует нумерация ν модели $\mathfrak{M}$ такая, что $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, 0)) \in \Delta_1^{1,A}$, то есть $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \nu))$ есть гиперарифметич. множество относительно A; эти оценки сложности являются в нек-ром смысле точными.

С нахождением точной оценки связан также следующий результат. Известно, что любая непротиворечивая формула имеет Н. м. $(\mathfrak{M}, \nu)$ сложности Δ_2^0, т. е.

$$\gamma^{-1}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \nu)) \in \Delta_2^0.$$

Иерархия Ершова дает более тонкую классификацию множеств из Δ_2^0. Доказана теорема: для любого n существует непротиворечивая формула φ_n, не имеющая Н. м. $(\mathfrak{M}, \nu)$ с предикатами из Σ_n^{-1}, то есть $\nu^{-1}(P_i) \in \Sigma_n^{-1}$ и $\mathfrak{M} \vdash \varphi_n$, где $\sigma_0 = \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$. В конструктивной безатомной булевой алгебре $(\mathfrak{M}, \nu)$ построен рекурсивно перечислимый идеал I (т. е. множество $\nu^{-1}(I)$ рекурсивно перечислимо) такой, что булева алгебра $\mathfrak{M}/I$ не конструктивизируема. Это позволило доказать нерекурсивную представимость решетки рекурсивно перечислимых множеств.

Исследование нумерованных линейных порядков позволило опровергнуть гипотезу сильной однородности для тьюринговых степеней.

Лит.: [1] Гончаров С. С., Дроботун Б. Н., «Сиб. матем. ж.», 1980, т. 21, № 2, с. 25—41; [2] Денисов С. Д., «Алгебра и логика», 1972, т. 11, № 6, с. 648—55; [3] Дроботун Б. Н., «Сиб. матем. ж.», 1977, т. 18, № 5, с. 1002—14; [4] Ершов Ю. Л., Теория нумераций, М., 1977; [5] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [6] Feiner L., «J. Symbol. Logic», 1970, v. 35, p. 365—74; [7] его же, там же, p. 375—77.

С. С. Гончаров

НУССЕЛЬТА ЧИСЛО — безразмерный параметр, характеризующий интенсивность конвективного теплообмена между поверхностью тела и потоком газа (жидкости): $\mathrm{Nu} = \alpha l/\lambda$, где $\alpha = Q/\Delta T S$ — коэффициент теплообмена, Q — количество тепла, отдаваемого (или получаемого) поверхностью тела в единицу времени, $T\Delta > 0$ — разница между температурой поверхности тела и температурой газа (жидкости) вне пограничного слоя, S — площадь поверхности, l — характерный размер, λ — коэффициент теплопроводности газа.

Н. ч. наз. по имени В. Нуссельта (W. Nusselt).

БСЭ-3.

НЬЮТОНА БИНОМ — формула разложения произвольной натуральной степени двучлена в многочлен, расположенный по степеням одного из слагаемых двучлена:

$$(z_1 + z_2)^m = z_1^m + \frac{m}{1!} z_1^{m-1} z_2 + \frac{m(m-1)}{2!} z_1^{m-2} z_2^2 + \ldots$$

$$\ldots + z_2^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k z_1^{m-k} z_2^k, \qquad (*)$$

где $C_m^k = m!/k!(m-k)!$ — *биномиальные коэффициенты*. Для n слагаемых формула (*) принимает вид

$$(z_1 + \ldots + z_n)^m = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=m} \frac{m!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}\, z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n}.$$

При произвольном показателе m, действительном или даже комплексном, в правой части (*) получается, вообще говоря, *биномиальный ряд*.

Постепенное освоение формулы Н. б., начинавшееся с ее простейших частных случаев (формул «квадрата суммы» и «куба суммы»), прослеживается уже с 11 в. Заслуга И. Ньютона (I. Newton), собственно говоря, состоит в открытии биномиального ряда.

Е. Д. Соломенцев.

НЬЮТОНА ДИАГРАММА, многоугольник Ньютона,— выпуклая ломаная, введенная И. Ньютоном (I. Newton) в 1669 (см. [1]) для определения показателей главных членов алгебраич. функций. Процесс последовательного нахождения членов разложения алгебраич. функции с помощью Н. д. носит название метода диаграммы Ньютона. Более подробно метод Н. д. был разработан В. Пюизё [2], и в математич. литературе Н. д. иногда наз. диаграммой Пюизё. Алгебраич. вариант Н. д. задолго до В. Пюизё был исследован Ж. Лагранжем [3].

Пусть $F(x, y)$ — псевдомногочлен относительно y, т. е.

$$F(x, y) = \sum_{s=0}^{n} F_s(x)\, y^s,$$

где

$$F_s(x) = x^{\rho_s} \sum_{r=0}^{\infty} F_{rs} x^{r/p},$$

x, y — комплексные переменные, F_{rs} — комплексные числа, p — натуральное число, ρ_s — неотрицательные рациональные числа, $F_n(x) \not\equiv 0$, $F_0(x) \not\equiv 0$. Обычно считается, что если $F_s(x) \not\equiv 0$, то $F_{0s} \neq 0$, а значит $F_{00} \neq 0$, $F_{0n} \neq 0$. Решения $y = y(x)$ уравнения

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

ищутся в виде ряда

$$y = y_\varepsilon x^\varepsilon + y_{\varepsilon'} x^{\varepsilon'} + y_{\varepsilon''} x^{\varepsilon''} + \ldots, \qquad (2)$$

где $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' < \ldots$ или, короче, $y = y_\varepsilon x^\varepsilon + z$, где $z = o(x^\varepsilon)$ при $x \to 0$. Для определения возможных значений ε и y_ε подставляется (2) в (1), собираются члены с одинаковыми степенями x и приравниваются нулю коэффициенты при этих степенях.

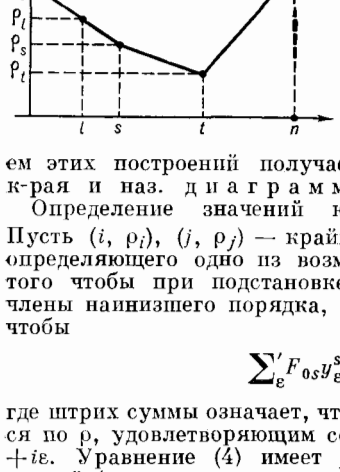
Процесс начинается с члена наинизшей степени. Пока показатель ε не определен, нельзя сказать, какие из полученных членов будут наинизшими по x. Однако члены наинизшего порядка содержатся среди следующих:

$$F_{00} x^{\rho_0},\ F_{0k} y_\varepsilon^k x^{\rho_k + k\varepsilon},\ F_{0n} y_\varepsilon^n x^{\rho_n + n\varepsilon}, \qquad (3)$$

где k пробегает те из значений $1, 2, \ldots$, для к-рых $F_k(x) \not\equiv 0$. Для уничтожения членов наинизшего порядка необходимо подобрать ε так, чтобы по меньшей мере два из показателей ρ_0, $\rho_k + k\varepsilon$, $\rho_n + n\varepsilon$ совпали, а остальные были не меньше их. Это соображение и приводит к Н. д.

На плоскости выбирается прямоугольная декартова система координат и строятся точки $(0, \rho_0)$, (k, ρ_k), (n, ρ_n), где k пробегает те же значения, что и в (3). Через точку $(0, \rho_0)$ проводится прямая, совпадающая с осью ординат, к-рая затем вращается вокруг точки $(0, \rho_0)$ против часовой стрелки до тех пор, пока она не попадет на какую-либо из нанесенных точек, напр. (l, ρ_l). Тангенс угла, составленного прямой L, проходящей через точки $(0, \rho_0)$ и (l, ρ_l), с отрицательным направлением оси абсцисс, равен одному из значений ε,

так как $\rho_0 = \rho_l + l\varepsilon$, а $\rho_k + k\varepsilon > \rho_l + l\varepsilon$, если $(k, \rho_k) \notin L$. Пусть (s, ρ_s) — точка на L с наибольшей абсциссой и пусть теперь L вращается против часовой стрелки вокруг точки (s, ρ_s), пока она не попадет на другую из нанесенных точек, скажем (t, ρ_t) с $t > s$. Пусть L' — прямая, проходящая через (s, ρ_s) и (t, ρ_t). Тангенс угла, образованного L' с отрицательным направлением оси абсцисс, даст еще одно из возможных значений ε. Продолжением этих построений получается выпуклая ломаная, к-рая и наз. диаграммой Ньютона.



Определение значений коэффициента y_ε таково. Пусть (i, ρ_i), (j, ρ_j) — крайние точки отрезка Н. д., определяющего одно из возможных значений ε. Для того чтобы при подстановке (2) в (1) уничтожились члены наинизшего порядка, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum\nolimits'_{\varepsilon} F_{0s} y_\varepsilon^s = 0, \qquad (4)$$

где штрих суммы означает, что суммирование проводится по ρ, удовлетворяющим соотношению $\rho_s + s\varepsilon = \rho_i + i\varepsilon$. Уравнение (4) имеет $j - i$ отличных от нуля корней (с учетом их кратности), т. е. столько корней, какова длина проекции взятого отрезка Н. д. Отсюда видно, что методом Н. д. получаются все n значений главного члена $y_\varepsilon x^\varepsilon$ в формуле (2). Этим же методом определяется следующий член в разложении (2), и т. д. В результате все n решений уравнения (1) имеют вид (2) т. н. рядов Пюизё (см. *Алгебраическая функция*). Метод Н. д. применяется также и при решении дифференциальных уравнений.

Лит.: [1] Ньютон И., Математические работы, пер. с латин., М.— Л., 1937, с. 33—34; [2] Puiseux V., «J. math. pure et appl.», 1850, t. 15, p. 365—480; [3] Lagrange J., «Nouv. Mem. Acad. Roy. Sci.», 1776; [4] Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969; [5] Исаак Ньютон. 1643—1727. Сб. статей к трехсотлетию со дня рождения, М.— Л., 1943; [6] Брюно А. Д., Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений, М., 1979. *В. А. Треногин.*

НЬЮТОНА ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ — три основных закона, описывающие движения материальных тел под действием приложенных к ним сил.

Первый закон: если на материальную точку не действуют никакие силы (или если приложенные к ней силы взаимно уравновешиваются), то по отношению к инерциальной *отсчета системе* материальная точка будет находиться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

Второй закон: если на материальную точку действует сила $\boldsymbol{F}$, то точка получает по отношению к инерциальной системе отсчета такое ускорение $\boldsymbol{w}$, что произведение массы m точки на это ускорение равно силе $\boldsymbol{F}$:

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}.$$

Третий закон: две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по абсолютной величине и направленными в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки.

Н. з. м. перестают быть справедливыми для движения объектов очень малых размеров (элементарных частиц) и при движениях со скоростями, близкими к скорости света.

Законы сформулированы И. Ньютоном (I. Newton, 1687). *С. М. Тарг.*

НЬЮТОНА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — форма записи *Лагранжа интерполяционной формулы*,

использующая разделенные разности:

$$L_n(x) = f(x_0) + (x-x_0) f(x_0; x_1) + \\ + (x-x_0)(x-x_1) f(x_0; x_1; x_2) + \ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots \\ \ldots (x-x_{n-1}) f(x_0; x_1; \ldots; x_n), \quad (1)$$

где $f(x_0; x_1; \ldots; x_k)$ — разделенные разности k-го порядка; рассматривалась И. Ньютоном (I. Newton, 1687). Формула (1) наз. Н. и. ф. для неравных промежутков. В случае, когда значения x_i являются равноотстоящими, т. е.

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h,$$

введя обозначение $(x - x_0)/h = t$ и выразив разделенные разности $f(x_0; \ldots; x_k)$ через конечные разности $f^k_{k/2}$ по формуле

$$f(x_0; x_1; \ldots; x_k) = f^k_{k/2}/h^k k!, \; k = 0, 1, \ldots, n,$$

получают запись многочлена $L_n(x)$ в форме

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = \\ = f_0 + t f^1_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2!} f^2_1 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!} f^n_{n/2}, \quad (2)$$

которая наз. Н. и. ф. для интерполирования вперед. Если такая же замена переменных в интерполяционном многочлене L_n производится по узлам $x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-n}$, где $x_{-k} = x_0 - kh$,

$$L_n(x) = f(x_0) + (x-x_0) f(x_0; x_{-1}) + \\ + (x-x_0)(x-x_1) f(x_0; x_{-1}; x_{-2}) + \ldots \\ \ldots + (x-x_0)\ldots(x-x_{-n+1}) f(x_0; \ldots; x_n),$$

то получается Н. и. ф. для интерполирования назад:

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = f_0 + t f^1_{-1/2} + \\ + \frac{t(t+1)}{2!} f^2_{-1} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!} f^n_{-n/2}. \quad (3)$$

Формулы (2), (3) удобны при вычислении таблиц заданной функции $f(x)$, если точка x находится в начале или конце таблицы, поскольку в этом случае добавление одного или нескольких узлов, вызванное стремлением повысить точность приближения, не приводит к повторению всей проделанной работы заново, как при вычислениях по формуле Лагранжа.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975. *М. К. Самарин.*

НЬЮТОНА МЕТОД, метод касательных,— метод приближенного нахождения корней действительного уравнения

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где f — дифференцируемая функция. Последовательные приближения Н. м. вычисляются по формулам

$$x^{k+1} = x^k - [f'(x^k)]^{-1} f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (2)$$

Если функция f дважды непрерывно дифференцируема, x^* — простой корень уравнения (1) и начальное приближение x^0 лежит достаточно близко к x^*, то Н. м. обладает квадратичной сходимостью, т. е.

$$|x^{k+1} - x^*| \leqslant c\,|x^k - x^*|^2,$$

где c — константа, зависящая только от функции f и начального приближения x^0.

Часто вместо (2) для решения задачи (1) применяется т. н. модифицированный метод Ньютона:

$$x^{k+1} = x^k - [f'(x^0)]^{-1} f(x^k). \quad (3)$$

При тех же предположениях, при к-рых Н. м. имеет квадратичную сходимость, метод (3) имеет линейную

сходимость, т. е. сходится со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем меньше единицы.

Применительно к решению нелинейного операторного уравнения $A(u) = 0$ с оператором $A : B_1 \to B_2$, где B_1 и B_2 — нек-рые банаховы пространства, обобщение (2) наз. методом Ньютона—Канторовича. Формулы этого метода имеют вид

$$u^{k+1} = u^k - [A'(u^k)]^{-1} A(u^k), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $A'(u^k)$ — производная Фреше оператора A в точке u^k, являющаяся обратимым оператором, действующим из B_1 в B_2. При специальных предположениях метод Ньютона — Канторовича обладает квадратичной сходимостью, а соответствующий модифицированный метод — линейной сходимостью.

Н. м. разработан И. Ньютоном (I. Newton, 1669).

Лит.: [1] Канторович Л. В., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 6, с. 89—185; [2] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [3] Коллатц Л., Функциональный анализ и вычислительная математика, пер. с нем., М., 1969; [4] Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [5] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975. *Ю. А. Кузнецов.*

НЬЮТОНА ЧИСЛО — один из критериев подобия механич. движения, к-рый получается из уравнения, выражающего второй закон Ньютона: $\mathrm{Ne} = 2P/\rho v^2$, где P — характерное давление, ρ — плотность и v — характерная скорость.

НЬЮТОНА—КОТЕСА КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — интерполяционная квадратурная формула

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong (b-a)\sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$$

для вычисления интеграла по конечному промежутку $[a, b]$, узлы к-рой выбираются следующим образом: $x_k^{(n)} = a + kh$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, где n — натуральное число и $h = (b-a)/n$, число узлов $N = n+1$. Коэффициенты определяются тем, что квадратурная формула интерполяционная, т. е.

$$B_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!\,n} \int_0^n \frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-n)}{t-k}\,dt.$$

При $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$ все коэффициенты положительны, при $n = 8$ и $n \geqslant 10$ среди них имеются как положительные, так и отрицательные. Алгебраич. степень точности Н.—К. к. ф. (число d такое, что формула точна для всех многочленов степени не выше d и не точна для x^{d+1}) равна n при n нечетном и равна $n+1$ при n четном. Простейшие частные случаи Н.—К. к. ф.: $n = 1$, $h = b-a$, $N = 2$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

— *трапеций формула*; $n = 2$, $h = (b-a)/2$, $N = 3$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

— *Симпсона формула*; $n = 3$, $h = (b-a)/3$, $N = 4$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{8}\left[f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b)\right]$$

— квадратурная формула «трех восьмых». При больших n Н.—К. к. ф. применяются редко (из-за упомянутого выше свойства коэффициентов при $n \geqslant 10$). Предпочитают пользоваться составными Н.—К. к. ф. при небольших n. Таковы составные квадратурная формула трапеций и квадратурная формула Симпсона.

Коэффициенты Н.—К. к. ф. при $n = 1(1)20$ приведены в [3].

Н.—К. к. ф. впервые появились в письме И. Ньютона (I. Newton) к Г. Лейбницу (G. Leibniz) в 1676 (см. [1]), а затем в книге Р. Котеса [2], где указаны коэффициенты формул при $n = 1(1)10$.

Лит.: [1] Ньютон И., Математические начала натуральной философии, пер. с латин., в кн.: Крылов А. Н., Собр. трудов, т. 7, М.— Л., 1936; [2] Cotes R., Harmonia Mensurarum, pt 1—2, L., 1722; [3] Крылов В. И., Шульгина Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию, М., 1966; [4] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975. *И. П. Мысовских.*

НЬЮТОНА — ЛЕЙБНИЦА ФОРМУЛА — формула, выражающая значение определенного интеграла от заданной функции f по отрезку в виде разности значений на концах отрезка любой первообразной F этой функции

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (*)$$

Названа именами И. Ньютона (I. Newton) и Г. Лейбница (G. Leibniz), т. к. правило, выражаемое формулой (*), было известно им обоим, но опубликовано позже.

Эта формула справедлива, если функция f интегрируема по Лебегу на отрезке $[a, b]$, в частности если функция f непрерывна на этом отрезке и

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C,$$

где C — нек-рая постоянная. В этом случае функция F абсолютно непрерывна и почти всюду на отрезке $[a, b]$ (всюду, если f непрерывна на $[a, b]$) справедливо равенство $F'(x) = f(x)$.

Обобщением Н.— Л. ф. является *Стокса формула* для ориентированных многообразий с краем.

Л. Д. Кудрявцев.

НЬЮТОНОВ ПОТЕНЦИАЛ в широком смысле — потенциал с ньютоновым ядром $1/|x-y|^{N-2}$, где $|x-y|$ — расстояние между точками x и y евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$, т. е. интеграл вида

$$u(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-2}}, \qquad (1)$$

где интегрирование производится по нек-рой мере Радона μ на $\mathbb{R}^N$ с компактным носителем S. В случае неотрицательной меры μ Н. п. (1) есть супергармонич. функция во всем пространстве $\mathbb{R}^N$ (см. *Субгармоническая функция*).

Вне носителя S меры μ Н. п. (1) имеет производные всех порядков по координатам точки x и является регулярным решением уравнения Лапласа $\Delta u(x) = 0$, т. е. $u(x)$ — *гармоническая функция* на открытом множестве CS, регулярная и на бесконечности, $u(\infty) = 0$. В случае абсолютно непрерывной меры μ Н. п. $u(x)$ имеет вид

$$u(x) = \int_D \frac{1}{|x-y|^{N-2}} f(y)\,d\omega(y), \qquad (2)$$

где $d\omega$ — элемент объема в $\mathbb{R}^N$, D — нек-рая конечная область. Если при этом плотность $f(y)$ непрерывна по Гёльдеру в замкнутой области D и граница ∂D состоит из конечного числа замкнутых гиперповерхностей Ляпунова, то $u(x)$ имеет непрерывные производные 2-го порядка внутри D и удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta u(x) = -(N-2)\,2\pi^{N/2} f(x)/\Gamma(N/2)$.

В работах И. Ньютона (I. Newton) понятие «потенциала» еще не встречается. Впервые существование силовой функции ньютоновых сил тяготения доказал Ж. Лагранж (J. Lagrange, 1773). Термины «потенциальная функция» и «потенциал», применительно к интегралам вида (2) при $N=3$, впервые встречаются соответственно у Дж. Грина (G. Green, 1828) и у К. Гаусса (C. Gauss, 1840). Термин «Н. п.» иногда употребляется в узком смысле применительно только к объемным потенциалам вида (2), а иногда — применительно только к физически реальному случаю (2) потенциала сил тяготения при $N=3$, создаваемого массами, распределенными в области D с плотностью $f(y)$.

Если интеграл типа (2) или (1) распространен по гиперповерхности $S \subset \mathbb{R}^N$, т. е.

$$u(x) = \int_S \frac{1}{|x-y|^{N-2}} f(y)\, d\sigma(y), \qquad (3)$$

то говорят о ньютоновом потенциале простого слоя, к-рый является регулярной гармонич. функцией всюду вне S. Если S — замкнутая гиперповерхность Ляпунова и плотность $f(y)$ непрерывна по Гёльдеру на S, то Н. п. простого слоя непрерывен всюду в $\mathbb{R}^N$, а его производные непрерывны вне S. При этом его нормальная производная по направлению внешней к S нормали n_0 в точке $y_0 \in S$ имеет различные пределы при приближении к S изнутри и извне, выражающиеся соответственно формулами

$$\lim_{x \to y_0} \frac{du}{dn_0}\Big|_i = \frac{du(y_0)}{dn_0} + \frac{(N-2)\,\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} f(y_0),$$

$$\lim_{x \to y_0} \frac{du}{dn_0}\Big|_e = \frac{du(y_0)}{dn_0} - \frac{(N-2)\,\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} f(y_0),$$

где

$$\frac{du(y_0)}{dn_0} = (N-2) \int_S f(y) \frac{\cos(y-y_0, n_0)}{|y-y_0|^{N-1}}\, d\sigma(y), \quad y_0 \in S,$$

— т. н. прямое значение нормальной производной Н. п. простого слоя, $(y-y_0, n_0)$ — угол между вектором $y-y_0$ и нормалью n_0; при этом нормальная производная $du(y_0)/dn_0$ непрерывна на S.

Ньютонов потенциал двойного слоя имеет вид

$$v(x) = \int_S f(y) \frac{\cos(y-x, n)}{|y-x|^{N-1}}\, d\sigma(y), \qquad (4)$$

где n — внешняя нормаль к S в точке $y \in S$. Н. п. двойного слоя — также гармонич. функция вне S, но при приближении к S он терпит разрыв. При тех же предположениях на S и $f(y)$ он имеет пределы изнутри и извне S, выражающиеся соответственно формулами

$$\lim_{x \to y_0} v(x)\Big|_i = v(y_0) + \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} f(y_0),$$

$$\lim_{x \to y_0} v(x)\Big|_e = v(y_0) - \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} f(y_0),$$

где

$$v(y_0) = \int_S f(y) \frac{\cos(y-y_0, n)}{|y-y_0|^{N-1}}\, d\sigma(y)$$

— т. н. прямое значение Н. п. двойного слоя в точке $y_0 \in S$. При несколько более жестких условиях на S и $f(y)$ нормальная производная Н. п. двойного слоя, напротив, непрерывна при переходе через S.

См. также *Двойного слоя потенциал*, *Объемный потенциал*, *Потенциала теория*, *Простого слоя потенциал*.

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [2] Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.— Л., 1946; [3] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [4] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [5] Уэрмер Дж., Теория потенциала, пер. с англ., М., 1980; [6] Kellogg O. D., Foundations of potential theory, B., 1929.

Е. Д. Соломенцев.

НЭША ТЕОРЕМА в теории игр — теорема о существовании ситуаций равновесия в смешанном расширении конечной *бескоалиционной игры*

$$\Gamma = \langle J, \{S_i\}_{i \in J}, \{H_i\}_{i \in J} \rangle,$$

где J, $\{S_i\}_{i \in J}$ — конечные множества соответственно игроков и их стратегий, $H_i : S = \prod_{i \in J} S_i \to \mathbb{R}^1$ — функция выигрыша игрока $i \in J$ (см. также *Игр теория*). Установлена Дж. Нэшем (J. Nash [1]). Пусть M_i, $i \in J$, — множества всех вероятностных мер, заданных на S_i. Н. т. утверждает: существует такая мера $\mu^* \in M =$

$= \prod_{i \in J} M_i$, для к-рой выполняются неравенства

$$H_i(\mu^*) \geqslant H_i(\mu^* \| \mu_i)$$

для всех $\mu_i \in M_i$, $i \in J$, где через $\mu^* \| \mu_i$ обозначена мера из M, полученная заменой i-й компоненты в векторе μ^* на μ_i, а $H_i(\mu) = \mathsf{E}(H_i, \mu)$. Известные доказательства Н. т. опираются на теоремы о неподвижной точке.

Лит.: [1] Нэш Дж., в кн.: Матричные игры, М., 1961; [2] Воробьев Н. Н., Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков, Л., 1974.

Е. Б. Яновская.

НЭША ТЕОРЕМЫ в дифференциальной геометрии — две группы теорем об изометрич. вложениях и погружениях римановых многообразий в евклидовы пространства, и первоначальные варианты к-рых принадлежат Дж. Нэшу (J. Nash).

1) Н. т. о C^1-вложениях и C^1-погружениях. Погружение класса C^1 (вложение) $f: V^n \to E^m$ n-мерного риманова пространства V^n класса C^0 с метрикой g в m-мерное евклидово пространство E^m наз. коротким, если индуцированная им на V^n метрика g_f такова, что квадратичная форма $g_n - g_f$ положительно определена. Тогда если V^n допускает короткое погружение (вложение) в E^m, $m \geqslant n+1$, то V^n допускает и изометрич. погружение (вложение) класса C^1 в E^m. Эта теорема при ограничении $m \geqslant n+2$ доказана в [1], а в приведенной формулировке доказана в [2]. Из этой теоремы вытекает, в частности, что если компактное риманово многообразие V^n имеет C^1 вложение (погружение) в E^m, $m \geqslant n+1$, то V^n допускает и изометрич. C^1-вложение (погружение) в E^m. Другим следствием Н. т. является наличие у каждой точки V^n достаточно малой окрестности, допускающей изометрич. вложение класса C^1 в E^{n+1}.

2) Н. т. о регулярных вложениях. Всякое компактное риманово многообразие V^n класса C^r, $3 \leqslant r \leqslant \infty$, допускает изометрич. C^r вложение в E^m, где $m = {}^1/_2(3n^2+11n)$. Если V^n некомпактно, то оно допускает изометрич. C^r вложение в E^{m_1}, где $m_1 = {}^1/_2(3n^2+11n)(n+1)$.

Н. т. о регулярных вложениях получена в результате применения теоремы об обращении широкого класса дифференциальных операторов — Н. т. о неявной функции. Смысл этой теоремы состоит в том, что из разрешимости нек-рой линейной алгебраич. системы уравнений, естественно связанной с дифференциальным оператором L, и при введении разумной топологии в образе и прообразе рассматриваемый оператор является открытым отображением, т. е. оператор L локально обратим вблизи любой точки из множества его значений. Для уравнений вложения риманова пространства в евклидово эти условия сводятся к тому, что первые и вторые производные отображения $f: V^n \to E^m$ по внутренним координатам V^n должны быть линейно независимыми. Такие вложения были впервые рассмотрены в [4]; они наз. свободными вложениями. Из Н. т. о неявной функции вытекает, что компактное риманово многообразие V^n, достаточно близкое к компактному римановому многообразию $\bar{V}^n$, допускающему свободное вложение в E^m, также допускает свободное вложение в E^m. Этот факт и своеобразный метод продолжения по параметру привели к Н. т. о регулярных вложениях (см. [3]). С помощью распространения методов Нэша на некомпактные многообразия и аналитич. вложения, а также с помощью кардинального усовершенствования процесса продолжения по параметру доказано, что всякое бесконечно дифференцируемое (аналитическое) риманово многообразие V^n допускает изометрическое дифференцируемое (аналитическое) вложение в E^m, где $m = {}^1/_2\, n(n+1)+3n+5$.

Лит.: [1] Нэш Дж., «Математика», 1957, т. 1, № 2, с. 3—16; [2] Кёйпер Н., там же, т. 1, № 2, с. 17—28; [3] Нэш Дж., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 4, с. 173—216; [4] Бурстин К., «Матем. сб.», 1931, т. 38, № 3—4, с. 74—85.

Д. Д. Соколов.

ОБВЕРТЫВАЮЩИЙ РЯД для числа A — ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

такой, что

$$|A-(a_0+a_1+\ldots+a_n)|<|a_{n+1}|$$

при всех $n=0, 1, 2, \ldots$ О. р. может сходиться или расходиться; если он сходится, то его сумма равна A. Ряд (*) обвертывает действительное число A в узком смысле, если числа a_n действительны и при всех $n=0, 1, 2, \ldots$

$$A-(a_0+a_1+\ldots+a_n)=\theta_n a_{n+1},\ 0<\theta_n<1.$$

В этом случае A заключено между двумя любыми последовательными частичными суммами ряда. Напр., при $x>0$ функции e^{-x}, $\ln(1+x)$, $(1+x)^{-p}(p>0)$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$, $J_0(x)$ обвертываются в узком смысле своими рядами Маклорена.

Если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$$

обвертывает при $x>R>0$ функцию $f(x)$, принимающую действительные значения, и числа a_n действительны, то знаки чисел $a_1, a_2, \ldots$ чередуются и ряд является обвертывающим в узком смысле. Этот ряд является асимптотич. разложением функции $f(x)$ при $x\to+\infty$; если он расходится, то наз. полусходящимся рядом. Такие ряды используются для приближенного вычисления значений функции $f(x)$ при больших значениях x.

Лит.: [1] Полиа Г., Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, пер. с нем., 3 изд., ч. 1–2, М., 1978; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951. *М. В. Федорюк.*

ОБИЛЬНОЕ ВЕКТОРНОЕ РАССЛОЕНИЕ — векторное алгебраическое или аналитическое расслоение, пучок регулярных (соответственно аналитических) сечений которого обилен (см. *Обильный пучок*, *Положительное расслоение*). *О. А. Иванова.*

ОБИЛЬНЫЙ ПУЧОК — обобщение понятия обильного *обратимого пучка*. Пусть X — нётерова схема над полем k, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок на X (т. е. пучок сечений нек-рого векторного алгебраич. расслоения $E\to X$). Пучок $\mathcal{E}$ наз. обильным, если для всякого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X существует целое число n_0, зависящее от $\mathcal{F}$, такое, что пучок $\mathcal{F}\otimes S^n\mathcal{E}$ при $n\geqslant n_0$ порождается своими глобальными сечениями (здесь $S^n\mathcal{E}$ обозначает n-ю симметрическую степень пучка $\mathcal{E}$).

Локально свободный пучок $\mathcal{E}$ на X обилен тогда и только тогда, когда обилен обратимый тавтологич. пучок $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ на проективизации $P(E)$ расслоения E. Другой критерий обильности состоит в том, что для всякого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X должно существовать целое число n_0, зависящее от $\mathcal{F}$, такое, что группа когомологий $H^i(X, \mathcal{F}\otimes S^n\mathcal{E})$ равна нулю при $n\geqslant n_0$ и $i>0$. Если пучки $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ обильны, то и $\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}$ — обильный пучок [1]. Если X — неособая комплексная проективная кривая, то пучок $\mathcal{E}$ на X обилен тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}$ и все его факторпучки имеют положительные степени [2]. Касательный пучок на P^N

обилен для любого N (см. [1]). Справедливо и обратное утверждение: любое неособое N-мерное алгебраич. многообразие с обильным касательным пучком изоморфно P^N (см. [1], [3]).

Лит.: [1] Hartshorne R., «Publ. math. IHES», 1966, № 29, p. 319—50; [2] его же, «Nagoya Math. J.», 1971, v. 43, p. 73—89; [3] Demazure M., в кн.: «Semin. Bourbaki», 1979/80, № 544.

В. А. Исковских.

ОБЛАСТЬ—непустое связное открытое множество точек топологич. пространства X. Замыкание $\overline{D}$ области D наз. замкнутой областью; замкнутое множество $\mathrm{Fr}D=\overline{D}\setminus D$ наз. границей О. D. Точки $x\in D$ наз. также внутренними точками О. D; точки $x\in \mathrm{Fr}\,D$ наз. граничными точками для О. D; точки дополнения $C\overline{D}=X\setminus\overline{D}$ — внешними точками для О. D.

Любые две точки О. D действительного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 1$ (либо комплексного пространства $\mathbb{C}^m$, $m\geqslant 1$, либо римановой поверхности или римановой области), можно соединить путем (или дугой), целиком расположенным в D, а в случае $D\subset\mathbb{R}^n$ или $D\subset\mathbb{C}^m$ — даже ломаной линией с конечным числом звеньев. Конечные и бесконечные открытые интервалы — единственные О. на числовой прямой $\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$; их границы состоят не более чем из двух точек. Область D на плоскости наз. односвязной, если любой замкнутый путь в D можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь все время в О. D. Вообще говоря, граница односвязной О. открытой плоскости $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}=\mathbb{C}^1$ может состоять из любого числа k связных компонент, $0\leqslant k\leqslant\infty$. Если же D рассматривается как О. компактной расширенной плоскости $\overline{\mathbb{R}}^2$ или $\overline{\mathbb{C}}$ и число k компонент границы конечно, то k наз. порядком связности плоской О. D; при $k>1$ О. D наз. многосвязной. Иначе говоря, порядок связности k на единицу больше минимального числа разрезов, попарно соединяющих компоненты границы, к-рые нужно провести, чтобы превратить О. D в односвязную. При $k=2$ О. наз. двусвязной, при $k=3$ — трехсвязной и т. д.; при $k<\infty$ имеем конечносвязные О., при $k=\infty$ — бесконечносвязные О. Порядок связности плоской О. характеризует ее топологический тип. Топологич. типы О. пространств $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, или $\mathbb{C}^m$, $m\geqslant 2$, нельзя характеризовать каким-либо одним числом.

Даже в случае односвязной плоской О. метрич. строение ее границы $\mathrm{Fr}\,D$ может быть очень сложным (см. *Граничные элементы*). В частности, точки границы делятся на достижимые точки $x_0\in\mathrm{Fr}D$, для к-рых существует путь $x(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $x(0)\in D$, $x(1)=x_0$, соединяющий x_0 в D с любой точкой $x(0)\in D$, и недостижимые точки, для к-рых такого пути не существует. Множество достижимых точек границы $\mathrm{Fr}\,D$ любой плоской односвязной О. всюду плотно на $\mathrm{Fr}\,D$.

Область D пространства $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^m$ наз. ограниченной, или конечной, если

$$\sup\{\,|x|:x\in D\}<\infty;$$

в противном случае О. D наз. неограниченной, или бесконечной. Замкнутая жорданова плоская

кривая разделяет плоскость $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$ на две жордановы О.: конечную D^+ и бесконечную D^-. Все граничные точки жордановых О. достижимы.

Е. Д. Соломенцев.

ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ функции, множество значений функции,— множество всех элементов, к-рые заданной функцией поставлены в соответствие элементам из ее области определения, т. е. если $f: X \to Y$, то множеством значений функции f наз. множество Y_f всех таких элементов $y \in Y$, для каждого из к-рых существует такой элемент $x \in X$, что $f(x)=y$. Таким образом, О. з. функции является образом ее области определения. *Л. Д. Кудрявцев.*

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ функции — множество, на к-ром задана рассматриваемая функция, т. е. совокупность X всех тех элементов x, каждому из к-рых данная функция f ставит в соответствие элемент y из нек-рого множества Y; таким образом, если $f: X \to Y$, то X наз. О. о. функции. *Л. Д. Кудрявцев.*

ОБЛАСТЬ ЦЕЛОСТНОСТИ, целостное кольцо,— коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля. Любое поле, а также любое кольцо с единицей, содержащееся в нек-ром поле, является О. ц. Обратно, любая О. ц. может быть вложена в нек-рое поле. Такое вложение дает конструкция поля частных (см. *Частных кольцо*).

Если A — О. ц., то кольцо многочленов $A[X]$ и кольцо формальных степенных рядов $A[[X]]$ над A также будут О. ц. Если A — коммутативное кольцо с единицей и I — нек-рый идеал в A, то кольцо A/I является О. ц. тогда и только тогда, когда идеал I прост. Кольцо A будет О. ц. тогда и только тогда, когда спектр кольца A — неприводимое топологич. пространство.

Иногда в определении О. ц. не требуют коммутативности кольца A. Примерами некоммутативных областей целостности являются тела, а также подкольца тел, содержащие единицу. Однако, вообще говоря, неверно, что любая некоммутативная О. ц. может быть вложена в нек-рое тело (см. [2], а также *Вложение кольца*).

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Кон П., Свободные кольца и их связи, пер. с англ., М., 1975; [3] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1, М., 1977. *Л. В. Кузьмин.*

ОБЛОЖЕНИЕ — вес $d\sigma(x)$ системы ортогональных многочленов $\{P_n(x)\}$. Если $\sigma(x)$ есть неубывающая, ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция с бесконечным множеством точек роста, то мера $d\sigma(x)$, называемая обложением, однозначно определяет систему многочленов $\{P_n(x)\}$, имеющих положительный старший коэффициент и удовлетворяющих условию ортонормированности.

Функция распределения, или интегральный вес, $\sigma(x)$ представляется в виде

$$\sigma(x)=\sigma_1(x)+\sigma_2(x)+\sigma_3(x),$$

где $\sigma_1(x)$ — абсолютно непрерывная функция, называемая ядром, $\sigma_2(x)$ — сингулярная компонента и $\sigma_3(x)$ — функция скачков. Если $\sigma_2(x)\equiv\sigma_3(x)\equiv 0$, то под знаком интеграла можно сделать замену $d\sigma(x)=\sigma_1'(x)dx$; при этом производная $\sigma_1'(x)=h(x)$ наз. дифференциальным весом системы многочленов.

Из трех компонент функции распределения на асимптотич. свойства ортогональных многочленов влияет лишь ядро $\sigma_1(x)$.

Лит. см. при ст. *Ортогональные многочлены. П. К. Суетин.*

ОБОБЩЕННАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция $w(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, удовлетворяющая системе

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+au+bv=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+cu+dv=0 \qquad (1)$$

с действительными коэффициентами a, b, c, d, являющимися функциями действительных переменных x и y. В обозначениях

$$2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y},$$

$$4A = a + b + i(c - b),\ 4B = a - d + i(c + b)$$

исходная система записывается в виде

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + Aw + B\overline{w} = 0.$$

Если коэффициенты A и B системы (1) на всей плоскости E комплексного переменного z принадлежат классу $L_{p,2}$, $p > 2$, то в любой области D этой плоскости каждая О. а. ф. $w(z)$, удовлетворяющая уравнению (1), представляется в виде

$$w(z) = \Phi(z)\, e^{\omega(z)}, \tag{2}$$

где

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(\zeta) + B(\zeta)\dfrac{\overline{w}}{w}}{\zeta - z}\, d\xi d\eta,\ \zeta = \xi + i\eta,$$

а $\Phi(z)$ — вполне определенная аналитическая в области D функция переменного z.

Связь между О. а. ф. и аналитич. функциями, осуществляемая формулой (2), является нелинейной, если $B \neq 0$. По заданной аналитич. функции из нелинейного интегрального уравнения (2) единственным образом определяется О. а. ф. $w(z)$.

Существует линейный оператор

$$w(z) = \Phi(z) + \iint_D \Gamma_1(z, \zeta)\ \overline{\Phi}\zeta)\, d\xi d\eta + \iint_D \Gamma_2(z, \zeta)\,\overline{\Phi(\zeta)}\, d\xi d\eta, \tag{3}$$

устанавливающий взаимно однозначное соответствие между множествами аналитических в ограниченной области D и непрерывных в замкнутой области $D \cup S$ функций $\Phi(z)$ и обобщенных аналитических в D функций $w(z)$, причем $\Gamma_1(z, \zeta)$ и $\Gamma_2(z, \zeta)$ — вполне определенные функции, к-рые выражаются через коэффициенты A и B системы (1).

Из формулы (3) получаются различные интегральные представления О. а. ф., обобщающие интегральное представление Коши для аналитич. функций. Представление О. ф. в виде (3) оказалось полезным при исследовании краевых задач для О. а. ф.

Если A и B — аналитич. функции действительных переменных x, y, то для О. а. ф. в односвязной области имеет место представление

$$w(z) = \exp\left(\int_{z_0}^{z} A(z, \tau)\, d\tau\right) + \left\{\Phi(z) + \int_{z_0}^{z} \tilde{\Gamma}_1(z, \bar{z}, t)\,\Phi(t)\, dt + \int_{z_0}^{\bar{z}} \tilde{\Gamma}_2(z, \bar{z}, t)\,\overline{\Phi(t)}\, dt\right\}, \tag{4}$$

в к-ром $\tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{\Gamma}_2$ — аналитич. функции своих аргументов, выражающиеся через A и B, а $\Phi(z)$ — произвольная аналитич. функция переменного z. (Формула (4) не является частным случаем формулы (3).)

В случае, когда A и B — целые функции переменных x и y, представление (4) годится для любой односвязной области плоскости комплексного переменного z.

Проблема приведения общего эллиптич. уравнения 2-го порядка

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0 \tag{5}$$

к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+Cu=0$$

эквивалентна задаче редукции к канонич. виду положительной квадратичной формы $adx^2+2bdxdy+cdy^2$. Последняя проблема, в свою очередь, сводится к отысканию гомеоморфизмов уравнения Бельтрами

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z}-q(z)\frac{\partial w}{\partial z}=0,\ w=u+iv, \tag{6}$$

где

$$q(z)=(a-\sqrt{\Delta}-ib)/(a+\sqrt{\Delta}+ib),$$
$$\Delta=ac-b^2,\ |q(z)|<1.$$

Если (5) — равномерно эллиптич. уравнение ($\Delta\geqslant\Delta_0=\text{const}>0$), то $|q(z)|<q_0=\text{const}<1$.

При изучении уравнения Бельтрами основным вопросом является построение нек-рого его гомеоморфизма для данной области D. Это вытекает из следующего утверждения: если $\omega(z)$ — гомеоморфизм уравнения Бельтрами, реализующий топологич. отображение области D на область $\omega(D)$, то всякое другое его решение в D имеет вид

$$w(z)=\Phi[\omega(z)], \tag{7}$$

где Φ — произвольная аналитич. функция в области $\omega(D)$.

Когда $q(z)$ измерима, $q(z)=0$ вне D и $|q(z)\leqslant q_0<1$, однолистным решением уравнения Бельтрами (6) является функция

$$w(z)=z-\frac{1}{\pi}\iint_E\frac{\rho(\zeta)\,d\xi d\eta}{\zeta-z}, \tag{8}$$

где ρ удовлетворяет сингулярному интегральному уравнению (интеграл понимается в смысле главного значения по Коши)

$$\rho(z)-\frac{q(z)}{\pi}\iint_E\frac{\rho(\zeta)\,d\xi d\eta}{(\zeta-z)^2}=q(z). \tag{9}$$

Это уравнение имеет единственное решение в нек-ром классе $L_p(E)$, $p>2$; его можно получить, напр., методом последовательных приближений. Функция (8) принадлежит классу $C_\alpha(E)$, $\alpha=(p-2)/2$, реализует топологич. отображение плоскости на себя, причем $w(\infty)=\infty$, $z^{-1}w\to 1$ при $z\to\infty$. Если $q\in C_\alpha^m(E)$, $0<\alpha<1$, $m\geqslant 0$, то $w(z)\in C_\alpha^{m+1}$.

Равномерно эллиптич. система двух уравнений 1-го порядка общего вида в комплексной записи имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z}-q_1(z)\frac{\partial w}{\partial z}-q_2(z)\frac{\partial \bar w}{\partial \bar z}+Aw+B\bar w=0w. \tag{10}$$

С помощью гомеоморфизма нек-рого уравнения вида (6) систему (10) можно привести к виду (1). Но ее можно изучить также непосредственно, что позволяет избежать нек-рых дополнительных ограничений.

Пусть уравнение (10) рассматривается в нек-рой ограниченной области при условии, что $A,\ B\in L_p(D)$, $p>2$. Тогда всякое решение уравнения (10) представимо в виде

$$w(z)=\Phi[\omega(z)]\,e^{\varphi(z)}, \tag{11}$$

где $\omega(z)$ — нек-рый гомеоморфизм уравнения Бельтрами (6) с коэффициентом

$$q(z)=q_1(z)+q_2(z)\frac{\partial\bar w/\partial\bar z}{\partial w/\partial z},$$

$\Phi(\omega)$ — аналитич. функция в области $\omega(D)$, функция $\varphi(z)\in C_\alpha(E)$, $\alpha=(p-2)/2$, голоморфна вне $D\cup S$ и исчезает на бесконечности. Представление (11) имеет место и тогда, когда коэффициенты в левой части урав-

нения (10) зависят от w и от ее производных любого порядка, лишь бы на рассматриваемых решениях выполнялись указанные выше условия. Как и (2), формула (11) допускает обращение.

Формула (11) позволяет перенести целый ряд свойств классич. теории аналитич. функций на решения уравнения (10): теорему единственности, принцип аргумента, принцип максимума и др.

Общее Q-квазиконформное отображение является решением нек-рой равномерно эллиптич. системы вида (10) (при $A=B=0$). Справедливо и обратное утверждение. Поэтому указанные выше результаты позволяют решить чисто аналитич. путем основные проблемы квазиконформных отображений.

Теория О. а. ф. позволила исчерпывающим образом исследовать о б о б щ е н н у ю з а д а ч у Р и м а н а — Г и л ь б е р т а: найти решение уравнения (1), непрерывное в $D \cup S$, по краевому условию

$$\operatorname{Re}\left[\overline{\lambda(z)}\, w(z)\right] = \alpha u + \beta v = \gamma, \quad z \in S, \tag{12}$$

где α, β, γ — заданные действительные функции из класса $C_\alpha(S)$, $0 < \alpha < 1$, причем $\alpha^2+\beta^2=1$. Область D, вообще говоря, многосвязна.

Задачу (12) можно редуцировать к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению и получить полный качественный анализ краевой задачи (12).

Пусть граница S области D состоит из конечного числа простых замкнутых кривых $S_0, \ldots, S_m$, удовлетворяющих условиям Ляпунова. Так как при конформных отображениях вид уравнения и краевого условия сохраняются, то без ущерба общности можно считать, что S_0 — единичная окружность с центром в точке $z=0$, принадлежащая рассматриваемой области D, а $S_1, \ldots, S_m$ — окружности, лежащие внутри S_0.

И н д е к с о м задачи (12) наз. целое число n, равное приращению

$$\frac{1}{2\pi} \arg\left[\alpha(\zeta) + i\beta(\zeta)\right],$$

когда точка ζ один раз обойдет S в положительном направлении. Краевое условие можно привести к более простому виду

$$\operatorname{Re}\left[z^{-n} e^{iC(z)} w(z)\right] = \gamma, \quad z \in S,$$

где $C(z)=C_j$ на S_j, причем $C_0=0$, а $C_1, \ldots, C_m$ — некоторые действительные параметры, к-рые однозначно выражаются через α и β.

Для сопряженной задачи:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w^*}{\partial \bar z} - A w^* - \overline{B} w^* = 0, \quad z \in D, \\ &\operatorname{Re}\left[(\alpha + i\beta)\, \frac{d\bar z}{ds}\, w^*(z)\right] = 0, \quad z \in S. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Индекс вычисляется по формуле $n' = m - n - 1$.

Основные результаты по задаче (12) можно сформулировать в виде следующих утверждений.

1) Задача (12) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_S (\alpha + i\beta)\, w^* \gamma\, ds = 0,$$

где w^* — производное решение сопряженной задачи.

2) Пусть l и l' — числа линейно независимых решений однородных задач (12) и (13) соответственно. Тогда $l - l' = n - n' = 2n - m + 1$.

3) Если $n<0$, то однородная задача (12) не имеет нетривиальных решений.

4) Если $n>m-1$, то однородная задача (12) имеет ровно $l=2n+m-1$ линейно независимых решений, а неоднородная задача (12) всегда разрешима. Если $n<0$, то неоднородная задача (12) имеет решение (единствен-

ное) тогда и только тогда, когда $\int_S (\alpha+i\beta)w_j^*\gamma ds=0$, $j=1,\ldots,l'$, $l'=m-2n+1$, где w_j^* — полная система решений однородной задачи (13).

5) Если $m=0$ и $n=0$, то $l=1$ и все решения однородной задачи имеют вид $w(z)=ice^{\omega_0(z)}$, где c — действительная постоянная, а ω_0 — непрерывная в $D\cup S$ функция.

Приведенные результаты полностью характеризуют задачу (12) в односвязном ($m=0$) и многосвязном ($n<0$, $n>m-1$) случаях. Особого рассмотрения требует случай $0\leqslant n\leqslant m-1$.

Лит.: [1] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959.

А. В. Бицадзе.

ОБОБЩЕННАЯ ГРУППА — то же, что *инверсная полугруппа.*

ОБОБЩЕННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ типа функции — распространение понятия производной на некоторые классы недифференцируемых функций. Первое определение принадлежит С. Л. Соболеву (см. [1], [2]), к-рый подошел к определению О. п. с точки зрения идеи введенного им понятия *обобщенной функции.*

Пусть $f=f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ и $\varphi=\varphi(x)=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — локально интегрируемые функции на открытом множестве Ω n-мерного пространства R^n, т. е. интегрируемые по Лебегу на любом замкнутом ограниченном множестве $F\subset\Omega$. Тогда φ есть обобщенная частная производная от f по x_j на Ω и пишут $\varphi=\partial f/\partial x_j$, если для любой бесконечно дифференцируемой функции ψ, финитной в Ω (см. *Финитная функция*),

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}(x)\,dx=-\int_\Omega \varphi(x)\,\Psi(x)\,dx. \qquad (1)$$

Второе эквивалентное определение О. п. $df/dx_j=\varphi$ заключается в следующем. Если f можно видоизменить на множестве n-мерной меры нуль так, что видоизмененная функция (к-рая снова обозначается через f) будет локально абсолютно непрерывной по x_j почти для всех (в смысле $(n-1)$-мерной меры) $x^j=(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, принадлежащих к проекции Ω^j области Ω на плоскость $x_j=0$, то f имеет частную (в обычном смысле этого слова) производную $\partial l/dx_j$ почти всюду на Ω. Если функция $\varphi=\frac{\partial f}{\partial x_j}$ почти всюду на Ω, то φ есть О. п. от f по x_j на Ω. Таким образом, О. п. определена на Ω почти всюду; если f непрерывна и имеет на Ω непрерывную обычную производную df/dx_j, то последняя есть в то же время О. п. от f по x_j на Ω.

О. п. $\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j$, $\partial^3 f/\partial x i\partial^2 x_j$, ..., высшего порядка определяются по индукции. Они не зависят (почти всюду) от порядка дифференцирования.

Имеется третье эквивалентное определение О. п. Пусть для всякого замкнутого ограниченного $F\subset\Omega$ функции f и φ, заданные на Ω, обладают свойствами:

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_F |f_\nu-f|\,dx=0,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_F \left|\frac{\partial f_\nu}{\partial x_j}-\varphi\right| dx=0,$$

где функции f_ν, $x=1, 2, \ldots$, непрерывны на Ω вместе со своими частными производными $\partial f_\nu/\partial x_j$; тогда φ есть О. п. по x_j от f на Ω ($\varphi=\partial f/\partial x_j$) (см. также *Соболева пространство*).

С точки зрения теории обобщенных функций О. п. определяется следующим образом. Пусть задана функция $f(x)$, локально суммируемая на Ω, рассматриваемая как обобщенная функция, и пусть $\partial f/\partial x_j=\varphi$ — частная производная в смысле теории обобщенных функций. Если окажется, что φ представляет локально суммируемую на Ω функцию, то тогда (по первому (исходному) определению) φ есть О. п.

Понятие О. п. вводилось и ранее (см., напр., [3], где рассматривались О. п. с интегрируемым квадратом на Ω). В дальнейшем многие исследователи приходили к этому понятию независимо от своих предшественников (см. по этому вопросу [4]).

Лит.: [1] Соболев С. Л., «Докл. АН СССР», 1935, т. 8, с. 291—94; [2] его же, «Матем. сб.», 1936, т. 1, с. 39—72; [3] Levi B., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1906, v. 22, p. 293—359; [4] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969.

С. М. Никольский.

ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ — математическое понятие, обобщающее классич. понятие функции. Потребность в таком обобщении возникает во многих технич., физич. и математич. задачах. Понятие О. ф. дает возможность выразить в математически корректной форме такие идеализированные понятия, как плотность материальной точки, точечного заряда, точечного диполя, (пространственную) плотность простого или двойного слоя, интенсивность мгновенного источника и т. д. С другой стороны, в понятии О. ф. находит отражение тот факт, что реально нельзя измерить значение физич. величины в точке, а можно измерять лишь ее средние значения в достаточно малых окрестностях данной точки. Таким образом, техника О. ф. служит удобным и адекватным аппаратом для описания распределений различных физич. величин. Поэтому иначе О. ф. наз. р а с п р е д е л е н и я м и (distributions).

О. ф. были введены впервые в кон. 20-х гг. 20 в. П. Дираком (P. Dirac, см. [1]) в его исследованиях по квантовой механике, где он систематически использует понятие δ-функции и ее производных (см. *Дельта-функция*). Основы математич. теории О. ф. были заложены С. Л. Соболевым [2] в 1936 при решении задачи Коши для гиперболич. уравнений, а в 50-х гг. Л. Шварц (см. [3]) дал систематич. изложение теории О. ф. и указал многие применения. В дальнейшем теория О. ф. интенсивно развивалась многими математиками и физиками-теоретиками, главным образом в связи с потребностями теоретич. и математич. физики и теории дифференциальных уравнений (см. [4] — [7]). Теория О. ф. далеко продвинута, имеет многочисленные применения и широко вошла в обиход математика, физика и инженера.

Формально О. ф. f определяется как линейный непрерывный функционал над тем или иным векторным пространством достаточно «хороших» (основных) функций $\varphi(x)$; $f:\varphi\to(f,\varphi)$. Важным примером основного пространства является пространство $D(O)$ — совокупность финитных $C^\infty(O)$-функций в открытом множестве $O\subset\mathbb{R}^n$, снабженная топологией строгого индуктивного предела (объединения) пространств $C_0^\infty(\overline{O_k})$, $O_k\Subset O_{k+1}$, $\bigcup_k O_k=O$. Пространство $C_0^\infty(\overline{O_k})$ есть совокупность $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-функций с носителем в $\overline{O_k}$, снабженная топологией счетного числа норм

$$\|\varphi\|_{C^p(\overline{O_k})}=\max_{|\alpha|\leqslant p}|D^\alpha\varphi(x)|,\quad p=0,\ 1,\ \ldots$$

Примером основной функции из $D(\mathbb{R}^n)$ служит «шапочка»:

$$\omega_\varepsilon(x)=\begin{cases}C_\varepsilon\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}\right), & |x|\leqslant\varepsilon,\\ 0, & |x|>\varepsilon,\end{cases}\qquad\int\omega_\varepsilon(x)\,dx=1.$$

Сопряженное к $D(O)$ пространство есть п р о с т р а н с т в о О. ф. $D'(O)$; $D=D(\mathbb{R}^n)$, $D'=D'(\mathbb{R}^n)$. Сходимость последовательности О. ф. из $D'(O)$ определяется как с л а б а я с х о д и м о с т ь функционалов из $D'(O)$, т. е. $f_k\to0$, $k\to\infty$, в $D'(O)$ означает, что $(f_k,\varphi)\to0$, $k\to\infty$, для всех $\varphi\in D(O)$.

Для того чтобы линейный функционал f на $D(O)$ был О. ф. в O, т. е. $f\in D'(O)$, необходимо и достаточно,

чтобы для любого открытого множества $O' \Subset O$ существовали числа K и m такие, что

$$|(f, \varphi)| \leqslant K \|\varphi\|_{C^m(\overline{O'})}, \quad \varphi \in D(O'). \qquad (1)$$

Если в неравенстве (1) целое число m можно выбрать независящим от O', то О. ф. f имеет конечный порядок; наименьшее такое m наз. порядком f в O. Таким образом, в силу (1), всякая О. ф. f из $D'(O)$ имеет конечный порядок в любом $O' \Subset O$.

Пространство $D'(O)$ — полное: если последовательность О. ф. f_k, $k=1, 2, \ldots$, из $D'(O)$ такова, что для любой функции $\varphi \in D(O)$ числовая последовательность (f_k, φ) сходится, то функционал

$$(f, \varphi) = \lim_{k \to \infty} (f_k, \varphi)$$

принадлежит $D'(O)$.

Простейшими примерами О. ф. являются функционалы, порождаемые локально суммируемыми в O функциями

$$\varphi \to (f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x)\, dx, \quad \varphi \in D(O). \qquad (2)$$

О. ф., определяемые локально суммируемыми в O функциями $f(x)$ по формуле (2), наз. регулярными О. ф. в O; остальные О. ф. наз. сингулярными. Между локально суммируемыми в O функциями и регулярными О. ф. в O существует взаимно однозначное соответствие. В этом смысле «обычные», т. е. локально суммируемые в O, функции являются (регулярными) О. ф. из $D'(O)$.

Примером сингулярной О. ф. в $\mathbb{R}^n$ служит δ-функция Дирака

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in D.$$

Она описывает плотность массы 1, сосредоточенной в точке $x=0$. При этом «шапочка» $\omega_\varepsilon(x)$ (слабо) аппроксимирует δ-функцию

$$\omega_\varepsilon \to \delta, \ \varepsilon \to +0 \text{ в } D'.$$

Пусть $f \in D'(O)$ и $\omega_\varepsilon(x)$ — «шапочка». Тогда функция

$$f_\varepsilon(x) = (f(y), \omega_\varepsilon(x-y))$$

из $C^\infty(O_\varepsilon)$ наз. регуляризацией f, и $f_\varepsilon \to f$, $\varepsilon \to +0$ в $D'(O)$. Более того, всякая f из $D'(O)$ есть слабый предел функций из $D(O)$. Последнее свойство иногда берется в качестве исходного для определения О. ф., что вместе с теоремой о полноте пространства О. ф. приводит к эквивалентному определению О. ф. [8].

О. ф., вообще говоря, не имеют значений в отдельных точках. Тем не менее можно говорить о совпадении О. ф. с локально суммируемой функцией на открытом множестве: О. ф. f из $D'(O)$ совпадает в $O' \subset O$ с локально суммируемой в O' функцией $f_0(x)$, если ее сужение на O' есть f_0, т. е. в соответствии с (2)

$$(f, \varphi) = \int f_0(x) \varphi(x)\, dx$$

для всех $\varphi \in D(O')$, при этом считается $f = f_0(x)$, $x \in O'$. В частности, при $f_0 \equiv 0$ получается определение того, что О. ф. f обращается в нуль в O'. Множество точек O, ни в какой окрестности к-рых О. ф. не обращается в нуль, наз. носителем О. ф. f и обозначается $\operatorname{supp} f$. Если $\operatorname{supp} f \Subset O$, то О. ф. f наз. финитной в O.

Справедлива теорема о кусочном склеивании обобщенной функции: пусть в окрестности $U_y \Subset O$ каждой точки $y \in O$ задана О. ф. f_y из $D'(U_y)$, причем элементы f_y согласованы, т. е. $f_{y_1} = f_{y_2}$ в $U_{y_1} \cap U_{y_2} \neq \varnothing$; тогда существует О. ф. f из $D'(O)$, совпадающая с f_y в U_y при всех $y \in O$.

Примеры обобщенных функций.

1) δ-функция Дирака: $\operatorname{supp}\delta=\{0\}$.

2) О. ф. $\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$, определяемая равенством

$$\left(\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right),\ \varphi\right)=\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,\quad \varphi\in D(\mathbb{R}^1),$$

наз. конечной частью, или главным значением, интеграла от функции $\frac{1}{x}$; $\operatorname{supp}\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)=\mathbb{R}^1$. О. ф. $\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ сингулярна в $\mathbb{R}^1$, однако на открытом множестве $x\neq 0$ она регулярна и совпадает с $\frac{1}{x}$.

3) Поверхностная δ-функция. Пусть S — кусочно гладкая поверхность и μ — непрерывная функция на S. О. ф. $\mu\delta_S$ определяется равенством

$$(\mu\delta_S)\varphi=\int_S\mu(x)\,\varphi(x)\,dS_x.$$

При этом $\mu\delta_S(x)=0$, $x\notin S$, $\mu\delta_S$ — сингулярная О. ф. Эта О. ф. описывает пространственную плотность масс или зарядов, сосредоточенных на поверхности S с поверхностной плотностью μ (плотность простого слоя).

Линейные операции над О. ф. вводятся как расширение соответствующих операций над основными функциями.

а) Замена переменных. Пусть $f\in D'(O)$ и $x=Ay+b$ — неособенное линейное преобразование O на O_1. О. ф. $f(Ay+b)$ из $D'(O_1)$ определяется равенством

$$(f(Ay+b),\ \varphi)=\left(f,\ \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|}\right),\quad \varphi\in D(O_1). \qquad (3)$$

Так как операция $\varphi(y)\to\varphi[A^{-1}(x-b)]$ — изоморфизм $D(O)$ на $D(O_1)$, то операция $f(x)\to f(Ay+b)$ — изоморфизм $D'(O)$ на $D'(O_1)$. В частности, если $A=\lambda I$, $\lambda\neq 0$, $b=0$ ($x=\lambda y$ — подобие (с отражением при $\lambda<0$)), то

$$(f(\lambda y),\ \varphi)=\frac{1}{|\lambda|^n}\left(f,\ \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right);$$

если $A=I$ ($x=y+b$ — сдвиг на b), то

$$(f(y+b),\ \varphi)=(f,\ \varphi(x-b)).$$

Формула (3) позволяет определить трансляционно инвариантные, сферически симметричные, центрально симметричные, однородные, периодические, лоренц-инвариантные и т. д. О. ф.

Пусть функция $a\in C^1(\mathbb{R}^1)$ имеет только простые нули $x_1, x_2, \ldots$ на оси $\mathbb{R}^1$. Функция $\delta(a(x))$ определяется равенством

$$\delta(a(x))=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta(x-x_k)}{|a'(x_k)|}.$$

Примеры. 4) $\delta(-x)=\delta(x)$.

5) $(\delta(x-x_0),\ \varphi)=\varphi(x_0)$.

6) $\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2a}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]$, $a>0$.

7) $\delta(\sin x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-k\pi)$.

б) Произведение. Пусть $f\in D'(O)$ и $a\in C^\infty(O)$. Произведение $af=fa$ определяется равенством

$$(af,\ \varphi)=(f,\ a\varphi),\quad \varphi\in D(O).$$

Оказывается, что $af\in D'(O)$ и для обычных локально суммируемых функций произведение af совпадает с обычным умножением функций $f(x)$ и $a(x)$.

Примеры. 8) $a(x)\delta(x)=a(0)\delta(x)$.

9) $x\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)=1$.

Однако эта операция произведения не допускает распространения на любые О. ф. так, чтобы она была

ассоциативной и коммутативной. Действительно, в противном случае получилось бы противоречие:

$$(x\delta(x))\,\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)=0\,\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)=0,$$

$$(x\delta(x))\,\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)=(\delta(x)\,x)\,\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\delta(x)\left(x\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\delta(x).$$

В нек-рых классах О. ф. такое произведение можно определить, однако оно может оказаться неоднозначным.

в) Дифференцирование. Пусть $f\in D'(O)$. Обобщенная (слабая) производная О. ф. f

$$D^{\alpha}f(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad |\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n,$$

порядка $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ определяется равенством

$$(D^{\alpha}f,\ \varphi)=(-1)^{|\alpha|}(f,\ D^{\alpha}\varphi),\ \varphi\in D(O). \qquad (4)$$

Так как операция $\varphi\to(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\varphi$ линейна и непрерывна из $D(O)$ в $D(O)$, то функционал $D^{\alpha}f$, определяемый правой частью равенства (4), есть О. ф. из $D'(O)$. Если $f\in C^p(O)$, то $D^{\alpha}f\in C^{p-|\alpha|}(O)$ при всех α таких, что $|\alpha|\leqslant p$.

Имеют место следующие свойства: операция $f\to D^{\alpha}f$ линейна и непрерывна из $D'(O)$ в $D'(O)$, любая О. ф. из $D'(O)$ бесконечно дифференцируема (в обобщенном смысле); дифференцирование не зависит от порядка; справедлива формула Лейбница для дифференцирования произведения af, где $a\in C^{\infty}(O)$; дифференцирование не увеличивает носителя; всякая О. ф. f из $D'(O)$ во всяком открытом множестве $O'\Subset O$ есть нек-рая производная от непрерывной функции в O'; любое дифференциальное уравнение $Lu=f$, $f\in D'(O)$, с постоянными коэффициентами разрешимо в $D'(O)$, если O — выпуклая область; любая О. ф. f порядка N с носителем в точке 0 единственным образом представляется в виде

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant N}a_{\alpha}D^{\alpha}\delta(x).$$

Примеры. 10) $\theta'(x)=\delta(x)$, где θ — функция Хевисайда (функция включения):

$$\theta(x)=1,\ x\geqslant 0,\ \theta(x)=0,\ x<0.$$

11) $(\delta',\ \varphi)=-\varphi'(0)$; $-\delta'(x)$ описывает плотность зарядов, соответствующих диполю момента $+1$ в точке $x=0$ и ориентированного вдоль положительного направления оси x.

12) Обобщением $\delta'(x)$ является нормальная производная от плотности простого слоя на ориентируемой поверхности S:

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}(\mu\delta_S),\ \varphi\right)=-\int_S\mu\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS_x.$$

О. ф. $-\frac{\partial}{\partial n}(\mu\delta_S)$ описывает пространственную плотность зарядов, соответствующую распределению диполей на поверхности S с поверхностной плотностью момента μ и ориентированных вдоль заданного направления нормали n на S (плотность двойного слоя).

13) Общее решение уравнения $u'=0$ в классе $D'(\mathbb{R}^1)$ есть $u(x)=C$, где C — произвольная постоянная.

14) Общее решение уравнения $xu=0$ в классе $D'(\mathbb{R}^1)$ есть $u(x)=C\delta(x)$.

15) $x^m\delta^{(k)}(x)=0$, $k=0,\ 1,\ \dots,\ m-1$.

16) Тригонометрический ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ke^{ikx},\ |a_k|\leqslant A(1+|k|)^m,$$

сходится в D' и его можно дифференцировать в D' почленно бесконечное число раз.

17) $\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-2k\pi)$.

г) Прямое произведение. Пусть $f \in D'(O_1)$ и $g \in D'(O_2)$. Прямое произведение определяется по формуле

$$(f(x)\times g(y), \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi)), \qquad (5)$$

$$\varphi(x, y) \in D(O_1 \times O_2).$$

Так как операция $\varphi \to (g(y), \varphi(x, y))$ линейна и непрерывна из $D(O_1\times O_2)$ в $D(O_1)$, то функционал $f(x)\times g(y)$, определяемый формулой (5), есть О. ф. из $D'(O_1\times O_2)$. Прямое произведение — коммутативная и ассоциативная операция, причем

$$\operatorname{supp}(f\times g) = \operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g.$$

О. ф. $f(x, y)$ из $D'(O_1\times O_2)$ не зависит от переменной y, если она представима в виде

$$f(x, y) = f_0(x)\times 1(y), \quad f_0 \in D'(O_1);$$

в этом случае пишется $f(x, y) = f_0(x)$.

Примеры. 18) $\delta(x) = \delta(x_1)\times \ldots \times \delta(x_n)$.

19) Общее решение в $D'(\mathbb{R}^2)$ уравнения колебаний однородной струны $u_{tt} = u_{xx}$ задается формулой

$$u(x, t) = f(x+t) + g(x-t),$$

где $f(\xi)$ и $g(\eta)$ — произвольные О. ф. из $D'(\mathbb{R}^1)$.

д) Свертка. Пусть О. ф. f и g из $D'(\mathbb{R}^n)$ обладают тем свойством, что их прямое произведение $f(x)\times g(y)$ допускает расширение на функции вида $\varphi(x+y)$, где φ пробегает $D(\mathbb{R}^n)$, в следующем смысле: для всякой последовательности функций $\eta_k(x, y)$, $k\to\infty$, из $D(\mathbb{R}^{2n})$ со свойствами

$$|D^\alpha \eta_k(x, y)| \leqslant C_\alpha, \quad \eta_k(x, y) \to 1,$$

$$D^\alpha \eta_k(x, y) \rightrightarrows 0, \quad |\alpha| \geqslant 1, \quad k \to \infty,$$

(на любом компакте), числовая последовательность $(f(x)\times g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x+y))$ имеет предел, не зависящий от последовательности $\{\eta_k\}$. Этот предел наз. сверткой О. ф. f и g и обозначается $f*g$, так что

$$(f*g, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (f(x)\times g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x+y)),$$

$$\varphi \in D(\mathbb{R}^n). \qquad (6)$$

Из полноты пространства D' следует, что $f*g \in D'(\mathbb{R}^n)$. Как показывают элементарные примеры, свертка существует не для любых пар f и g. Она заведомо существует, если одна из О. ф. финитна. Если свертка существует в D', то она коммутативна $f*g = g*f$ и справедливы формулы дифференцирования свертки

$$f*D^\alpha g = D^\alpha(f*g) = D^\alpha f*g. \qquad (7)$$

Далее,

$$f*\delta = \delta*f = f, \qquad (8)$$

откуда из (7) получается

$$D^\alpha f = f*D^\alpha\delta.$$

Наконец,

$$\operatorname{supp}(f*g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}.$$

Как показывает пример:

$$(1*\delta')*\theta = 1'*\theta = 0*\theta = 0,$$

$$1*(\delta'*\theta) = 1*\theta' = 1*\delta = 1,$$

свертка — неассоциативная операция. Однако существуют ассоциативные (и коммутативные) сверточные алгебры. Единицей в них, в силу (8), служит δ-функция. Сверточную алгебру образует, напр., множество $D'(\Gamma)$, состоящее из О. ф. из D' с носителями в выпук-

лом остром и замкнутом конусе Γ с вершиной в 0. Обозначение:

$$D'_+ = D'([0, \infty)), \ n = 1.$$

О. ф. $\mathcal{E}$ из D' наз. фундаментальным решением (функцией точечного источника) дифференциального оператора $L(D)$ с постоянными коэффициентами, если она удовлетворяет уравнению

$$L(D)\,\mathcal{E}(x) = \delta(x).$$

Зная фундаментальное решение $\mathcal{E}$ оператора $L(D)$, можно построить решение уравнения $L(D)u = f$ для тех f из D', для к-рых свертка $f * \mathcal{E}$ существует, и это решение дается формулой $u = f * \mathcal{E}$.

Примеры. 20) Ядро оператора дробного дифференцирования и дробного интегрирования $f_\alpha(x)$, $-\infty < \alpha < \infty$:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta(x)\, x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \alpha > 0, \\ f^{(N)}_{\alpha+N}(x), & \alpha + N > 0, \ N \text{ — целое}. \end{cases}$$

При этом $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$, $f_0 = \delta$, $f_1 = \theta$, $f_{-k} = \delta^{(k)}$, k — целое. Если $f \in D'_+$, то $f * f_\alpha = f^{(-\alpha)}$ есть первообразная порядка α при $\alpha > 0$ (производная порядка $-\alpha$ при $\alpha < 0$).

21) $\Delta \mathcal{E} = \delta(x)$,

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|, \ n = 2, \quad \mathcal{E}(x) = -\frac{1}{4\pi |x|}, \ n = 3.$$

22) $\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_{xx} = \delta(x, t)$, $\mathcal{E}(x, t) = \dfrac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-x^2/4t}$.

23) $\mathcal{E}_{tt} - \mathcal{E}_{xx} = \delta(x, t)$,

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{1}{2}\,\theta(t - |x|).$$

е) Преобразование Фурье. Оно определяется для класса О. ф. $S' = S'(\mathbb{R}^n)$ медленного роста. Пространство основных функций $S = S(\mathbb{R}^n)$ состоит из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-функций, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Топология в S задается счетным числом норм

$$\|\varphi\|_p = \sup_{|\alpha| \leqslant p} (1 + |x|^2)^{p/2} |D^\alpha \varphi(x)|, \ \varphi \in S, \ p = 0, 1, \ldots$$

При этом $D \subset S$ и $S' \subset D'$, где указанные вложения непрерывны. Локально суммируемые в $\mathbb{R}^n$ функции медленного роста содержатся в S', определяя по формуле (2) регулярные функционалы на S.

Всякая О. ф. из S' есть нек-рая производная от непрерывной функции медленного роста и, стало быть, имеет конечный порядок в $\mathbb{R}^n$.

Преобразование Фурье $F[f]$ О. ф. f из S' определяется равенством

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \ \varphi \in S,$$

где

$$F[\varphi](\xi) = \int \varphi(x)\, e^{i(\xi, x)}\, dx,$$

$\varphi \in S$ — классич. преобразование Фурье. Так как операция $\varphi \to F[\varphi]$ — изоморфизм S на S, то и операция $f \to F[f]$ — изоморфизм S' на S', причем обратной операцией к F служит операция

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-\xi)], \ f \in S'.$$

Имеют место основные формулы для $f \in S'$:

$$D^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f], \ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n};$$

$$F[D^\alpha f] = (i\xi)^\alpha F[f],$$

$$F[f * g] = F[f]\, F[g],$$

если g финитна. Если О. ф. f — периодическая с n-периодом $T=(T_1, \ldots, T_n)$, $T_j>0$, то $f\in S'$ и ее можно разложить в тригонометрич. ряд

$$f(x)=\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k(f)\, e^{i(k\omega, x)}, \qquad |c_k(f)|\leqslant A(1+|k|)^m,$$

сходящийся к f в S'; здесь

$$\omega=\left(\frac{2\pi}{T_1}, \ldots, \frac{2\pi}{T_n}\right), \quad k\omega=\left(\frac{2\pi k_1}{T_1}, \ldots, \frac{2\pi k_n}{T_n}\right).$$

Примеры. 24) $F[x^\alpha]=(2\pi)^n(-i)^{|\alpha|}D^\alpha\delta(\xi)$, в частности $F[1]=(2\pi)^n\delta(\xi)$.

25) $F[D^\alpha\delta]=(-i\xi)^\alpha$, в частности $F[\delta]=1$.

26) $F[0]=\frac{i}{\xi+i0}=\pi\delta(\xi)+i\mathcal{P}\left(\frac{1}{\xi}\right)$.

ж) Преобразование Лапласа. Пусть О. ф. $g\in S'(\Gamma)=S'\cap D'(\Gamma)$, где Γ — замкнутый выпуклый острый конус. Пусть $C=\operatorname{int}\Gamma$, где $\Gamma^*=\{y:(y^*, \xi)\geqslant 0,\ \forall\xi\in\Gamma\}$ — сопряженный конус к Γ. Преобразованием Лапласа О. ф. f наз. выражение

$$L[g]\,z=F[g(\xi)\,e^{-(y,\xi)}]\ (x),\ z=x+iy. \qquad (9)$$

Операция $g\to L[g]$ осуществляет изоморфизм сверточной алгебры $S'(\Gamma)$ на алгебру $H(C)$, состоящую из функций $f(z)$, голоморфных в трубчатой области $T^C=\mathbb{R}^n+iC$ и удовлетворяющих условию роста: существуют числа $\alpha=\alpha(f)\geqslant 0$ и $\beta=\beta(f)\geqslant 0$ такие, что для любого конуса $C'\Subset C$ (т. е. $\bar{C'}\subset C\cup\{0\}$) существует число $M_f(C')$ такое, что

$$|f(z)|\leqslant M_f(C')\,\frac{1+|z|^\alpha}{|y|^\beta},\ z\in T^{C'}.$$

Обратное преобразование к преобразованию Лапласа L задается равенством

$$g(\xi)=e^{(y,\xi)}F_x[f(x+iy)]\ (\xi), \qquad (10)$$

причем правая часть (10) не зависит от $y\in C$.

Взаимно однозначное соответствие между $g(\xi)$ и $f(z)$, задаваемое равенствами (9) и (10), удобно изображать в виде следующей схемы:

$$g(\xi)\leftrightarrow f(z),$$

причем f наз. изображением g, а g — спектральной функцией функции f.

Всякая $f(z)$ из алгебры $H(C)$ имеет граничное значение $f(x+i0)$ при $y\to 0$, $y\in C$, в S', связанное со спектральной функцией g функции f формулой $f(x+i0)=F[g]$ согласно (9). Справедливы следующие основные формулы для преобразования Лапласа:

$$(i\xi)^\alpha g(\xi)\leftrightarrow D^\alpha f(z),$$

$$D^\alpha g(\xi)\leftrightarrow(-iz)^\alpha f(z),$$

$$g_1*g_2\leftrightarrow L[g_1](x)\,L[g_2](z),\ g_1, g_2\in S'(\Gamma).$$

Пример. 27) $f_\alpha(t)\leftrightarrow(-iz)^{-\alpha}$, в частности

$$\delta^{(k)}(t)\leftrightarrow(-iz)^k,\ \theta(t)\leftrightarrow\frac{i}{z}.$$

Лит.: [1] Дирак П. А. М., Основы квантовой механики, пер. с англ., 2 изд., М.—Л., 1937; [2] Соболев С. Л., «Матем. сб.», 1936, т. 1, с. 39—72; [3] Schwartz L., Théore des distributions, t. 1—2, P., 1950—51; [4] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969; [5] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции, в. 1—3, М., 1958; [6] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [7] его же, Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979; [8] Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р., Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход, пер. с англ., М., 1976.
В. С. Владимиров.

ОБОБЩЕННО НИЛЬПОТЕНТНАЯ ГРУППА — группа одного из обобщенно нильпотентных классов групп. Класс групп наз. обобщенно нильпо-

тентным, если он содержит все нильпотентные группы и пересекается с классом конечных групп по классу всех конечных нильпотентных групп. Рассматривалось довольно много классов О. н. г., причем в основном изучались связи между этими классами. Важнейшие классы О. н. г.— класс локально нильпотентных групп, классы нильгрупп и энгелевых групп, группы с нормализаторным условием. Большинство классов О. н. г. введено при рассмотрении тех или иных свойств центральных или нормальных рядов и систем подгрупп (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Курош А. Г., Черников С. Н., «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 3, с. 18—59. *А. Л. Шмелькин.*

ОБОБЩЕННО РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА — группа одного из обобщенно разрешимых классов групп. Класс групп наз. обобщенно разрешимым, если он содержит все разрешимые группы и пересекается с классом конечных групп по классу всех конечных разрешимых групп. Рассматривалось довольно много классов О. р. г., причем в основном изучались связи между различными такими классами. Важнейшим классом О. р. г. является класс *локально разрешимых групп*. Другие классы, как правило, вводились при рассмотрении тех или иных свойств нормальных и субнормальных рядов (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Курош А. Г., Черников С. Н., «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 3, с. 18—59. *А. Л. Шмелькин.*

ОБОБЩЕННОГО СДВИГА ОПЕРАТОРЫ, гипергруппа,— понятие, возникшее в результате аксиоматизации нек-рых свойств операторов сдвига в пространствах функций на группе. В терминах операторов группового сдвига можно сформулировать такие важные математич. понятия как *свертка*, *групповая алгебра*, *положительно определенная функция*, *почти периодическая функция* и др. В рамках теории О. с. о. удается получить далеко идущие обобщения фундаментальных принципов и результатов, связанных с указанными понятиями. В частности, теория О. с. о. имеет существенные приложения к *гармоническому анализу абстрактному*.

Термины «О. с. о.» и «гипергруппа» принадлежат Ж. Дельсарту (см. [1] — [3]). Ему же принадлежат важные идеи и ряд первоначальных результатов в данной области. Систематич. построение теории О. с. о. дано главным образом в работах Б. М. Левитана (см., напр., [4] — [7]).

Основные понятия. Пусть H — произвольное множество, Φ — нек-рое векторное пространство комплекснозначных функций, определенных на H. Пусть каждому элементу $x \in H$ сопоставлен линейный оператор R^x в Φ, причем при любом фиксированном $h \in H$ функция $\psi(x) = R^x\varphi(h)$ содержится в Φ для всех $\varphi \in \Phi$. Линейный оператор $\varphi(x) \to \psi(x) = R^x\varphi(h)$ в Φ обозначается L^h (т. е. $L^h\varphi(x) = R^x\varphi(h)$). Линейные операторы R^x наз. операторами обобщенного сдвига, если выполнены следующие условия (аксиомы): 1) $R^xL^y = L^yR^x$ для любых x, $y \in H$ (аксиома ассоциативности), 2) существует в H такой элемент e, наз. нейтральным, что $R^e = I$, где I — тождественный оператор. В таком случае множество H наз. гипергруппой, так что понятия «О. с. о.» и «гипергруппа» равносильны. Операторы R^x часто наз. операторами правого сдвига, тогда как L^x наз. операторами левого сдвига.

О. с. о. очевидным образом возникают в любом инвариантном относительно сдвигов векторном пространстве функций на произвольной полугруппе с единицей, напр. на группе. Пусть $R^x : \varphi(h) \to \varphi(h \cdot x)$, где $h \cdot x$ — произведение элементов h, x в полугруппе, а $L^x : \varphi(h) \to \varphi(x \cdot h)$; тогда аксиома ассоциативности сводится к ассоциативности умножения в полугруппе, а нейтраль-

ным элементом является единица полугруппы, так что операторы R^x образуют семейство О. с. о. Нетривиальные примеры приводятся ниже.

В общем случае L^x не образуют О. с. о., так как оператор L^e не обязан быть тождественным. Однако L^e является проектором, и его образ $\tilde{\Phi}$ наз. основным подпространством в Φ. В пространстве $\tilde{\Phi}$ операторы L^x образуют семейство О. с. о., и симметрия между операторами левого и правого сдвига восстанавливается. Часто вторую из аксиом О. с. о. усиливают требованием, чтобы $L^e=I$, т. е. $\tilde{\Phi}=\Phi$. Условия 1) и 2) являются наиболее общими аксиомами О. с. о. Накладывая дополнительные условия, можно выделять более узкие классы О. с. о. Если $R^xR^y=R^yR^x$ для всех $x, y\in H$, то О. с. о. R^x наз. коммутативными; в этом случае и гипергруппа H наз. коммутативной. Если относительно H делаются дальнейшие предположения, то для О. с. о. естественным образом возникают новые условия. Напр., если H — локально бикомпактное пространство с мерой m, то обычно требуется, чтобы операторы R^x и L^x согласованно действовали в пространстве $C(H)$ непрерывных функций на H и в пространствах $L_p(H, m)$, $p\geqslant 1$, причем на R^x и L^x накладываются дополнительные условия типа непрерывности; если H — гладкое многообразие, то накладываются условия типа дифференцируемости, и т. п. Различные варианты аксиоматики даны в [1], [3] — [6], [8], [15] — [20].

Примеры О. с. о., связанных с группами. Операторы обобщенного сдвига Дельсарта. Пусть G — топологич. группа, K — нек-рая бикомпактная группа автоморфизмов группы G, dk — мера Хаара на K и $\int dk=1$. В пространстве $\Phi=C(G)$ непрерывных функций на G О. с. о. R^x определяются с помощью равенства

$$R^x\varphi(g)=\int_K \varphi(g\cdot k(x))\,dk,$$

где $\varphi\in\Phi$, $k(x)$ — образ элемента $x\in G$ при автоморфизме $k\in K$, $g\cdot k(x)$ — произведение элементов g и $k(x)$ в G. Нейтральным элементом является единица группы. Обе аксиомы О. с. о. выполняются; если G коммутативна, то коммутативны и О. с. о. Дельсарта. Основное подпространство $\tilde{\Phi}$ состоит из всех функций, постоянных на орбитах относительно действия группы K, а операторы R^x и R^y совпадают в $\tilde{\Phi}$, если x и y лежат на одной орбите. Поэтому пространство орбит H также можно наделить структурой гипергруппы, отождествляя $\tilde{\Phi}$ с пространством непрерывных функций на H и полагая $R^h=R^x$, где x — произвольный элемент орбиты h. Если G совпадает с $\mathbb{R}$, а группа автоморфизмов состоит из двух элементов (отражение относительно нуля и тождественное отображение), то $R^x\varphi(t)=(\varphi(t+x)+\varphi(t-x))/2$. В этом случае основное подпространство состоит из четных функций, а пространство орбит отождествляется с полуосью $0\leqslant t<\infty$. Другой частный случай О. с. о. Дельсарта получается при $G=K$ и $k(x)=k^{-1}xk$; при этом основное подпространство состоит из центральных функций на K, а гипергруппа, образованная орбитами, т. е. классами сопряженных элементов, коммутативна.

Двойные классы смежности по бикомпактной подгруппе. Пусть G — локально бикомпактная группа, K — ее бикомпактная подгруппа, H — пространство двойных классов смежности по подгруппе K (такой класс вместе с элементом $g\in G$ содержит и все элементы вида k_1gk_2, где $k_1, k_2\in K$). Если K — нормальный делитель в G, то H совпадает с факторгруппой G/K. Пусть Φ — пространство, состоящее из всех таких непрерывных функций на G,

что $\varphi(k_1gk_2)=\varphi(g)$ для любых элементов $k_1,\ k_2\in K$, $g\in G$. О. с. о. определяется формулой

$$R^x\varphi\,(g)=\int_K \varphi\,(xkg)\,dk.$$

Пространство Φ можно отождествить с пространством $C(H)$ непрерывных функций на H и так же, как для О. с. о. Дельсарта, можно наделить H структурой гипергруппы. Если G — линейная полупростая группа Ли, K — ее максимальная бикомпактная подгруппа, то гипергруппа H коммутативна и тесно связана со сферич. функциями на G (в частности, все сферич. функции лежат в Φ).

В описанных выше примерах наряду с пространствами непрерывных функций можно рассматривать и другие функциональные пространства (см. [8], [13], [15] — [19]).

Гиперкомплексные системы. Пусть Φ — конечная гиперкомплексная система, т. е. конечномерная ассоциативная алгебра с фиксированным базисом $H=\{h_1,\ \ldots,\ h_n\}$. Алгебра Φ отождествляется с пространством функций на конечном множестве H, причем функции $\varphi(h)$ соответствует элемент $\sum_{i=1}^n\varphi(h_i)h_i\in\Phi$. Пусть

$$R^x\varphi\,(h)=\sum_{i=1}^n \varphi\,(h_i)\,h_i*x,$$

где h_i*x — произведение элементов h_i и x в алгебре Φ. Операторы R^x образуют семейство О. с. о. тогда и только тогда, когда один из элементов базиса H является правой единицей в алгебре Φ; указанным способом устанавливается соответствие между любыми О. с. о. в пространстве функций на конечном множестве и конечными гиперкомплексными системами. Таким образом, понятие О. с. о. можно рассматривать как далеко идущее обобщение классич. понятия гиперкомплексной системы. Важные примеры О. с. о., к-рые естественно трактовать как гиперкомплексные системы со счетным или континуальным базисом, рассмотрены, напр., в [4], [5], [8].

Генераторы и теоремы Ли для О. с. о. Пусть гипергруппа H является дифференцируемым (или комплексно-аналитическим) многообразием и $u(x,\ y)=R^x\varphi(y)$ — дифференцируемая (соответственно голоморфная) функция на $H\times H$ при всех $\varphi\in\Phi$. Пусть $(h_1,\ \ldots,\ h_n)$ — локальные координаты точки $h\in H$, причем система координат выбрана так, что нейтральный элемент имеет координаты $(0,\ \ldots,\ 0)$. Генераторами (инфинитезимальными операторами) правого сдвига k-го порядка для О. с. о. R^x наз. линейные операторы вида

$$R_{k_1,\ \ldots,\ k_n;\ h}:\varphi\,(h)\to\frac{\partial^k u\,(x,\ h)}{\partial^{k_1}x_1\ \ldots\ \partial^{k_n}x_n}\Bigg|_{x=0},$$

где $u(x,\ h)=R^x\varphi(h)$, $k=k_1+\ldots+k_n$. Аналогично генераторы левого сдвига определяются равенством

$$L_{k_1,\ \ldots,\ k_n h}\varphi\,(h)\to\frac{\partial^k u\,(h,\ x)}{\partial^{k_1}x_1\ \ldots\ \partial^{k_n}x_n}\Bigg|_{x=0}.$$

Из аксиомы ассоциативности можно вывести, что любой генератор левого сдвига коммутирует со всеми генераторами правого сдвига (равно как и с операторами R^x). Дифференцирование условия ассоциативности $R^xL^y\varphi(h)=L^yR^x\varphi(h)$ по переменным $h_1,\ \ldots,\ h_n$ соответствующее число раз дает при $h=0$ систему уравнений

$$L_{k_1,\ \ldots,\ k_n;\ x}(u)=R_{k_1,\ \ldots,\ k_n;\ y}(u),\qquad(*)$$

где $u(x,\ y)=R^x\varphi(y)$. Эту систему следует рассматривать как обобщение на случай О. с. о. первой прямой теоремы Ли (см. [3] для О. с. о. Дельсарта и [5] для общего случая). Не обязательно привлекать все урав-

нения системы (*), чтобы определить $u(x, y)$. Напр., для сдвига на группе Ли уже генераторы 1-го порядка однозначно определяют функцию u (т. е. групповое умножение). В общем случае нек-рые генераторы низших порядков могут вырождаться, напр. в умножение на константу, так что соответствующие уравнения системы (*) не содержат полезной информации. Поэтому возникает задача: отобрать минимальное число уравнений из системы (*), однозначно определяющих О. с. о. При этом вырождающиеся генераторы пополняют число начальных условий. Если конечная система вида (*) при нек-рых начальных условиях, среди к-рых содержится условие $u|_{x=0}=\varphi(y)$, однозначно определяет решение $u(x, y)=R^x\varphi(y)$, причем операторы, стоящие в левых частях системы, коммутируют со всеми операторами, стоящими в правых частях, то операторы R^x суть О. с. о. Это утверждение является аналогом первой обратной теоремы Ли [5]. Для нек-рого класса О. с. о. доказаны (см. [5]) аналоги второй и третьей (прямой и обратной) теорем Ли. В частности, в пространстве бесконечно дифференцируемых функций от n переменных построены О. с. о., для к-рых генераторы правого (левого) сдвига порождают любую заданную n-мерную алгебру Ли. Получено явное описание этих генераторов в виде интегро-дифференциальных операторов 2-го порядка [10]. С помощью аналогичной техники построены [11] генераторы любого порядка, действующие в пространстве целых аналитич. функций (от n переменных) и порождающие любую n-мерную вещественную алгебру Ли; по этим генераторам восстанавливаются О. с. о. Можно строить О. с. о., исходя не только из алгебр Ли, но и из коммутационных соотношений более общего вида (см. [7], [12]). Так, напр., уже в [1] О. с. о. на прямой строились исходя из явно заданного генератора 2-го порядка с помощью ряда, аналогичного ряду Тейлора, к-рый дает разложение обычного сдвига по степеням оператора дифференцирования. Подробно описаны коммутативные О. с. о. на прямой с генератором 2-го порядка типа Штурма — Лиувилля (см. [4], [5]) и указаны приложения к операторам и уравнениям Штурма — Лиувилля. Дана [14] полная классификация О. с. о. с генератором типа Штурма — Лиувилля (в том числе некоммутативных) в пространстве дифференцируемых функций на прямой.

Представления О. с. о. и гипергрупповые алгебры. Теория представлений для О. с. о. не столь хорошо разработана, как в случае групп, но строится аналогичным образом. Эта аналогия простирается довольно далеко, напр. с помощью понятия генератора можно изучать представления О. с. о. инфинитезимальным методом так же, как это делается для групп Ли (см. [3], [5], [11]). Представления О. с. о. удобно трактовать как представления ассоциативных гипергрупповых алгебр, аналогичных групповым алгебрам; так же, как и в случае групп, различным типам гипергрупповых алгебр соответствуют различные варианты теории представлений и гармонич. анализа (см. *Бесконечномерное представление*). Если гипергруппа H локально бикомпактна, то пространство $M(H)$ комплексных мер Радона с бикомпактными носителями на H приобретает структуру гипергрупповой алгебры относительно обобщенной свертки $f*g$ элементов f, $g\in M(H)$, определяемой равенством

$$\int \varphi d\,(f*g)=\int\int R^y\varphi\,(x)\,df\,(x)\,dg\,(y),$$

где φ — любая непрерывная функция на H. Аналогично определяется структура гипергрупповой алгебры в пространстве $D(H)$ финитных обобщенных функций на H (или в пространстве $A(H)$ аналитич. функционалов на H), если гипергруппа H является дифференцируемым

(комплексно-аналитическим) многообразием. Относительно естественных топологий $M(H)$, $D(H)$, $A(H)$ являются топологич. алгебрами; δ-функция, сосредоточенная в нейтральном элементе $e \in H$, является правой единицей в каждой из этих алгебр. Справедливо и обратное утверждение: если в пространстве $M(H)$ (соответственно $D(H)$, $A(H)$), наделенном естественной топологией, задана структура топологической ассоциативной алгебры с правой единицей, являющейся δ-функцией, то существует такая (единственная) структура гипергруппы на H, что обобщенная свертка совпадает с умножением в $M(H)$ (соответственно в $D(H)$ или $A(H)$). Непрерывные представления алгебры $M(H)$ ($D(H)$, $A(H)$) интерпретируются как непрерывные (бесконечно дифференцируемые, голоморфные) представления соответствующих О. с. о. [20].

Аналогом теории унитарных представлений групп является теория симметричных представлений гипергрупповых банаховых алгебр с инволюцией. Наиболее полные результаты (см. [4] — [6]) получены для представлений коммутативных и бикомпактных О. с. о. При нек-рых условиях структурой гипергрупповой банаховой алгебры с инволюцией наделяется пространство $L^1(H, m)$ суммируемых по положительной мере m функций на гипергруппе H. Одно из этих условий состоит в том, чтобы мера m была инвариантна относительно обобщенных сдвигов (различные варианты точных определений см. в [4] — [6], [15] — [19]). При естественных предположениях доказана единственность (с точностью до скалярного множителя) меры, инвариантной относительно правых или левых обобщенных сдвигов; имеются и достаточные условия существования такой меры (условия типа компактности, коммутативности или дискретности гипергруппы, см. [8], [16] — [18]). Однако вопрос о существовании инвариантной меры для О. с. о. общего вида остается открытым (1982). Наряду с $L^1(H, m)$ важную роль играют гипергрупповая банахова алгебра мер ограниченной вариации и гипергрупповая C^*-алгебра.

Гипергрупповые банаховы алгебры и их симметричные представления изучались в [4], [6], [8], [15] — [19]. Алгебры аналитич. функционалов, связанные с нек-рыми О. с. о. на прямой, описаны в [9]. Для О. с. о. общего типа топологические гипергрупповые алгебры и их представления рассмотрены в [20], при этом задачи спектрального анализа и синтеза трактовались как задачи изучения идеалов гипергрупповых алгебр. Техника гипергрупповых алгебр применена [12] для решения задач математич. физики в рамках операторного метода В. П. Маслова.

Гармонический анализ. Следующая модель вскрывает структуру коммутативных О. с. о. (см. [4], [5]). Пусть положительные меры m_1 и m_2 заданы на пространствах H_1 и H_2 соответственно и с помощью функции $\chi(x, y)$, определенной на $H_1 \times H_2$, задано обобщенное преобразование Фурье

$$\varphi(x) \to f(y) = \int \varphi(x)\, \overline{\chi(x, y)}\, dm_1(x),$$

к-рое определяет изоморфизм гильбертовых пространств $L^2(H_1, m_1)$ и $L^2(H_2, m_2)$. Пусть справедлива формула обращения

$$\varphi(x) = \int f(y)\, \chi(x, y)\, dm_2(y);$$

если мера m_2 дискретна, то эта формула дает разложение функции $\varphi(x)$ в обобщенный ряд Фурье. Оказывается, что H_1 имеет структуру гипергруппы, если для нек-рой точки $e \in H_1$ и для всех $y \in H_2$ справед-

ливо равенство $\chi(e, y)=1$. В этом случае О. с. о. определяются формулой

$$R^h\varphi(x)=\int f(y)\,\chi(h, y)\,\chi(x, y)\,dm_2(y).$$

Поэтому О. с. о. естественно возникают в задачах, связанных с разложениями по ортогональным системам функций, спектральной теорией операторов и т. п., что обеспечивает широкий круг приложений теории О. с. о. (см., напр., [4], [5], [8], [15]— [19]). На случай коммутативных О. с. о. обобщены теорема Бохнера о представлении положительно определенных функций и закон двойственности Понтрягина, определено обобщенное преобразование Фурье и доказан аналог *Планшереля теоремы* [6] (различные варианты этих результатов см. в [15] — [17]). С помощью теории представлений можно строить гармонич. анализ и для некоммутативных О. с. о. Напр., для О. с. о. получены некоммутативные аналоги теоремы Планшереля и формулы обращения, включающие в качестве частного случая соответствующие результаты для локально компактных групп; для бикомпактных О. с. о. справедлив аналог теоремы Петера — Вейля. Для О. с. о. рассматривались варианты гармонич. анализа в духе теорий почти периодических и средне периодических функций (см. [1], [2], [4], [8], [9], [14], [20]). Для коммутативных О. с. о. получен аналог *Винера тауберовой теоремы* и рассмотрены вопросы спектрального синтеза (см. [21], [22]). О приложениях О. с. о. к гармонич. анализу на группах см. [8], [13], [16], [19].

Лит.: [1] Delsarte J., «J. math. pures et appl.», 1938, t. 17, p. 213—31; [2] его же, «Acta math.», 1939, v. 69, p. 259—317; [3] его же, «Colloq. internat. CNRS», 1956, № 71, p. 29—45; [4] Левитан Б. М., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 1, с. 3—112; [5] его же, Теория операторов обобщенного сдвига, М., 1973; [6] его же, «Докл. АН СССР», 1945, т. 47, с. 3—6, 163—65, 323—26, 401—03; [7] его же, там же, 1958, т. 123, с. 243—45; [8] Березанский Ю. М., Крейн С. Г., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 1, с.147—52; [9] Красичков И. Ф., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 1, с. 37—60; 1968, т. 32, № 5, с. 1024—32; [10] Грабовская Р. Я., Крейн С. Г., «Math. Nachr.», 1976, Bd 75, p. 9—29; [11] Грабовская Р. Я., Кононенко В. И., Осипов В. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1977, т. 41, № 4, с. 942—36; [12] Маслов В. П., «Теорет. и матем. физика», 1977, т. 33, с. 185—209; [13] Рашевский П. К., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1979, т. 38, с. 139—85; [14] Гуревич Д. И., «Матем. заметки», 1979, т. 25, № 3, с. 393—408; [15] Dunkl Ch., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1973, v. 179; p. 331—48; [16] Jewett R., «Adv. Math.» 1975, v. 18, № 1, p. 1—101; [17] Spector R., «Lectures Notes in Math.», 1975, v. 497, p. 643—73; [18] его же, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 239, p. 147—65; [19] Ross K., «Symposia Math.», 1977, v. 22, p. 189—203; [20] Литвинов Г. Л., «Тр. Семинара по вект. и тенз. анализу», 1978, в. 18, с. 345—71; [21] Chilana A., Ross K., «Pacific J. Math.», 1978, v. 76, p. 313—28; [22] Chilana A., Kumar A., «Pacif. J. Math.», 1979, v. 80, № 1, p. 59—76.

Б. М. Левитан, Г. Л. Литвинов.

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ — обобщение понятия классич. решений дифференциальных (псевдодифференциальных) уравнений. Это понятие возникло в связи с многими задачами математич. физики, когда под решениями дифференциальных уравнений потребовалось понимать функции, не имеющие достаточного числа производных, и даже вовсе недифференцируемые функции, а также более общие объекты — обобщенные функции, гиперфункции и т. д. Поэтому понятие О. р. тесно связано с понятием *обобщенной производной* и вообще *обобщенной функции*.

Под обобщенным решением дифференциального уравнения

$$L(x, D)(u)\equiv\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha D^\alpha u(x)=f(x),\quad f\in D'(O),\quad (1)$$

$$a_\alpha\in C^\infty(O),$$

в классе $D'(O)$ понимается всякая обобщенная функция u из $D'(O)$, удовлетворяющая уравнению (1) в O, т. е. для любой основной функции $\varphi\in D(O)$ должно быть вы-

полнено равенство $(u, L^*\varphi)=(f, \varphi)$, где L^* — сопряженный оператор к L в смысле Лагранжа:

$$L^*\varphi=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(a_\alpha\varphi).$$

О. р. краевых задач для дифференциальных уравнений удовлетворяют краевым условиям в надлежащем обобщенном смысле (в $L_p(\partial O)$ или $D'(\partial O)$ и т. д.), напр.: $u(rs)\to u(s)$, $r\to 1-0$, в $L_2(|s|=1)$, $u(x, t)\to u_0(x)$, $t\to+0$ в D'.

О. р. краевых задач для дифференциальных уравнений возникают при решении их вариационными методами, при применении разностных методов, а также как слабые пределы классич. решений при применении *Фурье метода*, *предельного поглощения принципа*, *предельной амплитуды принципа*, методов, связанных с введением вязкости, и т. д.

Примеры. 1) Общее решение уравнения $x^2u'=0$ в классе $D'(\mathbb{R})$ дается формулой

$$u(x)=C_1+C_2\theta(x)+C_3\delta(x),$$

где θ — функция Хевисайда: $\theta(x)=1$, $x\geqslant 0$, ; $\theta(x)=0$, $x<0$; δ — дельта-функция Дирака, C_1, C_2, ... — здесь и далее произвольные постоянные.

2) Уравнение $x^2u'+u=0$ имеет одно решение в классе $C^\infty(\mathbb{R})$, равное $0(-x)e^{1/x}$, а в классе гиперфункций общее решение его дается формулой $u(x)=C_4e^{1/(x+i0)}+C_5e^{1/(x-i0)}+C_6\theta(-x)e^{1/x}$.

3) Общее решение волнового уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}$ в классе $C(\mathbb{R}^2)$ дается формулой $u(x, t)=f(x+at)+g(x-at)$, где f и g — произвольные функции класса $C'(\mathbb{R})$.

4) Всякое решение u из $D'(0)$ уравнения Лапласа $\Delta u=0$ — (вещественно) аналитическое в O.

5) Всякое решение u из D' уравнения теплопроводности $u_t=a^2\Delta u$ — бесконечно дифференцируемое.

6) Всякий дифференциальный оператор $L\not\equiv 0$ с постоянными коэффициентами имеет фундаментальное решение (медленного роста) из класса S'.

7) Всякое уравнение $L(D)u=f$, где $L(D)\not\equiv 0$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, имеет при любом f из $L_2(O)$ О. р. u из $L_2(O)$, если O — ограниченная область.

8) О. р. u краевой задачи

$$\Delta u=f,\ u|_{\partial O}=0,\ f\in L_2(O) \tag{2}$$

в классе Соболева $W_2^{(1)}(O)$ возникает как решение классической вариационной задачи о минимуме квадратичного функционала

$$J(u)=\int_O\left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2+2uf\right)dx$$

в классе $W_2^{(1)}(O)$. Решение этой вариационной задачи при любом f из $L_2(O)$ существует и единственно в классе $W_2^{(1)}(O)$. Таким образом, О. р. краевой задачи (2) при всех $f\in L_2(O)$ дают самосопряженное расширение оператора Δ (жесткое расширение, или расширение по Фридрихсу). О. р. краевой задачи (2), как и все их производные,— регулярные в O (т. е. типа локально интегрируемых функций в O), вторые их производные, вообще говоря,— сингулярные обобщенные функции.

Лит.: [1] Соболев С. Л., «Матем. сб.», 1936, т. 1, № 1, с. 39—72; [2] его же, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962; [3] Schwartz L., Théorie des distributions, t. 1—2, P., 1950—51; [4] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Некоторые вопросы дифференциальных уравнений, М., 1958; [5] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965; [6] Hyperfunctions and pseudo-differential eduations, B.— [u. a.], 1973; [7] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [8] его же, Обобщенные функции в математической физике, М., 2 изд., 1979.

В. С. Владимиров.

ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ НОСИТЕЛЬ — множество *тех и только тех точек, ни в какой окрестности* к-рых *обобщенная функция* не обращается в нуль. Обобщенная функция f из $D'(O)$ обращается в нуль в открытом множестве $O' \subset O$, если $(f, \varphi)=0$ для всех $\varphi \in D(O')$. С помощью разложения единицы показано, что если обобщенная функция f из $D'(O)$ обращается в нуль в нек-рой окрестности $U_y \subset O$ каждой точки $y \in O$, то f обращается в нуль в O. Объединение всех окрестностей, где f обращается в нуль, наз. н у л е в ы м м н о ж е с т в о м обобщенной функции f и обозначается O_f. Носитель f, обозначаемый $\operatorname{supp} f$, есть дополнение к O_f до O, так что $\operatorname{supp} f = O \setminus O_f$ — это замкнутое множество в O. Если $\operatorname{supp} f \subset O$, то обобщенная функция f наз. ф и н и т н о й в O. Если функция $f(x)$ непрерывна в O, то эквивалентное определение носителя f таково: $\operatorname{supp} f$ есть замыкание в O множества тех точек, где $f(x)$ обращается в нуль. Напр., $\operatorname{supp} x = \mathbb{R}^1$, $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$.

С и н г у л я р н ы й н о с и т е л ь (sing supp) обобщенной функции — множество тех и только тех точек, ни в какой окрестности к-рых обобщенная функция не совпадает с C^∞-функцией. Напр., $\operatorname{sing\,supp} x = \varnothing$, $\operatorname{sing\,supp} \delta = \{0\}$.

В. С. Владимиров.

ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОДНАЯ — слабое расширение операции обычного дифференцирования. Пусть *обобщенная функция* $f \in D'(O)$. Обобщенная (слабая) производная

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ определяется равенством

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in D(O). \qquad (*)$$

Так как операция $\varphi \to (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi$ линейна и непрерывна из $D(O)$ в $D(O)$, то функционал $D^\alpha f$, определяемый правой частью равенства (*), есть обобщенная функция из $D'(O)$. Если $f \in C^p(O)$, то $D^\alpha f \in C^{p-|\alpha|}(O)$ при всех α таких, что $|\alpha| \leqslant p$.

Имеют место следующие свойства О. ф. п.: операция $f \to D^\alpha f$ линейна и непрерывна из $D'(O)$ в $D'(O)$; любая обобщенная функция из $D'(O)$ бесконечно дифференцируема (в обобщенном смысле); дифференцирование не зависит от порядка; справедлива формула *Лейбница* для дифференцирования произведения af, где $a \in C^\infty(O)$; $\operatorname{supp} D^\alpha f \subset \operatorname{supp} f$.

Пусть $f \in L^1_{loc}(O)$. Может случиться, что нек-рая обобщенная производная $D^\alpha f$ может быть отождествлена с нек-рой $L^1_{loc}(O)$-функцией. В этом случае $D^\alpha f(x)$ — *обобщенная производная* т и п а ф у н к ц и и.

П р и м е р ы. 1) $\theta' = \delta$, где θ — функция Хевисайда и δ — функция Дирака.

2) Общее решение уравнения $u' = 0$ в классе D' есть произвольная постоянная.

3) Тригонометрический ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}, \quad |a_k| \leqslant A(1+|k|)^m$$

сходится в D' и его можно дифференцировать в D' почленно бесконечное число раз.

Лит.: [1] S c h w a r t z L., Théorie des distributions, v. 1, P., 1950; [2] С о б о л е в С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962.

В. С. Владимиров.

ОБОБЩЕННЫЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — классы функций, являющиеся различными обобщениями почти периодич. функций. Каждый из них обобщает какую-то из сторон в определениях *Бора почти периодических функций* и *Бохнера почти периодических функций*. В этих определениях встречаются следующие математич. понятия (структуры): 1) пространство функций, определенных на всей прямой

как метрич. пространство с метрикой (расстоянием):

$$\rho\{f,\ g\} = \sup_{x\in\mathbb{R}^1} |f(x) - g(x)|; \qquad (*)$$

2) отображение прямой $\mathbb{R}^1$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}^1$ (функция); 3) прямая линия $\mathbb{R}^1$ как группа; 4) прямая линия как топологич. пространство.

Имеющиеся обобщения почти периодич. функций удобно классифицировать в согласии с этими структурами.

1) Если вместо непрерывности требовать от функции $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^1$, измеримость и суммируемость с p-й степенью в каждом конечном промежутке, то в качестве расстояния можно принять одно из следующих трех выражений:

расстояние Степанова:

$$\rho_{S^p_l}\{f,\ g\} = \sup_{x\in\mathbb{R}^1}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l} |f(x) - g(x)|^p\,dx\right\}^{1/p};$$

расстояние Вейля:

$$\rho_{W^p}\{f,\ g\} = \lim_{l\to\infty} \rho_{S^p_l}\{f,\ g\};$$

расстояние Безиковича:

$$\rho_{B^p}\{f,\ g\} = \left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\left|f(x) - g(x)\right|^p dx\right\}^{1/p}.$$

Этим расстояниям соответствуют обобщенные *Степанова почти периодические функции*, *Вейля почти периодические функции* и *Безиковича почти периодические функции*.

2) Пусть прямая $\mathbb{R}^1$ отображается не в $\mathbb{C}^1$, а в банахово пространство B. Такое отображение наз. абстрактной функцией. Пусть абстрактные функции непрерывны и расстояние между ними определяется по формуле (*), в к-рой модуль заменен нормой. Тогда определения Бора и Бохнера обобщаются и приводят к т. н. абстрактным почти периодическим функциям.

Дальнейшее обобщение получается заменой банахова пространства на топологическое векторное пространство. В этом случае почти период $\tau=\tau_\varepsilon$ определяется так: для всякого $\varepsilon>0$ существует такая окрестность нуля U_ε, что $f(x+\tau)-f(x)\in U_\varepsilon$.

Если топологию, определяемую нормой, заменить слабой топологией, то получаются т. н. слабо почти периодические функции: функция $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^1$, $f(x)\in B$, наз. слабо почти периодической, если для любого функционала $\varphi\in B^*$, $\varphi(f(x))$ есть числовая почти периодич. функция.

3) Пусть вместо прямой $\mathbb{R}^1$ рассматривается произвольная группа G (не обязательно топологическая) и отображение $f(x)$, $x\in G$, группы G в топологическое векторное пространство (в частности, в $\mathbb{C}^1$). В качестве определения почти периодич. функций удобней принять определение Бохнера: $f(x)$ наз. почти периодической функцией на группе, если семейство функций $f(xh)$, $h\in G$ (или, что эквивалентно, семейство $f(hx)$), условно компактно.

3) В определении почти периодич. функции на группе важна не сама групповая операция, а операция сдвига на функциях: $T^h f(x)=f(xh)$ (или $f(hx)$), x, $h\in G$. Поэтому дальнейшее обобщение почти периодич. функций получается обобщением операции сдвига. Пусть Ω — абстрактное пространство (не обязательно группа) и $f(x)$, $x\in\Omega$, — функция, определенная на Ω. Семейство линейных операторов T^h, $h\in\Omega$, наз. обобщенного сдвига операторами, если выполняются следующие аксиомы:

1) ассоциативность: $T^g_h T^h_x f(x) = T^h_g T^g_x f(x)$;

2) существование нейтрального элемента, т. е. такого элемента $h_0\in\Omega$, что $T^{h_0}=I$, где I — единичный оператор.

Функция $f(x)$, $x\in\Omega$, наз. почти периодической относительно семейства операторов обобщенного сдвига T^h, если семейство функций $T^hf(x)$ (x — параметр) условно компактно относительно равномерной сходимости на Ω. Следует отметить, что теория таких функций относительно даже конкретных семейств операторов обобщенного сдвига еще слабо разработана (см. [1], [5]).

4) Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — произвольное конечное или счетное множество действительных чисел. Пусть прямая $\mathbb{R}^1$ превращена в топологическое векторное пространство заданием окрестности нуля как множества действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $|e^{i\lambda_n x}-1|<\varepsilon$, $k=1, \ldots, N$ (числа ε и N выбираются произвольно и определяют окрестность нуля). Оказывается, что почти периодич. функции Бора совпадают с функциями, равномерно непрерывными в этой топологии (в качестве чисел $\{\lambda_k\}$ можно взять показатели Фурье функции или их целый базис). Функции, непрерывные в указанной топологии, дают еще одно обобщение почти периодич. функций. Это — так наз. N-почти периодические функции Левитана. Определение N-почти периодич. функций очевидным образом переносится на функции, определенные на абелевой группе (и менее очевидно — на некоммутативные группы).

В указанную здесь классификацию О. п. п. ф. не совсем хорошо укладываются т. н. асимптотические почти периодич. функции, введенные М. Фреше (см. [9], [10]) в связи с нек-рыми проблемами эргодич. теории. Функция $f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{C}^1$ наз. асимптотической почти периодической функцией, если для всех $\alpha\in\mathbb{R}^1$ и произвольной последовательности действительных чисел $\{h_n\}$, $h_n\to\infty$ существует подпоследовательность $\{k_n^{(\alpha)}\}$ последовательности $\{h_n\}$, для к-рой $f(x+k_n^{(\alpha)})$ сходится равномерно для всех $x>\alpha$.

Лит.: [1] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953; [2] Besicovitch A., Almost periodic functions, Camb., 1932; [3] Amerio L., Prouse G., Almost-periodic functions and functional equations, N. Y., 1971; [4] Bochner S., «Acta math.», 1933, v. 61, p. 149—84; [5] Марченко В. А., в кн.: Тр. Моск. матем. об-ва, т. 2, М., 1953, с. 3—83; [6] Левин Б. Я., «Укр. матем. ж.», 1949, т. 1, с. 49—101; [7] Besicovitch A., Bohr H., «Acta math.», 1931, v. 57, p. 203—92; [8] Левитан Б. М., Жиков В. В., Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения, М., 1978; [9] Fréchet M., «C. r. Acad. sci», 1941, t. 213, p. 520—22; [10] его же, «Proc. Roy. Soc. Edinburgh (A)», 1950, v. 63, p. 61—68.

Б. М. Левитан.

ОБОБЩЕННЫЕ ТЕОРИИ КОГОМОЛОГИЙ, экстраординарные теории когомологий,— класс специальных функторов из категории пар пространств в категорию градуированных абелевых групп.

О. т. к. есть пара (h^*, δ), где h^* — функтор из категории P пар топологич. пространств в категорию GA градуированных абелевых групп (т. е. каждой паре пространств (X, A) отвечает градуированная абелева группа $h^*(X, A)=\oplus_{n=-\infty}^{\infty}h^n(X, A)$ и каждому непрерывному отображению $f(X, A)\to(\varphi, B)$ — набор гомоморфизмов $\{h^n(f): h^n(Y, B)\to h^n(X, A)\}_{n=-\infty}^{\infty}$), δ — заданный для каждой пары (X, A) набор гомоморфизмов

$$\{\delta^n_{(X, A)}: h^n(A)\to h^{n+1}(X, A)\},$$

естественных в том смысле, что для любого непрерывного $f_i(X, A)\to(Y, B)$ имеет место

$$\delta^n_{(X, A)}\circ h^n(f|_A)=h^n(f)\circ\delta^n_{(Y, B)},$$

причем должны выполняться следующие три аксиомы.

1) Аксиома гомотопии. Если два отображения $f, g: (X, A)\to(Y, B)$ гомотопны, то гомоморфизмы $h^n(f)$ и $h^n(g)$ совпадают для всех n.

2) Аксиома точности. Для любой пары (X, A) последовательность

$$\ldots \to h^n(X, A) \xrightarrow{h^n(j)} h^n(X) \xrightarrow{h^n(i)} h^n(A) \xrightarrow{\delta^n_{(X, A)}} \xrightarrow{\delta^n_{(X, A)}} h^{n+1}(X, A) \xrightarrow{h^{n+1}(j)} \ldots$$

точна; здесь $i : A \to X$ и $j : X = (X, \varnothing) \subset (X, A)$ — очевидные включения.

3) Аксиома вырезания. Пусть (X, A) — пара пространств и пусть $U \subset A$ таково, что $\overline{U} \subset A$. Тогда включение $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ для всех n индуцирует изоморфизмы

$$h^n(X, A) \to h^n(X \setminus U, A \setminus U).$$

Для корасслоения (X, A) из аксиом следует, что проекция $(X, A) \to (X/A, pt)$, где pt — пространство, состоящее из одной точки, индуцирует изоморфизм

$$h^n(X, A) \to h^n(X \setminus U, A \setminus U).$$

Часто вместо $h^n(i)$ пишут просто f^*, а вместо $\delta^n_{(X, A)}$ — просто δ. Группу $h^n(X, A)$ наз. группой n-мерных (обобщенных) когомологий пары (X, A), а градуированную группу $h^*(pt)$ — группой коэффициентов О. т. к.

В определении О. т. к. можно вместо категории p брать категорию корасслоений или категорию $\mathfrak{S}$ пар клеточных пространств, или категорию $\mathfrak{S}_F$ пар конечных клеточных пространств (при этом в аксиоме вырезания надо потребовать, чтобы пара $(X \setminus U, A \setminus U)$ была изоморфна объекту соответствующей категории. В этих случаях говорят, что О. т. к. (h, δ) определена на категории $\mathfrak{S}$ (соответственно $\mathfrak{S}_F$).

Выбор термина О. т. к. мотивируется следующим обстоятельством. Доказано [2], что любой функтор $\mathfrak{S}_F \to GA$, удовлетворяющий аксиомам 1—3 и т. н. аксиоме размерности (состоящей в том, что $h^i(pt) = 0$ при $i \neq 0$), есть обычная теория *когомологий* H^* с коэффициентами в $h^0(pt)$. Позже было замечено, что многие полезные конструкции алгебраич. топологии (напр., *кобордизмы*, *K-теория*) удовлетворяют аксиомам 1—3 и что эффективность этих конструкций в значительной степени обусловлена свойствами, формально вытекающими из этих аксиом. Эти обстоятельства и привели к формированию понятия О. т. к.

Пусть X — пунктированное пространство и $\varepsilon : pt \to X$ — пунктированное отображение. Группу приведенных обобщенных когомологий $\tilde{h}^n(X)$ пространства X определяют, полагая

$$\tilde{h}^n(X) = \ker(h^n(\varepsilon) \cdot h^n(X) \to h^n(pt)).$$

Имеется очевидное расщепление

$$h^n(X) = \tilde{h}^n(X) \oplus h^n(pt),$$

и его можно сделать каноническим, считая, что вложение $h^n(pt) \subset h^n(X)$ индуцировано отображением $X \to pt$. Ясно, что $\tilde{h}^n(X) \approx h^n(X, pt)$. Кроме того, для корасслоения (X, A) из аксиом 1—3 следует изоморфизм $h^n(X, A) \approx h^n(X/A, pt)$ (см. [2], [3]), так что $h^n(X, A) \approx \tilde{h}^n(X/A)$. Здесь, как обычно, $X/A = X \cup pt = X^t$ при $A = \varnothing$.

Если (X, A) — корасслоение, то из аксиом следует точность последовательности (естественной на категории корасслоений)

$$\ldots \tilde{h}^n(X/A) \xrightarrow{j^*} \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{h}^n(A) \xrightarrow{\delta} \tilde{h}^{n+1}(X/A) \to \ldots \quad (*)$$

Здесь $i : A \to X$ и $j : X \to X/A$ — очевидные отображения, а δ есть композиция

$$\tilde{h}^n(A) \subset h^n(A) \to h^{n+1}(X, A) \approx \tilde{h}^{n+1}(X/A).$$

В частности, если X есть конус CA над A, то $\tilde{h}^*(X)=0$ (аксиома гомотопии), а X/A есть надстройка SA над A, и точность последовательности (*) влечет изоморфизмы надстройки $\sigma_A : \tilde{h}^i(A) \approx \tilde{h}^{i+1}(SA)$, естественные по A. При этом изоморфизмы σ позволяют восстановить гомоморфизмы δ (см. [2], [3]); это делается с использованием т. н. последовательности Пуппе. Применение к последней функтора h^N, $N \to \infty$, дает точную последовательность (*). Таким образом, по приведенной О. т. к. $(\tilde{h}^*, \sigma)$ полностью восстанавливается О. т. к. (h^*, δ).

О. т. к. h^* наз. мультипликативной, если для любых пар пространств (X, A), (Y, B) из P задано естественное спаривание

$$h^p(X, A) \bigoplus h^q(Y, B) \to h^{p+q}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y),$$

удовлетворяющее условиям коммутативности и ассоциативности (см. [4], [5]). В этом случае для $(X, A) \in P$ группа $h^*(X, A)$ является градуированным (коммутативным, ассоциативным) кольцом относительно умножения

$$h^p(X, A) \bigoplus h^q(X, A) \to h^{p+q}(X \times X, X \times A \cup A \times X) \xrightarrow{\Delta^*} \xrightarrow{\Delta^*} h^{p+q}(X, A),$$

где

$$\Delta : (X, A) \to (X \times X, A \times A) \subset (X \times X, X \times A \cup A \times X)$$

— диагональ, и индуцированные отображения $f^* : h^*(Y, B) \to h^*(X, A)$ суть кольцевые гомоморфизмы. Более общим образом можно определить спаривание двух О. т. к. в третьей [5].

Обычные когомологии $H^n(X; G)$ можно определить как группу $[X, K(G, n)]$ гомотопич. классов непрерывных отображений из X в *Эйленберга — Маклейна пространство* $K(G, n)$. Это обобщается и на О. т. к. следующим образом. Спектром пространств наз. последовательность пространств $\{M_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и непрерывных отображений $s_n : SM_n \to M_{n+1}$, где SM_n — надстройка над M_n. Для пространства X определяется группа $\tilde{h}^n(X)$ равенством

$$\tilde{h}^n(X) = \lim_{k \to \infty} [S^k X, M_{n+k}].$$

Здесь отображения

$$[S^k X, M_{n+k}] \to [S^{k+1} X, M_{n+k+1}]$$

определяются композицией

$$[S^k X, M_{n+k}] \xrightarrow{S} [S^{k+1} X, SM_{n+k}] \xrightarrow{(s_{n+k})} [S^{k+1} X, M_{n+k+1}].$$

Очевидным образом строятся изоморфизмы надстройки $\sigma_X^n : \tilde{h}^n(X) \approx \tilde{h}^{n+1}(SX)$. Таким образом, каждый спектр пространств задает нек-рую О. т. к. (h^*, σ) и, значит, неприведенную О. т. к. $(\tilde{h}, \delta)$.

Если для О. т. к. (h^*, δ) существует спектр, из к-рого она получается описанным выше способом, то говорят, что этот спектр представляет О. т. к. (h^*, δ) или что теория (h^*, δ) представима этим спектром. Известно, что любая О. т. к. на категории $\mathfrak{S}_F$ представима спектром, единственным с точностью до слабой гомотопич. эквивалентности.

Если О. т. к. (h^*, δ) представима кольцевым спектром пространств, то она мультипликативна [5]. Для О. т. к., заданной на категории $\mathfrak{S}$, верно и обратное.

Пусть $F \to E \to B$ — расслоение в смысле Серра. Для любой О. т. к. h^* и любого n группы $h^n(F)$ образуют локальную систему групп на пространстве B. Существует спектральная последовательность Дольда — Атьи — Хирцебруха $\{E_r^{p,q}\}$, начальный член к-рой

есть $E_2^{p,q}=H^p(B;\ \{h^q(F)\})$. Если B — конечное клеточное пространство, то эта спектральная последовательность сходится и ее предельный член присоединен к группе $h^*(E)$ (см. [1]). В частности, если $F=pt$, то получается спектральная последовательность $H^p(X,h^q(pt))\Longrightarrow h^n(X)$, позволяющая (иногда) вычислять группу $h^*(X)$ по группам $H^*(X)$ и $h^*(pt)$.

С каждой О. т. к. h^* можно связать двойственную обобщенную теорию гомологий h_*, аксиоматика к-рой аналогична аксиоматике О. т. к. с учетом того, что гомологии — ковариантный функтор [4]. При этом если пространства X и Y $(n+1)$-двойственны (см. *S-двойственность*), то $\tilde{h}^i(X)\approx\tilde{h}_{n-i}(Y)$. Кроме того, если О. т. к. h^* представима спектром $\{M_n,\ s_n\}$, то

$$\tilde{h}_i(X)=\lim_{k\to\infty}\pi_{i+k}(X\wedge M_k).$$

При этом для мультипликативной О. т. к. h^* имеется спаривание высечения $\cap$:

$$\cap:h_n(X,\ X_1\cup X_2)\oplus h^q(X,\ X_1)\to h_{n-q}(X,\ X_2).$$

Важнейшими примерами О. т. к. является K-теория и различные кобордизмы. Двойственные к кобордизмам обобщенные теории гомологий суть *бордизмы*.

Пусть ξ есть n-мерное векторное расслоение над X, ориентируемое в О. т. к. h^*, и $T\xi$ — его *Тома пространство*. В этом случае имеет место обобщенный *Тома изоморфизм* $h^i(X)\approx\tilde{h}^{i+n}(T\xi)$ (см. ([1])). Отсюда (и из теоремы двойственности Атьи [7]) следует обобщенная *Пуанкаре двойственность*: пусть P — *Пуанкаре пространство* формальной размерности n (напр., замкнутое n-мерное многообразие), нормальное расслоение к-рого ориентируемо в О. т. к. h^*. Тогда для любого целого i имеет место $h^i(P)\approx h^{n-i}(P)$. Пусть $A\vee$ есть N-мерное нормальное расслоение над P и $T\vee$ — его пространство Тома. Пространства $P^+=P\cup pt$ и $T\vee(N+n)$-двойственны (отношение, названное в статье *S-двойственность* $(n+1)$-двойственностью, часто наз. n-двойственность). Поэтому

$$h_i(P)\approx\tilde{h}_i(P^+)\approx\tilde{h}^{N+n-i}(T\vee)\approx h^{n-i}(P).$$

Элемент z группы $h_n(P)$, отвечающий при этом изоморфизме единице $1\in h^0(P)$, наз. фундаментальным классом пространства P в О. т. к. h^*, это понятие обобщает классич. понятие *фундаментального класса*. Доказано, что изоморфизм $h^i(P)\approx h_{n-i}(P)$ задается «высечением на фундаментальном классе», т. е. имеет вид $x\to z\cap x_*$ (см. [4]).

Пусть F — одно из полей $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{H}$. Мультипликативная О. т. к. h^* наз. F-ориентируемой, если все F-векторные расслоения ориентируемы в h^*. Оказывается, что для любой F-ориентируемой О. т. к. h^* и любого F-векторного расслоения над X можно определить обобщенные *характеристические классы* расслоения ξ со значениями в группе $h^*(X)$, при этом для F, соответственно равного $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$, и обычной теории когомологий H^* (или $H^*(\mathbb{Z}_2)$ для $F=\mathbb{R}$) получаются соответственно классы Штифеля, Чжэня или Бореля. При этом (см. *Кобордизм*) универсальной F-ориентированной О. т. к. является теория GF-кобордизмов. Это проявляется также в существовании спектральных последовательностей, связывающих $h^*(X)$ с $GF_0^*(X)$ и $h^*(pt)$, где F_0 — одно из полей $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Кроме того, с каждой $\mathbb{C}$-ориентированной О. т. к. h^* можно ассоциировать формальную группу над кольцом $h^*(pt)$, и универсальность кобордизмов отражается и в том факте, что формальная группа теории унитарных кобордизмов универсальна (чисто алгебраически) в классе всех формальных групп. При этом формальная группа О. т. к. h^* несет с последней довольно много информации.

Часто бывает необходимо продолжать О. т. к. с подкатегории на всю категорию. Напр., надо продолжить О. т. к. h^*, заданную на категории $\mathfrak{S}_F$, на всю категорию $\mathfrak{S}$.

Первый способ: берется спектр, представляющий (на $\mathfrak{S}_F$) О. т. к. h^*, и с его помощью строится О. т. к. на всем $\mathfrak{S}$.

Второй способ: пусть О. т. к. h^* задана на $\mathfrak{S}_F$ и $X \subset \mathfrak{S}$, $\{X_\alpha\}$ — семейство конечных клеточных подпространств пространства X и

$$\overleftarrow{h}(X) = \varprojlim h^*(X).$$

Тогда $\overleftarrow{h}^*$ — функтор на $\mathfrak{S}$, удовлетворяющий всем аксиомам О. т. к., кроме аксиомы точности (функтор $\varprojlim$ не сохраняет точность). При этом для любого $X \leftarrow \mathfrak{S}$ и любой О. т. к. $h^*: \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}A$, продолжающей О. т. к. $h^*: \mathfrak{S}_F \to \mathfrak{S}A$, естественный гомоморфизм

$$A^*(X) \to \overleftarrow{h}^*(X)$$

эпиморфен.

В общем случае должны, видимо, возникать спектральные последовательности, использующие высшие производные функторы $\lim^p$ и вычисляющие $h^*(X)$ по $\lim^p h^*(X_\alpha)$ и $\overleftarrow{h}^*(X)$ (эти спектральные последовательности известны (1982) лишь для H^*).

Для обобщенной теории гомологий h_*, заданной на $\mathfrak{S}_F$, функтор

$$\overrightarrow{h}_*(X) = \varinjlim h_*(X_\alpha)$$

удовлетворяет аксиоме точности и, следовательно, всегда является продолжением h_* с $\mathfrak{S}_F$ на $\mathfrak{S}$.

Третий способ является аналогом способа Александрова — Чеха и основывается на использовании конструкции *нерва*.

О. т. к. можно продолжить и на категорию спектров: пусть $M_n = \{M_n, s_n\}$ — спектр пространств. Группа $\tilde{h}^*(M)$ определяется соотношением

$$\tilde{h}^i(M) = \lim_{n \to \infty} \tilde{h}^{i+n}(M_n),$$

отображения

$$\tilde{h}^{i+n}(M_n) \leftarrow \tilde{h}^{i+n+1}(M_{n+1})$$

имеют вид

$$\tilde{h}^{i+n}(M_n) \approx \tilde{h}^{i+n+1}(SM_n) \leftarrow \tilde{h}^{i+n+1}(M_{n+1}).$$

Полученный функтор h^* на категории спектров удовлетворяет всем аксиомам приведенной О. т. к. (при правильном их переносе в категории спектров) (см. [5]).

Имеется естественная задача «сравнения» различных О. т. к., и в частности задача выражения одних О. т. к. через другие. Решение последней можно рассматривать как далеко идущее обобщение формулы универсальных коэффициентов. Наиболее мощный аппарат здесь представляют спектральные последовательности адамсовского типа. Один такой пример уже приводился: это спектральные последовательности «от кобордизмов к ориентированной О. т. к.». Другой пример: пусть h^* и k^* — две О. т. к. Пусть, далее, A_h — кольцо *когомологических операций* теории h^*, Y — спектр, представляющий теорию k^*, и X — некрый спектр (в частности, пространство). Тогда (при «хороших X, Y и h^*», см. [6]) существует спектральная последовательность, начальный член к-рой есть $\operatorname{Ext}^{**}_{A_h}(h^*(Y), h^*(X))$, а предельный член присоединен к $k^*(X)$. Есть и другие спектральные последовательности (см. [8], [9]), связывающие одни О. т. к. с другими.

Полезно было бы научиться трактовать О. т. к. как когомологический функтор, т. е. разлагать $h^*: P \to GA$

в композицию $P \xrightarrow{i} A \to GA$, где i — канонический (не зависящий от h^*) функтор в *абелеву категорию* A. Один из путей реализации этого намечен в [8].

Лит.: [1] Дольд А., «Математика», 1965, т. 9, № 2, с. 8—14; [2] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [3] Коннер П., Флойд Э., Гладкие периодические отображения, пер. с англ., М., 1969; [4] Уайтхед Дж., Новейшие достижения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1974; [5] Switzer R., Algebraic topology-homotopy and homology, B., 1975; [6] Новиков С. П., «Изв. АН СССР, Сер. матем.», 1967, т. 31, № 4, с. 855—951; [7] Атья М., «Математика», 1966, т. 10, № 5, с. 48—69; [8] Adams J., Stable homotopy and generalised homology, Chi.—[a. o.], 1974; [9] Dyer E., Kahn D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 145, p. 397—437; [10] Milnor J., «Pacific J. Math.», 1962, v. 12, № 1, p. 337—41; [11] Dyer E., Cohomology theories, N. Y.—Amst., 1969.

Ю. Б. Рудяк.

ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПРОИЗВЕДЕНИЕ — произведение $af = fa$ *обобщенной функции* f из $D'(O)$ с функцией $a \in C^\infty(O)$, определяемое равенством

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), \quad \varphi \in D(O);$$

при этом $af \in D'(O)$ и для (обычных) функций $f(x)$ из $L^1_{\mathrm{loc}}(O)$ произведение af совпадает с обычным умножением функций $f(x)$ и $a(x)$.

Примеры. 1) $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$; 2) $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$.

Однако эта операция произведения не допускает распространения на любые обобщенные функции так, чтобы она была ассоциативной и коммутативной, иначе было бы противоречие:

$$(x\delta(x))\,\mathcal{P}\frac{1}{x} = 0\mathcal{P}\frac{1}{x} = 0,$$

$$(x\delta(x))\,\mathcal{P}\frac{1}{x} = (\delta(x)\,x)\,\mathcal{P}\frac{1}{x} = \delta(x)\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}\right) = \delta(x).$$

Чтобы определить произведение двух обобщенных функций f и g, достаточно, чтобы они обладали, грубо говоря, свойствами: насколько f «нерегулярна» в окрестности произвольной точки, настолько g должна быть «регулярной» в этой окрестности и наоборот, напр. если $\operatorname{sing\,supp} f \cap \operatorname{sing\,supp} g = \varnothing$ (см. *Обобщенной функции носитель*). В нек-рых классах обобщенных функций их произведение можно определить, однако оно может оказаться неоднозначным.

Примеры: 3) Граничные значения из алгебры голоморфных функций $H(C)$ (одночастотные обобщенные функции):

$$f(x+i0)\,g(x+i0) = \lim_{y \to 0,\ y \in C} f(x+iy)\,g(x+iy) \text{ в } S'.$$

Они образуют алгебру, ассоциативную и коммутативную с единицей [2].

4) $\delta^2(x) = c\delta(x)$, где c — произвольная постоянная. Действительно,

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)} \to \delta(x), \ \varepsilon \to +0 \text{ в } D'.$$

Но на основных функциях $\varphi(x)$ таких, что $\varphi(0) = 0$,

$$(\delta_\varepsilon^2, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{\pi^2(x^2+\varepsilon^2)}\varphi(x)\,dx \to 0, \ \varepsilon \to +0.$$

Поэтому естественно положить $(\delta^2, \varphi) = 0$, если $\varphi \in D$, $\varphi(0) = 0$. Расширяя этот функционал на все основные функции φ из D, получают 4).

5) Определить произведение $\frac{\theta(x)}{x}$. Функция $\frac{\theta(x)}{x}$ не принадлежит к $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1)$, однако она определяет регулярные обобщенные функции: 0 из D', $x < 0$, и $\frac{1}{x}$ из D', $x > 0$. Их можно согласованно продолжить до обобщенных функций из D', напр., взяв конечную часть

по Адамару расходящегося интеграла (п е р е н о р м и р о в а в е г о)

$$\left(\left(\frac{\theta(x)}{x}\right)_M, \varphi\right) = \int_0^M \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_M^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,x, \quad \varphi \in D.$$

Обобщенная функция $\left(\frac{\theta(x)}{x}\right)_M$ (перенормированный функционал для $\frac{\theta(x)}{x}$) зависит от произвольного параметра $M > 0$. Произвол в перенормировке таков:

$$\left(\frac{\theta(x)}{x}\right)_M - \left(\frac{\theta(x)}{x}\right)_{M_1} = \mathrm{nl}\,\frac{M_1}{M}\,\delta(x).$$

Эти идеи привели к процедуре перенормировки амплитуд Фейнмана в квантовой теории поля. Перенормировочные константы (напр., массы и заряды) выступают как произвольные постоянные, аналогичные $\ln\frac{M_1}{M}$; наиболее общее определение О. ф. п. дается в терминах волновых фронтов.

Лит.: [1] S c h w a r t z L., Théorie des distributions, t. 1--2, P., 1950—51; [2] В л а д и м и р о в В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976; [3] Б о г о л ю б о в Н. Н., П а р а с ю к О. С., «Acta Math.», 1957, v. 97, p. 227—66; [4] Х е п п К., Теория перенормировок, пер. с франц., М., 1974.

В. С. Владимиров.

ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПРОСТРАНСТВО — пространство, сопряженное к п р о с т р а н с т в у о с н о в н ы х (достаточно хороших) ф у н к ц и й. Важную роль здесь играют *Фреше пространства* (типа FS) и сильно сопряженные к ним (типа DFS). Пространство типа FS есть проективный предел компактной последовательности банаховых пространств и его сопряженное есть пространство типа DFS. Пространство типа DFS есть индуктивный предел компактной последовательности банаховых пространств и его сопряженное есть пространство типа FS. Пространства типов FS и DFS — полные, сепарабельные, рефлексивные и монтелевские. В пространствах типов FS и DFS слабая и сильная сходимости совпадают.

П р и м е р ы п р о с т р а н с т в о с н о в н ы х и о б о б щ е н н ы х ф у н к ц и й.

1) Пространства S и S'. Пространство основных (б ы с т р о у б ы в а ю щ и х) функций $S = S(\mathbb{R}^n)$ состоит из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-функций, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Это пространство есть проективный предел последовательности банаховых пространств S_p, $p = 0, 1, \ldots$, состоящих из $C^p(\mathbb{R}^n)$-функций, с нормой

$$\varphi \to \|\varphi\|_p = \sup_{|\alpha| \leqslant p} (1 + |x|^2)^{p/2} |D^\alpha \varphi(x)|,$$

причем вложение $S_{p+1} \subset S_p$ компактно; S типа FS. Сопряженное пространство $S' = S'(\mathbb{R}^n)$ (пространство обобщенных функций м е д л е н н о г о р о с т а) есть индуктивный предел последовательности банаховых пространств S'_p, причем вложение $S'_p \subset S'_{p+1}$ компактно, так что S' типа DFS. Из (слабой) сходимости последовательности обобщенных функций в S следует сходимость по норме функционалов в нек-ром S'_p. В пространствах S и S' операция преобразования Фурье есть изоморфизм.

2) Пространства $D(O)$ и $D'(O)$ (O — открытое множество в $\mathbb{R}^n$). Пространство основных функций состоит из финитных в O $C^\infty(O)$-функций (см. *Обобщенной функции носитель*). Оно снабжается топологией строгого индуктивного предела (возрастающей) последовательности пространств $C_0^\infty(\overline{O}_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, типа FS, где $\{O_k\}$ — строго возрастающая последовательность открытых множеств, исчерпывающая O: $O_k \Subset O_{k+1}$, $\bigcup O_k = O$. Пространство $C_0^\infty(\overline{O}_k)$ есть проективный

предел (убывающей) последовательности банаховых пространств $C_0^p(\overline{O}_k)$, $p=0, 1, \ldots$, состоящих из $C^p(\mathbb{R}^n)$-функций с носителем в $\overline{O}_k$, с нормой

$$\varphi \to \|\varphi\|_p' = \max_{|\alpha| \leqslant p}{}_x |D^\alpha \varphi(x)|,$$

причем вложение $C_0^{p+1}(\overline{O}_k) \subset C_0^p(\overline{O}_k)$ компактно. Пусть $D'(O)$ — пространство, (сильно) сопряженное с $D(O)$; $D=D(\mathbb{R}^n)$ и $D'=D'(\mathbb{R}^n)$. Последовательность основных функций из $D(O)$ сходится в $D(O)$, если она сходится в каком-либо пространстве $C_0^\infty(\overline{O}_k)$. Последовательность обобщенных функций из $D'(O)$ сходится в $D'(O)$, если она сходится на каждом элементе из $D(O)$ (слабая сходимость). Для того чтобы линейный функционал на $D(O)$ был обобщенной функцией из $D'(O)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого открытого множества $O' \Subset O$ существовали числа K и m такие, что

$$|(f, \varphi)| \leqslant K \|\varphi\|_m', \quad \varphi \in D(O').$$

Пространство $D'(O)$ — (слабо) полное: если последовательность обобщенных функций $f_k \in D'(O)$, $k=1, 2, \ldots$, такова, что для любой φ из $D(O)$ числовая последовательность (f_k, φ) сходится, то функционал

$$(f, \varphi) = \lim_{k \to \infty} (f_k, \varphi)$$

принадлежит $D'(O)$. Обобщенная функция из $D'(O)$ имеет произвольный «рост» в окрестности границы ∂O, в частности любая функция $f \in L^1_{loc}(O)$ определяет обобщенную функцию из $D'(O)$ по формуле

$$\varphi \to (f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in D(O).$$

3) Пространства Φ и Φ'. Пусть Φ_p — банахово пространство, состоящее из всех функций $\varphi(z)$, $z=x+iy$, голоморфных в трубчатой области $|y|<\rho$, $x \in \mathbb{R}^n$, с нормой

$$\varphi \to \|\varphi\|_\rho'' = \sup_{|y|<\rho,\, x \in \mathbb{R}^n} e^{\rho|x|} |\varphi(x+iy)|;$$

вложение $\Phi_\rho \subset \Phi_{\rho'}$, $\rho > \rho'$, компактно. Пусть Φ — индуктивный предел (возрастающей) последовательности пространств $\Phi_{1/n}$, $n \to \infty$. Пространство Φ типа DFS, а его сопряженное Φ' типа FS. Элементы Φ являются Фурье-гиперфункциями; Φ' изоморфно также пространству S_1^1.

Лит.: [1] Schwartz L., Théorie des distributions, t. 1—2, P., 1950—51; [2] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [3] Дьёдонне Ж., Шварц Л., «Математика», 1958, т. 2, № 2, с. 77—107; [4] Гротендик А., там же, № 3, с. 81—127; [5] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958; [6] Yoshinaga K., «J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A», 1957, v. 21, p. 89—98; [7] Kawai T., «J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. 1A», 1970, v. 17, p. 467—517; [8] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979. *В. С. Владимиров.*

ОБОЛОЧЕК ТЕОРИЯ — направление в теории упругости и строительной механике, основная цель к-рого состоит в описании напряжений и деформаций, возникающих под действием внешних нагрузок в оболочке. Оболочка — твердое тело, ограниченное двумя поверхностями, к-рое обладает малой по сравнению с другими характерными размерами толщиной. В О. т. рассматриваются и другие внешние воздействия, напр. тепловые.

В О. т. вводится гладкая поверхность g, наз. срединной, по обе стороны к-рой на расстоянии $h(x)$ вдоль нормали к g расположены точки ограничивающих оболочку поверхностей. В большинстве случаев толщина постоянна: $h(x) \equiv h$. Наиболее распространенный вариант О. т. использует т. н. гипотезу Кирхгофа — Лява, согласно к-рой всякое нормальное к

g волокно (отрезок прямой, перпендикулярный к срединной поверхности) сохраняет после деформации свою прямолинейность, длину и нормальное положение к срединной поверхности. При этом предположении систему уравнений трехмерной теории упругости, описывающей перемещения точек оболочки как упругого твердого тела, сводят к системе трех дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными x_1 и x_2 — криволинейными координатами точки x недеформированной срединной поверхности g. В общем случае эта система нелинейна. При дополнительных предположениях о малости деформаций и внешних нагрузок нелинейные члены могут быть отброшены. Задача сводится к решению линейной системы (см. [3], [4])

$$\sum_{j=1}^{3} m_{ij}u_j = q_i,\ i=1,\ 2,\ 3, \qquad (1)$$

в к-рой q_i — компоненты внешней нагрузки, m_{ij} — линейные дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими от геометрич. характеристик поверхности g, а $u_j(x)$ — искомые компоненты вектора перемещения точки срединной поверхности. Система (1) решается при четырех граничных условиях, к-рые зависят от характера закрепления края g. Операторы m_{ij} в (1) имеют специальный вид:

$$m_{ij} = h^2 n_{ij} + l_{ij},$$

малый параметр h^2 стоит при старших производных. Система (1) является эллиптической в смысле Дуглиса—Ниренберга (см. [5]) и формально самосопряженной (см. [7]). При естественно возникающих граничных условиях система (1) порождает эллиптич. краевую задачу. Систему (1) принято наз. системой уравнений м о м е н т н о й О. т., поскольку при ее получении учитываются члены, содержащие изгибающие и крутящие моменты. При дополнительных предположениях указанными членами пренебрегают, что приводит к б е з м о м е н т н о й (м е м б р а н н о й) О. т. Формально этот переход сводится к отбрасыванию в (1) членов, содержащих малый параметр h^2. Безмоментная система

$$\sum_{j=1}^{3} l_{ij}u_i = q_i,\ i=1,\ 2,\ 3, \qquad (2)$$

существенно проще, чем система (1). Все операторы в (2) не выше 2-го порядка. Порядок определителя главного символа (характеристич. полинома) в случае системы (2) равен 4, а в случае (1) равен 8.

Наличие малого параметра в (1) позволяет воспользоваться процедурой асимптотич. интегрирования (см. [4]). Если гауссова кривизна K срединной поверхности g положительна, то система (2) эллиптична и при условиях полного или частичного закрепления края вырождение моментной задачи в безмоментную при $h \to 0$ регулярно. Заметное расхождение решений возможно лишь в малой окрестности края g (краевой эффект). При $K \leqslant 0$ картина вырождения моментной системы при $h \to 0$ существенно сложнее; переход от системы (1) к (2) может привести к значительным погрешностям не только у края g, но и всюду внутри. Используемая в О. т. процедура асимптотич. интегрирования при нерегулярном вырождении еще (1982) не нашла математич. обоснования.

Безмоментная О. т. тесно связана с проблемой бесконечно малых изгибаний поверхностей. Существенный вклад в безмоментную О. т. и одновременно в теорию бесконечно малых изгибаний был внесен благодаря привлечению аппарата *обобщенных аналитических функций* (см. [2]).

Важной задачей О. т. является исследование устойчивости форм равновесия, с к-рой связана проблема определения критич. нагрузки. Эти задачи рассматрива-

ются в линейной (точнее, использующей линеаризацию) и нелинейной постановках. Один из методов их решения в нелинейной постановке существенно использует теорию изгибаний (см. [8]).

В задачах статики эффективен метод комплексного представления уравнений О. т., позволяющий путем введения вспомогательных функций свести систему (1) к эквивалентной системе с характеристич. многочленом 4-го порядка (см. [7]).

Среди вопросов динамики, подвергшихся интенсивному математич. анализу, находится проблема свободных и вынужденных колебаний, совершаемых оболочкой. Методами асимптотич. интегрирования и спектральной теории операторов найдена структура спектра собственных частот и строение соответствующих форм свободных колебаний (см. [5], [9]).

В О. т. широко используются методы вычислительной математики. В случае разделяющихся переменных в статич. и динамич. задачах особенно эффективен метод прогонки, в случае оболочек произвольного очертания — метод конечных элементов.

Лит.: [1] Алумяэ Н. А., Теория упругих оболочек и пластинок, в кн.: Механика в СССР за 50 лет, т. 3, М., 1972, с. 227—66; [2] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959; [3] Власов В. З., Общая теория оболочек и ее приложение в технике, М.— Л., 1949; [4] Гольденвейзер А. Л., Теория упругих тонких оболочек, 2 изд., М., 1976; [5] Гольденвейзер А. Л., Лидский И. Б., Товстик П. Е., Свободные колебания тонких упругих оболочек, М., 1979; [6] Муштари Х. М., Галимов К. З., Нелинейная теория упругих оболочек, Казань, 1957; [7] Новожилов В. В., Теория тонких оболочек, 2 изд., Л., 1962; [8] Погорелов А. В., Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек, М., 1967; [9] Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник, т. 3, М., 1968.

В. Б. Лидский.

ОБРАЗ МОРФИЗМА категории — понятие, аналогичное понятию образа отображения одного множества в другое. Однако в теории категорий существует несколько подходов к определению этого понятия. Наиболее простой подход тесно связан с понятием *бикатегории*. Пусть в категории $\mathfrak{K}$ существует бикатегорная структура $\mathfrak{K}=(\mathfrak{K}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$, где $\mathfrak{E}$ — класс допустимых эпиморфизмов, $\mathfrak{M}$ — класс допустимых мономорфизмов. Если $\alpha: A \to B$ — произвольный морфизм из $\mathfrak{K}$ и $\alpha=\nu\mu$ — допустимое разложение α, т. е. $\nu\in\mathfrak{E}$, $\mu\in\mathfrak{M}$, то подобъект $(\mu]$ объекта B, определяемый мономорфизмом μ, наз. (допустимым) образом морфизма α (относительно заданной бикатегорной структуры). Если в $\mathfrak{K}$ имеется единственная бикатегорная структура, то можно говорить об О. м. α. В частности, в категориях множеств, групп, векторных пространств над нек-рым полем сформулированное определение приводит к обычному понятию образа отображения или гомоморфизма.

С другой стороны, если в категории $\mathfrak{K}$ существует несколько бикатегорных структур, то один и тот же морфизм может иметь разные образы относительно различных бикатегорных структур. Подобная ситуация имеет место, напр., в категориях топологич. пространств и ассоциативных колец.

Другой подход к определению О. м. состоит в следующем. Говорят, что морфизм $\alpha: A \to B$ проходит через подобъект $(\mu]$ объекта B, если α можно представить в виде $\alpha=\alpha'\mu$. Наименьший подобъект объекта B, через к-рый проходит α, наз. образом α. Если категория $\mathfrak{K}$ локально мала слева и в $\mathfrak{K}$ существуют пределы семейств мономорфизмов с общим концом, то каждый морфизм из $\mathfrak{K}$ имеет образ.

Если в $\mathfrak{K}$ имеется бикатегорная структура, в к-рой все мономорфизмы допустимы, то второе определение О. м. эквивалентно определению О. м. относительно указанной бикатегорной структуры.

О. м. обычно обозначается $\mathrm{Im}\,\alpha$; через $\mathrm{im}\,\alpha$ обозначается любой представитель подобъекта $\mathrm{Im}\,\alpha$.

М. Ш. Цаленко.

ОБРАЗУЮЩИЙ ОБЪЕКТ категории, образующий категории,— понятие, позволяющее распознать различные морфизмы категории и, как правило, «моделировать» все объекты категории с помощью копроизведений одного и того же объекта. Объект U категории $\mathfrak{K}$ наз. образующим, если для любого объекта A из $\mathfrak{K}$, не являющегося левым нулем, множество $H_{\mathfrak{K}}(U, A)$ непусто и для любого необратимого мономорфизма $\mu : A \to B$ существует такой морфизм $\gamma : U \to B$, к-рый не представим в виде $\gamma = \gamma'\mu$. Если в категории $\mathfrak{K}$ каждая пара морфизмов обладает ядром, то для любой пары морфизмов $\alpha, \beta : A \to B$, $\alpha \neq \beta$, найдется такой морфизм $\gamma : U \to A$, что $\gamma\alpha \neq \gamma\beta$. Следовательно, если множество $H_{\mathfrak{K}}(U, A)$ непусто для любого $A \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$, то О. о. U оказывается *интегральным объектом*. Поэтому иногда О. о. определяется как интегральный объект. В случае абелевых категорий понятия образующего и интегрального объектов эквивалентны.

В категории множеств каждое непустое множество есть О. о. В категориях, порождаемых многообразиями универсальных алгебр, каждая свободная алгебра есть О. о. В категории топологич. пространств каждое непустое пространство с дискретной топологией является О. о.

В бикатегориях обычно рассматриваются допустимые О. о., т. е. такие объекты, к-рые обладают всеми свойствами образующих только по отношению к допустимым мономорфизмам. *М. Ш. Цаленко.*

ОБРАТИМЫЙ МОДУЛЬ — модуль M над коммутативным кольцом A, для к-рого существует A-модуль N такой, что $M \otimes N$ изоморфно A (изоморфизм A-модулей). Модуль M обратим тогда и только тогда, когда он конечно порожден, проективен и имеет ранг 1 над каждым простым идеалом кольца A. Классы изоморфных О. м. образуют группу Пикара кольца A; операция в этой группе индуцирована тензорным произведением модулей, а единичным элементом является класс модуля A. В некоммутативном случае (A, B)-бимодуль, где A и B — ассоциативные кольца, наз. обратимым, если существует такой (B, A)-бимодуль N, что

$$M \otimes_B N \simeq A \text{ и } N \otimes_A M \simeq B.$$

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1, М., 1977. *Л. В. Кузьмин.*

ОБРАТИМЫЙ ПУЧОК — локально свободный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей ранга 1 на окольцованном пространстве $(X, \mathcal{O}_X)$. Эквивалентное определение О. п.: пучок $\mathcal{O}_X$-модулей, локально изоморфный пучку $\mathcal{O}_X$. О. п. на X, рассматриваемые с точностью до изоморфизма, образуют абелеву группу относительно операции тензорного умножения над $\mathcal{O}_X$. Эта группа наз. *Пикара группой* пространства X и обозначается $\mathrm{Pic}\, X$. Обратным к пучку $\mathscr{L}$ будет в ней пучок $\mathscr{L}^{-1} = \mathcal{H}om(\mathscr{L}, \mathcal{O}_X)$, двойственный к $\mathscr{L}$. В случае, когда $(X, \mathcal{O}_X)$ — схема (в частности, алгебраич. многообразие) или аналитич. пространство, пучок $\mathcal{O}_X$-модулей обратим тогда и только тогда, когда он изоморфен пучку регулярных (соответственно аналитических) сечений нек-рого линейного алгебраического (соответственно аналитического) расслоения над X.

О. п. на схемах тесно связаны с *дивизорами*. Каждому дивизору Картье D на X сопоставляется О. п. $\mathcal{O}_X(D)$, чем определяется инъективный гомоморфизм $\mathrm{Cl}X \to \mathrm{Pic}X$, где $\mathrm{Cl}X$ — группа классов дивизоров Картье на X. Для целых схем X этот гомоморфизм является изоморфизмом.

На проективной схеме X определяется подкручивающий обратимый пучок Серра $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}(1)$. А именно, если задано вложение схемы X в проективное пространство P^N, то $\mathcal{O}_X(1)$ соответствует

классу гиперплоского сечения. В частности, если $X = P^N(k)$ — проективное пространство над полем k, то пучок $\mathcal{O}(1)$ есть прямой образ пучка линейных функций на k^{N+1} при естественном отображении $k^{N+1} \setminus \{0\} \to P^N(k)$. Систему однородных координат $x_0, x_1, \ldots, x_N$ в $P^N(k)$ можно отождествить с базисом пространства сечений $\Gamma(P^N, \mathcal{O}(1))$.

О. п. на схеме X над полем k связаны с рациональными отображениями схемы X в проективные пространства. Пусть $\mathcal{L}$ — О. п. на схеме X, $s_0, \ldots, s_N$ — сечения пучка $\mathcal{L}$, значения к-рых в любой точке $x \in X$ порождают слой $\mathcal{L}_x$ над $\mathcal{O}_x$. Тогда существует единственный морфизм $\varphi : X \to P^N(k)$ такой, что $\varphi^*\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{L}$ и $\varphi^* x_i = s_i$, где $x_0, x_1, \ldots, x_N$ — однородные координаты в $P^N(1)$. О. п. $\mathcal{L}$ на X наз. очень обильным, если существует такое вложение $\varphi : X \to P^N(k)$, что $\varphi^*\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{L}$. О. п. $\mathcal{L}$ на X наз. обильным, если существует такое целое положительное n, что $\mathcal{L}^n$ очень обилен. На нётеровой схеме X над k обратимый пучок $\mathcal{L}$ обилен тогда и только тогда, когда для каждого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X существует такое целое $n_0 > 0$, что пучок $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$ порождается при $n \geqslant n_0$ своими глобальными сечениями.

Если $\mathcal{L}$ — обильный О. п. на X, соответствующий дивизору D, то D наз. обильным дивизором. Дивизор Картье D на схеме X, собственной над алгебраически замкнутым полем k, обилен тогда и только тогда, когда для каждой замкнутой целой подсхемы $Y \subseteq X$ индекс пересечения $D^r \cdot Y$ положителен, где $r = \dim Y$. По поводу других критериев обильности см. [5]. Существует также обобщение понятия обильного дивизора на подмногообразия большей коразмерности [2].

Понятия очень обильного и обильного О. п. переносятся также на случай аналитич. пространств (по поводу критериев обильности в этой ситуации см. *Положительное расслоение*).

Лит.: [1] Hartshorne R., Algebraic geometry, N. Y., 1977; [2] его же, Ample subvarieties of algebraic varieties, N. Y.—B., 1970; [3] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [4] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [5] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 47—112. *В. А. Исковских.*

ОБРАТИМЫЙ ЭЛЕМЕНТ полугруппы с единицей — элемент x, для к-рого существует такой элемент y, что $xy = 1$ (правая обратимость) или $yx = 1$ (левая обратимость). Если элемент обратим и справа и слева, то он наз. двусторонне обратимым (часто просто обратимым). Множество $G(S)$ всех двусторонне О. э. полугруппы S с единицей является наибольшей подгруппой из S, содержащей единицу. *Бициклическая полугруппа* доставляет пример существования элементов, обратимых только справа и только слева; более того, существование таких элементов в полугруппе S влечет наличие в S бицикличе. подполугруппы, единица к-рой совпадает с единицей полугруппы S. Другой альтернативой является ситуация, когда всякий односторонне О. э. полугруппы S будет двусторонне обратим — это имеет место тогда и только тогда, когда либо $S = G(S)$, либо $S \setminus G(S)$ есть подполугруппа (являющаяся, очевидно, наибольшим идеалом в S); такая полугруппа наз. полугруппой с отделяющейся групповой частью. Полугруппами с отделяющейся групповой частью будут, напр., всякая конечная полугруппа с единицей, всякая коммутативная полугруппа с единицей, всякая полугруппа с двусторонним сокращением и единицей, всякая мультипликативная полугруппа комплексных матриц, содержащая единичную матрицу.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, т. 1, пер. с англ., М., 1972; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960. *Л. Н. Шеврин.*

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА к в а д р а т н о й м а т р и ц е A н а д п о л е м K — матрица A^{-1}, для к-рой $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ — единичная матрица. Обратимость матрицы равносильна ее невырожденности (см. *Невырожденная матрица*). Для матрицы $A=\|\alpha_{ij}\|$ обратной является матрица $A^{-1}=\|\gamma_{ij}\|$, где

$$\gamma_{ij}=\frac{A_{ji}}{\det A},$$

A_{ji} — *алгебраическое дополнение* элемента α_{ji}. О методах вычисления О. м. см. *Обращение матрицы*.

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА — теорема, условием к-рой служит заключение теоремы исходной (прямой), а заключением — условие. Обратной к О. т. будет исходная (прямая) теорема, так что прямая и О. т. взаимно обратны.

О. т. равносильна теореме, противоположной к прямой, т. е. теореме, в к-рой условие и заключение прямой теоремы заменены их отрицаниями. Поэтому прямая теорема равносильна противоположной к обратной, т. е. теореме, утверждающей, что если неверно заключение прямой теоремы, то неверно и ее условие. Известный способ «доказательства от противного» как раз и представляет собой замену доказательства прямой теоремы доказательством теоремы, противоположной к обратной. Справедливость обеих взаимно обратных теорем означает, что выполнение условия любой из них не только достаточно, но и необходимо для справедливости заключения. См. также *Теорема, Необходимые и достаточные условия*. *БСЭ-3.*

ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, определенная на множестве значений заданной функции и ставящая в соответствие каждому его элементу множество всех тех элементов из области определения рассматриваемой функции, к-рые в него отображаются, т. е. его полный прообраз. Если данная функция обозначена символом f, то О. ф. обозначается символом f^{-1}. Таким образом, если $f: X\to Y$ и Y_f — множество значений функции f, $Y_f\subset Y$, то для любого $y\in Y_f$ справедливо равенство $f^{-1}(y)=\{x: f(x)=y\}$.

Если для любого элемента $y\in Y_f$ его полный прообраз состоит в точности из одного элемента $x\in X$, т. е. отображение $f: X\to Y_f$ является биекцией, то О. ф. является о д н о з н а ч н о й, в противном случае — м н о г о з н а ч н о й.

Если множества X и Y являются подмножествами числовой прямой (или вообще пек-рых упорядоченных множеств), то условие строгой монотонности функции f необходимо и достаточно для существования обратной однозначной функции.

По ряду свойств функции f можно судить о соответствующих свойствах О. ф. Так, напр., если функция f строго монотонна и непрерывна на нек-ром промежутке числовой оси, то ее О. ф. также монотонна и непрерывна на соответствующем промежутке. Если взаимно однозначное отображение бикомпакта на топологическое хаусдорфово пространство непрерывно, то и обратное отображение непрерывно, т. е. рассматриваемое отображение является гомеоморфизмом. Когда отображение f является биективным линейным ограниченным оператором, отображающим банахово пространство X на банахово пространство Y, то обратный оператор f^{-1} также является линейным и ограниченным.

Пусть f — непрерывное отображение замыкания $\overline{G}$ ограниченной области $G\subset\mathbb{R}^n$ с достаточно хорошей границей в $\mathbb{R}^n$, f — дифференцируемо в G и отображает границу G на границу $f(G)$ и множество нулей его якобиана образует изолированное множество; тогда если отображение f взаимно однозначно на границе области G, то оно взаимно однозначно и на $\overline{G}$. Для существования локального обратного отображения в

окрестности данной точки достаточно необращения в нуль якобиана отображения в нек-рой окрестности этой точки. Если $f: G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, f — дифференцируемое отображение с якобианом, неравным нулю во всех точках $x \in G$, то для любой точки $x_0 \in G$ существует такая ее окрестность $U = U(x_0)$, что сужение $f|_U$ отображения f на окрестности U взаимно однозначно отображает множество U на нек-рую окрестность $V = V(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$ и обратное отображение f^{-1} также дифференцируемо (на V). Эта теорема обобщается и на бесконечномерный случай: пусть X и Y — полные нормированные пространства, $G \subset X$ — открытое множество, $f: G \to Y$ — непрерывно дифференцируемое отображение. Если $f'(x_0)$ — обратимый элемент пространства линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(X, Y)$ (f' — производная Фреше), $x_0 \in G$, то существуют такие окрестности $U = U(x_0)$ и $V = V(y_0)$ соответственно точек x_0 и $y_0 = f(x_0)$ в пространствах X и Y, что отображение $f: U \to V$ является непрерывно дифференцируемым гомеоморфизмом вместе со своим *обратным отображением*.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Шварц Л., Анализ, пер. с франц., т. 1, М., 1972.

Л. Д. Кудрявцев.

ОБРАТНО ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$u_t + \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x,\,t)\,u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x,\,t)\,u_{x_i} - a(x,\,t)\,u = f(x,\,t), \qquad (*)$$

где форма $\Sigma a_{ij}\xi_i\xi_j$ положительно определена. Переменная t играет роль «обратного» времени. При подстановке $t = -t'$ уравнение (*) приводится к обычному параболич. виду. Встречаются параболич. уравнения «смешанного» типа, напр. уравнение $u_t = xu_{xx}$ является прямым параболическим при $x > 0$, обратно параболическим при $x < 0$ с вырождением порядка при $x = 0$.

А. П. Солдатов.

ОБРАТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ (обратный оператор) к однозначному отображению (оператору)

$$f: M \xrightarrow{\text{на}} f(M)$$

— однозначное отображение g такое, что

$$g \circ f = I_X \text{ на } M, \qquad (1)$$

$$f \circ g = I_Y \text{ на } f(M), \qquad (2)$$

где $M \subset X_1$ $f(M) \subset Y$, X, Y — нек-рые множества.

Если g удовлетворяет лишь условию (1), то оно наз. правым обратным отображением к f, если лишь (2) — левым обратным отображением к f. О. о. f^{-1} существует тогда и только тогда, когда для любого $y \in f(M)$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ состоит из единственного элемента $x \in M$. Если отображение f имеет обратное отображение f^{-1}, то уравнение

$$f(x) = y \qquad (3)$$

однозначно разрешимо при любом $y \in f(M)$. Если существует только правое О. о. $f_{\text{п}}^{-1}$, то существует и решение уравнения (3), но вопрос об однозначности решения остается открытым. Наличие же лишь левого О. о. $f_{\text{л}}^{-1}$ обеспечивает единственность решения в предположении, что оно существует. Если X и Y — векторные пространства, и A — линейный оператор из X в Y, то A^{-1}, если он существует, тоже линеен. Вообще, в случае наделения X и Y той или иной структурой, случается, что нек-рые свойства оператора A сохраняются и при переходе к A^{-1} в предположении, что он существует. Так, если X и Y — банаховы пространства и $A: X \to Y$ — замкнутый оператор, то A^{-1} также замкнут; если H — гильбертово пространство и $A: H \to H$ самосопряжен, то A^{-1} также самосопряженный оператор; если $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — нечетная функция,

то f^{-1} — также нечетная, и т. д. Непрерывность A не всегда сохраняется при переходе к A^{-1} для многих важных классов линейных операторов, напр. вполне непрерывных. Важными признаками непрерывности операторов, обратных к линейным, являются следующие.

Пусть X — конечномерное векторное пространство с нек-рым базисом и $A : X \to X$ задается в этом базисе матрицей $\|a_{ij}\|$. Для существования A^{-1} необходимо и достаточно, чтобы $\det\|a_{ij}\| \neq 0$ (операторы A и A^{-1} в этом случае автоматически непрерывны).

Пусть X и Y — банаховы пространства и A — линейный непрерывный оператор из X в Y.

1) Если $\|Ax\| \geqslant m\|x\|$, где $m>0$, то A^{-1} существует и непрерывен.

2) Если $X=Y$, $\|A\|<1$, то $(I-A)^{-1}$ существует и непрерывен, причем

$$(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

где ряд справа сходится по норме в пространстве $\mathscr{L}(X)$.

3) Оператор A^{-1} существует и непрерывен на всем Y тогда и только тогда, когда его сопряженный A^* имеет обратный, определенный и непрерывный на всем X^*. При этом $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$.

4) Если оператор A^{-1} существует и непрерывен и $\|A-B\| \leqslant \|A\|^{-1}$, то оператор B^{-1} также существует и непрерывен, причем

$$B^{-1}=A^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}[(A-B)A^{-1}]^n.$$

Таким образом, множество обратимых операторов открыто в $\mathscr{L}(X, Y)$ в равномерной топологии этого пространства.

5) Теорема Банаха об изоморфизме: если A взаимно однозначно отображает X на Y, то О. о., к-рое существует, непрерывно. Эта теорема допускает обобщение: взаимно однозначное линейное непрерывное отображение совершенно полного пространства X на отделимое бочечное пространство Y является *топологич. изоморфизмом*.

Ряд утверждений о существовании и непрерывности оператора, обратного к линейному непрерывному, содержится в спектральной теории линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Так, если A самосопряжен и λ не действительно, то $(A-\lambda I)^{-1}$ существует и непрерывен.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [2] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [3] Рудин У., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1975; [4] Робертсон А.-П., Робертсон В.-Дж., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967.

В. И. Соболев.

ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — функции, обратные *гиперболическим функциям*. О. г. ф. наз. ареа-синус гиперболический, ареа-косинус гиперболический, ареа-тангенс гиперболический: Ar sh x, Ar ch x, Ar th x; другие обозначения: ar sh x, ar ch x, ar th x; $\mathrm{sh}^{-1}x$, $\mathrm{ch}^{-1}x$, $\mathrm{th}^{-1}x$.

О. г. ф. действительного переменного x определяются формулами

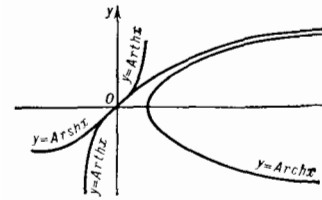
$$\mathrm{Ar\,sh}\,x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\quad -\infty<x<+\infty,$$

$$\mathrm{Ar\,ch}\,x=\pm\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\quad x\geqslant 1,$$

$$\mathrm{Ar\,th}\,x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad |x|<1.$$

О. г. ф. однозначны и непрерывны в каждой точке своей области определения за исключением О. г. ф. Ar ch x, к-рая двузначна. При изучении свойств О. г. ф. для Ar ch x выбирается одна из ее непрерывных ветвей, т. е. в формуле для Ar ch x выбирается только один знак (обычно — плюс).

Графики О. г. ф. см. на рисунке. О. г. ф. связаны между собой рядом соотношений. Напр.,



$$\operatorname{Ar\,sh}\, x = \operatorname{Ar\,th}\, \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\operatorname{Ar\,th}\, x = \operatorname{Ar\,sh}\, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Производные О. г. ф. находятся по формулам

$$(\operatorname{Ar\,sh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$(\operatorname{Ar\,ch}\, x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (\operatorname{Ar\,th}\, x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

О. г. ф. комплексного переменного z определяются по таким же формулам, что и для действительного переменного x, причем под $\ln z$ понимается многозначная логарифмич. функция. О. г. ф. комплексного переменного являются аналитич. продолжениями соответствующих О. г. ф. действительного переменного в комплексную плоскость.

О. г. ф. выражаются через обратные тригонометрич. функции по формулам

$$\operatorname{Ar\,sh}\, z = -i \arcsin iz,$$

$$\operatorname{Ar\,ch}\, z = i \arccos z,$$

$$\operatorname{Ar\,th}\, z = -i \operatorname{arc\,tg}\, iz.$$

Ю. В. Сидоров.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, а р к ф у н к ц и и, к р у г о в ы е ф у н к ц и и,— функции, обратные *тригонометрическим функциям*. Шести основным тригонометрич. функциям соответствуют шесть О. т. ф.: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, арксеканс, арккосеканс; обозначаются соответственно $\operatorname{Arc\,sin}\, x$, $\operatorname{Arc\,cos}\, x$, $\operatorname{Arc\,tg}\, x$, $\operatorname{Arc\,ctg}\, x$, $\operatorname{Arc\,sec}\, x$, $\operatorname{Arc\,cosec}\, x$. Функции $\operatorname{Arc\,sin}\, x$ и $\operatorname{Arc\,cos}\, x$ определены (в действительной области) для $|x| \leqslant 1$, функции $\operatorname{Arc\,tg}\, x$ и $\operatorname{Arc\,ctg}\, x$ — для всех действительных x, а функции $\operatorname{Arc\,sec}\, x$ и $\operatorname{Arc\,cosec}\, x$ — для $|x| \geqslant 1$; две последние функции малоупотребительны. Другие обозначения: $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ и т. п.

Так как тригонометрич. функции периодические, то обратные к ним функции являются м н о г о з н а ч н ы м и функциями. Определенные однозначные ветви (г л а в н ы е в е т в и) этих функций обозначаются так: $\operatorname{arc\,sin}\, x$, $\operatorname{arc\,cos}\, x$, ... Именно, $\operatorname{arc\,sin}\, x$ есть та ветвь функции $\operatorname{Arc\,sin}\, x$, для к-рой — $\pi/2 \leqslant \operatorname{arc\,sin}\, x \leqslant \pi/2$. Аналогично, функции $\operatorname{arc\,cos}\, x$, $\operatorname{arc\,tg}\, x$ и $\operatorname{arc\,ctg}\, x$ определяются из условий: $0 \leqslant \operatorname{arc\,cos}\, x \leqslant \pi$, $-\pi/2 < \operatorname{arc\,tg}\, x < \pi/2$, $0 < \operatorname{arc\,ctg}\, x < \pi$.



На рисунке изображены графики функций $y = \operatorname{Arc\,sin}\, x$, $y = \operatorname{Arc\,cos}\, x$, $y = \operatorname{Arc\,tg}\, x$, $y = \operatorname{Arc\,ctg}\, x$; главные ветви этих функций выделены жирной линией. О. т. ф. $\operatorname{Arc\,sin}\, x$, ... легко выражаются через $\operatorname{arc\,sin}\, x$, ..., напр.:

$$\operatorname{Arc\,sin}\, x = (-1)^n \operatorname{arc\,sin}\, x + \pi n,$$

$$\operatorname{Arc\,cos}\, x = \pm \operatorname{arc\,cos}\, x + 2\pi n,$$

$$\operatorname{Arc\,tg}\, x = \operatorname{arc\,tg}\, x + \pi n,$$

$$\operatorname{Arc\,ctg}\, x = \operatorname{arc\,ctg}\, x + \pi n,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

О. т. ф. связаны соотношениями

$$\operatorname{arc\,sin}\, x + \operatorname{arc\,cos}\, x = \pi/2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\operatorname{arc\,tg}\, x + \operatorname{arc\,ctg}\, x = \pi/2, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Поэтому функции $\arccos x$ и $\operatorname{arc\,ctg} x$ в нижеследующих формулах не фигурируют.

О. т. ф. бесконечно дифференцируемы и в окрестности каждой внутренней точки своей области определения могут быть разложены в ряды Тейлора. Производные, интегралы и разложения в ряды О. т. ф.:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) + C,$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1,$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

О. т. ф. комплексного переменного определяются как аналитические продолжения соответствующих О. т. ф. действительного переменного в комплексную плоскость.

О. т. ф. выражаются через логарифмическую функцию:

$$\arcsin z = -i \ln (iz + \sqrt{1-z^2}),$$

$$\arccos z = -i \ln (z + \sqrt{z^2-1}),$$

$$\operatorname{arc\,tg} z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz},$$

$$\operatorname{arc\,ctg} z = -\frac{i}{2} \ln \frac{iz-1}{iz+1}.$$

Ю. В. Сидоров.

ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦЫ — алгоритм, применяемый при численном нахождении *обратной матрицы*. Как и в задаче решения линейных систем, методы численного обращения подразделяются на прямые и итерационные; однако итерационные методы вследствие их трудоемкости играют здесь существенно меньшую роль.

Большинство прямых методов О. м. основано на идее разложения заданной матрицы в произведение легко обращаемых сомножителей.

Если

$$A = L_1 L_2 \ldots L_k$$

— такое разложение, то

$$A^{-1} = L_k^{-1} L_{k-1}^{-1} \ldots L_1^{-1}.$$

Типичным (и одним из наиболее употребительных) прямых методов О. м. является метод Жордана (см. [1]).

Пусть A — невырожденная матрица порядка n. Построение обратной матрицы A^{-1} происходит в n шагов; результатом k-го шага будет матрица A_k, первые k столбцов к-рой совпадают с одноименными столбцами единичной матрицы. Переход от A_k (пусть $A = A_0$) к A_{k+1} с матричной точки зрения эквивалентен умножению A_k слева на матрицу L_{k+1}, к-рая отличается от единичной лишь $(k+1)$-м столбцом. Элементы этого столбца выбираются так, чтобы привести $(k+1)$-й столбец A_k к единичному, и имеют вид

$$-\frac{a^{(k)}_{1,\,k+1}}{a^{(k)}_{k+1,\,k+1}}, \ldots, -\frac{a^{(k)}_{k,\,k+1}}{a^{(k)}_{k+1,\,k+1}},$$

$$\frac{1}{a^{(k)}_{k+1,\,k+1}}, \ldots, -\frac{a^{(k)}_{n,\,k+1}}{a^{(k)}_{k+1,\,k+1}}.$$

Из соотношений

$$A_{k+1} = L_{k+1}A_k, \quad A_n = E$$

вытекает

$$L_nL_{n-1}\ldots L_1A = E$$

и

$$A^{-1} = L_nL_{n-1}\ldots L_1. \qquad (1)$$

Получение факторизованного представления (1) для обратной матрицы A^{-1} требует примерно $n^3/2$ операций умножения и примерно $n^3/2$ операций сложения. Приблизительно такое же число дополнительных операций необходимо для того, чтобы перемножить матрицы в (1) и получить явный вид A^{-1}. Во многих приложениях операции О. м. использование факторизованной формы (1) столь же удовлетворительно, что и явного вида. Напр., вычисление произведения $A^{-1}b$, где b — вектор-столбец, требует одинаковой арифметич. работы в обоих случаях. Одинаковы и требования к памяти при реализации на ЭВМ.

В приведенном описании метода Жордана предполагалось для простоты, что все элементы $a^{(k)}_{k+1,\,k+1}$ (называемые ведущими элементами) отличны от нуля. В действительности метод Жордана, как и методы типа Гаусса для решения линейных систем, как правило, применяется с той или иной схемой выбора ведущих элементов. Использование такой схемы равносильно введению в (1) дополнительных множителей, учитывающих перестановки строк и столбцов обратной матрицы. Точность вычисленного решения, как и в случае линейных систем, зависит от степени роста матричных элементов на промежуточных шагах метода. Такой рост и, следовательно, ухудшение точности вычисляемого решения в методе Жордана, даже при выборе ведущего элемента, более вероятны, чем в методах типа Гаусса.

Невязкой, соответствующей приближенной обратной матрице X для A, наз. матрица $R = E - AX$. Имеет место оценка

$$\frac{\| A^{-1} - X \|}{\| A^{-1} \|} \leqslant \| R \|.$$

Таким образом, норма невязки является оценкой относительной точности приближенной обратной матрицы X. В этом состоит важное отличие задачи численного О. м. от задачи решения линейных систем, где (напр., в ортогональных методах или методах типа Гаусса) невязка обычно мала, а качество полученного решения зависит от обусловленности системы.

Обращение ряда важных классов матриц может быть достигнуто значительно более экономичными, чем в общем случае, методами. Таковы теплицевы, ганкелевы, ленточные (и, в частности, трехдиагональные) матрицы, блочные матрицы, имеющие теплицеву структуру или структуру кронекерова произведения, и т. д. Напр., пусть T — теплицева матрица порядка $n+1$ с элементами из R или C:

$$T = \begin{Vmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ldots & t_{n-1} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \ldots & t_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{-n} & t_{-n+1} & t_{-n+2} & \ldots & t_0 \end{Vmatrix}.$$

Предполагается, что не только T, но и ее главная подматрица порядка n невырождены. Тогда для матри-

цы T^{-1}, уже, вообще говоря, не являющейся теплицевой, справедливо представление (см. [2]):

$$T^{-1}=\frac{1}{p_n}\begin{Vmatrix} 1 & & & 0 \\ b_1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & \dots & b_1 & 1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_n \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & a_1 \\ 0 & & & 1 \end{Vmatrix} - \frac{1}{p_n}\begin{Vmatrix} 0 & & & 0 \\ a_n & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_1 & \dots & a_n & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 & b_n & \dots & b_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & b_n \\ 0 & & & 0 \end{Vmatrix} \tag{2}$$

При этом векторы

$$\frac{1}{p_n}(1\ b_1\ \dots\ b_n)^T \quad \text{и} \quad \frac{1}{p_n}(a_n\ \dots\ a_1\ 1)^T$$

суть соответственно первый и последний столбцы T^{-1}. Таким образом, T полностью определяется заданием первого и последнего столбцов. При необходимости из (2) могут быть последовательно вычислены все элементы T^{-1}:

$$\{T^{-1}\}_{i+1,\,j+1}=\{T^{-1}\}_{i,\,j}+\frac{1}{p_n}(b_{i+1}a_{j+1}-a_{n-i}b_{n-j}).$$

Это вычисление требует $O(n^2)$ арифметич. операций.

В экономичных алгоритмах обращения теплицевых матриц (см., напр., [3]) вычисление a_i, b_j и p_n проводится по рекуррентным формулам и также требует $O(n^2)$ операций. Условие невырожденности главных подматриц может быть ослаблено с сохранением порядка $O(n^2)$ необходимой арифметич. работы.

Иногда операцию О. м. используют с тем, чтобы решать *линейные системы* $Ax=b$ по формуле $x=A^{-1}b$. В случае матрицы общего вида такой образ действий имеет мало смысла, т. к. сопровождается проигрышем и в арифметич. работе, и в численной устойчивости по сравнению с прямым решением линейной системы. Для теплицевых (и родственных им) матриц ситуация иная. Как показывает представление (2), вычисление $T^{-1}b$ сводится к выполнению четырех умножений теплицевых матриц на векторы и вычитанию векторов. Существуют экономичные алгоритмы умножения теплицевой матрицы на вектор, требующие (для порядка n) $O(n\log n)$ операций. Для задачи решения теплицевых систем такая асимптотика арифметич. работы пока не достигнута. Поэтому при многократном решении линейных систем $Tx=b$ с одной и той же теплицевой матрицей T и различными правыми частями b предварительное обращение T, по-видимому, целесообразно.

Предварительное О. м. *может быть оправданным* и в случае многократного решения линейных систем с одной и той же матрицей общего вида на ЭВМ с большим числом параллельно работающих процессоров. Причина в том, что по сравнению с операцией умножения матрицы на вектор прямые методы решения линейных систем не имеют столь же удобного распараллеливания.

Во многих случаях (напр., в квазиньютоновых методах математич. программирования) требуется обратить матрицу A, отличающуюся от матрицы B с известной обратной B^{-1} матрицей ранга 1 или (в случае симметричной матрицы B) симметричной матрицей ранга 2. Такая перестройка обратной матрицы может быть выполнена для матриц порядка n за $O(n^2)$ арифметич. операций. Примером может служить следующая формула (см. [4]): если u и v — векторы-столбцы, то

$$(B+uv^T)^{-1}=B^{-1}-\frac{1}{\gamma}B^{-1}uv^TB^{-1},$$

где $\gamma=1+v^TB^{-1}u$ считается отличным от нуля.

С точки зрения теории вычислительной сложности задача О. м. общего вида имеет (на последовательной машине) сложность того же порядка, что и задача решения линейной системы (при выполнении нек-рых естественных условий на скорость роста сложности обеих задач с увеличением их порядка [5]). Эта сложность имеет порядок, не превышающий $n^{\log_2 7}$.

Лит.: [1] Воеводин В. В., Численные методы алгебры, М., 1966; [2] Гохберг И. Ц., Фельдман И. А., Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, М., 1971; [3] Trench W., «SIAM J. Contr.», 1964, v. 12, p. 512—522; [4] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.— Л., 1963; [5] Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж., Построение и анализ вычислительных алгоритмов, пер. с англ., М., 1979.

С. Д. Икрамов.

ОБРАЩЕНИЕ РЯДА — получение по известному степенному ряду

$$w=f(z)=\sum_{j=0}^{\infty} b_j (z-a)^j,\ b_1 \neq 0, \qquad (1)$$

ряда для обратной функции $z=\varphi(w)$ в виде

$$z=\varphi(w)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (w-b)^k, \qquad (2)$$

где $b=f(a)=b_0$, $a_0=a$,

$$a_k=\frac{1}{k!}\lim_{\zeta\to a}\frac{d^{k-1}}{d\zeta^{k-1}}\left[\frac{\zeta-a}{f(\zeta)-b}\right]^k,\ k\geqslant 1.$$

Ряд (2) наз. также О. р. (1), или *рядом Лагранжа*. Более общая задача о получении разложения произвольной сложной аналитич. функции $F[\varphi(w)]$ решается *Бюрмана — Лагранжа рядом*. Если круг сходимости ряда (1) есть $|z-a|<\rho$, то ряд (2) сходится в круге $|w-b|<\delta$, где δ есть расстояние от точки b до образа окружности $|z-a|=\rho$ при отображении $w=f(z)$.

Если функция $w=f(z)$ разлагается в ряд вида

$$w=f(z)=b+\sum_{j=m}^{\infty} b_j (z-a)^j,\ m\geqslant 2,\ b_m\neq 0, \qquad (3)$$

т. е. если a — *критическая точка* для $f(z)$, то обратная функция $z=\varphi(w)$ имеет в b *алгебраическую точку ветвления* порядка $m-1$ и О. р. (3) возможно только в виде ряда Пюизё:

$$z=\varphi(w)=a+\sum_{k=1}^{\infty} a_k (w-b)^{k/m},$$

$$a_k=\frac{1}{k!}\lim_{\zeta\to a}\frac{d^{k-1}}{d\zeta^{k-1}}\left\{\frac{\zeta-a}{[f(\zeta)-b]^{1/m}}\right\}^k,\ k\geqslant 1.$$

Аналогично решается задача обращения *Лорана ряда* по целым отрицательным и положительным степеням $z-a$ в том случае, когда в таком ряде имеется лишь конечное число отрицательных (или положительных) степеней (см. [1]).

Для аналитич. функций многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n>1$, вопросы обращения ставятся по-разному. Напр., если $f: \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ — невырожденное (т. е. такое, что ранг матрицы Якоби $\|\partial f/\partial z_k\|$ равен n) голоморфное отображение окрестности нуля $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$, $f(0)=0$, то существует в нек-рой окрестности нуля и голоморфное обратное отображение φ, к-рое можно записать в виде многомерного ряда Бюрмана — Лагранжа (см. [3]).

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [2] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [3] Солтан Е. Е., в кн.: Голоморфные функции многих комплексных переменных, Красноярск, 1972, с. 129—37.

Е. Д. Соломенцев.

ОБРАЩЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА — проблема, состоящая в построении функции u как функции от z или однозначных сложных функций вида $f(u(z))$ в случае *эллиптического интеграла*

$$z=\int^u R(z, w)\,dz,$$

где R — рациональная функция от переменных z, w, связанных уравнением $w^2=F(z)$, $F(z)$ — многочлен 3-й или 4-й степени без кратных корней. Полное решение этой проблемы дали почти одновременно в 1827—29 Н. Абель (N. Abel) и К. Якоби (C. Jacobi), показав, что ее решение приводит к новым трансцендентным *эллиптическим функциям*.

Существенно иной подход к теории эллиптич. функций принадлежит К. Вейерштрассу (K. Weierstrass). Для эллиптич. интеграла I рода в нормальной форме Вейерштрасса

$$z=\int^{u}\frac{dz}{w},\quad w^2=4z^3-g_2z-g_3,$$

$u=\wp(z)$ оказывается $\wp$-функцией Вейерштрасса с инвариантами g_2, g_3 (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*). Для эллиптич. интеграла I рода в нормальной форме Лежандра

$$z=\int_0^{\varphi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$

обращение приводит к *Якоби эллиптическим функциям*.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970; [2] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968.

Е. Д. Соломенцев.

ОБРЫВА ЦЕПЕЙ УСЛОВИЕ — условие конечности возрастающих или убывающих цепей в частично упорядоченном множестве. Условие обрыва убывающих цепей: для всякой цепи $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_k\geqslant\ldots$ элементов частично упорядоченного множества P найдется такой номер n, что $a_n=a_{n+1}=\ldots$ Выполнение этого условия эквивалентно каждому из следующих свойств частично упорядоченного множества P:

1) всякое непустое подмножество $M\subseteq P$ имеет хотя бы один минимальный (в M) элемент (условие минимальности);

2) все элементы из P обладают нек-рым свойством ε, если этим свойством обладают все минимальные элементы множества P и если справедливость свойства ε для любого $a\in P$ можно вывести из того, что ε справедливо для всех $x<a$, $x\in P$ (условие индуктивности).

Условие индуктивности позволяет для множеств с условием обрыва убывающих цепей проводить по индукции доказательства и построения. При этом если P вполне упорядочено,— получается *трансфинитная индукция*, а если P изоморфно множеству всех неотрицательных целых чисел,— обычная математич. индукция (см. *Индукции аксиома*).

Условие обрыва возрастающих цепей (и эквивалентные ему утверждения) формулируется двойственным образом (см. *Двойственности принцип* в частично упорядоченных множествах). В решетке с условием обрыва возрастающих цепей каждый идеал — главный. Всякое конечное множество очевидно удовлетворяет обоим О. ц. у., однако обратное утверждение (конечность множества, удовлетворяющего этим двум условиям) неверно. Решетка с условиями обрыва убывающих и возрастающих цепей полна.

О. ц. у. используются в алгебре, в основном в применении к упорядоченному по включению множеству подсистем различных алгебраич. систем (см., напр., *Артинов модуль*, *Артинова группа*, *Артиново кольцо*, *Композиционный ряд*, *Нётеров модуль*, *Нётерова группа*, *Нётерово кольцо*).

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [3] Скорняков Л. А., Элементы теории структур, М., 1970.

Т. С. Фофанова.

ОБЩАЯ АЛГЕБРА — часть алгебры, занимающаяся изучением тех или иных алгебраич. систем, включающая в себя теории групп, колец, модулей, полугрупп, решеток (структур) и т. п. Вне рамок О. а. остаются

такие направления, как изучение матриц и линейных уравнений, алгебраич. геометрия и алгебраич. теория чисел, полилинейная алгебра и т. п. Выделение О. а. как части алгебры довольно условно, и граница ее расплывчата. Напр., трудно сказать, относятся ли к О. а. теории полей, конечных групп или конечномерных алгебр Ли.

Если универсальная алгебра снабжена порядком или топологией, согласованными с операциями, то возникает частично упорядоченная или топологич. алгебра соответственно. Исследование этих объектов также относится к О. а. Наиболее развиты теории частично упорядоченных и топологич. групп и колец.

Начало развития О. а. относится к 19 в., когда были исследованы нек-рые конечные группы и конечномерные алгебры. Однако современная О. а. связана с проникновением в алгебру теоретико-множественного мышления и является продуктом 20 в. Так, первая монография (О. Ю. Шмидта, см. [1]), где группа не предполагается конечной, по определению, появилась лишь в 1916. В первую очередь эта перестройка коснулась теории групп, а затем теории колец. Результаты этой перестройки отражены в монографии Б. Ван дер Вардена (B. L. Van der Waerden), вышедшей в 1930—31.

Выявление общих моментов, содержащихся в теориях групп и колец, привело к рассмотрению решеток (структур), универсальных алгебр и категорий. Появление теории моделей и алгебраич. систем связано с вскрытием связей алгебры и математич. логики. Желание выяснить, в какой мере те или иные факты теории групп зависят от наличия обратных элементов и ассоциативности, породило полугруппы и квазигруппы. Все эти вновь появившиеся разделы О. а. через нек-рое время обрели собственную проблематику, нашли собственные пути развития и собственные области приложения (напр., полугруппы оказались чрезвычайно важными для алгебраич. теории автоматов). Более того, эти направления в свою очередь начали оказывать влияние на породившие их классич. разделы О. а. Так, напр., понятие многообразия алгебр, выкристаллизовавшееся в теории универсальных алгебр, играет важную роль в современной теории групп и колец. В качестве другого примера можно назвать изучение классов групп и колец, определяемых свойствами решетки их подгрупп и нормальных подгрупп, идеалов и подколец, а также вопросов, связанных с решеточными изоморфизмами. См. также *Универсальная алгебра*.

Лит.: [1] Шмидт О. Ю., Абстрактная теория групп, 2 изд., М.— Л., 1933; [2] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [3] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [4] его же, Общая алгебра. Лекции 1969/1970 учебного года, М., 1974; [5] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [6] Судзуки М., Строение группы и строение структуры ее подгрупп, пер. с англ., М., 1960.

Л. А. Скорняков.

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ — ветвь геометрии, посвященная исследованию непрерывности и предельного перехода на том естественном уровне общности, к-рый определяется природой этих понятий. Исходными понятиями О. т. являются понятия *топологического пространства* и *непрерывного отображения*, выделенные в 1914 Ф. Хаусдорфом (F. Hausdorf).

Частным случаем непрерывных отображений являются гомеоморфизмы— непрерывные взаимно однозначные отображения топологич. пространств, обладающие непрерывным обратным отображением. Пространства, к-рые можно отобразить друг на друга посредством гомеоморфизма (т. е. гомеоморфные пространства), считаются в О. т. одинаковыми. Одной из основных задач О. т. является выделение и исследование естественных топологич. инвариантов — свойство пространств, сохраняющихся гомеоморфизмами. Разумеется, каждое свойство пространства, к-рое формулируется исключи-

тельно в терминах его топологии, автоматически является топологич. инвариантом. Доказательство топологич. инвариантности свойства пространства требуется лишь тогда, когда оно формулируется с привлечением каких-либо дополнительных структур, определенных на множестве точек пространства и так или иначе связанных с его топологией. Примером может служить топологич. инвариантность групп гомологий.

Топологич. инвариант не обязательно выражается числом; напр., связность, бикомпактность, метризуемость — топологич. инварианты. Среди числовых инвариантов (принимающих числовые значения на конкретных топологич. пространствах) важнейшими являются размерностные инварианты: малая индуктивная размерность ind, большая индуктивная размерность Ind и размерность Лебега dim (размерность в смысле покрытий).

Важную роль играют топологич. инварианты иной природы, значениями к-рых служат *кардинальные числа*. Среди них: *вес*, *характер*.

В связи с системой топологич. инвариантов возникают классы топологич. пространств — каждый класс определяется ограничением на тот или иной топологич. инвариант. Наиболее важны классы *метризуемых пространств*, *бикомпактных пространств*, *тихоновских пространств*, *паракомпактных пространств*, *перистых пространств*.

Основные «внутренние» задачи О. т. таковы: 1) выделение новых важных классов топологич. пространств; 2) сравнение различных классов топологич. пространств; 3) изучение пространств в пределах того или иного класса и категорных свойств этого класса в целом. Центральной в этой группе, безусловно, является задача 2), направленная на обеспечение внутреннего единства О. т.

Выделение новых важных классов топологич. пространств (т. е. новых топологич. инвариантов) часто связано с рассмотрением дополнительных структур на пространстве (числовых, алгебраических, порядковых), естественно согласованных с его топологией. Так, выделяются метризуемые пространства, упорядоченные пространства, пространства топологических групп, симметризуемые пространства и др. Важную роль при решении задач 1), 2), 3) играет метод покрытий. На языке покрытий и соотношений между покрытиями, важнейшими из к-рых являются отношения вписанности и звездной вписанности, выделяются фундаментальные классы бикомпактных и паракомпактных пространств, формулируются топологич. свойства типа компактности. Метод покрытий играет важную роль в *размерности теории*.

Для решения центральной задачи 2) особенно важен метод взаимной классификации пространств и отображений. Он направлен на установление связей между различными классами топологич. пространств посредством непрерывных отображений, подчиненных тем или иным простым ограничениям. Пространства весьма общей природы удается при этом описать как образы более простых пространств при «хороших» отображениях. Напр., пространства с первой аксиомой счетности характеризуются как образы метрич. пространств при непрерывных открытых отображениях. Связи такого рода составляют эффективную систему ориентиров при рассмотрении классов топологич. пространств.

Метод обратных *спектров*, тесно связанный с методом покрытий и методом отображений, позволяет сводить изучение сложных топологич. пространств к рассмотрению систем отображений пространств более простых.

Наконец, в решении задачи 2) существенно участвует метод кардинальнозначных топологич. инвариантов, или *мощностных характеристик*. Инварианты такого

рода наиболее созвучны теоретико-множественной природе О. т. В связи с этим система кардинальнозначных инвариантов обладает большой разветвленностью и оказывает влияние практически на все остальные топологич. свойства. Другая важная особенность кардинальнозначных инвариантов — их тесная взаимосвязь, в основе к-рой лежит возможность осуществлять над такими инвариантами арифметич. операции и сравнивать их по величине. Благодаря указанным чертам теория кардинальнозначных инвариантов играет унифицирующую роль в О. т. и дает подход к любому из ее разделов.

Среди внешних задач О. т. выделяется, прежде всего, следующая задача общего характера: как связаны и взаимодействуют свойства топологии и др. структур, согласованных с этой топологией. Конкретные задачи этого рода относятся к топологическим группам, к топологическим векторным пространствам и к мерам на топологических пространствах. Каждому бикомпакту отвечает *банахова алгебра* всех непрерывных действительных функций на этом бикомпакте. Этим теория топологич. пространств ставится в тесную связь с теорией банаховых алгебр. Большую роль в функциональном анализе играют *слабые топологии* на банаховых пространствах. Это — важный для приложений класс неметризуемых топологий. Каждое тихоновское пространство характеризуется однозначно кольцом всех непрерывных действительных функций на нем в топологии поточечной сходимости. Результаты этого рода соединяют О. т. и *топологическую алгебру*.

Понятие *бикомпактного расширения* нашло приложение в теории потенциала (*Кольцевая граница*, *Мартина граница*).

О. т. важна в методич. отношении при обучении математике. Только в рамках ее понятий и конструкций вполне выясняются и становятся прозрачными фундаментальные концепции непрерывности, сходимости, параллельного перехода. Трудно назвать области математики, в к-рых понятия и язык О. т. совсем бы не использовались. В этом, в частности, проявляется ее объединяющая роль в математике. Положение О. т. в математике определяется и тем, что целый ряд принципов и теорем, имеющих общематематич. значение, получает свою естественную (т. е. отвечающую природе этих принципов, теорем) формулировку только в рамках О. т. Примерами могут служить понятие бикомпактности — абстракции от леммы Гейне — Бореля о выборе конечного подпокрытия отрезка, теорема о бикомпактности произведения бикомпактных пространств (за к-рой стоит, в качестве прообраза, утверждение о бикомпактности конечномерного куба), теорема о том, что непрерывная действительная функция на бикомпакте ограничена и достигает наибольшего и наименьшего значений. Этот ряд примеров можно продолжить: понятие множества второй категории, понятие полноты, понятие расширения (сам характер этих понятий и относящихся к ним результатов, важных для математики в целом, делает наиболее естественным и прозрачным их исследование в рамках О. т.).

Лит.: [1] Александров П. С., Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств, М., 1978, с. 280—358; [2] его же, «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 2, с. 25—95; [3] его же, там же, 1964, т. 19, в. 6, с. 3—46; 1965, т. 20, в. 1, с. 253—54; [4] Александров П. С., Федорчук В. В., там же, 1978, т. 33, в. 3, с. 3—48; [5] Архангельский А. В., там же, 1966, т. 21, в. 4, с. 133—84; [6] его же, там же, 1978, т. 33, в. 6, с. 29—84.

А. В. Архангельский.

ОБЩАЯ ТОЧКА — точка топологич. пространства, замыкание к-рой совпадает со всем пространством. Топологич. пространство, имеющее О. т., является *неприводимым топологическим пространством*; однако неприводимое пространство может как вообще не иметь ни одной О. т., так и иметь много О. т. Впрочем, если

пространство удовлетворяет *Колмогорова аксиоме*, то оно может иметь не более одной О. т. Любое неприводимое алгебраич. многообразие или неприводимая схема обладают и притом единственной О. т. В этом случае О. т. есть не что иное, как спектр поля рациональных функций многообразия.

Термин «О. т.» употребляется иногда также для обозначения *общего положения точки*. *В. И. Данилов.*

ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКА — точка, принадлежащая нек-рому открытому плотному в топологии Зарисского подмножеству алгебраич. многообразия. В алгебраич. геометрии О. п. т. часто наз. просто о б щ е й т о ч к о й. *О. А. Иванова.*

ОБЩЕЕ ПОЛОЖЕНИЕ — словосочетание, употребляющееся в оборотах типа: «объекты O в О. п. имеют свойство S (или свойства S_i)», «S есть свойство О. п.», «приведение в О. п.», точный смысл к-рых зависит от контекста. Обычно совокупность $\mathfrak{O}$ всех рассматриваемых объектов снабжается структурой, позволяющей считать нек-рые подмножества $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{O}$ «малыми», «пренебрежимыми» или, наоборот, «большими», «массивными»; тогда S считается «свойством О. п.», если обладающие им объекты образуют в $\mathfrak{O}$ «большое» подмножество. $\mathfrak{O}$ обычно имеет одну из следующих структур: а) *алгебраического многообразия*, б) *дифференцируемого многообразия* (возможного, бесконечномерного), в) топологич. пространства, чаще всего *Бэра пространства* в первом значении этого термина, г) пространства с мерой. «Малыми» считаются соответственно: алгебраич. подмногообразия (меньшей размерности), дифференцируемые подмногообразия и конечные или счетные объединения таковых, нигде не плотные множества или множества первой категории, множества меры нуль. Множество $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{O}$ считается «большим», если дополнение к нему — «малое». Тогда говорят также, что $\mathfrak{A}$ содержит «большинство» объектов из $\mathfrak{O}$ или «почти все» эти объекты, а свойство S, выполняющееся для почти всех объектов, наз. «типичным», или свойством О. п. Нередко говорят о «типичном» объекте, объекте общего положения или объекте, находящемся в О. п., подразумевая (иногда молчаливо), что имеется одно или несколько «типичных» свойств (каких именно — должно быть ясно из контекста) и что речь идет об объекте, обладающем этими свойствами.

В более слабом смысле «большое» подмножество в случаях в) и г) может означать подмножество второй категории в непустом открытом подмножестве пространства $\mathfrak{O}$ или подмножество положительной меры. Тогда говорят, что «этим множеством объектов нельзя пренебрегать» (но уже не говорят о «типичности»).

В случаях а) и б) «малое» множество $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{O}$ имеет положительную коразмерность $\operatorname{codim}\mathfrak{A}$. Естественно считать, что $\mathfrak{A}$ тем меньше, чем больше $\operatorname{codim}\mathfrak{A}$. Близкой к б) (и более общей) является ситуация, когда можно говорить об n-параметрич. семействах объектов $O(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, достаточно гладко зависящих от n (скалярных) параметров, и всевозможные такие семейства образуют пространство Бэра. Если почти все (в смысле в)) эти семейства не содержат объектов из $\mathfrak{A}$, то говорят, что $\operatorname{codim}\mathfrak{A}>n$, а если это так при любом n, то полагают $\operatorname{codim}\mathfrak{A}=\infty$. Соображения коразмерности играют значительную роль в теории *бифуркаций* и теории *особенностей дифференцируемых отображений* (см. также [8]).

На объекты могут действовать нек-рые операции g; их совокупность G обычно является группой или хотя бы полугруппой с единицей e. О «приведении объекта O в О. п. посредством операции g» говорят, когда из контекста ясно, что рассматриваются определенные свойства; «приведение» означает, что gO обладает этими свойствами. Как и $\mathfrak{O}$, G обычно снабжается

структурой, позволяющей говорить о «большом» множестве операций или о том, что операцию g, переводящую O в объект gO с нужными свойствами, можно выбрать сколь угодно близкой к e («приведение в О. п. посредством малого шевеления»).

Напр., на плоскости прямая и окружность в О. п. либо не пересекаются, либо пересекаются в двух точках. В данном случае объект есть пара (a, b), где a — прямая, b — окружность, а в качестве операций можно взять евклидовы движения (либо одни только параллельные переносы), действующие на a при фиксированном b. Совокупность всевозможных объектов Σ и группа G естественно снабжаются всеми названными выше структурами, и О. п. можно понимать согласно любому из описанных вариантов. Первоначально об О. п. говорили именно в подобных геометрич. вопросах, поэтому данный термин употребляется в разделах математики, являющихся геометрическими по своему характеру или по крайней мере испытавших значительное геометрич. влияние (хотя соображения, связанные с множествами второй категории или полной меры, используются и за их пределами). По сей день термин «О. п.» часто применяется к ситуации, непосредственно обобщающей приведенный пример, когда речь идет о *трансверсальности* двух подмногообразий в нек-ром объемлющем многообразии (или к родственной ситуации с трансверсальными самопересечениями иммерсированного подмногообразия). В частности, в геометрич. топологии (рассматривающей кусочно линейные или топологич. многообразия и соответствующие классы отображений) термин «О. п.» употребляется почти исключительно как синоним трансверсальности.

В алгебраич. геометрии простые примеры (вроде приведенного) легко разбираются с помощью теории исключения, причем основное поле может быть довольно произвольным (обычно алгебраически замкнутым). Имеются теоремы, связанные с О. п. в более сложных ситуациях (напр., *Бертини теоремы*, *Лефшеца теорема* о гиперплоском сечении); при изучении действия алгебраич. группы на алгебраич. многообразии большую роль играют *общего положения точки* [1].

В дифференциальной топологии и теории особенностей дифференцируемых отображений О.п. используется очень широко. Доказательства обычно проводятся с помощью теоремы Сарда или ее следствий — теорем Абрахама и Тома о трансверсальности (см. [2], [3]), более удобных для непосредственного применения. В бесконечномерном случае теорема Сарда не верна, однако можно получить более слабые результаты, к-рых иногда бывает достаточно (см. [4], [5]).

В теории гладких динамич. систем имеется ряд результатов о «типичных» свойствах. Большинство из них (особенно в локальной теории бифуркаций [3]) доказывается с использованием редукции к теореме Сарда; положительные результаты, не связанные с такой редукцией, немногочисленны (см. [6], [7], [9], [10], а также лит. при ст. *Грубая система*). Для теории гладких динамич. систем характерно наличие существенного различия между О. п. в топологич. и метрич. смысле [в) и г) см. выше] [11].

Об О. п. в дифференциальной геометрии многообразий см. [12], [13].

Лит.: [1] Мамфорд Д., Геометрическая теория инвариантов, М.— Hdlb.— N. Y., 1965; [2] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967, приложение III; [3] Арнольд В. И., Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1978; [4] Eells J., McAlpin J., «J. Math. and Mech.», 1968, v. 17, № 11, p. 1055—64; [5] Quinn F., в кн.: Global analysis, Providence, 1970, p. 213—22; [6] Gutierrez C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 241, p. 311—20; [7] его же, «J. Diff. Equations», 1978, v. 29, № 3, p. 388—95; [8] Kurland H., Robbin J., в кн.: Dynamical Systems — Warwick, 1974, B.— Hdlb.— N. Y., 1975, p. 135—50; [9] Takens F., там же, p. 293—304; [10] Добрынский В. А.,

Шарковский А. Н., «Докл. АН СССР», 1973, т. 211, № 2, с. 273—76; [11] Арнольд В. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 25, № 1, с. 21—86; 1964, т. 28, № 2, с. 479—80; [12] Wall C., в кн.: Geometry and topology, B.— Hdlb.— N. Y., 1977, p. 707—74; [13] Klingenberg W., Lectures on closed geodesics, B.— Hdlb.— N. Y., 1978.

Д. В. Аносов.

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ системы обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$x' = f(t, x),\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

в области G — гладкое по t и непрерывное по совокупности параметров n-параметрическое семейство вектор-функций

$$x = \varphi(t, C_1, \ldots, C_n),\ (C_1, \ldots, C_n) \in C \subset \mathbb{R}^n, \qquad (2)$$

откуда при соответствующем выборе значений параметров получается любое решение системы, график к-рого проходит в области $G \subset D$; здесь $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — область, где выполнены условия теоремы существования и единственности для системы (1). (Иногда условливаются, что параметры могут принимать и значения $\pm\infty$.) Геометрически О. р. системы (1) в области G представляет собой семейство непересекающихся интегральных кривых этой системы, полностью заметающих всю область.

О. р. системы (1) в области G позволяет найти решение задачи Коши для этой системы с начальным условием $x(t_0) = x^0$, $(t_0, x^0) \in G$: нужно из системы n равенств $x^0 = \varphi(t_0, C_1, \ldots, C_n)$ определить значения n параметров $C_1, \ldots, C_n$ и подставить эти значения в (2). Если $x = \psi(t, t_0, x^0)$ — решение системы (1), удовлетворяющее условию $x(t_0) = x^0$, $(t_0, x^0) \in D$, то n-параметрическое семейство

$$x = \psi(t, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

где t_0 — фиксированное число, а $x_1^0, \ldots, x_n^0$ рассматриваются как параметры, является О. р. системы (1) в нек-рой области $G \subset D$ и наз. О. р. в форме Коши. Знание О. р. позволяет однозначно восстановить систему дифференциальных уравнений: для этого надо из n соотношений (2) и из n соотношений, получающихся дифференцированием соотношений (2) по t, исключить n параметров $C_1, \ldots, C_n$.

В случае обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (3)$$

О. р. в области G имеет вид n-параметрического семейства функций

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n),\ (C_1, \ldots, C_n) \in C \subset \mathbb{R}^n, \qquad (4)$$

из к-рого при соответствующем выборе значений параметров получается решение уравнения (3) с любыми начальными условиями

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$
$$(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G \subset D;$$

здесь $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — область, где выполнены условия теоремы существования и единственности для уравнения (3).

Функция, получающаяся из О. р. при конкретных значениях параметров, наз. частным решением. Семейство функций, содержащее все решения данной системы (уравнения) в нек-рой области, не всегда удается выразить в виде явной функции независимой переменной. Это семейство может оказаться записанным в виде неявной функции — и тогда оно наз. *общим интегралом* — или в параметрич. виде.

Если конкретное обыкновенное дифференциальное уравнение (3) допускает интегрирование в замкнутой форме (см. *Интегрирование дифференциальных уравне-*

ний в замкнутой форме), то часто удается получить соотношение типа (4), где параметры возникают как постоянные интегрирования и оказываются произвольными постоянными. (Именно поэтому часто говорят, что О. р. уравнения n-го порядка содержит n произвольных постоянных.) Однако такое соотношение далеко не всегда является О. р. во всей области существования и единственности решения задачи Коши для исходного уравнения.

Лит.: [1] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959; [2] Еругин Н. П., Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, 3 изд., Минск, 1979. *Н. Х. Розов.*

ОБЩЕЗНАЧИМОСТЬ — свойство *логической формулы*, состоящее в том, что эта формула истинна при любой интерпретации входящих в нее нелогич. символов, т. е. предикатных и пропозициональных переменных. Логич. формулы, обладающие этим свойством, наз. общезначимыми, или тождественно истинными, или тавтологиями. Всякая общезначимая формула выражает *логический закон*. Вместо слов «формула A общезначима» часто пишут: «$\models A$». Важнейшими видами логич. формул являются пропозициональные и предикатные формулы. При классич. понимании *логических операций* О. пропозициональных формул проверяется путем построения *истинностных таблиц*: формула общезначима тогда и только тогда, когда при любых истинностных значениях пропозициональных переменных она принимает значение И («истина»). О. предикатной формулы означает истинность в любой *модели*. Множество общезначимых предикатных формул неразрешимо, т. е. не существует алгоритма, позволяющего для произвольной предикатной формулы выяснить, общезначима ли она. Из *Гёделя теоремы о полноте* следует, что все общезначимые предикатные формулы и только они выводимы в классич. исчислении предикатов.

Лит.: [1] Клини С. К., Математическая логика, пер. с англ., М., 1973. *В. Е. Плиско.*

ОБЩЕРЕКУРСИВНАЯ ФУНКЦИЯ — *частично рекурсивная функция*, определенная для всех значений аргументов. Понятие О. ф. может быть определено и независимо от понятия частично рекурсивной функции следующим образом. Класс всех О. ф.— это наименьший класс функций, содержащий все *примитивно рекурсивные функции* и замкнутый относительно композиции функций и *наименьшего числа оператора* при условии, что последний применяется к функции $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ лишь тогда, когда

$$\forall x_1, \ldots, x_n \exists y g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0.$$

Однако изучение О. ф. обычно ведется в классе всех частично рекурсивных функций. Это связано, в частности, с тем, что ни при каком натуральном $n>0$ не существует О. ф., универсальной для класса всех n-местных О. ф.

Все О. ф. численно представимы в *арифметике формальной*, так что для любой такой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно построить арифметич. формулу $F(x_1, \ldots, x_n, y)$, обладающую следующим свойством: каковы бы ни были натуральные числа $k_1, \ldots, k_n, k$, если $f(k_1, \ldots, k_n) = k$, то $\vdash F(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n, \bar{k})$; если же $f(k_1, \ldots, k_n) \neq k$, то $\vdash \neg F(k_1, \ldots, \bar{k}_n, \bar{k})$, где $\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n, \bar{k}$ — термы, изображающие числа $k_1, \ldots, k_n, k$, символ $\vdash$ означает выводимость в арифметич. исчислении.

Лит.: [1] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [2] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1971. *В. Е. Плиско.*

ОБЩЕРЕКУРСИВНЫЙ ОПЕРАТОР — *частично рекурсивный оператор*, к-рый определен на всех всюду определенных функциях и переводит всюду определенные функции во всюду определенные. *В. Е. Плиско.*

ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ системы обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$x_i' = f_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\ i=1,\ \ldots,\ n, \qquad (1)$$

в области G — совокупность n соотношений

$$\Phi_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) = C_i,\ i=1,\ \ldots,\ n, \qquad (2)$$

содержащая n параметров $(C_1,\ \ldots,\ C_n) \in C \subset \mathbb{R}^n$ и в неявном виде описывающая семейство функций, составляющих *общее решение* этой системы в области G. Часто О. и. системы (1) наз. не соотношения (2), а совокупность функций

$$\Phi_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\ i=1,\ \ldots,\ n. \qquad (3)$$

Каждое из соотношений (2) [или каждая из функций (3)] наз. *первым интегралом* системы (1). Иногда под О. и. системы (1) понимают совокупность более общих, чем (2), соотношений

$$\Phi_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ C_1,\ \ldots,\ C_n) = 0,\ i=1,\ \ldots,\ n.$$

В случае обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$$

О. и. в области G представляет собой одно соотношение с n параметрами

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ \ldots,\ C_n) = 0,$$

в виде неявной функции описывающее общее решение этого уравнения в области G.

О. и. дифференциального уравнения с частными производными 1-го порядка наз. соотношение между входящими в уравнение переменными, содержащее одну произвольную функцию и определяющее при каждом выборе этой функции решение уравнения.

См. также *Интеграл дифференциального уравнения*.

Лит. см. при ст. *Общее решение*. *Н. Х. Розов.*

ОБЩИХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ СИСТЕМА — множество R мощности m, являющееся *различных представителей системой* для каждого из t семейств подмножеств $F_1, F_2, \ldots, F_t$ заданного множества S, каждое из к-рых состоит из m членов. Пусть $t=2$, m конечно, $F_1 = \{F_1', F_2', \ldots, F_m'\}$, $F_2 = \{F_1'', F_2'', \ldots, F_m''\}$, $S = \bigcup_{i=1}^m F_i' = \bigcup_{i=1}^m F_i''$. О. п. с. для F_1 и F_2 существует тогда и только тогда, когда никакие k из множеств семейства F_1 не содержатся менее чем в k множествах из F_2 для каждого $k=1, 2, \ldots, m$. Эта теорема справедлива также при бесконечном m, если только все подмножества семейств F_1 и F_2 конечны. Известны условия существования О. п. с. при $t>2$, к-рые формулируются более сложно.

Лит.: [1] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970. *В. Е. Тараканов.*

ОБЩНОСТИ КВАНТОР — то же, что *всеобщности квантор*.

ОБЪЕДИНЕНИЕ (сумма, соединение) множеств — одна из основных операций над множествами. Пусть имеется нек-рая (конечная или бесконечная) совокупность множества A_α (индексы α служат для различения элементов данной совокупности). Тогда множество тех элементов, к-рые принадлежат хотя бы одному из множеств, входящих в эту совокупность, наз. объединением множеств, образующих данную совокупность.

О. множеств A_α обозначается $\bigcup A_\alpha$, иногда ΣA_α. *М. И. Войцеховский.*

ОБЪЕКТ геометрический — см. *Геометрических объектов теория*.

ОБЪЕКТ категории — термин, используемый для обозначения элементов произвольной категории, играющих роль множеств, групп, топологич. пространств и т. п. О. категории — неопределяемое понятие.

Каждая категория состоит из элементов двух классов, наз. *классом объектов* и *классом морфизмов* соответственно. Класс О. категории $\mathfrak{K}$ обычно обозначается $Ob\,\mathfrak{K}$. Любому объекту A категории $\mathfrak{K}$ однозначно соответствует единичный морфизм 1_A, причем разным О. отвечают разные единичные морфизмы. Поэтому формально можно определить понятие категории только с помощью морфизмов. Однако термин «объект категории» является удобным языковым средством, к-рое практически всегда используется. Деление элементов категории на О. и морфизмы имеет смысл только в пределах фиксированной категории, так как О. одной категории могут быть морфизмами другой и наоборот. Благодаря наличию морфизмов между О. категории устанавливаются определенные взаимосвязи, что позволяет выделить специальные классы О.: *интегральные объекты*, *нулевые объекты*, *малые объекты*, *проективные объекты*, *инъективные объекты* и т. д.

М. Ш. Цаленко.

ОБЪЕМ *трехмерного тела* — числовая характеристика тела, равная в простейшем случае, когда тело можно разбить на конечное множество единичных кубов (т. е. кубов с ребрами длины единица), числу этих кубов. О. трехмерных тел (т. е. множеств трехмерного евклидова пространства), для к-рых они определены, обладают свойствами, аналогичными свойствам *площадей* плоских фигур: 1) О. неотрицательны; 2) О. аддитивны: если для двух тел P и Q, не имеющих общих внутренних точек, определены О. $v(P)$ и $v(Q)$, то О. их объединения равен сумме их О. $v(P \cup Q) = v(P) + v(Q)$; 3) О. инвариантны относительно перемещений: если для тел P и Q определены О. и они конгруентны, то $v(P) = v(Q)$; 4) О. единичного куба равен единице. Из этих свойств следуют монотонность О.: если для тел P и Q определены О. $v(P)$, $v(Q)$ и $P \subset Q$, то выполняется неравенство $v(P) \leqslant v(Q)$, и равенство отношения О. подобных тел кубу коэффициента подобия.

На множестве всех многогранников существует и притом единственная неотрицательная функция, удовлетворяющая свойствам 1) — 4). Однако если на плоскости два любых равновеликих (имеющих одинаковую площадь) многоугольника равносоставлены, т. е. каждый из них допускает разбиение на многоугольники, из к-рых можно составить другой, то в пространстве аналогичное свойство уже не имеет места: существуют равновеликие (имеющие равные О.), но не равносоставленные многогранники (см. *Равновеликие и равносоставленные фигуры*).

Понятие О. распространяется с сохранением свойств 1) — 4) при помощи предельного перехода с множества многогранников на более широкие классы тел, напр. на тела с кусочно гладкой границей, в частности на шары, шаровые слои, шаровые сегменты и секторы, цилиндры, конусы и т. п. Если граница ограниченного тела G является кусочно гладкой поверхностью, то его О. $v(G)$ определяется следующим образом. Рассматриваются всевозможные многогранники P, лежащие в теле G, и всевозможные многогранники Q, содержащие в себе тело G: $P \subset G \subset Q$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{P \subset Q} v(P) = \inf_{Q \supset G} v(Q).$$

Это общее значение указанных нижней и верхней граней и наз. *объемом* $v(G)$ тела G. Аналогично случаю вычисления площадей плоских фигур для вычисления О. тел также применяется метод разбиения тела на части, для к-рых О. либо уже известен, либо может быть найден более простым путем. При этом для О. справедлив *принцип Кавальери*: если два тела, для к-рых определен О., пересекаются каждой плоскостью, параллельной нек-рой заданной, по конгруэнтным плоским фигурам, то они равновелики. Об-

щий метод вычисления О. дает интегральное исчисление: вычисление О. сводится к вычислению соответствующих кратных интегралов. Интегральное исчисление дает возможность обосновать и принцип Кавальери.

Расширение понятия О. на еще более широкий класс подмножеств трехмерного евклидова пространства приводит к понятию трехмерной *Жордана меры* и понятию кубируемого множества. Все упоминавшиеся выше тела являются кубируемыми множествами и потому для них определена мера Жордана.

Если M^3 — трехмерное непрерывно дифференцируемое многообразие с римановой метрикой

$$ds^2 = \sum_{i,\ j=1}^{3} g_{ij} dx^i dx^j$$

и $g = \det \| g_{ij} \|$, то о б ъ е м о м м н о ж е с т в а E, лежащего в многообразии M^3, наз. величина интеграла

$$\int\int\int_E |g|\, dx^1 dx^2 dx^3.$$

Так определенный О. множества инвариантен относительно выбора локальных координат на рассматриваемом многообразии.

Определение О. трехмерного тела обобщается на случай подмножества произвольного n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$; n-м е р н ы м о б ъ е м о м также наз. функция множества, удовлетворяющая условиям 1) — 4), если только под кубом понимать n-мерный куб. Вычисление О. множеств n-мерного пространства сводится к вычислению n-кратных интегралов.

Если E есть n-мерный параллелепипед, натянутый на радиус-векторы $a_1, \ldots, a_n$, то

$$v(E) = \sqrt{|\det \| a_i,\ a_j \| |}$$

(под корнем стоит абсолютная величина определителя Грама векторов $a_1, \ldots, a_n$).

О. подмножества E n-мерного риманова многообразия с метрикой

$$ds^2 = \sum_{i,\ j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j$$

наз. величина интеграла

$$\int \ldots \int_E |g|\, dx^1 \ldots dx^n,$$

где $g = \det \| g_{ij} \|$.

Обобщением понятия О. является понятие *меры*. Иногда термины «О». и «мера» употребляются как синонимы.

Понятие О. рассматривается не только в евклидовых, но и в аффинных пространствах. Пусть E — подмножество n-мерного аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ и пусть в $\mathbb{R}^n$ задана аффинная система координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Пусть

$$V_x(E) = \int \ldots \int_E dx^1 \ldots dx^n.$$

Если $(y^1, \ldots, y^n)$ — другая система координат и $y^i = a^i_j x^j + b^i$, то

$$V_y(E) = \left| \det \left\| a^i_j \right\| \right| V_x(E),$$

т. е. интеграл $V_x(E)$ является знакопостоянным относительным инвариантом веса — 1. Относительный инвариант $V_x(E)$ наз. а ф ф и н н ы м О. множества E. Аффинный О. не меняется при параллельном переносе, и если $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$ и $V_x(E_1)$, $V_x(E_2)$ определены, то $V_x(E) = V_x(E_1) + V_x(E_2)$. Аффинный О. обладает следующими свойствами, инвариантными относительно аффинного преобразования координат: 1) если О. двух тел равны в одной системе координат, то они равны и в другой; 2) если О. пек-рого множе-

ства равен сумме О. двух множеств в одной координатной системе, то это равенство верно и в другой; 3) отношение О. двух множеств является инвариантом аффинного преобразования координат.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — координатные векторы системы координат $x_1, \ldots, x_n$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ и пусть их начала находятся в нек-рой фиксированной точке $0 \in \mathbb{R}^n$. Если $a_i = a_i^j e_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$,— нек-рая система векторов с началом в точке O и E есть n-мерный параллелепипед, натянутый на векторы $a_1, \ldots, a_n$, то

$$V_x(E) = |\det \|a_i^j\||.$$

Величина $\det\|a_i^j\|$ наз. ориентированным объемом параллелепипеда E относительно выбранного базиса $e_1, \ldots, e_n$.

Лит.: [1] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [4] Ильин В. А., Поляк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971.

Л. Д. Кудрявцев.

ОБЪЕМНОСТИ АКСИОМА — одна из аксиом теории множеств, утверждающая равенство двух множеств, если они содержат одни и те же элементы:

$$\forall u\, \forall v\, (\forall x\, (x \in u \Longleftrightarrow x \in v) \Rightarrow u = v).$$

В языке, не содержащем символа равенства и имеющем только один предикатный символ $\in$, О. а. имеет вид

$$\forall u\, \forall v\, (\forall x\, (x \in u \Longleftrightarrow x \in v) \Rightarrow \forall z\, (u \in z \Rightarrow v \in z)).$$

Для формализации математики в системе Цермело — Френкеля ZF О. а. не имеет существенного значения. Все, что может быть построено в рамках системы ZF, может быть формализовано в системе без О. а. Пусть ZF^- — система ZF, получающаяся из ZF удалением О. а. и заменой в остальных аксиомах формул вида $u = v$ на формулу

$$\forall x\, (x \in u \Longleftrightarrow x \in v).$$

Тогда можно показать, что существует *интерпретация* системы ZF в ZF^-. Аналогичное утверждение справедливо и для теории типов.

Для системы NF Куайна, получающейся из теории типов «стиранием» типовых индексов, положение меняется: в системе NF^- невозможно интерпретировать систему NF. Система NF^- (NF без О. а.) довольно слабая теория, ее непротиворечивость доказуема в формальной арифметике. В то время как система NF не слабее теории типов с аксиомой бесконечности.

Лит.: [1] Handbook of Mathematical Logic, Amst.—N. Y.—Oxf., 1977; [2] Boffa M., «J. Symbol. Logic», 1977, v. 42, № 2, p. 215—20.

В. Н. Гришин.

ОБЪЕМНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ — выражение вида

$$u(x) = \int_D h(|x-y|)\, f(y)\, dv(y), \qquad (*)$$

где D — конечная область евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, ограниченная замкнутой поверхностью (при $N = 2$ — кривой) Ляпунова S, $h(|x-y|)$ — фундаментальное решение оператора Лапласа,

$$h(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{(N-2)\,\omega_N\,|x-y|^{N-2}}, & N \geqslant 3; \\ \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x-y|}, & N = 2; \end{cases}$$

$\omega_N = 2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^N$, $|x-y|$ — расстояние между точками x и y, $dv(y)$ — элемент объема D.

Если $f(y) \in C^{(1)}(\overline{D})$, то О. п. определен для всех $x \in \mathbb{R}^N$ и $u(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^N)$. При этом в дополнительной области $C\overline{D}$ функция $u(x)$ имеет производные всех по-

рядков и удовлетворяет *Лапласа уравнению* $\Delta u(x)=0$, т. е. является *гармонической функцией*; при $N \geqslant 3$ эта функция регулярна на бесконечности, $u(\infty)=0$. В области D О. п. $u(x)$ принадлежит классу $C^{(2)}(D)$ и удовлетворяет *Пуассона уравнению* $\Delta u(x)=-f(x)$.

Эти свойства обобщаются в различных направлениях. Напр., если $f(y) \in L^{(\infty)}(D)$, то $u(x) \in C(\mathbb{R}^N)$, $u(x) \in C^{(\infty)}(C\overline{D})$, $\Delta u(x)=0$ в $C\overline{D}$, в D существуют обобщенные производные 2-го порядка от $u(x)$ и почти всюду в D удовлетворяется уравнение Пуассона $\Delta u(x)=-f(x)$. Изучены также свойства О. п. произвольной меры μ Радона, сосредоточенной на N-мерной области D:

$$u(x)=\int h(|x-y|)\,d\mu(y).$$

Здесь также $u(x) \in C^{(\infty)}(C\overline{D})$ и $\Delta u(x)=0$ в $C\overline{D}$, $\Delta u(x)=-\mu'(x)$ почти всюду в D, где $\mu'(x)$ — производная меры μ по мере Лебега в $\mathbb{R}^N$. В определении (*) фундаментальное решение оператора Лапласа можно заменить на произвольную функцию Леви для общего эллиптич. оператора 2-го порядка L с переменными коэффициентами класса $C^{(0,\lambda)}(\overline{D})$; при этом перечисленные выше свойства остаются в силе с заменой Δu на Lu (см. [2]—[4]).

О. п. применяется при решении краевых задач для эллиптич. уравнений с частными производными (см. [2] — [5]).

При решении краевых задач для параболич. уравнений используется также понятие объемного теплового потенциала вида

$$v(x,\ t)=\int_0^t d\tau \int_D G(x,\ t;\ y,\ \tau)\, f(y,\ \tau)\, dv(y),$$

где $G(x,\ t;\ y,\ \tau)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^N$:

$$G(x,\ t;\ y,\ \tau)=$$
$$=\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^N (t-\tau)^{N/2}} \exp\left[-|x-y|^2/4\,(t-\tau)\right],$$

$f(y,\ \tau)$ — плотность. Функция $v(x,\ t)$ и ее обобщения на случай произвольного параболич. уравнения 2-го порядка имеют свойства, близкие к указанным выше для $u(x)$ (см. [3] — [6]).

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [2] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [3] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [4] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958; [5] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [6] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966.

Е. Д. Соломенцев.

ОВАЛ — замкнутая выпуклая C^2-гладкая линия в $\mathbb{R}^2$. Точки О., в к-рых кривизна достигает экстремума, наз. вершинами О. Число вершин О. не менее четырех.

Пусть E—О., пробегаемый против часовой стрелки, в плоскости с декартовыми прямоугольными координатами x, y; h — расстояние ориентированной касательной к E от начала Θ ($h>0$, если вращение касательной вокруг O происходит против часовой стрелки). Тогда уравнение касательной

$$x\cos\tau+y\sin\tau=h(\tau),$$

где τ — угол касательной с осью Ox. Величина $h(\tau)$ наз. опорной функцией О. Радиус кривизны О.:

$$r=h+\frac{d^2h}{d\tau^2};$$

длина О. (формула Коши):

$$L=\int_{-\pi}^{\pi} h(\tau)\,d\tau.$$

Между длиной L и площадью F области внутри О. выполняется соотношение

$$L^2 - 4\pi F \geqslant 0$$

(уточнение см. в ст. *Боннезена неравенство*).

А. Б. Иванов.

ОВОИД, о в а л о и д,— множество O точек нек-рого пространства, к-рое произвольная прямая пересекает не более чем в двух точках, а прямые, касательные к O в каждой его точке, лежат в гиперплоскости. В проективном пространстве нелинейчатая квадрика является О. Этот термин используется в основном для конечных геометрий.

В конечных проективных пространствах размерности большей трех О. не существует. В трехмерных пространствах порядка $q > 2$ О. является максимальной k-шапкой и состоит из q^2+1 точек, для нечетного q каждый О. является эллиптич. квадрикой (см. [1]). В плоскости порядка q О. наз. о в а л о м и содержит $q+1$ точек. В дезарговой плоскости нечетного порядка любой овал однозначно представим невырожденной коникой над полем Галуа (см. [2]).

Лит.: [1] S e g r e B., Introduction to Galois geometries, Roma, 1967; [2] е г о ж е, «Canad. J. Math.», 1955, v. 7, № 3, p. 414—16; [3] T i t s J., «Rend. mat. e applic.», 1962, v. 21, p. 37—59.

В. В. Афанасьев.

ОВРАЖНЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ — численные методы отыскания минимумов функций многих переменных. Пусть задана ограниченная снизу дважды непрерывно дифференцируемая по своим аргументам функция

$$J(x) = J(x_1, \ldots, x_m),$$

для к-рой известно, что при нек-ром векторе $x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)^T$ (T — знак транспонирования) она принимает наименьшее значение. Требуется построить последовательность векторов $\{x_n\}$, $x_n = (x_{1n}, \ldots, x_{mn})^T$, такую, что

$$\lim_{n \to \infty} J(x_n) = J(x^*).$$

Существует много методов, позволяющих получить указанную последовательность векторов. Однако общим недостатком большинства алгоритмов является резкое ухудшение их свойств в случаях, когда поверхности уровня минимизируемой функции $J(x) = \text{const}$ имеют структуру, сильно отличающуюся от сферической. В этом случае нек-рую область Q, в к-рой норма вектора-градиента

$$J'(x) = \left(\frac{\partial J}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial J}{\partial x_m} \right)^T$$

существенно меньше, чем в остальной части пространства, наз. д н о м о в р а г а, а саму функцию — о в р а ж н о й ф у н к ц и е й. Если размерность пространства аргументов минимизируемой функции больше двух, то структура поверхностей уровня овражных функций может оказаться весьма сложной. Появляются $(m-k)$-мерные овраги, где число k изменяется от 1 до $m-1$. В трехмерном пространстве, напр., возможны одномерные и двумерные овраги.

Функции овражного типа локально характеризуются плохой обусловленностью матриц двух производных (м а т р и ц Г е с с е)

$$J''(x) = \left\| \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|, \quad i, j = 1, \ldots, m,$$

что приводит к сильному изменению функции $J(x)$ вдоль направлений, совпадающих с собственными векторами матрицы Гессе для больших собственных чисел, и к слабому изменению вдоль других направлений, отвечающих малым собственным значениям матрицы Гессе.

Большинство известных методов оптимизации позволяет достаточно быстро попадать на дно оврага, при-

водя иногда к существенному уменьшению значения функции $J(x)$ по сравнению с его значением в начальной точке (спуск на дно оврага). Однако далее процесс резко замедляется и практически останавливается в нек-рой точке из Q, к-рая может быть расположена очень далеко от истинной точки минимума.

Дважды непрерывно дифференцируемая по своим аргументам функция $J(x)$ наз. о в р а ж н о й ф у н к ц и е й (см. [1]), если существует нек-рая область $G \subset \mathbb{R}^m$, где собственные значения матрицы Гессе $J''(x)$, упорядоченные в любой точке $x \in G$ по убыванию модулей, удовлетворяют неравенствам

$$0 < \left| \min_i \lambda_i(x) \right| \ll \lambda_1(x). \tag{1}$$

Степень овражности характеризуется числом

$$S = \lambda_1 / \left| \min_{\lambda_i \neq 0} \lambda_i \right|. \tag{2}$$

Если собственные значения $J''(x)$ в области G удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda_m(x)| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_{m-r+1}(x)| \ll \lambda_{m-r}(x) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_1(x),$$

то число r наз. р а з м е р н о с т ь ю о в р а г а функции $J(x)$ при $x \in G$ (см. [1]).

Системы дифференциальных уравнений, описывающие траекторию спуска овражной функции $J(x)$,

$$\frac{dx}{dt} = -J'(x), \quad x(0) = x_0, \tag{3}$$

являются *жесткими дифференциальными системами*.

В частности, когда функция $J(x)$ сильно выпуклая и матрица Гессе положительно определена (все ее собственные значения строго больше нуля), неравенства (1) совпадают с известным требованием плохой обусловленности матрицы Гессе

$$k(J''(x)) = \max_i \lambda_i(x) / \min_i \lambda_i(x) \gg 1.$$

В этом случае спектральное число обусловленности совпадает со степенью овражности.

Метод покоординатного спуска (см. [2])

$$J(x_{1,\,k+1}, \ldots, x_{i-1,\,k+1}, x_{i,\,k+1}, x_{i+1,\,k}, \ldots, x_{m,\,k}) = \min_y J(x_{1,\,k+1}, \ldots, x_{i-1,\,k+1}, y, x_{i+1,\,k}, \ldots, x_{m,\,k}),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

несмотря на простоту и универсальность, в овражной ситуации эффективен лишь в редких случаях ориентации оврагов вдоль координатных осей.

Предложена (см. [2]) модернизация метода (4), состоящая в использовании процедуры вращения осей координат так, чтобы одна из осей была направлена вдоль $x_k - x_{k-1}$, после чего начинается поиск на $(k+1)$-м шаге. Такой подход приводит к тому, что одна из осей имеет тенденцию выстраиваться вдоль образующей дна оврага, позволяя в ряде случаев весьма успешно проводить минимизацию функций с одномерными оврагами. В случае многомерных оврагов метод непригоден.

Схема метода наискорейшего спуска задается разностным уравнением

$$x_{k+1} = x_k - h_k J'_k, \quad J'_k = J'(x_k), \tag{5}$$

где h_k выбирается из условия

$$J(x_{k+1}) = \min_{h>0} J(x_k - hJ'_k).$$

Для сильно выпуклой овражной функции, в частности квадратичной

$$J(x) = \tfrac{1}{2} x^T D x - b^T x, \tag{6}$$

последовательность $\{x_k\}$, построенная алгоритмом (5), сходится к точке минимума функции x^* по закону геометрич. прогрессии (см. [3])

$$\|x_k - x^*\| \leqslant Cq^k,$$

где $C = \text{const}$,

$$q = [k(J''(x^*)) - 1]/[k(J''(x^*)) + 1].$$

Так как для овражной функции $k(J''(x^*)) \gg 1$, то $q \simeq 1$ и сходимость практически отсутствует.

Аналогичная картина наблюдается и для простой градиентной схемы (см. [4])

$$x_{k+1} = x_k - hJ'_k,\ J_{k+1} = J(x_{k+1}),\ h = \text{const}. \qquad (7)$$

Ускорение ее сходимости основано на использовании результатов предыдущих итераций для уточнения дна оврага. Может быть использован (см. [4] [5]) градиентный метод (7) с вычислением на каждой итерации отношения $q = \|J'_k\|/\|J'_{k-1}\|$. Когда оно устанавливается около нек-рого постоянного значения $q = 1$, делается большой ускоряющий шаг согласно выражению

$$x_{k+1} = x_k - \frac{h}{1-q} J'_k.$$

Далее из точки x_{k+1} продолжается спуск градиентным методом до следующего ускоряющего шага.

Различные версии метода параллельных касательных (см. [4] — [6]) основаны на выполнении ускоряющего шага вдоль направления $x_{k+2} - x_k$,[1] задаваемого точками x_k, x_{k+2} в градиентном методе. В методе «тяжелого шарика» (см. [4]) очередное приближение имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \alpha J'_k + \beta(x_k - x_{k-1}).$$

В методе оврагов (см. [7]) предлагается провести локальные спуски градиентным методом (7) из двух случайно выбранных исходных точек, а затем выполнить ускоряющий шаг по направлению, задаваемому двумя полученными на дне оврага точками.

Все эти методы немногим сложнее градиентного метода (7) и построены на его основе. Ускорение сходимости получается для одномерных оврагов. В более общих случаях многомерных оврагов, где сходимость этих схем резко замедляется, приходится обращаться к более мощным методам квадратичной аппроксимации, в основе к-рых лежит метод Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - (J''_k)^{-1} J'_k,\ J''_k = J''(x_k). \qquad (8)$$

Точка минимума функции (6) удовлетворяет системе линейных уравнений

$$D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad (9)$$

и при условии абсолютной точности всех вычислений для квадратичной функции метод Ньютона независимо от степени овражности (2) и размерности оврагов приводит к минимуму за один шаг. На самом деле, при больших числах обусловленности $k(D)$ при ограниченной разрядности вычислений задача получения решения (9) может быть некорректной, и небольшие деформации элементов матрицы D и вектора $\boldsymbol{b}$ могут приводить к большим вариациям x^*.

При умеренных степенях овражности в выпуклой ситуации метод Ньютона часто оказывается более предпочтительным по скорости сходимости, чем другие, напр. градиентные, методы.

Большой класс квадратичных (квазиньютоновских) методов основан на использовании сопряженных направлений (см. [2], [3], [8]). Эти алгоритмы для случая минимизации выпуклой функции оказываются весьма эффективными, ибо, имея квадратичное окончание, они не требуют вычисления матрицы двух производных.

Иногда (см. [8]) итерации строятся по схеме

$$x_{k+1}=x_k-(\beta_k E+J_k'')^{-1}J_k', \qquad (10)$$

где E — единичная матрица. Скаляр β_k подбирается так, чтобы матрица $J_k''+\beta_k E$ была положительно определенной и чтобы

$$\|x_{k+1}-x_k\|\leqslant\varepsilon_k.$$

Существует ряд аналогичных подходов (см. [8]), основанных на получении строго положительно определенных аппроксимаций матрицы Гессе. При минимизации овражных функций такие алгоритмы оказываются малоэффективными из-за трудностей в подборе параметров β_k, ε_k и т. д. Выбор этих параметров основан на информации о величине наименьших по модулю собственных значений матрицы Гессе, а при реальных вычислениях и большой степени овражности эта информация сильно искажена.

Более целесообразно обобщение метода Ньютона на случай минимизации овражных функций проводится на базе непрерывного принципа оптимизации. Функции $J(x)$ ставится в соответствие дифференциальная система (3), интегрируемая системным методом (см. *Жесткая дифференциальная система*). Алгоритм минимизации принимает вид

$$\left.\begin{gathered}
x_{k+1}=x_k-\Phi\left(2^N h_k^0\right)J_k',\\
\Phi\left(2^N h_k^0\right)=\int_0^{2^N h_k^0}\exp\left(-J_k''\tau\right)d\tau,\\
J_{k+1}=\min_N J\left(x_k-\Phi\left(2^N h_k^0\right)J_k'\right),\\
h_k^0\leqslant 1/\|J_k''\|,\\
\Phi\left(h_k^0\right)=h_k^0\left[E-\frac{h_k^0}{2}J_k''+\frac{\left(h_k^0\right)^2}{6}\left(J_k''\right)^2-\ldots\right],\\
\Phi\left(2^{s+1}h_k^0\right)=\Phi\left(2^s h_k^0\right)\left[2E-J_k''\Phi\left(2^s h_k^0\right)\right],\\
s=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.
\end{gathered}\right\} \qquad (11)$$

Предложен [1] алгоритм минимизации овражной функции, основанный на использовании свойств жестких систем. Пусть функция $J(x)$ в окрестности x_0 аппроксимируется квадратичной функцией (6). Матрица D и вектор b вычисляются, напр., с помощью конечно-разностной аппроксимации. Из представления элементов матрицы

$$d_{ij}=\sum_{s=1}^m u_{is}u_{js}\lambda_s,$$

где $u_s=(u_{1s},\ \ldots,\ u_{ms})^T$, $s=1,\ \ldots,\ m$,—ортонормированный базис собственных векторов D, следует, что неточное измерение этих элементов искажает информацию о малых собственных значениях плохо обусловленной матрицы, а следовательно, приводит к некорректности задачи минимизации функции (6).

Вместе с тем система дифференциальных уравнений спуска для овражной функции (6)

$$\frac{dx}{dt}=-Dx+b,\quad x(0)=x_0$$

имеет решение, в к-ром в силу условия (1) слагаемые с сомножителями $\exp(-\lambda_1 t)$ оказывают влияние лишь на малом начальном отрезке длиной $\tau_{\text{пс}}=O(\lambda_1^{-1})$.

Другими словами, компоненты вектора $x(t)$ удовлетворяют равенству

$$x^T(t)u_1-\lambda_1^{-1}b^Tu_1=\left(x_0^Tu_1-\lambda_1^{-1}b^Tu_1\right)\exp(-\lambda_1 t),$$

быстро переходящему в стационарную связь

$$\sum_{i=1}^m u_{i1}\bar{x}_i-\lambda_1^{-1}\sum_{i=1}^m b_iu_{i1}=0, \qquad (12)$$

где $\bar{x}_i$ — компоненты вектора, удовлетворяющие равенству (12). Это свойство используется в алгоритме. Выражая j-ю компоненту вектора $\bar{x}$, к-рой соответствует максимальная компонента вектора u_1, через остальные компоненты, вместо функции $J(x)$ получают новую функцию с аргументом размерности $(m-1)$:

$$J\left(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{j-1}, -\right.$$
$$\left. -u_{j1}^{-1}\sum_{i=1,\ i\neq j}^{m}(u_{i1}\bar{x}_i-\lambda_1^{-1}b_iu_{i1}),\ x_{j+1}, \ldots, x_m\right)=$$
$$=\bar{J}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{j-1}, \bar{x}_{j+1}, \ldots, \bar{x}_m). \qquad (13)$$

По функции (13) с помощью конечноразностной аппроксимации находится новая матрица $\bar{D}$ порядка $(m-1)$ и вектор $\bar{b}$. Здесь важно не только и не столько понижение размерности пространства поиска, сколько уменьшение степени овражности, т. к. при минимизации новой функции в подпространстве, ортогональном вектору u_1, большое собственное значение уже не оказывает влияния на вычислительный процесс. Самым существенным моментом здесь является требование получения $\bar{D}$ и $\bar{b}$ по функции (13), а не по матрице D и вектору b. Коэффициенты связи (12) находят степенным методом, как коэффициенты любого уравнения системы

$$D^k x = D^{k-1}b.$$

Если степень овражности не понижается или понижается незначительно, то процесс исключения координат вектора x продолжается рекурсивно до необходимого ее уменьшения.

Лит.: [1] Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г., Численные методы решения жестких систем, М., 1979; [2] Сеа Ж., Оптимизация. Теория и алгоритмы, пер. с франц., М., 1973; [3] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах, М., 1975; [4] Поляк Б. Т., «Экономика и математич. методы», 1967, т. 3, № 6, с. 881—902; [5] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М., 1963; [6] Уайлд Д.-Дж., Методы поиска экстремума, пер. с англ., М., 1967; [7] Гельфанд И. М., Цетлин М. Л., «Докл. АН СССР», 1961, т. 137, № 2, с. 295—98; [8] Численные методы условной оптимизации, пер. с англ., М., 1977.

Ю. В. Ракитский.

ОГИБАЮЩАЯ семейства кривых на плоскости — кривая, к-рая в каждой точке касается одной из кривых семейства, причем касания вдоль О. переходит от одной кривой семейства к другой. Напр., для семейства окружностей одинакового радиуса с центрами на прямой О. состоит из двух параллельных прямых. Если C — параметр семейства, t — параметр вдоль О., $C(t)$ — значение C для одной из кривых семейства, касающихся О. в точке с параметром t, то предполагается возможность выбора $C(t)$ так, что функция $C(t)$ ни на каком участке изменения t не постоянна.

Для семейства кривых, заданного уравнением $f(x, y, z)=0$, где $f\in C^1$ и $|f'_x|+|f'_y|\neq 0$, необходимым признаком существования О. является выполнение при $x(t)$, $y(t)$, $C(t)$ условий

$$f=0,\ f'_C=0. \qquad (1)$$

Система (1) служит для нахождения точек О., но (1) могут удовлетворять и другие особые точки семейства. Достаточным признаком точек О. является $f\in C^2$ и выполнение, кроме (1), условия

$$f''_{CC}\neq 0,\ \frac{D(f,\ f'_C)}{D(x,\ y)}\neq 0. \qquad (2)$$

Для семейства плоских кривых, заданных C^1-гладкой функцией

$$\boldsymbol{r}(u,\ C)=\{x(u,\ C),\ y(u,\ C)\},$$

где C — параметр семейства, u — параметр вдоль

его кривых, необходимым признаком точек О. является $\boldsymbol{r}_u \| \boldsymbol{r}_C$ или, что то же,

$$\varphi = \frac{D(x, y)}{D(u, C)} = 0. \tag{3}$$

Достаточным признаком является $\boldsymbol{r} \in C^2$ и выполнение, кроме (3), условия

$$\boldsymbol{r}_u \varphi'_C - \boldsymbol{r}_C \varphi'_u \neq 0. \tag{4}$$

Нарушение условий (2), (4) чаще всего связано с появлением на О. точки возврата.

Для зависящего от одного параметра C **семейства поверхностей** в пространстве О. есть поверхность, к-рая в каждой ее точке с внутренними параметрами (u, v) касается поверхности семейства с параметром $C(u, v)$, причем функция $C(u, v)$ ни в какой области изменения (u, v) не постоянна. Напр., для сфер одинакового радиуса с центрами на прямой О. является цилиндром. Для семейства, заданного уравнением $f(x, y, z, C) = 0$, где $f \in C^1$ и $|f'_x| + |f'_y| + |f'_z| \neq 0$, необходимым признаком О. является система равенств

$$f = 0, \ f'_C = 0, \tag{5}$$

а достаточным: $f \in C^2$ и выполнение, кроме (5), условий

$$f''_{CC} \neq 0, \quad \left|\frac{D(f, f'_C)}{D(x, y)}\right| + \left|\frac{D(f, f'_C)}{D(y, z)}\right| + \left|\frac{D(f, f'_C)}{D(z, x)}\right| \neq 0. \tag{6}$$

Для семейства $\boldsymbol{r}(u, v, C)$, где $\boldsymbol{r} \in C^1$ и $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$, необходимым признаком О. служит равенство

$$\varphi = (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v \boldsymbol{r}_C) = 0, \tag{7}$$

а достаточным: $\boldsymbol{r} \in C^2$ и выполнение, кроме (7), условий

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_C \\ \boldsymbol{r}_u^2 & \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v & \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_C \\ \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v & \boldsymbol{r}_v^2 & \boldsymbol{r}_v \boldsymbol{r}_C \end{vmatrix} \neq 0, \ |\varphi'_u| + |\varphi'_v| \neq 0. \tag{8}$$

С нарушением первых из условий (6), (8) чаще всего связано появление на О. ребра возврата. Линию касания О. с одной поверхностью семейства наз. **характеристикой**. Ребро возврата на О. в свою очередь обычно является О. характеристик.

Для зависящего от **двух параметров** A, B семейства поверхностей в пространстве О. есть поверхность, касающаяся в каждой своей точке (u, v) поверхности семейства с параметрами $A(u, v)$, $B(u, v)$, причем ни в какой области изменения (u, v) не существует такой функции $\Phi \in C^1$, что $A(u, v) = \Phi(B(u, v))$. Для семейства, заданного уравнением $f(x, y, z, A, B) = 0$, где $f \in C^1$ и $|f'_x| + |f'_y| + |f'_z| \neq 0$, необходимым признаком О. является система

$$f = 0, \ f'_A = 0, \ f'_B = 0, \tag{9}$$

а достаточным: $f \in C^2$ и выполнение, кроме (9), условий

$$\frac{D(f, f'_A, f'_B)}{D(x, y, z)} \neq 0, \ \frac{D(f'_A, f'_B)}{D(A, B)} \neq 0.$$

Для семейства $\boldsymbol{r}(u, v, A, B)$, где $\boldsymbol{r} \in C^1$ и $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$, необходимым признаком О. служит система

$$\varphi = (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v \boldsymbol{r}_A) = 0, \ \psi = (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v \boldsymbol{r}_B) = 0, \tag{10}$$

а достаточным: $\boldsymbol{r} \in C^2$ и выполнение, кроме (10), условий

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_A & \varphi'_B \\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_A & \psi'_B \\ \boldsymbol{r}_u^2 & \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v & \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_A & \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_B \\ \boldsymbol{r}_v \boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v^2 & \boldsymbol{r}_v \boldsymbol{r}_A & \boldsymbol{r}_v \boldsymbol{r}_B \end{vmatrix} \neq 0, \ \frac{D(\varphi, \psi)}{D(A, B)} \neq 0.$$

Более сложное понятие О. для зависящего от k параметров семейства m-мерных подмногообразий в n-мерном многообразии вводится (см. [1]) на основе теории осо-

бенностей дифференцируемых отображений как специальный вид особенности семейства.

Лит.: [1] Залгаллер В. А., Теория огибающих, М., 1975; [2] Фавар Ж., Курс локальной дифференциальной геометрии, пер. с франц., М., 1960; [3] Толстов Г. П., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 4, с. 173—79.

В. А. Залгаллер.

ОГРАНИЧЕННО КОМПАКТНОЕ МНОЖЕСТВО в линейном топологическом пространстве X — такое множество M, что замыкание $\overline{N}$ всякого ограниченного подмножества $N \subset M$ компактно и содержится в M (для нормированного пространства в сильной, соответственно слабой, топологии это равносильно компактности, соответственно слабой компактности, пересечений M с шарами). Выпуклое замкнутое множество в нормированном пространстве является О. к. м. в том и только в том случае, когда оно локально компактно. О. к. м. находят применение в теории приближения в банаховых пространствах; они обладают свойством существования *наилучшего приближения элемента*. Бочечное линейное топологич. пространство, являющееся (в самом себе) О. к. м. в слабой, соответственно сильной, топологии есть рефлексивное пространство, соответственно монтелево пространство. Нормированное пространство, являющееся О. к. м., конечномерно.

Лит.: [1] Klee V. L., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 74, p. 10—43; [2] Эдвардс Р., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969.

Л. П. Власов.

ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА ФУНКЦИЯ в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ — *мероморфная функция* $f(z)$ в области D, представимая в D в виде отношения двух ограниченных аналитич. функций:

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}, \quad |g_1|, |g_2| \leqslant 1, \quad z \in D. \tag{1}$$

Наиболее изучен класс $N(\Delta)$ О. в. ф. в единичном круге $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Для того чтобы мероморфная в Δ функция $f(z) \in N(\Delta)$, необходимо и достаточно, чтобы ее характеристика $T(r; f)$ была ограниченной (теорема Неванлинны):

$$T(r; f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta + \\ + \sum \ln \frac{r}{|b_\nu|} + \lambda \ln r \leqslant C(f) < \infty, \quad 0 < r < 1. \tag{2}$$

Здесь сумма в правой части составлена по всем полюсам b_ν функции $f(z)$ таким, что $0 < |b_\nu| < r$, причем каждый полюс берется столько раз, каков его порядок; $\lambda \geqslant 0$ — порядок полюса в начале координат. Поэтому О. в. ф. класса $N(\Delta)$ наз. также функциями с ограниченной характеристикой. Представляет интерес также следующее достаточное условие: если мероморфная функция $f(z)$ в Δ не принимает множества значений E положительной *емкости*, cap $E > 0$, то $f(z) \in N(\Delta)$.

Функции $f(z)$ класса $N(\Delta)$ обладают следующими свойствами: 1) почти всюду на единичной окружности $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ функция $f(z)$ имеет угловые граничные значения $f(e^{i\theta})$, причем $\ln |f(e^{i\theta})| \in L^1(\Gamma)$; 2) если $f(e^{i\theta}) = 0$ на множестве точек Γ положительной меры, то $f(z) \equiv 0$; 3) функции $f(z) \in N(\Delta)$ характеризуются интегральным представлением вида

$$f(z) = z^m e^{i\lambda} \frac{B_1(z; a_\mu)}{B_2(z; b_\nu)} \times \\ \times \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(e^{i\theta})| \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \, d\theta \times \\ \times \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \, d\Phi(\theta), \tag{3}$$

где m — целое число такое, что $f(z)=z^m\varphi(z)$, $\varphi(0)\neq 0, \infty$; λ — действительное число; $B_1(z;\ a_\mu)$ и $B_2(z;\ b_\nu)$ — *Бляшке произведения*, составленные по всем нулям $a_\mu\neq 0$ и полюсам $b_\nu\neq 0$ функции $f(z)$ внутри Δ с учетом их кратности; $\Phi(\theta)$ — сингулярная функция ограниченной вариации на $[0,\ 2\pi]$ с производной, равной нулю почти всюду.

Важное значение имеет также подкласс $N^*(\Delta)$ класса $N(\Delta)$, состоящий из всех голоморфных О. в. ф. $f(z)$ в Δ. Для того чтобы голоморфная функция $f(z)\in N^*(\Delta)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось вытекающее из (2) условие

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant C(f)<\infty,\quad 0<r<1. \qquad (4)$$

Для функций $f(z)\in N^*(\Delta)$ в характеристич. представлении (3) $B_2(z;\ b_\nu)\equiv 1$, $m\geqslant 0$.

Условие (4) равносильно требованию, чтобы субгармонич. функция $\ln^+|f(z)|$ имела гармонич. мажоранту во всем круге Δ. В такой форме это условие употребляется обычно для определения класса $N^*(D)$ голоморфных функций $f(z)$ в произвольных областях $D\subset\mathbb{C}$: $f(z)\in N^*(D)$ тогда и только тогда, когда $\ln^+|f(z)|$ имеет гармонич. мажоранту во всей области D.

Пусть функция $w=w(z)$ реализует конформное универсальное накрывающее отображение $\Delta\to D$; это — однозначная аналитич. функция в Δ, автоморфная относительно соответствующей области D группы G дробно-линейных отображений круга Δ на себя. Для того чтобы $f(w)\in N^*(D)$, необходимо и достаточно, чтобы суперпозиция $f(w(z))$ была автоморфной относительно G и $f(w(z))\in N^*(\Delta)$. Если область D конечносвязная и ее граница ∂D спрямляемая, то угловые граничные значения $f(\zeta)$, $\zeta\in\partial D$, функции $f(z)\in N^*(D)$ существуют почти всюду на ∂D, причем $\ln|f(\zeta)|$ суммируем по гармонич. мере на ∂D (подробнее см. обзор [4]).

Пусть теперь $f(z)$, $z=(z_1,\ \ldots,\ z_n)$, $n>1$,— голоморфная функция многих переменных в единичном поликруге $\Delta^n=\{z\in\mathbb{C}^n:|z_j|<1,\ j=1,\ \ldots,\ n\}$, T^n — остов поликруга Δ^n, $T^n=\{z\in\mathbb{C}^n:|z_j|=1,\ j=1,\ \ldots,\ n\}$. Класс $N^*(\Delta^n)$ функций с ограниченной характеристикой определяют условием, обобщающим условие (4):

$$\int_{T^n}\ln^+|f(r\zeta)|\,dm_n(\zeta)\leqslant C(f)<\infty,\quad 0<r<1,$$

где $\zeta=(\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_n)\in T^n$, $m_n(\zeta)$ — нормированная мера Хаара на T^n, $m_n(T^n)=1$. Голоморфная функция $f(z)$ класса $N^*(\Delta^n)$ почти всюду на T^n по мере Хаара m^n имеет радиальные граничные значения $\lim\limits_{r\to 1}f(r\zeta)=f(\zeta)$, $\zeta\in T^n$, причем $\ln|f(\zeta)|$ суммируем на T^n. Оставляя для О. в. ф. в $D=\Delta^n$ первоначальное определение (1), получают, что О. в. ф. $f(z)$ является функцией с ограниченной характеристикой, $N(\Delta^n)\subset N^*(\Delta^n)$. Однако при $n>1$ имеются функции $g(z)\in N^*(\Delta^n)$, заведомо не представимые в виде отношения двух ограниченных голоморфных функций (см. [5]).

Лит.: [1] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.— Л., 1941; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [3] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [4] Итоги науки. Математический анализ. 1963, М., 1965, с. 5—80; [5] Рудин У., Теория функций в поликруге, пер. с англ., М., 1974.

Е. Д. Соломенцев.

ОГРАНИЧЕННО-ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ФУНКЦИЯ — словарная функция, характеризующая поведение *автомата конечного*. (Функция наз. словарной, если областью определения и областью значений ее являются множества слов или сверхслов.)

Если A — какой-либо алфавит, то пусть A^* обозначает множество всех слов, а A° — множество всех слов

или множество всех сверхслов в алфавите A. Функция f, отображающая A° в B°, где A и B — произвольные конечные алфавиты, наз. детерминированной функцией, если выполняются следующие два условия:

1) для любого α из A° длина $f(\alpha)$ равна длине α и

2) если α — слово длины l и $\alpha_1=\alpha\alpha'$, $\alpha_2=\alpha\alpha''$, где $\alpha', \alpha''\in A^\circ$, то значения $f(\alpha_1)$ и $f(\alpha_2)$ имеют одинаковые начала длины l.

Если детерминированная функция f определена на множестве A^∞ всех сверхслов в алфавите A, то в силу условий 1) и 2) она однозначно распространяется на множество A^*: для произвольного слова α длины l значение $f(\alpha)$ совпадает с началом длины l значения $f(\alpha\beta)$, где β — произвольное сверхслово в алфавите A. Таким образом, всякая детерминированная функция f удовлетворяет условию:

3) для любого слова α из A^* и любого β из A° справедливо равенство $f(\alpha\beta)=f(\alpha)f_\alpha(\beta)$, где f_α — нек-рая детерминированная функция на множестве A°, однозначно определяемая словом α.

Функция f_α наз. остаточной функцией для f. Из условия 3) следует, что всякая детерминированная функция f определяет на множестве A^* отношение эквивалентности $R: \alpha R\beta$ тогда и только тогда, когда $f_\alpha=f_\beta$. Ранг этого отношения, или, что то же, максимальное число попарно различных остаточных функций, наз. весом детерминированной функции f. Если вес детерминированной функции конечен, то она наз. ограниченно-детерминированной функцией. Это понятие распространяется и на функции от m переменных, где $m\geqslant 2$, если наборы из m слов одинаковой длины (или сверхслов) в алфавитах $A_1, \ldots, A_m$ соответственно рассматривать как слова (сверхслова) в алфавите $A_1\times\ldots\times A_m$, являющемся декартовым произведением алфавитов $A_1, \ldots, A_m$. Таким же образом можно рассматривать О.-д. ф. с несколькими выходами, т. е. значениями к-рых являются наборы из k слов или сверхслов соответственно в алфавитах $B_1, \ldots, B_k$. Класс всех О.-д. ф. совпадает с классом функций, вычислимых конечными автоматами. Поэтому для задания О.-д. ф. могут быть использованы те же средства, что и для задания конечных автоматов, напр. канонич. уравнения (см. *Автомат конечный*, *Автоматов способы задания*). Отсюда следует, в частности, что класс О.-д. ф. с совпадающими алфавитами $A_1=\ldots=A_m=B$ замкнут относительно суперпозиций. Минимальный (по числу состояний) автомат $\mathfrak{A}(A, S, B, \varphi, \psi, s_1)$, вычисляющий О.-д. ф. f веса m, содержит n состояний и может быть построен следующим образом. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольные представители всех классов эквивалентности отношения R. Каждому классу $R(\alpha_i)$, $i=1, \ldots, n$, ставится в соответствие нек-рое состояние s_i автомата $\mathfrak{A}$. Функция переходов φ и функция выходов ψ определяются следующими условиями: если $a\in A$ и $1\leqslant i\leqslant n$, то $\varphi(s_i, a)=s_j$, где состояние s_j соответствует классу $R(\alpha_i a)$; $\psi(s_i, a)=f_{\alpha_i}(a)$. В качестве начального берется состояние, соответствующее классу $R(e)$, где e — пустое слово.

Лит.: [1] Кудрявцев В. Б., *Лекции по теории конечных автоматов*, М., 1976; [2] Яблонский С. В., Введение в дискретную математику, М., 1979. *Ю. И. Янов.*

ОГРАНИЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО — 1) О. м. в метрическом пространстве X (с метрикой $\rho(.,.)$) — множество A, диаметр к-рого

$$\delta(A)=\sup_{x,\ y\in A}\rho(x,\ y)$$

конечен.

2) О. м. в топологич. векторном пространстве E (над полем k) — множество B, к-рое поглощается

каждой окрестностью нуля U (т. е. существует такое $\alpha \in k$, что $B \subset \alpha U$). *М. И. Войцеховский.*

ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИЯ — функция, имеющая ограниченную вариацию (см. *Вариация функции*). Для функций одного действительного переменного понятие О. в. ф. введено К. Жорданом [1] в связи с обобщением *Дирихле теоремы* о сходимости рядов Фурье кусочно монотонных функций (см. *Жордана признак* сходимости ряда Фурье). Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, является О. в. ф. тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — возрастающие (убывающие) на $[a, b]$ функции (см. *Жордана разложение* О. в. ф.). Всякая О. в. ф. ограничена и может иметь не более чем счетное множество точек разрыва, причем все 1-го рода. О. в. ф. может быть представлена в виде суммы абсолютно непрерывной функции (см. *Абсолютная непрерывность*), *сингулярной функции* и *скачков функции* (см. *Лебега разложение* О. в. ф.).

В случае нескольких переменных понятие О. в. ф. не является однозначным, т. к. в этом случае существует несколько определений вариации функции (см. *Арцела вариация*, *Витали вариация*, *Пьерпонта вариация*, *Тонелли плоская вариация*, *Фреше вариация*, *Харди вариация*).

Лит.: [1] Jordan C., «C. r. Acad. sci.», 1881, t. 92, p. 228—30; [2] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974. *Б. И. Голубов.*

ОГРАНИЧЕННЫЙ КВАНТОР — квантор, используемый для характеризации предикатов не на всей области изменения данной предметной переменной, а на ее части, выделяемой нек-рым предикатом $R(x)$. При использовании в качестве О. к. *всеобщности квантор* $(\forall x)$ и *существования квантор* $(\exists x)$ обычно обозначаются $(\forall x)_{R(x)}$ и $(\exists x)_{R(x)}$. Если $P(x)$ — нек-рый предикат, то $(\forall x)_{R(x)}\ P(x)$ означает

$$\forall x\,(R(x) \supset P(x)),$$

т. е. что предикат $P(x)$ истинен при всех значениях переменной x, удовлетворяющих предикату $R(x)$. Высказывание $(\exists x)_{R(x)} P(x)$ означает

$$\exists x\,(R(x)\ \&\ P(x)),$$

т. е. что пересечение областей истинности предикатов $R(x)$ и $P(x)$ непусто.

В *арифметике формальной* важную роль играют О. к. вида $(\forall x)_{x<t}$ и $(\exists x)_{x<t}$, где t — терм, не содержащий переменной x. При применении таких кванторов к *разрешимым предикатам* получаются также разрешимые предикаты. *В. Е. Плиско.*

ОГРАНИЧЕННЫЙ ОПЕРАТОР — отображение A топологического векторного пространства X в топологическое векторное пространство Y такое, что $A(M)$ — ограниченное подмножество в Y для любого ограниченного подмножества M пространства X. Всякий оператор $A: X \to Y$, непрерывный на X, является О. о. Если $A: X \to Y$ — линейный оператор, то для ограниченности A достаточно, чтобы существовала окрестность нуля $U \subset X$ такая, что $A(U)$ ограничено в Y. Пусть X, Y — векторные нормированные пространства и линейный оператор $A: X \to Y$ ограничен. Тогда

$$\gamma = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| < \infty.$$

Это число наз. нормой оператора A и обозначается $\|A\|$. При этом

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|,$$

и $\|A\|$ есть наименьшая из констант C таких, что

$$\|Ax\| \leqslant C\,\|x\|$$

для любого $x \in X$. Обратно, выполнение этого неравенства означает, что A ограничен. Для линейных опера-

торов, отображающих нормированное пространство X в нормированное пространство Y, понятия ограниченности и непрерывности эквивалентны. Для случая произвольных топологических векторных пространств X и Y это не так, но если X — борнологическое, Y — локально выпуклое пространство, то из ограниченности линейного оператора $A : X \to Y$ следует его непрерывность. Если H — гильбертово пространство и $A : H \to H$ — ограниченный симметрич. оператор, то квадратичная форма $\langle Ax, x\rangle$ ограничена на единичном шаре $K_1 = \{x : \|x\| \leqslant 1\}$. Числа

$$\beta = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \langle Ax, x\rangle \text{ и } \alpha = \inf_{\|x\| \leqslant 1} \langle Ax, x\rangle$$

наз. верхней и нижней границами оператора A. Точки α и β принадлежат спектру A, и весь спектр лежит на отрезке $[\alpha, \beta]$. Примеры О. о.: оператор проектирования (*проектор*) на дополняемое подпространство банахова пространства и *изометрический оператор*, действующий в гильбертовом пространстве.

Если пространства X и Y наделены структурой частично упорядоченного множества, напр. являются *векторными решетками*, то помимо рассмотренной выше топологич. ограниченности вводится понятие порядковой ограниченности оператора. Именно, оператор $A : X \to Y$ наз. порядково ограниченным, если $A(M)$ есть порядково ограниченное множество пространства Y для любого порядково ограниченного множества M пространства X. Пример: изотонный оператор, т. е. такой оператор, что из $x \leqslant y$ следует $Ax \leqslant Ay$.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Рудин У., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1975; [3] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952.

В. И. Соболев.

ОДНОЛИСТНАЯ ФУНКЦИЯ — функция f, регулярная или мероморфная в области B расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ и такая, что для всяких z_1, $z_2 \in B$, $z_1 \neq z_2$, выполняется соотношение $f(z_1) \neq f(z_2)$, то есть f отображает B в $\overline{\mathbb{C}}$ взаимно однозначно. При этом обратная функция $z = f^{-1}(w)$ также однолистна. Обобщением О. ф. являются *многолистные функции*, в частности p-листные функции.

При изучении О. ф. одним из основных является вопрос о возможности однолистного отображения заданной области B на заданную область B' (т. е. отображения с помощью О. ф.). Необходимым условием существования такого отображения является равенство порядков связности областей B и B' (см., напр., [1] с. 28). Если B и B' — односвязные области, границы к-рых содержат более одной точки, то это условие является и достаточным (см. *Римана теорема*) и задача сводится к отображению заданной области на круг. В связи с этим особую роль в теории О. ф. в односвязных областях играет класс S функций f, регулярных и однолистных в круге $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ и имеющих разложение

$$f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \quad z \in \Delta. \qquad (1)$$

В случае многосвязных областей изучают отображение заданной многосвязной области на т. н. канонич. области (см. *Конформное отображение*). Пусть $\Sigma(B)$ — класс функций F, мероморфных и однолистных в области B, содержащей точку ∞, и имеющих в окрестности точки ∞ разложение

$$F(z) = z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \ldots + \alpha_n z^{-n} + \ldots \qquad (2)$$

Если $B = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 1\} = \Delta'$, то этот класс обозначают Σ.

Основные задачи теории О. ф. следующие: 1) изучение соответствия границ при конформном отображении (см. *Соответствия границ принцип*, *Граничные элементы*, *Достижимая граничная точка*); 2) получение *однолистности условий*; 3) решение различных экстремальных задач теории функций, в частности получение оценок различных функционалов и областей значений функционалов (см. ниже) и их систем в том или другом классе.

Пусть имеется нек-рый класс (множество) K регулярных или мероморфных функций и пусть на K задан комплексный функционал $w=\Phi(f)$ (или система функционалов $\{\Phi_k(f)\}_{k=1}^n$). О б л а с т ь ю з н а ч е н и й ф у н к ц и о н а л а $\Phi(f)$ (или системы функционалов $\{\Phi_k(f)\}_{k=1}^n$) на классе K наз. множество D точек $w=\Phi(f)$ комплексного пространства $\mathbb{C}$ (соответственно множество точек $(\Phi_1(f), \ldots, \Phi_n(f))$ n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$) таких, что $f\in K$. Рассматриваются также действительные функционалы. Всякое множество D', содержащее D, наз. м а ж о р а н т н о й о б л а с т ь ю ф у н к ц и о н а л а (или системы функционалов). Знание области значений функционала позволяет свести решение ряда экстремальных задач к более простым задачам анализа. Напр., если известна область D значений функционала $f(z_0)$, $f\in K$ (z_0 фиксировано), то задача оценки $|f(z_0)|$ сверху и снизу сводится к нахождению самой далекой и самой близкой точек из D по отношению к точке $w=0$.

Первые существенные результаты в теории О. ф. получены использованием *площадей принципа*. С помощью внешней теоремы площадей Л. Бибербах (L. Bieberbach, 1916) получил точные оценки $|f(z)|$ и $|f'(z)|$ сверху и снизу для $f\in S$ (см. *Искажения теоремы*), дал оценку $|c_2|\leqslant 2$ для $f\in S$ и высказал гипотезу, что $|c_n|\leqslant n$ для $f\in S$ (см. *Бибербаха гипотеза*, *Коэффициентов проблема*). Им же было найдено точное значение постоянной Кёбе. Были также получены оценки модуля функции, модуля ее производной и другие оценки в классах *выпуклых функций*, *звездообразных функций*, *типично вещественных функций* и др. В ряде классов были найдены *выпуклости радиус* и радиус звездообразности (см. *Звездообразности граница*).

Ниже приведены основные методы теории О. ф. и нек-рые результаты, полученные с их помощью.

1. Метод интегральных представлений дает возможность достаточно просто решать многие задачи теории функций, в частности экстремальные задачи в классах функций, имеющих представление с помощью интегралов Стилтьеса: выпуклых функций, почти выпуклых функций, звездообразных функций, типично вещественных функций, функций с положительной действительной частью (см. *Каратеодори класс*). Для классов функций, представимых посредством интеграла Стилтьеса, был разработан нек-рый вариационный метод (см. [1] с. 504—19), с помощью к-рого решен ряд экстремальных задач. Для таких классов разработан *внутренних вариаций метод*.

Найдены выпуклые оболочки нек-рых подклассов класса S (см. [3]). Здесь, в частности, доказано, что для всякой звездообразной функции f существует неубывающая на $[0,2\pi]$ функция μ такая, что $\mu(2\pi)-\mu(0)=1$ и

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}\,d\mu(\theta).$$

См. также *Интегральное представление аналитической функции*, *Параметрическое представление*, *Параметрических представлений метод*.

2. Метод контурного интегрирования. С помощью этого метода было, в частности, доказано, что для $f\in S$

справедливо неравенство (см. [1] с. 135—39)

$$\left|\frac{z}{f(z)}+c_2z+1-|z|^2-2\frac{E(|z|)}{K(|z|)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\left(1-\frac{E(|z|)}{K(|z|)}\right),\quad |z|<1,$$

где E и K — полные *эллиптические интегралы*. Если z фиксировано $(0<|z|<1)$, то это неравенство определяет область значений функционала $\frac{z}{f(z)}+c_2z$ в классе S. Получены усиления теорем искажения и доказаны теоремы об искажении хорд в классах Σ и $\Sigma(B)$ (см. *Искажения теоремы* и [1] с. 118—35).

См. также *Контурного интегрирования метод*, *Площадей принцип*.

3. Метод площадей. Пусть $\mathfrak{M}(a_1, \ldots, a_n)$ — класс систем функций $\{f_k(z)\}_{k=1}^n$, конформно и однолистно отображающих круг $\Delta=\{|z|<1\}$ на области $B^k\ni a_k$, попарно не имеющие общих точек (неналегающие области), и нормированных условиями $f_k(0)=a_k$. С помощью теоремы площадей в классе $\mathfrak{M}(\infty, a_1, \ldots, a_n)$, в частности, получены следующие результаты: 1) если

$$\{f_k\}_{k=1}^n\in\mathfrak{M}(a_1, \ldots, a_n),\ a_k\neq\infty,$$

то

$$\prod_{k=1}^n |f_k'(0)|^{\gamma_k|^2}\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}|a_k-a_l|^{-2\,\mathrm{Re}\,(\gamma_k,\,\bar{\gamma}_l)} \qquad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n\gamma_k=0;$$

это неравенство обобщает на случай комплексных γ известное ранее неравенство для действительных γ_k;

2) если $\{f_0, f_1\}\in\mathfrak{M}(0, \infty)$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_0(e^{it})|^2\,dt\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_1(e^{it})|^{-2}\,dt\leqslant 1. \qquad (4)$$

Для *Бибербаха — Эйленберга функций*

$$f(z)=\sum_{k=1}^\infty a_kz^k,$$

отсюда следует неравенство

$$\sum_{k=1}^\infty|a_k|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^2\,dt\leqslant 1; \qquad (4')$$

выяснены условия, при выполнении к-рых в (4) и (4′) имеет место знак равенства.

С помощью теоремы площадей для неналегающих областей получена оценка приближения функции, регулярной на замкнутой многосвязной области, рациональной функцией, интерполирующей заданную функцию в узлах, равнорасположенных на границе области (см. [4] с. 143—54). Получена область значений шварциана

$$\{F(z),\ z\}=\left(\frac{F''(z)}{F'(z)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{F''(z)}{F'(z)}\right)$$

для $F\in\Sigma(B)$ и ряд других областей значений в классах функций, заданных в многосвязных областях (см. [4], [5]).

4. Метод Лёвнера. Сам К. Лёвнер (K. Löwner, 1923) получил точную оценку $|c_3|\leqslant 3$ для функций $f\in S$ и точные оценки коэффициентов разложения функции, обратной к f, в окрестности точки $w=0$. В частности, этим методом получена точная форма теоремы вращения в классе S (см. *Вращения теоремы*). Доказана теорема: для $f\in S$ при заданных $z\in\Delta$ и $|f(z)|$ справедливо неравенство

$$|f'(z)|\leqslant\frac{1}{1-|z|^2}\left|\frac{f(z)}{z}\right|^2(1-x^2)^2\left|\frac{x}{z}\right|^{4x^2/(1-x^2)}, \qquad (5)$$

где x, $|x|<|z|$, определяется условием

$$\left|\frac{f(x)}{z}\right|(1+x)^2\left|\frac{z}{x}\right|^{2x/(1+x)}=1.$$

Неравенство (5) точное. Из (5) следуют точные неравенства в классе S ($0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r < 1$):

$$\left.\begin{aligned} |f(re^{i\theta})| + |f(-re^{i\theta})| &\leqslant \frac{r}{(1-r)^2} + \frac{r}{(1+r)^2}, \\ |f'(re^{i\theta})| + |f'(-re^{i\theta})| &\leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3} + \frac{1-r}{(1+r)^3}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Был введен весьма широкий подкласс функций $f \in S$, представимых в виде

$$f(z) = \left[(\alpha + i\beta) \int_0^z p(s)\, g(s)^{\alpha}\, s^{i\beta - 1}\, ds \right]^{1/(\alpha + i\beta)},$$

где g — звездообразная функция, p — регулярная в Δ функция и такая, что $\operatorname{Re}\{e^{i\gamma} p(z)\} > 0$ для нек-рого $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$, $p(0) = 1$, $\alpha > 0$, $-\infty < \beta < +\infty$ (см. [6] с. 47).

С помощью теорем искажения было установлено, что функция Кёбе

$$K_{\alpha}(z) = z(1 - e^{i\alpha} z)^{-2} \in S$$

(α — действительное) реализует максимум линейной меры покрытия окружности $|w| = \rho$ образом $B(r)$ круга $\Delta_r = \{|z| < r < 1\}$ при отображении функциями класса S, когда $\rho > e^{\pi/e} r$. Из этого свойства функций класса S следуют оценки площади $\sigma(r)$ области $B(r)$, оценки среднего модуля функции и другие оценки в классе S, асимптотически точные при $r \to 1$ (см. [1] с. 561).

Была предложена нек-рая удобная редукция экстремальных задач на классе S и нек-рых его подклассах к определенным экстремальным задачам на более простом классе (см. *Каратеодори класс*), оказавшаяся применимой к решению ряда экстремальных задач, в частности к нахождению области значений системы функционалов $\{\ln \frac{f(z)}{z},\ \ln f'(z)\}$ (здесь z, $0 < |z| < 1$, фиксировано) для $f \in S$ (см. [6] с. 115—58).

Метод Лёвнера успешно применялся к исследованию свойств линий уровня и к решению экстремальных задач на подклассе S_M ограниченных функций $f \in S$: $|f(z)| \leqslant M$, $z \in \Delta$ (см. [6] с. 150—77).

См. также *Лёвнера уравнение*, *Лёвнера метод*, *Параметрических представлений метод*.

5. Вариационные методы. Граничные и внутренние вариации при решении экстремальных задач приводят к дифференциальным уравнениям для границ экстремальных областей и, соответственно, для экстремальных функций. Левая часть этих уравнений, как правило, есть нек-рый *квадратичный дифференциал*. Различные качественные характеристики функций, реализующих экстремум, получаются при исследовании свойств соответствующих квадратичных дифференциалов. В частности, для большого числа экстремальных задач в классе S (и в других классах) оказывается, что экстремальная функция отображает круг Δ на всю плоскость с конечным числом аналитич. разрезов. Иногда дифференциальное уравнение для экстремальной функции удается проинтегрировать и тем самым получить величину экстремума в исследуемой задаче и все экстремальные функции. Чаще удается лишь получить одно или несколько конечных уравнений для величины экстремума. Нек-рые результаты, полученные вариационным методом, перечислены ниже.

Пусть $F \in \Sigma$, w_k, $k = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 2$, не принадлежат образу области $\Delta' = \{|z| > 1\}$ при отображении $w = F(z)$ и пусть

$$d_n(F) = \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n} |w_k - w_l|.$$

Доказано, что

$$d_3(F) = |(w_1 - w_2)(w_2 - w_3)(w_3 - w_1)| \leqslant 12\sqrt{3}$$

и знак равенства имеет место только для

$$F(z) = z(1 + e^{i\alpha} z^3)^{2/3},$$

где α — действительное (см. [1] с. 140—46).

Доказано (см. [1] с. 127—35), что область значений функционала

$$w=\sum_{\nu,\,\nu'=1}^{n}\gamma_\nu\gamma_{\nu'}\ln\frac{F(\zeta_\nu)-F(\zeta_{\nu'})}{\zeta_\nu-\zeta_{\nu'}}$$

для $F\in\Sigma$, где γ_ν — заданные числа, не равные одновременно нулю, ζ_ν — заданные точки из области Δ', является кругом

$$|w|\leqslant-\operatorname{Re}\sum_{\nu,\,\nu'=1}^{n}\gamma_\nu\overline{\gamma}_{\nu'}\ln(1-\zeta_\nu^{-1}\overline{\zeta_{\nu'}^{-1}}).$$

Исследована задача об экстремуме $|c_n|$, $n\geqslant1$, в классе S_a функций $f(z)=c_1z+c_2z^2+\ldots$, регулярных и однолистных в круге Δ и не принимающих в нем заданных значений $a_1, \ldots, a_n$ (см. [1] с. 151—56). Частный случай $n=1$ является задачей определения континуума наименьшей емкости (рассмотрение этой задачи и ее обобщений см. в [7]).

С помощью вариационного метода исследовались различные задачи для неналегающих областей. Так, рассматривалась задача о максимуме произведения

$$I_n=\prod_{k=1}^{n}|f_k'(0)|$$

в классе $\mathfrak{M}(a_1, \ldots, a_n)$ (см. [1] с. 156—65). Получена точная оценка произведения

$$\prod_{k=1}^{n}|f_k'(0)|^{\alpha_k},$$

где α_k — любые заданные положительные числа при $n=2$ и 3 (см. [1] с. 550—51).

Эта задача равносильна задаче нахождения области D системы функционалов $(|f_1(0)|, \ldots, |f_n(0)|)$ в классе $\mathfrak{M}(a_1, \ldots, a_n)$.

См. также *Вариационные принципы*, *Вариация однолистной функции*, *Внутренних вариаций метод*, *Граничных вариаций метод*, *Вариационно-параметрический метод*.

6. Метод экстремальной метрики. При решении экстремальных задач методом экстремальной метрики основную роль, как правило, играет метрика, порожденная нек-рым квадратичным дифференциалом $Q(z)dz^2$. Это тот же квадратичный дифференциал, к-рый возникает при решении задачи вариационным методом. Ниже для примера указаны два результата, полученные этим методом (см. [1] с. 532—611, [7] — [9]).

При помощи общей теоремы коэффициентов (о. т. к.) Дж. Дженкинс (J. Jenkins, 1960) получил решение задачи об области значений функционала $f(z)$ при фиксированном z из круга $\Delta=\{|z|<1\}$ на классе S_r функций из S с действительными коэффициентами $c_2, c_3, \ldots$. В классах Σ и M, где M — класс функций f, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, мероморфных и однолистных в круге Δ, он выяснил влияние обращения в нуль нек-рого числа из начальных коэффициентов на рост последующих.

Было дано добавление к о. т. к. в случае, когда дифференциал $Q(z)dz^2$ не имеет полюсов порядка, большего единицы; кроме того, с помощью экстремально-метрического подхода были установлены весьма общие теоремы покрытия линий при однолистном конформном отображении односвязных и двусвязных областей, в частности уточнен результат о покрытии отрезков для функций, мероморфных и однолистных в круге, и аналогичный результат для кругового кольца (см. [1] с. 559, 560, 564).

См. также *Грётша принцип*, *Грётша теоремы*, *Полос метод*, *Квадратичный дифференциал*, *Бибербаха — Эйленберга функции*, *Экстремальной метрики метод*.

7. Метод симметризации. С помощью этого метода, часто в сочетании с другими, решен ряд сложных экстремальных задач, не поддающихся решению иными методами. Таковы, напр., следующие задачи (см. [1]

с. 536—611, [7] — [10]). В классе S функций f была получена точная оценка сверху меры множества точек окружности $|w|=R$, $1/4\leqslant R<1$, не принадлежащих образу круга Δ при отображении $w=f(z)$ $(\in f(\Delta))$. В сочетании с методом экстремальных метрик найдена точная оценка сверху $|f(z)|$ при фиксированном $|z|=r$, $0<r<1$, для

$$f(z)=z+c_2z^2+\ldots\in S$$

с заданным $c_2=c=\text{const}$, $0\leqslant c\leqslant 2$; обобщены и распространены неравенства (6) на класс p-листных в среднем по окружности функций

$$f(z)=z^p+c_{p+1}z^{p+1}+\ldots$$

(см. *Многолистная функция*).

С использованием метода симметризации было доказано, что если Φ — выпуклая неубывающая на $(-\infty, +\infty)$ функция, то для $f\in S$ при $0<r<1$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\ln|f(re^{it})|)\,dt\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\ln|K(re^{it})|)\,dt,$$

где $K(z)=z(1-z)^{-2}$ (см. [11]). Если имеет место знак равенства при нек-ром r, $0<r<1$, и при нек-рой строго выпуклой функции Φ, то

$$f(z)=e^{-i\alpha}K(e^{i\alpha}z),$$

где α действительно.

О приложениях метода симметризации к многосвязным областям см. в [12], [13]. См. также *Симметризации метод*.

Лит.: [1] Голузин Г.М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Александров И. А., Лебедев Н. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1968, т. 94, с. 79—89; [3] Brickman L., MacGregor T. H., Wilken D. R., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1971, v. 156, p. 91—107; [4] Лебедев Н. А., Принцип площадей в теории однолистных функций, М., 1975; [5] Милин И. М., Однолистные функции и ортонормированные системы, М., 1971; [6] Александров И. А., Параметрические продолжения в теории однолистных функций, М., 1976; [7] Кузьмина Г. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1980, т. 139, с. 1—241; [8] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [9] Pommerenke Ch., Univalent Functions, Gött., 1975; [10] Хейман В. К., Многолистные функции, пер. с англ., М., 1960; [11] Baernstein A., «Acta math.», 1974, v. 133, p. 139—69; [12] Митюк И. П., «Укр. матем. ж.», 1965, т. 17, № 4, с. 46—54; [13] его же, «Сиб. матем. ж.», 1965, т. 6, № 6, с. 1282—91. *Н. А. Лебедев.*

ОДНОЛИСТНОСТИ РАДИУС — радиус $\rho(M)$ наибольшего круга $|z|<\rho$, в к-ром однолистны все функции семейства регулярных в круге $|z|<1$ функций

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

таких, что $|f(z)|\leqslant M$ при $|z|<1$. Оказывается, что

$$\rho(M)=M-\sqrt{M^2-1},\quad M\geqslant 1,$$

причем функция

$$f_0(z)=Mz(1-Mz)/(M-z)$$

однолистна в круге $|z|<\rho(M)$, но не в большем круге (имеющем центр в начале). Для функций, регулярных в круге $|z|<R$ и таких, что $f(0)=0$, $f'(0)=c$, $c\neq 0$, и $|f(z)|\leqslant M$, О. р. $\rho^*(M)$ определяется аналогично, и его значение легко получается из $\rho(M)$.

Г. К. Антонюк.

ОДНОЛИСТНОСТИ УСЛОВИЯ — необходимые и достаточные условия, при к-рых регулярная (или мероморфная) функция $f(z)$ однолистна в нек-рой области комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Необходимым и достаточным условием однолистности $f(z)$ в достаточно малой окрестности точки a является $f'(a)\neq 0$. Такая (локальная) однолистность во всех точках области еще не гарантирует однолистности в области. Напр., функция e^z неоднолистна в круге $|z|\leqslant R$, где $R>\pi$, хотя для нее выполняется условие локальной однолистности в каждой точке плоскости. Необходимым условием одно-

листности является всякое свойство однолистной функции, в частности всякое неравенство, к-рому удовлетворяет однолистная функция. Справедливы следующие необходимые и достаточные О. у.

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ в окрестности $z=0$ разлагается в ряд

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots \qquad (1)$$

и пусть

$$\ln\frac{f(t)-f(z)}{t-z}=\sum_{p,\,q=1}^{\infty}\omega_{p,\,q}t^pz^q$$

с постоянными коэффициентами a_k и $\omega_{p,\,q}$. Для того чтобы $f(z)$ была регулярной и однолистной в $E=\{z:|z|<1\}$ функцией, необходимо и достаточно, чтобы при всяком натуральном N и для всяких x_p, $p=1,\ldots,N$, выполнялось неравенство Грунского

$$\left|\sum_{p,\,q=1}^{N}\omega_{p,\,q}x_px_q\right|\leqslant\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}|x_p|^2.$$

Аналогичные условия имеют место для класса $\Sigma(B)$ (класс функций $F(\zeta)=\zeta+c_0+c_1/\zeta+\ldots$, мероморфных и однолистных в области $B\ni\infty$) (см. [2] с. 599—602, а также *Площадей принцип*).

Теорема 2. Пусть граница l конечной области D есть жорданова кривая. Для того чтобы регулярная в D и непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$ функция $f(z)$ была однолистной в $\overline{D}$, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ взаимно однозначно отображала l на нек-рую замкнутую жорданову кривую.

Необходимые и достаточные условия однолистного отображения на области выпуклые, звездообразные или спиралеобразные относительно начала для функции (1) в круге E связаны с теоремой 2 и записываются соответственно в виде

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)+1\geqslant0,\quad\operatorname{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\geqslant0,$$

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\gamma}z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\geqslant0.$$

Многие достаточные О. у. описываются с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений (теорема 3) и уравнений с частными производными (теорема 4).

Теорема 3. Мероморфная в круге E функция $f(z)$ будет однолистной в E, если шварциан

$$\{f,\,z\}=[f''(z)/f'(z)]'-2^{-1}[f''(z)/f'(z)]^2$$

подчиняется неравенству

$$|\{f,\,z\}|\leqslant2S(|z|),\quad|z|<1,$$

причем мажоранта $S(r)$ является непрерывной неотрицательной функцией и удовлетворяет условиям: а) $S(r)(1-r^2)^2$ не возрастает по r при $0<r<1$, б) дифференциальное уравнение $y''+S(|t|)y=0$ при $-1<t<1$ имеет решение $y_0(t)>0$.

Частными случаями теоремы 3 являются условия однолистности Нехари — Покорного:

$$|\{f,\,z\}|\leqslant C(\mu)(1-|z|^2)^{-\mu},$$

где $C(\mu)=[2^{3\mu-1}\pi^{2(1-\mu)},\ 0\leqslant\mu\leqslant1;\ 2^{3-\mu},\ 1\leqslant\mu\leqslant2]$.

Теорема 4. Пусть $f(z,\,t)$ есть функция, регулярная в круге E, непрерывно дифференцируемая по t, $0\leqslant t<\infty$, $f(0,\,t)=0$, и удовлетворяющая уравнению Лёвнера — Куфарева

$$\frac{\partial f}{\partial t}=zh(z,\,t)\,\frac{\partial f}{\partial z},\quad0<t<\infty,\quad z\in E,$$

где $h(z,\,t)$ — функция, регулярная в E, непрерывная по t, $0\leqslant t<\infty$, и $\operatorname{Re}h(z,\,t)\geqslant0$. Если

$$f(z,\,t)=a_0(t)f(z)+O(1),$$

где $\lim_{t\to\infty} a_0(t)=\infty$, $O(1)$ — конечная величина при $t\to\infty$ для каждого $z\in E$ и $f(z)$ — непостоянная регулярная функция в E с разложением (1), то все функции $f(z, t)$ однолистны, в том числе однолистными являются функции $f(z, 0)$ и $f(z)$.

Теорема 4 приводит к следующим конкретным О. у.:

$$\left| z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leqslant \frac{1}{1-|z|^2}$$

и

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\gamma}\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha+i\beta-1}\frac{f'(z)}{\varphi'^{\alpha}(z)}\right]\geqslant 0,$$

где α, β, γ — действительные постоянные, $\alpha>0$, $|\gamma|<\pi/2$, $\varphi(z)$ — регулярная функция, отображающая круг E на выпуклую область.

Однолистность функции

$$w=f(z) \qquad (2)$$

равносильна однозначной разрешимости уравнения (2) относительно z. В таком понимании достаточные О. у. распространяются на широкий класс операторных уравнений. Для этих уравнений, в частности, обобщено условие $\operatorname{Re}[e^{i\gamma}f'(z)]\geqslant 0$ на класс действительных преобразований выпуклых и невыпуклых областей n-мерного евклидова пространства.

Лит.: [1] Лебедев Н. А., Принцип площадей в теории однолистных функций, М., 1975; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [4] Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 4, с. 3—60; [5] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977; [6] Тумашев Г. Г., Нужин М. Т., Обратные краевые задачи и их приложения, 2 изд., Казань, 1965. *Л. А. Аксентьев.*

ОДНОМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — топологическое пространство X, каждая точка к-рого обладает окрестностью, гомеоморфной прямой (внутренняя точка) или полупрямой (граничная точка). Связное паракомпактное хаусдорфово О. м. X без граничных точек гомеоморфно окружности, если оно компактно, и прямой, если оно некомпактно; при наличии одной или двух граничных точек X гомеоморфно соответственно полуоткрытому или замкнутому конечному интервалу. Любое такое О. м. сглаживаемо, так что в вышеприведенном утверждении гомеоморфность можно заменить диффеоморфностью.

Континуум (связное (би)-компактное хаусдорфово пространство) K, каждая точка к-рого, за исключением двух, разделяет его, гомеоморфен замкнутому интервалу. Если же каждая точка является разделяющей, то K гомеоморфен окружности. При этом $x\in K$ разделяет K, если существуют два непустых непересекающихся открытых множества A и B таких, что $K\setminus x=A\cup B$. Другими словами, нек-рые линии являются О. м.

Лит.: [1] Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология. Начальный курс, пер. с англ., М., 1972; [2] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [3] Хирш М., Дифференциальная топология, пер. с англ., М., 1979. *М. И. Войцеховский.*

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, поток,— действие аддитивной группы действительных чисел $\mathbb{R}$ на многообразии M.

Таким образом, однопараметрическое семейство $\{\varphi_t,\ t\in\mathbb{R}\}$ преобразований многообразия M является О. г. п., если выполнены следующие условия:

$$\varphi_{t+s}x=\varphi_t(\varphi_s x),\quad \varphi_{-t}x=\varphi_t^{-1}x,\quad \forall t,\ s\in\mathbb{R},\ x\in M. \qquad (*)$$

Если многообразие M гладкое, то обычно предполагается, что О. г. п. тоже гладкая, т. е. соответствующее отображение

$$\varphi:\mathbb{R}\times M\longrightarrow M,\ (t, x)\longrightarrow\varphi_t x$$

является дифференцируемым отображением дифференцируемых многообразий.

Более общим, чем понятие О. г. п., является понятие локальной однопараметрической группы преобразований многообразия M. Оно определяется как отображение $\varphi: U \to M$ нек-рого открытого подмногообразия $U \subset \mathbb{R} \times M$ вида $U = \bigcup_{x \in M} (]\varepsilon_-(x), \varepsilon_+(x)[, x)$, где $\varepsilon_+(x) > 0$, $\varepsilon_-(x) < 0$ для $x \in M$, удовлетворяющее условиям (*) при всех $t, s \in \mathbb{R}$, $x \in M$, для к-рых обе части равенств определены.

С каждой гладкой локальной О. г. п. $\{\varphi_t\}$ многообразия M связывается векторное поле

$$M \ni x \longrightarrow X_x = \frac{d}{dt} \varphi_t x \Big|_{t=0},$$

наз. полем скоростей, или инфинитезимальной образующей, О. г. п. $\{\varphi_t\}$. Обратно, любое гладкое векторное поле X порождает локальную О. г. п. φ_t, имеющую полем скоростей поле X. В локальных координатах x^i на M эта О. г. п. задается как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi^i(t, x^j)}{dt} = X^i(x^j)$$

с начальными условиями $\varphi^i(0, x^j) = x^i$, где $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Если локальная О. г. п., порождаемая векторным полем X, продолжается до глобальной О. г. п., то поле X наз. полным. На компактном многообразии любое векторное поле является полным, и, таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между О. г. п. и векторными полями. На некомпактном многообразии это уже не так, причем множество полных векторных полей даже не замкнуто относительно сложения.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971; [2] Palais R., A global formulation of the Lie theory of transformation groups, Providence, 1957.

Д. В. Алексеевский.

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ПОДГРУППА группы Ли G над нормированным полем K — аналитический гомоморфизм аддитивной группы поля K в G, т. е. такое аналитическое отображение $\alpha: K \to G$, что

$$\alpha(s+t) = \alpha(s)\alpha(t), \quad s, t \in K.$$

О. п. наз. также образ этого гомоморфизма, к-рый, собственно, и является подгруппой группы G. Если $K = \mathbb{R}$, то уже из непрерывности гомоморфизма $\alpha: K \to G$ следует его аналитичность. Если $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то для любого касательного вектора $X \in T_e G$ к группе G в точке e существует единственная О. п. $\alpha: K \to G$, имеющая X своим касательным вектором в точке $t = 0$. При этом $\alpha(t) = \exp tX$, $t \in K$, где $\exp: T_e G \to G$ — *экспоненциальное отображение*. В частности, любая О. п. в полной линейной группе $G = \mathrm{GL}(n, K)$ имеет вид

$$\alpha(t) = \exp tX = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n X^n.$$

Если G — вещественная группа Ли, снабженная двусторонне инвариантной псевдоримановой метрикой или аффинной связностью, то О. п. группы G — это геодезические, проходящие через единицу e.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [3] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964.

А. Л. Онищик.

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ПОЛУГРУППА — семейство операторов $T(t)$, $t > 0$, действующих в банахо-

вом или топологическом векторном пространстве X, обладающее свойством

$$T(t+\tau)x = T(t)[T(\tau)x],\ t,\ \tau > 0,\ x \in X.$$

Если операторы $T(t)$ линейны, ограничены и действуют в банаховом пространстве X, то из измеримости всех функций $T(t)x$, $x \in X$, следует их непрерывность. Функция $||T(t)||$ растет на бесконечности не быстрее экспоненты. Классификация О. п. основана на их различном поведении при $t \to 0$. В простейшем случае $T(t)$ сильно стремится к единичному оператору при $t \to 0$ (см. *Полугруппа операторов*).

Важной характеристикой О. п. является *производящий оператор* полугруппы. Основной проблематикой теории О. п. является установление связи между свойствами полугрупп и их производящих операторов. Достаточно полно изучены О. п. линейных непрерывных операторов в локально выпуклых пространствах.

О. п. нелинейных операторов в банаховом пространстве исследованы в том случае, когда операторы $T(t)$ сжимающие. Здесь имеются глубокие связи с теорией диссипативных операторов.

Лит.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967; [3] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., М., 1962; [4] Butzer P., Berens H., Semigroups of operators and approximation, B., 1967; [5] Barbu V., Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces, Buc.— Leyden, 1976. *С. Г. Крейн.*

ОДНОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, простопериодическая функция,— периодическая функция $f(z)$ комплексного переменного z, все периоды p к-рой суть целые кратные одного единственного основного, или примитивного, периода $2\omega \neq 0$, $p = 2n\omega$. Напр., целой О. ф. является показательная функция e^z с основным периодом $2\omega = 2\pi i$, мероморфными О. ф.— тригонометрич. функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ с основным периодом $2\omega = \pi$. *Е. Д. Соломенцев.*

ОДНОПОЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛОИД — см. *Гиперболоид.*

ОДНОРОДНАЯ ОГРАНИЧЕННАЯ ОБЛАСТЬ — *однородное комплексное многообразие*, изоморфное ограниченной области в $\mathbb{C}^n$. Примером О. о. о. является «комплексный шар»

$$\{z \in \mathbb{C}^n : |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 < 1\},$$

в к-ром транзитивно действует псевдоунитарная группа $SU_{n,1}$, представленная проективными преобразованиями пространства $\mathbb{C}^n$.

Если D — любая ограниченная область в $\mathbb{C}^n$, то эрмитова дифференциальная форма

$$d'd'' \ln K(z, \bar{z}) = \sum_{ij} \frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i d\bar{z}_j,$$

где K — *Бергмана кернфункция* области D, определяет в D кэлерову метрику, наз. метрикой Бергмана и инвариантную относительно всех автоморфизмов области D (см. [1], [2]). Группа $G(D)$ всех автоморфизмов области D является вещественной группой Ли, не содержащей нетривиальных связных комплексных подгрупп. Если D — однородна, то метрика Бергмана полна.

Среди О. о. о. выделяются симметрич. области. Ограниченная область D наз. симметрической, если для любой точки $z \in D$ существует инволютивный автоморфизм области D, имеющий z изолированной неподвижной точкой. Всякая симметрич. область однородна и является эрмитовым симметрич. пространством относительно метрики Бергмана. Получена [3] классификация симметрич. областей. Имеются 4 серии неприводимых симметрич. областей, связанных с классич. простыми группами Ли, и две особые области раз-

мерностей 16 и 27. К числу классических симметрич. областей относятся, в частности, комплексный шар и верхняя полуплоскость Зигеля (см. *Зигеля область*). Всякая симметрич. область изоморфна прямому произведению неприводимых симметрич. областей [1].

Всякая О. о. о. размерности $\leqslant 3$ является симметрической [3]. Начиная с размерности 4, существуют и несимметрические О. о. о. (см. [4]). Более того, при $n \geqslant 7$ имеется континуум n-мерных О. о. о., среди к-рых лишь конечное число симметрических. Каждая О. о. о. гомеоморфна клетке и аналитически изоморфна аффинно однородной области Зигеля, определенной однозначно с точностью до аффинного изоморфизма. Классификация О. о. о. производится алгебраич. средствами [5].

С О. о. о. связаны многомерные обобщения эйлеровых интегралов (интегралы Зигеля 1-го и 2-го рода), а также гипергеометрич. функции [6].

Лит.: [1] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [2] Фукс Б. А., *Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных*, М., 1963; [3] Cartan E., «Abh. Math. Sem. Hamb. Univ.», 1935, Bd 11, S. 116—62; [4] Пятецкий-Шапиро И. И., Геометрия классических областей и теория автоморфных функций, М., 1961; [5] Винберг Э. Б., Гиндикин С. Г., Пятецкий-Шапиро И. И., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1963, т. 12, с. 359—88; [6] Гиндикин С. Г., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 4, с. 3—92.

Э. Б. Винберг.

ОДНОРОДНАЯ ФУНКЦИЯ степени λ — числовая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что для всех точек $(x_1, \ldots, x_n)$ из области ее определения и всех действительных $t>0$ выполняется равенство

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^{\lambda} f(x_1, \ldots, x_n),$$

где λ — действительное число; при этом предполагается, что вместе с каждой точкой $(x_1, \ldots, x_n)$ из области определения функции f при любом $t>0$ к этой области определения принадлежит и точка $(tx_1, \ldots, tx_n)$. Если функция

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\nolimits_{0 \leqslant k_1 + \ldots + k_n \leqslant m} a_{k_1 \ldots k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n},$$

т. е. является многочленом степени не выше чем m, то она будет О. ф. степени m в том и только в том случае, когда все коэффициенты $a_{k_1 \ldots k_n}$ при $k_1 + \ldots + k_n < m$ равны нулю. Понятие О. ф. может быть расширено на многочлены от n переменных над любым коммутативным кольцом с единицей.

Пусть область определения E функции f лежит в первом квадранте: $x_1>0, \ldots, x_n>0$ и вместе с любой точкой $(x_1, \ldots, x_n)$ содержит и весь луч $(tx_1, \ldots, tx_n)$, $t>0$. Для того чтобы функция f была однородной степени λ, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция φ от $n-1$ переменных, определенная на множестве точек вида $\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)$, где $(x_1, \ldots, x_n) \in E$, что для всех $(x_1, \ldots, x_n) \in E$ выполняется равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\lambda} \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Если область определения E функции f открытое множество и функция f непрерывно дифференцируема на E, то функция является О. ф. степени λ в том и только в том случае, когда она при всех $(x_1, \ldots, x_n)$ из ее области определения удовлетворяет равенству (формула Эйлера)

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = \lambda f(x_1, \ldots, x_n).$$

Л. Д. Кудрявцев.

ОДНОРОДНОЕ КОМПЛЕКСНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — комплексное многообразие M, группа автоморфизмов к-рого транзитивно действует на M. Все односвязные одномерные комплексные многообразия — сфера Ри-

мана, комплексная плоскость и верхняя комплексная полуплоскость — однородны. Многообразие G/H смежных классов комплексной группы Ли G по замкнутой комплексной подгруппе H является О. к. м.

Среди компактных О. к. м. выделяются комплексные флаговые многообразия, к числу к-рых относятся все компактные эрмитовы *симметрические пространства* [8]. Комплексные флаговые многообразия могут быть охарактеризованы как односвязные компактные однородные *кэлеровы многообразия* [4], а также как многообразия G/U, где G — полупростая комплексная группа Ли, U — ее параболич. подгруппа. Всякое компактное О. к. м. допускает однородное коломорфное расслоение над флаговым многообразием со слоем, изоморфным многообразию смежных классов комплексной группы Ли по дискретной подгруппе (см. *Титса расслоение*, а также [6], [9]).

Другой важный класс О. к. м. составляют *однородные ограниченные области* (о. о. о.), к числу к-рых относятся, в частности, симметрич. области, двойственные компактным эрмитовым симметрич. пространствам.

Флаговые многообразия и о. о. о. представляют собой частные случаи однородных кэлеровых многообразий (т. е. кэлеровых многообразий, на к-рых транзитивно действует группа аналитич. автоморфизмов, сохраняющих кэлерову метрику). Существует гипотеза [2], что всякое однородное кэлерово многообразие допускает однородное голоморфное расслоение, базой к-рого служит о. о. о., а слоем — прямое произведение флагового многообразия и многообразия смежных классов комплексного векторного пространства по дискретной подгруппе. Эта гипотеза доказана для однородных кэлеровых многообразий, допускающих полупростую [1] или вполне разрешимую [2] транзитивную группу автоморфизмов, а также для компактных однородных кэлеровых многообразий, которые, таким образом, изоморфны прямым произведениям флаговых многообразий и комплексных торов [10].

В теории О. к. м. важную роль играет каноническая эрмитова форма h_μ. По любой гладкой мере μ на комплексном многообразии M, задаваемой внешней дифференциальной формой

$$i^n K\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n,$$

может быть построена эрмитова дифференциальная форма

$$h_\mu = d'd'' \ln K = \sum_{i,\,j} \frac{\partial^2 \ln K}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\, dz_i\, d\bar{z}_j$$

(вообще говоря, вырожденная), не зависящая от выбора системы координат и не меняющаяся при умножении меры μ на константу. Если мера μ определена стандартным образом по какой-либо кэлеровой метрике на M, то форма $(-h_\mu)$ совпадает с формой Риччи этой метрики [7]. Если потребовать, чтобы мера μ была инвариантна относительно какой-либо транзитивной группе автоморфизмов многообразия M, то она будет определена этой группой однозначно с точностью до умножения на константу, а форма h_μ — вполне однозначно. В случае, когда M — о. о. о., определенная таким образом эрмитова форма h_μ положительно определена и совпадает с метрикой Бергмана. Для флаговых многообразий форма h_μ отрицательно определена.

Каноничч. эрмитова форма О. к. м. может быть вычислена в терминах соответствующей алгебры Ли [3]. Это служит основой для алгебраизации теории о. о. о. и других О. к. м.

Одно из направлений в теории О. к. м. состоит в изучении голоморфных функций на них при помощи аппарата линейных представлений групп Ли. Напр.

этим способом доказано [5], что многообразие G/H смежных классов полупростой комплексной группы Ли G по связной замкнутой комплексной подгруппе H является многообразием Штейна тогда и только тогда, когда подгруппа H редуктивна.

Существуют О. к. м., не допускающие транзитивной группы Ли автоморфизмов [11].

Лит.: [1] Borel A., «Proc. Nath. Acad. Sci. USA», 1954, v. 40, p. 1147—51; [2] Винберг Э. Б., Гиндикин С. Г., «Матем. сб.», 1967, т. 74, № 3, с. 357—77; [3] Koszul J. L., «Canad. J. Math.», 1955, v. 7, № 4, p. 652—76; [4] Lichnerowicz A., в кн.: Géométrie différentielle, P., 1953, p. 171—84; [5] Онищик А. Л., «Докл. АН СССР», 1960, т. 130, с. 726—29; [6] Tits J., «Comm. math. helv.», 1962/1963, t. 37, p. 111—20; [7] Фукс Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963; [8] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [9] Wang H.-C., «Amer. J. Math.», 1954, v. 76, № 1, p. 1—32; [10] Borel A., Remmert R., «Math. Ann.», 1962, Bd 145, № 5, p. 429—39; [11] Kaup W., «Invent. math.», 1967, v. 3, № 1, p. 43—70.

Э. Б. Винберг.

ОДНОРОДНОЕ ПРОСТРАНСТВО — множество вместе с заданным на нем транзитивным действием некой группы. Точнее, M есть *однородное пространство группы* G, если задано отображение

$$(g,\ x) \longrightarrow gx$$

множества $G\times M$ в M такое, что:

1) $(gh)\,x = g\,(hx)$;

2) $ex = x$;

3) для любых $x,\ y \in M$ существует такой $g \in G$, что $gx = y$.

Элементы множества M наз. точками О. п., группа G — *группой движений*, или *основной (фундаментальной) группой*, О. п.

Любая точка x О. п. M определяет подгруппу

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

основной группы G. Она наз. *изотропии группой*, или стационарной подгруппой, или *стабилизатором точки* x. Стабилизаторы разных точек сопряжены в группе G с помощью внутренних автоморфизмов.

С произвольной подгруппой H группы G связано нек-рое О. п. группы G — множество $M = G/H$ левых классов смежности группы G по подгруппе H, на к-ром G действует по формуле

$$g\,(aH) = (ga)\,H;\ g,\ a \in G.$$

Это О. п. наз. *факторпространством группы* G *по подгруппе* H, а подгруппа H оказывается стабилизатором точки $eH = H$ этого пространства (e — единица группы G). Любое О. п. M группы G можно отождествить с факторпространством группы G по подгруппе $H = G_x$, являющейся стабилизатором фиксированной точки $x \in M$, с помощью биекции

$$M \ni y \leftrightarrow gH \in G/H,$$

где g — любой элемент из G, для к-рого $gx = y$.

Если группа G является топологич. группой, а H — ее подгруппой (соответственно G — группа Ли, а H — замкнутая подгруппа в G), то факторпространство $M = G/H$ канонич. образом снабжается структурой топологич. пространства (соответственно структурой аналитич. многообразия), относительно к-рой действие группы G на M является непрерывным (соответственно аналитическим). Если группа Ли G транзитивно и аналитически действует на аналитич. многообразии M, то для любой точки $x_0 \in M$ подгруппа $H = G_{x_0}$ замкнута и указанная выше биекция $gH \to gx_0$ аналитична; если при этом число связных компонент группы G не более чем счетно, то эта биекция является диффеоморфизмом.

Изучаются также случай, когда G — алгебраич. группа, а M — алгебраич. многообразие (см. *Однород-*

ное пространство алгебраической группы), и случай, когда M — комплексное многообразие, а G — вещественная (или комплексная) группа Ли (см. *Однородное комплексное многообразие*).

В дальнейшем всюду M — аналитич. многообразие, а G — группа Ли.

Геометрия однородных пространств. Согласно Эрлангенской программе Ф. Клейна (F. Klein), предмет геометрии О. п. есть изучение инвариантов группы движений О. п. Классич. направлением исследований здесь является классификация тех или иных подмножеств О. п., прежде всего подмногообразий и их объединений, семейств подмногообразий и т. п. с точностью до движений из группы G. Такая классификация может быть получена при помощи построения полной системы инвариантов подмножества данного типа (примерами таких систем инвариантов служат длины сторон треугольника, а также кривизна и кручение гладкой кривой в трехмерном евклидовом пространстве). Общий метод построения полной системы локальных инвариантов (*подвижного репера метод*) для гладкого подмногообразия в произвольном О. п. группы Ли разработан Э. Картаном (см. [6], [16]).

Другое направление исследований состоит в отыскании и изучении инвариантных геометрич. объектов на О. п. (см. *Инвариантный объект* на однородном пространстве). Действие основной группы Ли G в О. п. M индуцирует действие группы G в пространстве различных геометрич. объектов на M (функций, векторных и тензорных полей, связностей, дифференциальных операторов и т. п.). Геометрич. объекты, неподвижные относительно этого действия, наз. инвариантными объектами. Примерами таких объектов являются евклидова метрика в евклидовом пространстве, рассматриваемом как О. п. группы евклидовых движений, и конформная метрика, задающая угол между кривыми в конформном пространстве. С этим же направлением тесно связана задача описания и изучения О. п., обладающих тем или иным инвариантом. Напр., рассматриваются римановы и псевдоримановы, аффинной связности, симплектические О. п., однородные комплексные многообразия, то есть О. п., обладающие инвариантной метрикой (римановой или псевдоримановой), аффинной связностью, симплектич. структурой, комплексной структурой соответственно. См. *Риманово пространство однородное*, *Симплектическое пространство однородное*, *Однородное комплексное многообразие*.

Важным классом О. п. является класс редуктивных О. п., т. е. таких О. п. G/H, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G допускает разложение

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m},\ \mathfrak{h}\cap\mathfrak{m}=\{0\}, \qquad (*)$$

где $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы H, а $\mathfrak{m}$ — подпространство, инвариантное относительно присоединенного представления подгруппы H в $\mathfrak{g}$. Такое разложение определяет в О. п. G/H геодезически полную линейную связность с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения. Обратно, односвязное многообразие с полной линейной связностью, имеющей ковариантно постоянные тензоры кривизны и кручения, является редуктивным О. п. относительно группы автоморфизмов этой связности (см. [5]). Частным случаем редуктивного О. п. является симметрич. пространство, для к-рого разложение (*) удовлетворяет дополнительно условию $[\mathfrak{m},\ \mathfrak{m}]\subseteq\mathfrak{h}$. Геометрически это условие означает, что соответствующая связность имеет нулевое кручение. Примерами симметрич. пространств являются *глобально симметрические римановы пространства*, а также пространство произвольной

группы Ли, на к-ром группа движений порождается левыми и правыми сдвигами.

Однородные расслоения и теория представлений. Действие основной группы G продолжается не только на расслоения геометрич. объектов, но и на более широкий класс т. н. однородных расслоений. Однородное расслоение π над О. п. G/H задается левым действием подгруппы H на произвольном многообразии F (типовом слое) и определяется как естественная проекция

$$\pi: G\times_H F \longrightarrow G/H,$$

где $G\times_H F$ — расслоенное произведение, получаемое факторизацией прямого произведения $G\times F$ по отношению эквивалентности

$$(g,\ f) \sim (gh^{-1},\ hf),\ g\in G,\ h\in H,\ f\in F.$$

Если P — векторное пространство, на к-ром группа H действует линейно, то соответствующее однородное расслоение π является векторным, а в пространстве $\Gamma(\pi)$ его сечений возникает линейное представление группы G, индуцированное представлением подгруппы H в F. Изучение *индуцированных представлений* (свойства к-рых оказываются тесно связанными с геометрией соответствующего О. п.) и их обобщений играет важную роль в теории представлений групп Ли (см. [7]).

Анализ на однородных пространствах. К числу наиболее разработанных разделов относятся: 1) изучение различных функциональных пространств на О. п. (пространств функций, пространств сечений однородных векторных расслоений, пространств когомологий со значением в соответствующих пучках), 2) изучение инвариантных дифференциальных операторов, действующих на этих пространствах, 3) изучение различных динамич. систем, связанных с О. п.

К первому разделу относится теория сферич. функций (и, более общо, сферич. сечений), изучающая конечномерные инвариантные относительно основной группы пространства функций на О. п. (см. *Представляющая функция*). Многие специальные функции математич. физики интерпретируются как сферич. функции на том или ином О. п., и изучение представлений основной группы в пространствах таких функций позволяет единым образом получить основные результаты теории специальных функций (интегральные представления, рекуррентные формулы, теоремы сложения и т. п., см. [2]). Естественным обобщением теории рядов и интегралов Фурье является *гармонический анализ абстрактный* на О. п., одна из основных задач к-рого состоит в описании разложения пространства квадратично интегрируемых функций на О. п. в сумму подпространств, неприводимых относительно действия основной группы. Большинство полученных здесь результатов относится к случаю, когда О. п. есть пространство полупростой группы Ли (см. [4]).

Теория автоморфных функций приводит к более общей задаче о разложении на неприводимые компоненты пространства квадратично интегрируемых сечений однородного векторного расслоения над О. п. G/H, инвариантных относительно нек-рой дискретной подгруппы $\Gamma\subset G$.

Кроме пространств функций, изучаются также и различные пространства мер на О. п., напр. в связи с приложениями в теории вероятностей (см. [3], [9]).

Ко второму разделу относятся вопросы описания *инвариантных дифференциальных операторов* на О. п., изучение их свойств, нахождение спектра и фундаментального решения, исследование решений соответствующих дифференциальных уравнений с частными производными (см. [8], [15]).

К третьему разделу относится изучение различных *динамических систем*, связанных с О. п., напр. потока, порожденного однопараметрич. подгруппой основной группы, потока, порожденного канонич. связностью группы Ли, *геодезического потока* однородного риманова пространства и т. п. Исследуются условия эргодичности потоков, дается описание их первых интегралов (см. [1]).

К анализу на О. п. примыкает также *интегральная геометрия*, представляющая собой теорию инвариантных мер на О. п. и на связанных с ними многообразиях, точками к-рых являются подмногообразия того или иного типа.

Топология однородных пространств. Методы алгебраич. топологии позволяют в широком классе случаев свести задачу о вычислении основных топологич. инвариантов О. п. (кольцо когомологий, характеристич. классы, K-функтор, гомотопич. группы и т. д.) к нек-рым алгебраич. задачам, связанным с алгебраич. строением основной группы и группы изотропии О. п. Для ряда классов О. п. получены явные результаты в этом направлении. Напр., теорема А. Картана (H. Cartan) дает алгоритм для вычисления алгебры вещественных когомологий $H^*(G/H;\ \mathbb{R})$, где G и H — связные компактные группы Ли, в терминах инвариантов групп Вейля для G и H (см. [10]). В частности, если G/H имеет ненулевую эйлерову характеристику (это равносильно совпадению рангов групп G и H), то многочлен Пуанкаре многообразия G/H имеет вид

$$P(G/H,\ t) = \prod_{i=1}^{r} \frac{1-t^{2k_i}}{1-t^{2l_i}},$$

где $k_1, \ldots, k_r$ и $l_1, \ldots, l_r$ — степени базисных инвариантных многочленов групп Вейля для G и H соответственно (формула Хирша).

Наиболее детально изучено топологич. строение О. п. компактных групп Ли, симметрич. пространств и солвмногообразий (однородных пространств разрешимых группы Ли). Теорема Мостова — Карпелевича, утверждающая, что любое О. п. группы Ли, имеющее конечную фундаментальную группу, диффеоморфно векторному расслоению над О. п. компактной группы Ли, в значительной мере сводит изучение топологии О. п. к случаю, когда основная группа компактна.

Классификация однородных пространств. Основные задачи этого направления состоят в определении тех многообразий, к-рые являются О. п. связных групп Ли, и в перечислении всех транзитивных действий связных групп Ли на этих многообразиях. Напр., единственными О. п. размерности 2 являются плоскость, цилиндр, сфера, тор, лист Мёбиуса, проективная плоскость и бутылка Клейна. К настоящему времени (1982) проведена также классификация всех трехмерных О. п. и (с точностью до конечнолистных накрытий) всех компактных О. п. размерностей $\leqslant 6$ (см. [11]).

Для ряда важных классов О. п. M высших размерностей известна классификация всех транзитивных действий групп Ли на M (см. [12]). Напр., классификация всех транзитивных действий компактных групп Ли на сферах выглядит следующим образом. Любое непрерывное транзитивное и эффективное действие связной компактной группы Ли на S^n переводится нек-рым гомеоморфизмом сферы S^n в стандартное линейное действие группы $\mathrm{SO}(n+1)$ или одной из следующих ее подгрупп:

$$G = \mathrm{SU}(k) \text{ или } U(k), \text{ если } n = 2k-1;$$
$$G = \mathrm{Sp}(k),\ \mathrm{Sp}(k)\times U(1) \text{ или } \mathrm{Sp}(k)\times \mathrm{Sp}(1),$$
$$\text{если } n = 4k-1;$$
$$G = \mathrm{Spin}(7) \text{ или } \mathrm{Spin}(9), \text{ если } n = 7, 15;$$
$$G = G_2, \text{ если } n = 6$$

(теорема Монтгомери — Самельсона — Бореля, см. [10]). Что касается транзитивных действий некомпактных групп Ли на сфере S^n, то для четного n единственными такими действиями по существу являются проективное действие группы $\mathrm{SL}(n+1)$ и конформное действие группы $\mathrm{SO}(1, n+1)$. Для нечетного n результат выглядит сложнее: здесь могут существовать транзитивные и эффективные действия групп Ли с радикалом сколь угодно большой размерности.

Лит.: [1] Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф., Потоки на однородных пространствах, пер. с англ., М., 1966; [2] Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965; [3] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [4] Желобенко Д. П., Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли, М., 1974; [5] Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства, пер. с франц., М., 1949; [6] его же, Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные мстодом подвижного репера, пер. с франц., М., 1963; [7] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [8] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [9] Хеннан Э., Представления групп и прикладная теория вероятностей, пер. с англ., М., 1970; [10] Борель А., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения, М., 1958; [11] Горбацевич В. В., в сб.: Геометрические методы в задачах алгебры и анализа, Ярославль, 1980, с. 37—60; [12] Онищик А. Л., «Матем. сб.», 1963, т. 60, № 4, с. 447—85; 1968, т. 75, № 2, с. 255—63; [13] Итоги науки. Алгебра. Топология, 1963, М., 1964; [14] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 11, М., 1974; [15] Helgason S., Analisis on Lie groups and homogeneous spaces, Providence, 1972; [16] Jensen G., Higher order contact of submanifolds of homogeneous spaces, B.-[u. a.], 1977; [17] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 2, М., 1981; [18] Wolf J. A., Spaces of constant curvature, N. Y., 1967. *Д. В. Алексеевский.*

ОДНОРОДНОЕ ПРОСТРАНСТВО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГРУППЫ — алгебраическое многообразие M вместе с заданным на нем регулярным и транзитивным действием алгебраич. группы G. Если $x \in M$, то *изотропии группа* G_x замкнута в G. Обратно, если H — замкнутая подгруппа нек-рой алгебраич. группы G, то на множестве левых смежных классов G/H существует структура алгебраич. многообразия, превращающая его в О. п. а. г. G, причем естественное отображение π: $G \to G/H$ регулярно, сепарабельно и обладает следующим универсальным свойством: для любого морфизма φ: $G \to X$, постоянного на смежных классах, существует такой морфизм ψ: $G/H \to X$, что $\psi\pi = \varphi$. Если M — любое О. п. а. г. G и $H = G_x$ для какого-либо $x \in M$, то естественное биективное отображение ψ: $G/H \to M$ регулярно, а если основное поле K имеет характеристику 0, то ψ бирегулярно (см. [1], [3]).

Пусть связная группа G, однородное пространство M и действие группы G на M определены над нек-рым подполем $k \subset K$. Тогда группа k-рациональных точек $G(k)$ переводит $M(k)$ в себя и $G(k)_x = G_x(k)$ для $x \in M(k)$. Если k конечно, то $M(k) \neq \phi$, а если при этом подгруппа изотропии G_x связна, то $G(k)$ транзитивно действует на $M(k)$. В общем случае изучение k-рациональных точек в M сводится к задачам теории *Галуа когомологий* (см. [2]).

О. п. а. г. G всегда является гладким квазипроективным многообразием (см. [5]). Если G — аффинная алгебраич. группа, то многообразие G/H проективно тогда и только тогда, когда H — *параболическая подгруппа* в G (см. [3]). Если G редуктивна, то многообразие G/H аффинно тогда и только тогда, когда подгруппа H редуктивна (см. *Мацусимы критерий*). Известно также описание замкнутых подгрупп H линейной алгебраич. группы G над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, для к-рых G/H квазиаффинно (см. [4], [6]).

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [3] Хамфри Дж., Линейные алгебраи-

ческие группы, пер. с англ., М., 1980; [4] Суханов А. А., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 2, с. 182—83; [5] Chow W., в кн.: Algebraic geometry and topology. Symp. in Honour of S. Lefschetz, Princeton, 1957, p. 122—28; [6] Hochschild G. P., Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, N. Y.— Hdld.— B., 1981. *А. Л. Онищик.*

ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ — координаты, обладающие тем свойством, что определяемый ими объект не меняется при умножении всех координат на одно и то же число. Таковы, напр., *проективные координаты*, *плюккеровы координаты*, *пентасферические координаты*. *Д. Д. Соколов.*

ОДНОРОДНЫЙ ВЫПУКЛЫЙ КОНУС — открытый строго выпуклый конус V в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$, однородный относительно группы линейных преобразований $\alpha \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ таких, что $\alpha V = V$ (автоморфизмов конуса V). О. в. к. V_1 и V_2 наз. изоморфными, если существует изоморфизм объемлющих векторных пространств, переводящий V_1 в V_2.

Примеры. 1) Шаровой конус

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 > x_1^2 + \ldots + x_n^2\}.$$

Группа автоморфизмов конуса K_n есть прямое произведение подгруппы индекса 2 группы Лоренца $O_{n,1}(\mathbb{R})$ (изоморфной группе движений n-мерного пространства Лобачевского) и группы $\mathbb{R}^+$ гомотетий с положительными коэффициентами.

2) Конус $P_n(\mathbb{R})$ положительно определенных симметрических действительных матриц порядка n. Группа автоморфизмов этого конуса состоит из преобразований вида

$$x \longrightarrow gxg^t, \quad g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

3) Конус $P_n(\mathbb{C})$ положительно определенных эрмитовых комплексных матриц порядка n.

4) Конус $P_n(\mathbb{H})$ положительно определенных эрмитовых кватернионных матриц порядка n.

Выпуклый конус V', сопряженный О. в. к. V (т. е. конус в сопряженном пространстве, состоящий из всех линейных форм, положительных на V), также однороден. О. в. к. V наз. самосопряженным, если в объемлющем векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ существует такая евклидова метрика, что $V = V'$ при отождествлении пространства $\mathbb{R}^n$ со своим сопряженным с помощью этой метрики. Все приведенные выше О. в. к. являются самосопряженными.

Классификация самосопряженных О. в. к. основана на их связи с компактными *йордановыми алгебрами* (см. [1], [2]). Действительная йорданова алгебра A наз. компактной, если $\mathrm{Tr}\, T(a)^2 > 0$ для любого $a \in A$, $a \neq 0$, где $T(a)$ — оператор умножения на a в алгебре A. Комплексификация устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных компактных йордановых алгебр и классами изоморфных полупростых комплексных йордановых алгебр. Множество квадратов обратимых элементов компактной йордановой алгебры является самосопряженным О. в. к., и все самосопряженные О. в. к. получаются таким способом. Отсюда выводится, что всякий самосопряженный О. в. к. изоморфен прямому произведению конусов описанных выше четырех типов и 27-мерных конусов, связанных с особой простой йордановой алгеброй.

Произвольные О. в. к. могут быть представлены в виде конуса положительно определенных эрмитовых матриц в нек-рых обобщенных матричных алгебрах [3]. Простейшим примером несамосопряженного О. в. к. является 5-мерный конус положительно определенных симметрических действительных матриц $x = \|x_{ij}\|$ 3-го порядка, удовлетворяющих условию $x_{23} = x_{32} = 0$. Начиная с $n = 11$ в $\mathbb{R}^n$ имеется континуум неизоморфных О. в. к.

Во всяком О. в. к. нек-рым канонич. образом может быть определена полная риманова метрика, инвариантная относительно всех его автоморфизмов. Самосопряженные О. в. к. характеризуются тем, что они являются *симметрическими пространствами* относительно этой метрики. Стационарная подгруппа любой точки О. в. к. является максимальной компактной подгруппой в группе его автоморфизмов. Стационарная подгруппа единицы компактной йордановой алгебры A в группе автоморфизмов О. в. к., ассоциированного с A, совпадает с группой автоморфизмов алгебры A. Всякий О. в. к. допускает просто транзитивную группу автоморфизмов, приводящуюся в нек-ром базисе к треугольному виду.

О. в. к. представляют особый интерес для теории *однородных ограниченных областей* в связи с тем, что указанные области реализуются в виде *Зигеля областей*, а для однородности области Зигеля 1-го или 2-го рода необходимо, чтобы был однороден ассоциированный с ней выпуклый конус. О. в. к. и связанные с ними области Зигеля являются естественными носителями нек-рых аналитич. конструкций, в частности обобщения эйлеровых интегралов и гипергеометрич. функций [8]. С каждым О. в. к. связывается многопараметрич. группа интегралов Римана — Лиувилля, включающая нек-рые гиперболические дифференциальные операторы (напр., в случае шарового конуса таким образом получается волновой оператор). Для этих операторов может иметь место усиленный принцип Гюйгенса [9].

Исследование дискретных групп автоморфизмов самосопряженных О. в. к. важно для компактификации и разрешения особенностей локально симметрич. пространств [4]. Многие результаты классич. теории приведения, полученные для группы $SL_n(\mathbb{Z})$, действующей в конусе $P_n(\mathbb{R})$, могут быть обобщены на произвольные самосопряженные О. в. к. (см. [5], [6]).

Лит.: [1] Koecher M., «Math. Ann.», 1958, Bd 135, № 3, S. 192—202; [2] Винберг Э. Б., «Докл. АН СССР», 1960, т. 133, № 1, с. 9—12; [3] его же, «Тр. Моск. матем. об-ва», 1963, т. 12, с. 303—58; 1965, т. 13, с. 56—83; [4] Ash A. [a. o.], Smoth compactifications of locally symmetric varieties, Brookline, 1975; [5] Helwig K.-H., «Math. Z.», 1966, Bd 91, S. 152—78, 355—62; [6] Ash A., «Canad. J. Math.», 1977, v. 29, № 5, p. 1040—54; [7] Rothaus O. S., «Ann. Math.», 1966, v. 83, № 2, p. 358—76; [8] Гиндикин С. Г., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 4, с. 3—92; [9] Вайнберг Б. Р., Гиндикин С. Г., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1967, т. 16, с. 151—80.

Э. Б. Винберг.

ОДНОРОДНЫЙ ОПЕРАТОР — отображение A векторного пространства X в векторное пространство Y такое, что существует симметрическое полилинейное отображение

$$B: \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n \text{ раз}} \longrightarrow Y,$$

причем $B(x, \ldots, x) = A(x)$. Число n наз. с т е п е н ь ю О. о. A. Однородным оператором степени 1 (обычно говорят, просто однородным) является линейный оператор $L: X \to Y$. Вместо $(x, \ldots, x)$ пишут для сокращения x^n, понимая под этим элемент пространства $X \times \ldots \times X$, у к-рого все координаты равны, но не степень элемента, к-рая в произвольном векторном пространстве не определена. Если A есть О. о. степени n, то

$$A(tx) = t^n A(x).$$

Более общо:

$$A(t_1 x_1 + \ldots + t_k x_k) =$$

$$= \sum_{n_1 + \ldots + n_k = n,\ n_i \geqslant 0} \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}\, t_1^{n_1} \ldots$$

$$\ldots t_k^{n_k} B\left(x_1^{n_1}, \ldots, x_k^{n_k}\right).$$

В случае, когда X и Y — векторные нормированные пространства, непрерывность О. о. A эквивалентна его ограниченности и из непрерывности A в нуле следует непрерывность его на всем X.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Картан А., Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы, пер. с франц., М., 1971. *В. И. Соболев.*

ОДНОРЯДНОЕ КОЛЬЦО — кольцо, все неразложимые односторонние идеалы к-рого обладают единственным композиционным рядом и к-рое разлагается в прямую сумму примарных колец. Отказ от последнего требования приводит к определению обобщенно однорядного кольца, наз. также рядным кольцом. Всякое обобщенно О. к. является полуцепным как слева, так и справа (см. *Полуцепной модуль*, *Полуцепное кольцо*). Всякий модуль над обобщенно О. к. разлагается в прямую сумму циклич. подмодулей. Кольцо является обобщенно однорядным тогда и только тогда, когда все левые модули над ним полуцепные. Примером О. к. может служить кольцо верхних треугольных матриц над телом. *Л. А. Скорняков.*

ОДНОСВЯЗНАЯ ГРУППА — топологическая группа (группа Ли, в частности), топологич. пространство к-рой односвязно. Значение О. г. в теории групп Ли объясняется следующими теоремами:

1) всякая связная группа Ли G изоморфна факторгруппе нек-рой О. г. (называемой универсальной накрывающей группы G) по дискретной центральной подгруппе, изоморфной $\pi_1(G)$;

2) две О. г. Ли изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их алгебры Ли; более того, всякий гомоморфизм алгебры Ли О. г. G_1 в алгебру Ли произвольной группы Ли G_2 является дифференциалом (однозначно определенного) гомоморфизма G_1 в G_2.

Центр Z односвязной полупростой компактной или комплексной группы Ли G конечен. Для различных типов простых групп Ли он приведен в таблице:

G	A_n	B_n	C_n	D_{2n}	D_{2n+1}	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
Z	$\mathbb{Z}_{n+1}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$

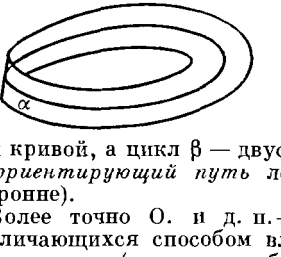
В теории *алгебраических групп* О. г. наз. связную алгебраич. группу G, не допускающую нетривиальных *изогений* φ: $\tilde{G}\to G$, где $\tilde{G}$ — также связная алгебраич. группа. Для полупростых алгебраич. групп над полем комплексных чисел это определение равносильно данному выше. *Э. Б. Винберг.*

ОДНОСВЯЗНАЯ ОБЛАСТЬ линейно связного пространства — область D, в к-рой все замкнутые пути гомотопны нулю или, иначе говоря, *фундаментальная группа* к-рой тривиальна. Это означает, что любой замкнутый путь в D можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь все время в О. о. D. Граница О. о. D, вообще говоря, может состоять из любого числа k, $0\leqslant k\leqslant\infty$, связных компонент, даже в случае О. о. евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, или $\mathbb{C}^m$, $m\geqslant 1$. Граница конечной плоской О. о. состоит из одной связной компоненты; все плоские О. о. гомеоморфны между собой.

См. также *Граничные элементы*. *Е. Д. Соломенцев.*

ОДНОСТОРОННИЕ И ДВУСТОРОННИЕ ПОВЕРХНОСТИ — два типа поверхностей, различающихся по способу их расположения в объемлющем пространстве (одностороннее расположение и двустороннее расположение). Напр., цилиндр представляет собой двустороннюю поверхность (д. п.), а *Мёбиуса лист* — одностороннюю поверхность (о. п.). Характерное отличие этих поверхностей — граница цилиндра состоит из двух кривых, а граница листа Мёбиуса — из одной кривой. Среди

замкнутых поверхностей двусторонней является *сфера* и *тор*, а односторонней — *Клейна поверхность*. Примерами двустороннего и одностороннего расположения кривой могут служить вложения окружности в лист Мёбиуса. Так, цикл α (см. рис.) является односторон-



ней кривой, а цикл β — двусторонней (и вообще, любой *дезориентирующий путь* лежит в поверхности односторонне).

Более точно О. и д. п.— два типа многообразий, различающихся способом вложения их в объемлющее пространство (на единицу большей размерности). Двусторонность и односторонность связаны с ориентируемостью и неориентируемостью (см. *Ориентация*), но в отличие от последних не являются внутренними свойствами поверхности и зависят от объемлющего пространства. Так, напр., существуют ориентируемые д. п.: $S^2 \subset S^3$, $T^2 \subset \mathbb{R}^3$; неориентируемые д. п.: $\mathbb{R}P^2 \times 0 \subset \mathbb{R}P^2 \times S^1$; ориентируемые о. п.: $T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}P^2 \times S^1$; неориентируемые о. п.: $\mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3$ (здесь S^2 — сфера, T^2 — тор, $\mathbb{R}P^2$ — проективная плоскость, $\mathbb{R}P^3$ — проективное пространство, S^1 — дезориентирующий путь на $\mathbb{R}P^2$).

В ориентируемом пространстве (напр., в $\mathbb{R}^n$) гиперповерхность является ориентируемой в том и только в том случае, когда она является д. п.

Пусть вдоль замкнутой кривой на гладкой поверхности, погруженной в нек-рое пространство, обносится нормальный вектор так, чтобы он оставался нормальным. Если при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным независимо от выбора кривой, то поверхность наз. д в у с т о р о н н е й; в противном случае (когда нормаль окажется противонаправленной исходной) — о д н о с т о р о н н е й. Более общо, двусторонность расположения поверхности П равносильна тривиальности ее нормального расслоения (в таком расслоении существует ненулевое сечение). Наоборот, нормальное расслоение о. п. нетривиально: существует кривая на П, над к-рой расслоение является листом Мёбиуса.

Локально всякая (гипер)поверхность M^{n-1} в пространстве N^n разбивает его на две части, т. е. для точки $x \in M^{n-1} \subset N^n$ имеется такая окрестность $U \subset N$, что U состоит из двух компонент U' и U'' и $U \cap M^{n-1}$ принадлежит их общей границе. С другой стороны, достаточно тесная окрестность M^{n-1} в N^n (если M замкнуто в N) имеет либо одну, либо две компоненты, границы к-рых содержат M. В первом случае (гипер) поверхность M^{n-1} также наз. о д н о с т о р о н н е й, а во втором — д в у с т о р о н н е й. Таким образом, хотя поверхность локально и имеет две стороны, глобально она может быть о. п. и в противоположность д. п. не разбивать свою окрестность в пространстве.

Для д. п. M^n, лежащей в N^{n+1}, *пересечения индекс* в N^{n+1} для любой замкнутой кривой α на M^n удовлетворяет равенству $(\alpha, M^n) = 0 \bmod 2$. Если же M^n— о. п., то $(\alpha, M^n) \neq 0$ для нек-рой кривой $\alpha \in M^n$. Этот факт также можно принять за определение одно- и двусторонности (наряду с обносом нормального вектора и разбиением окрестности).

Лит.: [1] Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, пер. с нем., 3 изд., М., 1981; [2] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.—Л., 1938; [3] Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В.Л., Гомотопическая топология, 2 изд., [М., 1969]. *М. И. Войцеховский.*

ОДНОСТОРОННИЙ ПРЕДЕЛ — предел функции в нек-рой точке справа или слева. Пусть f — отображе-

ние упорядоченного множества X (напр., множества, лежащего на числовой прямой), рассматриваемого как топологич. пространство с топологией, порожденной отношением порядка, в топологич. пространство Y и $x_0 \in X$. Предел отображения f по любому интервалу $(a, x_0) = \{x : x \in X \ a < x < x_0\}$ наз. предел слева отображения f и обозначают

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

(он не зависит от выбора $a < x_0$), а предел по интервалу $(x_0, b) = \{x : x \in X \ x_0 < x < b\}$ наз. предел справа и обозначают

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

(он не зависит от выбора $b > x_0$). Если точка x_0 является предельной как слева, так и справа для множества определения функции f, то обычный предел

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

по проколотой окрестности точки x_0 (в этом случае его наз. также двусторонним, в отличие от односторонних пределов) существует тогда и только тогда, когда в точке x_0 существуют пределы слева и справа и они равны между собой. *Л. Д. Кудрявцев.*

ОДНОСТОРОННЯЯ ПРОИЗВОДНАЯ — обобщение понятия производной, в к-рой обычный предел заменяется односторонним пределом. Если для функции $f(x)$ действительного переменного существует

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \left(\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right),$$

то этот предел наз. правой (левой) производной функции $f(x)$ в точке x_0. В случае равенства этих О. п. функция имеет в точке x_0 обычную производную. См. также *Дифференциальное исчисление.* *Г. П. Толстов.*

ОДНОЧЛЕН — простейший вид алгебраич. выражений — *многочлен*, состоящий из одного члена.

Как и многочлены (см. *Многочленов кольцо*), О. могут рассматриваться не только над полем, но и над кольцом. О. над коммутативным кольцом A от множества переменных $\{x_i\}$, где i пробегает нек-рое множество индексов I, наз. пара (a, ν), где $a \in A$, а ν — отображение из множества I в множество неотрицательных целых чисел, причем $\nu(i) = 0$ для всех i кроме конечного числа. О. принято записывать в виде

$$a x_{i_1}^{\nu(i_1)} \dots x_{i_n}^{\nu(i_n)},$$

где $i_1, \dots, i_n$ — все те индексы, для к-рых $\nu(i) > 0$. Число $\nu(i)$ наз. степенью одночлена относительно переменной x_i, а сумма $\sum_{i \in I} \nu(i)$ наз. полной степенью одночлена. Элементы кольца можно рассматривать как О. степени 0. Одночлен с $a = 1$ наз. примитивным. Любой О. с $a = 0$ отождествляется с элементом $0 \in A$.

Множество О. над A от переменных $\{x_i\}$, $i \in I$, образует коммутативную полугруппу с единицей. При этом произведение О. (a, ν) и $(b, \varkappa)$ определяется как $(ab, \nu + \varkappa)$.

Пусть B — нек-рая коммутативная A-алгебра. Тогда О. $a x_{i_1}^{\nu(i_1)} \dots x_{i_n}^{\nu(i_n)}$ определяет отображение из B^n в B по формуле $(b_1, \dots, b_n) \longrightarrow a b_1^{\nu(i_1)} \dots b_n^{\nu(i_n)}$.

Иногда рассматривают О. от некоммутирующих переменных. Такие О. определяются как выражения вида

$$a x_{i_1}^{\nu(i_1)} \dots x_{i_n}^{\nu(i_n)},$$

где последовательность индексов $i_1, \dots, i_n$ фиксирована, причем не обязательно все эти индексы различны.

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

Л. В. Кузьмин.

ОКА ТЕОРЕМЫ — теоремы о классич. проблемах теории функций многих комплексных переменных, впервые доказанные К. Ока в 1930—50 (см. [1]).

1) О. т. о *Кузена проблемах*: первая проблема Кузена разрешима в любой области голоморфности в $\mathbb{C}^n$; вторая проблема Кузена разрешима в любой области голоморфности $D \subset \mathbb{C}^n$, гомеоморфной $D_1 \times \ldots \times D_n$, где все области $D_\nu \subset \mathbb{C}$, кроме, возможно, одной, односвязны.

2) О. т. о *Леви проблеме*: всякая псевдовыпуклая риманова область является областью голоморфности.

Первоначально эта теорема была доказана К. Ока для размерности $n=2$; в случае произвольной размерности она доказана К. Ока и др. математиками.

3) О к а — В е й л я т е о р е м а: пусть D — область в $\mathbb{C}^n$ и компакт $K \subset D$ совпадает со своей оболочкой относительно алгебры $\mathcal{O}(D)$ всех голоморфных в D функций; тогда для любой функции f, голоморфной в окрестности K, и любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $F \in \mathcal{O}(D)$ такая, что

$$\max_K |f - F| < \varepsilon.$$

Эта фундаментальная теорема теории голоморфных приближений широко применяется в комплексном и функциональном анализе.

4) О. т. о к о г е р е н т н о с т и: пусть $\mathcal{O}$ — пучок голоморфных функций на комплексном многообразии X; тогда для любого натурального числа p любой локально конечно порожденный подпучок пучка $\mathcal{O}^p = \mathcal{O} \times \ldots \times \mathcal{O}$ (p раз) является когерентным *аналитическим пучком*. Это одна из основных теорем т. н. теории Ока — Картана, к-рая существенно используется при доказательстве *Картана теорем* A и B.

Лит.: [1] О к а К., Sur les fonctions analitiques plusieurs variables, Tokyo, 1961; [2] Х е р м а н д е р Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968; [3] Г а н н и н г Р., Р о с с и Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969.

Е. М. Чирка.

ОКАЙМЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА X в б и к о м п а к т н о м р а с ш и р е н и и bX — конечное семейство $\{U_1, \ldots, U_k\}$ открытых в X множеств такое, что множество $K \setminus U_1 \cup \ldots \cup U_k$ бикомпактно и $bX = K \cup \tilde{U}_1 \cup \ldots \cup \tilde{U}_k$, где $\tilde{U}_k$ — наибольшее открытое в bX множество, высекающее на X множество U_i (X предполагается вполне регулярным). Понятие О. п. X в bX совпадает с понятием близостного продолжаемого окаймления пространства близости X (близость на X индуцирована расширением bX), формулируемом в близостных терминах: кроме бикомпактности K требуется, чтобы для любой окрестности $\mathcal{O}_K$ семейство $\{\mathcal{O}_K, U_1, \ldots, U_k\}$ было равномерным покрытием пространства X. Просто о к а й м л е н и е м пространства X наз. его окаймление в бикомпактном расширении Стоуна — Чеха. На языке окаймлений формулируется ряд теорем о размерности наростов бикомпактных расширений топологических и близостных пространств.

Лит.: [1] С м и р н о в Ю. М., «Матем. сб.», 1966, т. 71, № 4, с. 454—82.

В. В. Федорчук.

ОКАЙМЛЕНИЯ МЕТОД — метод решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax = b$ с невырожденной

матрицей, обращения матрицы и вычисления определителя, основанный на рекуррентном переходе от решения задачи с матрицей

$$A_{k-1}=\begin{Vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,\,k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,\,k-1} \end{Vmatrix}$$

к решению задачи с матрицей A_k, рассматриваемой как результат окаймления A_{k-1}.

Вычислительная схема О. м. для обращения матриц такова. Пусть A_{k-1} — невырожденная матрица. Для обращения матрицы A_k используется представление

$$A_k=\begin{Vmatrix} A_{k-1} & u_k \\ v_k & a_{kk} \end{Vmatrix}, \qquad (1)$$

где

$u_k=(a_{1,\,k}, a_{2,\,k}, \dots, a_{k-1,\,k})^T$, $v_k=(a_{k,\,1}, a_{k,\,2}, \dots, a_{k,\,k-1})$. Тогда

$$A_k^{-1}=\begin{Vmatrix} A_{k-1}^{-1}+\dfrac{A_{k-1}^{-1}u_kv_kA_{k-1}^{-1}}{\alpha_k} & -\dfrac{A_{k-1}^{-1}u_k}{\alpha_k} \\ -\dfrac{v_kA_{k-1}^{-1}}{\alpha_k} & \dfrac{1}{\alpha_k} \end{Vmatrix}, \qquad (2)$$

$$\alpha_k=a_{kk}-v_kA_{k-1}^{-1}u_k.$$

Последовательное обращение матриц $A_1, A_2, \dots, A_n$ по этой схеме дает матрицу A^{-1}.

Описанная схема О. м. пригодна лишь для матриц с отличными от нуля главными минорами. В общем случае следует принять схему О. м. с выбором главного элемента. В этой схеме в качестве окаймляющих строки и столбца берутся те, для к-рых $\alpha_k=a_{kk}-v_kA_{k-1}^{-1}u_k$ будет максимальным по модулю. Тогда вычисленная матрица будет отличаться от A^{-1} лишь перестановкой строк и столбцов [1].

По быстродействию О. м. не уступает самым быстродействующим из прямых методов *обращения матрицы*.

О. м. позволяет эффективно обращать треугольные матрицы. Если A_{k-1} — правая треугольная матрица, то в (1)

$$v_k=0 \text{ и } A_k^{-1}=\begin{Vmatrix} A_{k-1}^{-1} & -\dfrac{A_{k-1}^{-1}u_k}{a_{kk}} \\ 0 & \dfrac{1}{a_{kk}} \end{Vmatrix}.$$

Объем вычислений в этом случае уменьшается в 6 раз.

Особенно эффективен О. м. при обращении эрмитовых положительно определенных матриц. Для этих матриц не нужно применять схему выбора главного элемента. Кроме того, они могут быть заданы лишь половиной своих элементов. Вычислительная схема в этом случае упрощается:

$$A_k^{-1}=\begin{Vmatrix} A_{k-1}^{-1}+\dfrac{P_kP_k^*}{\alpha_k} & -\dfrac{P_k}{\alpha_k} \\ -\dfrac{P_k^*}{\alpha_k} & \dfrac{1}{\alpha_k} \end{Vmatrix},$$

$$P_k=A_{k-1}^{-1}u_k, \quad \alpha_k=a_{kk}-u_k^*P_k.$$

Вычислительная схема О. м. для решения системы состоит в следующем. Пусть $b^{(kp)}=(a_{1p}, a_{2p}, \ldots, a_{kp})^T$, $k=1, 2, \ldots, n$; $b^{(n, n+1)}=-b$. Если A_{k-1} — невырожденная матрица и $x^{(k-1, p)}$ — решение системы $A_{k-1}x^{(k-1, p)}+b^{(k-1, p)}=0$, то решение $x^{(kp)}$ системы $A_kx^{(kp)}+b^{(kp)}=0$ находится из представления

$$A_k=\begin{Vmatrix} A_{k-1} & b^{(k-1, k)} \\ v_k & a_{kk} \end{Vmatrix}, \qquad b^{(kp)}=\begin{Vmatrix} b^{(k-1, p)} \\ a_{kp} \end{Vmatrix} \tag{3}$$

и из (2) следующим образом:

$$x^{(k, p)}=\begin{Vmatrix} A_{k-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} b^{(k-1, p)} \\ a_{kp} \end{Vmatrix}+$$

$$+\frac{1}{\alpha_k}\begin{Vmatrix} x^{(k-1, k)}v_kx^{(k-1, p)} & -x^{(k-1, k)}b_k \\ -v_kx^{(k-1, p)}+b_k & \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} x^{(k-1, p)} \\ 0 \end{Vmatrix}-\frac{v_kx^{(k-1, p)}-b_k}{a_{kk}-v_kx^{(k-1, p)}}\begin{Vmatrix} x^{(k-1, k)} \\ 1 \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Таким образом, по решениям $x^{(k-1, p)}$ и $x^{(k-1, k)}$ систем с одной и той же матрицей A_{k-1} и разными правыми частями легко получить решение системы с окаймленной матрицей A_k. Решение исходной системы: $x^{(n, n+1)}$. Оно может быть получено рекуррентным применением соотношения (4). Это сводится к последовательному вычислению совокупности векторов $x^{(kp)}$, $k=1, 2, \ldots, n$, $p>k$, то есть

$$\begin{array}{ccccc} x^{(12)}, & x^{(13)}, & \ldots, & x^{(1n)}, & x^{(1, n+1)}, \\ & x^{(23)}, & \ldots, & x^{(2n)}, & x^{(2, n+1)}, \\ & & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ & & & x^{(n-1, n)}, & x^{(n-1, n+1)}, \\ & & & & x^{(n, n+1)}. \end{array}$$

По объему вычислительной работы приведенная схема О. м. равносильна *Гаусса методу*, одному из самых быстродействующих прямых методов решения систем.

О. м. позволяет решать системы повышенного порядка за счет эффективного использования памяти ЭВМ. Это обусловлено тем, что для вычисления векторов $x^{(k, p)}$, $p>k$, требуется запоминание только векторов $x^{(k-1, p)}$, $p>(k-1)$, и коэффициентов k-го уравнения системы, т. е. массива чисел длины $f(k)=k(n-k+1)+(n+1)$. Поэтому для решения системы n-го порядка достаточно иметь рабочее поле длины $(n+1)(n+5)/4\approx (n/2)^2$. При этом элементы матрицы и правой части можно вводить в память ЭВМ не сразу, а последовательно — по строкам.

О. м. целесообразно использовать при решении системы, для к-рой уже ранее решена усеченная система. Тогда соотношение (4) сразу дает искомое решение.

Описанная схема О. м. может быть использована для вычисления определителя. Из представления (1) следует, что

$$|A_k|=|a_{kk}-v_kA_{k-1}^{-1}u_k|\,|A_{k-1}|.$$

Рекуррентное применение этого соотношения дает $|A|$.

Так же, как и обращение матрицы, решение системы и вычисление определителя по О. м. возможно лишь для матриц с ненулевыми главными минорами. В общем случае здесь также необходимо использовать схему выбора главного элемента.

Лит.: [1] Воеводин В. В., Численные методы алгебры, М., 1966; [2] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.—Л., 1963.

Г. Д. Ким.

ОКАТЫВАНИЕ — см. *Симметризация.*

ОКЕАНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — математические задачи в области физики, химии, геологии и биологии океана. В физике океана это прежде всего задачи геофизич. гидродинамики (определяемой

как гидродинамика природных течений вращающихся бароклинных стратифицированных жидкостей). Вращение Земли, существенно влияющее на крупномасштабные течения (глобальных и синоптич. масштабов), и стратификация, т. е. изменение плотности среды по направлению силы тяжести (вертикали), создают специфич. анизотропию индивидуальных гидродинамич. полей в океане или их статистич. характеристик, к-рую необходимо учитывать, напр., при выборе базисных функций для описания этих полей по методу Галеркина, при объективном анализе (интерполяции, экстраполяции, сглаживании) эмпирич. данных об этих полях и выборе статистич. моделей для вертикально-неоднородных случайных полей турбулентности и внутренних волн.

Аналитич. описание собственных колебаний океана при помощи линеаризированных уравнений гидродинамики затрудняется из-за неправильной формы его границ — дна и берегов, что делает невозможным использование решений с разделяющимися переменными. Поэтому в теории приливов, в к-рой существенна возможность резонансных реакций океана на приливообразующие силы, имеются аналитич. расчеты лишь для модельных океанов правильной формы (напр., ограниченных отрезками меридианов и параллелей). В реальной же геометрии последовательные (возрастающие) собственные частоты должны определяться как экстремумы квадратичных интегральных функционалов, родственных энергии, на экстремалях, подбираемых по методу Галеркина; такой подход полностью еще не реализован. В теории приливов заметна не только линейная, но и нелинейная реакция океана на приливообразующие силы, к-рая может быть описана при представлении высоты прилива в виде функционального степенного ряда по приливообразующим силам; функциональные коэффициенты такого ряда описывают свойства океана как резонансной системы.

Для океана специфично наличие среди решений уравнений гидродинамики нескольких классов волн — акустических, поверхностных (капиллярных и гравитационных), внутренних гравитационных, инерционных (включая баротропные и бароклинные волны Росби — Блиновой, образующиеся вследствие изменения с широтой вертикальной проекции угловой скорости вращения Земли) и, наконец, гидромагнитных, возникающих при движениях электропроводной жидкости (соленой морской воды) в геомагнитном поле. Построение отдельных классов волновых решений (и динамич. уравнений для них) осуществляется при помощи асимптотич. методов нелинейной механики, родственных методу Ван дер Поля, в виде асимптотич. рядов по степеням малых параметров, стоящих при «лишних» производных по времени. Примером служит т. н. квазигеострофич. разложение, отфильтровывающее из числа решений уравнений гидродинамики быстрые волны и выделяющее класс волн Росби—Блиновой.

Волны в океане, как правило, нелинейны. Для длинных нелинейных волн, поверхностных и внутренних, удается вывести уравнение Кортевега—де Фриса и использовать его солитонные и периодические (кноидальные) решения. Для коротких волн сколько-нибудь общих методов нахождения солитонных и периодич. решений еще не построено, и существуют лишь отдельные примеры (капиллярные волны Слезкина — Краппера, гравитационные волны Герстнера и Стокса, баротропные и бароклинные солитоны Росби). Недостаточно развиты и статистич. теории нелинейных волновых полей, особенно актуальные для описания поверхностных и внутренних гравитационных волн (для внутренних волн — с генерацией ими турбулентных пятен и расплыванием последних в слои вертикальной микроструктуры) и волн Росби (с эволюцией квазидвумерной турбулентности в нелинейное волновое поле).

Одной из важнейших проблем гидродинамики океана является математич. моделирование его циркуляции (в наиболее общей постановке — в его взаимодействии с атмосферой через т. н. верхний перемешанный слой океана и пограничный слой атмосферы), причем вследствие большой ширины спектра масштабов пространственных неоднородностей (от миллиметров до 10^4 километров) моделируемая система здесь имеет огромное число степеней свободы (при миллиметровых элементарных объемах порядка 10^{28}), и неизбежно возникает необходимость их аггрегирования, напр. методом параметризации мелкомасштабных процессов.

При аппроксимации континуальных гидродинамич. уравнений разностными возникают вопросы о порядке аппроксимации, сходимости и устойчивости разностной схемы. В современных т. н. вихреразрешающих моделях циркуляции океана используются пространственные сетки с горизонтальными шагами порядка немногих десятков километров. Конкурирующими могут быть схемы, использующие спектральные (в том числе галеркинские) разложения пространственных гидродинамич. полей.

Основные задачи математич. обработки данных измерений в гидродинамике океана делятся на задачи зондирования (функции от глубины, их разложения на моды, спектры), буксировки (горизонтальные и пространственно-временные спектры с доплеровскими эффектами) и полигонных измерений (временные ряды на трехмерной сетке точек, их спектры и взаимные спектры, объективный анализ, синхронные пространственные картины, четырехмерный анализ волновых полей).

В акустике океана рассматриваются типичные задачи распространения волн в слоистых средах; для аналитич. описания вертикальной структуры волновых полей в ряде случаев используется приближение ВКБ (см. *ВКБ-метод*). В оптике океана специфич. процессом является многократное рассеяние света, для описания к-рого используются численные решения уравнения переноса излучения, получаемые методами Монте-Карло, и асимптотические аналитич. решения. В химии океана важной математич. задачей является расчет конвективной диффузии неконсервативных примесей со специфич. источниками и стоками.

В геологии океана в связи с развитием мобилистской геотектоники (т. н. тектоники литосферных плит) возникли задачи кинематич. расчетов движения жестких плит на поверхности сферы и их генетич. объяснения при помощи математич. моделирования процессов плотностной конвекции в земной мантии (возникающей вследствие перехода тяжелых веществ из мантии в ядро). Одной из важных частных задач геологии является биостратиграфия, т. е. распознавание возрастов слоев осадочных пород по содержащимся в них микропалеонтологич. ассамблеям при помощи программ с самообучением (пока что в большинстве работ эта задача решается приближенно без использования ЭВМ).

Весьма объемные вычислительные задачи оценки статистич. характеристик сигналов, фильтрации шумов и распознавания образов возникают при регистрации и обработке данных морского многоканального непрерывного глубинного сейсмопрофилирования и вибропросвечивания океанского дна, причем в ряде случаев и при постановке измерений (пространственные распределения излучателей и приемников сигналов), и при их регистрации перспективны голографич. методы, использующие преобразования Фурье.

В биологии океана в проблеме управления биологич. продуктивностью океана важное значение приобретает математич. моделирование структуры и функционирования экологич. систем и, в частности, динамики популяций. Примером служит задача об эволюции со временем t вертикальных распределений $q_i(z, t)$ компонент

q_i экологич. системы (включающих концентрации ряда видов фито- и зоопланктона, кислорода, углекислого газа, фосфорных и азотных солей, температуру и соленость воды, освещенность фотосинтетически-активной радиацией), описываемой уравнениями вида

$$q_i = A_{i\alpha} q_\alpha + B_{i\alpha\beta} q_\alpha q_\beta + \frac{\partial}{\partial z} K(z) \frac{\partial q_i}{\partial z},$$

где $A_{i\alpha}$, $B_{i\alpha\beta}$ — биологич. и биофизич. параметры; здесь представляют интерес как численные решения задачи Коши с конкретными начальными данными, так и выводы качественной теории дифференциальных уравнений о поведении решений в целом и об их зависимости от имеющихся в уравнениях параметров.

Лит.: [1] Биология океана, т. 1—2, М., 1977; [2] Физика океана, т. 1, М., 1978; [3] Геофизика океана, т. 1—2, М., 1979; [4] Химия океана, т. 1—2, М., 1979; [5] Геология океана, т. 1, М., 1979.

А. С. Монин

ОКОЛЬЦОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X, снабженное пучком колец $\mathcal{O}_X$. Пучок $\mathcal{O}_X$ наз. структурным пучком О. п. $(X, \mathcal{O}_X)$. Обычно предполагается, что $\mathcal{O}_X$ есть пучок ассоциативных и коммутативных колец с единицей. Морфизмом О. п. $(X, \mathcal{O}_X)$ в О. п. $(Y, \mathcal{O}_Y)$ наз. пара $(f, f^\#)$, где $f : X \to Y$ — непрерывное отображение и $f^\#$: $f^*\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ — гомоморфизм пучков колец над Y, переводящий единицы слоев в единицы. О. п. и их морфизмы составляют категорию. Задание гомоморфизма $f^\#$ равносильно заданию гомоморфизма

$$f_\# : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_* \mathcal{O}_X,$$

переводящего единицы в единицы.

Окольцованное пространство $(X, \mathcal{O}_X)$ наз. локально окольцованным, если $\mathcal{O}_X$ — пучок локальных колец. В определении морфизма $(f, f^\#)$ локально О. п. $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ дополнительно предполагается, что для любого $x \in X$ гомоморфизм

$$f^\#_x : \mathcal{O}_{Y, f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X, x}$$

является локальным. Локально О. п. составляют подкатегорию в категории всех О. п. Другую важную подкатегорию составляют О. п. над (фиксированным) полем k, то есть О. п. $(X, \mathcal{O}_X)$, где $\mathcal{O}_X$ — пучок алгебр над k, а морфизмы согласованы со структурой алгебр.

Примеры О. п. 1) Каждому топологич. пространству X соответствует О. п. (X, C_X), где C_X — пучок ростков непрерывных функций на X.

2) Каждому дифференцируемому многообразию (напр., класса C^∞) X соответствует О. п. (X, D_X), где D_X — пучок ростков функций класса C^∞ на X; при этом категория дифференцируемых многообразий вкладывается в категорию О. п. над $\mathbb{R}$ в качестве полной подкатегории.

3) *Аналитические многообразия* и *аналитические пространства* над полем k составляют полные подкатегории в категории О. п. над k.

4) *Схемы* составляют полную подкатегорию в категории локально О. п.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981.

А. Л. Онищик

ОКРЕСТНОСТЬ точки x (подмножества A) топологического пространства — любое открытое подмножество этого пространства, содержащее точку x (множество A). Иногда под О. точки x (множества A) понимается любое такое подмножество топологич. пространства, к-рое содержит точку x (множества A) в своей внутренности.

Б. А. Пасынков

ОКРУГЛЕНИЕ числа — приближенное представление числа в нек-рой системе счисления с помощью конечного количества цифр. Необходимость О. диктуется потребностями вычислений, в к-рых, как правило,

окончательный результат не может быть получен абсолютно точно и следует избегать бесполезного выписывания лишних цифр, ограничивая все числа лишь нужным количеством знаков.

При О. числа оно заменяется другим числом (t-разрядным, т. е. имеющим t цифр), представляющим его приближенно. Возникающую при этом погрешность наз. погрешностью округления, или ошибкой округления.

Применяются различные способы О. числа. Простейший из них состоит в отбрасывании младших разрядов числа, выходящих за t разрядов. Абсолютная погрешность О. при этом не превосходит единицы t-го разряда числа. Способ О., обычно применяемый в ручных вычислениях, состоит в О. числа до ближайшего t-разрядного числа. Абсолютная ошибка О. при этом не превосходит половины t-го разряда округляемого числа. Этот способ дает минимально возможную ошибку среди всех способов О., использующих t разрядов.

Способы О., реализуемые на вычислительной машине, определяются ее назначением, технич. возможностями и, как правило, уступают по точности О. до ближайшего t-разрядного числа. В ЭВМ наиболее приняты два режима арифметич. вычислений: т. н. режим с плавающей запятой и режим с фиксированной запятой. В режиме с плавающей запятой результат О. числа имеет определенное количество значащих цифр; в режиме с фиксированной запятой — определенное количество цифр после запятой. В первом случае принято говорить об О. до t разрядов, во втором — об О. до t разрядов после запятой. При этом в первом случае контролируется относительная погрешность О., во втором — абсолютная погрешность.

В связи с использованием вычислительных машин развились исследования накопления ошибок О. в больших вычислениях. Анализ накопления ошибок в численных методах позволяет характеризовать методы по чувствительности их к ошибкам О., строить стратегии реализации их в вычислительной практике, учитывающие ошибки О., и оценить точность окончательного результата.

Лит.: [1] Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, 5 изд., М.— Л., 1950; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [3] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [4] Воеводин В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977. *Г. Д. Ким.*

ОКРУГЛЕНИЯ ТОЧКА — эллиптическая точка поверхности, в к-рой соприкасающийся параболоид вырождается в параболоид вращения. В О. т. нормальные кривизны по всем направлениям равны, *Дюпена индикатриса* является окружностью. О. т. иногда наз. омбилической точкой, шаровой точкой, или круговой точкой. *Д. Д. Соколов.*

ОКРУЖНОСТЬ — замкнутая плоская кривая, все точки к-рой одинаково удалены от данной точки (центра О.), лежащей в той же плоскости, что и кривая. О. с общим центром наз. концентрическими. Отрезок R, соединяющий центр О. с какой-либо ее точкой (а также длина этого отрезка), наз. радиусом О. Уравнение О. в прямоугольных декартовых координатах:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

где a и b — координаты центра.

Прямая, проходящая через две точки О., наз. секущей; отрезок ее, лежащий внутри О.,— хордой. Хорды, равноотстоящие от центра, равны. Хорда, проходящая через центр О., наз. ее диаметром. Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит ее пополам.

Каждая из двух частей, на к-рые две точки О. делят ее, наз. дугой.

Угол, образованный двумя радиусами О., соединяющими ее центр с концами дуги, наз. центральным углом, а соответствующая дуга — дугой, на к-рую он опирается. Угол, образованный двумя хордами с общим концом, наз. вписанным углом. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на дугу, заключенную между концами вписанного угла. Длина окружности $C=2\pi R$, длина дуги $l=\frac{\pi R a^\circ}{180^\circ}=R\alpha$, где a° — величина (в градусах) соответствующего центрального угла, α — его радианная мера.

Если через какую-либо точку плоскости провести к О. несколько секущих, то произведение расстояний от точки до обеих точек пересечения каждой секущей с О. есть постоянное число (для данной точки), в частности, оно равно квадрату длины отрезка касательной к О. из этой точки (*степень точки*). Совокупность всех точек плоскости, относительно к-рых данная точка имеет одинаковую степень, составляет *связку* О. Совокупность всех общих О. двух связок, лежащих в одной плоскости, наз. *пучком* О.

Часть плоскости, ограниченная О. и содержащая ее центр, наз. кругом. Сектором наз. часть круга, ограниченная дугой О. и радиусами, проведенными в концы этой дуги. Сегментом наз. часть круга, заключенная между дугой и ее хордой.

Площадь круга $S=\pi R^2$, площадь сектора $S_1=\pi R^2\frac{a^\circ}{360^\circ}$, где a° — градусная мера соответствующего центрального угла, площадь сегмента $S_2=\pi R^2\frac{a^\circ}{360^\circ}\pm S_\Delta$, где S_Δ — площадь треугольника с вершинами в центре круга и в концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор, знак «—» берется, если $a^\circ<180^\circ$, и знак «+», если $a^\circ>180^\circ$.

О. на *выпуклой поверхности* локально почти изометрична границе выпуклой поверхности конуса (теорема Залгаллера). О. в многообразии ограниченной кривизны может иметь достаточно сложное строение (т. е. могут существовать угловые и кратные точки, О. может состоять из нескольких компонент и т. п.). Тем не менее точки О. в многообразиях ограниченной кривизны можно естественно упорядочить, превратив ее тем самым в циклически упорядоченное множество (см. [1]).

Об О. в более общих пространствах — банаховых, финслеровых и т. п. см. в ст. *Сфера*.

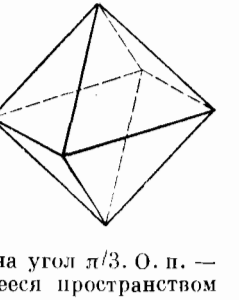
Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, М., 1963; [2] «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1965, т. 76, с. 88—114.

А. Б. Иванов.

ОКТАНТ — любая из восьми областей, на к-рые пространство делится тремя взаимно перпендикулярными координатными плоскостями.

ОКТАЭДР — один из пяти типов правильных многогранников. О. имеет 8 граней (треугольных), 12 ребер, 6 вершин (в каждой вершине сходятся 4 ребра). Если a — длина ребра О., то его объем

$$v=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}\approx 0{,}4714a^3.$$



БСЭ-3.

ОКТАЭДРА ПРОСТРАНСТВО — пространство, получающееся из октаэдра при отождествлении противоположных его граней — треугольников, повернутых друг относительно друга на угол $\pi/3$. О. п. — трехмерное многообразие, являющееся пространством орбит действия бинарной группы октаэдра на трехмерной сфере. Оно может быть отождествлено с пространством куба, получающимся аналогичным

образом. Одномерная группа Бетти О. п. является группой третьего порядка. *М. И. Войцеховский.*

ОМБИЛИЧЕСКАЯ ТОЧКА — то же, что *округления точка.*

«ОМЕГА-КВАДРАТ» РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей случайной величины

$$\omega^2 = \int_0^1 Z^2(t)\,dt,$$

где $Z(t)$ — условный *винеровский процесс.* Характеристич. функция «О.-к.» р. выражается формулой

$$\mathsf{E}e^{it\omega^2} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{2it}{\pi^2k^2}\right)^{-1/2}.$$

В математической статистике «О.-к.» р. часто встречается в связи со следующим обстоятельством. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[0, 1]$, по к-рым построена функция эмпирич. распределения $F_n(\cdot)$. В этом случае процесс

$$Z_n(t) = \sqrt{n}\,(F_n(t)-t)$$

слабо сходится к условному винеровскому процессу, откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\int_0^1 Z_n^2(t)\,dt < \lambda\right\} = \mathsf{P}\{\omega^2 < \lambda\} =$$

$$= 1-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}\frac{e^{-t^2\lambda/2}}{\sqrt{-t\sin t}}\,dt,\ \lambda>0.$$

См. также *Крамера — Мизеса критерий.*

Лит.: [1] Смирнов Н. В., «Матем. сб.», 1937, т. 2, с. 973—993; [2] Anderson T. W., Darling D. A., «Ann. Math. Statist.», 1952, v. 23, p. 193—212. *М. С. Никулин.*

ОМЕГА-НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ — свойство формальных арифметич. систем, означающее невозможность получения омега-противоречия. О м е г а - п р о т и в о р е ч и е м наз. такая ситуация, когда для некрой формулы $A(x)$ доказуема каждая формула из бесконечной последовательности формул $A(\ulcorner 0\urcorner)$, $A(\ulcorner 1\urcorner)$, ..., $A(\ulcorner n\urcorner)$, ... и формула $\neg\forall x A(x)$, где $\ulcorner 0\urcorner$ — константа формальной системы, обозначающая число 0 а константы $\ulcorner n\urcorner$ определяются рекурсивно через терм $(x)'$, обозначающий число, непосредственно следующее за x: $\ulcorner n+1\urcorner = (\ulcorner n\urcorner)'$.

Понятие О.-н. появилось в связи с *Гёделя теоремой о неполноте* арифметики. Именно в предположении О.-н. формальной арифметики К. Гёдель (K. Gödel) доказал ее неполноту. Свойство О.-н. сильнее свойства простой непротиворечивости. Простая непротиворечивость получится, если взять в качестве $A(x)$ формулу, не содержащую x. Из теоремы Гёделя о неполноте вытекает существование непротиворечивых, но омега-противоречивых систем.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *В. Н. Гришин.*

ОМЕГА-ПОЛНОТА — свойство формальных арифметич. систем, состоящее в том, что для всякой формулы $A(x)$ из выводимости формул $A(\ulcorner 0\urcorner)$, $A(\ulcorner 1\urcorner)$, ..., $A(\ulcorner n\urcorner)$, ... следует выводимость формулы $\forall x A(x)$, где $\ulcorner n\urcorner$ — константа, обозначающая натуральное число n или 0. В противном случае система наз. о м е г а - н е п о л н о й. К. Гёдель в своей теореме о неполноте формальной арифметики фактически установил ее омега-неполноту. Если в качестве аксиом взять множество всех формул, истинных в стандартной модели арифметики, то получится омега-полная аксиоматич. система. Наоборот, во всяком омега-полном расширении арифметики Пеано выводима всякая истинная в стандартной модели формула.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *В. Н. Гришин.*

ОПЕРАНД в языках программирования — аргумент операции; грамматич. конструкция, обозначающая выражение, задающее значение аргумента операции; иногда О. наз. место, позиция в тексте, где должен стоять аргумент операции. Отсюда понятие местности, или арности, операции, т. е. числа аргументов операции.

В зависимости от положения О. относительно знака операции различают префиксные (напр., $\sin x$), инфиксные (напр., $a+b$) и постфиксные (напр., x^2) операции. В зависимости от числа О. различают одноместные (унарные, или монадические) операции; двуместные (бинарные, или диадические) операции; многоместные (или полиадические) операции.

В связи с различением операнда-позиции и операнда как фактического аргумента возникает понятие приведения О. к виду, требуемому операцией. Напр., если действительный аргумент находится в позиции целого О., правила языка могут подразумевать тот или иной способ округления действительного числа до подходящего целого. Другим примером приведения является изменение формы представления объекта, напр. скаляр приводится к вектору, состоящему из одной компоненты. *А. П. Ершов.*

ОПЕРАТОР в программировании — грамматическая конструкция в языках программирования, выражающая нек-рое законченное действие при выполнении программы на ЭВМ. В императивных языках программирования (напр., *алгол*, *фортран*) О. является командой, предписывающей выполнить выражаемое им действие. В аппликативных языках (напр., *лисп*) О. является обозначением результата выполнения выражаемого им действия. В нек-рых языках (напр., *алгол-68*) императивные и аппликативные свойства О. объединяются: каждый О. вырабатывает нек-рое значение, может быть пустое, и выполняет (в качестве побочного эффекта) предписываемое им действие. Обычно действие О. состоит из двух частей: информационной и логической.

Информационная часть О. состоит в выработке нек-рого значения как функции состояния памяти или, более общо, в отображении состояния памяти на другое состояние.

Логическая часть О. состоит в выборе из программы другого О., выполняемого вслед за данным. В зависимости от однозначности выбора имеет место детерминированность или недетерминированность выполнения программы.

См. также *Алгоритмический язык*. *А. П. Ершов.*

ОПЕРАТОР — отображение одного множества на другое, каждое из к-рых наделено нек-рой структурой (алгебраич. операциями, топологией, отношением порядка). Общее определение О. совпадает с определением отображения или функции: пусть X и Y — два множества; оператором A из множества X во множество Y наз. правило или соответствие, к-рое каждому элементу x из нек-рого подмножества $D \subset X$ сопоставляет однозначно определенный элемент $A(x) \in Y$; множество D наз. областью определения оператора A и обозначается $D(A)$; множество $\{A(x), x \in D\}$ наз. областью значений оператора A и обозначается $R(A)$. Часто пишут Ax вместо $A(x)$. Термин «О.» используется чаще всего в случае, когда X и Y — векторные пространства. Если A — оператор из X в Y, где $Y=X$, то A наз. оператором в X. Если $D(A)=X$, то A наз. всюду определенным оператором. Если A_1, A_2 — операторы из X_1 в Y_1 и из X_2 в Y_2 с областями

определения $D(A_1)$ и $D(A_2)$ соответственно и такие, что $D(A_1) \subset D(A_2)$ и $A_1 x = A_2 x$ при всех $x \in D(A_1)$, то при $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ оператор A_1 называется сужением, или ограничением, оператора A_2, а оператор A_2 — расширением оператора A_1; при $X_1 \subset X_2$, A_2 называется расширением оператора A_1 с выходом из X_1.

Многие уравнения в функциональных или абстрактных пространствах можно представить в виде $Ax = y$, где $y \in Y$, $x \in X$, y — задан, x — неизвестен, A — оператор из X в Y. Утверждение о существовании решения такого уравнения при любой правой части $y \in Y$ равносильно утверждению, что область значений оператора A есть все пространство Y; утверждение, что уравнение $A(x) = y$ имеет при любом $y \in R(A)$ единственное решение, означает, что A взаимно однозначно отображает $D(A)$ на $R(A)$.

Если X и Y — векторные пространства, то в множестве всех О. из X в Y можно выделить класс *линейных операторов;* остальные О. из X в Y наз. нелинейными операторами. Если X и Y — топологические векторные пространства, то в множестве О. из X в Y естественно выделяется класс *непрерывных операторов*, а также класс ограниченных линейных операторов A (таких операторов A, что образ любого ограниченного множества в X ограничен в Y) и класс линейных *компактных операторов* (т. е. таких О., что образ любого ограниченного множества в X предкомпактен в Y). Если X и Y — локально выпуклые пространства, то в X и Y естественно рассматривать различные топологии; О. наз. полунепрерывным, если он определяет непрерывное отображение пространства X (в исходной топологии) в пространство Y в слабой топологии (понятие полунепрерывности используется главным образом в теории нелинейных О.); О. наз. усиленно непрерывным, если он непрерывен как отображение пространства X в ограниченно слабой топологии в пространство Y; О. наз. слабо непрерывным, если он определяет непрерывное отображение X в Y, где X и Y наделены слабой топологией. Часто компактные О. наз. вполне непрерывными. Иногда термин «вполне непрерывный О.» используется вместо термина «усиленно непрерывный О.» или для обозначения О., переводящего любую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся; если X и Y — рефлексивные банаховы пространства, то эти условия эквивалентны компактности О. Если О. усиленно непрерывен или компактен, то он непрерывен; если О. непрерывен, то он слабо непрерывен.

Графиком оператора A наз. множество $\Gamma(A) \subset X \times Y$, определенное соотношением

$$\Gamma(A) = \{\{x,\ Ax\},\ x \in D(A)\}.$$

Пусть X и Y — топологические векторные пространства; оператор A из X в Y наз. *замкнутым оператором*, если его график замкнут. Понятие замкнутого О. особенно плодотворно в случае линейных О. с плотной областью определения.

Понятие графика позволяет обобщить понятие О.: многозначным оператором из X в Y наз. любое подмножество A в $X \times Y$; если X и Y — векторные пространства, то многозначным линейным О. наз. линейное подпространство $X \times Y$; областью определения многозначного О. наз. множество

$$D(A) = \{x \in X\colon \text{существует } y \in Y \text{ такой, что } \{x, y\} \in A\}.$$

Если X — векторное пространство над полем k и $Y = k$, то всюду определенный О. из X в k наз. *функционалом* на X.

Если X и Y — локально выпуклые пространства, то оператор A из X в Y с плотной в X областью опре-

деления имеет сопряженный оператор A^* с плотной в Y^* в ослабленной топологии областью определения тогда и только тогда, когда A — замкнутый О.

Примеры операторов. 1) О., сопоставляющий любому элементу $x \in X$ элемент $0 \in Y$ (нулевой оператор).

2) О., сопоставляющий любому элементу $x \in X$ этот же элемент $x \in X$ (единичный оператор в X обозначается id_X или 1_X).

3) Пусть X — векторное пространство функций на нек-ром множестве M и f — функция на M; О. в X с областью определения

$$D(A) = \{\varphi \in X : f\varphi \in X\},$$

действующий по правилу

$$A\varphi = f\varphi$$

при $\varphi \in D(A)$, наз. оператором умножения на функцию; A — линейный О.

4) Пусть X — векторное пространство функций на множестве M и F — отображение множества M в себя; О. в X с областью определения

$$D(A) = \{\varphi \in X : \varphi \circ F \in X\},$$

действующий по правилу

$$A\varphi = \varphi \circ F$$

при $\varphi \in D(A)$, будет линейным О.

5) Пусть X, Y — векторные пространства действительных измеримых функций на пространствах с мерой (M, Σ_M, μ) и (N, Σ_N, ν) соответственно, K — функция на $M \times N \times \mathbb{R}$, измеримая относительно произведения мер $\mu \times \nu \times \mu_0$, где μ_0 — мера Лебега на $\mathbb{R}$, и непрерывная по $t \in \mathbb{R}$ при любых фиксированных $m \in M$, $n \in N$; О. из X в Y с областью определения

$$D(A) = \left\{\varphi \in X : f(x) = \int_M K(x, y, \varphi(y))\, dy\right\},$$

существующий для почти всех $x \in N$ и $f \in Y$, действующий по правилу $A\varphi = f$ при $\varphi \in D(A)$, наз. интегральным оператором; если

$$K(x, y, z) = K(x, y)\, z,\ x \in M,\ y \in N,\ z \in \mathbb{R},$$

то A линейный О.

6) Пусть X — векторное пространство функций на дифференцируемом многообразии M, ξ — векторное поле на M; оператор A в X с областью определения

$$D(A) = \{f \in X : \text{произв одная } D_\xi f$$

функции f вдоль поля ξ определена всюду и $D_\xi f \in X\}$,

действующий по правилу $Af = D_\xi f$ при $f \in D(A)$, наз. оператором дифференцирования; A — линейный О.

7) Пусть X — векторное пространство функций на множестве M; всюду определенный О., сопоставляющий функции $\varphi \in X$ значение этой функции в точке $a \in M$, есть линейный функционал на X; он наз. δ-функцией в точке a и обозначается δ_a.

8) Пусть G — коммутативная локально компактная группа, $\hat{G}$ — группа характеров группы G; dg, $d\hat{g}$ — меры Хаара на G, $\hat{G}$ соответственно; пусть

$$X = L^2(G, dg),\ Y = L^2(\hat{G}, d\hat{g});$$

линейный оператор A из X в Y, сопоставляющий функции $f \in X$ функцию $\hat{f} \in Y$, определяемую формулой

$$\hat{f}(\hat{g}) = \int f(g)\, \hat{g}(g)\, dg,$$

всюду определен, если сходимость интеграла понимается как сходимость в среднем.

Если X и Y — топологические векторные пространства, то О. в примерах 1) и 2) непрерывны; если в примере 3) пространство X есть $L^2(M, \Sigma_M, \mu)$, где μ — мера на X, то О. умножения на ограниченную измеримую функцию замкнут и имеет плотную область определения; если в примере 5) пространство $X=Y$ есть гильбертово пространство $L^2(M, \Sigma_M, \mu)$ и $K(x, y, z)=K(x, y)\,z$, где $K(x, y)$ принадлежит $L^2(M\times M, \Sigma_M\times\Sigma_M, \mu\times\mu)$, то A компактен; если в примере 8) пространства X и Y рассматриваются как гильбертовы пространства, то A непрерывен.

Если A — О. из X в Y такой, что $Ax\neq Ay$ при $x\neq y$, $x, y\in D(A)$, то можно определить обратный оператор A^{-1} к A; вопрос о существовании обратного О. и его свойствах связан с теоремой существования и единственности решения уравнения $Ax=f$; если A^{-1} существует, то $x=A^{-1}f$ при $f\in R(A)$.

Для О. в векторных пространствах можно определить сумму, произведение на число и произведение О. Если A, B — операторы из X в Y с областями определения $D(A)$ и $D(B)$ соответственно, то **суммой операторов** A и B наз. О., обозначаемый $A+B$, с областью определения

$$D(A+B)=D(A)\cap D(B),$$

действующий по правилу

$$(A+B)\,x=Ax+Bx$$

при $x\in D(A+B)$. **Произведением оператора** A **на число** λ наз. О., обозначаемый λA, с областью определения

$$D(\lambda A)=D(A),$$

действующей по правилу

$$(\lambda A)\,x=\lambda\,(Ax)$$

при $x\in D(\lambda A)$. **Произведение операторов** определяется как композиция отображений: если A оператор из X в Y, B — оператор из Y в Z, то произведением B и A наз. оператор BA с областью определения

$$D(BA)=\{x\in X: x\in D(A)\ \text{и}\ Ax\in D(B)\},$$

действующий по правилу

$$(BA)\,x=B\,(Ax)$$

при $x\in D(BA)$.

Если P — всюду определенный О. в X такой, что $PP=P$, то P наз. **проектором** в X; если I — всюду определенный О. в X такой, что $II=\mathrm{id}_X$, то I наз. **инволюцией** в X.

Теория О. составляет важнейшую часть линейного и нелинейного функционального анализа, являясь, в частности, основным аппаратом теории динамич. систем, представлений групп и алгебр и важнейшим математич. инструментом математич. физики и квантовой механики.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [4] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 1—3, М.,,1962—74; [5] Эдвардс Р. -Э., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969; [6] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967.

М. А. Наймарк, А. И. Штерн.

ОПЕРАТОРНАЯ ГРУППА — 1) О. г.— однопараметрическая группа операторов в банаховом пространстве E, т. е. семейство линейных ограниченных операторов U_t, $-\infty<t<\infty$, такое, что $U_0=I$, $U_{s+t}=U_s\cdot U_t$ и U_t непрерывно зависит от t (в равномерной, сильной или слабой топологии). Если E — гильбертово пространство и $\|U_t\|$ равномерно ограничены, то группа

$\{U_t\}$ подобна группе унитарных операторов (теорема Надя).

Лит.: [1] Sz.-Nagy B., «Acta Univ. szeged. Sec. scient. Math.», 1947, t. 11, p. 152—57; [2] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962.

В. И. Ломоносов.

2) О. г., группа с областью операторов Σ, — такая группа G, что всякому элементу $a \in G$ и всякому $\sigma \in \Sigma$, где Σ — нек-рое множество символов, поставлен в соответствие элемент $a\sigma \in G$, причем $(ab)\sigma = a\sigma \cdot b\sigma$ при любых $a, b \in G$. Пусть G и G' — группы с одной и той же областью операторов Σ; изоморфное (гомоморфное) отображение φ группы G на G' наз. операторным изоморфизмом (гомоморфизмом), если $(a\sigma)\varphi = (a\varphi)\sigma$ для любых $a \in G$, $\sigma \in \Sigma$. Подгруппа (нормальный делитель) H группы G с областью операторов Σ наз. допустимой подгруппой (допустимым нормальным делителем), если $H\sigma \subseteq H$ при всяком $\sigma \in \Sigma$. Пересечение всех допустимых подгрупп, содержащих данное подмножество M группы G, наз. допустимой подгруппой, порожденной множеством M. Группа, не имеющая допустимых нормальных делителей, кроме себя и единичной подгруппы, наз. простой (относительно заданной области операторов). Всякая факторгруппа О. г. по допустимому нормальному делителю является группой с той же областью операторов.

Группа G наз. группой с полугруппой операторов Σ, если G — группа с областью операторов Σ, Σ — полугруппа и $a(\sigma\tau) = (a\sigma)\tau$ для любых $a \in G$, $\sigma, \tau \in \Sigma$. Если Σ — полугруппа с единицей ε, то считается, что $a\varepsilon = a$ при всяком $a \in G$. Всякая группа с произвольной областью операторов Σ_0 есть группа с полугруппой операторов Σ, где Σ — свободная полугруппа, порожденная множеством Σ_0. Группа F с полугруппой операторов Σ, обладающей единицей, наз. Σ — свободной, если она порождается такой системой элементов X, что элементы $x\alpha$, где $x \in X$, $\alpha \in \Sigma$, составляют для F (как группы без операторов) систему свободных образующих. Пусть F есть Γ-свободная группа (Γ — группа операторов), Δ — подгруппа группы Γ, $f \in F$ и $A_{f,\Delta}$ — допустимая подгруппа группы F, порожденная всеми элементами вида $f^{-1}(f\alpha)$, где $\alpha \in \Delta$. Тогда всякая допустимая подгруппа группы F является операторным свободным произведением групп типа $A_{f,\Delta}$ и нек-рой Γ-свободной группы (см. [2]). Если Σ — свободная полугруппа операторов, то при $a \neq 1$ допустимая подгруппа Σ-свободной группы F, порожденная элементом a, сама является Σ-свободной группой со свободным образующим a (см. также [3]).

Абелева группа с ассоциативным кольцом операторов K — это модуль над K.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Завало С. Т., «Матем. сб.», 1953, т. 33, с. 399—432; [3] его же, «Укр. матем. ж.», 1964, т. 16, № 5, с. 593—602; № 6, с. 730—51.

А. П. Мишина.

ОПЕРАТОРНАЯ ТОПОЛОГИЯ — топология в пространстве $L(E, F)$ непрерывных линейных отображений одного топологического векторного пространства E в другое топологич. пространство F, превращающая пространство $L(E, F)$ в топологическое векторное пространство. Пусть F — локально выпуклое пространство и $\mathfrak{S}$ — такое семейство ограниченных подмножеств пространства E, что линейная оболочка объединения множеств этого семейства плотна в E; пусть $\mathfrak{B}$ — базис окрестностей нуля в F. Семейство

$$M(S, V) = \{f : f \in L(E, F),\ f(S) \subset V\},$$

где S пробегает $\mathfrak{S}$, а V пробегает $\mathfrak{B}$, является базисом окрестностей нуля для единственной инвариантной относительно сдвигов топологии, к-рая является О. т. и превращает пространство $L(E, F)$ в локально выпук-

лое пространство; эта топология наз. $\mathfrak{S}$-т о п о л о г и е й на $L(E, F)$.

П р и м е р ы. I. Пусть E, F — локально выпуклые пространства; 1) пусть $\mathfrak{S}$ — семейство всех конечных подмножеств в E, соответствующая $\mathfrak{S}$-топология (в $L(E, F)$) наз. т о п о л о г и е й п р о с т о й (или п о т о ч е ч н о й) с х о д и м о с т и; 2) пусть $\mathfrak{S}$ — семейство всех выпуклых закругленных компактных подмножеств E, соответствующая топология наз. т о п о л о г и е й в ы п у к л о й з а к р у г л е н н о й к о м п а к т н о й с х о д и м о с т и; 3) пусть $\mathfrak{S}$ — семейство всех предкомпактных подмножеств E, соответствующая $\mathfrak{S}$-топология наз. т о п о л о г и е й п р е д к о м п а к т н о й с х о д и м о с т и; 4) пусть $\mathfrak{S}$ — семейство всех ограниченных подмножеств, соответствующая топология наз. т о п о л о г и е й о г р а н и ч е н н о й с х о д и м о с т и.

II. Если E, F — банаховы пространства, рассматриваемые одновременно в слабой или сильной (нормированной) топологии, то соответствующие пространства $L(E, F)$ алгебраически совпадают; соответствующие топологии простой сходимости наз. с л а б о й и с и л ь н о й О. т. в $L(E, F)$. Сильная О. т. мажорирует слабую О. т.; обе они согласуются с двойственностью между $L(E, F)$ и пространством функционалов на $L(E, F)$ вида $f(A)=\Sigma\varphi_i(A\,\xi_i)$, где $\xi_i\in E$, $\varphi_i\in E^*$, $A\in L(E, F)$.

III. Пусть E, F — гильбертовы пространства и $\tilde{E}$, $\tilde{F}$ — счетные прямые суммы гильбертовых пространств E_n, F_n соответственно, где $E_n=E$, $F_n=F$ для всех натуральных n; пусть ψ — вложение пространства $L(E, F)$ в $L(\tilde{E}, \tilde{F})$, определенное условием: для любого оператора $A\in L(E, F)$ ограничение оператора $\psi(A)$ на подпространство E_n переводит E_n в F_n и совпадает на E_n с оператором A. Тогда полный прообраз в $L(E, F)$ слабой (сильной) О. т. в $L(\tilde{E}, \tilde{F})$ наз. у л ь т р а с л а б о й (соответственно у л ь т р а с и л ь н о й) О. т. в $L(E, F)$. Ультраслабая (ультрасильная) топология мажорирует слабую (сильную) О. т. Симметричная подалгебра $\mathfrak{A}$ алгебры $L(E)$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве E, содержащая единичный оператор, тогда и только тогда совпадает с множеством всех операторов из $L(E)$, перестановочных с каждым оператором из $L(E)$, перестановочным со всеми операторами из $\mathfrak{A}$, когда $\mathfrak{A}$ замкнута в слабой (или сильной, или ультраслабой, или ультрасильной) О. т., то есть является *Неймана алгеброй*.

Лит.: [1] Ш е ф е р Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [2] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д ж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [3] Н а й м а р к М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [4] S a k a i S., C*-algebras and W*-algebras, B., 1971.

А. И. Штерн.

ОПЕРАТОРНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА — общее название теорем о пределе средних по неограниченно удлиняющемуся «промежутку времени» $n=0, 1, \ldots, N$ или $0\leqslant t\leqslant T$ для степеней $\{A^n\}$ линейного оператора A, действующего в банаховом (или даже топологическом векторном, см. [5]) пространстве E, либо для действующей в E однопараметрич. полугруппы линейных операторов $\{A_t\}$. В последнем случае можно рассматривать также предел средних по неограниченно уменьшающемуся промежутку времени (л о к а л ь н ы е э р г о д и ч е с к и е т е о р е м ы, см. [5], [6]; говорят также об «эргодичности в нуле», см. [1]). Средние могут пониматься в различных смыслах, аналогично тому, как это делается в теории суммирования рядов. Чаще всего используются с р е д н и е Ч е з а р о

$$\bar{A}_N=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}A^n$$

или

$$\overline{A}_T = \frac{1}{T}\int_0^T A_t\,dt$$

или средние Абеля

$$\overline{A}_\theta = (1-\theta)\sum_{n=0}^{\infty}\theta^n A^n,\ |\theta|<1$$

или

$$\overline{A}_\lambda = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}A_t\,dt.$$

Условия эргодич. теорем заведомо обеспечивают сходимость подобных бесконечных рядов или интегралов; при этом, хотя абелевы средние образуются с участием всех A^n или A_t, главную роль играют значения A^n или A_t на конечном отрезке времени, неограниченно возрастающем при $\theta\to 1$ (или $\lambda\to 0$). Предел средних ($\lim_{N\to\infty}\overline{A}_N$ и т. д.) тоже может пониматься в различных смыслах — в сильной или слабой операторной топологии (статистические эргодические теоремы, т. е. *Неймана теорема* эргодическая — исторически первая О. э. т.— и ее обобщения), в равномерной операторной топологии (равномерные эргодические теоремы, см. [1], [2], [3]), а если E реализовано как нек-рое *пространство функций на нек-ром пространстве с мерой*, то и в смысле сходимости почти всюду средних $\overline{A}_N\varphi$ и т. п. при $\varphi\in E$ (индивидуальные эргодические теоремы, т. е. *Биркгофа эргодическая теорема* и ее обобщения, см., напр., *Орнстейна—Чекона эргодическая теорема*; их, впрочем, не всегда относят к О. э. т.). Нек-рые из О. э. т. как бы сравнивают силу различных упомянутых выше вариантов, устанавливая, что из существования пределов средних в одном смысле следует существование пределов в другом смысле. В нек-рых теоремах речь идет не о пределе средних, а о пределе отношения двух средних (такова теорема Орнстейна — Чекона).

Имеются также О. э. т. для n-параметрических и даже более общих полугрупп.

Лит.: [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., М., 1962; [2] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [3] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [4] Вершик А. М., Юзвинский С. А., в кн.: Итоги науки, в. 15 — Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 133—87; [5] Каток А. Б., Синай Я. Г., Степин А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ, т. 13, М., 1975, с. 129—262; [6] Krengel U., «Astérisque», 1977, t. 50, p. 151—92.

Д. В. Аносов.

ОПЕРАТОРНО НЕПРИВОДИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — представление π группы (алгебры, кольца, полугруппы) X в (топологическом) векторном пространстве E такое, что любой (непрерывный) линейный оператор в пространстве E, перестановочный со всеми операторами $\pi(x)$, $x\in X$, кратен единичному оператору в E. Если π — вполне неприводимое представление (в частности, если π — конечномерное неприводимое представление), то π — О. н. п.; обратное, вообще говоря, неверно. Если π — унитарное представление группы или симметричное представление симметричной алгебры, то π тогда и только тогда является О. н. п., когда π — *неприводимое представление*.

А. И. Штерн.

ОПЕРАТОРНОЕ КОЛЬЦО, кольцо с областью операторов Σ,— кольцо, в к-ром определено умножение элементов кольца на элементы из нек-рого фиксированного *множества* Σ (*внешний* закон композиции), удовлетворяющее следующим аксиомам:

$$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha, \tag{1}$$

$$(ab)\alpha = (a\alpha)b = a(b\alpha), \tag{2}$$

где α — элемент множества Σ, а a, b, $a\alpha$, $b\alpha$—элементы кольца. Операторы, таким образом, действуют как эндоморфизмы аддитивной группы, перестановочные с умножением на элемент кольца. Кольцо с областью операторов Σ, или короче Σ-операторное кольцо, можно трактовать и как универсальную алгебру с двумя бинарными операциями (сложением и умножением) и множеством Σ унарных операций, связанных обычными кольцевыми тождествами, а также тождествами (1) и (2). Понятия Σ-допустимого подкольца, Σ-допустимого идеала, Σ-операторного изоморфизма и Σ-операторного гомоморфизма могут быть определены подобно тому, как это делается для *операторных групп*. Если Σ-операторное кольцо R обладает единицей, то все идеалы и все односторонние идеалы кольца R Σ-допустимы.

Кольцо R наз. кольцом с кольцом операторов Σ, если оно есть Σ-операторное кольцо, область операторов Σ к-рого сама является ассоциативным кольцом, причем для любых α, $\beta \in \Sigma$ и $a \in R$ справедливы равенства

$$a(\alpha+\beta) = a\alpha + a\beta,$$

$$a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta.$$

Кольцо с кольцом операторов можно определить так же, как кольцо являющееся одновременно Σ-модулем и удовлетворяющее аксиоме (2). Всякое кольцо можно естественным образом считать операторным над кольцом целых чисел.

Для всех a из R и α, β из Σ элемент $a(\alpha\beta-\beta\alpha)$ является аннулятором кольца R. Поэтому, если R — кольцо без аннуляторов, то его кольцо операторов Σ непременно коммутативно.

Наиболее часто рассматриваются кольца с ассоциативно-коммутативным кольцом операторов, обладающим единицей. Такое О. к. наз. обычно алгеброй над коммутативным кольцом, а также линейной алгеброй. Наиболее изучены линейные алгебры над полями, их теория развивается параллельно общей теории колец (без операторов).

Лит.: [1] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973.
К. А. Жевлаков.

ОПЕРАТОРНЫЙ ГОМОМОРФИЗМ — гомоморфизм алгебраической системы, перестановочный с каждым оператором из нек-рого фиксированного множества, действующим на этой системе, т. е. гомоморфизм операторной группы, операторного кольца и т. д.

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — один из методов математич. анализа, позволяющий в ряде случаев сводить исследование *дифференциальных операторов*, *псевдодифференциальных операторов* и нек-рых типов *интегральных операторов* и решение уравнений, содержащих эти операторы, к рассмотрению более простых алгебраич. задач. Развитие и систематич. применение О. и. началось с работ О. Хевисайда (O. Heaviside, 1892), к-рый предложил формальные правила обращения с оператором дифференцирования $\frac{d}{dt}$ и решил ряд прикладных задач. Однако О. и. не получило у него математич. обоснования: оно было дано с помощью *Лапласа преобразования*; Я. Микусиньский (J. Mikusiński, 1953) алгебраизировал О. и., опираясь на понятие функционального кольца; наиболее общая концепция О. и. получается с помощью *обобщенных функций*.

Простейший вариант О. и. строится следующим образом. Пусть K — совокупность функций (с действительными или комплексными значениями), заданных в области $0 \leqslant t < \infty$ и абсолютно интегрируемых в любом

конечном интервале. Сверткой функций f, $g \in K$ наз. интеграл

$$h = f * g = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau.$$

Относительно обычного сложения и операции свертки K становится кольцом без делителей нуля (теорема Титчмарша, 1924). Элементы поля частных P этого кольца наз. операторами и обозначаются $\frac{a}{b}$; невыполнимость деления в K как раз и есть источник нового понятия оператора, обобщающего понятие функции. Для выявления необходимого в О. и. различия между понятиями функции и ее значения в точке введены следующие обозначения:

$\{f(t)\}$ — функция $f(t)$;

$f(t)$ — значение $f(t)$ в точке t.

Примеры операторов.

1) $e = \{1\}$ — оператор интегрирования:

$$\{1\}\{f\} = \left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\},$$

при этом

$$e^p = \left\{\frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)}\right\}$$

и, в частности,

$$e^n\{f\} = \underbrace{\int_0^t dt \ldots \int_0^t}_{n \text{ раз}} f(t)\, dt =$$

$$= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\, d\tau;$$

это — формула Коши, обобщение к-рой на случай произвольного (нецелого) показателя служит для определения дробного интегрирования.

2) $[\alpha] = \frac{\{\alpha\}}{\{1\}}$ (где α — функция-константа) — числовой оператор; поскольку $[\alpha]\,[\beta] = [\alpha, \beta]$, $[\alpha]\,\{f\} = \{\alpha f\}$, в то время как $\{\alpha\}\,\{\beta\} = \{\alpha\beta t\}$, то числовые операторы ведут себя как обычные числа. Таким образом, оператор является обобщением не только функции, но и числа; единицей кольца K является $[1]$.

3) $s = \frac{[1]}{e}$ — оператор дифференцирования, обратный оператору интегрирования. Так, если функция $a(t) = \{a(t)\}$ имеет производную $a'(t)$, то

$$s\{a\} = \{a'\} + [a(0)]$$

и

$$\{a^{(n)}\} = s^n\{a\} - s^{n-1}[a(0)] - \ldots - [a^{n-1}(0)];$$

отсюда, напр.,

$$\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s-a}.$$

На оператор дифференцирования s можно умножать не только дифференцируемые функции, однако результат есть уже, вообще говоря, оператор.

4) $D\{f\} = \{-tf(t)\}$ — алгебраическая производная, она распространяется на произвольные операторы обычным способом, при этом оказывается, что действие этого оператора на функции от s совпадают с дифференцированием по s.

О. и. дает удобные способы решения линейных дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и с частными производными. Напр., решение уравнения

$$\alpha_n x^{(n)} + \ldots + \alpha_0 x = f, \quad \alpha_i = \text{const}, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = \gamma_0, \ldots,$

$x^{(n-1)}(0)=\gamma_{n-1}$ автоматически приводится к алгебраич. уравнению и символически выражается формулой

$$x=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\ldots+\beta_0+f}{\alpha_n s^n+\ldots+\alpha_0},$$

$$\beta_\nu=\alpha_{\nu+1}\gamma_0+\ldots+\alpha_n\gamma_{n-\nu-1},$$

решение в обычном виде получается разложением на элементарные дроби от переменной s с последующим обратным переходом по соответствующим таблицам к функциям.

Для применения О. и. к уравнениям с частными производными (а также к более общим псевдодифференциальным уравнениям) строятся дифференциальное и интегральное исчисления операторных функций, т. е. функций, значениями к-рых являются операторы: вводятся понятия непрерывности, производной, сходимости ряда, интеграла и т. д.

Пусть $f(\lambda, t)$ — нек-рая функция, определенная для $t\geqslant 0$ и $\lambda\in[a, b]$. Параметрическая операторная функция $f(\lambda)$ определяется формулой $f(\lambda)=\{f(\lambda, t)\}$; она ставит в соответствие рассматриваемым значениям λ операторы частного вида — функции от t. Операторная функция наз. непрерывной при $\lambda\in[a, b]$, если она представима как произведение некрого оператора q и такой параметрич. функции $f_1(\lambda)=\{f_1(\lambda, t)\}$, что $f_1(\lambda, t)$ непрерывна в обычном смысле.

Примеры. 1) С помощью параметрич. функции $h(\lambda)=\{h(\lambda,t)\}$:

$$h(\lambda, t)=\begin{cases}0 & \text{для } 0\leqslant t<\lambda,\\ t-\lambda & \text{для } 0\leqslant\lambda\leqslant t,\end{cases}$$

определяется функция Хевисайда

$$H(\lambda)=s\{h(\lambda, t)\};$$

значения гиперболической показательной функции

$$e^{-\lambda s}\equiv sH(\lambda)=s^2\{h(\lambda, t)\}$$

наз. операторами сдвига, поскольку умножение данной функции на $e^{-\lambda s}$ вызывает смещение ее графика на длину λ в положительном направлении оси t.

2) Решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\alpha^2\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda^2}$$

выражается через параболическую показательную функцию (являющуюся также параметрической операторной функцией):

$$e^{-\alpha\lambda\sqrt{s}}=\left\{\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}t^3}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right)\right\}.$$

3) Периодич. функция $f(t)$ с периодом $2\lambda_0$ имеет представление

$$\{f\}=\frac{\int_0^{2\lambda_0}e^{-\lambda s}f(\lambda)\,d\lambda}{1-e^{-2\lambda_0 s}}.$$

4) Если $f(\lambda)$ принимает числовые значения в интервале $[\lambda_1, \lambda_2]$, то

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}e^{-\lambda s}f(\lambda)\,d\lambda=\begin{cases}f(\lambda), & \lambda_1<t<\lambda_2,\\ 0, & 0\leqslant t<\lambda_1,\ t>\lambda_2,\end{cases}$$

т. е. умножение данной функции $\{f\}$ на $e^{-\lambda s}$ с последующим интегрированием вызывает усечение ее графика. В частности,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(\lambda)\,d\lambda=\{f(t)\};$$

таким образом, каждой функции $f(t)$, для к-рой рассмат-

риваемый интеграл сходится, ставится в соответствие аналитич. функция

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

— ее преобразование Лапласа. Благодаря этому обстоятельству довольно обширный класс операторов описывается функциями одного параметра s, более того, это формальное сходство уточняется математически установлением определенного изоморфизма.

Имеются различные обобщения О. и.; таково О. и. дифференциальных операторов, отличных от $s=\frac{d}{dt}$, напр. $b=\frac{d}{dt}\left(t\frac{d}{dt}\right)$, к-рое основывается на функциональных кольцах с надлежащим образом определенным произведением.

Лит.: [1] Диткин В. А., Прудников А. П., Справочник по операционному исчислению, М., 1965; [2] Микусинский Я., Операторное исчисление, пер. с польск., М., 1956.

М. И. Войцеховский.

A-ОПЕРАЦИЯ, операция A,— теоретико-множественная операция, открытая П. С. Александровым [1] (см. также [2] с. 39 и [3]). Пусть $\{E_{n_1,\dots n_k}\}$ — система множеств, заиндексированных всеми конечными последовательностями натуральных чисел. Множество

$$P=\bigcup_{n_1,\dots n_k,\dots}\ \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_1,\dots n_k},$$

где суммирование распространяется на все бесконечные последовательности натуральных чисел, наз. результатом A-О., примененной к системе $\{E_{n_1,\dots n_k}\}$.

Применение A-О. к системе интервалов числовой прямой дает множества (названные *A-множествами* в честь П. С. Александрова), к-рые могут не быть борелевскими (см. *Дескриптивная теория множеств*). A-О. сильнее операций счетного объединения и счетного пересечения и является идемпотентной. Относительно A-О. инвариантны *Бэра свойство* (подмножеств произвольного тополологич. *пространства*) и *измеримость* по Лебегу.

Лит.: [1] Александров П. С., «C. r. Acad. sci», 1916, t. 162, p. 323—25; [2] его же, Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств, М., 1978; [3] Колмогоров А. Н., «*Успехи матем. наук*», 1966, т. 21, в. 4, с. 275—78; [4] Суслин М. Я., «C. r. Acad. sci.», 1917, t. 164, p. 88—91; [5] Лузин Н. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1958, с. 284; [6] Куратовский К., Топология, пер. [с англ.], т. 1, М., 1966.

А. Г. Елькин.

δs-ОПЕРАЦИЯ — теоретико-множественная операция, результат применения к-рой к последовательности (E_n) множеств может быть записан в виде

$$\Phi(E_n)=\bigcup_{z\in N}\ \bigcap_{n\in z} E_n,$$

где N — система множеств положительных целых чисел, наз. *базой* $\delta s=0$. См. *Дескриптивная теория множеств.*

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Матем. сб.», 1928, т. 35, № 3—4, с. 415—22; [2] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [3] Александров П. С., Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств, М., 1978, с. 35—40, 53—58; [4] Очан Ю. С., «Успехи матем. наук», 1955, т. 10, в. 3, с. 71—128; [5] Колмогоров А. Н., там же, 1966, т. 21, в. 4, с. 275—78.

А. Г. Елькин.

ОПЕРЕНИЕ пространства — счетное семейство P покрытий пространства X множествами, открытыми в нек-ром объемлющем пространстве Y, такое, что

$$\bigcap\{\mathrm{St}_\gamma(x):\gamma\in P\}\subset X$$

для каждой точки $x\in X$ (здесь $\mathrm{St}_\gamma(x)$ означает звезду точки x относительно γ, т. е. объединение всех элементов из γ, содержащих точку x).

Понятие О. лежит в основе определения т. н. p-пространства (в смысле А. В. Архангельского). Про-

странство X наз. p-пространством, если оно имеет О. в своем *Стоуна — Чеха бикомпактном расширении* или *Уолмена бикомпактном расширении*. Каждое полное в смысле Чеха пространство является p-пространством. Каждое p-пространство имеет точечно-счетный тип. В p-пространстве справедливы аддиционная теорема для веса, и сетевой вес совпадает с весом. Паракомпактные p-пространства — это в точности совершенные прообразы метрич. пространств. Паракомпактные p-пространства с точечно-счетной базой метризуемы, равно как метризуемы и пространства этого вида с диагональю G_δ. Совершенный образ и совершенный прообраз паракомпактного p-пространства — также паракомпактные p-пространства. *В. И. Пономарев.*

ОПОРНАЯ ГИПЕРПЛОСКОСТЬ множества M в n-мерном векторном пространстве — $(n-1)$-мерная плоскость, к-рая содержит точки замыкания M и оставляет M в одном замкнутом пространстве. При $n=3$ О. г. наз. опорной плоскостью, а при $n=2$ — опорной прямой.

Граничную точку множества M, через к-рую проходит хотя бы одна О. г., наз. опорной точкой M. У выпуклого множества M все его граничные точки — опорные. Последнее свойство Архимед использовал как определение выпуклости M. Граничные точки выпуклого множества M, через к-рые проходит единственная О. г., наз. гладкими.

В общих векторных пространствах, где гиперплоскость определяется как область постоянства значений линейного функционала, также вводится понятие О. г. как гиперплоскости, экстремальной по значению этого функционала среди гиперплоскостей, оставляющих M в одном полупространстве. *В. А. Залгаллер.*

ОПОРНАЯ ФУНКЦИЯ, опорный функционал, множества A, лежащего в векторном пространстве X,— функция sA, задаваемая в находящемся с ним в двойственности векторном пространстве Y соотношением

$$(sA)(y) = \sup_{y \in A} \langle x, y \rangle.$$

Напр., О. ф. единичного шара в нормированном пространстве, рассматриваемом в двойственности со своим сопряженным пространством,— это норма в последнем.

О. ф. всегда выпуклая, замкнутая и положительно однородная (первой степени). Оператор $s : A \to sA$ взаимно однозначно отображает совокупность выпуклых замкнутых множеств в X на совокупность выпуклых замкнутых однородных функций, обратный оператор — не что иное, как *субдифференциал* (в нуле) опорной функции. Именно, если A — выпуклое замкнутое подмножество в X, то $\partial(sA) = A$, и если p — выпуклая замкнутая однородная функция на Y, то $s(\partial p(0)) = p$. Эти два соотношения (являющиеся следствием теоремы Фенхеля — Моро, см. *Сопряженная функция*) и выражают двойственность между замкнутыми выпуклыми множествами и выпуклыми замкнутыми однородными функциями.

Примеры соотношений, связывающих оператор s с алгебраическими и теоретико-множественными операциями:

$$s(\lambda C) = \lambda s C, \ \lambda > 0; \ s(A_1 + A_2) = sA_1 + sA_2;$$

$$s(\operatorname{conv}(A_1 \cup A_2))(x) = \max(sA_1(x), sA_2(x)).$$

Лит.: [1] Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973; [2] Minkowski H., Geometrie der Zahlen, Lpz.—B., 1910; [3] его же, Gesammelte Abhandlungen, Bd 2, Lpz.— B., 1911; [4] Fenchel W., «Canad. J. Math.», 1949, v. 1, p. 73—77; [5] его же, Convex cones, sets and funktions, Princeton, 1953; [6] Hörmander L., «Ark. för Mat.», 1955, bd 3, p. 181—86. *В. М. Тихомиров.*

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ — см. *Интеграл.*

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ, детерминант, квадратной матрицы $A=\|a_{ij}\|$ порядка n над ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей 1 — элемент кольца K, равный сумме всех членов вида

$$(-1)^t a_{1i_1}\dots a_{ni_n},$$

где $i_1, \dots, i_n$ — перестановка чисел $1, \dots, n$, а t — число инверсий перестановки $i_1, \dots, i_n$. О. матрицы

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{Vmatrix}$$

обозначается

$$\begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} \text{ или } \det A.$$

О. матрицы A содержит $n!$ членов; при $n=1$ $\det A=a_{11}$, при $n=2$ $\det A=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$. Наиболее важные для приложений случаи: K — поле (в частности, числовое поле), K — кольцо функций (в частности, кольцо многочленов), K — кольцо целых чисел.

Всюду ниже K — ассоциативно-коммутативное кольцо с 1, $M_n(K)$ — совокупность всех квадратных матриц порядка n над K, E_n — единичная матрица над K. Пусть $A\in M_n(K)$, а $a_1, \dots, a_n$ — строки матрицы A (все далее изложенное справедливо и для столбцов матрицы A). О. матрицы A удобно рассматривать как функцию от ее строк:

$$\det A=D(a_1, \dots, a_n).$$

Отображение

$$d: M_n \to K \quad (A \mapsto \det A)$$

подчинено следующим трем условиям:

1) $d(A)$ — линейная функция любой строки матрицы A:

$$D(a_1, \dots, \lambda a_i+\mu b_i, \dots, a_n)=$$
$$=\lambda D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)+\mu D(a_1, \dots, b_i, \dots, a_n),$$

где $\lambda, \mu\in K$;

2) если матрица B получена из A заменой строки a_i строкой a_i+a_j, $i\neq j$, то $d(A)=d(B)$;

3) $d(E_n)=1$.

Условия 1) — 3) однозначно определяют отображение d, т. е. если отображение $h: M_n(K)\to K$ удовлетворяет условиям 1) — 3), то $h(A)=\det A$. Таким образом получается аксиоматич. построение теории О.

Пусть отображение $f: M_n(K)\to K$ удовлетворяет условию:

1_a) если B получается из матрицы A умножением одной строки на $\lambda\in K$, то $f(B)=\lambda f(A)$. Очевидно, 1) $\Rightarrow 1_a$). В случае, когда K — поле, совокупность условий 1) — 3) оказывается равносильной условиям 1_a), 2), 3).

О. диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов. Отсюда вытекает сюръективность отображения $d: M_n(K)\to K$. О. треугольной матрицы также равен произведению ее диагональных элементов. Для матрицы $A=\begin{Vmatrix} B & 0 \\ D & C \end{Vmatrix}$, где B и C — квадратные матрицы,

$$\det A=\det B \det C.$$

Из свойств перестановок вытекает, что $\det A^T=\det A$, где ^{T} — знак транспонирования. Если матрица A имеет две одинаковые строки, то ее определитель равен 0; если поменять местами две строки матрицы A, то ее О. изменит знак;

$$D(a_1, \dots, a_i+\lambda a_j, \dots, a_n)=D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

при $i\neq j$, $\lambda\in K$; для A и B из $M_n(K)$

$$\det AB=\det A \det B.$$

Таким образом, отображение d есть эпиморфизм мультипликативных полугрупп $M_n(K)$ и K.

Пусть $m \leqslant n$, $A = \|a_{ij}\|$ есть (m, n) матрица. $B = \|b_{ij}\|$ есть $(n \times m)$-матрица над K, а $C = AB$. Тогда верна формула Бине — Коши:

$$\det C = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n} \begin{vmatrix} a_{1j_1} \ldots a_{1j_m} \\ \ldots \quad \ldots \\ a_{mj_1} \ldots a_{mj_m} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{j_1 1} \ldots b_{j_1 m} \\ \times \ldots \quad \ldots \\ b_{j_m 1} \ldots b_{j_m m} \end{vmatrix}.$$

Пусть $A = |a_{ij}| \in M_n(K)$, а A_{ij} — алгебраич. дополнение элемента a_{ij}. Тогда верны формулы

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} &= \delta_{ik} \det A, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} &= \delta_{jk} \det A, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Для вычислений О. часто используются разложение его по элементам строки или столбца, т. е. формулы (1), теорема Лапласа (см. *Алгебраическое дополнение*) и преобразования матрицы A, не меняющие О. Для матрицы A из $M_n(K)$ тогда и только тогда существует обратная матрица A^{-1} в $M_n(K)$, когда в K имеется элемент, обратный элементу $\det A$. Следовательно, отображение

$$\mathrm{GL}(n, K) \longrightarrow K^* \quad (A \longmapsto \det A),$$

где $\mathrm{GL}(n, K)$ — группа всех обратимых матриц в $M_n(K)$, т. е. полная линейная группа, а K^* — группа обратимых элементов K, есть эпиморфизм этих групп.

Квадратная матрица над полем обратима тогда и только тогда, когда ее О. отличен от нуля. n-мерные векторы $a_1, \ldots, a_n$ над полем F линейно зависимы тогда и только тогда, когда

$$D(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

О. матрицы A порядка $n > 1$ над полем равен 1 тогда и только тогда, когда A есть произведение элементарных матриц вида

$$t_{ij}(\lambda) = E_n + \lambda e_{ij},$$

где $i \neq j$, а e_{ij} — матрица, единственный ненулевой элемент к-рой равен 1 и расположен на позиции (i, j).

Теория О. возникла в связи с задачей решения систем линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где a_{ij}, b_j — элементы нек-рого поля F. Если $\det A \neq 0$, где $A = \|a_{ij}\|$ — матрица системы (2), то эта система имеет единственное решение, вычисляемое по формулам Крамера (см. *Крамера правило*). В случае, когда система (2) задана над кольцом K и $\det A$ обратим в K, система также имеет единственное решение, определяемое теми же формулами Крамера.

Теория О. построена также и для матриц над некоммутативным ассоциативным телом. О. матрицы над телом k (определитель Дьёдонне) вводится следующим образом. Тело k рассматривается как полугруппа и строится ее коммутативный гомоморфный образ $\bar{k}$. k — группа k^* с внешне присоединенным нулем 0, а в качестве $\bar{k}$ берется также группа $\bar{k}^*$ с внешне присоединенным нулем $\bar{0}$, где $\bar{k}^*$ — факторгруппа группы k^* по коммутанту. Эпиморфизм $k \to \bar{k}$,

$\lambda \to \overline{\lambda}$, задается канонич. эпиморфизмом групп $k^* \to \overline{k}^*$ и условием $0 \to \overline{0}$. Очевидно, $\overline{1}$ — единица полугруппы $\overline{k}$.

Теория О. над телом основана на следующей теореме. Существует единственное отображение

$$\delta : M_n(k) \to \overline{k},$$

удовлетворяющее *следующим трем аксиомам*:

I) если матрица B получена из матрицы A умножением слева одной строки на $\lambda \in k$, то $\delta(B) = \overline{\lambda}\delta(A)$;

II) если B получена из A заменой строки a_i строкой $a_i + a_j$, где $i \neq j$, то $\delta(B) = \delta(A)$;

III) $\delta(E_n) = \overline{1}$.

Элемент $\delta(A)$ наз. о п р е д е л и т е л е м матрицы A и обозначается $\det A$. Для коммутативного тела аксиомы I), II), III) совпадают с условиями 1_a), 2), 3) соответственно, и, следовательно, в этом случае получаются обычные О. над полем. Если $A = \operatorname{diag}[a_{11}, \ldots, a_{nn}]$, то $\det A = \overline{a_{11} \ldots a_{nn}}$; таким образом, отображение $\delta : M_n(k) \to \overline{k}$ сюръективно. Матрица A из $M_n(k)$ обратима тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. Справедливо равенство $\det AB = \det A \cdot \det B$. Как и в коммутативном случае, $\det A$ не изменится, если строку a_i матрицы A заменить строкой $a_i + \lambda a_j$, где $i \neq j$, $\lambda \in k$. При $n > 1$ $\det A = \overline{1}$ тогда и только тогда, когда A *произведение элементарных матриц* вида $t_{ij}(\lambda) = E_n + \lambda e_{ij}$, $i \neq j$, $\lambda \in k$. Если $a \neq 0$, то

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \overline{ad - aca^{-1}b}, \quad \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\overline{cb}.$$

В отличие от коммутативного случая, $\det A^T$ может и не совпадать с $\det A$. Напр., для матрицы $A = \left\| \begin{matrix} i & j \\ k & -1 \end{matrix} \right\|$ над телом *кватернионов* $\det A = -\overline{2i}$, а $\det A^T = \overline{0}$.

Бесконечные О., то есть О. бесконечных матриц, определяются как предел, к к-рому стремится О. конечной подматрицы при бесконечном возрастании ее порядка. Если этот предел существует, то О. наз. сходящимся, в противном случае — расходящимся.

Понятие «О.» восходит к Г. Лейбницу (G. Leibnitz, 1678); первая публикация принадлежит Г. Крамеру (G. Cramer, 1750). Теория О. создана трудами А. Вандермонда (A. Vandermonde), П. Лапласа (P. Laplace), *О. Коши (A. Cauchy) и К. Якоби (C. Jacobi)*. *Термин* «О.» встречается впервые у К. Гаусса (C. Gauss, 1801). Современное обозначение введено А. Кэли (A. Cayley, 1841).

Лит.: [1] К у р о ш А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [2] К о с т р и к и н А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [3] Е ф и м о в Н. В., Р о з е н д о р н Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, М., 1970; [4] Т ы ш к е в и ч Р. И., Ф е д е н к о А. С., Линейная алгебра и аналитическая геометрия, 2 изд., Минск, 1976; [5] А р т и н Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [6] Б у р б а к и Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [7] К а г а н В. Ф., Основания теории определителей, Одесса, 1922.

Д. А. Супруненко.

ОПРЕДЕЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА ОКРЕСТНОСТЕЙ множества A в топологическом пространстве X — любое семейство ξ подмножеств пространства X, подчиненное следующим двум условиям: а) для каждого $O \in \xi$ найдется открытое множество V пространства X такое, что $O \supset V \supset A$, б) каково бы ни было открытое в X множество W, содержащее A, найдется элемент U семейства ξ, содержащийся в W. Иногда дополнительно предполагают, что все элементы семейства ξ открытые множества. Определяющей системой окрестностей точки $x \in X$ в топологич. пространстве X наз. О. с. о. в X одноточечного множества $\{x\}$.

Лит.: [1] А р х а н г е л ь с к и й А. В., П о н о м а р е в В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, ассоциированное с регулярной особой точкой $z=a$ обыкновенного линейного дифференциального уравнения

$$p_0(z)\,w^{(n)}+p_1(z)\,w^{(n-1)}+\ldots+p_n(z)\,w=0. \qquad (1)$$

Пусть

$$p_j(z)=(z-a)^{n-j}\,q_j(z),$$

функции $q_j(z)$ голоморфны в точке $z=a$ и $q_0(a)\neq 0$. Определяющее уравнение имеет вид

$$\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)\,q_0(a)+\ldots+\lambda q_{n-1}(a)+q_n(a)=0. \qquad (2)$$

Если корни λ_j, $1\leqslant j\leqslant n$, уравнения (2) таковы, что все разности $\lambda_j-\lambda_k$ при $j\neq k$ не являются целыми числами, то уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений вида

$$w_j(z)=(z-a)^{\lambda_j}\varphi_j(z),\ 1\leqslant j\leqslant n, \qquad (3)$$

где функции $\varphi_j(z)$ голоморфны в точке $z=a$. В противном случае решения уравнения (1) могут быть многочленами от $\ln(z-a)$ с коэффициентами, голоморфными в точке $z=a$.

О. у. для системы из n уравнений

$$(z-a)\,w'=A(z)\,w, \qquad (4)$$

отвечающее регулярной особой точке $z=a$, имеет вид

$$\det\|\lambda I-A(a)\|=0,$$

где $A(z)$ — матрица-функция порядка $n\times n$, голоморфная в точке $z=a$, и $A(a)\neq 0$. Если все разности $\lambda_j-\lambda_k$ при $j\neq k$ не являются целыми числами, где λ_j — собственные значения матрицы A, то система (4) имеет фундаментальную систему решений вида (3), где $\varphi_j(z)$ — вектор-функции, голоморфные в точке $z=a$; в противоположном случае вектор-функции $\varphi_j(z)$ могут быть многочленами от $\ln(z-a)$ с коэффициентами, которые являются голоморфными в точке $z=a$ вектор-функциями.

В ином смысле термин «О. у.» употребляется при исследовании групп преобразований, допускаемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями с частными производными (см. [3]).

Лит.: [1] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [3] Овсянников Л. В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978.

М. В. Федорюк.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ универсальной алгебры G относительно системы $\{g_i,\ i\in I\}$ ее порождающих элементов — соотношения вида

$$u_j(g_{i_1},g_{i_2},\ldots,g_{i_n})=v_j(g_{i_1},g_{i_2},\ldots,g_{i_n}),\ j\in J,$$

между порождающими (где u_j, v_j — термы в сигнатуре рассматриваемой алгебры) такие, что все остальные соотношения этого вида являются следствиями данных и тождеств многообразия, в к-ром рассматривается алгебра G. Обычно, когда говорят о задании алгебры порождающими и О. с., имеют в виду факторалгебру *свободной алгебры* многообразия с теми же порождающими по конгруэнции, определяемой всеми парами (u_j,v_j), $j\in J$. В случае мультиоператорных групп (в частности, групп, алгебр, колец, модулей) вид О. с. упрощается: их можно записать либо как $w_j=0$, либо как $w_j=1$ (в группах).

О. с. выбираются неоднозначно даже при одной и той же системе порождающих. Напр., циклическая группа второго порядка с порождающим элементом a может быть задана одним О. с. $a^2=1$, а также двумя О. с. $a^6=1$ и $a^4=1$. Существуют специальные преобразования (преобразования Тице в группах,

см. [2], и их аналоги в различных многообразиях алгебр), позволяющие по одному заданию алгебры порождающими и О. с. строить другие задания той же алгебры. При этом для конечно определенных групп (или алгебр), то есть задаваемых конечной системой образующих и конечной системой О. с., можно конечным числом преобразований Тице перейти от любого такого задания к любому другому ее (конечному) заданию порождающими и О. с. Если алгебра конечно порождена, то из любой системы ее порождающих можно выбрать конечную подсистему порождающих; если алгебра в нек-рой конечной системе порождающих задается конечным числом О. с., то в любой другой конечной системе порождающих из любой системы О. с. можно выбрать конечную подсистему О. с.

Изучение конечно определенных алгебр породило целый ряд проблем алгоритмического характера, таких, как проблема равенства (тождества), проблема изоморфизма и др. (см. *Алгоритмическая проблема*). Ряд результатов получен для алгебр с одним О. с. Напр., в группах с одним О. с. разрешима проблема равенства, описаны элементы конечного порядка, центр и все подгруппы с нетривиальными тождествами (см. также *Групповое исчисление*).

Лит.: [1] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [3] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп, пер. с англ., М., 1974.

А. Л. Шмелькин.

ОПРОВЕРЖИМАЯ ФОРМУЛА, формально опровержимая в данной системе формула,— замкнутая формула данной системы, отрицание к-рой выводимо в этой системе.

В. Н. Гришин.

ОПТИМАЛЬНАЯ ГАРАНТИРУЮЩАЯ СТРАТЕГИЯ — стратегия, к-рая имеет в данной операции оценку эффективности, равную наилучшему гарантированному результату (см. *Наибольшего гарантированного результата принцип*). Если, напр., в операции с критерием эффективности $f(x, y)$ неопределенный фактор y принимает значения из множества Y, то О. г. с. $\tilde{x}^*$ определяется из равенства

$$\sup_{\tilde{x}} \inf_{y \in Y} f(\tilde{x}, y) = \inf_{y \in Y} f(\tilde{x}^*, y).$$

Если верхняя грань по $\tilde{x}$ не достигается, то вводится понятие ε-оптимальной гарантирующей стратегии $\tilde{x}^*_\varepsilon$, для к-рой

$$\inf_{y \in Y} f(\tilde{x}^*_\varepsilon, y) \geqslant \sup_{\tilde{x}} \inf_{y \in Y} f(\tilde{x}, y) - \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$. В зависимости от множества стратегий $\tilde{x} = x(y)$ и информации о неопределенном факторе (обстановке проведения операции) запись О. г. с. конкретизируется (см. [1]). Так, если множество стратегий $\tilde{x}$ состоит из всех функций $x(y)$ и в операции имеется полная информация об y, то О. г. с. $x^*(y)$ наз. абсолютно оптимальной стратегией и определяется из условия

$$\sup_x f(x, y) = f(x^*(y), y) \text{ при всех } y \in Y.$$

Изучаются также оптимальные стратегии, соответствующие иным принципам оптимальности (см., напр., [2], [3]).

Лит.: [1] Гермейер Ю. Б., Введение в теорию исследования операций, М., 1971; [2] его же, Игры с непротивоположными интересами, М., 1976; [3] Воробьев Н. Н., в кн.: Теория игр, Ер., 1973, с. 5—57.

Ф. И. Ерешко, В. В. Федоров.

ОПТИМАЛЬНАЯ КВАДРАТУРА — квадратурная формула, дающая наилучшее приближение интегралу

$$I(f) = \int_\Omega f(P)\, \omega(P)\, dP$$

на классе F подинтегральных функций. Если

$$S_N(f) = \sum_{k=1}^{N} c_k f(P_k),$$

то

$$R_N(f) = S_N(f) - I(f)$$

наз. **погрешностью квадратуры** при вычислении интеграла от данной функции, а

$$r_N(F) = \sup_{f \in F} |R_N(f)|$$

наз. **погрешностью квадратуры на классе** F. Если существует такая квадратура, что для соответствующей ей $r_N(F)$ выполняется равенство

$$r_N(F) = \inf_{c_k, P_k} r_N(F),$$

то эту квадратуру наз. **оптимальной на этом классе**.

О. к. построены лишь для нек-рых классов функций в основном одного переменного (см. [1] — [3]). О. к. наз. также **наилучшими квадратурными формулами**, или **экстремальными квадратурными формулами**.

Лит.: [1] Никольский С. М., Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979; [2] Бахвалов Н. С., в кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы, М., 1964, с. 5—63; [3] Соболев С. Л., Введение в теорию кубатурных формул, М., 1974.

Н. С. Бахвалов.

ОПТИМАЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ — кривая $x(t)$ в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $t, x^1, \ldots, x^n$, по к-рой точка $x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, движение к-рой описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

переводится из начального состояния

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

в конечное состояние

$$x(t_1) = x_1 \tag{3}$$

под воздействием оптимального управления $u(t)$, доставляющего минимальное значение заданному функционалу

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, u)\, dt, \quad f^0: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{4}$$

На выбор оптимального управления накладывается ограничение

$$u \in U, \tag{5}$$

где U — замкнутое множество допустимых управлений, $U \subset \mathbb{R}^p$. Начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1 для определенности предполагаются соответственно фиксированным и свободным.

Аналогичным образом О. т. определяется для вариационных задач более общего вида по сравнению с (1) — (5), напр. для задач с подвижными концами и с ограничениями на фазовые координаты. О методах отыскания О. т. см. *Вариационное исчисление*; численные методы.

Для автономных задач, в к-рых функции f^0, f не зависят явно от времени t:

$$f^0 = f^0(x, u), \quad f = f(x, u),$$

более удобным для теории и приложений оказывается понятие фазовой оптимальной траектории. **Фазовая оптимальная траектория** есть проекция О. т. на n-мерное подпространство фазовых переменных $x^1, \ldots, x^n$. Для автономных задач фазовая О. т. не зависит от выбора начального момента времени t_0.

Исследование множества фазовых О. т., переводящих систему из произвольного начального состояния

в заданное конечное состояние (или, наоборот, из заданного начального состояния в произвольное конечное), позволяет решить многие качественные вопросы для рассматриваемой вариационной задачи. Построение множества фазовых О. т. является обязательным этапом построения синтеза оптимальных управлений

$$u(t) = v(x(t)),$$

обеспечивающего движение по О. т. в любой точке фазового пространства.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976; [2] Дерусс о П., Рой Р., Клоуз Ч., Пространство состояний в теории управления, пер. с англ., М., 1970. *И. Б. Вапнярский.*

ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ЗАДАЧА — одна из задач *оптимального управления математической теории*, состоящая в определении минимального времени

$$J(u) = t_1, \qquad (1)$$

за к-рое управляемый объект, движение к-рого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u),\ u \in U,\ f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

можно перевести из заданного начального состояния $x(0) = x_0$ в заданное конечное состояние $x(t_1) = x_1$. Здесь $x = x(t)$ есть n-мерный вектор фазовых координат, а $u = u(t)$ есть p-мерный вектор управляющих параметров (управлений), принадлежащий при любом t заданной замкнутой допустимой области управлений U.

Искомое минимальное время t_1 является функционалом (1), зависящим от выбираемого управления $u(t)$. В качестве класса допустимых управлений, среди к-рых разыскивается управление, оптимальное по быстродействию, для большинства приложений достаточно рассматривать кусочно непрерывные управления $u(t)$, т. е. функции, непрерывные для всех рассматриваемых t, за исключением конечного числа моментов времени, в к-рых они могут терпеть разрывы 1-го рода. Теоретически, строго говоря, следует рассматривать более общий класс функций $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, измеримых по Лебегу.

О. б. з. можно рассматривать как частный случай *Больца задачи* и *Майера задачи*, рассматриваемых в вариационном исчислении, получающийся из этих задач при специальном задании оптимизируемого функционала. Оптимальное по быстродействию управление $u(t)$ должно удовлетворять принципу максимума Понтрягина, являющемуся необходимым условием, обобщающим необходимые условия Эйлера, Клебша и Вейерштрасса, используемые в классическом вариационном исчислении.

Для линейных О. б. з. из необходимых условий можно получить нек-рые выводы о качественной структуре оптимального управления. Линейными О. б. з. (см. [1], [2]) наз. такие задачи, в к-рых выполнены следующие три условия:

1) уравнения движения объекта линейны по x и u:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где A и B — постоянные матрицы размерности $n \times n$ и $n \times p$ соответственно;

2) конечное состояние x_1 совпадает с началом координат, являющимся состоянием равновесия объекта при $u = 0$;

3) область управления U является p-мерным выпуклым многогранником таким, что начало координат пространства u принадлежит U, но не является его вершиной.

Пусть выполнено условие общности положения, состоящее в линейной независимости векторов

$$Bw,\ ABw,\ A^2Bw,\ \ldots,\ A^{n-1}Bw,$$

где w — произвольный p-мерный вектор, параллельный ребру многогранника U. Тогда для оптимальности по быстродействию управления $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводящего объект из заданного начального состояния x_0 в положение равновесия (начало координат в пространстве x), необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло принципу максимума Понтрягина. Далее, оптимальное управление $u(t)$ в линейной задаче оптимального быстродействия кусочно постоянно, и его значениями являются лишь вершины многогранника U.

В общем случае число переключений $u(t)$ хотя и конечно, но может быть произвольным. В следующем важном случае число переключений допускает точную оценку сверху.

Если многогранник U является p-мерным параллелепипедом

$$a^s \leqslant u^s \leqslant b^s, \quad s = 1, \ldots, p,$$

и все собственные значения матрицы A действительны, то каждая из компонент $u^s(t)$, $s = 1, \ldots, p$, оптимального управления $u(t)$ является кусочно постоянной функцией, принимающей только значения a^s и b^s и имеющей не более $n-1$ переключений, т. е. не более n интервалов постоянства.

О. б. з. может рассматриваться и для неавтономных систем, т. е. для систем, у к-рых правая часть f зависит еще и от времени t.

В тех случаях, когда это удается, полезно рассматривать О. б. з. не только в программной постановке, как это описано выше, но и в позиционной постановке в форме задачи синтеза (см. *Оптимальное управление позиционное*). Решение задачи синтеза позволяет получить качественное представление о структуре оптимального по быстродействию управления, переводящего систему из любой точки, находящейся в нек-рой окрестности исходной начальной точки x_0, в заданное конечное состояние x_1.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976; [2] Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, М., 1966.

И. Б. Вапнярский.

ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — раздел математики, в к-ром изучаются способы формализации и методы решения задач о выборе наилучшего в заранее предписанном смысле способа осуществления управляемого динамич. процесса. Этот *динамический процесс* может быть, как правило, описан при помощи дифференциальных, интегральных, функциональных, конечноразностных уравнений (или иных формализованных эволюционных соотношений), зависящих от системы функций или параметров, наз. *управлениями* и подлежащих определению. Искомые управления, а также реализации самого процесса следует в общем случае выбирать с учетом ограничений, предписанных постановкой задачи.

В более специальном смысле термином «О. у. м. т.» принято называть математич. теорию, в к-рой изучаются методы решения неклассических вариационных задач оптимального управления (как правило, с дифференциальными связями), допускающих рассмотрение негладких функционалов и произвольных ограничений на параметры управления или иные зависимые переменные (обычно рассматривают ограничения, задаваемые нестрогими неравенствами). Термину «О. у. м. т.» иногда придают более широкий смысл, имея в виду теорию, изучающую математич. методы исследования задач, решения к-рых включают какой-либо процесс статической или динамич. оптимизации, а соответствующие модельные ситуации допускают интерпретацию в терминах той или иной прикладной процедуры принятия наилучшего решения. В таком толковании

О. у. м. т. содержит элементы *исследования операций*, *математического программирования* и *игр теории*.

Задачи, рассматриваемые в О. у. м. т., возникли из практич. потребностей, прежде всего в области механики космич. полета и *автоматического управления теории* (см. также *Вариационное исчисление*). Формализация и решение этих задач поставили новые вопросы, напр. в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, как в области обобщения понятия решения и вывода соответствующих условий существования, так и в изучении динамических и экстремальных свойств траекторий управляемых дифференциальных систем; в частности, О. у. м. т. стимулировала изучение свойств *дифференциальных включений*. Соответствующие направления О. у. м. т. поэтому часто рассматриваются как раздел теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В О. у. м. т. содержатся математич. основы теории управления движением — нового раздела общей механики, в к-ром исследуются законы формирования управляемых механич. движений и смежные математич. вопросы. По методам исследования и по своим приложениям О. у. м. т. тесно связана с аналитич. механикой, в особенности с разделами, относящимися к *вариационным принципам классической механики*.

Хотя частные задачи оптимального управления и неклассические вариационные задачи встречались и ранее, основы общей О. у. м. т. были заложены в 1956—1961. Ключевым пунктом этой теории послужил *Понтрягина принцип максимума*, сформулированный Л. С. Понтрягиным в 1956 (см. [1]). Важными стимулами создания О. у. м. т. были открытие метода *динамического программирования*, выяснение роли функционального анализа в теории оптимальных систем, открытие связей решений задач оптимального управления с результатами теории устойчивости по Ляпунову, появление работ, связанных с понятиями управляемости и наблюдаемости динамич. систем (см. [2]—[5]). В последующие годы были развиты основы теории стохастич. управления и стохастич. фильтрации динамич. систем, построены общие методы решения неклассических вариационных задач, получены обобщения основных положений О. у. м. т. на более сложные классы динамич. систем, изучены связи с классическим вариационным исчислением (см. [6]—[11]). О. у. м. т. интенсивно развивается, в частности, в направлении изучения игровых задач динамики (см. *Дифференциальные игры*), задач управления в условиях неполной или неопределенной информации, систем с распределенными параметрами, уравнений на многообразиях и т. д.

Результаты О. у. м. т. нашли широкие приложения в формировании процессов управления, относящихся к самым разным областям современной техники, в изучении экономич. динамики, в решении ряда задач из области биологии, медицины, экологии, демографии и т. д.

Задача оптимального управления в общем виде может быть описана следующим образом.

1) Дана управляемая система S, состояние к-рой в момент времени t изображается величиной x (напр., вектором обобщенных координат и обобщенных импульсов механич. системы, функцией от пространственных координат в распределенной системе, вероятностным распределением, характеризующим текущее состояние стохастич. системы, вектором выпуска продукции в динамич. модели экономики и т. д.). Предполагается, что к системе S приложены управляющие воздействия u, оказывающие влияние на ее динамику. Они могут, напр., иметь смысл механич. сил, температурных или электрич. потенциалов, программы капиталовложений и т. д.

2) Дано уравнение, связывающее переменные x, u, t и описывающие динамику системы. Указан про-

межуток времени, на к-ром рассматривается уравнение. В типичном случае это может быть обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x}=f(t,\ x,\ u),\ t_0\leqslant t\leqslant t_1,\ x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^p, \qquad (1)$$

с заранее оговоренными свойствами функции f (часто требуют, напр., непрерывности f по t, x, u и непрерывной дифференцируемости по x).

3) Известен характер информации, к-рая может быть использована для формирования управляющих воздействий (напр., в каждый момент времени или в заранее предписанные моменты становятся известными доступные измерению величины — значения фазовых координат системы (1) или функций от этих координат). Оговорен класс функций, описывающих управления, допускаемые к рассмотрению: множество кусочно непрерывных функций вида $u=u(t)$, множество линейных по x функций вида $u=u(t,\ x)=P'(t)x$ с непрерывными коэффициентами и т. д.

4) Установлены ограничения на процесс, подлежащий реализации. Сюда прежде всего входят условия, определяющие цель управления (напр., для системы (1) — попадание в заданную точку или на заданное множество фазового пространства $\mathbb{R}^n$, требование стабилизации решений около заданного движения и т. д.). Кроме того, ограничения могут быть наложены на величины управляющих воздействий u или координат состояния x, на функции от этих величин, на функционалы от их реализаций и т. д. В системе (1), напр., возможны ограничения на параметры управления

$$u\in U\subseteq\mathbb{R}^p \text{ или } \varphi(u)\leqslant 0,\ \varphi:\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathbb{R}^k, \qquad (2)$$

и на координаты

$$x\in X\subseteq\mathbb{R}^n \text{ или } \psi(x)\leqslant 0,\ \psi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^l; \qquad (3)$$

здесь U, X — замкнутые множества, φ, ψ — дифференцируемые функции. Могут рассматриваться и более сложные ситуации, когда множество U зависит от t, x или задано неравенство вида $g(t,\ x,\ u)\leqslant 0$ (случай смешанных ограничений) и т. д.

5) Задан показатель (критерий) качества процесса, подлежащего реализации, представимый в виде функционала $J(x(\cdot),\ u(\cdot))$ от реализации переменных x, u на рассматриваемом отрезке времени. Условия 1)—4) теперь дополняются требованием оптимальности процесса — минимума, максимума, минимакса и т. д. показателя $J(x(\cdot),\ u(\cdot))$.

Таким образом, в заданном классе управлений для заданной системы требуется выбрать управление u, оптимизирующее показатель $J(x(\cdot),\ u(\cdot))$ (при условии достижения цели управления и при выполнении наложенных ограничений). Функция (напр., вида $u=u(t)$ или $u=u(t,\ x)$ и т. д.), решающая задачу оптимального управления, наз. оптимальным управлением (пример формулировки типичной задачи оптимального управления см. в ст. *Понтрягина принцип максимума*).

Среди динамич. объектов, охватываемых задачами О. у. м. т., принято отличать конечномерные от бесконечномерных — в зависимости от размерности фазового пространства соответствующих систем дифференциальных уравнений, описывающих их, или от вида ограничений, наложенных на фазовые переменные.

Различают задачи *оптимального управления программного* и *оптимального управления позиционного*. В первом случае воздействие u формируется в виде функции времени. Во втором случае воздействие u формируется в виде стратегии управления по принципу обратной связи, как функция от доступных значений текущих параметров процесса.

В изучении задач О. у. м. т. выделяют вопросы существования решений, вывод необходимых условий экс-

тремума (оптимальности управления), исследование достаточных условий, построение численных алгоритмов. Рассматриваются также соотношения между решениями задач О. у. м. т., полученных в классе программных и позиционных управлений.

Описанные варианты постановок задач оптимального управления предполагают существование корректной математич. модели процесса и рассчитаны на полную априорную или даже на полную текущую информацию о соответствующей системе. Однако в прикладных постановках доступной информации о системе (напр., сведений о начальных и конечных условиях, о коэффициентах соответствующих уравнений, о значениях *дополнительных параметров или доступных измерению* координат и т. д.) часто оказывается недостаточно для прямого применения отмеченной выше теории. Последнее приводит к задачам оптимального управления, сформулированным в иных информационных предположениях. Большой раздел О. у. м. т. посвящен задачам, где описание недостающих величин носит статистич. характер (т. н. теория стохастического оптимального управления). Если какая-либо статистич. информация о недостающих величинах отсутствует, но заданы лишь допустимые области их изменения, то соответствующие задачи рассматриваются в рамках теории оптимального управления в условиях неопределенности. К решению этих задач тогда привлекают методы минимакса и теории игр. Задачи стохастического оптимального управления и оптимального управления в условиях неопределенности особенно содержательны, когда речь идет о позиционном оптимальном управлении.

Хотя формализованное описание управляемых систем может принимать достаточно абстрактную форму (см. [11]), простейшая классификация допускает также деление их на системы с непрерывным временем (описываемые, напр., дифференциальными уравнениями — *обыкновенными или с частными производными*, уравнениями с отклоняющимся аргументом, уравнениями в банаховом пространстве, а также дифференциальными включениями, интегральными, интегро-дифференциальными уравнениями и т. д.) и многошаговые (дискретные) системы, описываемые рекуррентными разностными уравнениями и рассматриваемые лишь в изолированные (дискретные) моменты времени.

Дискретные системы управления, помимо самостоятельного интереса, имеют серьезное значение как конечно-разностные модели непрерывных систем. Последнее важно для построения численных методов решения задач оптимального управления (см. [12], [13]), в особенности в тех случаях, когда исходная задача подвергается дискретизации, начиная с самой постановки. К дискретным системам применимы основные указанные выше постановки задач. Хотя теоретико-функциональная сторона исследования здесь оказывается проще, перенесение основных фактов теории оптимального управления для непрерывных систем и изложение их в компактной форме связано со специфич. трудностями и не всегда возможно (см. [14], [15]).

Теория оптимальных линейных дискретных систем управления с ограничениями, задаваемыми выпуклыми функциями, разработана достаточно полно (см. [15]). Она смыкается с методами линейного и выпуклого программирования (особенно с соответствующими «динамическими» или «нестационарными» вариантами) (см. [16]). Важное значение в этой теории приобретают решения, позволяющие соединять в рекуррентном процессе оптимизацию дискретной динамической системы с реализацией адекватного численного дискретного алгоритма.

Отдельный круг проблем О. у. м. т. образуют вопросы аппроксимации решений задач оптимального управления для непрерывных систем дискретными, тесно связанные с проблемой регуляризации некорректно поставленных задач (см. [17]).

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976; [2] Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960; [3] Красовский Н. Н., Теория управления движением, М., 1968; [4] его же, в сб.: Механика в СССР за 50 лет, т. 1, М., 1968, с. 179—244; [5] Калман Р., в кн.: Труды 1 Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 2, М., 1961, с. 521—47; [6] Флеминг У., Ришел Р., Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами, пер. с англ., М., 1978; [7] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В., Оптимальное управление, М., 1979; [8] Варга Дж., Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями, пер. с англ., М., 1977; [9] Hestenes M., Calculus of variations and optimal control theory, N. Y., 1966; [10] Янг Л., Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления, пер. с англ., М., 1974; [11] Калман Р., Фалб П., Арбиб М., Очерки по математической теории систем, пер. с англ., М., 1971; [12] Моисеев Н. Н., Элементы теории оптимальных систем, М., 1975; [13] Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ, т. 14, М., 1977, с. 101—66; [14] Болтянский В. Г., Оптимальное управление дискретными системами, М., 1973; [15] Canon M. D., Cullum C. D., Polak E., Theory of optimal control and mathematical programming, N. Y., 1970; [16] Пропой А. И., Элементы теории оптимальных дискретных процессов, М., 1973; [17] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, 2 изд., М., 1979.

А. Б. Куржанский.

ОПТИМАЛЬНОЕ ДЕКОДИРОВАНИЕ — декодирование, к-рое максимизирует *сообщений точность воспроизведения* для заданных источников сообщений, канала связи и метода кодирования. В случае, когда точность воспроизведения сообщений характеризуется средней *ошибочного декодирования вероятностью*, О. д. минимизирует эту вероятность. Пусть, напр., для передачи M сообщений, занумерованных числами $1, \ldots, M$, вероятности появления к-рых равны $p_1, \ldots, p_M$ соответственно, используется дискретный канал с конечным числом значений сигналов на входе и выходе и переходной функцией, задаваемой матрицей

$$q(y, \tilde{y}) = \mathsf{P}\{\tilde{\eta} = \tilde{y} \mid \eta = y\}, \quad y \in Y, \ \tilde{y} \in \tilde{Y},$$

где Y, $\tilde{Y}$ — множества значений сигналов η на входе и $\tilde{\eta}$ на выходе соответственно, а кодирование задается функцией $f(\cdot)$ такой, что $f(m) = y_m$, $m = 1, \ldots, M$, где $y_m \in Y$, $m = 1, \ldots, M$,— код, т. е. нек-рый набор M возможных значений сигнала на входе канала. Тогда О. д. задается функцией $g(\cdot)$ такой, что $g(\tilde{y}) = m'$ для любого $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, где m' удовлетворяет неравенству

$$p_{m'} q(y_{m'}, \tilde{y}) \geqslant p_m q(y_m, \tilde{y})$$

для всех $m \neq m'$. В частности, если все сообщения равновероятны, т. е. $p_1 = \ldots = p_M = 1/M$, то описанное О. д. является в то же время декодированием по методу «максимального правдоподобия» (к-рое в общем случае оптимальным не является): полученный на выходе канала сигнал $\tilde{y}$ следует декодировать в сообщение m', для к-рого

$$q(y_{m'}, \tilde{y}) \geqslant q(y_m, \tilde{y}) \text{ при } m \neq m'.$$

Лит.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Возенкрафт Дж., Джекобс И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ — решение некласси́ческой вариационной задачи оптимального управления (см. *Оптимального управления математическая теория*). В типичном случае О. у. дает решение задачи об экстремуме заданного функционала вдоль траекторий обыкновенного дифференциального уравнения, зависящего от параметров-«управлений» (при наличии дополнительных ограничений, предписанных постановкой задачи). Здесь, в зависи-

мости от рассматриваемого класса управлений, О. у. может принимать форму функции времени (в задаче *оптимального управления программного*) или функции времени и текущего состояния (позиций) системы (в задаче синтеза *оптимального управления позиционного*).

В более сложных или более специальных задачах О. у. может принимать форму обобщенного управления — функции времени со значениями во множестве мер, функционала от отрезка траектории или от нек-рого множества в фазовом пространстве, краевого условия для уравнения с частными производными, многозначного отображения, последовательности экстремальных элементов нестационарной задачи математич. программирования и т. д. *А. Б. Куржанский.*

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОЗИЦИОННОЕ — решение задачи *оптимального управления математической теории*, состоящей в синтезе оптимального управления в виде стратегии управления по принципу обратной связи, как функции текущего состояния (позиции) процесса (см. [1] — [3]). Последнее определяется, помимо текущего момента t, также доступными значениями текущих параметров. Таким образом, введение позиционной стратегии позволяет формировать реализацию управления *апостериорно*, корректируя его на основе дополнительной информации, получаемой по ходу процесса.

Простейшая задача синтеза, напр. для системы

$$\dot{x} = f(t, x, u),\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^p, \qquad (1)$$

с ограничениями

$$u \in U \subseteq \mathbb{R}^p \text{ или } \psi(u) \leqslant 0,\ \psi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^k, \qquad (2)$$

и заданным «терминальным» показателем

$$I(x(\cdot),\ u(\cdot)) = \varphi(t_1,\ x(t_1)),\ \varphi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^1,$$

предполагает поиск решения u^0, минимизирующего функционал $I(x(\cdot), u(\cdot))$ среди функций вида $u(t, x)$ для произвольной исходной позиции $\{\tau, x\}$. Естественный путь состоит в решении для каждой позиции $\{\tau, x\}$ соответствующей задачи о построении *оптимального управления программного*

$$u^0[t \mid \tau, x],\ x = x(\tau),\ \tau \leqslant t \leqslant t_1,$$

на минимум того же функционала $I(x(\cdot), u(\cdot))$ и при тех же самых ограничениях. Далее полагается, что

$$u^0(t, x) = u^0[t \mid t, x]$$

и если функция $u^0(t, x)$ корректно определена, а уравнение

$$\dot{x} = f(t, x, u^0(t, x)),\ x(\tau) = x,\ \tau \leqslant t \leqslant t_1, \qquad (3)$$

имеет единственное решение, то задача синтеза решена, причем оптимальные значения показателя I, найденные в классах программных и позиционных управлений, совпадают (в общем случае выделяют условия, обеспечивающие существование в определенном содержательном смысле решений уравнения (3), и условия, гарантирующие оптимальность всех траекторий этого уравнения).

Синтезированная функция $u^0(t, x)$, являющаяся О. у. п., позволяет построить оптимальное в смысле минимума функционала I решение задачи оптимального управления для любой исходной позиции $\{\tau, x\}$, в отличие от программного оптимального управления, зависящего, вообще говоря, от фиксированного начального состояния $\{t_0, x^0\}$ процесса. Решение задачи оптимального управления в форме синтеза оптимального управления находит большие приложения, в частности в связи с тем, что реальные процедуры построения управления осуществляются, как правило, на фоне ин-

формационных помех или возмущений процедуры счета. В указанных ситуациях позиционное управление предпочтительней программного.

Нахождение $u^0(t, x)$ сразу в виде функции текущего состояния связано с использованием метода *динамического программирования* (см. [2]). Вводимая в рассмотрение функция действия (функция Беллмана) $V(\tau, x)$, имеющая смысл минимума (максимума) оптимизируемой величины (напр., функционала

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{\tau}^{t_1} f^0(t, x, u)\, dt + \varphi(t_1, x(t_1)) \quad (4)$$

для системы (1) при $x(\tau) = x$, $t \in [\tau, t_1]$), должна удовлетворять дифференциальному уравнению Беллмана с частными производными и с краевыми условиями, зависящими от цели управления и показателя J. Для системы (1), (2), (4) это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0, \quad V(t_1, x) = \varphi(t_1, x), \quad (5)$$

где

$$H\left(t, x, \frac{\partial V}{\partial x}\right) = -\min\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}, f(t, x, u)\right) + f^0(t, x, u) \,\middle|\, u \in U\right\} \quad (6)$$

— функция Гамильтона. Оно связано с уравнениями, фигурирующими в условиях *Понтрягина принципа максимума*, подобно тому, как уравнение Гамильтона — Якоби для функции действия связано в аналитич. механике с обыкновенным дифференциальным уравнением Гамильтона (см. *Вариационные принципы классической механики*).

Вывод уравнения (5) для задачи синтеза опирается на принцип оптимальности, утверждающий, что отрезок оптимальной траектории есть снова оптимальная траектория (см. [2]). Правомерность такого подхода зависит от корректного определения информационных свойств процесса и, в частности, понятия позиции (текущего состояния, см. [5]).

В задаче быстродействия — о минимальном времени $T(x)$ попадания траектории автономной системы (1) из положения x на множество M — функцию $V(\tau, x) = V(x)$ можно рассматривать как своего рода потенциал $V(x) = T(x)$ относительно множества M. Выбор оптимального управления $u^0(t, x)$ из условий (5), (6), приобретающих здесь вид

$$\min\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}, f(x, u)\right) \,\middle|\, u \in U\right\} = -1,$$
$$V(x) = 0 \text{ при } x \in M,$$

тогда означает, что $u^0(t, x) = u^0(x)$ осуществляет спуск оптимальной траектории $x^0(t)$ относительно поверхностей уровня функции $V(x)$ наискорейшим из способов, допускаемых условием $u \in U$.

Применение метода динамич. программирования (как достаточного условия оптимальности) будет обосновано, если функция $V(\tau, x)$ всюду удовлетворяет определенным условиям гладкости (напр., в задаче (3)—(6) функция $V(\tau, x)$ должна быть непрерывно дифференцируемой) или если условия гладкости выполняются всюду, за исключением нек-рого «особого» множества N. При выполнении нек-рых специальных «условий регулярного синтеза» метод динамич. программирования оказывается эквивалентным принципу Понтрягина, к-рый тогда выступает как необходимое и достаточное условие оптимальности (см. [8]). Трудности, связанные с априорной проверкой применимости метода динамич. программирования и с необходимостью решать дифференциальное уравнение Беллмана с частными производными, усложняют использование этого метода. Ме-

тод динамического программирования нашел распространение в задачах синтеза оптимального управления для дискретных (многошаговых) систем, где соответствующее уравнение Беллмана конечно-разностное (см. [2], [9]).

В задачах оптимального управления с дифференциальными связями метод динамич. программирования дает эффективное решение задачи синтеза в замкнутой форме для класса задач, охватываемых линейными системами с квадратичным показателем (4) (функции f^0, φ суть положительно определенные квадратичные формы соответственно по x, u и по x). Эта задача об аналитическом конструировании оптимального регулятора при $\varphi(t, x)\equiv 0$, $t_1=\infty$ переходит в задачу об оптимальной стабилизации системы (из существования допустимого управления здесь сразу вытекает свойство асимптотич. устойчивости положения равновесия синтезированной системы) (см. [10], [4]). Существование решения в данном случае обеспечивается свойством стабилизируемости системы (см. [4]). Для линейных стационарных и периодич. систем оно эквивалентно свойству управляемости системы по неустойчивым собственным координатам (см. *Оптимальное управление программное*).

Решение задачи оптимальной стабилизации показало, что соответствующая функция Беллмана является в то же время «оптимальной» функцией Ляпунова для исходной системы с найденным оптимальным управлением. Отмеченные обстоятельства позволили получить эффективные условия стабилизируемости и построить для задач стабилизации полный аналог теории устойчивости по Ляпунову (по первому приближению и в критич. случаях), охватывающий обыкновенные квазилинейные и периодич. системы, а также системы с запаздыванием. В последнем случае роль функции Беллмана играют «оптимальные» функционалы Ляпунова — Красовского, заданные на отрезках траектории, соответствующих величине запаздывания в системе (см. [4], [5]). Теория линейно-квадратичных задач оптимального управления хорошо развита и для дифференциальных уравнений с частными производными (см. [11]).

В прикладных задачах синтеза оптимального управления измерение всех фазовых координат системы доступно далеко не всегда. Поэтому возникает следующая задача наблюдения, допускающая многочисленные обобщения: зная на промежутке $\sigma\leqslant t\leqslant\vartheta$ реализацию $y[t]\in\mathbb{R}^m$ доступной измерению функции $y=g(t, x)$ координат системы (1) (при известном $u(t)$, напр. при $u(t)\equiv 0$, и $m\leqslant n$), найти вектор $x(\vartheta)\in\mathbb{R}^n$ в заданный момент ϑ. Системы, позволяющие по реализации $y[t]$ однозначным образом восстанавливать $x(\vartheta)$, каким бы он ни был, наз. вполне наблюдаемыми.

Свойство полной наблюдаемости, как и построение соответствующих аналитич. операций, выделяющих $x(\vartheta)$, а также оптимизация этих операций хорошо изучены для линейных систем. Здесь известен принцип дуальности, состоящий в том, что каждой задаче наблюдения может быть поставлена в соответствие эквивалентная двухточечная краевая задача управления для дуальной системы. Вследствие этого оказывается, что свойство полной наблюдаемости линейной системы совпадает со свойством полной управляемости дуальной системы с управлением. Более того, оказывается, что и соответствующие дуальные экстремальные задачи об оптимальном наблюдении и оптимальном управлении могут быть составлены так, что их решения совпадут (см. [3]). Свойства управляемости и наблюдаемости линейных систем допускают весьма разнообразные обобщения на линейные бесконечномерные объекты (уравнения в банаховом пространстве, системы с

отклоняющимся аргументом, дифференциальные уравнения с частными производными). Имеется и ряд результатов, характеризующих соответствующие свойства. Для нелинейных систем известен лишь ряд локальных теорем о наблюдаемости. Решения проблемы наблюдения нашли многочисленные применения в задачах синтеза в условиях неполной информации о координатах, в том числе в задачах оптимальной стабилизации (см. [3]—[5], [14], [15]).

Задача синтеза становится особенно содержательной, когда информация об уравнениях управляемого процесса, исходных начальных условиях и текущих параметрах искажена возмущениями. Если описание возмущений носит статистич. характер, то задачи оптимального управления рассматривают в рамках теории стохастического оптимального управления. Эта теория, начатая с решения стохастических программных задач [16], в наибольшей степени разработана для систем вида

$$\dot{x} = f(t, x, u) + g(t, x, u)\,\eta,\ x(t_0) = x^0, \qquad (7)$$

со случайными возмущениями $\eta(t)$, описываемыми гауссовскими диффузионными процессами или более общими классами марковских процессов (начальный вектор обычно также считают случайным). При этом, как правило, предполагается, что заданы нек-рые вероятностные характеристики величин η (напр., сведения о моментах соответствующих распределений или о параметрах стохастич. уравнений, описывающих эволюцию процесса $\eta(t)$).

В общем случае применение программных и синтезирующих управлений здесь дает существенно различные значения оптимальных показателей J качества (роль таких показателей могут играть, напр., те или иные средние оценки неотрицательных функционалов, заданных на траекториях процесса). Задача синтеза стохастического оптимального управления теперь имеет очевидные преимущества, т. к. непрерывное измерение координат системы позволяет корректировать движение с учетом реального хода случайного процесса, непредсказуемого заранее. Здесь было обнаружено, что метод динамич. программирования совершенно естественным образом сопрягается с теорией бесконечно малых производящих операторов для полугрупп преобразований, генерируемых марковскими случайными процессами. Эти обстоятельства позволили построить и строго обосновать серию достаточных условий оптимальности, приведших к решению на конечном и бесконечном интервале времени ряда задач о синтезе стохастического оптимального управления с полной и неполной информацией о текущих координатах, стохастич. задач преследования и т. д. При этом существенно, что для справедливости принципа оптимальности управление u здесь должно строиться в каждый момент времени t как функция «достаточных координат» z процесса, для к-рых будет обеспечено свойство марковости (см. [5], [6], [17], [18]).

Таким путем, в частности, была разработана теория оптимальной стохастической стабилизации, связанная с соответствующей теорией устойчивости по Ляпунову, развитой для стохастич. систем [19].

Для формирования синтезирующего оптимального управления, а также для иных целей управления целесообразно оценивать состояние стохастич. системы по результатам измерения. Решению этого вопроса при условии, что процесс измерения искажается вероятностными «шумами» (т. е. решению задачи наблюдения в условиях случайных возмущений), посвящена теория стохастической фильтрации. Наиболее полные решения здесь известны для линейных систем с квадратичными критериями оптимума

(т. н. фильтр Калмана—Бьюси, см. [13]). В применении этой теории к задаче синтеза стохастического оптимального управления были выявлены условия, обеспечивающие справедливость принципа разделения, позволяющего решать собственно задачу управления независимо от задачи оценивания текущих позиций на основе достаточных координат процесса (см. [20]; *более общим закономерностям* стохастич. фильтрации, а также задачам стохастич. оптимального управления, когда само управление выбирается в классе марковских процессов диффузионного типа, посвящены работы [18], [21]).

Строго формализованное решение задачи стохастического оптимального управления неизбежно соприкасается с проблемой корректного обоснования вопросов существования решений соответствующих стохастических дифференциальных уравнений. Последнее обстоятельство порождает определенные трудности в решении задач стохастического оптимального управления при наличии неклассич. ограничений.

Содержательный процесс динамич. оптимизации возникает в задачах синтеза оптимального управления в условиях неопределенности (см. *Оптимальное управление программное*). Позиционные решения в общем случае позволяют и здесь улучшить показатели качества процесса по сравнению с программными, представляющими собой все-таки результат статич. оптимизации (проводимой, правда, в пространстве динамич. систем и функций-управлений). К решению задач тогда привлекают понятия и методы теории игр.

Пусть имеется система

$$\dot{x} = f(t,\ x,\ u,\ w),\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{8}$$

при ограничениях

$$x^0 = x(t_0) \in X^0 \subseteq \mathbb{R}^n,\ u \in U \subseteq \mathbb{R}^p,\ w \in W \subseteq \mathbb{R}^q,$$

на начальный вектор x^0, управление u и возмущения w. В отличие от игрока-союзника, представляющего исходное управление u, подлежащее определению, воздействия w здесь трактуют как управление игрока-противника и допускают к рассмотрению любые целенаправленные стратегии w, формируемые на основе любой допустимой информации. При этом цели управления могут быть сформулированы с точки зрения каждого из игроков в отдельности. Если названные цели противоположны, то возникает задача конфликтного управления. Исследование задач позиционного управления в условиях конфликта или неопределенности составляет предмет теории *дифференциальных игр*.

Процесс формирования позиционного оптимального управления в условиях неопределенности может быть осложнен неполнотой информации о текущем состоянии. Так, в системе (8) могут быть доступны лишь результаты косвенных измерений фазового вектора x — реализации $y[t]$ функции

$$y(t) = g(t,\ x,\ \xi), \tag{9}$$

где неопределенные параметры ξ стеснены известным априорным ограничением $\xi \in \Xi$. Знание $y[t]$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ (при заданном $u(t)$), позволяет построить в фазовом пространстве информационную область $X(\vartheta, y(\cdot))$ состояний системы (8), совместимых с реализацией $y[t]$, уравнением (9) и ограничениями на w, ξ. Среди элементов $X(\vartheta, y(\cdot))$ будет содержаться и неизвестное истинное состояние системы (8), к-рое может быть оценено выбором нек-рой точки $x^*(\vartheta, \cdot)$ из $X(\vartheta, \cdot)$ (напр., «центра тяжести» или «чебышевского центра» $X(\vartheta, \cdot)$). Изучение эволюции областей $X(\vartheta, \cdot)$ и динамики векторов $x^*(\vartheta, \cdot)$ составляет содержание теории минимаксной фильтрации.

Наиболее полные решения здесь известны для линейных систем и выпуклых ограничений (см. [22]).

В общем случае выбор позиционной стратегии оптимального управления в условиях неопределенности (напр., в виде функционала $u=u(t, X(t, \cdot))$) должен быть нацелен на управление эволюцией областей $X(\vartheta, \cdot)$ (т. е. на изменение их конфигурации и перемещение их в пространстве) в соответствии с предписанными критериями. Для указанной задачи известен ряд общих качественных результатов, а также конструктивных решений в классе специальных линейно-выпуклых задач (см. [7], [22]). При этом информация, доставляемая измерениями (напр., функцией $y[t]$ в системе (8), (9)), позволяет по ходу процесса апостериорным образом переоценивать области допустимых значений неопределенных параметров в направлении их сужения. Таким образом попутно решается з а д а ч а и д е н т и ф и к а ц и и математич. модели процесса (напр., параметров w уравнения (8)). Сказанное позволяет трактовать решения задачи о синтезе оптимального управления в условиях неопределенности как процедуру а д а п т и в н о г о о п т и м а л ь н о г о у п р а в л е н и я, в к-ром уточнение свойств модели процесса переплетается с выбором управляющего воздействия как такового. Вопросы идентификации моделей динамич. процессов и задачи адаптивного оптимального управления подробно изучены в предположениях о существовании того или иного вероятностного описания неопределенных параметров (см. [23], [24]).

Если в задачах синтеза оптимального управления в условиях неопределенности трактовать параметры w, ξ как «управления» фиктивного игрока-противника, то цели управлений u и $\{w, \xi\}$ могут быть различными. Последнее обстоятельство приводит к нескалярному *показателю качества процесса, вследствие чего* соответствующие задачи могут рассматриваться в рамках понятий о равновесных ситуациях, свойственных многокритериальным задачам теории неантагонистич. игр или их обобщениям.

Лит.: [1] П о н т р я г и н Л. С., Б о л т я н с к и й В. Г., Г а м к р е л и д з е Р. В., М и щ е н к о Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976; [2] Б е л л м а н Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960; [3] К р а с о в с к и й Н. Н., Теория управления движением, М., 1968; [4] е г о ж е, «Дифференциальные уравнения», 1965, т. 1, № 1, с. 5—16; [5] е г о ж е, в сб.: Механика в СССР за 50 лет, т. 1, М., 1968, с. 179—244; [6] е г о ж е, «Прикл. матем. и мех.», 1961, т. 25, № 5, с. 806—17; [7] К р а с о в с к и й Н. Н., С у б б о т и н А. И., Позиционные дифференциальные игры, М., 1974; [8] Б о л т я н с к и й В. Г., Математические методы оптимального управления, М., 1966; [9] е г о ж е, Оптимальное управление дискретными системами, М., 1973; [10] Л е т о в А. М., Математическая теория процессов управления, М., 1981; [11] Л и о н с Ж., Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, пер. с франц., М., 1972; [12] К а л м а н Р., в кн.: Труды 1 Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 2, М., 1961, с. 521—47; [13] К а л м а н Р., Б ь ю с и Р., «Труды Амер. об-ва инженеров-механиков. Сер. 1, Д.», 1961, т. 83, с. 123; [14] Л и Э.-Б., М а р к у с Л., Основы теории оптимального управления, пер. с англ., М., 1972; [15] Б у т к о в с к и й А. Г., Структурная теория распределенных систем, М., 1977; [16] К о л м о г о р о в А. Н., М и щ е н к о Е. Ф., П о н т р я г и н Л. С., «Докл. АН СССР», 1962, т. 145, № 5, с. 993—95; [17] Л и п ц е р Р. Ш., Ш и р я е в А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [18] О с т р е м К. Ю., Введение в стохастическую теорию управления, пер. с англ., М., 1973; [19] К а ц И. Я., К р а с о в с к и й Н. Н., «Прикл. матем. и мех.», 1960, т. 24, № 5, с. 809—23; [20] W o n h a m W. M., «SIAM J. Contr.», 1968, v. 6, p. 312—26; [21] К р ы л о в Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [22] К у р ж а н с к и й А. Б., Управление и наблюдение в условиях неопределенности, М., 1977; [23] Ц ы п к и н Я. З., Основы теории обучающихся систем, М., 1970; [24] Э й к х о ф ф П., Основы идентификации систем управления, пер. с англ., М., 1975.

А. Б. Куржанский.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОГРАММНОЕ — решение задачи *оптимального управления математической теории*, в к-рой управляющее воздействие $u=u(t)$ формируется в виде функции времени (тем самым предполагается, что по ходу процесса ни-

какой информации, кроме заданной в самом начале, в систему не поступает). Таким образом, О. у. п. формируется по априорным сведениям о системе и уже не может быть скорректировано, в отличие от *оптимального управления позиционного*.

Проблема существования решений задачи О. у. п. разбивается на два вопроса: выяснение осуществимости цели управления при заданных ограничениях (существование допустимого управления, реализующего цель управления) и установление разрешимости экстремальной задачи — достижимость экстремума (как правило, относительного) — в упомянутом выше классе допустимых управлений (существование оптимального управления).

В связи с первым вопросом весьма важно изучение свойства управляемости системы. Для системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\ x,\ u)$$

оно означает существование в заданном классе $U = \{u(\cdot)\}$ функций, допускаемых к рассмотрению, управлений $u(t)$, переводящих фазовую точку (см. *Понтрягина принцип максимума*) из любого заданного начального положения $x(t_0) = x^0 \in \mathbb{R}^n$ в любое заданное конечное положение $x(t_1) = x^1 \in \mathbb{R}^n$ (за фиксированное или свободное время $T = t_1 - t_0$, в зависимости от постановки задачи). Необходимые и достаточные условия управляемости (или, как еще принято говорить, полной управляемости) известны в конструктивной форме для линейных систем

$$\dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u,\quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^p, \tag{1}$$

с аналитическими или периодич. коэффициентами (они наиболее просты при $A \equiv \text{const}$, $B \equiv \text{const}$). Для линейных систем общего вида полностью решается и вопрос о разрешимости задачи попадания с одного выпуклого множества на другое (при выпуклых ограничениях на u, x). В нелинейном случае известны лишь локальные условия управляемости (справедливые в малой окрестности заданного движения) или условия для частных классов систем (см. [2], [4], [5]). Свойство управляемости изучают и в рамках многочисленных обобщений, связанных, в частности, с рассмотрением специальных классов U (напр., множества U всех ограниченных кусочно непрерывных управлений $u(t)$), задач управляемости по части координат или изучением более общих классов систем, в том числе бесконечномерных.

Вопрос о существовании оптимального управления в общем случае связан со свойством компактности в той или иной топологии минимизирующих последовательностей управлений или траекторий и свойством полунепрерывности по соответствующим переменным минимизируемых функционалов. Первое из этих свойств тесно связано для системы

$$\dot{x} = f(t,\ x,\ u),\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^p, \tag{2}$$

при ограничениях

$$u \in U \subseteq \mathbb{R}^p \tag{3}$$

с выпуклостью множества

$$f(t,\ x,\ U) = \{f(t,\ x,\ u) \mid u \in U\},$$

а второе (для интегральных функционалов) — с выпуклостью по соответствующим переменным $J(x(\cdot), u(\cdot))$. Отсутствие этих свойств возмещают путем расширения исходных вариационных задач. Так, невыпуклость $f(t, x, u)$ можно возместить путем введения скользящих режимов — обобщенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений, порожденных управлениями-мерами, заданными на U и

создающими эффект «овыпукления» (см. [6], [7]). Отсутствие выпуклости у интегральных функционалов $J(x(\cdot), u(\cdot))$ возмещают путем погружения задачи в более общую, с новым функционалом, являющимся выпуклой минорантой прежнего, и решения новой задачи в более широком классе управлений (см. [8]). В отмеченных случаях существование оптимального управления часто вытекает из существования допустимого управления.

Теория необходимых условий экстремума наиболее развита в задачах О. у. п. Основополагающим результатом здесь послужил принцип максимума Понтрягина, содержащий необходимые условия сильного экстремума в задаче оптимального управления.

Следует отметить создание общих приемов получения необходимых условий в экстремальных задачах, эффективно использованных для задач О. у. п. с более сложными ограничениями (фазовыми, функциональными, минимаксными, смешанными и т. д.) и основанных, так или иначе, на теоремах об отделимости выпуклых конусов (см. [9], [10]). Пусть, напр., E — векторное пространство, $f(x)$, $x \in E$,— заданный функционал, Q_i — множества из E,

$$Q = \bigcap Q_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

$x^0 \in Q$ — точка, в к-рой $f(x)$ достигает минимума на Q,

$$Q_0 = \{x \mid f(x) < f(x^0)\}.$$

Суть распространенного общего метода состоит в том, что каждое из множеств Q_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, аппроксимируется в окрестности точки x^0 нек-рым выпуклым конусом K_i с вершиной в точке x^0 (конус «убывания» для Q_0; конус «допустимых направлений» для ограничений, изображаемых неравенствами; конус «касательных направлений» для ограничений типа равенства, в том числе для дифференциальных связей, и т. д.). Необходимое условие минимума теперь состоит в том, чтобы x^0 была единственной точкой, общей для всех K_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, и, следовательно, чтобы конусы были «отделимы» (см. [8]). Последнему «геометрическому» условию далее придают аналитич. форму и по возможности преобразуют к удобному виду, напр. при помощи функции Гамильтона. В зависимости от исходных ограничений, а также от класса используемых вариаций, необходимые условия могут принимать как форму, аналогичную принципу Понтрягина, так и форму локального (линеаризованного) принципа максимума (условия слабого экстремума по u). Реализация отмеченного пути, таким образом, зависит от возможности аналитически описывать конусы K_i. Эффективное их описание достигается для множеств Q_i, задаваемых гладкими функциями, удовлетворяющими нек-рым дополнительным условиям регулярности в рассматриваемой точке, или выпуклыми функциями (см. [9], [10]). В принципе отмеченный путь допускает обобщения и на случай негладких ограничений, в том числе дифференциальных. Здесь, напр., может быть использовано понятие субдифференциала выпуклой функции или его обобщения, когда выпуклость отсутствует (см. [11], [12]).

Условия 1-го порядка, аналогичные принципу Понтрягина, известны для решений в классе обобщенных функций-мер (т. н. интегральный принцип максимума), для управляемых систем, описываемых дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом, дифференциальными уравнениями с частными производными, эволюционными уравнениями в банаховом пространстве, дифференциальными уравнениями на многообразиях, рекуррентными разностными уравнениями и т. д. (см. [1], [6], [7], [13] — [16]).

Из указанных необходимых условий экстремума в задаче оптимального управления вытекают известные

необходимые условия 1-го порядка классического вариационного исчисления. В частности, в двухточечной краевой задаче для системы (2), (3), где U — открытое множество, $J(x(\cdot), u(\cdot))$ — стандартный интегральный функционал, из принципа Понтрягина вытекает необходимое условие экстремума Вейерштрасса в классическом вариационном исчислении.

В теории оптимального управления развиваются методы получения необходимых условий высших порядков (особенно 2-го порядка) для неклассических вариационных задач (см. [19]). Интерес к условиям высших порядков в значительной степени был связан с изучением вырожденных задач оптимального управления, приводящих к т. н. особым управлениям и не имеющих адекватных аналогов в классич. теории. Напр., в принципе Понтрягина функция $H(t, \psi, x, u)$ либо может приводить к целому семейству управлений, каждое из к-рых удовлетворяет принципу максимума, либо вообще не зависит от u (тогда любое из допустимых значений u удовлетворяет принципу Понтрягина). Эта ситуация оказалась весьма характерной для целого ряда прикладных задач управления в пространстве. В данном случае выделение оптимального управления уже требует перебора экстремалей 1-го порядка (т. н. экстремалей Понтрягина) и применения к ним необходимых условий оптимальности 2-го или, в общем случае, более высокого порядка. Здесь разные по форме необходимые условия были получены путем использования специальных классов «неклассических» вариаций (напр., «связок» игольчатых вариаций и т. д.). Реализация особых управлений часто связана снова с использованием скользящих режимов (см. [17], [18]).

Теория достаточных условий оптимальности разработана в меньшей степени. Известны результаты, относящиеся к условиям локальной оптимальности и содержащие, в числе прочих требований, условия невырожденности системы в вариациях и ограничения на свойства гессиана правых частей, вычисленного вдоль исследуемой траектории для соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения. Другая группа достаточных условий опирается на метод динамич. программирования и его связь с теорией принципа максимума (см. [8]). Имеются и формализмы, приводящие к достаточным условиям абсолютного минимума, основанные на идее расширения вариационных задач. Область их реальной применимости охватывает специальные классы задач с выпуклыми критериями и вырожденных задач оптимального управления (см. [18]).

Полное решение задачи О. у. п. (необходимые и достаточные условия оптимальности) известно для линейных систем (1), когда рассматриваемые функционалы и ограничения на u, x выпуклы (в ряде случаев здесь требуется выполнение нек-рых дополнительных условий). Привлечение идей двойственности, используемых в выпуклом анализе, выявило особое экстремальное свойство траекторий системы, описывающей сопряженные переменные принципа максимума Понтрягина. Это позволило свести краевую задачу, возникающую при использовании необходимых условий общего вида, к решению более простой двойственной экстремальной задачи. В рамках названного подхода получила развитие теория линейных систем с импульсными управлениями, моделирующих объекты, подверженные мгновенным воздействиям (ударным, взрывным, импульсным), и формализуемых при помощи дифференциальных уравнений в обобщенных функциях соответствующих порядков сингулярности. Эффективное применение, особенно в теории игровых систем, нашел метод областей достижимости (см. [2], [3]).

В отсутствии полной априорной информации о системе (*и в том числе статистич. описания недостающих величин*) рассматривают задачу О. у. п. в условиях неопределенности. Пусть в системе ($t_0 \leqslant t \leqslant t_1$)

$$\dot{x} = f(t, x, u, w), \; x(t_0) = x^0 \in X^0, \; w \in W, \qquad (4)$$

параметр $w \in \mathbb{R}^q$, реализующийся в виде функции времени $w = w(t)$, и вектор x^0 неизвестны, но заданы лишь множества $X^0 \subseteq \mathbb{R}^n$, $W \subseteq \mathbb{R}^q$. Тогда, предполагая существование и продолжаемость на $[t_0, t_1]$ решений

$$x(t \mid x^0, u(\cdot), w(\cdot)), \; x(t_0 \mid x^0, u(\cdot), w(\cdot)) = x^0$$

уравнения (4) (при заданных x^0, $u(\tau)$, $w(\tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1$), можно построить пучок (ансамбль) траекторий

$$X(t \mid u(\cdot)) = \bigcup \{x(t \mid x^0, u(\cdot), w(\cdot)) \mid x^0 \in X^0, \; w(\tau) \in W, \; t_0 \leqslant \tau \leqslant t\}.$$

Выбирая программное управление $u(t)$ (одно и то же для всех траекторий пучка), можно управлять положением $X(t \mid u(\cdot))$ в фазовом пространстве. Типичная задача О. у. п. в условиях неопределенности теперь состоит в оптимизации $u(t)$ в силу функционала Ф типа максимума

$$\Phi(X(t_1 \mid u(\cdot))) = \max \{\varphi(x) \mid x \in X(t_1 \mid u(\cdot))\} \qquad (5)$$

(тогда решение $u^0(t)$ задачи будет обеспечивать нек-рый гарантированный результат) или интегрального функционала

$$\Phi(X(t_1 \mid u(\cdot))) = \int_{X(t_1 \mid u(\cdot))} f_0(x)\, dx. \qquad (6)$$

Применение техники вывода необходимых условий оптимальности или ее модификаций позволило сформулировать требования, обеспечивающие существование аналогов принципа Понтрягина для задач (5), (6) (в первом случае он принимает форму нек-рого условия минимакса). Для линейных систем эти задачи допускают столь же детальное решение, как и в случае полной информации (см. [3], [20], [21]).

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976; [2] Красовский Н. Н., Теория управления движением, М., 1968; [3] Красовский Н. Н., Субботин А. И., Позиционные дифференциальные игры, М., 1974; [4] Калман Р., в кн.: Труды 1 Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 2, М., 1961, с. 521—47; [5] Ли Э.-Б., Маркус Л., Основы теории оптимального управления, пер. с англ., М., 1972; [6] Гамкрелидзе Р. В., Основы оптимального управления, Тбилиси, 1977; [7] Варга Дж., Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями, пер. с англ., М., 1977; [8] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 6, с. 51—116; [9] Дубовицкий А. Я., Милютин А. А., «Журн. вычисл. матем. и матем. физики», 1965, т. 5, № 3, с. 395—453; [10] Neustadt L. W., Optimizations. A theory of necessary conditions, Princeton, 1974; [11] Пшеничный Б. Н., Необходимые условия экстремума, М., 1969; [12] Clarke F. H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1975, v. 205, p. 247—62; [13] Sussmann H. J., «Math. Syst. Theory», 1977, v. 10, № 3, p. 263—284; [14] Лионс Ж., Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, пер. с франц., М., 1972; [15] Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, М., 1966; [16] его же, Оптимальное управление дискретными системами, М., 1973; [17] Габасов Р., Кириллова Ф. М., Особые оптимальные управления, М., 1973; [18] Кротов В. Ф., Букреев В. З., Гурман В. И., Новые методы вариационного исчисления в динамике полета, М., 1969; [19] Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 6, с. 85—148; [20] Куржанский А. Б., Управление и наблюдение в условиях неопределенности, М., 1977; [21] Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н., Введение в минимакс, М., 1972.

А. Б. Куржанский.

ОПТИМАЛЬНОСТИ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ — условия, обеспечивающие оптимальность данного ре-

шения задачи вариационного исчисления в выбранном классе кривых сравнения.

О. д. у. с л а б о г о м и н и м у м а (см. [1]): для того чтобы кривая $\overline{y}(x)$ доставляла слабый минимум функционалу

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx \qquad (1)$$

при граничных условиях

$$y(x_0)=y_0,\ \ y(x_1)=y_1,$$

достаточно, чтобы выполнялись следующие условия.

1) Кривая $\overline{y}(x)$ должна быть экстремалью, т. е. удовлетворять *Эйлера уравнению*

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0.$$

2) Вдоль кривой $\overline{y}(x)$, включая ее концы, должно выполняться усиленное *Лежандра условие*

$$F_{y'y'}(x,\ y,\ y')>0.$$

3) Кривая $\overline{y}(x)$ должна удовлетворять усиленному *Якоби условию*, требующему, чтобы решение уравнения Якоби

$$\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)\eta-\frac{d}{dx}(F_{y'y'}\eta')=0 \qquad (2)$$

с начальными условиями

$$\eta(x_0)=0,\quad \eta'(x_0)=1$$

не обращалось в нуль в точках замкнутого справа интервала $x_0<x\leqslant x_1$.

Коэффициенты уравнения Якоби (2), представляющего собой линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка, вычисляются вдоль экстремали $\overline{y}(x)$ и представляют известные функции от x.

Для с и л ь н о г о м и н и м у м а достаточно, чтобы дополнительно, помимо перечисленных выше, выполнялось следующее условие.

4) Существует окрестность кривой $\overline{y}(x)$, в каждой точке $(x,\ y)$ к-рой при любом y' выполняется неравенство

$$\mathcal{E}(x,\ y,\ u(x,\ y),\ y')\geqslant 0, \qquad (3)$$

где

$$\mathcal{E}(x,\ y,\ u,\ y')=F(x,\ y,\ y')-F(x,\ y,\ u)-$$
$$-(y'-u)F_{y'}(x,\ y,\ u)$$

— функция Вейерштрасса, а $u(x,\ y)$ — наклон поля экстремалей, окружающего $\overline{y}(x)$.

На самой экстремали $\overline{y}(x)$ условие (3) принимает вид

$$\mathcal{E}(x,\ \overline{y},\ \overline{y}',\ y')=$$
$$=F(x,\ \overline{y},\ y')-F(x,\ \overline{y},\ \overline{y}')-(y'-\overline{y}')F_{y'}(x,\ \overline{y},\ \overline{y}')\geqslant 0. \qquad (4)$$

Условие (4) является необходимым для сильного минимума; оно наз. н е о б х о д и м ы м у с л о в и е м В е й е р ш т р а с с а. Таким образом, в отличие от достаточных условий слабого минимума, к-рые требуют выполнения нек-рых усиленных необходимых условий в точках самой экстремали, в достаточных условиях сильного минимума требуется выполнение необходимого условия Вейерштрасса в нек-рой окрестности экстремали. В общем случае нельзя ослабить формулировку достаточных условий сильного минимума, заменив требование выполнения условия Вейерштрасса в окрестности экстремали на усиленное условие Вейерштрасса (условие (4) со знаком строгого неравенства) в точках экстремали (см. [1]).

Для неклассических вариационных задач, рассматриваемых в *оптимального управления математической*

теории, существует несколько подходов к установлению О. д. у. абсолютного экстремума.

Пусть поставлена задача оптимального управления, в к-рой требуется определить минимум функционала

$$J = \int_0^{t_1} f^0(x,\ u)\, dt, \tag{5}$$

$$f^0\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R},$$

при условиях

$$\dot{x} = f(x,\ u),\ f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

$$x(0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \tag{7}$$

$$u \in U, \tag{8}$$

где U — заданное замкнутое множество p-мерного пространства.

При использовании метода динамического программирования [3] О. д. у. формулируются следующим образом. Для того чтобы управление $u(t)$ было оптимальным управлением в задаче (5)—(8), достаточно, чтобы:

1) существовала такая непрерывная функция $S(x)$, к-рая имеет непрерывные частные производные при всех x, за исключением, быть может, нек-рого кусочно гладкого множества размерности меньше n, равна нулю в конечной точке x_1, $S(x_1)=0$, и удовлетворяет уравнению Беллмана

$$\max_{u \in U} \left(\frac{\partial S}{\partial x} f(x,\ u) - f^0(x,\ u) \right) = 0; \tag{9}$$

2) $u(t) = v(x(t))$, при $0 \leqslant t \leqslant t_1$, где $v(x)$ — синтезирующая функция, определяемая из уравнения Беллмана:

$$\frac{\partial S}{\partial x} f(x,\ v(x)) - f^0(x,\ v(x)) =$$

$$= \max_{u \in U} \left(\frac{\partial S}{\partial x} f(x,\ u) - f^0(x,\ u) \right) = 0.$$

В действительности при использовании метода динамич. программирования получается более сильный результат: О. д. у. для множества различных управлений, переводящих фазовую точку из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние x_1.

В более общем случае, когда рассматривается неавтономная система, т. е. подинтегральная функция и вектор-функция правых частей зависят еще и от времени t, функция S должна зависеть от t и к левой части уравнения (9) следует добавить слагаемое $\frac{\partial S}{\partial t}$. Имеется доказательство (см. [4]), в к-ром удалось снять весьма стеснительное и не выполняющееся в большинстве задач, но обычно предполагаемое условие непрерывной дифференцируемости функции $S(x)$ для всех x.

О. д. у. могут быть построены на основе принципа максимума Понтрягина. Если в нек-рой области G фазового пространства осуществлен регулярный синтез, то все траектории, полученные с помощью принципа максимума при построении регулярного синтеза, являются оптимальными в области G.

Определение регулярного синтеза хотя и является довольно громоздким, но по существу не накладывает особых ограничений на задачу (5)—(8).

Существует другой подход к установлению О. д. у. (см. [5]). Пусть $\varphi(x)$ — функция, непрерывная вместе со своими частными производными при всех допустимых x, принадлежащих заданной области G, и

$$R(x,\ u) = \varphi_x' f(x,\ u) - f^0(x,\ u). \tag{10}$$

Для того чтобы пара $\bar{u}(t)$, $\bar{x}(t)$ доставляла абсолютный минимум в задаче (5)—(8), достаточно существование такой функции $\varphi(x)$, что

$$R(\bar{x},\ \bar{u}) = \max_{x \in G,\ u \in U} R(x,\ u). \tag{11}$$

Допускаются соответствующие изменения приведенной формулировки О. д. у. для более общих случаев неавтономной системы, задач с функционалами типа Майера и Больца (см. *Больца задача*), а также для скользящих оптимальных режимов (см. [5]).

Исследовались вариационные задачи с функционалами в виде кратных интегралов и дифференциальными связями в форме уравнений с частными производными, в к-рых рассматриваются функции нескольких переменных (см. [6]).

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950; [2] Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [3] Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960; [4] Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, М., 1966; [5] Кротов В. Ф., «Автоматика и телемеханика», 1962, т. 23, № 12, с. 1571—83; 1963, т. 24, № 5, с. 581—98; [6] Бутковский А. Г., Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, М., 1965. *И. Б. Вапнярский.*

ОПТИМАЛЬНОСТИ ПРИНЦИПЫ — формальные описания различных представлений об оптимальном. Обычно О. п. отражают те или иные черты интуитивного понимания устойчивости, выгодности и справедливости. Существенно, что одновременная реализация всех (или хотя бы достаточно большого числа) таких черт часто оказывается невозможной ввиду их формальной несовместности. По мере того как теория О. п. приобретает аксиоматич. характер, создаются новые О. п., *уже не всегда обладающие интуитивной прозрачностью.*

Проблемы О. п. возникают, напр., в тех случаях, когда ищется значение переменного, одновременно экстремизирующее несколько заданных функций (т. н. многокритериальные экстремальные задачи). Задачи, требующие для своего решения привлечения нетривиальных О. п., фактически относятся к *игр теории.* Одним из наиболее простых теоретико-игровых О. п. является *минимакса принцип.* Другие О. п. реализуются в виде *с-ядра* решения по Нейману—Моргенштерну, *Шепли вектора* и т. д.

О принципе оптимальности Беллмана см. *Динамическое программирование.* *Н. Н. Воробьев.*

ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕЖИМ ОСОБЫЙ, особое оптимальное управление,— оптимальное управление, для к-рого на нек-ром участке времени одновременно выполняются условия

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}=0, \tag{2}$$

где H — *Гамильтона функция.* В векторном случае, когда О. р. о. имеет место по k, $k>1$, компонентам управления, условие (1) заменяется на k условий

$$\frac{\partial H}{\partial u_s}=0,\ s=1,\ \ldots,\ k, \tag{3}$$

а вместо равенства (2) требуется обращение в нуль определителя

$$\left|\frac{\partial^2 H}{\partial u_s\,\partial u_p}\right|=0,\ p,\ s=1,\ \ldots,\ k. \tag{4}$$

На О. р. о. функция Гамильтона H стационарна, но ее второй дифференциал не является отрицательно определенным, т. е. максимум H по u (при u, изменяющемся внутри допустимой области) оказывается «размытым».

Наиболее типичными задачами, в к-рых может иметь место О. р. о., являются задачи оптимального управления, в к-рых подинтегральная функция и правые части линейно зависят от управления.

Ниже рассматриваются задачи такого рода сначала со скалярным особым управлением.

Пусть требуется определить минимум функционала

$$J = \int_0^{t_1} (F(x) + u\Phi(x))\, dt \tag{5}$$

при условиях связи

$$\dot{x}^i = f^i(x) + u\varphi^i(x), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

граничных условиях

$$x(0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \tag{7}$$

и ограничениях на управление

$$|u| \leqslant 1. \tag{8}$$

Необходимые условия, к-рым должен удовлетворять О. р. о., позволяют заранее исследовать задачу (5)—(8) и выделить многообразия особых участков, на к-рых оптимальное управление лежит внутри допустимой области: $|u|<1$. Пристраивая к ним неособые участки, удовлетворяющие граничным условиям (7), с управлением $|u|=1$, определяемым из *Понтрягина принципа максимума*, можно получить оптимальное решение задачи (5)—(8).

Согласно принципу максимума оптимальное управление при любом $t \in [0, t_1]$ должно доставлять максимум функции Гамильтона

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = \max_{|u| \leqslant 1} H(\psi(t), x(t), u), \tag{9}$$

где

$$H(\psi, x, u) = -(F(x) + u\Phi(x)) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i (f^i(x) + u\varphi^i(x)),$$

а $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ — нек-рая не обращающаяся в нуль сопряженная вектор-функция, удовлетворяющая системе уравнений

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Условие (2) выполняется для любого управления, а не только для О. р. о.

На тех участках времени, на к-рых $\frac{\partial H}{\partial u} \neq 0$, условие (9) определяет неособое оптимальное управление, принимающее граничные значения

$$u(t) = \operatorname{sign} \frac{\partial H}{\partial u} = \pm 1.$$

Таким образом, участки $[\tau_0, \tau_1]$ с оптимальным особым управлением

$$|u(t)| < 1$$

могут появиться лишь при выполнении условия (1):

$$\frac{\partial H(\psi(t), x(t), u(t))}{\partial u} = 0, \quad \tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1, \tag{11}$$

при к-ром функция Гамильтона перестает явно зависеть от управления u. Следовательно, для задач, линейных по управлению, условие (9) не позволяет непосредственно определить оптимальное особое управление $u(t)$.

Пусть функция $\frac{\partial H}{\partial u}$ дифференцируется по t в силу систем (6), (10) до тех пор, пока управление u не войдет с ненулевым коэффициентом в очередную производную. Доказывается (см. [1]—[3]), что управление u может войти с ненулевым коэффициентом лишь в четную производную, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^s}{dt^s}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)\right) = 0, \ s = 1, \ldots, 2q-1, \\ \frac{d^{2q}}{dt^{2q}}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = a(\psi, x) + u \cdot b(\psi, x), \ b(\psi(t), x(t)) \neq 0, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

и что необходимым условием оптимальности особого управления является выполнение неравенства

$$(-1)^q\, b\,(\psi, x) = (-1)^q \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right) \right) \leqslant 0. \qquad (13)$$

Если $b(\psi(t), x(t)) \neq 0$ на всем отрезке, то оптимальное особое управление

$$u(t) = -\frac{a(\psi(t), x(t))}{b(\psi(t), x(t))}, \quad \tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1.$$

Поскольку условия (12) получены в результате последовательного дифференцирования (11), то на участке особого режима, в частности в точках сопряжения τ_0 и τ_1 особого и неособого участков, помимо равенства (11), выполняется $2q-1$ равенств

$$\frac{d^s}{dt^s} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = 0, \quad s = 1, \ \ldots, \ 2q-1. \qquad (14)$$

Анализ условий (11), (14) показывает, что для случаев четного и нечетного q характер сопряжения особого и неособого участков траектории различен (см. [4]).

При четном q оптимальное управление на неособом участке не может быть кусочно непрерывным. Разрывы управления (точки переключения) сгущаются к точке сопряжения с особым участком, так что оптимальное управление оказывается измеримой по Лебегу функцией *со счетным множеством точек разрыва*.

При нечетном q только две кусочно гладкие оптимальные траектории могут входить в точку, лежащую на особом участке (или исходить из нее). Пусть размерность многообразия особых участков в n-мерном пространстве фазовых координат равна k. Тогда в рассматриваемом случае нечетного q оптимальные траектории с кусочно непрерывным управлением заполняют в фазовом пространстве лишь нек-рую поверхность размерности $k+1$. Поэтому при $k \ll n-2$ почти все оптимальные траектории будут иметь управление с бесконечным числом точек переключения.

Сформулировано предположение (см. [4]), что $k = n-q$. Если это так, то при $q \geqslant 2$ сгущение точек переключения перед выходом на особый участок (или сходом с него) *является типичным явлением для задач типа* (5)—(8).

Пример сопряжения неособого и особого участков оптимального управления с бесконечным числом переключений приведен в [5].

При четном q, $q \geqslant 2$, оптимальное особое управление на неособом участке, примыкающем к особому, не может быть кусочно непрерывным, а имеет бесконечное число точек переключения, сгущающихся к точке входа τ_0, т. е. не существует $\varepsilon > 0$ такого, что в промежутке $[\tau_0 - \varepsilon, \ \tau_0]$ оптимальное управление постоянно.

В наиболее часто встречающемся О. р. о. величина $q=1$. Для этого случая сопряжение неособого и особого участков осуществляется с помощью кусочно непрерывного оптимального управления.

В более общем случае О. р. о., в к-ром рассматривается k, $k>1$, управлений:

$$J = \int_0^{t_1} \left(F(x) + \sum\nolimits_{s=1}^{k} u_s \Phi_s(x) \right) dt, \qquad (15)$$

$$\dot{x}^i = f^i(x) + \sum\nolimits_{s=1}^{k} u_s \varphi_s^i(x), \qquad (16)$$

(как и в скалярном случае) условие (4), в силу линейности, выполняется для любого управления. На участке $[\tau_0, \ \tau_1]$ О. р. о. по k компонентам с $|u_s| < 1$ должны выполняться k условий (3):

$$M_s(\psi(t), x(t)) = \frac{\partial H(\psi(t), x(t), u(t))}{\partial u_s} = 0, \qquad (17)$$

$$\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1, \quad s = 1, \ \ldots, \ k,$$

где $$H(\psi, x) = -\left(F(x) + \sum_{s=1}^{k} u_s \Phi_s(x)\right) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i \left(f^i(x) + \sum_{s=1}^{k} u_s \varphi_s^i(x)\right) = Q(\psi, x) + \sum_{s=1}^{k} u_s M_s(\psi, x),$$

а ψ_i определяются из (10).

Дальнейшие необходимые условия оптимальности для О. р. о. по нескольким компонентам отличаются от рассмотренного выше случая О. р. о. по одной компоненте следующими особенностями. На участке О. р. о. должны выполняться необходимые условия двух видов. Одно из них, типа неравенства, является аналогом условия (13). Другие необходимые условия являются условиями типа равенства и не имеют более ранних аналогий (см. [6]).

Дифференцируя (17) полным образом по t, получают систему k линейных уравнений относительно k неизвестных $u_1, \ldots, u_k$:

$$\frac{dM_s(\psi, x)}{dt} = \sum_{p=1}^{k} u_p \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial M_s}{\partial x^i} \varphi_p^i - \frac{\partial M_p}{\partial x^i} \varphi_s^i\right)\right] + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial M_s}{\partial x^i} f^i - \frac{\partial Q}{\partial x^i} \varphi_s^i\right) = 0, \quad s = 1, \ldots, k. \tag{18}$$

Матрица коэффициентов системы (18)

$$a_{sp} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial M_s}{\partial x^i} \varphi_p^i - \frac{\partial M_p}{\partial x^i} \varphi_s^i\right), \quad s, p = 1, \ldots, k,$$

является кососимметричной: $a_{sp} = -a_{ps}$. Отсюда, в частности, следует, что элементы a_{ss}, стоящие на главной диагонали матрицы (a_{sp}), равны нулю. Остальные элементы a_{sp}, $s \neq p$, в системе (18) в общем случае на произвольной траектории, соответствующей нек-рому неоптимальному управлению, отличны от нуля. На О. р. о. по k компонентам должны выполняться необходимые условия, требующие обращения в нуль всех $\frac{k(k-1)}{2}$ коэффициентов системы (18) (см. [6]):

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial M_s}{\partial x^i} \varphi_p^i - \frac{\partial M_p}{\partial x^i} \varphi_s^i\right) = 0, \quad s, p = 1, \ldots, k, \quad s < p. \tag{19}$$

Кроме этих условий должно выполняться условие типа неравенства (являющееся аналогом условия (13) для О. р. о. по одной компоненте при $q = 1$):

$$\sum_{s, p=1}^{k} \frac{\partial}{\partial u_p} \left(\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u_s}\right)\right) \delta u_s \delta u_p \geqslant 0. \tag{20}$$

Условия (13), (20) можно рассматривать как обобщение *Лежандра условия* и *Клебша условия* на случай О. р. о., поэтому указанные неравенства наз. иногда обобщенным условием Лежандра — Клебша.

Важность выявления и исследования О. р. о. в задачах оптимального управления объясняется следующим свойством О. р. о. (см. [4]): если оптимальная траектория, исходящая из нек-рой точки, содержит участок О. р. о., то этим же свойством обладают все оптимальные траектории, исходящие из близких точек.

Исследованы нек-рые вопросы, связанные с определением порядка О. р. о. для линейных и нелинейных по управлению задач (см. [8]).

Все приведенные выше результаты по О. р. о. получены из рассмотрения второй вариации функционала. Оказывается, что можно получить дополнительные необходимые условия оптимальности особого режима из рассмотрения третьей и четвертой вариаций функционала (см. [9]).

Лит.: [1] Келли Г., «Ракетная техника и космонавтика», 1964, № 8, с. 26—29; [2] Роббинс Г., там же, 1965, № 6, с.

139—45; [3] Кошр., Мойер Г., там же, 1965, № 8, с. 84—90; [4] Бершанский Я. М., «Автоматика и телемеханика», 1979, № 3, с. 5—11; [5] Фуллер А. Т., в кн.: Тр. 1 Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. Теория дискретных оптимальных и самонастраивающихся систем, М., 1961, с. 584—605; [6] Ваннярский И. Б., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1967, т. 7, № 2, с. 259—83; [7] Krener A., «SIAM J. Contr. and Optimiz.», 1977, v. 15, № 2, p. 256—93; [8] Lewis R. M., там же, 1980, v. 18, № 1, p. 21—32; [9] Скородинский И. Т., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1979, т. 19, № 5, с. 1134—40; [10] Габасов Р., Кириллова Ф. М., Особые оптимальные управления, М., 1973.

И. Б. Ваннярский.

ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕЖИМ СКОЛЬЗЯЩИЙ — термин, используемый в теории оптимального управления для описания оптимального способа управления системой в случае, когда минимизирующая последовательность управляющих функций не имеет предела в классе измеримых по Лебегу функций.

Пусть, напр., требуется найти минимум функционала

$$J(x, u) = \int_0^3 (x^2 - u^2)\, dt \tag{1}$$

при условиях

$$\dot{x} = u, \tag{2}$$

$$x(0) = 1, \quad x(3) = 1, \tag{3}$$

$$|u| \leqslant 1. \tag{4}$$

Для получения минимума функционала (1) желательно иметь при каждом t как можно меньшее значение $|x(t)|$ и как можно большее значение $|u(t)|$. Первому требованию, с учетом условия связи (2), граничных условий (3) и ограничений на управление (4), удовлетворяет траектория

$$x(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0, & 1 < t < 2, \\ t-2, & 2 \leqslant t \leqslant 3. \end{cases} \tag{5}$$

Если бы траекторию (5) можно было построить при нек-ром управлении, принимающем при всех t граничные значения

$$u(t) = +1 \text{ или } u(t) = -1, \tag{6}$$

был бы получен абсолютный минимум функционала (1). Однако «идеальная» траектория (5) не может быть построена ни при какой управляющей функции $u(t)$, удовлетворяющей (6), поскольку при $1<t<2$ $u(t)\equiv 0$. Тем не менее можно, используя управляющие функции $u_n(t)$, реализующие при $n \to \infty$ и $1<t<2$ все более частые переключения с 1 на -1 и обратно:

$$u_n(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ +1, & 1 + \frac{h}{n} < t \leqslant 1 + \frac{2h+1}{2n}, \quad h = 0, 1, \ldots, n-1, \\ -1, & 1 + \frac{2h+1}{2n} < t \leqslant 1 + \frac{h+1}{n}, \quad h = 0, 1, \ldots, n-1, \\ +1, & 2 < t \leqslant 3, \\ & n = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{7}$$

построить минимизирующую последовательность управлений $\{u_n(t)\}$, удовлетворяющую (6), и минимизирующую последовательность траекторий $\{x_n(t)\}$, сходящуюся к «идеальной» траектории (5).

Каждая из траекторий $x_n(t)$ отличается от (5) только на интервале (1, 2), на к-ром вместо точного движения по оси x она обеспечивает «пилообразное» движение с n одинаковыми «зубьями», расположенными над осью x. «Зубья пилы» становятся все мельче при $n \to \infty$, так что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$, $1<t<2$. Таким образом, минимизирующая последовательность траекторий $\{x_n(t)\}$ сходится к (5), но минимизирующая последовательность управлений $\{u_n(t)\}$, реализующих при $n \to \infty$ и $1<t<2$ все

более частые переключения с 1 на -1 и обратно, не имеет предела в классе измеримых (а тем более в классе кусочно непрерывных) функций. Это означает, что на участке (1, 2) имеет место О. р. с.

Используя не очень строгие рассуждения, можно описать полученный О. р. с. следующим образом: оптимальное управление в каждой точке интервала (1, 2) «скользит», т. е. перескакивает со значения $+1$ на -1 и обратно так, что для любого, сколь угодно малого, интервала времени мера множества точек t, в к-рых $u=+1$, равна мере множества точек t, в к-рых $u=-1$, что обеспечивает, в силу уравнения (2), точное движение по оси x. Приведенное описание характера изменения оптимального управления на участке скользящего режима является нестрогим, ибо оно не удовлетворяет обычному определению функции.

Можно дать строгое определение О. р. с., если наряду с исходной задачей (1)—(4) ввести в рассмотрение вспомогательную, расщепленную задачу: найти минимум функционала

$$I(x,\ \alpha,\ u)=\int_0^3 \left(x^2-\alpha_0 u_0^2-\alpha_1 u_1^2\right) dt \tag{8}$$

при условиях

$$\dot{x}=\alpha_0 u_0+\alpha_1 u_1, \tag{9}$$

$$x(0)=1,\quad x(3)=1, \tag{10}$$

$$|u_0|\leqslant 1,\ |u_1|\leqslant 1,\ \alpha_0+\alpha_1=1,\ \alpha_0\geqslant 0,\ \alpha_1\geqslant 0. \tag{11}$$

Расщепленная задача (8)—(11) отличается от исходной тем, что: вместо одной управляющей функции $u(t)$ вводятся две независимые управляющие функции $u_0(t)$ и $u_1(t)$; подинтегральная функция и функция, стоящая в правой части уравнения (2) исходной задачи, заменяются линейной выпуклой комбинацией соответствующих функций, взятых при различных управлениях $u_0(t)$ и $u_1(t)$ с коэффициентами $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, к-рые также рассматриваются как управляющие функции.

Таким образом, в задаче (8)—(11) имеется 4 управления u_0, u_1, α_0, α_1. Поскольку α_0 и α_1 связаны условием типа равенства $\alpha_0+\alpha_1=1$, то от одного из управлений α_0 или α_1 можно избавиться, выразив его через другое. Однако для удобства последующего анализа целесообразно оставить оба эти управления в явном виде.

В отличие от исходной задачи оптимальное управление в расщепленной задаче (8)—(11) существует. На участке О. р. с. исходной задачи оптимальное управление расщепленной задачи имеет вид

$$\alpha_0(t)=\alpha_1(t)=\frac{1}{2},\quad u_0(t)=-1,\quad u_1(t)=+1,\quad 1<t<2,$$

а на участках входа и выхода

$$\alpha_0(t)=1,\ u_0(t)=-1,\ \alpha_1(t)=0,\ u_1(t)\text{ — любая},\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$\alpha_1(t)=1,\ u_1(t)=+1,\ \alpha_0(t)=0,\ u_0(t)\text{ — любая},\quad 2\leqslant t\leqslant 3.$$

На участке О. р. с. управления α_0 и α_1, линейно входящие в правую часть и подинтегральную функцию, принимают значения, лежащие внутри допустимой области. Это означает, что О. р. с. исходной задачи (1)—(4) есть особый оптимальный режим, или особое оптимальное управление, для вспомогательной, расщепленной задачи (8)—(11).

Аналогичные результаты для О. р. с. имеют место в общем случае задачи оптимального управления. Пусть требуется найти минимум функционала

$$J(x,u)=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,\ x,\ u)\,dt, \tag{12}$$

$$f^0(t,\ x,\ u):\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R},$$

при условиях

$$\dot{x} = f(t, x, u),\ f(t, x, u): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (13)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad (14)$$

$$u \in U. \quad (15)$$

О. р. с. характеризуется неединственностью максимума по u функции Гамильтона

$$H(t, x, \psi, u) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f^i(t, x, u),$$

где ψ_i — сопряженные переменные (см. [2]). При этом на участке $[\tau_1, \tau_2]$ «скольжения» по $k+1$, $k>1$, максимумам $u_0, u_1, \ldots, u_k$ исходная задача расщепляется и принимает вид

$$I(x, \alpha, u) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{s=0}^{k} \alpha_s f^0(t, x, u_s)\, dt, \quad (16)$$

$$\dot{x} = \sum_{s=0}^{k} \alpha_s f(t, x, u_s), \quad (17)$$

$$x(t) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \quad (18)$$

$$u_s \in U,\ \sum_{s=0}^{k} \alpha_s = 1,\ \alpha_s \geqslant 0, s = 0, 1, \ldots, k. \quad (19)$$

Функцию Гамильтона для задачи (16)—(19)

$$H(t, x, \psi, \alpha, u) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i \left(\sum_{s=0}^{k} \alpha_s f^i(t, x, u_s) \right)$$

после исключения α_0 и перегруппировки слагаемых можно привести к виду

$$H(t, x, \psi, \alpha, u) =$$

$$= \sum_{s=1}^{k} \left(\sum_{i=0}^{n} \psi_i f^i(t, x, u_0) - \sum_{i=0}^{n} \psi_i f^i(t, x, u_s) \right) \alpha_s =$$

$$= \sum_{s=k}^{k} (H(t, x, \psi, u_1) - H(t, x, \psi, u_s))\, \alpha_s. \quad (20)$$

Поскольку все $H(t, x, \psi, u_s)$, $s=0, 1, \ldots, k$, есть равные между собой максимумы H по u на множестве U, то на участке $[\tau_1, \tau_2]$ О. р. с. с $k+1$ максимумами коэффициенты при k независимых линейных управлениях $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ функции Гамильтона расщепленной задачи (12)—(15) равны нулю. О. р. с. со «скольжением» по $k+1$ максимумам есть особый оптимальный режим по k компонентам для расщепленной задачи (16)—(19). Максимально возможное значение k, к-рое целесообразно брать при исследовании скользящих режимов, определяется из условия выпуклости множества значений вектора правых частей и выпуклости вниз точной нижней границы множества значений подинтегральной функции расщепленной системы, получающихся, когда вектор управления (α_s, u_s), $s=0, 1, \ldots, k$ пробегает всю допустимую область значений. Таким образом, $k \leqslant n$ — оценка сверху для k. В самом общем случае все О. р. с. исходной задачи могут быть получены как особые оптимальные управления расщепленной задачи, записанной при $k=n$. В частности, в рассмотренном выше примере расщепленная задача рассматривалась при $k=1$, поскольку условия связи содержали только одно уравнение; исследование расщепленной задачи (8)—(11) было достаточно для исследования О. р. с. исходной задачи (1)—(4).

Если известны $k+1$ управлений $u_0(t), u_1(t), \ldots, u_k(t)$, доставляющих равные между собой абсолютные максимумы функции Гамильтона $H(t, x, \psi, u)$ в допустимой области U, то анализ О. р. с. сводится к исследованию особого оптимального режима по k компонентам. Это исследование может быть проведено с использованием необходимых условий оптимальности особого управления (см. *Оптимальный режим особый*).

Исследовались О. р. с. с помощью достаточных условий оптимальности (см. [4]).

Лит.: [1] Гамкрелидзе Р. В., «Докл. АН СССР», 1962, т. 143, № 6, с. 1243—45; [2] Понтрягин Л. С., Болтян-

ский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969; [3] Ваннярский И. Б., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1967, т. 7, № 2, с. 259—83; [4] Кротов В. Ф., «Автоматика и телемеханика», 1963, т. 24, № 5, с. 581—98.

И. Б. Ваннярский.

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МЕТОДА — обычно то же, что *оптимизация вычислительных алгоритмов.* Иногда, однако, эти понятия трактуются различно. Напр., можно говорить об оптимальности конкретного сеточного метода решения краевой задачи на нек-ром классе задач, имея в виду, что он требует вычисления правой части в минимальном числе точек. При рассмотрении вопросов об оптимизации вычислительного алгоритма изучается дополнительно ряд других моментов: способы решения возникающей системы сеточных уравнений, программная реализация этих способов и т. п.

Н. С. Бахвалов.

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ — выбор оптимального вычислительного алгоритма при решении прикладных задач или при разработке систем стандартных программ. При решении конкретной задачи оптимальная тактика поведения может состоять в том, чтобы не оптимизировать метод решения, а подключиться к стандартной программе или воспользоваться простейшим методом, составление программы для к-рого не потребует много усилий.

Теоретич. постановка вопроса об О. в. а. имеет следующее основание. При выборе метода решения задачи исследователь ориентируется на нек-рые ее свойства и выбирает алгоритм решения в зависимости от них, причем алгоритм будет применимым и при решении других задач, обладающих этими свойствами. Поэтому при теоретич. исследовании алгоритмов вводят в рассмотрение нек-рый класс задач P, обладающих определенными свойствами. При выборе метода решения исследователь располагает нек-рым множеством M методов решения. При применении метода m к решению задачи p решение будет получено с нек-рой погрешностью $\varepsilon(p, m)$. Величина

$$E(P, m) = \sup_{p \in P} |\varepsilon(p, m)|$$

наз. погрешностью метода m на классе задач P, а

$$E(P, M) = \inf_{m \in M} E(P, m)$$

— оптимальной на классе P оценкой погрешности методов из множества M. Если существует метод такой, что

$$E(P, m_0) = E(P, M),$$

то этот метод наз. оптимальным. Такая схема рассмотрения проблемы О. в. а., восходящая к А. Н. Колмогорову [2], изучает множество задач вычисления интеграла

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

при условии $|f^{(m)}| \leqslant A$, M — множество всевозможных квадратур

$$I(f) \approx \sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j);$$

каждая квадратура задается совокупностью $2N$ чисел C_j и x_j. Задача о минимальном количестве информации (см. [2], [3]), необходимой для запоминания функции из данного класса с требуемой точностью, также может быть уложена в эту схему. Рассматривается [4] более сложная постановка проблемы, где трудоемкость реализации алгоритма в определенном смысле увязывается с объемом используемой памяти. Оптимальные алгоритмы построены для незначительного числа задач типа [1].

Однако для большого числа вычислительных задач построены методы, по своим асимптотич. характеристикам близкие к оптимальным (см. [5]—[8]).

Исследование характеристик оптимальных на классах вычислительных алгоритмов решения задач (см. [5], [7]) складывается из двух частей: построение конкретных методов решения с возможно лучшими характеристиками и получение оценок снизу характеристик вычислительных алгоритмов (см. [2]—[4], [9]). По существу первая часть вопроса является основной проблемой теории численных методов и в большинстве случаев рассматривается независимо от проблемы оптимизации. Получение оценок снизу обычно сводится к оценке снизу ε-энтропии или поперечников соответствующих пространств; иногда оно проводится независимо, но с использованием техники, аналогичной технике получения указанных оценок.

Вычислительные алгоритмы условно делят на п а с с и в н ы е и а к т и в н ы е. В первом случае алгоритм решения задачи не зависит от получаемой в ходе решения задачи информации, а во втором — зависит. При вычислении интеграла используемая информация о функции есть обычно информация о ее значениях в N точках. В случае пассивного алгоритма интеграл вычисляется по формуле

$$I(f) \approx \sum_{j=1}^{N} C_j f(P_j),$$

где веса C_j и P_j из области Ω определения f задаются заранее. Активные алгоритмы вычисления интеграла укладываются в следующую схему: задается точка $P_1 \in \Omega$ и функции

$$Q_q = \Phi_q(Q_1, \ldots, Q_{q-1}; y_1, \ldots, y_{q-1}), \quad q = 2, \ldots, N,$$
$$S_N(Q_1, \ldots, Q_N; y_1, \ldots, y_N),$$

где y_j, S_N — числа, $Q_j \in \Omega$. Последовательно вычисляют

$$f(P_1), \quad P_2 = \Phi_2(P_1; f(P_1)), \quad f(P_2),$$
$$P_3 = \Phi_3(P_1, P_2; f(P_1), f(P_2)), \ldots, f(P_N)$$

и полагают

$$I(f) \approx S_N(P_1, \ldots, P_N; f(P_1), \ldots, f(P_N)).$$

В случае выпуклых классов подинтегральных функций, центрально симметричных относительно функции $f=0$, оптимальная оценка на классе пассивных алгоритмов совпадает с оптимальной оценкой на классе активных алгоритмов (см. [10], [11]).

В практике численного интегрирования активные алгоритмы типа алгоритмов интегрирования с автоматич. выбором шага (см. [10]) показали свое превосходство над пассивными алгоритмами. Это подтверждает общепринятую точку зрения о том, что формальная схема О. в. а. зачастую не охватывает специфики реальных задач. При решении задач оптимизации (в частности, задач минимизации) пассивные алгоритмы практически не употребляются (см. [12], [13]). Выше за единицу трудоемкости алгоритма неявно принимается трудоемкость вычисления одного значения функции из нек-рого класса F. Возможны и другие подходы к оценке оптимальности характеристик алгоритма. Напр., за единицу трудоемкости принимается трудоемкость вычисления нек-рого функционала $l(f)$ из множества функционалов $L(f)$. В этом случае оценка снизу трудоемкости алгоритмов производится с помощью теории поперечников (см. [14], [15]). Трудоемкость алгоритма складывается не только из трудоемкости получения информации об исходных данных, но и из трудоемкости обработки полученной информации. В настоящее время, по-видимому, нельзя привести примеров классов реальных вычислительных задач, где бы были получены оценки снизу трудоемкости алгоритмов, отличные от информационных

оценок рассматриваемого типа. Однако для ряда задач невычислительного характера такого типа оценки известны (см. *Алгоритма сложность*).

В случае, когда исследование проблемы О. в. а. имеет своей целью решение задач на ЭВМ, проблема О. в. а. приобретает дополнительные оттенки, связанные с устойчивостью алгоритма к вычислительной погрешности, с ограничением на объем разных видов используемой памяти (см. *Вычислительный алгоритм*). Выше задача О. в. а. рассматривалась как задача О. в. а. на классах задач. Существенный интерес для практики представляет задача О. в. а. на конкретной задаче (см. [10], [16]). Постановка проблемы оптимизации (см. [16]) заключается в следующем. Дифференциальное уравнение интегрируется методом Рунге — Кутта с переменным шагом. Производится оценка главного члена оценки погрешности. Затем эта оценка оптимизируется по распределению узлов интегрирования (при общем заданном числе узлов). Такой подход к проблеме оптимизации оказал существенное влияние на развитие теории и практики активных алгоритмов численного интегрирования.

Лит.: [1] Никольский С. М., Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979; [2] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1956, т. 108, № 3, с. 385—88; [3] Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 2, с. 3—86; [4] Витушкин А. Г., Оценка сложности задачи табулирования, М., 1959; [5] Бабушка И., Соболев С. Л., «Aplikace mat.», 1965, t. 10, s. 96—129; [6] Бахвалов Н. С., *там же, 1968, t. 13, s. 27—38*; [7] *его же, в кн.:* Международный конгресс математиков в Ницце. 1970. Доклады советских математиков, М., 1972, с. 27—33; [8] *его же, в кн.:* Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы, М., 1964, с. 3—63; [9] его же, «Матем. заметки», 1972, т. 12, в. 6, с. 655—64; [10] его же, Численные методы, 2 изд., М., 1975; [11] его же, «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1971, т. 11, № 4, с. 1014—18; [12] Уайлд Д. Дж., Методы поиска экстремума, пер. с англ., М., 1967; [13] Васильев Ф. П., Численные методы решения экстремальных задач, М., 1980; [14] Оганесян Л. А., Руховец Л. А., Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, Ер., 1979; [15] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [16] Тихонов А. Н., Горбунов А. Д., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1964, т. 4, № 2, с. 232—41.

Н. С. Бахвалов.

ОПЦИОНАЛЬНАЯ σ-АЛГЕБРА — наименьшая σ-алгебра $\mathcal{O}=\mathcal{O}(\mathbb{F})$ множеств из $\Omega\times R_+=\{(\omega,\ t):\omega\in\Omega,\ t\geqslant 0\}$, порожденная всеми отображениями $(\omega,\ t)\rightsquigarrow f(\omega,\ t)$ множества $\Omega\times R_+$ в R, к-рые (для каждого фиксированного $\omega\in\Omega$) являются (по t) непрерывными справа, имеют пределы слева и $\mathbb{F}$-согласованы с неубывающим семейством $\mathbb{F}=(F_t)_{t\geqslant 0}$ под-σ-алгебр $F_t\subseteq F$, $t\geqslant 0$, где $(\Omega,\ F)$ — измеримое пространство. О. σ-а. совпадает с наименьшей σ-алгеброй, порожденной стохастич. интервалами $[\![0,\ \tau]\!]=\{(\omega,\ t):0\leqslant t<\tau(\omega)\}$, где $\tau=\tau(\omega)$ — марковские моменты (относительно $\mathbb{F}=(F_t)_{t\geqslant 0}$). Между опциональными и предсказуемыми σ-алгебрами имеет место соотношение $\mathcal{P}(\mathbb{F})\subseteq\mathcal{O}(\mathbb{F})$.

Лит.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975.

А. Н. Ширяев.

ОПЦИОНАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС — стохастический процесс $X=(X_t(\omega),\ F_t)_{t\geqslant 0}$, являющийся измеримым (как отображение $(\omega,\ t)\rightsquigarrow X(\omega,\ t)=X_t(\omega)$) относительно *опциональной* σ-*алгебры* $\mathcal{O}=\mathcal{O}(\mathbb{F})$.

А. Н. Ширяев.

ОРБИТ МЕТОД — метод изучения унитарных представлений групп Ли. С помощью О. м. была построена теория унитарных представлений нильпотентных групп Ли, а также указана возможность его применения к другим группам [1].

О. м. основан на следующем «экспериментальном» факте: существует глубокая связь между унитарными неприводимыми представлениями группы Ли G и орбитами этой группы в *коприсоединенном представлении*. Решение основных задач теории представлений с помощью О. м. осуществляется следующим образом (см. [2]).

I. Конструкция и классификация неприводимых унитарных представлений. Пусть Ω — орбита действительной группы Ли G в коприсоединенном представлении, F — точка этой орбиты (являющаяся линейным функционалом на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G), $G(F)$ — стабилизатор точки F, $\mathfrak{g}(F)$ — алгебра Ли группы $G(F)$. Поляризацией точки F наз. комплексная подалгебра $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, где $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ — *комплексификация алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, обладающая свойствами:

1) $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{h}=\dim\mathfrak{g}-\frac{1}{2}\dim\Omega$;

2) $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ содержится в ядре функционала F на $\mathfrak{g}$;

3) $\mathfrak{h}$ инвариантна относительно $\mathrm{Ad}\,G(F)$.

Пусть $H^0=\exp(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g})$ и $H=G(F)\cdot H^0$. Поляризация $\mathfrak{h}$ наз. действительной, если $\mathfrak{h}=\overline{\mathfrak{h}}$, и чисто комплексной, если $\mathfrak{h}\cap\overline{\mathfrak{h}}=\mathfrak{g}(F)$. Функционал F определяет характер (одномерное унитарное представление) χ_F^0 группы H^0 по формуле

$$\exp X\longrightarrow\exp 2\pi i\langle F,\ X\rangle.$$

Пусть χ_F^0 продолжается до характера χ_F группы H. Если $\mathfrak{h}$ — действительная поляризация, то пусть $T_{F,\mathfrak{h},\chi_F}$ — индуцированное характером χ_F подгруппы H представление группы G (см. *Индуцированное представление*). Если $\mathfrak{h}$ — чисто комплексная поляризация, то пусть $T_{F,\mathfrak{h},\chi_F}$ — голоморфно индуцированное представление, действующее в пространстве голоморфных функций на G/H.

Первая основная гипотеза состоит в том, что представление $T_{F,\mathfrak{h},\chi_F}$ неприводимо и его класс эквивалентности зависит только от орбиты Ω и от выбора продолжения χ_F характера χ_F^0. Эта гипотеза доказана для нильпотентных групп [1] и для разрешимых групп Ли [5]. Для нек-рых орбит простой особой группы G_2 гипотеза неверна [7]. Возможность продолжения и степень его неоднозначности зависят от топологич. свойств орбиты: препятствием к продолжению служат двумерные когомологии орбиты, а в качестве параметра, нумерующего различные продолжения, можно взять одномерные когомологии орбиты. Более точно, пусть B_Ω — каноническая 2-форма на орбите Ω. *Для* существования продолжения необходимо и достаточно, чтобы *форма* B_Ω *принадлежала целочисленному классу* (т. е. интеграл ее по любому двумерному циклу был *целым числом*); *если это условие выполнено, то множество* продолжений параметризуется характерами фундаментальной группы орбиты.

Вторая основная гипотеза состоит в том, что указанным способом получаются все унитарные неприводимые представления рассматриваемой группы G. Единственным (1983) противоречащим этой гипотезе примером являются т. н. дополнительные серии представлений полупростых групп Ли.

II. Функториальные свойства соответствия между орбитами и представлениями. Значительное место в теории представлений занимают вопросы о разложении на неприводимые компоненты представления, получаемого ограничением на подгруппу H неприводимого представления группы G и индуцированием с помощью неприводимого представления подгруппы $H\subset G$. О. м. дает ответ на эти вопросы в терминах естественной проекции $p:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{h}^*$ (* *означает переход к сопряженному пространству*; *проекция* p состоит в ограничении функционала с $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}$). А именно, пусть G — экспоненциальная группа Ли (для таких групп соответствие между орбитами и представлениями взаимно однозначно).

Тогда неприводимое представление группы G, соответствующее орбите $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$, при ограничении на H разлагается на неприводимые компоненты, соответствующие тем орбитам $\omega \in \mathfrak{h}^*$, к-рые лежат в $p(\Omega)$, а представление группы G, индуцированное неприводимым представлением группы H, соответствующим орбите $\omega \subset \mathfrak{h}^*$, разлагается на неприводимые компоненты, соответствующие тем орбитам $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$, к-рые имеют непустое пересечение с прообразом $p^{-1}(\omega)$. Из этих результатов вытекают два следствия: если неприводимые представления T_i соответствуют орбитам Ω_i, $i=1, 2$, то тензорное произведение $T_1 \otimes T_2$ разлагается на неприводимые компоненты, соответствующие тем орбитам Ω, к-рые лежат в арифметич. сумме $\Omega_1 + \Omega_2$; квазирегулярное представление группы G в пространстве функций на G/H разлагается на неприводимые компоненты, соответствующие тем орбитам $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$, для к-рых образ $p(\Omega) \subset \mathfrak{h}^*$ содержит нуль.

III. Теория характеров. Для характеров неприводимых представлений (как обобщенных функций на группе) предложена [2] следующая универсальная формула:

$$\chi(\exp X) = \frac{1}{p(X)} \int_\Omega e^{2\pi i \langle F, X \rangle} \beta(F), \qquad (*)$$

где $\exp : \mathfrak{g} \to G$ — экспоненциальное отображение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в группу G, $p(X)$ — квадратный корень из плотности инвариантной меры Хаара на G в канонич. координатах, β — форма объема на орбите Ω, связанная с канонической 2-формой B_Ω соотношением $\beta = \frac{B_\Omega^k}{k!}$, $k = \frac{1}{2} \dim \Omega$. Эта формула справедлива для нильпотентных групп, разрешимых групп типа 1, компактных групп, дискретной серии представлений полупростых действительных групп и основной серии представлений комплексных полупростых групп. Для нек-рых вырожденных серий представлений $SL(3, \mathbb{R})$ формула неверна. Из формулы (*) получается простая формула для вычисления инфинитезимального характера неприводимого представления T_Ω, соответствующего орбите Ω, а именно: каждому оператору Лапласа Δ на G может быть сопоставлен Ad^*G-инвариантный многочлен P_Δ на $\mathfrak{g}^*$ так, что значение инфинитезимального характера представления T_Ω на элементе Δ в точности равно значению P_Δ на Ω.

IV. Конструкцию неприводимого унитарного представления группы G по ее орбите Ω в коприсоединенном представлении можно рассматривать как операцию квантования нек-рой гамильтоновой системы, для к-рой Ω играет роль фазового пространства, а G — роль многомерного некоммутативного времени (или группы симметрий). При этом G-орбиты в коприсоединенном представлении — это все G-однородные симплектич. многообразия, допускающие квантование. Таким образом, вторую основную гипотезу можно переформулировать так: каждая элементарная квантовая система с временем (или группой симметрий) G получается квантованием из соответствующей классич. системы (см. [2]).

Обнаружена также связь О. м. с теорией вполне интегрируемых гамильтоновых систем (см. [11]).

Лит.: [1] Кириллов А. А., «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, в. 4, с. 57—110; [2] его же, Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [3] Диксмье Ж., Универсальные обертывающие алгебры, пер. с франц., М., 1978; [4] Simms D. J., Woodhouse N. M. J., Lectures on geometric quantization, B.— Hdlb.— N. Y., 1976; [5] Auslander L., Kostant B., «Invent. math.», 1971, v. 14, p. 255—354; [6] Moore C.C., «Ann. Math.», 1965, v. 82, № 1, p. 146—82; [7] Rothschild L. P., Wolf J. A., «Ann. Sci. Ecole norm. supér. Sér.4», 1974, v. 7, № 2, p. 155—74; [8] Représentations des groupes de Lie résolubles, P., 1972; [9] Гинзбург В. А., «Докл. АН СССР», 1979, т. 249, № 3, с. 525—28; [10] Kirillov A. A., Infinite

dimensional groups, their representations, orbits, invariants, в сб.: Proc. Int. Congr. Math., Helsinki, 1978; [11] Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A., «Invent. math.», 1979, v. 54, № 1, p. 81—100. *А. А. Кириллов.*

ОРБИТА точки x относительно группы G, действующей на множестве X (слева),— множество

$$G(x)=\{g(x)\mid g\in G\}.$$

Множество

$$G_x=\{g\in G\mid g(x)=x\}$$

является подгруппой в G и наз. стабилизатором, или стационарной подгруппой точки x относительно G. Отображение $g\mapsto g(x)$, $g\in G$, индуцирует биекцию между G/G_x и орбитой $G(x)$. О. любых двух точек из X либо не пересекаются, либо совпадают; иначе говоря, О. определяют разбиение множества X. Фактормножество по отношению эквивалентности, определенному этим разбиением, наз. пространством орбит, или фактормножеством X по G, и обозначается X/G. Сопоставление каждой точке ее О. определяет канонич. отображение $\pi_{X,G}: X\to X/G$. Стабилизаторы точек из одной О. сопряжены в G, точнее $G_{g(x)}=gG_xg^{-1}$. Если в X имеется только одна О., то X — однородное пространство группы G; говорят также, что G действует на X транзитивно. Если G — топологич. группа, X — топологич. пространство и действие непрерывно, то X/G обычно снабжается топологией, в к-рой множество $U\subset X/G$ открыто в X/G тогда и только тогда, когда множество $\pi^{-1}_{X,G}(U)$ открыто в X.

Примеры. 1) Пусть G — группа поворотов плоскости X вокруг фиксированной точки a. Тогда О.— это всевозможные окружности с центром в a (в том числе и сама точка a). 2) Пусть G — группа всех невырожденных линейных преобразований конечномерного действительного векторного пространства V, X — множество всех симметрич. билинейных форм на V, а действие G на X определено формулой $(gf)(u,v)=f(g^{-1}(u),\ g^{-1}(v))$ для любых $u,v\in V$. Тогда О. группы G на X — множество форм, имеющих фиксированный ранг и сигнатуру.

Пусть G — вещественная группа Ли, гладко действующая на дифференцируемом многообразии X (см. *Ли группа преобразований*). Для любой точки $x\in X$ орбита $G(x)$ является погруженным подмногообразием в X, диффеоморфным G/G_x (диффеоморфизм индуцирован отображением $g\mapsto g(x)$, $g\in G$). Это подмногообразие не обязательно замкнуто в X (не обязательно вложено). Классич. примером служит «обмотка тора», то есть О. действия аддитивной группы $\mathbb{R}$ на торе

$$T^2=\{(z_1,\ z_2)\mid z_i\in\mathbb{C},\ |z_i|=1,\ i=1,\ 2\},$$

заданного формулой

$$t(z_1,\ z_2)=(e^{it}z_1,\ e^{i\alpha t}z_2),\ t\in\mathbb{R},$$

где α — иррациональное действительное число; замыкание такой О. совпадает с T^2. Если G компактна, то все О. являются вложенными подмногообразиями.

Если G — алгебраич. группа, X — алгебраич. многообразие над алгебраически замкнутым полем k, а действие регулярно (см. *Алгебраическая группа преобразований*), то любая орбита $G(x)$ является гладким алгебраич. многообразием, открытым в своем замыкании $\overline{G(x)}$ (в топологии Зарисского), причем в $\overline{G(x)}$ всегда содержится замкнутая О. группы G (см. [5]). В этом случае морфизм $G\to G(x)$, $g\mapsto g(x)$, индуцирует изоморфизм алгебраич. многообразий G/G_x и $G(x)$ тогда и только тогда, когда он сепарабелен (это условие всегда выполнено, если k — поле нулевой характеристики). О. максимальной размерности образуют открытое в X множество.

Описание структуры О. для данного действия обычно сводится к указанию в каждой О. нек-рого единствен-

ного представителя x, к нахождению стабилизатора G_x и к описанию какого-либо — по возможности обозримого — класса функций, постоянных на О. (инвариантов) и разделяющих разные О.; эти функции позволяют описать «расположение» О. в X (О. являются пересечениями их множеств уровня). Эта программа обычно наз. задачей орбитального разложения. К такой задаче часто сводятся многие задачи классификации. Так, в примере 2) это — задача классификации билинейных симметрич. форм с точностью до эквивалентности; инварианты в этом случае «дискретны» — это ранг и сигнатура, а стабилизатор G_f, где f невырождена, является соответствующей псевдоортогональной группой. Классич. теория жордановой формы матриц (также, как и теории других *нормальных форм* матриц) тоже укладывается в эту схему: жорданова форма — это канонич. представитель (определенный, правда, с точностью до порядка жордановых клеток) в О. полной линейной группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ на пространстве всех комплексных $(n\times n)$-матриц при действии, заданном формулой $Y\to AYA^{-1}$; среди инвариантов важное место занимают коэффициенты характеристич. многочлена матрицы Y (к-рые не разделяют, однако, любые две О.). Идея рассмотрения эквивалентных объектов как О. нек-рой группы активно используется в различных задачах классификации, напр. в алгебраич. *модулей теории* (теория Мамфорда, см. [10]), в теории перечисления графов (см. [2]) и др.

Если G и X конечны, то

$$|X/G|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\operatorname{Fix} g|,$$

где $|Y|$ — число элементов множества Y, а

$$\operatorname{Fix} g=\{x\in X\mid g(x)=x\}.$$

Если G — компактная группа Ли, гладко действующая на связном гладком многообразии X, то структура О. на X локально конечна, т. е. у любой точки $x\in X$ существует такая окрестность U, что число различных стабилизаторов G_y, $y\in U$, с точностью до сопряженности в G конечно. В частности, если X компактно, то конечно число различных (с точностью до сопряженности в G) стабилизаторов G_y, $y\in X$. При этом для любой подгруппы H в G каждое из множеств

$$X_{(H)}=\{x\in X\mid G_x \text{ сопряжена } H \text{ в } G\}$$

является пересечением открытого и замкнутого инвариантных подмножеств в X. Исследование $X_{(H)}$ приводит в этом случае к классификации действий (см. [1]). Аналоги этих результатов получены в геометрич. *инвариантов теории* (см. [3]). А именно, пусть G — редуктивная алгебраич. группа, регулярно действующая на аффинном алгебраич. многообразии X (основное поле k алгебраически замкнуто и имеет характеристику 0). В замыкании любой О. содержится единственная замкнутая О. Существует разбиение X в объединение конечного числа локально замкнутых инвариантных непересекающихся подмножеств $X=\cup_\alpha X_\alpha$, обладающее свойствами: а) если $x, y\in X_\alpha$ и $G(x)$ замкнута, то стабилизатор G_y сопряжен в G подгруппе в G_x, а если замкнута и $G(y)$, то G_y сопряжен с G_x; б) если $x\in X_\alpha$, $y\in X_\beta$, $\alpha\neq\beta$, а $G(x)$ и $G(y)$ замкнуты, то G_x и G_y не сопряжены в G. Если X — гладкое алгебраич. многообразие (напр., в важном случае, когда рассматривается рациональное линейное представление G в векторном пространстве $V=X$), то существует такое непустое открытое подмножество Ω в X, что G_x и G_y сопряжены в G для любых $x, y\in\Omega$. Последний результат является утверждением о свойстве точек общего положения в X, т. е. точек, заполняющих непустое открытое подмножество; имеется и ряд других утверждений такого типа. Напр., для рационального линейного представления

полупростой группы G в векторном пространстве V О. точек общего положения замкнуты тогда и только тогда, когда их стабилизаторы редуктивны (см. [7]); в случае, когда G неприводима, найден явный вид стабилизаторов точек общего положения (см. [8], [9]). Вопрос о замкнутости О. является специфическим и важным в этой теории. Так, множество тех точек $x \in V$, О. к-рых содержит в своем замыкании нуль пространства V, совпадает с многообразием нулей непостоянных инвариантных многочленов на V; во многих случаях, и в частности в применениях теории инвариантов к теории модулей, это многообразие играет существенную роль (см. [10]). Любые две различные замкнутые О. разделяются инвариантными многочленами. Орбита $G(x)$ замкнута тогда и только тогда, когда замкнута О. точки x относительно нормализатора $G(x)$ в G (см. [4]). Появление незамкнутых О. связано со свойствами G; если G унипотентна (а X аффинно), то любая О. замкнута (см. [6]). Одним из направлений теории инвариантов является изучение орбитальных разложений различных конкретных действий (в особенности линейных представлений). Одно из них — присоединенное представление редуктивной группы G — подробно исследовалось (см., напр., [11]). Его изучение связано с теорией представлений группы G; см. *Орбит метод*.

Лит.: [1] Palais R., The classification of G-spaces, Providence, 1960 (Mem. Amer. Math. Soc., № 36); [2] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [3] Luna D., «Bull. Soc. Math. France. Mém. 33», 1973, p. 81—105; [4] его же, «Invent. math.», 1975, v. 29, № 3, p. 231—38; [5] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [6] Steinberg R., Conjugacy classes in algebraic groups, B.— Hdlb.— N. Y., 1974; [7] Попов В. Л., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1970, т. 34, с. 523—31; [8] Попов А. М., «Функц. анализ и его прилож.», 1978, т. 12, № 2, с. 91—92; [9] Элашвили А. Г., там же, 1972, т. 6, № 2, с. 65—78; [10] Mumford D., Geometric invariant theory, B.— Hdlb.— N. Y., 1965; [11] Kostant B., «Amer. J. Math.», 1963, v. 85, № 3, p. 327—404; [12] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980.

В. Л. Попов.

ОРБИТАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ — свойство траектории ξ (решения $x(t)$) *автономной системы* обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{*}$$

состоящее в следующем: для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что всякая положительная полутраектория, начинающаяся в δ-окрестности траектории ξ, содержится в ε-окрестности траектории ξ. Здесь под траекторией понимается множество значений решения $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, системы (*), а под положительной полутраекторией — множество значений решения $x(t)$ при $t \geqslant 0$. Если решение $x(t)$ устойчиво по Ляпунову, то его траектория орбитально устойчива.

Траектория ξ наз. асимптотически орбитально устойчивой, если она орбитально устойчива и, кроме того, найдется $\delta_0 > 0$ такое, что траектория всякого решения $x(t)$ системы (*), начинающегося в δ_0-окрестности траектории ξ (т. е. $d(x(0), \xi) < \delta_0$), стремится при $t \to +\infty$ к траектории ξ, то есть

$$\lim_{t \to +\infty} d(x(t), \xi) = 0,$$

где

$$d(x, \xi) = \inf_{y \in \xi} d(x, y)$$

— расстояние от точки x до множества ξ ($d(x, y)$ — расстояние между точками x и y).

Роль понятия асимптотической орбитальной устойчивости основана на следующих фактах. Периодич. решение системы (*) никогда не бывает асимптотически устойчивым. Но если у периодич. решения такой системы модули всех *мультипликаторов*, кроме одного, меньше единицы, то траектория этого периодич. решения асимптотически орбитально устойчива (Андро-

нова — Витта теорема). Имеет место также более общая теорема Демидовича (см. [3]): пусть $x_0(t)$ — ограниченное решение системы (*), причем

$$\inf_{t \geqslant 0} |x_0(t)| > 0,$$

и пусть система уравнений в вариациях вдоль $x_0(t)$ правильная (см. *Правильная линейная система*), причем все ее *Ляпунова характеристические показатели*, кроме одного, отрицательны; тогда траектория решения $x_0(t)$ асимптотически орбитально устойчива.

Лит.: [1] Андронов А. А., Собр. трудов, М., 1956; [2] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [3] Демидович Б. П., «Дифференц. уравнения», 1968, т. 4, № 4, с. 575—88; № 8, с. 1359—73.

В. М. Миллионщиков.

ОРДИНАЛЬНОЕ ЧИСЛО, ординал,— то же, что *порядковое число*.

ОРДИНАТА — одна из декартовых *координат* точки.

ОРИЕНТАЦИЯ — формализация и далеко идущее обобщение понятия направления обхода. Определяется О. нек-рых специальных классов пространств (*многообразий*, *векторных расслоений*, *пуанкаре комплексов* и т. д.). Современный взгляд на О. дается в рамках *обобщенных теорий когомологий*.

В классич. случае ориентация — выбор одного класса систем координат, связанных между собой положительно в нек-ром определенном смысле. Каждая система задает О., определяя класс, к к-рому она принадлежит.

В случае векторного пространства $\mathbb{R}^n$ конечной размерности две системы координат связаны положительно, если положителен определитель матрицы перехода от одной из них к другой. Здесь имеется два класса. В комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ комплексный репер $e_1, \ldots, e_n$ определяет действительный репер $e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$ в том же пространстве, рассматриваемом как $\mathbb{R}^{2n}$, и все такие реперы связаны попарно положительными переходами (т. е. комплексная структура задает О. в $\mathbb{R}^{2n}$).

На прямой, плоскости и вообще в действительном аффинном пространстве E^n системы координат состоят из точки (начала 0) и репера e, переход определяется вектором переноса начала и заменой репера. Этот переход положителен, если положителен определитель матрицы замены (напр., при четной перестановке векторов репера). Две системы координат определяют одну и ту же О., если одну из них можно перевести в другую непрерывно, т. е. существует непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$ семейство координатных систем O_t, e_t, связывающее данные системы O_0, e_0 и O_1, e_1. При отражении в плоскости (размерности $n-1$) системы двух классов переходят друг в друга.

Классы систем координат можно задавать различными геометрич. фигурами. Если какая-либо фигура X по определенному закону связывается с системой координат, то зеркально симметричная ей фигура будет по тому же закону связана с системой координат из другого класса. Тем самым X (вместе с данным законом) определит О. Напр., на плоскости E^2 окружность с фиксированным направлением обхода задает системы координат из одного класса по правилу: начало лежит в ее центре, первый вектор берется произвольно, а второй так, чтобы вращение от первого ко второму через меньший угол происходило в направлении, заданном на окружности. В E^3 репер можно связать с винтом с точностью до непрерывного вращения и растяжения пространства: первый вектор идет по направлению ввинчивания, вращение от второго вектора к третьему совпадает с вращением при ввинчивании (предполагается

при этом, что все винты находятся в положительной связи друг с другом). Репер может быть также задан тремя первыми пальцами руки хорошо известным способом.

Если в E^n задана О., то каждое полупространство E^n_+ определяет О. на граничной плоскости E^{n-1}. Напр., условливаются, что если в репере последние $n-1$ векторов лежат в E^{n-1}, а первый смотрит наружу из E^n_+, то последние векторы задают О. в E^{n-1}. В E^n О. может быть задана порядком вершин n-мерного симплекса (треугольника в E^2, тетраэдра в E^3). Репер определяется условием: в первую вершину помещается начало, в остальные из первой направляются векторы репера. Два порядка задают одну О., если и только если они отличаются на четную перестановку. Симплекс с фиксированным с точностью до четной перестановки порядком вершин наз. ориентированным. Каждая $(n-1)$-грань σ^{n-1} ориентированного симплекса получает индуцированную ориентацию: если первая вершина не принадлежит σ^{n-1}, то порядок остальных принимается за положительный для σ^{n-1}.

В связном многообразии M системой координат служит атлас — набор карт, покрывающих M. Атлас наз. ориентирующим, если координатные преобразования все положительны. Это означает, что их степени равны $+1$, а в случае дифференцируемого многообразия положительны якобианы преобразования во всех точках. Если ориентирующий атлас существует, то многообразие M наз. ориентируемым. В этом случае все ориентирующие атласы распадаются на два класса, так что переход от карт одного атласа к картам другого положителен, если и только если атласы принадлежат одному классу. Выбор такого класса наз. ориентацией многообразия. Этот выбор может быть сделан указанием одной карты или локальной О. в точке x_0 (связные карты, содержащие x_0, естественным образом распадаются на два класса). В случае дифференцируемого многообразия локальную О. можно задать указанием репера в касательной плоскости в точке x_0 (напр., вращение на окружности можно задать указанием одного касательного вектора). Если M имеет край и ориентировано, то край также ориентируем, напр. по правилу: в точке края берется репер, ориентирующий M, первый вектор к-рого направлен из ∂M, а остальные векторы лежат в касательной плоскости края; эти последние и принимаются за ориентирующий репер края.

Вдоль любого пути q: $[0, 1] \to M$ можно выбрать цепочку карт так, что две соседние карты связаны положительно. Тем самым О. в точке $q(0)$ определяет О. в точке $q(1)$, и эта связь зависит от пути q лишь с точностью до его непрерывной деформации при фиксированных концах. Если q — петля, т. е. $q(0)=q(1)=x_0$, то q наз. дезориентирующим путем, если эти О. противоположны. Возникает гомоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(M, x_0)$ в группу порядка 2: дезориентирующие петли переходят в -1, а остальные в $+1$. По этому гомоморфизму строится накрытие, являющееся двулистным в случае неориентируемого многообразия. Оно наз. ориентирующим (т. к. накрывающее пространство будет ориентируемым). Этот же гомоморфизм определяет над M одномерное расслоение, тривиальное, если и только если M ориентируемо. Для дифференцируемого M оно может быть определено как расслоение $\Lambda^n(M)$ дифференциальных форм порядка n. Ненулевое сечение в нем существует лишь в ориентируемом случае и задает форму объема на M и одновременно О. Классифицирующим отображением этого расслоения служит отображение k: $M \to \mathbb{R}P^n$. Многообразие M ориентируемо, если и только если не равен нулю класс $\mu \in H^{n-1}(M, \mathbb{Z})$, служащий образом класса

двойственного к $\mathbb{R}P^{n-1} \subset \mathbb{R}P^n$. Он двойствен циклу, носителем к-рого служит многообразие, являющееся прообразом $\mathbb{R}P^{n-1}$ при отображении k, приведенным в *общее положение*. Этот цикл наз. ориентирующим, т. к. дополнение к нему ориентируемо: если по нему M разрезать, то получится ориентируемое многообразие. Само M ориентируемо (неориентируемо), если и только если после разреза получится несвязное многообразие (это дополнение связно). Напр., в $\mathbb{R}P^2$ ориентирующим циклом служит проективная прямая $\mathbb{R}P^1$.

Триангулированное многообразие M (или псевдомногообразие) ориентируемо, если можно ориентировать все n-мерные симплексы так, что два симплекса с общей $(n-1)$-мерной гранью индуцируют на ней противоположные О. Замкнутая цепочка n-мерных симплексов, каждые два соседа в к-рой имеют общую $(n-1)$-грань, наз. дезориентирующей, если эти симплексы могут быть ориентированы так, что первый и последний симплексы индуцируют на общей грани совпадающие О., а остальные соседи — противоположные.

О. может быть определена на гомологич. языке: для связного ориентируемого многообразия без края *гомологий группа* $H_n(M; \mathbb{Z})$ (с замкнутыми носителями) изоморфна $\mathbb{Z}$, и выбор одной из двух образующих задает О.— отбираются карты с положительными степенями отображений. Для связного многообразия с краем то же верно и для $H_n(M, \partial M; \mathbb{Z})$. В первом случае ориентируемость есть гомотопич. инвариант M, а во втором — пары $(M, \partial M)$. Так, лист Мёбиуса и кольцо имеют один и тот же абсолютный гомотопич. тип, но разный — относительно края. Локальная О. многообразия может быть также задана выбором образующей в группе $H_n(M, M \setminus x_0; \mathbb{Z})$, изоморфной $\mathbb{Z}$. Гомологич. интерпретация О. позволяет перенести это понятие на обобщенные *гомологические многообразия*.

Пусть над пространством X задано расслоение p: $E \to X$ со стандартным слоем F^n. Если О. всех слоев можно выбрать так, что любое (собственное) отображение $p^{-1}(\gamma(0)) \to p^{-1}(\gamma(1))$, определенное путем γ: $(0, 1) \to X$ однозначно с точностью до собственной гомотопии, сохраняет О., то расслоение наз. ориентированным, а указанный выбор О. слоев — ориентацией расслоения. Напр., лист Мёбиуса, рассматриваемый как векторное расслоение над окружностью, не обладает О., в то время как боковая поверхность цилиндра — обладает.

Понятие О. допускает естественное обобщение и для случая бесконечномерного многообразия, моделированного при помощи бесконечномерного банахова или топологического векторного пространства. При этом необходимы ограничения на линейные операторы, являющиеся дифференциалами функций перехода от карты к карте: они должны не просто принадлежать общей линейной группе всех изоморфизмов моделирующего пространства, к-рая гомотопически тривиальна (в равномерной топологии) для большинства классических векторных пространств, а содержаться в нек-рой линейно несвязной подгруппе общей линейной группы. Тогда компонента связности данной подгруппы и будет задавать «знак» О. В качестве такой подгруппы обычно выбирается фредгольмова группа, состоящая из тех изоморфизмов моделирующего пространства, для к-рых разность с тождественным изоморфизмом есть вполне непрерывный оператор.

Ориентация в обобщенных теориях когомологий. Пусть E^* — мультипликативная обобщенная теория когомологий (ниже — просто теория). Имеется единица $1 \in \tilde{E}^0(S^0)$, и при изоморфизме надстройки $\tilde{E}^0(S^0) \approx \tilde{E}^n(S^n)$ ей отвечает элемент $\gamma_n \in \tilde{E}^n(S^n)$, где S^n есть n-мерная сфера.

Пусть ξ есть n-мерное векторное расслоение над линейно связным пространством X и пусть $T\xi$ — *Тома пространство* расслоения ξ. Пусть $i\colon S^n \to T\xi$ — стандартное вложение, т. е. гомеоморфизм на «слой» над нек-рой точкой $x_0 \in X$. Элемент $u \in \tilde{E}^n(T\xi)$ наз. о р и е н т а ц и е й или *Тома классом* р а с с л о е н и я ξ, если $i^*(u) = \varepsilon\gamma_n$, где $\varepsilon \in \tilde{E}^0(S^0)$ — некоторый обратимый элемент (напр., $\varepsilon = 1$). Расслоение, обладающее О., наз. о р и е н т и р у е м ы м в теории E^*, или просто E-о р и е н т и р у е м ы м, а расслоение с выбранной E-ориентацией наз. E-о р и е н т и р о в а н н ы м. Изоморфизм Тома $\tilde{E}^*(T\xi) \approx E^*(X)$ (см. [6]). Множество О. данного E-ориентированного расслоения ξ над X находится во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $\tilde{E}^0(X) \oplus (\tilde{E}^0(S^0))^*$, где $(\ )^*$ — группа обратимых элементов кольца $(\ )$.

Тривиальное n-мерное расслоение θ^n обладает О. в любой теории E^n, и если два из трех расслоений ξ, η, $\xi \oplus \eta$ E-ориентируемы, то E-ориентируемо и третье (см. [7]). В частности, E-ориентируемость расслоения ξ влечет E-ориентируемость расслоения $\xi \oplus \theta^n$.

Понятие E-ориентируемости вводится и для любого расслоения в смысле Гуревича $p\colon E \to B$, слой к-рого гомотопически эквивалентен сфере. П р о с т р а н с т в о м Т о м а такого расслоения наз. конус отображения p; в остальном определение аналогично. Определение О. векторного расслоения ξ сводится к этому, если в качестве E взять расслоение на единичные (в нек-рой римановой метрике на ξ) сферы, ассоциированное с ξ. E-ориентируемость есть инвариант стационарного послойного гомотопического типа векторного (сферического) расслоения. Расслоение, ориентируемое в одной теории, не обязано быть ориентируемым в другой, но при наличии кольцевого гомоморфизма теорий $E^* \to F^*$ из E-ориентируемости следует F-ориентируемость.

П р и м е р ы. 1) В теории $H^*(-;\ \mathbb{Z}_2)$ ориентируемо любое векторное (сферическое) расслоение. 2) В теории $H^*(-;\ \mathbb{Z})$ ориентируемы в точности те расслоения ξ, для к-рых характеристич. класс Штифеля $w_1(\xi) = 0$, т. е. ориентируемы те расслоения, к-рые ориентируемы в классич. смысле. 3) Ориентируемость векторного расслоения ξ в вещественной K-*теории* эквивалентна тому, что $w_1(\xi) = w_2(\xi) = 0$, а в комплексной K-теории — тому, что $w_1(\xi) = 0$ и $w_2(\xi)$ — целочисленный элемент [8]. При этом для K-ориентируемости сферич. расслоений это условие необходимо, но не достаточно. 4) Ориентируемость в теории унитарных кобордизмов U^* не охарактеризована (1983); комплексные расслоения U-ориентируемы, но это явно не необходимо. 5) В теории Π^* стабильных когомотопич. групп ориентируемы лишь расслоения тривиального стационарного послойного гомотопич. типа.

В задаче описания класса расслоений, ориентируемых в данной теории, имеется следующий общий результат. Пусть топологич. группа G действует на $\mathbb{R}^n$ и пусть E^* — нек-рая теория. Существует (см. [7], где дана явная конструкция) пространство $B(G, E)$ с универсальным E-ориентированным расслоением над ним, классифицирующее E-ориентированные векторные расслоения со структурной группой G, т. е. для любого (линейно связного) пространства X множество E-ориентированных G-векторных расслоений над X находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством $[X, B(G, E)]$ гомотопич. классов отображений $X \to B(G, E)$. Это же верно для сферич. расслоений и «хороших» моноидов G.

Обратная задача состоит в описании теории, где данное расслоение (или данный класс расслоений) ориен-

тируемо. Известно, что если в теории E^* ориентируемы все векторные расслоения, то

$$E^*(X) \approx H^*(X; \tilde{E}(S^0)),$$

причем $2E^*(S^0)=0$. В этом контексте иногда ослабляют условия на теорию E^*, напр. снимают условие коммутативности умножения и т. д. Для любой теории E^*, в к-рой все комплексные расслоения ориентируемы, имеется гомоморфизм теории $U^* \to E^*$, где U^* — теория унитарных кобордизмов, и этот гомоморфизм полностью задается E-ориентацией канонич. расслоения η над $\mathbb{C}P^\infty$. Аналогичное верно и для S_p-расслоений (см. *Кобордизм*). Построение для любого класса векторных расслоений универсальной теории, отображающейся в любую теорию, где ориентируем данный класс расслоений, еще (1983) не проведено.

О р и е н т а ц и е й (другое название — ф у н д а м е н т а л ь н ы й к л а с с) замкнутого n-мерного многообразия (или, более общо, комплекса Пуанкаре формальной размерности n) в теории E^* наз. такой элемент $z \in E_n(M)$, что гомоморфизм $E^i(M) \to E_{n-i}(M)$ вида $x \to z \cap x$ (см. [9]) есть изоморфизм; это — т. н. изоморфизм двойственности Пуанкаре. Оказывается, что многообразие (комплекс Пуанкаре) E-ориентируемо тогда и только тогда, когда E-ориентируемо его нормальное расслоение. Определяется О. и для многообразий (комплексов Пуанкаре) с краем.

Лит.: [1] Д у б р о в и н Б. А., Н о в и к о в С. П., Ф о м е н к о А. Т., Современная геометрия, М., 1979; [2] Введение в топологию, М., 1980; [3] Р о х л и н В. А., Ф у к с Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [4] Х ь ю з м о л л е р Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [5] С п е н ь е р Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [6] Д о л ь д А., «Математика», 1965, т. 9, № 2, с. 8—14; [7] M a y J., E_∞ ring spaces and E_∞ ring spectra, B.— N. Y., 1977; [8] С т о н г Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [9] У а й т х е д Дж., Новейшие достижения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1974.

Ю. В. Рудяк, А. В. Черкавский.

ОРИСФЕРА — поверхность пространства Лобачевского, ортогональная к прямым, параллельным в некотором направлении. О. можно рассматривать как сферу с бесконечно удаленным центром. На О. реализуется евклидова геометрия, если под прямыми понимать *орициклы*, порядок точек определить через порядок прямых в пучке параллелей, определяющих орицикл, а движением называть такие движения в пространстве Лобачевского, к-рые переводят О. в себя.

А. Б. Иванов.

ОРИЦИКЛ, п р е д е л ь н а я л и н и я,— ортогональная траектория параллельных в нек-ром направлении прямых плоскости Лобачевского. О. можно рассматривать как окружность с бесконечно удаленным центром. О., порожденные одним пучком параллельных прямых, конгруэнтны, концентричны (т. е. высекают на прямых пучка конгруэнтные отрезки), незамкнуты и вогнуты в сторону параллельности прямых пучка. Кривизна О. постоянна. В модели Пуанкаре О.— окружность, касающаяся изнутри абсолюта.

Прямая и О. либо не имеют общих точек, либо касаются, либо пересекаются в двух точках под равными углами, либо пересекаются в одной точке под прямым углом.

Через две точки плоскости Лобачевского проходят два и только два О.

Лит.: [1] К а г а н В. Ф., Основания геометрии, ч. 1—2, М.— Л., 1949—56; [2] Н о р д е н А. П., Элементарное введение в геометрию Лобачевского, М., 1953; [3] Е ф и м о в Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978.

А. Б. Иванов.

ОРИЦИКЛИЧЕСКИЙ ПОТОК — поток в пространстве биэдров такого n-мерного риманова многообразия M^n (обычно замкнутого), для к-рого определено понятие орицикла; О. п. описывает движение биэдров вдоль определяемых ими орициклов.

Основные случаи, когда определено понятие орицикла,— те, когда кривизна римановой метрики отрицательна и либо $n=2$, либо кривизна постоянна. Б и э д р у, т. е. ортонормированному 2-реперу (x, e_1, e_2) ($x \in M^n$; e_1, e_2 — взаимно ортогональные единичные касательные векторы в точке x), сопоставляется орицикл $h(x, e_1, e_2)$, к-рый проходит через x в направлении e_2 и расположен на проходящей через x орисфере $H(x, e_1)$, являющейся $(n-1)$-мерным ортогональным многообразием семейства геодезич. линий, асимптотических (в положительном направлении) к геодезич. линии, проходящей через x в направлении e_1. Направление на h, определяемое e_2, принимается за положительное (при $n=2$ роль e_2 только к этому и сводится; H и h могут иметь самопересечения; простейший способ избежать могущих возникнуть из-за этого неясностей состоит в том, чтобы выполнить аналогичные построения не в M^n, а в его универсальном накрывающем многообразии — при постоянной кривизне это обычное n-мерное пространство Лобачевского — и спроектировать полученный там орицикл в M^n). Под действием О. п. биэдр (x, e_1, e_2) за время t переходит в

$$(x(t),\ e_1(t),\ e_2(t)),$$

где $x(t)$ с изменением t движется с единичной скоростью по $h(x, e_1, e_2)$ в положительном направлении, единичный вектор $e_1(t)$ ортогонален $H(x, e_1)$ в точке $x(t)$ (выбор одного из двух возможных направлений для $e_1(t)$ производится по непрерывности) и $e_2(t)=dx(t)/dt$.

Изучение О. п. было начато в связи с тем, что он играл важную роль при исследовании *геодезических потоков* на многообразиях отрицательной кривизны [1]. Позднее эта роль перешла к нек-рым *слоениям*, возникающим в теории *У-систем*, а О. п. стал самостоятельным объектом исследования. Свойства О. п. хорошо изучены (см. [2]—[7], [11]). О нек-рых обобщениях см. в [8] — [10].

Лит.: [1] Х о п ф Э., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 2, с. 129—70; [2] П а р а с ю к О. С., там же, 1953, т. 8, в. 3, с. 125—26; [3] Г у р е в и ч Б. М., «Докл. АН СССР», 1961, т. 136, № 4, с. 768—70; [4] F u r s t e n b e r g H., в кн.: Recent advances in topological dynamics, B.— [u. a.], 1973, p. 95—115; [5] M a r c u s B., «Israel J. Math.», 1975, v. 21, № 2—3, p. 133—44; [6] е г о ж е, «Ann. Math.», 1977, v. 105, № 1, p. 81—105; [7] е г о ж е, «Invent. math.», 1978, v. 46, № 3, p. 201—09; [8] G r e e n L. W., «Duke math. J.», 1974, v. 41, № 1, p. 115—26; [9] B o w e n R., «Israel J. Math.», 1976, v. 23, № 3—4, p. 267—73; [10] B o w e n R., M a r c u s B., там же, 1977, v. 26, № 1, p. 43—67; [11] R a t n e r M., «Ann. Math.», 1982, v. 115, №3, p. 597—614.

Д. В. Аносов.

ОРЛИЧА КЛАСС — множество функций L_M, удовлетворяющее условию

$$\int_G M(x(t))\,dt < \infty,$$

где G — ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, dt — мера Лебега, $M(u)$ — четная выпуклая функция, возрастающая при положительных u, и

$$\lim_{u \to 0} u^{-1} M(u) = \lim_{u \to \infty} u\,[M(u)]^{-1} = 0.$$

Такие функции наз. N-ф у н к ц и я м и. Функция $M(u)$ допускает представление

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(v)\,dv,$$

где $p(v)=M'(v)$ не убывает на полуоси,

$$p(0) = \lim_{v \to 0} p(v) = 0,$$

$p(0)>0$ при $v>0$. Функции $M(u)$ и

$$N(u) = \int_0^{|u|} p^{-1}(v)\,dv,$$

где $p^{-1}(v)$ — обратная к $p(v)$ функция, наз. д о п о л н и т е л ь н ы м и ф у н к ц и я м и. Напр., если

$M(u)=u^{p'}/p'$, $1<p<\infty$, то $N(u)=u^{p'}/p'$, где $1/p+1/p'=1$. Для пары дополнительных функций справедливо неравенство Юнга:

$$ab \leqslant M(a)+N(b).$$

Функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, если существуют такие C и u_0, что $M(2u)\leqslant CM(u)$ для всех $u\geqslant u_0$. О. к. линеен тогда и только тогда, когда $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию. Из *Иенсена неравенства* вытекает выпуклость L_M.

Пусть $M_1(u)$ и $M_2(u)$ — две N-функции. Для того чтобы $L_{M_1}\subset L_{M_2}$, необходимо и достаточно, чтобы $M_2(u)\leqslant CM_1(u)$ для нек-рого C и достаточно больших u.

О. к. рассмотрены В. Орличем и З. Бирнбаумом [1].

Лит.: [1] Birnbaum Z., Orlicz W., «Studia math.», 1931, v. 3, p. 1—67; [2] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958.

Е. М. Семенов.

ОРЛИЧА ПРОСТРАНСТВО — банахово пространство измеримых функций; введено В. Орличем [1]. Пусть $M(u)$ и $N(u)$ — пара дополнительных N-функций (см. *Орлича класс*) и G — ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Пространством Орлича L_M^* наз. множество измеримых относительно меры Лебега функций на G, на к-рых

$$\|x\|_M=\sup\left\{\int_G x(t)\,y(t)\,dt:\int_G N(y(t))\,dt\leqslant 1\right\}<\infty.$$

О. п.— полное нормированное пространство относительно нормы $\|x\|_M$, к-рая наз. нормой Орлича. Когда $M(u)=u^p$, $1<p<\infty$, то L_M^* совпадает с *Рисса пространством* L_p и с точностью до скалярного множителя $\|x\|_M$ совпадает с $\|x\|_{L_p}$.

Если $M_1(u)$ и $M_2(u)$ суть N-функции, то вложение $L_{M_1}^*\subset L_{M_2}^*$ имеет место тогда и только тогда, когда для нек-рого C и всех достаточно больших u выполнено неравенство $M_2(u)\leqslant M_1(Cu)$. Для любого О. п. L_M^* справедливы вложения $L_\infty\subset L_M^*\subset L_1$. Всякая суммируемая функция принадлежит нек-рому О. п.

Пространство L_M^* сепарабельно тогда и только тогда, когда $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию. В общем случае L_∞ не плотно в L_M^* и замыкание L_∞ в L_M^* обозначается через E_M, оно всегда сепарабельно. Если $x\in L_M^*$, то

$$\lim_{\tau\to 0}\sup_{\operatorname{mes}E\leqslant\tau}\|x\chi_E\|_M=\rho(x,\,E_M),$$

где

$$\chi_E(t)=\begin{cases}1, & t\in E,\\ 0, & t\notin E.\end{cases}$$

Если $M(u)$ и $N(u)$ — дополнительные N-функции и $x\in L_M^*$, $y\in L_N^*$, то справедлив аналог *Гёльдера неравенства*

$$\int_G x(t)\,y(t)\leqslant\|x\|_{(M)}\|y\|_{(N)},$$

где $\|x\|_{(M)}$ — *Люксембурга норма*. Всякий непрерывный линейный функционал f на E_M представим в виде

$$f(x)=\int_G x(t)\,y(t)\,dt,$$

где $y\in L_N$ и $\|f\|=\|y\|_{(N)}$.

Критерии компактности М. Рисса (M. Riesz) и А. Н. Колмогорова для пространств L_p переносятся на E_M. Следующие условия эквивалентны: 1) пространство L_M^* рефлексивно; 2) $M(u)$ и $N(u)$ удовлетворяют Δ_2-условию; 3) в L_M^* существует безусловный *базис*; 4) *Хаара система* образует безусловный базис в L_M^*; 5) тригонометрич. система — базис в L_M^*. Система Хаара — базис в E_M.

Аналогичным образом определяется пространство последовательностей l^*_M, однако свойства пространства l^*_M зависят от асимптотики функции $M(u)$ в 0. Изучены [5] многие геометрич. свойства пространств L^*_M и l^*_M; напр., для любой функции $M(u)$ находится множество всех таких p, что l_p изоморфно вкладывается в L^*_M.

О. п. применяются при изучении свойств интегральных операторов, в теории дифференцируемых функций многих переменных и в других разделах анализа.

Лит.: [1] Orlicz W., «Bull. intern. Acad. Pol. Sér. A», 1933 (année 1932), p. 207—20; [2] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958; [3] Галошкин В. Ф., «Функц. анализ и его прилож.», 1967, т. 1, № 4, с. 26—32; [4] Крейн С. Г., Шетунин Ю. И., Семенов Е. М., Интерполяция линейных операторов, М., 1978; [5] Lindenstrauss J., Tzafriri L., Classical Banach Spaces, v. 1—2, B. — Hdlb.— N. Y., 1977—79.

Е. М. Семенов.

ОРНСТЕЙНА — ЧЕКОНА ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА: пусть (W, μ) — пространство с σ-конечной мерой и T — линейный положительный оператор в $L_1(W, \mu)$, причем L_1-норма $\|T\| \leqslant 1$; если f, $g \in L_1(W, \mu)$ и $g \geqslant 0$ почти всюду, то предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} T^k f(w)}{\sum_{k=0}^{n} T^k g(w)}$$

существует почти всюду на том множестве, где знаменатель при достаточно больших n отличен от нуля, т. е. где хоть одно из чисел $T^k g(w) > 0$.

Эта теорема сформулирована и доказана Д. Орнстейном и Р. Чеконом [1] (см. также [2], [3]); позднее был получен ее аналог для непрерывного времени (см. [4]).

Непосредственными следствиями О.—Ч. э. т. являются *Биркгофа эргодическая теорема* и нек-рые из ранее предложенных обобщений последней, но имеется также ряд эргодич. теорем, независимых от О.—Ч. э. т., а сама она подвергалась различным обобщениям (см. [5], [6], а также лит. при ст. *Операторная эргодическая теорема*). Вместе с тем из всех обобщений теоремы Биркгофа, по-видимому, чаще всего используется О.—Ч. э. т.

В иностранной литературе О.—Ч. э. т., как и вообще теоремы, в к-рых речь идет о пределе отношения двух временных средних, наз. ratio ergodic theorem.

Лит.: [1] Chacon R. V., Ornstein D. S., «Ill. J. Math.», 1960, v. 4, № 2, p. 153—60; [2] Хопф Э., «Математика», 1962, т. 6, № 3, с. 29—36; [3] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [4] Akcoglu M. A., Gunsolo J., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1970, v. 24, № 1, p. 161—70; [5] Chacon R. V., в кн.: Ergodic theory. Proceedings of an International Symposium. New Orleans, 1961, N. Y.— L., 1963, p. 89—120; [6] Terrell T. R., «Boll. Unione mat. ital.», 1972, v. 6, № 2, p. 175—80.

Д. В. Аносов.

ОРНШТЕЙНА — УЛЕНБЕКА ПРОЦЕСС — гауссовский стационарный случайный процесс $V(t)$ с нулевым математич. ожиданием и экспоненциально затухающей корреляционной функцией вида

$$\mathsf{E} V(t)\, V(t+\tau) = B(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|), \quad \alpha > 0.$$

О.—У. п. может быть также определен как стационарное решение стохастич. уравнения (уравнения Ланжевена) вида

$$m\, dV(t) + \beta V(t)\, dt = dW(t), \qquad (*)$$

где $W(t)$ — *винеровский процесс* (так что $dW(t)/dt = W'(t)$ — обобщенный случайный процесс белого шума), а m и β — положительные постоянные, причем $\beta/m = \alpha$.

Уравнение (*) приближенно описывает одномерное броуновское движение свободной частицы; при этом $V(t)$ интерпретируется как скорость частицы, m — ее масса, $-\beta V(t)$ — пропорциональная скорости сила «вязкого трения» (для сферич. частицы радиуса a коэффициент β равен $6\pi\eta a$, где η — коэффициент вязкости,

в силу гидродинамич. формулы Стокса), а белый шум $W'(t)$ — это «случайная сила», порожденная хаотич. толчками молекул среды, находящихся в тепловом движении, и являющаяся основной причиной броуновского движения. В первоначальной теории броуновского движения, развитой А. Эйнштейном (A. Einstein) и М. Смолуховским (M. Smoluchowski) в 1905—06, пренебрегалось инерцией частицы, т. е. считалось, что $m=0$; при этом уравнение (*) приводило к выводу, что координата броуновской частицы

$$X(t)=\int_0^t V(t')\,dt'$$

равна $\beta^{-1}W(t)$, т. е. представляет собой винеровский процесс. Таким образом, винеровский процесс описывает модель Эйнштейна — Смолуховского броуновского движения (отсюда другое его название — *процесс броуновского движения*); т. к. этот процесс недифференцируем, то в теории Эйнштейна — Смолуховского частица, совершающая броуновское движение, не имеет конечной скорости. Уточненная теория броуновского движения, опирающаяся на уравнение (*), где $m\neq 0$, была предложена Л. Орнштейном и Дж. Уленбеком ([1]; см. также [2]); позже та же теория была выдвинута С. Н. Бернштейном [3] и А. Н. Колмогоровым [4]. В теории Орнштейна — Уленбека скорость $V(t)$ броуновской частицы является конечной, но ее ускорение бесконечно (так как О.— У. п. недифференцируем); для того чтобы и ускорение оказалось конечным, надо уточнить теорию, учтя отличие случайной силы от идеализированного белого шума $W'(t)$.

Уравнение (*) можно использовать и для описания одномерного броуновского движения гармонич. осциллятора, если пренебречь его массой и считать, что $V(t)$ — это координата осциллятора, $-\frac{mdV}{dt}$ — сила вязкого трения, $-\beta V$ — регулярная упругая сила, удерживающая осциллятор, а $W'(t)$ — случайная сила, создаваемая молекулярными толчками. Таким образом, О.— У. п. доставляет также модель пульсаций координаты гармонич. осциллятора, совершающего броуновское движение, родственную модели Эйнштейна — Смолуховского броуновского движения свободной частицы.

О.— У. п. является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа (см. *Диффузионный процесс*); наоборот, процесс $V(t)$, являющийся одновременно стационарным случайным процессом, гауссовским процессом и марковским процессом, обязательно представляет собой О.— У. п. Как марковский процесс О.— У. п. удобно характеризовать его переходной плотностью вероятности $p(t, x, y)$, представляющей собой фундаментальное решение соответствующего уравнения Фоккера — Планка (т. е. прямого *Колмогорова уравнения*) вида

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\alpha\frac{\partial(yp)}{\partial y}+\alpha\sigma^2\frac{\partial^2 p}{\partial y^2},$$

и, следовательно, задаваемой формулой

$$p(t, x, y)=\frac{1}{\left[2\pi\sigma^2(1-e^{-2\alpha t})\right]^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{(y-xe^{-\alpha t})^2}{2\sigma^2(1-e^{-2\alpha t})}\right\}.$$

Многие свойства О.— У. п. $V(t)$ (включая и его марковость) можно вывести из известных свойств винеровского процесса, воспользовавшись тем, что процесс

$$W_0(t)=\frac{\sqrt{t}}{\sigma}V\left(\frac{\ln t}{2\alpha}\right)$$

является стандартным винеровским процессом (см. [5]). В частности, отсюда следует, что реализации О.— У. п.

непрерывны и нигде не дифференцируемы с вероятностью 1 и что

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\ \frac{|V(t)-V(0)|}{\sqrt{4\alpha\sigma^2 t\ln\ln\frac{1}{t}}}=1,\quad \overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{|V(t)|}{\sqrt{2\sigma^2 t\ln t}}=1$$

с вероятностью 1.

Лит.: [1] Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S., «Phys. Rev.», 1930, v. 36, p. 823—41; [2] Чандрасекар С., Стохастические проблемы в физике и астрономии, пер. с англ., М., 1947; [3] Бернштейн С. Н., «Докл. АН СССР», 1934, т. 1, № 1, с. 1—9; № 7, с. 361—65; [4] Колмогоров А. Н., «Ann. Math.», 1934, v. 35, p. 116—17; [5] Doob J. L., «Ann. Math.», 1942, v. 43, p. 351—69.

А. М. Яглом.

ОРРА — ЗОММЕРФЕЛЬДА УРАВНЕНИЕ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\varphi^{(4)}-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi=i\alpha R\,[(w-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-w''\varphi], \quad (1)$$

где R — число Рейнольдса, $w(y)$ — заданная функция (профиль скорости невозмущенного потока), к-рая обычно предполагается голоморфной в окрестности отрезка $[-1, 1]$ в комплексной плоскости y, $\alpha>0$ — постоянная и c — спектральный параметр. Для О.—З. у. исследуется краевая задача

$$\varphi(-1)=\varphi'(-1)=\varphi(1)=\varphi'(1)=0. \quad (2)$$

О.— З. у. возникло при исследовании У. Орром [1] и А. Зоммерфельдом [2] устойчивости в линейном приближении плоского течения Пуазёйля — течения вязкой несжимаемой жидкости в слое $-\infty<x<\infty$, $-1<y<1$ с твердыми границами; возмущение для функции тока берется в виде $\varphi(y)e^{i\alpha(x-ct)}$.

Собственные значения задачи (1), (2), вообще говоря, комплексны; течение устойчиво, если $\operatorname{Im}c<0$ для всех собственных значений, и неустойчиво, если $\operatorname{Im}c>0$ для нек-рого из них. Кривая $\operatorname{Im}c(\alpha, R)=0$ наз. нейтральной кривой. Течение Пуазёйля устойчиво при небольших числах Рейнольдса. В. Гейзенберг [6] впервые высказал предположение, что течение Пуазёйля неустойчиво при больших числах Рейнольдса, и вычислил 4 точки нейтральной кривой. Для квадратичного профиля скорости установлено, что течение неустойчиво при $\alpha R\gg 1$.

Асимптотич. теория О.— З. у. построена в предположении, что $(\alpha R)^{-1}\to 0$ — малый параметр. Точка y_c, в к-рой $w(y_c)=0$, является точкой поворота (см. *Малого параметра метод*). В малой окрестности точки $y\neq y_c$ О.— З. у. имеет фундаментальную систему решений вида

$$\varphi_{1,2}(y)=\varphi^0_{1,2}(y)+O((\alpha R)^{-1}),$$

$$\varphi_{3,4}(y)=\exp\left[\pm\int^y\sqrt{i(w-c)}\,dy\right]\times$$

$$\times\left[(w-c)^{-5/4}+O\left((\alpha R)^{-1/2}\right)\right],$$

где $\varphi^0_1(y)$, $\varphi^0_2(y)$ — фундаментальная система решений невязкого (то есть $\alpha R=0$) уравнения

$$(w-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-w''\varphi=0.$$

Исследование задач (1), (2) связано, напр., со следующими трудностями: 1) невязкое уравнение в окрестности точки $y=y_c$ имеет голоморфное в ней решение и решение с логарифмич. особенностью; 2) при малых $|c|$ (т. е. в наиболее важном случае) точки поворота сливаются с концами отрезка $[-1, 1]$ (напр., для квадратичного профиля скорости $w=1-y^2$).

При $\alpha R\gg 1$ получено строгое обоснование неустойчивости (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Orr W. Mc F., «Proc. R. Irish. Acad. A», 1907, v. 27, p. 9—68, 69—138; [2] Sommerfeld A., в кн.: Atti del IV Congresso internazionale del matematici (Roma, 1908), 1909, p. 116—24; [3] Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, пер. с англ., М., 1958; [4] Гидродинамическая неустойчивость. Сборник, пер. с англ., М., 1964; [5] Gersting J. M., Janowski D. F., «Internat. J. Num. Meth. in Eng.», 1972, v. 4, p. 195—206; [6] Heisenberg W., «Ann. Phys.», 1924, Bd 74, № 15, S. 577—627.

М. В. Федорюк.

ОРТ, единичный вектор,— вектор, длина к-рого равна единице выбранного масштаба.

ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ МЕТОД — метод решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax=b$ с невырожденной матрицей A, основанный на процессе Грама—Шмидта *ортогонализации* системы векторов.

Если

$$A=\|a_{ij}\|;\quad x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)^{\top};$$
$$b=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)^{\top};$$
$$a_i=(a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots,\ a_{in},\ -b_i),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$
$$y=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ 1)^{\top},$$

то исходная система уравнений может быть записана в виде

$$(a_i,y)=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Это значит, что решение системы равносильно нахождению вектора y, имеющего единичную последнюю компоненту и ортогонального ко всем векторам a_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Для этого к системе векторов $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, a_{n+1}, где $a_{n+1}=(0,\ 0,\ \ldots,\ 1)$, линейно независимой в силу невырожденности матрицы A, применяется процесс ортогонализации, состоящий в построении ортонормированной относительно скалярного произведения $(x,\ y)=x^{\top}y$ системы векторов $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{n+1}$ по рекуррентным соотношениям

$$\left.\begin{aligned} v_1=a_1,\quad q_1=v_1/\sqrt{(v_1,\ v_1)},\\ v_k=a_k+\sum_{i=1}^{k-1}c_iq_i,\ c_i=-(a_k,\ q_i),\\ q_k=v_k/\sqrt{(v_k,\ v_k)}. \end{aligned}\right\}\qquad (*)$$

Коэффициенты c_i здесь находятся из условия ортогональности v_k векторам $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{k-1}$. Векторы $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ линейно выражаются через $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$, поэтому вектор $q_{n+1}=(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n+1})$ ортогонален ко всем векторам $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$. При этом невырожденность матрицы A обеспечивает выполнение $z_{n+1}\neq 0$. Таким образом,

$$(z_1/z_{n+1},\ z_2/z_{n+1},\ \ldots,\ z_n/z_{n+1})$$

— искомое решение системы.

Описанная схема О. м. хорошо вписывается в общую схему *прямых методов решения системы*: соотношения (*) равносильны преобразованию матрицы системы в матрицу $L_nL_{n-1}\ldots L_1A$, где

$$L_k=\begin{Vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & C_1C_2\ldots C_k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{Vmatrix},$$

и тем самым осуществляют факторизацию матрицы системы в виде $A=LQ$, где L — треугольная, Q — унитарная матрицы.

Процесс факторизации матрицы A по О. м. устойчив к ошибкам округления. Если в (*) при выполнении операции скалярного произведения векторов использовать процедуру накопления с удвоенной точностью, то для факторизации матрицы по О. м. имеет место одна из лучших оценок точности в классе прямых методов. При этом, однако, свойство ортогональности векторов $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$, то есть унитарности матрицы Q, неустойчиво по отношению к ошибкам округления. Поэтому решение системы, полученное из рекуррентных соотношений (*), может иметь большую погрешность. Для

устранения этого недостатка используются различные методы переортогонализации (см. [1], [2]).

О. м. уступает многим прямым методам по быстродействию.

Лит.: [1] Воеводин В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975.

Г. Д. Ким.

ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ, процесс ортогонализации,— алгоритм построения для данной линейно независимой системы векторов евклидова или эрмитова пространства V ортогональной системы ненулевых векторов, порождающих то же самое подпространство в V. Наиболее известным является процесс ортогонализации Шмидта (или Грама — Шмидта), при к-ром по линейно независимой системе $a_1, \ldots, a_k$ строится ортогональная система $b_1, \ldots, b_k$ такая, что каждый вектор b_i ($i=1, \ldots, k$) линейно выражается через $a_1, \ldots, a_i$, то есть $b_i = \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} a_j$, где $C=\|\gamma_{ij}\|$ — верхняя треугольная матрица. При этом можно добиться того, чтобы система $\{b_i\}$ была ортонормированной и чтобы диагональные элементы γ_{ii} матрицы C были положительны; этими условиями система $\{b_i\}$ и матрица C определяются однозначно.

Процесс Грама—Шмидта состоит в следующем. Полагают $b_1=a_1$; если уже построены векторы $b_1, \ldots, b_i$, то

$$b_{i+1} = a_{i+1} + \sum_{j=1}^{i} \alpha_i b_j,$$

где

$$\alpha_j = -\frac{(a_{i+1}, b_j)}{(b_j, b_j)},$$

$j=1, \ldots, i$, найдены из условия ортогональности вектора b_{i+1} к $b_1, \ldots, b_i$. Геометрич. смысл описанного процесса состоит в том, что на каждом шагу вектор b_{i+1} является перпендикуляром, восстановленным к линейной оболочке векторов $a_1, \ldots, a_i$ до конца вектора a_{i+1}. Произведение длин $|b_1| \ldots |b_k|$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах системы $\{a_i\}$, как на ребрах. Нормируя полученные векторы b_i, получают искомую ортонормированную систему. Явное выражение векторов b_i через $a_1, \ldots, a_k$ дает формула

$$b_i = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \ldots & (a_1, a_{i-1}) & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_i, a_1) & \ldots & (a_i, a_{i-1}) & a_i \end{vmatrix}$$

(определитель в правой части следует формально разложить по последнему столбцу). Соответствующая ортонормированная система имеет вид

$$q_i = \frac{b_i}{\sqrt{\Gamma_{i-1}\Gamma_i}},$$

где Γ_i — *Грама определитель* системы $a_1, \ldots, a_j$.

Этот процесс применим также и к счетной системе векторов.

Процесс Грама—Шмидта может быть истолкован как разложение невырожденной квадратной матрицы в произведение ортогональной (или унитарной матрицы в случае эрмитова пространства) и верхней треугольной матрицы с положительными диагональными элементами, что есть частный случай *Ивасавы разложения*.

Лит.: [1] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966; [2] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975.

И. В. Проскуряков.

ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ — построение для заданной системы функций $\{f_n(x)\}$, интегрируемых с квадратом на отрезке $[a, b]$ функций ортогональной системы $\{\varphi_n(x)\}$ путем применения некоторого процесса *ортогонализации* или же путем продолжения функций $f_n(x)$ на более длинный интервал $[c, d]$, $c<a<b<d$.

Применение процесса ортогонализации Шмидта к полным системам $\{f_n(x)\}$ всегда приводит к полным ортонормированным системам $\{\varphi_n(x)\}$ и при соответствующем выборе последовательности $\{f_n(x)\}$ дает возможность построения систем, обладающих теми или иными хорошими свойствами. Таким путем построена, напр., система Франклина (см. *Ортогональная система*), являющаяся базисом в $C[0, 1]$ и в $L^p[0, 1]$, $p \geqslant 1$.

О. с. ф. путем продолжения на более длинный интервал впервые рассматривалась И. Шуром (см. [1] с. 84). Он доказал, что для существования ортонормированной в $L^2[0, 1]$ системы $\{\varphi_n(x)\}$, $\varphi_n(x) = f_n(x)$, $x \in [a, b]$, $0 < a < b < 1$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sup \int_a^b \left[\sum \xi_i f_i(x)\right]^2 dx = 1,$$

где верхняя грань берется по всем $\{\xi_i\}$, $\sum \xi_i^2 = 1$. Найдены также необходимые и достаточные условия, при выполнении к-рых можно путем такой ортогонализации получить полную ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}$ (см. [2]).

Нек-рые конструкции ортогонализации продолжением функций даны Д. Е. Меньшовым [3]. Они использовались при доказательстве теорем о точности условия $\sum a_n^2 \ln^2 n < \infty$ для сходимости почти всюду ортогональных рядов $\sum a_n \varphi_n(x)$.

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [2] Олевский А. М., «Матем. заметки», 1969, т. 6, № 6, с. 737—47; [3] Меньшов Д. Е., «Матем. сб.», 1938, т. 3, с. 103—20; [4] Franklin Ph., «Math. Ann.», 1928, Bd 100, S. 522—29.

А. А. Талалян.

ОРТОГОНАЛЬНАЯ ГРУППА — группа всех линейных преобразований n-мерного векторного пространства V над полем k, сохраняющих фиксированную невырожденную квадратичную форму Q на V (т. е. таких линейных преобразований φ, что $Q(\varphi(v)) = Q(v)$ для любого $v \in V$). О. г. принадлежит к числу *классических групп*. Элементы О. г. наз. ортогональными (относительно Q) преобразованиями V, а также автоморфизмами формы Q. Пусть, далее, $\mathrm{char}\, k \neq 2$ (об О. г. над полями характеристики 2 *см* [1], [7]) и f — *связанная* с Q *невырожденная* симметрич. билинейная форма на V, определенная формулой

$$f(v, u) = \frac{1}{2}(Q(v+u) - Q(v) - Q(u)).$$

Тогда О. г. состоит в точности из тех линейных преобразований пространства V, к-рые сохраняют f, и обозначается через $O_n(k, f)$ или (когда ясно о каком поле k и форме f идет речь) просто через O_n. Если B — матрица f в каком-либо базисе пространства V, то О. г. может быть отождествлена с группой всех таких $(n \times n)$-матриц A с коэффициентами в k, что $A^\top BA = B$ ($^\top$ — транспонирование).

Описание алгебраич. строения О. г. составляет предмет классич. исследований. Определитель любого элемента из O_n равен 1 или -1. Элементы с определителем 1 наз. вращениями; они образуют в О. г. нормальный делитель $O_n^+(k, f)$ (или просто O_n^+) индекса 2, наз. группой вращений. Элементы из $O_n - O_n^+$ наз. переворачиваниями. Всякое вращение (переворачивание) является произведением четного (нечетного) числа отражений из O_n.

Пусть Z_n — группа всех гомотетий φ_α: $v \mapsto \alpha v$, $\alpha \in k$, $\alpha \neq 0$, пространства V. Тогда $O_n \cap Z_n$ — это центр O_n; он состоит из двух элементов: φ_1 и φ_{-1}. Если n нечетно, то O_n является прямым произведением своего центра и O_n^+. Центр O_n^+ при $n \geqslant 3$ тривиален, если n нечетно, и совпадает с центром O_n, если n четно. Если же $n = 2$, то группа O_n^+ коммутативна и изоморфна либо

мультипликативной группе k^* поля k (в случае, когда индекс Витта ν формы f равен 1), либо группе элементов с нормой 1 в поле $k(\sqrt{-\Delta})$, где Δ — дискриминант формы f (в случае, когда $\nu=0$). Коммутант группы $O_n(k, f)$ обозначается через $\Omega_n(k, f)$ или просто Ω_n; он порождается квадратами элементов из O_n. При $n\geqslant 3$ коммутант группы O_n^+ совпадает с Ω_n. Центр группы Ω_n имеет вид $\Omega_n\cap Z_n$.

Классич. группами, связанными с О. г., являются также канонич. образы O_n^+ и Ω_n в *проективной группе*; они обозначаются $PO_n^+(k, f)$ и $P\Omega_n(k, f)$ (или просто PO_n^+ и $P\Omega_n$) и изоморфны соответственно $O_n^+/(O_n^+\cap Z_n)$ и $\Omega_n/(\Omega_n\cap Z_n)$.

Основные классич. факты об алгебраич. структуре О. г. относятся к описанию последовательных факторов следующего ряда нормальных делителей в О. г.

$$O_n\supset O_n^+\supset\Omega_n\supset\Omega_n\cap Z_n\supset\{e\}.$$

Группа O_n/O_n^+ имеет порядок 2. Всякий элемент в O_n/Ω_n имеет порядок 2, ввиду чего строение этой группы полностью определяется кардинальным числом ее элементов, к-рое может быть либо бесконечным, либо конечным вида 2^a, a — целое. Описание остальных факторов существенно зависит от того, отличен ли от нуля индекс Витта ν формы f.

Пусть сначала $\nu\geqslant 1$. Тогда $O_n^+/\Omega_n\approx k^*/k^{*2}$ при $n\geqslant 2$. Этот изоморфизм определен спинорной нормой, к-рая задает эпиморфизм O_n^+ на k^*/k^{*2} с ядром Ω_n. Группа $\Omega_n\cap Z_n$ нетривиальна (и состоит из преобразований φ_1 и φ_{-1}) тогда и только тогда, когда n четно и $\Delta\in k^2$. Если $n\geqslant 5$, то группа $P\Omega_n=\Omega_n/(\Omega_n\cap Z_n)$ проста. Случаи $n=3, 4$ рассматриваются отдельно. А именно, $P\Omega_3=\Omega_3$ изоморфна $PSL_2(k)$ (см. *Специальная линейная группа*) и также проста, если число элементов в k не равно 3 (группа O_3^+ изоморфна проективной группе $PGL_2(k)$). При $\nu=1$ группа $P\Omega_4=\Omega_4$ изоморфна группе $PSL_2(k(\sqrt{\Delta}))$ и проста (в этом случае $\Delta\notin k^2$), а при $\nu=2$ группа $P\Omega_4$ изоморфна $PSL_2(k)\times PSL_2(k)$ и не проста. В частном случае, когда $k=\mathbb{R}$ и Q — форма сигнатуры (3, 1), группа $P\Omega_4=\Omega_4\simeq PSL_2(\mathbb{C})$ наз. группой Лоренца.

В случае же, когда $\nu=0$ (т. е. Q — анизотропная форма), многие из указанных результатов не верны. Напр., если $k=\mathbb{R}$, а Q — положительно определенная форма, то $\Omega_n=O_n^+$, хотя $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^{*2}$ состоит из двух элементов; при $k=\mathbb{Q}$, $n=4$, возможен случай, когда $\Delta\in k^2$, но $\varphi_{-1}\notin\Omega_4$. Вообще при $\nu=0$ структура О. г. и связанных с ней групп существенно зависит от k. Напр., если $k=\mathbb{R}$, то PO_n^+, $n\geqslant 3$, $n\neq 4$, $\nu=0$, проста (а PO_4^+ изоморфна прямому произведению $O_3^+\times O_3^+$ двух простых групп); если же k — поле p-адических чисел, то при $\nu=0$ в O_3 (и в O_4) существует бесконечный ряд нормальных делителей с абелевыми факторами. Наиболее изучены случаи локально компактного поля и поля алгебраич. чисел. Если k — поле p-адических чисел, то случай $\nu=0$ невозможен при $n\geqslant 5$. Если же k — поле алгебраич. чисел, то такого ограничения нет и один из основных результатов состоит в том, что $P\Omega_n$ при $\nu=0$ и $n\geqslant 5$ проста. В этом случае изучение О. г. тесно связано с теорией эквивалентности квадратичных форм, к-рая основывается на рассмотрении форм, полученных из Q при расширении k до локальных полей, определенных нормированиями k (принцип Хассе).

Если k — конечное поле $\mathbb{F}_q$ из q элементов, то О. г. является конечной группой. Порядок O_n^+ при нечетном n равен

$$(q^{n-1}-1)\,q^{n-2}\,(q^{n-3}-1)\,q^{n-4}\ldots(q^2-1)\,q,$$

а при $n=2m$ равен

$$(q^{2m-1}-\varepsilon q^{m-1})\,(q^{2m-2}-1)\,q^{2m-3}\ldots(q^2-1)\,q,$$

где $\varepsilon=1$ при $(-1)^m\Delta\in\mathbb{F}_q^2$ и $\varepsilon=-1$ в противном случае. Указанные формулы вместе с приведенными общими фактами об О. г. при $\nu\geqslant 1$ позволяют вычислить также и порядки Ω_n и $P\Omega_n$, так как $\nu\geqslant 1$ при $n\geqslant 3$, а порядок k^*/k^{*2} равен 2. Группа $P\Omega_n$, $n\geqslant 5$, является одной из классических простых конечных групп (см. также *Шевалле группа*).

Один из основных результатов об автоморфизмах О. г. состоит в следующем: если $n\geqslant 3$, то всякий автоморфизм φ группы O_n имеет вид $\varphi(u)=\chi(u)gug^{-1}$, $u\in O_n$, где χ — фиксированный гомоморфизм O_n в ее центр, а g — фиксированное биективное полулинейное отображение V в себя, удовлетворяющее условию $Q(g(v))=r_gQ^\sigma(v)$ для всех $v\in V$, где $r_g\in k^*$, а σ — связанный с g автоморфизм k. Если $\nu\geqslant 1$ и $n\geqslant 6$, то всякий автоморфизм O_n^+ индуцирован автоморфизмом O_n (см. [1], [3]).

Так же, как и другие классич. группы, О. г. допускает (при нек-рых предположениях) геометрич. характеризацию. А именно, пусть Q — такая анизотропная форма, что $Q(v)\in k^2$ для любого $v\in V$. В этом случае k — пифагорово упорядочиваемое поле. При фиксированном **упорядочении** поля k n-мерной **цепью инцидентных полупространств** в V наз. любая последовательность $(H_s)_{1\leqslant s\leqslant n}$, построенная по линейно независимой системе векторов $(h_s)_{1\leqslant s\leqslant n}$, где H_s — множество всех линейных комбинаций вида $\sum_{j=1}^s\lambda_jh_j$, $\lambda_s\geqslant 0$. Группа O_n обладает **свойством свободной подвижности**, т. е. для любых двух n-мерных цепей полупространств существует единственное преобразование из O_n, переводящее первую цепь во вторую. Это свойство характеризует О. г.: если L — любое упорядоченное тело и G — подгруппа в $GL_n(L)$, $n\geqslant 3$, обладающая свойством свободной подвижности, то L является пифагоровым полем, а $G=O_n(L, f)$, где f — такая анизотропная симметрич. билинейная форма, что $f(v, v)\in L^2$ для любого вектора v.

Пусть $\overline{k}$ — фиксированное алгебраич. замыкание поля k. Форма f естественно продолжается до невырожденной симметрич. билинейной формы $\overline{f}$ на $V\otimes_k\overline{k}$, а О. г. $O_n(\overline{k}, f)$ является определенной над k *линейной алгебраической группой* с группой k-точек $O_n(k, f)$. Определяемые таким образом (для разных f) линейные алгебраич. группы изоморфны над $\overline{k}$ (но, вообще говоря, не над k); соответствующая линейная алгебраич. группа над $\overline{k}$ наз. **ортогональной алгебраической группой** $O_n(\overline{k})$. Ее подгруппа $O_n^+(\overline{k}, \overline{f})$ также является линейной алгебраич. группой над $\overline{k}$ и наз. **собственно ортогональной**, или **специальной ортогональной, алгебраической группой** (обозначение: $SO_n(\overline{k})$); она является связной компонентой единицы группы $O_n(\overline{k})$. Группа $SO_n(\overline{k})$ — почти простая алгебраич. группа (т. е. не содержащая непульмерных алгебраич. нормальных делителей) типа B_s при $n=2s+1$, $s\geqslant 1$, и типа D_s при $n=2s$, $s\geqslant 3$. Универсальной накрывающей группы SO_n является *спинорная группа*.

Если $k=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или p-адическое поле, то $O_n(k, f)$ естественно снабжается структурой вещественной, комплексной или p-адической *аналитической группы*. Группа Ли $O_n(\mathbb{R}, f)$ определяется с точностью до изоморфизма сигнатурой формы f; если эта сигнатура имеет вид (p, q), $p+q=n$, то $O_n(\mathbb{R}, f)$ обозначается через $O(p, q)$ и наз. **псевдоортогональной группой**. Ее можно отождествить с группой Ли всех дейст-

вительных $(n\times n)$-матриц A, удовлетворяющих условию

$$A^{\top}I_{p,q}A=I_{p,q},\quad \text{где } I_{p,q}=\begin{Vmatrix}1_p & 0\\ 0 & -1_q\end{Vmatrix}$$

(через 1_s обозначена единичная $(s\times s)$-матрица); алгебра Ли этой группы отождествляется с алгеброй Ли всех действительных $(n\times n)$-матриц X, удовлетворяющих условию $X^{\top}I_{p,q}=-I_{p,q}X$. В частном случае $q=0$ группа $O(p, q)$ обозначается через $O(n)$ и наз. в е щ е с т в е н н о й о р т о г о н а л ь н о й г р у п п о й; ее алгебра Ли состоит из всех кососимметрических действительных $(n\times n)$-матриц. Группа Ли $O(p, q)$ имеет четыре компоненты связности при $q\neq 0$ и две компоненты связности при $q=0$. Связной компонентой единицы является ее коммутант, к-рый при $q=0$ совпадает с подгруппой $SO(n)$ в $O(n)$, состоящей из всех преобразований с определителем, равным 1. Группа $O(p, q)$ компактна только при $q=0$. Инварианты $SO(n)$ как топологич. многообразия достаточно подробно изучены. Один из классич. результатов в этом направлении — вычисление чисел Бетти многообразия $SO(n)$: его полином Пуанкаре имеет вид

$$\prod_{s=1}^{m}(1+t^{4s-1})$$

при $n=2m+1$ и вид

$$(1+t^{2m-1})\prod_{s=1}^{m-1}(1+t^{4s-1})$$

при $n=2m$. Фундаментальная группа многообразия $SO(n)$ есть $\mathbb{Z}_2$. Вычисление высших гомотопич. групп $\pi_l(SO(n))$ имеет непосредственное отношение к классификации локально тривиальных главных $SO(n)$-расслоений над сферами. Важную роль в топологической *K-теории* играет теорема периодичности, согласно к-рой при $N\geqslant n$ имеют место изоморфизмы

$$\pi_{n+8}(O(N))\simeq\pi_n(O(N)),\ \pi_n(O(N))\simeq\mathbb{Z}_2,$$

если $n=0,\ 1$;

$$\pi_n(O(N))\simeq\mathbb{Z},$$

если $n=3,\ 7$, и

$$\pi_n(O(N))=0,$$

если $n=2,\ 4,\ 5,\ 6$. Изучение топологии группы $O(p, q)$ по существу сводится к предыдущему случаю, т. к. связная компонента единицы группы $O(p, q)$ диффеоморфна произведению $SO(p)\times SO(q)$ на евклидово пространство.

Лит.: [1] Д ь е д о н н е Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [2] А р т и н Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [3] Автоморфизмы классических групп, пер. с англ. и франц., М., 1976; [4] В е й л ь Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [5] Ж е л о б е н к о Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [6] Б у р б а к и Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [7] О'М е а р а О. Т., Introduction to quadratic forms, B.—Hdlb., 1963; [8] Х ь ю з м о л л е р Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970.

В. Л. Попов.

ОРТОГОНАЛЬНАЯ МАТРИЦА — матрица над коммутативным кольцом R с единицей 1, для к-рой транспонированная матрица совпадает с обратной. Определитель О. м. равен ± 1. Совокупность всех О. м. порядка n над R образует подгруппу полной линейной группы $\mathrm{GL}_n(R)$. Для любой действительной О. м. a существует такая действительная О. м. c, что

$$cac^{-1}=\mathrm{diag}\,[\pm 1,\ \ldots,\ \pm 1,\ a_1,\ \ldots,\ a_l],$$

где

$$a_j=\begin{Vmatrix}\cos\varphi_j & \sin\varphi_j\\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j\end{Vmatrix}.$$

Невырожденная комплексная матрица a тогда и только тогда подобна комплексной О. м., когда система ее *элементарных делителей* обладает следующими свойствами: 1) для $\lambda\neq\pm 1$ элементарные делители $(x-\lambda)^m$ и

$(x-\lambda^{-1})^m$ повторяются одно и то же число раз; 2) каждый элементарный делитель вида $(x\pm 1)^{2l}$ повторяется четное число раз.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 4 изд., М., 1975.

Д. А. Супруненко.

ОРТОГОНАЛЬНАЯ СЕТЬ — сеть, у к-рой касательные в нек-рой точке к линиям различных семейств ортогональны. Примеры О. с.: *асимптотическая сеть* на минимальной поверхности, *кривизны линий сеть*.

А. Б. Иванов.

ОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА — 1) О. с. векторов — множество $\{x_\alpha\}$ ненулевых векторов евклидова (гильбертова) пространства со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ такое, что $(x_\alpha, x_\beta)=0$ при $\alpha\neq\beta$. Если при этом норма каждого вектора равна единице, то система $\{x_\alpha\}$ наз. ортонормированной. Полная О. с. $\{x_\alpha\}$ наз. ортогональным (ортонормированным) базисом.

М. И. Войцеховский.

2) О. с. координат — система координат, в к-рой координатные линии (или поверхности) пересекаются под прямым углом. О. с. координат существуют в любом евклидовом пространстве, но, вообще говоря, не существуют в произвольном пространстве. В двумерном гладком аффинном пространстве О. с. всегда можно ввести по крайней мере в достаточно малой окрестности каждой точки. Иногда возможно введение О. с. координат в целом. В О. с. метрич. тензор g_{ij} диагоналей; диагональные компоненты g_{ii} принято наз. коэффициентами Ламе. *Ламе коэффициент* О. с. в пространстве выражаются формулами

$$L_u=\sqrt{(\partial x/\partial u)^2+(\partial y/\partial u)^2+(\partial z/\partial u)^2},$$
$$L_v=\sqrt{(\partial x/\partial v)^2+(\partial y/\partial v)^2+(\partial z/\partial v)^2},$$
$$L_w=\sqrt{(\partial x/\partial w)^2+(\partial y/\partial w)^2+(\partial z/\partial w)^2},$$

где x, y и z — декартовы прямоугольные координаты. Через коэффициенты Ламе выражаются элемент длины:

$$ds=\sqrt{L_u^2\,du^2+L_v^2\,dv^2+L_w^2\,dw^2},$$

элемент площади поверхности:

$$d\sigma=\sqrt{(L_uL_v\,du\,dv)^2+(L_uL_w\,du\,dw)^2+(L_vL_w\,dv\,dw)^2},$$

элемент объема:

$$dV=L_uL_vL_w\,du\,dv\,dw,$$

векторные дифференциальные операции:

$$\operatorname{grad}_u\varphi=\frac{1}{L_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u},\quad \operatorname{grad}_v\varphi=\frac{1}{L_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v},\quad \operatorname{grad}_w\varphi=\frac{1}{L_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{L_uL_vL_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_uL_vL_w)+\frac{\partial}{\partial v}(a_vL_uL_w)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial w}(a_wL_uL_v)\right];$$

$$\operatorname{rot}_u\boldsymbol{a}=\frac{1}{L_vL_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(a_wL_w)-\frac{\partial}{\partial w}(a_vL_v)\right],$$

$$\operatorname{rot}_v\boldsymbol{a}=\frac{1}{L_uL_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(a_uL_u)-\frac{\partial}{\partial u}(a_wL_w)\right],$$

$$\operatorname{rot}_w\boldsymbol{a}=\frac{1}{L_uL_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_vL_v)-\frac{\partial}{\partial v}(a_uL_u)\right],$$

$$\Delta\varphi=\frac{1}{L_uL_vL_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L_vL_w}{L_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L_uL_w}{L_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{L_uL_v}{L_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right].$$

Наиболее часто используемые О. с. координат: на плоскости — декартовы, полярные, эллиптические, параболические; в пространстве — сферические, цилиндрические, параболоидальные, бицилиндрические, биполярные.

Д. Д. Соколов.

3) О. с. функций — конечная или счетная система $\{\varphi_i(x)\}$ функций, принадлежащих пространству

$L^2(X,\ S,\ \mu)$ и удовлетворяющих условиям

$$\int_X \psi_i(x)\,\overline{\varphi}_j(x)\,d\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ \lambda_i > 0 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Если $\lambda_i = 1$ для всех i, то система наз. ортонормированной. При этом предполагается, что мера $\mu(x)$, определенная на σ-алгебре S подмножеств множества X, счетно аддитивна, полна и имеет счетную базу. Это определение О. с. включает все рассматриваемые в современном анализе О. с.; они получаются при различных конкретных реализациях пространства с мерой $(X,\ S,\ \mu)$.

Наибольший интерес представляют полные ортонормированные системы $\{\varphi_n(x)\}$, обладающие тем свойством, что для любой функции $f(x) \in L^2(X,\ S,\ \mu)$ существует единственный ряд $\sum c_n\varphi_n(x)$, сходящийся к $f(x)$ в метрике пространства $L^2(X,\ S,\ \mu)$, при этом коэффициенты c_n определяются формулами Фурье

$$c_n = \int_X f\overline{\varphi}_n\,d\mu.$$

Такие системы существуют в силу сепарабельности пространства $L^2(X,\ S,\ \mu)$. Универсальный способ построения полных ортонормированных систем дает метод ортогонализации Шмидта. Для этого достаточно применить его к нек-рой полной в $L^2(S,\ X,\ \mu)$ системе линейно независимых функций.

В теории *ортогональных рядов* в основном рассматриваются О. с. пространства $L^2[a,\ b]$ (тот частный случай, когда $X = [a,\ b]$, S — система множеств, измеримых по Лебегу, и μ — мера Лебега). Многие теоремы о сходимости или суммируемости рядов $\sum a_n\varphi_n(x)$, $\sum a_n^2 < \infty$, по общим О. с. $\{\varphi_n(x)\}$ пространства $L^2[a,\ b]$ верны и для рядов по ортонормированным системам пространства $L^2(X,\ S,\ \mu)$. Вместе с тем в этом частном случае построены интересные конкретные О. с., обладающие теми или иными хорошими свойствами. Таковы, например, системы Хаара, Радемахера, Уолша—Пэли, Франклина.

1) Система Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$: $\chi_1(x) = 1$, $x \in [0,\ 1]$,

$$\chi_m(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{при } x \in \left(\frac{2k-2}{2^{n+1}},\ \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right), \\ -\sqrt{2^n} & \text{при } x \in \left(\frac{2k-1}{2^{n+1}},\ \frac{2k}{2^{n+1}}\right), \\ 0 & \text{в остальных точках отрезка } [0,\ 1], \end{cases}$$

где $m = 2^n + k$, $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, $m = 2,\ 3,\ \ldots$. Ряды по системе Хаара представляют типичный пример *мартингалов* и для них верны общие теоремы из теории мартингалов. Кроме того, система $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в $L^p[0,\ 1]$, $p \geqslant 1$, и ряд Фурье по системе Хаара любой интегрируемой функции почти всюду сходится.

2) Система Радемахера $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$r_n(x) = \operatorname{sign}\sin 2^{n+1}\pi x, \quad x \in [0,\ 1],$$

представляет собой важный пример О. с. независимых функций и имеет применения как в теории вероятностей, так и в теории ортогональных и общих функциональных рядов.

3) Система Уолша — Пэли $\{W_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определяется через функции Радемахера:

$$W_0(x) = 1,\ W_n(x) = \prod_{k=0}^{m} [r_k(x)]^{q_k},\ x \in [0,\ 1],$$

где числа m и q_k определяются из двоичного разложения числа n:

$$n = \sum_{k=0}^{m} q_k 2^k.$$

4) Система Франклина $\{\Phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ получается ортогонализацией методом Шмидта последовательности функций

$$u_1(x)=x,\ u_2(x)=1-x,\ u_n(x)=\int_0^x \chi_{n-1}(t)\,dt,$$
$$n\geqslant 3,\quad x\in[0,\ 1].$$

Она является примером ортогонального базиса пространства $C[0,\ 1]$ непрерывных функций.

В теории кратных ортогональных рядов рассматриваются системы функций вида

$$\varphi_{n_1}(x_1)\cdot\varphi_{n_2}(x_2)\ \ldots\ \varphi_{n_m}(x_m),\ x_i\in[a,\ b],\ 1\leqslant i\leqslant m,$$
$$n_i=1,\ 2,\ \ldots,$$

где $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в $L^2[a,\ b]$. Такие системы ортонормированы на m-мерном кубе $J^m=[a,\ b]\times\ldots\times[a,\ b]$ и полны, если полна система $\{\varphi_n(x)\}$.

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [2] Итоги науки. Математический анализ, 1970, М., 1971, с. 109—46; [3] там же, с. 147—202; [4] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [5] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [6] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1—2, М., 1965.

А. А. Талалян.

ОРТОГОНАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА, ортогональный массив, ОА (N, k, n, t, λ) — матрица размера $k\times N$, элементы к-рой суть числа $1, 2, \ldots, n$, обладающая тем свойством, что в каждой ее подматрице размера $t\times N$ любой из n^t возможных t-мерных векторов-столбцов, имеющих координатами эти числа, встречается в качестве столбцов этой подматрицы точно λ раз. Из определения О. т. следует, что $N=\lambda n^t$. Иногда под О. т. понимают ОА (N, k, n, t, λ) с $t=2$ и $\lambda=1$, и тогда эта О. т. обозначается ОА (n, k). При $k>3$ О. т. ОА (n, k) эквивалентна множеству из $k-2$ попарно ортогональных латинских квадратов. При заданных n, t, λ максимальное значение параметра k определено лишь в нескольких частных случаях. Так, напр., $k\leqslant(\lambda n^2-1)/(n-1)$ при $t=2$ или $k_{\max}=t+1$ в случае нечетного λ при $n=2$.

Лит.: [1] Dénes J., Keedwell A. D., Latin Squares and their applications, Bdpst, 1974; [2] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970.

В. М. Михеев.

ОРТОГОНАЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ — см. *Изогональная траектория.*

ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — линейное преобразование A евклидова пространства, сохраняющее длины или (что эквивалентно этому) скалярное произведение векторов. О. п. и только они переводят ортонормированный базис в ортонормированный. Необходимым и достаточным условием ортогональности является также равенство $A^*=A^{-1}$, где A^* — сопряженное, а A^{-1} — обратное линейные преобразования.

В ортонормированном базисе О. п. (и только им) соответствуют ортогональные матрицы. Собственные значения О. п. равны ±1, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Определитель О. п. равен $+1$ (собственное О. п.) или -1 (несобственное О. п.). В случае евклидовой плоскости всякое собственное О. п. является поворотом, и его матрица в подходящем ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{Vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{Vmatrix},$$

где φ — угол поворота, а всякое несобственное О. п. является отражением относительно нек-рой прямой, его матрица в подходящем ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix}.$$

В трехмерном пространстве всякое собственное О. п. есть поворот вокруг нек-рой оси, а всякое несобственное — произведение поворота вокруг оси и отражения в перпендикулярной плоскости. В произвольном n-мерном евклидовом пространстве О. п. также сводятся к поворотам и отражениям (см. *Вращение*).

Множество всех О. п. евклидова пространства образует группу относительно умножения преобразований — *ортогональную группу* данного евклидова пространства. Собственные О. п. образуют нормальную подгруппу в этой группе (специальную ортогональную группу).

Т. С. Пиголкина.

ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ МЕТОД — вариант метода прогонки, основанный на ортогональном преобразовании неизвестных. Пусть при $a \leqslant x \leqslant b$ рассматривается граничная задача для пары линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y'(x) = a_1(x)\, y(x) + b_1(x)\, z(x) + f_1(x), \tag{1}$$

$$z'(x) = a_2(x)\, y(x) + b_2(x)\, z(x) + f_2(x) \tag{2}$$

с условиями вида

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 z(a) = \gamma_1, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \tag{3}$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 z(b) = \gamma_2, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1. \tag{4}$$

Пусть данные функции $a_i(x)$, $b_i(x)$, $f_i(x)$, $i = 1, 2$, непрерывны на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Решение граничной задачи (1)—(4) О. п. м. осуществляется следующим путем.

I. Решается вспомогательная задача Коши

$$s'(x) = c(x)\, r(x), \quad c'(x) = -s(x)\, r(x),$$
$$r(x) = s^2(x)\, b_1(x) + s(x)\, c(x)\, (b_2(x) - a_1(x)) - c^2(x)\, a_2(x), \tag{5}$$

$$u'(x) = \bar{a}_1(x)\, u(x) + \bar{f}_1(x), \tag{6}$$

$$s(a) = \alpha_1, \; c(a) = \beta_1, \; u(a) = \gamma_1, \tag{7}$$

где

$$\bar{a}_1(x) = a_1(x)\, s^2(x) + b_2(x)\, c^2(x) + (b_1(x) + a_2(x))\, s(x)\, c(x),$$
$$f_1(x) = f_1(x)\, s(x) + f_2(x)\, c(x)$$

(прямой ход прогонки).

II. Проверяется условие $\Delta = \alpha_2 c(b) - \beta_2 s(b) \neq 0$, и если оно выполняется, то в направлении от точки $x = b$ к точке $x = a$ решается задача Коши

$$v'(x) = \bar{a}_2(x)\, u(x) + \bar{b}_2(x)\, v(x) + \bar{f}_2(x), \tag{8}$$

$$v(b) = \{\gamma_2 - [\alpha_2 s(b) + \beta_2 c(b)]\, u(b)\}/\Delta, \tag{9}$$

где

$$\bar{a}_2(x) = 2(a_1(x) - b_2(x))\, s(x)\, c(x) + (b_1(x) + a_2(x))\, (c^2(x) - s^2(x)),$$

$$\bar{b}_2(x) = a_1(x)\, c^2(x) + b_2(x)\, s^2(x) - (b_1(x) + a_2(x))\, s(x)\, c(x),$$

$$\bar{f}_2(x) = f_1(x)\, c(x) - f_2(x)\, s(x)$$

(обратный ход прогонки).

III. Искомые функции вычисляются по формулам

$$y(x) = s(x)\, u(x) + c(x)\, v(x),$$
$$z(x) = c(x)\, u(x) - s(x)\, v(x).$$

Если решение $y(x)$, $z(x)$ граничной задачи (1)—(4) существует, единственно и устойчиво относительно малых изменений коэффициентов и свободных членов, определяющих ее, то $\Delta \neq 0$ и рассмотренный метод также устойчив (см. [2]).

Система линейных алгебраических уравнений

$$y_{k+1} = A_k y_k + B_k z_k + F_k, \tag{10}$$

$$z_{k+1} = C_k y_k + D_k z_k + G_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{11}$$

$$\alpha_0 y_0 + \beta_0 z_0 = \gamma_0, \tag{12}$$

$$\alpha_n y_n + \beta_n z_n = \gamma_n, \tag{13}$$

где $A_kD_k \neq B_kC_k$, $\alpha_0^2+\beta_0^2=1$, $\alpha_n^2+\beta_n^2=1$, решается по следующим правилам.

1) Используя формулы

$$s_{k+1}=(C_kc_k-D_ks_k)/\rho_k,$$
$$c_{k+1}=(B_ks_k-A_kc_k)/\rho_k,$$
$$\rho_k=\sqrt{[(C_kc_k-D_ks_k)^2+(B_ks_k-A_kc_k)^2]},$$
$$u_{k+1}=(A_ks_ks_{k+1}+B_kc_ks_{k+1}+C_ks_kc_{k+1}+D_kc_kc_{k+1})\,u_k+$$
$$+(F_ks_{k+1}+G_kc_{k+1}),$$
$$s_0=\alpha_0,\quad c_0=\beta_0,\quad u_0=\gamma_0,$$

последовательно вычисляют s_{k+1}, c_{k+1}, u_{k+1} при $k=0, \ldots, n-1$ (прямой ход прогонки).

2) Проверяется условие $\Delta_n=\alpha_nc_n-\beta_ns_n\neq 0$, и если оно выполняется, то вычисляют

$$v_n=[\gamma_n-(\alpha_ns_n+\beta_nc_n)\,u_n]/\Delta_n$$

и

$$v_k=\{v_{k+1}+[(C_ks_k+D_kc_k)s_{k+1}-(A_ks_k+B_kc_k)\,c_{k+1}]\,u_k+$$
$$+(G_ks_{k+1}-F_kc_{k+1})\}/\rho_k$$

при $k=n-1, n-2, \ldots, 1$ (обратный ход прогонки).

3) Значения искомого решения системы уравнений (10)—(13) вычисляются по формулам

$$y_k=u_ks_k+v_kc_k,\qquad z_k=u_kc_k-v_ks_k.$$

Если решение системы уравнений (10)—(13) существует, единственно и устойчиво относительно малых изменений коэффициентов и свободных членов, то и рассмотренный О. п. м. также устойчив (см. [2]).

Иногда ортогональной прогонкой наз. методы, основанные на использовании фундаментальной системы решений однородной системы уравнений для целей переноса граничных условий (см. [1], [3]). Однако эти методы являются скорее вариантами *пристрелки метода*.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., т. 1, М., 1975; [2] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы высшей математики, т. 2, Минск, 1975; [3] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

А. Ф. Шапкин.

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ — обобщение понятия перпендикулярности векторов евклидова пространства. Наиболее естественное понятие О. введено в теории гильбертовых пространств. Два элемента x и y из гильбертова пространства H наз. ортогональными ($x \perp y$), если их скалярное произведение равно нулю ($(x, y)=0$). Это понятие О. в том частном случае, когда H — евклидово пространство, совпадает с понятием перпендикулярности двух векторов. В терминах этого понятия в любом гильбертовом пространстве верна теорема Пифагора: если элемент $x \in H$ равен конечной или счетной сумме попарно ортогональных элементов x_i, $x_i \in H$ (счетная сумма $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ понимается в смысле сходимости ряда в метрике пространства H), то $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2$ (см. *Парсеваля равенство*).

Полная счетная система $\{x_i\}$ ортонормированных векторов сепарабельного гильбертова пространства представляет аналог полной системы попарно ортогональных векторов конечномерного евклидова пространства: любой элемент $x \in H$ единственным образом представляется в виде суммы $\sum_{i=1}^{\infty} c_ix_i$, причем $c_ix_i=(x, x_i)x_i$ — проекция элемента x на x_i.

В случае функционального пространства $L^2[a, b]$ такую роль играют полные ортонормированные системы функций $\{\varphi_k\}$: если $f(x) \in L^2[a, b]$, то

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$$

в метрике пространства $L^2[a, b]$, где

$$c_k = \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx.$$

В случае, когда $\varphi_k(x)$ — ограниченные функции, коэффициенты c_k можно определить для любой интегрируемой функции. При этом представляет интерес вопрос о сходимости соответствующего разложения в том или ином смысле (см. *Тригонометрическая система*, *Хаара система*). Поэтому для функций термин «О.» употребляется в более широком смысле: интегрируемые на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ наз. о р т о г о н а л ь н ы м и, если

$$\int_b^a f(x)\,g(x)\,dx = 0$$

(для существования интеграла обычно требуется, чтобы $f(x) \in L^p[a, b]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $g(x) = L^q[a, b]$, $1/p + 1/q = 1$, $L^\infty[a, b]$ — множество ограниченных функций).

Существуют также определения О. элементов произвольного действительного нормированного пространства. Одно из них (см. [4]) следующее: элемент x действительного нормированного пространства B считается ортогональным элементу y, если $\|x\| \leqslant \|x + ky\|$ для любого действительного k. В терминах этого понятия установлены нек-рые необходимые и достаточные условия, при к-рых может быть определено скалярное (внутреннее) произведение элементов пространства B (см. [5], [6]).

Лит.: [1] К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [2] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д ж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [3] К а ч м а ж С., Ш т е й н г а у з Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [4] B i r k h o f f G., «Duke Math. J.», 1935, v. 1, p. 169—72; [5] J a m e s R., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 61, p. 265—92; [6] е г о ж е, «Bull. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 53, p. 559—66. *А. А. Талалян.*

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ЛАТИНСКИЕ КВАДРАТЫ — пара латинских квадратов $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$ порядка n таких, что $(a_{ij}, b_{ij}) \neq (a_{kl}, b_{kl})$ при $(i, j) \neq (k, l)$, $i, j, k, l \in S = \{1, \ldots, n\}$. Квадраты A и B наз. о р т о г о н а л ь н ы м и с о к в а д р а т а м и. Матрица, получаемая наложением A на B, наз. г р е к о - л а т и н с к и м, или э й л е р о в ы м, к в а д р а т о м, ее элементы — все n^2 упорядоченных пар элементов S. Ортогональность A и B обозначается $A \perp B$. Пример пары О. л. к. и их эйлерова квадрата для $n = 3$:

1 2 3	1 2 3	11 22 33
2 3 1	3 1 2	23 31 12
3 1 2	2 3 1	32 13 21.

Латинский квадрат A порядка n имеет ортогональный соквадрат тогда и только тогда, когда в A существует n непересекающихся трансверсалей (см. *Латинский квадрат*). Если A — латинский квадрат порядка $4t+2$ (или $4t+1$) с подквадратом порядка $2t+1$ (соответственно $2t$), все клетки к-рого за исключением, быть может, t (соответственно $[(t-1)/2]$) клеток заполнены не более чем $2t+1$ (соответственно $2t$) элементами, то для A не существует ортогонального соквадрата. Для всех $n > 2$, $n \neq 6$, имеются примеры пар О. л. к., а для $n = 6$ путем перебора всех возможностей доказано, что таких пар нет [3].

Несколько латинских квадратов одного порядка наз. п о п а р н о о р т о г о н а л ь н ы м и, если любые два из них ортогональны. Если $N(n)$ — максимальное возможное число попарно О. л. к., то $N(n) \leqslant n-1$. Для $N(n)$ получены следующие оценки снизу:

$n \geqslant$	7	52	53	63	90
$N(n) \geqslant$	2	3	4	5	6.

Кроме того, $N(12)\geqslant 5$, $N(33)\geqslant 3$, $N(35)\geqslant 4$, $N(40)\geqslant 4$, $N(45)\geqslant 4$ и доказано, что $N(n)\to\infty$ при $n\to\infty$; напр., $N(n)\geqslant n^{1/17}-2$ при достаточно большом n (см. [2]).

Множество из $n-1$ попарно О. л. к. порядка n наз. п о л н ы м. При $n>4$ множество из $n-3$ попарно О. л. к. всегда может быть дополнено до полного. В настоящее время (1983) полные множества известны только в случае $n=p^k$, где k — натуральное, p — простое числа (то есть $N(p^k)=p^k-1$). Если же $n\equiv 1 \pmod 4$ или $n\equiv 2 \pmod 4$ и свободная от квадрата часть числа n содержит хотя бы один простой множитель $p\equiv 3 \pmod 4$, то не существует полного множества попарно О. л. к. порядка n. Напр., не существует полных множеств при $n=2p$, $p\equiv 3 \pmod 4$.

Полные множества попарно О. л. к. находят приложение в статистике при построении симметрических уравновешенных неполных *блок-схем* с параметрами $v=n^2+n+1$, $k=n+1$, $\lambda=1$. Полные множества могут интерпретироваться и как конечные проективные плоскости (см. [2]).

Предложено много методов построения О. л. к. (см. [2]). Все они созданы с целью получения как можно большего множества попарно О. л. к. порядка n. Каждый из методов может быть отнесен к одной из следующих двух групп. К первой группе принадлежат методы, характерной особенностью к-рых является то, что они дают способ построения «основного» латинского квадрата и указывают, как переставить в нем строки и столбцы, чтобы получить ортогональный сокквадрат. Ко второй группе относятся методы, к-рые используют известные приемы построения О. л. к. меньшего порядка для построения О. л. к. заданного порядка.

Если $A=\|a_{ij}\|$ — латинский квадрат порядка n, построенный на множестве S, то упорядоченный набор перестановок σ_i, $i\in S$, определяемых равенствами $\sigma_i(j)=a_{ij}$, однозначно определяет латинский квадрат A. Не каждый упорядоченный набор перестановок соответствует какому-либо латинскому квадрату. Если $A=[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ и $B=[\tau_1, \ldots, \tau_n]$ — два латинских квадрата, заданных указанным способом перестановками σ_i и τ_i множества S, то $A\perp B$ тогда и только тогда, когда $[\sigma_1^{-1}\tau_1, \ldots, \sigma_n^{-1}\tau_n]$ — латинский квадрат. Если определить произведения $\alpha A=[\alpha\sigma_1, \ldots, \alpha\sigma_n]$, $A\beta=[\sigma_1\beta, \ldots, \sigma_n\beta]$, где α и β — перестановки S, то, напр., $A\perp\alpha A$ тогда и только тогда, когда $[\sigma_1^{-1}\alpha\sigma_1, \ldots, \sigma_n^{-1}\alpha\sigma_n]$ — латинский квадрат.

Методы первой группы обычно используются в случае, когда A — таблица умножения конечной группы G, то есть $a_{ij}=g_ig_j$, $g_i, g_j\in G$, $i, j\in S$; отличие одного метода от другого заключается в выборе группы G, в выборе взаимно однозначных отображений α, β группы G на себя и в использовании произведений αA, $A\beta$, $\alpha^{-1}A\alpha$ и т. д.

Если G — аддитивная группа, то условие $A\perp\alpha A$ сводится к тому, что α — о р т о м о р ф и з м G, т. е. такое взаимно однозначное отображение G на себя, что если для $g_1, g_2\in G$ выполняется равенство $\alpha(g_1)-g_1=\alpha(g_2)-g_2$, то $g_1=g_2$. Напр., пять попарно О. л. к. порядка 12 были найдены после определения четырех нетривиальных ортоморфизмов абелевой группы, являющейся прямым произведением циклич. групп 6-го и 2-го порядков (см. [2], [6]).

Если G — аддитивная группа конечного поля $GF(p^r)=\{a_0=0, a_1=1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$, $n=p^r$, то все построения значительно упрощаются и получается следующее полное множество попарно О. л. к.:

$$A_k=\|a_{ij}^k\|,\ a_{ij}^k=a_ia_k+a_j;\ i,\ j\in\{0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\},$$

$$k\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\}.$$

Следует отметить, что для n, удовлетворяющих условиям $n \not\equiv 2 \pmod 4$, $n \not\equiv 3 \pmod 9$ и $n \not\equiv 6 \pmod 9$, оказалось возможным всегда построить такой латинский квадрат A порядка n, что $A \perp A^{\top}$.

Использование прямого произведения латинских квадратов составляет основу следующего метода, относящегося ко второй группе. Пусть A_1 и B_1 — О. л. к. порядка n, построенные на множестве X, а A_2 и B_2 — *О. л. к. порядка m, построенные на множестве Y*, тогда прямые произведения матриц $A_1 \times A_2$ и $B_1 \times B_2$ будут О. л. к. порядка mn, построенные на множестве $X \times Y$. Если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$, то указанный метод приводит к оценке $N(n) \geqslant \min (p_i^{k_i} - 1)$.

В основе многих других методов второй группы лежит следующее построение. Пусть A_1, B_1, C_1 — попарно О. л. к. порядка $m \geqslant 2n$, построенные на $S_1 = \{1, 2, \dots, \dots, m\}$, A_2, B_2 — О. л. к. порядка n, построенные на $S_2 = \{m+1, \dots, m+n\}$. Чтобы получить теперь два латинских квадрата A и B порядка $m+n$, построенные на $S = S_1 \cup S_2$, добавляют к A строки и столбцы с номерами $m+1, \dots, m+n$ с незаполненными клетками, в результате чего получают частичный латинский квадрат порядка $m+n$, содержащий A_1 в верхнем левом углу. Клетки A_1 и B_1, имеющие те же номера, что и клетки C_1, содержащие элемент i, составляют общую для A_1 и B_1 i-ю трансверсаль, $i = 1, 2, \dots, m$. Элементы i-й трансверсали в A_1 при $i = 1, 2, \dots, n$ помещают в $(m+i)$-й столбец (и в $(m+i)$-ю строку) в том же порядке, в каком они располагались в строках (соответственно столбцах) A_1, а на их место ставится число $m+i$. Остается в правый нижний угол частичного квадрата поставить A_2, чтобы завершить построение A.

Построение B проводится аналогичным образом из B_1 и B_2, но только с использованием трансверсалей с номерами $n+1, n+2, \dots, 2n$. Квадраты A и B будут латинскими, но не обязательно ортогональными. Всегда можно получить пару О. л. к. порядка $m+n$ при $m = p^k \neq 13$, где p — нечетное, и $n = (m-1)/2$; показано, как, используя приведенное выше построение, получить пару О. л. к. порядка n при $n \equiv 2 \pmod 4$, $n > 6$ (см. [2]).

Приложения О. л. к. в статистике, теории информации и в теории планирования эксперимента требуют построения О. л. к. специального вида и перенесения понятия ортогональности на другие объекты. Так, обобщением О. л. к. являются *ортогональные таблицы*. *Два частичных латинских квадрата одного порядка наз. о р т о г о н а л ь н ы м и*, если при наложении их друг на друга получаемые в клетках упорядоченные пары будут все различны. Говорят, что частичный латинский квадрат A вложен в латинский квадрат B, если A совпадает с нек-рой подматрицей B (за исключением пустых клеток A). Каждый квадрат из множества попарно ортогональных частичных латинских квадратов может быть вложен в латинский квадрат таким образом, что полученные латинские квадраты будут О. л. к. (см. [6]).

Лит.: [1] С а ч к о в В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [2] D é n e s J., K e e d w e l l A. D., Latin Squares and their applications, Bdpst, 1974; [3] Х о л л М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [4] Р а й з е р Г. Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [5] H e d a y a t A., S e i d e n E., «Pacif. J. Math.», 1977, v. 54, № 2, p. 85—113; [6] L i n d n e r C h., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1976, v. 59, № 1, p. 184—86.

В. М. Михеев.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ — *система многочленов* $\{P_n(x)\}$, удовлетворяющих условию ортогональности

$$\int_a^b P_n(x)\, P_m(x)\, h(x)\, dx = 0, \quad n \neq m,$$

причем степень каждого многочлена $P_n(x)$ равна его индексу n, а весовая функция (вес) $h(x) \geqslant 0$ на интервале (a, b) или (в случае конечности a и b) на отрез-

ке $[a, b]$. О. м. наз. ортонормированными и обозначаются $\{\hat{P}_n(x)\}$, если каждый многочлен имеет положительный старший коэффициент и выполняется условие нормированности

$$\int_a^b \hat{P}_n^2(x)\, h(x)\, dx = 1.$$

А если старший коэффициент каждого многочлена равен 1, то система О. м. обозначается $\{\hat{P}_n(x)\}$.

Система О. м. $\{\hat{P}_n(x)\}$ определяется однозначно, если весовая функция (дифференциальный вес) $h(x)$ интегрируема по Лебегу на (a, b), не эквивалентна нулю и, в случае неограниченного интервала (a, b), имеет конечные степенные моменты

$$h_n = \int_a^b x^n h(x) dx.$$

Вместо дифференциального веса $h(x)$ можно рассматривать интегральный вес $d\sigma(x)$, где $\sigma(x)$ — ограниченная неубывающая функция с бесконечным множеством точек роста (в этом случае в условии ортогональности интеграл понимается в смысле Лебега — Стилтьеса).

Для того чтобы многочлен $P_n(x)$ степени n входил в систему О. м. $\{P_n(x)\}$ с весом $h(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого многочлена $Q_m(x)$ степени $m < n$ выполнялось условие

$$\int_a^b P_n(x)\, Q_m(x)\, h(x)\, dx = 0.$$

Если интервал ортогональности (a, b) симметричен относительно начала координат, а весовая функция $h(x)$ четна, то каждый многочлен $P_n(x)$ содержит только те степени x, к-рые имеют одинаковую с номером n четность, т. е. имеет место тождество

$$P_n(-x) \equiv (-1)^n P_n(x).$$

Нули О. м. в случае ортогональности по интервалу (a, b) все действительны, различны и расположены внутри (a, b), причем между двумя соседними нулями многочлена $P_n(x)$ есть один нуль многочлена $P_{n-1}(x)$. Нули О. м. часто применяются в качестве узлов интерполяционных и квадратурных формул.

Любые три последовательных многочлена системы О. м. связаны рекуррентной формулой

$$P_{n+1}(x) = (a_n x + b_n) P_n(x) - c_n P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $P_0(x) = \mu_0$,

$$P_1(x) = \mu_1 x + \nu_1, \quad \ldots,$$

$$P_n(x) = \mu_n x^n + \nu_n x^{n-1} + \ldots,$$

$$a_n = \mu_{n+1}/\mu_n, \quad b_n = a_n(\nu_{n+1}/\mu_{n+1} - \nu_n/\mu_n),$$

$$c_n = \frac{\mu_{n+1}\mu_{n-1}}{\mu_n^2} \cdot \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}, \quad d_n^2 = \int_a^b P_n^2(x)\, h(x)\, dx.$$

Число d_n^{-1} — нормирующий множитель многочлена $P_n(x)$, так что система $\{d_n^{-1} P_n(x)\}$ ортонормирована, т. е.

$$d_n^{-1} P_n(x) = \hat{P}_n(x).$$

Для О. м. имеет место формула Кристоффеля — Дарбу

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{d_k^2} P_k(x) P_k(t) =$$

$$= \frac{1}{d_n^2} \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x) P_n(t) - P_n(x) P_{n+1}(t)}{x - t}.$$

О. м. представляются через степенные моменты $\{h_k\}$ весовой функции $h(x)$ по формуле

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \psi_n(x),$$

где

$$\psi_n(x)=\begin{vmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_n \\ h_1 & h_2 & \dots & h_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-1} & h_{n-2} & \dots & h_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix},$$

а определитель Δ_{n-1} получается из $\psi_n(x)$ вычеркиванием последних строки и столбца, Δ_n определяется аналогично.

На множестве многочленов $\tilde{Q}_n(x)$ степени n с единичным старшим коэффициентом минимум функционала

$$F(\tilde{Q}_n)=\int_a^b \tilde{Q}_n^2(x)\,h(x)\,dx$$

достигается тогда и только тогда, когда

$$\tilde{Q}_n(x)\equiv \tilde{P}_n(x),$$

причем этот минимум равен μ_n^{-2}.

Если многочлены $\{\tilde{P}_n(x)\}$ ортонормированы с весом $h(x)$ на отрезке $[a, b]$, то при $p>0$ многочлены

$$\hat{Q}_n(t)=\sqrt{p}\,\hat{P}_n(pt+q),\quad n=0, 1, 2, \dots,$$

ортонормированы с весом $h(pt+q)$ на отрезке $[A, B]$, к-рый переходит в отрезок $[a, b]$ в результате линейного преобразования $x=pt+q$. Поэтому при изучении асимптотич. свойств ортогональных многочленов сначала рассматривается случай стандартного отрезка $[-1, 1]$, а затем полученные результаты распространяются на другие случаи.

Наиболее важный класс О. м., встречающихся при решении краевых задач математич. физики, составляют т. н. *классические ортогональные многочлены*: *Лагерра многочлены* $\{L_n(x;\alpha)\}$ (для них $h(x)=x^\alpha e^{-x}$, $\alpha>-1$, интервал ортогональности $(0, \infty)$); *Эрмита многочлены* $\{H_n(x)\}$ (для них $h(x)=\exp(-x^2)$, интервал ортогональности $(-\infty, \infty)$); *Якоби многочлены* $\{P_n(x;\alpha,\beta)\}$ (для них $h(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$, отрезок ортогональности $[-1, 1]$) и их частные случаи: *ультрасферические многочлены*, или многочлены Гегенбауэра $\{P_n(x,\alpha)\}$ (для них $\alpha=\beta$), *Лежандра многочлены* $\{P_n(x)\}$ (для них $\alpha=\beta=0$), *Чебышева многочлены* первого рода $\{T_n(x)\}$ (для них $\alpha=\beta=-1/2$) и второго рода $\{U_n(x)\}$ (для них $\alpha=\beta=1/2$).

Весовая функция $h(x)$ классических О. м. $\{K_n(x)\}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона

$$\frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{p_0+p_1x}{q_0+q_1x+q_2x^2}=\frac{A(x)}{B(x)},\quad x\in(a, b),$$

причем на концах интервала ортогональности выполняются условия

$$\lim_{x\to a+0} h(x)\,B(x)=\lim_{x\to b-0} h(x)\,B(x)=0.$$

Многочлен $y=K_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$B(x)\,y''+[A(x)+B'(x)]\,y'-n[p_1+(n+1)\,q_2]\,y=0.$$

Для классич. О. м. имеют место обобщенная формула Родрига

$$K_n(x)=\frac{c_n}{h(x)}\frac{d^n}{dx^n}[h(x)\,B^n(x)],$$

где c_n — нормировочный коэффициент, и формулы дифференцирования

$$\frac{d}{dx}L_n(x;\alpha)=-L_{n-1}(x;\alpha+1),\quad \frac{d}{dx}H_n(x)=2nH_{n-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}P_n(x;\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+n+1)\,P_{n-1}(x;\alpha+1,\beta+1).$$

Для частных случаев классических О. м. имеют место представления через гипергеометрич. функцию

$$P_n(x;\alpha,\beta)=\binom{n+\alpha}{n}F\left(-n,\,n+\alpha+\beta+1;\,\alpha+1;\,\frac{1-x}{2}\right),$$

$$P_n(x)=F\left(-n,\;n+1;\;1;\;\frac{1-x}{2}\right),$$

$$T_n(x)=F\left(-n,\;n;\;\frac{1}{2};\;\frac{1-x}{2}\right),$$

$$U_n(x)=(n+1)\,F\left(-n,\;n+2;\;\frac{3}{2},\;\frac{1-x}{2}\right)$$

и через вырожденную гипергеометрич. функцию

$$L_n(x)=n!\,\Phi(-n;\;1;\;x),$$

$$H_{2n}(x)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\,\Phi\left(-n;\;\frac{1}{2};\;x^2\right),$$

$$H_{2n+1}(x)=(-1)^n\frac{(2n+1)!}{n!}\,\Phi\left(-n;\;\frac{3}{2};\;x^2\right).$$

Исторически первым примером О. м. были многочлены Лежандра. Затем были введены многочлены Чебышева, общие многочлены Якоби, многочлены Эрмита и Лагерра. Все эти классич. О. м. играют важную роль во многих прикладных вопросах.

Общая теория О. м. была построена П. Л. Чебышевым. При этом в качестве основного аппарата исследования применялось разложение интеграла

$$\int_a^b\frac{h(t)}{x-t}\,dt$$

в цепную дробь; знаменатели подходящих дробей этой цепной дроби образуют систему О. м. на интервале $(a,\;b)$ с весом $h(t)$.

При изучении О. м. большое внимание уделяется их асимптотич. свойствам, ибо от этих свойств зависят условия сходимости рядов Фурье по О. м.

Асимптотич. свойства классических О. м. впервые исследовал В. А. Стеклов в 1907 (см. [8], с. 218). При этом он применил и усовершенствовал метод Лиувилля, к-рый ранее использовался для изучения решений уравнения Штурма — Лиувилля. В дальнейшем метод Лиувилля — Стеклова применялся во многих работах, в результате чего к настоящему времени (1983) подробно изучены асимптотич. свойства О. м. Якоби, Эрмита, Лагерра.

В общем случае ортогональности на отрезке $[-1,\;1]$ с произвольным весом, удовлетворяющим нек-рым качественным условиям, асимптотич. формулы для О. м. впервые получил Г. Сегё (G. Szegö) в 1920—24. При этом он ввел многочлены, ортогональные на окружности, изучил их основные свойства и нашел весьма важную формулу, представляющую многочлены, ортогональные на отрезке $[-1,\;1]$, через многочлены, ортогональные на окружности. А для исследования асимптотич. свойств многочленов, ортогональных на окружности, Г. Сегё разработал метод, основанный на специальном обобщении теоремы Фейера о представлении неотрицательных тригонометрич. полиномов с использованием методов и результатов теории аналитич. функций.

В 1930 С. Н. Бернштейн [2] для исследования асимптотич. свойств О. м. применил методы и результаты теории приближения функций. Он рассмотрел случай весовой функции вида

$$h(x)=\frac{h_0(x)}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,\;1),\qquad(1)$$

где функция $h_0(x)$, наз. т р и г о н о м е т р и ч е с к и м в е с о м, удовлетворяет условию

$$0<c_1\leqslant h_0(x)\leqslant c_2<\infty.$$

Если функция $h_0(x)$ на всем отрезке $[-1, 1]$ удовлетворяет условию Дини — Липшица порядка $\gamma=1+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, то есть

$$|h_0(x+\delta)-h_0(x)|\leqslant\frac{M}{|\ln|\delta||^{\gamma}},\quad x,\ x+\delta\in[-1,1],$$

то для многочленов $\{\hat{P}_n(x)\}$, ортонормированных с весом (1) на всем отрезке $[-1, 1]$, имеет место асимптотич. формула

$$\hat{P}_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi h_0(x)}}\cos(n\theta+q)+O\left[\frac{1}{(\ln n)^{\varepsilon}}\right],$$

где $\theta=\arccos x$, а q зависит от θ.

При исследовании сходимости рядов Фурье по О. м. возникает вопрос об условиях ограниченности О. м. *либо в отдельной точке, либо на нек-ром множестве* $A\subset[-1, 1]$, либо на всем отрезке ортогональности $[-1, 1]$, т. е. рассматриваются условия, при к-рых имеет место неравенство типа

$$|\hat{P}_n(x)|\leqslant M,\quad x\in A\subseteq[-1,1]. \tag{2}$$

Впервые такой вопрос поставил В. А. Стеклов (1921). Если тригонометрич. вес $h_0(x)$ на множестве A ограничен от нуля, т. е.

$$h_0(x)\geqslant c_3>0,\quad x\in A\subseteq[-1,1], \tag{3}$$

и удовлетворяет нек-рым дополнительным условиям, то неравенство (2) имеет место. А в общем случае из неравенства (3) при $A=[-1, 1]$ без дополнительных условий следует оценка

$$|\hat{P}_n(x)|\leqslant\varepsilon_n\sqrt{n},\quad \varepsilon_n\longrightarrow 0,\ x\in[-1,1]. \tag{4}$$

Нули весовой функции являются особыми точками в том смысле, что свойства последовательности $\{\hat{P}_n(x)\}$ существенно различны в нулях и в других точках интервала ортогональности. Пусть, напр., весовая функция имеет вид

$$h(x)=\frac{h_1(x)}{\sqrt{1-x^2}}\prod_{k=1}^{m}|x-x_k|^{\gamma_k},\ \gamma_k>0,\ x_k\in(-1,1).$$

Тогда если функция $h_1(x)$ положительна и удовлетворяет условию Липшица на $[-1, 1]$, то последовательность $\{\hat{P}_n(x)\}$ ограничена на всяком отрезке $[a, b]\subset[-1, 1]$, не содержащем точек $\{x_k\}$, а в нулях выполняются неравенства

$$|\hat{P}_n(x_k)|\leqslant c_4(n+1)^{\gamma_k/2},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Случай, когда нули весовой функции расположены на концах отрезка ортогональности, рассмотрел С. Н. Бернштейн [2]. Один из его результатов заключается в том, что если весовая функция имеет вид

$$h(x)=h_1(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},\quad x\in[-1,1],$$

где функция $h_1(x)$ положительна и удовлетворяет условию Липшица, то при $\alpha>-1/2$, $\beta>-1/2$ О. м. допускают весовую оценку

$$(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}|\hat{P}_n(x)|\leqslant c_5,\quad x\in[-1,1],$$

а в точках $x=\pm1$ возрастают со скоростью $n^{\alpha+1/2}$ и $n^{\beta+1/2}$ соответственно.

В теории О. м. часто рассматриваются т. н. теоремы сравнения. Так, напр., теорема сравнения Корауса: если многочлены $\{\hat{\omega}_n(x)\}$, ортогональные с весом $p(x)$ на отрезке $[a, b]$, равномерно ограничены на нек-ром множестве $A\subset[a, b]$, то на этом множестве ограничены также и многочлены $\{\hat{P}_n(x)\}$, ортогональные с весом $h(x)=p(x)q(x)$, где множитель $q(x)$ положителен и удовлетворяет на отрезке $[a, b]$

условию Липшица порядка $\alpha = 1$. Аналогично, при нек-рых условиях на множитель $q(x)$ с системы $\{\widehat{\omega}_n(x)\}$ на систему $\{\widehat{P}_n(x)\}$ переносятся асимптотич. формулы или другие асимптотич. свойства. Более того, если множитель $q(x)$ есть неотрицательный на отрезке $[a, b]$ многочлен степени m, то многочлены $\{\widehat{P}_n(x)\}$ представляются через многочлены $\{\widehat{\omega}_n(x)\}$ с помощью определителей порядка $m+1$ (см. [8] с. 42). Эффективные формулы для О. м. получены также в случае весовых функций вида

$$\frac{1}{Q_m(x)\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{\sqrt{1-x^2}}{Q_m(x)}, \quad \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{1}{Q_m(x)},$$

где $Q_m(x)$ — произвольный положительный на отрезке $[-1, 1]$ многочлен (см. [8] с. 44). А в большинстве случаев вычисление О. м. произвольного веса при больших номерах n затруднительно.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.—Л., 1947, с. 103—26, 314—34, 335—41, 357—74; [2] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1954, с. 7—106; [3] Геронимус Я. Л., Теория ортогональных многочленов, М.—Л., 1950; [4] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979; [5] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б., Специальные функции математической физики, М., 1978; [6] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, т. 2 — Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [7] Джексон Д., Ряды Фурье и ортогональные полиномы, пер. с англ., М., 1948; [8] Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [9] Справочник по специальным функциям..., пер.с англ., М., 1979; [10] Shohat J. A., Hille E., Walsh J. L., A bibliography on orthogonal polynomials, Wash., 1940.

П. К. Суетин

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ в комплексной области — общее название многочленов, ортогональных на окружности, по контуру или по площади. В отличие от случая ортогональности в действительной области, многочлены указанных трех систем могут иметь мнимые коэффициенты и рассматриваются при всех комплексных значениях независимого переменного. Характерной особенностью случаев ортогональности в комплексной области является тот факт, что в ряды Фурье по указанным системам разлагаются обычно аналитич. функции комплексного переменного, удовлетворяющие некрым дополнительным условиям в окрестности границы области аналитичности.

1) О. м. на окружности — система многочленов $\{\varphi_n(z)\}$, имеющих положительный старший коэффициент и удовлетворяющих условию ортогональности (обычно ортонормированности):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_n(e^{i\theta})\,\overline{\varphi_m(e^{i\theta})}\,d\mu(\theta) = \delta_{nm},$$

где $\mu(\theta)$ — ограниченная неубывающая на сегменте $[0, 2\pi]$ функция с бесконечным числом точек роста, наз. функцией распределения, а δ_{nm} — символ Кронекера. Аналогично случаю ортогональности на отрезке, для многочленов $\{\varphi_n(z)\}$ имеют место рекуррентное соотношение и аналог формулы Кристоффеля — Дарбу.

Асимптотич. свойства исследуются при условии

$$\int_0^{2\pi} \ln \mu'(\theta)\,d\theta > -\infty.$$

Случай ортогональности на окружности как периодич. случай изучен достаточно подробно, поскольку здесь успешно применяются результаты о приближении периодических функций тригонометрическими полиномами.

Пусть многочлены $\{P_n(x)\}$ ортонормированы на сегменте $[-1, 1]$ с дифференциальным весом $h(x)$, а весовая функция на окружности имеет вид

$$\mu'(\theta) = h(\cos\theta)\,|\sin\theta|.$$

Тогда при условии $x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ имеет место формула Сегё

$$P_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[1+\frac{\varphi_{2n}(0)}{\alpha_{2n}}\right]^{-1/2}\left[\frac{1}{z^n}\varphi_{2n}(z)+z^n\varphi_{2n}\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

где α_{2n} — старший коэффициент многочлена $\varphi_{2n}(z)$.

Если аналитическая в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ имеет угловые граничные значения на окружности $|z|=1$, то при нек-рых дополнительных предположениях справедливо разложение

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(z),\quad |z|<1, \tag{1}$$

коэффициенты к-рого определяются по формуле

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\,\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}\,d\mu(\theta).$$

Ряды вида (1) являются непосредственным обобщением рядов Тейлора: при $\mu(\theta)=\theta$ будет $\varphi_n(z)\equiv z^n$. При нек-рых условиях на функцию распределения $\mu(\theta)$ ряд (1) в точках окружности $|z|=1$ сходится или расходится одновременно с рядом Тейлора этой же функции $f(z)$, т. е. имеет место теорема о равносходимости этих двух рядов.

2) О. м. по контуру — система многочленов $\{P_n(z)\}$, имеющих положительный старший коэффициент и удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma P_n(z)\,\overline{P_m(z)}\,h(z)\,|dz|=\delta_{nm},$$

где Γ — спрямляемая жорданова (обычно замкнутая) кривая в комплексной плоскости, а весовая функция $h(z)$ интегрируема по Лебегу и почти всюду положительна на Γ.

Пусть в конечной односвязной области G, ограниченной кривой Γ, задана аналитич. функция $f(z)$, граничные значения к-рой на контуре Γ интегрируемы в квадрате с весом $h(z)$. Тогда с помощью формулы для коэффициентов

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma f(\zeta)\,\overline{P_n(\zeta)}\,h(\zeta)\,|d\zeta|$$

этой функции ставится в соответствие ряд Фурье по ортогональным многочленам:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(z). \tag{2}$$

Эти ряды являются естественным обобщением рядов Тейлора по свойству ортогональности на случай односвязной области и служат для представления аналитич. функций. Если выполняется условие полноты

$$\inf_{\{Q_n\}}\int_\Gamma h(z)\,|f(z)-Q_n(z)|^2\,|dz|=0,$$

где нижняя грань берется по множеству всех многочленов $Q_n(z)$, то ряд (2) сходится к функции $f(z)$ в среднем по контуру Γ с весом $h(z)$, а при нек-рых дополнительных условиях и равномерно внутри области G.

3) О. м. по площади — система многочленов $\{K_n(z)\}$, имеющих положительный старший коэффициент и удовлетворяющих условию

$$\iint_G K_n(z)\,\overline{K_m(z)}\,h(z)\,dx\,dy=\delta_{nm},$$

где весовая функция $h(z)$ неотрицательна, интегрируема по площади конечной области G и неэквивалентна нулю. Если имеет место условие полноты

$$\inf_{\{Q_n\}}\iint_G h(z)\,|f(z)-Q_n(z)|^2\,dx\,dy=0,$$

где нижняя грань берется по множеству всех многочле-

нов $Q_n(z)$, то ряд Фурье по многочленам $\{K_n(z)\}$ функции $f(z)$, аналитической в односвязной области G сходится к этой функции в среднем по площади области G с весом $h(z)$, а при нек-рых дополнительных условиях и равномерно внутри области G.

Лит.: [1] Szegö G., «Math. Z.», 1920, Bd 6, S. 167—202; 1921, Bd 9, S. 167—90, 218—70; [2] Carleman T., «Ark. för mat., astr. och fys.», 1922—23, Bd 17, № 9, S. 1—30; [3] Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [4] Геронимус Я. Л., Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке, М., 1958; [5] Смирнов В. И., «Журнал Ленинградского физико-матем. об-ва», 1928, т. 2, в. 1, с. 155—79; [6] Коровкин П. П., «Матем. сб.», 1941, т. 9, № 3, с. 469—485; [7] Суетин П. К., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 2, с. 41—88; [8] его же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 100, с. 1—96.

П. К. Суетин.

ОРТОГОНАЛЬНЫЙ БАЗИС — система попарно ортогональных элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ гильбертова пространства X такая, что любой элемент $x \in X$ однозначно представим в виде сходящегося по норме ряда

$$x = \sum_i c_i e_i,$$

наз. рядом Фурье элемента x по системе $\{e_i\}$. Обычно базис $\{e_i\}$ выбирается так, что $\|e_i\| = 1$, и тогда он наз. ортонормированным базисом. В этом случае числа C_i, наз. коэффициентами Фурье элемента x по ортонормированному базису $\{e_i\}$, имеют вид $c_i = (x, e_i)$. Необходимым и достаточным условием того, чтобы ортонормированная система $\{e_i\}$ была базисом, является равенство Парсеваля — Стеклова

$$\sum_i |(x, e_i)|^2 = \|x\|^2$$

для любого $x \in X$. Гильбертово пространство, имеющее ортонормированный базис, является сепарабельным, и обратно, во всяком сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис. Если задана произвольная система чисел $\{c_i\}$ такая, что $\sum_i |c_i|^2 < \infty$, то в случае гильбертова пространства с базисом $\{e_i\}$ ряд $\sum_i c_i e_i$ сходится по норме к нек-рому элементу $x \in X$. Этим устанавливается изоморфизм любого сепарабельного гильбертова пространства пространству l_2 (теорема Рисса — Фишера).

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966.

В. И. Соболев.

ОРТОГОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТОР, ортопроектор,— отображение P_L гильбертова пространства H на его подпространство L такое, что $x - P_L x$ ортогонально P_L: $x - P_L x \perp P_L x$. О. п. есть ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, и такой, что $P_L^2 = P_L$ и $\|P_L\| = 1$. Обратно, если дан ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, и такой, что $P^2 = P$, то $L_P = \{Px | x \in H\}$ является подпространством и P есть О. п. на L_P. Два О. п. P_{L_1}, P_{L_2} наз. ортогональными, если $P_{L_1} P_{L_2} = P_{L_2} P_{L_1} = 0$; это эквивалентно условию, что $L_1 \perp L_2$.

Свойства О. п.: 1) для того чтобы сумма $P_{L_1} + P_{L_2}$ двух О. п. была О. п., необходимо и достаточно, чтобы $P_{L_1} P_{L_2} = 0$, в этом случае $P_{L_1} + P_{L_2} = P_{L_1 + L_2}$; 2) для того чтобы композиция $P_{L_1} P_{L_2}$ была О. п., необходимо и достаточно, чтобы $P_{L_1} P_{L_2} = P_{L_2} P_{L_1}$, в этом случае $P_{L_1} P_{L_2} = P_{L_1 \cap L_2}$.

О. п. $P_{L'}$ наз. частью О. п. P_L, если L' есть подпространство L. При этом $P_L - P_{L'}$ является О. п. на $L \ominus L'$ — ортогональное дополнение к L' в L. В частности, $I - P_L$ есть О. п. на $H \ominus L$.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в

гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [3] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979. *В. И. Соболев.*

ОРТОГОНАЛЬНЫЙ РЯД — ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad x \in X, \tag{1}$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ — *ортонормированная система* функций (онс) относительно меры $\mu(x)$:

$$\int_X \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,d\mu(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ 1 \text{ при } i = j. \end{cases}$$

Начиная с 18 в. при изучении различных вопросов математики, астрономии, механики и физики (движение планет, колебание струн, мембран и др.) в исследованиях Л. Эйлера (L. Euler), Д. Бернулли (D. Bernoulli), А. Лежандра (A. Legendre), П. Лапласа (P. Laplace), Ф. Бесселя (F. Bessel) и др. эпизодически появляются нек-рые специальные онс и разложения функций по ним. Определяющее же влияние на становление теории О. р. оказали:

а) исследования Ж. Фурье (J. Fourier, 1807—22) (*Фурье метод* решения краевых задач уравнений математич. физики) и в связи с ними работы Ж. Штурма и Ж. Лиувилля (J. Sturm, J. Liouville, 1837—41);

б) исследования П. Л. Чебышева по интерполированию и проблеме моментов (сер. 19 в.), повлекшие за собой создание им общей теории *ортогональных многочленов*;

в) исследования Д. Гильберта (D. Hilbert, нач. 20 в.) по интегральным уравнениям, где, в частности, были установлены общие теоремы о разложении функций в ряд по онс;

г) создание А. Лебегом (H. Lebesgue) теории меры и интеграла Лебега, придавшие теории О. р. современный вид.

Активному развитию теории О. р. в 20 в. способствует применение онс функций и рядов по ним в самых разнообразных разделах науки (математич. физика, вычислительная математика, функциональный анализ, квантовая механика, математич. статистика, операционное исчисление, автоматич. регулирование и управление, различные технич. задачи и т. п.).

Характерные результаты и направления исследований в теории О. р.

1) Пусть $X=[a,\ b]$, $d\mu(x)=dx$ — мера Лебега и $\{\varphi_n\}$ — онс. Тогда если $f \in L^2(a,\ b)$, то числа

$$a_n(f) \equiv (f,\ \varphi_n) \equiv \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$$

наз. к о э ф ф и ц и е н т а м и Ф у р ь е, а ряд (1) с $a_n = a_n(f)$ — р я д о м Ф у р ь е функции f по системе $\{\varphi_n\}$.

Система $\{\varphi_n\}$ з а м к н у т а относительно пространства L^2, если для любой функции $f \in L^2$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется полином

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi_n(x)$$

такой, что норма $\|f - \Phi\|_2 < \varepsilon$. Система $\{\varphi_n\}$ п о л н а относительно L^2, если из условий $f \in L^2$ и $a_n(f) = 0$ при всех $n \geqslant 0$ следует, что $f(x) = 0$ почти всюду, т. е. f — нулевой элемент пространства L^2.

Если для нек-рой функции $f \in L^2$ выполняется равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(f) = \int_a^b f^2(x)\,dx, \tag{2}$$

то говорят, что функция f удовлетворяет у с л о в и ю з а м к н у т о с т и Л я п у н о в а — С т е к л о в а (или р а в е н с т в у П а р с е в а л я). Это условие эквивалентно сходимости частных сумм ряда Фурье от f по норме пространства L^2 к функции f.

Аналогично даются определения замкнутости, полноты и условия замкнутости для более общих пространств и мер.

Одним из важнейших вопросов теории О. р. является вопрос однозначного определения функции по ее коэффициентам Фурье. Для пространств L^2 он самым тесным образом связан с выполнением равенства (2) для всех функций $f\in L^2$.

Для случая тригонометрич. системы равенство (2) в 1805 было приведено (фактически без доказательства) М. Парсевалем (M. Parseval), а в 1828 Ф. Бессель установил, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(f) \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \qquad (3)$$

неравенство Бесселя). В 1896 А. М. Ляпунов доказал равенство (2) для интегрируемых по Риману функций, а потом П. Фату (P. Fatou) для случая $f\in L^2$.

В. А. Стекловым (1898—1904) был поставлен вопрос о замкнутости общих онс и положительно решен для многих ортогональных систем (сферич. функции, собственные функции оператора Штурма — Лиувилля, системы ортогональных многочленов Эрмита, Лагерра, функции Ламе и др.).

Что касается неравенства (3), то оно оказалось справедливым для произвольных онс и функций $f\in L^2$.

В 1907 Ф. Рисс (F. Riesz) и Э. Фишер (E. Fischer) доказали, что для любой онс $\{\varphi_n\}$ и любой последовательности чисел $\{a_n\}\in l_2$ найдется функция $f\in L^2$, для к-рой $a_n(f)\equiv(f,\varphi_n)=a_n$ и выполнено равенство (2). Из этой теоремы и неравенства Бесселя вытекает, что для любых онс полнота и замкнутость эквивалентны в пространстве L^2; замкнутость в пространствах L^p с $1<p<\infty$ эквивалентна полноте в пространстве $L^{p'}$, где $1/p'+1/p=1$ (С. Банах, S. Banach, 1931).

Неравенство Бесселя и теорема Рисса — Фишера были распространены Г. Харди (G. Hardy), Дж. Литлвудом (J. Littlewood) и Р. Пэли (R. Paley) на пространства L^p. Именно, пусть $\{\varphi_n\}$ — онс, $|\varphi_n(x)|\leqslant M$ и $1<p<2$. Тогда:

а) если $f\in L^p$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f,\varphi_n)|^p n^{p-2} \leqslant A\|f\|_p^p;$$

б) если дана последовательность $\{a_n\}$ с

$$I \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{p'} n^{p'-2} < \infty,$$

то найдется функция $f\in L^{p'}$, для к-рой $(f,\varphi_n)=a_n$ и $\|f\|_{p'}^{p'}\leqslant AI$, где A зависит лишь от p и M.

2) Другой крупной проблемой теории О. р. является вопрос разложения функции в ряд по простым функциям, сходящийся к ней по норме того или иного пространства. Система элементов $\{\varphi_n\}$ из B-пространства E наз. базисом (безусловным базисом), если каждый элемент $f\in E$ единственным образом представляется в виде ряда

$$f=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n, \quad a_n=a_n(f), \qquad (4)$$

сходящегося (безусловно сходящегося) к f по норме пространства E.

Если $\{\varphi_n\}$ — базис в E, то $a_n(f)$ являются линейными непрерывными функционалами в пространстве E и в случае $E=L^p(0,1)$ с $1<p<\infty$ имеют вид

$$a_n(f)=\int_0^1 f(t)\,\psi_n(t)\,dt,$$

где $\{\psi_n\}$ — базис пространства $L^{p'}(0,1)$, $\{\varphi_n,\psi_n\}$ — биортонормированная система (С. Банах). В частности, если $\varphi_n\equiv\psi_n$, то есть $\{\varphi_n\}$ — онс, то ортого-

нальный базис в L^p автоматически является базисом во всех пространствах L^r, где r — любое число между p и p'.

Исследования по указанной проблеме ведутся в двух направлениях:

а) *по заданной* онс $\{\varphi_n\}$ *находятся те пространства*, в к-рых $\{\varphi_n\}$ является базисом;

б) для заданного пространства E отыскиваются в нем базисы или ортогональные базисы.

В обоих случаях исследуется взаимосвязь свойств функции f и ее разложения.

Что касается тригонометрич. системы, то она не является базисом пространства непрерывных функций C (П. Дюбуа-Реймон, P. Du Bois Reymond, 1876), но является базисом в пространствах L^p с $1<p<\infty$ (М. Рисс, M. Riesz, 1927). Результат П. Дюбуа-Реймона был распространен на *любые ограниченные в совокупности* онс.

Ортонормированная система многочленов Лежандра является базисом в пространствах L^p при $p\in(4/3,\ 4)$ и не является таковой в остальных пространствах L^q (1946—52, Х. Поллард, H. Pollard, Дж. Нейман, J. Neumann, и В. Рудин, W. Rudin).

В 1910 была построена онс $\{\chi_m\}_{m=0}^{\infty}$ такая, что всякая непрерывная функция $f\in C(0,\ 1)$ единственным образом раскладывается в равномерно сходящийся ряд Фурье по этой системе (А. Хаар, A. Haar). Однако система Хаара $\{\chi_m\}$ не является базисом пространства $C(0,1)$, т. к. функции χ_m разрывны при $m\geqslant 1$. Проинтегрировав систему $\{\chi_m\}$, Г. Фабер (G. Faber, 1910) установил, что система

$$\{f_n(t)\}\equiv\left\{1,\ \int_0^t \chi_m(x)\,dx\right\}$$

является базисом в пространстве C (0,1) и тем самым был найден первый базис в пространстве непрерывных функций. Этот результат Г. Фабера был переоткрыт Ю. Шаудером (J. Schauder, 1927), к-рый указал также класс базисов пространства C (0,1) типа базиса $\{f_n\}$; в честь *последнего* и введен термин «базис Шаудера», хотя более справедливо было бы называть его «базис Фабера — Шаудера».

Построенные Г. Фабером и Ю. Шаудером базисы не являются ортогональными. Первый ортонормированный базис $\{F_n\}$ в пространстве C (0,1) был найден Ф. Франклином (Ph. Franklin, 1928), к-рый проортогонализировал методом Шмидта систему Фабера — Шаудера $\{f_n\}$ и получил $\{F_n\}$. На этом пути (ортогонализация и интегрирование) был введен и изучен новый класс базисов. Все ортонормированные базисы пространства C (0,1) автоматически являются базисами во всех пространствах L^p с $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Система Хаара $\{\chi_m\}$ является безусловным базисом во всех пространствах L^p с $1<p<\infty$ (1931—37, Р. Пэли, Ю. Марцинкевич, J. Marcinkiewicz). Аналогичный результат имеет место и для системы $\{F_n\}$ Франклина.

В пространствах C и L вообще нет безусловных базисов. Точно также не существует нормированных и ограниченных в совокупности безусловных базисов в пространствах L^p при $1<p<\infty$ и $p\neq 2$.

3) Большой цикл исследований проведен по проблеме сходимости почти всюду тригонометрических и ортогональных рядов.

В 1911 Н. Н. Лузин построил первый пример почти всюду расходящегося тригонометрич. ряда, коэффициенты к-рого стремятся к нулю. Такого типа ряд Фурье был построен А. Н. Колмогоровым (1923). Результат Н. Н. Лузина был распространен на произвольные полные онс, а результат А. Н. Колмогорова обобщен на множества положительной меры для ограниченных в совокупности онс.

Неотрицательная последовательность $\{\omega(n)\}$ с $\omega(n_0)>0$ и $\omega(n)\uparrow$ наз. множителем Вейля для сходимости почти всюду рядов по системе $\{\varphi_n\}$, если всякий ряд (1) сходится почти всюду на $X=[0,1]$, как только

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^2\omega(n) < \infty.$$

Если $\omega(n)\equiv 1$ является множителем Вейля, то $\{\varphi_n\}$ наз. системой сходимости почти всюду. Последовательность $\{\omega(n)\}$ наз. точным множителем Вейля для сходимости почти всюду рядов (1), если $\{\omega(n)\}$ — множитель Вейля, а всякая $\tau(n)=o(\omega(n))$ при $n\to\infty$ уже не является таковой. Аналогично даются определения множителей Вейля для тех или иных видов сходимости и суммируемости (по мере, безусловная сходимость почти всюду и др.).

Множители Вейля были найдены для тех или иных систем. В 1913 М. Планшерель (M. Plancherel) доказал, что $\{\log^3 n\}$ является множителем Вейля для сходимости почти всюду рядов по любым онс $\{\varphi_n\}$, в 1922 Д. Е. Меньшов и Х. Радемахер (H. Rademacher) установили, что в качестве множителя Вейля можно взять $\{\log^2 n\}$. И что особенно важно, Д. Е. Меньшов доказал неусиляемость этого результата во всем классе онс, т. е. $\{\log^2 n\}$ является точным множителем Вейля для нек-рых онс.

Впоследствии были найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы $\{\omega(n)\}$ была множителем Вейля для сходимости или $(C,1)$-суммируемости почти всюду (по мере и др.) О. р. Было показано, напр., что система $\{\operatorname{sign}\sin \pi nx\}$ не является системой сходимости почти всюду. В 1975 была построена первая полная онс $\{\varphi_n\}$ строгой сходимости, т. е. ряд (1) сходится почти всюду на $X=[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\{a_n\}\in l_2$.

В 1927 установлено, что последовательность $\omega(n)=\tau(n)\log^2 n$ является множителем Вейля для безусловной сходимости почти всюду любых О. р., если

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n\tau(n)\log n} < \infty.$$

Этот результат оказался неусиляемым.

В 1960 было показано, что система Хаара $\{\chi_n\}$ не является системой безусловной сходимости почти всюду. На основе этого результата было доказано, что многие системы (базисы в L^2, полные онс и др.) не являются системами безусловной сходимости почти всюду. Для системы $\{\chi_m\}$ последовательность $\{\omega(n)\}$ лишь тогда является множителем Вейля для безусловной сходимости почти всюду, когда

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n\omega(n)} < \infty.$$

Поэтому не всякая полная онс имеет точный множитель Вейля для безусловной сходимости почти всюду.

Много исследований было проведено по проблеме представления функций рядами, сходящимися почти всюду, по мере и др. Так, в 1957 было установлено, что для любой полной онс $\{\varphi_n\}$ с $x\in X=[0,1]$ и любой измеримой функции $f(x)$ найдется ряд вида (1), к-рый сходится по мере к $f(x)$ (для случая тригонометрич. системы это утверждение было получено в 1947 Д. Е. Меньшовым). Этот результат теряет силу даже для случая конечных измеримых функций, если вместо сходимости по мере рассматривать сходимость почти всюду.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.—Л., 1951; [2] Банах С., Курс функціонального аналізу, К., 1948; [3] Гаронимус Я. Л., Теория ортогональных многочленов, М.— Л., 1950; [4] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [5] Джексон Д., Ряды Фурье и ортогональные полиномы,

пер. с англ., М., 1948; [6] Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [7] Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963; [8] Tricomi F. G., Vorlesungen über Orthogonalreihen, 2 Aufl., B., 1970; [9] Olevskiĭ A. M., Fourier series with respect to general orthogonal systems, B., 1975; [10] Меньшов Д. Е., Ульянов П. Л., О метрической теории функций в Московском университете за пятидесятилетие, «Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика», 1967, № 5, с. 24—36; [11] Талалян А. А., Представление измеримых функций рядами, «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 5, с. 77—141; [12] Ульянов П. Л., Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, там же, 1964, т. 19, в. 1, с. 3—69; [13] Итоги науки. Математический анализ. 1970, М., 1971, с. 5—264; [14] Бурбаки Н., Очерки по истории математики, пер. с франц., М., 1963; [15] Папаускас А. Б., Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега, М., 1966.

П. Л. Ульянов.

ОРТОМОДУЛЯРНАЯ РЕШЕТКА — решетка с нулем (0) и единицей (1), в к-рой для любого элемента a существует ортодополнение $a^{\perp}$, т. е. такой элемент, что

$$1)\ a \vee a^{\perp} = 1; \quad a \wedge a^{\perp} = 0; \quad a^{\perp\perp} = a;$$

$$2)\ a \leqslant b \Rightarrow a^{\perp} \geqslant b^{\perp},$$

и выполняется ортомодулярный закон:

$$3)\ a \leqslant b \Rightarrow b = a \vee (b \wedge a^{\perp}).$$

В О. р. исследовались в основном дистрибутивность и перспективность, неприводимость, модулярность пар, свойства центра и идеалов, коммутант и разрешимость, приложения к логике квантовой механики (см. [1], [2]).

Если $\mathfrak{A}$ — произвольная *Неймана алгебра*, то совокупность $P(\mathfrak{A})$ всех ее проекций является полной О. р. При этом, если $\mathfrak{A}$ — фактор, то на множестве $P(\mathfrak{A})$ можно определить *размерности функцию*. В зависимости от множества значений этой функции факторы делятся на типы I_n, I_∞, II_1, II_∞, III (классификация Мюррея — Неймана, [4]). Было установлено, что решетки проекций факторов типа I_n и II_1 являются непрерывными геометриями, т. е. полными дедекиндовыми решетками с дополнениями, удовлетворяющими следующим двум аксиомам непрерывности:

1) $b \wedge (\vee_{\alpha \in D} a_\alpha) = \vee_{\alpha \in D} (b \wedge a_\alpha)$ для любого направленного множества индексов D и такого множества элементов $\{a_\alpha,\ \alpha \in D\}$, что $\alpha' \leqslant \alpha''$ влечет $a_{\alpha'} \leqslant a_{\alpha''}$;

2) условие, двойственное к 1).

Возникла задача построения абстрактной теории размерности в рамках такого класса решеток, к-рый включил бы в себя, кроме модулярных решеток проекций факторов типов I_n и II_1, и немодулярные решетки проекций факторов остальных типов. Доказано (см. [5], [6]) существование функции размерности на полной О. р. с отношением эквивалентности, удовлетворяющим нек-рым дополнительным условиям. Этот класс решеток включает в себя и решетки проекций факторов, и непрерывные геометрии.

О. р., являясь естественным обобщением решеток проекций факторов, в то же время составляют существенно более широкий класс, поскольку многие свойства решеток проекций неверны для произвольных О. р. Подобно тому как непрерывные геометрии координатизируются регулярными кольцами (см. [1]), О. р. могут быть координатизированы бэровскими $*$-полугруппами. Если полная О. р. модулярна, то она непрерывна (см. [7]). Существует модулярная решетка с ортодополнениями, пополнение сечениями к-рой не ортомодулярно (в то время как пополнение сечениями полумодулярной решетки с ортодополнениями полумодулярно, и решетка проекций алгебры Неймана полумодулярна).

Лит.: [1] Скорняков Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961; [2] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1968, М., 1970; [3] Фофанова Т. С., в сб.: Упорядоченные множества и решетки, в. 3, [Саратов], 1975, с. 28—40; [4] Murray F., Neumann J., «Ann. Math.», 1936, v. 37, № 1, p. 116—229; [5] Loomis L. H., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1955, № 18, p. 1—36; [6] Maeda S., «J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A.», 1955, v. 19, № 2, p. 211—37; [7] Kaplansky I., «Ann. Math.», 1955, v. 61, № 3, p. 524—541.

Т. С. Фофанова.

ОРТОНОРМИРОВАННАЯ СИСТЕМА — 1) О. с. векторов — множество $\{x_\alpha\}$ ненулевых векторов евклидова (гильбертова) пространства со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ такое, что $(x_\alpha, x_\beta)=0$ при $\alpha\neq\beta$ (ортогональность) и $(x_\alpha, x_\alpha)=1$ (нормируемость).

М. И. Войцеховский.

2) О. с. функций — система $\{\varphi_i(x)\}$ функций пространства $L^2(X, S, \mu)$, являющаяся одновременно ортогональной и нормированной в $L^2(X, S, \mu)$, то есть

$$\int_X \varphi_i(x)\overline{\varphi}_j(x)\,d\mu=\begin{cases}0 & \text{при } i\neq j,\\ 1 & \text{при } i=j\end{cases}$$

(см. *Нормированная система*, *Ортогональная система*). В математич. литературе часто термин «ортогональная система» означает «ортонормированная система». При исследовании данной ортогональной системы ее нормированность не играет существенной роли. Тем не менее нормированность систем дает возможность более ясной формулировки нек-рых теорем о сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$$

в терминах поведения коэффициентов $\{c_k\}$. Такой теоремой является, напр., теорема Рисса — Фишера: ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$$

по ортонормированной в $L^2[a, b]$ системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в метрике пространства $L^2[a, b]$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2<\infty.$$

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958.

А. А. Талалян.

ОРТОЦЕНТР треугольника — точка пересечения трех высот треугольника. О. треугольника лежит на *Эйлера прямой*. Середины трех сторон, середины отрезков, соединяющих О. с тремя вершинами, и основания высот треугольника лежат на одной окружности. О. является центром окружности, вписанной в ортоцентрический треугольник, т. е. треугольник, вершинами к-рого являются основания высот данного.

П. С. Моденов.

ОСВЕЩЕНИЯ ЗАДАЧА — задача определения минимального числа направлений пучков параллельных лучей или числа источников, освещающих всю границу выпуклого тела. Пусть K — выпуклое тело n-мерного линейного пространства $\mathbb{R}^n$, а $\mathrm{bd}\,K$ и $\mathrm{int}\,K$ — соответственно граница и внутренность его, причем $\mathrm{bd}\,K\neq\phi$. Наиболее известны следующие О. з.

1) Пусть l — нек-рое направление в пространстве $\mathbb{R}^n$. Точка $x\in\mathrm{bd}\,K$ наз. освещенной извне направлением l, если прямая, проходящая через x параллельно l, проходит через нек-рую точку $y\in\mathrm{int}\,K$ и направление вектора $\overrightarrow{xy}$ совпадает с l. Ищется минимальное число $c(K)$ направлений в пространстве $\mathbb{R}^n$, достаточное для освещения в этом смысле всего множества $\mathrm{bd}\,K$.

2) Пусть z — нек-рая точка множества $\mathbb{R}^n\setminus K$. Точка $x\in\mathrm{bd}\,K$ наз. освещенной извне точ-

кой z, если прямая, определяемая точками z и x, проходит через нек-рую точку $y \in \operatorname{int} K$ и векторы $\overrightarrow{xy}$ и $\overrightarrow{zy}$ одинаково направлены. Ищется минимальное число $c'(K)$ точек из $\mathbb{R}^n \setminus K$, достаточное для освещения в этом смысле всего множества $\operatorname{bd} K$.

3) Пусть z — нек-рая точка множества $\operatorname{bd} K$. Точка $x \in \operatorname{bd} K$ наз. освещенной изнутри точкой $z \neq x$, если прямая, определяемая точками z и x, проходит через нек-рую точку $y \in \operatorname{int} K$ и векторы $\overrightarrow{xy}$ и $\overrightarrow{zy}$ противоположно направлены. Ищется минимальное число $p(K)$ точек из $\operatorname{bd} K$, достаточное для освещения изнутри всего множества $\operatorname{bd} K$.

4) Система точек $Z = \{z \mid z \in \operatorname{bd} K\}$ наз. фиксированной для K, если она обладает свойствами: а) Z достаточна для освещения изнутри всего множества $\operatorname{bd} K$; б) Z не обладает никаким собственным подмножеством, достаточным для освещения изнутри множества $\operatorname{bd} K$. Ищется максимальное число $p'(K)$ точек фиксированной системы для тела $K \subset \mathbb{R}^n$.

Задача 1) была поставлена в связи с *Хадвигера гипотезой* (см. [1]): минимальное число тел $b(K)$, гомотетичных ограниченному K с коэффициентом гомотетии k, $0 < k < 1$, достаточное для покрытия K, удовлетворяет неравенству $n+1 < b(K) \leqslant 2^n$, причем значение $b(K) = 2^n$ характеризует параллелепипед. Для ограниченного $K \subset \mathbb{R}^n$ $c(K) = b(K)$. Если K неограниченно, то $c(K) \leqslant b(K)$ и существуют такие тела, что $c(K) < b(K)$ или $c(K) = b(K) = \infty$ (см. [1]).

Задача 2) поставлена в связи с задачей 1). Для ограниченного $K \subset \mathbb{R}^n$ верно равенство $c(K) = c'(K)$. Если же K неограниченно, то $c'(K) \leqslant b(K)$ и $c(K) \leqslant c'(K)$. Число $c'(K)$ для любого неограниченного $K \subset \mathbb{R}^3$ принимает одно из значений: 1, 2, 3, 4, ∞ (см. [1]).

Решение задачи 3) имеет вид: число $p(K)$ определено тогда и только тогда, когда K отлично от конуса. В этом случае

$$2 \leqslant p(K) \leqslant n+1;$$

причем $p(K) = n+1$ характеризует n-мерный симплекс пространства $\mathbb{R}^n$ (см. [1]).

Для задачи 4) (см. [2]) предполагается, что при ограниченном $K \subset \mathbb{R}^n$ верно неравенство

$$p'(K) \leqslant 2^n.$$

Каждая из О. з. тесно связана с нек-рым специальным *покрытием* тела K (см. [1]).

Лит.: [1] Болтянский В. Г., Солтан П. С., Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств, Кишинев, 1978; [2] Grünbaum B., «Acta math. Acad. scihung.», 1964, v. 15, p. 161—63. *П. С. Солтан.*

ОСЕВОЙ ВЕКТОР, аксиальный вектор, псевдовектор, вектор в ориентированном пространстве, к-рый при изменении ориентации пространства на противоположную преобразуется в противоположный вектор. Пример О. в.— векторное произведение векторов. *БСЭ-3.*

ОСНАЩЕННОЕ ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО — гильбертово пространство H с выделенным в нем линейным всюду плотным подмножеством $\Phi \subset H$, на к-ром задана структура топологического векторного пространства так, что вложение непрерывно. Это вложение порождает непрерывное вложение сопряженных пространств $\Phi' \subset H'$ и цепочку непрерывных вложений $\Phi \subset H \subset \Phi'$ (с помощью стандартного отождествления $H' = H$). Наиболее содержательным является случай, когда оснащение Φ — *ядерное пространство*. Здесь верно следующее усиление спектральной теоремы для самосопряженных операторов, дей-

ствующих в H: **любой** такой оператор A. непрерывно (в топологии Φ) переводящий Φ в себя, обладает полной системой обобщенных собственных функций $\{F_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ ($\mathfrak{A}$ — нек-рое множество индексов), т. е. таких элементов $F_\alpha \in \Phi'$, что для любого $\varphi \in \Phi$

$$F_\alpha(A\varphi) = \lambda_\alpha F_\alpha(\varphi), \quad \alpha \in \mathfrak{A},$$

причем множество значений функции $\alpha \to \lambda_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, содержится в спектре оператора A и имеет полную меру относительно спектральной меры $\sigma_f(\lambda)$, $f \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$, любого элемента $f \in H$. Полнота системы означает, что $\varphi \neq 0$, $F_\alpha(\varphi) \neq 0$ для любого $\varphi \in \Phi$ хотя бы при одном $\alpha \in \mathfrak{A}$. Кроме того, для любого элемента $\varphi \in \Phi$ существует его разложение по системе обобщенных собственных функций $\{F_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$, обобщающее известное разложение по базису собственных векторов для оператора с дискретным спектром.

Пример: разложение в интеграл Фурье

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{isx} \tilde{f}(s)\, ds, \; x \in \mathbb{R}, \; f \in L_2(\mathbb{R}), \; \tilde{f} \in L_2(\mathbb{R}),$$

$\{e^{isx}, s \in \mathbb{R}\}$ — система обобщенных собственных функций оператора дифференцирования, действующего в $L_2(\mathbb{R})$, возникающая при естественном оснащении этого пространства с помощью пространства Шварца $S(\mathbb{R})$. Аналогичные утверждения верны и для унитарных операторов, действующих в О. г. п.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, М., 1958; [2] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [3] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965.

Р. А. Минлос.

ОСНАЩЕННОЕ МНОГООБРАЗИЕ — гладкое многообразие с фиксированной тривиализацией нормального расслоения. Более точно, пусть гладкое n-мерное многообразие M вложено в $\mathbb{R}^{n+k}$ и пусть (k-мерное) нормальное расслоение ν, отвечающее этому вложению, тривиально. Оснащением многообразия M, отвечающим этому вложению, наз. любая тривиализация расслоения ν; при этом одному и тому же вложению могут отвечать разные оснащения. О. м. введены в 1937 (см. [1]) для доказательства того, что группы *бордизмов* О. м. размерности n, лежащих в $\mathbb{R}^{n+k}$, изоморфны гомотопич. группе $\pi_{n+k}(S^n)$; на этом пути были вычислены группы $\pi_{n+1}(S^n)$ и $\pi_{n+2}(S^n)$.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976.

Ю. Б. Рудяк.

ОСНОВАНИЕ ИЗГИБАНИЯ — *сопряженная сеть* на поверхности F и ее изгибании F^* вне точек их конгруэнтности. О. и. характеризуется тем, что изгиб — отношение нормальных кривизн k и k^* в соответствующих по изометрии точках F и F^* вдоль соответствующих направлений — имеет экстремальные значения вдоль направлений О. и.

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 2, М.— Л., 1948.

М. И. Войцеховский.

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ — раздел геометрии, в к-ром исследуются основные понятия геометрии, соотношения между ними и связанные с ними вопросы.

Важная роль основных понятий и соотношений между ними, на базе к-рых строятся определения фигур и доказываются геометрич. предложения, отмечается уже в работах античных геометров. Так, развивая дедуктивный метод в геометрии, они указывали на особую роль основных понятий, аксиом и постулатов, составляющих фундамент геометрии. В «Началах» Евклида (3 в. до н. э.) аксиомам и постулатам предпослана цепь определений всех понятий, к-рые используются в дальнейшем изложении. Среди этих определений особое место принадлежит понятиям

«точка», «прямая», «плоскость», определения к-рых не опираются на другие геометрич. понятия. Сами определения этих основных понятий с геометрич. точки зрения неудовлетворительны, т. к. они выражают лишь характерное физич. свойство (напр., «точка есть то, что не имеет частей», т. е. под точкой понимается малое физически неделимое тело). Поэтому уже в трудах геометров, написанных почти одновременно с «Началами», содержатся многочисленные комментарии и критич. анализ определений основных и других геометрич. понятий, аксиом и постулатов. Но это были лишь уточнения, не затрагивающие основы определений. По существу, доказательства многих геометрич. теорем опирались в основном на наглядность чертежа, на физич. осуществимость необходимых геометрич. построений, а не выводились строго логически из аксиом и постулатов. Только в 19 в. и особенно в нач. 20 в. появляются работы, в к-рых выясняется все глубокое значение основных понятий и соотношений между ними для логически безупречного дедуктивного метода построения геометрии и ее обоснования. Причем во многом этому углубленному анализу основ геометрии способствовало открытие неевклидовой геометрии Лобачевского (1826). Результаты по обоснованию евклидовой геометрии на основе тех же принципов и понятий, что и в «Началах» Евклида, содержатся в работах Дж. Пеано (G. Peano, 1894), М. Паша (M. Pasch, 1882), М. Пиери (M. Pieri, 1899), Д. Гильберта (D. Hilbert) и др. Наибольшую известность получила *Гильберта система аксиом* евклидовой геометрии (1899). Добиваясь логически удовлетворительного построения евклидовой геометрии, Д. Гильберт выделил 5 групп аксиом, показал их необходимость и достаточность для построения всей евклидовой геометрии. Вместе с тем впервые была проведена логич. обработка всей системы, выяснена непротиворечивость системы с помощью построения числовой модели, установлена независимость групп аксиом, а также полнота системы. В отличие от концепции пространства как «места» для всех фигур, проводимой в «Началах», Д. Гильберт рассматривает его как множество всех «точек», «прямых», «плоскостей» и фигур, построенных на основе этих понятий.

Набор основных понятий в системе Гильберта был заимствован (и уточнен) из «Начал», однако эта система является, по существу, чисто геометрич. схемой, свободной от ссылок на наглядность чертежа. Вместе с тем язык геометрии, построенной на основе системы Гильберта, почти не отличается от языка «Начал».

Почти одновременно с системой Гильберта появились и др. системы аксиом евклидовой геометрии. Так, в системе Ф. Шура (F. Schur, 1909) в качестве основных понятий были «точка», «отрезок» и т. д., а вместо «конгруэнтности» фигур в этой системе вводилось понятие «движение». Введение понятия «движение» позволило применить в геометрии групповой подход к исследованию движений, алгебраизировать методы исследования. Упомянутые выше геометрич. схемы не полностью удовлетворяют требованиям дальнейшего обобщения понятия пространства и др. понятий и, кроме того, недостаточно «алгебраичны».

Новые подходы к обоснованию евклидовой геометрии потребовали выработки нового «языка», с помощью к-рого оказывается возможным провести соответствующие дальнейшие обобщения понятий, алгебраизацию доказательств, классификацию объектов и т. д. Одной из распространенных схем основания евклидовой геометрии, в к-рой сконцентрированы возможности обобщений, перевода на язык алгебры геометрич. понятий, является система аксиом, предложенная Г. Вейлем (H. Weil, 1916). Ниже приводится одна из транскрипций схемы Вейля.

Трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ определяется как множество, состоящее из элементов двух родов — «точек» и «векторов», удовлетворяющих следующим 4 группам аксиом:

I группа — аксиомы, определяющие соотношения между точками и векторами. I_1. Существует по меньшей мере одна точка. I_2. Каждой упорядоченной паре точек поставлен в соответствие один и только один вектор. I_3. Для каждой точки A и каждого вектора $\boldsymbol{a}$ существует одна и только одна точка B такая, что $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ ($\overrightarrow{AB}$ есть вектор $\boldsymbol{a}$). I_4. Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

На основе этой группы аксиом определяется сумма векторов, к-рая удовлетворяет требованиям коммутативности и ассоциативности. Существует нуль-вектор, противоположный вектор. Векторы по сложению образуют группу.

II группа — аксиомы, описывающие операцию умножения вектора на число. II_1. Каждому вектору $\boldsymbol{a}$ и каждому $k\in\mathbb{R}$ поставлен в соответствие определенный вектор $k\boldsymbol{a}$ ($k\boldsymbol{a}$ наз. произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на число k). II_2. Умножение вектора на 1 не изменяет вектора. II_3. Умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения чисел $(k_1+k_2)\boldsymbol{a}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{a}$. II_4. Умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения векторов $k(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=k\boldsymbol{a}_1+k\boldsymbol{a}_2$. II_5. Умножение вектора на число ассоциативно $k_1(k_2\boldsymbol{a})=(k_1k_2)\boldsymbol{a}$.

С помощью операций сложения и умножения на число определяется линейная комбинация векторов, их линейная зависимость.

III группа определяет размерность пространства. III_1. Существуют три линейно независимых вектора, но всякие четыре — линейно зависимы.

Эта аксиома имеет топологич. характер; из нее вместе со второй группой аксиом следует, что $\mathbb{R}^3$ является топологич. пространством размерности 3. Первые три группы аксиом определяют трехмерное аффинное пространство.

IV группа определяет метрич. свойства. IV_1. Любым двум векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ поставлено в соответствие определенное число (скалярное произведение) $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=l$, $l\in\mathbb{R}$. IV_2. Симметричность скалярного произведения: $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a})$. IV_3. Дистрибутивность скалярного произведения $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})$. IV_4. Для $k\in\mathbb{R}$ имеет место $(\boldsymbol{a},\ k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$. IV_5. Скалярный квадрат вектора неотрицателен $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})\geqslant 0$, причем $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})=0$ только для нуль-вектора.

На основе IV группы аксиом определяется расстояние между точками, угол между векторами и т. д.; с помощью векторов — «отрезки», «прямые», «плоскости» и т. д.

Схема Вейля допускает обобщение на случай любой размерности, с помощью соответствующего изменения аксиом в эту схему включаются гиперболич. и эллиптич. пространства и т. д.

Система аксиом Вейля евклидовой геометрии является непротиворечивой, независимой и удовлетворяет требованию полноты (категоричности, или минимальности). Непротиворечивость устанавливается с помощью числовой модели: упорядоченным тройкам чисел (x^1, x^2, x^3), $x^i\in\mathbb{R}$; $i=1, 2, 3$, ставятся во взаимно однозначное соответствие «точки» пространства $\mathbb{R}^3$. Вектор с началом в (x_1^1, x_1^2, x_1^3) и концом в (x_2^1, x_2^2, x_2^3) определяется тройкой $\boldsymbol{a}=(a^1, a^2, a^3)$, $a^i=x_2^i-x_1^i$; $i=1, 2, 3$. Сумма векторов (a^1, a^2, a^3) и (b^1, b^2, b^3) определяется тройкой $(a^1+b^1, a^2+b^2, a^3+b^3)$, произведение вектора (a^1, a^2, a^3) на число $k\in\mathbb{R}$ есть тройка (ka^1, ka^2, ka^3). Скалярное произведение векторов (a^1, a^2, a^3) и (b^1, b^2, b^3) выражается числом $\Sigma_{i=1}^3 a^ib^i$. Ба-

зисные векторы (тройка линейно независимых векторов) можно изображать тройками $e^1=(1,0,0)$, $e^2=(0,1,0)$, $e^3=(0,0,1)$. Для доказательства независимости аксиом друг от друга и независимости групп аксиом строится интерпретация системы, получающейся из данной путем замены какой-либо ее аксиомы ее отрицанием. Полнота системы выводится из полноты множества действительных чисел.

В качестве основных понятий при создании схемы евклидовой геометрии могут быть положены геометрич. преобразования. Так, в системе аксиом Ф. Бахмана (P. Bachmann) в качестве такого понятия вводится преобразование симметрии. С помощью симметрий, порождающих группу движений евклидовой (метрической) плоскости, определяются «точки» и «прямые» как инволютивные элементы этой группы. Теоретико-групповые отношения являются основой при определении понятий «инцидентность», «ортогональность» и т. п., геометрич. доказательства заменяются вычислениями, переводятся на язык алгебры.

Обоснование евклидовой геометрии влияло и на разработку вопросов обоснования неевклидовых геометрий. В кон. 19 — нач. 20 вв. сформировались основные современные методы и подходы в О. г. Новые подходы к понятиям, лежащим в основе геометрии, были разработаны Б. Риманом (B. Riemann), С. Ли (S. Lie), Ф. Клейном (F. Klein), А. Кэли (A. Cayley) и др. В основу геометрич. понятий были положены многомерные многообразия, группы преобразований, действующих на многообразиях, инварианты групп преобразований и т. п.

Групповой подход впервые был четко сформулирован в эрлангенской программе Ф. Клейна: геометрич. пространство определяется как множество Φ с фиксированной группой Ω его преобразований; объектом геометрии является изучение Ω-инвариантных свойств пространства. (Напр., n-мерное аффинное пространство A^n определяется как множество, на к-ром просто транзитивно действует векторная группа размерности n.) С. Ли, Ф. Клейн, А. Кэли провели исследование групп преобразований, на основе к-рого возникают новые возможности в классификации и обосновании евклидовой и неевклидовых геометрий как геометрий определенных групп преобразований. Геометрия становится учением об инвариантах групп преобразований, и О. г. опирается на теорию групп.

В работах Б. Римана был разработан метрич. подход к О. г. Геометрич. пространство рассматривается как множество, снабженное метрикой, к-рая удовлетворяет тем или иным аксиомам. Б. Риман показал, что все внутренние свойства пространства определяются заданной квадратичной дифференциальной формой (кривизна, геодезич. линии и т. д.), тем самым были открыты широкие классы различных метрич. геометрий. Впервые классификация пространств и их геометрий была осуществлена на метрич. основе. Б. Риман указал на особую роль выбора координат в точечном многообразии для исследования самих квадратичных форм. Так, для пространства постоянной римановой кривизны Б. Риман привел стандартный вид, к к-рому может быть приведена квадратичная форма путем соответствующего выбора координат.

Координатный метод евклидовой геометрии был обобщен для различных пространств, а также нашел развитие в дифференциальной геометрии; понятие многообразий, опирающееся на выбор координатных систем, получает многочисленные применения в геометрии. Групповой подход к исследованию преобразований дифференциально-геометрич. объектов позволил создать теорию инвариантов метрических (квадратичных) форм. Эта теория инвариантов групп преобразований явилась основой для построения и

логич. обоснования современной дифференциальной геометрии. В качестве одного из основных понятий выкристаллизовалось понятие геометрич. объекта, геометрия рассматривается как *геометрических объектов теория*. Понятие дифференцируемого многообразия позволяет дать строгие определения дифференциально-геометрич. объектам, в частности обосновать методы анализа в геометрии и геометрич. методы в анализе.

Обоснование евклидовой (и, вообще, любой) геометрии, опирающееся на определенную систему аксиом, обнаруживает особую роль теоретико-множественных принципов при логич. анализе систем аксиом. Именно, независимость и непротиворечивость системы аксиом может быть установлена путем построения числовой модели, реализующей эту систему. Поэтому теория множеств в О. г. является своего рода эталоном безупречного логич. построения геометрич. теории. Геометрич. аксиомы непрерывности (и полноты) по существу являются нек-рыми эквивалентами теоретико-множественных аксиом.

Построение геометрии над определенным полем обосновывается путем применения понятий теоретико-множественного характера. Начиная с создания декартовой аналитич. геометрии, идея отображения множества точек на множество действительных чисел (или на произвольное числовое множество) приобретает большое значение для О. г. Развитие этой идеи позволяет определить и классифицировать геометрии по тому числовому множеству, над к-рым они построены.

В О. г. широко применяются теоретико-множественные методы для изучения геометрич. преобразований. Как уже отмечалось выше, инварианты групп преобразований являются предметом изучения в определенной этой группой геометрии. Важное применение теории инвариантов (проективных) преобразований нашел Ф. Клейн для интерпретации неевклидовых пространств и доказательства непротиворечивости неевклидовых геометрий. Углубленному анализу подверглись такие понятия, как «угол», «ортогональность» и т. д. Исследования проективных комплексных пространств, различных проективных мероопределений имеют большое значение в классификации пространств с определенной структурой.

В О. г. применяются также топологич. методы классификации многообразий, с помощью этих методов выявляются наиболее существенные различия между классами и типами многообразий, исследуются глобальные их свойства.

Основные методы и подходы в О. г.— синтетический, групповой и метрический — имеют значение и в современных исследованиях в этой области геометрии. Напр., обобщением идей Б. Римана в О. г. является инфинитезимальный подход, при к-ром геометрич. структура определяется заданием поля нек-рых инфинитезимальных величин (напр., финслеровой метрики, связности и т. п.). Многие задачи физики и механики при этом допускают геометрич. интерпретацию и при их решении используются геометрич. соображения. Вообще, все современные системы аксиом евклидовой (и неевклидовой) геометрии используют в различной степени все три подхода в О. г.

Изучение средств, используемых в доказательствах теорем на основе данной системы аксиом, является одной из важных проблем в О. г. В «Началах» Евклида для доказательств применялась классич. логика Аристотеля. Много внимания уделил этим вопросам Д. Гильберт, наметивший основные задачи математич. логики. Непротиворечивость систем геометрич. аксиом устанавливается путем построения числовых моделей этих систем и их логического исследования.

Значительное место в О. г. занимают вопросы измерения отрезков, площадей, объемов. Понятия меры

отрезка, площади, объема основываются на определенных группах аксиом. Так, напр., теория площадей многоугольников на евклидовой плоскости в системе аксиом Гильберта обосновывается аксиомами, относящимися только к плоскости и независимо от аксиом непрерывности (см. *Неархимедова геометрия*, *Непаскалева геометрия*).

В О. г. исследуется проблема о материальных объективных истоках геометрич. понятий и систем аксиом. Одним из принципов построения геометрич. систем долгое время являлся принцип физич. осуществимости системы на какой-либо материальной модели. Как отмечалось выше, еще в «Началах» была сделана попытка дать истолкование основных понятий с точки зрения их физич. свойств. В кон. 19 в., после открытия геометрии Лобачевского, вновь возник вопрос об объективной возможности других, отличных от евклидовой, геометрий. Проблему объективного существования неевклидовых геометрий многие геометры решали путем построения физич. моделей, с помощью к-рых пытались убедиться в независимости и непротиворечивости геометрич. систем аксиом. Так, Н. И. Лобачевский пытался обосновать непротиворечивость выводов, вытекающих из его аксиомы о параллельных, путем физич. измерений дефектов треугольников гигантских размеров, вершины к-рых располагались на удаленных от Земли космич. телах, чтобы убедиться в том, что дефекты различны для различных треугольников и что сумма внутренних углов треугольников может быть меньше двух прямых углов. Попытку обосновать существование различных метрич. геометрий предпринял Г. Гельмгольц (H. Helmholtz), в работе, написанной вскоре после появления результатов Б. Римана. Основным понятиям, к-рыми оперирует метрич. геометрия, Г. Гельмгольц дал физич. истолкование, в основу геометрич. свойств пространства он положил нек-рые физич. законы, из к-рых вытекает возможность построения геометрии этого пространства. Эвристическим путем из основных физич. законов Г. Гельмгольц получил метрику пространства в виде дифференциальной формы, к-рая, как показал Б. Риман, определяет все внутренние свойства пространства. Вместо гипотез, лежащих в О. г., предложенных Б. Риманом, Г. Гельмгольц рассматривал факты, из к-рых вытекали те же выводы в метрич. геометрии, подчеркивая тем самым опытную проверку справедливости (непротиворечивости) этих выводов.

Объективно работы по опытной проверке геометрич. систем служили распространению новых геометрич. идей, способствовали появлению углубленного логич. анализа геометрич. систем, выработке современных основных требований к этим системам. Вместе с тем попытки физич. обоснования геометрии способствовали проникновению геометрических идей и методов в различные области математики, физики и механики.

О. г. имеют большое значение в методологии геометрии. В процессе преподавания современных курсов геометрии в университетах и педагогич. вузах раздел О. г. занимает одно из центральных мест. В связи с этим все большую роль играет выбор системы основных понятий и аксиом, чтобы «сократить» путь от самих аксиом до выводимых из них содержательных теорем, находящих практич. применение (в частности, в решении задач).

Лит.: [1] Начала Евклида, кн. 1—15, пер. с греч., М., 1948—50; [2] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [3] Веблен О., Уайтхед Дж., Основания дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1949; [4] Об основаниях геометрии, М., 1956; [5] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1—2, М.— Л., 1949—56; [6] Каган В. Ф., *Очерки по геометрии*, М., 1963; [7] Буземан Г., Геометрия геодезических, пер. с англ., М., 1962; [8] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [9] Бах-

ман Ф., Построение геометрии на основе понятия симметрии, пер. с нем., М., 1969; [10] Розенфельд Б. А., История неевклидовой геометрии, М., 1976; [11] Погорелов А. В., Элементарная геометрия, 2 изд., М., 1974; [12] Шоке Г., Геометрия, пер. с франц., М., 1970; [13] Донеддю А., Евклидова планиметрия, пер. с франц., М., 1978; [14] Картеси Ф., Введение в конечные геометрии, пер. с англ., М., 1980.

Л. А. Сидоров.

ОСНОВНОГО ТИПА АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, общего типа алгебраическая поверхность,— поверхность одного из самых обширных классов *алгебраических поверхностей* в классификации Энрикеса. А именно, гладкая проективная поверхность X над алгебраически замкнутым полем k наз. О. т. а. п., если

$$\varkappa(X)=2,$$

где $\varkappa$ — *Кодаиры размерность*. Это условие равносильно тому, что для нек-рого целого $n>0$ линейная система $|nK|$, где K — канонич. дивизор на X, определяет бирациональное отображение поверхности X на ее образ в P^N для нек-рого N. Всякая О. т. а. п. обладает бирациональным морфизмом на свою минимальную модель.

Минимальные О. т. а. п. характеризуются (см. [1], [3], [6]) каждым из следующих наборов свойств:

а) $K^2>0$ и $KD\geqslant 0$ для любого эффективного дивизора D;

б) $K^2>0$ и $P_2\geqslant 2$, где $P_2=\dim|2K|+1$ — двукратный род X;

в) $K^2>0$ и поверхность X не рациональна;

г) существует такое целое n_0, что при любом $n\geqslant n_0$ отображение φ_{nK}, определяемое системой $|nK|$, является бирациональным морфизмом поверхности X на ее образ в $P^{\dim|nK|}$. Для О. т. а. п. существуют (см. [2], [3], [6], [10]) соотношения (вида неравенств) между численными характеристиками. Пусть p_g — геометрич. род и q — иррегулярность поверхности X, тогда для минимальной О. т. а. п. имеют место следующие неравенства:

1) $q\leqslant p_g$;

2) $p_g\leqslant\frac{1}{2}K^2+2$, если K^2 четно, $p_g\leqslant\frac{1}{2}K^2+\frac{3}{2}$, если K^2 нечетно (эти два неравенства наз. неравенствами Нётера);

3) $K^2<3C_2$, где C_2 — второй класс Чжэня поверхности X (или топологическая эйлерова характеристика).

Наиболее полный результат о кратноканонич. отображениях φ_{nK} О. т. а. п. есть теорема Бомбьери — Кодаиры: пусть X — минимальная О. т. а. п. над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, тогда отображение

$$\varphi_{nK}: X\longrightarrow P^{\dim|nK|}$$

является бирациональным морфизмом на свой образ при всех $n\geqslant 5$. Существуют (см. [5], [8], [9]) О. т. а. п., для к-рых φ_{4K} уже не обладает этим свойством.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [2] Богомолов Ф. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1978, т. 42, с. 1227—87; [3] Beauville A., Surfaces algébriques complexes, P., 1978; [4] Bombieri E., «Publ. Math. IHES», 1972, № 42, p. 171—219; [5] Bombieri E., Cataneso F., The tricanonical map of surface with $K=2$, $pg=0$, C. P. Ramanujam, Atribute, B.— [e. a.], 1978, p. 279—90; [6] Bombieri E., Husemoller D., Classification and embeddings of surfaces, Proceedings of Symposia in Pure Math., № 29, Algebraic geometry, 1974, p. 329—420; [7] Horikawa E., «Ann. Math.», 1976, v. 104, p. 357—87; [8] его же, «Invent. math.», 1976, v. 37, p. 121—55; 1978/79, v. 50, p. 103—28; [9] Kodaira K., «J. Math. Soc. Japan», 1968, v. 20, p. 170—92; [10] Miyaoka Y., «Invent. math.», 1977, v. 42, p. 225—37.

В. А. Исковских.

ОСОБАЯ ТОЧКА —1) О. т. аналитической функции $f(z)$ — препятствие для *аналитического продолжения* элемента функции $f(z)$ комплексного переменного z вдоль какого-либо пути на плоскости этого переменного.

Пусть аналитическая функция $f(z)$ определена некоторым вейерштрассовым элементом $(U(\zeta, R), f_\zeta)$, состоящим из степенного ряда

$$f_\zeta = f_\zeta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\zeta)^k \qquad (1)$$

и его круга сходимости

$$U(\zeta, R) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z-\zeta| < R\}$$

с центром $\zeta \neq \infty$ и радиусом сходимости $R > 0$. Рассмотрим всевозможные пути $L : [0,1] \to \mathbb{C}$, т. е. непрерывные отображения $L : z = \varphi(t)$ отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$ в расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$, начинающиеся в центре этого элемента ζ, $\zeta = \varphi(0)$. Если аналитич. продолжение данного элемента возможно вдоль любого такого пути в любую точку $z \in \overline{\mathbb{C}}$, то получающаяся при этом полная аналитич. функция $f(z)$ сводится к константе: $f(z) = \text{const}$. Для нетривиальных же аналитич. функций $f(z) \neq \text{const}$ характерно существование препятствий для аналитич. продолжения вдоль нек-рых путей L.

Пусть точка a расширенной плоскости $\mathbb{C}$ расположена на пути $L_1 : z = \varphi_1(t)$, $a = \varphi_1(\tau_1)$, $0 < \tau_1 \leqslant 1$, $\varphi_1(0) = \zeta$, и на пути $L_2 : z = \varphi_2(t)$, $a = \varphi_2(\tau_2)$, $0 < \tau_2 \leqslant 1$, $\varphi_2(0) = \zeta$, причем аналитич. продолжение вдоль L_1 и L_2 осуществимо во все предшествующие точки $z = \varphi_1(t)$, $0 \leqslant t < \tau_1$, и $z = \varphi_2(t)$, $0 \leqslant t < \tau_2$. Два таких пути L_1 и L_2 наз. эквивалентными по отношению к аналитич. продолжению данного элемента $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ в точку a, если для любой окрестности $V(a)$ точки a в $\overline{\mathbb{C}}$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что вейерштрассов элемент, получаемый из $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ посредством аналитич. продолжения вдоль L_1 до какой-либо точки $z' = \varphi_1(\tau')$, $\tau_1 - \varepsilon < \tau' < \tau_1$, может быть продолжен вдоль нек-рого пути, расположенного в $V(a)$, в элемент, получаемый посредством продолжения вдоль L_2 из $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ до какой-либо точки $z'' = \varphi_2(\tau'')$, $\tau_2 - \varepsilon < \tau'' < \tau_2$.

Если аналитич. продолжение в точку a осуществимо вдоль нек-рого пути L, то оно возможно и вдоль всех путей класса эквивалентности $\{L\}$, содержащего L. В этом случае пара $(a, \{L\})$ наз. регулярной, или правильной; она определяет однозначную регулярную ветвь аналитич. функции $f(z)$ в окрестности точки $V(a)$.

Если же аналитич. продолжение вдоль нек-рого пути $L : z = \varphi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\varphi(0) = \zeta$, проходящего через a, $a = \varphi(\tau)$, $0 < \tau \leqslant 1$, осуществимо во все точки $\varphi(t)$, $0 \leqslant t < \tau$, предшествующие a, но не осуществимо в точку $a = \varphi(\tau)$, то a есть особая точка при аналитическом продолжении элемента $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ вдоль пути L. В этом случае она будет особой и при продолжении вдоль всех проходящих через a путей класса эквивалентности $\{L\}$. Пара $(a, \{L\})$, состоящая из точки $a \in \overline{\mathbb{C}}$ и класса эквивалентности $\{L\}$ путей L, проходящих через a, для каждого из к-рых точка a особая, наз. особой точкой аналитической функции $f(z)$, определяемой элементом $(U(\zeta, R), f_\zeta)$. Две О. т. $(a, \{L\})$ и $(b, \{M\})$ считаются совпадающими, если $a = b$ и совпадают классы $\{L\}$ и $\{M\}$. При этом точка a расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ наз. проекцией, или z-координатой, О. т. $(a, \{L\})$; говорят также, что О. т. $(a, \{L\})$ расположена над точкой $a \in \mathbb{C}$. В общем случае над одной и той же точкой $a \in \overline{\mathbb{C}}$ могут располагаться несколько и даже счетное множество различных особых и регулярных пар $(a, \{L\})$, получающихся при аналитич. продолжении одного и того же элемента $(U(\zeta, R), f_\zeta)$.

Если радиус сходимости исходного ряда (1) $R < \infty$, то на окружности $\Gamma = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z-\zeta| = R\}$ круга схо-

димости $U(\zeta, R)$ непременно имеется хотя бы одна особая точка a элемента $(U(\zeta, R), f_\zeta)$, то есть О. т. аналитич. функции $f(z)$ при продолжении вдоль путей $z=\varphi(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, класса $\{L\}$ таких, что $z=\varphi(t)\in U(\zeta, R)$ при $0\leqslant t<1$, $a=\varphi(1)$. Иначе говоря, О. т. элемента $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ — это такая точка $a\in\Gamma$, что непосредственное аналитич. продолжение элемента $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ из круга $U(\zeta, R)$ в любую окрестность $V(a)$ невозможно. В этой ситуации и вообще во всех случаях, когда отсутствие явного описания класса путей $\{L\}$ не может повести к недоразумениям, ограничиваются обычно только указанием z-координаты О. т. a. Изучение расположения О. т. аналитич. функции в зависимости от свойств последовательности коэффициентов $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ исходного элемента $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ является одним из важных направлений исследований в теории функций (см. *Адамара теорема* мультипликационная, *Звезда элемента функции*, а также [1], [3], [5]). Известно, напр., что О. т. ряда

$$f_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b^k z^{d^k},$$

где $b\in\overline{\mathbb{C}}$, $|b|<1$, $d\geqslant 2$ — натуральное число, заполняют всю границу $\Gamma=\{z\in\overline{\mathbb{C}} : |z|=1\}$ его круга сходимости $U(0, 1)$, хотя сумма этого ряда непрерывна всюду в замкнутом круге $\overline{U}(0, 1)=\{z\in\overline{\mathbb{C}} : |z|\leqslant 1\}$. Здесь окружность Γ есть естественная граница аналитич. функции $f_0(z)$, аналитич. продолжение $f_0(z)$ за пределы круга $U(0, 1)$ невозможно.

Пусть в достаточно малой окрестности $V(a)=\{z\in\overline{\mathbb{C}} : |z-a|<R\}$ точки $a\neq\infty$ (или $V(\infty)=\{z\in\overline{\mathbb{C}} : |z|>R\}$) аналитич. продолжение элементов, получаемых вдоль путей определенного класса $\{L\}$, возможно во все точки, отличные от a, т. е. по всем путям, расположенным в проколотой окрестности $V'(a)=\{z\in\overline{\mathbb{C}} : 0<|z-a|<R\}$ (соответственно $V'(\infty)=\{z\in\overline{\mathbb{C}} : R<|z|<\infty\}$); тогда О. т. $(a, \{L\})$ наз. *изолированной особой точкой*. Если при этом аналитич. продолжение элементов, получаемых вдоль путей класса $\{L\}$, по всевозможным замкнутым путям, расположенным в $V'(a)$, не изменяет этих элементов, то изолированная О. т. $(a, \{L\})$ наз. особой точкой однозначного характера. Такая О. т. может быть полюсом или существенно особой точкой: если существует бесконечный предел $\lim f(z)=\infty$ при стремлении $z\to a$ вдоль путей класса $\{L\}$, то О. т. однозначного характера $(a, \{L\})$ наз. *полюсом*; если не существует никакого конечного или бесконечного предела $\lim f(z)$ при стремлении $z\to a$ вдоль путей класса $\{L\}$, то $(a, \{L\})$ — *существенно особая точка*; случай конечного предела соответствует регулярной паре $(a, \{L\})$. Если же аналитич. продолжение элементов, получаемых вдоль путей класса $\{L\}$, по замкнутым путям, окружающим в $V'(a)$ точку a, изменяет эти элементы, то изолированная О. т. $(a, \{L\})$ наз. *ветвления точкой*, или особой точкой многозначного характера. Класс точек ветвления, в свою очередь, подразделяется на *алгебраические точки ветвления* и *трансцендентные точки ветвления* (включая *логарифмические точки ветвления*). Если после нек-рого конечного числа $m\geqslant 2$ однократных обходов точки a в одном и том же направлении в $V'(a)$ элементы, получаемые вдоль путей класса $\{L\}$, принимают исходный вид, то $(\{a, \{L\})$ есть алгебраич. точка ветвления и число $m-1$ наз. ее порядком. В противном случае, когда обходы точки a дают все новые и новые элементы, $(a, \{L\})$ есть трансцендентная точка ветвления.

Напр., для функции

$$f(z)=\frac{1}{(1+\sqrt{z})\left(1+\sqrt[6]{z}\right)}$$

точки $a=0$, ∞ (для всех путей) являются алгебраич. точками ветвления порядка 5. Как однозначную функцию точки $f(z)$ можно представить только на соответствующей *римановой поверхности* S, состоящей из 6 листов над $\overline{\mathbb{C}}$, определенным образом соединенных над точками 0, ∞. Кроме того, над точкой $a=1$ расположены три правильные ветви $f(z)$, однозначные на трех соответствующих листах S; на одном листе S расположен полюс второго порядка и на двух листах S — полюсы первого порядка. Вообще, привлечение понятия римановой поверхности оказывается весьма удобным и плодотворным при изучении характера О. т.

Если радиус сходимости исходного ряда (1) $R=\infty$, то он представляет *целую функцию* $f(z)$, голоморфную во всей конечной плоскости $\mathbb{C}$. Такая функция в случае $f(z)\neq\text{const}$ имеет единственную изолированную О. т. $a=\infty$ однозначного характера; если при этом $a=\infty$ — полюс, то $f(z)$ есть целая рациональная функция, или многочлен; если же $a=\infty$ — существенно особая точка, то $f(z)$ есть целая трансцендентная функция.

Мероморфная функция $f(z)$ в конечной плоскости $\mathbb{C}$ получается, когда аналитич. продолжение ряда (1) приводит к однозначной аналитич. функции $f(z)$ в $\mathbb{C}$, имеющей в $\mathbb{C}$ в качестве О. т. только полюсы. Если при этом и $a=\infty$ есть полюс или регулярная точка, то общее число всех полюсов $f(z)$ в расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ конечно и $f(z)$ есть рациональная функция. Для трансцендентной мероморфной функции $f(z)$ в $\mathbb{C}$ бесконечно удаленная точка $a=\infty$ может оказаться предельной точкой полюсов — это простейший пример неизолированной О. т. однозначной аналитич. функции. Мероморфная функция в произвольной области $D\subset\overline{\mathbb{C}}$ определяется аналогично.

Вообще говоря, проекции неизолированных О. т. могут образовывать различные множества точек расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. В частности, какова бы ни была область $D\subset\overline{\mathbb{C}}$, существует аналитич. функция $f_D(z)$ в D, для к-рой D является ее естественной областью существования, а граница $\Gamma=\partial D$ — естественной границей, так что аналитич. продолжение функции $f_D(z)$ за пределы области D невозможно. При этом естественная граница Γ состоит из достижимых и недостижимых точек (см. *Граничные элементы*). Если точка $a\in\Gamma$ достижима вдоль путей класса $\{L\}$ (таких классов может быть и несколько), расположенных целиком, кроме конечной точки a, в области D, то над ней необходимо расположены только О. т. функции $f_D(z)$, т. к. в противном случае было бы возможно аналитич. продолжение $f_D(z)$ за пределы области D через нек-рую часть Γ в окрестности точки a; достижимые точки образуют плотное множество на Γ.

В качестве определяющего элемента аналитич. функции $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n>1$, можно принять, напр., вейерштрассов элемент $(U^n(\zeta, R), f_\zeta)$ в виде кратного степенного ряда

$$f_\zeta=f_\zeta(z)=\sum_{k_1, \ldots, k_n=0}^{\infty} c_{k_1 \ldots k_n}(z_1-\zeta_1)^{k_1}\ldots(z_n-\zeta_n)^{k_n} \tag{2}$$

и поликруга сходимости этого ряда

$$U^n(\zeta, R)=\{z\in\mathbb{C}^n: |z_\nu-\zeta_\nu|<R_\nu,\ \nu=1, \ldots, n\},$$

имеющего центр $\zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\in\mathbb{C}^n$ и радиус сходимости $R=\{R_1>0, \ldots, R_n>0\}$. Полагая в основу процесс аналитич. продолжения элемента (2) вдоль всевозможных путей $L: [0, 1]\to\mathbb{C}^n$, отображающих отрезок $0\leqslant t\leqslant 1$ в комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, получают общее определение О. т. $(a, \{L\})$, $a\in\mathbb{C}^n$, функции $f(z)$, формально вполне аналогичное приведенному выше для случая $n=1$.

Однако вследствие переопределенности *Коши — Римана условий* при $n>1$ и проистекающей отсюда «большей силы» аналитич. продолжения случай $n>1$ коренным образом отличается, по существу, от случая $n=1$. В частности, при $n>1$ существуют такие области $D\subset\mathbb{C}^n$, к-рые не могут быть естественными областями существования никакой однозначной аналитической, или голоморфной, функции. Иначе говоря, определенные участки границы ∂D такой области свободны от О. т. любой голоморфной функции $f(z)$, заданной в D, и через них возможно аналитич. продолжение. Напр., справедлива т е о р е м а О с г у д а — Б р а у н а: если компакт K расположен в ограниченной области $D\subset\mathbb{C}^n$, причем $D\setminus K$ является также областью, и функция $f(z)$ голоморфна в $D\setminus K$, то она голоморфно продолжается на всю область D (см. также *Устранимое множество*). Естественные области существования голоморфных функций наз. иначе *голоморфности областями*, они характеризуются определенными геометрич. свойствами. Аналитически продолжая голоморфную функцию $f(z)$, заданную первоначально в области $D\subset\mathbb{C}^n$, и желая сохранить ее однозначность, приходят к необходимости введения, вообще говоря, многолистных над $\mathbb{C}^n$ областей голоморфности на *римановых областях* — аналогах римановых поверхностей. В этой трактовке оказывается, что О. т. голоморфной функции $f(z)$ — это точки границы $\Gamma=\partial\hat{D}$ ее области голоморфности $\hat{D}$. Теорема Осгуда — Брауна показывает, что связные компоненты Γ не могут образовывать компактных множеств K таких, что в $\hat{D}\setminus K$ функция $f(z)$ голоморфна. В частности, при $n>1$ не существует изолированных О. т. голоморфных функций.

Простейшие типы О. т. аналитич. функций многих комплексных переменных доставляют мероморфные функции $f(z)$ в области $D\subset\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, характеризующиеся следующими свойствами: 1) $f(z)$ голоморфна всюду в D, за исключением *полярного множества* P, состоящего из О. т.; 2) для любой точки $a\in P$ существуют окрестность $V(a)$ и голоморфная в $V(a)$ функция $\psi_a(z)$ такие, что функция $\varphi_a(z)=\psi_a(z)f(z)$ голоморфно продолжается в $V(a)$. При этом О. т. $a\in P$ делятся на полюсы, в к-рых $\varphi_a(a)\neq 0$, и т о ч к и н е о п р е д е л е н н о с т и, в к-рых $\varphi_a(a)=0$. В случае полюса $\lim f(z)=\infty$ при стремлении $z\to a$, $z\in D\setminus P$; в любой окрестности точки неопределенности $f(z)$ принимает все значения $w\in\mathbb{C}$. Напр., мероморфная функция $f(z)=z_1/z_2$ в $\mathbb{C}^2$ имеет в качестве полярного множества прямую $P=\{z=(z_1, z_2)\in\mathbb{C}^2 : z_2=0\}$, все точки к-рой суть полюсы, за исключением одной точки неопределенности (0,0). Мероморфная функция $f(z)$ в своей области голоморфности $\hat{D}$ представима глобально в $\hat{D}$ в виде отношения двух голоморфных функций, т. е. ее полярное множество P есть *аналитическое множество*.

Точка $a\in\mathbb{C}^n$ наз. т о ч к о й м е р о м о р ф н о с т и функции $f(z)$, если $f(z)$ мероморфна в нек-рой ее окрестности; таким образом, если О. т. есть точка мероморфности, то она либо полюс, либо точка неопределенности. Все остальные О. т. аналитич. функции $f(z)$, не являющиеся точками мероморфности, иногда наз. с у щ е с т в е н н о о с о б ы м и т о ч к а м и. К ним относятся, напр., точки ветвления $f(z)$, т. е.

точки ветвления ее (многолистной) области голоморфности $\hat{D}$. Размерность множества всех О. т. голоморфной функции $f(z)$ в общем случае равна $2n-1$. При нек-рых дополнительных ограничениях на $f(z)$ это множество оказывается аналитическим (и, следовательно, имеющим меньшую размерность; см. [2]).

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [3] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1—2, М., 1962; [4] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [5] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967; [6] Bieberbach L., Lehrbuch der Funktionentheorie, 3 Aufl., Bd 1, Lpz.— B., 1930, Bd 2, Lpz.— B., 1927; [7] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [8] Фукс Б. А., Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, 2 изд., М., 1962; [9] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [10] Behnke H., Thullen P., Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, B., 1934.

Е. Д. Соломенцев.

2) О. т., особенность, алгебраического многообразия — точка, в к-рой нарушается гладкость. Точнее, пусть X — алгебраич. многообразие или схема конечного типа над полем k, тогда точка $x\in X$ наз. особой, если соответствующее локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ не регулярно (регулярность локального нётерова кольца A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ означает равенство $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2=\dim A$). Множество О. т. алгебраич. многообразия X замкнуто в топологии Зариского и обозначается $\operatorname{Sing} X$. Если X— приведенное многообразие, то $\operatorname{Sing} X$ нигде не плотно в X. Если x является изолированной точкой в $\operatorname{Sing} X$, то x наз. изолированной О. т. Для проверки того, будет ли точка $x\in X$ особой или неособой, используется якобиев критерий (см. *Гладкая схема*).

Разрешением особенности (десингуляризацией) алгебраич. многообразия X наз. собственный бирациональный морфизм $\pi\colon \overline{X}\to X$, где $\overline{X}$ — гладкое многообразие. Существование разрешения особенностей доказано для широкого класса многообразий, в частности для всех многообразий над полем характеристики 0 (см. [13]); как правило, оно не единственно. Разрешение особенностей используется для введения различных инвариантов многообразия X; примером служат пространства когомологий $H^i(\overline{X},\ \mathcal{O}_{\overline{X}})$. Нормальное многообразие X, для к-рого $H^i(\overline{X},\ \mathcal{O}_{\overline{X}})=0$ при всех $i>0$, наз. многообразием с рациональными особенностями. Рациональными являются тороидальные особенности [6] и особенности многообразий Шуберта [3]. Размерность пространства $H^{n-1}(\overline{X},\ \mathcal{O}_{\overline{X}})$ для n-мерного многообразия X наз. геометрическим родом X. См. также *Разрешение особенностей*.

Теория деформаций особенностей, т. е. многообразий с О. т., строится параллельно теории деформаций (гладких) алгебраич. многообразий. Деформацией многообразия X_0 наз. плоский морфизм $f\colon X\to S$ такой, что $f^{-1}(s_0)=X_0$ для нек-рой $s_0\in S$; многообразие S при этом наз. базой деформации. Для многообразия X_0 с изолированной О. т. существует версальная деформация, содержащая все деформации многообразия X_0. Может оказаться, что особенность жесткая, т. е. база версальной деформации ее состоит из одной точки и все ее деформации тривиальны [4]. Противоположными к жестким являются сглаживаемые О. т., в базе S версальной деформации к-рых есть такие точки, что $X_s=f^{-1}(s)$ неособы. Множество D точек $s\in S$ с особыми X_s наз. дискриминантным подмножеством.

При изучении деформаций большую роль играет действие группы монодромии $\pi_1(S \setminus D)$ на когомологиях слоев X.

Одновременным разрешением особенностей семейства $X \to S$ наз. собственный морфизм $\pi : \overline{X} \to X$ такой, что $\overline{X}$ — гладкая S-схема и для любого $s \in S$ морфизм $\overline{X}_s \to X_s$ является разрешением особенностей. Версальная деформация простых О. т. (см. ниже) допускает одновременное разрешение после нек-рого конченого накрытия ее базы, причем группой Галуа этого накрытия служит группа Вейля соответствующей корневой системы (см. [5], с. 179—203).

Особые точки комплексной гиперповерхности. Пусть гиперповерхность X задана в $\mathbb{C}^{n+1}$ одним уравнением $f(x_0, \ldots, x_n)=0$, где f — многочлен (или росток аналитич. функции в точке 0). Якобиевым идеалом многочлена f наз. идеал $J(f)=(\partial f/\partial x_0, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ в кольце $\mathbb{C}\{x_0, \ldots, x_n\}$; изолированность О. т. 0 эквивалентна конечномерности пространства $\mathbb{C}\{x_0, \ldots, x_n\}/J(f)$. Размерность μ этого пространства наз. числом Милнора многочлена f и совпадает с рангом свободной абелевой группы $H_n(X_\varepsilon, \mathbb{Z})$, где X_ε задается уравнением $f(x_0, \ldots, x_n)=\varepsilon$, при малых $\varepsilon \neq 0$. Более точно, многообразие X_ε гомотопически эквивалентно букету μ сфер размерности n (см. [12]). База версальной деформации этой особенности неособая и также имеет размерность μ (см. [9]). Простейшим примером является невырожденная квадратичная особенность $x_0^2+\ldots+x_n^2=0$, для нее $\mu=1$.

Простой О. т. гиперповерхности наз. особенность, при деформации к-рой появляется лишь конечное число других особенностей [9]; гиперповерхность при этом задается одним из следующих уравнений:

$$A_\mu : x_0^{\mu+1}+x_1^2+\ldots+x_n^2=0, \qquad \mu \geqslant 1,$$
$$D_\mu : x_0^{\mu-1}+x_0x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=0, \qquad \mu \geqslant 4,$$
$$E_6 : x_0^4+x_1^3+x_2^2+\ldots+x_n^2=0,$$
$$E_7 : x_0^3x_1+x_1^3+x_2^2+\ldots+x_n^2=0,$$
$$E_8 : x_0^5+x_1^3+x_2^2+\ldots+x_n^2=0.$$

Нижний индекс μ здесь — число Милнора особенности. В случае поверхностей ($n=2$) эти особенности наз. особенностями дю Валя, или двойными рациональными О. т. Эти О. т. можно также охарактеризовать тем, что форма пересечения на пространстве $H_n(X_\varepsilon, \mathbb{R})$ является определенной. Имеется классификация следующих по сложности, унимодальных особенностей [9]. Изучается вещественный аналог этих понятий, а также их связь с теорией катастроф [10]. Многие теоремы об О. т. гиперповерхностей распространяются на О. т. полных пересечений.

Особые точки кривых. Пусть A — локальное кольцо О. т. x кривой, а $\overline{A}$ — его нормализация; главным инвариантом О. т. является $\delta_x=\dim \overline{A}/A$. Для неприводимой кривой X ее арифметич. род равен геометрич. роду плюс $\Sigma_x \delta_x$ (суммирование по всем О. т. кривой X). Причем для плоской кривой $2\delta_x=\mu+r-1$, где μ — число Милнора, а r — число ветвей кривой в точке x.

Пусть $X \subset \mathbb{C}^2$ — плоская неприводимая кривая, имеющая в точке 0 особенность кратности n (см. *Кратность особой точки*). Тогда X допускает параметризацию $x=t^n$, $y=\Sigma_{i \geqslant n} a_i t^i$, к-рая записывается в виде

$$y=\sum\nolimits_i a_i x^{i/n}$$

(разложение Пюизё). Характеристич. показателями этого разложения наз. числа

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_1 n_2} < \ldots < \frac{m_g}{n_1 \ldots n_g}=\frac{m_g}{n},$$

где $\frac{m_1}{n_1}$ — первый нецелый показатель в разложении Пюизё, $\frac{m_2}{n_1 n_2}$ — первый показатель некратный $\frac{1}{n_1}$ и т. д. Последовательность $\{n, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$, где $\beta_\nu = \frac{m_\nu n}{n_1 \ldots n_\nu}$ наз. характеристикой особенности. Плоские одномерные особенности топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их характеристики совпадают (см. [8]).

Особые точки поверхностей. Среди разрешений особенностей нормальных поверхностей однозначно выделяются минимальные разрешения $\pi: \overline{X} \to X$, через к-рые пропускаются все остальные разрешения. Если x — О. т. поверхности X, то кривая $A = \pi^{-1}(x)$ наз. исключительной. Комбинаторным инвариантом О. т. x является взвешенный граф Г кривой A, вершины которого соответствуют неприводимым компонентам A_i кривой A, точки пересечения компонент A_i и A_j изображаются ребрами между соответствующими вершинами, вершине приписывается вес, равный роду кривой A_i, а иногда еще и индекс самопересечения (A_i^2). Матрица $\|(A_i, A_j)\|$ пересечений компонент кривой A отрицательно определена, граф Г связен. Наименьший положительный дивизор $Z = \Sigma r_i A_i$ такой, что $(Z, A_i) \leqslant 0$ для всех i, наз. фундаментальным циклом особенности. *Он всегда существует, и его арифметич.* род

$$p(Z) = 1 - \dim H^0(Z, \mathcal{O}_Z) + \dim H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$$

неотрицателен. О. т. рациональна тогда и только тогда, когда $p(Z) = 0$; в этом случае кратность ее равна $-(Z^2)$, а размерность касательного пространства Зарисского на единицу больше [1]. Исследуются также [7] эллиптические особенности (то есть О. т. с $p(Z) = 1$).

Лит.: [1] Artin M., «Amer. J. Math.», 1966, v. 68, p. 129—36; [2] Groupes de monodromie en géométrie algébrique, B.— Hdlb.— N. Y., 1972; [3] Kempf G., «Invent. math.», 1976, v. 37, p. 229—39; [4] Schlessinger M., «Invent. math.», 1971, v. 14, p. 17—26; [5] Séminaire sur les singularités des surfaces, B.— Hdlb.— N. Y., 1980; [6] Toroidal embeddings, [v. 1], B.— Hdlb.— N. Y., 1973; [7] Yau S.-T., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1980, v. 257, p. 269—329; [8] Zariski O., «Amer. J. Math.», 1968, v. 90, p. 961—1023; [9] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 5, с. 3—65; [10] Голубицкий М., Гийемин В., Устойчивые отображения и их особенности, пер. с англ., М., 1977; [11] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1—2, М., 1982; [12] Милнор Дж., Особые точки комплексных гиперповерхностей, пер. с англ., М., 1971; [13] Хиронака Х., «Математика», 1965, т. 9, № 6, с. 2—70; 1966, т. 10, № 1, с. 3—89.

В. И. Данилов.

3) О. т. векторного поля X — точка a, для к-рой $X(a) = 0$. О. т. наз. изолированной, если X не обращается в нуль в отличных от a точках достаточно малой окрестности точки a. О. т. наз. невырожденной, если

$$\det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial a^j} \right\| \neq 0.$$

Невырожденная О. т. всегда изолирована.

М. И. Войцеховский.

4) О. т. дифференциального уравнения

$$X(x, y)\, dy = Y(x, y)\, dx \qquad (1)$$

— любая точка $(x_0, y_0) \in G$, удовлетворяющая условию

$$X(x_0, y_0) = Y(x_0, y_0) = 0; \qquad (2)$$

здесь $X, Y: G \to \mathbb{R}$ — непрерывные в нек-рой области $G \subset \mathbb{R}^2$ функции. Точки области G, не удовлетворяющие условию (2), наз. обыкновенными точками уравнения (1). Иногда точку $(x_0, y_0) \in G$ наз. О. т. уравнения (1) и в том случае, когда условие (2) не вы-

полняется, но задача Коши для уравнения (1) с начальными данными $(x_0,\ y_0)$ имеет более одного решения.

Уравнение (1) — частный случай системы дифференциальных уравнений в симметричной форме:

$$\frac{dx_1}{X_1(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(x)}, \qquad (3)$$

где $n \geqslant 2$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, функции $X_i : G \to \mathbb{R}$, $i=1, 2, \ldots, n$, непрерывны в нек-рой области $G \subset \mathbb{R}^n$. Точка $x_0 \in G$ наз. о с о б о й т о ч к о й системы (3), если $X_i(x_0)=0$, $i=1, \ldots, n$. В противном случае x_0 — обыкновенная точка этой системы.

Пусть H — множество О. т. системы (3) в области G. Если $x_0 \in G \setminus H$, то существуют индекс $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ и окрестность U точки x_0 такие, что в U система (3) представима в нормальной форме:

$$\frac{dx_i}{dx_{i_0}} = f_i(x), \quad f_i \in \mathbb{C}(U), \qquad i \neq i_0.$$

Таким образом, поведение интегральных кривых системы (3) в окрестности обыкновенной точки описывается теоремами общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, справедлива следующая т е о р е м а о в ы п р я м л е н и и: если через любую точку x_0 множества $G \setminus H$ проходит единственная интегральная кривая системы (3), то каждая точка этого множества имеет окрестность V такую, что семейство дуг интегральных кривых системы (3), заполняющих V, гомеоморфно (а если $X_i \in \mathbb{C}^1(G)$, $i=1, \ldots, n$, то диффеоморфно) семейству параллельных прямых.

Если же $x_0 \in H$, то пары $(i_0,\ U)$, обладающей указанным выше свойством, не существует, и интегральные кривые системы (3) могут образовывать вблизи x_0 различные конфигурации. Так, для уравнения

$$(ax+by)\,dy = (cx+ey)\,dx,$$

где $a, b, c, e \in \mathbb{R}$, а матрица $A = \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & e \end{matrix} \right\|$ — невырожденная, расположение интегральных кривых в окрестности точки (0, 0) может относиться к типу *седло*, *узел*, *центр* или *фокус*. Соответствующее название закрепляется при этом и за самой точкой (0, 0).

Систему (3) можно рассматривать как результат исключения времени t из *автономной системы* дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad X=(X_1, \ldots, X_n). \qquad (4)$$

Если (4) — система класса $(\mathbb{C},$ единственность) в G, то есть $X \in \mathbb{C}(G)$, и через каждую точку области G проходит единственная траектория системы, что далее и предполагается, то точки множества H будут для нее точками покоя (*равновесия положениями*). Часто их наз. О. т. и для этой системы, поскольку они являются таковыми (по определению) для векторного поля X. Интегральные кривые системы (3), расположенные в $G \setminus H$, представляют собою траектории системы (4), отличные от состояний покоя.

Таким образом, задачи о поведении интегральных кривых системы (3) в окрестности О. т. и о расположении траекторий системы (4) в окрестности положений равновесия эквивалентны. Исследования этих задач ведутся по двум основным направлениям.

Одно направление, берущее свое начало в трудах А. Пуанкаре [1], ставит своей целью выяснение возможных топологич. типов расположения траекторий системы (4) в окрестности изолированной точки покоя (к-рую всегда можно считать совпадающей с началом координат $O(x=0)$) и отыскание аналитич. критериев их различения. Наиболее законченные результаты

получены здесь для того случая, когда система (4) представима в виде

$$\dot{x} = Ax + f(x), \tag{5}$$

где A — постоянная невырожденная матрица, $f(x) = o(\|x\|)$ при $\|x\| \to 0$. В этом случае точка O наз. простой, или невырожденной, особой точкой системы (4). Для системы (5) установлена следующая теорема о топологической эквивалентности: если матрица A не имеет чисто мнимых собственных значений, а функция $f \in \mathbb{C}^1(G)$, то существует гомеоморфизм h окрестности U точки O на окрестность V той же точки, переводящий траектории системы (5) в траектории линейной системы

$$\dot{x} = Ax. \tag{6}$$

Гомеоморфизм $h : U \to V$, осуществляющий топологич. соответствие между траекториями систем (5) и (6), в общем случае не является (и не может быть заменен) диффеоморфизмом.

При условиях этой теоремы точка покоя O системы (5) относится к тому же топологич. типу, что и точка покоя O системы (6). В частности, для системы 2-го порядка она будет при этом седлом, если собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A удовлетворяют условию $\lambda_1\lambda_2 < 0$, топологическим узлом (узлом или фокусом), если $\lambda_1\lambda_2 > 0$ (при чисто мнимых λ_1, λ_2 точка O для системы (6) — центр, а для системы (5) — центр, фокус или *центро-фокус*).

Если матрица A имеет чисто мнимые или нулевые собственные значения, то топологич. эквивалентности между системами (5) и (6) в окрестности точки O в общем случае нет. При этих условиях поведение траекторий системы (5) в окрестности точки O весьма детально изучено в тех случаях, когда матрица A имеет не более двух собственных значений с нулевыми действительными частями, а функция f — аналитическая. В частности, для системы 2-го порядка с ненулевой матрицей A выяснены все возможные топологич. типы расположения траекторий в окрестности точки O и даны коэффициентные критерии их различения с точностью до различения центра и фокуса [9]. Здесь, кроме седла, топологич. узла и центра, точка O может быть: двухсепаратрисным седлом, седло-узлом (некрая окрестность U точки O разбивается тремя примыкающими к O траекториями (сепаратрисами) на три сектора: два гиперболических, заполненных траекториями, к-рые обоими концами покидают U, и один параболический, заполненный траекториями, к-рые одним концом покидают U, а другим примыкают к O) и точкой (нек-рая ее окрестность U разбивается сепаратрисами на 4 сектора: один гиперболический, два параболических и один эллиптический, заполненный траекториями, к-рые обоими концами примыкают к O, охватывая друг друга). Для системы 2-го порядка с нулевой матрицей A разработаны алгоритмы расщепления особенности (см., напр., *Фроммера метод*), позволяющие с помощью конечного числа шагов процесса расщепления выяснить топологич. тип точки O с точностью до решения задачи о различении центра и фокуса. Последняя задача (см. *Центра и фокуса проблема*) возникает для системы 2-го порядка вида (5) в случае, когда матрица A имеет чисто мнимые собственные значения, и может возникать в случае двух нулевых собственных значений этой матрицы. Она решена для частных классов таких систем.

Важной характеристикой изолированной точки покоя O системы (4) является ее индекс Пуанкаре. Для $n = 2$ он определяется как вращение векторного поля X при обходе точки O по окружности $\|x\| = \rho$ достаточно малого радиуса ρ в положительном

направлении, измеренное в единицах полного оборота. Напр., индекс простого седла равен —1, индекс узла, фокуса и центра равен 1. При произвольном n индекс точки O определяется как степень отображения h сферы $\|x\|=\rho$ достаточно малого радиуса ρ на себя, определенного формулой:

$$h(x)=\frac{\rho X(x)}{\|X(x)\|}.$$

Это направление развилось в обширную *качественную теорию дифференциальных уравнений*, а центр тяжести исследований переместился с локальных проблем на глобальные — изучение поведения траекторий системы (4) во всей области задания G, к-рая все чаще предполагается гладким многообразием той или иной природы.

Другое направление, заложенное трудами А. М. Ляпунова [2], занимается исследованием решений (в частности, состояний равновесия) систем вида (4), а также неавтономных систем дифференциальных уравнений на устойчивость. Оно представляет собою разветвленную теорию устойчивости движения (см. *Устойчивости теория*).

В комплексном анализе вводится понятие О. т. дифференциального уравнения

$$\frac{d^nw}{dz^n}=P\left(z,\ w,\ \frac{dw}{dz},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}\right), \qquad (7)$$

а также системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dw}{dz}=P(z,\ w), \qquad (8)$$

где z — комплексная переменная, P — рациональная функция от w, w', ..., $w^{(n-1)}$ или от компонент w_1, w_2, ..., w_n вектора w, $n\geq 1$, коэффициенты к-рой — известные аналитич. функции от z. Особой для уравнения (7) (системы (8)) наз. любая точка z_0 комплексной плоскости, к-рая является О. т. хотя бы одного из коэффициентов функции P (см. *Особая точка* аналитической функции). О. т. уравнения или системы, как правило, являются особыми и для их решений как аналитич. функций от z. Они наз. *неподвижными особыми точками* решений. Кроме того, решения уравнения (7) (системы (8)) могут иметь *подвижные особые точки*, положение к-рых определяется начальными данными решений. Исследование различных классов уравнений вида (7), (8) с целью изучения аналитич. природы решений в окрестности особых точек уравнений и с целью выяснения вопроса о наличии у решений этих уравнений подвижных О. т. различных типов составляет предмет *аналитической теории дифференциальных уравнений*.

Лит.: [1] Poincaré H., Sur les courbes définies par une équation differentielle, Oeuvres, t. 1, P., 1892; рус. пер.— Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, М.— Л., 1947; [2] Ляпунов А., Общая задача об устойчивости движения, М.— Л., 1950; [3] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [4] Кодингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [5] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961; [6] Sansone G., Conti R., Non-linear differential equations, Oxf., 1964; [7] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [8] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971; [9] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А., Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости, М., 1976; [10] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950; [11] Еругин Н. П., Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, 2 изд., Минск, 1972; [12] Брюно А. Д., Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений, М., 1979; [13] Андреев А. Ф., Особые точки дифференциальных уравнений, Минск, 1979.

А. Ф. Андреев.

5) О. т. дифференцируемого отображения f — точка, к-рая является для f нерегуляр-

ной (критической) и неправильной одновременно. Точнее, пусть M^m и N^n — два дифференцируемых многообразия размерностей m и n соответственно, а $f: M^m \to N^n$ — дифференцируемое отображение первого во второе, x^i и $y^j = f(x^j)$ — локальные координаты в них. Если ранг матрицы $\left\| \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right\|$ в точке $a \in M^m$ равен m, то отображение f наз. регулярным в точке a. Если ранг матрицы $\left\| \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right\|$ равен n в точке $a \in M^m$, то отображение f наз. правильным в точке a. В О. т. f ранг этой матрицы меньше обоих чисел m и n. См. также *Особенности дифференцируемых отображений*.

М. И. Войцеховский.

6) О. т. действительной кривой $F(x,y)=0$ — точка (x_0, y_0), в к-рой первые частные производные равны нулю $(F'_x)_0=0$, $(F'_y)_0=0$. О. т. наз. двойной точкой, если по крайней мере одна из вторых частных производных функции $F(x, y)$ не равна нулю. При исследовании строения кривой в окрестности О. т. рассматривают знак выражения

$$\Delta = (F''_{xx})_0 (F''_{yy})_0 - (F''_{xy})^2_0.$$

Если $\Delta > 0$, то О. т. является изолированной точкой (см. рис. , *а*); узловой точкой (или точкой самопересечения), если $\Delta < 0$ (см. рис. , *б*); если $\Delta = 0$, то О. т. является либо изолированной точкой, либо характеризуется тем, что различные ветви кривой имеют в этой точке общую касательную. Если ветви кривой расположены по разные стороны от общей касательной и по одну сторону от общей нормали, то О. т. наз. точкой возврата 1-го рода (см. рис. , *в*); если ветви кривой расположены по одну сторону от общей касательной и по одну сторону от общей нормали, то О. т. наз. точкой возврата 2-го рода (см. рис. , *г*); если ветви расположены по разные стороны от общей нормали и по разные стороны от общей касательной (см. рис. , *д*) или по одну сторону от общей касательной и по разные стороны от общей нормали (см. рис. , *е*), то О. т. наз. точкой самоприкосновения. См. также *Двойная точка*.

Если в нек-рой точке все частные производные от функции $F(x, y)$ до $(k-1)$-го порядка включительно обращаются в нуль, а среди производных k-го порядка по крайней мере одна отлична от нуля, то эта точка наз. особой точкой k-го порядка (кратной точкой).

Иногда О. т. наз. точки, отличающиеся каким-либо свойством от других точек кривой; см., напр., *Перегиба точка*, *Прекращения точка*, *Излома точка*, *Спрямления точка*, *Уплощения точка*.

О. т. пространственной кривой, заданной уравнениями $F(x, y, z)=0$, $G(x, y, z)=0$ — точка, в окрестности к-рой ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{Vmatrix}$$

меньше двух.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956; [2] Бюшгенс С. С., Дифференциальная геометрия, т. 1, М.— Л., 1940; [3] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., т. 1, М.— Л., 1969.

А. Б. Иванов.

7) О. т. действительной поверхности — точка поверхности $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$, в к-рой ранг матрицы

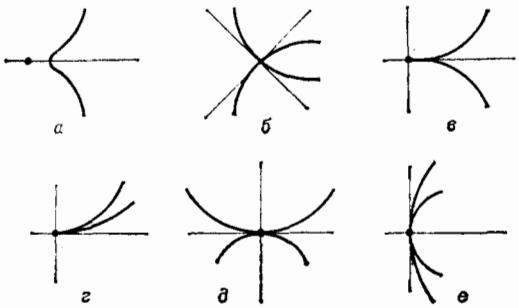
$$\begin{Vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{Vmatrix}$$

меньше двух. Если поверхность определяется как множество точек, координаты к-рых удовлетворяют

уравнению $F(x, y, z)=0$, то О. т. наз. точку (x_0, y_0, z_0) поверхности, в к-рой первые частные производные функции $F(x, y, z)$ равны нулю:

$$(F'_x)_0=0, \quad (F'_y)_0=0, \quad (F'_z)_0=0.$$

Если в О. т. не все вторые частные производные функции $F(x, y, z)$ обращаются в нуль, то касательные к поверхности в О. т. образуют конус. Если конус касательных невырожденный, то О. т. наз. коническ ой точкой; если конус вырождается в две



действительные плоскости, то О. т. является точкой самопересечения поверхности; если конус мнимый, то О. т.— изолированная точка поверхности.

О. т. могут составлять т. н. особые линии поверхности: *возврата ребро*, линии самопересечения, самоприкосновения и др.

Лит.: [1] Погорелов А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969; [2] Норден А. П., Краткий курс дифференциальной геометрии, 2 изд., М., 1958; [3] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980.

А. Б. Иванов.

ОСОБЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ — раздел математич. анализа и дифференциальной геометрии, в к-ром изучаются свойства отображений, сохраняющихся при заменах координат в образе и прообразе отображения (или при заменах, сохраняющих нек-рые дополнительные структуры); предлагается общий подход к решению различных задач о вырождениях отображений, функций, векторных полей и т. д.; дается классификация наиболее часто встречающихся вырождений, указываются их нормальные формы и алгоритмы приведения к нормальным формам.

Точка области определения дифференцируемого отображения (т. е. отображения класса C^k, см. *Дифференцируемое многообразие*) наз. регулярной, если в этой точке матрица Якоби имеет максимальный ранг, и критической в противном случае.

Строение отображения в окрестности регулярной точки описывает классич. теорема о *неявной функции*, в окрестности такой точки и в окрестности ее образа существуют координаты, в к-рых отображение линейно.

Во многих случаях ограничиться рассмотрением лишь регулярных точек недостаточно, поэтому естественны вопросы:

а) описания отображения в окрестности каждой критич. точки;

б) описания строения множества критич. точек.

Ответы на а) и б) для произвольного отображения отсутствуют по двум причинам: при попытке охватить все отображения нет надежды на получение обозримых ответов (например, множество критических точек локально может быть произвольным замкнутым множеством), и для приложений достаточно знать ответы лишь для достаточно обширного множества отображений.

Вопросы а), б) и многие другие в теории особенностей исследуются по следующей схеме:

1) из рассмотрения исключается множество «нетипичных», «патологических» отображений,

2) указывается критерий «типичности» отображения,

3) проверяется, что всякое отображение аппроксимируется «типичными»,

4) изучаются «типичные» отображения.

Выбор множества типичных отображений зависит от решаемой задачи и не однозначен: чем меньше отображений отнесено к типичным, тем легче задача их изучения, однако 2) и 3) требуют, чтобы множество типичных отображений было достаточно широким и достаточно конструктивно определяемым.

Эту схему иллюстрирует следующая теорема Уитни: всякое дифференцируемое отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ можно аппроксимировать таким отображением f, что для любой точки $a \in \mathbb{R}^2$ в окрестностях точек a и $f(a)$ можно выбрать координаты, в к-рых отображение f записывается в одной из трех нормальных форм:

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2^2; \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2^3 + x_1 x_2 \end{cases}$$

(критерий типичности см. в [3] или [4]). Работа Х. Уитни (H. Whitney, 1955), в к-рой была доказана эта теорема, считается началом теории О. д. о., хотя ряд отдельных результатов появился гораздо раньше (теория Морса критических точек функций, теоремы Уитни об особенностях вложений, работы Л. С. Понтрягина о связи особенностей с характеристическими классами).

Основные понятия теории особенностей дифференциальных отображений.

Ростки дифференцируемых отображений. Пусть X, Y — гладкие многообразия, $p \in X$, $q \in Y$. (Всюду ниже термин «гладкий» будет употребляться как синоним термина бесконечно дифференцируемый.) Ростком в точке p наз. класс эквивалентности отображений $X \to Y$, совпадающих в некоторой окрестности точки p; множество ростков отображений, переводящих p в q, обозначается $C^\infty(X, Y)_{p,q}$. Группа ростков гладких замен переменных в X, сохраняющих точку p, обозначается $\mathrm{Diff}^\infty(X)_p$.

Важная локальная задача теории О. д. о.— изучение естественного действия группы

$$\mathrm{Diff}^\infty(X)_p \times \mathrm{Diff}^\infty(Y)_q \text{ на } C^\infty(X, Y)_{p,q}.$$

Решение этой и многих подобных задач обычно начинается с аппроксимации функциональных пространств и бесконечномерных групп, действующих на них, конечномерными многообразиями и действиями на них групп Ли. Полученные результаты затем переносятся в исходную бесконечномерную ситуацию.

Расслоения струй. Пусть $f, g : X \to Y$ — гладкие отображения и $f(p) = g(p) = q$; отображения f и g имеют, по определению, касание порядка k в точке p, если их ряды Тейлора в этой точке совпадают до порядка k. Класс эквивалентности отображений, имеющих в точке p касание порядка k, наз. k-струей. Множество всех k-струй отображений, переводящих p в q, наделяется естественной структурой гладкого многообразия и обозначается $J^k(X, Y)_{p,q}$. Определена естественная проекция

$$C^\infty(X, Y)_{p,q} \longrightarrow J^k(X, Y)_{p,q}.$$

Класс эквивалентности гладких замен переменных в X, сохраняющих точку p и имеющих в этой точке касание порядка k, наз. обратимой k-струей в точке p. Обратимые k-струи образуют группу Ли

$L^k(X)_p$. Группа Ли $L^k(X)_p \times L^k(Y)_q$ действует на $J^k(X, Y)_{p,q}$, аппроксимируя действие

$$\mathrm{Diff}^\infty(X)_p \times \mathrm{Diff}^\infty(Y)_q \text{ на } C^\infty(X, Y)_{p,q}.$$

Пусть $J^k(X, Y) = \{$дизъюнктное объединение $J^k(X, Y)_{p,q}$ по всем $(p, q) \in X \times Y\}$. Множество $J^k(X, Y)$ наделяется естественной структурой гладкого расслоения над $X \times Y$ со слоем

$$J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)_{0,0} = J^k(m, n)$$

и структурной группой

$$L^k(\mathbb{R}^m)_0 \times L^k(\mathbb{R}^n)_0 = L^k(m, n),$$

где $m = \dim X$, $n = \dim Y$.

Особенности и классы особенностей. Орбита действия $L^k(m, n)$ на $J^k(m, n)$ наз. k-особенностью; любое подмножество в $J^k(m, n)$, инвариантное относительно $L^k(m, n)$, наз. классом k-особенностей. Пусть S такой класс. Поскольку $J^k(m, n)$ можно отождествить с $J^k(X, Y)_{p,q}$ в $J^k(X, Y)_{p,q}$ определяется подмножество $S(X, Y)_{p,q}$, не зависящее от способа отождествления. Множество $S(X, Y) = \{$объединение $S(X, Y)_{p,q}$ по всем $(p, q) \in X \times Y\}$ наз. универсальным классом особенностей (или универсальной особенностью, если S — особенность). Универсальная особенность $S(X, Y)$ является подмногообразием в $J^k(X, Y)$, коразмерность этого подмногообразия равна коразмерности S в $J^k(m, n)$.

Пусть $f: X \to Y$ — гладкое отображение. Сопоставлением каждой точке $p \in X$ k-струи отображения f в точке p получается гладкое отображение $j^k f: X \to J^k(X, Y)$, наз. k-струйным расширением f. Отображение $f: X \to Y$ имеет, по определению, в точке p особенность типа S, если $j^k f(p) \in S(X, Y)$. Множество $S(f)$ всех точек, в к-рых f имеет особенность типа S, есть не что иное, как $(j^k f)^{-1} S(X, Y)$. Поэтому изучение множества $S(f)$ разбивается на два этапа: изучение универсального множества $S(X, Y)$ в $J^k(X, Y)$, сводящееся к изучению S в $J^k(m, n)$; изучение взаимного расположения $S(X, Y)$ и $j^k f(X)$. На втором этапе обычно применяется теорема трансверсальности Тома.

Трансверсальность. Гладкое отображение гладких многообразий $f: A \to B$ трансверсально подмногообразию $C \subset B$ (обозначается $f \pitchfork C$), если для любой точки $a \in A$ либо $f(a) \notin C$, либо $(df)_a(T_a A) \oplus T_{f(a)} C = T_{f(a)} B$. Если $f \pitchfork C$, то множество $f^{-1}(C)$ либо пусто, либо является подмногообразием в A, коразмерность к-рого равна коразмерности C в B. Теорема трансверсальности Тома: пусть X, Y — гладкие многообразия и C — подмногообразие в $J^k(X, Y)$; тогда множество тех f, для к-рых $j^k f \pitchfork C$, является массивным подмножеством в $C^\infty(X, Y)$ в C^∞-топологии Уитни. (Множество наз. массивным, если оно является пересечением счетного числа открытых плотных подмножеств.)

Топология Уитни. Пусть $k \geqslant 0$ и U — открытое множество в $J^k(X, Y)$. Пусть

$$M(U) = \{f \in C^\infty(X, Y): j^k f(X) \subset U\}.$$

Множества $M(U)$ образуют базис нек-рой топологии, наз. C^∞-топологией Уитни на $C^\infty(X, Y)$. В этой топологии $C^\infty(X, Y)$ является *Бэра пространством*, т. е. каждое массивное подмножество плотно.

Мультиструи. При изучении самопересечений образа гладкого отображения используется понятие мультиструи. Пусть $\alpha: J^k(X, Y) \to X$ — естественная проекция. Пусть

$$X^{(s)} = \{(x_1, \ldots, x_s) \in X \times \ldots \times X: x_j \neq x_i, i \neq j\}$$

и $\alpha^s = \alpha \times \ldots \times \alpha$ (s раз). Множество $J^k_s(X,Y) = (\alpha^s)^{-1}(X^{(s)})$ может быть наделено естественной структурой гладкого многообразия и наз. s-кратным расслоением k-струй. Для s-кратных струй определяются k-струйное расширение отображения f, k-особенности, универсальные особенности и т. д. и доказывается аналог теоремы трансверсальности Тома.

Устойчивые дифференцируемые отображения. Центральной проблемой теории О. д. о. в период ее возникновения была задача изучения устойчивых дифференцируемых отображений. Гладкое отображение $f : X^m \to Y^n$ гладких многообразий наз. устойчивым, если для любого достаточно близкого к f отображения $\tilde{f}$ найдутся диффеоморфизмы $h : X^m \to X^m$ и $k : Y^n \to Y^n$ такие, что $\tilde{f} = hfk$.

При небольших m, $n (m, n \leqslant 4)$, а также при $n = 1$ и любом m устойчивые дифференцируемые отображения плотны в пространстве всех собственных дифференцируемых отображений [3]. В пространстве отображений $X^9 \to Y^9$ устойчивые отображения не составляют всюду плотного множества (см. [1]). Для нек-рых пар многообразий (напр., для $X = \mathbb{R}P^{19}$, $Y = \mathbb{R}^{19}$) вообще нет ни одного устойчивого отображения X в Y. Найдены [14], [15] все «устойчивые размерности» (m, n) : для любых гладких многообразий X^m и Y^n устойчивые отображения X^m в Y^n плотны в пространстве собственных дифференцируемых отображений $X^m \to Y^n$, снабженном C^∞-топологией Уитни, тогда и только тогда, когда пара (m, n) удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий $(q = n - m)$: а) $n < 7q + 8$ и $q \geqslant 4$; б) $n < 7q + 9$ и $3 \geqslant q \geqslant 0$; в) $n < 8$ и $q = -1$; г) $n < 6$ и $q = -2$; д) $n < 7$ и $q \leqslant 3$.

При доказательстве этой теоремы, а также во многих других вопросах оказываются полезными следующие два понятия: отображение $f_0 : X^m \to Y^n$ наз. гомотопически устойчивым, если для любой гладкой гомотопии f_t отображения f_0 найдутся гладкие гомотопии h_t и k_t тождественных диффеоморфизмов X^m и Y^n такие, что $f_t = h_t f_0 \circ k_t$ для достаточно малых t; отображение $f : X^m \to Y^n$ наз. инфинитезимально устойчивым, если всякое бесконечно близкое к f_0 отображение $\tilde{f}$ может быть получено из f_0 «бесконечно близкими к тождественным» диффеоморфизмами X^m и Y^n. Для собственного отображения понятие устойчивости, гомотопич. устойчивости и инфинитезимальной устойчивости совпадают [3]. Задача нахождения локальных нормальных форм устойчивых отображений сводится к задаче классификации нек-рых конечномерных локальных алгебр [14], [15]. Для фиксированных m, n число таких нормальных форм конечно.

Если в определении устойчивого отображения в качестве h и k взять вместо диффеоморфизмов гомеоморфизмы, то получится определение топологически устойчивого отображения. Доказана теорема (см. [8]) о плотности множества топологических устойчивых отображений в пространстве всех отображений любого компактного многообразия X^m в любое многообразие Y^n (при любых m, n).

Конечно определенные ростки. Пусть $\sim$ — нек-рое отношение эквивалентности на множестве $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)_{0,0}$ ростков отображений $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, переводящих 0 в 0. k-струя любого такого ростка — это его отрезок ряда Тейлора порядка k. Росток f наз. k-определенным, если любой другой росток g, имеющий ту же k-струю, удовлетворяет соотношению $f \sim g$. Росток наз. конечно определенным, если он k-определен при нек-ром k. Достаточной наз. такая k-струя σ, что любые два ростка f, g, имеющие σ в качестве k-струи, удовлетворяют соотношению $f \sim g$. Наиболее часто

встречающиеся эквивалентности носят специальные названия:

r-эквивалентность — принадлежность одной орбите группы $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{R}^m)_0$ «правых» замен координат; rl-эквивалентность — принадлежность одной орбите группы $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{R}^m)_0 \times \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{R}^n)_0$. Топологическая эквивалентность — принадлежность одной орбите группы $\mathrm{Diff}^0(\mathbb{R}^m)_0 \times \mathrm{Diff}^0(\mathbb{R}^n)_0$. Изучение k-определенного ростка сводится к изучению отображения, заданного многочленами степени $\leqslant k$.

Решение вопроса о том, является ли росток f k-определенным относительно rl-эквивалентности, сводится к задаче о разрешимости нек-рой явно выписываемой системы конечного числа линейных уравнений.

Множество конечно определенных относительно rl-эквивалентности ростков открыто в $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)_{0,0}$, однако плотно не для любых m, n. Естественно рассмотреть более грубое отношение топологич. эквивалентности. После выбрасывания из $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)_{0,0}$ подмножества бесконечной коразмерности остается счетное число классов топологич. эквивалентности, каждый из к-рых является полуалгебраич. множеством. Отсюда следует, что открытое плотное множество в $C^\infty(X, Y)$ (X^m — компактно) составляют отображения, ростки к-рых топологически эквивалентны полиномиальным [13].

Деформации. Если отображение зависит от параметров, то говорят, что задано семейство отображений. Если семейство отображений изучается локально, то при малом изменении параметров в окрестности фиксированных значений говорят о деформации отображения, соответствующего этим значениям параметров. Оказывается, во многих случаях изучение всевозможных деформаций сводится к изучению одной единственной, из к-рой получаются все остальные. Такая деформация, в нек-ром смысле самая большая, содержит в себе все существенно разные деформации данного отображения. Она наз. версальной деформацией (см. [11], [12], [13]).

Критические точки функций. Критич. точка функции наз. невырожденной, если второй дифференциал — невырожденная квадратичная форма. Функция общего положения имеет лишь невырожденные критич. точки, а в окрестности каждой из них она может быть приведена к стандартной форме. Вырожденные критич. точки приходится рассматривать в тех случаях, когда эти функции зависят от параметров, и чем больше число этих параметров, тем более сложные критич. точки будут встречаться неустранимым (малым шевелением) образом при нек-рых значениях параметров.

Семейство функций, зависящее от любого числа параметров, можно превратить малым шевелением в семейство, в к-ром при каждом значении параметра в окрестности любой точки области определения функция представляется многочленом в нек-рой локальной системе координат. Это позволяет при локальном изучении функций рассматривать только многочлены и использовать комплексный анализ.

Классификация критических точек функций. Естественно начать с классификации ростков в 0 голоморфных функций в $\mathbb{C}^n$, считая два ростка эквивалентными, если один переводится в другой ростком голоморфной замены координат в $\mathbb{C}^n$, сохраняющей 0. Струя (многочлен Тейлора) голоморфной функции в 0 достаточна, если она определяет функцию с точностью до эквивалентности. Росток, у к-рого критич. точка 0 изолирована, всегда имеет достаточную струю и, следовательно, эквивалентен многочлену. Кратностью (или числом Милнора) μ критич. точки 0 наз. число невырожденных критич. точек, на к-рые распадается

критич. точка 0 при малом шевелении функции. Если кратность критич. точки функции f равна μ, то $(\mu+1)$-струя достаточна. Т. к. кратность μ при малом изменении f не может увеличиваться, то классификация функций, близких к функции с изолированной критич. точкой, сводится к изучению действия группы Ли k-струй замен переменных на пространстве k-струй при достаточно большом k. В пространстве k-струй функций f таких, что $f(0)=0$, $df(0)=0$, коразмерность орбиты f равна $\mu-1$, поэтому критич. точки кратности μ встречаются неустранимым образом в семействах функций, зависящих от $(\mu-1)$ параметров. Получены классификация (см. [10]) всех критич. точек кратности $\mu\leqslant 16$ и алгоритм приведения любой такой функции к нормальной форме. Сложность критич. точки определяется не только ее кратностью μ, но и ее модальностью m (числом модулей). Критич. точка наз. простой (или 0-модальной), если среди всех близких критич. точек найдется не более чем конечное число попарно неэквивалентных. Два ростка функций наз. стабильно эквивалентными, если они становятся эквивалентными после прямого сложения с невырожденными квадратичными формами от подходящего числа переменных (для ростков функций от одинакового числа переменных стабильная эквивалентность не отличается от обычной).

С точностью до стабильной эквивалентности простые ростки исчерпываются следующим списком:

$$A_k: f(x)=x^{k+1}, \qquad k\geqslant 1;$$
$$D_k: f(x,\ y)=x^2y+y^{k-1}, \quad k\geqslant 4;$$
$$E_6: f(x,\ y)=x^3+y^4;$$
$$E_7: f(x,\ y)=x^3+xy^3;$$
$$E_8: f(x,\ y)=x^3+y^5.$$

Модальностью точки $x\in X$ при действии группы Ли G на многообразии X наз. наименьшее число m такое, что достаточно малая окрестность точки x покрыта конечным числом m-параметрич. семейств орбит.

Получена также классификация ростков функций модальности 1 и 2 (см. [10]). Классификация простых особенностей и особенностей малой модальности оказывается связанной с группами Ли, Коксетера и Вейля серий A, D, E, с теорией Кос Артина, классификацией правильных многогранников в трехмерном пространстве, классификацией Кодаиры вырождений эллиптич. кривых, классификацией треугольников на плоскости Лобачевского (см. [10], [11]).

Краевые особенности. Ряд геометрич. задач требует изучения критич. точек функций на многообразии с краем.

В комплексном случае эта ситуация соответствует изучению ростка функции, заданной в пространстве $\mathbb{C}^n$ с выделенным подпространством $\mathbb{C}^{n-1}$. Такие ростки изучаются с точностью до замен переменных в $\mathbb{C}^n$, переводящих $\mathbb{C}^{n-1}$ в себя. В этой ситуации также получена классификация всех простых ростков, ростков модальностей 1 и 2. Классификация простых краевых особенностей оказывается связанной с простыми алгебрами Ли B, C, F_4.

Топологические характеристики ростка голоморфной функции. Пусть $f: (\mathbb{C}^n,\ 0)\to(\mathbb{C},\ 0)$ — функция, голоморфная в окрестности нуля и имеющая в нуле критич. точку кратности μ. Пусть η, ε — положительные числа, $B\subset\mathbb{C}^n$ — шар $|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2\leqslant\varepsilon^2$, S — его граница, $T\subset\mathbb{C}$ — диск $|t|<\eta$, T' — проколотый диск $T\setminus 0$. Пусть $X(t)=f^{-1}(t)\cap B$, $X=f^{-1}(T')\cap B$. Для подходящих ε и η (ε достаточно малого и η достаточно малого по сравнению с ε) отображение $f: X\to T'$ —

гладкое локально тривиальное расслоение. Слой $X(t)$ этого расслоения — $(2n-2)$-мерное многообразие с краем, гомотопически эквивалентное букету μ $(n-1)$-мерных сфер. Край $X(t)$ есть $2n-3$-мерное многообразие, диффеоморфное $f^{-1}(0) \cap S$. Даже для сравнительно простых f это многообразие может быть нетривиальным. Напр., 28 многообразий

$$x_1^{6k-1}+x_2^3+x_3^2+x_4^2+x_5^2=0, \quad |x_1|^2+\ldots+|x_5|^2=\varepsilon^2,$$
$$k=1, \ldots, 28,$$

суть 28 сфер Милнора (к-рые все гомеоморфны обычной семимерной сфере, но попарно не диффеоморфны). Группа приведенных гомологий $H_{n-1}(X(t), *, \mathbb{Z})$ изоморфна $\mathbb{Z}^\mu$. Индекс пересечения определяет на H_{n-1} целочисленную билинейную форму. Перенос слоев расслоения $f: X \to T'$ над кривыми в T' определяет действие фундаментальной группы $\pi_1(T')$ в $(n-1)$-мерных гомологиях слоя. Образующей $\pi_1(T')$ отвечает автоморфизм группы гомологий, наз. оператором монодромии. Оператор монодромии сохраняет форму пересечений. Собственные значения оператора монодромии несут информацию об асимптотиках различных интегралов, связанных с функцией f.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М., Особенности дифференцируемых отображений, М., 1982; [2] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [3] Голубицкий М., Гийемин В., Устойчивые отображения и их особенности, пер. с англ., М., 1977; [4] Брекер Т., Ландер Л., Дифференцируемые ростки и катастрофы, пер. с англ., М., 1977; [5] Постон Т., Стюарт И., Теория катастроф и ее приложения, пер. с англ., М., 1980; [6] Милнор Дж., Особые точки комплексных гиперповерхностей, пер. с англ., М., 1971; [7] Особенности дифференцируемых отображений, Сб. ст., пер. с англ. и франц., М., 1968; [8] Topological stability of smooth mappings, B.— Hdlb.— N. Y., 1976; [9] Thom R., Stabilité structurelle et morphogénèse, N. Y., 1972; [10] Арнольд В. И., «Функц. анализ и его приложения», 1972, т. 6, № 4, с. 3—25; [11] его же, «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 5, с. 119—184; 1973, т. 28, в. 5, с. 17—44; 1974, т. 29, в. 2, с. 11—49; 1975, т. 30, в. 5, с. 3—65; [12] Том Р., там же, 1972, т. 27, в. 5, с. 51—57; [13] Варченко А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1974, т. 38, № 5, с. 1037—90; 1975, т. 39, № 2, с. 294—314; [14] Мазер Д., «Математика», 1970, т. 14, № 1, с. 145—75; [15] его же, «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 6, с. 165—90; 1974, т. 29, в. 1, с. 99—158.

А. Н. Варченко, А. Г. Кушниренко.

ОСОБЕННОСТЬ аналитической функции — 1) Множество *особых точек* аналитич. функции $f(z)$ комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n \geqslant 1$, выделяемое теми или иными дополнительными условиями. В частности, *изолированные особые точки* иногда наз. изолированными О.

2) Множество $K \subset \mathbb{C}^n$ такое, что в нек-рой области D, примыкающей к K, определена однозначная аналитич. функция $f(z)$ и для к-рого ставится вопрос о возможности аналитич. продолжения $f(z)$ на K. Напр., пусть D — область пространства $\mathbb{C}^n$, K — компакт, содержащийся в D, и $f(z)$ голоморфна на $D \setminus K$. Тогда K — потенциальная О. функции $f(z)$, и ставится вопрос об аналитич. продолжении (быть может, при нек-рых дополнительных условиях) $f(z)$ на всю область D, иначе говоря, вопрос об «устранении», или «стирании», особенности K.

См. также *Устранимое множество.*

Е. Д. Соломенцев.

ОСОБОЕ РЕШЕНИЕ обыкновенного дифференциального уравнения — решение, в каждой точке к-рого нарушается единственность решения задачи Коши для этого уравнения. Напр., для уравнения 1-го порядка

$$y'=f(x, y) \qquad (*)$$

с непрерывной правой частью, всюду имеющей конечную или бесконечную частную производную по y, О. р.

может лежать только во множестве

$$M=\{(x,\ y)\mid f'_y(x,\ y)\mid=\infty\}.$$

Кривая $\gamma\subset M$ есть О. р. уравнения (*), если γ является интегральной кривой уравнения (*) и через каждую точку кривой γ проходит по крайней мере еще одна интегральная кривая уравнения (*). Пусть уравнение (*) имеет в нек-рой области G *общий интеграл* $\Phi(x, y, C)=0$; если это семейство кривых имеет *огибающую*, то она является О. р. уравнения (*). Для дифференциального уравнения

$$F(x,\ y,\ y')=0$$

О. р. находится исследованием *дискриминантной кривой*.

Лит.: [1] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 7 изд., М., 1958; [2] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 2, М., 1954.

Н. Х. Розов.

ОСОБОЙ ТОЧКИ ИНДЕКС — одна из основных характеристик изолированной *особой точки* векторного поля. Пусть векторное поле X определено в $\mathbb{R}^n$, Q — сфера малого радиуса, окружающая особую точку x_0, такая, что $X|_Q\neq 0$. Тогда индексом $\operatorname{ind}_{x_0}(X)$ особой точки x_0 векторного поля X наз. *степень отображения* $\deg f$, где

$$f:\frac{X(x)}{|X(x)|}:Q\longrightarrow S^{n-1},$$

т. е.

$$\operatorname{ind}_{x_0}(X)=\deg f_{x_0}.$$

Если x_0 невырождена, то

$$\operatorname{ind}_{x_0}(X)=\operatorname{sign}\det\left\|\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right\|.$$

О. т. и. не зависит от направления поля.

М. И. Войцеховский.

ОСОБЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — величины, определяемые формулой:

$$\Omega^0(A)=\overline{\lim_{\theta-\tau\to+\infty}}\frac{1}{\theta-\tau}\ln\|X(\theta,\ \tau)\|$$

(верхний особый показатель) или формулой

$$\omega^0(A)=\underline{\lim_{\theta-\tau\to+\infty}}\frac{1}{\tau-\theta}\ln\|X(\tau,\ \theta)\|$$

(нижний особый показатель), где $X(\theta,\ \tau)$ — *Коши оператор* системы

$$\dot{x}=A(t)\,x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\tag{1}$$

где $A(\cdot)$ — отображение $\mathbb{R}^+\to\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n)$, суммируемое на каждом отрезке.

О. п. могут равняться $\pm\infty$; если для нек-рого $T>0$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\int_t^{t+T}\|A(\tau)\|\,d\tau<+\infty,$$

то О. п. суть числа.

Для системы (1) с постоянными коэффициентами ($A(t)\equiv A(0)$) О. п. $\Omega^0(A)$ и $\omega^0(A)$ равны соответственно максимуму и минимуму действительных частей собственных значений оператора $A(0)$. Для системы (1) с периодич. коэффициентами ($A(t+T)=A(t)$ при всех $t\in\mathbb{R}$ для нек-рого $T>0$) О. п. $\Omega^0(A)$ и $\omega^0(A)$ равны соответственно максимуму и минимуму логарифмов модулей *мультипликаторов*, деленных на период T. Иногда О. п. наз. иначе, напр. генеральными показателями (см. [4]).

Следующие определения эквивалентны приведенным выше: О. п. $\Omega^0(A)$ равен точной нижней грани мно-

жества тех чисел α, для каждого из к-рых найдется число $C_\alpha > 0$ такое, что для всякого решения $x(t) \neq 0$ системы (1) выполнено неравенство

$$|x(\theta)| \leqslant C_\alpha e^{\alpha(\theta-\tau)} |x(\tau)| \text{ для всех } \theta \geqslant \tau \geqslant 0;$$

О. п. $\omega^0(A)$ равен точной верхней грани множества тех чисел β, для каждого из к-рых найдется число $C_\beta > 0$ такое, что для всякого решения $x(t) \neq 0$ системы (1) выполнено неравенство

$$|x(\theta)| \geqslant C_\beta e^{\beta(\theta-\tau)} |x(\tau)| \text{ для всех } \theta \geqslant \tau \geqslant 0.$$

Для О. п. и *Ляпунова характеристических показателей* имеют место неравенства:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|A(\tau)\| d\tau \geqslant \Omega^0(A) \geqslant \lambda_1(A) \geqslant \ldots$$

$$\ldots \geqslant \lambda_n(A) \geqslant \omega^0(A) \geqslant -\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|A(\tau)\| d\tau.$$

Для линейных систем с постоянными или с периодич. коэффициентами

$$\Omega^0(A) = \lambda_1(A), \quad \omega^0(A) = \lambda_n(A),$$

но существуют системы, для к-рых соответствующие неравенства — строгие (см. *Равномерная устойчивость*).

О. п. $\Omega^0(A)$ (соответственно $\omega^0(A)$) как функция на пространстве систем (1) с ограниченными непрерывными коэффициентами (отображение $A(\cdot)$ непрерывно и $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(t)\| < +\infty$), наделенном метрикой

$$d(A, B) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(t) - B(t)\|,$$

полунепрерывна сверху (соответственно снизу), но не всюду непрерывна.

Если отображение $A(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывно и

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|A(t)\| < +\infty,$$

то *сдвигов динамическая система* ($S = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$) имеет инвариантные нормированные меры μ_1 и μ_2, сосредоточенные на замыкании траектории точки A, такие, что для почти всех $\tilde{A}$ (в смысле меры μ_1) верхний О. п. системы

$$\dot{x} = \tilde{A}(t)\, x \tag{2}$$

равен ее наибольшему (старшему) характеристич. показателю Ляпунова

$$\Omega^0(\tilde{A}) = \lambda_1(\tilde{A})$$

и для почти всех $\tilde{A}$ (в смысле меры μ_2) нижний О. п. системы (2) равен ее наименьшему характеристич. показателю Ляпунова

$$\omega^0(\tilde{A}) = \lambda_n(\tilde{A}).$$

Для почти периодич. отображения $A(\cdot)$ (см. *Линейная система дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами*) меры μ_1 и μ_2 идентичны и совпадают с той единственной нормированной инвариантной мерой, сосредоточенной на сужении динамич. системы сдвигов на замыкание траектории точки A, к-рая в этом случае имеется.

Пусть динамич. система на гладком замкнутом n-мерном многообразии V^n задана гладким векторным полем. Тогда у этой системы найдутся нормированные инвариантные меры μ_1 и μ_2 такие, что для почти всякой (в смысле меры μ_1) точки $x \in V^n$ совпадают верхний О. п. и старший характеристич. показатель Ляпунова системы уравнений в вариациях вдоль траектории точки x и для почти всякой (в смысле меры μ_2) точки $x \in V^n$ совпадают нижний О. п. и наименьший характеристич.

показатель Ляпунова системы уравнений в вариациях вдоль траектории точки x. Определения О. п., характеристич. показателей Ляпунова и т. п. сохраняют смысл для систем уравнений в вариациях гладких динамич. систем, заданных на любых гладких многообразиях. Система уравнений в вариациях такой динамич. системы вдоль траектории точки x может быть записана в виде (1), напр. с помощью задания в касательном пространстве к V^n в каждой точке траектории точки x базиса, полученного параллельным перенесением вдоль траектории точки x (в смысле римановой связности, индуцированной какой-либо гладкой римановой метрикой) нек-рого базиса касательного пространства к V^n в точке x.

Лит.: [1] Bohl P., «J. reine und angew. Math.», 1913, Bd 144, S. 284—318; [2] Персидский К., «Матем. сб.», 1933, т. 40, № 3, с. 284—93; [3] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [4] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970; [5] Изобов Н. А., в кн.: Итоги науки и техники. Матем. анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146. *В. М. Миллионщиков.*

ОСРЕДНЕНИЕ, усреднение,— операция вычисления средних значений функций, входящих в структуру дифференциальных уравнений, описывающих периодические, почти периодические и, вообще, колебательные процессы. Операция О. может рассматриваться как нек-рый сглаживающий оператор. Методы О. впервые стали применяться в небесной механике при исследовании движения планет вокруг Солнца. Позже они получили распространение в самых разнообразных областях: в теории нелинейных колебаний, в физике, в теории автоматич. регулирования, астродинамике и др. Методы О. часто позволяют находить приближенные решения для исходных уравнений. Наиболее типичные классы дифференциальных уравнений, к к-рым применяются методы О., следующие.

1) Стандартные системы в смысле Н. Н. Боголюбова

$$\frac{dx}{dt} = \mu X(x, t, \mu), \tag{1}$$

где x, X — векторы, t — время, μ — малый положительный параметр.

2) Многочастотные автономные 2π-периодические системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \omega(x) + \mu Y(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где x, y, X, Y — векторы, причем

$$X(x, y + (2\pi)) \equiv X(x, y),\ Y(x, y + (2\pi)) \equiv Y(x, y),$$

$\omega(x)$ — вектор частот.

3) Многочастотные неавтономные системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu X(x, y, t), \\ \frac{dy}{dt} &= \omega(x, y, t) + \mu Y(x, y, t). \end{aligned} \tag{3}$$

Вместо систем (1)—(3) рассматриваются «более простые» осредненные системы 1-го приближения:

$$\frac{dx}{dt} = \mu X_0(x) \tag{1'}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu X_1(x), \\ \frac{dy}{dt} &= \omega(x); \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu X_2(x, x_0, y_0, t), \\ \frac{dy}{dt} &= \omega(x, y, t), \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

где

$$X_0(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(x, t, 0)\, dt, \qquad (4)$$

$$X_1(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} X(x, y_1, \dots, y_n)\, dy_1 \dots dy_n, \qquad (5)$$

$$X_2(x, x_0, y_0, t_0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X(x, \varphi(x_0, y_0, t_0, t), t)\, dt. \qquad (6)$$

Формулы (4)—(6) выражают наиболее распространенные схемы О.

Формула (6) выражает схему О. «вдоль порождающего решения». В функции $X(x, y, t)$ вектор y сначала заменяется порождающим решением системы

$$dx/dt = 0,$$
$$dy/dt = \omega(x, y, t),$$

после чего вычисляется интегральное среднее (6).

Принципиальный вопрос, к-рый возникает при замене систем (1)—(3), состоит в том, чтобы построить є-оценки для норм

$$\| x(t, \mu) - x(t, \mu) \|, \quad \| y(t, \mu) - y(t, \mu) \|$$

на возможно большем (порядка $1/\mu$) промежутке времени, если

$$x(0, \mu) = x(0, \mu), \quad y(0, \mu) = y(0, \mu).$$

В этом состоит проблема обоснования методов О. Для систем (1) проблема обоснования методов О. была поставлена и решена Н. Н. Боголюбовым, результаты к-рого заложили основы современной алгоритмич. теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974; [2] Митропольский Ю. А., Метод усреднения в нелинейной механике, К., 1971; [3] Волосов В. М., Моргунов Б. И., Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, М., 1971; [4] Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., Конструктивные методы анализа нелинейных систем, М., 1979. *Е. А. Гребеников.*

ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН разложения функции — аддитивное слагаемое в формуле, задающей аппроксимацию функции с помощью другой, в каком-то смысле более простой. О. ч. равен разности между заданной функцией и функцией ее аппроксимирующей, тем самым его оценка является оценкой точности рассматриваемой аппроксимации.

К указанным формулам относятся формулы типа *Тейлора формулы*, интерполяционных формул, асимптотич. формул, формул для приближенного вычисления тех или иных величин и т. п. Так, в формуле Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

О. ч. (в виде Пеано) наз. слагаемое $O((x - x_0)^n)$. При асимптотич. разложении функции

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \to +\infty,$$

О. ч. является $O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$, $x \to \infty$. В частности, в *Стирлинга формуле*, дающей асимптотич. разложение гамма-функции Эйлера

$$\Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi s}\left(\frac{s}{e}\right)^s + O\left(e^{-s} s^{s-\frac{1}{2}}\right), \quad s \to +\infty,$$

О. ч. является $O(e^{-s} s^{s-1/2})$. *Л. Д. Кудрявцев.*

ОСТРОГРАДСКОГО МЕТОД — метод выделения алгебраич. части у неопределенных интегралов от рациональных функций. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с

действительными коэффициентами, причем степень $P(x)$ меньше степени $Q(x)$ и, следовательно, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная дробь,

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\ \dots\ (x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ \dots$$
$$\dots\ (x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \qquad (1)$$

a_i, p_j, q_j — действительные числа, $p_j^2/4-q_j<0$, α_i и β_i — натуральные числа, $i=1, 2, \dots, r$, $j=1, 2, \dots, s$,

$$\left.\begin{aligned} Q_1(x)&=(x-a_1)^{\alpha_1-1}\ \dots \\ &\dots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\ \dots \\ &\dots\ (x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}, \\ Q_2(x)&=(x-a_1)\ \dots\ (x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)\ \dots \\ &\dots\ (x^2+p_sx+q_s). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Тогда существуют такие действительные многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$, степени к-рых меньше соответственно чем степени n_1 и $n_2=r+2s$ многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, что

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx. \qquad (3)$$

Важным является то обстоятельство, что многочлены $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ можно найти без знания разложения (1) многочлена $Q(x)$ на неприводимые множители: многочлен $Q_1(x)$ является наибольшим общим делителем многочлена $Q(x)$ и его производной $Q'(x)$ и может быть получен с помощью алгоритма Евклида, а $Q_2(x)=Q(x)/Q_1(x)$. Коэффициенты многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ можно вычислить с помощью *неопределенных коэффициентов метода*. О. м. сводит, в частности, задачу интегрирования правильной рациональной дроби к задаче интегрирования правильной рациональной дроби, знаменатель к-рой имеет простые корни; интеграл от такой функции выражается через трансцендентные функции: логарифмы и арктангенсы. Следовательно, рациональная дробь $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ в формуле (3) является алгебраич. частью неопределенного интеграла $\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$.

О. м. впервые опубликован М. В. Остроградским в 1845 (см. [1]).

Лит.: [1] Остроградский М. В., «Bull. scient. Acad. Sci. St.-Pitersbourg», 1845, t. 4, № 10—11, p. 145—67; № 18—19, p. 286—300.

Л. Д. Кудрявцев.

ОСТРОГРАДСКОГО ФОРМУЛА — формула интегрального исчисления функций многих переменных, устанавливающая связь между n-кратным интегралом по области и $(n-1)$-кратным интегралом по ее границе. Пусть функции $X_i=X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вместе со своими частными производными $\partial X_i/\partial x_i$, $i=1, 2, \dots, n$, интегрируемы по Лебегу в ограниченной области $G\subset\mathbb{R}^n$, граница ∂G к-рой является объединением конечного множества кусочно гладких $(n-1)$-мерных гиперповерхностей, ориентированных с помощью внешней нормали ν. Тогда О. ф. имеет вид

$$\int\dots\int_G\sum_{i=1}^n\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\,dx_1\ \dots\ dx_n=$$
$$=\int\ \dots\ \int_{\partial G}\sum_{i=1}^n X_i\,dx_{i+1}\ \dots\ dx_n\,dx_1\ \dots\ dx_{i-1}. \qquad (1)$$

Если $\cos\alpha_i$, $i=1, 2, \dots, n$, — направляющие косинусы внешних нормалей ν гиперповерхностей, составляющих границу ∂G области G, то формула (1) может быть записана в виде

$$\int\ \dots\ \int_G\sum_{i=1}^n\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\,dv=\int\dots\int_{\partial G}\sum_{i=1}^n X_i\cos\alpha_i\,d\sigma, \qquad (2)$$

где $dv=dx_1 \dots dx_n$ — элемент n-мерного объема в R^n, а $d\sigma$ — элемент $(n-1)$-мерного объема на ∂G.

В терминах векторного поля $\boldsymbol{a}=(X_1, \dots, X_n)$ формулы (1) и (2) означают равенство интеграла от *дивергенции* этого поля по области G его потоку (см. *Поток векторного поля*) через границу области G:

$$\int \dots \int_G \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dv = \int \dots \int_{\partial G} \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}\, d\sigma.$$

Для гладких функций О. ф. была впервые получена в трехмерном случае М. В. Остроградским в 1828 (опубл. в 1831, см. [1]). На n-кратные интегралы в случае произвольного натурального n О. ф. была обобщена им в 1834 (опубл. в 1838, см. [2]). С помощью этой формулы М. В. Остроградский нашел выражение производной по параметру от n-кратного интеграла с переменными пределами и получил формулу для вариации n-кратного интеграла; при $n=3$ для одного частного случая О. ф. была получена К. Гауссом (C. Gauss) в 1813 , поэтому иногда О. ф. наз. также формулой Остроградского — Гаусса. Обобщением О. ф. является *Стокса формула* для многообразий с краем.

Лит.: [1] Остроградский М. В., «Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg. Sér. 6 — Sciences mathématiques, physiques et naturelles», 1831, t. 1, p. 117—22; [2] его же, там же, 1838, t. 1, p. 35—58. *Л. Д. Кудрявцев.*

ОСТРОГРАДСКОГО — ЛИУВИЛЛЯ ФОРМУЛА — см. *Лиувилля — Остроградского формула.*

ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЕ РЕШЕНИЕ — то же, что *колеблющееся решение* обыкновенного дифференциального уравнения.

ОСЦИЛЛЯТОР ГАРМОНИЧЕСКИЙ — система с одной степенью свободы, колебания к-рой описываются уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Фазовые траектории — окружности, период колебаний $T=2\pi/\omega$ не зависит от амплитуды. Потенциальная энергия О. г. квадратично зависит от x:

$$U = \omega^2 x^2/2.$$

Примеры О. г.: малые колебания маятника, колебания материальной точки, закрепленной на пружине с постоянной жесткостью, простейший электрический колебательный контур. Термины «гармонический осциллятор» и «линейный осциллятор» часто употребляются как синонимы.

Колебания квантовомеханического линейного осциллятора описываются уравнением Шрёдингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\psi = 0.$$

Здесь m — масса частицы, E — ее энергия, $\hbar$ — постоянная Планка, ω — частота. Квантовомеханический линейный осциллятор имеет дискретный спектр уровней энергии $E_n=(n+{}^1/_2)\hbar\omega$, $n=0, 1, 2$; соответствующие собственные функции выражаются через *Эрмита функции*.

Термин «осциллятор» употребляется по отношению к системам (механическим или физическим) с конечным числом степеней свободы, движение к-рых носит колебательный характер (напр., многомерный линейный осциллятор — колебания материальной точки, находящейся в потенциальном поле сил с потенциалом, к-рый является положительно определенной квадратичной формой от координат, нелинейный осциллятор Ван дер Поля, см. *Ван дер Поля уравнение*). По-видимому, не существует однозначного толкования термина «осциллятор» или даже «линейный осциллятор».

Лит.: [1] Мандельштам Л. И., Лекции по теории колебаний, М., 1972; [2] Ландау Л. Д., Лившиц Е. М., Квантовая механика. Нерелятивистская теория, 3 изд., М., 1974 (Теоретическая физика, т. 3). *М. В. Федорюк.*

ОСЦИЛЛЯЦИОННАЯ МАТРИЦА — *вполне неотрицательная матрица* A *такая, что существует целое положительное число* χ, *для к-рого* A^χ — *вполне положительная матрица; при этом матрица* A *наз.* в п о л н е н е о т р и ц а т е л ь н о й (в п о л н е п о л о ж и т е л ь н о й), *если все ее миноры любого порядка неотрицательны (положительны). Наименьший из показателей* χ *наз.* п о к а з а т е л е м О. м. Если A — О. м. *с показателем* χ, *то при любом целом* $k \geqslant \chi$ *матрица* A^k *вполне положительна; натуральная степень О. м. и матрица* $(A^+)^{-1}$ — *также О. м. Для того чтобы вполне неотрицательная матрица* $A = \|a_{ik}\|_1^n$ *была О. м., необходимо и достаточно, чтобы: 1)* A *была неособенной матрицей, 2) при* $i = 1, \ldots, n$ *было выполнено* $a_{i,\,i+1} > 0$, $a_{i+1,\,i} > 0$.

Основная теорема для О. м.: О. м. $A = \|a_{ik}\|_1^n$ всегда имеет n различных положительных собственных значений; у собственного вектора u^1, отвечающего наибольшему собственному значению λ_1, все координаты отличны от нуля и одного знака; у собственного вектора u^s, соответствующего s-му по величине собственному значению λ_s, имеется точно $s-1$ перемен знака; при любых действительных числах $c_g, c_{g+1}, \ldots, c_h$, $1 \leqslant g \leqslant h \leqslant n$, $\sum_{k=g}^{n} c_k^2 > 0$, в ряду координат вектора $u = \sum_{k=g}^{n} c_n u^k$ число перемен знака заключается между $g-1$ и $h-1$.

Лит.: [1] Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, 2 изд., М.— Л., 1950.

В. И. Ломоносов.

ОСЦИЛЛЯЦИОННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение, обладающее хотя бы одним осцилляционным (колеблющимся) решением. Имеются различные понятия осцилляционности решения. Наиболее распространены следующие: осцилляционность в точке (в качестве к-рой, как правило, берется $+\infty$) и осцилляционность в промежутке. Ненулевое решение уравнения

$$u^{(n)} = f(t,\ u,\ u',\ \ldots,\ u^{(n-1)}), \quad n \geqslant 2, \tag{1}$$

где $f(t, 0, \ldots, 0) = 0$, наз. о с ц и л л я ц и о н н ы м в т о ч к е $+\infty$ (в п р о м е ж у т к е I), если оно имеет последовательность нулей, сходящуюся к $+\infty$ (соответственно имеет в I не менее n нулей с учетом их кратности). Осцилляционность уравнения (1) в $+\infty$ или в промежутке I понимается в соответствующем смысле.

Среди осцилляционных в $+\infty$ уравнений выделяют уравнения, обладающие т. н. свойствами A или B, т. е. в определенном смысле сходные с одним из уравнений

$$u^{(n)} = -u \quad \text{или} \quad u^{(n)} = u.$$

При этом уравнение (1) о б л а д а е т с в о й с т в о м A, если каждое его решение, заданное в окрестности $+\infty$, при четном n является осцилляционным, а при нечетном n — либо осцилляционным, либо удовлетворяющим условию

$$\lim_{t \to +\infty} u^{(i-1)}(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Если же каждое решение уравнения (1), заданное в окрестности $+\infty$, при четном n является либо осцилляционным, либо удовлетворяющим условию (2) или

$$\lim_{t \to +\infty} |u^{(i-1)}(t)| = +\infty, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

а при нечетном n — либо осцилляционным, либо удовлетворяющим условию (3), то оно о б л а д а е т с в о й с т в о м B.

Линейное уравнение

$$u^{(n)} = a(t)\,u \tag{4}$$

с локально суммируемым коэффициентом $a : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ обладает свойством A (свойством B), если

$$a(t) \leqslant 0 \ [a(t) \geqslant 0] \text{ при } t \geqslant t_0,$$
$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{n-1-\varepsilon} |a(t)| \, dt = +\infty,$$

или

$$a(t) \leqslant \frac{\mu_n - \varepsilon}{t^n} \left[a(t) \geqslant \frac{\nu_n + \varepsilon}{t^n} \right]$$

при $t \geqslant t_0$, где $\varepsilon > 0$, а μ_n — наименьший (ν_n — наибольший) из локальных минимумов (максимумов) многочлена $x(x-1)\ldots(x-n+1)$ (см. [1] — [5]).

Уравнение типа Эмдена — Фаулера

$$u^{(n)} = a(t) |u|^{\lambda} \operatorname{sign} u \ (\lambda > 0, \ \lambda \neq 1) \qquad (5)$$

с локально суммируемым неположительным (неотрицательным) коэффициентом $a : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ обладает свойством A (свойством B) тогда и только тогда, когда

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{\mu} |a(t)| \, dt = +\infty,$$

где $\mu = \min\{n-1, (n-1)\lambda\}$ (см. [4], [6], [7]).

В ряде случаев вопрос об осцилляционности уравнения (1) можно свести к аналогичному вопросу для эталонных уравнений вида (4) и (5) с помощью теорем сравнения (см. [11]).

При изучении осцилляционных свойств уравнений с отклоняющимся аргументом проявляются нек-рые специфич. особенности. Напр., если n нечетно, $\Delta > 0$ и для больших t соблюдается неравенство

$$a(t) \leqslant a_0 < -n! \, \Delta^{-n},$$

то все ненулевые решения уравнения

$$u^{(n)}(t) = a(t) \, u(t - \Delta)$$

являются осцилляционными в $+\infty$ (см. [10], [11]). В то же время при неположительном a и нечетном n уравнение без запаздывания (4) всегда имеет неосцилляционное решение.

Понятия осцилляционности и неосцилляционности в промежутке изучаются в основном для линейных однородных уравнений. Они имеют фундаментальное значение для теории краевых задач (см. [12]).

Лит.: [1] Kneser A., «Math. Ann.», 1893, Bd 42, S. 409—435; [2] Mikusinski J. G., «Colloq. Math.», 1949, v. 2, p. 34—39; [3] Кондратьев В. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1961, т. 10, с. 419—36; [4] Кигурадзе И. Т., «Матем. сб.», 1964, т. 65, № 2, с. 172—87; [5] Чантурия Т. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1976, т. 40, № 5, с. 1128—42; [6] Liška I., Švec M., «Чехосл. матем. ж.», 1963, т. 13, с. 481—91; [7] Кигурадзе И. Т., «Arch. Math.», 1978, v. 14, № 1, p. 21—44; [8] Swanson C. A., Comparison and oscillation theory of linear differential equations, N. Y.— L., 1968; [9] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [10] Мышкис А. Д., Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, 2 изд., М., 1972; [11] Коплатадзе Р. Г., Чантурия Т. А., Об осцилляционных свойствах дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Тб., 1977; [12] Левин А. Ю., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 2, с. 43—96. *И. Т. Кигурадзе.*

ОСЦИЛЛЯЦИОННОЕ ЯДРО — функция $K(x, s)$, $a \leqslant x, s \leqslant b$, такая, что для любых точек $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, среди к-рых (при $n = 2$) имеется по крайней мере одна внутренняя, матрица $\|K(x_i, x_k)\|_1^n$ является *осцилляционной матрицей*. *В. И. Ломоносов.*

π-ОТДЕЛИМАЯ ГРУППА — группа, у к-рой среди различных простых делителей каждого индекса ее композиционного ряда содержится не более одного простого числа из π (π — нек-рое множество простых чисел). Класс π-О. г. содержит класс *π-разрешимых групп*. Для конечных π-О. г. установлена справедливость π-силовских свойств (см. [1]). Именно, для любого множества $\pi_1 \subseteq \pi$ конечная π-О. г. G содержит π_1-холловскую подгруппу и любые две π_1-холловские

подгруппы сопряжены в G. Любая π_1-подгруппа π-О. г. G содержится в нек-рой π_1-холловской подгруппе группы G (см. [2]).

Лит.: [1] Чунихин С. А., «Докл. АН СССР», 1948, т. 59, № 3, с. 443—45; [2] Hall P., «Proc. London Math. Soc.», 1956, v. 6, № 22, p. 286—304. *С. П. Струнков.*

ОТДЕЛИМОЕ ПОПОЛНЕНИЕ КОЛЬЦА — пополнение топологич. кольца $A/\bar{o}$, где A — топологич. кольцо, а $\bar{o}$ — замыкание в A нулевого идеала o. О. п. к. снова является топологич. кольцом и обозначается обычно $\hat{A}$. Всякий непрерывный гомоморфизм кольца A в полное отделимое кольцо B единственным образом продолжается до непрерывного гомоморфизма $\hat{A}\to B$.

В наиболее важном случае, когда топология кольца A линейна и задается фундаментальной системой идеалов $(\mathfrak{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, отделимое пополнение $\hat{A}$ канонически отождествляется с проективным пределом $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}(A/\mathfrak{A}_\lambda)$ дискретных колец $A/\mathfrak{A}_\lambda$. Аналогично устроено отделимое пополнение модулей. *В. И. Данилов.*

ОТДЕЛИМОСТИ АКСИОМА — условие, налагаемое на топологич. пространство и выражающее требование, чтобы те или иные дизъюнктные, т. е. не имеющие общих точек, множества были в нек-ром определенном смысле топологически отделены друг от друга. Простейшие, т. е. самые слабые из этих аксиом, касаются лишь одноточечных множеств, т. е. точек пространства. Это т. н. аксиомы T_0 (аксиома Колмогорова) и T_1. Дальнейшие суть T_2 (аксиома Хаусдорфа), T_3 (аксиома регулярности) и T_4 (аксиома нормальности), требующие, соответственно, чтобы всякие две различные точки (аксиома T_2), всякая точка и всякое не содержащее ее замкнутое множество (аксиома T_3), всякие два дизъюнктные замкнутые множества (аксиома T_4) были отделимы окрестностями, т. е. содержались в дизъюнктных открытых множествах данного пространства.

Топологич. пространство, удовлетворяющее аксиоме $T_i, i=2, 3, 4$, наз. T_i-пространством, T_2-пространство наз. хаусдорфовым, а T_3-пространство — регулярным; хаусдорфово T_4-пространство всегда регулярно и наз. нормальным.

Особое место занимает т. н. функциональная отделимость. Два множества A и B в данном топологич. пространстве X наз. функционально отделимыми в X, если существует такая определенная во всем пространстве действительная ограниченная непрерывная функция f, к-рая принимает во всех точках множества A одно значение a, а во всех точках множества B — нек-рое отличное от a значение b. При этом всегда можно предположить, что $a=0$, $b=1$, $0\leqslant f(x)\leqslant 1$ во всех точках $x\in X$.

Два функционально отделимых множества всегда отделимы и окрестностями, обратное утверждение верно не всегда. Однако имеет место лемма Урысона: в нормальном пространстве всякие два дизъюнктные замкнутые множества функционально отделимы. Пространство, в к-ром всякая точка функционально отделима от всякого не содержащего ее замкнутого множества, наз. вполне регулярным. Вполне регулярное T_2-пространство наз. тихоновским.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977. *В. И. Зайцев.*

ОТДЕЛИМОСТЬ МНОЖЕСТВ — одно из основных понятий дескриптивной теории множеств (введенное Н. Н. Лузиным [1]). Служит важным инструментом для исследования дескриптивной природы множеств. Говорят, что множества A и A' отделимы при помощи множеств, обладающих свойствами P, если существуют обладающие свойством P множества B и B' такие, что $A\subset B$, $A'\subset B'$, $B\cap B'=\phi$.

Основополагающие результаты по отделимости принадлежат Н. Н. Лузину и П. С. Новикову. В дальнейшем не только появились многочисленные варианты теорем отделимости, но и само понятие О. м. было обобщено и получило новые формы. Одно из таких обобщений связано со следующей теоремой Новикова [2]: пусть $\{A_n\}$ — последовательность *A-множеств* полного сепарабельного метрич. пространства такая, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$, тогда существует последовательность $\{B_n\}$ *борелевских множеств* такая, что $A_n \subset B_n$, $n \geqslant 1$, и $\bigcap_{n=1} B_n = \phi$. Эта теорема и различные ее варианты и обобщения получили название теорем кратной (или обобщенной) отделимости.

Классич. результаты относятся к множествам, лежащим в полных сепарабельных метрич. пространствах. В хаусдорфовом пространстве X: 1) два непересекающихся аналитич. множества отделимы борелевскими множествами, порожденными системой G открытых множеств этого пространства [3] (если X — *Урысона пространство*, то «G открытых» можно заменить на «F замкнутых»; в хаусдорфовом пространстве этого сделать, вообще говоря, нельзя [4]); 2) пусть $\mathcal{H}$ — нек-рая система A-множеств, порожденных системой F; если A есть A-множество, порожденное системой $\mathcal{H}$, и B — аналитич. множество, $A \cap B = \phi$, то существует борелевское множество C, порожденное системой $\mathcal{H}$, такое, что $A \subset C$, $C \cap B = \phi$ (см. [5]).

В отличие от этих (и других) вариантов первого принципа отделимости многие формулировки второго принципа отделимости не зависят от топологии пространства, в к-ром лежат рассматриваемые множества. Одна из них [6]: пусть система $\mathcal{H}$ подмножеств данного множества замкнута относительно операции перехода к дополнению и содержит ϕ; пусть $\{A_n\}$ — произвольная последовательность *CA-множеств*, порожденных системой $\mathcal{H}$; тогда существует последовательность $\{C_n\}$ попарно непересекающихся CA-множеств, порожденных системой $\mathcal{H}$, такая, что $C_n \subset A_n$, $n \geqslant 1$, и $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (более точно, это — одна из формулировок принципа редукции, см. [7]).

Лит.: [1] Лузин Н. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1958; [2] Новиков П. С., «Докл. АН СССР», 1934, т. 3 [т. 4], № 3, с. 145—148; [3] Frolik Z., «Czechosl. Math. J.», 1970, v. 20, p. 406—67; [4] Ostaszewski A. I., «Proc. London Math. Soc.», 1973, v. 27, № 4, p. 649—66; [5] Rogers C. A., «J. London Math. Soc.», 1971, v. 3, № 1, p. 103—08; [6] его же, там же, 1973, v. 6, № 3, p. 491—503; [7] Куратовский К., Топология, [пер. с англ.], т. 1, М., 1966.
А. Г. Елькин.

ОТКОСА ЛИНИЯ — кривая, касательная к к-рой образует постоянный угол с нек-рым неизменным направлением. Пример: винтовая линия. Отношение кручения О. л. к кривизне О. л. постоянно. Сферич. индикатриса касательных к О. л. является окружностью. Если $r = r(s)$ — естественная параметризация О. л., то $(r^{\mathrm{II}}, r^{\mathrm{III}}, r^{\mathrm{IV}}) = 0$ (см. [2]). Эволюты плоской кривой γ являются О. л., касательные к к-рым наклонены к плоскости кривой γ под постоянным углом (см. [1]). Для всякой О. л. существует неподвижно связанный с ее сопутствующим триэдром конус, вершина к-рого лежит на кривой, а образующие описывают развертывающиеся поверхности.

Лит.: [1] Бляшке В., Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна, пер. с нем., т. 1, М.— Л., 1935; [2] Forsyth A. R., Lectures on the differential geometry of curves and surfaces, Camb., 1912; [3] Appell P., «Arch. Math. Phys.», 1879, Bd 64, № 1, S. 19—23.
Е. В. Шикин.

ОТКРЫТОЕ МНОГООБРАЗИЕ — многообразие, не имеющее компактных компонент, т. е. не являющееся *замкнутым многообразием*.
М. И. Войцеховский.

ОТКРЫТОЕ МНОЖЕСТВО топологического пространства — элемент топологии этого пространства. Подробнее, пусть топология τ топологич.

пространства (X, τ) определяется как такая система τ подмножеств множества X, что: 1) $X \in \tau$, $\phi \in \tau$, 2) если $O_i \in \tau$, $i=1, 2$, то $O_1 \cap O_2 \in \tau$, 3) если $O_\alpha \in \tau$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, то $\bigcup \{O_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\} \in \tau$; тогда о т к р ы т ы м и м н о ж е с т в а м и в пространстве (X, τ) считаются элементы топологии τ и только они. *Б. А. Пасынков.*

ОТКРЫТОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение одного топологич. пространства в другое, при к-ром образ каждого открытого множества открыт.

Проектирование топологич. произведений на сомножители — О. о. Открытость отображения можно толковать как вид непрерывности обратного к нему многозначного отображения. Взаимно однозначное непрерывное О. о. на — *гомеоморфизм*. В общей топологии О. о. применяются при классификации пространств. Важен вопрос о поведении топологич. инвариантов при непрерывных О. о. Все пространства с первой аксиомой счетности и только они являются образами метрич. пространств при непрерывных О. о. Метризуемое пространство, являющееся образом полного метрич. пространства при непрерывном О. о., метризуемо полной метрикой. Если паракомпакт является образом полного метрич. пространства при непрерывном О. о., то он метризуем. Счетнократное непрерывное О. о. компактов не повышает размерности. Но трехмерный куб можно непрерывно и открыто отобразить на куб любой большей размерности. Каждый бикомпакт является образом некоего одномерного бикомпакта при непрерывном О. о. с нульмерными прообразами точек.

Самостоятельное значение имеют непрерывные О. о., при к-рых прообразы всех точек бикомпактны, — т. н. о т к р ы т ы е б и к о м п а к т н ы е о т о б р а ж е н и я. Пространства с равномерной базой и только они являются образами метрич. пространств при бикомпактных О. о. Важны замкнутые непрерывные О. о. Таковы все непрерывные О. о. бикомпактов в хаусдорфовы пространства. Непрерывные замкнутые О. о. сохраняют метризуемость. О. о. с дискретными прообразами точек играют существенную роль в теории функций одного комплексного переменного: таковы все голоморфные в области функции. Теорема об открытости голоморфных функций играет центральную роль при доказательстве принципа максимума модуля, при доказательстве фундаментальной теоремы о существовании корня у произвольного непостоянного многочлена над полем комплексных чисел.

Лит.: [1] К у р а т о в с к и й К., Топология, [пер. с англ.], т. 1—2, М., 1966—69; [2] К е л д ы ш Л. В., в кн.: Тр. 3 Всесоюзного математического съезда, т. 3, М., 1958, с. 368—72; [3] С т о и л о в С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1, М., 1962. *А. В. Архангельский.*

ОТКРЫТОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, т е о р е м а о б о т к р ы т о м о т о б р а ж е н и и: линейный непрерывный оператор A, отображающий банахово пространство X на все банахово пространство Y, является открытым отображением, т. е. $A(G)$ открыто в Y для любого G, открытого в X; доказана С. Банахом (S. Banach). В частности, непрерывный линейный оператор A, отображающий взаимно однозначно банахово пространство X на банахово пространство Y, является гомеоморфизмом, т. е. A^{-1} — также линейный непрерывный оператор (т е о р е м а Б а н а х а о г о м е о м о р ф и з м е). Условиям теоремы об О. о. удовлетворяет, например, всякий ненулевой линейный непрерывный функционал, определенный на вещественном (комплексном) банаховом пространстве X со значениями в $\mathbb{R}$ (в $\mathbb{C}$).

Теорема об О. о. допускает следующее обобщение: непрерывный линейный оператор, отображающий совершенно полное топологич. векторное пространство X на *бочечное пространство* Y, есть открытое отображение. К теореме об О. о. примыкает теорема о замкнутом

графике (см. *Замкнутый график*, теорема о замкнутом графике).

Лит.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Робертсон А.-П., Робертсон В.-Дж., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967.

В. И. Соболев.

ОТКРЫТОЕ ЯДРО — множество всех точек x подмножества A топологич. пространства X, для к-рых существует такое открытое в X множество U_x, что $x \in U_x \subset A$. О. я. множества A обозначается обычно $\operatorname{Int} A$ и представляет собой максимальное открытое в X множество, содержащееся в A. Имеет место равенство $\operatorname{Int} A = X - [X - A]$, где $[\ ]$ обозначает замыкание в пространстве X. О. я. множества топологич. пространства X есть открытое регулярное, или *каноническое множество*. Пространства, в к-рых открытые канонич. множества образуют *базу* топологии, наз. полурегулярными. Всякое регулярное пространство полурегулярно. Иногда О. я. наз. внутренностью множества.

В. И. Пономарев.

ОТКРЫТО-ЗАМКНУТОЕ МНОЖЕСТВО — подмножество топологич. пространства, одновременно открытое и замкнутое в нем. Топологич. пространство X несвязно тогда и только тогда, когда в нем имеется отличное от X и от ϕ О.-з. м. Если семейство всех О.-з. м. топологич. пространства является базой его топологии, то это пространство наз. индуктивно нульмерным. Всякая булева алгебра изоморфна булевой алгебре всех О.-з. м. подходящего индуктивно нульмерного бикомпакта. Особый класс нульмерных бикомпактов образуют т. н. экстремально несвязные бикомпакты, характеризующиеся тем, что в них замыкание любого открытого множества также открыто (и замкнуто). Всякая полная булева алгебра изоморфна булевой алгебре всех О.-з. м. подходящего экстремально несвязного бикомпакта.

В. И. Пономарев.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА — гомологическая алгебра, ассоциированная с парой абелевых категорий $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ и фиксированным функтором $\Delta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{M}$. Функтор Δ предполагается аддитивным, точным и полным. Короткая точная последовательность объектов категории $\mathfrak{A}$

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

наз. допустимой, если точная последовательность

$$0 \longrightarrow \Delta A \longrightarrow \Delta B \longrightarrow \Delta C \longrightarrow 0$$

расщепляется в категории $\mathfrak{M}$. Посредством класса $\mathcal{E}$ допустимых точных последовательностей определяется класс $\mathcal{E}$-проективных (*соответственно* $\mathcal{E}$-инъективных) объектов как класс таких объектов P (соответственно Q), для к-рых функтор $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}}(P, —)$ (соответственно $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{A}}(—, Q)$) точен на допустимых коротких точных последовательностях.

Любой проективный объект P категории $\mathfrak{A}$ является $\mathcal{E}$-проективным, это не означает, однако, что в категории $\mathfrak{A}$ достаточно много относительно проективных объектов (т. е. что для любого объекта A из $\mathfrak{A}$ существует допустимый эпиморфизм $P \to A$ нек-рого $\mathcal{E}$-проективного объекта категории $\mathfrak{A}$). Если в категории $\mathfrak{A}$ достаточно много $\mathcal{E}$-проективных или $\mathcal{E}$-инъективных объектов, то обычные конструкции гомологич. алгебры позволяют строить в этой категории производные функторы, наз. относительными производными функторами.

Примеры. Пусть $\mathfrak{A}$ — категория R-модулей над ассоциативным кольцом R с единицей, $\mathfrak{M}$ — категория множеств, $\Delta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{M}$ — функтор, «забывающий» структуру модуля. В этом случае все точные последовательности допустимы, и в результате получается «абсолютная» (т. е. обычная) гомологич. алгебра.

Если G — группа, то каждый G-модуль является, в частности, абелевой группой. Если R является алгеброй над коммутативным кольцом k, то каждый R-модуль является k-модулем. Если R и S — кольца и $R \supset S$, то каждый R-модуль является S-модулем. Во всех этих случаях имеется функтор из одной абелевой категории в другую, определяющий относительные производные функторы.

Лит.: [1] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [2] Eilenberg S., Moore J. C., Foundations of relative homological algebra, Providence, 1965.

В. Е. Говоров, А. В. Михалев.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ МЕТРИКА — ограничение метрики ρ на подмножество A метрич. пространства X, т. е. ограничение отображения ρ квадрата $X \times X$ на квадрат $A \times A \subset X \times X$. Это понятие позволяет рассматривать как метрич. пространство любое его подмножество.

Б. А. Пасынков.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА КОРНЕЙ связной редуктивной алгебраической группы G, определенной над полем k,— система $\Phi_k(S, G)$ ненулевых весов присоединенного представления максимального k-расщепимого тора S группы G в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ этой группы. Сами веса наз. корнями G относительно S. О. с. к. $\Phi_k(S, G)$, рассматриваемая как подмножество своей линейной оболочки L в пространстве $X(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, где $X(S)$ — группа рациональных характеров тора S, является *корневой системой*. Пусть $N(S)$ — нормализатор, а $Z(S)$ — централизатор S в G. Тогда $Z(S)$ является связной компонентой единицы группы $N(S)$; конечная группа $W_k(S, G) = N(S)/Z(S)$ наз. группой Вейля группы G над k, или относительной группой Вейля (о. г. В.). Присоединенное представление $N(S)$ в $\mathfrak{g}$ определяет линейное представление $W_k(S, G)$ в L. Это представление является точным и его образ есть *Вейля группа* системы корней $\Phi_k(S, G)$, что позволяет отождествить эти две группы. Ввиду сопряженности над k максимальных k-расщепимых торов в G О. с. к. $\Phi_k(S, G)$ и о. г. В. $W_k(S, G)$ не зависят, с точностью до изоморфизма, от выбора тора S и часто обозначаются просто $\Phi_k(G)$ и $W_k(G)$. В случае, когда G расщепима над k, О. с. к. и о. г. В. совпадают соответственно с обычной (абсолютной) системой корней и группой Вейля группы G. Пусть g_α — весовое относительно S подпространство в $\mathfrak{g}$, отвечающее корню $\alpha \in \Phi_k(S, G)$. Если G расщепима над k, то $\dim g_\alpha = 1$ для любого α и $\Phi_k(G)$ — приведенная система корней; в общем случае это не так: $\Phi_k(G)$ может быть неприведенной, а $\dim g_\alpha$ может быть больше 1. О. с. к. $\Phi_k(G)$ неприводима, если G проста над k.

О. с. к. играет важную роль в описании структуры и в классификации полупростых алгебраич. групп над k. Пусть G — полупроста и T — максимальный тор, определенный над k и содержащий S. Пусть $X(S)$ и $X(T)$ — группы рациональных характеров торов S и T с фиксированными согласованными отношениями порядка, Δ — соответствующая система простых корней группы G относительно T и Δ_0 — подсистема в Δ, состоящая из характеров, тривиальных на S. Пусть также Δ_k — система простых корней в О. с. к. $\Phi_k(S, G)$, определенная выбранным в $X(S)$ отношением порядка; она состоит из сужений на S характеров системы Δ. Группа Галуа $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ естественно действует на Δ, и набор данных $\{\Delta, \Delta_0$, действие Γ на $\Delta\}$ наз. k-индексом полупростой группы G. Роль k-индекса объясняется следующей теоремой: всякая полупростая группа над k однозначно с точностью до k-изоморфизма определяется своим классом относительно изоморфизма над k_s, своим k-индексом и своим *анизотропным ядром*. О. с. к. $\Phi_k(G)$ полностью определяется системой Δ_k и набором таких натуральных чисел n_α, $\alpha \in \Delta_k$ (равных 1 или 2), что $n_\alpha \alpha \in \Phi_k(G)$,

но $(n_\alpha+1)\alpha \notin \Phi_k(G)$. В свою очередь, Δ_k и n_α, $\alpha \in \Delta_k$, могут быть восстановлены по k-индексу. В частности, два элемента из $\Delta \setminus \Delta_0$ имеют одно и то же ограничение на S тогда и только тогда, когда они лежат в одной орбите группы Γ; это определяет биекцию между Δ_k и множеством орбит группы Γ в $\Delta \setminus \Delta_0$.

Если $\gamma \in \Delta_k$, $O_\gamma \subset \Delta \setminus \Delta_0$ — соответствующая орбита и $\Delta(\gamma)$ — любая связная компонента в $\Delta_0 \cup O_\gamma$, не все вершины к-рой лежат в Δ_0, то n_γ есть сумма коэффициентов при корнях $\alpha \in \Delta(\gamma) \cap O_\gamma$ в разложении старшего корня системы $\Delta(\gamma)$ по простым корням.

Если $k=\mathbb{R}$, $\overline{k}=\mathbb{C}$, то это О. с. к. естественно отождествляется с системой корней, а о. г. В.— с группой Вейля соответствующего симметрич. пространства.

Лит.: [1] Титс Ж., «Математика», 1968, т. 12, № 2, с. 110—143; [2] Борель А., Титс Ж., там же, 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; № 2, с. 3—31; [3] Tits J., «Proc. of Symposia in pure math.», 1966, v. 9, p. 33—62 (AMS). *В. Л. Попов.*

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ подмножества A топологич. пространства (X, τ) — система пересечений всевозможных открытых подмножеств пространства (X, τ) (т. е. элементов топологии τ) с множеством A. Часто О. т. наз. индуцированной топологией.

Подмножество топологич. пространства (X, τ), снабженное О. т., наз. подпространством пространства (X, τ). Подпространство T_i-пространства является T_i-пространством, $i=0, 1, 2, 3, 3^1/_2$. Подпространство метризуемого пространства метризуемо. Любое тихоновское пространство веса $\leqslant \theta$ гомеоморфно подпространству бикомпакта веса $\leqslant \theta$ (теорема Тихонова). *Б. А. Пасынков.*

ОТНОСИТЕЛЬНО БИКОМПАКТНОЕ МНОЖЕСТВО — подмножество M топологич. пространства X такое, что его замыкание $\overline{M}$ бикомпактно. *М. И. Войцеховский.*

ОТНОСИТЕЛЬНО ОТКРЫТОЕ (ЗАМКНУТОЕ) МНОЖЕСТВО, множество, открытое (замкнутое) относительно нек-рого множества E,— множество M топологич. пространства X такое, что

$$M = E \setminus (E \setminus M) \quad (M = E \cap \overline{M})$$

(черта сверху означает операцию замыкания). Для того чтобы нек-рое множество было открытым (замкнутым) относительно E, необходимо и достаточно, чтобы оно было пересечением M с нек-рым открытым (замкнутым) множеством. *М. И. Войцеховский.*

ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ПРИНЦИП — один из наиболее фундаментальных физич. законов, согласно к-рому любой процесс протекает одинаково в изолированной материальной системе, находящейся в состоянии покоя, и в такой же системе, находящейся в состоянии равномерного прямолинейного движения. Состояние движения или покоя определяется здесь по отношению к произвольно выбранной *инерциальной системе отсчета*; физически эти состояния полностью равноправны. Эквивалентная формулировка О. п.: законы физики имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета. О. п. вместе с постулатом о независимости скорости света в вакууме от движения источника света легли в основу специальной (частной) *относительности теории.* *БСЭ-3.*

ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ТЕОРИЯ — физическая теория, рассматривающая пространственно-временные свойства физич. процессов. Эти свойства являются общими для всех физич. процессов, поэтому их часто наз. просто свойствами *пространства-времени*. Свойства пространства-времени зависят от полей тяготения, действующих в данной его области. Свойства пространства-времени при наличии полей тяготения исследуются в общей О. т., наз. также теорией тяготения. В частной (специальной)

О. т. рассматриваются свойства пространства-времени в том приближении, в к-ром эффектами, связанными с полями тяготения, можно пренебречь. Ниже излагается частная О. т., об общей О. т. см. *Тяготения теория*. О. т. часто наз. также теорией относительности Эйнштейна по имени ее создателя А. Эйнштейна (см. [1], [2]).

Основные черты теории относительности. Специфические (релятивистские) эффекты, описываемые О. т. и отличающие ее от предшествующих физич. теорий, проявляются при скоростях движения тел, близких к скорости света в вакууме $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек*. При таких скоростях, наз. релятивистскими, зависимость энергии E тела массы m от его скорости v описывается формулой

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (1)$$

При скоростях v, много меньших c, формула (1) приобретает вид

$$E = mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \qquad (2)$$

Второй член справа в формуле (2) совпадает с формулой для кинетич. энергии в классич. механике, а первый член показывает, что покоящееся тело обладает энергией $E = mc^2$, наз. энергией покоя. В ядерных реакциях и процессах превращения элементарных частиц энергия покоя может переходить в кинетич. энергию частиц. Из формулы (1) вытекает, что энергия тел с ненулевой массой стремится к бесконечности при $v \to c$. Если $m \neq 0$, то скорость тела всегда меньше c. Частицы с $m = 0$ (фотоны и нейтрино) всегда движутся со скоростью света. Иногда говорят, что при релятивистских скоростях масса тела начинает зависеть от его скорости, и величину

$$m_{\text{дв}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

наз. массой движения тела, а m — его массой покоя. Из формулы (1) следует, что

$$E = m_{\text{дв}} c^2.$$

Скорость света в вакууме в О. т. является предельной скоростью, т. е. передача любых взаимодействий и сигналов из одной точки в другую происходит со скоростью, не превышающей скорости света.

Существование предельной скорости несовместимо с представлениями классич. механики и вызывает необходимость глубокой перестройки классич. пространственно-временных представлений.

Принцип относительности Эйнштейна и другие принципы инвариантности. В основе О. т. лежит принцип относительности, согласно к-рому любой физич. процесс протекает одинаково (при одинаковых начальных условиях) в изолированной материальной системе, находящейся в состоянии покоя по отношению к нек-рой произвольно выбранной инерциальной системе отсчета, и в такой же системе, находящейся в состоянии равномерного и прямолинейного движения относительно этой же инерциальной системы отсчета.

Справедливость принципа относительности означает, что различие между состоянием покоя и равномерного и прямолинейного движения не имеет физич. смысла. Говорят, что движущаяся система отсчета получается из системы отсчета, условно считающейся покоящейся, с помощью преобразования движения. Из принципа относительности вытекает, что физич. законы инвариантны относительно преобразований движения и име-

ют один и тот же вид во всех инерциальных системах отсчета.

Кроме принципа относительности, известны еще три типа преобразований, к-рые оставляют неизменным ход протекания физич. процессов: перенос (сдвиг) в пространстве, вращение в пространстве, перенос (сдвиг) во времени. Симметрии физич. законов относительно этих преобразований выполняются точно только в изолированных системах или им отвечают соответственно законы сохранения импульса, момента импульса и энергии.

Инерциальные системы отсчета и преобразования Лоренца. Инерциальные системы отсчета образуют в О. т. выделенный класс систем отсчета, в к-рых эффекты О. т. имеют наиболее простое описание.

Первичными понятиями О. т. являются понятия точечного события и светового сигнала. В данной инерциальной системе отсчета точечное событие можно характеризовать тремя пространственными координатами x, y, z в нек-рой декартовой системе координат и временной координатой t. Системы координат x, y, z, t в разных инерциальных системах отсчета связаны *Лоренца преобразованиями*. Из принципа относительности, условий симметрии и требования того, чтобы указанные преобразования образовывали группу, можно получить вид преобразований Лоренца. Если инерциальная система отсчета L' движется относительно инерциальной системы отсчета L со скоростью V так, что оси x и x' совмещены и направлены по V, оси y и y' и z и z' соответственно параллельны, начала координат в L и L' совпадают в момент $t=0$ и часы в системе L' в начале координат показывают при $t=0$ время $t'=0$, то преобразования Лоренца имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y'=y, \quad z'=z, \\ t' &= \frac{t-\frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Для получения всех преобразований Лоренца к преобразованиям (3) нужно добавить пространственные вращения вокруг начала координат. Преобразования Лоренца образуют группу, наз. г р у п п о й Л о р е н ц а. Свойство инвариантности физич. законов при преобразованиях Лоренца наз. л о р е н ц - и н в а р и а н т н о с т ь ю или релятивистской инвариантностью.

Из преобразований Лоренца вытекает релятивистский закон сложения скоростей. Если частица движется в инерциальной системе отсчета L со скоростью v вдоль оси x, то скорость этой частицы в системе L' равна

$$v' = \frac{v-V}{1-\frac{vV}{c^2}}. \qquad (4)$$

Формула (4) показывает, что скорость света не зависит от скорости (4) движения источника света.

Из преобразований Лоренца вытекают также основные эффекты О. т.: относительность одновременности, замедление времени и сокращение продольных размеров тел. Так, события A и B, одновременные в системе L ($t_A=t_B$) и происходящие в разных точках (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), оказываются неодновременными в L':

$$t'_A - t'_B = (x_2-x_1)\frac{V}{c^2}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \neq 0.$$

Далее, когда часы, покоящиеся в системе L в точке

(0, 0, 0), показывают время t, то время t' по часам в L', пространственно совпадающим с часами в L в этот момент, равно

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Таким образом, с точки зрения наблюдателя в L' часы в L отстают. Однако в силу принципа относительности с точки зрения наблюдателя в L часы в L' также отстают. Размеры тел, покоящихся в L (т. н. собственная длина), при измерении в L' оказываются уменьшенными в $\sqrt{1-V^2/c^2}$ раз в направлении скорости V сравнительно с размерами в L:

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

При малых скоростях v преобразования Лоренца (3) с точностью до величин, стремящихся к нулю при $V/c \to 0$, совпадают с преобразованиями Галилея:

$$x' = x - Vt,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t. \qquad (5)$$

Эти преобразования соответствуют повседневному опыту, в к-ром не встречаются движения тел с релятивистскими скоростями. В частности, преобразования Галилея сохраняют пространственные размеры тел и длительности физич. процессов. Преобразования (5) и различные их комбинации с пространственными поворотами образуют т. н. группу Галилея. Важным отличием преобразований Лоренца от преобразований Галилея является то, что в формулу преобразования временной координаты t входит пространственная координата x. В связи с этим в О. т. сформировалось представление, согласно к-рому пространственные и временны́е свойства физич. процессов нельзя рассматривать изолированно друг от друга. Это привело к возникновению понятия пространства-времени, т. е. объекта, геометрич. свойства к-рого определяют пространственные и временны́е свойства физич. процессов. В классич. механике Ньютона пространственные свойства физич. процессов определяются геометрич. свойствами трехмерного евклидова пространства, а временна́я переменная входит в уравнения как параметр. В частной О. т. адекватной моделью пространства-времени является четырехмерное *псевдоевклидово пространство* $E^4_{(1,3)}$, наз. пространством Минковского. Формирование понятия пространства-времени открыло путь к геометризации аппарата О. т., значительно развитой при разработке общей О. т.

Математический аппарат теории относительности и геометрия пространства Минковского. При аксиоматич. описании О. т. аксиомы, фиксирующие свойства первичных понятий О. т. (точечного события и светового сигнала), удается вычленить из приведенного выше неформального описания основных положений О. т. Эта система аксиом дополняется естественными с физич. точки зрения аксиомами, гарантирующими существование достаточно большого числа событий и световых сигналов, а также нек-рыми аксиомами непрерывности на множестве световых сигналов и точечных событий. Иными словами, эти аксиомы гарантируют, что каждый набор чисел (t, x, y, z) определяет точечное событие. Получающаяся при таком расширении система аксиом О. т. оказывается эквивалентной системе аксиом пространства Минковского. Таким образом, пространство Минковского может служить моделью пространства-времени частной О. т. Точечное событие интерпретируется в рассматриваемой модели пространства-времени как точка в пространстве Минковского, в связи

с чем точки последнего принято наз. мировыми точками. Каждая прямоугольная система координат (t, x, y, z) в пространстве Минковского определяет нек-рую инерциальную систему отсчета, в связи с чем сами прямоугольные системы координат в О. т. принято наз. галилеевыми. Плоскость $t=\text{const}$ пространства Минковского наз. пространственным сечением, соответствующим данной системе координат. Линейный элемент пространства Минковского в прямоугольной системе координат (t, x, y, z) может быть представлен в виде

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Величину ds наз. элементом интервала, а величину

$$s^2 = c^2\,(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

— квадратом интервала. (В качестве модели пространства-времени частной О. т. можно использовать и псевдоевклидово пространство $E^4_{(3,\,1)}$ с линейным элементом

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2.)$$

Преобразования, образующие общую группу Лоренца, в рассматриваемой модели являются преобразованиями, связывающими две галилеевы системы координат в пространстве Минковского. Эти преобразования сохраняют интервал и являются аналогом ортогональных преобразований в евклидовой геометрии. В частности, преобразованиям Лоренца можно придать вид

$$x' = \operatorname{ch}\psi + ct\,\operatorname{sh}\psi,$$
$$ct' = x'\,\operatorname{sh}\psi + ct\,\operatorname{ch}\psi,$$

где Ψ — угол поворота в плоскости (ct, x), имеющей индефинитную метрику

$$\psi = \operatorname{arc\,sh}\frac{V/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

По знаку квадрата интервала происходит классификация векторов в пространстве Минковского. Векторы, для к-рых $s^2>0$, наз. времениподобными; векторы, для к-рых $s^2<0$,— пространственноподобными; векторы, для к-рых $s^2=0$,— светоподобными. Если в пространстве Минковского выделена нек-рая точка (напр., начало координат), то его можно разбить на три области. Две из них, составленные из точек, соединенных с точкой 0 времениподобными векторами, наз. областями абсолютного будущего и абсолютного прошлого. Эти названия связаны с тем, что при любом преобразовании из полной группы Лоренца, связывающей данную галилееву систему координат с другой галилеевой системой координат (t', x', y', z'), событие A, лежащее в области абсолютного будущего, по-прежнему будет иметь большее значение временной координаты t', чем событие 0. Область, точки A к-рой соединяются с 0 пространственноподобными векторами, наз. областью абсолютного удаления. Эта область характеризуется тем, что не существует такого преобразования Лоренца, в результате к-рого точки A и 0 получают одинаковые пространственные координаты. Точки, лежащие на границе этих областей, образуют световой конус точки 0. Точки этого конуса соединены с 0 нулевыми векторами. Пространственно-временной истории всякой точечной частицы (материальной точки) соответствует нек-рая линия в пространстве Минковского, наз. мировой линией этой частицы. Точки этой линии определяют коор-

динаты частицы во все моменты времени. То, что скорости всех частиц не превосходят c, означает, что (в естественном предположении гладкости) все касательные векторы мировой линии являются либо времениподобными, либо изотропными. Первые из них соответствуют частицам с ненулевой, а вторые — с нулевой массой покоя. Натуральный параметр на мировой линии наз. собственным временем частицы. Физич. смысл собственного времени состоит в том, что оно является временем, отсчитываемым часами, к-рые движутся вместе с частицей.

Выражением закона инерции в рассматриваемой модели О. т. является то, что свободные, т. е. не подверженные действию сил, частицы имеют в качестве своих мировых линий времениподобные и изотропные прямые (т. е. геодезические) пространства Минковского. В частности, частицы с нулевой массой покоя имеют мировые линии, лежащие на нек-ром световом конусе, с чем и связано название последнего. В общей О. т. выражением закона инерции является т. н. *геодезических гипотеза*, согласно к-рой частица, не испытывающая действия иных сил, кроме гравитационных, движется по геодезической соответствующего пространства-времени. Световой сигнал, соединяющий данные точечные события, интерпретируется в рассматриваемой модели как отрезок изотропной геодезической, соединяющей соответствующие мировые точки.

Времениподобная геодезическая в пространстве Минковского, соединяющая данные мировые точки A и B, является кривой наибольшей длины среди всех времениподобных мировых линий, соединяющих эти точки. Это вытекает из обратного неравенства треугольника, согласно к-рому времениподобная наклонная короче своей времениподобной геодезической. С точки зрения О. т. максимальность длины времениподобной геодезической означает, что собственное время частицы, свободно движущейся от мировой точки A к мировой точке B, больше, чем собственное время любой другой частицы, мировая линия к-рой соединяет эти мировые точки. Это обстоятельство принято называть парадоксом близнецов.

При построении тензорных величин, выражающих физич. величины, как правило, в один тензорный объект в пространстве Минковского объединяются несколько соответствующих тензорных объектов классич. физики. Напр., вектор энергии-импульса составляется следующим образом: первой его компонентой в галилеевой системе координат является величина $\mathcal{E}/c$, а остальными тремя — компоненты вектора импульса (обозначение этой операции $(\mathcal{E}/c, p)$). Для того чтобы отличить тензоры пространства Минковского от тензоров на его пространственных сечениях, к-рые рассматривались в классич. физике, принято говорить о четырехмерных, или 4-тензорах. Примеры нек-рых физич. величин, являющихся 4-тензорами: 4-вектор

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad \frac{v}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \quad i = 0, \ 1, \ 2, \ 3,$$

наз. 4-скоростью. Этот вектор является касательным единичным вектором к траектории мировой частицы. Вектор

$$g^i = \left(\frac{\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad \frac{\boldsymbol{F}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right),$$

где $\boldsymbol{F}$ — сила, является вектором 4-силы. Основные уравнения релятивистской динамики с использованием этих векторов могут быть переписаны в виде

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} \equiv mc\frac{du^i}{ds}.$$

Роль теории относительности в современной физике. О. т. с высокой точностью подтверждена обширной совокупностью фактов и лежит в основе всех современных теорий, рассматривающих явления при релятивистских скоростях. Уже последовательная теория электромагнетизма — классич. электродинамика — возможна только на основе О. т. (исторически анализ основ классич. электродинамики, и в частности оптики движущихся тел, привел к построению О. т.). О. т. лежит в основе квантовой электродинамики, теорий сильного и слабого взаимодействия элементарных частиц. Квантовые законы движения и взаимопревращения элементарных частиц рассматриваются в квантовой теории поля.

Лит.: [1] Эйнштейн А., Собр. научных трудов, т. 1—4, М., 1965—67; [2] Einstein A., «Ann. Phys.», 1905, Bd 17, S. 891—921; [3] Minkowski H., «Phys. Z.», 1909, Bd 10, S. 104—11; [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973 (Теоретич. физика, т. 2); [5] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М., Фейнмановские лекции по физике, пер. с англ., в. 2, М., 1965; [6] Паули В., Теория относительности, пер. с нем., М.— Л., 1947; [7] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961; [8] Пенроуз Р., Структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1972; [9] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [10] Александров А. Д., «Вопросы философии», 1953, № 5, с. 225—45. *Д. Д. Соколов.*

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ГОМОЛОГИИ — группы гомологий $H_p^c(X, A; G)$ пары пространств (X, A). Они определяются факторкомплексом комплекса цепей X с коэффициентами в группе G по подкомплексу, состоящему из всех цепей с носителями в A. Эти группы обычно не изменяются при «вырезании», т. е. при замене пары (X, A) парой $(X \setminus U, A \setminus U)$, где U — содержащееся в A открытое подмножество X. Относительные когомологии $H^p(X, A; G)$ определяются подкомплексом комплекса цепей X, состоящим из всех коцепей с носителями в $X \setminus A$, в то время как факторкомплекс обычно определяет когомологии подмножества $A \subset X$.

Лит.: [1] Скляренко Е. Г., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 6, с. 90—118. *Е. Г. Скляренко.*

ОТНОШЕНИЕ — подмножество конечной декартовой степени $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ данного множества A, т. е. подмножество систем $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из n элементов множества A.

Подмножество $R \subseteq A^n$ наз. n-местным, или n-арным, отношением в множестве A. Число n наз. рангом, или типом, отношения R. Подмножество $R \subseteq A^n$ наз. также n-местным, или n-арным, предикатом на множестве A. Запись $R(a_1, \ldots, a_n)$ означает, что $(a_1, \ldots, a_n) \in R$.

Одноместные О. наз. свойствами. Двуместные О. наз. бинарными, трехместные О.— тернарными и т. д.

Множество A^n и пустое подмножество ϕ в A^n наз. соответственно универсальным отношением и нуль-отношением ранга n в множестве A. Диагональ множества A^n, т. е. множество

$$\Delta = \{(a, a, \ldots, a) \mid a \in A\},$$

наз. отношением равенства в множестве A.

Если R и S суть n-местные О. в множестве A, то n-местными О. в A будут также следующие подмножества в A^n:

$$R \cup S,\ R \cap S,\ R' = A^n \setminus R \text{ и } R \setminus S.$$

Множество всех n-арных О. в множестве A относительно операций $\cup$, $\cap'$ является *булевой алгеброй*. $(n+1)$-местное отношение F в A наз. функциональным, если для любых элементов $a_1, \ldots, a_n, a, b$ из A из того, что $(a_1, \ldots, a_n, a) \in F$ и $(a_1, \ldots, a_n, b) \in F$, следует $a = b$.

См. также *Бинарное отношение*, *Соответствие*.

Д. М. Смирнов.

ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ КРИТЕРИЙ — статистический критерий, статистика к-рого есть отношение наибольших значений функций правдоподобия, отвечающих проверяемой и множеству всех допустимых гипотез. Пусть случайная величина X принимает значения в выборочном пространстве $\{\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \mathsf{P}_\theta\}$, $\theta \in \Theta$, а семейство мер $\mathcal{P} = \{\mathsf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ абсолютно непрерывно относительно нек-рой σ-конечной меры μ и $p_\theta(x) = d\mathsf{P}_\theta(x)/d\mu(x)$. Пусть по реализации случайной величины X необходимо проверить сложную гипотезу H_0, согласно к-рой неизвестное истинное значение θ_0 параметра θ принадлежит множеству $\Theta_0 \subset \Theta$, против сложной альтернативы $H_1 : \theta_0 \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$. Согласно О. п. к. с уровнем значимости α, $0 < \alpha < 1/2$, гипотезу H_0 следует отвергнуть, если в результате эксперимента окажется, что $\lambda(x) \leqslant \lambda_\alpha$, где $\lambda(X)$ — статистика О. п. к., определяемая следующим образом:

$$\lambda(X) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} p_\theta(X)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta} p_\theta(X)},$$

а λ_α — критич. уровень, к-рый находится из того условия, что размер критерия

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathsf{P}_\theta \{\lambda(X) \leqslant \lambda_\alpha\} =$$

$$= \sup_{\theta \in \Theta_0} \int_{\{x : \lambda(x) \leqslant \lambda_\alpha\}} p_\theta(x)\, \mu(dx)$$

равен α. В частности, если множество Θ содержит лишь две точки $\Theta = \{\mathsf{P}_0, \mathsf{P}_1\}$, а конкурирующим гипотезам, к-рые в данном случае являются простыми, отвечают, напр., плотности $p_0(\cdot)$ и $p_1(\cdot)$ соответственно, то в этом случае статистика О. п. к. выражается формулой

$$\lambda(X) = \frac{p_0(X)}{\max\{p_0(X), p_1(X)\}} = \min\left\{1, \frac{p_0(X)}{p_1(X)}\right\}.$$

Согласно О. п. к. с уровнем значимости α, гипотезу H_0 следует отвергнуть, если $p_0(X)/p_1(X) \leqslant \lambda_\alpha$, где число λ_α, $0 < \lambda_\alpha < 1$, определяется из условия

$$\mathsf{P}\{\lambda(X) < \lambda_\alpha \mid H_0\} =$$

$$= \int_{\{x :\, p_0(x) \leqslant p_1(x)\lambda_\alpha\}} p_0(x)\, \mu(dx) = \alpha.$$

О. п. к. предложен Ю. Нейманом и Э. Пирсоном (J. Neyman, E. Pearson, 1928). Ими же было доказано (1933), что среди всех критериев уровня, предназначенных для проверки простых гипотез, О. п. к. является наиболее мощным (см. *Неймана — Пирсона лемма*).

Лит.: [1] Neyman J., Pearson E. S., Joint statistical papers, Camb., 1967; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979. *М. С. Никулин.*

ОТОБРАЖЕНИЕ однозначное — закон, по к-рому каждому элементу нек-рого заданного множества X ставится в соответствие вполне определенный элемент другого заданного множества Y (при этом X может совпадать с Y). Такое соотношение между элементами $x \in X$ и $y \in Y$ записывается в виде $y = f(x)$, $y = fx$ или $y = y(x)$. Пишут также $f : X \to Y$ и говорят, что отображение f действует из X в Y. Множество X наз. областью определения отображения, а множество $\{y = f(x),\ x \in X\} \subset Y$ наз. множеством значений отображения. Отображение $f : X \to Y$ наз. также отображением множества X во множество Y (или на множество Y, если $\{y = f(x),\ x \in X\} = Y$). Логически понятие «О.» совпадает с понятиями *функция*, *оператор*, *преобразование*.

Отображение $f : X \to Y$ порождает множество $\mathrm{Gr}_f = \{x, f(x) \mid x \in X\} \subset X \times Y$, наз. графиком отображения. Обратно, множество $M \subset X \times Y$ определяет однозначное О. если и только если для всех $u \in X$

существует $V \in Y$, притом только один такой, что $(u, v) \subset M$, тогда $f_M(u) = v$.

Два отображения f и g наз. р а в н ы м и, если области их определения совпадают и $f(x) = g(x)$ для любого $x \in X$. В этом случае совпадают и области значений этих О. Отображение f на X наз. п о с т о я н н ы м, если $f(x) = a$ для любого $x \in X$. С у ж е н и е м о т о б р а ж е н и я $f : X \to Y$ на подмножество $A \subset X$ наз. отображение φ, заданное на множестве A равенством $\varphi(x) = f(x)$, $x \in A$; это сужение обозначается f_A. Р а с ш и р е н и е м о т о б р а ж е н и я (или п р о д о л ж е н и е м) на множество $E \supset X$ наз. отображение F, определенное на E и удовлетворяющее равенству $F(x) = f(x)$ для всех $x \in X$. Если заданы три множества X, Y, Z, на X определено отображение f со значениями в Y, а на Y задано отображение g со значениями в Z, то существует отображение h с областью определения X, принимающее значения в Z и определяемое равенством $h(x) = g[f(x)]$. Это О. наз. к о м п о з и ц и е й о т о б р а ж е н и й f и g, а f и g с о о т в е т с т в у ю щ и м и о т о б р а ж е н и я м и, и обозначается $g \circ f$, причем порядок записи играет существенную роль (для функций действительного переменного принят термин с у п е р п о з и ц и я). Отображение h наз. также с л о ж н ы м о т о б р а ж е н и е м, составленным из внутреннего отображения f и внешнего отображения g. Понятие сложного О. обобщается на любое конечное *число составляющих О.*

Отображение f, определенное на X и принимающее значения в Y, порождает новое О., заданное на подмножествах множества X и имеющее в качестве значений подмножества множества Y. Именно, если $A \subset X$, то

$$f(A) \overset{\text{def}}{=} \{y = f(x),\ x \in A\}.$$

Множество $f(A)$ наз. о б р а з о м м н о ж е с т в а A. Если положить $A = \{x\}$, то получится исходное отображение $f(x)$, так что $f(A)$ есть расширение отображения $f(x)$ с множества X на множество $\mathfrak{P}(X)$ всех подмножеств множества X, если отождествлять одноэлементное множество с элементом, его составляющим. В случае $Y = X$ множество A наз. и н в а р и а н т н ы м п о д м н о ж е с т в о м отображения f, если $f(A) \subset A$, а точка x наз. н е п о д в и ж н ы м э л е м е н т о м отображения f, если $f(x) = x$. Инвариантные множества и неподвижные элементы играют важную роль при решении функциональных уравнений вида $f(x) = a$ или $x - f(x) = a$.

Каждое отображение $f : X \to Y$ порождает О., заданное на подмножествах множества $f(X)$ и имеющее в качестве значений подмножества множества X. Именно, для каждого $B \subset f(X)$ через $f^{-1}(B)$ обозначается множество $\{x,\ f(x) \in B\}$, называемое п о л н ы м п р о о б р а з о м множества B. Если $f^{-1}(y)$ для любого $y \in f(X)$ состоит из единственного элемента, то f^{-1} есть О. элемента, определенное на $f(X)$, принимающее значения в X и называемое о б р а т н ы м о т о б р а ж е н и е м к f. Существование обратного О. эквивалентно разрешимости уравнения $f(x) = y$, $y \in f(X)$.

Если множества X и Y наделены нек-рыми свойствами, то во множестве $F(X, Y)$ всех О. на X в Y могут быть выделены содержательные классы. Так, для частично упорядоченных множеств X и Y отображение f наз. и з о т о н н ы м, если $x < y$ влечет $f(x) \leqslant f(y)$. Для комплексных плоскостей X и Y выделяется класс голоморфных О. Для топологич. пространств X и Y естественным образом выделяется класс непрерывных О. этих пространств; строится развернутая теория *дифференцирования отображений*. Для О. скалярного аргумента и, в более общем случае, для О., определенных на пространстве с мерой, может быть введено по-

нятие (сильной или слабой) измеримости и могут быть построены различные интегралы лебеговского типа (напр., *Бохнера интеграл*, *Даниеля интеграл*).

О. наз. многозначным отображением, если нек-рым значениям x соответствуют подмножества $Y_x \subset Y$, состоящие более чем из одного элемента. Таковы, напр., многолистные функции комплексного переменного, многозначные О. топологических пространств и др.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965; [2] его же, Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., 2 изд., М., 1968; [3] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981. *В. И. Соболев.*

ОТОБРАЖЕНИЕ ПЕРИОДОВ — отображение, сопоставляющее точке s базы S семейства $\{X_s\}$ алгебраич. многообразий над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел когомологии $H^*(X_s)$ слоя над этой точкой, снабженные *Ходжа структурой*. Полученная при этом структура Ходжа рассматривается как точка в многообразии модулей структур Ходжа данного типа.

Изучение О. п. восходит к исследованиям Н. Абеля (N. Abel) и К. Якоби (C. Jacobi) интегралов алгебраич. функций (см. *Абелев дифференциал*). Однако до недавнего времени глубоко были изучены лишь О. п., отвечающие семействам кривых.

Пусть $\{X_s\}$ есть семейство слоев $X_s = f^{-1}(s)$ гладкого проективного морфизма $f: X \to S$, где S — гладкое многообразие. Тогда когомологии $H^*(X_s, \mathbb{Z}) = V_{\mathbb{Z}}$ снабжены чистой, поляризованной структурой Ходжа, к-рая задается гомоморфизмом вещественных *алгебраических групп* $h: \mathbb{C}^* \to G_{\mathbb{R}}$, где $\mathbb{C}^*$ — мультипликативная группа $\mathbb{C}^*$ поля комплексных чисел, рассматриваемая как вещественная алгебраич. группа, а

$$G = \{g \in \mathrm{GL}(V),\ \psi(gx,\ gy) = \lambda(g)\,\psi(x,\ y)\}$$

— алгебраич. группа линейных преобразований пространства V, умножающих невырожденную (симметрическую или кососимметрическую) билинейную форму ψ на скалярный множитель; причем автоморфизм $\mathrm{Ad}\, h(i)$ группы $G_{\mathbb{R}}$ является инволюцией Картана и $h(\mathbb{R}^*)$ лежит в центре группы $G_{\mathbb{R}}$. Множество X_G гомоморфизмов $h: \mathbb{C}^* \to G_{\mathbb{R}}$, обладающих указанными свойствами, естественным образом снабжено $G_{\mathbb{R}}$-инвариантной структурой однородного кэлерова многообразия и наз. многообразием Гриффитса, а фактор $M_G = X_G/G_{\mathbb{Z}}$ является пространством модулей структур Ходжа. Гомоморфизм h задает разложение Ходжа

$$\mathfrak{G}_{\mathbb{C}} = \oplus\, \mathfrak{G}^{p,\,-p}$$

алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы G, где $\mathfrak{G}^{p,\,-p}$ — подпространство в $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$, на к-ром $\mathrm{Ad}\, h(z)$ действует умножением на $z^p \bar{z}^{-p}$. Сопоставление $h \to P(h)$, где $P(h)$ — параболич. подгруппа в $G_{\mathbb{C}}$, алгебра Ли к-рой есть $\oplus_{p \geqslant 0} \mathfrak{G}^{p,\,-p}$, задает открытое плотное вложение многообразия X_G в компактное $G_{\mathbb{C}}$-однородное многообразие флагов $\check{X}_G$. В касательном пространстве

$$\mathfrak{G}_{\mathbb{C}} / \oplus_{p \geqslant 0} \mathfrak{G}^{p,\,-p}$$

к X_G в точке h выделено горизонтальное подпространство

$$\oplus_{p \geqslant -1} \mathfrak{G}^{p,\,-p} / \oplus_{p \geqslant 0} \mathfrak{G}^{p,\,-p}.$$

Голоморфное отображение в X_G или M_G наз. горизонтальным, если образ его касательного отображения лежит в горизонтальном подрасслоении.

Установлено, что О. п. $\Phi : S \to M_G$ горизонтально (см. [1], [3]). Особенности О. п. описываются теоремой Шмида о нильпотентной орбите, к-рая в случае, когда $S = \overline{S} \setminus \{0\}$ — кривая с выколотой точкой, утверждает, что если z — локальная координата на S, $z(0)=0$, то при $z \to 0$ $\Phi(z)$ асимптотически близко к

$$\exp\left(\frac{\log z}{2\pi i} N\right) a,$$

где $a \in \check{X}_G$, а $N \in \mathfrak{G}_{\mathbb{Q}}$ — нильпотентный элемент (см. [4]). Относительно группы монодромии

$$\Phi_*(\pi_1(S, s)) \subset G_{\mathbb{Z}}$$

известно, что ее образ полупрост во всяком рациональном представлении группы G, а преобразования обхода T вокруг дивизора с нормальными пересечениями $\overline{S} \setminus S$ в гладкой компактификации $\overline{S}$ многообразия S порождают квазиунипотентные (т. е. имеющие в качестве собственных значений корни из 1) элементы $\Phi_*(T) \in G_{\mathbb{Z}}$. Важность группы монодромии подчеркивает теорема жесткости (см. [1], [2], [4]): если над S имеются два семейства алгебраич. многообразий, то соответствующие О. п. Φ_1 и Φ_2 из S в M_G совпадают тогда и только тогда, когда $\Phi_1(s_0) = \Phi_2(s_0)$ в нек-рой точке $s_0 \in S$ и гомоморфизмы $\Phi_{i*} : \pi_1(S, s_0) \to G_{\mathbb{Z}}$, $i=1, 2$, совпадают.

Законченные результаты о строении ядра и образа О. п. относятся в основном к случаям кривых и *КЗ-поверхностей*. Если $\{X_s\}$ — семейство многообразий указанного типа и $\Phi(s) = \Phi(s')$, то $X_s \simeq X_{s'}$ (теорема Торелли), а для КЗ-поверхностей максимально возможный образ О. п. совпадает с M_G (см. [7]). В случае кривых образ О. п. частично описан (соотношения Шоттки — Юнга, см. [6], [8]). Существует гипотеза Гриффитса о том, что многообразие модулей допускает частичную аналитич. компактификацию, т. е. открытое вложение в такое аналитич. пространство $\overline{M}_G$, что О. п. $S \to M_G$ продолжается до голоморфного отображения $\overline{S} \supset S$ для всякой гладкой компактификации $\overline{S} \supset S$. Такая компактификация известна (1983) лишь для случая, когда X_G — симметрическая область [9].

Лит.: [1] Гриффитс Ф. А., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 3, с. 175—234; [2] Griffiths Ph. A., в кн.: Actes du Congrès international des mathématiciens (Nice), 1970, t. 1, P., 1971, p. 113—19; [3] Deligne P., Travaux de Griffiths, в кн.: Seminaire Bourbaki. 1969/70, B.— N. Y.— Hdlb., 1971, p. 213—35; [4] Schmid W., «Invent. math.», 1973, v. 22, p. 211—319; [5] Cattani E. H., Kaplan A. G., «Duke Math. J.», 1977, v. 44, № 1, p. 1—43; [6] Дубровин Б. А., «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, в. 2, с. 11—80; [7] Куликов В. А., там же, 1977, т. 32, в. 4, с. 257—58; [8] Мамфорд Д., «Математика», 1973, т. 17, № 4, с. 34—42; [9] Baily W., Borel A., «Ann. Math.», 1966, v. 84, p. 442—528.

А. И. Овсеевич.

ОТОБРАЖЕНИЙ КЛАССЫ — важнейшие классы непрерывных отображений, рассматриваемые в общей топологии и ее приложениях. К ним относятся: открытые отображения — такие, что образ любого открытого множества является открытым множеством; замкнутые отображения — такие, при к-рых образ каждого замкнутого множества замкнут; бикомпактные отображения — для них прообраз любой точки является бикомпактным множеством; совершенные отображения — замкнутые бикомпактные отображения. Факторные отображения определяются требованием: множество в образе открыто в том и только в том случае, если его полный прообраз открыт. Важны также открытые бикомпактные отображения, псевдооткрытые отображения и

уплотнения — последние определяются как взаимно однозначные непрерывные отображения на. Таким образом, при классификации отображений в общей топологии ограничения накладываются либо на поведение (при переходе к образу) открытых или замкнутых множеств, либо на свойства прообразов множеств. Второй подход приводит, в частности, к следующим О. к. Монотонные отображения — те, при к-рых прообраз каждой точки нульмерен. Конечнократные отображения характеризуются конечностью всех прообразов точек. Отображения, при к-рых прообраз каждого бикомпактного множества бикомпактен, наз. *k*-отображениями. Соединением ограничений первого и второго типа выделяются основные классы непрерывных отображений в общей топологии. Самими определениями О. к. естественно организуются в нек-рую иерархию, к-рая может быть положена в основу систематич. классификации топологич. пространств [1]. Эта классификация строится как результат решения вопросов следующих двух типов. Дан класс пространств $\mathcal{A}$, целесообразность выделения к-рого не вызывает сомнений, и пусть $\mathcal{B}$ — нек-рый класс отображений из нашей исходной иерархии. Требуется охарактеризовать посредством внутренних топологич. инвариантов образы пространств из класса $\mathcal{A}$ при всевозможных отображениях из класса $\mathcal{B}$. Вопросы второго типа аналогичны — требуется охарактеризовать прообразы пространств из класса $\mathcal{A}$ при отображениях из класса $\mathcal{B}$.

При решении вопросов указанных двух типов получаются совсем не очевидные теоремы общего характера. Напр., пространства с первой аксиомой счетности — это в точности образы метрич. пространств при непрерывных открытых отображениях. Пространства с равномерной базой и только они — образы метрич. пространств при открытых бикомпактных отображениях. Пространства Фреше — Урысона характеризуются как псевдооткрытые образы метрич. пространств, а секвенциальные пространства — это факторпространства метрич. пространств. Далее, прообразы метрич. пространств при совершенных отображениях — это в точности паракомпактные перистые пространства, а прообразами полных метрич. пространств являются паракомпактные пространства, полные по Чеху. Непрерывные образы пространств со счетной базой — пространства со счетной сетью. При систематич. следовании указанному пути получается единая взаимная классификация пространств и отображений.

Особую роль среди различных классов непрерывных отображений занимает класс *факторных отображений*. Важнейшей особенностью факторных отображений является то, что они могут служить средством для построения новых топологич. пространств. А именно, если дано отображение f топологич. пространства X на нек-рое множество Y (напр., если рассматривается естественное отображение π пространства X на множество всех элементов нек-рого разбиения этого пространства), то на множестве Y всегда можно ввести естественную топологию требованием, чтобы отображение f было факторным: множество $V \subset Y$ объявляется открытым в том и только в том случае, если его полный прообраз $f^{-1}(V)$ открыт в пространстве X. Помимо уже названных, весьма важны *неприводимые отображения*, напр. в теории абсолютов. См. также *Бифакторное отображение*, *Многозначное отображение*.

Лит.: [1] Архангельский А. В., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4, с. 133—84. *А. В. Архангельский.*

ОТОБРАЖЕНИЙ МЕТОД — то же, что *изображений метод*.

ОТОБРАЖЕНИЯ ГЛАВНАЯ СЕТЬ, основание отображения,— ортогональная сеть в области G n-мерного многообразия M (в частности, M может быть евклидовым пространством), к-рая переходит в сеть, также ортогональную, при диффеоморфизме $f: G \to G'$ области G на область G' того же или другого риманова многообразия M'. Направления, касательные к линиям О. г. с. в точке $x \in G$, являются главными направлениями эллипсоида деформации индуцированного отображения $f_*: T_x \to T'_{f(x)}$ касательного пространства T_x на касательное пространство $T'_{f(x)}$. При $n>2$ О. г. с., вообще говоря, не является голономной. Если отображение f — конформное, то любая ортогональная сеть в области G служит О. г. с.

Лит.: Рыжков В. В., в сб.: Итоги науки, Серия Математика, в. 3— Геометрия. 1963, М., 1965. *В. Т. Базылев.*

ОТРАЖЕНИЕ — движение σ n-мерного односвязного пространства постоянной кривизны X^n (т. е. евклидова аффинного пространства E^n, сферы S^n или пространства Лобачевского Λ^n), множество неподвижных точек Г к-рого является $n-1$ мерной гиперплоскостью. Множество Г наз. зеркалом отображения σ; говорят также, что σ есть О. относительно Г. Всякое О. однозначно определяется своим зеркалом. Порядок О. в группе всех движений X^n равен 2, то есть $\sigma^2 = \mathrm{id}_{X^n}$.

Пусть $X^n = E^n$ и $x \in \Gamma$. Выбор x в качестве начала координат позволяет отождествить евклидово аффинное пространство E^n с линейным евклидовым пространством V^n его параллельных переносов. Тогда отражение σ — линейное ортогональное преобразование пространства V^n, имеющее в нек-ром ортонормированном базисе матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & -1 \end{Vmatrix},$$

и наоборот, всякое ортогональное преобразование пространства V^n, имеющее в нек-ром ортонормированном базисе такую матрицу, является О. в E^n. Более общо: линейное преобразование φ произвольного векторного пространства W над полем k характеристики, отличной от 2, наз. линейным отражением, если $\varphi^2 = \mathrm{id}_W$ и ранг преобразования $1-\varphi$ равен 1. В этом случае подпространство W_1 неподвижных относительно φ векторов имеет в W коразмерность 1, а подпространство W_{-1} собственных векторов с собственным значением -1 имеет размерность 1 и $W = W_1 \oplus W_{-1}$. Если α — такая линейная форма на W, что $\alpha(w) = 0$ при $w \in W_1$, а $h \in W_{-1}$ — такой элемент, что $\alpha(h) = 2$, то φ задается формулой

$$\varphi w = w - \alpha(w)\, h, \quad w \in W.$$

Описание О. в произвольном односвязном пространстве X^n постоянной кривизны может быть сведено к описанию линейных О. следующим способом. Всякое такое пространство X^n вкладывается в виде гиперповерхности в действительное $(n+1)$-мерное векторное пространство V^{n+1} таким образом, что движения X^n продолжаются до линейных преобразований V^{n+1}, причем в подходящей системе координат в V^{n+1} уравнения указанной гиперповерхности записываются следующим образом:

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1 \quad \text{для } S^n;$$

$$x_0 = 1 \text{ для } E^n;$$

$$x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n = 1 \text{ и } x_0 > 0 \text{ для } \Lambda^n.$$

При этом вложении всякая гиперплоскость в X^n есть

пересечение с X^n нек-рого n-мерного подпространства в V^{n+1}, а всякое О. в X^n индуцировано линейным О. в V^{n+1}.

Если в определении линейного О. отказаться от требования $\varphi^2=\mathrm{id}_W$, то получается более общее понятие п с е в д о о т р а ж е н и я. Если k — поле комплексных чисел, а φ — псевдоотражение конечного порядка (не обязательно равного 2), то φ наз. к о м п л е к с н ы м о т р а ж е н и е м. Комплексным О. наз. также всякий биголоморфный автоморфизм конечного порядка ограниченной симметрич. области в комплексном пространстве, множество неподвижных точек к-рого имеет комплексную коразмерность 1.

См. также *Отражений группа*.

Лит.: [1] Б у р б а к и Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., М., 1972; [2] В и н б е р г Э. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 5, с. 1072—112; [3] G o t t s c h l i n g E., «Comm. Pure and Appl. Math.», 1969, v. 22, p. 693—714; [4] Р о з е н ф е л ь д Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

В. Л. Попов.

ОТРАЖЕНИЙ ГРУППА — дискретная группа преобразований, порождаемая отражениями относительно гиперплоскостей. Наиболее часто рассматриваются О. г., состоящие из движений односвязного полного риманова многообразия постоянной кривизны, т. е. евклидова пространства E^n, сферы S^n или пространства Лобачевского L^n.

Истоками теории О. г. являются исследования правильных многогранников и правильных разбиений евклидовой плоскости и сферы («орнаментов»). Во 2-й пол. 19 в. эти исследования были распространены на n-мерный случай и, в связи с задачами теории функций комплексного переменного, на плоскость Лобачевского; были также описаны правильные разбиения пространства L^n на правильные многогранники. Группа симметрии любого правильного многогранника, а также группа симметрии правильного разбиения пространства на правильные многогранники являются О. г. В 1934 были перечислены (см. [1]) все О. г. в E^n и S^n(последние можно рассматривать как частный случай О. г. в E^{n+1}). Еще в 1925—27 в работах Г. Вейля (H. Weyl) и Э. Картана (E. Cartan) О. г. появились как *Вейля группы* полупростых групп Ли. Позднее было установлено, что группы Вейля — это в точности те О. г. в E^n, к-рые имеют единственную неподвижную точку и записываются в нек-ром базисе целочисленными матрицами, а аффинные группы Вейля — это все О. г. в E^n с ограниченным фундаментальным многогранником (см. *Дискретная группа преобразований*).

О с н о в н ы е р е з у л ь т а т ы т е о р и и г р у п п о т р а ж е н и й. Пусть $X^n=S^n$, E^n или L^n. Всякая О. г. в X^n допускает в качестве образующих отражения r_i относительно гиперплоскостей H_i, $i\in I$, ограничивающих фундаментальный многогранник P. Относительно этой системы образующих она является *Кокстера группой* с определяющими соотношениями $(r_ir_j)^{n_{ij}}=1$, где числа n_{ij} находятся следующим образом: если грани $H_i\cap P$ и $H_j\cap P$ смежны и угол между ними равен α_{ij}, то $n_{ij}=\frac{\pi}{\alpha_{ij}}$; если они не смежны, то $n_{ij}=\infty$ (и тогда гиперплоскости H_i и H_j не пересекаются). Обратно, любой выпуклый многогранник в пространстве X^n, все двугранные углы к-рого суть целые части π, является фундаментальным многогранником группы, порожденной отражениями относительно ограничивающих его гиперплоскостей.

Всякая О. г. в E^n является (как группа движений) прямым произведением тривиальной группы, действующей в евклидовом пространстве нек-рой размерности, и групп движений следующих двух типов: (I) конечная О. г., фундаментальный многогранник к-рой есть симплициальный конус, и (II) бесконечная О. г., фундаментальный многогранник к-рой есть сим-

плекс. Группа типа (I) может рассматриваться как О. г. на сфере с центром в вершине фундаментального конуса; ее фундаментальным многогранником будет тогда сферич. симплекс. О. г. типа (I) однозначно определяется своей матрицей Кокстера, поэтому классификация таких групп совпадает с классификацией конечных групп Кокстера. О. г. типа (II) определяется своей матрицей Кокстера с точностью до гомотетии. Классификация таких групп с точностью до гомотетии совпадает с классификацией неразложимых параболич. групп Кокстера. Всякая О. г. в E^n, имеющая ограниченный фундаментальный многогранник, является (как группа движений) прямым произведением групп типа (II).

О. г. в E^n изучены значительно хуже. По многим причинам естественно выделить те из них, фундаментальный многогранник к-рых ограничен или выходит на абсолют лишь в конечном числе точек (это равносильно конечности объема). Ниже рассматриваются только такие группы. Они описаны более или менее явно только при $n=2$, 3.

О. г. в L^2 определяются k-угольником с углами

$$\frac{\pi}{n_1}, \ldots, \frac{\pi}{n_k}, \text{ где } \frac{1}{n_1}+\ldots+\frac{1}{n_k}<k-2$$

(если вершина бесконечно удаленная, то считается, что угол при ней равен нулю). Многоугольник с заданными углами всегда существует и зависит от $k-3$ параметров.

При $n\geqslant 3$ фундаментальный многогранник О. г. в L^n однозначно определяется своим комбинаторным строением и двугранными углами. Для $n=3$ получено исчерпывающее описание таких многогранников [5] и, тем самым, О. г. Для $n\geqslant 4$ известны лишь примеры и нек-рые общие способы построения О. г. в L^n (см. [6], [7]). Неизвестно (1983), существуют ли О. г. в L^n с ограниченным фундаментальным многогранником при $n\geqslant 8$ и с фундаментальным многогранником конечного объема при $n\geqslant 20$.

Наряду с О. г. в пространствах постоянной кривизны рассматриваются линейные О. г., действующие дискретно в открытом выпуклом конусе действительного векторного пространства. Это позволяет дать геометрич. реализацию всех групп Кокстера с конечным числом образующих (см. [3], [4]).

Всякую конечную О. г. можно рассматривать как линейную группу. Конечные О. г. характеризуются среди всех конечных линейных групп тем, что алгебры инвариантных многочленов этих групп обладают алгебраически независимыми системами образующих [4]. Напр., для группы всех перестановок базисных векторов такими образующими будут элементарные симметрич. многочлены. Пусть m_1+1, . . ., m_n+1 — степени образующих инвариантов конечной О. г. G (n — размерность пространства); числа m_1, . . ., m_n наз. показателями группы G. Имеет место формула

$$(1+m_1t)\ldots(1+m_nt)=c_0+c_1t+\ldots+c_nt^n,$$

где c_k — число элементов группы G, для к-рых пространство неподвижных точек имеет размерность $n-k$. В частности, $m_1+\ldots+m_n$ равно числу отражений в группе G; $(m_1+1)\ldots(m_n+1)$ равно порядку группы. Если группа G неприводима, то собственные значения ее элемента Киллинга — Кокстера (см. *Кокстера группа*) равны $\exp\frac{2\pi i m_k}{h}$, где h — число Кокстера:

$$h=\max\{m_k\}+1.$$

Утверждения предыдущего абзаца, за исключением последнего, сохраняют силу для линейных групп над

произвольным полем нулевой характеристики (см. [4]). Отражением в этом случае следует называть линейное преобразование, пространство неподвижных точек к-рого имеет размерность $n-1$. Перечислены [8] все конечные линейные О. г. над полем комплексных чисел. Найдены [9] конечные линейные О. г. над полями ненулевой характеристики.

Лит.: [1] Coxeter H. S. M., «Ann. Math.», 1934, v. 35, p. 588—621; [2] Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Дж., Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп, пер. с англ., М., 1980; [3] Tits J., в кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. 1962, Dursholm, [1963], p. 197—221; [4] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., М., 1972, гл. 4—6; [5] Андреев Е. М., «Матем. сб.», 1970, т. 81, с. 445—78; т. 83, с. 256—60; [6] Макаров В. С., в кн.: Исследования по общей алгебре, в. 1, Киш., 1968, с. 120—29; [7] Винберг Э. Б., «Матем. сб.», 1967, т. 72, с. 471—88; 1972, т. 87, с. 18—36; [8] Shephard G. C., Todd J. A., «Canad. J. Math.», 1954, v. 6, p. 274—304; [9] Сережкин В. Н., «Докл. АН СССР», 1976, т. 227, с. 574—75.

Э. Б. Винберг.

ОТРАЖЕНИЯ ПРИНЦИП — обобщение *симметрии принципа* для гармонич. функций на гармонич. функции от произвольного числа независимых переменных. Формулировки О. п. таковы.

1) Пусть G — область k-мерного евклидова пространства ($k\geqslant 1$), ограниченная жордановой поверхностью Γ (в частности, гладкой или кусочно гладкой поверхностью Γ без самопересечений), в состав к-рой входит $(k-1)$-мерная подобласть σ $(k-1)$-мерной гиперплоскости L. Если функция $U(x_1, \ldots, x_k)$ гармонична в G, непрерывна на $G\bigcup\sigma$ и всюду на σ равна нулю, то $U(x_1, \ldots, x_k)$ продолжается как гармонич. функция сквозь σ в область G^*, симметричную с G относительно L, с помощью равенства

$$U(x_1^*, \ldots, x_k^*) = -U(x_1, \ldots, x_k),$$

где точки $(x_1^*, \ldots, x_k^*)\in G^*$ и $(x_1, \ldots, x_k)\in G$ симметричны относительно L.

2) Пусть G — область k-мерного евклидова пространства ($k\geqslant 1$), ограниченная жордановой поверхностью Γ, в состав к-рой входит $(k-1)$-мерная подобласть σ $(k-1)$-мерной сферы Σ нек-рого радиуса $R>0$ с центром в нек-рой точке $M^0=(x_1^0, \ldots, x_k^0)$. Если $U(x_1, \ldots, x_k)$ гармонична в G, непрерывна на $G\bigcup\sigma$ и всюду на σ равна нулю, то $U(x_1, \ldots, x_k)$ продолжается как гармонич. функция сквозь σ в область G^*, симметричную с G относительно Σ (т. е. полученную из G посредством преобразования обратных радиусов — инверсии — относительно сферы Σ). Это продолжение осуществляется посредством взятого с обратным знаком *Кельвина преобразования* функции U относительно сферы Σ, именно:

$$U(x_1^*, \ldots, x_k^*) = -\frac{R^{k-2}}{r^{k-2}}\, U\left(x_1^0 + R^2\frac{x_1^* - x_1^0}{r^2}, \ldots, x_k^0 + R^2\frac{x_k^* - x_k^0}{r^2}\right),$$

где $(x_1^*, \ldots, x_k^*)\in G^*$, $r=\sqrt{(x_1^*-x_1^0)^2+\ldots+(x_k^*-x_k^0)^2}$. При преобразовании обратных радиусов относительно упомянутой сферы Σ точка $M^*=(x_1^*, \ldots, x_k^*)$ переходит в точку $M(x_1, \ldots, x_k)$ в соответствии с равенствами

$$x_1 - x_1^0 = R^2\frac{x_1^* - x_1^0}{r^2}, \ \ldots, \ x_k - x_k^0 = R^2\frac{x_k^* - x_k^0}{r^2},$$

так что если $M^*\in G^*$, то M принадлежит области G (где U задана), и если $M^*\in\sigma$, то $M=M^*$.

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964, с. 272.

Е. П. Долженко.

ОТРЕЗОК, сегмент, — множество точек на прямой, расположенных между двумя данными точками a, b и удовлетворяющих условию вида $a\leqslant x\leqslant b$; обозначают $[a, b]$. См. также *Интервал и сегмент*.

ОТРИЦАНИЕ — логическая операция, в результате к-рой из данного высказывания A получается новое высказывание «не A». В формализованных языках высказывание, получающееся в результате О. высказывания A, обозначается $\neg A$, $\sim A$, $\overline{A}$, $-A$, A' (читается: «не A», «неверно, что A», «A не имеет места»). Семантически О. высказывания A означает, что допущение A приводит к противоречию. В классической двузначной логике операции О. соответствует следующая *истинностная таблица*:

A	$\neg A$
И	Л
Л	И

В. Е. Плиско.

ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИИ, отрицательное изменение функции,— одно из двух слагаемых, сумма к-рых есть полное изменение или *вариация функции* на данном отрезке. Пусть $f(x)$ — функция действительного переменного, заданная на отрезке $[a, b]$ и принимающая конечные значения.

Пусть $\Pi = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и

$$N_\Pi(f) = -\sum\nolimits_i^- [f(x_i) - f(x_{i-1})],$$

где суммирование производится по тем номерам i, для к-рых разность $f(x_i) - f(x_{i-1})$ неположительна. Величина

$$N(f) \equiv N(f;\ [a, b]) = \sup_\Pi N_\Pi(f)$$

наз. отрицательной вариацией (отрицательным изменением) функции f на отрезке $[a, b]$. Всегда $0 \leqslant N(f) \leqslant +\infty$. См. также *Положительная вариация функции*.

Лит.: [1] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.— Л., 1934. *Б. И. Голубов.*

ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ — вид корреляционной зависимости между случайными величинами, при к-рой условные средние значения одной из них уменьшаются при возрастании значений другой величины. Об О. к. между величинами с *корреляции коэффициентом* ρ говорят в том случае, когда $\rho < 0$. См. *Корреляция*. *А. В. Прохоров.*

ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей случайной величины X, принимающей целые неотрицательные значения $k = 0, 1, 2, \ldots$ в соответствии с формулой

$$\mathsf{P}\{X = k\} = G^k_{r+k-1}\, p^r (1-p)^k \qquad (*)$$

при любых действительных значениях параметров $0 < p < 1$ и $r > 0$. Производящая функция и характеристич. функция О. б. р. задаются формулами

$$P(z) = p^r (1 - qz)^{-r}$$

и

$$f(t) = p^r (1 - qe^{it})^{-r},$$

где $q = 1 - p$. Математич. ожидание и дисперсия равны соответственно rq/p и rq/p^2. Функция распределения О. б. р. для значений $k = 0, 1, 2, \ldots$ определяется через значения функции *бета-распределения* в точке p следующим соотношением:

$$F(k) = \mathsf{P}\{X < k\} = \frac{1}{\mathrm{B}(r,\ k+1)} \int_0^p x^{r-1} (1-x)^k\, dx,$$

где $\mathrm{B}(r,\ k+1)$ — бета-функция.

Происхождение термина «О. б. р.» объясняется тем, что это распределение порождается биномом с отрицательным показателем, а именно, вероятности (*) являются коэффициентами разложения $p^r (1 - qz)^{-r}$ по степеням z.

О. б. р. встречается во многих приложениях теории вероятностей. При целом $r>0$ О. б. р. интерпретируется как распределение времени ожидания r-го «успеха» в схеме *Бернулли испытаний* с вероятностью «успеха» p; в такой форме оно наз. обычно *Паскаля распределением* и является дискретным аналогом *гамма-распределения*. При $r=1$ О. б. р. совпадает с *геометрическим распределением*. Часто О. б. р. появляется в задачах, связанных с рандомизацией параметров распределений, напр. если Y случайная величина, имеющая *Пуассона распределение* со случайным параметром λ, к-рый в свою очередь имеет гамма-распределение с плотностью

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} x^{\mu-1} e^{-\alpha x}, \quad x>0, \mu>0,$$

то распределение Y будет О. б. р. с параметрами $r=\mu$ и $p=\alpha/(1+\alpha)$. О. б. р. служит предельной формой *Пойа распределения*.

Сумма независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, имеющих О. б. р. с параметрами p и $r_1, \ldots, r_n$, соответственно, имеет О. б. р. с параметрами p и $r_1+\ldots+r_n$. При больших r и малых q, когда $rq\sim\lambda$, О. б. р. приближается распределением Пуассона с параметром λ. Многие свойства О. б. р. определяются тем фактом, что оно представляет собой обобщенное распределение Пуассона.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967.

А. В. Прохоров.

ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей случайной величины X с целыми неотрицательными значениями, заданное формулой

$$\mathsf{P}\{X=k\}=\frac{C^k_{k+m-1}\, C^{M-m}_{N-m-k}}{C^M_N}, \quad 0\leqslant k\leqslant N-M, \quad (*)$$

параметры N, M, m — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $m\leqslant M\leqslant N$. О. г. р. обычно возникает в схеме выбора без возвращения. Если в нек-рой генеральной совокупности объема N имеется M «отмеченных» и $N-M$ «неотмеченных» элементов и если выбор (без возвращения) производится до тех пор, пока число «отмеченных» элементов в выборке не достигает фиксированного числа m, то случайная величина X — число «неотмеченных» элементов в такой выборке — подчиняется О. г. р. (*). Случайная величина $X+m$ — объем выборки — также имеет О. г. р. Распределение (*) названо по аналогии с *отрицательным биномиальным распределением*, к-рое возникает подобным образом при выборе с возвращением.

Математич. ожидание и дисперсия О. г. р. равны соответственно

$$m\frac{N-M}{M+1}$$

и

$$m\frac{(N+1)(N-M)}{(M+1)(M+2)}\left[1-\frac{m}{M+1}\right].$$

При $N\to\infty$, $M\to\infty$, $N-M\to\infty$, так что $\frac{M}{N}\to p$, $\frac{N-M}{N}\to q$, $p+q=1$, О. г. р. стремится к отрицательному биномиальному распределению с параметрами m и p.

Функция распределения $F(n)$ О. г. р. с параметрами N, M, m связана с функцией *гипергеометрического распределения* $G(m)$ с параметрами N, M, n соотношением

$$F(n)=1-G(m-1).$$

Это позволяет при решении задач в математич. статистике, связанных с О. г. р., пользоваться таблицами гипергеометрич. распределения. О. г. р. приме-

няется, например, при *статистическом контроле качества.*

Лит.: [1] Беляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

А. В. Прохоров.

ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — то же, что *показательное распределение.*

ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — совместное распределение вероятностей случайных величин $X_1, \ldots, X_k$, принимающих неотрицательные целые значения $m=0, 1, 2, \ldots$, заданное формулой

$$\mathsf{P}\{X_1=m_1, \ldots, X_k=m_k\} = \frac{\Gamma(r+m_1+\ldots+m_k)}{\Gamma(r)\, m_1! \ldots m_k!}\, p_0^r p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k}, \qquad (*)$$

где $r>0$, $p_0, \ldots, p_k$ $(0<p_i<1,\ i=0, \ldots, k;\ p_0+\ldots+p_k=1)$ — параметры. О. п. р. является многомерным дискретным распределением — распределением случайного вектора $(X_1, \ldots, X_k)$ с неотрицательными целочисленными компонентами.

Производящая функция О. п. р. с параметрами r, $p_0, \ldots, p_k$ имеет вид

$$P(z_1, \ldots, z_k) = p_0^r (1-\textstyle\sum_{i=1}^k z_i p_i)^{-r}.$$

О. п. р. возникает в следующей полиномиальной схеме. Производятся последовательные независимые испытания, и в каждом испытании возможны $k+1$ различных исходов с индексами $0, 1, \ldots, k$, к-рым соответствуют вероятности $p_0, p_1, \ldots, p_k$. Испытания продолжаются до r-го появления исхода с индексом 0 (здесь r — целое). Если X_i — число появлений исхода с индексом i, $i=1, \ldots, k$, за время до конца испытаний, то формула (*) выражает вероятность появления исходов с индексами $1, \ldots, k$, соответственно, равно $m_1, \ldots, m_k$ раз до r-го появления исхода 0. О. п. р. в указанном смысле служит обобщением *отрицательного биномиального распределения*, совпадая с последним при $k=1$.

Если случайный вектор $(X_0, \ldots, X_k)$ имеет *полиномиальное распределение* с параметрами $n>1$, $p_0, \ldots, p_k$ и параметр n сам является случайной величиной, имеющей отрицательное биномиальное распределение с параметрами $r>0$, $0<\pi<1$, то распределение вектора $(X_1, \ldots, X_k)$ при условии $X_0=r$ является О. п. р. с параметрами r, $p_0(1-\pi), \ldots, p_k(1-\pi)$.

А. В. Прохоров.

ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ — голоморфное векторное расслоение E над комплексным пространством X, обладающее такой эрмитовой метрикой h, что функция $v \to h(v, v)$ на E строго псевдовыпукла вне нулевого сечения (обозначается $E<0$). Расслоение E отрицательно тогда и только тогда, когда сопряженное расслоение $E^*>0$ (см. *Положительное расслоение*). Если X — многообразие, то условие отрицательности можно выразить в терминах кривизны метрики h. Любое подрасслоение О. р. отрицательно. Расслоение E над комплексным многообразием наз. отрицательным в смысле Накано, если E^* положительно в смысле Накано. Голоморфное векторное расслоение E над компактным комплексным пространством X наз. слабо отрицательным, если его нулевое сечение обладает строго псевдовыпуклой окрестностью в E, т. е. если E^* слабо положительно. Всякое О. р. над X слабо отрицательно. Аналогично определяются также отрицательные и слабо отрицательные линейные пространства над пространством X.

Лит. см. при ст. *Положительное расслоение.*

А. Л. Онищик.

ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТЬ в непосредственном понимании — двумерная поверхность трехмерного евклидова пространства, к-рая в каждой своей точке имеет отрицательную

гауссову кривизну $K<0$. Простейшие примеры: однополостный гиперболоид (рис. 1, *а*), гиперболический параболоид (рис. 1, *б*), *катеноид*.

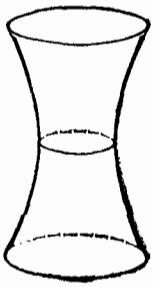


Рис. 1, *а*.

Непосредственное понимание О. к. п. можно обобщать, напр., по размерности самой поверхности или по размерности и по структуре объемлющего пространства.

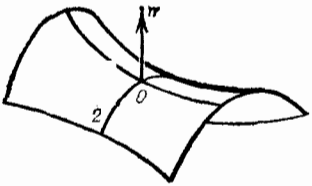


Рис. 1, *б*.

Локально О. к. п. имеют седловое строение. Это значит, что в достаточно малой окрестности любой своей точки О. к. п. похожа на седло (см. рис. 1, *б*, не интересуясь поведением поверхности вне изображенной ее части). Локальный седловой характер поверхности ясно усматривается на этом рисунке, где показаны главные сечения поверхности в произвольной точке O. Пусть $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ — их нормальные кривизны, т. е. главные кривизны в точке O. По классич. определению, гауссова кривизна в точке O есть число $K=\frac{1}{R_1R_2}$. Так как $K<0$, то главные кривизны имеют разные знаки, поэтому главные сечения имеют противоположные направления выпуклости; на рис. 1, *б* выпуклость сечения $O2$ направлена по нормали n, выпуклость другого — против нормали, что и соответствует седловому характеру поверхности. Топологич. строение О. к. п. в целом («глобальное») может быть весьма разнообразным. Напр., гиперболич. параболоид (рис. 1, *б*) топологически эквивалентен плоскости, однополостный гиперболоид (рис. 1, *а*) — цилиндрич. трубке. Пусть *два однополостных гиперболоида с параллельными осями* пересекаются по гиперболе (рис. 2, *а*). Пусть эти

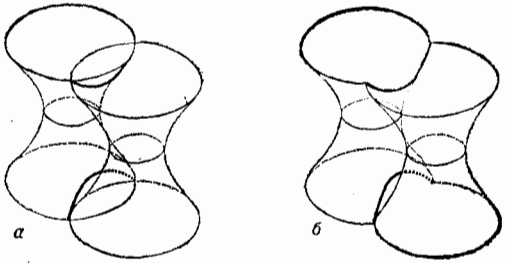


Рис. 2.

гиперболоиды не прозрачны и их невидимые части (т. е. части любого из них, лежащие внутри другого) отброшены. Получившаяся поверхность имеет отрицательную кривизну всюду, кроме точек указанной гиперболы. В точках этой гиперболы кривизны вообще нет (в классическом понимании), т. к. гипербола является ребром поверхности. Но поверхность вблизи ребра в данном случае можно загладить (см. [7]) так, чтобы получилась поверхность, к-рая имеет кривизну во всех точках, причем отрицательную (см. рис. 2, *б*). Она топологически эквивалентна тору с двумя проколами. Включая в конструкцию большее число однополостных гиперболоидов, можно построить О. к. п. сколь угодно сложного топологич. строения.

Поверхность наз. п о л н о й, если она является полным метрич. пространством с расстоянием в смысле ее внутренней геометрии. Во всех указанных примерах рассматривались полные поверхности. Идея построения полных О. к. п. разнообразных топологич. типов, исходя из нек-рых простейших (как изложено выше), принадлежит Ж. Адамару (J. Hadamard, [1]). Предложен принципиально другой пример (рис. 3) полной О. к. п. (см. [6] — [7]). Эта поверхность имеет всюду отрицательную кривизну и вся заключена внутри нек-рого шара. Она бесконечно ветвится, причем переменная ее точка, двигаясь по ветвям, может сколь угодно близко подойти к граничной сфере шара, но нигде не достигает этой сферы. Поверхность построена так, что при указанном движении переменная точка всегда проходит путь бесконечной длины. Тем самым обеспечивается полнота поверхности в смысле ее внутренней метрики. Этот пример показывает, что внутренне полная О. к. п. не обязательно уходит в бесконечность в пространстве, подобно поверхностям в примерах Адамара.

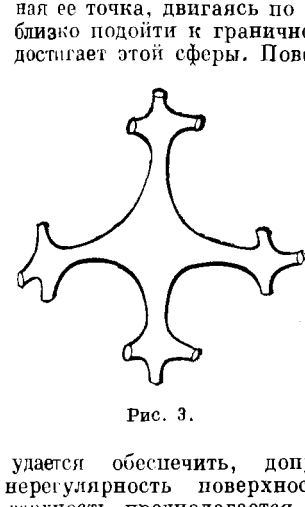


Рис. 3.

В приведенном примере повсеместное соблюдение условия $K<0$ удается обеспечить, допуская хотя бы слабую нерегулярность поверхности. Это значит, что поверхность предполагается гладкой (всюду класса C^1), но допускается, что в нек-рых изолированных точках она не принадлежит C^2; в таких точках требуется существование предельного значения кривизны. После дополнения предельными значениями кривизна всюду определена и непрерывна. Вопрос о протяженности поверхности и связь его с условием регулярности существенно дополняется следующими теоремами [8].

Если гауссова кривизна K полной поверхности класса C^2 удовлетворяет неравенству $-a^2 \leqslant K \leqslant 0$, где $a=\text{const}$, то поверхность не может содержаться в шаре, радиус к-рого меньше $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Если на полной поверхности класса C^2, неограниченной во внутреннем смысле, гауссова кривизна $K \to 0$ на бесконечности, то поверхность не ограничена в пространстве (в этой теореме допускается перемена знака кривизны).

Особое внимание привлекали (и привлекают) постоянной О. к. п., к-рые имеют гауссову кривизну с одним и тем же численным значением во всех точках. Они замечательны уже тем, что их внутренняя геометрия локально совпадает с геометрией на плоскости Лобачевского (см. *Лобачевского геометрия*). Это значит, что для фигур, лежащих на постоянной О. к. п., осуществляются в точности те же соотношения, какие имеют место в планиметрии Лобачевского (при этом роль прямых играют геодезич. линии); напр., тригонометрич. формулы для треугольников на постоянной О. к. п. и соответствующие формулы в неевклидовой геометрии Лобачевского точно совпадают. Тем самым на постоянной О. к. п. получается локальная модель геометрии Лобачевского. Такая модель была построена Э. Бельтрами (E. Beltrami, 1868), что существенно содействовало признанию геометрии Лобачевского. Э. Бельтрами указал также важный пример О. к. п.; она наз. п с е в д о с ф е р о й (рис. 4) и образована вращением трактрисы вокруг ее асимптоты (рис. 5). Характеристич. свойство трактрисы — отрезок касательной от

точки прикосновения до асимптоты постоянно равен нек-рому числу a. Оказывается, что гауссова кривизна псевдосферы $K=-\frac{1}{a^2}$. Еще раньше, чем Э. Бельтрами, поверхности вращения отрицательной кривизны изучал Ф. Миндинг (F. Minding, 1839). Он нашел два вида периодических постоянной О. к. п. вращения (рис. 6), к-рые вместе с псевдосферой исчерпывают все

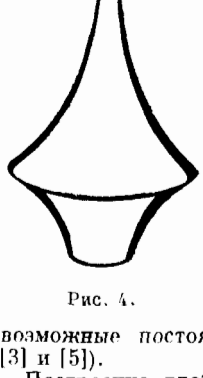


Рис. 4.

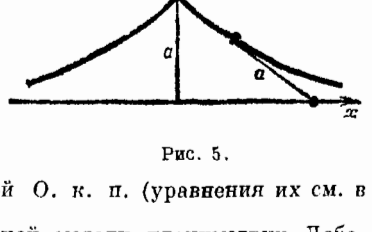


Рис. 5.

возможные постоянной О. к. п. (уравнения их см. в [3] и [5]).

Построение глобальной модели планиметрии Лобачевского на какой-нибудь постоянной О. к. п. вращения, напр. на псевдосфере, невозможно по двум причинам. Во-первых, на псевдосфере имеются нерегулярные точки; они составляют ребро возврата (рис. 4). Во-вторых, псевдосфера топологически эквивалентна трубке и значит даже с топологич. точки зрения отличается от плоскости Лобачевского. Но можно построить на регулярной О. к. п. вращения модель бесконечной части плоскости Лобачевского. С этой целью отсекается от псевдосферы плоскостью, перпендикулярной оси, бесконечная (сужающаяся) область U. Плоскость проводится так, чтобы она не содержала ребра возврата. В качестве U берется та часть псевдосферы, где ребра возврата нет. Далее рассматривается только U, к-рую для простоты также наз. псевдосферой; на ней нет особых точек. Пусть U' — универсальная накрывающая псевдосферу U поверхность. Это понятие можно наглядно ввести следующим образом. Берется бесконечно много одинаковых и совмещенных экземпляров псевдосферы U, к-рые различаются введением нумерации: . . ., U_{-2}, U_{-1}, U_0, U_1, . . . Затем все они разрезаются по какому-нибудь общему меридиану, а на каждой из них устанавливается левый и правый берег разреза так, чтобы все левые берега были совмещены (также — правые). Теперь для любого номера k, $-\infty<k<\infty$, левый берег U_k соединяется с правым берегом U_{k+1} (следовательно, правый берег U_k с левым берегом U_{k-1}). Так получится связная поверхность U', к-рая и является универсальной накрывающей поверхности U, она иногда наз. односвязной о б е р т к о й поверхности U. Универсальную накрывающую можно построить для любой поверхности, но наглядное описание ее конструкции будет далеко не так просто, как для псевдосферы. Существенно, что универсальная накрывающая всегда односвязна. Важно также, что на универсальную накрывающую можно перенести локальную внутреннюю геометрию накрываемой поверхности. Для этого достаточно учесть, что каждая точка p накрываемой поверхности имеет выпуклую окрестность $V(p)$, к-рая однолистно накрывается окрестностью $V'(p')$ накрывающей (здесь p' — точка,



Рис. 6.

к-рая накрывает точку p; соответствие $p \to p'$ биективно). Геометрия $V(p)$ переносится на $V'(p')$ тождественно, т. е. расстояние между точками p_1', $p_2' \in V'$ принимается равным расстоянию между их прообразами. Вместе с тем определяется глобальная геометрия универсальной накрывающей, но она, как правило, будет совершенно отличаться от глобальной геометрии накрываемой.

На псевдосфере U меридианы, уходя в бесконечность, сближаются; кроме того, они ортогональны краю U. Поэтому край универсальной накрывающей есть кривая в плоскости Лобачевского, к-рая является ортогональной траекторией пучка параллельных по Лобачевскому (сближающихся) прямых. Эта кривая в геометрии Лобачевского наз. о р и ц и к л о м. Таким образом, с точки зрения своей внутренней геометрии универсальная накрывающая псевдосферы U есть внутренняя область орицикла в плоскости Лобачевского. Универсальная накрывающая U' псевдосферы U удобнее для построения модели геометрии Лобачевского, чем сама псевдосфера U. Напр., сколь угодно большой круг можно расположить на U', но в U слишком большой круг без перекрытий может не уместиться. Но даже U' недостаточно обширна, чтобы вместить любой объект геометрии Лобачевского, напр. полная прямая в U' не умещается. Иначе говоря, построить с помощью U' модель всей плоскости Лобачевского нельзя.

Д. Гильбертом (1900) был поставлен вопрос: не существует ли поверхности, внутренняя геометрия к-рой в целом совпадает с геометрией плоскости Лобачевского? Из простых соображений следует, что если такая поверхность есть, то она должна иметь постоянную отрицательную кривизну и быть полной. Далее, она должна быть односвязной, поскольку односвязна плоскость Лобачевского. Но на самом деле достаточно было бы найти любую полную поверхность постоянной отрицательной кривизны (согласно изложенному выше, универсальная накрывающая такой поверхности полна и односвязна). При этом имеются в виду только регулярные поверхности (хотя бы дважды непрерывно дифференцируемые в любой точке, т. е. класса C^2).

Уже в 1901 Д. Гильберт решил свою проблему (см. [2]), причем в отрицательном смысле: в трехмерном евклидовом пространстве не существует полной регулярной поверхности постоянной отрицательной кривизны. Эта теорема привлекала внимание геометров на протяжении ряда десятилетий и привлекает внимание до сих пор. Дело в том, что с ней и с ее доказательством связано много интересных вопросов (см. ниже). При этом наличие особых линий у поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны (см. рис. 4, 6) не случайно. Оно соответствует теореме Гильберта.

Доказательство теоремы Гильберта о поверхностях любого топологич. строения прежде всего интересно тем, что в нем существенно использовано понятие универсальной накрывающей поверхности. Оно сводит дело к поверхности с простейшей топологией, именно, к односвязной поверхности. По-видимому, теорема Гильберта была одним из ранних предложений математики, где это понятие уяснилось. После публикации первой статьи Д. Гильберта с доказательством его теоремы выражалось сомнение в справедливости этого доказательства. Замечания относились к необозримости поведения асимптотич. линий, к-рые по ходу дела рассматривались на поверхности ввиду сложности ее топологии. Предполагалось даже, что Д. Гильберт перерабатывал свое доказательство, чтобы уточнить его. Между тем доказательство Д. Гильберта с самого начала было безупречным. Вероятно, этих замечаний не было бы, если бы Д. Гильберт отчетливо сказал, что исследуется полное односвязное многообразие постоянной отрицательной кривизны, т. е. сама плоскость

Лобачевского, в предположении, что она изометрично и регулярно погружена в трехмерное евклидово пространство.

Интересным является также то, что в доказательстве Д. Гильберта неожиданно появляются чебышевские сети: так называется сеть, в каждом сетевом четырехугольнике к-рой противоположные стороны имеют равные длины (см. рис. 7). И вот оказывается, что асимптотич. сеть (к-рая определена и невырождена во всех точках на любой О. к. п.) в случае постоянной О. к. п.— чебышевская. Эту сеть можно принять в качестве координатной: $u=\text{const}$, $v=\text{const}$. Тогда линейный элемент получает чебышевский вид

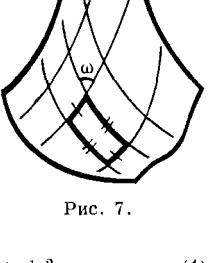


Рис. 7.

$$ds^2=du^2+2\cos\omega\,du\,dv+dv^2, \qquad (1)$$

где ω — сетевой угол. Предполагая, что поверхность регулярна, полна и односвязна, и, пользуясь чебышевским характером сети, можно доказать, что u, v принимают все значения: $-\infty<u<\infty$, $-\infty<v<\infty$ и этим исчерпывают сеть; иначе говоря, асимптотич. сеть в целом гомеоморфна декартовой сети на евклидовой координатной плоскости (см. [9]). С другой стороны, в предположении, что гауссова кривизна постоянна, напр. $K=-1$, из (1) получается уравнение

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}=\sin\omega, \qquad (2)$$

при этом из геометрич. соображений следуют ограничения

$$0<\omega<\pi. \qquad (3)$$

Д. Гильберт показал, что уравнение (2) не может иметь регулярного на всей координатной плоскости решения $\omega=\omega(u,v)$, подчиненного условию (3), и тем самым полная плоскость Лобачевского не может быть регулярно и изометрично погружена в трехмерное евклидово пространство. Отсюда, как объяснялось выше, вытекает более общая формулировка этой теоремы: в трехмерном евклидовом пространстве невозможна полная регулярная постоянной О. к. п. (никакой топологич. структуры).

Во многих разделах математики случалось, что какое-нибудь утверждение или какой-нибудь вопрос играли особую роль в развитии всего раздела. В дифференциальной геометрии одним из таких утверждений была (и еще остается) теорема Гильберта. Ей посвящено много публикаций. Интерес к этой теореме вызван прежде всего сочетанием в ее доказательстве разнообразных идей и понятий (универсального накрытия, чебышевской сети). Позднее обнаружилась ее связь с физикой.

Оказалось, что уравнение (2), написанное в несколько ином виде и без ограничения (3), выражает условие на потенциал в т. н. эффекте Джозефсона из теории сверхпроводимости. Физики дали уравнению (2) название «синус-Гордона». Используя связь уравнения (2) с теорией О. к. п. (см. [13], [14]), находят в конечном виде нек-рые его решения, регулярные на всей плоскости.

С. Э. Кон-Фоссен высказал (см. [15]) предположение, что имеет место гораздо более общая теорема, чем теорема Гильберта, именно, что условие на гауссову кривизну $K=\text{const}<0$ можно заменить условием $K\leqslant\text{const}<0$. Однако до нач. 60-х гг. 20 в. не было найдено ни одной теоремы, к-рая включала бы теорему Гильберта как частный случай. Только в 1961 (см. [16]) была доказана корректность теоремы Гильберта, т. е.

была установлена теорема о переменной О. к. п., для к-рой теорема Гильберта является предельным случаем. Иначе говоря, те свойства постоянной О. к. п., к-рые вызывают эффект теоремы Гильберта (нарушение регулярности), и сам эффект возможно понимать в приближенном смысле. Для доказательства было найдено уравнение в случае переменной кривизны, к-рое обобщает уравнение (2). Именно,

$$k^2 \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{1}{K^2}\frac{\partial \omega}{\partial s_1}\right) = \{k^2 + A + \alpha\,|\,\mathrm{grad}\,\omega\,|\}\sin\omega, \qquad (4)$$

где ω имеет прежний смысл, $k^2 = -K$, дифференцирование ведется по дугам асимптотич. линий, A и α — величины, модули к-рых допускают внутреннюю оценку, т. е. оценку в зависимости только от погружаемой метрики. При $K = \mathrm{const}$ получается $A = 0$, $\alpha = 0$ и уравнение (4) превращается в уравнение (2).

В случае переменной кривизны найдено (см. [17]) уравнение

$$L_{s_2} L^*_{s_1}(\omega) = M \sin\omega, \qquad (5)$$

где L_{s_2} — линейный оператор, пропорциональный оператору дифференцирования по дуге асимптотич. линий второго семейства, $L^*_{s_1}$ — квазилинейный оператор похожей структуры. Существенно, что функция M при нек-рых условиях на метрику допускает внутреннюю оценку снизу положительным числом, благодаря чему и благодаря строению левой части уравнение (5) сходно с уравнением (2). Поэтому при таких условиях на метрику можно провести рассуждения, сходные с рассуждениями Д. Гильберта (хотя гораздо более сложные), и получить сходный результат. Таким путем впервые было получено обобщение теоремы Гильберта (см. [18]). Что касается условий на метрику, о к-рых только что говорилось, то они заключаются в требовании, чтобы гауссова кривизна K была отгорожена от нуля и медленно изменялась. Если предположить, что $K \ll -1$, то медленное изменение кривизны нужно понимать в том смысле, что первые и вторые производные от K по дуге любой геодезической достаточно малы. Достаточные оценки устанавливаются с таким расчетом, чтобы к уравнению (5) были применены указанные выше рассуждения, идущие от Д. Гильберта. Эти оценки (см. [19]) выражены с помощью положительных постоянных, обозначаемых h и Δ. Соответственно, получаемые метрики с медленно изменяющейся отрицательной кривизной наз. (h, Δ)-м е т р и к а м и (определение см. в [18] или в [19]); при этом метрики постоянной кривизны получаются при $\Delta = +\infty$. Таким образом, полная (h, Δ)-метрика не допускает регулярного изометрич. погружения в трехмерное евклидово пространство.

Вопрос о возможности обобщения теоремы Гильберта в том виде, как он ставился в 30-е гг. (без ограничений характера поведения кривизны, см. [12]), на указанных сейчас путях, т. е. с помощью дифференциальных уравнений теории поверхностей, завершить не удалось. Но решение этого вопроса получилось совсем на другом пути, именно, с помощью тщательного исследования граничных свойств сферич. образа О. к. п. Таким способом доказано (см. [19], [20]), что полная метрика с гауссовой кривизной $K \ll \mathrm{const} < 0$ не допускает регулярного изометрич. погружения в E_3. Тем самым вопрос решен точно в классич. постановке. Одновременно доказана теорема: в E_3 на всякой полной регулярной поверхности отрицательной гауссовой кривизны K имеет место равенство

$$\sup K = 0. \qquad (6)$$

Здесь достаточна регулярность C^2. Но в случае $C^{1,1}$ есть (см. [7]) контрпример (в виде слабо нерегулярной поверхности).

Кроме (6) получены также (см. [21]) другие равенства и оценки, универсальные в том смысле, что они относятся ко всем О. к. п. в E_3. Кроме того, метод доказательства (6) позволил получить теоремы, к-рые дают достаточные признаки, когда отображение плоскости в плоскость с отрицательным якобианом является не только локальным, но и глобальным диффеоморфизмом.

Несмотря на изложенные сейчас результаты, исследование (h, Δ)-метрик и других метрик с медленно изменяющейся кривизной (напр., q-метрик; см. [9]) не потеряло смысла. Дело в том, что в задачах погружения метрик с медленно изменяющейся отрицательной кривизной возникают эффекты, к-рые не имеют места в случае более общих метрик отрицательной кривизны (см., напр., теорему о простой зоне в [9]). Образно можно сказать, что чем медленнее изменяется кривизна, тем «труднее» метрике отрицательной кривизны быть погруженной в E_3. Для метрики постоянной кривизны это «явление» проявляется особенно заметно (см. усиленную теорему Гильберта в [9]). Что касается дифференциальных уравнений, к-рые отмечались в связи с вопросом о погружении (h, Δ)-метрик, то они существенно использовались и в других вопросах. Так, с их помощью установлен [7] ряд сильных теорем о связи между внутренними и внешними свойствами О. к. п.; в частности, теоремы о зависимости внешней регулярности кривизны О. к. п. от регулярности ее метрики (см. [7]).

Влияние регулярности метрики на внешнюю регулярность О. к. п. представляется особенно интересным, так как О. к. п. входят в нек-рый специальный класс поверхностей, к-рый может быть определен чисто геометрически (интересно, что чисто геометрич. определение допускает и класс выпуклых поверхностей). Поверхности этого класса наз. с е д л о в ы м и. Седловые поверхности в нек-ром смысле — антиподы выпуклых (см. [22] — [25]).

Теорема о невозможности в евклидовом пространстве полной О. к. п. $K \leqslant \mathrm{const} < 0$ получает весьма усиленную форму в случае поверхности, к-рая однолистно проектируется на плоскость, т. е. может быть представлена как график функции $z=f(x, y)$. В этом случае существуют универсальные оценки протяженности поверхности, и полнота ее становится несущественной. Доказаны теоремы (см. [26]): 1) если на прямоугольник со сторонами a, b регулярно проектируется поверхность с гауссовой кривизной $K \leqslant -\alpha^2 = \mathrm{const} < 0$, то неравенство $\sqrt{\alpha} \geqslant C_1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ влечет $a\sqrt{\alpha} \leqslant C_1 + \frac{C_2}{\varepsilon}$, где C_1, C_2 — универсальные постоянные (напр., $C_1 = 4\pi$, $C_2 = 12\pi$); 2) если a, b и (для простоты) $\alpha = 1$, то $a \leqslant 18{,}9$.

Пусть дана метрика ds^2 с отрицательной гауссовой кривизной K и $k = \sqrt{-K}$. Пусть метрика ds^2 погружена в E_3 и l, m, n — приведенные коэффициенты получившейся второй квадратичной формы (приведенные — значит удовлетворяющие уравнению $ln - m^2 = -K$). В задаче о погружении l, m, n — неизвестные функции. В качестве новых неизвестных функций вводятся т. н. и н в а р и а н т ы Р и м а н а:

$$r = -\frac{m+k}{n}, \quad s = \frac{m-k}{n}.$$

Тогда основная система уравнений теории поверхностей примет симметричный вид

$$\left.\begin{aligned} r_x + sr_y &= A_0 + A_1 r + A_2 s + A_3 r^2 + A_4 rs + A_5 r^2 s, \\ s_x + rs_y &= A_0 + A_1 s + A_2 r + A_3 s^2 + A_4 rs + A_5 s^2 r, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

где $A_0, \ldots, A_5$ выражаются только через метрику ds^2.

Выше указывалось, что полная О. к. п. с $K \leqslant \mathrm{const} < 0$ не допускает изометричного регулярного погружения в E_3. Поэтому полученные результаты о возможности изометрич. погружения двумерных многообразий от-

рицательной кривизны в E_3 по необходимости относятся к частям полных многообразий. Само многообразие предполагается односвязным. Так, доказано (см. [29], [30]), что каждый геодезич. круг на произвольном регулярном многообразии отрицательной кривизны $K \leqslant \text{const} < 0$ может быть регулярно изометрически погружен в E_3. Эта теорема получена как следствие более общей теоремы: при нек-рых естественных условиях регулярности на метрику полной О. к. п. с $K \leqslant \text{const} < 0$ каждая бесконечная эквидистантная полоса на этом многообразии может быть изометрично и регулярно погружена в E_3. Эта теорема в свою очередь получена как следствие теоремы о существовании в целом решений гиперболич. систем квазилинейных уравнений вида (7), причем $r \neq s$.

Построен пример односвязного многообразия знакопеременной кривизны, на к-ром есть геодезич. круг, не допускающий изометрич. погружения в E_3 (см. [10]). Доказано [31] при нек-рых ограничениях на полную метрику односвязной О. к. п. $K \leqslant \text{const} < 0$, что внутренняя область произвольного орицикла такого многообразия может быть изометрично погружена в E_3. Таким образом, для полных односвязных многообразий отрицательной кривизны $K \leqslant \text{const} < 0$ доказана возможность изометрич. погружения в E_3 всех компактных и некомпактных его частей, к-рые сходны с частями плоскости Лобачевского, изометрич. погружения к-рых известны из работ Ф. Миндинга и Э. Бельтрами.

Изучаются погружения метрики с гауссовой кривизной $K = \text{const} < 0$, т. е. погружения частей плоскости Лобачевского. Так, доказано, что каждый, даже бесконечно протяженный, многоугольник плоскости Лобачевского, может быть изометрически погружен в E_3.

Разнообразие топологич. типов полных О. к. п. в E_3 приводит к необходимости рассматривать различные подклассы этого слишком широкого класса, удовлетворяющие тем или иным дополнительным условиям. Весьма естественным является подкласс полных О. к.п., имеющих взаимно однозначное сферическое («о д н о л и с т н о е») отображение (см. [33]). Если поверхность F из этого класса не имеет самопересечений, то она односвязна или двусвязна. Если такая поверхность F имеет рог, то, используя неограниченность седлового рога (см. [34]), можно получить ряд внешнегеометрич. свойств этой поверхности: F допускает задание уравнением $z = f(x, y)$ над областью, полученной из плоскости x, y удалением компактного выпуклого множества; F имеет предельный конус $A(F)$, состоящий из луча, соответствующего рогу, и выпуклого конуса, соответствующего чаше поверхности; замыкание F^* сферич. образа поверхности F имеет своим дополнением до сферы открытую полусферу и открытое выпуклое множество (рис. 8—10). Ряд аналогичных

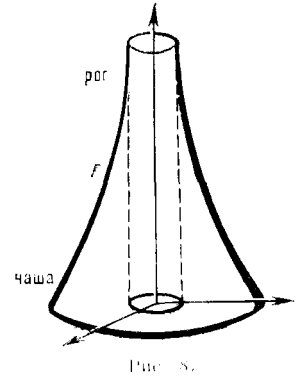


Рис. 8.

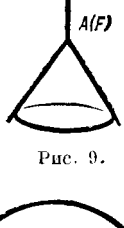


Рис. 9.

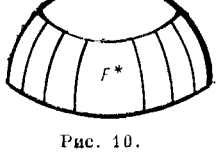


Рис. 10.

вопросов изучен и для других типов полных О. к. п. со взаимно однозначным сферич. отображением.

Другим интересным по своим свойствам и свойствам своего сферич. отображения классом является класс сужающихся О. к. п. (см. [36], [37]). Такой поверхностью, напр., является поверхность, заданная уравнением $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=a^2$. По ряду своих свойств сужающиеся О. к. п. напоминают замкнутые поверхности. Их сферич. образ можно рассматривать как риманову поверхность с краем, каждая компонента к-рого является сферич. ломаной, лежащей на одной из больших окружностей.

Иначе выглядит теория О. к. п. в псевдоевклидовом пространстве $E^3_{2,1}$. В этом пространстве О. к. п. являются выпуклыми; при этом кривизна понимается обычным образом, как кривизна метрики, индуцированной объемлющим пространством. Именно она предполагается отрицательной.

Единичная сфера пространства $E^3_{2,1}$ состоит из трех связных компонент L_1, L_2, L_3 (рис. 11). Компоненты L_1 и L_2 являются выпуклыми поверхностями, на к-рых индуцируется положительно определенная метрика постоянной отрицательной кривизны; эти поверхности дают известную интерпретацию геометрии Лобачевского. Поверхность L_3 седлообразная, на ней индуцируется индефинитная метрика постоянной положительной кривизны; метрика этой поверхности известна как двумерная метрика де Ситтера.

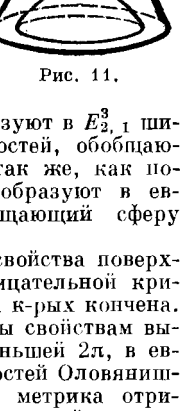


Рис. 11.

О. к. п. с дефинитной метрикой образуют в $E^3_{2,1}$ широкий и естественный класс поверхностей, обобщающих свойства поверхностей L_1 и L_2 так же, как поверхности положительной кривизны образуют в евклидовом пространстве класс, обобщающий сферу (см. [38]).

Исчерпывающим образом изучены свойства поверхностей с дефинитной метрикой и отрицательной кривизной, полная интегральная кривизна к-рых конечна. Свойства этих поверхностей аналогичны свойствам выпуклых поверхностей с кривизной, меньшей 2π, в евклидовом пространстве (класс поверхностей Оловянишникова). Именно, полная дефинитная метрика отрицательной кривизны и конечной интегральной кривизны $\tilde{K}$ и геодезич. луч γ на многообразии, несущем эту метрику, определяют единственным образом выпуклую поверхность с данным выпуклым предельным конусом полной кривизны $\tilde{K}$ без изотропных образующих и с данной образующей, к-рая является предельной для луча γ. Регулярность получаемых поверхностей определяется регулярностью метрики.

Полные О. к. п. с индефинитной метрикой также являются выпуклыми. Но свойства их отчасти сходны со свойствами седлообразных поверхностей в евклидовом пространстве. В частности, для них справедлива оценка $\sup K=0$. Такие поверхности должны были бы соответствовать компоненте L_3 единичной сферы пространства $E^3_{2,1}$; однако она не выпукла. Здесь играет определяющую роль не только знак гауссовой кривизны, но и знак определителя метрич. формы поверхности.

Лит.: [1] Hadamard J., «J. math. pures et appl.», 1898, v. 4, p. 27—73; [2] Hilbert D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1901, v. 2, p. 87—99; [3] Bianchi L., Lezioni di geometria differentiale, 3 ed., v. 1, pt 1, Bologna, 1927; [4] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [5] Норден А. П., Теория поверхностей, М., 1956; [6] Розендорн Э. Р., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 2, с. 149—56; [7] его же, там же, 1966, т. 21, в. 5, с. 59—116; [8] Аминов Ю. А., «Укр. геометр. сб.», 1973, в. 13, с. 3—9; [9] Ефимов Н. В., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 5, с. 3—58; [10] Позняк Э. Г., там же,

1973, т. 28, в. 4, с. 47—76; [11] Позняк Э. Г., Шикин Е. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, с. 171—207; [12] Позняк Э. Г., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии, т. 8, М., 1977, с. 225—41; [13] Грибков И. В., «Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика. Механика», 1977, № 4, с. 78—83; [14] его же, «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 2, с. 191—92; [15] Кон-Фоссен С. Э., там же, 1936, в. 1, с. 33—76; [16] Ефимов Н. В., «Докл. АН СССР», 1961, т. 136, № 6, с. 1283—86; [17] Ефимов Н. В., Позняк Э. Г., там же, т. 137, № 1, с. 25—27; [18] их же, там же, № 3, с. 509—12; [19] Ефимов Н. В., там же, 1963, т. 150, № 6, с. 1206—09; [20] его же, «Матем. сб.», 1964, т. 64, № 2, с. 286—320; [21] его же, там же, 1968, т. 76, № 4, с. 499—512; [22] Шефель С. З., Исследования по геометрии седловых поверхностей, Новосиб., 1963; [23] его же, «Сиб. матем. ж.», 1964, т. 5, № 6, с. 1382—96; [24] его же, там же, 1967, т. 8, № 3, с. 705—14; [25] его же, «Докл. АН СССР», 1965, т. 162, № 2, с. 294—96; [26] Ефимов Н. В., «Матем. сб.», 1976, т. 100, № 3, с. 356—63; [27] его же, «Докл. АН СССР», 1953, т. 93, № 4, с. 609—11; [28] Heinz E., «Math. Ann.», 1955, Bd 129, H. 5, p. 451—54; [29] Позняк Э. Г., «Докл. АН СССР», 1966, т. 170, № 4, с. 786—89; [30] его же, «Укр. геометр. сб.», 1966, в. 3, с. 78—92; [31] Шикин Е. В., «Докл. АН СССР», 1974, т. 215, № 1, с. 61—63; [32] Рождественский Б. Л., там же, 1962, т. 143, № 1, с. 50—52; [33] Вернер А. Л., «Матем. сб.», 1967, т. 74, № 2, с. 218—40; 1968, т. 75, № 1, с. 112—39, т. 77, № 1, с. 136; [34] его же, «Сиб. матем. ж.», 1970, т. 11, № 1, с. 20—29; № 4, с. 750—769; [35] его же, «Матем. заметки», 1972, т. 12, № 3, с. 281—86; [36] Соколов Д. Д., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 1, с. 261—62; 1978, т. 33, в. 4, с. 227—28; 1979, т. 34, в. 3, с. 213—14; [37] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М. — Л., 1948; [38] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.

Н. В. Ефимов.

ОТСЧЕТА СИСТЕМА — совокупность системы координат и часов, связанных с телом, по отношению к к-рому изучается движение (или равновесие) каких-нибудь других материальных точек или тел. Любое движение является относительным, и движение тела следует рассматривать лишь по отношению к какому-либо другому телу (телу отсчета) или системе тел. Нельзя указать, напр., как движется Луна вообще, можно лишь определить ее движение по отношению к Земле или Солнцу и звездам и т. д.

Математически движение тела (или материальной точки) по отношению к выбранной О. с. описывается уравнениями, к-рые устанавливают, как изменяются с течением времени t координаты, определяющие положение тела (точки) в этой О. с. Напр., в декартовых координатах x, y, z движение точки определяется *уравнениями*

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t),$$

наз. уравнениями движения.

Выбор О. с. зависит от целей исследования. При кинематич. исследованиях все О. с. равноправны. В задачах динамики преимущественную роль играют *инерциальные системы отсчета*, по отношению к которым дифференциальные уравнения имеют обычно более простой вид.

По материалам статьи Система отсчета из БСЭ-3.

ОЦЕНКА СТАТИСТИЧЕСКАЯ — функция от случайных величин, применяемая для оценки неизвестных параметров теоретич. распределения вероятностей. Методы теории О. с. служат основой современной теории ошибок; обычно в качестве неизвестных параметров выступают измеряемые физич. постоянные, а в качестве случайных величин — результаты непосредственных измерений, подверженные случайным ошибкам. Напр., если X_1, X_2, . . ., X_n — независимые одинаково нормально распределенные случайные величины (результаты равноточных измерений, подверженных независимым нормально распределенным случайным ошибкам), то в качестве О. с. для неизвестного среднего значения a (*приближенного значения измеряемой физич. постоянной*) применяется среднее арифметическое

$$X = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n). \qquad (1)$$

О. с. как функция от случайных величин чаще всего задается теми или иными формулами, выбор к-рых определяется требованиями практики. При этом различают оценки точечные и оценки интервальные.

Точечные оценки. Точечной оценкой наз. такая О. с., значение к-рой представимо геометрически в виде точки в том же пространстве, что и значения неизвестных параметров (размерность пространства равна числу оцениваемых параметров). Именно точечные О. с. и используются как приближенные значения для неизвестных физич. величин. В дальнейшем для простоты предполагается, что оценке подлежит один единственный параметр; в этом случае точечная О. с. *представляет собой функцию от результатов наблюдений*, принимающую числовые значения.

Точечную О. с. наз. несмещенной, если ее математич. ожидание совпадает с оцениваемой величиной, т. е. если О. с. лишена систематич. ошибки. Среднее арифметическое (1) — несмещенная О. с. для математич. ожидания одинаково распределенных случайных величин X_i (не обязательно нормальных). В то же время выборочная дисперсия

$$\widehat{s^2}=\frac{1}{n}\left[(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\ldots+(X_n-\overline{X})^2\right] \quad (2)$$

является смещенной О. с. для дисперсии $\sigma^2=\mathrm{D}X_i$, так как $\mathrm{E}\widehat{s^2}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\sigma^2$; в качестве несмещенной О. с. для σ^2 обычно берут функцию

$$s^2=\frac{n}{n-1}\,\widehat{s^2}.$$

См. также *Несмещенная оценка*.

За меру точности несмещенной О. с. α для параметра a чаще всего принимают дисперсию $\mathrm{D}\alpha$.

О. с. с наименьшей дисперсией наз. наилучшей. В приведенном примере среднее арифметическое (1) — наилучшая О. с. Однако если распределение вероятностей случайных величин X_i отлично от нормального, то О. с. (1) может и не быть наилучшей. Напр., если результаты наблюдений X_i распределены равномерно в интервале (b, c), то наилучшей О. с. для математич. ожидания $a=(b+c)/2$ будет полусумма крайних значений

$$\alpha=\frac{\min X_i+\max X_i}{2}. \quad (3)$$

В качестве характеристики для сравнения точности различных О. с. применяют эффективность — отношение дисперсий наилучшей оценки и данной несмещенной оценки. Напр., если результаты наблюдений X_i распределены равномерно, то дисперсии оценок (1) и (3) выражаются формулами

$$\mathrm{D}\overline{X}=\frac{(c-b)^2}{12n}$$

и

$$\mathrm{D}\alpha=\frac{(c-b)^2}{2(n+1)(n+2)}. \quad (4)$$

Так как оценка (3) наилучшая, то эффективность оценки (1) в данном случае есть

$$e_n(\overline{X})=6n/(n+1)(n+2)\sim 6/n.$$

При большом количестве наблюдений n обычно требуют, чтобы выбранная О. с. стремилась по вероятности к истинному значению параметра a, т. е. чтобы для всякого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\{|\alpha-a|>\varepsilon\}=0;$$

такие О. с. наз. состоятельными (пример состоятельной О. с. — любая несмещенная оценка,

дисперсия к-рой при $n \to \infty$ стремится к нулю; см. также *Состоятельная оценка*). Поскольку важную роль при этом играет порядок стремления к пределу, то асимптотически наилучшими являются а с и м п т о т и ч е с к и э ф ф е к т и в н ы е О. с., то есть такие О. с., для к-рых при $n \to \infty$

$$\frac{\mathsf{E}(\alpha - a)}{\sqrt{\mathsf{E}(\alpha - a)^2}} \to 0 \text{ и } e_n(\alpha) \to 1.$$

Напр., если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ распределены одинаково нормально, то О. с. (2) представляет собой асимптотически эффективную оценку для неизвестного параметра $\sigma^2 = \mathsf{D}X_i$, так как при $n \to \infty$ дисперсия оценки $\hat{s}^2$ и дисперсия наилучшей оценки $\hat{s}^2 n/(n-1)$ асимптотически эквивалентны:

$$\mathsf{D}\hat{s}^2 / \mathsf{D}[\hat{s}^2 n/(n-1)] = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2, \quad \mathsf{D}\hat{s}^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

и, кроме того,

$$\mathsf{E}(\hat{s}^2 - \sigma^2) = -\sigma^2/n.$$

Фундаментальное значение для теории О. с. и ее приложений имеет тот факт, что квадратичное отклонение О. с. для параметра a ограничено снизу нек-рой величиной (этой величиной Р. Фишер (R. Fischer) предложил характеризовать количество информации относительно неизвестного параметра a, содержащийся в результатах наблюдений). Напр., если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и одинаково распределены с плотностью вероятности $p(x; a)$ и если $\alpha = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — О. с. для нек-рой функции $g(a)$ от параметра a, то в широком классе случаев

$$\mathsf{E}[\alpha - g(a)]^2 \geqslant \frac{nb^2(a)\, I(a) + [g'(a) + b'(a)]^2}{nI(a)}, \qquad (5)$$

где

$$b(a) = \mathsf{E}[\alpha - g(a)] \text{ и } I(a) = \mathsf{E}\left[\frac{\partial \ln p(X; a)}{\partial a}\right]^2.$$

Функцию $b(a)$ наз. с м е щ е н и е м, а величину, обратную правой части неравенства (5), наз. к о л и ч е с т в о м и н ф о р м а ц и и (по Фишеру) относительно функции $g(a)$, содержащейся в результате наблюдений. В частности, если α — несмещенная О. с. параметра a, то

$$g(a) \equiv a, \quad b(a) \equiv 0$$

и

$$\mathsf{E}[\alpha - g(a)]^2 = \mathsf{D}\alpha \geqslant 1/nI(a), \qquad (6)$$

причем количество информации $nI a$ в этом случае пропорционально количеству наблюдений (функцию $I(a)$ наз. к о л и ч е с т в о м и н ф о р м а ц и и, содержащейся в одном наблюдении).

Основные условия, при к-рых справедливы неравенства (5) и (6), — гладкость оценки α как функции от X_i, а также независимость от параметра a множества тех точек x, где $p(x, a) = 0$. Последнее условие не выполняется, напр., в случае равномерного распределения, и поэтому дисперсия О. с. (3) не удовлетворяет неравенству (6) [согласно (4) эта дисперсия есть величина порядка n^{-2}, в то время как по неравенству (6) она не может иметь порядок малости выше, чем n^{-1}].

Неравенства (5) и (6) справедливы и для дискретно распределенных случайных величин X_i: нужно лишь в определении информации $I(a)$ плотность $p(x; a)$ заменить вероятностью события $\{X = x\}$.

Если дисперсия несмещенной О. с. α^* для параметра a совпадает с правой частью неравенства (6), то α^* — наилучшая оценка. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: дисперсия наилучшей О. с. может превышать $[nI(a)]^{-1}$. Однако если $n \to \infty$, то дисперсия наилучшей оценки $\mathsf{D}\alpha^*$ асимптотически эквивалентна

правой части (6), т. е. $n\mathrm{D}\alpha^* \to 1/I(a)$. Таким образом, с помощью количества информации (по Фишеру) можно определить асимптотич. эффективность несмещенной О. с. α, полагая

$$e_\infty(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{D}\alpha^*}{\mathrm{D}\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nI(a)\,\mathrm{D}\alpha}. \qquad (7)$$

Особенно плодотворным информационный подход к теории О. с. сказывается тогда, когда плотность (в дискретном случае — вероятность) совместного распределения случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ представима в виде произведения двух функций $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)q[y(x_1, x_2, \ldots, x_n); a]$, из к-рых первая не зависит от a, а вторая представляет собой плотность распределения нек-рой случайной величины $Z=y(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, наз. *достаточной статистикой*, или исчерпывающей статистикой.

Один из наиболее распространенных методов нахождения точечных О. с.— *моментов метод*. Согласно этому методу, теоретич. распределению, зависящему от неизвестных параметров, ставят в соответствие дискретное выборочное распределение, к-рое определяется результатами наблюдений X_i и представляет собой распределение вероятностей воображаемой случайной величины, принимающей значения $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с одинаковыми вероятностями, равными $1/n$ (выборочное распределение можно рассматривать как точечную О. с. для теоретич. распределения). В качестве О. с. для моментов теоретич. распределения принимают соответствующие моменты выборочного распределения; напр., для математич. ожидания a и дисперсии σ^2 метод моментов дает следующие О. с.: выборочное среднее (1) и выборочную дисперсию (2). Неизвестные параметры обычно выражаются (точно или приближенно) в виде функций от нескольких моментов теоретич. распределения. Заменяя в этих функциях теоретич. моменты выборочными, получают искомые О. с. Этот метод, часто приводящий на практике к сравнительно простым вычислениям, дает, как правило, О. с. невысокой асимптотической эффективности (см. выше пример оценки математического ожидания равномерного распределения).

Другой метод нахождения О. с., более совершенный с теоретич. точки зрения,— *максимального правдоподобия метод*, или наибольшего правдоподобия метод. Согласно этому методу, рассматривают функцию правдоподобия $L(a)$, к-рая представляет собой функцию неизвестного параметра a и получается в результате замены в плотности совместного распределения $p(x_1, x_2, \ldots, x_n; a)$ аргументов x_i самими случайными величинами X_i; если X_i независимы и одинаково распределены с плотностью вероятности $p(x; a)$, то

$$L(a) = p(X_1; a)\, p(X_2; a) \ldots p(X_n; a)$$

(если X_i распределены дискретно, то в определении функции правдоподобия L следует плотности заменить вероятностями событий $\{X_i = x_i\}$). В качестве О. с. максимального правдоподобия для неизвестного параметра a принимают такую величину α, для к-рой $L(\alpha)$ достигает наибольшего значения (при этом часто вместо L рассматривают т. н. логарифмическую функцию правдоподобия $l(\alpha) = -\ln L(\alpha)$; в силу монотонности логарифма точки максимумов функций $L(\alpha)$ и $l(\alpha)$ совпадают). Примерами О. с. максимального правдоподобия являются оценки по *наименьших квадратов методу*.

Основное достоинство О. с. максимального правдоподобия заключается в том, что при нек-рых общих условиях эти оценки состоятельны, асимптотически эффективны и распределены приближенно нормально.

Перечисленные свойства означают, что если α есть О. с. максимального правдоподобия, то при $n \to \infty$

$$\mathsf{E}\alpha \sim a \text{ и } \mathsf{E}(\alpha - a)^2 \sim \mathsf{D}\alpha \sim \sigma_n^2(a) = \frac{1}{\mathsf{E}\left[\frac{d}{da} l(a)\right]^2}$$

(если X независимы, то $\sigma_n^2(a) = [nI(a)]^{-1}$). Таким образом, для функции распределения нормированной О. с. $(\alpha - a)/\sigma_n(a)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\alpha - a}{\sigma_n(a)} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \equiv \Phi(x). \quad (8)$$

Преимущества О. с. максимального правдоподобия оправдывают вычислительную работу по отысканию максимума функции L (или l). В нек-рых случаях вычислительная работа существенно сокращается благодаря следующим свойствам: во-первых, если α^* — такая О. с., для к-рой неравенство (6) обращается в равенство, то О. с. максимального правдоподобия единственна и совпадает с α^*, во-вторых, если существует достаточная статистика Z, то О. с. максимального правдоподобия есть функция Z.

Пусть, напр., $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и распределены одинаково нормально так, что

$$p(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - a)^2\right\},$$

поэтому

$$l(a, \sigma) = \ln L(a, \sigma) =$$
$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2.$$

Координаты $a = a_0$ и $\sigma = \sigma_0$ точки максимума функции $l(a, \sigma)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial l}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2}\sum(X_i - a) = 0,$$
$$\frac{\partial l}{\partial a} = -\frac{n}{\sigma^3}\left[\sigma^2 - \frac{1}{n}\sum(X_i - a)^2\right] = 0.$$

Таким образом, $a_0 = \overline{X} = \Sigma X_i/n$, $\sigma_0^2 = \hat{s}^2 = \Sigma(X_i - \overline{X})^2/n$ и, значит, в данном случае О. с. (1) и (2) — оценки максимального правдоподобия, причем $\overline{X}$ — наилучшая О. с. параметра a, распределенная нормально ($\mathsf{E}\overline{X} = a$, $\mathsf{D}\overline{X} = \sigma^2/n$), а $\hat{s}^2$ — асимптотически эффективная О. с. параметра σ^2, распределенная при больших n приближенно нормально ($\mathsf{E}\hat{s}^2 \sim \sigma^2$, $\mathsf{D}\hat{s}^2 \sim 2\sigma^4/n$). Обе оценки представляют собой независимые достаточные статистики.

Еще один пример, в к-ром

$$p(x; a) = \{\pi[1 + (x - a)^2]\}.$$

Эта плотность удовлетворительно описывает распределение одной из координат частиц, достигших плоского экрана и вылетевших из точки, расположенной вне экрана (a — координата проекции источника на экран — предполагается неизвестной). Для указанного распределения математич. ожидание не существует, т. к. соответствующий интеграл расходится. Поэтому отыскание О. с. для a методом моментов невозможно. Формальное применение в качестве О. с. среднего арифметического (1) лишено смысла, т. к. $\overline{X}$ распределено в данном случае с той же плотностью $p(x; a)$, что и каждый единичный результат наблюдений. Для оценки a можно воспользоваться тем обстоятельством, что рассматриваемое распределение симметрично относительно точки $x = a$ и, значит, a — медиана теоретич. распределения. Несколько видоизменяя метод моментов, в качестве О. с. для a принимают т. н. выборочную медиану μ, к-рая при $n \geqslant 3$ является несмещенной О. с.

для a, причем если n велико, то μ распределена приближенно нормально с дисперсией

$$\mathsf{D}\mu \sim \pi^2/4n.$$

В то же время

$$l(a) = -n \ln \pi + \sum_{i=1}^{n} \ln [1 + (X_i - a)^2],$$

поэтому $nl(a) = n/2$ и, значит, согласно (7) асимптотич. эффективность $e_\infty(\mu)$ равна $8/\pi^2 \approx 0{,}811$. Таким образом, для того чтобы выборочная медиана μ была столь же точной О. с. для a, как и оценка наибольшего правдоподобия α, нужно количество наблюдений увеличить на 25%. Если затраты на эксперимент велики, то для определения a следует воспользоваться О. с. α, к-рая в данном случае определяется как корень уравнения

$$\frac{\partial l}{\partial a} \equiv -2 \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - a}{1 + (X_i - a)^2} = 0.$$

В качестве первого приближения выбирают $\alpha_0 = \mu$ и далее решают это уравнение последовательными приближениями по формуле

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \alpha_k}{1 + (X_i - \alpha_k)^2}.$$

См. также *Точечная оценка*.

Интервальные оценки. Интервальной оценкой наз. такая О. с., к-рая геометрически представима в виде множества точек, принадлежащих пространству параметров. Интервальную О. с. можно рассматривать как множество точечных О. с. Это множество зависит от результатов наблюдений и, следовательно, оно случайно; поэтому каждой интервальной О. с. ставится в соответствие вероятность, в к-рой эта оценка «накроет» неизвестную параметрич. точку. Такая вероятность, вообще говоря, зависит от неизвестных параметров; поэтому в качестве характеристики достоверности интервальной О. с. принимают коэффициент доверия — наименьшее возможное значение указанной вероятности. Содержательные статистич. выводы позволяют получать лишь те интервальные О. с., коэффициент доверия к-рых близок к единице.

Если оценивается один параметр a, то интервальной О. с. обычно является нек-рый интервал (β, γ) (т. н. доверительный интервал), конечные точки к-рого β и γ представляют собой функции от результатов наблюдений; коэффициент доверия ω в данном случае определяется как нижняя грань вероятности одновременного осуществления двух событий $\{\beta < a\}$ и $\{\gamma > a\}$, вычисляемая по всем возможным значениям параметра a:

$$\omega = \inf_a \mathsf{P}\{\beta < a < \gamma\}.$$

Если середину такого интервала $(\beta + \gamma)/2$ принять за точечную О. с. для параметра a, то с вероятностью не менее чем ω можно утверждать, что абсолютная погрешность этой О. с. не превышает половины длины интервала $(\gamma - \beta)/2$. Иными словами, если руководствоваться указанным правилом оценки абсолютной погрешности, то ошибочное заключение будет получаться в среднем менее чем в 100 $(1-\omega)$% случаев. При фиксированном коэффициенте доверия ω наиболее выгодны кратчайшие доверительные интервалы, для к-рых математич. ожидание длины $\mathsf{E}(\gamma - \beta)$ достигает наименьшего значения.

Если распределение случайных величин X_i зависит только от одного неизвестного параметра a, то построение доверительного интервала обычно осуществляется с помощью какой-либо точечной О. с. α. Для большинства практически интересных случаев функция распределения $\mathsf{P}\{\alpha < x\} = F(x; a)$ разумно выбранной О. с. α монотонно зависит от параметра a. В этих условиях для

отыскания интервальной О. с. следует в $F(x;\ a)$ подставить $x=\alpha$ и определить корни $a_1=a_1(\alpha,\ \omega)$ и $a_2=a_2(\alpha,\ \omega)$ уравнений

$$F(\alpha;\ a_1)=\frac{1-\omega}{2} \quad \text{и} \quad F(\alpha+0;\ a_2)=\frac{1+\omega}{2} \qquad (9)$$

где

$$F(x+0;\ a)=\lim_{\Delta\to 0} F(x+\Delta^2;\ a)$$

[для непрерывных распределений $F(x+0;\ a)=F(x;\ a)$]. Точки с координатами $a_1(\alpha;\ \omega)$ и $a_2(\alpha;\ \omega)$ ограничивают доверительный интервал с коэффициентом доверия ω. Разумеется, интервал, построенный столь простым способом, во многих случаях может отличаться от оптимального (кратчайшего). Однако если α — асимптотически эффективная О. с. для a, то при достаточно большом количестве наблюдений такая интервальная О. с. практически несущественно отличается от оптимальной. В частности, это верно для О. с. наибольшего правдоподобия, т. к. она распределена асимптотически нормально (см. (8)). В тех случаях, когда решение уравнений (9) затруднительно, интервальную О. с. вычисляют приближенно с помощью точечной О. с. максимального правдоподобия и соотношения (8):

$$\beta\approx\beta^*=\alpha-x\sigma_n(\alpha) \text{ и } \gamma\approx\gamma^*=\alpha+x\sigma_n(\alpha),$$

где x — корень уравнения $\Phi(x)=(1+\omega)/2$.

Если $n\to\infty$, то истинный коэффициент доверия интервальной оценки (β^*, γ^*) стремится к ω. В более общем случае распределение результатов наблюдений X_i зависит от нескольких параметров a, b,. . . . В этих условиях указанные выше правила построения доверительных интервалов часто оказываются неприменимыми, т. к. распределение точечной О. с. α зависит, как правило, не только от a, но и от остальных параметров. Однако в практически интересных случаях О. с. α можно заменить такой функцией от результатов наблюдений X_i и неизвестного параметра a, распределение к-рой не зависит (или «почти не зависит») от всех неизвестных параметров. Примером такой функции может служить нормированная О. с. максимального правдоподобия $(\alpha-a)/\sigma_n(a,\ b,\ldots)$; если в знаменателе аргументы a, b,. . . заменить их оценками максимального правдоподобия α, β,. . . , то предельное распределение останется тем же самым, что и в формуле (8). Поэтому приближенные доверительные интервалы для каждого параметра в отдельности можно строить так же, как и в случае одного параметра.

Как уже отмечалось выше, если X_1, X_2, . . ., X_n, . . . — независимые и одинаково нормально распределенные случайные величины, то $\overline{X}$ и s^2 — наилучшие О. с. для параметров a и σ^2 соответственно. Функция распределения О. с. выражается формулой

$$\mathrm{P}\{\overline{X}<x\}=\Phi\left[\frac{\sqrt{n}\,(x-a)}{\sigma}\right]$$

и, следовательно, она зависит не только от a, но также и от σ. В то же время распределение т. н. отношения Стьюдента

$$\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}-a)}{s}=\tau$$

не зависит ни от a, ни от σ, причем

$$\mathrm{P}\{|\tau|\leqslant t\}=\omega_{n-1}(t)=C_{n-1}\int_0^t\left(1+\frac{v^2}{n-1}\right)^{-n/2}dv,$$

где постоянная C_{n-1} выбирается так, чтобы выполнялось равенство $\omega_{n-1}(\infty)=1$. Таким образом, доверительному интервалу

$$\overline{X}-st/\sqrt{n}<a<\overline{X}+st/\sqrt{n}$$

соответствует коэффициент доверия $\omega_{n-1}(t)$.

Распределение оценки s^2 зависит лишь от σ^2, причем функция распределения О. с. s^2 задается формулой

$$\mathsf{P}\left\{s^2 < \frac{\sigma^2 x}{n-1}\right\} = G_{n-1}(x) = D_{n-1}\int_0^x v^{(n-3)/2}\, e^{-v/2}dv,$$

где постоянная D_{n-1} определяется условием $G_{n-1}(\infty)=1$ (так наз. χ^2-распределением с $n-1$ степенями свободы). Так как с ростом σ вероятность $\mathsf{P}\{s^2 < \sigma^2 x/(n-1)\}$ монотонно возрастает, то для построения интервальной О. с. применимо правило (9). Таким образом, если x_1 и x_2 — корни уравнений $G_{n-1}(x_1)=(1-\omega)/2$ и $G_{n-1}(x_2)=(1+\omega)/2$, то доверительному интервалу

$$(n-1)\, s^2/x_2 < \sigma^2 < (n-1)\, s^2/x_1$$

соответствует коэффициент доверия ω. Отсюда, в частности, следует, что доверительный интервал для относительной ошибки задается неравенствами

$$\frac{x_1}{n-1} - 1 < \frac{s^2-\sigma^2}{\sigma^2} < \frac{x_2}{n-1} - 1.$$

Подробные таблицы функций распределения Стьюдента $\omega_{n-1}(t)$ и χ^2-распределения $G_{n-1}(x)$ имеются в большинстве руководств по математич. статистике.

До сих пор предполагалось, что функция распределения результатов наблюдений известна с точностью до значений нескольких параметров. Однако в приложениях часто встречается случай, когда вид функции распределения неизвестен. В этой обстановке для оценки параметров могут оказаться полезными т. н. *непараметрические методы статистики* (т. е. такие методы, к-рые не зависят от исходного распределения вероятностей). Пусть, напр., требуется оценить медиану m теоретич. непрерывного распределения независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (для симметричных распределений медиана совпадает с математич. ожиданием, если, конечно, оно существует). Пусть $Y_1 \leqslant Y_2 \leqslant \ldots \leqslant Y_n$ — те же величины X_i, но расположенные в порядке возрастания. Тогда, если k — целое число, удовлетворяющее неравенствам $1 \leqslant k \leqslant n/2$, то

$$\mathsf{P}\{Y_k < m < Y_{n-k+1}\} = 1 - 2\sum_{r=0}^{k-1} C_n^r \left(\frac{1}{2}\right)^n = \omega_{n,k}.$$

Таким образом, $(Y_k,\ Y_{n-k+1})$ — интервальная О. с. для m с коэффициентом доверия $\omega=\omega_{n,k}$. Этот вывод верен при любом непрерывном распределении случайных величин X_i.

Выше отмечалось, что выборочное распределение — точечная О. с. для неизвестного теоретич. распределения. Более того, функция выборочного распределения $F_n(x)$ — несмещенная О. с. для функции теоретич. распределения $F(x)$. При этом, как показал А. Н. Колмогоров, распределение статистики

$$\lambda_n = \sqrt{n}\max_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|$$

не зависит от неизвестного теоретич. распределения и при $n \to \infty$ стремится к предельному распределению $K(y)$, к-рое наз. р а с п р е д е л е н и е м К о л м о г о р о в а. Таким образом, если y — решение уравнения $K(y)=\omega$, то с вероятностью ω можно утверждать, что график функции теоретич. распределения $F(y)$ целиком «покрывается» полосой, заключенной между графиками функций $F_n(x) \pm y/\sqrt{n}$ (при $n \geqslant 20$ различие допредельного и предельного распределений статистики λ_n практически несущественно). Такую интервальную О. с. наз. д о в е р и т е л ь н о й з о н о й. См. также *Интервальная оценка*.

Статистические оценки в теории ошибок. Теория ошибок – раздел математич. статистики, посвященный численному определению неизвестных величин по ре-

зультатам измерений. В силу случайного характера ошибок измерений и, быть может, случайной природы самого изучаемого явления не все такие результаты равноправны: при повторных измерениях нек-рые из них встречаются чаще, другие — реже.

В основе теории ошибок лежит математич. модель, согласно к-рой до опыта совокупность всех мыслимых результатов измерения трактуется как множество значений нек-рой случайной величины. Поэтому важную роль приобретает теория О. с. Выводы теории ошибок носят статистич. характер. Смысл и содержание таких выводов (как, впрочем, и выводов теории О.с.) проявляются лишь в свете закона больших чисел (пример такого подхода — статистич. толкование смысла коэффициента доверия, указанного выше).

Полагая результат измерения X случайной величиной, различают три основных типа ошибок измерений: систематические, случайные и грубые (качественные описания таких ошибок даны в ст. *Ошибок теория*). При этом о ш и б к о й измерения неизвестной величины a наз. разность $X-a$, математич. ожидание этой разности $\mathsf{E}(X-a)=b$ наз. с и с т е м а т и ч е с к о й о ш и б к о й (если $b=0$, то говорят, что измерения лишены систематич. ошибок), а разность $\delta=X-a-b$ наз. с л у ч а й н о й о ш и б к о й ($\mathsf{E}\delta=0$). Таким образом, если приведено n независимых измерений величины a, то их результаты можно записать в виде равенств

$$X_i=a+b+\delta_i, \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

где a и b — постоянные, а δ_i — случайные величины. В более общем случае

$$X_i=a+(b+\beta_i)+\delta_i, \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

где β_i — не зависящие от δ_i случайные величины, к-рые равны нулю с вероятностью, весьма близкой к единице (поэтому всякое другое значение $\beta_i\neq 0$ маловероятно). Величину β_i наз. г р у б о й о ш и б к о й.

Задача оценки (и устранения) систематич. ошибки обычно выходит за рамки математич. статистики. Исключения составляют т. н. м е т о д э т а л о н о в, согласно к-рому для оценки b производят серию измерений известной величины a (в этом методе b — оцениваемая величина и a — известная систематич. ошибка), а также д и с п е р с и о н н ы й а н а л и з, позволяющий оценивать систематич. расхождения между несколькими сериями измерений.

Основная задача теории ошибок — отыскивание О. с. для неизвестной величины a и оценка точности измерений. Если систематич. ошибка устранена ($b=0$) и наблюдения грубых ошибок не содержат, то согласно (10) $X_i=a+\delta_i$ и, значит, в этом случае задача оценки a сводится к отысканию в том или ином смысле оптимальной О. с. для математич. ожидания одинаково распределенных случайных величин X_i. Как было показано в предыдущих разделах, вид такой О. с. (точечной или интервальной) существенно зависит от закона распределения случайных ошибок. Если этот закон известен с точностью до нескольких неизвестных параметров, то для оценки, а также для оценки a можно применять, напр., метод максимального правдоподобия; в противном случае следует сначала по результатам наблюдений X_i найти О. с. для неизвестной функции распределения случайных ошибок δ_i («непараметрическая» интервальная О. с. такой функции указана выше). В практич. работе часто довольствуются двумя О. с. $\overline{X}\approx a$ и $s^2\approx \mathsf{D}\delta_i$ (см. (1) и (2)). Если δ_i распределены одинаково нормально, то эти О. с. наилучшие; в других случаях эти оценки могут оказаться малоэффективными.

Наличие грубых ошибок усложняет задачу оценки параметра a. Обычно доля наблюдений, в к-рых $\beta_i\neq 0$

бывает невелика, а математич. ожидание ненулевых $|\beta_i|$ значительно превышает $\sqrt{D\delta_i}$ (грубые ошибки возникают в результате случайного просчета, неправильного чтения показаний измерительного прибора и т. п.). Результаты измерений, содержащие грубые ошибки, часто бывают хорошо заметны, т. к. они сильно отличаются от других результатов измерений. В этих условиях наиболее целесообразный способ выявления (и устранения) грубых ошибок — непосредственный анализ измерений, тщательная проверка неизменности условий всех экспериментов, запись результатов «в две руки» и т. д. Статистич. методы выявления грубых ошибок следует применять лишь в сомнительных случаях.

Простейший пример таких методов — статистич. выявление одного резко выделяющегося наблюдения, когда подозрительным может оказаться либо $Y_1=\min X_i$, либо $Y_n=\max X_i$ (предполагается, что в равенствах (11) $b=0$ и закон распределения величин δ_i известен). Для того чтобы выяснить, обосновано ли предположение о наличии одной грубой ошибки, для пары Y_1, Y_n вычисляют совместную интервальную О. с. (доверительную область), полагая все β_i равными нулю. Если эта О. с. «накрывает» точку с координатами (Y_1, Y_n), то подозрение о наличии грубой ошибки следует считать статистически необоснованным; в противном случае гипотезу о присутствии грубой ошибки надо признать подтвердившейся (при этом обычно забракованное наблюдение отбрасывают, т. к. сколько-нибудь надежно оценить величину грубой ошибки по одному наблюдению статистически не представляется возможным).

Пусть, напр., a неизвестно, $b=0$ и δ_i независимы и распределены одинаково нормально (дисперсия неизвестна). Если все $\beta_i=0$, то распределение случайной величины

$$Z=\frac{\max|X_i-\overline{X}|}{\hat{s}}$$

не зависит от неизвестных параметров (О. с. X и $\hat{s}$ вычисляются по всем n наблюдениям согласно формулам (1) и (2)). Для больших значений

$$P\{Z>z\}\approx n\left[1-\omega_{n-2}\left(z\sqrt{\frac{n-2}{n-1-z^2}}\right)\right],$$

где $\omega_r(t)$ — функция распределения Стьюдента, определенная выше. Таким образом, с коэффициентом доверия

$$\omega\approx 1-n\left[1-\omega_{n-2}\left(z\sqrt{\frac{n-2}{n-1-z^2}}\right)\right] \qquad (12)$$

можно утверждать, что при отсутствии грубой ошибки выполняется неравенство $Z<z$ или, что то же самое,

$$\overline{X}-z\hat{s}<Y_1<Y_n<\overline{X}+z\hat{s}.$$

(Погрешность оценки коэффициента доверия по формуле (12) не превышает $\omega^2/2$.) Поэтому если все результаты измерений X_i лежат в пределах $X\pm z\hat{s}$, то нет оснований считать какое-нибудь измерение содержащим грубую ошибку.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975, гл. 33, 34; [2] Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика в технике. (Общая часть), М., 1955; [3] Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962; [4] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [5] Арлей Н., Бух К. Р., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, пер. с англ., М., 1951; [6] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1942, т. 6, № 1—2, с. 3—32.

Л. Н. Большев.

ОЧЕРЕДЕЙ ТЕОРИЯ — раздел *массового обслуживания теории*. О. т. изучает системы, в к-рых требования,

застающие систему занятой, не теряются, а ожидают ее освобождения и затем обслуживаются в том или ином порядке (часто с предоставлением приоритета определенным категориям требований). Выводы О. т. используют для рационального планирования систем массового обслуживания. С математич. точки зрения задачи О. т. могут быть включены в теорию случайных процессов, а ответы часто бывают выражены в терминах преобразований Лапласа искомых характеристик. Применение методов О. т. необходимо даже в простейших случаях для правильного понимания статистич. закономерностей, возникающих в системах массового обслуживания.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, М., 1966; [2] Приоритетные системы обслуживания, М., 1973. *Ю. В. Прохоров.*

ОШИБОК ТЕОРИЯ — раздел математич. статистики, посвященный построению уточненных выводов о численных значениях приближенно измеренных величин, а также об ошибках (погрешностях) измерений. Повторные измерения одной и той же постоянной величины дают, как правило, различные результаты, т.к. каждое измерение содержит нек-рую ошибку. Различают три основных вида ошибок: систематические, грубые и случайные. Систематические ошибки все время либо преувеличивают, либо преуменьшают результаты измерений и происходят от определенных причин (неправильной установки измерительных приборов, влияния окружающей среды и т. д.), систематически влияющих на измерения и изменяющих их в одном направлении. Оценка систематич. ошибок производится с помощью методов, выходящих за пределы математич. статистики (см. *Наблюдений обработка*). Грубые ошибки возникают в результате просчета, неправильного чтения показаний измерительного прибора и т. п. Результаты измерений, содержащие грубые ошибки, сильно отличаются от других результатов измерений и поэтому часто бывают хорошо заметны. Случайные ошибки происходят от различных случайных причин, действующих при каждом из отдельных измерений непредвиденным образом то в сторону уменьшения, то в сторону увеличения результатов.

О. т. занимается изучением лишь грубых и случайных ошибок. Основные задачи О. т.: разыскание законов распределения случайных ошибок, разыскание оценок (см. *Оценка статистическая*) неизвестных измеряемых величин по результатам измерений, установление погрешностей таких оценок и установление грубых ошибок. Пусть в результате n независимых равноточных измерений нек-рой неизвестной величины μ получены значения $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Разности

$$\delta_1 = Y_1 - \mu, \ \ldots, \ \delta_n = Y_n - \mu$$

наз. истинными ошибками. В терминах вероятностной О. т. все δ_i трактуются как случайные величины; независимость измерений понимается как взаимная независимость случайных величин $\delta_1, \ldots, \delta_n$. Равноточность измерений в широком смысле истолковывается как одинаковая распределенность: истинные ошибки равноточных измерений суть одинаково распределенные случайные величины. При этом математич. ожидание истинных ошибок $b = \mathsf{E}\delta_1 = \ldots = \mathsf{E}\delta_n$ наз. систематической ошибкой, а разности $\delta_1 - b, \ \ldots, \ \delta_n - b$ — случайными ошибками. Таким образом, отсутствие систематич. ошибки означает, что $b=0$ и в этой ситуации $\delta_1, \ldots, \delta_n$ суть случайные ошибки. Величину $1/\sigma\sqrt{2}$, где σ — квадратичное отклонение, наз. мерой точности (при наличии систематич. ошибки мера точности выражается отношением $1/\sqrt{2(b^2+\sigma^2)}$). Равноточность измерений в узком смысле понимается как одинаковость меры точности всех результатов измерений. Наличие грубых

ошибок означает нарушение равноточности (как в широком, так и в узком смысле) для нек-рых отдельных измерений. В качестве оценки неизвестной величины μ обычно берут арифметич. среднее из результатов измерений

$$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,$$

а разности $\Delta_1=Y_1-\overline{Y}, \ldots, \Delta_n=Y_n-\overline{Y}$ наз. к а ж у щ и м и с я о ш и б к а м и. Выбор $\overline{Y}$ в качестве оценки для μ основан на том, что при достаточно большом числе n равноточных измерений, лишенных систематич. ошибки, оценки $\overline{Y}$ с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, сколь угодно мало отличается от неизвестной величины μ (см. *Больших чисел закон*); оценка $\overline{Y}$ лишена систематич. ошибки (оценки с таким свойством наз. н е с м е щ е н н ы м и), дисперсия оценки есть

$$\mathsf{D}\overline{Y}=\mathsf{E}(\overline{Y}-\mu)^2=\sigma^2/n.$$

Опыт показывает, что практически очень часто случайные ошибки δ_i подчиняются распределениям, близким к нормальному (причины этого вскрыты т. н. *предельными теоремами* теории вероятностей). В этом случае величина $\overline{Y}$ имеет мало отличающееся от нормального распределение с математич. ожиданием μ и дисперсией σ^2/n. Если распределения δ_i в точности нормальны, то дисперсия всякой другой несмещенной оценки для μ, напр. медианы, не меньше $\mathsf{D}\overline{Y}$. Если же распределение δ_i отлично от нормального, то последнее свойство может не иметь места (см. пример в ст. *Рао — Крамера неравенство*).

Если дисперсия σ^2 отдельных измерений заранее неизвестна, то для ее оценки пользуются величиной

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2$$

($\mathsf{E}s^2=\sigma^2$, то есть s^2 — несмещенная оценка для σ^2). Если случайные ошибки δ_i имеют нормальное распределение, то отношение

$$t=\frac{(\overline{Y}-\mu)\sqrt{n}}{s}$$

подчиняется *Стьюдента распределению* с $n-1$ степенями свободы. Этим можно воспользоваться для оценки погрешности приближенного равенства $\mu\approx\overline{Y}$ (см. *Наименьших квадратов метод*).

Величина $(n-1)s^2/\sigma^2$ при тех же предположениях имеет «*хи-квадрат*» *распределение* с $n-1$ степенями свободы. Это позволяет оценить погрешность приближенного равенства $\sigma\approx s$. Можно показать, что относительная погрешность не будет превышать числа q с вероятностью

$$\omega=F(z_2,\ n-1)-F(z_1,\ n-1),$$

где $F(z,\ n-1)$ — функция χ^2-распределения

$$z_1=\frac{\sqrt{n-1}}{1+q},\quad z_2=\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}.$$

Если нек-рые измерения содержат грубые ошибки, то предыдущие правила оценки μ и σ дадут искаженные результаты. Поэтому очень важно уметь отличать измерения, содержащие грубые ошибки, от измерений, подверженных лишь случайным ошибкам δ_i. Для случая, когда δ_i независимы и имеют одинаковое нормальное распределение, наиболее совершенный способ выявления измерений, содержащих грубые ошибки, предложен Н. В. Смирновым [3].

Лит.: [1] Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962; [2] Большев Л. Н., Смир-

нов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М. 1968; [3] Смирнов Н. В., «Докл. АН СССР», 1941, т. 33, № 5, с. 346—49.

Л. Н. Большев.

ОШИБОЧНОГО ДЕКОДИРОВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТЬ — одна из возможных мер характеризации точности воспроизведения сообщений, передаваемых по *каналу связи* (см. также *Сообщений точность воспроизведения*). Пусть для передачи сообщения ξ, вырабатываемого источником сообщений и принимающего M различных возможных значений $1, \ldots, M$ с распределением вероятностей $p_m = \mathsf{P}\{\xi = m\}$, $m = 1, \ldots, M$, используется нек-рый канал связи. Тогда для фиксированных методов *кодирования и декодирования* (см. также *Информации передача*) О. д. в. $P_{e,m}$, $m = 1, \ldots, M$, определяется равенством

$$P_{e,m} = \mathsf{P}\{\tilde{\xi} \neq m \mid \xi = m\},$$

где $\tilde{\xi}$ — декодированное сообщение на выходе канала.

Средней О. д. в. P_e наз. величина

$$P_e = \mathsf{P}\{\tilde{\xi} \neq \xi\} = \sum_{m=1}^{M} p_m P_{e,m}.$$

Особый интерес представляет изучение оптимальной О. д. в. P_e^{opt}, определяемой равенством

$$P_e^{\mathrm{opt}} = \inf P_e,$$

где нижняя грань берется по всевозможным методам кодирования и декодирования. Ввиду трудностей получения точного выражения для P_e^{opt}, связанных с тем обстоятельством, что в общем случае неизвестны оптимальные методы кодирования, интерес представляет изучение асимптотич. поведения P_e^{opt} при возрастании длительности передачи по каналу. Точнее, рассматривается следующая ситуация. Пусть для передачи используется отрезок длины N канала связи с дискретным временем и $R = (\ln M)/N$. Требуется изучить асимптотич. поведение P_e^{opt} при $N \to \infty$ и $R = \mathrm{const}$ (это означает, что длительность передачи возрастает, а ее скорость остается постоянной). Если рассматриваемый отрезок канала является отрезком однородного *канала без памяти* с дискретным временем и конечными пространствами Y и $\tilde{Y}$ значений компонент сигналов

на входе и выходе, то известны следующие верхние и нижние оценки $P_e^{\text{opt}} = P_e^{\text{opt}}(N, R)$:

$$\exp\{-N[E_{sp}(R-\alpha(N))+\beta(N)]\} \leqslant \leqslant P_e^{\text{opt}}(N, R) \leqslant \exp\{-NE_r(R)\}, \quad (1)$$

где $\alpha(N)$ и $\beta(N)$ стремятся к нулю с ростом N, а функции $E_r(R)$ и $E_{sp}(R)$ определяются следующим образом:

$$E_r(R) = \max_{0 \leqslant \rho \leqslant 1} \max_{q(\cdot)} [E_0(\rho, q(\cdot)) - \rho R], \quad (2)$$

$$E_{sp}(R) = \sup_{\rho > 0} \max_{q(\cdot)} [E_0(\rho, q(\cdot)) - \rho R], \quad (3)$$

где

$$E_0(\rho, q(\cdot)) = -\ln \sum_{\tilde{y} \in \tilde{Y}} \left[\sum_{y \in Y} q(y)\, q(y, \tilde{y})^{\frac{1}{1+\rho}} \right]^{1+\rho}.$$

Здесь $q(\cdot) = \{q(y),\ y \in Y\}$ — произвольное распределение вероятностей на Y, $q(y, \tilde{y}) = \mathsf{P}\{\tilde{\eta}_k = \tilde{y} | \eta_k = y\}$, $y \in Y$, $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, а η_k и $\tilde{\eta}_k$, $k = 1, \ldots, N$,— компоненты сигналов на входе и выходе рассматриваемого канала без памяти. Известно, что $E_r(R)$ и $E_{sp}(R)$, определяемые формулами (2) и (3), являются положительными, выпуклыми вниз, монотонно убывающими функциями от R при $0 \leqslant R < C$, где C — *канала пропускная способность*, причем $E_r(R) = E_{sp}(R)$ при $R \geqslant R_{cr}$, здесь R_{cr} — величина, определяемая переходной матрицей канала и называемая критической скоростью для данного канала без памяти. Таким образом, для значений R, $R_{cr} \leqslant R < C$, главные члены верхней и нижней оценок (1) для P_e^{opt} асимптотически совпадают, откуда следует, что для этого диапазона изменения R известно точное значение функции надежности канала $E(R)$, определяемой равенством

$$E(R) = \overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{-\ln P_e^{\text{opt}}(N, R)}{N}.$$

Для значений R, $0 \leqslant R < R_{cr}$, точное значение $E(R)$ для произвольных каналов без памяти неизвестно (1983), хотя оценки (1) и могут быть улучшены. Экспоненциальный характер убывания $P_e^{\text{opt}}(N, R)$ доказан для весьма широкого класса каналов.

Лит.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Файнстейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ПАДЕ АППРОКСИМАЦИЯ — наилучшая рациональная аппроксимация степенного ряда. Пусть

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \qquad (1)$$

— произвольный степенной ряд (формальный или сходящийся), n, $m \geqslant 0$ — целые числа, $R_{n,m}$ — класс всех рациональных функций вида p/q, где p и q — многочлены от z, $\deg q \leqslant m$, $\deg p \leqslant n$, $q \not\equiv 0$. Аппроксимацией Паде типа (n, m) ряда (1) (функции f) наз. рациональная функция $\pi_{n,m} \in R_{n,m}$, имеющая максимально возможный в классе $R_{n,m}$ порядок касания с рядом (1) в точке $z=0$. Точнее, функция $\pi_{n,m}$ определяется условием

$$\sigma(f-\pi_{n,m})=\max\{\sigma(f-r),\ r \in R_{n,m}\},$$

где $\sigma(\varphi)$ — индекс первого из отличных от нуля коэффициентов ряда

$$\varphi=\sum \varphi_k z^k.$$

Функцию $\pi_{n,m}$ можно определить также как отношение $\pi_{n,m}=p/q$ любых многочленов p, $q (q \not\equiv 0)$, удовлетворяющих соотношениям

$$\deg p \leqslant n, \quad \deg q \leqslant m,$$
$$(qf-p)(z)=A_{n,m} z^{n+m+1}+\dots \qquad (2)$$

При фиксированных n, m существует единственная П. а. $\pi_{n,m}$ ряда (1). Таблица $\{\pi_{n,m}\}_{n,m=0}^{\infty}$ наз. таблицей Паде ряда (1). Последовательности вида $\{\pi_{n,m}\}_{n=0}^{\infty}$ наз. строками таблицы Паде (нулевая строка совпадает с последовательностью многочленов Тейлора для f); $\{\pi_{n,m}\}_{m=0}^{\infty}$ — столбцами таблицы Паде; $\{\pi_{n+j,n}\}_{j=0}^{\infty}$ — диагоналями таблицы Паде. Наиболее важный частный случай $j=0$ — главная диагональ.

Вычисление функции $\pi_{n,m}$ сводится к решению системы линейных уравнений, коэффициенты к-рых выражаются через коэффициенты f_k, $k=0,1,\dots, n+m$, заданного ряда. Если отличен от нуля определитель Ганкеля

$$\Delta_{n,m}=\begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \dots & f_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & f_{n+1} & \dots & f_{n+m-1} \end{vmatrix},$$

то знаменатель $q_{n,m}$ функции $\pi_{n,m}$ определяется по формуле

$$q_{n,m}(z)=\frac{1}{\Delta_{n,m}}\begin{vmatrix} \Delta_{n,m} & \begin{matrix} f_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{n+m} \end{matrix} \\ \hline z^m \dots z & 1 \end{vmatrix}$$

(нормировка $q_{n,m}(0)=1$; явная формула может быть написана и для числителя функции $\pi_{n,m}$). При этом

$$(f-\pi_{n,m})(z)=A_{n,m} z^{n+m+1}+\dots.$$

Последнее соотношение иногда принимают за определение П. а.; в этом случае П. а. могут не существо-

вать для нек-рых (n, m). Для обозначения П. а. типа (n, m) заданного ряда f часто употребляется символ

$$[n/m] = [n/m]_f.$$

Для эффективного вычисления П. а. удобнее пользоваться не явными формулами, а рекуррентными соотношениями, существующими в таблице Паде. Разработано большое количество алгоритмов для машинного вычисления П. а.; эти вопросы имеют особенно важное значение в связи с приложениями (см. [17], [18]).

Впервые общую задачу об интерполяции заданных значений функции в $n+m+1$ различных точках посредством рациональной функции класса $R_{n,m}$ рассмотрел О. Коши [1]; К. Якоби [2] распространил результаты О. Коши на случай кратных узлов интерполяции. Случай одного $(n+m+1)$-кратного узла интерполяции соответствует П. а. Понятие П. а. сформировалось в кон. 19 в. в рамках классич. теории непрерывных дробей (Г. Фробениус [3], А. Паде [4]). Фундаментальные результаты о диагональных П. а. были получены П. Л. Чебышевым, А. А. Марковым, Т. Стильтьесом (T. Stieltjes) в терминах непрерывных дробей; ими были обнаружены и исследованы связи диагональных П. а. с ортогональными многочленами, квадратурными формулами, проблемой моментов и другими вопросами классич. анализа (см. [7] — [9]). Начало изучению строк таблицы Паде было положено работами о радиусах мероморфности функции, заданной степенным рядом, и о сходимости строк таблицы Паде в кругах мероморфности (см. [5], [6]).

С нач. 20 в. П. а. становятся самостоятельным объектом анализа и составляют важную главу теории рациональных приближений аналитич. функций. Используя для своего построения локальные данные (коэффициенты степенного ряда), они позволяют изучать глобальные свойства соответствующей аналитич. функции (аналитич. продолжение, характер и расположение особенностей и т. п.) и вычислять значение функции за пределами круга сходимости степенного ряда.

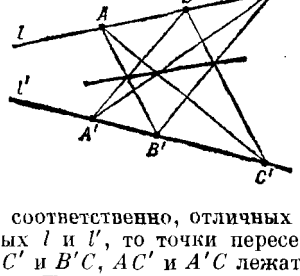
Наряду с классическими П. а. рассматриваются различные их обобщения: общие процессы интерполяции посредством рациональных функций со свободными полюсами (многоточечные аппроксимации Паде); рациональные аппроксимации рядов по заданной системе многочленов (напр., по ортогональным многочленам); совместные П. а. (аппроксимации Паде — Эрмита); рациональные аппроксимации (типа П. а.) степенных рядов от нескольких переменных и др.

Лит.: [1] Cauchy A.-L., Cours d'analyse de l'École royale polytechnique, pt. 1— Analyse algébrique, P., 1821; [2] Jacobi C. G. J., «J. reine und angew. Math.», 1846, Bd 30, S. 127—56; [3] Frobenius G., там же, 1881, Bd 90, S. 1—17; [4] Padé H., «Ann. scient. École norm. super.», 1892, t. 9, p. 1—93; [5] Hadamard J., «J. math. pures et appl.», 1892, t. 8, p. 101—86; [6] Montessus de Ballore R. de, «Bull. Soc. math. France», 1902, t. 30, p. 28—36; [7] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 3, М.— Л., 1948; [8] Марков А. А., Избр. труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, М.— Л., 1948; [9] Стилтьес Т., Исследования о непрерывных дробях, пер. с франц., Хар.— К., 1936; [10] Wall H. S., Analytic theory of continued fractions, Toronto — N. Y.— L., 1948; [11] Perron O., Die Lehre von den Kettenbrüchen, 3 Aufl., Bd 2, Stuttg., 1957; [12] The Padé approximant in theoretical physics, N. Y.— L., 1970; [13] Padé approximants and their applications, L.— N. Y., 1973; [14]

Padé approximants method and its applications to mechanics, B.— Hdlb.— N. Y., 1976; [15] Baker G. A., Essentials of Padé approximants, N. Y.— San Franc.— L., 1975; [16] Padé and rational approximation, N. Y.— [a. o.], 1977; [17] Gilewicz J., Approximants de Padé, B.— Hdlb.— N. Y., 1978; [18] Padé approximation and its applications, B.— Hdlb.— N. Y., 1979.

Е. А. Рахманов.

ПАППА АКСИОМА: если l и l' — две различные прямые, A, B, C и A', B', C' — тройки различных точек



прямых l и l' соответственно, отличных от точки пересечения прямых l и l', то точки пересечения прямых AB' и $A'B$, BC' и $B'C$, AC' и $A'C$ лежат на одной прямой. Выполнение П. а. эквивалентно коммутативности тела, соответствующего рассматриваемой проективной геометрии. *Дезарга предложение* является следствием П. а. (теорема Хессенберга), в то же время П. а. представляет собой вырожденный случай *Паскаля теоремы*. П. а. предложена Паппом (3 в.).

П. С. Моденов, А. С. Пархоменко.

ПАППЕРИЦА УРАВНЕНИЕ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка класса Фукса, имеющее ровно три особые точки:

$$w''+\left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right)w'+$$

$$+\left[\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b}+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right]\times$$

$$\times\frac{w}{(z-a)(z-b)(z-c)}=0,\ \alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1; \qquad (1)$$

здесь a, b, c — попарно различные комплексные числа, α, α' (β, β' и γ, γ') — характеристич. показатели в особой точке $z=a$ (соответственно $z=b$ и $z=c$). П. у. однозначно определяется заданием особых точек и характеристич. показателей. Для решений П. у. (1) используется обозначение Римана:

$$w=P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

Б. Риман исследовал [1] задачу: найти все многозначные аналитические в расширенной комплексной плоскости функции $w(z)$ со следующими свойствами: 1) функция $w(z)$ имеет ровно три особые точки a, b, c; 2) любые три ее ветви связаны линейным соотношением

$$A_1w_1(z)+A_2w_2(z)+A_3w_3(z)=0$$

с постоянными коэффициентами; 3) функция $w(z)$ имеет простейшие особенности в точках a, b, c, а именно: в окрестности точки $z=a$ существуют две ее ветви $\tilde{w}_1(z)$, $\tilde{w}_2(z)$ такие, что

$$\tilde{w}_1(z)=(z-a)^{\alpha}\varphi_1(z),\quad \tilde{w}_2(z)=(z-a)^{\alpha'}\varphi_2(z),$$

где $\varphi_j(z)$, $j=1, 2$,— голоморфные в точке $z=a$ функции; и аналогично для точек b, c.

Б. Риман при нек-рых дополнительных предположениях относительно чисел α, α', . . ., γ' показал, что все такие функции выражаются через гипергеометрич. функции и что $w(z)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка с рациональ-

ными коэффициентами, но явно его не выписал (см. [1]). Это уравнение (уравнение (1)) было приведено Э. Папперицем [2]. Оно наз. также Р-уравнением Римана, уравнением Римана в форме Папперица, уравнением Римана, а его решения наз. Р-функциями.

Основные свойства решений П. у.

1) П. у. инвариантно относительно дробно-линейных преобразований: если $z_1=(Az+B)/(Cz+D)$ отображает точки a, b, c в точки a_1, b_1, c_1, то

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & z_1 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

2) Преобразование

$$\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^k \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^l w = \tilde{w}$$

переводит П. у. в П. у. с теми же особыми точками, но с другими характеристич. показателями:

$$\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^k \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^l P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} =$$

$$= P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha+k & \beta-k-l & \gamma+l & z \\ \alpha'+k & \beta'-k-l & \gamma'+l & \end{Bmatrix}.$$

3) *Гипергеометрическое уравнение*

$$z(1-z)\,w''+[C-(A+B+1)\,z]\,w'-ABw=0$$

есть частный случай П. у. и ему соответствует обозначение Римана

$$P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & A & 0 & z \\ 1-C & B & C-A-B & \end{Bmatrix}.$$

4) Всякое решение П. у. выражается через гипергеометрич. функции:

$$w(z)=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}\times$$

$$\times F\left\{\alpha+\beta+\gamma;\ \alpha+\beta'+\gamma;\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}\right\} \quad (2)$$

в предположении, что $\alpha-\alpha'$ не есть целое отрицательное число. Если все разности $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ — нецелые числа, то, переставляя в (2) местами α и α' или γ и γ', получают четыре решения П. у. Кроме того, П. у. не меняется, если переставлять местами тройки (α, α', a), (β, β', b), (γ, γ', c); все эти перестановки приводят к 24 частным решениям П. у. (1), к-рые впервые были получены Э. Куммером [5].

Лит.: [1] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948, с. 159—75; [2] Papperitz E., «Math. Ann.», 1885, Bd 25, S. 212—21; [3] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1962—63; [4] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950; [5] Kummer E., «J. reine und angew. Math.», 1836, Bd 15, S. 39—83, 127—72.

М. В. Федорюк.

ПАРАБОЛ МЕТОД — метод вычисления корней многочлена

$$P_n(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$$

с комплексными коэффициентами, основанный на интерполяции многочленами 2-й степени. П. м. позволяет найти все корни многочлена без предварительной информации о начальном приближении. Сходимость П. м. установлена лишь эмпирически. Вблизи простого корня скорость сходимости близка к квадратичной.

Вычислительная схема П. м. состоит в следующем. По произвольным комплексным числам z_0, z_1, z_2 как узлам интерполяции строится интерполяционный многочлен Лагранжа для $P_n(z)$. Это будет нек-рый многочлен 2-й степени. Находятся оба его корня и за z_3 берется ближайший к z_2. После этого вместо точек z_0, z_1, z_2 берутся точки z_1, z_2, z_3 и процесс повторяется. Эмпирически установлено, что последовательность z_0, z_1, z_2, z_3, . . ., построенная таким образом, сходится к корню многочлена. Вычисленный корень выделяется, и далее метод применяется к многочлену меньшей степени.

Расчетные формулы П. м.: если z_{i-2}, z_{i-1}, z_i — исходная тройка чисел i-го шага, то в обозначениях

$$h=z-z_i,\ h_i=z_i-z_{i-1},\ h_{i-1}=z_{i-1}-z_{i-2},$$
$$\lambda=h/h_i,\quad \lambda_i=h_i/h_{i-1},\quad \delta_i=1+\lambda_i$$

интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид

$$L^{(i)}(\lambda)=\lambda^2\delta_i^{-1}\left[P_n(z_{i-2})\lambda_i^2-P_n(z_{i-1})\lambda_i\delta_i+P_n(z_i)\lambda_i\right]+$$
$$+\lambda\delta_i^{-1}\left[P_n(z_{i-2})\lambda_i^2-P_n(z_{i-1})\delta_i^2+\right.$$
$$\left.+P_n(z_i)(\lambda_i+\delta_i)\right]+P_n(z_i).$$

Корни $L^{(i)}(\lambda)$ находятся по формуле

$$\lambda=\frac{-2P_n(z_i)\delta_i}{g_i\pm\sqrt{g_i^2-4P_n(z_i)\delta_i\lambda_i[P_n(z_{i-2})\lambda_i-P_n(z_{i-1})\delta_i+P_n(z_i)]}},$$

где

$$g_i=P_n(z_{i-2})\lambda_i^2-P_n(z_{i-1})\delta_i^2+P_n(z_i)(\lambda_i+\delta_i).$$

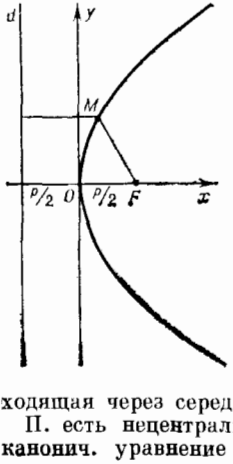
Из двух возможных значений λ берется наименьший по модулю и далее вычисляется

$$\lambda_{i+1}=\lambda;\ h_{i+1}=\lambda_{i+1}h_i;\ z_{i+1}=z_i+h_{i+1}.$$

При реализации описанного процесса на ЭВМ возможно переполнение сверху и снизу при вычислении значения многочлена в точке. Появление больших чисел возможно также при вычислении корней многочлена 2-й степени. Существует ряд приемов, имеющих целью избежать это явление (см. [1], [3]).

Лит.: [1] Воеводин В. В., Численные методы алгебры, М., 1966; [2] Уилкинсон Дж. Х., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970; [3] Бахвалов Н. С., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1971, т. 11, № 6, с. 1568—74.
Г. Д. Ким.

ПАРАБОЛА — плоская кривая, получающаяся в пересечении кругового конуса с плоскостью, не проходящей через вершину конуса и параллельной его образующей. П. есть множество точек M плоскости, для каждой из к-рых расстояние до данной точки F (фокуса П.) равно расстоянию до некрой данной прямой d (директрисы). Расстояние p от фокуса П. до директрисы наз. параметром. П.— симметричная кривая; точка пересечения П. с осью ее симметрии наз. вершиной П., а ось симметрии — осью П. Эксцентриситет равен единице. Диаметр П.— любая прямая, параллельная ее оси, и сама ось. Диаметр П. может быть определен как прямая, проходящая через середины параллельных хорд.



П. есть нецентральная *линия второго порядка*. Ее канонич. уравнение имеет вид

$$y^2=2px.$$

Уравнение касательной к П. в точке (x_0, y_0):

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Уравнение П. в полярных координатах ρ, φ:

$$\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}, \text{ где } 0 < \varphi < 2\pi.$$

П. обладает следующим оптическим свойством: световые лучи, исходящие из фокуса, после зеркального отражения от П. пойдут параллельно оси.

А. Б. Иванов.

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ПОДАЛГЕБРА — подалгебра конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над алгебраически замкнутым полем, содержащая какую-либо подалгебру Бореля, т. е. максимальную разрешимую подалгебру алгебры $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над произвольным полем k, то ее подалгебра $\mathfrak{p}$ наз. П. п., если $\mathfrak{p}\otimes_k\bar{k}$ — П. п. в $\mathfrak{g}\otimes_k\bar{k}$, где $\bar{k}$ — алгебраич. замыкание поля k. Если G — неприводимая линейная алгебраич. группа над полем характеристики 0 и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, то подалгебра $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}$, тогда и только тогда является П. п. в $\mathfrak{g}$, когда она совпадает с алгеброй Ли нек-рой *параболической подгруппы* группы G.

Примерами П. п. в алгебре Ли всех квадратных матриц порядка n над полем k являются подалгебры вида $\mathfrak{p}(\mu)$ ($\mu = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ — произвольный набор натуральных чисел, сумма к-рых равна n), где алгебра $\mathfrak{p}(\mu)$ состоит из всех верхних треугольных блочных матриц, у к-рых диагональные блоки являются квадратными матрицами порядков $m_1, m_2, \ldots, m_s$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная конечномерная алгебра Ли над полем k характеристики 0, $\mathfrak{f}$ — максимальная диагонализируемая над k подалгебра в $\mathfrak{g}$, R — система k-корней алгебры Ли $\mathfrak{q}$ относительно $\mathfrak{f}$, Δ — базис (множество простых корней) системы R и $\mathrm{Aut}_e\mathfrak{g}$ — группа элементарных автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. группа, порожденная автоморфизмами вида $\exp \mathrm{ad}\, x$, где x — нильпотентный элемент алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда всякая П. п. алгебры Ли $\mathfrak{g}$ переводится нек-рым автоморфизмом из группы $\mathrm{Aut}_e\mathfrak{g}$ в одну из стандартных параболических подалгебр вида

$$\mathfrak{p}_\Phi = \mathfrak{g}^0 + \sum\nolimits_{\alpha\in\Pi(\Phi)}\mathfrak{g}^\alpha,$$

где $\mathfrak{g}^0$ — централизатор подалгебры $\mathfrak{f}$ в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^\alpha$ — корневое подпространство алгебры Ли $\mathfrak{g}$, отвечающее корню $\alpha\in R$, Φ — некоторое произвольное подмножество множества Δ, а $\Pi(\Phi)$ — множество тех корней из R, в разложении которых по простым корням из базиса Δ корни, принадлежащие множеству Φ, входят только с неотрицательными коэффициентами. Таким образом, число классов П. п., сопряженных относительно $\mathrm{Aut}_e\mathfrak{g}$, равно 2^r, где $r = |\Delta|$ есть k-ранг полупростой алгебры Ли $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. При этом если $\Phi_1\subseteq\Phi_2$, то $\mathfrak{p}_{\Phi_1}\supseteq\mathfrak{p}_{\Phi_2}$. В частности, $\mathfrak{p}_\phi = \mathfrak{g}$, а $\mathfrak{p}_\Delta$ — минимальная П. п. в $\mathfrak{g}$.

Максимальными П. п. исчерпываются все нередуктивные максимальные подалгебры конечномерных редуктивных алгебр Ли над полем характеристики 0 (см. [2], [3], [5]).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли, пер. с франц., М., 1978; [2] Карпелевич Ф. И., «Докл. АН СССР», 1951, т. 76, № 6, с. 775—78; [3] Морозов В. В., «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, в. 5, с. 191—94; [4] Mostow G. D., «Ann. Math.», 1961, v. 74, № 3, p. 503—17; [5] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1972, т. 16, № 3, с. 3—12.

В. Л. Попов.

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ПОДГРУППА — 1) П. п. линейной алгебраич. группы G, определенной над полем k,— замкнутая в *Зарисского топологии* подгруппа $P\subset G$ такая, что факторпространство G/P является проектив-

ным алгебраич. многообразием. Подгруппа $P \subset G$ тогда и только тогда является П. п., когда она содержит какую-нибудь *Бореля подгруппу* группы G. Параболической подгруппой группы G_k k-рациональных точек группы G наз. подгруппа $P_k \subset G_k$, являющаяся группой k-рациональных точек нек-рой П. п. P в G и плотная в P в топологии Зарисского. Если $\mathrm{char} k = 0$ и $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, то замкнутая подгруппа $P \subset G$ тогда и только тогда является П. п., когда ее алгебра Ли является *параболической подалгеброй в* $\mathfrak{g}$.

Пусть G — связная редуктивная линейная алгебраич. группа. Минимальные k-замкнутые (т. е. определенные над k) П. п. играют в теории таких групп для произвольного основного поля k ту же роль, что подгруппы Бореля для алгебраически замкнутого поля k (см. [1]). В частности, любые две минимальные k-замкнутые П. п. группы G сопряжены над k. Если две k-замкнутые П. п. группы G сопряжены над каким-нибудь расширением поля k, то они сопряжены и над k. Множество классов сопряженных П. п. (соответственно множество классов сопряженных k-замкнутых П. п.) группы G состоит из 2^r (соответственно 2^{r_k}) элементов, где r — ранг коммутанта (G, G) группы G, а r_k — его k-ранг, равный размерности максимального расщепимого над k тора в (G, G). Точнее, каждый такой класс определяется нек-рым произвольным подмножеством множества простых корней (соответственно простых k-корней) группы G аналогично тому, как каждая параболич. подалгебра редуктивной алгебры Ли сопряжена одной из стандартных подалгебр (см. [2], [4]).

Всякая П. п. P группы G связна, совпадает со своим нормализатором и допускает разложение Леви, т. е. может быть представлена в виде полупрямого произведения своего унипотентного радикала и нек-рой k-замкнутой редуктивной подгруппы, наз. подгруппой Леви группы P. Любые две подгруппы Леви в П. п. P сопряжены посредством рационального над k элемента группы P. Две П. п. группы G наз. противоположными, если их пересечение является подгруппой Леви в каждой из них. Замкнутая подгруппа группы G тогда и только тогда является П. п., когда она совпадает с нормализатором своего унипотентного радикала. Всякая максимальная замкнутая подгруппа группы G либо является П. п., либо имеет редуктивную связную компоненту единицы (см. [2], [4]).

П. п. в группе $\mathrm{GL}_n(k)$ невырожденных линейных преобразований n-мерного векторного пространства V над полем k исчерпываются подгруппами $P(\nu)$, состоящими из всех автоморфизмов пространства V, которые сохраняют фиксированный флаг типа $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_t)$ в V. При этом факторпространство $\mathrm{GL}_n(k)/P(\nu)$ совпадает с многообразием всех флагов типа ν в пространстве V.

В случае, когда $k = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$-замкнутые П. п. допускают следующую геометрич. интерпретацию (см. [5]). Пусть $G_{\mathbb{R}}$ — некомпактная полупростая вещественная группа Ли, совпадающая с группой вещественных точек полупростой алгебраич. группы G. Подгруппа группы $G_{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда является П. п., когда она совпадает с группой движений соответствующего некомпактного симметрич. пространства M, сохраняющих нек-рый k-пучок геодезич. лучей в M (два геодезич. луча в M считаются принадлежащими одному k-пучку, если расстояние между двумя точками, движущимися с одинаковыми постоянными скоростями вдоль этих лучей в бесконечность, стремится к конечному пределу).

2) П. п. системы Титса (G, B, N, S) — подгруппа группы G, сопряженная подгруппе, содержащей B. Каждая П. п. совпадает со своим нормализатором.

Пересечение любых двух П. п. содержит подгруппу группы G, сопряженную с $T=B\cap N$. В частности, П. п. системы Титса, связанной с редуктивной линейной алгебраич. группой G,— это то же, что П. п. группы G (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; [2] их же, там же, 1972, т. 16, № 3, с. 3—12; [3] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли, пер. с франц., М., 1978; [4] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980; [5] Карпелевич Ф. И., «Труды Моск. матем. об-ва», 1965, т. 14, с. 48—185.

В. Л. Попов.

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ РЕГРЕССИЯ, полиномиальная регрессия,— модель регрессии, в к-рой функции регрессии суть многочлены. Точнее, пусть $X=(X_1, \ldots, X_m)^T$ и $Y=(Y_1, \ldots, Y_n)^T$ — случайные векторы, принимающие значения $x=(x_1, \ldots, x_m)^T\in\mathbb{R}^m$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)^T\in\mathbb{R}^n$, и пусть существует

$$\mathsf{E}\{Y\mid X\}=f(X)=(f_1(X), \ldots, f_n(X))^T$$

(т. е. существуют $\mathsf{E}\{Y_1|X\}=f_1(X), \ldots, \mathsf{E}\{Y_n|X\}=f_n(X)$). Регрессия наз. параболической, если компоненты вектора $\mathsf{E}\{Y|X\}=f(X)$ суть многочлены от компонент вектора X. Напр., в простейшем случае, когда Y и X — обычные случайные величины, уравнение П. р. имеет вид

$$y=\beta_0+\beta_1X+\ldots+\beta_pX^p,$$

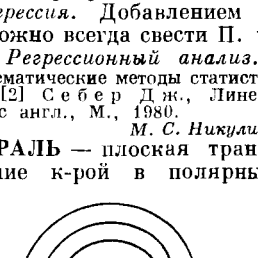
где $\beta_0, \ldots, \beta_p$ — коэффициенты регрессии. Частный случай П. р.— *линейная регрессия*. Добавлением к вектору X новых компонент можно всегда свести П. р. к линейной. См. *Регрессия, Регрессионный анализ.*

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Себер Дж., Линейный регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1980.

М. С. Никулин.

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ — плоская трансцендентная кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид

$$\rho=a\sqrt{\varphi}+l,\quad l>0.$$



Каждому значению φ соответствуют два значения $\sqrt{\varphi}$ — положительное и отрицательное. Кривая имеет бесконечно много двойных точек и одну точку перегиба (см. рис.). Если $l=0$, то кривая наз. *Ферма спиралью*. П. с. относится к т. н. алгебраич. спиралям (см. *Спирали*).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ТОЧКА — точка регулярной поверхности, в к-рой соприкасающийся параболоид вырождается в параболич. цилиндр. В П. т. *Дюпена индикатриса* является парой параллельных прямых, гауссова кривизна равна нулю, одна из главных кривизн обращается в нуль, а для коэффициентов второй квадратичной формы справедливо равенство

$$LN-M^2=0.$$

Д. Д. Соколов.

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — числа u и v, связанные с прямоугольными координатами x и y формулами

$$x=u^2-v^2,\quad y=2uv,$$



где $-\infty<u<\infty$, $0\leqslant v<\infty$. Координатные линии: две системы взаимно ортогональных парабол с противоположно направленными осями.

Коэффициенты Ламе:

$$L_u=L_v=2\sqrt{u^2+v^2}.$$

Элемент площади:

$$d\sigma = 4\,(u^2+v^2)\,du dv.$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\operatorname{grad}_u f = \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}\,\frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\operatorname{grad}_v f = \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}\,\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\operatorname{div} a = \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}\left(\frac{\partial a_u}{\partial u}+\frac{\partial a_v}{\partial v}\right)+\frac{1}{2\sqrt{(u^2+v^2)^3}}\,(ua_u+va_v),$$

$$\Delta f = \frac{1}{4\,(u^2+v^2)}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right).$$

Уравнение Лапласа допускает в П. к. разделение переменных.

Д. Д. Соколов.

ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР — цилиндрическая *поверхность второго порядка*, для к-рой направляющей служит парабола. Каноническое уравнение П. ц.:

$$y^2 = 2px.$$

А. Б. Иванов.

ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$u_t - \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x,\,t)\,u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x,\,t)\,u_{x_i} - a(x,\,t)\,u = f(x,\,t),$$

где $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ — положительно определенная квадратичная форма. Переменная t выделена и играет роль времени. Типичным примером П. т. у. является уравнение теплопроводности

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0.$$

А. П. Солдатов.

ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА УРАВНЕНИЕ; численные методы решения — методы решения уравнений параболич. типа на основе вычислительных алгоритмов. Для решения П. т. у. часто применяются приближенные численные методы, рассчитанные на использование быстродействующих ЭВМ. Наиболее универсальным является метод сеток (конечноразностный метод).

Ниже рассмотрен метод сеток на примере уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,\,t), \quad t>0, \quad 0<x<l, \tag{1}$$

с краевыми условиями 1-го рода

$$u(0,\,t)=\mu_1(t),\ u(l,\,t)=\mu_2(t),\ u(x,\,0)=u_0(x).$$

Вводится равномерная сетка узлов $(x_i,\,t_n)$,

$x_i = ih,\ i=0,\,1,\,\ldots,\,N,\ hN=l,\ t_n=n\tau,\ n=0,\,1,\,\ldots;$

и обозначения

$$y_i^n = y(x_i,\,t_n),\ y_{t,\,i} = (y_i^{n+1}-y_i^n)/\tau,$$

$$y_{\overline{x},\,i}^{\,n} = (y_i^n - y_{i-1}^n)/h,\ y_{x,\,i}^n = (y_{i+1}^n - y_i^n)/h,$$

$$y_{\overline{x}x,\,i}^{\,n} = (y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n)/h^2.$$

Метод сеток состоит в том, что уравнение (1) приближенно заменяется системой линейных алгебраич. уравнений (разностной схемой)

$$\left.\begin{aligned} y_{t,\,i}^n = \sigma y_{\overline{x}x,\,i}^{\,n+1} + (1-\sigma)\,y_{\overline{x}x,\,i}^{\,n} + \varphi_i^n,\ i=1,2,\ldots,N-1,\\ y_0^n=\mu_1(t_n),\ y_N^n=\mu_2(t_n),\ y_i^0=u_0(x_i),\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где σ — числовой параметр и φ_i^n — сеточная аппроксимация функции $f(x,\,t)$, напр. $\varphi_i^n = f(x_i,\,t_n+0{,}5\tau)$.

Система уравнений (2) решается по слоям, т. е. для каждого $n=0, 1, \ldots$ по известным значениям y_i^n, φ_i^n находятся новые значения y_i^{n+1}, $i=1, 2, \ldots, N-1$. Если $\sigma=0$ (явная схема), то y_i^{n+1} выражаются явным образом через y_i^n, φ_i^n. Если же $\sigma\neq 0$ (неявные схемы), то относительно y_i^{n+1}, $i=1, 2, \ldots, N-1$, возникает система уравнений, имеющая трехдиагональную матрицу. Эта система уравнений решается *прогонки методом*. Недостатком явной схемы является сильное ограничение на шаг τ, возникающее из условия устойчивости, а именно $\tau \leqslant 0{,}5\, h^2$. Неявные схемы при $\sigma \geqslant 0{,}5$ абсолютно устойчивы, т. е. устойчивы при любых шагах h и τ. Известны и другие разностные схемы для уравнения (1) (см. [1], [2]).

Если схема (2) устойчива и φ_i^n аппроксимирует $f(x, t)$, то при $h, \tau \to 0$ решение y_i^n разностной задачи сходится к решению $u(x_i, t_n)$ исходной задачи (см. [1]). Порядок точности зависит от параметра σ. Так, симметричная схема ($\sigma=0{,}5$, $\varphi_i^n = f(x_i, t_n+0{,}5\tau)$) имеет второй порядок точности по τ и по h, т. е. для каждого n выполняется оценка

$$\max_{0<i<N} |\, y_i^n - u(x_i, t_n)\,| \leqslant M(\tau^2+h^2)$$

с константой M, не зависящей от h и τ. При $\sigma=0{,}5$ — $-h^2/(12\tau)$ и специальном выборе φ_i^n схема (2) имеет точность $O(\tau^2+h^4)$. Для остальных σ — точность $O(\tau+h^2)$.

При решении П. т. у. на больших отрезках времени существенное значение имеет асимптотич. устойчивость разностной схемы. Решение уравнения (1) с $f(x, t)=0$, $\mu_1(t)=\mu_2(t)=0$ ведет себя при $t\to\infty$ как $e^{-\lambda_1 t}$, $\lambda_1=\pi^2/l^2$. Этим свойством обладает не всякая разностная схема, аппроксимирующая уравнение (1). Напр., симметричная схема ($\sigma=0{,}5$) асимптотически устойчива при условии $\tau \leqslant lh/\pi$. Построены схемы 2-го порядка точности, асимптотически устойчивые при любых τ, h, однако они не входят в семейство (2) (см. [3]).

Краевые условия 3-го рода

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - \beta u(0, t) = \mu(t)$$

аппроксимируются с порядком $O(h^2)$ разностными уравнениями

$$\sigma\left(y_{x,0}^{n+1} - (\beta y_0^{n+1} + \mu^{n+1})\right) + (1-\sigma)\left(y_{x,0}^n - (\beta y_0^n + \mu^n)\right) = 0{,}5h\,(y_{t,0}^n - \varphi_0^n),\quad \mu^n = \mu(t_n).$$

Для уравнения теплопроводности в цилиндрич. и сферич. координатах

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r^m}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^m \frac{\partial u}{\partial r}\right),\ m=1, 2,\quad 0<r<R,$$

вводится сетки (r_i, t_n), где $t_n=n\tau$, $n=0, 1, \ldots$, $r_i = \left(i+\frac{m}{2}\right)h$, $i=0, 1, \ldots, N$, $h=\frac{R}{N+0{,}5m}$, $m=1, 2$, и рассматриваются разностные уравнения (см. [4])

$$y_{t,i}^n = \Lambda_r^{(m)}\left(\sigma y_i^{n+1} + (1-\sigma)\, y_i^n\right),$$

где

$$\Lambda_r^{(m)} y_0^n = \frac{1}{r_0^m}\left(\overline{r}_1^m \frac{y_1^n - y_0^n}{h}\right),$$

$$\Lambda_r^{(m)} y_i^n = \frac{1}{r_i^m}\frac{1}{h}\left(\overline{r}_{i+1}^m \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h} - \overline{r}_i^m \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h}\right),$$

$\overline{r}_i = 0{,}5\,(r_i + r_{i+1})$ при $m=1$, $\overline{r}_i = \sqrt{r_i r_{i-1}}$ при $m=2$, $i=1, 2, \ldots, N-1$.

Для решения П. т. у. с переменными коэффициентами применяются однородные консервативные разностные схемы, выражающие на сетке законы сохранения, присущие исходному дифференциальному уравнению (см. [1], [5]). При построении разностных схем для П. т. у. с переменными коэффициентами применяются методы: баланса, вариационный, конечных элементов. Напр., для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,\ t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$$

используются разностные схемы с весами

$$y^n_{t,\ i} = (a(\sigma y^{n+1} + (1-\sigma)\ y^n)_{\overline{x}})_{x,\ i} + \varphi^n_i,$$

где

$$a = a^n_i = k(x_i - 0{,}5h,\ t_n + 0{,}5\tau).$$

Доказана сходимость и получены оценки погрешности однородных консервативных разностных схем для П. т. у. как в случае непрерывных, так и в случае разрывных коэффициентов (см. [1]).

Для решения систем уравнений параболич. типа, содержащих одну пространственную переменную, применяются те же разностные схемы, что и для одного уравнения. Вектор y^{n+1} решения на новом слое находится *матричной факторизации методом*.

При решении квазилинейного П. т. у. используются неявные абсолютно устойчивые разностные схемы. Решение y^{n+1} разностного уравнения находится итерационным методом с использованием прогонки. Напр., для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ k(u) > 0, \qquad (3)$$

применяют чисто неявную разностную схему

$$y^n_{t,\ i} = (a(y^{n+1}_i)\ y^{n+1}_{\overline{x}})_{x,\ i},$$
$$a(y^{n+1}_i) = 0{,}5\,(k(y^{n+1}_i) + k(y^{n+1}_{i-1})),$$

к-рую решают с помощью итерационного метода (s — номер итерации):

$$y^{(s+1)}_i = y^n_i + \tau\,(a(y^{(s)}_i)\ y^{(s+1)}_{\overline{x}})_{x,\ i},\ s = 0,\ 1,\ \ldots,\ m,$$
$$y^{(0)}_i = y^n_i,\quad y^{(m+1)}_i = y^{n+1}_i.$$

Решение $y^{(s+1)}_i$ на каждой итерации находится методом прогонки. При решении нелинейного П. т. у. нашли также применение схемы, основанные на идее *Рунге — Кутта метода*. Так, для уравнения (3) используется двухэтапный метод

$$y^{n+1/2}_i = y^n_i + 0{,}5\tau\,(a(y^n_i)\ y^{n+1/2}_{\overline{x}})_{x,\ i},$$
$$y^{n+1}_i = y^n_i + 0{,}5\tau\,(a(y^{n+1/2}_i)\ (y^{n+1} + y^n)_{\overline{x}})_{x,\ i}.$$

Тестирование и проверка качества разностных схем для нелинейного П. т. у. проводится путем сравнения с точными автомодельными решениями, такими, напр., как решение типа температурной волны (см. [6]).

При решении многомерного П. т. у. используются *переменных направлений методы*, к-рые позволяют свести решение многомерной задачи к решению последовательности одномерных задач (см. [1], [7] — [10]). Предложено и исследовано значительное число абсолютно устойчивых алгоритмов переменных направлений. Эти алгоритмы являются экономичными в том смысле, что число арифметич. действий, необходимых для вычисления решения на новом временно́м слое t_{n+1}, имеет порядок числа узлов пространственной сетки. Ниже рассмотрен пример схемы переменных направлений для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\ (x_1,\ x_2) \in G,\ t > 0 \qquad (4)$$

в прямоугольнике $G\{0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha=1, 2\}$. Вводится сетка

$$x_{ij}=(x_1^{(i)},\ x_2^{(j)}),\ x_1^{(i)}=ih_1,\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ N_1,\ \ h_1N_1=l_1,$$
$$x_2^{(j)}=jh_2,\ j-0,\ 1,\ \ldots,\ N_2,\ h_2N_2=l_2$$

и обозначения

$$y_{ij}^n=y\,(x_{ij},\ t_n),\ y_{ij}^{n+1/2}=y\,(x_{ij},\ t_n+0{,}5\tau),$$
$$\Lambda_1y_{ij}^n=(y_{i+1,j}^n-2y_{ij}^n+y_{i-1,j}^n)/h_1^2,$$
$$\Lambda_2y_{ij}^n=(y_{i,j+1}^n-2y_{ij}^n+y_{i,j-1}^n)/h_2^2.$$

Уравнение (4) решается с помощью следующей разностной схемы

$$\frac{y_{ij}^{n+1/2}-y_{ij}^n}{0{,}5\tau}=\Lambda_1y_{ij}^{n+1/2}+\Lambda_2y_{ij}^n,$$
$$\frac{y_{ij}^{n+1}-y_{ij}^{n+1/2}}{0{,}5\tau}=\Lambda_1y_{ij}^{n+1/2}+\Lambda_2y_{ij}^{n+1}.$$

Эти уравнения записываются при $i=1,\ \ldots,\ N_1-1$, $j=1,\ \ldots,\ N_2-1$ и доопределяются соответствующими граничными условиями. Из первого уравнения прогонкой по направлению x_1 для каждого $j=1,\ 2,\ \ldots,\ N_2-1$ находится $y_{ij}^{n+1/2}$, а затем из второго уравнения прогонкой по направлению x_2 для каждого $i=1,\ 2,\ \ldots,\ N_1-1$ находится y_{ij}^{n+1}. Таким образом, вычислительный алгоритм состоит в последовательном применении одномерных прогонок.

Теоретич. основой построения и исследования экономичных разностных схем для многомерного П. т. у. является метод суммарной аппроксимации (см. [1], [8], [9]). Обобщением методов переменных направлений явились аддитивные экономичные схемы с уравнениями на графах и векторные схемы (см. [11]).

В случае нерегулярных пространственных сеток разностные схемы для П. т. у. строятся методом конечных элементов и методом баланса (см. [12]).

Для решения сеточных уравнений, возникающих при аппроксимации многомерного П. т. у. неявными разностными схемами, применяются эффективные прямые и итерационные методы, разработанные для эллиптических разностных краевых задач: метод разделения переменных, использующий алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье, метод циклич. редукции, попеременно-треугольный итерационный метод и др. (см. [13]).

Лит.: [1] Самарский А. А., *Теория разностных схем*, М., 1977; [2] Саульев В. К., Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, М., 1960; [3] Самарский А. А., Гулин А. В., Устойчивость разностных схем, М., 1973; [4] Фрязинов И. В., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1971, т. 11, № 5, с. 1219—28; [5] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [6] Самарский А. А., Соболь И. М., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1963, т. 3, № 4, с. 702—19; [7] Яненко Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967; [8] Самарский А. А., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 1, с. 25—56; [9] Яненко Н. Н., «Сиб. матем. ж.», 1964, т. 5, № 6, с. 1431—34; [10] Дьяконов Е. Г., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 4, с. 549—68; [11] Самарский А. А., Фрязинов И. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 6, с. 167—96; [12] Фрязинов И. В., «Дифференц. уравнения», 1980, т. 16, № 7, с. 1332—43; [13] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

А. В. Гулин.

ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОД — метод приближенного решения высокочастотных дифракционных задач (см. *Дифракции математическая теория*). Как правило, к П. у. м. приходится прибегать для нахождения волнового поля в тех областях, где *лучевой метод* применять нельзя из-за того, что поле лучей теряет в том или ином смысле регулярность. Пусть, напр., поставлена задача о падении плоской

волны на идеально отражающее выпуклое тело. Волновой процесс описывается уравнением Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2\right)u=0. \qquad (1)$$

Здесь точка (x, y) пробегает внешность ограниченной выпуклой области Ω, на границе к-рой выполняется краевое условие Дирихле $u|_S=0$. Предполагается, что $\partial\Omega=S\in C^\infty$ и имеет всюду положительную кривизну. Решение u представимо в виде $e^{ikx}+u^0$, где u^0 удовлетворяет *излучения условиям*. Решение такой задачи существует и единственно.

В высокочастотном случае (k «велико») важно построить формальное коротковолновое решение этой задачи (т. е., грубо говоря, разложение, формально удовлетворяющее всем условиям задачи, достаточно далекие члены к-рого имеют сколь угодно высокий порядок малости при $k\to\infty$). Можно показать, что в рассматриваемом случае формальное решение будет асимптотич. разложением классич. решения.

Лучевой метод позволяет построить искомое коротковолновое разложение всюду, кроме области тени (см. рис.). Выражение для волнового поля, построенное с помощью лучевого метода, теряет гладкость на границе тень—свет (полупрямые OA и $O'A'$ на рис.). В окрестности OA (и $O'A'$) коротковолновая асимптотика волнового поля уже не выражается лучевыми формулами. Окрестности OA (и $O'A'$) наз. обычно полутенью.



Ключевым моментом при построении формального решения поставленной выше задачи является рассмотрение окрестности точек касания O и O' лучей падающей волны и кривой $S=\partial\Omega$. Точка O принята за начало координат, положительная часть оси Ox отделяет область *тени* от *освещенной* области.

Пусть в окрестности O введены новые координаты s, n. Точка $M\notin S$ характеризуется ее расстоянием вдоль S от O. Считается, что $s>0$ (соответственно $s<0$) в области тени (соответственно в освещенной области). Если $M\in\Omega$, то точка M характеризуется ее расстоянием n от S и координатой s проекции M на S. В координатах s, n уравнение Гельмгольца имеет вид

$$\left(1+\frac{n}{\rho}\right)^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\left(1+\frac{n}{\rho}\right)\frac{\partial u}{\partial n}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\left(1+\frac{n}{\rho}\right)^{-1}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{\partial u}{\partial s}\right)\right]+k^2u=0 \qquad (2)$$

($\rho=\rho(s)>0$ — радиус кривизны S в точке s).

Используя ряд Маклорена для $\frac{1}{\rho}$:

$$\frac{1}{\rho}\sim\frac{1}{\rho}\Big|_{s=0}+s\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)_{s=0}+\dots,$$

можно заменить все коэффициенты уравнения (2) их формальными разложениями по степеням s и n. В растянутых координатах

$$\sigma=\frac{k^{1/3}s}{\sqrt[3]{2}\rho^{2/3}},\quad \nu=\sqrt[3]{\frac{2}{\rho_0}}\,k^{2/3}n,\quad \rho_0=\rho(0),$$

полагая в уравнении (2)

$$u\sim e^{iks}\left(v_0(\sigma,\nu)+k^{-1/3}v_1(\sigma,\nu)+\dots\right) \qquad (3)$$

и приравнивая нулю коэффициенты при последовательных степенях $k^{-1/3}$, приходят к типичной для метода пограничного слоя цепочке рекуррентных уравнений

$$L_0v_0=0,\ L_0v_1+L_1v_0=0,\ L_0v_2+L_1v_1+L_2v_0=0.$$

Здесь первое уравнение и есть «параболическое» уравнение, давшее название П. у. м.:

$$L_0 v_0 \equiv i\frac{\partial v_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial \nu^2} + \nu v_0 = 0. \qquad (4)$$

По существу уравнение (4) является уравнением типа Шрёдингера. В операторах L_j коэффициенты — полиномы от σ и ν. Для формального выполнения краевого условия $u|_S = 0$ достаточно потребовать, чтобы $u_j|_S = 0$. Роль других краевых условий играет требование, чтобы при больших $|\sigma|$, $\sigma < 0$, ряд (3) формально переходил бы в разложение лучевого метода. Для v_0 можно вывести явную формулу (т. н. ф о р м у л у Ф о к а), имеющую вид интеграла Фурье

$$\int e^{i\sigma\zeta}\Phi(\nu, \zeta)\, d\zeta,$$

где Φ сравнительно просто выражается через функции Эйри. Методика склеивания (сращивания) асимптотич. разложений дает возможность получить формулы для волнового поля по всей области тени и полутени.

В случае волн соскальзывания и шепчущей галереи выводятся соответствующие «параболические» уравнения и их решения выражаются через функции Эйри. Развитие теории лазеров привело к необходимости рассматривать волны, сосредоточенные в окрестности изолированных лучей. Выделяя соответствующий фазовый множитель и проводя далее построения, аналогичные построениям метода пограничного слоя, приходят к «параболическому» уравнению, через решение к-рого выражается в первом приближении волновое поле. В этом случае «параболическое» уравнение будет уравнением Шрёдингера с квадратичным потенциалом. П. у. м. находит применение также при расчете волнового поля в световодах, в статистически неоднородных средах и во многих др. задачах. Аналоги П. у. м. используются в теории нелинейных волн.

Лит.: [1] Ф о к В. А., Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, М., 1970; [2] Б а б и ч В. М., Б у л д ы р е в В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [3] Б а б и ч В. М., К и р п и ч н и к о в а Н. Я., Метод пограничного слоя в задачах дифракции, Л., 1974.

В. М. Бабич.

ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА ФУНКЦИИ, В е б е р а ф у н к ц и и, В е б е р а — Э р м и т а ф у н к ц и и,— решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) y = 0, \qquad (*)$$

к-рое получается в результате разделения переменных в волновом уравнении $\Delta u = k^2 u$ в параболических цилиндрич. координатах. Наиболее часто используется решение

$$D_\nu(z) \equiv U\left(-\nu - \frac{1}{2},\, z\right) = 2^{(\nu-1)/2} e^{-z^2/2}\, \Psi\left(\frac{1-\nu}{2},\, \frac{3}{2};\, \frac{z^2}{2}\right),$$

где $\Psi(a, b; z)$ — вырожденная гипергеометрич. функция. Уравнению (*) удовлетворяют также $D_\nu(-z)$, $D_{-\nu-1}(\pm iz)$. Функции $D_\nu(z)$ и $D_{-\nu-1}(\pm iz)$ линейно независимы при любых ν, $D_\nu(z)$ и $D_\nu(-z)$ при $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ П. ц. ф.— целые функции от z. Функция $D_\nu(z)$ действительна при действительных ν и z.

Формулы дифференцирования ($n = 1, 2, \ldots$):

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[e^{z^2/4} D_\nu(z)\right] = (-1)^n (-\nu)_n e^{z^2/4} D_{\nu-n}(z),$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[e^{-z^2/4} D_\nu(z)\right] = (-1)^n e^{-z^2/4} D_{\nu+n}.$$

Рекуррентные формулы:

$$D_{\nu+1}(z) - zD_\nu(z) + \nu D_{\nu-1}(z) = 0,$$

$$D'_\nu(z) + \frac{z}{2} D_\nu(z) - \nu D_{\nu-1}(z) = 0,$$

$$D'_\nu(z) - \frac{z}{2} D_\nu(z) + D_{\nu+1}(z) = 0.$$

Асимптотика: при фиксированном ν $|\arg z| < 3\pi/4$ и $|z| \to \infty$

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-z^2/4}\left[\sum_{k=0}^{N} \frac{(-\nu/2)_k\,(1/2-\nu/2)_k}{k!}\left(\frac{z^2}{-2}\right)^{-k} + O\left(|z|^{-2N-2}\right)\right],$$

при ограниченном $|z|$, $|\arg(-\nu)| \leqslant \pi/2$ и $|\nu| \to \infty$

$$D_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[\frac{\nu}{2}\ln(-\nu) - \frac{\nu}{2} - \sqrt{-\nu}\,z\right] \times \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\nu|}}\right)\right].$$

П. ц. ф. связана с др. функциями следующими соотношениями. С многочленами Эрмита:

$$D_n(z) = 2^{-n/2} e^{-z^2/4} H_n(z/\sqrt{2}),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$

с интегралом вероятности:

$$D_{-n-1}(z) = \frac{(-1)^n\sqrt{2}}{n!}\, e^{-z^2/4}\frac{d^n}{dz^n}\left(e^{z^2/2}\operatorname{erf}\frac{z}{\sqrt{2}}\right),$$
$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$

с функциями Бесселя:

$$D_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}}\, K_{1/4}\left(\frac{z^2}{4}\right).$$

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [2] Миллер Дж.-Ч.-П., Таблицы функций Вебера (функций параболического цилиндра), пер. с англ., М., 1968.
Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

ПАРАБОЛОИД — незамкнутая нецентральная *поверхность второго порядка*. Канонич. уравнения П.:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,\ p,\ q > 0,$$

— *эллиптический параболоид* (при $p = q$ называется П. вращения) и

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,\ p,\ q > 0,$$

— *гиперболический параболоид*. *А. Б. Иванов.*

ПАРАБОЛОИДАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ — числа u, v и w, связанные с прямоугольными координатами x, y и z формулами:

$$x = 2uw\cos v,\ y = 2uw\sin v,\ z = u^2 - w^2,$$

где $0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v < 2\pi$, $0 \leqslant w < \infty$. Координатные поверхности: две системы параболоидов вращения с противоположно направленными осями ($u = \text{const}$ и $w = \text{const}$) и полуплоскости ($v = \text{const}$). Система П. к.— ортогональная.

Коэффициенты Ламе:

$$L_u = L_w = 2\sqrt{u^2 + w^2},\ L_v = 2uw.$$

Элемент площади поверхности:

$$d\sigma = 4\sqrt{(u^2+w^2)\,u^2w^2\,(du^2+dw^2)\,dv^2 + (u^2+w^2)(du\,dw)^2}.$$

Элемент объема:

$$dV = 8\,(u^2+w^2)\,uw\,du\,dv\,dw.$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\operatorname{grad}_u\varphi = \frac{1}{2\sqrt{u^2+w^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial u},\ \operatorname{grad}_v\varphi = \frac{1}{2uw}\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

$$\operatorname{grad}_w\varphi = \frac{1}{2\sqrt{u^2+w^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial w},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \frac{1}{2uw\sqrt{(u^2+w^2)^3}}\left[wa_u\,(2u^2+w^2) + ua_w\,(u^2+2w^2)\right] + \frac{1}{2\sqrt{u^2+w^2}}\left(\frac{\partial a_u}{\partial u} + \frac{\partial a_w}{\partial w}\right) + \frac{1}{2uw}\frac{\partial a_v}{\partial v};$$

$$\mathrm{rot}_u\, \boldsymbol{a} = \frac{1}{2uw}\frac{\partial a_w}{\partial v} - \frac{1}{2w\sqrt{u^2+w^2}}\left(a_v + w\frac{\partial a_v}{\partial w}\right),$$

$$\mathrm{rot}_v\, \boldsymbol{a} = \frac{1}{2\sqrt{(u^2+w^2)^3}}(wa_u - a_w) + \frac{1}{2\sqrt{u^2+w^2}}\left(\frac{\partial a_u}{\partial w} - \frac{\partial a_w}{\partial u}\right),$$

$$\mathrm{rot}_w\, \boldsymbol{a} = \frac{1}{2w(u^2+w^2)}\left(a_v + u\frac{\partial a_v}{\partial u}\right) - \frac{1}{2uv}\frac{\partial a_u}{\partial v};$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{4(u^2+w^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial u^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{w^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2} + \frac{1}{w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right].$$

Д. Д. Соколов.

ПАРАДОКС — то же, что *антиномия*.

ПАРАКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, в любое открытое покрытие к-рого можно вписать локально конечное открытое покрытие. (Семейство γ множеств, лежащих в топологич. пространстве X, наз. локально конечным в X, если у каждой точки $x \in X$ существует окрестность в X, пересекающаяся лишь с конечным множеством элементов семейства γ; семейство γ множеств вписано в семейство λ множеств, если каждый элемент семейства γ содержится в нек-ром элементе семейства λ.) Паракомпактом наз. паракомпактное хаусдорфово пространство. Класс паракомпактов весьма широк — он включает все метрич. пространства (теорема Стоуна) и все бикомпакты. Однако не каждое локально бикомпактное хаусдорфово пространство паракомпактно.

Значение паракомпактности определяется отмеченной общностью этого понятия и рядом замечательных свойств паракомпактов. Прежде всего, каждое хаусдорфово П. п. нормально. Это позволяет строить на паракомпактах разбиения единицы, подчиненные произвольному заданному открытому покрытию γ. Так называются семейства действительных неотрицательных непрерывных функций на пространстве, подчиненные следующим условиям: а) семейство носителей этих функций локально конечно и вписано в γ; б) в каждой точке пространства сумма значений всех тех функций семейства, к-рые отличны в ней от нуля (а таких функций конечное число), равна 1. Разбиения единицы являются основным средством построения погружений пространств в стандартные пространства. В частности, они используются для вложений многообразий в евклидовы пространства и при доказательстве теоремы о метризуемости каждого тихоновского пространства с σ-локально конечной базой. Кроме того, на разбиениях единицы в теории многообразий основаны методы, с помощью к-рых осуществляется единовременный синтез локальных построений, производимых в пределах отдельных карт (в частности, тех или иных векторных и тензорных полей). Поэтому одним из требований исходных в теории многообразий является требование паракомпактности, не являющееся лишним, т. к. существуют непаракомпактные связные хаусдорфовы многообразия.

В присутствии паракомпактности нек-рые локальные свойства пространства синтезируются и выполняются глобально. В частности, если паракомпакт локально метризуем, то он метризуем; если хаусдорфово пространство локально полно по Чеху и паракомпактно, то оно полно по Чеху. В *размерности теории* для паракомпактов удается получить ряд важных соотношений, не распространяющихся даже на нормальные пространства. Это не удивительно, т. к. одно из основных определений размерности — по Лебегу — связано с рассмотрением кратности открытых покрытий, что, несомненно,

родственно идее локальной конечности, на к-рой основано определение паракомпактности.

Паракомпактность не наследуется произвольными подпространствами (в отличие от метризуемости), иначе, напр., все *тихоновские пространства*, как подпространства бикомпактных, оказались бы паракомпактами. Но каждое замкнутое подпространство паракомпакта есть паракомпакт. Большим недостатком паракомпактности является отсутствие мультипликативности: произведение двух паракомпактов может паракомпактом не быть. С другой стороны, в классе хаусдорфовых пространств прообраз паракомпакта при совершенном отображении является паракомпактом, и образ паракомпакта при непрерывном замкнутом отображении является паракомпактом. К числу паракомпактов относятся, в частности, *Линделёфа пространства*. Для пространства всех непрерывных действительных функций на произвольном тихоновском пространстве, наделенном топологией поточечной сходимости, паракомпактность равносильна линделёфовости. Если банахово пространство в слабой топологии топологически порождается нек-рым лежащим в нем бикомпактом, то оно паракомпактно. Важный пример паракомпактов — полиэдры, стоящие за *CW*-комплексами.

В классе паракомпактов упрощаются критерии метризуемости. В частности, паракомпакт метризуем в том и только в том случае, если он обладает базой счетного порядка, т. е. базой, любая убывающая последовательность элементов к-рой, содержащих какую-либо точку $x \in X$, непременно образует базу в этой точке. Многообразны *паракомпактности критерии*. В частности, для тихоновского пространства X равносильны *условия*: а) X паракомпактно, б) в любое открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное покрытие, в) в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать σ-локально конечное открытое покрытие, г) в любое открытое покрытие пространства X можно вписать к о н с е р в а т и в н о е з а м к н у т о е п о к р ы т и е, т. е. покрытие, объединение любого подсемейства к-рого замкнуто в X.

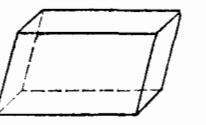
Важным является следующий критерий: тихоновское пространство X паракомпактно в том и только в том случае, если в каждое его открытое покрытие γ можно вписать нек-рое открытое покрытие λ з в е з д н о; последнее означает, что для каждой точки $x \in X$ объединение всех элементов покрытия λ, содержащих x, содержится в нек-ром элементе покрытия γ. Понятие звездной вписанности служит выражением идеи неограниченной дробимости пространства и может восприниматься как наиболее общая теоретико-множественная форма аксиомы треугольника.

Лит.: [1] К е л л и Д ж., *Общая топология*, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [2] А р х а н г е л ь с к и й А. В., П о н о м а р е в В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [3] А р х а н г е л ь с к и й А., «Докл. АН СССР», 1961, т. 141, № 1, с. 13—15. *А. В. Архангельский.*

ПАРАКОМПАКТНОСТИ КРИТЕРИИ — следующие утверждения, равносильные для произвольного вполне *регулярного хаусдорфова пространства* X. 1) X паракомпактно. 2) В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное открытое покрытие. 3) В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать σ-л о к а л ь н о к о н е ч н о е о т к р ы т о е п о к р ы т и е, т. е. открытое покрытие, распадающееся на счетное множество локально конечных в X семейств множеств. 4) В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное покрытие (о строении элементов к-рого не предполагается ничего). 5) Каково бы ни было открытое покрытие γ пространства X, существует открытое покрытие этого пространства, звездно вписанное в γ. 6) В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать консервативное покрытие.

7) Каково бы ни было открытое покрытие γ пространства X, существует счетное семейство $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ открытых покрытий этого пространства такое, что для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности O_x найдутся $U \in \gamma$ и номер i, удовлетворяющие условию: каждый элемент покрытия λ_i, пересекающийся с O_x, содержится в U (т. е. вся звезда множества O_x относительно λ_i лежит в U). 8) Каково бы ни было открытое покрытие ω пространства X, существует непрерывное отображение f пространства X на нек-рое метрич. пространство Y, подчиненное условию: у каждой точки пространства Y существует окрестность, прообраз к-рой при f содержится в элементе покрытия ω. 9) Пространство X коллективно нормально и слабо паракомпактно. *А. В. Архангельский.*

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД — шестигранник, противоположные грани к-рого попарно параллельны. П. имеет 8 вершин, 12 ребер; его грани представляют собой попарно равные параллелограммы. П. наз. п р я м ы м, если его боковые ребра перпендикулярны к плоскости основания (в этом случае 4 боковые грани — прямоугольники); п р я м о у г о л ь н ы м, если этот П. прямой и основанием служит прямоугольник (следовательно, 6 граней — прямоугольники); П., все грани к-рого квадраты, наз. к у б о м. Объем П. равен произведению площади его основания на высоту. *БСЭ-3.*



ПАРАЛЛЕЛИЗМ АБСОЛЮТНЫЙ — поле реперов $e=(e_1, \ldots, e_n)$ на многообразии. П. а. определяет изоморфизм всех касательных пространств многообразия M, при к-ром отождествляются векторы касательных пространств T_pM и T_qM, имеющие одинаковые координаты относительно реперов e_p и e_q. Это задает на многообразии линейную связность ∇^e с нулевой кривизной. Параллельными полями относительно этой связности являются тензорные поля, имеющие постоянные координаты относительно поля реперов e (в частности, векторные поля $e_1, \ldots, e_n$ параллельны), а операция ковариантного дифференцирования тензорного поля T по направлению векторного поля X сводится к дифференцированию по направлению поля X координат поля T относительно e. Обратно, линейная связность ∇ с нулевой кривизной на односвязном многообразии M определяет П. а. e, если задан дополнительно репер e_p нек-рого касательного пространства T_pM. П. а. e получается из репера e_p разнесением с помощью параллельного переноса связности ∇ (параллельный перенос не зависит от выбора пути, соединяющего две данные точки многообразия, если связность имеет нулевую кривизну, а многообразие односвязно).

С точки зрения теории G-структур П. а. является $\{1\}$ — структурой, где $\{1\}$ — группа, состоящая из одной единицы. Интегрируемость такой структуры означает, что в окрестности любой точки многообразия существует система координат x^i, для к-рой $e_i=\partial/\partial x^i$, $i=1, \ldots, n$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы векторные поля $e_1, \ldots, e_n$ попарно коммутировали или, иначе говоря, чтобы тензор кручения $C=C^i_{jk}$ связности ∇^e, задаваемый формулой $[e_j, e_k]=C^i_{jk}e_i$, был тождественно равен нулю. П. а. наз. п о л н ы м, если все векторные поля, имеющие постоянные координаты относительно поля реперов, полны или, что эквивалентно, если связность ∇_e геодезически полна. В интегрируемом случае для этого достаточно полноты векторных полей $e_1, \ldots, e_n$. Полный интегрируемый П. а. на односвязном многообразии M задает на M структуру аффинного пространства. Более общо, полный П. а. с ковариантно постоянным тензором кручения C ($C^i_{jk}=\text{const}$) на одно-

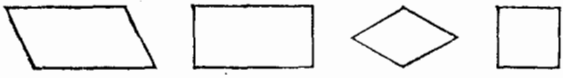
связном многообразии M с отмеченной точкой задает на M структуру группы Ли со структурными константами C^i_{jk}, для к-рой поля e_i образуют базис пространства левоинвариантных полей.

Группа автоморфизмов П. а. есть группа Ли, свободно действующая на M. Известны необходимые и достаточные условия того, чтобы две П. а. были локально изоморфны (см. [3]). Они выражаются в терминах тензора кручения и его ковариантных производных.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [2] Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, пер. с англ., М., 1960; [3] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970. *Д. В. Алексеевский.*

ПАРАЛЛЕЛИЗУЕМОЕ МНОГООБРАЗИЕ — многообразие M размерности n, допускающее поле реперов $e=(e_1, \ldots, e_n)$, то есть n линейно независимых в каждой точке векторных полей $e_1, \ldots, e_n$. Поле e задает изоморфизм касательного расслоения τ: $TM \to M$ на тривиальное расслоение ε: $\mathbb{R}^n \times M \to M$, сопоставляющий касательному вектору $v \in T_pM$ его координаты относительно репера $e|_p$ и его начало. Поэтому П. м. можно также определить как многообразие, имеющее тривиальное касательное расслоение. Примерами П. м. являются открытые подмногообразия евклидова пространства, все трехмерные многообразия, пространство произвольной группы Ли, многообразие реперов произвольного многообразия. Сфера S^n является П. м. только при $n=1, 3, 7$. Для параллелизуемости 4-мерного многообразия необходимо и достаточно обращение в нуль его второго характеристич. класса Штифеля — Уитни. В общем случае равенство нулю всех характеристич. классов Штифеля — Уитни, Чжэня и Понтрягина является необходимым, но недостаточным условием для того, чтобы многообразие M было П. м. *Д. В. Алексеевский.*

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ — четырехугольник, у к-рого стороны попарно параллельны (см. рис., *а — г*). П. может быть также охарактеризован как выпуклый



а *б* *в* *г*

четырехугольник при любом из следующих признаков: 1) та и другая пара противоположных сторон состоит из равных отрезков; 2) одна пара противоположных сторон состоит из равных и параллельных отрезков; 3) при противоположных вершинах той и другой пары углы равны; 4) точка пересечения диагоналей делит каждую из них пополам. Различные виды П.: прямоугольник (*б*) — П., все углы к-рого прямые; ромб (*в*) — П., все стороны к-рого равны; квадрат (*г*) — равносторонний прямоугольник. *БСЭ-3.*

ПАРАЛЛЕЛОТОП, параллелогранник, — множество точек, радиус-векторы к-рых имеют вид

$$h = \sum_{i=1}^{p} x^i a_i,$$

со всевозможными значениями $0 \leqslant x^i \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_p$ — фиксированные векторы n-мерного аффинного пространства A. Они наз. образующими параллелотопа и совпадают с нек-рыми ребрами П. Все остальные ребра П. им параллельны. Если образующие П. линейно независимы (зависимы), то П. наз. p-мерным, или невырожденным (вырожденным). Вырожденный П. является параллельной проекцией нек-рого p-мерного П. на плоскость размерности $k \leqslant p-1$. Невырожденный П. определяет несущую его p-мерную плоскость. Такой

П. при $p=2$ является параллелограммом, при $p=3$ — параллелепипедом.

Два невырожденных П. наз. п а р а л л е л ь н ы м и, если параллельны несущие их плоскости. У параллельных П. можно сравнивать их p-мерные «объемы» (хотя в пространстве A может и не быть метрики). Количественной характеристикой отношения p-мерного «объема» П. с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_p$ к p-мерному «объему» параллельного П. с образующими $b_1, b_2, \ldots, b_p$ служит скаляр $\det(x_j^i)$, где $(x_j^i)-(p\times p)$-матрица перехода от $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ к $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$, т. е.

$$a_j=\sum_{i=1}^{p} x_j^i b_i, \quad 1\leqslant j\leqslant p.$$

Если в пространстве A определено скалярное произведение, то квадрат p-мерного объема П. с образующими $a_1, \ldots, a_p$ равен определителю $(p\times p)$-матрицы Грама с элементами (a_i, a_j).

Понятие П. тесно связано с понятием *поливектора*.

Лит.: [1] Ш и р о к о в П. А., Тензорное исчисление, Казань, 1961; [2] Б е к л е м и ш е в Д. В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, 3 изд., М., 1976; [3] П и з о Ш., З а м а н с к и й М., Курс математики. Алгебра и анализ, пер. с франц., М., 1971.

Л. П. Купцов.

ПАРАЛЛЕЛОЭДР — многогранник, параллельным перенесением к-рого можно заполнить пространство так, чтобы многогранники не входили друг в друга



и не оставляли пустот между собой, т. е. образовать разбиение пространства. П. является, напр., куб или правильная 6-угольная призма. Топологически различных сеток ребер П. пять (см. рис.). Число их граней: 6, 8, 12, 12, 14. Для того чтобы многогранник был П., необходимо и достаточно, чтобы он был выпуклым многогранником одного из пяти указанных топологич. типов и чтобы все его грани имели центры симметрии. Центры П. образуют точечную решетку (см. *Вороного типы решеток*).

А. Б. Иванов.

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПЕРЕНЕСЕНИЕ — изоморфизм слоев над концами x_0 и x_1 кусочно гладкой кривой $L(x_0, x_1)$ базы M гладкого расслоенного пространства E, определяемый нек-рой заданной в E *связностью*; в частности, линейный изоморфизм касательных пространств $T_{x_0}(M)$ и $T_{x_1}(M)$, определяемый вдоль кривой $L\in M$ нек-рой заданной на M *аффинной связностью*. Развитие понятия П. п. началось с обычного параллелизма на евклидовой плоскости E_2, для к-рой Ф. Миндинг (F. Minding, 1837) указал возможность обобщить ее на случай поверхности M в E_3 с помощью введенного им понятия развертывания кривой $L\in M$ на плоскость E_2. Это указание Миндинга послужило отправным пунктом для Т. Леви-Чивита [1], к-рый, оформляя аналитически П. п. касательного вектора на поверхности, обнаружил зависимость его только от метрики поверхности и на этой основе обобщил его сразу на случай n-мерного риманова пространства (см. *Леви-Чивита связность*). Г. Вейль [2] положил понятие П. п. касательного вектора в основу определения аф-

финной связности на гладком многообразии M. Дальнейшие обобщения этого понятия связаны с развитием общей теории связностей.

Пусть на гладком многообразии M задана аффинная связность с помощью матрицы локальных форм связности:

$$\omega^i = \Gamma^i_k(x)\,dx^k, \quad \omega^i_j = \Gamma^i_{jn}(x)\,\omega^k, \ \det\left|\Gamma^i_k\right| \neq 0.$$

Говорят, что вектор $X_0 \in T_{x_0}(M)$ получен *параллельным перенесением* из вектора $X_1 \in T_{x_1}(M)$ вдоль гладкой кривой $L(x_0, x_1) \in M$, если на L существует гладкое векторное поле X, соединяющее X_0 и X_1, такое, что $\nabla_Y X = 0$, где Y — поле касательного вектора кривой L, а $\nabla_Y X$ — ковариантная производная поля X относительно Y, определяемая формулой

$$\omega^i(\nabla_Y X) = Y\omega^i(X) + \omega^i_k(Y)\,\omega^k(X).$$

Таким образом, координаты $\xi^i = \omega^i(X)$ поля X должны удовлетворять вдоль L системе дифференциальных уравнений

$$d\xi^i + \xi^k\omega^i_k = 0.$$

Из линейности этой системы следует, что П. п. вдоль L определяет нек-рый изоморфизм между $T_{x_0}(M)$ и $T_{x_1}(M)$. П. п. вдоль кусочно гладкой кривой определяется как суперпозиция П. п. вдоль ее гладких кусков.

Автоморфизмы пространства $T_x(M)$, определяемые П. п. вдоль замкнутых кусочно гладких кривых $L(x, x)$, образуют линейную *голономии группу* Φ_x; при этом Φ_x и $\Phi_{x'}$ всегда сопряжены между собой. Если Φ_x дискретна, т. е. ее компонента единицы одноэлементна, то говорят об аффинной связности с (локальным) абсолютным параллелизмом векторов, или о (локально) *плоской связности*. Тогда П. п. при любых x_0 и x_1 не зависит от выбора линии $L(x_0, x_1)$ из одного класса гомотопии; для этого необходимо и достаточно равенство нулю тензора кривизны связности.

На основе П. п. вектора определяется П. п. ковектора и, вообще, тензора. Говорят, что поле ковектора θ на L *совершает параллельное перенесение*, если для любого векторного поля X на L, совершающего П. п., функция $\theta(X)$ постоянна вдоль L. Вообще, говорят, что поле тензора T, напр. типа (2, 1), *совершает параллельное перенесение* вдоль L, если для любых X, Y и θ, совершающих П. п., функция $T(X, Y, \theta)$ постоянна вдоль L. Для этого необходимо и достаточно, чтобы компоненты T^i_{jk} удовлетворяли вдоль L системе дифференциальных уравнений

$$dT^i_{jk} = T^i_{lk}\omega^l_j + T^i_{jl}\omega^l_k - T^l_{jk}\omega^i_l.$$

После введения Э. Картаном [3] пространств проективной и конформной связностей в 1920-х гг. и общей концепции связности на многообразии понятие П. п. получило более общее содержание. В наиболее общем смысле оно понимается теперь при рассмотрении связностей в главных расслоенных пространствах или присоединенных к ним пространствах. Существует способ определения самого понятия связности с помощью понятия П. п., к-рое тогда определяется аксиоматически. Связность, однако, может быть задана *горизонтальным распределением* или нек-рым другим эквивалентным способом, напр. *связности формой*. Тогда для каждой кривой $L(x_0, x_1)$ базы M определяются ее горизонтальные поднятия как интегральные кривые горизонтального распределения над L. П. п. наз. тогда отображение, к-рое концам этих поднятий в слое над x_1 ставит в соответствие их другие концы в слое над x_0. Аналогично определяются понятия

группы голономии и (локально) плоской связности; последняя также характеризуется равенством нулю *кривизны формы*.

Лит.: [1] Levi-Civita T., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1917, t. 42, p. 173—205; [2] Weyl H., Raum, Zeit, Materie, 5 Aufl., B., 1923; [3] Cartan E., «Acta math.», 1926, t. 48, p. 1—42; [4] Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, пер. с англ., М., 1960; [5] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.

Ю. Г. Лумисте.

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПОЛЕ, ковариантно постоянное поле,— поле тензоров A на многообразии M с линейной связностью ∇, инвариантное относительно *параллельного перенесения* вдоль кривых на M. Это означает, что для любых точек p, $q \in M$ тензор A_p (значение тензорного поля A в точке p) при параллельном перенесении в точку q вдоль любой гладкой кривой, соединяющей точки p и q, переходит в тензор A_q.

Поле тензоров A будет параллельным тогда и только тогда, когда его ковариантная производная по направлению любого векторного поля X тождественно равна нулю: $\nabla_X A = 0$ или, иначе, когда ковариантный дифференциал DA поля A равен нулю.

Множество $\Pi(M, \nabla)$ параллельных полей образует подалгебру алгебры всех тензорных полей на многообразии M, инвариантную относительно сверток тензорных полей и перестановок их индексов. Алгебра $\Pi(M, \nabla)$ естественным образом изоморфна алгебре тензоров в фиксированной точке p многообразия M, инвариантных относительно однородной группы голономии Γ_p связности ∇ в точке p. Для связности с полной группой голономии $\Gamma = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, где $n = \dim M$, алгебра $\Pi(M, \nabla)$ порождается символом Кронекера δ_j^i, для римановой связности с группой голономии $\mathrm{O}(n)$ — метрич. тензором $g = (g_{ij})$ и обратным к нему тензором $g^{-1} = (g^{ij})$, а для римановой связности с группой голономии $\mathrm{SO}(n)$ — тензорами g, g^{-1} и n-формой объема. Описаны также образующие алгебры параллельных дифференциальных форм на произвольном пространстве линейной связности без кручения с любой неприводимой группой голономии [5].

Особый интерес представляют П. п. дифференциальных форм в римановом многообразии со связностью Леви-Чивиты. С каждой такой формой ω ассоциируется (с помощью операции свертки) ряд линейных операторов в пространстве дифференциальных форм, перестановочных с оператором Бельтрами — Лапласа Δ, напр. операторы внутреннего и внешнего умножения на форму ω или операторы ортогонального проектирования на инвариантные относительно группы голономии подпространства пространства дифференциальных форм. Изучение этих операторов позволяет получить оценки для размерностей пространств гармонич. форм различных степеней, т. е. (в компактном случае) для чисел Бетти многообразия M (см. [4]). Наиболее содержательная теория (см. *Ходжа теорема*) развита для кэлеровых и кватернионных римановых пространств, в к-рых всегда имеется П. п. 2-форм и, соответственно, 4-форм. Любая параллельная дифференциальная форма в римановом пространстве гармонична. В компактном симметрическом римановом пространстве верно и обратное: любая гармонич. форма параллельна. Поэтому кольцо вещественных когомологий компактного симметрич. пространства изоморфно кольцу параллельных дифференциальных форм.

Поле тензоров A является П. п. относительно нек-рой линейной связности ∇ тогда и только тогда, когда оно инфинитезимально однородно, т. е. когда в каждой точке p многообразия M существует репер, относительно к-рого тензор A_p имеет фикси-

рованные координаты $A^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l}$, не зависящие от точки p. В этом случае множество реперов, относительно к-рых тензоры A_p, $p \in M$, имеют координаты $A^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l}$, образует G-структуру, т. е. главное подрасслоение $P(A)$ расслоения реперов со структурной группой G, являющейся стабилизатором точки A_p при действии группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ в пространстве тензоров. Поле A параллельно относительно любой связности в G-структуре $P(A)$. В частности, любое сечение расслоения $P(A)$ (если оно существует) задает связность с нулевой кривизной, относительно к-рой поле A параллельно.

Более сложным является вопрос о существовании связности без кручения, относительно к-рой данное инфинитезимально однородное поле параллельно. Если поле A является псевдоримановой метрикой, то такая связность (с в я з н о с т ь Л е в и-Ч и в и т а) всегда существует и единственна. Оказывается, что этот случай является исключительным: если для нек-рого тензорного поля A существует единственная связность без кручения, относительно к-рой оно параллельно, то структурная группа G G-структуры $P(A)$ является псевдоортогональной группой и, следовательно, с полем A канонич. образом ассоциируется псевдориманова метрика [7]. Для широкого класса инфинитезимально однородных тензорных полей A наличие связности без кручения, относительно к-рой поле параллельно, влечет за собой интегрируемость поля A, т. е. существование локальной системы координат, в к-рой координаты поля A постоянны. Это верно, напр., для почти комплексной структуры, почти симплектич. структуры и для любого поля A, для к-рого структурная группа G расслоения $P(A)$ неприводима и не принадлежит известному списку неприводимых групп голономии пространств линейной связности без кручения [5].

Лит.: [1] К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К., Основы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 1—2, М., 1981; [2] Л и х н е р о в и ч А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [3] Ч ж э н ь Ш э н ь ш э н ь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [4] C h e r n S. S., в кн.: Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz, N. Y., 1957, p. 103—21; [5] B e r g e r M., «Bull. Soc. math. France», 1955, t. 83, p. 279—330; [6] K o b a y a s h i S., Transformation groups in differential geometry, B.—Hdlb.—N. Y., 1972; [7] K o b a y a s h i S., N a g a n o T., «J. Math. Soc. Japan», 1965, v. 17, № 1, p. 84—101.

Д. В. Алексеевский.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ АКСИОМА — аксиома, определяющая соотношение параллельности в различных геометриях. См. *Параллельные прямые*, *Пятый постулат*.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ — диффеоморфные гладкие линии в пространстве, имеющие в соответствующих точках параллельные касательные. Таковы, напр., гладкие компоненты эквидистантных линий на плоскости (см. *Эквидистанта*) — они характеризуются тем, что расстояние между соответствующими точками равно расстоянию между соответствующими касательными. Пример П. л. в трехмерном пространстве: если две поверхности находятся в *Петерсона соответствии* и имеют общую сопряженную сеть, то линии этой сети имеют параллельные касательные. П. л. пространства E^n, имеющие параллельные нормали до порядка $m \leqslant n < n$, расположены в нек-ром подпространстве E^{n-m}.

Для линейного семейства плоских выпуклых П. л. (т. е. выпуклых линий, радиус-вектор к-рых линейно зависит от параметра ε) справедлива т е о р е м а Б р у н н а-М и н к о в с к о г о: площадь области, ими ограниченная, является вогнутой функцией параметра ε.

Обобщение понятия параллельности на случай линий, расположенных в группах Ли, получается с помощью понятия эквиполлентности векторов.

Д. Д. Соколов.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ — диффеоморфные, одинаково ориентированные поверхности F_1 и F_2, к-рые имеют в соответствующих точках параллельные касательные плоскости, причем расстояние h между соответствующими точками F_1 и F_2 постоянно и равно расстоянию между соответствующими касательными плоскостями. Радиус-векторы $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ П. п. F_1 и F_2 связаны соотношением: $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=h\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали, один и тот же для F_1 и F_2.

Таким образом, можно определить однопараметрич. семейство F_h поверхностей, параллельных данной $F=F_0$, причем регулярность F_h имеет место для достаточно малых значений h, удовлетворяющих неравенству

$$w(h)=1-2Hh+Kh^2>0.$$

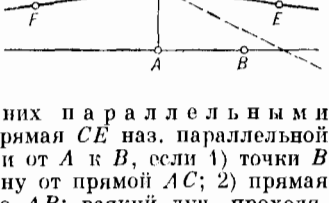
Значениям корней h_1 и h_2 уравнения $w(h)=0$ соответствуют поверхности F_{h_1} и F_{h_2}, являющиеся эволютами поверхности F, так что П. п. имеют общую эволюту. Средняя H_h и гауссова K_h кривизны поверхности F_h, параллельной F, связаны с соответствующими величинами H и K для F соотношениями

$$H_h=\frac{H-Kh}{w(h)},\quad K_h=\frac{K}{w(h)},$$

линии кривизны П. п. соответствуют друг другу, так что между ними имеется соответствие Комбескюра, являющееся частным случаем *Петерсона соответствия*.

И. Х. Сабитов.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ в евклидовой геометрии — прямые, к-рые лежат в одной плоскости и не пересекаются. В *абсолютной геометрии* через точку, не лежащую на данной прямой, проходит хотя бы одна прямая, не пересекающая данную. В *евклидовой геометрии* существует только одна такая прямая. Этот факт равносилен *пятому постулату* Евклида (о параллельных). В *Лобачевского геометрии* в плоскости через точку C (см. рис.) вне данной прямой AB проходит бесконечное множество прямых, не пересекающих AB. Из них параллельными к AB наз. только две. Прямая CE наз. параллельной прямой AB в направлении от A к B, если 1) точки B и E лежат по одну сторону от прямой AC; 2) прямая CE не пересекает прямую AB; всякий луч, проходящий внутри угла ACE, пересекает луч AB. Аналогично определяется прямая CF, параллельная к AB в направлении от B к A.



БСЭ-3.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС — частный случай *движения*, при к-ром все точки пространства перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Иначе, если M — первоначальное, а M' — смещенное положение точки, то вектор $\overrightarrow{MM'}$ — один и тот же для всех пар точек, соответствующих друг другу в данном преобразовании.

На плоскости П. п. выражается аналитически в прямоугольной системе координат (x, y) при помощи формул

$$\tilde{x}=x+a,\qquad \tilde{y}=y+b,$$

где вектор $\overrightarrow{MM'}=(a, b)$.

Совокупность всех П. п. образует группу, к-рая в евклидовом пространстве является подгруппой группы

движений, а в аффинном — подгруппой группы аффинных преобразований. *А. Б. Иванов.*

ПАРАМЕТРА ВАРИАЦИИ МЕТОД — метод приближенного решения нелинейных (и линейных) функциональных и операторных уравнений в банаховых пространствах $y=P(x)$, $x\in X$, $y\in Y$, а также для качественных исследований. П. в. м. состоит в том, что уравнение $P(x)=0$, где оператор $P(x)$ непрерывно дифференцируем по Фреше до нужного порядка, или некрый нелинейный функционал $\Phi(x)$, связанный с решением этого уравнения, обобщаются путем введения вспомогательного числового (или общего функционального) параметра λ, принимающего значения на конечном или бесконечном промежутке $\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\lambda^*$, так: $F(x,\lambda)=0$, где $F(x,\lambda)$, $x\in X$, $\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\lambda^*$,— оператор со значениями в Y, так что $P(x)=0$ получается при $\lambda=\lambda^*$: $F(x,\lambda^*)=P(x)$, а уравнение $F(x,\lambda_0)=0$ легко разрешается или известно его решение x_0. При этом предполагается, что оператор $F(x,\lambda)$ непрерывно дифференцируем (в смысле Фреше) по x и λ, т. е. существуют непрерывные частные производные $F'_x(x,\lambda)$ и $F'_\lambda(x,\lambda)$, и что существует непрерывный оператор $\Gamma(x,\lambda)=[F'_x(x,\lambda)]^{-1}$ из Y в X. Для построения решения $x(\lambda)$ уравнения $F(x,\lambda)=0$ на всем интервале $\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\lambda^*$ строится соответствующая дифференциальная задача (задача Коши) в предположении, что $x(\lambda)$ непрерывно дифференцируемая функция со значениями в X, определяемая этим уравнением:

$$F'_x(x,\lambda)\frac{dx}{d\lambda}+F'_\lambda(x,\lambda)=0,\quad x(\lambda_0)=x_0, \tag{1}$$

или

$$\frac{dx}{d\lambda}=-\Gamma(x,\lambda)F'_\lambda(x,\lambda),\quad x(\lambda_0)=x_0. \tag{2}$$

Интервал $[\lambda,\lambda^*]$ разбивается точками $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n=\lambda^*$ на более мелкие подинтервалы длины $h_k=\lambda_k-\lambda_{k-1}$, $k=1,2,\ldots,n$, и к задаче Коши (2) (или (1)) применяются методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с шагом h_k (или несколько таких методов). В результате для построения решения $x(\lambda)$ уравнения $F(x,\lambda)=0$ получаются П. в. м. соответствующих типов. Построенное значение $x(\lambda^*)$ будет решением уравнения $P(x)=0$.

Решение на каждом шаге линейных относительно $\frac{dx}{d\lambda}$ задач вида (1) или обращение линейных операторов $F'_x(x,\lambda)$ в (2), или последовательная аппроксимация обратного оператора $\Gamma(x,\lambda)$ проводятся различными методами или опять-таки П. в. м.

Шаги h_k выбираются различными способами, напр. из условия минимума нормы невязки $\|P(x_{k+1})\|$ как функции многих, вообще говоря, переменных. При этом эффективным является также совместный выбор h_k и свободных параметров метода численного интегрирования, напр. *Рунге — Кутта метода* s-го порядка точности, использование корней полиномов Чебышева и близких к ним и др.

Задача Коши (2) служит не только средством для определения приближенного решения рассматриваемого уравнения, но и для доказательства существования самого решения. Изучен ряд различных способов введения параметра λ. В качестве числового параметра λ может быть использован также и один из естественных параметров, содержащихся в рассматриваемой задаче.

В зависимости от способа введения параметра λ П. в. м. является прямым или итерационным методом. Совместное применение прямого и итерационного методов наз. комбинированным П. в. м. Напр., итерационный метод типа усовершенствованного метода

Эйлера — Коши с шагом $h_k=1$ (при $F(x,\lambda)=P(x)-(1-\lambda)P(x_0)$, $\lambda_0=0$ и $\lambda^*=1$) является методом 3-го порядка точности и имеет следующий вид:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{1}{2}[\Gamma(x_i)+\Gamma(x_i-\Gamma(x_i)P(x_i))]P(x_i),$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad \Gamma(x)=[P'(x)]^{-1}.$$

Каждый метод численного интегрирования порождает свой итерационный П. в. м. высокого порядка точности, причем без привлечения производных $P(x)$ порядка выше первой.

Использование методов численного интегрирования в прямом П. в. м. совместно с корректировкой результатов после каждого шага с помощью итерационного П. в. м. (комбинированный П. в. м.) представляет собой один из наиболее эффективных методов решения нелинейных задач.

П. в. м. достаточно хорошо разработан и исследован для широкого класса задач. Первоначально он был предложен для систем алгебраич. и трансцендентных уравнений, интегральных уравнений, дифференциальных уравнений обыкновенных и с частными производными, а затем для решения более общих нелинейных и операторных уравнений. Изучены условия, при к-рых гарантируется разрешимость уравнения $P(x)=0$ и возможность построения его решения интегрированием задачи Коши (2) на интервале $[\lambda_0,\ \lambda^*]$ и установления области его расположения. Изучены условия сходимости и даны оценки погрешности. Исследованы также вопросы применения П. в. м. для обращения и псевдообращения линейных операторов, построения псевдорешений (и решений) линейных функциональных уравнений с минимальным уклонением по норме (в заданном подпространстве) от начального значения, суммирования операторных рядов и построения нек-рых классов проекторов, определения начальных приближений для итерационных процессов, решения операторных дифференциальных уравнений и задач линейной алгебры, для доказательства разрешимости нелинейных систем, связанных с вариационными задачами, и построения их решений, минимизации функционалов и многих других. Изучены обширные классы эффективных модификаций П. в. м., в том числе и с последовательной аппроксимацией обратного оператора $\Gamma(x,\lambda)$ или $\Gamma(x)$. Изучены также широкие классы задач ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. (Впрочем, случай ветвления может быть блокирован другим способом введения параметра λ или путем введения дополнительного параметра т.) П. в. м. исследован также как метод «градиентного» типа, а также без предположения существования $\Gamma(x)$.

См. также *Продолжения по параметру метод*.

Лит.: [1] Давиденко Д. Ф., «Докл. АН СССР», 1953, т. 88, № 4, с. 601—02; [2] его же, «Укр. матем. ж.», 1955, т. 7, с. 18—28; [3] Гавурин М. К., «Изв. ВУЗов. Математика», 1958, № 5, с. 18—31; [4] Поляк Б. Т., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1964, т. 4, № 6, с. 995—1005; [5] Давиденко Д. Ф., «Докл. АН СССР», 1965, т. 162, № 3, с. 499—502; [6] Михлин С. Г., Численная реализация вариационных методов, М., 1966; [7] Kleinmichel H., «Math. Nachr.», 1968, Bd 37, H. 5/6, S. 313—43; [8] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [9] Лика Д. К., Шафиев Р. А., «Изв. АН Молд. ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук», 1970, № 2, с. 13—18; [10] Жидков Е. П. [и др.], «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 1973, т. 4, в. 1, с. 127—66; [11] Давиденко Д. Ф., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1975, т. 15, № 1, с. 30—47; [12] Ортега Дж., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ., М., 1975; [13] Келлер Г., в кн.: Методы вычислительной и прикладной математики, в. 2, Новосиб., 1977, с. 6—36; [14] Давиденко Д. Ф., в кн.: Математическое программирование и смежные вопросы. Вычислительные методы, М., 1976, с. 187—212; [15] Коляда Ю. В., Сигорский В. П., «Кибернетика», 1980, № 3, с. 24—28.

Д. Ф. Давиденко.

ПАРАМЕТРИКСА МЕТОД — один из методов изучения краевых задач для дифференциальных урав-

нений с переменными коэффициентами с помощью интегральных уравнений.

Пусть в какой-либо области G n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ рассматривается эллиптич. дифференциальный оператор порядка m

$$L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha. \qquad (1)$$

В равенстве (1) символом α обозначен мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где α_j — неотрицательные целые числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$. Каждому оператору (1) сопоставляется однородный эллиптич. оператор

$$L_0(x_0, D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0) D^\alpha$$

с постоянными коэффициентами, где $x_0 \in G$ — произвольная фиксированная точка. Пусть $\varepsilon(x, x_0)$ обозначает фундаментальное решение оператора $L_0(x_0, D)$, параметрически зависящее от x_0, тогда функция $\varepsilon(x, x_0)$ наз. **параметриксом** оператора (1) с особенностью в точке x_0.

В частности, для эллиптич. оператора 2-го порядка

$$L(x, D) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$$

в качестве параметрикса с особенностью в точке y может быть взята **функция Леви**:

$$\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\,\omega_n \sqrt{A(y)}} [R(x, y)]^{2-n}, & n > 2, \\ \dfrac{1}{2\pi \sqrt{A(y)}} \ln R(x, y), & n = 2. \end{cases} \qquad (2)$$

В равенстве (2) $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, $A(y)$ — определитель матрицы $\|a_{ij}(y)\|$,

$$R(x, y) = \sum_{i, j=1}^n A_{ij}(y)(x_i - y_i)(x_j - y_j),$$

$A_{ij}(y)$ — элементы матрицы, обратной к матрице $\|a_{ij}(y)\|$.

Пусть S_{x_0} — интегральный оператор

$$(S_{x_0}\varphi)(x) = \int_G \varepsilon(x - y, x_0) \varphi(y)\, dy, \qquad (3)$$

действующий на функциях из $C_0^\infty(G)$, и

$$T_{x_0} = S_{x_0}[L_0(x_0, D) - L(x, D)].$$

Поскольку, в силу определения фундаментального решения,

$$L_0(x_0, D) S_{x_0} = S_{x_0} L_0(x_0, D) = I,$$

где I — тождественный оператор, то

$$I = S_{x_0} L(x, D) + T_{x_0}.$$

Это равенство означает, что для каждой достаточно гладкой и финитной в области G функции φ справедливо представление

$$\varphi = S_{x_0} L(x, D) \varphi + T_{x_0} \varphi \qquad (4)$$

и, кроме того, если

$$\varphi = S_{x_0} f + T_{x_0} \varphi,$$

то φ является решением уравнения

$$L(x, D) \varphi = f.$$

Таким образом, вопрос о локальной разрешимости уравнения $L\varphi = f$ сводится к вопросу об обратимости оператора $I - T_{x_0}$.

Если применять оператор T_{x_0} к функциям φ, к-рые обращаются в нуль вне шара радиуса R с центром в

точке x_0, то при достаточно малом R норма оператора T_{x_0} может быть сделана меньше единицы. Тогда будет существовать оператор $(I-T_{x_0})^{-1}$ и, следовательно, оператор $E=(I-T_{x_0})^{-1}S_{x_0}$, к-рый является обратным к оператору $L(x, D)$. Оператор E является интегральным оператором, ядро к-рого представляет собой фундаментальное решение оператора $L(x, D)$.

Параметриксом иногда наз. не только функцию $\varepsilon(x, x_0)$, но и интегральный оператор S_{x_0} с ядром $\varepsilon(x, x_0)$, определенный равенством (3).

В теории псевдодифференциальных операторов вместо оператора S_{x_0} параметриксом оператора $L(x, D)$ наз. оператор S такой, что $I-L(x, D)S$ и $I-SL(x, D)$ являются интегральными операторами с бесконечно дифференцируемыми ядрами. Если же таким оператором является лишь оператор $I-SL$ (или $I-LS$), то S наз. левым (соответственно правым) параметриксом оператора $L(x, D)$. Иначе говоря, оператор S_{x_0} в равенстве (4) является левым параметриксом, если оператор T_{x_0} в этом равенстве имеет бесконечно дифференцируемое ядро. Если у оператора $L(x, D)$ существуют левый параметрикс S' и правый параметрикс S'', то каждый из этих операторов является параметриксом. Существование параметрикса доказано для гипоэллиптических псевдодифференциальных операторов (см. [3]).

Лит.: [1] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [2] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [3] Хёрмандер Л., в сб.: Псевдодифференциальные операторы, М., 1967.

Ш. А. Алимов.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ МЕТОД — метод в геометрич. теории функций комплексного переменного, использующий для решения экстремальных задач в классах функций представление этих классов с помощью интегралов, зависящих от параметров.

К таким классам относятся *Каратеодори класс*, класс однолистных звездообразных в круге функций, класс типично вещественных функций. Функции этих классов имеют параметрич. представление, содержащее интеграл Стилтьеса

$$\int_a^b g(z, t)\, d\mu(t)$$

с заданными действительными числами a, b и функцией $g(z, t)$ (ядро класса), $\mu(t)\in M_{a,b}$, где $M_{a,b}$ — класс функций, не убывающих на промежутке $[a, b]$, $\mu(b)-\mu(a)=1$ (μ — параметр класса).

Для классов функций, имеющих параметрич. представление с помощью интегралов Стилтьеса, получены вариационные формулы, к-рые при решении экстремальных задач в этих классах показывают, что экстремальная функция имеет вид

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k g(z, t_k),\ \lambda_k\geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{m}\lambda_k=1,$$

где $t_k\in[a, b]$, причем указывается значение m (см. [1] гл. 11; [3]).

При нахождении областей значений функционалов и систем функционалов на таких классах иногда полезны следующие теоремы.

1) Множество B точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, допускающих представление

$$x_k=\int_a^b u_k(t)\, d\mu(t),\quad k=1, 2, \ldots n,$$

где $u_k(t)$ — фиксированные непрерывные на $[a, b]$ действительные функции и $\mu(t)\in M_{a,b}$, совпадает с

замкнутой выпуклой оболочкой $R(U)$ множества U точек

$$x_k = u_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad a \leqslant t \leqslant b$$

(теорема Рисса).

2) Каждая точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R(U) \subset \mathbb{R}^n$ может быть представлена в виде

$$x_k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_k(t_j), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$, $m \leqslant n+1$, а если $x \in \partial R(U)$, то $m \leqslant n$ (теорема Каратеодори).

3) Для того чтобы существовала, по крайней мере, одна неубывающая функция $\mu(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, такая, что

$$\int_a^b w_k(t)\, d\mu(t) = \gamma_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$w_1(t) \equiv 1$, $w_k(t) = u_k(t) + iv_k(t)$; $u_k(t), v_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — заданные действительные непрерывные на $[a, b]$ функции, $\gamma_1 > 0$, γ_k — заданные комплексные числа, необходимо и достаточно, чтобы всякий раз, когда при нек-рых комплексных числах $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} [\alpha_k w_k(t) + \overline{\alpha}_k \overline{w}_k(t)] \geqslant 0, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

имело место также и неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} [\alpha_k \gamma_k + \overline{\alpha}_k \overline{\gamma}_k] \geqslant 0$$

(теорема Рисса).

Приведенные теоремы позволили дать геометрич. и алгебраич. характеристики областей значений систем коэффициентов и отдельных коэффициентов на классах функций, регулярных и имеющих положительную действительную часть в круге (кольце), регулярных и типично вещественных в круге (кольце) и на нек-рых других классах (см. [1] Добавление; [4], [5]).

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Крейн М. Г., «Успехи матем. наук», 1951, т. 6, в. 4, с. 3—120; [3] Лебедев Н. А., Александров И. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1968, т. 94, с. 79—89; [4] Голузина Е. Г., там же, с. 33—46; [5] ее же, «Зап. науч. семинаров Ленингр. отделения Матем. ин-та АН СССР», 1972, т. 24, с. 29—62; 1974, т. 44, с. 17—40; 1980, т. 100, с. 17—25. *Е. Г. Голузина.*

ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ МЕТОД — метод теории функций комплексного переменного, возникший из *параметрического представления* однолистных функций и базирующийся большей частью на *Лёвнера уравнении* и его обобщениях (см. [1]). Самим К. Лёвнером (K. Löwner) П. п. м. использовался на классе S всех регулярных однолистных в единичном круге функций $w = f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, для оценки коэффициентов разложений

$$w = z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

и

$$z = f^{-1}(w) = w + b_2 w^2 + \ldots + b_n w^n + \ldots$$

(см. *Бибербаха гипотеза*). Затем П. п. м. систематически применял Г. М. Голузин при решении проблем искажения, вращения, взаимного роста и других геометрич. характеристик отображения $w = f(z)$, связанных со значениями $f(z_0)$ и $f'(z_0)$ при фиксированном z_0, $|z_0| < 1$.

П. п. м. связан с теорией оптимальных процессов. Эта связь базируется на том факте, что аналитически все упомянутые выше задачи формулируются как экстремальные задачи для управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемой из уравнения Лёвнера. Использование принципа максимума Понтрягина (см. *Понтрягина принцип максимума*) и изучение свойств функции Понтрягина по-

зволяют изучить ряд новых задач на классе S и его подклассах вплоть до их полного решения либо получить результаты, сравнимые (напр., в проблеме Бибербаха) с результатами, найденными другими методами (см. [1] п. 74).

Лит.: [1] Александров И. А., Параметрические продолжения в теории однолистных функций, М., 1976.

В. И. Попов.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — раздел теории обыкновенных дифференциальных уравнений, изучающий явление параметрич. резонанса.

Пусть S — нек-рая динамич. система, способная совершать лишь колебательные движения и описываемая *гамильтоновой системой линейной* (*невозмущенным уравнением*)

$$J\dot{x} = H_0 x \quad \left(J = \begin{Vmatrix} 0 & -I_k \\ I_k & 0 \end{Vmatrix},\ H_0^* = H_0\right)$$

с постоянным действительным гамильтонианом H_0. Таким образом, $(2k\times 2k)$-матрица $J^{-1}H_0$ приводится к диагональному виду с чисто мнимыми элементами

$$i\omega_\nu \qquad (\nu = \mp 1,\ \ldots,\ \mp k,\ \omega_{-\nu} = -\omega_\nu),$$

$|\omega_\nu|$ — собственные частоты системы. Пусть нек-рые параметры системы S начинают периодически изменяться с частотой $\vartheta > 0$ и малыми амплитудами, значения к-рых определяются малым параметром $\varepsilon > 0$. Если возбуждения не выводят из класса линейных гамильтоновых систем, то движение системы S будет описываться возмущенным уравнением

$$J\dot{x} = [H_0 + \varepsilon H_1(\vartheta t) + \varepsilon^2 H_2(\vartheta t) + \ldots]\, x, \qquad (1)$$

где $H_j(s+2\pi) = H_j(s) = H_j(s)^*$, $j = 1, 2, \ldots$, суть кусочно непрерывные, интегрируемые в $(0,2\pi)$ $(2k\times 2k)$-матрицы-функции, и ряд в правой части (1) сходится при $\varepsilon < r_0$, где r_0 не зависит от t.

Возникновение неограниченно возрастающих колебаний системы S при сколь угодно малом периодич. возмущении нек-рых ее параметров наз. **параметрическим резонансом**. Параметрич. резонанс имеет две существенные особенности: 1) спектр частот, при к-рых возникают неограниченно возрастающие колебания, не является точечным, а состоит из совокупности малых интервалов, длины к-рых зависят от амплитуды возмущений (т. е. от ε) и к-рые стягиваются в точку при $\varepsilon \to 0$; значения частот, к к-рым стягиваются эти интервалы, наз. **критическими**; 2) колебания нарастают не по степенному, а по экспоненциальному закону. Этим параметрич. резонанс намного «опаснее» (или «полезнее», в зависимости от задачи) обычного резонанса.

Пусть $i\omega_1, \ldots, i\omega_k$ — собственные значения 1-го рода, перенумерованные так, что $\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_k$. Тогда критическими могут быть лишь частоты вида

$$\vartheta_{jh}^{(m)} = \frac{1}{m}\,|\omega_j + \omega_h|,\ j,\ h = 1, \ldots,\ k;\ m = 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

Пусть собственные векторы f_ν матрицы $J^{-1}H_0$, для к-рых $J^{-1}H_0 f_\nu = i\omega_\nu f_\nu$, $\nu = \mp 1, \ldots, \mp k$, нормированы так, что

$$i\,(Jf_\nu, f_\mu) = \delta_{\nu\mu}\operatorname{sign}\nu, \quad \nu,\ \mu = \mp 1,\ \ldots,\ \mp k,$$

где $\delta_{\nu\mu}$ — символ Кронекера, а

$$H_1(\vartheta t) \sim \sum e^{il\vartheta t} H_1^{(l)}.$$

Тогда области неустойчивости в первом приближении по ε определяются неравенствами

$$\vartheta_{jh}^{(m)} + \mu_1\varepsilon + \ldots < \vartheta < \vartheta_{jh}^{(m)} + \mu_2\varepsilon + \ldots, \qquad (3)$$

где

$$\left.\begin{gathered}\mu_{1,2}=\frac{1}{m}\left(\chi_{-j-j}+\chi_{hh}\mp 2\left|\chi_{-jh}\right|\right),\\ \chi_{-j-j}=(H_1^{(0)}f_{-j},\ f_{-j}),\ \chi_{hh}=(H_1^{(0)}f_h,\ f_h),\\ \chi_{-jh}=(H_1^{(m)}f_{-j},\ f_h).\end{gathered}\right\}\qquad(4)$$

Если $j=h$, то область неустойчивости отвечает основному резонансу, при $j\neq h$ — комбинационному резонансу. Величина $|\chi_{-jh}|$ характеризует «степень опасности» критич. частоты $\vartheta_{jh}^{(m)}$: чем больше эта величина, тем шире «клинышек» неустойчивости (3) с острием в точке $\vartheta_{jh}^{(m)}$. Установлена аналитич. зависимость границ областей неустойчивости от параметра ε и получены эффективные формулы для вычисления областей (3) во втором приближении (см. [3], [4]).

В часто встречающемся в приложениях случае, когда возмущенная система S описывается векторным уравнением 2-го порядка

$$\ddot{y}+[P_0+\varepsilon P_1(\vartheta t)+\varepsilon^2P_2(\vartheta t)+\ldots]\,y=0,\qquad(5)$$

где $P_0^*=P_0>0$ и $P_j(s)^*=P_j(s)=P_j(s+2\pi)$, $j=1,2,\ldots$, собственные векторы и собственные значения (квадраты частот невозмущенной системы) матрицы P_0 определяют формулами

$$P_0a_\varkappa=\omega_\varkappa^2a_\varkappa,$$

$$(\omega_\varkappa+\omega_\lambda)(a_\varkappa,\ a_\lambda)=\delta_{\varkappa\lambda},\ \varkappa,\ \lambda=1,\ \ldots,\ k.$$

Пусть

$$P_1(\vartheta t)\sim\sum e^{il\vartheta t}P_1^{(l)}.$$

Тогда формулы (2) и (4) примут вид

$$\vartheta_{jh}^{(m)}=\frac{1}{m}(\omega_j+\omega_h),\ \chi_{-j-j}=(P_1^{(0)}a_j,\ a_j),$$

$$\chi_{hh}=(P_1^{(0)}a_h,\ a_h),\ \chi_{-jh}=(P_1^{(m)}a_j,\ a_h)$$

соответственно. В частности, в базисе $e_1,\ \ldots,\ e_k$, где P_0 диагональна:

$$P_0=\operatorname{diag}(p_1,\ \ldots,\ p_k)$$

и

$$P_1(\vartheta t)\sim\sum e^{il\vartheta t}\|\pi_{\varkappa\lambda}\|_1^k,$$

имеет место:

$$\omega_\varkappa=+\sqrt{p_\varkappa},\ a_\varkappa=\frac{1}{\sqrt{2\omega_\varkappa}}e_\varkappa,\ \varkappa=1,\ \ldots,\ k,$$

и, следовательно (см. [5]):

$$\chi_{-j-j}=\frac{1}{2\omega_j}\pi_{jj}^{(0)},\ \chi_{hh}=\frac{1}{2\omega_h}\pi_{hh}^{(0)},$$

$$\chi_{-jh}=\frac{1}{2\sqrt{\omega_j\omega_h}}\pi_{jh}^{(m)}.$$

Рассмотрен случай нелинейной зависимости коэффициентов уравнений (1) и (5) от параметра $1/\vartheta$ (см. [4]). Изучен параметрич. резонанс в линейных системах, близких к гамильтоновым (см. [6]). Здесь областям основного резонанса предшествуют области главного резонанса, а наряду с областями комбинационного резонанса появляются области комбинационно-разностного резонанса. Для параметрич. резонанса в линейных распределенных системах (см. [7]) получен ряд аналогичных результатов для операторных уравнений (1) в гильбертовом пространстве. Исследовался параметрич. резонанс для нек-рых классов систем с конечным числом степеней свободы, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями (см. [8]).

Лит.: [1] Крейн М. Г., в кн.: Памяти Александра Александровича Андронова, М., 1955, с. 413—98; [2] Якубович В. А., «Докл. АН СССР», 1958, т. 121, № 4, с. 602—05; [3] его же, в кн.: Методы вычислений, в. 3, Л., 1966, с. 51—69; [4] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972; [5] Малкин И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, М., 1956; [6] Старжинский В. М., «Инженерный ж. Механ. тверд. тела», 1967, т. 3, с. 174—80; [7] Фомин В. Н., Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах, Л., 1972; [8] Шмидт Г., Параметрические колебания, пер. с нем., М., 1978.

В. М. Старжинский.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ в теории однолистных функций — представление однолистных функций, осуществляющих конформное отображение плоских областей на области канонич. вида (напр., на круг с концентрич. разрезами); оно возникает обычно следующим образом. Выбирается однопараметрич. семейство областей Q_t, $0 \leqslant t < T$, вложенных друг в друга, $Q_{t'} \subset Q_t$, $0 \leqslant t' < t < T$. Для области Q_0 предполагается известным ее конформное отображение f_0 на нек-рую канонич. область B_0. По известному отображению f_t области Q_t на область канонич. вида строится такое же отображение $f_{t+\varepsilon}$ для области $Q_{t+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ и мало. При непрерывном изменении параметра t на этом пути возникают дифференциальные уравнения, наиболее известными из к-рых являются *Лёвнера уравнение* и уравнение Лёвнера — Куфарева. В дискретном случае — для сеточных областей Q_t и натурального параметра t — переход от отображения f_t к отображению $f_{t+\varepsilon}$, $\varepsilon = 1$, осуществляется по рекуррентным формулам. Источником упомянутых формул и уравнений служит обычно формула Шварца (см. [1] с. 92) и ее обобщения (см. [2]). Не менее важным источником П. п. служат вариации Адамара (см. [3], [4]) для функций Грина $G_t(z, z')$, $z, z' \in Q_t$, указанного выше семейства областей. Метод Адамара наз. также методом инвариантного погружения (см. [5]) для эллиптических дифференциальных уравнений. Ниже показана связь П. п., вариаций Адамара и инвариантного погружения в простейшем (дискретном) случае.

Пусть Q — нек-рый набор целых комплексных чисел (сеточная область) и функция Грина $G_t(z, z')$ — экстремаль функционала Дирихле — Дугласа

$$I_t(g) = 2g(z') + \sum_{k=0}^{1} \sum_{z \in Q_0} \rho_k(t) \mid \nabla_k g(z) \mid^2$$

в классе R_0 всех действительных на Q функций $g(z)$. Здесь $Q_0 = \{z \mid z,\ z-1,\ z-i,\ z-1-i \in Q\}$,

$$\nabla_0 g(z) = g(z) - g(z-1-i),\ \nabla_1 g(z) = g(z-1) - g(z-i), \tag{1}$$

$$\rho_k(0) \equiv 1,\ \rho_k(t+1) = \rho_k(t) + N\delta^{\xi}_{\xi_t},$$

N — натуральное число, $\delta^{\xi}_{\xi_t}$ — символ Кронекера и $\xi_t = (k_t, z_t)$, $t = 0, 1, \ldots, T-1$, — нек-рый набор пар чисел; $\{z_t \mid t = 1, \ldots, T\}$ — граница области Q_t, $k_t = 0$ или 1. Нахождение экстремума функционала $I_t(g)$ — задача квадратичного программирования. Сравнение ее решений при t и $t+1$ дает основную формулу инвариантного погружения (вариацию Адамара):

$$G_{t+1}(z, z') = G_t(z, z') - \frac{1}{c_t} \nabla_{k_t} G_t(z_t, z)\, \nabla_{k_t} G_t(z_t, z'), \tag{2}$$

где $c_t = N^{-1} - \nabla_{k_t} \nabla'_{k_t} G_t(z_t, z_t) > 0$, символ ∇'_k означает разностные операторы (1) по второму аргументу функции Грина. Зная функцию $G_0(z, z')$, можно шаг за шагом (рекуррентно) получить по формуле (2) все функции

$G_t(z, z')$, $t=1, \ldots, T$. Достроив функцию Грина до сеточно аналитич. функции $f_T(z)=G_T(z, z')+iH_T(z, z')$ согласно уравнениям типа Коши — Римана

$$(-1)^k \nabla_{1-k} H = \rho_k \nabla_k G,$$

получают однолистное сеточно-квазиконформное отображение $w=\exp[2\pi f_T(z)]$ области Q_T в единичный круг. Ближайшим к началу координат будет образ точки z'. В пределе при $N \to \infty$ отображение сеточно-конформно и образом области Q_T служит круг с концентрич. разрезами. Получен непрерывный аналог формулы (2) (см. [6]). В случае, когда все области G_t односвязны и канонич. областью служит единичный круг B, удается, используя дробно-линейные автоморфизмы круга B, представить функцию Грина в явном виде

$$G_t(z, z') = \ln |1 - f_t(z)\, \overline{f_t(z')}| - \ln |f_t(z) - f_t(z')|$$

через функцию $f_t(z)$, отображающую Q_t на B с нормировкой $f(0)=0$, $0 \in Q_t$ для всех $t \in [0, T)$.

В терминах отображения $w=f_t(z)$ вариация Адамара сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (Лёвнера). По сравнению с вариацией Адамара это уравнение значительно проще, однако информация о границе области Q_t представлена в нем неявно — через управляющий параметр $\alpha(t)=\arg f_t(z_t)$, поскольку функция $f_t(z)$ заранее неизвестна. Тем не менее уравнение Лёвнера — основной инструмент П. п.

Были рассмотрены более общие однопараметрич. семейства областей Q_t, $0 \leqslant t < T$, не обязательно вложенных друг в друга (см. [7]). Возникающие при таких П. п. уравнения наз. уравнениями Куфарева — Лёвнера. Существуют также модификации уравнений Лёвнера и Куфарева — Лёвнера на те случаи, когда области Q_t обладают различного рода симметриями или иными геометрич. особенностями (см. [1]).

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Александров И. А., Сорокин А. С., «Сиб. матем. ж.», 1972, т. 13, № 5, с. 971—1001; [3] Hadamard J., *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibri des plaques élastiques encastrées*, P., 1908; [4] его же, Leçons sur le calcul des variations, v. 1, P., 1910; [5] Беллман Р., Эндже Э., Динамическое программирование и уравнения в частных производных, пер. с англ., М., 1974; [6] Попов В. И., «Докл. АН СССР», 1972, т. 207, № 5, с. 1048—50; [7] Куфарев П. П., «Матем. сб.», 1943, т. 13, № 1, с. 87—118. *В. И. Попов.*

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ функции — задание функции $y=f(x)$, определенной, напр., на отрезке $[a, b]$ с помощью пары функций $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, таких, что у функции $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ существует такая однозначная обратная функция $\varphi^{-1} : [a, b] \to [\alpha, \beta]$, что $f=\psi \circ \varphi^{-1}$, т. е. для любого $x \in [a, b]$ имеет место

$$f(x) = \psi[\varphi^{-1}(x)].$$

Пример. Пара функций $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, является П. п. функции $y=\sqrt{1-x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Если в точке $t_0 \in [a, b]$ П. п. функции f дифференцируемо, т. е. функции φ и ψ дифференцируемы, и $\varphi'(t_0) \neq 0$, то параметрически представленная функция f дифференцируема в точке $x_0=\varphi(t_0)$ и $f'(x_0)=\psi'(t_0)/\varphi'(t_0)$. Если, кроме того, у функций φ и ψ в точке t_0 существуют производные порядка n, $n=2, 3, \ldots$, то и у функции f в точке x_0 существует производная порядка n, причем она является дробно-рациональной функцией от производных функций φ и ψ порядков k, $k=1, 2, \ldots, n$, в знаменателе к-рой стоит $(2n-1)$-я степень значения производной $\varphi'(t_0)$, напр.,

$$f''(x_0) = \frac{\psi''(t_0)\,\varphi'(t_0) - \psi'(t_0)\,\varphi''(t_0)}{[\varphi'(t_0)]^3}.$$

Л. Д. Кудрявцев.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — раздел *математического программирования*, посвящен-

ный исследованию задач оптимизации, в к-рых условия допустимости и (или) целевая функция зависят от нек-рых детерминированных параметров. (Задачи, в к-рых эти параметры являются случайными, составляют предмет *стохастического программирования*.)

В общем виде задача П. п. заключается в максимизации целевой функции $f(x, \lambda)$ по всем $x=(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}^n$, удовлетворяющим ограничениям

$$g_i(x, \lambda)\leqslant b_i(\lambda), \quad i=1, \ldots, m, \tag{1}$$

где λ — вектор параметров, принадлежащий нек-рому заданному множеству параметров $\Lambda\subset\mathbb{R}^p$. При любом фиксированном λ эта задача представляет собой обычную задачу математич. программирования. Пусть $\Lambda'\subset\Lambda$ — множество тех значений λ, при к-рых эта задача разрешима (м н о ж е с т в о р а з р е ш и м о с т и). Оптимальное решение $x^*=x^*_\lambda$ естественным образом является функцией от λ. Под р е ш е н и е м з а д а ч и П. п. понимается семейство $\{x^*_\lambda\}$ при всех $\lambda\in\Lambda'$.

Источники задач П. п. довольно разнообразны. Это прежде всего стремление отразить определенный произвол, с к-рым нередко бывают определены все или нек-рые исходные данные практической оптимизационной задачи, либо охватить единой формулировкой несколько связанных между собой вариантов задачи (или целое семейство задач, напр., зависящих от времени). П. п. является наиболее адекватным способом постановки важной проблемы устойчивости решений задач оптимизации относительно вариаций тех или иных исходных данных. Наконец, с задачами П. п. тесно связана проблема нахождения множества оптимумов Парето в задачах многокритериальной оптимизации.

Если при любом фиксированном λ задача П. п. представляет собой задачу *линейного программирования* (*выпуклого программирования* и т. п.), то говорят о задаче л и н е й н о г о (соответственно в ы п у к л о г о и т. п.) п а р а м е т р и ч е с к о г о п р о г р а м м и р о в а н и я. В общем виде проблематику П. п. можно охарактеризовать следующим образом. 1) Нахождение и выяснение свойств множеств разрешимости Λ'. 2) Нахождение областей устойчивости решений, характеризация их строения; анализ поведения неустойчивых задач. 3) Характеризация зависимости оптимального значения целевой функции от вектора параметров.

В полном своем объеме (т. е. для произвольных целевых функций, ограничений и областей изменения параметров Λ) эти задачи весьма трудны. Достаточно продвинуты в теоретическом и вычислительном отношении лишь нек-рые частные их классы. В основном это касается задач линейного П. п., в к-рых: либо а) целевая функция линейно зависит от одного скалярного ($\Lambda=\mathbb{R}^1$) параметра, либо б) правые части ограничений линейно зависят от одного параметра, либо в) целевая функция и правые части ограничений линейно зависят от двух независимых скалярных параметров или от одного и того же параметра, г) целевая функция линейно зависит от векторного параметра, д) правые части ограничений линейно зависят от векторного параметра. Случай зависимости от параметров матрицы ограничений задачи линейного программирования весьма сложен и пока (1983) исследован недостаточно. Для случая а), напр., решение указанных проблем 1) — 3) характеризуется следующим образом. Пусть требуется максимизировать

$$\sum_{j=1}^n (c_j+\lambda c'_j)\, x_j \tag{2}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\leqslant b_i,\ i=1, \ldots, m;\ x_j\geqslant 0,\ j=1, \ldots, n,$$

где $\lambda \in \Lambda = \mathbb{R}^1$. Тогда существует такое разбиение Λ на конечное число открытых слева интервалов: $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{q} \Lambda^k$ (где интервал Λ^1 неограничен слева, Λ^q неограничен справа, причем возможен случай совпадения одного из них с Λ), что при всех $\lambda \in \Lambda^k$ соответствующая задача линейного П. п. разрешима, причем на каждом интервале Λ^k, $k = 1, \ldots, q$, она имеет один и тот же базис. Исключение могут составлять лишь интервалы Λ^1 и Λ^q, на к-рых целевая функция (2) может быть неограниченна. Таким образом, в данной задаче множество разрешимости Λ' представляет собой объединение всех Λ^k за возможным исключением Λ^1 и (или) Λ^q. Далее, оптимальное значение целевой функции на каждом Λ^k, $k = 1, \ldots, q$, является выпуклой кусочно линейной функцией параметра λ.

Численные методы решения однопараметрических ($\Lambda = \mathbb{R}^1$) задач линейного П. п. представляют собой модификации *симплексного метода*; в случае многомерного пространства параметров приходится привлекать более сложные соображения.

Лит.: [1] Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., Новые направления в линейном программировании, М., 1966; [2] Theorie der linearen parametrischen Optimierung, B., 1974.

А. А. Корбут.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ множества точек пространства — задание точек этого множества или их координат в виде значений функций нек-рых переменных, называемых параметрами.

Параметрич. задание прямой в n-мерном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$x = x^{(0)} + at, \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \quad a \in \mathbb{R}^n, \quad -\infty < t < +\infty, \qquad (1)$$

где $x^{(0)}$ и a — фиксированные векторы, $x^{(0)}$ — начальный вектор, а $a \neq 0$ — направляющий вектор, параллельный прямой. Если в $\mathbb{R}^n$ задан базис и координаты вектора x обозначаются через $x_1, \ldots, x_n$, то уравнение (1) в координатной форме имеет вид

$$x_k = x_k^{(0)} + a_k t, \quad -\infty < t < +\infty, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Параметрич. задание m-мерной гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$x = x^{(0)} + a^{(1)} t_1 + \ldots + a^{(m)} t_m, \quad x^{(0)} \in R^n, \qquad (2)$$

$$a^{(j)} \in R^n, \quad -\infty < t_j < +\infty, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

где $x^{(0)}$ — начальный вектор, соответствующий нулевым значениям параметров t_j, а $a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}$ — линейно независимая система m векторов, параллельных рассматриваемой гиперплоскости. В координатной форме уравнение (2) имеет вид

$$x_k = x_k^{(0)} + a_k^{(1)} t_1 + \ldots + a_k^{(m)} t_m, \quad -\infty < t_j < +\infty,$$

$$j = 1, 2, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Параметрич. задание m-мерной поверхности в $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$x = x(t) = x(t_1, \ldots, t_m), \quad t = (t_1, \ldots, t_m) \in E \subset \mathbb{R}^m, \qquad (3)$$

где E — напр., замыкание нек-рой области m-мерного пространства $\mathbb{R}^m$, а $x : E \to \mathbb{R}^n$ — отображение нек-рого класса: непрерывное, дифференцируемое, непрерывно дифференцируемое, дважды дифференцируемое и т. д., в зависимости от чего рассматриваемая m-мерная поверхность также наз. соответственно непрерывной, дифференцируемой и т. д. В случае $m = 1$ множество E является отрезком: $E = [a, b]$ и П. у. (3) превращается в П. у. кривой: $x = x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, в пространстве $\mathbb{R}^n$. Напр., $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, является П. у. на плоскости окружности единичного радиуса с центром в начале координат.

В качестве множества E, на к-ром задано рассматриваемое параметрич. представление, иногда вместо замыкания m-мерной области берутся подмножества пространства $\mathbb{R}^m$ другой природы. *Л. Д. Кудрявцев.*

ПАРЕТО РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное распределение вероятностей с плотностью

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{x_0}\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1}, & x_0<x<\infty,\\ 0, & x\leqslant x_0,\end{cases}$$

зависящей от параметров $x_0>0$ и $\alpha>0$. В такой «усеченной» трактовке П. р. выделяется как самостоятельное распределение из семейства *бета-распределений* 2-го рода с плотностью

$$\frac{1}{B(\mu,\alpha)}\frac{x^{\mu-1}}{(1+x)^{\mu+\alpha}},\quad \mu,\alpha>0,\ 0<x<\infty,$$

при $\mu=1$. Для любого фиксированного x_0 П. р. сводится преобразованием $x=\frac{x_0}{y}$ к бета-распределению 1-го рода. В системе *Пирсона кривых* П. р. принадлежит к распределениям «типа VI» и «типа XI». Математическое ожидание П. р. конечно при $\alpha>1$ и равно $\alpha x_0/(\alpha-1)$; дисперсия конечна при $\alpha>2$ и равна $\alpha x_0^2/(\alpha-1)^2\times(\alpha-2)$; медиана равна $2^{1/\alpha}x_0$. Функция распределения П. р. определена формулой

$$\mathsf{P}\{X<x\}=1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha},\quad x>x_0,\ \alpha>0.$$

П. р. получило широкое распространение в различных задачах экономич. статистики начиная с работ В. Парето (W. Pareto, 1897) о распределении доходов. Считалось, что П. р. достаточно хорошо описывает распределение доходов, превышающих нек-рый уровень, в том смысле, что это распределение должно иметь хвост порядка $1/x^{\alpha}$ при $x\to\infty$.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. *А. В. Прохоров.*

ПАРИКМАХЕРА ПАРАДОКС — то же, что *антиномия* «деревенский парикмахер».

ПАРСЕВАЛЯ РАВЕНСТВО — равенство, выражающее квадрат нормы элемента в векторном пространстве со скалярным произведением через квадраты модулей коэффициентов Фурье этого элемента по нек-рой ортогональной системе элементов; так, если X — нормированное сепарабельное векторное пространство со скалярным произведением $(\cdot)$, $\|\cdot\|$ — соответствующая ему норма и $\{e_n\}$ — ортогональная в X система, $e_n\neq 0$, $n=1,2,\ldots$, то равенством Парсеваля для элемента $x\in X$ наз. равенство

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\|e_n\|^2, \tag{1}$$

где $a_n=\frac{(x,e_n)}{(e_n,e_n)}$, $n=1,2,\ldots$,— коэффициенты Фурье элемента x по системе $\{e_n\}$. Если эта система $\{e_n\}$ ортонормированная, то П. р. имеет вид

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2.$$

Выполнение П. р. для данного элемента $x\in X$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы ряд Фурье этого элемента по ортогональной системе $\{e_n\}$ сходился к самому элементу x по норме пространства X. Выполнение П. р. для любого элемента $x\in X$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы ортогональная система $\{e_n\}$ была полной системой в X. Отсюда следует, в частности:

если X — сепарабельное гильбертово пространство и $\{e_n\}$ — его ортонормированный базис, то П. р. по системе $\{e_n\}$ выполняется для каждого элемента $x\in X$;

если X — сепарабельное гильбертово пространство, $x\in X$, $y\in X$, $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в X, $a_n=(x,\ e_n)$ и $b_n=(y,\ e_n)$ — коэффициенты Фурье соответственно элементов x и y, то справедливо равенство

$$(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{b}_n, \qquad (2)$$

наз. обобщенным равенством Парсеваля. В достаточно законченном виде вопрос о полноте систем функций, являющихся собственными функциями дифференциальных операторов, был изучен В. А. Стекловым [1].

П. р. обобщается и на случай несепарабельных гильбертовых пространств: если $\{e_\alpha\}$, $\alpha\in\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ нек-рое множество индексов), является полной ортонормированной системой гильбертова пространства X, то для любого элемента $x\in X$ справедливо П. р.

$$(x,\ x)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}}|(x,\ e_\alpha)|^2,$$

причем сумма в правой части равенства понимается как

$$\sup_{\mathfrak{A}_0}\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}_0}|(x,\ e_\alpha)|^2,$$

где верхняя грань берется по всевозможным конечным подмножествам $\mathfrak{A}_0$ множества $\mathfrak{A}$.

В случае, когда $X=L_2[-\pi,\ \pi]$ состоит из действительных функций, квадрат к-рых интегрируем по Лебегу на отрезке $[-\pi,\ \pi]$, $f\in L_2[-\pi,\ \pi]$, в качестве полной ортогональной системы взята тригонометрич. система функций и

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

равенство (1) имеет вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\,dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

и наз. классическим равенством Парсеваля; оно было указано М. Парсевалем (M. Parseval, 1805).

Если $g\in L_2[-\pi,\ \pi]$ и

$$g\sim\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n'\cos nx+b_n'\sin nx,$$

то равенство, аналогичное формуле (2), выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,g(t)\,dt=\frac{1}{2}a_0a_0'+\sum_{n=1}^{\infty}(a_na_n'+b_nb_n'). \qquad (3)$$

Классы K и K' действительных функций, определенных на отрезке $[-\pi,\ \pi]$, такие, что для всех $f\in K$ и $g\in K$ имеет место обобщенное П. р. (3), наз. дополнительными. Примером дополнительных классов являются пространства $L_p[-\pi,\ \pi]$ и

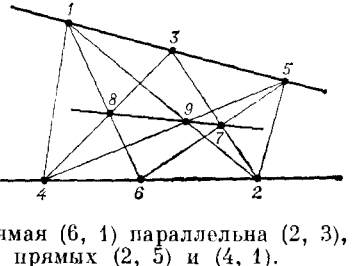
$$L_{p'}[-\pi,\ \pi],\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\quad 1<p<+\infty.$$

Лит.: [1] Стеклов В. А., «Записки физико-математич. общества», сер. 8, 1904, т. 15, № 7, с. 1—32; [2] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975; [3] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980; [4] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [5] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965; [6] Кириллов А. А., Гвишиани А. Д., Теоремы и задачи функционального анализа, М., 1979. *Л. Д. Кудрявцев.*

ПАРСЕВАЛЯ — ПЛАНШЕРЕЛЯ ФОРМУЛА — см. *Планшереля теорема.*

ПАСКАЛЕВА ГЕОМЕТРИЯ — геометрия плоскости, построенной над полем (коммутативным телом). Название этой геометрии связано с тем, что в этой геометрии на плоскости выполняется конфигурационное предложение Паппа — Паскаля: если

точки 1, 3, 5 и 2, 4, 6 соответственно лежат на прямых (коллинеарны), то точки пересечения пар прямых (1, 2) и (4, 5), (2, 3) и (5, 6), (3, 4) и (6, 1) — точки 9, 7, 8 — также лежат на одной прямой при любом выборе системы образующих точек 1, 3, 5 на одной прямой и 2, 4, 6 — на другой прямой, отличной от первой (см. рис.). Важнейший частный случай этого предложения (в аффинной плоскости) утверждает: из того, что прямая (4, 3) параллельна (6, 5) и прямая (6, 1) параллельна (2, 3), следует параллельность прямых (2, 5) и (4, 1).



П. г. плоскости может быть построена над бесконечными или конечными полями, соответственно этому плоскость наз. бесконечной или конечной паскалевой плоскостью.

Впервые важную роль предложения Паскаля в построении геометрич. систем над бесконечными полями исследовал Д. Гильберт (D. Hilbert, см. [1]), к-рый устанавливал доказуемость предложения Паскаля при различных наборах аксиом из системы аксиом евклидова пространства. Д. Гильберт показал, что *Паскаля теорему* в бесконечной плоскости можно доказать с помощью плоскостных аксиом инцидентности, порядка, конгруэнтности, параллельности и непрерывности, причем было установлено, что без аксиом непрерывности в этом случае теорему Паскаля доказать нельзя.

Опираясь же на пространственные аксиомы системы Гильберта, теорему Паскаля можно доказать без аксиом конгруэнтности, но обязательно с применением аксиом непрерывности (исключение аксиом непрерывности в бесконечной плоскости приводит к *непаскалевой геометрии*). Возможность доказательства теоремы Паскаля аналогична в указанном смысле возможности доказательства *Дезарга предложения* с использованием пространственных аксиом, однако в доказательстве теоремы Паскаля проявляется особая роль аксиом непрерывности Архимеда в бесконечных плоскостях (см. *Неархимедова геометрия*).

Предложение Паппа — Паскаля проективно выполняется в нек-рой плоскости тогда и только тогда, когда умножение во всех натуральных телах этой плоскости обладает коммутативным свойством, или иначе: натуральное тело всякой паскалевой плоскости является полем и, наоборот, плоскость, построенная над полем, обладает П. г. Поэтому П. г. иногда наз. геометрией с коммутативным умножением. Таким образом, в паскалевой плоскости конфигурационное предложение Паппа — Паскаля имеет алгебраич. инвариант, выражающий коммутативное свойство умножения в множестве, над к-рым построена эта плоскость.

В любой проективной плоскости теорема Паппа — Паскаля влечет за собой предложение Дезарга.

Конечная паскалева плоскость как конечная проективная плоскость существует только в случае, если число точек, лежащих на каждой прямой этой плоскости, есть p^s+1, где p — простое, s — натуральное число. Так как всякое конечное альтернативное тело является полем, то в конечной плоскости предложение Дезарга влечет за собой теорему Паппа — Паскаля, причем последняя является следствием т. н. малой теоремы Дезарга. Вместе с тем существуют конечные проективные плоскости, являющиеся непаскалевыми. Паскалева плоскость изоморфна двойственной себе плоскости.

Значение П. г. определяется ее ролью при исследовании независимости системы аксиом, в частности системы аксиом Гильберта евклидовой геометрии. При построении бесконечной плоскости на основе групп аксиом инцидентности, порядка и параллельности предложение Паппа — Паскаля должно рассматриваться как дополнительная аксиома. С другой стороны, с помощью комбинаций конечного числа конфигураций Паппа — Паскаля оказывается возможным решить задачи на построение, в к-рых используется лишь понятие инцидентности и, может быть, параллельности.

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Bieberbach L., Einleitung in die höhere Geometrie, Lpz., 1933; [3] Скорняков Л. А., «Успехи матем. наук», 1951, т. 6, в. 6, с. 112—54; [4] Dembowski P., Finite geometries, B.— [u. a.], 1968; [5] Reidemeister K., Grundlagen der Geometrie, B., 1930; [6] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969.

Л. А. Сидоров.

ПАСКАЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — дискретное распределение вероятностей случайной величины X, принимающей целые неотрицательные значения $k=0, 1, 2, \ldots$ в соответствии с формулой

$$\mathsf{P}\{X=k\}=C_{r+k-1}^{r-1}p^r(1-p)^k,$$

где $0<p<1$ и целое $r>0$ — параметры.

Производящая функция и характеристич. функция П. р. равны соответственно

$$P(z)=p^r(1-qz)^{-r}$$

и

$$f(t)=p^r(1-qe^{it})^{-r}, \quad q=1-p.$$

Математич. ожидание и дисперсия суть rq/p и rq/p^2.

П. р. с параметрами r и p возникает естественным образом в схеме *Бернулли испытаний* с вероятностью «успеха» p и вероятностью «неудачи» $q=1-p$ как распределение числа «неудач» до наступления r-го «успеха». При $r=1$ П. р. совпадает с *геометрическим распределением* с параметром p, а при $r>1$ — с распределением суммы независимых случайных величин, имеющих одинаковое геометрич. распределение с параметром p. В соответствии с этим сумма независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, имеющих П. р. с параметрами p и $r_1, \ldots, r_n$ соответственно, имеет П. р. с параметрами p и $r_1+\ldots+r_n$.

Функция распределения П. р. при $k=0, 1, 2, \ldots$ задается формулой

$$F(k)=\frac{1}{B(r,\ k+1)}\int_0^p x^{r-1}(1-x)^k\,dx,$$

где в правой части стоит значение функции *бета-распределения* в точке p ($B(r,\ k+1)$ — бета-функция). Используя это соотношение, можно доопределить $F(k)$ для всех действительных $r>0$. В таком обобщенном смысле П. р. наз. *отрицательным биномиальным распределением*.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1967.

А. В. Прохоров.

ПАСКАЛЯ ТЕОРЕМА: противоположные стороны шестиугольника, вписанного в линию 2-го порядка,



Рис. 1.

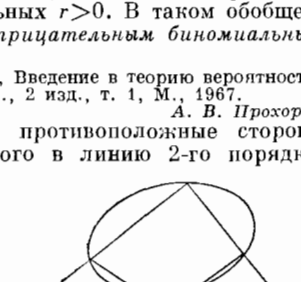


Рис. 2.

пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой (на прямой Паскаля, см. рис. 1). П. т. верна и в том случае, когда две или даже три соседних вер-

шины совпадают (но не более чем по две в одной точке). В этом случае в качестве прямой, проходящей через две совпадающие вершины, принимается касательная к линии в этой точке.

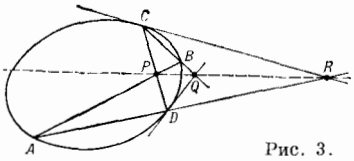


Рис. 3.

Касательная к линии 2-го порядка, проведенная в одной из вершин вписанного пятиугольника, пересекается со стороной, противоположной этой вершине, в точке, к-рая лежит на прямой, проходящей через точки пересечения остальных пар несмежных сторон этого пятиугольника (см. рис. 2).

Если $ABCD$ — четырехугольник, вписанный в линию 2-го порядка, то точки пересечения касательных в вершинах C и D соответственно со сторонами AD и BC и точка пересечения прямых AB и CD лежат на одной прямой (см. рис. 3).

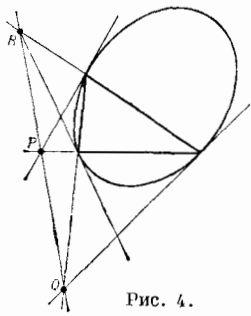


Рис. 4.

Точки пересечения касательных в вершинах треугольника, вписанного в линию 2-го порядка, с противоположными сторонами лежат на одной прямой (см. рис. 4).

П. т. двойственна *Брианшона теореме*.

П. т. установлена Б. Паскалем (B. Pascal, 1639). Частный случай П. т. для линии 2-го порядка, вырождающейся в пару прямых, был известен еще в древности (см. *Паппа аксиома*).

Лит.: [1] Гдаголев Н. А., Проективная геометрия, 2 изд., М., 1963; [2] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978. *П. С. Моденов, А. С. Пархоменко.*

ПАСКАЛЯ ТРЕУГОЛЬНИК — таблица чисел, являющихся *биномиальными коэффициентами*. В этой таблице по боковым сторонам равнобедренного треугольника стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, стоящих над ним слева и справа:

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1 . . . . . . . . . . . 1
```

В строке с номером $n+1$ выписаны коэффициенты разложения бинома $(a+b)^n$. Треугольная таблица, предложенная Б. Паскалем в «Трактате об арифметическом треугольнике» (1654), отличается от выписанной здесь поворотом на 45°. Таблицы для изображения биномиальных коэффициентов были известны и ранее.

Лит.: [1] Успенский В. А., Треугольник Паскаля, 2 изд., М., 1979; [2] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. 2, М., 1970. *В. И. Печаев.*

ПАСКАЛЯ УЛИТКА — *плоская алгебраич. кривая* 4-го порядка; *конхоида* окружности диаметра a (см. рис.). Уравнение в прямоугольных координатах:

$$(x^2+y^2-ax)^2=l^2(x^2+y^2);$$

в полярных координатах:

$$\rho=a\cos\varphi+l.$$



Начало координат — двойная точка, изолированная при $a<l$, узловая при $a>l$, точка возврата

при $a=l$ (в этом случае П. у.— *кардиоида*). Длина дуги выражается эллиптич. интегралом 2-го рода. Площадь, ограниченная П. у.:

$$S=\frac{\pi a^2}{2}+\pi l^2;$$

при $a>l$ площадь внутренней петли при вычислении по этой формуле считается дважды. П. у.— частный случай *Декартова овала*, она является эпитрохоидой (см. *Трохоида*).

П. у. названа по имени Э. Паскаля (E. Pascal, 1-я пол. 17 в.), впервые рассмотревшего ее.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ПАУЛИ МАТРИЦЫ — двурядные комплексные постоянные эрмитовы матрицы коэффициентов. Введены В. Паули (W. Pauli, 1927) для описания спинового механич. момента (спина $\hat{s}=\frac{\hbar}{2}\bar{\sigma}$) и магнитного момента ($\bar{\mu}=\frac{e\hbar}{2mc}\bar{\sigma}$) электрона. Это уравнение корректным образом в нерелятивистском случае описывает частицы со спином $\frac{1}{2}$ (в единицах $\hbar$) и может быть получено из *Дирака уравнения* при условии $\frac{v}{c}\ll 1$. В явном виде П. м. можно записать следующим образом:

$$\sigma_1=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix};\quad \sigma_2=\begin{Vmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{Vmatrix};\quad \sigma_3=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix}.$$

Их собственные значения равны ± 1. П. м. удовлетворяют следующим алгебраич. соотношениям:

$$\sigma_i\sigma_k+\sigma_k\sigma_i=2\delta_{ik},$$

$$\sigma_i\sigma_k-\sigma_k\sigma_i=2i\varepsilon_{ikl}\sigma_l.$$

Вместе с единичной матрицей $\sigma_0=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$ П. м. образуют полную систему матриц второго ранга, по к-рой может быть разложен произвольный линейный оператор (матрица) размерности 2. П. м. действуют на *двухкомпонентные функции-спиноры* ψ_A, $A=1, 2$, преобразующиеся при вращении системы координат по линейному двузначному представлению группы вращений. При повороте на бесконечно малый угол вокруг оси с единичным направляющим вектором $\boldsymbol{n}$, спинор ψ_A преобразуется по формуле

$$\psi_A=\left[\sigma_{AB}+\frac{1}{2}\,i\theta\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})_{AB}\right]\psi'_B,$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}=\sigma_1 n_x+\sigma_2 n_y+\sigma_3 n_z.$$

Из П. м. можно образовать *Дирака матрицы* γ_α, $\alpha=0, 1, 2, 3$:

$$\gamma_0=\begin{Vmatrix}\sigma_0 & 0\\ 0 & -\sigma_0\end{Vmatrix};\quad \gamma_k=\begin{Vmatrix}0 & \sigma_k\\ -\sigma_k & 0\end{Vmatrix};\quad k=1, 2, 3.$$

П. м. изоморфны системе простейших гиперкомплексных чисел — кватернионов. Они используются всегда, когда элементарная частица имеет дискретный параметр, принимающий лишь два значения, напр. при описании изоспина нуклона (протон — нейтрон). Вообще П. м. используются не только для описания изотопич. пространства, но и в формализме группы внутренней симметрии SU (2). В этом случае П. м. являются генераторами двузначного представления группы SU (2) и обозначаются как τ_1, τ_2, τ_3. Иногда удобно пользоваться линейными комбинациями

$$\tau^+=\frac{1}{2}(\tau_1+i\tau_2)=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{Vmatrix};\quad \tau^-=\frac{1}{2}(\tau_1-i\tau_2)=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{Vmatrix}.$$

В нек-рых случаях для релятивистски ковариантного описания двукомпонентных спинорных функций вме-

сто П. м. вводятся связанные с ними матрицы S_α с помощью следующего изоморфизма:

$$S_0 S_0^* + \sigma_0 = 0; \quad S_i S_0^* = \sigma_i, \quad i = 1, 2, 3, \qquad (1)$$

где знак $(*)$ обозначает комплексное сопряжение. Матрицы S_α удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$S_\alpha S_\beta^* + S_\beta S_\alpha^* = 2\eta_{\alpha,\beta}, \qquad (2)$$

где $\eta_{\alpha,\beta}$ — компоненты метрич. тензора пространства Минковского с сигнатурой $+2$. Формулы (1) и (2) позволяют ковариантным образом обобщить П. м. на произвольное искривленное пространство

$$S_\alpha S_\beta^* + S_\beta S_\alpha^* = 2g_{\alpha\beta},$$

где $g_{\alpha\beta}$ — компоненты метрич. тензора искривленного пространства.

Лит.: [1] Паули В., Труды по квантовой теории, [пер. с нем., т. 1—2], М., 1975—77; [2] Нелипа Н. Ф., Физика элементарных частиц, М., 1977; [3] Бриль Д., Уилер Дж., в кн.: Новейшие проблемы гравитации, М., 1961, с. 381—427.

В. Г. Кречет.

ПАША АКСИОМА — одна из аксиом порядка в *Гильберта системе аксиом* евклидовой геометрии. Формулировка аксиомы использует понятие «лежать внутри отрезка», причем отрезок здесь рассматривается как система двух различных точек A и B, принадлежащих одной прямой; точки, лежащие «между» точками A и B, наз. точками отрезка (или внутренними точками отрезка). Понятие «между» (лежать между) описывается группой аксиом порядка, куда входит и П. а., к-рая формулируется следующим образом: пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — прямая в плоскости (ABC) этих трех точек, не проходящая ни через одну из точек A, B, C; если при этом прямая проходит через одну из точек отрезка AB, то она должна пройти через одну из точек отрезка AC или через одну из точек отрезка BC.

П. а. является аксиомой *абсолютной геометрии*. С помощью других гильбертовых аксиом порядка можно доказать, что прямая a не может пересечь оба отрезка AC и BC. Аксиома сформулирована М. Пашем [1].

Лит.: [1] Pasch M., Vorlesungen über neuere Geometrie, Lpz., 1882; [2] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948.

Л. А. Сидоров.

ПЕАНО АКСИОМЫ — система из пяти аксиом для натурального ряда N и функции S (прибавление 1) на нем, введенная Дж. Пеано (G. Peano, 1889):

(1) $0 \in N$;

(2) $x \in N \longrightarrow Sx \in N$;

(3) $x \in N \longrightarrow Sx \neq 0$;

(4) $x \in N \wedge y \in N \wedge Sx = Sy \longrightarrow x = y$;

(5) $0 \in M \wedge \forall x\ (x \in M \longrightarrow Sx \in M) \longrightarrow N \subseteq M$ для любого свойства M (аксиома индукции).

В первом варианте вместо 0 использовалась 1. Сходные аксиомы независимо предложил Р. Дедекинд (R. Dedekind, 1888). П. а. категоричны, т. е. любые две системы $(N, S, 0)$ и $(N', S', 0')$, удовлетворяющие П. а., изоморфны. Изоморфизм определяется функцией $f(x, x)$, где

$$f(0, 0) = 0', \quad f(Sx, Sx) = S' f(x, x);$$
$$f(x, Sy) = f(x, y); \ f(x, y) = 0 \text{ для } y < x.$$

Существование $f(x, y)$ для всех пар (x, y) и взаимная однозначность при $x \leqslant y$ доказываются по индукции. П. а. позволяют развить теорию чисел, в частности ввести обычные арифметич. функции и доказать их свойства. Все аксиомы независимы, однако (3) и (4) можно объединить в одну:

$$x \in N \wedge y \in N \wedge x < y \longrightarrow x \neq y,$$

если определить $x<y$ как

$$\forall M\,[M\,(Sx)\wedge\forall z\,(M\,(z)\longrightarrow M\,(Sz))\longrightarrow M\,(y)].$$

Независимость доказывается предъявлением модели, в к-рой верны все аксиомы, кроме рассматриваемой. Для (1) такая модель — натуральный ряд, начиная с единицы; для (2) — множество $N\cup\{1/2\}$, где $S0=1/2$, $S\,(1/2)=1$; для (3) — множество $\{0\}$; для (4) — множество $\{0,\ 1\}$ с $S0=S1=1$; для (5) — множество $N\cup\cup\{-1\}$.

Иногда под арифметикой Пеано понимают систему в языке 1-го порядка с функциональными символами S, $+$, $\cdot$, состоящую из аксиом

$$Sx\neq 0,\quad Sx=Sy\longrightarrow x=y,$$

определяющих равенств для $+$, $\cdot$ и схемы индукции

$$A\,(0)\wedge\forall x\,(A\,(x)\longrightarrow A\,(Sx))\longrightarrow\forall xA\,(x)$$

(см. *Арифметика формальная*).

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

Г. Е. Минц.

ПЕАНО КРИВАЯ — непрерывный образ отрезка, заполняющий внутренность квадрата (или треугольника). Открыта Дж. Пеано [1]. П. к., рассматриваемая как плоская фигура, не есть множество, нигде не плотное на плоскости; она является жордановой, но не канторовой кривой, а потому не является линией. Построение П. к., заполняющей квадрат, см. в ст. *Линия*; оно принадлежит Д. Гильберту (D. Hilbert). На рис. 1 приведен аналог его построения для треугольника (первые шесть шагов) (другие конструкции см. в [2] и [3]).

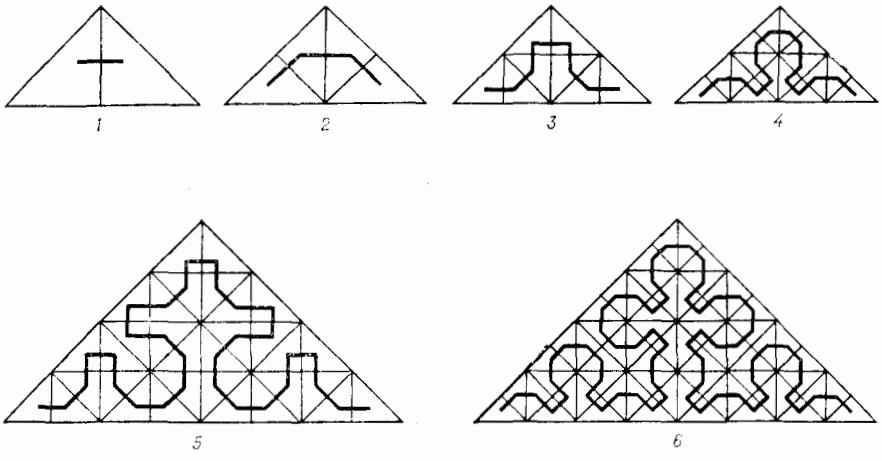


Рис. 1.

Всякая П. к. имеет кратные точки — это «предложение имеет огромную принципиальную важность для геометрии, так как оно показывает, в чем именно кроется самая геометрическая сущность различия числа измерений плоскости и прямой» (Н. Н. Лузин). Не существует П. к., всякая точка к-рой была бы простой или двукратной, но существует П. к., имеющая самое большее лишь трехкратные точки (в счетном числе),— такова, напр., кривая, построенная самим Дж. Пеано; конструкция Д. Гильберта содержит четырехкратные точки (также в счетном числе).

С понятием П. к. связан любопытный факт существования пространственных простых дуг, проектирующихся на плоскость в виде сплошных площадей,— такова, напр., кривая $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=t$, где первые две функции задают П. к. Хотя эта дуга и может служить непроницаемой для дождя крышей, однако она вовсе не есть непрерывная поверхность.

Известный интерес представляют т. н. правильные замкнутые кривые типа Пеано — пределы последовательностей симметричных замкнутых кривых, соответствующих последовательностям триангуляций произвольного правильного многоугольника, каждая из к-рых является правильным (т. е. полученным делением на две равные части) подразделением предыдущей (пример — на рис. 2). При этом последовательность кривых можно выбрать так, чтобы предел площадей областей, ими ограниченных, был равен заданной величине (даже нулю или площади всей подразделяемой фигуры) (рис. 3). Кажется вероятным, что подобные картинки могут быть полезны при исследовании роста кристаллич. структур. Аналогично с помощью последовательностей триангуляций можно строить отображения прямой в плоскость, в частности «периодические» кривые типа Пеано.

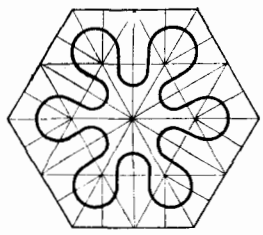


Рис. 2.

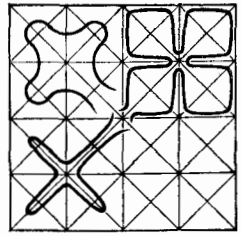


Рис. 3.

Существует аналог П. к., заполняющий многомерный и даже счетномерный куб (см. [3]).

Далеко идущее обобщение содержит теорема Мазуркевича: если X — континуум, то эквивалентны условия: а) пространство X локально связно, б) X — непрерывный образ интервала.

Лит.: [1] Peano G., «Math. Ann.», 1890, Bd 36, S. 157; [2] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [3] Лузин Н. Н., Теория функций действительного переменного, 2 изд., М., 1948.

М. И. Войцеховский.

ПЕАНО ПРОИЗВОДНАЯ — одно из обобщений понятия производной. Пусть существует $\delta>0$ такое, что для всех t с $|t|<\delta$ имеет место

$$f\,(x_0+t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\ldots+\frac{\alpha_r}{r!}\,t^r+\gamma\,(t)\,t^r,$$

где $\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_r$ — постоянные и $\gamma(t)\to 0$ при $t\to 0$. Пусть $\gamma(0)=0$. Тогда число α_r наз. обобщенной производной Пеано порядка r функции f в точке x_0. Обозначение: $f_r(x_0)=\alpha_r$, в частности $\alpha_0=f(x_0)$, $\alpha_1=f'(x_0)$. Если существует $f_{(r)}(x_0)$, то существует и $f_{(r-1)}(x_0)$, $r\geqslant 1$. Если существует конечная обычная двусторонняя производная $f^{(r)}(x_0)$, то $f_{(r)}(x_0)=f^{(r)}(x_0)$. Обратное неверно при $r>1$: для функции

$$f\,(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \text{ и рационально},\\ 0, & x=0 \text{ или иррационально},\end{cases}$$

если определить $x<y$ как

$$\forall M\,[M\,(Sx)\wedge\forall z\,(M\,(z)\longrightarrow M\,(Sz))\longrightarrow M\,(y)].$$

Независимость доказывается предъявлением модели, в к-рой верны все аксиомы, кроме рассматриваемой. Для (1) такая модель — натуральный ряд, начиная с единицы; для (2) — множество $N\cup\{1/2\}$, где $S0=1/2$, $S\,(1/2)=1$; для (3) — множество $\{0\}$; для (4) — множество $\{0,\ 1\}$ с $S0=S1=1$; для (5) — множество $N\cup\cup\{-1\}$.

Иногда под арифметикой Пеано понимают систему в языке 1-го порядка с функциональными символами S, $+$, $\cdot$, состоящую из аксиом

$$Sx\neq 0,\quad Sx=Sy\longrightarrow x=y,$$

определяющих равенств для $+$, $\cdot$ и схемы индукции

$$A\,(0)\wedge\forall x\,(A\,(x)\longrightarrow A\,(Sx))\longrightarrow\forall xA\,(x)$$

(см. *Арифметика формальная*).

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

Г. Е. Минц.

ПЕАНО КРИВАЯ — непрерывный образ отрезка, заполняющий внутренность квадрата (или треугольника). Открыта Дж. Пеано [1]. П. к., рассматриваемая как плоская фигура, не есть множество, нигде не плотное на плоскости; она является жордановой, но не канторовой кривой, а потому не является линией. Построение П. к., заполняющей квадрат, см. в ст. *Линия*; оно принадлежит Д. Гильберту (D. Hilbert). На рис. 1 приведен аналог его построения для треугольника (первые шесть шагов) (другие конструкции см. в [2] и [3]).

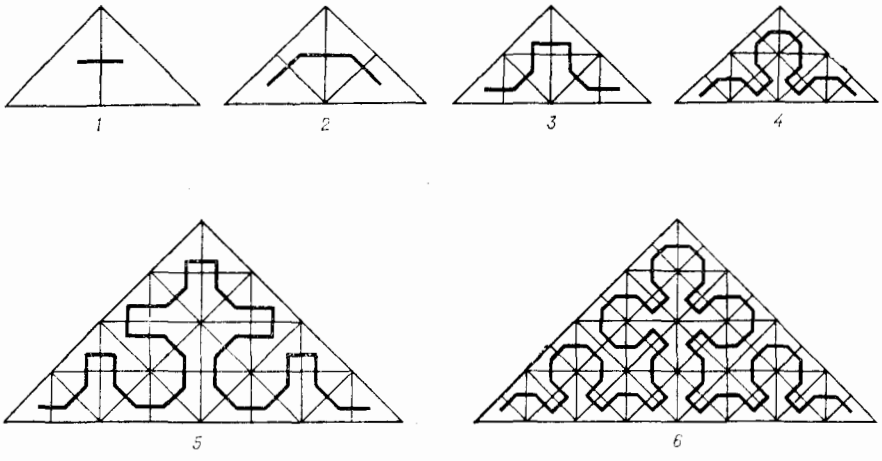


Рис. 1.

Всякая П. к. имеет кратные точки — это «предложение имеет огромную принципиальную важность для геометрии, так как оно показывает, в чем именно кроется самая геометрическая сущность различия числа измерений плоскости и прямой» (Н. Н. Лузин). Не существует П. к., всякая точка к-рой была бы простой или двукратной, но существует П. к., имеющая самое большее лишь трехкратные точки (в счетном числе),— такова, напр., кривая, построенная самим Дж. Пеано; конструкция Д. Гильберта содержит четырехкратные точки (также в счетном числе).

С понятием П. к. связан любопытный факт существования пространственных простых дуг, проектирующихся на плоскость в виде сплошных площадей,— такова, напр., кривая $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=t$, где первые две функции задают П. к. Хотя эта дуга и может служить непроницаемой для дождя крышей, однако она вовсе не есть непрерывная поверхность.

Известный интерес представляют т. н. правильные замкнутые кривые типа Пеано — пределы последовательностей симметричных замкнутых кривых, соответствующих последовательностям триангуляций произвольного правильного многоугольника, каждая из к-рых является правильным (т. е. полученным делением на две равные части) подразделением предыдущей (пример — на рис. 2). При этом последовательность кривых можно выбрать так, чтобы предел площадей областей, ими ограниченных, был равен заданной величине (даже нулю или площади всей подразделяемой фигуры) (рис. 3). Кажется вероятным, что подобные картинки могут быть полезны при исследовании роста кристаллич. структур. Аналогично с помощью последовательностей триангуляций можно строить отображения прямой в плоскость, в частности «периодические» кривые типа Пеано.

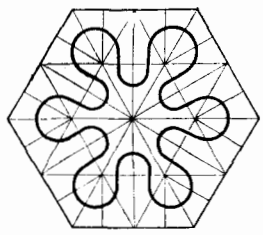


Рис. 2.

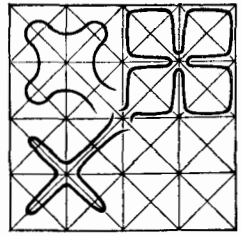


Рис. 3.

Существует аналог П. к., заполняющий многомерный и даже счетномерный куб (см. [3]).

Далеко идущее обобщение содержит теорема Мазуркевича: если X — континуум, то эквивалентны условия: а) пространство X локально связно, б) X — непрерывный образ интервала.

Лит.: [1] Peano G., «Math. Ann.», 1890, Bd 36, S. 157; [2] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [3] Лузин Н. Н., Теория функций действительного переменного, 2 изд., М., 1948.

М. И. Войцеховский.

ПЕАНО ПРОИЗВОДНАЯ — одно из обобщений понятия производной. Пусть существует $\delta>0$ такое, что для всех t с $|t|<\delta$ имеет место

$$f\,(x_0+t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\ldots+\frac{\alpha_r}{r!}\,t^r+\gamma\,(t)\,t^r,$$

где $\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_r$ — постоянные и $\gamma(t)\to 0$ при $t\to 0$. Пусть $\gamma(0)=0$. Тогда число α_r наз. обобщенной производной Пеано порядка r функции f в точке x_0. Обозначение: $f_r(x_0)=\alpha_r$, в частности $\alpha_0=f(x_0)$, $\alpha_1=f'(x_0)$. Если существует $f_{(r)}(x_0)$, то существует и $f_{(r-1)}(x_0)$, $r\geqslant 1$. Если существует конечная обычная двусторонняя производная $f^{(r)}(x_0)$, то $f_{(r)}(x_0)=f^{(r)}(x_0)$. Обратное неверно при $r>1$: для функции

$$f\,(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \text{ и рационально},\\ 0, & x=0 \text{ или иррационально},\end{cases}$$

имеет место $f_{(r)}(0)=0$, $r=1, 2, \ldots$, но не существует $f_{(1)}(x)=f'(x)$ при $x\neq 0$ (ибо $f(x)$ разрывна при $x\neq 0$). Следовательно, не существует обычная производная $f^{(r)}(0)$ при $r>1$.

Вводятся также и бесконечные **обобщенные производные Пеано**. Пусть для всех t с $|t|<\delta$ имеет место

$$f(x_0+t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\ldots+\frac{\alpha_{r-1}}{(r-1)!}t^{r-1}+\frac{\alpha_r(t)}{r!}t^r,$$

где $\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1}$ — постоянные и $\alpha_r(t)\to\alpha_r$ при $t\to 0$ (α_r — число или символ ∞). Тогда α_r также наз. П. п. порядка r функции f в точке x_0. Введена Дж. Пеано (G. Peano).

А. А. Конюшков.

ПЕАНО ТЕОРЕМА — одна из теорем существования решения обыкновенного дифференциального уравнения, установленная Дж. Пеано [1] и состоящая в следующем. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y'=f(x, y). \qquad (*)$$

Тогда если функция f ограничена и непрерывна в области G, то через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) этой области проходит, по крайней мере, одна интегральная кривая уравнения (*). Может оказаться, что через нек-рую точку проходит более одной интегральной кривой, напр. для уравнения $y'=2\sqrt{y}$ существует бесконечное множество интегральных кривых, проходящих через точку (0, 0):

$$y(0),\ -b\leqslant x\leqslant a,$$
$$y=-(x+b)^2,\ x\leqslant -b,$$
$$y=(x-a)^2,\ x\geqslant a,$$

где a, b — произвольные постоянные.

Имеются обобщения (в том числе многомерные) П. т. (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Peano G., «Math. Ann.», 1890, Bd 37, S. 182—228; [2] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970; [3] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970.

М. И. Войцеховский.

ПЕЙДЖА ТЕОРЕМА — 1) П. т. о нулях L-функций Дирихле: пусть $L(s, \chi)$ — *Дирихле L-функция*, $s=\sigma+it$, χ — *Дирихле характер* по mod d, $d\geqslant 3$; существуют абсолютные положительные постоянные $c_1, \ldots, c_8$ такие, что

а) $L(s, \chi)\neq 0$ при $\sigma>1-c_1/\log dt$, $t\geqslant 3$;

б) $L(s, \chi)\neq 0$ при $\sigma>1-c_2/\log d$, $0<t<5$;

в) для комплексного χ mod d,

$$L(s, \chi)\neq 0 \text{ при } \sigma>1-c_3/\log d,\ |t|\leqslant 5;$$

г) для действительного примитивного χ mod d,

$$L(\sigma, \chi)\neq 0 \text{ при } \sigma>1-c_4/\sqrt{d}\log^2 d;$$

д) для $2<d\leqslant D$ существует не более одного $d=d_0$, $d_0>c_5\log^2 D/(\log\log D)^8$ и не более одного действительного примитивного χ_1 mod d_0, для к-рого $L(s, \chi_1)$ может иметь действительный нуль $\beta_1>1-c_6/\log D$, причем β_1 является однократным нулем и для всех β таких, что $L(\beta, \chi)=0$, $\beta>1-c_6/\log D$ с действительным χ mod d имеют $d\equiv 0 \pmod{d_0}$.

2) П. т. о $\pi(x; d, l)$ — числе простых чисел $p\leqslant x$, $p\equiv l \pmod d$, при $0<l\leqslant d$, l и d — взаимно простых. В обозначениях и при условиях п. 1 вследствие а) — в) и д) справедливо равенство

$$\pi(x; d, l)=\frac{\operatorname{li} x}{\varphi(d)}-E\frac{\chi(l)}{\varphi(d)}\sum_{n\leqslant x}\frac{n^{\beta_1-1}}{\log n}+$$
$$+O\left(xe^{-c_7\sqrt{\log x}}\right),$$

где $E=1$ или $E=0$, смотря по тому, существует β_1

или нет для данного d, и вследствие 2), для любого $d \leqslant (\log x)^{1-\delta}$ при фиксированном $\delta > 0$

$$\pi(x;\ d,\ l) = \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(d)} + O\left(x e^{-c_8\sqrt{\log x}}\right). \qquad (*)$$

Этот результат является единственным (1983), к-рый эффективен в том смысле, что, если значение δ задано, можно указать численные значения c_8 и постоянной, входящей в символ 0. Замена оценки 2) оценкой Зигеля: $L(\sigma,\ x) \neq 0$ при $\sigma > 1 - c(\varepsilon) d^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ распространяет действие формулы (*) на существенно большие d, $d \leqslant (\log x)^A$, с любым фиксированным A, но при этом утрачивается эффективность оценок в формуле (*) — по заданному $\varepsilon > 0$ невозможно оценить $c_8 = c_8(\varepsilon)$ и $O = O_\varepsilon$.

П. т. установлены Э. Пейджем [1].

Лит.: [1] Page A., «Proc. London Math. Soc. Ser. 2», 1935, v. 39, № 2, p. 116—41; [2] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, М., 1975; [3] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967.

А. Ф. Лаврик.

ПЕКЛЕ ЧИСЛО — один из критериев подобия для процессов конвективного теплообмена. П. ч. характеризует соотношение между конвективным и молекулярным процессами переноса тепла в потоке жидкости. П. ч.

$$\mathrm{Pe} = vl/a = C_p \rho v/(\lambda/l),$$

где l — характерный линейный размер поверхности теплообмена, v — скорость потока жидкости относительно поверхности теплообмена, a — коэффициент температуропроводности, C_p — теплоемкость при постоянном давлении, ρ — плотность и λ — коэффициент теплопроводности жидкости.

П. ч. связано с *Рейнольдса числом* Re и *Прандтля числом* Pr соотношением $\mathrm{Pe} = \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}$.

П. ч. названо по имени Ж. Пекле (J. Péclet).

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

ПЕЛЛЯ УРАВНЕНИЕ — диофантово уравнение вида

$$x^2 - dy^2 = 1, \qquad (1)$$

а также более общее уравнение

$$x^2 - dy^2 = c, \qquad (2)$$

где d — натуральное, $\sqrt{d}$ — иррациональное число, c — целое, неизвестные x и y — целые числа.

Если P_s/Q_s, $s = 0, 1, 2, \ldots$, — подходящие дроби разложения $\sqrt{d}$ в цепную дробь с периодом k, то положительные решения уравнения (1) имеют вид

$$x = P_{kn-1}, \quad y = Q_{kn-1},$$

где n — любое натуральное число такое, что kn четно.

Все решения уравнения (1) получаются из формулы

$$x + y\sqrt{d} = \pm (x_0 + y_0\sqrt{d})^n,$$

где n — любое целое, а $(x_0,\ y_0)$ решение с наименьшими положительными значениями неизвестных. Общее уравнение (2) либо совсем не имеет решений, либо — бесконечно много. При $c = -1$ решения существуют тогда и только тогда, когда k нечетно. При $c = 4$ уравнение (2) всегда имеет решения. С помощью решений П. у. при $c = \pm 1,\ \pm 4$ находятся единицы квадратичного поля $R(\sqrt{d})$. Решения П. у. используются при нахождении автоморфизмов бинарных квадратичных форм $Ax^2 + Bxy + Cy^2$; они позволяют по одному решению диофантова уравнения $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = n$ получить бесконечное множество решений.

Уравнение (1) изучалось У. Броункером (W. Brouncker, 1657), П. Ферма (P. Fermat) и Дж. Валлисом (J. Wallis). Л. Эйлер (L. Euler) по недоразумению связал его с именем Дж. Пелля (J. Pell).

Лит.: [1] Вальфиш А. З., Уравнение Пелля, Тб., 1952; [2] Гельфонд А. О., Решение уравнений в целых числах, 3 изд., М., 1978; [3] Le Veque W. J., Topics in number theory, L., 1961.
А. А. Бухштаб.

ПЕНЛЕВЕ ПРОБЛЕМА — проблема характеризации *устранимых множеств* для класса ограниченных однозначных аналитич. функций комплексного переменного z. Пусть E — компактное множество на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ такое, что дополнение $CE = \mathbb{C} \setminus E$ есть область. Каковы минимальные условия на E, при выполнении к-рых любая ограниченная однозначная аналитич. функция в CE продолжается аналитически на E и, следовательно, является константой? П. Пенлеве [1] указал достаточное условие: линейная мера Хаусдорфа множества E (такие множества иногда наз. множествами Пенлеве) должна обращаться в нуль; однако его рассуждения содержали ряд неточностей (см. [2], [3]). Необходимое и достаточное условие на E состоит в том, чтобы *аналитическая емкость* E обращалась в нуль (теорема Альфорса). Построен пример множества нулевой аналитической емкости, но положительной линейной меры [5].

Лит.: [1] Painlevé P., Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm, [1895], P., 1897; [2] Zoretti L., «J. math. pure appl.», 1905, t. 1, p. 1—51; [3] его же, Leçons sur le prolongement analytique, P., 1911; [4] Ahlfors L., «Duke Math. J.», 1947, v. 14, p. 1—11; [5] Витушкин А. Г., «Докл. АН СССР», 1959, т. 127, № 2, с. 246—49.
Е. Д. Соломенцев.

ПЕНЛЕВЕ ТЕОРЕМА — 1) П. т. о решениях аналитических дифференциальных уравнений: решения дифференциального уравнения $P(w', w, z) = 0$, где P — многочлен относительно неизвестной функции w и ее производной w' и w — аналитич. функция относительно независимого переменного z, не могут иметь подвижных (т. е. зависящих от произвольной постоянной) существенно особых точек и трансцендентных точек ветвления.

2) П. т. об аналитическом продолжении: если Γ — спрямляемая жорданова кривая, расположенная в области D на плоскости комплексного переменного z, и функция $f(z)$ непрерывна в D и аналитична на $D \setminus \Gamma$, то $f(z)$ — аналитич. функция и во всей области D (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Painlevé P., Sur les lignes singulières des fonctions analytiques, P., 1887; [2] его же, Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm, [1895], P., 1897; [3] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950.
Е. Д. Соломенцев.

ПЕНЛЕВЕ УРАВНЕНИЕ — общее название группы из шести специальных обыкновенных дифференциальных уравнений типа

$$w'' = R(w', w, z),$$

где R — рациональная функция от w' и w и аналитич. функция от z. Любое такое уравнение, имеющее лишь неподвижные критич. точки, может быть приведено к одному из 50 канонич. уравнений. Среди этих уравнений имеются линейные уравнения, уравнения Риккати и др. известные уравнения, а также 6 уравнений, называемые уравнениями Пенлеве и имеющие своими решениями трансцендентные функции Пенлеве — специальные функции, не сводящиеся к другим известным функциям. Расположенные в общепринятом порядке, П. у. имеют следующий вид (a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ — константы):

1) $w'' = 6w^2 + z$;

2) $w'' = 2w^3 + zw + a$;

3) $w'' = \frac{w'^2}{w} + e^z(aw^2 + b) + e^{2z}\left(cw^3 + \frac{d}{w}\right), \quad bd \neq 0$;

4) $w'' = \frac{w'^2}{2w} + \frac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - a)w + \frac{b}{w}$;

5) $$w''=w'^2\left(\frac{1}{2w}+\frac{1}{w-1}\right)-\frac{w'}{z}+\frac{(w-1)^2}{z^2}\left(aw+\frac{b}{w}\right)+$$
$$+c\,\frac{w}{z}+d\,\frac{w(w+1)}{w-1};$$

6) $$w''=\frac{w'^2}{2}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w-z}\right)-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{w-z}\right)w'+$$
$$+\frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left[a+b\,\frac{z}{w^2}+c\,\frac{z-1}{(w-1)^2}+d\,\frac{z(z-1)}{(w-z)^2}\right].$$

Указанные результаты впервые получены в исследованиях П. Пенлеве (см. [1], [2]), к-рые были продолжены, уточнены и дополнены Б. Гамбье [3].

Лит.: [1] Painlevé P., «Bull. Soc. math. France», 1900, t. 28, p. 201—61; [2] его же, «Acta math.», 1902, t. 25, p. 1—85; [3] Gambier B., там же, 1910, t. 33, p. 1—55; [4] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950; [5] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Хар., 1939. *Н. Х. Розов.*

ПЕНТАСФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — вид однородных координат, связанных с декартовыми прямоугольными координатами формулами:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{Z_1}{N},\quad x=\frac{Z_2}{N},\quad y=\frac{Z_3}{N},\quad z=\frac{Z_4}{N}.$$

П. к. точки в 3-мерном евклидовом пространстве связаны соотношением

$$Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2-NZ_1=0. \qquad (*)$$

С помощью П. к. можно пополнить 3-мерное евклидово пространство до сферического, допуская элемент $N=0$. При этом соотношение (*) описывает положение этого 3-мерного сферич. пространства в 4-мерном проективном пространстве.

Существует 2-мерный аналог П. к.— тетрациклические координаты. Именно, пусть

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$$

— уравнение сферы в однородных координатах, где x_4 — радиус сферы. Числа x_1, x_2, x_3, x_4 являются П. к. той точки плоскости, к-рая соответствует точке сферы при стереографич. проекции сферы на плоскость.

Вполне аналогичные построения могут быть проведены в пространствах более высокой размерности, в результате чего получаются полисферические координаты. В 4-мерном случае они наз. гексасферическими координатами. Полисферич. координаты используются в конформной геометрии, при изучении многообразий фигур.

Лит.: [1] Клейн Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.— Л., 1939; [2] Бушманова Г. В., Норден А. П., Элементы конформной геометрии, Казань, 1972. *Д.Д. Соколов.*

ПЕРВАЯ АКСИОМА СЧЕТНОСТИ — понятие теоретико-множественной топологии. Топологич. пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности, если система окрестностей всякой его точки обладает счетной базой. Класс пространств, удовлетворяющих П. а. с., выделен Ф. Хаусдорфом (F. Hausdorff, 1914); к этому классу принадлежат, напр., все метрич. пространства, пространство непрерывных функций на отрезке и др. Пространства, удовлетворяющие *второй аксиоме счетности*, удовлетворяют и П. а. с. Обратное неверно, напр. всякое несчетное пространство с дискретной топологией не удовлетворяет П. а. с. *М. И. Войцеховский.*

ПЕРВАЯ ВАРИАЦИЯ — см. *Вариация функционала.*

ПЕРВАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА, метрическая форма, поверхности — квадратичная форма от дифференциалов координат на поверхности, к-рая определяет внутреннюю геометрию поверхности в окрестности данной точки.

Пусть поверхность задана уравнением

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\,v),$$

где u и v — внутренние координаты на поверхности;

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv$$

— дифференциал радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ вдоль выбранного направления $du : dv$ смещения из точки M в бесконечно близкую точку M' (см. рис. 1). Квадрат главной линейной части приращения длины дуги MM' выражается квадратом дифференциала $d\boldsymbol{r}$:

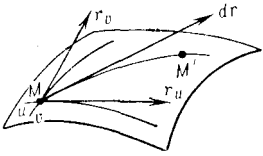


Рис. 1.

$$I = ds^2 = d\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{r}_u^2\, du^2 + 2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\, du\, dv + \boldsymbol{r}_v^2\, dv^2$$

и наз. первой основной квадратичной формой поверхности. Коэффициенты П. к. ф. обычно обозначают через

$$E = \boldsymbol{r}_u^2, \quad F = (\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v), \quad G = \boldsymbol{r}_v^2$$

или в тензорных символах

$$d\boldsymbol{r}^2 = g_{11}\, du^2 + 2g_{12}\, du\, dv + g_{22}\, dv^2.$$

Тензор g_{ij} наз. основным, или метрическим, тензором поверхности. П. к. ф. является положительно определенной формой в обыкновенных точках поверхности:

$$EG - F > 0.$$

П. к. ф. характеризует метрич. свойства поверхности: знание П. к. ф. позволяет вычислять длины дуг на поверхности:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt,$$

где t — параметр на кривой; углы между кривыми на поверхности:

$$\cos\widehat{(d\boldsymbol{r}\ \delta\boldsymbol{r})} = \frac{E\, du\, \delta u + F\,(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G dv\, \delta v}{\sqrt{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2}\ \sqrt{E\, \delta u^2 + 2F\, \delta u\, \delta v + G\, \delta v^2}},$$

где $du : dv$ и $\delta u : \delta v$ — направления векторов, касательных к кривым (см. рис. 2); площади областей на поверхности:

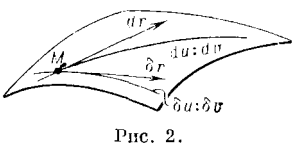


Рис. 2.

$$\sigma = \iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Вид коэффициентов П. к. ф. существенно зависит от выбора координат на поверхности. П. к. ф. имеет т. н. ортогональный вид:

$$E\,(u,\ v)\, du^2 + G\,(u,\ v)\, dv^2$$

в ортогональных координатах; канонический вид

$$du^2 + G^2\, dv^2$$

в полугеодезич. координатах; изотермический (изометрический) вид в изотермич. координатах

$$ds^2 = \lambda^2\,(u,\ v)\,(du^2 + dv^2).$$

Иногда поверхности характеризуются специальными видами П. к. ф. Напр., *Лиувилля поверхности* характеризуются следующим видом П. к. ф.:

$$[\varphi\,(u) + \psi\,(v)]\,(du^2 + dv^2).$$

П. к. ф. является инвариантом изгибания поверхности: полная кривизна поверхности в данной точке может быть вычислена через коэффициенты только П. к. ф. и их производные (теоремы Гаусса).

О связи П. к. ф. с другими квадратичными формами поверхности и лит. см. в ст. *Квадратичные формы поверхности.*

А. Б. Иванов.

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА — краевая задача специального вида; заключается в отыскании в области D переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$ решения дифференциального уравнения

$$Lu=f \tag{1}$$

четного порядка $2m$ по заданным значениям всех производных порядка не выше m на границе S области D (или ее части). Эти условия обычно задаются в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^k u\Big|_S=\varphi_k, \quad 0\leqslant k\leqslant m-1, \tag{2}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали к ∂D. Функции φ_k, $0\leqslant k\leqslant m-1$, наз. данными Дирихле, а сама задача (1), (2), если $S=\partial D$, — *Дирихле задачей*.

Для обыкновенного дифференциального уравнения

$$Lu\equiv u''+a_1u'+au=f \tag{3}$$

в области $D=(x_0<x<x_1)$ П. к. з. определяется краевым условием

$$u(x_0)=y_0, \quad u(x_1)=y_1.$$

Для линейного равномерно эллиптич. уравнения

$$Lu\equiv\sum_{i,\ j=1}^n a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^n a_iu_{x_i}+au=f \tag{4}$$

П. к. з. (задача Дирихле) состоит в нахождении решений этого уравнения при условии

$$u|_{\partial D}=\varphi.$$

Если функции a_{ij}, a_i, a, f, φ и $(n-1)$-мерное многообразие ∂D достаточно гладки, то эта задача фредгольмова. В частности, когда мера D достаточно мала или когда $a\leqslant 0$ в D, П. к. з. однозначно разрешима. Условия гладкости могут быть значительно ослаблены как в отношении коэффициентов уравнения и данных Дирихле, так и в отношении границы ∂D.

Если (1) является системой $N>1$ уравнений относительно неизвестного N-компонентного вектора u, то П. к. з. ставится аналогичным образом. В этом случае между задачами Дирихле для систем (3) и (4) имеется существенное различие: если задача (3), (2) ($S=\partial D$) всегда фредгольмова, то фредгольмовость задачи (4), (2) может нарушаться. Напр., однородная задача Дирихле для равномерно эллиптич. системы Бицадзе (см. [1])

$$u^1_{xx}-u^1_{yy}-2u^2_{xy}=0,$$
$$2u^1_{xy}+u^2_{xx}-u^2_{yy}=0$$

в круге $x^2+y^2<R^2$ имеет бесконечное число линейно независимых решений. Этот пример послужил отправным пунктом различных дополнительных условий на L (правильная эллиптичность, сильная эллиптичность), обеспечивающих фредгольмовость задачи Дирихле.

Для линейных параболич. уравнений П. к. з. ставится в цилиндре и носителем данных Дирихле служит его основание и боковая поверхность. Напр., для уравнения теплопроводности

$$Lu\equiv u_t-\sum_1^n u_{x_ix_i}=0$$

решение ищется в области

$$D=\{0<t<T, \quad x=(x_1, \ldots, x_n)\in G\}$$

и носителем данных Дирихле $\varphi=u|_S$ служит

$$S=\{0\leqslant t\leqslant T, \quad x\in\partial G\}\cup\{t=0, \quad x\in\partial G\}.$$

Если граница ∂G — гладкое $(n-1)$-мерное многообразие, функция φ гладкая и выполнено условие согласования на $\{t=0,\ x\in\partial G\}$, то П. к. з. однозначно разрешима.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981; [2] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [3] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [4] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [5] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [6] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [7] Хермандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965.

А. П. Солдатов.

ПЕРВИЧНОЕ КОЛЬЦО — кольцо R, в к-ром произведение любых двусторонних идеалов P и Q равно нулевому идеалу в том и только в том случае, когда либо P, либо Q является нулевым идеалом. Другими словами, идеалы П. к. по умножению образуют полугруппу без делителей нуля. Кольцо R является П. к. тогда и только тогда, когда правый (левый) *аннулятор* любого его ненулевого правого (соответственно левого) идеала равен (0), а также тогда и только тогда, когда $aRb\neq 0$ для любых ненулевых $a,\ b\in R$. Центр П. к. является *областью целостности*. Любое *примитивное кольцо* первично. Если кольцо R не содержит ненулевых нильидеалов, то R — подпрямая сумма первичных колец. Класс П. к. играет важную роль в теории радикалов колец (см. [1]).

Существует следующее обобщение понятия П. к. Кольцо R наз. полупервичным, если оно не имеет ненулевых нильпотентных идеалов.

Лит.: [1] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М., Радикалы алгебр и структурная теория, М., 1979; [2] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [3] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972.

К. А. Жевлаков.

ПЕРВИЧНЫЙ ИДЕАЛ — такой двусторонний идеал I кольца A, что из включения $PQ\subseteq I$ для любых двусторонних идеалов P и Q кольца A следует, что либо $P\subseteq I$, либо $Q\subseteq I$. Для первичности идеала I кольца R необходимо и достаточно, чтобы множество $R\setminus I$ было m-системой, т. е. чтобы для любых $a,\ b\in R\setminus I$ существовал $x\in R$ такой, что $axb\in R\setminus I$. Идеал I кольца A первичен тогда и только тогда, когда факторкольцо по нему является *первичным кольцом*.

К. А. Жевлаков.

ПЕРВООБРАЗНАЯ, первообразная (примитивная) функция, для конечной функции $f(x)$ — такая функция $F(x)$, что всюду $F'(x)=f(x)$. Это определение является наиболее распространенным, но встречаются и другие, в к-рых ослаблены требования существования всюду конечной F' и выполнения всюду равенства $F'=f$; иногда в определении используют обобщения производной. Большинство теорем о П. касается их существования, нахождения и единственности. Достаточным условием для существования П. у заданной на отрезке функции f является непрерывность f; необходимыми условиями являются принадлежность функции f первому *Бэра классу* и выполнение для нее Дарбу свойства. У заданной на отрезке функции любые две П. отличаются на постоянную. Задачу нахождения F по F' для непрерывных F' решает *Римана интеграл*, для ограниченных F' — *Лебега интеграл*, для любой F' — узкий (а тем более широкий) *Данжуа интеграл* и *Перрона интеграл*.

Лит.: [1] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1, М., 1981; [2] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975.

Т. П. Лукашенко.

ПЕРВООБРАЗНЫЙ КОРЕНЬ — 1) П. к., примитивный корень, из единицы в поле K степени m — элемент ζ поля K такой, что $\zeta^m=1$ и $\zeta^r\neq 1$ для любого натурального $r<m$. Элемент ζ порождает циклич. группу $\mu(m)$ корней из единицы порядка m.

Если в поле K существует П. к. степени m, то m взаимно просто с характеристикой поля K. Алгебраически замкнутое поле содержит П. к. любой степени взаимно простой с характеристикой поля. Если ζ — П. к. степени n, то для любого k взаимно простого с n элемент ζ^k также является П. к. Число всех П. к. степени m равно значению функции Эйлера $\varphi(m)$.

В поле комплексных чисел П. к. степени m имеют вид

$$\cos\frac{2\pi k}{m}+i\sin\frac{2\pi k}{m},$$

где $0<k<m$ и k взаимно просто с m.

2) П. к. по модулю m — целое число g такое, что

$$g^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m \quad \text{и} \quad g^{\gamma}\not\equiv 1 \pmod m$$

при $1\leqslant\gamma\leqslant\varphi(m)-1$, где $\varphi(m)$ — функция Эйлера. Для П. к. g его степени $g^0=1, g, \ldots, g^{\varphi(m)-1}$ несравнимы между собой по модулю m и образуют приведенную систему вычетов по модулю m. Таким образом, для каждого числа a, взаимно простого с m, найдется показатель γ $(0\leqslant\gamma\leqslant\varphi(m)-1)$, для к-рого $a\equiv g^{\gamma} \pmod m$.

П. к. существуют не для всех модулей, а только для модулей m вида $m=2, 4, p^{\alpha}, 2p^{\alpha}$, где $p>2$ — простое число. В этих случаях *мультипликативные группы* приведенных классов вычетов по модулю m устроены наиболее просто: они являются циклич. группами порядка $\varphi(m)$. С понятием П. к. по модулю m тесно связано понятие *индекса* числа по модулю m.

П. к. для простых модулей p были введены Л. Эйлером (L. Euler), но существование П. к. для любых простых модулей p было доказано лишь К. Гауссом (C. Gauss, 1801).

Лит.: Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел, пер. с лат. и нем., М., 1959; [3] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972.

Л. В. Кузьмин, С. А. Степанов.

ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ обыкновенного дифференциального уравнения — отличная от постоянной и непрерывно дифференцируемая функция, производная к-рой вдоль решений данного уравнения тождественно равна нулю. Для скалярного уравнения

$$y'=f(x, y) \qquad (*)$$

П. и. есть функция $F(x, y)$, находящаяся в левой части общего решения $F(x, y)=C$, где C — произвольная постоянная. Таким образом, $F(x, y)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}f(x, y)=0$$

с частными производными 1-го порядка. П. и. может не существовать во всей области задания уравнения (*), однако в малой окрестности точки, в к-рой функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема, он всегда существует. П. и. определяется не единственным образом. Так, для уравнения $y'=-x/y$ П. и. является как функция x^2+y^2, так, напр., и функция $\exp(x^2+y^2)$.

Знание П. и. нормальной системы

$$\dot{x}=f(x, t), \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

позволяет понизить порядок этой системы на единицу, а отыскание n функционально независимых П. и. равносильно отысканию общего решения в неявном виде. Если $F_1(x, t), \ldots, F_n(x, t)$ — функционально независимые П. и., то всякий другой П. и. $F(x, t)$ можно представить в виде

$$F(x, t)=\Phi(F_1(x, t), \ldots, F_n(x, t)),$$

где Φ — нек-рая дифференцируемая функция.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974.

Н. Н. Ладис.

ПЕРЕВАЛА МЕТОД — метод вычисления асимптотики интегралов вида

$$F(\lambda)=\int_{\gamma} f(z)\, e^{\lambda S(z)}\, dz, \qquad (*)$$

где $\lambda>0$, $\lambda\to+\infty$ — большой параметр, γ — контур в комплексной плоскости z, функции $f(z)$ и $S(z)$ голоморфны в области D, содержащей γ. Нули функции $S'(z)$ наз. точками перевала функции $S(z)$; точка перевала — седловая точка поверхности $U=\operatorname{Re} S(x+iy)$. Суть П. м. состоит в следующем. Контур γ деформируется в контур $\tilde{\gamma}$ с теми же концами, лежащий в D и такой, что $\max\limits_{z\in\tilde{\gamma}} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в точках перевала или на концах $\tilde{\gamma}$ (перевальный контур). Асимптотика интеграла $(*)$ по перевальному контуру вычисляется с помощью *Лапласа метода* и равна сумме вкладов от указанных точек максимума. Вклад $V_{z_0}(\lambda)$ от точки z_0 — это интеграл вида $(*)$, взятый по малой дуге контура $\tilde{\gamma}$, содержащей точку z_0. Если z_0 — внутренняя точка контура $\tilde{\gamma}$, z_0 — точка перевала и $S''(z_0)\neq 0$, то

$$V_{z_0}(\lambda)=\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(z_0)}}\, e^{\lambda S(z_0)}\,[f(z_0)+O(\lambda^{-1})].$$

Перевальный контур обладает минимаксным свойством: на нем достигается

$$\min_{\gamma'}\max_{z\in\gamma'} \operatorname{Re} S(z),$$

где минимум берется по всем контурам γ', лежащим в D и имеющим те же концы, что и γ. Основная трудность при применении П. м.— отбор точек перевала, т. е. выбор перевального контура $\tilde{\gamma}$, отвечающего γ.

П. м. восходит к П. Дебаю [1]; идеи этого метода были высказаны ранее Б. Риманом (см. [2]). Вычисление вкладов от точек перевала и от концов контура см. в [3] — [9].

П. м.— по существу единственный метод, позволяющий вычислять асимптотику интегралов вида $(*)$. С его помощью вычислены асимптотики преобразований Лапласа, Фурье, Меллина, экспоненты от полинома, многих специальных функций.

Пусть $z\in\mathbb{C}^n$, γ — ограниченное многообразие с краем размерности n и класса C^∞, функции $f(z)$, $S(z)$ голоморфны в нек-рой области D, содержащей γ, и $dz=dz_1\ldots dz_n$. Пусть $\max\limits_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z)$ достигается только в одной точке z^0, к-рая является внутренней точкой γ и невырожденной точкой перевала функции $S(z)$, т. е. $\Delta_S(z^0)\equiv\det S''(z^0)\neq 0$. Тогда вклад от z^0 равен

$$F(\lambda)=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}(-\Delta_S(z^0))^{-1/2}e^{\lambda S(z^0)}\,[f(z^0)+O(\lambda^{-1})].$$

Лит.: [1] Debye P., «Math. Ann.», 1909, Bd 67, S. 535—58; [2] Риман Б., Сочинения, пер. с нем., М.— Л., 1948; [3] Эрдейи А., Асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1962; [4] Брейн Н. Г., Асимптотические методы в анализе, пер. с англ., М., 1961; [5] Евграфов М. А., Асимптотические оценки и целые функции, 2 изд., М., 1962; [6] Копсон Э.-Т., Асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1966; [7] Olver F. W. J., Asymptotics and special functions, N. Y.— [a. o.], 1974; [8] Риекстыньш Э. Я., Асимптотические разложения интегралов, т. 1—2, Рига, 1974—77; [9] Федорюк М. В., Метод перевала, М., 1977.

М. В. Федорюк.



Рис. 1.

ПЕРЕГИБА ТОЧКА — точка M плоской кривой, обладающая следующими свойствами: в точке M кривая имеет единственную касательную, в достаточно малой окрестности точки M кривая расположена внутри одной пары вертикальных углов, образуемых касательной и нормалью (см. рис. 1).

Пусть функция $f(x)$ определена в нек-рой окрестности точки x_0 и непрерывна в этой точке. Точка x_0 наз. точкой перегиба функции $f(x)$, если она является одновременно концом интервала строгой выпуклости вверх и концом интервала строгой выпуклости вниз. В этом случае точка $(x_0; f(x_0))$ наз. точкой перегиба графика функции, т. е. график функции $f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ «перегибается» через касательную к нему в этой точке: при $x<x_0$ касательная лежит под графиком $f(x)$, а при $x>x_0$ — над графиком $f(x)$ (или наоборот) (см. рис. 2). Необходимое условие существования П. т.: если функция $f(x)$, дважды дифференцируемая в нек-рой окрестности точки x_0, имеет в x_0 П. т., то $f''(x_0)=0$. Достаточное условие существования П. т.: если функция $f(x)$ в нек-рой окрестности точки x k раз непрерывно дифференцируема, причем k нечетно и $k\geqslant 3$, и $f^{(n)}(x_0)=0$ при $n=2, 3, \ldots, k-1$, а $f^{(k)}(x_0)\neq 0$, то функция $f(x)$ имеет в x_0 П. т.

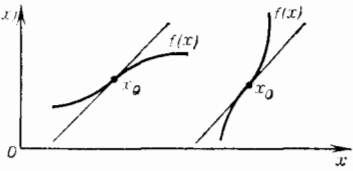


Рис. 2.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980; [2] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1, М., 1981.

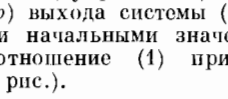
ПЕРЕГОРОДКА — замкнутое множество E топологич. пространства X, разбивающее X между данными множествами P и Q (или, др. словами, отделяющее P и Q в X), т. е. такое, что $X\setminus E=H_1\cup H_2$, где H_1 и H_2 дизъюнктны и открыты в $X\setminus E$, $P\subset H_1$, $Q\subset H_2$ (при этом оказывается, что P и Q открыты во всем X). П. наз. тонкой, если ее внутренность пуста. Всякое бинарное (т. е. состоящее из двух элементов) *разбиение* $\alpha=(A_1, A_2)$ пространства X определяет в X тонкую П.: $B=$граница $A_1=$граница A_2, причем $X\setminus B=O_1\cup O_2$, где O_i — открытое ядро A_i, $i=1, 2$. Верно и обратное. По существу понятие П. между множествами сводится к понятию *связности*. Но и обратно, пространство X несвязно, если $\varnothing$ есть П. между непустыми множествами.

М. И. Войцеховский.

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ линейной стационарной системы управления (системы автоматич. регулирования) — *Лапласа преобразование* отклика системы на воздействие единичной импульсной функции (дельта-функции) $\delta(t)$ при нулевых условиях в момент $t=0$ (сам этот отклик наз. функцией веса, импульсной переходной функцией или импульсной характеристикой системы). Эквивалентное определение: П. ф. есть отношение изображений по Лапласу (см. *Операционное исчисление*) выходного и входного сигналов с нулевыми начальными данными. П. ф. представляет собой дробно-рациональную функцию $W(p)$ комплексного переменного p; она является коэффициентом в линейном соотношении

$$Y(p)=W(p)\,U(p), \qquad (1)$$

связывающем изображение по Лапласу $U(p)$ входа системы (воздействия, управления) $u(t)$ и изображение по Лапласу $Y(p)$ выхода системы (отклика, реакции) $y(t)$ с нулевыми начальными значениями. В теории управления соотношение (1) принято изображать графически (см. рис.).



Пусть, напр., система управления описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнени-

ем с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}, \quad a_n = 1 \qquad (2)$$

(в реальных системах, как правило, $m \leqslant n$). Тогда

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0}. \qquad (3)$$

Это же выражение можно получить, если, используя операторную форму записи уравнения (2) с помощью оператора дифференцирования p

$$A(p)\, y = B(p) u,$$

определить П. ф. как отношение входного оператора системы $B(p)$ к собственному оператору системы $A(p)$. П. ф. (3) системы (2) допускает следующее толкование: если выбрать управление $u = e^{st}$, где s — комплексное число такое, что $A(s) \neq 0$, то линейное неоднородное уравнение (2) имеет частное решение $y = W(s) e^{st}$.

П. ф. не следует путать с переходной функцией, к-рая представляет собой отклик системы на воздействие единичной ступенчатой функции

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

при нулевых начальных условиях.

П. ф. является одним из основных понятий теории линейных стационарных систем управления. Она не зависит от характера приложенных к системе управляющих воздействий, а определяется лишь параметрами самой системы и дает тем самым ее динамич. характеристику. Особую роль в теории управления играет функция $W(i\omega)$ чисто мнимого аргумента, наз. амплитудно-фазовой, или частотной, характеристикой системы. Понятие П. ф. обобщается и на линейные системы управления иных типов (матричные, нестационарные, дискретные, с распределенными параметрами и др.).

Лит.: [1] Ройтенберг Я. Н., Автоматическое управление, 2 изд., М., 1978; [2] Математические основы теории автоматического регулирования, М., 1971; [3] Калман Р., Фалб П., Арбиб М., Очерки по математической теории систем, пер. с англ., М., 1971; [4] Бутковский А. Г., Характеристики систем с распределенными параметрами. Справочное пособие, М., 1979.

Н. Х. Розов.

ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ МЕТОД — итерационный метод решения систем линейных или нелинейных уравнений, возникающих в разностных или проекционно-разностных методах при приближенном решении, напр., краевых задач для уравнений с частными производными эллиптич. типа.

Пусть, напр., имеются две пространственные переменные и последовательности квадратных сеток ω_h с шагом $h > 0$ и узлами $x_i \equiv (i_1 h, i_2 h)$, где $i \equiv (i_1, i_2)$ — вектор с целочисленными компонентами. Пусть Ω_h — множество узлов ω_h, в к-рых ищется решение разностной или проекционно-разностной задачи, записанной в виде операторного уравнения

$$L_h(u_h) = f_h$$

в евклидовом пространстве H_h, отождествляемом с пространством функций, заданных в узлах Ω_h; размерность H_h совпадает с числом точек N_h из Ω_h.

Пусть

$$A_h u_h(x_i) = \sum_{x_{i+j} \in \Omega_h} a_{i,j} u_h(x_{i+j}), \quad x_i \in \Omega_h, \qquad (1)$$

— линейные операторы, отображающие H_h в H_h. Среди операторов (1) имеются операторы, у к-рых ненулевые коэффициенты $a_{i,j}$ в (1) соответствуют лишь векторам сдвига $j \equiv (j_1, j_2)$ с $j_2 = 0$. Такие операторы наз. одномерными операторами, дейст-

вующими по x_1, и обозначаются $A_{h,\,x_2}$; аналогично для векторов сдвига с $j_1=0$ определяются и одномерные операторы $A_{h,\,x_2}$, действующие по x_2.

Системы уравнений

$$A_{h,\,x_r}u_h=g_h,\quad r=1,\ 2,$$

расщепляются на отдельные подсистемы, каждая из к-рых связывает лишь значения $u_h(x_i)$ в узлах, лежащих на отдельных горизонтальных (для $A_{h,\,x_1}$) или вертикальных (для $A_{h,\,x_2}$) линиях сетки. Для П. н. м. характерно использование расщепляющихся операторов A_h, имеющих вид

$$R_h=A_{h,\,x_1}A_{h,\,x_2}.$$

Решение системы

$$A_{h,x_1}A_{h,x_2}u_h=g_h \tag{2}$$

тогда сводится к последовательному решению двух систем

$$A_{h,x_1}v_h=g_h, \tag{3}$$

$$A_{h,x_2}u_h=v_h, \tag{4}$$

в к-рых вначале решаются отдельные подсистемы на горизонтальных линиях сетки (в случае (3)), а затем осуществляется перемена направлений и решаются подсистемы на вертикальных линиях сетки (в случае (4)). При этом обычно операторы R_h выбираются такими, что на решение систем (3), (4), а следовательно, и (2), уходит только $O(N_h)$ арифметич. действий. Поэтому и каждая итерация в П. н. м. вида

$$R_h^{(n)}u_h^{(n+1)}=R_h^{(n)}u_h^{(n)}-\left(L_h\left(u_h^{(n)}\right)-f_h\right),\ n=0,\ 1,\ \ldots, \tag{5}$$

где верхний индекс n соответствует номеру итерации, обычно осуществляется с затратой $O(N_h)$ арифметич. действий.

Наиболее эффективные результаты для П. н. м. получаются для т. н. коммутативного случая, когда оператор L_h является самосопряженным положительно определенным оператором, а операторы $R_h^{(n)}$ — самосопряженные и перестановочные с L_h. В этом случае для любого $\varepsilon>0$ погрешность начального приближения можно уменьшить по норме в ε^{-1} раз за число итераций $M=O(|\ln\varepsilon|/|\ln h|)$. Коммутативный случай может встретиться только для краевых задач, в к-рых можно произвести разделение переменных, и, следовательно, область должна быть прямоугольником. Наиболее частым случаем метода (5) для уравнения

$$L_hu_h=(\Lambda_{h,x_1}+\Lambda_{h,x_2})\,u_h=f_h$$

является метод

$$\left[\prod_{r=1}^{2}\left(E_h+\tau_{r,\,h}^{(n)}\Lambda_{h,x_r}\right)\right]\left(u_h^{(n+1)}-u_h^{(n)}\right)=$$
$$=-\gamma_h^{(n)}\left(L_hu_h^{(n)}-f_h\right),$$

где E_h — тождественный оператор.

Наряду с подходом, в к-ром за счет выбора итерационных параметров стремятся минимизировать норму оператора перехода от нулевой итерации к итерации с фиксированным номером, используются и подходы, основанные на различных вариационных принципах.

П. н. м. часто используется в качестве внутреннего итерационного процесса в двухступенчатых итерационных методах, использующих операторы, эквивалентные по спектру и пригодные в случае переменных коэффициентов и нелинейных задач.

Лит.: [1] Peaceman D. W., Rachford H. H., «J. Soc. Industr. Appl. Math.», 1955, v. 3, № 1, p. 28—41; [2] Дьяконов Е. Г., Итерационные методы решения разностных аналогов краевых задач для уравнений эллиптического типа, К., 1970; [3] Яненко Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967; [4] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М.,

1971; [5] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980. *Е. Г. Дьяконов.*

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ — свойство динамич. системы (*каскада* $\{S^n\}$ или *потока* $\{S_t\}$) с конечной *инвариантной мерой* μ, состоящее в том, что для любых двух измеримых подмножеств A, B фазового пространства W мера

$$\mu((S^n)^{-1}A \cap B),$$

соответственно

$$\mu((S_t)^{-1}A \cap B),$$

стремится к

$$\mu(A)\,\mu(B)/\mu(W)$$

при $n \to \infty$, соответственно при $t \to \infty$. Если преобразования S, S_t обратимы, то в определении П. вместо прообразов множества A относительно этих преобразований можно брать образы S^nA, S_tA, что более наглядно. При наличии свойства П. говорят также, что система перемешивает, а в случае перемешивающего каскада $\{S^n\}$ о порождающем его эндоморфизме S пространства с мерой (W, μ) тоже говорят, что S перемешивает (обладает свойством П.; впрочем, в последнем случае под П. часто понимают не свойство объекта, а сам этот объект, то есть S).

В эргодич. теории наряду с П. рассматривают родственные свойства — к р а т н о е п е р е м е ш и в а н и е и с л а б о е п е р е м е ш и в а н и е (см. [1]; *последнее в старой литературе часто называли* П. в широком смысле, или короче — просто П., а о П. говорили как о П. в сильном смысле). Рассматривают также свойство, промежуточное между П. и слабым П. (см. [2]). Все эти свойства сильнее *эргодичности*.

Имеется аналог П. для систем с бесконечной инвариантной мерой (см. [3]).

Лит.: [1] Халмош П. Р., Лекции по эргодической теории, пер. с англ., М., 1959; [2] Furstenberg H., Weiss B., в кн.: The structure of attractors in dynamical systems, B.— Hdlb.— N. Y., 1978, p. 127—32 (Lecture Notes in Math., № 668); [3] Krengel U., Sucheston L., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.», 1969, Bd 13, № 2, S. 150—64. *Д. В. Аносов.*

ПЕРЕНОРМИРОВКА — процедура устранения расходимостей, присущих теории возмущений в лагранжевой формулировке *квантовой теории поля*. При построении формальных рядов теории возмущений в квантовой теории поля появляются выражения, не имеющие однозначного математич. смысла, связанные с т. н. ультрафиолетовыми расходимостями. Такие расходимости возникают из-за того, что коэффициенты этих рядов являются произведениями обобщенных функций, т. е. объектом, вообще говоря, не определенным корректно.

Удобно начинать рассмотрение с регуляризованной теории, в к-рой обобщенные функции заменены достаточно гладкими. Регуляризация вводит в теорию дополнительные параметры, не имеющие прямого физич. содержания. Но в регуляризованной теории уже возможно выделить из каждой коэффициентной функции ту ее часть, к-рая при снятии регуляризации порождает ультрафиолетовые расходимости. Собственно П. состоит в отбрасывании расходящихся вкладов в коэффициентные функции. После П. регуляризация снимается, т. е. регуляризующий параметр исключается соответствующим предельным переходом.

Идея П., предложенная Х. Бете (см. [1]), состоит в том, что отбрасывание расходимостей должно производиться таким способом, чтобы оно сводилось к переопределению (П.) параметров исходного лагранжиана, т. е. затравочных масс, констант связи и нормировки полей. Точная формулировка перенормировочной процедуры в квантовой теории поля (R-операция) была дана Н. Н. Боголюбовым и О. С. Парасюком (см. [2]). Ими была доказана теорема (т е о р е м а Б о г о л ю-

бова — Парасюка) о конечности в смысле обобщенных функций из S' перенормированных выражений в каждом порядке теории возмущений. При этом П. сводится к добавлению к лагранжиану дополнительных членов — «контрчленов». Каждый контрчлен представляет собой нек-рую локальную операторную структуру с числовым коэффициентом, являющимся, вообще говоря, бесконечным рядом по затравочным константам связи. Эти коэффициенты конечны лишь при наличии регуляризации и обращаются в бесконечность при снятии ее. Таким образом, П. демонстрирует вспомогательный характер исходного лагранжиана. Физич. смысл придается лишь лагранжиану перенормированному. Его параметры, т. е. перенормированные массы, константы связи и т. д., к-рые конечны, можно идентифицировать с наблюдаемыми величинами.

Лагранжева формулировка теории возмущений возможна лишь для теорий, в к-рых число контрчленов, отличающихся по своей операторной структуре, конечно. Такие теории делятся на два класса — супернормируемые и перенормируемые. В супернормируемых теориях коэффициенты при контрчленах являются конечными рядами по константам связи, а в перенормируемых — эти ряды бесконечны. В этих теориях операторная структура контрчленов, как правило, та же, что и отдельных членов исходного лагранжиана. Их объединение и приводит к П. затравочных констант.

В классич. варианте П. есть R-операция Боголюбова — Парасюка (устранение расходимостей из каждой диаграммы, возникающей, напр., в разложении S-матрицы) и сводится к переопределению коэффициентной функции этой диаграммы следующим образом. Пусть M_γ — оператор, сопоставляющий коэффициентной функции диаграммы γ начальный отрезок ее разложения в ряд Маклорена по импульсам. Тогда коэффициентная функция $RG_\Gamma(p_1, \ldots, p_N)$ перенормированной диаграммы Γ запишется как

$$RG_\Gamma(p_1, \ldots, p_N) =$$

$$= \vdots \prod_{\gamma_j \in \{\gamma_i\}} (1 - M_{\gamma_i}) \vdots \; G_\Gamma(p_1, \ldots, p_N), \qquad (*)$$

где $\{\gamma_i\}$ — совокупность всех расходящихся поддиаграмм диаграммы Γ, а символ $\vdots \ldots \vdots$ означает, во-первых, отбрасывание в получающемся из (*) при раскрытии скобок выражении всех членов, содержащих произведения $M_{\gamma_i} M_{\gamma_j}$, отвечающие паре поддиаграмм, для к-рых не выполняется ни одно из условий $\gamma_i \subset \gamma_j$, $\gamma_i \supset \gamma_j$, $\gamma_i \cap \gamma_j = \varnothing$, и, во-вторых, упорядочивание операторов M_{γ_i} таким образом, что M_{γ_i} стоит правее M_{γ_j}, если $\gamma_i \subset \gamma_j$.

Ограничения, накладываемые на процедуру П., не фиксируют ее полностью. Остающийся произвол имеет двоякий характер. Во-первых, требование конечности перенормированных выражений определяет лишь нек-рое минимальное число «вычитаний» в каждой расходящейся поддиаграмме, т. е. минимальное число выделяемых членов ряда Маклорена. П. будет по-прежнему приводить к конечным результатам, если число вычитаний увеличивать, соблюдая нек-рые условия согласования для вычитаний в различных поддиаграммах перенормируемой диаграммы. Во-вторых, вместо отрезка ряда Маклорена можно вычитать выражение, отличающееся от него многочленом по импульсам той же степени с конечными коэффициентами.

Указанный произвол приводит к эквивалентности различных процедур П., отличающихся по своей формулировке от R-операции. Их конкретный выбор обычно диктуется рассматриваемой задачей. Так, для

теорий с калибровочной инвариантностью, была предложена П., получившая название размерной. Она базируется на регуляризации, использующей в качестве параметра отклонение размерности пространства-времени, в к-ром производятся вычисления, от физич. значения. Устранение расходимостей производится путем отбрасывания выражений, сингулярных по этому отклонению.

В других задачах пользуются аналитич. П. В ее основе лежит регуляризация, состоящая в замене пропагатора частицы, имеющего вид типа $(p^2-m^2+i0)^{-1}$ на $(p^2-m^2+i0)^{\lambda}$. Продолжение в комплексную область по параметрам λ осуществляет регуляризацию теории, а ультрафиолетовые расходимости выделяются как полюса по нек-рым линейным комбинациям этих параметров. Согласованное отбрасывание таких полюсов устраняет все расходимости.

В приложениях используются и другие схемы П. (см. [3]).

Лит.: [1] Bethe H. A., «Phys. Rev.», 1947, v. 72, p. 339—341; [2] Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С., «Докл. АН СССР», 1955, в. 100, № 1, с. 25; № 3, с. 429; [3] Завьялов О. И., Перенормированные диаграммы Фейнмана, М., 1979.

С. А. Аникин.

ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ТЕОРИЯ — исследование прохождения электромагнитного излучения, гамма-квантов, нейтронов и др. элементарных частиц через вещество с помощью линейного кинетического уравнения, или уравнения переноса (см. *Кинетическое уравнение*).

Задача определения поля излучения в атмосфере, рассеивающей свет по известным физич. законам, возникла в 80-е гг. 19 в. в связи с исследованиями по освещенности дневного неба. Кинетич. уравнение переноса излучения было найдено в нач. 20 в. для задачи о лучистом равновесии в звездных атмосферах. Физич. смысл уравнения переноса — баланс энергии, числа квантов, числа частиц в элементе фазового пространства координат и скоростей частиц:

$$\frac{d\Phi}{dt}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{\text{столкн.}}+S, \qquad (*)$$

где $\Phi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v},\ t)$ — функция распределения частиц в точке $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ — скорость, t — момент времени, $\frac{d}{dt}$ — полная производная по траектории движения частицы, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{\text{столкн.}}$ — скорость изменения функции распределения за счет столкновения частиц с веществом (нейтронов с ядрами или квантов с атомами вещества), S — мощность источника частиц. Для электромагнитного излучения в качестве независимых переменных функции распределения, определяющей среднюю интенсивность излучения, входят вектор направления излучения и его частота. Одни и те же уравнения для описания распространения частиц и квантов получаются вследствие одинакового физич. смысла этих кинетич. уравнений — баланс энергии в фазовом пространстве.

Член, описывающий столкновения, является интегральным:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{\text{столкн.}}=\lambda\int\Sigma_S(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v}'\to\boldsymbol{v})\,\Phi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v}',\ t)\,dv'-$$
$$-\Sigma(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v})\,\Phi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v},\ t),$$

а само уравнение переноса (кинетическое уравнение) — интегро-дифференциальным уравнением. Здесь Σ — полное сечение взаимодействия частиц с веществом в элементарном акте столкновения, $\Sigma_S(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v}'\to\boldsymbol{v})$ — сечение перехода (вероятность перехода) из скорости $\boldsymbol{v}'$ до рассеяния в скорость $\boldsymbol{v}$ после рассеяния (с учетом вероятности, что столкновение произойдет). Для свободного движения частиц полная

производная от функции распределения по траектории движения имеет вид

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad}\,\Phi.$$

Для полного определения решения необходимо задать начальное условие

$$\Phi|_{t=0}=f(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v})$$

и граничное условие. На границе тела (области пространства, внутри к-рой решается уравнение переноса) могут быть заданы, напр., условия **абсолютного** поглощения частиц

$$\Phi(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v},\ t)=0\quad\text{при}\quad(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})<0,$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности (границе) тела. Возможны и более общие граничные условия, описывающие отражение частиц от границы или «прострел» частиц через вакуум (для невыпуклого тела, граничащего с вакуумом — областью, где нет столкновений). Математич. исследование уравнений переноса в односкоростном случае, т. е. в предположении, что изменяется лишь направление распространения излучения или частиц при постоянной энергии кванта или частицы, было проведено В. С. Владимировым [1] для случая $\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$. При изотропном рассеянии задача сводится к интегральному уравнению с положительным ядром, к к-рому применима теория вполне непрерывных операторов, оставляющих инвариантным конус в банаховом пространстве. При этом однородная задача имеет положительное собственное значение (стоящее множителем при интеграле столкновений), к-рое не больше модуля всякого другого собственного значения λ_i, и ему отвечает, по крайней мере, одна неотрицательная собственная функция (соответствующая λ_1). Эта теорема обобщается на случай анизотропного рассеяния. В широком классе случаев первое собственное значение задачи оказывается простым, а собственная функция, соответствующая ему,— положительной почти всюду в фазовом пространстве координат и направлений.

Таков, напр., случай, когда $\Sigma_S(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v}'\to\boldsymbol{v})>0$ почти всюду. Найдены условия, при к-рых для уравнения переноса с анизотропным рассеянием справедлива теория Гильберта — Шмидта, построен новый вариационный функционал для уравнений переноса с четной вероятностью перехода относительно переменной $\mu_0=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}')$. С помощью нового вариационного метода последовательно исследованы уравнения метода сферич. гармоник, к-рые вместе с краевыми условиями получаются применением прямого вариационного метода Галеркина к уравнению переноса, если в качестве пробных функций взять линейные комбинации сферич. функций, зависящих от направления распространения, умноженных на неизвестные функции пространственных координат. Вариационный принцип позволил отобрать наилучшие граничные условия для метода сферич. гармоник, ранее найденные эмпирически, из вдвое большего количества возможных линейно независимых условий на границе тела (для плоской геометрии) (см. [1]).

В нестационарном случае (см. [2]) при исследовании спектра собственное значение при переходе к интегральному уравнению (для изотропного рассеяния) нелинейно входит в ядро интегрального уравнения. Это обстоятельство приводит в конечном счете к тому, что число точек дискретного спектра оказывается конечным (а в некоторых случаях — нестационарная задача для тепловых нейтронов в малом блоке замедлителя — их вообще нет), кроме того, появляется сплошной спектр собственных значений.

В ряде случаев удается получить аналитическое решение уравнения переноса. Например, методом Винера — Хопфа решается задача Милна; метод разложения по сингулярным собственным функциям оператора переноса позволяет решить ряд одномерных задач [3].

В связи с потребностями инженерной практики были развиты оперативные численные методы решения уравнения переноса нейтронов для расчета критич. режима ядерного реактора (задача на собственные значения для уравнения (*) при $\partial\Phi/\partial t=0$). Одним из основных методов решения является метод сферич. гармоник, к-рый, однако, сложен для реализации на ЭВМ и, как, впрочем, и другие методы, медленно сходится (это объясняется наличием особенности в ядре интегрального уравнения переноса). См. *Переноса уравнения*; численные методы решения.

Лит.: [1] Владимиров В. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 61; [2] Шихов С. В., Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ, М., 1973; [3] Кейз К., Цвайфель П. Ф., Линейная теория переноса, пер. с англ., М., 1972; [4] Соболев В. В., Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., 1956. *В. А. Чуянов.*

ПЕРЕНОСА ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, образованная параллельным переносом кривой L_1 так, что нек-рая ее точка $M_0\in L_1$ скользит по кривой L_2. Если $r_1(u)$ и $r_2(v)$ — радиус-векторы кривых L_1 и L_2 соответственно, то радиус-вектор П. п. есть

$$r=r_1(u)+r_2(v)-r_1(u_0),$$

где $r_1(u_0)=r_2(v_0)$ — радиус-вектор точки M_0. Линии $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$ образуют *переноса сеть*. Каждая линейчатая поверхность имеет ∞^1 сетей переноса (Рейдемейстера теорема), развертывающаяся П. п. может быть только цилиндром или плоскостью. Если поверхность имеет две сети переноса, то несобственные точки касательных к линиям этих сетей лежат на алгебраич. кривой 4-го порядка. Инвариантным признаком П. п. является существование сопряженной чебышевской сети (сети переноса). Напр., изотропная сеть на минимальной поверхности есть сеть переноса, так что эта поверхность есть П. п. Можно также П. п. охарактеризовать тем, что одна из ее кривых (линия переноса) переходит в линию, лежащую на той же поверхности, под воздействием однопараметрич. группы параллельных переносов. Замена этой группы произвольной однопараметрич. группой G приводит к обобщенным поверхностям переноса (см. [1]).

Лит.: [1] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963. *И. Х. Сабитов.*

ПЕРЕНОСА СЕТЬ — сопряженная чебышевская сеть на двумерной поверхности аффинного (или евклидова) пространства. Поверхность, несущая П. с., наз. *переноса поверхностью*.

В расширенном пространстве имеет место теорема Ли: если поверхность несет две П. с., то касательные к линиям этих сетей высекают на несобственной плоскости кривую 4-го порядка (см. [1]).

Лит.: [1] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963. *В. Т. Базылев.*

ПЕРЕНОСА ТЕОРЕМА в теории диофантовых приближений — утверждение о связи разрешимости в целых числах одной системы неравенств с разрешимостью другой системы, определенным образом связанной с первой. Классич. примером линейных П. т. является принцип переноса Хинчина (см. *Диофантовы приближения*). Более общие линейные П. т. касаются связи между решениями в целых числах системы однородных линейных неравенств с неособой квадратной матрицей и решениями соответствующей системы с обратной транспонированной матрицей:

существование нетривиального решения одной системы гарантирует существование нетривиального решения другой, и наоборот. Подобные связи существуют между линейными однородными и неоднородными системами неравенств, при этом отсутствие нетривиальных решений однородной системы неравенств гарантирует существование решений соответствующих неоднородных систем, и наоборот. Известны такого рода связи и в случае нелинейных задач, но они менее определенно выражены и мало изучены. Принципиальные основы П. т. теории диофантовых приближений проясняются П. т. геометрии чисел: для выпуклых множеств устанавливаются связи между наличием целых точек в данном и взаимном к данному множествах.

Лит.: [1] Касселс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1961; [2] его же, Введение в геометрию чисел, пер. с англ., М., 1965.

В. Г. Спринджук.

ПЕРЕНОСА УРАВНЕНИЯ; численные методы решения — методы решения интегро-дифференциальных уравнений, описывающих перенос частиц или излучения. Для стационарных задач уравнения имеют вид

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma\varphi = \int dv' \int d\Omega' \, \varphi w(x, \Omega, \Omega', v, v') + f, \quad (1)$$

где $x=(x, y, z)$, $\Omega=(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ — единичный вектор, $\varphi=\varphi(x, \Omega, v)$ — поток частиц в точке x, летящих со скоростью $v\Omega$; положительные функции Σ, w описывают взаимодействие частиц с веществом, а f — источник. Рассматривают две основные задачи: 1) найти решение уравнения (1) в (выпуклой) области $D(x, y, z)$ такое, что на ее границе Γ

$$\varphi(x, \Omega, v) = 0 \quad \text{при} \quad (\Omega, n) < 0, \quad (2)$$

где n — внешняя нормаль к Γ; 2) найти наибольшее собственное значение λ_1 и соответствующую собственную функцию задачи (1) — (2), в к-рой

$$f = \frac{1}{\lambda} \int dv' \int d\Omega' \, \varphi w_1(x, \Omega, \Omega', v, v'). \quad (3)$$

Уравнение (1) содержит шесть независимых переменных; из-за существенной многомерности его сводят к более простым уравнениям. Заменяя в (1), (3) интеграл по v' квадратурной формулой с N членами и предполагая изотропность рассеяния, получают систему т. н. многоскоростных уравнений

$$\Omega\nabla\varphi_i + \Sigma_i\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} \Sigma_s^{ij} \varphi_{i0} + f_i, \quad i=1, 2, \ldots, N, \quad (4)$$

где

$$\varphi_i = \varphi_i(x, \Omega), \quad \varphi_{i0} = \frac{1}{4\pi} \int \varphi_i \, d\Omega'$$

— нулевые моменты, а коэффициенты Σ_i, Σ_s^{ij}, f_i получены применением методов усреднения с использованием решений сопряженных задач. Для задачи 2) аналогично получают, что

$$f_i = \frac{1}{\lambda} \chi_i Q(\varphi) = \frac{1}{\lambda} \chi_i \sum_{j=1}^{N} \Sigma_{fj} \varphi_{j0}. \quad (5)$$

Для $N=1$ получают односкоростное уравнение

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma\varphi = \Sigma_s\varphi_0 + f \quad (6)$$

для функции $\varphi=\varphi(x, \Omega)$. Уравнение (6) для плоского слоя $0 \leqslant x \leqslant H$, когда решение зависит только от одной координаты x и одной угловой переменной μ, $|\mu| \leqslant 1$, имеет вид

$$\mu l \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi = c \, \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \varphi(x, \mu') \, d\mu' + f_1(x, \mu), \quad (7)$$

где $l=1/\Sigma$, $c=\Sigma_S/\Sigma$, $f_1=f/\Sigma$. Характеристиками левой части (6) являются все прямые $x=x_0+\xi\Omega$, $x_0\in D$; вдоль каждой из них уравнение (6) принимает вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\Sigma\varphi=\Sigma_s\varphi_0+f. \qquad (8)$$

Если в (6) сделать замену $u=(\varphi(x,\ \Omega)+\varphi(x,\ -\Omega))/2$, то оно принимает вид

$$[-l\Omega\nabla]^2 u+u=cu_0+F. \qquad (9)$$

Решение уравнения (9) минимизирует квадратичный функционал Владимирова:

$$G(u)=(l\Omega\nabla u,\ l\Omega\nabla u)+(u,\ u)-(cu_0,\ u)+ \\ +\int_{\Gamma\times\Omega}|(\Omega,\ u)|u^2\,d\Omega\,d\Gamma-2(u,F), \qquad (10)$$

где

$$(u,\ v)=\int_D\int_\Omega uv\,dx\,d\Omega.$$

Пусть краевые задачи записаны в операторной форме

$$L\varphi=S\varphi+f. \qquad (11)$$

Характерным свойством задач переноса, используемым в численных алгоритмах, является то, что значение $L^{-1}\psi$ находится по заданному ψ прямым методом путем интегрирования (8) вдоль характеристик. Учитывая это, из (11) получают т. н. интегральное уравнение Пайерлса

$$S\varphi=SL^{-1}(S\varphi+f) \qquad (12)$$

для нулевого момента $S\varphi$.

Для решения задач переноса существенное развитие получил метод сферических гармоник (являющийся вариантом метода Галеркина). Приближенное решение (P_n-приближение) находят в виде

$$\varphi^{(n)}(x,\ \Omega)=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\sum_{i=-k}^{k}\varphi_{ki}(x)\,Y_{ki}(\Omega), \qquad (13)$$

где $\varphi_{ki}(x)$ — неизвестные функции, а $Y_{ki}(\Omega)$ — сферич. гармоники k-го порядка. Подставляя (13) в (6), умножая результат на Y_{ki} и интегрируя по Ω, получают систему уравнений с частными производными для определения $\varphi_{ki}(x)$. В P_1-приближении система имеет вид

$$\operatorname{div}\varphi_1+\Sigma\varphi_0=f_0,\quad \frac{1}{3}\nabla\varphi_0+\varphi_0+\Sigma\varphi_1=f_1, \\ 2(\varphi_1,\ n)-\varphi_0|_\Gamma=0, \qquad (14)$$

где $\varphi_0=\varphi_{00}$, $\varphi_1=(\varphi_{11},\ \varphi_{12},\ \varphi_{13})$. При $f_1\equiv0$ из (14) получают диффузионное приближение

$$-\operatorname{div}D\nabla\varphi_0+\Sigma\varphi_0=f_0,\quad 2D\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi_0\Big|_\Gamma=0, \qquad (15)$$

где $D=1/(3\Sigma)$. Это — эллиптич. задача, решение к-рой находят, применяя вариационные или сеточные методы.

Для решения одномерных задач развиты аналитич. методы, основанные на разложении решения по обобщенным собственным функциям. Для нахождения значений функционалов от решений сложных многомерных задач применяют *Монте-Карло метод*.

Широкое распространение получили методы конечноразностных аппроксимаций уравнения переноса. Так, используя квадратурную формулу для области D, заменяют интегральное уравнение (12) системой линейных уравнений. В уравнениях (4), (5), (6), (8) для аппроксимации интегрального оператора применяют квадратурные формулы для сферы. Известны *Гаусса квадратурные формулы* для сферы до 35-го алгебраич. порядка точности. В методе характеристик

через каждую точку пространственной сетки проводят семейство характеристик по направлениям, соответствующим узлам квадратуры для сферы, и заменяют дифференциальный оператор L в (8) разностным. Разностные уравнения S_n-метода получают интегрированием уравнения (6) по сеточной ячейке фазового пространства, предполагая линейность решения в пределах ячейки по независимым переменным. В методе Галеркина решение ищут в виде

$$\varphi = \sum_{n=1}^{N} g_n(\Omega)\,\varphi_n(x). \qquad (16)$$

Если $\varphi_n(x)$ заданы, то для определения $g_n(\Omega)$ получают систему вырожденных интегральных уравнений; если $\varphi_n(x)$ — финитные функции, то получают метод конечных элементов; если $g_n(\Omega)$ — заданные финитные функции и выражение (16) минимизирует функционал (10), то получают так наз. P_{NJ}-уравнения.

Итерационные методы решения разностных задач переноса обладают своей спецификой; она заключается в том, что сходимость итерационных методов, как правило, замедляется при $c \to 1$ ($c \leqslant 1$), а для нахождения следующего приближения φ^{k+1} используют только часть информации о предыдущем приближении φ^k существенно меньшей размерности — запоминают и используют лишь значения φ_0^k. В итерационных методах в качестве промежуточной операции (операции K) часто входит решение следующей задачи

$$L\Phi^k = S\varphi^k + f, \quad \Phi_0^k = \frac{1}{4\pi}\int \Phi^k\, d\Omega'. \qquad (17)$$

Тогда ошибка $\varphi - \Phi^k$ удовлетворяет (11) с независящим от Ω источником $S(\Phi^k - \varphi^k)$ и невязка тоже не зависит от Ω. Это свойство позволяет ускорить сходимость итераций. Пусть задана периодич. задача для уравнения (7) с постоянными коэффициентами, четным по μ источником и $H = 2\pi$. Применительно к этой задаче ниже рассмотрены следующие итерационные методы. Для уравнения (7) строится сетка с N узлами по x и M угловыми направлениями по μ. Пусть

$$r(l) = l^{-1}\operatorname{arctg} l, \quad 0 \leqslant r(l) \leqslant 1,$$

$$\varepsilon_0^k = \varphi_0 - \varphi_0^k = \sum_n \varepsilon_n^k \exp(inx),$$

$$\|\varepsilon_0^k\| = \max_n |\varepsilon_n^k|.$$

Для сходящихся итерационных методов $\|\varepsilon_0^{k+1}\| \leqslant q\|\varepsilon_0^k\|$, где $0 \leqslant q < 1$. Пусть $Ц_0$ — цена (количество действий) операции K, Ц — цена полной итерации, а $\Delta = Ц - Ц_0$. Для различных методов имеют место следующие соотношения.

1) Простая итерация: $\varphi_0^{k+1} = \Phi_0^k$; для нее $\Delta = 0$, $q = c$.

2) Метод Люстерника: для нек-рых k полагают в простой итерации

$$\varphi_0^{k+1} = \Phi_0^k + (\lambda_1 - 1)^{-1}(\Phi_0^k - \varphi_0^k),$$

где $\lambda_1 > 1$ — наибольшее собственное значение задачи $L\varphi = \lambda S\varphi$; тогда $\Delta = 0(N)$, $q = cr(l)$ ($q \to 1$ при $c \to 1$, $l \to 0$).

3) Метод оценки итерационных отклонений: $\varphi_0^{k+1} = \Phi_0^k + W_0^k$, где W^k — решение уравнения

$$l\mu\frac{\partial W^k}{\partial x} + (1 - c)\,W^k = c\,(\Phi_0^k - \varphi_0^k);$$

тогда

$$\Delta = O(NM), \quad q = \max\left(cr(l),\ \frac{\pi\sqrt{2}\,c^2}{12}\right)$$

($q \to 1$ при $c \to 1$, $l \to 0$).

4) Метод с балансовыми множителями: $\varphi_0^{k+1}=\delta^k\Phi_0^k$, где

$$\delta^k=\frac{\int_0^H f_0\,dx}{\int_0^H (1-c)\,\Phi_0^k\,dx};$$

для него $\Delta=O(N)$, $q=cr(l)$ ($q\to 1$ при $c\to 1$, $l\to 0$).

5) Метод средних потоков (метод ребаланса):

$$\varphi^{k+1}(x,\ \mu)=(1+v^k(x))\,\Phi^k;$$

функцию v^k выбирают, чтобы минимизировать функционал (10) или чтобы минимизировать его на нек-ром конечномерном подпространстве: $v^k=\Sigma_i a_i\psi_i$, тогда a_i удовлетворяют определенной системе уравнений.

6) Метод квазидиффузии:

$$-l\frac{d}{dx}l\frac{d}{dx}D^k\varphi_0^{k+1}+(1-c)\,\varphi_0^{k+1}=f_0,$$

где

$$D^k=\left(\int_{-1}^{1}\Phi^k\mu^2\,d\mu\right)\Big/\Phi_0^k;$$

тогда $\Delta=O(NM)$.

7) Методы расщепления:

$$(I+\tau\Lambda_2)\,(I+\tau\Lambda_1)\,\varphi^{k+1}=$$
$$=(I+\tau\Lambda_2)\,(I-\tau\Lambda_1)\,\varphi^k+2\tau f,$$

где

$$\Lambda_1=I-\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}(\ldots)\,d\mu,\qquad \Lambda_2=l\mu\frac{d}{dx}.$$

Методы 4) — 6) — нелинейные, их сходимость может замедляться при $c\to 1$, $l\to 0$; метод 7) требует запоминания $\varphi^k(x,\ \mu)$ ($q\to 1$ при $c\to 1$, $l\to 0$).

8) *KP*-методы: поправку W^k определяют как решение в D краевой задачи

$$Q_nW^k=P_nc\,(W^k+\Phi_0^k-\varphi_0^k),\qquad (18)$$

где Q_n, P_n — линейные дифференциальные операторы 2-го порядка, и полагают $\varphi_0^{k+1}=\Phi_0^k+W^k$. В одном из вариантов *KP*-метода уравнение (18) имеет вид

$$-\frac{g_k}{3}\left(l\frac{d}{dx}\right)^2W^k+(1-c)\,W^k=c\,(\Phi_0^k-\varphi_0^k).\qquad (19)$$

Для уравнения (19) $\Delta=O(N)$; $q=0,186c$ при $g_k=0{,}843$, а при $g_k=(1+y_k)/2$, где y_k — корни многочлена Якоби $P^{(-1/2,\ 2(N+\beta)-2/3)}(y)$, $\beta>0$, среднегеометрическое за N итераций значение q близко к $0{,}15c$. В *KP*-методе сходимость итераций не замедляется при $c\to 1$, $l\to 0$.

Для решения многоскоростной задачи (4) применяют итерационный метод Зейделя:

$$\Omega\nabla\varphi_i^{k+1}+\Sigma_i\varphi_i^{k+1}=$$
$$=\sum_{j=1}^{i}\Sigma_s^{ij}\varphi_{j0}^{k+1}+\sum_{j=i+1}^{N}\Sigma_s^{ij}\varphi_{j0}+f,$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N,\qquad (20)$$

а решение φ_i^{k+1} в каждом уравнении (20) находят итерационным методом для односкоростного уравнения.

Для решения многоскоростных задач на собственные значения (4), (5) к описанным двум итерационным циклам добавляют еще один внешний для нахождения максимального значения $\lambda=\lambda_1$ и соответствующей собственной функции φ. Если $x=Q(\varphi)$, $A=Q(L-S)^{-1}\chi$, то задача (4), (5) преобразуется в задачу

$$Ax=\lambda x.\qquad (21)$$

Для нахождения λ_1 и φ применяют итерационные методы с чебышевскими параметрами

$$u^{k+1}=Ax^k-\beta_{k+1}x^k,\quad x^{k+1}=u^{k+1}/Q\,(u^{k+1}),\qquad (22)$$

где

$$\beta_k=\frac{1}{2}(M+m+(M-m)\cos\pi\omega_k), \qquad (23)$$

$\omega_k\in[0,\ 1]$, M, m — параметры. Предполагая неотрицательность спектра, сначала находят λ_1 и λ_2 — наибольшие собственные значения (21), считая, что $m=0$, $M=a$, где $a\geqslant 0$ — оценка снизу для λ_1, и беря за ω_k T-последовательность (см. ниже). Значения λ_1, λ_2 определяют т. н. обобщенным методом Эйткена, учитывающим сдвиги β_k. После нахождения λ_1, λ_2 функцию φ находят по формулам (22), (23), полагая $M=\lambda_2$. Бесконечная T-последовательность образована, соответственно, из специальным образом упорядоченных корней многочленов Чебышева 1-го рода $T_{2\cdot 3^n}(\cos\pi\omega)$; начальный отрезок T-последовательности длины $2\cdot 3^n$ состоит из всех чисел вида $(2j_k-1)/4\cdot 3^n$, $1\leqslant j_k\leqslant 2\cdot 3^n$,

$$\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{12},\ \frac{11}{12},\ \frac{5}{12},\ \frac{7}{12},\ \frac{1}{36},\ \ldots,$$

Любой отрезок T-последовательности длины $2\cdot 3^n$ обеспечивает оптимальное в нек-ром смысле подавление ошибки и устойчивость в итерационном методе (22), (23).

Для решения нестационарных задач

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+L\varphi-S\varphi=f$$

применимы: метод характеристик в пространстве $(x,\ t)$, метод Галеркина и конечноразностные методы, сводящиеся к явным и неявным по разностным схемам или к методам расщепления оператора. В случае неявных схем для нахождения решения на верхнем слое может быть применен KP-метод.

Лит.: [1] Владимиров В. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 61, с. 1—158; [2] Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд., М., 1981; [3] Лебедев В. И., Финогенов С. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1976, т. 16, № 4, с. 895—907; [4] Лебедев В. И., там же, 1977, т. 17, № 1, с. 100—108.

В. И. Лебедев.

ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННАЯ СИСТЕМА — система, число уравнений к-рой больше числа неизвестных. В линейном случае такие системы задаются прямоугольной $(m\times n)$-матрицей, $m<n$, где m — число уравнений, а n — число неизвестных. Для П. с. первоочередным является вопрос ее разрешимости, выражаемый в условиях совместности.

Напр., П. с. линейных алгебраич. уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

разрешима тогда и только тогда, когда ранги основной матрицы $A=\|a_{ij}\|$ и расширенной матрицы, полученной приписыванием к A столбца свободных членов, совпадают.

Для П. с. линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(D)\,u_j=f_i,\quad 1\leqslant i\leqslant m, \qquad (1)$$

где p_{ij} — многочлен от одного (обыкновенное уравнение) или нескольких (уравнение с частными производными) переменных, а D — символ дифференцирования, условие совместности выражается в виде однородной системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{m}q_{ki}(D)\,f_i=0,\quad 1\leqslant k\leqslant r, \qquad (2)$$

где матрица q находится по матрице p с помощью алгебраич. соображений.

Для П. с. (1) дифференциальных уравнений с частными производными с переменными коэффициентами

$p_{ij}=p_{ij}(x, D)$ отыскание условий совместности, имеющих вид (2) с $q_{ki}=q_{ki}(x, D)$, является значительно более трудной задачей.

Простейшим примером П. с. служит система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=f_i, \quad 1\leqslant i\leqslant m.$$

Условия совместности для этой системы, необходимые и достаточные для ее разрешимости, имеют вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}-\frac{\partial f_k}{\partial x_i}=0, \quad 1\leqslant i,\ k\leqslant m.$$

Аналитич. функции многих комплексных переменных $u(z_1, \ldots, z_m)$ можно также рассматривать как решения П. с. уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial z_j}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}+i\frac{\partial u}{\partial y_j}\right)=0, \quad 1\leqslant j\leqslant m,$$

где $z_j=x_j+iy_j$.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 3 изд., М., 1970; [2] Паламодов В. В., в сб.: Итоги науки. Математический анализ. 1968, М., 1969, с. 5—37.

А. П. Солдатов.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ множеств — одна из основных операций над множествами. Пусть имеется нек-рая (конечная или бесконечная) совокупность множеств $\{A_\alpha\}$ (индексы α служат для различения элементов данной совокупности). Тогда множество тех элементов, к-рые содержатся во всех данных множествах (множество элементов, общих всем множествам A_α) наз. пересечением этих множеств.

П. множеств обозначается $A=\bigcap A_\alpha$.

М. И. Войцеховский.

ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ТЕОРИЯ на алгебраическом многообразии — теория пересечений алгебраич. подмногообразий и циклов. Пусть X — гладкое алгебраич. многообразие размерности n над полем k, а Y и Z — подмногообразия X коразмерности i и j соответственно. Если Y и Z пересекаются трансверсально, то $Y\bigcap Z$ является гладким подмногообразием коразмерности $i+j$, к-рое обозначается $Y\cdot Z$. В общем случае паре (Y, Z) сопоставляется *алгебраический цикл* $Y\cdot Z$ коразмерности $i+j$. Идея его определения состоит в том, чтобы заменить Y и Z на эквивалентные в каком-то смысле циклы Y' и Z', находящиеся уже в общем положении, и взять затем пересечение Y' и Z'; конечно, при этом цикл $Y'\cdot Z'$ также определен с точностью до эквивалентности.

Пусть $A^i(X)$ — группа классов алгебраич. циклов коразмерности i на X по модулю рациональной эквивалентности; $A(X)=\bigoplus_{i\geqslant 0} A^i(X)$. Теория пересечений Чжоу состоит из построения трех частей:

а) структуры градуированного коммутативного кольца на $A(X)$ для каждого гладкого квазипроективного многообразия X;

б) гомоморфизма градуированных колец $f^*: A(Y)\to A(X)$ для каждого морфизма $f: X\to Y$ (обратный образ);

в) гомоморфизма групп $f_*: A(X)\to A(Y)$ степени $\dim Y-\dim X$ для каждого собственного морфизма $f: X\to Y$ (прямой образ).

При этом структуры а), б), в) связаны рядом соотношений, важнейшими из к-рых являются:

формула проекции: для собственного морфизма $f: X\to Y$ и циклов $\alpha\in A(X)$ и $\beta\in A(Y)$

$$f_*(\alpha\cdot f^*(\beta))=f_*(\alpha)\cdot\beta;$$

редукция к диагонали: если $\Delta: X\to X\times X$ — диагональный морфизм, а $\alpha, \beta\in A(X)$, то $x\cdot y=\Delta^*(\alpha\times\beta)$.

Кроме того, существует естественный гомоморфизм

$$c_1 : \mathrm{Pic}\,(X) \longrightarrow A^1\,(X),$$

что позволяет построить теорию *Чжэня классов* со значениями в кольце Чжоу, и в частности характер Чжэня

$$\mathrm{ch} : K\,(X) \longrightarrow A\,(X) \otimes \mathbb{Q},$$

являющийся гомоморфизмом колец.

Проще всего определяется гомоморфизм прямого образа f_*. Пусть $Z \subset X$ — неприводимое подмногообразие; если $\dim f(Z) < \dim Z$, то $f_*(Z) = 0$, если $\dim f(Z) = \dim Z$, то $f_*(Z) = d \cdot f(Z)$, где d — степень Z над $f(Z)$. По линейности определение продолжается на циклы и классы циклов. Гомоморфизм обратного образа f^* сводится к умножению циклов по формуле

$$f^*(\alpha) = p_*\,(\Gamma_f \cdot (X \times \alpha)),$$

где $p : X \times Y \to X$ — проекция, а $\Gamma_f \subset X \times Y$ — график f. Определение умножения циклов делается в два этапа. Пусть сначала Y и Z — неприводимые подмногообразия в X, к-рые пересекаются с о б с т в е н н о (т. е. коразмерность $Y \cap Z$ равна сумме коразмерностей Y и Z). Каждой компоненте W пересечения $Y \cap Z$ приписывается нек-рое целое положительное число $i(Y, Z; W)$ — л о к а л ь н а я к р а т н о с т ь п е р е с е ч е н и я. Есть несколько определений числа $i(Y, Z; W)$, напр. Тор-формула Серра:

$$i(Y, Z; W) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k\, l\,(\mathrm{Tor}_k^A\,(A/\mathfrak{a},\ A/\mathfrak{b})),$$

где A — локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,W}$, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — идеалы Y и Z, а l — длина A-модуля. После этого полагают

$$Y \cdot Z = \sum_W i\,(Y, Z; W) \cdot W,$$

где W пробегает неприводимые компоненты $Y \cap Z$.

Второй этап — л е м м а Ч ж о у о с д в и г е — состоит в утверждении, что для произвольных циклов Y, Z на квазипроективном многообразии X существует цикл Z', рационально эквивалентный Z, к-рый пересекается собственно с Y; более того, класс рациональной эквивалентности $Y \cdot Z'$ не зависит от Z'.

Наиболее интересен случай проективного многообразия X; применяя функтор прямого образа к структурному морфизму $X \to \mathrm{Spec}\,k$, получают отображение степени $\deg : A\,(X) \to \mathbb{Z}$. По существу, степень цикла — это число точек в нульмерной компоненте цикла. Композиция умножения со степенью позволяет численно измерять пересечение. Напр., если Y и Z имеют дополнительные размерности, то получается *пересечения индекс* (ч и с л о) Y и Z. Аналогично, получается индекс пересечения n дивизоров $D_1, \ldots, D_n$:

$$(D_1, \ldots, D_n) = \deg\,(D_1 \cdot \ldots \cdot D_n).$$

Напр., кольцо Чжоу проективного пространства P^n порождается классом гиперплоскости H, причем $(H^n) = (H, \ldots, H) = 1$. Поэтому если $D_1, \ldots, D_n$ — гиперповерхности степени $d_1, \ldots, d_n$, то $(D_1, \ldots, D_n) = d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$ (т е о р е м а Б е з у). Степень проективного многообразия $Y \subset \mathrm{P}^n$ размерности k определяется как индекс пересечения Y с линейным подпространством P^{n-k} дополнительной размерности; если многообразия Y и Z пересекаются трансверсально, то степень $Y \cap Z$ есть произведение степеней Y и Z.

Для собственно пересекающихся эффективных дивизоров $(D_1, \ldots, D_n) \geqslant 0$, но в общем случае это уже неверно. Напр., для исключительной кривой E на поверхности $(E, E) = -1$.

Многими формальными свойствами теории колец Чжоу обладают другие теории: циклы по модулю алгебраической или численной эквивалентности, *K-теория*, теория сингулярных когомологий $H^*(\ , \mathbb{Z})$

(в случае $k=\mathbb{C}$), теория *l-адических когомологий* (см. также *Вейля когомологии*). Это приводит к аксиоматич. построению теории пересечения как сопоставления каждому многообразию X (из нек-рой категории) кольца $C(X)$ и гомоморфизмов f^* и f_*, связанных рядом аксиом типа формулы проекции или редукции к диагонали (см. [1]). Сравнение различных П. т. приводит к полезным соотношениям. Напр., в комплексном случае понятие фундаментального цикла позволяет определить гомоморфизм теорий пересечений $A(X)\to H^*(X,\mathbb{Z})$, что позволяет использовать трансцендентные методы. Сравнение K-теории и теории Чжоу приводит к теореме Римана — Роха — Гротендика. Важную роль при этом играет поведение П. т. при моноидальном преобразовании (см. [2]). Другое применение П. т. относится к обоснованию исчислительной геометрии Шуберта (см. [3]). Эту ветвь геометрии можно рассматривать как теорию колец Чжоу различных многообразий, классифицирующих геометрич. объекты — многообразия Грассмана, многообразия флагов и т. д.

Лит.: [1] Anneaux de Chow et Applications, Séminaire Chevalley, Secr. Math., P., 1958; [2] Манин Ю. И., Лекции по алгебраической геометрии, ч. 2, М., 1971; [3] Проблемы Гильберта, М., 1969, с. 175—81; [4] Бальдассари М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [5] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, с. 3—93; [6] Théorie des intersections et théorème de Riemann — Roch, B.— Hdlb.— N.Y., 1971; [7] Algebraic geometry, Arcata 1974, Providence, 1975; Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981.

В. И. Данилов.

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ИНДЕКС — число точек пересечения n дивизоров на n-мерном алгебраич. многообразии с учетом кратностей этих точек. Точнее, пусть X есть n-мерное неособое алгебраич. многообразие над полем k, а $D_1,\ \ldots,\ D_n$ — эффективные дивизоры на X, пересекающиеся в конечном числе точек. Локальным индексом (или кратностью) пересечения этих дивизоров в точке $x\in X$ наз. целое число

$$(D_1,\ \ldots,\ D_n)_x=\dim_k A/(u_1,\ \ldots,\ u_n),$$

где u_i — локальные уравнения дивизора D_i в локальном кольце $A=\mathcal{O}_{X,\,x}$. В комплексном случае локальный индекс совпадает с вычетом формы $\frac{du_1}{u_1}\wedge\ldots\wedge\frac{du_n}{u_n}$, а также со степенью ростка отображения

$$(u_1,\ \ldots,\ u_n)\colon (X,\ x)\longrightarrow(\mathbb{C}^n,\ 0).$$

Глобальный индекс пересечения $(D_1,\ \ldots,\ D_n)$ есть сумма локальных индексов по всем точкам пересечения $D_1\cap\ldots\cap D_n$. Если это пересечение не пусто, то $(D_1,\ \ldots,\ D_n)>0$.

См. также *Пересечений теория*.

В. И. Данилов.

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ИНДЕКС — гомологический инвариант, характеризующий алгебраическое (т. е. учитывающее ориентацию) число точек пересечения двух подмножеств дополнительных размерностей в евклидовом пространстве или ориентированном многообразии (находящихся в *общем положении*). В случае неориентируемого многообразия в качестве кольца коэффициентов R для гомологий рассматривается $\mathbb{Z}_2$.

Пусть $X\supset A$, $Y\supset B$ — такие пары подмножеств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, что $A\cap Y=\varnothing=X\cap B$, и пусть $d\colon(X\times Y,\ (A\times Y)\cup(X\times B))\to(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n\setminus 0)$ — отображение, для к-рого $d(x,\ y)=x-y$. Индексом пересечения $\xi\circ\eta$ классов гомологий $\xi\in H_{n-i}(X,\ A)$, $\eta\in H_n(Y,\ B)$ наз. элемент $(-1)^i d_*(\xi\times\eta)$. Здесь d_* — индуцированное отображение гомологий, а $\xi\times\eta\in H_n(X\times Y,\ (A\times Y)\cup(X\cup B))$ — внешнее гомологич. произведение элементов ξ и η.

И. и. $\xi\circ\eta$ зависит лишь от тех частей классов ξ и η, носители к-рых попадают в произвольно малую окрестность V замыкания множества $X\cap Y$. В част-

ности, $\xi \circ \eta = 0$, если $X \cap Y = \varnothing$. Кроме того, если $V = \bigcup_i V_i$, $V_i \cap V_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то определены соответствующие каждому открытому множеству V_i локальные П. и. ξ и η, сумма к-рых совпадает с $\xi \circ \eta$. Инвариант $\xi \circ \eta$ не меняется при гомеоморфизмах $\mathbb{R}^n$. Вместе с предшествующим свойством локальности это позволяет определить П. и. $\xi \circ \eta$ для компактных подмножеств ориентированного многообразия. Имеет место следующее соотношение антикоммутативности:

$$\xi \circ \eta = (-1)^{i(n-i)} \eta \circ \xi.$$

Если X и Y — векторные подпространства общего положения, $A = X \setminus 0$, $B = Y \setminus 0$, а ξ и η — образующие $R = H_{n-i}(X, A) = H_i(Y, B)$, то $\xi \circ \eta$ — образующая $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) = R$. Так как выбор указанных образующих равносилен выбору ориентации в соответствующих евклидовых пространствах, это дает возможность определить П. и. $c \circ c'$ двух цепей дополнительных размерностей (в том числе сингулярных), для к-рых $|c| \cap |\partial c'| = \varnothing = |c'| \cap |\partial c|$ ($|c|$ — носитель, а ∂c — граница цепи c). При этом $c \circ c' = \xi \circ \eta$ для определяемых цепями c, c' классов гомологий $\xi \in H_{n-i}(X, A)$, $\eta \in H_i(Y, B)$, $|c| \subset X$, $|\partial c| \subset A$, $|c'| \subset Y$, $|\partial c'| \subset B$.

П. и. применяется для описания нек-рых соотношений двойственности в многообразиях.

Лит.: [1] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976.

Е. Г. Скляренко.

ПЕРЕСТАНОВКА из n элементов — конечная последовательность длины n, все элементы к-рой различны, т. е. П.— это *размещение* без повторения из n элементов по n. Число перестановок равно $n!$

Обычно в качестве элементов П. берут элементы множества $Z_n = \{1, 2, \ldots, n\}$; взаимно однозначное отображение π множества Z_n на себя определяет перестановку $\overline{\pi} = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$. Отображение π наз. подстановкой Z_n. Многие задачи, связанные с перечислением П., формулируются в терминах подстановок, как, напр., задачи о перечислении П. с различными ограничениями на позиции переставляемых элементов (см., напр., [1], [2]). Перестановка $\overline{\pi}$ может рассматриваться как упорядоченное множество, состоящее из n элементов, если считать, что элемент $\pi(i)$ предшествует элементу $\pi(i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Примеры. 1) Пара $\{\pi(i), \pi(j)\}$ образует в $\overline{\pi}$ инверсию, если $\pi(i) > \pi(j)$ при $i < j$. Если a_r — число П. из n элементов с r инверсиями, то

$$\sum_{r=0}^{\binom{n}{2}} a_r x^r = \frac{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)}{(1-x)^n}.$$

2) Если b_n — число таких перестановок $\overline{\pi}$ из n элементов, что $\pi(i) > \pi(i-1)$ при i четном и $\pi(i) < \pi(i-1)$ при i нечетном, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!} = \operatorname{tg} x + \sec x.$$

Иногда П. наз. отображения в себя конечного множества, т. е. *подстановки*.

Лит.: [1] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [2] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963.

В. М. Михеев.

ПЕРЕСТАНОВОК КРИТЕРИЙ — статистический критерий, предназначенный для проверки гипотезы H_*, согласно к-рой плотность вероятности наблюдаемого случайного вектора $X = (X_1, \ldots, X_n)$ принадлежит семейству всех n-мерных плотностей, симметричных относительно перестановок аргументов.

Пусть по реализации случайного вектора $X = (X_1, \ldots, X_n)$, принимающего значения $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, надлежит проверить гипотезу H_* о принадлежности плотности вероятности $p(x)$ случайного вектора X семейству

$\mathbf{H}_*=\{p(x)\}$ всех n-мерных плотностей $p(x)=p(x_1, \ldots, x_n)$, симметричных относительно перестановок аргументов $x_1, \ldots, x_n$, то есть

$$p(x)\in\mathbf{H}_* \Leftrightarrow p(x_1, \ldots, x_n)=p(x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_n}),$$

где $r=(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ — произвольный вектор из пространства $\mathfrak{R}$ всех перестановок $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ вектора $(1, 2, \ldots, n)$. Пространство $\mathfrak{R}$ является множеством всех реализаций вектора рангов $R=(R_1, R_2, \ldots, R_n)$, естественным образом возникающим при построении вектора порядковых статистик $X^{(\cdot)}$, принимающего значения $x^{(\cdot)}$ в множестве $\mathfrak{X}^{(\cdot)}\subset\mathbb{R}^n$. При справедливости гипотезы H_* статистики $X^{(\cdot)}$ и R стохастически независимы, при этом

$$\mathsf{P}\{R=r\}=\frac{1}{n!}, \quad r\in\mathfrak{R}, \qquad (*)$$

а плотность вероятности вектора порядковых статистик $X^{(\cdot)}$ равна $n!p(x^{(\cdot)})$, $x^{(\cdot)}\in\mathfrak{X}^{(\cdot)}$.

Свойство (*) равномерной распределенности статистики R при справедливости гипотезы H_* и лежит в основе построения П. к.

Если $\Psi(x^{(\cdot)}, r)$ — функция, определенная на $\mathfrak{X}^{(\cdot)}\times\mathfrak{R}$ таким образом, что $0\leqslant\Psi\leqslant1$, и для любого $r\in\mathfrak{R}$ она является измеримой относительно борелевской σ-алгебры пространства $\mathfrak{X}^{(\cdot)}$ и, кроме того, для нек-рого $\alpha\in(0,1)$

$$\frac{1}{n!}\sum\nolimits_{r\in\mathfrak{R}}\Psi(x^{(\cdot)}, r)=\alpha \text{ почти всюду},$$

то статистич. критерий для проверки H_*, имеющий критич. функцию

$$\varphi(x)=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\Psi(x^{(\cdot)}, r),$$

наз. критерием перестановок. Если П. к. не является рандомизированным, то α следует выбирать кратным $1/n!$.

Наиболее мощный критерий для проверки H_* против простой альтернативы $q(x)$ ($q(x)$ — произвольная n-мерная плотность, не принадлежащая семейству $\mathbf{H}_*$) может быть найден в семействе П. к.

Семейство П. к. и семейство критериев, инвариантных относительно изменения параметров сдвига и масштаба, играют большую роль при построении *ранговых критериев*. И, наконец, следует отметить, что в литературе по математич. статистике вместо термина П. к. часто употребляют термин «рандомизации критерий».

См. *Порядковая статистика*, *Инвариантный критерий*, *Критическая функция*.

Лит.: [1] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

М. С. Никулин.

ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ СООТНОШЕНИЯ — правила перестановки произведения двух операторов рождения или уничтожения. Именно, для *уничтожения операторов* $\{a(f), f\in H\}$ и сопряженных к ним *рождения операторов* $\{a^*(f), f\in H\}$, где H — нек-рое гильбертово пространство, действующих в симметричном *Фока пространстве* $P(H)$ над пространством H, эти соотношения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} a(f_1)\,a(f_2)-a(f_2)\,a(f_1)&=\\ =a^*(f_1)\,a^*(f_2)-a^*(f_2)\,a^*(f_1)&=0,\\ a(f_1)\,a^*(f_2)-a^*(f_2)\,a(f_1)&=-(f_1, f_2)E, \quad f_1, f_2\in H, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в H, а E — единичный оператор, действующий в $P(H)$. Соотношения (1) наз. также коммутационными соотношениями. В случае антисимметричного пространства Фока операторы рождения и уничтожения переставляются согласно правилам:

$$\left.\begin{aligned} a(f_1)\,a(f_2)+a(f_2)\,a(f_1)&=\\ =a^*(f_1)\,a^*(f_2)+a^*(f_2)\,a^*(f_1)&=0,\\ a(f_1)\,a^*(f_2)+a^*(f_2)\,a(f_1)&=(f_1, f_2)E, \quad f_1, f_2\in H, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

к-рые наз. антикоммутационными соотношениями.

В случае бесконечномерного пространства H кроме операторов рождения и уничтожения, действующих в пространствах Фока над H, существуют и другие, не эквивалентные им, неприводимые представления коммутационных и антикоммутационных соотношений, т. е. другие семейства операторов, действующих в каком-нибудь гильбертовом пространстве и удовлетворяющих правилам перестановки (1) или (2) (см. [1], [2]). В случае конечномерного гильбертова пространства H все неприводимые представления как соотношений (1), так и соотношений (2) унитарно эквивалентны.

Лит.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965; [2] Gårding L., Wightman A., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1954, v. 70, № 7, p. 617—26.

Р. А. Минлос.

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ — линейные операторы B и T, из к-рых T — общего вида, а B — ограничен, такие, что

$$BT \subseteq TB \qquad (1)$$

(запись $T \subseteq T'$ означает, что T' является *расширением* T). Отношение перестановочности обозначается $B \bigcup T$ и подчиняется следующим правилам:

1) если $B \bigcup T_1$, $B \bigcup T_2$, то $B \bigcup (T_1 + T_2)$, $B \bigcup T_1 T_2$;
2) если $B_1 \bigcup T$, $B_2 \bigcup T$, то $(B_1 + B_2) \bigcup T$, $B_1 B_2 \bigcup T$;
3) если T^{-1} существует, то из $B \bigcup T$ следует $B \bigcup T^{-1}$;
4) если $B \bigcup T_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то $B \bigcup \lim T_n$;
5) если $B_n \bigcup T$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\lim B_n \bigcup T$ при условии, что $\lim B_n$ ограничен, а T замкнут.

Если оба оператора определены на всем пространстве, то условие (1) сводится к обычному:

$$BT = TB, \qquad (2)$$

причем ограниченность B не требуется. Обобщение условия (2) оправдано тем, что, напр., даже ограниченный оператор B не будет перестановочным со своим обратным B^{-1}, если этот последний определен не на всем пространстве.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979.

М. И. Войцеховский.

ПЕРЕСТРОЙКА, сферическая перестройка, на многообразии типа $(\lambda, n-\lambda)$ — переход от одного $(n-1)$-мерного многообразия M_1 к другому многообразию M_2, состоящий в изъятии вложенной в M_1 сферы размерности $\lambda-1$ и замене ее вложенной сферой размерности $n-\lambda-1$. Подробнее см. *Ручек теория.*

М. И. Войцеховский.

ПЕРЕХОД С ЗАПРЕЩЕНИЯМИ для цепи Маркова — множество траекторий *Маркова цепи*, к-рые на рассматриваемом отрезке времени ни разу не попадают в фиксированное множество состояний. Пусть, напр., $\xi(t)$ — цепь Маркова с дискретным временем и множеством состояний S, а H — «запрещенное» множество состояний. Тогда вероятности переходов с запрещениями ${}_H p_{ij}(t)$ суть

$${}_H p_{ij}(t) = \mathsf{P}\{\xi(k) \notin H\ (k = 1, \ldots, t-1), \quad \xi(t) = j \mid \xi(0) = i\},\ i, j \in S.$$

Свойства вероятностей П. с з. ${}_H p_{ij}(t)$ во многом аналогичны свойствам обычных *переходных вероятностей* $p_{ij}(t)$, так как семейства матриц $P(t) = \|p_{ij}(t)\|_{i,\ j \in S}$ и $P_H(t) = \|{}_H p_{ij}(t)\|_{i,\ j \in S \setminus H}$, $t \geqslant 0$, образуют полугруппы по умножению; однако если $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$, то $\sum_{j \in S} {}_H p_{ij}(t) \leqslant 1$. К изучению тех или иных свойств вероятностей П. с з. фактически сводятся исследование распределения момента первого попадания цепи Маркова в фиксированное множество, доказательство

предельных теорем для *ветвящихся процессов* при условии невырождения и т. п.

Лит.: [1] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964. *А. М. Зубков.*

ПЕРЕХОДНАЯ ФУНКЦИЯ, вероятность перехода,— семейство мер, используемых в теории марковских процессов для определения распределения процесса в будущие моменты времени по известным состояниям в предшествующие моменты. Пусть измеримое пространство $(E, \mathcal{B})$ таково, что σ-алгебра $\mathcal{B}$ содержит все одноточечные подмножества из E, и пусть T — подмножество действительной прямой R. Функция $P(s, x; t, B)$, заданная при $s, t \in T$, $s \leqslant t$, $x \in E$ и $B \in \mathcal{B}$, наз. переходной функцией в измеримом пространстве $(E, \mathcal{B})$, если: а) при фиксированных s, x, t она является мерой на $\mathcal{B}$, причем $P(s, x; t, B) \leqslant 1$; б) при фиксированных s, t, B она является $\mathcal{B}$-измеримой функцией точки x; в) $P(s, x; s, \{x\}) \equiv 1$ и для всех s, предельных для T в правой топологии прямой R,

$$\lim_{s \downarrow t,\ t \in T} P(s, x; t, E) = 1;$$

г) при всех $x \in E$, $B \in \mathcal{B}$ и $s \leqslant t \leqslant u$ из T выполняется уравнение Колмогорова — Чепмена:

$$P(s, x; u, B) = \int_E P(s, x; t, dy)\, P(t, y; u, B) \quad (*)$$

(в нек-рых случаях требование в) опускают или ослабляют). П. ф. наз. марковской переходной функцией, если $P(s, x; t, E) \equiv 1$, и субмарковской переходной функцией в противоположном случае. Если E не более чем счетно, П. ф. задают с помощью матрицы вероятностей перехода

$$P^{st} = \| p_{xy}(s, t) \|$$

(см. *Переходные вероятности, Переходных вероятностей матрица*). Нередко оказывается, что при любых допустимых s, x и t мера $P(s, x; t, \cdot)$ обладает плотностью $p(s, x; t, \cdot)$ относительно нек-рой меры. Если при этом выполнен следующий вариант уравнения (*):

$$p(s, x; u, z) = \int_E P(s, x; t, dy)\, p(t, y; u, z)$$

для любых x, z из E и $s \leqslant t \leqslant u$ из T, то функцию $p(s, x; t, y)$ наз. переходной плотностью.

При широких условиях (см. [1], [2]) с П. ф. $P(s, x; t, B)$ можно связать марковский процесс $X = (x_t, \zeta, \mathcal{F}_t^s, \mathsf{P}_{s,x})$, для к-рого $\mathsf{P}_{s,x}\{x_t \in B\} = P(s, x; t, B)$ (в случае марковской П. ф. этот процесс не обрывается). Наоборот, марковское свойство случайного процесса, как правило, позволяет сопоставить ему П. ф. (см. [3]).

Пусть T однородно в том смысле, что совокупность значений $t - s$ при $s \leqslant t$ из T образует полугруппу $\tilde{T}$ в R относительно сложения (напр., $T = R$, $T = \{t \in R : R : t \geqslant 0\}$, $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$). Если при этом П. ф. $P(s, x; t, B)$ зависит лишь от разности $t - s$, т. е. если $P(s, x; t, B) = P(t - s, x, B)$, где $P(t, x, B)$ — функция от $t \in \tilde{T}$, $x \in E$, $B \in \mathcal{B}$, подчиненная соответствующему варианту условий а) — г), то $P(s, x; t, B)$ наз. однородной переходной функцией. Последнее название присваивается и функции $P(t, x, B)$, для к-рой (*) принимает форму

$$P(t + s, x, B) = \int_E P(t, x, dy)\, P(s, y, B),$$

$$s, t \in \tilde{T},\ x \in E,\ B \in \mathcal{B}.$$

Для нек-рых целей (напр., при регуляризации П. ф.) оказывается необходимым расширить определение П. ф. Напр., считают заданным семейство измеримых про-

странств $(E_t, \mathcal{B}_t)$, $t \in T$, а П. ф. относительно этого семейства определяют как функцию $P(s, x; t, B)$, где $s, t \in T$, $s \leqslant t$, $x \in E_s$, $B \in \mathcal{B}_t$, удовлетворяющую подходящей модификации условий а) — г).

Лит.: [1] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [3] Кузнецов С. Е., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, № 2, с. 389—93.

М. Г. Шур.

ПЕРЕХОДНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ — вероятности перехода *Маркова цепи* $\xi(t)$ на отрезке времени $[s, t]$ из состояния i в состояние j:

$$p_{ij}(t) = \mathsf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(s) = i\}, \quad s < t.$$

Ввиду основного свойства цепи Маркова для любых состояний i, $j \in S$ (где S — множество всех состояний цепи) и любых $s < t < u$

$$p_{ij}(s, u) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s, t)\, p_{kj}(t, u).$$

Обычно рассматриваются однородные цепи Маркова, для к-рых П. в. $p_{ij}(s, t)$ зависят от длины отрезка $[s, t]$, но не от его положения на оси времени:

$$p_{ij}(s, t) = p_{ij}(t - s).$$

Для любых состояний i, j однородной цепи Маркова с дискретным временем последовательность $p_{ij}(n)$ сходится по Чезаро, т. е. существует

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}(k) \geqslant 0.$$

При нек-рых дополнительных условиях (а также для цепей с непрерывным временем) пределы существуют и в обычном смысле. См. *Маркова цепь эргодическая*, *Маркова цепи положительный класс состояний*.

П. в. $p_{ij}(t)$ цепи Маркова с дискретным временем определяются значениями $p_{ij}(1)$, i, $j \in S$; для любых $t > 0$, $i \in S$

$$\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1.$$

В случае цепей Маркова с непрерывным временем обычно предполагается, что П. в. удовлетворяют дополнительным условиям: все $p_{ij}(t)$ измеримы как функции $t \in (0, \infty)$,

$$\lim_{t \downarrow 0} p_{ij}(t) = 0 \ (i \neq j), \quad \lim_{t \downarrow 0} p_{ii}(t) = 1, \ i, \ j \in S.$$

При этих предположениях существуют плотности вероятностей перехода

$$\lambda_{ij} = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (p_{ij}(t) - p_{ij}(0)) \leqslant \infty, \ i, \ j \in S; \qquad (1)$$

если все λ_{ij} конечны и $\sum_{j \in S} \lambda_{ij} = 0$, $i \in S$, то П. в. $p_{ij}(t)$ удовлетворяют системам дифференциальных уравнений Колмогорова — Чепмена

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} \lambda_{ik} p_{kj}(t), \quad p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} \lambda_{kj} p_{ik}(t) \qquad (2)$$

с начальными условиями $p_{ii}(0) = 1$, $p_{ij}(0) = 0$, $i \neq j$, i, $j \in S$ (см. также *Колмогорова уравнение*, *Колмогорова — Чепмена уравнение*).

При задании цепи Маркова плотностями перехода (1) ее П. в. $p_{ij}(t)$ удовлетворяют условиям

$$p_{ij}(t) \geqslant 0, \ \sum_{j \in S} p_{ij}(t) \leqslant 1, \ i, \ j \in S, \ t > 0;$$

цепи, для к-рых $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) < 1$ при нек-рых $i \in S$ и $t > 0$, наз. **нерегулярными** (тогда имеет место неединственность решения систем (2)); если $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$ для всех $i \in S$ и $t > 0$, то цепь наз. **регулярной**.

Пример. Цепь Маркова $\xi(t)$ с множеством состояний $\{0, 1, \ldots\}$ и плотностями перехода

$$\lambda_{i, i+1} = -\lambda_{ii} = \lambda_i > 0, \ \lambda_{ij} = 0, \ i \neq j \neq i+1$$

(т. н. процесс чистого размножения) нерегулярна тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^{-1} < \infty.$$

Пусть

$$\tau_{0n} = \inf \{t > 0 : \xi(t) = n \ (\xi(0) = 0)\},$$
$$\tau = \lim_{n \to \infty} \tau_{0n},$$

тогда

$$\mathrm{E}\tau = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1}$$

и при $\mathrm{E}\tau < \infty$ имеет место $\mathrm{P}\{\tau < \infty\} = 1$, т. е. траектория цепи $\xi(t)$ «с вероятностью 1 за конечное время уходит в бесконечность» (см. также *Ветвящихся процессов регулярность*).

Лит.: [1] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964.

А. М. Зубков.

ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МАТРИЦА — матрица $P_t = \|p_{ij}(t)\|$, элементами к-рой являются переходные вероятности за время t однородной *Маркова цепи* $\xi(t)$ с не более чем счетным множеством состояний S:

$$p_{ij}(t) = \mathrm{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}, \ i, \ j \in S.$$

П. в. м. $\|p_{ij}(t)\|$ цепей Маркова с дискретным временем и регулярных цепей Маркова (см. *Переходные вероятности*) с непрерывным временем при любых $t > 0$, $i, j \in S$ удовлетворяют условиям

$$p_{ij}(t) \geqslant 0, \ \sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1,$$

т. е. являются *стохастическими матрицами*, для нерегулярных цепей

$$p_{ij}(t) \geqslant 0, \ \sum_{j \in S} p_{ij}(t) \leqslant 1,$$

такие матрицы наз. полустохастическими.

В силу основного свойства однородной цепи Маркова:

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) \, p_{kj}(t),$$

семейство матриц $\{P_t, \ t > 0\}$ образует полугруппу по умножению; в случае, когда время дискретно, эта полугруппа однозначно определяется матрицей P_1.

А. М. Зубков.

ПЕРЕХОДНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПОЛУГРУППА — полугруппа операторов, порождаемых *переходной функцией* марковского процесса. По переходной функции $P(t, x, A)$ однородного марковского процесса $X = (x_t, \zeta, \mathcal{F}_t, \mathrm{P}_x)$ в фазовом пространстве $(E, \mathcal{B})$ можно построить нек-рые полугруппы линейных операторов P^t, действующих в том или ином банаховом пространстве $\mathbb{B}$ (см., напр., [1]). Чаще всего в роли $\mathbb{B}$ берут пространство $\mathbb{B}(E)$ ограниченных действительных функций f на E с равномерной нормой (а для феллеровского процесса X — пространство $\mathbb{C}(E)$ непрерывных функций с той же нормой) или пространство $\mathrm{V}(E)$ конечных счетно аддитивных функций φ на $\mathcal{B}$ с полной вариацией в качестве нормы. В первых двух случаях полагают

$$P^t f(x) = \int_E f(y) \, P(t, \ x, \ dy);$$

в третьем

$$P^t \varphi(A) = \int_E P(t, \ y, \ A) \, \varphi(dy)$$

(здесь f и φ принадлежат соответствующим пространствам, $x \in E$, $A \in \mathcal{B}$). Во всех этих случаях выполнено полугрупповое свойство: $P^t P^s = P^{t+s}$, $s, \ t \geqslant 0$, и любая из трех полугрупп $\{P^t\}$ наз. полугруппой переходных операторов.

В дальнейшем речь идет только о первом случае. Инфинитезимальный оператор A полугруппы $\{P^t\}$ (он же — инфинитезимальный оператор процесса) определяется обычным образом:

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (P^t f - f)$$

для всех тех $f \in \mathbb{B}(E)$, для к-рых указанный предел существует как предел в $\mathbb{B}(E)$. Предполагая, что $P(t, x, A)$ при $A \in \mathcal{B}$ является измеримой функцией пары переменных (t, x), вводят резольвенту R^α процесса X, $\alpha > 0$:

$$R^\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P^t f \, dt, \quad f \in \mathbb{B}(E). \qquad (*)$$

Если $\|P^t f - f\| \to 0$ при $t \downarrow 0$, то $Ag = \alpha g - f$, где $g = R^\alpha f$. При определенных предположениях интеграл (*) существует и при $\alpha = 0$, причем $g = R^0 f$ удовлетворяет «уравнению Пуассона»

$$Ag = -f$$

(по этой причине, в частности, $R^0 f$ наз. потенциалом функции f).

Знание инфинитезимального оператора позволяет найти важные характеристики исходного процесса; более того, вопросы классификации марковских процессов сводятся к описанию соответствующих им инфинитезимальных операторов (см. [2], [3]). Немаловажно и то обстоятельство, что инфинитезимальный оператор входит в уравнения, позволяющие находить средние значения различных функционалов от процесса. Так, при нек-рых предположениях функция

$$v(t, x) = \mathsf{E}_x \left[\exp \left\{ \int_0^{t \wedge \zeta} c(x_s) \, ds \right\} f(x_{t \wedge \zeta}) \right], \quad t \geqslant 0, \ x \in E,$$

является единственным не слишком быстро растущим по t решением задачи $v'_t = Av + cv$, $v(0, x) = f(x)$, где E_x — математич. ожидание, отвечающее P_x, а $t \wedge \zeta = \min(t, \zeta)$.

Оператор A родственен характеристическому оператору $\mathfrak{A}$ (см. [2]). Пусть X — непрерывный справа марковский процесс в топологич. пространстве E. Для борелевской функции f полагают

$$\mathfrak{A} f(x) = \lim_{U \downarrow x} \left[\frac{\mathsf{E}_x f(x_\tau) - f(x)}{\mathsf{E}_x \tau} \right],$$

если предел существует для всех $x \in E$, где U пробегает систему окрестностей точки x, стягивающихся к x, и где τ — момент первого выхода X из U (при $\mathsf{E}_x \tau = \infty$ дробь, стоящую под знаком предела, приравнивают нулю). Во многих случаях вычисление Af сводится к вычислению $\mathfrak{A} f$.

Лит.: [1] Feller W., «Ann. Math.», 1952, v. 55, p. 468—519; [2] Дынкин Е. Б., Основания теории марковских процессов, М., 1959; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973. *М. Г. Шур.*

ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ОПЕРАТОР — отображение множества всех множеств натуральных чисел в себя (т. е. отображение $2^{\mathbb{N}}$ в $2^{\mathbb{N}}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел), определяемое следующим образом. Пусть W_z — рекурсивно перечислимое множество с гёделевым номером z, D_u — конечное множество натуральных чисел с канонич. индексом u (то есть $D_u = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, где $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ и $2^{x_1} + 2^{x_2} + \ldots + 2^{x_n} = u$), $\langle x, u \rangle$ — номер упорядоченной пары, состоящей из чисел x и u, при нек-ром фиксированном взаимно однозначном рекурсивном кодировании пар. С каждым рекурсивно перечислимым множеством W_z связана процедура, преобразующая любое множество натуральных чисел B в нек-рое множество натуральных чисел A. А именно, если число $\langle x, u \rangle$ принадлежит множеству W_z и конечное множество D_u содержится

в множестве B, то x относится к множеству A. Иными словами,

$$A=\{x\mid(\exists u)\,(\langle x,\ u\rangle\in W_z\&D_u\subseteq B)\}.$$

Эта процедура позволяет из любого пересчета множества B эффективно получить пересчет множества A. Она наз. П. о. и обозначается Φ_z. Если для нек-рого П. о. Ψ имеет место $\Psi(B)=A$, то говорят, что A сводится по перечислимости к B ($A\leqslant_e B$).

Если Φ и Ψ суть П. о., то их композиция $\Phi\Psi$ также есть П. о. Если Ψ — П. о. и $A\subseteq B$, то $\Psi(A)\subseteq\Psi(B)$. Если $x\in\Psi(A)$, то $x\in\Psi(D)$ для нек-рого конечного множества $D\subseteq A$. Каждый П. о. Ψ имеет неподвижную точку, а именно, существует такое рекурсивно перечислимое множество A, что $\Psi(A)=A$, и если $\Psi(B)=B$, то $A\subseteq B$.

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972. *В. Е. Плиско.*

ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ПРОБЛЕМА — *алгоритмическая проблема*, в к-рой для заданного множества A требуется построить алгоритм, перечисляющий A, т. е. такой алгоритм $\mathfrak{A}$, к-рый применим ко всякому натуральному числу и перерабатывает его в элемент из A, причем любой элемент из A получается в результате применения $\mathfrak{A}$ к нек-рому натуральному числу; иными словами, $A=\bigcup_{i=0}^{\infty}\{\mathfrak{A}(i)\}$. П. п. для множества A разрешима тогда и только тогда, когда A — непустое *перечислимое множество.* *В. Е. Плиско.*

ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ТЕОРИЯ — раздел *комбинаторного анализа*, в к-ром изучаются и разрабатываются методы решения перечислительных задач. Эти задачи, как правило, сводятся к подсчету числа элементов конечного множества, обладающих определенными свойствами, или их классов эквивалентности. К таким методам относятся, напр., *включения и исключения принцип* и различные его обобщения. Теория перечисления Пойа (см. *Пойа теорема*) часто позволяет преодолевать трудности при подсчете разных объектов, когда их приходится рассматривать как неразличимые. Основным инструментом при решении перечислительных задач являются производящие функции; они также играют существенную роль при получении асимптотич. соотношений (см. [1] — [3]).

Для получения производящих функций в комбинаторике широко применяются алгебры формальных степенных рядов и различные символич. методы (см. [1], [2], [4]). В основе общего подхода к разработке методов получения производящих функций лежит тот факт, что многие дискретные объекты обладают естественной упорядоченностью (см. [1], [5]). Ниже в качестве примера даны построения алгебр инцидентности и показано, как с их помощью решаются нек-рые перечислительные задачи.

Пусть задано частично упорядоченное множество X с отношением порядка $\leqslant$ и пусть X локально конечно, т. е. любой его сегмент

$$[x,\ y]=\{z: x\leqslant z\leqslant y;\ x,\ y,\ z\in X\}$$

конечен.

Алгеброй инцидентности $I(X)$ наз. совокупность функций $f(x,\ y)$, $x,\ y\in X$, принимающих действительные значения и таких, что $f(x,\ y)=0$ при $x\not\leqslant y$. Сумма двух таких функций и умножение на число определяются обычным образом, а произведение $f*g=h$ вводится соотношением

$$h(x,\ y)=\sum\nolimits_{x\leqslant z\leqslant y} f(x,\ z)\,g(z,\ y).$$

Умножение оказывается ассоциативным и дистрибутивным относительно сложения. Алгебра $I(X)$ обладает единицей

$$\delta=\delta(x,\ y)=\begin{cases}1 & \text{при } x=y,\\ 0 & \text{при } x\neq y.\end{cases}$$

В алгебре $I(X)$ выделяют два элемента: дзета-функцию $\zeta=\zeta(x, y)$ ($\zeta(x, y)=1$ при $x\leqslant y$) и обратную ей функцию Мёбиуса $\mu=\zeta^{-1}$. Справедливо утверждение: если локально конечное частично упорядоченное множество X содержит свою наибольшую нижнюю грань, функция $f(x)$ определена для всех $x\in X$ и $g(x)=\sum_{y\leqslant x} f(y)$ для всех $x\in X$, то для всех $x\in X$

$$f(x)=\sum_{y\leqslant x} g(y)\,\mu(y, x)$$

(теорема обращения Мёбиуса).

Если $X=B$ — множество всех конечных подмножеств нек-рого счетного множества, а $x\leqslant y$ означает, что $x\subseteq y$, то при $x\subseteq y$

$$\mu_B(x, y)=(-1)^{|y|-|x|},$$

а обращение Мёбиуса есть не что иное, как принцип включения и исключения.

Если $X=D$ — множество натуральных чисел и $x\leqslant y$ означает, что x делит y, то при $x\leqslant y$ имеем $\mu_D(x, y)=\mu\left(\frac{y}{x}\right)$, где $\mu(n)$ — теоретико-числовая *Мёбиуса функция*.

Редуцированной алгеброй инцидентности $R(X)$ наз. подалгебра $I(X)$, к-рой принадлежат все функции $I(X)$, принимающие равные значения на эквивалентных сегментах. При этом отношение эквивалентности сегментов обладает тем свойством, что если $f(x, y)=f(u, v)$ и $g(x, y)=g(u, v)$ для $[x, y]\sim[u, v]$, то и

$$(f*g)(x, y)=(f*g)(u, v).$$

Это будет, напр., выполняться, если эквивалентными считать изоморфные сегменты. К алгебре $R(X)$ всегда принадлежат дзета-функция и функция Мёбиуса.

Если $X=N_0=\{0, 1, 2, \ldots\}$ с естественной упорядоченностью чисел, то алгебра $I(N_0)$ изоморфна алгебре верхнетреугольных бесконечных матриц. Если к $R(N_0)$ отнести все такие функции $f\in I(N_0)$, что $f(m, n)=f(m', n')$ при $n-m=n'-m'=k$, то имеет место взаимно однозначное соответствие

$$f\leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k,\quad g\leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

где $a_k=f(m, n)$, $g_k=(m, n)$ при $n-m=k$, так что

$$f*g\leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,\quad c_k=\sum_{s=0}^{k} a_s b_{k-s}.$$

Таким образом, алгебра $R(N_0)$ изоморфна алгебре формальных степенных рядов и

$$s\leftrightarrow(1-x)^{-1},\quad \mu\leftrightarrow 1-x.$$

Если $X=B$, то алгебра $R(B)$ изоморфна алгебре экспоненциальных степенных рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\frac{x^k}{k!}$$

и $s\leftrightarrow e^x$, $\mu\leftrightarrow e^{-x}$, где $[x, y]\sim[u, v]$ при $|y\setminus x|=|v\setminus u|$.

Если $X=D$ и рассматриваются $f(m, n)=f(m', n')$ при $\frac{n}{m}=\frac{n'}{m'}$, то алгебра $R(D)$ оказывается изоморфной алгебре рядов Дирихле и

$$\zeta\leftrightarrow\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad \mu\leftrightarrow\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Пример. Пусть $c(x, y)$ — число цепей вида $x<x_1<\ldots<x_{l-1}<y$ в X, тогда $(\zeta-\delta)^k(x, y)$ — число таких цепей длины k (то есть $l=k$). Поэтому

$$c(x, y)=\sum_{k=0}^{\infty}(\zeta-\delta)^k(x, y)=$$
$$=[\delta-(\zeta-\delta)]^{-1}(x, y)=(2\delta-\zeta)^{-1}(x, y).$$

Рассмотрим эту формулу в $R(X)$ при $X=N_0$, B, D. В случае $X=N_0$ и $y-x=n$ число $c(x, y)=c_n$ есть число упорядоченных разбиений (композиций) n. В $R(N_0)$ полученная формула имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{1}{2-(1-x)^{-1}},$$

следовательно $c_n=2^{n-1}$, $n>0$.

В случае $X=B$ число $c(x, y)=c_n$ есть число упорядоченных разбиений n-элементного множества, $|x \setminus y|=n$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n = \frac{1}{2-e^x}.$$

В случае $X=D$ число $c(x, y)=c_n$ есть число упорядоченных разложений на множители $n=y/x$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = \frac{1}{2-\zeta(1)}.$$

Лит.: [1] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [2] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963; [3] Перечислительные задачи комбинаторного анализа. Сб. переводов, М., 1979; [4] Rota G.-C., Mullin R., в кн.: Graph theory and its applications, N. Y.— L., 1970, p. 167—213; [5] Rota G.-C., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.», 1964, Bd 2, H. 4, S. 340—68; [6] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970. *В. М. Михеев.*

ПЕРЕЧИСЛИМОЕ МНОЖЕСТВО — множество, возникающее в результате развертывания какого-либо конструктивного порождающего процесса. Такой процесс можно мыслить как процесс вычисления значений нек-рого алгоритма с исходными данными в виде натуральных чисел, и потому, напр., определению П. м. натуральных чисел можно придать следующий точный вид: множество натуральных чисел наз. перечислимым, если существует такая *частично рекурсивная функция*, что это множество является множеством ее значений.

Всякое *разрешимое множество* натуральных чисел является П. м. Обратное неверно: можно указать пример неразрешимого П. м. Этот факт, установленный в 1936 А. Чёрчем (A. Church), является одним из фундаментальных результатов общей *алгоритмов теории*. На нем основаны (или могут быть основаны) все известные отрицательные решения *алгоритмических проблем*. Если какое-либо множество и его дополнение суть П. м., то это множество разрешимо (теорема Поста). Изучение и классификация П. м. являются предметом исследований алгоритмич. теории множеств.

Лит.: [1] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960. *Н. М. Нагорный.*

ПЕРИМЕТР — 1) П. плоской области, ограниченной спрямляемой кривой,— полная длина границы области.

2) П. измеримого множества A в n-мерном евклидовом (или римановом) пространстве — нижний предел $(n-1)$-мерной площади границы многогранников P_i (или множеств P_i с C^1-гладкой границей), сходящихся к A по объему, т. е. так, что $\mathrm{Vol}((A \setminus P_i) \cup (P_i \setminus A)) \to 0$ при $i \to \infty$.

Лит.: [1] Caccoppoli R., «Rand. Accad. naz. Lincei. Ser. 8», 1952, № 1, p. 3—11, № 2, p. 137—46; [2] Gorgi E. de, там же, Ser. 1, 1958, 5, № 2, p. 33—34. *В. А. Залгаллер.*

ПЕРИОД группы — наименьшее общее кратное порядков элементов данной группы (предполагается, что группа периодическая и порядки всех ее элементов ограничены в совокупности). П. группы наз. также показателем группы. *О. А. Иванова.*

ПЕРИОД функции $f(x)$ — число $T \neq 0$ такое, что при любом $x \in X \subset \mathbb{R}$ (или $X \subset \mathbb{C}$) числа $x-T$ и $x+T$ также принадлежат множеству X и выполняется равенство

$$f(x+T)=f(x).$$

Числа $\pm nT$, где n — любое натуральное число, также являются П. функции $f(x)$. У функции $f=\text{const}$ на оси или на плоскости любое число $T\neq 0$ будет П.; для функции Дирихле

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\text{ — рациональное,}\\ 0, & \text{если } x\text{ — иррациональное,}\end{cases}$$

любое рациональное число $T\neq 0$ будет П. Если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $\psi(x)=f(ax+b)$, где a и b — постоянные и $a\neq 0$, имеет период $\frac{T}{a}$. Если действительная функция $f(x)$ с действительным аргументом непрерывна на X (и не равна тождественно постоянной), то она имеет наименьший период $T_0>0$ и всякий другой действительный П. кратен T_0. Существуют функции с комплексным аргументом, у к-рых имеются два некратных с мнимым частным П.; таковы, напр., *эллиптические функции*.

Аналогично определяется П. функции, определенной на нек-рой абелевой группе. *А. А. Конюшков.*

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа, каждый элемент к-рой имеет конечный порядок. Всякая периодич. абелева группа разлагается в прямую сумму примарных групп по различным простым числам. Об условиях конечности П. г. см. *Бёрнсайда проблема* о периодических группах. *О. А. Иванова.*

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа, в к-рой каждая моногенная подполугруппа конечна (другими словами, каждый элемент имеет конечный порядок). Всякая П. п. имеет идемпотенты. Множество K_e всех элементов П. п., нек-рая (зависящая от элемента) степень к-рых равна данному идемпотенту e, наз. *классом кручения*, соответствующим этому идемпотенту. Множество G_e всех элементов из K_e, для к-рых e служит единицей, является $\mathcal{H}$-классом (см. *Грина отношения эквивалентности*), наибольшей подгруппой в K_e и идеалом в подполугруппе $\langle K_e\rangle$, порожденной K_e; таким образом $\langle K_e\rangle$ будет гомогруппой (см. *Минимальный идеал*). П. п. с единственным идемпотентом наз. унипотентной. Унипотентность П. п. S эквивалентна каждому из следующих условий: S есть идеальное расширение группы при помощи *нильполугруппы*, S есть подпрямое произведение группы и нильполугруппы.

Разбиение П. п. на классы кручения играет определяющую роль при изучении многих вопросов для периодич. полугрупп. Произвольный класс кручения не обязательно является подполугруппой: минимальный контрпример — пятиэлементная *Брандта полугруппа* B_2, изоморфная *рисовской полугруппе матричного типа* над единичной группой с единичной сэндвич-матрицей 2-го порядка. В П. п. S все классы кручения будут подполугруппами тогда и только тогда, когда S не содержит подполугруппы, являющейся идеальным расширением унипотентной полугруппы при помощи B_2; в этом случае разбиение S на классы кручения не обязательно будет *связкой*. Известны различные (в том числе необходимые и достаточные) условия, при к-рых П. п. есть связка классов кручения; это, очевидно, имеет место для коммутативных полугрупп, это верно для П. п. с двумя идемпотентами [3].

В любой П. п. отношения Грина $\mathcal{D}$ и $\mathcal{J}$ совпадают; О-простая П. п. будет вполне О-простой. Для П. п. S следующие условия эквивалентны: 1) S — *архимедова полугруппа*, 2) все идемпотенты из S попарно не сравнимы относительно естественного частичного порядка (см. *Идемпотент*), 3) S есть идеальное расширение вполне простой полугруппы при помощи нильполугруппы. Известно много условий, эквивалентных тому, что П. п. S разлагается в связку (а тогда и в полурешетку) архимедовых полугрупп;

среди них: 1) для любого $a \in S$ и для любого идемпотента $e \in S$, если $e \in SaS$, то $e \in Sa^2S$ (см. [5]); 2) в S каждый регулярный $\mathcal{D}$-класс есть подполугруппа; 3) каждый *регулярный элемент* из S является групповым.

Пусть S — бесконечная П. п., E_S — множество всех ее идемпотентов. Если E_S конечно, то S содержит бесконечную унипотентную подполугруппу, если E_S бесконечно, то S содержит бесконечную подполугруппу, являющуюся *нильпотентной полугруппой* или полугруппой идемпотентов [4].

Важный подкласс П. п. составляют *локально конечные полугруппы*. Более широкий класс составляют квазипериодич. полугруппы (S наз. квазипериодической, если нек-рая степень каждого ее элемента лежит в подгруппе $G \subseteq S$). Многие свойства П. п. переносятся на квазипериодич. полугруппы.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [3] Просвиров А. С., «Матем. зап. Уральск. ун-та», 1971, т. 8, № 1, с. 77—94; [4] Шеврин Л. Н., «Изв. вузов. Математика», 1974, № 5, с. 205—15; [5] Putcha M., «Semigroup Forum», 1973, v. 6, № 1, p. 12—34; [6] Schwarz St., «Чехосл. матем. ж.», 1953, т. 3, с. 7—21.

Л. Н. Шеврин.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ТОЧКА динамической системы — точка траектории периодич. движения динамич. системы f^t ($t \in \mathbb{R}$ или $t \in \mathbb{Z}$), заданной на пространстве S, т. е. такая точка $x \in S$, что найдется число $T > 0$, для к-рого $f^T x = x$, но $f^t x \neq x$ при $t \in (0, T)$. Это число T наз. периодом точки x (иногда периодами наз. также все целые кратные числа T).

Траектория П. т. наз. замкнутой траекторией, или циклом. При употреблении последних терминов часто отвлекаются от конкретной параметризации множества точек траектории параметром t, рассматривая тот или иной класс эквивалентных параметризаций: если f^t — непрерывное действие группы $\mathbb{R}$ на топологич. пространстве S, то цикл рассматривают как окружность, топологически вложенную в S; если f^t — дифференцируемое действие группы $\mathbb{R}$ на дифференцируемом многообразии S, то цикл рассматривают как окружность, гладко вложенную в S.

Если x — П. т. (а S — метрич. пространство), то ее *α-предельное множество* A_x и ω-предельное множество Ω_x совпадают с ее траекторией (понимаемой как множество точек). Это свойство в определенной мере выделяет П. т. среди всех точек, не являющихся неподвижными. А именно, если пространство, на к-ром задана динамич. система f^t, является полным метрическим и точка x такова, что $\Omega_x = \{f^t x\}_{t \in \mathbb{R}}$, то x — неподвижная или периодич. точка динамич. системы f^t.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949.

В. М. Миллионщиков.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ТРАЕКТОРИЯ автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — траектория *периодического решения* этой системы; обычно подразумевается, что это решение не сводится к константе, т. е. траектория не сводится к одной точке (*равновесия положению*). Синоним П. т.— замкнутая траектория (поскольку она является замкнутой кривой).

Д. В. Аносов.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция, имеющая *период*.

1) Пусть функция $f(x)$ определена на $X \in \mathbb{R}$ и имеет период T. Для получения графика $f(x)$ достаточно график функции $f(x)$ на $[a, a+T] \cap X$, где a — нек-рое число, переместить вдоль $\mathbb{R}$ на $\pm T$, $\pm 2T$, ... Если П. ф. $f(x)$ с периодом T имеет конечную производную $f'(x)$, то $f'(x)$ является П. ф. с тем же периодом. Пусть $f(x)$ интегрируема на любом отрезке и имеет период T. Первообразная $F = \int_0^x f(t)dt$ имеет период T, если

$\int_0^T f(t)dt=0$, в противном случае первообразная П. ф. непериодическая, такова, напр., первообразная функции $f(x)=\cos x+1$. *А. А. Конюшков.*

2) П. ф. комплексного переменного z — однозначная аналитич. функция $f(z)$, имеющая только изолированные особые точки во всей плоскости комплексного переменного $\mathbb{C}$, для к-рой существует число $p\neq 0$, называемое периодом функции $f(z)$, такое, что

$$f(z+p)=f(z),\ z\in\mathbb{C}.$$

Любая линейная комбинация периодов данной П. ф. $f(z)$ с целочисленными коэффициентами также является периодом $f(z)$. Все периоды данной П. ф. $f(z)\neq\text{const}$ составляют дискретную абелеву группу по сложению, называемую группой периодов функции $f(z)$. Если базис этой группы состоит из одного единственного основного, или примитивного, периода $2\omega=2\omega_1\neq 0$, т. е. если любой период p есть целое кратное 2ω, то $f(z)$ наз. *однопериодической функцией*. В случае базиса, состоящего из двух основных периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$, $\operatorname{Im}(\omega_1/\omega_3)\neq 0$, имеем *двоякопериодическую функцию*. Если П. ф. $f(z)$ отлична от константы, то базис ее группы периодов не может состоять более чем из двух основных независимых периодов (теорема Якоби).

Любая полоса вида

$$\{z=(\tau e^{i\alpha}+t)\,2\omega:\ -\infty<\tau<\infty,\ 0\leqslant t<1,\ 0<\alpha\leqslant\pi/2\},$$

где 2ω — один из основных периодов П. ф. $f(z)$, или ей конгруэнтная, наз. полосой периодов функции $f(z)$; обычно принимают $\alpha=\pi/2$, т. е. рассматривают полосу периодов, стороны к-рой перпендикулярны основному периоду 2ω. В каждой полосе периодов П. ф. принимает любое свое значение и притом одинаково часто.

Любая целая П. ф. $f(z)$ во всей плоскости $\mathbb{C}$ разлагается в ряд Фурье

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\frac{\pi ik}{\omega}z}, \qquad (*)$$

$$a_k=\frac{1}{2\omega}\int_{-\omega}^{\omega} f(t)\,e^{\frac{-\pi ik}{\omega}t}\,dt,$$

к-рый сходится равномерно и абсолютно на прямой $\{z=t\omega:-\infty<t<\infty\}$ и вообще на любой сколь угодно широкой полосе конечной ширины, параллельной этой прямой. Случай, когда целая П. ф. $f(z)$ стремится к определенному конечному или бесконечному пределу в каждом из двух концов полосы периодов, характеризуется тем, что ряд $(*)$ содержит лишь конечное число членов, то есть $f(z)$ есть тригонометрич. полином.

Любая мероморфная П. ф. $f(z)$ во всей плоскости $\mathbb{C}$ с основным периодом 2ω представима в виде отношения двух целых П. ф. с тем же периодом, т. е. в виде отношения двух рядов вида $(*)$. В частности, класс всех тригонометрич. функций можно описать как класс таких мероморфных П. ф. с периодом 2π, к-рые в каждой полосе периодов имеют лишь конечное число полюсов и стремятся к определенному пределу в каждом конце полосы периодов.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968. *Е. Д. Соломенцев.*

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ обыкновенного дифференциального уравнения или системы — решение, периодически зависящее от независимого переменного t. Для П. р. $x(t)$ (в случае системы x — вектор) имеется такое число $T\neq 0$, что

$$x(t+T)=x(t)\ \text{при всех}\ t\in\mathbb{R}.$$

Всевозможные такие T наз. периодами данного **П. р.**; при этом из непрерывности $x(t)$ следует, что либо $x(t)$ не зависит от t, либо всевозможные периоды являются целочисленными кратными одного из них — минимального периода $T_0>0$. Говоря о П. р., часто подразумевают, что имеет место второй случай, а о T_0 говорят просто как о периоде.

П. р. рассматривают обычно для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части к-рых либо не зависят от t (*автономная система*):

$$\dot{x}=f(x),\ x\in U, \tag{1}$$

где U — область в $\mathbb{R}^n$, либо зависят от t периодически:

$$\dot{x}=f(t,\ x),\ f(t+T_1,\ x)=f(t,\ x),\ x\in U. \tag{2}$$

(У систем с иным характером зависимости правых частей от t чаще всего нет П. р.) В случае системы (2) период T_0 П. р. обычно совпадает с периодом T_1 правой части или является целочисленным кратным T_1; другие T_0 возможны лишь в исключительных случаях. П. р. с периодом $T_0=kT_1$, $k>1$, описывают субгармонич. колебания (см. *Вынужденные колебания*) и потому сами иногда наз. субгармоническими П. р. (или субгармониками).

Система (2) определяет *последования отображение* F (зависящее от выбора начального момента t_0): если $x(t,\ \xi)$ — решение системы (2) с начальным значением $x(t_0,\ \xi)=\xi$, то

$$F(\xi)=x(t_0+T_1,\ \xi).$$

Свойства системы (2) тесно связаны со свойствами F; в частности, значение при $t=t_0$ П. р. с периодом kT_1 является при $k=1$ неподвижной точкой отображения F, а при $k>1$ — его периодич. точкой периода k, т. е. неподвижной точкой для итерации F^k. Изучение П. р. в значительной степени сводится к исследованию соответствующей неподвижной (или периодической) точки отображения последования.

Для автономной системы (1) используется следующая модификация этой конструкции: в фазовом пространстве в какой-либо точке траектории рассматриваемого П. р. (она является замкнутой кривой) берут какое-нибудь локальное сечение, т. е. гладкую площадку Π коразмерности 1, трансверсальную к этой траектории, и рассматривают отображение, переводящее точку $\xi\in\Pi$ в первую по времени точку пересечения с Π исходящей из ξ траектории системы (1).

Поведение решений, близких к данному П. р., описывается в линейном приближении соответствующей системой *уравнений в вариациях*. Коэффициенты этой линейной системы в данном случае периодически зависят от t, и поэтому можно говорить о соответствующих *монодромии операторе* и *мультипликаторах*. О последних говорят как о мультипликаторах данного П. р. Линейное приближение определяет свойства П. р. (устойчивость, инвариантные многообразия) примерно в той же степени, как и для *равновесия положений*.

П. р. автономной системы (1) имеют нек-рые специфич. особенности: один из мультипликаторов всегда равен единице (если П. р. не сводится к константе), что приходится, в частности, учитывать при исследовании устойчивости этих П. р. (см. *Андронова — Витта теорема*); период может измениться при малом возмущении, что приходится учитывать в *возмущений теории*.

Отыскание П. р. и исследование их свойств представляет интерес не только с чисто математич. точки зрения, но и потому, что при математич. описании реальных физич. систем их периодич. режимы обычно соответствуют П. р. (см. *Автоколебания*, *Вынужденные колебания*, *Колебаний теория*, *Нелинейные колебания*, *Релаксационное колебание*). Однако эта задача очень

трудна — так, не имеется никаких общих методов, к-рые позволили бы устанавливать, существуют ли П. р. у конкретной системы. В различных случаях используются различные соображения и методы. Многие из них относятся к *возмущений теории* (*гармонического баланса метод*, *Крылова — Боголюбова метод усреднения*, *Малого параметра метод*), к к-рой примыкает также исследование *бифуркаций*; другие — к *качественной теории дифференциальных уравнений*. Последняя, в частности, устанавливает особую роль П. р. для системы (1) при $n=2$: в этом случае П. р. вместе с нек-рыми другими типами решений полностью определяют поведение всех решений вообще (см. также *Предельный цикл*). В связи с этим имеется ряд специальных результатов о П. р. таких систем (напр., о П. р. *Ван дер Поля уравнения* и его обобщений или модификаций — *Льенара уравнения*, *Рэлея уравнения*).

Д. В. Аносов.

ПЕРИОДОГРАММА — функция $I_N(\lambda)$, $-\infty<\lambda<\infty$, N — целое положительное, определяемая по выборке $X(1), \ldots, X(N)$ стационарного случайного процесса $X(t)$, $t=0, \pm 1, \ldots$, следующим образом:

$$I_N(\lambda) = (2\pi N)^{-1} \mid d_N^{(X)}(\lambda) \mid^2,$$

где

$$d_N^{(X)}(\lambda) = \sum_{t=1}^{N} \exp\{-it\lambda\} X(t).$$

П. является периодической по λ функцией с периодом 2π. Дифференцируемая спектральная плотность $f(\lambda)$ стационарного процесса $X(t)$ со средним $c=\mathsf{E}X(t)$ может быть оценена с помощью П. при $\lambda \neq 0 \pmod{2\pi}$

$$\mathsf{E} I_N(\lambda) = f(\lambda) + (2\pi N)^{-1} \frac{\sin^2 \frac{N\lambda}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} c^2 + O(N^{-1}).$$

В то же время П. не является состоятельной оценкой $f(\lambda)$ (см. [1]). Состоятельные *спектральной плотности оценки* могут быть получены на основе нек-рых дальнейших построений, использующих асимптотическую некоррелированность П. разных частот $\lambda_1 \neq \lambda_2$, так что осреднение $I_N(x)$ по близким к λ частотам может привести к асимптотически состоятельной оценке. В случае n-мерного случайного процесса $X(t)=\{X_k(t)\}_{k=\overline{1,n}}$ матрица периодограммы $I_N(\lambda)$ определяется своими элементами

$$I_N^{(i,\ j)}(\lambda) = (2\pi N)^{-1} d_N^{X_i}(\lambda) \overline{d_N^{X_j}(\lambda)}.$$

Наряду с периодограммой $I_N(\lambda)$, к-рую еще наз. П. 2-го порядка, иногда рассматривают П. m-го порядка

$$I_N^{(k_1 \ \ldots \ k_m)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = (2\pi)^{-m+1} N^{-1} \prod_{j=1}^{m} d_N^{X_{k_j}}(\lambda_j),$$

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 0 \pmod{2\pi},$$

к-рые используют для построения оценок спектральных плотностей m-го порядка (см. *Спектральный семиинвариант*).

Лит.: [1] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [2] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974.

И. Г. Журбенко.

ПЕРИСТОЕ ПРОСТРАНСТВО — вполне регулярное хаусдорфово пространство, обладающее оперением в нек-ром своем хаусдорфовом бикомпактном расширении. Оперением подпространства X топологич. пространства Y в Y наз. счетная система $\mathcal{P}$ семейств открытых множеств в Y такая, что для каждой точки $x \in X$ пересечение ее звезд $\mathrm{St}_\gamma(x)$ относительно семейств $\gamma \in \mathcal{P}$ по всем $\gamma \in \mathcal{P}$ содержится в X. При этом звезда $\mathrm{St}_\gamma(x)$ точки x относительно семейств множеств γ есть объединение всех элементов семейства γ, содер-

жащих x. Если пространство X обладает оперением в нек-ром своем *бикомпактном расширении*, то оно имеет оперение и в каждом бикомпактном хаусдорфовом расширении. Если множество X является пересечением убывающей последовательности U_1, U_2, ... множеств, открытых в объемлющем X пространстве Y, то система $\{U_1\}$, $\{U_2\}$, ... составляет оперение подпространства X в Y. В частности, если пространство полно по Чеху, т. е. является множеством типа G_δ в нек-ром своем бикомпактно хаусдорфовом расширении, то это — П. п. Все метрич. пространства являются перистыми. Таким образом, понятие П. п. является одновременным обобщением понятий локально бикомпактного пространства и метрич. пространства.

Класс П. п. устойчив относительно операций: произведение (в счетном числе) П. п. является П. п., перистость сохраняется при переходах к замкнутому подпространству и к подпространству типа G_δ. Прообраз П. п. при совершенном отображении является П. п. (в классе тихоновских пространств). Предположение пространства перистым обеспечивает его правильное поведение во многих существенных отношениях. Всякое П. п. является k-пространством. Каждое счетное П. п. обладает счетной базой. Более того, если в П. п. есть счетная сеть, то в нем есть и счетная база (и это пространство метризуемо). При непрерывном отображении на П. п. вес не может увеличиваться. Важно, что в присутствии перистости принципиально меняется поведение нек-рых других фундаментальных свойств. В частности, произведение паракомпактных П. п. является паракомпактным П. п., хотя паракомпактность сама по себе не мультипликативна. Далее, произведение финально компактных П. п. является финально компактным П. п., хотя финальная компактность не мультипликативна. Понятие перистости позволило охарактеризовать те пространства, к-рые могут быть совершенно отображены на метрич. пространства. А именно, для того чтобы существовало совершенное отображение тихоновского пространства X на нек-рое метрич. пространство, необходимо и достаточно, чтобы X было паракомпактным П. п. (теорема Архангельского). Образ паракомпактного П. п. при совершенном отображении является паракомпактным П. п. (теорема Филиппова); однако известен пример совершенного отображения П. п. на неперистое тихоновское пространство. Важными примерами непаракомпактных П. п. служат непаракомпактные локально бикомпактные пространства и неметризуемые моровские пространства — тихоновские пространства со счетной измельчающейся последовательностью открытых покрытий. Для пространств топологич. групп из перистости следует паракомпактность. Для групп справедлив простой критерий перистости: пространство топологич. группы является перистым в том и только в том случае, если в нем имеется непустой бикомпакт, обладающий счетной определяющей системой окрестностей (теорема Пасынкова). В присутствии перистости существенно упрощаются критерии метризуемости. В частности, если паракомпактное П. п. X взаимно однозначно и непрерывно отображается на метрич. пространство, то X метризуемо. На этой основе доказывается, что тихоновское пространство X метризуемо в том и только в том случае, если оно является паракомпактным П. п. с диагональю типа G_δ; последнее условие означает, что множество $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ представимо как пересечение счетного семейства открытых в пространстве $X \times X$ множеств. Приведенные и другие результаты позволяют считать перистость одним из основных общих свойств метрич. пространств и бикомпактов наряду с паракомпактностью.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Архангельский А. В., «Матем. сб.», 1965, т. 67, № 1, с. 55—88; [3] Филиппов В. В., «Докл. АН СССР», 1967, т. 176, № 3, с. 533—35; [4] Пасынков Б. А., там же, 1965, т. 161, № 2, с. 281—84.

А. В. Архангельский.

ПЕРИФЕРИЧЕСКИ БИКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, обладающее *базой* открытых множеств с бикомпактными границами. Вполне регулярное П. б. п. X имеет *бикомпактные расширения* с нульмерными (в смысле размерности ind) *наростами*. Если всякий бикомпакт $A \subset X$ допускает вложение в другой бикомпакт $B \subset X$, для к-рого в X имеется счетная фундаментальная система окрестностей (напр., когда X метризуемо), периферич. бикомпактность X равносильна существованию у X бикомпактных расширений с нульмерными наростами.

Е. Г. Скляренко.

ПЕРМАНЕНТ ($m \times n$)-матрицы $A = \|a_{ij}\|$ — функция

$$\operatorname{per} A = \sum\nolimits_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{m\sigma(m)},$$

где a_{ij} — элементы из коммутативного кольца, суммирование производится по всем взаимно однозначным отображениям σ из $\{1, 2, \ldots, m\}$ в $\{1, 2, \ldots, n\}$. Если $m = n$, то σ — всевозможные подстановки, и П. представляет собой частный случай матричной функции Шура

$$d_{\chi}^{H}(A) = \sum\nolimits_{\sigma \in H} \chi(\sigma) \prod\nolimits_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

при $H = S_n$, $\chi \equiv 1$, где χ — характер степени 1 на подгруппе H симметрической группы S_n (при $H = S_n$, $\chi(\sigma) = \pm 1$, в зависимости от четности σ, получается определитель).

П. применяется в линейной алгебре, теории вероятностей и комбинаторике. В комбинаторике П. можно интерпретировать следующим образом: число систем различных представителей для заданного семейства подмножеств конечного множества есть П. матрицы инцидентности для *инцидентности системы*, связанной с этим семейством.

Наибольший интерес представляют П. матриц из нулей и единиц ((0,1)-матриц), матриц с неотрицательными действительными элементами, в частности дважды стохастических матриц (у к-рых суммы элементов по любой строке и любому столбцу равны 1) и комплексных эрмитовых матриц. Из основных свойств П. следует отметить теорему о разложении (аналог теоремы Лапласа для определителей) и теорему Бине — Коши, дающую представление П. произведения двух матриц через сумму произведений П., образованных из сомножителей. Для П. комплексных матриц полезно представление их в виде скалярного произведения на классах симметрии вполне симметричных тензоров (см., напр., [3]). Один из наиболее эффективных способов вычисления П. дает формула Райзера:

$$\operatorname{per} A = \sum\nolimits_{t=0}^{m-1} (-1)^t \sum\nolimits_{X \in \Lambda_{m-t}} \prod\nolimits_{i=1}^{m} r_i(X),$$

где Λ_k — совокупность подматриц размера $m \times k$ квадратной матрицы A, $r_i = r_i(X)$ — сумма элементов в i-й строке X, $i, k = 1, \ldots, m$. Ввиду сложности вычисления П. важны его оценки. Ниже приведены нек-рые из оценок снизу.

а) Если A есть (0, 1)-матрица с $r_i(A) \geqslant t$, $i = 1, \ldots, m$, то

$$\operatorname{per} A \geqslant t!/(t-m)!$$

при $t \geqslant m$,

$$\operatorname{per} A \geqslant t!,$$

если $t < m$ и $\operatorname{per} A > 0$.

б) Если A есть (0, 1)-матрица порядка n, то

$$\operatorname{per} A \geqslant \prod_{i=1}^{n} \{r_i^* + i - n\},$$

где $r_1^* \geqslant r_2^* \geqslant \ldots \geqslant r_n^*$ — суммы элементов в строках A, расположенные в порядке невозрастания, $\{r_i^* + i - n\} = \max(0, r_i^* + i - n)$.

в) Если A — положительно полуопределенная эрмитова матрица порядка n, то

$$\operatorname{per} A \geqslant \frac{n!}{s(A)^n} \prod_{i=1}^{n} |r_i|^2,$$

где $s(A) = \sum_{i,j} a_{ij}$, если $s(A) \neq 0$.

Оценки П. сверху:

1) для (0, 1)-матрицы порядка n

$$\operatorname{per} A \leqslant \prod_{i=1}^{n} (r_i!)^{1/r_i};$$

2) для вполне неразложимой матрицы порядка n с неотрицательными целыми элементами

$$\operatorname{per}(A) \leqslant 2^{s(A)-2n} + 1;$$

3) для комплексной нормальной матрицы с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

$$|\operatorname{per} A| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^n.$$

Наиболее известной проблемой в теории П. являлась гипотеза Ван дер Вардена: П. дважды стохастич. матрицы порядка n ограничен снизу величиной $n!/n^n$, и это значение достигается лишь для матрицы, составленной из дробей $1/n$. Положительное решение этой проблемы было получено в 1980 (см. [4]).

Из применений П. следует отметить связь с известными *комбинаторными задачами* о встречах, об исполнителях, с *Фибоначчи числами*, с перечислением *латинских квадратов* и троек Штейнера, с нахождением числа 1-факторов и линейных подграфов в *графе*; дважды стохастич. матрицы связаны с нек-рыми вероятностными моделями. Интересны физич. применения П., среди к-рых наиболее важна проблема димеров, возникающая при изучении *адсорбции* двухатомных молекул поверхностного слоя: через П. (0, 1)-матрицы простого строения выражается число способов объединения атомов вещества в двухатомные молекулы. Известны также применения П. в статистич. физике, теории кристаллов, физич. химии.

Лит.: [1] Райзер Г. Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [2] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [3] Минк Х., Перманенты, пер. с англ., М., 1982; [4] Егорычев Г. П., Решение проблемы Ван дер Вардена для перманентов, Красноярск, 1980; [5] Фаликман Д. И., «Матем. заметки», 1981, т. 29, в. 6, с. 931—38.

В. Е. Тараканов.

ПЕРМУТАТОР — собственное значение λ стохастич. ядра такое, что оно отлично от единицы и $|\lambda| = 1$. Неотрицательная непрерывная функция $K(x, y)$, заданная на компактном множестве Ω конечномерного пространства, наз. стохастическим ядром, если

$$\int_{\Omega} K(x, y)\, dy = 1, \quad x \in \Omega.$$

Собственные значения такого ядра удовлетворяют условию $|\lambda| \leqslant 1$. В теории операторов П. наз. оператор $A : E \to E$, если область его значений $A(E)$ конечномерна и в этой области существует такой базис $e_1, \ldots, e_n$, что $Ae_j = e_{k_j}$, $j = 1, \ldots, n$.

Лит.: [1] Интегральные уравнения, М., 1968.

Б. В. Хведелидзе.

ПЕРПЕНДИКУЛЯР к данной прямой (плоскости) — прямая, пересекающая данную прямую (плоскость) под прямым углом.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ — прямые, составляющие прямой угол (в пространстве такие прямые не должны обязательно пересекаться). Прямая l и плоскость α наз. взаимно перпендикулярными, если l перпендикулярна ко всякой прямой, лежащей на α. Об обобщении понятия перпендикулярности см. ст. *Ортогональность*.

ПЕРРОНА ИНТЕГРАЛ — обобщение понятия интеграла Лебега. Функция $f(x)$ наз. интегрируемой на $[a, b]$ в смысле Перрона, если существуют функции $M(x)$ (мажоранта) и $m(x)$ (миноранта) такие, что

$$M(a)=0,\ \underline{D}M(x)\geqslant f(x),\ \underline{D}M(x)\neq-\infty,$$

$$m(a)=0,\ \overline{D}m(x)\leqslant f(x),\ \overline{D}m(x)\neq+\infty$$

($\underline{D}$ и $\overline{D}$ — нижняя и верхняя производные) для $x\in[a, b]$ и нижняя грань значений $M(b)$ мажорант $M(x)$ равна верхней грани значений $m(b)$ минорант $m(x)$; их общее значение наз. интегралом Перрона от $f(x)$ на $[a, b]$ и обозначается

$$(P)\int_a^b f(x)\,dx.$$

П. и. восстанавливает функцию по ее точной конечной производной; он эквивалентен *Данжуа интегралу* узкому. П. и. для ограниченных функций ввел О. Перрон [1], окончательное определение дал Х. Бауэр [2].

Лит.: [1] Perron O., «Sitzungsber. Heidelberg. Acad. Wiss.», 1914, Bd V A., S. 1—16; [2] Bauer H., «Monatsh. Math. und Phys.», 1915, Bd 26, S. 153—98; [3] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [4] Виноградова И. А., Скворцов В. А., Итоги науки. Математический анализ, 1970, М., 1971.

Т. П. Лукашенко.

ПЕРРОНА МЕТОД — метод решения *Дирихле задачи* для *Лапласа уравнения*, основанный на свойствах *субгармонических функций* (и супергармонич. функций). Первоначальное изложение этого метода было дано О. Перроном [1], существенное развитие получено в работах Н. Винера [3] и М. В. Келдыша [4].

Пусть Ω — конечная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, с границей $\Gamma=\partial\Omega$, $f=f(y)$ — действительная функция на Γ, $-\infty\leqslant f(y)\leqslant+\infty$. Пусть Φ — (непустое) семейство всех супергармонич. функций $v(x)$, $x\in\Omega$, в широком смысле (т. е. функция $v(x)\equiv+\infty$ принадлежит Φ), ограниченных снизу и таких, что

$$\liminf_{x\to y} v(x)\geqslant f(y),\ y\in\Gamma,$$

и пусть

$$\overline{H}_f(x)=\overline{H}_f(x;\ \Omega)=\inf\{v(x):\ v\in\Phi\},\ x\in\Omega,$$

— нижняя огибающая семейства Φ. Наряду с Φ рассматривается (непустое) семейство Ψ всех субгармонич. функций $u(x)$, $x\in\Omega$, в широком смысле (функция $u(x)\equiv-\infty\in\Psi$), ограниченных сверху и таких, что

$$\limsup_{x\to y} u(x)\leqslant f(y),\ y\in\Gamma,$$

и пусть

$$\underline{H}_f(x)=\underline{H}_f(x;\ \Omega)=\sup\{u(x):\ u\in\Psi\},\ x\in\Omega,$$

— верхняя огибающая семейства Ψ.

Относительно функции $\overline{H}_f$ (и $\underline{H}_f$) имеются только три возможности: $\overline{H}_f(x)\equiv+\infty$, $\overline{H}_f(x)\equiv-\infty$, $\overline{H}_f(x)$ — гармонич. функция, причем всегда

$$\underline{H}_f(x)\leqslant\overline{H}_f(x),\ x\in\Omega.$$

Функция $f(y)$, $y\in\Gamma$, наз. разрешимой, если обе огибающие $\overline{H}_f$ и $\underline{H}_f$ конечны и совпадают. В этом случае гармонич. функция $H_f(x)=\overline{H}_f(x)=\underline{H}_f(x)$ есть обобщенное решение задачи Дирихле для функции $f(y)$, $y\in\Gamma$ (в смысле Винера — Перрона).

Для того чтобы функция $f(y)$, $y\in\Gamma$, была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы она была интегрируемой по гармонич. мере на Γ (теорема Брело). Любая непрерывная конечная функция $f(y)$, $y\in\Gamma$, разрешима (теорема Винера).

Точка $y_0\in\Gamma$ наз. регулярной граничной точкой, если для любой непрерывной конечной функции $f(y)$, $y\in\Gamma$, выполняется предельное соотношение

$$\lim_{x\to y_0} H_f(x)=f(y_0).$$

Регулярность всех точек $y\in\Gamma$ равносильна существованию классич. решения $w_f(x)$ задачи Дирихле для любой непрерывной конечной функции $f(y)$, $y\in\Gamma$, причем в этом случае $H_f(x)\equiv w_f(x)$; область Ω, все граничные точки к-рой регулярны, иногда наз. также регулярной. Для того чтобы точка $y_0\in\Gamma$ была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы существовал *барьер* в y_0.

Точки $y_0\in\Gamma$, не являющиеся регулярными, наз. иррегулярными граничными точками. Напр., иррегулярными граничными точками являются изолированные точки и при $n\geqslant 3$ вершины достаточно сильно заостренных входящих в область Ω острий (пример Лебега). Множество всех иррегулярных точек Γ есть множество типа F_σ емкости нуль.

Пусть имеется последовательность областей Ω_k, $\overline{\Omega}_k\subset\Omega_{k+1}$, такая, что $\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_k$, и непрерывная конечная функция $f(y)$, $y\in\Gamma$, продолжена непрерывно на окрестность Γ. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} H_f(x;\ \Omega_k)=H_f(x;\ \Omega),\quad x\in\Omega,$$

равномерно внутри Ω; в случае регулярных областей Ω_k здесь получается конструкция обобщенного решения задачи Дирихле по Винеру. Рассмотрим теперь для области Ω без внутренней границы произвольную последовательность областей G_k, $\partial G_k\to\Gamma$, $G_k\supset\overline{\Omega}$. В этом случае, вообще говоря,

$$\lim_{k\to\infty} H_f(x;\ G_k)\neq H_f(x;\ \Omega).$$

Задача Дирихле устойчива в области Ω или в замкнутой области $\overline{\Omega}$, если

$$\lim_{k\to\infty} H_f(x;\ G_k)=H_f(x;\ \Omega)$$

соответственно для всех $x\in\Omega$ или для всех $x\in\overline{\Omega}$. Для устойчивости задачи Дирихле в области Ω необходимо и достаточно, чтобы множества всех иррегулярных точек дополнений $C\Omega$ и $C\overline{\Omega}$ совпадали; для устойчивости в замкнутой области — чтобы дополнение $C\overline{\Omega}$ не имело иррегулярных точек (теоремы Келдыша, см. [4], где построен также пример регулярной области Ω, внутри к-рой задача Дирихле неустойчива).

См. также *Верхних и нижних функций метод*.

Лит.: [1] Perron O., «Math. Z.», 1923, Bd 18, S. 42—54; [2] Петровский И. Г., «Успехи матем. наук», 1941 [1940], в. 8, с. 107—14; [3] Wiener N., «J. Math. and Phys.», 1924, v. 3, p. 24—51, 127—46; 1925, v. 4, p. 21—32; [4] Келдыш М. В., «Успехи матем. наук», 1941 [1940], в. 8, с. 171—231; [5] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

ПЕРРОНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — ортогональное (унитарное) преобразование

$$x^i=\sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)\,y^j,\quad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{1}$$

гладко зависящее от t и преобразующее линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)\,x^j,\quad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{2}$$

в систему треугольного вида

$$\dot{y}^i = \sum_{j=i}^{n} p_j^i(t)\, y^j,\ i=1,\ \ldots,\ n. \qquad (3)$$

Введено О. Перроном [1]. Справедлива **теорема Перрона**: для всякой линейной системы (2) с непрерывными коэффициентами $a_j^i(t)$ существует П. п.

П. п. строится с помощью процесса ортогонализации Грама — Шмидта (при каждом t) системы векторов $x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)$, где $x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)$ — какая-либо *фундаментальная система решений* системы (2), причем различные фундаментальные системы дают, вообще говоря, различные П. п. (см. [1], [2]). Для систем (2) с ограниченными непрерывными коэффициентами все П. п. являются *Ляпунова преобразованиями*.

Если матричнозначная функция $\|a_j^i(t)\|$, $i, j=1,\ \ldots,\ n$, является *рекуррентной функцией*, то найдется рекуррентная матричнозначная функция $\|u_j^i(t)\|$, $i, j=1,\ \ldots,\ n$, такая, что (1) есть П. п., приводящее систему (2) к треугольному виду (3), причем функция

$$\|p_j^i(t)\|,\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n,$$

рекуррентна.

Лит.: [1] Perron O., «Math. Z.», 1930, Bd 32, S. 465—73; [2] Diliberto S. P., «Ann. Math. Studies», 1950, v. 20, p. 1—38; [3] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [4] Изобов Н. А., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146.

В. М. Миллионщиков.

ПЕРРОНА — СТИЛТЬЕСА ИНТЕГРАЛ — обобщение понятия *Перрона интеграла* от функции одного действительного переменного. Конечная функция $f(x)$ наз. интегрируемой в смысле Перрона — Стилтьеса относительно конечной функции $G(x)$ на $[a, b]$, если на $[a, b]$ существуют мажоранта $M(x)$ и миноранта $m(x)$ функции $f(x)$ относительно $G(x)$ на $[a, b]$ с $M(x)=m(a)=0$ такие, что в каждой точке $x\in[a, b]$

$$M(x+\beta)-M(x-\alpha)\geqslant f(x)\,(G(x+\beta)-G(x-\alpha)),$$
$$m(x+\beta)-m(x-\alpha)\leqslant f(x)\,(G(x+\beta)-G(x-\alpha))$$

при всех достаточно малых $\alpha\geqslant 0$ и $\beta\geqslant 0$, кроме того, нижняя грань чисел $M(b)$, где $M(x)$ — произвольная мажоранта $f(x)$ относительно $G(x)$, и верхняя грань чисел $m(b)$, где $m(x)$ — произвольная миноранта $f(x)$ относительно $G(x)$, равны между собой. Общее значение этих двух граней наз. П.—С. и. от $f(x)$ относительно $G(x)$ на $[a, b]$ и обозначается

$$(P-S)\int_a^b f(x)\,dG(x).$$

Такое обобщение интеграла Перрона ввел О. Уорд [1].

Лит.: [1] Ward A. J., «Math. Z.», 1936, Bd 41, S. 578—604; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [3] Виноградова И. А., Скворцов В. А., в кн.: Математический анализ. 1970, М., 1971, с. 65—107.

Т. П. Лукашенко.

ПЕРРОНА — ФРОБЕНИУСА ТЕОРЕМА: пусть действительная квадратная $(n\times n)$-матрица A, рассматриваемая как оператор в пространстве $\mathbb{R}^n$, не имеет инвариантных координатных подпространств (такая матрица наз. **неразложимой**) и неотрицательна (т. е. все ее элементы неотрицательны). И пусть $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$ — ее собственные значения, занумерованные так, что

$$|\lambda_1|=\ldots=|\lambda_h|>|\lambda_{h+1}|\geqslant\ldots\geqslant|\lambda_n|,\ 1\leqslant h\leqslant n.$$

Тогда:

1) число $r=|\lambda_1|$ — простой положительный корень характеристич. многочлена матрицы A;

2) существует собственный вектор матрицы A с положительными координатами, соответствующий r;

3) числа $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_h$ совпадают с точностью до нумерации с числами $r,\ \omega r,\ \ldots,\ \omega^{h-1}r$, где $\omega=e^{2\pi i/h}$;

4) произведение любого собственного значения матрицы A на ω есть собственное значение матрицы A;

5) при $h>1$ найдется перестановка строк и столбцов, приводящая матрицу A к виду

$$\begin{Vmatrix} 0 & A_1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & A_{h-1} \\ A_h & 0 & 0 \dots 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где A_j — матрицы порядка nh^{-1}.

О. Перрон доказал в [1] утверждения 1) и 2) для положительных матриц, а в полном объеме приведенную теорему доказал Ф. Фробениус в [2].

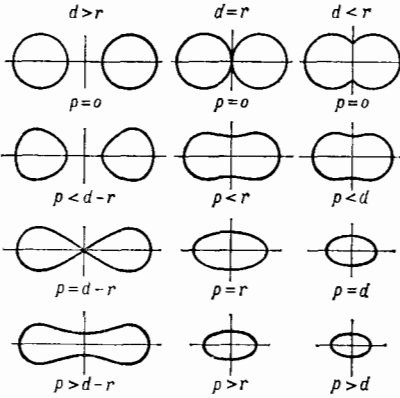
Лит.: [1] Perron O., «Math. Ann.», 1907, Bd 64, S. 248—263; [2] Frobenius G., «Sitzungsber. der Kgl. Preuss. Akad. Wiss.», 1912, S. 456—77; [3] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967.

Д. А. Супруненко.

ПЕРСЕЯ КРИВАЯ, спирическая кривая,— плоская алгебраич. кривая 4-го порядка; является линией пересечения поверхности тора плоскостью, параллельной его оси (см. рис.). Уравнение в прямоугольных координатах:

$$(x^2+y^2+p^2+d^2-r^2)^2=4d^2(x^2+p^2),$$

где r — радиус окружности, описывающей тор, d — расстояние от начала координат до ее центра, p — расстояние от оси тора до секущей плоскости. К П. к.



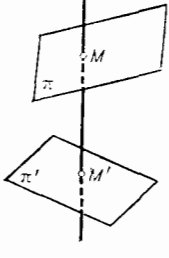
относятся: *Бута лемниската*, *Кассини овал* и *Бернулли лемниската*.

П. к. названа по имени древнегреч. геометра Персея (2 в. до н. э.), исследовавшего ее в связи с изучением различных способов задания кривых.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ПЕРСПЕКТИВА с центром S — отображение плоскости π в плоскость π', при к-ром каждой точке M плоскости π ставится в соответствие точка M' пересечения прямой SM с плоскостью π' (если прямая SM не параллельна плоскости π'; см. рис.).



В проективной геометрии П. определяется следующим образом: пусть V и V' — собственные подпространства одинаковой размерности проективного пространства Ω, T — подпространство максимальной размерности, не имеющее общих точек ни с V, ни с V'. Пусть U — подпространство, содержащееся в V, и W — подпространство минимальной размерности, содержащее U и T, а U' — пересечение W и V'. Соответствие, при к-ром каждому подпространству

U, содержащемуся в V, ставится в соответствие подпространство U', содержащееся в V', наз. перспективным отображением пространства V на пространство V' с центром перспективы T.

П. есть *коллинеация*. Если подпространства V и V' пересекаются, то каждая точка подпространства $V \cap V'$ сама себе соответствует.

Если в пространствах V и V' введены проективные координаты, то перспективное соответствие может быть задано линейным отображением.

Лит.: [1] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [2] Глаголев Н. А., Проективная геометрия, 2 изд., М., 1963.

П. С. Моденов.

ПЕРЦЕНТИЛЬ — одна из числовых характеристик распределения вероятностей; частный случай *квантили*. Именно, П. определяется как квантиль K_p, соответствующая значениям p, равным $j/100$ для $j=0, 1, 2, \ldots, 99$. Для непрерывной строго монотонной функции распределения $F(x)$ j-я перцентиль представляет собой решение уравнения

$$F(x) = \frac{j}{100},$$

$j=0, 1, 2, \ldots, 99$. В математич. статистике П. дают хорошее представление о виде функции распределения. П. также наз. процентилями, или центилями.

А. В. Прохоров.

ПЕТЕЛЬ ПРОСТРАНСТВО — снабженное компактно открытой *топологией* пространство ΩX всех петель в точке $*$ топологич. пространства X с отмеченной точкой $*$. П. п. является слоем *Серра расслоения* (E, p, X) над пространством X (здесь E — *путей пространство*).

А. Ф. Харшиладзе.

ПЕТЕРА — ВЕЙЛЯ ТЕОРЕМА — теорема об аппроксимации функций на компактной топологич. группе *представляющими функциями*. Пусть π пробегает семейство Σ представителей всех классов эквивалентности неприводимых непрерывных унитарных представлений компактной группы G. Пусть $\dim \pi$ — размерность представления π и $u_{ij}^{(\pi)}$ — его матричные элементы в нек-ром ортонормированном базисе. П.—В. т. утверждает, что функции вида

$$\sqrt{\dim \pi}\, u_{ij}^{(\pi)} \quad (\pi \in \Sigma)$$

образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathscr{L}_2(G)$ суммируемых с квадратом функций относительно меры Хаара на G (мера всей группы считается равной 1). Алгебра всех представляющих комплексных функций на G, совпадающая с множеством конечных линейных комбинаций функций $u_{ij}^{(\pi)}$ $(\pi \in \Sigma)$, равномерно плотна в пространстве всех непрерывных комплексных функций на G.

В случае, когда $G=T$ — группа вращений плоскости,— это утверждение совпадает с элементарной теоремой об аппроксимации периодических непрерывных функций тригонометрич. многочленами.

В качестве следствия из П.— В. т. выводится, что совокупность линейных комбинаций характеров неприводимых представлений группы G плотна в алгебре всех непрерывных функций на G, построенных на классах сопряженных элементов. Другое следствие состоит в том, что для любого элемента $a \in G$, $a \neq e$, найдется такое неприводимое непрерывное представление φ группы G, что $\varphi(a) \neq E$; если же G — компактная группа Ли, то G допускает точное линейное представление.

Из П.— В. т. вытекает также следующее, более общее, утверждение (см. [5], [6]). Пусть дано непрерывное линейное представление φ компактной группы G в пространстве Фреше E, тогда подпространство представляющих элементов пространства E плотно в E. При этом элемент $v \in E$ наз. представляю-

щим, или сферическим, или почти инвариантным, если орбита $\varphi(G)v$ порождает в E конечномерное подпространство. Это, в частности, применимо к случаю, когда E — пространство сечений нек-рого класса гладкости гладкого векторного G-расслоения, напр. пространство тензорных полей определенного типа и заданного класса гладкости на гладком многообразии с гладким действием компактной группы Ли G.

П.— В. т. была доказана в 1927 Ф. Петером (F. Peter) и Г. Вейлем (H. Weyl) (см. [1]).

Лит.: [1] Петер Ф., Вейль Г., «Успехи матем. наук», 1936, в. 2, с. 144—60; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [3] Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 1, М., 1975; [4] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948; [5] Palais R. S., Stewart T. E., «Amer. J. Math.», 1961, v. 83, № 4, p. 623—44; [6] Mostow G. D., «Ann. Math.», 1961, v. 73, № 1, p. 20—48.

А. Л. Онищик, А. И. Штерн.

ПЕТЕРСОНА ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, обладающая сопряженной сетью конических или цилиндрич. линий, являющейся главным основанием изгибания (см. *Изгибание на главном основании*). Напр., П. п. является *каналовая поверхность*, *переноса поверхность*, *вращения поверхность*. *Вращений индикатриса* П. п. есть прямой коноид (в частности, для каналовой поверхности ею является геликоид, для поверхности переноса — гиперболич. параболоид). Впервые рассмотрена К. М. Петерсоном как пример поверхности, допускающей изгибание на главном основании.

И. Х. Сабитов.

ПЕТЕРСОНА СООТВЕТСТВИЕ — соответствие двух поверхностей, при к-ром их касательные плоскости в соответствующих точках параллельны. В общем виде рассмотрено К. М. Петерсоном [1] в связи с задачей изгибания на главном основании. Напр., в П. с. находятся поверхность и ее сферич. образ, поверхность и ее индикатриса вращения, присоединенные минимальные поверхности.

Если поверхности S и S^* имеют общую параметризацию, то их третьи квадратичные формы равны. Главная сеть асимптотич. сетей S и S^* сопряжена на каждой из них. Эта сеть определяется однозначно, если асимптотич. сети не имеют общих семейств линий; вырождается, если эти сети связанные; становится неопределенной, если эти сети соответствуют друг другу. Соответствующие касательные к линиям главной сети на S и S^* параллельны.

Если главную сеть принять за координатную (u, v), то радиус-векторы x и x^* поверхностей S и S^* связаны уравнениями

$$x^*_u = \rho x_u, \quad x^*_v = \sigma x_v,$$

причем функции ρ, σ удовлетворяют системе уравнений

$$\rho_v E - \sigma_u F = \frac{\sigma - \rho}{2}, \quad \rho_v F - \sigma_u G = \frac{\sigma - \rho}{2} G_u,$$

то есть ρ, σ зависят только от метрики F (E, F, G — коэффициенты ее первой квадратичной формы). Естественно поэтому применение П. с. к паре изометричных поверхностей S, $\tilde{S}$: оно дает другую пару изометричных поверхностей S^*, $\tilde{S}^*$ с теми же нормалями $n = n^*$, $\tilde{n} = \tilde{n}$ соответственно. Кроме того, оказывается, что диаграммы поворота этих поверхностей одни и те же и что основание изометрии новых поверхностей имеет то же сферич. изображение, как и первоначальных. Напр., сфере и изометричной ей поверхности положительной постоянной кривизны отвечают при П. с. изометричные поверхности с соответствующими линиями кривизны — т. н. поверхности Бонне.

В частности, если основание изометрии S и S^* было главным основанием, то оно и остается таковым. Это — т. н. преобразование Петерсона

поверхности, изгибаемой на главном основании в поверхность того же типа. Имеется обобщение этого преобразования на случай семейства сетей (см. [2]).

Специальный случай П. с., при к-ром главная сеть является сетью кривизны одновременно на S и на S^*, наз. соответствием Комбескюра.

Если П. с. является конформным, то либо одна из поверхностей минимальная, а другая — сфера (то есть П. с.— сферич. отображение), либо обе поверхности минимальные, а вектор конформного отображения удовлетворяет уравнению Лапласа, либо поверхности подобны, либо обе поверхности изотермические и находятся в соответствии Комбескюра.

Имеется многомерное обобщение П. с. (см. [4]).

Лит.: [1] Петерсон К. М., «Матем. сб.», 1866, т. 1, с. 391—438; [2] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963; [3] Фиников С. П., Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи, М.— Л., 1937; [4] Широков П. А., Широков А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1959.

М. И. Войцеховский.

ПЕТЕРСОНА — КОДАЦЦИ УРАВНЕНИЯ — уравнения, составляющие вместе с уравнением Гаусса (см. *Гаусса теорема*) необходимые и достаточные условия интегрируемости системы, к к-рой сводится задача восстановления поверхности по ее первой и второй квадратичным формам (см. *Бонне теорема*). П. — К. у. имеют вид

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2}+\Gamma^1_{i1}b_{12}+\Gamma^2_{i1}b_{22}=\frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1}+\Gamma^1_{i2}b_{11}+\Gamma^2_{i2}b_{21},$$

где b_{ij} — коэффициенты второй квадратичной формы, Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля 2-го рода.

Уравнения впервые найдены К. М. Петерсоном в 1853, переоткрыты Г. Майнарди (G. Mainardi, 1856) и Д. Кодацци (D. Codazzi, 1867).

Лит.: [1] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, М., 1956.

А. Б. Иванов.

ПЕТЛЯ — замкнутый *путь*. Подробнее, петля f — непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в топологич. пространство X такое, что $f(0)=f(1)$. Совокупность всех П. пространства X с отмеченной точкой $*$ таких, что $f(0)=f(1)=*$, образует *петель пространство*.

М. И. Войцеховский.

ПЕТРИ СЕТЬ — математическая модель дискретных динамич. систем, в том числе информационных систем (параллельных программ, операционных систем, ЭВМ и их устройств, сетей ЭВМ), ориентированная на качественный анализ и синтез таких систем (обнаружение блокировок, тупиковых ситуаций и узких мест, автоматич. синтез параллельных программ и компонентов ЭВМ и др.). Введена К. Петри (C. Petri) в 60-х гг. 20 в. П. с.— это набор $N=(T, P, F, M_0)$, где T — конечное множество символов, наз. переходами, P — конечное множество символов, наз. местами, $P\bigcap T=\phi$, F — функция инцидентности:

$$F\colon T\times P\bigcup P\times T\longrightarrow\{0, 1\},$$

M_0 — начальная разметка мест:

$$M_0\colon P\longrightarrow\{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Неформально П. с. представляют размеченным ориентированным графом со множеством вершин $T\bigcup P$ (см. рис.). Из вершины-места $p\in P$, изображаемой кружком, ведет дуга в вершину-переход $t\in T$, изображаемую прямоугольником, тогда и только тогда, когда

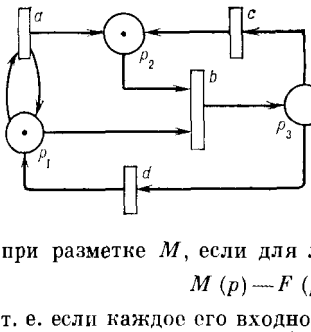
$$F(p, t)=1$$

(p — входное место перехода t; на рис. $P=\{p_1, p_2, p_3\}$, $T=\{a, b, c, d\}$). Из вершины-перехода t ведет дуга в вершину-место p тогда и только тогда, когда

$$F(t, p)=1$$

(p — выходное место перехода t). Место p помечается разметкой $M_0(p) \neq 0$, часто изображаемой соответствующим числом точек (фишек).

Динамика поведения моделируемой системы описывается в терминах функционирования П. с. Сеть функционирует в дискретном времени, переходя от разметки к разметке. Каждая разметка — это функция $M : P \to \{0, 1, 2, \ldots\}$; смена разметок (начиная с M_0) происходит в результате срабатывания переходов сети. Переход $t \in T$ может сработать при разметке M, если для любого $p \in P$



$$M(p) - F(p, t) \geqslant 0,$$

т. е. если каждое его входное место имеет хотя бы одну фишку. В результате срабатывания t при разметке M последняя сменяется разметкой M' по правилу: для любого $p \in P$

$$M'(p) = M(p) - F(p, t) + F(t, p),$$

т. е. переход t изымает по фишке из каждого своего входного места и посылает по фишке в каждое свое выходное место. Если может сработать несколько переходов, то срабатывает один, любой из них. Сеть останавливается, если при нек-рой разметке (тупиковая разметка) ни один из ее переходов не может сработать. При одной и той же начальной разметке П. с. может порождать, в силу недетерминированности ее функционирования, различные последовательности срабатываний ее переходов. Эти последовательности образуют слова в алфавите T, а множество всевозможных слов, порождаемых П. с., наз. ее языком. Две П. с. эквивалентны, если они порождают один и тот же язык.

Исследования по П. с. развиваются в двух направлениях. Математич. теория сетей разрабатывает методы формального анализа их свойств. Среди наиболее интересных проблем следует отметить задачи распознавания тупиковых ситуаций в сетях, задачи распознавания эквивалентности сетей по порождаемым языкам, оценки сложности анализа сетей, сравнение выразительной мощности различных подклассов П. с. и их обобщений. Установлено, что проблема тупиковых ситуаций разрешима, изучены свойства класса языков, порождаемых П. с. Этот класс строго содержится в классе рекурсивно перечислимых языков, строго включает класс регулярных языков и частично пересекается с классом контекстно свободных языков. Второе направление — применение П. с. как основы прикладных моделей дискретных динамич. систем в информатике, экономике, цифровой технике и т. п.

В отличие от *автоматов конечных*, в терминах к-рых описываются глобальные изменения состояний систем, П. с. концентрирует внимание на локальных событиях (им соответствуют переходы), локальных условиях (им соответствуют места) и на локальных связях между событиями и условиями. Поэтому в терминах П. с. более адекватно, чем с помощью автоматов, моделируется поведение распределенных асинхронных систем.

Лит.: [1] Peterson J. L., Petri net theory and the modeling of systems, Englewood-Cliffs, 1981; [2] Котов В. Е., «Кибернетика», 1980, № 5, с. 10—18; [3] Апериодические автоматы, М., 1976; [4] Net theory and applications, B., 1980.

В. Е. Котов.

ПЕТТИСА ИНТЕГРАЛ — интеграл от векторнозначной функции по скалярной мере, являющийся т. н. слабым интегралом. Введен Б. Петтисом [1].

Пусть $F(X,\ E,\ \mathfrak{B},\ \mu)$ — векторное пространство функций $x(t)$, $t\in E$, со значениями в банаховом пространстве X, заданных на множестве $(E,\ \mathfrak{B},\ \mu)$ со счетно аддитивной мерой μ на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ подмножеств E. Функция $x(t)$ наз. *слабо измеримой*, если для любого $f\in X^*$ измерима скалярная функция $f[x(t)]$. Функция $x(t)$ *интегрируема по Петтису* на измеримом подмножестве $M\subset E$, если для любого $f\in X^*$ интегрируема на M функция $f[x(t)]$ и существует элемент $x(M)\in X$ такой, что

$$f[x(M)]=\int_M f[x(t)]\,d\mu.$$

Тогда

$$\int_M x(t)\,d\mu \overset{\text{def}}{=} x(M)$$

и наз. *интегралом Петтиса*. Такой интеграл для случая $E=(a,\ b)$ с обычной мерой Лебега был впервые введен И. М. Гельфандом [2].

Лит.: [1] Pettis B., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1938, v. 44, № 2, p. 277—304; [2] Гельфанд И. М., «Зап. Науково-досл. інст. матем. и мех. Харків. матем. тов.», 1936, т. 13, в. 1, с. 35—40; [3] Hildebrandt T., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 59, p. 111—39; [4] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., М., 1962.

В. И. Соболев.

ПИ, *число* π,— отношение длины окружности к диаметру; представляется бесконечной непериодической десятичной дробью

$$\pi=3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ldots$$

Разыскание пределов нек-рых арифметич. последовательностей, составляемых по простым законам, часто приводило к числу π. Примером может служить *ряд Лейбница*

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots,$$

к-рый, однако, очень медленно сходится. Существуют значительно быстрее сходящиеся ряды, пригодные для вычисления π.

Возможность чисто аналитич. определения числа π имеет принципиальное значение и для геометрии. Так, в неевклидовой геометрии π также участвует в нек-рых формулах, но уже не как отношение длины окружности к диаметру (это отношение в неевклидовой геометрии не является постоянным). Средствами анализа, среди к-рых решающую роль сыграла формула Эйлера

$$e^{2\pi i}=1,$$

была окончательно выяснена и арифметич. природа числа π. В кон. 18 в. И. Ламберт (J. Lambert) и А. Лежандр (A. Legendre) установили, что π — иррациональное число, а в 19 в. Ф. Линдеман (F. Lindemann) доказал, что π является трансцендентным числом.

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

ПИКА ТЕОРЕМА, *инвариантная форма леммы Шварца*,— обобщение *Шварца леммы*, состоящее в следующем. Пусть $w=f(z)$ — ограниченная регулярная аналитич. функция в единичном круге $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, $|f(z)|\leqslant 1$, $|z|<1$. Тогда для любых точек z_1 и z_2 круга Ω неевклидово расстояние $d(w_1,\ w_2)$ их образов $w_1=f(z_1)$ и $w_2=f(z_2)$ не превосходит неевклидова расстояния $d(z_1,\ z_2)$, то есть

$$d(w_1,\ w_2)\leqslant d(z_1,\ z_2),\ |z_1|<1,\ |z_2|<1. \qquad (1)$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$\frac{|dw|}{1-|w|^2}\leqslant\frac{|dz|}{1-|z|^2},\ dw=f'(z)\,dz,\ |z|<1, \qquad (2)$$

между элементами неевклидовой длины (дифференциальная форма П. т., или леммы Шварца). Знаки ра-

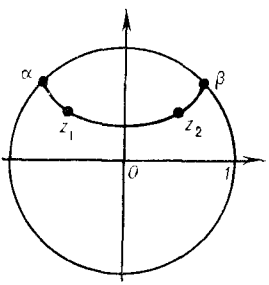
венства в (1) и (2) имеют место только в том случае, когда $w=f(z)$ есть дробно-линейная функция, отображающая круг Ω на себя.

Неевклидово, или гиперболическое, расстояние $d(z_1, z_2)$ есть расстояние в геометрии Лобачевского между точками z_1 и z_2, когда круг Ω принимается в качестве плоскости Лобачевского, а прямыми Лобачевского служат дуги окружностей, ортогональных единичной окружности (модель Пуанкаре); при этом

$$d(z_1, z_2)=\frac{1}{2}\ln(\alpha, \beta, z_1, z_2)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{|1-\bar{z}_1z_2|+|z_1-z_2|}{|1-\bar{z}_1z_2|-|z_1-z_2|},$$

где $(\alpha, \beta, z_1, z_2)$ — двойное отношение точек z_1, z_2 и определяемых этими точками точек пересечения α, β прямой Лобачевского, проходящей через z_1 и z_2, с единичной окружностью (см. рис.).



Неевклидова длина образа $f(L)$ любой спрямляемой кривой $L\subset\Omega$ при отображении $w=f(z)$ не превосходит неевклидовой длины L.

П. т. была установлена Г. Пиком (см. [1]); дальнейшим ее обобщением является *гиперболической метрики принцип*. В геометрич. теории функций из этих теорем выводятся оценки различных функционалов, связанных с отображающей функцией (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Pick G., «Math. Ann.», 1916, Bd 77, S. 1—6; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Каратеодори К., Конформное отображение, пер. с англ., М.— Л., 1934.

Е. Д. Соломенцев.

ПИКАРА ГРУППА — группа классов обратимых пучков (или линейных расслоений). Более точно, пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — окольцованное пространство. Пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{L}$ наз. обратимым, если он локально изоморфен структурному пучку $\mathcal{O}_X$. Множество классов изоморфных обратимых пучков на X обозначается $\mathrm{Pic}(X)$. Тензорное произведение $\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}'$ определяет на множестве $\mathrm{Pic}(X)$ операцию, превращающую его в абелеву группу, наз. группой Пикара пространства X. Группа $\mathrm{Pic}(X)$ естественно изоморфна группе когомологий $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, где $\mathcal{O}_X^*$ — пучок обратимых элементов в $\mathcal{O}_X$.

Для коммутативного кольца A группой Пикара $\mathrm{Pic}A$ наз. группа классов обратимых A-модулей; $\mathrm{Pic}A\cong\mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}\,A)$. Для кольца Крулля A группа $\mathrm{Pic}A$ тесно связана с *классов дивизоров группой* этого кольца.

П. г. полного нормального алгебраич. многообразия обладает естественной алгебраич. структурой (см. *Пикара схема*). Связная компонента нуля группы $\mathrm{Pic}(X)$ обозначается $\mathrm{Pic}^0(X)$ и наз. многообразием Пикара для X; это — алгебраич. группа (абелево многообразие, если многообразие X гладко). Факторгруппа $\mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}^0(X)$ наз. группой Нерона — Севери и имеет конечное число образующих; ранг ее наз. числом Пикара. В комплексном случае, когда X — гладкое проективное многообразие над $\mathbb{C}$, группа $\mathrm{Pic}^0(X)$ изоморфна факторгруппе пространства $H^0(X, \Omega_X^1)$ голоморфных 1-форм на X по решетке $H^1(X, \mathbb{Z})$.

Лит.: [1] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968.

В. И. Данилов.

ПИКАРА МНОГООБРАЗИЕ полного гладкого алгебраического многообразия X над алгебраически

замкнутым полем — абелево многообразие $\mathfrak{P}(X)$, параметризующее факторгруппу $\mathrm{Div}^a(X)/P(X)$ группы $\mathrm{Div}^a(X)$ дивизоров, алгебраически эквивалентных нулю, по группе главных дивизоров $P(X)$, т. е. дивизоров рациональных функций. С точки зрения теории пучков П. м. параметризует множество классов изоморфных обратимых пучков с нулевым классом Чжэня, т. е. $\mathfrak{P}(X)$ совпадает со связной компонентой единицы $\mathrm{Pic}^0(X)$ *Пикара группы* $\mathrm{Pic}(X)$ многообразия X. Структура абелева многообразия на группе $\mathfrak{P}(X)=\mathrm{Div}^a(X)/P(X)$ однозначно характеризуется следующим свойством: для любого алгебраич. семейства дивизоров D на X с базой S существует такое регулярное отображение $\varphi: S\to\mathfrak{P}(X)$, для к-рого $D(s)-D(s_0)\in\varphi(s)$, где s_0 — нек-рая фиксированная точка из S_0 (см. [2]). Размерность $q=\dim\mathfrak{P}(X)$ наз. и р р е г у л я р н о с т ь ю многообразия X.

Классический пример П. м.— *Якоби многообразие* гладкой проективной кривой. Другим примером может служить двойственное абелево многообразие (см. [3]).

В случае, когда X — гладкое проективное комплексное многообразие, $\mathfrak{P}(X)$ можно отождествить с группой обратимых аналитич. пучков на X, имеющих нулевой класс Чжэня [4]. Более того, многообразие Пикара $\mathfrak{P}(X)$ в этом случае изоморфно факторгруппе пространства $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ по решетке $H^1(X, \mathbb{Z})\subset H^1(X, \mathcal{O}_X)$. В частности, иррегулярность q многообразия X совпадает с $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X)=\dim H^0(X, \Omega^1_X)$, где Ω^1_X — пучок регулярных 1-форм. Последний результат верен также в случае неособых проективных кривых над любым алгебраически замкнутым полем и в случае полных гладких многообразий над алгебраически замкнутым полем характеристики 0; для произвольной характеристики имеет место лишь н е р а в е н с т в о И г у з ы: $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X)\geqslant q$ (известен пример гладкой алгебраич. поверхности F иррегулярности 1 с $\dim H^1(F, \mathcal{O}_F)=2$; см. [6]). Как видно отсюда, П. м. тесно связано с теорией одномерных дифференциальных форм. Начало исследования таких форм на римановых поверхностях положил Э. Пикар [1]; он доказал конечномерность пространства $H^0(X, \Omega^1_X)$ всюду регулярных форм.

Понятие П. м. может быть обобщено на случай полного нормального многообразия X. Изучалось также многообразие Пикара $\mathfrak{P}_c(X)$, соответствующее дивизорам Картье и обладающее, в отличие от $\mathfrak{P}(X)$, хорошими функториальными свойствами [9]. Многообразие $\mathfrak{P}_c(X)$ было построено для полных нормальных многообразий X (см. [5]), а также для произвольных проективных многообразий [8].

Лит.: [1] P i c a r d E., «C. r. Acad. Sci.», 1884, t. 99, p. 961—963; [2] Ш а ф а р е в и ч И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [3] М а м ф о р д Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971; [4] Г р и ф ф и т с Ф., Х а р р и с Дж., Принципы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1—2, М., 1982; [5] C h e v a l l e y C., «Amer. J. Math.», 1960, v. 82, p. 435—90; [6] I g u s a J.-I., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1955, v. 41, № 11, p. 964—67; [7] M a t s u s a k a T., «Jap. J. Math.», 1951, v. 21, № 2, p. 217—36; [8] S e s h a d r i C., «Ann. mat. pura ed appl.», 1962, v. 57, p. 117—42; [9] е г о ж е, «Math. Ann.», 1965, Bd 158, № 3, S. 293—96.
В. В. Шокуров.

ПИКАРА СХЕМА — естественное обобщение в рамках теории схем понятия *Пикара многообразия* $\mathfrak{P}(X)$ гладкого алгебраич. многообразия X. Для определения П. с. произвольной S-схемы X рассматривается о т н о с и т е л ь н ы й ф у н к т о р П и к а р а $\mathrm{Pic}_{X/S}$ на категории Sch/S схем над схемой S. Значение этого функтора на S-схеме S' есть группа

$$H^0\left(S', R^1_{fpqc}f'_*(G_{m,\,X'})\right),$$

где $f': X\times_S S'\to S'$ есть морфизм замены базы, $R^1_{fpqc}f'_*(G_{m,\,X'})$ — пучок на топологии Гротендика

S'_{fpqc} строго плоских квазикомпактных морфизмов, ассоциированный с предпучком

$$T \longrightarrow H^1(T_{fpqc}, G_m) = H^1(T_{et}, G_m),$$

а G_m обозначает стандартный мультипликативный пучок. Если функтор Пикара $\mathrm{Pic}_{X/S}$ представим на (Sch/S), то представляющая его S-схема наз. относительной схемой Пикара S-схемы X и обозначается $\mathrm{Pic}_{X/S}$. В случае, когда X — алгебраич. схема над нек-рым полем k, имеющая рациональную k-точку,

$$\mathrm{Pic}_{X/k}(S') = \mathrm{Pic}(X \times_k S')/\mathrm{Pic}(S')$$

для любой k-схемы S' (см. [3]); в частности, $\mathrm{Pic}_{X/k}(k) = \mathrm{Pic}(X)$ отождествляется с группой k-рациональных точек $\mathrm{Pic}_{X/k}(k)$ схемы $\mathrm{Pic}_{X/k}$, если таковая существует.

Если $f : X \to S$ — проективный морфизм с геометрически целостными слоями, то схема $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ существует и является локально конечно представленной отделимой групповой S-схемой. Если $S = \mathrm{Spec}(k)$, то связная компонента единицы $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/k}$ схемы $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ является алгебраической k-схемой и соответствующая приведенная k-схема $(\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/k})_{\mathrm{red}}$ есть в точности многообразие Пикара $\mathfrak{P}_c(X)$ (см. [4]). Нильпотентные элементы в локальных кольцах схемы $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/k}$ дают много дополнительной информации о П. с. и позволяют объяснить ряд паталогий в алгебраич. геометрии над полем характеристики $p > 0$. С другой стороны, над полем характеристики 0 схема $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{X/k}$ всегда приведена (см. [6]). Известно также, что схема $\mathrm{Pic}_{F/k}$ приведена, если F — гладкая алгебраич. поверхность и $H^2(F, \mathcal{O}_F) = 0$ (см. [5]).

Для любого собственного плоского морфизма f: $X \to S$ (конечно представленного, если база S нётерова), для к-рого $f'_*(\mathcal{O}_{X'}) = \mathcal{O}_{S'}$, при любой замене базы $f' : X' = X \times_S S' \to S$ функтор $\mathrm{Pic}_{X/S}$ является алгебраич. пространством над S (см. [1]). В частности, функтор $\mathrm{Pic}_{X/S}$ представим, если базисная схема S есть спектр локального артинова кольца.

Лит.: [1] Artin M., в сб.: Global analysis. Papers in Honor of K. Kodaira, Tokyo, 1969, p. 21—77; [2] Chevalley C., «Amer. J. Math.», 1960, v. 82, p. 435—90; [3] Grothendieck A., в кн.: Séminaire Bourbaki, 1961—1962, année 14, [P., 1962], p. 232/01—232/19; [4] его же, «Publ. math. Inst. hautes études scient.», 1960, № 4, p. 1—168; [5] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраических поверхностях, пер. с англ., М., 1968; [6] Oort F., «Invent. math.», 1966, v. 2, № 1, p. 79—80; [7] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 47—112.

В. В. Шокуров.

ПИКАРА ТЕОРЕМА — 1) П. т. о поведении аналитической функции $f(z)$ комплексного переменного z в окрестности существенно особой точки a — название результата классич. теории функций, явившегося отправным пунктом многочисленных глубоких исследований и состоящего из двух частей. а) Малая теорема Пикара: всякая целая функция $f(z) \neq \mathrm{const}$ принимает любое конечное комплексное значение, за исключением, быть может, одного. б) Большая теорема Пикара: всякая однозначная аналитич. функция $f(z)$ в произвольной окрестности изолированной существенно особой точки a принимает любое конечное комплексное значение, за исключением, быть может, одного.

Впервые эта теорема опубликована Э. Пикаром [1], [2]. Она существенно дополняет *Сохоцкого теорему*. Малая П. т. есть следствие большой П. т. Из большой П. т. непосредственно следует, что любое конечное комплексное значение, за исключением, быть может,

одного, принимается в произвольной окрестности существенно особой точки бесконечно часто. Для мероморфной функции в конечной плоскости $\mathbb{C}$: $|z|<\infty$ П. т. принимает вид: если точка $a=\infty$ — существенно особая для мероморфной в $\mathbb{C}$ функции $F(z)$, то в произвольной окрестности точки a функция $F(z)$ принимает любое комплексное значение из расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$: $|z|\leqslant\infty$, за исключением, быть может, двух, и притом бесконечно часто. Как показывают примеры целой функции $e^z\neq 0$ и мероморфной функции $\operatorname{tg} z\neq i$, $-i$, все эти утверждения точные. Фигурирующие в П. т. исключительные значения наз. пикаровскими исключительными значениями.

П. т. существенно дополняется *Иверсена теоремой* и *Жюлиа теоремой*, к-рые показывают соответственно, что пикаровские исключительные значения являются *асимптотическими значениями* и что существуют лучи Жюлиа L, исходящие из существенно особой точки a и такие, что неисключительные значения принимаются бесконечно часто даже в любом сколь угодно малом секторе с вершиной a и осью симметрии L.

Для современных исследований, связанных с П. т., характерны следующие два направления. Пусть E — множество существенно особых точек мероморфной функции $F(z)$, то есть $F(z)$ — мероморфная функция в нек-рой окрестности любой точки $z_0\notin E$, и предельное множество $C(z_0; F)$ функции $F(z)$ в точке $z_0\in E$ не сводится к одному значению. Пусть $R(a; F)$, $a\in E$,— множество тех значений $w\in\overline{\mathbb{C}}$, к-рые в любой окрестности точки a принимаются бесконечно часто. Тогда П. т. утверждает, что если a — изолированная точка E, то дополнение

$$CR(a; F)=\overline{\mathbb{C}}\setminus R(a; F)$$

обладает свойством Пикара, т. е. состоит не более чем из двух точек. В. В. Голубев в 1916 установил, что если емкость множества E равна нулю, cap $E=0$, то $CR(a; F)$ имеет емкость нуль для всех $a\in E$. Вопрос о том, каковы минимальные условия на E, чтобы множество $CR(a; F)$ для всех $a\in E$ обладало свойством Пикара, пока (1983) полностью не решен. Примеры показывают, что, с одной стороны, условие cap$E=0$ не является достаточным, а с другой — что имеется множество E, cap $E>0$, вне к-рого не существует мероморфных трансцендентных функций, выпускающих четыре значения (см. [4], [5], [8]).

Второе направление связано с обобщениями П. т. для аналитич. функций $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n\geqslant 1$. При $n=1$ П. т. можно формулировать и так: любое голоморфное отображение $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, выпускающее по крайней мере две точки, постоянно. Однако в 1922 П. Фату (P. Fatou) построил пример невырожденного голоморфного (и даже биголоморфного) отображения $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$, для к-рого множество исключительных значений $\mathbb{C}^2\setminus f(\mathbb{C}^2)$ содержит непустое открытое множество. Это означает, что П. т. (и даже теорему Сохоцкого) непосредственно нельзя распространить на случай $n>1$. Обобщения П. т. все же возможны, если отправляться, напр., от другой ее формулировки, несколько искусственной при $n=1$: любое голоморфное отображение $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}P$ в комплексную проективную плоскость $\mathbb{C}P=\overline{\mathbb{C}}$, выпускающее по крайней мере три гиперплоскости (т. е. точки при $n=1$), постоянно. Верна, в частности, такая теорема Грина: любое голоморфное отображение $F:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}P^n$, выпускающее по крайней мере $2n+1$ гиперплоскостей в общем положении, постоянно (см. [3], [6], [8].

2) П. т. об униформизации алгебраических кривых: если алгебраич. кривая $\Phi(z, w)=0$ имеет род $g>1$,

то не существует ни одной пары мероморфных функций $z=f(t)$, $w=h(t)$ таких, что $\Phi(f(t),\ h(t))\equiv 0$. Иными словами, униформизация алгебраич. кривых рода $g>1$ при помощи мероморфных функций невозможна. Напротив, в случае $g=1$ униформизация всегда осуществима при помощи (мероморфных) эллиптич. функций. Установлена Э. Пикаром [7].

Лит.: [1] Picard E., «C. r. Acad. sci.», 1879, t. 88, p. 1024—1027; t. 89, p. 662—65; [2] его же, «Ann. Ecole norm. super.», 1880, t. 9, p. 145—66; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [4] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [5] Ловатер А., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259; [6] Гриффитс Ф., Кинг Дж., Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий, пер. с англ., М., 1976; [7] Picard E., «Acta math.», 1887—88, v. 11, p. 1—12; [8] Шабат Б. В., *Распределение значений голоморфных отображений*, М., 1982.

Е. Д. Соломенцев.

ПИРАМИДА — многогранник, одной из граней к-рого служит многоугольник (основание П.), а остальные грани (боковые) суть треугольники с общей вершиной (вершина П.) (см. рис. 1, 2). В зависимости от числа боковых граней П. делятся на треугольные,

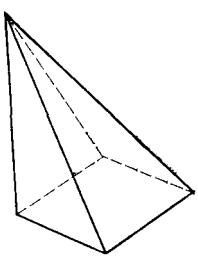


Рис. 1.

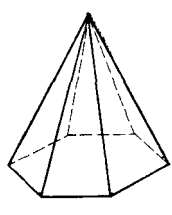


Рис. 2.

четырехугольные и т. д. Отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины П. на плоскость ее основания (а также его длина), наз. *высотой* П. Объем П. вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{3}HS,$$

где H — высота, S — площадь основания, П. наз. правильной (см. рис. 2), если в основании ее лежит правильный многоугольник и высота П. проходит через центр основания. Боковые грани правильной П. суть равные между собой равнобедренные треугольники; высота каждого из этих треугольников наз. апофемой правильной П. (апофема основания П. служит проекцией апофемы П. на плоскость основания).

Рассекая П. плоскостью, параллельной ее основанию, получают две части: П., подобную данной, и т. н. усеченную П. (см. рис. 3). Многоугольник, полученный от пересечения П. и секущей плоскости, наз. верхним основанием, основание П.— нижним основанием усеченной П. Расстояние между секущей плоскостью и нижним основанием наз. высотой усеченной П. Объем усеченной П. вычисляется по формуле

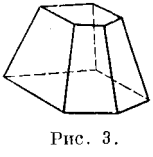


Рис. 3.

$$V=\frac{1}{3}h\left(s+S+\sqrt{sS}\right),$$

где h — высота, s, S — площади оснований. *БСЭ-3.*

ПИРСА СТРЕЛКА — двуместная *логическая операция*, обычно обозначаемая $\downarrow$ и задаваемая следующей *истинностной таблицей*:

A	B	$A\downarrow B$
И	И	Л
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Таким образом, высказывание $A\downarrow B$ означает «ни A, ни B». П. с. обладает тем свойством, что через нее выражаются все другие ло-

гические операции. Например, высказывание $\neg A$ *(отрицание A)* эквивалентно высказыванию $A \downarrow A$, *конъюнкция* $A \& B$ высказываний A и B выражается так: $(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$, дизъюнкция $A \vee B$ эквивалентна $(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$. П. с. была введена в рассмотрение Ч. Пирсом (C. Peirs). *В. Е. Плиско.*

ПИРСОВСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ — представление кольца в виде прямой суммы подколец, связанное с данным идемпотентом e. Для кольца R, содержащего идемпотент e, существуют левое, правое и двустороннее П. р., определяемые равенствами

$$R = Re + R(1-e),$$

$$R = eR + (1-e)R,$$

$$R = eRe + eR(1-e) + (1-e)Re + (1-e)R(1-e)$$

соответственно. При этом в случае отсутствия в R единицы полагают, по определению,

$$R(1-e) = \{x - xe \mid x \in R\},$$

$$(1-e)Re = \{xe - exe \mid x \in R\},$$

$$(1-e)R(1-e) = \{x - ex - xe + exe \mid x \in R\}.$$

Множества $(1-e)R$ и $eR(1-e)$ определяются аналогично. Таким образом, при двустороннем П. р. элемент $x \in R$ представляется в виде

$$x = exe + (ex - exe) + (xe - exe) + (x - ex - xe + exe),$$

при левом — в виде

$$x = xe + (x - xe)$$

и при правом — в виде

$$x = ex + (x - ex).$$

Рассматривается также П. р. относительно ортогональной системы идемпотентов $\{e_1, \ldots, e_n\}$, где $\Sigma_i e_i = 1$, а именно:

$$R = \sum\nolimits_{ij} e_i R e_j.$$

П. р. было предложено Б. Пирсом (см. [1]).

Лит.: [1] Peirce B., «Amer. J. Math.», 1881, v. 4, p. 97.

Л. А. Скорняков.

ПИРСОНА КРИВЫЕ — название семейства непрерывных распределений вероятностей (распределений Пирсона), плотности к-рых $p(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{x-a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} p(x), \qquad (*)$$

где параметры a, b_0, b_1, b_2 — действительные числа. Более точно, кривыми Пирсона наз. графики зависимости $p(x)$ от x. Распределения, являющиеся решениями уравнения (*), совпадают с предельными формами *гипергеометрического распределения*. П. к. классифицируются в зависимости от характера корней уравнения

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 0.$$

Семейство П. к. составляют 12 типов и *нормальное распределение*. Многие важнейшие распределения в математич. статистике могут быть получены с помощью преобразований из уравнения (*).

Систематич. описание типов П. к. дано У. Элдертоном (W. Elderton, 1938). В упрощенном виде классификация по типам такова.

Тип I:

$$p(x) = k\left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{m_1}\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{m_2},$$

$$-a_1 \leqslant x \leqslant a_2,\ m_1,\ m_2 > -1;$$

частный случай — *бета-распределение* 1-го рода.

Тип II:

$$p(x) = k\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m,\ -a \leqslant x \leqslant a,\ m \geqslant -1$$

(вариант П. к. типа I); частный случай — *равномерное распределение*.

Тип III:

$$p(x)=k\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\mu a}e^{-\mu x},\quad -a\leqslant x\leqslant\infty,\quad \mu>0,\quad a>0;$$

частные случаи — *гамма-распределение*, «*хи-квадрат*»-*распределение*.

Тип IV:

$$p(x)=k\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-m}e^{-\mu\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)},$$

$$-\infty\leqslant x\leqslant\infty,\quad a>0,\quad \mu>0.$$

Тип V:

$$p(x)=kx^{-q}e^{-\frac{\alpha}{x}},\quad 0\leqslant x<\infty,\quad \alpha>0,\quad q>1$$

(сводится преобразованием к типу III).

Тип VI:

$$p(x)=kx^{-q_1}(x-a)^{q_2},\quad a\leqslant x<\infty,\quad q_1>q_2-1;$$

частные случаи — бета-распределение 2-го рода, *Фишера F-распределение*.

Тип VII:

$$p(x)=k\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-m},\quad -\infty<x<\infty,\quad m>\frac{1}{2};$$

частный случай — *Стьюдента распределение*.

Тип VIII:

$$p(x)=k\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-m},\quad -a\leqslant x\leqslant 0,\quad 0\leqslant m\leqslant 1.$$

Тип IX:

$$p(x)=k\left(1+\frac{x}{a}\right)^{m},\quad -a\leqslant x\leqslant 0,\quad m>-1.$$

Тип X:

$$p(x)=ke^{-\frac{x-m}{\sigma}},\quad m\leqslant x<\infty,\quad \sigma>0,$$

показательное распределение.

Тип XI:

$$p(x)=kx^{-m},\quad b\leqslant x<\infty,\quad m>0;$$

частный случай — *Парето распределение*.

Тип XII:

$$p(x)=\left(\frac{1+\frac{x}{a_1}}{1-\frac{x}{a_2}}\right)^{m},\quad -a_1\leqslant x\leqslant a_2,\quad |m|>1$$

(вариант типа I).

Наиболее важны в приложениях типы I, III, VI, VII.

Всякая П. к. однозначно определяется своими первыми четырьмя моментами

$$\alpha_k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k p(x)\,dx,$$

если они конечны. Это свойство семейства П. к. используется для приближенного описания *эмпирических распределений*.

Метод подгонки П. к. к нек-рому эмпирич. распределению состоит в следующем. По независимым результатам наблюдений вычисляют первые четыре выборочных момента, затем определяется тип подходящей П. к. и методом моментов находятся значения неизвестных параметров искомой П. к. В общем случае метод моментов не является эффективным методом получения оценок П. к. Проблема более точной аппроксимации распределений с помощью П. к. получила новое решение в работах Л. Н. Большева (1963) по асимптотич. преобразованиям.

П. к. были введены К. Пирсоном (K. Pearson, 1894).

Лит.: [1] Elderton W. P., Frequency curves and correlation, 4 ed., Camb., 1953; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [3] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [4] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, № 2, с. 129—55.
А. В. Прохоров.

ПИРСОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. *Пирсона кривые.*

ПИТМЕНА ОЦЕНКА — эквивариантная статистич. оценка параметра сдвига относительно группы вещественных сдвигов, имеющая минимальный риск при квадратичной функции потерь.

Пусть компоненты $X_1, X_2, \ldots, X_n$ случайного вектора $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ суть независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же вероятностному закону, плотность вероятности к-рого принадлежит семейству

$$\{f(x-\theta),\ |x|<\infty,\ \theta\in\Theta=(-\infty, +\infty)\},$$

причем

$$\mathsf{E}_\theta X_1^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x-\theta)\,dx<\infty$$

для любого $\theta\in\Theta$. Далее, пусть $G=\{g\}$ — группа вещественных сдвигов, действующая в пространстве реализаций $\mathbb{R}^1=(-\infty, +\infty)$ случайной величины X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$:

$$G=\{g: gX_i=X_i+g,\ |g|>\infty\}.$$

В таком случае задача оценивания параметра θ будет инвариантной относительно квадратичной функции потерь $L(\theta, \hat\theta)=(\theta-\hat\theta)^2$, если в качестве $\hat\theta=\hat\theta(X)$ выбрать эквивариантную оценку. Э. Питмен [1] показал, что эквивариантная оценка $\hat\theta(X)$ параметра сдвига θ относительно группы G, имеющая минимальный риск при квадратичной функции потерь, имеет вид

$$\hat\theta(X)=X_{(n1)}-\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\prod_{i=2}^{n} f(x+Y_i)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\prod_{i=2}^{n} f(x+Y_i)\,dx},$$

где $Y_i=X_{(ni)}-X_{(n1)}$, $X_{(ni)}$ есть i-я порядковая статистика, построенная по вектору наблюдений X. П. о.— несмещенная оценка, она является минимаксной в классе всех оценок параметра сдвига θ при квадратичной функции потерь, если все эквивариантные оценки параметра θ имеют конечные функции риска [2].

Пример 1. Если

$$f(x-\theta)=e^{-(x-\theta)},\ x\geqslant\theta,$$

то есть X_i, $i=1, 2, \ldots, n$, подчинляется показательному закону с неизвестным параметром сдвига θ, то П. о. $\hat\theta(X)$ для θ выражается формулой

$$\hat\theta(X)=X_{(n1)}-\frac{1}{n},$$

причем ее дисперсия равна $1/n^2$.

Пример 2. Если

$$f(x-\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}},\ |x|<\infty,$$

то есть X_i, $i=1, 2, \ldots, n$, подчиняется нормальному $N(\theta, 1)$ закону с неизвестным математич. ожиданием θ, то в этом случае среднее арифметическое

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)$$

является П. о.

Лит.: [1] Pitman E. J., «Biometrika», 1939, v. 30, p. 391—421; [2] Girshick M. A., Savage L. J., «Proc. Second Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.», 1951, p. 53—73; [3] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.
М. С. Никулин.

ПИФАГОРА ТЕОРЕМА — теорема геометрии, устанавливающая связь между сторонами прямоугольного треугольника. П. т. была, по-видимому, известна до

Пифагора (6 в. до н. э.), но ему приписывается ее доказательство в общем виде. Первоначально теорема устанавливала соотношения между площадями квадратов, построенных на гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника: квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах. Обычно П. т. принято кратко формулировать так: квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов. Верна и теорема, обратная П. т.: если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то этот треугольник прямоугольный. *БСЭ-3.*

ПИФАГОРОВЫ ЧИСЛА — тройки целых положительных чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2=z^2$. Все решения этого уравнения, а следовательно, и все П. ч. выражаются формулами $x=a^2-b^2$, $y=2ab$, $z=a^2+b^2$, где a, b — произвольные целые положительные числа ($a>b$). П. ч. могут быть истолкованы как длины сторон прямоугольного треугольника. *БСЭ-3.*

ПЛ/I — универсальный *алгоритмический язык* (сокращение от Programming Language One), разработанный в 1963—64 фирмой по производству вычислительных машин ИБМ (International Business Machines). В языке ПЛ/I нашли свое отражение как опыт предшествующих ему языков *алгол*, *фортран*, *кобол*, так и многие новые идеи программирования, появившиеся к моменту создания ПЛ/I. На язык также оказали заметное влияние особенности вычислительных машин фирмы ИБМ и их операционной системы.

ПЛ/I устроен таким образом, чтобы из него можно было выделять подмножества, удовлетворяющие нуждам конкретного приложения. Программа на ПЛ/I составляется из независимо транслируемых модулей, называемых внешними процедурами, к-рые имеют алголоподобную блочную структуру и включают процедуры (возможно, многовходовые и рекурсивные) и блоки.

Наибольшее значение для диапазона применения ПЛ/I имеет разнообразие типов данных. Язык имеет дело с данными арифметическими (действительными и комплексными, с фиксированной и плавающей запятой, двоичными и десятичными), строковыми (литерными и битовыми), данными с шаблоном (аналогичными шаблонам в коболе) и данными для управления программой (метка передачи управления, вход, указатель, файл, ветвь и событие).

Язык ПЛ/I обеспечивает возможность объединения данных в агрегаты — массивы и структуры. М а с с и в ы представляют собой упорядоченный набор однородных элементов (скаляров или структур). С т р у к т у р а м и в ПЛ/I наз. иерархически упорядоченный набор элементов, каждый из к-рых имеет свое имя и может иметь свой тип данных и организацию.

Правила вычисления выражений позволяют вырабатывать произвольные значения. В случае несоответствия типов данных при их вычислении осуществляется автоматич. преобразование к типу, требуемому операциями или конкретным контекстом.

Существенной особенностью ПЛ/I являются п р а в и л а у м о л ч а н и я, позволяющие программисту указывать, напр., не все свойства данных, не все компоненты операторов, не все параметры встроенных функций. То, что не указано явно программистом, понимается нек-рым заранее определенным образом или же исходя из контекста.

ПЛ/I обладает развитыми средствами управления работой с памятью. Эти средства позволяют программисту самому определять момент размещения переменных в памяти, объем требуемой памяти, скорость выборки элементов данных, повторно использовать уже выделенную память под другим именем и, возможно,

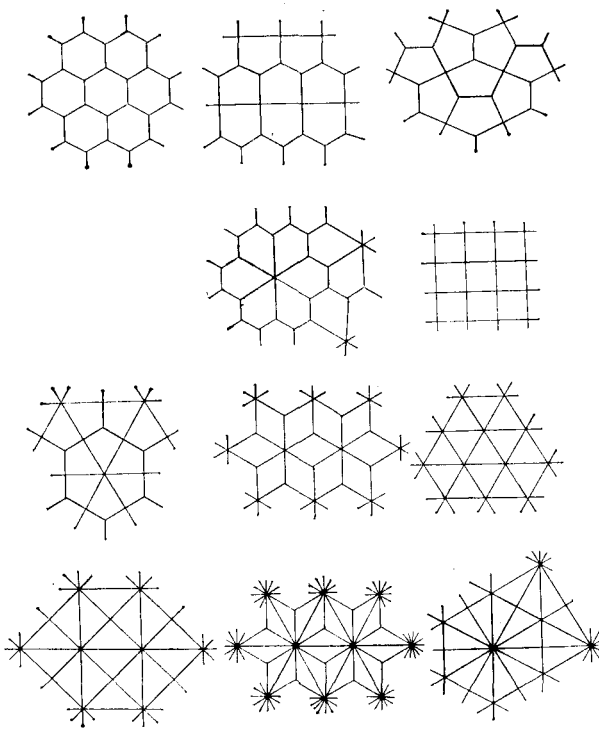
с другой интерпретацией содержащихся в ней значений без переразмещения. Память может быть выделена статически (до исполнения программы) или динамически (при входе в блок или при исполнении оператора размещения). Выделенная для нек-рой переменной память может быть организована по типу стека с соответствующими правилами доступа или может быть связана с нек-рым указателем.

Наряду с обычными операторами присваивания, перехода, итеративного исполнения, вызова процедур, условными операторами, ПЛ/I включает средства для синхронизации параллельно исполняемых процедур, для исполнения нек-рых операторов во время компиляции, а также для выполнения нек-рых действий (системных или определенных программистом) при возникновении ситуаций (стандартных или определенных программистом), вызывающих прерывание при исполнении программы. В ПЛ/I представлены разнообразные средства для обмена данными с внешними устройствами (посредством записей, посимвольно и с редактированием). В язык ПЛ/I встроено большое количество стандартных функций, к-рые существенно облегчают программирование.

Стандарт ПЛ/I, опубликованный в 1976, дает более формальную и точную спецификацию языка, обобщает понятие типа и правила вычисления выражений и вычисляемых функциями значений. В то же время в стандарт языка не включены средства для параллельного исполнения и средства организации вычислений в период трансляции.

Лит.: [1] Универсальный язык программирования PL/1, пер. с англ., М., 1968; [2] Скотт Р., Сондак Н., ПЛ/1 для программистов, пер. с англ., М., 1977; [3] Программирование на ПЛ/1 ОС ЕС, М., 1979; [4] Бухтияров А. М., Фролов Г. Д., Олюнин В. Ю., Сборник задач по программированию на языке ПЛ/1, М., 1978; [5] American National Standard programming language PL/1, ANSI, X 3.53—1976. *Л. А. Корнева.*

ПЛАНИГОН — выпуклый многоугольник правильного разбиения плоскости на равные многоугольники, т. е. такого разбиения, что существует группа движений плоскости, совмещающая разбиение с собой, к-рая



действует транзитивно на совокупности многоугольников разбиения. На евклидовой плоскости существует 11 комбинаторных типов разбиения — т. н. сети Шубникова — Лавеса (см. рис.). Однако группа симметрии для одного комбинаторного типа может действовать по-разному. Взаимосвязь комбинаторного типа и группы симметрии характеризуется т. н. символом смежности. На евклидовой плоскости существует 46 общих правильных разбиений с различным символом смежности.

На плоскости Лобачевского планигонами являются правильные многоугольники с любым числом k сторон и любым данным числом α сходящихся в каждой вершине П. Для числа сторон $k=3, 4, 5, 6, >6$ можно выбрать такой размер П., что $\alpha \geqslant 7, \geqslant 5, \geqslant 4, \geqslant 4, \geqslant 3$. Многомерным аналогом П. является *стереоэдр*.

Лит.: [1] Делоне Б. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 3, с. 365—86; [2] Делоне Б. Н., Долбилин Н. П., Штогрин М. И., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1978, т. 148, с. 109—40; [3] Узоры симметрии, пер. с англ., М., 1980.

А. Б. Иванов.

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА — раздел математической статистики, изучающий рациональную организацию измерений, подверженных случайным ошибкам. Обычно рассматривается следующая схема П. э. Со случайными ошибками измеряется функция $f(\theta, x)$, зависящая от неизвестных параметров (вектора θ) и от переменных x, к-рые по выбору экспериментатора могут принимать значения из нек-рого допустимого множества X. Целью эксперимента является обычно либо оценка всех или нек-рых параметров θ или их функций, либо проверка нек-рых гипотез о параметрах θ. Исходя из цели эксперимента, формулируется критерий оптимальности плана эксперимента. Под планом эксперимента понимается совокупность значений, задаваемых переменным x в эксперименте.

Лит.: [1] Налимов В. В., Чернова Н. А., Статистические методы планирования экстремальных экспериментов, М., 1965; [2] Федоров В. В., Теория оптимального эксперимента, М., 1971; [3] Хикс Ч., Основные принципы планирования эксперимента, пер. с англ., М., 1967; [4] Финни Д., Введение в теорию планирования экспериментов, пер. с англ., М., 1970.

ПЛАНКА ПОСТОЯННАЯ — одна из абсолютных физич. констант, имеющая размерность действия (энергия × время); в системе CGS П. п. h равна

$$(6{,}62377 \pm 0{,}00018)\cdot 10^{-27} \text{ эрг}\times\text{сек}$$

($\pm 0{,}00018$ — возможная погрешность в измерении). Впервые была введена М. Планком (M. Planck, 1900) в работе по световому излучению, в к-рой он предположил, что энергия e фотона (электромагнитной волны) равна $e=h\nu$, где ν — частота волны. Позднее, с возникновением квантовой механики, П. п. была использована в определении важнейших квантовомеханич. величин (оператора импульса, энергии и т. д.) и вошла почти во все уравнения и соотношения квантовой механики.

П. п. в нек-ром смысле характеризует границы применения классич. механики: оказывается, что законы квантовой механики существенно отклоняются от законов классич. механики лишь для тех физич. систем, для к-рых характерные расстояния, скорости и массы таковы, что соответствующая характерная величина действия сравнима по порядку с величиной h. При формальном математическом рассмотрении это означает, что при $h \to 0$ соотношения квантовой механики переходят в соответствующие классич. соотношения.

Наряду с постоянной h используют константу $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, к-рую при этом также наз. П. п.

Р. А. Минлос.

ПЛАНШЕРЕЛЯ ТЕОРЕМА: для каждой квадратично суммируемой функции $f \in L_2(-\infty, +\infty)$ интеграл

$$\tilde{f}_\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega}^{+\omega} f(y)\, e^{-ixy}\, dy$$

сходится в L_2 к нек-рой функции $\tilde{f}(x) \in L_2$ при $\omega \to \infty$, то есть

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}_\omega(x)|^2\, dx = 0.$$

При этом сама функция $f(x)$ представляется как предел в L_2 при $\eta \to \infty$ интегралов

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\eta}^{+\eta} \tilde{f}(y)\, e^{ixy}\, dy,$$

то есть

$$f(x) = \lim_{\eta \to \infty}^{L_2} f_\eta(x).$$

Кроме того, справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\lambda)|^2\, d\lambda$$

(формула Парсеваля — Планшереля).

Функция

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega}^{+\omega} f(y)\, e^{-iyx}\, dy,$$

где предел понимается в смысле сходимости в L_2, наз. преобразованием Фурье функции f и обозначается обычным символом

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-ixy}\, dy, \qquad (1)$$

при этом интеграл (1) понимается в смысле главного значения на ∞ в метрике L_2. Аналогично истолковывается равенство

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(y)\, e^{ixy}\, dy. \qquad (2)$$

Для функций $f \in L_2$ интегралы (1) и (2) существуют в смысле главного значения почти при всех x.

Функции f и $\tilde{f}$ удовлетворяют почти при всех x также соотношениям

$$\tilde{f}(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \frac{e^{-ixy} - 1}{-iy}\, dy \right\},$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(y)\, \frac{e^{ixy} - 1}{iy}\, dy \right\}.$$

Если обозначить $\tilde{f}$ преобразование Фурье, $\tilde{f}^{-1}$ — его обращение, то П. т. перефразируется так: $\tilde{f}$ и $\tilde{f}^{-1}$ — взаимно обратные унитарные операторы в L_2.

П. т. установлена М. Планшерелем (M. Plancherel, 1910).

Лит.: [1] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 2, М., 1965; [2] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.— Л., 1948; [3] Бохнер С., Лекции об интегралах Фурье, пер. с англ., М., 1962.

П. И. Лизоркин.

ПЛАНШЕРЕЛЯ ФОРМУЛА — формула, выражающая инвариантность скалярного произведения при преобразовании Фурье в пространстве $L_2(X)$:

$$\int_Y \hat{f}_1(y)\, \overline{\hat{f}_2(y)}\, d\mu(y) = \int_X f_1(x)\, \overline{f_2(x)}\, d\mu(x).$$

В классич. случае, когда $X = Y = \mathbb{R}^n$ есть n-мерное евклидово пространство, $\mu(x)$ и $\mu(y)$ суть n-мерные меры Лебега, преобразование Фурье

$$f(x) \mapsto \hat{f}(y)$$

на пространстве $L_2(\mathbb{R}^n) \ni f$ является непрерывным продолжением классич. преобразования Фурье

$$g(x) \mapsto \hat{g}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, e^{i(x,y)}\, dx,$$
$$g \in L_1(\mathbb{R}^n),$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n),$$

(x, y) — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, с множества $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ на пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$.

П. ф. справедлива также, когда X — локально компактная коммутативная топологич. группа, Y — ее группа характеров, $x \in X$, $y \in Y$, $\mu(x)$ и $\mu(y)$ — соответствующим образом нормированные инвариантные меры в группах X и Y, а преобразование Фурье $f(x) \mapsto \hat{f}(y)$ на пространстве $L_2(X) \ni f$ является непрерывным продолжением отображения

$$g(x) \mapsto \hat{g}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_X g(x)\, y(x)\, d\mu(x),$$
$$g(x) \in L_1(X),\ y(x) \in Y,$$

с множества $L_1(X) \cap L_2(X)$ на пространство $L_2(X)$.

П. ф. обобщается на некоммутативные топологич. группы. Пусть, напр., G — бикомпактная группа, μ — инвариантная на ней мера, $\mu(G) = 1$, $g \mapsto U_g^{(\alpha)}$ — неприводимое конечномерное размерности n_α унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве, $g \in G$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, $x(g) \in L_2(G)$,

$$T_x^{(\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_G x(g)\, U_g^{(\alpha)*}\, d\mu(g)$$

($*$ — переход к сопряженному оператору), $S(T_x^{(\alpha)} T_x^{(\alpha)*})$ — след оператора $T_x^{(\alpha)} T_x^{(\alpha)*}$. Тогда обобщенная П. ф. имеет вид

$$\int_G |x(g)|^2\, d\mu(g) = \sum\nolimits_\alpha n_\alpha S\left(T_x^{(\alpha)} T_x^{(\alpha)*}\right).$$

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968.

Л. Д. Кудрявцев.

ПЛАСТИЧНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — теория деформируемого пластичного твердого тела, в к-рой исследуются задачи, состоящие в определении полей вектора перемещений $u(x, t)$ или вектора скоростей $v(x,t)$, тензора деформации $\varepsilon_{ij}(x, t)$ или скоростей деформации $v_{ij}(x, t)$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}(x,t)$, к-рые возникают в теле, занимающем область Ω с границей S, под действием массовых $K(x, t)$ и поверхностных $F(x, t)$ сил при заданных начальных и граничных условиях, а также в определении тех нагрузок и процессов, при к-рых равновесие (движение) тела является неустойчивым. Особенности П. м. т. состоят в том, что

а) соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ нелинейны и необратимы и описываются, вообще говоря, функционалами; следовательно, задачи П. м. т. существенно нелинейны;

б) конфигурации искомых квазистатич. полей определяются процессом изменения заданных функций на промежутке $[0, t]$, а не их мгновенными значениями в момент t;

в) в процессе изменения функций K, F возникают области упругой деформации, активной пластич. деформации (нагрузки) и пассивной деформации (разгрузки), в к-рых соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ различны; эти области должны быть определены при решении задачи;

г) уравнения краевой задачи могут, вообще говоря, оказаться разных типов (эллиптического или гиперболического) в разных областях тела.

При произвольном сложном процессе известны лишь весьма общие свойства функционалов пластичности,

их явная аналитич. структура не установлена. Конкретные соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$, не содержащие явно функционалов, построены и экспериментально обоснованы для ряда типичных процессов деформации. Иногда рассматриваются также нек-рые искусственные «модели» соотношений $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$, к-рые лишь частично отражают упругопластич. свойства материалов.

Статические краевые задачи. В теории упругопластич. процессов (см. [1]) согласно постулату изотропии А. А. Ильюшина соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = A_k \varepsilon_{ij}^k \tag{1}$$

(суммирование по k от 1 до 6), где ε_{ij}^k — базис, построенный на основе тензора малой деформации, A_k — функционалы от инвариантов тензора деформации, давления p, температуры T и, возможно, других инвариантных величин немеханич. природы. Искомые функции $u_i(x, t)$, $\varepsilon_{ij}(x, t)$, $\sigma_{ij}(x, t)$ при равновесии удовлетворяют уравнениям

$$\sigma_{ij,\,j} + \rho K_i = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,\,j} + u_{j,\,i}, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$\sigma_{ij} = A_k \varepsilon_{ij}^k, \quad x \in \Omega \cup S, \tag{4}$$

$$\sigma_{ij} l_j = F_i, \quad x \in S_\sigma, \tag{5}$$

$$u_i = \varphi_i, \ x \in S_u, \ S_\sigma \cup S_u = S, \ S_\sigma \cap S_u = 0 \tag{6}$$

при заданных функциях $K_i(x, t)$, $F_i(x, t)$, $\varphi_i(x, t)$ и областях Ω, S_σ, S_u. Здесь l_j — направляющие косинусы внешней нормали к граничной поверхности S; t — параметр процесса (напр., истинное или условное время); ρ — плотность материала; (2) — дифференциальные уравнения равновесия, (3) — кинематич. соотношения между малыми деформациями и перемещениями, (5) и (6) — граничные условия в напряжениях и перемещениях соответственно. Равенства (2) — (6), строго говоря, не реализуют постановку краевой задачи, поскольку при неизвестной структуре функционалов *пластичности нельзя решить вопрос о существовании решения.*

С учетом этой неопределенности для решения задачи (2) — (6), допуская его существование при произвольном сложном нагружении (СН), предложен и в частных задачах реализован следующий метод СН-ЭВМ. Ниже система равенств (2), (3), (5), (6) будет наз. неполной системой (В). В связи с использованием конечноразностной процедуры область Ω разбивается на N ячеек (элементов), в каждой из к-рых искомые функции имеют постоянные (средние) значения, зависящие от параметра t (интересующий интервал времени $[0, t]$ разбивается на M шагов), и в ν-й ячейке заменяются соотношения (4) аппроксимирующими соотношениями вида

$$\sigma_{\nu ij} = C_{\nu k} \varepsilon_{\nu ij}^k, \tag{7}$$

где $C_{\nu k}$ — функции t, такими, что решение задачи (В), (7) существует. Пусть в первом приближении с конкретно заданными (по возможности — наиболее простым способом, напр. в соответствии с обобщенным законом Гука) функциями $C_{\nu k}$

$$\sigma_{\nu ij} = C_{\nu k}^{(1)} \varepsilon_{\nu ij}^k \tag{7_1}$$

решение задачи (В), (7) есть $u_{\nu i}^{(1)}(t)$, $\varepsilon_{\nu ij}^{(1)}$, $\sigma_{\nu ij}^{(1)}(t)$. Определяемый по нему набор инвариантов $I_\nu^{(1)}(t)$ вместе с $p_\nu(t)$ и $T_\nu(t)$ рассматривается как совокупность программ испытаний N образцов в однородном напряженном состоянии. Проведение их на испытательном комбайне класса СН дает истинные зависимости $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ в процессах $I_\nu^{(1)}(t)$, $p_\nu(t)$, $T_\nu(t)$, что

определяет уточненные аппроксимирующие соотношения

$$\sigma_{vij} = C^{(2)}_{vk}\varepsilon^{k}_{vij}, \qquad (7_2)$$

к-рые используются для численного решения задачи (В), (7_2) во втором приближении. Аналогично строятся последующие приближения. Сходимость оценивается по нормам разностей двух последующих приближений.

В отличие от применяемых вариантов теоретико-экспериментальных методов решения краевых задач с известными соотношениями (4), здесь используется испытание стандартных образцов в одномерном напряженном состоянии по стандартной методике, а не натурного объекта или его модели в сложном напряженном состоянии.

Предложен апостериорный критерий существования (см. [2]): если указанный процесс итераций сходится, то решение задачи (2) — (6) (с неизвестной структурой функционалов A_k) существует и с заданной степенью точности определяется в n-м приближении.

Если соотношения (4) известны, но сложны, то этот метод также применим с использованием (4) вместо испытательного комбайна СН.

Сложности постановки и решения краевой задачи теории пластичности в общем случае существенно уменьшаются при рассмотрении конкретных классов процессов.

Степень сложности процесса деформации в точке тела определяется сопоставлением кривизн траектории деформации, к-рая в 5-мерном евклидовом пространстве изображает процесс изменения девиатора деформации $\vartheta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}$ $(3\varepsilon = \varepsilon_{ii})$, с типичной для каждого материала величиной следа запаздывания h, определяемой экспериментально. На этой основе выделяются частные классы процессов, для к-рых соотношения (4) конкретизируются и не содержат явно функционалов. Для каждого такого класса процессов постановка краевой задачи (2) — (6) становится определенной, допускающей доказательство теорем существования и единственности и построение общих методов решения. При этом, однако, возникает проблема физич. достоверности решения, поскольку при заданных функциях $K_i(x,\ t)$, $F_i(x,\ t)$, $\varphi_i(x,\ t)$ процессы, определяемые решением, могут не соответствовать области достоверности частного вида соотношения (4), принятого при постановке задачи. Эту проблему можно поставить как задачу об определении класса заданных функций K_i, F_i, φ_i и, может быть, ограничений на соотношения (4) частного вида, при к-рых система уравнений (2) — (6), дополненная соотношениями, определяющими соответствующий класс процессов, совместна.

В теории малых упругопластич. деформаций (см. [3]), относящейся к процессам простой деформации (нулевой кривизны), соотношения (4) имеют вид

$$\sigma_{ij} = \frac{2\Phi(\varepsilon_u)}{3\varepsilon_u}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}) + 3K\varepsilon\delta_{ij}, \qquad (8)$$

где $\varepsilon_u = \left(\frac{2}{3}\vartheta_{ij}\vartheta_{ij}\right)$ — интенсивность деформации, Φ — экспериментально определяемая функция упрочнения, K — константа (модуль объемной упругости), $3\varepsilon = \varepsilon_{ii}$.

При ограничениях

$$3G \geqslant \frac{\Phi(\varepsilon_u)}{\varepsilon_u} \geqslant \frac{d\Phi}{d\varepsilon_u} \geqslant \lambda > 0 \qquad (9)$$

($\lambda < 1$ — число), приемлемых для конструкционных материалов, установлена эллиптич. природа краевой задачи (В), (8), доказаны теоремы существования и единственности решения, установлены минимальные принципы и даны соответствующие вариационные постановки задач. Доказана теорема о простом нагружении, определяющая класс функций K_i, F_i, φ_i

(однопараметрич. нагрузки), при к-ром решение задачи физически достоверно. Для решения краевой задачи (В), (8) в принципе применимы методы Ритца и Бубнова — Галеркина, к-рые, вследствие нелинейности задачи, малоэффективны. Широко используется метод упругих решений, сходящийся при условиях (9): в каждом последовательном приближении решается более простая краевая задача линейной теории упругости (см. [3]). При этом в ходе решения определяются области упругих деформаций, в к-рых имеет место обобщенный закон Гука. Применяется также метод переменных параметров упругости (см. [4]).

Постановка задачи (В), (8) и указанные методы решения применяются также к задачам термопластичности. При этом при температурном поле $T(x,\ t)$, определяемом решением задачи теплопроводности, в соотношениях (8) полагается $\Phi \equiv \Phi(\varepsilon_u,\ T)$ и член $3K\varepsilon\delta_{ij}$ заменяется выражением $3K(\varepsilon - \alpha T)\delta_{ij}$. Ввиду функциональной природы соотношений $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ использование функции $\Phi(\varepsilon_u,\ T)$ ограничено нек-рым классом тепловых процессов. Специальный интерес представляют задачи о циклич. нагружении тела (см. [5]), сопровождающемся периодич. возникновением областей разгрузки и нагрузки обратного знака.

В теории упругопластич. процессов малой кривизны (наибольшая кривизна значительно меньше h^{-1}) с соотношениями

$$\sigma_{ij} = \frac{2\Phi\ (s)}{3v_u}(v_{ij} - v\delta_{ij}) + \sigma\delta_{ij},\ \dot{\sigma} = 3Kv, \qquad (10)$$

где

$$v_u = \left(\frac{2}{3} V_{ij} V_{ij}\right)^{1/2},\ V_{ij} = v_{ij} - v\delta_{ij},\ 3v = v_{mm},$$

$s = \int_0^t v_u dt$ — длина дуги траектории деформации, и с кинематич. уравнениями

$$2v_{ij} = v_{i,\ j} + v_{j,\ i}, \qquad (11)$$

где $v_i(x,\ t)$ — координаты вектора скорости частицы среды, ставится краевая задача (2), (10), (11), (5), (6), для к-рой доказаны теоремы существования и единственности, сформулированы вариационные принципы и предложен метод последовательных приближений. Условия физич. достоверности решения не выяснены. Эта задача формулируется, в частности, применительно к расчету установившегося пластич. течения упрочняющегося металла в технологич. процессах обработки давлением (прессование, прокатка и т. п.).

Аналогично ставится краевая задача для упругопластич. процессов средней кривизны (главная кривизна траектории деформации меньше или порядка h^{-1}).

Для теории двухзвенных процессов (траектория деформации — ломаная с углом излома θ при $s = s_0$), типичных для двухпараметрич. нагружений тела, с соотношениями (8) при $s \leqslant s_0$ и соотношениями

$$\sigma_{ij} = \frac{2\sigma_u}{3\sin\theta}\left[\frac{\vartheta_{ij} - \vartheta^0_{ij}}{s - s_0}\sin(\theta - \vartheta) + \frac{\vartheta^0_{ij}}{s_0}\sin\vartheta\right] + 3K\varepsilon\delta_{ij} \qquad (12)$$

при $s > s_0$, где σ_u, ϑ — известные функции от s_0, θ, s, дана постановка краевой задачи (В), (12) при $s > s_0$ и (В), (8) при $s \leqslant s_0$ с доказательством теорем существования и единственности. Доказана локальная теорема физич. достоверности, определяющая достаточные условия, налагаемые на функции K_i, F_i, φ_i, при к-рых почти всюду в области Ω происходят изломы траекторий деформации. Свойства решений и материальных функций в окрестности точки излома существенны для решения задач об устойчивости равновесия при упругопластич. деформациях.

В современной теории течения для пластич. части тензора деформации ε_{ij}^p из постулатов пластичности энергетич. типа выводятся соотношения вида

$$\Delta\varepsilon_{ij}^p = H\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}\Delta\sigma_{mn}, \qquad (13)$$

а для упругой части принимается обобщенный закон Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{mm}^l\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}^l,$$

где λ, μ — постоянные Ламе, причем функция нагружения f является функционалом процесса нагружения $\sigma_{ij}(t)$, а фупкция упрочнения H, кроме того, зависит от приращений $\Delta\sigma_{ij}$. Чаще всего предполагается, что H не зависит от $\Delta\sigma_{ij}$. При этом линеаризованные по приращениям соотношения (13) позволяют строго формулировать краевую задачу типа (В), (13) с доказательством ряда общих теорем и минимальных принципов (см. [6]); разработаны процедуры численно-аналитич. решения. Преимущество простоты, даваемое линеаризацией соотношений (13), серьезно ослабляется ограниченностью области, в к-рой линеаризованные соотношения физически достоверны.

В П. м. т. часто используется постановка краевой задачи на основе теории пластичности Прандтля — Рейса, к-рая описывается соотношениями

$$2G\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}\delta_{ij} + R(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}) + \frac{2G}{3K}\dot{\sigma}\delta_{ij},$$

где G, K — константы упругости, R — функция от $\sigma_u = \left(\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}\right)^{1/2}$. Область достоверности этих соотношений ограничена (точно не определена).

Развита теория идеально пластич. тел (см. [7], [8]), основанная на физич. соотношениях Сен-Венана — Леви — Мизеса. Эти соотношения формально получаются из соотношений малой кривизны (10), если в них положить $\Phi(s) = \sigma_s = \text{const}$ (σ_s — предел текучести материала) и принять условие несжимаемости:

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = \frac{2\sigma_s}{3V_u}v_{ij},\ v = 0. \qquad (14)$$

Понятие идеальной пластичности подразумевает, кроме того, соблюдение в области активных пластич. деформаций условия текучести вида

$$F(\sigma_{ij}) = 0, \qquad (15)$$

напр. условия Генки — Мизеса $^3/_2 s_{ij}s_{ij} = \sigma_s^2$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$, или условия Треска — Сен-Венана $\tau_{max} = \tau_s$, где τ_{max} — наибольшее касательное напряжение, σ_s, τ_s — константы материала.

Краевая задача вида (В), (14), (15) с заменой (3) на (11) обычно гиперболического (иногда эллиптического) типа. Полная задача теории идеальной пластичности состоит в решении уравнений (2), (11), (14), (15) в части области Ω_1, в к-рой имеют место пластич. деформации, и уравнений (2), (3) с соотношениями обобщенного закона Гука в области упругих деформаций Ω_2 с соответствующими граничными условиями и кинематич. и динамич. условиями сопряжения решений на неизвестной границе областей Ω_1 и Ω_2 (упругопластич. задача).

Часто практически полезные результаты дает жесткопластич. анализ, в к-ром упругие деформации игнорируются и части тела вне области пластичности считаются недеформируемыми. При этом, как правило, возникают стационарные поверхности разрыва скоростей частиц, что несовместимо с классич. положениями механики сплошной среды. В нек-рых задачах при задании граничных условий в напряжениях урав-

нения равновесия вместе с условиями типа (15) можно рассматривать как автономную систему гиперболич. типа. При этом возникает возможность неоднозначного определения области пластич. деформаций и напряжений в этой области, к-рую часто разрешают на основе нек-рых эвристич. соображений. Многозначность не возникает при решении упругопластич. задачи.

Среди задач, решаемых методами теории идеальной пластичности, специального упоминания заслуживают задачи об установившемся пластич. течении неупрочняющегося металла в «каналах» с определением скоростей и напряжений, включая контактные, применительно к технологич. задачам обработки давлением (ковка, штамповка, прессование).

Для ряда инженерных приложений особый интерес представляет теория пластич. течения тонких слоев металла, основанная на ряде рациональных гипотез кинематич. и физич. характера. При этом определяются условия, необходимые для поддержания пластич. течения (напр., мощность пресса), и распределение скоростей, позволяющее предвидеть форму изделия.

Прикладные задачи П. м. т. (напр., о равновесии оболочек) приводят к краевым задачам с нелинейными дифференциальными уравнениями с частными производными высокого порядка (напр., четвертого).

Для задач об устойчивости равновесия при пластич. деформациях характерно бифуркационное изменение типа процесса деформации в момент потери устойчивости с образованием точек излома на траекториях деформации. Напр., при простом нагружении тела в момент потери устойчивости возникает сложное нагружение, и для решения задачи об устойчивости необходимо привлекать соотношения, описывающие бесконечно малый процесс после точки излома траектории (см. [1]).

Динамические задачи теорий пластичности. Общая постановка динамич. задачи получается, если (2) заменить уравнением движения

$$\sigma_{ij,\ j} + \rho K_i = \rho U_{i,\ tt},\ x \in \Omega,$$

и к (2) — (6) добавить начальные условия, напр. вида

$$u_i(x,\ 0) = \psi_i(x),\ u_{i,\ t}(x,\ 0) = \chi_i(x),\ x \in \Omega.$$

При этом возникают трудности двоякого характера:

1) вследствие возникновения разных типов волн с различными скоростями распространения, зависящими от величин деформаций, процессы деформации в разных точках тела (и в каждой точке в разные промежутки времени) имеют разную степень сложности даже при простейших типах прилагаемых нагрузок, и априори нельзя установить возможность использования соотношений $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ частного вида;

2) необходимо использовать динамич. соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ с учетом зависимости от развития процесса деформации во времени.

Динамич. функционал пластичности изучен не полностью даже для одномерного процесса, т. е. при простой деформации. Информация о динамич. характеристиках материалов в сложном напряженном состоянии при сложных процессах деформации чрезвычайно скудна и не позволяет судить хотя бы о качественных свойствах динамич. функционалов пластичности. В связи с этим динамич. задачи теории пластичности ставятся с использованием статич. соотношений теории пластичности, что позволяет отрабатывать методы решения, выяснять специфические для динамики механич. эффекты и получать решения, полезные для практики в качестве оценок. Такой подход в качестве этапа исследования оправдывается чрезвычайной важностью изучения динамич. процессов в конструкциях, сооружениях и массивах.

Анализ распространения активных нелинейных деформаций в сложном напряженном состоянии обнаруживает возникновение комбинированных разрывов разных типов, характерных только для нелинейных задач. Насколько можно судить по имеющимся результатам, наиболее сложные процессы протекают в *областях, примыкающих к поверхностям* разрыва, тогда как в основной области движения сложность процесса по кривизнам траекторий и по времени ограничена. Поэтому представляется возможным решать динамич. задачи теории пластичности для сложных случаев путем комбинированного использования соотношений частного вида (напр., для процессов средней кривизны) в основной области и соотношений для окрестности точки излома (или для двухзвенных процессов) в областях, примыкающих к поверхностям разрыва. Нетривиальной и специфической для динамич. задач теории пластичности является задача о нахождении поверхности разгрузки, разделяющей области активных и пассивных деформаций.

Наиболее детально изучены задачи о распространении одномерных упругопластич. волн (см. [9]). Исследована задача о распространении волны разгрузки в стержне при растяжении-сжатии (см., напр., [9]). В дальнейшем распространение и взаимодействие упругопластич. продольных волн в стержне исследовано с учетом различных типов зависимости механич. нагрузок от скорости деформации. В свою очередь, полученные решения используются в качестве теории эксперимента (базисного или контрольного) для изучения динамич. свойств материалов (см. [10]).

Математические задачи теории уравнений состояния. Явление пластичности настолько сложно, что построить уравнения состояния (соотношения $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$) путем прямого обобщения опытных данных не удается. В связи с этим доминирует тенденция к созданию общей теории, к-рая, в частности, определит и теорию эксперимента. На этом пути ведется математич. исследование допустимых форм уравнений состояний, не противоречащих законам механики и термодинамики, изучение свойств кривых и поверхностей в n-мерном пространстве в связи с исследованием процессов и предельных конфигураций, формулирование определяющих принципов, относящихся к нек-рым классам (так или иначе идеализированных) материалов, указывающих выбор независимых параметров состояния и уточняющих (в достаточно общем виде) структуру соотношений $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$, аналитич. исследование свойств функционалов пластичности, выяснение классов процессов, допускающих более простое математич. описание в рамках общих соотношений (см. [1], [11]). *Большое* значение для теории и экспериментального исследования имеет развитие теории представления функционалов. Результаты этой теории позволяют, в частности, устанавливать физич. достоверность уравнения состояния сложной функциональной структуры по анализу явлений, сравнительно легко воспроизводимых в натуре.

Лит.: [1] Ильюшин А. А., Пластичность. Основы общей математической теории, М., 1963; [2] Ильюшин А. А., Ленский В. С., Модель и алгоритм, «Прикладные проблемы прочности и пластичности», 1975, № 1 (Горький); [3] Ильюшин А. А., Пластичность, ч. 1— Упруго-пластические деформации, М.— Л., 1948; [4] Биргер И. А., «Прикл. матем. и механ.», 1951, т. 15, № 6, с. 765—70; [5] Москвитин В. В., Пластичность при переменных нагружениях, М., 1965; [6] Койтер В. Т., Общие теоремы теории упруго-пластических сред, пер. с англ., М., 1961; [7] Соколовский В. В., Теория пластичности, 3 изд., М., 1969; [8] Хилл Р., Математическая теория пластичности, пер. с англ., М., 1956; [9] Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А., Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках, М., 1961; [10] Васин Р. А., Ленский В. С., Ленский Э. В., Динамические зависимости между напряжениями и деформациями, в кн.: Проблемы динамики упруго-пластических сред, М., 1975; [11] Трусделл К., Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред, пер. с англ., М., 1975.

В. С. Ленский.

ПЛАТО ЗАДАЧА — задача нахождения *минимальной поверхности* (м. п.) с заранее заданной границей Г. Впервые такая задача была поставлена Ж. Лагранжем (J. Lagrange, 1760), к-рый свел ее в классе поверхностей вида $z=z(x, y)$ к решению уравнения Эйлера — Лагранжа м. п. После опытов Ж. Плато (J. Plateau, 1849), в к-рых он показал, что м. п. могут быть получены в виде мыльных пленок, натянутых на проволочные каркасы (см. [1]), эту задачу стали называть з а д а ч е й П л а т о.

В строгой постановке П. з. требует ряд дополнительных уточнений, относящихся к искомой м. п. и к ее границе. Напр., должно ли искомое решение быть регулярной м. п. или же его можно искать среди обобщенных минимальных поверхностей (о. м. п.); обязательно ли искомая поверхность должна реализовать абсолютный минимум площади; каков должен быть конформный или топологич. тип поверхности; в каком смысле понимать границу поверхности, и т. п. В зависимости от постановки задачи, ее решения и свойства этих решений (существование, единственность, регулярность и т. д.) могут быть существенно различными.

В течение 19 в. П. з. была решена для нек-рых частных видов заданной границы Г, главным образом для различных полигональных контуров. В 1928 было доказано существование решения П. з. для о. м. п. типа круга, представляемой формулами Вейерштрасса и ограниченной заданной незаузленной жордановой кривой. В 1931 дано решение П. з. в следующей формулировке: пусть Г — жорданова кривая в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, тогда в $\mathbb{R}^n$ существует о. м. п., заданная в изотермич. координатах (u, v) радиус-вектором $r=r(u, v)$, непрерывным в круге $|w|\leqslant 1$, $w=u+iv$, и гомеоморфно отображающим окружность $|w|=1$ на Г; при этом площадь этой о. м. п. оказывается наименьшей среди всех непрерывных поверхностей типа круга, натянутых на контур Г, в предположении, что на Г можно натянуть хотя бы одну такую поверхность конечной площади.

После решения П. з. в 1931 для односвязной поверхности Дж. Дуглас (J. Douglas) поставил вопрос (т. н. з а д а ч а Д у г л а с а) о существовании в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, м. п., имеющей заданный топологич. тип (т. е. заданную эйлерову характеристику и характер ориентируемости) и ограниченной заданным контуром Г, состоящим из объединения $k\geqslant 1$ жордановых кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$. В 1936—40 были даны достаточные условия разрешимости этой задачи, одно из к-рых заключается в возможности натянуть на Г какую-нибудь поверхность данного топологич. типа, площадь к-рой была бы меньше, чем площадь любой поверхности с меньшей эйлеровой характеристикой, натянутой на тот же контур. В такой постановке П. з. была рассмотрена и решена также в римановом пространстве.

В нач. 60-х гг. 20 в. было достигнуто большое продвижение и в решении П. з. для k-мерных поверхностей, $k\geqslant 3$. Было предложено несколько обобщений П. з., основанных на новых определениях понятий поверхности, границы и площади. Одно из обобщений исходит из следующего определения понятия поверхности X и ее границы L в $\mathbb{R}^n$. Пусть имеются компакт $X\subset\mathbb{R}^n$ и компакт $A\subset X$, G — абелева группа и $k\geqslant 1$ — целое число; тогда определены группы гомологий Чеха — Александрова $H_{k-1}(A, G)$ и $H_{k-1}(X, G)$; ядро гомоморфизма i_*: $H_{k-1}(A, G)\to H_{k-1}(X, G)$, индуцированного вложением $i: A\to X$, наз. алгебраич. границей компакта X (в размерности k) по отношению к A. Если L — подгруппа группы $H_{k-1}(A, G)$, то X является поверхностью с границей $\supset L$, если L принадлежит алгебраич. границе компакта X; под площадью компакта X в $\mathbb{R}^n$ понимается его k-мерная хаусдорфова (сферическая) мера Λ^k. При таких определениях доказаны

существование и регулярность почти всюду (топологическая локально евклидовость и аналитичность) компакта X_0, реализующего минимум меры Λ^k по всем компактам X с заданной границей L. Впоследствии эти теоремы были распространены на случай поверхностей X в римановом пространстве.

Другие предложенные обобщения П. з., в частности обобщение в терминах интегральных потоков, являются в нек-ром смысле эквивалентными постановке П. з. в терминах гомологий.

В классич. постановке *Плато многомерная задача* решена в 1969; а именно, доказана теорема: если в римановом пространстве V^n задано $(k-1)$-мерное подмногообразие Γ, $k \geqslant 3$, то существует поверхность, реализующая минимум хаусдорфовой меры Λ^k среди всех параметризуемых поверхностей X, являющихся в V^n непрерывными f-образами k-мерных гладких многообразий M с краем, гомеоморфным Γ при отображении $f : M \to V^n$.

Наряду с вопросами разрешимости П. з. интересными являются также вопросы единственности и регулярности ее решения. Наиболее продвинуто исследование вопроса о регулярности решения. Показано, что решение П. з., данное Дугласом в $\mathbb{R}^3$, не содержит внутренних точек ветвления. Для случая многомерной П. з. доказана регулярность решения почти всюду, причем возможность наличия нерегулярных точек подтверждается примерами. Что касается единственности решения П. з., то здесь известны лишь нек-рые достаточные признаки единственности (напр., решение П. з. единственно, если заданный контур Γ имеет однозначную выпуклую проекцию при центральном или параллельном проектировании на нек-рую плоскость). Чтобы подчеркнуть сложность этого вопроса, достаточно сказать, что есть основания ожидать существование спрямляемых контуров, стягивающих континуум м. п. типа круга.

Лит.: [1] Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd 3, H. 2/3, Lpz., 1903; [2] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces..., 2 éd., pt. 1, P., 1914; [3] Bianchi L., Vorlesungen über Differentialgeometrie, 2 Aufl., Lpz.—B., 1910; [4] Курант Р., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, пер. с англ., М., 1953; [5] Morrey C., «Ann. Math.», 1948, v. 49, № 4, p. 807—51; [6] Rado T., On the problem of Plateau, B., 1933; [7] Ниче И. С. С., «Математика», 1967, т. 11, № 3, с. 37—100; [8] Осс ерман Р., там же, 1971, т. 15, № 2, с. 104—25; [9] Фоменко А. Т., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1972, т. 36, с. 1049—1079; [11] Nitsche J. C. C., «Invent. math.», 1969, v. 8, N 4, p. 313—33; [12] Осс ерман Р., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 4, с. 55—136; [13] Federer H., Geometric measure theory, B.— [u. a.], 1969; [14] Morrey C., Multiple integrals in the calculus of variations, B.— [u. a.], 1966. *И. Х. Сабитов.*

ПЛАТО МНОГОМЕРНАЯ ЗАДАЧА — термин, обозначающий серию задач, связанных с изучением экстремалей и глобальных минимумов функционала k-мерного объема vol_k, определенного на k-мерных обобщенных поверхностях, вложенных в n-мерное риманово пространство M^n и удовлетворяющих тем или иным граничным условиям.

В истории развития указанной вариационной задачи (см. *Плато задача*) выделяются несколько периодов, характеризующихся различными подходами к понятиям «поверхности», «границы», «минимизации» и, соответственно, методами получения минимального решения. Многомерная задача Плато формулируется так. Пусть $A^{k-1} \subset M^n$ — фиксированное замкнутое гладкое $(k-1)$-мерное подмногообразие в римановом пространстве M^n и пусть $X(A)$ — класс всех таких пленок (поверхностей) $X \subset M^n$, имеющих границей многообразие A, причем каждая пленка $X \in X(A)$ допускает непрерывную параметризацию (представима в виде образа нек-рого многообразия с краем), т. е. $X = f(W)$, где W — нек-рое k-мерное многообразие с краем ∂W, гомеоморфным A, а $f : W \to M^n$ —

непрерывное отображение, совпадающее с фиксированным гомеоморфизмом на крае ∂W, то есть $f : \partial W \xrightarrow{\cong} A$. Вопрос: можно ли найти в классе $X(A)$ пленку X_0, к-рая была бы в каком-либо разумном смысле минимальной, напр. чтобы ее k-мерный объем был наименьшим по сравнению с k-мерными объемами других пленок X из этого же класса? Оказалось, что перенесение классич. «двумерных» методов на многомерный случай наталкивается на серьезные трудности. Это привело к тому, что классич. постановка П. м. з. была на время оставлена и задача была сформулирована в иных (гомологических) терминах. Если отбросить понятие многообразия-пленки с краем $\partial W = A$ и сильно расширить понятие пленки и ее границы, ослабив связь пленки с ее границей (в частности, если рассматривать непараметризованные пленки), отбросив условие $X = f(W)$, то П. м. з. может быть сформулирована на языке обычных целочисленных гомологий H_*: найти минимальную пленку X_0, аннулирующую фундаментальный цикл $[A] \in H_{k-1}(A)$ многообразия A (в предположении, что A ориентируемо), т. е. $i_*[A] = 0$, $i_* : H_{k-1}(A) \to H_{k-1}(X)$, где i_* — гомоморфизм, индуцированный вложением $i : A \to X$. Для решения П. м. з. в этой новой расширенной постановке был разработан (см. [1], [2]) геометрич. подход, при к-ром минимизировался функционал k-мерной хаусдорфовой меры (объема), определенный на k-мерных измеримых компактах (поверхностях) в M^n, и развита (см. [3], [4]) теория интегральных потоков и варифолдов, носителями к-рых являются k-спрямляемые подмножества в M^n. Однако указанное расширение понятия границы пленки в терминах гомологий H_* (то есть $k-1$-мерное многообразие A считается границей k-мерной пленки W, если при вложении $A \to W$ фундаментальный цикл $[A]$ аннулируется) означает отход классич. постановки П. м. з., так как, располагая теоремой существования минимального решения в гомологич. классе $X(A)$, по-прежнему ничего нельзя сказать о существовании минимального решения в классе всех пленок, являющихся непрерывными образами многообразий с краем, т. е. допускающих параметризацию. *Дело в том, что если многообразие A* гомологично нулю (как цикл) в пленке X_0, то X_0 не обязательно допускает представление в виде $X_0 = f(W_0)$, где W_0 — нек-рое k-мерное многообразие с краем.

В классич. постановке, т. е. в терминах пленок вида $X = f(W)$, где W суть k-мерные многообразия с краем A, П. м. з. была решена (см. [5], [6]). При этом было замечено, что классическая П. м. з. допускает эквивалентную формулировку на языке *бордизмов*. Пусть V есть $(k-1)$-мерное компактное ориентированное замкнутое многообразие, $f : V \to M^n$ — непрерывное отображение; пара (V, f) наз. с и н г у л я р н ы м б о р д и з м о м M^n. Два бордизма (V_1, f_1) и (V_2, f_2) наз. э к в и в а л е н т н ы м и, если существует k-мерное ориентированное многообразие W с краем $\partial W = V_1 \cup (-V_2)$ (где $-V_2$ означает V_2 с обратной ориентацией) и непрерывное отображение $F : W \to M^n$ такое, что $F|_{V_1} = f_1$, $F|_{V_2} = f_2$. Бордизм (V, f) эквивалентен нулю, если $V = \partial W = V_1$, $V_2 = \phi$. Классы эквивалентности сингулярных бордизмов образуют абелевы группы, к-рые после выполнения процесса стабилизации образуют одну из обобщенных теорий гомологий (теорию бордизмов). П. м. з. формулируется (на этом языке) так: а) можно ли среди всех пленок $X \subset M$, $A \subset X$ и обладающих тем свойством, что сингулярный бордизм (A, i) (где $i : A \to X$ — вложение) эквивалентен нулю в X, найти X_0 с наименьшим объемом $\mathrm{vol}_k X_0$? б) Можно ли среди всех сингулярных бордизмов (V, g) (где $g : V \to M^n$), эквивалентных данному бордизму (V', g'), найти такой бордизм (V_0, g_0), чтобы объем

пленки $g_0(X_0)\subset M^n$ был бы наименьшим? Положительный ответ на эти вопросы см. в [5], [6], [13].

Классическая П. м. з. значительно отличается от ее гомологич. варианта. На рис. 1 показаны контур $A=S^1$ и пленка X, стремящаяся занять в $\mathbb{R}^3$ положение, соответствующее наименьшей площади. В некрый момент наступит склейка, схлопывание пленки,

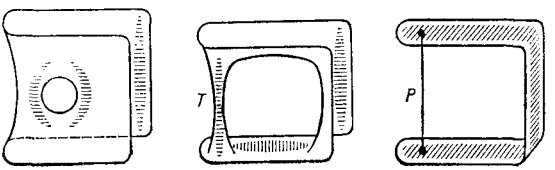


Рис. 1.

в результате чего вместо двумерной трубки T появится одномерный отрезок P. В двумерном случае отрезок P может быть непрерывно отображен в двумерный диск, заклеивающий A. В многомерном случае описанный эффект появления у минимальной пленки зон меньших разномерностей присутствует еще в большей степени, причем если в двумерном случае все такие куски P, $\dim P\leqslant k-1$, можно было отобразить без потери параметризующих свойств пленки X_0 в k-мерную (двумерную) часть этой пленки, то при $k>2$ эти зоны меньшей размерности, в общем случае, неустранимы (если мы хотим сохранить топологич. свойство пленки X_0, аннулирующей бордизм (A, i)). В силу тех же причин зоны меньшей размерности не могут быть отброшены, так как k-мерная часть $X^{(k)}$ пленки X может вообще не допускать непрерывной параметризации и, тем самым, вообще говоря, не аннулирует бордизм (A, i). Это показывает необходимость введения стратифицированного объема пленки X, составленного из объемов всех ее зон $X^{(i)}$, то есть $(\mathrm{vol}_k X^{(k)}, \mathrm{vol}_{k-1}X^{(k-1)}, \ldots)$. Теорема, являющаяся решением П. м. з., формулируется так (см. [5], [6]): существует глобально минимальная поверхность, минимизирующая стратифицированный объем.

Следствие: для любого фиксированного $(k-1)$-мерного ориентированного гладкого замкнутого подмногообразия A в римановом пространстве M^n (в том случае, когда $X(A)\neq\phi$) существует глобально минимальная поверхность $X_0=f_0(W_0)$, аннулирующая бордизм (A, i) (в частности, k-мерный объем пленки X_0 не больше k-мерного объема любой пленки вида $X=f(W)$), см. [5], [13]. Более того, пленка X_0 минимальна в каждой своей размерности $s\leqslant k$; если $X^{(s)}$ — часть пленки X, имеющая размерность s, то $X^{(s)}$ содержит подмножество $Z^{(s)}$, s-мерный объем к-рого равен нулю, а дополнение $X^{(s)}\setminus Z^{(s)}$ является открытым s-мерным всюду плотным в $X^{(s)}$ аналитич. подмногообразием в M^n. Здесь $Z^{(s)}$ — множество сингулярных точек в размерности s.

Этот результат является частным случаем общей теоремы существования и почти всюду регулярности глобально минимальной поверхности, доказанной (см. [5], [6], [13] для любой обобщенной теории (ко)гомологией и для любого набора краевых условий. Кроме того, такая поверхность существует и в каждом стабильном гомотопич. классе. Вот пример вариационной задачи, сформулированной и получившей решение в когомологич. терминах. Пусть ξ — стабильно нетривиальное векторное расслоение на компактном римановом пространстве M^n; пусть $X(\xi)$ — класс всех таких поверхностей $X\subset M^n$, что ограничение $\xi|_X$ расслоения ξ на X стабильно нетривиально (т. е. X — носитель ξ). Тогда всегда существует глобально минимальная поверхность $X_0\in X(\xi)$, имеющая наимень-

ший объем в классе $X(\xi)$. Общая теорема существования может быть сформулирована и доказана также и на языке интегральных потоков, для чего следует ввести фильтрованные потоки, состоящие из потоков различных размерностей. На этом пути было затем получено решение П. м. з. в классах гомотопий [14].

В сфере задач, окружающих П. м. з., выделяются исследования конкретных аналитич. и топологич. свойств глобально минимальных поверхностей. Напр., актуальна задача предъявления конкретных поверхностей в римановых пространствах. Так, напр., известно (см. [3]), что комплексные алгебраич. подмногообразия в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$ — глобально минимальные поверхности. Этот результат носит ярко выраженный комплексный характер. В случае вещественных подмногообразий долгое время отсутствовали какие-либо методики обнаружения конкретных глобально минимальных поверхностей. Первым результатом (см. [6]) в этом направлении, учитывающим их топологию, была методика, применение к-рой позволило доказать, что каждому компактному риманову пространству M^n можно сопоставить универсальную функцию $\Omega_x(k)$, где $x \in M^n$, k — целое число, $1 \leqslant k \leqslant n$. Если X_0 — глобально минимальная поверхность, реализующая нетривиальный (ко)цикл в $H_k(M^n)$, то $\mathrm{vol}_k X_0 \geqslant \Omega_x(k)$ для любой точки $x \in X_0$. Если $M = G/H$ — однородное пространство, то $\Omega_x(k) \equiv \Omega(k)$ не зависит от точки x. Функция $\Omega_x(k)$ вычисляется в явном виде и дает общую оценку снизу на объемы всех k-мерных (ко)циклов в M^n. Оценка эта в общем случае неулучшаема, т. е. существуют бесконечные серии глобально минимальных X_0, для к-рых $\mathrm{vol}_k X_0 = \Omega(k)$. Для симметрич. пространств получено (см. [6], [13], [15]) полное описание всех таких поверхностей, для к-рых $\mathrm{vol}_k X_0 = \Omega(k)$. Разработаны (см. [11], [12], [14], [15]) дальнейшие методики получения конкретных глобально минимальных поверхностей. В различных задачах вариационного исчисления, топологии, алгебраич. геометрии, комплексного анализа возникает следующая ситуация: а) дано многообразие M^n и его «исчерпание» n-мерными областями D_r, расширяющимися с ростом параметра r; б) в M^n фиксирована глобально минимальная поверхность X^k; в) ставится вопрос: с какой скоростью растет $\mathrm{vol}_k(X^k \cap D_r)$, рассматриваемый как функция от r? К этому вопросу сводятся, напр., задачи о вычислении $\Omega_x(k)$, задачи о структуре базисов в пространствах целых функций, теоремы типа Штолля (см. [11]) и т. д. Оказывается (см. [6], [15]), существует универсальная точная эффективно вычислимая оценка снизу на скорость роста $\mathrm{vol}_k(X^k \cap D_r)$, из к-рой, как частные случаи, получаются явные формулы для $\mathrm{vol}_k X^k$, где X^k — глобально минимальная поверхность. Напр., объем такой поверхности, заключенной в шаре $B^n \subset \mathbb{R}^n$ и проходящей через центр шара (и имеющей границу на границе шара), всегда не меньше стандартного k-мерного шара B^k (плоского сечения), проходящего через центр B^n (см. [13], [15]).

В особое направление выделилась П. м. з. «коразмерности один»: рассматриваются глобально минимальные поверхности коразмерности 1 в $\mathbb{R}^n$. Так, напр., решена (см. [7]) п р о б л е м а Б е р н ш т е й н а: пусть V^{n-1} — гладкое полное локально минимальное подмногообразие в $\mathbb{R}^n$, допускающее взаимно однозначную проекцию на нек-рую гиперплоскость, т. е. V^{n-1} задается графиком функции f, определенной на $\mathbb{R}^{n-1}$; верно ли, что f — линейная функция? При $3 \leqslant n \leqslant 8$ ответ положителен (см. [8]). Минимальность таких гиперповерхностей тесно связана с минимальностью конусов в $\mathbb{R}^n$: из существования локально минимальной поверхности следует существование минимального конуса CM^{n-2}, т. е. поверхности, составленной из точек радиусов, идущих из точки $O \in \mathbb{R}^n$ в

точки $x \in M^{n-2}$, где M^{n-2} — локально минимальная поверхность в сфере S^{n-1}. Установлено (см. [8]), что если M^{n-2} — замкнутое локально минимальное подмногообразие (т. е. обращающее в нуль оператор Эйлера) в S^{n-1}, не являющееся экватором $S^{n-2} \subset S^{n-1}$, то при $n \leqslant 7$ конус CM^{n-2} (с основанием M^{n-2} и вершиной в центре сферы) не минимизирует $(n-1)$-мерный объем vol_{n-1} (при фиксированной границе M^{n-2}), т. е. существует вариация (носитель к-рой сосредоточен около центра сферы), уменьшающая объем конуса. Отсюда и выводится линейность функции f при $n \leqslant 8$. При $n \geqslant 9$ ответ на вопрос отрицателен: существуют (см. [7] локально (и даже глобально) минимальные поверхности $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, задаваемые как графики нелинейных функций. Построение осуществляется явно; при этом обнаружилось, что конусы, задаваемые в $\mathbb{R}^{2m}$ уравнением

$$x_1^2 + \ldots + x_m^2 = x_{m+1}^2 + \ldots + x_{2m}^2, \qquad (*)$$

являются глобально минимальными поверхностями при фиксированной границе $V = S^{m-1} \times S^{m-1}$, $m \geqslant 4$. Эти конусы — частный случай конусов более общего вида, являющихся глобально минимальными поверхностями (см. [10]).

Развивается новое направление в П. м. з. — так наз. эквивариантные многомерные задачи Плато. Среди глобально минимальных поверхностей естественно выделен класс пленок, переходящих в себя при действии нек-рой группы симметрий (см. [9], [10]). Пусть G — компактная связная группа Ли, гладко действующая на M^n изометриями и расслаивающая его на орбиты $G(x)$, $x \in M^n$. Тогда для нахождения глобально минимальных поверхностей X^k в M^n, инвариантных относительно G, достаточно перейти к факторпространству $P = M^n/G$ и снабдить P римановой метрикой вида

$$dl_p = v^{1/p} d\tilde{s},$$

где $v = \mathrm{vol} G(x)$, а

$$p = \dim X^k - \dim G(x) = k - \dim G(x)$$

(здесь через $\dim G(x)$ обозначена размерность орбиты общего положения в M^n), $d\tilde{s}$ — естественная метрика-проекция, возникающая на P при изометрич. действии G. Для нахождения глобально минимальных поверхностей в M^n, инвариантных относительно G, достаточно описать таковые в M^n/G, снабженном метрикой dl_p (см. [9]), так что получается редукция П. м. з. на M^n к П. м. з. на M^n/G меньшей размерности. Эта методика позволила получить серии конкретных глобально минимальных поверхностей, обладающих большими группами симметрии (см. [13]). В частности, «конусы Саймонса», задаваемые уравнением (*), изображаются отрезком OD (см. рис. 2) на двумерном факторе

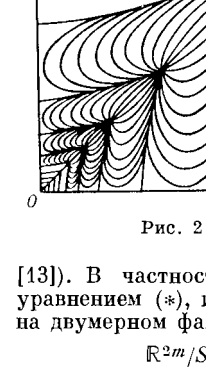


Рис. 2.

$$\mathbb{R}^{2m}/SO_m \times SO_m = (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0),$$

снабженном метрикой

$$(xy)^{2(2m-2)}(dx^2 + dy^2)$$

и являющемся первым квадрантом K на плоскости $\mathbb{R}^2$ (см. [13]). Для нахождения глобально минимальной поверхности с границей

$$S^{m-1} \times S^{m-1} = G(D),\ G = SO_m \times SO_m$$

достаточно найти геодезические, идущие из D на границу K и имеющие наименьшую длину. На рис. 2 показан пучок геодезических, исходящих из точки D; этот пучок можно понимать как пучок световых лучей, распространяющихся из источника D в прозрачной среде, заполняющей K с показателем преломления $(xy)^{2m-2}$. При $m<\frac{5}{2}+\sqrt{2}$ наряду с поверхностью OD существует еще одно минимальное решение меньшей длины, изображаемое геодезической OQ; это означает, что конус Саймонса — не глобально минимальная поверхность. С ростом m точка Q стремится к O, и при $m>\frac{5}{2}+\sqrt{2}$ существует единственная геодезическая, соединяющая D с границей квадранта, т. е. конус Саймонса — глобально минимальная поверхность (см. [13]).

Лит.: [1] Morrey Ch., Multiple integrals in the calculus of variations, B., 1966; [2] Reifenberg E., «Acta Math.», 1960, t. 104, № 1/2, p. 1—92; [3] Federer H., Geometric measure theory, B., 1969; [4] Almgren E. J., «Ann. Math.», 1968, v. 87, № 2, p. 321—91; [5] Фоменко А. Т., «Матем. сб.», 1972, т. 89, № 3, с. 475—519; [6] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1972, т. 36, № 5, с. 1049—79; [7] Bombieri E., De Giorgi E., Giusti E., «Invent. Math.», 1969, v. 7, fasc. 3, p. 243—268; [8] Simons J., «Ann. Math.», 1968, v. 88, № 1, p. 62—105; [9] Lawson H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1972, v. 173, № 446, p. 231—49; [10] Lawson H., Simons J., «Ann. Math.», 1973, v. 98, № 3, p. 427—50; [11] Фоменко А. Т., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 3, с. 667—81; [12] Дао Чонг Тхи, там же, 1980, т. 44, № 5, с. 1031—65; [13] Фоменко А. Т., «Тр. Семинара по вект. и тенз. анализу...», 1974, в. 17, с. 3—176; 1978, в. 18, с. 4—93; [14] Дао Чонг Тхи, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1978, т. 42, в. 3, с. 500—05; [15] Фоменко А. Т., там же, 1981, т. 45, № 1, с. 187—213.

А. Т. Фоменко.

ПЛАТОНА ТЕЛА — названия пяти выпуклых *правильных многогранников*: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Многогранники названы по имени Платона, к-рый в соч. «Тимей» (4 в. до н. э.) придавал им мистич. смысл; были известны до Платона.

ПЛЕСНЕРА ТЕОРЕМА — один из основных результатов в теории *граничных свойств аналитических функций*. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в единичном круге $D=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$, $\Delta=\Delta(e^{i\theta})$ — открытый угол с вершиной $e^{i\theta}$ на окружности $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}$, образованный двумя хордами круга D, проходящими через $e^{i\theta}$. Точка $e^{i\theta}$ наз. точкой Плеснера (или $e^{i\theta}$ обладает свойством Плеснера), если в любом сколь угодно малом угле Δ для любого значения w из расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ существует последовательность $\{z_k\}\subset\Delta$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} z_k=e^{i\theta},\quad \lim_{k\to\infty} f(z_k)=w.$$

Точка $e^{i\theta}$ наз. точкой Фату для $f(z)$, если существует один единственный предел

$$\lim_{z\to e^{i\theta}} f(z)=A,$$

когда z стремится к $e^{i\theta}$ внутри любого угла Δ. Теорема Плеснера: почти все точки окружности Γ по мере Лебега на Γ являются либо точками Фату, либо точками Плеснера. Доказана А. И. Плеснером (см. [1]).

Известно также, что множество $P(f)$ всех точек Плеснера имеет тип G_δ на Γ. Построены примеры аналитич. функций в D, для к-рых множество $P(f)$ плотно на Γ и имеет любую наперед заданную меру Лебега $\mathrm{mes}\, P(f)=m$, $0\leqslant m<2\pi$ (см. [3]). П. т. верна для мероморфных функций $f(z)$ в любой односвязной области D со спрямляемой границей Γ. В этом случае $\zeta\in\Gamma$ есть точка Фату, если существует предел

$$\lim_{z\to\zeta} f(z)=A,\quad z\in D,$$

при стремлении $z \to \zeta$ по любому некасательному пути; определение точки Плеснера $\zeta \in \Gamma$ нужно изменить так, чтобы рассматривались углы Λ с вершиной ζ и сторонами, образующими углы, меньшие $\pi/2$, с нормалью к Γ в точке ζ (см. [2]).

Аналогом П. т. в терминах категории множеств является *Мейера теорема*.

Лит.: [1] Плеснер А. И., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 1, с. 125—36; [2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М. — Л., 1950; [3] Ловатер Д ж., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259. *Е. Д. Соломенцев.*

ПЛОСКАЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КРИВАЯ — множество точек L действительной аффинной плоскости, координаты к-рых удовлетворяют уравнению

$$f(x,\ y)=0, \qquad (1)$$

где $f(x,\ y)$ — многочлен степени n от координат x, y; число n наз. п о р я д к о м кривой L. Если многочлен f приводим, т. е. разлагается на множители $f_1, \ldots, f_k$, то определяемая уравнением (1) кривая L наз. п р и в о д и м о й и является объединением кривых $L_1, \ldots, L_k$ (к о м п о н е н т L), задаваемых соответственно уравнениями

$$f_1=0, \ \ldots, \ f_n=0.$$

Если же многочлен f неприводим, то кривая L наз. н е п р и в о д и м о й. Две неприводимые П. д. а. к., одна из к-рых имеет порядок n, а другая — порядок m, пересекаются не более чем в mn точках (т е о р е м а Б е з у).

Одна и та же П. д. а. к. L может определяться различными уравнениями. Пусть I_L — совокупность многочленов, обращающихся в нуль во всех точках кривой L. Если L неприводима, то из того, что $fg=0$ на L, следует равенство нулю f или g; в этом случае факторкольцо $K(L)=K/I_L$ (здесь K — кольцо всех многочленов) не имеет делителей нуля и наз. к о л ь ц о м м н о г о ч л е н о в на L.

С неприводимой П. д. а. к. L ассоциируется также нек-рое поле $K(L)$, наз. п о л е м р а ц и о н а л ь н ы х ф у н к ц и й на L. Оно состоит из рациональных функций $\frac{p(x,\ y)}{q(x,\ y)}$, причем q не делится на f, рассматриваемых с точностью до равенства на L $\left(\frac{p}{q}\right.$ и $\left.\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}\right.$ наз. равными на кривой L, заданной уравнением (1), если многочлен $p\tilde{q}-\tilde{p}q$ делится на f). Поле $K(L)$ является полем частных кольца $K(L)$.

Отображение $F:\ (x,\ y) \to \varphi(x,\ y),\ \psi(x,\ y)$ плоскости в себя наз. р е г у л я р н ы м на П. д. а. к. L, если $\varphi,\ \psi \in K(L)$. Кривые L и M наз. и з о м о р ф н ы м и, если существуют регулярные (соответственно на L и на M) отображения $F: L \to M$ и $G: M \to L$, обратные друг другу; при этом кольца $K(L)$ и $K(M)$ изоморфны. В частности, изоморфны аффинно эквивалентные кривые.

Более общим является р а ц и о н а л ь н о е о т о б р а ж е н и е кривой L в кривую M, осуществляемое рациональными функциями. Оно устанавливает соответствие между всеми точками кривых, кроме конечного их числа, и определяется так. Пусть $f=0$ и $g=0$ — уравнения кривых L и M соответственно, тогда рациональное отображение F задается такой парой рациональных функций φ и ψ, определенных на L, что $g(\varphi,\ \psi)=0$ на M. Кривые L и M наз. б и р а ц и о н а л ь н о э к в и в а л е н т н ы м и, если существуют рациональные отображения L в M и M в L, обратные друг другу; при этом поля $k(L)$ и $k(M)$ оказываются изоморфными. Такие рациональные отображения наз. б и р а ц и о н а л ь н ы м и, или к р е м о н о в ы м и, преобразованиями. Все кремоновы преобразования на

плоскости могут быть осуществлены последовательным проведением преобразований вида $x \to \frac{1}{x}$, $y \to \frac{1}{y}$. Бирациональная эквивалентность — более грубое отношение, чем изоморфизм, однако классификация П. д. а. к. с этой точки зрения оказывается проще и обозримее.

Простейшим примером рационального отображения является *проективное преобразование*. Важную роль играет дуальное отображение неприводимой кривой L, отличной от прямой, в кривую L^*, дуальную L, определяемое формулами:

$$u = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}}, \quad v = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}}, \qquad (2)$$

где f — многочлен, определяющий L. Уравнение

$$g(u, v) = 0,$$

определяющее кривую L^*, получается исключением x, y из уравнений (1), (2). Вследствие связи дуального отображения с касательным преобразованием саму кривую L^* в ряде случаев можно представлять как огибающую семейства прямых, касательных к L.

Порядок L^* наз. к л а с с о м n^* кривой L. Отношение дуальности взаимно, т. е. $L^{**} = L$, и является отражением *двойственности принципа* проективной геометрии.

Точка x П. д. а. к. L, заданной уравнением (1), наз. о с о б о й т о ч к о й, если в ней $\operatorname{grad} f = 0$. Анализ особенностей является необходимым элементом исследования кривой L, однако полная классификация особенностей еще далека от завершения (1983).

Если все производные многочлена f до $(r-1)$-го порядка включительно в точке x равны нулю, а хотя бы одна производная r-го порядка отлична от нуля в x, то x наз. т о ч к о й к р а т н о с т и r и притом обыкновенной, если в ней существуют r различных касательных. Примеры особых точек:

1) $x^3 - x^2 + y^2 = 0$; $(0, 0)$ — обыкновенная двойная точка, точка самопересечения;

2) $x^2 + x^3 + y^2 = 0$; $(0, 0)$ — изолированная точка;

3) $x^3 + y^2 = 0$; $(0, 0)$ — точка заострения, возврата;

4) $2x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 + y^4 = 0$; $(0, 0)$ — точка самоприкосновения.

Неособая точка x П. д. а. к. L, заданной уравнением (1), наз. т о ч к о й п е р е г и б а, если в ней

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Другими словами, точки перегиба — это точки пересечения кривой L и кривой H, задаваемой уравнением (3) и называемой г е с с и а н о й кривой L. Точкам перегиба кривой L соответствуют на дуальной кривой L^* точки возврата.

Для всякой П. д. а. к. имеет место соотношение (Ф. Клейн, F. Klein, 1876):

$$n + 2d + r = n^* + 2d^* + r^*,$$

где n — порядок L, n^* — класс L, r^* — число точек перегиба L, d^* — число изолированных двойных касательных к L (двойных точек L^*), r — число точек возврата L (точек перегиба L^*), d — число двойных точек L. См. также *Плюккера формулы*.

Любая неприводимая плоская кривая L бирационально эквивалентна неприводимой кривой L_0, имеющей лишь обыкновенные особенности.

Р о д (или ж а н р) П. д. а. к. L определяется числом p, являющимся разностью между наибольшим числом двойных точек, к-рые может иметь L, и их фактич. числом. Род p и порядок n кривой L связаны соотношением

$$2p = n(n-1) - \sum r_i(r_i-1),$$

где суммирование распространяется на точки кратности r_i.

Кривые нулевого рода (наз. также р а ц и о н а л ь н ы м и, у н и к у р с а л ь н ы м и) обладают важным свойством, а именно: координаты точки, движущейся по такой кривой, могут быть выражены рациональными функциями ξ, η нек-рого параметра t. Другими словами, кривые рода нуль бирационально эквивалентны прямой. Уникурсальные кривые имеют важные применения. Пусть, напр., уравнение такой кривой определяет y как алгебраич. функцию от x; тогда для любой рациональной функции $g(x, y)$ неопределенный интеграл

$$\int g(x, y)dx$$

может быть выражен через элементарные функции.

Кривые рода 1, тесно связанные с *эллиптическими функциями*, бирационально эквивалентны кривой 3-го порядка без особенностей. Нек-рые кривые рода $p>1$ (т. н. г и п е р э л л и п т и ч е с к и е) бирационально эквивалентны кривой порядка $p+2$, имеющей единственную особую точку кратности p.

Род p является бирациональным инвариантом, однако две кривые, имеющие один и тот же род, не обязательно бирационально эквивалентны.

Полная классификация кривых порядка $n \geqslant 4$ еще (1983) не получена. Неприводимая кривая 2-го порядка является либо пустым множеством, либо эллипсом, либо гиперболой, либо параболой (см. *Линия второго порядка*). Эти кривые неособенны и уникурсальны.

Первая классификация кривых 3-го порядка была предложена И. Ньютоном (I. Newton, 1704), к-рый положил тем самым начало систематич. исследованию П. д. а. к. В основе ее лежит подразделение кривых 3-го порядка на классы в зависимости от количества и характера бесконечных ветвей. Уравнение кривой надлежащим выбором координатной системы приводится к одной из четырех канонич. форм A, B, C, D, которые затем разделяются на классы, подклассы и типы (см. схему).

У каждой кривой 3-го порядка L есть либо (единственная) двойная точка, и тогда L уникурсальна, либо точка перегиба, быть может находящаяся на бесконечности; если есть три точки перегиба, то они лежат на одной прямой; более трех точек перегиба быть не может.

Пополнение аффинной плоскости несобственными элементами приводит к проективной плоскости, на к-рой П. д. а. к. определяется уравнением

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0,$$

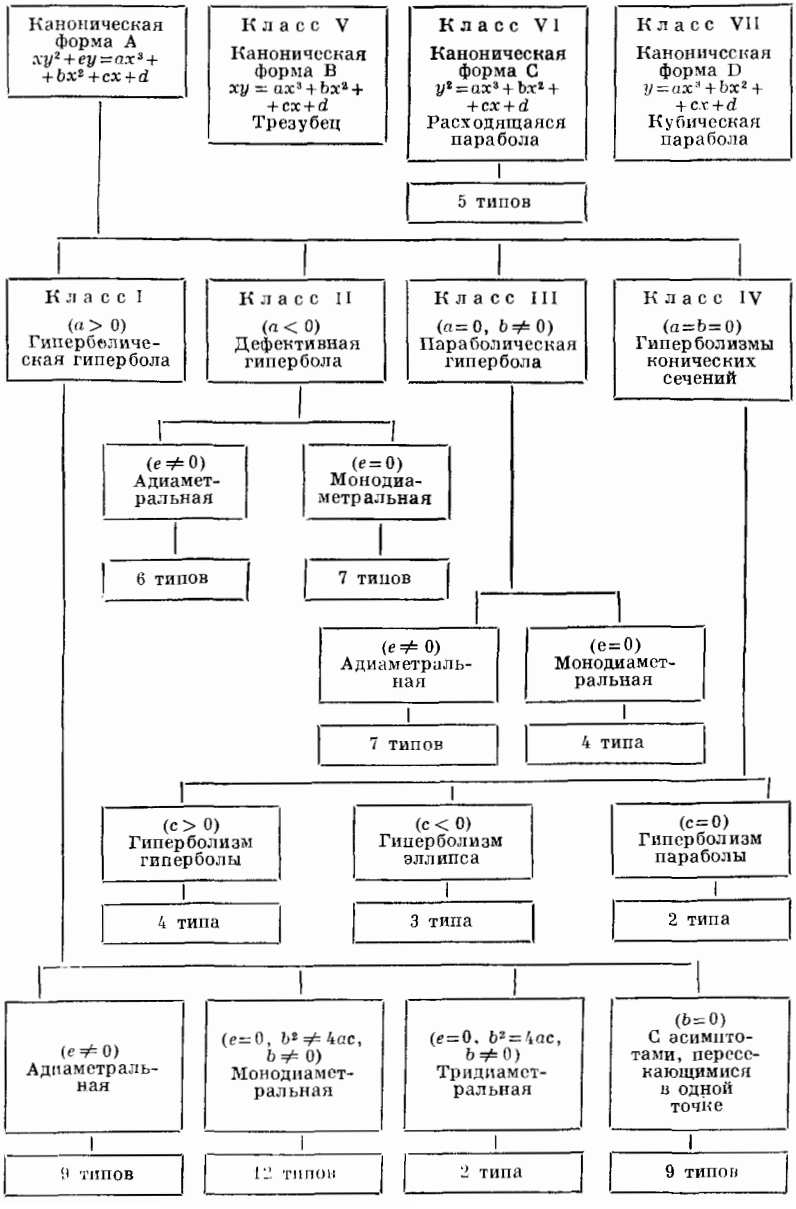
где F — однородный многочлен степени n от проективных координат x^1, x^2, x^3. Проективная классификация кривых проще; напр., каждая кривая 3-го порядка может быть рассматриваема как сечение конуса, направляющей к-рого служит одна из пяти т. н. дивергентных парабол, т. е. имеется пять типов проективно неэквивалентных кубич. кривых (т е о р е м а Н ь ю т о н а).

При исследовании П. д. а. к. полезным оказывается также и привлечение мнимых элементов, и, далее, переход в комплексную область. См. *Алгебраическая кривая*.

Лит.: [1] У о к е р Р., Алгебраические кривые, пер. с англ., М., 1952; [2] С м о г о р ж е в с к и й А. С., С т о л о в а Е. С., Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, М., 1961; [3] С а в е л о в А. А., Плоские кривые, М., 1960.

М. И. Войцеховский.

Классификация Ньютона кривых 3-го порядка



Р о д (или ж а н р) П. д. а. к. L определяется числом p, являющимся разностью между наибольшим числом двойных точек, к-рые может иметь L, и их фактич. числом. Род p и порядок n кривой L связаны соотношением

$$2p = n(n-1) - \sum r_i(r_i-1),$$

где суммирование распространяется на точки кратности r_i.

Кривые нулевого рода (наз. также р а ц и о н а л ь н ы м и, у н и к у р с а л ь н ы м и) обладают важным свойством, а именно: координаты точки, движущейся по такой кривой, могут быть выражены рациональными функциями ξ, η нек-рого параметра t. Другими словами, кривые рода нуль бирационально эквивалентны прямой. Уникурсальные кривые имеют важные применения. Пусть, напр., уравнение такой кривой определяет y как алгебраич. функцию от x; тогда для любой рациональной функции $g(x, y)$ неопределенный интеграл

$$\int g(x, y)dx$$

может быть выражен через элементарные функции.

Кривые рода 1, тесно связанные с *эллиптическими функциями*, бирационально эквивалентны кривой 3-го порядка без особенностей. Нек-рые кривые рода $p>1$ (т. н. г и п е р э л л и п т и ч е с к и е) бирационально эквивалентны кривой порядка $p+2$, имеющей единственную особую точку кратности p.

Род p является бирациональным инвариантом, однако две кривые, имеющие один и тот же род, не обязательно бирационально эквивалентны.

Полная классификация кривых порядка $n \geqslant 4$ еще (1983) не получена. Неприводимая кривая 2-го порядка является либо пустым множеством, либо эллипсом, либо гиперболой, либо параболой (см. *Линия второго порядка*). Эти кривые неособенны и уникурсальны.

Первая классификация кривых 3-го порядка была предложена И. Ньютоном (I. Newton, 1704), к-рый положил тем самым начало систематич. исследованию П. д. а. к. В основе ее лежит подразделение кривых 3-го порядка на классы в зависимости от количества и характера бесконечных ветвей. Уравнение кривой надлежащим выбором координатной системы приводится к одной из четырех канонич. форм A, B, C, D, которые затем разделяются на классы, подклассы и типы (см. схему).

У каждой кривой 3-го порядка L есть либо (единственная) двойная точка, и тогда L уникурсальна, либо точка перегиба, быть может находящаяся на бесконечности; если есть три точки перегиба, то они лежат на одной прямой; более трех точек перегиба быть не может.

Пополнение аффинной плоскости несобственными элементами приводит к проективной плоскости, на к-рой П. д. а. к. определяется уравнением

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0,$$

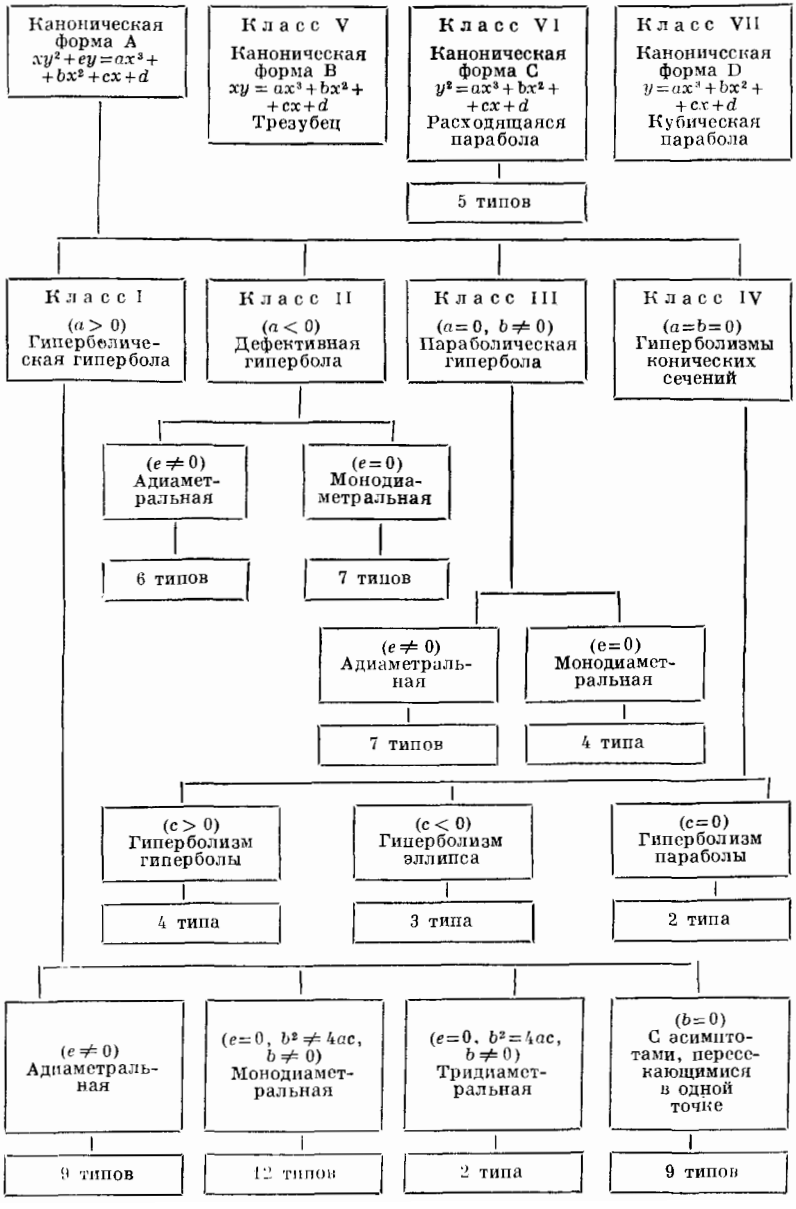
где F — однородный многочлен степени n от проективных координат x^1, x^2, x^3. Проективная классификация кривых проще; напр., каждая кривая 3-го порядка может быть рассматриваема как сечение конуса, направляющей к-рого служит одна из пяти т. н. дивергентных парабол, т. е. имеется пять типов проективно неэквивалентных кубич. кривых (т е о р е м а Н ь ю т о н а).

При исследовании П. д. а. к. полезным оказывается также и привлечение мнимых элементов, и, далее, переход в комплексную область. См. *Алгебраическая кривая*.

Лит.: [1] У о к е р Р., Алгебраические кривые, пер. с англ., М., 1952; [2] С м о г о р ж е в с к и й А. С., С т о л о в а Е. С., Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, М., 1961; [3] С а в е л о в А. А., Плоские кривые, М., 1960.

М. И. Войцеховский.

Классификация Ньютона кривых 3-го порядка



ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА теории упругости — название типа задач, в к-рых картина изучаемого явления в упругой среде одинакова во всех плоскостях, параллельных нек-рой плоскости (напр., плоскости Ox_1x_2 декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$). Математич. теорией П. з. часто описываются и задачи, к-рые по содержанию имеют пространственный характер (напр., изгиб тонких пластинок).

По П. з. теории упругости успехи достигнуты главным образом благодаря использованию формул, выражающих искомые решения через аналитич. функции одного комплексного аргумента; впервые эти формулы были выведены в 1909 Г. К. Колосовым (см. [1]), а начиная с 20-х гг. 20 в. в работах Н. И. Мусхелишвили они нашли полное обоснование, и на их базе развиты методы решения широкого круга граничных (краевых) и контактных П. з. теории упругости. Полученные по П. з. теоретич. результаты используются при решении практич. задач.

Комплексное представление полей смещений и напряжений. Говорят, что упругая среда находится в состоянии плоской деформации, если существует такая декартова система координат $Ox_1x_2x_3$, относительно к-рой компоненты вектора смещения имеют вид

$$u_\alpha = u_\alpha(x_1,\ x_2,\ t),\ \alpha = 1,\ 2,\ u_3 = 0,$$

где t — время. Компоненты тензора напряжений таковы

$$X_{\alpha\beta} = \lambda\theta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta},\ X_{\alpha 3} = 0,\ X_{33} = \lambda\theta,$$

где λ, μ — постоянные Ламе, $\delta_{\alpha\beta}$ — символы Кронекера, $e_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора деформации: $e_{\alpha\beta} = \partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha$; $\theta = e_{\alpha\alpha} = \partial_\alpha u_\alpha$ — дилатация ($\alpha, \beta = 1, 2$; наличие в выражении двух одинаковых индексов означает суммирование).

Плоская деформация возможна в упругой среде, к-рая заполняет цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости Ox_1x_2, если при этом компоненты объемных сил имеют вид $X_\alpha = X_\alpha(x_1,\ x_2,\ t)$, $X_3 = 0$, а боковые усилия не зависят от координаты x_3 и расположены на плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра. Для реализации плоской деформации упругого цилиндра к его торцам необходимо приложить нормальные силы, равные $\pm\lambda\theta$.

При сделанных допущениях система уравнений динамики упругого тела относительно компонентов вектора смещений имеет вид

$$\mu\Delta u_\alpha + (\lambda+\mu)\,\partial_\alpha\theta + X_\alpha = \rho\ddot{u}_\alpha,\ \alpha = 1,\ 2,$$

где ρ — плотность распределения масс, $\rho\ddot{u}_\alpha$ — силы инерции, Δ — оператор Лапласа. Если воспользоваться операциями комплексного дифференцирования: $2\partial_{\bar z} = \partial_1 + i\partial_2$, $2\partial_z = \partial_1 - i\partial_2$ ($\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$), то при отсутствии сил инерции (статич. задача) эту систему можно записать в виде одного (комплексного) уравнения:

$$(\lambda+3\mu)\,\partial^2_{z\bar z} u + (\lambda+\mu)\,\partial^2_{zz}\bar u + X = 0,$$

где $$u = u_1 + iu_2,\ X = 2^{-1}(X_1 + iX_2).$$

Пусть область S, занятая упругой средой, представляет связную часть плоскости Ox_1x_2, ограниченную одним или несколькими контурами L_0, L_1, . . ., L_m без общих точек, $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m$ — граница области S; точка $z = 0$ принадлежит S.

Искомое решение уравнения равновесия выражается по формуле $u = u_0 + TX$, где TX — нек-рое частное решение, к-рое можно выразить в виде

$$TX = -\varkappa(\mu\pi(1+\varkappa))^{-1}\int\int X(\zeta)\ln|\zeta - z|\,d\xi_1 d\xi_2 +$$

$$+ (2\mu\pi(1+\varkappa))^{-1}\int\int \bar X(\zeta - z)(\bar\zeta - \bar z)^{-1}\,d\xi_1 d\xi_2,$$

а u_0 — общее решение однородного уравнения ($X=0$), к-рое выражается по формуле

$$u_0 = K(\varphi, \psi; \varkappa) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)},$$

где φ и ψ — произвольные аналитич. функции от $z=x_1+ix_2$ в области S ($\varkappa=3-4\sigma$, где σ — постоянная Пуассона, $0<\sigma<0{,}5$). Если X — многочлен от x, y, то TX можно выразить в явной форме.

Оператор $K(\varphi, \psi; \varkappa)$ не изменится, если функции φ и ψ подчинить условию $\varphi(0)=0$ или $\psi(0)=0$. При выполнении одного из этих условий всякому полю смещений $u=u_1+iu_2$, заданному в области S, соответствует вполне определенная пара аналитич. функций φ, ψ.

Если в предыдущих формулах постоянную $\varkappa$ заменить через $\varkappa^*=(3-\sigma)/(1+\sigma)$, то получается формула для поля смещения обобщенного плосконапряженного состояния.

Комплексная запись

$$X_{\alpha\alpha} = 2(\lambda+\mu)(\partial_z u + \partial_{\bar z} u), \quad X_{11} - X_{22} + 2iX_{12} = 4\mu\partial_{\bar z} u$$

компонентов тензора напряжений, в силу равенства

$$u = K(\varphi, \psi; \varkappa) + Tx,$$

принимает вид

$$X_{\alpha\alpha} = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z) + T_0 X,$$

$$X_{11} - X_{22} + 2iX_{12} = 2(\bar z\Phi'(z) + \Psi(z)) + T_1 X,$$

где

$$\Phi = 2\mu\varphi', \quad \Psi = 2\mu\Psi',$$

$$T_0 = 4(\lambda+\mu)\,\mathrm{Re}\,\partial_z TX, \quad T_1 X = 4\mu\partial_{\bar z} TX.$$

Пусть упругая среда подвергается непрерывной деформации. Тогда можно считать, что компоненты тензора напряжений и смещений — непрерывные однозначные функции в области S; Φ и Ψ голоморфны в S, причем Φ можно подчинить условию $\Phi'(0)=\overline{\Phi'(0)}$.

Если область S ограничена и односвязна, а деформация непрерывна, то функции φ и ψ голоморфны в S. В случае конечной многосвязной области φ и ψ будут, вообще говоря, многозначными функциями определенного вида.

Основными задачами плоской теории упругости являются следующие задачи.

1) Первая основная задача: определить упругое равновесие тела, когда на его границе заданы внешние силы.

Сила напряжения (X_n, Y_n), действующая на элемент дуги ds контура L с нормалью n, может быть записана в комплексной форме:

$$(X_n + iY_n)\,ds = -2i\mu d(\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}),$$

и краевые условия первой задачи имеют вид

$$\varphi(t) + t\,\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + c(t), \quad t \in L, \qquad (1)$$

где

$$f(t) = i(2\mu)^{-1}\int_L (X_n + iY_n)\,ds,$$

причем дуга s отсчитывается на каждом L_k от нек-рой фиксированной точки $z_k \in L_k$ в положительном направлении; $c(t)=c_k=\mathrm{const}$ на L_k. Всегда можно считать $c_0=0$, остальные постоянные c_k определяются в ходе решения задачи. Если $m=0$, то искомые функции φ и ψ голоморфны в S. Тогда равенства $\varphi(0)=0$, $\mathrm{Im}\,\varphi'(0)=0$ обеспечивают единственность решения задачи (1), а необходимые и достаточные условия существования решения

$$\int_L (X_n + iY_n)\,ds = 0, \quad 2\mu\int_L (x_1 Y_n - x_2 X_n)\,ds =$$

$$= \mathrm{Re}\int_L f\,d\bar t = 0$$

представляют собой условия статич. равновесия абсолютно жесткого тела.

При $m>0$, как уже было отмечено, φ и ψ — многозначные функции специального вида, причем они выражаются через новые искомые голоморфные в области S функции φ^* и ψ^*.

2) Вторая основная задача: определить упругое равновесие тела по заданным смещениям точек его границы.

Эта задача приводит к граничному условию вида

$$\varkappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}=f(t),\ t\in L,$$

где $f=u_1+iu_2$ — заданная на L функция.

3) Основная смешанная задача. Пусть S — конечная односвязная область, ограниченная замкнутым контуром L; $L=L'+L''$, где L' состоит из конечного числа дуг L', . . ., L'_m контура L, к-рые попарно не имеют общих точек; на L' заданы внешние напряжения, а на L'' — смещения. Соответствующие краевые условия можно записать в виде

$$\gamma(t)\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)+c(t),\ t\in L,$$

где f — заданная функция точки $t\in L$; $\gamma(t)=1$, если $t\in L'$, и $\gamma(t)=-\varkappa$, если $t\in L''$; $c(t)=c_k=\text{const}$, если $t\in L'$; $c(t)=0$, если $t\in L''$. Постоянные c_k (кроме одной, выбираемой как угодно) не задаются заранее и подлежат определению в ходе решения задачи.

4) Третья основная задача. На границе области задаются нормальная составляющая вектора смещения и касательная составляющая вектора внешнего напряжения.

Такая задача возникает, напр., в случае соприкасания упругого тела с жестким профилем заданной формы, когда контакт между упругим и жестким телами осуществляется по всей границе. Рассматриваются также другого рода контактные задачи. Все эти задачи также приводятся к граничным задачам для аналитич. функций.

5) Граничные задачи изгиба тонких пластинок. К аналогичным граничным условиям приводят задачи изгиба тонких пластинок. Прогиб w срединной поверхности тонкой однородной упругой пластинки, подверженной действию распределенной по ее поверхности нормальной нагрузки интенсивности q, удовлетворяет неоднородному бигармонич. уравнению

$$\Delta\Delta w=q/D,$$

где $D=Eh^3/12(1-\sigma^2)$ — цилиндрич. жесткость; h — толщина пластинки, E — модуль Юнга. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$w=w_0+\tilde{T}q,$$

где $\tilde{T}q$ — частное решение, к-рое выражается формулой

$$\tilde{T}q=(8\pi D)^{-1}\int\int q(\zeta)\,|\zeta-t|^2\ln|\zeta-z|\,d\xi_1 d\xi_2,$$

а w_0 — общее решение

$$w_0=\operatorname{Re}(\bar{z}\Phi(z)+\Psi(z))$$

однородного бигармонич. уравнения

$$\Delta\Delta w_0=0,$$

где Φ и Ψ — произвольные аналитич. функции в S.

Если q — многочлен от x_1 и x_2, то $\tilde{T}q$ выражается в явной форме. Если $\Phi(0)=0$, $\Psi(0)=0$, $\Phi'(0)=\overline{\Phi'(0)}$, то функции Φ и Ψ выражаются однозначно посредством заданной бигармонич. функции w_0.

Решение w уравнения $\Delta\Delta w=q/D$ следует подчинить граничным условиям, соответствующим тому или иному

характеру закрепления границы пластинки. В случае заделанной по краям пластинки на границе L области S, занятой срединной поверхностью пластинки, должны выполняться условия $w = dw/dn = 0$, где n — внешняя нормаль к контуру L. Эти два условия можно записать в виде одного комплексного равенства $\partial_z w = 0$ (на L). Последнее приводится к виду (1).

Решение этой задачи всегда существует, единственно и выражается по формуле

$$w(x_1, x_2) = D^{-1} \iint SG(x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2)\, q(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1 d\zeta_2,$$

где G — функция Грина. Для круга $|z| < 1$:

$$G(x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2) = 2|\zeta - z|^2 \ln(|1 - z\bar{\zeta}|\,|\zeta - z|^{-1}) - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2),$$
$$z = x_1 + ix_2, \quad \zeta = \zeta_1 + i\zeta_2.$$

В случае свободной пластинки граничные условия имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\sigma\Delta w + (1-\sigma)(w_{x_1x_2}\cos^2 v + w_{x_2x_2}\sin^2 v + \\ &\quad + w_{x_1x_2}\sin 2v) = 0, \\ &\frac{d\Delta w}{dn} + (1-\sigma)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}(w_{x_1x_2} - w_{x_1x_1})\sin 2v + \right. \\ &\quad \left. + w_{x_1x_2}\cos 2v\right) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где v — угол, составляемый внешней нормалью n с осью Ox_1. Левые части равенств (2) представляют собой соответственно изгибающий момент и обобщенную перерезывающую силу, отнесенные к единице длины и действующие на боковой элемент пластинки с нормалью n. Граничные условия (2) можно записать в виде

$$d((3+\sigma)/(1-\sigma)\,\Phi - z\bar{\Phi}' - \bar{\Psi}') = g,$$

где g — заданная функция на L.

6) Плоские стационарные упругие колебания. Когда решения системы уравнений динамики упругой среды ищутся в виде

$$u = v(x_1, x_2)\, e^{i\nu t}, \quad u_3 = 0,$$

где ν — частота колебания, для v получается формула

$$v = \partial_{\bar{z}}(w_1 + iw_2)$$

(предполагается, что внешние силы равны нулю, $X_\alpha = 0$), где w_1 и w_2 — произвольные решения уравнений:

$$\Delta w_1 + a^2\nu^2 w_1 = 0, \quad \Delta w_2 + b^2\nu^2 w_2 = 0,$$
$$a^2 = \rho(\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad b^2 = \rho\mu^{-1}.$$

Поле напряжений выражается по формулам

$$X_{11} + X_{22} = -(\lambda + \mu)\,\alpha^2\nu^2 w_1,$$
$$X_{11} - X_{22} + 2iX_{22} = 4\mu\partial_{\bar{z}}^2\,(w_1 - iw_2),$$
$$X_{33} = -2^{-1}a^2\nu^2 w_1.$$

Общее решение уравнения

$$\Delta w + k^2 w = 0, \quad k^2 = \text{const},$$

выражается в виде

$$w = A_0 J_0(k|z|) + \int_0^1 \mathrm{Re}\,[z\Phi(zt)]\, J_0(k|z|\sqrt{1-t})\, dt, \qquad (3)$$

где A_0 — произвольная действительная постоянная, Φ — произвольная аналитич. функция, J_0 — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка. При помощи формулы (3) выводятся комплексные представления для полей смещений и напряжений при плоском стационарном колебании упругой среды; они могут быть использованы для исследования граничных задач,

а также для построения различных полных систем частных решений, к-рые позволяют аппроксимировать любые поля смещений и напряжений. В частности, эти полные системы можно использовать для построения приближенных решений краевых задач.

7) Задача определения концентраций напряжений около отверстий в анизотропных и изотропных пластинах. Основу приближенных методов решения таких задач также составляют введение функций комплексного переменного специальной структуры в виде степенных рядов и различных модификаций теории возмущений, а также использование теорем сложения цилиндрич. и сферич. функций с последующим сведением граничных задач к бесконечным системам алгебраич. уравнений.

Методы решения граничных задач. Формулы представления полей смещений и напряжений через аналитич. функции используются для доказательства существования и единственности решения общих гравичных задач, а также для построения в явной форме решений нек-рых классов задач частного вида.

Метод степенных рядов с применением конформного отображения позволяет решать основные плоские задачи для областей, конформно отображающихся на круг посредством рациональных функций. Задача редуцируется к линейной алгебраич. системе уравнений и квадратурам. Этим методом практически решаются основные граничные задачи для любой односвязной области с использованием приближенного конформного отображения области на круг с помощью рациональных функций. При использовании ЭВМ этот прием является эффективным для построения решений основных граничных П. з. теории упругости и изгиба пластинок.

На основе теории интеграла типа Коши исследование П. з. редуцируется к хорошо изученным интегральным уравнениям.

Полезными являются также методы, сочетающие конформное отображение с применением аппарата интегралов типа Коши.

Существуют и другие способы приведения граничных П. з. теории упругости к интегральным уравнениям, к-рые дают возможность изучить вопросы существования и единственности решения.

Для редукции граничных П. з. теории упругости к интегральным уравнениям используется также метод потенциалов, не вводящий в рассмотрение комплексные аналитич. функции (φ и ψ).

Лит.: [1] Колосов Г. В., Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости, Юрьев, 1909; [2] его же, Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости, Л.— М., 1935; [3] Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд., М., 1966; [4] его же, Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [5] Векуа И. Н., Мусхелишвили Н. И., Методы теории аналитических функций в теории упругости, в кн.: Тр. Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике (1960), М.— Л., 1962; [6] Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М.— Л., 1948; [7] Савин Г. Н., Концентрация напряжений около отверстий, М.— Л., 1951; [8] Галин Л. А., Контактные задачи теории упругости, М., 1953; [9] Штаерман И. Я., Контактная задача теории упругости, М.— Л., 1949; [10] Каландия А. И., *Математические методы двумерной* упругости, М., 1973; [11] Sokolnikoff I. S., Mathematical theory of elasticity, N. Y.— L., 1946; [12] Трехмерные задачи математической теории упругости, Тб., 1968.

И. Н. Векуа, Р. А. Кордзадзе.

ПЛОСКИЙ МОДУЛЬ — левый (или правый) модуль P над ассоциативным кольцом R такой, что функтор тензорного произведения $-\otimes_R P$ (соответственно $P\otimes_R -$) точен. Приведенное определение эквивалентно любому из следующих: 1) функтор $\mathrm{Tor}_1^R(-, P)=0$ (соответственно $\mathrm{Tor}_1^R(P, -)=0$); 2) модуль P представим в виде

прямого (инъективного) предела спектра свободных модулей; 3) модуль характеров $P^* = \mathrm{Hom}_Z(P, Q/Z)$ инъективен, где Q — группа рациональных чисел, а Z — группа целых чисел; 4) для любого правого (соответственно левого) идеала J кольца R канонич. гомоморфизм

$$J \otimes_R P \longrightarrow JP \quad (P \otimes_R J \longrightarrow PJ)$$

является изоморфизмом.

Проективные модули и *свободные модули* являются примерами П. м. Класс П. м. над кольцом целых чисел совпадает с классом абелевых групп без кручения. Все модули над кольцом R являются П. м. тогда и только тогда, когда R регулярно в смысле Неймана (см. *Абсолютно плоское кольцо*). Когерентное кольцо может быть определено как кольцо, над к-рым прямое произведение ΠR_α любого числа экземпляров кольца R является П. м. Операции локализации и пополнения по степеням идеала кольца R приводят к П. м. над этим кольцом (см. *Адическая топология*). Классич. кольцо частных кольца R является П. м. над R.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971.
В. Е. Говоров.

ПЛОСКИЙ МОРФИЗМ — морфизм схем $f: X \to Y$ такой, что для любой точки $x \in X$ локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ является плоским над $\mathcal{O}_{Y, f(x)}$ (см. *Плоский модуль*). Вообще, пусть $\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{O}_X$-модулей, он наз. п л о с к и м над Y в точке $x \in X$, если $\mathcal{F}_x$ — плоский модуль над кольцом $\mathcal{O}_{Y, f(x)}$. При нек-рых (довольно слабых) условиях конечности множество точек, в к-рых когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{F}$ является плоским, открыто в X. Если при этом схема Y целостна, то существует открытое непустое подмножество $U \subset Y$ такое, что $\mathcal{F}$ — П. м. над Y во всех точках, лежащих над U.

П. м. конечного типа соответствуют интуитивному понятию непрерывного семейства многообразий. П. м. открыт и равноразмерен (т. е. размерность слоев $f^{-1}(y)$ локально постоянна по $y \in Y$). Для многих геометрич. свойств множество точек $x \in X$, в к-рых слой $f^{-1}(f(x))$ плоского морфизма $f: X \to Y$ обладает этим свойством, открыто в X. Если П. м. f *собственный*, то открытым является и множество точек $y \in Y$, слои над к-рыми обладают этим свойством (см. [1]).

П. м. применяются также в теории спуска. Морфизм схем наз. с т р о г о п л о с к и м, если он плоский и сюръективный. Тогда, как правило, для проверки какого-либо свойства нек-рого объекта над Y достаточно проверить это свойство для объекта, полученного после строго плоской замены базы $f: X \to Y$ (см. [1]). В связи с этим представляют интерес критерии плоскостности морфизма $f: X \to Y$ (или $\mathcal{O}_X$-модуля $\mathcal{F}$); при этом Y можно считать локальной схемой. Простейший критерий относится к случаю, когда база Y одномерна и регулярна: когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{F}$ будет плоским тогда и только тогда, когда униформизирующая на Y имеет тривиальный аннулятор в $\mathcal{F}$. Общий случай в нек-ром смысле сводится к одномерному. Пусть Y — приведенная нётерова схема и для любого морфизма $Z \to Y$, где Z — одномерная регулярная схема, замена базы $f_Z: X_Y \times Z \to Z$ является П. м.; тогда f есть П. м. Другой критерий плоскостности требует, чтобы $f: X \to Y$ был универсально открыт, а Y и геометрич. слои $f^{-1}(y)$ — приведены.

Лит.: [1] Grothendieck A., Dieudonné J., Eléments de géométrie algébrique, 4, «Publ. math. IHES», 1964, № 24; 1966, № 28; [2] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [3] Raynaud M., Gruson L., «Invent. math.», 1971, v. 13, p. 1—89.
В. И. Данилов.

ПЛОСКОСТЬ — одно из основных понятий геометрии; обычно косвенным образом определяется аксио-

мами геометрии. П. может рассматриваться как совокупность двух непересекающихся множеств — множества точек и множества прямых с симметричным отношением инцидентности, связывающим точку и прямую. В зависимости от требований, к-рым удовлетворяет отношение инцидентности, описываемое определенными аксиомами, различают проективные, аффинные, гиперболические, эллиптические П. и др.

П. можно классифицировать по группам коллинеаций (см., напр., [7] гл. 3, где дана классификация Ленца — Бартолоцци проективных и аффинных П.) или по реализации в плоскости тех или иных конфигураций (см., напр., *Дезаргова геометрия*, *Паскалева геометрия*).

П. наз. метрической, если кроме отношения инцидентности определено расстояние между любой парой точек. Так, в *Гильберта системе аксиом* евклидовой геометрии расстояние вводится на базе аксиом конгруэнтности и непрерывности, и П. в этом случае наз. непрерывной (см. [1]). В случае невыполнения для П. аксиом непрерывности П. наз. д и с к р е т н о й (см., напр., *Неархимедова геометрия*), а П., состоящая из конечного числа точек, а следовательно, и прямых, наз. к о н е ч н о й (см. [7]).

Одним из путей изучения П. является введение в ней координат и тернарной операции с последующим ее изучением (см., напр., [7]), [8]).

В системе аксиом Вейля пространства E^3 П. является производным понятием от понятий «вектор» и «точка». Под П., проходящей через точку $A \in E^3$ и векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$, понимается множество точек таких, что

$$\overrightarrow{AM} = t\mathbf{m} + \tau\mathbf{n}, \text{ где } t, \tau \in \mathbb{R}.$$

В прямоугольной системе координат (x, y, z) пространства E^3 П. задается линейным уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

коэффициенты A, B, C определяют координаты нормального вектора этой П. В m-мерном пространстве n-мерные П. описываются системами линейных уравнений (см. [5]).

Взаимное расположение П. в различных m-мерных пространствах определяется соответствующими аксиомами инцидентности так же, как и свойства инцидентности плоскостей и прямых.

Лит.: [1] Г и л ь б е р т Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Е ф и м о в Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [3] Об основаниях геометрии, М., 1956; [4] Б а х м а н Ф., Построение геометрии на основе понятия симметрии, пер. с нем., М., 1969; [5] Д о н е д д ю А., Евклидова планиметрия, пер. с франц., М., 1978; [6] Р о з е н ф е л ь д Б. А., Многомерные пространства, М., 1966; [7] D e m b o w s k i P., Finite geometries, B., 1968; [8] P i k e r t G., Projektive Ebenen, B., 1955.

В. В. Афанасьев, Л. А. Сидоров.

ПЛОТНОЕ МНОЖЕСТВО — то же, что *всюду плотное множество*. Более общо, множество A наз. п л о т н ы м в о т к р ы т о м м н о ж е с т в е G пространства X, если G содержится в замыкании A или, что то же самое, если $A \cap G$ всюду плотно в подпространстве $G \subset X$. Если A не плотно ни в каком непустом открытом множестве G, то оно является *нигде не плотным множеством* в X.

М. И. Войцеховский.

ПЛОТНОСТИ МАТРИЦА состояния ρ, определенного на алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$,— положительный *ядерный оператор* $\rho \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$ такой, что

$$\rho(A) = \mathrm{Sp}\, A\tilde{\rho}, \quad A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H}), \tag{1}$$

причем $\mathrm{Sp}\tilde{\rho} = 1$. Обратно, всякое состояние ρ, т. е. линейный положительный $(\rho(A^*A) \geqslant 0)$ нормированный $(\rho(E) = 1)$ функционал на $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$, представимо в виде (1), т. е. имеет П. м. $\tilde{\rho}$ и притом единственную.

Впервые понятие П. м. появилось в статистич. физике при определении квантового состояния Гиббса. Пусть квантовая система, занимающая конечную область V пространства $\mathbb{R}^3$, описывается векторами нек-рого гильбертова пространства $\mathscr{H}_V$ и гамильтонианом H_V^0 и обладает, быть может, нек-рым набором коммутирующих друг с другом «первых интегралов» H_V^1, ..., H_V^k, $k=1, 2, \ldots$. Состоянием Гиббса такой системы наз. состояние на $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)$, задаваемое П. м.:

$$\tilde{\rho}=Z^{-1}\exp\{-\beta(H_V^0+\mu_1 H_V^1+\ldots+\mu_k H_V^k)\}, \quad (2)$$

где Z — нормирующий множитель, а $\beta>0$, $\mu_1, \ldots, \mu_k$ — действительные параметры.

Наряду с П. м. (2) состояние системы в квантовой статистич. физике можно задавать с помощью т. н. приведенной матрицы плотности. В наиболее простом случае системы одинаковых частиц (бозонов или фермионов), описываемых векторами Фока пространства $\mathscr{H}_V$, приведенная П. м. $\hat{\rho}$ состояния ρ представляет собой набор функций (вообще говоря, обобщенных)

$$\hat{\rho}=\{\hat{\rho}_{m,n}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n),\ x_i\in V,\ y_j\in V,\ i=1, \ldots, m,\ j=1, \ldots, n;\ m=0, 1, \ldots\}, \quad (3)$$

где

$$\hat{\rho}_{m,n}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)=\rho\left(\prod_{i=1}^{m} a(x_i)\times\right.$$
$$\left.\times\prod_{j=1}^{n} a^*(y_j)\right),$$

а $a(x)$, $a^*(y)$, x, $y\in\mathbb{R}^3$,— *рождения операторы* и *уничтожения операторы* соответственно, действующие в $\mathscr{H}_V$. В случаях, когда в алгебре $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)$ вместо операторов рождения и уничтожения выбрана какая-нибудь другая система образующих $\{a_\lambda, \lambda\in\mathscr{L}\}$ ($\mathscr{L}$ — нек-рое множество индексов), приведенная П. м. состояния $\hat{\rho}$ определяется аналогично (3) как совокупность значений состояния ρ на всевозможных мономах вида

$$a_{\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda_n}, \lambda_i\in\mathscr{L},\ i=1, \ldots, n,\ n=1, 2, \ldots.$$

Приведенная П. м. оказывается особенно удобной при определении предельного гиббсовского состояния на C^*-алгебре $\mathfrak{A}_\infty$ так наз. квазилокальных наблюдаемых: $\mathfrak{A}_\infty=\overline{\bigcup_{V\in\mathbb{R}^3}\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)}$ (черта означает замыкание в равномерной топологии).

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, 3 изд., М., 1976 (Теоретическая физика, т. 5); [2] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971.

Р. А. Минлос.

ПЛОТНОСТИ ТОЧКА множества E в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$— точка x, в к-рой *плотность множества* E равна единице. Если единице равна внешняя плотность, то точка x наз. точкой внешней плотности. П. т. множества является одновременно точкой разрежения для дополнения этого множества. Почти все точки измеримого множества суть его П. т. С помощью понятия П. т. вводится понятие аппроксимативно непрерывной функции и *аппроксимативной производной.*

В. А. Скворцов.

ПЛОТНОСТНАЯ ГИПОТЕЗА — предполагаемое неравенство, доставляющее оценку для числа $N(\sigma, T)$ нулей $\rho=\beta+i\gamma$ дзета-функции Римана

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

где $s=\sigma+it$, в прямоугольнике $^1/_2<\sigma\leqslant\beta\leqslant 1$, $|\gamma|\leqslant T$.

Наиболее точная формулировка П. г.:

$$N(\sigma, T)\leqslant cT^{2(1-\sigma)}\ln^A T.$$

Более простой, но менее точный вид П. г.:

$$N(\sigma, T) \leqslant cT^{2(1-\sigma)+\varepsilon}.$$

П. г. позволяет получать в теории простых чисел результаты, сравнимые с теми, к-рые вытекают из гипотезы Римана. Напр., из П. г. следует, что при достаточно больших x в каждом сегменте $[x, x+x^{1/2+\varepsilon}]$ содержится хотя бы одно простое число.

П. г. является следствием более сильной *Линделёфа гипотезы*. В отличие от последней П. г. частично доказана, т. к. содержится в *плотностных теоремах*, начиная с нек-рых значений $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1/2$.

Для числа $N(\sigma, T, \chi)$ нулей L-функций Дирихле

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n, k) n^{-s},$$

где $\chi(n, k)$ — характер по модулю k, имеет место аналогичная П. г. В усредненной форме она имеет вид

$$\sum_{\chi \bmod k} N(\sigma, T, \chi) \leqslant c(k, T)^{2(1-\sigma)+\varepsilon},$$

$$\sum_{k \leqslant Q} \sum_{\chi^* \bmod k} N(\sigma, T, \chi) \leqslant c(k^2T)^{2(1-\sigma)+\varepsilon},$$

где χ^* — примитивный характер по модулю k.

П. г. для L-функций Дирихле применяется в теории распределения простых чисел, принадлежащих арифметич. прогрессиям.

Лит.: [1] Монтгомери Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1974; [2] Лаврик А. Ф., «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, в. 2, с. 55—65. *Б. М. Бредихин.*

ПЛОТНОСТНЫЕ ТЕОРЕМЫ — общее название теорем, к-рые дают оценку сверху для числа $N(\sigma, T, \chi)$ нулей $\rho = \beta + i\gamma$ L-функций Дирихле

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n, k) n^{-s},$$

где $s = \sigma + it$, $\chi(n, k)$ — характер по модулю k в прямоугольнике $1/2 < \sigma \leqslant \beta < 1$, $|\gamma| \leqslant T$. В случае $k=1$ получают П. т. для числа нулей дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

П. т. для L-функций при $k \neq 1$ сложнее, чем соответствующие теоремы для дзета-функции Римана. При растущих параметрах T и k получаются оценки, зависящие от этих параметров. В приложениях решающую роль играет параметр k.

Значение П. т. выясняется из соотношений, позволяющих оценивать остаточный член в формуле для количества простых чисел p, принадлежащих арифметич. прогрессии $km+l$, $1 \leqslant l \leqslant k$, $(l, k)=1$, $m=0, 1, 2, \ldots$, и не превосходящих x, в зависимости от $N(\sigma, T, \chi)$.

Поскольку функция $N(\sigma, T, \chi)$ не возрастает при возрастании σ и $N(1, T, \chi)=0$, целью П. т. является получение оценок, наиболее быстро стремящихся к нулю при $\sigma \to 1$. В свою очередь эти оценки существенно дополняются результатами об отсутствии нулей у L-функций Дирихле в окрестности прямой $\sigma=1$, к-рые получаются с помощью кругового метода Харди — Литлвуда — Виноградова. На этом пути удалось получить сильные оценки для количества четных чисел $n \leqslant x$, возможно непредставимых в виде суммы двух простых чисел.

Первые П. т., доставлявшие оценки $N(\sigma, T, \chi)$ для индивидуального характера χ и усредненные оценки по всем характерам данного модуля k, были получены Ю. В. Линником. Дальнейшее значительное улучшение П. т. принадлежит А. И. Виноградову и Э. Бомбьери (E. Bombieri), к-рые использовали оценки $N(\sigma, T, \chi)$, усредненные по всем модулям $k \leqslant Q$ и по всем примитивным характерам данного модуля k, для доказательства теоремы о распределении простых чисел в арифметич. прогрессиях в среднем (при $Q = \sqrt{x}/(\ln x)^c$).

Теорема Виноградова — Бомбьери позволяет в ряде классич. задач аддитивной теории чисел заменять расширенную гипотезу Римана. Имеется ряд других улучшений П. т.

Лит.: [1] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [2] Монтгомери Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1974; [3] Лаврик А. Ф., «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, в. 2, с. 55—65.

Б. М. Бредихин.

ПЛОТНОСТНЫЙ МЕТОД — один из методов аналитич. теории чисел, основанный на изучении статистики распределения нулей дзета-функции Римана

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$$

и L-функции Дирихле

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n,k)/n^s,$$

$s=\sigma+it$ — характер по модулю k. Многие теоретико-числовые проблемы получают наиболее законченное решение в предположении, что все нули $\rho=\beta+i\gamma$ функций $\zeta(s)$ и $L(s,\chi)$, находящиеся в полосе $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, $-\infty<t<+\infty$, лежат на прямой $\sigma=1/2$. Однако в ряде случаев достаточно сильные результаты получаются, если удается показать, что нули указанных функций с абсциссой $\beta\geqslant\sigma>1/2$ если и существуют, то все же составляют множество, к-рое становится все более редким при $\sigma\to 1$. Существует большое количество теорем, к-рые дают оценки сверху для числа $N(\sigma,T)$ нулей $\zeta(s)$ и для числа $N(\sigma,T,\chi)$ нулей $L(s,\chi)$ в прямоугольнике $1/2<\sigma\leqslant\beta\leqslant 1$, $|\gamma|\leqslant T$. П. м. существенно опирается на эти теоремы, получившие название *плотностных теорем*.

Впервые П. м. с использованием плотностной теоремы для $\zeta(s)$ применил Г. Хоайзель (G. Hoheisel, 1930) для оценки разности двух соседних простых чисел. Ему удалось доказать существование положительной константы $\alpha<1$ такой, что при $x>x_0=x_0(\alpha)$ между x и $x+x^{\alpha}$ всегда находится простое число. В дальнейшем всякое улучшение оценки для $N(\sigma,T)$ приводило к уточнению константы α. Для L-функции Дирихле П. м. был разработан Ю. В. Линником (1944 и последующие годы). Ю. В. Линник впервые исследовал распределение нулей L-функций при переменном k, в частности получил результаты о «частоте» нулей $L(s,\chi)$ вблизи точки $s=1$, что позволило найти оценку для наименьшего простого числа $p_0=p_0(k,l)$, лежащего в арифметич. прогрессии $kx+l$, $(l,k)=1$, $1\leqslant l\leqslant k$, $x=0,1,2,\ldots$; $p_0<k^c$, где c — нек-рая абсолютная константа. Улучшение оценок для $N(\sigma,T,\chi)$ приводит к уточнению константы c. Применяя плотностные теоремы для L-функций, Ю. В. Линник нашел новое доказательство теоремы Виноградова о представлении всякого достаточно большого нечетного числа суммой трех простых чисел (см. *Гольдбаха проблема*).

П. м. в теории L-функций позволил получить сильный результат в направлении бинарной проблемы Гольдбаха: всякое достаточно большое натуральное число можно представить в виде суммы двух простых чисел и ограниченного абсолютной константой нек-рого числа степеней двоек.

Наиболее сильные результаты П. м. дает в сочетании с др. методами, в частности с методом *большого решета*. На этом пути была доказана теорема Виноградова — Бомбьери (1965), к-рая заменяет во многих случаях *Римана обобщенную гипотезу*. Идеи и результаты П. м. переносятся с поля рациональных чисел на поля алгебраич. чисел.

Лит.: [1] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [2] Монтгомери Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1974; [3] Halberstam H., Richert H.-E., Sieve methods, L.—[a. o.], 1974.

Б. М. Бредихин.

ПЛОТНОСТЬ топологического пространства — одна из его *мощностных характеристик*.

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ, плотность распределения вероятностей,— производная функции распределения, отвечающей абсолютно непрерывной вероятностной мере.

Пусть X — случайный вектор, принимающий значения в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, $F(x_1, \ldots, x_n)$ — его функция распределения и пусть существует неотрицательная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n$$

для любых действительных $x_1, \ldots, x_n$. Тогда $f(x_1, \ldots, x_n)$ наз. плотностью вероятности случайного вектора X и для любого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathsf{P}\{X \in A\} = \int_A \ldots \int f(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n.$$

Любая неотрицательная интегрируемая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = 1,$$

является П. в. нек-рого случайного вектора.

Если случайные векторы X и Y, принимающие значения в $\mathbb{R}^n$, независимы и имеют П. в. $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ соответственно, то случайный вектор $X+Y$ имеет П. в. $h(x_1, \ldots, x_n)$, к-рая является сверткой функций f и g:

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 - u_1, \ldots, x_n - u_n) \times$$
$$\times g(u_1, \ldots, u_n)\, du_1 \ldots du_n =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, \ldots, u_n)\, g(x_1 - u_1, \ldots, x_n - u_n) \times$$
$$\times du_1 \ldots du_n.$$

Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ — случайные векторы, принимающие значения в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ $(n, m \geqslant 1)$ и имеющие П. в. $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(y_1, \ldots, y_m)$ соответственно, и пусть $Z = (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$ — случайный вектор в $\mathbb{R}^{n+m}$. Тогда если X и Y независимы, то Z имеет П. в. $h(t_1, \ldots, t_{n+m})$, наз. совместной плотностью распределения вероятностей случайных векторов X и Y, причем

$$h(t_1, \ldots, t_{n+m}) = f(t_1, \ldots, t_n)\, g(t_{n+1}, \ldots, t_{n+m}). \quad (1)$$

И обратно, если Z имеет П. в., удовлетворяющую соотношению (1), то X и Y независимы.

Характеристич. функция $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ случайного вектора X, имеющего П. в. $f(x_1, \ldots, x_m)$, выражается формулой

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n)} \times$$
$$\times f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

причем если $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ абсолютно интегрируема, то $f(x_1, \ldots, x_n)$ является ограниченной непрерывной функцией и

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n)} \times$$
$$\times \varphi(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

П. в. $f(x_1, \ldots, x_n)$ и соответствующая характеристич. функция $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ связаны также следующим соотношением (тождество Планшереля): функция $f^2(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируема тогда и только

тогда, когда интегрируема функция $|\varphi(t_1, \ldots, t_n)|^2$, и в этом случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t_1, \ldots, t_n)|^2\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$ — измеримое пространство, ν и μ суть σ-конечные меры на $(\Omega, \mathcal{A})$, причем ν абсолютно непрерывна относительно μ, т. е. из равенства $\mu(A)=0$ следует равенство $\nu(A)=0$, $A \in \mathcal{A}$. В этом случае на $(\Omega, \mathcal{A})$ существует неотрицательная измеримая функция f такая, что

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu$$

для любого $A \in \mathcal{A}$. Функция f наз. п р о и з в о д н о й Р а д о н а — Н и к о д и м а меры ν по мере μ, а в случае, когда ν — вероятностная мера, также П. в. ν по отношению к μ.

С понятием П. в. тесно связано понятие д о м и н и р о в а н н о г о с е м е й с т в а р а с п р е д е л е н и й. Семейство вероятностных распределений $\mathcal{P}$ на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$ наз. доминированным, если на $(\Omega, \mathcal{A})$ существует σ-конечная мера μ такая, что каждая вероятностная мера из $\mathcal{P}$ имеет П. в. по отношению к μ (или, что то же самое, каждая мера из $\mathcal{P}$ абсолютно непрерывна относительно μ). Предположение о доминированности является существенным в нек-рых теоремах математич. статистики.

Лит.: [1] П р о х о р о в Ю. В., Р о з а н о в Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [2] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967; [3] Л е м а н Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

Н. Г. Ушаков.

ПЛОТНОСТЬ МНОЖЕСТВА E, измеримого на действительной прямой $\mathbb{R}$, в точке x — предел (если он существует) отношения

$$\frac{\operatorname{mes}(E \cap \Delta)}{|\Delta|} \text{ при } |\Delta| \longrightarrow 0, \qquad (1)$$

где Δ — произвольный отрезок, содержащий x, а $|\Delta|$ — его длина. Если вместо меры рассматривать внешнюю меру, то получится определение в н е ш н е й П. м. E в точке x. Аналогично вводится П. м. в n-мерном пространстве. При этом длины отрезков в $\mathbb{R}$ заменяются объемами соответствующих n-мерных параллелепипедов с гранями, параллельными координатным плоскостям, а предел рассматривается при стремлении к нулю диаметра параллелепипеда. Для множеств из $\mathbb{R}$ оказывается полезным понятие правой (левой) П. м. E в точке x, к-рое получается из общего определения, если в нем рассматривать лишь отрезки Δ, имеющие левым (правым) концом точку x. Чаще всего понятие П. м. применяется в случае, когда П. м. равна единице (см. *Плотности точка*) или нулю (см. *Разреженность множества*).

Лит.: [1] Н а т а н с о н И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974; [2] С а к с С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949.

В. А. Скворцов.

ПЛОТНОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ — понятие общей аддитивной теории чисел, изучающей законы сложения последовательностей общего вида. П. п. является мерой того, какая часть из последовательности всех натуральных чисел принадлежит данной последовательности $A=\{a_k\}$ целых чисел $a_0=0<1\leqslant a_1<a_2<\ldots<a_k$. Под понятием П. п. имеется в виду плотность $d(A)$ (введенная в 1930 Л. Г. Шнирельманом) последовательности A, а именно:

$$d(A) = \inf_n \frac{A(n)}{n},$$

где

$$A(n) = \sum\nolimits_{1 \leqslant a_k \leqslant n} 1.$$

Плотность $d(A)=1$ тогда и только тогда, когда A совпадает с множеством N_0 всех целых неотрицательных чисел. Пусть $A+B$ — арифметич. сумма последовательностей $A=\{a_k\}$ и $B=\{b_l\}$, т. е. множество $A+B=\{a_k+b_l\}$, где числа a_k+b_l берутся без повторений. При $A=B$ полагают $2A=A+A$, аналогично $3A=A+A+A$ и т. д. Если $hA=N_0$, то A наз. базисом h-го порядка. При исследовании структуры множеств, получающихся в результате суммирования последовательностей, заданных лишь их плотностями, используются теоремы о плотности суммы двух последовательностей:

$$d(A+B)\geqslant d(A)+d(B)-d(A)\,d(B)$$

— неравенство Шнирельмана,

$$d(A+B)\geqslant \min\,(d(A)+d(B),\,1)$$

— неравенство Манна — Дайсона.

Из неравенства Шнирельмана следует, что всякая последовательность положительной плотности есть базис конечного порядка. Применение этого факта к аддитивным задачам, в к-рых часто суммируются последовательности нулевой плотности, осуществляется посредством предварительного конструирования из заданных последовательностей новых с положительной плотностью. Напр., с помощью методов решета доказывается, что последовательность $\{p\}+\{p\}$, где p пробегает простые числа, обладает положительной плотностью. Отсюда следует теорема Шнирельмана: существует такое целое число $c_0>0$, что любое натуральное число есть сумма не более c_0 простых чисел. Эта теорема дает решение т. н. ослабленной проблемы Гольдбаха (см. также *Аддитивная теория чисел*).

Разновидностью понятия П. п. является понятие *асимптотической плотности*, частным случаем к-рой будет натуральная плотность. Понятие П. п. обобщается на числовые последовательности, отличные от натурального ряда, напр. на последовательности целых чисел в полях алгебраич. чисел. В результате удается изучать базисы в алгебраич. полях.

Лит.: [1] Гельфонд А. О., Линник Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962; [2] Ostmann H.-H., Additive Zahlentheorie, Bd 1—2, B., 1956.

Б. М. Бредихин.

ПЛОЩАДЕЙ МЕТОД — способ решения различных задач теории однолистных функций, использующий теоремы площадей (см. *Площадей принцип*).

ПЛОЩАДЕЙ ПРИНЦИП: площадь дополнения к образу области при ее отображении регулярной в ней функцией неотрицательна. Впервые П. п. использовал в 1914 Т. Гронуолл [1], к-рый доказал этим путем т. н. внешнюю теорему площадей для функций класса Σ — функций

$$F(z)=z+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{z}+\ldots,$$

регулярных и однолистных в области $\Delta'=\{z:1<|z|<\infty\}$ (см. *Однолистная функция*). Площадь $\sigma(CF(\Delta'))$ дополнения для образа $F(\Delta')$ области Δ' при отображении $w=F(z)\in\Sigma$ определяется формулой

$$\sigma(CF(\Delta'))=\pi\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}k\,|\alpha_k|^2\right)\geqslant 0$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\,|\alpha_k|^2\leqslant 1. \qquad (1)$$

С помощью неравенства (1) получены первые результаты для функций классов Σ и S, где S — класс функций $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$, регулярных и однолистных в круге $\Delta=\{z:|z|<1\}$ (см. *Бибербаха гипотеза*, *Искажения теоремы*). Доказана [2] более общая теорема пло-

щадей. Г. М. Голузин [3] распространил теорему площадей на p-листные функции в круге (см. *Многолистная функция*).

Доказана следующая теорема площадей [4]: пусть $F\in\Sigma$, $\overline{B}=CF(\Delta')$, $Q(w)$ — регулярная на $\overline{B}$ функция,

$$Q(F(z))=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_k z^{-k}\not\equiv\text{const};$$

тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}k|\alpha_k|^2\leqslant 0 \qquad (2)$$

и знак равенства имеет место только в том случае, если площадь $\sigma(\overline{B})$ множества $\overline{B}$ равна нулю.

Под теоремой площадей в нек-ром классе однолистных функций $f(z)$, $z\in B$, B — область (или в классе систем однолистных функций $\{f_k(z),\ z\in B_k\}_{k=0}^n$, $n=1, 2, \ldots$, B_k — области), понимают обычно всякое неравенство, обладающее тем свойством, что знак равенства в нем имеет место в том и только в том случае, если площадь дополнения $\overline{G}$ для $f(B)$ (соответственно дополнения $\overline{G}$ для $\bigcup_{k=0}^n f_k(B_k)$) равна нулю. Обычно такая теорема доказывается с помощью П. п. Именно, рассматривается произвольная регулярная функция $Q(w)$ (или, более общо, имеющая регулярную производную) на $\overline{G}$ и вычисляется площадь $\sigma(Q(\overline{G}))$ образа $\overline{G}$ при отображении функцией Q. Таким образом, неравенство (2) есть нек-рая весьма общая теорема площадей в классе Σ.

Пусть $F\in\Sigma$ и

$$\ln\frac{F(t)-F(z)}{t-z}=\sum_{p,\,q=1}^{\infty}\omega_{p,\,q}t^{-p}z^{-q},\quad t,\ z\in\Delta'.$$

Выбирая надлежащим образом функцию Q, регулярную на $CF(\Delta')$, неравенство (2) можно записать в виде

$$\sum_{q=1}^{\infty}q\left|\sum_{p=1}^{\infty}\omega_{p,\,q}x_p\right|^2\leqslant\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}|x_p|^2, \qquad (3)$$

где x_p — произвольные числа, не равные одновременно нулю и такие, что

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\sqrt[p]{|x_p|}<1.$$

Получены и более общие теоремы площадей в классе Σ (см. [5]).

Теоремы площадей доказаны: для класса $\mathfrak{M}(a_1, \ldots, a_n)$ систем $\{f_k(z),\ f_k(0)=a_k,\ z\in\Delta\}_{k=1}^n$ функций f_k, конформно и однолистно отображающих круг Δ на области, попарно не имеющие общих точек,— неналегающие области (см. [6]); в классе $\Sigma(B)$ ($\Sigma(B)$, $B\ni\infty$,— класс функций F, регулярных и однолистных в $B\setminus\{\infty\}$ и таких, что $F(\infty)=\infty$, $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{F(z)}{z}=1$, см. [7]); для неналегающих многосвязных областей (см. [6], а также [8], [9]). Все теоремы площадей для многосвязных областей доказываются *контурного интегрирования методом*.

Под методом площадей понимают способы решения различных задач теории однолистных функций, использующие теоремы площадей.

Напр., из (3) с помощью неравенства Коши можно получить:

$$\left|\sum_{p,\,q=1}^{\infty}\omega_{p,\,q}x_p x'_q\right|^2\leqslant\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}|x_p|^2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}|x'_q|^2, \qquad (4)$$

где x_p и x'_q такие, что ряды, стоящие в правой части, сходятся. Если в неравенстве (4), напр., $x_p=t^{-p}$,

$x'_q = z^{-q}$, $|t|>1$, $|z|>1$, то получают теорему искажения хорд:

$$\left|\ln\frac{F(t)-F(z)}{t-z}\right|^2 \leqslant \ln\frac{|t|^2}{|t|^2-1}\ln\frac{|z|^2}{|z|^2-1}.$$

Теоремы площадей, напр. в классе $\mathfrak{M}(a_1, \ldots, a_n)$, дают необходимые и достаточные условия принадлежности системы $\{f_k(z), f_k(0)=a_k,\ z\in\Delta\}_{k=1}^{n}$ мероморфных функций f_k классу $\mathfrak{M}(a_1, \ldots, a_n)$ (см. [6] с. 179).

Лит.: [1] Gronwall T. H., «Ann. Math. Ser. 2», 1914/1915, v. 16, p. 72—76; [2] Prawitz H., «Arkiv mat., astron., fysik», 1927, Bd 20A, № 6, S. 1—12; [3] Голузин Г. М., «Матем. сб.», 1940, т. 8, № 2, с. 277—84; [4] Лебедев Н. А., Милин И. М., там же, 1951, т. 28, № 2, с. 359—400; [5] Nehari Z., «Arch. Ration. Mech. and Anal.», 1969, v. 34, № 4, p. 301—30; [6] Лебедев Н. А., Принцип площадей в теории однолистных функций, М., 1975; [7] Милин И. М., Однолистные функции и ортонормированные системы, М., 1971; [8] Аленицын Ю. Е., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1973, т. 37, № 5, с. 1132—54; [9] Гутлянский В. Я., Щепетов В. А., «Докл. АН СССР», 1974, т. 218, № 3, с. 509—12; [10] Grunsky H., «Math. Z.», 1939, Bd 45, H. 1, S. 29—61. *Н. А. Лебедев.*

ПЛОЩАДЬ — численная характеристика, приписываемая плоским фигурам определенного класса (напр., многоугольникам) и обладающая следующими свойствами: 1) П. неотрицательна; 2) П. аддитивна (в случае многоугольников это означает, что если фигура $P\cup Q$ составлена из фигур P и Q, не имеющих общих внутренних точек, то пл. $(P\cup Q)$=пл. P+пл. Q; 3) П. сохраняется при перемещениях; 4) П. единичного квадрата равна 1. Термин «П.» употребляется также в более широком смысле как численная характеристика, сопоставляемая двумерным поверхностям в трехмерном пространстве; k-мерным поверхностям в n-мерном $(2\leqslant k<n)$ евклидовом или римановом пространстве; границам множеств и др. объектам, см. ниже.

Площадь плоской фигуры. Исторически П. определялась сначала на классе многоугольников (фигур, допускающих разбиение на конечное число треугольников без общих внутренних точек). Существенно, что на классе многоугольников П. со свойствами 1) — 4) существует и единственна (см. [1], [2]). Одним из следствий свойств 1) — 4) является то, что П. всей фигуры не меньше П. ее части.

В древности существование и единственность П. со свойствами 1) — 4) принимались без ясного описания класса рассматриваемых фигур; внимание сосредоточивалось на приемах вычисления П. Формула для П. прямоугольника, в том числе с иррациональными сторонами, обосновывалась *исчерпывания методом*. П. треугольника и произвольных многоугольников вычислялась как П. равносоставленного с ними прямоугольника. Доказано, что любые многоугольники равной П. равносоставлены (см. [2]).

Затем был выделен класс квадрируемых (измеримых по Жордану) фигур. Фигура M на плоскости наз. квадрируемой, если для любого $\varepsilon>0$ существуют такие многоугольные фигуры P и Q, что $P\subset M\subset Q$ и (пл. Q — пл. P)$<\varepsilon$. Класс квадрируемых фигур весьма богат. Он включает, в частности, все ограниченные плоские области с кусочно гладкими границами. Но есть и неквадрируемые плоские фигуры. На классе квадрируемых фигур также существует и единственна П. со свойствами 1) — 4) (см. [2]).

Исторически до рассмотрения класса квадрируемых фигур умели вычислять П. нек-рых из них — круга, кругового сектора и сегмента, различного рода лунок, криволинейных трапеций. Эти вычисления обосновывались методом исчерпывания многоугольниками. В ряде случаев для обоснования таких вычислений привлекался *Кавальери принцип*, состоящий в том, что если две плоские фигуры указанного типа пересекаются каждой прямой, параллельной фиксированной прямой, по отрезкам одинаковой длины, то эти фигуры имеют равную П. Средства интегрального исчисления (см.,

напр., [3]) дают удобные приемы для вычисления П. любых плоских областей с кусочно гладкими границами. Эти средства обосновывают также принцип Кавальери.

Стремление распространить понятие П. на более общие плоские множества с сохранением свойств 1) — 4) ведет к теории меры, к выделению класса плоских множеств, измеримых по Лебегу. Переход к еще более общим классам множеств на плоскости приводит уже к неединственным мерам со свойствами 1) — 4).

О р и е н т и р о в а н н а я п л о щ а д ь. Если на ориентированной плоскости расположена направленная замкнутая кривая l, быть может с самопересечениями и налеганиями, то для каждой не лежащей на l точки плоскости определена целочисленная функция (положительная, отрицательная или нулевая), наз. степенью точки относительно l. Она показывает сколько раз и в какую сторону контур l обходит данную точку. Интеграл *по всей плоскости от этой функции*, если он существует, наз. охватываемой l ориентированной П. Последняя, в отличие от обычной П., имеет знак. О простейших свойствах ориентируемой П. см. [4].

П л о щ а д ь п о в е р х н о с т и. Проще всего определяется П. многогранных поверхностей: как сумма П. плоских граней. Попытка ввести понятие П. кривых поверхностей как предела П. вписанных многогранных поверхностей (подобно тому, как длина кривой определяется как предел вписанных ломаных) встречает трудность. Даже для весьма простой кривой поверхности П. вписанных в нее многогранников со все более мелкими гранями может иметь разные пределы в зависимости от выбора последовательности многогранников. Это наглядно демонстрирует известный пример Шварца, в к-ром последовательности вписанных многогранников с разными пределами П. строятся для боковой поверхности прямого кругового цилиндра (см. [2]).

Чаще всего П. поверхности определяют для класса кусочно гладких поверхностей с кусочно гладким краем (или без края). Обычно это делают с помощью следующей конструкции. Поверхность разбивают на мелкие части с кусочно гладкими границами: в каждой части выбирают точку, в к-рой существует касательная плоскость, и ортогонально проектируют рассматриваемую часть на касательную плоскость поверхности в выбранной точке; П. полученных плоских проекций суммируют; наконец, переходят к пределу при все более мелких разбиениях (таких, что наибольший из диаметров частей разбиения стремится к нулю). На указанном классе поверхностей этот предел всегда существует, и если поверхность задана параметрически кусочно C^1-гладкой функцией $\boldsymbol{r}(u, v)$, где параметры u, v изменяются в области D на плоскости (u, v), то площадь F выражается двойным интегралом

$$F=\int_D \sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,du\,dv, \qquad (1)$$

где $g_{11}=\boldsymbol{r}_u^2$, $g_{12}=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v$, $g_{22}=\boldsymbol{r}_v^2$, а $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ — частные производные по u и v. Доказательство см., напр., в [3], [5]. В частности, если поверхность есть график C^1-гладкой функции $z=f(x, y)$ над областью D на плоскости (x, y), то

$$F=\int_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy. \qquad (2)$$

Здесь $(1+f_x^2+f_y^2)^{-1/2}=\cos\alpha$, где α — острый угол между нормалью к поверхности и осью Oz. На основе формул (1), (2) выводятся известные формулы для П. сферы и ее частей, обосновываются приемы для вычисления П. поверхностей вращения и т. п.

Для двумерных кусочно гладких поверхностей в римановых многообразиях [6] формула (1) служит

определением П., при этом роль g_{11}, g_{12}, g_{22} играют составляющие метрич. тензора самой поверхности.

Существенно, что уже в случае двумерной поверхности П. приписывается не множеству точек, а отображению двумерного многообразия в пространство и тем отличается от меры.

k-мерная площадь. Для кусочно гладкого погружения $f: M \to \mathbb{R}^n$ k-мерного многообразия (с краем или без края) в n-мерное евклидово пространство, $2 \leqslant k < n$, П. определяют с помощью конструкции, вполне аналогичной описанной выше для кусочно гладких поверхностей. Разница состоит в том, что проектирование ведется на k-мерные касательные плоскости и суммируются k-мерные объемы проекций. Если в области $D \subset M$ можно ввести координаты $u^1, \ldots, u^k$, то площадь F погружения $(D, f|_D)$ выражается интегралом

$$F = \int_D \sqrt{\det (g_{ij})}\, du^1 \ldots du^k, \qquad (3)$$

где g_{ij} — скалярные произведения $\left\langle \frac{df}{du^i}, \frac{df}{du^j} \right\rangle$. Если $k = n-1$ и D — область на координатной гиперплоскости $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, а f допускает явное задание $x_n = z(x_1, \ldots, x_{n-1})$, то формула (3) принимает вид

$$F = \int_D \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^2}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}. \qquad (4)$$

Если отображение f гладкое, то g_{ij} — коэффициенты метрич. тензора, индуцированного погружением, и из (3) следует, что П., определяемая внешней конструкцией, принадлежит внутренней геометрии погруженного многообразия. Иногда равенство (3) принимают за определение П., напр. в случае погружения не в $\mathbb{R}^n$, а в риманово многообразие.

На классе кусочно гладких погруженных многообразий П.: а) неотрицательна; б) равна 1 на k-мерном единичном кубе в $\mathbb{R}^n$; в) не меняется при ортогональных преобразованиях; г) аддитивна; д) полунепрерывна, т. е. $F(f) \leqslant \varlimsup_{i \to \infty} F(f_i)$ при равномерной сходимости $f_i \to f$; е) если $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ есть нерастягивающее отображение, то $F(\varphi \circ f) \leqslant F(f)$; ж) если $\{P_i\}$ — набор из C_n^k попарно ортогональных k-мерных плоскостей и p_i — проектирование на P_i, то

$$F(p_i \circ f) \leqslant F(f) \leqslant \sum_{i=1}^{C_n^k} F(p_i \circ f). \qquad (5)$$

Дальнейшие обобщения. Теория площадей. Распространение функции F на более общие объекты с сохранением хотя бы части их свойств а) — ж) может осуществляться разными путями и вести к разным результатам. Изучение таких обобщений составляет предмет теории П. Обзор соотношений разных понятий П. см. в [10].

Граница между теорией П. и теорией меры довольно условна. По традиции к теории П. относят в первую очередь изучение П. непрерывных отображений, где учитывается кратность и меньшую роль играет сохранение аддитивности. О k-мерных мерах в n-мерном пространстве см., напр., *Хаусдорфа мера*, *Фавара мера*.

Ту или иную П. можно вводить на основе аппроксимативного, интегрально геометрического, функционального подхода, либо — аксиоматически. Ниже приведены наиболее распространенные понятия.

Площадь по Лебегу (см. [7], [9]) определяется равенством

$$L(M, f) = \varlimsup_{i \to \infty} F(f_i), \qquad (6)$$

где M — конечно триангулируемое k-мерное многообразие; $f_i: M \to \mathbb{R}^n$ — всевозможные кусочно линейные от-

ображения; $f_i \to f$; $F(f_i)$ есть k-мерная П. соответствующей полиэдральной поверхности. П. по Лебегу одинакова для эквивалентных по Фреше отображений и потому является характеристикой *Фреше поверхности*.

В случае $k=2$ условие $L(M, f)<\infty$ влечет ряд полезных свойств поверхности (напр., возможность введения изотермич. параметров); в этом случае П. по Лебегу оказалась удобным инструментом, достаточным для решения *Плато задачи* и более общих двумерных задач вариационного исчисления. При $k>2$ исследование вариационных задач в классе непрерывных отображений столкнулось с трудностями (в проблеме компактности), что заставило обратиться к поиску других объектов (потоки и вариобразия) и связанных с ними характеристик типа П. Использование П. по Лебегу ограничивается также сложностью, с к-рой устанавливаются ее связи с другими понятиями П. и нек-рые ее свойства (напр., правое из неравенств (5)). Следует отметить две особенности $L(M, f)$: во-первых, при $L(M, f)=0$ может оказаться, что объем $V(f(M))>0$; во-вторых, даже при $k=2$ для разбиения M на M_1 и M_2 с общей границей в виде кривой может оказаться

$$L(M, f) > L(M_1, f|_{M_1}) + L(M_2, f|_{M_2}). \qquad (7)$$

Изучался вопрос о том, в какой мере соблюдение нек-рых из свойств а) — ж) с заменой аддитивности на полуаддитивность, т. е. допущением неравенства типа (7), приводит к П. по Лебегу. Вопросы этого типа исследованы (1983) не до конца (см. [7]).

Интегральногеометрические площади [9]. Пусть $N(M, \varphi, y)$ есть какая-либо функция кратности для отображений $\varphi : M \to \mathbb{R}^k$ в точке $y \in \mathbb{R}^k$, напр. $N=\operatorname{card}\varphi^{-1}(y)$. Тогда для $f : M \to \mathbb{R}^n$ можно образовать интегрально геометрическую П.

$$\int_{G(n, k)} \int_{R^k} N(M, p_\sigma \circ f, y)\, dV(y)\, d\nu(\sigma), \qquad (8)$$

где $G(n, k)$ — *Грассмана многообразие* k-мерных подпространств $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, ν — нормированная *Хаара мера* на $G(n, k)$, p_σ — ортогональное проектирование на $\sigma \in G(n, k)$. Для разных функций кратности П. (8) могут различаться. Весьма специальный выбор $N(M, \varphi, y)$ приводит для триангулируемых M к совпадению (8) с П. по Лебегу при $k=2$, а также при $k>0$ в случае равенства нулю меры Хаусдорфа $H_{k+1}(f(M))$ (см. [9]). Для случая $k=2$ различные интегрально геометрические П. вводились еще Пеано, Гецем, Банахом (см. [7]).

Площадь границы множества. В связи с доказательством неравенства Брунна — Минковского и классического изопериметрич. неравенства была введена П. по Минковскому. Она приписывается множеству $A \subset \mathbb{R}^n$, но характеризует П. его границы и определяется равенством

$$F(A) = \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} (V(A + hB) - V(A)), \qquad (9)$$

где B — единичный шар в $\mathbb{R}^n$, а V — объем. Для множеств A с кусочно гладкой границей и для выпуклых A в (9) существует обычный предел, совпадающий с $(n-1)$-мерной П. границы. Определение (9) сохраняет смысл для множеств в конечномерных нормированных пространствах, где даже для выпуклых A значение П. (9) может отличаться от меры Хаусдорфа $H_{n-1}(\partial A)$.

Другой полезной характеристикой, аналогичной П., к-рая сопоставляется множеству, но характеризует в основном его границу, является *периметр* измеримого множества. Он является частным случаем понятия массы потока.

Внутренняя площадь. Если M метризовано и $f: M \to \mathbb{R}^n$ — локально изометрич. отображение, то возникает вопрос о соотношении между $L(M, f)$ и мерой Хаусдорфа $H_k(M)$. Когда M — *двумерное многообразие ограниченной кривизны*, то $L(M,f) = H_2(M)$. Вообще же непрерывное $f: M \to \mathbb{R}^n$ индуцирует на компонентах связности $f^{-1}(u)$, $u \in \mathbb{R}^n$, обобщенную метрику ρ, отличающуюся возможностью $\rho(x, y) = \infty$. Конструкция k-мерной меры Хаусдорфа, примененная к ρ, дает характеристику, к-рую можно принять за внутреннюю П. погружения. Для липшицевых f она совпадает с $L(M, f)$ (см. [11]).

Массы потоков и вариобразий. Интегрирование k-форм по k-мерному кусочно гладко вложенному в $\mathbb{R}^n$ ориентированному многообразию M приводит к потоку $T_M\varphi = \int_M \langle \varphi(x), \nu(x) \rangle dF(x)$ — линейному функционалу на k-формах φ в $\mathbb{R}^n$. Здесь ν — единичный касательный к M k-вектор. Линейный функционал T_M в существенном характеризует M. Кроме того, определен (на этот раз и при неориентированном M) нелинейный функционал — вариобразие $V_M\varphi = \int_M |\langle \varphi, \nu \rangle| dF$. Интегральные нормы (массы) $\|T_M\|$ и $\|V_M\|$ совпадают с П., то есть с $F(M)$. Включение класса кусочно гладких подмногообразий пространства $\mathbb{R}^n$ в более общие классы потоков и вариобразий играет в вариационном исчислении такую же роль, как обобщенные решения в теории уравнений в частных производных.

Среди всех потоков и вариобразий выделяют широкие классы целочисленных потоков и вариобразий. Последние сохраняют многие геометрич. свойства подмногообразий. Напр., целочисленный поток есть поток, допускающий представление $T = \sum_{i=1}^{\infty} n_i T_{M_i}$, где n_i — целые числа, а M_i суть C^1-гладкие подмногообразия, при условии, что конечна масса $(k-1)$-мерного потока dT, определяемого равенством $dT(\varphi) = T(d\varphi)$. Массы целочисленных потоков и вариобразий можно рассматривать как обобщения понятия П. поверхности. И здесь есть связь с П. по Лебегу. Пусть кусочно гладкие отображения $f_i: M \to \mathbb{R}^n$ равномерно сходятся $f_i \to f$ и $L(M, f) = \lim_{i \to \infty} L(M, f_i)$. Тогда соответствующие вариобразия V_{f_i} слабо сходятся к нек-рому целочисленному вариобразию V_f, причем $\|V_f\| = L(M, f)$. Тем самым каждому $f: M \to \mathbb{R}^n$ с $L(M, f) < \infty$ естественно сопоставляется вариобразие V_f с массой $L(M, f)$; на языке потоков об этом см. в [13].

Лит.: [1] Лебег А., Об измерении величин, пер. с франц., 2 изд., М., 1960; [2] Энциклопедия элементарной математики, т. 5, М., 1966; [3] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; [4] Лопшиц А. М., Вычисление площадей ориентированных фигур, М., 1956; [5] Погорелов А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969; [6] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [7] Cesari L., Surface area, Princeton, 1956; [8] Federer H., Geometric measure theory, B.— Hdlb.— N. Y., 1969; [9] Federer H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1952, v. 58, № 3, p. 306—78; [10] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А., Геометрические неравенства, Л., 1980; [11] Busemann H., «Ann. Math. 2 ser.», 1947, v. 48, p. 234—67; [12] Almgren F. J., The theory of varifolds, Princeton, 1965; [13] Federer H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1961, v. 98, № 2, p. 204—33.

Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, Л. Д. Кудрявцев.

ПЛЮККЕРА ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — модель, реализующая геометрию трехмерного проективного пространства P_3 в гиперболич. пространстве ${}^3S_5$. П. и. основана на специальном истолковании *плюккеровых координат* прямой, определяемых для любой прямой пространства P_3.

При проективных преобразованиях пространства P_3 плюккеровы координаты преобразуются линейно. С помощью плюккеровых координат прямых про-

странства P_3 устанавливается взаимно однозначное соответствие между прямыми пространствами P_3 и точками проективного пространства P_5, координаты к-рых численно равны плюккеровым координатам прямых пространства P_3.

Прямые пространства P_3 изображаются точками невырожденной квадрики пространства P_5, индекс к-рой равен трем.

Если считать эту квадрику за абсолют и определить в пространстве P_5 проективную (неевклидову) метрику, то получается пятимерное гиперболич. пространство ${}^3S_5$. При каждой коллинеации и корреляции пространства P_3 происходит линейное преобразование плюккеровых координат, т. е. каждая коллинеация и корреляция изображаются коллинеацией пространства P_5, переводящей в себя абсолют. Эти коллинеации тем самым являются перемещениями пространства ${}^3S_5$. Перемещения пространства ${}^3S_5$ изображают или коллинеации или корреляции пространства P_3.

Каждому линейному комплексу пространства P_3 сопоставляется точка пространства ${}^3S_5$. Проективную геометрию пространства P_3 можно рассматривать как неевклидову геометрию гиперболич. пространства ${}^3S_5$. Именно эта интерпретация геометрии пространства P_3 в пространстве ${}^3S_5$ наз. интерпретацией Плюккера в связи с ролью плюккеровых координат.

Если в качестве основного образа пространства P_3 берется прямая, то геометрию этого пространства можно рассматривать как геометрию на абсолюте пространства ${}^3S_5$.

Группа проективных преобразований пространства P_3 изоморфна группе перемещений пространства ${}^3S_5$, и всякому инволюционному проективному преобразованию пространства P_3 соответствует инволюционное перемещение пространства ${}^3S_5$. Напр., нуль-системе в пространстве P_3 соответствует отражение от точки и от ее полярной гиперплоскости в пространстве ${}^3S_5$; инволюционной гомологии в пространстве P_3 соответствует гиперболический паратактич. сдвиг на полупрямую в пространстве ${}^3S_5$ и т. д. Каждой связной компоненте группы проективных преобразований пространства P_3 соответствует связная компонента группы перемещений пространства ${}^3S_5$.

1) Коллинеациям пространства P_3 с положительным определителем, включая тождественное преобразование, отвечают перемещения пространства ${}^3S_5$ с определителем, равным $+1$ (сюда включаются тождественные преобразования).

2) Корреляциям пространства P_3 с положительным определителем (включая нуль-систему) отвечают перемещения пространства ${}^3S_5$ с определителем, равным -1, переводящие собственную и идеальную области соответственно в себя (включая отражения от точки).

3) Коллинеациям пространства P_3 с отрицательным определителем отвечают перемещения пространства ${}^3S_5$ с определителем, равным $+1$, переводящие собственную область в идеальную и обратно, эта компонента содержит гиперболич. сдвиг на полупрямую.

4) Корреляциям пространства P_3 с отрицательным определителем отвечают перемещения пространства ${}^3S_5$ с определителем, равным -1, переводящие собственную область в идеальную и обратно.

Образам симметрии, соответствующим в пространствах P_3 и ${}^3S_5$, сопоставляются числовые инварианты, между к-рыми существуют определенные связи.

П. и. применяется в исследованиях групп перемещений трехмерных неевклидовых пространств S_3, ${}^1S_3$, ${}^2S_3$, к-рые изоморфны определенным подгруппам группы перемещений пространства ${}^3S_5$. Устанавливается также взаимосвязь групп движений этих трехмерных пространств (эллиптического, гиперболиче-

ского) с группами перемещений пространств низших размерностей (см. *Фубини интерпретация*, *Котельникова интерпретация*). С помощью П. и. изучается интерпретация трехмерного симплектич. пространства Sp_3 в пространстве ${}^3S_5$.

П. и. предложена Ю. Плюккером [1].

Лит.: [1] Plücker J., Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, Lpz., 1868—69; [2] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969; [3] Клейн Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.— Л., 1939.

Л. А. Сидоров.

ПЛЮККЕРА ФОРМУЛЫ — формулы, связывающие внешние, т. е. отвечающие проективным вложениям, и внутренние характеристики алгебраич. многообразий. Наиболее старыми и известными среди численных формул алгебраич. геометрии являются П. ф. для плоской приведенной и неприводимой кривой $Z \subset \mathbb{C}P^2$, к-рая имеет лишь обыкновенные двойные и каспидальные особые точки. Пусть d — степень кривой Z, т. е. число точек из Z на прямой общего положения в $\mathbb{C}P^2$, а d^* — класс кривой Z, т. е. число прямых, касательных к Z в неособых точках и проходящих через одну и ту же фиксированную точку общего положения в $\mathbb{C}P^2$. Основные две формулы Плюккера таковы:

$$(1)\quad d^* = d(d-1) - 2\delta - 3k,$$
$$(2)\quad d^* = 2d + (2g-2) - k,$$

где g — род разрешения X кривой Z, δ — число обыкновенных двойных точек, а k — число каспидальных точек. Формула (1) сводится к виду $d^* = d(d-1)$, если кривая Z неособа.

Другие классические П. ф. следуют из (1) и (2) по двойственности. Если Z — не прямая, тогда двойственная кривая Z^* к Z определяется как замыкание множества касательных к Z, рассматриваемых как точки двойственной плоскости $\mathbb{C}P^{2*}$. Теорема, принадлежащая Ю. Плюккеру (J. Plücker, см. [3]), состоит в том, что дважды двойственная кривая Z^{**} совпадает с Z. Предполагая, что Z^* имеет лишь δ^* обыкновенных двойных и k^* каспидальных особых точек, получают формулы

$$(1^*)\quad d = d^*(d^*-1) - 2\delta^* - 4k^*,$$
$$(2^*)\quad d = 2d^* + 2(2g-2) - 2k^*.$$

Число δ^* можно интерпретировать также как число бикасательных к Z, т. е. прямых, к-рые касаются Z ровно в двух различных и неособых точках, с порядком касания 2, а k^* — как число точек перегиба.

Четыре формулы (1), (2), (1)*, (2)* не независимы: из любых трех следует четвертая. Однако любые три из них независимы. Из них вытекают также следующие соотношения:

$$(3)\quad k^* = 3d(d-2) - 6\delta - 8k,$$
$$(3^*)\quad k = 3d^*(d^*-2) - 6\delta^* - 8k^*.$$

Именно эти формулы были получены Ю. Плюккером вместе с формулами (1) и (1)* в 1834—39.

В случае основного поля конечной характеристики П. ф. и теорема двойственности не всегда справедливы. Напр., в характеристике 2 все касательные к конике проходят через одну определенную точку, наз. странной точкой коники, поэтому двойственная кривая есть прямая. В характеристике 3 имеется неособая кубика только с тремя точками перегиба и даже с одной (по П. ф. их должно было бы быть девять). При правильной интерпретации d^* формулы (1), (2) остаются справедливыми во всех характеристиках $\neq 2$; в характеристике 2 их нужно заменить на

$$(1_2)\quad d^* = d(d-1) - 2\delta - 4k,$$
$$(2_2)\quad d^* = 2d + (2g-2) - 2k.$$

Известно обобщение П. ф. на случай кривых в P^n с произвольными особенностями (см. [2]), а также на случай гиперповерхностей в P^n.

Лит.: [1] Berzolari L., в кн.: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd 3_2, Lpz., 1906; [2] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, т. 1—2, пер. с англ., М., 1982; [3] Клейман С. Л., «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, в. 6, с. 69—148.

В. В. Шокуров.

ПЛЮККЕРОВЫ КООРДИНАТЫ — координаты прямой в трехмерном пространстве, шесть чисел p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{04}, p_{05}, p_{06}, из к-рых первые три являются координатами направляющего вектора l прямой L, а вторые три — моменты этого вектора относительно начала координат. Пусть прямая L проходит через точки X и Y с проективными координатами $(x_0, x_1, \ldots, x_3)$ и $(y_0, y_1, \ldots, y_3)$ соответственно П. к. этой прямой являются числа

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i.$$

П. к. применяют в линейчатой геометрии. Впервые были рассмотрены Ю. Плюккером (J. Plücker, 1869). Иногда вместо П. к. используют Клейна координаты $(x_0, \ldots, x_5)$, связанные с П. к. формулами:

$$p_{01} = x_0 + x_1,\ p_{02} = x_2 + x_3,\ p_{03} = x_4 + x_5,$$
$$p_{23} = x_0 - x_1,\ p_{13} = x_2 - x_3,\ p_{12} = x_4 - x_5.$$

Естественно рассматривать П. к. как координаты в p-мерном векторном подпространстве n-мерного векторного пространства V. При этом они понимаются как совокупность чисел, равных $(p\times p)$-субдетерминантам $(n\times p)$-матрицы $A(a_1, a_2, \ldots, a_p)$, столбцы a_i, $1\leqslant i\leqslant p$, к-рой являются столбцами координат (в каком-либо базисе пространства V) базисных векторов подпространства W. Если a_i^j — компоненты столбца a_i, $1\leqslant i\leqslant p$, то П. к. (или грассмановы координаты) являются числа

$$u^{i_1 i_2 \ldots i_p} = \begin{vmatrix} a_1^{i_1} & a_2^{i_1} & \ldots & a_p^{i_1} \\ a_1^{i_2} & a_2^{i_2} & \ldots & a_p^{i_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{i_p} & a_2^{i_p} & \ldots & a_p^{i_p} \end{vmatrix} = p!\, a_1^{[i_1} a^{i_2} \ldots a_p^{i_p]},$$
$$1\leqslant i_\nu \leqslant n.$$

П. к. симметричны по всем индексам. Число существенных П. к. равно $\binom{n}{p}$.

При замене базиса W и фиксированном базисе V П. к. умножаются на одно и то же ненулевое число. При замене базиса V и фиксированном базисе W П. к. преобразуются как координаты контравариантного тензора валентности p (см. *Поливектор*). Два подпространства совпадают тогда и только тогда, когда их П. к., вычисленные в одном и том же базисе пространства V, отличаются лишь ненулевым множителем.

Принадлежность вектора x подпространству W записывается в виде линейных уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^{p+1} (-1)^{\alpha-1} x^i \alpha_{u^{i_1 \ldots i_{\alpha-1} i \alpha_{\alpha+1} \ldots i_p}} = 0$$

с коэффициентами, являющимися П. к. подпространства W. В этих уравнениях $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ — всевозможные наборы из чисел $1, 2, \ldots, n$. *Л. П. Купцов.*

ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция $u = u(z)$ от n комплексных переменных $z = (z_1, \ldots, z_n)$ в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, имеющая в D непрерывные частные производные по координатам x_ν, y_ν, $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, до 2-го

порядка включительно и удовлетворяющая в D системе n^2 уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_\mu \partial y_\nu}=0,\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial y_\nu}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_\mu \partial x_\nu}=0,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\mu,\ \nu=1,\ \ldots,\ n.$$

Применяя формальные производные

$$\frac{\partial u}{\partial z_\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\nu}-i\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial \bar z_\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\nu}+i\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right),$$

можно записать систему (1) в более компактной форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar z_\mu \partial z_\nu}=0,\ \mu,\nu=1,\ \ldots,\ n. \qquad (2)$$

Значение класса П. ф. определяется тем, что действительная и мнимая части $u=\mathrm{Re}\, f$, $v=\mathrm{Im}\, f$ любой голоморфной в области D функции $f=u+iv$ являются П. ф. в D; такие две (действительные) П. ф. наз. с о п р я ж е н н ы м и. Обратно, если дана П. ф. u в окрестности V точки $z^0=x^0+iy^0\in\mathbb{C}^n$, то в этой окрестности существует голоморфная функция $f=u+iv$, действительная часть к-рой равна u. Задача определения этой голоморфной функции f сводится к нахождению сопряженной П. ф. v по формуле

$$v(z)=\int_{z^0}^{z}\sum_{\nu=1}^{n}\left(-\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\,dx_\nu+\frac{\partial u}{\partial x_\nu}\,dy_\nu\right)+C,\ z\in V,$$

где интеграл не зависит от пути в силу (1).

Вообще говоря, рассматриваются сами по себе и комплексные П. ф., определяемые как решения системы (1) или (2). При $n>1$ П. ф. составляют правильный подкласс класса *кратногармонических функций*, к-рый, в свою очередь, есть правильный подкласс класса *гармонических функций*: при $n=1$ все эти три класса совпадают. С другой стороны, при $n\geqslant 1$ действительные П. ф. составляют правильный подкласс класса *плюрисубгармонических функций*, к-рый, в свою очередь, при $n>1$ является правильным подклассом класса *субгармонических функций*.

Кроме общих свойств гармонич. функций, П. ф. при $n>1$ обладают характерными свойствами, обусловленными в основном переопределенностью системы (1) или (2) в этом случае. Пусть, напр., при $n>1$ П. ф. $u(z)$ в единичном поликруге

$$U^n=\{z\in\mathbb{C}^n:|z_\nu|<1,\ \nu=1,\ \ldots,\ n\}$$

непрерывна в замкнутом поликруге $\bar U^n$. При этом даже ее граничные значения на остове $T^n=\{\zeta\in\mathbb{C}^n:|\zeta_\nu|=1,\nu=1,\ \ldots,\ n\}$, являющемся правильной частью всей границы ∂U^n, не могут быть заданы в виде произвольной непрерывной функции $U^*(\zeta)$, $\zeta\in T^n$,— они удовлетворяют определенным дополнительным условиям. Таким образом, задача Дирихле в классе П. ф. с данными на остове разрешима лишь при специально подобранных граничных данных (см. [3]).

Лит.: [1] Ш а б а т Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [2] С о л о м е н ц е в Е. Д., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964, с. 83—100; [3] Р у д и н У., Теория функций в поликруге, пер. с англ., М., 1974. *Е. Д. Соломенцев.*

ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — действительная функция $u=u(z)$, $-\infty\leqslant u<+\infty$, n комплексных переменных $z=(z_1,\ \ldots,\ z_n)$ в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$: $n\geqslant 1$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $u(z)$ полунепрерывна сверху всюду в D; 2) $u(z^0+\lambda a)$ есть *субгармоническая функция* переменного $\lambda\in\mathbb{C}$ в каждой связной компоненте открытого множества $\{\lambda\in\mathbb{C}: z^0+\lambda a\in D\}$ для любых

фиксированных точек $z^0 \in D$, $a \in \mathbb{C}^n$. Функция $v(z)$ наз. п л ю р и с у п е р г а р м о н и ч е с к о й ф у н к ц и е й, если — $v(z)$ есть П. ф. Плюрисубгармонич. функции при $n>1$ составляют правильный подкласс класса субгармонич. функций, а при $n=1$ эти два класса совпадают. Наиболее важные примеры П. ф.: $\ln|f(z)|$, $\ln^+|f(z)|$, $|f(z)|^p$, $p \geqslant 0$, где $f(z)$ — голоморфная функция в D.

Для того чтобы полунепрерывная сверху в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функция $u(z)$, $u(z) < +\infty$, была П. ф., необходимо и достаточно, чтобы для любых фиксированных $z \in D$, $a \in \mathbb{C}^n$, $|a|=1$ существовало число $\delta = \delta(z, a) > 0$ такое, что при $0 < r < \delta$ выполняется неравенство

$$u(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\,(z + re^{i\varphi}\, a)\, d\varphi.$$

Для функций $u(z)$ класса $C^2(D)$ более удобен следующий критерий: $u(z)$ есть П. ф. в D тогда и только тогда, когда эрмитова форма (гессиан функции u)

$$H\,((z;\, u)\, a, \bar{a}) = \sum_{j,\, k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k}\, a_j a_k$$

неотрицательно определена в каждой точке $z \in D$.

Помимо общих свойств субгармонич. функций, для П. ф. справедливы следующие: 1) $u(z)$ есть П. ф. в области D тогда и только тогда, когда $u(z)$ — П. ф. в окрестности каждой точки $z \in D$; 2) линейная комбинация П. ф. с положительными коэффициентами есть П. ф.; 3) пределы равномерно сходящейся и монотонно убывающей последовательностей П. ф. суть П. ф.; 4) для того чтобы $u(z)$ была П. ф. в области D, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде предела убывающей последовательности П. ф. $\{u_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно классов $C^\infty(D_k)$, где области D_k таковы, что $D_k \subset \overline{D}_k \subset D_{k+1}$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D$; 5) для любой точки $z^0 \in D$ среднее значение

$$J\,(z^0, r; u) = \frac{1}{\sigma_{2n}} \int_{|a|=1} u\,(z^0 + ra)\, da$$

по сфере радиуса r, где $\sigma_{2n} = 2\pi^n/(n-1)!$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^{2n}$, есть возрастающая функция по r, выпуклая относительно $\ln r$ на отрезке $0 \leqslant r \leqslant R$, если шар

$$V\,(z^0, R) = \{z \in \mathbb{C}^n\colon |\, z - z^0\,| < R\}$$

расположен в D, причем $u(z^0) \leqslant J\,(z^0, r; u)$; 6) при голоморфных отображениях П. ф. переходит в П. ф.; 7) если $u(z)$ — непрерывная П. ф. в области D, E — замкнутое связное аналитич. подмножество D и сужение $u|E$ достигает максимума на E, то $u(z) = \text{const}$ на E.

Имеют значение для приложений также следующие правильные подклассы класса П. ф. Функция $u(z)$ наз. с и л ь н о п л ю р и с у б г а р м о н и ч е с к о й, если существует выпуклая возрастающая функция $\varphi(t)$, $-\infty < t < +\infty$,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = +\infty,$$

такая, что $\varphi^{-1}(u(z))$ есть П. ф. В частности, если $\varphi(t) = e^t$, то получают л о г а р и ф м и ч е с к и п л ю р и с у б г а р м о н и ч е с к и е ф у н к ц и и.

Класс П. ф. и только что названные его подклассы важны для описания различных свойств голоморфных функций и областей комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, а также и более общих аналитич. пространств (см. [1] — [4], [7]). Напр., класс ф у н к ц и й Г а р т о г с а $H(D)$ определяется как наименьший класс действительных функций в области D, содержащий все

функции $\ln|f(z)|$, где $f(z)$ — голоморфная функция в D, и замкнутый относительно следующих операций:

1) $\{u_1, u_2 \in H(D), \lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0\} \Rightarrow \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in H(D)$;

2) $\{u_k \in H(D),\ u_k \leqslant M(D')$ для всякой подобласти $D' \subset \overline{D'} \subset D, k = 1, 2, \ldots\} \Rightarrow \sup\{u_k(z): k = 1, 2, \ldots\} \in H(D)$;

3) $\{u_k \in H(D),\ u_k \geqslant u_{k+1}, k = 1, 2, \ldots\} \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} u_k(z) \in H(D)$;

4) $\{u \in H(D),\ z \in D\} \Rightarrow \limsup\limits_{z' \to z} u(z') \in H(D)$;

5) $\{u \in H(D')$ для всякой подобласти $D' \subset \overline{D'} \subset D\} \Rightarrow u \in H(D)$.

Полунепрерывные сверху функции Гартогса являются П. ф., но не всякая П. ф. есть функция Гартогса. Если D — область голоморфности, то классы полунепрерывных сверху функций Гартогса $u \in H(D)$ и П. ф. в D совпадают (см. [5], [6]).

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [2] Геннинг Р., Россси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [3] Lelong P., в кн.: Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles, 1953, P., 1953, p. 21—40; [4] Bremermann H. J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1956, v. 82, p. 17—51; [5] его же, «Math. Ann.», 1956, Bd 131, p. 76—86; [6] его же, «Proc. Amer. Math. Soc.», 1956, v. 7, p. 771—75; [7] Соломенцев Е. Д., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964, с. 83—100. *Е. Д. Соломенцев.*

ПЛЮРИСУПЕРГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — см. *Плюрисубгармоническая функция.*

ПОВЕРХНОСТЕЙ ТЕОРИЯ — раздел дифференциальной геометрии, в к-ром изучаются поверхности. В П. т. исследуются форма поверхности, ее искривление, свойства различного рода линий на поверхности, рассматриваются вопросы изгибания, вопросы существования поверхности с данными внутренними или внешними свойствами и др.

В П. т. имеются две точки зрения: поверхность можно рассматривать как метрич. пространство со своей внутренней метрикой (т. н. внутренняя геометрия), либо поверхность рассматривается как фигура в пространстве (т. н. внешняя геометрия). Многие направления в П. т. (вопросы *изометрического погружения*, *изгибания* и др.) посвящены изучению связей между внутренней и внешней геометриями. Для регулярных поверхностей класса C^2 эти связи довольно тесны. См. также *Погруженных многообразий геометрия.*

Изучение поведения кривых на поверхностях (*асимптотических линий*, *геодезических линий* и др.), а также пар их однопараметрич. семейств — т. н. *сетей* — привело к выделению специальных классов поверхностей. Напр., *переноса поверхность* характеризуется существованием на ней сети переноса, *Фосса поверхность* — сетью Фосса, *линейчатая поверхность* — полугеодезической асимптотич. сетью и т. д. Теория сетей тесно связана с вопросами отображений поверхностей на поверхности. Наиболее важными классами отображений являются: *изометрическое отображение*, при к-ром сохраняются длины дуг, площади и углы между двумя направлениями, исходящими из одной точки; *конформное отображение*, при к-ром сохраняются углы между всякими двумя направлениями, выходящими из одной точки (напр., *стереографическая проекция*); *сферическое отображение*, при к-ром каждой точке поверхности по параллельности нормалей ставится в соответствии точка сферы; *геодезическое отображение*, при котором геодезические линии одной поверхности соответствуют геодезическим другой поверхности; эквиареальное отображение, при к-ром площади соответствующих фигур находятся в постоянном отношении.

Исследования в П. т. сопровождались изучением большого числа классов поверхностей, таких как *поверхности второго порядка*, *винтовые поверхности*, *геликоиды*, *Каталана поверхности*, *коноиды*, *резные поверхности*, *каналовые поверхности*, *Дюпена циклиды*, *Эннепера поверхности*, *Вейнгартена поверхности* и др. Много внимания уделяется изучению *минимальных поверхностей*. В связи с приложениями широко исследовались *триортогональные системы* поверхностей, напр. конфокальные поверхности 2-го порядка.

Помимо изучения свойств поверхностей, неизменных при любых изометрич. преобразованиях всего пространства (относящихся к т. н. метрической П. т.), изучаются свойства поверхностей, инвариантные по отношению к какой-либо другой группе преобразований, напр. группе аффинных или проективных преобразований. Аффинная П. т. рассматривает свойства поверхностей, неизменные при эквиаффинных преобразованиях (т. е. аффинных преобразованиях, сохраняющих объем). Проективная П. т. рассматривает проективно инвариантные свойства поверхностей. См. также *Аффинная дифференциальная геометрия*, *Проективная дифференциальная геометрия*, *Конформно-дифференциальная геометрия*.

Исследования П. т., изучение полей тех или иных геометрич. объектов, связанных с поверхностями, стимулировали развитие многих методов, нашедших применение и в др. областях математики, физики и механики (напр., *тензорный анализ*, *Картана метод внешних форм* и др.).

Для П. т. в том виде, в каком она сложилась в кон. 19 в., характерно рассмотрение только достаточно регулярных для применения дифференциального исчисления поверхностей (или их частей). С нач. 20 в. появились направления исследований П. т., в к-рых отказ от требований дифференцируемости компенсируется какими-то иными требованиями, гарантирующими получение содержательных геометрич. результатов. Такими требованиями были, напр., выпуклость изучаемой поверхности (см. *Выпуклая поверхность*), локальная единственность геодезической. Кроме того, предметом изучения стали поверхности во всем их протяжении (т. н. *геометрия в целом*), а не в достаточно малом участке, как это имело место в классической дифференциальной геометрии. При этом существенными являются учет их топологич. строения (напр., род поверхности), их полноты в том или ином смысле и связи этих характеристик с распределением кривизны.

Исследования по дифференциальной геометрии многомерных пространств, эллиптического пространства и пространства Лобачевского установили ряд геометрич. фактов, относящихся к П. т. в этих пространствах.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956; [2] Бляшке В., Дифференциальная геометрия..., пер. с нем., т. 1, М.— Л., 1935; [3] Норден А. П., Теория поверхностей, М., 1956; [4] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1—2, М.— Л., 1947—48; [5] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963; [6] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.— Л., 1948; [7] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969; [8] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, 2 éd., t. 1—4, P., 1914—1925; [9] Bianchi L., Lezioni di geometria differenziale, 3 ed., t. 1—2, Bologna, 1937.

Ю. А. Аминов.

ПОВЕРХНОСТНАЯ ФУНКЦИЯ — функция множества на сфере Ω, равная площади $S(E)$ той части выпуклой поверхности F, к-рая имеет своим сферич. изображением $E \subset \Omega$. Она сохраняет смысл для общих выпуклых поверхностей и является вполне аддитивной на кольце борелевских множеств.

Лит.: [1] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1938, т. 3, № 1, с. 27—44; [2] Буземан Г., Выпуклые поверхности, пер. с англ., М., 1964.

М. И. Войцеховский.

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл по поверхности. Пусть поверхность S, расположенная в

трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами x, y, z и имеющая, быть может, самопересечения, задана векторным представлением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v),$$

где
$$\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)) \qquad (1)$$

— непрерывно дифференцируемая вектор-функция, определенная на замыкании $\bar{G}$ двумерной измеримой по Жордану области G, расположенной на плоскости с декартовыми координатами u, v. Пусть

$$g_{11} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right)^2,\ g_{12} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v},\ g_{22} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)^2$$

— коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S. Если через $F(x, y, z)$ обозначить функцию, определенную на поверхности S, т. е. функцию $F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, то поверхностный интеграл первого рода (или интеграл по площади поверхности) определяют равенством

$$\iint_S F(x, y, z)\, dS =$$

$$= \iint_G F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du dv. \qquad (2)$$

Это определение не зависит от выбора представления поверхности. П. и. 1-го рода является пределом соответствующих интегральных сумм, к-рые могут быть описаны в терминах, связанных с поверхностью. Напр., если функция $F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ интегрируема по Риману, $\tau = \{S_i\}_{i=1}^{i=k}$ — разбиение поверхности S на части S_i, являющиеся образами при отображении (1) множеств $E_i \subset \bar{G}$, образующих разбиение $\tau_0 = \{E_i\}_{i=1}^{i=k}$ множества $\bar{G}$ (см. *Кратный интеграл*), и

$$\operatorname{mes} S_i = \iint_{E_i} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du dv$$

— площадь S_i, то

$$\iint_S F(x, y, z)\, dS =$$

$$= \lim_{\delta_{\tau_0} \to 0} \sum_{i=1}^{k} F(x(\xi_i, \eta_i),\ y(\xi_i, \eta_i),\ z(\xi_i, \eta_i)) \operatorname{mes} S_i,$$

где δ_{τ_0} — мелкость разбиения τ_0, а $(\xi_i, \eta_i) \in E_i$. В случае явного задания поверхности S в виде $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{G}$, формула (2) принимает вид

$$\iint_S F(x, y, z)\, dS =$$

$$= \iint_G F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx dy.$$

Если на поверхности S с векторным представлением (1) нет особых точек, т. е. $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$, то ее можно ориентировать, выбрав на ней непрерывную единичную нормаль $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, напр. $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}$.

Для ориентированной поверхности S^+ определяют поверхностные интегралы второго рода по формулам

$$\left.\begin{aligned}
\iint_{S^+} F(x, y, z)\, dx\, dy &= \iint_S F(x, y, z) \cos\gamma\, dS, \\
\iint_{S^+} F(x, y, z)\, dy\, dz &= \iint_S F(x, y, z) \cos\alpha\, dS, \\
\iint_{S^+} F(x, y, z)\, dy\, dz &= \iint_S F(x, y, z) \cos\beta\, dS,
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где в правой части стоят П. и. 1-го рода. Если S^- — поверхность S с ориентацией, противоположной ориентации S^+, то

$$\iint_{S^-} F(x, y, z)\, dx\, dy = -\iint_{S^+} F(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Аналогичные равенства имеют место в случае остальных П. и. 2-го рода (3). Как и П. и. 1-го рода, П. и. 2-го рода являются пределами интегральных сумм, к-рые можно описать в терминах поверхности.

Если $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$, то справедлива формула

$$\iint_{S^+} F(x,\ y,\ z)\,dx\,dy =$$

$$=\iint_G F(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v))\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\,dudv.$$

Аналогичные формулы справедливы и для других П. и. 2-го рода (3).

В частности, для случая поверхности $z=f(x,\ y)$, $(x,\ y)\in\overline{G}$:

$$\iint_{S^+} F(x,\ y,\ z)\,dx\,dy=\iint_G F(x,\ y,\ f(x,\ y))\,dx\,dy,$$

$$\iint_{S^-} F(x,\ y,\ z)\,dx\,dy=-\iint_G F(x,\ y,\ f(x,\ y))\,dx\,dy.$$

Первый из этих интегралов наз. интегралом по «верхней» стороне поверхности S, а второй — по «нижней». Эта терминология связана с тем, что вектор $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$ в случае явного задания поверхности S, т. е. когда $x=u$, $y=v$, $z=f(x,\ y)$, составляет острый угол с осью z, т. е. направлен «вверх», а во втором случае — тупой угол и, следовательно, направлен «вниз».

Если гладкая поверхность S является границей ограниченной области и S^+ обозначает ее ориентацию с помощью внешней, а, значит, S^- с помощью внутренней, нормали по отношению к указанной области, то П. и. 2-го рода по ориентированной поверхности S^+ наз. П. и. по внешней стороне поверхности, а по S^- — П. и. по внутренней стороне.

П. и. по кусочно гладким поверхностям, к-рые могут быть разбиты на конечное число частей, каждая из к-рых имеет векторное представление (1), определяются как суммы П. и. по соответствующим частям. Так, определенные П. и. по кусочно гладким поверхностям не зависят от способа разбиения поверхности на указанные части.

Остроградского формула устанавливает связь между тройным интегралом по трехмерной ограниченной области и П. и. по ее границе, а *Стокса формула* — между П. и. и криволинейным интегралом по контуру, являющимся ее краем.

П. и. $\iint_S dS$ равен площади поверхности S. Если на поверхности S распределена масса с плотностью $F(x,\ y,\ z)$, то П. и. $\iint_S F(x,\ y,\ z)dS$ равен величине всей этой массы. Если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x,\ y,\ z)$ — векторная функция, заданная на ориентированной с помощью единичной нормали $\boldsymbol{n}$ поверхности S, то П. и.

$$\iint_S \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\,dS$$

наз. потоком векторного поля $\boldsymbol{a}$ через поверхность S. Очевидно, он не зависит от выбора системы координат в пространстве $\mathbb{R}^3$. С помощью П. и. записывают *двойного слоя потенциал* и *простого слоя потенциал*.

Если поверхность S является дифференцируемым многообразием, непрерывно дифференцируемые неотрицательные функции $\varphi_j(x,\ y,\ z)$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, образуют разбиение единицы на S, т. е. носитель каждой функции содержится в нек-рой *карте* многообразия S и $\sum_{j=1}^m\varphi_j(x,\ y,\ z)=1$ для каждой точки $(x,\ y,\ z)\in S$, а функция $F(x,\ y,\ z)$ определена на S, то,

по определению,

$$\iint_S F(x, y, z)\, dS = \sum_{j=1}^{m} \iint_S \varphi_j(x, y, z)\, F(x, y, z)\, dS, \quad (4)$$

где каждый интеграл в правой части понимается в смысле (2). Если S^+ — ориентированное двумерное многообразие, то

$$\iint_{S^+} F(x, y, z)\, dx\, dy = \sum_{j=1}^{m} \iint_{S^+} \varphi_j(x, y, z) F(x, y, z)\, dx dy. \quad (5)$$

Аналогично определяются П. и. 2-го рода других типов (3). Определения (4) и (5) не зависят от выбора разбиения единицы на многообразии S.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980; [2] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 2, М., 1981; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975; [4] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, М., 1979; [5] Мищенко А. С., Фоменко А. Т., Курс дифференциальной геометрии и топологии, М., 1980. *Л. Д. Кудрявцев.*

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ — потенциал меры, сосредоточенной на нек-рой поверхности. При решении основных граничных задач *потенциала теории* применяются два вида П. п.: *простого слоя потенциал*

$$V(x) = \int_S \frac{\mu(y)}{|y-x|}\, dS_y,$$

создаваемый распределенной по поверхности S мерой с плотностью $\mu(y)$, $y \in S$; и *двойного слоя потенциал*

$$W(x) = \int \nu(y)\, \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|y-x|}\, dS_y,$$

создаваемый распределенной на S мерой с плотностью $\nu(y)$. Физически потенциал простого слоя интерпретируется как потенциал электрич. зарядов с плотностью $\mu(y)$, а потенциал двойного слоя — как потенциал диполей с плотностью $\nu(y)$ (см. также *Мультиполя потенциал*). *Е. Д. Соломенцев.*

ПОВЕРХНОСТЬ — одно из основных понятий геометрии. Определения П. в различных областях геометрии существенно отличаются друг от друга.

В *элементарной геометрии* рассматриваются плоскости, многогранные П., а также нек-рые кривые П. (напр., сфера). Каждая из кривых П. определяется специальным способом, чаще всего как множество точек или линий. Общее понятие П. в элементарной геометрии лишь поясняется, а не определяется: говорят, что П. есть граница тела или след движущейся линии и т. п.

В аналитич. и алгебраич. геометрии П. рассматривается как множество точек, координаты к-рых удовлетворяют определенному виду уравнений (см., напр., *Поверхность второго порядка*, *Алгебраическая поверхность*).

В 3-мерном евклидовом пространстве E^3 П. определяется с помощью понятия п р о с т о й П. как гомеоморфизм квадрата в E^3. П. понимается как связное множество простых П. (напр., сфера является объединением двух полусфер — простых П.).

Обычно задание П. в E^3 осуществляется вектор-функцией

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)),$$

где $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$, а

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$$

— функции параметров u и v, удовлетворяющие нек-рым условиям регулярности, напр. условию

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{Vmatrix} = 2$$

(см. также *Дифференциальная геометрия, Поверхностей теория, Риманова геометрия*).

С точки зрения топологии П.— *двумерное многообразие.* *Л. А. Сидоров.*

К3-ПОВЕРХНОСТЬ — гладкая проективная алгебраич. поверхность X, у к-рой канонич. класс тривиален и размерность $\dim H^1(X, \Omega^1)$ пространства одномерных дифференциальных форм на X равна 0. Для К3-П. известны значения следующих инвариантов: геометрич. род $p_g = \dim H^2(X, \Omega^2) = 1$, эйлерова характеристика структурного пучка $\chi(\mathcal{O}) = 2$, этальные или (над полем комплексных чисел) топологич. числа Бетти $b_0 = b_4 = 1$, $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 = 22$, характеристика Эйлера — Пуанкаре $e(X) = 24$. Формула Римана — Роха для одномерного обратимого пучка D на К3-П. приобретает вид

$$\dim H^0(X, D) + \dim H^0(X, D^{-1}) = \frac{(D)^2}{2} + 2 + \dim H^1(X, D),$$

где $(D)^2$ — индекс самопересечения класса дивизоров, соответствующего пучку D (см. *Римана — Роха теорема*). Если пучку D соответствует эффективный неприводимый дивизор, то $H^1(X, D) = 0$.

Формула для вычисления арифметич. рода неприводимой кривой C на X тоже имеет простой вид:

$$p_a(C) = \frac{(C)^2}{2} + 1.$$

Как следствие получается, что $(C)^2 \geqslant -2$, а равенство $(C)^2 = -2$ будет выполнено только для гладких рациональных кривых. Отсюда также следует, что $(D)^2$ — четное число для любого дивизора D. Пусть $N(X)$ — группа Нерона — Севери поверхности X, т. е. группа классов дивизоров на X относительно алгебраич. эквивалентности. Тогда $N(X)$ — свободная абелева группа ранга ρ, где $1 \leqslant \rho \leqslant 20$, если характеристика основного поля k равна 0, и $1 \leqslant \rho \leqslant 20$ или $\rho = 22$, если $\operatorname{char} k > 0$. Индекс пересечения определяет на $N(X)$ целозначную билинейную форму, у к-рой квадрат любого элемента четен. Поверхности с $\rho = 20$ (при $\operatorname{char} k = 0$) наз. с и н г у л я р н ы м и, а с $\rho = 22$ (при $\operatorname{char} k > 0$) — с у п е р с и н г у л я р н ы м и.

Еще один численный инвариант поверхности X — это минимальный возможный индекс n самопересечения эффективного очень обильного дивизора на X, т. е. минимальная возможная степень поляризации на X. Если $n = 2n - 2$, то поверхность X можно вложить в n-мерное проективное пространство и нельзя вложить в проективное пространство меньшей размерности.

Важный способ изучения К3-П.— представление их в виде семейства (пучка) эллиптич. кривых. Поверхность X представлена в виде семейства эллиптич. кривых, если задано регулярное отображение $\tau : X \to P^1$, все слои к-рого, кроме конечного их числа,— неособые эллиптич. кривые. Поверхность X может быть представлена в таком виде тогда и только тогда, когда в группе $N(X)$ есть ненулевой элемент с индексом самопересечения 0, причем всевозможные такие представления соответствуют классам эффективных дивизоров с индексом самопересечения 0. Если поверхность, представленная в виде семейства эллиптич. кривых, является К3-П., то у нее нет кратных слоев. Построенное по такому семейству якобиево эллиптич. семейство снова будет К3-П.

Важный класс К3-П.— *Куммера поверхности.* Куммерова поверхность — это неособая модель фактора двумерного абелева многообразия A по подгруппе автоморфизмов, порожденной отображением замены знака. В частности, куммеровой будет поверхность, задаваемая уравнением $x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$ в P^3. Любая гладкая поверхность 4-й степени в P^3 является К3-П. Поверхностями К3 будут гладкие поверхности, получаемые как пересечение трех гиперповерхностей 2-й

степени (квадрик) в P^5 и как двойное накрытие плоскости с кривой ветвления 6-й степени.

Все КЗ-П. над полем комплексных чисел диффеоморфны, их многообразие модулей связно и имеет размерность 19. Строение этого многообразия модулей и автоморфизмы КЗ-П. изучают при помощи *отображения периодов*. Для КЗ-П. над полем комплексных чисел отображение периодов биективно (теорема типа Торелли) (см. [2]).

Если задано одномерное семейство КЗ-П. (над $\mathbb{C}$) с одним вырожденным слоем, то после накрытия базы его можно перестроить, не меняя вне вырожденного слоя, так что этот вырожденный слой либо станет невырожденным, либо будет одного из двух типов: (а) компоненты вырожденного слоя и кривые пересечений рациональны, двойственный полиэдр вырожденного слоя имеет топологич. тип двумерной сферы, (б) компоненты вырожденного слоя составляют цепочку, непустое пересечение имеют только соседние поверхности, крайние две поверхности рациональны, средние — эллиптические линейчатые, кривые пересечения — эллиптические. Типы (*а*) или (*б*) возникают, когда монодромия семейства нетривиальна (см. [2]).

КЗ-П. над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики допускают подъем в характеристику нуль, модули их кристаллич. когомологий не имеют кручения, а ранги этих модулей совпадают с размерностями соответствующих этальных когомологий. Для суперингулярных поверхностей построен аналог отображения периодов, и для него тоже доказана теорема типа Торелли. Многообразие периодов здесь неприводимо, полно, имеет размерность 9 и унирационально. Описаны все возможные для суперсингулярных поверхностей формы пересечений на $N(X)$, их 9 для каждого значения характеристики основного поля (см. [4]).

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [2] Куликов В. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1977, т. 41, № 5, с. 1008—42; [3] Рудаков А. Н., Шафаревич И. Р., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1981, т. 45, № 3, с. 646—61; [4] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 18, М., 1981. *А. Н. Рудаков.*

ПОВЕРХНОСТЬ ВТОРОГО ПОРЯДКА — множество точек 3-мерного действительного (или комплексного) пространства, координаты к-рых в декартовой системе удовлетворяют алгебраич. уравнению 2-й степени

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0. \qquad (*)$$

Уравнение (*) может и не определять действительного геометрич. образа, в таких случаях говорят, что уравнение (*) определяет мнимую П. в. п. В зависимости от значений коэффициентов общего уравнения (*) оно может быть преобразовано с помощью параллельного переноса и поворота системы координат на нек-рый угол к одному из 17 приведенных ниже канонич. видов, каждому из к-рых соответствует определенный класс поверхностей. Именно,

невырождающиеся нераспадающиеся поверхности:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — *эллипсоид*,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ — мнимый эллипсоид,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ — однополостный *гиперболоид*,

$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — двуполостный гиперболоид,

$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ p,\ q>0$ — *эллиптический параболоид*,

$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ p,\ q>0$ — *гиперболический параболоид*;

вырождающиеся распадающиеся поверхности:

цилиндрические поверхности —

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — *эллиптический цилиндр*,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ — мнимый эллиптический цилиндр,

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ — *гиперболический цилиндр*,

$y^2=2px$ — *параболический цилиндр*;

конические поверхности —

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ — коническая поверхность,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ — мнимая коническая поверхность;

вырождающиеся распадающиеся поверхности:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ — пара пересекающихся плоскостей,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ — пара мнимых пересекающихся плоскостей,

$\frac{x^2}{a^2}=1$ — пара параллельных плоскостей,

$x^2+a^2=0$ — пара мнимых параллельных плоскостей.

$x^2=0$ — пара совпадающих плоскостей.

П. в. п., имеющие единственный центр симметрии (центр П. в. п.), наз. центральными поверхностями. Координаты центра определяются решением системы:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}=0,$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}=0,$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}=0.$$

П. в. п. без центра симметрии или с неопределенным центром наз. нецентральными поверхностями.

Исследование П. в. п. может быть осуществлено без приведения общего уравнения к канонич. виду. Это достигается совместным рассмотрением значений т. н. основных инвариантов П. в. п.— выражений, составленных из коэффициентов уравнения (*), значения к-рых не меняются при параллельном переносе и повороте системы координат:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\end{vmatrix},\quad \delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix},$$

$$T=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\\ a_{21}a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}\\ a_{32}a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33}a_{31}\\ a_{13}a_{11}\end{vmatrix},$$

$$S=a_{11}+a_{22}+a_{33},$$

и семиинвариантов (полуинвариантов) Δ' и Δ'', к-рые являются инвариантами относительно поворота системы координат:

$$\Delta'=\Delta_{11}+\Delta_{22}+\Delta_{33},$$

где Δ_{ij} — алгебраич. дополнение элемента a_{ik}, в Δ;

$$\Delta''=\begin{vmatrix} a_{11}a_{14}\\ a_{41}a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22}a_{24}\\ a_{42}a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33}a_{34}\\ a_{43}a_{44}\end{vmatrix}.$$

См. табл. 1 и 2.

Табл. 1.— Классификация поверхностей второго порядка по инвариантам

		Невырождающиеся поверхности		Вырождающиеся поверхности
		$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$
Центральные поверхности $\delta \neq 0$	$\delta S > 0$, $T > 0$	Мнимый эллипсоид	Эллипсоид	Мнимый конус
	$\delta S \leqslant 0$ и (или) $T \leqslant 0$	Однополостный гиперболоид	Двуполостный гиперболоид	Действительный конус
Нецентральные поверхности $\delta = 0$		Гиперболический параболоид	Эллиптический параболоид	Цилиндрические и распадающиеся поверхности (см. табл. 2)

Табл. 2.—Цилиндрические и распадающиеся поверхности второго порядка ($\Delta = 0$, $\delta = 0$)

	Цилиндрические поверхности $\Delta' \neq 0$		Распадающиеся поверхности $\Delta' = 0$	
$T > 0$	Эллиптический цилиндр		Пара мнимых пересекающихся плоскостей	
	Мнимый $\Delta' S > 0$	Действительный $\Delta' S < 0$		
$T < 0$	Гиперболический цилиндр		Пара пересекающихся плоскостей	
$T = 0$	Параболический цилиндр		Пара мнимых параллельных плоскостей $\Delta'' > 0$	Пара совпадающих плоскостей $\Delta'' = 0$
			Пара параллельных плоскостей $\Delta'' < 0$	

Инварианты в общем случае определяют П. в. п. с точностью до движения евклидова пространства, если соответствующие инварианты двух поверхностей равны, то такие поверхности могут быть совмещены движением. Иными словами, эти поверхности эквивалентны по отношению к группе движений пространства (метрически эквивалентны).

Существует классификация П. в. п. с точки зрения других групп преобразований. Так, относительно группы аффинных преобразований эквивалентными являются любые две поверхности, определяемые уравнениями одного канонич. вида, напр. две подобные П. в. п. являются эквивалентными.

Связи между различными аффинными классами П. в. п. позволяет установить классификация с точки зрения проективной геометрии. При этом эквивалентными считаются поверхности, к-рые могут быть переведены друг в друга посредством проективного преобразования. Напр., эллипсоиды, эллиптич. параболоиды и двуполостные гиперболоиды с точки зрения проективной геометрии являются действительными овальными поверхностями. Их проективная эквивалентность проявляется в том, что существует нек-рая система проективных координат, в к-рой уравнения этих поверхностей имеют одинаковый вид:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0,$$

т. е. соответствующие квадратичные формы $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ имеют одинаковые ранг (4) и сигнатуру (3). Аффинное их различие проявляется в типе линии пересечения с несобственной плоскостью: эллипсоиды пересекаются с ней по мнимому овалу, гиперболоиды — по действительному овалу, эллиптич. параболоиды — по паре мнимых пересекающихся прямых. Всего существует 8 классов проективной эквивалентности П. в. п.:

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$ — мнимая овальная поверхность,

$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$ — действительная овальная поверхность,

$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$ — кольцевидная поверхность,

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ — мнимая коническая поверхность,

$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ — действительная коническая поверхность,

$x_1^2+x_2^2=0$ — пара мнимых плоскостей,

$x_1^2-x_2^2=0$ — пара действительных плоскостей,

$x_1^2=0$ — пара совпадающих плоскостей.

Лит. см. при ст. *Линия второго порядка.* *А. Б. Иванов.*

ПОВОРОТОВ ДИАГРАММА — поверхность в эллиптическом пространстве $\mathcal{E}^3$, определяемая изометричными гладкими поверхностями F и F^* в евклидовом пространстве E^3 аналогично тому, как определяется *вращений индикатриса* для бесконечно малых изгибаний в E^3. О поверхности в эллиптич. пространстве, совпадающей с П. д., впервые упомянул Л. Бианки (L. Bianchi) при исследовании сферич. изображения основания изгибания поверхностей, показавший, что оно совпадает с изображением в смысле Клиффорда асимптотич. линий П. д.

Пусть F и F^* — изометричные гладкие одинаково ориентированные поверхности. В соответствующих по изометрии точках M и M^* триэдры, образованные касательными векторами x_u, x_v и x_u^*, x_v^* к соответствующим по изометрии парам кривых $v=\text{const}$ и $u=\text{const}$ и нормалями n и n^*, равны, т. е.

$$(x_u)^2=(x_u^*)^2,\ (x_v)^2=(x_v^*)^2,$$

$$(n^*)^2=(n)^2=1,\ (x_u,\ x_v)=(x_u^*,\ x_v^*),$$

$$(nx_u)^2=(n^*\,x_u^*)=(nx_v)=(n^*\,x_v^*)=0,$$

и потому получаются один из другого поворотом вокруг оси с направляющим ортом $\mathring{V}$ на угол χ (определяемый с точностью до 2π). Пусть

$$Q=\cos\frac{\chi}{2}+\mathring{V}\sin\frac{\chi}{2}$$

— кватернион, по модулю равный 1 и определяемый с точностью до знака, представляющий указанный поворот. Совокупность таких кватернионов, параметризованная точками $M\in F$ (или $M^*\in F^*$), определяет множество точек в эллиптич. пространстве, называемое диаграммой поворота для изометричных поверхностей F и F^*. Напр., если F и F^* — изометричные куски цилиндров, то П. д.— кусок поверхности Клиффорда, причем круглым цилиндрам соответствует минимальная поверхность Клиффорда. Если $|\chi|<\pi$, то вне П. д. есть эллиптич. плоскость, и при геодезич. отображении эллиптич. пространства в евклидово:

$$Q=\mathring{V}\sin\frac{\chi}{2}+\cos\frac{\chi}{2}\to y=\mathring{V}\operatorname{tg}\frac{\chi}{2},$$

образом П. д. является индикатриса вращений нек-рого

бесконечно малого изгибания срединной поверхности, соответствующей F и F^* (см. *Кон-Фоссена преобразование*) (при условии $|\chi|<\pi$ она регулярна).

Свойства П. д. для изометричных поверхностей положительной гауссовой кривизны аналогичны свойствам индикатрисы вращений: напр., удельная внутренняя кривизна П. д. всюду отрицательна, и потому она играет при исследовании изометрии выпуклых поверхностей такую же роль, что и индикатриса вращений. *М. И. Войцеховский.*

ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ЗАКОН — предельная теорема теории вероятностей, являющаяся уточнением *больших чисел усиленного закона*. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность случайных величин и

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Для простоты предполагается, что S_n для каждого n имеет нуль своей медианой. В то время как теоремы об усиленном законе больших чисел указывают условия, при к-рых $\frac{S_n}{a_n} \to 0$ почти наверное (п. н.) при $n \to \infty$, где $\{a_n\}$ — числовая последовательность, теоремы о П. л. з. имеют дело с числовыми последовательностями $\{c_n\}$ такими, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{c_n} = 1 \text{ п.н.} \tag{1}$$

или

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{c_n} = 1 \text{ п.п.} \tag{2}$$

Соотношение (1) равносильно тому, что

$$\mathsf{P}\{S_n > (1+\varepsilon)\, c_n \text{ б.ч.}\} = 0$$

и

$$\mathsf{P}\{S_n > (1-\varepsilon)\, c_n \text{ б.ч.}\} = 1$$

для любого $\varepsilon > 0$, где запись «б. ч.» означает бесконечное число раз.

Соотношения вида (1) и (2) справедливы при более ограничительных условиях, чем оценки, вытекающие из усиленного закона больших чисел. Если $\{X_n\}$ — последовательность *независимых случайных величин*, имеющих одинаковое распределение с математич. ожиданием, равным нулю, то

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \text{ п.н. при } n \to \infty$$

(теорема Колмогорова); если выполнено дополнительное условие $0 < \mathsf{E}X_1^2 < \infty$, то имеет место более сильное соотношение (2), в к-ром

$$c_n = (2nb \ln \ln (nb))^{1/2},$$

где $b = \mathsf{E}X_1^2$ (теорема Хартмана — Винтнера).

Первой теоремой общего типа о законе повторного логарифма был следующий результат А. Н. Колмогорова [1]. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность независимых случайных величин с математич. ожиданиями, равными нулю, конечными дисперсиями и пусть

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}X_k^2.$$

Если $B_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и существует последовательность положительных постоянных $\{M_n\}$ такая, что

$$|X_n| \leqslant M_n \text{ и } M_n = o\left(\left(\frac{B_n}{\ln \ln B_n}\right)^{1/2}\right),$$

то выполнены соотношения (1) и (2) при

$$c_n = (2B_n \ln \ln B_n)^{1/2}.$$

В частном случае, когда $\{X_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одинако-

вое распределение с двумя значениями, это утверждение было получено А. Я. Хинчиным [2]. Ю. Марцинкевич и А. Зигмунд [3] показали, что в условиях теоремы Колмогорова нельзя заменить o на O. Обобщения П. л. з. Колмогорова для последовательностей независимых ограниченных неодинаково распределенных случайных величин были исследованы В. Феллером [4]. Другие обобщения П. л. з. см. в [5]; имеется также следующий результат (см. [6]), примыкающий к теореме Хартмана — Винтнера: если $\{X_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение с бесконечной дисперсией, то

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{(n \ln n \ln n)^{1/2}} = \infty \text{ п.н.}$$

Результаты, полученные в области П. л. з. для последовательностей независимых случайных величин, послужили отправным пунктом для многочисленных исследований применимости П. л. з. к последовательностям зависимых случайных величин и векторов и к случайным процессам.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Math. Ann.», 1929, Bd 101, S. 126—35; [2] Хинчин А. Я., «Fundam. math.», 1924, v. 6, p. 9—20; [3] Marcinkiewicz J., Zygmund A., там же, 1937, v. 29, p. 215—22; [4] Feller W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1943, v. 54, p. 373—402; [5] Strassen V., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.», 1964, Bd 3, S. 211—26; [6] его же, там же, 1965—66, Bd 4, S. 265—68; [7] Hartman P., Wintner A., «Amer. J. Math.», 1941, v. 63, p. 169—176; [8] Лампорти Дж., Вероятность, пер. с англ., М., 1973; [9] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972.

В. В. Петров.

ПОВТОРНЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл, в к-ром последовательно выполняется интегрирование по разным переменным, т. е. интеграл вида

$$\int_{A_y} \left[\int_{A(y)} f(x, y)\, dx \right] dy. \qquad (1)$$

Функция $f(x, y)$ определена на множестве A, лежащем в прямом произведении $X \times Y$ пространств X и Y, в к-рых заданы σ-конечные меры μ_x и μ_y, обладающие свойством полноты; множество $A(y) = \{x : (x, y) \in A\} \subset X$ («сечение» множества A), измеримое относительно меры μ_x; множество A_y (проекция множества A в пространство Y), измеримое относительно меры μ_y. Интегрирование по $A(y)$ производится по мере μ_x, а по A_y — по мере μ_y. Интеграл (1) обозначают также

$$\int_{A_y} dy \int_{A(y)} f(x, y)\, dx.$$

К П. и. могут быть сведены *кратные интегралы*.

Пусть функция $f(x, y)$, интегрируемая по мере $\mu = \mu_x \times \mu_y$ на множестве $A \subset X \times Y$, продолжена нулем на все пространство $X \times Y$, тогда П. и.

$$\int_Y dy \int_X f(x, y)\, dx$$

и

$$\int_X dx \int_Y f(x, y)\, dy$$

существуют и равны между собой:

$$\int_Y dy \int_X f(x, y)\, dx = \int_X dx \int_Y f(x, y)\, dy \qquad (2)$$

(см. *Фубини теорема*). В левом интеграле внешнее интегрирование фактически производится по множеству $A_y^* = \{y : y \in A_y,\ \mu_x A(y) > 0\}$. Таким образом, в частности, для точек $y \in A_y^*$ множества $A(y)$ измеримы относительно меры μ_x. По всему множеству A_y брать этот интеграл, вообще говоря, нельзя, т. к. при измеримом относительно меры μ множества A множество A_y может оказаться неизмеримым относительно меры μ_y, так же, как и отдельные множества $A(y)$, $y \in A_y$,

могут быть неизмеримы относительно меры μ_x. Множество же A_y^* всегда измеримо относительно меры μ_y, если только множество A измеримо относительно меры μ.

Сформулированные условия возможности перемены порядка интегрирования в П. и. являются лишь достаточными, но не необходимыми: иногда перемена порядка интегрирования в П. и. допустима, а соответствующий кратный интеграл не существует. Напр., для функции $f(x, y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ при $x^2+y^2>0$ и $f(0, 0)=0$ П. и.

$$\int_{-1}^{+1} dx \int_{-1}^{+1} f(x, y)\, dy = \int_{-1}^{+1} dy \int_{-1}^{+1} f(x, y)\, dx,$$

а кратный интеграл

$$\iint_{|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1} f(x, y)\, dx\, dy$$

не существует. Однако если существует хотя бы один из интегралов

$$\int_Y dy \int_X |f(x, y)|\, dx \text{ или } \int_X dx \int_Y |f(x, y)|\, dy,$$

то функция f интегрируема на множестве $X \times Y$ и справедливо равенство (2).

Для П. и. в случае, когда внутренний интеграл является интегралом Стилтьеса, а внешний — интегралом Лебега, справедлива следующая теорема о перемене порядка интегрирования: пусть функция $g(x, y)$ суммируема по y на $[c, d]$ для всех значений x из $[a, b]$ и является функцией ограниченной вариации по x на $[a, b]$ для почти всех значений $y \in [c, d]$. Пусть, далее, полная вариация функции $g(x, y)$ по переменной x на $[a, b]$ при всех указанных значениях y не превышает нек-рой неотрицательной и суммируемой на $[c, d]$ функции. Тогда функция $\int_c^d g(x, y)dy$ является функцией ограниченной вариации от переменной x на $[a, b]$ и для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ имеет место формула

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x)\, d_x g(x, y) = \int_a^b f(x)\, d_x \left[\int_c^d g(x, y)\, dy \right].$$

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 2, М., 1981; [4] Никольский С. М., Курс математичеекого анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975; [5] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959. *Л. Д. Кудрявцев.*

ПОВТОРНЫЙ ПРЕДЕЛ — предел функции нескольких переменных, при к-ром предельный переход совершают последовательно по различным переменным. Пусть, напр., функция f двух переменных x и y определена на множестве вида $X \times Y$, $x \in X \subset \mathbb{R}^m$, $y \in Y \subset \mathbb{R}^n$, и пусть x_0, y_0 — предельные точки соответственно множеств X и Y или символы ∞ (в случае, когда $m=1$ или $n=1$, x_0 и соответственно y_0 могут быть бесконечностями со знаком: $+\infty$, $-\infty$). Если при любом фиксированном $y \in Y$ существует предел

$$\varphi(y) = \lim_{x \to x_0} f(x, y) \qquad (1)$$

и у функции $\varphi(y)$ существует предел

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y),$$

то этот предел наз. повторным пределом

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) \qquad (2)$$

функции $f(x,\ y)$ в точке $(x_0,\ y_0)$. Аналогично определяется П. п.

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,\ y). \tag{3}$$

Если существует (конечный или бесконечный) *двойной предел*

$$\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,\ y) \tag{4}$$

и при любом фиксированном $y\in Y$ существует конечный предел (1), то существует и П. п. (2) и он равен двойному пределу (4).

Если при каждом $y\in Y$ существует предел (1), а при каждом $x\in X$ существует предел

$$\psi(x)=\lim_{y\to y_0} f(x,\ y)$$

и если при $x\to x_0$ функция $f(x,\ y)$ стремится на Y к предельной функции $\varphi(y)$ равномерно относительно y, то оба П. п. (2) и (3) существуют и равны друг другу.

Если множества X и Y являются множествами натуральных чисел, то функция f наз. в этом случае двойной последовательностью и значения аргументов пишут в виде индексов:

$$f(m,\ n)=u_{mn},$$

а П. п.

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}=u_{mn} \text{ и } \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} u_{mn}$$

наз. повторными пределами двойной последовательности. Понятие П. п. обобщается на случай, когда X, Y и множество значений функции f являются подмножествами нек-рых топологич. пространств. *Л. Д. Кудрявцев.*

ПОВТОРНЫЙ РЯД — ряд, члены к-рого являются также рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}\right). \tag{1}$$

П. р. (1) наз. сходящимся, если при любом фиксированном n сходится ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}=a_n$$

и, кроме того, сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Сумма последнего ряда и наз. суммой повторного ряда (1). Сумма

$$s=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}\right).$$

П. р. (1) является повторным пределом его частичных сумм

$$s_{mn}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} u_{kl},$$

то есть

$$s=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} s_{mn}.$$

Если сходится *двойной ряд*

$$\sum_{m,\ n=1}^{\infty} u_{mn} \tag{2}$$

и при любом натуральном n сходятся ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn},$$

то сходится и П. р. (1), причем он имеет ту же сумму, что и двойной ряд (2). Условие этой теоремы выпол-

няется, в частности, если двойной ряд (2) абсолютно сходится. *Л. Д. Кудрявцев.*

ПОГЛОЩАЮЩЕЕ СОСТОЯНИЕ цепи Маркова $\xi(t)$ — такое состояние i, что

$$\mathsf{P}\{\xi(t)=i \mid \xi(s)=i\}=1 \text{ при любых } t\geqslant s.$$

Примером *Маркова цепи* с поглощающим состоянием 0 является *ветвящийся процесс*.

Введение дополнительных поглощающих состояний — удобный прием, к-рый помогает исследовать свойства траекторий цепи Маркова, связанные с достижением того или иного множества.

Пример. Пусть в множестве S состояний однородной цепи Маркова $\xi(t)$ с дискретным временем и переходными вероятностями

$$p_{ij}=\mathsf{P}\{\xi(t+1)=j \mid \xi(t)=i\}$$

выделено подмножество H и нужно найти вероятности

$$q_{ih}=\mathsf{P}\{\xi(\tau(H))=h \mid \xi(0)=i\}, \quad i\in S,\ h\in H,$$

где $\tau(H)=\min\{t>0 : \xi(t)\in H\}$ — момент первого достижения множества H. Если ввести вспомогательную цепь Маркова $\xi^*(t)$, отличающуюся от $\xi(t)$ лишь тем, что в $\xi^*(t)$ все состояния $h\in H$ поглощающие, то при $h\in H$ вероятности

$$p^*_{ih}(t)=\mathsf{P}\{\xi^*(t)=h \mid \xi^*(0)=i\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\tau(H)\leqslant t,\ \xi(\tau(H))=h \mid \xi(0)=i\}$$

монотонно не убывают при $t\uparrow\infty$ и

$$q_{ih}=\lim_{t\to\infty} p^*_{ih}(t),\ i\in S,\ h\in H. \qquad (*)$$

В силу основного определения цепи Маркова

$$p^*_{ih}(t+1)=\sum\nolimits_{j\in S} p_{ij}p^*_{jh}(t),\ t\geqslant 0,\ i\in S\setminus H,\ h\in H,$$
$$p^*_{hh}(t)=1,\ h\in H,\ p^*_{ih}(t)=0,\ i,\ h\in H,\ i\neq h.$$

Переход к пределу при $t\to\infty$ с учетом (*) дает для q_{ih} систему линейных уравнений:

$$q_{ih}=\sum\nolimits_{j\in S} p_{ij}q_{ih},\ i\in S\setminus H,\ h\in H,$$
$$q_{hh}=1,\ h\in H,\ q_{ih}=0,\ i,\ h\in H,\ i\neq h.$$

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1967.
А. М. Зубков.

ПОГЛОЩЕНИЯ ЗАКОНЫ — тождества вида

$$x\wedge(x\vee y)=x,\ x\vee(x\wedge y)=x,$$

где $\wedge$ и $\vee$ — две двуместные операции на нек-ром множестве L. Если, кроме П. з., эти операции удовлетворяют законам коммутативности и ассоциативности, то отношение $x\leqslant y$, определяемое эквивалентностью

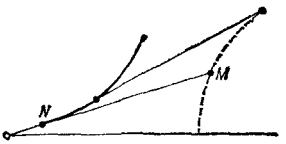
$$x\leqslant y \leftrightarrow x\vee y=y \qquad (*)$$

(или равносильной эквивалентностью $x\leqslant y\leftrightarrow x\wedge y=x$), будет порядковым отношением таким, что $x\wedge y$ — наибольшая нижняя грань, а $x\vee y$ — наименьшая верхняя грань элементов x и y. С другой стороны, если в упорядоченном множестве $(L,\leqslant)$ существуют наибольшая нижняя грань $x\wedge y$ и наименьшая верхняя грань $x\vee y$ для любой пары элементов x, y, то для операций $\vee$ и $\wedge$ выполняются законы поглощения, коммутативности, ассоциативности и справедлива эквивалентность (*).

Лит.: [1] Расёва Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972.
В. Н. Гришин.

ПОГОНИ ЛИНИЯ — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», к-рая ставится следующим образом. Пусть точка M равномерно движется по нек-рой заданной кривой. Требуется найти траекто-

рию равномерного движения точки N такую, что касательная, проведенная к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки M. В плоском слу-



чае система уравнений, к-рым должна удовлетворять П. л., имеет вид

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x),\ F(\xi,\ \eta) = 0,$$

где $\frac{dy}{dx}$ — угловой коэффициент П. л., $F(\xi,\ \eta)=0$ — уравнение заданной кривой.

Задача о П. л. поставлена Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci), решена П. Буге (P. Bouguer, 1732).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ТЕОРИЯ — асимптотическое приближение решения граничных задач для дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных (сингулярных задач) в подобластях с существенным влиянием членов со старшими производными на решение. Явление пограничного слоя (п. с.) возникает в узких зонах вблизи частей границы, на к-рых существует различие между числом граничных условий исходной и вырожденной (при нулевом значении параметра малости) задач, а также вблизи поверхностей разрыва решения вырожденной задачи.

Решение сингулярных задач представимо суммой двух разложений. Внешнее разложение дает метод малого параметра с частью B_0 граничных условий $B=B_0+B_1$ задачи. Внутреннее разложение быстро убывает вне п. с. и отыскивается, как правило, в виде многочленов по степеням ε. Для их определения дифференциальные уравнения преобразуются к переменным, зависящим от ε и растягивающим подобласти пограничного слоя. Уравнения п. с. возникают в результате приравнивания нулю коэффициентов при различных степенях ε после подстановки многочленов в преобразованные уравнения. К ним добавляются условия B_1. Оценка погрешности внешнего разложения, если она найдена, показывает необходимую замену переменных. При решении сложных прикладных задач необходимая замена переменных может быть выявлена на основе физич. оценки величин членов исходных уравнений и соответствующих им упрощений и должна освободить старшие производные от ε. Для решения задачи необходимо определить, где расположены п. с. и как условия B разделяются на B_0 и B_1. Своеобразие такого решения заключается в том, что исходным эллиптич. уравнением могут отвечать гиперболич. уравнения внешних разложений и параболические — внутренних разложений.

В теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x_t = f(x,\ y,\ t),\ \varepsilon y_t = g(x,\ y,\ t),\ 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (1)$$

где x и f суть m-мерные, а y и g суть n-мерные векторные функции, для задачи Коши с условиями $x(0,\ \varepsilon)=x^0$, $y(0,\ \varepsilon)=y^0$ и определенными свойствами f и g доказана теорема существования и единственности решения и установлены свойства решения при $\varepsilon \to 0$ (см. [1]). В случае краевой задачи для уравнения (1) с условиями

$$x(0,\ \varepsilon) = x^0,\ y_1(0,\ \varepsilon) = y_1^0,\ y_2(0,\ \varepsilon) = y_2^0,$$

где сумма числа компонент векторов y_1 и y_2 равна n, существуют, вообще говоря, п. с. в окрестностях концов сегмента $[0, T]$. Построен алгоритм нахождения асимптотики решения этой задачи, при определенных свойствах функций f и g доказано существование и единственность решения и даны его оценки (см. [3]). В случае неединственности решения предельного уравнения $g=0$ относительно y построен внутренний (в окрестности τ, $0<\tau<T$) п. с., разделяющий области с различными решениями предельного уравнения. Для одного типа интегро-дифференциального уравнения построен алгоритм асимптотич. разложения по ε задачи с начальными условиями и исследованы нек-рые особенности поведения решений.

В случае линейных обыкновенных дифференциальных уравнений $(L+\varepsilon M)x=f(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, где L и M — дифференциальные операторы, с граничными условиями B_0+B_1 выделен класс задач, решение к-рых содержит п. с., и введено понятие регулярного вырождения, при к-ром решение предельного уравнения позволяет удовлетворить условиям B_0, а асимптотич. решение для п. с.— условиям B_1 (см. [4]). Построен итерационный процесс асимптотич. представления решения и даны оценки остаточных членов разложений.

В П. с. т. общего нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка при определенных предположениях доказано (см. [5]), что решение 1-й краевой задачи складывается из внешнего решения, п. с. и остаточного члена, имеющего с 1-й производной порядок ε на всем сегменте.

Изучено поведение решений краевых задач основных типов для линейного уравнения с частными производными вида

$$\varepsilon\Delta u+A(x,\ y)\,u_x+B(x,\ y)\,u_y+C(x,\ y)\,u=f(x,\ y),$$

где Δ — оператор Лапласа, в области D с границей S. Построены условия на функции A, B, C, f, границу S и функции a, φ точки P линии S, входящие в граничное условие $u_n+a(P)=\varphi(P)$, при к-рых u в $D+S$ равномерно стремится к решению предельного уравнения с приведенным граничным условием на определенной части S (отсутствие п. с.) (см. [6]).

Для эллиптич. уравнения 2-го порядка в области D с границей S на примере двух независимых переменных

$$\varepsilon\,[a(x,\ y)\,u_{xx}+2b(x,\ y)\,u_{xy}+c(x,\ y)\,u_{yy}+$$
$$+d(x,\ y)\,u_x+e(x,\ y)\,u_y+g(x,\ y)\,u]+u_x-$$
$$-h(x,\ y)\,u=f(x,\ y),\ h\geqslant\alpha^2>0,$$

построены итерационные процессы решения задачи с условием $u=0$ на S, доказаны теоремы о структуре разложения u по ε и даны оценки остаточного члена этого разложения (см. [4]). Аналогичные результаты получены и для уравнений высших порядков.

Разработан (см. [7]) метод сращивания асимптотич. разложений для уравнения

$$\varepsilon\Delta u-a(x,\ y)\,u_y=f(x,\ y)$$

в прямоугольнике с заданным u на его границе.

Исследования П. с. т. для нелинейных уравнений с частными производными связаны в основном с аэрогидродинамикой и базируются на уравнениях Навье—Стокса и их обобщениях. Запросы практики привели как к развитию математич. теории, так и к возникновению различных задач и методов их решения. Здесь речь будет идти только о ламинарных течениях (см. [8] — [10]).

Гидродинамика плоских ($k=0$) и осесимметричных ($k=1$) течений несжимаемой жидкости с постоянным

коэффициентом вязкости ν описывается уравнениями Навье — Стокса

$$\left.\begin{aligned}(\eta^k u)_\xi + (\eta^k v)_\eta = 0,\quad u_\tau + uu_\xi + vu_\eta = \varepsilon^2 \Delta u - p_\xi,\\ v_\tau + uv_\xi + vv_\eta = \varepsilon^2 \Delta v - p_\eta,\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где $\varepsilon = R^{-1/2}$, $R = wX/\nu$ — число Рейнольдса, представленное через характерные величины скорости w и линейного размера X. На замкнутой границе S области D решения задаются краевые условия, причем на обтекаемом контуре Γ при $\eta = H(\xi)$ задаются условия $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = v_0(\xi, H(\xi))$, где $\bar{u}$, $\bar{v}$ — касательная и нормальная к Γ составляющие вектора (u, v). В $D+S$ задаются начальные значения u, v, p.

При малом ε асимптотич. решение задачи в первом приближении составляется из решения уравнений (2) при $\varepsilon = 0$ с частью условий на S (на Γ ставится только условие $v = v_0$) и решения уравнений п. с. Уравнения динамического п. с. выводятся в предположении, что условная толщина п. с. δ и величина v имеют порядки $\delta \sim X\varepsilon$, $v \sim w\varepsilon$, а члены левых частей последних уравнений из (2) имеют порядок членов с ε^2. Введение переменных $t = \tau$, $x = \xi$, $y = \eta/\varepsilon$. $V = v/\varepsilon$ приводит при $\varepsilon \to 0$ к уравнениям Прандтля

$$(r^k u)_x + (r^k V)_y = 0,\quad u_t + uu_x + Vu_y = u_{yy} - p_x,\quad p_y = 0, \quad (3)$$
$$0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant X_0,\ 0 \leqslant y < \infty,$$

с условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x, y),\ v|_{t=0} = v_0(x, y),\ u|_{y=0} = 0,$$
$$V|_{y=0} = v_0(t, x),$$

$u \to W(t, x)$ при $y \to \infty$, $p_x = -WW_x - W_t$, $u|_{x=0} = 0$,

где r — расстояние от оси симметрии при $k = 1$, $W(x)$ — известная функция. Эти уравнения и условия справедливы для любого криволинейного контура, радиус кривизны к-рого много больше δ. В последнем случае x, y — координаты вдоль контура и по нормали к нему.

При постоянном W задача сводится к краевой для обыкновенного дифференциального уравнения. Имеются и другие классы подобных решений.

Известны условия, при к-рых решения задач п. с. существуют, исследованы вопросы единственности и устойчивости решений и их выхода на решения стационарных задач (см. [11]). Решения строятся по методу прямых, доказана их сходимость.

Уравнения п. с. для сжимаемой жидкости выводятся из уравнений для течений вязкого и теплопроводного газа и значительно более сложны, чем (3). Возрастает и их количество. Имеется интегральное преобразование, упрощающее эти уравнения в общем случае и сводящее их к (3) при числе Прандтля $\mathrm{Pr} = c_p/K = 1$, где c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении, K — коэффициент теплопроводности (см. [12]). Известен ряд модификаций преобразования. В общем случае уравнения п. с. описывают т. н. естественные конвективные течения. Если ν не зависит от температуры и архимедова сила пренебрежимо мала, то уравнение энергии отделяется от системы уравнений п. с. и говорят о вынужденных конвективных течениях. Уравнение энергии определяет тепловой п. с., толщина к-рого отличается от δ.

П. с. возникают и в зоне раздела течений с различными характерными скоростями. Ударные волны также являются п. с.

Отдельный класс двумерных задач п. с. связан с течениями у вращающихся осесимметричных пластин и тел.

Вместе с развитием методов решения нестационарных задач решены задачи с периодическим W, при движении скачком из состояния покоя, при ускорен-

ном движении, для п. с. за ударной волной, при переменной температуре обтекаемой поверхности.

В П. с. т. трехмерных течений развиты методы решения задач и рассмотрены случаи, приводящие к упрощению уравнений. Уравнения п. с. на скользящем цилиндрич. крыле бесконечного размаха аналогичны уравнениям двумерного п. с. В приближенной постановке решены задачи п. с. на вращающейся цилиндрич. лопасти пропеллера и на вращающемся цилиндре в косо набегающем потоке, а также задача п. с. вблизи линии пересечения двух плоскостей.

Перечисленные исследования п. с. в аэрогидродинамике относятся к первому приближению П. с. т. Высшие приближения позволяют проводить исследования взаимодействия п. с. с внешним потоком, а также расчеты при умеренных числах R (см. [13]).

Устойчивость п. с. позволяет определить границы применимости теории. Имеются исследования (см. [14]) на основе метода малых возмущений с периодическими и *локальными начальными возмущениями*. В случае плоских течений анализ 3-мерных возмущений в линейном приближении сводится на основании теоремы Сквайра к 2-мерному с измененным значением ν. Нелинейный анализ при потере устойчивости обнаруживает появление продольных вихрей.

Физич. обобщения задач П. с. т. (см. [15] — [17]) связаны с изучением многофазных течений, с использованием реальных уравнений состояния и коэффициентов переноса (усложнение уравнений), с рассмотрением неравновесных течений с диффузией (расширение системы уравнений и приобретение ею параболико-гиперболич. типа), с учетом абляции обтекаемой поверхности (усложнение граничных условий и необходимость расчета теплопроводности в теле), с учетом переноса излучения (интегро-дифференциальные уравнения).

Дальнейшее развитие П. с. т. в аэрогидродинамике получила при исследовании течений, не удовлетворяющих предположениям Прандтля, с решениями в виде многослойных асимптотич. разложений. Источником сложности структуры решения являются дополнительные малые параметры в граничных условиях (напр., из-за малого радиуса кривизны обтекаемого контура), существования особых точек, линий или *поверхностей в первом* приближении П. с. т., а также возможная бифуркация решения.

К этому классу относятся течения около точек отрыва и присоединения п. с. к обтекаемому контуру и около точек падения на п. с. ударных волн. Характерные решения (см. [18] — [20]) имеют трехслойную структуру. Внешнее решение определяет возмущенное п. с. потенциальное течение и описывается уравнениями в возмущениях. Средний слой толщины порядка $X\varepsilon$ описывается уравнениями невязких завихренных течений с $p_y=0$, и в него поступает газ из основной части предшествующего п. с.

Уравнения 3-го, самого тонкого, пристеночного слоя выводятся в предположении, что его длина и толщина имеют соответственно порядки $X\varepsilon^{3/4}$, $X\varepsilon^{5/4}$. Введение в стационарном случае переменных $x=\xi\varepsilon^{-3/4}$, $y=\eta\varepsilon^{-5/4}$, $U=u\varepsilon^{-1/4}$, $V=v\varepsilon^{-3/4}$, $P=p\varepsilon^{-1/2}$ приводит при $\varepsilon\to 0$ снова к уравнениям (3), в к-рых следует u заменить на U, а p — на P. Эта структура решения задачи характерна для широкого класса течений с малыми величинами возмущений.

Исследованы многие задачи динамики течений при малых ε, в к-рых на коротких расстояниях давление во внешнем сверхзвуковом ($M>1$, $M=w/c$, где w — скорость газа, c — скорость звука) потоке меняется сильно. К ним относятся задачи расчета обтекания контуров с большой локальной кривизной и присоедин-

нения потока к поверхности тела. В этих случаях при трехслойной схеме решения в среднем слое $p_y \neq 0$.

Изучен класс задач, в к-рых возмущенное решение занимает конечную область. Эти решения реализуются на режимах умеренного и сильного взаимодействия п. с. с внешним гиперзвуковым ($M \to \infty$) потоком и при сверхзвуковом обтекании тел конечной длины, через поверхность к-рых производится интенсивный вдув ($v_0 > 0$) газа. В этих задачах величина давления на всей внешней границе п. с. определяется из решения полной задачи. Возмущение от задней кромки тела распространяется вверх по потоку, что определяется неединственностью решения в окрестности передней кромки тела.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., «Матем. сб.», 1952, т. 31, № 3, с. 575—86; [2] Вазов В., Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1968; [3] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., 1973; [4] Вишик М. И., Люстерник Л. А., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 5, с. 3—122; 1960, т. 15, в. 3, с. 3—80; [5] Коул Дж., Методы возмущений в прикладной математике, пер. с англ., М., 1972; [6] Олейник О. А., «Матем. сб.», 1952, т. 31, № 1, с. 104—17; [7] Ильин А. М., Леликова Е. Ф., там же, 1975, т. 96, № 4, с. 568—83; [8] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, 4 изд., ч. 2, М., 1963; [9] Лойцянский Л. Г., Ламинарный пограничный слой, М., 1962; [10] Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, пер. с нем., М., 1974; [11] Олейник О. А., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 3, с. 3—65; [12] Дородницын А. А., «Прикл. матем. и механ.», 1942, т. 6, в. 6, с. 449—86; [13] Ван-Дайк М., Методы возмущений в механике жидкости, пер. с англ., М., 1967; [14] Бетчов Р., Криминале В., Вопросы гидродинамической устойчивости, пер. с англ., М., 1971; [15] Соу С., Гидродинамика многофазных систем, пер. с англ., М., 1971; [16] Дорренс У. Х., Гиперзвуковые течения вязкого газа, пер. с англ., М., 1966; [17] Кэйс В. М., Конвективный тепло- и массообмен, пер. с англ., М., 1972; [18] Нейланд В. Я., «Изв. АН СССР. Механ. жидк. и газа», 1969, № 4, с. 53—57; [19] его же, «Тр. ЦАГИ», 1974, в. 1529; [20] Stewartson K., «Advances Appl. Mech.», 1974, v. 14, p. 145—239.

Ю. Д. Шмыглевский.

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ — область больших значений градиента функций, в частности в гидродинамике, область течения вязкой жидкости (газа) с малой по сравнению с продольными размерами поперечной толщиной, образующаяся у поверхности обтекаемого твердого тела или на границе раздела двух потоков жидкостей с различными скоростями, температурами или химич. составами. П. с. характеризуется резким изменением в поперечном направлении скорости (динамический П. с.) или температуры (тепловой, или температурный, П. с.), или же концентраций отдельных химич. компонентов (диффузионный, или концентрационный, П. с.). Понятие П. с. и сам термин были введены Л. Прандтлем (L. Prandtl, 1904) в связи с решением краевой задачи для нелинейных уравнений с частными производными гидродинамики вязких жидкостей. Нужды развития авиации определили разработку теории П. с. в аэрогидродинамике. В сер. 20 в. стала развиваться математическая *пограничного слоя теория*, а также приложения в теории теплопередачи, диффузии, процессов в полупроводниках и др. *Ю. Д. Шмыглевский.*

ПОГРЕШНОСТЬ — разность $x - a$, где a — данное число, к-рое рассматривается как приближенное значение нек-рой величины, точное значение к-рой равно x. Разность $x - a$ наз. также абсолютной П. Отношение $x - a$ к a наз. относительной П. числа a. Для характеристики П. обычно пользуются указанием ее границ. Число $\Delta(a)$ такое, что

$$|x - a| \leqslant \Delta(a),$$

наз. границей абсолютной П. Число $\delta(a)$ такое, что

$$\left|\frac{x-a}{a}\right| \leqslant \delta(a),$$

наз. границей относительной П. Гра-

ницы относительной П. часто выражают в процентах. В качестве $\Delta(a)$ и $\delta(a)$ берутся по возможности меньшие числа.

Информацию о том, что число a является приближенным значением числа x с границей абсолютной П. $\Delta(a)$, принято записывать в виде

$$x = a \pm \Delta(a).$$

Аналогичное соотношение для относительной П. записывается в виде

$$x = a(1 \pm \delta(a)).$$

Границы абсолютной и относительной П. указывают на максимально возможное расхождение x и a. Наряду с ними часто употребляются характеристики П., учитывающие характер возникновения П. (напр., погрешность измерений) и частоту различных значений разности x и a. При таком подходе к П. используются методы теории вероятностей (см. *Ошибок теория*).

При численном решении задачи П. результата обусловливается неточностями, к-рые присущи формулировке задачи и способам ее решения. П., возникающую вследствие неточности математич. описания реального процесса, наз. П. математической модели; возникающую вследствие неточности задания исходных данных — П. входных данных; возникающую вследствие неточности метода решения — П. метода; возникающую вследствие неточности вычислений — вычислительной П. Иногда П. математич. модели и П. входных данных объединяют под одним названием — неустранимая П.

В процессе вычислений исходные П. последовательно переходят от операции к операции, накапливаясь и порождая новые П. Возникновение и распространение П. в вычислениях являются предметом специальных исследований (см. *Вычислительная математика*).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Воеводин В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977.

Г. Д. Ким.

ПОГРУЖАЮЩАЯ ОПЕРАЦИЯ — в математической логике операция, переводящая выражения одного логико-математич. языка в выражения другого с сохранением тех или иных дедуктивных свойств. П. о. широко используются для установления взаимосвязи между различными логич. теориями, *исчислениями*.

Напр., если формуле A формальной арифметики сопоставить формулу A^* этого же языка, вставив два отрицания перед ней и перед каждой ее подформулой (напр., $(A \vee B)^*$ есть $\neg\neg(\neg\neg A^* \vee \neg\neg B^*)$, а $(\exists x A)^*$ есть $\neg\neg\exists x \neg\neg A^*$, и т. д.), то из выводимости A в классической формальной арифметике следует выводимость A^* уже в интуиционистской формальной арифметике. Отсюда вытекает, что непротиворечивость интуиционистской формальной арифметики влечет непротиворечивость и классической формальной арифметики. Описанная негативная интерпретация Гёделя позволяет, следовательно, указать важное взаимоотношение между интуиционистской и классич. арифметиками.

Другой типичный пример П. о.— перевод Гёделя — Тарского, позволяющий установить взаимосвязь модальных и интуиционистских логик. Построение моделей в аксиоматич. теории множеств также может быть обычно интерпретировано синтаксически как построение нек-рой П. о.— внутренней модели теории множеств.

Лит.: [1] Шенфилд Дж. Р., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975; [2] Фейс Р., Модальная логика, пер. с англ., М., 1974; [3] Драгалин А. Г., Математический интуиционизм, М., 1979.

А. Г. Драгалин.

ПОГРУЖЕНИЕ, иммерсия,— отображение $f: X \to Y$ одного топологич. пространства в другое, при к-ром каждая точка в X имеет окрестность U, к-рую

f гомеоморфно отображает на fU. Это понятие применяется главным образом к отображению многообразий, где часто дополнительно требуется еще выполнение условия локальной плоскости (такое же, как и для *локально плоского вложения*). Последнее условие автоматически выполнено, если многообразия X и Y являются дифференцируемыми, и матрица Якоби отображения f имеет в каждой точке максимальный ранг, равный размерности X. Задача классификации П. одного многообразия в другое с точностью до т. н. регулярной гомотопии сведена к чисто гомотопич. задаче. Гомотопия $f_t\colon X^m \to Y^n$ наз. р е г у л я р н о й, если для каждой точки $x \in X$ она может быть продолжена до *изотопии* $F_t : U \times D^k \to Y$, где U — окрестность x, D^k — диск размерности $k=n-m$, и F_t совпадает с f_t на $U \times 0$, где 0 — центр диска. В дифференцируемом случае достаточно потребовать, чтобы матрица Якоби имела максимальный ранг при каждом t и непрерывно зависела от t. Дифференциал D_f П. определяет послойный мономорфизм касательного расслоения τX в касательное расслоение τY. Регулярная гомотопия определяет гомотопию таких мономорфизмов. Оказывается, что этим устанавливается биекция между классами регулярных гомотопий и гомотопич. классами мономорфизмов расслоений.

Задача П. в евклидовы пространства сводится к задаче гомотопич. классификации П. в *Штифеля многообразия* $V_{n,\,m}$. Напр., так как $\pi_2(V_{3,\,2})=0$, то имеется только один класс П. сферы S^2 в $\mathbb{R}^3$, так что стандартное вложение регулярно гомотопно своему зеркальному отражению (сферу можно «регулярно вывернуть наизнанку», см. рис.). Так как $V_{2,\,1} \approx S^1$, то имеется счетное число классов П. окружности в плоскость, а т. к. расслоение Штифеля над S^2 гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{R}P^3$ и $\pi_1(\mathbb{R}P^3)=\mathbb{Z}_2$, то имеется только два класса погружений S^1 в S^2, и т. д.

А. В. Чернавский.

ПОГРУЖЕНИЕ м н о г о о б р а з и я — непрерывное отображение $F\colon M^m \to N^n$ m-мерного многообразия M^m в n-мерное многообразие N^n такое, что для каждой точки $x \in M^m$ существует окрестность U_x, для к-рой F есть вложение, т. е. гомеоморфизм на $F(U_x) \subset N^n$. В частности, если F есть гомеоморфизм на $F(M^m)$, то он наз. в л о ж е н и е м M^m в N^n. Погружение F наз. $C^{l,\,\alpha}$-п о г р у ж е н и е м, если M^m и N^n суть $C^{l,\,\alpha}$-гладкие многообразия ($l \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $m \leqslant n$) и отображение F в соответствующих картах задается функциями

$$x^i = f^i(u^1, \ldots, u^m), \quad i = 1, \ldots, n,$$

принадлежащими классу гладкости $C^{l,\,\alpha}$, а ранг матрицы $\left\| \frac{df^i}{du^j} \right\|$ равен m в каждой точке $x \in M^m$ ($C^{l,\,\alpha}$-гладкое многообразие — многообразие, наделенное G-структурой, где псевдогруппа состоит из l раз дифференцируемых отображений, производные к-рых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α).

К понятию П. и $C^{l,\,\alpha}$-гладкого П. непосредственно примыкают понятия поверхности и $C^{l,\,\alpha}$-гладкой поверхности. Погружения F и G многообразия M в N наз. эквивалентными, если существует такой гомеоморфизм $\Phi : M \to M$, что $F = G\Phi$.

П о г р у ж е н н ы м м н о г о о б р а з и е м наз. пара, состоящая из многообразия M и его погружения F. m-м е р н о й п о в е р х н о с т ь ю в n-мерном многообразии N^n наз. класс эквивалентных погружений $F : M^m \to N^n$; каждое П. этого класса наз. п а р а м е т р и з а ц и е й п о в е р х н о с т и. Поверхность наз. $C^{l,\,\alpha}$-г л а д к о й, если на многообразиях M и N можно ввести $C^{l,\,\alpha}$-структуры и если среди параметризаций поверхности найдется такая параметри-

зация F, к-рая в этих структурах есть $C^{l,\alpha}$-погружение.

Теория погруженных многообразий, как правило, особенно в тех случаях, когда рассматриваются вопросы, связанные с геометрией П., изучает свойства, инвариантные относительно введенного выше понятия эквивалентности, и по существу совпадает с теорией поверхностей.

Пусть M^m есть $C^{l,\alpha}$-многообразие, $l\geqslant 1$, $0\leqslant\alpha<1$. Всякое M^m допускает при $m\geqslant 1$ вложение в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2m}$ и $C^{l,\alpha}$-погружение в $\mathbb{R}^{2m-1}$ при $m\geqslant 2$. Если m положительно и не является степенью двойки, то всякое M^m допускает $C^{l,\alpha}$-вложение в $\mathbb{R}^{2m-1}$, в то же время при любом $m=2^s$ с $s\geqslant 0$ существуют замкнутые гладкие m-мерные многообразия, не допускающие даже топологич. вложения в $\mathbb{R}^{2m-1}$ (таково, напр., проективное пространство). Если M^m не имеет компактных компонент, то оно допускает $C^{l,\alpha}$-вложение в $\mathbb{R}^{2m-1}$.

Ориентируемое m-мерное многообразие при $m\neq 1,4$ допускает $C^{l,\alpha}$-вложение в $\mathbb{R}^{2m-1}$. Вопрос о возможности погружения m-мерного многообразия в $\mathbb{R}^{2m}$ при $n<2m-1$ связан с классами Уитни и *Понтрягина классами* этого многообразия. Известно также, что каждое $C^{l,\alpha}$-гладкое m-мерное многообразие с $l\geqslant 1$, $0\leqslant\alpha<1$ допускает собственное (т. е. такое, что прообраз каждого компактного множества компактен) П. в $\mathbb{R}^{2m}$ и собственное вложение в $\mathbb{R}^{2m+1}$. Если на M^m задана риманова метрика, то часто рассматривают *изометрическое погружение* M^m в $\mathbb{R}^n$ или другое риманово пространство N^n. $C^{l,\alpha}$-гладкое риманово многообразие, $l=2$, $0<\alpha<1$; $l>2$, $0\leqslant\alpha<1$, допускает $C^{l,\alpha}$-гладкое изометрическое П. в нек-рое $\mathbb{R}^n$. В случае компактного M^m число $n=(2m+1)$ $(6m+14)$. Наоборот, $C^{l\alpha}$-гладкое П. $(l\geqslant 2, 0<\alpha<1)$ M^m в $\mathbb{R}^n$ индуцирует на M^m $C^{l,\alpha}$-гладкую риманову метрику [4].

Лит.: [1] Смейл С., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 1, с. 125—38; [2] Jacobowitz H., «Ann. Math.», 1972, v. 95, № 2, p. 191—225; [3] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [4] Сабитов И. Х., Шефель С. З., «Сиб. матем. ж.», 1976, т. 17, № 4, с. 914—25.

С. З. Шефель.

ПОГРУЖЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ ГЕОМЕТРИЯ — теория, изучающая внешнюю геометрию и связь между внешней и внутренней геометрией подмногообразий евклидова или риманова пространства. П. м. г. является обобщением классич. дифференциальной геометрии поверхностей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Локально внутренняя и внешняя геометрии погружения многообразия обычно описываются соответственно с помощью первой и второй квадратичных форм. Для погружений m-мерного многообразия M^m в многообразие N^n существует понятие эквивалентности (см. *Погружение* многообразия). В П. м. г. изучаются свойства, одинаковые у эквивалентных погружений, т. е. свойства поверхности F^m, определяемой погружением f. В связи с этим в геометрических вопросах погружение и поверхность не различаются. Погружение f индуцирует отображение $df: TM^m\to TN^n$ *касательных расслоений*.

Первая квадратичная (фундаментальная) форма g поверхности F определяется на TM^m равенством

$$g_p(X, Y)=\tilde{g}_{f(p)}(X, Y),$$

где $p\in M^m$, $X, Y\in TM^m$, а $\tilde{g}$ — риманова метрика в N^n. Здесь и далее векторы $X\in TM^m$ не различаются в обозначениях с их образом $df(X)$. Квадратичная форма g определяет на M^m структуру риманова пространства M_g^m; свойства M_g^m составляют предмет внутренней геометрии поверхности F. Если $\{x^k\}$, $\{y^\alpha\}$, $k=1, \ldots, m$, $\alpha=1, \ldots, n$,— локальные координаты в M^m и

N^n, то погружение f задается параметрич. уравнениями $y^\alpha = f^\alpha(x^1, \ldots, x^m)$. В локальных координатах

$$g_p(X, Y) = g_{ij}(p)\, X^i Y^j,$$

где $\{X^i\}$, $\{Y^j\}$ — координаты векторов X, Y,

$$g_{ij} = \overline{g}_{\alpha,\beta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f_\beta}{\partial x^j},$$

а $\{\overline{g}_{\alpha\beta}\}$ — компоненты метрич. тензора $\overline{g}$ риманова пространства N^n.

К внутренней геометрии поверхности F принадлежат такие понятия, как длина кривой, объем области, связность Леви-Чивита ∇_X внутренней метрики, ее преобразования кривизны $R(X, Y)Z$ и т. д. Относящиеся сюда вычислит. формулы см. в ст. *Риманова геометрия*.

Вторая (фундаментальная) форма II определяется равенством

$$II(X, Y)_p = (\overline{\nabla}_X Y)_p - (\nabla_X Y)_p,$$

где $\overline{\nabla}$, ∇ — связности Леви-Чивита на N^n, M^m соответственно. Фактически II зависит не от векторных полей X, Y, а лишь от их значений в точке p и является билинейным симметричным отображением

$$(TM^m)_p \times (TM^m)_p \to (\nu M^m)_p,$$

где νM^m — *нормальное расслоение* M^m в N^n. Для каждого единичного вектора $\xi \in (\nu M^m)_p$ равенства

$$\langle II(X, Y), \xi\rangle_p = h_\xi(X, Y)_p = \langle A_\xi(X), Y\rangle_p$$

определяют вторую квадратичную форму h_ξ и второй фундаментальный тензор A_ξ. В локальных координатах компоненты $h_{ij}(\xi)$ формы h_ξ имеют вид

$$h_{ij}(\xi) = \overline{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} \xi^\beta,$$

где $\{\xi^\beta\}$ — координаты вектора ξ.

Для формы h_ξ обычным образом (т. е. так же, как для поверхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$) определяют главные кривизны, главные направления (зависящие от ξ) и другие связанные с ними понятия.

Исходя из элементарных симметрич. функций, можно строить различные функции главных кривизн. Таковы, напр., средняя кривизна

$$H = \frac{1}{m} \sqrt{\sum_{j=1}^{m+n} \left(\sum_{i=1}^{m} K_i(\xi_j) \right)^2},$$

где $\{\xi_j\}$ — ортонормированный набор нормалей, а $K_i(\xi)$ — главные кривизны формы h_j; кривизна Чжэня — Лашофа

$$K = \frac{1}{\omega_{n-m-1}} \int_{\xi \in S^{n-m-1}} |K_1(\xi) \ldots K_m(\xi)|\, d\sigma,$$

где ω_l — объем сферы S^l; длина второй основной формы

$$S = \sqrt{\sum_{i,j} K_i^2(\xi_j)}$$

(см. [1] — [3]).

Значение первой и второй квадратичных форм поверхности в точке p определяет ее вблизи p с точностью до бесконечно малых 2-го порядка. Каждому $\xi \in (\nu M^m)_p$, $|\xi| = 1$, соответствует соприкасающийся параболоид. (Для поверхности в евклидовом пространстве — это соприкасающийся параболоид для проекции поверхности на $(m+1)$-плоскость, определяемую $(TM^m)_p$ и ξ.) При $m = n-1$ (т. е. в случае гиперповерхности) форма h_ξ единственна с точностью до знака. В этом случае вторые фундаментальную и квадратичную формы не различают, и теория приобретает большое сходство с классич. теорией поверхностей в $\mathbb{R}^3$.

О с н о в н ы е у р а в н е н и я. Коэффициенты первой и второй квадратичных форм не являются независимыми. Они связаны уравнениями Гаусса и Петерсона — Кодацци — Майнарди.

У р а в н е н и я Г а у с с а

$$R(X, Y)Z = \overline{R}(X, Y)Z - H(X, \nabla_X Z) + H(Y, \nabla_X Z) + H([X, Y], Z) \quad (1)$$

выражают преобразование кривизны поверхности F через преобразование кривизны N^n и коэффициенты квадратичных форм (здесь $[\cdot, \cdot]$ — скобка Пуассона).

Инвариантная форма уравнений Петерсона — Кодацци — Майнарди связана с понятием риманова расслоения над M_g^m. Расслоение $E(l)$ l-мерных плоскостей над римановым многообразием M_g^m наз. р и м а н о в ы м, если в $E(l)$ задана риманова метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ и риманова (т. е. согласованная с метрикой) связность $D: TM^n \times E \to E$. Билинейное g-симметричное отображение

$$A_\xi : TM^m \times E \to TM^m$$

наз. в т о р ы м ф у н д а м е н т а л ь н ы м т е н з о р о м в E; равенство

$$\langle H(X, Y), \xi \rangle_E = \langle A_\xi X, Y \rangle_g$$

определяет вторую фундаментальную форму в E, ассоциированную с A_ξ. Уравнения

$$\nabla_X A_\xi Y - \nabla_Y A_\xi X = A_{D_X Y} - A_{D_Y X}, \quad (2)$$

$$\tilde{R}(X, Y)\xi = H(A_\xi X, Y) - H(X, A_\xi Y), \quad (3)$$

где $\tilde{R}$ — форма кривизны связности D, наз. у р а в н е н и я м и П е т е р с о н а — К о д а ц ц и — М а й н а р д и. Уравнения (3) часто наз. у р а в н е н и я м и Р и ч ч и (координатную запись уравнений (2) — (3) см. в [1]). Уравнения (2) — (3) всегда выполнены, если $E(l)$ — нормальное расслоение M^m в N^n и $D_X\xi$ равно проекции $\overline{\nabla}_X \xi$ на $(\nu M^m)_p$.

Имеется следующее обобщение *Бонне теоремы* (см. [2]). Пусть $E(l)$ — риманово расслоение над односвязным M_g^m и пусть на $E(l)$ задан второй фундаментальный тензор A_ξ. Если при этом выполняются соотношения (1) — (3), то существует изометрич. погружение M_g^m в евклидово пространство $\mathbb{R}^{m+l}$ с нормальным расслоением $E(l)$. Такое погружение единственно в следующем смысле: если f, f' — изометрич. погружения M_g^m в $\mathbb{R}^{m+l}$ с нормальными расслоениями E, E', оснащенными, как и выше, и нек-рая изометрия φ: $M_g^m \to M_g^m$ накрывается отображением $\overline{\varphi}$: $E \to E'$, согласованным с оснащенным, то существует такая изометрия Φ пространства $\mathbb{R}^{m+l}$, что $\Phi \circ f = f' \circ \varphi$.

К л а с с ы п о г р у ж е н и й. Многомерная П. м. г. возникла и долгое время развивалась как теория существования изометрич. погружений римановых многообразий как правило в $\mathbb{R}^n$, реже — в пространство постоянной кривизны K (см. *Изометрическое погружение*). Что касается внешне геометрич. свойств и связей между внешней и внутренней геометрией поверхностей, то она подробно изучена только для двумерных поверхностей в $\mathbb{R}^3$. В этом случае существует классификация точек поверхности, с помощью к-рой двумерные поверхности разбиваются на классы: выпуклые поверхности, седловые поверхности и развертывающиеся поверхности. Именно эти классы являются основным объектом изучения в дифференциальной геометрии в целом. В многомерном случае такая классификация точек поверхности неизвестна (1983). Известны только нек-рые классы многомерных поверхностей: k-выпуклые, k-седловые и k-развертывающиеся.

k-в ы п у к л ы е п о в е р х н о с т и. Поверхность F^m в $\mathbb{R}^n$ наз. k-в ы п у к л о й, если для каждой точки $p \in F^m$ существует нормаль $\xi_p \in (\nu F^m)_p$, для к-рой $h_p(\xi)$ положительно определена, и для любого k-мерного направления $\sigma_k \in (TF^m)_p$, $2 \leqslant k \leqslant m$, найдется в σ_k двумерное направление σ_2 такое, что $h_p(\xi)(X, Y) > 0$ (либо $h_p(\xi)(X, Y) = 0$) для каждого $\xi_p \in (\nu F^m)_p$ при $X, Y \in \sigma_2$, $X, Y \neq 0$. 2-выпуклая поверхность F^m в $\mathbb{R}^n$ есть выпуклая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{m+1} \subset \mathbb{R}^n$ (см. [4]). Внутренняя метрика k-выпуклой поверхности обладает следующим свойством: в каждой точке p для каждого k-мерного направления σ_k касательного пространства найдется двумерное направление $\sigma_2 \subset \sigma_k$, в к-ром риманова кривизна строго положительна.

k-с е д л о в ы е п о в е р х н о с т и. Поверхность F^m в $\mathbb{R}^n$ наз. k-с е д л о в о й, если каждой ее точке p для каждой нормали $\xi \in (\nu F^m)_p$ число собственных значений $h_p(\xi)$ одного знака не превосходит $(k-1)$, $2 \leqslant k \leqslant m$. Двумерная k-седловая поверхность есть обычная седловая поверхность в $\mathbb{R}^n$, от к-рой нельзя отсечь «горбушку» гиперплоскостью. Внутренняя метрика k-седловой поверхности обладает следующим свойством: в каждой точке p для каждого k-мерного направления σ_k касательного пространства найдется двумерное направление $\sigma_2 \subset \sigma_k$, в к-ром риманова кривизна не положительна. Если k-седловая поверхность полна в $\mathbb{R}^n$, то ее гомологии $H_i(F^m) = 0$ при $i \geqslant k$ (см. [4], [5]). Полная m-мерная k-седловая поверхность F^m с неотрицательной кривизной Риччи есть цилиндр с $(m-k+1)$-мерной образующей.

k-р а з в е р т ы в а ю щ и е с я (k-п а р а б о л и ч е с к и е) п о в е р х н о с т и. Поверхность F^m в $\mathbb{R}^n$ наз. k-р а з в е р т ы в а ю щ е й с я, если в каждой ее точке p существует k-мерное направление $\sigma_k \subset (TF^m)_p$, к-рое состоит из собственных векторов, принадлежащих нулевому собственному значению матрицы второй квадратичной формы относительно каждой нормали в данной точке. Внутренняя метрика k-развертывающейся поверхности обладает следующим свойством: в каждой точке p найдется подпространство σ_k касательного пространства $(TF^m)_p$ размерности k такое, что $R_{XY} = 0$ для любого вектора $X \in \sigma_k$, где $Y \in (TF^m)_p$ — любой вектор касательного пространства, R_{XY} — оператор кривизны. Если k-развертывающаяся поверхность F^m полна в $\mathbb{R}^n$ и несет на себе внутреннюю метрику неположительной кривизны Риччи, то она является цилиндром с k-мерной образующей [6].

С в о б о д н ы е п о г р у ж е н и я. Если образ $H_p(X, Y)$ в каждой точке $p \in F^m$ имеет максимально возможную размерность $m(m+1)/2$, то погружение наз. с в о б о д н ы м. В этом случае первые и вторые производные радиус-вектора погружения F^m образуют линейно независимую систему. В классе свободных погружений существует изометрич. погружение в размерность $n > m(m+1)/2 + 3m + 5$, но при этом полностью теряется связь между внутренней и внешней геометрией. Напр., два свободных изометрич. погружения m-мерного многообразия M^m в $\mathbb{R}^n$, $n > m(m+1)/2 + 3m + 5$, можно соединить гомотопией, состоящей из свободных изометрич. погружений M^m (см. [7]).

П о г р у ж е н и я с м а л о й к о р а з м е р н о с т ь ю. Если коразмерность q погружения мала, то из условий на внутреннюю метрику многообразия вытекают условия на вторую квадратичную форму поверхности. А из свойств второй квадратичной формы далее выводятся топологические и внешне геометрич. свойства поверхности. В частности, получаются теоремы непогружаемости. Так, если M^m с секционной кривизной $K_\sigma \leqslant 0$ изометрически погружено в $\mathbb{R}^{m+q}$ с $q < m$, то M^m есть $(q+1)$-седловая поверхность и ее гомологии (в случае полноты) $H_k = 0$ при $k \geqslant q+1$ (см. [5]). В частности, компактное M^m с $K_\sigma \leqslant 0$ не

может быть погружено в $\mathbb{R}^{2m-1}$ (см. [8], [9]). Если же $K_\sigma<0$, то M^m даже локально непогружаемо в $\mathbb{R}^{2m-2}$ (см. [9]). Аналогично, M^m с $K_\sigma<1$ непогружаемо в сферу S^{2m-2} радиуса 1. Компактное F^m в S^{2m-1} имеет нулевую эйлерову характеристику и компактное параллелизуемое накрывающее многообразие, если $K_\sigma<1$ (см. [10]). О поверхности F^m в $\mathbb{R}^{m+q}$ при $q\leqslant m-2r-2$ и $K_\sigma<0$ известно, что ее нормальные *Понтрягина классы* удовлетворяют условию

$$\sum 2^{q-2}p_i^\perp p_{r-i}^\perp=0.$$

Если $K_\sigma>0$, то из $q\leqslant m-1$ следует, что F^m есть $(q+1)$-выпуклая поверхность [9]. В частности, при $q=1$ — это 2-выпуклая поверхность. Если $K_\sigma>0$ и $q=2$, то компактная поверхность F^m, $m\geqslant 3$, имеет гомологии сферы [11]. Если F^m в $\mathbb{R}^{m+q}$ имеет неположительную секционную кривизну, то она — $(m-q(q+1))$-развертывающаяся и, в случае полноты, F^m есть цилиндр с $(m-q(q+1))$-мерной образующей [10]. Если же $M^m=M^k\times\mathbb{R}^{n-k}$ и $q\leqslant n-2k$, то погружение многообразия M^m в $\mathbb{R}^{m+q}$ есть $(m-2k-q)$-развертывающаяся поверхность [8] и, в случае полноты, F^m есть цилиндр с $(m-2k-q)$-мерной образующей. При более общих предположениях компактная поверхность

$$M^m=M^{p_1}\times\ldots\times M^{p_q}\to\mathbb{R}^{n+q},\ p_i\geqslant 2,$$

есть произведение гиперповерхностей [12].

Лит.: [1] Эйзенхарт Л., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [2] Chen B., Geometry of submanifolds, N.Y., 1973; [3] Chern S.-s., Lashof R. K., «Amer. J. Math.», 1957, v. 79, p. 306—18; [4] Шефель С. З., «Сиб. матем. ж.», 1969, т. 10, № 2, с. 459—66; [5] Глазырин В. В., «Докл. АН СССР», 1977, т. 233, № 6, с. 1028—30; [6] Hartman P., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 115, p. 94—109, 1970, v. 147, p. 529—40; [7] Громов М. Л., «Докл. АН СССР», 1970, т. 192, № 6, с. 1206—09; [8] Chern S., Kuiper N., «Ann. of Math.», 1952, v. 56, № 3, p. 422—30; [9] Боровский Ю. Е., Шефель С. З., «Сиб. матем. ж.», 1978, т. 19, № 6, с. 1386—87; [10] Бориссенко А. А., «Матем. сб.», 1977, т. 104, № 4, с. 559—76; [11] Moore J., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 70, № 1; [12] Gardner R. B., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1977, v. 83, № 1, p. 1—35.

В. А. Топоногов, С. З. Шефель.

ПОДВИЖНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА — особая точка z_0 решения дифференциального уравнения $F(z, w, w')=0$ (F — аналитич. функция), рассматриваемого как функция $w(z)$ комплексного переменного z, при условии, что решения того же уравнения с близкими начальными данными имеют близкие к z_0 особые точки, не совпадающие с z_0. Классич. пример П. о. т. возникает при рассмотрении уравнения

$$\frac{dw}{dz}=\frac{P(z, w)}{Q(z, w)},$$

где P и Q — голоморфные функции в нек-рой области пространства $\mathbb{C}^2$. Если поверхность $\{Q=0\}$ неприводима и проектируется вдоль оси Ow на область $\Omega\subset Oz$, то все точки области Ω являются П. о. т.; для решения с начальным условием (z_0, w_0), где

$$Q=(z_0, w_0)=0\neq P(z_0, w_0),$$

точка z_0 — *алгебраическая точка ветвления.*

Лит.: [1] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950.

Ю. С. Ильяшенко.

ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА МЕТОД — дифференциально-геометрический метод локального исследования подмногообразий различных однородных пространств, исходным моментом к-рого является отнесение самого подмногообразия и всех его геометрич. объектов к возможно более общему (подвижному) реперу. П. р. м. включает в себя последующий процесс канонизации репера — инвариантного присоединения к каждой точке подмногообразия единственного репера с целью получения дифференциальных инвариантов, характеризующих подмногообразие с точностью до преобразований вмещающего его однородного пространства.

В наиболее общей форме П. р. м. был предложен Э. Картаном (E. Cartan, см. [1]), давшим разнообразные образцы его применений. Позднее метод получил широкое распространение и развитие (см. *Продолжений и охватов метод*). Аналитич. основу П. р. м. составляют инвариантные линейные дифференциальные формы группы Ли и их структурные уравнения, а также теория представлений групп Ли как групп преобразований. В современной геометрии основные положения П. р. м. потребовали уточнений и получили оформление в терминах теории расслоенных пространств.

Пусть X_n есть n-мерное однородное пространство и G есть r-мерная группа Ли его преобразований (G действует слева). Пусть $X_n = G/H$ — представление, где $H \subset G$ — группа изотропии (стационарности) нек-рой точки $x_0 \in X_n$; (e_k, e_α), $k = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha = n+1, \ldots, r$,— базис левоинвариантных векторных полей на G такой, что на H e_α составляют также базис левоинвариантных векторных полей подгруппы Ли H. Базису (e_k, e_α) отвечает сопряженный базис левоинвариантных линейных дифференциальных форм $(\theta^k, \theta^\alpha)$ на группе Ли G. Канонич. проекция $\pi\colon G \to X_n$, сопоставляющая точкам $x \in X_n$ левые классы смежности $\pi(x) = H_x \in G$ группы G по подгруппе $H = H_{x_0}$, вносит в группу Ли G структуру главного H-расслоения с базой X_n и структурной группой H размерности $r-n$. При таком представлении G векторные поля e_α составляют базис фундаментальных векторных полей расслоения $\pi\colon G \to X_n$, а векторные поля e_k натягивают некрое трансверсальное к слоям расслоения $\pi\colon G \to X_n$ n-распределение. В соответствии с этим линейные дифференциальные формы θ^k являются полубазовыми формами расслоения $\pi\colon G \to X_n$ и образуют вполне интегрируемую подсистему форм в системе $(\theta^k, \theta^\alpha)$. Слои $H_x \subset G$ являются интегральными многообразиями максимальной размерности для системы уравнений Пфаффа $\theta^k = 0$.

Системой реперов в классической дифференциальной геометрии (евклидовой, аффинной, проективной и т. д.) наз. множество фигур пространства X_n, находящееся в биективном соответствии с множеством преобразований пространства X_n (или, что то же самое, с множеством элементов фундаментальной группы G данного пространства), при этом любой репер R из данной системы можно получить из нек-рого начального R_0 с помощью только одного преобразования:

$$L_g\colon X_n \to X_n,\ R = L_g(R_0),\ g \in G.$$

Учитывая, что главная роль подвижного репера $L_g(R_0) = R_g$ по отношению к неподвижному R_0 состоит в том, чтобы определять произвольное преобразование L_g однородного пространства X_n, можно отождествить множество реперов $\{R_g\}$ с множеством элементов группового пространства G, приобретающих таким образом смысл абстрактных реперов, обслуживающих любое однородное пространство с данной фундаментальной группой G.

Пусть задано нек-рое гладкое подмногообразие $M \subset X_n$ размерности m. Реперами нулевого порядка подмногообразия M наз. элементы ограничения $G(\pi, M) = G|_M \subset G$ расслоения $\pi\colon G \to X_n$ на M, как на новую базу. Это значит, что главное расслоение $G(\pi, M) \to M$ вложено в G и определяется в нем как полный прообраз $\pi^{-1}(M) \subset G$. Так как левоинвариантные формы θ^k, θ^α на группе Ли G подчиняются уравнениям Маурера — Картана

$$\left.\begin{aligned} d\theta^k &= \tfrac{1}{2} C^k_{lm} \theta^l \wedge \theta^m + C^k_{l\alpha} \theta^l \wedge \theta^\alpha, \\ d\theta^\alpha &= \tfrac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma} \theta^\beta \wedge \theta^\gamma + C^\alpha_{\beta k} \theta^\beta \wedge \theta^k + \tfrac{1}{2} C^\alpha_{lm} \theta^l \wedge \theta^m, \\ k, l, m &= 1, 2, \ldots, n;\ \alpha, \beta, \gamma = n+1, \ldots, r, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где C^k_{lm}, $C^k_{l\alpha}$, $C^\alpha_{\beta\gamma}$, $C^\alpha_{\beta k}$, C^α_{lm} — структурные константы группы Ли, то ограничение форм θ^k, θ^α на подрасслоение $G(\pi, M)$, т. е. формы ω^k, ω^α, будет подчиняться таким же уравнениям, но, сверх того, среди форм ω^k возникнут линейные зависимости

$$\omega^p = \Lambda^p_a \omega^a, a = 1, 2, \ldots, m; \; p = m+1, \ldots, n, \quad (2)$$

где ω^a — формы, оставшиеся вместе с ω^α линейно независимыми на главном расслоенном пространстве $G(\pi, M) \to M$, а Λ^p_a — функции, также определенные на расслоении реперов нулевого порядка $G(\pi, M) \to M$. Функции Λ^p_a являются координатами касательной плоскости $T_x(M) \subset T_x(X_n)$ подмногообразия $M \subset X_n$, зависящими от точки $x \in M$ и репера

$$R \in \pi^{-1}(x) = H_x \subset G(\pi, M).$$

Касательные плоскости $x \to T_x(M)$ образуют сечение $f\colon M \to \mathcal{G}_m(M)$ грассманова расслоения $\mathcal{G}_m(M) \to M$ m-плоскостей, проходящих через точки подмногообразия $M \subset X_n$. Расслоение $\mathcal{G}_m(M) \to M$ является присоединенным к главному расслоению $G(\pi, M) \to M$. Структура функций Λ^p_a характеризуется уравнениями

$$d\Lambda^p_a + F^p_{a\alpha}(\Lambda)\,\omega^\alpha = \Lambda^p_{ab}\omega^b, \quad (3)$$

явный вид к-рых можно получить внешним дифференцированием уравнений (2) с помощью (1) и последующим применением леммы Картана. Функции Λ^p_a, Λ^p_{ab} являются относительными координатами 1-струи $j^1_x f$ сечения f по отношению к подвижному реперу $R \in \pi^{-1}(x)$ точки $x \in M$. Геометрич. объект $j^1_x f$ образует также сечение $j^1 f\colon M \to \mathcal{G}^1_m(M)$ соответствующего расслоенного пространства $\mathcal{G}^1_m(M) \to M$, присоединенного к главному расслоению $G(\pi, M) \to M$. Аналогичным образом возникает сечение $j^2 f\colon M \to \mathcal{G}^2_m(M)$ с координатами Λ^p_a, Λ^p_{ab}, Λ^p_{abc} образующего его геометрич. объекта, а также его последующие продолжения $j^3 f, \ldots, j^q f$, к-рым соответствуют дифференциальные продолжения уравнений (3).

До тех пор пока расслоение $\mathcal{G}^a_m(M) \to M$, к-рому принадлежит сечение $j^q f(M)$, является однородным, возможна редукция $G^q(\pi, M)$ главного расслоения $G(\pi, M) \to M$ реперов к нек-рой подгруппе $\tilde{H} \subset H$, определяемая по Картану с помощью нек-рой фиксации относительных координат Λ^p_a, Λ^p_{ab}, $\ldots$, $\Lambda^p_{a_1 \ldots a_{q+1}}$ геометрич. объекта $j^q_x f$, не зависящей от точки $x \in M$. Так определяется частичная каноницация репера. Реперы $R \in G^q(\pi, M)$ наз. полуканоническими реперами порядка $q+1$ данного подмногообразия $M \subset X_n$. Если же следующее продолжение дает геометрич. объекты, группа стационарности к-рых содержит лишь тождественное преобразование, то возможна фиксация лишь части координат геометрич. объекта сечения $j^{q+1} f$, не зависящая от точки x, после чего оставшаяся часть координат Λ геометрич. объекта $j^{q+1} f$ зависит только от $x \in M$. Таким образом возникает сечение $s\colon M \to G(\pi, M)$ расслоения реперов нулевого порядка подмногообразия $M \subset X_n$. Репер $R = s(x)$ этого сечения наз. каноническим репером подмногообразия $M \subset X_n$, или сопровождающим репером этого подмногообразия. Описанный выше процесс продолжения уравнений (3) и выбранный способ фиксации функций Λ приводит к уравнениям

$$\omega^p = \Lambda^p_\alpha \omega^a, \; \omega^\alpha = \Lambda^\alpha_a \omega^a, \quad (4)$$

связывающим линейные формы ω^k, ω^α на сечении $s(M)$. Поле канонич. репера строится не однозначно, а зависит от произвола фиксации относительных коор-

динат геометрич. объекта $j^{q+1}f$. Важно лишь то, что часть коэффициентов уравнения (4) имеет постоянные (при желании наиболее простые) числовые значения, тогда как другая часть их образует дифференциальные инварианты подмногообразия $M \subset X_n$, определяющие его с точностью до преобразования в X_n. Канонич. реперы сечения $s(M)$ являются аналогом классич. примера — сопровождающего репера Френе кривой евклидова пространства, а уравнения (4) соответствуют уравнениям Френе кривой. На пути канонизации репера могут возникать осложнения, связанные с неоднородностью расслоений $\mathcal{G}_m^q(M)$ и разнотипностью в этом смысле различных подмногообразий M в X_n и даже их отдельных кусков. На этом и основывается классификация различных типов точек и различных классов подмногообразий в X_n. Благодаря этим особенностям П. р. м. сыграл плодотворную роль в изучении подмногообразий в разнообразных однородных пространствах и, кроме того, указал путь к развитию современных методов исследования самых общих дифференциально-геометрич. структур на гладких многообразиях.

Лит.: [1] Картан Э., Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера, пер. с франц., М., 1963; [2] Фавар Ж., Курс локальной дифференциальной геометрии, пер. с франц., М., 1960; [3] Картан А., Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы, пер. с франц., М., 1971; [4] Фиников С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.— Л., 1948. *Е. Л. Евтушик.*

ПОДВИЖНЫХ СЕТОК МЕТОД — метод численного решения задач математич. физики, где разностная сетка, на к-рой осуществляется аппроксимация уравнений основной задачи, не остается фиксированной; она прослеживает в процессе расчета изменение границ счетных областей. Простейшая разностная сетка, получаемая точками пересечения прямых, параллельных осям декартовой системы координат (прямоугольная сетка), позволяет максимально упростить разностные уравнения, описывающие основную задачу. Однако адекватное представление на ней границ сложной формы и задаваемых на них граничных условий связано со значительными трудностями, зачастую непреодолимыми при ограниченных ресурсах ЭВМ. Эти трудности особенно возрастают при решении нестационарных задач математич. физики, когда границы расчетных областей подвижны и претерпевают значительную деформацию. Построение системы координат с координатными линиями, совпадающими с границами, становится существенной частью алгоритма решения таких задач.

При применении П. с. м. в каждый фиксированный момент времени счетная область разрезается на конечное число ячеек сетки, не налегающих друг на друга и заполняющих всю область без зазоров. В случае двух пространственных переменных с точки зрения практич. реализации наиболее удобно счетную область двумя семействами линий разрезать на четырехугольные ячейки. Тогда становится простой нумерация ячеек (аналогичная нумерации элементов матрицы по строкам и столбцам).

Расчет координат узлов такой сетки можно трактовать как разностный аналог задачи об отыскании функций $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, обеспечивающих однолистное отображение на область физич. плоскости (x, y), в к-рой проводится расчет, нек-рой параметрич. области на плоскости (ξ, η), напр. единичного квадрата $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Граничные значения этих функций устанавливают нек-рое взаимно однозначное соответствие между точками на сторонах параметрич. квадрата и на границах физич. области. Это соответствие целесообразно оставлять в распоряжении вычислителя, к-рый расставляет узлы сетки на границе счетной области,

исходя из конкретного содержания задачи и имеющихся ресурсов.

Для областей несложной формы координаты узлов сетки можно вычислять по явным формулам, основанным на использовании интерполяции или конкретного вида отображения. В случае сложных областей приходится прибегать к итерационному процессу, в ходе к-рого положение узла сетки на каждой итерации пересчитывается в зависимости от положения его соседей. Такие итерационные процессы, как правило, моделируют решение нек-рой системы дифференциальных уравнений с частными производными. При их конструировании зачастую в той или иной форме привлекаются конформные и квазиконформные отображения.

Структура решения задач математич. физики (напр., задач газовой динамики) может характеризоваться наличием зон, в к-рых происходит резкое изменение параметров потока. Размеры таких зон могут быть существенно меньше характерного линейного размера задачи, а их местонахождение заранее неизвестно и, кроме того, может меняться в процессе расчета. В связи с этим разрабатываются алгоритмы, к-рые позволяли бы использовать в расчетах сетки, сгущающиеся в таких зонах.

С целью создания надежных вычислительных алгоритмов задача построения сетки зачастую формулируется как задача минимизации нек-рого вариационного функционала. Функционал может содержать управляющие параметры, изменение к-рых обеспечивает определенную свободу и возможность приспосабливать рассчитываемую сетку к особенностям конкретной задачи.

Лит.: [1] Численное решение многомерных задач газовой динамики, М., 1976; [2] Сидоров А. Ф., «Численные методы механики сплошной среды», 1977, т. 8, № 4, с. 149—56; [3] Мещеряков Ю. П., Шапеев В. П., там же, 1978, т. 9, № 2, с. 91—103; [4] Данаев Н. Т., там же, 1979, т. 10, № 4, с. 60—74; [5] Томас П. Д., Миддлкофф Д. Ф., «Ракетная техника и космонавтика», 1980, т. 18, № 7, с. 55—61.

Г. П. Прокопов.

ПОДГРУППЫ РЯД — конечная цепочка вложенных одна в другую подгрупп группы G:

$$E = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G \qquad (*)$$

или

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots \supseteq G_{n+1} = E.$$

Рассматриваются также бесконечные цепочки вложенных подгрупп (убывающие и возрастающие), занумерованные порядковыми числами или даже элементами упорядоченного множества. Их чаще наз. *подгруппами системами*.

Важную роль в теории групп играют субнормальные, нормальные и центральные ряды. П. р. (*) наз. субнормальным, если каждый его предыдущий член есть нормальная подгруппа следующего члена. Если, кроме того, каждая подгруппа G_i, $i=0, 1, \ldots, n$, нормальна в G, то ряд (*) наз. нормальным рядом в G. Существует и иная терминология, в к-рой нормальным рядом наз. то, что здесь названо субнормальным, а для второго определенного здесь понятия используется термин «инвариантный ряд» (преобладает, однако, первая терминология). Факторгруппы G_{i+1}/G_i наз. факторами, а число n — длиной субнормального ряда. Нормальный ряд (*) наз. центральным, если все его факторы центральны, т. е. G_{i+1}/G_i лежит в центре группы G/G_i для всех i или, что равносильно, взаимный коммутант G_{i+1} и G лежит в G_i для всех i. Если G_{i+1}/G_i в точности совпадает с центром группы G/G_i (соответственно коммутант G_{i+1} и G совпадает с G_i) для всех i, то ряд (*) наз. верхним центральным рядом (соответственно нижним центральным рядом) группы G.

Пусть в группе G заданы субнормальный (соответственно нормальный или центральный) ряд и нек-рая подгруппа $H \subseteq G$ и пусть $H_i = G_i \cap H$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Тогда цепочка

$$E = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = H$$

является субнормальным (соответственно нормальным или центральным) рядом в H, а факторы этого ряда изоморфны подгруппам соответствующих факторов ряда (*). Если G/N — нек-рая факторгруппа группы G, то цепочка

$$E = G_0N/N \subseteq G_1N/N \subseteq \ldots \subseteq G_nN/N = G/N$$

является субнормальным (соответственно нормальным или центральным) рядом в G/N, а факторы этого ряда суть гомоморфные образы соответствующих факторов ряда (*).

Два субнормальных (в частности, нормальных) ряда группы наз. *изоморфными*, если они имеют одинаковую длину и между их факторами существует взаимно однозначное соответствие, при к-ром соответствующие факторы изоморфны. Если всякая подгруппа одного ряда совпадает с одной из подгрупп другого, то второй ряд наз. *уплотнением* первого. Неуплотняемый далее нормальный ряд наз. *главным*, а субнормальный — *композиционным*. Факторы этих рядов наз. соответственно *главными* и *композиционными факторами*. Любые два субнормальных (соответственно нормальных или центральных) ряда группы обладают изоморфными субнормальными (соответственно нормальными или центральными) уплотнениями. В частности, любые два главных (композиционных) ряда изоморфны (см. *Жордана — Гёльдера теорема*).

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории группы, 3 изд., М., 1982; [2] Черников С. Н., Группы с заданными свойствами системы подгрупп, М., 1980.

Н. С. Романовский.

ПОДГРУПП СИСТЕМА — множество $\mathfrak{A}$ подгрупп группы G, удовлетворяющее условиям: 1) $\mathfrak{A}$ содержит единичную подгруппу 1 и саму группу G, 2) $\mathfrak{A}$ линейно упорядочено по вложению, т. е. для всяких A, B из $\mathfrak{A}$ либо $A \subseteq B$, либо $B \subseteq A$. Говорят, что подгруппы A, A' из $\mathfrak{A}$ составляют *скачок*, если A' непосредственно следует за A в $\mathfrak{A}$. П. с., замкнутая относительно объединений и пересечений, наз. *полной*. Полная П. с. наз. *субнормальной*, если для всякого скачка A, A' этой системы A является нормальной подгруппой в A'. Факторгруппы A'/A наз. *факторами системы* $\mathfrak{A}$. П. с., все члены к-рой суть нормальные подгруппы группы G, наз. *нормальной*. В случае, когда одна субнормальная система содержит (в теоретико-множественном смысле) другую, первую из них наз. *уплотнением* второй. Нормальная П. с. наз. *центральной*, если все ее факторы центральны, т. е. A'/A содержится в центре G/A для всякого скачка A, A'. Субнормальная П. с. наз. *разрешимой*, если все ее факторы абелевы.

Наличие в группе тех или иных П. с. выделяет в классе всех групп различные подклассы, наиболее употребительны из к-рых RN, $\overline{RN}^*$, $\overline{RN}$, RI, RI^*, $\overline{RI}$, Z, ZA, ZD, $\overline{Z}$, $\tilde{N}$, N — классы Куроша — Черникова:

RN-группа — обладает разрешимой субнормальной П. с.;

$\overline{RN}^*$-группа — обладает разрешимой субнормальной П. с., вполне упорядоченной по возрастанию;

$\overline{RN}$-группа — всякую субнормальную П. с. этой группы можно уплотнить до разрешимой субнормальной;

RI-группа — обладает разрешимой нормальной П. с;

RI^*-группа — обладает разрешимой нормальной П. с., вполне упорядоченной по возрастанию;

$\overline{RI}$-группа — всякую нормальную П. с. этой группы можно уплотнить до разрешимой нормальной;

Z-группа — обладает центральной П. с.;

ZA-группа — обладает центральной П. с., вполне упорядоченной по возрастанию;

ZD-группа — обладает центральной П. с., вполне упорядоченной по убыванию;

$\overline{Z}$-группа — всякую нормальную П. с. такой группы можно уплотнить до центральной;

$\tilde{N}$-группа — через всякую подгруппу такой группы проходит субнормальная П. с.;

N-группа — через всякую подгруппу такой группы проходит субнормальная П. с., вполне упорядоченная по возрастанию.

Частный случай П. с.— *подгрупп ряды*.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Черников С. Н., Группы с заданными свойствами системы подгрупп, М., 1980; [3] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982.

Н. С. Романовский.

ПОДГРУППА — подмножество H *группы* G, само являющееся группой относительно операции, определяющей G. Подмножество H группы G является ее подгруппой тогда и только тогда, когда: (1) H содержит произведение любых двух элементов из H, (2) H содержит вместе со всяким своим элементом h обратный к нему элемент h^{-1}. В случае конечных и, вообще, периодич. групп проверка условия (2) является излишней.

Подмножество группы G, состоящее из одного элемента 1, будет, очевидно, подгруппой, и эта П. наз. единичной П. группы G и обозначается обычно символом E. Сама G также является своей П. Всякая П., отличная от всей группы, наз. истинной П. этой группы. Истинная П. нек-рой бесконечной группы может быть изоморфна самой группе. Сама группа G и подгруппа E наз. несобственными П. группы G, все остальные — собственными.

Теоретико-множественное пересечение любых двух (и любого множества) П. группы G является П. группы G. Пересечение всех П. группы G, содержащих все элементы нек-рого непустого множества M, наз. подгруппой, порожденной множеством M, и обозначается символом $\{M\}$. Если M состоит из одного элемента a, то $\{a\}$ наз. циклической П. элемента a. Группа, совпадающая с одной из своих циклических П., наз. *циклической группой*.

Теоретико-множественное объединение П., вообще говоря, не обязано являться П. Объединением подгрупп H_i, $i \in I$, наз. П., порожденная объединением множеств H_i.

Произведение подмножеств S_1 и S_2 группы G есть множество, состоящее из всевозможных (различных) произведений $s_1 s_2$, где $s_1 \subset S_2$, $s_2 \in S_2$. Произведение подгрупп $H_1 H_2$ есть П. тогда и только тогда, когда $H_1 H_2 = H_2 H_1$, и в этом случае произведение $H_1 H_2$ совпадает с объединением подгрупп H_1 и H_2.

Гомоморфный образ П.— подгруппа. Если группа G_1 изоморфна нек-рой подгруппе H группы G, то говорят, что группа G_1 может быть вложена в группу G. Если даны две группы и каждая из них изоморфна нек-рой истинной П. другой, то отсюда еще не следует изоморфизм самих этих групп.

О. А. Иванова.

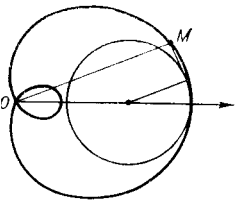
ПОДГРУППЫ ИНДЕКС в группе G — число *смежных классов* в каждом из разложений группы G по этой подгруппе H (в бесконечном случае — мощность множества этих классов). Если число смежных классов конечно, то H наз. подгруппой конечного индекса в G. Пересечение конечного числа подгрупп конечного индекса само имеет конеч-

ный индекс (теорема Пуанкаре). Индекс подгруппы H в группе G обычно обозначается $|G:H|$. Произведение порядка подгруппы H на ее индекс $|G:H|$ равно порядку группы G (теорема Лагранжа). Это соотношение имеет место как для конечной группы G, так и в случае бесконечной G — для соответствующих мощностей.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982; [2] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

О. А. Иванова.

ПОДЕРА, подэра, кривой l относительно точки O — множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки O на касательные к кривой l. Напр., улитка Паскаля — П. окружности относительно точки O (см. рис.). П. плоской линии $x=x(t)$, $y=y(t)$ относительно начала координат:



$$X=x-x'\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2},\ Y=y-y'\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2}.$$

Уравнение П. пространственной линии $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ относительно начала координат:

$$X=x-x'\frac{xx'+yy'+zz'}{x'^2+y'^2+z'^2};\ Y=y-y'\frac{xx'+yy'+zz'}{x'^2+y'^2+z'^2};$$

$$Z=z-z'\frac{xx'+yy'+zz'}{x'^2+y'^2+z'^2}.$$

Антиподерой линии l относительно точки O наз. линия, П. к-рой относительно точки O есть линия l.

П. поверхности относительно точки O — множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки O на касательные плоскости поверхности. Уравнение П. поверхности $F(x, y, z)=0$ по отношению к началу координат:

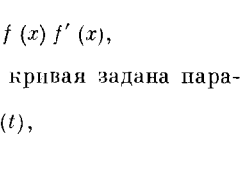
$$X=F_x\Phi,\ Y=F_y\Phi,\ Z=F_z\Phi,$$

где

$$\Phi=\frac{xF_x+yF_y+zF}{F_x^2+F_y^2+F_z^2}.$$

А. Б. Иванов.

ПОДКАСАТЕЛЬНАЯ И ПОДНОРМАЛЬ — направленные отрезки QT и QN, являющиеся проекциями на ось Ox отрезков касательной MT и нормали MN к нек-рой кривой в ее точке M (см. рис.).



Если кривая есть график функции $y=f(x)$, то значения величин П. и п. равны соответственно:

$$QT=-\frac{f(x)}{f'(x)},\ QN=f(x)f'(x),$$

где x — абсцисса точки M. Если кривая задана параметрически:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$$

то тогда

$$QT=-\frac{\psi(t)\varphi'(t)}{\psi'(t)},\ QN=\frac{\psi(t)\psi'(t)}{\psi'(t)},$$

где t — значение параметра, определяющее точку M кривой.

БСЭ-3.

ПОДКАТЕГОРИЯ — частный случай понятия подструктуры математич. структуры. Категория $\mathfrak{L}$ наз. подкатегорией категории $\mathfrak{K}$, если $\mathrm{Ob}\mathfrak{L}\subseteq\mathrm{Ob}\mathfrak{K}$,

$$H_{\mathfrak{L}}(A, B)=H_{\mathfrak{K}}(A, B)\cap\mathrm{Mor}\,\mathfrak{L}$$

для любых A, $B\in\mathrm{Ob}\mathfrak{L}$ и произведение морфизмов из $\mathfrak{L}$ совпадает с их произведением в $\mathfrak{K}$. Для каждого

подкласса $\mathfrak{L}'$ класса $\mathrm{Ob}\mathfrak{K}$ существуют наименьшая и наибольшая подкатегории $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ категории $\mathfrak{K}$, классы объектов к-рых совпадают с $\mathfrak{L}'$; подкатегория $\mathfrak{L}_1$ содержит только единичные морфизмы объектов из $\mathfrak{L}'$ и наз. дискретной П., порожденной $\mathfrak{L}'$; подкатегория $\mathfrak{L}_2$ содержит все морфизмы из $\mathfrak{K}$, начала и концы к-рых лежат в $\mathfrak{L}'$ и наз. полной П., порожденной $\mathfrak{L}'$. Всякая подкатегория $\mathfrak{L}$ категории $\mathfrak{K}$, для к-рой $H_{\mathfrak{L}}(A, B)=H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ для любых $A, B\in\mathrm{Ob}\mathfrak{L}$, наз. полной П. категории $\mathfrak{K}$. Полными П. являются: П. непустых множеств в категории всех множеств, П. абелевых групп в категории всех групп и т. д. Для *малой категории* $\mathfrak{D}$ полная П. категории всех контравариантных функторов из $\mathfrak{D}$ в категорию множеств, порожденная основными функторами, изоморфна категории $\mathfrak{D}$. Этот результат позволяет строить пополнение произвольной малой категории пределами и копределами.

Произвольная П. категории $\mathfrak{K}$ не наследует никаких свойств этой категории. Однако существуют важные классы П., наследующих многие свойства объемлющей категории, таковы, напр., рефлективные П., корефлективные П. *М. Ш. Цаленко.*

ПОДМАТРИЦА матрицы A размера $m\times n$ — матрица размера $k\times l$, где $1\leqslant k\leqslant m$, $1\leqslant l\leqslant n$, образованная элементами, находящимися на пересечении фиксированных k строк и l столбцов матрицы A с сохранением прежнего порядка. Определитель квадратной П. порядка k матрицы A наз. минором k-го порядка матрицы A. *Т. С. Пиголкина.*

ПОДМНОГООБРАЗИЕ — 1) В узком смысле слова топологическое n-мерное П. топологического m-мерного многообразия M — такое подмножество $N\subset M$, к-рое в индуцированной топологии является n-мерным многообразием. Число $m-n$ наз. коразмерностью подмногообразия N. Наиболее часто встречаются локально плоские П., для к-рых тождественное вложение $i\colon N\to M$ является *локально плоским вложением*. Подмножество $N\subset M$ является локально плоским П., если для каждой точки $p\in N$ имеются такая окрестность U этой точки в M и такие локальные координаты $x_1, \ldots, x_m$ в ней, что в терминах этих координат $N\cap U$ описывается уравнениями $x_{n+1}=\ldots=x_m=0$.

2) В широком смысле слова топологическое n-мерное П. топологического m-мерного многообразия M — такое n-мерное многообразие N, к-рое как множество точек является подмножеством M (иными словами, N — это подмножество M, снабженное структурой n-мерного многообразия) и для к-рого тождественное вложение $i\colon N\to M$ является *погружением*. П. в узком смысле является П. в широком смысле, а последнее является П. в узком смысле тогда и только тогда, когда i есть вложение в топологич. смысле (т. е. у каждой точки $p\in N$ имеется сколь угодно малые окрестности в N, являющиеся пересечениями с N нек-рых окрестностей в M).

3) Кусочно линейное, аналитическое или дифференцируемое (класса C^l, $l\leqslant\infty$) П. кусочно линейного, аналитического или дифференцируемого (класса C^k, $l\leqslant k\leqslant\infty$) многообразия M в широком смысле (соответственно узком) — это подмножество $N\subset M$, к-рое снабжено структурой кусочно линейного, аналитического или дифференцируемого (класса C^l) многообразия, причем i является кусочно линейным, аналитическим или дифференцируемым (класса C^l) погружением (соответственно вложением). Определение дифференцируемого П. класса C^l годится и при $l=0$, совпадая в этом случае с определением топологического П. Обычно подразумевается, что $l\geqslant 1$.

В аналитическом и дифференцируемом случаях П. всегда является локально плоским. Поэтому определение аналитического (дифференцируемого) П. в узком смысле обычно с самого начала формулируется как аналитический (дифференцируемый) вариант данного в 1) определении локально плоского П. с помощью локальных координат, добавляя к сказанному там условию, чтобы локальные координаты $x_1, \ldots, x_m$ были аналитическими (дифференцируемыми класса C^l). Если подмножество N удовлетворяет последнему определению, то оно естественным образом снабжается структурой аналитического (дифференцируемого класса C^l) многообразия и i оказывается вложением в смысле соответствующей структуры.

Кусочно линейное П. в узком смысле локально представляется как подполиэдр объемлющего многообразия, кусочно линейно эквивалентный симплексу. Оно не всегда является локально плоским (хотя это так при $m - n > 2$); кроме того, для таких П. свойство быть локально плоским в топологич. смысле не совпадает (по крайней мере непосредственно) со свойством быть локально плоским в кусочно линейном смысле.

4) Простой модификацией этих определений получаются определения: П. с краем; П. многообразия с краем (при этом в ряде топологич. вопросов оказывается целесообразным ограничить возможные расположения П. у края объемлющего многообразия, см. [1]); П., различные компоненты к-рого могут иметь различную размерность; П. бесконечномерного многообразия [2]; комплексно аналитического П. комплексно аналитического многообразия.

Понятие П. в узком смысле является непосредственным обобщением понятия кривой и поверхности. П. в широком смысле используются в теории групп Ли (где это понятие и было впервые введено [3]), дифференциальной геометрии [4] и теории *слоений*.

5) В *алгебраической геометрии* П.— замкнутое подмножество алгебраич. многообразия в *Зарисского топологии*. Этим формализуется идея, что П. задается алгебраич. уравнениями. Помимо перехода от $\mathbb{R}$ к другим полям, изменение понятия П. в этом случае состоит в том, что допускаются П. с особенностями.

Лит.: [1] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [2] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948; [4] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970. *Д. В. Аносов.*

ПОДМОДУЛЬ — подмножество модуля, являющееся подгруппой его аддитивной группы и замкнутое относительно умножения на элементы основного кольца. В частности, левый (правый) идеал кольца R является П. левого (правого) R-модуля R. П., отличный от всего модуля, наз. собственным. Множество П. данного модуля, упорядоченное по включению, является полной дедекиндовой решеткой (см. *Вполне приводимый модуль*). Если φ — гомоморфизм модуля A в модуль B, то множество

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \mid x \in A,\ \varphi(x) = 0\}$$

оказывается П. модуля A и наз. ядром гомоморфизма φ. Каждый П. служит ядром некоторого гомоморфизма. П. наз. большим (или существенным), если он имеет ненулевое пересечение с любым другим ненулевым П. Напр., целые числа образуют большой П. группы рациональных чисел. Каждый модуль является большим П. своей инъективной оболочки (см. *Инъективный модуль*). Подмодуль A модуля B наз. малым (или косущественным), если для любого подмодуля $A' \subseteq B$ равенство $A + A' = B$ влечет $A' = B$. Малым оказывается, напр., всякий собственный П. цепного модуля. Малый П. образуют необратимые элементы локального кольца.

Сумма всех малых П. совпадает с пересечением всех максимальных П. Левый идеал I принадлежит радикалу Джекобсона тогда и только тогда, когда IM мал в M для всякого конечно порожденного левого модуля M. Элементы малого П. являются **необразующими**, т. е. любая система образующих модуля остается таковой после удаления любого из этих элементов (это, конечно, не означает, что их можно удалить все сразу!). Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов модуля совпадает с множеством эндоморфизмов, имеющих малый образ.

Лит.: [1] Каш Ф., Модули и кольца, пер. с нем., М., 1981; [2] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79. *Л. А. Скорняков.*

ПОДОБИЕ — преобразование евклидова пространства, при к-ром для любых двух точек A, B и их образов A', B' имеет место соотношение $|A'B'|=k|AB|$, где k — положительное число, называемое **коэффициентом** П.

Каждая *гомотетия* является подобием. Каждое *движение* (в том числе и тождественное) также можно рассматривать как преобразование П. с коэффициентом k, равным единице. Фигура F наз. **подобной** фигуре F', если существует преобразование П., при к-ром $F\to F'$. П. фигур является отношением эквивалентности, т. е. обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. П. есть взаимно однозначное отображение евклидова пространства на себя; П. сохраняет порядок точек на прямой, т. е. если точка B лежит между точками A, C и B', A', C' — соответствующие их образы при нек-ром П., то B' также лежит между точками A' и C'; точки, не лежащие на прямой, при любом П. переходят в точки, не лежащие на одной прямой. П. преобразует прямую в прямую, отрезок в отрезок, луч в луч, угол в угол, окружность в окружность. При П. угол сохраняет величину.

П. с коэффициентом $k\neq 1$, преобразующее каждую прямую в параллельную ей прямую, является гомотетией с коэффициентом k или $-k$. Каждое П. можно рассматривать как композицию движения D и нек-рой гомотетии Г с положительным коэффициентом.

П. наз. **собственным** (**несобственным**), если движение D является собственным (несобственным). Собственное П. сохраняет ориентацию фигур, а несобственное — изменяет ориентацию на противоположную.

Аналогично определяется П. (с сохранением указанных выше свойств) в 3-мерном евклидовом пространстве, а также в n-мерном евклидовом и псевдоевклидовом пространствах.

В n-мерных римановых, псевдоримановых и финслеровых пространствах П. определяется как преобразование, переводящее метрику пространства в себя с точностью до постоянного множителя.

Совокупность всех П. n-мерного евклидова, псевдоевклидова, риманова, псевдориманова или финслерова пространства составляет r-членную группу преобразований Ли, наз. **группой подобных (гомотетических)** преобразований соответствующего пространства. В каждом из пространств указанных типов r-членная группа подобных преобразований Ли содержит $(r-1)$-членную нормальную подгруппу движений.

Представляют интерес метрич. пространства векторных плотностей с группами П. и изометрий, содержащими бесконечномерные подгруппы изометрий с общими траекториями. *И. П. Егоров.*

ПОДОБИЯ ТЕОРИЯ — учение об исследовании физич. явлений, основанное на понятии о физич. подобии.

Два физич. явления **подобны**, если по численным значениям характеристик одного явления можно

получить численные значения характеристик другого явления простым пересчетом, к-рый аналогичен переходу от одной системы единиц измерения к другой. Для всякой совокупности подобных явлений все соответствующие безразмерные характеристики (безразмерные комбинации из размерных величин) имеют одинаковое численное значение (см. *Размерностей анализ*). Обратное заключение тоже верно, т. е. если все соответствующие безразмерные характеристики для двух явлений одинаковы, то эти явления физически подобны.

Анализ размерностей и П. т. тесно связаны между собой и положены в основу экспериментов с моделями. В таких экспериментах осуществляются замены изучения нек-рого явления в натуре изучением аналогичного явления на модели меньшего или большего масштаба (обычно в специальных лабораторных условиях).

После установления системы параметров, определяющих выделенный класс явлений, устанавливаются условия подобия двух явлений. Именно, пусть явление определяется n независимыми параметрами, нек-рые из к-рых могут быть безразмерными. Пусть, далее, размерности определяющих переменных и физич. постоянных выражены через размерности k из этих параметров с независимыми размерностями ($k \leqslant n$). Тогда из n величин можно составить только $n-k$ независимых безразмерных комбинаций. Все искомые безразмерные характеристики явления можно рассматривать как функции от этих $n-k$ независимых безразмерных комбинаций, составленных из определяющих параметров. Среди всех безразмерных величин, составленных из определяющих характеристик явления, всегда можно указать нек-рую базу, т. е. систему безразмерных величин, к-рые определяют собой все остальные.

Определенный соответствующей постановкой задачи класс явлений содержит явления, вообще неподобные между собой. Выделение из него подкласса подобных явлений осуществляется с помощью следующего условия.

Для подобия двух явлений необходимо и достаточно, чтобы численные значения безразмерных комбинаций, составленных из полного перечня определяющих параметров, образующих базу, в этих двух явлениях были одинаковы. Условия о постоянстве базы отвлеченных параметров, составленных из заданных величин, определяющих явление, наз. **критериями подобия**.

В гидродинамике важнейшими критериями подобия являются *Рейнольдса число*, характеризующее соотношение между инерционными силами и силами вязкости, *Маха число*, учитывающее сжимаемость газа, и *Фруда число*, характеризующее соотношение между инерционными силами и силами тяжести. Основными критериями подобия процессов теплопередачи между жидкостью (газом) и обтекаемым телом являются: *Прандтля число*, характеризующее термодинамич. состояние среды; *Нуссельта число*, характеризующее интенсивность конвективного теплообмена между поверхностью тела и потоком жидкости (газа); *Пекле число*, характеризующее соотношение между конвективным и молекулярным процессами переноса тепла в жидкости; *Стэнтона число*, характеризующее интенсивность диссипации энергии в потоке жидкости или газа. Для распределения тепла в твердом теле критериями подобия являются *Фурье число*, характеризующее скорость изменения тепловых условий в окружающей среде и скорость перестройки поля темп-ры внутри тела, и число Био, определяющее характер соответствия между температурными условиями среды и распределением температуры внутри тела. В про-

цессах, изменяющихся с течением времени, основными критериями подобия, характеризующими одинаковость протекания процессов во времени, являются критерии гомохронности. В задачах аэрогидромеханики этот критерий наз. *Струхаля числом*. Критерием подобия механич. движения является *Ньютона число*. При изучении упругих деформаций критерием подобия является коэффициент Пуассона.

Если условия подобия выполнены, то для фактич. расчета всех характеристик в натуре по данным о размерных характеристиках на модели необходимо знать переходные масштабы для всех соответствующих величин. Если явление определяется n параметрами, из к-рых k имеют независимые размерности, то для величин с независимыми размерностями переходные масштабы могут быть произвольными и их нужно задать с учетом условий задачи, а при экспериментах — и с учетом условий опыта. Переходные масштабы для всех остальных размерных величин получаются из формул, выражающих размерности каждой размерной величины через размерности k величин с независимыми размерностями, для к-рых масштабы подсказаны условиями опыта и постановки задачи.

Напр., в задаче об установившемся обтекании тела несжимаемой вязкой жидкостью все безразмерные величины, характеризующие движение в целом, определяются тремя параметрами: углами α, β (направление поступательной скорости тела относительно его поверхности) и числом Рейнольдса R. Условия физич. подобия — критерии подобия — представляются соотношениями:

$$\alpha = \text{const},\ \beta = \text{const},\ R = \frac{Pvd}{\mu} = \text{const}.$$

Здесь подразумевается, что при моделировании явления результаты опытов с моделью можно переносить на натуру только при одинаковых α, β и R. Первые два условия всегда легко осуществить на практике, третье — труднее, особенно в тех случаях, когда модель меньше обтекаемого тела, к-рое в натуре имеет большие размеры, напр. крыло самолета. При уменьшении размеров для сохранения величины числа Рейнольдса необходимо либо увеличивать скорость обтекаемого потока, что практически обычно неосуществимо, либо существенно изменять плотность и вязкость жидкости. На практике эти обстоятельства приводят к большим затруднениям при изучении аэродинамич. сопротивления (напр., продувка самолетов в натуральную величину в аэродинамич. трубах, а также труб закрытого типа, в к-рых циркулирует с большой скоростью сжатый, т. е. более плотный, воздух).

Специальные теоретические и экспериментальные исследования показывают, что в ряде случаев для тел хорошо обтекаемой формы число Рейнольдса заметно влияет только на безразмерный коэффициент лобового сопротивления и иногда очень слабо влияет на безразмерный коэффициент подъемной силы и на нек-рые др. величины, играющие весьма важную роль в различных практич. вопросах. Различие в значении числа Рейнольдса на модели и в натуре в нек-рых вопросах не является существенным.

Аналогичным образом при моделировании движения тел в газе с большими скоростями необходимо иметь одинаковые значения числа Маха на модели и в натуре.

При моделировании плавания кораблей по воде необходимо обеспечивать равенство для натуры и модели чисел Фруда и Рейнольдса. Однако при уменьшении линейных размеров и опытах в воде в лаборатории из условия о постоянстве чисел Рейнольдса следует требование об увеличении скорости движения модели, а из постоянства числа Фруда следует требование об уменьшении скорости движения модели, поэтому точное моде-

лирование (при испытании моделей кораблей в лаборатории), вообще говоря, невозможно. Иногда такого рода трудности можно обходить путем использования различных жидкостей или путем искусственного изменения ускорения силы тяжести с помощью «центробежного моделирования», располагая испытываемые объекты на вращающейся установке большого диаметра.

Детальное проникновение в сущность гидродинамич. явлений показывает, что во многих случаях влияние числа Рейнольдса можно учесть с помощью дополнительных расчетов или с помощью простых опытов с использованием данных по буксировке плоских пластинок. В гидродинамике обычных водоизмещающих судов основное значение имеет число Фруда, и поэтому моделирование проводится с соблюдением постоянства числа Фруда.

Исследование с помощью моделей часто является единственно возможным способом экспериментального изучения и решения важнейших практич. задач. Так обстоит дело при изучении натурных явлений, протекающих в течение десятков, сотен или даже тысяч лет; в условиях модельных опытов подобное явление может продолжаться несколько часов или дней (напр., при моделировании просачивания нефти). Могут встречаться и обратные случаи, когда вместо исследования чрезвычайно быстро протекающего в природе явления изучают подобное явление, происходящее на модели гораздо медленнее.

Моделирование является исходной базой для задачи, к-рая состоит в фактич. определении законов природы, в отыскании общих свойств и характеристик различных классов явлений, в разработке экспериментальных и теоретич. методов исследования и разрешения различных проблем, в получении систематич. материалов, приемов, правил и рекомендаций для решения конкретных практич. задач.

Лит.: [1] Бриджмен П. В., Анализ размерностей, пер. с англ., Л.— М., 1934; [2] Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, 9 изд., М., 1981.

Л. И. Седов.

ПОДОБНАЯ ОБЛАСТЬ — общепринятое сокращение термина «критическая область, подобная выборочному пространству», употребляемого в математич. статистике по отношению к критич. области нерандомизированного подобия статистич. критерия.

Пусть X — случайная величина, принимающая значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$, и пусть проверяется сложная гипотеза $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ против альтернативы $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$. Далее, пусть для проверки H_0 против H_1 построен нерандомизированный подобный критерий уровня $\alpha\ (0<\alpha<1)$, критич. функция к-рого есть $\varphi(x)$, $x \in \mathfrak{X}$. Так как этот критерий является нерандомизированным, то

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in K \subset \mathfrak{X}, \\ 0, & x \notin K, \end{cases} \tag{1}$$

где K — нек-рое множество из пространства $\mathfrak{X}$, наз. критическим множеством критерия (согласно этому критерию гипотеза H_0 отклоняется в пользу H_1, если в эксперименте наблюдается событие $\{X \in K\}$). Кроме того, построенный критерий является подобным, в силу чего

$$\int_{\mathfrak{X}} \varphi(x)\, d\mathsf{P}_\theta = \alpha \text{ при всех } \theta \in \Theta_0. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что критич. область K нерандомизированного подобного критерия обладает следующим свойством:

$$\mathsf{P}_\theta\{X \in K\} = \alpha \text{ при всех } \theta \in \Theta_0.$$

Именно, акцентируя внимание на последнем свойстве критич. множества K нерандомизированного подобного

критерия, Дж. Нейман и Э. Пирсон назвали K «областью, подобной выборочному пространству $\mathfrak{X}$» в том смысле, что обе вероятности $\mathsf{P}_\theta\{X\in K\}$ и $\mathsf{P}_\theta\{X\in\mathfrak{X}\}$ не зависят от $\theta\in\Theta_0$.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [3] Neyman J., Pearson E. S., «Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A», 1933, v. 231, p. 289—337; [4] Lehmann E. L., Scheffé H., «Sankhyā», 1950, v. 10, p. 305—40; [4] их же, там же, 1955, v. 15, p. 219—36. *М. С. Никулин.*

ПОДОБНАЯ СТАТИСТИКА — статистика, имеющая одно и то же распределение вероятностей при справедливости нек-рой сложной гипотезы.

Пусть статистика T отображает выборочное пространство $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}_\mathfrak{X}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta\in\Theta$, в измеримое пространство $(\mathfrak{Y}, \mathcal{B}_\mathfrak{Y})$ и пусть рассматривается нек-рая сложная гипотеза H_0: $\theta\in\Theta_0\subseteq\Theta$. В таком случае, если для любого события $B\in\mathcal{B}_\mathfrak{Y}$ вероятность

$$\mathsf{P}_\theta(T^{-1}(B)) \text{ не зависит от } \theta, \text{ когда } \theta\in\Theta_0, \qquad (*)$$

то говорят, что T является П. с. по отношению к гипотезе H_0 или просто П.с. Очевидно, что условие $(*)$ равносильно тому, что распределение статистики T не меняется, когда θ пробегает Θ_0. Имея в виду это свойство, часто о П. с. говорят, что она является свободной относительно параметра θ, $\theta\in\Theta_0$. П. с. играют большую роль при построении подобных критериев, а также при решении статистич. задач с мешающими параметрами.

Пример 1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково нормально $N_1(a, \sigma^2)$ распределенные случайные величины ($|a|<\infty$, $\sigma>0$). Тогда при любом $\alpha>0$ статистика

$$T=\frac{1}{\left[\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2\right]^\alpha}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^{2\alpha},$$

где

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i,$$

является свободной относительно двумерного параметра (a, σ^2).

Пример 2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_{n+m}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, функция распределения к-рых принадлежит семейству $\mathcal{F}=\{F(x)\}$ всех непрерывных функций распределений на $(-\infty, +\infty)$. В этом случае, если $F_n(x)$ и $F_m(x)$ суть функции эмпирич. распределений, построенные по наблюдениям $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_{n+m}$ соответственно, то статистика Смирнова

$$S_{n,m}=\sup_{|x|<\infty}|F_n(x)-F_m(x)|$$

является подобной относительно семейства $\mathcal{F}$.

Лит.: [1] Соле Ж.-Л., Основные структуры математической статистики, пер. с франц., М., 1972; [2] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [3] Барра Ж.-Р., Основные понятия математической статистики, пер. с франц., М., 1974. *М. С. Никулин.*

ПОДОБНЫЕ МАТРИЦЫ — квадратные матрицы A и B одного порядка, связанные соотношением $B=S^{-1}AS$, где S — какая-либо невырожденная матрица того же порядка. П. м. имеют один и тот же ранг, один и тот же определитель, один и тот же характеристич. многочлен, одни и те же собственные значения. Часто бывает важно выбрать для данной матрицы ей подобную, имеющую возможно более простую форму, напр. диагональную или жорданову (см. *Жорданова матрица*). *Т. С. Пиголкина.*

ПОДОБНЫЕ МНОЖЕСТВА — обобщение элементарно-геометрич. понятия *подобия*. Множества A и B, линейно упорядоченные отношениями $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$, наз. подобными, если для них существует такое взаимно

однозначное отображение $f: A \to B$, что для любых $x, y \in A$ из $x \mathcal{R} y$ следует $f(x) \mathcal{S} f(y)$. *М. И. Войцеховский.*

ПОДОБНЫЕ ОПЕРАТОРЫ — операторы S и T в банаховом пространстве X (не обязательно ограниченные) такие, что существует ограниченный оператор U в X, обладающий ограниченным обратным, и выполняется соотношение

$$S = U^{-1} T U.$$

Если U — унитарный оператор, то S и T наз. унитарно эквивалентными.

Это понятие — пример понятия т. н. подобных отображений. Пусть f и g — два отображения множества X в себя. Тогда если существует взаимно однозначное отображение $U: X \to X$ такое, что $Uf = gU$, то эти отображения наз. подобными. Имеются попытки дать определение подобия для отображений одного множества X на другое Y; напр., отображения наз. подобными, если существуют взаимно однозначные отображения U и V множеств X и Y на себя такие, что $Vf = gU$. *М. И. Войцеховский.*

ПОДОБНЫЙ КРИТЕРИЙ — статистический критерий для проверки сложной гипотезы $H_0: \theta \in \Theta_0$ против сложной альтернативы $H_1: \theta \in \Theta_1 (\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing)$, функция мощности к-рого принимает на Θ_0 одно и то же заранее заданное значение из интервала (0,1).

См. *Неймана структура*, *Беренса — Фишера проблема*, *Подобная область*.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979. *М. С. Никулин.*

ПОДОБЪЕКТ объекта категории — понятие, аналогичное понятию подструктуры математич. структуры. Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольная категория и A — фиксированный объект из $\mathfrak{K}$. В классе всех мономорфизмов из $\mathfrak{K}$ с концом в A вводится отношение предпорядка (отношение делимости справа): $\mu: X \to A$ предшествует $\sigma: Y \to A$ или $\mu \prec \sigma$, если $\mu = \mu' \sigma$ для нек-рого $\mu': X \to Y$. В действительности, морфизм μ' однозначно определен, поскольку σ — мономорфизм. Отношение предпорядка индуцирует отношение эквивалентности между мономорфизмами с концом в A: мономорфизмы $\mu: X \to A$ и $\sigma: Y \to A$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mu \prec \sigma$ и $\sigma \prec \mu$. Класс эквивалентных мономорфизмов наз. подобъектом объекта A. П. с представителем $\mu: X \to Y$ иногда обозначают $(\mu: X \to A]$ или $(\mu]$. Допускается также возможность с помощью т. н. символа τ Гильберта произвести выбор представителей подобъектов объекта A и рассматривать этих представителей в качестве подобъектов. В категориях множеств, групп, абелевых групп, векторных пространств П. любого объекта определяется канонич. вложением подмножества (подгруппы, подпространства) в объемлющее множество (группу, пространство). Однако в категории топологич. пространств введенное понятие П. шире понятия подмножества с индуцированной топологией.

Отношение предпорядка между мономорфизмами с общим концом A индуцирует отношение порядка между П. объекта A: $(\mu] \leqslant (\sigma]$, если $\mu < \sigma$. Это отношение аналогично отношению включения подмножеств некоторого множества.

Если мономорфизм μ регулярен, то любой эквивалентный ему мономорфизм также регулярен. Поэтому можно говорить о регулярных П. любого объекта A. В частности, П. с представителем 1_A регулярен. В категориях с нулевыми морфизмами аналогично вводятся нормальные П. Если в категории $\mathfrak{K}$ существует бикатегорная структура $(\mathfrak{K}, \mathfrak{S}, \mathfrak{M})$, то подобъект $(\mu: X \to A]$ объекта A наз. допустимым (относительно указанной бикатегорной структуры), если $\mu \in \mathfrak{M}$.

М. Ш. Цаленко.

ПОДПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ — линейное представление ρ в инвариантном подпростран-

ство $F \subset E$ представления π группы (алгебры, кольца, полугруппы) X в векторном (топологич. векторном) пространстве E, определяемое формулой $\rho(x)\xi = \pi(x)\xi$ для всех $\xi \in F$, $x \in X$. Если π — непрерывное представление (топологич. группы, алгебры, кольца, полугруппы), то любое его П. п. также непрерывно.

А. И. Штерн.

ПОДПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ алгебраических систем — специальный тип подсистем прямого (декартова) произведения систем. Пусть A_i, $i \in I$, — семейство однотипных алгебраич. систем и пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$ — прямое произведение этих систем с проекциями ρ_i: $A \to A_i$, $i \in I$. Алгебраич. система B того же типа наз. подпрямым произведением систем A_i, если существует такое вложение m: $B \to A$, что гомоморфизмы $m\rho_i$, $i \in I$, сюръективны. Иногда под П. п. понимается любая система, изоморфная подсистеме прямого произведения: тогда системы, удовлетворяющие сформулированному выше условию, наз. специальными подпрямыми произведениями. В теории колец и в теории модулей П. п. наз. также подпрямой суммой. Подпрямое произведение (подпрямую сумму) обозначают $\prod^s_{i \in I} A_i$ ($\sum^s_{i \in I} A_i$ соответственно).

Следующие условия равносильны: а) система B является П. п. систем A_i, $i \in I$; б) существует разделяющее семейство сюръективных гомоморфизмов f_i: $B \to A_i$, $i \in I$; в) существует такое семейство конгруэнций ρ_i, $i \in I$, системы B, что пересечение этих конгруэнций является единичной конгруэнцией и $B/\rho_i \simeq A_i$ для каждого $i \in I$. Всякая универсальная алгебра является П. п. подпрямо неразложимых алгебр.

С теоретико-категорной точки зрения понятие П. п. двойственно понятию правильного произведения алгебраич. систем с нулевыми (одноэлементными) подсистемами.

М. Ш. Цаленко.

ПОДРАЗДЕЛЕНИЕ геометрического симплициального комплекса K — такой геометрический симплициальный комплекс K_1, что тело $|K_1|$ совпадает с телом $|K|$ и каждый симплекс K_1 содержится в нек-ром симплексе K. Практически переход к П. производится с помощью разбиения симплексов комплекса K на более мелкие симплексы так, чтобы разбиение каждого симплекса было согласовано с разбиением его граней. В частности, каждая вершина K является вершиной K_1. Переход к П. обычно используется для доказательства инвариантности комбинаторно определяемых характеристик *полиэдров* (напр., *эйлеровой характеристики*, *гомологий групп*), а также для получения *триангуляций* с нужными свойствами (напр., достаточно мелких триангуляций). Звездное П. комплекса K с центром в точке $a \in |K|$ получается следующим образом. Замкнутые симплексы K, не содержащие точку a, остаются без изменения. Каждый замкнутый симплекс σ, содержащий точку a, разбивается на конусы с вершиной в точке a над теми гранями σ, к-рые не содержат a. Для любых двух триангуляций T_1, T_2 одного и того же полиэдра P существует триангуляция T_3 полиэдра P, получающаяся как из T_1, так и из T_2 последовательностью звездных П. Понятие звездного П. допускает формализацию на языке абстрактных симплициальных комплексов (симплициальных схем). Любое звездное П. замкнутого подкомплекса продолжается до звездного П. всего комплекса. Производное подразделение K' комплекса K получается в результате последовательных звездных П. с центрами во всех открытых симплексах K в порядке убывания их размерностей. Для произвольного замкнутого подкомплекса K комплекса L подкомплекс $K' \subset L'$ — полный в следующем смысле: из того, что все вершины нек-рого симплекса

$\sigma \in L'$ лежат в K', следует, что $\sigma \in K'$. Если в качестве центров производного П. выбрать барицентры симплексов, то получится б а р и ц е н т р и ч е с к о е П. Если диаметр каждого симплекса n-мерного комплекса K не превосходит числа d, то диаметры симплексов его барицентрического П. ограничены числом $\frac{nd}{n+1}$. Диаметры симплексов m-кратного барицентрического П. комплекса K ограничены числом $\left(\frac{n}{n+1}\right)^m d$, т. е. могут быть сделаны сколь угодно малыми путем выбора достаточно большого m.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947; [2] Х и л т о н П.-Дж., У а й л и С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, пер. с англ., М., 1966.

С. В. Матвеев.

ПОДРЕШЕТКА — подмножество A элементов решетки, замкнутое относительно операций $+$ и $\cdot$, т. е. такое подмножество, что $a+b \in A$ и $ab \in A$ для любых a, b из A. Таким образом, П. является подалгеброй решетки, рассматриваемой как универсальная алгебра с двумя бинарными операциями. Подрешетка A наз. в ы п у к л о й, если из a, $b \in A$ и $a \leqslant c \leqslant b$ вытекает, что $c \in A$. Примерами П. являются всякое одноэлементное подмножество решетки, идеал, фильтр, интервал. Все эти П. выпуклые. Любое подмножество элементов цепи является ее П. (не обязательно выпуклой). Все П. данной решетки, упорядоченные отношением включения, образуют решетку.

Лит.: [1] Б и р к г о ф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] С к о р н я к о в Л. А., Элементы теории структур, М., 1970; [3] Ж и т о м и р с к и й Г. И., в сб.: Упорядоченные множества и решетки, в. 7, Саратов, 1981; [4] Г р е т ц е р Г., Общая теория решеток, пер. с англ., М., 1982.

Т. С. Фофанова.

ПОДСТАНОВКА м н о ж е с т в а — взаимно однозначное отображение множества на себя. Термин «П.» главным образом применяется для конечного множества X. В этом случае удобно считать, что $X=\{1, \ldots, n\}$, и записывать П. в виде

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots n \\ i_1 & i_2 & \ldots i_n \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — нек-рая *перестановка* чисел $1, 2, \ldots, n$ (впрочем, иногда термин «перестановка» употребляется как синоним термина «П.», см., напр., [2] с. 146). Запись $(*)$ означает, что γ переводит число k в i_k, то есть $\gamma(k)=i_k$ (пишут также $k^\gamma=i_k$) для $i=1, 2, \ldots, n$. Число всех различных П. множества X при $|X|=n$ равно числу всех перестановок этого множества, т. е. $n!$. Произведение подстановок α и β множества X определяется как последовательное выполнение отображений α и β и задается формулой $\alpha\beta(x)=\alpha(\beta(x))$ для всех $x \in X$. Совокупность всех П. множества X образует группу относительно введенного умножения, к-рая наз. *симметрической группой*. Любая подгруппа симметрич. группы наз. *подстановок группой*.

Симметрич. группа П. множества X обозначается $S(X)$, она содержит в качестве подгруппы $SF(X)$ — группу, состоящую из таких подстановок γ, к-рые перемещают лишь конечное подмножество элементов (то есть $\gamma(x) \neq x$ лишь для конечного множества элементов $x \in X$). Если X конечно и состоит из n элементов, то симметрич. группа обозначается S_n.

Т р а н с п о з и ц и е й наз. такая П. множества X, к-рая меняет местами только два элемента i и j; она обозначается (i, j). В S_n имеется ровно $n(n-1)/2$ транспозиций. Любая подстановка γ из $SF(X)$ представима в виде произведения транспозиций. В частности, каждая П. из S_n есть произведение транспозиций. П. может разлагаться в произведение транспозиций многими способами. Однако для данной γ характер четности числа множителей в разложении на транспозиции не зависит

от способа разложения. П., представимая в виде произведения четного числа транспозиций, наз. ч е т н о й, а разлагающаяся в произведение нечетного числа транспозиций — н е ч е т н о й. В S_n имеется $n!/2$ четных П. и столько же нечетных. Если П. $\gamma \in S_n$ записана в виде (*), то ее четность совпадает с четностью числа и н в е р с и й перестановки $i_1, \ldots, i_n$, к-рое равно числу таких пар $\{i_k, i_j\}$, что $k<j$, $i_k>i_j$. Транспозиция, очевидно, есть нечетная П. Применение одной транспозиции к любой перестановке меняет четность числа ее инверсий на противоположную. Произведение двух четных, а также двух нечетных П. есть четная П., а четной и нечетной П. (в любом порядке) — нечетная. Все четные П. составляют нормальную подгруппу $A(X)$ в группе $SF(X)$, к-рая наз. з н а к о п е р е м е н н о й. При $|X|=n$ подгруппа $A(X)$ обозначается A_n.

Ц и к л о м длины l наз. такая подстановка σ конечного множества $Y=\{y_1, \ldots, y_l\}$, что

$$\sigma(y_1)=y_2,\ \sigma(y_2)=y_3, \ldots,\ \sigma(y_{l-1})=y_l,\ \sigma(y_l)=y_1.$$

Конечный цикл обозначается $(y_1, y_2, \ldots, y_l)$. Б е с к о н е ч н ы м ц и к л о м наз. такая П. счетного множества

$$Y=\{\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots\},$$

что для любого целого i $\sigma(y_i)=y_{i+1}$. Обозначение бесконечного цикла таково:

$$(\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots).$$

Цикл длины 2 есть транспозиция. Группа S_n содержит $(n-1)!$ циклов длины n. Для любой подстановки γ из $S(X)$ существует такое разбиение множества X на непересекающиеся подмножества, что на каждом из них γ действует как цикл. Конечные подмножества этого разбиения имеют вид

$$\{x, \gamma(x), \ldots, \gamma^{l-1}(x)\},$$

где $\gamma^l(x)=x$, а бесконечные —

$$\{\ldots, \gamma^{-2}(x), \gamma^{-1}(x), x, \gamma(x), \gamma^2(x), \ldots\},$$

где $\gamma^k(x)\neq x$ при $k\neq 0$. Циклы, индуцируемые подстановкой γ на подмножествах разбиения, наз. н е з а в и с и м ы м и ц и к л а м и подстановки γ. Например, (1, 3, 4) и (2, 5)— независимые циклы П.

$$\gamma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&1&2\end{pmatrix};$$

γ записывается в виде

$$(1,\ 3,\ 4)\,(2,\ 5)$$

и является произведением своих независимых циклов. Вообще, если γ нетождественная П., имеющая лишь конечное число циклов неединичной длины, то γ — произведение таких циклов. В частности, каждая нетождественная П. из $SF(X)$ является произведением своих независимых циклов неединичной длины. П о р я д о к п о д с т а н о в к и γ из $SF(X)$, т. е. порядок циклич. группы $\langle\gamma\rangle$, равен наименьшему общему кратному длин ее независимых циклов.

Из независимых циклов данной П. можно получить независимые циклы П., сопряженной с ней. Напр., если

$$\gamma=(a_1, \ldots, a_l)\ldots(a_j, \ldots, a_n)$$

произведение независимых циклов подстановки γ из S_n, а $\delta\in S_n$ и $\delta(a_i)=b_i$, $i=1, \ldots, n$, то

$$\delta\gamma\delta^{-1}=(b_1, \ldots, b_l)\ldots(b_j, \ldots, b_n)$$

— разложение подстановки $\delta\gamma\delta^{-1}$ в произведение независимых циклов. Две П. группы S_n тогда и только

тогда сопряжены в S_n, когда они имеют одно и то же число независимых циклов каждой длины.

Пусть $s \in S_n$, k — число независимых циклов подстановки s, включая и циклы длины 1. Тогда разность $n-k$ наз. декрементом подстановки s. Наименьшее число множителей при разложении подстановки s в произведение транспозиций совпадает с ее декрементом. Четность П. совпадает с четностью ее декремента.

П. возникли впервые в комбинаторике 18 в. В кон. 18 в. Ж. Лагранж (J. Lagrange) применил их при исследовании разрешимости алгебраич. уравнений в радикалах. О. Коши (A. Cauchy) посвятил многочисленные исследования этому понятию. Ему, в частности, принадлежит идея разложения П. в произведение циклов. Исследования групповых свойств П. восходит к Н. Абелю (N. Abel) и особенно к Э. Галуа (E. Galois). См. *Галуа теория*, *Подстановок группа*.

Лит.: [1] Jordan C., Traité des substitutions et des équations algébriques, P., 1957; [2] Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [3] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [4] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

Д. А. Супруненко.

ПОДСТАНОВКИ ПРАВИЛО — одно из *вывода правил* логико-математических исчислений. Под названием «П. п.» могут фигурировать различные виды правил. Напр., в *высказываний исчислении* это П. п. формулы вместо всех вхождений пропозициональной переменной. Для *предикатов исчисления*: а) П. п. формулы вместо *предикатной переменной*; при этом требуется выполнение ряда ограничений на вхождения индивидных переменных с тем, что бы избежать коллизии переменных, т. е. ситуации, когда переменная, свободная в подставляемой формуле, окажется связанной в результате подстановки; б) П. п. терма вместо свободных вхождений индивидной переменной соответствующего сорта; при этом также необходимо избегать коллизии переменных.

Лит.: [1] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [2] Шенфилд Дж. Р., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975; [3] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., 2 изд., М., 1982.

С. Н. Артемов.

ПОДСТАНОВОК ГРУППА — совокупность *подстановок* на нек-ром множестве X, образующих группу относительно операции умножения подстановок. Иначе, П. г. — это пара (G, X), где G — группа, X — множество и каждому $\gamma \in G$ соответствует подстановка $x \mapsto x^\gamma$ множества X такая, что 1) $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$, $x \in X$, $\alpha, \beta \in G$, и 2) $x^\alpha = x$ для любого $x \in X$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \varepsilon$ — единица группы G. Если выполняется лишь условие 1), то говорят о действии (или представлении) группы G на множестве X. В этом случае подмножество H элементов группы G, оставляющих на месте все $x \in X$, будет нормальным делителем в G (называемым ядром действия) и факторгруппа G/H действует на X уже как П. г. Если X — конечное множество, то П. г. (G, X) наз. конечной, в противном случае — бесконечной. Множество всех подстановок на X наз. симметрич. группой и обозначается $S(X)$ или S_n, если $X = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Подобием (или изоморфизмом) П. г. (G, X) на П. г. (G', X') наз. пара (φ, ψ) отображений, где φ — изоморфизм G на G', а ψ — биекция X на X', причем оба отображения согласованы в том смысле, что для всех $x \in X$ и $\alpha \in G$ имеет место равенство $(x^\alpha)^\psi = (x^\psi)^{\alpha\varphi}$. П. г., между к-рыми существует подобие, наз. подобными. Если (G, X) — П. г., то на множестве X естественно определена эквивалентность: $y \sim x$, $y, x \in X \Leftrightarrow y = x^\alpha$ для нек-рого $\alpha \in G$; классы эквивалентности П. г. наз. орбитами, или областями транзитивности, группы (G, X). П. г. транзитивна, если она имеет лишь одну ор-

биту, в противном случае она интранзитивна (см. *Транзитивная группа*).

Произвольная абстрактная группа G может быть представлена как П. г. на подходящем множестве X (теорема Кэли). При этом в качестве X можно выбрать множество всех элементов группы G и сопоставить каждому $\gamma \in G$ отображение, получающееся в результате умножения справа на элемент γ: $\xi^{\gamma} = \xi\gamma$. Полученное таким образом регулярное представление группы G в виде П. г. не является единственно возможным. При исследовании П. г. интересуются другими свойствами, чем при изучении абстрактных групп. Речь идет не только о строении группы, а в первую очередь о том, как группа действует на множестве X; так, напр., свойство транзитивности есть свойство П. г., а не абстрактных групп.

Пусть (G, X) — П. г., а M — подмножество в X. Совокупность всех подстановок $\gamma \in G$, переводящих M в себя (то есть $x \in M \Leftrightarrow x^{\gamma} \in M$), образует подгруппу G_M, называемую стабилизатором множества M. Множество тех подстановок, к-рые оставляют все $y \in M$ на месте, наз. фиксатором множества M и обозначается $G_{\{M\}}$. Фиксатор будет нормальным делителем стабилизатора. Если $M = \{\alpha\}$ — одноэлементное множество, то понятия стабилизатора и фиксатора совпадают (он обозначается G_a). Группа наз. полурегулярной (или действующей свободно), если стабилизатор каждой точки является единичной группой и регулярной (или просто транзитивной), если группа, кроме того, транзитивна. Централизатором $\mathfrak{z}(G)$ группы G наз. ее централизатор в симметрич. группе $S(X)$ — это совокупность подстановок на X, поэлементно перестановочных со всеми элементами из G. Централизатор транзитивной группы полурегулярен, и наоборот, централизатор полурегулярной группы транзитивен. Регулярная П. г. (G, X) подобна вышеприведенному регулярному представлению группы G. Централизатором $\mathfrak{z}(G)$ регулярного представления будет т. н. левое регулярное представление группы G, сопоставляющее элементу $\gamma \in G$ подстановку $\xi^{\gamma} = \gamma^{-1}\xi$, $\xi \in G$.

Существуют операции (см. [6]), позволяющие из заданных П. г. строить новые.

а) Сумма П. г. Пусть (G, X) и (H, Y) — две П. г., причем пересечение $X \cap Y$ пусто. Сумма $(G, X)+(H, Y)$ определяется как П. г. прямого произведения $G \times H$ на объединении $X \cup Y$, причем для $\alpha \in G$, $\beta \in H$, $z \in X \cup Y$

$$z^{(\alpha, \beta)} = \begin{cases} z^{\alpha}, & z \in X, \\ z^{\beta}, & z \in Y. \end{cases}$$

б) Произведением $(G, X) \times (H, Y)$ П. г. (G, X) и (H, Y) наз. группа $(G \times H, X \times Y)$, действующая на $X \times Y$ согласно формуле $(x, y)^{(\alpha, \beta)} = (x^{\alpha}, y^{\beta})$.

Обе операции ассоциативны и могут быть определены для произвольного числа групп.

в) Сплетение. Пусть (G, X) и (H, Y) — П. г. и $\beta(x) \in H^X$ — отображение X в H. На множестве пар $[\alpha, \beta(x)]$, называемых таблицами, определяется умножение:

$$[\alpha, \beta(x)]\,[\alpha', \beta'(x)] = [\alpha\alpha', \beta(x)\,\beta(x^{\alpha})],$$

относительно к-рого они образуют группу $G \wr H$. Сплетение П. г. (G, X) и (H, Y) есть П. г. $(G \wr H, X \times Y)$, причем действие определяется формулой

$$(x, y)^{[\alpha, \beta(x)]} = (x^{\alpha}, y^{\beta(x)}).$$

Сплетение также ассоциативно и может быть определено даже для любого вполне упорядоченного семей-

ства П. г. Сплетение неединичных П. г. будет импримитивной группой. Если G и H рассматривать как их регулярные представления, то это определение с точностью до порядка сомножителей совпадает с обычным теоретико-групповым *сплетением* групп.

г) Экспонирование. Группа таблиц, действующая на множестве Y^X, приводит к П. г.

$$(H,\ Y)\uparrow(G,\ X)=(G\wr H,\ Y^X).$$

Причем действие определяется следующим образом:

$$f\ (x)^{[\alpha,\ \beta\ (x)]}=(f\ (x^{\alpha}))^{\beta\ (x)},$$

где $f(x)\in Y^X$. Экспонирование не ассоциативно и приводит обычно к примитивным группам. А именно, $(H,\ Y)\uparrow(G,\ X)$ примитивна, если $(H,\ Y)$ — примитивная нециклич. группа.

Группы подстановок возникают обычно как совокупность подстановок, сохраняющих нек-рые отношения или операции на множестве X (см. также *Преобразований группа*). Так, исходным для возникновения теории П. г. было понятие группы Галуа многочлена. Если

$$f\ (x)=a_nx^n+\ldots+a_0$$

многочлен с коэффициентами a_i из нек-рого поля K, а $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$ — его корни в нек-ром надполе, то группой Галуа будет П. г. множества $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$, сохраняющих рациональные отношения между корнями, т. е. равенства вида

$$\sum c_{i_1i_2\ldots i_n}\xi_1^{i_1}\ldots\xi_n^{i_n}=0,$$

где $c_{i_1i_2\ldots i_n}\in K$. Как показал Э. Галуа (E. Galois), от свойств этой группы зависит разрешимость или неразрешимость уравнения $f(x)=0$ в радикалах. Этот результат привел к развитию теории П. г. в трудах Э. Галуа, Ж. Серре (J. Serret), К. Жордана (C. Jordan) и др. Дальнейшее развитие (кон. 19 — нач. 20 вв.) эта теория нашла в работах У. Бёрнсайда (W. Burnside), У. Маннинга (W. Manning), Г. Фробениуса (G. Frobenius), О. Ю. Шмидта, И. Шура (J. Schur). П. г. имеют многочисленные применения в дискретной математике, напр. при классификации булевых функций и конечных автоматов, в теории кодов с исправлением ошибок, при подсчете изомеров сложных органич. соединений.

Лит.: [1] Passman D., Permutation groups, N.Y.—Amst., 1968; [2] Wielandt H., Finite permutation groups, N.Y.—L., 1964; [3] Burnside W., Theory of groups of finite order, N.Y., 1958; [4] Калужнин Л. А., Сущанский В. И., Преобразования и перестановки, пер. с укр., М., 1979; [5] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962; [6] Калужнин Л. А., Клин М. Х., Сущанский В. И., «Известия вузов. Математика», 1979, № 8, с. 26—33.

Л. А. Калужнин.

ПОДФОРМУЛЬНОСТИ СВОЙСТВО — свойство нек-рых *логических исчислений* и *логико-математических исчислений*, заключающееся в том, что посылки каждого правила исчисления состоят из подформул заключения. П. с. позволяет организовать поиск вывода «снизу вверх» (см. *Генцена формальная система*). С целью повышения эффективности такого поиска для многих исчислений рассматриваются различные специализации и обобщения П. с.

С. Ю. Маслов.

ПОДХОДЯЩАЯ ДРОБЬ — см. *Цепная дробь.*

ПОДЧИНЕНИЯ ПРИНЦИП — одна из форм *Линделёфа принципа*, использующая понятие подчинения функций. Пусть $\omega(z)$ — любая функция, регулярная в круге $|z|<1$ и удовлетворяющая условию: $\omega(0)=0$, $|\omega(z)|<1$ в $|z|<1$; пусть функция $F(z)$ мероморфна в $|z|<1$. Если функция $f(z)$ имеет вид $f(z)=F(\omega(z))$, то $f(z)$ наз. подчиненной функции $F(z)$ в круге $|z|<1$, а $F(z)$ — подчиняющей функцией. Это отношение подчинения обозначается

через $f(z) \prec F(z)$. В простейшем случае, когда $F(z)$ — *однолистная функция* в $|z|<1$, указанное отношение означает просто, что $f(0)=F(0)$ и что функция $f(z)$ не принимает в круге $|z|<1$ тех значений, к-рых в нем не принимает функция $F(z)$. Имеют место следующие основные теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $w=F(z)$ мероморфна в круге $|z|<1$ и отображает его на *риманову поверхность* $G(F)$. Пусть $G_r(F)$ — часть $G(F)$, соответствующая $|z|\leqslant r$, $r<1$. Если $f(z)\prec F(z)$, то значения $f(z)$ в $|z|\leqslant r$ (при *аналитическом продолжении* из $f(0)=F(0)$) лежат в $G_r(F)$, причем граничные точки $G_r(F)$ достигаются только для $f(z)=F(\varepsilon z)$, $|\varepsilon|=1$ (см. [2]).

Теорема 2. Если $f(z)\prec F(z)$ и $F(z)$ регулярна в $|z|\leqslant r$, $r<1$, то, полагая

$$M_\lambda(r,\ f)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^\lambda d\theta\right\}^{1/\lambda},\ \lambda\geqslant 0,$$

имеем $M_\lambda(r,\ f)\leqslant M_\lambda(r,\ F)$, $\lambda\geqslant 0$, $0\leqslant r<1$ (см. [1]).

Теорема 3. Если $f(z)\prec F(z)$ и $F(z)$ регулярна в $z=0$, то для коэффициентов разложений $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n$ имеем $\sum_{n=1}^{m}|a_n|^2\leqslant\sum_{n=1}^{m}|A_n|^2$, $m=1,\ 2,\ \ldots$ (см. [2]).

Общая теория подчинения полезна при рассмотрении *вопроса о множестве значений, принимаемых* (или выпускаемых) аналитич. функцией. Отношение подчинения можно использовать в двух различных направлениях. Во-первых, можно исходить из заданной функции $F(z)$ и изучать свойства всех функций $f(z)$, подчиненных $F(z)$. Если при этом подчиняющая функция $F(z)$ полностью известна, то известна и область $G_r(F)$, в к-рой лежат значения $f(z)$ (теорема 1), и верхняя граница интегральных средних $M_\lambda(r,\ f)$ (теорема 2). Если, кроме того, $F(z)$ регулярна в $z=0$, то имеем верхние границы для коэффициентов функции $f(z)$ (теорема 3). Во-вторых, можно рассмотреть какую-либо мероморфную в круге $|z|<1$ функцию $f(z)$, из свойств к-рой следует невозможность ее подчинения в $|z|<1$ надлежащей функции $F(z)$. Если при этом $F(z)$, напр., однолистна, то $f(z)$ необходимо принимает в $|z|<1$ значения вне $G(F)$. Эти идеи использования отношения подчинения и выражают П. п. П. п. можно распространять и на многосвязные области (см. [3]).

Лит.: [1] Littlewood J. E., «Proc. Lond. Math. Soc. (2)», 1925, v. 23, p. 481—519; [2] Rogosinski W., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1939, v. 35, p. 1—26; [3] Аленицын Ю. Е., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 60, с. 5—21; [4] Rogosinski W., «Schr. Königs. Gelehrt. Gesellsch. Naturwiss. Kl.», 1931, Jg. 8, H. 1, S. 1—31; [5] Rogosinski W., «J. Lond. Math. Soc.», 1939, v. 14, № 53, p. 4—11; [6] его же, «Proc. Lond. Math. Soc.», 1943, v. 48, p. 48—82; [7] Littlewood J. E., Lectures on the theory of functions, L., 1944; [8] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966, с. 356—57, 606—09.

Ю. Е. Аленицын.

ПОЗИТИВНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность действительных чисел $\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots$ на промежутке $[a,\ b]$ такая, что для всякого многочлена

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,$$

нетождественного нулю и неотрицательного на $[a,\ b]$ выражение

$$\Phi(P)=a_0\mu_0+a_1\mu_1+\ldots+a_n\mu_n\geqslant 0.$$

Если же для всякого такого многочлена будет $\varphi(P)>0$, то последовательность наз. строго позитивной. Для того чтобы последовательность $\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots$ была позитивной на $[a,\ b]$, необходимо и достаточно существование возрастающей на $[a,\ b]$ функции $g(x)$, для к-рой

$$\int_a^b x^n dg(x)=\mu_n,\ n=1,\ 2,\ \ldots.$$

М. И. Войцеховский.

ПОЗИТИВНОЕ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — исчисление высказываний в языке $\{\&, \vee, \supset\}$, задаваемое следующими 8 схемами аксиом:

$$A \supset (B \supset A),\ (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)),$$
$$A \& B \supset A,\ A \& B \supset B,\ A \supset (B \supset A \& B),$$
$$A \supset A \vee B,\ B \supset A \vee B,\ (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B) \supset C)$$

и правилом вывода *modus ponens*. П. п. и. содержит ту часть интуиционистского исчисления высказываний I (см. *Интуиционизм*), к-рая не зависит от отрицания, а именно: всякая пропозициональная формула, не содержащая связки $\neg$ (отрицания), выводима в П. п. и. тогда и только тогда, когда она выводима в I. Если к П. п. и. добавить две схемы аксиом:

1) $\neg A \supset (A \supset B)$ (закон отрицания антецедента),

2) $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$ (закон приведения к абсурду),

то получится исчисление I. Для получения I можно вместо 2) взять и более слабую схему:

2′) $(A \supset \neg A) \supset \neg A$ (закон частичного приведения к абсурду).

См. также *Импликативное пропозициональное исчисление*.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960; [2] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., 2 изд., М., 1982. *С. К. Соболев.*

ПОЗИЦИОННАЯ ИГРА — игра, имеющая характер развертывающегося в дискретном времени процесса на древовидно упорядоченном множестве (наз. также *деревом*). Конечной П. и. наз. система

$$\Gamma = \langle I,\ X,\ \Re,\ \{P_x\}_{x \in X_0},\ \{\Re_i\}_{i \in I},\ \{h_i\}_{i \in I} \rangle,$$

где 1) I — множество игроков ($|I| = n$); 2) X — конечное дерево, вершины к-рого наз. позициями, а корень — начальной позицией. Для позиций естественно определяется отношение следования; позиции, непосредственно следующие за данной $x \in X$, наз. альтернативами x; позиции, не имеющие альтернатив, наз. окончательными, а ведущие в них пути — партиями; множество окончательных позиций обозначается X^*; 3) $\Re$ — разбиение множества $X \setminus X^*$ на $n+1$ множеств очередности $X_0, X_1, \ldots, X_n$. В позициях из X_i, $i > 0$, ход осуществляется игроком i, в позициях из X_0 — случайно; 4) P_x — вероятностные распределения на множествах альтернатив каждой позиции $x \in X_0$; 5) $\Re_i = \{U_1^i, U_2^i, \ldots, U_{m_i}^i\}$ — разбиение каждого X_i, $i > 0$. Предполагается, что все позиции x из данного U_k^i имеют одинаковое число альтернатив и никакие две из них не следуют друг за другом; множества U_k^i наз. информационными. Между альтернативами всех позиций одного информационного множества установлено однозначное соответствие, и каждый его класс наз. альтернативой самого информационного множества; 6) h_i — функция, ставящая в соответствие каждой окончательной позиции выигрыш в ней игрока i.

Чистой стратегией игрока i в П. и. является функция, ставящая в соответствие каждому информационному множеству U_k^i нек-рую его альтернативу. Набор n чистых стратегий всех игроков составляет ситуацию. Процесс игры в условиях сложившейся ситуации можно понимать как случайное блуждание по множеству позиций от начальной позиции к окончательной, причем в каждой позиции игрок, множеству очередности к-рого принадлежит эта позиция, знает лишь содержащее ее информационное множество и выбирает альтернативу в соответствии со своей стра-

тегией. В позициях из X_0 выбор альтернативы случаен. Это случайное блуждание определяет вероятностное распределение на множестве окончательных позиций. Принимая за выигрыш игрока математич. ожидание его выигрыша на окончательных позициях, получают *бескоалиционную игру* в нормальной форме.

П. и. наз. игрой с полной информацией, если информационные множества игроков состоят из одной позиции каждое. В игре с полной информацией существует ситуация равновесия в чистых стратегиях (теорема Цермело — Неймана).

Важную роль в П. и. играют смешанные стратегии. Две смешанные стратегии игрока наз. эквивалентными, если в ситуациях, отличающихся только этими стратегиями, вероятности каждой окончательной позиции равны. Игрок имеет полную память, если каждое его информационное множество следует за единственной альтернативой всех предшествующих информационных множеств этого игрока. Наличие полной памяти у игрока означает, что в момент совершения хода он помнит все информационные множества, в к-рых он находился, и свои выборы в них. Стратегией поведения наз. такая смешанная стратегия, при к-рой случайные выборы альтернатив информационных множеств стохастически независимы. Каждая смешанная стратегия игрока эквивалентна нек-рой стратегии поведения тогда и только тогда, когда игрок имеет полную память (теорема Куна).

Более общими являются П. и. с бесконечным множеством альтернатив в каждой позиции и с бесконечно продолжающимися партиями, а также *игры на графах*.

Лит.: [1] Позиционные игры, М., 1967; [2] Берж К., Общая теория игр нескольких лиц, пер. с франц., М., 1961; [3] Кун Г. У., в сб.: Позиционные игры, М., 1967, с. 13—40; [4] Thompson G. L., в кн.: Contributions to the theory of games, v. 2, Princeton, 1953, p. 267—77; [5] Воробьев Н. Н., «Проблемы кибернетики», 1962, в. 7, с. 5—20; [6] Буй Конг Кыонг, «Вестник ЛГУ», 1969, № 1, с. 49—59.

Н. Н. Воробьев, А. Н. Ляпунов.

ПОЙА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей случайной величины X_n, принимающей целые неотрицательные значения k, $0 \leqslant k \leqslant n$, в соответствии с формулой

$$\mathsf{P}\{X_n = k\} = C_n^k \frac{b(b+c)\dots[b+(k-1)c]\, r(r+c)\dots[r+(n-k-1)c]}{(b+r)(b+r+c)\dots[b+r+(n-1)c]},$$

где целые $n>0$, $b>0$, $r>0$, $c \geqslant -1$ — параметры, или эквивалентной формулой

$$\mathsf{P}\{X_n = k\} = C_n^k \frac{p(p+\gamma)\dots[p+(k-1)\gamma]\, q(q+\gamma)\dots[q+(n-k-1)\gamma]}{(1+\gamma)\dots[1+(n-1)\gamma]} =$$

$$= C^k_{(p/\gamma)+k-1} C^{n-k}_{(q/\gamma)+n-k-1} / C^n_{(1/\gamma)+n-1}, \qquad (2)$$

где целое $n>0$, действительные $0<p<1$, $q=1-p$, $\gamma>0$ — параметры. Связь между (1) и (2) устанавливается равенствами

$$p = \frac{b}{b+r}, \quad q = \frac{r}{b+r}, \quad \gamma = \frac{c}{b+r}.$$

Математич. ожидание и дисперсия П. р. равны соответственно $\mathsf{E}X_n = np$ и $\mathsf{D}X_n = npq\,\frac{1+\gamma n}{1+\gamma}$. Специальные случаи П. р.: X_n имеет при $c=0$ *биномиальное распределение* с параметрами n и p; X_n имеет при $s=-1$ *гипергеометрическое распределение* с параметрами $M=b$, $N=b+r$ и n. При $b\to\infty$, $r\to\infty$, когда $p=b/(b+r)$ постоянно, и $\gamma=c/(b+r)\to 0$, П. р. стремится к биномиальному распределению с параметрами n и p.

П. р. было рассмотрено Д. Пойа (G. Pólya, 1923) в связи с т. н. урновой схемой Пойа. Из

урны, содержащей b черных и r красных шаров, осуществляется выбор с возвращением при условии, что каждый извлеченный шар возвращается в урну вместе с c шарами того же цвета. Если X_n — полное число черных шаров в выборке объема n, то распределение X_n задается формулами (1) или (2). Последовательность X_n, $n=1, 2, \ldots$, представляет собой дискретный марковский процесс, причем состояния процесса определяются числом черных шаров в выборке в момент n, а условная вероятность перехода от состояния k в момент времени n в состояние $k+1$ в момент времени $n+1$ равна

$$\mathsf{P}\{X_{n+1}=k+1 \mid X_k=k\}=\frac{b+kc}{b+r+nc}=\frac{p+k\gamma}{1+n\gamma}$$

(зависит от n).

Предельным переходом из урновой схемы Пойа может быть получен процесс Пойа — неоднородный марковский процесс с непрерывным временем, принадлежащий классу процессов «чистого размножения». При условии, что за бесконечно малое время Δt происходит лишь одно извлечение шара, при $n\to\infty$, когда $np\to t$, $n\gamma\to\alpha t$, выводится предельная условная вероятность перехода из состояния k в состояние $k+1$ за время Δt:

$$\mathsf{P}\{X(t+\Delta t)=k+1 \mid X(t)=k\}=\frac{1+\alpha k}{1+\alpha t}\Delta t+o(\Delta t).$$

При переходе от урновой схемы Пойа к процессу Пойа возникает важная предельная форма П. р. Именно, вероятность $P_k(t)$ в момент времени t пребывать в состоянии k равна

$$P_n(t)=C^n_{(1/\alpha)+n-1}\left(\frac{\alpha t}{1+\alpha t}\right)^n\left(\frac{1}{1+\alpha t}\right)^{1/\alpha}$$

$$(P_0(0)=1).$$

Полученное предельное распределение является *отрицательным биномиальным распределением* с параметрами $1/\alpha$ и $1/(1+\alpha t)$ (соответствующее математич. ожидание равно t, а дисперсия $t(1+\alpha t)$).

Урновая модель и процесс Пойа, в к-рых возникает П. р. и его предельная форма, являются моделями с эффектом последействия (извлечение шара определенного цвета из урны увеличивает вероятность извлечения шара того же цвета при следующем испытании).

При стремлении параметра α к нулю процесс Пойа переходит в *пуассоновский процесс*, а П. р. при $\alpha\to 0$ имеет своим пределом *Пуассона распределение* с параметром t.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967.

А. В. Прохоров.

ПОЙА ТЕОРЕМА: пусть R^D — множество отображений конечного множества D, $|D|=n$, в множество R и пусть G — группа подстановок множества D, порождающая разбиение R^D на классы эквивалентности, при к-ром f_1, $f_2\in R^D$ принадлежат одному и тому же классу тогда и только тогда, когда найдется такое $g\in G$, что $f_1(g(d))=f_2(d)$ для всех $d\in D$; если каждому $r\in R$ сопоставлен вес $w(r)$ — элемент коммутативного кольца (вес f полагается равным $w(f)=\prod_{d\in D}w(f(d))$ и вес $w(F)$ класса $F\subset R^D$ определяется как вес любого $f\in F$), то

$$\sum_F w(F)=P\left(G;\ \sum_{r\in R}w(r),\ \sum_{r\in R}w^2(r),\ldots,\ \sum_{r\in R}w^n(r)\right),$$

где в левой части равенства сумма берется по всем классам эквивалентности, а

$$P(G;\ x_1, x_2, \ldots, x_n)=|G|^{-1}\sum_{g\in G}\prod_{k=1}^n x_k^{j_k(g)}=P(G)$$

есть **цикловой индекс** G, при этом $j_k(G)$ — **число циклов длины** k подстановки g в разложении ее в произведение независимых циклов.

Теорема была опубликована в 1937 Д. Пойа (G. Pólya, см. [3] с. 36—138), хотя фактически она была известна раньше (см. [3] с. 9—35).

Если в качестве веса элементов R брать степени независимой переменной x (или произведение степеней нескольких переменных), то для $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ (т. н. «ряд, перечисляющий фигуры», где a_k — число элементов R веса x^k) и $\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$ (т. н. «ряд, перечисляющий конфигурации», где b_k — число классов R^D веса x^k) согласно П. т. имеет место соотношение:

$$\Phi(x)=P(G;\ \varphi(x),\ \varphi(x^2),\ \ldots,\ \varphi(x^n))=P(G;\ \varphi(x)).$$

Примеры. 1) Если $|R|=m$, $w(r)\equiv 1$, то $\varphi(x)=m$ и тогда $P(G;\ m,\ m,\ \ldots,\ m)$ — число классов эквивалентности.

2) Если $R=\{0,\ 1\}$, $w(r)=x^r$, то $\varphi(x)=1+x$, а $f\in R^D$ с $w(f)=x^k$ можно истолковать как подмножество D мощности k. Группа G индуцирует орбиты подмножеств D, и коэффициент при x^k в многочлене $P(G;\ 1+x)$ есть число орбит, состоящих из подмножеств мощности k.

3) Пусть $R=\{0,\ 1\}$, $D=V^2$ — все 2-подмножества $\{i,\ j\}$ множества $V=\{1,\ 2,\ \ldots,\ p\}$, тогда $f\in R^D$ представляет помеченный граф с вершинами из V, у к-рого две вершины i и j смежны, если $f(\{i,\ j\})=1$. Пусть $w(r)=x^r$, тогда если $w(f)=x^k$, то k — число ребер в графе, соответствующем отображению f. Если на V действует симметрич. группа S_p, то, определив для $\sigma\in S_p$ подстановку g_σ на D соотношением $g_\sigma\{i,\ j\}=\{\sigma(i),\ \sigma(j)\}$, получают парную группу $G=S_p^{(2)}=\{g_\sigma\}$, действующую на $D=V^{(2)}$.

Для последовательности g_{pk} (чисел графов с p вершинами и k ребрами), $k=1,\ 2,\ \ldots$, по П. т. получают производящую функцию

$$g_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}g_{pk}x^k=P(S_p^{(2)};\ 1+x).$$

Для единичной группы подстановок E_n, симметрич. группы подстановок S_n и парной группы подстановок $S_n^{(2)}$ цикловой индекс имеет соответственно вид

$$P(E_n;\ x_1)=x_1^n,$$

$$P(S_n;\ x_1,\ \ldots,\ x_n)=\sum{}^{*}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i!}\left(\frac{x_i}{i}\right)^{k_i},$$

$$P(S_n^{(2)})=\sum{}^{*}\left(\prod_{i=1}^{n}k_i!\ i^{k_i}\right)^{-1}\prod_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(x_ix_{2i}^{i-1})^{k_{2i}}\times$$

$$\times x_i^{i\binom{k_i}{2}}\prod_{i=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}x_{2i+1}^{ik_{2i}+1}\prod_{r<s}x_{[r,\ s]}^{(r,\ s)k_rk_s},$$

где $(r,\ s)$ — наибольший общий делитель, $[r,\ s]$ — наименьшее общее кратное чисел r и s, а суммирование Σ^* проводится по $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$ при условии $k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n$. Известны цикловые индексы для знакопеременной, циклической и диэдральной групп, а также формулы для получения цикловых индексов для произведения, декартова произведения и сплетения групп (см. [4]).

Имеются обобщения П. т. на случай иного определения как веса функции, так и классов эквивалентности [1].

Лит.: [1] Де Брейн Н. Дж., в кн.: Прикладная комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1968, с. 61—106; [2] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [3] Перечислительные задачи комбинаторного анализа. Сб. переводов, М., 1979; [4] Харари Ф., Палмер Э., Перечисление графов, пер. с англ., М., 1977.

В. М. Михеев.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, экспоненциальная функция, экспонента,— функция

$$y = e^z \equiv \exp z$$

(где e — основание натуральных логарифмов — неперово число), для любого значения z (действительного или комплексного) определяемая соотношением

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n. \qquad (1)$$

Она обладает следующими свойствами:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad \text{и} \quad (e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$$

при любых значениях z_1 и z_2.

При действительных x график П. ф. $y=e^x$ — экспоненциальная кривая — проходит через точку (0, 1) и асимптотически приближается к оси Ox (см. рис.).



В курсе математич. анализа рассматривается П. ф. $y=a^x$ при действительных x и $a>0$, $a\neq 1$; она связана с (основной) П. ф. $y=e^x$ соотношением

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

П. ф. $y=a^x$ определена при всех x, положительна, монотонна (возрастает, если $a>1$, и убывает, если $0<a<1$), непрерывна, бесконечно дифференцируема; при этом

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

в частности

$$(e^x)' = e^x, \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

в окрестности каждой точки П. ф. может быть разложена в степенной ряд, напр.:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \qquad (2)$$

График П. ф. $y=a^x$ симметричен графику П. ф. $y=(1/a)^x$ относительно оси ординат. Если $a>1$, то П. ф. a^x при $x\to+\infty$ возрастает быстрее любой степени x, а при $x\to-\infty$ стремится к нулю быстрее любой степени $1/x$, т. е. при любом натуральном $b>0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{|x|^b} = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^b a^x = 0.$$

Обратной к П. ф. является *логарифмическая функция*.

При комплексных a и z П. ф. связана с (основной) П. ф. $w=e^z$ формулой

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a},$$

где $\operatorname{Ln} a$ — логарифм комплексного числа a.

П. ф. $w=e^z$ — целая трансцендентная функция и является аналитич. продолжением П. ф. $y=e^x$ с действительной оси в комплексную плоскость.

Помимо формулы (1), П. ф. может быть определена также с помощью ряда (2), сходящегося во всей комплексной плоскости, или по формуле Эйлера

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Если $z=x+iy$, то

$$|e^z| = e^x, \quad \operatorname{Arg} e^z = y + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

П. ф. e^z — периодическая с периодом $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

П. ф. e^z принимает все комплексные значения, за исключением нуля: уравнение $e^z=a$ имеет бесконечное

число решений для любого комплексного числа $a \neq 0$. Эти решения находятся по формуле

$$z = \operatorname{Ln} a = \ln |a| + i \operatorname{Arg} a.$$

П. ф. e^z является одной из основных элементарных функций. Через нее выражаются, напр., тригонометрич. функции и гиперболич. функции. *Ю. В. Сидоров.*

ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное распределение вероятностей случайной величины X, задаваемое плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Плотность $p(x)$ зависит от положительного масштабного параметра λ. Формула для моментов: $\mathsf{E}X^n = n!/\lambda^n$, в частности — для математич. ожидания $\mathsf{E}X = 1/\lambda$ и дисперсии $\mathsf{D}X = 1/\lambda^2$; характеристич. функция: $(1 - it/\lambda)^{-1}$.

П. р. входит в семейство распределений, называемых *гамма-распределениями* и задаваемых плотностью

$$p(x) = [\lambda^\alpha x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)]\, e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0;$$

n-кратная свертка распределения (1) равна гамма-распределению с тем же самым параметром λ и с $\alpha = n$.

П. р.— единственное распределение, обладающее свойством отсутствия последействия: для любых $x > 0$, $y > 0$ выполняется равенство

$$\mathsf{P}\{X > x + y \mid X > y\} = \mathsf{P}\{X > x\}, \qquad (2)$$

где $\mathsf{P}\{X > x+y \mid X > y\}$ — условная вероятность события $X > x+y$ при условии $X > y$. Свойство (2) называется также марковским свойством.

В однородном *пуассоновском процессе* расстояние между двумя последовательными скачками траектории имеет П. р. Наоборот, процесс восстановления с показательным временем жизни (1) является пуассоновским процессом восстановления. П. р. часто возникает как предельное при суперпозиции или разрежении процессов восстановления, в задачах пересечения высокого уровня в различных схемах блуждания, в критических ветвящихся процессах и т. п.

Упомянутыми выше свойствами объясняется широкое применение П. р. при расчетах различных систем в теории массового обслуживания и в теории надежности. Предполагая времена занятости приборов случайными, независимыми друг от друга и распределенными показательно, можно благодаря свойству (2) изучать системы массового обслуживания с помощью конечных или счетных цепей Маркова с непрерывным временем. Аналогичным образом используются цепи Маркова и в теории надежности, где времена исправной работы отдельных приборов часто можно предполагать независимыми и распределенными показательно.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967.

Б. А. Севастьянов.

ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКА МЕТОД — один из методов минимизации функций многих переменных, использующий лишь значения минимизируемой функции. П. с. м. применяется в тех случаях, когда минимизируемая функция недифференцируема или вычисление ее производных требует большого объема работы. Ниже описан П. с. м. для задачи минимизации функции $F(x)$ на множестве

$$X = \{x = (x^1, \ldots, x^n) : a_i \leqslant x^i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

где a_i, b_i — заданные числа, $a_i < b_i$; случаи, когда все или нек-рые $a_i = -\infty$, $b_j = +\infty$, здесь не исключаются. Пусть $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ — координатный вектор, у к-рого i-я координата равна 1, остальные координаты равны нулю. Задают начальное приближение $x_0 \in X$, $\alpha_0 > 0$. Пусть известно k-е при-

ближение $x_0 \in X$, $\alpha_k > 0$ при каком-либо $k \geqslant 0$. Полагают $p_k = e_{i_k}$, где $i_k = k - n\left[\frac{k}{n}\right] + 1$ (здесь $[a]$ — целая часть числа a). Таким образом,

$$p_0 = e_1, \ldots, p_{n-1} = e_n, p_n = e_1, \ldots, p_{2n-1} = e_n, p_{2n} = e_1, \ldots,$$

т. е. осуществляется циклич. перебор координатных векторов $e_1, \ldots, e_n$. Сначала проверяют выполнение условия

$$x_k + \alpha_k p_k \in X, \; F(x_k + \alpha_k p_k) < F(x_k). \qquad (1)$$

Если (1) выполняется, то полагают $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, $\alpha_{k+1} = \alpha_k$. Если (1) не выполняется, то проверяют условие

$$x_k - \alpha_k p_k \in X, \; F(x_k - \alpha_k p_k) < F(x_k). \qquad (2)$$

В случае выполнения условия (2) полагают $x_{k+1} = x_k - \alpha_k p_k$, $\alpha_{k+1} = \alpha_k$. Если оба условия (1), (2) не выполняются, то полагают $x_{k+1} = x_k$,

$$\alpha_{k+1} = \begin{cases} \lambda \alpha_k \text{ при } i_k = n, \; x_k = x_{k-n+1}, \\ \alpha_k \text{ при } i_k \neq n \text{ или } x_k \neq x_{k-n+1}, \text{ или } 0 \leqslant k \leqslant n-1; \end{cases} \qquad (3)$$

где λ, $0 < \lambda < 1$,— параметр метода. Условия (3) означают, что если за один цикл из n итераций при переборе всех координатных векторов $e_1, \ldots, e_n$ с шагом α_k выполнилось хотя бы одно из условий (1) или (2), то длина шага α_k не дробится и сохраняется на протяжении по крайней мере следующего цикла из n итераций; если же на последних n итерациях оба условия (1), (2) ни разу не выполнились, то шаг α_k дробится.

Если функция $F(x)$ выпукла и непрерывно дифференцируема на X, множество $\{x \in X : F(x) \leqslant F(x_0)\}$ ограничено, α_0 — произвольное положительное число, то метод (1) — (3) сходится, т. е.

$$\lim_{k \to \infty} F(x_k) = \inf_{x \in X} F(x),$$

последовательность $\{x_k\}$ сходится к множеству точек минимума $F(x)$ на X. Если $F(x)$ недифференцируема на X, то П. с. м. может не сходиться (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Васильев Ф. П., Численные методы решения экстремальных задач, М., 1980; [2] Карманов В. Г., Математическое программирование, 2 изд., М., 1980.

Ф. П. Васильев.

ПОКРЫВАЮЩИЙ ЭЛЕМЕНТ в частично упорядоченном множестве — элемент, непосредственно следующий за другим элементом; точнее, выражение «a покрывает b в частично упорядоченном множестве P» означает, что $b < a$ и не существует элемента $x \in P$, удовлетворяющего условию $b < x < a$.

Т. С. Фофанова.

ПОКРЫТИЕ множества X — любое семейство подмножеств этого множества, объединение к-рого есть X.

1) Под П. топологического пространства, равномерного пространства и вообще какого-либо множества, наделенного тем или иным строением, понимают произвольное П. этого множества. Однако в теории топологич. пространств особенно естественно рассматривать открытые покрытия, то есть П., все элементы к-рых являются открытыми множествами. Большое значение открытых П. вызвано тем, что их элементы несут в себе полную информацию о локальном строении пространства, а свойства П. в целом (в частности, число элементов в нем, кратность, комбинаторные свойства) отражают существенно глобальные характеристики пространства.

Так, на языке открытых П. определяется размерность по Лебегу dim топологич. пространства: размерность нормального пространства X не превосходит

натурального числа n, если в каждое конечное открытое П. этого пространства можно вписать конечное открытое П., кратность к-рого в каждой точке (т. е. число элементов П., содержащих данную точку) не превосходит $n+1$. Отношение вписанности одного П. в другое является основным общим элементарным отношением между П. Семейство множеств γ вписано в семейство множеств λ, если каждый элемент семейства γ содержится в нек-ром элементе семейства λ. На языке открытых П. определяется класс *паракомпактных пространств*.

Подпокрытием покрытия γ множества X наз. всякое подсемейство семейства γ, само являющееся П. множества X. В терминах подпокрытий определяются фундаментальные понятия бикомпактности, счетной и финальной компактности. Пространство бикомпактно, если из каждого его открытого П. можно выделить конечное подпокрытие. Пространство счетно компактно, если из каждого его счетного открытого П. можно выделить конечное подпокрытие. Пространство финально компактно, если из каждого его открытого П. можно выделить счетное подпокрытие. С помощью открытых П. определяются абстрактные комбинаторные объекты, открывающие дорогу применению алгебраич. методов к исследованию топологич. пространств, более общих, чем полиэдры. П. С. Александров определил фундаментальное понятие нерва произвольного покрытия γ как абстрактного комплекса, вершины к-рого поставлены во взаимно однозначное соответствие с элементами покрытия γ и конечный набор этих вершин составляет абстрактный симплекс в том и только в том случае, если пересечение отвечающих этим элементам покрытий γ не пусто. Системам открытых П. пространства, взятых вместе с отношением вписанности, отвечают системы абстрактных комплексов, связанных симплициальными отображениями,— т. н. спектры комплексов.

Заметную роль в топологии играют и замкнутые покрытия — то есть П., все элементы к-рых являются замкнутыми множествами. Если в топологич. пространстве все одноточечные множества замкнуты, то примером замкнутого П. этого пространства может служить семейство всех его одноточечных подмножеств. Но в таком П. не заключено никакой информации о топологии рассматриваемого пространства, кроме той, что в нем выполнена T_1-аксиома отделимости. Поэтому требование замкнутости П. следует соединять с другими существенными ограничениями. В частности, полезно рассматривать замкнутые локально конечные П. Они существенны в теории размерности. Важным примером замкнутого П. является П. полиэдра замкнутыми симплексами какого-нибудь подразделяющего этот полиэдр комплекса.

Среди ограничений на П., связанные не с характером элементов, а с их расположением, наиболее часто встречаются следующие. Мощность П.— число элементов в нем, локальная конечность (у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся с конечным множеством элементов семейства подмножеств этого пространства), точечная конечность (означающая, что множество элементов П., содержащих произвольно взятую точку, конечно), звездная конечность (каждый элемент П. пересекается лишь с конечным числом элементов этого П.).

Семейство множеств в топологич. пространстве наз. консервативным, если замыкание объединения любого его подсемейства равно объединению замыканий элементов этого подсемейства. Каждое локально конечное семейство множеств консервативно. Консервативные П. возникают при исследовании пара-

компактных пространств, при этом важны и не тривиальны не только открытые, но и любые консервативные П.

Важную роль играет понятие звезды точки x относительно семейств множеств (в частности, покрытий) γ. Это — объединение всех элементов семейства γ, содержащих x, обозначаемое обычно $\mathrm{St}_\gamma(x)$. Аналогично определяется звезда $\mathrm{St}_\gamma(A)$ множества A относительно семейства множеств γ. На понятии звезды основано фундаментальное отношение звездной вписанности одного П. в другое, существенно более тонкое, чем отношение вписанности. Семейство множеств λ наз. звездно вписанным в семейство множеств γ, если для каждой точки найдется элемент семейства γ, содержащий звезду этой точки относительно λ. Отношение звездной вписанности открытых П. имеет важное значение в теории размерности, на нем основаны нек-рые критерии метризуемости, оно является одним из основных элементарных понятий, входящих в определение равномерной структуры и равномерного пространства. Полезно рассматривать семейства F открытых П. топологич. пространства, направленные отношением звездной вписанности в следующем смысле: для любых γ_1 и γ_2 из F найдется $\mu \in F$, звездно вписанное и в γ_1, и в γ_2.

Представляет ценность следующая характеристика паракомпактности на языке звездной вписанности (теорема Мориты): хаусдорфово пространство паракомпактно в том и только в том случае, если в любое его открытое П. можно вписать открытое П. звездно.

Звездная вписанность в случае произвольных (или даже замкнутых) П. не столь содержательна. В частности, это видно из того, что семейство всех одноточечных подмножеств пространства звездно вписано в любое П. этого пространства.

Лит.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974. *А. В. Архангельский.*

2) В комбинаторной геометрии имеется ряд задач и предложений, относящихся к специальным П., в основном выпуклых множеств. Пусть K — выпуклое тело n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{bd}\,K$ и $\mathrm{int}\,K$ — соответственно граница и внутренность K. Наиболее известны следующие задачи с П.

а) Ищется минимальное число $t(K)$ транслятов (параллельных переносов) $\mathrm{int}\,K$, при помощи к-рых можно покрыть тело K.

б) Ищется минимальное число $b(K)$ гомотетичных K тел с коэффициентом гомотетии k, $0<k<1$, при помощи к-рых можно покрыть тело K.

в) Ищется минимальное число $d(K)$ гомотетичных K множеств с коэффициентом гомотетии $k>1$ и центром гомотетии в $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{int}\,K$, при помощи к-рых можно покрыть тело K.

При ограниченности K задачи а) и б) эквивалентны между собой, эквивалентны *освещения задаче* (извне) множества $\mathrm{bd}\,K$ и связаны с *Хадвигера гипотезой*. Для неограниченного K задачи а) и б), вообще говоря, различны, причем числа $b(K)$ и $t(K)$ могут быть бесконечными.

Лит.: [1] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В., Теорема Хелли и ее применения, пер. с англ., М., 1968; [2] Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц., Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, М., 1965; [3] их же, Разбиение фигур на меньшие части, М., 1971; [4] Хадвигер Г., Дебруннер Г., Комбинаторная геометрия плоскости, пер. с нем., М., 1965; [5] Роджерс К., Укладки и покрытия, пер. с англ., М., 1968; [6] Болтянский В. Г., Солтан П. С., Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств, Кишинев, 1978. *П. С. Солтан.*

ПОКРЫТИЯ И УПАКОВКИ — комбинаторные конфигурации, связанные с многозначным отображением

одного множества на другое. Пусть заданы множества V и E и многозначное отображение Γ множества E на множество V. Пусть $\Gamma(e)$ — образ элемента $e\in E$ при отображении Γ и для любого $C\subseteq E$ пусть $\Gamma(C)=\bigcup_{e\in E}\Gamma(e)$. Подмножество $C\subseteq E$ наз. п о к р ы т и е м (для (V, E, Γ)), если $\Gamma(C)=V$. Подмножество $P\subseteq E$ наз. у п а к о в к о й, или у к л а д к о й (для (V, E, Γ)), если для любых двух различных элементов e_i, e_j из P множества $\Gamma(e_i)$ и $\Gamma(e_j)$ не пересекаются. Подмножество $P\subseteq E$ наз. с о в е р ш е н н о й у п а к о в к о й, или с о в е р ш е н н ы м п о к р ы т и е м, если P является одновременно и покрытием, и упаковкой. Множество E наз. п о к р ы в а ю щ и м, а множество V — п о к р ы в а е м ы м. Если обратное отображение Γ^{-1} таково, что $\Gamma^{-1}(V)=E$, то можно рассматривать V как покрывающее множество, а E как покрываемое. Отображение $\Gamma: E\to V$ определяет о т н о ш е н и е и н ц и д е н т н о с т и I, при к-ром v из V и e из E инцидентны (обозначение vIe), если $v\in\Gamma(e)$.

С понятиями упаковки и покрытия связаны экстремальные задачи, заключающиеся в отыскании (по произвольно заданной тройке (V, E, Γ)) П. и у., доставляющих экстремум тех или иных функционалов. Такой функционал можно, напр., задать с помощью функции, сопоставляющей каждому элементу e из E неотрицательное действительное число $w(e)$, наз. в е с о м э л е м е н т а e. Задача о минимальном покрытии заключается в построении покрытия C, для к-рого $\Sigma_{e\in C}w(e)$ принимает минимальное значение. Часто рассматривается случай, когда $w(e)\equiv 1$; здесь речь идет о нахождении покрытия минимальной мощности, или т. н. к р а т ч а й ш е г о п о к р ы т и я. Если тройка (V, E, Γ) такова, что

$$\max_{e\in E}|\Gamma(e)|\leqslant u,\quad \min_{v\in V}|\Gamma^{-1}(v)|\geqslant w,$$

то минимальная мощность $\varkappa(V, E, \Gamma)$ покрытия удовлетворяет неравенствам

$$\frac{|V|}{u}\leqslant\varkappa(V,E,\Gamma)\leqslant 1+\frac{E}{w}\left(1+\ln\frac{|V|w}{|E|}\right).$$

В экстремальных задачах об упаковках чаще всего требуется найти упаковки максимальной мощности.

Иногда на покрываемом множестве V задается функция λ, принимающая целые неотрицательные значения, тогда λ-п о к р ы т и е м (-у п а к о в к о й) наз. подмножество $P\subseteq E$, удовлетворяющее условию: для каждого $v\in V$ число $\sigma(v, P)$ тех элементов $e\in P$, к-рые инцидентны элементу v, подчиняется неравенству

$$\sigma(v, P)\geqslant\lambda(v)$$

(соответственно $\sigma(v, P)\leqslant\lambda(v)$). Существует связь между λ-покрытиями минимальной мощности и λ-упаковками максимальной мощности. Именно, пусть заданы множества V и E, многозначное отображение $\Gamma: E\to V$, а также функции λ и λ' на множестве V такие, что для каждого $v\in V$:

$$\lambda(v)+\lambda'(v)=|\Gamma^{-1}(v)|.$$

Тогда, если множество C есть минимальное по мощности λ-покрытие для (V, E, Γ), то множество $P=E\setminus C$ является максимальной по мощности λ'-упаковкой, и наоборот: если P — максимальная λ'-упаковка, то множество $C=E\setminus P$ есть λ-покрытие минимальной мощности. К классу задач о П. и у. относятся, напр., следующие:

1) Пусть G — граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Если рассматривать множество V в качестве покрываемого, множество E — в качестве покрывающего и отношение инцидентности вершин

и ребер — в качестве I, то покрытием является реберное покрытие графа, упаковкой — паросочетание, совершенной упаковкой — совершенное паросочетание. Если в качестве и покрывающего, и покрываемого взять множество вершин, а в качестве I — отношение смежности вершин, то покрытием будет внешне устойчивое множество, а упаковкой — внутренне устойчивое множество; при этом минимальная мощность покрытия наз. числом внешней устойчивости, а максимальная мощность упаковки — числом внутренней устойчивости (см. *Графов числовые характеристики*).

2) Пусть V — непустое множество в метрич. пространстве R. Система π множеств $U \subseteq R$ наз. ε-п о к р ы т и е м множества V, если диаметр $d(U)$ любого множества $U \in \pi$ не превосходит 2ε и $V \subseteq \bigcup_{U \in \pi} U$. Множество $S \subseteq R$ наз. ε-с е т ь ю для множества V, если любая точка множества V находится на расстоянии, не превышающем ε, от нек-рой точки из S. Множество $U \subseteq R$ наз. ε-р а з л и ч и м ы м, если любые две его различные точки лежат на расстоянии, бо́льшем ε. Пусть $N_\varepsilon(V)$ — минимальное число множеств в ε-покрытии множества V, а $M_\varepsilon(V)$ — максимальное число точек в ε-различимом подмножестве множества V. Число $\log_2 N_\varepsilon(V)$ наз. ε-э н т р о п и е й множества V, а $\log_2 M_\varepsilon(V)$ наз. ε-е м к о с т ь ю множества V. Понятия ε-энтропии и ε-емкости применяются в теории приближения функций и в теории информации.

3) Пусть B^n — единичный n-мерный куб с метрикой Хемминга и покрываемое множество есть множество его вершин, а покрывающее множество — множество шаров радиуса r в B^n. Тогда множество центров шаров упаковки есть *код*, исправляющий r ошибок. Если упаковка является совершенной, то код наз. п л о т н о у п а к о в а н н ы м, или с о в е р ш е н н ы м.

Если в качестве покрываемого множества взять подмножество N_f вершин куба B^n, на к-ром нек-рая булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принимает значение 1, а в качестве покрывающего — множество граней (интервалов), целиком содержащихся в N_f, то покрытие наименьшей мощности будет соответствовать кратчайшей дизъюнктивной нормальной форме функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, а покрытие с наименьшей суммой рангов — минимальной дизъюнктивной нормальной форме функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ (см. *Булевых функций нормальные формы*).

В задачах о П. и у. оцениваются их мощности, исследуются вопросы существования, построения, перечисления совершенных упаковок, изучаются возможности построения эффективных алгоритмов для решения этих задач.

Лит.: [1] Р о д ж е р с К., Укладки и покрытия, пер. с англ., М., 1968; [2] Т о т Л. Ф., Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, пер. с нем., М., 1958; [3] П и т е р с о н У., У э л д о н Э., Коды, исправляющие ошибки, пер. с англ., М., 1976; [4] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1, М., 1974; [5] Х а р а р и Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [6] В е р ж К., Теория графов и ее применения, пер. с франц., М., 1962; [7] В и т у ш к и н А. Г., Оценка сложности задачи табулирования, М., 1959; [8] К о л м о г о р о в А. Н., Т и х о м и р о в В. М., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 2, с. 3—86; [9] Б а х в а л о в Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [10] Я б л о н с к и й С. В., Введение в дискретную математику, М., 1979.

А. А. Сапоженко.

ПОКРЫТИЯ ТЕОРЕМЫ — теоремы для различных классов регулярных функций, устанавливающие нек-рые свойства таких множеств, к-рые целиком содержатся в множестве значений каждой функции соответствующего класса. Ниже приведены нек-рые из основных П. т. (см. также [1]).

Т е о р е м а 1. Если функция $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ регулярна и однолистна в круге $|z| < 1$ (то есть $f(z) \in S$), то круг $|w| < 1/4$ целиком покрывается образом круга $|z| < 1$ при отображении этой функцией. На

окружности $|w|=1/4$ только в том случае имеются точки, не принадлежащие образу, если

$$f(z)=\frac{z}{(1+e^{i\alpha}z)^2},\quad 0\leqslant\alpha<2\pi.$$

Теорема 2. Если мероморфная функция $w=F(\zeta)=\zeta+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{\zeta}+\ldots$ однолистно отображает $|\zeta|>1$, то вся граница образа лежит в круге $|w-\alpha_0|\leqslant 2$.

Теорема 3. Если $f(z)\in S$, то по крайней мере одна из n ближайших к $w=0$ точек границы образа круга $|z|<1$ при отображении $w=f(z)$, лежащих на n любых лучах, исходящих из $w=0$ под равными углами, отстоит от $w=0$ не ближе чем на $\sqrt[n]{1/4}$.

Теорема 4. Если $f(z)\in S$, то в образе круга $|z|<1$ при отображении $w=f(z)$ содержится множество, состоящее из n открытых прямолинейных отрезков с суммой длин, не меньшей n, исходящих из начала под равными углами величины 2π.

Для $f(z)\in S$ и удовлетворяющих в круге $|z|<1$ неравенству $|f(z)|<M$, $M\geqslant 1$, имеют место П. т., аналогичные теоремам 1, 3 (с соответствующими постоянными). П. т. 1 и 3 переносятся и на класс функций $w=f(z)$, регулярных и однолистных в кольце $1<|z|<r$ и отображающих его на области, лежащие в $|w|>1$, а окружность $|z|=1$ — на окружность $|w|=1$.

Для класса R функций $w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots$, регулярных в круге $|z|<1$, не существует круга $|w|<\rho$, $\rho>0$, целиком покрываемого значениями каждой из функций этого класса. Для функций

$$w=F(z)=z^q+a_2z^{q+1}+\ldots,\quad q\geqslant 1,$$

регулярных в $|z|<1$, каждый образ этого круга целиком покрывает нек-рый отрезок любого заданного наклона, содержащий точку $w=0$ внутри, длиной не меньше $A=8\pi^2/\Gamma^4(1/4)=0{,}45\ldots$, причем число A нельзя увеличить без дополнительных ограничений. В этом же классе функций при условии, что $F(z)\neq 0$ в кольце $0<|z|<1$, каждый образ круга $|z|<1$ целиком покрывает круг $|w|<1/16$, но не всегда покрывает больший круг с центром в $w=0$.

В классе S_p регулярных в $|z|<1$ функций $f(z)=z^p(1+a_1z+a_2z^2+\ldots)$ таких, что каждое свое значение w они принимают не более чем в p точках круга $|z|<1$, имеет место аналог П. т. 1 с соответствующим кругом $|w|<1/2^{p+1}$. Если при этом $a_1=\ldots=a_{p-1}=0$ или $a_1=\ldots=a_p=0$, то соответствующими кругами будут $|w|<1/4$ или $|w|<1/2$. Аналогичные результаты имеют место для функций, p-листных в среднем по окружности, p-листных в среднем по площади и др. На класс S_p перенесена и П. т. 3.

См. также теорему Блоха в ст. *Блоха константа*.

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

Г. К. Антонюк.

ПОЛЕ — коммутативно-ассоциативное кольцо с единицей, множество ненулевых элементов к-рого не пусто и образует группу относительно умножения. П. можно охарактеризовать также как простые ненулевые коммутативно-ассоциативные кольца с единицей. Примеры полей: П. рациональных чисел $\mathbb{Q}$, П. действительных чисел $\mathbb{R}$, П. комплексных чисел $\mathbb{C}$, конечные П. (см. *Галуа поле*), П. частных областей целостности.

Подполем поля K наз. подмножество $M\subset K$, к-рое само является П. относительно операций сложения и умножения, заданных в K. Напр., если σ — нек-рый автоморфизм поля K, то множество

$$K^\sigma=\{x\in K\mid \sigma(x)=x\}$$

является подполем в K. Если M и N — подполя поля K, то их пересечение $M\cap N$ будет подполем в K; кроме

того, существует наименьшее подполе MN поля K, содержащее M и N и называемое композитом полей M и N (в K). Каждое П. содержит единственное простое (т. е. не содержащее подполей) подполе.

Любой гомоморфизм полей является вложением. Для произвольного поля K существует единственный гомоморфизм $\varphi\colon \mathbb{Z}\to K$, переводящий единицу кольца $\mathbb{Z}$ в единицу поля K. Если $\ker\varphi=0$, то K наз. полем характеристики нуль. В этом случае простое подполе поля K совпадает с П. частных кольца $\varphi(\mathbb{Z})$ и изоморфно полю $\mathbb{Q}$. Если $\ker\varphi\neq 0$, то $\ker\varphi=p\mathbb{Z}$ для нек-рого простого p. Это p наз. характеристикой поля K. Простое подполе поля K совпадает в этом случае с $\varphi(\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Если k подполе поля K, то K наз. расширением поля k. Пусть Y — нек-рое подмножество в K, тогда определено поле $k(Y)$ — наименьшее подполе поля K, содержащее Y и k. Говорят, что $k(Y)$ получено из k присоединением элементов множества Y.

Основные задачи теории полей — это описание всех подполей данного П., всех П., содержащих данное П., то есть надполей (см. *Расширение поля*), изучение всех вложений П. в нек-рое другое П., классификация полей с точностью до изоморфизма и изучение группы автоморфизмов данного П.

Поле K наз. конечно порожденным над своим подполем k, если существует конечное множество $Y\subset K$ такое, что $K=k(Y)$. Любое такое П. можно интерпретировать как П. рациональных функций $k(X)$ нек-рого неприводимого алгебраич. многообразия X, определенного над k. Изучением таких П. занимается *алгебраическая геометрия*. В частности, задача классификации таких П. эквивалентна задаче бирациональной классификации неприводимых алгебраич. многообразий, а задача нахождения группы всех автоморфизмов П. $K\to k(X)$, оставляющих на месте все элементы поля k, эквивалентна задаче нахождения всех бирациональных автоморфизмов многообразия X, определенных над k.

Изучение конечных *сепарабельных расширений* произвольных П. составляет предмет *Галуа теории*. В теории чисел важную роль играет рассмотрение конечных расширений поля $\mathbb{Q}$, называемых П. алгебраич. чисел. Изучением этих П. занимается *алгебраическая теория чисел*.

Теория полей изучает также П., несущие нек-рые дополнительные структуры, напр. дифференциальные П., топологические П., упорядоченные П., формально вещественные и формально p-адические П. и др.

Зарождение теории П. (в рамках теории алгебраич. уравнений) относится к сер. 19 в. После публикации работ Э. Галуа (E. Galois) и Ж. Лагранжа (J. Lagrange) в теории групп и К. Ф. Гаусса по теории чисел стало очевидно, что нужно исследовать природу самих числовых систем. Концепции П. появляются в работах Л. Кронекера (L. Kronecker) и Р. Дедекинда (R. Dedekind). Р. Дедекинд ввел понятие П., к-рое он первоначально называл «рациональной областью». Теория Р. Дедекинда опубликована в примечаниях и дополнениях к «Теории чисел» П. Дирихле (P. Dirichlet). В них Р. Дедекинд существенно дополнил и развил теорию чисел, теорию идеалов и теорию конечных П. Термин «П.» впервые появился в издании этой книги в 1871.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [2] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [3] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [4] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963.

Л. В. Кузьмин.

ПОЛЕ РАЗЛОЖЕНИЯ многочлена — наименьшее поле, содержащее все корни данного многочлена. Точнее, расширение L поля K наз. полем разло-

жения многочлена f над полем K, если f разлагается над полем L на линейные множители:

$$f = a_0 (x - a_1) \ldots (x - a_n)$$

и $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (см. *Расширение* поля). П. р. существует для любого многочлена $f \in K[x]$ и определено однозначно с точностью до изоморфизма, тождественного на K. П. р., по определению, является конечным алгебраич. расширением поля K.

Примеры. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ служит П. р. многочлена x^2+1 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Любое конечное поле $\mathrm{GF}(q)$, где $q = p^n$, есть П. р. многочлена $x^q - x$ над простым подполем $\mathrm{GF}(p) \subset \subset \mathrm{GF}(q)$.

О. А. Иванова.

ПОЛЕЗНОСТИ ТЕОРИЯ — теория, изучающая предпочтение индивидов и его представление в виде числовой функции. Предпочтением на множестве альтернатив X наз. транзитивное бинарное отношение R на X; оно представляется функцией $u(x)$ на X; при этом $u(x)$ наз. функцией полезности, если для любых $x, y \in X$ из xRy следует $u(x) \geqslant u(y)$ и наоборот. Таким образом, в П. т. изучаются упорядоченные множества и их монотонные отображения в числовое пространство (обычно одномерное). П. т. возникла в работах экономистов 18 в.; начало современной (50-е гг. 20 в.) П. т. было положено Дж. Нейманом (J. Neumann) и О. Моргенштерном (O. Morgenstern) (см. [1]).

Существование функции полезности в случае конечного множества X является очевидным. В бесконечном случае необходимым и достаточным условием существования функции полезности является существование плотного по полезности счетного подмножества $A \subset X$, т. е. для любых $x, y \in X \setminus A$, xR^*y, существует такое $z \in A$, что xR^*z и zR^*y, где R^* — строгое предпочтение ($xR^*y \Longleftrightarrow xRy$ и не yRx). Если X — выпуклое множество векторного пространства, R непрерывно на X и для любых $x, y, z \in X$, xR^*y, и любого α, $0 < \alpha < 1$, верно $[\alpha x + (1-\alpha)z]R^*[\alpha y + (1-\alpha)z]$, то существует единственная с точностью до положительной линейной трансформации линейная функция полезности (см. [3]). Различные комбинации более слабых условий приводят к нелинейной, разрывной или в том же смысле неединственной функции полезности. Напр., если X — векторное пространство и из xR^*y следует $(x+z)R^*(y+z)$ и $\alpha xR^*\alpha y$ для всех $z \in X$ и $\alpha > 0$, то функция оказывается однозначной, но кусочно линейной.

В П. т. также рассматриваются стохастич. упорядочения и упорядочения сумм или разностей альтернатив (тогда функция полезности строится по некоторому кватернарному отношению на X), обобщения для n-арного отношения вместо бинарного, построение функции полезности одновременно с субъективными вероятностями, связь между полезностью многокомпонентных альтернатив и полезностями их компонент и др. (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [2] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [3] Фишберн П. С., Теория полезности для принятия решений, пер. с англ., М., 1978; [4] Суппес П., Зинес Дж., в кн.: Психологические измерения, пер. с англ., М., 1967.

Э. Й. Вилкас.

ПОЛЕЙ КЛАССОВ ТЕОРИЯ — теория, дающая описание всех абелевых расширений (конечных расширений Галуа с абелевой группой Галуа) поля K, принадлежащего к одному из следующих типов: 1) K — поле алгебраич. чисел, т. е. конечное расширение поля $\mathbb{Q}$; 2) K — конечное расширение поля рациональных p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$; 3) K — поле алгебраич. функций одной переменной над конечным полем; 4) K — поле формальных степенных рядов над конечным полем.

Основные теоремы П. к. т. были сформулированы и доказаны в частных случаях Л. Кронекером (L. Kronecker), Г. Вебером (H. Weber), Д. Гильбертом (D. Hilbert) и др. (см. также *Алгебраическая теория чисел*).

Поля типа 2) и 4) наз. локальными, а поля типа 1) и 3) — глобальными. Соответственно можно говорить о локальной и глобальной П.к. т.

В локальной П. к. т. каждому конечному абелеву расширению L/K с группой Галуа $G(L/K)$ ставится в соответствие норменная подгруппа $N_{L/K}(L^*)$ мультипликативной группы K^* поля K. Группа $N_{L/K}(L^*)$ полностью определяет поле L, и существует канонич. изоморфизм $\varphi: G(L/K)\simeq K^*/N_{L/K}(L^*)$ (основной изоморфизм П. к. т.). Явный вид этого изоморфизма дает теория формального комплексного умножения (см. [2] гл. 6). Наоборот, любая открытая подгруппа конечного индекса в K^* реализуется как норменная подгруппа для нек-рого абелева расширения L (теорема существования).

Если L и L_1 — конечные абелевы расширения поля K, $M=L\cap L_1$ и $N=L\cdot L_1$, то справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned} N_{M/K}(M^*) &= N_{L/K}(L^*)\, N_{L_1/K}(L_1^*), \\ N_{N/K}(N^*) &= N_{L/K}(L^*)\cap N_{L_1/K}(L_1^*). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Включение $L_1\subseteq L$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$N_{L/K}(L^*)\supset N_{L_1/K}(L_1^*),$$

причем в этом случае диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G(L_1/K) & \overset{\varphi}{\simeq} & K^*/N_{L_1/K}(L^*) \\ \downarrow\alpha & & \downarrow\beta \\ G(L/K) & \overset{\varphi}{\simeq} & K^*/N_{L/K}(L^*), \end{array} \qquad (2)$$

где α получен ограничением автоморфизмов с L_1 на L, а β индуцирован тождественным отображением $K^*\to K^*$, коммутативна. В частности, если K^{ab} — максимальное абелево расширение поля K, то группа Галуа $G(K^{ab}/K)$ канонически изоморфна проконечному пополнению группы K^*.

Изоморфизм φ дает также описание последовательности подгрупп ветвления в $G(L/K)$. Так, расширение L/K не разветвлено тогда и только тогда, когда группа единиц $U(K)$ поля K содержится в группе $N_{L/K}(L^*)$. В этом случае изоморфизм φ полностью определяется тем, что автоморфизм Фробениуса, порождающий группу $G(L/K)$, переходит в класс $\pi\cdot N_{L/K}(L^*)$, где π — простой элемент поля K.

На языке когомологий групп изоморфизм φ интерпретируется как изоморфизм между группами когомологий Тейта

$$H^{-2}(G(L/K),\ \mathbb{Z})\simeq G(L/K)$$

и

$$H^0(G(L/K),\ L^*)=K^*/N_{L/K}(L^*).$$

Более того, пусть L/K — произвольное конечное расширение Галуа локальных полей. Тогда для любого целого n определен канонич. изоморфизм φ_n:

$$H^{n-2}(G(L/K),\ \mathbb{Z})\simeq H^n(G(L/K),\ L^*).$$

Если задана башня полей Галуа $M\supset L\supset K$, то инфляция

$$\inf:\ H^2(G(L/K),\ L^*)\longrightarrow H^2(G(M/K),\ M^*)$$

сохраняет инвариант (см. *Брауэра группа*), а ограничение

$$\mathrm{res}:\ H^2(G(M/K),\ M^*)\longrightarrow H^2(G(M/L),\ M^*)$$

умножает инвариант на $[L:K]$. Если $\overline{K}$ — сепарабельное замыкание поля K, то инвариант определяет ка-

нонич. изоморфизм между группой Брауэра поля K

$$\mathrm{Br}\,(K) \simeq H^2\,(G\,(\overline{K}/K),\ \overline{K}^*)$$

и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

В глобальной П. к. т. роль мультипликативной группы поля играет группа классов иделей. Пусть L/K — конечное расширение Галуа глобальных полей, и I_L — группа иделей поля L. Группа L^* вкладывается в I_L в качестве дискретной подгруппы (она наз. группой главных иделей), а факторгруппа $C_L = I_L/L^*$, наделенная фактортопологией, наз. группой классов иделей. Доказывается, что $H^1(G(L/K),\ C_L) = 1$ и $H^2(G(L/K),\ C_L) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, где $n = [L:K]$. Существует канонич. вложение inv: $H^2(G(L/K),\ C_L) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Как и в локальной П. к. т., для любого целого n определен изоморфизм (основной изоморфизм глобальной П. к. т.)

$$\psi_n\colon\ H^{n-2}\,(G\,(L/K),\ \mathbb{Z}) \simeq H^n\,(G\,(L/K),\ C_L).$$

Для абелева расширения L/K изоморфизм ψ_0 сводится к изоморфизму $\psi : G(L/K) \simeq C_K/N_{L/K}(C_L)$. Норменная подгруппа $N_{L/K}(C_L)$ однозначно определяет поле L, и наоборот, любая открытая подгруппа конечного индекса в C_K является норменной подгруппой для нек-рого конечного абелева расширения L (глобальная теорема существования). Соотношения, аналогичные (1) и (2), остаются справедливыми и для глобальных полей. Если K^{ab} — максимальное абелево расширение поля K, то в функциональном случае группа $G(K^{ab}/K)$ изоморфна проконечному пополнению группы C_K, а в числовом случае группа $G(K^{ab}/K)$ изоморфна факторгруппе группы C_K по связной компоненте.

Изоморфизмы φ_n и ψ_n согласованы. Если L/K конечное расширение Галуа глобальных полей, L_v — пополнение поля L относительно нек-рой точки v и K_v — пополнение поля K относительно ограничения v на K, то существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \psi_n\colon\ H^{n-2}\,(G\,(L/K),\ \mathbb{Z}) & \simeq & H^n\,(G\,(L/K),\ C_L), \\ \uparrow \mathrm{cores} & & \uparrow f \\ \varphi_n\colon\ H^{n-2}\,(G\,(L_v/K_v),\ \mathbb{Z}) & \simeq & H^n\,(G\,(L_v/K_v),\ L^*), \end{array} \tag{3}$$

где отображение f индуцировано вложением $L^* \to I_L \to C_L$ и сокращением cores. Для $n=0$ (3) дает коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \psi\colon\ G\,(L/K)/[G\,(L/K),\ G\,(L/K)] & \simeq & C_K/N_{L/K}\,(C_L) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \varphi\colon\ G\,(L_v/K_v)/[G\,(L_v/K_v),\ G\,(L_v/K_v)] & \simeq & K_v^*/N_{L_v/K_v}(L_v^*). \end{array} \tag{4}$$

Диаграмма (4) позволяет получить закон разложения простых дивизоров поля K в абелевом расширении L/K. Именно, дивизор $\mathfrak{c}$ поля K не разветвлен в L (вполне распадается в L) тогда и только тогда, когда $U(K_\mathfrak{c}) \subset N_{L/K}(G_L)$ (соответственно $K^* \subset N_{L/K}(G_L)$).

Если $\mathfrak{c}$ — нек-рый простой дивизор поля K, не разветвленный в L, v — точка поля K, соответствующая $\mathfrak{c}$, и π — простой элемент поля K_v, то определен символ Артина $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{c}}\right) = \psi^{-1}(\pi) \in G(L/K)$, зависящий только от $\mathfrak{c}$. Элемент $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{c}}\right)$ — это автоморфизм Фробениуса в подгруппе разложения точки v. Согласно теореме плотности Чеботарева любой элемент группы $G(L/K)$ имеет вид $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{c}}\right)$ для бесконечного числа простых дивизоров $\mathfrak{c}$ поля K.

Напр., максимальное абелево неразветвленное расширение числового поля K (называемое гильбертовым полем классов) — это поле, нормен-

ная подгруппа к-рого совпадает с образом относительно проекции $I_K \to C_K$ группы $K^* \times \prod_v U(K_v)$, где v пробегает все точки поля K. Группа $I_K/K^* \times \prod_v U(K_v)$ канонически изоморфна группе классов дивизоров Cl_K поля K, что дает важный изоморфизм $G(F/K) \simeq \mathrm{Cl}_K$. В частности, над K нет неразветвленных абелевых расширений тогда и только тогда, когда поле K одноклассно.

Тип разложения простого дивизора $\mathfrak{c}$ поля K в F полностью определяется классом $\mathfrak{c}$ в $\mathrm{Cl}_\mathfrak{c}$. Вполне распадаются в F все главные дивизоры и только они. Все дивизоры поля K становятся главными в F.

Подобно тому, как П. к. т. для абелевых неразветвленных расширений можно излагать на языке группы классов дивизоров и ее подгрупп, можно дать характеризацию любого конечного абелева расширения поля K в терминах группы лучевых классов по нек-рому модулю (см. *Алгебраическая теория чисел*). Существуют также обобщения П. к. т. на случай бесконечных расширений Галуа [4].

Хотя П. к. т. возникла как теория абелевых расширений, ее результаты дают важную информацию и для неабелевых расширений Галуа. Напр., на теории полей классов основано доказательство существования бесконечных башен полей классов (см. *Башня полей*).

Лит.: [1] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [2] Вейль А., Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972; [3] Кох Х., Теория Галуа p-расширений, пер. с нем., М., 1973; [4] Кузьмин Л. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, в. 6, с. 1220—54.

Л. В. Кузьмин.

ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ порядка m — комплексная функция $w=u+iv$ действительных переменных x и y или, что эквивалентно, независимых комплексных переменных $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$ в плоской области D, представимая в виде

$$w=f(z,\bar{z})=\sum_{k=0}^{m-1}\bar{z}^k f_k(z), \qquad (1)$$

где $f_k(z)$, $k=0, \ldots, m-1$,— комплексные аналитич. функции в D. Иначе, П. ф. w порядка m можно определить как функцию, имеющую в D непрерывные частные производные по x и y или по z и $\bar{z}$ до порядка m включительно и удовлетворяющую всюду в D обобщенному условию Коши — Римана:

$$\frac{\partial^m w}{\partial \bar{z}^m}=0.$$

При $m=1$ получаются аналитич. функции.

Для того чтобы функция $u=u(x, y)$ была действительной (или мнимой) частью нек-рой П. ф. $w=u+iv$ в области D, необходимо и достаточно, чтобы u была *полигармонической функцией* в D. На П. ф. переносятся с соответствующими изменениями нек-рые классич. свойства аналитич. функций (см. [1]).

П. ф. мультипорядка $m=(m_1, \ldots, m_n)$ от комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$ и $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$ в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, наз. функция вида

$$w=\sum_{k_1, \ldots, k_n=0}^{m_1-1, \ldots, m_n-1} \bar{z}_1^{k_1} \ldots \bar{z}_n^{k_n} f_{k_1 \ldots k_n}(z_1, \ldots, z_n),$$

где $f_{k_1 \ldots k_n}$ — аналитич. функции переменных $z_1, \ldots, z_n$ в D.

Лит.: [1] Балк М. Б., Зуев М. Ф., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 5, с. 203—26.

Е. Д. Соломенцев.

ПОЛИВЕКТОР, p-вектор, векторного пространства V — элемент p-й внешней степени $\Lambda^p V$ пространства V над полем k (см. *Внешняя алгебра*). p-вектор может пониматься как кососимметризованный p раз контравариантный тензор на V. Любая линейно независимая система векторов $x_1, \ldots, x_p$ из V определяет

ненулевой p-вектор $x_1\wedge\ldots\wedge x_p$; такие П. наз. р а з л о ж и м ы м и, или п р о с т ы м и (часто — просто П.). При этом линейно независимые системы $x_1, \ldots, x_p$ и $y_1, \ldots, y_p$ порождают одно и то же подпространство в V в том и только в том случае, когда $y_1\wedge\ldots\wedge y_p=cx_1\wedge\ldots\wedge x_p$, где $c\in K$. Для любого ненулевого поливектора $t\in\Lambda^pV$ его а н н у л я т о р $\operatorname{Ann} t=\{v\in V\mid t\wedge v=0\}$ есть подпространство размерности $\leqslant p$, причем поливектор t разложим тогда и только тогда, когда $\dim\operatorname{Ann} t=p$. Разложимые p-векторы n-мерного пространства V образуют коническое алгебраич. многообразие в Λ^pV; соответствующее проективное алгебраич. многообразие есть *Грассмана многообразие*. Любой ненулевой n-вектор или $(n-1)$-вектор в n-мерном пространстве V разложим; бивектор t разложим тогда и только тогда, когда $t\wedge t=0$.

Если $v_1, \ldots, v_n$ — базис пространства V и $x_i=\sum_{j=1}^n x_i^jv_j$, то координатами поливектора $t=x_1\wedge\ldots\wedge x_p$ в базисе $\{v_{i_1}\wedge\ldots\wedge v_{i_p}\mid i_1<\ldots<i_p\}$ пространства Λ^pV являются миноры $t^{i_1\ldots i_p}=\det\|x_i^{j_k}\|$, $i_1<\ldots<i_p$, матрицы $\|x_i^j\|$. В частности, при $p=n$

$$x_1\wedge\ldots\wedge x_n=\det\|x_i^j\|\,v_1\wedge\ldots\wedge v_n.$$

Если фиксировать ненулевой n-вектор $\omega\in\Lambda^nV$, то возникает двойственность между p-векторами и $(n-p)$-векторами, т. е. естественный изоморфизм

$$\pi:\Lambda^p(V)\longrightarrow(\Lambda^{n-p}V)^*\cong\Lambda^{n-p}(V^*)$$

такой, что $t\wedge u=\pi(t)(u)\omega$ для всех $t\in\Lambda^pV$ и $u\in\Lambda^{n-p}V$.

Пусть $k=\mathbb{R}$ и в V задано скалярное произведение, тогда в Λ^pV индуцируется скалярное произведение, обладающее следующим свойством: для любого ортонормированного базиса $v_1, \ldots, v_n$ в V базис $\{v_{i_1}\wedge\ldots\wedge v_{i_p}\mid i_1<\ldots<i_p\}$ в Λ^pV также ортонормирован. Скалярный квадрат

$$(t,\,t)=\sum\nolimits_{i_1<\ldots<i_p}(t^{i_1\ldots i_p})^2$$

разложимого поливектора $t=x_1\wedge\ldots\wedge x_p$ совпадает с квадратом объема параллелепипеда в V, натянутого на векторы $x_1, \ldots, x_p$. Если фиксировать в n-мерном евклидовом пространстве V ориентацию (что равносильно выбору n-вектора ω, для к-рого $(\omega,\,\omega)=1$), то указанная выше двойственность приводит к естественному изоморфизму $\gamma:\Lambda^pV\to\Lambda^{n-p}V$ такому, что $t\wedge u=(\gamma(t),\,u)\omega$ для всех $t\in\Lambda^pV$, $u\in\Lambda^{n-p}V$. В частности, $(n-1)$-вектору $t=x_1\wedge\ldots\wedge x_{n-1}$ соответствует вектор $\gamma(t)\in V$, наз. в е к т о р н ы м п р о и з в е д е н и е м векторов $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Кострикин А. И., Манин Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980; [3] Постников М. М., Линейная алгебра и дифференциальная геометрия, М., 1979.

А. Л. Онищик.

ПОЛИГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, г и п е р г а р м о н и ч е с к а я ф у н к ц и я, м е т а г а р м о н и ч е с к а я ф у н к ц и я, порядка m — функция $u(x)=u(x_1, \ldots, x_n)$ действительных переменных, определенная в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant2$, имеющая непрерывные частные производные до $2m$-го порядка включительно и удовлетворяющая всюду в D п о л и г а р м о н и ч е с к о м у у р а в н е н и ю

$$\Delta^mu\equiv\Delta(\Delta\ldots(\Delta u))=0,\quad m\geqslant1,$$

где Δ — оператор Лапласа. При $m=1$ получаются *гармонические функции*, при $m=2$ — *бигармониче-*

ские функции. Каждая П. ф. есть аналитич. функция от координат x_j. Нек-рые другие свойства гармонич. функций также переносятся с соответствующими изменениями на П. ф.

Для П. ф. любого порядка $m>1$ обобщаются представления при помощи гармонич. функций, известные для бигармонич. функций (см. [1] — [5]). Напр., для П. ф. u двух переменных справедливо представление

$$u(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{m-1} r^{2k}\omega_k(x_1, x_2), \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

где ω_k, $k=0, \ldots, m-1$ — гармонич. функции в области D. Для того чтобы функция $u(x_1, x_2)$ двух переменных была П. ф., необходимо и достаточно, чтобы она была действительной (или мнимой) частью *полианалитической функции*.

Основная краевая задача для П. ф. порядка $m>1$ состоит в следующем: найти П. ф. $u=u(x)$ в области D, непрерывную вместе с производными до $(m-1)$-го порядка включительно в замкнутой области $\overline{D} = D \cup C$ и удовлетворяющую на границе C условиям:

$$\left.\begin{aligned} & u|_C = f_0(y), \\ & \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_C = f_1(y), \ \ldots, \ \frac{\partial^{m-1}u}{\partial n^{m-1}}\Big|_C = f_{m-1}(y), \ y \in C, \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

где $\partial u/\partial n$ — производная по нормали к C, а $f_0(y)$, $\ldots$, $f_{m-1}(y)$ — заданные достаточно гладкие функции на достаточно гладкой границе C. Многие исследования посвящены решению задачи (*) в шаре пространства $\mathbb{R}^n$ (см. [1], [6]). Для решения задачи (*) в случае произвольной области применялся метод интегральных уравнений, а также различные вариационные методы (см. [1], [6]).

Лит.: [1] Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М.— Л., 1948; [2] Привалов И. И., Пчелин Б. М., «Матем. сб.», 1937, т. 2, в. 4, с. 745—58; [3] Nicolesco M., Les fonctions polyharmoniques, P., 1936; [4] его же, «Disq. Math. Phys.», 1940, v. 1, p. 43—56; [5] Tolotti C., «Giorn. Math. Battaglini», 1947, v. 1, p. 61—117; [6] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957. *Е. Д. Соломенцев.*

ПОЛИГОН над моноидом R, R-полигон, операнд,— непустое множество с моноидом операторов. Точнее, непустое множество A наз. левым П. над моноидом R, если для любых $\lambda \in R$ и $a \in A$ определено произведение $\lambda a \in A$, причем

$$(\lambda\mu)\, a = \lambda\, (\mu a)$$

и

$$1a = a$$

для любых $\lambda, \mu \in R$, $a \in A$. Правый П. определяется аналогично. Задание R-полигона A равносильно заданию гомоморфизма φ моноида R в моноид отображений множества A в себя, переводящего 1 в тождественное отображение. При этом $\lambda a = b$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi(\lambda)(a) = b.$$

В частности, каждое непустое множество можно рассматривать как П. над моноидом его отображений в себя. Таким образом, П. тесно связан с представлением полугруппы преобразованиями.

Если A — *универсальная алгебра*, сигнатура к-рой Ω содержит лишь унарные операции, то A можно превратить в П. над свободным моноидом F с системой свободных образующих Ω, положив

$$(f_1 f_2 \ldots f_n)\, a = f_1(f_2(\ldots(f_n(a))\ldots))$$

для любых $f_i \in \Omega$, $a \in A$. Если Ω — множество входных сигналов автомата с множеством состояний A, то A аналогичным образом превращается в F-полигон (ср. *Автоматов алгебраическая теория*).

Отображение φ R-полигона A в R-полигон B наз. гомоморфизмом, если $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$ для лю-

бых $\lambda \in R$ и $a \in A$. При $A=B$ получается определение эндоморфизма. Все эндоморфизмы полигона A образуют моноид, и A можно рассматривать как П. над ним.

Эквивалентность θ на R-полигоне A наз. конгруэнцией, если $(a,\ b) \in \theta$ влечет $(\lambda a,\ \lambda b) \in \theta$ для любого $\lambda \in R$. Множество классов конгруэнции θ естественным образом превращается в R-полигон, называемый факторполигоном полигона A и обозначаемый через A/θ. Если A — полигон над R, то на R можно определить отношение Ann A, положив $(\lambda,\ \mu) \in \mathrm{Ann}\, A$, если $\lambda a = \mu a$ для всех $a \in A$. Отношение Ann A оказывается конгруэнцией моноида R, и A естественным образом превращается в П. над фактормоноидом $R/\mathrm{Ann}\, A$. Если полигон A возник из нек-рого автомата, то описанный переход равносилен «склеиванию» одинаковым образом действующих последовательностей входных сигналов. Наряду с обычными для универсальных алгебр конструкциями прямого и подпрямого произведения, в теории П. рассматривается важная для алгебраич. теории автоматов конструкция сплетения. Свободное произведение (или копроизведение) П. совпадает с их дизъюнктным объединением.

На П. можно смотреть как на неаддитивный аналог модуля над кольцом, что служит богатым источником задач теории П. В частности, установлена связь П. с *радикалами* в полугруппах и исследуются связи свойств моноида со свойствами П. над ним. Напр., все левые R-полигоны проективны тогда и только тогда, когда R — одноэлементная группа, а инъективность всех П. над коммутативным моноидом R равносильна наличию в R нуля и порождаемости всех его идеалов идемпотентами (ср. *Гомологическая классификация колец*).

Если R — моноид с нулем 0, то можно говорить об R-полигоне A с нулем как об R-полигоне с отмеченной точкой u, причем $0a=u$ для всех $a \in A$. Теория П. с нулем имеет нек-рые особенности.

Каждый П. можно рассматривать как функтор из однообъектной категории в категорию множеств.

Лит.: [1] Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп, пер. с англ., М., 1975; [2] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 2, М., 1972; [3] Скорняков Л. А., в сб.: Модули, в. 3, Новосиб., 1973, с. 22—27; [4] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 14, М., 1976, с. 57—190.

Л. А. Скорняков.

ПОЛИКРУГ, полицилиндр,— область

$$\Delta = \Delta(a=(a_1,\ \ldots,\ a_n),\ r=(r_1,\ \ldots,\ r_n) = \{z=(z_1,\ \ldots,\ z_n) \in \mathbb{C}^n : |\, z_\nu - a_\nu\,| < r_\nu,\ \nu=1,\ \ldots,\ n\}$$

комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, являющаяся топологич. произведением n кругов,

$$\Delta = \Delta_1 \times \ldots \times \Delta_n,$$

$$\Delta_\nu = \{z_\nu \in \mathbb{C} : |\, z_\nu - a_\nu\,| < r_\nu\},\ \nu=1,\ \ldots,\ n.$$

Точка $a=(a_1,\ \ldots,\ a_n) \in \mathbb{C}^n$ — центр поликруга Δ, $r=(r_1,\ \ldots,\ r_n)$, $r_\nu > 0$, $\nu=1,\ \ldots,\ n$,— его мультирадиус. При $a=0$, $r=(1,\ \ldots,\ 1)$ получается единичный поликруг. Остовом поликруга Δ наз. часть

$$T = T(a,\ r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |\, z_\nu - a_\nu\,| = r_\nu,\ \nu=1,\ \ldots,\ n\}$$

его полной топологич. границы $\partial\Delta$. П. есть полная *кратно круговая область*.

Естественным обобщением понятия П. является полиобласть (поликруговая область, обобщенный полицилиндр) $D=D_1 \times \ldots \times D_n$, являющаяся топологич. произведением n (вообще говоря, многосвязных) областей $D_\nu \subset \mathbb{C}$, $\nu=1,$

..., n. Граница $\Gamma=\partial D$ полиобласти D состоит из n множеств размерности $2n-1$:

$$\Gamma_\nu=\{z\in\mathbb{C}^n:\ z_\nu\in\partial D_\nu,\ z_\mu\in\overline{D}_\mu,\ \mu\neq\nu\},\ \nu=1,\ \ldots,\ m,$$

общая часть к-рых есть n-мерный остов полиобласти D:

$$T=\partial D_1\times\ldots\times\partial D_n=\{z\in\mathbb{C}^n:\ z_\nu\in\partial D_\nu,\ \nu=1,\ \ldots,\ n\}.$$

Е. Д. Соломенцев.

ПОЛИЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА — часть алгебры, изучающая *полилинейные отображения* модулей (в частности, векторных пространств). Первыми разделами П. а. явились теория *билинейных форм* и *квадратичных форм*, теория *определителей* и развивающее ее исчисление Грассмана (см. *Внешняя алгебра*). Основную роль в П. а. играют понятия *тензорного произведения*, *тензора*, *полилинейной формы*. Приложения П. а. к геометрии и анализу связаны главным образом с *тензорным исчислением* и *дифференциальными формами*.

А. Л. Онищик.

ПОЛИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА, n-линейная форма, на унитарном A-модуле E — *полилинейное отображение* $E^n\to A$ (здесь A — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей). П. ф. наз. также полилинейной функцией (n-линейной функцией). Поскольку П. ф.— частный случай полилинейных отображений, можно говорить о симметрических, кососимметрических, знакопеременных, симметризованных и кососимметризованных П. ф. Напр., определитель квадратной матрицы порядка n над A — это кососимметризованная (и тем самым знакопеременная) n-линейная форма на A^n. n-линейные формы на E образуют A-модуль $L_n(E,\ A)$, естественно изоморфный модулю $(\overset{n}{\bigotimes}E)^*$ всех линейных форм на $\overset{n}{\bigotimes}E$. В случае $n=2$ ($n=3$) говорят о *билинейных формах* (трилинейных формах).

n-линейные формы на E тесно связаны с n раз ковариантными тензорами, т. е. элементами модуля $T^n(E^*)=\bigotimes^n E^*$. Точнее, имеется линейное отображение

$$\gamma_n: T^n(E^*)\longrightarrow L_n(E,\ A)$$

такое, что

$$\gamma_n(u_1\otimes\ldots\otimes u_n)(x_1,\ \ldots,\ x_n)=u_1(x_1)\ldots u_n(x_n)$$

для любых $u_i\in E^*$, $x_i\in E$. Если модуль E свободен, то γ инъективно, а если E к тому же конечно порожден, то и биективно. В частности, n-линейные формы на конечномерном векторном пространстве над полем отождествляются с n раз ковариантными тензорами.

Для любых форм $u\in L_n(E,\ A)$, $v\in L_m(E,\ A)$ определяется их тензорное произведение $u\otimes v\in L_{n+m}(E,\ A)$ формулой

$$u\otimes v(x_1,\ \ldots,\ x_{n+m})=u(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,v(x_{n+1},\ \ldots,\ x_{n+m}).$$

Для симметризованных П. ф. определено также симметрич. произведение

$$(\sigma_n u)\vee(\sigma_m v)=\sigma_{n+m}(u\otimes v),$$

а для кососимметризованных П. ф.— внешнее произведение

$$(\alpha_n u)\wedge(\alpha_m v)=\alpha_{n+m}(u\otimes v).$$

Эти операции распространяются на модуль $L_*(E,\ A)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}L(E,\ A)$, где $L_0(E,\ A)=A$, $L_1(E,\ A)=E^*$, модуль симметризованных форм $L_\sigma(E,\ A)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\sigma_n L_n(E,\ A)$ и модуль кососимметризованных форм $L_\alpha(E,\ A)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\alpha_n L_n(E,\ A)$ соответственно, превращая их в ассоциативные алгебры с единицами. Если E — конечно порожденный свободный модуль, то отображения γ_n определяют изоморфизм *тензорной алгебры*

$T(E^*)$ на $L_*(E, A)$ и *внешней алгебры* $\Lambda(E^*)$ на алгебру $L_\alpha(E, A)$, совпадающую в этом случае с алгеброй знакопеременных форм. Если A — поле характеристики 0, то имеется также изоморфизм симметрич. алгебры $S(E^*)$ на алгебру $L_\sigma(E, A)$ симметрич. форм.

Всякой П. ф. $u \in L_n(E, A)$ соответствует функция $\omega_n(u) : E \to A$, заданная формулой

$$\omega_n(u)(x) = u(x, \ldots, x), \quad x \in E.$$

Функции вида $\omega_n(u)$ наз. ф о р м а м и с т е п е н и n на E; если E — свободный модуль, то в координатах относительно произвольного базиса они задаются однородными многочленами степени n. В случае $n=2$ ($n=3$) получаются *квадратичные формы* и *кубические формы* на E. Форма $F=\omega(u)$ полностью определяет симметризацию $\sigma_n u$ формы $u \in L_n(E, A)$, имеющую вид

$$\sigma_n u(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \sum_{i_1 < \ldots < i_r} F(x_{i_1} + \ldots + x_{i_r}).$$

В частности, для $n=2$

$$(\sigma_2 u)(x, y) = F(x+y) - F(x) - F(y).$$

Отображения γ_n и ω_n определяют гомоморфизм алгебры $S(E^*)$ на алгебру всех *полиномиальных функций* $P(E)$, к-рый является изоморфизмом, если E — свободный конечно порожденный модуль над бесконечной областью целостности A.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [3] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968. *А. Л. Онищик.*

ПОЛИЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, n-л и н е й н о е о т о б р а ж е н и е, п о л и л и н е й н ы й о п е р а т о р,— отображение f прямого произведения $\prod_{i=1}^{n} E_i$ n унитарных модулей E_i над ассоциативно-коммутативным кольцом A с единицей в нек-рый A-модуль F, линейное по каждому аргументу, т. е. удовлетворяющее условию

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, ay+bz, x_{i+1}, \ldots, x_n) =$$
$$= af(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) +$$
$$+ bf(x_i, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
$$(a, b \in A;\ y, z \in E_i,\ i=1, \ldots, n).$$

В случае $n=2$ ($n=3$) говорят о *билинейном отображении* (соответственно трилинейном). Каждое П. о.

$$f : \prod_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow F$$

определяет единственное линейное отображение $\bar{f}$ тензорного произведения $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i$ в F такое, что

$$\bar{f}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = f(x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in E_i,$$

причем соответствие $f \mapsto \bar{f}$ есть биекция множества П. о. $\prod_{i=1}^{n} E_i \to F$ на множество всех линейных отображений $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i \to F$. П. о. $\prod_{i=1}^{n} E_i \to F$ естественным образом образуют A-модуль.

В A-модуле $L_n(E, F)$ всех n-линейных отображений $E^n \to F$ действует симметрич. группа S_n:

$$(sf)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(n)}),$$

где $s \in S_n$, $f \in L_n(E, F)$, $x_i \in E$. П. о. f наз. с и м м е т р и ч е с к и м, если $sf=f$ для всех $s \in S_n$, и к о с о с и м м е т р и ч е с к и м, если $sf=\varepsilon(s)f$, где $\varepsilon(s) = \pm 1$ в зависимости от четности подстановки s. П. о. наз. з н а к о п е р е м е н н ы м (или а л ь т е р н и р о в а н н ы м), если $f(x_1, \ldots, x_n)=0$, как только $x_i=x_j$ для нек-рых $i \neq j$. Всякое знакопеременное П. о. кососимметрично, а если в F уравнение $2y=0$ имеет един-

ственное решение $y=0$, то верно и обратное. Симметрические П. о. образуют подмодуль в $L_n(E, F)$, естественно изоморфный модулю линейных отображений $L(S^nE, F)$, где S^nE есть n-я симметрич. степень E (см. *Симметрическая алгебра*), знакопеременные П. о.— подмодуль, естественно изоморфный $L(\Lambda^nE, F)$, где Λ^nE есть n-я внешняя степень модуля E (см. *Внешняя алгебра*). П. о. вида $\alpha_n f=\sum_{s\in S_n} sf$ наз. симметризованными, а П. о. вида $\sigma_n f=\sum_{s\in S_n}\varepsilon(s)sf$ — кососимметризованными. Симметризованные (кососимметризованные) П. о. симметричны (соответственно знакопеременны), а если в F уравнение $n!y=c$ имеет для каждого $c\in F$ единственное решение, то верно и обратное. Для того чтобы всякое знакопеременное П. о. было кососимметризованным, достаточно также, чтобы модуль E был свободным.

Лит. см. при ст. *Полилинейная форма. А. Л. Онищик.*

ПОЛИНИЛЬПОТЕНТНАЯ ГРУППА — группа, обладающая конечным *нормальным рядом*, факторы к-рого нильпотентны; такой ряд наз. полинильпотентным. Длина кратчайшего полинильпотентного ряда П. г. наз. ее полинильпотентной длиной. Класс всех П. г. совпадает с классом всех *разрешимых групп*; однако, вообще говоря, полинильпотентная длина меньше разрешимой. П. г. длины 2 наз. метанильпотентными.

Все группы, обладающие (возрастающим) полинильпотентным рядом длины l, факторы к-рого (в порядке возрастания ряда) имеют классы нильпотентности, не превосходящие чисел $c_1, c_2, \ldots, c_l$ соответственно, образуют многообразие $\mathfrak{M}$, являющееся произведением нильпотентных многообразий:

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_{c_1}\mathfrak{N}_{c_2}\ldots\mathfrak{N}_{c_l}$$

(см. *Групп многообразие*). Свободные группы такого многообразия наз. свободными полинильпотентными группами. Особый интерес представляют многообразия $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c$. Первое из них содержит все связные разрешимые группы Ли; во втором все конечно порожденные группы конечно аппроксимируемы и удовлетворяют условию максимальности для нормальных подгрупп.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Неймам Х., Многообразия групп, пер. с англ., М., 1969.

А. Л. Шмелькин.

ПОЛИНОМ — то же, что *многочлен*.

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ — обобщение понятия целой рациональной функции (см. *Многочлен*). Пусть V — унитарный модуль над ассоциативно-коммутативным кольцом C с единицей. Отображение $\varphi: V\to C$ наз. П. ф., если $\varphi=\varphi_0+\ldots+\varphi_m$, где φ_i — форма степени i на V, $i=0, 1, \ldots, m$ (см. *Полилинейная форма*). Наиболее часто П. ф. рассматриваются в случае, когда V — свободный C-модуль (напр., векторное пространство над полем C) с конечным базисом $v_1, \ldots, v_n$. В этом случае отображение $\varphi: V\to C$ является П. ф. тогда и только тогда, когда $\varphi(x)=F(x_1, \ldots, x_n)$, где $F\in C[X_1, \ldots, X_n]$ — многочлен над C и $x_1, \ldots, x_n$ — координаты элемента $x\in V$ в базисе $v_1, \ldots, v_n$. Если при этом C — бесконечная область целостности, то многочлен F определяется однозначно.

П. ф. на модуле V образуют ассоциативно-коммутативную C-алгебру $P(V)$ с единицей относительно естественных операций. В случае, когда V — свободный модуль с конечным базисом над бесконечной областью целостности C, алгебра $P(V)$ канонически изоморфна симметрич. алгебре $S(V^*)$ сопряженного модуля V^*, а если V — конечномерное векторное пространство над полем характеристики 0,— алгебре симметрических полилинейных форм на V. *А. Л. Онищик.*

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, мультиномиальное распределение, — совместное распределение случайных величин $X_1, \ldots, X_k$. к-рое задается для любого набора целых неотрицательных чисел $n_1, \ldots, n_k$, удовлетворяющих условию $n_1+\ldots+n_k=n$, $k_j=0, 1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, k$, формулой

$$\mathsf{P}\{X_1=n_1, \ldots, X_k=n_k\}=\frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}p_1^{n_1}\ldots p_k^{n_k}, \quad (*)$$

где n, $p_1, \ldots, p_k (p_j \geqslant 0, \sum_j p_j=1)$ — параметры распределения. П. р. является многомерным дискретным распределением — распределением случайного вектора $(X_1, \ldots, X_k)$ с $X_1+\ldots+X_k=n$ (это распределение является по существу $(k-1)$-мерным, т. к. в евклидовом пространстве k измерений оно вырождено). П. р. естественным образом обобщает *биномиальное распределение* и совпадает с последним при $k=2$. Название распределения объясняется тем, что вероятность $(*)$ является общим членом разложения многочлена (полинома) $(p_1+\ldots+p_k)^n$. П. р. появляется в следующей вероятностной схеме. Каждая из случайных величин X_j есть число появлений одного из взаимоисключающих событий A_j, $j=1, \ldots, k$, при повторных независимых испытаниях. Если при каждом испытании вероятность появления события A_j равна p_j, $j=1, \ldots, k$, то вероятность $(*)$ равна вероятности того, что при n испытаниях события $A_1, \ldots, A_k$ появятся $n_1, \ldots, n_k$ раз соответственно. Каждая из случайных величин X_j имеет биномиальное распределение с математич. ожиданием np_j и дисперсией $np_j(1-p_j)$.

Случайный вектор $(X_1, \ldots, X_k)$ имеет математич. ожидание $(np_1, \ldots, np_k)$ и ковариационную матрицу $B=\|b_{ij}\|$, где

$$b_{ij}=\begin{cases} np_i(1-p_i), & i=j, \\ -np_ip_j, & i \neq j \end{cases}$$
$$i, j=1, \ldots, k$$

(ранг матрицы B равен $k-1$ в силу того, что $\sum_{i=1}^k n_i=n$). Характеристич. функция П. р. равна

$$f(t_1, \ldots, t_k)=\left(p_1e^{it_1}+\ldots+p_ke^{it_k}\right)^n.$$

При $n\to\infty$ распределение вектора $(Y_1, \ldots, Y_k)$ с нормированными компонентами

$$Y_j=\frac{X_j-np_j}{\sqrt{np_j(1-p_j)}}$$

стремится к нек-рому многомерному *нормальному распределению*, а распределение суммы

$$\sum_{i=1}^k (1-p_i)Y_i^2$$

(к-рая используется в математич. статистике для построения *«хи-квадрат» критерия*) стремится к *«хи-квадрат» распределению* с $k-1$ степенями свободы.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

А. В. Прохоров.

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ — коэффициент

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}, \quad n_1+n_2+\ldots+n_m=n,$$

при $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_m^{n_m}$ в разложении многочлена (полинома) $(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n$. В комбинаторике П. к. выражает: а) число всевозможных перестановок из n элементов, из к-рых n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида, $\ldots$, n_m элементов m-го вида; б) число способов размещения n различных элементов по m различным ячейкам, при к-ром в i-ю ячейку помещается n_i элементов, $i=1, 2, \ldots, m$, без учета порядка элементов в любой ячейке.

Частным случаем П. к. являются *биномиальные коэффициенты*.

Лит.: [1] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [2] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963.

С. А. Рукова.

ПОЛИЦИКЛИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа, обладающая полициклическим рядом, т. е. субнормальным рядом с циклич. факторами (см. *Подгрупп ряд*). Класс П. г. тождествен классу разрешимых групп с условием максимальности для подгрупп; он замкнут относительно перехода к подгруппам, факторгруппам и расширениям. Число бесконечных факторов в любом полициклич. ряде — инвариант П. г. (полициклический ранг). Голоморф П. г. изоморфно вкладывается в группу матриц над кольцом целых чисел; это позволяет применять в теории П. г. методы алгебраич. геометрии, теории чисел и p-адического анализа. Если k — алгебраич. расширение конечного поля, G — конечное расширение П. г., то всякий простой kG-модуль конечномерен над k. Во всякой группе произведение двух локально полициклич. нормальных подгрупп — локально полициклич. подгруппа.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982; [2] Three lectures on polycyclic groups, L., 1973.

Ю. И. Мерзляков.

ПОЛИЭДР — объединение локально конечного семейства выпуклых многогранников в нек-ром $\mathbb{R}^n$. Под выпуклым многогранником понимается пересечение конечного числа замкнутых полупространств в случае, если это пересечение ограничено. Локальная конечность семейства означает, что каждая точка $\mathbb{R}^n$ имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом многогранников. Компактный П. является объединением конечного числа выпуклых многогранников. Размерность П. определяется как максимальная размерность составляющих его многогранников. Любое открытое подмножество П., в частности любое открытое подмножество евклидова пространства, есть П. Полиэдрами являются также *конус* и *надстройка* над компактным П. Простые примеры (конус над интервалом) показывают, что соединение компактного и некомпактного П. может не быть П. Подполиэдром полиэдра Q наз. любой полиэдр P, лежащий в Q. Иногда ограничиваются рассмотрением только замкнутых подполиэдров. Каждая точка a полиэдра $P \in \mathbb{R}^n$ обладает в P окрестностью, являющейся конусом в $\mathbb{R}^n$ с вершиной a и с компактным основанием. Это свойство оказывается характеристическим: любое подмножество $\mathbb{R}^n$, каждая точка к-рого имеет конич. окрестность с компактным основанием, является П.

Каждый компактный полиэдр P можно так разбить на конечное число замкнутых симплексов, чтобы каждые два симплекса либо не пересекались, либо пересекались по их общей грани. В случае некомпактного П. требуется, чтобы семейство симплексов было локально конечным. Такое разбиение наз. прямолинейной триангуляцией П. Любые две триангуляции одного и того же П. имеют общее подразделение. Если P — замкнутый подполиэдр полиэдра Q, то любая триангуляция K полиэдра P продолжается до нек-рой триангуляции L полиэдра Q. В этом случае говорят, что получающаяся пара (L, K) геометрических симплициальных комплексов триангулирует пару (Q, P). Отображение f полиэдра $P \subset \mathbb{R}^n$ в полиэдр $Q \subset \mathbb{R}^m$ наз. кусочно линейным, или pl-отображением, если f является симплициальным в нек-рых триангуляциях полиэдров P и Q. Эквивалентное определение: f кусочно линейно, если f локально коническое, т. е. если каждая точка $a \in P$ имеет такую конич. окрестность $N = a * L$, что $f(\lambda a + \mu x) = \lambda f(a) + \mu f(x)$ при любых $x \in L$ и $\lambda, \mu \geqslant 0$, $\lambda + \mu = 1$. Для того чтобы отображение f было кусочно линей-

ным, необходимо и достаточно, чтобы его график $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ являлся П. Суперпозиция кусочно линейных отображений кусочно линейна. Обратное отображение к обратимому кусочно линейному отображению f кусочно линейно. В этом случае f наз. *pl-гомеоморфизмом*.

Категория, объектами к-рой являются П. (и полиэдральные пары), а морфизмами являются *pl*-отображения, обозначается PL или $\mathcal{P}$ (см. также *Кусочно линейная топология*). Категория PL является одним из основных объектов и инструментов исследования в топологии. Особенно велика роль категории PL в *алгебраической топологии* и *топологии многообразий*. Это объясняется тем, что класс П. достаточно широк.

Напр., каждое *дифференцируемое многообразие* можно естественным образом представить в виде П. Каждое *непрерывное отображение* одного П. в другой сколь угодно точно аппроксимируется *pl*-отображением. Поэтому категория PL является хорошим приближением к категории всех топологич. пространств и непрерывных отображений. С другой стороны, триангулируемость П. позволяет использовать методы комбинаторной топологии. Многие алгебраич. инварианты (напр., *гомологий группы*, *когомологий кольцо*) строятся и эффективно вычисляются с помощью разбиения на симплексы. Вопрос о том, всякие ли гомеоморфные полиэдры *pl*-гомеоморфны, носит название основной гипотезы и решается отрицательно: для $n \geqslant 5$ существуют гомеоморфные, но не *pl*-гомеоморфные n-мерные П. (см. [3]). При $n \leqslant 3$ гомеоморфные n-мерные полиэдры *pl*-гомеоморфны, при $n=4$ вопрос остается (1983) открытым для компактных П. и решается отрицательно для некомпактных: существует нестандартная *pl*-структура на $\mathbb{R}^4$. Полиэдр M наз. n-мерным *pl*-многообразием, если каждая его точка имеет окрестность, *pl*-гомеоморфную $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_+$. Всякая прямолинейная триангуляция T *pl*-многообразия M комбинаторна. Это означает, что звезда каждой ее вершины комбинаторно эквивалентна симплексу. Основная гипотеза для П., *являющихся* n-мерными топологич. многообразиями, естественно распадается на две гипотезы: гипотезу о комбинаторности всякой триангуляции такого П. и основную гипотезу для *pl*-многообразий. Одним из важнейших достижений современной топологии является отрицательный ответ на обе гипотезы для $n \geqslant 5$ (см. [4], [5]). Для $n \leqslant 3$ обе гипотезы справедливы.

Пусть P — компактный подполиэдр полиэдра Q и пусть пара геометрических симплициальных комплексов (L, K) триангулирует пару (Q, P) так, что K — полный подкомплекс. Это означает, что каждый симплекс комплекса L, вершины к-рого лежат в K, лежит в K, и этого всегда можно добиться с помощью перехода к производному *подразделению*. Полиэдр N, состоящий из всех замкнутых симплексов производного подразделения L', имеющих вершину в K, а также его образ при любом неподвижном на P *pl*-гомеоморфизме Q на себя, наз. регулярной окрестностью полиэдра P в полиэдре Q. Для любых двух регулярных окрестностей N_1, N_2 полиэдра P существует неподвижная на P *pl*-изотопия $h_t : N_1 \times I \to Q$, переводящая N_1 в N_2, т. е. такая, что $h_0(N_1) = N_1$ и $h_1(N_1) = N_2$. Говорят, что полиэдр P получается элементарным полиэдральным стягиванием полиэдра $P_1 \supset P$, если для нек-рого $n \geqslant 0$ пара $(\overline{P_1 \setminus P},\ \overline{P_1 \setminus P} \cap P)$ *pl*-гомеоморфна паре $(I^n \times I,\ I^n \times \{0\})$. Полиэдр P_1 полиэдрально стягивается на свой подполиэдр P (обозначение $(P_1 \searrow P)$), если от P_1 к P можно перейти конечной последовательностью элементарных полиэдральных стягиваний. Если $P_1 \searrow P$, то в нек-рой триангуляции пары $(P_1,\ P)$ полиэдр P

можно получить из P_1 последовательностью элементарных комбинаторных стягиваний, каждое из к-рых состоит в отбрасывании главного симплекса вместе с его свободной гранью. Если Q является n-мерным pl-многообразием, то любая регулярная окрестность компактного подполиэдра $P \subset Q$ является n-мерным pl-многообразием и полиэдрально стягивается на P. Это свойство оказывается характеристическим: если n-мерное pl-многообразие $N \subset Q$ таково, что $P \subset \operatorname{Int} N$ и $N \setminus P$, то N — регулярная окрестность P. При этом любая регулярная окрестность края ∂M компактного pl-многообразия M pl-гомеоморфна $\partial M \times I$.

Пусть P, Q — замкнутые подполиэдры n-мерного pl-многообразия M, $\dim P = p$, $\dim Q = q$. Говорят, что P и Q находятся в общем положении, если $\dim (P \cap Q) \leqslant p+q-n$. Любые замкнутые подполиэдры P, $Q \subset \operatorname{Int} M$ можно привести в общее положение сколь угодно малой изотопией M. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $(\varepsilon - pl)$-изотопия $h_t : M \to M$, что полиэдры P и $Q_1 = h_1(Q)$ находятся в общем положении. Иногда в определение общего положения включают условия типа трансверсальности. Напр., если $p+q=n$, то можно добиться, чтобы для каждой точки $a \in P \cap Q_1$ и нек-рой окрестности U точки a в M тройка $(U, U \cap P, U \cap Q_1)$ была pl-гомеоморфна тройке $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{R}^q)$.

К р и в о й, или т о п о л о г и ч е с к и й, П.— топологич. пространство X, снабженное гомеоморфизмом $f : P \to X$, где P есть П. Образы симплексов какой-либо триангуляции T полиэдра P образуют к р и в о л и н е й н у ю т р и а н г у л я ц и ю X. Говорят также, что гомеоморфизм f задает на X pl-с т р у к т у р у. Две pl-структуры $f_i : P_i \to X$, $i=1, 2$, совпадают, если гомеоморфизм $f_2^{-1} f_1$ кусочно линеен, изотопны, если гомеоморфизм $f_2^{-1} f_1$ изотопен кусочно линейному, и эквивалентны, если P_1 и P_2 pl-гомеоморфны. Для любого дифференцируемого многообразия M существует pl-структура $f : P \to M$, согласованная с дифференцируемой структурой на M. Это означает, что для каждого замкнутого симплекса σ нек-рой триангуляции полиэдра P отображение $f|_\sigma : \sigma \to M$ дифференцируемо и не имеет особых точек. Любые две такие pl-структуры на M изотопны. Все понятия, определяемые для П. (триангуляция, подполиэдр, регулярная окрестность, общее положение), переносятся с помощью гомеоморфизма $f : P \to X$ на криволинейный полиэдр X.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947; [2] Р у р к К., С а н д е р с о н Б., Введение в кусочно линейную топологию, М., 1974; [3] M i l n o r J., «Ann. Math.», 1961, v. 74, № 3, p. 575; [4] K i r b y R., S i e b e n m a n n L., «Ann Math. Stud.», 1977, № 88; [5] E d w a r d s R., «Notices A. M. S.», 1975, v. 22, № 2, p. A-334.

С. В. Матвеев.

ПОЛИЭДРАЛЬНАЯ ЦЕПЬ — линейная форма $\sum_{i=1}^{m} d_i t_i^r$ в области $U \subset \mathbb{R}^n$, где t_i^r суть r-мерные симплексы, лежащие в U. При этом под r-мерным симплексом в U понимается упорядоченное множество из $r+1$ точки U, выпуклая оболочка к-рого лежит в U. Граница П. ц. определяется обычным образом. Понятие П. ц. занимает промежуточное положение между понятиями симплициальной цепи триангуляции U и сингулярной цепи в U и отличается от последнего линейностью симплексов.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975.

С. В. Матвеев.

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС — конечное множество замкнутых выпуклых многогранников в нек-ром $\mathbb{R}^n$, к-рое вместе с каждым многогранником содержит все его грани и такое, что пересечение различных многогранников либо пусто, либо является гранью каждого из них. Примером П. к. может служить совокупность всех вершин, ребер и двумерных граней

стандартного трехмерного куба. Рассматриваются также комплексы, состоящие из бесконечного, но локально конечного семейства многогранников. Понятие П. к. обобщает понятие геометрического симплициального комплекса. Тело $|P|$ П. к. P представляет собой объединение всех входящих в него многогранников и является *полиэдром*. Число многогранников в P, как правило, меньше числа симплексов в триангуляции. П. к. P_1 наз. *подразделением* комплекса P, если их тела совпадают и каждый многогранник из P_1 содержится в некотором многограннике из P. Звездное подразделение комплекса P с центром в точке $a \in |P|$ получается с помощью разбиения замкнутых многогранников, содержащих a, на конусы с вершиной a над теми их гранями, к-рые не содержат a. Любой П. к. P имеет подразделение K, являющееся геометрическим симплициальным комплексом. Такое подразделение можно получить без добавления новых вершин. Достаточно, напр., последовательно произвести звездные подразделения P с центрами во всех вершинах P.

Лит.: [1] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947.

С. В. Матвеев.

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЙ ЦИКЛ — *полиэдральная цепь*, граница к-рой равна нулю.

С. В. Матвеев.

ПОЛНАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — совокупность всех элементов аналитич. функции, получающихся при всевозможных *аналитических продолжениях* исходной аналитич. функции $f = f(z)$ комплексного переменного z, заданной первоначально в нек-рой области D расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Пара (D, f), состоящая из области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ и заданной в D однозначной аналитической, или голоморфной, функции f, наз. элементом аналитической функции, аналитическим элементом, или, короче, просто элементом. Всегда возможно, в частности, при задании аналитич. функции пользоваться вейерштрассовым, или регулярным, элементом $(U(a, R), f_a)$, состоящим при $a \neq \infty$ из степенного ряда

$$f_a = f_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \qquad (1)$$

и круга сходимости $U(a, R) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z-a| < R\}$ этого ряда с центром a и радиусом сходимости $R > 0$. В случае $a = \infty$ вейерштрассов элемент $(U(\infty, R), f_\infty)$ состоит из ряда

$$f_\infty = f_\infty(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k} \qquad (2)$$

и области сходимости этого ряда $U(\infty, R) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > R\}$, $R \geqslant 0$.

Пусть E_f — множество всех тех точек $\zeta \in \overline{\mathbb{C}}$, в к-рые исходный элемент $(U(a, R), f_a)$ аналитически продолжается хотя бы по одному пути, связывающему в $\overline{\mathbb{C}}$ точки a и ζ. Следует иметь в виду возможность такой ситуации, когда в точку $\zeta \in E_f$ аналитич. продолжение возможно вдоль нек-рого класса путей L_1 и невозможно вдоль другого класса путей L_2 (см. *Особая точка* аналитич. функции). Множество E_f есть область плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Полной аналитической функцией (в смысле Вейерштрасса) f_W, порожденной элементом $(U(a, R), f_a)$, называется совокупность всех вейерштрассовых элементов $(U(\zeta, R), f_\zeta)$, $\zeta \in E_f$, получаемых при этом аналитич. продолжении вдоль всевозможных путей $L \subset \overline{\mathbb{C}}$. Область E_f наз. (вейерштрассовой) областью существования П. а. ф. f_W. Применяя элементы общего вида (D, f), вместо вейерштрассовых на самом деле получают ту же самую П. а. ф. f_W. Элементы (D, f) П. а. ф. f_W часто наз. *ветвями аналитической функции* f_W. Любой элемент (D, f) П. а. ф.

f_W, будучи взят за исходный при аналитич. продолжении, приводит к той же самой П. а. ф. f_W. Каждый элемент $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ П. а. ф. f_W может быть получен из любого другого ее элемента $(U(a, R), f_a)$ посредством аналитич. продолжения вдоль нек-рого пути, связывающего в $\overline{\mathbb{C}}$ точки a и ζ.

Может оказаться, что исходный элемент (D, f) не допускает аналитич. продолжения ни в одну точку $\zeta \notin D$. В этом случае $D = E_f$ является естественной областью существования, или областью голоморфности, функции f, а ее граница $\Gamma = \partial D$ — естественной границей функции f. Напр., для вейерштрассова элемента

$$\left(U(0, 1),\ f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}\right)$$

естественной границей является окружность $\Gamma = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| = 1\}$ его круга сходимости $U(0, 1)$, т. к. этот элемент нельзя продолжить аналитически ни в одну точку ζ такую, что $|\zeta| \geqslant 1$. Какова бы ни была область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, можно построить аналитич. функцию $f_D(z)$, для к-рой D есть естественная область существования $f_D(z)$, а ее граница $\Gamma = \partial D$ — естественная граница $f_D(z)$ (это следует, напр., из *Миттаг-Леффлера теоремы*).

П. а. ф. f_W в своей области существования E_f, вообще говоря, не является функцией точки в обычном смысле этого слова. Часто встречающаяся в теории аналитич. функций ситуация такова, что П. а. ф. f_W есть многозначная функция: для каждой точки $\zeta \in E_f$ существует, вообще говоря, бесконечное множество элементов $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ с центром в этой точке. Однако это множество не более чем счетное (теорема Пуанкаре — Вольтерра). В целом П. а. ф. f_W можно рассматривать как однозначную аналитич. функцию только на соответствующей римановой поверхности, являющейся многолистной накрывающей поверхностью над $\overline{\mathbb{C}}$. Напр., П. а. ф. $f(z) = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ многозначна в своей области существования $E_f = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : 0 < |z| < \infty\}$; в каждой точке $\zeta \in E_f$ она принимает счетное множество значений

$$f_\zeta(\zeta;\ s) = \ln|\zeta| + i \arg\zeta + 2\pi s i,\ s = 0, \pm 1, \ldots,$$

и каждой точке $\zeta \in E_f$ соответствует счетное множество элементов

$$(U(\zeta, |\zeta|),\ f_\zeta(z;\ s)) = \\ = f_\zeta(\zeta;\ s) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k\zeta^k}(z-\zeta)^k$$

с центром ζ. Обычно используется однозначная ветвь этой П. а. ф. — главное значение логарифма $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, являющееся голоморфной функцией в области $D = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : 0 < |z| < \infty,\ -\pi < \arg z < \pi\}$, непрерывно продолжаемой на множество $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : 0 < |z| < \infty,\ -\pi < \arg\zeta \leqslant \pi\}$.

При обращении (см. *Обращение ряда*) вейерштрассовых элементов (1), (2) возникают элементы более общей природы, определяемые соответственно рядами Пюизё:

$$f_a = \sum_{k=\mu}^{\infty} c_k (z-a)^{k/\nu},\quad f_\infty = \sum_{k=\mu}^{\infty} c_k z^{-k/\nu}, \qquad (3)$$

где μ — целое число, ν — натуральное число, и кругами сходимости этих рядов $U(a, R)$, $U(\infty, R)$. В частности, при $\mu \geqslant 0$, $\nu = 1$ ряды (3) совпадают с рядами (1), (2), определяющими регулярные элементы; в отличие от них определяемые рядами (3) элементы при $\mu < 0$ или $\nu > 1$ наз. особыми. При $\nu = 1$ и $\nu > 1$ ряды (3) определяют соответственно неразветв-

ленные и (алгебраические) развет-вленные элементы.

Допуская при продолжении исходного элемента $(U(a, R), f_a)$ и особые элементы с рядами вида (3), вообще говоря, многозначные (при $\nu>1$) и имеющие особенности типа полюса (при $\mu<0$), получают более обширную, чем вейерштрассова, риманову область существования E_R и соответствующую более обширную совокупность элементов, определяемых рядами вида (3), называемую *аналитическим образом*. Аналитич. образ отличается от П. а. ф. присоединением всех особых элементов, получаемых при продолжении данного регулярного элемента. После введения соответствующей топологии аналитич. образ превращается в риманову поверхность данной функции.

При описанном построении П. а. ф. f_W можно пользоваться вместо элемента понятием ростка аналитич. функции, смысл введения к-рого заключается в локализации понятия элемента, в отвлечении от не имеющей в данном случае существенного значения величины радиуса сходимости. Два элемента (D, f) и (G, h) такие, что области D и G содержат общую точку a, наз. эквивалентными в точке a, если существует окрестность точки a, в к-рой $f=h$. Это отношение эквивалентности обладает обычными свойствами рефлексивности, симметрии и транзитивности. Класс эквивалентности элементов в данной точке $a\in\overline{\mathbb{C}}$ наз. ростком аналитической функции $\mathbf{f}_a$ в точке a. Росток характеризует локальные свойства функции в данной точке. Два ростка $\mathbf{f}_a$ и $\mathbf{g}_a$ равны, если в нек-рой окрестности точки a совпадают какие-либо представители классов эквивалентности. Аналогично, при помощи представителей, определяются арифметич. действия с ростками и их дифференцирование. П. а. ф. f_W есть совокупность всех ростков аналитич. функций $\mathbf{f}_\zeta$, $\zeta\in E_f$, получаемых из данного ростка $\mathbf{f}_a$ аналитич. продолжением вдоль всевозможных путей в $\overline{\mathbb{C}}$. Равенство двух П. а. ф. f_W, g_W и действия с П. а. ф. определяются как равенство ростков $\mathbf{f}_a$, $\mathbf{g}_a$ в какой-либо точке $a\in E_f\cap E_g$ и действия с ростками.

Элементы (D, f), вейерштрассовы элементы $(U^n(a, R), f_a)$ и ростки аналитич. функции многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n\geqslant 1$, определяются точно так же, как выше, но с помощью областей D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ или поликругов сходимости

$$U^n(a, R)=\{z\in\mathbb{C}^n: |z_j-a_j|<R_j,\ j=1, \ldots, n\};$$
$$R_j>0,\ j=1, \ldots, n;\ a=(a_1, \ldots, a_n);$$
$$R=(R_1, \ldots, R_n),$$

кратных степенных рядов

$$f_a=f_a(z)=\sum_{k_1, \ldots, k_n=0}^{\infty} c_{k_1\ldots k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\ldots(z_n-a_n)^{k_n}.$$

Понятие П. а. ф. многих комплексных переменных строится далее вполне аналогично случаю одного переменного.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [3] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [4] Фукс Б. А., Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1962.

Е. Д. Соломенцев.

ПОЛНАЯ ВАРИАЦИЯ функции — то же, что *вариация функции*.

ПОЛНАЯ ГРУППА — группа, в к-рой для любого ее элемента g и любого целого числа $n\neq 0$ разрешимо уравнение $x^n=g$. Абелева П. г. наз. также делимой группой. Важными примерами П. г. являются аддитивная группа всех рациональных чисел и группа

всех комплексных корней из 1 степеней p^k, $k=1, 2, \ldots$, где p — простое число (квазициклическая группа). Всякая абелева П. г. разлагается в прямую сумму групп, каждая из к-рых изоморфна одной из указанных. О неабелевых П. г. известно значительно меньше. Всякая неединичная П. г. бесконечна. Всякая группа вложима в подходящую П. г. Если в П. г. указанные в определении уравнения разрешимы однозначно, она наз. D-группой. Таковы, в частности, локально нильпотентные П. г. без кручения.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982. *А. Л. Шмелькин.*

ПОЛНАЯ КРИВИЗНА — 1) П. к. в точке поверхности Φ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ — скалярная величина K, равная произведению главных (нормальных) кривизн k_1 и k_2, вычисляемых в точке поверхности: $K=k_1k_2$; наз. также *гауссовой кривизной* поверхности. Понятие П. к. обобщается для гиперповерхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $n>2$. П. к. в этом случае есть величина $K=k_1 \ldots k_n$, где k_i — главная нормальная кривизна в точке гиперповерхности в i-м главном направлении.

П. к. в точке двумерной поверхности в трехмерном римановом пространстве равна разности внутренней кривизны — римановой кривизны двумерной поверхности, и внешней кривизны — римановой кривизны объемлющего пространства в направлении бивектора, касательного к поверхности в рассматриваемой точке.

2) П. к. области D на поверхности Φ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ — величина $\iint_D K d\sigma$, где K — гауссова кривизна поверхности в точке, $d\sigma$ — элемент площади поверхности. Аналогично определяется П. к. области нек-рого риманова многообразия, причем под K понимается риманова кривизна многообразия, вычисляемая в точках многообразия в направлении касательных бивекторов, а интегрирование ведется по площади (мере) области многообразия. *Л. А. Сидоров.*

ПОЛНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ГРУППА — группа всех обратимых матриц степени n над ассоциативным кольцом K с единицей; общепринятое обозначение: $\mathrm{GL}_n(K)$ или $\mathrm{GL}(n, K)$. П. л. г. $\mathrm{GL}(n, K)$ может быть также определена как группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}_K(V)$ свободного правого K-модуля V с n образующими.

В исследовании группы $\mathrm{GL}(n, K)$ большой интерес представляет вопрос о ее нормальном строении. Центр Z_n группы $\mathrm{GL}(n, K)$ состоит из скалярных матриц с элементами из центра кольца K. В классич. случае, когда K — поле, решающую роль играет исследование нормального строения специальной линейной группы $\mathrm{SL}(n, K)$, состоящей из матриц с определителем 1. А именно, коммутант группы $\mathrm{GL}(n, K)$ совпадает с $\mathrm{SL}(n, K)$ (кроме случая $n=2$, $|K|=2$), и всякая нормальная подгруппа группы $\mathrm{GL}(n, K)$ либо содержится в Z_n, либо содержит $\mathrm{SL}(n, K)$. В частности, специальная проективная группа

$$\mathrm{PSL}(n, K)=\mathrm{SL}(n, K)/\mathrm{SL}(n, K)\cap Z_n$$

является простой (за исключением случаев $n=2$, $|K|=2,3$).

Если K — тело и $n>1$, то всякая нормальная подгруппа группы $\mathrm{GL}(n, K)$ либо содержится в Z_n, либо содержит коммутант $\mathrm{SL}^+(n, K)$ группы $\mathrm{GL}(n, K)$, причем коммутант $\mathrm{SL}^+(n, K)$ порождается трансвекциями и факторгруппа $\mathrm{SL}^+(n, K)/\mathrm{SL}^+(n, K)\cap Z_n$ проста. Кроме того, существует естественный изоморфизм

$$\mathrm{GL}(n, K)/\mathrm{SL}^+(n, K)\simeq K^*/[K^*, K^*],$$

где K^* — мультипликативная группа тела K. Если K конечномерно над своим центром k, то роль группы

$\mathrm{SL}(n, K)$ играет группа всех матриц из $\mathrm{GL}(n, K)$ с приведенной нормой 1. Группы $\mathrm{SL}(n, K)$ и $\mathrm{SL}^1(n, K)$ не всегда совпадают, но если k — глобальное поле, то это так (см. *Кнезера — Титса гипотеза*).

Исследование нормального строения П. л. г. над произвольным кольцом K связано с развитием *алгебраической K-теории*. Над кольцами K общего типа группа $\mathrm{GL}(n, K)$ может быть весьма насыщена нормальными подгруппами. Напр., если K — коммутативное кольцо без делителей нуля и с конечным числом образующих, то группа $\mathrm{GL}(n, K)$ финитно аппроксимируема, т. е. для каждого ее элемента g существует нормальная подгруппа N_g конечного индекса, не содержащая g. В случае $K=\mathbb{Z}$ задача описания нормальных подгрупп группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ фактически эквивалентна *конгруэнц-проблеме* для группы $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, поскольку

$$[\mathrm{CL}(n, \mathbb{Z}):\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})]=2,$$

а всякая нескалярная нормальная подгруппа группы $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ при $n>2$ является конгруэнц-подгруппой.

Имеется глубокая аналогия между строением П. л. г. и строением других классич. групп, к-рая простирается далее на простые алгебраические группы и группы Ли.

Лит.: [1] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [2] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [3] Басс Х., Алгебраическая К-теория, пер. с англ., М., 1973. *В. П. Платонов.*

ПОЛНАЯ МЕРА — мера μ на σ-алгебре Σ, для к-рой равенство $|\mu|(A)=0$ влечет за собой $E\in\Sigma$ для всякого $E\subset A$. Здесь $|\mu|$ — полная вариация μ (для положительной меры $|\mu|=\mu$). *А. П. Терехин.*

ПОЛНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ — свойство *динамической системы*. Динамич. система наз. в п о л н е н е у с т о й ч и в о й, если все ее точки — блуждающие (см. *Блуждающая точка*).

Для того чтобы динамич. система, заданная на $\mathbb{R}^n$, была г л о б а л ь н о в ы п р я м л я е м о й (т. е. чтобы существовал гомеоморфизм $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, отображающий каждую траекторию системы на нек-рую прямую $\{a\}\times\mathbb{R}$, где точка $a\in\mathbb{R}^n$ зависит от траектории), необходимо и достаточно, чтобы система была вполне неустойчивой и не имела *седла в бесконечности* (т е о р е м а Н е м ы ц к о г о, см. [1]).

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949. *В. М. Миллионщиков.*

ПОЛНАЯ ПОДКАТЕГОРИЯ — подкатегория $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$ такая, что для любых объектов A, B из $\mathfrak{C}$ выполняется равенство

$$H_{\mathfrak{C}}(A, B)=H_{\mathfrak{K}}(A, B).$$

Таким образом, П. п. однозначно определяется классом своих объектов. Обратно, всякий подкласс класса объектов категории $\mathfrak{K}$ однозначно определяет П. п., для к-рой он служит классом объектов: в эту подкатегорию входят те и только те морфизмы, начала и концы к-рых принадлежат выделенному подклассу. В частности, П. п., соответствующая единственному объекту A, состоит из множества $H_{\mathfrak{K}}(A, A)$.

Многие важные классы подкатегорий (рефлективные и корефлективные подкатегории, многообразия и т. п.) являются П. п. *М. Ш. Цаленко.*

ПОЛНАЯ ПРОБЛЕМА с о б с т в е н н ы х з н а ч е н и й — задача вычисления всех (в отличие от *частичной проблемы*) собственных значений квадратной матрицы, обычно действительной или комплексной. Часто помимо собственных значений требуется еще и построение базиса из собственных или корневых векторов матрицы.

Решение П. п. собственных значений матрицы A сводится к построению характеристич. многочлена φ_A этой матрицы и вычислению его корней, действи-

тельных или комплексных (последнее обусловливает невозможность нахождения собственных значений конечным вычислительным процессом). Для каждого собственного значения λ соответствующие собственные векторы могут быть определены из однородной системы линейных уравнений $(A-\lambda E)x=0$ (E — единичная матрица). При вычислениях над полем комплексных чисел достаточным условием существования базиса из собственных векторов является простота спектра, а необходимое и достаточное условие состоит в том, чтобы алгебраич. кратность каждого собственного значения λ (т. е. его кратность как корня характеристич. многочлена φ_A) совпадала с его геометрич. кратностью, под к-рой понимается дефект матрицы $A-\lambda E$. При необходимости вычисления корневых векторов высоты, превосходящей единицу, приходится рассматривать однородные системы вида

$$(A-\lambda E)^k x=0,\ k\in N,\ k>1.$$

Примерно по этой схеме строились и численные методы решения П. п. собственных значений, практиковавшиеся до кон. 1940-х гг. В 1930-х гг. были разработаны высокоэффективные (по количеству арифметич. операций) алгоритмы вычисления характеристич. многочлена матрицы по ее коэффициентам. Так, в методе Данилевского построение характеристич. многочлена матрицы порядка n выполняется с затратой $\sim n^3$ мультипликативных операций (см. [1], [2]).

Методы этой группы получили название прямых, или точных, по той причине, что, проводимые в точной арифметике, они дают точные значения коэффициентов характеристич. многочлена. Их поведение в условиях реальных вычислений, сопровождающихся ошибками округлений, не могло быть проверено для задач сколько-нибудь значительного порядка до появления цифровых ЭВМ. Такая проверка произошла в 1950-х гг., в результате чего прямые методы были полностью вытеснены из численной практики. Катастрофич. неустойчивость вычисления собственных значений, связанная с этими методами, имеет две основные причины. Во-первых, коэффициенты характеристич. многочлена в большинстве точных методов прямо или косвенно определяются как компоненты решения системы линейных уравнений, матрица к-рой составлена по столбцам из векторов v, Av, A^2v, . . ., $A^{n-1}v$, где v — начальный вектор метода. Такая матрица обычно очень плохо обусловлена, что видно хотя бы из того, что длины ее столбцов, как правило, весьма различны, причем тем больше, чем больше n. Тем самым коэффициенты характеристич. многочлена в общем случае вычисляются с очень большими ошибками. Во-вторых, сама по себе задача вычисления корней многочлена зачастую оказывается численно неустойчивой. В этом отношении показателен пример (см. [3]): если у многочлена

$$p(x)=(x-1)(x-2)\dots(x-19)(x-20)=x^{20}-210x^{19}+\dots$$

изменить коэффициент при x^{19} с -210 на $-210+2^{-23}$, то у возмущенного многочлена $\tilde{p}(x)$ появится пять пар комплексно сопряженных корней; у одной из этих пар мнимые части достигают $\pm i\cdot 2,\ 81,\dots$.

Подобная чувствительность собственных значений матрицы к изменениям коэффициентов характеристич. многочлена обычно не сопровождается сравнимой чувствительностью в отношении элементов самой матрицы. Так, если указанный многочлен $p(x)$ является характеристич. многочленом симметрич. матрицы A, то изменения порядка 2^{-23} в любом элементе матрицы приводят самое большее к изменениям того же порядка в ее собственных значениях.

Современные численные методы решения П. п. собственных значений находят собственные значения без предварительного вычисления характеристич. много-

члена (см. *Итерационные методы* решения проблемы собственных значений матрицы). Трудоемкость лучших из этих методов составляет $\sim kn^3$ мультипликативных операций, где n — порядок матрицы, k — константа, не зависящая от n и имеющая смысл среднего числа итераций метода, приходящегося на вычисление одного собственного значения. В QR-алгоритме значения k обычно заключены между 1,5 и 2.

Приближенные собственные значения (векторы) $(n\times n)$-матрицы A, вычисленные ортогональным методом M (QR-алгоритмом для матриц общего вида, методом Якоби или методами, основанными на делении спектра, в случае симметрических и эрмитовых матриц), можно интерпретировать как точные собственные значения (векторы) возмущенной(ых) матрицы (матриц) $A+F_M$. Здесь F_M — матрица эквивалентного возмущения метода M — допускает оценку вида

$$\| F_M \|_E \leqslant f(n) \| A \|_E \varepsilon, \qquad (1)$$

где ε — относительная точность машинной арифметики, $\|A\|_E=(\Sigma|a_{ij}|^2)^{1/2}$ — евклидова матричная норма, $f(n)$ — функция вида Ckn^α. Число k описано выше, а точные значения константы C и показателя α зависят от таких деталей вычислительного процесса, как способ округления, использование операции накопления скалярных произведений и т. д. Обычное значение α равно 2.

Располагая априорной оценкой (1), можно оценить точность вычисления собственных значений (векторов), достигаемую в методе M. Эта точность зависит от обусловленности отдельных собственных значений (собственных подпространств).

Пусть λ — простое собственное значение матрицы A, x — соответствующий нормированный собственный вектор, y — нормированный собственный вектор транспонированной матрицы $A^\top$ для того же собственного значения. При возмущении матрицы A на матрицу F возмущение собственного значения λ с точностью до малых 2-го порядка выражается величиной

$$\Delta\lambda \approx (y^\top F x)/(y^\top x) \qquad (2)$$

и оценивается как

$$|\Delta\lambda| \leqslant \|F\|_2/|y^\top x| \qquad (3)$$

($\|\ \|_2$ — спектральная норма). Таким образом, чувствительность λ к возмущениям матрицы A характеризуется числом $s(\lambda)=|y^\top x|^{-1}$, наз. (индивидуальным) **числом обусловленности** этого собственного значения. В случае, когда оба вектора x и y действительные, число $s^{-1}(\lambda)$ имеет простой геометрич. смысл: это — косинус угла между векторами x и y, что объясняет другое наименование $s(\lambda)$ — **коэффициент перекоса**, соответствующий λ.

Если матрица A диагонализуема (т. е. имеет базис из собственных векторов), то обусловленность ее собственных значений λ_i может быть охарактеризована и интегрально. Пусть P — матрица, составленная по столбцам из собственных векторов λ_i и имеющая среди всех таких матриц наименьшее число обусловленности. Справедлива теорема (см. [4]): все собственные значения возмущенной матрицы $A+F$ заключены в области комплексной плоскости, являющейся объединением кругов

$$|z-\lambda_i| \leqslant \operatorname{cond} P \, \|F\|, \ i=1, \ \ldots, \ n. \qquad (4)$$

Если эта область распадается на связные компоненты, то каждая из них содержит столько собственных значений возмущенной матрицы, сколько кругов ее составляют. (В качестве нормы в (4) можно взять спектральную норму и для P — спектральное число обусловленности.)

Число $\mathrm{cond}\, P$ наз. числом обусловленности матрицы A по отношению к П. п. собственных значений. Выражаемое в спектральной норме, оно связано с коэффициентами перекоса следующим образом:

$$s(\lambda_i) \leqslant \mathrm{cond}_2 P \leqslant \sum_{i=1}^{n} s(\lambda_i).$$

Более сложно зависит от возмущения матрицы A возмущение собственного вектора x, относящегося к простому собственному значению λ. Оно определяется, вообще говоря, не только коэффициентом перекоса, соответствующим самому λ, но и коэффициентами перекоса для прочих собственных значений. Чувствительность собственного вектора x возрастает и при наличии собственных значений, близких к λ. В предельном случае, когда λ становится кратным, сама постановка вопроса о чувствительности отдельного собственного направления теряет смысл и нужно говорить о чувствительности собственного (или инвариантного) подпространства.

Качественно оценки (3) и (4) означают, что величина возмущения каждого собственного значения диагонализуемой матрицы A пропорциональна величине возмущения F, а множителями пропорциональности выступают числа обусловленности, индивидуальные либо глобальные. Если жорданова форма A — недиагональная и собственному значению λ отвечает элементарный делитель $(z-\lambda)^m$, то возмущение λ в общем случае пропорционально уже не $\|F\|$, а $\|F\|^{1/m}$.

Наиболее важным частным случаем П. п. собственных значений является вычисление всех собственных значений (собственных векторов) действительной симметрической либо комплексной эрмитовой матрицы A. Коэффициенты перекоса такой матрицы равны единице, и приближенная оценка (3) переходит в точное неравенство

$$|\Delta\lambda| \leqslant \|F\|_2.$$

Матрицу P в (4) можно выбрать ортогональной либо унитарной, и потому глобальное число обусловленности в спектральной норме равно единице. Независимо от кратности точек спектра A существует такое упорядочение собственных значений $\tilde{\lambda}_i$ матрицы $A+F$, что выполняются при всех i соотношения

$$|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i| \leqslant \|F\|_2.$$

Еще более точные оценки возможны, если не только сама матрица A является симметрической (эрмитовой), но и ее возмущение F (см. [5]).

Помимо указанных имеется еще ряд апостериорных оценок точности вычисленных собственных значений и векторов. Они наиболее эффективны для симметрических и эрмитовых матриц A.

Пусть $\tilde{x}_i$ — приближенный, а x_i — точный собственный вектор для простого собственного значения λ матрицы A. Оба вектора предполагаются нормированными. Наилучшую оценку λ_i, к-рую можно получить посредством вектора $\tilde{x}_i$, дает значение функционала Рэлея

$$\varphi(A, z) = (Az, z)/(z, z),$$

соответствующее $\tilde{x}_i$, т. е. число $\mu_i = \varphi(A, \tilde{x}_i)$ (этот факт имеет силу для произвольной, не обязательно эрмитовой матрицы A). Вектор $r_i = A\tilde{x}_i - \mu_i\tilde{x}_i$ наз. вектором невязки.

Пусть

$$\varepsilon = \|r_i\|_2, \quad a = \min_{j \neq i} |\lambda_j - \mu_i|.$$

Оценку величины a легко получить по вычисленным собственным значениям $\tilde{\lambda}_j$. Справедливы оценки:

$$|\lambda_i-\mu_i|\leqslant\varepsilon^2/a,\ |\sin\angle(x_i,\tilde{x}_i)|\leqslant\varepsilon/a.$$

Если λ_i — кратное собственное значение или имеется группа близких к λ_i собственных значений, то нужно оценивать суммарное возмущение всей этой группы и возмущение соответствующего ей инвариантного подпространства (см. [5]).

Наряду с описанной П. п. собственных значений часто возникает необходимость в решении т. н. обобщенной проблемы собственных значений

$$Ax=\lambda Bx. \tag{5}$$

В наиболее важном случае обобщенной проблемы собственных значений матрицы A и B являются симметрическими (эрмитовыми), и одна из них положительно определена. Теория и методы численного решения задачи (5) в этом случае параллельны теории и методам для обычной симметрической (эрмитовой) проблемы собственных значений.

Если ни одна из матриц A и B не является определенной или хотя бы одна из них даже симметрической, то пользуются т. н. QZ-алгоритмом (см. [6]), своеобразным обобщением QR-алгоритма. Необходимо отметить, что здесь возможны новые эффекты, ненаблюдаемые в обычной П. п. собственных значений: бесконечные собственные значения, непрерывный спектр.

Еще более сложны нелинейные задачи на собственные значения

$$(A_n\lambda^n+A_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+A_1\lambda+A_0)\,x=0.$$

Такие задачи решают обычно путем сведения к линейным более высокого порядка (см. [7]).

Лит.: [1] Данилевский А. М., «Матем. сб.», 1937, т. 2, № 1, с. 169—71; [2] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М., 1963; [3] Wilkinson J. H., Rounding errors in algebraic processes, Englewood cliffs (N.Y.), 1963; [4] Уилкинсон Дж. Х., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970; [5] Парлетт Б., Симметричная проблема собственных значений. Численные методы, пер. с англ., М., 1983; [6] Moler C. B., Stewart G. W., «SIAM J. Num. Anal.», 1973, v. 10, p. 241; [7] Кублановская В. Н., в сб.: Вычислительные методы линейной алгебры, Новосиб., 1980, с. 37—53.

Х. Д. Икрамов.

ПОЛНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ функции — производная по t от функции $y=f(t,u,v,\ldots,z)$, зависящей от переменной t как непосредственно, так и через промежуточные переменные $u=u(t,x_1,\ldots,x_n)$, $v=v(t,x_1,\ldots,x_n)$, $\ldots$, $z=z(t,x_1,\ldots,x_n)$, вычисляемая по формуле

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t},$$

где $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\ldots$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\ldots$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ — *частные производные.*

Е. Д. Соломенцев.

ПОЛНАЯ РЕШЕТКА, полная структура,— *частично упорядоченное множество*, в к-ром всякое непустое подмножество A имеет точную верхнюю и точную нижнюю грань, называемые обычно объединением и пересечением элементов подмножества A и обозначаемые $\bigvee_{a_\alpha\in A}a_\alpha$ и $\bigwedge_{a_\alpha\in A}a_\alpha$ (или просто $\bigvee A$ и $\bigwedge A$) соответственно. Если частично упорядоченное множество имеет наибольший элемент и каждое его непустое подмножество обладает точной нижней гранью, то оно является П. р. Решетка L тогда и только тогда является полной, когда для любого изотонного отображения φ этой решетки в себя существует неподвижная точка, т. е. такой элемент $a\in L$, что $a\varphi=a$. Если $P(M)$ — упорядоченное включением множество подмножеств множества M и φ —

отношение замыкания на $P(M)$, то совокупность всех φ-замкнутых подмножеств является П. р. Всякое частично упорядоченное множество P можно изоморфно вложить в П. р., к-рая в этом случае наз. п о п о л н е н и е м множества P. *Пополнение сечениями* является наименьшим из всех пополнений данного частично упорядоченного множества. П. р. образуют множество всех подалгебр универсальной алгебры, множество всех конгруэнций универсальной алгебры, множество всех замкнутых подмножеств топологич. пространства.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] Скорняков Л. А., Элементы теории структур, М., 1970.

Т. С. Фофанова.

ПОЛНАЯ СИСТЕМА, з а м к н у т а я с и с т е м а (д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы х у р а в н е н и й), — система дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка

$$F_i(x,\ u,\ p)=0, \qquad 1\leqslant i\leqslant m, \tag{1}$$

$$x=(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ u=u(x_1,\ \ldots,\ x_n),$$

$$p=(p_1,\ \ldots,\ p_n)=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ \ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

со следующим свойством: для любого набора чисел $(x,\ u,\ p)$, удовлетворяющего уравнениям (1), справедливы равенства

$$F_{ij}(x,\ u,\ p)=0,\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant m,$$

где $F_{ij}=[F_i,\ F_j]$ — *Якоби скобки*.

Для линейных однородных систем условие полноты формулируется несколько иначе. Скобка Якоби в этом случае линейна по переменным $p=(p_1,\ \ldots,\ p_n)$, и если система записана в виде

$$P_i(u)=0,\ 1\leqslant i\leqslant m,$$

где P_i — линейные дифференциальные операторы 1-го порядка, то этой скобке отвечает коммутатор $[P_i,\ P_j]=P_iP_j-P_jP_i$. Полнота системы заключается в представимости всех коммутаторов $[P_i,\ P_j]$ в виде линейных комбинаций от P_k с коэффициентами, зависящими только от $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$.

Если $u=u(x)$ — совместное решение двух уравнений

$$F_i(x,\ u,\ p)=0,\ F_j(x,\ u,\ p)=0,$$

то u является решением и уравнения

$$[F_i,\ F_j](x,\ u,\ p)=0. \tag{2}$$

Произвольную систему вида (1) обычно пытаются расширить до полной добавлением к ней новых независимых уравнений, полученных из старых с помощью операции образования скобок Якоби. При этом расширении в соответствии с (2) ни одно из решений переходной системы не должно теряться, если она вообще разрешима.

Свойство системы быть полной инвариантно относительно тех неособых преобразований переменных $(x,\ u,\ p,\ F)$, для к-рых сохраняется смысл дифференциальных уравнений. К таким преобразованиям относится, напр., замена независимых переменных $x=g(y)$, $y=(y_1,\ \ldots,\ y_n)$, а также преобразование следующего типа. Пусть $A:\mathbb{R}^{2n+1+m}\to\mathbb{R}^m$ — такое гладкое отображение, что

$$y=x,\ q=p,$$

$$v=u,\ t=H(x,\ u,\ p,\ s),$$

$$s=(s_1,\ \ldots,\ s_m),\ t=(t_1,\ \ldots,\ t_m)$$

есть диффеоморфизм $\mathbb{R}^{2n+1+m}\to\mathbb{R}^{2n+1+m}$. Тогда рассматриваемое преобразование заключается в переходе от системы (1) к системе

$$G_i(x,\ u,\ p)=H_i(x,\ u,\ p,\ F)=0,\ 1\leqslant i\leqslant m.$$

Лит.: [1] Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, пер. с нем., М., 1966; [2] Гюнтер Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, Л.— М., 1934; [3] Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, 2 Aufl., Bd 1, Lpz., 1956; [4] Goursat E., Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, P., 1891. *А. П. Солдатов.*

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ВЫЧЕТОВ по модулю m — любой набор из m несравнимых между собой по модулю m целых чисел. Обычно в качестве П. с. в. по модулю m берутся наименьшие неотрицательные вычеты $0, 1, \ldots, m-1$ или абсолютно наименьшие вычеты, состоящие из чисел $0, \pm 1, \ldots, \pm\frac{m-2}{2}$ в случае нечетного m и чисел $0, \pm 1, \ldots, \frac{m-2}{2}, \frac{m}{2}$ в случае четного m. *С. А. Степанов.*

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ФУНКЦИЙ — *ортонормированная система* функций $\{\varphi(x)\}$ некоторого гильбертова пространства H такая, что в H не существует функции, ортогональной всем функциям данного семейства. Система функций, полная в одном пространстве, может оказаться неполной в другом. Напр., система $\left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right\}$, $n=0, 1, \ldots$, образует П. с. ф. в пространстве $L[0, \pi]$, но не образует П. с. ф. в пространстве $L[-\pi, \pi]$. *Е. Д. Соломенцев.*

ПОЛНОГО НАКОПЛЕНИЯ ТОЧКА — точка x множества M в топологич. пространстве X такая, что пересечение M с любой окрестностью x имеет мощность ту же, что и все множество M. *М. И. Войцеховский.*

ПОЛНОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — обобщение понятия компактного комплексного алгебраич. многообразия. Многообразие X наз. полным, если для любого многообразия Y проекция $X\times Y\to Y$ является замкнутым морфизмом, т. е. переводит замкнутые (в топологии Зарисского) подмножества $X\times Y$ в замкнутые подмножества Y. Имеется т. н. валюативный критерий полноты: для любого кольца дискретного нормирования A с полем частных K и любого морфизма u : Spec $K\to X$ должен существовать единственный морфизм v : Spec $A\to X$, продолжающий u. Это условие является аналогом требования того, чтобы любая последовательность в X имела предельную точку.

Любое проективное многообразие является полным, но не наоборот. Для любого П. а. м. X существует проективное многообразие X' и проективный бирациональный морфизм $X'\to X$ (лемма Чжоу). Для любого алгебраич. многообразия X существует открытое вложение в полное многообразие $\overline{X}$ (теорема Нагаты). Обобщением понятия П. а. м. на относительный случай служит собственный морфизм схем.

Лит.: [1] Хармсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981; [2] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972. *В. И. Данилов.*

ПОЛНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ — то же, что *вариация функции* одного переменного. П. и. ф. есть сумма *положительной вариации функции* и *отрицательной вариации функции*. *Б. И. Голубов.*

ПОЛНОЕ МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — метрическое пространство, в к-ром каждая фундаментальная, или сходящаяся в себе, последовательность сходится. П. м. п.— частный случай *полного равномерного пространства*. *М. И. Войцеховский.*

ПОЛНОЕ МНОЖЕСТВО в топологическом векторном пространстве X над полем K — множество A такое, что совокупность линейных комбинаций элементов из A (всюду) плотна в X, т. е. порожденное множеством A замкнутое подпространство, или замкнутая линейная оболочка A, совпадает с X. Напр., в нормированном пространстве C непре-

рывных функций на $[0, 1]$ со значениями в $\mathbb{C}$ множество $\{x^n\}$ является П. м. Если K — недискретное нормированное поле, то каждое поглощающее множество (и в частности каждая окрестность нуля в X) является П. м.

Для того чтобы $A=\{a_t\}$, $t\in T$ было П. м. в ослабленной топологии $\sigma(X, X^*)$ пространства X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\xi\in X^*$ существовал индекс t такой, что $\langle a_t, \xi\rangle\neq 0$; это означает, что никакая замкнутая гиперплоскость не содержит всех элементов a_t, т. е. что A — т о т а л ь н о е м н о ж е с т в о. При этом если X — *локально выпуклое пространство*, то П. м. в ослабленной топологии будет полным и в исходной топологии. *М. И. Войцеховский.*

ПОЛНОЕ ПРИРАЩЕНИЕ ф у н к ц и и н е с к о л ь к и х п е р е м е н н ы х — приращение, приобретаемое функцией, когда все аргументы получают (вообще говоря, ненулевые) приращения. Точнее, пусть функция f определена в окрестности точки $x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ перемепных $x_1, \ldots, x_n$. Приращение

$$\Delta f = f(x^{(0)}+\Delta x) - f(x^{(0)})$$

функции f в точке $x^{(0)}$, где

$$\Delta x=(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n),$$
$$x^{(0)}+\Delta x=(x_1^{(0)}+\Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)}+\Delta x_n),$$

наз. п о л н ы м п р и р а щ е н и е м, если оно рассматривается как функция n всевозможных приращений $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ аргументов $x_1, \ldots, x_n$, подчиненных только условию, что точка $x^{(0)}+\Delta x$ принадлежит области определения функции f. Наряду с П. п. функции рассматриваются ч а с т н ы е п р и р а щ е н и я $\Delta_{x_k} f$ функции f в точке $x^{(0)}$ по переменной x_k, т. е. такие приращения Δf, для к-рых $\Delta x_j=0$, $j=1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$, k — фиксировано ($k=1, 2, \ldots, n$). *Л. Д. Кудрявцев.*

ПОЛНОЕ ПРОСТРАНСТВО — термин, относящийся к *метрическому пространству*, *равномерному пространству*, *топологическому пространству*, *близости пространству*, пространству *топологической группы*, пространству с *симметрикой*, *псевдометрическому пространству*; возможны употребления этого термина и в других ситуациях. Все определения полноты основаны на одной общей идее, конкретное воплощение к-рой зависит от рассматриваемого типа пространств. Общее в определениях полноты состоит в требовании сходимости достаточно широкого класса последовательностей, направленностей или центрированных систем.

Метрич. пространство наз. п о л н ы м, если каждая *фундаментальная последовательность* в нем сходится. В этом же смысле понимается полнота псевдометрич. пространства и пространства с симметрикой. Равномерное пространство наз. п о л н ы м, если для каждой центрированной системы множеств в нем, содержащей сколь угодно мелкие по отношению к покрытиям из данной равномерной структуры множества, пересечение элементов этой системы не пусто. На топологич. группе есть естественные правая и левая равномерные структуры. Если пространство группы в одной из этих равномерных структур полно, то оно полно и в другой, и топологич. группа наз. тогда п о л н о й п о В е й л ю. Полнота по отношению к двусторонней равномерной структуре на группе, получаемой структурным объединением ее правой и левой структур, наз. п о л н о й п о Р а й к о в у. Полнота метрич. пространства и полнота по Райкову могут быть истолкованы как абсолютная замкнутость по отношению к *любым* представлениям данного пространства, как подпространства пространства того же типа. В частности, метрич. пространство полно в том и только в том случае, если оно замкнуто в любом

объемлющем его метрич. пространстве. Топологич. группа полна по Райкову, если и только если она замкнута в любой топологич. группе, содержащей ее в качестве топологич. подгруппы. Это связано с фундаментальной конструкцией пополнения: каждому метрич. пространству канонич. образом сопоставляется его пополнение — полное метрич. пространство, содержащее исходное пространство в качестве всюду плотного подпространства. Аналогично, каждая топологич. группа пополняема по Райкову, но не каждая топологич. группа пополняема по Вейлю.

Для топологич. пространств требование абсолютной замкнутости — т. е. замкнутости в любом объемлющем пространстве, — приводит, если ограничиться классом вполне регулярных хаусдорфовых пространств, к бикомпактным пространствам: такие и только такие пространства обладают этим свойством. Однако есть другой полезный и естественный подход к определению полноты топологич. пространства. Вполне регулярное хаусдорфово пространство наз. полным по Чеху, если оно представимо в виде пересечения счетного семейства открытых множеств в нек-ром своем бикомпактном хаусдорфовом расширении. Все такие пространства обладают свойством Бэра: пересечение счетного семейства непустых открытых всюду плотных множеств в них всегда не пусто. Метризуемое пространство полно по Чеху в том и только в том случае, если оно метризуемо полной метрикой (теорема Александрова — Хаусдорфа). Полнота по Чеху обеспечивает правильное поведение топологич. пространства во многих существенных отношениях. Так, полное по Чеху счетное пространство имеет счетную базу и метризуемо. Паракомпактность сохраняется при операции произведения, когда пространства полны по Чеху. Полнота по Чеху сохраняется *совершенными отображениями*, а в классе метризуемых пространств она сохраняется в сторону образа открытыми непрерывными отображениями.

Другой полезный подход к определению полноты вполне регулярного хаусдорфова пространства связан с рассмотрением максимальной равномерной структуры на нем: если такое равномерное пространство полно, то топологич. пространство наз. полным по Дьёдонне. Полны по Дьёдонне в точности те пространства, к-рые гомеоморфны замкнутым подпространствам топологич. произведений метризуемых пространств. В присутствии полноты по Дьёдонне в одно свойство сливаются псевдокомпактность, счетная компактность и бикомпактность. Все паракомпакты полны по Дьёдонне, в частности полны по Дьёдонне все метрич. пространства. Отсюда видно, что из полноты по Дьёдонне не следует наличие у пространства свойства Бэра. Специальный случай полноты по Дьёдонне — полнота топологич. пространства в смысле Хьюитта, означающая гомеоморфность пространства замкнутому подпространству топологич. произведения нек-рого семейства действительных прямых.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

ПОЛНОЕ РАВНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — равномерное пространство, в к-ром всякий *Коши фильтр* сходится. Важнейший пример П. р. п. — *полное метрическое пространство*. Замкнутое подпространство П. р. п. полно; полное подпространство отделимого равномерного пространства замкнуто. Произведение П. р. п. полно; обратно, если произведение непустых равномерных пространств полно, то и все пространства сомножители полны. Всякое равномерное пространство X равномерно непрерывно отображается на нек-рое плотное подпространство П. р. п. $\hat{X}$ (см. *Пополнение*).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968; [2] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981. *М. И. Войцеховский.*

ПОЛНОЕ РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО — риманово пространство с функцией расстояния ρ, полное как метрич. пространство с метрикой ρ.

Пусть M — связное риманово пространство со связностью Леви-Чивита, тогда следующие три утверждения эквивалентны: а) M — полно; б) для каждой точки $p \in M$ *экспоненциальное отображение* $\exp_p$ определено на всем M_p (где M_p — касательное пространство к M в p); в) каждое ограниченное по отношению к расстоянию ρ замкнутое множество $A \subset M$ компактно (теорема Хопфа — Ринова). Следствия: любые две точки p, $q \in M$ П. р. п. можно соединить на M геодезич. длины $\rho(p, q)$; любая геодезическая неограниченно продолжаема.

Имеется [2] обобщение этой теоремы на случай пространства с несимметричной функцией расстояния.

Лит.: [1] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [2] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959. *М. И. Войцеховский.*

ПОЛНОЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — см. *Полное пространство.*

ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ФОРМУЛА — соотношение, позволяющее вычислять безусловную вероятность события через его условные вероятности относительно событий, образующих полную группу.

Точнее, пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $A, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ — события, причем $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$$

и $P(A_k) > 0$ для всех k. Тогда имеет место формула полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid A_k)\, P(A_k).$$

П. в. ф. верна и в том случае, когда число событий $A_1, A_2, \ldots$ бесконечно.

Имеет место П. в. ф. для математич. ожиданий. Пусть $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, $\mathsf{E}X$ — ее математич. ожидание, а $\mathsf{E}(X|A_k)$ — условные математич. ожидания относительно событий A_k, образующих полную группу. Тогда

$$\mathsf{E}X = \sum\nolimits_k \mathsf{E}(X \mid A_k)\, P(A_k).$$

Н. Г. Ушаков.

ПОЛНОТА в математической логике — свойство, близкое к понятию максимального элемента в частично упорядоченном множестве. Термин «П.» в математич. логике употребляется в контекстах вида: полное исчисление, полная теория (или полное множество аксиом), ω-полная теория, полная в смысле Поста система аксиом, полное вложение одной модели в другую, полная формула полной теории и др.

Одним из наиболее важных в гносеологич. отношении является понятие П. исчисления относительно данной семантики. Исчисление наз. полным, если всякая верная в семантич. смысле формула этого исчисления выводима в нем. При этом понятие выводимости должно быть эффективным, т. е. имеются набор правил и инструкция их применения, позволяющая строить выводы, причем есть алгоритм, отличающий выводы от невыводов. Понятие семантически верной формулы, наоборот, формулируется, как правило, с использованием неэффективных понятий, с помощью кванторов всеобщности по бесконечным и даже несчетным совокупностям. В теоремах о полноте классического и интуиционистского исчислений предикатов П. понимается в указанном смысле. В случае классич. исчисления семантически верными считаются те формулы языка узкого исчис-

ления предикатов (УИП), к-рые истинны во всех моделях для рассматриваемого языка. В интуиционистском случае семантически верными считаются формулы, истинные во всех *Крипке моделях*. Понятие истинной в данной модели формулы также использует кванторы по бесконечным областям (если модель бесконечна) как в классическом, так и в интуиционистском случаях. Иногда рассматривают исчисления, не удовлетворяющие требованию эффективности.

С понятием П. исчисления тесно связано понятие полной теории. Теорией (точнее, элементарной теорией) наз. произвольное множество T замкнутых формул языка УИП. Непротиворечивая теория T наз. полной, если множество всех следствий из T в классич. исчислении предикатов является максимальным непротиворечивым множеством, т. е. добавление к T любой замкнутой невыводимой из T формулы позволяет вывести любую формулу. В этом определении не предполагается, что множество T задано эффективно, так что понятие вывода становится тоже неэффективным. П. теории T эквивалентна следующему условию: для всякой замкнутой формулы φ имеет место в точности одно из двух утверждений — либо φ выводима из T, либо $\neg\varphi$ выводима из T.

Если дана какая-то модель M языка УИП, то возникает семантич. понятие формулы, истинной в модели M. Теория T наз. полной относительно M, если в классич. исчислении предикатов, пополненном формулами из T, выводимы в точности все истинные в M формулы. Между понятиями П. теории и П. относительно M имеется следующая связь. Теория T полна тогда и только тогда, когда существует модель M, относительно к-рой она полна. Модель M наз. моделью теории T, если все формулы из T истинны в M. Достаточный признак П. теории: если все модели нек-рой мощности теории T изоморфны, то теория T полна. Обратное не всегда верно.

Понятие П. теории находит применение в вопросах разрешимости теорий из-за следующего свойства полных теорий: если теория T полна и множество T конечно или даже рекурсивно перечислимо, то существует алгоритм, распознающий по любой формуле φ выводима она или нет. Если не требовать эффективного задания множества T, то всякую теорию можно пополнить, т. е. расширить добавлением новых аксиом до полной. При наличии требования эффективности дело обстоит не так, как показывает теорема Гёделя о неполноте арифметич. исчислений. Теория T' наз. расширением теории T, если всякая формула, выводимая из T, будет выводима из T'. Пусть T — непротиворечивая рекурсивно перечислимая теория. Теория T наз. эффективно неполнимой, если по всякому рекурсивно перечислимому непротиворечивому расширению T' теории T можно эффективно найти формулу φ, формально неразрешимую в T', т. е. такую, что ни φ, ни $\neg\varphi$ не выводимы из T'. Теорема Гёделя о неполноте утверждает, что нек-рая конкретная арифметич. теория Q, имеющая конечное число аксиом, эффективно не пополнима. Из этой теоремы вытекает неполнота относительно стандартной модели натуральных чисел любого арифметич. исчисления, удовлетворяющего требованию эффективности.

Арифметич. теория T наз. ω-полной, если из того, что в T выводимы все формулы вида

$$\varphi(0),\ \varphi(1),\ \varphi(2),\ \ldots, \qquad (*)$$

следует выводимость в T формулы $\forall x\ \varphi(x)$. Из доказательства теоремы Гёделя о неполноте следует, что существуют теории, не являющиеся ω-полными, и даже такие, в к-рых выводима бесконечная серия формул $(*)$, а также формула $\exists x\ \neg\varphi(x)$, и тем не менее

противоречия вывести нельзя. Такая теория наз. непротиворечивой.

Непротиворечивая система аксиом наз. полной в смысле Поста, если добавление к ней любой схемы аксиом либо не расширяет запаса выводимых формул, либо превращает систему в противоречивую. Напр., аксиоматика классич. исчисления высказываний полна в смысле Поста, а интуиционистского исчисления высказываний не полна.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч., Теория моделей, пер. с англ., М., 1977; [3] Шенфилд Дж., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975; [4] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [5] Фейс Р., Модальная логика, пер. с англ., М., 1974 (Дополнения). *В. Н. Гришин.*

ПОЛНОТА в топологии — свойство пространства, заключающееся в сходимости последовательностей, направленностей или семейств множеств, подчиненных условию Коши или его обобщениям (см. *Полное пространство*). *А. В. Архангельский.*

ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ функции n переменных в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — то же самое, что *дифференциал* функции в этой точке. Термин «П. д.» употребляется с целью противопоставления его термину «частный дифференциал». Понятие П. д. функции n переменных обобщается на случай отображения открытых множеств линейных топологич. пространств в подобные же пространства (см. *Гато дифференциал*, *Фреше дифференциал*, *Дифференцирование отображения*). *Л. Д. Кудрявцев.*

ПОЛНЫЙ ИНТЕГРАЛ — решение $u(x, a)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $a=(a_1, \ldots, a_n)$, дифференциального уравнения с частными производными 1-го порядка

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0, \qquad (1)$$

к-рое зависит от n параметров $a_1, \ldots, a_n$ и в рассматриваемой области удовлетворяет условию

$$\det \left| u_{x_i a_k} \right| \neq 0.$$

Если $u(x, a)$ рассматривать как n-параметрическое семейство решений, то огибающая любого его $(n-1)$-параметрического подсемейства, выделяемого условием $a_i=\omega_i(t_1, \ldots, t_{n-1})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, является решением уравнения (1). При этом линии касания поверхностей, задаваемых полным интегралом, и огибающей являются характеристиками (1). С помощью П. и. можно описать решения характеристич. системы обыкновенных дифференциальных уравнений, отвечающей уравнению (1), и, следовательно, обратить метод Коши, к-рый сводит решение уравнения (1) к решению характеристич. системы. Этот подход применяется в аналитич. механике, где требуется найти решение канонич. системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \qquad (2)$$

Эта система является характеристической для уравнения Якоби

$$u_t+H\left(x_1, \ldots, x_n, t, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0. \qquad (3)$$

Если для уравнения (3) П. и. $u=u(x_1, \ldots, x_n, t, a_1, \ldots, a_n)+a_0$ известен, то $2n$ интегралов канонич. системы (2) даются равенствами $u_{a_i}=b_i$, $u_{x_i}=p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, где a_i, b_i — произвольные постоянные. *А. П. Солдатов.*

ПОЛНЫЙ ОПЕРАТОР — обобщенный волновой оператор, т. е. частично изометрич. оператор, определяемый равенством

$$W_+(A_2, A_1)=s\text{-}\lim_{t \to \infty} e^{itA_2}e^{-itA_1}P_1,$$

где A_1 и A_2 — самосопряженные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H, P_1 — ортопроектор на $H_{1,ac}$, и такой, что

$$\{W_+(A_2, A_1)x \mid \|W_+(A_2, A_1)x\| = \|x\|\} = H_{2,ac}.$$

Здесь $H_{i,ac}$, $i=1, 2$,— совокупность всех спектрально абсолютно непрерывных относительно A_i элементов x, т. е. таких, что спектральная мера $\langle E_{A_i}(\mu)x, x\rangle$ множества M абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\mu(x)$.

Если оператор $W_+(A_2, A_1)$ (или аналогично определяемый оператор $W_-(A_2, A_1)$) существует и является полным, то $A_{i,ac}$ — части операторов A_i на $H_{i,ac}$ унитарно эквивалентны. Если A_1 и A_2 — самосопряженные операторы в H и $A_2 = A_1 + c\langle \cdot, f\rangle f$, где $f \in H$ и c вещественно, то $W_\pm(A_2, A_1)$ и $W_\pm(A_1, A_2)$ существуют и являются полными.

Лит.: [1] Като Т., Теория возмущений линейных операторов, пер. с англ., М., 1972.

В. И. Соболев.

ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ МЕТОД, метод дихотомии,— 1) Один из методов численного решения уравнений с одним неизвестным. Пусть имеется уравнение $f(x)=0$ с непрерывной на отрезке $[a, b]$ функцией $f(x)$, принимающей на концах отрезка значения разных знаков и имеющей внутри $[a, b]$ единственный корень x_*. Для приближенного нахождения x_* отрезок $[a, b]$ делят пополам и вычисляют значение $f(x_1)$ в средней точке $x_1=(a+b)/2$. Если $f(x_1)\neq 0$, то из двух отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$ для последующего деления пополам выбирается тот, на концах к-рого значения функции различны по знаку. Возникающая в процессе такого дробления последовательность середин отрезков $x_1, x_2, \ldots$ сходится к корню x_* со скоростью геометрич. прогрессии:

$$|x_n - x_*| \leqslant (b-a)/2^n, \quad n=1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

причем в рассматриваемом классе функций оценка (1) неулучшаема. В случае, когда функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ более одного корня, последовательность будет сходиться к одному из них.

2) Один из методов минимизации функций одного переменного. Пусть требуется найти минимум

$$f_* = \min_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$$

унимодальной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и указать точку x_*, в к-рой он достигается. Тогда отрезок $[a, b]$ делят пополам и вблизи его середины $\bar{x}_1=(a+b)/2$ вычисляют значения функции $f(x)$ в двух точках $x_1=\bar{x}_1-\varepsilon/2$ и $x_2=\bar{x}_1+\varepsilon/2$, где число $\varepsilon>0$, являющееся параметром метода, достаточно мало. Затем значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$ сравнивают и с учетом унимодальности функции $f(x)$ из двух отрезков $[a, x_2]$ и $[x_1, b]$ выбирают тот, к-рый заведомо содержит точку x_*. Так, если $f(x_1)\leqslant f(x_2)$, это будет отрезок $[a, x_2]$, в противном случае — отрезок $[x_1, b]$. Выбранный отрезок вновь делят пополам, вблизи его середины $\bar{x}_2$ берут две точки $x_1=\bar{x}_2-\varepsilon/2$ и $x_2=\bar{x}_2+\varepsilon/2$, сравнивают в них значения функции и т. д. В результате возникает последовательность срединных точек $\{\bar{x}_n\}$, для к-рой

$$|\bar{x}_n - x_*| \leqslant (b-a-\varepsilon)/2^n + \varepsilon/2, \quad n=1, 2, \ldots \qquad (2)$$

За приближения к f_* принимают значения $f(\bar{x}_n)$ при достаточно больших n.

Название метода объясняется тем, что на каждом следующем шаге описанного алгоритма отрезок, содержащий точку минимума, становится примерно вдвое короче. На классе унимодальных функций П. д. м. не является наилучшим. Существуют более эффективные методы, позволяющие при том же количестве вы-

чисел значений функции достигнуть лучшей по сравнению с (2) точности (см., напр., *Фибоначчи метод*).

Лит.: [1] Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики, 3 изд., М., 1966; [2] Уайлд Д.-Дж., Методы поиска экстремума, пер. с англ., М., 1967.

М. М. Потапов.

ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИИ — одно из двух слагаемых, сумма к-рых есть полное изменение, или *вариация функции*, на данном отрезке. Пусть $f(x)$ — функция действительного переменного, заданная на отрезке $[a, b]$ и принимающая конечные значения. Пусть $\Pi=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и

$$P_{\Pi}(f)=\sum_i^{+}[f(x_i)-f(x_{i-1})],$$

где суммирование производится по тем номерам i, для к-рых разность $f(x_i)-f(x_{i-1})$ неотрицательна. Величина

$$P(f)\equiv P(f;\ [a,\ b])=\sup_{\Pi} P_{\Pi}(f)$$

наз. положительным изменением функции f на отрезке $[a, b]$. Всегда $0\leqslant P(f)\leqslant+\infty$. Понятие «П. и. ф.» введено К. Жорданом [1]. См. также *Отрицательная вариация функции*.

Лит.: [1] Jordan C., «C. r. Acad. sci.», 1881, t. 92, p. 228—230; [2] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.—Л., 1934.

Б. И. Голубов.

ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ — вид корреляционной зависимости между случайными величинами, при к-рой условные средние значения одной из них увеличиваются при возрастании значений другой величины. О П. к. между величинами с *корреляции коэффициентом* ρ говорят в том случае, когда $\rho>0$. См. *Корреляция*.

А. В. Прохоров.

ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННАЯ ФОРМА — выражение вида

$$\sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k,$$

где $a_{ik}=a_{ki}$, принимающее неотрицательные значения при любых действительных значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и обращающееся в нуль лишь при $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. Т. о., П. о. ф. есть *квадратичная форма* специального типа. Любая П. о. ф. приводится с помощью линейного преобразования к виду

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Для того чтобы форма

$$\sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$$

была П. о. ф., необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_1>0,\ \Delta_2>0,\ \ldots,\ \Delta_n>0$, где

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1}a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

В любой аффинной системе координат расстояние точки от начала координат выражается П. о. ф. от координат точки.

Форма

$$f=\sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik}x_i\overline{x}_k$$

такая, что $a_{ik}=\overline{a}_{ki}$ и $f\geqslant 0$ для всех значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $f=0$ лишь при $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ наз. эрмитовой П. о. ф.

С понятием П. о. ф. связаны также понятия: 1) положительно определенной мат-

р и ц ы $\|a_{jk}\|_1^n$ — такой матрицы, что $\sum_{j,k=1}^n a_{jk}x_j\bar{x}_k$ есть эрмитова П. о. ф.; 2) *положительно определенного ядра* — такой функции $K(x, y)=\overline{K(y, x)}$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)\varphi(x)\overline{\varphi(y)}\,dx\,dy \geqslant 0$$

для любой функции $\varphi(x)$ с интегрируемым квадратом; 3) *положительно определенной функции* — такой функции $f(x)$, что ядро $K(x, y)=f(x-y)$ является положительно определенным. Класс непрерывных положительно определенных функций $f(x)$ с $f(0)=1$ совпадает с классом характеристических функций законов распределения случайных величин. *БСЭ-3.*

ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННАЯ ФУНКЦИЯ — комплекснозначная функция φ на группе G, удовлетворяющая неравенству

$$\sum_{i,\ j=1}^m \alpha_i\overline{\alpha_j}\varphi(x_j^{-1}x_i) \geqslant 0$$

для любых наборов $x_1, \ldots, x_m \in G$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$. Совокупность П. о. ф. на G образует конус в пространстве $M(G)$ всех ограниченных функций на G, замкнутый относительно операций умножения и комплексного сопряжения.

Причина выделения этого класса функций состоит в том, что именно П. о. ф. определяют *положительные функционалы* на групповой алгебре $\mathbb{C}G$ и унитарные представления группы G. Точнее, пусть $\varphi: G\to\mathbb{C}$ — произвольная функция и $l_\varphi: \mathbb{C}G\to\mathbb{C}$ — функционал, заданный равенством

$$l_\varphi\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right) = \sum_{g\in G}\varphi(g)\,\alpha_g g,$$

тогда для положительности l_φ необходимо и достаточно, чтобы φ была П. о. ф. Далее, l_φ определяет $*$-представление алгебры $\mathbb{C}G$ в гильбертовом пространстве H_φ и, следовательно, унитарное представление π_φ группы G, причем $\varphi(g)=(\pi_\varphi(g)\xi, \xi)$ для нек-рого $\xi\in H_\varphi$. Обратно, для любого представления π и любого вектора $\xi\in H_\varphi$ функция $g\to(\pi(g)\xi, \xi)$ является П. о. ф.

Если G — топологич. группа, то представление π_φ слабо непрерывно тогда и только тогда, когда П. о. ф. непрерывна. Если G локально компактна, то непрерывные П. о. ф. взаимно однозначно соответствуют положительным функционалам на $L^1(G)$.

Для коммутативных локально компактных групп класс П. о. ф. совпадает с классом преобразований Фурье конечных положительных мер на двойственных группах. Имеется аналог этого утверждения для компактных групп: непрерывная функция φ на компактной группе G является П. о. ф. тогда и только тогда, когда ее преобразование Фурье $\hat{f}(b)$ принимает положительные (операторные) значения на каждом элементе двойственного объекта, т. е.

$$\int_G f(g)\,(\sigma(g)\,\xi, \xi)\,dg \geqslant 0$$

для всякого представления σ и всякого вектора $\xi\in\pi_\sigma$.

Лит.: [1] Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 2, М., 1975; [2] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968.

В. С. Шульман.

ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОЕ ЯДРО — комплекснозначная функция K на $X\times X$, где X — произвольное множество, удовлетворяющая условию

$$\sum K(x_i, x_j)\,\lambda_i\overline{\lambda}_j \geqslant 0$$

для любых $i, j\in\mathbb{Z}$, $\lambda_i\in\mathbb{C}$, $x_i\in X$. Измеримые П. о. я. на пространстве с мерой (X, μ) соответствуют положительным *интегральным операторам* в $L^2(X, \mu)$; включение в схему такого соответствия произвольных по-

ложительных операторов требует введения обобщенных П. о. я., ассоциированных с оснащенными гильбертовыми пространствами (см. [1]).

Теория П. о. я. обобщает теорию *положительно определенных функций* на группе: для положительной определенности функции f на группе G необходимо и достаточно, чтобы функция $K(x, y)=f(xy^{-1})$ на $G\times G$ была П. о. я. В частности, на П. о. я. распространяются нек-рые результаты теории положительно определенных функций. Напр., теорема Бохнера о том, что всякая положительно определенная функция есть преобразование Фурье положительной меры (т. е. интегральная линейная комбинация характеров), обобщается следующим образом: всякое П. о. я. (обобщенное) допускает интегральное представление с помощью т. н. элементарных П. о. я. относительно данного дифференциального выражения [1].

Лит.: [1] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965; [2] Крейн М. Г., «Укр. матем. ж.», 1949, т. 1, № 4, с. 64—98; 1950, т. 2, № 1, с. 10—59.

В. С. Шульман.

ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ОПЕРАТОР — симметричный оператор A в гильбертовом пространстве H такой, что

$$\inf \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} > 0$$

для любого $x\in H$, $x\neq 0$. Всякий П. о. с. является *положительным оператором*.

М. Н. Войцеховский.

ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ — обобщение понятия *дивизора* положительной степени на римановой поверхности. Голоморфное векторное расслоение E над комплексным пространством X наз. положительным (обозначается $E>0$), если в E существует такая эрмитова метрика h, что функция

$$v \longmapsto -h(v, v)$$

на E строго псевдовыпукла вне нулевого сечения. Если X — многообразие, то условие положительности выражается в терминах кривизны метрики h. А именно, *кривизны форме* метрики h в расслоении E отвечает эрмитова квадратичная форма Ω на X со значениями в расслоении $\mathrm{Herm}\, E$ эрмитовых эндоморфизмов расслоения E. Условие положительности эквивалентно тому, что $\Omega_x(u)$ — положительно определенный оператор в E_x для любого $x\in X$ и любого ненулевого $u\in T_{X,x}$.

В случае, когда E — расслоение на комплексные прямые над многообразием X, условие положительности равносильно положительной определенности матрицы

$$\left\| -\frac{\partial^2 \log h}{\partial z_\alpha\, \partial \bar{z}_\beta} \right\|,$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — локальные координаты на X, $h>0$ — функция, задающая эрмитову метрику при локальной тривиализации расслоения. Если X компактно, то расслоение на комплексные прямые E над X положительно тогда и только тогда, когда *Чжэня класс* $c_1(E)$ содержит замкнутую форму вида

$$i\sum\nolimits_{\alpha,\beta} \varphi_{\alpha\beta}\, dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta,$$

где $\|\varphi_{\alpha\beta}\|$ — положительно определенная эрмитова матрица. В частности, если X — риманова поверхность, то расслоение над X, определяемое дивизором степени d, положительно тогда и только тогда, когда $d>0$. В случае, когда E — расслоение ранга >1 над многообразием X размерности >1, рассматривается также следующий более узкий класс П. р.: *расслоение* $E\to X$ наз. положительным в смысле Накано, если на E существует такая эрмитова метрика h, что эрмитова квадратичная форма H на расслоении

$E \otimes T_X$, заданная формулой

$$H_x(v \otimes u) = h_x(v,\ \Omega_x(u)\ v),$$

где $x \in X$, $v \in E_x$, $u \in T_{X,\,x}$, положительно определена. Примеры: касательное расслоение T_{P_n} к проективному пространству P^n положительно, но при $n>1$ не является положительным в смысле Накано; расслоение на комплексные прямые над P^n, определяемое гиперплоскостью, положительно.

Любое факторрасслоение положительного векторного расслоения положительно. Если E', E'' — положительные (положительные в смысле Накано) расслоения, то $E' \oplus E''$ и $E' \otimes E''$ положительны (положительны в смысле Накано).

Понятие «П. р.» было введено в связи с *Кодаиры теоремой* об обращении в нуль для случая расслоений на комплексные прямые, а затем обобщено на произвольные расслоения. Несколько позже, в связи с вопросом о существовании вложения в проективное пространство, были выделены понятия слабо положительного и слабо отрицательного расслоений.

Голоморфное векторное расслоение E над компактным комплексным пространством X наз. слабо отрицательным, если его нулевое сечение обладает строго псевдовыпуклой окрестностью в E, т. е. является исключительным аналитич. множеством. Расслоение E наз. слабо положительным, если сопряженное расслоение E^* слабо отрицательно. В случае, когда X — риманова поверхность, понятия слабо положительного и П. р. совпадают [5]. В общем случае из положительности вытекает слабая положительность; примеров слабо положительных, но не положительных расслоений пока (1983) не известно.

Слабая положительность расслоения $E \to X$ равносильна каждому из следующих свойств: для любого когерентного аналитич. пучка $\mathcal{F}$ на X существует такое $m_0>0$, что пучок $\mathcal{F} \otimes S^m \mathcal{E}$ при $m \geqslant m_0$ порождается глобальными сечениями; для любого когерентного аналитич. пучка $\mathcal{F}$ на X существует такое $m \geqslant 0$, что

$$H^q(X,\ \mathcal{F} \otimes S^m \mathcal{E}) = 0$$

для всех $q \geqslant 1$ (см. [3], [4]). Через $\mathcal{E}$ здесь обозначается пучок ростков голоморфных сечений расслоения E. Слабо положительные расслоения аналогичны, таким образом, *обильным векторным расслоениям* из алгебраич. геометрии и иногда наз. обильными аналитическими расслоениями. Слабо положительное расслоение над пространством X естественным образом определяет вложение пространства X в многообразие Грассмана и тем самым в проективное пространство.

Понятия положительного, отрицательного, слабо положительного и слабо отрицательного расслоений естественным образом обобщаются также на случай линейных пространств над комплексным пространством X (см. *Векторное аналитическое расслоение*).

См. также *Отрицательное расслоение*.

Лит.: [1] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [2] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 93—171; [4] Schneider M., «Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg», 1978, Bd 47, S. 150—170; [5] Umemura H., «Nagoya Math. J.», 1973, v. 52, p. 97—128.

А. Л. Онищик.

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ КОНУС — подмножество K действительного векторного пространства E, удовлетворяющее следующим условиям:

1) если x, $y \in K$, α, $\beta \geqslant 0$, то $\alpha x + \beta y \in K$;

2) $K \cap (-K) = 0$.

П. к. определяет полуупорядочение в E: по определению, $x \prec y$, если $y - x \in K$.

Пусть E — банахово пространство. Если E — замкнутый воспроизводящий П. к. (т. е. такой П. к., каждый вектор $z \in E$ к-рого представим в виде $z=x-y$, где $x,\ y \in K$), то $\|x\|+\|y\| \leqslant M\|z\|$, M не зависит от z. Телесный, т. е. имеющий внутренние точки, П. к. является воспроизводящим.

Пусть E^* — сопряженное пространство к банахову пространству E. Если $K \subset E$ — воспроизводящий П. к., то множество $K^* \subset E^*$ положительных (относительно П. к.) функционалов (т. е. таких f, что $f(x) \geqslant 0$ при $x \in K$) является П. к. (это т. н. сопряженный конус). П. к. K восстанавливается на K^*, а именно:

$$K = \{x \in E \mid f(x) \geqslant 0 \text{ при } f \in K^*\}.$$

Если K — телесный П. к., то его внутренность совпадает с

$$\{x \in E \mid f(x) > 0 \text{ при } f \in K^*,\ f \neq 0\}.$$

Конус в банаховом пространстве E наз. нормальным, если найдется такое $\delta > 0$, что $\|x+y\| \geqslant \delta(\|x\|+\|y\|)$ при $x,\ y \in K$. П. к. нормален тогда и только тогда, когда сопряженный конус K^* является воспроизводящим. Если K — воспроизводящий конус, то сопряженный конус K^* нормален.

Конус K наз. миниэдральным, если каждая пара элементов $x,\ y \in E$ имеет точную верхнюю грань $z = \sup(x,\ y)$ (то есть $z \geqslant x$, y и для любого $z_1 \in E$ из $z_1 \geqslant x$, y вытекает $z_1 \geqslant z$). Если П. к. правилен и миниэдрален, то всякое счетное ограниченное подмножество имеет точную верхнюю грань.

Лит.: [1] Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962.

В. И. Ломоносов.

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР, положительное отображение,— 1) П. о. в гильбертовом пространстве — линейный оператор A, для к-рого соответствующая квадратичная форма $(Ax,\ x)$ неотрицательна. П. о. необходимо симметричен и допускает самосопряженное расширение, также являющееся П. о. Самосопряженный оператор A является П. о. тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих условий: а) $A = B^*B$, где B — замкнутый оператор; б) $A = B^2$, где B — самосопряженный оператор; в) спектр A содержится в $(0,\ \infty)$. Совокупность ограниченных П. о. в гильбертовом пространстве образует конус в алгебре всех ограниченных операторов.

2) П. о. в пространстве с конусом — отображение векторного пространства X в себя, сохраняющее выделенный в X конус K. Интегральные операторы с положительными ядрами в различных функциональных пространствах с выделенными конусами положительных функций являются линейными П. о. При нек-рых дополнительных условиях на геометрию конуса K и действие П. о. A удается установить существование A-собственных векторов из X (соответствующие собственные значения наз. позитивными, или ведущими, они превосходят абсолютные величины всех остальных собственных значений). Напр., доказано (см. [3]), что если A — вполне непрерывный П. о. с ненулевым спектром, то его *спектральный радиус* является позитивным собственным значением. Условие компактности можно заменить условиями на поведение резольвенты (см. [4]).

В случае нелинейных П. о. исследуется вопрос о существовании неподвижной точки оператора (т. е. решения уравнения $Ax = x$) и о возможности нахождения этой точки как предела определенных рекуррентных последователей.

Нек-рые результаты теории П. о. могут быть перенесены на операторы, оставляющие инвариантными выделенные подмножества более общей природы, чем конусы (см. [5]).

3) П. о. в инволютивной алгебре (*-алгебре) — линейное отображение *-алгебры A в инволютивную алгебру B, переводящее положительные элементы в положительные. Наиболее изучены П. о. *C*-алгебр* (являющиеся, поскольку положительные элементы C^*-алгебры образуют конус, частным случаем П. о. пространств с конусом). Имеет место неравенство Шварца для П. о. C^*-алгебр: $\varphi(a^2)\geqslant(\varphi(a))^2$, если $a=a^*$. Найдены крайние точки множества унитальных (т. е. сохраняющих единичный элемент) П. о. Изучались вполне непрерывные положительные операторы (в. н. п. о.), то есть линейные отображения $\varphi: A\to B$, для к-рых положительны все отображения

$$(a_{ij})_{i,\,j=1}\longrightarrow(\varphi(a_{ij}))_{i,\,j=1}^{n}$$

матричных C^*-алгебр $M(A)$ в $M(B)$. Оказалось, что для в. н. п. о. справедлив аналог теоремы о продолжении положительного функционала: в. н. п. о. C^*-алгебры A в нек-рую алгебру Неймана может быть продолжен до в. н. п. о. любой C^*-алгебры, содержащей A. Если одна из C^*-алгебр A, B коммутативна (и только в этом случае), то всякий П. о. является в. н. п. о.

4) П. о. в банаховом пространстве E — линейный оператор A такой, что $AK\subset K$, где K — *положительный конус* в E. Собственный вектор A, лежащий в K, наз. положительным, а соответствующее собственное значение — позитивным. Если K — воспроизводящий конус, A — вполне непрерывный положительный оператор и $A^pu\geqslant\alpha u$ для нек-рого вектора u, не принадлежащего конусу — K, натурального p и $\alpha>0$, то спектральный радиус r_A оператора A является позитивным собственным значением A, причем $r_A\geqslant\alpha^{1/p}$ (теорема Крейна — Рутмана).

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [2] Sherman S., «Amer. J. Math.», 1951, v. 73, № 1, p. 227—32; [3] Крейн М. Г., Рутман М. А., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 1, с. 3—95; [4] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [5] Красносельский М. А., Соболев А. В., «Докл. АН СССР», 1975, т. 225, № 6, с. 1256—59; [6] Красносельский М. А. [и др.], Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966; [7] Диксмье Ж., *C*-алгебры и их представления*, пер. с франц., М., 1974; [8] Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962.

В. С. Шульман, В. И. Ломоносов.

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ на алгебре с инволюцией * — линейный функционал f на *-алгебре A, удовлетворяющий условию $f(x^*x)\geqslant0$ для всех $x\in A$. Важность П. ф. и причина их введения заключается, в частности, в том, что они используются в так наз. ГНС-конструкции — одного из основных методов исследования структуры банаховых * -алгебр. На ней (и на ее обобщениях, напр. на веса на C^*-алгебрах) основано доказательство теоремы абстрактной характеризации равномерно замкнутых * -алгебр операторов в гильбертовом пространстве и теоремы о полноте системы неприводимых унитарных представлений локально компактной группы.

ГНС-конструкция есть способ построения по произвольному П. ф. f на * -алгебре A с единицей такого *-представления π_f алгебры A в гильбертовом пространстве H_f, что $f(x)=\langle\pi_f(x)\,\xi,\,\xi\rangle$ для всех $x\in A$, где $\xi\in H_f$ — нек-рый циклич. вектор, к-рый состоит в следующем. В A определяется полускалярное произведение $\langle x,\,y\rangle=f(y^*x)$; соответствующим нейтральным подпространством является левый идеал $N_f=\{x\in A: f(x^*x)=0\}$, поэтому в предгильбертовом пространстве A/N_f корректно определены операторы левого умножения L_a на элементы $a\in A$ $(L_a(x+N_f)=ax+N_f)$;

операторы L_a непрерывны и продолжаются до непрерывных операторов $\overline{L}_a$ в пополнении H_f пространства A/H_f. Отображение π_f, переводящее $a\in A$ в $\overline{L}_a\xi$, и есть требуемое представление, причем в качестве ξ можно взять образ единицы при суперпозиции канонич. отображений $A\to A/H_f\to H_f$.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Наймарк М. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1948, т. 12, с. 445—80; [2] Segal I., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 53; [3] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968. *В. С. Шульман.*

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ алгебры с инволюцией $*$ — элемент x $*$-алгебры A, допускающий представление $x=y^*y$, где $y\in A$. Множество $P(A)$ П. э. банаховой $*$-алгебры A содержит множество $Q(A)$ квадратов эрмитовых элементов, содержащее, в свою очередь, множество $P_0(A)^+$ всех эрмитовых элементов с положительным спектром, но, вообще говоря, не содержит множества A^+ всех эрмитовых элементов с неотрицательным спектром. Условием $P(A)\subset A^+$ определяется класс вполне симметричных (или эрмитовых) банаховых $*$-алгебр; для того чтобы $*$-алгебра была вполне симметричной, необходимо и достаточно, чтобы все ее эрмитовы элементы имели действительный спектр. Равенство $P(A)=A^+$ имеет место тогда и только тогда, когда A есть C^*-алгебра. В этом случае $P(A)$ — воспроизводящий конус в пространстве всех эрмитовых элементов алгебры A.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [2] Дикмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [3] Райков Д. А., «Докл. АН СССР», 1946, т. 54, № 5, с. 391—94; [4] Pták V., «Bull. Lond. Math. Soc.», 1970, v. 2, p. 327—34; [5] Palmer I., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1972, v. 78, p. 522—24.

В. С. Шульман.

ПОЛОС МЕТОД — метод в теории функций комплексного переменного, опирающийся на оценки, связывающие длины нек-рого специального семейства кривых и площадь области, заполняемой этим семейством. В основе П. м. лежат леммы Грётша (см. [1]). Одна из них формулируется следующим образом.

Пусть в прямоугольнике со сторонами длины A и B имеется конечное число не налегающих друг на друга односвязных областей S_k, $k=1, \ldots, n$, с жордановыми границами, содержащими на сторонах длины A по отрезку, к-рые не вырождаются в точки (области S_k образуют полосы, идущие от одной стороны длины A к другой). Если область S_k конформно отображается на прямоугольник со сторонами длины a_k и b_k так, что упомянутые отрезки переходят в стороны длины a_k, то

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\leqslant\frac{A}{B},$$

причем равенство достигается только в том случае, если S_k, $k=1, \ldots, n$,— прямоугольники со сторонами длины a_k' и B и $\sum_{k=1}^{n}a_k'=A$.

В качестве другой леммы служит *Грётша принцип*. Леммы Грётша верны и для бесконечного множества подобластей.

П. м. как метод теории однолистных конформных и квазиконформных отображений был впервые использован Х. Грётшем [1], к-рый с помощью этого метода систематически исследовал и решил большое количество экстремальных задач для однолистных функций, заданных в конечносвязных и бесконечносвязных областях (см. [3]; о других применениях П. м. см. [2], гл. 4, § 6).

П. м. лежит в основе *экстремальной метрики метода*.

Лит.: [1] Grötzsch H., «Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-physische. Kl.», 1928, Bd 80, H. 6, S. 367—76; H. 7, S. 503—07; 1929, Bd 81, H. 1, S. 38—48; H. 2, S. 51—87; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962.

Е. Г. Голузина.

ПОЛОС МЕТОД — метод приближенного решения одномерных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, основанный на специальном способе замены ядра на вырожденное, на получении резольвенты вырожденного уравнения и последующем уточнении приближенного решения с помощью быстросходящегося итеративного алгоритма.

Пусть исходное интегральное уравнение записано в виде

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds=f(x). \qquad (1)$$

Для построения вырожденного ядра в П. м. квадрат

$$\{a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant s\leqslant b\}$$

разбивается на N полос

$$\left\{\frac{b-a}{N}\,i\leqslant x\leqslant\frac{b-a}{N}\,(i+1),\ a\leqslant s\leqslant b\right\},$$

$$i=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$$

В каждой полосе (i) функция $K(x,\ s)$ приближается в среднем квадратическом или равномерно функцией вида

$$K_i(x,\ s)=C_i(x)+P_i(x)\,Q_i(s).$$

В простейшем случае

$$K_i(x,\ s)=K(\xi_i,\ s),\ \xi_i\in\left[\frac{b-a}{N}\,i,\ \frac{b-a}{N}\,(i+1)\right]$$

При помощи функции $K_i(x,\ s)$ можно образовать вырожденное ядро:

$$K_N(x,\ s)=\sum_{i=0}^{N-1}\hat{C}_i(x)+\hat{P}_i(x)\,Q_i(s), \qquad (2)$$

$$\hat{P}_i(x)=\begin{cases}P_i(x), & x\in\left[\frac{b-a}{N}\,i,\ \frac{b-a}{N}\,(i+1)\right]\\ 0, & x\notin\left[\frac{b-a}{N}\,i,\ \frac{b-a}{N}\,(i+1)\right]\end{cases},$$

$$\hat{C}_i(x)=\begin{cases}C_i(x), & x\in\left[\frac{b-a}{N}\,i,\ \frac{b-a}{N}\,(i-1)\right]\\ 0, & x\notin\left[\frac{b-a}{N}\,i,\ \frac{b-a}{N}\,(i+1)\right]\end{cases}.$$

Решение уравнения с вырожденным ядром (2) аппроксимирует решение (1), вообще говоря, тем лучше, чем больше число полос N и чем лучше аппроксимация $K(x,\ s)$ в каждой полосе. Приближенное решение $\varphi_0(x)$ можно еще улучшить с помощью итеративного алгоритма:

$$\varphi_k(x)-\lambda\int_a^b K_N(x,\ s)\,\varphi_k(s)\,ds=$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b\left[K(x,\ s)-K_N(x,\ s)\right]\varphi_{k-1}(s)\,ds. \qquad (3)$$

Итерация (3) сходится к решению (1) в среднем квадратическом или равномерно при условии достаточной близости ядер $K(x,\ s)$ и $K_N(x,\ s)$.

Лит.: [1] Положий Г. Н., Чаленко П. И., «Доповіді АН УРСР», 1962, № 4, с. 427—31.

А. Б. Бакушинский.

ПОЛОСА — совокупность точек плоскости, лежащих между двумя параллельными прямыми этой плоскости. Координаты точек x, y полосы удовлетворяют неравенствам $C_1<Ax+By<C_2$, где A, B, C_1, C_2 — нек-рые постоянные, причем A и B одновременно не равны нулю. Преобразование $w=e^z$ конформно отображает полосу $0<y<\pi$ комплексной плоскости $z=x+iy$ на верхнюю полуплоскость комплексной плоскости w. *БСЭ-3.*

ПОЛОСА, поверхностная полоса (в узком смысле),— однопараметрическое семейство касательных плоскостей к поверхности. В общем смысле

полосой наз. объединение кривой l и вектора $\boldsymbol{m}$, ортогонального в каждой точке кривой ее касательному вектору. Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_3$ кривая l задана уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, где s — естественный параметр кривой, $\boldsymbol{r}(s)$ — радиус-вектор точки кривой. Вдоль l задается вектор-функция $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}(s)$, где $\boldsymbol{m}(s)$ — единичный вектор, ортогональный касательному вектору $\boldsymbol{t}=d\boldsymbol{r}/ds$ в соответствующих точках кривой. В этом случае говорят, что вдоль кривой l задана поверхностная полоса $\Phi=\{l, \boldsymbol{m}\}$ с нормалью $\boldsymbol{m}(s)$. Вектор $\boldsymbol{\tau}=[\boldsymbol{m}, \boldsymbol{t}]$ наз. вектором геодезической нормали полосы Φ; вместе с векторами $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{m}$ вектор $\boldsymbol{\tau}$ образует трехгранник Френе для П. Относительно подвижного трехгранника Френе для П. записываются деривационные формулы Френе:

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=k_g\boldsymbol{\tau}+k_n\boldsymbol{m};\quad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=-k_g\boldsymbol{t}+\varkappa_g\boldsymbol{m};$$

$$\frac{d\boldsymbol{m}}{ds}=-k_n\boldsymbol{t}+\varkappa_g\boldsymbol{\tau},$$

где k_g (геодезич. кривизна П.), $k_n(s)$ (нормальная кривизна П.), $\varkappa_g(s)$ — (геодезич. кручение П.) — скалярные функции параметра s.

Если в каждой точке кривой l вектор $\boldsymbol{m}$ коллинеарен вектору главной нормали кривой l, то $k_g=0$ и в этом случае П. наз. геодезической полосой. Если в каждой точке вектор $\boldsymbol{m}$ коллинеарен бинормали кривой, то в этом случае $k_n=0$, а П. наз. асимптотической полосой.

Лит.: [1] Бляшке В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., М., 1957. *Л. А. Сидоров.*

ПОЛУГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ, геодезические нормальные координаты,— координаты $x^1, \ldots, x^n$ в n-мерном римановом пространстве, характеризующиеся тем, что координатные линии, соответствующие x^1, являются геодезич. линиями, на к-рых x^1 играет роль нормального параметра, а координатные поверхности $x^1=\text{const}$ — ортогональны этим геодезическим. В П. к. квадрат линейного элемента имеет вид

$$ds^2=(dx^1)^2+\sum_{i,\ j=2}^{n} g_{ij}\,dx^i\,dx^j.$$

П. к. можно ввести в достаточно малой окрестности любой точки произвольного риманова пространства. В двумерных римановых пространствах в ряде случаев (напр., для регулярных поверхностей строго отрицательной кривизны) возможно введение П. к. в целом.

В двумерном случае квадрат линейного элемента в П. к. принято записывать в виде

$$ds^2=du^2+B^2(u,\ v)\,dv^2.$$

Полная (гауссова) кривизна может быть найдена по формуле:

$$K=-\frac{1}{B}\frac{\partial^2 B}{\partial u^2}.$$

При изучении двумерных римановых многообразий знакоопределенной кривизны важную роль играют специальные П. к.— геодезические полярные координаты (r, φ). В этом случае все координатные геодезич. линии $\varphi=\text{const}$ пересекаются в одной точке (полюсе), а φ является углом между координатными линиями $v=0$ и $\varphi=\text{const}$. Линия $r=\text{const}$ наз. геодезической окружностью. Квадрат линейного элемента в окрестности полюса в геодезических полярных координатах имеет вид

$$ds^2=dr^2+r^2\left\{1-\frac{K_0}{3}r^2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{6}(K_1\cos\varphi+K_2\sin\varphi)\,r^3+o(r^3)\right\}d\varphi^2,$$

где K_0 — полная (гауссова) кривизна в точке P, K_1 — производная от K по r в точке P в направлении геодезической $\varphi=0$, K_2 — такая же производная в направлении геодезической $\varphi=\pi/2$.

При определении П. к. в псевдоримановом пространстве часто требуется, чтобы геодезические, соответствующие x^1, не были изотропными. В этом случае квадрат линейного элемента имеет вид

$$ds^2 = \pm (dx^1)^2 + \sum_{i,\ j=2}^{n} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

(знак + или — выбирается в зависимости от знака квадрата интервала касательного вектора к линии x^1).

Д. Д. Соколов.

ПОЛУГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — проективное n-пространство, в к-ром метрика определяется заданным абсолютом, состоящим из совокупности действительного конуса 2-го порядка Q_0 индекса l_0 с $(n-m_0-1)$-плоской вершиной T_0, $(n-m_0-2)$-действительного конуса Q_1 индекса l_1 с $(n-m_1-1)$-плоской вершиной T_1 в $(n-m_0-1)$-плоскости T_0, $(n-m_1-2)$-действительного конуса Q_2 индекса l_2 с $(n-m_2-1)$-плоской вершиной T_2 в $(n-m_1-1)$-плоскости T_1 и т. д. до $(n-m_{r-2}-2)$-действительного конуса Q_{r-1} индекса l_{r-1} с $(n-m_{r-1}-1)$-плоской вершиной T_{r-1} и невырожденной действительной $(n-m_{r-1}-2)$-квадрикой Q_r индекса l_r в плоскости T_{r-1}, $0 \leqslant m_0 < m_1 < \ldots < m_{r-1} < n$. Такое пространство наз. П. п. индексов $l_0, l_1, \ldots, l_r$ и обозначается $l_0 l_1 \ldots l_r S_n^{m_0 m_1 \ldots m_{r-1}}$.

В случае, когда конус Q_0 является парой слившихся плоскостей, совпадающих с плоскостью T_0 (при $m_0=0$), П. п. с несобственной плоскостью T_0 наз. *полуевклидовым пространством*:

$$l_1 l_2 \ldots l_r\, R_n^{m_1 m_2 \ldots m_{r-1}}.$$

Расстояние между точками X и Y определяется в зависимости от расположения прямой XY относительно плоскостей $T_0, T_1, \ldots, T_{r-1}$. Если, в частности, прямая XY не пересекает плоскость T_0, то расстояние между точками X и Y определяется с помощью скалярного произведения аналогично соответствующему определению в *квазигиперболическом пространстве*. Если же прямая XY пересекает плоскость T_0, но не пересекает плоскость T_1 или пересекает плоскость T_{a-1}, но не пересекает плоскость T_a, то расстояние между точками определяется с помощью скалярного квадрата разности соответствующих векторов точек X и Y.

В зависимости от расположения относительно плоскостей $T_0, T_1, \ldots, T_a, \ldots$ абсолюта различаются четыре типа прямых различных порядков: эллиптические, гиперболические, изотропные и параболические.

Углы между плоскостями в П. п. определяются по аналогии с определением углов между плоскостями в квазигиперболич. пространстве, т. е. с использованием расстояний в двойственном пространстве.

Проективная метрика П. п. является метрикой наиболее общего вида. Частным случаем метрики П. п., напр., является метрика квазигиперболич. пространства. В частности, 2-плоскость ${}^{01}S_2^0$ совпадает с псевдоевклидовой ${}^1R_2$, плоскость ${}^{10}S_2^1$ — с копсевдоевклидовой ${}^1R_2^*$; 3-пространства ${}^{11}S_3^1$ и ${}^{10}S_3^1$ совпадают с квазигиперболическим 3-пространством, 3-пространство ${}^{10}S_3^2$ — с копсевдоевклидовым ${}^1R_3^*$ и т. д.; 3-пространство ${}^{100}S_3^{12}$ двойственно псевдогалилееву пространству ${}^1\Gamma_3$, оно наз. копсевдогалилеевым пространством, его абсолют состоит из пары действительных плоскостей (конус Q_0) и точки T_1 на прямой T_0 пересечения этих плоскостей.

Движениями П. п. наз. его коллинеации, переводящие абсолют в себя. При $m_a = n - m_{r-a-1} - 1$ и при $l_a = l_{r-a}$ П. п. двойственно самому себе. В таком пространстве определяются кодвижения, определения к-рых аналогичны определению кодвижения в квазигиперболич. пространстве, двойственном самому себе. Движения, движения и кодвижения образуют группы, являющиеся группами Ли. Движения (как и кодвижения) П. п. описываются псевдоортогональными операторами индексов, определенных индексами пространства.

П. п. является *полуримановым пространством*.

Лит.: [1] Sommerville D. M. Y., «Proc. Edinburgh Math. Soc.», 1910, v. 28, p. 25—41; [2] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *Л. А. Сидоров.*

ПОЛУГРУПП МНОГООБРАЗИЕ — класс полугрупп, задаваемый системой тождеств (см. *Алгебраических систем многообразие*). Всякое П. м. будет либо периодическим, т. е. состоит из периодич. полугрупп, либо надкоммутативным, т. е. содержит многообразие всех коммутативных полугрупп. Для классификации ряда свойств П. м. выделяются нек-рые типы тождеств. Тождество $u = v$ наз. нормальным (а также регулярным, однородным), если множества переменных, входящих в слова u и v, совпадают, и аномальным — в противном случае. Тождество $u = v$ наз. уравновешенным, если каждая переменная в u и v встречается одно и то же число раз. Частный случай уравновешенного тождества — перестановочное тождество — если $u = x_1 \ldots x_m$ и v получено из u перестановкой переменных. П. м. надкоммутативно тогда и только тогда, когда все его тождества уравновешенные. Базис тождеств П. м. $\mathfrak{M}$ наз. неприводимым, если любое его собственное подмножество задает многообразие, отличное от $\mathfrak{M}$. Всякое надкоммутативное П. м. имеет неприводимый базис тождеств. Существуют П. м., не имеющие неприводимый базис тождеств. Примеры конечно базируемых П. м.: любое многообразие коммутативных полугрупп, любое периодическое П. м. с перестановочным тождеством, любое П. м., заданное перестановочными тождествами. Любая полугруппа с числом элементов $\leqslant 5$ имеет конечный базис тождеств, но существует 6-элементная полугруппа, не имеющая конечного базиса тождеств.

Следующие условия для П. м. $\mathfrak{M}$ эквивалентны $\mathfrak{M}$ задано нормальными тождествами; все тождества $\mathfrak{M}$ нормальны; $\mathfrak{M}$ содержит двухэлементную полурешетку. П. м. $\mathfrak{M}$ имеет среди своих тождеств аномальное тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ периодическое и состоит из архимедовых полугрупп.

Минимальные П. м. исчерпываются многообразиями всех: 1) *полурешеток*, 2) *полугрупп левых нулей*, 3) полугрупп правых нулей (см. *Идемпотентов полугруппа*), 4) полугрупп с нулевым умножением, 5) абелевых групп экспоненты p при любом простом p. В решетке всех П. м. всякий неединичный элемент имеет покрывающий его элемент; единичный элемент не может быть равен объединению конечного числа неединичных элементов. Решетка всех П. м. не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству и имеет мощность континуум. Эту же мощность имеют подрешетка всех многообразий нильполугрупп с тождеством $x^2 = 0$ и подрешетка всех надкоммутативных многообразий. Для нек-рых П. м. $\mathfrak{M}$ получены явные описания решетки их подмногообразий $L(\mathfrak{M})$; описаны П. м. $\mathfrak{M}$ с нек-рыми ограничениями на решетку $L(\mathfrak{M})$.

П. м. наз. малым, если $L(\mathfrak{M})$ конечна. П. м. $\mathfrak{M}$ наз. многообразием конечного индекса, если ступени нильпотентности нильпотентных полугрупп из $\mathfrak{M}$ ограничены в совокупности (это условие эквивалентно тому, что каждая нильполу-

группа из $\mathfrak{M}$ нильпотентна, а также тому, что $\mathfrak{M}$ не содержит многообразия всех коммутативных нильполугрупп с тождеством $x^2=0$). Всякое малое П. м. имеет конечный индекс.

Для периодического П. м. $\mathfrak{M}$ следующие условия эквивалентны [4]: $\mathfrak{M}$ состоит из связок архимедовых полугрупп; в любой полугруппе из $\mathfrak{M}$ каждый класс кручения есть подполугруппа; $\mathfrak{M}$ не содержит полугруппы Брандта B_2 (см. *Периодическая полугруппа*). Этим условиям удовлетворяют П. м. $\mathfrak{M}$ с модулярной решеткой $L(\mathfrak{M})$ и П. м. конечного индекса (в частности, малые П. м.). Малое П. м. л о к а л ь н о к о н е ч н о (т. е. состоит из локально конечных полугрупп) тогда и только тогда, когда локально конечно многообразие всех групп из $\mathfrak{M}$; малое локально конечное многообразие групп — это в точности кроссово многообразие (см. *Групп многообразие*). О других локально конечных П. м. см. *Локально конечная полугруппа*. Описаны П. м., состоящие из финитно аппроксимируемых полугрупп [3].

Множество всех П. м. относительно мальцевского умножения образует частичный группоид G. Известны все идемпотенты в G, их в точности 9. Множество всех П. м., задаваемых системами тождеств вида $w=0$, образует максимальный группоид в G.

Изучаются также П. м. полугрупп с дополнительными сигнатурными операциями: многообразия моноидов (с сигнатурной единицей), многообразия полугрупп с сигнатурным нулем, многообразия инверсных полугрупп и др.

Лит.: [1] Evans T., «Semigroup forum», 1971, v. 2, № 1, p. 1—43; [2] Айзенштат А. Я., Богута Б. К., в сб.: Полугрупповые многообразия и полугруппы эндоморфизмов, Л., 1979, с. 3—46; [3] Голубов Э. А., Сапир М. В., «Докл. АН СССР», 1979, т. 247, № 5, с. 1037—41; [4] Сапир М. В., Суханов Е. В., «Изв. вузов. Математика», 1981, № 4, с. 48—55.

Л. Н. Шеврин.

ПОЛУГРУППА — множество с одной бинарной операцией, удовлетворяющей закону *ассоциативности*. Понятие П. есть обобщение понятия *группы*: из аксиом группы остается лишь одна — ассоциативность; этим объясняется и термин «П.». П. называют иногда м о н о и д а м и, но последний термин употребляется чаще всего для П. с сигнатурной единицей (т. е. с нульарной операцией, отмечающей единицу).

Теория П. принадлежит к числу сравнительно молодых областей алгебры. Первые исследования, посвященные П., относятся к 20-м гг. 20 в. и связаны с именем А. К. Сушкевича. Он, в частности, определил строение ядра (наименьшего идеала) конечной П., т. е. фактически строение конечной П. без собственных идеалов. Этот результат позднее был обобщен Д. Рисом (D. Rees) на произвольные *вполне простые полугруппы* и усовершенствован посредством введения понятия матрицы над группой (см. *Рисовская полугруппа матричного типа*). Теорема Риса, к-рую можно считать нек-рым аналогом теоремы Веддерберна о простых алгебрах, принадлежит к числу основных фактов теории П. Другие ранние исследования по теории П. принадлежат А. Клиффорду (A. Clifford), одним из первых значительных достижений к-рого было введение и изучение П., покрываемых группами; эти П. наз. теперь вполне регулярными, или *клиффордовыми полугруппами*. К кон. 50-х гг. 20 в. теория П. сформировалась в самостоятельную ветвь современной алгебры с богатой проблематикой, разнообразными методами и тесными связями с многими областями математики как собственно алгебраическими (в первую очередь, с теорией групп и теорией колец), так и другими, напр. функциональным анализом (П. операторов в банаховых пространствах), дифференциальной геометрией (П. частичных преобразований), алгебраич. теорией автоматов (П. автоматов).

Примеры П. чрезвычайно многочисленны. Это — различные множества чисел вместе с операцией сложения или умножения, замкнутые относительно рассматриваемой операции, П. матриц относительно умножения, П. функций относительно «поточечного» умножения $*$, задаваемого формулой $(f*g)(x)=f(x)\,g(x)$, П. множеств относительно операции пересечения или объединения и т. д. В общей теории и нек-рых приложениях важен следующий пример П. Пусть X — произвольное множество. На множестве F_X всех конечных последовательностей элементов из X определяется операция, задаваемая формулой

$$(x_1, \ldots, x_n) * (y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

Тогда F_X относительно операции $*$ является П.; она наз. с в о б о д н о й П. на множестве X. Всякая П. есть гомоморфный образ нек-рой свободной.

Всякая совокупность преобразований произвольного множества M, замкнутая относительно операции к о м п о з и ц и и (последовательного выполнения, наз. также с у п е р п о з и ц и е й), будет П. относительно этой операции; такова, в частности, совокупность всех преобразований множества M, наз. с и м м е т р и ч е с к о й п о л у г р у п п о й на множестве M. Многие важные совокупности преобразований оказываются П., причем часто они не являются группами. С другой стороны, всякая П. изоморфна нек-рой П. преобразований. Таким образом, именно понятие П. оказывается наиболее подходящим для изучения в самом общем виде преобразований, и в большой степени через рассмотрение преобразований осуществляются связи теории П. с другими областями математики. При этом очень часто П. возникают как П. эндоморфизмов (см. *Эндоморфизмов полугруппа*) тех или иных рассматриваемых систем: пространств, алгебр, графов и т. д. К П. приводит также рассмотрение частичных преобразований и бинарных отношений относительно операции умножения.

Как и в других алгебраич. теориях, одной из главных задач теории П. является классификация всевозможных П., описание их строения. Это осуществляется прежде всего наложением на рассматриваемые П. различных ограничений и выделением тем самым различных типов П. Ограничения могут иметь разную природу. П. может удовлетворять фиксированной системе тождеств (типичные примеры — коммутативные П., П. идемпотентов) или другим условиям, выражаемым формулой узкого исчисления предикатов (примеры — П. с законом сокращения, регулярные П.). Закон сокращения и регулярность представляют собой примеры ограничений, носящих так или иначе характер ослабления свойств группы; введение подобных условий было, пожалуй, особенно популярно на первых порах развития теории П. (среди выделенных здесь типов, наиболее близких к группам,— *правые группы*). Во многих случаях, впрочем, возникающие на этом пути классы П. включают в себя П., весьма далекие по своим свойствам от групп (типичный пример — П. идемпотентов).

Понятие *регулярной полугруппы* возникло по аналогии с понятием *регулярного кольца*. Класс регулярных П. принадлежит к числу наиболее интенсивно изучаемых в теории П. Он включает в себя следующие важные классы полугрупп: мультипликативные П. регулярных колец (и, в частности, П. всех матриц данного порядка над телом), симметрические П., П. всех частичных преобразований множеств, инверсные П., клиффордовы П. и, в частности, П. идемпотентов и вполне простые П., вполне 0-простые П. и др.

Другой тип распространенных ограничений — ограничения на систему всех или нек-рых подполугрупп, в частности идеалов, а также нек-рых отношений на

П., в частности конгруэнций. Так возникают, напр., разнообразные типы *простых полугрупп* и разнообразные условия конечности (см. *Полугруппа с условием конечности*, *Периодическая полугруппа*, *Локально конечная полугруппа*, *Финитно аппроксимируемая полугруппа*, *Минимальный идеал*), П. с разными типами идеальных рядов и идеальных систем (см. *Идеальный ряд*, *Нильполугруппа*); принципиальную роль в исследовании многих вопросов теории П. играют *Грина отношения эквивалентности*.

Ограничения могут относиться к порождающим множествам и выделять их типы либо с точки зрения характера порождающих элементов (напр., идемпотенты; всякая П. вложима в идемпотентно порожденную П.) или их числа (конечно порожденные П. существенно участвуют во многих исследованиях), либо с точки зрения взаимодействия порождающих элементов — изучаются П., заданные определяющими соотношениями и, в частности, конечно определенные П. (см. *Алгоритмическая проблема*, *Полугруппа с условием конечности*), либо с объединенной точки зрения (см., напр., *Бициклическая полугруппа*).

При изучении строения П. важную роль играют различные конструкции, сводящие описание рассматриваемых П. к тем или иным «более хорошим» типам. Довольно часто в качестве последних выступают группы, и принцип описания «по модулю групп» распространен в теоретико-полугрупповых исследованиях, он проявился еще в упоминавшейся классич. теореме Риса, согласно к-рой всякая вполне 0-простая (вполне простая) П. изоморфна регулярной рисовской П. матричного типа над группой с нулем (группой). Группы участвуют в конструкциях, описывающих инверсные П., и в конструкциях, описывающих коммутативные *архимедовы полугруппы* с законом сокращения и без идемпотентов. Описание П. с многими условиями конечности сводится к группам с соответствующими условиями.

Среди конструкций, участвующих в описании П., имеются как общеалгебраические, напр. прямые произведения, подпрямые произведения, так и специфически теоретико-полугрупповые. К последним относятся уже упоминавшиеся рисовские П., а также ряд других, из к-рых следует упомянуть конструкцию с в я з к и — такого разбиения на подполугруппы, что соответствующее отношение эквивалентности есть конгруэнция. Среди связок особую роль играют коммутативные связки (или полурешетки) и матричные (прямоугольные) связки (см. *Связка полугрупп*). В терминах связок описываются многие типы П. Так, теорема Клиффорда о вполне регулярных П. означает, по существу, что эти П. исчерпываются полурешетками вполне простых П.; вполне простые П. — это в точности прямоугольные связки групп; теорема Тамуры — Кимуры утверждает, что любая коммутативная П. единственным образом разложима в связку архимедовых П. (см. [3]).

Как и всюду в алгебре, существенную роль в теории П. играет понятие гомоморфизма и, соответственно, понятие конгруэнции. П. принадлежат к числу универсальных алгебр, конгруэнции к-рых не определяются однозначно нек-рым своим каноническим смежным классом («ядром») подобно тому, как это, напр., имеет место в группах и кольцах. Эта более сложная ситуация привела к развитию довольно обширного направления теории П., посвященного изучению конгруэнций П. с различных точек зрения. Решаемые здесь задачи делятся в основном на два вида: 1) выделяются те или иные специальные типы конгруэнций на произвольных П.; 2) описываются все конгруэнции на тех или иных специальных П., принадлежащих важным в каком-то отношении классам П. К первому виду относится, в

частности, рассмотрение главных конгруэнций (см. [3]), а также идеальных, или рисовских, конгруэнций, сопоставляемых каждому двустороннему идеалу (если I — идеал полугруппы S, то соответствующая рисовская конгруэнция имеет своими классами I и одноэлементные подмножества $\{x\}$, где $x \in S \setminus I$), к-рые часто используются в различных вопросах и объясняют важность рассмотрения идеалов; факторполугруппу по рисовской конгруэнции наз. факторполугруппой Риса по соответствующему идеалу. Из решенных задач второго вида следует отметить описание конгруэнций на симметрических П., на вполне 0-простых П.; весьма далеко продвинуто изучение конгруэнций на инверсных П.; изучение *радикалов* П. развивается не без влияния аналогичного раздела теории колец. Рассмотрение гомоморфизмов П. в П. с заданными «хорошими» свойствами способствовало формированию направления, занимающегося аппроксимацией (см. *Сепаративная полугруппа*, *Финитно аппроксимируемая полугруппа*).

В исследованиях, связанных с рассмотрением подполугрупп, выделяется самостоятельное направление, посвященное изучению решеточных свойств П., т. е. взаимосвязей между свойствами П. и свойствами решеток их подполугрупп (см. *Решетка подалгебр*).

Широкое направление теории П. посвящено изучению различных вложений П. Истоки этого направления восходят к классич. проблеме *вложения полугрупп* в группы. О нек-рых задачах и результатах этого направления см. в ст. *Расширение* полугруппы.

Интенсивно развивается теория многообразий П.; об исследованиях в этом направлении см. в ст. *Полугрупп многообразие*. Начинает развиваться теория квазимногообразий П. (см. *Алгебраических систем квазимногообразие*) и нек-рых других классов П., близких в том или ином смысле к многообразиям.

Связи общей теории П. с конкретными П. осуществляются многими путями. Решаются проблемы абстрактной характеризации тех или иных важных конкретных П. (напр., П. преобразований: известно, в частности, несколько характеризаций симметрических П.), описываются различные их абстрактные свойства. О нек-рых основных результатах, касающихся П. преобразований, см. *Преобразований полугруппа*. Изучаются изоморфизмы и гомоморфизмы абстрактных П. в различные конкретные П., прежде всего П. преобразований и П. матриц (см. *Представление полугруппы*). Исследованием гомоморфизмов П. в нек-рые числовые П., прежде всего в мультипликативную П. комплексных чисел, занимается теория *характеров* полугрупп.

К специальным разделам теории П. приводит рассмотрение П. с дополнительными структурами, согласованными с операцией умножения. Здесь следует, в первую очередь, отметить структуру топологич. пространства (см. *Топологическая полугруппа*) и структуру порядка, частичного или линейного (см. *Упорядоченная полугруппа*).

Развивается и теория нек-рых видов обобщенных П. В первую очередь это алгебры с одной n-арной операцией, подчиненной обобщенному ассоциативному закону (их наз. n-ассоциативами, или n-полугруппами). Рассматриваются также алгебры с одной частичной ассоциативной бинарной операцией (одна из естественных ситуаций подобного рода возникает в теории категорий).

Лит.: [1] Сушкевич А. К., Теория обобщенных групп, Хар.— К., 1937; [2] Лаллеп Л. С., Полугруппы, М., 1960; [3] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [4] Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп, пер. с англ., М., 1975; [5] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965; [6] Итоги науки. Алгебра. Топология. 1962, М., 1963, с. 33—58; [7] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 161—202; [8] Итоги науки. Алгебра. Тополо-

гия. Геометрия. 1966, М., 1968, с. 9—56; [9] Semigroups, N.Y.—L., 1969; [10] Howie J., An introduction to semigroup theory, L.—N.Y.—S.F., 1976; [11] Petrich M., Introduction to semigroups, Columbus, 1973; [12] его же, Lectures in semigroups, B., 1977; [13] Redei L., The theory of finitely generated commutative semigroups, Oxf.—[a.o.], 1965; [14] Hofmann K. H., Mostert P. S., Elements of compact semigroups, Columbus, 1966; [15] Lallement G., Semigroups and combinatorial applications, N.Y.—[a.o.], 1979; [16] Eilenberg S., Automata, languages and machines, N.Y.—S.F.—L., v. A, 1974; v. B., 1976.

Л. Н. Шеврин.

ПОЛУГРУППА НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ — однопараметрическое семейство операторов $S(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, определенных и действующих в замкнутом подмножестве C банахова пространства X, обладающее свойствами:

1) $S(t+\tau)x = S(t)(S(\tau)x)$ при $x \in C$, t, $\tau > 0$;

2) $S(0)x = x$ для любого $x \in C$;

3) при каждом $x \in C$ функция $S(t)x$ (со значениями в X) непрерывна по t на $[0, \infty)$.

Полугруппа $S(t)$ имеет тип ω, если

$$\| S(t)x - S(t)y \| \leqslant e^{\omega t} \| x - y \|, \quad x, y \in C, \quad t > 0.$$

Полугруппа типа 0 наз. сжимающей.

Так же, как и для полугрупп линейных операторов, вводится понятие производящего оператора A_0 полугруппы $S(t)$:

$$A_0 x = \lim_{h \to 0} (S(h)x - x)/h$$

на тех элементах $x \in C$, для к-рых этот предел существует. Если полугруппа сжимающая, то A_0 — диссипативный оператор. При этом оператор A в банаховом пространстве X диссипативен, если $\|x - y - \lambda(Ax - Ay)\| \geqslant \|x - y\|$ при x, $y \in \overline{D(A)}$, $\lambda > 0$. Диссипативный оператор может быть многозначным, тогда в определении под Ax понимается любое его значение на x. Диссипативный оператор наз. m-диссипативным, если $\operatorname{Im}(I - \lambda A) = X$ при $\lambda > 0$. Если $S(t)$ — типа ω, то $A_0 - \omega I$ диссипативен.

Основная теорема о порождении полугруппы: если оператор $A - \omega I$ диссипативен и при достаточно малых $\lambda > 0$ образ $\operatorname{Im}(I - \lambda A)$ оператора $I - \lambda A$ содержит $D(A)$, то существует полугруппа $S_A(t)$ типа ω на $\overline{D(A)}$ такая, что

$$S_A(t)x = \lim_{n \to \infty} \left(I - \frac{t}{n} A\right)^{-n} x,$$

где $x \in \overline{D(A)}$, при этом сходимость равномерна на любом конечном промежутке изменения t. (Существование полугруппы $S_A(t)$ можно показать, если заменить условие $\operatorname{Im}(I - \lambda A) \supset \overline{D(A)}$ более слабым:

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1} d(\operatorname{Im}(I - \lambda A), x) = 0,$$

где d — расстояние между множествами.)

С оператором A можно связать задачу Коши

$$\frac{du}{dt} \in Au(t), \quad t > 0, \quad u(0) = x. \qquad (*)$$

Если существует сильное решение задачи (*), т. е. непрерывная на $[0, \infty)$ функция $u(t)$, абсолютно непрерывная на любом компакте из $(0, \infty)$, принимающая при почти всех $t > 0$ значения в $D(A)$, имеющая при почти всех $t > 0$ сильную производную, удовлетворяющую включению (*), то $u(t) = S_A(t)x$. Любая функция $S_A(t)x$ является единственным т. н. интегральным решением задачи (*).

Если в условиях основной теоремы пространство X рефлексивно и A замкнут, то при $x \in D(A)$ функция $u(t) = S_A(t)$ дает сильное решение задачи Коши (*), при этом $\frac{du}{dt} \in A^0 u(t)$ почти везде, где $A^0 z$ — множество элементов минимальной нормы из Az. В этом случае про-

изводящий оператор A_0 полугруппы $S_A(t)$ плотно задан: $\overline{D(A_0)}=\overline{D(A)}$. Если, сверх того, X и X' равномерно выпуклы, то оператор A^0 однозначен и при всех $t\geqslant 0$ существует правая производная $\frac{d^+u}{dt}=A^0u(t)$; эта функция непрерывна справа на $[0, \infty)$ и непрерывна во всех точках, кроме, быть может, счетного множества, в этом случае $D(A_0)=D(A)$ и $A_0=A^0$.

Если X рефлексивно (соответственно $X=Y'$, где Y — сепарабельно), а оператор A однозначен и обладает тем свойством, что из $x_n\to x$ в X и $Ax_n\to y$ в *слабой топологии* $\sigma(X, X')$ (соответственно $\sigma(X, Y)$) следует $y=Ax$, то $u(t)\in D(A)$, $t\geqslant 0$, и $u(t)$ слабо (соответственно слабо *) *непрерывно дифференцируемое решение* задачи (*). В нерефлексивном случае известны примеры, когда выполнены условия основной теоремы при $\overline{D(A)}=X$ и функции $u(t)=S_A(t)x$ не имеют даже слабой производной в X ни при каких $x\in X$, $t\geqslant 0$.

Пусть A — непрерывный оператор, определенный на всем X и такой, что $A-\omega I$ диссипативен. Тогда $\operatorname{Im}(I-\lambda A)=X$ при $\lambda>0$, $\lambda\omega<1$ и для любого $x\in X$ задача (*) имеет единственное непрерывно дифференцируемое на $[0, \infty)$ решение $u(t)=S_A(t)x$. Если оператор A непрерывен в замкнутой области определения $D(A)$, то для того, чтобы он был производящим оператором полугруппы типа ω на $D(A)$, необходимо и достаточно, чтобы $A-\omega I$ был диссипативным и $\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda^{-1}d(x+\lambda Ax, D(A))=0$ при $x\in D(A)$.

В гильбертовом пространстве H сжимающая полугруппа на множестве C может быть продолжена для сжимающей полугруппы на замкнутом выпуклом множестве $\tilde{C}$ из H. При этом производящий оператор A_0 расширенной полугруппы будет определен на плотном в $\tilde{C}$ множестве. Существует единственный m-диссипативный оператор такой, что $\overline{D(A)}=C$ и $A_0=A^0$. Если A есть m-диссипативный оператор, то $\overline{D(A)}$ выпукло и существует единственная сжимающая на $\overline{D(A)}$ полугруппа $S(t)=S_A(t)$, для к-рой $A_0=A^0$.

Если на действительном гильбертовом пространстве H задан выпуклый полунепрерывный функционал φ и $\partial\varphi$ — его *субдифференциал*, то оператор $Ax=-\partial\varphi(x)$ (для тех x, при к-рых $\partial\varphi(x)$ непусто) является диссипативным. Полугруппа $S_A(t)$ обладает свойствами, сходными со свойствами линейных аналитич. полугрупп. В частности, $S_A(t)x\in D(A)$ $(t>0)$ при любом $x\in\overline{D(A)}$ и $u(t)=S_A(t)x$ является сильным решением задачи Коши (*), причем

$$\left\|\frac{d^+u}{dt}\right\|=\|A^0u(t)\|\leqslant\frac{v}{t}\|x-v\|+2\|A^0v\|$$

для всех $t>0$, $v\in D(A)$. Если φ достигает минимума, то $u(t)$ слабо сходится при $t\to\infty$ к нек-рой точке минимума.

Для приближенного решения задачи Коши существенную роль играют теоремы об аппроксимации полугрупп. Пусть X, X_n, $n=1, 2, \ldots$,— банаховы пространства, операторы A в X и A_n в X_n однозначны и удовлетворяют условиям основной теоремы с общим типом ω, операторы $p_n: X\to X_n$ — линейны и $\|p_n\|_{X\to X_n}\leqslant\text{const}$. Тогда из сходимости резольвент $(\lambda>0, \lambda\omega<1)$

$$\|(I-\lambda A_n)^{-1}p_nx-p_n(I-\lambda A)^{-1}x\|_{X_n}\to 0$$

при $x\in\overline{D(A)}$ следует сходимость полугрупп

$$\|S_{A_n}(t)p_nx-p_nS_A(t)x\|_{X_n}\to 0,\ x\in\overline{D(A)},$$

равномерная на каждом конечном промежутке.

Мультипликативные формулы Ли, полученные им в конечномерном линейном случае, обобщены на нелинейный случай. Если A, B и $A+B$ суть m-диссипа-

тивные однозначные операторы в гильбертовом пространстве и замкнутое выпуклое множество $C \subset \overline{D(A)} \cap \overline{D(B)}$ инвариантно относительно $(I-\lambda A)^{-1}$ и $(I-\lambda B)^{-1}$, то при любом $x \in C \cap \overline{D(A)} \cap \overline{D(B)}$

$$S_{A+B}(t)\,x = \lim_{n\to\infty}\left[S_A\left(\frac{t}{n}\right)S_B\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x.$$

Эта формула справедлива также в произвольном банаховом пространстве X для любого $x \in X$, если A — плотно заданный линейный m-диссипативный оператор, а B — заданный на всем X непрерывный диссипативный оператор. В обоих случаях

$$S_{A+B}(t)\,x = \lim\left[\left(I-\frac{t}{n}B\right)^{-1}\left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-1}\right]^n x,$$

$$x \in \overline{D(A)} \cap \overline{D(B)}.$$

В приводимых ниже примерах нелинейных дифференциальных операторов, удовлетворяющих условиям основной теоремы о порождении полугрупп, указывается лишь пространство X и краевые условия, а точное описание $D(A)$ опускается. Во всех примерах Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей; β, γ — многозначные максимальные монотонные отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\beta(0) \ni 0$, $\gamma(0) \ni 0$; $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная строго возрастающая функция, $\psi(0)=0$. Пример 1. $X=L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $Au=\Delta u - \beta(u)$, $-\frac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u)$ на Γ. Пример 2. $X=L_1(\Omega)$, $Au=\Delta\psi(u)$, $-\frac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u)$ на Γ. Пример 3. $X=W_2^{-1}(\Omega)$, $Au=\Delta\psi(u)$, $u=0$ на Γ. Пример 4. $X=C(\bar{\Omega})$ или $X=L_\infty(\Omega)$, $Au=\psi(\Delta u)$, $u=0$ на Γ. Пример 5. $X=L_1(\mathbb{R}^n)$, $Au=\operatorname{div} f(u)$, где $f \in C^1(\mathbb{R})$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, $f(0)=0$. Пример 6. $X=L_\infty(\mathbb{R})$, $Au=f(u_x)$, где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна.

Лит.: [1] Barbu V., Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces, Bucureşti, 1976; [2] Brézis H., Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Amst.—L.—N.Y., 1973; [3] Brezis H., Pazy A., «J. Funct. Anal.», 1972, v. 9, № 1, p. 63—74; [4] Crandall M. G., Liggett T. M., «Amer. J. Math.», 1971, v. 93, № 2, p. 265—98; [5] Kobayashi Y., «J. Math. Soc. Japan», 1975, v. 27, № 4, p. 640—65; [6] Konishi Y., «Proc. Japan. Acad.», 1972, v. 48, № 2, p. 62—66; [7] Martin R. H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1973, v. 179, p. 399—414; [8] Webb G. F., «J. Funct. Anal», 1972, v. 10, № 2, p. 191—203; [9] Хазан М. И., «Докл. АН СССР», 1973, т. 212, № 6, с. 1309—12; [10] его же, там же, 1976, т. 228, № 4, с. 805—808.

С. Г. Крейн, М. И. Хазан.

ПОЛУГРУППА ОПЕРАТОРОВ — семейство операторов $\{T\}$ в банаховом или топологическом векторном пространстве, обладающее тем свойством, что композиция любых двух операторов семейства снова принадлежит семейству. Если операторы T «занумерованы» элементами нек-рой абстрактной полугруппы $\mathfrak{A}$ и бинарной операции полугруппы отвечает композиция операторов, то полугруппа $\{T\}$ наз. представлением полугруппы $\mathfrak{A}$. Наиболее подробно изучены *однопараметрические полугруппы* линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве X, дающие представление аддитивной полугруппы всех положительных чисел, т. е. семейства $T(t)$ со свойством

$$T(t+\tau)\,x = T(t)\,T(\tau)\,x, \quad t,\ \tau > 0,\ x \in X.$$

Из сильной измеримости $T(t)$, $t>0$, следует, что $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа, поэтому в дальнейшем только такие и рассматриваются.

Существует число

$$\omega = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \ln \|T(t)\|$$

— тип полугруппы. Все функции $T(t)x$ растут не быстрее экспоненты.

Важной характеристикой является инфинитезимальный оператор полугруппы

$$A_0x = \lim_{t \to 0} t^{-1}[T(t)x - x],$$

определенный на линейном множестве $D(A_0)$ тех элементов x, на к-рых предел существует, и его замыкание A (если оно существует) — производящий оператор полугруппы. Множество $D(A_0)$ плотно на подпространстве X_0, являющемся замыканием объединения всех значений $T(t)x$. Если в X_0 нет ненулевых элементов, на к-рых $T(t)x \equiv 0$, то существует производящий оператор A. В дальнейшем всегда предполагается, что $X_0 = X$ и что из $T(t)x \equiv 0$ следует $x = 0$.

Наиболее простой класс полугрупп — класс C_0 — выделяется условием: $T(t)x \to x$ при $t \to 0$ и любом $x \in X$. Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы функция $\|T(t)\|$ была ограниченной на какомнибудь промежутке $(0, a]$. В этом случае $T(t)$ имеет производящий оператор $A = A_0$, для резольвенты $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$ к-рого выполнено

$$\|R^n(\lambda, A)\| \leqslant M(\lambda - \omega)^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots; \ \lambda > \omega, \qquad (1)$$

где ω — тип полугруппы. Обратно, если A — замкнутый оператор с плотной в X областью определения, для резольвенты к-рого выполнено (1), то он является производящим оператором нек-рой полугруппы $T(t)$ класса C_0, причем $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$. Условия (1) выполняются, если

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant (\lambda - \omega)^{-1}$$

(условие Хилле — Иосиды). Если при этом $\omega = 0$, то $T(t)$ — *сжатий полугруппа*: $\|T(t)\| \leqslant 1$.

Суммируемая полугруппа — та, для к-рой функции $\|T(t)x\|$ суммируемы на любом конечном отрезке при всех $x \in X$. Суммируемая полугруппа имеет производящий оператор $A = A_0$. Оператор A_0 замкнут тогда и только тогда, когда при любом $x \in X$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x\,ds = x.$$

Для суммируемой полугруппы при $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ определено преобразование Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\,dt = -R(\lambda)x, \qquad (2)$$

дающее линейный ограниченный оператор $R(\lambda)$, обладающий многими свойствами резольвенты.

Для того чтобы замкнутый оператор A с плотной в X областью определения был производящим оператором суммируемой полугруппы $T(t)$, необходимо и достаточно, чтобы для нек-рого ω существовала резольвента $R(\lambda, A)$ при $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ и выполнялись условия: а) $\|R(\lambda, A)\| \leqslant M$, $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$; б) существуют такие неотрицательная и непрерывная по совокупности переменных функция $\varphi(t, x)$, $t > 0$, $x \in X$, и неотрицательная функция $\varphi(t)$, ограниченная на любом промежутке $[a, b] \subset (0, \infty)$, что при $\omega_1 > \omega$

$$\int_0^\infty e^{-\omega_1 t} \varphi(t, x)\,dt < \infty,$$

$$\overline{\lim_{t \to \infty}}\ t^{-1} \ln \varphi(t) < \infty, \quad \varphi(t, x) \leqslant \varphi(t)\|x\|,$$

$$\|R^n(\lambda, A)x\| \leqslant \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} \varphi(t, x)\,dt.$$

При этом

$$\|T(t)x\| \leqslant \varphi(t, x), \quad \|T(t)\| \leqslant \varphi(t).$$

Если дополнительно потребовать, чтобы функция $\|T(t)\|$ была суммируемой на конечных промежутках,

то необходимо и достаточно существование такой непрерывной функции $\varphi(t)$, что при $\omega_1 > \omega$

$$\int_0^\infty \varphi(t)\, e^{-\omega_1 t}\, dt < \infty, \tag{3}$$

$$\| R^n(\lambda, A) \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} \varphi(t)\, dt, \ \lambda > \omega, \ n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

При этом $\| T(t) \| \leqslant \varphi(t)$. Выбирая различные функции, удовлетворяющие (3), можно выделять различные подклассы суммируемых полугрупп. Если $\varphi(t) = Me^{\omega t}$, то получается класс C_0 и из (4) вытекает (1). Если $\varphi(t) = Mt^{-\alpha} e^{\omega t}$, $0 \leqslant \alpha < 1$, то из (4) получается условие

$$\| R^n(\lambda, A) \| \leqslant \frac{M\Gamma(n-\alpha)}{(n-1)!\,(\lambda-\omega)^{n-\alpha}}, \ \lambda > \omega, \ n = 1, 2, \ldots$$

Полугруппа со степенными особенностями. Если в предыдущем примере $\alpha \geqslant 1$, то в (4) интегралы при $n \leqslant \alpha - 1$ расходятся. В соответствии с этим производящий оператор соответствующих полугрупп может не иметь резольвенты ни при каких λ, т. е. иметь спектр, совпадающий со всей комплексной плоскостью. Однако для таких операторов, начиная с нек-рого n, существуют функции $S_n(\lambda, A)$, совпадающие в предыдущих случаях с $R^{n+1}(\lambda, A)$. Оператор-функция $S_n(\lambda, A)$ наз. р е з о л ь в е н т о й п о р я д к а n, если она аналитична в нек-рой области $G \subset \mathbb{C}$ и при $\lambda \in G$

$$S_n(\lambda, A)\, Ax = AS_n(\lambda, A)\, x, \ x \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{A}),$$

$$S_n(\lambda, A)\, (A - \lambda I)^{n+1} x = x, \ x \in D(A^{n+1}),$$

и из того, что $S_n(\lambda, A)\, x = 0$ при всех $\lambda \in G$, следует, что $x = 0$. Если $\overline{D}(A^{n+1}) = X$, то оператор может иметь единственную резольвенту порядка n, для к-рой имеется максимальная область аналитичности, наз. р е з о л ь в е н т н ы м м н о ж е с т в о м п о р я д к а n.

Пусть для сильно непрерывной полугруппы $T(t)$ выполняется неравенство

$$\| T(t) \| \leqslant Mt^{-\alpha} e^{\omega t}$$

при $\alpha \geqslant 1$. Тогда ее производящий оператор B имеет резольвенту порядка n при $n > \alpha - 1$, причем

$$S_n(\lambda, B)\, x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)\, x\, dt, \ \operatorname{Re} \lambda > \omega,$$

$$\left\| \frac{d^k S_n(\lambda, B)}{d\lambda^k}\, x \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\Gamma(k+n+1-\alpha)}{n!\,(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{k+n+1-\alpha}}, \ \operatorname{Re}\lambda > \omega, \ k = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

Обратно, пусть оператор B имеет при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ резольвенту $S_n(\lambda, B)$ порядка n, для к-рой выполнено (5) при $n > \alpha - 1$. Тогда существует единственная полугруппа $T(t)$ с оценкой

$$\| T(t) \| \leqslant Mt^{-\alpha} e^{\omega t},$$

для производящего оператора A к-рой $S_n(\lambda, A) = S_n(\lambda, B)$.

Гладкая полугруппа. Если $x \in D(A_0)$, то функция $T(t)x$ непрерывно дифференцируема и

$$\frac{dT(t)}{dt}\, x = A_0 T(t)\, x = \boldsymbol{T}(t)\, A_0 x.$$

Существуют полугруппы класса C_0, для к-рых при $x \notin D(A_0) = D(A)$ функции $T(t)x$ недифференцируемы при всех t. Однако для важных классов полугрупп наблюдается явление повышения их гладкости с увеличением t. Если $\boldsymbol{T}(t)x$, $t > t_0$, дифференцируемы при любом $x \in X$, то из полугруппового свойства следует, что $\boldsymbol{T}(t)x$ дважды дифференцируема при $t > 2t_0$, трижды — при $t > 3t_0$ и т. д. Поэтому если $T(t)x$ дифференцируемы при любых $t > 0$ и $x \in X$, то $T(t)x$ бесконечно дифференцируемы.

Для того чтобы для полугруппы класса C_0 при нек-ром $t_0 \geqslant 0$ функции $T(t)x$ были дифференцируемы при всех $x \in X$ и $t > t_0$, необходимо и достаточно существование таких чисел a, b, $c > 0$, что резольвента $R(\lambda, A)$ определена в области

$$\operatorname{Re} \lambda > a - b \ln |\operatorname{Im} \lambda|$$

и в этой области

$$\| \operatorname{Re} (\lambda, A) \| \leqslant c |\operatorname{Im} \lambda|.$$

Для того чтобы $T(t)x$ были бесконечно дифференцируемыми при всех $x \in X$ и $t > 0$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $b > 0$ нашлись такие a_b, c_b, что резольвента $R(\lambda, a)$ определена при

$$\operatorname{Re} \lambda > a_b - b \ln |\operatorname{Im} \lambda|$$

и

$$\| R(\lambda, A) \| \leqslant c_b |\operatorname{Im} \lambda|.$$

Достаточные условия: если при нек-ром $\mu > \omega$

$$\overline{\lim_{\tau \to \infty}} \ln |\tau| \, \| R(\mu + i\tau, A) \| = t_0 < \infty,$$

то $T(t)x$ дифференцируемы при $t > t_0$ и $x \in X$, если $t_0 = 0$, то $T(t)x$ бесконечно дифференцируемы при всех $t > 0$ и $x \in X$.

Иногда о гладкости полугруппы можно судить по ее поведению в нуле; напр., если для каждого $c > 0$ существует такое δ_c, что при $0 < t < \delta_c$

$$\| I - T(t) \| \leqslant 2 - ct \ln t^{-1},$$

то $T(t)x$ бесконечно дифференцируемы при всех $t > 0$, $x \in X$.

Имеются условия гладкости суммируемых полугрупп и полугрупп степенного роста. Если полугруппа степенного роста α бесконечно дифференцируема при $t > 0$, то функция

$$\frac{dT(t)}{dt} x = AT(t)x$$

часто также имеет степенной рост:

$$\| AT(t) \| \leqslant M_1 t^{-\beta} e^{\omega t}.$$

Между числами α и β в общем случае нет жесткой связи, и число β может служить для более детальной классификации бесконечно дифференцируемых полугрупп степенного роста.

Аналитическая полугруппа. Важный класс полугруппы, связанный с уравнениями с частными производными параболич. типа, состоит из полугрупп $T(t)$, допускающих аналитич. продолжение в нек-рый сектор комплексной плоскости, содержащий положительную полуось. Для того чтобы полугруппа класса C_0 обладала этим свойством, необходимо и достаточно, чтобы в нек-рой правой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ для резольвенты выполнялось неравенство

$$\| \operatorname{Re} (\lambda, A) \| \leqslant M |\lambda - \omega|^{-1}.$$

Также необходимо и достаточно, чтобы полугруппа была сильно дифференцируемой и чтобы для ее производной имелась оценка

$$\left\| \frac{dT}{dt} \right\| \leqslant M t^{-1} e^{\omega t}.$$

Наконец, из неравенства

$$\overline{\lim_{t \to 0}} \| I - T(t) \| < 2$$

также следует аналитичность $T(t)$.

Если полугруппа $T(t)$ допускает аналитич. продолжение $T(z)$ в сектор $|\arg z| < \varphi \leqslant \pi/2$ и имеет степенной рост в нуле, $\| T(z) \| \leqslant c |z|^{\alpha}$, $\alpha > 0$, то резольвента $S_n(\lambda, A)$ порядка $n > \alpha - 1$ ее производящего оператора A допу-

скает аналитич. продолжение в сектор $|\arg\lambda|<\pi/2+\varphi$ и в любом секторе $|\arg\lambda|\leqslant\pi/2+\psi$, $\psi<\varphi$, допускает оценку

$$\|S_n(\lambda,\ A)\|\leqslant|\lambda|^{\alpha-n-1}M(\psi).$$

Обратно, пусть резольвента $S_n(\lambda,\ B)$ оператора B определена в секторе $|\arg\lambda|<\pi/2+\psi$ и справедливо неравенство

$$\|S_n(\lambda,\ B)\|\leqslant\lambda^{\alpha-n-1}M.$$

Тогда существует аналитическая в секторе $|\arg z|<\psi$ полугруппа $T(z)$ роста α, для производящего оператора A к-рой $S_n(\lambda,\ A)=S_n(\lambda,\ B)$.

Полугруппа-распределение. В соответствии с общей концепцией теории распределений (*обобщенных функций*) можно отказаться от того, чтобы оператор-функция $T(t)$ была определена при каждом $t>0$, а потребовать лишь вычислимость интегралов $\int_{-\infty}^{+\infty}T(t)\varphi(t)dt$ для всех φ из пространства $D(\mathbb{R})$ всех финитных бесконечно дифференцируемых функций. Тогда возникает определение: полугруппой-распределением в банаховом пространстве X наз. линейное непрерывное отображение $T(\varphi)$ пространства $D(\mathbb{R})$ в пространство $L(X)$ всех линейных ограниченных операторов в X, обладающее свойствами: а) $T(\varphi)=0$, если $\operatorname{supp}\varphi\subset(-\infty,\ 0)$; б) для φ, ψ из пространства $D^+(\mathbb{R})$, состоящего из всех функций из $D(\mathbb{R})$ с носителями в $(0,\ \infty)$, $T(\varphi*\psi)=T(\varphi)T(\psi)$, где свертка

$$\varphi*\psi=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-s)\psi(s)\,ds$$

(полугрупповое свойство); в) если $T(\varphi)x=0$ для всех $\varphi\in D^+(\mathbb{R})$, то $x=0$; г) линейная оболочка объединения всех значений $T(\varphi)x$, $\varphi\in D^+(\mathbb{R})$, $x\in X$, плотна в X; д) для любого $y=T(\psi)x$ с $\psi\in D^+(\mathbb{R})$ существует такая непрерывная на $(0,\ \infty)$ функция $u(t)$ со значениями в X, что $u(0)=y$ и

$$T(\varphi)\,y=\int_0^{\infty}\varphi(t)\,u(t)\,dt$$

для всех $\varphi\in D(\mathbb{R})$.

Инфинитезимальный оператор A_0 полугруппы-распределения определяется так: если существует дельта-последовательность $\{\rho_n\}\subset D^+(\mathbb{R})$ такая, что $T(\rho_n)x\to x$ и $T(-\rho_n')x\to y$ при $n\to\infty$, то $x\in D(A_0)$ и $y=A_0x$. Инфинитезимальный оператор допускает замыкание $A=\bar{A}_0$, к-рое наз. производящим оператором полугруппы-распределения. Множество $\bigcap_{n=1}^{\infty}D(A_0^n)$ плотно в X и содержит $T(\varphi)X$ при любой $\varphi\in D^+(\mathbb{R})$.

Замкнутый линейный оператор A с плотной в X областью определения является производящим оператором полугруппы-распределения тогда и только тогда, когда найдутся числа a, $b\geqslant0$, $c>0$ и натуральное m такие, что при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant a\ln(1+|\lambda|)+b$ существует резольвента $R(\lambda,\ A)$ и выполнено неравенство

$$\|R(\lambda,\ A)\|\leqslant C(1+|\lambda|)^m. \tag{6}$$

Если A — замкнутый линейный оператор в X, то множество $\bigcap_{n=1}^{\infty}D(A^n)$ можно превратить в пространство Фреше X_∞, введя в нем систему норм

$$\|x\|_n=\sum_{k=0}^{n}\|A^kx\|.$$

Сужение A_∞ оператора A на X_∞ оставляет X_∞ инвариантным. Если A — производящий оператор полугруппы-распределения, то A_∞ — производящий оператор полугруппы класса C_0 (непрерывный при $t\geqslant0$, $T(0)=I$) в пространстве X_∞. Обратно, если X_∞ плотно в X, оператор A имеет непустое резольвентное множество и является производящим оператором полугруппы класса

C_0 в X_∞, то A — производящий оператор полугруппы-распределения в X.

Полугруппа-распределение имеет экспоненциальный порядок роста не выше $q, 1 \leqslant q < \infty$, если при нек-ром $\omega > 0$ отображение $\exp(-\omega t^q) T(\varphi)$ непрерывно в топологии, индуцированной на D^+ пространством $S(\mathbb{R})$ быстро убывающих функций. Для того чтобы замкнутый линейный оператор был производящим оператором такой полугруппы-распределения, необходимо и достаточно, чтобы он имел резольвенту $R(\lambda, A)$, для к-рой выполнено (6) в области

$$\{\lambda: \operatorname{Re}\lambda \geqslant [\alpha \ln(1 + |\operatorname{Im}\lambda| + \beta)]^{1-1/q},\ \operatorname{Re}\lambda > \omega\},$$

где $\alpha, \beta > 0$. В частности, если $q = 1$, то полугруппа наз. экспоненциальной и неравенство (6) выполняется в нек-рой полуплоскости. Имеется характеристика полугрупп указанных типов в терминах свойств оператора A_∞. Для полугрупп-распределений изучены вопросы гладкости и аналитичности.

Полугруппа операторов в (отделимом) локально выпуклом пространстве X. Определение сильно непрерывной полугруппы непрерывных в X операторов $T(t)$ остается таким же, как и в банаховом пространстве. Аналогично класс C_0 выделяется свойством $T(t)x \to x$ при $t \to 0$ и любом $x \in X$. Полугруппа наз. локально эквинепрерывной (принадлежит классу lC_0), если семейство операторов $T(t)$ равностепенно непрерывно, когда t пробегает любой конечный промежуток из $(0, \infty)$. В бочечном пространстве полугруппа класса C_0 всегда локально эквинепрерывна.

Полугруппа наз. эквинепрерывной (принадлежит классу uC_0), если семейство $T(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, равностепенно непрерывно.

Инфинитезимальный и производящий операторы полугруппы определяются так же, как и в банаховом случае.

В дальнейшем предполагается, что пространство X секвенциально полно. Для полугрупп класса lC_0 производящий оператор A совпадает с инфинитезимальным, его область определения $D(A)$ плотна в X и, более того, плотно в X множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$. Полугруппа $T(t)$ оставляет $D(A)$ инвариантной и

$$\frac{dT}{dt}x = AT(t)x = T(t)Ax,\ 0 \leqslant t < \infty,\ x \in D(A).$$

Если A — производящий оператор полугруппы класса uC_0, то при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ определена резольвента $R(\lambda, A)$ и она является преобразованием Лапласа от полугруппы.

Линейный оператор A является производящим оператором полугруппы класса uC_0 тогда и только тогда, когда он замкнут, имеет плотную в X область определения и существует такая последовательность положительных чисел $\lambda_k \to \infty$, что для любого λ_k определена резольвента $R(\lambda_k, A)$ и семейство операторов $[\lambda_k R(\lambda_k, A)]^n$, $k, n = 1, 2, \ldots$, равностепенно непрерывно. При этом полугруппа может быть построена по формуле

$$T(t)x = \lim_{k \to \infty} \left(\exp\left[-\lambda_k - \lambda_k^2 R(\lambda_k, A)\right] t\right) x,$$
$$t \geqslant 0,\ x \in X.$$

В ненормируемом локально выпуклом пространстве производящий оператор полугруппы класса lC_0 может не иметь резольвенты ни в одной точке. Пример: $A = \frac{d}{ds}$ в пространстве C^∞ бесконечно дифференцируемых функций от s на $\mathbb{R}$. В качестве оператора, заменяющего резольвенту, может быть взят непрерывный оператор, умножение к-рого на оператор $A - \lambda I$ справа и слева «мало» отличается от единичного оператора.

Непрерывный оператор $R(\lambda)$, определенный для λ из множества $\Lambda \subset \mathbb{C}$, наз. асимптотической резольвентой линейного оператора A, если оператор $AR(\lambda)$ непрерывен в X, оператор $R(\lambda)A$ допускает расширение с $D(A)$ до непрерывного оператора $B(\lambda)$ в X и существует такая предельная точка λ_0 множества Λ, что $H^+(\lambda)x \to 0$, $H^-(\lambda)x \to 0$ при $\lambda \to \lambda_0$ для любого x из X, где

$$H^+(\lambda) = (A - \lambda I)\, R(\lambda) - I, \quad H^-(\lambda) = B(\lambda) - \lambda R(\lambda) - I.$$

Асимптотич. резольвента обладает рядом свойств, близких к свойствам обычной резольвенты.

Для того чтобы замкнутый линейный оператор A с плотной в X областью определения был производящим оператором полугруппы класса lC_0, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа ω и $\alpha > 0$, что при $\lambda > \omega$ определена асимптотич. резольвента $R(\lambda)$ оператора A, обладающая свойствами: функции $R(\lambda)$, $H^+(\lambda)$, $H^-(\lambda)$ сильно бесконечно дифференцируемы при $\lambda > \omega$, семейства операторов

$$e^{\alpha\lambda} \frac{d^n H^{\pm}(\lambda)}{d\lambda^n}, \quad \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \frac{d^n R(\lambda)}{d\lambda^n}, \quad \lambda > \omega, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

равностепенно непрерывны.

Теоремы порождения получены и для других классов П. о. в локально выпуклом пространстве.

Сопряженная полугруппа. Если $T(t)$ — полугруппа класса C_0 в банаховом пространстве X, то сопряженные операторы образуют полугруппы ограниченных операторов в сопряженном пространстве X'. Однако соотношение $T'(t)f \to f$ при $t \to 0$ и любом $f \in X'$ выполняется лишь в смысле слабой топологии $\sigma(X', X)$. Если A — производящий оператор, то сопряженный оператор A' будет слабым производящим оператором $T'(t)$ в том смысле, что $D(A')$ состоит из всех тех f, для к-рых существует в смысле слабой сходимости предел $t^{-1}[T'(t) - I]f$ при $t \to 0$, равный $A'f$. Область определения $D(A')$ плотна в X' в смысле слабой топологии, и оператор A' замкнут в этой топологии.

Пусть X^+ — совокупность тех элементов из X', для к-рых $T'(t)f \to f$ при $t \to 0$ в сильном смысле, тогда X^+ — замкнутое подпространство X', инвариантное относительно всех $T'(t)$. В X^+ операторы $T(t)$ образуют полугруппы класса C_0. Пространство X^+ может быть получено как сильное замыкание в X' множества $D(A')$. Если исходное пространство рефлексивно, то $X^+ = X'$. Для полугрупп класса C_0 в локально выпуклых пространствах справедливы аналогичные факты. Полугруппы классов lC_0 и uC_0 порождают полугруппы таких же классов в пространстве X^+.

Полугруппа-распределение в (отделимом) локально выпуклом пространстве. Полугруппа-распределение $T(\varphi)$ в секвенциально полном локально выпуклом пространстве определяется так же, как и в банаховом пространстве. Полугруппа $T(\varphi)$ наз. локально эквинепрерывной (класса lD'), если для любого компакта $K \subset D(\mathbb{R})$ семейство операторов $\{T(\varphi)\}$, $\varphi \in K$, равностепенно непрерывно. В бочечном пространстве X всякая полугруппа-распределение принадлежит классу lD'. Аналогично случаю банахова пространства определяется инфинитезимальный оператор A_0 полугруппы-распределения. Для полугрупп класса lD' он замкнут ($A_0 = A$), $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ плотно в X, при любых $x \in X$ и $\varphi \in D(\mathbb{R})$ выполнено

$$\left.\begin{aligned} T(\varphi)\, x \in D(A), \quad T'(\varphi)\, x = AT(\varphi)\, x + \varphi(0)\, x, \\ T'(\varphi)\, x = T(\varphi)\, Ax + \varphi(0)\, x, \quad x \in D(A). \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Обобщенную функцию T с носителем на $[0, \infty)$, обладающую свойствами (7), естественно назвать фундаментальной функцией оператора $\frac{d}{dt} - A$. Таким образом, если A — производящий опе-

ратор полугруппы T класса lD', то T является фундаментальной функцией оператора $\frac{d}{dt}-A$. Обратное утверждение верно при дополнительных предположениях относительно порядка сингулярности фундаментальной функции T (точнее, функций $f(T(\varphi)x)$, где $f\in X'$).

Для характеризации полугруппы в локально выпуклом пространстве полезным является понятие о б о б щ е н н о й р е з о л ь в е н т ы. Через $\hat{\varphi}$ обозначается образ функции $\varphi\in D(\mathbb{R})$ при преобразовании Лапласа, в пространстве $\hat{D}(\mathbb{R})$ всех образов вводится топология, индуцируемая преобразованием Лапласа из топологии $D(\mathbb{R})$. Преобразование Лапласа X-значной обобщенной функции F определяется равенством $\hat{F}(\hat{\varphi})=F(\varphi)$. При этом $\hat{F}$ является непрерывным отображением из $\hat{D}(\mathbb{R})$ в пространстве $L(X)$ линейных непрерывных операторов на X. Пусть $\hat{D}'_+$ — пространство всех $\hat{F}$, полученных из F с носителем на $(0,\infty)$, с естественной топологией. Если A — линейный оператор в X, то его можно «поднять» до оператора $\tilde{A}$ в пространстве $\hat{D}'_+$ с помощью равенства

$$(\tilde{A}\hat{F})(\hat{\varphi})=A(\hat{F}(\hat{\varphi}))=AF(\varphi).$$

Таким образом, он определен на тех $\hat{F}\in\hat{D}'_+$, для к-рых правая часть определена при любой $\varphi\in D(R)$ и продолжает обобщенную функцию из $\hat{D}'_+$. На $\hat{D}'_+$ определяется непрерывный оператор $\tilde{\lambda}$ равенством

$$(\tilde{\lambda}\hat{F})(\hat{\varphi})=\lambda\hat{F}(\hat{\varphi})=F'(\varphi)=-F(\varphi').$$

Если оператор $\tilde{A}-\tilde{\lambda}$ имеет непрерывный обратный $\tilde{R}$ на $\hat{D}'_+$, то $\tilde{R}$ наз. о б о б щ е н н о й р е з о л ь в е н т о й оператора A.

Оператор A имеет обобщенную резольвенту тогда и только тогда, когда у оператора $\frac{d}{dt}-A$ существует локально эквинепрерывная фундаментальная функция T, к-рая строится по формуле:

$$T(\varphi)x=(\tilde{R}(1\otimes x))(\hat{\varphi}),\ \varphi\in D(\mathbb{R}),\ x\in X,$$

где

$$(1\otimes x)(\hat{\varphi})=(\delta\otimes x)\varphi=\varphi(0)x.$$

При дополнительных условиях T будет полугруппой-распределением. В терминах обобщенной резольвенты получена также теорема порождения П. о. класса lC_0.

См. также *Полугруппа нелинейных операторов*.

Лит.: [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962; [2] Вувуникян Ю. М., в кн.: Теория операторов в функциональных пространствах, Новосиб., 1977, с. 99—120; [3] Забрейко П. П., Зафиевский А. В., «Докл. АН СССР», 1969, т. 189, № 5, с. 934—37; [4] Зафиевский А. В., «Тр. Матем. ф-та Воронеж. ун-та», 1970, в. 1, с. 206—10; [5] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [6] Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967; [7] Сильченко Ю. Т., «Дифференц. уравнения», 1979, т. 15, № 2, с. 363—66; [8] Chazarain J. «J. Funct. Analys.», 1971, v. 7, № 3, p. 386—446; [9] Gioranescu J., «J. Math. Analys. and Appl.», 1971, v. 34, p. 34—41; [10] её же, «Rev. roum. math. pures et appl.», 1977, v. 22, № 8, p. 1053—68; [11] Kato T., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1970, v. 25, № 3, p. 495—98; [12] Lions J., «Portugal. Math.», 1960, v. 19, p. 141—64; [13] Pazy A., «J. Math. Mech.», 1968, v. 17, № 12, p. 1131—41; [14] его же, «Proc. Amer. Math. Soc.», 1971, v. 30, № 1, p. 147—50; [15] Ushijima T., «Sci. Papers College Gen. Edic. Univ. Tokyo», 1971, v. 21, p. 93—122; [16] его же, «J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A», 1972, v. 19, № 1, p. 65—127; [17] Wild C., «C. r. Acad. sci.», 1977, t. A 285, p. 437—40.

Ю. М. Вувуникян, С. Г. Крейн.

ПОЛУГРУППА С УСЛОВИЕМ КОНЕЧНОСТИ — полугруппа, обладающая нек-рым свойством θ таким, что всякая конечная полугруппа обладает этим свойством (такое свойство θ наз. у с л о в и е м к о н е ч н о-

с т и). В определении свойства θ могут фигурировать элементы полугруппы, ее подполугруппы и т. п.

Примеры условий конечности: периодичность (см. *Периодическая полугруппа*), локальная конечность (см. *Локально конечная полугруппа*), финитная аппроксимируемость (см. *Финитно аппроксимируемая полугруппа*), конечная порожденность, конечная определенность. Исследования конечно определенных полугрупп в значительной степени ведутся с точки зрения алгоритмич. проблем. Наиболее известное условие, при к-ром конечная порожденность полугруппы влечет ее конечную определенность,— коммутативность (теорема Редеи). Всякая счетная полугруппа вложима в полугруппу с двумя порождающими, а также в полугруппу с тремя идемпотентными порождающими [8].

Целый ряд условий конечности формулируется в терминах решетки подполугрупп (напр., условие минимальности для подполугрупп). Полугруппа S тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности для подполугрупп, когда S периодическая, имеет лишь конечное число классов кручения, в каждом классе кручения K_e наибольшая подгруппа G_e удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, а разность $K_e \setminus G_e$ конечна [2]. Аналогичное строение имеют полугруппы конечного ранга (конечность ранга означает, что минимальное число порождающих каждой конечно порожденной подполугруппы полугруппы S не превосходит фиксированного числа), полугруппы конечной ширины (конечность ширины для S означает, что из любого конечного множества M ее элементов можно выделить подмножество, порождающее ту же подполугруппу, что и M, мощность к-рого не превосходит фиксированного числа), периодические полугруппы с условием максимальности для подполугрупп и др. (см. [3], [4]).

Инверсная полугруппа удовлетворяет условию минимальности для инверсных подполугрупп тогда и только тогда, когда она обладает главным рядом (см. *Идеальный ряд* полугруппы), каждый фактор к-рого есть *Брандта полугруппа* с конечным числом идемпотентов, все максимальные подгруппы к-рой удовлетворяют условию минимальности для подгруппы. Аналогичные описания получены для условия максимальности, конечности ранга и др. (см. [5]).

Из условий конечности, формулируемых в терминах частично упорядоченного множества идеалов полугруппы, наиболее известны условия минимальности M_L, M_R, M_J для главных левых, правых, двусторонних идеалов (эти условия часто определяются в терминах $\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- и $\mathscr{J}$-классов, см. *Грина отношения эквивалентности*). Аналогично определяется условие M_H для $\mathscr{H}$-классов. Конъюнкция условий M_L и M_R эквивалентна конъюнкции условий M_J и M_H, в остальном эти условия независимы; в частности, полугруппа с условиями M_L и M_J не обязательно удовлетворяет условиям M_R и M_H. Вместе с тем полупростая (см. *Главный фактор* полугруппы) полугруппа с условием M_L или M_R удовлетворяет условию M_J. Для регулярных полугрупп все четыре условия эквивалентны; всякая полугруппа с условием M_H будет квазипериодической. Конечно порожденная полугруппа с условием M_L или M_R, все подгруппы к-рой конечны, сама конечна [6].

Полугруппа с условием минимальности для правых конгруэнций является периодической, удовлетворяет условию M_L и двойственному условию максимальности для главных левых идеалов; если при этом все ее подгруппы конечны, то сама полугруппа конечна [6]. В инверсных полугруппах условие минимальности для правых конгруэнций эквивалентно условию минимальности для левых конгруэнций, а также тому, что полугруппа имеет лишь конечное число идемпотентов и удовлетворяет условию минимальности для подгрупп [7]. Изучен ряд свойств полугрупп с условием максимальности для

односторонних конгруэнций. Коммутативная полугруппа удовлетворяет условию минимальности (максимальности) для конгруэнций тогда и только тогда, когда она имеет главный ряд и удовлетворяет условию минимальности для подгрупп [7] (конечно порождена).

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 2, М., 1972; [2] Шеврин Л. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1965, т. 29, № 3, с. 553—66; [3] его же, «Матем. заметки», 1974, т. 15, № 6, с. 925—35; [4] его же, «Изв. ВУЗов. Матем.», 1974, № 5, с. 205—15; [5] Ершова Т. И., там же, 1977, № 11, с. 7—14; [6] Hotzel E., «J. Algebra», 1979, v. 60, № 2, p. 352—70; [7] Kozhukhov I. B., «Semigroup Forum», 1980, v. 21, № 4, p. 337—50; [8] Pastijn F., там же, 1977, v. 14, № 3, p. 247—64.

Л. Н. Шеврин.

ПОЛУГРУППОВАЯ АЛГЕБРА — алгебра $\Phi(S)$ над полем Φ, обладающая базисом S, являющимся одновременно и мультипликативной полугруппой. В частности, если базис S является группой, получается *групповая алгебра*. Если полугруппа S содержит нуль, то он обычно отождествляется с нулем алгебры $\Phi(S)$. Задача описания всех линейных представлений полугруппы S над полем Φ равносильна задаче описания всех представлений алгебры $\Phi(S)$. Значение П. а. для теории полугрупп состоит в возможности применения более богатого аппарата теории алгебр для изучения линейных представлений полугрупп. Пример такого рода результата: алгебра $\Phi(S)$ конечной полугруппы S полупроста тогда и только тогда, когда все линейные представления полугруппы S над полем Φ приводимы.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972.

Л. М. Глускин.

ПОЛУДЕДЕКИНДОВА РЕШЕТКА, полудедекиндова структура, полумодулярная решетка (структура),— решетка, в к-рой отношение модулярности симметрично, т. е. aMb влечет bMa для любых элементов решетки a и b. Отношение модулярности при этом определяется следующим образом: говорят, что элементы a и b образуют модулярную пару или что aMb, если $a(b+c)=ab+c$ для любого $c \leqslant a$. Решетка, в к-рой всякая пара элементов модулярна, наз. модулярной решеткой или *дедекиндовой решеткой*.

Решетка конечной длины полудедекиндова тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию покрытия: если x и y покрывают xy, то $x+y$ покрывает x и y (см. *Покрывающий элемент*). В любой П. р. конечной длины выполняется условие Жордана — Дедекинда для цепей (все максимальные цепи между двумя фиксированными элементами имеют одну и ту же длину), что позволяет развивать в них теорию размерности. П. р. конечной длины является решеткой с относительными дополнениями тогда и только тогда, когда каждый ее элемент есть объединение атомов. Такие решетки наз. геометрическими. Важный класс П. р. образуют близкие к геометрическим матроидные решетки (см. [3]). Каждая конечная решетка изоморфна подрешетке конечной П. р. Класс П. р. не замкнут относительно гомоморфных образов.

Наряду с П. р., называемыми также полудедекиндовыми сверху, рассматриваются полудедекиндовы снизу решетки, определяемые двойственным образом. Примерами П. р., кроме дедекиндовых решеток, являются решетки всех разбиений конечных множеств и решетки линейных многообразий аффинных пространств.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., [2 изд.], М., 1952; [2] Birkhoff G., Lattice theory, [3 ed.], Providence, 1967; [3] Maeda F., Maeda Sh., Theory of symmetric lattices, B.—Hdlb.—N. Y., 1970.

Т. С. Фофанова.

ПОЛУЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — действительное аффинное n-пространство, в к-ром определено скалярное произведение векторов так, что при надле-

жащем выборе базиса скалярный квадрат (x, x) всякого вектора имеет вид

$$(x, x) = -\sum_{i=1}^{l} (x^i)^2 + \sum_{j=l+1}^{n-d} (x^j)^2.$$

Такое П. п. называется П. п. индекса l и дефекта d, обозначается ${}^{l+(d)}R_n$. При $l=0$ выражение скалярного квадрата вектора является квадратичной полуопределенной формой, и П. п. наз. n-пространством дефекта d, обозначается ${}^{(d)}R_n$.

П. п. в проективной классификации могут быть определены как соответственно полуэллиптич. пространство или полугиперболич. пространство с несобственной абсолютной плоскостью, к-рые являются пространствами с проективными метриками наиболее общего вида.

В П. п. определяется т. н. полунеевклидово пространство как метрическое n-пространство, являющееся гиперсферой с отождествленными диаметрально противоположными точками в П. п. индекса l и дефекта d. Таким образом, полуэллиптич. и полугиперболич. пространства могут быть интерпретированы как указанные гиперсферы (т. е. как полунеевклидовы пространства) в П. п. с соответствующими индексом и дефектом.

Геометрич. интерпретация механики Галилея — Ньютона приводит к П. п. ${}^{(1)}R_n$ (см. [2]).

П. п. является полуримановым пространством нулевой кривизны.

Лит.: [1] Sommerville D. M., «Proc. Edinburgh Math. Soc.», 1910, v. 28, p. 25—41; [2] Котельников А. П., Принцип относительности и геометрия Лобачевского, в кн.: In memoriam N.I. Lobačevski, т. 2, Казань, 1926; [3] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров.

ПОЛУИНВАРИАНТ — общий собственный вектор семейства эндоморфизмов векторного пространства или модуля. Если G — множество линейных преобразований векторного пространства V над полем K, то П. множества G — это такой вектор $v \in V$, что $v \neq 0$ и

$$gv = \chi(g)\, v, \quad g \in G,$$

где $\chi : G \to K$ — функция, называемая весом полуинварианта v. П. веса 1 наз. также инвариантом. Чаще всего рассматривается случай, когда $G \subset \mathrm{GL}(V)$ — линейная группа, тогда $\chi : G \to K^*$ есть характер группы G и продолжается до полиномиальной функции на $\mathrm{End}\, V$. Если $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ — линейное представление группы G в пространстве V, то П. группы $\varphi(G)$ наз. также полуинвариантом представления φ. Пусть G — линейная алгебраич. группа, H — ее замкнутая подгруппа, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — алгебры Ли этих групп. Тогда существуют такое точное рациональное линейное представление $\varphi : G \to \mathrm{GL}(E)$ и такой полуинвариант $v \in E$ группы $\varphi(H)$, что H и $\mathfrak{h}$ являются максимальными подмножествами в G и $\mathfrak{g}$, для образов к-рых в $\mathrm{End}\, E$ вектор v есть П. Это означает, что соответствие $aH \mapsto K\varphi(a)v$, $a \in G$, есть изоморфизм алгебраического однородного пространства на орбиту прямой Kv в проективном пространстве $P(E)$.

Часто П. множества $G \subset \mathrm{End}\, V$ наз. полиномиальную функцию на $\mathrm{End}\, V$, являющуюся П. множества линейных преобразований $\eta(G)$ пространства $K[\mathrm{End}\, V]$, где

$$(\eta(g) f)(X) = f(Xg)$$

$$g \in G, \quad f \in K[\mathrm{End}\, V], \quad X \in \mathrm{End}\, V.$$

Если $G \subset \mathrm{GL}(V)$ — линейная алгебраич. группа, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, то G обладает такими П.

$$f_1, \ \ldots, \ f_n \in K[\mathrm{End}\, V]$$

одинакового веса, что G и $\mathfrak{g}$ суть максимальные подмножества в $\mathrm{GL}(V)$ и $\mathrm{End}\, V$, для к-рых $f_1, \ \ldots, \ f_n$ суть П. (теорема Шевалле).

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 2, М., 1958.

А. Л. Онищик.

ПОЛУКОЛЬЦО — непустое множество с двумя ассоциативными бинарными операциями $+$ и $\cdot$, связанными дистрибутивными законами:

$$(a+b)\cdot c = a\cdot b + a\cdot c$$

и

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c.$$

В большинстве случаев дополнительно предполагается, что сложение коммутативно и что существует нуль 0, для к-рого $a+0=a$ при любом a. Важнейшие примеры П.— кольца и дистрибутивные решетки. При наличии единицы 1 относительно умножения оба эти класса объединяются требованием

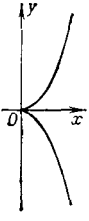
$$\forall x\ \exists y\ (x+y=1).$$

Неотрицательные целые числа с обычными операциями образуют П., не удовлетворяющее этому требованию.

Л. А. Скорняков.

ПОЛУКУБИЧЕСКАЯ ПАРАБОЛА — плоская алгебраическая кривая 3-го порядка, уравнение к-рой в прямоугольных координатах имеет вид

$$y = ax^{3/2}.$$



Начало координат есть точка возврата (см. рис.). Длина дуги от точки 0:

$$l = \frac{1}{27a^2}\left[(4+9a^2x)^{3/2} - 8\right];$$

кривизна:

$$k = \frac{6a}{\sqrt{x}\,(4+9a^2x)^{3/2}}.$$

Иногда П. п. наз. параболой Нейля.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960; [2] Смогоржевский А. С., Столова З. С., Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, М., 1961.

Д. Д. Соколов.

ПОЛУЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение α (левого) модуля M в (левый) модуль N над одним и тем же кольцом A, удовлетворяющее условиям:

$$\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y),$$

$$\alpha(cx) = c^{\sigma}\alpha(x),$$

где $x, y \in M$, $c \in A$, $c \to c^{\sigma}$ — нек-рый автоморфизм кольца A. В этом случае говорят, что α полулинейно относительно автоморфизма σ. П. о. векторных пространств над полем $\mathbb{C}$ относительно комплексного сопряжения $c^{\sigma} = \bar{c}$ наз. также антилинейным отображением. П. о. A-модуля M в себя наз. полулинейным преобразованием.

Пример. Гомотетия A-модуля M, т. е. отображение $x \to ax$ $(x \in M)$, где a — фиксированный обратимый элемент кольца A, есть полулинейное преобразование относительно автоморфизма $c^{\sigma} = aca^{-1}$.

Для П. о. остаются справедливыми многие свойства линейных отображений и гомоморфизмов модулей. В частности, ядро и образ П. о. являются подмодулями; П. о. свободных модулей с конечными базисами полностью определяются своей матрицей; для П. о. векторных пространств определяется ранг, совпадающий с рангом его матрицы, и т. д.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962.

А. Л. Онищик.

ПОЛУМАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС — случайный процесс $X(t)$ с конечным или счетным множеством состояний $N = \{1, 2, \ldots\}$, имеющий ступенчатые траектории со скачками в моменты времени $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$. Значе-

ния П. п. $X(\tau_n)$ в моменты скачков образуют *Маркова цепь* с переходными вероятностями

$$p_{ij} = \mathsf{P}\{X(\tau_n) = j \mid X(\tau_{n-1}) = i\}.$$

Распределения моментов скачков τ_n описываются с помощью функций распределения $F_{ij}(x)$ следующим образом:

$$\mathsf{P}\{\tau_n - \tau_{n-1} \leqslant x,\ X(\tau_n) = j \mid X(\tau_{n-1}) = i\} = p_{ij} F_{ij}(x)$$

(и при этом не зависят от состояний процесса в более ранние моменты времени). Если

$$F'_{ij}(x) = e^{-\lambda_i j x},\ x \geqslant 0,$$

для всех $i, j \in N$, то П. п. $X(t)$ является цепью Маркова с непрерывным временем. Если все распределения вырождены в одной точке, то получают цепь Маркова с дискретным временем.

П. п. служит моделью многих процессов массового обслуживания и теории надежности. С П. п. связаны процессы марковского восстановления (см. *Восстановления теория*), описывающие количество посещений процессом $X(t)$ состояний $i \in N$ за время $[0, t]$.

Изучение П. п. и марковских процессов восстановления аналитически сводится к системе интегральных уравнений восстановления.

Лит.: [1] Королюк В. С., Турбин А. Ф., *Полумарковские процессы и их приложения*, К., 1976.

В. А. Севастьянов.

ПОЛУМАРТИНГАЛ — понятие, равносильное понятиям субмартингала или супермартингала. Именно, стохастич. последовательность $X = (X_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in T \subseteq [0, \infty)$, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ с выделенным на нем убывающим семейством σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $s \leqslant t$, наз. полумартингалом, если $\mathsf{E}|X_t| < \infty$, X_t является $\mathcal{F}_t$-измеримой и с вероятностью 1 или

$$\mathsf{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geqslant X_s, \tag{1}$$

или

$$\mathsf{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leqslant X_s. \tag{2}$$

В случае (1) П. наз. субмартингалом, в случае (2) — супермартингалом.

В современной литературе термин «П.» или не употребляют, или отождествляют с понятием субмартингала (супермартингал определяется изменением знака из субмартингала и наз. иногда нижним П.). См. также *Мартингал*.

А. В. Прохоров.

ПОЛУНАСЛЕДСТВЕННОЕ КОЛЬЦО слева — кольцо, все конечно порожденные левые идеалы к-рого проективны. П. к. являются кольцо целых чисел, кольцо многочленов от одного неизвестного над полем, *регулярные кольца* в смысле Неймана, наследственные кольца, кольца конечно порожденных свободных идеалов (полу-FI-кольца). Аналогично определяется правое П. к. Левое П. к. не обязано быть правым П. к. Однако локальное левое П. к. оказывается областью целостности и правым П. к. Кольцо матриц над П. к. является П. к. Если R есть П. к. и $e^2 = e \in R$, то eRe есть П. к. Конечно порожденный подмодуль проективного модуля над П. к. изоморфен прямой сумме нек-рого множества конечно порожденных левых идеалов основного кольца и, следовательно, проективен. Каждый такой модуль может быть представлен и как прямая сумма модулей, двойственных конечно порожденным правым идеалам основного кольца.

Для коммутативного кольца R эквивалентны следующие свойства: (1) R есть П. к.; (2) $(A \cap B)C = AC \cap BC$, где A, B и C — произвольные идеалы кольца R; (3) полное кольцо частных кольца R регулярно в смысле Неймана, и для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца R кольцо частных $R_{\mathfrak{m}}$ является кольцом нормирования; (4) все 2-порожденные идеалы кольца R проектив-

ны. Кольцо многочленов от одного переменного над коммутативным кольцом R оказывается П. к. в том и только в том случае, когда R регулярно в смысле Неймана.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 14, М., 1976, с. 57—190, т. 19, М., 1981, с. 31—134. *Л. А. Скорняков.*

ПОЛУНЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ — функция из первого *Бэра класса*. Подробнее, числовая функция f, определенная на полном метрич. пространстве X, наз. полунепрерывной снизу (сверху) в точке $x_0 \in X$, если

$$\underline{\lim}_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad (\overline{\lim}_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)).$$

Функция f наз. полунепрерывной снизу (сверху) на X, если она полунепрерывна снизу (сверху) для всех $x \in X$. *Предел монотонно возрастающей (убывающей) последовательности* полунепрерывных снизу (сверху) в точке x_0 функций есть П. ф. снизу (сверху) в x_0. Если $u(x)$ и $v(x)$ есть П. ф. соответственно снизу и сверху на X и для всех $x \in X$ имеет место $u(x) \leqslant v(x)$, $u(x) > -\infty$, $v(x) < +\infty$, то существует непрерывная на X функция f такая, что $v(x) \leqslant f(x) \leqslant u(x)$ для всех $x \in X$. Если μ — неотрицательная мера на $\mathbb{R}^n$, то для любой μ-измеримой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ существуют две последовательности функций $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$, удовлетворяющие условиям: 1) $u_n(x)$ полунепрерывны снизу, $v_n(x)$ полунепрерывны сверху, 2) каждая функция $u_n(x)$ ограничена снизу, каждая функция $v_n(x)$ — сверху, 3) последовательность $\{u_n\}$ невозрастающая, последовательность $\{v_n\}$ неубывающая, 4) для всех x имеет место неравенство

$$u_n(x) \geqslant f(x) \geqslant v_n(x),$$

5) μ-почти всюду

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = \lim_{n \to \infty} v_n(x) = f(x),$$

6) если для $E \subset \mathbb{R}^n$ функция f суммируема, $f \in L(E)$, то $u_n,\ v_n \in L(E)$ и

$$\lim_{n \to \infty} \int_E u_n \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E v_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

(теорема Витали — Каратеодори).

Лит.: [1] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949. *И. А. Виноградова.*

ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ сверху (снизу) — отображение f одного топологич. пространства X в другое Y такое, что из

$$\lim x_n = x$$

следует

$$\overline{\lim} f(x_n) \leqslant f(x) \quad (\underline{\lim} f(x_n) \geqslant f(x))$$

(здесь $\overline{\lim}$ ($\underline{\lim}$) — верхний (нижний) предел).

М. И. Войцеховский.

ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЕ РАЗБИЕНИЕ снизу (сверху) — разбиение D, т. е. замкнутое дизъюнктное покрытие пространства X, такое, что проекция $p : X \to D$ является открытым (замкнутым) отображением. *М. И. Войцеховский.*

ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫЙ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — метод суммирования рядов и последовательностей, определенный с помощью последовательности функций. Пусть $\{a_k(\omega)\}$, $k = 0, 1, \ldots$, — последовательность функций, заданных на нек-ром множестве E изменения параметра ω, и ω_0 — точка сгущения этого множества (конечная или бесконечная). Данную последовательность $\{s_n\}$ с помощью функций $a_k(\omega)$ преобразуют в функцию $\sigma(\omega)$:

$$\sigma(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega) \, s_k. \qquad (1)$$

Если ряд в (1) сходится для всех ω, достаточно близких к ω_0, и

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \sigma(\omega) = s,$$

то последовательность $\{s_n\}$ наз. суммируемой к пределу s полунепрерывным методом суммирования, определенным последовательностью функций $\{a_k(\omega)\}$. Если $\{s_n\}$ — последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k, \qquad (2)$$

то ряд (2) в этом случае наз. суммируемым полунепрерывным методом к сумме s. П. м. с. при $\omega_0 = \infty$ является аналогом *матричного метода суммирования*, определенного матрицей $\|a_{nk}\|$, причем целочисленный параметр n заменен непрерывным параметром ω. Последовательность функций $a_k(\omega)$ в этом случае наз. полунепрерывной матрицей.

П. м. с. может задаваться преобразованием непосредственно ряда в функцию с помощью заданной последовательности функций, напр. $\{g_k(\omega)\}$:

$$\gamma(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\omega)\, u_k. \qquad (3)$$

В этом случае ряд (2) наз. суммируемым к сумме s, если

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \gamma(\omega) = s,$$

где ω_0 — точка сгущения множества E изменения параметра ω, а ряд в (3) предполагается сходящимся для всех ω, достаточно близких к ω_0.

П. м. с. в нек-рых случаях являются более удобными, чем методы суммирования, определенные обычными матрицами, т. к. позволяют использовать аппарат теории функций. Примерами П. м. с. являются *Абеля метод суммирования*, *Бореля метод суммирования*, *Линделёфа метод суммирования*, *Миттаг-Леффлера метод суммирования*. Класс П. м. с. составляют методы с полунепрерывными матрицами вида

$$a_k(\omega) = p_k \omega^k \Big/ \sum_{l=0}^{\infty} p_l \omega^l,$$

где в знаменателе стоит целая функция, не сводящаяся к многочлену.

Условия регулярности П. м. с. аналогичны условиям регулярности матричного метода суммирования. Напр., условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(\omega)| \leqslant M$$

для всех ω, достаточно близких к ω_0,

$$\lim_{\omega \to \omega_0} a_k(\omega) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega) = 1$$

являются необходимыми и достаточными, чтобы П. м. с., определенный преобразованием (1) последовательности $\{s_k\}$ в функцию, был регулярным (см. *Регулярности признаки*).

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Zeller K., Bukmann W., Theorie der Limitierungsverfahren, 2 Aufl., B.—Hdlb.—N.Y., 1970.

И. И. Волков.

ПОЛУНОРМА — конечная неотрицательная функция p на векторном пространстве E (над полем действительных или комплексных чисел), подчиненная условиям:

$$p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x),$$

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$$

для всех x, $y \in E$ и скаляров λ. Примером П. служит

норма; отличие заключается в том, что для П. допустимо $p(x)=0$ при $x\neq 0$. Если на векторном пространстве задана полунорма p, а на его подпространстве — *линейный функционал* f, подчиненный условию $|f(x)|\leqslant p(x)$, то его можно продолжить на все пространство с сохранением этого условия (теорема Хана — Банаха). В математич. анализе наиболее употребительны отделимые *топологические векторные пространства*, базис окрестностей нуля в к-рых можно составить из выпуклых множеств. Такие пространства наз. локально выпуклыми. В этих пространствах базис может быть описан неравенствами $p(x)<1$, где p — непрерывные П. В то же время в практике математич. анализа встречаются и такие топологич. векторные пространства (в том числе и с метризуемой топологией), на к-рых нет нетривиальных непрерывных П. Простейший пример такого рода — пространство $L_q(0, 1)$, где $0<q<1$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [2] Рудин У., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1975. *Е. А. Горин.*

ПОЛУОГРАНИЧЕННЫЙ ОПЕРАТОР — *симметрический оператор* S в гильбертовом пространстве H, для к-рого существует такое число c, что

$$(Sx,\ x)\geqslant c\ (x,\ x)$$

для всех векторов x, лежащих в области определения S. П. о. S всегда имеет полуограниченное самосопряженное расширение A с той же нижней гранью c (теорема Фридрихса). В частности, их индексы дефекта совпадают.

Лит.: [1] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979. *В. И. Ломоносов.*

ПОЛУОПРЕДЕЛЕННАЯ ФОРМА — *квадратичная форма* над упорядоченным полем, представляющая либо только неотрицательные, либо только неположительные элементы поля. В первом случае квадратичная форма наз. неотрицательной ($q(x)\geqslant 0$ для всех значений x), во втором — неположительной квадратичной формой ($q(x)\leqslant 0$). Чаще всего П. ф. рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Над полем $\mathbb{C}$ аналогично определяются *полуопределенные* (неотрицательные и неположительные) эрмитовы квадратичные формы (см. *Эрмитова форма*).

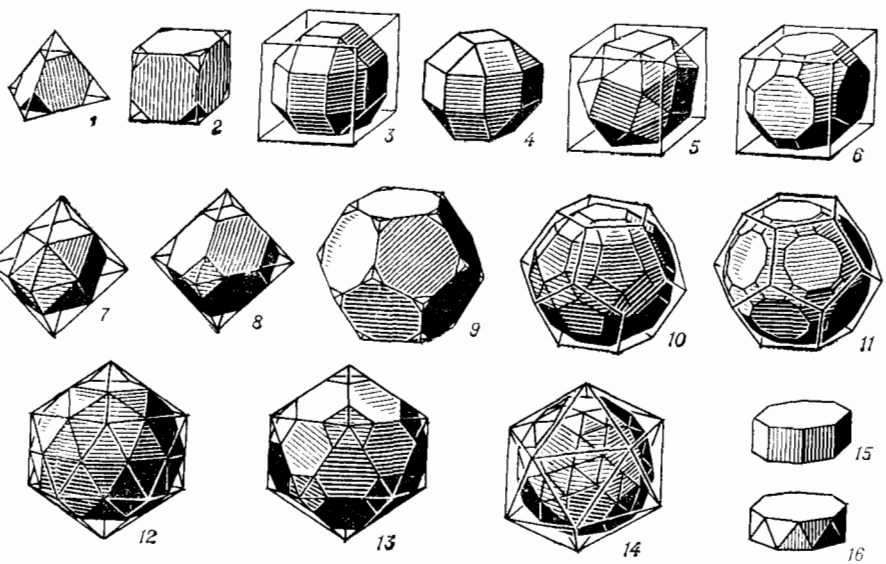
Если b — симметрическая билинейная или эрмитова форма, причем $q(x)=b(x, x)$ является П. ф., то и форму b также иногда называют полуопределенной (неотрицательной или неположительной). Если q — квадратичная или эрмитова П. ф. в векторном пространстве V, то $N=\{x\in V\,|\,q(x)=0\}$ является подпространством, совпадающим с ядром формы b, причем на V/N естественным образом индуцируется положительно определенная или отрицательно определенная форма. *О. А. Иванова.*

ПОЛУПЛОСКОСТЬ — совокупность точек плоскости, лежащих по одну сторону от нек-рой прямой этой плоскости. Координаты точек П. удовлетворяют неравенству $Ax+By+C>0$, где A, B, C — нек-рые постоянные, причем A и B одновременно не равны нулю. Если сама прямая $Ax+By+C=0$ (граница П.) причисляется к П., то говорят о замкнутой П. На комплексной плоскости $z=x+iy$ рассматриваются верхняя полуплоскость $y=\mathrm{Im}\,z>0$, нижняя полуплоскость $y=\mathrm{Im}\,z<0$, левая полуплоскость $x=\mathrm{Re}\,z<0$, правая полуплоскость $x=\mathrm{Re}\,z>0$ и т. д. Верхняя П. комплексной плоскости z конформно отображается на круг $|w|<1$ с помощью дробно-линейной функции

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}},$$

где θ — произвольное действительное число, а $\mathrm{Im}\,\beta>0$.

ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ, тела Архимеда,— выпуклые многогранники, все грани к-рых суть правильные многоугольники, а многогранные углы конгруэнтны или симметричны. Данные о П. м. приведены в таблице, где B — число вершин, P — число ребер, Γ — число граней, Γ_k — число n_k-угольных граней, s — число граней, сходящихся в каждой вершине, в том числе s_1 n_1-угольных, s_2 n_2-угольных и т. д. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ существует 13 П. м. [см. рис., *1—14*, иногда выделяют два вида ромбокубооктаэдра (рис., *3—4*), к-рые различаются тем, что верхняя часть многоугольника, состоящая из 5 квадратов и 4 правильных треугольников, повернута как целое на угол $\pi/4$] и две бесконечные серии — призмы (рис., *15*) и антипризмы (рис., *16*).



Полуправильные многогранники

	№ на рис.	B	P	Γ	n_1	n_2	n_3	Γ_1	Γ_2	Γ_3	s_1	s_2	s_3	s
Усеченный тетраэдр	*1*	12	18	8	6	3	—	4	4	—	2	1	—	3
Усеченный куб	*2*	24	36	14	8	3	—	6	8	—	2	1	—	3
Ромбокубооктаэдр	*3, 4*	24	48	26	4	3	—	18	8	—	3	1	—	4
Плосконосый куб	*5*	24	60	38	3	4	—	32	6	—	4	1	—	5
Усеченный кубооктаэдр	*6*	48	72	26	4	6	8	12	8	6	1	1	1	3
Кубооктаэдр	*7*	12	24	14	3	4	—	8	6	—	2	2	—	4
Усеченный октаэдр	*8*	24	36	14	6	4	—	8	6	—	2	1	—	3
Усеченный додекаэдр	*9*	60	90	32	10	3	—	12	20	—	2	1	—	3
Ромбоикододекаэдр	*10*	60	120	62	4	3	5	30	20	12	2	1	1	4
Усеченный икододекаэдр	*11*	120	180	62	4	6	10	30	20	12	1	1	1	3
Икододекаэдр	*12*	30	60	32	3	5	—	20	12	—	2	2	—	4
Усеченный икосаэдр	*13*	60	90	32	6	5	—	20	12	—	2	1	—	3
Плосконосый додекаэдр	*14*	60	150	92	3	5	—	80	12	—	4	1	—	5
Правильная призма (n=3, 5, 6,...)	*15*	$2n$	$3n$	$n+2$	4	n	—	n	2	—	2	1	—	3
Антипризма (n=4, 5, 6,...)	*16*	$2n$	$4n$	$2n+2$	3	n	—	$2n$	2	—	3	1	—	4

Невыпуклых (звездчатых) П. м. больше 51.

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4— Геометрия, М.—Л., 1963; [2] Люстерник Л. А., Выпуклые фигуры и многогранники, М., 1956; [3] Brückner M., Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte, Lpz., 1900; [4] Веннинджер М., Модели многогранников, пер. с англ., М., 1974.

А. Б. Иванов.

ПОЛУПРОСТАЯ АЛГЕБРА относительно радикала r — алгебра, являющаяся r-полупростым кольцом (см. *Полупростое кольцо*). В нек-рых классах алгебр при подходящем выборе радикала r удается описать строение П. а. (см. *Классически полупростое кольцо*, *Альтернативные кольца и алгебры*, *Йорданова алгебра*, *Ли полупростая алгебра*).

Часто под П. а. понимается конечномерная алгебра над полем, являющаяся прямой суммой простых алгебр.

Л. А. Скорняков.

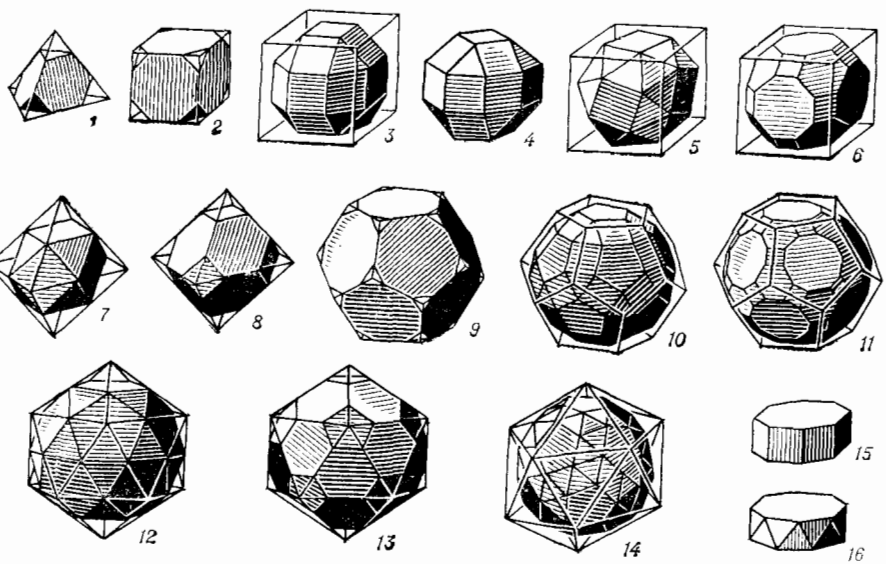
ПОЛУПРОСТАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГРУППА — связная линейная алгебраич. группа положительной размерности, содержащая лишь тривиальные разрешимые (или, что равносильно, абелевы) связные замкнутые нормальные подгруппы. Факторгруппа связной неразрешимой линейной алгебраич. группы по радикалу полупроста.

Связная линейная алгебраич. группа G положительной размерности наз. простой, если она не содержит собственных связных замкнутых нормальных подгрупп. Центр $Z(G)$ простой группы G конечен, и $G/Z(G)$ проста как абстрактная группа. Алгебраич. группа G полупроста тогда и только тогда, когда G разлагается в произведение простых связных замкнутых нормальных подгрупп.

В случае, когда основное поле есть поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел, П. а. г.— это не что иное как полупростая группа Ли над $\mathbb{C}$. Оказывается, что классификация П. а. г. над произвольным алгебраически замкнутым полем K аналогична случаю $K=\mathbb{C}$, т. е. что П. а. г. определяется с точностью до изоморфизма своей корневой системой и нек-рой подрешеткой в решетке весов, содержащей все корни. Точнее, пусть T — максимальный тор в П. а. г. G, $X(T)$ — группа характеров тора T, рассматриваемая как решетка в пространстве $E=X(T)\otimes\mathbb{R}$. Для любого рационального линейного представления ρ группы G группа $\rho(T)$ является диагонализируемой. Ее собственные значения, являющиеся элементами группы $X(T)$, наз. весами представления ρ. Ненулевые веса присоединенного представления Ad наз. корнями группы G. Оказывается, что система $\Sigma\subset X(T)$ всех корней группы G является приведенной *корневой системой* в пространстве E, причем неприводимые компоненты системы Σ — это системы корней простых замкнутых нормальных подгрупп группы G. Далее, $Q(\Sigma)\subseteq X(T)\subseteq P(\Sigma)$, где $Q(\Sigma)$— решетка радикальных весов, а $P(\Sigma)=\{\lambda\in E\mid\alpha^*(\lambda)\in\mathbb{Z}$ для всех $\alpha\in\Sigma\}$ — решетка весов корневой системы Σ. В случае $K=\mathbb{C}$ пространство E естественно отождествляется с вещественным подпространством $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*\subset\mathfrak{t}^*$, где $\mathfrak{t}$ — алгебра Ли тора T, натянутом на дифференциалы всех характеров, а решетки в $\mathfrak{t}$, двойственные к $Q(\Sigma)\subseteq X(T)\subseteq P(\Sigma)$, совпадают (с точностью до множителя $2\pi i$) с $\Gamma_1\supseteq\Gamma(G)\supseteq\Gamma_0$ (см. *Ли полупростая группа*).

Основная теорема классификации утверждает, что если G' — другая П. а. г., T' — ее максимальный тор, $\Sigma'\subset E'$ — система корней группы G' и если существует линейное отображение $E\to E'$, определяющее изомор-

ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ, тела Архимеда,— выпуклые многогранники, все грани к-рых суть правильные многоугольники, а многогранные углы конгруэнтны или симметричны. Данные о П. м. приведены в таблице, где B — число вершин, P — число ребер, Γ — число граней, Γ_k — число n_k-угольных граней, s — число граней, сходящихся в каждой вершине, в том числе s_1 n_1-угольных, s_2 n_2-угольных и т. д. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ существует 13 П. м. [см. рис., *1—14*, иногда выделяют два вида ромбокубооктаэдра (рис., *3—4*), к-рые различаются тем, что верхняя часть многоугольника, состоящая из 5 квадратов и 4 правильных треугольников, повернута как целое на угол $\pi/4$] и две бесконечные серии — призмы (рис., *15*) и антипризмы (рис., *16*).



Полуправильные многогранники

	№ на рис.	B	P	Γ	n_1	n_2	n_3	Γ_1	Γ_2	Γ_3	s_1	s_2	s_3	s
Усеченный тетраэдр	*1*	12	18	8	6	3	—	4	4	—	2	1	—	3
Усеченный куб	*2*	24	36	14	8	3	—	6	8	—	2	1	—	3
Ромбокубооктаэдр	*3, 4*	24	48	26	4	3	—	18	8	—	3	1	—	4
Плосконосый куб	*5*	24	60	38	3	4	—	32	6	—	4	1	—	5
Усеченный кубооктаэдр	*6*	48	72	26	4	6	8	12	8	6	1	1	1	3
Кубооктаэдр	*7*	12	24	14	3	4	—	8	6	—	2	2	—	4
Усеченный октаэдр	*8*	24	36	14	6	4	—	8	6	—	2	1	—	3
Усеченный додекаэдр	*9*	60	90	32	10	3	—	12	20	—	2	1	—	3
Ромбоикододекаэдр	*10*	60	120	62	4	3	5	30	20	12	2	1	1	4
Усеченный икододекаэдр	*11*	120	180	62	4	6	10	30	20	12	1	1	1	3
Икододекаэдр	*12*	30	60	32	3	5	—	20	12	—	2	2	—	4
Усеченный икосаэдр	*13*	60	90	32	6	5	—	20	12	—	2	1	—	3
Плосконосый додекаэдр	*14*	60	150	92	3	5	—	80	12	—	4	1	—	5
Правильная призма (n=3, 5, 6,...)	*15*	$2n$	$3n$	$n+2$	4	n	—	n	2	—	2	1	—	3
Антипризма (n=4, 5, 6,...)	*16*	$2n$	$4n$	$2n+2$	3	n	—	$2n$	2	—	3	1	—	4

Невыпуклых (звездчатых) П. м. больше 51.

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4— Геометрия, М.—Л., 1963; [2] Люстерник Л. А., Выпуклые фигуры и многогранники, М., 1956; [3] Brückner M., Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte, Lpz., 1900; [4] Веннинджер М., Модели многогранников, пер. с англ., М., 1974.

А. Б. Иванов.

ПОЛУПРОСТАЯ АЛГЕБРА относительно радикала r — алгебра, являющаяся r-полупростым кольцом (см. *Полупростое кольцо*). В нек-рых классах алгебр при подходящем выборе радикала r удается описать строение П. а. (см. *Классически полупростое кольцо*, *Альтернативные кольца и алгебры*, *Йорданова алгебра*, *Ли полупростая алгебра*).

Часто под П. а. понимается конечномерная алгебра над полем, являющаяся прямой суммой простых алгебр.

Л. А. Скорняков.

ПОЛУПРОСТАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГРУППА — связная линейная алгебраич. группа положительной размерности, содержащая лишь тривиальные разрешимые (или, что равносильно, абелевы) связные замкнутые нормальные подгруппы. Факторгруппа связной неразрешимой линейной алгебраич. группы по радикалу полупроста.

Связная линейная алгебраич. группа G положительной размерности наз. простой, если она не содержит собственных связных замкнутых нормальных подгрупп. Центр $Z(G)$ простой группы G конечен, и $G/Z(G)$ проста как абстрактная группа. Алгебраич. группа G полупроста тогда и только тогда, когда G разлагается в произведение простых связных замкнутых нормальных подгрупп.

В случае, когда основное поле есть поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел, П. а. г.— это не что иное как полупростая группа Ли над $\mathbb{C}$. Оказывается, что классификация П. а. г. над произвольным алгебраически замкнутым полем K аналогична случаю $K=\mathbb{C}$, т. е. что П. а. г. определяется с точностью до изоморфизма своей корневой системой и нек-рой подрешеткой в решетке весов, содержащей все корни. Точнее, пусть T — максимальный тор в П. а. г. G, $X(T)$ — группа характеров тора T, рассматриваемая как решетка в пространстве $E=X(T)\otimes\mathbb{R}$. Для любого рационального линейного представления ρ группы G группа $\rho(T)$ является диагонализируемой. Ее собственные значения, являющиеся элементами группы $X(T)$, наз. весами представления ρ. Ненулевые веса присоединенного представления Ad наз. корнями группы G. Оказывается, что система $\Sigma\subset X(T)$ всех корней группы G является приведенной *корневой системой* в пространстве E, причем неприводимые компоненты системы Σ — это системы корней простых замкнутых нормальных подгрупп группы G. Далее, $Q(\Sigma)\subseteq X(T)\subseteq P(\Sigma)$, где $Q(\Sigma)$— решетка радикальных весов, а $P(\Sigma)=\{\lambda\in E\mid\alpha^*(\lambda)\in\mathbb{Z}$ для всех $\alpha\in\Sigma\}$ — решетка весов корневой системы Σ. В случае $K=\mathbb{C}$ пространство E естественно отождествляется с вещественным подпространством $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*\subset\mathfrak{t}^*$, где $\mathfrak{t}$ — алгебра Ли тора T, натянутом на дифференциалы всех характеров, а решетки в $\mathfrak{t}$, двойственные к $Q(\Sigma)\subseteq X(T)\subseteq P(\Sigma)$, совпадают (с точностью до множителя $2\pi i$) с $\Gamma_1\supseteq\Gamma(G)\supseteq\Gamma_0$ (см. *Ли полупростая группа*).

Основная теорема классификации утверждает, что если G' — другая П. а. г., T' — ее максимальный тор, $\Sigma'\subset E'$ — система корней группы G' и если существует линейное отображение $E\to E'$, определяющее изомор-

физм корневых систем Σ и Σ' и отображающее $X(T)$ на $X(T')$, то $G \simeq G'$. Кроме того, для любой приведенной корневой системы Σ и любой решетки Λ, удовлетворяющей условию $Q(\Sigma) \subseteq \Lambda \subseteq P(\Sigma)$, существует такая П. а. г. G, что Σ есть система ее корней относительно максимального тора T и $\Lambda = X(T)$.

Классифицированы также все *изогении* (в частности, все автоморфизмы) П. а. г.

Лит.: [1] Стейнберг Р. Г., Лекции о группах Шевалле, пер. с англ., М., 1975; [2] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980. *А. Л. Онищик.*

ПОЛУПРОСТАЯ ГРУППА (в смысле нек-рого радикала) — группа, *радикал* к-рой совпадает с единичной подгруппой. Таким образом, понятие П. г. целиком определяется выбором радикального класса групп. В теории конечных групп и групп Ли под радикалом обычно понимают наибольшую (связную) разрешимую нормальную подгруппу. В этих случаях описание П. г. сводится к описанию простых групп.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973. *А. Л. Шмелькин.*

ПОЛУПРОСТАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица над полем F, подобная матрице вида $\operatorname{diag}[d_1, \ldots, d_l]$, где d_j — матрица над F с неприводимым в $F[x]$ характеристическим многочленом, $j=1, \ldots, k$. Для матрицы A над полем F следующие три утверждения эквивалентны: (1) A полупроста; (2) минимальный многочлен матрицы A не имеет кратных множителей в $F[x]$; (3) алгебра $F[A]$ полупроста.

Если F — совершенное поле, то П. м. над F подобна диагональной матрице над нек-рым расширением F. Для всякой квадратной матрицы A над совершенным полем имеется единственное представление в виде $A = A_S + A_N$, где A_S есть П. м., A_N нильпотентна, $A_S A_N = A_N A_S$; матрицы A_S и A_N принадлежат алгебре $F[A]$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра, пер. с франц., М., 1966, гл. 8. *Д. А. Супруненко.*

ПОЛУПРОСТОЕ КОЛЬЦО — кольцо R с нулевым радикалом. Точнее, если r — нек-рый радикал (см. *Радикалы* колец и алгебр), то кольцо R наз. r-полупростым в случае, когда $r(R)=0$. Часто, говоря об ассоциативном П. к., имеют в виду *классически полупростое кольцо*. *Л. А. Скорняков.*

ПОЛУПРОСТОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — то же, что вполне приводимое представление (см. *Вполне приводимое множество*).

ПОЛУПРОСТОЙ МОДУЛЬ — то же, что *вполне приводимый модуль*.

ПОЛУПРОСТОЙ ЭЛЕМЕНТ линейной алгебраической группы G — элемент $g \in G \subset \mathrm{GL}(V)$, где V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем K, являющийся *полупростым эндоморфизмом* пространства V. Понятие П. э. не зависит от реализации группы G в виде линейной группы, а определяется лишь структурой алгебраич. группы на G. Элемент $g \in G$ полупрост тогда и только тогда, когда для оператора правого сдвига ρ_g в $K[G]$ существует базис из собственных векторов. При любом рациональном линейном представлении $\varphi : G \to \mathrm{GL}(W)$ множество П. э. группы G отображается на множество П. э. группы $\varphi(G)$.

Аналогично определяются полупростые элементы алгебраической алгебры Ли $\mathfrak{g}$, отвечающей группе G; дифференциал $d\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W)$ представления φ отображает множество П. э. алгебры $\mathfrak{g}$ на множество П. э. своего образа.

Полупростой элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это элемент $X \in \mathfrak{g}$ такой, что присоединенное линейное преобразование $\operatorname{ad} X$ является полупростым эндоморфизмом векторного пространства $\mathfrak{g}$. Если

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ — алгебра Ли редуктивной линейной алгебраич. группы, то X есть П. э. алгебры $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда X — полупростой эндоморфизм пространства V.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Мерзляков Ю. И., Рациональные группы, М., 1980; [3] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980. *А. Л. Онищик.*

ПОЛУПРОСТОЙ ЭНДОМОРФИЗМ, полупростое линейное преобразование, векторного пространства V над полем K — эндоморфизм α пространства V такой, что всякое подпространство в V, инвариантное относительно α, обладает инвариантным прямым дополнением. Другими словами, требуется, чтобы α определял на V структуру полупростого модуля над кольцом $K[X]$. Напр., любое ортогональное, симметрическое или кососимметрическое линейное преобразование конечномерного евклидова пространства, а также любое диагонализируемое (т. е. записывающееся в нек-ром базисе диагональной матрицей) линейное преобразование конечномерного векторного пространства являются П. э. Полупростота эндоморфизма сохраняется при переходе к инвариантному подпространству $W \subset V$ и к факторпространству V/W.

Пусть $\dim V < \infty$. Эндоморфизм $\alpha : V \to V$ является П. э. тогда и только тогда, когда его минимальный многочлен не имеет кратных множителей. Пусть, кроме того, L — расширение поля K и $\alpha_{(L)} = \alpha \otimes 1$ — продолжение эндоморфизма α на пространство $V_{(L)} = V \otimes_K L$. Если $\alpha_{(L)}$ полупрост, то и α полупрост, а если L сепарабельно над K, то верно и обратное. Эндоморфизм α наз. абсолютно полупростым, если $\alpha_{(L)}$ полупрост для любого расширения $L \supset K$; для этого необходимо и достаточно, чтобы минимальный многочлен не имел кратных корней в алгебраич. замыкании $\overline{K}$ поля K, т. е. чтобы эндоморфизм $\alpha_{(\overline{K})}$ был диагонализируем.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966. *А. Л. Онищик.*

ПОЛУПРЯМАЯ — одна из частей прямой, на к-рые разбивается прямая любой ее точкой O. Если точка O отнесена к П., то П. наз. замкнутой П. (или лучом). *БСЭ-3.*

ПОЛУПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ группы A на группу B — группа $G = AB$, являющаяся произведением своих подгрупп A и B, причем B нормальна в G, и $A \cap B = \{1\}$. Если также и A нормальна в G, то П. п. превращается в *прямое произведение*. П. п. по группам A и B строится неоднозначно. Для построения П. п. нужно еще знать, какие автоморфизмы на группе B вызывают сопряжения элементами из A. Точнее, если $G = AB$ — П. п., то каждому элементу $a \in A$ соответствует автоморфизм $\alpha_a \in \operatorname{Aut} B$, являющийся сопряжением элементом a:

$$\alpha_a(b) = aba^{-1}, \quad b \in B.$$

При этом соответствие $a \mapsto \alpha_a$ есть гомоморфизм $A \to \operatorname{Aut} B$. Обратно, если A и B — произвольные группы, то для любого гомоморфизма $\varphi : A \to \operatorname{Aut} B$ существует единственное П. п. группы A на группу B такое, что $\alpha_a = \varphi(a)$ для любого $a \in A$. П. п. является частным случаем *расширения* группы B с помощью группы A, такое расширение наз. расщепляющимся.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967. *А. Л. Шмелькин.*

ПОЛУПСЕВДОЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — векторное пространство с вырожденной индефинитной метрикой. П. п. $R_n^{m_1 \dots m_{r-1}}$ определяется как n-мерное пространство, в к-ром задано r скалярных произведений

$$(x, y)_a = \sum \varepsilon_{i_a} x^{i_a} y^{i_a},$$

где $0=m_0<m_1<\ldots<m_r=n$; $a=1, 2, \ldots, r$; $i_a=m_{a-1}+1, \ldots, m_a$, $\varepsilon_{i_a}=\pm 1$, причем -1 среди чисел ε_{i_a} встречается l_a раз. Произведение $(x, y)_a$ определено для тех векторов, для к-рых все координаты x^i при $i\leqslant m_{a-1}$ равны нулю. На этих векторах справедливо равенство $(x, y)_{a-1}=0$. Первый скалярный квадрат произвольного вектора x П. п. является вырожденной квадратичной формой от координат вектора:

$$(x, x)=-(x_1)^2-(x_2)^2-\ldots-(x^{l_1})^2+(x^{l+1})^2+\ldots+(x^{n-d})^2,$$

где l — индекс, $d=n-m_1$ — дефект П. п. При $l_1=l_2=\ldots=l_r=0$ П. п. является *полуевклидовым пространством*. В П. п. определяются m-мерные плоскости ($m<n$), прямые, параллельность, длина вектора так же, как в псевдоевклидовых пространствах. В П. п. ${}^{l+(d)}R_n$ можно выбрать ортогональный базис, состоящий из l векторов мнимой длины, $n-l-d$ вещественной длины и d изотропных векторов. Через каждую точку П. п. дефекта d можно провести d-мерную изотропную плоскость, каждый вектор к-рой ортогонален всем векторам П. п. См. также *Галилеево пространство*.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Д. Д. Соколов.

ПОЛУПСЕВДОРИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО — многообразие с вырожденной индефинитной метрикой. П. п. ${}^{l_1\ldots l_r}V_n^{m_1\ldots m_{r-1}}$ определяется как n-мерное многообразие с координатами x^i, в к-ром задано r линейных элементов

$$ds_a^2=g_{(a)ij}\,dx^{ia}\,dx^{ja},$$

где $0=m_0<m_1<\ldots<m_r=n$; $a=1, 2, \ldots, r$; $i_a=m_{a-1}+1, \ldots, m_a$, причем индекс квадратичной формы $g_{(a)ij}$ равен l_a. Линейный элемент ds_a^2 определен для тех векторов, для к-рых все координаты dx^i при $i\leqslant m_{a-1}$ равны нулю (для этих векторов справедливо равенство $ds_{a-1}^2=0$). При $l_1=l_2=\ldots=l_r=0$ П. п. является *полуримановым пространством*. Пространства V_n^m и ${}^{kl}V_n^m$ являются квазиримановыми пространствами. В П. п. определяются основные понятия дифференциальной геометрии (напр., кривизна) по аналогии с римановыми пространствами (см. [1]).

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Д. Д. Соколов.

ПОЛУРЕШЕТКА, полуструктура,— коммутативная идемпотентная полугруппа, т. е. полугруппа с тождествами $x+y=y+x$ и $x+x=x$. Всякая полурешетка $p=\langle p, +\rangle$ может быть превращена в *частично упорядоченное множество* (частичный порядок $\leqslant$ вводится соотношением $a\leqslant b\Leftrightarrow a+b=b$), в к-ром для любой пары элементов существует точная верхняя грань $\sup\{a, b\}=a+b$. Обратно, всякое частично упорядоченное множество с точными верхними гранями для любых пар элементов является П. относительно операции $a+b=\sup\{a, b\}$. В этом случае говорят, что частично упорядоченное множество является верхней полурешеткой (или полурешеткой по объединениям, или V-полурешеткой). Нижняя полурешетка, называемая также полурешеткой по пересечениям, или Λ-полурешеткой, определяется дуально как частично упорядоченное множество, в к-ром для любых двух элементов существует точная нижняя грань.

Т. С. Фофанова.

ПОЛУРИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО — пространство с полуримановой метрикой (с вырожденным метрич. тензором). П. п. является обобщением понятия *риманова пространства*. Определение П. п. может быть выражено с помощью понятий, применяемых при определении риманова пространства. В определении риманова пространства V_n используется в качестве касательного

пространства евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, причем касательные векторы в каждой точке $X(x^1, \ldots x^n) \in V_n$ инвариантны при параллельных переносах V_n (метрич. тензор a_{ij} пространства V_n абсолютно постоянен). Если в качестве касательного пространства в каждой точке пространства V_n берется *полуевклидово пространство* $R_n^{m_1 m_2 \ldots m_{r-1}}$, то метрика пространства V_n будет являться вырожденной, метрич. тензор также абсолютно постоянен, но является теперь вырожденным, его матрица имеет ранг m_1 и имеет неособенную подматрицу. Определяется второй вырожденный метрич. тензор в $(n-m_1)$-плоскости ($a_{ij}x^j=0$), к-рая наз. нулевой $(n-m_1)$-плоскостью тензора a_{ij}; его матрица также обладает неособенной подматрицей и т. д. Последний, r-й метрич. тензор, определенный в нулевой $(n-m_{r-1})$-плоскости $(r-1)$-го тензора,— невырожденный тензор с неособенной матрицей. Такое пространство и наз. П. п. и в этом случае обозначается символом $V_n^{m_1 m_2 \ldots m_{r-1}}$. Аналогично определяется П. п. вида ${}^{l_1 l_2 \ldots l_r}V^{m_1 m_2 \ldots m_{r-1}}$, т. е. когда в качестве касательного пространства берется полупсевдоевклидово пространство ${}^{l_1 l_2 \ldots l_r}R_n^{m_1 m_2 \ldots m_{r-1}}$. Пространства V_n^m и ${}^{kl}V_n^m$ наз. к в а з и р и м а н о в ы м и п р о с т р а н с т в а м и.

Как и в римановом пространстве, в П. п. вводится понятие кривизны в двумерном направлении. Полугиперболич. и полуэллиптич. пространства являются П. п. постоянной ненулевой кривизны, а полуевклидово пространство — П. п. постоянной нулевой кривизны.

Таким образом, П. п. может быть определено как пространство аффинной связности (без кручения), касательные пространства к-рого в каждой точке являются полуевклидовыми (или полупсевдоевклидовыми), причем метрич. тензор П. п. является абсолютно постоянным.

В П. п. дифференциальная геометрия линий и поверхностей строится по аналогии с дифференциальной геометрией линий и поверхностей в V_n с учетом указанной выше специфичности П. п. Поверхности полугиперболич. и полуэллиптич. пространств сами являются П. п. В частности, m-орисфера полугиперболич. пространства ${}^{m+1}S_n$ изометрична П. п. $V_{n-1}^{m;\, n-m-1}$, метрика к-рого сводится к метрике полуэллиптич. пространства S_{n-m-1}^m; этот факт является обобщением изометричности орисферы пространства Лобачевского евклидовому пространству.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров.

ПОЛУСИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — проективное $(2n+1)$-пространство, в к-ром задана $(2n-2m_0-1)$-плоскость T_0, в ней — $(2n-2m_1-1)$-плоскость T_1 и т. д. до $(2n-2m_{r-1}-1)$-плоскости T_{r-1}, при этом в пространстве задана нуль-система, переводящая все точки пространства в плоскости, проходящие через плоскость T_0; в плоскости T_0 задана абсолютная нуль-система, переводящая все ее точки в $(2n-2m_0-2)$-плоскости, лежащие в ней и проходящие через $(2n-2m_1-1)$-плоскость T_1 и т. д. до абсолютной нуль-системы $(2n-2m_{r-1}-1)$-плоскости T_{r-1}, переводящей все ее точки в $(2n-2m_{r-1}-2)$-плоскости, лежащие в ней, $0 \leqslant m_0 < m_1 < \ldots < m_{r-1} < n$. П. п. обозначается $\mathrm{Sp}_{2n+1}^{2m_0+1, \ldots, 2m_{r-1}+1}$.

П. п. получается методом, аналогичным переходу от эллиптич. и гиперболич. пространств к полуэллиптич. и полугиперболич. пространствам, и является более общим по отношению к квазисимплектич. пространству.

Коллинеации П. п., переводящие в себя плоскости T_i, перестановочные с нуль-системами, наз. п о л у с и м п л е к т и ч е с к и м и п р е о б р а з о в а н и я м и П. п.

Существуют инварианты полусимплектич. преобразований, аналогичные симплектич. инварианту симплектич. пространств. Полусимплектич. преобразования образуют группу, являющуюся группой Ли.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров.

ПОЛУСИМПЛИЦИАЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС — прежнее название симплициального множества, данное при первом рассмотрении объектов такого рода.

М. И. Войцеховский.

ПОЛУСОВЕРШЕННОЕ КОЛЬЦО — кольцо, каждый конечно порожденный левый (или каждый конечно порожденный правый) модуль над к-рым обладает проективным накрытием. Кольцо R с радикалом Джекобсона J оказывается П. к. тогда и только тогда, когда R полулокально и у каждого идемпотента факторкольца R/J имеется идемпотентный прообраз в R. Первое условие можно заменить требованием классич. полупростоты факторкольца R/J, а второе — возможностью «поднимать» из R/J в R модульные прямые разложения. П. к. характеризуются также условием, что каждый модуль допускает прямое разложение, относительно к-рого дополняемы максимальные прямые слагаемые. Кольцо матриц над П. к. является П. к.

См. также *Совершенное кольцо* и лит. при этой статье.

Л. А. Скорняков.

ПОЛУТОРАЛИНЕЙНАЯ ФОРМА — функция от двух переменных на модуле (напр., на векторном пространстве), линейная по одному переменному и полулинейная по другому. Точнее, П. ф. на унитарном модуле E над ассоциативно-коммутативным кольцом A с единицей, снабженным автоморфизмом $a \to a^\sigma$, наз. отображение $\varphi : E \times E \to A$, линейное при фиксированном втором аргументе и полулинейное (см. *Полулинейное отображение*) при фиксированном первом аргументе. Аналогично определяется полуторалинейное отображение $E \times F \to G$, где E, F, G — A-модули. В случае, когда $a^\sigma = a$ ($a \in A$), получается понятие *билинейной формы* (и *билинейного отображения*). Другой важный пример П. ф. получается, когда V — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ и $a^\sigma = \bar{a}$. Специальным случаем П. ф. являются *эрмитовы формы* (а также косоэрмитовы формы).

П. ф. можно рассматривать и на модулях над некоммутативным кольцом A; в этом случае предполагается, что σ — антиавтоморфизм, т. е. что

$$(ab)^\sigma = b^\sigma a^\sigma, \quad a, b \in A.$$

Для П. ф. удается ввести многие понятия теории билинейных форм, напр. понятия ортогонального подмодуля, левого и правого ядра, невырожденной формы, матрицы формы в данном базисе, ранга формы, сопряженных гомоморфизмов.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

А. Л. Онищик.

ПОЛУУПОРЯДОЧЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО — общее название векторных пространств, в к-рых определено бинарное отношение частичного порядка, согласованное определенным образом с векторной структурой пространства. Введение порядка в функциональных пространствах позволяет исследовать в общих рамках функционального анализа такие задачи, к-рые существенно связаны с неравенствами между функциями, с выделением классов положительных функций. Однако, в отличие от множества действительных чисел, допускающего полное упорядочение, естественный порядок в функциональных пространствах оказывается лишь частичным; напр., в пространстве $C[a, b]$ естественно считать, что функция f мажорирует функцию g, если $f(t) \geqslant g(t)$ при всех $t \in [a, b]$. Но при таком определении порядка многие функции окажутся несравнимыми между собой.

Упорядоченные векторные пространства (у. в. п.). Векторное пространство X над полем действительных чисел наз. упорядоченным, если в нем определено бинарное отношение порядка, причем $x \geqslant y$ влечет $x+z \geqslant y+z$ для любого $z \in X$ и $\lambda x \geqslant \lambda y$ для любого числа $\lambda \geqslant 0$. Таково, напр., $C[a, b]$ с естественным порядком. Если отношение $\geqslant$ есть порядок, то множество $X_+ = \{x \in X : x > 0\}$ — конус, наз. положительным конусом. Обратно, если в векторном пространстве X задан конус K с вершиной в нуле, то в X может быть введен такой порядок, при к-ром $X_+ = K$: следует положить $x \geqslant y$, если $x - y \in K$. Рассматриваются и более общие у. в. п., в к-рых определена лишь структура квазипорядка. В этом случае множество X_+ есть клин, а всякий клин с вершиной в нуле порождает в X квазипорядок.

Пусть у. в. п. X наделено порядком. Конус X_+ наз. воспроизводящим, если $X_+ - X_+ = X$. Это свойство конуса X_+ необходимо и достаточно, для того чтобы любое конечное подмножество из X было ограниченным (сверху и снизу). Те у. в. п., в к-рых всякое ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань, иначе — точную верхнюю границу, или супремум (а тогда и всякое ограниченное снизу множество имеет нижнюю грань, иначе — точную нижнюю границу, или инфимум), наз. порядково полными или (o)-полными. Более слабый вид полноты в у. в. п. определяется следующим образом: у. в. п. наз. дедекиндово полным, если всякое его ограниченное сверху и направленное вверх подмножество имеет верхнюю грань (множество $E \subset X$ направлено вверх, если для любых $x_1, x_2 \in E$ существует такой $x_3 \in E$, что $x_3 \geqslant x_1, x_2$). Если это требование выполнено для ограниченных возрастающих последовательностей, то у. в. п. наз. дедекиндово (o)-полным. Дедекиндова полнота слабее (o)-полноты. Напр., если X — произвольное бесконечномерное банахово пространство, $u \in X$, $0 < r \leqslant \|u\|$, а K — конус, натянутый на замкнутый шар $S(u; r)$ и элемент 0, и с помощью K в X введен порядок, то X — дедекиндово полное, но не (o)-полное. У. в. п. наз. архимедовым, если в нем выполнена *Архимеда аксиома*. В частности, архимедовым является всякое дедекиндово (o)-полное у. в. п.

В у. в. п. вводится понятие порядковой сходимости: последовательность $\{x_n\}$ (o)-сходится к элементу x ($x_n \xrightarrow{(o)} x$), если существуют такие возрастающая и убывающая последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$, что $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ и $\sup y_n = x = \inf z_n$. (o)-предел обладает многими свойствами предела в множестве действительных чисел, однако нек-рые из них справедливы лишь в архимедовых у. в. п.

Линейный оператор A, действующий из у. в. п. X в у. в. п. Y (в частности, линейный функционал с действительными значениями), наз. положительным, если $AX_+ \subset Y_+$. Для положительных функционалов справедлива следующая теорема о распространении. Пусть E — линейное подмножество в X, мажорирующее конус X_+ (это означает, что для любого $x \in X_+$ существует такой $y \in E$, что $y \geqslant x$). Всякий линейный функционал, заданный на E и положительный относительно конуса $E \cap X_+$, допускает линейное положительное распространение на все X.

Векторная решетка (в. р.) — у. в. п., в к-ром отношение порядка определяет структуру решетки. При этом для определения в. р. достаточно постулировать для любых двух элементов из у. в. п. существование одной из граней: верхней $x \vee y$ или нижней $x \wedge y$. Напр., если существует $x \vee y$, то $x \wedge y = x + y - x \vee y$. Если X — в. р., то конус X_+ наз. миниэдральным. В в. р. для любого ее элемента x существуют положительная и отрицательная части: $x_+ = x \vee 0$ и $x_- = (-x) \vee 0$.

При этом $x=x_+-x_-$, и эта формула дает «минимальное» представление x в виде разности положительных элементов, т. е. если $x=y-z$, где $y, z\geqslant 0$, то $x_+\leqslant y$, $x_-\leqslant z$. Миниэдральный конус является воспроизводящим. Элемент $|x|=x_++x_-$ наз. модулем элемента x. В пространстве $C[a, b]$ с естественным упорядочением положительный конус миниэдрален, положительная часть любой функции $x(t)$ из C получается из $x(t)$ заменой ее отрицательных значений нулем, а модуль есть функция $|x(t)|$. В в. р. всякое конечное множество элементов имеет обе грани. Модуль элемента в. р. обладает многими свойствами абсолютной величины действительного числа.

В. р. наз. дистрибутивной, если для произвольного множества ее элементов $\{x_\alpha\}$, у к-рого существует $\sup x_\alpha$, при любом $y\in X$ справедлива формула: $y\wedge\sup x_\alpha=\sup\{y\wedge x_\alpha\}$. Тогда верна и двойственная формула: $y\vee\inf x_\alpha=\inf\{y\vee x_\alpha\}$.

Теорема о двойном разбиении положительных элементов: если $x=y+z$, где $y, z\geqslant 0$, и одновременно $x=x_1+\ldots+x_n$, где все $x_i\geqslant 0$, то каждый x_i можно представить в виде $x_i=y_i+z_i$ так, что все $y_i, z_i\geqslant 0$ и что

$$y=y_1+\ldots+y_n,\ z=z_1+\ldots+z_n.$$

Два элемента x, y в. р. наз. дизъюнктными (xdy), если $|x|\wedge|y|=0$. Два множества A, B наз. дизъюнктными, если adb для любых $a\in A$, $b\in B$. В пространстве $C[a, b]$ дизъюнктность xdy означает, что $x(t)y(t)\equiv 0$. Положительный элемент e наз. слабой единицей (единицей в смысле Фрейденталя), если 0 — единственный элемент, дизъюнктный с e. В $C[a, b]$ слабой единицей является любая функция, к-рая больше 0 на всюду плотном множестве. Если же элемент e таков, что для любого x существует λ, при к-ром $|x|\leqslant\lambda e$, то e наз. сильной единицей, а X с сильной единицей наз. в. р. ограниченных элементов. В $C[a, b]$ сильная единица — любая функция, для к-рой $\min x(t)>0$. Если в архимедовой в. р. X с сильной единицей e положить $\|x\|=\min\{\lambda : |x|\leqslant\lambda e\}$, то X становится нормированной решеткой.

На плоскости любой конус, кроме одномерного (т. е. луча), миниэдрален. Но в пространствах с большим числом измерений среди замкнутых конусов много не миниэдральных, напр. таковы все «круглые» конусы в $\mathbb{R}^3$. Для того чтобы конус (с вершиной в нуле) в n-мерном архимедовом у. в. п. был миниэдральным, необходимо и достаточно, чтобы он был натянут на $(n-1)$-мерный симплекс с линейно независимыми вершинами. Всякая архимедова n-мерная в. р. изоморфна пространству $\mathbb{R}^n$ с покоординатным упорядочением.

***K*-пространства** (К.-п.), пространства Канторовича, суть (o)-полные в. р. Это — основной класс П. п., они всегда архимедовы. (o)-сходимость в К.-п. описывается с помощью верхнего и нижнего пределов, именно, для огранич. последовательности $\{x_n\}$

$$\overline{\lim}\, x_n=\inf_n\sup_{m\geqslant n} x_m,\quad \underline{\lim}\, x_n=\sup_n\inf_{m\geqslant n} x_m$$

и тогда $x_n\xrightarrow{(o)}x$ означает, что $x=\overline{\lim}\, x_n=\underline{\lim}\, x_n$. Пусть X есть К.-п. Для любого множества $E\subset X$ его дизъюнктным дополнением наз. множество $E^d=\{x\in X : x\,dE\}$. Всякое множество, к-рое является дизъюнктным дополнением (к какому-либо множеству), наз. полосой. Для любого множества E существует наименьшая полоса, содержащая E, именно E^{dd}; она наз. полосой, порожденной множеством E. Если само E есть полоса, то $E^{dd}=E$. Полоса, порожденная одноэлементным множеством, наз. главной. Понятие полосы вводится и в любой в. р., однако в К.-п. оно играет особую роль, поскольку справедлива теорема

о проектировании на полосу: если E — полоса в X, то для любого $x \in X$ существует единственное разложение $x=y+z$, где $y \in E$, $z \in E^d$. Определенный при этом линейный оператор $y=\mathrm{Pr}_E x$ наз. проектором на полосу E. Если задана произвольная совокупность попарно дизъюнктных полос E_α, полная в том смысле, что 0 — единственный элемент из X, дизъюнктный всем E_α, то любой $x \in X_+$ представим в виде $x=\sup x_\alpha$, где $x_\alpha=\mathrm{Pr}_{E_\alpha} x$. Всякий l-идеал $Y \subset X$ также является К.-п. Однако если $x_n \in Y$ и $x_n \xrightarrow{(o)} x$ в X, то это соотношение верно и в Y только в том случае, когда последовательность $\{x_n\}$ ограничена в Y.

Примером К.-п. служит пространство S всех действительных почти всюду конечных измеримых функций на $[0, 1]$, в к-ром эквивалентные функции отождествляются. Функция $x \in S$ считается положительной, если $x(t) \geqslant 0$ почти всюду. Если $A=\{x_n\}$ — счетное ограниченное сверху подмножество из S (ограниченность сверху означает, что существует такая $y \in S$, что $x_n(t) \leqslant y(t)$ почти всюду для любого n), то функция $x(t)=\sup x_n(t)$ и будет верхней гранью множества A, т. е. $\sup A$ вычисляется поточечно. Однако для несчетных множеств вычисление граней таким же способом уже невозможно, и существование у несчетных множеств ограниченных множеств в S устанавливается сложнее. (o)-сходимость в S означает сходимость почти всюду. Все пространства $L_p=[0, 1]$, $p>0$, являются l-идеалами в S, и потому они тоже являются К.-п.

Важную роль играет теорема Рисса — Канторовича о том, что множество всех порядково ограниченных операторов (т. е. линейных операторов, переводящих ограниченные по упорядочению множества в такие же) из в. р. в К.-п. при естественном порядке ($A \leqslant B$ означает, что $Ax \leqslant Bx$ при всех $x \geqslant 0$) само является К.-п. Теория К.-п. нашла приложения в выпуклом анализе и теории экстремальных задач. Многие результаты здесь основываются на теореме Хана — Банаха — Канторовича о продолжении линейных операторов со значениями в К.-п.

К.-п. наз. расширенным, если всякое множество его попарно дизъюнктных элементов ограничено. В расширенном К.-п. всегда существует слабая единица. Для любого К.-п. X существует единственное (с точностью до изоморфизма) расширенное К.-п. Y, в к-рое X погружается как l-идеал, а полоса в Y, порожденная X, совпадает с Y. Такое Y наз. максимальным расширением К.-п. Пространство $S[0, 1]$ — максимальное расширение для всех пространств $L_p[0, 1]$. Понятие расширенного К.-п. играет существенную роль во всей теории П. п., в частности при представлении К. п. с помощью функций.

С в. р. и К.-п. тесно связано понятие решеточно-нормированного пространства — векторного пространства, каждому элементу к-рого сопоставлена его обобщенная норма, являющаяся элементом фиксированной в. р. и удовлетворяющая обычным для нормы аксиомам, в к-рых знак неравенства понимается в смысле порядка в указанной в. р. Такие пространства используются в теории функциональных уравнений (теоремы существования; методы приближенного решения; метод Ньютона — Канторовича; монотонные процессы последовательных приближений и т. д.).

Топологические полуупорядоченные пространства. В функциональном анализе используются также у. в. п., в к-рых одновременно определена еще нек-рая топология, согласованная с порядком. Простейший и важнейший пример такого пространства — *банахова решетка*. Обобщением понятия банаховой решетки служит локально выпуклая решетка.

Важный класс банаховых К.-п. составляют КВ-пространства (КВ-п.), Канторовича —

Банаха пространства. Так называется банахово К.-п., удовлетворяющее двум дополнительным условиям: 1) $x_n \downarrow 0$ влечет $\|x_n\| \to 0$ (порядковая непрерывность нормы); 2) если последовательность $\{x_n\}$ возрастает и не ограничена по порядку, то $\|x_n\| \to +\infty$. В КВ-п. удается описать с помощью нормы многие факты, опирающиеся по своему смыслу только на порядок. Напр., $x_n \xrightarrow{(o)} 0$ означает, что $\| |x_n| \vee \ldots \vee |x_{n+m}| \| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ равномерно относительно m. Для того чтобы множество в КВ-п. E было ограничено по порядку, необходимо и достаточно, чтобы ограниченным было множество всех чисел вида $\| |x_1| \vee \ldots \vee |x_n| \|$, где $x_i \in E$. КВ-п. есть регулярное К.-п.

Пример КВ-п.: $L_p[0, 1]$ при $1 \leqslant p < +\infty$.

Пусть X — произвольное локально выпуклое пространство, наделенное структурой у. в. п. и имеющее т. н. нормальный конус X_+; при этом нормальность X_+ равносильна тому, что в X существует база окрестностей нуля, состоящая из абсолютно выпуклых и порядково насыщенных множеств U (последнее означает, что если x, $y \in U$ и $x \leqslant y$, то и весь интервал $[x, y] \in U$). Для того чтобы каждый непрерывный линейный функционал на локально выпуклом у. в. п. был представим в виде разности положительных непрерывных линейных функционалов, необходима и достаточна нормальность конуса X_+ в слабой топологии. Для нормированных пространств нормальность конуса в слабой и сильной топологии равносильны.

Лит.: [1] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961; [2] Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.— Л., 1950; [3] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [4] Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962; [5] Антоновский М. Я., Болтянский В. Г., Сарымсаков Т. А., Топологические алгебры Буля, Ташк., 1963; [6] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [7] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [8] Функциональный анализ, М., 1972 (Справоч. матем. б-ка); [9] Вулих Б. З., Введение в теорию конусов в нормированных пространствах, Калинин, 1977; [10] Крейн М. Г., Рутман М. А., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 1, с. 3—95; [11] Бухвалов А. В., Векслер А. И., Лозановский Г. Я., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34. в. 2, с. 137—83; [12] Акилов Г. П., Кутателадзе С. С., Упорядоченные векторные пространства, Новосибирск, 1978.

Б. З. Вулих.

ПОЛУЦЕПНОЕ КОЛЬЦО, полуцепное слева (справа) кольцо,— кольцо, являющееся левым (правым) *полуцепным модулем* над самим собой.

Л. А. Скорняков.

ПОЛУЦЕПНОЙ МОДУЛЬ — модуль, разлагающийся в прямую сумму цепных подмодулей (см. *Цепной модуль*). Все левые R-модули оказываются П. м. тогда и только тогда, когда R — обобщенно *однорядное кольцо*.

Л. А. Скорняков.

ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — проективное n-пространство, в к-ром метрика определяется заданным абсолютом, состоящим из совокупности мнимого конуса 2-го порядка Q_0 с $(n-m_0-1)$-плоской вершиной T_0, $(n-m_0-2)$-мнимого конуса Q_1 с $(n-m_1-1)$-плоской вершиной T_1 в $(n-m_0-1)$-плоскости T_0, $(n-m_1-2)$-мнимого конуса Q_2 с $(n-m_2-1)$-плоской вершиной T_2 в $(n-m_1-1)$-плоскости T_1 и т. д. до $(n-m_{r-1}-2)$-мнимого конуса Q_{r-1} с $(n-m_{r-1}-2)$-плоской вершиной T_{r-1} и невырожденной мнимой $(n-m_{r-1}-2)$-квадрикой Q_r в $(n-m_{r-1}-1)$-плоскости T_{r-1}, $0 \leqslant m_0 < m_1 < \ldots < m_{r-1} < n$. Индексы конусов Q_k, $k=0, 1, \ldots, r-1$ равны: $l_0 = m_0 + 1$; $l_a = m_0 - m_{a-1}$, $0 < a < r$; $l_r = n - m_{r-1}$. П. п. обозначается $S_n^{m_0 m_1 \ldots m_{r-1}}$.

В случае, когда конус Q_0 является парой слившихся плоскостей, совпадающих с плоскостью T_0 (при $m_0 = 0$), пространство с несобственной плоскостью T_0 наз. *полуевклидовым пространством* $R_n^{m_1 m_2 \ldots m_{r-1}}$.

Расстояние между точками X и Y определяется в зависимости от расположения прямой XY относительно плоскостей $T_0, T_1, \ldots, T_{r-1}$. Если, в частности, прямая XY не пересекает плоскость T_0, то расстояние между точками X и Y определяется с помощью скалярного произведения аналогично определению расстояния в *квазиэллиптическом пространстве*. Если же прямая XY пересекает плоскость T_0, но не пересекает плоскость T_1 или пересекает плоскость T_{a-1}, но не пересекает плоскость T_a, расстояние между точками определяется с помощью скалярного квадрата разности соответствующих векторов точек X и Y.

В зависимости от расположения относительно плоскостей абсолюта в П. п. различаются четыре типа прямых.

Углы между плоскостями в П. п. определяются аналогично определению углов между плоскостями в квазиэллиптич. пространстве, т. е. с использованием расстояний в двойственном пространстве.

Проективная метрика П. п. является метрикой наиболее общего вида. Частным случаем метрики П. п. является, напр., метрика квазиэллиптич. пространства. В частности, 2-плоскость S_2^0 совпадает с евклидовой, S_2^1 — с коевклидовой, 3-пространство S_3^1 — с квазиэллиптическим, S_3^0 — с евклидовыми 3-пространствами, 3-пространство S_3^{01} является галилеевым, S_3^{012} — флаговым пространством и т. д. 3-пространство S_3^{12} соответствует по принципу двойственности галилееву 3-пространству Γ_3 и наз. когалилеевым пространством. (Абсолют когалилеева пространства состоит из пары мнимых плоскостей (конус Q_0) и точки T_1 на прямой T_0 пересечения этих плоскостей.)

Движениями П. п. являются его коллинеации, переводящие абсолют в себя. В случае $m_a = n - m_{r-a-1} - 1$, $l_a = l_{r-a}$ П. п. является двойственным самому себе, в нем определяются кодвижения, определение к-рых аналогично определению кодвижений квазиэллиптич. пространства.

Движения, движения и кодвижения образуют группы, являющиеся группами Ли. Движения (как и кодвижения) описываются ортогональными операторами.

П. п. являются *полуримановыми пространствами*.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров.

ПОЛЬКЕ — ШВАРЦА ТЕОРЕМА: любой полный плоский четырехугольник может служить параллельной проекцией тетраэдра, подобного любому данному.

Теорема впервые высказана в иной форме К. Польке (K. Pohlke, 1853), обобщена Г. Шварцем (H. Schwarz, 1864).

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4— Геометрия, М., 1963.

А. Б. Иванов.

ПОЛЮС — 1) П. координат — начало координат в *полярных координатах*.

2) П.— центр *инверсии*.

3) П. прямой p относительно линии 2-го порядка — точка P, для к-рой прямая p является *полярой* точки P относительно данной линии 2-го порядка. *А. Б. Иванов.*

ПОЛЮС — изолированная *особая точка* a однозначного характера аналитич. функции $f(z)$ комплексного переменного z такая, что $|f(z)|$ неограниченно возрастает при приближении к a, $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$. В достаточно малой проколотой окрестности $V = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < r\}$ точки $a \neq \infty$ или $V' = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < \infty\}$ в случае бесконечно удаленной точки $a = \infty$ функция $f(z)$ представима в виде ряда Лорана специального вида:

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad a \neq \infty, \; c_{-m} \neq 0, \quad z \in V, \quad (1)$$

или соответственно

$$f(z)=\sum_{k=-m}^{\infty}\frac{c_k}{z^k},\ a=\infty,\ c_{-m}\neq 0,\ z\in V', \qquad (2)$$

с конечным числом отрицательных степеней в главной части при $a\neq\infty$ или соответственно конечным числом положительных степеней при $a=\infty$. Натуральное число m в этих разложениях наз. порядком, или кратностью, полюса a; при $m=1$ П. наз. простым. Разложения (1) и (2) показывают, что функция $p(z)=(z-a)^m f(z)$ при $a\neq\infty$ или $p(z)=z^{-m}f(z)$ при $a=\infty$ аналитически продолжается в полную окрестность полюса a, причем $p(a)\neq 0$. Иначе полюс a порядка m можно еще охарактеризовать тем, что функция $1/f(z)$ имеет в этой точке a нуль кратности m.

Точка $a=(a_1, \dots, a_n)$ комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 2$, наз. П. аналитич. функции $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, \dots, z_n)$, если выполняются следующие условия: 1) $f(z)$ голоморфна всюду в нек-рой окрестности U точки a, за исключением множества $P\subset U$, $a\in P$; 2) $f(z)$ не продолжается аналитически ни в одну точку P; 3) существует голоморфная в U функция $q(z)\not\equiv 0$ такая, что голоморфная в $U\setminus P$ функция $p(z)=q(z)f(z)$ голоморфно продолжается во всю окрестность U, причем $p(a)\neq 0$. Здесь также

$$\lim_{z\to a} f(z)=\lim_{z\to a}\frac{p(z)}{q(z)}=\infty,$$

однако при $n\geqslant 2$ П., как и особые точки вообще, не могут быть изолированными.

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

ПОЛЯ ОПЕРАТОР — линейное слабо непрерывное отображение $f\to\varphi_f$, $f\in D^L(\mathbb{R}^4)$, пространства $D^L(\mathbb{R}^4)$ основных функций $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^4$, принимающих значения из конечномерного векторного пространства L, в множество операторов (вообще говоря, неограниченных), определенных на плотном линейном многообразии $D_0\in H$ нек-рого гильбертова пространства H. При этом предполагается, что как в L, так и в H действуют нек-рые представления $g\to T_g$ (в L) и $g\to U_g$ (в H), $g\in G$, неоднородной группы Лоренца G, причем так, что выполнено равенство

$$U_g\varphi_f U_g^{-1}=\varphi_{\tau_g f},\ g\in G,\ f\in D^L(\mathbb{R}^4), \qquad (*)$$

где

$$(\tau_g f)(x)=T_g f(g^{-1}x),\ x\in\mathbb{R}^4.$$

В зависимости от представления в L (скалярного, векторного, спинорного и т. д.) поле $\{\varphi_f, f\in D^L(\mathbb{R}^4)\}$ наз. соответственно скалярным, векторным или спинорным. Семейство П. о. $\{\varphi_f, f\in D^L(\mathbb{R}^4)\}$ вместе с представлениями $\{T_g, g\in G\}$ и $\{U_g, g\in G\}$, для к-рых выполнено условие (*), а также еще ряд общих требований (см. [1]), наз. квантовым (или квантованным) полем.

Кроме нек-рых моделей, относящихся к двумерному или трехмерному миру (см. [2], [4]), построены (1983) только простые примеры т. н. свободных квантовых полей [3].

Лит.: [1] Йост Р., Общая теория квантованных полей, пер. с англ., М., 1967; [2] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [3] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957; [4] Евклидова теория поля. Марковский подход, пер. с англ., М., 1978. *Р. А. Минлос.*

ПОЛЯРА — 1) П. точки P относительно невырожденной линии 2-го порядка — множество точек N, гармонически сопряженных с точкой P относительно точек M_1 и M_2 пересечения линии 2-го порядка секущими, проходящими через точку P. Поляра является прямой линией. Точку P наз. *полюсом*. Если точка P лежит вне линии 2-го порядка (через точ-

ку P можно провести две касательные к линии), то П. проходит через точки касания данной линии с прямыми, проведенными через точку P (см. рис. 1). Если точка P лежит на линии 2-го порядка, то П. является прямая, касательная к данной линии в этой точке. Если П. точки P проходит через точку Q, то П. точки Q проходит через точку P (см. рис. 2).

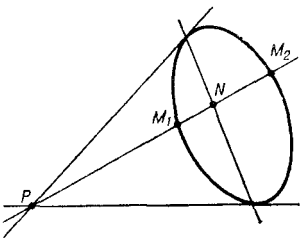


Рис. 1.

Всякая невырожденная линия 2-го порядка определяет биекцию точек проективной плоскости и множества ее прямых — *поляритет* (полярное преобразование). Соответствующие при этом преобразовании фигуры наз. в з а и м н о п о л я р н ы м и. Фигура, совпадающая со своей взаимно полярной, наз. а в т о п о л я р н о й (см., напр., автополярный трехвершинник PQR на рис. 2).

Аналогично определяется П. (п о л я р н а я п л о с к о с т ь) нек-рой точки относительно невырожденной поверхности 2-го порядка.

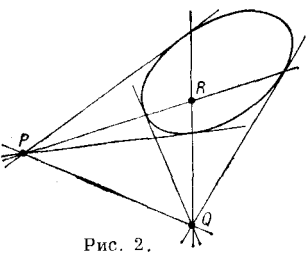


Рис. 2.

Понятие П. относительно линии 2-го порядка обобщается на линии n-го порядка. При этом заданной точке плоскости ставится в соответствие $n-1$ поляр относительно линии n-го порядка. Первая из этих П. является линией порядка $n-1$, вторая, являющаяся П. заданной точки относительно первой П., имеет порядок $n-2$ и т. д. и, наконец, $(n-1)$-я П. является прямой линией.

Лит.: [1] Е ф и м о в Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [2] П о с т н и к о в М. М., Аналитическая геометрия, М., 1973.
А. Б. Иванов.

2) П. A° подмножества A локально выпуклого топологического векторного пространства E — множество функционалов f из сопряженного пространства E', для к-рых $|\langle x, f\rangle| \leqslant 1$ для всех $x \in A$ (здесь $\langle x, f\rangle$ значение f в x). Б и п о л я р о й $A^{\circ\circ}$ наз. множество векторов x пространства E, для к-рых $|\langle x, f\rangle| \leqslant 1$ для всех $f \in A^\circ$.

П. выпукла, уравновешена и замкнута в слабой топологии. Биполяра $A^{\circ\circ}$ является слабым замыканием выпуклой уравновешенной оболочки множества A. Кроме того, $(A^{\circ\circ})^\circ = A^\circ$. Если A — окрестность нуля в пространстве E, то ее поляра A° является компактом в слабой $*$ топологии (т е о р е м а Б а н а х а — А л а о г л у).

П. объединения $\bigcup_\alpha A_\alpha$ любого семейства $\{A_\alpha\}$ множеств из E есть пересечение П. этих множеств. П. пересечения слабо замкнутых выпуклых уравновешенных множеств A_α есть замкнутая в слабой $*$ топологии выпуклая оболочка их П. Если A — подпространство в E, то его П. совпадает с подпространством в E', ортогональным к A.

За фундаментальную систему окрестностей нуля, определяющих слабую $*$ топологию пространства E', можно принять систему множеств вида M°, где M пробегает все конечные подмножества пространства E.

Подмножество функционалов пространства E' равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда оно содержится в П. нек-рой окрестности нуля.

Лит.: [1] Э д в а р д с Р., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969.
В. И. Ломоносов.

ПОЛЯРИЗОВАННОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — пара (V, ξ), где V — полное гладкое

многообразие над алгебраически замкнутым полем k, ξ из $\mathrm{Pic}\, V/\mathrm{Pic}^\circ V$ — класс нек-рого обильного обратимого пучка, $\mathrm{Pic}^\circ V$ — связная компонента абелевой схемы Пикара $\mathrm{Pic}\, V$. В случае, когда V — абелево многообразие, определено также понятие степени поляризации П. а. м.; она совпадает со степенью изогении $\varphi_{\mathscr{L}}: V \to \mathrm{Pic}^\circ V$, определяемой пучком $\mathscr{L} \in \xi$, а именно:

$$\varphi_{\mathscr{L}}(x) = T_x^* \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1} \in \mathrm{Pic}^\circ V,$$

где T_x — морфизм сдвига на x, $x \in V$. Поляризация степени 1 наз. главной поляризацией.

Понятие П. а. м. тесно связано с понятием поляризованного семейства алгебраич. многообразий. Пусть $f: X \to S$ — семейство многообразий с базой S, то есть f — гладкий проективный морфизм схемы X на нётерову схему S, слоями к-рого являются алгебраич. многообразия. Поляризованным семейством наз. пара $(X/S, \xi/S)$, где X/S — семейство $f: X \to S$ с базой S, а ξ/S — класс относительно обильного обратимого пучка $\mathscr{L}_{X/S}$ в $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{Pic}\, X/S)$ по модулю $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{Pic}^\circ X/S)$, где $\mathrm{Pic}\, X/S$ — относительная схема Пикара.

Введение понятий поляризованного семейства и П. а. м. необходимо для построения пространств модулей алгебраич. многообразий (см. *Модулей теория*). Так, напр., не существует пространства модулей всех гладких алгебраич. кривых рода $g \geqslant 1$, а для поляризованных кривых такое пространство модулей существует [4]. Одним из первых вопросов, связанных с понятием поляризации многообразий, является вопрос об одновременном погружении в проективное пространство поляризованных многообразий с фиксированными численными инвариантами. Если (V, ξ) содержится в качестве слоя в поляризованном семействе $(X/S, \xi/S)$ со связной базой S и относительно обильным пучком $\mathscr{L}_{X/S} \in \xi/S$, то существует ли такая константа c, зависящая только от многочлена Гильберта $h(n) = \chi(V, \mathscr{L}^n)$, что при $n > c$ пучки $\mathscr{L}_s^n$ с многочленом Гильберта $h(n)$ и с $H^i(X_s, \mathscr{L}_s^n) = 0$ при $i > 0$ очень обильны для всех П. а. м. (X_s, ξ_s), где $s \in S$? Для гладких П. а. м. над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 ответ на этот вопрос положителен [3], а в случае поверхностей основного типа с канонич. поляризацией константа c не зависит даже от многочлена Гильберта (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Bombieri E., «Publ. math. IHES», 1972, № 42, p. 447—95; [2] Kodaira K., «J. Math. Soc. Jap.», 1968, v. 20, № 1—2, p. 170—92; [3] Matsusaka T., Mumford D., «Amer. J. Math.», 1964, v. 86, № 3, p. 668—84; [4] Mumford D., Geometric invariant theory, B., 1965.

В. С. Куликов.

ПОЛЯРИТЕТ, полярное преобразование,— *корреляция* π, для к-рой $\pi^2 = \mathrm{id}$, то есть $\pi(Y) = X$ тогда и только тогда, когда $\pi(X) = Y$. П. разбивает все подпространства на пары, в частности, если пара образована подпространствами S_0 и S_{n-1}, где $S_0 = \pi(S_{n-1})$ — точка, а $S_{n-1} = \pi(S_0)$ — гиперплоскость, то S_0 наз. полюсом гиперплоскости S_{n-1}, а S_{n-1} наз. полярой точки S_0. Пространство $\Pi_n(K)$ над телом K обладает П. тогда и только тогда, когда тело допускает инволютивный инверсный автоморфизм α (т. е. $\alpha^2 = \mathrm{id}$). Пусть π представляется полубилинейной формой $f_\alpha(x, y)$. Тогда π будет П. в том и только в том случае, когда из $f_\alpha(x, y) = 0$ следует $f_\alpha(y, x) = 0$.

Поляритет π является либо симплектической корреляцией, характеризующейся тем, что $P \subset \pi(P)$ для любой точки P (в этом случае $f(x, y)$ является кососимметрич. формой на A_{n+1}, а K — полем), либо π представляется α-симметрич. формой на A_{n+1}: $\alpha(f_\alpha(x, y)) = f_\alpha(y, x)$ (симметрический П.), в этом случае существование нестрого изотропного

нулевого подпространства равносильно тому, что характеристика тела сат $K=2$ (в частности, если Сат $K\neq 2$, то любое нулевое подпространство строго изотропно).

Относительно поляритета π определяется разложение проективного пространства на подпространства, позволяющее привести полубилинейную форму, представляющую π, к канонич. виду. Важнейшими среди них являются:

M — максимальное неизотропное нулевое подпространство, его размерность $n(\pi)-1$, где n четно и наз. д е ф е к т о м π, f кососимметрична;

U — максимальное строго изотропное нулевое подпространство, его размерность $i(\pi)-1$, i наз. и н д е к с о м , $f\equiv 0$;

J — компонента, свободная от нулевых подпространств, неизотропна, причем f является положительно или отрицательно определенной, $M\cap J=\varnothing$;

$W=M+U$ — максимальное нулевое подпространство, его размерность $i(\pi)+n(\pi)-1$.

Проективное преобразование F наз. π-д о п у с т и м ы м (относительно поляритета π), если $\pi F=F\pi$. Полулинейное преобразование $(\bar{F}, \varphi)$ тогда и только тогда индуцирует π-допустимое проективное преобразование, когда в K существует c такое, что $f(\bar{F}x, \bar{F}y)=c\varphi(f(x, y))$. π-допустимые преобразования образуют группу G_π (наз. г р у п п о й П.). Если группа G_π транзитивна, то либо каждая точка пространства Π_n является нулевой (и G_π в этом случае наз. с и м п л е к т и ч е с к о й), либо нет ни одной нулевой точки (и G_π наз. в этом случае о р т о г о н а л ь н о й при $\alpha=\mathrm{id}$ и унитарной при $\alpha\neq\mathrm{id}$).

Лит.: [1] Е ф и м о в Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978.

М. И. Войцеховский.

ПОЛЯРНОЕ МНОЖЕСТВО — 1) П. м. а н а л и т и ч е с к о й ф у н к ц и и $f(z)$ комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n\geqslant 1$,— такое множество P точек нек-рой области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, что: а) $f(z)$ голоморфна всюду в $D\setminus P$; б) $f(z)$ не продолжается аналитически ни в одну точку P; в) для любой точки $a\in P$ существуют такие окрестность U_a и голоморфная в U_a функция $q_a(z)\not\equiv 0$, что голоморфная в $D\cap\{U_a\setminus P\}$ функция $p_a(z)=q_a(z)f(z)$ продолжается голоморфно в U_a. Во всякой точке $a\in P$ имеем $q_a(a)=0$. П. м. P состоит из *полюсов* $a\in P$ функции $f(z)$, в к-рых $p_a(a)\neq 0$, и точек неопределенности $a\in P$ функции $f(z)$, в к-рых $p_a(a)=0$ (предполагается, что $p_a(z)$ и $q_a(z)$ не имеют общих множителей, голоморфных и равных нулю в a). Всякое П. м. есть аналитич. множество комплексной размерности $n-1$.

2) П. м. в т е о р и и п о т е н ц и а л а — множество E точек евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, такое, что существует потенциал $U_\mu(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, нек-рой борелевской меры μ, принимающий значение $+\infty$ в точках E и только в них.

В случае *логарифмического потенциала* при $n=2$ и *ньютонова потенциала* при $n\geqslant 3$ для того, чтобы ограниченное множество E было П. м., необходимо и достаточно, чтобы E было множеством типа G_δ и имело нулевую внешнюю емкость. При этом в определении П. м. можно заменить «потенциал» на «супергармоническую функцию». Основные свойства П. м. для этого случая: а) множество $\{a\}$, состоящее из одной точки $a\in\mathbb{R}^n$, есть П. м.; б) счетное объединение П. м. есть П. м.; в) любое П. м. имеет лебегову меру нуль в $\mathbb{R}^n$; г) при конформных отображениях П. м. переходит в П. м.

Локальный критерий П. м. см. в ст. *Разреженность множества.*

Лит.: [1] Ш а б а т Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [2] Л а н д к о ф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [3] Б р е л о М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

ПОЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ — 1) П. р. линейного преобразования — разложение линейного преобразования конечномерного евклидова (или унитарного) пространства L в произведение самосопряженного и ортогонального (соответственно унитарного) преобразования. Каждое линейное преобразование A пространства L допускает П. р.

$$A=S\cdot U,$$

где S — положительно полуопределенное самосопряженное линейное преобразование, а U — ортогональное (или унитарное) линейное преобразование, причем S определяется единственным образом. Если A невырожденно, то преобразование S является даже положительно определенным, а U также определяется однозначно. Для одномерного унитарного пространства П. р. совпадает с представлением комплексного числа z в тригонометрич. форме. *А. Л. Онищик.*

2) П. р. оператора — представление оператора A, действующего в гильбертовом пространстве, в виде

$$A=UT,$$

где U — частично изометрический, а T — положительный операторы. Всякий замкнутый оператор A допускает П. р., причем $T=(A^*A)^{1/2}$ (часто используют обозначение $T=|A|$), а U отображает замыкание $\overline{R}_{A^*}$ области определения сопряженного оператора A на замыкание области значений $\overline{R}_A$ оператора A (теорема Неймана, см. [1]). П. р. становится единственным, если потребовать, чтобы начальное и конечное подпространства оператора U совпадали соответственно с $\overline{R}_{A^*}$ и $\overline{R}_A$. С другой стороны, U всегда можно выбрать унитарным, изометрическим или коизометрическим — в зависимости от соотношения коразмерностей подпространств $\overline{R}_{A^*}$ и R_A. В частности, если

$$\dim H\ominus\overline{R}_{A^*}=\dim H\ominus\overline{R}_A,$$

то можно выбрать U унитарным и найти такой эрмитов оператор Φ, что $U=\exp(i\Phi)$. Тогда П. р. оператора A запишется в виде

$$A=|A|\exp(i\Phi),$$

полностью аналогичном П. р. комплексного числа. Перестановочность сомножителей в П. р. имеет место тогда и только тогда, когда оператор нормален.

Получен (см. [2], [3]) аналог П. р. для операторов в пространстве с индефинитной метрикой.

3) П. р. функционала на алгебре Неймана — представление нормального функционала f на алгебре Неймана A в виде $f=up$, где p — положительный нормальный функционал на A, $u\in A$ — частичная изометрия (то есть u^*u и uu^* — проекторы), умножение понимается как действие на функционал p оператора, сопряженного к левому умножению на u в A: $f(x)=p(ux)$ для всех $x\in A$. П. р. всегда можно осуществить таким образом, чтобы выполнялось условие: $u^*f=p$. При этом условии П. р. определено однозначно.

Всякий ограниченный линейный функционал f на произвольной C^*-алгебре A можно рассматривать как нормальный функционал на универсальной обертывающей алгебре Неймана A''; соответствующее П. р. $f=up$ наз. обертывающим полярным разложением функционала f. Сужение функционала p на A называется абсолютной величиной функционала и обозначается $|f|$; следующие свойства однозначно определяют функционал

$$|f|:\||f|\|=\|f\|\ \text{и}\ |f(x)|^2\leqslant\|f\|\cdot|f|(x^*x).$$

В случае, когда $A = C(X)$ — алгебра всех непрерывных функций на компакте, абсолютная величина функционала соответствует полной вариации определенной им меры.

П. р. функционала во многом позволяет сводить изучение функционалов на C^*-алгебрах к изучению положительных функционалов. С его помощью, напр., можно построить для каждого $f \in A'$ такое представление π алгебры A, в к-ром f реализуется векторно (т. е. существуют векторы ξ, η из H_π такие, что $f(x) = (\pi(x)\xi, \eta)$, $x \in A$),— таким свойством будет обладать представление $\pi_{|f|}$, построенное по положительному функционалу $|f|$ с помощью конструкции Гельфанда — Наймарка — Сегала ГНС-конструкции).

4) П. р. элемента C^*-алгебры — представление элемента C^*-алгебры в виде произведения положительного элемента на частично изометрический. П. р. возможно не для всех элементов: в обычном П. р. оператора T в гильбертовом пространстве положительный сомножитель принадлежит C^*-алгебре, порожденной T, но о частично изометрическом сомножителе можно утверждать лишь, что он принадлежит порожденной T алгебре Неймана. Поэтому определяют и используют т. н. обертывающее П. р. элемента $a \in A$: $a = ut$, где $t = (a^*a)^{1/2} \in A$ — частично изометрич. элемент универсальной *обертывающей алгебры* Неймана A'' (предполагается, что A канонически вложена в A'').

Лит.: [1] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [2] Bognár J., «Stud. Scient. Math. Hung.», 1966, t. 1, № 1/2, p. 97—102; [3] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974. *В. С. Шульман.*

ПОЛЯРНОЕ СООТВЕТСТВИЕ — соответствие двух поверхностей, при к-ром в соответствующих точках радиус-вектор одной из них параллелен нормали другой и наоборот. Для каждой гладкой поверхности F в E^3 с радиус-вектором x существует (при определенных условиях) полярная ей поверхность F^* с радиус-вектором $x^* = -\frac{n}{(x,\ n)}$, где n — нормаль, а $(x,\ n)$ — опорная функция к F, так что

$$(x^*,\ x) = 1,\ (x_i,\ x) = (x_i,\ x^*) = 0.$$

Иногда эти условия также входят в определение П. с.

Понятие П. с. получает наиболее яркое выражение (в смысле полной двойственности) в центроаффинной геометрии. *М. И. Войцеховский.*

ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ — числа ρ и φ (см. рис.), связанные с декартовыми прямоугольными координатами x и y формулами:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,$$



где $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Координатные линии: концентрической окружности ($\rho = \text{const}$) и лучи ($\varphi = \text{const}$). Система П. к.— *ортогональная система*. Каждой точке плоскости Oxy (за исключением точки 0, для к-рой $\rho = 0$, а φ не определено, т. е. может быть любым числом $0 \leqslant \varphi < 2\pi$) соответствует пара чисел $(\rho,\ \varphi)$ и обратно. Расстояние ρ точки P от точки $(0,\ 0)$ (полюса) наз. полярным радиусом, а угол φ — полярным углом.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\rho = 1,\ L_\varphi = \rho.$$

Элемент площади:

$$d\sigma = \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\operatorname{grad}_\rho f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,,\ \operatorname{grad}_\varphi f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,;$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho}\,a_\rho + \frac{\partial a_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\,;$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\,.$$

О б о б щ е н н ы м и П. к. наз. числа r и ψ, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x и y формулами:

$$x = ar\cos\psi,\ y = br\sin\psi,$$

где $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \psi < 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$. Координатные линии: эллипсы ($r = \text{const}$) и лучи ($\psi = \text{const}$).

Д. Д. Соколов.

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ — понятие, характеризующее способность системы передачи информации противостоять искажающему действию помех. Предельно достижимую П. для оптимального метода передачи часто наз. п о т е н ц и а л ь н о й П. В теории передачи информации П. конкретной системы передачи информации характеризуют *сообщений точностью воспроизведения* и, в частности, *ошибочного декодирования вероятностью* переданного сообщения.

Лит.: [1] Х а р к е в и ч А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965; [2] В о з е н к р а ф т Дж., Д ж е к о б с И., Теоретические основы техники связи, пер. с англ., М., 1969.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ПОНТРЯГИНА ДВОЙСТВЕННОСТЬ — 1) П. д.— двойственность между абелевыми топологич. группами и их *характеров группами*. Т е о р е м а д в о й с т в е н н о с т и утверждает, что если G — локально компактная абелева группа и $X(G)$ — ее группа характеров, то естественный гомоморфизм $G \to X(X(G))$, переводящий $a \in G$ в характер $\omega_a : X(G) \to T$, заданный формулой

$$\omega_a(\alpha) = \alpha(a),\ \alpha \in X(G),$$

есть изоморфизм топологич. групп. Из этой теоремы выводятся следующие утверждения.

I. Если H — замкнутая подгруппа в G и

$$H^* = \{\alpha \in X(G) \mid \alpha(H) = 0\}$$

— ее аннулятор в $X(G)$, то H совпадает с аннулятором

$$\{a \in G \mid \alpha(a) = 0\ \ \forall \alpha \in H^*\}$$

подгруппы H^*; при этом группа $X(H)$ естественно изоморфна $X(G)/H^*$, а $X(G/H)$ — группе H^*.

II. Если $\varphi : G \to H$ — непрерывный гомоморфизм локально компактных абелевых групп, то после отождествления группы G с $X(X(G))$ и группы H с $X(X(H))$ при помощи изоморфизмов $a \to \omega_a$ гомоморфизм $(\varphi^*)^*$ отождествляется с φ.

III. *Вес* группы $X(G)$ (как топологич. пространства) совпадает с весом группы G.

П. д. сопоставляет компактным группам G дискретные группы $X(G)$ и наоборот. При этом компактная группа G метризуема тогда и только тогда, когда $X(G)$ счетна, и связна тогда и только тогда, когда группа $X(G)$ без кручения. Конечномерность компактной группы G равносильна тому, что $X(G)$ имеет конечный ранг (см. *Ранг* абелевой группы). Конечномерная компактная группа G локально связна тогда и только тогда, когда $X(G)$ конечно порождена. Если G конечна, то П. д. совпадает с *двойственностью* конечных абелевых групп, рассматриваемой над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Топологич. группы, для к-рых верна теорема двойственности, наз. р е ф л е к с и в н ы м и. Они не исчерпываются локально компактными группами, т. к. любое банахово пространство, рассматриваемое как топо-

логич. группа, рефлексивно [8]. О характеризации рефлексивных групп см. [9].

Аналог П. д. известен и для некоммутативных групп (теорема двойственности Танака — Крейна) (см. [4], [6], [7]). Пусть G — компактная топологич. группа, R — алгебра комплекснозначных представляющих функций на G, $S(R)$ — множество всех ненулевых гомоморфизмов алгебр $\omega : R \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию $\omega(\bar{f}) = \overline{\omega(f)}$, $f \in R$. В $S(R)$ определяется умножение $(\alpha, \beta) \to \alpha\beta$, удовлетворяющее следующему условию: если $\rho : G \to U(m)$ — неприводимое непрерывное унитарное представление группы G и $\rho_{ij}(g)$ — его матричные элементы, то

$$\| (\alpha\beta)(\rho_{ij}) \| = \| \alpha(\rho_{ij}) \| \cdot \| \beta(\rho_{ij}) \|.$$

Это умножение и естественная топология превращают $S(R)$ в топологич. группу. Каждому $g \in G$ отвечает гомоморфизм $\alpha_g \in S(R)$, задаваемый формулой

$$\alpha_g(f) = f(g), \quad f \in R.$$

Тогда соответствие $g \to \alpha_g$ есть изоморфизм топологич. группы G на $S(R)$. Дано также алгебраич. описание категории алгебр R, к-рая оказывается, таким образом, двойственной категории компактных топологич. групп. Эта теория допускает обобщение на случай однородных пространств компактных топологич. групп (см. [4]).

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Ann. Math.», 1934, v. 35, № 2, p. 361—88 (рус. пер.— «Успехи матем. наук», 1936, в. 2, с. 177—95); [2] его же, Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [3] Kampen E. van, «Ann. Math.», 1935, v. 36, p. 448—63; [4] Крейн М. Г., «Укр. матем. ж.», 1949, т. 1, № 4, с. 64—98; 1950, т. 2, № 1, с. 10—59; [5] Моррис С., Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп, пер. с англ., М., 1980; [6] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [7] Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 2, М., 1975; [8] Smith M. F., «Ann. Math.», 1952, v. 56, № 2, p. 248—53; [9] Venkataraman R., «Math. Z.», 1976, Bd 149, H. 2, S. 109—19.

А. Л. Онищик.

2) П. д. в топологии — изоморфизм между p-мерной группой когомологий Александрова — Чеха $H^p(A; G)$ с коэффициентами в группе G компактного множества A, лежащего в n-мерном компактном ориентируемом многообразии M^n, и $(n-p-1)$-мерной группой гомологий $H^c_{n-p-1}(B; G)$ дополнения $B = M^n \setminus A$ в предположении, что $H^p(M^n; G) = H^{p+1}(M^n; G) = 0$ (гомологии и когомологии в размерности нуль — приведенные; символ c означает компактные носители). Для случая, когда A или B — конечный полиэдр, этот изоморфизм был установлен Дж. Александером (J. Alexander). Н. Стинрод (N. Steenrod) установил наличие такого изоморфизма для любого открытого подмножества $A \subset M^n$, а К. А. Ситников — для произвольного подмножества A.

В приведенном виде закон двойственности Понтрягина был сформулирован П. С. Александровым. В первоначальной форме утверждалась двойственность в смысле теории характеров между группами $H_p(A; G^*)$ и $H^c_{n-p-1}(B; G)$, где G^* — бикомпактная группа характеров дискретной группы G. Эквивалентность обеих формулировок закона двойственности следует из того, что группа $H_p(A; G^*)$ есть группа характеров группы $H^p(A; G)$. Из предположения об ацикличности многообразия в размерностях p и $p+1$ и из точной последовательности когомологии пары (M^n, A) вытекает, что $H^p(A; G) = H^{p+1}(M^n, A; G)$, поэтому П. д.— простое следствие двойственности Пуанкаре — Лефшеца (см. *Пуанкаре двойственность*).

Наиболее общая форма соотношений двойственности рассматриваемого типа состоит в следующем. Пусть M^n — произвольное многообразие (возможно, обобщенное, не обязательно компактное и не обязательно ориентируемое), $\mathcal{G}$ — локально постоянная система

коэффициентов со слоем G, A — произвольное подмножество в M^n и Φ — семейство всех замкнутых в M^n множеств, содержащихся в $B=M^n\setminus A$. Тогда если $H_p(M^n;\ \mathcal{G})=H_{p+1}(M^n;\ \mathcal{G})=0$, то $H^p(A;\ \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))=H^{\Phi}_{n-p-1}(B;\ \mathcal{G})$. Здесь H^{Φ}_q — гомологии с замкнутыми носителями, содержащимися в Φ (т. е. прямой предел групп $H_q(F;\ \mathcal{G})$, $F\in\Phi$), а $\mathcal{H}_n(\mathcal{G})$ — локально постоянная система коэффициентов, образованная группами $H_n(M^n,\ M^n\setminus x;\ \mathcal{G})$, $x\in M^n$. В приведенном равенстве коэффициенты $\mathcal{H}_n(\mathcal{G})$ для когомологий могут быть заменены на $\mathcal{G}$, если рассматривать гомологии с коэффициентами в нек-рой специально определяемой системе.

Лит.: [1] Александров П. С., Топологические теоремы двойственности, ч. 1 — Замкнутые множества, М., 1955 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 48); [2] Масси У., Теория гомологий и когомологий, пер. с англ., М., 1981.

Е. Г. Скляренко.

ПОНТРЯГИНА ИНВАРИАНТ — инвариант оснащенных перестроек поверхности с заданным на ней оснащением. Пусть $(M^2,\ U)$ — замкнутая ориентируемая поверхность с n-мерным оснащением U в S^{n+2}, т. е. тривиализацией нормального n-мерного расслоения над поверхностью M^2 в S^{n+2}. Любой элемент $z\in H_1(M^2,\ \mathbb{Z})$ может быть реализован гладко иммерсированной окружностью с самопересечениями, к-рые являются только двойными и трансверсальными. Пусть выбрана и зафиксирована нек-рая ориентация окружности S^1; пусть $u_1(y),\ u_2(y),\ \dots,\ u_n(y)$ — ортогональные векторы, возникающие из оснащения U, ограниченного на точку $f(y)$, $y\in C$; $u_{n+2}(y)$ — вектор, касательный в точке $f(y)$ к кривой $C=f(y)$, согласно выбранной ориентации S^1; $u_{n+1}(y)$ — вектор, касательный к M^2 в точке $f(y)$, ортогональный $u_{n+2}(y)$ и направленный так, что последовательность векторов $u_1(y),\ \dots,\ u_n(y),\ u_{n+1}(y),\ u_{n+2}(y)$ дает стандартную ориентацию сферы S^{n+2}. Возникающее отображение $h: S^1\to SO_{n+2}$ задает элемент из группы $\pi_1(SO_{n+2})$, к-рая при $n\geqslant 1$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$. Пусть $\beta=0$, если h гомотопно нулю, и $\beta=1$, если h не гомотопно нулю, и пусть значение функции $\Phi_0: H_1(M^2,\ \mathbb{Z})\to\mathbb{Z}_2$ равно сумме по mod 2 числа двойных точек кривой C, реализующей элемент z, и числа β, определенного по кривой C. Так, определенное значение $\Phi_0(z)$ зависит только от гомологич. класса z, и функция $\Phi_0(z)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\Phi_0(z_1+z_2)=\Phi_0(z_1)+\Phi_0(z_2)+\Phi(z_1,\ z_2)\bmod 2,$$

где $\Phi: H_1(M^2,\ \mathbb{Z})\times H_1(M^2,\ \mathbb{Z})\to\mathbb{Z}$ — форма пересечений одномерных гомологий поверхности M^2. arf-*инвариант* функции Φ_0 и наз. инвариантом Понтрягина пары $(M^2,\ U)$. Пара $(M^2,\ U)$ оснащенно перестраивается до пары $(S^2,\ U)$ тогда и только тогда, когда П. и. пары $(M^2,\ U)$ равен нулю (теорема Понтрягина).

П. и. может быть реализован $(n+2)$-мерным оснащением на торе, $n\geqslant 2$, и является единственным инвариантом двумерных оснащенных *кобордизмов*. П. и. задает изоморфизм $\pi_{n+2}(S^n)\approx\mathbb{Z}_2$, $n\geqslant 2$.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976.

М. А. Штанько.

ПОНТРЯГИНА КВАДРАТ — *когомологическая операция* $\mathcal{P}_2$ типа $(\mathbb{Z}_{2^k},\ 2n;\ \mathbb{Z}_{2^{k+1}},\ 4n)$, т. е. отображение

$$\mathcal{P}_2:\ H^{2n}\left(X,\ Y;\ \mathbb{Z}_{2^k}\right)\longrightarrow H^{4n}\left(X,\ Y;\ \mathbb{Z}_{2^{k+1}}\right),$$

определенное для любой пары топологич. пространств $(X,\ Y)$ и такое, что для любого непрерывного отображения $f: (X,\ Y)\to(X',\ Y')$ имеет место равенство $f^*\mathcal{P}_2=\mathcal{P}_2 f^*$ (естественность).

П. к. обладает следующими свойствами:

1) $\mathcal{P}_2(u+v)=\mathcal{P}_2 u+\mathcal{P}_2 v+i(uv)$, где $i:\ \mathbb{Z}_{2^k}\longrightarrow\mathbb{Z}_{2^{k+1}}$

— вложение;

2) $\rho\mathcal{P}_2 u = u^2$ и $\mathcal{P}_2\rho u = u^2$, где $p: H^*(X, Y; \mathbb{Z}_{2^{k+1}}) \longrightarrow H^*(X, Y; \mathbb{Z}_{2^k})$

— гомоморфизм приведения по mod 2;

3) $\mathcal{P}_2\Sigma = \Sigma\mathcal{P}$, где $\Sigma: H^{2n-1}(X; G) \to H^{2n}(\Sigma X; G)$ — изоморфизм надстройки, а $\mathcal{P}$ — *Постникова квадрат* (иными словами, когомологич. надстройкой над $\mathcal{P}_2$ является $\mathcal{P}$). Если

$$\mathcal{P}_2: K(\mathbb{Z}_{2^k}, 2n) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_{2^{k+1}}, 4n)$$

и

$$\mathcal{P}: K(\mathbb{Z}_{2^k}, 2n-1) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_{2^{k+1}}, 4n-1)$$

— представляющие отображения, то $\Omega\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}$.

Свойства 1), 2) однозначно характеризуют П. к. и потому могут быть приняты за определяющие его аксиомы. Конструктивно П. к. определяется формулой

$$\mathcal{P}_2\{u\} = \{uv_0 u + uv_1\delta u\} \bmod 2^{k+1},$$

где $u \in C^{2n}(X; \mathbb{Z})$ — коцикл mod 2^k (о U_i-произведениях см. ст. *Стинрода квадрат*).

Существует (см. [5], [6]) обобщение П. к. на случай произвольного нечетного простого p. Это обобщение является когомологич. операцией типа $(\mathbb{Z}_{p^k}, 2n; \mathbb{Z}_{p^{k+1}}, 2pn)$ и наз. p-й **степенью Понтрягина** $\mathcal{P}_p$. Для операции $\mathcal{P}_p$ имеют место формулы (к-рые эту операцию однозначно характеризуют):

$$\mathcal{P}_p(u+v) = \mathcal{P}_p u + \mathcal{P}_p v + i\left(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{i} u^i u^{p-i}\right),$$

где $i: \mathbb{Z}_{p^k} \to \mathbb{Z}_{p^{k+1}}$ — вложение;

$$\rho\mathcal{P}_p u = u^p \text{ и } \mathcal{P}_p \rho u = u^p,$$

где $\rho: H^*(X, Y; \mathbb{Z}_{p^{k+1}}) \to H^*(X, Y; \mathbb{Z}_{p^k})$ — гомоморфизм приведения по модулю p, обобщающие соответствующие формулы для $\mathcal{P}_2$. Аналог формулы 3) для $\mathcal{P}_p$ имеет вид $\mathcal{P}_p\Sigma = 0$, означающий, что когомологич. надстройка над $\mathcal{P}_p$ при $p>2$ равна нулю. При $p>2$ имеет место равенство $\mathcal{P}_p(uv) = (\mathcal{P}_p u)(\mathcal{P}_p v)$, в к-ром умножение можно считать как внешним ($\times$-умножением), так и внутренним ($\cup$-умножением). При $p=2$ соответствующее равенство имеет место только с точностью до слагаемых порядка 2.

Наиболее общим образом П. к. определяется для когомологий над произвольной конечно порожденной абелевой группой π (см. [2], [3]). Окончательный вид этого обобщения (см. [6]): П. к. представляет собой кольцевой гомоморфизм

$$\mathcal{P}^*: \Gamma(H^{2n}(X; \pi)) \longrightarrow H^*(X; \Gamma(\pi)),$$

где Γ — функтор разделенных степеней алгебры. Если $\pi = \mathbb{Z}_p$, то p-я компонента этого гомоморфизма совпадает с p-й степенью Понтрягина $\mathcal{P}_p$ (при $p=2$ — с П. к. $\mathcal{P}_2$).

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Докл. АН СССР», 1942, т. 34, с. 39—41; [2] Болтянский В. Г., Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей, М., 1955; [3] Постников М. М., «Докл. АН СССР», 1949, т. 64, № 4, с. 461—62; [4] Browder W., Thomas E., «Quart. J. Math.», 1962, v. 13, p. 55—60; [5] Thomas E., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1956, v. 42, p. 266—69; [6] его же, The generalized Pontrjagin cohomology operations and rings with divided powers, Providence, 1957.

С. Н. Малыгин, М. М. Постников.

ПОНТРЯГИНА КЛАСС — *характеристический класс*, определенный для действительных векторных расслоений; П. к. введены в 1947 Л. С. Понтрягиным [1]. Для векторного расслоения ξ с базой B П. к. обозначаются символом $p_i(\xi) \in H^{4i}(B)$ и полагаются равными $p_i(\xi) = (-1)^i c_{2i}(\xi \otimes \mathbb{C})$, где $\xi \otimes \mathbb{C}$ — комплексификация

расслоения ξ, а c_k — *Чжэня классы*. Полным П. к. наз. неоднородный характеристич. класс $p=1+p_1+p_2+\dots$. Иначе говоря, П. к. определяются как классы когомологий $p_i\in H^{4i}(BO_n)$, задаваемые равенством $p_i=f^*((-1)^i c_{2i})$, где $f: BO_n\to(BU_n)$ — отображение, соответствующее комплексификации универсального расслоения, а $c_n\in H^{2k}(BU_n)$ — классы Чжэня.

Пусть $(\varkappa_n)_{\mathbb{R}}$ — овеществление универсального расслоения $\varkappa_n$ над BU_n. Полный П. к. $p((\varkappa_n)_{\mathbb{R}})$ расслоения $(\varkappa_n)_{\mathbb{R}}$ совпадает с $\prod_{i=1}^n(1+x_i^2)\in H^*(BU_n)$, где $x_1, \dots, x_n$ — образующие By (см. *Характеристический класс*).

Частичное описание кольца когомологий $H^*(BO_n)$ может быть получено в терминах образующих By следующим образом. Отображение $g: BU_{[n/2]}\to BO_n$, соответствующее расслоению $(\varkappa_{[n/2]})_{\mathbb{R}}$ либо $(\varkappa_{[n/2]})_{\mathbb{R}}\otimes\theta_1$, где θ_1 — одномерное тривиальное расслоение, индуцирует гомоморфизм колец $g^*: H^*(BO_n)\to H^*(BU_{[n/2]})$, при к-ром подкольцо кольца $H^*(BO_n)$, порождаемое П. к. $p_1, p_2, \dots, p^{[n/2]}$, отображается мономорфно на подкольцо кольца $H^*(BU_n)$, состоящее из всех четных симметрич. полиномов от образующих By. Четность понимается в том смысле, что каждая переменная x_i должна входить в полином в четной степени. Тем самым получается выражение любого элемента кольца $\mathbb{Z}(p_1,\dots, p_{[n/2]})\subset H^*(BO_n)$ через образующие By, что важно для практич. вычислений с П. к. Характеристич. класс, определяемый четным симметрич. полиномом от образующих By, может быть выражен через П. к. следующим образом. Полином выражается через элементарные симметрич. функции переменных $x_1^2, \dots, x_n^2$, а затем вместо элементарных симметрич. функций подставляется П. к.

Если ξ, η — два действительных векторных расслоения над общей базой, то класс когомологий $p(\xi\oplus\eta)-p(\xi)p(\eta)$ имеет порядок не больше двух; это связано с тем, что для первого класса Чжэня $c_1(\lambda)=-c_1(\bar{\lambda})$.

Пусть нек-рое кольцо Λ, содержащее $1/2$, рассматривается в качестве кольца коэффициентов и пусть p_i — П. к. со значениями в $H^*(\cdot;\Lambda)$. В этом случае имеет место равенство

$$p(\xi\oplus\eta)=p(\xi)\,p(\eta)$$

или

$$p_k(\xi\oplus\eta)=\sum_i p_{k-i}(\xi)\,p_i(\eta),\quad p_0=1.$$

Кольцо $H^{**}(BO_n;\Lambda)$ мономорфно отображается в $H^{**}(BU_{[n/2]};\Lambda)$, и образ этого отображения совпадает с подкольцом всех четных симметрич. рядов с образующими By в качестве переменных. При этом полный П. к. переходит в полином $\prod_{i=1}^{[n/2]}(1+x_i^2)$, а П. к.— в элементарные симметрич. функции от переменных $x_1^2, \dots, x_n^2$. Теорема:

$$H^{**}(BO_n;\Lambda)=\Lambda[[p_1, \dots, p_{[n/2]}]].$$

Кольцо когомологий $H^*(BSO_n)$ содержит кроме П. к. также *эйлеров класс* $e\in H^n(BSO_n)$. Теорема:

$$H^{**}(BSO_{2k+1};\Lambda)=\Lambda[[p_1, \dots, p_k, e]],$$

$$H^{**}(BSO_{2k};\Lambda)=\Lambda[[p_1, \dots, p_{k-1}, e]],$$

для пространства BSO_{2k} имеет место равенство $p_k=e^2$.

Отображение $g: BU_{[n/2]}\to BO_n$ пропускается через $BU_{[n/2]}\to BSO_n$. Индуцированное отображение $H^{**}(BSO_n)\to H^{**}(BU)_{[n/2]}$ переводит e в нуль при нечетном n и в $\prod_{i=1}^{n/2}x_i$ при четном n.

Пусть $f(t)\in\mathbb{Q}[[t]]$ — четный формальный степенной ряд над полем $\mathbb{Q}$. Тогда ряд $\prod_{i=1}^{[n/2]}f(x_i)$ определяет не-

к-рый неоднородный элемент кольца $H^{**}(BO_n; \mathbb{Q})$, т. е. характеристич. класс. Допуская нек-рую вольность, можно записать

$$x = \prod_{i=1}^{[n/2]} f(x_i) \in H^{**}(BO_n; \mathbb{Q}).$$

Характеристич. класс x стабилен (то есть $x(\xi \oplus \theta) = x(\xi)$, где θ — тривиальное расслоение) тогда и только тогда, когда свободный член ряда $f(t)$ равен единице. Если положить $f(t) = t/\operatorname{th} t$, то построенный описанным способом характеристич. класс обозначается через L и наз. L-классом Хирцебруха,

$$L = \prod_{i=1}^{[n/2]} x_i/\operatorname{th} x_i \in H^{**}(BO_n; \mathbb{Q}).$$

Стандартная процедура выражения ряда $\Pi f(x_i)$ через элементарные симметрич. функции переменных $x_1^2, \ldots, x_n^2$ приводит к представлению класса L в виде ряда от П. к. Другой важный для приложений характеристич. класс получается, если положить

$$f(t) = \frac{t/2}{\operatorname{sh}(t/2)} = \frac{t}{e^{t/2} - e^{-t/2}}.$$

Класс, задаваемый четным симметрич. рядом

$$\prod f(x_i) = \prod \frac{x_i/2}{\operatorname{sh}(x_i/2)},$$

наз. $\hat{A}$-классом. Аналогично, A-классом наз. характеристич. класс, задаваемый рядом $\Pi f(x_i)$, где $f(t) = \frac{2t}{\operatorname{sh}(2t)}$. Оба эти класса, как и L, могут быть выражены через П. к.

Топологическая инвариантность. В 1965 С. П. Новиков [2] доказал, что П. к. с рациональными коэффициентами двух гомеоморфных многообразий совпадают. До этой работы было известно, что рациональные П. к. кусочно линейно инвариантны, т. е. совпадают для двух кусочно линейных гомеоморфных многообразий. Более того, были определены (см. [4]) рациональные П. к. для кусочно линейных многообразий (возможно с краем). Был дан пример (см. [5]), показывающий, что целочисленные П. к. не являются топологич. инвариантами.

В 1969 было доказано (см. [7]), что слой Top/PL расслоения $BPL \to B\,\mathrm{Top}$ имеет гомотопич. тип пространства Эйленберга — Маклейна $K(\mathbb{Z}_2, 3)$. Отсюда следует топологич. инвариантность рациональных П. к., а также вытекает опровержение основной гипотезы комбинаторной топологии (Hauptvermutung).

Обобщенные классы Понтрягина. Пусть h^* — обобщенная теория когомологий, в к-рой определены классы Чжэня σ_i. Если для одномерного комплексного векторного расслоения λ выполнено равенство $\sigma_1(\lambda) = -\sigma_1(\bar{\lambda})$, то П. к. со значениями в теории h^* можно определить прежней формулой $P_i(\xi) = (-1)^i \sigma_{2i}(\xi \otimes \mathbb{C})$. Определенные таким образом классы будут обладать свойством $P(\xi \oplus \eta) = P(\xi) P(\eta)$, где $P = 1 + P_1 + P_2 + \ldots$ — полный П. к., рассматриваемый в теории $h^* \otimes \mathbb{Z}$ [1/2].

Однако во многих практически используемых обобщенных теориях (напр., в K-теории) приведенное равенство для σ_1 не имеет места. В таких теориях нецелесообразно определять П. к. описанным способом, т. к. при таком определении не выполняется обычная формула для полного класса суммы двух расслоений, даже после включения $^1/_2$ в коэффициенты. Можно определять обобщенные П. к. следующим образом. Пусть h^* — мультипликативная теория когомологий, в к-рой универсальным образом задана ориентация $u(\xi \otimes \mathbb{C}) \in$

$\in \widehat{h}^{2n}(B^{\xi\otimes\mathbb{C}})$ расслоения $\xi\otimes\mathbb{C}$, где ξ — произвольное n-мерное действительное расслоение над B. Пусть $e(\xi\otimes\mathbb{C})$ — эйлеров класс расслоения $\xi\otimes\mathbb{C}$, $e(\xi\otimes\mathbb{C})=i^*u(\xi\otimes\mathbb{C})$, где $i: B\to B^{\xi\otimes\mathbb{C}}$ — включение нулевого сечения. П. к. в теории h^* наз. характеристич. классы P_i, определенные для действительных векторных расслоений и удовлетворяющие следующим условиям.

1) $P_i(\xi)=0$, если $i>2\dim\xi$;

2) $P_i(\xi\oplus\theta)=P_i(\xi)$, где θ — тривиальное расслоение;

3) $P_k(\xi\oplus\eta)-\Sigma_i P_i(\xi)P_{k-i}(\eta)$ — элемент порядка степени двойки;

4) $P_n(\xi)=(-1)^n e(\xi\otimes\mathbb{C})$, где $n=\dim\xi$.

Доказано существование и единственность характеристич. классов с перечисленными свойствами. П. к. в этом смысле приводят к понятию двузначной формальной группы над кольцом $h^*(pt)$, соответствующей теории h^*.

Характеристич. классы π_i в K-теории определяются следующей формулой:

$$\sum_i \pi_i(\xi)\,s^i=\sum_i(-1)^i t^i\gamma_i(\xi\otimes\mathbb{C})=\gamma_{-t}(\xi\otimes\mathbb{C})=$$

$$=\lambda_{t/(1-t)}((\xi\oplus(-\dim\xi))\otimes\mathbb{C}),$$

где $s=t-t^2$, здесь γ_i — *Чжэня классы* в $\mathbb{Z}_2$-градуированной K-теории.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Матем. сб.», 1947, т. 21, с. 233—84; [2] Новиков С. П., «Докл. АН СССР», 1965, т. 163, с. 298—300; [3] Бухштабер В. М., «Матем. сб.», 1970, т. 83, с. 575—95; [4] Рохлин В. А., Шварц А. С., «Докл. АН СССР», 1957, т. 114, с. 490—93; [5] Милнор Дж., «Математика», 1959, т. 3, № 4, с. 3—53; 1965, т. 9, № 4, с. 3—40; [6] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [7] Kirby R., Siebenmann L., Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations, Princeton, 1977.

А. Ф. Харшиладзе.

ПОНТРЯГИНА ПОВЕРХНОСТИ — лежащие в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ двумерные континуумы C_m, $\dim C_m=2$, такие, что их *гомологическая размерность* по данному модулю $m=2, 3, \ldots$ равна 1 и что они в этом смысле «размерно неполноценны». Л. С. Понтрягин [1] построил такие поверхности C_2, C_3, что их топологич. произведение $C=C_2\times C_3$ есть континуум размерности 3. Этим была опровергнута гипотеза, что при топологич. перемножении двух (метрических) компактов их размерности складываются. Им же эта гипотеза доказана для гомологич. размерности по простому модулю и вообще по всякой группе коэффициентов, являющейся полем. Построен также [2] двумерный континуум C в $\mathbb{R}^4$, топологич. квадрат к-рого $C^2=C\times C$ трехмерен.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «C.r. Acad. sci.», 1930, t. 190, p. 1105—07; [2] Болтянский В., «Успехи матем. наук», 1951, т. 6, в. 3, с. 99—128; [3] Александров П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975.

П. С. Александров.

ПОНТРЯГИНА ПРИНЦИП МАКСИМУМА — соотношения, выражающие необходимые условия сильного экстремума для неклассической вариационной задачи *оптимального управления математической теории*. Сформулирован в 1956 Л. С. Понтрягиным (см. [1]).

Принятая формулировка П. п. м. относится к следующей задаче оптимального управления. Дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(x,u), \qquad (1)$$

где $x\in\mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, $u\in\mathbb{R}^p$ — управляющий параметр, f — вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемая по x. В пространстве $\mathbb{R}^p$ задано множество U допустимых значений управляющего параметра u; в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ даны точки x^0 и x^1; фикси-

рован начальный момент времени t_0. Допустимым управлением является любая кусочно непрерывная функция $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, со значениями во множестве U. Говорят, что допустимое управление $u=u(t)$ переводит фазовую точку из положения x^0 в положение x^1 ($x^0 \to x^1$), если соответствующее ему решение $x(t)$ системы (1), удовлетворяющее условию $x(t_0)=x^0$, определено при всех $t \in [t_0, t_1]$ и $x(t_1)=x^1$. Среди всех допустимых управлений, переводящих фазовую точку из положения x^0 в положение x^1, требуется найти оптимальное управление — функцию $u^*(t)$, минимизирующую функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),\ u(t))\, dt, \tag{2}$$

здесь $f^0(x,\ u)$ — заданная функция того же класса, что и компоненты $f(x,\ u)$, $x(t)$ — решение системы (1) с начальным условием $x(t_0)=x^0$, отвечающее управлению $u(t)$, t_1 — момент прохождения этого решения через точку x^1. Под решением задачи понимают пару, состоящую из оптимального управления $u^*(t)$ и отвечающей ему оптимальной траектории $x^*(t)$ системы (1).

Пусть

$$H(\psi,\ x,\ u) = (\psi,\ f(x,\ u))$$

— скалярная функция (гамильтониан) переменных ψ, x, u, где $\psi=(\psi_0,\ \psi^1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\psi_0 \in \mathbb{R}^1$, $\psi^1 \in \mathbb{R}^n$, $f=(f^0,\ f)$. Функции $H(\psi,\ x,\ u)$ ставится в соответствие каноническая (гамильтонова) система (относительно ψ, x)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi},\quad \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{3}$$

(первое из этих уравнений есть система (1)). Пусть

$$M(\psi,\ x) = \sup\{H(\psi,\ x,\ u) \mid u \in U\}.$$

Принцип максимума Понтрягина: если $u^*(t)$, $x^*(t)$ ($t \in [t_0, t_1]$) — решение задачи оптимального управления (1), (2) ($x^0 \to x^1$, $u \in U$), то существует такая ненулевая абсолютно непрерывная функция $\psi(t)$, что тройка функций $\psi(t)$, $x^*(t)$, $u^*(t)$ удовлетворяет на $[t_0, t_1]$ системе (3) и для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ выполняется условие максимума

$$H(\psi(t),\ x^*(t),\ u^*(t)) = M(\psi(t),\ x^*(t)), \tag{4}$$

а в конечный момент t_1 — условия

$$M(\psi(t_1),\ x(t_1)) = 0,\quad \psi_0(t_1) \leqslant 0. \tag{5}$$

Если функции $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют соотношениям (3), (4) (то есть $x(t)$, $u(t)$ образуют экстремаль Понтрягина), то имеют место условия

$$\mathscr{M}(t) = M(\psi(t),\ x(t)) \equiv \text{const},\quad \psi_0(t) \equiv \text{const}.$$

Из данного утверждения вытекает принцип максимума для задачи о быстродействии ($f^0=1$, $J=t_1-t_0$). Это утверждение допускает естественное обобщение на неавтономные системы, задачи с подвижными концами траекторий и задачи с ограничениями на фазовые координаты (условием $x(t) \in X$, где X — замкнутое множество фазового пространства $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее нек-рым дополнительным ограничениям (см. [1])).

Допущение к рассмотрению замкнутых множеств U, X (эти области могут, в частности, задаваться системами нестрогих неравенств) обусловило неклассич. характер задачи. Основные необходимые условия классического вариационного исчисления с обыкновенными производными вытекают из П. п. м. (см. [1], а также *Вейерштрасса условия*).

Распространенное доказательство изложенной формулировки П. п. м., основанное на использовании т. н. игольчатых вариаций (т. е. на рассмотрении допустимых управлений, отклоняющихся от оптимального произвольным образом, но зато лишь на конеч-

ном числе малых интервалов времени), состоит в линеаризации задачи в окрестности оптимального решения, в построении нек-рого выпуклого конуса вариаций оптимальной траектории и последующем использовании теоремы об отделимости выпуклых конусов (см. [1]). Соответствующее условие далее записывается в аналитич. форме (4), (3), в терминах максимума гамильтониана $H(\psi, x, u)$ от фазовых переменных x, управлений u и сопряженных переменных ψ, играющих роль, аналогичную *Лагранжа множителям* в классическом вариационном исчислении. Эффективное использование П. п. м. часто приводит к необходимости решать двухточечную краевую задачу для системы (3).

Наиболее полное решение задачи оптимального управления получено для линейных систем, где соотношения П. п. м. часто выступают не только как необходимое, но и как достаточное условие оптимальности.

П. п. м. получил многочисленные обобщения, напр., в направлении охвата более сложных неклассич. ограничений (в том числе смешанных ограничений на управления и фазовые координаты функциональных и разнообразных форм интегральных ограничений), в изучении достаточности соответствующих условий, в рассмотрении обобщенных решений, т. н. скользящих режимов, систем дифференциальных уравнений с негладкой правой частью, дифференциальных включений, задач оптимального управления для дискретных систем и систем с бесконечным числом степеней свободы, описываемых, в частности, уравнениями с частными производными, уравнениями с последействием (в том числе с запаздыванием), эволюционными уравнениями в банаховом пространстве и т. д. Последнее привело к рассмотрению новых классов вариаций соответствующих функционалов, введению т. н. интегрального принципа максимума, линеаризованного принципа максимума и т. д. Весьма общие классы вариационных задач с неклассич. ограничениями (в том числе в виде нестрогих неравенств) или негладкими функционалами принято называть задачами понтрягинского типа. Открытие П. п. м. послужило важным стимулом в создании математич. теории оптимального управления. Оно стимулировало новые исследования в теории дифференциальных уравнений, функциональном анализе и теории экстремальных задач, вычислительной математике и других смежных областях.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976.

А. Б. Куржанский.

ПОНТРЯГИНА ПРОСТРАНСТВО — *гильбертово пространство с индефинитной метрикой* $\Pi_\varkappa$, имеющей конечный ранг индефинитности $\varkappa$. Основные факты геометрии П. п. установлены Л. С. Понтрягиным [1]. Помимо фактов, общих для пространств с индефинитной метрикой, имеют место следующие.

Если $\mathcal{P}$ — любой неотрицательный линеал в $\Pi_\varkappa$, то $\dim \mathcal{P} \leqslant \varkappa$; если $\mathcal{P}$ — положительный линеал и $\dim \mathcal{P} = \varkappa$, то его J-ортогональное дополнение N является отрицательным линеалом и $\Pi_\varkappa = \mathcal{P} \oplus N$. При этом N представляет собой полное пространство по отношению к норме $|x| = \sqrt{-J(x, x)}$. Если линеал $L \subset \Pi_\varkappa$ невырожден, то невырождено его J-ортогональное дополнение M и $\Pi_\varkappa = M \oplus L$.

Спектр (в частности, дискретный спектр) J-унитарного (J-самосопряженного) оператора симметричен относительно единой окружности (действительной оси), все элементарные делители, отвечающие собственным числам λ, $|\lambda| > 1$, имеют конечный порядок ρ_λ, $\rho_\lambda \leqslant \varkappa$, $\rho_\lambda = \rho_{\bar{\lambda}}$. Сумма размерностей корневых подпространств J-унитарного (J-самосопряженного) оператора, отвечающих собственным числам λ, $|\lambda| > 1$ ($\operatorname{Im} \lambda > 0$), не превосходит числа $\varkappa$.

Основой теории J-самосопряженных операторов, действующих в П. п. $\Pi_\varkappa$, является следующая теорема [1]: у каждого J-самосопряженного оператора A ($\overline{D(A)} = \Pi_\varkappa$) существует $\varkappa$-мерное (максимальное) неотрицательное инвариантное подпространство $\mathscr{T}$, в к-ром все собственные значения оператора A имеют неотрицательную мнимую часть, и $\varkappa$-мерное неотрицательное инвариантное подпространство $\mathscr{T}'$, в к-ром все собственные значения имеют неположительную мнимую часть. Аналогичное утверждение с заменой верхней (нижней) полуплоскости на внешность (внутренность) единичного круга справедливо и для J-унитарных операторов, а при нек-рых дополнительных условиях — даже для операторов в пространстве Π_∞.

Если U есть J-унитарный оператор, то его максимальные инвариантные неотрицательные подпространства $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}'$ могут быть выбраны таким образом, чтобы порядки элементарных делителей операторов $U_{\mathscr{T}} = U|\mathscr{T}$, $U_{\mathscr{T}'} = U|\mathscr{T}'$ были минимальны. Для того чтобы многочлен $P(\lambda)$, не имеющий корней внутри единичного круга, обладал свойством: $(P(U)x,\ P(U)x) \leqslant 0$, $x \in \Pi_\varkappa$, необходимо и достаточно, чтобы он делился на минимальный *аннулирующий многочлен оператора* $U_{\mathscr{T}}$.

Если оператор U — циклический, то его неотрицательные инвариантные подпространства размерности $\varkappa$ определяются единственным образом. В этом случае указанное свойство многочлена P, корни $\{\lambda_i\}$ к-рого лежат вне единичного круга $|\lambda_i| > 1$, эквивалентно делимости $P(\lambda)$ на характеристич. многочлен оператора $U_{\mathscr{T}}$.

В П. п. $\Pi_\varkappa$ у каждого вполне непрерывного J-самосопряженного оператора A такого, что нуль принадлежит его непрерывному спектру, остаточный спектр отсутствует. Корневые векторы такого оператора образуют базис Рисса в $\Pi_\varkappa$ по отношению к (дефинитной) норме $(|J|x,\ x)$.

Многие факты об инвариантных подпространствах и спектре обобщаются на случай J-изометрических и J-нерастягивающих операторов. Так, если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — произвольная совокупность собственных значений J-изометрического оператора, $\lambda_i\overline{\lambda_k} \neq 1$, $i, k = 1, \ldots, n$, и порядок элементарного делителя в точке λ_i, то $\sum_1^n \rho_i \leqslant \varkappa$. Всякий J-нерастягивающий ограниченно обратимый оператор T обладает $\varkappa$-мерным инвариантным неотрицательным подпространством $\mathscr{T}$ таким, что все собственные значения сужения $T|\mathscr{T}$ лежат в единичном круге [2]. Аналогичный факт верен для максимальных J-диссипативных операторов. Вообще J-диссипативный оператор A, $D(A) \subset D(A^*)$, имеет не более $\varkappa$ собственных значений в верхней полуплоскости. Между J-изометрическими и J-симметрическими (и, более широко, J-нерастягивающими и J-диссипативными) операторами устанавливается связь с помощью *Кэли преобразования*, к-рое в пространстве $\Pi_\varkappa$ обладает всеми естественными свойствами [2]. Это позволяет развивать теорию расширений одновременно для J-изометрических и J-симметрических операторов. В частности, всякий J-изометрический (J-симметрический) оператор может быть расширен до максимального. Если его индексы дефекта не одинаковы, то у него нет J-унитарных (J-самосопряженных) расширений. Если же они одинаковы и конечны, то любое максимальное расширение является J-унитарным (J-самосопряженным).

Для вполне непрерывных J-диссипативных операторов в П. п. $\Pi_\varkappa$ верен также ряд утверждений о полноте системы корневых векторов, аналогичных соответствующим фактам из теории диссипативных операторов в пространствах с дефинитной метрикой.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1944, т. 8, с. 243—80; [2] Иохвидов И. С., Крейн М. Г., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1956, т. 5, с. 367—432; [3] их же, там же, 1959, т. 8, с. 413—96; [4] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 4, с. 43—92; [5] Крейн М. Г., в кн.: Вторая летняя математическая школа, [т.1], К., 1965, с. 15—92; [6] Наймарк М. А., Исмагилов Р. С., в кн.: Итоги науки. Математический анализ, 1968, в. 17, М., 1969, с. 73—105; [7] Надь К., Пространства состояний с индефинитной метрикой в квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1969.

Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.

ПОНТРЯГИНА ХАРАКТЕР ph — *характеристический класс*, определяемый равенством $\mathrm{ph}(\xi)=\mathrm{ch}(\xi\otimes\mathbb{C})$, где $\xi\otimes\mathbb{C}$ — комплексификация расслоения ξ, ch — *Чжэня характер*. П. х. как элемент кольца $H^{**}(BO_n;\ \mathbb{Q})$ задается четным симметрич. рядом $\sum_{i=1}^{[n/2]}(e^{x_i}+e^{-x_i})$ и обладает свойствами

$$\mathrm{ph}(\xi\otimes\eta)=\mathrm{ph}\,\xi\cdot\mathrm{ph}\,\eta,\quad \mathrm{ph}(\xi\oplus\eta)=\mathrm{ph}\,\xi+\mathrm{ph}\,\eta.$$

Индексный класс $I(\xi)$ полагается равным $T(\xi\otimes\mathbb{C})$, где $T\in H^{**}(BU_n;\ \mathbb{Q})$ — *Тодда класс*. Индексный класс $I\in H^{**}(BO_n;\ \mathbb{Q})$ выражается через образующие By по формуле

$$I=\Pi\frac{x_i}{1-e^{-x_i}}\,\Pi\frac{-x_i}{1-e^{x_i}}.$$

Имеет место следующая теорема о связи П. х. с классом $\hat{A}$. Пусть ξ — действительное векторное расслоение над базой B, имеющее Spin_n-структуру, $n=\dim\xi=8k$. Для таких расслоений имеется изоморфизм Тома в действительной K-теории:

$$\Phi\colon KO^*(B)\longrightarrow\widetilde{KO}^*(B^\xi).$$

Пусть

$$\Phi_H\colon H^*(B;\ \mathbb{Q})\longrightarrow\tilde{H}^*(B^\xi;\ \mathbb{Q})$$

— изоморфизм Тома, однозначно определенный ориентацией расслоения ξ. Тогда

$$\Phi_H^{-1}\,\mathrm{ph}\,(\Phi(1))=\hat{A}(-\xi).$$

Эта формула является точным аналогом соответствующего утверждения о связи характера Чжэня с классом Тодда.

Если ξ — комплексное векторное расслоение, то $T(\xi)=\hat{A}((\xi)_{\mathbb{R}})e^{c_1(\xi)/2}$, здесь $(\xi)_{\mathbb{R}}$ — овеществление расслоения, T — класс Тодда.

Лит. см. при ст. *Понтрягина класс*. *А. Ф. Харшиладзе.*

ПОНТРЯГИНА ЧИСЛО — *характеристическое число*, определенное для действительных замкнутых многообразий и принимающее рациональные значения. Пусть $x\in H^{**}(BO;\ \mathbb{Q})$ — произвольный (необязательно однородный) стабильный *характеристический класс*. Для замкнутого ориентированного многообразия M рациональное число $x[M]=\langle x(\tau M),\ [M]\rangle$ наз. числом Понтрягина многообразия M, соответствующим классу x, здесь τM — касательное расслоение. П. ч. $x[M]$ зависит лишь от однородной компоненты степени $\dim M$ класса x. Пусть $\omega=\{i_1,\ \dots,\ i_k\}$ — разбиение числа n, т. е. набор целых неотрицательных чисел $i_1,\ \dots,\ i_k$ с $i_1+\dots+i_k=n$ и $p_\omega=p_{i_1},\ \dots,p_{i_k}\in H^{4n}(BO)$.

Рациональные числа $p_\omega[M]$ определены для замкнутого многообразия M размерности $4n$ и всех разбиений ω числа n.

П. ч. $x[M]$, $x[N]$ двух бордантных (в ориентированном смысле) многообразий M, N равны: $x[M]=x[N]$ (теорема Понтрягина).

Согласно этой теореме каждый характеристич. класс $x\in H^{**}(BO;\ \mathbb{Q})$ индуцирует гомоморфизм $x[\ ]:\Omega_*^{SO}\to\mathbb{Q}$, а каждый элемент $[M]\in\Omega_*^{SO}$ индуцирует гомоморфизм $H^{**}(BO;\ \mathbb{Q})\to\mathbb{Q}$, $x\to x[M]$. Другими словами, имеется отображение

$$\varphi\colon\Omega_*^{SO}\longrightarrow\mathrm{Hom}\,(H^{**}(BO;\ \mathbb{Q});\ \mathbb{Q}).$$

Если все П. ч. и *Штифеля числа* двух ориентированных замкнутых многообразий совпадают, то эти многообразия бордантны (в ориентированном смысле).

Задача, аналогичная проблеме Милнора — Хирцебруха для квазикомплексных многообразий, состоит в том, чтобы описать образ отображения φ. Решение этой задачи основано на рассмотрении П. ч. в K-теории, соответствующих *Понтрягина классам* π_i в K-теории. Пусть $\omega=\{i_1, \dots, i_n\}$ — набор целых неотрицательных чисел, $S_\omega(p)$ и $S_\omega(e_p)$ — характеристич. классы, определяемые четными симметрич. рядами

$$S^\omega(x_1^2, \dots, x_n^2) \text{ и } S^\omega(e^{x_1}+e^{-x_1}-2, \dots, e^{x_n}+e^{-x_n}-2)$$

соответственно, здесь $S^\omega(t_1, \dots, t_n)$ — минимальный симметрич. полином, содержащий одночлен $t_1^{i_1}, \dots, t_k^{i_k}$, $n \geqslant i_1+\dots+i_k$. Пусть $B_* \subset \mathrm{Hom}(H^{**}(BO; \mathbb{Q}); \mathbb{Q})$ — множество таких гомоморфизмов $b: H^{**}(BO; \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$, для к-рых $b(S_\omega(p)) \in \mathbb{Z}$, $b(S_\omega(e_p)L) \in \mathbb{Z}$ [1/2] при всех наборах ω. Тогда образ гомоморфизма

$$\varphi: \Omega_*^{SO} \to \mathrm{Hom}(H^{**}(BO; \mathbb{Q}); \mathbb{Q})$$

совпадает с B_* (теорема Стонга — Хаттори).

Характеристич. числа $L[M]$ и $\hat{A}[M]$, соответствующие классам $L, \hat{A} \in H^{**}(BO; \mathbb{Q})$, наз. L-родом и $\hat{A}$-родом соответственно многообразия M.

Для замкнутого многообразия M, размерность к-рого делится на 4, имеет место равенство $L[M]=I(M)$, где $I(M)$ — *сигнатура* многообразия, т. е. сигнатура квадратичной формы пересечения, определенной на $H_{n/2}(M)$, $n=\dim M$ (теорема Хирцебруха). Для замкнутого спинорного многообразия M четной размерности спинорный индекс M, т. е. индекс оператора Дирака на M, совпадает с $\hat{A}[M]$.

Лит. см. при ст. *Понтрягина класс.* *А. Ф. Харшиладзе.*

ПОПЕРЕЧНИК множества — величина, характеризующая уклонение множества в метрич. пространстве от нек-рой системы объектов (как правило, конечномерных) при определенном методе приближения, а также величина, характеризующая точность восстановления элемента из данного множества при определенном методе кодирования. Наиболее изучены П., характеризующие возможность аппроксимации множества конечномерными компактами и конечномерными линейными многообразиями (поперечники по Александрову и поперечник по Колмогорову).

Пусть X — нормированное пространство с единичным шаром B, $C \subset X$ — аппроксимируемое подмножество в X, $\mathfrak{A}=\{A\}$, $A \subset X$, — нек-рая совокупность аппроксимирующих подмножеств, $F(C, A)$ — нек-рая совокупность отображений $f: C \to A$, наконец, $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}(C, \mathfrak{A})=U_{A \in \mathfrak{A}} F(C, A)$ — заданная совокупность отображений из аппроксимируемого в аппроксимирующее множества. Число

$$p_{\mathfrak{F}}(C, X)=\inf_{f \in \mathfrak{F}} \sup_{x \in C} \| x-f(x) \| \qquad (1)$$

характеризует величину уклонения аппроксимируемого множества C от совокупности аппроксимируемых множеств $\mathfrak{A}$ при методе аппроксимации $\mathfrak{F}$.

Большинство П., характеризующих аппроксимационные свойства того или иного аппарата приближения, задаются по типу (1).

Если $\mathfrak{A}=\mathfrak{M}_N$ — совокупность $\{M_N\}$ всех линейных многообразий (т. е. сдвигов линейных подпространств) размерности $\leqslant N$, а $F(C, M_N)$ — совокупность всех отображений из C в M_N, то величина (1), называемая N-поперечником по Колмогорову множества C и обозначаемая обычно $d_N(C, X)$, характеризует минимальное уклонение данного множества C

от N-мерных линейных многообразий, т. е. характеризует аппроксимативные возможности N-мерных линейных многообразий. Другие равносильные и общепринятые определения d_N таковы (см. [1]):

$$d_N(C, X) = \inf_{\{M_N\}} \sup_{x \in C} \inf_{y \in M_N} \|x - y\| = \inf_{\{M_N\}} \inf \{\varepsilon > 0 \mid C \subset M_N + \varepsilon B\}. \quad (1')$$

Если $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}_N$ (или $= \mathfrak{L}_N$ — совокупности всех подпространств $\{L_N\}$ размерности $\leqslant N$, а $F(C, M_N)(F(C, L_N))$ — совокупность всех аффинных (линейных) непрерывных отображений из C в $M_N(L_N)$, то величина (1), обозначаемая $\alpha_N(C, X)(\lambda_N(C, X))$ и называемая а ф ф и н н ы м (л и н е й н ы м) N-п о п е р е ч н и к о м, характеризует аппроксимативные возможности аффинных (линейных) N-мерных отображений.

Если $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}_N$ есть совокупность $\{K_N\}$ всех N-мерных компактов (или, равнозначно, всех N-мерных полиэдров), а $F(C, K_N)$ — множество всех непрерывных отображений из C в K_N, то величина (1), называемая N-п о п е р е ч н и к о м п о А л е к с а н д р о в у и обозначаемая $a_N(C, X)$, характеризует степень аппроксимации множества C N-мерными компактами.

Если $\mathfrak{A} = \Sigma_N$ — совокупность $\{\xi_N\}$ всех N-точечных множеств $\xi_N\{x_1, \ldots, x_N\}$ в X, а $F(C, \xi_N)$ — совокупность всех отображений из C в ξ_N, то П. (1), обозначаемый $\varepsilon_N(C, X)$, характеризует наименьшее уклонение данного C от N-точечных множеств, т. е. характеризует аппроксимативные возможности N-точечных множеств.

Все введенные выше аппроксимативные П. зависят от объемлющего пространства X и могут изменяться при погружении C с его метрикой в другое нормированное пространство.

Другой тип П. связан с задачами «кодирования» элементов множества C элементами другой природы или, как этот процесс еще иначе называют, с задачей восстановления. Пусть C — метрич. пространство, $Z = \{\zeta\}$ — нек-рая совокупность «кодирующих» множеств, $\varphi(C, \zeta)$ — нек-рая совокупность отображений $f : C \to \zeta$. Наконец, $\Phi = \Phi(C, Z) = \bigcup_{\zeta \in Z} \varphi(C, \zeta)$ — заданная совокупность методов кодирования. Величина

$$p^{\Phi}(C) = \inf_{f \in \Phi} \sup_{z \in f(C)} D(f^{-1}(z)), \quad (2)$$

где через $D(E)$ обозначен диаметр множества E, характеризует восстановимость элементов множества C по информации, «закодированной» элементами множеств ζ из Z с помощью отображений из Φ. Большинство П., связанных с процессами восстановления, задается по типу (2).

Если Φ — совокупность всевозможных отображений из C в Z, состоящего из одного множества $\{1, \ldots, N\}$, то П. (2), обозначаемый $\varepsilon^N(C)$, характеризует точность восстановления элемента с помощью таблицы, состоящей из N элементов. Если C лежит в линейном нормированном пространстве X и Φ — совокупность всех непрерывных аффинных отображений из X в $\mathbb{R}^N$, то величина, равная $p^{\Phi}(C)/2$, где $p^{\Phi}(C)$ определено в (2), называемая N-п о п е р е ч н и к о м п о Г е л ь ф а н д у и обозначаемая $d^N(C)$, характеризует точность восстановления элементов по их образам при аффинных отображениях в $\mathbb{R}^N$. Для центрально-симметричных множеств величины d^N имеется другое равносильное определение:

$$d^N(C) = \inf_{\{N\}} \sup_{x \in C \cap L^N} \|x\| = \inf_{\{N\}} \sup \{\varepsilon > 0 \mid C \cap L^N \subset \varepsilon B\}, \quad (2')$$

где L^N — замкнутое подпространство коразмерности N. Пусть Z состоит из всех N-мерных компактов $\{K_N\}$, $\varphi(C, K_N)$ — совокупность всех непрерывных отобра-

жений из C в K_N, $\Phi = \bigcup_{\{K_N\}} \varphi(C, K_N)$, тогда (2) называется N-поперечником по Урысону и обозначается $u_N(C)$. Другое равносильное и общепринятое определение поперечника Урысона таково: $u_N(C)$ есть нижняя грань диаметров покрытий множества C кратности $\leqslant N+1$. Поперечник по Урысону характеризует степень N-мерности (с точки зрения брауэровской размерности) множества C.

Впервые величину, названную впоследствии П., ввел в 1923 П. С. Урысон (см. [2]), когда он определил u_N. В 1933 П. С. Александров [3] вскрыл аппроксимативные аспекты теории размерности, что привело его к определению a_N. В 1936 А. Н. Колмогоров [1] определил d_N — именно этот П. наиболее интенсивно изучался далее в теории приближений. В 1931 Л. С. Понтрягин и Л. Г. Шнирельман (см. [4]) выразили размерность (топологич. характеристику), использовав асимптотическую метрич. характеристику $N_\varepsilon(C)$ (обратную к поперечнику $\varepsilon^N(C)$), равную для метрич. пространства C наименьшему числу элементов 2ε-покрытия для множества C. Интерес к подобным величинам возрос в 50-х гг., когда А. Н. Колмогоров [5], базируясь на идеях теории информации, ввел величину $N_\varepsilon(C, X)$ (обратную к поперечнику $\varepsilon_N(C, X)$) и сформулировал программу исследований величин типа $N_\varepsilon(C)$, $N_\varepsilon(C, X)$ и им подобных как специальный раздел теории приближений, связанный с вопросами наилучшего табулирования функций. Двоичный логарифм величины $N_\varepsilon(C, X)$ получил название *ε-энтропии* множества C, а $\log_2 N_\varepsilon(C)$ — абсолютной ε-энтропии множества C.

Получено множество конкретных результатов, где те или иные П. (названные выше и иные) вычислялись для различных функциональных классов и геометрич. объектов. Такие вычисления можно разделить на две группы — асимптотические и точные.

Вот нек-рые результаты, касающиеся асимптотич. вычислений П. соболевских классов. Пусть W_p^r — совокупность функций $x(\cdot)$ на конечном отрезке (скажем, на $[0, 1]$), у к-рых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна и для r-й производной выполнено неравенство

$$\|x^{(r)}(\cdot)\|_p = \left(\int_0^1 |x^{(r)}(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \leqslant 1,\quad p \geqslant 1, k = 1, 2, \ldots .$$

Доказана следующая асимптотич. формула:

$$d_N(W_p^r, L_q) \asymp \begin{cases} N^{-(r-(1/p-1/q)_+)}, \\ 1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty \text{ или } 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2, \\ N^{-(r-(1/p-1/2)_+)}, \\ 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty,\ q \geqslant 2. \end{cases} \qquad (3)$$

Из частных случаев верхней строки формулы (3) следует, что асимптотически наилучшим аппроксимирующим пространством является пространство тригонометрич. полиномов или пространство сплайнов с равномерно распределенными узлами.

Ожидалось, что всегда имеет место такая асимптотика, т. е. подпространство тригонометрич. полиномов данной степени всегда будет асимптотически экстремальным. Однако оказалось, что это не так (см. [10], [13]). Тригонометрич. полиномы $\operatorname{lin}\{\cos nt, \sin nt, 0 \leqslant n \leqslant N\}$ оказались асимптотически не экстремальными. Однако в ряде случаев «переставленные» гармоники, т. е. $\asymp N$ гармоник, взятых в «неправильном» порядке, все-таки оказались экстремальными.

Решение задачи о П. соболевских классов опирается на исследование вопроса о поперечнике n-октаэдров в $\mathbb{R}^n$:

$$O_p^n = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leqslant 1\right\}.$$

При $p \geqslant q$ величина $d_N(O_p^n, l_q^n)$ определяется точно; при $p < q$ точно вычислена величина $d_N(O_1^n, l_2^n)$, она оказалась равной $\left(1-\frac{N}{n}\right)^{1/2}$. Принципиальную роль при вычислении колмогоровских П. соболевских классов играют следующие оценки (см. [13]):

А) $d_N(O_1^n, l_\infty^n) \leqslant 2N^{-1/2}(\ln n)^{1/2}$;

Б) $d_N(O_2^n, l_\infty^n) \leqslant AN^{-1/2}\left(1+\ln\frac{n}{N}\right)^{3/2}$,

где A — постоянная;

В) если $\lambda \in (0, 1)$, то при $n^\lambda \leqslant N \leqslant n$ имеет место неравенство

$$d_N(O_1^n, l_\infty^n) \leqslant C_\lambda N^{-1/2}.$$

Рассмотрен вопрос и об асимптотич. поведении александровских П. соболевских классов. Оказалось, что

$$a_N(W_p^r, L_q) \asymp \frac{1}{N^r} \quad \text{при } 1 < p, q < \infty, r \in N.$$

Решить вопрос о точном вычислении П.— это найти экстремальный для данного класса аппарат приближения. Первый результат этого рода принадлежит А. Н. Колмогорову [1], к-рый решил задачу о вычислении поперечника $d_N(W_2^r, L_2[0, 1])$ и аналогичную задачу для периодич. класса $\tilde{W}_2^r$ в метрике $L_2([-\pi, \pi])$.

Для вычисления точного значения поперечника $d_N(\tilde{W}_\infty^r, L_\infty[-\pi, \pi])$ впервые привлечены (см. [7]) топологич. методы (теорема о поперечнике шара, сводящаяся к теореме Борсука об антиподах). Эта теорема была обобщена (см. [12]) и применена к нахождению других точных решений. Впоследствии обнаружились интересные связи с вариационным исчислением и оптимальным управлением (см. [9]).

О поперечниках ε_N, ε^N и обратных к ним величинах $N_\varepsilon(C)$ и $N_\varepsilon(C, X)$ см. *ε-энтропия*.

Вопросы о П. имеют тесное соприкосновение с разнообразными задачами геометрии. Напр., задача об асимптотике величины $N_\varepsilon(C, \mathbb{R}^n)$ тесно связана с задачей о наилучшем замощении пространства $\mathbb{R}^n$ сферами. Зависимость асимптотических П. от объемлющего пространства привела к идее введения абсолютных П.— величин

$$p_F^A(C) = \inf p_F(C, X),$$

где нижняя грань берется по всем вложениям C с его метрикой в объемлющее пространство X. При этом оказывается (см. [9]), напр., что

$$\varepsilon_N^A(C) = \frac{1}{2}\varepsilon^N(C),$$

$$a_N^A(C) = \frac{1}{2}u_N(C).$$

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Ann. Math.», 1936, v. 37, p. 107—10; [2] Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1, М.— Л., 1951, с. 483; [3] Александров П. С., «Fund. math.», 1933, v. 20, p. 140—50; [4] Понтрягин Л., Шнирельман Л. Г., в кн.: Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ., М., 1948, с. 210—18; [5] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1956, т. 108, № 3, с. 385—88; [6] Брудный Ю. А., Тиман А. Ф., там же, 1959, т. 126, № 5, с. 927—30; [7] Тихомиров В. М., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 3, с. 81—120; 1965, т. 20, в. 1, с. 227—30; [8] его же, Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [9] его же, в кн.: Теория приближения функций. Тр. Межд. конф. по теории приближения функций. Калуга. 1975, М., 1977, с. 359—65; [10] Исмагилов Р. С., в кн.: Геометрия линейных пространств и теория операторов, Ярославль, 1977, с. 75—113; [11] его же, «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, в. 3, с. 161—78; [12] Маковоз Ю. И., «Матем. сб.», 1972, т. 87, № 1, с. 136—42; [13] Кашин Б. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1977, т. 41, № 2, с. 334—51; [14] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976.

В. М. Тихомиров.

ПОПОЛНЕНИЕ топологического векторного пространства X — топологическое векторное пространство $\hat{X}$ такое, что X является подпространством $\hat{X}$ и X плотно в $\hat{X}$. Под П. понимают также и операцию перехода от X к $\hat{X}$; стандартное ее осуществление — с помощью *направленностей* (в частности, последовательностей Коши). *М. И. Войцеховский.*

ПОПОЛНЕНИЕ РАВНОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА X — отделимое *полное равномерное пространство* $\hat{X}$ такое, что существует равномерно непрерывное отображение $i\colon X\to\hat{X}$ и для любого равномерно непрерывного отображения f пространства X в отделимое полное равномерное пространство Y существует, и притом единственное, равномерно непрерывное отображение $g\colon \hat{X}\to Y$, причем $f=g\circ i$. Подпространство $i(X)$ плотно в $\hat{X}$, и образы при отображении $i\times i$ окружений для X являются окружениями для $i(X)$, а замыкания последних в $\hat{X}\times\hat{X}$ образуют фундаментальную систему окружений для $\hat{X}$. Когда X отделимо, i инъективно (что позволяет отождествить X с $i(X)$. Отделимое пополнение подпространства $A\subset X$ изоморфно замыканию $i(A)\subset\hat{X}$. Отделимое пополнение произведения равномерных пространств изоморфно произведению отделимых пополнений пространств-сомножителей.

Доказательство существования $\hat{X}$ по существу обобщает построение Г. Кантора (G. Cantor) множества действительных чисел из чисел рациональных.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968. *М. И. Войцеховский.*

ПОПОЛНЕНИЕ СЕЧЕНИЯМИ, пополнение Мак-Нейла, частично упорядоченного множества M — *полная решетка* L, получаемая из множества M следующим образом. Пусть $\tilde{M}=M$ (если M обладало нулем) или получается внешним присоединением наименьшего элемента 0 к M (если M не имело нуля). И пусть $P(\tilde{M})$ — упорядоченное отношением включения множество всех непустых подмножеств множества $\tilde{M}$. Для любого $X\in P(\tilde{M})$ пусть

$$X^{\Delta}=\{a\in\tilde{M}\mid a\geqslant x \text{ для всех } x\in X\},$$

$$X^{\nabla}=\{a\in\tilde{M}\mid a\leqslant x \text{ для всех } x\in X\}.$$

Условие $\varphi(X)=(X^{\Delta})^{\nabla}$ определяет *замыкания отношение* φ на множестве $P(\tilde{M})$. Решетка L всех φ-замкнутых подмножеств множества $P(\tilde{M})$ является полной. Для любого $x\in M$ множество $(x^{\Delta})^{\nabla}$ является главным идеалом, порожденным элементом x. Полагая $i(x)=(x^{\Delta})^{\nabla}$ для всех $x\in M$, получают изоморфное вложение i множества M в полную решетку L, сохраняющее все точные верхние и нижние грани, существующие в M. В применении к упорядоченному множеству рациональных чисел описанная конструкция дает пополнение множества рациональных чисел дедекиндовыми сечениями.

Лит.: [1] Macneille H. M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1937, v. 42, p. 416—60. *Т. С. Фофанова.*

ПОПОЛНЕНИЯ МЕТОД — метод вычисления обратной матрицы, основанный на рекуррентном переходе, использующем вычисление матрицы $(C+uv)^{-1}$, где u — вектор-столбец, v — вектор-строка, по формуле

$$(C+uv)^{-1}=C^{-1}-\frac{1}{\gamma}C^{-1}uvC^{-1},\quad \gamma=1+vC^{-1}u.$$

Вычислительная схема метода такова. Пусть $A=\|a_{ij}\|$ — данная матрица n-го порядка. Рассматривается последовательность $A_0=E,\ A_1,\ \ldots,\ A_n$, где $A_k=A_{k-1}+e_k a_k$, e_k есть k-й столбец единичной матрицы E, $a_k=(a_{k1},\ \ldots,\ a_{k,\,k-1},\ a_{k,\,k-1},\ a_{k,\,k+1},\ \ldots,\ a_{kn})$.

Тогда $A_n = A$ и матрица A^{-1} получается в результате n-кратного применения описанного выше процесса. Расчетные формулы при этом имеют следующий вид: если $a_j^{(k)}$ есть j-й столбец A_k, то для $k = 1, 2, \ldots, n$;

$$a_j^{(k)} = a_j^{(k-1)} - \frac{a_k a_j^{(k-1)}}{1 + a_k a_k^{(k-1)}} a_k^{(k-1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (*)$$

Для матрицы A_k^{-1} достаточно вычислять элементы первых k строк, т. к. последующие строки совпадают со строками единичной матрицы.

Известны другие способы организации вычислений в П. м., основанные на модификации (*), напр. т. н. метод Ершова (см. [1]).

Лит.: [1] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.— Л., 1963.

Г. Д. Ким.

ПОРИСТОСТИ ТОЧКА для множества E из n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ — точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, для к-рой существует последовательность открытых шаров B_k с радиусами $r_k \to 0$ и общим центром в точке x_0 таких, что для каждого $k = 1, 2, \ldots$ найдется открытый шар $G_k \subset B_k \setminus E$ радиуса $\geqslant C r_k$, где C положительно и не зависит от k (но, вообще говоря, зависит от x_0 и E). Множество E наз. пористым, если каждая его точка является П. т. для него. Множество E наз. σ-пористым, если его можно представить в виде конечного или счетного объединения пористых множеств (см. [1]). П. т. для E является П. т. для его замыкания $\overline{E}$ и не является точкой плотности в смысле Лебега ни для E, ни для $\overline{E}$. Каждое пористое или σ-пористое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет первую категорию по Бэру и нулевую меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. Обратное, вообще говоря, неверно: существуют даже совершенные нигде не плотные множества $E \subset \mathbb{R}^1$, имеющие меру нуль, но не являющиеся σ-пористыми (см. [2]). Для множества E, лежащего на гладком многообразии $S \subset \mathbb{R}^n$, П. т. $x_0 \in S$ множества E относительно многообразия S определяется, как выше, при дополнительном условии, что центры шаров B_k лежат на S.

Лит.: [1] Долженко Е. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 1, с. 3—14; [2] Zajíček L., «Časopis pěst. mat.», 1976, sv. 101, s. 350—59.

Е. П. Долженко.

ПОРЦИЯ множества — пересечение множества с интервалом в случае множества на прямой и с открытым кругом или шаром, с открытым прямоугольником или параллелепипедом в случае множества в n-мерном ($n \geqslant 2$) пространстве. Важность этого понятия оправдывается следующими обстоятельствами. Множество A является всюду плотным в множестве B, если каждая П. множества B содержит точку множества A, иначе говоря, если замыкание $\overline{A} \supset B$. Множество A является нигде не плотным в множестве B, если A не будет всюду плотным ни в какой П. множества B, т. е. если не существует П. множества B, содержащейся в $\overline{A}$.

А. А. Конюшков.

ПОРЯДКА СООТНОШЕНИЕ, сравнение функций, O — o-соотношения, асимптотические соотношения,— понятие, возникающее при изучении поведения одной функции относительно другой в окрестности нек-рой точки (быть может, бесконечной).

Пусть x_0 — предельная точка множества E. Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют такие постоянные $c > 0$ и $\delta > 0$, что $|f(x)| \leqslant c|g(x)|$ при $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, то говорят, что f является ограниченной по сравнению с g функцией в нек-рой окрестности точки x_0, и пишут

$$f(x) = O(g(x)) \text{ при } x \longrightarrow x_0$$

(читается: «$f(x)$ есть O большое от $g(x)$»); $x \to x_0$ означает, что рассматриваемое свойство имеет место лишь

в нек-рой окрестности точки x_0. Естественным образом это определение переносится на случай $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $f = O(g)$ и $g = O(f)$ при $x \to x_0$, то они наз. функциями одного порядка при $x \to x_0$. Напр., если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ таковы, что $\alpha(x) \neq 0$, $\beta(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$ и существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0,$$

то они одного порядка при $x \to x_0$.

Две функции $f(x)$ и $g(x)$ наз. эквивалентными (асимптотически равными) при $x \to x_0$ и пишут $f \sim g$, если в нек-рой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, определена такая функция $\varphi(x)$, что

$$f(x) = \varphi(x)\, g(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1. \qquad (*)$$

Условие эквивалентности двух функций симметрично, т. е. если $f \sim g$, то и $g \sim f$ при $x \to x_0$, и транзитивно, т. е. если $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$ при $x \to x_0$. Если в нек-рой окрестности точки x_0 при $x \neq x_0$ справедливы неравенства $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, то условие $(*)$ эквивалентно любому из следующих

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

Если $\alpha(x) = \varepsilon(x) f(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, то говорят, что α является бесконечно малой функцией по сравнению с функцией f, и пишут

$$\alpha = o(f) \text{ при } x \to x_0$$

(читается: «α есть o малое от f»). Если $f(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$, то $\alpha = o(f)$, когда $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha/f = 0$. В случае, если f является бесконечно малой при $x \to x_0$, то говорят, что функция $\alpha = o(f)$ при $x \to x_0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем f. Если же $g(x)$ и $[f(x)]^k$ — величины одного порядка, то говорят, что g является величиной порядка k относительно f. Все формулы указанного выше вида наз. асимптотическими оценками, они наиболее интересны для бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Примеры: $e^x - 1 = o(1)\ (x \to 0)$; $\cos x^2 = O(1)$, $(\ln x)^\alpha = o(x^\beta)\ (x \to \infty)$; α, β — любые положительные числа); $[x/\sin(1/x)] = O(x^2)\ (x \to \infty)$.

Некоторые свойства символов o и O:

$$O(\alpha f) = O(f) \quad (\alpha - \text{const});$$
$$O(O(f)) = O(f);$$
$$O(f)\, O(g) = O(f \cdot g);$$
$$O(o(f)) = o(O(f)) = o(f);$$
$$O(f)\, o(g) = o(f \cdot g);$$

если $0 < x < x_0$ и $f = O(g)$, то

$$\int_{x_0}^{x} f(y)\, dy = O\left(\int_{x_0}^{x} |g(y)|\, dy \right) \quad (x \to x_0).$$

Формулы, содержащие o-, O-символы, читаются только слева направо, это не исключает того, что отдельные формулы оказываются справедливыми и при чтении справа налево. Символы o и O для функций комплексного переменного и для функций многих переменных вводятся аналогично тому, как они были определены выше для функций одного действительного переменного.

М. И. Шабунин.

ПОРЯДКОВАЯ СТАТИСТИКА — член *вариационного ряда*, построенного по результатам наблюдений. Пусть

наблюдается случайный вектор $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, принимающий значения $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, и пусть в $\mathbb{R}^n$ задана функция $\varphi(\cdot): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определенная по следующему правилу:

$$\varphi(x)=x^{(\cdot)}, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

где $x^{(\cdot)}=(x_{(n1)}, x_{(n2)}, \ldots, x_{(nn)})$ — вектор из $\mathbb{R}^n$, полученный из вектора x в результате перестановки его координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в возрастающем порядке, т. е. компоненты $x_{(n1)}, x_{(n2)}, \ldots, x_{(nn)}$ вектора $x^{(\cdot)}$ удовлетворяют следующему соотношению

$$x_{(n1)}\leqslant x_{(n2)}\leqslant \ldots \leqslant x_{(nn)}. \tag{1}$$

В этом случае статистика $X^{(\cdot)}=\varphi(X)=(X_{(n1)}, \ldots, X_{(nn)})$ наз. вариационным рядом (или вектором) порядковых статистик, а ее k-я компонента X_{nk} ($k=1, 2, \ldots, n$) наз. k-й порядковой статистикой.

В теории П. с. наиболее полно изучен случай, когда компоненты $X_1, X_2, \ldots, X_n$ случайного вектора X суть независимые одинаково распределенные случайные величины, что в дальнейшем и будет предполагаться. Если $F(u)$ — функция распределения случайной величины X_i, $i=1, 2, \ldots, n$, то функция распределения $F_{nk}(u)$ k-й П. с. $X_{(nk)}$ вычисляется по формуле

$$F_{nk}(u)=\mathsf{P}\{X_{(nk)}\leqslant u\}=I_{F(u)}(k, n-k+1), \quad |u|<\infty, \tag{2}$$

где

$$I_y(a, b)=\frac{1}{B(a, b)}\int_0^y x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

— неполная бета-функция. Из (2) следует, что если функция распределения $F(u)$ имеет плотность вероятности $f(u)$, то плотность вероятности $f_{nk}(u)$ k-й П. с. $X_{(nk)}$, $k=1, 2, \ldots, n$, тоже существует и выражается формулой

$$f_{nk}(u)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}[F(u)]^{k-1}[1-F(u)]^{n-k}f(u), \quad |u|<\infty. \tag{3}$$

В предположении существования плотности $f(u)$ была получена совместная плотность вероятности $f_{r_1 r_2 \ldots r_k}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ П. с. $X_{(nr_1)}, X_{(nr_2)}, \ldots, X_{(nr_k)}$, $1\leqslant r_1<r_2<\ldots<r_k\leqslant n$; $k\leqslant n$, к-рая выражается формулой

$$\begin{aligned} f_{r_1 r_2 \ldots r_k}(u_1, u_2, \ldots, u_k)=&\frac{n!}{(r_1-1)!(r_2-r_1-1)!\ldots(n-r_k)!}\times\\ &\times F_1^{r_1-1}(u_1)f(u_1)[F(u_2)-F(u_1)]^{r_2-r_1-1}f(u_2)\ldots\\ &\ldots[1-F(u_k)]^{n-r_k}f(u_k),\\ &-\infty<u_1<u_2<\ldots<u_k<\infty. \end{aligned} \tag{4}$$

Формулы (2) — (4) позволяют, напр., найти распределение вероятностей т. н. экстремальных П. с.

$$X_{(n1)}=\min_{1\leqslant i\leqslant n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ и}$$

$$X_{(nn)}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

а также распределение статистики $W_n=X_{(nn)}-X_{(n1)}$, к-рую наз. размахом. Напр., если функция распределения $F(u)$ непрерывна, то функция распределения размаха W_n выражается формулой

$$\mathsf{P}\{W_n<w\}=n\int_{-\infty}^{\infty}[F(u+w)-F(u)]^{n-1}dF(u), \quad w\geqslant 0. \tag{5}$$

Формулы (2) — (5) показывают, что, как и в общей теории выборочных методов, точные распределения П. с. невозможно использовать при получении статистич. выводов, если функция распределения $F(u)$ неизвестна. Именно поэтому в теории П. с. получили ши-

рокое развитие асимптотич. методы исследования распределений П. с. при неограниченном увеличении размерности n вектора наблюдений. В асимптотич. теории П. с. изучаются предельные распределения соответствующим образом нормированных последовательностей П. с. $\{X_{(nk)}\}$, когда $n\to\infty$; при этом, вообще говоря, порядковый номер k может меняться в зависимости от n. Если с ростом n порядковый номер k меняется таким образом, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} k/n$, отличный от 0 и 1, то соответствующие П. с. $X_{(nk)}$ рассматриваемой последовательности $\{X_{(nk)}\}$ наз. центральными или средними П. с. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} k/n$ равен 0 или 1, то П. с. $X_{(nk)}$ наз. крайними.

В математич. статистике центральные П. с. используют при построении состоятельных последовательностей оценок для *квантилей* неизвестной функции распределения $F(u)$ по реализации случайного вектора X или, иначе говоря, при оценивании функции $F^{-1}(u)$. Напр., пусть x_p — квантиль уровня P $(0<P<1)$ функции распределения $F(u)$, про к-рую известно, что ее плотность вероятности $f(u)$ непрерывна и строго положительна в нек-рой окрестности точки x_p. В этом случае последовательность центральных П. с. $\{X_{(nk)}\}$ с порядковыми номерами $k=[(n+1)P+0{,}5]$, где $[a]$ — целая часть действительного числа a, является состоятельной последовательностью оценок для квантили x_p, $n\to\infty$. Более того, эта последовательность П. с. $\{X_{(nk)}\}$ асимптотически нормально распределена с параметрами

$$x_p \text{ и } \frac{P(1-P)}{f^2(x_p)(n+1)},$$

т. е. для любого действительного числа x

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\frac{X_{(nk)}-x_p}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n+1}}} f(x_p) < x\right\} = \Phi(x), \qquad (6)$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Пример 1. Пусть $X^{(\cdot)}=(X_{(n1)}, \ldots, X_{(nn)})$ — вектор П. с., построенный по случайному вектору $X=(X_1, \ldots, X_n)$, компоненты к-рого суть независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же вероятностному закону, плотность вероятности к-рого непрерывна и строго положительна в нек-рой окрестности медианы $x_{1/2}$. В этом случае при $n\to\infty$ последовательность выборочных медиан $\{\mu_n\}$, определяемых для любого $n\geqslant 2$ по правилу

$$\mu_n=\begin{cases} X_{(n,\,m+1)}, & \text{если } n \text{ — нечетное число,} \\ \frac{1}{2}(X_{(nm)}+X_{(n,\,m+1)}), & \text{если } n \text{ — четное число,} \end{cases}$$

асимптотически нормально распределена с параметрами

$$x_{1/2} \text{ и } \{4(n+1)f^2(x_{1/2})\}^{-1}.$$

В частности, если

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad |a|<\infty, \ \sigma>0,$$

то есть X_j подчиняется нормальному закону $N(a, \sigma^2)$, то в этом случае последовательность $\{\mu_n\}$ асимптотически нормально распределена с параметрами $x_{1/2}=a$ и $\frac{\sigma^2\pi}{2(n+1)}$. Если последовательность статистик $\{\mu_n\}$ сравнить с последовательностью наилучших несмещенных оценок

$$\{\overline{X}_n\}, \quad \overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

математич. ожидания a нормального закона, то следует отдать предпочтение последовательности $\{\overline{X}_n\}$, т. к.

$$\mathsf{D}\overline{X}_n=\frac{\sigma^2}{n}<\frac{\sigma^2\pi}{2(n+1)}\approx\mathsf{D}\mu_n$$

для любого $n\geqslant 2$.

Пример 2. Пусть $X^{(\cdot)}=(X_{(n1)}, \ldots, X_{(nn)})$ — вектор П. с., построенный по случайному вектору $X=(X_1, \ldots, X_n)$, компоненты к-рого независимы и равномерно распределены на отрезке $[a-h;\ a+h]$, причем параметры a и h неизвестны. В этом случае последовательности статистик $\{Y_n\}$ и $\{Z_n\}$, где

$$Y_n=\frac{1}{2}(X_{(n1)}+X_{(nn)}) \text{ и } Z_n=\frac{n+1}{2(n-1)}(X_{(nn)}-X_{(n1)}),\ n\geqslant 2,$$

являются состоятельными последовательностями сверхэффективных несмещенных оценок для параметров a и h соответственно, причем

$$\mathsf{D}Y_n=\frac{2h^2}{(n+1)(n+2)} \text{ и } \mathsf{D}Z_n=\frac{2h^2}{(n-1)(n+2)}. \qquad (7)$$

Можно показать, что последовательности статистик $\{Y_n\}$ и $\{Z_n\}$ определяют наилучшие оценки для a и h в смысле минимума квадратичного риска в классе линейных несмещенных оценок, выраженных в терминах П. с.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [3] Дэйвид Г., Порядковые статистики, пер. с англ., М., 1979; [4] Гумбель Э., Статистика экстремальных значений, пер. с англ., М., 1965; [5] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [6] Гнеденко Б. В., «Докл. АН СССР. Новая серия», 1941, т. 32, № 1, с. 7—9; [7] его же, «Ann. Math.», 1943, v. 44, № 3, p. 423—53; [8] Смирнов Н. В., «Тр. Матем. ин-та», 1949, т. 25, с. 5—59; [9] его же, «Теория вероятн. и ее применен.», 1967, т. 12, № 2, с. 391—92; [10] Чибисов Д. М., там же, 1964, т. 9, № 1, с. 159—65; [11] Craig A. T., «Amer. J. Math.», 1932, v. 54, p. 353—66; [12] Tippett L. H. C., «Biometrika», 1925, v. 17, p. 364—87; [13] Pearson E. S., там же, 1932, v. 24, p. 404—17.

М. С. Никулин.

ПОРЯДКОВАЯ ТОПОЛОГИЯ — топология $\mathscr{T}_<$ на линейно упорядоченном множестве X, порожденная линейным упорядочением $<$, базу к-рой образуют всевозможные интервалы из X. *М. И. Войцеховский.*

ПОРЯДКОВОЕ ЧИСЛО, трансфинитное число, ординальное число, ординал, — *порядковый тип* вполне упорядоченного множества. Понятие П. ч. ввел Г. Кантор (G. Cantor, 1883, см. [2]). Напр., П. ч. множества натуральных чисел, упорядоченного отношением $\leqslant$, есть ω. П. ч. множества, состоящего из числа 1 и чисел вида $1-\frac{1}{n}$, если $n=1, 2, \ldots$, упорядоченного отношением $\leqslant$, есть $\omega+1$. Говорят, что П. ч. α равно (меньше) П. ч. β. и пишут $\alpha=\beta(\alpha<\beta)$, если множество типа α подобно множеству (отрезку) типа β. Для произвольных П. ч. α и β выполняется одна и только одна из возможностей $\alpha<\beta$, $\alpha=\beta$, $\alpha>\beta$. Множество $\{\beta : \beta<\alpha\}$ всех П. ч., меньших α, вполне упорядочено по типу α отношением $\leqslant$. Более того, каждое множество П. ч. вполне упорядочено отношением $\leqslant$, т. е. в каждом непустом множестве П. ч. есть наименьшее П. ч. Для каждого множества Z П. ч. существует П. ч., превосходящее каждое П. ч. из Z. Таким образом, не существует множества всех П. ч. Наименьшее среди П. ч., следующих за П. ч. α, наз. последователем α и обозначается $\alpha+1$. П. ч. α наз. предшественником П. ч. $\alpha+1$. П. ч. наз. предельным числом, если оно не имеет предшественника. Таким образом, 0 — предельное число. Каждое П. ч. можно представить в виде $\alpha=\lambda+n$, где λ — предельное число, n — натуральное, а сумма понимается как сложение порядковых типов.

Трансфинитной последовательностью типа α, или α-последовательностью, наз. функция φ, определенная на $\{\beta : \beta<\alpha\}$. Если значениями этой последовательности служат П. ч. и из $\gamma<\beta<\alpha$ следует $\varphi(\gamma)<\varphi(\beta)$, то эта последовательность наз. возрастающей. Пусть φ обозначает λ-последовательность, где λ — предельное число. Наименьшее среди П. ч., бо́льших каждого из чисел $\varphi(\gamma)$, где $\gamma<\lambda$, наз. пределом последовательности $\varphi(\gamma)$ для $\gamma<\lambda$ и обозначается $\lim\limits_{\gamma<\lambda}\varphi(\gamma)$. Напр., $\omega=\lim\limits_{n<\omega} n=\lim\limits_{n<\omega} n^2$. П. ч. λ конфинально предельному числу α, если λ является пределом возрастающей α-последовательности: $\lambda=\lim\limits_{\xi<\alpha}\varphi(\xi)$.

П. ч. наз. регулярным, если оно не конфинально никакому меньшему П. ч., и сингулярным в противном случае. П. ч. наз. начальным П. ч., мощности τ, если оно наименьшее среди П. ч. мощности τ (т. е. среди порядковых типов вполне упорядоченных множеств мощности τ). Начальное П. ч. мощности τ обозначается $\omega(\tau)$. Множество $\{\omega(\delta) : \delta\leqslant\tau\}$ всех начальных П. ч. бесконечных мощностей, меньших чем τ, вполне упорядочено. Если П. ч. α является его порядковым типом, то полагается $\omega(\tau)=\omega_\alpha$. Таким образом, каждое начальное П. ч. снабжается индексом, равным порядковому типу множества всех начальных П. ч., меньших, чем данное. Различным начальным числам соответствуют различные индексы. Каждое П. ч. α является индексом нек-рого начального числа. Каждое предельное П. ч. $\lambda\neq 0$ конфинально начальному числу ω_α — наименьшему из П. ч., конфинальных λ.

Начальное число ω_α наз. слабо недостижимым, если оно регулярно и его индекс α — предельное число. Напр., $\omega=\omega_0$ слабо недостижимо, а ω_ω сингулярно и потому не будет слабо недостижимо. Если $\alpha>0$, то ω_α слабо недостижимо тогда и только тогда, когда $\alpha=\omega_\alpha=cf(\alpha)$, где $cf(\alpha)$ — наименьшее число ξ такое, что α конфинально ω_ξ.

Слабо недостижимые П. ч. допускают классификацию, аналогичную классификации недостижимых *кардинальных чисел*. Сумма и произведение двух П. ч. являются П. ч. Если множество индексов вполне упорядочено, то вполне упорядоченная сумма П. ч. является П. ч. Для П. ч. можно определить возведение в степень по трансфинитной индукции: $\gamma^0=1$, $\gamma^{\xi+1}=\gamma^\xi\cdot\gamma$, $\gamma^\lambda=\lim\limits_{\xi<\lambda}\gamma^\xi$, где λ — предельное число. Число γ^α наз. степенью числа γ, γ — *основанием степени* и α — *показателем степени*. Напр., взяв $\gamma=\omega$, $\alpha_0=1$, получают $\alpha_1=\gamma^{\alpha_0}=\omega$, $\alpha_2=\omega^\omega$, $\alpha_3=\omega^{\omega^\omega}$, ... Предел этой последовательности $\varepsilon=\lim\limits_{n<\omega}\alpha_n$ является наименьшим критич. *числом* функции ω^ξ, т. е. наименьшим из П. ч., для к-рых $\omega^\varepsilon=\varepsilon$. Числа ε, для к-рых выполняется это равенство, наз. эпсилон-ординалами.

Возведение в степень можно использовать для представления П. ч. в виде, напоминающем представление натуральных чисел в десятичной системе. Если $\gamma>1$, $1\leqslant\alpha<\gamma^\eta$, то существуют такое натуральное число n и такие последовательности $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, что

$$\alpha=\gamma^{\eta_1}\beta_1+\gamma^{\eta_2}\beta_2+\ldots+\gamma^{\eta_n}\beta_n, \qquad (1)$$

$$\eta>\eta_1>\eta_2>\ldots>\eta_n,\ 0\leqslant\beta_i<\gamma, \qquad (2)$$

для $i=1, 2, \ldots, n$. Формула (1) для чисел β_j и η_j, удовлетворяющих условиям (2), наз. разложением числа α по основанию γ. Числа β_i наз. цифрами, а числа η_i — показателями степеней этого разложения. Разложение П. ч. по данному основанию единственно.

Разложение П. ч. по основанию ω используется для определения натурального сложения и натурального умножения П. ч.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948; [2] Кантор Г., в кн.: Новые идеи в математике. Сб. 6, СПБ, 1914, с. 90—184; [3] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [4] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970; [5] Sierpiński W., Cardinal and ordinal numbers, 2 ed., Warsz., 1965.

Б. А. Ефимов.

ПОРЯДКОВЫЙ ТИП *линейно упорядоченного множества* A — свойство множества A, к-рое присуще любому линейно упорядоченному множеству B, подобному A. При этом два множества A и B, линейно упорядоченные соотношениями R и S, наз. подобными, если существует функция f, взаимно однозначно отображающая A на B и такая, что для любых точек $x, y \in A$ выполнено $xRy \Longleftrightarrow f(x)Sf(y)$. Г. Кантор (G. Cantor) определял П. т. как такое свойство линейно упорядоченного множества, к-рое остается, если отвлечься лишь от свойств элементов этого множества, но не от их порядка. Чтобы подчеркнуть, что проведен один этот акт абстракции, Г. Кантор для обозначения П. т. множества A ввел символ $\overline{A}$. Для часто встречающихся множеств их П. т. обозначается специальными буквами. Напр., если $\mathbb{Z}^+$ — множество всех натуральных чисел, упорядоченное отношением $\leqslant$, то $\overline{\mathbb{Z}^+}=\omega$. Если $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел, также упорядоченное отношением $\leqslant$, то $\overline{\mathbb{Q}}=\eta$. Линейно упорядоченное множество A имеет тип ω тогда и только тогда, когда: (1) A имеет первый элемент a_0, (2) каждый элемент x множества A имеет последующий $x+1$, (3) если $a_0 \in X \subset A$ и множество X содержит последователь каждого своего элемента, то $X=A$. Существует только один П. т. η непустых множеств, плотных, счетных, не имеющих ни первого, ни последнего элемента (теорема Кантора). Линейно упорядоченное множество имеет П. т. λ — множества всех действительных чисел, если оно непрерывно и содержит плотное в нем подмножество A, П. т. к-рого есть η, имеющее с ним общее начало и общий конец. Доказана независимость в системе аксиом (ZF) *Суслина проблемы*, см. [1].

Для П. т. определяются операции, до нек-рой степени аналогичные арифметич. операциям.

Пусть α и β — два П. т., A и B — такие два линейно упорядоченные множества, что $\overline{A}=\alpha$, $\overline{B}=\beta$ и $A \cap B=\varnothing$. Суммой $\alpha+\beta$ наз. П. т. $\alpha+\beta=\overline{A \cup B}$, где множество $A \cup B$ упорядочено так, что все элементы множества A предшествуют всем элементам множества B, а в каждом из множеств A и B порядок сохраняется. В частности, если α и β — натуральные числа, то определение суммы П. т. совпадает с определением суммы натуральных чисел. Имеют место равенства $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ и $\alpha+0=\alpha=0+\alpha$, где 0 — П. т. пустого множества. Закон коммутативности в общем случае не выполняется, напр. $\omega+1 \neq 1+\omega$.

Пусть $\alpha=\overline{A}$ и $\beta=\overline{B}$. Произведением $\alpha \cdot \beta$ наз. П. т. $\alpha \cdot \beta=\overline{A \times B}$, где множество $A \times B$ упорядочено так, что если $\{x, y\}$, $\{x_1, y_1\}$ — два его элемента, то первый элемент предшествует второму, когда $y<y_1$ или (в случае совпадения ординат) $x<x_1$ (принцип последних различных членов). Имеют место равенства $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma=\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$, $\alpha \cdot 1=1 \cdot \alpha$, $\alpha \cdot 0=0 \cdot \alpha=0$, где 1 — П. т. одноэлементного множества. Умножение, как и сложение, некоммутативно. Напр., $\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega$. Закон дистрибутивности выполняется: $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha \cdot \beta+\alpha \cdot \gamma$. Произведение $\lambda \cdot \lambda$ представляет непрерывный П. т. мощности континуума, не содержащий счетного плотного подмножества.

С суммой и произведением П. т. тесно связаны сумма произвольного упорядоченного множества П. т. и лексикографич. произведение вполне упорядоченного множества П. т. Пусть $\{A_m : m \in M\}$ — семейство линейно упорядоченных множеств, индексированное вполне упорядоченным множеством M, и $A = \Pi\{A_m : m \in M\}$ — декартово произведение этого семейства.

Лексикографическим произведением семейства $\{A_m : m \in M\}$ наз. множество A, наделенное следующим порядком. Если $\{a_m\}$ и $\{b_m\}$ элементы из A, то $\{a_m\} < \{b_m\}$ тогда и только тогда, когда или $a_1 < b_1$, или существует $m_0 \in M$ такое, что $a_m = b_m$ для всех $m < m_0$ и $a_{m_0} < b_{m_0}$ (принцип первых различных членов). Если $\alpha_m = A_m$ и A — лексикографич. произведение семейства $\{A_m : m \in M\}$, то $\alpha = \Pi\{\alpha_m : m \in M\} = \overline{A}$ наз. произведением семейства П. т. $\{\alpha_m : m \in M\}$. С помощью лексикографич. произведения и обобщенной *континуум-гипотезы* построено для каждого *кардинального числа* τ такое линейно упорядоченное множество η_τ мощности τ, что каждое линейно упорядоченное множество мощности $\leqslant \tau$ подобно некоторому подмножеству множества η_τ. Если τ является сильно недостижимым кардинальным числом, то обобщенная континуум-гипотеза для доказательства этой теоремы не нужна. В частности, для $\tau = \aleph_0$ таким множеством является любое линейно упорядоченное множество П. т. η.

Лит.: [1] Иех Т., Теория множеств и метод форсинга, пер. с англ., М., 1973.

Б. А. Ефимов.

ПОРЯДОК — 1) П. алгебраич. кривой $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — многочлен от x и y, наз. наивысшую степень членов этого многочлена. Напр., эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ есть кривая второго П., а лемниската $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ — кривая четвертого П. 2) П. бесконечно малой величины α относительно бесконечно малой величины β есть такое число n, что существует конечный предел $\lim \frac{\alpha}{\beta^n}$, отличный от нуля. Напр., $\sin^2 3x$ при $x \to 0$ есть бесконечно малая второго П. относительно x, так как $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2} = 9$. Вообще говорят, что α — бесконечно малая высшего П., чем β, если $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, и низшего П., чем β, если $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$. Аналогично определяют П. бесконечно больших величин. 3) П. нуля (соответственно полюса) a функции $f(x)$ есть такое число n, что существует конечный предел $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n}$ (соответственно $\lim (x-a)^n f(x)$), отличный от нуля. 4) П. производной — число дифференцирований, к-рые надо произвести над функцией, чтобы получить эту производную. Напр., y''' — производная третьего П., $\frac{\partial^4 z}{\partial^2 x \partial^2 y}$ — производная четвертого П. Аналогично определяют П. дифференциала. 5) П. дифференциального уравнения — наивысший из П. производных, входящих в уравнение. Напр., $y'''y' - (y'')^2 = 1$ — уравнение третьего П., $y'' - 3y' + y = 0$ — уравнение второго П. 6) П. квадратной матрицы — число ее строк или столбцов. 7) П. конечной группы — число элементов группы. Если группа G бесконечна, то говорят, что G — группа бесконечного П. Не следует путать порядок группы с порядком в группе, о к-ром см. *Упорядоченная группа*, *Частично упорядоченная группа*. 8) П. элемента группы — целое положительное число, равное числу различных элементов в циклической подгруппе, порождаемой этим элементом, либо ∞, если эта подгруппа бесконечна. В последнем случае элемент наз. элементом бесконечного

П. Если П. элемента a конечен и равен n, то n является наименьшим из чисел, для к-рых $a^n=1$. 9) Правый П. в кольце Q — такое подкольцо R кольца Q, что для всякого $x\in Q$ найдутся a, $b\in R$ такие, что b обратим в Q и $x=ab^{-1}$. Другими словами, R — это такое подкольцо в Q, что Q является классич. правым кольцом частных кольца R (см. *Частных кольцо*). 10) Если при нек-ром исследовании или вычислении отбрасываются все степени нек-рой малой величины, начиная с $(n+1)$-й, то говорят, что исследование или вычисление ведется с точностью до величин n-го П. Напр., при исследовании малых колебаний струны пренебрегают величинами, содержащими вторые и высшие степени прогиба и его производных, получая благодаря этому линейное уравнение (линеаризуя задачу). 11) Слово «П.» употребляется также в исчислении конечных разностей (разности различных П.), в теории многих специальных функций (напр., цилиндрич. функции n-го П.) и т. д. 12) При измерениях говорят о величине порядка 10^n, подразумевая под этим, что она заключена между $0{,}5\cdot 10^n$ и $5\cdot 10^n$.

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

ПОРЯДОК, отношение порядка,— *бинарное отношение* на нек-ром множестве A, обычно обозначаемое символом $\leqslant$ и обладающее следующими свойствами: (1) $a\leqslant a$ (рефлексивность); (2) если $a\leqslant b$ и $b\leqslant c$, то $a\leqslant c$ (транзитивность); (3) если $a\leqslant b$ и $b\leqslant a$, то $a=b$ (антисимметричность). Если $\leqslant$ — П., то отношение $<$, определяемое условием $a<b$, если $a\leqslant b$ и $a\neq b$, наз. строгим П. Строгий П. может быть определен и как отношение, обладающее свойствами (2) и (3′): $a<b$ и $b<a$ не могут выполняться одновременно. Запись $a\leqslant b$ обычно читается как «a меньше или равно b» или «b больше или равно a», а $a<b$ — как «a меньше b» или «b больше a». П. наз. линейным, если для любых a, $b\in A$ имеет место $a\leqslant b$ или $b\leqslant a$. Отношение, обладающее свойствами (1) и (2), наз. предпорядком или квазипорядком. Если $\lhd$ — квазипорядок, то отношение $a\sim b$, определяемое условиями $a\lhd b$ и $b\lhd a$, оказывается *эквивалентностью*. На фактормножестве по этой эквивалентности можно определить П., полагая $[a]\leqslant[b]$, где $[a]$ — смежный класс, содержащий элемент a, если $a\lhd b$. Примеры и лит. см. при ст. *Частично упорядоченное множество*.

Л. А. Скорняков.

ПОСЛЕДОВАНИЯ ОТОБРАЖЕНИЕ для гладкого или хотя бы непрерывного *потока* $\{S_t\}$ и трансверсальной к нему гиперповерхности V — отображение T, сопоставляющее точке $v\in V$ первую по времени точку пересечения с V исходящей из v положительной полутраектории потока (и определенное для тех v, для к-рых такое пересечение имеется). (Гиперповерхность V наз. при этом сечением, секущей поверхностью, трансверсалью.) Когда размерность $\dim V=1$ (так что $\{S_t\}$ — поток на плоскости или двумерной поверхности; в этом случае V наз. также дугой без контакта) и V параметризована числовым параметром s, то смещение точек V под действием П. о. описывается нек-рой числовой функцией f одного переменного (если v отвечает значению параметра s, то Tv — значению параметра $s+f(s)$), к-рая наз. функцией последования. Впервые П. о. использовал А. Пуанкаре (H. Poincaré, [1]), поэтому иногда П. о. наз. отображением Пуанкаре.

Если любая полутраектория пересекает V, то П. о. (определенное в данном случае на всем V) в значительной степени определяет поведение всех траекторий потока. Однако такие «глобальные» сечения существуют далеко не всегда (в частности, у гамильтоновой системы на многообразии постоянной энергии, не проходящем через критич. точки гамильтониана, т. е. *равнове-*

сия положения, нет замкнутых — как многообразия — глобальных сечений; см. [3] гл. VIII, п. 4.7).

Для неавтономной системы с периодической правой частью

$$\dot{x}=f(t,\ x),\quad f(t+\tau,\ x)=f(t,\ x),\qquad (*)$$

возникает аналог П. о.: точке x сопоставляют точку $Tx=\varphi(\tau, x)$, где $\varphi(t, x)$ — решение системы $(*)$ с начальным значением $\varphi(0, x)=x$. Это «отображение сдвига на период» можно даже формально рассматривать как П. о., если $(*)$ рассматривать как автономную систему в «цилиндрическом» фазовом пространстве. Отображение T определено всюду, если решения системы $(*)$ определены при всех t.

Чаще приходится иметь дело с «локальным» сечением — его пересекает только часть траекторий и нередко только часть пересекающих его траекторий вновь возвращается на V. Примером может служить маленькая гладкая «площадка» коразмерности один, трансверсально пересекающая некрую замкнутую траекторию L. В этом случае П. о. определено вблизи $V\cap L$ и характеризует поведение траекторий вблизи L.

В теории *слоений* также вводится П. о. (см. [2]), являющееся обобщением предыдущего примера (и охватывающее также П. о. для обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области).

Лит.: [1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М., 1947; [2] Тамура И., Топология слоений, пер. с япон., М., 1979; [3] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973. *Д. В. Аносов.*

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КАТЕГОРИЯ — частный случай общей конструкции категории функторов или категории диаграмм. Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, снабженное обычным отношением порядка. Тогда $\mathbb{Z}$ можно рассматривать как малую категорию, объектами к-рой являются целые числа, а морфизмами — всевозможные пары вида (i, j), где $i, j\in\mathbb{Z}$ и $i\leqslant j$. Пара (i, j) — это единственный морфизм объекта i в объект j. Композиция морфизмов определяется следующим равенством: $(i, j)\,(j, k)=(i, k)$.

Для произвольной категории $\mathfrak{K}$ категория ковариантных функторов $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}, \mathfrak{K})$ из $\mathbb{Z}$ в $\mathfrak{K}$ наз. категорией последовательностей над $\mathfrak{K}$. Чтобы задать функтор $F:\mathbb{Z}\to\mathfrak{K}$, достаточно указать семейство объектов из $\mathfrak{K}$, занидексированное целыми числами, и для каждой пары объектов A_i, A_{i+1} выбрать произвольный морфизм $\alpha_{i,\,i+1}: A_i\to A_{i+1}$. Тогда отображения $F(i)=A_i$, $F(i, i+1)=\alpha_{i,\,i+1}$ однозначно продолжаются до функтора $F: Z\to\mathfrak{K}$. Естественное преобразование φ функтора $F:\mathbb{Z}\to\mathfrak{K}$ в функтор $G:\mathbb{Z}\to\mathfrak{K}$, т. е. морфизм категории последовательностей, задается таким семейством морфизмов $\varphi_i: F(i)\to G(i)$, что $\varphi_i G(i, i+1)=F(i, i+1)\cdot\varphi_{i+1}$ для любого $i\in\mathbb{Z}$.

Если $\mathfrak{K}$ — категория с нулевыми морфизмами, то в П. к. $\mathfrak{F}(Z, \mathfrak{K})$ выделяется полная подкатегория комплексов, т. е. таких функторов $F:\mathbb{Z}\to\mathfrak{K}$, что $F(i, i+1)\,F(i+1, i+2)=0$ для любого $i\in\mathbb{Z}$. Для абелевой категории $\mathfrak{A}$ П. к. и подкатегория комплексов являются абелевыми категориями.

Вместо категории $\mathbb{Z}$ можно рассматривать ее подкатегории, состоящие только из неотрицательных или только из неположительных чисел. Соответствующие категории диаграмм также наз. П. к. *М. Ш. Цаленко.*

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ элементов заданного множества — функция, определенная на множестве натуральных чисел, множество значений к-рой содержится в рассматриваемом множестве.

Элементом, или членом, последовательности $f: N\to X$, где N — множество натуральных чисел, X — заданное множество, наз. упорядоченная пара (n, x), $x=f(n)$, $n\in N$, $x\in X$, к-рая обозначается через

x_n. Натуральное число n наз. номером элемента последовательности x_n, а элемент $x \in X$ — его значением. Последовательность $f: N \to X$ обычно обозначается через $\{x_n\}$ или x_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Множество элементов П. всегда счетно, причем два различных члена П. отличаются по крайней мере номерами. Множество значений элементов П. может быть и конечным; так, множество значений всякой стационарной П., т. е. последовательности $\{x_n\}$, все элементы к-рой имеют одно и то же значение: $x_n = a$, $n = 1, 2, \ldots$, состоит из одного элемента.

Если $n_1 < n_2$, то член x_{n_1} последовательности $\{x_n\}$ наз. предшествующим члену x_{n_2}, а член x_{n_2} — следующим за членом x_{n_1}. Таким образом, множество элементов П. упорядочено.

Того или иного рода П. встречаются в различных разделах математики и с их помощью описываются многие свойства изучаемых объектов. Напр., если X — топологич. пространство, то среди П. его точек важную роль играют сходящиеся П., т. е. П., к-рые имеют предел в этих пространствах. В терминах сходящихся П. удобно (во всяком случае, при наличии счетной базы) описывать свойство компактности, существование предела отображения, его непрерывность и т. п. Если все элементы П. нек-рых объектов (точек, множеств, отображений и т. д.) обладают каким-либо свойством, то часто бывает нужным выяснить, сохраняется ли это свойство для предела П.; напр., выяснить, как ведут себя свойства измеримости, непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости при предельном переходе для различных видов сходимости функций (поточечной, почти всюду, равномерной, по мере, в среднем и т. п.).

Иногда отображение $f: \overline{1, n} \to X$ конечного множества $\overline{1, n} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{1, 2, \ldots, n\}$ натуральных чисел в множество X наз. конечной П. и обозначается через $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, где $x_n = f(k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. П. может задаваться формулой ее общего члена (напр., П. членов арифметич. прогрессии), рекуррентной формулой (напр., П. чисел Бернулли) или просто словесным описанием с той или иной степенью эффективности (напр., П. всех простых натуральных чисел в порядке их возрастания). См. также *Двойная последовательность*, *Кратная последовательность*. Обобщением понятия П. является *направленность*.

Л. Д. Кудрявцев.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ — раздел математич. статистики, характерной чертой к-рого является то, что число производимых наблюдений (момент остановки наблюдений) не фиксируется заранее, а выбирается по ходу наблюдений в зависимости от значений поступающих данных. Стимулом к интенсивному развитию и применению в статистич. практике последовательных методов послужили работы А. Вальда (A. Wald). Им было установлено, что в задаче различения (по результатам независимых наблюдений) двух простых гипотез т. н. последовательный критерий отношений вероятностей дает значительный выигрыш в среднем числе производимых наблюдений по сравнению с наиболее мощным классич. способом различения (определяемой леммой Неймана — Пирсона) с фиксированным объемом выборки и теми же вероятностями ошибочных решений.

Основные принципы П. а. состоят в следующем. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и функция распределения $F_\theta(x) = \mathrm{P}_\theta\{\xi_1 \leqslant x\}$ зависит от неизвестного параметра θ, принадлежащего нек-рому параметрич. множеству Θ. Задача состоит в том, чтобы по результатам наблюдений вынести то или иное решение об истинном значении неизвестного параметра θ.

В основе любой статистич. задачи решения лежат пространство D заключительных (терминальных) решений d (о значениях параметра θ) и правило τ, определяющее момент прекращения наблюдений, в к-рый и выносится заключительное решение. В классич. методах наблюдений момент τ является неслучайным и фиксированным заранее; в последовательных методах τ является случайной величиной, не зависящей от «будущего» (марковский момент, момент остановки). Формально, пусть $\mathcal{F}_n=\sigma\{\omega : \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ есть σ-алгебра, порожденная случайными величинами $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Случайная величина $\tau=\tau(\omega)$, принимающая значения $0, 1, \ldots, +\infty$, наз. м а р к о в с к и м м о м е н т о м, если событие $\{\tau\leqslant n\}\in\mathcal{F}_n$ для каждого $n\geqslant 0$ ($\mathcal{F}_0=\{\varnothing, \Omega\}$). Пусть $\mathcal{F}_\tau$ — совокупность тех измеримых множеств A, для к-рых $A\cap\{\tau\leqslant n\}\in\mathcal{F}_n$ и для каждого $n\geqslant 0$. Если $\mathcal{F}_n$ интерпретируется как совокупность событий, наблюдаемых до случайного момента n (включительно), то $\mathcal{F}_\tau$ можно интерпретировать как совокупность событий, наблюдаемых до случайного момента τ (включительно). Заключительное (терминальное) решение $d=d(\omega)$ есть $\mathcal{F}_\tau$-измеримая функция со значениями в пространстве D. Пара $\delta=(\tau, d)$ таких функций наз. (п о с л е д о в а т е л ь н ы м) р е ш а ю щ и м п р а в и л о м.

Для выделения среди решающих правил «оптимального» задают функцию риска $W(\tau, \theta, d)$ и рассматривают математич. ожидание $\mathsf{E}_\theta W(\tau, \theta, d)$. Существуют разные подходы к определению понятия оптимального решающего правила $\delta^*=(\tau^*, d^*)$. Один из них, бейесовский, основан на предположении, что параметр θ является случайной величиной с априорным распределением $\pi=\pi(d\theta)$. Тогда имеет смысл говорить о π-риске

$$R^\delta(\pi)=\int_\Theta \mathsf{E}_\theta W(\tau, \theta, d)\,\pi(d\theta)$$

и называть правило $\delta^*=(\tau^*, d^*)$ о п т и м а л ь н ы м б е й е с о в с к и м р е ш е н и е м (или π-о п т и м а л ь н ы м), если $R^{\delta^*}(\pi)\leqslant R^\delta(\pi)$ для любого другого (допустимого) правила. Наиболее распространенной формой риска $W(\tau, \theta, d)$ является риск вида $c\tau+W_1(\theta, d)$, где константа $c\geqslant 0$ интерпретируется как стоимость единичного наблюдения, а $W_1(\theta, d)$ является функцией потерь от заключительного решения.

В бейесовских задачах отыскание оптимального заключительного решения d^*, как правило, не вызывает трудностей, и основные усилия направлены на отыскание оптимального момента остановки τ^*. При этом большинство задач П. а. укладывается в следующую схему «оптимальных правил остановки».

Пусть $X=(x_n, \mathcal{F}_n, \mathsf{P}_x)$, $n\geqslant 0$, $x\in E$, — цепь Маркова в фазовом пространстве $(E, \mathcal{B})$, где x_n — состояние цепи в момент времени n, σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ интерпретируется как совокупность событий, наблюдаемых до момента времени n (включительно), а P_x — распределение вероятностей, отвечающее начальному состоянию $x\in\mathsf{E}$. Предполагается, что, прекращая наблюдение в момент времени n, получают выигрыш $g(x_n)$. Тогда средний выигрыш от остановки в момент τ есть $\mathsf{E}_x g(x_\tau)$, где x — начальное состояние. Функцию $s(x)=\sup \mathsf{E}_x g(x_\tau)$, где sup берется по всем (конечным) моментам остановки τ, наз. ц е н о й, а момент τ_ε, для к-рого $s(x)\leqslant\mathsf{E}_x g(x_{\tau_\varepsilon})+\varepsilon$ для всех $x\in E$, наз. ε-о п т и м а л ь н ы м м о м е н т о м о с т а н о в к и. 0-оптимальные моменты наз. о п т и м а л ь н ы м и. Основные вопросы теории «оптимальных правил остановки» таковы: какова структура цены $s(x)$, как ее найти, когда существуют ε-оптимальные и оптимальные моменты, какова их структура. Ниже приведен один из типичных результатов, касающихся поставленных вопросов.

Пусть функция $g(x)$ ограничена: $|g(x)| \leqslant c < \infty$. Тогда цена $s(x)$ является наименьшей эксцессивной мажорантой функции $g(x)$, т. е. наименьшей из функций $f(x)$, удовлетворяющих двум свойствам

$$g(x) \leqslant f(x), \quad Tf(x) \leqslant f(x),$$

где $Tf(x) = \mathsf{E}_x g(x_1)$. При этом момент

$$\tau_\varepsilon = \inf\{n \geqslant 0: \ s(x_n) \leqslant g(x_n) + \varepsilon\}$$

является ε-оптимальным для всякого $\varepsilon > 0$, цена $s(x)$ удовлетворяет уравнению Вальда — Беллмана

$$s(x) = \max\{g(x), \ Ts(x)\}$$

и может быть найдена по формуле

$$s(x) = \lim_{n \to \infty} Q^n g(x),$$

где

$$Qg(x) = \max\{g(x), \ Tg(x)\}.$$

В том случае, когда множество E конечно, момент

$$\tau_0 = \inf\{n \geqslant 0: \ s(x_n) = g(x_n)\}$$

будет оптимальным. В общем случае момент τ_0 является оптимальным, если $\mathsf{P}_x\{\tau_0 < \infty\} = 1$, $x \in E$.

Пусть

$$C = \{x: \ s(x) > g(x)\}, \quad \Gamma = \{x: \ s(x) = g(x)\}.$$

В соответствии с определением

$$\tau_0 = \inf\{n \geqslant 0: \ x_n \in \Gamma\}.$$

Иначе говоря, прекращение наблюдений следует производить при первом попадании в множество Γ. В связи с этим множество C наз. множеством продолжения наблюдений, а Γ — множеством прекращения наблюдений.

Иллюстрацией этих результатов может служить задача различения двух простых гипотез, на к-рой А. Вальд продемонстрировал преимущество последовательных методов по сравнению с классическими. Пусть параметр θ принимает два значения 1 и 0 с априорными вероятностями π и $1-\pi$ соответственно и множество заключительных решений D состоит также из двух точек: $d=1$ (принимается гипотеза $H_1: \theta = 1$) и $d=0$ (принимается гипотеза $H_0: \theta = 0$). Если функцию $W_1(\theta, d)$ выбрать в виде

$$W_1(\theta, d) = \begin{cases} a, & \theta = 1, \ d = 0, \\ b, & \theta = 0, \ d = 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и положить

$$W(\tau, \theta, d) = c\tau + W_1(\theta, d),$$

то для $R^\delta(\pi)$ получают выражение

$$R^\delta(\pi) = c\mathsf{E}_\pi \tau + a\alpha_\pi(\delta) + b\beta_\pi(\delta),$$

где

$$\alpha_\pi(\delta) = \mathsf{P}_\pi\{d = 0 \mid \theta = 1\}, \ \beta_\pi(\delta) = \mathsf{P}_\pi\{d = 1 \mid \theta = 0\}$$

— вероятности ошибок первого и второго рода, а P_π означает распределение вероятностей в пространстве наблюдений, отвечающее априорному распределению π. Если $\pi_n = \mathsf{P}\{\theta = 1 \mid \mathcal{F}_n\}$ — апостериорная вероятность гипотезы $H_1: \theta = 1$ относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_n = \sigma\{\omega: \xi_1, \ldots, \xi_n\}$, то

$$R^\delta(\pi) = \mathsf{E}_\pi[c\tau + g(\pi_\tau)],$$

где

$$g(\pi) = \min(a\pi, \ b(1-\pi)).$$

Из общей теории оптимальных правил остановки, применимой к $x_n = (n, \pi_n)$, следует, что функция $\rho(\pi) = \inf_\tau R^\delta(\pi)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho(\pi) = \min\{g(\pi), \ c + T\rho(\pi)\}.$$

Отсюда, в силу выпуклости вверх функций $\rho(\pi)$, $g(\pi)$, $T\rho(\pi)$, можно вывести, что найдутся два числа $0 \leqslant A < B \leqslant 1$ такие, что область продолжения $C = \{\pi : A < \pi < B\}$, а область прекращения наблюдений $\Gamma = [0, 1] \setminus (A, B)$. При этом момент остановки

$$\tau_0 = \inf\{n \geqslant 0: \pi_n \in \Gamma\}$$

является оптимальным ($\pi_0 = \pi$).

Если $p_0(x)$ и $p_1(x)$ — плотности распределений $F_0(x)$ и $F_1(x)$ (по мере $d\mu = \frac{1}{2}(dF_0 + dF_1)$), а

$$\varphi = \frac{p_1(\xi_1)\ldots p_1(\xi_n)}{p_0(\xi_1)\ldots p_0(\xi_n)}$$

— отношение правдоподобия, то область продолжения наблюдений (см. рис. 1) может быть записана в виде

$$C = \left\{ \varphi: \frac{A}{1-A}\,\frac{1-\pi}{\pi} < \varphi < \frac{B}{1-B}\,\frac{1-\pi}{\pi} \right\}$$

и $\tau_0 = \inf\{n \geqslant 0 : \varphi_n \notin C\}$.

При этом если $\varphi_{\tau_0} \geqslant \frac{B}{1-B}\,\frac{1-\pi}{\pi}$, то выносится решение $d = 1$, т. е. принимается гипотеза $H_1 : \theta = 1$. Если же $\varphi_{\tau_0} \leqslant \frac{A}{1-A}\,\frac{1-\pi}{\pi}$, то — гипотеза $H_0 : \theta = 0$.

Структура этого оптимального решающего правила сохраняется и для задачи различения гипотез в условноэкстремальной постановке, состоящей в следующем. Для каждого решающего правила $\delta = (\tau, d)$ вводят вероятности ошибок $\alpha(\delta) = P_1(d = 0)$, $\beta(\delta) = P_0(d = 1)$ и задают два числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$; и пусть, далее, $\Delta(\alpha, \beta)$ — совокупность всех решающих правил с $\alpha(\delta) \leqslant \alpha$, $\beta(\delta) \leqslant \beta$ и $\mathsf{E}_0\tau < \infty$, $\mathsf{E}_1\tau < \infty$.

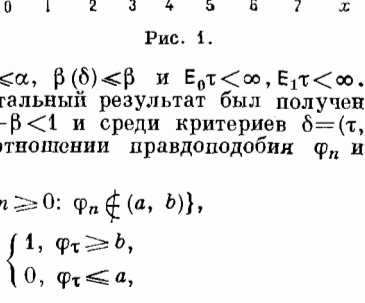


Рис. 1.

Следующий фундаментальный результат был получен А. Вальдом. Если $\alpha + \beta < 1$ и среди критериев $\delta = (\tau, d)$, основанных на отношении правдоподобия φ_n и имеющих вид

$$\tau = \inf\{n \geqslant 0: \varphi_n \notin (a, b)\},$$

$$d = \begin{cases} 1, & \varphi_\tau \geqslant b, \\ 0, & \varphi_\tau \leqslant a, \end{cases}$$

найдутся такие $a = a^*$ и $b = b^*$, что вероятности ошибок первого и второго рода в точности равны α и β, то решающее правило $\delta^* = (\tau^*, d^*)$ с $a = a^*$ и $b = b^*$ является в классе $\Delta(\alpha, \beta)$ оптимальным в том смысле, что

$$\mathsf{E}_0\tau^* \leqslant \mathsf{E}_0\tau, \quad \mathsf{E}_1\tau^* \leqslant \mathsf{E}_1\tau$$

для любого $\delta \in \Delta(\alpha, \beta)$.

Преимущества последовательного решающего правила $\delta^* = (\tau^*, d^*)$ по сравнению с классическим проще проиллюстрировать на примере задачи различения двух гипотез $H_0 : \theta = 0$ и $H_1 : 0 = 1$ относительно локального среднего значения θ винеровского процесса ξ_t с единичной диффузией. Оптимальное последовательное решающее правило $\delta^* = (\tau^*, d^*)$, обеспечивающее заданные вероятности ошибок α и β первого и второго рода соответственно, описывается следующим образом:

$$\tau^* = \inf\{t \geqslant 0: \lambda_t \notin (a^*, b^*)\},$$

$$d^* = \begin{cases} 1, & \lambda_{\tau^*} \geqslant b^*, \\ 0, & \lambda_{\tau^*} \leqslant a^*, \end{cases}$$

где $\lambda_t = \ln \varphi_t$ и отношение правдоподобия (производная меры, отвечающей $\theta = 1$, по мере, отвечающей $\theta = 0$) $\varphi_t = e^{\xi_t - \frac{1}{2} t}$, а $b^* = \ln \frac{1-\alpha}{\beta}$, $a^* = \ln \frac{\alpha}{1-\beta}$ (см. рис. 2).

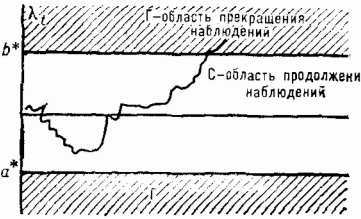


Рис. 2.

Оптимальное классич. правило $\tilde{\delta} = (\tilde{\tau}, \tilde{d})$ (согласно лемме Неймана — Пирсона) описывается следующим образом:

$$\tilde{t} = t(\alpha, \beta),$$

$$\tilde{d} = \begin{cases} 1, & \lambda_{\tilde{t}} \geqslant h(\alpha, \beta), \\ 0, & \lambda_{\tilde{t}} < h(\alpha, \beta), \end{cases}$$

где

$$t(\alpha, \beta) = (c_\alpha + c_\beta)^2,$$

$$h(\alpha, \beta) = \frac{c_\beta^2 - c_\alpha^2}{2},$$

а c_γ — корень уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c_\gamma}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \gamma.$$

Поскольку $\mathsf{E}_0\tau^* = 2\omega(\alpha, \beta)$, $\mathsf{E}_1\tau^* = 2\omega(\beta, \alpha)$, где

$$\omega(x, y) = (1-x) \ln \frac{1-x}{y} + x \ln \frac{x}{1-y},$$

то

$$\frac{\mathsf{E}_0\tau^*}{t(\alpha, \beta)} = 2\frac{\omega(\beta, \alpha)}{(c_\alpha + c_\beta)^2}, \quad \frac{\mathsf{E}_1\tau^*}{t(\alpha, \beta)} = 2\frac{\omega(\alpha, \beta)}{(c_\alpha + c_\beta)^2}.$$

Численный подсчет показывает, что при $\alpha, \beta \leqslant 0{,}03$

$$\frac{\mathsf{E}_0\tau^*}{t(\alpha, \beta)} \leqslant \frac{17}{30}, \quad \frac{\mathsf{E}_1\tau^*}{t(\alpha, \beta)} \leqslant \frac{17}{30}.$$

Иначе говоря, при рассматриваемых значениях ошибок первого и второго рода оптимальный последовательный метод различения требует примерно в два раза меньше наблюдений, чем оптимальный метод с фиксированным числом наблюдений. Более того, если $\alpha = \beta$, то

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\mathsf{E}_0\tau^*}{t(\alpha, \alpha)} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\mathsf{E}_1\tau^*}{t(\alpha, \alpha)} = \frac{1}{4}.$$

Лит.: [1] Вальд А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [2] Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1976.
А. Н. Ширяев.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ МЕТОД, *метод повторных подстановок, метод простой итерации,* — один из общих методов приближенного решения операторных уравнений. Во многих случаях хорошая сходимость построенных этим методом приближений позволяет применять его в практике вычислений.

Пусть E — нек-рое множество, на к-ром задан оператор A, отображающий E в себя. Требуется найти неподвижную точку этого отображения, т. е. решение уравнения

$$x = A(x), \quad x \in E. \tag{1}$$

Пусть уравнение (1) имеет решение x_* и каким-либо способом указано его начальное приближение $x_0 \in E$. Все остальные приближения в П. п. м. строятся по формуле

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Этот процесс наз. *простой одношаговой итерацией.*

Для исследования сходимости последовательности (2), а также для доказательства существования решения уравнения (1) широко применяется ниже сформулированный *принцип сжимающих отображений.*

Пусть E — полное метрич. пространство с метрикой ρ; оператор A определен в замкнутом шаре S радиуса δ с центром в x_0:

$$S=\{x\in E:\ \rho(x,\ x_0)\leqslant\delta\};$$

для всяких элементов x и y из шара S верно соотношение

$$\rho(Ax,\ Ay)\leqslant\alpha\rho(x,\ y),\ 0<\alpha=\text{const}<1;$$

для начального приближения x_0 выполнено неравенство $\rho(Ax_0,\ x_0)\leqslant m$, для чисел α, δ, m соблюдается условие $m/(1-\alpha)\leqslant\delta$.

Тогда: 1) последовательные приближения x_n, вычисляемые по правилу (2), могут быть найдены при всяком значении n, и все они принадлежат шару S; 2) последовательность x_n сходится к нек-рой точке $x_*\in S$; 3) предельный элемент x_* есть решение уравнения (1); 4) для приближения x_n верна следующая оценка близости к решению x_*:

$$\rho(x_n,\ x_*)\leqslant\frac{m}{1-\alpha}\alpha^n.$$

Далее, во всяком подмножестве пространства E, где для двух любых точек x, y верно неравенство $\rho(Ax,\ Ay)<\rho(x,\ y)$, уравнение (1) не может иметь более одного решения.

Пусть $E=\mathbb{R}^n$ — арифметическое n-мерное пространство и оператор A в (1) имеет вид $Ax=Bx+b$, где $B=\|a_{ik}\|$ — квадратная матрица n-го порядка, $b=(b_1,\ldots,b_n)$ — заданный, а $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ — искомый векторы в $\mathbb{R}^n$. Если в этом пространстве метрика определена формулой

$$\rho(x,\ y)=\max_i|x_i-y_i|$$

и элементы матрицы B удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^n|a_{ik}|<1$$

для всех i, $i=1,\ldots,n$, то из принципа сжимающих отображений следует, что система алгебраич. уравнений $x=Ax$ имеет единственное решение в $\mathbb{R}^n$, к-рое можно получить П. п. м., исходя из произвольного начального приближения $x_0\in\mathbb{R}^n$.

Если в $\mathbb{R}^n$ действует евклидова метрика

$$\rho(x,\ y)=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2},$$

тогда получается другое условие сходимости последовательных приближений:

$$\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}^2<1.$$

Пусть (1) — интегральное уравнение, в к-ром

$$Ax(t)=f(t)+\lambda\int_a^b K(t,\ s)\,x(s)\,ds,$$

где известные функции f, K интегрируемы с квадратом соответственно на множествах $[a,\ b]$ и $[a,\ b]\times[a,\ b]$, λ — числовой параметр. Тогда из принципа сжимающих отображений следует, что если

$$|\lambda|<\left(\int_a^b\int_a^b K^2(s,\ t)\,dt\,ds\right)^{-1/2},$$

то рассматриваемое интегральное уравнение имеет единственное решение в пространстве $L_2([a,\ b])$, к-рое можно построить П. п. м.

Лит.: [1] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.— Л., 1963; [2] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы, т. 1—2, М., 1976—77; [3] Коллатц Л., Функциональный анализ и вычислительная математика, пер. с нем., М., 1969. *Б. В. Хведелидзе.*

ПОСТА АЛГЕБРА — алгебра вида $(P\ \Omega)$, где P является множеством функций, а Ω — множеством операций, равносильных операциям композиции с различного рода ограничениями. Примерами П. а. являются конечнозначные и счетнозначные логики, логики неоднородных функций и т. п. Проблематика П. а. по существу совпадает с проблематикой для многозначных логик.

Лит. см. при ст. *Многозначная логика.* *В. Б. Кудрявцев.*

ПОСТА КАНОНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, исчисление Поста, — способ задания *перечислимых множеств* слов. Понятие П. к. с., предложенное Э. Постом (E. Post) в 1943, было первым общим понятием *исчисления*, пригодным для задания произвольных перечислимых множеств и не привязанным к логич. структуре порождаемых объектов, к их семантике и к логике *вывода правил*. П. к. с. задается четверкой A, P, $\mathcal{A}$, π, где A — алфавит исчисления, P (не имеющий общих букв с A) — алфавит переменных, $\mathcal{A}$ — список слов в A (аксиом исчисления), π — список правил вывода вида

$$\begin{gathered} G_{1,1}p_{1,1}\cdots G_{1,n_1}p_{1,n_1}G_{1,n_1+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hline G_{m,1}p_{m,1}\cdots G_{m,n_m}p_{m,n_m}G_{m,n_m+1} \\ G_1p_1\cdots G_np_nG_{n+1} \end{gathered} \qquad (*)$$

($G_{i,j}$ суть обозначения слов в A, $p_{i,j}$ — обозначения букв из P). Слово Q получается из $Q_1, \ldots, Q_m$ применением правила (*), если для каждой входящей в (*) буквы из P можно подобрать слово в A (значение этой переменной), подставляя к-рое вместо всех вхождений рассматриваемой переменной в (*), мы получим после такого замещения всех переменных слова $Q_1, \ldots, Q_m$ — над чертой и Q — под чертой. На основе этого понимания правил определяется выводимость в П. к. с. В теории исчислений применяется следующее определение *перечислимого множества слов в A*, эквивалентное обычному: M наз. *перечислимым*, если оно совпадает с множеством слов в A, выводимых в нек-рой П. к. с., алфавит к-рой содержит A (необходимость расширения A хотя бы одной буквой ξ неустранима, но можно потребовать, чтобы помимо M были выводимы лишь слова вида ξQ, где Q из A).

Рассматриваются различные специализации понятия П. к. с.: 1) *нормальные системы Поста* (все правила имеют вид $\frac{Gp}{pG'}$), 2) *локальные исчисления* (правила вида $\frac{p_1Gp_2}{p_1G'p_2}$), 3) *ограниченные исчисления* (алфавит однобуквенный, правила однопосылочны) и др. Упомянутые специализации предполагаются одноаксиомными, к каждой из них можно свести произвольную П. к. с. (установленная Постом эквивалентность П. к. с. и нормальных исчислений имеет фундаментальное значение для работ этого направления, для нахождения неразрешимых систем).

Лит. см. при ст. *Исчисление.* *С. Ю. Маслов.*

ПОСТА КЛАСС — замкнутый относительно операции суперпозиции класс функций *алгебры логики* (ф. а. л.). Э. Пост (E. Post) установил, что таких классов в точности счетное множество, и дал их явное описание. Им же показано, что все они являются конечно порожденными, построена решетка по включению, образованная этими классами. Множество указанных классов исчерпывается списком C_i, A_i, D_j, L_k, O_l, S_r, P_r, F_s^{μ}, F_s^{∞}, где $i=1, 2, 3, 4$; $j=1, 2, 3$; $k=1, \ldots, 5$; $l=1, \ldots, 9$; $r=1, 3, 5, 6$; $s=1, \ldots, 8$; $\mu=2, 3, \ldots$

Класс C_1 содержит все ф. а. л.; C_2 состоит из всех ф. а. л. $f(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что $f(0, \ldots, 0)=0$; C_3 — из всех ф. а. л. таких, что $f(1, \ldots, 1)=1$; $C_4=C_2\cap C_3$. Класс A_1 состоит из всех монотонных ф. а. л.;

$A_2 = C_2 \cap A_1$; $A_3 = C_3 \cap A_1$; $A_4 = A_2 \cap A_3$. Класс D_3 состоит из всех ф. а. л. $f(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$; $D_1 = C_4 \cap D_3$; $D_2 = A_1 \cap D_3$. Класс L_1 состоит из всех ф. а. л. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + d \pmod 2$, $d \in \{0, 1\}$; $L_2 = C_2 \cap L_1$; $L_3 = C_3 \cap L_1$; $L_4 = L_2 \cap L_3$; $L_5 = D_3 \cap L_1$.

Класс O_9 состоит из всех ф. а. л., существенно зависящих не более чем от одного переменного; $O_8 = A_1 \cap O_9$; $O_4 = D_3 \cap O_9$; $O_5 = C_2 \cap O_9$; $O_6 = C_3 \cap O_9$; $O_1 = O_5 \cap O_6$; O_7 состоит из всех константных функций; $O_2 = O_5 \cap O_7$; $O_3 = O_6 \cap O_7$.

Класс S_6 состоит из всех ф. а. л. $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ и всех константных ф. а. л.; $S_3 = C_2 \cap S_6$; $S_5 = C_3 \cap S_6$; $S_1 = S_3 \cap S_5$.

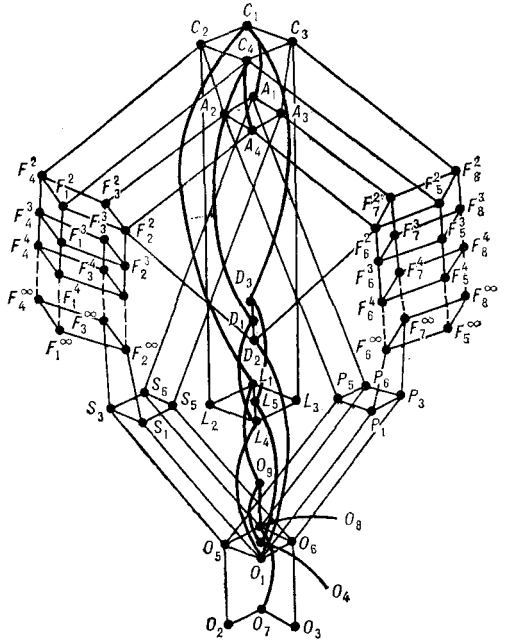
Класс P_6 состоит из всех ф. а. л. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \& x_2 \& \ldots \& x_n$ и всех константных ф. а. л.; $P_5 = C_2 \cap P_6$; $P_3 = C_3 \cap P_6$; $P_1 = P_5 \cap P_3$.

Ф. а. л. удовлетворяет условию a^μ, если любые μ наборов, на к-рых она равна 0, имеют общую координату, равную нулю. Аналогично с заменой 0 на 1 вводится условие A^μ.

Класс F_4^μ состоит из всех ф. а. л. со свойством a^μ; $F_1^\mu = C_4 \cap F_4^\mu$; $F_3^\mu = A_1 \cap F_4^\mu$; $F_2^\mu = F_1^\mu \cap F_3^\mu$; F_8^μ состоит из всех ф. а. л. со свойством A^μ; $F_5^\mu = C_4 \cap F_8^\mu$; $F_7^\mu = A_3 \cap F_8^\mu$; $F_6^\mu = F_5^\mu \cap F_7^\mu$.

Ф. а. л. удовлетворяет условию a^∞, если все наборы, на к-рых она равна нулю, имеют общую координату, равную нулю. Аналогично с заменой 0 на 1 вводится свойство A^∞. Класс F_4^∞ состоит из всех ф. а. л. со свойством a^∞; $F_1^\infty = C_4 \cap F_4^\infty$; $F_3^\infty = A_1 \cap F_4^\infty$; $F_2^\infty = F_1^\infty \cap F_3^\infty$; F_8^∞ состоит из всех ф. а. л. со свойством A^∞; $F_5^\infty = C_4 \cap F_8^\infty$; $F_7^\infty = A_3 \cap F_8^\infty$; $F_6^\infty = F_5^\infty \cap F_7^\infty$.

Решетка по включению, образованная этими классами, изображена на рисунке. На нем классы изобра-



жены точками. Две точки соединены дугой, если нижележащая точка обозначает класс, непосредственно содержащийся в верхнем классе (т. е. между ними нет промежуточных классов).

Лит.: [1] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста, М., 1966.

В. Б. Кудрявцев.

ПОСТА МАШИНА — один из вариантов *Тьюринга машины*.

ПОСТА НОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА, нормальное исчисление,— важный частный случай *Поста канонической системы*. *С. Ю. Маслов.*

ПОСТА РЕШЕТКА — решетка по включению *Поста алгебр*.

ПОСТА СИСТЕМА ПРОДУКЦИЙ, нормальная система Поста, нормальное исчисление Поста,— частный случай *Поста канонической системы*, когда все правила вывода имеют вид $\frac{Gp}{pG}$ и имеется только одно исходное слово (одна аксиома рассматриваемого исчисления). Э. Пост [1] установил эквивалентность П. с. п. и канонич. систем Поста в широком смысле. П. с. п. были использованы Э. Постом и А. А. Марковым (1947) при построении первых примеров *ассоциативных исчислений* с неразрешимой проблемой распознавания равенства слов (проблема Туэ).

Лит.: [1] Post E. L., «Amer. J. Math.», 1943, v. 65, № 2, p. 197—215; [2] Марков А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 42). *С. И. Адян.*

ПОСТНИКОВА КВАДРАТ — *когомологическая операция* типа $0(1, A, 3, B)$, где A, B — абелевы группы с фиксированным гетероморфизмом η: $A \to B$, т. е. таким отображением, что функция

$$h(g_1, g_2) = \eta(g_1 + g_2) - \eta(g_1) - \eta(g_2)$$

билинейна и $\eta(-g) = \eta(g)$. Пусть $\xi : F \to A$ — эпиморфизм, а $F = \bigoplus \mathbb{Z}$ — свободная абелева группа. Для 1-коциклов П. к. определен формулой

$$e^1 \longrightarrow \tilde{\eta}\tilde{\xi}(e_0^1 \cup \delta e_0^1),$$

где e_0^1 — такая коцепь с коэффициентами в F, что $\tilde{\xi}e_0^1 = e^1$. *Надстройкой* над П. к. является *Понтрягина квадрат*. Для односвязного X П. к., для к-рого $A = \pi_2(X)$, $B = \pi_3(X)$, а η определяется композицией с отображением Хопфа $S^3 \to S^2$, используется при классификации отображений трехмерных полиэдров в X. П. к. введен М. М. Постниковым [1].

Лит.: [1] Постников М. М., «Докл. АН СССР», 1949, т. 64, № 4, с. 461—62. *А. Ф. Харшиладзе.*

ПОСТНИКОВА СИСТЕМА, натуральная система, гомотопическая резольвента, П-разложение общего типа,— последовательность расслоений

$$\cdots \xrightarrow{p_{n+1}} X_n \xrightarrow{p_n} X_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} \cdots \xrightarrow{p_1} X_0 = pt,$$

слоями к-рых являются *Эйленберга — Маклейна пространства* $K(\pi_n, n)$, где π_n — нек-рая группа (абелева при $n > 1$). Введена М. М. Постниковым [1]. Пространство X_n наз. n-м членом (или n-м этажом) П. с. $\{p_n : X_n \to X_{n-1}\}$. П. с. $\{p_n : X_n \to X_{n-1}\}$ наз. сходящейся к пространству X, если ее обратный предел $\varprojlim \{p_n : X_n \to X_{n-1}\}$ слабо гомотопически эквивалентен пространству X. В этом случае пространство X наз. пределом П. с. $\{p_n : X_n \to X_{n-1}\}$.

Морфизмом П. с. $\{p_n : X_n \to X_{n-1}\}$ в П. с. $\{q_n : Y_n \to Y_{n-1}\}$ наз. последовательность непрерывных отображений $f_n : X_n \to Y_n$, для к-рых диаграмма гомотопически коммутативна. Морфизм $\{f_n\}$ индуцирует отображение $\varprojlim f_n : \varprojlim X_n \to \varprojlim Y_n$, называемое его пределом.

Из определения П. с. следует, что для каждого $n \geqslant 1$ отображение p_n является $(n-1)$-эквивалентностью (см. *Гомотопический тип*), в частности $\pi_i(X_{n-1}) \cong \pi_i(X_n)$ при $i < n$, $\pi_n(X_n) \cong \pi_n$ и $\pi_i(X_n) = 0$ при $i > n$. Пространства X и X_n имеют один и тот же $(n+1)$-тип. В частности, если П. с. конечна, т. е. для нек-рого числа N при всех $n > N$ группа π_n тривиаль-

на, то пространства X и X_N гомотопически эквивалентны. В общем случае при $i \leqslant n$ имеют место изоморфизмы $H_i(X_n) \cong H_i(X)$ и $\pi_i(X_n) \cong \pi_i(X)$, т. е. с ростом n группы гомологий и гомотопич. группы стабилизируются. Для любого клеточного разбиения K размерности $\leqslant n$ множества $[K, X]$ и $[K, X_n]$ совпадают. Характеристич. класс $k_n = c(p_n) \in H^{n+1}(X_{n-1}; \{\pi_n\})$ расслоения $p_n : X_n \to X_{n-1}$, т. е. образ при *трансгрессии*

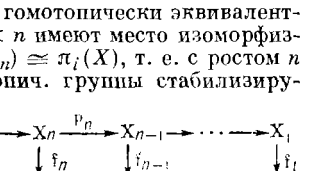


Рис. 1,

$$\tau: H^n(K(\pi, n); \pi) \longrightarrow H^{n+1}(B; \{\pi\})$$

фундаментального класса $\iota_n \in H^n(K(\pi, n); \pi)$, наз. n-м k-инвариантом (или n-м постниковским фактором) П. с. или ее предела X. Для любого $n \geqslant 1$ n-й член П. с., а потому и $(n+1)$-тип пространства X полностью определяются группами $\pi_1, \ldots, \pi_n$ и k-инвариантами $k_1, \ldots, k_{n-1}$. Часто П. с. наз. двойная последовательность

$$\{\pi_1, k_1, \ldots, \pi_n, k_n, \ldots\}.$$

Пространство X тогда и только тогда является пределом П. с. $\{p_n : X_n \to X_{n-1}\}$, когда существуют такие $(n-1)$-эквивалентности $\rho_n : X \to X_n$, что $\rho_{n-1} \sim \sim p_n \circ \rho_n$ для любого $n \geqslant 1$. Аналогично характеризуются пределы морфизмов П. с.

Существует вариант понятия П. с., иногда оказывающийся более полезным. В этом варианте пространства X_n предполагаются клеточными разбиениями, обладающими тем свойством, что $X_{n-1} \subset X_n^n$ и $X_{n-1}^{n-1} = X_n^{n-1}$, а отображения $p_n : X_n \to X_{n-1}$ — такими клеточными отображениями (уже не являющимися расслоениями), что, во-первых, $p_n | X_n^{n-1} = \mathrm{id}$ и, во-вторых, гомотопич. слой отображения p_n (т. е. слой этого отображения, превращенного в расслоение) является пространством $K(\pi_n, n)$. Такие П. с. наз. клеточными. Пределом клеточной П. с. является клеточное разбиение X, для к-рого $X^n = X_n^n$ при любом $n \geqslant 1$. Произвольная П. с. гомотопически эквивалентна клеточной П. с.

Основная теорема теории П. с. утверждает (см. [1], [6]), что каждое пространство X является пределом нек-рой однозначно (с точностью до изоморфизма) определенной П. с. $\{p_n : X_n \to X_{n-1}\}$. Эта П. с. наз. системой Постникова пространства X. Имеет место также вариант основной теоремы для отображений: любое отображение $f : X \to Y$ является пределом нек-рого морфизма $\{f_n : X_n \to Y_n\}$ П. с. $\{p_n : X_n \to X_{n-1}\}$ пространства X в П. с. $\{q_n : Y_n \to Y_{n-1}\}$ пространства Y. Этот морфизм наз. системой Постникова отображения f (др. названия: гомотопическая резольвента отображения, П-система общего типа отображения, система Мура—Постникова отображения). Для постоянного отображения $c : X \to pt$ линейно связного пространства X его П. с. совпадает с П. с. пространства X.

В приложениях большое распространение получили т. н. стандартные системы Постникова (к-рые зачастую наз. просто системами Постникова), представляющие собой П. с., составленные из главных расслоений $p_n : X_n \to X_{n-1}$, индуцирующихся из стандартных расслоений Серра $K(\pi_n, n) \to \to EK(\pi_n, n+1) \to K(\pi_n, n+1)$ постниковскими факторами $k_n \in H^{n+1}(X_{n-1}; \pi_n)$, интерпретируемыми в силу представимости группы когомологий как отображения $k_n : X_{n-1} \to K(\pi_n, n+1)$. Стандартными П. с. обладают все пространства, гомотопически простые во всех

размерностях (в терминологии [2] — абелевы пространства), и только они (см. [3], [4]).

Стандартные П. с. применяются для решения задач распространения и задач понятия, к которым сводятся многие задачи алгебраической топологии. Объединенная постановка этих задач заключается в следующем. Пусть имеется (гомотопически) коммутативный квадрат пространств и отображений, в котором отображение i является замкнутым корасслоением с кослоем X/A, а p — расслоением со слоем F. Спрашивается, существует ли такое отображение $X \to Y$, чтобы оба получающихся треугольника были (гомотопически) коммутативными. Далее, если такое отображение существует, то требуется вычислить множество $[X, Y]_B^A$ гомотопич. классов отображений $X \to Y$ «под A» (то есть rel A) и «над B». Пусть для расслоения $p : Y \to B$ существует стандартная П. с. $\{p_n : Y_n \to Y_{n-1}, Y_0 = B\}$ (для этого достаточно, напр., потребовать, чтобы пространства Y и B были односвязными). Задачу относительного поднятия решают шаг за шагом.

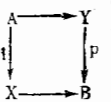


Рис. 2.

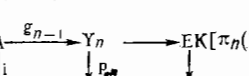


Рис. 3.

Рассмотрим «элементарную» задачу относительного поднятия отображения $f_{n-1}: X \to Y_{n-1}$ с $(n-1)$-го члена П. с. на n-й член П. с. (рис. 3).

Отображения f_{n-1} и g_{n-1} определяют отображение $X/A \to K(\pi_n, (F), n+1)$, т. е. класс когомологий $c^{n+1} \in H^{n+1}(X, A, \pi_n(F))$, называемый препятствием. Отображение f_{n-1} тогда и только тогда можно поднять в Y_n, когда $c^{n+1}=0$. Два поднятия f_n' и f_n'' определяют элемент $d^n \in H^n(X, A; \pi_n(F))$, называемый различающей, к-рый тогда и только тогда равен нулю, когда поднятия f_n' и f_n'' гомотопны.

Таким образом, задача относительного поднятия будет решена, если последовательно возникающие препятствия c^{n+1} равны нулю (напр., если $H^{n+1}(X, A; \pi_n(F))=0$. Поднятие будет единственно, если последовательно возникающие различающие d^n равны нулю (напр., если $H^n(X, A; \pi_n(F))=0$). В случае, когда корасслоение i является вложением клеточных разбиений, препятствие c^{n+1} и различающая d^n совпадают с обычными «поклеточными» *препятствием* и *различающей*.

Для односвязных пространств X, группы гомологий к-рых конечно порождены, П. с. эффективно вычислима [5] и, следовательно, эффективно вычислим гомотопич. тип пространства X. Однако на практике для большинства пространств из-за резко возрастающей сложности вычислений удается вычислить только начальные отрезки П. с. Для вычислений используется метод *когомологических операций*.

Двойственной к П. с. является система Картана — Серра

$$\cdots \longrightarrow X_n^{CS} \longrightarrow X_{n-1}^{CS} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{k-1}^{CS} = X$$

пространства X, состоящая из расслоений, слоями к-рых являются пространства Эйленберга — Маклейна $K(\pi_n(X), n-1)$. Пространство X_n^{CS} наз. $(n+1)$-м убивающим пространством для X. Члены X_n^{CS} системы Картана — Серра являются гомотопич. слоями $(n-1)$-эквивалентностей $\rho_n : X \to X_n$ для П. с. пространства X, а члены X_n П. с. — пространствами петель над слоями расслоений $X_n^{CS} \to X$.

Расщепленной П. с. наз. последовательность главных расслоений

$$\cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 = pt,$$

слоями к-рых являются пространства Эйленберга — Маклейна $K(\pi_n, s_n)$, где $s_n \leqslant s_{n+1}$. Расщепленные П. с. являются основным технич. средством изучения т. н. нильпотентных пространств и, в частности, их *локализаций* (см. [2], [6], [7]). Имеются и другие варианты П. с. (см. [6]).

Лит.: [1] Постников М. М., Исследования по гомотопической теории непрерывных отображений, ч. 1—2, М., 1955; [2] его же, «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 6, с. 117—81; [3] Мошер Р., Тангора М., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970, гл. 13; [4] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971, гл. 8; [5] Браун Э. Х., «Математика», 1958, т. 2, № 2, с. 3—24; [6] Baues H. J., Obstruction theory of the homotopy classification of maps, B.—Hdlb.—N.Y., 1977; [7] Hilton P., Mislin G., Roitberg J., Localization of nilpotent groups and spaces, Amst., 1976.

С. Н. Малыгин.

ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВО — риманово пространство M, у к-рого секционная кривизна $K(\sigma)$ по всем двумерным направлениям σ постоянна: если $K(\sigma) = k$, то говорят, что П. к. п. имеет кривизну k. Согласно теореме Шура, риманово пространство M^n, $n>2$, есть П. к. п., если для любой точки $p \in M$ секционная кривизна $K(\sigma)$ по направлению любых двумерных подпространств σ касательного пространства T_pM одна и та же. Тензор кривизны П. к. п. выражается через кривизну k и метрич. тензор g_{ij} по формуле

$$R^i_{jkl} = k\left(\delta^i_k g_{jl} - \delta^i_l g_{jk}\right).$$

П. к. п. является локально симметрическим пространством.

С точностью до изометрии существует единственное полное односвязное n-мерное риманово пространство $S^n(k)$ постоянной кривизны k. При $k=0$ это *евклидово пространство*, при $k>0$ — сфера радиуса $1/\sqrt{k}$, при $k<0$ — *Лобачевского пространство*.

Пространства $S^n(k)$ являются максимально однородными пространствами, т. е. обладают группой движений максимально возможной размерности $\frac{n(n+1)}{2}$. Все отличные от $S^n(k)$ максимально однородные римановы пространства исчерпываются проективными (иначе, эллиптическими) пространствами, к-рые получаются из сфер отождествлением диаметрально противоположных точек.

Полные, но неодносвязные П. к. п. наз. пространственными формами. Они получаются из односвязного пространства $S^n(k)$ факторизацией по свободно действующей дискретной группе движений пространства $S^n(k)$. Известны все пространственные формы положительной кривизны. Проблема классификации пространственных форм нулевой и отрицательной кривизны до конца (1983) не решена.

П. к. п. выделяются среди всех римановых пространств одним из следующих характеристич. свойств: 1) П. к. п. удовлетворяют аксиоме плоскости, т. е. любое геодезическое в точке подмногообразие в П. к. п. является вполне геодезическим. 2) П. к. п. является локально проективно плоским пространством, т. е. допускает локально проективные отображения в евклидово пространство.

Понятие П. к. п. не обладает свойством корректности, т. е. пространство с мало меняющимися секционными кривизнами может сильно отличаться от П. к. п. Однако нек-рые общие свойства П. к. п., напр. топологич. строение, при этом сохраняются (теорема Адамара — Картана, теорема о сфере и др., см. *Кривизна*, [2]). Совершенно иначе обстоит дело для псевдоримановых П. к. п. — любое псевдориманово пространство знакоопределенной секционной кривизны, размерность к-рого больше двух, является П. к. п.

П. к. п. являются также локально конформно евклидовыми, т. е. допускают локальные конформные отображения в евклидово пространство.

Лит.: [1] Вольф Дж., Пространства постоянной кривизны, пер. с англ., М., 1982; [2] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 3, с. 3—55.

Д. Д. Соколов.

ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ КРИВАЯ — плоская выпуклая кривая для к-рой расстояние между любыми парами параллельных опорных прямых одинаково. Это расстояние наз. ш и р и н о й П. ш. к. Кроме окружности, существует бесконечно много других, вообще говоря, негладких П. ш. к. Простейшей из них является т р е у г о л ь н и к Р ё л о, состоящий из трех дуг окружности одного радиуса a, к-рые соединяют вершины равностороннего треугольника со стороной a (см. рис. 1). Ширина треугольника Рёло равна a. Площадь фигуры, ограниченной треугольником Рёло, равна $\frac{a^2}{2}\left(\pi^2-\frac{1}{2}\right)$. Из всех П. ш. к. данной ширины a треугольник Рёло ограничивает фигуру наименьшей площади. Примеры других П. ш. к., где дуги П. ш. к., описанные вокруг различных многоугольников, представляют собой дуги окружностей, см. на рис. 2. Длина П. ш. к. ширины a равна πa (*Барбье теорема*).

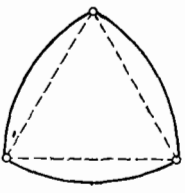


Рис. 1.

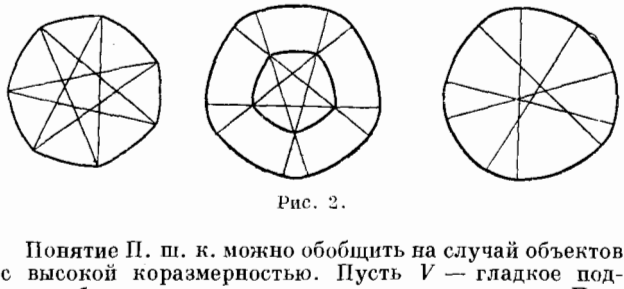


Рис. 2.

Понятие П. ш. к. можно обобщить на случай объектов с высокой коразмерностью. Пусть V — гладкое подмногообразие n-мерного евклидова пространства. Пространство V наз. т р а н с н о р м а л ь н ы м п р о с т р а н с т в о м (см. [2]), если для каждой точки p на V нормальное многообразие $\nu(p)$ таково, что для каждой точки $q\in\nu(p)\cap V$ выполнено условие $\nu(q)=\nu(p)$. Класс плоских транснормальных кривых совпадает с классом гладких П. ш. к. (о пространственных транснормальных кривых см. [3]).

Лит.: [1] Бляшке В., Круг и шар, пер. с нем., М., 1967; [2] Robertson S. A., «Michigan Math. J.», 1964, v. 11, p. 97—105; [3] Wegner B., «Math. Nachr.», 1972, Bd 53, S. 337—44; 1975, Bd 67, S. 213—23.

Д. Д. Соколов.

ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ ТЕЛО — выпуклое тело, для к-рого расстояние между любыми парами параллельных опорных плоскостей одинаково. Это расстояние наз. ш и р и н о й П. ш. т. Кроме шара существует бесконечно много других, вообще говоря, негладких П. ш. т. Простейшим из них является тело, ограниченное поверхностью, полученной путем вращения треугольника Рёло вокруг одной из его осей симметрии. Класс П. ш. т. совпадает с классом выпуклых т е л п о с т о я н н о г о о х в а т а, для к-рых границы ортогональных проекций на всевозможные плоскости имеют совпадающие длины.

Кроме П. ш. т., иногда рассматривают т е л а п о с т о я н н о й я р к о с т и, к-рые характеризуются тем, что площади поперечного сечения всевозможных ортогональных проекций этих тел совпадают.

Лит.: [1] Бляшке В., Круг и шар, пер. с нем., М., 1967.

Д. Д. Соколов.

ПОТЕНЦИАЛ, п о т е н ц и а л ь н а я ф у н к ц и я, — одна из характеристик векторного поля.

Скалярный потенциал — скалярная функция $v(M)$ такая, что $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad} v(M)$ во всех точках области задания поля $\boldsymbol{a}(M)$ (иногда, напр. в физике, П. наз. величину, противоположную по знаку). Если такая функция существует, то векторное поле наз. *потенциальным полем*.

Векторный потенциал — векторная функция $A(M)$ такая, что $\boldsymbol{a}=\operatorname{rot} A(M)$ во всех точках области задания поля $\boldsymbol{a}(M)$. Если такая функция существует, то векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ наз. *соленоидальным полем*.

В зависимости от распределения порождающих П. масс или зарядов рассматриваются П. точечного заряда, поверхностный П. (простого или двойного слоя), объемный П. и др. (см. *Потенциала теория*). *А. Б. Иванов.*

ПОТЕНЦИАЛА ТЕОРИИ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ — задачи, в к-рых требуется найти форму и плотности притягивающего тела по заданным значениям внешнего (внутреннего) потенциала этого тела (см. *Потенциала теория*). В другой постановке одна из таких задач состоит в отыскании такого тела, чтобы его внешний объемный потенциал заданной плотности совпадал вне этого тела с заданной гармонич. функцией. Первоначально П. т. о. з. рассматривались в связи с задачами теории фигуры Земли и небесной механики. П. т. о. з. связаны с задачами фигур равновесия вращающейся жидкости и задачами геофизики.

Центральное место в исследовании П. т. о. з. составляют проблемы существования, единственности, устойчивости, а также создание эффективных численных методов их решения. Теоремы существования решений в малом имеются для случая тела, близкого к данному, но при этом имеются значительные трудности в исследовании уравнений, как правило, нелинейных, к к-рым сводятся эти задачи. Критериев существования глобальных решений нет (1983). Во многих случаях существование глобальных решений предполагается заранее, что естественно во многих приложениях, и исследуются проблемы единственности и устойчивости. Одним из основных моментов в исследовании проблемы единственности является выявление дополнительных условий на решения, обеспечивающих их единственность. С проблемой единственности связана проблема устойчивости. Для задач, записанных в виде уравнения 1-го рода, вообще говоря, сколь угодно малым вариациям правой части могут соответствовать конечные вариации решений, т. е. эти задачи относятся к некорректно поставленным задачам. Для того чтобы задача стала корректной, накладывается ряд дополнительных ограничений на решения; при этих ограничениях получаются различные характеристики отклонения решения в зависимости от отклонения правой части.

Ниже сформулированы обратные задачи ньютонова (объемного) потенциала и потенциала простого слоя для уравнения Лапласа в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, хотя указанные задачи исследуются и в n-мерном ($n>2$) евклидовом пространстве для потенциалов общих эллиптич. уравнений (см. [7]).

Пусть T_α, $\alpha=1, 2$,— односвязные ограниченные области с кусочно гладкими границами S_α;

$$U_\alpha(x)=\int_{T_\alpha}\frac{1}{|x-y|}\mu_\alpha(y)\,dy$$

— ньютонов потенциал;

$$V_\alpha(x)=\int_{S_\alpha}\frac{1}{|x-y|}\xi_\alpha(y)\,dS_y$$

— потенциал простого слоя, где $|x-y|$ — расстояние между точками $x=(x_1, x_2, x_3)$ и $y=(y_1, y_2, y_3)$ в $\mathbb{R}^3$, $\mu_\alpha(y)\neq 0$ ($\xi_\alpha(y)\neq 0$) почти всюду в $T_\alpha(S_\alpha)$. И пусть

$$Z_\alpha(x)=\beta U_\alpha(x)+\gamma V_\alpha(x),$$

где β, γ — действительные числа, $\beta^2+\gamma^2\neq 0$.

Общая в н е ш н я я П. т. о. з. состоит в нахождении формы и плотности притягивающего тела по заданным значениям внешнего потенциала $Z(x)$. Для получения условий единственности решения этой задачи она формулируется следующим образом: найти такие условия для областей T_α и плотностей μ_α, ζ_α, чтобы из равенства внешних потенциалов $Z_1(x)$ и $Z_2(x)$:

$$Z_1(x) = Z_2(x) \text{ для } x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\overline{T_1} \cup \overline{T_2}) \qquad (1)$$

следовало равенство $T_1 = T_2$, $\mu_1 = \mu_2$, $\zeta_1 = \zeta_2$. Если множество $\mathbb{R}^3 \setminus (\overline{T_1} \cup \overline{T_2})$ состоит из одной компоненты, то условие (1) выполняется, когда $Z_1(x) = Z_2(x)$ для $|x| > R$, где R — достаточно большое, или когда на границе шара $|x| = R$ задаются данные, обеспечивающие совпадение $Z_1(x)$ и $Z_2(x)$ вне этого шара. В качестве таких данных могут быть выбраны данные Дирихле на всей границе шара либо данные Коши на куске границы шара и т. д. В дальнейшем для простоты считается, что множества $T' = T_1 \cap T_2$ и $T'' = \mathbb{R}^3 \setminus (\overline{T_1} \cup \overline{T_2})$ состоят из одной компоненты.

Решение общей внешней П. т. о. з. единственно, если $\mu_1 = \mu_2 = \mu > 0$, $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta > 0$, а области T_α контактны, т. е. такие, что для каждого из множеств T' и T'' существует общий участок S_* ($\operatorname{mes} S_* \neq 0$) границ S_α, причем $\operatorname{mes}[(S_1 \cup S_2) \setminus S_*] = 0$.

П. т. о. з. для ньютоновых потенциалов получается, когда в (1) $\beta = 1$ и $\gamma = 0$. Пусть T_α, $\alpha = 1, 2$,— области, звездные относительно общей точки, а функции $\mu_\alpha(y)$ имеют вид $\mu_\alpha(y) = \delta_\alpha \nu(y)$, где $\delta_\alpha = \text{const}$, $\nu > 0$ и не зависит от $\rho = |y|$. Если ньютоновы потенциалы удовлетворяют условию (1) и, кроме того, существует точка $x_0 \in T_1 \cap T_2$ такая, что $U_1(x_0) = U_2(x_0)$, то $T_1 = T_2$, $\mu_1 = \mu_2$.

Если в условиях (1) положить $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, то получается задача об определении формы притягивающего тела по известным значениям внешнего ньютонова потенциала $U(x)$ заданной плотности. Решение этой задачи единственно в классе областей T_α, звездных относительно общей точки, в случае заданных плотностей $\mu(y)$, монотонно неубывающих с ростом $|y|$.

Если в условиях (1) положить $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\zeta_1 = \zeta_2$, то получается задача об определении формы притягивающего тела по известным значениям внешнего потенциала простого слоя $V(x)$ заданной плотности ζ. Для выпуклых тел постоянной плотности решение этой задачи единственно.

Если в условиях (1) положить $T_1 = T_2 = T$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, то получается задача об определении плотности притягивающего тела по известным значениям внешнего ньютонова потенциала. Решение задачи единственно, если функции $\mu_\alpha(y)$ имеют вид $\mu_\alpha(y) = \eta(y)\nu_\alpha(y)$, где $\frac{\partial \nu_\alpha}{\partial \rho} = 0$, $\eta \geqslant 0$, $\frac{\partial \eta}{\partial \rho} \geqslant 0$.

Общая в н у т р е н н я я П. т. о. з. состоит в нахождении формы и плотностей притягивающего тела по заданным значениям внутреннего потенциала $Z(x)$. Для получения теорем единственности используется следующая формулировка этой задачи: найти условия для областей T_α и плотностей μ_α, ζ_α, чтобы из совпадения внутренних потенциалов $Z_1(x)$ и $Z_2(x)$:

$$Z_1(x) = Z_2(x) \text{ для } x \in T_1 \cap T_2 \qquad (2)$$

следовали равенства $T_1 = T_2$, $\mu_1 = \mu_2$, $\zeta_1 = \zeta_2$.

Если в условиях (2) $\beta = 1$, $\gamma = 0$, то в классе выпуклых тел переменной положительной плотности решение единственно. Если же в условиях (2) $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta = \text{const}$, то в классе выпуклых тел решение также единственно.

Пусть ищется тело T такое, что его внешний ньютонов потенциал $U(x;\ T_1,\ \mu)$ данной плотности $\mu(x)$ равен вне тела T_1 заданной гармонич. функции $H(x)$,

$H(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ и $H(x)$ близка в смысле нек-рой функциональной метрики к внешнему ньютонову потенциалу $U(x;\ T,\ \mu)$ заданного тела T плотности μ. Для односвязных областей T с гладкой границей S при условии $\mu(x)|_S \neq 0$ решение задачи существует и единственно.

Внутренняя задача ставится аналогично внешней, причем $H(x)$ является решением неоднородного уравнения Лапласа в конечной области $G_0 \supset \overline{T}$:

$$\Delta H = -\mu(x) \text{ для } x \in G_0.$$

Ищется тело T_1 такое, что для

$$\operatorname{grad} H(x) = \operatorname{grad} U(x;\ T_1,\ \mu).$$

В отличие от внешней внутренняя задача имеет, вообще говоря, не единственное решение; число решений определяется уравнением разветвлений.

Плоские П. т. о. з. ($n=2$) ставятся аналогично пространственным с учетом соответствующего поведения потенциалов на бесконечности. В связи с этим ряд утверждений, приведенных выше для $n=3$, видоизменяется. Плоские П. т. о. з. иногда удобно исследовать методами теории функций комплексного переменного и конформных отображений.

Плоская внешняя П. т. о. з. Пусть $\mu=1$ — заданная плотность, причем вместо логарифмич. потенциала масс введена его производная $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$; на комплексной плоскости $z=x+iy$ вне круга $K(0,\ R) = \{|z| < R\}$ задана аналитич. функция $H(z)$, $H(\infty)=0$, особые точки к-рой при ее аналитич. продолжении находятся внутри области D_*, $0 \in D_*$. Требуется найти конечную односвязную область D с жордановой границей, $\overline{D}_* \subset D \subset \overline{D} \subset K(0,\ R)$, такую, чтобы $H(z) = U(z,\ D)$ для $|z| > R$, где

$$U(z,\ D) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{1}{z-\zeta}\, d\xi\, d\eta,\ \zeta = \xi + i\eta.$$

Решением этой задачи считается функция $z(t)$, отображающая конформно единичный круг $|t| < 1$ комплексной плоскости t на область D плоскости $z=x+iy$ и удовлетворяющая условиям $z(0)=0$, $z'(0)>0$.

Пусть D — заданная конечная односвязная область с жордановой границей, функция $U_\alpha(z) = U(z,\ D)$ для $z \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Тогда функция удовлетворяет уравнению

$$z^*(s) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{U_\alpha[z(t)]\, dt}{t-s},\ |s| > 1, \qquad (3)$$

где

$$z^*(s) = \overline{z\left(\frac{1}{\overline{s}}\right)} \text{ при } |s| \geqslant 1.$$

Если $z(t)$ является решением уравнения (3), в к-ром $U_\alpha(z)$ заменена указанной выше функцией $H(z)$, причем $z(t)$ однолистна при $|t| < 1$, $z(0)=0$, $z'(0) > 0$, то $H(z) = U(z,\ D)$ для $|z| > R$.

Из уравнения (3) можно получить ряд связей между функцией $U_\alpha(z)$ и функцией $z(t)$. Напр., если внешний потенциал $U_\alpha(z)$ можно аналитически продолжить внутрь D через всю границу ∂D, то $z(t)$ — аналитич. функция при $|t|=1$; если

$$U_\alpha(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{z^k} \text{ при } |z| > R,\ c_m \neq 0,$$

то

$$z(t) = \alpha_1 t + \ldots + \alpha_m t^m,\ \alpha_m \neq 0.$$

Это позволяет иногда решить плоскую П. т. о. з. в конечном виде. Пусть $H(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{z^k}$, $c_m \neq 0$. Тогда соот-

ветствующее нелинейное уравнение для $z(t)$ эквивалентно, вообще говоря, нелинейной системе алгебраич. уравнений относительно коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Функция $z(t)$, вообще говоря, не однолистная при $|t|<1$, находится как решение этой алгебраич. системы уравнений. Класс однолистных в круге $|t|<1$ решений $z(t)$, удовлетворяющих условиям $z(0)=0$, $z'(0)>0$, является решением поставленной П. т. о. з.

Аналогичное исследование можно провести для внешней обратной задачи логарифмич. потенциала простого слоя, а также для внутренних обратных задач логарифмич. потенциалов, причем как для внешних, так и для внутренних П. т. о. з. можно рассматривать переменные плотности.

Лит.: [1] Новиков П., «Докл. АН СССР», 1938, т. 18, № 3, с. 165—68; [2] Тихонов А. Н., там же, 1943, т. 39, № 5, с. 195—98; [3] Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.— Л., 1946; [4] Иванов В. К., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1956, т. 20, № 6, с. 793—818; [5] его же, «Докл. АН СССР», 1955, т. 105, № 3, с. 409—11; 1956, т. 106, № 4, с. 598—99; [6] Лаврентьев М. М., О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосиб., 1962; [7] Прилепко А. И., «Дифференциальные уравнения», 1966, т. 2, № 1, с. 107—24; 1967, т. 3, № 1, с. 30—44; 1970, т. 6, № 1, с. 27—49; 1972, т. 8, № 1, с. 118—25; его же, «Сиб. матем. ж.», 1965, т. 6, № 6, с. 1332—56; 1971, т. 12, № 3, с. 630—47; № 4, с. 828—36; № 6, с. 1341—53; [8] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, 2 изд., М., 1979.

А. И. Прилепко.

ПОТЕНЦИАЛА ТЕОРИЯ — в первоначальном понимании — учение о свойствах сил, действующих по закону всемирного тяготения. В формулировке этого закона, данной И. Ньютоном (I. Newton, 1687), речь идет только о силах взаимного притяжения, действующих на две материальные частицы малых размеров, или материальные точки, прямо пропорциональные произведению масс этих частиц и обратно пропорциональные квадрату расстояния между частицами. Поэтому первой и важнейшей с точки зрения небесной механики и геодезии задачей было изучение сил притяжения материальной точки ограниченным гладким материальным телом — сфероидом и, в частности, эллипсоидом (ибо многие небесные тела имеют именно эту форму). После первых частных достижений И. Ньютона и др. ученых основное значение здесь имели работы Ж. Лагранжа (J. Lagrange, 1773), А. Лежандра (A. Legendre, 1784—94) и П. Лапласа (P. Laplace, 1782—99). Ж. Лагранж установил, что поле сил тяготения, как говорят теперь,— потенциальное, и ввел функцию, к-рую позже Дж. Грин (G. Green, 1828) назвал потенциальной, а К. Гаусс (C. Gauss, 1840) — просто потенциалом. Ныне достижения этого первоначального периода обычно входят в курсы классич. небесной механики (см. также [2]).

Еще К. Гаусс и его современники обнаружили, что *потенциалов метод* применим не только для решения задач теории тяготения, но и вообще для решения широкого круга задач математич. физики, в частности электростатики и магнетизма. В связи с этим стали рассматриваться потенциалы не только физически реальных в вопросах взаимного притяжения положительных масс, но и «масс» произвольного знака, или зарядов. В П. т. определились основные краевые задачи такие, как *Дирихле задача* и *Неймана задача*, электростатич. задача о статич. распределении зарядов на проводниках, или *Робена задача*, задача о выметании масс (см. *Выметания метод*). Для решения указанных задач в случае областей с достаточно гладкой границей оказались эффективным средством специальные разновидности потенциалов, т. е. специальные виды интегралов, зависящих от параметров, такие, как потенциал объемно распределенных масс, потенциалы простого и двойного слоя, логарифмич. потенциалы, потенциалы Грина и др. Основную роль в создании строгих методов решения основных краевых задач сыграли работы А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова кон. 19 в. Изучение

свойств потенциалов различных видов приобрело в П. т. и самостоятельное значение.

Мощный стимул в направлении обобщения основных задач и законченности формулировок П. т. получила начиная с 1-й пол. 20 в. на основе использования общих понятий меры в смысле Радона, емкости и обобщенных функций. Современная П. т. тесно связана в своем развитии с теорией аналитич. функций, гармонич. функций, субгармонич. функций и теорией вероятностей.

Наряду с дальнейшим углубленным изучением классических краевых задач и обратных задач (см. *Потенциала теории обратные задачи*) для современного периода развития П. т. характерно применение методов и понятий современной топологии и функционального анализа, применение абстрактных аксиоматич. методов (см. *Потенциала теория абстрактная*).

Основные типы потенциалов и их свойства. Пусть S — гладкая замкнутая поверхность, то есть $(n-1)$-мерное гладкое многообразие без края, в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, ограничивающая конечную область $G=G^+$, $\partial G=S$, и пусть $G^-=\mathbb{R}^n \setminus (G^+ \cup S)$ — внешняя бесконечная область. Пусть

$$E(x, y)=E(|x-y|)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega_n (n-2)} \dfrac{1}{|x-y|^{n-2}}, & n \geqslant 3,\\ \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x-y|}, & n=2,\end{cases}$$

— главное фундаментальное решение уравнения Лапласа $\Delta u \equiv \sum_{k=1}^{n} \partial^2 u/\partial x_k^2 = 0$ в $\mathbb{R}^n$, где

$$|x-y|=\left[\sum_{k-1}^{n} (x_k-y_k)^2\right]^{1/2}$$

— расстояние между точками $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ в $\mathbb{R}^n$, $\omega_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, Γ — гамма-функция. Три интеграла, зависящих от x как от параметра:

$$\left.\begin{aligned} Z(x) &= \int_G \rho(y) E(x, y)\, dy,\\ V(x) &= \int_S \mu(y) E(x, y)\, dS(y),\\ W(x) &= \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y)\, dS(y),\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где n_y — направление внешней относительно G^+ нормали к S в точке $y \in S$, наз. соответственно объемным потенциалом, потенциалом простого слоя и потенциалом двойного слоя. Функции $\rho(y)$, $\mu(y)$ и $\nu(y)$ наз. плотностями соответствующих потенциалов; ниже они будут предполагаться абсолютно интегрируемыми соответственно на G или S. При $n=3$ (а иногда и при $n \geqslant 3$) интегралы (1) наз. ньютоновым объемным потенциалом, ньютоновыми потенциалами простого и двойного слоя, при $n=2$ — логарифмическими потенциалами масс, простого и двойного слоя.

Пусть ρ принадлежит классу $C^1(G \cup S)$. Тогда объемный потенциал и его производные 1-го порядка непрерывны всюду в $\mathbb{R}^n$, причем их можно вычислить посредством дифференцирования под знаком интеграла, то есть $Z \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Далее,

$$\lim_{|x| \to \infty} (Z(x)/E(x, 0))=M, \quad M=\int_G \rho(y)\, dy.$$

Производные 2-го порядка непрерывны всюду вне S, но при переходе через поверхность S они претерпевают разрыв, причем в области G^+ удовлетворяется уравнение Пуассона — $\Delta Z=\rho(x)$, $x \in G^+$, а в G^- — уравнение Лапласа $\Delta Z=0$, $x \in G^-$. Перечисленные свойства характеризуют объемный потенциал.

Если G_1 — конечная область пространства $\mathbb{R}^n$ с границей $S_1=\partial G_1$ класса C^1, то справедлива формула Гаусса для объемного потенциала:

$$\int_{S_1}\frac{\partial Z}{\partial n_x}\,dS_1(x)=-\int_{G\cap G_1}\rho(y)\,dy.$$

Пусть $\mu\in C^1(S)$. Потенциал простого слоя $V(x)$ есть гармонич. функция при $x\notin S$, причем

$$\lim_{|x|\to\infty}(V(x)/E(x,0))=M,\quad M=\int_S\mu(y)\,dS(y);$$

в частности, $\lim\limits_{|x|\to\infty}V(x)=0$ при $n\geqslant 3$, но $\lim\limits_{|x|\to\infty}V(x)=0$ при $n=2$ тогда и только тогда, когда $\int_S\mu(y)dS(y)=0$.

Потенциал простого слоя непрерывен всюду в $\mathbb{R}^n$, $V\in C(\mathbb{R}^n)$, причем $V(x)$ и его касательные производные непрерывны при переходе через поверхность S. Нормальная производная потенциала простого слоя при переходе через поверхность S испытывает скачок:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_x}\right)^+=\frac{1}{2}\mu(x)+\frac{\partial V(x)}{\partial n_x},$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_x}\right)^-=-\frac{1}{2}\mu(x)+\frac{\partial V(x)}{\partial n_x},\quad x\in S,$$

где $\left(\frac{\partial V}{\partial n_x}\right)^+$ и $\left(\frac{\partial V}{\partial n_x}\right)^-$ — предельные значения нормальной производной соответственно из G^+ и G^-, то есть

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_x}\right)^+=\lim_{x'\to x,\ x'\in G^+}\frac{\partial V(x')}{\partial n_x},$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n_x}\right)^-=\lim_{x'\to x,\ x'\in G^-}\frac{\partial V(x')}{\partial n_x}.$$

Через $\partial V(x)/\partial n_x$ здесь обозначено т. н. прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя, вычисленное на поверхности S, то есть

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n_x}=\int_S\mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}E(x,y)\,dS(y),\ x\in S,$$

к-рое является непрерывной функцией точки $x\in S$, а ядро $\partial E(x,y)/\partial n_x$ имеет слабую особенность на S,

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_x}E(x,y)\right|\leqslant\frac{\text{const}}{|x-y|^{n-2}},\ x,\ y\in S.$$

Перечисленные свойства характеризуют потенциал простого слоя.

Пусть $\nu\in C^1(S)$. Потенциал двойного слоя $W(x)$ есть гармонич. функция при $x\notin S$, причем

$$\lim_{|x|\to\infty}\omega_n|x|^{n-1}W(x)=M,\quad M=\int_S\nu(y)\,dS(y).$$

При переходе через поверхность S потенциал двойного слоя испытывает скачок:

$$W^+(x)=-\frac{1}{2}\nu(x)+W(x),\ W^-(x)=\frac{1}{2}\nu(x)+W(x),\quad x\in S,$$

где $W^+(x)$ и $W^-(x)$ — предельные значения потенциала двойного слоя соответственно из G^+ и G^-, то есть

$$W^+(x)=\lim_{x'\to x,\ x'\in G^+}W(x'),\ W^-(x)=\lim_{x'\to x,\ x'\in G^-}W(x').$$

Через $W(x)$ при $x\in S$ обозначено т. н. прямое значение потенциала двойного слоя, вычисленное на поверхности S, то есть

$$W(x)=\int_S\nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}E(x,y)\,dS(y),\quad x\in S,$$

к-рое является непрерывной функцией точки $x \in S$, а ядро $\partial E(x, y)/\partial n_y$ имеет слабую особенность на S,

$$\left| \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y) \right| \leqslant \frac{\text{const}}{|x-y|^{n-2}}, \quad x, y \in S.$$

Касательные производные потенциала двойного слоя также испытывают скачок при переходе через поверхность S, но нормальная производная $\partial W(x)/\partial n_x$ сохраняет свое значение при переходе через S:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n_x}\right)^+ = \left(\frac{\partial W}{\partial n_x}\right)^-, \quad x \in S.$$

Перечисленные свойства характеризуют потенциал двойного слоя.

В случае постоянной плотности $\nu = 1$ имеет место формула Гаусса для потенциала двойного слоя:

$$-\int_S \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y)\, dS(y) = q(x) = \begin{cases} 1, & x \in G^+, \\ 1/2, & x \in S, \\ 0, & x \in G^-. \end{cases}$$

Интеграл в левой части этого равенства интерпретируется как (деленный на $\omega_n(n-2)$) телесный угол, под к-рым видна поверхность S из точки x.

Ниже дополнительно приводятся нек-рые свойства потенциалов при меньших ограничениях на плотности и поверхность S.

Если $\rho \in L_1(G)$, то $Z(x)$ — гармонич. функция при $x \in G^-$ и $Z(x)$ суммируема в G^+. Если $\rho \in L_p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant n/2$, то $Z \in L_q(\mathbb{R}^n)$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < q < np/(n-2p)$; если $\rho \in L_p(G)$, $p > n/2$, то $Z \in C(\mathbb{R}^n)$. Если $\rho \in L_p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant n$, то $Z \in W_q^1(\mathbb{R}^n)$, $1 < q < np/(n-p)$; если $\rho \in L_p(G)$, $p > n$, то $Z \in G^1(\mathbb{R}^n)$. Если $\rho \in L_2(G)$, то существуют обобщенные производные 2-го порядка от $Z(x)$, они также принадлежат классу $L_2(G)$ и выражаются с помощью сингулярных интегралов:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{1}{n}\delta_{ij}\rho(x) + \int_G \rho(y) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} E(x, y)\, dy,$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$; если $\rho \in L_p(G)$, $1 < p < \infty$, то все обобщенные производные $\partial^2 Z/\partial x_i \partial x_j$ также существуют и принадлежат $L_p(\mathbb{R}^n)$. Если $\rho \in L_p(G)$, $1 \leqslant p < +\infty$, то $Z(x)$ есть обобщенное решение уравнения Пуассона $-\Delta Z = \rho(x)$, $x \in G$. Если $\rho \in C^{(0,\alpha)}(G)$ и $S \in C^{(1,\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, то $Z \in C^{(2,\alpha)}$ в G^+ или G^-. Если $\rho \in C^{(l,\alpha)}(G)$ и $S \in C^{(k+1,\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, l, k — целые, $0 \leqslant l \leqslant k$, то $Z \in C^{(l+2,\alpha)}(G^+)$.

Пусть $S \in C^{(1,\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, $\bar{D}$ — замкнутая конечная область такая, что $G^+ \cup S \subset D \subset \bar{D} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если $\mu \in L_p(S)$, $p = 1, 2$, то $V \in L_p(\bar{D})$, $V \in L_p(S)$, $\partial V/\partial x_i \in L_p(\bar{D})$, $p = 1, 2$; $i = 1, 2, \ldots, n$. Если плотность μ ограниченная и суммируемая, то

$$V \in C^{(0,\lambda)} \forall \lambda \in (0, 1).$$

Если $\mu \in C^{(0,\alpha)}(S)$, $0 < \alpha < 1$, то $V \in C^{(1,\alpha)}$ в G^+ или G^-. Если $\nu \in C^{(0,\alpha)}(S)$, то $W \in C^{(0,\alpha)}$ в G^+ или G^-.

Если $\mu \in C^{(l,\alpha)}(S)$ и $S \in C^{(k+1,\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, l, k — целые, $0 \leqslant l \leqslant k$, то $V \in C^{(l+1,\alpha)}$ в G^+ или G^-. Если $\nu \in C^{(l,\alpha)}(S)$ и $S \in C^{(k+1,\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, l, k — целые, $0 \leqslant l \leqslant k+1$, то $W \in C^{(l,\alpha)}$ в G^+ или G^-.

Для доопределенных по непрерывности потенциалов и их производных на поверхности S описанные выше свойства гладкости также остаются в силе при соответствующих условиях гладкости на плотность и поверхность S.

Представление функций и решение основных краевых задач теории потенциала с помощью потенциалов. Пусть $\Phi(x)$ — функция класса $C^2(G \cup S)$, S — гладкая

поверхность класса C^2. Тогда справедливо интегральное тождество (ф о р м у л а Г р и н а):

$$-\int_G \Delta\Phi(y)\,E(x,\ y)\,dy+\int_S\left(\frac{\partial\Phi(y)}{\partial n_y}E(x,\ y)-\right.$$
$$\left.-\Phi(y)\frac{\partial E(x,\ y)}{\partial n_y}\right)dS(y)=q(x)\,\Phi(x). \qquad (2)$$

В частности, в области G функция $\Phi(x)$ представима в виде суммы объемного потенциала и потенциалов простого и двойного слоя соответственно с плотностями

$$\rho(y)=-\Delta\Phi(y),\ \mu(y)=\partial\Phi(y)/\partial n_y,\ \nu(y)=-\Phi(y).$$

Для гармонической в области G функции $u(x)$ класса $C^1(G\cup S)$ имеет место тождество

$$\int_S\left(\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}E(x,\ y)-u(y)\frac{\partial E(x,\ y)}{\partial n_y}\right)dS(y)=q(x)\,u(x), \quad (3)$$

и поэтому такая функция $u(x)$ представима в G в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя соответственно с плотностями $\mu(y)=\partial u(y)/\partial n_y$, $\nu(y)=-u(y)$. Однако эти плотности в формуле (3) не могут задаваться произвольно на S, они связаны интегральным соотношением, получающимся из (3) при $x\in G^-$.

Центральное место в П. т. занимают краевые задачи Дирихле и Неймана (наз. также первой и второй краевыми задачами) для областей G^+ (внутренние задачи) и G^- (внешние задачи), к-рые в предположении достаточной гладкости поверхности удается полностью исследовать сведением их к и н т е г р а л ь н ы м у р а в н е н и я м П. т.

В н у т р е н н я я з а д а ч а Д и р и х л е: найти гармоническую в G^+ функцию $u(x)$ класса $C(G^+\cup S)$, $S\in C^{(1,\ \alpha)}$, $0<\alpha<1$, удовлетворяющую краевому условию $u(x)=\varphi^+(x)$, $x\in S$, где $\varphi^+(x)$ — данная непрерывная функция на S. Решение этой задачи всегда существует, единственно и может быть найдено в виде потенциала двойного слоя

$$u(x)=\int_S\nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}E(x,\ y)\,dS(y)$$

с плотностью ν, к-рая находится как единственное решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$-\frac{1}{2}\nu(x)+\int_S\nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}E(x,\ y)\,dS(y)=\varphi^+(x), \quad x\in S.$$

В н у т р е н н я я з а д а ч а Н е й м а н а: найти гармоническую в области G^+ функцию $u(x)$ класса $C^1(G^+\cup S)$, $S\in C^{(1,\ \alpha)}$, $0<\alpha<1$, удовлетворяющую краевому условию $\partial u(x)/\partial n_x=\psi^+(x)$, $x\in S$, где $\psi^+(x)$ — данная непрерывная функция на S. Решение этой задачи существует тогда и только тогда, когда функция $\psi^+(x)$ удовлетворяет условию ортогональности

$$\int_S\psi^+(x)\,dS(x)=0. \qquad (4)$$

Это решение определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной C в виде $u(x)=V(x)+C$, где

$$V(x)=\int_S\mu(y)\,E(x,\ y)\,dS(y)$$

— потенциал простого слоя, плотность μ к-рого определяется из интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\frac{1}{2}\mu(x)+\int_S\mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}E(x,\ y)\,dS(y)=\psi^+(x),\ x\in S. \quad (5)$$

Соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальное решение $\mu_0(x)$, а неоднородное уравнение (5) разрешимо при выполнении условия (4), причем его общее решение имеет вид $\mu(x)+c\mu_0(x)$, где c — произвольная постоянная.

В н е ш н я я з а д а ч а Д и р и х л е: найти гармоническую в области G^-, $0\in G^+$, функцию $u(x)$ класса

$C(G^- \cup S)$, $S \in C^{(1,\,\alpha)}$, $0<\alpha<1$, удовлетворяющую краевому условию $u(x)=\varphi^-(x)$, $x \in S$, где $\varphi^-(x)$ — данная непрерывная функция на S; при этом $u(x)$ предполагается регулярной на бесконечности, т. е.

$$\lim_{|x| \to \infty} |x|^{n-2} u(x) = \text{const}.$$

Решение этой задачи всегда существует, единственно и может быть найдено в виде

$$u(x) = W(x) + A/|x|^{n-2},$$

где A — постоянная,

$$W(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y)\, dS(y)$$

— потенциал двойного слоя, плотность ν к-рого является решением интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\frac{1}{2}\nu(x) + \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y)\, dS(y) = \varphi^-(x) - \frac{A}{|x|^{n-2}}, \quad x \in S. \tag{6}$$

Соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальное решение $\tilde{\nu}_0 = 1$. При надлежащем выборе постоянной A решение неоднородного уравнения (6) имеет вид

$$\nu(y) = \nu^-(y) + C,$$

где C — произвольная постоянная, а $\nu^-(y)$ — частное решение ур-ния (6). Постоянная A подбирается в виде

$$A = -\int_S \varphi^-(x)\, \nu_0(x)\, dS(x),$$

где плотность ν_0 должна удовлетворять условию

$$\int_S \nu_0(y) \frac{1}{|y|^{n-2}}\, dS(y) = 1. \tag{7}$$

Эта плотность ν_0 есть нетривиальное решение уравнения (5) внутренней задачи Неймана с данными $\psi^+(x)=0$, $x \in S$, удовлетворяющее эквивалентному (7) при $n \geqslant 3$ условию нормировки

$$V_0(x) \equiv \int_S \nu_0(y)\, E(x, y)\, dS(y) = 1, \quad x \in G^+ \cup S.$$

Потенциал простого слоя $V_0(x)$ плотности $\nu_0(x)$ наз. равновесным потенциалом, или потенциалом Робена. Плотность $\nu_0(x)$ дает решение задачи Робена или электростатич. задачи о распределении зарядов на проводнике S, создающем равновесный потенциал, постоянный в области G^+. Нек-рая сложность решения внешней задачи Дирихле происходит из-за того, что регулярная на бесконечности гармонич. функция $u(x)$, вообще говоря, убывает при $|x| \to \infty$ медленнее, чем потенциал двойного слоя, и поэтому $u(x)$ в общем случае нельзя представить в виде одного только потенциала двойного слоя.

Внешняя задача Неймана: найти гармоническую в области G^-, $0 \in G^+$, функцию $u(x)$ класса $C^1(G^- \cup S)$, $S \in C^{(1,\,\alpha)}$, $0<\alpha<1$, удовлетворяющую краевому условию $\partial u(x)/\partial n_x = \psi^-(x)$, $x \in S$, где $\psi^-(x)$ — данная непрерывная функция на S; при этом $u(x)$ предполагается регулярной на бесконечности. При $n \geqslant 3$ решение этой задачи всегда существует и единственно; при $n=2$ решение существует тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\int_S \psi^-(x)\, dS(x) = 0, \tag{8}$$

причем решение определено лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Решение внешней

задачи Неймана представимо в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = \int_S \mu(y)\, E(x, y)\, dS(y),$$

плотность μ к-рого есть решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$-\frac{1}{2}\mu(x) + \int_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} E(x, y)\, dS(y) = \psi^-(x), \quad x \in S. \tag{9}$$

При $n \geqslant 3$ решение этого уравнения всегда существует и единственно. При $n=2$ соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальное решение $\mu_0(x)$, поэтому неоднородное уравнение (9) при выполнении условия разрешимости (8) имеет единственное решение $\tilde{\mu}(x)$ такое, что

$$\int_S \tilde{\mu}(x)\, dS(x) = 0,$$

а его общее решение имеет вид $\mu(x) = \tilde{\mu}(x) + c\mu_0(x)$, где c — произвольная постоянная.

Решение краевых задач П. т. может быть получено также с помощью *Грина функции*. Напр., для (внутренней) задачи Дирихле функция Грина имеет вид

$$G(x, y) = E(x, y) + g(x, y), \quad x \in G^+ \cup S, \quad y \in G^+,$$

где $g(x, y)$ — гармонич. функция в G^+ и непрерывная в $G^+ \cup S$ по x, для каждого $y \in G^+$ удовлетворяющая краевому условию $G(x, y) = 0$, $x \in S$. Решение (внутренней) задачи Дирихле $u(x)$ класса $C^2(G^+) \cap C(G^+ \cup S)$ для уравнения Пуассона $-\Delta u(x) = f(x)$, $x \in G^+$, с краевым условием $u(x) = \varphi^+(x)$, $x \in S$, представимо в виде

$$u(x) = \int_{G^+} f(y)\, G(x, y)\, dy + \int_S \varphi^+(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y)\, dS(y), \quad x \in G^+.$$

Зависящие от параметра x интегралы

$$\int_G \rho(y)\, G(x, y)\, dy, \quad \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y)\, dS(y)$$

наз. соответственно объемным потенциалом Грина (задачи Дирихле), потенциалом Грина двойного слоя. Их свойства аналогичны свойствам потенциалов (1).

С помощью функции Грина к интегральным уравнениям сводятся задачи на собственные значения. Напр., задача Дирихле — $\Delta u = \lambda u(x)$, $x \in G^+$, с краевым условием $u(x) = 0$, $x \in S$, сводится к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода с самосопряженным ядром

$$u(x) - \lambda \int_{G^+} u(y)\, G(x, y)\, dy = 0, \quad x \in G^+.$$

Дальнейшее обобщение некоторых основных понятий теории потенциала. Параллельно с углубленным изучением свойств потенциалов (1), определяемых плотностями более или менее общего вида, и их применений само понятие потенциала подверглось начиная примерно с 20-х гг. 20 в. глубокому обобщению, связанному с понятием меры и интеграла Радона.

Пусть $\lambda \geqslant 0$ — положительная борелевская мера на пространстве $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем $\operatorname{supp} \lambda$. Потенциал меры

$$E\lambda(x) = \int E(x, y)\, d\lambda(y) \tag{10}$$

существует всюду в $\mathbb{R}^n$ в смысле отображения $E\lambda : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ при $n \geqslant 3$ и $E\lambda : \mathbb{R}^2 \to (-\infty, \infty]$ при $n=2$ (т. е. здесь допускается и значение $+\infty$) и является *супергармонической функцией* всюду в $\mathbb{R}^n$, гармонической — вне носителя меры $\operatorname{supp} \lambda$. Для меры λ произ-

вольного знака с компактным носителем потенциал $E\lambda$ определяется, исходя из канонич. разложения $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, $\lambda^+ \geqslant 0$, $\lambda^- \geqslant 0$, в виде $E\lambda = E\lambda^+ - E\lambda^-$. В тех точках $x \in \mathbb{R}^n$, где оба потенциала $E\lambda^+(x)$ и $E\lambda^-(x)$ принимают значение $+\infty$, этот потенциал не определен. Если мера $\lambda \geqslant 0$ сосредоточена на гладкой поверхности S, то аналогично (10) определяется и потенциал двойного слоя меры λ:

$$\frac{\partial E}{\partial n_y}\lambda(x) = \int \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y)\, d\lambda(y).$$

Потенциал (10) конечен, $E\lambda < +\infty$, всюду в $\mathbb{R}^n$, за исключением точек полярного множества, к-рое характеризуется как множество внешней емкости нуль. Если $E\lambda(x) = 0$ всюду, кроме множества внешней емкости нуль, то $\lambda = 0$. Если мера $\lambda \geqslant 0$, $\lambda \neq 0$ сосредоточена на множестве емкости нуль, то $\sup E\lambda = +\infty$. Справедлив следующий принцип максимума:

$$E\lambda(x) \leqslant \sup\{E\lambda(y):\ y \in \operatorname{supp}\lambda\},$$

т. е. верхняя грань $E\lambda(x)$ есть верхняя грань сужения $E\lambda$ на $\operatorname{supp}\lambda$. Если это сужение непрерывно (в обобщенном смысле, включая значение $+\infty$) в точке $x_0 \in \operatorname{supp}\lambda$, то потенциал $E\lambda(x)$ непрерывен в точке x_0 в $\mathbb{R}^n$. Потенциалы мер $E\lambda$ сводятся к потенциалам плотностей (1) тогда и только тогда, когда мера λ абсолютно непрерывна по мере Лебега соответственно на G или на S (см. [3]—[6]).

Если T — обобщенная функция, или распределение, в $\mathbb{R}^n$, то потенциал распределения определяется как свертка $E * T$, являющаяся также обобщенной функцией. Напр., если T — финитная обобщенная функция, то в $\mathbb{R}^n$ в смысле обобщенных функций справедливо уравнение Пуассона $\Delta(ET) = -T$. Потенциалы мер можно рассматривать как частный случай потенциалов распределений. О потенциалах распределений см. [3], [4], [9].

Для областей $G = G^+$ с достаточно гладкой границей S метод потенциалов дает эффективное решение задачи Дирихле. Одно из основных направлений развития П. т. состоит в открытии методов доказательства существования и единственности решения задачи Дирихле для все более широких классов областей (см. *Выметания метод*, *Дирихле принцип*, *Перрона метод*, *Шварца альтернирующий метод*). Однако в 1910 С. Заремба (S. Zaremba) заметил, что для плоской области G при наличии изолированных точек границы $\partial G = S$ задача Дирихле в приведенной выше классич. постановке не всегда разрешима; более того, в 1912 А. Лебег (H. Lebesgue) показал, что она не всегда разрешима и для пространственных областей, гомеоморфных шару, при наличии достаточно острого входящего в область острия границы (т. н. острие Лебега, см. *Иррегулярная граничная точка*), т. е. существуют такие непрерывные функции $\varphi^+(x)$, $x \in \partial G$, для к-рых задача Дирихле не разрешима никаким способом.

Поэтому важное значение имеет полученное в ходе развития метода Перрона обобщенное решение в смысле Перрона — Винера задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Как показал Н. Винер (N. Wiener, 1924), при этом любая конечная непрерывная функция $\varphi = \varphi^+$, заданная на границе $S = \partial G$ произвольной конечной области $G \subset \mathbb{R}^n$, разрешима, т. е. для нее существует и притом единственное обобщенное решение $H_\varphi(x)$ в смысле Перрона — Винера. Вообще, в 1939 М. Брело (M. Brelot) показал, что конечная измеримая функция φ на S разрешима тогда и только тогда, когда φ интегрируема по *гармонической мере* на S.

Обобщенное решение $H_\varphi(x)$ не во всех граничных точках принимает заданные значения φ. Точка $x_0 \in S$ наз. регулярной, если для любой конечной непрерыв-

ной функции φ на S обобщенное решение $H_\varphi(x)$ принимает значение $\varphi(x_0)$, то есть

$$\lim_{x \to x_0} H_\varphi(x) = \varphi(x_0), \quad x \in G.$$

Прочие точки $x_0 \in S$ наз. и р р е г у л я р н ы м и, к ним относятся изолированные точки границы при $n \geqslant 2$ и острие Лебега при $n \geqslant 3$. Как оказалось (*Келлога — Эванса теорема*, 1933), множество иррегулярных точек имеет внешнюю емкость нуль, т. е. является в нек-ром смысле разреженным. Множество регулярных точек плотно на S.

Для задачи Дирихле строится соответственно и о б о б щ е н н а я ф у н к ц и я Г р и н а G, к-рую можно определить, напр., для произвольно фиксированной точки $y \in G$ следующим образом:

$$G(x, y) = E(x, y) - H_{E(x, y)}(x), \; x \in G.$$

Обобщенная функция Грина сохраняет нек-рые свойства классич. функции Грина, напр. свойство симметрии $G(x, y) = G(y, x)$, но $\lim_{x \to x_0} G(x, y) = 0$, $x \in G$, тогда и только тогда, когда x_0 — регулярная точка границы S (см. [4], [6]).

Важное значение имеют также исследования задачи Дирихле для компактов и устойчивости задачи Дирихле (см. [6], [4]).

Интенсивно развивается изучение потенциалов с другими ядрами, отличными от ядра $E(x, y)$, и их применений для решения краевых задач (см. *Бесселев потенциал*, *Нелинейный потенциал*, *Рисса потенциал*, а также [3], [11]).

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [2] Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.— Л., 1946; [3] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [4] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [5] Kellogg O. D., Foundations of potential theory, B., 1929; [6] Келдыш М. В., «Успехи матем. наук», 1941, в. 8, с. 171—231; [7] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [8] его же, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [9] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [10] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [11] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [12] Михлин С. Г., Линейные уравнения в частных производных, М., 1977; [13] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977.

А. И. Прилепко, Е. Д. Соломенцев.

ПОТЕНЦИАЛА ТЕОРИЯ АБСТРАКТНАЯ — теория потенциала на абстрактных топологич. пространствах. П. т. а. возникла в сер. 20 в. из стремления охватить единым аксиоматич. методом широкое многообразие свойств различных потенциалов, применяемых при решении разнообразных задач теории дифференциальных уравнений с частными производными. Первое достаточно полное изложение аксиоматики «гармонических» функций (т. е. решений допустимого класса уравнений с частными производными) и соответствующих потенциалов было дано М. Брело (1957—58, см. [1]), но оно охватывало только уравнения эллиптич. типа. Расширение теории, пригодное и для широкого класса уравнений параболич. типа, получено Х. Бауэром (1960—63, см. [3]). Весьма плодотворным оказался вероятностный подход к П. т. а., начало к-рому было положено еще в работах П. Леви (P. Lévy), Дж. Дуба (J. Doob), Г. Ханта (G. Hunt) и др.

Для изложения П. т. а. удобно понятие *гармонического пространства*. Пусть X — локально компактное топологич. пространство. П у ч к о м ф у н к ц и й на X наз. отображение $\mathfrak{H}$, определенное на семействе всех открытых множеств X и такое, что

1) $\mathfrak{H}(U)$ для любого открытого множества $U \subset X$ есть семейство функций $u : U \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$;

2) если открытые множества U, V таковы, что $U \subset V \subset X$, то сужение любой функции из $\mathfrak{F}(V)$ на U принадлежит $\mathfrak{F}(U)$;

3) если для любого семейства $\{U_i\}$, $i \in I$, открытых множеств $U_i \subset X$ сужения нек-рой определенной на $\bigcup_{i \in I} U_i$ функции u на U_i для всех $i \in I$ принадлежат $\mathfrak{F}(U_i)$, то $u \in \mathfrak{F}(\bigcup_{i \in I} U_i)$.

Пучок функций $\mathfrak{W}$ на X наз. гармоническим пучком, если для любого открытого множества $U \subset X$ семейство $\mathfrak{W}(U)$ есть действительное векторное пространство непрерывных функций на U. Функция u, определенная на нек-ром множестве $S \subset X$, содержащем открытое множество U, наз. $\mathfrak{W}$-функцией, если сужение $u|U$ принадлежит $\mathfrak{W}(U)$. Гармонич. пучок $\mathfrak{W}$ невырожден в точке $x \in X$, если в окрестности x существует $\mathfrak{W}$-функция u такая, что $u(x) \neq 0$.

Реальные различия в аксиоматиках Бауэра, Брело, Дуба характеризуются свойствами сходимости $\mathfrak{W}$-функций.

а) Свойство сходимости Бауэра состоит в том, что если возрастающая последовательность $\mathfrak{W}$-функций локально ограничена на нек-ром открытом множестве $U \subset X$, то предельная функция v есть $\mathfrak{W}$-функция.

б) Свойство сходимости Дуба состоит в том, что если предельная функция v конечна на плотном множестве в X, то v есть $\mathfrak{W}$-функция.

в) Свойство сходимости Брело состоит в том, что если предельная функция v возрастающей последовательности $\mathfrak{W}$-функций на нек-рой области $U \subset X$ конечна в точке $x \in U$, то v есть $\mathfrak{W}$-функция.

Если пространство X локально связно, то имеют место импликации в) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ а).

Пучок функций $\mathfrak{U}$ на X наз. гипергармоническим пучком, если для любого открытого множества $U \subset X$ семейство $\mathfrak{U}(U)$ есть выпуклый конус полунепрерывных снизу функций $u : U \to (-\infty, \infty]$; $\mathfrak{U}$-функция определяется аналогично $\mathfrak{W}$-функции. Отображение $U \to \mathfrak{U}(U) \cap (-\mathfrak{U}(U))$ есть гармонич. пучок $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_{\mathfrak{U}}$, порожденный пучком $\mathfrak{U}$; только этот гармонич. пучок будет использоваться в дальнейшем.

Пусть на границе ∂U открытого множества $U \subset X$ дана непрерывная функция $\varphi : \partial U \to (-\infty, \infty)$ с компактным носителем. Гипергармонич. пучок $\mathfrak{U}$ позволяет построить *Перрона методом* обобщенное решение задачи Дирихле для нек-рых открытых множеств в классе соответствующих $\mathfrak{W}$-функций. Пусть $\overline{\mathfrak{U}}_\varphi$ — семейство полунепрерывных снизу $\mathfrak{U}$-функций u, ограниченных снизу на U, положительных вне нек-рого компакта и таких, что

$$\liminf_{x \to y} u(x) \geqslant \varphi(y), \quad y \in \partial U;$$

можно положить $\underline{\mathfrak{U}}_\varphi = -\overline{\mathfrak{U}}_\varphi$. Пусть теперь

$$\overline{H}_\varphi(x) = \inf \{u(x) : u \in \overline{\mathfrak{U}}_\varphi\}, \quad x \in U,$$

и $\overline{H}_\varphi \equiv \infty$, если $\overline{\mathfrak{U}}_\varphi = \varnothing$. Аналогично,

$$\underline{H}_\varphi(x) = \sup \{u(x) : u \in \underline{\mathfrak{U}}_\varphi\}, \quad x \in U,$$

или $\underline{H}_\varphi \equiv -\infty$. Функция наз. разрешимой, если для нее $\overline{H}_\varphi$ и $\underline{H}_\varphi$ совпадают, $\overline{H}_\varphi = \underline{H}_\varphi = H_\varphi$, и H_φ является $\mathfrak{W}$-функцией; эта функция H_φ и есть обобщенное решение задачи Дирихле в классе $\mathfrak{W}$-функций. Открытое множество $U \subset X$ разрешимо относительно $\mathfrak{U}$, если разрешима любая конечная непрерывная функция с компактным носителем на ∂U. Для разрешимого множества U отображение $H_\varphi : C_k(\partial U) \to \mathbb{R}$ есть положительный линейный функционал, к-рый, следовательно, определяет положительную меру μ_x, $x \in U$, наз. га р-

моническ о й м е р о й на ∂U в точке x (относительно $\mathcal{U}$).

Локально компактное пространство X с гипергармонич. пучком $\mathcal{U}$ превращается в г а р м о н и ч е с к о е п р о с т р а н с т в о, если для него выполняются соответствующие четыре аксиомы (см. *Гармоническое пространство*), причем в аксиоме сходимости имеется в виду свойство Бауэра.

Часто (в классич. примерах именно так и обстоит дело) за основу берется гармонич. пучок $\mathfrak{W}$, а аксиома мажоранты служит тогда определением гипергармонич. пучка. Напр., евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, с пучком классич. решений уравнения Лапласа или уравнения теплопроводности в качестве $\mathfrak{W}$ является гармонич. пространством. Гармонич. пространство локально связно, не содержит изолированных точек и имеет базис из связных разрешимых множеств (разрешимых областей).

Открытое множество U гармонич. пространства X с сужением $\mathcal{U}|U$ в качестве гипергармонич. пучка есть г а р м о н и ч е с к о е п р о с т р а н с т в о X. Гипергармонич. функция u на $U\subset X$ наз. с у п е р г а р м о н и ч е с к о й ф у н к ц и е й, если для любого относительно компактного разрешимого множества V, $\overline{V}\subset U$, наибольшая миноранта $\mu^V u$ является гармонической, $\mu^V u\in\mathfrak{W}(V)$. Многие свойства классических супергармонич. функций (см. *Субгармоническая функция*) выполняются и здесь. П о т е н ц и а л о м наз. такая положительная супергармонич. функция u, для к-рой наибольшая гармонич. миноранта $\mu^V u$ на X тождественно равна нулю. Гармонич. пространство X наз. ($\mathfrak{S}$-г а р м о н и ч е с к и м (или $\mathfrak{P}$-г а р м о н и ч е с к и м) п р о с т р а н с т в о м, если для любой точки $x\in X$ существует положительная супергармонич. функция u (соответственно потенциал u) на X такая, что $u(x)>0$. Любое открытое множество $\mathfrak{P}$-гармонического пространства разрешимо.

Принимая за основу гармонич. пучок $\mathfrak{W}$ и определяя соответствующий гипергармонич. пучок $\mathfrak{W}^*$ с помощью аксиомы мажоранты, получают п р о с т р а н с т в о Б а у э р а, совпадающее с гармонич. пространством для $\mathfrak{W}^*$. Если гармонич. пучок $\mathfrak{W}$ для любого открытого множества $U\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ состоит из решений h уравнения теплопроводности $\Delta h-\partial h/\partial t=0$, то $\mathfrak{W}$ обладает свойством сходимости Дуба и $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ с этим пучком $\mathfrak{W}$ есть $\mathfrak{P}$-пространство (Бауэра). При этом v — гипергармонич. функция класса C^2 тогда и только тогда, если $\Delta v-\partial v/\partial t\leqslant 0$.

П р о с т р а н с т в о Б р е л о характеризуется следующими условиями: X не имеет изолированных точек и локально связно; регулярные множества относительно $\mathfrak{W}$ образуют базу X (регулярность — это разрешимость классич. задачи Дирихле в классе $\mathfrak{W}$); $\mathfrak{W}$ обладает свойством сходимости Брело. Пространства Брело составляют собственный подкласс т. н. эллиптических гармонич. пространств (см. [4]), т. е. эллиптич. пространств Бауэра. Если гармонич. пучок $\mathfrak{W}$ для любого открытого множества $U\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, состоит из решений u уравнения Лапласа $\Delta u=0$, то $\mathbb{R}^2$ с этим пучком есть ($\mathfrak{S}$-пространство Брело, а $\mathbb{R}^n$ при $n\geqslant 3$ есть $\mathfrak{P}$-пространство Брело. При этом v — гипергармонич. функция класса C^2 тогда и только тогда, если $\Delta v\leqslant 0$.

Точка y границы ∂U разрешимого множества U гармонич. пространства наз. р е г у л я р н о й г р а н и ч н о й т о ч к о й, если для любой конечной непрерывной функции φ на ∂U имеет место предел

$$\lim_{x\to y} H_\varphi(x)=\varphi(y),\quad x\in U,$$

а в противном случае y наз. и р р е г у л я р н о й г р а н и ч н о й т о ч к о й. Пусть F — фильтр на U, сходящийся к y. Б а р ь е р о м фильтра F наз. строго

положительная гипергармонич. функция v, определенная на пересечении U с нек-рой окрестностью y и сходящаяся к 0 вдоль F. Если для относительно компактного разрешимого множества U $\mathfrak{H}$-гармонического пространства все фильтры, сходящиеся к точкам $y \in \partial U$, имеют барьер, то U — р е г у л я р н о е м н о ж е с т в о, т. е. все его граничные точки регулярные. Если U — относительно компактное открытое множество $\mathfrak{P}$-гармонического пространства, на к-ром существует строго положительная гипергармонич. функция, сходящаяся к 0 в каждой точке $y \in \partial U$, то U — регулярное множество.

Кроме изучения разрешимости и регулярности в задаче Дирихле, к основной проблематике П. т. а. относятся: теория *емкости* точечных множеств на гармонич. пространствах X; теория выметания (см. *Выметания метод*) функций и мер на X; теория интегральных представлений положительных супергармонич. функций на X, обобщающая представления Мартина (см. *Мартина граница*).

Уже в нач. 20 в. была замечена тесная связь теории потенциала с нек-рыми вопросами теории вероятностей, такими, как *броуновского движения процесс*, *винеровский процесс*, *марковский процесс*. Напр., вероятность того, что траектория броуновского движения в плоской области $G \subset \mathbb{R}^2$, исходящая из точки $x_0 \in G$, встретит в первый раз границу ∂G на (борелевском) множестве $E \subset \partial G$, есть не что иное, как *гармоническая мера* множества E в точке x_0; *полярные множества* границы ∂G суть при этом те множества, к-рые траектории не встречают почти наверное. В дальнейшем вероятностные методы способствовали более глубокому пониманию нек-рых идей теории потенциала и привели к ряду новых результатов; с другой стороны, теоретико-потенциальный подход уменьшает отчужденность теории вероятностей и также приводит в ней к новым результатам.

Пусть X — локально компактное пространство со счетной базой, C_k и C_0 — классы конечных непрерывных функций на X соответственно с компактным носителем и стремящихся к 0 на бесконечности. Ядро-мера $N(x, E) \geqslant 0$ есть (борелевская) функция от $x \in X$ для каждого относительно компактного (борелевского) множества $E \subset X$. С помощью N каждой функции $f \geqslant 0$, $f \in C_k$, ставится в соответствие потенциал-функция

$$Nf(x) = \int f(y)\, N(x, dy), \quad x \in X,$$

а мере $\theta \geqslant 0$ соответствует потенциал-мера

$$\theta N(E) = \int N(x, E)\, d\theta(x).$$

Единичное ядро $I(x, E)$ равно 0 при $x \notin E$ и равно 1 при $x \in E$, оно не изменяет $f(x)$ и $\theta(E)$. Напр., в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ ядро

$$N(x, E) = \int_E \frac{dy}{|x-y|}$$

определяет ньютонов потенциал Nf с плотностью f, а θN есть мера с плотностью, равной ньютонову потенциалу меры θ (см. *Потенциала теория*).

Ядро-произведение имеет вид

$$MN(x, E) = \int N(y, E)\, M(x, dy).$$

Семейство ядер $\{N_t\}$, $t \geqslant 0$, с законом композиции $N_{t+s} = N_t N_s$ является однопараметрич. полугруппой. Ядро N удовлетворяет полному принципу максимума, если для любых f, $g \geqslant 0$ из C_k и $a > 0$ выполнение неравенства $Nf \leqslant Ng + a$ на множестве, где $f > 0$, влечет за собой выполнение этого неравенства всюду на X. Основная в этой теории т е о р е м а Х а н т а в простейшей форме состоит в том, что если образ C_k при

отображении N плотен в C_0 и N удовлетворяет полному принципу максимума, то существует полугруппа $\{P_t\}$, $t\geqslant 0$, такая, что

$$Nf(x)=\int_0^\infty P_t f(x)\,dt,\quad f\geqslant 0$$

(**феллеровская полугруппа**); при этом P_t отображает C_k в C_0, P_0 — единичное ядро, $\lim\limits_{t\to 0} P_t f=f$, $f\in C_0$, локально равномерно и $P_t(1)\leqslant 1$. Функция $f\geqslant 0$ наз. **эксцессивной функцией** относительно полугруппы $\{P_t\}$, если всегда $P_t f\leqslant f$ и $\lim\limits_{t\to 0} P_t f=f$; если $P_t f=f$, то f наз. **инвариантной функцией**. Соответствующие построения имеют место и для потенциала-меры θN.

Очерченная теория Г. Ханта (1957—58) имеет непосредственный вероятностный смысл. Пусть на X задана нек-рая σ-алгебра борелевских множеств $\mathfrak{A}$ и вероятностная мера P. Случайная величина $S=S(x)$ — это $\mathfrak{A}$-измеримое отображение X в пространство состояний $\overline{R}=[-\infty,\infty]$. Семейство случайных величин $\{S_t\}$, $t\geqslant 0$,— это случайный марковский процесс, для к-рого $S_t(x)$ — траектория точки $x\in X$, если для каждого y, $-\infty\leqslant y<\infty$, существует вероятностная мера P^y на $\mathfrak{A}$ такая, что

$$1)\ \mathsf{P}^y(\{S_0=y\})=1;\quad 2)\ \ \mathsf{P}^y(A),\quad A\in\mathfrak{A},$$

— борелевская функция от y; 3) вид траектории, проходящей через y в момент r, при $t\geqslant r$ не зависит от положения предыдущих ее точек. Применительно к таким марковским процессам полугруппы $\{\mathsf{P}_t\}$ интерпретируются как полугруппы мер

$$\mathsf{P}_t(y,\ B)=\mathsf{P}^y(\{S_t\in B\}).$$

Важное значение имеет изучение эксцессивных и инвариантных функций относительно полугрупп $\{\mathsf{P}_t\}$.

С другой стороны, если X есть $\mathfrak{P}$-гармоническое пространство со счетной базой, то на нем всегда можно выбрать ядро потенциалов так, чтобы удовлетворялись условия теоремы Ханта, и эксцессивные функции соответствующей полугруппы будут тогда в точности неотрицательными гипергармонич. функциями. Теорема Ханта обобщается и для нек-рых типов пространств Бауэра (см. [4], [7]).

И другие понятия П. т. а., такие, напр., как выметание, полярные и тонкие множества, также получают вероятностную интерпретацию в рамках общей теории случайных процессов, облегчающую их исследование. С другой стороны, для теории вероятностей оказалась важной теоретико-потенциальная трактовка ряда понятий, таких, напр., как мартингалы, выходящих за рамки марковских процессов.

Лит.: [1] Brelot M., Lectures on potential theory, 2 ed., Bombay, 1967; [2] его же, «L'enseign. math.», 1972, t. 18, № 1, p. 1—36; [3] Bauer H., Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, B., 1966; [4] Constantinescu C., Cornea A., Potential theory on harmonic spaces, B., 1972; [5] Мейер П.-А., Вероятность и потенциалы, пер. с англ., М., 1973; [6] Хант Дж.-А., Марковские процессы и потенциалы, пер. с англ., М., 1962; [7] Blumenthal R., Getoor R., Markov processes and potential theory, N.Y.—L., 1968.

Е. Д. Соломенцев.

ПОТЕНЦИАЛОВ МЕТОД — метод исследования краевых задач для уравнений математич. физики путем сведения их к интегральным уравнениям, основанный на представлении решений этих задач в виде (обобщенных) потенциалов.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, задано дифференциальное уравнение с частными производными 2-го порядка эллиптич. типа

$$Lu\equiv\sum_{i,\ j=1}^n\left(a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^n e_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f(x) \tag{1}$$

с достаточно гладкими коэффициентами $a_{ij}=a_{ji}=$

$=a_{ij}(x)$, $e_i=e_i(x)$, $c(x)\leqslant 0$ и правой частью $f(x)$, причем $c(x)<-k^2<0$ вне нек-рой ограниченной области, содержащей внутри область D класса C^1. Тогда любое решение $u(x)$ уравнения (1) класса $C^2(D\cup S)$ можно представить в виде суммы трех (обобщенных) потенциалов: потенциала объемных масс

$$\int_D E(x, y)\,\rho(y)\,dy, \tag{2}$$

потенциала простого слоя

$$\int_S E(x, y)\,\sigma(y)\,ds_y \tag{3}$$

и потенциала двойного слоя

$$\int_S Q_y[E(x, y)]\,\mu(y)\,ds_y, \tag{4}$$

где $S=\partial D$ — граница области D, $E(x, y)$ — *главное фундаментальное решение* оператора L, символ Q_y обозначает оператор

$$Q_y v = a\frac{\partial v}{\partial N} - bv,$$

действующий в точке $y\in S$, N — единичный вектор конормали в точке $y\in S$,

$$a^2=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\cos(\nu, y_j)\right)^2,$$

$$b=\sum_{i=1}^n e_i\cos(\nu, y_i),$$

ν — единичный вектор внешней нормали к S в точке $y\in S$. Плотности потенциалов $\rho(y)$, $\sigma(y)$ и $\mu(y)$ — достаточно гладкие функции на D или S.

Для потенциалов (2)—(4) остаются в силе, с соответствующими изменениями, все дифференциальные и граничные свойства гармонич. потенциалов, описанные в ст. *Потенциала теория* для случая, когда L — оператор Лапласа. На основании этих свойств удается свести краевые задачи для эллиптич. уравнений типа (1) к интегральным уравнениям, аналогично тому, как это было описано для задач Дирихле и Неймана для гармонич. функций в ст. *Потенциала теория*.

Лит.: [1] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [2] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [3] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [4] Купрадзе В. Д., Методы потенциала в теории упругости, М., 1963; [5] Милн-Томсон Л. М., Теоретическая гидродинамика, пер. с англ., М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ СЕТЬ, сеть Егорова,— ортогональная сеть на двумерной поверхности евклидова пространства, к-рую переводит в себя потенциальное движение жидкости по этой поверхности. В параметрах П. с. линейный элемент поверхности имеет вид

$$ds^2=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,du^2+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\,dv^2,$$

где $\Phi=\Phi(u, v)$ — потенциал поля скорости жидкости. Каждая ортогональная полугеодезич. сеть потенциальна. Частным случаем П. с. является *Лиувилля сеть*. П. с. впервые рассматривал Д. Ф. Егоров (1901).

Лит.: [1] Егоров Д. Ф., Работы по дифференциальной геометрии, М., 1970; [2] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. Т. Базылев.

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ПОЛЕ, градиентное поле,— векторное поле, образованное градиентами гладкой скалярной функции $f(t)$ нескольких переменных $t=(t^1, \ldots, t^n)$, принадлежащих нек-рой области T n-мерного пространства. Функция $f(t)$ наз. скалярным потенциалом (потенциальной функцией) этого поля. П. п. вполне интегрируемо в T: *Пфаффа уравнение* $(\operatorname{grad} f(t), dt)=0$ имеет в качестве $(n-1)$-мерных интегральных многообразий ли-

нии ($n=2$) или поверхности ($n\geqslant 3$) уровня потенциала $f(t)$. Любое регулярное вполне интегрируемое в T ковариантное поле $v=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ получается умножением П. п. на скаляр:

$$v_\alpha(t)=c(t)\frac{\partial f}{\partial t^\alpha}, \quad 1\leqslant\alpha\leqslant n.$$

Скаляр $1/c(t)$ наз. интегрирующим множителем уравнения Пфаффа $(v(t), dt)=0$. Признаком потенциальности поля $v_\alpha(t)$ $(c(t)=1)$ служат равенства

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t^\beta}=\frac{\partial v_\beta}{\partial t^\alpha}, \quad 1\leqslant\alpha, \quad \beta\leqslant n,$$

означающие, что поле $v(t)$ является безвихревым (см. *Вихрь*).

Понятие П. п. широко используется в механике и физике. Большинство силовых и электрич. полей можно рассматривать как П. п. Напр., если $f(t)$ выражает давление в точке t идеальной жидкости, заполняющей область T, то вектор $F=-\operatorname{grad} f\cdot d\omega$ равен равнодействующей сил давления, приложенной к элементу объема $d\omega$. Если $f(t)$ — температура нагретого тела T в точке t, то вектор $F=-k\cdot\operatorname{grad} f$, где k — коэффициент теплопроводности, равен плотности теплового потока, идущего в сторону менее нагретых участков тела (в направлении, ортогональном изотермич. поверхностям $f=\text{const}$). *Л. П. Купцов.*

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — отображение A банахова пространства X в сопряженное пространство X^*, являющееся градиентом нек-рого функционала $f\in X^*$, т. е. такое, что

$$\langle Ax, h\rangle=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}.$$

Напр., всякий ограниченный самосопряженный оператор A, определенный на гильбертовом пространстве H, является потенциальным:

$$A=\operatorname{grad}\left\{\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle\right\} x\in H.$$

Лит.: [1] Вайнберг М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972; [2] Гаевский Х., Грегор К., Захариас К., Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения, пер. с нем., М., 1978. *В. И. Соболев.*

ПОТЕРЬ ФУНКЦИЯ — неотрицательная функция, показывающая потери (ущерб) экспериментатора в задаче принятия статистич. решения при каждом возможном исходе эксперимента. Пусть X — случайная величина, принимающая значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, P_\theta)$, $\theta\in\Theta$, и пусть $D=\{d\}$ — пространство всех возможных решений, к-рые можно принять относительно параметра θ по реализации случайного вектора X. В теории статистических решающих функций любую неотрицательную функцию $L(\cdot, \cdot)$, определенную на $\mathfrak{X}\times D$, наз. функцией потерь. Значение $L(\theta, d)$ П. ф. $L(\cdot, \cdot)$ в произвольной точке $(\theta, d)\in\mathfrak{X}\times D$ интерпретируют как ущерб, к к-рому приводит принятие решения d, $d\in D$, если истинное значение параметра есть θ, $\theta\in\Theta$.

Лит.: [1] Вальд А., Статистические решающие функции, пер. с англ., в кн.: Позиционные игры, М., 1967; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979. *М. С. Никулин.*

ПОТОК векторного поля — одно из понятий теории векторного поля. П. векторного поля $\boldsymbol{a}$ через поверхность ∂V выражается с точностью до знака поверхностным интегралом

$$\iint_{\partial V}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\,ds=\iint_{\partial V}(a_x\,dy\,dz+a_y\,dz\,dx+a_z\,dx\,dy),$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности ∂V (предполагается, что изменение вектора $\boldsymbol{n}$ по поверх-

ности ∂V непрерывно). Для поля скоростей частиц жидкости П. векторного поля равен объему жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность ∂V.

БСЭ-3.

ПОТОК, динамическая система с непрерывным временем,— динамическая система, определяемая действием аддитивной группы действительных чисел $\mathbb{R}$ (или аддитивной полугруппы неотрицательных действительных чисел) на нек-ром фазовом пространстве W. Другими словами, каждому $t \in \mathbb{R}$ (каждому $t \geqslant 0$) сопоставлено нек-рое преобразование $S_t : W \to W$, причем

$$S_0(w) = w \text{ и } S_{t+s}(w) = S_t(S_s(w)).$$

При этом t обычно наз. «временем» и о зависимости $S_t w$ от t (при фиксированном w) говорят как о «движении» точки $S_t w$; множество всех $S_t w$ для данного w наз. траекторией w (нередко этот термин употребляется применительно к функции $t \longmapsto S_t w$). Как и для любых динамич. систем, обычно фазовое пространство наделено нек-рой структурой, и П. в каком-то смысле согласован с ней: преобразования S_t сохраняют эту структуру, накладываются определенные условия на характер зависимости $S_t w$ от t.

В приложениях чаще всего встречаются П., описываемые *автономными системами* обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{w}_i = f_i(w_1, \ldots, w_m), \quad i = 1, \ldots, m, \qquad (*)$$

или, в векторных обозначениях, $\dot{w} = f(w)$, $w \in \mathbb{R}^n$. Непосредственное обобщение — поток на дифференцируемом многообразии W^m, определяемый («порождаемый») заданным на W^m гладким векторным полем $f(w)$ класса C^k, $k \geqslant 1$ (гладкий поток класса C^k). В этом случае движение точки $S_t w$, пока она находится в пределах одной карты (локальной системы координат), описывается системой вида (*), в правой части к-рой стоят компоненты вектора $f(w)$ в соответствующих координатах. При переходе к другой карте описание движения меняется, поскольку при этом меняются как координаты точки $S_t w$, так и выражения для компонент вектора $f(w)$ как функций локальных координат. См. также *Измеримый поток*, *Непрерывный поток*, *Топологическая динамическая система*.

П. образуют наиболее важный класс динамич. систем, к-рый к тому же первым начал изучаться. Термин «динамическая система» часто употребляют в узком смысле, понимая под ним именно П. (или П. и *каскады*).

Д. В. Аносов.

ПОТОК — понятие интуиционистской математики (см. *Интуиционизм*); совокупность, *вид*, состоящий из конечных *кортежей* натуральных чисел, называемых узлами П. (или допустимыми кортежами П.). Точнее, вид П кортежей натуральных чисел наз. потоком, если выполняются следующие условия: 1) существует эффективное правило a (т. н. закон потока), согласно к-рому для всякого кортежа $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ можно выяснить, является ли он узлом П; 2) пустой кортеж $\langle\ \rangle$ является узлом всякого П.; 3) если кортеж $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ есть узел П, то всякий его начальный кортеж вида $\langle n_1, \ldots, n_i \rangle$ при $i \leqslant m$ также является узлом П; 4) если кортеж $\langle n_1, \ldots, n_m \rangle$ есть узел П, то найдется натуральное k такое, что $\langle n_1, \ldots, n_m, k \rangle$ есть узел П.

Если кортежи натуральных чисел упорядочить, считая, что $\tau < \pi$ тогда и только тогда, когда τ есть собственное начало π, то с точки зрения этого порядка поток П представляет собой бесконечное дерево с началом $\langle\ \rangle$, заданное эффективным образом (заданное законом). Свободно становящаяся последовательность α (или, более общо, произвольная эффективная функция, пере-

рабатывающая натуральные числа в натуральные) наз. элементом потока П, символически $\alpha \in \Pi$, если для всякого n кортеж $\langle \alpha(0), \ldots, \alpha(n-1) \rangle$ является узлом П. В приложениях встречается также понятие оснащенного П. Оснащенный поток Γ состоит из потока П и эффективного правила Γ_Π (т. н. дополнительного закона П.), приписывающего каждому узлу π потока П нек-рый объект $\Gamma_\Pi(\pi)$. Каждому элементу потока П при этом естественным образом соответствует последовательность объектов, задаваемых законом Γ_Π.

В языке формального интуиционистского математич. анализа П. задается функцией — своим законом П. С этой целью рассматривается стандартное примитивно рекурсивное взаимно однозначное соответствие между кортежами натуральных чисел и натуральными числами. Пусть при этом кортежу $\langle\ \rangle$ соответствует 0, операция соединения двух кортежей в один задается на их номерах примитивно рекурсивной функцией $x*y$, $\hat{x}$ означает номер кортежа с единственным членом x. Утверждение, что кортеж с номером x является узлом П., задаваемого a, записывается в виде $a(x)=0$. Тогда формула $\mathrm{Spr}(a)$, выражающая понятие «функция a задает П.», записывается в виде

$$a(0)=0 \,\&\, \forall xy\,(a(x*y)=0 \supset a(x)=0)\,\&$$

$$\forall x\,(a(x)=0 \supset \exists y\,(a(x*\hat{y})=0)).$$

Наконец, если через $\overline{\alpha}(n)$ обозначить номер кортежа $\langle \alpha(0), \ldots, \alpha(n-1) \rangle$, где n — длина кортежа, то формула $\alpha \in a$ («α есть элемент П., заданного a») записывается в виде $\forall x a(\overline{\alpha}(x))=0$.

В основаниях математики употребляются также обобщения понятия П., в к-рых используются кортежи не натуральных чисел, а более сложных объектов, напр. кортежи, составленные из свободно становящихся последовательностей.

Лит.: [1] Гейтинг А., Интуиционизм. Введение, пер. с англ., М., 1965.

А. Г. Драгалин.

ПОТОК В СЕТИ — функция, сопоставляющая дугам данной *сети* (ориентированного графа) нек-рые числа. Каждое число интерпретируется как интенсивность потока нек-рого груза по данной дуге. П. в с. являются удобной моделью при исследовании ряда проблем в транспорте, связи и др. областях, связанных с движением грузов, информации и т. д. Многие задачи о потоках являются задачами линейного программирования и могут решаться общими методами этой теории. Однако в большинстве случаев задачи о потоках допускают эффективное решение методами теории графов.

Пусть каждой дуге (x, y) сети N приписано неотрицательное действительное число $c(x, y)$ — пропускная способность дуги (x, y). Говорят, что поток $f(x, y)$ является стационарным потоком величины v из вершины r в вершину s, удовлетворяющим ограничениям пропускных способностей дуг, если

$$f^-(r) - f^+(r) = v,$$

$$f^-(x) - f^+(x) = 0 \text{ при } x \neq r, s,$$

$$f^-(s) - f^+(s) = -v,$$

$$0 \leqslant f(x, y) \leqslant c(x, y) \text{ для любой дуги } (x, y),$$

здесь $f^-(x) = \sum_y f(x, y)$ — поток, выходящий из вершины x, а $f^+(x) = \sum_y f(y, x)$ — поток, входящий в вершину x.

В задаче о максимальном потоке между двумя вершинами требуется построить стационарный поток из вершины r в вершину s, имеющий максимально возможную величину v. Для решения этой задачи существуют достаточно эффективные алгоритмы. Пусть X — подмножество вершин сети N такое, что

$r \in X$, $s \notin X$. Тогда множество дуг (x, y) таких, что $x \in X$, $y \notin X$, наз. р а з р е з о м. Пропускной способностью разреза наз. величина $\sum_{x \in X,\, y \notin X} c(x, y)$. Справедлива следующая т е о р е м а о м а к с и м а л ь н о м п о т о к е и м и н и м а л ь н о м р а з р е з е: максимальная величина потока равна минимальной пропускной способности разрезов. В приложениях часто используется т е о р е м а о ц е л о ч и с л е н н о с т и: если пропускная способность дуг целочисленна, то существует целочисленный максимальный (стационарный) поток.

К задаче о максимальном потоке между двумя вершинами сводится ряд задач: задача о максимальном П. в с. с несколькими источниками и стоками; задача о максимальном П. в с., имеющей неотрицательные ограничения на потоки по дугам как сверху, так и снизу; задача о максимальном потоке в неориентированных и смешанных сетях; задача о максимальном потоке в сети с пропускными способностями дуг и вершин и др.

Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе выявила общую основу ряда результатов, полученных ранее в теории графов и комбинаторике. Оказалось, что как следствия этой теоремы могут быть получены: теорема о максимальном паросочетании в *графе двудольном*, теорема о различных представителях, теоремы о k-связности графов (см. *Графа связность*), теорема о покрытии частично упорядоченного множества наименьшим числом цепей и др. Сведение различных задач к задаче о максимальном потоке является важным методом теории графов и комбинаторики.

В ряде задач о П. в с. каждой дуге (x, y) сопоставляется число $a(x, y)$ — стоимость перевозки единицы груза по дуге (x, y) и требуется найти поток, удовлетворяющий определенным ограничениям и минимизирующий общую стоимость потока. З а д а ч а о п о т о к е м и н и м а л ь н о й с т о и м о с т и состоит в нахождении стационарного потока из вершины r в вершину s, удовлетворяющего ограничениям пропускных способностей дуг, причем такого, что величина его равна заданному числу v, а стоимость минимальна.

В т р а н с п о р т н о й з а д а ч е сеть является двудольным графом. Вершины одной доли $S_1, \ldots, S_m$ интерпретируются как пункты отправления нек-рого груза, вершины другой $T_1, \ldots, T_n$ — как пункты назначения. Каждый пункт отправления S_i имеет определенное предложение b_i, и каждый пункт назначения T_j имеет определенный спрос c_j. Известна стоимость a_{ij} перевозки единицы груза из S_i в T_j. Задача состоит в отыскании потока минимальной стоимости, удовлетворяющего спрос во всех пунктах назначения.

Рассматриваются также многопродуктовые потоки и потоки, изменяющиеся во времени.

Лит.: [1] Ф о р д Л. - Р., Ф а л к е р с о н Д. - Р., Потоки в сетях, пер. с англ., М., 1966.

В. Б. Алексеев

ПОТОЧЕЧНАЯ СХОДИМОСТЬ — один из видов сходимости последовательности функций (отображений). Пусть $f_n : X \to Y$, $n = 1, 2, \ldots$, где X — нек-рое множество, а Y — топологич. пространство, тогда П. с. означает, что для любого элемента $x \in X$ последовательность точек $y_n = f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится в пространстве Y. Важным подклассом класса поточечно сходящихся последовательностей являются равномерно сходящиеся последовательности.

Л. Д. Кудрявцев

ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ ТОПОЛОГИЯ — одна из топологий пространства $F(X, Y)$ отображений множества X в топологич. пространство Y. Направление $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subset F(X, Y)$ поточечно сходится к $f \in F(X, Y)$, если $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ сходится при любом $x \in X$ к $f(x)$ в топологии пространства Y. Базу окрестностей точки $f_0 \in F(X, Y)$ образуют множества вида $\{f | f(x_i) \subset v_{f_0(x_i)},\ i = 1, \ldots, n\}$, где $x_1, \ldots, x_n$ — конечный набор точек из X и

$v_{f_0(x_i)} \in V_{f_0(x_i)}$ — база окрестностей точки $f_0(x_i)$ пространства Y.

Если Y отделимо, то $F(X, Y)$ также отделимо и $A \subset F(X, Y)$ компактно тогда и только тогда, когда при каждом $x \in X$ компактно множество $A_x = \{f(x) | f \in A\}$.

Лит.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981.

В. И. Соболев.

ПОХГАММЕРА УРАВНЕНИЕ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка вида

$$Q(z)w^{(n)} - \mu Q'(z)w^{(n-1)} + \dots$$

$$\dots + (-1)^n \frac{\mu(\mu+1)\dots(\mu+n-1)}{n!} Q^{(n)}(z)\, w -$$

$$-\left[R(z)w^{(n-1)} - (\mu+1)R'(z)w^{(n-2)} + \dots\right.$$

$$\left.\dots + (-1)^{n-1}\frac{(\mu+1)\dots(\mu+n-1)}{(n-1)!} R^{(n-1)}(z)\, w\right] = 0,$$

где μ — комплексная постоянная, $Q(z)$, $R(z)$ — многочлены степени $\leqslant n$ и $\leqslant n-1$ соответственно. П. у. было исследовано Л. Похгаммером [1] и К. Жорданом [2].

П. у. проинтегрировано с помощью *Эйлера преобразования*, и его частные решения имеют вид

$$w(z) = \int_\gamma (t-z)^{\mu+n-1} u(t)\, dt, \qquad (*)$$

$$u(t) = \frac{1}{Q(t)} \exp\left[\int^t \frac{R(\tau)}{Q(\tau)}\, d\tau\right],$$

где γ — нек-рый контур в комплексной плоскости t. Пусть все корни $a_1, \dots, a_m$ многочлена $Q(z)$ простые и вычеты функции $R(z)/Q(z)$ в этих точках — нецелые числа. Пусть a — фиксированная точка такая, что $Q(a) \neq 0$, и пусть γ_j — простая замкнутая кривая с началом и концом в точке a, положительно ориентированная, к-рая содержит внутри себя только корень a_j, $j = 1, \dots, m$. Формула $(*)$ дает решение П. у., если

$$\gamma = \gamma_j \gamma_k \gamma_j^{-1} \gamma_k^{-1}, \quad j \neq k;\ j, k = 1, \dots, m;$$

из этих решений ровно m линейно независимы. Для построения остальных решений используются другие контуры, в том числе незамкнутые (см. [3], [4]). Вычислена группа монодромии П. у. (см. [3]).

Частными случаями П. у. являются уравнение Тиссо (см. [4]), то есть П. у., в к-ром

$$Q(z) = \prod_{i=1}^{n-1} (z - a_j),\ R(z) = Q(z)\left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{z - a_j}\right),$$

и *Папперица уравнение*.

Лит.: [1] Pochhammer L., «Math. Ann.», 1889, Bd 35, S. 470—94; [2] Jordan C., Cours d'analyse de l'École Polytechnique, 3 éd., t. 3, P., 1915; [3] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Хар., 1939; [4] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

М. В. Федорюк.

ПОЧТИ ВСЮДУ, для почти всех x (относительно меры μ), — выражение, означающее, что речь идет о всех x из измеримого пространства X, за исключением, быть может, нек-рого множества $A \subseteq X$ меры нуль: $\mu(A) = 0$.

В. И. Битюцков.

ПОЧТИ КОМПЛЕКСНАЯ СТРУКТУРА — поле I линейных преобразований касательных пространств на многообразии M, удовлетворяющее условию

$$I^2 = -id,$$

т. е. поле *комплексных структур* в касательных пространствах T_pM, $p \in M$. П. к. с. I определяет разложение $T^{\mathbb{C}}M = V_+ + V_-$ комплексификации $T^{\mathbb{C}}M$ касательного расслоения в прямую сумму комплексно сопряженных друг другу подрасслоений V_+ и V_-, состоящих из собственных векторов аффинора I (продолженного по линейности на $T^{\mathbb{C}}M$) с собственными значениями i и $-i$

соответственно. Обратно, разложение $T^{\mathbb{C}}M$ в прямую сумму двух взаимно сопряженных векторных подрасслоений S, $\overline{S}$ определяет П. к. с. на M, для которой $V_+ = S$.

П. к. с. I наз. интегрируемой, если она индуцируется комплексной структурой на M, т. е. если существует атлас допустимых карт многообразия M, в к-рых поле I имеет постоянные координаты I^j_k. Необходимое и достаточное условие интегрируемости П. к. с. состоит в инволютивности подрасслоения V_+, т. е. замкнутости пространства его сечений относительно коммутирования (комплексных) векторных полей. Условие инволютивности подрасслоения V_+ равносильно обращению в нуль ассоциированной с I векторнозначной 2-формы $N(I, I)$, задаваемой формулой

$$N(I, I)(X, Y) = [IX, IY] - I[X, IY] - I[I, XY] - [X, Y],$$

где X, Y — векторные поля. Эта форма наз. тензором кручения, или тензором Нейенхейса, П. к. с. Тензор Нейенхейса $N(I, I)$ можно рассматривать как дифференцирование степени 1 алгебры дифференциальных форм на M, имеющее вид

$$N(I, I) = [I, [I, d]] + d,$$

где d — внешний дифференциал, а I рассматривается как дифференцирование степени 0.

С точки зрения теории G-структур П. к. с. представляет из себя $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$-структуру, где $m = {}^1/_2 \dim M$, а тензор кручения $N(I, I)$ — тензор, определяемый первой структурной функцией этой структуры. $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$-структура является структурой эллиптич. типа, и поэтому алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов П. к. с. удовлетворяет эллиптич. системе дифференциальных уравнений 2-го порядка [1]. В частности, алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов П. к. с. на компактном многообразии конечномерна, а группа G всех автоморфизмов компактного многообразия с П. к. с. является группой Ли. Для некомпактных многообразий это, вообще говоря, не так.

Если группа автоморфизмов G транзитивна на многообразии M, то П. к. с. I однозначно определяется своим значением I_p в фиксированной точке $p \in M$, к-рое представляет из себя инвариантную относительно представления изотропии комплексную структуру в касательном пространстве T_pM (см. *Инвариантный объект* на однородном пространстве). Методы теории групп Ли позволяют построить широкий класс однородных пространств, обладающих инвариантной П. к. с. (как интегрируемой, так и неинтегрируемой) и при тех или иных предположениях классифицировать инвариантные П. к. с. (см. [2]). Напр., любое факторпространство G/H группы Ли G по подгруппе H, состоящей из неподвижных точек автоморфизма нечетного порядка группы Ли G, обладает инвариантной П. к. с. Примером является 6-мерная сфера S^6, рассматриваемая как однородное пространство $G_2/\mathrm{SU}(3)$; ни одна из инвариантных П. к. с. на S^6 не является интегрируемой.

Наличие на многообразии П. к. с. накладывает некрые ограничения на его топологию — оно должно быть четномерным, ориентируемым, а в компактном случае все его нечетномерные классы Штифеля — Уитни должны быть равны нулю. Среди сфер П. к. с. допускают только сферы размерностей 2 и 6.

Лит.: [1] Kobayashi S., Transformation groups in differential geometry, B.—[u.a.], 1972; [2] Комраков Б. П., Структуры на многообразиях и однородные пространства, Минск, 1978; [3] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [4] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [5] Хермандер Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968.

Д. В. Алексеевский.

ПОЧТИ ПЕРИОД — понятие теории *почти периодических функций*, являющееся обобщением понятия периода. Для равномерной почти периодич. функции $f(x)$, $-\infty<x<\infty$, число $\tau=\tau_f(\varepsilon)$ наз. ε-п о ч т и п е р и о д о м функции $f(x)$, если для всех x выполняется неравенство

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon.$$

Для обобщенных почти периодич. функций понятие П. п. определяется сложнее. Напр., в пространстве S_l^p функций Степанова ε-почти период τ определяется неравенством

$$D_{S_l^p}[f(x+\tau)-f(x)]<\varepsilon,$$

где $D_{S_l^p}[f,\ \varphi]$ — расстояние между функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$ в метрике пространства S_l^p.

Множество П. п. функции $f(x)$ наз. о т н о с и т е л ь н о п л о т н ы м, если существует число $L=L(\varepsilon,\ f)>0$ такое, что в каждом интервале $(\alpha,\ \alpha+L)$ действительной оси найдется хотя бы одно число этого множества. Определение равномерных почти периодич. функций и почти периодич. функций по Степанову может быть основано на требовании существования относительно плотных множеств ε-почти периодов у этих функций.

Лит.: [1] Л е в и т а н Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953.

Е. А. Бредихина.

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция, к-рая может быть представлена обобщенным рядом Фурье. Существуют различные способы определения классов П. п. ф., основанные на понятиях замыкания, почти периода, сдвига. Каждый из классов П. п. ф. получается в результате замыкания в том или ином смысле одной и той же совокупности конечных тригонометрич. сумм.

Пусть $D_G[f(x),\ \varphi(x)]$ — расстояние между функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$ в метрич. пространстве G. Далее в качестве G рассматривается одно из пространств U, S_l^p, W^p, B^p, где U — совокупность непрерывных ограниченных на действительной оси функций с метрикой

$$D_U[f(x),\ \varphi(x)]=\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)-\varphi(x)|;$$

S_l^p, W^p, B^p — совокупности функций, измеримых и суммируемых со степенью p, $p\geqslant 1$, в каждом конечном интервале действительной оси с метриками:

$$D_{S_l^p}[f(x),\ \varphi(x)]=$$

$$=\sup_{-\infty<x<\infty}\left[\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f(x)-\varphi(x)|^p\,dx\right]^{1/p},$$

$$D_{W^p}[f(x),\ \varphi(x)]=\lim_{l\to\infty}D_{S_l^p}[f(x),\ \varphi(x)],$$

$$D_{B^p}[f(x),\ \varphi(x)]=\left[\overline{\lim_{\tau\to\infty}}\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}|f(x)-\varphi(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Пусть T — множество тригонометрич. полиномов вида

$$\sum_{k=1}^{N}a_k e^{i\lambda_k x},$$

где λ_k — любые действительные числа, a_k — комплексные коэффициенты. Через $H_G(T)$ обозначается замыкание в пространстве G множества T. Классы $H_U(T)=U$-п. п., $H_{S_l^p}(T)=S_l^p$-п. п., $H_{W^p}(T)=W^p$-п. п., $H_{B^p}=B^p$-п. п. наз. соответственно классами равномерных П. п. ф., или *Бора почти периодических функций*, *Степанова почти периодических функций*, *Вейля почти периодических функций*, *Безиковича почти периодических функций*. Все определенные выше классы П. п. ф. инварианты относительно сложения. Вместе с $f(x)$ в каждый класс входит $\overline{f(x)}$, $|f(x)|$ и произведение

$f(x)e^{i\lambda x}$, где λ — действительное число. Расстояния $D_{S_l^p}[f(x), \varphi(x)]$ при различных значениях l топологически эквивалентны, и потому можно считать $l=1$. Пусть S_1^p-п. п.$=S^p$-п. п., S^1-п. п.$=S$-п. п., B^1-п. п.$=B$-п. п., тогда имеют место включения

$$U\text{-п.п}\subset S^p\text{-п.п}\subset W^p\text{-п.п}\subset B^p\text{-п.п.}, \quad p\geqslant 1;$$

п. если $p_1<p_2$, $p_1\geqslant 1$,

$$S^{p_2}\text{-п.п}\subset S^{p_1}\text{-п.п.}, \quad W^{p_2}\text{-п.п.}\subset W^{p_1}\text{-п.п},$$

$$B^{p_2}\text{-п.п.}\subset B^{p_1}\text{-п.п.}$$

Для каждой $f(x)\in B$-п. п. существует среднее значение

$$M\{f(x)\}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(x)\,dx;$$

функция $a(\lambda, f)=M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$, где λ — действительное число, может отличаться от нуля не более чем на счетном множестве значений λ; в результате нумерации в произвольном порядке получается последовательность $\{\lambda_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, показателей Фурье функции $f(x)$.

Числа $A_{\lambda_k}=a(\lambda_k, f)$ наз. коэффициентами Фурье функции $f(x)$. П. п. ф. $f(x)$ любого определенного выше класса соответствует ряд Фурье вида

$$f(x)\sim\sum\nolimits_k A_{\lambda_k}e^{i\lambda_k x}.$$

Для $f(x)\in B^2$-п. п. имеет место равенство Парсеваля

$$M\{|f(x)|^2\}=\sum\nolimits_k|A_{\lambda_k}|^2.$$

В классе B^p-п. п. обобщается теорема Рисса — Фишера: пусть $\{\lambda_k\}$, $k=1, 2, \ldots$,— произвольные действительные числа, $\{A_k\}$, $k=1, 2, \ldots$,— комплексные числа, для к-рых $\sum_{k=1}^\infty|A_k|^2<\infty$, тогда существует $f(x)\in B^2$-п. п., для к-рой тригонометрич. ряд $\sum_k A_k e^{i\lambda_k x}$ является ее рядом Фурье.

Теорема единственности понимается в следующем смысле: если две функции $f(x)\in H_G(T)$ и $\varphi(x)\in H_G(T)$ имеют один и тот же ряд Фурье, то выполняется равенство

$$D_G[f(x), \varphi(x)]=0.$$

В частности, для равномерных П. п. ф. теорема единственности означает, что $f(x)=\varphi(x)$ (для П. п. ф. Степанова — почти всюду). Теорема единственности, понимаемая в том же смысле, что и для рядов Фурье — Лебега 2π-периодических функций, не имеет места для П. п. ф. Вейля — Безиковича.

Классы равномерных П. п. ф. и П. п. ф. Степанова являются соответственно нетривиальными расширениями класса непрерывных на всей числовой оси и суммируемых на $[0,2\pi]$ 2π-периодических функций. Для этих классов П. п. ф. сохраняется теорема единственности.

Другие, менее формальные определения П. п. ф. рассматриваемых классов опираются на понятие *почти периода* и на обобщения этого понятия.

Следствием определения классов П. п. ф. через понятие замыкания является теорема аппроксимации: для каждой П. п. ф. $f(x)$ из U (или S^p, W^p) и каждого $\varepsilon>0$ можно указать конечный тригонометрич. полином $P(x)$ из множества T, удовлетворяющий неравенству

$$D_U[f(x), P(x)]<\varepsilon$$

$$(D_{S^p}[f(x), P(x)]<\varepsilon, \quad D_{W^p}[f(x), P(x)]<\varepsilon).$$

Теорема аппроксимации может служить отправным пунктом определения различных классов П. п. ф. При этом аппроксимирующие полиномы $P(x)$ могут содержать «посторонние», т. е. отличные от показателей Фурье функции $f(x)$, показатели. Однако для нек-рых приложений теоремы аппроксимации важен тот факт, что можно совершенно избежать введения в $P(x)$ показателей, отличных от показателей Фурье функции $f(x)$.

В связи с представимостью П. п. ф. обобщенными рядами Фурье возникает вопрос о признаках сходимости для этих рядов и приобретают значение разнообразные методы суммирования обобщенных рядов Фурье (метод Бохнера — Фейера и др.). Так, получены признак абсолютной сходимости обобщенных рядов Фурье с линейно независимыми показателями Фурье, признак равномерной сходимости рядов Фурье, когда $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$, и аналогичный признак в случае, когда $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Значение признаков равномерной сходимости в теории П. п. ф. подчеркивается следующей теоремой: если тригонометрич. ряд $\sum_k a_k e^{i\lambda_k x}$ сходится равномерно на всей действительной оси, то он является рядом Фурье своей суммы $S(x) \subset U$-п. п. Следствие: существуют равномерные П. п. ф. с произвольным счетным множеством показателей Фурье. В частности, показатели Фурье равномерной П. п. ф. могут иметь предельные точки на конечном расстоянии или даже располагаться всюду плотно.

Кроме понятия замыкания или почти периода, для определения П. п. ф. можно использовать понятие сдвига. Так, функция $f(x)$ будет равномерной П. п. ф. тогда и только тогда, когда из каждой бесконечной последовательности функций $f(x+h_1)$, $f(x+h_2)$, ..., где сдвиги h_1, h_2, ...— произвольные действительные числа, можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Это определение служит отправной точкой при рассмотрении П. п. ф. на группах.

Основные факты теории П. п. ф. остаются справедливыми и в том случае, если рассматривать понятие обобщенного сдвига. Возможны и полезны другие обобщения: П. п. ф. со значениями в евклидовом n-мерном пространстве, в банаховом или метрич. пространстве, аналитические и гармонические П. п. ф.

Лит.: [1] Бор Г., Почти периодические функции, пер. с нем., М.— Л., 1934; [2] Besicovitch A. S., Almost periodic functions, Camb., 1932; [3] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953; [4] Купцов Н. П., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 4, с. 117—78; [5] Rudin W., Fourier analysis on groups, N.Y.—L., 1962; [6] Левитан Б. М., Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения, М., 1962; [7] Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С., Нелинейные почти периодические колебания, М., 1970.

Е. А. Бредихина.

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ — аналитическая функция $f(s)$, $s=\sigma+i\tau$, регулярная в полосе $-\infty \leqslant \alpha < \sigma < \beta \leqslant +\infty$ и разложимая в ряд вида

$$\sum a_n e^{i\lambda_n s},$$

где a_n — комплексные, λ_n — действительные числа. Действительное число τ наз. ε-п о ч т и п е р и о д о м функции $f(s)$, если во всех точках полосы (α, β) выполняется неравенство

$$|f(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon.$$

П. п. ф. а.— аналитическая функция, регулярная в полосе (α, β) и обладающая для каждого $\varepsilon > 0$ относительно плотным множеством ε-почти периодов. Аналогично определяется П. п. ф. а. в замкнутой полосе $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \beta$. П. п. ф. а. в полосе $[\alpha, \beta]$ на каждой прямой полосы является равномерной почти периодич. функцией от действительного переменного τ, она ограничена в $[\alpha, \beta]$, т. е. в любой внутренней полосе. Если функция

$f(s)$, регулярная в полосе (α, β), является равномерной почти периодич. функцией хотя бы на одной единственной прямой $\sigma=\sigma_0$ этой полосы, то ограниченность $f(s)$ в $[\alpha, \beta]$ влечет за собой ее почти периодичность во всей полосе $[\alpha, \beta]$. В результате теория П. п. ф. а. оказывается в основе своей аналогичной теории *почти периодических функций* от действительного переменного. Поэтому на П. п. ф. а. легко переносятся многие важные факты последней теории: теорема единственности, равенство Парсеваля, правила действий над рядами Дирихле, аппроксимационная теорема и ряд др. теорем.

Лит.: [1] Бор Г., Почти периодические функции, пер. с нем., М.— Л., 1934; [2] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953.

Е. А. Бредихина.

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ НА ГРУППЕ — обобщение почти периодич. функций, заданных на $\mathbb{R}^1$.

Пусть G — (абстрактная) группа. Комплекснозначная функция $f(x)$, $x\in G$, наз. правой почти периодической функцией (п. п. ф.), если семейство $f(xa)$, где a пробегает всю группу G, компактно в смысле равномерной сходимости на G, т. е. из каждой последовательности $f(xa_1)$, $f(xa_2)$, ... можно выделить равномерно на G сходящуюся подпоследовательность. Аналогично определяются левая почти периодическая функция на группе G. Оказывается, что всякая правая (левая) п. п. ф. является одновременно левой (правой) п. п. ф., и имеет место компактность семейства $f(axb)$, где a, b независимо пробегают группу G. Последнее свойство часто принимается в качестве определения п. п. ф. на G. Совокупность всех п. п. ф. на G есть банахово пространство с нормой $\|f\|=\sup\limits_{x\in G}|f(x)|$.

Теория п. п. ф. на группе существенно опирается на теорему о среднем значении (см. [5], [8]). Линейный функционал $M_x\{f(x)\}$, заданный на пространстве всех п. п. ф., наз. средним значением, если

1) $M_x\{1\}=1$, $M_x\{f(x)\}\geqslant 0$ для $f(x)\geqslant 0$ и $M_x\{f(x)\}>0$ для $f\not\equiv 0$;

2) $M_x\{f(xa)\}=M_x\{f(ax)\}=M_x\{f(x^{-1})\}$.

Унитарная матрица $g(x)=\{g_{ij}(x)\}_{i,\ j=1}^{r}$, заданная на G, наз. унитарным представлением группы G, если $g(e)=I_r$ (e — единица группы G, I_r — единичная матрица порядка r) и для любых элементов x, $y\in G$ имеет место равенство $g(xy)=g(x)g(y)$. Число r наз. размерностью представления g. Матричные элементы $g_{ij}(x)$ суть п. п. ф. на G. В теории п. п. ф. на группе они играют ту же роль, что и функции $\exp(i\lambda x)$ в теории п. п. ф. на прямой $\mathbb{R}^1$.

Два представления $g(x)$ и $g'(x)$ наз. эквивалентными, если существует такая постоянная матрица A, что $g'(x)=A^{-1}g(x)A$. Представление g наз. неприводимым, если семейство матриц $g(x)$, $x\in G$, не имеет общего нетривиального инвариантного подпространства в $\mathbb{R}^r$. Множество всех неприводимых унитарных представлений разбивается на классы эквивалентных между собой представлений. Пусть из каждого класса эквивалентных представлений выбрано по одному представлению и полученное множество обозначено S. Тогда множество п. п. ф. на G

$$H=\{\varphi_\lambda(x)\}=\{\varphi,\ \varphi=g_{ij},\ g\in S\}$$

оказывается ортогональной (хотя, вообще говоря, несчетной) системой.

Теорема 1 (равенство Парсеваля). Если для п. п. ф. $f(x)$ положить

$$f\sim\sum\varphi_\lambda\frac{M_x\{f(x)\overline{\varphi_\lambda(x)}\}}{M_x^{1/2}\{|\varphi_\lambda(x)|^2\}},$$

то

$$M_x\{|f(x)|^2\}=\sum\frac{\left|M_x\{f(x)\overline{\varphi_\lambda(x)}\}\right|^2}{M_x\{|\varphi_\lambda(x)|^2\}}.$$

Говорят, что представление $g\in S$ входит в ряд Фурье п. п. ф. $f(x)$, если $M_x\{f(x)\overline{g_{ij}(x)}\}\neq 0$ для нек-рых i, j, $1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant r$.

Теорема 2 (теорема аппроксимации). Множество H плотно в пространстве п. п. ф., наделенном нормой

$$\|f\|=\sup_{x\in G}|f(x)|,$$

причем каждую п. п. ф. можно сколь угодно близко аппроксимировать конечной линейной комбинацией матричных элементов представлений, входящих в ее ряд Фурье.

Если G — топологич. группа, то к определению п. п. ф. нужно добавить требование ее непрерывности. В этом случае и представления, входящие в ее ряд Фурье, также будут непрерывными.

В случае, когда группа G абелева, непрерывные унитарные представления одномерны — они наз. характерами группы G. Характеры группы G обозначаются через χ, и равенство Парсеваля таково:

$$M_x\{|f(x)|^2\}=\sum\nolimits_n|a_n|^2,\ a_n=M_x\{f(x)\overline{\chi_n(x)}\}.$$

В случае $G=\mathbb{R}^n$ непрерывными характерами являются функции $\chi(x)=\exp(i\lambda\cdot x)$, где $\lambda\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\cdot x=\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n$. Из теорем 1, 2 следуют основные результаты теории п. п. ф. одного и многих переменных.

Доказательство основных положений теории п. п. ф. опирается на рассмотрение интегральных уравнений на группе (см. [2]). Доказано [3] существование достаточной системы линейных представлений компактных групп Ли. В этом случае инвариантное интегрирование (а значит, и среднее) устанавливается непосредственно. Построено [4] инвариантное интегрирование на абстрактной компактной группе, обусловливающее распространение на этот случай теории Петера — Вейля.

Теорию п. п. ф. на группе можно вывести (см. [3]) из теории Петера — Вейля следующим образом. Пусть $f(x)$ — п. п. ф. на группе G и пусть

$$\rho(x,\ y)=\sup_{a,\ b\in G}|f(axb)-f(ayb)|,$$

тогда множество $E=\{t\in G, \rho(t, e)=0\}$ есть нормальный делитель группы G, а ρ — инвариантная метрика на факторгруппе G/E и f равномерно непрерывна на G/E.

Из почти периодичности функции $f(x)$ следует, что пополнение факторгруппы G/E по метрике ρ есть компактная группа, и теоремы 1, 2 следуют из теории Петера — Вейля.

Лит.: [1] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953; [2] Weyl H., «Math. Ann.», 1926, Bd 97, S. 338—56; [3] Peter F., Weyl H., там же, 1927, Bd 97, S. 737—55; [4] Neumann J. von, «Comp. math.», 1934, v. 1, № 1, p. 106—14; [5] его же, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1934, v. 36, p. 445—92; [6] Weil A., «C. r. Acad. sci.», 1935, v. 200, p. 38—40; [7] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [8] Maak W., Fast periodische Funktionen, B., 1950.

В. В. Жиков, Б. М. Левитан.

ПОЧТИ ПРИВОДИМАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА обыкновенных дифференциальных уравнений — система

$$\dot{x}=A(t)x,\ x\in\mathbb{R}^n,$$
$$A(\cdot):\mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n), \qquad (*)$$

обладающая свойством: найдется система с постоянными коэффициентами $\dot{y}=By$, $y\in\mathbb{R}^n$, и для каждого $\varepsilon>0$ найдется *Ляпунова преобразование* $L_\varepsilon(t)$ такие, что в ре-

зультате замены $x = L_\varepsilon(t)y$ система (*) переходит в систему

$$\dot{y} = (B + C_\varepsilon(t))\, y,$$

где

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \| C_\varepsilon(t) \| < \varepsilon.$$

Всякая *приводимая линейная система* почти приводима.

Лит.: [1] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146. *В. М. Миллионщиков.*

ПОЧТИ ПРОСТОЕ ЧИСЛО — натуральное число n, имеющее вид

$$n = p_1 p_2 \ldots p_k,$$

где p_i — простые числа, а $k \geqslant 1$ — константа. Простые числа являются частным случаем П. п. ч. при $k=1$. Для П. п. ч. имеют место теоремы, обобщающие теорему о распределении простых чисел в натуральном ряду. Ряд *аддитивных проблем*, к-рые еще не решены в простых числах, решаются в П. п. ч. *Б. М. Бредихин.*

ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА — невырожденная дифференциальная 2-форма на многообразии. П. с. с. Ω может существовать только на четномерном многообразии M ($\dim M = 2m$) и определяет $Sp(m, \mathbb{R})$-структуру $B_{Sp(m, \mathbb{R})}$, а именно главное расслоение реперов на M со структурной группой $Sp(m, \mathbb{R})$, состоящее из всех реперов $r = \{e_i, f_i, i=1, \ldots, m\}$, для к-рых

$$\Omega(e_i, e_j) = \Omega(f_i, f_j) = 0, \ \Omega(e_i\, f_j) = \delta_{ij}.$$

Необходимое и достаточное условие существования на многообразии M П. с. с. (так же, как и почти комплексной структуры) состоит в возможности редукции структурной группы касательного расслоения к унитарной группе $U(m)$. Для этого, в частности, необходимо обращение в нуль всех нечетномерных классов Штифеля — Уитни многообразия M (см. [1]).

Почти комплексная структура J и риманова метрика g на многообразии M определяют П. с. с. Ω по формуле

$$\Omega(X, Y) = g(JX, Y) - g(X, JY),$$

где X, Y — векторы, и любая П. с. с. может быть получена таким образом. П. с. с. Ω наз. и н т е г р и р у е м о й или, иначе, с и м п л е к т и ч е с к о й с т р у к т у р о й, если в окрестности любой точки в нек-рых локальных координатах x^i, y^i, $i=1, \ldots, m$, она приводится к виду $\Omega = \Sigma dx^i \wedge dy^i$. Согласно теореме Дарбу для этого необходимо и достаточно, чтобы форма Ω была замкнута. Пример интегрируемой П. с. с. — каноническая симплектич. структура $\Omega = \Sigma dp_i \wedge dq^i$ на кокасательном расслоении T^*M произвольного многообразия M (здесь q^i — локальные координаты многообразия M, p_i — соответствующие координаты в слое). Примером неинтегрируемой П. с. с. является левоинвариантная 2-форма на полупростой группе Ли G, получающаяся разнесением левыми сдвигами произвольной невырожденной внешней 2-формы на соответствующей группе G алгебре Ли. Так же, как и риманова метрика, П. с. с. определяет изоморфизм касательных и кокасательных пространств (а тем самым и пространств контравариантных и ковариантных тензоров), а также каноническую $2m$-форму объема $\eta = 1/m!\Omega^m$ и ряд операторов в пространстве $\Lambda(M)$ дифференциальных форм: оператор ε_Ω внешнего умножения на Ω; оператор i_Ω внутреннего умножения на Ω; оператор звездочки Ходжа $* : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{2m-p}(M)$, $\omega \to i_\omega \eta$, где оператор i_ω внутреннего умножения определяется как свертка данной с p-вектором, соответствующим p-форме ω; оператор кодифференцирования $\delta = *d*$. В отличие от риманова случая оператор $\Delta = d\delta + \delta d$ оказывается кососимметрич. относительно глобально-

го скалярного произведения $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge * \beta$ в пространстве p-форм на компактном многообразии M. Для произвольной p-формы имеет место разложение Ходжа — Лепажа $\omega = \omega_0 + \varepsilon_\Omega \omega_1 + \varepsilon_\Omega^2 \omega_2 + \ldots$, где $\omega_i \in \Lambda^{p-2i}(M)$ — однозначно определенные эффективные (т. е. аннулируемые оператором i_Ω) формы [3].

П. с. с. наз. конформно плоской, если существует такая функция $\lambda > 0$, что $d(\lambda\Omega) = 0$. Это эквивалентно представимости формы Ω в виде:

$$\Omega = y^1 \sum_{i=1}^{m} dx^i \wedge dy^i.$$

При $m = 2$ необходимым и достаточным условием того, чтобы П. с. с. Ω была конформно плоской, является замкнутость 1-формы $\delta\Omega = i_\Omega d\Omega$, а при $m > 2$ — выполнение равенства $d\Omega = (1/m - 1)\,\delta\Omega \wedge \Omega$ (см. [1]).

Тензор T типа (1, 2), соответствующий 3-форме $d\Omega$ и определяемый равенством $\Omega(T_X Y, Z) = d\Omega(X, Y, Z)$, где X, Y, Z — векторы, наз. тензором кручения П. с. с. Ω. С ним ассоциируется, вообще говоря, вырожденная метрика $g(X, Y) = \mathrm{tr}\, T_X T_Y$. С произвольной П. с. с. связывается класс линейных связностей ∇, аннулирующих форму Ω и имеющих тензор T своим тензором кручения. Две такие связности отличаются на тензорное поле вида $\Omega^{ij} S_{jkl}$, где S_{jkl} — произвольное симметрическое тензорное поле. Рассматриваемые связности взаимно однозначно соответствуют сечениям первого продолжения $B^1 \to B$ для $Sp(m, \mathbb{R})$-структуры $B = B_{Sp(m, \mathbb{R})}$, являющегося главным расслоением реперов на B со структурной группой $S^3(\mathbb{R}^{2m})$ (векторной группой однородных полиномов третьей степени от $2m$ переменных). $Sp(m, \mathbb{R})$-структура является G-структурой бесконечного типа. Поэтому группа автоморфизмов П. с. с. может быть бесконечномерной. В частности, группа автоморфизмов симплектич. структуры всегда бесконечномерна и является k-транзитивной группой для любого $k > 0$.

Лит.: [1] Libermann P., «Bull. Soc. Math. France», 1955, t. 83, p. 195—224; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 11, М., 1974, с. 153—207; [3] Лычагин В. В., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, № 1, с. 137—165; [4] Kobayashi Sh., Transformation groups in differential geometry, B.—[a.o.], 1972. *Д. В. Алексеевский.*

ПОЧТИКОЛЬЦО — одно из обобщений понятия ассоциативного кольца. П.— это *кольцоид* над группой, т. е. универсальная алгебра, в к-рой имеется ассоциативная операция умножения и операция сложения; относительно сложения П. должно быть группой (не обязательно коммутативной), причем должен также выполняться правый закон дистрибутивности:

$$x(y + z) = xy + xz.$$

П. являются также частным случаем *мультиоператорных групп*.

Примерами П. являются множества $M_S(\Gamma)$ всех отображений группы Γ в себя, перестановочных с действием фиксированной полугруппы эндоморфизмов S группы Γ. Групповые операции в $M_S(\Gamma)$ вводятся поточечно, умножением в $M_S(\Gamma)$ является композиция отображений. Почтикольцо $M_S(\Gamma)$ является аналогом кольца матриц. Обычным образом вводятся понятия подпочтикольца, идеала, правого модуля над П.

Пусть N_0 (соответственно N_c) — многообразие П., задаваемое тождеством $0x = 0$ (соответственно $0x = x$). Любое почтикольцо A разлагается в сумму подпочтиколец $A = A_0 + A_c$, где $A_0 \in N_0$, $A_c \in N_c$, причем $A_0 \cap A_c = 0$. Циклический правый A-модуль M наз. примитивным типа 0, если M прост, примитивным типа 1, если либо $xA = 0$, либо $xA = M$ для любого $x \in M$, и примитивным типа 2, если M является простым A_0-модулем. Почтикольцо A наз.

примитивным типа ν ($\nu=0, 1, 2$), если существует точный простой A-модуль Γ типа ν. При этом возникает плотное вложение почтикольца A в $M_S(\Gamma)$ для нек-рой полугруппы эндоморфизмов S группы Γ. Для 2-примитивных почтиколец A с единицей и условием минимальности для правых идеалов в A_0 имеет место равенство $A=M_S(\Gamma)$ (аналог теоремы Веддерберна — Артина). Для каждого $\nu=0, 1, 2$ вводится понятие радикала Джекобсона типа ν, обозначаемого $J_\nu(A)$, он определяется как пересечение аннуляторов ν-примитивных A-модулей. Радикал $J_{1/2}(A)$ определяется как пересечение максимальных правых модулярных идеалов. Все четыре радикала различны, причем

$$J_0(A)\subseteq J_{1/2}(A)\subseteq J_1(A)\subseteq J_2(A).$$

Оказывается, что эти радикалы обладают многими свойствами радикала Джекобсона ассоциативных колец (см. [4]).

Для П. справедлив аналог теоремы Оре о почтикольцах частных [4].

Дистрибутивно порожденным почтикольцом наз. П., аддитивная группа к-рого порождается такими элементами x, что

$$(y+z)x=yx+zx$$

для всех y, z из П. Все дистрибутивно порожденные П. порождают многообразие N_0. Для конечных дистрибутивно порожденных П. понятия 1- и 2-примитивности совпадают; 1-примитивные дистрибутивно порожденные П. имеют вид $M_0(\Gamma)$ для нек-рой группы Γ. В дистрибутивно порожденном П., с тождеством

$$(xy-yx)^{n(x,\,y)}=xy-yx,\ n(x,\ y)>1,$$

умножение коммутативно (см. [3], [4]).

Каждое П. из N_0, не содержащее нильпотентных элементов, является подпрямым произведением П. без делителей нуля [4]. Почтиалгебра A разлагается в прямую сумму простых П. тогда и только тогда, когда а) она удовлетворяет условию минимальности для главных идеалов, б) в A нет идеалов с нулевым умножением, в) аннулятор любого минимального идеала максимален [1].

Для П. получены результаты, аналогичные результатам о строении регулярных колец [2], о почтикольцах частных [5]. П. имеют приложения к изучению групп подстановок, блок-схем, проективной геометрии [4].

Лит.: [1] Bell H. E., «Canad. Math. Bull.», 1977, v. 20, № 1, p. 25—28; [2] Heatherly H. E., «J. Indian Math. Soc.», 1974, v. 38, p. 345—54; [3] Ligh S., «J. London Math. Soc.», 1975, v. 12, pt. 1, p. 27—31; [4] Pilz G., Near-rings, Amst., 1977; [5] Oswald A., «Proc. Edinburgh Math. Soc.», 1979, v. 22, № 2, p. 77—86; [6] Полин С. В., в кн.: Кольца, Новосиб., 1973, с. 41—45.

В. А. Артамонов.

ПОЯС, линк, симплекса σ триангуляции T — совокупность $\ln(\sigma, T)$ тех симплексов из замкнутой звезды $\mathrm{St}(\sigma, T)$ (объединения симплексов T, содержащих σ), к-рые не пересекают σ. *М. И. Войцеховский.*

ПРАВАЯ ГРУППА — полугруппа, простая справа (см. *Простая полугруппа*) и удовлетворяющая левостороннему закону сокращения. Всякая П. г. является *вполне простой полугруппой*. Свойство полугруппы S быть П. г. эквивалентно любому из следующих условий: а) S проста справа и содержит идемпотент, б) S регулярна и удовлетворяет левостороннему закону сокращения, в) S обладает разбиением на левые идеалы, являющиеся (необходимо изоморфными) группами, г) S есть прямое произведение группы и полугруппы правых нулей (см. *Идемпотентов полугруппа*). Симметричным к понятию П. г. является понятие левой группы. Группы и только они суть одновременно П. г. и левые группы. Всякая вполне простая полугруппа обладает разбиением на правые (левые) идеалы, являю-

щиеся (необходимо изоморфными) правыми (левыми) группами.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972.

Л. Н. Шеврин.

ПРАВДОПОДОБИЯ УРАВНЕНИЕ — уравнение, к-рое составляют при нахождении статистич. оценок неизвестных параметров по *максимального правдоподобия методу*. Пусть X — случайный вектор, плотность вероятности к-рого $p(x|\theta)$ содержит неизвестный параметр $\theta\in\Theta$. Тогда уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X\mid\theta)=0$$

наз. уравнением правдоподобия, а его решение $\hat{\theta}$ — оценкой максимального (наибольшего) правдоподобия для параметра θ. В нек-рых случаях П. у. решается элементарно, но в основном П. у. представляет собой алгебраическое или трансцендентное уравнение, для решения к-рого пользуются методом последовательных приближений.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960.

М. С. Никулин.

ПРАВИЛЬНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — интерпретация формальной системы, при к-рой все аксиомы истинны или принимают значение «истина» при всех значениях ее параметров, а правила вывода сохраняют свойство принимать значение «истина». Данное определение относится к двузначным логич. исчислениям. Если истинностных значений больше и нек-рые из них отмечены, то в определении П. и. вместо слов «принимать значение „истина“» надо использовать слова «принимать отмеченные значения». Если приведенное свойство интерпретации не выполняется, то она наз. неправильной. П. и. для формальных систем, получающихся добавлением к узкому исчислению предикатов какого-то множества аксиом T, наз. также моделями системы аксиом T или моделями для T. Произвольные интерпретации для таких формальных систем наз. алгебраич. системами или просто моделями.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960.

В. Н. Гришин.

ПРАВИЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА обыкновенных дифференциальных уравнений — система вида

$$\dot{x}=A(t)\,x,\quad x\in\mathbb{R}^n \tag{1}$$

(где $A(\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение $\mathbb{R}^+\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n)$), обладающая свойством:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{tr}\,A(\tau)\,d\tau$$

существует и равен $\sum_{i=1}^n\lambda_i(A)$, где $\lambda_1(A)\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(A)$ — *Ляпунова характеристические показатели* системы (1).

Для того чтобы треугольная система

$$\dot{u}^i=\sum_{j=i}^n p_{ij}(t)\,u^j,\quad i=1,\ \ldots,\ n,$$

была правильной, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t p_{ii}(\tau)\,d\tau,\quad i=1,\ \ldots,\ n$$

(критерий Ляпунова). Всякая *приводимая линейная система* и всякая *почти приводимая линейная система* являются правильными.

Роль понятия П. л. с. проясняется на следующей теореме Ляпунова. Пусть система (1) правильная и k ее характеристич. показателей Ляпунова отрицательны:

$$0>\lambda_{n-k+1}(A)\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(A).$$

Тогда для всякой системы

$$\dot{x}=A(t)\,x+g(t,\ x), \tag{2}$$

где $g(t,\ x)$ удовлетворяет следующим условиям: g, g'_x непрерывны, $g(0,\ t)\equiv 0$, $\|g'_x(x,\ t)\|=O(|x|^\varepsilon)$, где $\varepsilon=\mathrm{const}>0$, найдется k-мерное многообразие $V^k\subset\mathbb{R}^n$, содержащее точку $x=0$, такое, что всякое решение $x(t)$ системы (2), начинающееся на V^k (то есть $x(0)\in V^k$), экспоненциально убывает при $t\to+\infty$, точнее — удовлетворяет неравенству

$$|x(t)|\leqslant C_\delta e^{[\lambda_{n-k+1}(A)+\delta]\,t}\,|x(0)|$$

(для всякого $\delta>0$ при нек-ром C_δ).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Хар., 1892 (то же, в кн.: Собр. соч., т. 2, М.—Л., 1956); [2] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [3] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146.

В. М. Миллионщиков.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ, тела Платона,— выпуклые многогранники, все грани к-рых суть одинаковые правильные многоугольники и все многогранные углы при вершинах правильные и равные (рис. 1*а*—1*д*).



Рис. 1.

В евклидовом пространстве E^3 существуют пять П. м., данные о к-рых приведены в табл. 1, где символ Шлефли $\{p,\ q\}$ (см. *Многогранника группа*) обозначает П. м. с p-угольными гранями и q-гранными углами.

Табл. 1.—Правильные (выпуклые) многогранники в E^3

	Рис.	Символ Шлефли	Число вершин	Число ребер	Число граней
Тетраэдр	1*а*	{3, 3}	4	6	4
Куб (гексаэдр)	1*б*	{4, 3}	8	12	6
Октаэдр	1*в*	{3, 4}	6	12	8
Додекаэдр	1*г*	{5, 3}	20	30	12
Икосаэдр	1*д*	{3, 5}	12	30	20

Двойственными многогранниками $\{p,\ q\}$ и $\{q,\ p\}$ наз. такие, к-рые переходят друг в друга при полярном преобразовании относительно вписанной

Табл. 2.—Правильные многогранники в E^4

	Символ Шлефли	Число вершин	Число ребер	Число двумерных граней	Число трехмерных граней
Симплекс	{3, 3, 3}	5	10	10	5
Гиперкуб	{4, 3, 3}	16	32	24	8
16-гранник	{3, 3, 4}	8	24	32	16
24-гранник	{3, 4, 3}	24	96	96	24
120-гранник	{5, 3, 3}	600	1200	720	120
600-гранник	{3, 3, 5}	120	720	1200	600

щиеся (необходимо изоморфными) правыми (левыми) группами.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972.

Л. Н. Шеврин.

ПРАВДОПОДОБИЯ УРАВНЕНИЕ — уравнение, к-рое составляют при нахождении статистич. оценок неизвестных параметров по *максимального правдоподобия методу*. Пусть X — случайный вектор, плотность вероятности к-рого $p(x|\theta)$ содержит неизвестный параметр $\theta\in\Theta$. Тогда уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X\mid\theta)=0$$

наз. уравнением правдоподобия, а его решение $\hat{\theta}$ — оценкой максимального (наибольшего) правдоподобия для параметра θ. В нек-рых случаях П. у. решается элементарно, но в основном П. у. представляет собой алгебраическое или трансцендентное уравнение, для решения к-рого пользуются методом последовательных приближений.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960.

М. С. Никулин.

ПРАВИЛЬНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — интерпретация формальной системы, при к-рой все аксиомы истинны или принимают значение «истина» при всех значениях ее параметров, а правила вывода сохраняют свойство принимать значение «истина». Данное определение относится к двузначным логич. исчислениям. Если истинностных значений больше и нек-рые из них отмечены, то в определении П. и. вместо слов «принимать значение „истина“» надо использовать слова «принимать отмеченные значения». Если приведенное свойство интерпретации не выполняется, то она наз. неправильной. П. и. для формальных систем, получающихся добавлением к узкому исчислению предикатов какого-то множества аксиом T, наз. также моделями системы аксиом T или моделями для T. Произвольные интерпретации для таких формальных систем наз. алгебраич. системами или просто моделями.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960.

В. Н. Гришин.

ПРАВИЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА обыкновенных дифференциальных уравнений — система вида

$$\dot{x}=A(t)\,x,\quad x\in\mathbb{R}^n \tag{1}$$

(где $A(\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение $\mathbb{R}^+\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n)$), обладающая свойством:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{tr}\,A(\tau)\,d\tau$$

существует и равен $\sum_{i=1}^n\lambda_i(A)$, где $\lambda_1(A)\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(A)$ — *Ляпунова характеристические показатели* системы (1).

Для того чтобы треугольная система

$$\dot{u}^i=\sum_{j=i}^n p_{ij}(t)\,u^j,\quad i=1,\ \ldots,\ n,$$

была правильной, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t p_{ii}(\tau)\,d\tau,\quad i=1,\ \ldots,\ n$$

(критерий Ляпунова). Всякая *приводимая линейная система* и всякая *почти приводимая линейная система* являются правильными.

Роль понятия П. л. с. проясняется на следующей теореме Ляпунова. Пусть система (1) правильная и k ее характеристич. показателей Ляпунова отрицательны:

$$0>\lambda_{n-k+1}(A)\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(A).$$

Тогда для всякой системы

$$\dot{x}=A(t)\,x+g(t,\ x), \tag{2}$$

где $g(t,\ x)$ удовлетворяет следующим условиям: g, g'_x непрерывны, $g(0,\ t)\equiv 0$, $\|g'_x(x,\ t)\|=O(|x|^\varepsilon)$, где $\varepsilon=\mathrm{const}>0$, найдется k-мерное многообразие $V^k\subset\mathbb{R}^n$, содержащее точку $x=0$, такое, что всякое решение $x(t)$ системы (2), начинающееся на V^k (то есть $x(0)\in V^k$), экспоненциально убывает при $t\to+\infty$, точнее — удовлетворяет неравенству

$$|x(t)|\leqslant C_\delta e^{[\lambda_{n-k+1}(A)+\delta]\,t}\,|x(0)|$$

(для всякого $\delta>0$ при нек-ром C_δ).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Хар., 1892 (то же, в кн.: Собр. соч., т. 2, М.—Л., 1956); [2] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [3] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146.

В. М. Миллионщиков.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ, тела Платона,— выпуклые многогранники, все грани к-рых суть одинаковые правильные многоугольники и все многогранные углы при вершинах правильные и равные (рис. 1*а*—1*д*).



Рис. 1.

В евклидовом пространстве E^3 существуют пять П. м., данные о к-рых приведены в табл. 1, где символ Шлефли $\{p,\ q\}$ (см. *Многогранника группа*) обозначает П. м. с p-угольными гранями и q-гранными углами.

Табл. 1.—Правильные (выпуклые) многогранники в E^3

	Рис.	Символ Шлефли	Число вершин	Число ребер	Число граней
Тетраэдр	1*а*	{3, 3}	4	6	4
Куб (гексаэдр)	1*б*	{4, 3}	8	12	6
Октаэдр	1*в*	{3, 4}	6	12	8
Додекаэдр	1*г*	{5, 3}	20	30	12
Икосаэдр	1*д*	{3, 5}	12	30	20

Двойственными многогранниками $\{p,\ q\}$ и $\{q,\ p\}$ наз. такие, к-рые переходят друг в друга при полярном преобразовании относительно вписанной

Табл. 2.—Правильные многогранники в E^4

	Символ Шлефли	Число вершин	Число ребер	Число двумерных граней	Число трехмерных граней
Симплекс	{3, 3, 3}	5	10	10	5
Гиперкуб	{4, 3, 3}	16	32	24	8
16-гранник	{3, 3, 4}	8	24	32	16
24-гранник	{3, 4, 3}	24	96	96	24
120-гранник	{5, 3, 3}	600	1200	720	120
600-гранник	{3, 3, 5}	120	720	1200	600

или описанной сферы. Тетраэдр двойствен сам себе, гексаэдр — октаэдру и додекаэдр — икосаэдру.

В пространстве E^4 существуют шесть П. м., данные о к-рых приведены в табл. 2.

В пространстве E^n, $n>4$, существует три П. м.— аналоги тетраэдра, октаэдра и куба; их символы Шлефли — $\{3, \ldots, 3\}$, $\{4, 3, \ldots, 3\}$, $\{3, \ldots, 3, 4\}$.

Если под многоугольником понимать плоские замкнутые ломаные (хотя бы и самопересекающиеся), то можно указать еще 4 невыпуклых (звездчатых) П. м. (тела Пуансо). В этих многогранниках либо грани пересекают друг друга, либо грани — самопересекающиеся многоугольники (рис. 2а—2г). Данные о них приведены в табл. 3.

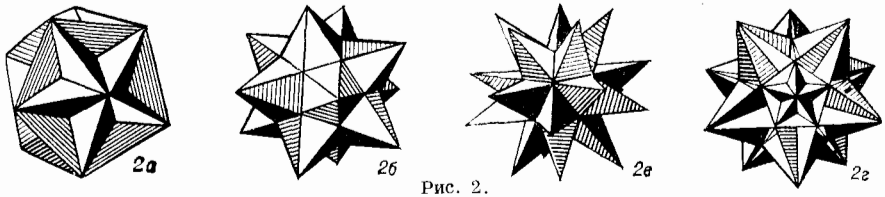


Рис. 2.

Табл. 3.—Правильные (невыпуклые) многогранники в E^3

	Рис.	Число вершин	Число ребер	Число граней
Малый звездчатый додекаэдр	2а	12	30	12
Большой звездчатый додекаэдр	2б	20	30	12
Большой додекаэдр	2в	12	30	12
Икосаэдр	2г	12	30	20

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4— Геометрия, М., 1963; [2] Люстерник Л. А., Выпуклые фигуры и многогранники, М., 1956; [3] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3, М., 1954; [4] Coxeter H. S. M., Regular polytopes, 3 ed., N.Y., 1973.

А. Б. Иванов.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ — многоугольники, у к-рых равны все его углы и равны все его стороны. Подробнее см. *Многоугольник*.

ПРАВОУПОРЯДОЧЕННАЯ ГРУППА — группа G, на множестве элементов которой задано отношение линейного порядка $\leqslant$ такое, что для всех x, y, z из G неравенство $x\leqslant y$ влечет за собой $xz\leqslant yz$. Множество $P=\{x\in G | x>e\}$ положительных элементов группы G является чистой (то есть $P\cap P^{-1}=\varnothing$) линейной (то есть $P\cup P^{-1}\cup\{e\}=G$) полугруппой. Всякая чистая линейная подполугруппа P произвольной группы определяет в ней правый порядок, а именно порядок $x<y \iff yx^{-1}\in P$.

Группа $A(X)$ автоморфизмов линейно упорядоченного множества X естественным образом может быть правоупорядочена. Всякая П. г. порядково изоморфна нек-рой подгруппе $A(X)$ для подходящего линейно упорядоченного множества (см. [1]). Архимедова П. г., то есть П. г., для к-рой верна аксиома Архимеда (см. *Архимедова группа*), порядково изоморфна подгруппе аддитивной группы действительных чисел. В отличие от (двусторонне) линейно упорядоченных групп существуют некоммутативные П. г. без собственных выпуклых подгрупп. Класс П. г. замкнут относительно лексикографич. расширений. Система всех выпуклых подгрупп П. г. G линейно упорядочена по включению и полна. Эта система разрешима тогда и только тогда, когда для всяких положительных элементов $a, b\in G$ существует натуральное число n такое, что $a^n b>a$. Если группа обладает разрешимой системой подгрупп $S(G)$, факторы к-рой не имеют кручения, то G можно так правоупорядочить, что все подгруппы из $S(G)$ окажутся выпуклыми. В локально нильпотентной П. г. система выпуклых подгрупп разрешима.

Группа G тогда и только тогда может быть правоупорядочена, когда для любого конечного набора

$$\{x_i\neq e,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$$

элементов из G найдутся числа $\varepsilon_i=\pm 1$, $1\leqslant i\leqslant n$, такие, что полугруппа, порожденная множеством $\{x_1^{\varepsilon_1}, \ldots, x_n^{\varepsilon_n}\}$, не содержит единицы группы G.

Всякий структурный (решеточный) порядок группы есть пересечение нек-рых ее правых порядков (см. *Структурно упорядоченная группа*).

Лит.: [1] Кокорин А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972; [2] Mura R. B., Rhemtulla A., Orderable groups, N.Y.—Basel, 1977.

В. М. Копытов.

ПРАНДТЛЯ УРАВНЕНИЕ — основное интегро-дифференциальное уравнение крыла самолета конечного размаха. При выводе П. у. делаются предположения, которые позволяют считать каждый элемент крыла находящимся в условиях обтекания его плоскопараллельным потоком. Это дает возможность связать геометрич. характеристики крыла с его аэродинамич. свойствами. Так, полученное П. у. имеет вид

$$\frac{F(t_0)}{B(t_0)}+\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{F'(t)}{t-t_0}\,dt=f(t_0),\quad -a<t_0<a, \qquad (1)$$

где F — искомая функция, $F'(t)=dF(t)/dt$, B и f — заданные функции $B(t)=cb(t)$, $f(t)=v\omega(t)$, а несобственный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Значения входящих в эти равенства величин следующие: $2a$ — размах крыла, к-рое предполагается симметричным относительно плоскости Oyz, причем направление оси Oz совпадает с направлением потока воздуха на бесконечности; $b(x)$ обозначает хорду профиля, к-рый соответствует абсциссе x; $F(x)$ — циркуляцию воздушного потока вокруг этого профиля; c — нек-рую постоянную; v — скорость воздушного потока на бесконечности; а ω — функцию, зависящую от изогнутости профиля и перекручивания крыла (см. [1]). Исходя из экспериментальных данных, полагают, что $F(-a)=F(a)$.

П. у. решается в замкнутом виде лишь при весьма жестких предположениях. В общем случае удается П. у. свести к интегральному уравнению Фредгольма (см. [3]).

П. у. наз. по имени Л. Прандтля (L. Prandtl).

Лит.: [1] Голубев В. В., Лекции по теории крыла, М.— Л., 1949; [2] Карман Т., Бюргерс И., Теоретическая аэродинамика идеальных жидкостей, пер. с англ., М.— Л., 1939; [3] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968.

Б. В. Хведелидзе.

ПРАНДТЛЯ ЧИСЛО — один из критериев подобия тепловых процессов в жидкостях и газах. П. ч. зависит только от термодинамич. состояния среды. П. ч.

$$\mathrm{Pr}=\nu/a=\mu c_p/\lambda,$$

где $\nu=\mu/\rho$ — кинематич. коэффициент вязкости, μ — динамич. коэффициент теплопроводности, ρ — плотность, λ — коэффициент теплопроводности, $a=\lambda/\rho c_p$ — коэффициент температуропроводности, c_p — удельная теплоемкость среды при постоянном давлении.

П. ч. связано с др. критериями подобия — *Пекле числом* и *Рейнольдса числом* соотношением $\mathrm{Pr}=\mathrm{Pe}/\mathrm{Re}$.

П. ч. наз. по имени Л. Прандтля (L. Prandtl).

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

ПРЕВОСХОДНОЕ КОЛЬЦО — коммутативное нётерово кольцо, удовлетворяющее трем приводимым ниже аксиомам. Известно, что *геометрические кольца* обладают рядом качественных свойств, не присущих

или описанной сферы. Тетраэдр двойствен сам себе, гексаэдр — октаэдру и додекаэдр — икосаэдру.

В пространстве E^4 существуют шесть П. м., данные о к-рых приведены в табл. 2.

В пространстве E^n, $n>4$, существует три П. м.— аналоги тетраэдра, октаэдра и куба; их символы Шлефли — $\{3, \ldots, 3\}$, $\{4, 3, \ldots, 3\}$, $\{3, \ldots, 3, 4\}$.

Если под многоугольником понимать плоские замкнутые ломаные (хотя бы и самопересекающиеся), то можно указать еще 4 невыпуклых (звездчатых) П. м. (тела Пуансо). В этих многогранниках либо грани пересекают друг друга, либо грани — самопересекающиеся многоугольники (рис. 2а—2г). Данные о них приведены в табл. 3.

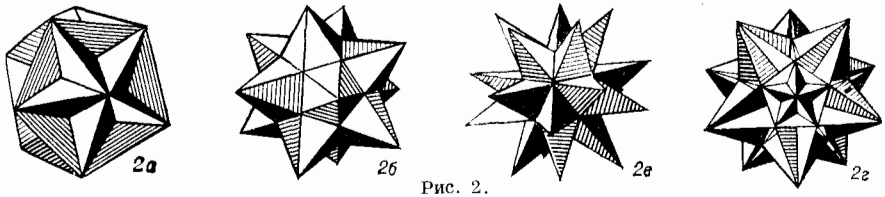


Рис. 2.

Табл. 3.—Правильные (невыпуклые) многогранники в E^3

	Рис.	Число вершин	Число ребер	Число граней
Малый звездчатый додекаэдр	2а	12	30	12
Большой звездчатый додекаэдр	2б	20	30	12
Большой додекаэдр	2в	12	30	12
Икосаэдр	2г	12	30	20

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4— Геометрия, М., 1963; [2] Люстерник Л. А., Выпуклые фигуры и многогранники, М., 1956; [3] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3, М., 1954; [4] Coxeter H. S. M., Regular polytopes, 3 ed., N.Y., 1973.

А. Б. Иванов.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ — многоугольники, у к-рых равны все его углы и равны все его стороны. Подробнее см. *Многоугольник*.

ПРАВОУПОРЯДОЧЕННАЯ ГРУППА — группа G, на множестве элементов которой задано отношение линейного порядка $\leqslant$ такое, что для всех x, y, z из G неравенство $x\leqslant y$ влечет за собой $xz\leqslant yz$. Множество $P=\{x\in G | x>e\}$ положительных элементов группы G является чистой (то есть $P\cap P^{-1}=\varnothing$) линейной (то есть $P\cup P^{-1}\cup\{e\}=G$) полугруппой. Всякая чистая линейная подполугруппа P произвольной группы определяет в ней правый порядок, а именно порядок $x<y \iff yx^{-1}\in P$.

Группа $A(X)$ автоморфизмов линейно упорядоченного множества X естественным образом может быть правоупорядочена. Всякая П. г. порядково изоморфна нек-рой подгруппе $A(X)$ для подходящего линейно упорядоченного множества (см. [1]). Архимедова П. г., то есть П. г., для к-рой верна аксиома Архимеда (см. *Архимедова группа*), порядково изоморфна подгруппе аддитивной группы действительных чисел. В отличие от (двусторонне) линейно упорядоченных групп существуют некоммутативные П. г. без собственных выпуклых подгрупп. Класс П. г. замкнут относительно лексикографич. расширений. Система всех выпуклых подгрупп П. г. G линейно упорядочена по включению и полна. Эта система разрешима тогда и только тогда, когда для всяких положительных элементов $a, b\in G$ существует натуральное число n такое, что $a^n b>a$. Если группа обладает разрешимой системой подгрупп $S(G)$, факторы к-рой не имеют кручения, то G можно так правоупорядочить, что все подгруппы из $S(G)$ окажутся выпуклыми. В локально нильпотентной П. г. система выпуклых подгрупп разрешима.

Группа G тогда и только тогда может быть правоупорядочена, когда для любого конечного набора

$$\{x_i\neq e,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$$

элементов из G найдутся числа $\varepsilon_i=\pm 1$, $1\leqslant i\leqslant n$, такие, что полугруппа, порожденная множеством $\{x_1^{\varepsilon_1}, \ldots, x_n^{\varepsilon_n}\}$, не содержит единицы группы G.

Всякий структурный (решеточный) порядок группы есть пересечение нек-рых ее правых порядков (см. *Структурно упорядоченная группа*).

Лит.: [1] Кокорин А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972; [2] Mura R. B., Rhemtulla A., Orderable groups, N.Y.—Basel, 1977.

В. М. Копытов.

ПРАНДТЛЯ УРАВНЕНИЕ — основное интегро-дифференциальное уравнение крыла самолета конечного размаха. При выводе П. у. делаются предположения, которые позволяют считать каждый элемент крыла находящимся в условиях обтекания его плоскопараллельным потоком. Это дает возможность связать геометрич. характеристики крыла с его аэродинамич. свойствами. Так, полученное П. у. имеет вид

$$\frac{F(t_0)}{B(t_0)}+\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{F'(t)}{t-t_0}\,dt=f(t_0),\quad -a<t_0<a, \qquad (1)$$

где F — искомая функция, $F'(t)=dF(t)/dt$, B и f — заданные функции $B(t)=cb(t)$, $f(t)=v\omega(t)$, а несобственный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Значения входящих в эти равенства величин следующие: $2a$ — размах крыла, к-рое предполагается симметричным относительно плоскости Oyz, причем направление оси Oz совпадает с направлением потока воздуха на бесконечности; $b(x)$ обозначает хорду профиля, к-рый соответствует абсциссе x; $F(x)$ — циркуляцию воздушного потока вокруг этого профиля; c — нек-рую постоянную; v — скорость воздушного потока на бесконечности; а ω — функцию, зависящую от изогнутости профиля и перекручивания крыла (см. [1]). Исходя из экспериментальных данных, полагают, что $F(-a)=F(a)$.

П. у. решается в замкнутом виде лишь при весьма жестких предположениях. В общем случае удается П. у. свести к интегральному уравнению Фредгольма (см. [3]).

П. у. наз. по имени Л. Прандтля (L. Prandtl).

Лит.: [1] Голубев В. В., Лекции по теории крыла, М.— Л., 1949; [2] Карман Т., Бюргерс И., Теоретическая аэродинамика идеальных жидкостей, пер. с англ., М.— Л., 1939; [3] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968.

Б. В. Хведелидзе.

ПРАНДТЛЯ ЧИСЛО — один из критериев подобия тепловых процессов в жидкостях и газах. П. ч. зависит только от термодинамич. состояния среды. П. ч.

$$\mathrm{Pr}=\nu/a=\mu c_p/\lambda,$$

где $\nu=\mu/\rho$ — кинематич. коэффициент вязкости, μ — динамич. коэффициент теплопроводности, ρ — плотность, λ — коэффициент теплопроводности, $a=\lambda/\rho c_p$ — коэффициент температуропроводности, c_p — удельная теплоемкость среды при постоянном давлении.

П. ч. связано с др. критериями подобия — *Пекле числом* и *Рейнольдса числом* соотношением $\mathrm{Pr}=\mathrm{Pe}/\mathrm{Re}$.

П. ч. наз. по имени Л. Прандтля (L. Prandtl).

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

ПРЕВОСХОДНОЕ КОЛЬЦО — коммутативное нётерово кольцо, удовлетворяющее трем приводимым ниже аксиомам. Известно, что *геометрические кольца* обладают рядом качественных свойств, не присущих

произвольным нётеровым кольцам. Понятие П. к. позволяет в аксиоматич. форме учесть важнейшие из этих свойств.

Аксиомы П. к. A.

А1. Кольцо A универсально цепное. (Кольцо A наз. ц е п н ы м, если для любых двух его простых идеалов $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$ длины любых неуплотняемых цепочек простых идеалов $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}'$ совпадают. Кольцо A наз. у н и в е р с а л ь н о ц е п н ы м, если цепным является любое кольцо многочленов $A[T_1, \ldots, T_k]$.)

А2. Формальные слои кольца A являются геометрически регулярными, т. е. для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ и гомоморфизма из A в поле K кольцо $\hat{A}_{\mathfrak{p}} \otimes_A K$ регулярно. Здесь $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$ — пополнение локального кольца $A_{\mathfrak{p}}$.

А3. Для любой целостной конечной A-алгебры B найдется ненулевой элемент $b \in B$ такой, что кольцо частных $B[b^{-1}]$ регулярно.

П. к. обладают следующими свойствами.

1) Для П. к. A множество регулярных (соответственно нормальных) точек схемы Spec A открыто.

2) Если превосходное локальное кольцо A приведенное (соответственно нормальное, равноразмерное), то таким же будет пополнение $\hat{A}$.

3) Целое замыкание П. к. A в конечном расширении поля частных кольца A является конечной A-алгеброй.

4) Если кольцо A превосходное, то любая A-алгебра конечного типа — также П. к.

Два важнейших примера П. к.— полные локальные кольца (или аналитич. кольца) и дедекиндовы кольца с полем частных нулевой характеристики. Таким образом, класс П. к. достаточно широк и, в частности, содержит все алгебры конечного типа над полем или над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

Превосходность кольца A тесно связана с возможностью разрешения особенностей схемы Spec A (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Grothendieck A. [Dieudonné J.], Éléments de géométrie algébrique, pt. 2, P., 1965; [2] Хиронака Х., «Математика», 1965, т. 9, № 6, с. 3—70.

В. И. Данилов.

ПРЕДБАЗА — семейство γ открытых подмножеств топологич. пространства X такое, что совокупность всех множеств, являющихся пересечением конечного числа элементов γ, образует *базу* X.

М. И. Войцеховский.

ПРЕДВАРЕННАЯ ФОРМУЛА — формула узкого исчисления предикатов (УИП), имеющая вид

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \Psi,$$

где Q_i обозначает квантор всеобщности $\forall$ или квантор существования $\exists$, переменные x_i, x_j различны при $i \neq j$ и Ψ — формула, не содержащая кванторов. П. ф. наз. также п р е д в а р е н н ы м и н о р м а л ь н ы м и ф о р м а м и или п р е н е к с н ы м и ф о р м а м и.

Для всякой формулы φ языка УИП можно найти П. ф., логически эквивалентную в классич. исчислении предикатов формуле φ. Процесс нахождения П. ф. основан на следующих эквивалентностях, выводимых в классич. УИП:

$$(\forall x \varphi(x) \supset \Psi) \equiv \exists x' (\varphi(x') \supset \Psi),$$

$$\exists x \varphi(x) \supset \Psi \equiv \forall x' (\varphi(x') \supset \Psi),$$

$$\Psi \supset \forall x \varphi(x) \equiv \forall x' (\Psi \supset \varphi(x')),$$

$$\Psi \supset \exists x \varphi(x) \equiv \exists x' (\Psi \supset \varphi(x')),$$

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi, \quad \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi,$$

$$Q y \forall x \varphi \equiv \forall x Q y \varphi, \quad Q y \exists x \varphi \equiv \exists x Q y \varphi,$$

где x' — любая переменная, не входящая свободно в формулы $\varphi(x)$, Ψ, и $\varphi(x')$ получается из $\varphi(x)$ заменой всех свободных вхождений x на x'; переменная y не

входит свободно в $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$. Чтобы применять приведенные эквивалентности, надо предварительно выразить логич. связки через $\supset$ и $\neg$; затем, применяя эти эквивалентности, постепенно передвигать все кванторы влево. Получающаяся в результате П. ф. наз. предваренной формой данной формулы.

Лит.: [1] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1971. *В. Н. Гришин.*

ПРЕДГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО — векторное пространство E над полем комплексных или действительных чисел, снабженное скалярным произведением $E\times E\to\mathbb{C}$, $x\times y\to(x, y)$, удовлетворяющим следующим условиям:

1) $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$, $(\lambda x, y)=\lambda(x, y)$, $(y, x)=\overline{(x, y)}$, $x, y, z\in E$, $\lambda\in\mathbb{C}(\mathbb{R})$;

2) $(x, x)\geqslant 0$ для $x\in E$.

На П. п. E определена полунорма $\|x\|=(x, x)^{\frac{1}{2}}$. Пополнение E по этой полунорме является *гильбертовым пространством.* *В. И. Ломоносов.*

ПРЕДЕЛ — одно из основных понятий математики, означающее, что какая-то переменная, зависящая от другой переменной, при определенном изменении последней, неограниченно приближается к нек-рому постоянному значению. Основным при определении П. является понятие близости рассматриваемых объектов: только после его введения П. приобретает точный смысл. С П. связаны основные понятия математич. анализа: непрерывность, производная, дифференциал, интеграл. Одним из простейших случаев П. является П. последовательности.

Предел последовательности. Пусть X — топологич. пространство. Последовательность его точек x_n, $n=1, 2, \ldots$, наз. сходящейся к точке $x_0\in X$ или, что то же самое, точка x_0 наз. пределом данной последовательности, если для любой окрестности U точки x_0 существует такое натуральное N, что для всех $n>N$ выполняется включение $x_n\in U$; при этом пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0.$$

В случае, когда X — хаусдорфово пространство, П. последовательности $x_n\in X$, $n=1, 2, \ldots$, если он существует, единствен. Для метрич. пространства X точка x_0 является П. последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует такое натуральное N, что для всех номеров $n>N$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_0)<\varepsilon$, где $\rho(x_n, x_0)$ — расстояние между точками x_n и x_0. Если последовательность точек метрич. пространства сходится, то она ограничена. Последовательность точек полного метрич. пространства является сходящейся в том и только в том случае, когда она фундаментальная. В частности, это верно для числовых последовательностей, для к-рых исторически впервые возникло понятие П. последовательности. Для числовых последовательностей справедливы формулы

$$\lim_{n\to\infty} c=c,\quad \lim_{n\to\infty} cx_n=c\lim_{n\to\infty} x_n,$$

c — произвольное фиксированное число,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n+\lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_ny_n=\lim_{n\to\infty} x_n\lim_{n\to\infty} y_n,$$

а если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n\neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Эти свойства числовых последовательностей переносятся на П. последовательностей более общих структур,

напр. свойство П. суммы — на последовательности точек линейных топологич. пространств, свойства П. произведения — на последовательности точек топологич. групп и т. д.

Если действительные числовые последовательности $x_n \in \mathbb{R}$ и $y_n \in \mathbb{R}$ сходятся и $x_n \leqslant y_n$, $n=1, 2, \ldots$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n,$$

т. е. при предельных переходах нестрогие неравенства сохраняются. Если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

и $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, то последовательность z_n, $n=1, 2, \ldots$, сходится к тому же П.: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Эти свойства обобщаются на П. последовательностей точек упорядоченных множеств.

Всякая возрастающая (убывающая) последовательность действительных чисел x_n, т. е. такая, что $x_n \leqslant x_{n+1}$ (соответственно $x_n \geqslant x_{n+1}$), $n=1, 2, \ldots$, ограниченная сверху (снизу), сходится, и ее П. является верхняя (нижняя) грань множества ее значений. Напр., если $a>0$, k — натуральное число, a_n — приближенное значение корня $\sqrt[k]{a}$ с n десятичными знаками после запятой, вычисленное с недостатком, то a_n, $n=1, 2, \ldots$, образуют возрастающую последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[k]{a}$. Другим примером возрастающей ограниченной сверху последовательности является последовательность периметров правильных многоугольников с n сторонами, $n=3, 4, \ldots$, вписанных в нек-рую окружность, к длине к-рой и сходится эта последовательность.

Особую роль в теории числовых последовательностей играют б е с к о н е ч н о м а л ы е п о с л е д о в а т е л ь н о с т и, т. е. последовательности, сходящиеся к нулю. Общее понятие П. числовой последовательности сводится к понятию бесконечно малой в том смысле, что числовая последовательность сходится к нек-рому числу в том и только в том случае, когда разность между членами последовательности и этим числом является бесконечно малой последовательностью.

Полезным является и понятие б е с к о н е ч н о б о л ь ш и х ч и с л о в ы х п о с л е д о в а т е л ь н о с т е й, т. е. последовательностей, имеющих своим П. либо одну из бесконечностей со знаком $+\infty$ или $-\infty$, либо бесконечность без знака ∞. Для определения бесконечных П. вводятся понятия ε-окрестностей, $\varepsilon>0$, бесконечностей $+\infty$, $-\infty$ и ∞ в множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ по формулам

$$U(+\infty, \varepsilon) = \left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{\varepsilon}\right\},$$

$$U(-\infty, \varepsilon) = \left\{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{1}{\varepsilon}\right\},$$

$$U(\infty, \varepsilon) = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| > \frac{1}{\varepsilon}\right\}$$

и понятие ε-окрестности ∞ в множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$:

$$U(\infty, \varepsilon) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\varepsilon}\right\}.$$

Пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $-\infty$), $x_n \in \mathbb{R}$, $n=1, 2, \ldots$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех номеров $n>N$ выполняется включение $x_n \in U(\infty, \varepsilon)$ (соответственно включение $x_n \in U(+\infty, \varepsilon)$ или $x_n \in U(-\infty, \varepsilon)$). Аналогично определяется бесконечный П. для последовательностей комплексных чисел.

Из всякой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность (см. *Больцано — Вейерштрасса теорема*), а из всякой неограниченной — бесконечно большую.

П. (конечный или бесконечный) какой-либо подпоследовательности данной последовательности наз. частичным пределом последней. В множестве всех частичных П. всякой последовательности действительных чисел всегда имеются как наибольший, так и наименьший (конечные или бесконечные). Наибольший (соответственно наименьший) частичный П. последовательности наз. ее верхним (соответственно нижним) пределом. Последовательность имеет конечный или бесконечный П. тогда и только тогда, когда ее верхний П. совпадает с нижним, причем их общее значение и является П.

С помощью П. последовательности могут быть определены другие понятия П., напр. П. функции и П. интегральных сумм. Определение П. последовательностей обобщается на случай направленных (частично упорядоченных) множеств.

Предел функции (отображения). Пусть X и Y — топологич. пространства, $E \subset X$, x_0 — точка прикосновения множества E, $f : E \to Y$ — отображение E в Y. Точку $a \in Y$ наз. пределом отображения f в точке x_0 (или, как говорят, при x, стремящемся к x_0) и пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \text{ или } f(x) \longrightarrow a \text{ при } x \longrightarrow x_0,$$

если, какова бы ни была окрестность $V = V(a)$ точки a в Y, существует такая окрестность $U = U(x_0)$ точки x_0 в X, что для любой точки $x \in E \cap U(x_0)$ ее образ $f(x)$ принадлежит $V : f(x) \in V$. Иначе говоря, если $f(E \cap U) \subset V$. Если Y — хаусдорфово пространство, то отображение $f : E \to Y$ может иметь только один П. в точке $x_0 \in X$.

В случае, когда $E^* \subset E$ и x_0 — точка прикосновения множества E^*, то П. сужения f_{E^*} отображения f на множестве E^* наз. П. отображения (функции) f по множеству E^*, при этом пишут

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in E^*} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_{E^*}(x).$$

Если $f : E \to Y$, $E^* \subset E \subset X$, x_0 — точка прикосновения множества E^* и существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то в точке x_0 существует и предел f по множеству E^*, причем

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in E^*} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Если $E_1 \subset X$, $E_2 \subset X$, $f : E_1 \cup E_2 \to Y$ и существуют

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in E_1} f(x) = \lim_{x \to x_0,\ x \in E_2} f(x) = a,$$

то существует и

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

При рассмотрении П. отображения (функции) $f : E \to Y$, $E \subset X$, при $x \to x_0 \in X$ может случиться, что $x_0 \in E$ или, наоборот, $x_0 \notin E$. Случай $x_0 \in E$ представляет специальный интерес, т. к. он приводит к понятию непрерывной функции: если $f : E \to Y$ и $x_0 \in E$, то для того, чтобы отображение f имело П. в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

В случае выполнения этого условия отображение f наз. непрерывным в точке x_0. Если точка x_0 является изолированной точкой множества E, то в ней всегда существует предел

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

для любого отображения $f : E \to Y$, т. е. любое отображение f непрерывно во всех изолированных точках множества своего определения. Поэтому понятие П. отображения, в частности его непрерывности, содержательно лишь для предельных точек отображаемого множества. В классич. случае П. функций $f : E \to Y$ обычно предполагается, что $x_0 \notin E$, т. е. что точка x_0 не принадлежит тому множеству, по к-рому берется П.

Если в точке $x_0 \in X$ для пространства X выполняется первая аксиома счетности, а пространство Y — хаусдорфово, то для того, чтобы существовал предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ отображения $f : E \to Y$, $E \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \in E$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, существовал предел $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$. При выполнении этого условия предел $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ не зависит от выбора указанной последовательности $\{x_n\}$ и их общее значение является П. отображения f в точке x_0.

Предел последовательности точек $\{y_n\}$ топологич. пространства Y является частным случаем П. отображения (функции): в этом случае $E = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, рассматриваемых с дискретной топологией, $x_0 = +\infty$, $X = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, окрестностью $+\infty$ в X является любое подмножество $U \subset \mathbb{N}$ вида $U = \{n : n \geqslant n_0\} \cup \{+\infty\}$, где n_0 — нек-рое натуральное число.

Понятие предела кратной последовательности, т. е. последовательности, члены к-рой снабжены целочисленными мультииндексами, также является частным случаем П. отображения.

Внутренний критерий существования П. отображения $f : E \to Y$ в данной точке x_0 (он наз. критерием Коши) в случае, когда в точке x_0 топологич. пространства $X \supset E$ выполняется первая аксиома счетности, а множество Y является полным метрич. пространством, состоит в том, что предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $U = U(x_0)$ точки x_0 в X, что для всех точек x' и x'', удовлетворяющих условию $x' \in E \cap U$, $x'' \in E \cap U$, выполняется неравенство $\rho(f(x''), f(x')) < \varepsilon$. В частности, этот критерий справедлив, когда Y является множеством действительных или комплексных чисел.

Некоторые свойства пределов. Если Y — метрич. пространство, $f : E \to Y$, $E \subset X$, и существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in Y$, то найдется такая окрестность $U = U(x_0)$ точки x_0, что при отображении f образ пересечения $E \cap U$ отображаемого множества E с этой окрестностью будет ограниченным подмножеством пространства Y.

Если функция $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset X$, $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, имеет в точке $x_0 \in X$ не равный нулю конечный П., то существуют такие окрестность $U = U(x_0)$ точки x_0 и число $c > 0$, что для всех точек $x \in E \cap U$ выполняются неравенства

$$f(x) > c, \text{ если } \lim_{x \to x_0} f(x) > 0,$$

$$f(x) < -c, \text{ если } \lim_{x \to x_0} f(x) < 0.$$

Если Y — топологич. группа (в частности, коммутативная с аддитивной записью групповой операции), $f : E \to Y$, $E \subset X$, $x_0 \in X$, то предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда функция $\alpha(x) = f(x) a^{-1}$ имеет в точке x_0 предел, равный единице группы Y (соответственно функция $\alpha(x) = f(x) - a$ имеет П. в x_0, равный нулю,— такие функции наз. бесконечно малыми функциями).

Если Y — линейное топологич. пространство над полем P, $f_1 : E \to Y$, $f_2 : E \to Y$, $E \subset X$, то П. в точке x_0 линейной комбинации отображений f_1 и f_2 равен такой же линейной комбинации их П. в той же точке:

$$\lim_{x \to x_0} [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)] = \lambda_1 \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lambda_2 \lim_{x \to x_0} f_2(x),$$

$$\lambda_1 \in P, \ \lambda_2 \in P.$$

Если Y — множество действительных или комплексных чисел, $f_1 : E \to Y$, $f_2 : E \to Y$ (такие функции наз. числовыми), $E \subset X$, то

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) f_2(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \lim_{x \to x_0} f_2(x),$$

а если $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) \neq 0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)},$$

причем в этом случае под $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ понимается П. сужения функции $\frac{f_1}{f_2}$ на пересечение отображаемого множества E с нек-рой окрестностью точки x_0 такой, что на указанном пересечении имеет смысл частное $\frac{f_1}{f_2}$. Если $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, $x \in E$, и существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$, то

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} f_2(x).$$

Если X и Y получены из множества действительных чисел $\mathbb{R}$ пополнением его либо бесконечностью без знака: ∞, либо двумя бесконечностями со знаком: $+\infty$, $-\infty$, $E \subset \mathbb{R}$, $f(E) \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \notin E$, то сформулированное определение П. функции является классич. определением конечного и бесконечного П. действительной функции одного переменного. Аналогично, если пространства X и Y получаются пополнением бесконечностью ∞ множества комплексных чисел $\mathbb{C}$, то получают определение П. (конечного и бесконечного) для функций комплексного переменного. Если же пространство X получается пополнением бесконечностью ∞ пространства $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$), $n > 1$, то получают определение конечного и бесконечного П. функции многих переменных при стремлении аргумента к конечной или бесконечно удаленной точке.

Для функций, определенных на подмножествах числовой прямой (или, более общо, на упорядоченных множествах), существует понятие о д н о с т о р о н н е г о п р е д е л а. Примером функций, имеющих по крайней мере один односторонний П. во всех предельных точках области определения, являются действительные монотонные функции: если функция f монотонна на множестве E числовой оси и точка x_0 является предельной точкой множества E, то она является и предельной точкой хотя бы одного из множеств $E_1 = E \cap \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$, $E_2 = E \cap \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$. Если точка x_0 предельная для множества E_1, то у функции f в точке x_0 существует П. слева, а если она предельная для E_2, то справа. При этом если, напр., функция f возрастает и ограничена сверху, $E_1 \neq \varnothing$, x_0 — предельная точка для множества E_1, то предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ конечен.

Основным общим методом отыскания П. функций является метод выделения главных частей функций в окрестности данной точки, что обычно делается с помощью *Тейлора формулы*. Для вычисления П. часто бывает полезно *Лопиталя правило*.

Несмотря на большую общность понятия П. отображения, оно не охватывает все существующие понятия П., имеющиеся в современной математике. Напр., понятие П. интегральных сумм не содержится в понятии

П. отображения (функции). Достаточно общим понятием П., в определенном смысле охватывающим все основные случаи, является П. отображения по фильтру.

Предел фильтра. Пусть X — топологич. пространство, $X \neq \varnothing$, $\mathfrak{U} = \{U\}$ — его база топологии, $\mathfrak{F}$ — фильтр на X (т. е. такое непустое семейство $\mathfrak{F}$ непустых подмножеств пространства X, что для любых $A' \in \mathfrak{F}$, $A'' \in \mathfrak{F}$ существует такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subset A' \cap A''$). Точка x_0 наз. пределом фильтра $\mathfrak{F}$ или его предельной точкой, если фильтр $\mathfrak{F}$ сильнее фильтра $\mathfrak{B}(x_0)$, являющегося локальной базой топологии в точке x_0, т. е. для любого $U \in \mathfrak{B}(x_0)$ существует такое $A \in \mathfrak{F}$, что $A \subset U$.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел с дискретной топологией. Фильтр на множестве $\mathbb{N}$, состоящий из всевозможных дополнений к конечным подмножествам множества $\mathbb{N}$, наз. натуральным фильтром и обозначается $\mathfrak{F}_{\mathbb{N}}$. Он не имеет П. в $\mathbb{N}$. Тот же фильтр на множестве $X = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, в к-ром локальная база $\mathfrak{B}(+\infty)$ состоит из всевозможных множеств $A_n = \{m : m \in \mathbb{N},\ m > n \in \mathbb{N}\}$, а $\mathfrak{B}(n)$ при $n \in \mathbb{N}$ — из одной точки n, имеет своим П. бесконечность $+\infty$. Единственность П. фильтра топологич. пространства связана с отделимостью точек пространства: для того чтобы любой фильтр топологич. пространства имел не более одного П., необходимо и достаточно, чтобы пространство было хаусдорфово.

Пусть X — нек-рое множество, Y — топологич. пространство, φ — отображение X в Y, $\mathfrak{F}$ — фильтр на X. Точку $b \in Y$ наз. пределом отображения φ по фильтру $\mathfrak{F}$ и пишут

$$\lim_{\mathfrak{F}} \varphi(x) = b,$$

если фильтр $\varphi(\mathfrak{F})$, состоящий из всевозможных множеств $\varphi(A)$, $A \in \mathfrak{F}$, имеет своим П. в пространстве Y точку b.

Если $X = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, φ — отображение $\mathbb{N}$ в топологич. пространство Y, $\varphi(n) = y_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}_{\mathbb{N}}$ — натуральный фильтр, то П. отображения φ по фильтру $\mathfrak{F}_{\mathbb{N}}$ в пространстве Y совпадает с обычным П. последовательности $\{y_n\}$ в Y.

Если в $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}$ — фильтр на X, являющийся произведением двух натуральных фильтров $\mathfrak{F}_{\mathbb{N}}$, т. е. состоящий из всевозможных множеств вида $A \times B$, где $A \in \mathfrak{F}_{\mathbb{N}}$, $B \in \mathfrak{F}_{\mathbb{N}}$, φ — отображение $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в топологич. пространство Y : $\varphi(n, m) = y_{nm} \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, то П. отображения φ по фильтру $\mathfrak{F}$ в пространстве Y совпадает с обычным П. двойной последовательности $\{y_{nm}\}$ в Y.

Пусть элементами множества X являются, в свою очередь, множества x, состоящие из какого-либо разбиения $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ нек-рого отрезка $[a, b]$; $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ и каких-то точек $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots$, то есть

$$x = \{\tau;\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}.$$

Пусть A_η (для любого $\eta > 0$) — подмножество множества X, состоящее из всех элементов $x \in X$, у к-рых мелкости входящих в них разбиений $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}$ меньше η, то есть

$$\max_{i=1,\ 2,\ \ldots,\ n} (t_i - t_{i-1}) < \eta.$$

Система $\mathfrak{F} = \{A_\eta\}$ является фильтром. Всякая действительная функция f, определенная на отрезке $[a, b]$, порождает отображение Φ_f множества X в числовую ось $\mathbb{R}$ по формуле

$$\Phi_f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}),\ x = (\tau;\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n),$$

$$\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=n}.$$

Таким образом, $\varphi_f(x)$ является значением интегральной суммы Римана функции f, соответствующим элементу $x \in X$.

П. отображения φ_f в $\mathbb{R}$ по фильтру $\mathfrak{F}$ совпадает с обычным П. интегральных сумм Римана функции f при условии, что мелкости рассматриваемых разбиений стремятся к нулю. Это совпадение имеет место в том смысле, что оба П. одновременно существуют или нет, а если существуют, то равны и являются значениями интеграла Римана от функции f по отрезку $[a, b]$.

Предел отображения топологических пространств по фильтру. Пусть X и Y — топологич. пространства, $E \subset X$, $\mathfrak{F}$ — фильтр на E, φ — отображение E в Y. Точку $b \in Y$ наз. пределом отображения φ в точке $a \in X$ по фильтру $\mathfrak{F}$, если a является П. фильтра $\mathfrak{F}$, а b является П. фильтра $\varphi(\mathfrak{F})$. В этом случае пишут

$$b = \lim_{\mathfrak{F}} \varphi(x).$$

Если $\mathfrak{B}(a)$ — база окрестностей в точке a, $E = X \setminus \{a\}$, а фильтр $\mathfrak{F}$ состоит из всевозможных «проколотых окрестностей» $U(a) \setminus \{a\}$ точки a, $U(a) \in \mathfrak{B}(a)$, то предел $\lim_{\mathfrak{F}} \varphi(x)$ совпадает с обычным пределом $\lim_{x \to a} \varphi(x)$ отображения φ в точке a, то есть обобщает классическое определение П. отображения, сформулированное в терминах окрестностей. Непосредственным обобщением понятия П. последовательности является *П. направленного множества в топологическом пространстве*, т. е. такого частично упорядоченного множества, у к-рого за каждыми двумя элементами имеется следующий. В терминах П. по направленным множествам можно также сформулировать понятие П. отображения одного топологич. пространства в другое (см. *Направленность*, *Сходимость*).

Предел последовательности множеств. Топологический предел. Пусть A_n, $n = 1, 2, \ldots$, — множества топологич. пространства X. Верхним топологическим пределом $\overline{\mathrm{lt}}\, A_n$ *последовательности* $\{A_n\}$ наз. множество точек $x \in X$, каждая окрестность к-рых пересекается с бесконечным числом множеств A_n, а нижним топологическим пределом $\underline{\mathrm{lt}}\, A_n$ — множество точек, каждая окрестность к-рых содержит точки почти всех A_n. Очевидно, $\underline{\mathrm{lt}}\, A_n \subset \overline{\mathrm{lt}}\, A_n$. Если $A = \underline{\mathrm{lt}}\, A_n = \overline{\mathrm{lt}}\, A_n$, то последовательность $\{A_n\}$ наз. сходящейся, а множество A ее топологическим П. и пишут $A = \mathrm{lt}\, A_n$. Верхний и нижний топологические П. последовательности являются замкнутыми множествами.

Теоретико-множественный предел. Имеется понятие П. последовательности множеств, не связанное с топологией. Последовательность множеств A_n, $n = 1, 2, \ldots$, наз. сходящейся, если существует такое множество A, называемое ее пределом и обозначаемое

$$A = \lim A_n,$$

что каждая его точка принадлежит всем множествам A_n, начиная с нек-рого номера, и каждая точка из объединения всех множеств A_n, не принадлежащая A, содержится лишь в конечном числе множеств A_n. Множество A является П. последовательности $\{A_n\}$ тогда и только тогда, когда оно является одновременно ее *верхним и нижним пределом*.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; [2] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., Математический анализ, М., 1979; [3] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1981; [4] Никольский С. М., Курс математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1975; [5] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер.

с франц., 2 изд., М., 1958; [6] Заманский М., Введение в современную алгебру и анализ, пер. с франц., М., 1974; [7] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [8] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937.

Л. Д. Кудрявцев.

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТОЧКА множества — точка, в любой окрестности к-рой содержится по крайней мере одна точка данного множества, отличная от нее самой. Рассматриваемые множества и точка предполагаются принадлежащими нек-рому топологич. пространству. Множество, содержащее все свои П. т., наз. замкнутым. Совокупность всех П. т. множества M наз. производным множеством и обозначается M'. Если рассматриваемое топологич. пространство X удовлетворяет первой аксиоме отделимости (для любых двух его точек x и y существует окрестность $U(x)$, не содержащая точку y), то каждая окрестность П. т. нек-рого множества $M \subset X$ содержит бесконечно много точек этого множества и производное множество M' — замкнуто. Всякая *прикосновения точка* множества M является либо его П. т., либо изолированной.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937.

Л. Д. Кудрявцев.

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТОЧКА траектории $\{f^t x\}$ динамической системы f^t — точка

$$x_\alpha = \lim_{k \to \infty} f^{t_k} x \qquad (1)$$

(α-предельная точка) или

$$x_\omega = \lim_{k \to \infty} f^{t_k} x \qquad (2)$$

(ω-предельная точка), где $\{t_k\}$, $k \in \mathbb{N}$,— последовательность такая, что $t_k \to -\infty$ при $k \to \infty$ в (1) или $t_k \to +\infty$ при $k \to \infty$ в (2) и пределы (1) или (2) существуют.

Для траектории $\{f^t x\}$ динамич. системы f^t (или, иначе, $f(t, x)$, см. [1]) α-П. т. (ω-П. т.) — то же, что ω-П. т. (α-П. т.) траектории $\{f^{-t} x\}$ динамич. системы f^{-t} (системы с обращением времени). Множество Ω_x (A_x) всех ω-П. т. (α-П. т.) траектории $\{f^t x\}$ наз. ω-предельным (α-предельным) множеством этой траектории.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М., 1949.

В. М. Миллионщиков.

ПРЕДЕЛЬНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ ПРИНЦИП — способ однозначного выделения решений уравнений, аналогичных *Гельмгольца уравнению*, с помощью введения бесконечно малого поглощения. Математич. смысл П. п. п. состоит в следующем. Пусть Ω — неограниченная область в $\mathbb{R}^n$, P — самосопряженный оператор в $L_2(\Omega)$, задаваемый дифференциальным выражением $P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $x \in \Omega$, и однородными граничными условиями на $\partial\Omega$, λ — точка непрерывного спектра оператора P. Тогда при $\varepsilon \neq 0$ уравнение

$$Pu_\varepsilon = (\lambda + i\varepsilon) u_\varepsilon + f$$

однозначно разрешимо в $L_2(\Omega)$ и в нек-рых случаях можно выделить решения $u = u_\pm$ уравнения

$$Pu = \lambda u + f$$

с помощью предельного перехода

$$u_\pm = \lim_{\varepsilon \to \pm 0} u_\varepsilon.$$

При этом предполагается, что f имеет компактный носитель, а сходимость $u_\varepsilon \to u_\pm$ при $\varepsilon \to \pm 0$ понимается в смысле $L_2(\Omega')$, где Ω' — произвольная ограниченная область в Ω. Так как λ — точка спектра оператора P,

то указанный предел в $L_2(\Omega)$, вообще говоря, не существует.

Впервые П. п. п. был сформулирован для уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^2$ (см. [1]):

$$(\Delta + k^2)\, u = -f,\ \Omega = \mathbb{R}^2,$$
$$P = -\Delta,\ \lambda = -k^2 < 0.$$

Выделяемые с помощью этого принципа решения $u_\pm$ соответствуют расходящимся или сходящимся волнам и удовлетворяют *излучения условию* на бесконечности. Эти результаты были перенесены (см. [2], [3]) на эллиптические краевые задачи во внешности ограниченной области в $\mathbb{R}^n$ для оператора

$$P\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right) = -\sum_{k,\ j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{kj}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + q(x), \quad (*)$$

где коэффициенты $a_{kj}(x)$ достаточно быстро стремятся к константам при $|x| \to \infty$. Для справедливости П. п. п. в этом случае необходимо требовать, чтобы λ не было собственным значением оператора P или f была ортогональна собственным функциям. Теорема Като (см. [3]) дает достаточные условия отсутствия собственных значений на непрерывном спектре оператора $P = -\Delta + q(x)$. Такая теорема получена для оператора (*) (см. [3]). П. п. п. обоснован для нек-рых областей с некомпактной границей (см. [3], [4]).

П. п. п. и соответствующие условия излучения найдены для уравнений любого порядка и систем уравнений (см. [5], [6]); они состоят в следующем. Пусть $P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — эллиптический (или гипоэллиптический) оператор, удовлетворяющий условиям: 1) многочлен $P(\sigma)$ имеет действительные коэффициенты, 2) поверхность $P(\sigma) = 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, распадается на $\varkappa$-связных гладких поверхностей S_j с отличной от нуля кривизной, 3) $\operatorname{grad} P(\sigma) \neq 0$ на S_j. Пусть на S_j заданы ориентации, т. е. независимо для каждой поверхности выбраны направления нормали ν. Пусть $\omega = \frac{x}{|x|}$, $\sigma_j = \sigma_j(\omega)$ — точка на S_j, в к-рой ν и ω имеют одинаковые направления, и $\mu_j(\omega) = (\sigma_j(\omega), \omega)$. Тогда функция $u(x)$ удовлетворяет условиям излучения, если она представима в виде

$$u = \sum_{j=1}^{\varkappa} u_j(x),\ u_j = O\left(r^{(1-n)/2}\right),$$
$$\frac{\partial u_j}{\partial r} - i\mu_j(\omega)\, u_j = o\left(r^{(1-n)/2}\right),\ r \to \infty.$$

Эти условия выделяют единственное решение уравнения

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u = f,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

для любой функции f с компактным носителем. П. п. п. для этого уравнения заключается в том, что это же решение получается в пределе при $\varepsilon \to +0$ из однозначного определяемого решения $u_\varepsilon(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ эллиптич. уравнения

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u_\varepsilon + i\varepsilon Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u_\varepsilon = f,$$

где $Q(\sigma)$ имеет действительные коэффициенты и $Q(\sigma) \neq 0$ на S_j. В зависимости от набора $\operatorname{sign}_{\sigma \in S_j} Q(\sigma)$, $1 \leqslant j \leqslant \varkappa$, в пределе получаются решения с условиями излучения, соответствующими той или иной ориентации поверхностей S_j. Этот принцип обоснован для уравнений и систем любого порядка с переменными коэффициентами во внешности ограниченной области (см. [5], [6]), а также в случае невыпуклых S_j; для этих уравнений имеется и теорема единственности типа Като.

Лит.: [1] Игнатовский В. С., «Ann. Phys.», 1905, Bd 18, № 13, S. 495—522; [2] Повзнер А. Я., «Матем. сб.», 1953, т. 32, № 1, с. 109—56; [3] Эйдус Д. М., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 3, с. 91—156; [4] Свешников А. Г., «Докл. АН СССР», 1951, т. 80, № 3, с. 345—47; [5] Вайнберг Б. Р., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 3, с. 115—94; его же, «Матем. сб.», 1968, т. 75, № 3, с. 454—80.

Б. Р. Вайнберг.

ПРЕДЕЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО $C(f, z_0; S)$ функции $f(z)$: $G \to \Omega$, определенной в области $G \subset \mathbb{C}$ со значениями на сфере Римана Ω, в точке $z_0 \in \overline{G}$ по множеству $S \subset G$, $z_0 \in \overline{S}$, — множество значений $a \in \Omega$, для к-рых существуют такие последовательности точек $\{z_n\}, z_n \in S$, $n=1, 2, \ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, что

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = a.$$

Каждое значение $a \in C(f, z_0; S)$ наз. предельным значением функции f в точке z_0 по множеству S. Теория П. м.— это раздел теории функций, в котором граничные свойства функций изучаются в терминах топологических и метрических свойств различных П. м.

Если в качестве множества S взята вся область G, то получается полное предельное множество $C(f, z_0; G) = C(f, z_0)$; в случаях строгого включения $S \subset G$ соответствующие П. м. $C(f, z_0; S)$ иногда наз. частными. Полное П. м. $C(f, z_0)$ всегда замкнуто; если функция f непрерывна на множестве S, локально связном в точке $z_0 \in \overline{S}$, то П. м. $C(f, z_0; S)$ либо вырожденное, т. е. состоит из одной точки, либо является невырожденным континуумом. Если П. м. $C(f, z_0; S)$ совпадает с Ω, то оно наз. тотальным П. м. Значение $a \in \Omega$ принадлежит множеству повторяющихся значений $R(f, z_0; S)$ функции f в точке z_0 по множеству S, если существует такая последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \in S$, $n=1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, что $a = f(z_n)$, $n=1, 2, \ldots$. Всегда $R(f, z_0; S) \subset C(f, z_0; S)$. Если для нек-рого $a \in \Omega$ в области G существует путь $L: z = z(t)$, $0 \leqslant t < 1$, оканчивающийся в точке z_0, $z_0 \in \overline{G}$, $\lim\limits_{t\to 1} z(t) = z_0$, и такой, что $\lim\limits_{t\to 1} f(z(t)) = a$, то a наз. *асимптотическим значением* функции f в точке z_0 (вдоль пути L). Асимптотическое множество $A(f, z_0; G)$ — это совокупность всех асимптотич. значений f в точке z_0.

Понятие П. м. было впервые явно сформулировано П. Пенлеве в 1895 (под названием «область неопределенности», см. [1]) в связи с изучением поведения аналитич. функции вблизи ее особой точки и классификацией особенностей таких функций. С тех пор в теории П. м. изучаются в основном три геометрически простейших случая: а) z_0 — изолированная точка границы $\mathrm{Fr}G$ или внутренняя точка G; б) $G = D = \{|z| < 1\}$ — единичный круг или, вообще, нек-рая жорданова область, а z_0 — точка границы $\Gamma = \mathrm{Fr}D$; в) граница $E = \mathrm{Fr}G$ есть всюду разрывный компакт на плоскости (т. е. вполне несвязный компакт, не содержащий никакого невырожденного континуума) и $z_0 \in E$. Ряд классич. результатов теории аналитич. функций допускает формулировку в терминах П. м. Напр., *Сохоцкого теорема* в несколько усиленной форме: если z_0 — изолированная точка всюду разрывного компакта $E \subset \overline{G}$ и $f(z)$ — мероморфная функция на $G \setminus E$, то П. м. $C(f, z_0; G \setminus E)$ либо вырожденное, либо тотальное. Дополнительно к этому *Пикара теорема* утверждает, что в случае, когда $C(f, z_0; G \setminus E)$ тотально, т. е. когда z_0 — *существенно особая точка*, множество $CR(f, z_0; G \setminus E) = \Omega \setminus R(f, z_0; G \setminus E)$ содержит

не более двух различных значений. В этом же случае

$$CR(f,\ z_0;\ G\setminus E)\subset A(f,\ z_0;\ G\setminus E)$$

(*Иверсена теорема*).

Основной из результатов, касающийся теории поведения мероморфных функций вблизи «тощей» границы (т е о р и и П е н л е в е), состоит в следующем (см. [1], [2]): если множество $E\subset G$ имеет линейную хаусдорфову меру нуль, $\mu(E)=\mu_1(E)=0$, и функция f мероморфна в $G\setminus E$, то в каждой точке $z_0\in E$ П. м. $C(f,\ z_0;\ G\setminus E)$ либо вырожденное, либо тотальное; более того, в первом случае f мероморфна и в точке z_0. Таким образом, точка $z_0\in E$, в к-рой П. м. $C(f,\ z_0;\ G\setminus E)$ вырожденное, является устранимой особой точкой функции f; изучение устранимых множеств различных классов функций можно рассматривать как раздел теории П. м.

Важным усилением теоремы Пикара является т е о р е м а Г о л у б е в а: если $E\subset G$, $\mu(E)=0$ и f мероморфна в $G\setminus E$, то в любой существенно особой точке $z_0\in E$ множество $CR(f,\ z_0;\ G\setminus E)$ имеет *аналитическую емкость* нуль (и, следовательно, плоскую меру $\mu_2(CR)=0$).

Началом теории П. м. в случае непрерывной границы можно считать работу П. Фату (P. Fatou, 1906) о граничных значениях функций $f(z)$, голоморфных в единичном круге $D=\{|z|<1\}$. Если такая функция f ограничена в D, то почти всюду (в смысле меры Лебега) на окружности $\Gamma=\{|z|=1\}$ она имеет радиальные и угловые граничные значения (т е о р е м а Ф а т у). Для произвольной точки $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$ пусть $h(\zeta,\ \varphi)$ обозначает хорду круга D, оканчивающуюся в ζ и образующую с радиусом, проведенным в эту точку, угол раствора φ, $-\pi/2<\varphi<\pi/2$. И пусть $\Delta(\zeta,\ \varphi_1,\ \varphi_2)$ — угловая область с вершиной $\zeta\in\Gamma$, состоящая из всех точек круга D, заключенных между двумя хордами

$$h(\zeta,\ \varphi_1)\ \text{и}\ h(\zeta,\ \varphi_2),\quad -\pi/2<\varphi_1<\varphi_2<\pi/2.$$

Точку $\zeta\in\Gamma$ наз. т о ч к о й Ф а т у и относят к множеству $F(f)$, если объединение

$$\bigcup C(f,\ \zeta;\ \Delta(\zeta,\ \varphi_1,\ \varphi_2))$$

по всем угловым областям $\Delta(\zeta,\ \varphi_1,\ \varphi_2)$ состоит из единственного значения $f(e^{i\theta})$, наз. у г л о в ы м г р а н и ч н ы м з н а ч е н и е м функции f в точке ζ. Иная формулировка теоремы Фату состоит в том, что для ограниченной голоморфной в круге D функции f справедливо разложение $\Gamma=F(f)\cup E$, $\operatorname{mes}E=0$. Результат дополняется т е о р е м о й е д и н с т в е н н о с т и Ф. и М. Р и с с о в (1916): если f голоморфна и ограничена в круге D и на нек-ром множестве $M\subset F(f)$, $\operatorname{mes}M>0$, имеет угловое граничное значение $f(\zeta)=a$, $\zeta\in M$, то $f(z)\equiv a$. Это утверждение было независимо доказано Н. Н. Лузиным и И. И. Приваловым (1919), к-рые существенно распространили его также на случай *произвольных* мероморфных функций. В том же году Н. Н. Лузин и И. И. Привалов опубликовали г р а н и ч н у ю т е о р е м у е д и н с т в е н н о с т и для случая радиальных граничных значений: если голоморфнан в D функция f на множестве M второй категории и метрически *плотном* на нек-рой дуге $\gamma\subset\Gamma$ имеет одно и то же радиальное граничное значение $a\in\Omega$, то есть $\lim\limits_{r\to1}f(re^{i\theta})=a$, $e^{i\theta}\in M$, то $f(z)\equiv a$.

В 1936 И. И. Привалов отметил, что утверждение $f(z)=\text{const}$ остается в силе и в том случае, когда значения $a_\zeta=\lim\limits_{r\to1}f(re^{i\theta})$ не обязательно одинаковы в точках $\zeta=e^{i\theta}\in M$, но принадлежат нек-рому множеству (логарифмической) емкости нуль. Основная идея и элементы доказательства теорем Лузина — Прива-

лова применимы и в общем случае непрерывных отображений f круга D, что и было позднее использовано во многих работах.

Точку $\zeta\in\Gamma=\{|z|=1\}$ наз. точкой Плеснера и относят к множеству $I(f)$, если пересечение

$$\bigcap C(f,\ \zeta;\ \Delta(\zeta,\ \varphi_1,\ \varphi_2))$$

по всем угловым областям $\Delta(\zeta,\ \varphi_1,\ \varphi_2)$ с вершиной ζ совпадает с Ω. В 1927 А. И. Плеснер доказал, что для любой мероморфной в круге D функции f почти все точки окружности Γ принадлежат либо $F(f)$, либо $I(f)$, то есть $\Gamma=F(f)\cup I(f)\cup E$, $\operatorname{mes}E=0$. Точку $\zeta\in\Gamma$ наз. точкой Мейера и относят к множеству $M(f)$, если $C(f,\ \zeta;\ D)\neq\Omega$ и пересечение хордальных П. м. $\bigcap C(f,\ \zeta;\ h(\zeta,\ \varphi))$ по всем хордам, проведенным в точку ζ, совпадает с $C(f,\ \zeta;\ D)$. К. Мейер (K. Meier, 1961) установил следующий аналог теоремы Плеснера в терминах категории по Бэру: если f мероморфна в D, то все точки окружности Γ, за возможным исключением множества E первой категории, принадлежат объединению $M(f)\cup I(f)$. Получено уточнение теоремы Мейера, согласно к-рому E есть множество первой категории и типа F_σ (см. [12] — [14], где получены усиления теорем Плеснера и Мейера, а также даны обращение теоремы Мейера и характеризация множества $M(f)$).

Работа П. Фату послужила первоначальным толчком к развитию фундаментальных исследований граничных свойств аналитич. функций. Исследования Ф. и М. Риссов, Н. Н. Лузина, И. И. Привалова, Р. Неванлинны (R. Nevanlinna), А. И. Плеснера, В. И. Смирнова и др. проводились независимо от идей П. Пенлеве, и для них характерно использование методов, связанных с теорией меры и теорией интегрирования, с понятием категории по Бэру (см. [4] — [9]).

Основным объектом исследований Ф. Иверсена (F. Iversen) и В. Гросса (W. Gross) были также мероморфные функции f в области D с жордановой границей $\Gamma=\operatorname{Fr}D$. В произвольной точке $\zeta_0\in\Gamma$ граничное предельное множество $C(f,\ \zeta_0;\ \Gamma)$ определяется следующим образом: если M_r обозначает замыкание объединения $\bigcup C(f,\ \zeta;\ D)$ по всем точкам

$$\zeta\in(\Gamma\setminus\{\zeta_0\})\cup\{|z-\zeta_0|<r\},$$

то $C(f,\ \zeta_0;\ \Gamma)=\bigcap_{r>0}M_r$. Одна из основных теорем, полученных независимо Ф. Иверсеном и В. Гроссом, утверждает, что при указанных условиях в каждой точке $\zeta_0\in\Gamma$ множество

$$C_i(f,\ \zeta_0;\ D)=C(f,\ \zeta_0;\ D)\setminus C(f,\ \zeta_0;\ \Gamma)$$

открыто и все значения $a\in C_i(f,\ \zeta_0;\ D)$, за возможными двумя исключениями, принадлежат множеству повторяющихся значений $R(f,\ \zeta_0;\ D)$; кроме того, каждое *исключительное значение* (если таковые существуют) является асимптотич. значением функции f в точке ζ_0.

Исследования Ф. Иверсена и В. Гросса получили свое дальнейшее развитие в работах А. Бёрлинга (A. Beurling), В. Зайделя (W. Seidel, он и ввел термин «П. м.» в 1932) и др. (см. [5] — [9]). Рассматривались в основном случаи, когда ζ_0 принадлежит нек-рому «малому» множеству E точек границы Γ нулевой линейной меры или нулевой емкости, и изучалось П. м. $C(f,\ \zeta_0;\ \Gamma\setminus E)$, определяемое аналогично множеству $C(f,\ \zeta;\ \Gamma)$. В этих исследованиях использовались и методы теории потенциала.

Новейшие результаты в этом направлении сформулированы ниже для случая круга $D=\{|z|<1\}$. Пусть фиксировано множество E на дуге γ границы $\Gamma=\{|z|=1\}$, $\operatorname{mes}E=0$, $\zeta_0\in E$. Каждой точке $\zeta\in\gamma\setminus E$ отнесем жорданову дугу $\Lambda_\zeta\subset D$, оканчивающуюся в ζ.

Пусть M_r^* — замыкание объединения $\bigcup C(f,\ \zeta;\ \Lambda\zeta)$ по всем точкам

$$\zeta\in(\gamma\setminus E)\cap\{|z-\zeta_0|<r\}$$

и пусть $C^*(f,\ \zeta_0;\ \Gamma\setminus E)=\bigcap_{r>0}M_r^*$.
Тогда множество

$$S(\zeta_0)=C(f,\ \zeta_0;\ D)\setminus C^*(f,\ \zeta_0;\ \Gamma\setminus E)$$

открыто, множество $S(\zeta_0)\setminus R(f,\ \zeta_0;\ D)$ имеет емкость нуль, а каждое значение $a\in S(\zeta_0)\setminus R(f,\ \zeta_0;\ D)$ является асимптотическим значением функции f либо в точке ζ_0, либо в каждой точке нек-рой последовательности $\{\zeta_n\}$, $\zeta_n\in\Gamma$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n=\zeta_0$. Если емкость E равна нулю, то для каждой связной компоненты $S_k(\zeta_0)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, множества $S(\zeta_0)$ множество $S_k(\zeta_0)\setminus R(f,\ \zeta_0;\ D)$ состоит самое большее из двух различных значений.

С помощью *нормальных семейств* была доказана т е о р е м а Л и н д е л ё ф а: если голоморфная функция f ограничена в круге D и имеет асимптотич. значение a в точке $\zeta_0\in\Gamma$, то она имеет в этой же точке значение a и в качестве углового граничного значения. Нормальность семейства $F=\{f(z)\}$ мероморфных функций $f(z)$ в области G можно характеризовать в терминах т. н. с ф е р и ч е с к о й п р о и з в о д н о й

$$\rho(f(z))=\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}.$$

Именно, семейство F нормально тогда и только тогда, когда сферич. производные $\rho(f(z))$, $f\in F$, равномерно ограничены внутри G, т. е. для любого компакта $K\subset G$ можно указать такую постоянную $C=C(K)$, что

$$\rho(f(z))\leqslant C(K),\ z\in K,\ f\in F.$$

Однако наиболее важный вклад нормальных семейств в теорию П. м. формулируется при помощи понятия нормальной функции. Мероморфная в односвязной области G функция $f(z)$ наз. н о р м а л ь н о й ф у н к ц и е й в G, если нормально семейство $\{f(S(z))\}$, где S пробегает семейство всех конформных автоморфизмов области G; $f(z)$ нормальна в многосвязной области G, если она нормальна на универсальной накрывающей поверхности G. Мероморфная функция $f(z)$ в круге $D=\{|z|<1\}$ нормальна тогда и только тогда, когда существует константа $C=C(f)$, $0<C<\infty$, такая, что

$$\rho(f(z))\,|dz|\leqslant C\frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

Здесь левая часть есть элемент длины в т. н. хордальной метрике на сфере Римана Ω для отображения $w=f(z)$, а стоящее в правой части выражение $d\sigma(z)=|dz|/(1-|z|^2)$ есть элемент длины в гиперболич. метрике круга D. Ограниченные голоморфные функции и мероморфные функции, не принимающие трех различных значений, являются нормальными функциями, и нек-рые свойства функций названных классов переносятся на произвольные нормальные функции. Напр., для произвольной нормальной функции справедливо утверждение теоремы Линделёфа. Класс всех нормальных мероморфных функций в круге D имеет нек-рое сходство с классом *ограниченного вида функций*. Однако имеются и существенные различия. Напр., существуют нормальные мероморфные функции без асимптотич. значений, а следовательно и без радиальных граничных значений, чего не может быть для функций ограниченного вида. Важные исследования асимптотич. значений были проведены Дж. Маклейном (G. R. MacLane, см. [7], [9]). Теория Маклейна позволила получить новые доказательства из-

вестных ранее свойств нормальных функций; так, напр., множество точек $\zeta \in \Gamma$, в к-рых нормальная голоморфная функция $f(z)$ имеет асимптотич. значение, а следовательно и угловое граничное значение, плотно на Γ.

С понятием нормальности тесно связано распределение значений мероморфных функций. Последовательность $\{z_n\}$ точек z_n единичного круга D, $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 1$, наз. *P-последовательностью* для мероморфной функции $f(z)$ в D, если для любой ее бесконечной подпоследовательности $\{z_{n_k}\}$ и для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\Omega \setminus R\left(f,\ z;\ \bigcup\nolimits_{k=1}^{\infty} \{z \in D : \sigma(z,\ z_{n_k}) < \varepsilon\}\right)$$

состоит самое большее из двух значений. Показано, что f обладает хотя бы одной P-последовательностью в том и только в том случае, если

$$\lim_{|z|\to 1} \sup q_f(z) = +\infty,\ q_f(z) = (1 - |z|^2)\,\rho(f(z)).$$

Таким образом, распределение значений мероморфной функции $f(z)$ связано со строением П. м. непрерывной функции $q_f(z)$.

Существенные продвижения имеются в теории П. м. общих отображений $f : D \to \Omega$, $D = \{|z| < 1\}$. Так, еще в 1955 была доказана *теорема о точках неопределенности*: для произвольного отображения $f : D \to \Omega$ точки $\zeta \in \Gamma$, в к-рые можно провести две непрерывные кривые L_ζ^1 и L_ζ^2 такие, что

$$C(f,\ \zeta;\ L_\zeta^1) \neq C(f,\ \zeta;\ L_\zeta^2),$$

образуют самое большее счетное множество. *Теорема максимальности Коллингвуда*: пусть L_0 — произвольный континуум в круге D такой, что $L_0 \cap \Gamma = \{z = 1\}$, и пусть континуум L_θ получается из L_0 поворотом на угол θ вокруг начала координат; тогда для произвольного отображения $f : D \to \Omega$ точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, в к-рых

$$C(f,\ \zeta;\ L_\theta) \neq C(f,\ \zeta;\ D),$$

образуют множество первой категории на Γ. Точку $\zeta \in \Gamma$ относят к множеству $C(f)$, если П. м. $C(f, \zeta; D)$ совпадает с пересечением

$$\bigcap C(f,\ \zeta;\ \Delta(\zeta,\ \varphi_1,\ \varphi_2))$$

по всем угловым областям с вершиной ζ. Доказано [10], что

$$\Gamma = C(f) \cup E$$

для произвольного отображения $f : D \to \Omega$, где E — множество типа F_σ и первой категории. Обратно, для произвольного множества $E \subset \Gamma$ типа F_σ и первой категории существует голоморфная и ограниченная в D функция $f(z)$, для к-рой $E = \Gamma \setminus C(f)$. Множество $C(f)$ является подмножеством множества $K(f)$, состоящего из таких точек $\zeta \in \Gamma$, в к-рых

$$C(f,\ \zeta;\ \Delta(\zeta,\ \varphi_1,\ \varphi_2)) = C(f,\ \zeta;\ \Delta(\zeta,\ \varphi_1',\ \varphi_2'))$$

для любых двух угловых областей $\Delta(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ и $\Delta(\zeta, \varphi_1', \varphi_2')$. Пусть $E \subset \Gamma$ и $\zeta \in \Gamma$. Для данного $\varepsilon > 0$ пусть $r(\zeta, \varepsilon, E)$ обозначает длину наибольшей открытой дуги на Γ, лежащей в дуговой ε-окрестности $\{e^{i\theta} : |\theta - \arg\zeta| < \varepsilon\}$ точки ζ и не имеющей общих точек с E; если такой дуги нет, то полагают $r(\zeta, \varepsilon, E) = 0$. Множество E наз. *пористым* на Γ, если для любой точки $\zeta \in E$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup r(\zeta,\ \varepsilon,\ E) > 0;$$

σ-пористое множество есть объединение не более чем счетного числа пористых множеств. Вся-

кое σ-пористое множество есть множество первой категории и линейной меры нуль. Для произвольного отображения $f: D \to \Omega$ справедливо равенство $\Gamma = K(f) \cup E$, где E есть σ-пористое множество типа $G_{\delta\sigma}$. Обратно, для произвольного σ-пористого множества E существует голоморфная и ограниченная в D функция $f(z)$, для к-рой $\Gamma \setminus K(f) \supset E$.

О теории П. м. для функций многих комплексных переменных см., напр., [15] — [17].

Лит.: [1] Painlevé P., Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles..., P., 1897; [2] Zoretti L., Leçons sur le prolongement analytique..., P., 1911; [3] Голубев В. В., Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции, М., 1961; [4] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [5] Носиро Киоси, Предельные множества, пер. с англ., М., 1963; [6] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [7] Мак-Лейн Г., Асимптотические значения голоморфных функций, пер. с англ., М., 1966; [8] Маркушевич А. И., Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я., в кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, М., 1961, с. 100—10; [9] Ловатер А., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259; [10] Долженко Е. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 1, с. 3—14; [11] его же, «Ann. Math.», 1976, v. 2, p. 191—201; [12] Гаврилов В. И., «Докл. АН СССР», 1974, т. 216, № 1, с. 21—23; [13] Гаврилов В. И., Канатников А. Н., там же, 1977, т. 233, № 1, с. 15—17; [14] Канатников А. Н., там же, 1978, т. 238, № 5, с. 1043—1046; [15] Рудин У., Теория функций в поликруге, пер. с англ., М., 1974; [16] Хенкин Г. М., Чирка Е. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 13—142; [17] Rudin W., Function theory in the unit ball of C^n, N.Y.—[e.a.], 1980.

В. И. Гаврилов, Е. Д. Соломенцев.

ПРЕДЕЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО траектории $\{f^t x\}$ динамической системы f^t — множество A_x всех α-предельных точек (α-предельное множество) или множество Ω_x всех ω-предельных точек (ω-предельное множество) этой траектории (см. *Предельная точка* траектории). Для траектории $\{f^t x\}$ системы (или, иначе, $f(t, x)$, см. [1]) α-П. м. (соответственно ω-П. м.) — то же, что ω-П. м. (соответственно α-П. м.) траектории $\{f^{-t} x\}$ динамич. системы f^{-t} (системы с обращением времени). Поэтому свойства α-П. м. аналогичны свойствам ω-П. м.

Множество Ω_x — замкнутое инвариантное множество. Если $\Omega_x = \varnothing$, то траектория $\{f^t x\}$ наз. уходящей в положительном направлении; если $A_x = \varnothing$, то траектория $\{f^t x\}$ наз. уходящей в отрицательном направлении; если $\Omega_x = A_x = \varnothing$, то траектория наз. уходящей. Если $x \in \Omega_x$, то точка x наз. положительно устойчивой по Пуассону; если $x \in A_x$, то точка x наз. отрицательно устойчивой по Пуассону; если $x \in \Omega_x \cap A_x$, то точка x наз. устойчивой по Пуассону. Если $x \notin \Omega_x$ и $\Omega_x \neq \varnothing$, то точка x наз. положительно асимптотической; если $x \notin A_x$ и $A_x \neq \varnothing$, то точка x наз. отрицательно асимптотической.

Если точка x положительно устойчива по Лагранжу (см. *Устойчивость по Лагранжу*), то Ω_x — непустое связное множество,

$$\lim_{t \to +\infty} d(f^t x, \Omega_x) = 0$$

(где $d(z, Y)$ — расстояние от точки z до множества Y) и в Ω_x найдется *рекуррентная точка* (траектория). Если x — неподвижная точка, то $\Omega_x = \{x\}$. Если x — периодич. точка, то

$$\Omega_x = \{f^t x\}_{t \in \mathbb{R}} = \{f^t x\}_{t \in [0,\ T)},$$

где T — период. Если точка x положительно устойчива по Пуассону, но не неподвижная и не периодическая, а метрич. пространство, на к-ром задана рас-

сматриваемая динамич. система, полно, то в Ω_x всюду плотны точки, не принадлежащие траектории $\{f^t x\}$.

Если динамич. система задана на плоскости автономной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^2,\ f \in C^1$$

(гладким векторным полем $f(x)$), точка x положительно устойчива по Лагранжу, но не периодическая и $f(x)$ не обращается в нуль на множестве Ω_x (т. е. множество Ω_x не содержит неподвижных точек), то Ω_x — цикл, т. е. замкнутая кривая (траектория периодич. точки), а траектория $\{f^t x\}$ при $t \to +\infty$ спиралевидно наматывается на этот цикл. У динамич. систем, заданных на $\mathbb{R}^n$, $n>2$, или на нек-рых двумерных поверхностях, напр. на торе, ω-П. м. могут быть устроены иначе. Напр., у иррациональной обмотки тора (система $\dot{\varphi}=1$, $\dot{\psi}=\mu$, где (φ, ψ) (mod 1) — циклич. координаты на торе T^2, μ — иррациональное число) множество Ω_x для всякой точки $x=(\varphi, \psi)$ совпадает со всем тором.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [2] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974.

В. М. Миллионщиков.

ПРЕДЕЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ ПРИНЦИП — способ однозначного выделения решений стационарных уравнений, описывающих установившиеся колебания, через предел при $t \to \infty$ амплитуды решений соответствующих нестационарных уравнений с нулевыми начальными данными и периодической по t правой частью вида $f(x)e^{\pm i\omega t}$. Справедливость П. а. п. означает, что решение $v(x, t)$ указанной нестационарной задачи при $t \to \infty$ имеет вид

$$v(x, t) = u_{\pm}(x)\, e^{\pm i\omega t} + o(1), \qquad (*)$$

где $u_{\pm}$ — решения стационарного уравнения.

Впервые этот принцип был предложен (см. [1]) для уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^n$

$$(\Delta + k^2)\, u = f,$$

он выделяет те же решения этого уравнения, что и *излучения условия* и *предельного поглощения принцип*. Справедливость П. а. п. исследована: для уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами во внешности ограниченной области (см. [2], [3]), уравнения Гельмгольца в нек-рых областях с некомпактной границей (см. [3], [4]), задачи Коши — Пуассона в полосе (см. [5]), нек-рых уравнений высокого порядка (см. [3], [6]), смешанных задач во внешности ограниченной области для уравнений и систем любого порядка с переменными коэффициентами (см. [7]). В последнем случае условия излучения и принцип предельного поглощения выделяют $2^\varkappa$, $1 < \varkappa < \infty$, решений стационарного уравнения, а П. а. п. дает два из них. Указаны (см. [8]) такие постановки П. а. п., к-рые позволяют получить все эти $2^\varkappa$ решений.

Для справедливости П. а. п. необходимо, чтобы $f(x)$ была ортогональна всем собственным функциям стационарной задачи. Поэтому П. а. п. не справедлив в ограниченной области. Пусть P_λ — оператор, к-рый соответствует зависящей полиномиально от спектрального параметра λ стационарной задаче, полученной из смешанной задачи для нестационарного уравнения заменой в уравнении и граничных условиях оператора дифференцирования $i\partial/\partial t$ на параметр λ. Справедливость для оператора P_λ, $\lambda=\text{const}$, П. а. п. связана с возможностью аналитич. продолжения ядра резольвенты $R_\lambda \equiv P_\lambda^{-1}$ на непрерывный спектр и гладкостью по λ этого продолжения (см. [3], [7]). Если ядро R_λ допускает аналитич. продолжение через непрерывный спектр и имеет подходящие оценки при $\lambda \to \infty$, то

можно написать асимптотику при $t \to \infty$ остатка 0 (1) в (*), а также получить асимптотику при $t \to \infty$ решений других нестационарных задач (см. [2], [7]). Указанные свойства R_λ получены в [7] для смешанных задач во внешности ограниченной области для уравнений и систем любого порядка.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., «Ж. эксперимент. и теоретич. физики», 1948, т. 18, № 2, с. 243—248; [2] Ладыженская О. А., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 3, с. 161—64; [3] Эйдус Д. М., там же, 1969, т. 24, в. 3, с. 91—156; [4] Свешников А. Г., «Докл. АН СССР», 1950, т. 73, № 5, с. 917—20; [5] Исакова Е. К., «Дифференциальные уравнения», 1970, т. 6, № 1, с. 56—71; [6] Михайлов В. П., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1967, т. 91, с. 100—12; [7] Вайнберг Б. Р., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 2, с. 3—55; [8] его же, «Изв. ВУЗов. Математика», 1974, № 2, с. 12—23.

Б. Р. Вайнберг.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ теории вероятностей — общее название ряда теорем теории вероятностей, указывающих условия возникновения тех или иных закономерностей в результате действия большого числа случайных факторов. Первые П. т., установленные Я. Бернулли (J. Bernoulli, 1713) и П. Лапласом (P. Laplace, 1812), относятся к распределению отклонений частоты μ_n/n появления нек-рого события E при n независимых испытаниях от его вероятности p, $0<p<1$ (точные формулировки см. в статьях *Бернулли теорема*, *Лапласа теорема*). С. Пуассон (S. Poisson, 1837) распространил эти теоремы на случай, когда вероятность p_k наступления события E в k-м испытании может зависеть от k, описав предельное поведение при $n \to \infty$ распределения отклонений частоты μ_n/n от среднего арифметического $\overline{p}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k$ вероятностей p_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ (см. *Пуассона теорема*). Если обозначить через X_k случайную величину, принимающую значение, равное единице при появлении события E в k-м испытании, и значение, равное нулю при появлении противоположного события, μ_n можно представить в виде суммы

$$\mu_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

что позволяет рассматривать перечисленные теоремы как частные случаи двух более общих утверждений, относящихся к суммам независимых случайных величин — *больших чисел закона* и *центральной предельной теоремы* (к-рые приводятся ниже в их классич. формулировке).

Закон больших чисел. Пусть

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \qquad (1)$$

— последовательность независимых случайных величин, s_n — сумма первых n из них:

$$s_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \qquad (2)$$

A_n и B_n^2 — соответственно математич. ожидание

$$A_n = \mathsf{E}s_n = \mathsf{E}X_1 + \mathsf{E}X_2 + \ldots + \mathsf{E}X_n$$

и дисперсия

$$B_n^2 = \mathsf{D}s_n = \mathsf{D}X_1 + \mathsf{D}X_2 + \ldots + \mathsf{D}X_n$$

суммы s_n. Говорят, что последовательность (1) подчиняется *закону больших чисел*, если при любом $\varepsilon>0$ вероятность неравенства

$$\left| \frac{s_n}{n} - \frac{A_n}{n} \right| > 0$$

стремится к нулю при $n \to \infty$.

Широкие условия приложимости закона больших чисел найдены впервые П. Л. Чебышевым (1867) и затем обобщены А. А. Марковым (1906). Вопрос о необходимых и достаточных условиях приложимости закона больших чисел был окончательно решен А. Н. Колмо-

горовым (1928). В случае, когда случайные величины X_n имеют одну и ту же функцию распределения, эти условия, как показал А. Я. Хинчин (1929), сводятся к одному: величины X_n должны иметь конечные математич. ожидания.

Центральная предельная теорема. Говорят, что к последовательности (1) применима центральная предельная теорема, если при любых z_1 и z_2 вероятность неравенства

$$z_1 B_n < s_n - A_n < z_2 B_n$$

имеет пределом при $n \to \infty$ величину

$$\Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\, dx$$

(см. *Нормальное распределение*). Довольно общие достаточные условия применимости центральной П. т. были указаны П. Л. Чебышевым (1887), но в его доказательстве обнаружились пробелы, восполненные лишь позже А. А. Марковым (1898). Решение вопроса, близкое к окончательному, было получено А. М. Ляпуновым (1901). Точная формулировка теоремы Ляпунова такова: пусть

$$c_k = \mathsf{E}\,|X_k - \mathsf{E}X_k|^{2+\delta},\ \delta > 0,$$
$$C_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n.$$

Если отношение $L_n = C_n / B_n^{2+\delta}$ стремится к нулю при $n \to \infty$, то к последовательности (1) применима центральная П. т. Окончательное решение вопроса об условиях применимости центральной П. т. получено в основных чертах С. Н. Бернштейном (1926) и дополнено В. Феллером (W. Feller, 1935). В условиях центральной П. т. относительная точность аппроксимации вероятности неравенства типа $s_n - A_n > z_n B_n$, где z_n неограниченно растет вместе с n, величиной $1 - \Phi(z_n)$ может быть весьма невысокой. Необходимые для повышения точности поправочные множители указываются в П. т. для вероятностей больших отклонений (см. *Больших отклонений вероятности, Крамера теорема*). Вслед за Г. Крамером (H. Cramèr) и В. Феллером вопрос исследовался Ю. В. Линником и др. Типичные результаты, относящиеся к этой области, легче всего пояснить на примере сумм (2) независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ с $\mathsf{E}X_j = 0$ и $\mathsf{D}X_j = 1$; в этом случае $A_n = 0$, $B_n = \sqrt{n}$.

Пусть, напр., рассматривается вероятность неравенства

$$s_n \geqslant z_n \sqrt{n}.$$

Эта вероятность равна $1 - F_n(z_n)$, где $F_n(z)$ — функция распределения величины $s_n / \sqrt{n}$ и при фиксированных $z_n = z$ и $n \to \infty$

$$1 - F_n(z) \longrightarrow 1 - \Phi(z). \qquad (3)$$

Если z_n зависит от n, причем так, что $z_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$1 - F_n(z_n) \longrightarrow 0 \quad \text{и} \quad 1 - \Phi(z_n) \longrightarrow 0$$

и формула (3) становится бесполезной. Необходимы оценки для относительной точности аппроксимации, т. е. для отношения $1 - F_n(z_n)$ к $1 - \Phi(z_n)$. В частности, естественно возникает вопрос об условиях, при к-рых

$$\frac{1 - F_n(z_n)}{1 - \Phi_n(z_n)} \longrightarrow 1 \qquad (4)$$

для $z_n \to \infty$.

Соотношение (4) может выполняться при любом росте z_n только при условии, что сами слагаемые имеют нормальный закон (этот вывод верен уже при z_n по порядку, больших $\sqrt{n}$). Если же слагаемые не являются нормальными, то это соотношение может выполняться лишь в определенных з о н а х, к-рые по порядку не превосходят $\sqrt{n}$. Наиболее «узкие» (логарифмического порядка) зоны получаются при условии конечности определенного числа моментов. При этом в определенных условиях «регулярности» плотности слагаемых можно проследить переход «нормальной» асимптотики в степенную. Напр., если плотность слагаемых X_j равна

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{(1+z^2)^2},$$

то равномерно по z при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{s_n}{\sqrt{n}} \geqslant z\right\} \sim 1-\Phi(z)+\frac{2}{3\pi}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{z^3};$$

учитывая, что при $z \to \infty$

$$1-\Phi(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,z}\,e^{-z^2/2},$$

легко понять, при каких z имеет место (4). Расширение зоны до степенной (вида n^α, $\alpha<1/2$), требует условия

$$\mathsf{E}e^{|X_j|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}} < \infty \qquad (5)$$

и совпадения определенного (зависящего от α) числа моментов X_j с соответственными моментами нормального распределения. Если же условие совпадения моментов не выполнено, то отношение в левой части (4) описывается в терминах ряда Крамера (при так наз. условии Крамера, см. *Крамера теорема*) или его начальных отрезков (при выполнении условий типа (5)).

Оценки вероятностей больших отклонений используются в математич. статистике, статистич. физике и т. д.

Из других направлений работ в области П. т. можно отметить следующие.

1) Начатые А. А. Марковым и продолженные С. Н. Бернштейном и др. исследования условий приложимости закона больших чисел и центральной П. т. к суммам зависимых случайных величин.

2) Даже в случае последовательности одинаково распределенных случайных величин можно указать простые примеры, когда «нормированные» (т. е. подвергнутые какому-либо линейному преобразованию) суммы $(s_n-a_n)/b_n$, где a_n, $b_n>0$ — постоянные, имеют в пределе распределение, отличное от нормального (речь идет о невырожденных распределениях, т. е. распределениях, не сосредоточенных целиком в одной точке) (см. *Устойчивое распределение*). В работах А. Я. Хинчина, Б. В. Гнеденко, П. Леви (P. Lévy), В. Дёблина (W. Doeblin) и др. полностью изучены как класс возможных распределений для сумм независимых случайных величин, так и условия сходимости распределений сумм к тому или иному предельному распределению (в схеме серий случайных величин при условии *асимптотической пренебрегаемости* слагаемых) (см. *Безгранично делимое распределение*, *Случайный процесс с независимыми приращениями*).

3) Значительное внимание уделяется т. н. *локальным предельным теоремам*. Пусть, напр., случайные величины X_n принимают лишь целые значения. Тогда суммы s_n принимают также только целые значения и естественно поставить вопрос о предельном поведении вероятностей $P_n(m)$ того, что $s_n=m$, где m — целое. Простейшим примером локальной П. т. может служить локальная теорема Лапласа. Другой тип ло-

кальных П. т. описывает предельное распределение плотностей распределения сумм.

4) П. т. в их классич. постановке описывают поведение отдельной суммы s_n с возрастанием номера n. Достаточно общие П. т. для вероятностей событий, зависящих сразу от нескольких сумм, получены впервые А. Н. Колмогоровым (1931). Так, напр., из его результатов следует, что при весьма широких условиях вероятность неравенства

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |s_k| < zB_n$$

имеет пределом величину

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} e^{-(2k+1)^2 z^2/8\pi^2}, \quad z > 0.$$

Наиболее общий способ доказательства подобных П. т.— предельный переход от дискретных процессов к непрерывным.

5) Перечисленные выше П. т. относятся к суммам случайных величин. Примером П. т. иного рода могут служить П. т. для членов вариационного ряда. Эти П. т. подробно изучены Б. В. Гнеденко, Н. В. Смирновым и др.

6) Наконец, к П. т. относят также и теоремы, устанавливающие свойства последовательностей случайных величин, имеющие место с вероятностью, равной единице (см., напр., *Больших чисел усиленный закон*, *Повторного логарифма закон*).

О методах доказательства П. т. см. в статьях *Характеристическая функция*, *Распределений сходимость*.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [2] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [3] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [4] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973.

Ю. В. Прохоров.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ КОНУС выпуклой поверхности S — поверхность $P(S)$ конуса, образованного полупрямыми, исходящими из нек-рой точки $O \in S$ и принадлежащими выпуклому телу, ограниченному S. П. к. определен однозначно с точностью до параллельного переноса, зависящего от выбора точки O. Понятие П. к. определяется и для нек-рых классов невыпуклых поверхностей, напр. для т. н. сферически однолистных седловых поверхностей.

Лит.: [1] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.

М. И. Войцеховский.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ — замкнутая траектория в фазовом пространстве автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к-рая является α- или ω-предельным множеством (см. *Предельное множество* траектории) хотя бы для одной другой траектории этой системы. П. ц. наз. орбитально устойчивым, или устойчивым, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что все траектории, начинающиеся в δ-окрестности П. ц. при $t = 0$, не выходят из его ε-окрестности при $t > 0$. П. ц. соответствует периодич. решение системы, отличное от постоянного. Если оно устойчиво по Ляпунову, то П. ц. устойчив. Для того чтобы периодич. решению соответствовал устойчивый П. ц., достаточно, чтобы модули всех его *мультипликаторов*, кроме одного, были меньше единицы (см. *Орбитальная устойчивость*, *Андронова — Витта теорема*). С физич. точки зрения П. ц. соответствует периодич. режиму, или *автоколебанию*, системы (см. [2]).

Пусть автономная система

$$\dot{x} = f(x), \qquad (*)$$

определенная в области $U \subset V^n$, где V^n — дифференци-

руемое многообразие, напр. $V^n=\mathbb{R}^n$, имеет замкнутую траекторию Γ. Проведем гиперповерхность π, пересекающую Γ трансверсально в точке p. Тогда любая траектория системы, начинающаяся при $t=0$ в точке $c\in V\subset\pi$, где V — достаточно малая окрестность точки p, при увеличении t снова пересечет π в точке $T(c)$. Диффеоморфизм $T: V\to T(V)$ имеет неподвижную точку p и наз. *последования отображением*. Его свойства определяют поведение траекторий системы в окрестности Г. П. ц. в отличие от произвольной замкнутой траектории всегда определяет отличное от тождественного отображение последования. Если p — седловая точка диффеоморфизма T, то П. ц. наз. П. ц. седлового типа. Система, имеющая П. ц. седлового типа, может иметь гомоклинич. кривую, т. е. траекторию, для к-рой П. ц. является одновременно как α-, так и ω-предельным множеством.

В случае двумерной системы (*) ($V^n=\mathbb{R}^2$) в качестве π берут прямую и рассматривают функцию $\rho: \rho(c)=T(c)-c$, к-рая наз. функцией последования. Кратность нуля $c=p$ функции ρ наз. кратностью П. ц. Предельный цикл четной кратности наз. полуустойчивым. П. ц. вместе с точками покоя и *сепаратрисами* определяют качественную картину поведения остальных траекторий (см. *Пуанкаре — Бендиксона теория*, а также [3], [4]). П. ц. в случае аналитич. функций $f(x)$ принадлежит к одному из типов: 1) устойчивый, 2) неустойчивый, т. е. устойчивый П. ц., если изменить направление t на противоположное, 3) полуустойчивый. Напр., система

$$\dot{x}_1=-\omega x_2+\mu x_1(x_1^2+x_1^2-1)^k,$$
$$\dot{x}_2=\omega x_1+\mu x_2(x_1^2+x_2^2-1)^k,$$

где $\omega\neq 0$, $\mu=\text{const}$, $k\in\mathbb{N}$, имеет при $\mu<0$ ($\mu>0$) и k нечетном устойчивый (неустойчивый), а при k четном — полуустойчивый П. ц. кратности k; во всех этих случаях П. ц. является окружность $x_1^2+x_2^2=1$, т. е. траектория решения

$$x_1=\cos(\omega t+\varphi_0),\ x_2=\sin(\omega t+\varphi_0).$$

Если система (*) задана на односвязной области $U\subset\mathbb{R}^2$, то П. ц. окружает по крайней мере одну точку покоя этой системы.

Для разыскания П. ц. в системе 2-го порядка применяется метод, основанный на следующем утверждении: если векторное поле $f(x)$ направлено вовнутрь (вовне) кольцеобразной области G и в G нет точек покоя, то в G имеется хотя бы один устойчивый (неустойчивый) П. ц. Выбор области G производится из физич. соображений или результатов аналитических или численных расчетов.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974; [2] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [3] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966; [4] их же, Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, М., 1967; [5] Плисс В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, М.— Л., 1964; [6] Моисеев Н. Н., Асимптотические методы нелинейной механики, 2 изд., М., 1981. *Л. А. Черкас.*

ПРЕДИКАТ — функция, значениями к-рой являются высказывания об n-ках объектов, представляющих значения аргументов; при $n=1$ П. наз. «свойством», при $n>1$ — «отношением», единичные высказывания могут рассматриваться как нульместные П.

Чтобы задать n-местный предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$, следует указать множества $D_1, \ldots, D_n$ — области изменения предметных переменных $x_1, \ldots, x_n$, причем чаще всего рассматривают случаи $D_1=D_2=\ldots=D_n$. С теоретико-множественной точки зрения П. определяется заданием подмножества M

в декартовом произведении $D_1 \times \ldots \times D_n$. При этом $P(a_i, \ldots, a_n)$ понимают как высказывание «упорядоченный набор $(a_1, \ldots, a_n)$ принадлежит M». Синтаксич. задание n-местного П. осуществляется указанием формулы логико-математич. языка, содержащей n свободных переменных. Понятие П. восходит к Аристотелю; аппарат оперирования с высказываниями, содержащими в своем составе П., разработан в математич. логике (см. *Логические исчисления*, *Предикатов исчисление*). *С. Ю. Маслов.*

ПРЕДИКАТИВНОСТЬ — особый способ образования понятий, характеризующийся отсутствием «порочного круга» в определениях: определяемый объект не должен участвовать в своем собственном определении. Если язык, на к-ром даются определения, формализован, то П. означает, как правило, что определяющая формула не должна содержать связанной переменной, в область изменения к-рой входит определяемый объект.

Непредикативные определения, наоборот, отличаются наличием в них такого «порочного круга». Явление непредикативности встречается также в нек-рых рассуждениях, когда в процессе обоснования нек-рая часть проводимого рассуждения сама рассматривается как объект рассуждения. Именно использование такого типа рассуждений является причиной появления семантич. *антиномий*. Типичный пример — установление противоречия в т. н. парадоксе лжеца: если некто утверждает — «я лгу», то это утверждение не может быть истинным и не может быть ложным.

В. Н. Гришин, А. Г. Драгалин.

ПРЕДИКАТНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ — переменная, значениями к-рой могут быть *предикаты*. При формальном построении аксиоматич. систем П. п. отличаются от *индивидных переменных* тем, что вместо них можно подставлять формулы. Так, в исчислении предикатов 2-й ступени, если в аксиоме

$$\forall x \varphi(x) \longrightarrow \varphi(t)$$

x — предикатная переменная для n-местных предикатов, то в качестве t можно взять любую формулу с n отмеченными переменными. При этом результатом подстановки формулы t с отмеченными переменными $z_1, \ldots, z_n$ вместо П. п. x в атомарную формулу $x(y_1, \ldots, y_n)$, где $y_1, \ldots, y_n$ — индивидные переменные, является формула $t(y_1/z_1, \ldots, y_n/z_n)$, получающаяся из t одновременной заменой свободных вхождений $z_1, \ldots, z_n$ на $y_1, \ldots, y_n$ соответственно.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960; [2] Такеути Г., Теория доказательств, пер. с англ., М., 1978. *В. Н. Гришин.*

ПРЕДИКАТНЫЙ СИМВОЛ, предикатная буква,— обозначение какого-либо конкретного предиката. Напр., символом $\leqslant$ часто обозначают отношение порядка на действительных числах, являющееся двуместным предикатом. При формальном построении языка символы, отнесенные к категории предикатных, должны определенным образом использоваться для построения выражений языка. Именно, если P есть n-местный П. с., то среди синтаксич. правил образования выражений формализованного языка должно быть правило: «если $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ — формула». Таким образом, П. с. синтаксически используются для образования формул, а семантически обозначают предикаты.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А., Математическая логика, М., 1979. *В. Н. Гришин.*

ПРЕДИКАТОВ ИСЧИСЛЕНИЕ — формальная аксиоматич. теория; исчисление, предназначенное для описания *логических законов*, справедливых для любой непустой области объектов с произвольными заданными на этих объектах предикатами (т. е. свойствами и отношениями).

Для формулировки П. и. следует вначале формулировать точный л о г и к о - м а т е м а т и ч е с к и й я з ы к Ω. В наиболее распространенном случае односортных языков 1-го порядка такой язык содержит предметные переменные $x, y, z, \ldots$, функциональные символы $f, g, h, \ldots$ с различным количеством аргументных мест и предикатные символы (предикатные буквы) $P, Q, R, \ldots$ также с различным количеством аргументных мест. Из переменных и функциональных символов конструируются т е р м ы языка, содержательно интерпретируемые как имена объектов исследования теории. Далее, если P есть n-местный предикатный символ языка Ω, $n \geqslant 0$, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ есть, по определению, а т о м а р н а я (э л е м е н т а р н а я) ф о р м у л а языка Ω. Содержательно $P(t_1, \ldots, t_n)$ означает, что истинно высказывание, гласящее, что объекты $t_1, \ldots, t_n$ связаны отношением P.

Из атомарных формул с помощью *пропозициональных связок* и *кванторов* конструируются формулы языка. Обычный набор связок и кванторов в классическом и интуиционистском П. и. таков: & или $\wedge$ (конъюнкция, «и»), $\vee$ (дизъюнкция, неразделительное «или»), $\rightarrow$ или $\supset$ (импликация, «влечет», «если..., то»), $\neg$ (отрицание, «не»), $\forall$ (квантор «для всех»), $\exists$ (квантор «существует»). Соответственно неэлементарные формулы этих исчислений имеют вид $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \supset \psi)$, $\neg\varphi$, $\forall x \varphi$, $\exists x \varphi$. Вхождение переменной x в формулу φ наз. с в я з а н н ы м, если x входит в часть φ вида $\exists x \varphi$ или $\forall x \psi$. Остальные вхождения x в φ наз. с в о б о д н ы м и. Переменная x наз. п а р а м е т р о м φ, если найдется хотя бы одно свободное вхождение x в φ. Интуитивно говоря, формула с параметрами выражает нек-рое условие, к-рое превращается в конкретное высказывание, если задать м о д е л ь и с ч и с л е н и я, т. е. выбрать нек-рую непустую область объектов исследования и приписать предикатным символам п р е д и к а т ы (т. е. отношения на области объектов), а параметрам приписать в качестве значений определенные объекты.

П. и. задается с помощью аксиом и правил вывода. Напр., одна из обычных формулировок к л а с с и ч е с к о г о и с ч и с л е н и я п р е д и к а т о в содержит следующие аксиомы:

1. $(\varphi \supset (\psi \supset \varphi))$,
2. $((\varphi \supset (\psi \supset \eta)) \supset ((\varphi \supset \psi) \supset (\varphi \supset \eta)))$,
3. $((\varphi \wedge \psi) \supset \varphi)$,
4. $((\varphi \wedge \psi) \supset \psi)$,
5. $(\varphi \supset (\psi \supset (\varphi \wedge \psi)))$,
6. $((\varphi \supset \eta) \supset ((\psi \supset \eta) \supset ((\varphi \vee \psi) \supset \eta)))$,
7. $(\varphi \supset (\varphi \vee \psi))$,
8. $(\psi \supset (\varphi \vee \psi))$,
9. $(\neg\varphi \supset (\varphi \supset \psi))$,
10. $((\varphi \supset \psi) \supset ((\varphi \supset \neg\psi) \supset \neg\varphi))$,
11. $(\varphi \vee \neg\varphi)$,
12. $(\forall x \varphi \supset \varphi(x \mid t))$,
13. $(\varphi(x \mid t) \supset \exists x \varphi)$,
14. $(\forall x (\varphi \supset \psi) \supset (\varphi \supset \forall x \psi))$,
15. $(\forall x (\psi \supset \varphi) \supset (\exists x \psi \supset \varphi))$.

Здесь φ, ψ, η обозначают произвольные формулы языка Ω, так что каждая из строчек 1—15 представляет собой аксиомную схему, порождающую конкретную аксиому исчисления при конкретном выборе формул φ, ψ, η. Далее, в схемах 14 и 15 предполагается, что x — не параметр формулы φ; в схемах 12 и 13 через $\varphi(x|t)$ обозначен результат одновременного замещения всех свободных вхождений переменной x в φ на терм t

(причем если t оказался на месте x в части формулы φ, имеющей вид $\exists y\psi$ или $\forall y\chi$, где y входит в t, то следует дополнительно заменить все связанные вхождения y в эту часть на переменную, не входящую в φ; это делается для того, чтобы не допустить искажения смысла φ при замене x на t; такое искажение смысла наз. к о л л и з и е й п е р е м е н н ы х).

Далее, П. и. содержит два правила вывода: 1) если выведены формулы вида φ и $(\varphi\supset\psi)$, то разрешается вывести формулу ψ (правило *модус поненс*) и 2) если выведена формула φ и x — переменная, то разрешается вывести формулу $\forall x\varphi$ (п р а в и л о о б о б щ е н и я).

Истолкование логич. связок в П. и. такое же, как и в *высказываний исчислении*. Что касается истолкования кванторов, то они в классическом П. и. трактуются с использованием актуальной бесконечности. Если задать интерпретацию языка, то каждая формула без параметров получает значение «истина» или «ложь». Формула наз. к л а с с и ч е с к и о б щ е з н а ч и м о й, если она в любой интерпретации и при любом приписывании значений параметрам принимает значение «истина». В силу *Гёделя теоремы о полноте* в классическом П. и. выводимы все классически общезначимые формулы и только они. Эта теорема представляет собой точное выражение идеи формализации классич. логики: в классическом П. и. выводятся все логич. законы, общие для всех моделей.

И н т у и ц и о н и с т с к о е и с ч и с л е н и е п р е д и к а т о в отличается от классического тем, что из числа аксиомных схем исключается схема 11. Различие двух исчислений отражает различное понимание логич. связок и кванторов. В последнем исчислении это понимание трактуется в рамках *интуиционизма*. Вопрос о полноте интуиционистского П. и. оказывается значительно сложнее и допускает различные решения в зависимости от деталей интуиционистской семантики, но и здесь может быть развита весьма содержательная теория моделей, аналогичная классич. *моделей теории* (см. *Крипке модели*, *Реализуемость*).

Употребляются и другие формулировки П. и., среди к-рых с точки зрения *доказательств теории* наиболее важны исчисления натурального вывода (см. *Естественный логический вывод*) и *секвенций исчисление*.

П. и. является обычным базисом для построения логич. исчислений, предназначенных для описания фрагментов тех или иных конкретных математич. теорий. Напр., если мы стремимся описать нек-рый класс истинных суждений теории множеств, то можно построить логич. исчисление в языке теории множеств, в к-ром, кроме аксиом и правил вывода классического П. и. (логич. постулатов), будут фигурировать дополнительные н е л о г и ч е с к и е а к с и о м ы, описывающие свойства множеств. Примером типичной нелогич. аксиомы в теории множеств является *выбора аксиома*.

П. и. иногда наз. у з к и м и с ч и с л е н и е м п р е д и к а т о в, и с ч и с л е н и е м п р е д и к а т о в 1-г о п о р я д к а, ф у н к ц и о н а л ь н ы м и с ч и с л е н и е м 1-г о п о р я д к а, в отличие от исчислений, содержащих кванторы по предикатам и соответствующие аксиомы свертывания, утверждающие существование соответствующих предикатов. Такого рода исчисления, уже не носящие чисто логич. характера, часто наз. П. и. в ы с ш е г о п о р я д к а. Примером такого исчисления может служить *типов теория*. Помимо классического и интуиционистского П. и., имеются и другие логич. системы, описывающие логич. законы, к-рые могут быть выражены иными логич. средствами или с иных методологич. позиций. Сюда относятся П. и. модальной, индуктивной логики и др.

Лит.: [1] Г и л ь б е р т Д., Б е р н а й с П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., 2 изд., М., 1982; [2] К л и н и С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] П о в и к о в И. С.,

Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [4] Такеути Г., Теория доказательств, пер. с англ., М., 1978.

А. Г. Драгалин.

ПРЕДКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО, вполне ограниченное пространство, — *равномерное пространство* X, для всякого окружения U к-рого существует конечное покрытие X множествами порядка U. Другими словами, для каждого окружения $U \subset X$ должно найтись такое конечное множество $F \subset X$, что $X \subset U(F)$. Равномерное пространство компактно тогда и только тогда, когда каждая сеть в X обладает подсетью Коши. Поэтому для того чтобы X было П. и.. достаточно, чтобы нек-рое пополнение пространства X было компактным, и необходимо, чтобы каждое пополнение его было компактным.

М. И. Войцеховский.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ — простейшее выражение языка, представляющее собой такое соединение слов, к-рое имеет самостоятельный смысл, т. е. выражает законченную мысль. В формализованных языках П. наз. формулы, не содержащие свободных переменных, т. е. параметров. П. в формализованных языках наз. также замкнутыми формулами. Напр., в языке 1-го порядка (языке узкого исчисления предикатов) формулы

$$\forall x\, \forall y\, \exists z\, (x \leqslant z \& z \leqslant y),\ \exists z\, (1 \leqslant z \& z \leqslant 4),\ 1 \leqslant 2$$

являются замкнутыми (первая ложная, а вторая и третья — истинные в области натуральных чисел). Формулы

$$\exists z\, (x \leqslant z \& z \leqslant y),\ z \leqslant 1$$

не являются замкнутыми, т. к. содержат параметры (x и y — в первой и z — во второй).

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960.

В. Н. Гришин.

ПРЕДМЕРА — конечно аддитивная мера с действительными или комплексными значениями на нек-ром пространстве Ω, обладающая свойством: она определена на алгебре $\mathfrak{A}$ подмножеств Ω, к-рая имеет вид $\mathfrak{A} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{B}_\alpha$, где $\mathfrak{B}_\alpha$ — семейство σ-алгебр пространства Ω, помеченных элементами нек-рого частичного упорядоченного множества A так, что $\mathfrak{B}_{\alpha_1} \subset \mathfrak{B}_{\alpha_2}$ при $\alpha_1 < \alpha_2$, и сужение этой меры на любую σ-алгебру $\mathfrak{B}_\alpha$ счетно аддитивно. Напр., если Ω — хаусдорфово топологич. пространство, A — совокупность всех компактов, упорядоченных по вложению, $\mathfrak{B}_\alpha$, $\alpha \in A$, есть σ-алгебра борелевских подмножеств компакта α и $C_0(\Omega)$ — пространство всех непрерывных функций на Ω с компактными носителями, то всякий линейный функционал на $C_0(\Omega)$, непрерывный относительно топологии равномерной сходимости в $C_0(\Omega)$, порождает П. на алгебре $\mathfrak{A} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{B}_\alpha$.

Пусть Ω — линейное локально выпуклое пространство, A — совокупность конечномерных подпространств сопряженного пространства Ω', упорядоченных по вложению, $\mathfrak{B}_\alpha$, $\alpha \in A$, — наименьшая σ-алгебра, относительно которой измерим любой линейный функционал $\varphi \in \alpha$. Множества из алгебры $\mathfrak{A} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{B}_\alpha$ наз. цилиндрическими множествами, а любая П. на $\mathfrak{A}$ — цилиндрической мерой (или квазимерой). Любой положительно определенный функционал на пространстве Ω', непрерывный на любом конечномерном подпространстве $\alpha \subset \Omega$, является характеристич. функционалом (преобразованием Фурье) нек-рой конечной неотрицательной П. на Ω.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах, пер. с франц., М., 1977.

Р. А. Минлос.

ПРЕДМЕТНАЯ ОБЛАСТЬ, универсум, — термин теории моделей, обозначающий область изменения

(пробегания) предметных переменных данного формального языка. В качестве формальных языков берутся языки узкого исчисления предикатов. Каждый такой язык полностью описывается множеством

$$L=\{P_0,\ \ldots,\ P_n,\ \ldots,\ F_0,\ \ldots,\ F_m,\ \ldots\},$$

где $P_0, \ldots, P_n, \ldots$ — предикатные символы, а $F_0, \ldots, F_m, \ldots$ — функциональные символы, для каждого из к-рых указано число его аргументных мест. Модель $\mathfrak{M}$ (или алгебраич. система) для L задается непустым множеством M и интерпретирующей функцией I, определенной на L и сопоставляющей n-местному предикатному символу n-местный предикат, т. е. подмножество декартовой степени M^n множества M, а n-местному функциональному символу — n-местную функцию $M^n \to M$. Множество M наз. П. о. (или универсумом) модели $\mathfrak{M}$.

Лит.: [1] Клини С. К., Математическая логика, пер. с англ., М., 1973; [2] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч., Теория моделей, пер. с англ., М., 1977; [3] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А., Математическая логика, М., 1979.

В. Н. Гришин.

ПРЕДМЕТНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ — то же, что *индивидная переменная*. См. также *Предикатов исчисление*.

ПРЕДМЕТНЫЙ ЯЗЫК — язык, являющийся предметом изучения. При формализации какой-либо содержательной теории различают два языка. Один — это язык формализуемой теории, или П. я., задаваемый правилами построения выражений П. я. и семантическими правилами, определяющими, что обозначают его выражения или какие они выражают суждения. Другой — это язык, на к-ром формулируются упомянутые выше синтаксические и семантич. правила. Этот язык наз. *метаязыком*. Обычно метаязык не формализуется. Однако и его можно формализовать, и тогда он станет П. я., для изучения к-рого требуется новый метаязык.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

В. Н. Гришин.

ПРЕДНОРМА — то же, что *полунорма*.

ПРЕДПОРЯДОК, квазипорядок, предупорядоченность, квазиупорядоченность, — рефлексивное и транзитивное *бинарное отношение* на множестве. Если $\lesssim$ есть П. на множестве M, то отношение $a\sim b \leftrightarrow a\lesssim b$ и $b\lesssim a$, $a,\ b\in M$, является отношением эквивалентности на M. При этом П. $\lesssim$ индуцирует *порядок* на фактормножестве $M/\sim$.

Т. С. Фофанова.

ПРЕДПУЧОК на топологическом пространстве X со значениями в нек-рой категории $\mathscr{K}$ (напр., категории множеств, групп, модулей, колец, ...) — контравариантный *функтор* F из категории открытых множеств пространства X и их естественных отображений включения в категорию $\mathscr{K}$. В зависимости от $\mathscr{K}$ предпучок F наз. предпучком множеств, групп, модулей, колец,... . Отвечающие включениям $V\subset U$ морфизмы $F(U)\to F(V)$ наз. гомоморфизмами ограничения.

Всякий П. определяет на X *пучок* (см. *Пучков теория*).

Е. Г. Скляренко.

ПРЕДСКАЗУЕМАЯ σ-АЛГЕБРА — наименьшая σ-алгебра $\mathscr{P}=\mathscr{P}(\mathbb{F})$ множеств из

$$\Omega\times R_+=\{(\omega,\ t):\omega\in\Omega,\ t\geqslant 0\},$$

порожденная всеми отображениями $(\omega, t)\to f(\omega, t)$ множества $\Omega\times R_+$ в R, к-рые (для каждого фиксированного $\omega\in\Omega$) являются (по t) непрерывными слева и $\mathbb{F}$-согласованными с неубывающим семейством $\mathbb{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ под-σ-алгебр $\mathscr{F}_t\subseteq\mathscr{F}$, $t\geqslant 0$, где $(\Omega, \mathscr{F})$ — измеримое пространство. П. σ-а. порождается также любой из совокупностей множеств:

1) $A\times\{0\}$, где $A\in\mathscr{F}_0$, и $[\![0, \tau]\!]$, где τ — марковские моменты, а $[\![0, \tau]\!]$ — стохастич. интервалы;

2) $A\times\{0\}$, где $A\in\mathscr{F}_0$, и $A\times(s, t]$, где $s<t$ и $A\in\mathscr{F}_s$.

Между опциональными алгебрами и П. σ-а. имеет место соотношение $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \equiv \mathcal{G}(\mathbb{F})$.

Лит.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975.

А. Н. Ширяев.

ПРЕДСКАЗУЕМЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС — стохастический процесс $X=(X_t(\omega), \mathcal{F}_t)$, являющийся измеримым (как отображение $(\omega, t) \to X(\omega, t)=X_t(\omega)$) относительно *предсказуемой* σ-*алгебры* $\mathcal{P}=\mathcal{P}(\mathbb{F})$.

А. Н. Ширяев.

ПРЕДСТАВИМОСТИ МАТРИЦ ПРОБЛЕМА — проблема, заключающаяся в том, чтобы выяснить, можно ли указать такой единый общий метод (*алгоритм*), к-рый по произвольной системе $U, U_1, \ldots, U_q$ целочисленных матриц позволял бы за конечное число шагов ответить на вопрос, представима ли матрица U через остальные матрицы $U_1, \ldots, U_q$ с помощью операции умножения. Наибольший интерес представляет случай, когда матрицы $U, U_1, \ldots, U_q$ являются квадратными и имеют один и тот же порядок. Так сформулированная П. м. п. наз. о б щ е й. Фиксируя матрицы $U_1, \ldots, U_q$ и оставляя матрицу U переменной, получают т. н. ч а с т н ы е П. м. п. Алгоритм, решающий общую П. м. п., решал бы и все частные проблемы, так что для установления неразрешимости общей П. м. п. достаточно указать хотя бы одну неразрешимую частную П. м. п.

П. м. п.— одна из первых *алгоритмических проблем* алгебраич. характера, неразрешимость к-рых была установлена. Первоначально А. А. Марковым было показано (см. [1], [2]), что для любого $n \geqslant 6$ может быть построена система, состоящая из 91 матрицы порядка n, такая, что соответствующая ей частная П. м. п. будет неразрешимой, т. е. будет невозможен алгоритм (понимаемый в точном смысле этого слова), распознающий по произвольной матрице порядка n, представима ли она через матрицы данной системы. В дальнейшем (см. [3]) число матриц в системе было уменьшено до 23 и было показано, что за счет надлежащего усложнения конструкции системы (включая увеличение числа членов) условие $n \geqslant 6$ может быть ослаблено до $n \geqslant 4$. Для любого $n \geqslant 6$ строится конкретная система, состоящая из 12 матриц порядка n, с неразрешимой частной П. м. п. (см. [4]). Путем подходящей фиксации U и варьирования $U_1, \ldots, U_q$ доказана неразрешимость общей П. м. п. для $n=3$ (см. [5]).

Лит.: [1] Марков А. А., «Докл. АН СССР», 1951, т. 78, № 6, с. 1089—92; [2] е г о ж е, Теория алгорифмов, М.— Л., 1954 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 42); [3] е г о ж е, «Z. math. Logik und Grundl. Math.», 1958, Bd 4, S. 157—68; [4] Нагорный Н. М., «VI Всесоюзн. конференция по матем. логике», Тб., 1982, с. 124; [5] Paterson M. S., «Studies in appl. math.», 1970, v. 49, № 1, p. 105—07.

Н. М. Нагорный.

ПРЕДСТАВИМЫЙ ФУНКТОР — ковариантный (или контравариантный) функтор F из нек-рой категории $\mathfrak{K}$ в категорию множеств $\mathfrak{S}$, изоморфный одному из основных теоретико-множественных функторов:

$$H_A(X)=H(A, X): \mathfrak{K} \longrightarrow \mathfrak{S}.$$

Функтор $F: \mathfrak{K} \to \mathfrak{S}$ представим тогда и только тогда, когда найдутся такие объект $A \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$ и элемент $a \in F(A)$, что для каждого элемента $x \in F(X)$, $X \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$, существует единственный морфизм $\alpha: A \to X$, для к-рого $x=aF(\alpha)$. Объект A называется п р е д с т а в л я ю щ и м ф у н к т о р F; он определен однозначно с точностью до изоморфизма.

В категории множеств тождественный функтор представим: представляющим объектом служит одноточечное множество. Функтор взятия нек-рой декартовой степени также представим: представляющим объектом служит множество, мощность к-рого равна этой степени. В произвольной категории произведение П. ф. F_i с представляющими объектами A_i, $i \in I$, представимо тогда и только тогда, когда в этой категории существует копроизведение объектов A_i. Всякий ковариантный П. ф. перестановочен с пределами, т. е. непрерывен.

П. ф.— аналог понятия «свободная универсальная алгебра с одним образующим». Для любого функтора $G: \mathfrak{K} \to \mathfrak{S}$ и П. ф. F множество естественных преобразований $\mathrm{Nat}(F, G)$ изоморфно множеству $G(A)$, где A — представляющий объект. Это показывает, что П. ф. являются свободными объектами категории функторов.

Для аддитивных категорий вместо функторов со значениями в $\mathfrak{S}$ рассматриваются аддитивные функторы со значениями в категории абелевых групп; поэтому под П. ф. понимается аддитивный функтор, изоморфный основному аддитивному функтору.

Понятие П. ф. первоначально возникло в алгебраич. геометрии (см. [2]). Наиболее важными примерами П. ф. здесь являются функторы Пикара $\mathrm{Pic}\, X/S$ и Гильберта $\mathrm{Hilb}\, X/S$, представимые в категории *алгебраических пространств* (см. [1]). Пусть K — поле частных регулярного дискретного нормированного кольца O с совершенным полем вычетов. Если X_0— гладкая геометрически неприводимая собственная кривая рода $g>0$ над K, то ее *минимальная модель* представляет функтор $Y \mapsto \mathrm{Isom}_K(Y \otimes_O K,\ X_0)$ из категории регулярных O-схем. Если A — абелево многообразие над K, то его минимальная *Нерона модель* является гладкой групповой схемой $X \to \mathrm{Spec}\, O$, представляющей функтор $Y \mapsto \mathrm{Hom}_K(Y \otimes_O K,\ A)$ из категории гладких O-схем.

Лит.: [1] Артин М., «Математика», 1970, т. 14, № 4, с. 3—39; [2] Гротендик А., Дьёдонне Ж., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 2, с. 135—48.

С. Г. Танкеев, М. Ш. Цаленко.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АЛГЕБРЫ ЛИ в векторном пространстве V — гомоморфизм ρ алгебры Ли L над полем k в алгебру Ли $\mathfrak{gl}(V)$ всех линейных преобразований пространства V над k. Два представления $\rho_1: L \to \mathfrak{gl}(V_1)$ и $\rho_2: L \to \mathfrak{gl}(V_2)$ наз. эквивалентными (или изоморфными), если существует изоморфизм $\alpha: V_1 \to V_2$, для к-рого

$$\alpha(\rho_1(l)\, v_1) = \rho_2(l)\, \alpha(v_1)$$

при любых $l \in L$, $v_1 \in V_1$. Представление ρ в V наз. конечномерным, если $\dim V < \infty$, и неприводимым, если в V не существует отличных от нуля и всего пространства подпространств, инвариантных относительно всех операторов $\rho(l)$, $l \in L$.

При заданных представлениях $\rho_1: L \to \mathfrak{gl}(V_1)$ и $\rho_2: L \to \mathfrak{gl}(V_2)$ можно построить представления $\rho_1 \oplus \rho_2$ (прямая сумма) и $\rho_1 \otimes \rho_2$ (тензорное произведение) алгебры L в пространствах $V_1 \oplus V_2$ и $V_1 \otimes V_2$, полагая

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(l)(v_1,\ v_2) = (\rho_1(l)\, v_1,\ \rho_2(l)\, v_2),$$

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(l)\, v_1 \otimes v_2 = \rho_1(l)\, v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \rho_2(l)\, v_2$$

для $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $l \in L$. Если ρ — представление алгебры Ли L в пространстве V, то формула

$$<\rho^*(l)\, u,\ v> = -<u,\ \rho(l)\, v>$$

определяет представление ρ^* алгебры L на сопряженном к V пространстве, наз. контрарадиентным по отношению к ρ.

Каждое П. а. Ли L однозначно продолжается до представления универсальной обертывающей алгебры $U(L)$; тем самым устанавливается изоморфизм категории П. а. Ли L и категории модулей над $U(L)$. В частности, представлению ρ алгебры L соответствует идеал $\ker \tilde{\rho}$ в $U(L)$ — ядро его продолжения $\tilde{\rho}$. Если представление ρ неприводимо, то идеал $\ker \tilde{\rho}$ примитивен. Обратно, всякий примитивный идеал в $U(L)$ строится таким способом по нек-рому (вообще говоря, не единственному) неприводимому представлению ρ алгебры L. Изучение пространства примитивных идеалов $\mathrm{Prim}\, U(L)$, снабженного топологией Джекобсона, является существенной частью теории П. а. Ли. Оно проведено пол-

ностью в случае, когда L — конечномерная разрешимая алгебра Ли, а k — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль (см. [2]).

Наиболее полно изучены конечномерные представления конечномерных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. В случае полей $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ эти представления находятся во взаимно однозначном соответствии с аналитическими конечномерными представлениями соответствующих односвязных (комплексных или вещественных) групп Ли. В этой ситуации любое представление разрешимой алгебры Ли содержит одномерное инвариантное подпространство (см. *Ли теорема*). Любое представление полупростой алгебры Ли вполне приводимо, т. е. изоморфно прямой сумме неприводимых представлений. Неприводимые представления полупростой алгебры Ли L полностью классифицированы: классы изоморфных представлений взаимно однозначно соответствуют доминантным весам, т. е. весам с неотрицательными числовыми отметками, из сопряженного пространства H^* к подалгебре Картана H алгебры L (см. *Картана теорема* о старшем векторе). Об описании строения неприводимого представления по соответствующему ему доминантному весу (его старшему весу) см. в статьях *Кратность веса*, *Характеров формула*.

Произвольный (не являющийся, вообще говоря, доминантным весом) элемент $\lambda \in H^*$ также определяет нек-рое неприводимое линейное представление полупростой алгебры Ли L со старшим весом λ, являющееся, однако, бесконечномерным (см. *Представление со старшим вектором*). Соответствующие $U(L)$-модули наз. модулями Верма (см. [2]). Полной классификации неприводимых бесконечномерных представлений полупростых алгебр Ли пока (1983) не получено.

Если k — алгебраически замкнутое поле характеристики $p>0$, то неприводимые представления конечномерной алгебры Ли L всегда конечномерны и их размерность ограничена константой, зависящей от $n=\dim L$. Если алгебра L имеет p-структуру, то эта константа есть $p^{(n-r)/2}$, где r — минимальная возможная размерность аннулятора линейной формы на L в присоединенном представлении [4]. Для описания множества неприводимых представлений в этом случае применяется следующая конструкция. Пусть $Z(L)$ — центр алгебры $U(L)$ и M_L — аффинное алгебраич. многообразие (размерность $\dim M_L=n$), алгебра регулярных функций на к-ром совпадает с $Z(L)$ (многообразие Цассенхауза). Отображение $\rho \mapsto \ker(\tilde{\rho}/Z(L))$ позволяет сопоставить каждому неприводимому представлению точку многообразия Цассенхауза. Получаемое отображение сюръективно, прообраз любой точки из M_L конечен, а для точек открытого всюду плотного подмножества этот прообраз состоит из одного элемента [7]. Полное описание всех неприводимых представлений имеется для нильпотентных алгебр Ли (см. [8]) и нек-рых отдельных примеров [см. [9], [10]). Получены также разнообразные результаты относительно специальных типов представлений.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., М., 1976—78; [2] Диксмье Ж., Универсальные обертывающие алгебры, пер. с франц., М., 1978; [3] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [4] Мильнер А. А., «Функциональный анализ и его приложения», 1980, т. 14, № 2, с. 67—68; [5] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [6] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, пер. с франц., М., 1962; [7] Zassenhaus H., «Proc. Glasgow Math. Assoc.», 1954, v. 2, p. 1—36; [8] Вейсфейлер Б. Ю., Кац В. Г., «Функциональный анализ и его приложения», 1971, т. 5, № 2, с. 28—36; [9] Jantzen J. C., «Math. Z.», 1974, Bd 140, H. 1, S. 127—49; [10] Рудаков А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1970, т. 34, № 4, с. 735—43.

А. Н. Рудаков.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АССОЦИАТИВНОЙ АЛГЕБРЫ размерности n — гомоморфизм алгебры A над полем F в алгебру матриц $M_n(F)$, т. е. сопостав-

ление каждому $a \in A$ квадратной матрицы $T(a)$ порядка n, при к-ром

$$T(\lambda a + \mu b) = \lambda T(a) + \mu T(b) \text{ и } T(ab) = T(a)\,T(b),$$

где $a, b \in A$, $\lambda, \mu \in F$. Обычно требуется также, чтобы единице алгебры A соответствовала единичная матрица; иногда требуется, чтобы и сама алгебра A была конечномерной.

Всякое неразложимое представление полупростой алгебры эквивалентно прямому слагаемому *регулярного представления*. Таким образом, всякая полупростая алгебра является алгеброй конечного (представленческого) типа, т. е. имеет конечное число неизоморфных неразложимых представлений. Неполупростые алгебры могут быть как конечного, так и бесконечного представленческого типа (такова, напр., $A = \{1, r, s | r^2 = s^2 = rs = sr = 0\}$). Алгебры бесконечного типа принято делить еще на алгебры дикого типа, задача классификации к-рых содержит в себе классич. нерешенную задачу о паре матриц (т. е. задачу об одновременном приведении к канонич. форме двух линейных операторов в конечномерном пространстве), и алгебры ручного типа.

Основными вопросами, изучаемыми в теории П. а. а., являются получение необходимых и достаточных условий, при к-рых алгебра принадлежит одному из перечисленных типов, и классификация неразложимых представлений в конечном и ручном случаях. В общем случае эти задачи не решены. Описание алгебр конечного и ручного типа и их представлений получено для алгебр, у к-рых квадрат радикала равен нулю (см. [2], [4], [8]—[10]). Решены проблемы Брауэра — Трэлла, т. е. доказано, что над любым полем алгебра бесконечного типа имеет неразложимые представления сколь угодно большой размерности, а над совершенным полем имеется бесконечно много размерностей, в каждой из к-рых имеется бесконечно много неразложимых представлений (см. [5], [7]). Любая алгебра конечного типа над алгебраически замкнутым полем имеет мультипликативный базис, т. е. базис, у к-рого произведение любых двух его элементов либо равно нулю, либо принадлежит этому базису [6]. Полностью решен вопрос о разделении групповых алгебр на ручные и дикие [1].

С П. а. а. тесно связаны представления нек-рых других объектов: колчанов, частично упорядоченных множеств, решеток, боксов.

Лит.: [1] Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А., «Записки научных семинаров ЛОМИ», 1977, т. 71, с. 24—41; [2] Кругляк С. А., там же, 1972, т. 28, с. 60—69; [3] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [4] Назарова Л. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1973, т. 37, № 4, с. 752—91; [5] Назарова Л. А., Ройтер А. В., Категорные матричные задачи и проблема Брауэра — Трэлла, К., 1973; [6] Ройтер А. В., Обобщение теоремы Бонгартца, К., 1981; [7] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1968, т. 32, с. 1275—1282; [8] Dlab V., Ringel C., Indecomposable representations of graphs and algebras, Prowidence, 1976; [9] Donovan P., Freislich M. R., The representation theory of finite graphs and associated algebras, [s. l., 1974]; [10] Gabriel P., «Manus. Math.», 1972, v. 6, № 1, p. 71—103.

А. В. Ройтер.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ГРУППЫ — гомоморфизм бесконечной группы в группу взаимно однозначных отображений на себя (вообще говоря, бесконечных) множеств. Чаще всего рассматриваются П. б. г. автоморфизмами алгебраич. структур; в этом случае теория П. б. г. связана с теорией представлений связанных с этими группами групповых алгебр.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Плоткин Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966.

А. И. Штерн.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БИКОМПАКТНОЙ ГРУППЫ — непрерывное представление бикомпактной топологич.

группы в топологическое векторное пространство. См. *Компактная группа*. *А. И. Штерн.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ — гомоморфизм группы в группу всех обратимых преобразований нек-рого множества V. Представление ρ группы G наз. л и н е й н ы м, если V является векторным пространством над нек-рым полем k, а преобразования $\rho(g)$, $g \in G$,— линейными преобразованиями. Часто линейные представления называют для краткости просто п р е д с т а в л е н и я м и (см. *Представлений теория*). В теории представлений абстрактных групп наиболее разработанным разделом является теория конечномерных представлений конечных групп (см. *Конечной группы представление*, *Представление симметрической группы*).

Если G — топологич. группа, то рассматриваются непрерывные линейные представления группы G в топологическом векторном пространстве V (см. *Непрерывное представление*, *Представление топологической группы*). Если G — группа Ли, а V — конечномерное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то непрерывное линейное представление автоматически является вещественно аналитическим. Аналитические и дифференцируемые представления группы Ли можно определить и в бесконечномерном случае (см. *Аналитическое представление*, *Бесконечномерное представление*). Всякому дифференцируемому представлению ρ группы Ли G соответствует нек-рое линейное представление ее алгебры Ли — дифференциал представления ρ. Если G — связная группа Ли, то ее конечномерные представления полностью определяются своими дифференциалами. Наиболее разработанные разделы теории представлений топологич. групп — это теория конечномерных линейных представлений полупростых групп Ли, к-рая часто формулируется на языке алгебр Ли (см. *Конечномерное представление*, *Представления классических групп*, *Картана теорема* о старшем векторе), теория *представлений компактных групп*, теория *унитарных представлений*.

Для алгебраич. групп имеется теория *рациональных представлений*, во многом аналогичная теории конечномерных представлений групп Ли.

Лит.: [1] Ж е л о б е н к о Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [2] К и р и л л о в А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [3] Н а й м а р к М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [4] Ж е л о б е н к о Д. П., Ш т е р н А. И., Представления групп Ли, М., 1981. *А. Л. Онищик.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОМПАКТНОЙ ГРУППЫ — гомоморфизм компактной группы в группу непрерывных линейных автоморфизмов (комплексного) банахова пространства, непрерывный в сильной операторной топологии.

Пусть G — компактная группа, V — банахово пространство и $\varphi : G \to GL(V)$ — представление. Если $V = H$ — гильбертово пространство, а $\varphi(g)$ — унитарный оператор для любого $g \in G$, то φ наз. *унитарным представлением*. В H всегда существует эквивалентная норма, относительно к-рой данное представление φ унитарно.

Всякое неприводимое унитарное представление группы G конечномерно. Пусть $\{\rho^\alpha, \alpha \in I\}$ — семейство всевозможных попарно неэквивалентных унитарных неприводимых представлений группы G. Всякое унитарное представление φ группы G является ортогональной прямой суммой таких однозначно определенных представлений φ^α, $\alpha \in I$, что каждое φ^α является ортогональной прямой суммой нек-рого семейства представлений, эквивалентных ρ^α.

Если G конечна, то семейство $\{\rho^\alpha\}$ тоже конечно и содержит столько элементов, сколько имеется в G различных классов сопряженных элементов (при этом $\sum_{\alpha \in I} (\dim \rho^\alpha)^2 = |G|$). Задача исследования этих представлений (вычисления их характеров, нахождения

явной реализации и т. п.) составляет предмет обширной теории (см. *Конечной группы представление*).

Если G — связная односвязная компактная группа Ли, а $G_{\mathbb{C}}$ — ее комплексификация (см. *Комплексификация группы Ли*), то описание семейства $\{\rho^\alpha, \alpha \in I\}$ для G сводится (посредством сужения представлений на G) к описанию семейства всех неприводимых попарно неэквивалентных конечномерных *рациональных представлений* редуктивной алгебраич. группы $G_{\mathbb{C}}$. Последнее же семейство, в свою очередь, допускает полное описание с помощью рассмотрения старших весов (см. *Представление со старшим вектором*).

В современной теории чисел и алгебраич. геометрии рассматриваются l-адические представления компактных вполне несвязных групп (см. [5], [6]).

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [3] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [4] Ленг С., $SL_2(R)$, пер. с англ., М., 1977; [5] Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И., Теория представлений и автоморфные функции, М., 1966; [6] Серр Ж.-П., Абелевы l-адические представления и эллиптические кривые, пер. с англ., М., 1973; [7] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948. *В. Л. Попов.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛУГРУППЫ S **в классе полугрупп** Ξ — гомоморфизм полугруппы S в нек-рую полугруппу из класса Ξ (в случае изоморфизма говорят о точном представлении). Обычно имеются в виду классы каких-либо конкретных полугрупп. Наиболее изучены представления в классе полугрупп преобразований (короче — представления преобразованиями), в классах полугрупп частичных преобразований и бинарных отношений, в классе полугрупп матриц (т. н. матричные, или линейные, П. п.). В теории автоматов с каждым автоматом связано представление свободной полугруппы преобразованиями множества его внутренних состояний. Специальный характер носят П. п. преобразованиями, связанными тем или иным образом со свойствами элементов преобразуемого множества, наделенного какой-либо структурой (эндоморфизмами, непрерывными преобразованиями и т. п.). Всякая полугруппа с единицей изоморфно представима как полугруппа всех эндоморфизмов ориентированного или неориентированного графа, как полугруппа всех эндоморфизмов нек-рой алгебры с унарными операциями и т. п. Известно (1983) несколько конструкций, позволяющих получить все П. п. частичными преобразованиями. Они строятся из нек-рых простейших П. п. при помощи их объединения, кратного повторения, ограничения на подмножестве и операции погружения полугрупп.

Присоединив к полугруппе S единицу: $S^1 = S \cup \{1\}$ и продолжив регулярное П. п. S левыми сдвигами на декартову степень S^X полугруппы S^1, получают представление φ_I — I-кратное повторение регулярного П. п. S. Всякое представление ψ полугруппы S преобразованиями множества Ω может быть получено (см. [2]) из φ_I с помощью нек-рого отображения $\theta : S^I \to \Omega$ так, что

$$\psi a\,(\theta\alpha) = \theta\,(\varphi_I a\,(\alpha)),\ a \in S,\ \alpha \in S^I.$$

Особую роль играют транзитивные П. п., т. е. такие ее представления φ преобразованиями множества Ω, что для любых α, $\beta \in \Omega$ найдется a, для которого $(\varphi a)\alpha = \beta$.

П. п. взаимно однозначными частичными преобразованиями связаны с понятием и свойствами *инверсных полугрупп*.

При исследовании матричных П. п. привлекаются к рассмотрению *полугрупповые алгебры*. Изучается вопрос о приводимости матричных П. п. Найдены неприводимые представления для ряда полугрупп (в том числе и для конечных). Матричные представления вполне

простых и вполне 0-простых полугрупп могут быть построены как продолжение представлений их подгрупп. Матричные представления произвольных полугрупп могут быть описаны при помощи представлений их факторов, являющихся простыми и 0-простыми полугруппами.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [2] Вагнер В. В., «Матем. сб.», 1956, т. 38, № 2, с. 203—40; [3] Ляпин Е. С., там же, 1960, т. 52, № 1, с. 589—96; [4] Шайн Б. М., там же, 1963, т. 60, № 3, с. 293—303; [5] McAlister D. B., «Semigroup Forum», 1971, v. 2, № 3, p. 189—263; № 4, p. 288—320; [6] Jónsson B., Topics in universal algebra, B.—N. Y., 1972. *Л. М. Глускин, Е. С. Ляпин.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ — линейное представление группы S_m над каким-либо полем K. Если char $K=0$, то все конечномерные П. с. г. вполне приводимы и определены над $\mathbb{Q}$ (иначе говоря, все неприводимые конечномерные представления над $\mathbb{Q}$ абсолютно неприводимы).

Неприводимые конечномерные представления группы S_m над $\mathbb{Q}$ классифицируются следующим образом. Пусть d — какая-либо *Юнга диаграмма*, отвечающая разбиению $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ числа m, R_d (соответственно C_d) — подгруппа группы S_m, состоящая из всех подстановок, переводящих каждое из чисел $1, 2, \ldots, m$ в число, находящееся в той же строке (соответственно столбце) диаграммы d. Тогда

$$R_d \simeq S_{\lambda_1} \times \ldots \times S_{\lambda_r}$$

и

$$C_d \simeq S_{\lambda_1'} \times \ldots \times S_{\lambda_s'},$$

где $\lambda'=(\lambda_1', \ldots, \lambda_s')$ — разбиение числа m, сопряженное к разбиению λ. Существует единственное неприводимое представление $T_\lambda : S_m \to GL(U_\lambda)$ группы S_m (зависящее только от λ) со следующими свойствами: 1) в пространстве U_λ имеется такой ненулевой вектор u_d, что $T_\lambda(g)u_d=u_d$ для любого $g\in R_d$; 2) в пространстве U_λ имеется такой ненулевой вектор u_d', что $T_\lambda(g)u_d'=\varepsilon(g)u_d'$ для любого $g\in C_d$, где $\varepsilon(g)=\pm 1$ — четность подстановки g. Представления, отвечающие различным разбиениям, не эквивалентны, и ими исчерпываются все неприводимые представления группы S_m над $\mathbb{Q}$.

Векторы u_d и u_d' определены однозначно с точностью до умножения на число. Для всех диаграмм, отвечающих разбиению λ, эти векторы нормируются таким образом, что $gu_d=u_{gd}$ и $gu_d'=u_{gd}'$ для любого $g\in S_m$, где gd обозначает диаграмму, получаемую из d применением ко всем числам подстановки g. Векторы u_d (соответственно u_d'), соответствующие стандартным диаграммам d, образуют базис пространства U_λ; в этом базисе операторы представления T_λ записываются целочисленными матрицами. Размерность представления T_λ равна

$$\dim T_\lambda = \frac{m!\prod_{i<j}(l_i-l_j)}{\prod_i l_i!} = \frac{m!}{\prod_{(i,j)}\lambda_{ij}},$$

где $l_i=\lambda_i+r-i$ $(i=1, \ldots, r)$, а произведение в знаменателе второго выражения берется по всем клеткам c_{ij} таблицы Юнга t_λ, причем λ_{ij} обозначает длину соответствующего крюка.

Разбиению (m) отвечает тривиальное одномерное представление группы S_m, а разбиению $(1, \ldots, 1)$ — нетривиальное одномерное представление ε (четность). Разбиению λ', сопряженному к λ, отвечает представление εT_λ. Пространство $U_{\lambda'}$ канонич. образом (с точностью до гомотетии) отождествляется с пространством U_λ так, что $T_{\lambda'}(g)=\varepsilon(g)T_\lambda(g)$ для любого $g\in S_m$; при этом можно считать, что $u_d'=u_{d'}$, где d' — диаграмма, получаемая из d транспонированием.

Построение полной системы неприводимых П. с. г. производится с помощью *Юнга симметризаторов*, позволяющих получить разложение регулярного представления. Если d — диаграмма Юнга, отвечающая разбиению λ, то представление T_λ эквивалентно П. с. г. S_m в левом идеале групповой алгебры $\mathbb{Q}S_m$, порожденном симметризатором Юнга e_d. Апостериорное описание элемента e_d состоит в следующем: $T_\mu(e_d)=0$ при $\mu\neq\lambda$, а $T_\lambda(e_d)$ — оператор ранга 1, действующий по формуле $T_\lambda(e_d)u=(u_d, u)u'_d$ для любого $u\in U_\lambda$, где $(\ ,\ )$ — подходящим образом нормированное инвариантное скалярное умножение в пространстве U_λ. При этом

$$(u_d, u'_d)=\frac{m!}{\dim U_\lambda}.$$

Производящая функция для характеров представлений T_λ дается *Фробениуса формулой*. Однако для вычисления отдельных значений характеров удобнее пользоваться рекуррентными соотношениями. Наиболее эффективным из них является правило Мурнагана — Накаямы: пусть $a_{\lambda\mu}=a_{\lambda\mu}^{(m)}$ — значение характера представления T_λ на классе $[\mu]$ сопряженных элементов группы S_m, определенном разбиением μ числа m, и пусть разбиение μ содержит число p. Через $\bar{\mu}$ обозначается разбиение числа $m-p$, получаемое из μ выбрасыванием числа p. Тогда

$$a_{\lambda\mu}^{(m)}=\Sigma_{\bar{\lambda}}(-1)^{i(\bar{\lambda})}a_{\bar{\lambda}\bar{\mu}}^{(m-p)},$$

где сумма берется по всем разбиениям $\bar{\lambda}$ числа $m-p$, получаемым удалением косого крюка длины p из таблицы Юнга t_λ, а $i(\bar{\lambda})$ обозначает высоту удаленного косого крюка.

Имеется также метод (см. [5]), позволяющий найти целиком таблицу характеров группы S_m, т. е. матрицу $A=\|a_{\lambda\mu}\|$. Пусть M_λ есть П. с. г. S_m, индуцированное тривиальным одномерным представлением подгруппы $R_\lambda=R_d$, где d — диаграмма Юнга, отвечающая разбиению λ. И пусть $M_\lambda=\Sigma_\mu m_{\lambda\mu}T_\mu$, а $M=\|m_{\lambda\mu}\|$. Если считать, что строки и столбцы матрицы M расположены в порядке лексикографич. убывания индексов (разбиений), то это будет нижняя треугольная матрица с единицами на диагонали. Значение характера представления M_λ на классе $[\mu]$ равно

$$b_{\lambda\mu}=\frac{c_\mu\,|\,R_\lambda\cap[\mu]\,|}{|\,R_\lambda\,|},$$

где c_μ — порядок централизатора подстановки из класса $[\mu]$. Матрица $B=\|b_{\lambda\mu}\|$ является верхней треугольной, и имеет место соотношение $MM^T=BC^{-1}B^T$, где $C=\operatorname{diag}(c_\mu)$, из к-рого однозначно определяется матрица M. После этого матрица A находится по формуле

$$A=M^{-1}B.$$

Ограничение представления T_λ группы S_m на подгруппу S_{m-1} находится по правилу ветвления:

$$T_\lambda\,|\,S_{m-1}=\Sigma_i T_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_i-1,\ldots,\lambda_r)},$$

где суммирование распространяется на те i, для к-рых $\lambda_i>\lambda_{i+1}$ (включая r). Ограничение представления T_λ на подгруппу A_m при $\lambda\neq\lambda'$ абсолютно неприводимо, а при $\lambda=\lambda'$ распадается над квадратичным расширением поля $\mathbb{Q}$ в сумму двух неэквивалентных абсолютно неприводимых представлений одинаковой размерности. Получаемые таким образом представления группы A_m исчерпывают все ее неприводимые представления над $\mathbb{C}$.

О П. с. г. в тензорах см. в ст. *Представления классических групп*.

Разработана также теория модулярных П. с. г. (см., напр., [5]).

Лит.: [1] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [2] Мурнаган Ф. Д., Теория представлений групп, пер. с англ., М., 1950; [3] Хамермеш М., Теория групп и ее применение к физическим проблемам, пер. с англ., М., 1966; [4] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [5] Джеймс Г., Теория представлений симметрических групп, пер. с англ., М., 1982.

Э. Б. Винберг.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СО СТАРШИМ ВЕКТОРОМ — линейное представление ρ конечномерной полупростой расщепляемой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем k характеристики нуль с расщепляющей *Картана подалгеброй* $\mathfrak{t}$, удовлетворяющее следующим условиям.

1) В пространстве V представления ρ существует циклический вектор v (т. е. V — наименьшее $\mathfrak{g}$-инвариантное подпространство, содержащее v).

2) $\rho(h)(v)=\lambda(h)v$ для всех $h\in\mathfrak{t}$, где λ — некоторая фиксированная линейная форма на $\mathfrak{t}$ со значениями в k.

3) Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — система простых корней, определенная нек-рым лексикограф. упорядочением множества Δ всех корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{t}$ (см. *Корневая система*), а e_{α_i}, $\mathfrak{t}_{\alpha_i}$, h_{α_i} — соответствующие корню α_i векторы из базиса Шевалле алгебры $\mathfrak{g}$, $i=1, \ldots, r$, то $\rho(e_{\alpha_i})(v)=0$ для всех $i=1, \ldots, r$.

Таким образом, λ является весом относительно сужения ρ на $\mathfrak{t}$ (см. *Вес представления*); он наз. старшим весом. Пространство V наз. циклическим $\mathfrak{g}$-модулем со старшим весом λ и образующей v, а v наз. старшим вектором.

Для всякой линейной формы λ на $\mathfrak{t}$ существует единственное с точностью до эквивалентности неприводимое представление ρ_λ алгебры $\mathfrak{g}$ со старшим весом λ. $\mathfrak{g}$-модуль $V(\lambda)$, определяемый ρ_λ, является прямой суммой весовых подпространств относительно сужения ρ_λ на $\mathfrak{t}$. Их веса имеют вид

$$\lambda-\sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i,$$

где n_i — целые неотрицательные числа. Весовое подпространство $V_\mu(\lambda)$ веса μ конечномерно, натягивается над k на векторы вида

$$\left(\rho_\lambda\left(f_{\alpha_{i_1}}\right)\rho_\lambda\left(f_{\alpha_{i_2}}\right)\cdots\rho_\lambda\left(f_{\alpha_{i_s}}\right)\right)(v),$$

и для любого $h\in\mathfrak{t}$ ограничение $\rho_\lambda(h)$ на $V_\mu(\lambda)$ является скалярным оператором умножения на $\mu(h)$. Пространство $V_\lambda(\lambda)$ одномерно; вес λ является единственным старшим весом представления ρ_λ и может быть охарактеризован как единственный вес $\mathfrak{t}$-модуля $V(\lambda)$ такой, что любой другой вес имеет вид

$$\lambda-\sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i,$$

где n_i — целые неотрицательные числа.

Представление ρ_λ конечномерно тогда и только тогда, когда λ — доминантная линейная форма на $\mathfrak{t}$, то есть $\lambda(h_{\alpha_i})$ — целое неотрицательное число для всех $i=1, \ldots, r$. Всякое неприводимое конечномерное линейное представление алгебры $\mathfrak{g}$ имеет вид ρ_λ для нек-рой доминантной линейной формы λ на $\mathfrak{t}$ (так что все такие представления классифицируются с точностью до эквивалентности доминантными линейными формами на $\mathfrak{t}$). Множество всех весов конечномерного представления ρ_λ относительно $\mathfrak{t}$ инвариантно относительно *Вейля группы* алгебры $\mathfrak{g}$ (рассматриваемой как группа линейных преобразований пространства $\mathfrak{t}$), и если веса μ и ν лежат в одной орбите группы Вейля, то размерности пространств $V_\mu(\lambda)$ и $V_\nu(\lambda)$ совпадают. Для всякого веса μ и всякого корня

$\alpha \in \Delta$ число $\mu(h_\alpha)$ — целое; если при этом $\mu + \alpha$ — тоже вес, то

$$\rho(e_\alpha)(V_\mu(\lambda)) \neq 0$$

(здесь h_α — элемент из $\mathfrak{t}$, соответствующий α, а e_α — корневой вектор корня α).

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1962; [3] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [4] Cartan E., «Bull. sci. math.», 1925, t. 49, p. 130—52; [5] Harish-Chandra, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1951, v. 70, p. 28—96.

В. Л. Попов.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЫ — непрерывное отображение группы G в топологич. группу гомеоморфизмов нек-рого топологич. пространства. Чаще всего под П. т. г. G понимается *линейное представление*, более того — такое линейное представление π топологич. группы G в топологич. векторном пространстве (т. в. п.) E, что вектор-функция $g \to \pi(g)x$, $g \in G$, определяет при любом $x \in E$ непрерывное отображение группы G в пространство E. В частности, всякое *непрерывное представление* группы G является П. т. г. G.

Теория П. т. г. тесно связана с теорией представлений различных топологических *групповых алгебр*. Среди них важнейшей является банахова симметричная алгебра мер $M(G)$ группы G (алгебра всех регулярных борелевских мер на G с конечной полной вариацией, в к-рой умножение определяется как свертка). Часто используется также топологическая алгебра $C'(G)$ всех регулярных борелевских мер на G с конечной полной вариацией и с компактным носителем. Умножение в $C'(G)$ определяется как свертка, а инволюция $\mu \to \mu^*$, $\mu \in C'(G)$, определяется формулой

$$\int_G f(g)\, d\mu^*(g) = \int_G \overline{f(g^{-1})}\, d\mu(g), \quad f \in C(G).$$

Топология алгебры $C'(G)$ согласуется с двойственностью между этой алгеброй и алгеброй $C(G)$ (всех непрерывных функций на G), рассматриваемой в компактно открытой топологии. Важную роль играют также различные подалгебры алгебр $M(G)$ и $C'(G)$. В частности, если E — квазиполное бочечное или полное локально выпуклое пространство (л. в. п.), а π — непрерывное П. т. г. G в E, то формула

$$\pi(\mu) = \int_G \pi(g)\, d\mu(g), \quad \mu \in C'(G),$$

определяет слабо непрерывный линейный оператор $\pi(\mu)$ в E и соответствие $\mu \to \pi(\mu)$ есть представление алгебры $C'(G)$ в пространстве E, однозначно определяющее представление π топологич. группы. При этом П. т. г. — (топологически) *неприводимое представление*, *операторно неприводимое представление*, вполне неприводимое представление, эквивалентно другому П. т. г. (и т. д.) тогда и только тогда, когда соответствующее представление алгебры $C'(G)$ обладает соответствующим свойством.

Пусть π есть П. т. г. G в л. в. п. E; пусть E' — сопряженное к E пространство. Функции на G вида $g \to \varphi(\pi(g)\xi)$, $\xi \in E$, наз. матричными элементами представления π. Если E — гильбертово пространство и $\xi \in E$, $\|\xi\| = 1$, то функции вида $g \to \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle$, $g \in G$, наз. сферическими функциями, связанными с представлением π.

Пусть E, E^* суть л. в. п. в двойственности, π есть П. т. г. G в л. в. п. E. Формула $\pi^*(g) = \pi(g^{-1})^*$ определяет П. т. г. π^* в E^*, наз. сопряженным, или контрградиентным, к π. Пусть π_1, π_2 суть П. т. г. G в т. в. п. E_1, E_2 соответственно, $E = E_1 + E_2$ — прямая сумма и $\pi(g)$, $g \in G$, — непрерывный линейный оператор в E, определенный формулой

$$\pi(g)(x_1 + x_2) = \pi_1(g)x_1 + \pi_2(g)x_2, \quad x_1 \in E_1, \quad x_2 \in E_2.$$

Отображение $g \to \pi(g)$ есть П. т. г. G в т. в. п. E, наз.

прямой суммой П. т. г. π_1 и π_2. В нек-рых случаях (в частности, для унитарных представлений) может быть определено тензорное произведение П. т. г. и прямая сумма бесконечного семейства П. т. г. С помощью ограничения или расширения поля скаляров вводятся операции овеществления и комплексификации для П. т. г.

Представление топологич. группы наз. *вполне приводимым*, если любое замкнутое инвариантное подпространство имеет дополнительное замкнутое инвариантное подпространство. Представление π топологич. группы G в т. в. п. E наз. *разложимым*, если существуют такие замкнутые инвариантные подпространства E_1, E_2 в E, что π эквивалентно прямой сумме подпредставлений π_1, π_2 представления π, отвечающих подпространствам E_1, E_2 соответственно; в противном случае π наз. *неразложимым*. Неразложимое приводимое представление π определяется не только подпредставлением и факторпредставлением, соответствующими данному инвариантному подпространству, но и нек-рым классом одномерных когомологий группы G с коэффициентами в G-модуле ограниченных линейных операторов из пространства факторпредставления в пространство представления.

Важнейшими общими задачами теории П. т. г. являются описание всех неразложимых представлений данной топологич. группы и изучение возможности описания (разложения) произвольных П. т. г. с помощью неразложимых. В общем случае обе задачи далеки (1983) от полного решения, но полученные в этих направлениях результаты делают теорию П. т. г. основой *гармонического анализа абстрактного*, обобщающего теорию рядов и интегралов Фурье, спектральную теорию унитарных операторов, теорию жордановых нормальных форм и систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а также основой нек-рых разделов эргодической теории, квантовой механики, статистической физики и теории поля.

Наиболее важным разделом общей теории П. т. г. является теория *унитарных представлений*, имеющих многочисленные приложения и обладающих рядом свойств, упрощающих их изучение. В частности, ортогональное дополнение к инвариантному подпространству унитарного представления инвариантно, поэтому всякое унитарное П. т. г. вполне приводимо; для унитарных представлений условия полной неприводимости, (топологической) неприводимости и операторной неприводимости равносильны (но, вообще говоря, слабее условия алгебраич. неприводимости).

Другой класс П. т. г., имеющий многочисленные приложения, образуют *конечномерные представления*. Изучение представлений этого класса во многом облегчается относительным упрощением аналитич. сложности задачи по сравнению с общим случаем; в частности, неприводимое конечномерное П. т. г. вполне неприводимо. Однако теория конечномерных П. т. г. построена (1983) достаточно полно лишь для нек-рых классов топологич. групп (в частности, для полупростых групп Ли и для групп $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$). Для несколько более широкого класса групп, содержащего класс групп Ли, существует полное описание неприводимых конечномерных П. т. г.

Теория П. т. г. более разработана для локально компактных групп. Важнейшим свойством класса локально компактных групп является его совпадение с классом полных топологич. групп, на к-рых существует ненулевая правоинвариантная регулярная борелевская мера m (см. *Хаара мера*). Этот факт позволяет включить в число групповых алгебр локально компактной группы G банахову симметричную алгебру $L_1(G) = L_1(G, m)$ (относительно свертки), к-рая играет ре-

шающую роль в теории ограниченных (т. е. имеющих ограниченный образ) П. т. г. G в банаховых пространствах. Формула

$$\pi(f) = \int_G f(g)\,\pi(g)\,dm(g),\quad f \in L_1(G),$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между ограниченными представлениями π локально компактной группы G и (непрерывными) представлениями $\tilde{\pi}$ алгебры $L_1(G)$, обладающими тем свойством, что $\tilde{\pi}(L_1(G))H_\pi$ плотно в пространстве $H_{\tilde{\pi}}$ представлений $\tilde{\pi}$; при этом унитарные П. т. г. соответствуют симметричным представлениям алгебры $L_1(G)$. Другое свойство локально компактных групп состоит в том, что их представления в бочечных л. в. п. суть непрерывные представления.

Наиболее развитая часть теории П. т. г.— теория унитарных представлений локально компактных групп. В связи с существованием меры Хаара на локально компактных группах оказывается возможным изучение *регулярного представления* группы G в пространстве $L_2(G)$, приводящее, в частности, к аналогу *Планшереля формулы* для таких групп, а также к выделению основной, дополнительной и дискретной серий унитарных П. т. г. рассматриваемого класса (см. *Дополнительная серия*, *Дискретная серия*). Важнейшими общими задачами теории унитарных П. т. г. являются задачи построения неприводимых представлений и факторпредставлений, разложения представлений в прямой интеграл, изучения дуальных объектов и связанные с ними вопросы теории сферич. функций, теории характеров и гармонич. анализа, в том числе — изучения различных групповых алгебр.

Исключительно богатым приложениями подклассом класса локально компактных групп является класс групп Ли. Теория *бесконечномерных представлений* групп Ли, включающая теорию представлений классич. групп, является одним из наиболее быстро развивающихся разделов общей теории П. т. г. Мощным методом изучения П. т. г. Ли является *орбит метод*.

Другой важный подкласс класса локально компактных групп образуют компактные группы. Представления компактных групп — один из наиболее завершенных разделов общей теории П. т. г., являющийся инструментом изучения П. т. г., содержащих компактные подгруппы. Актуальным разделом теории представлений компактных групп является группа задач, связанных с вопросами разложения ограничения на подгруппу и тензорного произведения конкретных представлений компактных групп Ли. Разделом теории представлений компактных групп, имеющим многочисленные приложения в алгебре и анализе, является теория конечных групп представлений.

Не только упомянутая выше задача изучения неразложимых П. т. г., но и более простая задача описания зацеплений вполне неприводимых представлений, связанная с соответствующей теорией когомологий, решена (1983) лишь для нек-рых групп, несмотря на ее важность в построении гармонич. анализа на группах. Действительно, в терминах неразложимых П. т. г. (а именно, входящих в аналитич. продолжение соответствующей основной серии) для нек-рых групп Ли (соответственно групп Шевалле) получен аналог теоремы Пэли — Винера, дающий описание образа групповой алгебры финитных бесконечно дифференцируемых (соответственно финитных локально постоянных) функций на группе при преобразовании Фурье (т. е. при отображении $f \to \int_G f(g)\pi(g)d\mu(g)$, $f \in K(G)$, сопоставляющем функции на группе операторнозначную функцию на множестве представителей пространства классов эквивалентности представлений этой группы). Менее об-

щая задача описания всех вполне неприводимых представлений данной группы решена (1983) лишь для локально компактных групп, факторгруппа к-рых по центру компактна (вполне неприводимые представления таких групп конечномерны, и набора этих представлений достаточно для получения аналога теоремы Пэли — Винера) и для нек-рых линейных групп Ли (в том числе для комплексных полупростых). Как в теории унитарных, так и в теории неунитарных П. т. г. накоплен богатый фактич. материал, относящийся к конкретным представлениям конкретных групп и к приложениям этих результатов к отдельным задачам гармонич. анализа на таких группах.

Ряд вопросов теории П. т. г. связан с изучением П. т. г. в *пространствах с индефинитной метрикой*. Для нек-рых полупростых групп Ли получено полное описание вполне неприводимых представлений в таких пространствах (к их числу относятся, в частности, неприводимые конечномерные представления таких групп) и найдено разложение тензорных произведений нек-рых неприводимых представлений этого типа на неприводимые унитарные представления. Теория операторно неприводимых представлений полупростых групп Ли в пространствах с индефинитной метрикой и определение структуры их инвариантных подпространств тесно связаны с аналитич. продолжением основной серии представлений этих групп.

Успехи теории П. т. г. связаны с развитием теории *проективных представлений*, с распространением ряда методов теории представлений групп Ли (в частности, метода орбит) на локально компактные группы общего вида, а также с развитием теории П. т. г., не являющихся локально компактными (групп гладких функций на многообразии со значениями в группе Ли, групп диффеоморфизмов гладких многообразий, бесконечномерных аналогов классич. групп и нек-рых других). Изучение представлений таких групп оказалось связанным с теорией вероятностей (в частности, теорией марковских процессов) и задачами статистич. физики. С другой стороны, установлены глубокие связи теории представлений групп матриц 2-го порядка над локально компактными полями (и нек-рых связанных с ними групп) с задачами теории чисел.

Лит.: [1] Барут А., Рончка Р., Теория представлений групп и ее приложения, пер. с англ., т. 1—2, М., 1980; [2] Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965; [3] Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И., Теория представлений и автоморфные функции, М., 1966; [4] Жаке Э., Ленгленде Р., Автоморфные формы на GL_2, пер. с англ., М., 1973; [5] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [6] его же, Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли, М., 1974; [7] Желобенко Д. П., Штерн А. И., Представления групп Ли, М., 1983; [8] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [9] Климык А. У., Матричные элементы и коэффициенты Клебша — Гордана представлений групп, К., 1979; [10] Ленг С., SL_2 (R), пер. с англ., М., 1977; [11] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [12] его же, Теория представлений групп, М., 1976; [13] Gaal S. A., Linear analysis and representation theory, B.—[a.o.], 1973; [14] Lie groups and their representations, Bdpst, 1975; [15] Mackey G. W., Unitary group representations in physics, probability and number theory, Reading, 1978; [16] Non-commutative harmonic analysis, B.—[a.o.], 1979.

А. И. Штерн.

ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОЛЬЦО — коммутативное кольцо, определяемое следующим образом. Аддитивная группа П. к. порождена классами эквивалентности представлений группы G в векторных пространствах, а определяющие соотношения имеют вид $\pi=\pi_1+\pi_2$, где π — класс эквивалентности нек-рого представления, π_1 — класс эквивалентности его подпредставления, а π_2 — класс эквивалентности соответствующего факторпредставления π; операция умножения в П. к. сопоставляет классам эквивалентности представлений π_1 и π_2 класс эквивалентности их тензорного произведения. П. к. иногда наз. кольцом Гротендика

группы G. Для локально компактных групп П. к. группы G принято называть коммутативное кольцо, определенное операциями прямой суммы и тензорного произведения в множестве классов эквивалентности непрерывных унитарных представлений группы G. Изучение структуры П. к. плодотворно для компактных групп, где оно приводит к теории двойственности в терминах блок-алгебр, а также в более общем случае для групп типа I, где изучение структуры П. к. может быть сведено к изучению структуры тензорных произведений неприводимых унитарных представлений.

А. И. Штерн.

ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ТЕОРИЯ — теория, изучающая гомоморфизмы полугрупп (в частности, групп), алгебр или других алгебраич. систем в соответствующие системы эндоморфизмов нек-рой подходящей структуры. Особенно часто рассматриваются *линейные представления*, т. е. гомоморфизмы полугрупп, групп, ассоциативных алгебр или алгебр Ли в полугруппу, группу, алгебру линейных преобразований нек-рого векторного пространства V. Такое представление наз. также *линейным представлением в пространстве* V, а V наз. *пространством представления*. Часто под П. т. понимают именно теорию линейных представлений. Если пространство V конечномерно, то его размерность наз. *размерностью представления*, а само представление — *конечномерным*. Таким образом, различаются конечномерные и бесконечномерные представления. Представление наз. *точным*, если оно инъективно.

Изучение линейных представлений полугрупп, групп и алгебр Ли сводится к изучению линейных *представлений ассоциативных алгебр*. А именно, линейные *представления полугрупп* (линейные *представления групп*) в пространстве V над полем k находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с представлениями соответствующей полугрупповой (групповой) алгебры над k в пространстве V. Представления алгебры Ли L над k взаимно однозначно соответствуют линейным представлениям ее универсальной обертывающей алгебры.

Задание линейного представления φ ассоциативной алгебры A в пространстве V равносильно заданию на V структуры A-модуля, называемого *модулем представления* φ. При рассмотрении представлений группы G или алгебры Ли L говорят также о G-модулях или L-модулях (см. *Модуль*). Гомоморфизмы модулей представлений наз. *сплетающими операторами*. Изоморфным модулям соответствуют *эквивалентные представления*. Подмодуль модуля V представления φ — это подпространство $W \subset V$, инвариантное относительно φ; индуцируемое в W представление наз. *подпредставлением*, а представление, индуцируемое в фактормодуле V/W, — *факторпредставлением* представления φ. Прямые суммы модулей соответствуют прямым суммам представлений, неразложимые модули — неразложимым представлениям, простые модули — неприводимым представлениям, а полупростые модули — вполне приводимым представлениям. Определяются также тензорное произведение линейных представлений, внешняя и симметрич. степени представления (см. *Тензорное произведение* представлений).

Наряду с абстрактной (или алгебраической) П. т. существует теория представлений топологич. объектов, напр. топологич. групп или банаховых алгебр (см. *Непрерывное представление*, *Представление топологической группы*).

О. А. Иванова.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП в *тензорах* — линейные представления групп $GL(V)$, $SL(V)$, $O(V, f)$, $SO(V, f)$, $Sp(V, f)$ (где V

есть n-мерное векторное пространство над полем k, f — невырожденная симметрическая или знакопеременная билинейная форма на V) в инвариантных подпространствах тензорных степеней $T^m(V)$ пространства V. Если k — поле нулевой характеристики, то все неприводимые полиномиальные линейные представления указанных групп реализуются в тензорах.

В случае $k=\mathbb{C}$ перечисленные выше группы являются комплексными группами Ли. Для всех них, кроме $GL(V)$, все (дифференцируемые) линейные представления полиномиальны; всякое линейное представление группы $GL(V)$ имеет вид $g \mapsto (\det g)^k R(g)$, где $k \in \mathbb{Z}$, а R — полиномиальное линейное представление. Классические компактные группы Ли U_n, SU_n, O_n, SO_n, Sp_n имеют те же комплексные линейные представления и те же инвариантные подпространства в пространствах тензоров, что и их комплексные оболочки $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $O_n(\mathbb{C})$, $SO_n(\mathbb{C})$, $Sp_{2n}(\mathbb{C})$. Поэтому результаты теории линейных представлений, полученные для классических комплексных групп Ли, переносятся на соответствующие компактные группы и наоборот («унитарный трюк» Вейля). В частности, с помощью интегрирования по компактной группе доказывается полная приводимость линейных представлений классических комплексных групп Ли.

Естественное линейное представление группы $GL(V)$ в пространстве $T^m(V)$ определяется по формуле

$$g(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = gv_1 \otimes \ldots \otimes gv_m, \quad g \in GL(V), \ v_i \in V.$$

В том же пространстве определено линейное представление симметрич. группы S_m:

$$\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)}, \ \sigma \in S_m, \ v_i \in V.$$

Операторы этих двух представлений перестановочны; тем самым в $T^m(V)$ определено линейное представление группы $GL(V) \times S_m$. Если $\operatorname{char} k = 0$, то пространство $T^m(V)$ может быть разложено в прямую сумму минимальных $(GL(V) \times S_m)$-инвариантных подпространств:

$$T^m(V) = \Sigma_\lambda V_\lambda \otimes U_\lambda.$$

Здесь суммирование происходит по всем разбиениям λ числа m, содержащим не более n слагаемых, U_λ — пространство абсолютно неприводимого представления T_λ группы S_m, отвечающего разбиению λ (см. *Представление симметрической группы*), а V_λ — пространство нек-рого абсолютно неприводимого представления R_λ группы $GL(V)$. Разбиения λ удобно представлять в виде наборов $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ целых неотрицательных чисел, удовлетворяющих условиям $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, $\Sigma_i \lambda_i = m$.

Подпространство $V_\lambda \otimes U_\lambda \subset T^m(V)$ разлагается в сумму минимальных $GL(V)$-инвариантных подпространств, в каждом из к-рых реализуется представление R_λ. Эти подпространства могут быть явно получены применением к $T^m(V)$ *Юнга симметризаторов*, связанных с разбиением λ. Напр., для разбиения $\lambda=(m, 0, \ldots, 0)$ (соответственно $\lambda=(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ при $m \leqslant n$) $\dim U_\lambda = 1$ и $V_\lambda \otimes U_\lambda$ есть минимальное $GL(V)$-инвариантное подпространство, состоящее из всех симметрич. (соответственно кососимметрич.) тензоров.

Представление R_λ характеризуется следующими свойствами. Пусть $B \subset GL(V)$ — подгруппа, состоящая из линейных операторов, к-рые в нек-ром базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V записываются верхними треугольными матрицами. Тогда операторы $R_\lambda(b)$, $b \in B$, имеют единственный (с точностью до числового множителя) общий собственный вектор v_λ, называемый старшим вектором представления R_λ. Соответствующее собственное значение (старший вес представления R_λ) равно $b_{11}^{\lambda_1} \ldots b_{nn}^{\lambda_n}$, где b_{ii} есть i-й диагональный элемент матрицы оператора b в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$.

Представления R_λ, отвечающие различным разбиениям λ, не эквивалентны. Характер представления R_λ находится по формуле Вейля:

$$\operatorname{tr} R_\lambda(g) = \frac{W_\lambda(z_1, \ldots, z_n)}{W_0(z_1, \ldots, z_n)},$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — корни характеристич. многочлена оператора g, W_λ — обобщенный определитель Вандермонда, отвечающий разбиению λ (см. *Фробениуса формула*), W_0 — обычный определитель Вандермонда. Размерность представления R_λ равна

$$\dim R_\lambda = \prod_{i<j} \frac{l_i - l_j}{j-i},$$

где $l_i = \lambda_i + n - i$.

Ограничение представления R_λ на унимодулярную группу $SL(V)$ неприводимо. Ограничения на $SL(V)$ представлений R_λ и R_μ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mu_i = \lambda_i + s$ (s не зависит от i). Ограничение представления R_λ группы $GL_n(k)$ на подгруппу $GL_{n-1}(k)$ находится по правилу:

$$R_\lambda|_{GL_{n-1}(k)} = \sum\nolimits_\mu R_\mu,$$

где μ пробегает все наборы $(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$, удовлетворяющие условию

$$\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_{n-1} \geqslant \lambda_n.$$

Для всякой диаграммы Юнга d, отвечающей разбиению λ, тензор $v_\lambda \otimes u_d \in T^m(V)$ (обозначения см. в ст. *Представление симметрической группы*) является результатом альтернирования по столбцам диаграммы d тензора $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}$, где i_k — номер строки диаграммы d, в к-рой находится число k. Тензоры, построенные таким образом по всем стандартным диаграммам d, образуют базис минимального S_m-инвариантного подпространства $v_\lambda \otimes U_\lambda$, в к-ром реализуется представление T_λ группы S_m.

Линейное представление ортогональной группы $O(V, f)$ в пространстве $T^m(V)$ устроено следующим образом. Имеется разложение в прямую сумму двух $(O(V, f) \times S_m)$-инвариантных подпространств:

$$T^m(V) = T_0^m(V) \oplus T_1^m(V),$$

где $T_0^m(V)$ состоит из бесследных тензоров, т. е. тензоров, свертка к-рых с формой f по любым двум индексам равна нулю, а

$$T_1^m(V) = \sum\nolimits_{\sigma \in S_m} \sigma(T^{m-2}(V) \otimes f^{-1}).$$

Пространство $T_0^m(V)$ в свою очередь разлагается в прямую сумму минимальных $(O(V, f) \times S_m)$-инвариантных подпространств:

$$T_0^m(V) = \sum\nolimits_\lambda V_\lambda^0 \otimes U_\lambda,$$

где $V_\lambda^0 \subset V_\lambda$. При этом $V_\lambda^0 \neq 0$ тогда и только тогда, когда сумма $\lambda_1' + \lambda_2'$ высот первых двух столбцов таблицы Юнга, отвечающей разбиению λ, не превосходит n, и в этом случае V_λ^0 есть пространство абсолютно неприводимого представления R_λ^0 группы $O(V, f)$. Представления R_λ^0, отвечающие различным разбиениям λ, не эквивалентны. Если разбиение λ удовлетворяет условию $\lambda_1' + \lambda_2' \leqslant n$, то после замены первого столбца его таблицы Юнга столбцом высоты $n - \lambda_1'$ получается таблица Юнга нек-рого разбиения $\bar{\lambda}$, также удовлетворяющего этому условию. Соответствующие представления группы $O(V, f)$ связаны соотношением $R_{\bar{\lambda}}^0(g) = (\det g)\, R_\lambda^0(g)$ (в частности, они имеют одинаковую размерность).

Ограничение представления R^0_λ на подгруппу $SO(V, f)$ абсолютно неприводимо, за исключением случая, когда n четно и $\lambda=\overline{\lambda}$ (т. е. число слагаемых разбиения λ равно $n/2$). В этом последнем случае оно распадается над полем k или его квадратичным расширением в сумму двух неэквивалентных абсолютно неприводимых представлений одинаковой размерности.

При вычислении размерности представления R^0_λ можно считать, что $\lambda'_1 \leqslant n/2$ (в противном случае следует заменить λ на $\overline{\lambda}$). Пусть $l_i=\lambda_i+n/2-i$. Тогда при нечетном n

$$\dim R^0_\lambda = \prod_{i=1}^{[n/2]} \frac{l_i}{n/2-i} \prod_{i,\, j=1,\, i<j}^{[n/2]} \frac{(l_i-l_j)\,(l_i+l_j)}{(j-i)\,(n-i-j)},$$

а при четном n и $\lambda \neq \overline{\lambda}$

$$\dim R^0_\lambda = \prod_{i,\, j=1,\, i<j}^{n/2} \frac{(l_i-l_j)\,(l_i+l_j)}{(j-i)\,(n-i-j)}.$$

При $\lambda=\overline{\lambda}$ последняя формула дает половину размерности представления R^0_λ, т. е. размерность каждого из соответствующих ему абсолютно неприводимых представлений группы $SO(V, f)$.

Разложение пространства $T^m(V)$ относительно симплектич. группы $Sp(V, f)$ аналогично разложению относительно ортогональной группы, с той разницей, что $V^0_\lambda \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda'_1 \leqslant n/2$. Размерность представления R^0_λ находится в этом случае по формуле

$$\dim R^0_\lambda = \prod_{i=1}^{n/2} \frac{l_i}{n/2-i+1} \prod_{i,\, j=1,\, i<j}^{n/2} \frac{(l_i-l_j)\,(l_i+l_j)}{(j-i)\,(n-j-i+2)},$$

где $l_i=\lambda_i+n/2-i+1$.

Лит.: [1] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [3] Хамермеш М., Теория групп и ее применение к физическим проблемам, пер. с англ., М., 1966.

Э. Б. Винберг.

ПРЕДСТАВЛЯЮЩАЯ ФУНКЦИЯ — непрерывная функция f на топологич. пространстве X, снабженном непрерывным действием нек-рой группы G, орбита к-рой $\{g^*f \mid g \in G\}$ в пространстве всех непрерывных функций на X порождает конечномерное подпространство. П. ф. иногда называют также *сферическими*, или *почти инвариантными*, *функциями*. П. ф. со значениями в поле $k=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ образуют G-инвариантную k-подалгебру $F(X, k)_G$ в алгебре всех k-значных непрерывных функций $F(X, k)$ на X. В случае, когда $X=G$ — топологич. группа, действующая на себе при помощи левых сдвигов, $F(X, k)_G = F(G, k)_G$ совпадает с подпространством в $F(G, k)$, порожденным матричными элементами конечномерных непрерывных линейных представлений группы G. Если при этом G компактна, то можно ограничиться матричными элементами неприводимых представлений. Напр., если $G=T$ — группа вращений плоскости, то П. ф. на G — это тригонометрич. полиномы. Другим примером являются классические сферич. функции на сфере, к-рые суть П. ф. для стандартного действия группы вращений сферы.

Если G — компактная топологич. группа, непрерывно действующая на пространстве X, являющемся объединением счетного числа компактов, то $F(X, k)_G$ плотно в $F(X, k)$ относительно компактно открытой топологии (см. *Петера — Вейля теорема*). Аналогичные утверждения справедливы для П. ф. различных степеней гладкости на дифференцируемом многообразии с гладким действием компактной группы Ли. С другой стороны, если G не допускает нетривиальных непрерывных гомоморфизмов в компактную группу (например, G — связная полупростая группа Ли без

компактных простых факторов), то всякая П. ф. на компактном пространстве X с непрерывным действием группы G является G-инвариантной [4].

Если гладкое действие компактной группы Ли G на дифференцируемом многообразии X имеет лишь конечное число типов орбит, то алгебра $F^\infty(X, k)_G$ всех П. ф. класса C^∞ конечно порождена над подалгеброй всех G-инвариантных функций класса C^∞ (см. [5]). В частности, для однородного пространства X алгебра $F(X, \mathbb{C})_G = F^\infty(X, \mathbb{C})_G$ конечно порождена и отождествляется с алгеброй регулярных функций на аффинном однородном алгебраич. многообразии над $\mathbb{C}$, множество вещественных точек к-рого совпадает с X. Важной для приложений является задача о разложении G-модуля $F(X, \mathbb{C})_G$ в прямую сумму простых G-модулей. В случае, когда X — симметрическое однородное пространство компактной группы G, она была решена Э. Картаном [1].

Обобщением П. ф. являются **представляющие сечения** нек-рого векторного G-расслоения E над G-пространством X, т. е. непрерывные сечения, G-орбиты к-рых порождают конечномерные подпространства в пространстве $\Gamma(E)$ всех непрерывных сечений, напр. представляющие тензорные поля на гладких многообразиях с гладким действием группы Ли G; они образуют G-подмодуль $\Gamma(E)_G \subset \Gamma(E)$ (см. [5]). Если группа G компактна, то подмодуль $\Gamma(E)_G$ плотен в $\Gamma(E)$. В случае, когда X — симметрическое однородное пространство группы G, изучено (см. [3]) разложение G-модуля $\Gamma(E)_G$ на простые компоненты. Если же X — компактное однородное пространство полупростой группы Ли G без компактных факторов со связной стационарной подгруппой, то

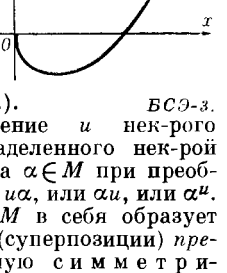
$$\dim \Gamma(E)_G < \infty$$

(см. [2]).

Лит.: [1] Cartan E., «Rend. Circ. Mat. Palermo», 1929, v. 53, p. 217—52; [2] Дао Ван Ча, «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 5, с. 203—04; [3] Дзядык Ю. В., «Докл. АН СССР», 1975, т. 220, № 5, с. 1019—22; [4] Лукацкий А. М., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 5, с. 212—13; [5] Онищик А. Л., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1976, т. 35, с. 235—64.

А. Л. Онищик.

ПРЕКРАЩЕНИЯ ТОЧКА — особая точка плоской кривой, в к-рой кривая обрывается. Окружность достаточно малого радиуса с центром в П. т. пересекает кривую только в одной точке. Например, у кривой $y = x \ln x$ П. т.— начало координат (см. рис.).



БСЭ-3.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — отображение u нек-рого множества M (вообще говоря, наделенного нек-рой структурой) в себя. Образ элемента $\alpha \in M$ при преобразовании u обозначается $u(\alpha)$, или $u\alpha$, или αu, или α^u. Совокупность всех П. множества M в себя образует относительно операции умножения (суперпозиции) *преобразований полугруппу*, называемую **симметрической полугруппой** на множестве M. Обратимые элементы этой полугруппы наз. *подстановками*. Все подстановки на множестве M образуют подгруппу симметрич. полугруппы — *симметрическую группу*.

См. также *Подстановок группа*, *Преобразований группа*.

О. А. Иванова.

ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРУППА — *подстановок группа* (G, M), действующая на множестве M. При этом если на множестве M определена какая-либо структура и элементы из G эту структуру сохраняют, то принято говорить, что G есть группа преобразований этой структуры. Наименование П. г. обычно отражает в нек-рой мере наименование структуры, определенной на M. Так, напр., если M — векторное пространство над телом, то группы, сохраняющие эту структуру,

наз. *линейными группами*. Более общо, линейными группами наз. часто группы автоморфизмов модулей над различными кольцами. В частности, если M — свободный конечномерный модуль над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел, то говорят о *кристаллографических группах*. Если M — топологич. пространство, а G состоит из автогомеоморфизмов пространства M, то говорят о группах непрерывных преобразований. Если $M=K$ есть поле, а G — конечная группа автоморфизмов поля K, то G является группой Галуа расширения K/L, где L — подполе, состоящее из элементов, неподвижных при действии элементов из G. Рассматривается также ситуация, когда группа G и множество M снабжены структурами одного и того же типа, причем действие группы G на M является морфизмом в соответствующей категории. Напр., если G — топологич. группа, непрерывно действующая на топологич. пространстве M, то говорят о *топологической группе* преобразований; аналогично определяются *Ли группа преобразований*, *алгебраическая группа преобразований*.

Лит.: [1] Математика, ее содержание, методы и значение, т. 3, М., 1956, гл. 20.

Л. А. Калужнин.

ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОЛУГРУППА — всякая подполугруппа симметрич. полугруппы T_Ω, где T_Ω — совокупность всех преобразований множества Ω. Частным случаем П. п. являются *преобразований группы*.

П. п. $P_1 \in T_{\Omega_1}$, $P_2 \subset T_{\Omega_2}$ наз. п о д о б н ы м и, если существуют биекции $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ и $\psi : P_1 \to P_2$ такие, что при $u\alpha = \beta$ (α, $\beta \in \Omega_1$; $u \in P_1$) имеет место $(\psi u)(\varphi\alpha) = \varphi\beta$. Подобные П. п. изоморфны, но обратное, вообще говоря, неверно. Однако в пределах нек-рых классов П. п. из изоморфизма вытекает подобие. Таков, напр., класс П. п., включающих все такие преобразования u, что $u\Omega$ состоит из одного элемента. Задание полугруппы как П. п. несет бо́льшую информацию, чем ее задание с точностью до изоморфизма.

Принципиально важно выделение свойств П. п., инвариантных относительно изоморфизмов. Для нек-рого класса П. п. Γ условие, при к-ром полугруппа S изоморфна нек-рой полугруппе из Γ, наз. а б с т р а к т н о й х а р а к т е р и с т и к о й к л а с с а Γ. Найдены абстрактные характеристики для нек-рых важных П. п. Всякая полугруппа изоморфна нек-рой П. п. Полугруппа S тогда и только тогда изоморфна нек-рой симметрич. полугруппе T_Ω, когда она является максимальным плотным идеальным расширением (см. *Расширение* полугруппы) какой-либо полугруппы A с тождеством $xy=x$.

Из общей теории П. п. выделяется направление, при к-ром преобразуемое множество Ω наделено нек-рой структурой (топологией, действием, отношением в Ω и т. п.), и рассматриваются П. п., связанные с этой структурой (эндоморфизмы, непрерывные или линейные преобразования, *сдвиги полугрупп* и т. д.). Изучение соотношений между свойствами структуры в Ω и свойствами полугруппы соответствующих преобразований является обобщением теории Галуа. В частности, известны случаи, когда указанная П. п. вполне определяет структуру (см., напр., *Эндоморфизмов полугруппа*). Свойства левых и правых сдвигов полугрупп используются в общей теории полугрупп.

Обобщением понятия преобразования является ч а с т и ч н о е п р е о б р а з о в а н и е, отображающее какое-либо подмножество $\Omega' \subset \Omega$ в Ω. Бинарное отношение на множестве Ω иногда трактуют как многозначное (вообще говоря, частичное) преобразование этого множества. Рассматриваемые относительно операции суперпозиции (определяемой как умножение бинарных отношений) однозначные и многозначные частичные преобразования также образуют полугруппы. Целесообразно рассматривать их как полугруппы, наделен-

ные дополнительными структурами (напр., отношением включения бинарных отношений, включения или равенства областей определения, включения или равенства образов и т. д.).

Лит.: [1] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [2] Клиффорд А. Х., Престон Г. Б., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [3] Глускин Л. М., «Матем. сб.», 1961, т. 55, № 4, с. 421—48; [4] Schein B. M., «Semigroup Forum», 1970, v. 1, № 1, p. 1—62.

Л. М. Глускин, Е. С. Ляпин.

ПРЕПЯТСТВИЕ — понятие гомотопич. топологии; инвариант, равный нулю, если соответствующая задача разрешима, и отличный от нуля — в противном случае.

Пусть (X, A) — пара клеточных пространств и Y — односвязное (более общо — гомотопически простое) топологич. пространство. Можно ли данное непрерывное отображение $g: A \to Y$ продолжить до непрерывного отображения $f: X \to Y$? Продолжение можно осуществлять по остовам X^n пространства X. Пусть построено такое отображение $f: X^n \cup A \to Y$, что $f|_A = g$. Для любой ориентированной $(n+1)$-мерной клетки $S^n \to Y$ отображение $f|_{\partial e^{n+1}}$ задает отображение $S^n \to Y$ (где S^n есть n-мерная сфера) и элемент $\alpha_e \in \pi_n(Y)$ (именно здесь и используется гомотопич. простота пространства Y, позволяющая игнорировать выбор отмеченной точки). Таким образом, возникает коцепь

$$c_f^{n+1} \in C^{n+1}(X;\ \pi_n(Y)),\ c_f^{n+1}(e^{n+1}) = \alpha_e.$$

Так как для $e^{n+1} \subset A$, очевидно, $c_f^{n+1}(e^{n+1}) = 0$, то на самом деле

$$c_f^{n+1} \in C^{n+1}(X,\ A;\ \pi_n(Y)).$$

Очевидно, $c_f^{n+1} = 0$ тогда и только тогда, когда f продолжается на X^{n+1}, т. е. коцепь c_f^{n+1} является препятствием к продолжению f на X^{n+1}.

Коцепь $c_f^{n+1} \in C^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$ является коциклом. Из того, что $c_f^{n+1} = 0$, вообще говоря, не следует, что g не продолжается на X: f может не продолжаться на X^{n+1} в силу неудачного выбора продолжения g на X^n. Может оказаться, напр., что отображение $f|_{X^{n-1} \cup A}$ продолжается на X^{n+1}, т. е. что продолжение возможно после отступления на один шаг. Оказывается, что П. к этому является класс когомологий

$$[c_f^{n+1}] \in H^{n+1}(X,\ A;\ \pi_n(Y)),$$

то есть $[c_f^{n+1}] = 0$ тогда и только тогда, когда существует такое отображение $\tilde{f}: X^{n+1} \cup A \to Y$, что $\tilde{f}|_{X^{n-1} \cup A} = f|_{X^{n-1} \cup A}$ (в частности, $\tilde{f}|_A = g$). Для доказательства этого утверждения используется конструкция *различающей*.

Так как задачу гомотопич. классификации отображений $X \to Y$ можно интерпретировать как задачу продолжения, то теория П. применима и к описанию множества $[X, Y]$ гомотопич. классов отображений из X в Y. Пусть $I = [0, 1]$ и пусть $A = X \times \{0, 1\}$ — подпространство в $X \times I$. Тогда пара отображений $f_0, f_1: X \to Y$ интерпретируется как отображение $G: A \to Y$, $G(x, i) = f_i(x)$, $i = 0, 1$, и наличие гомотопии между f_0 и f_1 означает наличие отображения $F: X \times I \to Y$, продолжающего отображение G. При этом если гомотопия F построена на n-мерном остове пространства X, то П. к ее продолжению на X есть различающая

$$d^n(f_0,\ f_1) \in C^n(X;\ \pi_n(Y)).$$

В качестве приложения можно указать описание множества $[X, Y] = [X, K(\pi, n)]$, $n > 1$, где $K(\pi, n)$ — *Эйленберга — Маклейна пространство*: $\pi_i(K(\pi, n)) = 0$ при $i \neq n$, $\pi_n(K(\pi, n)) = \pi$. Пусть $f_0: X \to K(\pi, n)$ — постоянное отображение, а $f: X \to K(\pi, n)$ — произ-

вольное непрерывное отображение. Так как $H^i(X;\ \pi_i(Y))=0$ при $i<n$, то f_0 и f_1 гомотопны на X^{n-1} и можно, выбрав какую-нибудь такую гомотопию, определить различающую

$$d^n(f,\ f_0)\in C^n(X;\ \pi_n(Y))=C^n(X;\ \pi).$$

Класс когомологий $[d^n(f, f_0)]\in H^n(X;\ \pi)$ определен корректно, т. е. не зависит от выбора гомотопии между f_0 и f (в силу того, что $\pi_i(Y)=0$ при $i<n$). Далее, если отображения $f,\ g: X\to Y$ таковы, что $[d^n(f, f_0)]=[d^n(g, f_0)]$, то $[d^n(f, g)]=0$ и, значит, f и g гомотопны на X^n. П. к продолжению этой гомотопии на все X лежат в группах $H^i(X;\ \pi_i(Y))=0$ (так как $i>n$), и, значит, отображения f и g гомотопны. Таким образом, гомотопич. класс отображения f полностью определяется элементом $[d^n(f, f_0)]\in H^n(X,\ \pi)$. Наконец, для любого элемента $x\in H^n(X,\ \pi)$ найдется отображение f с $[d^n(f, f_0)]=x$ и потому $[X,\ K(\pi,\ n)]=H^n(X;\ \pi)$. Аналогично: если $\pi_i(Y)=i$ при $i<n$ и $\dim X\leqslant n$, то $[X,\ Y]=H^n(X;\ \pi_n(Y))$.

При исследовании задачи продолжения рассматривалась возможность продолжения после «отступления на один шаг». Полное решение задачи требует анализа возможности продолжения после отступления на произвольное число шагов. Для этой цели используются *когомологические операции* или *Постникова системы*. Так, для описания множества $[X,\ Y]$, где $\pi_i(Y)=0$ при $i<n$, $\pi_n(Y)\neq 0$, $\dim X=n+r$, требуется, вообще говоря, исследовать возможность отступления на $r+1$ шаг, для чего надо исследовать первые $n+r$ этажей системы Постникова пространства Y, т. е. использовать когомологич. операции порядков $\leqslant r$ (в ст. *Когомологические операции* эта задача разобрана для $r=1$).

Теория П. используется также в более общей ситуации продолжения *сечений*. Пусть $p: E\to B$ — нек-рое расслоение со слоем F (причем $\pi_1(F)=0$ и $\pi_1(B)$ действует на $\pi_1(F)$ тривиально), пусть $A\subset B$ и $s: A\to E$ — нек-рое сечение (т. е. такое непрерывное отображение, что $ps(a)=a$). Можно ли продолжить s на все B? Соответствующие П. лежат в группах $H^{n+1}(B;\ \pi_n(F))$. Задача продолжения получается из этой задачи, если положить $B=X$, $E=X\times Y$, $p(x, y)=x$, $s(a)=(a, g(a))$. Аналогичным образом с помощью теории П. исследуется и задача классификации сечений.

Наконец, в задаче продолжения можно снять ограничение гомотопич. простоты пространства Y (и аналогично в задаче о сечениях); для этого надо использовать когомологии с локальными коэффициентами.

Ю. Б. Рудяк.

ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ИГРА — антагонистическая дифференциальная игра преследователя (догоняющего) P и преследуемого (убегающего) E, движения к-рых описываются системами дифференциальных уравнений:

$$P:\ \dot{x}=f(x,\ u),\ E:\ \dot{y}=g(y,\ v),$$

где x, y — фазовые векторы, определяющие состояния игроков P и E соответственно; u, v — управляющие параметры, выбираемые игроками в каждый момент времени из заданных компактных множеств U, V евклидовых пространств. Целью P может быть, напр., сближение с E на заданное расстояние, что формально означает попадание x в l-окрестность y ($l\geqslant 0$). При этом различаются случаи сближения за минимальное время (П. и. и а б ы с т р о д е й с т в и е), к заданному моменту времени (П. и. с п р е д п и с а н н о й п р о д о л ж и т е л ь н о с т ь ю) и до момента достижения игроком E нек-рого множества (игра с «линией жизни»). Сравнительно хорошо изучены игры с полной информацией, когда оба игрока знают фазовые состояния друг друга в каждый текущий момент времени. Под решением П. и. понимается нахождение ситуации равновесия.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4, с. 219—74; [2] Красовский Н. Н., Субботин А. И., Позиционные дифференциальные игры, М., 1974; [3] Айзекс Р., Дифференциальные игры, пер. с англ., М., 1967; [4] Петросян Л. А., Дифференциальные игры преследования, Л., 1977. *Л. А. Петросян.*

ПРИБЛИЖЕНИЕ — то же, что *аппроксимация*. Термин «П.» иногда употребляется в смысле приближающего объекта (напр., начальное П.).

ПРИБЛИЖЕНИЕ В СРЕДНЕМ — приближение заданной и интегрируемой на промежутке $[a, b]$ функции $f(t)$ функцией $\varphi(t)$, когда за меру погрешности принята величина

$$\mu(f, \varphi) = \int_a^b |f(t) - \varphi(t)|\, dt.$$

В более общем случае, когда

$$\mu(f, \varphi) = \int_a^b |f(t) - \varphi(t)|^q\, d\sigma(t) \quad (q > 0),$$

где $\sigma(t)$ — неубывающая на $[a, b]$ отличная от постоянной функция, говорят о среднестепенном (с показателем q) приближении относительно распределения $d\sigma(t)$. Если $\sigma(t)$ абсолютно непрерывна и $\rho(t) = \sigma'(t)$, получают среднестепенное приближение с весом $\rho(t)$, если же $\sigma(t)$ — ступенчатая функция со скачками c_k в точках t_k из $[a, b]$, то приходят к взвешенному среднестепенному приближению в системе точек $\{t_k\}$ с мерой погрешности

$$\mu(f, \varphi) = \sum\nolimits_k c_k |f(t_k) - \varphi(t_k)|^q.$$

Естественным образом эти понятия обобщаются на случай функций многих переменных.

Лит.: [1] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [2] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ — замена по определенному правилу функции $f(t)$ близкой к ней в том или ином смысле функцией $\varphi(t)$ из заранее фиксированного множества $\mathfrak{N}$ (приближающего множества). Предполагается, что функция f определена на том множестве Q m-мерного евклидова пространства (в частности, действительной оси), на к-ром осуществляется приближение, она может быть задана явно через элементарные функции или быть решением нек-рого уравнения. Если о функции $f(t)$ располагают неполной информацией, то тогда речь идет, по существу, о приближении задаваемого этой информацией целого класса функций.

Практич. необходимость в П. ф. возникает в самых различных ситуациях, когда нужно функцию $f(t)$ заменить более гладкой или более простой и удобной для вычислений, восстановить функциональную зависимость по экспериментальным данным и т. п.

В общей задаче П. ф. обычно можно выделить следующие более частные задачи: выбор приближающего множества $\mathfrak{N}$; выбор меры погрешности приближения; выбор метода приближения, т. е. правила, по к-рому функции $f(t)$ сопоставляется функция $\varphi(t)$ из $\mathfrak{N}$; исследование и оценка погрешности приближения.

При выборе приближающего множества $\mathfrak{N}$, помимо безусловного требования обеспечить нужную точность приближения, руководствуются стремлением иметь дело с простыми по структуре и удобными для вычисления функциями $\varphi(t)$, на к-рые могут накладываться априорные условия, связанные, напр., с гладкостью.

Классич. аппаратами приближения являются алгебраические (если Q — ограниченное замкнутое множество) и тригонометрические (в периодич. случае) полиномы одного и многих переменных. Широкое при-

менение их в качестве приближающего множества обусловлено, в частности, принципиальной возможностью приблизить непрерывную функцию алгебраическими или тригонометрич. полиномами с любой наперед заданной погрешностью. Точность приближения может быть повышена за счет увеличения степени полинома, что, однако, усложняет приближающий аппарат и увеличивает вычислительные трудности при его использовании. На практике в качестве приближающего множества берут подпространства алгебраических или тригонометрич. полиномов фиксированного порядка и стремятся получить нужную точность с помощью полиномов возможно меньшей степени. Более общий и в то же время более гибкий аппарат приближения получают, рассматривая обобщенные полиномы

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + \ldots + c_N\varphi_N(t),$$

где $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ — нек-рая система линейно независимых функций, к-рую можно выбирать в зависимости от условий конкретной задачи и априорных требований на $\varphi(t)$.

Во многих задачах более естественным и удобным с вычислительной точки зрения, чем классич. полиномы, аппаратом приближения оказались *сплайны*. Если

$$\Delta_N = \{a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = b\},\ N \geqslant 2, \qquad (1$$

фиксированное разбиение отрезка $[a, b]$, то (полиномиальным) сплайном порядка r дефекта k ($k = 1, 2, \ldots, r$) по разбиению Δ_N наз. функцию $s(t)$, «склеенную» в точках $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{N-1}$ из алгебраич. многочленов степени r так, что на всем отрезке $[a, b]$ она непрерывна вместе со своими производными до $(r-k)$-го порядка включительно. Таким образом, $s(t) \in C^{r-k}[a, b]$ и $s(t)$ есть алгебраич. многочлен степени r на каждом промежутке (τ_{i-1}, τ_i), $i = 1, 2, \ldots, N$. Напр., ломаная с узлами в точках τ_i есть сплайн первого порядка дефекта 1; непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция $s(t)$, совпадающая на $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 1, \ldots, N$, с кубич. многочленом, есть кубический сплайн дефекта 2 и т. д. Аналогично определяются сплайны двух и большего числа переменных. Имея конечную гладкость, сплайны обладают большей, чем полиномы, локальной гибкостью: изменение значений сплайна на нек-ром промежутке (α, β) мало сказывается (или совсем не сказывается) на поведении его вне (α, β). Преимущества сплайнов, помимо простоты машинной реализации, сказываются, в частности, там, где информация о приближаемой функции имеет дискретный характер, напр. значения в нек-рых точках самой функции f и, быть может, нек-рых ее производных.

Если $f(t)$ имеет особенности или приближение осуществляется в неограниченной области, то удобным аппаратом приближения являются рациональные дроби $p(t)/q(t)$, где $p(t)$ и $q(t)$ — алгебраич. многочлены. Заданные на всей действительной оси непериодич. функции приближают также целыми функциями экспоненциального типа.

Мера погрешности $\mu(f, \varphi)$ выбирается обычно с учетом условий конкретной задачи и имеющейся информации о приближаемой функции $f(t)$. Чаще всего дело сводится к выбору содержащего f функционального пространства, в метрике к-рого целесообразно оценивать погрешность приближения. Если

$$\mu(f, \varphi) = \sup_{t \in Q} |f(t) - \varphi(t)|,$$

то речь идет о равномерном, или чебышевском, приближении, если же

$$\mu(f, \varphi) = \int_Q |f(t) - \varphi(t)|^p\, dt,\ p > 0,$$

то говорят о среднестепенном приближении, к-рое при $p=1$ наз. приближением в среднем. Особое значение имеет случай $p=2$ — среднеквадратическое приближение, когда погрешность наилучшего приближения функции f конечномерным подпространством может быть точно выражена через нек-рые определители. В нек-рых задачах требования близости функций f и φ в различных точках различны; для учета этой неоднородности вводят *весовую функцию* $\rho(t)\geqslant 0$ и рассматривают взвешенное приближение с мерой погрешности

$$\mu(f, \varphi)=\sup_{t\in Q}|f(t)-\varphi(t)|\rho(t)$$

или

$$\mu(f, \varphi)=\int_Q |f(t)-\varphi(t)|^p \rho(t)\,dt,\ p>0.$$

Весовая функция позволяет также обеспечить конечность погрешности, если, напр., $f(t)$ неограничена. Если погрешность должна учитывать близость f и φ только в отдельных точках t_k $(k=1, \ldots, N)$ из Q, то в качестве $\mu(f, \varphi)$ можно выбрать одну из величин

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}|f(t_k)-\varphi(t_k)|$$

или

$$\sum_{k=1}^{N}|f(t_k)-\varphi(t_k)|^p,\ p>0,$$

в к-рые также могут вводиться весовые коэффициенты.

При решении вопроса о том, по какому правилу выбирать из множества $\mathfrak{N}$ приближающую функцию $\varphi(t)=\varphi(f, t)$ (при выборе метода приближения), естественно стремление обеспечить по возможности более высокую точность приближения и одновременно простоту построения $\varphi(f, t)$ по имеющейся информации о приближаемой функции $f(t)$. Первое требование ориентирует на «ближайшую» к $f(t)$ функцию $\varphi_f(t)$ из $\mathfrak{N}$, т. е. такую, что

$$\mu(f, \varphi_f)=\inf_{\varphi\in\mathfrak{N}}\mu(f, \varphi).$$

Здесь сразу же возникают вопросы о существовании и единственности такой функции (функции наилучшего приближения), а также о ее характеристич. свойствах (см. [5]). Существование гарантируется, если $\mathfrak{N}$ — замкнутое локально компактное множество, в частности конечномерное подпространство. Единственность зависит как от свойств приближающего множества $\mathfrak{N}$ (см. *Хаара условие*, *Чебышева система* функций), так и от метрики, определяющей меру погрешности $\mu(f, \varphi)$. Известен ряд необходимых и достаточных условий, к-рым должна удовлетворять функция наилучшего приближения $\varphi_f(t)$ в той или иной ситуации (см. *Наилучшего приближения многочлен*, *Чебышева теорема*, *Маркова критерий*). Однако эти критерии, как правило, не дают способов эффективного построения функции $\varphi_f(t)$. Поэтому большое значение имеют методы, к-рые позволяют по информации о приближаемой функции $f(t)$ эффективно построить нек-рую функцию $\varphi(f, t)$ из $\mathfrak{N}$, обеспечивающую приемлемое приближение. Здесь, в первую очередь, надо говорить о линейных методах (когда $\varphi(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2, t)=\alpha_1\varphi(f_1, t)+\alpha_2\varphi(f_2, t)$), к к-рым, в частности, относится метод интерполяции. Зафиксировав точки $t_1, \ldots, t_N$ из Q, можно выбирать $\varphi(f, t)$ среди тех функций $\varphi(t)$ из $\mathfrak{N}$, к-рые удовлетворяют условию интерполяции

$$\varphi(t_k)=f(t_k),\ k=1, 2, \ldots, N. \qquad (2)$$

Если $\mathfrak{N}$ — линейное многообразие и в нем существует система функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ такая, что $\varphi_i(t_i)=1$, $\varphi_i(t_k)=0$ $(k\neq i)$, то функция

$$\varphi(f, t)=\sum_{k=1}^{N} f(t_k)\,\varphi_k(t)$$

принадлежит $\mathfrak{N}$ и удовлетворяет условиям (2); она задает интерполяционный метод приближения, являющийся, очевидно, линейным. Функцию $\varphi(f, t)$ можно выбирать, требуя совпадения в точках t_k не только $f(t)$ и $\varphi(f, t)$, но и нек-рых их производных; в этом случае говорят об интерполировании с кратными узлами. Если $Q=[a, b]$, $a\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_N\leqslant b$, то существует единственный алгебраич. многочлен степени $N-1$, а в непериодич. случае $(b-a=2\pi$, $t_N=t_{2n-1}<b)$ — единственный тригонометрич. полином порядка $n-1$, совпадающий с $f(t)$ в точках t_k. Кратное интерполирование осуществляют интерполяционные полиномы Эрмита, частным случаем к-рых является многочлен Тейлора, когда в одной точке алгебраич. многочленом степени n интерполируются значения функции и ее первых n производных.

Интерполирование сплайнами имеет свои особенности, связанные с выбором точек интерполяции и краевых условий, обеспечивающих существование и единственность интерполяционного сплайна. Напр., сплайн $s(t)$ порядка $r\geqslant 2$ дефекта 1 по разбиению (1), принимающий заданные значения в N различных точках t_i интервала (a, b) таких, что $\tau_{i-1}\leqslant t_i\leqslant\tau_i$, $i=1, 2, \ldots, N$, существует и единствен, если задать определенным образом краевые условия в виде m_a чисел $s^{(\nu)}(a)$ $(0\leqslant\nu\leqslant r-1)$ и m_b чисел $s^{(\mu)}(b)$ $(0\leqslant\mu\leqslant r-1)$, причем $m_a+m_b=r$. Функции $f\in C^{k-1}[a, b]$ можно однозначно сопоставить сплайн $s(f, t)$ порядка $2r-1$ дефекта k $(1\leqslant k\leqslant r)$ по разбиению (1), потребовав выполнения равенств $s^{(\nu)}(f, \tau_i)=f^{(\nu)}(\tau_i)$, $\nu=0, 1, \ldots, k-1$; $i=0, 1, \ldots, N$, а при $k<r$ также нек-рых краевых условий. При $k=r$ этот сплайн наз. эрмитовым, а также локальным, т. к. его поведение на интервале (τ_{i-1}, τ_i) определяется только значениями функции $f(t)$ и ее производных $f^{(\nu)}(t)$ $(\nu=1, \ldots, k-1)$ в точках τ_{i-1} и τ_i.

В П. ф. важную роль играют также линейные методы, построенные на базе разложения приближаемой функции в ряд Фурье по нек-рой ортогональной системе. В частности, в периодич. случае широко распространенным аппаратом приближения являются суммы Фурье по тригонометрич. системе и их различные усреднения (см. *Приближение функций*; линейные методы приближения).

Исследование и оценка погрешности приближения — важный с практич. точки зрения и в то же время наиболее содержательный в идейном отношении этап П. ф. Именно разработка методов оценки погрешности, изучение зависимости ее от гладкостных характеристик приближаемой функции, исследование и сравнение аппроксимативных свойств различных аппаратов приближения привели к формированию теории приближения функций — одного из наиболее интенсивно развивающихся разделов математич. анализа.

Фундамент теории П. ф. был заложен работами П. Л. Чебышева в 1854—59 (см. [1]) о наилучшем равномерном приближении непрерывных функций многочленами и рациональными дробями, а также работами К. Вейерштрасса [2], доказавшего в 1885, что для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ или непрерывной на всей оси с периодом 2π функции $f(t)$ существует последовательность алгебраических (соответственно тригонометрических) полиномов $P_n(f, t)$ по-

рядка $n=1, 2, \ldots$ такая, что при $n \to \infty$

$$\mu(f, P_n(f)) = \max_{t \in Q} |f(t) - P_n(f, t)| \to 0,$$

где Q есть $[a, b]$ или, соответственно, вся числовая ось. Аналогичные факты имеют место и в случае, когда мера погрешности определяется интегральной метрикой, а также для функций многих переменных. Особую важность приобретает исследование скорости убывания числовой последовательности $\mu(f, P_n(f))$ в зависимости от свойств приближаемой функции и от выбора приближающих полиномов $P_n(f, t)$. Наибольший интерес представляет изучение наилучшего приближения, а также приближения, доставляемого линейными методами, позволяющими по функции $f(t)$ эффективно построить полином $P_n(f, t)$. Важный этап в развитии теории П. ф., связанный с именами Ш. Ж. Валле Пуссена (Ch. J. La Vallée Poussin), Д. Джексона (D. Jackson), С. Н. Бернштейна, составили исследования связи между скоростью убывания погрешности приближения функции $f(t)$ выбранными тем или иным способом многочленами $P_n(f, t)$ степени n (при $n \to \infty$) и дифференциально-разностными свойствами $f(t)$. Оказалось, что эти свойства, т. е. наличие у $f(t)$ производных, их гладкость и т. д., можно в ряде случаев охарактеризовать через последовательность приближающих полиномов и поведение доставляемой ими погрешности (см. *Приближение функций*; прямые и обратные теоремы). Этим давалась новая, конструктивная характеристика непрерывных и дифференцируемых функций. В первой трети 20 в. такая проблематика была доминирующей в теории приближения, что дало повод говорить о ней как о *конструктивной теории функций*.

В 30—40-х гг. появились работы А. Н. Колмогорова, Ж. Фавара (J. Favard) и С. М. Никольского, к-рые положили начало новому направлению исследований, связанному с приближением классов функций конечномерными подпространствами и получением точных оценок погрешности через задающие класс дифференциально-разностные характеристики. Речь идет об отыскании величин

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}} \mu(f, P_N(f)),$$

где $\mu(g, \varphi)$ — выбранная мера погрешности приближения, $\mathfrak{M}$ — нек-рый класс функций, а $P_N(f, t)$ — приближающий (вообще говоря, обобщенный) полином, коэффициенты к-рого определяются выбором метода приближения. Результаты такого рода позволяют сравнивать методы приближения с точки зрения их аппроксимативных возможностей и ставить важную для приложений задачу отыскания для данного класса функций оптимального (наилучшего) приближающего аппарата (фиксированной размерности N). Исследования в этом направлении, базирующиеся как на изучении свойств конкретных методов приближения, так и на самых общих положениях функционального анализа, оказались весьма плодотворными и в идейном отношении, т. к. привели к установлению принципиально новых фактов о связи между различными по характеру экстремальными задачами, позволили выявить глубокие и тонкие зависимости в теории функций. Благодаря этому оказалось возможным до конца решить ряд экстремальных задач по наилучшему приближению важнейших классов функций (см. [5], [7], а также *Приближение функций*; экстремальные задачи на классах функций).

О некоторых других аспектах П. ф. На приближающую функцию $\varphi(t)=\varphi(f, t)$ из $\mathfrak{N}$ могут накладываться дополнительные ограничения. Если они не связаны с функцией f (напр., ограничения или

связи на коэффициенты приближающего полинома), то дело фактически сводится к уточнению приближающего множества $\mathfrak{N}$. Новая ситуация возникает, если ограничения на $\varphi(f, t)$ связаны с приближаемой функцией f; один из интересных случаев — о д н о с т о р о н н е е п р и б л и ж е н и е, когда $\varphi(f, t)$ из $\mathfrak{N}$ должна удовлетворять неравенству $\varphi(f, t) \leqslant f(t)$ (или $\geqslant$) и погрешность оценивается в интегральной метрике (см. [19]).

В прикладных задачах наряду с явно задаваемыми функциями возникает необходимость приближать кривые и поверхности, допускающие только параметрич. задание; в качестве аппарата приближения могут служить, напр., параметрич. сплайны. Меру погрешности здесь естественнее всего определить через хаусдорфово расстояние, к-рое хорошо учитывает геометрич. близость таких объектов, и, напр., для кривых l_1 и l_2 определяется равенством

$$r(l_1, l_2) = \max \left\{ \max_{P \in l_1} \min_{Q \in l_2} \rho(P, Q), \max_{P \in l_2} \min_{Q \in l_1} \rho(P, Q) \right\},$$

где $\rho(P, Q)$ — евклидово (или какое-нибудь другое) расстояние между точками P и Q. Хаусдорфово расстояние является более предпочтительным при выборе меры погрешности и в нек-рых ситуациях П. ф., напр. когда разрывную функцию нужно аппроксимировать функцией гладкой (см. [16]).

Решение ряда задач теории П. ф. тесно связано с исследованием экстремальных свойств полиномов по тем или иным конкретным системам функций (неравенства для производных многочленов, полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля, и др.). В частности, доказательство обратных теорем П. ф. существенно базируется на неравенствах, дающих оценку нормы (или значения в фиксированной точке) нек-рой производной алгебраического или тригонометрич. полинома через те или иные характеристики самого полинома. В этом направлении известен ряд точных результатов, имеются обобщения на целые функции (см. [6] — [10]).

Задача об алгебраич. многочлене (с фиксированным старшим коэффициентом), наименее уклоняющемся от нуля в метрике C или L_p на отрезке $[a, b]$, эквивалентная задаче о наилучшем приближении функции t^n многочленами степени $n-1$, исследовалась П. Л. Чебышевым (метрика C) и его учениками (метрика L_1). Решение дают многочлены Чебышева первого (C) и второго (L_1) рода и многочлены Лежандра (L_2), имеющие широкое применение как в теоретических, так и в прикладных исследованиях. Известен ряд результатов для более общего случая, когда на коэффициенты многочлена накладывается несколько связей (см. [6]). Задача о моносплайне минимальной нормы, эквивалентная отысканию наилучшего приближения функции t^n сплайнами порядка $n-1$ со свободными узлами, приобрела особое значение в связи с тем, что к ней в ряде случаев сводится задача о наилучшей квадратурной формуле (см. [17]).

О П. ф. в комплексной плоскости см. *Приближение функций комплексного переменного.*

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций (1859), Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947, с. 151—235; [2] Weierstrass K., «Sitzungsber. Akad. Berlin», 1885, S. 633—639, 789—805; [3] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [4] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.— Л., 1949; [5] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [6] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [7] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [8] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [9] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [10] Тиман А. Ф., Теория приближе-

ния функций действительного переменного, М., 1960; [11] Коровкин П. П., Линейные операторы и теория приближений, М., 1959; [12] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и ее приложения, пер. с англ., М., 1972; [13] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976; [14] Лоран П.-Ж., Аппроксимация и оптимизация, пер. с франц., М., 1975; [15] Коллатц Л., Крабс В., Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения, пер. с нем., М., 1978; [16] Сендов Б., Хаусдорфовые приближения, София, 1979; [17] Никольский С. М., Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979; [18] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л., Методы сплайн-функций, М., 1980; [19] Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г., Аппроксимация с ограничениями, К., 1982. *Н. П. Корнейчук.*

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ; линейные методы приближения — методы приближения, определяемые линейными операторами. Если в линейном нормированном пространстве функций X в качестве приближающего множества выбрано линейное многообразие $\mathfrak{N}$, то любой линейный оператор U, сопоставляющий функции $f \in X$ функцию $U(f, t) = (Uf)(t)$ из $\mathfrak{N}$ так, что

$$U(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, t) = \alpha_1 U(f_1, t) + \alpha_2 U(f_2, t)$$

(α_1 и α_2 — любые числа), определяет линейный метод приближения (л. м. п.) функций пространства X функциями множества $\mathfrak{N}$. Л. м. п. наз. проекционным, если $U(f, t) = f(t)$ для всех f из $\mathfrak{N}$, он наз. положительным, если $U(f, t) \geqslant 0$ для неотрицательных функций $f(t)$.

Наибольший интерес представляет конечномерный случай, когда $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_N$ есть N-мерное подпространство, и тогда

$$U(f, t) = U_N(f, t) = \sum_{k=1}^{N} c_k(f)\, \varphi_k(t), \qquad (1)$$

где $\{\varphi_k(t)\}_1^N$ — базис в $\mathfrak{N}_N$, а c_k — нек-рые определенные на X линейные функционалы. Выбор линейно независимой системы $\{\varphi_k(t)\}_1^N$ и набора функционалов $\{c_k\}_1^N$ может определяться той информацией о приближаемой функции $f(t)$, к-рую предполагается использовать при построении линейного метода. Если $c_k(f) = f(t_k)$, где $\{t_k\}_1^N$ — фиксированная система точек в области определения функции $f(t)$ и $\varphi_k(t_i) = 0$ при $i \neq k$, $\varphi_k(t_k) = 1$, то $U_N(f, t_k) = f(t_k)$, $k = 1, \ldots, N$, и имеют интерполяционный метод (напр., интерполяционный многочлен Лагранжа, *интерполяционный сплайн*). Если $X = H$ — гильбертово пространство функций и $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f по ортонормированной системе $\{\varphi_k(t)\}$, то суммы (1) дают линейный метод ортогонального проектирования X на $\mathfrak{N}_N$, причем в этом случае

$$\|f - U_N(f)\|_H = \inf_{\alpha_k} \left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k \right\|_H,$$

т. е. этот метод реализует наилучшее приближение функции f линейными комбинациями функции $\varphi_k(t)$.

В теории л. м. п. функций особое внимание уделяется проблеме сходимости. Пусть X — банахово пространство, $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots\}$ — линейно независимая система функций из X, $\mathfrak{N}_N$ ($N = 1, 2, \ldots$) — подпространства, порожденные первыми N функциями этой системы, U_N ($N = 1, 2, \ldots$) — линейные ограниченные операторы из X в $\mathfrak{N}_N$. Сходимость $U_N(f, t) \to f(t)$ (в смысле $\|U_N f - f\|_X \to 0$ при $N \to \infty$) для любой функции $f(t)$ из X имеет место тогда и только тогда, когда 1) последовательность норм $\|U_N\|$ операторов U_N ограничена (см. *Банаха — Штейнхауза теорема*) и 2) $U_N(f, t) \to f(t)$ для всех функций $f(t)$ из множества A, всюду плотного в X. Эти условия выполняются, в частности, в пространстве 2π-периоди-

ческих функций $\tilde{L}_p = \tilde{L}_p[0, 2\pi]$ при $1 < p < \infty$ для операторов S_n, определяемых суммами Фурье

$$S_n(f, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \qquad (2)$$
$$n = 1, 2, \ldots,$$

функции f по тригонометрич. системе, причем в качестве множества A, на к-ром проверяется условие 2), можно взять множество всех тригонометрич. полиномов. Если же X есть пространство $\tilde{C} = \tilde{C}[0, 2\pi]$ (непрерывных на всей оси с периодом 2π функций) или $\tilde{L}_1$, то $\|S_n\| \sim \ln n$ при $n \to \infty$ (см. *Лебега константы*) и, следовательно, существуют в $\tilde{C}$ и в $\tilde{L}_1$ функции $f(t)$, к к-рым последовательность $\{S_n(f, t)\}$ не сходится в соответствующей метрике. Так как в банаховом пространстве функций X с нормой, инвариантной относительно сдвига, для оператора $U_n^{\perp}$ линейного проектирования X на подпространство T_n тригонометрич. полиномов порядка n справедливо неравенство $\|U_n^{\perp}\| \geqslant \|S_n\|$ (см. [3]), то расходимость на $\tilde{C}$ и $\tilde{L}_1$ имеет место и для последовательности $\{U_n^{\perp}\}$. В частности, это имеет место на $\tilde{C}$ для последовательности интерполяционных операторов Лагранжа по любой треугольной матрице узлов интерполирования. Аналогичные факты отрицательного характера наблюдаются и в непериодич. случае для операторов линейного проектирования пространств $C[a, b]$ и $L_1[a, b]$ на подпространства A_n ($n = 1, 2, \ldots$) алгебраич. многочленов степени n.

Факт расходимости последовательности (2) для некрых функций из $\tilde{C}$ побудил ввести в рассмотрение различные усреднения сумм Фурье, не обладающие таким недостатком. Таковы, напр., *Фейера сумма*, *Бернштейна — Рогозинского метод суммирования*, к-рые являются частным случаем (при определенном выборе числовых множителей $\lambda_k^{(n)}$) полиномов вида

$$U_n^{\lambda}(f, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \qquad (3)$$
$$n = 1, 2, \ldots.$$

Так как

$$U_n^{\lambda}(f, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos k(t-u) \right] f(u)\, du, \qquad (4)$$

то средние (3) входят в весьма широкий класс л. м. п., представимых в виде свертки функции f с нек-рым (сингулярным) ядром, свойствами к-рого (в данном случае свойствами треугольной матрицы чисел $\{\lambda_k^{(n)}\}$) и определяется решение вопроса о сходимости. Если

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_k^{(n)} = 1, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то суммы (3) равномерно сходятся, когда $f(t)$ — тригонометрич. полином, и значит. выполнено условие 2). Для ограниченности норм U_n^{λ}, как операторов из $\tilde{C}$ в $\tilde{C}$, необходимо, чтобы

$$\frac{\lambda_1^{(n)}}{n} + \frac{\lambda_2^{(n)}}{n-1} + \ldots + \frac{\lambda_n^{(n)}}{1} = O(1)$$

и $\lambda_k^{(n)} = O(1)$ равномерно по n и $k = 1, 2, \ldots, n$. Эти условия становятся и достаточными для ограниченности последовательности $\{\|U_n^{\lambda}\|\}$, если наложить на матрицу $\{\lambda_k^{(n)}\}$ нек-рые дополнительные требования (напр., выпуклость или вогнутость по строкам). По аналогии с (3) с помощью матрицы множителей $\{\lambda_k^{(n)}\}$ строятся также средние на базе сумм Фурье — Чебышева (для $f \in C[-1, 1]$), а также на базе интерполя-

ционных полиномов Лагранжа по узлам $2k\pi/(2n+1)$ (в периодич. случае) или по узлам $\cos[(2k-1)\pi/(2n+2)]$ на отрезке $[-1, 1]$ (см., напр., [6]).

Вопрос о сходимости линейных положительных операторов U_n^+, действующих из $C[a, b]$ в A_n или из $\tilde{C}$ в T_n (в частности, операторов вида (4) с положительным ядром), решается на трех пробных функциях (см. [1]): для равномерной сходимости последовательности $U_n^+(f, t)$ к $f(t) \in C[a, b]$ или к $f(t) \in \tilde{C}$ необходимо и достаточно, чтобы это имело место для функций 1, t, t^2 или соответственно для функций 1, $\sin t$, $\cos t$.

Исследование погрешности приближения, доставляемой л. м. п., сводится, чаще всего, к изучению скорости сходимости $U_N(f, t)$ к $f(t)$, оценке погрешности через дифференциально-разностные характеристики приближаемой функции, выяснению вопроса о том, как реагирует л. м. п. на улучшение ее гладкостных свойств.

При оценке аппроксимативных свойств л. м. п. (1) естественным ориентиром служит наилучшее приближение $E(f, \mathfrak{N}_N)_X$ функции f подпространством $\mathfrak{N}_N$. *Лебега неравенство*

$$\|f - S_n(f)\|_{\tilde{C}} \leqslant E(f, T_n)_{\tilde{C}} (\ln n + 3) \qquad (5)$$

показывает в сопоставлении с *Джексона неравенством*

$$E(f, T_n)_{\tilde{C}} \leqslant Mn^{-r}\omega(f^{(r)}, 1/n)$$

($\omega(g, \delta)$ — модуль непрерывности функции $g \in \tilde{C}$), что, хотя порядок приближения суммами Фурье несколько хуже наилучшего ($\ln n$ в (5) нельзя заменить константой), эти суммы реагируют на любое повышение порядка дифференцируемости приближаемой функции. Для нек-рых же л. м. п. порядок приближения не может быть выше определенной величины, сколько бы производных ни имела функция $f(t)$ (эффект насыщения). Так, порядок приближения линейными положительными полиномиальными операторами U_n^+ не может быть выше $O(n^{-2})$; для сумм Фейера порядок насыщения $O(n^{-1})$, для сумм Бернштейна — Рогозинского $O(n^{-2})$. *Интерполяционные сплайны* при определенном выборе узлов склейки обеспечивают наилучший порядок погрешности приближения не только самой функции, но и нек-рых ее первых производных — в зависимости от степени многочленов, из к-рых склеен сплайн (см. [7], [8]).

В отдельных случаях для конкретных л. м. п. найдены точные или асимптотически точные оценки погрешности на классах функций. Видимо, первый нетривиальный результат такого рода был получен А. Н. Колмогоровым, к-рый в 1935 установил, что

$$\sup_{f \in W^r K} \|f - S_n(f)\|_{\tilde{C}} = \frac{4K}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} + O(n^{-r}),$$

где $W^r K$ ($r = 1, 2, \ldots$) — класс функций $f \in \tilde{C}$, у к-рых $f^{(r-1)}(t)$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$ и почти всюду $|f^{(r)}(t)| \leqslant K$. В дальнейшем аналогичного характера результаты были получены для сумм Фурье (и для нек-рых их средних) на других важных классах функций, задаваемых, напр., мажорантой модуля непрерывности r-й производной (см. [2], [6], [9]). Особый интерес представляют л. м. п. (1), в точности реализующие на том или ином классе функций верхнюю грань наилучших приближений подпространством $\mathfrak{N}_N$. Таким свойством для классов $W^r K$ ($r = 1, 2, \ldots$) обладают при определенном выборе $\lambda_k^{(n)}$ суммы вида (3), напр., при $r = 1$ надо положить

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{k\pi}{2n+2} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n+2},$$

а также интерполяционные сплайны порядка $r-1$ дефекта 1 с узлами склейки $k\pi/n$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) (см. [4],

а также *Приближение функций*; экстремальные задачи на классах функций, *Наилучший линейный метод*).

Лит.: [1] Коровкин П. П., Линейные операторы и теория приближений, М., 1959; [2] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [3] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [4] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [5] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [6] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [7] Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и ее приложения, пер. с англ., М., 1972; [8] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976; [9] Степанец А. И., Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Линейные методы, К., 1981.

Н. П. Корнейчук.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ; прямые и обратные теоремы — теоремы и неравенства, устанавливающие связь между дифференциально-разностными свойствами приближаемой функции и величиной (а также поведением) погрешности приближения ее тем или иным методом. Прямые теоремы (п. т.) дают оценку погрешности приближения функции $f(t)$ через ее гладкостные характеристики (наличие производных определенного порядка, модуль непрерывности или модуль гладкости самой функции f или нек-рой ее производной и т. п.). В случае наилучшего приближения полиномами п. т. известны еще как теоремы Джексона [1] и их различные обобщения и уточнения (см. *Джексона неравенство*, *Джексона теорема*). Обратные теоремы (о. т.) характеризуют дифференциально-разностные свойства функций в зависимости от скорости убывания к нулю ее наилучших (или каких-либо других) приближений. Задача получения о. т. приближения функций впервые была поставлена, а в нек-рых случаях и решена С. Н. Бернштейном [2]. Сопоставление п. т. и о. т. позволяет иногда полностью охарактеризовать класс функций, имеющих те или иные гладкостные свойства, с помощью последовательности, напр., наилучших приближений.

Наиболее проста связь между п. т. и о. т. в периодич. случае. Пусть $\tilde{C}$ — пространство непрерывных на всей оси 2π-периодических функций с нормой

$$\|f\|_{\tilde{C}} = \max_t |f(t)|, \qquad E(f, T_n) = \inf_{\varphi \in T_n} \|f - \varphi\|_{\tilde{C}}$$

— наилучшее приближение функции f из $\tilde{C}$ подпространством T_n тригонометрич. полиномов порядка n, $\omega(f, \delta)$ — модуль непрерывности функции $f \in \tilde{C}$; $\tilde{C}^r$ ($r = 1, 2, \ldots$) — множество r раз непрерывно дифференцируемых на всей оси функций из $\tilde{C}$, $\tilde{C}^0 = \tilde{C}$. Прямая теорема: если $f \in \tilde{C}^r$, то

$$E(f, T_{n-1}) \leqslant \frac{M}{n^r}\, \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right), \qquad (1)$$

$$n = 1, 2, \ldots, r = 0, 1, \ldots,$$

где константа M не зависит от n. Более сильное утверждение состоит в том, что можно указать последовательность линейных методов U_n ($n = 0, 1, \ldots$), сопоставляющих функции $f(t)$ из $\tilde{C}$ полином $U_n(f, t) \in T_n$ и таких, что для $f \in \tilde{C}^r$ погрешность $\|f - U_n(f)\|_{\tilde{C}}$ оценивается правой частью (1). Обратная теорема утверждает, что для $f \in \tilde{C}$

$$\omega(f, \delta) \leqslant M\delta \sum_{n=1}^{[1/\delta]} E(f, T_{n-1}), \quad \delta > 0, \qquad (2)$$

где M — абсолютная константа, $[1/\delta]$ — целая часть числа $1/\delta$, а из сходимости при нек-ром натуральном r ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E(f, T_{n-1})$$

следует, что $f\in\tilde{C}^r$, причем аналогично (2) можно оценить $\omega(f^{(r)}, 1/n)$ через $E(f, T_{n-1})$ $(n=1, 2, \ldots)$ (см. [4], [8], [12]). Из этих оценок, в частности, следует, что если

$$E(f, T_{n-1})=O(n^{-r-\alpha}), \quad r=0, 1, \ldots, 0<\alpha\leqslant 1,$$

то $f\in\tilde{C}^r$ и $f^{(r)}(t)$ удовлетворяет при $0<\alpha<1$ условию Гёльдера

$$|f^{(r)}(t')-f^{(r)}(t'')|\leqslant K|t'-t''|^{\alpha}, \tag{3}$$

а при $\alpha=1$ — условию Зигмунда

$$\left|f^{(r)}(t')-2f^{(r)}\left(\frac{t'+t''}{2}\right)+f^{(r)}(t'')\right|\leqslant K|t'-t''|. \tag{4}$$

Обозначив этот класс функций через $K\tilde{H}^{r+\alpha}$, получают его конструктивную характеристику: $f\in K\tilde{H}^{r+\alpha}$ тогда и только тогда, когда

$$E(f, T_{n-1})=O(n^{-r-\alpha}).$$

2π-периодическая функция бесконечно дифференцируема на всей оси в том и только в том случае, если

$$\lim_{n\to\infty} n^r E(f, T_{n-1})=0$$

для любого $r=1, 2, \ldots$.

Аналогичные факты имеют место для приближения периодич. функций в метрике $L_p[0, 2\pi]$ $(1\leqslant p<\infty)$, а также для заданных на всей оси (не обязательно периодич.) функций в случае приближения их целыми функциями конечной степени (см. [7], [8]). Известны п. т. и о. т. для $f\in\tilde{C}^r$, использующие в качестве дифференциально-разностной характеристики модуль гладкости $\omega_k(f, \delta)$ порядка $k=1, 2, \ldots$ приближаемой функции (или нек-рой ее производной) (см. [4], [8]).

Иначе обстоит дело в случае приближения на конечном отрезке. Пусть $C=C[a, b]$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|f\|_C=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|,$$

$C^r=C^r[a, b]$ — множество r раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций, $C^0=C$, $KH^{r+\alpha}[a, b]$ — класс функций, определяемый неравенствами (3) и (4) при $t', t''\in[a, b]$. Для наилучшего приближения

$$E(f, A_{n-1}; a, b)=\inf_{p\in A_{n-1}}\|f-p\|_C, \quad n=1, 2, \ldots,$$

функции $f\in C^r$ подпространством A_{n-1} алгебраич. многочленов степени $n-1$ справедлива оценка вида (1) через модуль непрерывности функции $f^{(r)}$ на $[a, b]$, однако обращение, аналогичное периодич. случаю (с неравенством вида (2)), здесь возможно лишь на отрезке, лежащем внутри интервала (a, b). Напр., если

$$E(f, A_{n-1}; a, b)\leqslant Mn^{-r-\alpha}, \tag{5}$$
$$r=0, 1, \ldots, \quad 0<\alpha\leqslant 1,$$

то можно лишь утверждать, что f принадлежит классу $KH^{r+\alpha}[a_1, b_1]$, определяемому неравенствами (3) (при $0<\alpha<1$) и (4) (при $\alpha=1$) лишь на отрезке $[a_1, b_1]\subset(a, b)$, причем константа K зависит от a, a_1, b_1 и b и может неограниченно увеличиваться, если $a_1\to a$, $b_1\to b$. Существуют функции, не принадлежащие классу $KH^{r+\alpha}[a, b]$, для к-рых, однако,

$$E(f, A_{n-1}; a, b)=O(n^{-r-\alpha}).$$

Напр.,

$$E(\sqrt{1-t^2}, A_{n-1}; -1, 1)<2/\pi n, \quad n=1, 2, \ldots,$$

хотя $\sqrt{1-t^2}\notin KH^{\alpha}$ на $[-1, 1]$ ни при каком $\alpha>1/2$. Оказалось, что алгебраич. многочлены могут, обеспечивая на всем отрезке $[a, b]$ наилучший порядок при-

ближения функции $f \in C$, у **концов отрезка осуществ** лять приближение существенно лучшее (впервые этот феномен был обнаружен С. М. Никольским, см. [3]). Если, в частности, $f \in KH^{r+\alpha}[a, b]$, то при каждом $n > r$ существует многочлен $p_n(t) \in A_{n-1}$ такой, что

$$|f(t) - p_n(t)| \leqslant M\left[\frac{1}{n}\sqrt{(t-a)(b-t)} + \frac{1}{n^2}\right]^{r+\alpha}, \quad (6)$$
$$a \leqslant t \leqslant b,$$

где константа M не зависит ни от n, ни от t.. Это утверждение, в отличие от (5), уже можно обратить: если для $f \in C$ существует последовательность многочленов $p_n(t) \in A_{n-1}$ таких, что при нек-рых $r = 0, 1, \ldots$ и $0 < \alpha \leqslant 1$ выполнено (6), то $f \in KH^{r+\alpha}[a, b]$. Известны п. т. и о. т. для $f \in C^r[a, b]$, использующие модуль непрерывности и модуль гладкости (см. [4], [8]).

П. т., в к-рых даются порядковые оценки погрешности через дифференциально-разностные характеристики приближаемой функции, доказаны для многих конкретных методов приближения (см. [6], [8], [9]), в частности для *сплайнов* (наилучших и интерполяционных [10]).

Известны п. т. и о. т. для приближения в хаусдорфовой метрике (см. [13]). Здесь возникают свои особенности; в частности, характеризация классов функций через их наилучшие хаусдорфовы приближения связана не только с порядком этого приближения, но и с величиной константы в соответствующем неравенстве. О п. т. и о. т. в многомерном случае см. *Приближение функций*; случай многих действительных переменных.

Лит.: [1] Jackson D., Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung, Gött., 1911; [2] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени (1912), Собр. соч., т. 1, М., 1952, с. 11—104; [3] Никольский С. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1946, т. 10, № 4, с. 295—317; [4] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [5] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [6] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [7] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [8] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [9] Коровкин П. П., Линейные операторы и теория приближений, М., 1959; [10] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976; [11] Даугавет И. К., Введение в теорию приближения функций, Л., 1977; [12] Стечкин С. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1951, т. 15, № 3, с. 219—42; [13] Сендов Бл., Хаусдорфовые приближения, София, 1979.

Н. П. Корнейчук.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ; случай многих действительных переменных — случай, когда приближаемая функция f зависит от двух и большего числа переменных:

$$f(t) = f(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ m \geqslant 2$$

(см. *Приближение функций*). По сравнению с одномерным случаем исследование вопросов приближения функций m ($m \geqslant 2$) переменных значительно усложняется ввиду появления принципиально новых обстоятельств, связанных с многомерностью. Прежде всего это касается области, на к-рой осуществляется приближение. Просто связный компакт (в одномерном случае — отрезок) в $\mathbb{R}^m$ (даже на плоскости) может иметь самую разнообразную конфигурацию, и возникает необходимость классифицировать области в зависимости, напр., от гладкостных свойств их границ. Сложности появляются и при описании дифференциально-разностных свойств функций m переменных. Эти свойства могут быть, вообще говоря, различными по разным направлениям, их характеризация должна учитывать как геометрию области определения, так и поведение функции при подходе к границе, так что большое значение приобретает изучение гра-

ничных свойств функций. Если пытаться упростить решение аппроксимационной задачи переходом к области более простой структуры, то возникает проблема возможности продолжения функции f из области $Q \subset \mathbb{R}^m$ в нек-рую содержащую Q канонич. область Q_1 (напр., в параллелепипед или на все пространство $\mathbb{R}^m$) с сохранением тех или иных гладкостных свойств (см. *Продолжения теоремы*). Этот круг вопросов тесно связан с *вложения теоремами*, а также с проблемами, возникающими при решении краевых задач математич. физики.

Увеличение числа независимых переменных, естественно, усложняет и аппарат приближения, ибо увеличивается его размерность при том же, напр., порядке полиномов. Алгебраич. многочлен степени $n_1, \ldots, n_m$ соответственно по переменным $t_1, \ldots, t_m$ имеет вид

$$P_{n_1, \ldots, n_m}(t_1, \ldots, t_m) = \sum a_{k_1, \ldots, k_m} t^{k_1} \ldots t^{k_m} \quad (1)$$

($a_{k_1, \ldots, k_m}$ — действительные коэффициенты, суммирование ведется по k_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, от 0 до n_ν), так что, напр., подпространство многочленов степени 3 по каждому из m переменных имеет размерность 4^m. Иногда фиксируется суммарная степень многочлена n, тогда суммирование в (1) распространено на индексы, удовлетворяющие неравенству $0 \leqslant k_1 + \ldots + k_\nu \leqslant n$. Тригонометрический действительный полином порядка $n_1, \ldots, n_m$ по переменным $t_1, \ldots, t_m$ может быть записан в виде

$$T_{n_1, \ldots, n_m}(t_1, \ldots, t_m) = \sum a_{k_1, \ldots, k_\nu} \exp\left(i \sum_{\nu=1}^{m} k_\nu t_\nu\right),$$

где комплексные коэффициенты $a_{k_1, \ldots, k_m}$ с индексами противоположного знака комплексно сопряжены, а суммирование ведется по k_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, от $-n_\nu$ до n_ν. Этот полином можно также представить в виде линейной комбинации всевозможных произведений вида $\varphi_{k_1}(t)\, \varphi_{k_2}(t_2) \ldots \varphi_{k_m}(t_m)$, где $\varphi_{k_\nu}(t_\nu)$ есть либо $\sin k_\nu t_\nu$ $(0 \leqslant k_\nu \leqslant n_\nu)$, либо $\cos k_\nu t_\nu$ $(0 \leqslant k_\nu \leqslant n_\nu)$. Широкое применение находят многомерные сплайны, «склеенные» до определенной гладкости из «кусков» алгебраич. многочленов m переменных. В случае $m = 2$ наиболее простой вид имеют сплайны, склеенные из многочленов по прямым, параллельным осям координат. В качестве аппарата приближения применяются также функции $g(t_1, \ldots, t_m)$, являющиеся полиномами или сплайнами лишь по нек-рым из переменных. Для приближения непериодич. функций, заданных на всем пространстве $\mathbb{R}^m$ (или на неограниченном множестве из $\mathbb{R}^m$), могут применяться целые функции экспоненциального типа, представимые в виде суммы абсолютно сходящегося степенного ряда

$$G_{n_1, \ldots, n_m}(t_1, \ldots, t_m) = \sum_{k_\nu \geqslant 0,\ \nu = 1, \ldots, m} a_{k_1, \ldots, k_m} t_1^{k_1} \ldots t_m^{k_m} \quad (2)$$

при условии, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех комплексных $t_1, t_2, \ldots, t_m$

$$|G_{n_1, \ldots, n_m}(t_1, \ldots, t_m)| \leqslant M_\varepsilon \exp \sum_{\nu=1}^{m} (n_\nu + \varepsilon)\,|t_\nu|,$$

где константа M_ε зависит только от ε (см. [1]). Следует заметить, что в отличие от полиномов функция (2) определяется бесконечным числом параметров.

В многомерном случае справедлива т е о р е м а В е й е р ш т р а с с а о возможности приблизить непрерывную на ограниченном замкнутом множестве $Q \subset \mathbb{R}^m$ функцию f ($f \in C(Q)$) или непрерывную на всем

пространстве $\mathbb{R}^m$ с периодом 2π по каждому переменному функцию $f\,(f\in\tilde{C}(\mathbb{R}^m))$ алгебраическими (соответственно тригонометрическими) полиномами с любой наперед заданной степенью точности. Аналогичный факт имеет место и в пространствах $L_p(Q)$ и (в периодич. случае) $\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)$ $(1\leqslant p<\infty)$. На линейные нормированные пространства функций m переменных распространяются общие факты и теоремы о свойствах наилучшего приближения, о существовании, единственности и характеристич. свойствах функции наилучшего приближения, а также общие соотношения двойственности для приближения выпуклым множеством и, в частности, подпространством (см. [3], [4]). Однако получение конкретных реализаций этих теорем с учетом конкретной метрики и специфики приближающего подпространства в многомерном случае сопряжено с большими трудностями.

Более полно исследованы вопросы связи порядка убывания наилучших приближений функций многих переменных алгебраическими и тригонометрич. полиномами, а также целыми функциями с гладкостными свойствами приближаемой функции.

Пусть Q — произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^m$ (в частности, $Q=\mathbb{R}^m$), $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор из $\mathbb{R}^m$, $h>0$ и Q_{he} — множество точек $t\in Q$ таких, что отрезок $[t,\ t+he]\subset Q$. Если $f\in L_p(Q)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, то величина

$$\omega_{\boldsymbol{e}}(f;\ \delta)_{L_p(Q)}=\sup_{h\leqslant\delta}\|f\,(t+h\boldsymbol{e})-f\,(t)\|_{L_p(Q_{he})}$$

наз. модулем непрерывности функции $f(t_1,\ \ldots,\ t_m)$ в метрике $L_p(Q)$ по направлению $\boldsymbol{e}$. Величину

$$\omega\,(f;\ \delta)_{L_p(Q)}=\sup_{\boldsymbol{e}}\omega_{\boldsymbol{e}}\,(f;\ \delta)_{L_p(Q)}$$

наз. модулем непрерывности функции f в $L_p(Q)$.

В периодич. случае для наилучших приближений $E_{n_1,\ \ldots,\ n_m}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)}$ тригонометрич. полиномами $\tilde{T}_{n_1,\ \ldots,\ n_m}$ функции $f\in\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)$, имеющей частные (вообще говоря, обобщенные по Соболеву) производные

$$D^{r_\nu}_\nu f=\frac{\partial^{r_\nu}}{\partial t_\nu^{r_\nu}}f\in\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)$$

($r_\nu\geqslant 0$ — целые, $D^0_\nu f=f$, $\nu=1,\ \ldots,\ m$), справедливы оценки

$$\tilde{E}_{n_1,\ \ldots,\ n_m}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)}\leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{\nu=1}^m n_\nu^{-r_\nu}\omega_{\boldsymbol{e}_\nu}\left(D^{r_\nu}_\nu f;\ n_\nu^{-1}\right)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)},\qquad(3)$$

где $\boldsymbol{e}_\nu$ — единичный вектор, направленный вдоль t_ν, а константа M не зависит от f и n_ν. Для функции f из $\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)$, имеющей обобщенные смешанные и несмешанные производные

$$D^{\boldsymbol{r}}f=\frac{\partial^{\boldsymbol{r}}}{\partial t_1^{r_1}\ldots\partial t_m^{r_m}}f\in\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)$$

($\boldsymbol{r}=(r_1,\ \ldots,\ r_m)$) порядка $r=r_1+\ldots+r_m$, имеют место неравенства

$$\tilde{E}_{n,\ \ldots,\ n}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{n^r}\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\omega\left(D^{\boldsymbol{r}}f;\ n^{-1}\right)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)}.\qquad(4)$$

Если

$$\omega\left(D^{\boldsymbol{r}}f;\ \delta\right)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)}\leqslant K\delta^\alpha,\quad 0<\alpha\leqslant 1,$$

т. е. если функции $D^r f$ удовлетворяют *Гёльдера условию*, то

$$\tilde{E}_{n,\ \ldots,\ n}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)} \leqslant \frac{M}{n^{r+\alpha}},\ r=0,\ 1,\ \ldots,\ 0<\alpha\leqslant 1. \quad (5)$$

В последнем случае обратная теорема утверждает, что если для функции $f\in\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)$ при всех $n=1,\ 2,\ \ldots$ справедлива оценка (5), то существуют производные $D^r f\in\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющие при любом $h\in\mathbb{R}^m$ неравенствам

$$\|D^r f(t+h)-D^r f(t)\|_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)}\leqslant K|h|^\alpha, \quad (6)$$

если $0<\alpha<1$, или

$$\|D^r f(t+h)-2D^r f(t)-D^r f(t-h)\|_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^m)}\leqslant K|h|, \quad (7)$$

если $\alpha=1$, где K не зависит от длины $|h|=(h_1^2+\ldots+h_m^2)^{1/2}$ вектора $h=(h_1,\ \ldots,\ h_m)$.

Теоремы, аналогичные приведенным, верны также для непериодич. функций $f\in L_p(\mathbb{R}^m)$, если в качестве аппарата приближения применяются целые функции экспоненциального типа. Приведенные результаты распространяются также на классы функций, гладкость к-рых описывается в терминах модулей непрерывности (модулей гладкости) более высокого порядка (см. [1]).

В случае приближения функций $f\in L_p(Q)$ алгебраич. многочленами $P_{n_1,\ \ldots,\ n_m}$ на ограниченном параллелепипеде (и нек-рых других ограниченных множествах) доказаны прямые теоремы, аналогичные (3), (4) и (5). Обращение этих теорем, как и для функций, заданных на конечном отрезке, возможно лишь на множестве Q_1, лежащем строго внутри Q. Известны обратные теоремы, предполагающие повышение порядка приближения вблизи границы множества Q (см. [13]), а также прямые теоремы, утверждающие возможность такого улучшения вблизи угловых точек (см. [14]). Необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность функции f классу $H_C^{r+\alpha}(Q)$ (определяемому в метрике $C(Q)$ условиями, аналогичными условиям (6), (7)) за счет повышения порядка приближения вблизи границы (как в одномерном случае), неизвестны (1983). Однако имеет место следующий результат отрицательного характера (см. [13]). Пусть $Q=\{t: t\in\mathbb{R}^2,\ |t|\leqslant 1\}$. Не существует ни одной определенной на Q последовательности функций $\lambda_n^{(\alpha)}(|t|)$, $n=1,\ 2,\ \ldots,\ 0<\alpha<1$, обладающей следующими двумя свойствами:

1) для всякой функции f из $H_C^\alpha(Q)$ найдется постоянная M и последовательность многочленов

$$P_n(t)=\sum\nolimits_{0\leqslant k_1+k_2\leqslant n} a_{k_1,\ k_2}^{(n)} t_1^{k_1} t_2^{k_2},\ \ n=1,\ 2,\ \ldots,$$

таких, что

$$|f(t)-P_n(t)|\leqslant M\lambda_n^{(\alpha)}(|t|),\ t\in Q; \quad (8)$$

2) из того, что для определенной на Q функции f существуют постоянная $M>0$ и последовательность многочленов $P_n(t)$, удовлетворяющих неравенству (8), следует, что $f\in H_C^\alpha(Q)$.

В качестве других примеров, отражающих специфику приближения функций многих переменных, можно привести следующие результаты.

Пусть $\tilde{E}_{n_1,n_2}(f)_{\tilde{X}}$ — наилучшее приближение 2π-периодической функции f двух переменных тригонометрич. полиномами T_{n_1,n_2} в метрике $\tilde{X}$ ($\tilde{X}=\tilde{C}(\mathbb{R}^2)$ или $\tilde{X}=\tilde{L}_p(\mathbb{R}^2)$), а $\tilde{E}_{n_1,\infty}(f)_{\tilde{X}}$ — наилучшее приближение f в $\tilde{X}$ функциями $T_{n_1,\infty}$, являющимися тригонометрич. полиномами порядка n_1 по переменному t_1,

коэффициенты к-рых суть функции от t_2. Аналогично определяются величины $\tilde{E}_{\infty,\, n_2}(f)_{\tilde{X}}$.

Если $1<p<\infty$, то выполняются неравенства

$$\tilde{E}_{n_1, n_2}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^2)} \leqslant A_p \left(\tilde{E}_{n_1, \infty}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^2)} + E_{\infty, n_2}(f)_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^2)}\right),$$

где A_p зависит лишь от p.

Если же $\tilde{X}=\tilde{L}_1(\mathbb{R}^2)$ или $\tilde{X}=\tilde{C}(\mathbb{R}^2)$, то

$$\tilde{E}_{n_1, n_2}(f)_{\tilde{X}} \leqslant A \ln(2+\min\{n_1, n_2\})\,(\tilde{E}_{n_1, \infty}(f)_{\tilde{X}} + \tilde{E}_{\infty, n_2}(f)_{\tilde{X}}), \qquad (9)$$

где A — абсолютная постоянная, и множитель $\ln(2+\min\{n_1, n_2\})$ в неравенстве (9) нельзя заменить ни на какой другой, растущий при $\min\{n_1, n_2\}\to\infty$ по порядку медленнее (см. [15]).

Принципиальные особенности возникают в задачах интерполирования функций многих переменных. Напр., существование алгебраического интерполяционного многочлена в отличие от одномерного случая существенно зависит от расположения узлов интерполяции. Разработаны, тем не менее, эффективные способы построения полиномов и сплайнов, интерполирующих функцию $f(t_1, \ldots, t_m)$ на определенным образом выбранной сетке узлов (см. *Интерполирование*), Для многомерных интерполяционных сплайнов в ряде случаев найдены порядковые оценки погрешности приближения как самой функции f, так и ее частных производных, более детально исследованы в этом направлении двумерные сплайны малого порядка, а также локальные (эрмитовы) сплайны любого порядка (см. [7], [10] — [12]). Среди других линейных методов приближения функций многих переменных сравнительно лучше исследованы кратные суммы Фурье и их различные средние. Здесь известны порядковые оценки приближения на классах функций, в нек-рых случаях найдена точная асимптотика (см. [5], [6], [8]).

Лит.: [1] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [2] Гутер Р. С., Кудрявцев Л. Д., Левитан Б. М., Элементы теории функций, М., 1963, с. 106—98; [3] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [4] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [5] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [6] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [7] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976; [8] Степанец А. И., Равномерное приближение тригонометрическими полиномами. Линейные методы, К., 1981; [9] Лоран П.-Ж., Аппроксимация и оптимизация, пер. с франц., М., 1975; [10] Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и ее приложения, пер. с англ., М., 1972; [11] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л., Методы сплайн-функций, М., 1980; [12] Варга Р., Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе, пер. с англ., М., 1974; [13] Никольский С. М., «Сиб. матем. ж.», 1969, т. 10, № 5, с. 1075—1083; [14] Брудный Ю. А., «Докл. АН СССР», 1970, т. 195, № 5, с. 1007—09; [15] Темляков В. Н., «Докл. АН СССР», 1975, т. 223, с. 1079—82. *В. Н. Коновалов, Н. П. Корнейчук.*

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ; экстремальные задачи на классах функций — задачи, связанные с отысканием верхней грани погрешности приближения на фиксированном классе функций и с выбором для него наилучшего в том или ином смысле аппарата приближения. Начало исследованиям по экстремальным задачам П. ф. положили работы А. Н. Колмогорова (см. [1] — [2]), Ж. Фавара (см. [3] — [4]) и С. М. Никольского (см. [5]—[6]). Широкое развитие эти исследования получили начиная с 50-х гг. 20 в.; они стимулировались потребностями вычислительной математики, все больше сталкивавшейся с задачами оптимизационного содержания.

Если в нормированном функциональном пространстве X рассматривается П. ф. из класса $\mathfrak{M}$ функциями

фиксированного множества $\mathfrak{N}\subset X$, то интерес представляют задачи отыскания величин

$$E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_X = \sup_{f\in\mathfrak{M}} E(f, \mathfrak{N})_X, \qquad (1)$$

где

$$E(f, \mathfrak{N})_X = \inf_{\varphi\in\mathfrak{N}} \|f-\varphi\|_X$$

— наилучшее приближение функции $f(t)$ множеством $\mathfrak{N}$, а также

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, U)_X = \sup_{f\in\mathfrak{M}} \|f-Uf\|_X, \qquad (2)$$

где U — нек-рый конкретный метод приближения, задаваемый тем или иным оператором, действующим из X в $\mathfrak{N}$. С геометрич. точки зрения верхняя грань (1) характеризует величину уклонения множества $\mathfrak{M}$ от $\mathfrak{N}$ в метрике X. Практич. смысл величины $E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_X$ можно видеть в том, что она, во-первых, дает минимально возможную оценку сверху для наилучшего приближения множеством $\mathfrak{N}$ функции, о к-рой известно только, что она принадлежит классу $\mathfrak{M}$, а во-вторых, является определенным ориентиром при оценке и сравнении аппроксимативных возможностей конкретных методов приближения на классе $\mathfrak{M}$. Что касается величины (2), то наиболее важным является случай, когда $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_N$ есть N-мерное подпространство, U — линейный метод приближения. Известен целый ряд точных и асимптотически точных результатов по приближению классов функций конкретными линейными методами (в частности, полиномами и сплайнами) (см. [1]—[12], [19]), но особый интерес вызывают методы, реализующие точную нижнюю грань

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N)_X = \inf_{U\,X\subset\mathfrak{N}_N} \mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N, U)_X, \qquad (3)$$

распространенную на все линейные ограниченные операторы U из X в $\mathfrak{N}_N$, т. е. линейные методы, наилучшие для класса $\mathfrak{M}$. Ясно, что всегда

$$E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N)_X \leqslant \mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N)_X,$$

и, естественно, возникает вопрос о возможности здесь знака равенства. Помимо тривиального случая, когда X — гильбертово пространство функций и наилучшее приближение каждой функции доставляют суммы Фурье по ортонормированному базису $\mathfrak{N}_N$, известны ситуации в негильбертовом пространстве, когда линейный метод реализует наилучшее приближение на всем классе $\mathfrak{M}$.

Так, если X — пространство 2π-периодических функций $\tilde{L}_p=\tilde{L}_p[0,\ 2\pi]$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, $\mathfrak{N}^T_{2n-1}$ — подпространство тригонометрич. полиномов порядка $n-1$ $(\dim\mathfrak{N}^T_{2n-1}=2n-1)$, $M\tilde{W}^r_p (r=1, 2, \ldots)$ — класс функций $f\in\tilde{L}_p$, у к-рых $f^{(r-1)}(t)$ абсолютно непрерывна на $[0,2\pi]$ и $\|f\|_{\tilde{L}_p}\leqslant M$, то

$$E(M\tilde{W}^r_p,\ \mathfrak{N}^T_{2n-1})_{\tilde{L}_p} = \mathcal{E}(M\tilde{W}^r_p,\ \mathfrak{N}^T_{2n-1})_{\tilde{L}_p} = MK_r n^{-r},$$

$$p=1,\ \infty;\ n,\ r=1,\ 2,\ \ldots,$$

где K_r — константы Фавара, причем наилучшее приближение на классах $M\tilde{W}^r_1$ и $M\tilde{W}^r_\infty$ реализует линейный метод U^{λ}_{n-1}, построенный на базе сумм Фурье (см. *Приближение функций*; линейные методы приближения, формула (3)) при определенном выборе множителей $\lambda^{(n-1)}_k=\lambda^{(n-1)}_k(r)$. Построены линейные операторы со значениями в $\mathfrak{N}^T_{2n-1}$, реализующие верхнюю грань наилучших приближений на классах сверток, включающих, в частности, классы $M\tilde{W}^r_\infty$ и $M\tilde{W}^r_1$ с дробными $r>0$, а также классы сопряженных функций (см. [10], [11]).

Для приближения подпространством S_{2n}^m 2π-периодических сплайнов порядка m дефекта 1 с узлами склейки $k\pi/n$ ($\dim S_{2n}^m = 2n$) справедливы равенства

$$E\left(M\tilde{W}_p^r,\ S_{2n}^{r-1}\right)_{\tilde{L}_p} = \mathcal{E}\left(M\tilde{W}_p^r,\ S_{2n}^{r-1}\right)_{\tilde{L}_p} = MK_r n^{-r},$$

$$p = 1,\ \infty;\ n,\ r = 1,\ 2,\ \ldots;$$

наилучшим линейным методом здесь являются сплайны $\sigma_{r-1}(f,\ t)$ из S_{2n}^{r-1}, интериолирующие функцию $f(t)$ в точках $k\pi/n$, если r четно, и в точках $k\pi/n + \pi/2n$, если r нечетно. Относительно класса $M\tilde{W}_\infty^r$ эти сплайны обладают исключительными аппроксимативными свойствами, т. к. наилучшим образом приближают функции $f(t) \in M\tilde{W}_\infty^r$ в любой метрике $\tilde{L}_p$ (см. [7]).

Перечисленные случаи, когда величины (1) и (3) совпадают и удается построить конкретный линейный метод, решающий сразу обе задачи, являются, в известном смысле, идеальными. В других ситуациях эффективным при решении задачи (1) оказывается подход, основанный на использовании общих теорем двойственности, отражающих фундаментальные соотношения геометрии выпуклого анализа (см. [7], [8]). Если, напр., X — произвольное линейное нормированное пространство, X^* — ему сопряженное, $\mathfrak{N}$ — выпуклое множество в X, то для любого элемента $x \in X$

$$\inf_{u \in \mathfrak{N}} \|x - u\| = \sup_{F \in X^*,\ \|F\| \leqslant 1} [F(x) - \sup_{u \in \mathfrak{N}} F(u)]; \quad (4)$$

в частности, если $\mathfrak{N}$ — подпространство, то

$$\inf_{u \in \mathfrak{N}} \|x - u\| = \sup \{F(x):\ F \in X^*,\ \|F\| \leqslant 1,$$

$$F(u) = 0\ \ \forall u \in \mathfrak{N}\}. \quad (5)$$

Соотношения (4) или (5) позволяют в ряде случаев свести вычисление или оценку верхней грани (1) к более обозримой задаче на экстремум явно задаваемого функционала на нек-ром множестве функций, связанных, если $\mathfrak{N}$ — подпространство, условиями ортогональности. Например, используя (5), оценку $E\left(\tilde{W}_q^r,\ \mathfrak{N}_{2n-1}^T\right)_{\tilde{L}_p}$ $(1 \leqslant p,\ q \leqslant \infty)$ можно свести с помощью известных неравенств к вычислению верхней грани норм $\|g\|_{q'}$ $(q' = q/(q-1))$ на множестве функций $g \in \tilde{W}_{p'}^r (p' = p/(p-1))$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} g(t) \begin{matrix} \cos kt \\ \sin kt \end{matrix} dt = 0,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Более тонкая ситуация возникает, если задача (1) решается на классах, задаваемых ограничениями не на норму r-й производной $f^{(r)}(t)$, а на ее модуль непрерывности $\omega(f^{(r)},\ \delta)_X$, в частности когда $\mathfrak{M} = \tilde{W}^r H^\omega$ $(r = 0,\ 1,\ \ldots;\ \tilde{W}^0 H^\omega = \tilde{H}^\omega)$ — класс 2π-периодических функций $f \in \tilde{C}^r$ $(\tilde{C}^0 = \tilde{C})$, у к-рых

$$\omega(f^{(r)},\ \delta)_C = \omega(f^{(r)},\ \delta) \leqslant \omega(\delta),$$

где $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности, напр. $\omega(\delta) = M\delta^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1,\ 0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$. Здесь применение (5) требует использования тонких свойств дифференцируемых периодич. функций типа теорем сравнения и *Колмогорова неравенств* (для норм производных), но описываемых с помощью аппарата перестановок (равноизмеримых функций). При условии выпуклости вверх $\omega(\delta)$ справедливы равенства (см. [7], [13])

$$E\left(\tilde{W}^r H^\omega,\ \mathfrak{N}_{2n-1}^T\right)_X = E\left(\tilde{W}^r H^\omega,\ S_{2n}^r\right)_X = \|f_{nr}(\omega)\|_X,$$

$$n = 1,\ 2,\ \ldots;\ r = 0,\ 1,\ \ldots,$$

где $X = \tilde{C}$ или $\tilde{L}_1$, $f_{nr}(\omega,\ t)$ — функция из $\tilde{W}^r H^\omega$ периода $2\pi/n$ с нулевым средним значением на периоде,

у к-рой $f^{(r)}(\omega,\ t)$ четна, равна $|\omega(\pi/n-2t)|/2$ на $[0,\ \pi/2n]$ и равна $-|\omega(2t-\pi/n)|/2$ на $[\pi/2n,\ \pi/n]$. Нормы $\|f_{nr}(\omega)\|_X$ допускают явное выражение, напр.:

$$\|f_{n0}(\omega)\|_{\tilde{C}}=\frac{1}{2}\,\omega(\pi/n),$$

$$\|f_{nr}(\omega)\|_{\tilde{C}}=\frac{1}{2n^r}\int_0^{\pi}\Phi_r(\pi-t)\,\omega(t/n)\,dt,\ r=1,\ 2,\ \ldots,$$

где функции $\Phi_k(t)$ задаются на $[0,\ \pi]$ рекуррентно:

$$\Phi_1(t)=\frac{1}{2},$$

$$\Phi_k(t)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi-t}\Phi_{k-1}(u)\,du.$$

Решение задач о наилучшем для класса $\tilde{W}^rH^\omega$ линейном методе из $\tilde{C}$ в $\mathfrak{N}_{2n-1}^T$ или в S_{2n}^r известно в случае $\omega(\delta)=M\delta$ $(0\leqslant\delta\leqslant\pi)$, т. е. когда $\tilde{W}^rH^\omega=M\tilde{W}_\infty^{r+1}$. Интерполяционные сплайны $\sigma_r(f,\ t)$ из S_{2n}^r реализуют верхнюю грань $E(\tilde{W}^rH^\omega,\ S_{2n}^r)_{\tilde{C}}$ (при любом выпуклом $\omega(\delta)$) лишь в случае $r=1$.

При решении экстремальных задач на классах функций, заданных на конечном отрезке и не связанных жесткими краевыми условиями, нельзя ждать результатов в столь совершенном, как в периодич. случае, виде: на экстремальных функциях сказывается возмущающее действие концов промежутка, к-рое усугубляется с увеличением порядка дифференцируемости. Здесь известны нек-рые результаты с точной асимптотикой. Если $MW^rH^\alpha(r=0,1,\ldots;\ 0<\alpha\leqslant1,\ MW^0H^\alpha=MH^\alpha)$ — класс функций $f(t)\in C^r[-1,\ 1]$, у к-рых

$$|f^{(r)}(t')-f^r(t'')|\leqslant M\,|t'-t''|^\alpha\ (t',\ t''\in[-1,\ 1]),$$

то для наилучшего равномерного на $[-1,\ 1]$ приближения подпространством $\mathfrak{N}_n^A$ алгебраич. многочленов степени $n-1$ имеют место соотношения

$$\lim_{n\to\infty}n^\alpha E\left(MH^\alpha,\ \mathfrak{N}_n^A\right)_C=M\pi^\alpha/2, \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}n^{r+\alpha}E\left(MW^rH^\alpha,\ \mathfrak{N}_n^A\right)_C=$$

$$=\frac{M}{2}\int_0^{\pi}\Phi_r(\pi-t)\,t^\alpha\,dt,\quad r=1,\ 2,\ \ldots, \tag{7}$$

к-рые полезно сравнить с соответствующими результатами в периодич. случае; при $\alpha=1$ правые части (6) и (7) равны соответственно MK_1 и MK_{r+1}. Отказавшись от многочленов наилучшего приближения, можно усилить эти результаты, существенно улучшив приближение у концов отрезка $[-1,\ 1]$ без потери наилучшей асимптотики на всем промежутке. Напр., для любой $f\in MH^\alpha$ существует последовательность алгебраич. многочленов $p_n(f,\ t)\in\mathfrak{N}_n^A$ таких, что равномерно по $t\in[-1,\ 1]$ при $n\to\infty$

$$|f(t)-p_n(f,\ t)|\leqslant\frac{M}{2}\left[\left(\frac{\pi}{n}\sqrt{1-t^2}\right)^\alpha+o(n^{-\alpha})\right]=$$

$$=E\left(MH^\alpha,\ \mathfrak{N}_n^A\right)_C[(1-t^2)^{\alpha/2}+o(1)].$$

Аналогичный факт имеет место для функций классов MW^rH^1 $(r=1,\ 2,\ \ldots)$ (см. [11]). В задачах приближения сплайнами (наилучшими и интерполяционными) классов функций, заданных на отрезке, известны нек-рые точные (гл. обр., для сплайнов малого порядка) и асимптотически точные результаты (см. [15]).

В случае одностороннего приближения (в интегральной метрике) известен ряд точных результатов по оценке погрешности наилучшего приближения полиномами и сплайнами на введенных выше классах функций (см. [19]). При их получении существенно использовались соотношения двойственности для наилучшего

приближения при наличии ограничений, задаваемых с помощью конуса.

Отыскание наилучшего аппарата приближения (фиксированной размерности) для данного класса функций $\mathfrak{M}$ приводит к задачам о поперечниках: найти величины (см. (1) и (3))

$$d_N(\mathfrak{M},\ X)=\inf_{\mathfrak{N}_N} E(\mathfrak{M},\ \mathfrak{N}_N)_X,$$

$$d'_N(\mathfrak{M},\ X)=\inf_{\mathfrak{N}_N} \mathcal{E}(\mathfrak{M},\ \mathfrak{N}_N)_X,$$

где нижние грани берутся по всем подпространствам $\mathfrak{N}_N$ из X (и их сдвигам) размерности N, а также указать экстремальные (наилучшие) подпространства, реализующие эти нижние грани. Оценки сверху для d_N и d'_N дают найденные для конкретных подпространств $\mathfrak{N}_N$ величины $E(\mathfrak{M},\ \mathfrak{N}_N)_X$ и $\mathcal{E}(\mathfrak{M},\ \mathfrak{N}_N)_X$, основная трудность в задаче о поперечнике обычно состоит в получении точных оценок снизу. В ряде ситуаций получить такие оценки удается, привлекая топологич. соображения, в частности теорему Борсука об антиподах (см. [8]). Практически во всех случаях точного решения задачи о наилучшем приближении классов $M\tilde{W}^r_p$ и $\tilde{W}^r H^\omega$ периодич. функций подпространствами $\mathfrak{N}^T_{2n-1}$ (тригонометрич. полиномов порядка $n-1$) и S^m_{2n} (сплайнов нек-рого порядка m дефекта 1 по разбиению $k\pi/n$) найденные точные верхние грани $E(\mathfrak{M},\ \mathfrak{N}_N)_X$ дают и значения поперечников d_N этих классов, причем оказалось, что для периодич. классов $d_{2n-1}=d_{2n}$. В частности (см. [7], [8]),

$$d_{2n-1}(\tilde{W}^r_\infty,\ \tilde{C})=d_{2n}(\tilde{W}^r_\infty,\ \tilde{C})=d_{2n-1}(\tilde{W}^r_1,\ \tilde{L}_1)=$$
$$=d_{2n}(\tilde{W}^r_1,\ \tilde{L}_1)=K_r n^{-r},$$
$$n,\ r=1,\ 2,\ \ldots,$$

а при выпуклом вверх $\omega(\delta)$ и $X=\tilde{C}$ или $\tilde{L}_1$

$$d_{2n-1}(\tilde{W}^r H^\omega,\ X)=d_{2n}(\tilde{W}^r H^\omega,\ X)=\|f_{nr}(\omega)\|_X,$$
$$n=1,\ 2,\ \ldots;\ r=0,\ 1,\ \ldots$$

Следует отметить, что подпространство $\mathfrak{N}^T_{2n-1}$ является наилучшим для рассматриваемых классов при всех r и никакое подпространство размерности $2n$ не дает на этих классах лучшее приближение, чем $\mathfrak{N}^T_{2n-1}$ (имеющее размерность $2n-1$). Подпространство сплайнов S^m_{2n} является наилучшим для классов $\tilde{W}^{r+1}_\infty$ и $\tilde{W}^r H^\omega$ в $\tilde{C}$ при $m=r$ и для класса $\tilde{W}^{r+1}_p$ в $\tilde{L}_1$ при $m\geqslant r$. Линейные поперечники d'_N классов $\tilde{W}^r_\infty$ в $\tilde{C}$ и $\tilde{W}^r_1$ в $\tilde{L}_1$ совпадают с d_N, они реализуются на подпространствах $\mathfrak{N}^T_{2n-1}$ и S^{r-1}_{2n} наилучшими линейными методами, о к-рых упоминалось выше. Поперечники d_N и d'_N класса $\tilde{W}^r_2$ в $\tilde{L}_2$ при $N=2n-1$ и $N=2n$ равны и реализуются суммами Фурье по тригонометрич. системе. Для поперечников классов функций, заданных на отрезке, в ряде случаев известна точная асимптотика; поперечники d_N и d'_N классов W^r_∞ в $C[-1,\ 1]$ совпадают и реализуются интерполяционными сплайнами порядка $r-1$ по неравномерному разбиению (см. [8]).

Задачу оценки погрешности приближения на множестве X^r r-х интегралов от функций из X (не являющемся локально компактным) можно сделать корректной, если оценивать для $f\in X^r$ при фиксированном $\gamma>0$ величину

$$E(f,\ \mathfrak{N}_N)_X/\omega(f^{(r)},\ \gamma)_X$$

($\omega(g,\ \delta)_X$ — модуль непрерывности функции g в пространстве X) или (в случае приближения конкретным методом) величину

$$\|f-U_N f\|_X/\omega(f^{(r)},\ \gamma)_X.$$

Отыскание точных верхних граней этих величин на множестве X^r равносильно нахождению наименьшей константы в соответствующем *Джексона неравенстве*; можно затем говорить о минимизации по всем подпространствам размерности N. В ряде случаев эти задачи решены. Напр., в неравенстве

$$E(f, S^r_{2n})_{\tilde{C}} \leqslant M_r n^{-r} \omega(f^{(r)}, \pi/n)_{\tilde{C}}, \quad f \in \tilde{C}^r,$$

наименьшая константа $M_r = K_r/2$, причем она не может быть уменьшена, если S^r_{2n} заменить любым другим подпространством той же размерности (см. [14]). Известны точные константы в неравенстве Джексона для приближения тригонометрич. полиномами в равномерной и интегральной метрике (см. [7]). В непериодич. случае есть результаты с точной асимптотикой.

Среди экстремальных задач, в к-рых приближающее множество, не будучи линейным многообразием, является выпуклым множеством, интерес представляют задачи наилучшего приближения одного класса функций $\mathfrak{M}$ другим классом $\mathfrak{M}_1$ с лучшими, в том или ином смысле, гладкостными свойствами. Сначала такая задача возникла как промежуточная при получении точной оценки для

$$E(\tilde{H}^\omega, \mathfrak{N}^T_{2n-1})_{\tilde{C}} \quad (\mathfrak{M} = \tilde{H}^\omega, \ \mathfrak{M}_1 = M\tilde{W}^1_\infty)$$

(см. [7]); в дальнейшем ее стали рассматривать как самостоятельную, причем в ряде случаев использование соотношения (4) позволило получить точный результат.

При

$$\mathfrak{M} = M_1 W^r_p,$$

$$\mathfrak{M}_1 = M_2 W^k_q \ (0 < r < k).$$

здесь обнаруживается связь с задачами о неравенствах между нормами производных и о наилучшем приближении оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами (см. [16]).

Многие экстремальные задачи приближения функций можно интерпретировать как задачи оптимального восстановления (см. [15], [17], [18]). Пусть информация о функции $f \in X$ задается вектором $T(f, \Lambda) = \{\lambda_1(f), \ldots, \lambda_n(f)\}$, где λ_k — заданные на X функционалы (напр., значения функции $f(t)$ или (и) нек-рых ее производных в фиксированных точках). Зная, что f принадлежит классу $\mathfrak{M}$, требуется по информации $T(f, \Lambda)$ восстановить с наименьшей погрешностью функцию f или значение $L(f)$ на ней нек-рого линейного функционала (напр., $L(f) = f(\overline{t})$, $L(f) = \int_a^b f(t)dt$ и т. п.). Минимизация может предполагаться не только по методам S, сопоставляющим вектору $T(f, \Lambda)$ функцию $\varphi(t) \approx f(t)$ (или функционал $l(f) \approx L(f)$), но также и по наборам функционалов λ_k ($k = 1, \ldots, N$). В зависимости от выбора меры погрешности и класса методов S задача оптимального восстановления функции может быть иногда сведена к отысканию поперечников d_N или d'_N, чебышевского центра или других характеристик класса $\mathfrak{M}$. Оптимальное восстановление интеграла $\int_a^b f(t)dt$ по информации вида $\{f(t_k)\}$ или $\{f^{(\nu)}(t_k)\}$ приводит к задаче о наилучшей квадратурной формуле для класса $\mathfrak{M}$. Наилучший аппарат восстановления в ряде случаев доставляют сплайны; так, напр., сплайны $\sigma_{r-1}(f, t)$ из S^{r-1}_{2n}, интерполирующие в равностоящих точках t_k, восстанавливают функции f из $\tilde{W}^r_\infty$ по информации $\lambda_k(f) = f(t_k)$ в каждой точке $t \neq t_k$ с минимально возможной на всем классе $\tilde{W}^r_\infty$ погрешностью.

В пространствах функций двух и большего числа переменных, если не считать тривиального случая приближения в гильбертовом пространстве, точных решений экстремальных задач почти нет (1983). В немногих

случаях известны асимптотически точные соотношения для погрешности равномерного приближения классов функций суммами Фурье и нек-рыми их средними (см. [12]).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Ann. Math.», 1935, v. 36, № 2, с. 521—26; [2] его же, там же, 1936, v. 37, № 1, p. 107—10; [3] Favard J., «C. r. Acad. sci.», 1936, t. 203, p. 1122—24; [4] его же, «Bull. sci. math.», 1937, t. 61, p. 209—24, 243—56; [5] Никольский С. М., «Тр. МИАН СССР», 1945, т. 15, с. 1—76; [6] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1946, т. 10, с. 207—56; [7] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [8] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [9] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [10] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [11] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [12] Степанец А. И., Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Линейные методы, К., 1981; [13] Корнейчук Н. П., «Матем. заметки», 1976, т. 20, № 5, с. 655—64; [14] его же, «Укр. матем. журн.», 1979, т. 31, № 4, с. 380—88; [15] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1981, т. 45, № 2, с. 266—90; [16] Арестов В. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1975, т. 138, с. 3—28; [17] Великин В. Л., «Матем. заметки», 1977, т. 22, № 5, с. 663—70; [18] Лигун А. А., «Anal. Math.», 1979, v. 5, № 4, p. 269—86; [19] Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г., Аппроксимация с ограничениями, К., 1982.

Н. П. Корнейчук.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО — раздел комплексного анализа, изучающий вопросы приближенного представления (аппроксимации) функций комплексного переменного посредством аналитич. функций специальных классов. Основными в теории П. ф. к. п. являются задачи о возможности приближения, скорости приближения и об аппроксимационных свойствах различных способов представления функций (интерполяционных последовательностей и рядов, рядов по ортогональным многочленам и многочленам Фабера, разложений в непрерывные дроби и аппроксимаций Паде, последовательностей полиномов из экспонент и рядов Дирихле и т. п.). Теория П. ф. к. п. тесно связана с другими разделами комплексного анализа и математики в целом; в теории приближений важную роль играют методы и результаты конформных отображений, интегральные представления, теория потенциала, теория функциональных алгебр и др.

Центральная проблематика теории П. ф. к. п. относится к приближению функций многочленами и рациональными функциями, в частности многочленами и рациональными функциями наилучшего приближения (существование, характеристич. свойства, единственность), а также экстремальные задачи и различные оценки для многочленов и рациональных функций (оценки роста, неравенства для производных, многочлены и рациональные функции, наименее уклоняющиеся от нуля, и т. п.).

А. А. Гончар.

Приближение функций комплексного переменного многочленами и рациональными функциями. В этом разделе теории П. ф. к. п. можно выделить несколько направлений.

1) Изучение возможности приближения функции $f(z)$ комплексного переменного z с любой наперед заданной точностью посредством многочленов и рациональных функций от z в зависимости от свойств того множества E, на к-ром задана f и на к-ром происходит приближение, от свойств метрики уклонения ρ и, наконец, от свойств самой функции f.

2) Изучение свойств многочленов и рациональных функций наилучшего приближения, т. е. таких многочленов $P_n(z; f, E, \rho)$ и рациональных функций $R_n(z; f, E, \rho)$ степени не выше n, $n=0, 1, \ldots$, для к-рых

$$\rho(f, P_n(z; f, E, \rho)) = E_n(f, E, \rho) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\rho(f, P) : \deg P \leqslant n\},$$

$$\rho(f, R_n(z; f, E, \rho)) = R_n(f, E, \rho) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\rho(f, R) : \deg R \leqslant n\},$$

где нижние грани берутся соответственно по всем многочленам $P(z)$ степени $\deg P \leqslant n$ и рациональным функциям $R(z)$ степени $\deg R \leqslant n$ (либо по части множества таких многочленов или рациональных функций, выделяемой какими-либо дополнительными условиями). По существу здесь идет речь о свойствах решений нек-рого класса экстремальных задач. Сюда можно отнести также изучение и других экстремальных задач на множествах многочленов, рациональных функций и на нек-рых классах аналитич. функций, а также исследования аналитич. свойств многочленов и рациональных функций (в частности, получение неравенств между различными нормами этих функций и их производных).

3) Изучение зависимости скорости убывания к нулю величин $E_n(f, E, \rho)$ и $R_n(f, E, \rho)$ при $n \to \infty$ от свойств f, E и ρ (так наз. п р я м ы е т е о р е м ы теории приближения) и зависимости свойств функции f от скорости убывания $E_n(f, E, \rho)$ или $R_n(f, E, \rho)$ к нулю при $n \to \infty$ и свойств E и ρ (о б р а т н ы е т е о р е м ы). С этим направлением неразрывно связано изучение возможностей известных методов П. ф. к. п. (таких, как ряды по *Фабера многочленам*, различные *интерполяционные процессы* и т. п.) и отыскание новых эффективных методов приближения.

4) Приближение функций нескольких комплексных переменных. Здесь решаются в основном те же задачи, что и в случае одного переменного, однако результаты и методы их получения, как правило, резко отличаются от случая одного переменного.

Ниже отмечены нек-рые основные результаты.

1) Задачу о возможности сколь угодно хорошего равномерного приближения многочленами решают *Рунге теорема* (в случае аналитичности f на E), *Лаврентьева теорема* (непрерывность f на E), *Келдыша теорема* (E — замкнутая область, f непрерывна на E и аналитична внутри E), *Мергеляна теорема* (в общем случае: E — компакт, f непрерывна на E и аналитична во внутренних точках E).

2) Задачу о возможности приближения голоморфной функции на замкнутом подмножестве E расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ решает теорема Рунге. При изучении возможности приближения функций f из различных пространств в метрике этих пространств посредством рациональных функций важную роль играют количественные характеристики множеств $e \subset \mathbb{C}$, аналогичные *аналитической емкости* $\gamma(e)$. В терминах $\gamma(e)$ задача об описании компактов E, на к-рых любая непрерывная функция с любой точностью приближается рациональными функциями, решается следующим образом: необходимо и достаточно выполнение либо условия

(а) $\gamma(\sigma(r, a) \setminus E) = \gamma(\sigma(r, a)) = r$

для любого круга $\sigma(r, a) = \{z : |z-a| < r\}$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$; либо условия

(б) $\overline{\lim\limits_{r \to 0}}\, r^{-2}\gamma(\sigma(r, a) \setminus E) = \infty$

для любого $a \in E$ (эквивалентность условий (а) и (б) выражает т. н. «неустойчивость» аналитической емкости).

3) Если E ограничено и измеримо по Лебегу и $1 \leqslant p < 2$, то множество всех рациональных функций плотно в пространстве $L^p(E)$.

4) Если $p > 0$, G — односвязная область с жордановой спрямляемой границей, то семейство всех многочленов от z плотно в *Смирнова классе* $E_p(G)$ тогда и только тогда, когда G — *Смирнова область*.

5) Пусть комплекснозначные функции $\varphi_1(z)$, ..., $\varphi_n(z)$, $f(z)$ непрерывны на компакте $E \subset \mathbb{C}$, $n \geqslant 1$. Среди всех обобщенных полиномов вида

$$P(z) = c_1\varphi_1(z) + \ldots + c_n\varphi_n(z)$$

($c_1, \ldots, c_n$ — произвольные комплексные числа) обобщенный полином $P_0(z)$ является наименее уклоняющимся от f по метрике

$$\rho_C(f, P) = \max\{|f(z) - P(z)| : z \in E\}$$

тогда и только тогда, когда

$$\min\{\operatorname{Re}[P(z)(P_0(z) - f(z))] : z \in E, \; |f(z) - P_0(z)| = \rho_C(f, P_0)\} \leqslant 0$$

для каждого $P(z)$.

6) Если E — компакт со связным дополнением G и в G существует *Грина функция* (первой краевой задачи для уравнения Лапласа) $g(z, \infty)$ с полюсом в ∞, то при $z \in G$ для любого многочлена $P(z)$ степени n справедливо неравенство

$$|P(z)| \leqslant M \exp\{n g(z, \infty)\}, \quad M = \max\{|P(z)| : z \in E\}.$$

7) Если E — ограниченный невырожденный континуум со связным дополнением G, $f(z)$ непрерывна на E с модулем непрерывности $\omega(\delta)$ и аналитична во внутренних точках E, то

$$E_n(f, E, \rho_C) \leqslant C(f)\, \omega\left(d\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right),$$

где

$$d(t) = \max\{\min\{|\zeta - z| : \zeta \in G, \; g(\zeta, \infty) = \ln(1+t)\} : z \in \partial G\}.$$

Если замкнутая область $\bar{G}$ ограничена аналитической кривой Γ, то условие

$$E_n(f, E, \rho_C) = O\left(n^{-p-\alpha}\right)$$

эквивалентно выполнению для $f^{(p)}(z)$ в G условия Гёльдера порядка α, $0 < \alpha < 1$. Изучен также случай, когда Γ — кусочно гладкая кривая с углами.

8) В ряде случаев эффективным аппаратом приближения аналитич. функций являются различные интерполяционные процессы, в том числе *Паде аппроксимации* и их обобщения.

9) При $n \geqslant 2$ в $\mathbb{C}^n$ существуют как незамкнутые жордановы кривые, на к-рых не каждая непрерывная функция равномерно с любой точностью приближается многочленами от $(z_1, \ldots, z_n)$, так и замкнутые жордановы кривые, на к-рых многочленами равномерно приближается любая непрерывная функция. В $\mathbb{C}^1$ это невозможно.

10) К настоящему времени (1983) имеется сравнительно мало прямых теорем теории приближения рациональными функциями со свободными полюсами (т. е. без всяких условий на расположение полюсов приближающей функции) и значительное количество обратных теорем.

Е. П. Долженко.

Лит.: [1] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, М., 1954; [2] Уолш Дж. Л., Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, пер. с англ., М., 1961 (там же, Приложение: Мергелян С. Н., О некоторых результатах в теории равномерных и наилучших приближений полиномами и рациональными функциями, с. 461—99); [3] Смирнов В. И., Лебедев Н. А., Конструктивная теория функций комплексного переменного, М.— Л., 1964; [4] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [5] Русак В. Н., Рациональные функции как аппарат приближения, Минск, 1979; [6] Гамелин Т., Равномерные алгебры, пер. с англ., М., 1973; [7] Леонтьев А. Ф., Ряды экспонент, М., 1976; [8] Некоторые вопросы теории приближений, пер. с англ., М., 1963; [9] Келдыш М. В., «Докл. АН СССР», 1936, т. 4, с. 163—66; [10] Лаврентьев М. А., «Тр. Физ.-матем. ин-та АН СССР», 1934, т. 5, с. 159—245; [11] Колмогоров А. Н., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 1, с. 216—21; [12] Мергелян С. Н., там же, 1952, т. 7, в. 2, с. 31—122; [13] Витушкин А. Г., там же, 1967, т. 22, в. 6, с. 141—99; [14] Джрбашян М. М., «Матем. сб.», 1955, т. 36, с. 353—440; [15] Гончар А. А., в кн.: Тр. Международного конгресса математиков. Москва, 1966, М., 1968, с. 329—56; [16] Долженко Е. П., Ульянов П. Л., «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем. Мех.», 1980, № 1, с. 3—13; [17] Мергелян С. Н., в кн.: Математика в СССР за сорок

лет, т. 1, М., 1959, с. 383—98; [18] Гончар А. А., Мергелян С. Н., в кн.: История отечественной математики, т. 4, кн. 1, К., 1970, с. 112—93; [19] Тамразов П. М., Гладкости и полиномиальные приближения, К., 1975; [20] Мельников М. С., Синанян С. О., в кн.: Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 143—250.

ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОРЯДОК, аппроксимации порядок,— порядок погрешности приближения как переменной величины, зависящей от непрерывного или дискретного аргумента τ, относительно другой переменной $\varphi(\tau)$, поведение к-рой, как правило, считается известным. Обычно τ — нек-рый параметр, являющийся числовой характеристикой приближающего множества, (напр., размерность этого множества) или метода приближения (напр., шаг интерполяции); при этом множество значений τ имеет конечную или бесконечную предельную точку. Функция $\varphi(\tau)$ — чаще всего степенная, показательная или логарифмическая. В качестве $\varphi(\tau)$ может фигурировать *непрерывности модуль* приближаемой функции (или нек-рой ее производной) или его мажоранта.

П. п. характеризует как аппроксимативные возможности метода приближения, так и определенные свойства приближаемого объекта, напр., дифференциально-разностные свойства приближаемой функции (см. *Приближение функций*; прямые и обратные теоремы).

В численном анализе П. п. численного метода, имеющего погрешность $O(h^m)$ (h — шаг метода), наз. показатель m.

Лит.: [1] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [2] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [3] Бахвалов Н. С., Численные методы, т. 1, М., 1975.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

ПРИБЛИЖЕНИЯ ТЕОРИЯ, аппроксимации теория,— раздел математич. анализа, изучающий методы приближения одних математич. объектов другими и вопросы, связанные с исследованием и оценкой возникающей при этом погрешности.

Основное содержание П. т. относится к *приближению функций*. Фундамент П. т. был заложен работами П. Л. Чебышева (1854—59) о наилучшем равномерном приближении функций многочленами и К. Вейерштрасса (K. Weierstraß), установившего в 1885 принципиальную возможность приблизить непрерывную на конечном отрезке функцию алгебраич. многочленами со сколь угодно малой наперед заданной погрешностью. Развитие П. т. в значительной степени определялось основополагающими работами А. Лебега (H. Lebesgue), Ш. Ж. Валле Пуссена (Ch. J. La Vallée Poussin), С. Н. Бернштейна, Д. Джексона (D. Jackson), Ж. Фавара (J. Favard), А. Н. Колмогорова, С. М. Никольского о приближении функций и классов функций.

С развитием функционального анализа многие вопросы П. т. стали рассматривать в самой общей ситуации, напр. как приближение элементов произвольного линейного нормированного пространства X. При этом выделяют три круга задач, к-рые в определенной степени соответствуют и основным хронологич. этапам развития исследований в П. т.

1. Приближение фиксированного элемента $x \in X$ элементами фиксированного множества $\mathfrak{N} \subset X$. Если в качестве меры приближения взять величину

$$E(x, \mathfrak{N}) = \inf_{u \in \mathfrak{N}} \| x - u \|,$$

т. е. *наилучшее приближение* x множеством $\mathfrak{N}$, то, помимо исследования и оценки $E(x, \mathfrak{N})$, возникают вопросы о существовании элемента наилучшего приближения u_0 из $\mathfrak{N}$ (для к-рого $\|x-u_0\| = E(x, \mathfrak{N})$), его единственности и характеристич. свойствах. Любой оператор A, отображающий X в $\mathfrak{N}$, задает нек-рый метод приближения с погрешностью $\|x - Ax\|$. Если $\mathfrak{N}$ — линейное многообразие, то особое значение имеют линей-

ные операторы. Для последовательности $\{A_n\}$ таких операторов возникает задача об условиях сходимости $A_n x \to x$ для любого $x \in X$.

2. Приближение фиксированного множества $\mathfrak{M} \subset X$ элементами другого фиксированного множества $\mathfrak{N}$ из X. Наилучшее приближение в этом случае выражается величиной

$$E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \sup_{x \in \mathfrak{M}} E(x, \mathfrak{N}),$$

к-рая дает минимально возможную оценку погрешности приближения любого элемента $x \in X$ элементами из $\mathfrak{N}$. В конкретных случаях задача состоит в том, чтобы оценить или точно выразить $E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ через характеристики, задающие множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Если приближение осуществляется с помощью оператора A, то исследуется верхняя грань

$$\sup_{x \in \mathfrak{M}} \| x - Ax \|,$$

а также (если $\mathfrak{N}$ — линейное многообразие) величина

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \inf_{AX \subset \mathfrak{N}} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \| x - Ax \|,$$

где нижняя грань распространена на все линейные операторы, отображающие X в $\mathfrak{N}$. Линейный оператор, реализующий эту нижнюю грань (если он существует), определяет *наилучший линейный метод* приближения. Особый интерес представляет выяснение случаев, когда $\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

3. Наилучшее приближение фиксированного множества $\mathfrak{M} \subset X$ заданным классом $\{\mathfrak{N}\}$ аппроксимирующих множеств из X. Предполагается, что в класс $\{\mathfrak{N}\}$ входят в каком-то смысле «равноценные» множества, напр. содержащие одно и то же количество элементов или имеющие одну и ту же размерность. Первый случай приводит к задаче об ε-энтропии множества $\mathfrak{M}$ (относительно X), второй — к задачам вычисления *поперечников* множества $\mathfrak{M}$ (в пространстве X), в частности величин

$$d_N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{\mathfrak{N}_N} E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N), \qquad (1)$$

и

$$d'_N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{\mathfrak{N}_N} \mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}_N), \qquad (2)$$

где нижние грани берутся по всем подпространствам $\mathfrak{N}_N$ из X фиксированной размерности N (или по всевозможным их сдвигам $\mathfrak{N}_N + a$). Таким образом, в задачах (1)—(2) речь идет об отыскании наилучшего (соответственно наилучшего линейного) аппарата приближения размерности N для множества $\mathfrak{M}$.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [2] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [3] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [4] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [5] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [6] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [7] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МЕРА — количественное выражение погрешности приближения. Когда речь идет о приближении функции $f(t)$ функцией $\varphi(t)$, мера приближения $\mu(f, \varphi)$ обычно определяется метрикой нек-рого функционального пространства, содержащего как $f(t)$, так и $\varphi(t)$. Напр., если функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, часто пользуются равномерной метрикой пространства $C[a, b]$, т. е. полагают

$$\mu(f, \varphi) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} | f(t) - \varphi(t) |.$$

Если же непрерывность приближаемой функции не гарантирована или по условию задачи важна близость между $f(t)$ и $\varphi(t)$ лишь в среднем на $[a, b]$, можно использовать интегральные метрики пространств $L_p[a, b]$, полагая

$$\mu(f, \varphi) = \int_a^b q(t) \,|\, f(t) - \varphi(t) \,|^p \, dt, \quad p > 0,$$

где $q(t)$ — нек-рая весовая функция. Здесь наиболее употребительным и удобным с практич. точки зрения является случай $p=2$ (см. *Среднеквадратическое приближение* функций).

П. ф. м. может учитывать значения функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ лишь в отдельных точках t_k, $k=1, \ldots, n$, промежутка $[a, b]$, напр.:

$$\mu(f, \varphi) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{ f(t_k) - \varphi(t_k) \},$$

$$\mu(f, \varphi) = \sum_{k=1}^{n} q_k \,|\, f(t_k) - \varphi(t_k) \,|^p,$$

где q_k — нек-рые положительные коэффициенты.

Аналогично определяется мера приближения функций двух и большего числа переменных.

Мера приближения функции $f(t)$ семейством функций F обычно определяется как *наилучшее приближение*:

$$E(f, F) = \mu(f, F) = \inf_{\varphi \in F} \mu(f, \varphi).$$

Под мерой приближения класса $\mathfrak{M}$ функций $f(t)$ функциями $\varphi(t)$ из фиксированного множества F понимают величину

$$E(\mathfrak{M}, F) = \mu(\mathfrak{M}, F) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{\varphi \in F} \mu(f, \varphi),$$

к-рая характеризует максимальное отклонение функций множества $\mathfrak{M}$ от ближайших к ним функций из F.

В общем случае, когда рассматривается приближение в произвольном метрич. пространстве X, мера приближения $\mu(x, u)$ элемента x элементом u (множеством F) есть расстояние $\rho(x, u)$ ($\rho(x, F)$) между x и u (x и F) в смысле метрики пространства X.

Лит.: [1] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [2] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

ПРИВАЛОВА ОПЕРАТОРЫ, параметры Привалова,— операторы, позволяющие выразить условие гармоничности функции без использования частных производных. Пусть $u(x)$ — локально интегрируемая функция в конечной области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$; $\omega(h)$ — объем шара $B(x; h)$ радиуса h с центром $x \in D$, расположенного в D;

$$\Delta_h u(x) = \frac{1}{\omega(h)} \int_{B(x; h)} u(y)\, dy - u(x).$$

Верхний и нижний операторы Привалова $\overline{\Delta}^* u(x)$ и $\underline{\Delta}^* u(x)$ соответственно определяются формулами

$$\overline{\Delta}^* u(x) = \overline{\lim_{h \to 0}} \left(\Delta_h u(x) : \frac{h^2}{2(n+2)} \right),$$

$$\underline{\Delta}^* u(x) = \underline{\lim_{h \to 0}} \left(\Delta_h u(x) : \frac{h^2}{2(n+2)} \right).$$

Если верхний и нижний П. о. совпадают, то оператор Привалова $\Delta^* u(x)$ определяется формулой

$$\Delta^* u(x) = \overline{\Delta}^* u(x) = \underline{\Delta}^* u(x) = \lim_{h \to 0} \left(\Delta_h u(x) : \frac{h^2}{2(n+2)} \right).$$

Если функция $u(x)$ имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно в точке $x \in D$,

то в этой точке существует П. о. $\Delta^* u(x)$, и он равен значению оператора Лапласа: $\Delta^* u(x) = \Delta u(x)$. Справедлива теорема Привалова: если непрерывная в области D функция $u(x)$ удовлетворяет всюду в D условию

$$\underline{\Delta}^* u(x) \leqslant 0 \leqslant \overline{\Delta}^* u(x),$$

то $u(x)$ — гармонич. функция в D. Отсюда вытекает, что непрерывная функция $u(x)$ в D является гармонической тогда и только тогда, когда во всякой точке $x \in D$, начиная с достаточно малого h, $\Delta_h u(x) = 0$ или, иначе,

$$u(x) = \frac{1}{\omega(h)} \int_{B(x;\, h)} u(y)\, dy.$$

Среднее значение по объему шара здесь можно заменить средним значением по площади сферы.

Лит.: [1] Привалов И. И., «Матем. сб.», 1925, т. 32, с. 464—71; [2] его же, Субгармонические функции, М.—Л., 1937; [3] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964. *Е. Д. Соломенцев.*

ПРИВАЛОВА ТЕОРЕМА — 1) П. т. о сопряженных функциях: пусть

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

— периодическая непрерывная функция с периодом 2π и

$$\tilde{f}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos kt - a_k \sin kt)$$

— тригонометрически сопряженная функция с $f(t)$; тогда если $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем α, $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то $\tilde{f} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ при $0 < \alpha < 1$ и $\tilde{f}$ имеет модуль непрерывности, не больший $M\delta \ln(1/\delta)$ при $\alpha = 1$. Эта теорема, доказанная И. И. Приваловым [1], имеет важные применения в теории тригонометрич. рядов. Она переносится и на условия Липшица в нек-рых других метриках (см., напр., [5]).

2) П. т. единственности аналитических функций: если однозначная аналитич. функция $f(z)$ в области D плоскости комплексного переменного z, ограниченной спрямляемой жордановой кривой Γ, на нек-ром множестве $E \subset \Gamma$ положительной меры Лебега на Γ имеет нулевые угловые граничные значения, то $f(z) \equiv 0$ в D. Эта теорема доказана И. И. Приваловым [2]; ее обобщением является *Лузина — Привалова теорема*; см. также *Единственности свойство* аналитических функций.

3) П. т. о сингулярном интеграле Коши, основная лемма Привалова,— один из основных результатов теории интеграла типа Коши — Стилтьеса (см. *Коши интеграл*). Пусть $\Gamma : \zeta = \zeta(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$,— спрямляемая (замкнутая) жорданова кривая на плоскости комплексного переменного z, l — длина кривой Γ, s — длина дуги на Γ, отсчитываемая от нек-рой фиксированной точки; $\varphi = \varphi(s)$ — угол между положительным направлением оси абсцисс и касательной к Γ, $\psi(s)$ — комплексная функция ограниченной вариации на Γ. Пусть точка $\zeta_0 \in \Gamma$ определяется значением s_0 длины дуги, $\zeta_0 = \zeta(s_0)$, $0 \leqslant s_0 \leqslant l$, и Γ_δ — часть линии Γ, оставшаяся после удаления из Γ меньшей дуги, концами к-рой являются точки $\zeta(s_0 - \delta)$ и $\zeta(s_0 + \delta)$. Конечный предел при $\delta \to 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} \frac{e^{i\varphi(s)}\, d\psi(s)}{\zeta - \zeta_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\varphi(s)}\, d\psi(s)}{\zeta - \zeta_0}, \qquad (1)$$

если он существует, наз. сингулярным интегралом Коши — Стилтьеса. Пусть D^+ и D^- — соответственно конечная и бесконечная области, ограничиваемые кривой Γ. Формулировка П. т.: если для почти всех по мере Лебега на Γ точек Γ существует сингулярный интеграл (1), то почти всюду

на Г существуют угловые граничные значения $F^{\pm}(\zeta_0)$ интеграла типа Коши — Стилтьеса

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{i\varphi(s)}\,d\psi(s)}{\zeta-z},\quad z\in D^{\pm},\qquad(2)$$

соответственно из областей $D^{\pm}$, причем почти всюду справедливы *Сохоцкого формулы*:

$$F^{\pm}(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{i\varphi(s)}\,d\psi(s)}{\zeta-\zeta_0}\pm\frac{1}{2}\psi'(s_0).\qquad(3)$$

Обратно, если почти всюду на Г существуют угловые граничные значения $F^{+}(\zeta_0)$ (или $F^{-}(\zeta_0)$) интеграла (2), то почти всюду на Г существуют сингулярный интеграл (1) и граничные значения с другой стороны $F^{-}(\zeta_0)$ (соответственно $F^{+}(\zeta_0)$), причем выполняются равенства (3). Эта теорема была установлена И. И. Приваловым для интегралов типа Коши — Лебега (т. е. для случая абсолютно непрерывной функции $\psi(s)$, см. [2]), а затем и для общего случая [3]. Она играет основную роль в теории сингулярных интегральных уравнений и разрывных граничных задач аналитич. функций (см. [6]).

4) П. т. о граничных значениях интеграла типа Коши — Лебега: если жорданова кривая Г кусочно гладкая и без точек заострения, а комплексная функция $f(\zeta)$, $\zeta\in\Gamma$, удовлетворяет условию Липшица

$$|f(\zeta_1)-f(\zeta_2)|<C|\zeta_1-\zeta_2|^{\alpha},\ 0<\alpha\leqslant 1,$$

то интеграл типа Коши — Лебега

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},\quad z\in D^{\pm},$$

есть непрерывная функция в замкнутой области $\bar{D}^{+}$, причем для граничных значений $F^{\pm}(\zeta)$ выполняются условия:

$$|F^{\pm}(\zeta_1)-F^{\pm}(\zeta_2)|<C_1|\zeta_1-\zeta_2|^{\alpha},$$

если $0<\alpha<1$, и

$$|F^{\pm}(\zeta_1)-F^{\pm}(\zeta_2)|<C_2(\delta)|\zeta_1-\zeta_2|\ln\frac{1}{|\zeta_1-\zeta_2|},$$

если $\alpha=1$, $|\zeta_1-\zeta_2|\leqslant\delta<1$ (см. [2]).

Лит.: [1] Привалов И. И., «Bull. Soc. math. France», 1916, t. 44, p. 100—03; [2] его же, Интеграл Cauchy, Саратов, 1918; [3] его же, Граничные свойства однозначных аналитических функций, М., 1941; [4] его же, Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [5] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., М., 1965; [6] Хведелидзе Б. В., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 7, М., 1975, с. 5—162.

Е. Д. Соломенцев.

ПРИВЕДЕНИЕ К АБСУРДУ — правило логич. вывода, позволяющее заключить, что если из списка утверждений Г, A следует как утверждение B, так и утверждение $\neg B$, то из списка Г следует $\neg A$. Правило П. к а. записывают, напр., в виде

$$\frac{\Gamma, A\to B;\ \Gamma,\ A\to\neg B}{\Gamma\to\neg A}$$

и наз. также правилом введения отрицания. П. к а. является *допустимым правилом* для подавляющего большинства логико-математич. исчислений.

С. Ю. Маслов.

ПРИВЕДЕННАЯ СИСТЕМА ВЫЧЕТОВ по модулю m — набор, составленный из всех чисел *полной системы вычетов* по модулю m, взаимно простых с m. П. с. в. по модулю m состоит из $\varphi(m)$ чисел, где $\varphi(m)$ — функция Эйлера. В качестве П. с. в. по модулю m обычно берутся взаимно простые с m числа полной системы вычетов 0, 1, ..., $m-1$.

С. А. Степанов.

ПРИВЕДЕННАЯ СХЕМА — схема, локальное кольцо любой точки к-рой не содержит ненулевых нильпотентных элементов. Для любой схемы $(X, \mathcal{O}_X)$ сущест-

вует наибольшая замкнутая приведенная подсхема $(X_{\text{red}}, \mathcal{O}_{X_{\text{red}}})$, характеризуемая соотношениями

$$\mathcal{O}_{X_{\text{red}}, x} = \mathcal{O}_{X, x}/r_x,$$

где r_x — идеал, состоящий из всех нильпотентных элементов кольца $\mathcal{O}_{X, x}$. Групповая схема над полем характеристики 0 всегда приведена [3]. П. с.— классич. объект изучения в алгебраич. геометрии.

Лит.: [1] Артин М., «Математика», 1970, т. 14, № 4, с. 3—47; [2] Гротендик А., Дьёдонне Ж., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, № 2, с. 135—48; [3] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968.

С. Г. Танкеев.

ПРИВИЛЕГИРОВАННЫЙ КОМПАКТ — понятие, часто используемое в теории комплексных пространств, в особенности в теории модулей комплексных структур. Пусть K — компакт в $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{O}_K$ — ограничение на K пучка ростков голоморфных функций в $\mathbb{C}^n$. Компакт K наз. привилегированным относительно когерентного аналитического пучка $\mathcal{F}$, заданного на K, если существует точная последовательность отображений $\mathcal{O}_K$-пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_n \longrightarrow \mathcal{L}_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \longrightarrow 0, \quad (1)$$

в к-рой $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}_K^{r_i}$ с нек-рыми $r_i \geqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, такая, что порожденная ею последовательность непрерывных операторов

$$0 \longrightarrow B(K, \mathcal{L}_n) \xrightarrow{d} B(K, \mathcal{L}_{n-1}) \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow B(K, \mathcal{L}_1) \xrightarrow{d} B(K, \mathcal{L}_0) \quad (2)$$

точна и расщепляема. Здесь

$$B(K, \mathcal{L}_i) = B(K, \mathcal{O})^{r_i},$$

а $B(K, \mathcal{O})$ есть банахово пространство непрерывных на K функций, голоморфных внутри K, наделенное равномерной нормой. Расщепляемость последовательности (2) означает, что ядро и образ дифференциала d в каждом члене имеет прямое замкнутое дополнение. Это условие расщепляемости эквивалентно следующему: существует линейный непрерывный оператор h в (2), переводящий $B(K, \mathcal{L}_i)$ в $B(K, \mathcal{L}_{i+1})$, такой, что $dhd = d$ (оператор гомотопии). Свойство точности и расщепляемости последовательности (2) не зависит от выбора последовательности (1).

Пусть точка z принадлежит внутренности компакта K. Тогда существует морфизм π комплекса (2) в слой комплекса (1) над точкой z, переводящий элемент $B(K, \mathcal{L}_i)$, т. е. функцию на K со значениями в $\mathbb{C}^{r_i}$ в ее росток в точке z. Отсюда вытекает, что последовательность

$$B(K, \mathcal{L}_1) \xrightarrow{d} B(K, \mathcal{L}_0) \xrightarrow{\pi\varphi} \mathcal{F}_z \quad (3)$$

полуточна. Компакт K наз. $\mathcal{F}$-привилегированной окрестностью точки z, если он $\mathcal{F}$-привилегирован и последовательность (3) точна. Это свойство также не зависит от выбора последовательности (1).

Для всякого когерентного аналитич. пучка $\mathcal{F}$ всякая точка его области определения обладает фундаментальной системой $\mathcal{F}$-привилегированных окрестностей. В качестве таких окрестностей выбираются поликруги с определенными соотношениями типа неравенств для радиусов. Известно достаточное условие $\mathcal{F}$-привилегированности полицилиндра, связывающее пучок $\mathcal{F}$ с устройством границы (см. [1]).

Рассматриваются также привилегированные компакты по отношению к пучку, заданному на произвольном комплексном пространстве X, при этом имеют в виду компакты, привилегированные относительно пучков $f_*(\mathcal{F})$, где f карта на X.

Лит.: [1] Douady A., «Ann. Inst. Fourier», 1966, t, 16. p. 1—95. *В. П. Паламодов.*

ПРИВОДИМАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА обыкновенных дифференциальных уравнений — система

$$\dot{x} = A(t)\,x,\ x \in \mathbb{R}^n \text{ (или } \mathbb{C}^n), \qquad (*)$$
$$A(\cdot)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \text{ (или } \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)),$$

переходящая в систему с постоянными коэффициентами $\dot{y} = By$ в результате замены $x = L(t)y$, где $L(t)$ — нек-рое *Ляпунова преобразование*. Если отображение $A(t)$ непрерывно и периодически зависит от t, то система (*) приводима (теорема Ляпунова). Для приводимости системы (*) необходимо и достаточно, чтобы нашлись преобразование Ляпунова $L(t)$ и оператор B такие, что всякое решение системы (*) имеет вид

$$x(t) = L(t)\,e^{tB}x(0)$$

(критерий Еругина).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, в его кн.: Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956, с. 7—263; [2] Еругин Н. П., Приводимые системы, Л.— М., 1946 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 13). *В. М. Миллионщиков.*

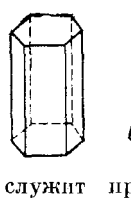
ПРИВОДИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — линейное представление, в пространстве к-рого есть собственное *инвариантное подпространство*. *А. И. Штерн.*

ПРИВОДИМОЕ РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО — риманово пространство M, у к-рого линейная (или, иначе, однородная) *голономии группа* приводима, т. е. имеет нетривиальные инвариантные подпространства. Риманово пространство с неприводимой группой голономии наз. неприводимым. Полное односвязное П. р. п. разложимо (теорема де Рама), т. е. разлагается в прямое произведение римановых пространств положительной размерности. Более точно, любое полное односвязное риманово пространство изометрично прямому произведению $M_0 \times M_1 \times \ldots \times M_k$ евклидова пространства M_0 и полных односвязных неприводимых римановых пространств M_i, $i > 0$, причем такое разложение M единственно с точностью до порядка сомножителей.

Ослабленный вариант этой теоремы справедлив для псевдоримановых пространств: псевдориманово пространство наз. слабо неприводимым, если все нетривиальные инвариантные относительно группы голономии Γ подпространства касательного пространства изотропны, т. е. индуцированное на них скалярное произведение вырождено. Любое полное односвязное псевдориманово пространство разлагается в прямое произведение слабо неприводимых псевдоримановых пространств. Если подпространство неподвижных относительно группы голономии векторов неизотропно, то такое разложение единственно с точностью до порядка сомножителей. Слабо неприводимое псевдориманово пространство не разлагается в прямое произведение псевдоримановых пространств [3].

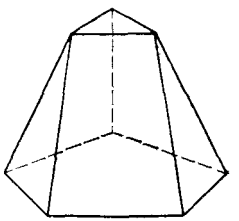
Лит.: [1] Лихнерович А., Теория связностей в целом и групп голономий, пер. с франц., М., 1960; [2] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1981; [3] Wu H., «Illinois J. Math.», 1964, v. 8, № 2, p. 291—311; [4] Шапиро Я. Л., «Докл. АН СССР», 1972, т. 206, № 4, с. 831—33. *Д. В. Алексеевский.*

ПРИЗМА — многогранник, у к-рого две грани суть n-угольники (основания П.), а остальные n граней (боковых) — параллелограммы. Основания П. конгруэнтны и расположены в параллельных плоскостях. П. наз. прямой, если плоскости боковых граней перпендикулярны к плоскости основания. Прямую П. наз. правильной, если основанием ее служит правильный многоугольник. П. бывают треугольные, четырехугольные и т. д., смотря по тому, лежит ли в основании треугольник, четырехугольник и



т. д. На рисунке дана шестиугольная П. (слева — прямая). Объем П. равен произведению площади основания на высоту (расстояние между основаниями П.). *БСЭ-3.*

ПРИЗМАТОИД — многогранник, две грани к-рого (основания П.) лежат в параллельных плоскостях, а остальные являются треугольниками или трапециями, причем у треугольников одна сторона, а у трапеций оба основания являются сторонами оснований П. (см. рис.). Объем П. равен



$$\frac{h}{6}(S+S'+4S''),$$

где h — расстояние между основаниями П., S и S' — их площади, S'' — площадь сечения, одинаково удаленного от обоих оснований. *БСЭ-3.*

ПРИКОСНОВЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, касательное преобразование, контактное преобразование,— преобразование кривых на плоскости, при к-ром две касающиеся друг друга кривые преобразуются в две кривые, также касающиеся друг друга. См. *Контактное преобразование.*

ПРИКОСНОВЕНИЯ ТОЧКА — точка x множества A в топологич. пространстве X такая, что всякая ее окрестность имеет непустое пересечение с A. Множество всех П. т. образует замыкание $[A]$ множества A. *М. И. Войцеховский.*

ПРИМАРНОЕ КОЛЬЦО — кольцо с единицей, факторкольцо к-рого по радикалу Джекобсона изоморфно кольцу матриц над телом или, что то же самое, является артиновым простым кольцом. Если идемпотенты П. к. R с радикалом Джекобсона J можно поднимать по модулю J (т. е. у каждого идемпотента из R/J существует идемпотентный прообраз в R), то R изоморфно кольцу всех матриц над нек-рым локальным кольцом. Это, в частности, имеет место, если J есть нильидеал.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79. *Л. А. Скорняков.*

ПРИМАРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — то же, что *факторпредставление.*

ПРИМАРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ — представление идеала I кольца R (или подмодуля N модуля M) в виде пересечения примарных идеалов (примарных подмодулей). П. р. обобщает разложение целого числа в произведение степеней различных простых чисел. Существование П. р. в кольце многочленов доказал Э. Ласкер [1], в произвольном коммутативном *нётеровом кольце* — Э. Нётер [2]. Пусть R — коммутативное нётерово кольцо. П. р. $I=\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ наз. неприводимым, если $\bigcap_{i\neq j} Q_i \neq I$ для любого $j=1, \ldots, n$ и радикалы $P_1, \ldots, P_n$ идеалов $Q_1, \ldots, Q_n$ попарно различны (радикалом примарного идеала Q наз. такой единственный простой идеал $P \supseteq Q$, что $P^n \subseteq Q$ для нек-рого натурального числа n). Совокупность простых идеалов $\{P_1, \ldots, P_n\}$ определена однозначно идеалом I (первая теорема единственности П. р.), минимальные по включению элементы этой совокупности наз. изолированными простыми идеалами идеала I, остальные — вложенными простыми идеалами, причем примарные идеалы, соответствующие изолированным простым идеалам, также однозначно определены идеалом I (вторая теорема единственности П. р., см. [3]). Изолированным простым идеалам идеала I кольца многочленов над полем соответствуют неприводимые компоненты *аффинного многообразия* корней идеала I. Имеются различные некоммутативные обобщения понятия

П. р. Аксиоматизация П. р. привела к развитию *аддитивной теории идеалов.*

Лит.: [1] Lasker E., «Math. Ann.», 1905, Bd 60, S. 20—116; [2] Noether E., «Math. Ann.», 1921, Bd 83, S. 24—66; [3] Атья М., Макдональд И., Введение в коммутативную алгебру, пер. с англ., М., 1972; [4] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1—2, М., 1963; [5] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

В. Т. Марков.

ПРИМАРНЫЙ ИДЕАЛ коммутативного кольца R — такой идеал $I \subset R$, что если $a, b \in R$ и $ab \in I$, то либо $b \in I$, либо $a^n \in I$ для нек-рого натурального числа n. В кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ П. и.— идеал вида $p^n\mathbb{Z}$, где p — простое, n — натуральное число. Важную роль в коммутативной алгебре играет представление любого идеала коммутативного *нётерова кольца* в виде пересечения конечного числа П. и.— *примарное разложение*. Более общо, пусть $\mathrm{Ass}(M)$ обозначает множество первичных идеалов кольца R, являющихся аннуляторами ненулевых подмодулей модуля M. Подмодуль N модуля M над нётеровым кольцом R наз. примарным, если $\mathrm{Ass}(M/N)$ — одноэлементное множество. Если кольцо R коммутативно, то любой собственный подмодуль нётерова R-модуля, не представимый в виде пересечения двух строго содержащих его подмодулей, примарен. В некоммутативном случае это не так, поэтому предпринимались попытки построить различные некоммутативные обобщения понятия примарности. Напр., собственный подмодуль N модуля M наз. примарным, если для любого ненулевого инъективного подмодуля E' инъективной оболочки E модуля M/N пересечение ядер гомоморфизмов из E в E' тривиально. Другое удачное обобщение — понятие терциарного идеала [4]: левый идеал I нётерова слева кольца R наз. терциарным, если для любых элементов $a \in R$, $b \in R \setminus I$ из $aRb \subseteq I$ следует, что для любого $c \in R \setminus I$ найдется элемент $d \in Rc \setminus I$ такой, что $aRd \subseteq I$. Оба эти обобщения приводят к некоммутативным аналогам примарного разложения. Каждый терциарный идеал нётерова кольца R примарен в том и только в том случае, когда кольцо R удовлетворяет условию Артина — Риса: для любых левых идеалов I, J кольца R найдется натуральное число n такое, что $I^n \cap J \subseteq IJ$ (см. [3]).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963; [3] Goldman O., «J. Algebra», 1969, v. 13, № 1, p. 10—47; [4] Lesieur L., Croisot R., Algèbre noethérienne non commutative, P., 1963.

В. Т. Марков.

ПРИМИТИВНАЯ ГРУППА ПОДСТАНОВОК — группа подстановок $(G; M)$, сохраняющая лишь тривиальные отношения эквивалентности на множестве M (т. е. равенство и аморфную эквивалентность). Изучаются главным образом конечные П. г. п.

П. г. п. транзитивна и всякая 2-транзитивная группа примитивна (см. *Транзитивная группа*). В точности 1-транзитивные (т. е. не являющиеся уже 2-транзитивными) группы подстановок наз. унипримитивными. Коммутативными П. г. п. являются циклич. группы простого порядка и только они. Транзитивная группа подстановок примитивна тогда и только тогда, когда стабилизатор G_α каждой точки $\alpha \in M$ есть максимальная подгруппа в группе G. Другой признак примитивности основан на сопоставлении каждой транзитивной группе $(G; M)$ ее графов, соответствующих бинарным орбитам этой группы. Группа $(G; M)$ примитивна тогда и только тогда, когда графы, соответствующие нерефлексивным 2-орбитам, связны. Число 2-орбит наз. рангом группы $(G; M)$. Ранг равен 2 для дважды транзитивных групп, а ранг унипримитивной группы не меньше 3.

Всякий неединичный нормальный делитель П. г. п. транзитивен. Всякая транзитивная группа подстановок

погружается в кратное сплетение П. г. п. (правда, такое представление не однозначно).

Многие вопросы теории групп подстановок сводятся к обозрению П. г. п. Известен список всех П. г. п. степени $\leqslant 50$ (см. [4]). Изучаются связи между П. г. п. и простыми конечными группами.

Обобщение понятия П. г. п.— к р а т н о п р и м и т и в н ы е г р у п п ы. Группа подстановок $(G; M)$ наз. k раз примитивной, если она k раз транзитивна и фиксатор $(k-1)$-й точки действует примитивно на остальных точках.

Лит.: [1] C a m e r o n P., «Bull. London Math. Soc.», 1981, v. 13, p. 1—22; [2] K r a s n e r M., K a l o u j n i n e L., «Acta Scient. math. (Szeged)», 1951, v. 14, p. 39—66; [3] W i e l a n d t H., Finite permutation groups, N.Y.—L., 1964; [4] П о г о р е л о в Б. А., в кн.: VI Всесоюзный симпозиум по теории групп. Сборник, К., 1980, с. 146—57; [5] Ш м и д т О. Ю., Абстрактная теория групп, 2 изд., М.—Л., 1933.

Л. А. Калужнин.

ПРИМИТИВНАЯ РЕКУРСИЯ — способ определения функций от натуральных аргументов с натуральными значениями. Говорят, что $(n+1)$-местная функция $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ получена п р и м и т и в н о й р е к у р с и е й из n-местной функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ и $(n+2)$-местной функции $h(x_1, \ldots, x_n, y, z)$, если для всех натуральных значений $x_1, \ldots, x_n, y$ имеет место

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$$

и

$$f(x_1, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)).$$

Для данных g и h такая функция f всегда существует и единственна. При $n=0$ определяющие равенства для f записываются в виде

$$f(0) = a, \quad f(x+1) = h(x, f(x)).$$

Фундаментальным свойством П. р. является то, что при любом разумном уточнении понятия вычислимости функция f, полученная из вычислимых функций g и h с помощью П. р., сама вычислимая. П. р.— одно из основных правил порождения из исходного набора простейших функций всех примитивно рекурсивных и всех частично рекурсивных функций.

Лит.: [1] У с п е н с к и й В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [2] М а л ь ц е в А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [3] Р о д ж е р с Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972.

С. Н. Артемов.

ПРИМИТИВНО РЕКУРСИВНАЯ ФУНКЦИЯ — функция от натуральных аргументов с натуральными значениями, к-рую можно получить из простейших функций

$$s(x) = x+1, \quad o(x) = 0, \quad I_m^n(x_1, \ldots, x_n) = x_m$$

конечным числом операций суперпозиции и *примитивной рекурсии*.

Поскольку исходные функции являются вычислимыми, а операторы суперпозиции и примитивной рекурсии вычислимость сохраняют, множество всех П. р. ф. есть подкласс класса всех *вычислимых функций*. Каждая П. р. ф. задается описанием ее построения из исходных функций (п р и м и т и в н о р е к у р с и в н о е о п и с а н и е) и, следовательно, класс всех П. р. ф. счетен. Практически все арифметич. функции, употребляемые в математике по конкретным поводам, являются П. р. ф., напр.: $x+y$, $x \cdot y$, x^y, $\operatorname{sg}(x)$, $\left[\frac{x}{y}\right]$, остаток от деления x на y, $\pi(x)$ — простое число с номером x и т. д.

Отношение $P(x_1, \ldots, x_n)$ на натуральных числах наз. п р и м и т и в н о р е к у р с и в н ы м о т н о ш е н и е м (п. р. о.), если функция $g(x_1, \ldots, x_n)$, равная 1, когда $P(x_1, \ldots, x_n)$ истинно, и 0, когда $P(x_1, \ldots, x_n)$ ложно, является П. р. ф. Говорят, что отношение $P(x_1, \ldots, x_n, z)$ получено из отношения $Q(x_1, \ldots, x_n,$

$y, z)$ с помощью ограниченного квантора, если

$$P(x_1, \ldots, x_n, z) \Leftrightarrow \forall y\,(y \leqslant z \Rightarrow Q(x_1, \ldots, x_n, y, z))$$

или

$$P(x_1, \ldots, x_n, z) \Leftrightarrow \exists y\,(y \leqslant z \& Q(x_1, \ldots, x_n, y, z)).$$

Класс п. р. о. замкнут относительно применения всех логич. связок (включая отрицание) и ограниченных кванторов.

Пусть $f_1, \ldots, f_{s+1}$ суть n-местные П. р. ф., а $P_1, \ldots, P_s$ — такие п. р. о., что на любом наборе значений аргументов истинно не более одного из них. Тогда функция

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } P_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_s(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } P_s(x_1, \ldots, x_n), \\ f_{s+1}(x_1, \ldots, x_n), & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

является П. р. ф.

Говорят, что функция $f(x_1, \ldots, x_n, z)$ получена из всюду определенной функции $g(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ применением ограниченного оператора минимизации, если $f(x_1, \ldots, x_n, z)$ равно минимальному y такому, что $y \leqslant z$ и $g(x_1, \ldots, x_n, y, z) = 0$, и равно $z+1$, если такого y нет. Класс П. р. ф. замкнут относительно применения ограниченных операторов минимизации.

Функция $\Phi(y, x_1, \ldots, x_n)$ наз. универсальной для класса всех n-местных П. р. ф., если для каждой П. р. ф. $f(x_1, \ldots, x_n)$ найдется натуральное число k такое, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(k, x_1, \ldots, x_n).$$

Для каждого $n \geqslant 1$ такая универсальная функция существует, но она не может быть П. р. ф.

Всякое рекурсивно перечислимое множество есть область значений П. р. ф.; всякое рекурсивно перечислимое отношение $R(x_1, \ldots, x_n)$ представимо в виде $\exists y A(y, x_1, \ldots, x_n)$, где A — н. р. о. Всякая П. р. ф. представима в *арифметике формальной*, т. е. для каждой П. р. ф. $f(x_1, \ldots, x_n)$ найдется арифметич. формула $F(y, x_1, \ldots, x_n)$ такая, что для натуральных $k_1, \ldots, k_n, m$ при $f(k_1, \ldots, k_n) = m$ в формальной арифметике выводима формула $F(\overline{m}, \overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n)$, а при $f(k_1, \ldots, k_n) \neq m$ выводима $\neg F(\overline{m}, \overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n)$ (здесь $\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{m}$ — арифметич. термы, изображающие в формальной арифметике натуральные числа $k_1, \ldots, k_n, m$). Этот факт занимает центральное место в доказательстве неполноты формальной арифметики (см. [4]).

Лит.: [1] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [2] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [3] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [4] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1976.

С. Н. Артемов.

ПРИМИТИВНОЕ КОЛЬЦО правое — ассоциативное кольцо, обладающее правым точным *неприводимым модулем*. Аналогично (с помощью левого неприводимого модуля) определяется левое примитивное кольцо. Классы правых и левых П. к. не совпадают. Всякое коммутативное П. к. является полем. Всякое полупростое (в смысле *Джекобсона радикала*) кольцо является подпрямым произведением П. к. Простое кольцо либо является П. к., либо радикально. П. к. с ненулевыми минимальными правыми идеалами описываются теоремой плотности. П. к. с условием минимальности для правых идеалов (т. е. артиновы П. к.) являются простыми.

Кольцо R примитивно тогда и только тогда, когда оно обладает максимальным модулярным правым идеалом I, к-рый не содержит двусторонних идеалов кольца R,

отличных от нулевого идеала. Это свойство может быть принято за определение П. к. в классе неассоциативных колец.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972. *К. А. Жевлаков.*

ПРИМИТИВНЫЙ ИДЕАЛ, правопримитивный идеал,— такой двусторонний идеал P ассоциативного кольца R, что факторкольцо R/P является (правым) *примитивным кольцом*. Аналогично, с помощью левых примитивных колец может быть определен левопримитивный идеал. Множество П всех П. и. кольца, снабженное нек-рой топологией, оказывается полезным при изучении отдельных классов колец. Обычно множество П топологизируется при помощи следующего *замыкания отношения*:

$$A=\{P' \mid P'\in\Pi,\ P'\supseteq(\cap P,\ P\in A)\},$$

где A подмножество в П. Множество всех П. и. кольца, снабженное такой топологией, наз. структурным пространством этого кольца.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961. *К. А. Жевлаков.*

ПРИМИТИВНЫЙ КЛАСС алгебраических систем — то же, что многообразие (см. *Алгебраических систем многообразие*).

ПРИМИТИВНЫЙ МНОГОЧЛЕН — многочлен $f(X)\in R[X]$, где R — ассоциативно-коммутативное кольцо с однозначным разложением на множители, коэффициенты к-рого не имеют нетривиальных общих делителей. Любой многочлен $g(X)\in R[X]$ можно записать в виде $g(X)=c(g)f(X)$, где $f(X)$ — П. м., а $c(g)$ — наибольший общий делитель коэффициентов многочлена $g(X)$. Элемент $c(g)\in R$, определенный с точностью до умножения на обратимые элементы из R, наз. содержанием многочлена $g(X)$. Справедлива лемма Гаусса: если $g_1(X)$, $g_2(X)\in R[X]$, то $c(g_1g_2)=c(g_1)c(g_2)$. В частности, произведение П. м. снова примитивно.

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963. *Л. В. Кузьмин.*

ПРИОРИТЕТА МЕТОД — метод, применяемый в рекурсивной теории множеств для построения просто устроенных с рекурсивной точки зрения (в простейших случаях — рекурсивно перечислимых) множеств (функций, нумераций и т. п.), удовлетворяющих бесконечной системе условий определенного типа. Специфика допустимых условий такова, что для того чтобы удовлетворить отдельному условию из данной системы, обычно бывает достаточно, чтобы в строящееся множество был включен определенный (зависящий от рассматриваемого условия) элемент. Однако на каждом этапе построения (представляющего собой нек-рый вычислительный процесс, чем и обеспечивается рекурсивная простота строения искомого объекта) каждое из условий системы (к-рое определяется, вообще говоря, бесконечным множеством конструктивных объектов) представлено нек-рой своей конечной аппроксимацией. Включение в строящееся множество элемента, обеспечивающего выполнение аппроксимации j-го условия, еще не дает гарантии, что тем самым будет удовлетворено само j-е условие. П. м. позволяет в известных случаях обходить это препятствие. С этой целью j-му условию данной системы, $j=1, 2, 3, \ldots$, в процессе построения ставится в соответствие натуральное число, являющееся кандидатом на роль элемента, включение к-рого в строящееся множество удовлетворяет j-му условию; про такой элемент принято говорить, что он помечен маркером $\boxed{j}$ (снабженным, возможно, дополнительными индексами). Каждый такой кандидат может в процессе построения заменяться (или, что то же самое, маркер может сдвигаться), но при этом в простейших приоритетных конструкциях сама после-

довательность, в к-рой выполняются попытки удовлетворить данным условиям, организуется так, что каждый маркер может изменить свое положение лишь конечное число раз, причем в своем заключительном положении он с необходимостью отмечает элемент, гарантирующий выполнение соответствующего условия.

П. м. был создан при решении проблемы Поста о существовании нетривиальных рекурсивно перечислимых степеней. Впоследствии он был использован в многочисленных задачах, возникших при изучении тьюринговых и других степеней, структуры рекурсивно перечислимых множеств (упорядоченной отношением включения), теории вычислимых нумераций и др. При этом возникли различные модификации первоначального П. м. (в частности, иногда допускается, чтобы нек-рые маркеры меняли свое положение бесконечно много раз), поэтому нередко предпочитают говорить о методах приоритета.

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [2] Sacks G. E., Degrees of unsolvability, Princeton (N.J.), 1963.

В. А. Душский.

ПРИСОЕДИНЕННАЯ ГРУППА группы G — линейная группа $\mathrm{Ad}\,G$, являющаяся образом группы Ли или алгебраич. группы G при *присоединенном представлении*. П. г. $\mathrm{Ad}\,G$ содержится в группе $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ всех автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, а ее алгебра Ли совпадает с присоединенной алгеброй $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Связная полупростая группа есть группа присоединенного типа (т. е. она изоморфна своей П. г.) тогда и только тогда, когда ее корни порождают группу рациональных характеров максимального тора; центр такой группы тривиален. Если основное поле имеет характеристику 0 и G связна, то $\mathrm{Ad}\,G$ однозначно определяется алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и наз. иногда П. г., или группой внутренних автоморфизмов, алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В частности, если G полупроста, то $\mathrm{Ad}\,G$ совпадает со связной компонентой единицы в $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [3] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980.

А. Л. Онищик.

ПРИСОЕДИНЕННАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность Y, находящаяся с данной поверхностью X в *Петерсона соответствии*, причем асимптотич. сети на Y соответствует на X сопряженная сеть σ с равными инвариантами, и наоборот. П. п. Y является *вращения индикатрисой* для X, и наоборот. Если сеть σ — главное основание изгибания X, то Y — *Бианки поверхность*.

И. Х. Сабитов.

ПРИСОЕДИНЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ группы Ли или алгебраической группы G — линейное представление Ad группы G в касательном пространстве $T_e(G)$ (или в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G), сопоставляющее каждому $a\in G$ дифференциал $\mathrm{Ad}\,a=d(\mathrm{Int}\,a)_e$ внутреннего автоморфизма $\mathrm{Int}\,a$: $x\to axa^{-1}$. Если $G\subseteq GL(V)$ — линейная группа в пространстве V, то

$$(\mathrm{Ad}\,a)\,X=aXa^{-1},\quad X\in T_e(G).$$

Ядро $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad}$ содержит центр группы G, а в случае, когда G связна и основное поле имеет характеристику 0, совпадает с центром. Дифференциалом П. п. группы G в точке e служит присоединенное представление ad алгебры $\mathfrak{g}$.

Присоединенным представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ наз. линейное представление ad алгебры $\mathfrak{g}$ в модуле $\mathfrak{g}$, действующее по формуле

$$(\mathrm{ad}\,x)\,y=[x,\,y],\ x,\ y\in\mathfrak{g},$$

где $[\ ,\ ]$ — операция в алгебре $\mathfrak{g}$. Ядро $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}$ есть центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Присоединенные операторы

ad x являются дифференцированиями алгебры $\mathfrak{g}$ и наз. внутренними дифференцированиями. Образ ad $\mathfrak{g}$ называется присоединенной алгеброй и является идеалом в алгебре Ли Der $\mathfrak{g}$ всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{g}$, причем Der $\mathfrak{g}$/Ad $\mathfrak{g}$ есть пространство $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ 1-мерных когомологий алгебры Ли $\mathfrak{g}$, определяемых П. п. В частности, ad $\mathfrak{g}$=Der $\mathfrak{g}$, если $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над полем характеристики 0.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980.

А. Л. Онищик.

ПРИСТРЕЛКИ МЕТОД, стрельбы метод,— метод решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, к-рый заключается во введении управляющих переменных (параметров) и последующем нахождении их из системы уравнений, при этом выбор параметров имеет решающее значение для успешного решения задачи.

Пусть имеется при $a \leqslant x \leqslant b$ дифференциальное уравнение

$$y' = F(x, y) \tag{1}$$

с граничным условием

$$g(y(a), y(b)) = h, \tag{2}$$

где вектор-функция $y=(y_1, \ldots, y_n)^\top$ от x подлежит определению, вектор-функции $F=(F_1, \ldots, F_n)^\top$ и $g=(g_1, \ldots, g_n)^\top$ известны, числовой вектор $h=(h_1, \ldots, h_n)^\top$ задан.

Пусть задача Коши

$$\partial Z/\partial x = F(x, Z), \tag{3}$$

$$Z(a, r) = r, \tag{4}$$

где $Z=(Z_1, \ldots, Z_n)^\top$, $r=(r_1, \ldots, r_n)^\top$, имеет единственное решение $Z(x, r)$, определенное при $a \leqslant x \leqslant b$, $r \in E^n$. При подстановке в (2) вместо $y(a)$ заданного значения $Z(a, r)=r$, а вместо $y(b)$ найденного значения $Z(b, r)$ получают уравнение

$$g(r, Z(b, r)) = h \tag{5}$$

относительно параметра r.

Алгоритм П. м. состоит в следующем: сначала находят решение $r=r^*$ уравнения (5), а затем — искомое решение граничной задачи (1) — (2) как решение задачи Коши

$$y' = F(x, y), \quad y(a) = r^*.$$

Для решения упоминавшихся здесь задач Коши могут быть использованы численные методы. Для решения уравнения (5) целесообразно избрать какой-либо итерационный метод.

В случае, когда нек-рые из компонент вектора g зависят только от $y(a)$, а остальные компоненты — только от $y(b)$, выгоден другой выбор параметров (см. [1], а также *Нелинейная краевая задача*; численные методы решения). Имеются другие варианты П. м. (см. [4]). П. м. применяют и при решении сеточной краевой задачи.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977; [3] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы, т. 2, М., 1977; [4] Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1979.

А. Ф. Шапкин.

ПРИТЯЖЕНИЯ ОБЛАСТЬ устойчивого распределения — совокупность всех функций распределения $F(x)$ таких, что для последовательности независимых одинаково распределенных случайных

величин X_1, X_2, ... с функцией распределения $F(x)$ при подходящем подборе постоянных A_n и $B_n>0$, $n=1, 2, \ldots$, распределения случайных величин

$$\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - A_n\right)/B_n, \quad n=1, 2, \ldots, \qquad (*)$$

слабо сходятся при $n \to \infty$ к невырожденной функции распределения $V(x)$, к-рая с необходимостью оказывается устойчивой.

Одной из основных задач теории устойчивых законов является описание П. о. устойчивых законов. Так, для нормального распределения в 1935 А. Я. Хинчиным, В. Феллером (W. Feller) и П. Леви (P. Lévy) было установлено, что $F(x)$ принадлежит П. о. нормального закона тогда и только тогда, когда при $x \to \infty$

$$x^2 \int_{|y|>x} dF(y) \Big/ \int_{|y|<x} y^2\, dF(y) \longrightarrow 0.$$

Позже Б. В. Гнеденко (1939) и В. Дёблин (W. Doeblin, 1940) дали описание П. о. устойчивого закона с показателем α, $0<\alpha<2$: для принадлежности $F(x)$ П. о. невырожденного устойчивого закона $V(x)$ с показателем α необходимо и достаточно, чтобы

$$F(-x)/[1-F(x)+F(-x)] \longrightarrow c_1/(c_1+c_2) \quad \text{при} \quad x \to \infty$$

для нек-рых $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$, $c_1+c_2>0$, определяемых по $V(x)$, и

$$[1-F(x)+F(-x)]/[1-F(tx)+F(-tx)] \longrightarrow t^{\alpha}$$
$$\text{при } x \to \infty$$

при каждом постоянном $t>0$. Ограничение на характер поведения нормирующих коэффициентов B_n, $n=1, 2, \ldots$, приводит к уменьшению совокупности функций распределения, для к-рых имеет место сходимость по распределению для последовательности (*). Совокупность функций распределения $F(x)$, для к-рых функции распределения последовательности случайных величин (*) при подходящем выборе последовательности A_n, $n=1, 2, \ldots$, постоянной $c>0$ и $B_n=cn^{-1/\alpha}$, $n=1, 2, \ldots$, слабо сходятся к устойчивой функции распределения $V(x)$ с показателем α, наз. областью нормального притяжения $V(x)$. Нормальная П. о. нормального распределения совпадает с совокупностью невырожденных распределений с конечной дисперсией.

Нормальная П. о. невырожденной устойчивой функции распределения $V(x)$ с показателем α $(0<\alpha<2)$ образована функциями $F(x)$ такими, что существуют и конечны

$$\lim_{x \to -\infty} F(x)/|x|^{\alpha} = c_1 \geqslant 0,$$

$$\lim_{x \to \infty} (1-F(x))/x^{\alpha} = c_2 \geqslant 0,$$

где c_1 и c_2 определяются устойчивым законом $V(x)$.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [2] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [3] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972.

Б. А. Рогозин.

ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ЯЗЫК — специализированный язык программирования задач, принадлежащих нек-рому четко выделяемому классу. Выделение класса производится либо фиксацией математич. объектов, лежащих в основе решаемых задач (напр., класс задач линейной алгебры), либо фиксацией области применения ЭВМ (напр., класс задач оперативного планирования и учета на предприятии). Проблемная ориентация обычно производится в контексте нек-рого универсального языка программирования, по отношению к к-рому П.-о. я. является либо над-, либо пред-, либо подъязыком. Надъязык

получается обогащением универсального языка дополнительными конструкциями, особенно удобными для формулирования задачи из класса. Обычные конструкции универсального языка используются либо для «скрепления» дополнительных конструкций в целостную программу, либо для программирования «нестандартных» компонент задачи. В предъязыке дополнительные конструкции полностью «загораживают» универсальный язык и переводятся на него специальным препроцессором. Подъязык получается из универсального языка отказом от конструкций, неупотребительных в данном классе задач, либо предварительным составлением библиотеки «стандартных программ», в совокупности достаточных для выражения любой задачи из класса. Во всех случаях выгода от употребления П.-о. я. состоит в том, что вместо программирования заново каждой задачи из класса достаточно лишь указать средствами П.-о. я. параметры, отличающие одну задачу от другой.

А. П. Ершов.

ПРОГОНКИ МЕТОД — метод переноса одноточечного граничного условия с помощью дифференциального или разностного уравнения, соответствующего данному уравнению. Применяется для решения граничной задачи в том случае, когда *пристрелки метод* не эффективен.

Пусть на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ задано линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'(x) + A(x)\, y(x) = f(x), \tag{1}$$

где квадратная матрица $A(x)$ порядка n и вектор $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_n(x)]^\top$ — известные непрерывные функции, дифференцируемая вектор-функция $y(x) = [y_1(x), \ldots, y_n(x)]^\top$ подлежит определению. К уравнению (1) присоединены граничные условия в форме

$$\varphi^\top y(a) = \alpha, \quad \psi^\top y(b) = \beta, \tag{2}$$

где известные матрицы φ и ψ имеют размеры $n \times k$ и $n \times l$ и ранги k и l соответственно,

$$\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_k]^\top, \quad \beta = [\beta_1, \ldots, \beta_l]^\top, \quad k + l = n.$$

Используя дифференциальные уравнения

$$u'(x) - A^\top(x)\, u(x) = 0,$$
$$\gamma'(x) = u^\top(x)\, f(x)$$

с начальными условиями $u(a) = \varphi$, $\gamma(a) = \alpha$, где искомая дифференцируемая матрица-функция $u(x)$ имеет размеры $n \times k$, $\gamma(x) = [\gamma_1(x), \ldots, \gamma_k(x)]^\top$, можно определить $u(x)$ и $\gamma(x)$ на всем отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ (прямой ход прогонки). С помощью уравнения

$$u^\top(b)\, y(b) = \gamma(b)$$

и второго из граничных условий (2) можно определить значение $y(b)$, если квадратная матрица $[u(b), \psi]$ имеет ранг n. Искомое решение граничной задачи (1)—(2) вычисляется теперь как решение задачи Коши для уравнения (1) в направлении от точки $x = b$ к точке $x = a$ (обратный ход прогонки). Указанный метод применим и к многоточечной задаче, когда условия вида (2) задаются не только на концах, но и в нескольких внутренних точках отрезка $a \leqslant x \leqslant b$. Разработаны варианты метода прогонки для переноса линейных граничных условий, отличных от (2) (см. [1]).

Достоинства П. м. видны на примере следующей граничной задачи:

$$y''(x) + Q(x)\, y(x) = f(x), \tag{3}$$
$$y'(a) + \varphi y(a) = \alpha, \tag{4}$$
$$y'(b) + \psi y(b) = \beta, \tag{5}$$

где квадратная матрица $Q(x)$ порядка n и вектор $f(x)$ размера n — известные непрерывные функции, дважды дифференцируемая вектор-функция $y(x)$ подлежит определению, известные квадратные матрицы φ и ψ имеют порядок n, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^\top$, $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)^\top$.

Используя дифференциальные уравнения

$$v(x)=[v(x)]^2+Q(x),$$
$$\gamma'(x)=v(x)\gamma(x)+f(x)$$

с начальными условиями $v(a)=\varphi$, $\gamma(a)=\alpha$, где искомая дифференцируемая квадратная матрица-функция $v(x)$ имеет порядок n, $\gamma(x)=[\gamma_1(x), \ldots, \gamma_n(x)]^\top$, ищутся $v(x)$ и $\gamma(x)$ на всем отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ (п р я м о й х о д п р о г о н к и).

С помощью уравнения

$$y'(b)+v(b)\,y(b)=\gamma(b)$$

и граничного условия (5) можно определить значение

$$y(b)=[v(b)-\psi]^{-1}[\gamma(b)-\beta], \qquad (6)$$

если матрица $v(b)-\psi$ имеет ранг n. Искомое решение граничной задачи (3) — (5) находится как решение задачи Коши для уравнения

$$y'(x)+v(x)\,y(x)=\gamma(x)$$

с начальным условием (6) (о б р а т н ы й х о д п р о г о н к и). Таким образом, П. м. для задачи (3) — (5) является методом понижения порядка дифференциального уравнения (3).

В случае конечной последовательности линейных алгебраич. уравнений

$$a_i\varphi_{i-1}-b_i\varphi_i+c_i\varphi_{i+1}=f_i,\ i=1, 2, \ldots, n, \qquad (7)$$

где коэффициенты a_i, c_i, b_i — известные квадратные матрицы порядка ν, а f_i и φ_i — известный и искомый вектор-столбцы размера ν, $a_1=0$, $c_n=0$, алгоритм прогонки определяется следующим образом:

$$\beta_{i+1}=(b_i-a_i\beta_i)^{-1}c_i, \qquad (8)$$

$$z_{i+1}=(b_i-a_i\beta_i)^{-1}(a_iz_i-f_i),\quad i=1, 2, \ldots, n, \qquad (9)$$

при условиях $\beta_1=0$, $z_1=0$ (п р я м о й х о д) и

$$\varphi_i=\beta_{i+1}\varphi_{i+1}+z_{i+1}, \qquad (10)$$
$$i=n,\ n-1,\ \ldots,\ 1,$$

при условии $\varphi_{n+1}=0$ (о б р а т н ы й х о д). Здесь β_i — квадратная матрица порядка ν, z_i и φ_i — вектор-столбцы размера ν. Изложенный метод наз. методом п р а в о й п р о г о н к и. Аналогично формулам (8)—(10) получаются формулы л е в о й п р о г о н к и. Комбинируя левую и правую прогонки, получают метод в с т р е ч н ы х п р о г о н о к. При решении уравнений (7) с сильно меняющимися коэффициентами применяется п о т о к о в ы й м е т о д п р о г о н к и. Для нахождения периодич. решения бесконечной последовательности уравнений вида (7) с периодич. коэффициентами используется ц и к л и ч е с к а я п р о г о н к а (см. [4]).

См. также *Ортогональной прогонки метод.*

Лит.: [1] Б а х в а л о в Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] К р ы л о в В. И., Б о б к о в В. В., М о н а с т ы р н ы й П. И., Вычислительные методы, т. 2, М., 1977; [3] М а р ч у к Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [4] С а м а р с к и й А. А., Н и к о л а е в Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

А. Ф. Шапкин.

ПРОГРАММ ОПТИМИЗИРУЮЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ — применяемые при трансляции направленные преобразования программы, представленной в нек-рой ее промежуточной форме, с целью улучшения рабочих характеристик программы, связанных с использованием ею ресурсов ЭВМ, главными из к-рых

являются время выполнения и объем занимаемой памяти.

Обычно каждое применение П. о. п. изменяет локальную семантику фрагментов программы, но сохраняет семантику программы в целом — результирующая программа либо эквивалентна исходной, либо является ее доопределением на более широкое множество входов.

Различают м а ш и н н о - з а в и с и м ы е П. о. п., к-рые определяются особенностями машинного языка или другими характеристиками конкретной ЭВМ, и у н и в е р с а л ь н ы е П. о. п. (такие, напр., как удаление из программы операторов, недостижимых от начала), к-рые определяются только семантикой, вкладываемой в исходную запись алгоритма, и применимы для широкого класса ЭВМ.

Основные способы улучшения машинной программы при П. о. п. заключаются в удалении вычислений или объектов из процессов выполнения программы или в замене в них сложных вычислений на более простые (на основе априорных оценок сложности вычислений). Это требует учета управляющих, информационных и частотных отношений, возникающих в этих процессах между операторами и объектами программы. П. о. п. по существу включает в себя: нахождение необходимых ему отношений указанного типа по локальной семантике операторов программы — т. н. п о т о к о в ы й а н а л и з п р о г р а м м ы; проверку нек-рых свойств собранной информации — т. н. к о н т е к с т н ы х у с л о в и й; преобразование фрагмента программы в случае удовлетворения этих свойств — собственно трансформация данного П. о. п.

По величине той части программы (т. н. у ч а с т к а э к о н о м и и), к-рая обрабатывается П. о. п. независимо от окружения, П. о. п. разделяются на л о к а л ь н ы е, участок экономии к-рых не более оператора; г л о б а л ь н ы е, участком экономии к-рых является вся программа; к в а з и л о к а л ь н ы е, где участок экономии — нек-рый фрагмент программы, имеющий фиксированную внутреннюю структуру,— напр., л у ч (линейная последовательность операторов), з о н а (нетривиальный сильно связный подграф управляющего графа программы), не содержащая других зон, или г а м а к (подграф, связанный с остальной частью управляющего графа в точности двумя вершинами — входной и выходной; входная вершина принадлежит гамаку, а выходная нет), не содержащий других гамаков и зон.

Для уменьшения временно́й и емкостной сложности глобального П. о. п. часто используется ф а к т о р и з а ц и я — замена глобального П. о. п. серией квазилокальных, применяемых к фрагментам программы в соответствии с их вложенностью.

Только для узких классов программ таких, как, напр., класс линейных программ, можно построить конечный полный набор П. о. п. Поэтому в конкретных трансляторах набор П. о. п. в значительной степени строится на эвристич. основе и существенно зависит от класса задач, для к-рых предназначен транслятор. Важным является выбор последовательности применений П. о. п., поскольку, как правило, используемые наборы П. о. п. не являются системами Чёрча — Россера, в к-рых результат не зависит от порядка применения преобразований.

Набор П. о. п. для трансляторов с наиболее распространенных *проблемно-ориентированных языков* (таких, напр., как *алгол*, *фортран*, *ПЛ/I*) является хорошо исследованным и позволяет получать машинные программы, сравнимые по качеству с программами, написанными вручную. Он содержит преобразования по удалению повторных вычислений с одинаковым результатом, частичному выполнению программы при

трансляции, по чистке программы от бесполезных объектов и действий, замене сложных вычислений на более простые, уменьшению суммарного размера одновременно существующих объектов, сокращению размера программы.

Лит.: [1] Ахо А., Ульман Дж., Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции, пер. с англ., т. 2, М., 1978; [2] Бабецкий Г. И. и др., Альфа-система автоматизации программирования, Новосиб., 1967; [3] Касьянов В. Н., Поттосин И. В., Технология трансляции, Новосиб., 1979.

В. Н. Касьянов.

ПРОГРАММА — план действий, подлежащих выполнению нек-рым исполнителем, обычно автоматическим устройством, чаще всего ЭВМ; предписание, *алгоритм*. П. представляется в виде конечной совокупности команд (инструкций), каждая из к-рых побуждает исполнителя выполнить нек-рую элементарную операцию над данными, хранящимися в памяти исполнителя и имена к-рых являются параметрами команды. Автоматизм исполнения достигается тем, что любая текущая команда, кроме завершающей, указывает однозначно на команду П., к-рая должна выполниться после текущей. Особенностью исполнения является наличие команд ветвления (условных переходов), в к-рых выбор одного из нескольких указанных продолжений делается на основании проверки свойств данных, упоминаемых в команде. Другой особенностью является возможность многократного выполнения отдельных команд. Эти особенности *приводят к тому*, что последовательность выполняемых команд и ее длина при исполнении П. могут варьировать, однозначно определяясь входными данными. Таким образом, П., являясь конечным объектом, побуждает исполнителя закономерно реагировать на потенциально бесконечное разнообразие входных данных. Тем самым П. так же, как и теоремы с их доказательствами, реализуют свойство всеобщности математич. закономерностей.

Математич. абстракции П. изучаются *программированием теоретическим*. П. важна не только как предписание для ЭВМ, но и как источник операционного знания для человека. Тем самым *алгоритмические языки*, созданные для записи П., несут также коммуникативную функцию, свойственную естественным языкам.

Составление П. для ЭВМ, или *программирование*, стало в связи с широким применением ЭВМ новой массовой формой математич. практики.

Лит.: [1] Ершов А. П., «Кибернетика», 1972, № 5, с. 95—99; [2] Турский В., Методология программирования, М., 1981.

А. П. Ершов.

ПРОГРАММИРОВАНИЕ — 1) процесс составления *программы*, плана действий; 2) дисциплина, изучающая методы и приемы составления программ. С определенной долей условности П. как дисциплина делится на *программирование теоретическое*, изучающее математич. абстракции программ и способов их построения, системное программирование, имеющее дело с разработкой *математического обеспечения* ЭВМ, т. е. программных комплексов массового и длительного применения, и прикладное программирование, обслуживающее конкретные применения ЭВМ во всем их разнообразии.

Составление программы является творч. задачей, т. к. поиски способа достижения даже четко сформулированной цели в общем случае требуют выработки или привлечения нового знания. В нек-рых частных случаях возможно нахождение более систематической и формальной процедуры П. Так, если задание на П. уже сформулировано в виде алгоритма, то П. сводится к переводу с языка записи алгоритма, *или алгоритмического языка*, к языку, непосредственно воспринимаемому исполнителем. В нек-рых математич. моделях задача перевода решается исчерпывающе. Напр., если

задача сформулирована в виде теоремы существования

$$\forall x \exists! y P(x, y),$$

где $P(x, y)$ — нек-рая формула узкого исчисления предикатов, то из доказательства теоремы в конструктивной логике эффективно извлекается рекурсивное описание функции $\varphi(x)$, для к-рой $\forall x P(x, \varphi(x))$ (теорема Клини — Нельсона). Поиски систематич. процедур перевода записей алгоритма в программы и извлечения программы из условия задачи и дополнительной информации составляют предмет *автоматизации программирования* и ее частного случая — *трансляции* программ.

Методика П. уделяет особое внимание способам описания исходной спецификации задачи, подлежащей П., поскольку умелое использование заложенной в спецификации информации позволяет придать П. более достоверный характер. Важным аспектом П. является забота о четкой структуре программы, облегчающей проверку ее правильности, а главное — выделение и изоляцию тех фрагментов программы, дальнейшая детализация к-рых требует привлечения нового знания.

Нек-рое представление о способе перехода от спецификации задачи к программе дает следующий пример П. задачи возведения x в натуральную степень n.

Исходное знание: $x^1 = x$, $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$, $x^{nm} = (x^n)^m$. Обнаруживая, что эти соотношения позволяют свести решение задачи x^n к более простой (т. е. с меньшим n), пытаются придать исходному знанию простейшую форму (творч. шаг):

$$x^0 = 1, \quad x^{n+1} = x^n \cdot x, \quad x^{2n} = (x^n)^2.$$

Содержательный анализ показывает, что третье соотношение эффективнее, нежели второе, но зато применимо не всегда. Второе соотношение переписывается в виде случая, дополнительного к третьему (творч. шаг):

$$x^0 = 1, \quad x^{2n+1} = x^{2n} \cdot x, \quad x^{2n} = (x^n)^2.$$

Используя обратимость функций $2n$ и $n+1$ и логич. несовместимость соотношений, получают рекурсивное соотношение методом разбора случаев (формальный шаг):

$$x^n = \begin{cases} \text{если } n = 0, \text{ то } 1; \\ \text{если } n \text{ четное, то } (x^{n/2})^2; \\ \text{если } n \text{ нечетное, то } x \cdot x^{n-1}. \end{cases}$$

Остается переписать это правило на каком-либо алгоритмич. языке, напр. алгол-60 (формальный шаг):

real *power*(x, n); real x, integer n;
power:= if $n=0$ then 1 else
if *even*(n) then *power*$(x, n/2) \uparrow 2$ else $x \times$ *power*$(x, n-1)$.

Определение процедуры проверки четности *even* (n) становится отдельной, более частной задачей П.

Важной составной частью П. является проверка правильности программы. Одним из способов обеспечения правильности является придание процессу П. формы, сходной с доказательством теоремы, т. е. когда каждый шаг построения программы сопровождается рассуждением, подтверждающим непротиворечивость этого шага исходному знанию о программе и дополнительному знанию, использованному в данном шаге. Возникающие при этом формальные дедуктивные системы также изучаются в *программировании теоретическом*. Дополнительным средством проверки правильности уже составленной программы является ее о т л а д к а, т. е. систематич. испытания программы на машине и сравнение эффекта, производимого программой, с ожидаемым. Хотя на практике отладка является преимущественным способом проверки программ, теоретически она не может быть исчерпывающей, т. к. установление правильности программы путем конеч-

ной системы испытаний может быть достигнуто только для очень узких классов задач (см. *Автоматов теория*).

Лит.: [1] Любимский Э. З., Мартынюк В. В., Трифонов Н. П., Программирование, М., 1980; [2] Дейкстра Э. В., Дисциплина программирования, пер. с англ., М., 1978; [3] Мейер Б., Бодуэн К., Методы программирования, пер. с франц., т. 1—2, М., 1982. *А. П. Ершов.*

ПРОГРАММИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ — см. *Математическое программирование.*

ПРОГРАММИРОВАНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ — раздел программирования, связанный с изучением и разработкой методов и средств для: а) адекватного описания в программах естественного параллелизма моделируемых в ЭВМ и управляемых ЭВМ систем и процессов, б) распараллеливания обработки информации в многопроцессорных и мультипрограммных ЭВМ с целью ускорения вычислений и эффективного использования ресурсов ЭВМ.

В отличие от программирования последовательных вычислений, концептуальную основу к-рого составляет понятие алгоритма, реализуемого по шагам строго последовательно во времени, в П. п. программа порождает совокупность параллельно протекающих процессов обработки информации, полностью независимых или связанных между собой статическими или динамическими пространственно-временными или причинно-следственными отношениями.

Вычислительный параллелизм выступает в разных конкретных формах в зависимости от этапа программирования, от сложности параллельных фрагментов и характера связей между ними.

В текстах, описывающих задачи и программы, можно выделить уровни сложности фрагментов, для к-рых *задача распараллеливания*, т. е. составления параллельной программы, решается по-разному: выражения со скалярными данными; выражения над структурными данными (векторы, матрицы, деревья и т. п.), записываемые в алгоритмич. языках с помощью операторов цикла; подзадачи и подпрограммы; независимые задачи и программы в мультипроцессорных системах.

Предпосылкой для распараллеливания выражений служит тот факт, что входящие в них операции и функции удовлетворяют нек-рым соотношениям, индуцирующим на всем множестве выражений отношение эквивалентности по результатам (например, для арифметич. операций — ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность). *Задача распараллеливания* состоит в построении по заданному выражению E эквивалентного выражения E', к-рое может быть исполнено за наименьшее число параллельных шагов, где параллельный шаг — это совокупность действий, выполняемых одновременно на разных вычислителях (процессорах). Напр., выражение

$$a+b+(c\times d)/(e\times f)+g$$

преобразуется в эквивалентное выражение

$$((a+b)+g)+((c\times d)/(e\times f)),$$

исполнение к-рого осуществляется за 3 параллельных шага. Отношение числа параллельных шагов исполнения к числу последовательных шагов наз. *ускорением распараллеливания*. Любое арифметич. выражение с n операндами может быть вычислено параллельно за $O(\log n)$ шагов с использованием n процессоров. Относительная простота алгоритмов распараллеливания выражений позволяет реализовать их автоматически в ЭВМ с помощью специальных программ или аппаратными средствами.

Большее ускорение может быть получено за счет распараллеливания обработки структурных данных. В алгоритмич. языках типа алгол или фортран выражения над структурными данными программируются с

помощью операторов цикла вида FOR $I=A, B, C$, DO S, где I — целочисленный параметр цикла, A — его начальное значение, B — конечное значение, C — шаг изменения параметра, S — тело цикла, задающее действия, выполнимые на одном шаге итерации. Для распараллеливания системы вложенных циклов рассматривается n-мерное целочисленное пространство итераций с координатными осями $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Выполнение K_1-й итерации по параметру I_1, K_2-й итерации по параметру $I_2, \ldots, K_n$-й итерации по параметру I_n изображается точкой $(K_1, \ldots, K_n)$ этого пространства. В пространстве итераций ищется семейство поверхностей, удовлетворяющих условию: все итерации $(K_1, \ldots, K_n)$, лежащие на любой из этих поверхностей, могут выполняться параллельно. Для программного представления параллельной обработки структурных данных необходимы специальные языковые средства. С этой целью разработаны модификации существующих языков программирования (в основном — фортрана), в к-рые вводятся параллельные операторы циклов, напр., вида

FOR ALL $(I, J, K)/[1{:}N;\ 1{:}L;\ 1{:}M]$,

при исполнении к-рых тело цикла копируется по определенным правилам на параллельно исполняемые итерации. Эти языки снабжаются также более развитыми средствами описания структурных данных и средствами управления размещением их в памяти для обеспечения быстрого параллельного доступа к структурным данным. Дальнейшее повышение уровня языков программирования состоит в использовании групповых операций над структурными данными таких, как покомпонентное умножение и сложение векторов и матриц, скалярное и векторное произведение, обращение матриц и т. п. Применение таких языков позволяет заменить автоматич. распараллеливание последовательных циклов, к-рое на практике осуществимо, но относительно сложно, на непосредственное задание параллельных групповых операций.

Параллельные выражения могут исполняться а с и н х р о н н о или с и н х р о н н о. В первом случае не фиксируется связь между временами выполнения параллельных операций, во втором случае времена их выполнения должны вкладываться в жесткие рамки тактированного расписания. Если операции имеют фиксированные длительности и известно число процессоров, доступных в любой момент исполнения, то целесообразно применять синхронный метод вычислений, в противном случае — более гибкий асинхронный. Управление асинхронным исполнением выражений основано на потоковом принципе: операция может выполняться в любой момент времени после того, как для нее подготовлены операнды.

Распараллеливание на уровне подзадач и подпрограмм существенно сложнее. В этом случае параллельные процессы могут иметь сложную внутреннюю структуру, длительность их выполнения не фиксирована; процессы взаимодействуют, обмениваясь данными и обращаясь к общим ресурсам (общие данные и программы в памяти, внешние устройства и т. п.). Автоматич. распараллеливание на этом уровне требует сложных алгоритмов анализа задач и учета динамич. ситуаций в системе. В связи с этим особое значение имеет создание языков П. п., позволяющих программисту непосредственно описывать сложные взаимодействия параллельных процессов.

В большинстве языков и систем П. п. принята частично асинхронная организация вычислений. В языках П. п. имеются средства выделения (порождения) параллельных процессов и средства их синхронизации, к-рые в аппаратуре поддерживаются механизмами прерываний — принудительных остановок процессов

с запоминанием их текущих состояний и с последующей активацией или возобновлением др. процессов.

Наиболее известными и простыми программными механизмами синхронизации являются семафоры и события. Семафор — это специальная управляющая переменная, принимающая целочисленные значения. Семафор обычно связан с нек-рым конфликтным ресурсом. К семафору применимы только две операции P и V. Если в ходе исполнения процесса встретится операция $P(s)$, где s — семафор, то процесс может продолжаться с уменьшением значения s на 1 только в том случае, когда значение s положительно; в противном случае он приостанавливается и занимает место в очереди $q(s)$ процессов, ждущих соответствующего ресурса. Операция V увеличивает значение s на 1 и возобновляет первый в очереди $q(s)$ процесс. Механизм семафоров широко используется в языках управления процессами в операционных системах ЭВМ и в ряде универсальных языков программирования (напр., *алгол-68*). Механизм событий включает управляющие переменные, текущие значения к-рых отмечают наступление каких-либо программных или системных событий (завершение процессов, прерывания и т. п.), и специальные операторы ожидания событий.

Семафоры и события являются универсальными средствами синхронизации, но они слишком примитивны, и неправильное их использование может привести к аварийным ситуациям таким, как взаимная блокировка процессов (напр., два процесса требуют для своего продолжения по два ресурса и каждый «захватил» по одному). Стремление повысить надежность программирования приводит к появлению более сложных механизмов синхронизации: «почтовые ящики» — особые структуры для обмена сообщениями, для к-рых фиксированы правила работы с ними параллельных процессов; мониторы — наборы процедур и данных, к к-рым процессы могут обращаться только поочередно и к-рые содержат заданные программистом правила организации взаимодействий.

Чисто асинхронное П. п. используется для организации вычислений в распределенных вычислительных системах, в к-рых полностью исключены конфликты по ресурсам. Стремление упростить организацию взаимодействий между процессами с общими ресурсами привлекает внимание к асинхронным методам вычислений, в к-рых разрешен нерегламентированный доступ параллельных процессов к общим ресурсам. Напр., разрабатываются асинхронные алгоритмы, в к-рых параллельные процессы обмениваются данными с общей памятью, причем неупорядоченный доступ к памяти не мешает достижению однозначного результата.

В теории П. п. разрабатываются формальные модели параллельных программ, процессов и систем и с их помощью исследуются различные аспекты П. п.: автоматич. распараллеливание последовательных алгоритмов и программ; разработка параллельных методов вычислений для разных классов задач и разных классов параллельных вычислительных систем; оптимальное планирование параллельных вычислений и распределение ресурсов между параллельными процессами; формальное описание семантики программ и языков П. п. Среди таких моделей — схемы параллельных программ, отражающие с разной степенью детализации структурные свойства программ; графовые модели и асинхронные сети *(Петри сети)*, являющиеся математич. абстракциями дискретных процессов и систем.

Лит.: [1] Котов В. Е., «Кибернетика», 1974, № 1, с. 1—16; №2, с. 1—18; [2] Нариньяни А. С., там же, № 3, с. 1—15; № 5, с. 1—14; [3] Фаддеева В. Н., Фаддеев Д. К., там же, 1977, № 6, с. 28—40; [4] Kuck D. J., «Comp. Surveys», 1977, v. 9, № 1, p. 29—59. *В. Е. Котов.*

ПРОГРАММИРОВАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ — математическая дисциплина, изучающая математич.

абстракции программ, трактуемых как объекты, выраженные на формальном языке, обладающие определенной информационной и логич. структурой и подлежащие исполнению на автоматич. устройствах. П. т. сформировалось преимущественно на основе двух моделей вычислений: последовательных программ с памятью, или операторных программ, и рекурсивных программ. Обе модели строятся над нек-рой абстрактной алгебраич. системой $\langle D, \Phi, \Pi\rangle$, образованной предметной областью D, конечным набором (сигнатурой) функциональных $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ и предикатных $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ символов с заданным для каждого символа числом его аргументов (арностью).

Определение класса программ слагается из трех частей: схемы программы (синтаксиса), интерпретации и семантики. Схема программы — это конструктивный объект, показывающий, как строится программа с использованием сигнатуры и других формальных символов. Интерпретация — это задание конкретной предметной области и сопоставление символам сигнатуры конкретных функций и предикатов (базовых операций), согласованных с предметной областью и арностью символов. Семантика — это способ сопоставления каждой программе результата ее выполнения. Как правило, с программами связывают вычисляемые ими функции. Интерпретация обычно входит в семантику как параметр, поэтому схема программы задает множество программ и вычисляемых ими функций, к-рое получается при варьировании интерпретаций над нек-рым запасом базовых операций.

Схема программы с памятью, называемая также алголоподобной, или операторной, схемой, задается в виде конечного ориентированного графа переходов, имеющего обычно одну входную и одну выходную вершины, вершины с одной (преобразователи) и двумя (распознаватели) исходящими дугами. С помощью символов сигнатуры и счетного множества символов переменных и констант обычным образом строится множество функциональных и предикатных термов. Каждому распознавателю сопоставляется нек-рый предикатный терм, а преобразователю — оператор присваивания, имеющий вид $y := \tau$, где y — символ переменной, а τ — функциональный терм. Конечная совокупность всех переменных в схеме образует ее память. Интерпретация в дополнение к конкретизации базовых операций предписывает каждой переменной область ее изменения, а каждой константе — ее значение. Для программ с памятью наиболее обычна т. н. операционная семантика, состоящая из алгоритма выполнения программы на заданном состоянии памяти. Программа выполняется при движении по графу переходов. При попадании на распознаватель вычисляется предикатный терм и происходит переход по дуге, соответствующей значению предиката. При попадании на преобразователь с оператором $y := \tau$ вычисляется значение τ и присваивается переменной y. Результат выполнения программы — состояние памяти при попадании на выходную вершину.

Схема рекурсивной программы, или рекурсивная схема, использует кроме функциональных т. н. условные термы, образующие вместе с первыми множество вычислительных термов. Условный терм задает вычисление методом разбора случаев и имеет вид $(\pi|\tau_1|\tau_2)$, где π — предикатный, а τ_1 и τ_2 — вычислительные термы, и соответствует конструкции условного выражения в *алголе*:

$$\text{if } \pi \text{ then } \tau_1 \text{ else } \tau_2.$$

Термы строятся над счетным множеством входных и формальных переменных, констант и символов опреде-

ляемых функций. Рекурсивная схема состоит из главного вычислительного терма с входными переменными и конечного набора рекурсивных уравнений вида $f(x_1, \ldots, x_n)=\tau$, где f — символ определяемой функции, $x_1, \ldots, x_n$ — формальные переменные, а τ — терм с переменными из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и с определяемыми функциями из набора уравнений. При естественных предположениях на интерпретацию базовых операций система уравнений относительно определяемых функций всегда имеет т. н. наименьшую неподвижную точку (н. н. т.) — совокупность функций, удовлетворяющих уравнениям, с графиками, принадлежащими графикам любых других решений уравнений. Подставляя в главный терм вместо символов определяемых функций соответствующие компоненты н. н. т., получают функциональный терм, задающий нек-рую функцию входных переменных, к-рая и объявляется функцией, вычисляемой рекурсивной программой. Поскольку такой способ сопоставления программе вычисляемой ею функции не дает конкретного алгоритма вычисления, определенная так семантика наз. денотационной.

Указанные формализмы как бы отмечают диапазон уровней изобразительных средств языков программирования: если операторные схемы близки к структуре машинной программы, то рекурсивные схемы ближе к исходной формулировке задач, подлежащих программированию.

Исследования по П. т. несут на себе отпечаток общематематич. средств, используемых при изучении моделей программ. Формально-комбинаторные методы формируют теорию схем программ, к-рая изучает свойства программ, инвариантные относительно выбора интерпретации базовых операций. Логич. методы изучают способы определения семантики программы, а также ищут закономерности в процессе построения программы. Алгебраич. методы, отвлекаясь от конкретной структуры программы, концентрируют свое внимание на изучении множеств, возникающих при рассмотрении программы или класса программ.

Сложившиеся разделы П. т. охватывают в основном модели последовательных вычислений, выполняемых одним активным устройством. Изучение проблем, возникающих при необходимости организовать совместную работу ансамбля машин, объединяемых для решения одной задачи или взаимодействующих посредством передачи сигналов и информации, составляет предмет новой дисциплины — т. н. *программирования параллельного*.

Теория схем программ. Отправным понятием теории схем программ является понятие функциональной эквивалентности. Две схемы функционально эквивалентны, если для любой интерпретации соответствующие программы вычисляют одинаковые функции. Каждому выполнению программы можно сопоставить его протокол — особого рода терм в сигнатуре базовых операций, отражающий порядок их выполнения. Если известны значения истинности предикатов, входящих в программу, то протокол по этим значениям строится однозначно, при этом для построения не нужно знать интерпретации базовых операций. Если выбирать значения истинности предикатов произвольно, то в результате для схемы программы создается нек-рое множество формальных протоколов, называемое ее детерминантом. Две схемы формально эквивалентны, если их детерминанты совпадают. Формальная эквивалентность корректна, если из нее следует функциональная эквивалентность. Поскольку детерминант строится чисто комбинаторно на основе произвольного выбора из конечного множества, он образует формальный язык, воспринимаемый нек-рым автоматом. Представляют особый

интерес такие определения протокола схем программ, к-рые приводят к разрешимым детерминантам. Для таких детерминантов можно ставить вопрос о поиске системы преобразований схем программ, полной в том смысле, что любые две формально эквивалентные схемы переводимы одна в другую этими преобразованиями.

Структура теории схем программ сложилась на базе основополагающих работ А. А. Ляпунова и Ю. И. Янова (см. [5], [10]). Последний полностью изучил простейшую модель операторных схем с сигнатурой одноместных операций и допускающих в программе только одну переменную (*с х е м ы Я н о в а*). Протоколом схемы Янова является последовательность выполняемых операций, перемежаемых значениями предикатов. Автомат, воспринимающий детерминант, оказывается конечным автоматом, а формальная эквивалентность разрешима, при этом она совпадает с функциональной. Для схем Янова найдена полная система преобразований.

Для общей модели операторных схем функциональная эквивалентность оказалась неразрешимой, однако удалось найти форму протокола — т. н. *л о г и к о - т е р м а л ь н у ю и с т о р и ю*, к-рая приводит к разрешимому детерминанту. Этот протокол фиксирует последовательность выполнения и значения предикатов схемы, а для каждого аргумента предиката указывает функциональный терм, к-рый вычислял значение данного аргумента при выполнении программы. Автоматом, воспринимающим детерминант, оказывается двухленточный конечный автомат. Для логико-термальной формальной эквивалентности также найдена полная система преобразований.

Существенное место в теории схем программ занимают вопросы перевода схем программ из одной вычислительной модели в другую. Операторные схемы эффективно переводятся в рекурсивные схемы в той же сигнатуре, однако обратная трансляция невозможна, т. к. выполнение рекурсивной программы требует, вообще говоря, сколь угодно большого числа ячеек памяти. Детерминант рекурсивной схемы может быть задан в виде контекстно-свободного языка (см. *Грамматика бесконтекстная*), однако вопрос о разрешимости соответствующей формальной эквивалентности остается пока (1983) открытым.

Теория схем программ занимается также изучением отдельных классов схем программ с целью выделить случаи разрешимых эквивалентностей, она также обогащает базовую вычислительную модель дополнительными конструкциями языков программирования, изучая при этом выразительную силу обогащений и вопросы сводимости.

Логическая теория программ. Говорят, что программа A *ч а с т и ч н о п р а в и л ь н а* относительно входного условия P и выходного условия Q (обозначение $P\{A\}Q$), если в случае, когда P истинно для входных значений переменных и A завершает работу, Q истинно для выходных значений переменных. При этом P наз. *п р е д у с л о в и е м*, а Q — *п о с т у с л о в и е м* программы A. Программа A *т о т а л ь н о п р а в и л ь н а* (обозначение $P<A>Q$), если A частично правильна относительно P и Q, а также A завершает работу для входных значений переменных, удовлетворяющих условию P. Для доказательства частичной правильности последовательных программ часто используется *м е т о д Ф л о й д а*, к-рый состоит в следующем. На схеме программы выбираются контрольные точки так, чтобы любой циклич. путь проходил по крайней мере через одну точку. Контрольные точки также связываются с входом и выходом схемы. С каждой контрольной точкой ассоциируется специальное условие (т. н. *и н д у к т и в н о е у т в е р ж д е н и е*,

или инвариант цикла), к-рое истинно при каждом переходе через эту точку. С входной и выходной точками ассоциируются входное и выходное условия. Затем каждому пути программы между двумя соседними контрольными точками сопоставляется т. н. условие правильности. Выполнимость всех условий правильности гарантирует частичную правильность программы. Один из способов доказательства завершения работы программы состоит во введении в программу дополнительных счетчиков и установлении ограниченности этих счетчиков на выходе программы в процессе доказательства частичной правильности.

Было предложено задавать аксиоматич. семантику языков программирования посредством конечной аксиоматич. системы (т. н. логики Хоара), состоящей из аксиом и правил вывода, в к-рой в качестве теорем выводимы утверждения о частичной правильности программ. Напр., для оператора присваивания схема аксиом имеет вид

$$P\,(x \leftarrow e)\,\{x := e\}\,P,$$

где $P\,(x \leftarrow e)$ означает результат подстановки в P выражения e вместо всех вхождений переменной x, а для оператора цикла типа while правило вывода имеет вид

$$(P \wedge R)\,\{A\}\,P \vdash P\,\{\text{while } R \text{ do } A\}\,(P \wedge \neg R)$$

(то есть P является инвариантом цикла).

Пусть рассматривается логика Хоара, у к-рой в качестве языка для записи условий взят язык арифметики 1-го порядка. Утверждение о частичной правильности программы наз. выводимым, если оно выводимо в расширении этой логики посредством добавления истинных формул арифметики, и наз. истинным, если оно истинно по отношению к операционной (или денотационной) семантике программы. Логика Хоара наз. состоятельной, если каждое выводимое в ней утверждение истинно, и наз. полной (относительно арифметики), если каждое истинное утверждение выводимо в ней. Состоятельная и полная логика Хоара построена, в частности, для языка программирования, содержащего простые переменные и операторы присваивания, составной, условный, цикла и процедуры (возможно, рекурсивные, но с рядом ограничений).

Важным обобщением логики Хоара является т. н. алгоритмическая (или динамическая) логика. Пусть $P\{A\}Q$ представлено в виде $P \supset [A]Q$, где $[A]Q$ есть самое слабое предусловие, для к-рого справедливо утверждение о частичной правильности программы A с постусловием Q. Аналогично для случая тотальной правильности пусть $P<A>Q$ представлено в виде $P \supset <A>Q$. Формулы алгоритмич. логики строятся из формул базового логич. языка (для записи условий) и программ с помощью булевых операций, кванторов, а также операций вида $[A]Q$, $<A>Q$. В алгоритмич. логике выразимы различные утверждения о программах, напр. их эквивалентность. Аналогично логике Хоара для алгоритмич. логики построена состоятельная и полная конечная аксиоматич. система в случае языка программирования, допускающего и недетерминированные программы.

Для доказательства утверждений о рекурсивных программах часто используется специальная индукция, связанная с определением н. н. т. Пусть для простоты рекурсивная программа задается одним уравнением $f = \tau(f)$, а ее денотационная семантика — н. н. т. $f_н$. При естественных предположениях об условии P справедлив следующий принцип индукции: если формула $P(\Omega)$ истинна и из $P(\tau^i(\Omega))$ следует $P(\tau^{i+1}(\Omega))$, то выполняется $P(f_н)$ (здесь Ω — нигде не определенная функция). Для описания денотационной семантики языков программирования высокого уровня исполь-

зуется задание области данных в виде т. н. полных решеток Скотта.

Задачу синтеза программы можно формализовать как задачу построения доказательства теоремы $\forall x \exists y \Pi(x, y)$ и последующего извлечения программы из этого доказательства. Построен алгоритм, к-рый по доказательству в интуиционистской логике дает программу на языке алгол-68. Если доказательство использует правило индукции, то ему соответствует в программе цикл вида for to . . . do . . . od. Извлекаемая программа будет приемлемой сложности, если использовать предположение, что она строится из стандартных (т. е. заданных) функций и предикатов, свойства к-рых описаны аксиомами специального вида.

Алгебраическая теория программ. Примером применения алгебраич. методов в П. т. может служить проблема эквивалентности дискретных преобразователей Глушкова, в к-рые естественно вкладываются операторные схемы программ. Пусть $\mathfrak{A}$ — конечный автомат Мили с входным алфавитом X и выходным алфавитом Y и с заданными начальным и заключительным состояниями. Пусть G — полугруппа с множеством образующих Y и единицей e. Пусть рассматривается автомат Мура G_μ (возможно, бесконечный) с множествами состояний G, входов Y, выходов X, начальным состоянием e, функцией выходов $\mu(g)$ и функцией переходов $q(g, y) = gy$. Автомат $\mathfrak{A}$, работающий совместно с G_μ, наз. дискретным преобразователем, если $\mathfrak{A}$ воспринимает в качестве входа выход G_μ, а G_μ воспринимает в качестве входа выход $\mathfrak{A}$. Выходом $\mathfrak{A}$ считается при этом состояние G_μ в момент остановки $\mathfrak{A}$. Дискретные преобразователи эквивалентны относительно полугруппы G, если для каждого отображения μ из G в X они оба не останавливаются при работе с G_μ либо оба останавливаются с одинаковым выходом. Установлена разрешимость проблемы эквивалентности дискретных преобразователей относительно полугруппы с левым сокращением, неразложимой единицей, в к-рой разрешима проблема тождества слов. Описаны также все разрешимые и неразрешимые случаи эквивалентности дискретных преобразователей относительно коммутативной полугруппы.

П. т. оказывает свое влияние на практику прежде всего как концептуальный багаж при изучении программирования и — более технич. путем — через теорию формальных языков программирования. Здесь свойства абстрактных моделей вычислений используются для уточнения семантики языков программирования и для обоснования различных манипуляций с программами (см. *Трансляция* программ, *Программ оптимизирующие преобразования*).

Лит.: [1] Глушков В. М., Летичевский А. А., в кн.: Избранные вопросы алгебры и логики, Новосиб., 1973, с. 5—39; [2] Ершов А. П., Введение в теоретическое программирование, М., 1977; [3] Котов В. Е., Введение в теорию схем программ, Новосиб., 1978; [4] Лавров С. С., «Программирование», 1978, № 6, с. 3—10; [5] Ляпунов А. А., «Проблемы кибернетики», 1958, в. 1, с. 46—74; [6] Нейвода Н. Н., «Программирование», 1979, № 1, с. 15—25; [7] Плюшкявичюс Р. А.; [и др.], «Кибернетика», 1979, № 2, с. 12—19; [8] Семантика языков программирования. Сб. статей, пер. с англ., М., 1980; [9] Скотт Д., «Кибернетический сборник», 1977, в. 14, с. 107—21; [10] Янов Ю. И., «Проблемы кибернетики», 1958, в. 1, с. 75—127; [11] Manna Z., Mathematical theory of computation, N.Y.,—[a.o.], 1974.

А. П. Ершов, В. А. Непомнящий.

ПРОГРАММИРОВАНИЯ ЯЗЫК — формальная знаковая система, служащая общению человека с ЭВМ. Решая вычислительные задачи или управляя исполнительными механизмами, ЭВМ с ее программным обеспечением демонстрирует сложные формы поведения, обычно относимые к умственной деятельности человека. Именно это сходство функций, отражающее общность кибернетич. законов обработки информации в живых организмах и автоматич. устройствах, позволя-

ет говорить о языке ЭВМ, о понимании машиной передаваемой ей информации, об общении человека и ЭВМ.

Основное назначение П. я.— быть средством *программирования*, т. е. формулирования программ, подлежащих выполнению на ЭВМ. Осмысленная программа для ЭВМ представляет собой своеобразную операционную и информационную модель нек-рой закономерности внешнего мира, причем программа фиксирует эту закономерность в точной и воспроизводимой форме. Эта документальная сторона программирования делает П. я. также важным средством профессионального общения людей.

Наиболее распространенным видом П. я. являются *алгоритмические языки*, формулирующие алгоритм решения задачи на ЭВМ. Обычно П. я. носит универсальный характер, допуская формулирование алгоритмов решения разнообразных задач, подлежащих решению на разных ЭВМ. В то же время для более удобного представления задач из нек-рого четко выделяемого класса создают *проблемно-ориентированные языки*, а для более полного использования возможностей конкретной ЭВМ создают *машинно-ориентированные языки*. Наиболее распространенные П. я. в 1970-е гг.— *алгол*, *фортран*, *кобол*, *ПЛ / I*, *алгол-68*. К более специальным языкам относятся *лисп*, *симула*, *снобол*. В СССР получили распространение также языки *альфа* и *рефал*.

Лит.: [1] Криницкий Н. А., Миронов Г. А., Фролов Т. Д., Программирование и алгоритмические языки, 2 изд., М., 1979; [2] Пратт Т., Языки программирования: разработка и реализация, пер. с англ., М., 1979.

А. П. Ершов.

ПРОГРАММЫ СХЕМА — формальный конструктивный объект, получающийся из *программы* абстрагированием от лексич. особенностей использованного при ее записи формального языка программирования и от смысла элементарных действий и объектов, употребляемых в программе. П. с. изучаются в *программировании теоретическом*.

А. П. Ершов.

ПРОГРЕССИЯ — см. *Арифметическая прогрессия*, *Геометрическая прогрессия*.

ПРО-p-ГРУППА — проконечная группа, являющаяся проективным пределом конечных p-групп. Напр., аддитивная группа кольца $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел является П.-p-г. В теории Галуа П.-p-г. появляются как группы Галуа p-расширений полей.

Пусть G есть П.-p-г. Ее системой образующих наз. подмножество $E \subset G$, обладающее свойствами: 1) G совпадает с минимальной замкнутой подгруппой группы G, содержащей E, 2) в любой окрестности единицы группы G содержатся почти все (т. е. все, кроме конечного числа) элементы из E.

Пусть I — множество индексов и F_I — абстрактная свободная группа с системой образующих $\{a_i | i \in I\}$. Проективный предел $F(I)$ системы групп F_I/N, где N — такие нормальные делители группы F_I, что индекс подгруппы N в F_I является степенью числа p, а почти все элементы a_i, $i \in I$, лежат в N, является П.-p-г., к-рая наз. свободной П.-p-г. с системой образующих $\{a_i | i \in I\}$. Всякая замкнутая подгруппа свободной П.-p-г. сама является свободной П.-p-г. Всякая П.-p-г. G есть факторгруппа свободной П.-p-г., то есть существует точная последовательность гомоморфизмов П.-p-г.

$$1 \longrightarrow R \longrightarrow F \xrightarrow{\alpha} G \longrightarrow 1,$$

где F — подходящая свободная П.-p-г. (эта последовательность наз. представлением группы G с помощью F). Подмножество $E \subset R$ наз. системой соотношений группы G, если R является наименьшим замкнутым нормальным делителем в R, содержащим E, и любой открытый нормаль-

ный делитель в R содержит почти все элементы из E. Мощности минимального (относительно включения) множества образующих и минимальной системы соотношений соответствующего представления П.-p-г. G допускают когомологич. интерпретацию: первая мощность совпадает с размерностью над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ пространства $H^1(G)=H^1(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, а вторая — с размерностью над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ пространства $H^2(G)=H^2(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Здесь $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ рассматривается как дискретный G-модуль с тривиальным действием. Если G — конечная p-группа, то

$$4 \dim H^2(G) \geqslant (\dim H^1(G)-1)^2;$$

из этого результата выводится отрицательное решение классич. проблемы *башни полей* классов [4].

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [2] Кох Х., Теория Галуа p-расширений, пер. с нем., М., 1973; [3] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [4] Голод Е. С., Шафаревич И. Р., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 261—72.

В. Л. Попов.

ПРОДОЛЖАЕМОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ — свойство решений обыкновенных дифференциальных уравнений быть продолженными на больший интервал независимого переменного. Пусть

$$x=\varphi(t), \quad t \in I, \tag{1}$$

— решение системы

$$\dot{x}=f(t, x), \; x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Решение $x=\psi(t)$, $t \in J$, системы (2) наз. продолжением решения (1), если $J \supset I$ и $\psi(t) \equiv \varphi(t)$, $t \in I$.

Пусть функция

$$f(t, x)=(f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n))$$

определена в области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{t, x}$ и $t_0 \in I$. Решение (1) наз. неограниченно продолжаемым (неограниченно продолжаемым вперед (вправо), неограниченно продолжаемым назад (влево)), если существует его продолжение, определенное на оси $-\infty<t<\infty$ (соответственно на полуоси $t_0 \leqslant t<\infty$, на полуоси $-\infty<t \leqslant t_0$). Решение (1) наз. продолжаемым вперед (вправо) до границы Γ области G, если существует его продолжение $x=\psi(t)$, $t_0 \leqslant t<t_+<\infty$, обладающее свойством: для любого компакта $F \subset G$ найдется значение $t=t_F$, $t_0<t_F<t_+$, такое, что точка $(t_F, \psi(t_F))$ не содержится в F. Аналогично определяется продолжаемость назад (влево) до границы Γ. Решение, к-рое нельзя продолжить, наз. непродолжаемым.

Если функция $f(t, x)$ непрерывна в области G, то всякое решение (1) системы (2) может быть продолжено вперед (назад) либо неограниченно, либо до границы Γ. Другими словами, всякое решение системы (2) может быть продолжено до непродолжаемого решения. Если частные производные

$$\partial f_i/\partial x_j, \quad i, j=1, \ldots, n, \tag{3}$$

непрерывны в области G, то такое продолжение единственно.

Интервал J наз. максимальным интервалом существования решения системы (2), если его нельзя продолжить на больший интервал. Для любого решения линейной системы

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j+f_i(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

с непрерывными на интервале J коэффициентами $a_{ij}(t)$ и правыми частями $f_i(t)$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, максимальный интервал существования решения совпадает с J. Для решений нелинейных систем максимальный интервал

существования может быть разным для разных решений, и его отыскание — трудная задача. Напр., для решения задачи Коши

$$\dot{x}=x^2,\quad x(t_0)=x_0$$

имеет место

$$J=(t_0+x_0^{-1},\ \infty)$$

при $x_0<0$,

$$J=(-\infty,\ t_0+x_0^{-1})$$

при $x_0>0$,

$$J=(-\infty,\ \infty)$$

при $x_0=0$.

Достаточные условия, при к-рых можно указать максимальный интервал существования решения, дает, напр., теорема Уинтнера: пусть функция $f(t, x)$ непрерывна при $t\in J=[t_0,\ t_0+a]$, $x\in\mathbb{R}^n$ и в этой области выполняется оценка

$$|f(t,x)|\leqslant L(|x|),$$

где $L(r)$ — непрерывная при $r\geqslant 0$ функция, $L(r)>0$ и

$$\int^{+\infty} dr/L(r)=+\infty;$$

тогда максимальный интервал существования любого решения системы (2) совпадает с J.

Эта теорема справедлива и в том случае, когда $J=[t_0,\ \infty)$. Большой интерес представляют достаточные условия неограниченной продолжаемости решений. Напр., если функция $f(t, x)$ и ее частные производные (3) непрерывны при $t_0\leqslant t<\infty$, $x\in\mathbb{R}^n$ и при этих значениях t, x выполняются оценки

$$|\partial f_i/\partial x_j|\leqslant c(t)<\infty,\quad i,\ j=1,\ \ldots,\ n,$$

то решение системы (2) такое, что $x(t_0)=x_0$, существует при $t_0\leqslant t<\infty$ для любого $x_0\in\mathbb{R}^n$.

Пусть рассматривается задача Коши

$$\dot{x}=f(x),\quad x(t_0)=x_0 \tag{4}$$

для *автономной системы*, причем функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема в области $G\subseteq\mathbb{R}^n_x$. Если при возрастании t фазовая траектория решения $x=\varphi(t)$ задачи (4) остается в компактном подмножестве $F\subset G$, то это решение можно продолжить на полуось $t_0\leqslant t<\infty$.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970; [2] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971; [3] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [4] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [5] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [6] Чезари Л., Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1964; [7] Wintner A., «Amer. J. Math.», 1945, v. 67, p. 277—84.

М. В. Федорюк.

ПРОДОЛЖЕНИЙ И ОХВАТОВ МЕТОД — метод исследования различных дифференциально-геометрич. структур на гладких многообразиях и их подмногообразиях. В основе П. и о. м. лежат дифференциально-алгебраич. критерии операций, позволяющих в инвариантной (безкоординатной) форме присоединять к данной структуре внутренне связанные с ней структуры, в том числе и их дифференциальные инварианты. Исторически П. и о. м. возник вслед за методом подвижного репера как инвариантный метод исследования подмногообразий однородных пространств или пространств со связностью. Впоследствии П. и о. м. был распространен на геометрию произвольных расслоенных пространств. В отличие от главной цели метода подвижного репера — построения канонич. поля реперов и дифференциальных инвариантов изучаемой структуры путем последовательного сужения соответствующих главных расслоенных пространств, П. и о. м.

ставит целью построение инвариантов и инвариантно присоединяемых структур без сужения главных расслоений реперов. В необходимых случаях П. и о. м. включает и процесс канонизации репера.

Пусть G — группа Ли и $K(G)$ — класс всех G-пространств с левосторонним действием группы Ли G на них как группы преобразований. G-о х в а т о м наз. такое гладкое сюръективное отображение

$$f: X \longrightarrow Y; \quad X,\ Y \in K(G),$$

что для любого $g \in G$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle l_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l_g^1} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array},$$

где l_g и l_g^1 — преобразования G-пространств X и Y соответственно, определяемые элементом g. В этом случае говорят, что пространство Y с помощью f о х в а ч е н о п р о с т р а н с т в о м X или п р о с т р а н с т в о X является п р о д о л ж е н и е м п р о с т р а н с т в а Y. Класс $K(G)$ становится категорией с морфизмами — G-охватами.

Примеры G-охватов.

1) Пусть $T(p, q) \in K(\mathrm{GL}(n, R))$ — пространство тензоров типа (p, q), $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$. Охватом является отображение свертки

$$T(p, q) \longrightarrow T(p-1, q-1).$$

Полная свертка тензоров пространства $T(p, p)$

$$T(p, p): T(p, p) \longrightarrow R$$

является примером охвата инварианта.

2) Если X, $Y \in K(G)$, то $X \times Y$ с помощью pr_X и pr_Y охватывает X и Y соответственно. Иными словами, $X \times Y$ является продолжением как X, так и Y.

Понятие охвата естественным образом распространяется на классы расслоенных пространств, присоединенных к главным расслоениям. Пусть $\pi: P(M, H) \to M$ — главное расслоенное пространство со структурной группой H, действующей на P правым образом, и $F \in K(H)$ — любое левое H-пространство. Объектами класса $K(P)$ присоединенных к P расслоенных пространств являются пространства типа

$$F(P) = P \times F/H,$$

где факторизация подразумевается по следующему правому действию группы H на $P \times F$:

$$(\xi, Y)\, h = (\xi h,\ h^{-1} Y); \quad (\xi, Y) \in P \times F, \quad h \in H.$$

Пространство $F(P) \in K(P)$ является расслоенным над базой M пространством с типовым слоем F. Элемент $y \in F(P)$, определяемый парой $(\xi, Y) \in P \times F$, записывают в виде $y = \xi Y$. Если F, $\Phi \in K(H)$ и $f: F \to \Phi$ — отображение H-охвата, то в силу конструкций $F(P)$ и $\Phi(P)$ f индуцирует послойное сюръективное отображение $f: F(P) \to \Phi(P)$, называемое P-о х в а т о м. P-охват f определяется по закону:

$$\tilde{f}(\xi Y) = \xi f(Y), \quad \xi \in P, \quad Y \in F.$$

Таким образом, класс $K(P)$ присоединенных к P расслоенных пространств является категорией с морфизмами типа P-охватов $\tilde{f}$. Соответствие $F \mapsto F(P)$, $f \mapsto \tilde{f}$ является биективным функтором категории $K(H)$ на категорию $K(P)$. Следовательно, достаточно изучать операции охвата в категориях H-пространства.

Если $s: M \to F(P)$ — сечение расслоенного пространства $F(P)$ (п о л е г е о м е т р и ч е с к о г о о б ъ е к т а типа F), то P-охват $\tilde{f}: F(P) \to \Phi(P)$ присоединяет к сечению s сечение $\tilde{s} = \tilde{f} \circ s$ охваченного

расслоения $\Phi(P)$; иными словами, поле геометрич. объекта $s(x)$, $x \in M$, охватывает поле геометрич. объекта $\tilde{f} \circ s(x)$. Если $s(x)$ — структурный объект нек-рой G-структуры, то изучение G-структуры и ее инвариантов сводится во многом к отысканию охватываемых геометрич. объектов. В процессе отыскания охватываемых геометрич. объектов важную роль играют дифференциальные критерии охватов, формулируемые в терминах структурных дифференциальных форм расслоенных пространств и составляющие основу П. и о. м.

Лит.: [1] Лаптев Г. Ф., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1953, т. 2, с. 275—382; [2] его же, в кн.: Тр. Третьего Всесоюзного матем. съезда. Москва, 1956, т. 3, М., 1958, с. 409—18.

Л. Е. Евтушик.

ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ МЕТОД — включение данной задачи в однопараметрическое ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$) семейство задач, связывающее данную задачу ($\alpha = 1$) с известной разрешимой задачей ($\alpha = 0$), и изучение зависимости решений от параметра α. Метод широко используется в теории дифференциальных уравнений.

Пусть, напр., требуется доказать разрешимость в классе Гёльдера задачи Дирихле

$$\left.\begin{aligned} Lu &= f, \\ u\,|_{\partial D} &= \varphi \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

в ограниченной N-мерной области $D \in A^{(n,\,\mu)}$ для линейного эллиптич. оператора 2-го порядка

$$Lu = \sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)\,u,$$

$$c(x) \leqslant 0, \quad a_{ij},\ b_i,\ c \in C^{(n-2,\,\mu)}(\overline{D}), \quad \overline{D} = D + \partial D,$$

$$n \geqslant 2, \quad \mu > 0.$$

Вводится семейство эллиптич. операторов

$$L_\alpha u = \alpha L u + (1-\alpha)\,\Delta u, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

и рассматривается для него задача Дирихле

$$\left.\begin{aligned} L_\alpha u &= f \text{ в } D, \\ u\,|_{\partial D} &= \varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество тех $\alpha \in [0,\,1]$, для к-рых задача (2) однозначно разрешима в классе $C^{(n,\,\mu)}(\overline{D})$ при любых f и φ, $f \in C^{(n-2,\,\mu)}(\overline{D})$, $\varphi \in C^{(n,\,\mu)}(\partial D)$. Множество $\mathfrak{A}$ не пусто, поскольку при $\alpha = 0$ (т. е. для оператора Лапласа) задача (2) однозначно разрешима в классе $C^{(n,\,\mu)}(\overline{D})$, как это следует из теории потенциала. Множество $\mathfrak{A}$ одновременно открыто и замкнуто на $[0,\,1]$ и, следовательно, совпадает с $[0,\,1]$. Таким образом, $\alpha = 1$ принадлежит $\mathfrak{A}$ и задача (1) разрешима.

П. по п. м. (в варианте аналитич. продолжения по параметру) был предложен и развит в ряде работ С. Н. Бернштейна (см. [1], [2]). В дальнейшем этот метод нашел широкое применение в различных вопросах теории линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, причем идея аналитич. продолжения по параметру была дополнена более общими функциональными и топологич. принципами (см. [3]).

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., «Math. Ann.», 1904, Bd 59, S. 20—76; [2] его же, Собр. соч., т. 3, М., 1960; [3] Лере Ж., Шаудер Ю., «Успехи матем. наук», 1946, в. 3/4, с. 71—95.

И. А. Шишмарев.

ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ МЕТОД — метод приближенного решения нелинейных функциональных уравнений. П. по п. м. состоит в том, что решаемое уравнение $P(x) = 0$ обобщается к виду $F(x,\,t) = 0$ путем введения параметра t, принимающего заданные значения на конечном интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$, так, что первоначальное уравнение получается при $t = t^*$: $F(x,\,t^*) = P(x)$, а уравнение $F(x,\,t_0) = 0$ легко решается или известно его решение x_0 (см. [1] — [3]).

Обобщенное уравнение $F(x, t)=0$ последовательно решается при отдельных значениях $t: t_0, t_1, \ldots, t_k=t^*$. Уравнение при $t=t_{i+1}$ решается каким-либо итерационным методом (методом Ньютона, простой итерации, итерационным методом вариации параметра [4] и др.), начиная с полученного решения x_i уравнения $F(x, t)=0$ при $t=t_i$. Применение на каждом шаге по i, напр. n итераций метода Ньютона, приводит к следующей формуле:

$$x_{i+1}^{(\nu+1)}=x_{i+1}^{(\nu)}-\left[F_x'(x_{i+1}^{(\nu)},\ t_{i+1})\right]^{-1} F(x_{i+1}^{(\nu)}, t_{i+1}),$$

$$i=0, 1, 2, \ldots, k-1;\ \nu=0, 1, 2, \ldots, n-1;\ x_{i+1}^{(0)}=x_i^{(n)}.$$

Если разность $t_{i+1}-t_i$ достаточно мала, то значение x_i может оказаться достаточно хорошим начальным приближением, обеспечивающим сходимость, для получения решения x_{i+1} при $t=t_{i+1}$ (см. [1], [3], [5]).

На практике часто исходная задача естественным образом зависит от нек-рого параметра, к-рый может быть выбран в качестве параметра t.

П. по п. м. применяется как для решения систем нелинейных алгебраич. и трансцендентных уравнений (см. [1], [2]), так и для более общих нелинейных функциональных уравнений в банаховых пространствах (см. [5] — [7]).

П. по п. м. иногда наз. также прямой метод вариации параметра (см. [2], [6]), а также комбинированный метод прямого и итерационного методов вариации параметра. В этих методах построение решений обобщенного уравнения сводится путем дифференцирования по параметру к решению дифференциальной задачи с начальными условиями (задачи Коши) методами численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Применяя простейший метод Эйлера в прямом методе вариации параметра к задаче Коши

$$\frac{dx}{dt}=-\left[F_x'(x, t)\right]^{-1} F_t'(x, t),\ x(t_0)=x_0,$$

приближенные значения $x(t_i)=x_i$, $i=1, 2, \ldots, k$, решения $x(t)$ уравнения $F(x, t)=0$ можно определить следующими равенствами:

$$x_{i+1}=x_i-(t_{i+1}-t_i)\left[F_x'(x_i, t_i)\right]^{-1} F_t'(x_i, t_i),$$

$$i=0, 1, 2, \ldots, k-1.$$

Элемент x_k будет искомым приближенным решением исходного уравнения $P(x)=0$. Уточнение всех или нек-рых значений x_{i+1} можно проводить итерационным методом вариации параметра [4] (или методом Ньютона). Обобщенное уравнение при этом рассматривается обычно в виде

$$F(x,\ t_{i+1})=(1-\lambda) F(x^{(0)},\ t_{i+1}),\ x^{(0)}=x_{i+1}$$

на конечном промежутке $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ или, заменяя здесь $1-\lambda$ на $e^{-\tau}$, на бесконечном промежутке $0\leqslant\tau\leqslant\infty$.

Метод вариации параметра применен к широкому классу задач как для построения решений, так и для доказательства их существования (см., напр., [3], [4], [6], [7]).

Лит.: [1] Lahaye E., «Acad. Roy. Belg. Bull., Cl. Sci. Sér. 5», 1948, t. 34, p. 809—27; [2] Давиденко Д. Ф., «Укр. матем. ж.», 1953, т. 5, № 2, с. 196—206; [3] Ортега Дж., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ., М., 1975; [4] Давиденко Д. Ф., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1975, т. 15, № 1, с. 30—47; [5] Дементьева А. М., «Докл. АН СССР», 1971, т. 201, № 4, с. 774—777; [6] Давиденко Д. Ф., «Укр. матем. ж.», 1955, т. 7, № 1, с. 18—28; [7] Шидловская Н. А., «Уч. зап. ЛГУ», 1958, № 271, в. 33, с. 3—17.

Д. Ф. Давиденко.

ПРОДОЛЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ — теоремы о продолжении функции с нек-рого множества на более широкое таким образом, что продолженная функция обладает определенными свойствами. К П. т. относятся прежде всего задачи об аналитическом продолжении функций.

Примером теоремы существования непрерывного продолжения непрерывной функции является теорема Брауэра—Урысона: если E — замкнутое подмножество нормального пространства X и $f: E \to \mathbb{R}$ — непрерывная действительная ограниченная функция, то существует такая непрерывная ограниченная функция $F: X \to \mathbb{R}$, что $F=f$ на E. К числу П. т. относится *Хана — Банаха теорема* о продолжении линейных функционалов в векторных пространствах.

В евклидовом пространстве П. т. в основном связаны с решением следующих двух задач: 1) продолжение функций с областей, лежащих в пространстве, на все пространство; 2) продолжение функций с границы области на саму область. В обоих случаях требуется, чтобы продолженная функция обладала определенными свойствами гладкости, т. е. принадлежала определенному функциональному классу, зависящему от свойств продолжаемой функции.

Задача о продолжении функции с сохранением непрерывности частных производных с области с достаточно гладкой границей на все пространство была решена М. Хестенсом [3] и Х. Уитни [4]. Если на $(n-1)$-мерной границе ∂G области G, лежащей в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$, заданы функции $\varphi_k: \partial G \to \mathbb{R}$, $k=0, 1, \ldots, m$, то задача построения такой функции $u: G \to \mathbb{R}$, что для нее

$$\frac{\partial^k u}{\partial n^k} = \varphi_k, \quad k=0, 1, \ldots, m, \quad u \in C^\infty(G), \qquad (*)$$

где n — нормаль к ∂G, в случае, когда гладкость функций φ_k и границы ∂G описывается в терминах непрерывности и принадлежности *Гёльдерову пространству* (при наличии, быть может, нек-рых особенностей), рассматривалась Э. Леви [5], Ж. Жиро [6] — [7] и М. Жевре [8]. Изучался также порядок роста частных производных порядка $k>m$ при стремлении аргумента к границе ∂G области G.

Систематически обе указанные задачи о продолжении функций в разных метриках L_p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, для разных измерений и в различных функциональных пространствах изучались С. М. Никольским и его учениками (см. [9], [10]). В терминах ряда функциональных пространств установлены наилучшие характеристики дифференциальных свойств функций, к-рые можно получить при продолжении функции, обладающей заданными дифференциально-разностными свойствами (см. *Вложения теоремы*). Для задачи (*) было найдено продолжение, наилучшее с точки зрения роста производных порядка $k>m$ при подходе к граничному многообразию (см. [11], [12]).

Часто методы продолжения функций и систем функций (*) с границы области на всю область основаны на интегральных представлениях функций. Подобные методы продолжения функций обычно являются линейными. Существуют и другие методы продолжения функций, напр., основанные на разложении функций в ряды с последующим продолжением каждого члена ряда. Этот метод, вообще говоря, не линейный. Имеются случаи, когда заведомо не существует линейного метода продолжения [13].

Лит.: [1] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Hestenes M. R., Extension of the range of differentiable function, «Duke Math. J.», 1941, v. 8, p. 183—92; [4] Whitney H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1934, v. 36, p. 63—89; 1936, v. 40, p. 309—17; [5] Levi E. E., «Mem. Soc. It. dei XL», 1909, v. 16, p. 3—112; [6] Giraud G., «Ann. Ec. norm. sup.», 1929, t. 46, p. 131—245; [7] его же, там же, 1932, t. 49, p. 1—104, 245—308; [8] Gevrey M., «Ann. Ec. norm. sup.», 1935, t. 52, p. 39—108; [9] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [10] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М., Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., 1975; [11] Кудрявцев Л. Д., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1959, т. 55; [12]

Успенский С. В., «Сиб. матем. ж.», 1966, т. 7, № 1, с. 192—99; № 2, с. 409—18; [13] Буренков В. И., Гольдман М. Л., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1979, т. 150, с. 31—51.
Л. Д. Кудрявцев.

ПРОДОЛЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ в аналитической геометрии — утверждения о продолжении функций, сечений аналитич. пучков, аналитич. пучков, аналитич. подмножеств, голоморфных и мероморфных отображений с дополнения $X \setminus A$ в аналитич. пространстве X к подмножеству A (как правило, тоже аналитическому) на все пространство X. Классич. результатами о продолжении функций являются две теоремы Римана.

Первая теорема Римана утверждает, что всякая аналитич. функция на $X \setminus A$, где X — нормальное комплексное пространство, а A его аналитич. подмножество коразмерности $\geqslant 2$, продолжается до аналитич. функции на всем X. Вторая теорема Римана утверждает, что всякая аналитич. функция f на $X \setminus A$, где A нигде не плотное аналитич. подмножество нормального комплексного пространства X, локально ограниченная на X, продолжается до аналитич. функции на всем X. Существуют обобщения этих теорем на произвольные комплексные пространства X, а также на сечения когерентных аналитич. пучков (см. *Локальные когомологии*).

Важнейшими результатами о продолжениях аналитических подмножеств являются теорема Реммерта — Штейна — Шифмана и теорема Бишопа. Теорема Реммерта — Штейна — Шифмана утверждает, что всякое чисто p-мерное комплексное аналитич. подмножество в $X \setminus A$, где X — комплексное аналитич. многообразие, а A его замкнутое подмножество, имеющее нулевую $(2p-1)$-мерную меру Хаусдорфа, продолжается до чисто p-мерного комплексного аналитич. подмножества во всем X. Теорема Бишопа утверждает, что всякое чисто p-мерное комплексное аналитич. подмножество V в $X \setminus A$, где X — комплексное аналитич. многообразие, а A — его комплексное аналитич. подмножество, продолжается до чисто p-мерного комплексно аналитич. подмножества $\overline{V}$ во всем X, если V имеет локально конечный объем в нек-рой окрестности U множества A в X.

Имеются критерии продолжаемости аналитич. отображений, обобщающие классич. *Пикара теорему*. Напр., всякое аналитич. отображение $X \setminus A \to Y$, где X — комплексное многообразие, A — его аналитическое нигде не плотное подмножество, а Y — гиперболическое компактное комплексное многообразие, можно продолжить до аналитич. отображения $X \to Y$. Всякое не всюду вырожденное аналитич. отображение $X \setminus A \to Y$, где X — комплексное многообразие, A — его аналитич. подмножество, Y — компактное комплексное многообразие с отрицательным первым классом Чжэня, можно продолжить до мероморфного отображения $X \to Y$.

Лит.: [1] Гриффитс Ф., Кинг Дж., Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий, пер. с англ., М., 1976; [2] Кобаяси Ш., «Математика», 1973, т. 17, в. 1, с. 47—96; [3] Харви Р., Голоморфные цепи и их границы, пер. с англ., М., 1979.
Д. А. Пономарев.

ПРОДУКТИВНОЕ МНОЖЕСТВО — множество натуральных чисел A, для к-рого существует такая частично рекурсивная функция φ, что $\varphi(x) \in A - W_x$ для всякого рекурсивно перечислимого множества W_x с геделевым номером x, содержащегося в A. Известно, что для всякого П. м. A существует такая общерекурсивная функция ψ, что уже для каждого x в зависимости от взаимного расположения множеств A и W_x имеет место либо $\psi(x) \in A - W_x$, либо $\psi(x) \in W_x - A$. Таким образом, П. м. «эффективно» отличается от любого рекурсивно перечислимого множества. С другой стороны, всякое П. м. содержит бесконечное рекурсивно перечислимое подмножество, в силу чего П. м. противопо-

ставляются *иммунным множествам*, хотя иммунными и продуктивными множествами не исчерпывается совокупность множеств, не являющихся рекурсивно перечислимыми. Продуктивными оказываются многие множества, играющие важную роль в рекурсивной теории множеств (напр., множество всех гёделевых номеров общерекурсивных функций в нек-рой гёделевой нумерации всех частично рекурсивных функций) и в ее приложениях (в частности, множества всех номеров истинных и ложных формул элементарной арифметики при естественной нумерации всех ее формул). Рекурсивно перечислимые множества, дополнение к-рых (до натурального ряда) является продуктивным, наз. к р е а т и в н ы м и; они образуют важный класс рекурсивно перечислимых множеств.

Лит.: [1] Р о д ж е р с Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972.

В. А. Душский.

ПРОЕКТИВНАЯ АЛГЕБРА в у з к о м с м ы с л е — алгебра точек на проективной прямой; проективно-инвариантные конструкции для определения сложения и умножения точек проективной прямой l, расположенной в нек-рой проективной плоскости π, для к-рой выполняется *Дезарга предложение*. Эти конструкции зависят от выбора на l трех различных точек O, E, U.

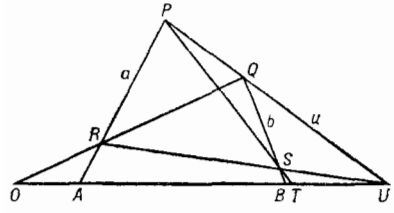


Рис. 1.

К о н с т р у к ц и я I определяет для любых двух точек A и B, отличных от U, третью точку $A+B$, также отличную от U и называемую с у м м о й т о ч е к A и B. Для этого в плоскости π проводятся три прямые a, b и u, отличные от l, не проходящие через одну точку и проходящие соответственно через точки A, B и U. Пусть P — точка пересечения прямых u и a, Q — точка пересечения прямых u и b, R — точка пересечения прямых OQ и a, S — точка пересечения прямых b и UR. Тогда прямая PS пересекает прямую l в определенной точке $T=A+B$ (общий случай — на рис. 1). Оказывается, так построенная точка зависит лишь от A, B, O, U и не зависит от выбора прямых и точки E.

К о н с т р у к ц и я II определяет для любых двух точек A и B, отличных от U, третью точку $A\cdot B$, также отличную от U, называемую п р о и з в е д е н и е м т о ч е к A и B. Для этого в плоскости проводятся три прямые a, b, u, проходящие соответственно через точки A, B и U, отличные от l и не проходящие через одну точку. Пусть P — точка пересечения прямых u и a, Q — точка пересечения прямых u и b, R — точка пересечения прямых EQ и a, S — точка пересечения прямых OR и b. Тогда прямая PS пересекает прямую l в определенной точке $T=A\cdot B$ (общий случай — на рис. 2). Оказывается, так построенная точка зависит лишь от A, B, O, E, U, но не зависит от выбора прямых a, b и u.

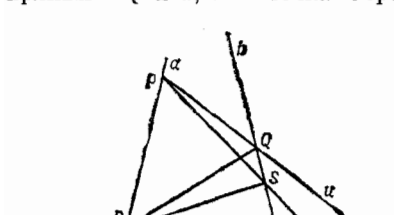


Рис. 2.

Относительно этих операций сложения и умножения точки прямой l (отличные от U) образуют тело $K(O, E, U)$. Поменяв ролями A и B в конструкции II, получают инверсно изоморфное тело $K^*(O, E, U)$. Если O',

E', U' — любая другая упорядоченная тройка точек на прямой l из той же плоскости π, то соответствующее тело $K'(O', E', U')$ изоморфно $K(O, E, U)$ вследствие того, что между прямыми l и l' существует проективное соответствие; поэтому любое тело K, изоморфное им, наз. просто телом данной проективной плоскости (или даже данной проективной геометрии); говорят также, что имеет место проективная геометрия над телом K. В общих случаях конструкций I и II фигурируют четыре лежащие в одной плоскости точки P, Q, R, S, никакие три из к-рых не коллинеарны; они образуют т. н. (полный) четырехвершинник с тремя парами противоположных сторон PQ, RS; PS, QR; PR, QS. Точки пересечения Z, X, Y этих пар противоположных сторон называется диагональными точками, — диагоналями. Специальный случай, не показанный на рисунке, соответствует той ситуации, когда X, Y, Z коллинеарны (см. *Фано постулат*).

Аналогичные построения проводятся и в пучке прямых, проходящих через одну точку с использованием (полного) четырехсторонника — фигуры, двойственной четырехвершиннику, и приводят к телу K^*, инверсно изоморфному K.

Свойства проективной прямой l как алгебраич. системы определяются геометрическими (проективно-инвариантными) свойствами проективной плоскости, в к-рой она расположена. Так, напр., коммутативность K эквивалентна выполнению *Паппа аксиомы*; то, что характеристика K не равна 2, эквивалентно постулату Фано; при отсутствии автоморфизмов у тела K, отличных от внутренних, любое *проективное преобразование* есть *коллинеация*, и т. д.

С помощью тела K на прямой, а затем и в проективном пространстве, ее содержащем, вводятся *проективные координаты*, описывающие алгебраич. модель проективного пространства, так что содержание проективной геометрии по существу определяется свойствами того тела K, над к-рым она построена.

В широком смысле П. а. исследует совокупность подпространств проективного пространства, являющуюся *дедекиндовой решеткой* с дополнениями; при этом конечномерности пространства не требуется, но накладываются условия полноты, существования однородного базиса и т. д., благодаря чему устанавливаются разнообразные связи с теорией простых и регулярных колец, теорий операторных абелевых групп и др. разделами алгебры.

Лит.: [1] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1954; [2] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969.

М. И. Войцеховский.

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии, изучающий свойства фигур, не меняющиеся при *проективных преобразованиях*, напр. при проектировании. Такие свойства наз. проективными; к ним относятся, напр., прямолинейное расположение точек (коллинеарность), порядок алгебраич. кривой и т. д.

При проектировании точек одной плоскости Π на другую плоскость Π' не каждая точка Π' имеет прообраз в Π и не каждая точка из Π имеет образ в Π'. Это обстоятельство привело к необходимости дополнения евклидова пространства т. н. *бесконечно удаленными элементами* (несобственными точками, прямыми и плоскостью) и к образованию нового геометрич. объекта — трехмерного *проективного пространства*. При этом каждая прямая дополняется одной несобственной точкой, каждая плоскость — одной несобственной прямой, все пространство — одной несобственной плоскостью. Параллельные прямые дополняются одной и той же несобственной точкой, непараллельные — разными, параллельные плоскости

дополняются одной и той же несобственной прямой, непараллельные — разными. Несобственные точки, которыми дополняется плоскость, принадлежат несобственной прямой, дополняющей ту же плоскость. Все несобственные точки и несобственные прямые принадлежат несобственной плоскости. Дополнение евклидова пространства до проективного пространства приводит к тому, что проектирование становится взаимно однозначным. Аналогичная процедура применима и для n-мерного пространства.

Существуют различные способы аксиоматич. построения проективного пространства. Наиболее распространенным является видоизменение системы аксиом, предложенной в 1899 Д. Гильбертом (D. Hilbert) для обоснования элементарной геометрии (см. *Гильберта система аксиом*). Проективное пространство рассматривается как совокупность элементов трех родов: точек, прямых и плоскостей, между к-рыми установлено основное для П. г. отношение инцидентности, характеризующееся надлежащими аксиомами. Они отличаются от соответствующей группы аксиом элементарной геометрии тем, что требуют, чтобы каждые две прямые, лежащие в одной плоскости, имели общую точку, и на каждой прямой имелось, по крайней мере, три различные точки. В конкретных случаях для получения более «богатой» П. г. эта совокупность аксиом дополняется аксиомами порядка и непрерывности (для действительного проективного пространства), *Паппа аксиомой* (для П. г. над коммутативным телом), *Фано постулатом* (для П. г. над телом, характеристика к-рого $\neq 2$) и т. д.

Замечательным положением П. г. является *двойственности принцип*. Говорят, что точка и прямая (точка и плоскость, прямая и плоскость) и н ц и д е н т н ы, если точка лежит на прямой (или прямая проходит через точку) и т. д. Тогда если верно нек-рое предложение $\mathcal{A}$ о точках, прямых и плоскостях проективного пространства, сформулированное только в терминах инцидентности между ними, то будет верно и двойственное предложение $\mathcal{B}$, к-рое получается из $\mathcal{A}$ заменой слова «точка» на слово «плоскость», слова «плоскость» на слово «точка» и с сохранением слова «прямая».

Важную роль в П. г. играет *Дезарга предложение*, выполнение к-рого необходимо и достаточно для введения проективными средствами системы *проективных координат*, составленных из элементов нек-рого тела K, естественным образом связанного с точками проективной прямой (см. *Проективная алгебра*).

Основы П. г. были заложены в 17 в. Ж. Дезаргом (G. Desargues) (в связи с развитием им учения о перспективе) и Б. Паскалем (B. Pascal) (в связи с изучением им нек-рых свойств конич. сечений). Большое значение для последующего развития П. г. имели работы Г. Монжа (G. Monge, 2-я пол. 18 — нач. 19 вв.). Как самостоятельная дисциплина П. г. была изложена Ж. Понселе (J. Poncelet, нач. 19 в.). Заслуга Ж. Понселе заключалась в выделении проективных свойств фигур в отдельный класс и установлении соответствий между метрическими и проективными свойствами этих фигур. К этому же периоду относятся работы Ж. Бриансона (J. Brianchon). Дальнейшее развитие П. г. получила в трудах Я. Штейнера (J. Steiner) и М. Шаля (M. Chasles). Большую роль в развитии П. г. сыграли работы К. Штаудта (Ch. Staudt), в к-рых были намечены также контуры аксиоматич. построения П. г. Все эти геометры стремились доказывать теоремы П. г. синтетич. методом, положив в основу изложения проективные свойства фигур. Аналитич. направление в П. г. было намечено работами А. Мёбиуса (A. Möbius). Влияние на развитие П. г. оказали работы Н. И. Лобачевского по созданию неевклидовой геометрии, позволившие в дальнейшем А. Кэли (A. Cayley) и Ф. Клейну (F. Klein) рассмотреть различные геометрич. системы с точки зрения П. г. Разви-

тие аналитич. методов обычной П. г. и построение на этой базе комплексной П. г. (Э. Штуди, E. Study, Э. Картан, E. Cartan) поставили задачу о зависимости тех или иных проективных свойств от того тела, над которым построена геометрия. В решении этого вопроса больших успехов добились А. Н. Колмогоров и Л. С. Понтрягин.

Лит.: [1] Глаголев Н. А., Проективная геометрия, 2 изд., М.— Л., 1963; [2] Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, пер. с нем., 3 изд., М., 1981; [3] Кокстер Х. С. М., Действительная проективная плоскость, пер. с англ., М., 1959; [4] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [5] Хартсхорн Р., Основы проективной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [6] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [7] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии . . ., М., 1968; [8] Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, М., 1970; [9] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [10] Veblen O., Young J. W., Projective geometry, v. 1—2, Boston—N.Y., 1910—18; [11] Blaschke W., Projektive Geometrie, 3 Aufl., Basel, 1954. *М. И. Войцеховский.*

ПРОЕКТИВНАЯ ГРУППА от n переменных над телом K — группа $PGL_n(K)$ преобразований $(n-1)$-мерного проективного пространства $P_{n-1}(K)$, индуцированных невырожденными линейными преобразованиями пространства K^n. Имеется естественный эпиморфизм

$$P: GL_n(K) \longrightarrow PGL_n(K),$$

ядром к-рого служит группа гомотетий пространства K^n, изоморфная мультипликативной группе Z^* центра Z тела K. Элементы группы $PGL_n(K)$, наз. проективными преобразованиями, являются коллинеациями пространства $P_{n-1}(K)$. Наряду с группой $PGL_n(K)$, наз. также полной проективной группой, рассматривают унимодулярную проективную группу $PSL_n(K)$ и вообще группы вида $P(G)$, где G — нек-рая линейная группа.

При $n \geqslant 2$ группа $PSL_n(K)$ проста, за исключением двух случаев, когда $n=2$ и $|K|=2$ или 3. Если K — конечное поле из q элементов, то

$$|PSL_n(K)| = (q-1, n)^{-1} q^{n(n-1)/2} (q^n-1) \times \times (q^{n-1}-1) \ldots (q^2-1).$$

Лит.: [1] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974. *Э. Б. Винберг.*

ПРОЕКТИВНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии, изучающий дифференциально-геометрические свойства кривых и поверхностей, сохраняющихся при проективных преобразованиях. Таковы, напр., понятия асимптотич. направления или, более общо, *сопряженных направлений*, *соприкасающейся квадрики* (в частности, квадрики Ли, пучка квадрик Дарбу и т. п.), *проективной нормали* и т. д. Важную роль в П. д. г. играет *двойственности принцип*, так, напр., поверхность в проективном пространстве может рассматриваться и как двухпараметрич. семейство точек, и как огибающая двухпараметрич. семейства плоскостей. Разработанными разделами П. д. г. являются (проективная) теория прямолинейных *конгруэнций*, вопросы *проективного изгибания*, асимптотич. преобразования (в частности, преобразования Бэклунда, Бианки, Эйзенхарта, Лапласа и др.).

Первые исследования по П. д. г. начались в кон. 19 в.; здесь особенно важны работы Г. Дарбу (G. Darboux) по теории поверхностей и конгруэнций. Первой книгой, где систематически изложена классич. П. д. г., явилась работа [1]. В дальнейшем появились монографии [2], [3], [4], в к-рых П. д. г. предстает уже широко развитой геометрич. теорией, связанной с другими разделами геометрии и имеющей широкие приложения, напр. в теории дифференциальных уравнений (в особенности нелинейных, что выяснилось в последнее время при «бесквадратурном» получении их решений путем аналогов

асимптотич. преобразований, см., напр., *Синус Гордона уравнение*).

Г. Фубини (G. Fubini) и Э. Чех (E. Čech) дали изложение П. д. г. в тензорной форме, используя *ковариантное дифференцирование* и положив в основу фундаментальные формы (см., напр., *Фубини форма*). Так была решена задача проективно инвариантного оснащения поверхности 3-мерного пространства. Большой вклад в П. д. г. внесен С. П. Фиников ым и его школой, в особенности это касается теории конгруэнций и теории пар конгруэнций и их преобразований. Проблема проективно инвариантного оснащения многообразия в многомерном проективном пространстве исследовалась Г. Ф. Лаптевым и др.

Эффективным средством изучения П. д. г. многомерных пространств является м е т о д н о р м а л и з а ц и и А. П. Нордена [6]. В этом методе с каждой точкой x m-мерной поверхности X_m проективного пространства P_n ассоциируется инцидентная x $(n-m)$-мерная плоскость (н о р м а л ь 1-г о р о д а), пересекающая касательную плоскость в единственной точке x, а в касательной m-мерной плоскости выбирается $(m-1)$-мерная плоскость (н о р м а л ь 2-г о р о д а), не инцидентная точке x. При этом на поверхности X_m индуцируется *аффинная связность* без кручения, свойства к-рой зависят как от строения X_m, так и от выбора нормализации. В случае нормализованной гиперповерхности возникает двойственная конструкция, приводящая к внутренним связностям без кручения 1-го и 2-го рода, сопряженным относительно асимптотич. тензора гиперповерхности. При специальном выборе нормализации в общую схему включается дифференциальная геометрия пространств, отвечающих подгруппам проективной группы: аффинных, биаксиальных, неевклидовых и евклидовых пространств.

Наконец, в работах Э. Картана (E. Cartan) построена общая теория пространств *проективной связности*. Г. Ф. Лаптев, используя метод внешних форм, исследовал их как расслоенные пространства, структурная группа к-рых является группой проективных преобразований проективного пространства.

Лит.: [1] W i l c z y n s k i F., «Mém. publ. Acad. Belgique», 1911, t. 3, pt. 2; [2] F u b i n i G., Č e c h E., Geometria proiectiva differenziale, t. 1—2, Bol., 1926—27; [3] B o l G., Projective Differentialgeometrie, t. 1—3, Gött., 1950—67; [4] Ф и н и к о в С. П., Проективно дифференциальная геометрия, М.— Л., 1937; [5] е г о ж е, Теория конгруэнций, М.— Л., 1950; [6] Н о р д е н А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976; [7] К а г а н В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 2, М.— Л., 1948.

А. П. Норден, А. П. Широков.

ПРОЕКТИВНАЯ МЕТРИКА — метрика $\rho(x, y)$ в подмножестве R проективного пространства P^n такая, что кратчайшая относительно этой метрики является частью или всей проективной прямой. При этом полагают, что R не принадлежит ни одной гиперплоскости и что 1) для любых трех неколлинеарных точек x, y, z неравенство треугольника выполняется в строгом смысле

$$\rho(x, y)+\rho(y, z) > \rho(x, z);$$

2) если x, y — различные точки из R, то пересечение $l(x, y)$ прямой l, проходящей через x и y, с R есть либо вся l (б о л ь ш о й к р у г), либо получается из l удалением нек-рого отрезка (могущего сводиться и к одной точке) (м е т р и ч е с к а я п р я м а я).

Множества R, наделенные П. м., наз. п р о е к т и в н о м е т р и ч е с к и м и п р о с т р а н с т в а м и (п. м. п.).

В одном и том же п. м. п. не могут одновременно существовать оба типа линий: либо все они — метрич. прямые (т. е. изометричны отрезку из $\mathbb{R}^1$), либо же все они — большие круги одинаковой длины (т е о р е м а Г а м е л я). Пространства первого типа наз. о т к р ы т ы м и (они совпадают с подмножествами аффин-

ного пространства, то есть с P^n, из к-рого удалена некрая гиперплоскость); геометрия открытых п. м. п. наз. также *Гильберта геометрией*. Пространства второго типа наз. замкнутыми (они совпадают со всем P^n).

Проблема определения всех П. м.— это так наз. 4-я проблема Гильберта (см. [2]), полное ее решение дано А. В. Погореловым (1974).

С П. м. связано, как частный ее случай, т. н. *проективное мероопределение* — введение в подмножества проективного пространства методами проективной геометрии такой метрики, при к-рой эти подмножества оказываются изоморфными евклидову, гиперболическому и эллиптическому пространствам. Так, геометрия открытых п. м. п., подлежащее множество к-рых совпадает со всем аффинным пространством, наз. геометрией Минковского. Евклидова геометрия — это одновременно геометрия Гильберта и геометрия Минковского.

Гиперболическая геометрия — геометрия Гильберта, в к-рой существуют отражения от всех прямых. Для этого необходимо и достаточно, чтобы R было внутренностью эллипсоида.

Эллиптическая геометрия (или *Римана геометрия*) — геометрия п. м. п. второго типа.

Лит.: [1] Буземан Г., Келли П. Дж., Проективная геометрия и проективные метрики, пер. с англ., М., 1957; [2] Проблемы Гильберта, пер. с нем., М., 1969.

М. И. Войцеховский.

ПРОЕКТИВНАЯ НОРМАЛЬ — обобщение понятия нормали в метрич. геометрии. В отличие от последней, где нормаль вполне определяется касательной плоскостью к поверхности (т. е. окрестностью первого порядка), в проективной геометрии это не так. Даже и члены третьего порядка малости не определяют вершину координатного тетраэдра, не лежащую в касательной плоскости (т. е. к выбранной *Дарбу квадрике* можно построить не один автополярный тетраэдр). Это естественно: проективная группа значительно шире группы движений, а потому ее инварианты должны быть более высокого порядка; но и окрестность 4-го порядка не определяет единственной прямой, к-рую можно принять за третью ось тетраэдра. На этом пути, напр., получаются:

директриса Вильчинского

$$W = N + \frac{1}{I} u^i r_i,$$

ребро Грина

$$G = N + \frac{1}{4}\left(g^{pq}\frac{\partial_q I}{I} - \frac{1}{I} A_{ij} T^{ijp}\right) r_p.$$

ось Чеха

$$C = N + \frac{1}{3}\left(g^{is}\frac{\partial_s I}{2I} - \frac{1}{I} A_{jk} T^{ijk}\right) r_i,$$

нормаль Фубини

$$F = N + g^{is}\frac{\partial_s I}{2I} r_i$$

(здесь N — аффинная нормаль).

Все они лежат в одной плоскости.

Лит.: [1] Широков П. А., Широков А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1959; [2] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976; [3] Фиников С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М.— Л., 1937.

М. И. Войцеховский.

ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ, двумерное проективное пространство,— инцидентностная структура $\pi = \{\mathcal{P}, \mathcal{L}, I\}$, где элементы множества $\mathcal{P}$ наз. точками, элементы множества $\mathcal{L}$ — прямыми, а I — отношение инцидентности. Инцидентностная структура удовлетворяет следующим аксиомам:

1) для любых двух различных точек p и q существует единственная прямая L такая, что pIL и qIL;

2) для любых двух различных прямых L и M существует единственная точка p такая, что pIL и pIM;

3) существуют четыре точки, никакие три из к-рых не инцидентны одной прямой.

Напр., пучок П прямых и плоскостей трехмерного аффинного пространства, проходящих через точку O, является П. п., если в качестве проективной точки считать прямую пучка П, а в качестве проективной прямой — плоскость из П. В этой интерпретации получают прозрачный геометрич. смысл однородные координаты точки П. п. над полем как координаты какого-либо вектора прямой, изображающей эту точку (см. *Проективная геометрия*, *Проективные координаты*). Другим примером является П. п., состоящая из семи точек A_i, $i=1, \ldots, 7$, и семи прямых $\{A_1, A_2, A_4\}$, $\{A_2, A_3, A_5\}$, $\{A_3, A_4, A_6\}$, $\{A_4, A_5, A_7\}$, $\{A_5, A_6, A_1\}$, $\{A_6, A_7, A_2\}$, $\{A_7, A_1, A_3\}$ (рис. 1),— представитель класса конечных проективных плоскостей. П. п. $P(2, n)$ наз. конечной проективной плоскостью порядка n, если отношение инцидентности удовлетворяет еще одной аксиоме:

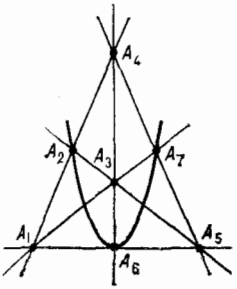


Рис. 1.

4) существует прямая, инцидентная ровно $n+1$ точке.

В $P(2, n)$ каждая точка (прямая) инцидентна $n+1$ прямой (точке), а число точек плоскости равно числу прямых и равно n^2+n+1. Остается невыясненным (1983) вопрос, для каких значений n существует П. п. $P(2, n)$. Доказано существование конечной П. п., порядок к-рой есть степень простого числа (см. [4]). Доказано также (см. [5]) отсутствие П. п. $P(2, n)$ для широкого класса чисел: если n сравнимо с 1 или 2 по модулю 4 и если в разложении этого числа на простые множители встречается в нечетной степени хотя бы одно простое число, сравнимое с 3 по модулю 4, то $P(2, n)$ не существует; таковы, напр., $n=6, 14, 21, 22, \ldots$. Вопрос относительно $n=10, 12, 15, 18, \ldots$ остается открытым. Важной задачей теории конечных П. п. является изучение подплоскостей заданной плоскости $P(2, n)$. Так, если $P(2, m)$ является собственной подплоскостью конечной П. п. $P(2, n)$, то $m^2+m \leqslant n$ или $m^2=n$ (см. [5]).

Специфическим для П. п. является понятие двойственности. Две П. п. наз. двойственными, или дуальными, если между точками (прямыми) одной плоскости и прямыми (точками) другой можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее инцидентность. Нек-рые П. п. (напр., П. п. над полем k) допускают двойственное отображение на себя, к-рое наз. корреляцией, а П. п., допускающие корреляцию, наз. автодуальными. Для П. п. имеет место т. п. малый принцип двойственности: если верно нек-рое предложение $\mathcal{A}$ о точках и прямых П. п., сформулированное только в терминах инцидентности между ними, то будет верно предложение $\mathcal{B}$, двойственное $\mathcal{A}$, т. е. предложение, к-рое получается из $\mathcal{A}$ заменой слова «точка» на слово «прямая» и наоборот.

Изоморфное отображение П. п. на себя наз. коллинеацией. Коллинеация конечной П. п. $P(2, n)$ является подстановкой множества точек и подстановкой множества прямых, причем эти подстановки подобны. Конечная П. п. наз. дезаргово́й, если она имеет группу коллинеаций, дважды транзитивную на ее точках. Группа коллинеаций дезарговой П. п. $PG(2, p^h)$ имеет порядок

$$h\,(p^{2h}+p^h+1)\,(p^{2h}+p^h)\,p^{2h}\,(p^h-1)^2.$$

Группа коллинеаций недезарговой П. п. $P(2, n)$ имеет

порядок, не превосходящий

$$n^s\,(n^2+n+1)\,(n^2+n)\,n^2\,(n-1)^2,$$

где $s \leqslant \log_2 n$. Порядки групп коллинеаций известных недезарговых П. п. не превосходят порядков групп коллинеаций дезарговых плоскостей того же порядка.

На рассмотрении 53 типов множеств

$$T(G) = \{(x, X) \mid G \text{ является } (x, X)\text{-транзитивной}\},$$

определенных для полной группы коллинеаций G, основана классификация Ленца — Бартолоцци П. п. Одним из основных путей изучения П. п. является введение в ней координат и тернарной операции. Каждому возможному типу П. п. классификации Ленца — Бартолоцци соответствует система алгебраич. законов, к-рой должно удовлетворять натуральное тело П. п., определенное через тернарную операцию. Напр., П. п. является дезарговой (паппповой) тогда и только тогда, когда во всех ее натуральных телах выполняется ассоциативный (коммутативный) закон. Дезаргова конечная П. п. $P(2, n)$ является паппповой.

Особенность дезарговой П. п. $PG(2, n)$ в том, что она обладает коллинеацией порядка n^2+n+1, циклической на точках и прямых. Этот результат дает возможность представить П. п. $PG(2, n)$ в виде циклич. таблицы. Такое представление $PG(2, n)$ заключается в том, что точки плоскости, занумерованные натуральными числами от 1 до n^2+n+1, располагаются в прямоугольной таблице из $n+1$ строки и n^2+n+1 столбца таким образом, что каждый столбец, означающий прямую со всеми на ней точками, получается прибавлением к каждому элементу предыдущего столбца единицы по модулю n^2+n+1. Напр., представление плоскости $P(2, 2)$ имеет вид

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3. \end{matrix}$$

Плоскости $P(2, n)$, где $n \leqslant 8$, единственны с точностью до изоморфизма — это дезарговы плоскости или плоскости Галуа (см. [6]), а уже для $n=9$ известны четыре неизоморфные плоскости (см. [7]).

Если к аксиомам П. п. и предложению Дезарга присоединить аксиомы порядка (к-рыми описывается разделенность двух пар точек, лежащих на одной прямой: напр., на рис. 2 пара C, D разделяет пару A, B, а пара A, C не разделяет пару B, D) и аксиому непрерывности, то полученная П. п. оказывается изоморфной действительной аффинной плоскости, пополненной несобственными элементами: к каждой прямой присоединяется несобственная (бесконечно удаленная) точка, к параллельным прямым — одна и та же, а к непараллельным — разные, причем все несобственные точки лежат на одной несобственной прямой.

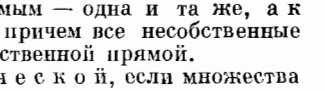


Рис. 2.

П. п. наз. топологической, если множества ее точек и прямых являются топологич. пространствами, причем отношение инцидентности является непрерывным. В топологич. плоскости тернарная операция непрерывна по всем своим аргументам. С топологич. точки зрения множество точек действительной П. п. (равно как и множество прямых) представляет собой замкнутое неориентируемое многообразие, эйлерова характеристика к-рого равна 1.

Лит.: [1] Кокстер Х., Действительная проективная плоскость, пер. с англ., М., 1959; [2] Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, пер. с англ., М., 1955; [3] Скорняков Л. А., «Успехи матем. наук», 1951, т. 6, в. 6, с. 112—54; [4] Картеси Ф., Введение в конечные геометрии, пер. с англ., М., 1980; [5] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962, гл. 20; [6] Dembowski P., Finite geometries, B.—N.Y., 1968; [7] Room T. G., Kirkpatrick P. B., Miniquaternion geometry, Camb., 1971.

В. В. Афанасьев.

ПРОЕКТИВНАЯ ПРЯМАЯ — *проективное пространство* размерности 1; П. п., рассматриваемая как самостоятельный объект, является замкнутым одномерным многообразием. П. п. является своеобразным проективным пространством — на ней нет интересных отношений инцидентности, как у проективных пространств большей размерности. Единственным инвариантом П. п. служит число ее точек. П. п. наз. непрерывной, дискретной или конечной, если она инцидентна со множеством точек мощности континуума, счетным или конечным соответственно.

П. п. наз. упорядоченной, если на ней задано отношение разделения двух пар различных точек. Предполагается, что разделение не зависит от порядка пар и порядка точек в парах и любая четверка различных точек разбивается на две взаимно разделяющиеся пары единственным образом, а также принимается аксиома расположения, связывающая пять различных точек (см., напр., [1]). Упорядочение П. п. над полем $\mathbb{R}$ связано с упорядоченностью этого поля, а именно: пара точек $\{A, B\}$ разделяет пару $\{C, D\}$, если *двойное отношение* $(A, B; C, D)$ отрицательно, и не разделяет, если $(A, B; C, D)$ положительно. Конечную П. п. $PG(1, q)$ над *Галуа полем* нечетного порядка q можно упорядочить аналогично вещественной П. п. Полагают (см. [4]), что пара точек $\{A, B\}$ разделяет пару $\{C, D\}$ тогда и только тогда, когда $(A, B; C, D)$ — квадратичный вычет поля Галуа $GF(q)$.

П. п. приобретает определенное геометрич. строение, если она вложена в проективное пространство большей размерности; так, напр., П. п. однозначно определяется двумя различными точками, а аналитич. определение П. п. как множества классов эквивалентности пар элементов тела k, не равных одновременно нулю, по существу эквивалентно вложению П. п. в проективное пространство $P_n(k)$, $n \geqslant 2$. Если $P_1(k)$ является П. п. над полем k, то группа автоморфизмов П. п. $\mathrm{Aut}\, P_1(k)$ может быть представлена на точках $P_1(k)$ в параметрич. форме как множество отображений

$$k \longrightarrow \frac{{}^{h}\alpha a + b}{{}^{h}\alpha c + d}, \quad a, b, c, d \in k, \quad ad - bc \neq 0, \quad \alpha \in \mathrm{Aut}\, k.$$

Группа алгебраич. автоморфизмов действительной П. п. изоморфна группе перемещений действительной плоскости Лобачевского, а порядок группы $\mathrm{Aut}\, PG(1, p^h)$ равен $h(p^{3h} - p^h)$.

На П. п. можно построить другие геометрии. Так, напр., плоскость Мёбиуса порядка p допускает интерпретацию на П. п. $PG(1, p^2)$ (см. [5]). Другой традиционной геометрич. конструкцией является изображение проективного пространства $P_n(k)$ на П. п. $P_1(k)$ (см. [2]), при к-ром точки из $P_n(k)$ изображаются набором n точек П. п. $P_1(k)$ (здесь k — алгебраически замкнутое поле).

Лит.: [1] Глаголев Н. А., Проективная геометрия, М., 1963; [2] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [3] Hughes D. R., Piper F. C., Projective planes, N. Y., 1973; [4] Kustaanheimo P., «Comment. phys.-math.», 1957, v. 20, № 8; [5] Veblen O., Young J. W., Projective geometre, v. 1, Boston, 1910.

В. В. Афанасьев.

ПРОЕКТИВНАЯ СВЯЗНОСТЬ — *дифференциально-геометрическая структура* на гладком многообразии M; специальный вид *связности на многообразии*, когда приклеенное к M гладкое расслоенное пространство E имеет своим типовым слоем проективное пространство P_n размерности $n = \dim M$. Структурой такого E к каждой точке $x \in M$ присоединяется экземпляр проективного пространства $(P_n)_x$, к-рый отождествляется (с точностью до гомологий с инвариантной связкой прямых в точке x) с касательным центроаффинным пространством $T_x(M)$, дополненным бесконечно удаленной гиперплоскостью. П. с., как связность в таком E, предусматривает сопоставление каждой гладкой кривой

$\mathscr{L} \in M$ с началом x_0 и каждой ее точке x_t проективного отображения $(P_n)_{x_t} \to (P_n)_{x_0}$ так, что удовлетворяется следующее условие. Пусть M покрыто координатными областями, в к-рых фиксировано гладкое поле репера $(P_n)_x$, у к-рого вершина, определяемая вектором e_0, совпадает с x. (Репер в P_n определяется классом эквивалентности базисов в векторном пространстве V_{n+1}, если эквивалентными считаются те $\{e_\alpha\}$ и $\{e'_\alpha\}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n$, у к-рых $e'_\alpha = \lambda e_\alpha$, $\lambda \neq 0$.) Тогда при $t \to 0$ отображение семейства должно стремиться к тождественному отображению, причем главная часть его отклонения от последнего должна определяться относительно поля реперов в нек-рой окрестности точки x_0 матрицей линейных дифференциальных форм

$$\omega_\alpha^\beta = \Gamma_{\beta i}^\alpha \, dx^i, \quad \det \| \Gamma_{0i}^j \| \neq 0, \tag{1}$$
$$\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n; \; i, j = 1, \ldots, n,$$

общей для всех L. Другими словами, образ репера в точке x_t при отображении $(P_n)_{x_t} \to (P_n)_{x_0}$ должен быть определен векторами

$$e_\beta \left[\delta_\alpha^\beta + \omega_\alpha^\beta (X)\, t + \varepsilon_\alpha^\beta (t) \right],$$

где X — касательный вектор к L в точке x_0 и $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\varepsilon_\alpha^\beta (t)}{t} = 0$. Возможность перехода к эквивалентным базисам приводит к тому, что среди форм (1) существенны только

$$\omega_0^i, \quad \theta_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j \omega_0^0, \quad \omega_i^0. \tag{2}$$

При преобразовании репера поля в произвольной точке $x \in M$ согласно формулам $e_{\alpha'} = A_{\alpha'}^\beta e_\beta$, $e_\beta = A_\beta^{\alpha'} e_{\alpha'}$, где $A_{0'}^{i} = A_{0'}^{i'} = 0$, т. е. при переходе к произвольному элементу главного расслоенного пространства П реперов в пространствах $(P_n)_x$, формы (1) заменяются следующими 1-формами на П:

$$\omega_{\alpha'}^{\beta'} = A_\gamma^{\beta'} \, dA_{\alpha'}^\gamma + A_{\alpha'}^\gamma A_\delta^{\beta'} \omega_\gamma^\delta. \tag{3}$$

2-формы

$$\Omega_{\alpha'}^{\beta'} = d\omega_{\alpha'}^{\beta'} + \omega_\gamma^{\beta'} \wedge \omega_{\alpha'}^{\gamma'} \tag{4}$$

являются полубазовыми, т. е. линейными комбинациями $\omega_0^k \wedge \omega_0^l$, и тензорными, т. е. при преобразовании репера матрицами A_α^γ имеют место формулы

$$\Omega_{\alpha'}^{\beta'} = A_{\alpha'}^\gamma A_\delta^{\beta'} \Omega_\gamma^\delta,$$

где $\Omega_\alpha^{\beta'}$ составлены из (3) аналогично (4). Для существенных форм (2) имеют место структурные уравнения П. с. (где для простоты опущены штрихи):

$$\left.\begin{aligned} d\omega_0^i + \theta_j^i \wedge \omega_0^j &= \Omega_0^i, \\ d\theta_i^j + \theta_k^j \wedge \theta_i^k + \omega_0^k \wedge (\delta_i^j \omega_k^0 + \delta_k^j \omega_i^0) &= \Theta_i^j, \\ d\omega_i^0 + \omega_k^0 \wedge \theta_i^k &= \Omega_i^0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $\Theta_i^j = \Omega_i^j - \delta_i^j \Omega_0^0$. Здесь правые части полубазовы; они составляют систему форм кручения-кривизны П. с.

Равенство $\Omega_0^i = 0$ имеет инвариантный смысл. В этом случае говорят о П. с. нулевого кручения; для нее $\Theta_{i'}^{j'} = \Theta_i^j$. Инвариантные тождества

$$\Omega_0^i \equiv 0, \quad \Theta^i{}_i \equiv 0,$$
$$K_{ikj}^i \equiv 0, \quad \Theta_i^j = \frac{1}{2} K_{ikl}^j \, \omega_0^k \wedge \omega_0^l,$$

выделяют специальный класс П. с., называемых (по Картану) нормальными П. с.

Формы (1) определяют П. с. на M однозначно: образ при отображении $(P_n)_{x_t} \to (P_n)_{x_0}$ репера в точке x_t

определяется решением $\{e_\alpha(t)\}$ системы

$$du_\alpha = (\omega_\alpha^\beta)_{x(t)}(\dot{x}(t))\, u_\beta \qquad (6)$$

при начальных условиях $u_\alpha(0) = e_\alpha$, где $x^i = x^i(t)$ — уравнения кривой L в нек-рой координатной окрестности ее точки x_0 с координатами $x^i(0)$.

Любые 1-формы ω_0^i, θ_i^j, ω_i^0, заданные на П и удовлетворяющие уравнениям (5) с правыми частями, выражающимися через $\omega_0^k \wedge \omega_0^l$, где ω_0^i, $i=1, \ldots, n$, линейно независимы, определяют в этом смысле нек-рую П. с. на M.

Кривая, к-рую описывает в $(P_n)_{x_0}$ точка, определяемая первым вектором $e_0(t)$ решения $\{e_\alpha(t)\}$ системы (6), наз. р а з в е р т к о й кривой L. Кривая наз. г е о д е з и ч е с к о й л и н и е й П. с. на M, если ее развертка в нек-рой окрестности произвольной ее точки x является прямой пространства $(P_n)_x$. Уравнения $x^i = x^i(t)$ геодезич. линии определяются с помощью функций

$$\xi(t) = (\omega^i)_{x(t)}(\dot{x}(t))$$

из системы

$$d\xi^i + \xi^j (\theta_j^i)_{x(t)}(\dot{x}(t)) = \vartheta_{x(t)}(\dot{x}(t))\, \xi^i,$$

где ϑ — нек-рая 1-форма. В репере, где $\omega^i = dx^i$, $\xi^i = \dot{x}^i$, эта система имеет вид

$$\frac{d^2x^a}{(dx^n)^2} = -Q^a\left(\frac{dx^1}{dx^n}, \ldots, \frac{dx^{n-1}}{dx^n}\right) + \frac{dx^a}{dx^n} Q^n\left(\frac{dx^1}{dx^n}, \ldots, \frac{dx^{n-1}}{dx^n}\right), \qquad (7)$$

где Q^a и Q^n — многочлены 2-го порядка, коэффициенты к-рых есть функции от $x^1, \ldots, x^n$.

Т е о р е м а К а р т а н а: если на гладком многообразии M задана система кривых, локально определяемая системой дифференциальных уравнений вида (7), то существует одна и только одна нормальная П. с., для к-рой эта система кривых является системой геодезич. линий.

Теория П. с. дает, таким образом, средство для инвариантного исследования систем дифференциальных уравнений специального вида. П. с. полезны также при исследовании геодезических (или проективных) отображений пространств аффинной связности. П. с. сводится к *аффинной связности*, если на M существуют локальные поля реперов, относительно к-рых $\omega_i^0 = P_{ij}\omega_0^j$. Для каждой аффинной связности на M существует единственная нормальная П. с., имеющая общие геодезич. линии, из к-рой она может быть получена. Две аффинные связности геодезически (или проективно) эквивалентны, если их нормальные П. с. совпадают. В частности, аффинная связность на M при $\dim M > 2$ проективно евклидова тогда и только тогда, когда ее тензор проективной кривизны K_{ikl} обращается в нуль.

Лит.: [1] C a r t a n E., «Bull. Soc. math. France», 1924, t. 52, p. 205—41; [2] е г о ж е, Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective, P., 1937; [3] е г о ж е, Пространства аффинной, проективной и конформной связности, пер. с франц., Казань, 1962; [4] K o b a y a s h i S., N a g a n o T., «J. Math. and Mech.», 1964, v. 13, № 2, p. 215—35. *Ю. Г. Лумисте.*

ПРОЕКТИВНАЯ СХЕМА — замкнутая подсхема проективного пространства P_k^n; в однородных координатах $x_0, \ldots, x_n$ на P_k^n проективная схема задается системой однородных алгебраич. уравнений:

$$f_1(x_0, \ldots, x_n) = 0, \ \ldots, \ f_r(x_0, \ldots, x_n) = 0.$$

Каждая П. с. является полной (компактной в случае $k = \mathbb{C}$); обратно, полная схема проективна, если на ней есть обильный обратимый пучок. Имеются и другие критерии проективности.

Обобщением понятия П. с. служит проективный морфизм. Морфизм схем $f\colon X \to Y$ наз. п р о е к т и в н ы м

(а X — схемой, проективной над Y), если X является замкнутой подсхемой проективного расслоения $P_Y(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — локально свободный $\mathcal{O}_Y$-модуль. Композиция проективных морфизмов проективна. Проективность морфизма сохраняется и при замене базы; в частности, слои проективного морфизма являются проективными схемами (но не обратно). Если схема X проективна, а $X \to Z$ — конечный сюръективный морфизм, то и Z проективна.

Любая П. с. (над Y) может быть получена при помощи конструкции проективного спектра. Ограничиваясь случаем аффинной базы, $Y = \operatorname{Spec} R$: пусть $A = \bigoplus_{i \geqslant 0} A_i$ — градуированная R-алгебра, причем R-модуль A_1 имеет конечный тип и порождает алгебру A, и пусть $\operatorname{Proj}(A)$ — множество однородных простых идеалов $p \subset A$, не содержащих A_1. Снабженное естественной топологией и структурным пучком множество $\operatorname{Proj}(A)$ является проективной Y-схемой; более того, любая проективная Y-схема имеет такой вид.

Лит.: [1] Мамфорд Д., Алгебраическая геометрия, т. 1 — Комплексные проективные многообразия, пер. с англ., М., 1979; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 47—112.

В. И. Данилов.

ПРОЕКТИВНОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО — подмножество точек проективного пространства P^n, определенного над полем k, имеющее (в однородных координатах) вид

$$V(I) = \{(a_0, \ldots, a_n) \in P^n \mid f(a_0, \ldots, a_n) = 0 \text{ для любого } f \in I\}.$$

Здесь I — однородный идеал в кольце многочленов $k[X_0, \ldots, X_n]$. (Идеал I однороден, если из $f \in I$ и $f = \sum f_i$, где все f_i — однородные многочлены степени i, следует, что все $f_i \in I$.)

Свойства П. а. м.:

1) $V\left(\sum_{i \in S} I_i\right) = \bigcap_{i \in S} V(I_i)$;

2) $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$;

3) если $I_1 \subset I_2$, то $V(I_2) \subset V(I_1)$;

4) $V(I) = V\left(\sqrt{I}\right)$,

где $\sqrt{I}$ — радикал идеала I. Из свойств 1)—3) следует, что на $V(I)$ можно ввести топологию Зарисского. Если $I = \sqrt{I}$, то I однозначно представляется в виде пересечения однородных простых идеалов:

$$I = \mathfrak{B}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{B}_s$$

и

$$V(I) = V(\mathfrak{B}_1) \cup \ldots \cup V(\mathfrak{B}_s).$$

В случае, когда I — однородный простой идеал, П. а. м. $V(I)$ наз. проективным многообразием.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1—2, М., 1963.

Вик. С. Куликов.

ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ — распространение на проективную геометрию понятия изгибания (наложения) в метрич. теории поверхностей, дано Г. Фубини (G. Fubini, 1916) (обобщение этого понятия на геометрию любой группы преобразований получил Э. Картан, E. Cartan, 1920) с использованием понятия т. н. качения одной поверхности по другой.

Пусть G — группа преобразований пространства E. Поверхность S' налагается на поверхность S (или катится по S) в геометрии группы G, если между их точками устанавливается взаимно однозначное соответствие так, что каждой паре соответствующих точек $M \in S$, $M' \in S'$ можно присоединить преобразование $g \in G$, к-рое переводит S' в положение S. При этом требуется, чтобы

1) M' совмещалась с M;

2) каждая кривая $l' \in S'$, проходящая через M, имела в этой точке касание n-го порядка с соответствующей

кривой $l \in S$ (т. е. расстояние между точками M'^* и M^*, близкими к общей точке $M'=M$, будет бесконечно малым порядка $n+1$ по сравнению с расстоянием их от общей точки). Соответствие S и S', характеризующееся числом n, наз. наложением n-го порядка.

Содержащееся здесь понятие расстояния не вносит ограничения на геометрию группы. Однако здесь речь идет о порядке касания кривых в несколько более тесном, чем обычно, смысле слова (отличие состоит в том, что соответствие между точками обеих кривых уже установлено наложением, тогда как обычно оно устанавливается при определении порядка касания).

Пусть, далее, G — группа проективных преобразований и пусть S и S' проективно налагаются. Тогда П. и. есть преобразование поверхности S с сохранением проективного линейного элемента

$$ds = \frac{F_3}{F_2},$$

где F_2 и F_3 — *Фубини формы* (при этом здесь — наложимость 2-го порядка). И оказывается, что, кроме линейчатых поверхностей, только т. н. поверхности R (см. [1]) допускают нетривиальное П. и.

Проективная геометрия занимает некое среднее положение между метрической, где, вообще говоря, всякая поверхность может изгибаться, и аффинной, где понятие изгибания не имеет места: любые две поверхности допускают наложение 1-го порядка и никакие две различные не могут иметь наложение 2-го порядка.

Лит.: [1] Фиников С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М.— Л., 1937; [2] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976.

М. И. Войцеховский.

ПРОЕКТИВНОЕ МЕРООПРЕДЕЛЕНИЕ — введение в подмножествах *проективного пространства* методами проективной геометрии такой метрики, при к-рой эти подмножества оказываются изоморфными евклидову, гиперболическому или эллиптическому пространствам. Это достигается выделением из класса всех *проективных преобразований* таких преобразований, к-рые порождают в этих подмножествах группу преобразований, изоморфную соответствующей группе движений. Наличие движений позволяет «откладывать» отрезки от данной точки в данном направлении и тем самым ввести понятие длины отрезка.

Чтобы получить евклидово мерооопределение в n-мерном проективном пространстве P, выделяют в нем одну $(n-1)$-мерную гиперплоскость π, называемую несобственной гиперплоскостью, и устанавливают в этой гиперплоскости эллиптическое полярное соответствие П точек и $(n-2)$-мерных гиперплоскостей (т. е. полярное соответствие, при к-ром никакая точка не принадлежит соответствующей ей $(n-2)$-мерной плоскости).

Пусть E_n — подмножество проективного пространства P, получающееся удалением из него несобственной гиперплоскости; X, Y, X', Y' — точки, принадлежащие E_n. Два отрезка XY и $X'Y'$ наз. конгруэнтными, если существует проективное преобразование φ, переводящее точки X и Y соответственно в точки X' и Y', при к-ром сохраняется *поляритет* П.

Определенное таким образом понятие конгруэнтности отрезков позволяет в E_n ввести метрику евклидова пространства. Для этого в проективном пространстве P вводится система *проективных координат* с базисным симплексом $OA_1A_2\ldots A_n$, причем точка O не принадлежит несобственной гиперплоскости π, а точки A_1, A_2, . . ., A_n принадлежат этой плоскости. Пусть точка O в этой системе имеет координаты 0,0, . . ., 0, 1, а точки A_i, $i=1, 2, \ldots, n$, имеют координаты

$$x_1=0, x_2=0, \ldots, x_{i-1}=0, x_i=1, x_{i+1}=0, \ldots, x_{n+1}=0.$$

Тогда эллиптическое полярное соответствие П, задан-

ное в гиперплоскости π, может быть записано в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрица $||a_{ij}||$ этого соответствия будет симметрической, а соответствующая ей квадратичная форма

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum a_{ij}x_i x_j$$

— положительно определенной. Пусть

$$X = (a_1 : a_2 : \ldots : a_n : a_{n+1}) \text{ и } Y = (b_1 : b_2 : \ldots : b_n : b_{n+1})$$

— две точки, принадлежащие E_n (то есть $a_{n+1} \neq 0$, $b_{n+1} \neq 0$). Можно положить:

$$\frac{a_1}{a_{n+1}} = x_1, \ \frac{a_2}{a_{n+1}} = x_2, \ \ldots, \ \frac{a_n}{a_{n+1}} = x_n;$$

$$\frac{b_1}{b_{n+1}} = y_1, \ \frac{b_2}{b_{n+1}} = y_2, \ \ldots, \ \frac{b_n}{b_{n+1}} = y_n.$$

Тогда расстояние ρ между точками X и Y определяется соотношением

$$\rho(X, Y) = \sqrt{Q(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)}.$$

Для установления П. м. в n-мерном гиперболич. пространстве в n-мерном проективном пространстве P рассматривается множество U внутренних точек действительной овальной гиперповерхности S 2-го порядка. Пусть X, Y, X', Y' принадлежат множеству U, тогда отрезки XY и $X'Y'$ считаются конгруэнтными, если существует проективное преобразование пространства P, при к-ром гиперповерхность S отображается на себя, переводящее точки X и Y соответственно в точки X' и Y'. Введенное таким образом понятие конгруэнтности отрезков приводит к установлению во множестве U метрики гиперболич. пространства. Длина отрезка в этой метрике определяется соотношением

$$\rho(X, Y) = c\,|\ln(XYPQ)|,$$

где P и Q — точки пересечения прямой XY с гиперповерхностью S, а c — положительное число, связанное с кривизной пространства Лобачевского.

Для введения в проективном пространстве P эллиптич. метрики в этом пространстве рассматривается эллиптическое полярное соответствие П. Два отрезка XY и $X'Y'$ наз. конгруэнтными, если существует проективное преобразование φ, переводящее точки X и Y соответственно в точки X' и Y', при к-ром сохраняется поляритет П (т. е. для любой точки M и ее поляры m полярой точки $\varphi(M)$ будет $\varphi(m)$). Если эллиптическое полярное соответствие П задано соотношениями

$$u_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

то матрица (a_{ij}) будет симметрической, а соответствующая ей квадратичная форма — положительно определенной. Тогда если

$$X = (x_1 : x_2 : \ldots : x_n : x_{n+1}), \ Y = (y_1 : y_2 : \ldots : y_n : y_{n+1}),$$

то

$$\rho(X, Y) = \arccos \frac{|B(X, Y)|}{\sqrt{B(X, X)}\sqrt{B(Y, Y)}},$$

где B — билинейная форма с матрицей $||a_{ij}||$.

Во всех рассмотренных случаях (если дополнить действительное проективное пространство до комплексного проективного пространства) при проективных преобразованиях, определяющих конгруэнтность отрезков, т. е. движениях, остаются инвариантными нек-рые гиперповерхности 2-го порядка, наз. а б с о л ю т а м и. В случае евклидова мероопределения абсолютом будет мнимая $(n-2)$-мерная овальная поверхность 2-го порядка, в случае гиперболич. мероопределения — овальная $(n-1)$-мерная действительная гиперповерхность 2-го порядка, в случае эллиптич. мероопределения —

мнимая ($n-1$)-мерная овальная гиперповерхность 2-го порядка.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [2] Глаголев Н. А., Проективная геометрия, 2 изд., М., 1963; [3] Буземан Г., Келли П. Дж., Проективная геометрия и проективные метрики, пер. с англ., М., 1957.

П. С. Моденов, А. С. Пархоменко.

ПРОЕКТИВНОЕ МНОЖЕСТВО — множество, к-рое может быть получено из *борелевских множеств* повторным применением операций проектирования и перехода к дополнению. П. м. классифицируются по классам, образующим проективную иерархию. Пусть $I=\omega^\omega$ — бэровское пространство (гомеоморфное пространству иррациональных чисел). Множество $P\subset I^m$ принадлежит: 1) классу A_1, если P есть проекция борелевского множества пространства I^{m+1}; 2) классу CA_n (P есть CA_n-м н о ж е с т в о), если его дополнение $I^m\setminus P$ есть A_n-множество ($n\geqslant 1$); 3) классу A_n (P есть A_n-м н о ж е с т в о), если P есть проекция CA_{n-1}-множества пространства I^{m+1}, $n\geqslant 2$; 4) классу B_n, если P принадлежит одновременно классам A_n и CA_n, $n\geqslant 1$. Те же классы получаются заменой проекции непрерывным образом (множества того же пространства I^m).

В силу *Суслина теоремы* класс A_1 совпадает с классом *A-множеств* (следовательно, класс CA_1 — с классом *CA-множеств*), а класс B_1 — с классом борелевских множеств. Для каждого класса A_n построено универсальное множество, и при его помощи доказана следующая т е о р е м а о п р о е к т и в н о й и е р а р х и и (теорема «существования», теорема «о непустоте классов»): $B_n\subset A_n\subset B_{n+1}$ (следовательно, $B_n\subset A_n\subset \subset B_{n+1}$), где каждое из включений — строгое. Мощность множества всех П. м. пространства I равна $2^{\aleph_0}$.

Каждое A_2-множество — объединение $\aleph_1$ борелевских множеств и, значит, счетно или имеет мощность $\aleph_1$ или $2^{\aleph_0}$ (см. [2], [7]). Для класса A_2 выполнены принципы униформизации и редукции, а для класса CA_2 — (первый) принцип отделимости. Каждый из проективных классов с номером $n\geqslant 2$ инвариантен относительно *A-операции*. Для каждого из классов A_n, CA_n существует *δs-операция*, дающая в точности все множества этого класса, исходя из замкнутых множеств. Изучение П. м. (даже второго класса) — трудная задача. Многие вопросы теории П. м. оказались неразрешимыми в классич. смысле, что полностью подтвердило предвидение (см. [6]): «область П. м. есть область, где принцип исключенного третьего уже не применим». Теория П. м. получила свое дальнейшее продвижение с привлечением сильных теоретико-множественных предположений, таких, как МС (существует измеримый кардинал), *PD* (аксиома проективной определимости), $V=L$.

В предположении МС: каждое A_2-множество измеримо (по Лебегу), обладает *Бэра свойством* и, если несчетно, содержит (непустое) совершенное подмножество; каждое A_3-множество может быть униформизировано A_4-множеством.

В предположении *PD*: 1) каждое П. м. измеримо, обладает свойством Бэра и, если несчетно, содержит совершенное подмножество, может быть униформизировано П. м., точнее: принцип униформизации выполнен для классов A_{2n} и CA_{2n+1}; 2) для классов A_{2n} и CA_{2n+1} выполнен принцип редукции, следовательно, для классов A_{2n+1} и CA_{2n} — принцип отделимости.

В предположении $V=L$: 1) существует несчетное *CA*-множество, не содержащее совершенного подмножества, и неизмеримое B_2-множество без свойства Бэра; 2) при $n\geqslant 2$ для класса A_n выполнен принцип униформизации.

Если для класса A_n выполнен принцип униформизации, то выполнен и принцип редукции. При $n\geqslant 3$ обратная импликация не доказуема в *ZFC*. Если существует неизмеримое (или без свойства Бэра) A_2-множество, то существует несчетное *CA*-множество, не содержащее совершенного подмножества. Если каждое несчетное

CA-множество содержит совершенное подмножество, то это же верно для каждого несчетного A_2-множества (см. [7]).

Отмеченные результаты справедливы не только для пространства I, но и для числовой прямой и, вообще, для любого полного сепарабельного метрич. пространства. Имеет место следующая теорема о топологич. инвариантности П. м.: гомеоморфный образ П. м. данного класса, расположенный в том же или любом другом полном сепарабельном метрич. пространстве, есть П. м. того же класса.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., «С. r. Acad. sci.», 1925, v. 180, p. 1572 (пер.: [6], с. 304—306); [2] Sierpiński W., «Fund. math.», 1925, t. 7, p. 237—43; [3] Куратовский К., Топология, пер. [с англ.], т. 1, М., 1966; [4] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970; [5] Sierpiński W., Les ensembles projectifs et analytiques, P., 1950; [6] Лузин Н. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1958, с. 242, 268; [7] Jech T., Set theory, N.Y., 1978; [8] Hinman P., Recursion theoretic hicrarchics, B., 1978; [9] Новиков П. С., Избр. труды, М., 1979; [10] Козлова З. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, № 2, с. 223—60; [11] Канторович Л. В., Дивенсон Е. М., «Fund. math.», 1932, t. 18, p. 214—79; [12] Martin D., в кн.: Handbook of mathematical logic, Amst., 1977, p. 783—815; [13] Moschovakis Y., в кн.: Proc. of the Inter. Congr. of Mathem. (Vancouver, 1974), v. 1, Montreal, 1975, p. 251—57; [14] Кановей В. Г., «Докл. АН СССР», 1980, т. 253, № 4, с. 800—03; [15] Любецкий В. А., в сб.: Исследования по теории множеств и неклассич. логикам, М., 1976, с. 96—122; [16] Kechris A., в кн.: Logic colloquim'77, Amst., 1978, p. 155—60; [17] Mauldin R., «Mathematika», 1976, v. 23, № 2, p. 151—55; [18] Marcus S., «Math. Nachr.», 1959, Bd 17, № 3—6, S. 143—50; [19] Козлова З. И., Филиппов В. П., «Изв. ВУЗов. Матем.», 1978, № 7, с. 33—39.

А. Г. Елькин.

ПРОЕКТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ группы G — гомоморфизм этой группы в группу $PGL(V)$ проективных преобразований проективного пространства $P(V)$, связанного с векторным пространством V над полем k.

С каждым П. п. φ группы G связано центральное расширение этой группы

$$1 \longrightarrow k^* \xrightarrow{i} E_\varphi \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1, \qquad (*)$$

где p — естеств. проекция группы $GL(V)$ на $PGL(V)$, i — вложение мультипликативной группы поля k в $GL(V)$ в виде скалярных матриц, а $E_\varphi = p^{-1}(\varphi(G))$. Каждое сечение s проекции p над $\varphi(G)$ задает отображение

$$\Psi = s \circ \varphi : G \longrightarrow GL(V),$$

обладающее свойством

$$\Psi(g_1 g_2) = c(g_1, g_2)\,\Psi(q_1)\,\Psi(q_2),$$

где c: $G \times G \to k^*$ — двумерный коцикл на группе G. Класс когомологий h этого коцикла не зависит от выбора сечения s. Он определяется П. п. φ и определяет класс эквивалентности расширения (*). Условие $h=0$ необходимо и достаточно для того, чтобы П. п. φ получалось факторизацией линейного представления группы G.

П. п. естественным образом возникают при изучении линейных представлений расширений групп. Важнейшие примеры П. п.: спинорное представление ортогональной группы и представление Вейля симплектич. группы. На П. п. непосредственно переносятся определения эквивалентности и неприводимости линейных представлений. Классификация неприводимых П. п. конечных групп получена И. Шуром (I. Schur, 1904).

П. п. наз. унитарным, если пространство V гильбертово, а отображение Ψ можно выбрать так, чтобы оно принимало значение в группе $U(V)$ унитарных операторов в V. Изучались унитарные неприводимые П. п. топологич. групп [4]; для связной группы Ли G их изучение сводится к изучению унитарных неприводимых представлений односвязной группы Ли $\tilde{G}$, алгебра Ли к-рой является центральным расширением алгебры

Ли $\mathfrak{g}$ группы G с помощью d-мерной коммутативной алгебры Ли, где $d=\dim H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Кертис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [3] Mackey G. W., «Acta math.», 1958, v. 99, p. 265—311; [4] Bargmann V., «Ann. Math.», 1947, v. 48, p. 568—640.

А. А. Кириллов

ПРОЕКТИВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — взаимно однозначное отображение *проективного пространства* Π_n на себя, сохраняющее отношение порядка частично упорядоченного (по включению) множества всех подпространств Π_n, т. е. отображение Π_n в себя такое, что

1) если $S_p \subset S_q$, то $F(S_p) \subset F(S_q)$;

2) для каждого S_p существует S_p такое, что $F(S_p) = \tilde{S}_p$;

3) $S_p = S_q$ тогда и только тогда, когда $F(S_p) = F(S_q)$.

При П. п. сохраняются сумма и пересечение подпространств, точки отображаются в точки, независимость точек сохраняется. П. п. образуют группу, наз. проективной группой. Примеры П. п.: *коллинеация*, *перспектива*, *гомология*.

Пусть *пространство* Π_n *интерпретируется как* совокупность подпространств $P_n(K)$ левого векторного пространства $A_{n+1}(K)$ над телом K; полулинейным преобразованием A_{n+1} в себя наз. пара $(\bar{F}, \varphi)$, состоящая из автоморфизма $\bar{F}$ аддитивной группы A_{n+1} и автоморфизма φ тела K такого, что для любых $a \in A_{n+1}$ и $k \in K$ имеет место: $\bar{F}(ka) = \varphi(k)\,\bar{F}(a)$; в частности, полулинейное преобразование $(\bar{F}, \varphi)$ является линейным, если $\varphi(k) \equiv k$. Полулинейное преобразование $(\bar{F}, \varphi)$ индуцирует П. п. F. Обратное утверждение — первая основная теорема проективной геометрии: если $n \geqslant 2$, то каждое П. п. F индуцируется нек-рым полулинейным преобразованием $(\bar{F}, \varphi)$ пространства $A_{n+1}(K)$.

Лит.: [1] Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, пер. с англ., М., 1955; [2] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1954.

М. И. Войцеховский

ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО — совокупность всех подпространств инцидентностной структуры $\pi = \{\mathcal{P}, \mathcal{L}, I\}$, где элементы множества $\mathcal{P}$ наз. точками, а элементы множества $\mathcal{L}$ — прямыми, I — отношение инцидентности. Подпространством инцидентностной структуры π наз. подмножество S множества $\mathcal{P}$, для к-рого справедливо условие: если $p, q \in S$ и $p \neq q$, то множество точек прямой, проходящей через точки p и q, также принадлежат S. Инцидентностная структура π удовлетворяет следующим требованиям:

1) для любых двух различных точек p и q существует единственная прямая L такая, что pIL, qIL;

2) каждая прямая инцидентна по крайней мере с тремя точками;

3) если две различные прямые L, M пересекаются в точке p и выполнено qIL и rIL, а sIM, tIM, то прямые, проходящие через пары точек r, t и s, q, пересекаются.

Подпространство S порождено множеством s точек из $\mathcal{P}$ (пишут $S = \langle s \rangle$), если S является пересечением всех подпространств, содержащих s. Множество точек s наз. независимым, если для любого $x \in s$ имеет место $x \notin \langle s \setminus \{x\} \rangle$. Упорядоченное максимальное и независимое множество точек подпространства S наз. базисом S, а число его элементов $d(S)$ — размерностью подпространства S. Подпространство размерности 0 является точкой, размерности 1 — *проективной прямой*. Подпространство размерности 2 наз. *проективной плоскостью*.

В П. п. определены операции сложения и пересечения подпространств. Суммой $P_m + P_k$ подпространств P_m и P_k наз. наименьшее из подпространств, содержащее и P_m, и P_k. Пересечением $P_m \cap P_k$ подпространств

P_m и P_k наз. наибольшее из подпространств, содержащееся и в P_m, и в P_k. Размерности подпространств P_m, P_k, их суммы и пересечения связаны соотношением

$$m+k=d\,(P_m \cap P_k)+d\,(P_m+P_k).$$

Для любого P_m существует P_{n-m-1} такое, что $P_m \cap \bigcap P_{n-m-1}=P_{-1}=\emptyset$ и $P_m+P_{n-m-1}=P_n$ (P_{n-m-1} — дополнение P_m в P_n), и если $P_m \subset P_r$, то

$$(P_m+P_k) \cap P_r = P_m+P_k \cap P_r$$

для любого P_k (д е д е к и н д о в о п р а в и л о), т. е. относительно введенных операций П. п. является дедекиндовой решеткой с дополнениями.

П. п. размерности больше двух дезаргово (см. *Дезарга предложение*), а следовательно, изоморфно П. п. (левому или правому) над подходящим телом k (см. [1]). $P_n^l(k)$ (напр., левое) размерности n над телом k — совокупность линейных подпространств нек-рого $(n+1)$-мерного левого линейного пространства $A_{n+1}^l(k)$ над телом k; точками $P_n^l(k)$ являются прямые $A_{n+1}^l(k)$, т. е. множества классов эквивалентности слева строк $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, составленных из элементов тела k и не равных одновременно нулю (строки $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ эквивалентны слева, если существует такое $\lambda \in k$, что $x_i=\lambda y_i$, $i=0,1, \ldots, n$); подпространствами $P_m^l(k)$, $m=1, \ldots, n$, являются $(m+1)$-мерные подпространства $A_{m+1}^l(k)$. Можно установить нек-рое соответствие между левым $P_n^l(k)$ и правым $P_n^r(k)$ П. п., при к-ром подпространству $P_s^l(k)$ соответствует $P_{n-s-1}^r(k)$ (подпространства $P_s^l(k)$ и $P_{n-s-1}^r(k)$ наз. д у а л ь н ы м и друг другу), пересечению подпространств соответствует сумма, а сумме — пересечение. Если нек-рое утверждение, основанное только на свойствах линейных подпространств, их пересечений и сумм, справедливо для $P_n^l(k)$, то справедливо и соответствующее утверждение для $P_n^r(k)$. Это соответствие между свойствами пространств $P_n^l(k)$ и $P_n^r(k)$ наз. п р и н ц и п о м д в о й с т в е н н о с т и для П. п. (см. [2]).

Конечное тело необходимо коммутативно, следовательно, конечное П. п. размерности больше двух и порядка q изоморфно П. п. над *Галуа полем* $PG(n, q)$. Конечное П. п. $P(n, q)$ содержит $(q^{n+1}-1)/(q-1)$ точек и $\prod_{i=0}^{r}(q^{n+1-i}-1)/\prod_{i=0}^{r}(q^{r+1-i}-1)$ подпространств размерности r (см. [4]).

К о л л и н е а ц и е й П. п. является перестановка ее точек, к-рая отображает прямые в прямые, при этом подпространства отображаются на подпространства. Нетривиальная коллинеация П. п. имеет не более одного центра и не более одной оси. Группа коллинеаций конечного П. п. $PG(n, p^h)$ имеет порядок, равный

$$hp^{hn(n+1)/2}\prod_{i=1}^{n+1}(p^{hi}-1).$$

Каждое П. п. $PG(n, q)$ допускает циклическую транзитивную группу коллинеаций (см. [3]).

К о р р е л я ц и е й δ П. п. является перестановка подпространств, к-рая меняет включения, т. е. если $S \subset T$, то $S^\delta \supset T^\delta$. П. п. допускает корреляцию, только если оно конечномерно. Важное значение в проективной геометрии играет корреляция порядка два, наз. *поляритетом*.

Лит.: [1] А р т и н Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [2] Х о д ж В., П и д о Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1954; [3] D e m b o w s k i P., Finite geometries, B.—[a. o.], 1968; [4] S e g r e B., Lectures on modern geometry, Roma, 1961. *В. В. Афанасьев.*

ПРОЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ — взаимно однозначное соответствие между элементами *проективного пространства* $\Pi_n(K)$ (проективными подпространствами S_q) и классами эквивалентных упорядоченных ко-

нечных подмножеств элементов тела K. П. к. подпространств S_q при $q>0$ (наз. также г р а с с м а н о в ы м и к о о р д и н а т а м и) определяются через координаты точек (0-мерных подпространств), лежащих в S_q, и потому достаточно определить П. к. точек проективного пространства.

Пусть в совокупности строк $(x^0, x^1, \ldots, x^n)=x$ не равных одновременно нулю элементов тела K (к-рые наз. также о д н о р о д н ы м и к о о р д и н а т а м и т о ч е к) введено отношение эквивалентности слева (справа): $x\sim y$, если существует $\lambda\in K$ такое, что $x^i=\lambda y^i$ ($x^i=y^i\lambda$), $i=0, \ldots, n$. Тогда совокупность классов эквивалентности находится во взаимно однозначном соответствии с совокупностью точек $\mathcal{P}$ проективного пространства $P_n^l(K)$ ($P_n^r(K)$). Если $\mathcal{P}$ интерпретируется как множество прямых левого (правого) векторного пространства $A_{n+1}^l(K)$ ($A_{n+1}^r(K)$), то однородные координаты точки M имеют смысл координат векторов, принадлежащих прямой l, представляющей эту точку, а П. к.— совокупности всех таких координат.

В общем случае П. к. точек проективного пространства Π_n относительно нек-рого базиса вводятся чисто проективными средствами (при обязательном выполнении в Π_n *Дезарга предложения*) следующим образом.

Множество σ_n $(n+1)$ независимых точек $A_0, \ldots, A_n$ пространства Π_n наз. с и м п л е к с о м, при этом точки $A_0, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$ также независимы и определяют нек-рое подпространство $S_{n-1}=\Sigma^i$, наз. г р а н ь ю этого симплекса. Существует нек-рая точка E, не лежащая ни на одной из граней Σ^i. Пусть $i_0, i_1, \ldots, i_n$ — любая перестановка чисел $0, 1, \ldots, n$. Точки $A_{i_{k+1}}, \ldots, A_{i_n}$, $k\geqslant 0$, и E оказываются независимыми и определяют нек-рое S_{n-k}. Далее, точки $A_{i_0}, \ldots, A_{i_k}$ определяют тоже нек-рое S_k, а так как суммой S_k и S_{n-k} является все пространство Π_n, то S_k и S_{n-k} имеют в точности одну общую точку $E_{i_0 \ldots i_k}$, не лежащую ни в одном из $(k-1)$-мерных подпространств, определяемых точками $A_{i_0}, \ldots, A_{i_{j-1}}, A_{i_{j+1}}, \ldots, A_{i_k}$; при этом $E_{i_0 \ldots i_k}$, $A_{i_{k+1}}, \ldots, A_{i_n}$ также независимы. Таким образом получается $2^{n+1}-1$ точек $E_{i_0 \ldots i_k}$, включая точки $E_i=A_i$ и $E_{0 \ldots n}=E$, к-рые и образуют р е п е р п р о с т р а н с т в а $S_n=\Pi_n$; симплекс σ_n является его остовом.

На каждой прямой A_iA_j имеются три точки A_i, A_j, E_{ij}, пусть они играют роль точек O, U, E в определении тела K рассматриваемой проективной геометрии (см. *Проективная алгебра*). Тела $K(A_i, E_{ij}, A_j)$ и $K(A_k, E_{kl}, A_l)$ изоморфны друг другу, причем изоморфизм устанавливается п р о е к т и в н ы м с о о т в е т с т в и е м T_{ij}^{kl} между точками двух прямых A_iA_j и A_kA_l таким, что точки A_k, E_{kl}, A_l отвечают точкам A_i, E_{ij}, A_j. Элемент тела K, соответствующий точке P прямой A_iA_j, наз. п р о е к т и в н о й к о о р д и н а т о й p точки P в шкале (A_i, E_{ij}, A_j). В частности, П. к. E_{ij} всегда равна 1, а П. к. P в шкале (A_j, E_{ij}, A_i) есть $p^*=p^{-1}$.

Пусть P — точка пространства, не лежащая ни на одной из граней симплекса σ_n: $A_0, \ldots, A_n$, образующего вместе с нек-рой точкой E репер R. Если использовать точку P вместо E в вышеприведенной конструкции репера, то получится последовательность точек P_i, P_{ij}, P_{ijk}, $\ldots$, где $P_{i_0 \ldots i_k}$ лежит в подпространстве, определяемом $A_{i_0}, \ldots, A_{i_k}$ (но не лежит ни в одной из граней симплекса σ_k, образованного этими точками). Пусть P_{ij} — координата точки P_{ij} (лежащей на A_iA_j) в шкале (A_i, E_{ij}, A_j). Тогда если i, j, k попарно различны, то

1) $p_{ij}p_{ji}=1$;

2) $p_{ik}p_{kj}p_{ji}=1$.

Пусть x_0 — произвольный элемент K, отличный от нуля, а $x_i=x_0p_{i0}$, $x\neq 0$, $i=1, \ldots, n$ (при этом оказывается, что $p_{ij}=x_j^{-1}x_i$). Тогда совокупность эквивалентных между собой строк, определяемых различными элементами x_0, и дает П. к. точки P относительно репера R.

Пусть P лежит в подпространстве S_k, определяемом точками $A_{i_0}, \ldots, A_{i_k}$, но не лежит ни в одной из граней симплекса, определяемого этими точками. Пусть совокупность эквивалентных строк $(x_{i_0}, \ldots, x_{i_k})$ является П. к. точки P относительно репера R подпространства S_k, определяемого симплексом σ_k и точкой $E_{i_0 \ldots i_k}$. Тогда П. к. точки P относительно репера R задаются следующим образом: $y_i=x_i$, $i=i_0, \ldots, i_k$; $y_i=0$, $i\neq i_0, \ldots, i_k$.

Любая совокупность эквивалентных между собой слева (справа) $(n+1)$ строк, построенная вышеизложенным способом, соответствует одной и только одной точке P пространства Π_n и определяет поэтому в нем П. к.

Лит.: [1] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1954. *М. И. Войцеховский.*

ПРОЕКТИВНЫЙ МОДУЛЬ — модуль P, удовлетворяющий любому из следующих эквивалентных условий: 1) для любого эпиморфизма модулей α: $B\to C$ и любого гомоморфизма β: $P\to C$ найдется такой гомоморфизм γ: $P\to C$, что $\beta=\alpha\gamma$; 2) модуль P является прямым слагаемым свободного модуля; 3) функтор Hom $(P,-)$ точен; 4) любой эпиморфизм модулей $A\to P$ расщепляется.

Теорема Капланского [2], утверждающая, что всякий П. м. является прямой суммой П. м. со счетным числом образующих, сводит изучение структуры П. м. к счетному случаю. П. м. с конечным числом образующих изучаются в алгебраической K-теории. Простейшим примером П. м. является свободный модуль. Над кольцами, разложимыми в прямую сумму, всегда существуют П. м., отличные от свободных. Совпадение классов проективных и свободных модулей доказано для локальных колец [2], колец многочленов над полем от нескольких переменных (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Kaplansky J., «Ann. Math.», 1958, v. 68, № 2, p. 372—77; [3] Суслин А. А., «Докл. АН СССР», 1976, т. 229, № 5, с. 1063—66; [4] Quillen D., «Invent. Math.», 1976, v. 36, p. 167—71. *В. Е. Говоров.*

ПРОЕКТИВНЫЙ ОБЪЕКТ категории — понятие, формализующее свойства ретрактов (или прямых слагаемых) свободных групп, свободных модулей и т. п. Объект P категории $\mathfrak{K}$ наз. проективным, если для всякого эпиморфизма ν: $A\to B$ и произвольного морфизма γ: $P\to B$ найдется такой морфизм γ': $P\to A$, что $\gamma=\gamma'\nu$. Другими словами, объект P проективен, если основной функтор $H_P(X)=H(P, X)$ из $\mathfrak{K}$ в категорию множеств $\mathfrak{S}$ переводит эпиморфизмы из $\mathfrak{K}$ в эпиморфизмы категории $\mathfrak{S}$, т. е. в сюръективные отображения.

Примеры. 1) В категории множеств всякий объект проективен. 2) В категории групп проективны свободные группы и только они. 3) В категории ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ левых модулей над ассоциативным кольцом Λ с единицей модуль проективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым свободного модуля. Описание колец, над к-рыми всякий проективный модуль свободен, составляет содержание проблемы Серра. 4) В категории ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ все модули проективны тогда и только тогда, когда кольцо Λ классически полупросто. 5) В категории функторов $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{S})$ из малой категории $\mathfrak{D}$ в категорию множеств $\mathfrak{S}$ каждый объект проективен тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D}$ — дискретная категория.

В определении П. о. иногда предполагают, что функтор H_P переводит в сюръективные отображения не все эпиморфизмы, а морфизмы выделенного класса $\mathfrak{E}$. В частности, если $\mathfrak{E}$ — класс допустимых эпиморфиз-

мов бикатегории $\mathfrak{K}=(\mathfrak{K}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$, то P наз. допустимым проективным объектом. Напр., в нек-рых многообразиях групп свободные группы этого многообразия являются допустимыми П. о. относительно класса всех сюръективных гомоморфизмов, но не являются П. о., поскольку существуют несюръективные эпиморфизмы.

Дуальным к понятию П. о. является понятие инъективного объекта. Фундаментальная роль проективных и инъективных объектов была выявлена при построении гомологич. алгебры. В категориях модулей всякий модуль представим в виде фактормодуля проективного модуля. Это свойство позволяет строить т. н. проективные резольвенты и исследовать различные типы гомологич. размерности.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966.

М. Ш. Цаленко.

ПРОЕКТИВНЫЙ ПРЕДЕЛ, обратный предел,— конструкция, возникшая первоначально в теории множеств и топологии, а затем нашедшая широкое применение во многих разделах математики. Наиболее часто используется П. п. семейства однотипных математич. структур, индексированных элементами нек-рого предупорядоченного множества. Пусть I — множество, снабженное отношением предпорядка $<$, и каждому элементу $i\in I$ сопоставлено множество X_i, а каждой паре (i, j), $i, j\in I$, в к-рой $i<j$, сопоставлено отображение $\varphi_{ij}X_i\to X_j$, причем φ_{ii}, $i\in I$,— тождественные отображения и $\varphi_{ij}\varphi_{jk}=\varphi_{ik}$ при $i<j<k$. Множество X наз. проективным пределом семейства множеств X_i и отображений φ_{ij}, если выполнены следующие условия: а) существует такое семейство отображений π_i: $X\to X_i$, что $\pi_i\varphi_{ij}=\pi_j$ для любой пары $i<j$; б) для любого семейства отображений $\alpha_i: Y\to X_i$, $i\in I$, произвольного множества Y, для к-рого выполнены равенства $\alpha_i\varphi_{ij}=\alpha_j$ при $i<j$, существует такое однозначно определенное отображение $\alpha: Y\to X$, что $\alpha_i=\alpha\pi_i$ для всех $i\in I$. Конструктивно П. п. можно описать следующим образом: рассматривается прямое произведение $\prod_{i\in I}X_i$ и в нем выделяется подмножество всех функций f: $I\to\bigcup_{i\in I}X_i$, для к-рых выполняются равенства $\varphi_{ij}(f(i))=f(j)$ при $i<j$. Это подмножество является П. п. семейства X_i. Если все X_i снабжены дополнительной однотипной структурой, к-рая переносится на $\prod_{i\in I}X_i$, то эта же структура индуцируется и в П. п. Поэтому можно говорить о П. п. групп, модулей, топологич. пространств и т. д.

Естественным обобщением понятия П. п. является понятие П. п. функтора. Пусть $F: \mathfrak{D}\to\mathfrak{K}$ — одноместный ковариантный функтор из малой категории $\mathfrak{D}$ в произвольную категорию $\mathfrak{K}$. Объект $X\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$, вместе с морфизмами π_D: $X\to F(D)$, $D\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$, наз. проективным пределом (обратным пределом, или просто пределом) функтора F, если выполнены следующие условия: а) $\pi_DF(\varphi)=\pi_{D'}$ для любого морфизма $\varphi: D\to D'$; б) для всякого семейства морфизмов $\alpha_D: Y\to F(D)$, для к-рого $\alpha_DF(\varphi)=\alpha_{D'}$ при $\varphi: D\to D'$, существует такой единственный морфизм $\alpha: Y\to X$, что $\alpha_D=\alpha\pi_{D'}$ для любого $D\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$. Обозначение: $\lim F=(X, \pi_D)$. Аналогично определяется проективный предел контравариантного функтора.

Примеры П. п. 1) Пусть I — дискретная категория. Тогда для произвольного функтора F: $I\to\mathfrak{K}$ проективный предел функтора F совпадает с *прямым произведением* семейства объектов $F(i)$, $i\in I$.

2) Пусть $\mathfrak{D}$ — категория с двумя объектами A, B и двумя неединичными морфизмами α, β: $A\to B$. Тогда предел любого функтора $F: \mathfrak{D}\to\mathfrak{K}$ является *ядром* пары морфизмов $F(\alpha)$, $F(\beta)$.

Если в категории $\mathfrak{N}$ существуют произведения любых семейств объектов и ядра пар морфизмов, то в $\mathfrak{N}$ существует предел любого функтора $F: \mathfrak{D} \to \mathfrak{N}$ из произвольной малой категории $\mathfrak{D}$. *М. Ш. Цаленко.*

ПРОЕКТИВНЫЙ СПЕКТР кольца — *схема* $X = \mathrm{Proj}(R)$, сопоставляемая градуированному кольцу $R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n$. Как множество точек X представляет собою множество однородных простых идеалов $p \subset R$, таких, что $p \not\supset \sum_{n=1}^{\infty} R_n$. Топология на X определяется следующим базисом открытых множеств: $X_f = \{p \mid f \notin p\}$ для $f \in R_n$, $n > 0$. Структурный пучок $\mathcal{O}_X$ локально окольцованного пространства X задается на базисных открытых множествах так: $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) = [R_{(f)}]_0$, т. е. подкольцо элементов степени 0 кольца частных $R_{(f)}$ по мультипликативной системе $\{f^n\}_{n \geqslant 0}$.

Наиболее важным примером П. с. является $P^n = \mathrm{Proj}\ \mathbb{Z}[T_0, T_1, \ldots, T_n]$. Множество его k-значных точек P^n_k для любого поля k находится в естественном соответствии с множеством точек проективного n-мерного пространства над полем k.

Если все кольца R_m как R_0-модули натянуты на $\underbrace{R_1 \otimes \ldots \otimes R_1}_{m}$, то на $\mathrm{Proj}(R)$ определена еще дополнительная структура. А именно, покрытие $\{X_f \mid f \in R_1\}$ и единицы f/g определяют 1-коцикл Чеха на $\mathrm{Proj}(R)$, к-рому отвечает обратимый пучок, обозначаемый через $\mathcal{O}(1)$. Через $\mathcal{O}(n)$ принято обозначать n-ю тензорную степень $\mathcal{O}(1)^{\otimes n}$ пучка $\mathcal{O}(1)$. Существует канонич. гомоморфизм $R_n \xrightarrow{\varphi_n} \Gamma(X, \mathcal{O}(n))$, указывающий геометрич. смысл градуировки кольца R (см. [1]). Если, напр., $R = k[T_0, \ldots, T_n]$, то $\mathcal{O}(1)$ соответствует пучку гиперплоских сечений в P^n_k.

Лит.: [1] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [2] Grothendieck A., Eléments de géométrie algébrique, t. 1–4, P., 1960–1967 (Publ. IHES). *В. В. Шокуров.*

ПРОЕКТОР, проекционный оператор,— линейный оператор P в векторном пространстве X такой, что $P^2 = P$. *М. И. Войцеховский.*

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ — методы отыскания приближенного решения операторного уравнения в заданном подпространстве, основанные на проектировании уравнения на нек-рое (вообще говоря, другое) подпространство. П. м. являются основой построения различных вычислительных схем решения краевых задач, в том числе метода конечных элементов и метода коллокации.

Пусть L — оператор, область определения $D(L)$ к-рого лежит в банаховом пространстве X, а область значений $R(L)$ — в банаховом пространстве Y. Для решения уравнения

$$Lx = y \qquad (1)$$

проекционным методом выбирают две последовательности подпространств $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$,

$$X_n \subset D(L) \subset X,\ Y_n \subset Y,\quad n = 1, 2, \ldots,$$

а также проекторы P_n, проектирующие Y на Y_n. Уравнение (1) заменяется приближенным

$$P_n L x_n = P_n y,\quad x_n \in X_n. \qquad (2)$$

В случае $X = Y$, $X_n = Y_n$, $n = 1; 2, \ldots$ П. м. (2) принято называть методом Галеркина (иногда последний метод трактуется более широко, см. *Галеркина метод*).

Имеет место теорема сходимости П. м. для линейных уравнений (для случая конечномерных подпространств X_n и Y_n). Пусть L линеен и переводит

$D(L)$ на $R(L)$ взаимно однозначно, причем $D(L)$ и $R(L)$ плотны в X и Y соответственно; подпространства X_n и Y_n конечномерны, $\dim X_n = \dim Y_n$, $n=1, 2, \ldots$, а проекторы P_n ограничены равномерно по n, то есть $\|P_n\| \leqslant c = \text{const}$, $n=1, 2, \ldots$ Тогда следующее условие а) равносильно набору условий б) и в):

а) начиная с нек-рого $n=n_0$ существует единственное решение x_n уравнения (2) и $\|Lx_n - y\| \to 0$ при любом $y \in F$;

б) последовательность подпространств LX_n предельно плотна в Y, т. е. расстояние $d(y, LX_n) \to 0$ при $n \to \infty$ для $\forall y \in F$;

в) $\tau \equiv \varliminf\limits_{n\to\infty} \tau_n > 0$, где $\tau_n = \inf\limits_{y_n \in LX_n,\ \|y_n\|=1} \|P_n y_n\|$.

Быстрота сходимости при соблюдении условий б) и в) характеризуется неравенством

$$d(y, LX_n) \leqslant \|Lx_n - y\| < (1 + c/\tau_n)\, d(y, LX_n). \quad (3)$$

В случае, когда пространства X и Y гильбертовы, а P_n и Q_n — ортопроекторы, проектирующие Y соответственно на Y_n и LX_n, условие в) равносильно условию

в') $\theta \equiv \varlimsup\limits_{n\to\infty} \theta_n < 1$, где $\theta_n = \|P_n - Q_n\|$ — раствор подпространств Y_n и LX_n; вместо (3) получается оценка

$$\|y - Q_n y\| \leqslant \|Lx_n - y\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\theta_n^2}} \|y - Q_n y\|.$$

В случае $Y_n = LX_n$ (метод наименьших квадратов) $\theta_n = 0$, $n=1, 2, \ldots$, и критерием сходимости является условие б).

Теорема дает условие сходимости невязки $\|Lx_n - y\|$. Если L^{-1} ограничен и $y \in R(L)$, то из сходимости невязки следует сходимость самих приближений x_n к решению $x = L^{-1}y$ уравнения (1). Из теоремы можно извлечь удобный критерий сходимости метода Галеркина; для метода Галеркина — Петрова следует дополнительно наложить условие типа в').

Пусть l — линейная ограниченная форма, а a — билинейная ограниченная форма на действительном гильбертовом пространстве H (или полуторалинейная в случае комплексного H). Допускается, что a представима в виде $a = \hat{a} + b$, так что

$$\hat{a}(u, u) \geqslant \gamma \|u\|^2 \quad \forall u \in H, \quad \gamma = \text{const} > 0,$$

а билинейная форма b вполне непрерывна, т. е. слабые сходимости $u_n \to u$, $v_n \to v$ в H влекут за собой сходимость $b(u_n, v_n) \to b(u, v)$ (симметричность форм a, $\hat{a}$, b не обязательна). Пусть поставлена задача: найти $u \in H$ такое, что

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H. \quad (4)$$

Метод Галеркина решения задачи (4) заключается в следующем. Выбирают какие-нибудь (замкнутые) подпространства $H_n \subset H$, $n=1, 2, \ldots$, и находят $u_n \in H_n$ такое, что

$$a(u_n, v_n) = l(v_n) \quad \forall v_n \in H_n. \quad (5)$$

Имеет место следующая теорема: пусть $\{H_n\}$ предельно плотна в H, выполнены наложенные выше на a условия, и задача (4) имеет единственное решение $u \in H$ (равносильное условие: однородная задача отыскания u из условия $a(u, v) = 0$ $\forall v \in H$ имеет лишь тривиальное решение $u=0$); тогда задача (5) при всех достаточно больших n имеет единственное решение $u_n \in H_n$ и $\|u_n - u\| \to 0$ с оценкой

$$\|u - O_n u\| \leqslant \|u_n - u\| \leqslant c \|u - O_n u\|,$$

где O_n — ортопроектор, проектирующий H на H_n, $c = \text{const}$.

В применении к краевым задачам для уравнений эллиптич. типа в качестве H, как правило, выбирается энергетич. пространство главной части соответствующего дифференциального оператора.

Лит.: [1] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969.

Г. М. Вайникко.

ПРОЕКЦИОННЫЙ СПЕКТР — индексированное *направленным множеством* $(A, >)$ семейство *симплициальных комплексов* $\{N_\alpha : \alpha \in A\}$ такое, что для каждой пары индексов α, $\alpha' \in A$, для к-рых $\alpha' > \alpha$, определено симплициальное отображение (проекция) $\pi_\alpha^{\alpha'}$ комплексов $N_{\alpha'}$ на комплекс N_α. При этом требуется, чтобы $\pi_\alpha^{\alpha''} = \pi_\alpha^{\alpha'} \pi_{\alpha'}^{\alpha''}$, когда $\alpha'' > \alpha' > \alpha$ (условие транзитивности). Тогда и говорят, что задан проекционный спектр $S = \{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}, A\}$, или просто $S = \{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}\}$. Это понятие принадлежит П. С. Александрову (см. [2]); оно, по сути, эквивалентно общему понятию обратной системы, или обратного спектра (см. *Спектр* в категории). Действительно, каждый комплекс N_α естественным образом превращается в частично упорядоченное множество симплексов этого комплекса, а следовательно в топологическое T_0-пространство N_α. При этом проекции $\pi_\alpha^{\alpha'}$ становятся непрерывными отображениями. Обратно, если $\{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}\}$ — обратная система из топологических T_0-пространств и непрерывных проекций $\pi_\alpha^{\alpha'}$, то каждое T_0-пространство N_α естественно превращается в частично упорядоченное множество, а это частично упорядоченное множество реализуется в виде симплициального комплекса N_α. При этом непрерывные проекции $\pi_\alpha^{\alpha'}$ становятся симплициальными отображениями. Таким образом, П. с. — это в точности обратная система из топологических T_0-пространств (см. [3]).

Понятия «П. с.» (а следовательно, и обратной системы пространств) и нерва системы множеств (см. ниже) оказали огромное влияние не только на развитие топологии, но и на развитие всей теоретико-множественной математики. После этого стало возможным говорить о теории аппроксимации сложных топологических и алгебро-топологич. объектов более простыми.

Если для каждого $\alpha \in A$ комплекс N_α конечен, то спектр $S = \{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}\}$ наз. конечным проекционным спектром. С каждым П. с. $S = \{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}\}$ связываются следующие понятия. Всякий набор симплексов $\xi = \{t_\alpha : \alpha \in A\}$ по одному из каждого комплекса N_α спектра S наз. нитью этого спектра, если при $\alpha' > \alpha$ всегда $\pi_\alpha^{\alpha'} t_{\alpha'} = t_\alpha$, где t_α, $t_{\alpha'} \in \xi$. Множество $\overline{S}$ всех нитей с топологией, базу к-рой образуют множества вида $Ot_{\alpha_0} = \{\xi' \in S : t'_{\alpha_0} \leqslant t_{\alpha_0}\}$, где $\alpha_0 \in A$, $t_{\alpha_0} \in N_{\alpha_0}$ произвольны, а $t'_{\alpha_0} \leqslant t_{\alpha_0}$ означает, что симплекс t'_{α_0} нити ξ' в комплексе N_{α_0} является гранью симплекса t_{α_0}, наз. полным пределом спектра S. Та же топология получается, если индуцировать на $\overline{S}$ топологию тихоновского произведения $\Pi\{\mathcal{O}^\alpha : \alpha \in A\}$, где $\mathcal{O}^\alpha$ — соответствующее комплексу N_α топологическое T_0-пространство. Нить $\xi' = \{t'_\alpha\}$ объемлет нить $\xi = \{t_\alpha\}$, если для каждого $\alpha \in A$ выполнено $t'_\alpha \geqslant t_\alpha$. Нить ξ наз. максимальной (соответственно минимальной), если не существует никакой отличной от нее нити, для к-рой она была бы объемлемой (соответственно объемлющей). Подпространство полного предельного пространства $\overline{S}$ спектра S, состоящее из всех максимальных (соответственно из всех минимальных) нитей, наз. верхним (соответственно нижним) пределом спектра S. Полный предел $\overline{S}$ является полурегулярным (в другой терминологии —

семирегулярным) T_0-пространством, а верхний $\widehat{S}$ и нижний $\check{S}$ пределы суть T_1-пространства. Если S — конечный П. с., то $\widetilde{S}$, $\hat{S}$ и $\check{S}$ — бикомпактные пространства.

В основе всей теории аппроксимации топологич. пространств полиэдрами, вернее симплициальными комплексами, лежит введенное П. С. Александровым (см. [1]) понятие нерва системы множеств. Н е р в о м данной системы α множеств наз. симплициальный комплекс N_α, вершины к-рого взаимно однозначно соответствуют элементам системы α таким образом, что каждое множество вершин определяет симплекс комплекса N_α тогда и только тогда, когда соответствующие этим вершинам множества системы α имеют непустое пересечение.

Удобнее рассматривать т. н. канонич. покрытия пространства X. Локально конечное (конечное) покрытие α пространства X наз. к а н о н и ч е с к и м, если его элементы — *канонические множества* (замкнутые) (в другой терминологии — регулярные замкнутые) с дизъюнктными открытыми ядрами. Если из двух канонич. покрытий пространства X покрытие α' следует за покрытием α, т. е. α' вписано в α (в этом случае $\alpha' > \alpha$), то определено естественное симплициальное отображение $\pi_\alpha^{\alpha'}$ (проекция) нерва $N_{\alpha'}$ на нерв N_α, к-рое возникает, если каждому элементу $A^{\alpha'} \in \alpha'$ покрытия α' поставить в соответствие тот единственный элемент A^α покрытия α, для к-рого $A^\alpha \supset A^{\alpha'}$. Пусть $\mathfrak{A}(X)$ (соответственно $\mathfrak{A}_0(X)$) обозначает совокупность всех локально конечных (конечных) канонич. покрытий пространства X. Для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}(X)$ (соответственно $\alpha \in \mathfrak{A}_0(X)$) обозначена вся совокупность всех локально конечных (конечных) канонич. покрытий пространства X. Для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}(X)$ (соответственно $\alpha \in \mathfrak{A}_0(X)$) рассматривается комплекс N_α, являющийся нервом покрытия α. Если $\alpha' > \alpha$, то определено симплициальное отображение $\pi_\alpha^{\alpha'} : N_{\alpha'} \to N_\alpha$. Полученный таким образом П. с. $S = \{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}\}$ наз. п о л н ы м (соответственно к о н е ч н ы м) П. с. топологич. пространства X. П. С. Александров [2] еще в 1928 доказал, что каждый метрический (n-мерный) компакт является верхним пределом (n-мерного) конечного П. с. над счетным множеством индексов. А. Г. Курош в 1934 доказал, что каждый бикомпакт есть верхний предел своего конечного П. с. В 1961 В. И. Пономарев доказал, что каждый паракомпакт есть верхний предел своего полного П. с., то есть спектра, построенного над множеством $\mathfrak{A}(X)$ всех локально конечных канонич. покрытий пространства X. В. И. Пономарев ввел понятие р а с с л а б л е н и я симплициального комплекса K, понимая под этим всякий замкнутый подкомплекс $K' \subset K$, содержащий все вершины комплекса K. Нульмерный комплекс, состоящий из всех вершин комплекса K, наз. его п о л н ы м р а с с л а б л е н и е м (или о с т о в о м). Заменяя все комплексы данного П. с. их (полным) расслаблением и сохраняя при этом проекции, получают (полное) расслабление спектра. Исследование неприводимых совершенных отображений паракомпактов сводится к исследованию расслаблений их полных П. с. При этом предел полного расслабления полного П. с. паракомпакта X есть т. н. *абсолют* $\dot{X}$ паракомпакта X, а предел полного расслабления конечного П. с. любого регулярного пространства — бикомпактное расширение Стоуна — Чеха $\beta\dot{X}$ абсолюта $\dot{X}$ этого регулярного пространства. Всякий конечный абстрактный П. с. эквивалентен спектру над нек-рым направленным измельчающимся множеством конечных канонических покрытий нек-рого полурегулярного бикомпактного T_0-пространства, т. е. получается из этого спектра

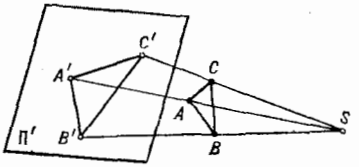
посредством конечного числа следующих операций: 1) замена спектра изоморфным ему спектром, 2) замена спектра *его конфинальной частью*, 3) *замена спектра* спектром, содержащим данный в качестве конфинальной части (теорема Зайцева).

Понятия нерва и П. с. доставили средства для редукции свойств общих пространств, и прежде всего паракомпактов, бикомпактов и метрич. компактов, к свойствам комплексов и их симплициальных отображений. Это позволило определить и изучать гомологические и когомологические инварианты общих пространств, а не только полиэдров (см. *Александрова — Чеха гомологии и когомологии*, *Спектральные гомологии*). Все это привело к синтезу геометрических и теоретико-множественных идей в топологии.

Лит.: [1] Александров П. С., «C.r. Acad. sci.», 1927, t. 184, p. 317—20; [2] его же, «Ann. Math.», 1929, v. 30, p. 101—87; [3] его же, «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 1, с. 5—57; [4] его же, Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [5] Александров П. С., Пономарёв В. И., в кн.: General topology and its relations to modern analysis and algebra, v. 2, Prague, 1967, p. 25—30; [6] Александров П. С., Федорчук В. В., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 3, с. 3—48; [7] *Пономарев В. И.*, «Матем. сборник», 1963, т. 60, № 1, с. 89—119; [8] Зайцев В. И., «Труды Моск. матем. об-ва», 1972, т. 27, с. 129—93.

В. И. Пономарев.

ПРОЕКЦИЯ — термин, связанный с операцией проектирования (проецирования), к-рую можно определить следующим образом (см. рис.): выбирают произвольную точку S пространства в качестве центра проектирования и плоскость Π', не проходящую через точку S, в качестве плоскости проекций. Чтобы спроектировать точку A (прообраз) пространства на плоскость Π' через центр проекций S, проводят прямую SA до ее пересечения в точке A' с плоскостью Π'. Точку A' (образ) наз. проекцией точки A; проекцией фигуры F наз. совокупность П. всех ее точек. Описанная П. наз. центральной (или конической). П. с бесконечно удаленным центром проектирования наз. параллельной (или цилиндрической). Если плоскость П. расположена перпендикулярно к направлению проектирования, то П. наз. ортогональной (или прямоугольной).



Параллельные П. широко используются в *начертательной геометрии* для получения различных видов изображений (см., напр., *Аксонометрия*, *Перспектива*). Имеются специальные виды П. на плоскость, сферу и др. поверхности (см., напр., *Картографическая проекция*, *Стереографическая проекция*).

А. Б. Иванов.

ПРОИЗВЕДЕНИЕ семейства объектов категории — понятие, описывающее на языке морфизмов конструкцию декартова произведения. Пусть A_i, $i \in I$, — индексированное семейство объектов категории $\mathfrak{K}$. Объект $P \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ (вместе с морфизмами $\pi_i : P \to A_i$, $i \in I$) наз. произведением семейства объектов A_i, $i \in I$, если для всякого семейства морфизмов $\alpha_i : X \to A_i$, $i \in I$, существует такой единственный морфизм $\alpha : X \to P$, что $\alpha\pi_i = \alpha_i$, $i \in I$. Морфизмы π_i наз. проекциями произведения; П. обозначается $\prod_{i \in I}^{\times} A_i(\pi_i)$, или $\prod_{i \in I} A_i$, или $A_1 \times \ldots \times A_n$ в случае $I = \{1, \ldots, n\}$. Морфизм α, входящий в определение П., иногда обозначается $\prod_{i \in I} \alpha_i$ или $(\times)_{i \in I} \alpha_i$. П. семейства A_i, $i \in I$, определено однозначно с точностью до изоморфизма; оно ассоциативно и ком-

мутативно. Понятие П. семейства объектов двойственно понятию *копроизведения* семейства объектов.

Произведением пустого семейства объектов является правый нуль (терминальный объект) категории. В большинстве категорий структуризованных множеств (категории множеств, групп, топологич. пространств и т. д.) понятие П. семейства объектов совпадает с понятием декартова (прямого) П. этих объектов. Тем не менее такое совпадение не является обязательным: в категории периодических абелевых групп П. семейства групп G_i, $i \in I$, есть периодич. часть декартова П. этих групп, к-рая в общем случае отличается от самого декартова П.

В категориях с нулевыми морфизмами для любого произведения $P = \prod_{i \in I}^{\times} A_i (\pi_i)$ существуют такие однозначно определенные морфизмы $\sigma_i : A_i \to P$, $i \in I$, что $\sigma_i \pi_i = 1_{A_i}$, $\sigma_i \pi_j = 0$ при $i \neq j$. Если I конечно, то в абелевой категории $\pi_1 \sigma_1 + \ldots + \pi_n \sigma_n = 1$ и П. семейства объектов $A_1, \ldots, A_n$ совпадает с их копроизведением.

Лит.: [1] Каленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974. *М. Ш. Каленко.*

ПРОИЗВОДНАЯ — одно из основных понятий математич. анализа. Пусть действительная функция $f(x)$ действительного переменного x определена в нек-рой окрестности точки x_0 и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (*)$$

Этот предел и наз. производной от функции $f(x)$ в точке x_0. Если положить $y = f(x)$,

$$x - x_0 = \Delta x, \quad f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y,$$

то предел (*) запишется так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Используют также обозначения $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx} f(x_0)$ и нек-рые другие.

Операцию вычисления П. наз. дифференцированием. Если производная $f'(x_0)$ конечна, то функцию $f(x)$ наз. дифференцируемой в точке x_0. Функцию, дифференцируемую в каждой точке нек-рого множества, наз. дифференцируемой на этом множестве. Дифференцируемая функция всегда непрерывна. Однако существуют непрерывные функции, не имеющие П. во всех точках заданного промежутка (см. *Недифференцируемая функция*).

Пусть функция дифференцируема в нек-ром промежутке. Ее производная $f'(x)$ может оказаться при этом *разрывной функцией*. Однако по классификации Бэра (см. *Бэра классы*) она всегда является функцией 1-го класса и обладает свойством Дарбу: приняв два значения, принимает и все промежуточные.

Обобщением понятия П. является понятие П. по множеству. Пусть действительная функция $f(x)$ определена на нек-ром множестве E действительных чисел, x_0 — предельная точка этого множества, $x_0 \in E$, и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in E} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

к-рый и наз. производной от функции $f(x)$ по множеству E в точке x_0 и обозначают символом $f'_E(x_0)$. П. функции по множеству есть обобщение понятия П. Разновидностями этого обобщения являются понятия *односторонней производной*, *производного числа*, *аппроксимативной производной*.

Данное определение П. (и его обобщение), а также простейшие ее свойства почти без изменений распространяются на комплексные функции и вектор-функции действительного или комплексного переменного. Кроме того, существуют понятия П. скалярной функции точки евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (см. *Градиент*). П. функции множества по мере (в частности, по площади, по объему и т. п.), понятие П. распространяют на вектор-функции точки абстрактного пространства (см. *Дифференцирование отображения*).

О геометрич. и механич. истолковании П., о простейших правилах дифференцирования, о П. высших порядков, о частных П., а также лит. см. в ст. *Дифференциальное исчисление*. *Г. П. Толстов.*

ПРОИЗВОДНОЕ МНОЖЕСТВО — совокупность M' всех *предельных точек* множества M в топологич. пространстве. Множество M, совпадающее со своим П. м., наз. совершенным. *М. И. Войцеховский.*

ПРОИЗВОДНОЕ ПРАВИЛО вывода для данного исчисления — *вывода правило*, заключение к-рого выводимо из его посылок в рассматриваемом исчислении. Напр., в *высказываний исчислении* правило вывода

$$\frac{A \supset B,\ B \supset C}{A \supset C}$$

является П. п., поскольку в этом исчислении имеет место выводимость из посылок:

$$A \supset B,\ B \supset C \vdash A \supset C.$$

Всякое П. п. является *допустимым правилом*, но не всякое допустимое правило является П. п. Напр., *подстановки правило* в исчислении высказываний является допустимым правилом, но не производным.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *С. Н. Артемов.*

ПРОИЗВОДНОЕ ЧИСЛО, производное число Дини,— понятие теории функций действительного переменного. Верхним правым П. ч. Λ_α наз. верхний предел отношения $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ при $x_1 \to x$, где $x_1 > x$. Аналогично определяют нижнее правое λ_α, верхнее Λ_g и нижнее λ_g левые П. ч. Если $\Lambda_\alpha = \lambda_\alpha$ ($\Lambda_g = \lambda_g$), то $f(x)$ имеет в точке x одностороннюю правую (левую) производную. Обыкновенная производная существует, если все четыре П. ч. конечны и совпадают. П. ч. были введены У. Дини [1]. Как показал Н. Н. Лузин, если все четыре П. ч. конечны на нек-ром множестве, то функция имеет обычную производную всюду на этом множестве, кроме точек множества меры нуль.

Лит.: [1] Dini U., Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, Pisa, 1878; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949. *Т. П. Лукашенко.*

ПРОИЗВОДНЫЙ АВТОМОРФИЗМ в эргодической теории — преобразование T_X, определяющееся по автоморфизму T *пространства с мерой* (M, μ) и измеримому подмножеству положительной меры $X \subset M$, почти все точки к-рого под действием итераций T снова попадают в X. Для каждой такой точки x определяют $T_X(x)$ как ту точку траектории $T^n x$, в к-рой эта траектория впервые после x возвращается в X (согласно *Пуанкаре теореме* о возвращении, условие, чтобы почти все точки из X со временем снова возвращались в X, автоматически выполняется, если $\mu(M) < \infty$). Преобразование T_X оказывается автоморфизмом (точнее, автоморфизмом по mod 0) пространства X с индуцированной на нем мерой (последняя есть мера μ, рассматриваемая только на подмножествах X; если $\mu(X) < \infty$, то обыкновенно эту меру еще нормируют).

Обратно, если $\bigcup_{n \geqslant 0} T^n X = M$ (это условие автоматически выполняется, если автоморфизм T эргодичен),

то исходный автоморфизм T восстанавливается (с точностью до сопряжения посредством нек-рого изоморфизма пространств с мерой) по T_X и времени возвращения

$$n_X(x) = \min\{n > 0 : T^n x \in X\}.$$

А именно, T есть *специальный автоморфизм*, построенный по T_X и n_X. *Д. В. Аносов.*

ПРОИЗВОДНЫЙ ФУНКТОР — функтор, «измеряющий» отклонение основного функтора от точного. Пусть $T(A, C)$ — аддитивный функтор из категории R_1-модулей и R_2-модулей в категорию R-модулей, ковариантный по первому аргументу и контравариантный по второму. Для инъективной резольвенты X модуля A и проективной резольвенты Y модуля C получают дважды градуированный комплекс $T(X, Y)$. Группы гомологий ассоциированного одинарного комплекса $T(A, C)$ не зависят от выбора резольвент, обладают функторными свойствами и наз. правыми производными функторами $R^nT(A, C)$ функтора $T(A, C)$. Основное свойство П. ф.— существование бесконечных точных последовательностей

$$\longrightarrow R^nT(A', C) \longrightarrow R^nT(A, C) \longrightarrow R^nT(A''C) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow R^{n+1}T(A', C) \longrightarrow \dots$$
$$\longrightarrow R^nT(A, C'') \longrightarrow R^nT(A, C) \longrightarrow R^nT(A, C') \longrightarrow$$
$$\longrightarrow R^{n+1}(A, C'') \longrightarrow \dots,$$

индуцированных короткими точными последовательностями

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0.$$

Левые П. ф. определяются двойственным образом. П. ф. функтора Hom обозначаются Ext^n_R. Функтор $\mathrm{Ext}^1_R(A, C)$ классифицирует все расширения модуля A с ядром C с точностью до эквивалентности (см. *Бэра умножение*, *Когомологии алгебр*).

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966. *В. Е. Говоров.*

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ, генератриса, числовой или функциональной последовательности $\{a_n(x)\}$ — сумма степенного ряда

$$F(x, w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\, w^n$$

с положительным радиусом сходимости. Если известна П. ф., то для изучения последовательности $\{a_n(x)\}$ используются свойства коэффициентов Тейлора аналитич. функций. Для многочленов $\{P_n(x)\}$, ортогональных на интервале (a, b) с весовой функцией $h(x)$, при нек-рых общих условиях существует П. ф.

$$F(x, w) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, w^n, \quad x \in (a, b).$$

Для классических ортогональных многочленов П. ф. представляется в явном виде через весовую функцию $h(x)$ и используется для вычисления значений этих многочленов в отдельных точках, а также для вывода различных тождественных соотношений между этими многочленами и их производными.

В теории вероятностей П. ф. случайной величины ξ, принимающей целочисленные значения $\{n\}_0^\infty$ с вероятностями $\{P_\xi(n)\}$, определяется формулой

$$F(\xi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_\xi(n)\, z^n, \quad |z| \leqslant 1.$$

С помощью П. ф. вычисляются распределения вероят-

ностей случайной величины ξ, ее математич. ожидание и дисперсия:

$$P_\xi(n)=\frac{1}{n!}F_{z^n}^{(n)}(\xi,0),\ \mathsf{E}\xi=F_z'(\xi,1),$$

$$\mathsf{D}\xi=F_{z^2}''(\xi,1)+F_z'(\xi,1)-\left[F_z'(\xi,1)\right]^2.$$

П. ф. случайной величины ξ можно определить как математич. ожидание случайной величины z^ξ, то есть $F(\xi,z)=\mathsf{E}z^\xi$.

Лит.: [1] Серге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [2] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967.

П. К. Суетин.

ПРОИЗВОДЯЩИЙ ОПЕРАТОР полугруппы — производная в нуле от полугруппы линейных ограниченных операторов $T(t)$, $0<t<\infty$, действующих в комплексном банаховом пространстве X. Если $T(t)$ непрерывна по норме операторов, то она имеет вид $T(t)=e^{tA_0}$, где A_0 — ограниченный оператор,

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}[T(t)x-x]=A_0x \tag{1}$$

при любом $x\in X$ и A_0 есть П. о. $T(t)$. Обратно, если предел слева существует при всех $x\in X$, то $T(t)=e^{tA_0}$.

Более сложная картина возникает, когда $T(t)$ только *сильно непрерывная полугруппа*. В этом случае предел (1) существует не при всех x. Оператор A_0, определенный на линейном множестве $D(A_0)$ всех тех x, для к-рых предел существует, является линейным неограниченным оператором и наз. инфинитезимальным оператором. В частности, A_0 определен на всех элементах вида $\int_\alpha^\beta T(t)y\,dt$, α, $\beta>0$, $y\in X$. Если обозначить через X_0 замыкание объединения областей значений всех операторов $T(t)$, $t>0$, то $D(A_0)$ плотно в X_0 и, более того, $\bigcap_n D(A_0^n)$ плотно в X_0. Все значения оператора A_0 также лежат в X_0. Если оператор A_0 неограничен, то $D(A_0)$ является множеством первой категории в X_0.

Если в X_0 нет элементов x, на к-рых $T(t)x\equiv 0$, то оператор A_0 допускает замыкание $A=\overline{A_0}$, к-рое и наз. производящим оператором полугруппы $T(t)$. В этом случае при $x\in D(A)$

$$\begin{aligned} T(t)x-T(s)x&=\int_s^t T(\tau)Ax\,d\tau,\\ \frac{dT(t)x}{dt}&=A_0T(t)x=T(t)Ax. \end{aligned} \tag{2}$$

Равенство (2) определяет замкнутый оператор A, к-рый, вообще говоря, шире, чем замыкание A_0. Его иногда наз. обобщенным производящим оператором полугруппы $T(t)$.

На множестве D_R тех же $x\in X$, для к-рых сходится несобственный интеграл

$$\int_0^t T(s)x\,ds, \tag{3}$$

определен оператор

$$R(\lambda)x=\lim_{t\to 0}\int_t^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\,ds$$

при $\operatorname{Re}\lambda>\omega$, где ω — тип полугруппы $T(t)$. Этот оператор обладает свойствами:

1) $R(\lambda)D_R\subset D_R$;
2) $R(\lambda)x-R(\mu)x=(\mu-\lambda)R(\lambda)R(\mu)x$;
3) $R(\lambda)(\lambda I-A_0)x=x$, $x\in D(A_0)$;
4) $(\lambda I-A)R(\lambda)x=x$, $x\in D_R\cap X_0$.

Если интеграл (3) абсолютно сходится при любом $x\in X$, то П. о. A существует тогда и только тогда, когда из $T(t)x\equiv 0$, $x\in X_0$, следует $x=0$; оператор $R(\lambda)$ огра-

ционен, и, если $X_0=X$, он совпадает с *резольвентой* оператора A; для того чтобы A_0 был замкнутым ($A=A_0$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds=x$$

при любом $x\in X_0$.

Основной задачей теории полугрупп операторов является установление связи между свойствами полугрупп и свойствами их П. о., причем последние обычно формулируются в терминах операторов $R(\lambda)$.

Лит.: [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., М., 1962; [2] Забрейко П. П., Зафиевский А. В., «Докл. АН СССР», 1969, т. 189, № 5, с. 934—37; [3] его же, там же, 1970, т. 195, № 1, с. 24—27.

С. Г. Крейн.

ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ ВАРИАЦИЯ — метод решения линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных систем (или уравнений). Этот метод позволяет записать в замкнутой форме *общее решение* неоднородной системы, если известно общее решение соответствующей однородной системы. Идея метода П. п. в. состоит в том, что произвольные постоянные, входящие в общее решение однородной системы, заменяются функциями независимой переменной, к-рые подбираются так, чтобы удовлетворить неоднородной системе. В конкретных задачах этот метод применялся еще Л. Эйлером (L. Euler) и Д. Бернулли (D. Bernoulli), но его полная разработка принадлежит Ж. Лагранжу [1].

Пусть рассматривается задача Коши для линейной неоднородной системы

$$\dot{x}=A(t)x+f(t),\quad x(t_0)=x_0, \tag{1}$$

где

$$A:(\alpha,\ \beta)\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n),$$
$$f:(\alpha,\ \beta)\longrightarrow \mathbb{R}^n$$

— суммируемые на каждом конечном отрезке отображения, $t_0\in(\alpha,\beta)$. Если $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы

$$\dot{y}=A(t)y, \tag{2}$$

то $y=\Phi(t)c$, $c\in\mathbb{R}^n$,— общее решение этой системы. П. п. в. представляет собой замену переменных в системе (1):

$$x=\Phi(t)u$$

и приводит к формуле Коши для решения задачи (1):

$$x=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0+\Phi(t)\int_{t_0}^t\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

к-рую наз. иногда формулой вариации (произвольных) постоянных (см. также *Линейное дифференциальное уравнение обыкновенное*).

Идею П. п. в. иногда удается использовать в более общей нелинейной ситуации для описания связи решений возмущенной полной системы и решений невозмущенной укороченной системы (см. [3], [4]). Напр., для решения $x(t)$ задачи

$$\dot{x}=A(t)x+f(t,\ x),\quad x(t_0)=x_0$$

(где A, f — непрерывные отображения и где обеспечивается условие единственности решения) справедлива формула П. п. в., являющаяся интегральным уравнением:

$$x(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0+\Phi(t)\int_{t_0}^t\Phi^{-1}(\tau)f(\tau,\ x(\tau))\,d\tau;$$

здесь $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений системы (2).

Лит.: [1] Lagrange J., Œuvres, t. IV, P., 1869, p. 151—251; [2] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 5 изд., М., 1983; [3] Алексеев В. М., «Вестн.

Моск. ун-та», 1961, № 2, с. 28—36; [4] Рейзинь Л. Э., Локальная эквивалентность дифференциальных уравнений, Рига, 1971. *Н. Х. Розов.*

ПРОКОНЕЧНАЯ ГРУППА — топологическая группа, являющаяся *проективным пределом* системы конечных групп G_i, $i \in I$, снабженных дискретной топологией (I — предупорядоченное множество). П. г. G обозначается $\varprojlim G_i$. Как подпространство прямого произведения $\prod_{i \in I} G_i$, снабженного компактной топологией (базой окрестностей единицы является система ядер проекций $\prod_{i \in I} G_i \to G_i$), она замкнута и потому компактна.

Примеры. 1) Пусть I — множество целых чисел, бо́льших нуля, с естественным отношением порядка и $G_i = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$. Пусть $\tau_i^{i+1} : G_{i+1} \to G_i$ — естественный эпиморфизм и

$$\tau_i^j = \tau_i^{i+1} \tau_{i+1}^{i+2} \dots \tau_{j-1}^j$$

для любых $i < j$. Тогда $\varprojlim G_i$ — (аддитивная) группа кольца $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел.

2) Всякая компактная аналитич. группа над полем p-адических чисел (напр., $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$) является (как топологич. группа) П. г.

3) Пусть G — абстрактная группа и $\{H_i,\ i \in I\}$ — семейство всех ее нормальных делителей конечного индекса. На I можно ввести отношение $\leqslant$, положив $i \leqslant j$, если $H_i \supseteq H_j$. Это отношение превращает I в предупорядоченное множество. Сопоставляя каждому $i \in I$ группу G/H_i и каждой паре $i \leqslant j$ из I — естественный гомоморфизм $\tau_i^j : G/H_j \to G/H_i$, получают П. г. $\hat{G} = \varprojlim G/H_i$, наз. ассоциированной с G П. г.; она является отделимым пополнением группы G относительно топологии, определенной подгруппами конечного индекса. Ядро естественного гомоморфизма $G \to \hat{G}$ является пересечением всех подгрупп конечного индекса. В этой конструкции можно было бы вместо семейства всех нормальных делителей конечного индекса рассматривать лишь те, индекс к-рых есть степень фиксированного простого числа p. Соответствующая группа обозначается $\hat{G}_p$ и является *про-р-группой*.

4) П. г. следующим образом естественно возникают в теории Галуа (вообще говоря, бесконечных) алгебраич. расширений полей. Пусть K/k — *Галуа расширение* и $\{K_i/k,\ i \in I\}$ — семейство всех конечных расширений Галуа поля k, лежащих в K. Тогда $K = \bigcup_{i \in I} K_i$. На I можно ввести отношение $\leqslant$, положив $i \leqslant j$, если $K_i \subseteq K_j$. Тогда I становится предупорядоченным множеством. Пусть $\mathrm{Gal}\, K_i/k$ — группа Галуа расширения K_i/k. Каждой паре $i \leqslant j$ из I сопоставляется естественный гомоморфизм

$$\tau_i^j : \mathrm{Gal}\, K_j/k \longrightarrow \mathrm{Gal}\, K_i/k.$$

Тогда соответствующая П. г. $\varprojlim \mathrm{Gal}\, K_i/k$ (абстрактно) изоморфна группе $\mathrm{Gal}\, K/k$, что позволяет считать $\mathrm{Gal}\, K/k$ П. г. Система подгрупп $\mathrm{Gal}\, K/K_i$ образует в $\mathrm{Gal}\, K/k$ систему окрестностей единицы (см. *Галуа топологическая группа*). Эта конструкция получает обобщение в алгебраич. геометрии при определении фундаментальной группы схемы. П. г. могут быть охарактеризованы как компактные вполне несвязные группы (см. *Компактная группа*), а также как компактные группы, у к-рых имеется множество открытых нормальных делителей, образующее систему окрестностей единицы. Теория когомологий П. г. (см. *Когомологии групп*, *Галуа когомологии*) играет важную роль в современной теории Галуа.

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [2] Кох Х., Теория Галуа p-расширений, пер. с нем., М., 1973; [3] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969.
В. Л. Попов.

ПРОМЕЖУТОК, открытый промежуток, интервал,— множество точек, заключенных между двумя данными, т. е. удовлетворяющих условию вида $a<x<b$. П. не включает концов и обозначается (a, b), в отличие от отрезка $[a, b]$ (замкнутого П.), включающего концы, т. е. состоящего из точек $a\leqslant x\leqslant b$.
БСЭ-3.

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ЛОГИКА высказываний — произвольное непротиворечивое множество пропозициональных формул, замкнутое относительно правила вывода *модус поненс* и правила подстановки и содержащее все аксиомы *интуиционистского исчисления высказываний* I.

Наиболее естественным способом задания П. л. являются промежуточные пропозициональные исчисления. Каждое такое исчисление задается указанием нек-рого числа классически общезначимых пропозициональных формул, добавляемых к аксиомам исчисления I.

Совокупность всех П. л. образует дистрибутивную решетку относительно включения $\subseteq$, причем конечно аксиоматизируемые П. л. образуют в ней подрешетку, в к-рую изоморфно вложима любая конечная дистрибутивная решетка.

П. л. L наз. разрешимой, если существует алгоритм, к-рый по каждой пропозициональной формуле A распознает, принадлежит A П. л. L или нет. Так, разрешимыми являются интуиционистская и классическая П. л. Вообще, всякая финитно аппроксимируемая (см. ниже) конечно аксиоматизируемая П. л. разрешима. Построен пример конечно аксиоматизируемой неразрешимой П. л. (см. [7]).

П. л. L наз. дизъюнктивной, если из $(A\vee B)\in L$ следует, что $A\in L$ или $B\in L$. Этим свойством обладает, напр., интуиционистская П. л., но не обладает классическая П. л. Существует бесконечно много дизъюнктивных П. л.

Интерполяционное свойство П. л. (теорема Крейга) состоит в том, что если формула $A\supset B$ принадлежит П. л. L, то существует формула C, содержащая только общие для A и B переменные и такая, что $(A\supset C)\in L$ и $(C\supset B)\in L$; если A и B не имеют общих переменных, то $\neg A\in L$ или $B\in L$. Показано, что интерполяционным свойством, кроме интуиционистской и классической П. л., обладают еще ровно пять П. л. (см. [6]).

Формула A наз. выразимой через формулы B_1, B_2, ... в П. л. L, если A можно получить из B_1, B_2, ... с помощью конечного числа замен на эквивалентные (в L) формулы и конечного числа подстановок ранее полученных формул вместо переменных. Список формул $\Sigma=\{B_1, B_2, \ldots\}$ функционально полон в П. л. L, если всякая формула выразима в L через Σ. Алгоритмическая проблема распознавания функциональной полноты любого списка формул разрешима для интуиционистской и нек-рых других П. л. (см. [3]). Другая алгоритмич. проблема — проблема распознавания выразимости A через Σ по данным формуле A и списку Σ — положительно решена лишь для нек-рых П. л.; она остается пока (1983) открытой для интуиционистской П. л.

Другой способ задания П. л. дает т. н. семантич. подход. Под семантикой здесь понимается нек-рое множество S структур (моделей) $\mathfrak{M}$, на к-рых определено отношение истинности $\mathfrak{M}\models_\theta A$ данной пропозициональной формулы A при данной оценке θ (оценка — отображение, сопоставляющее переменным формулы A нек-рые значения в $\mathfrak{M}$). Формула A, истинная в $\mathfrak{M}$ при любой оценке, наз. общезначимой

на $\mathfrak{M}$ (обозначение $\mathfrak{M}\models A$). Если $S_1\subseteq S$, то П. л. $L(S_1)$ есть совокупность всех формул, общезначимых на любой структуре $\mathfrak{M}\in S_1$. Для данной семантики S естественно определяется отношение семантического следования $\Gamma\models_S A$, где Γ состоит из формул; это отношение означает, что для любой структуры $\mathfrak{M}\in S$ из $\mathfrak{M}\models B$ для всех $B\in\Gamma$ следует $\mathfrak{M}\models A$. Семантики S_1 и S_2 наз. эквивалентными, если отношения $\models_{S_1}$ и $\models_{S_2}$ совпадают. Основное требование, предъявляемое к семантике,— это ее корректность: из $\Gamma\vdash_I A$ должно следовать $\Gamma\models_S A$. Все упоминаемые ниже семантики корректны. Другое важное свойство семантики — полнота. П. л. L наз. полной относительно семантики S, если $A\in L\Leftrightarrow L\models_S A$.

Алгебраическая семантика S_A состоит из псевдобулевых алгебр, т. е. алгебр вида

$$\mathfrak{M}=(M,\ \bar{\&},\ \bar{\vee},\ \Rightarrow,\ \bar{\neg};\ 1,\ 0),$$

где $\bar{\neg}$ — унарная, а $\bar{\&}$, $\bar{\vee}$, $\Rightarrow$ — бинарные операции на M, соответствующие связкам $\neg$, &, $\vee$, $\supset$, причем $(M,\ \bar{\&},\ \bar{\vee})$ — дистрибутивная решетка, а 1 и 0 — наибольший и наименьший элементы в M. Операции $\Rightarrow$ и $\bar{\neg}$ удовлетворяют свойствам: для любых $a,\ b,\ c\in M$

$$a\leqslant(b\Rightarrow c)\Leftrightarrow(a\bar{\&}\,b)\leqslant c\quad\text{и}\quad\bar{\neg}\,a=(a\Rightarrow 0).$$

Отношение $\mathfrak{M}\models_\theta A$ здесь означает, что A принимает в $\mathfrak{M}$ значение 1 при данной оценке θ.

Каждая П. л. полна относительно конечно порожденных псевдобулевых алгебр. Если П. л. L полна относительно множества конечных псевдобулевых алгебр (одной конечной псевдобулевой алгебры), то она наз. финитно аппроксимируемой (соответственно табличной). Простейшей табличной П. л. является классическая П. л. Дизъюнктивные П. л., в частности интуиционистская, табличными не являются. Имеется пример не финитно аппроксимируемой конечно аксиоматизируемой П. л. (см. [3]).

Семантика Крипке S_K состоит из *Крипке моделей*, имеющих в данном случае вид $(\mathfrak{M},\ \theta)$, где $\mathfrak{M}=(M,\ \leqslant)$ — *частично упорядоченное множество*, наз. также остовом, или шкалой, а значениями оценки θ являются подмножества M, причем для любых $\alpha,\ \beta\in M$ из $\alpha\in\theta(p_i)$ и $\alpha\leqslant\beta$ следует $\beta\in\theta(p_i)$.

Между семантиками S_A и S_K имеется тесная связь (см. [5]), однако они не эквивалентны; в частности, существуют П. л., не полные относительно S_K (см. [3]).

Конструктивные семантики — это семантика *реализуемости* S_R (см. [1]) и семантика финитных задач S_F. Эти семантики не полны даже для интуиционистской П. л., более того, существуют формулы, общезначимые в S_R и не общезначимые в S_F, и наоборот.

Предикатные П. л. определяются по аналогии с П. л. высказываний, т. е. это — расширения интуиционистской логики предикатов LI, содержащиеся в классич. логике предикатов. В отличие от пропозициональных П. л. все предикатные П. л. неразрешимы. Семантика предикатных П. л. аналогична соответствующей семантике П. л. высказываний (см. [2]).

Лит.: [1] Новиков П. С., Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., 1977; [2] Драгалин А. Г., Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., 1979; [3] Кузнецов А. В., в кн.: Логический вывод, М., 1979, с. 5—33; [4] его же, «Математические исследования», 1975, т. 10, в. 2, с. 150—58; [5] Эсакиа Л. Л., в кн.: Логический вывод, М., 1979, с. 147—72; [6] Максимова Л. Л., «Алгебра и логика», 1977, т. 16, с. 643—81; [7] Шехтман В. Б., «Докл. АН СССР», 1978, т. 240, № 3,

с. 549—52; [8] Hosoi T., Ono H., «J. Tsuda College», 1973, v. 5, p. 67—82. *С. К. Соболев.*

ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ ЯКОБИАН — набор комплексных торов, определяемых нечетномерными когомологиями комплексного кэлерова многообразия, геометрия к-рых тесно связана с геометрией самого многообразия.

Пусть $H^n(X, \mathbb{R})$ (соответственно $H^n(X, \mathbb{Z})$) — пространство n-мерных когомологий с действительными (соответственно с целыми) коэффициентами комплексно-аналитич. кэлерова многообразия X. На веществ. торе

$$T^n(X) = H^n(X, \mathbb{R})/H^n(X, \mathbb{Z})$$

при нечетном n можно двумя различными способами ввести комплексную структуру, используя представление n-мерных когомологий с комплексными коэффициентами в виде прямой суммы $H^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$ пространств $H^{p,q}$ гармонич. форм типа (p, q). Пусть $P_{p,q} : H^n(X, \mathbb{C}) \to H^{p,q}$ — проекция, а

$$C_W = \sum_{p+q=n} i^{p-q} P_{p,q} \quad \text{и} \quad C_G = \sum_{p+q=n} i^{\frac{p-q}{|p-q|}} P_{p,q}$$

— операторы, переводящие когомологии с действительными коэффициентами в себя. Полагая

$$(a+ib)\,\omega = a\omega + bC_W(\omega) \quad \text{и} \quad (a+ib)\,\omega = a\omega + bC_G(\omega),$$

для любого ω из $H^n(X, \mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$, получают комплексные структуры на $T^n(X)$, первая из к-рых $T^n_W(X)$ наз. промежуточным якобианом Вейля, а вторая $T^n_G(X)$ — промежуточным тором Гриффитса. Если X — многообразие Ходжа, то ходжева метрика на X канонически определяет на П. я. $T^n_W(X)$ структуру поляризованного абелева многообразия, что не всегда имеет место для $T^n_G(X)$. С другой стороны, при голоморфной вариации многообразия X промежуточные торы $T^n_G(X)$ варьируются голоморфно [2], а П. я. Вейля этим свойством могут не обладать. Cup-произведение, задающее спаривание пространств $H^n(X, \mathbb{R})$ и $H^{d-n}(X, \mathbb{R})$, где $d = \dim_{\mathbb{R}} X$, определяет комплексное спаривание торов $T^n_G(X)$ и $T^{d-n}_G(X)$ и двойственность между абелевыми многообразиями $T^n_W(X)$ и $T^{d-n}_W(X)$. В случае, когда $\dim_{\mathbb{C}} X = 2k+1$, П. я. $T^{2k+1}_W(X)$ является самодвойственным абелевым многообразием с главной поляризацией, а $T^{2k+1}_G(X)$ — главным тором.

П. я. служит важным инвариантом кэлеровых многообразий. Если для двух многообразий X и Y из совпадения $T^n_W(X) = T^n_W(Y)$ (соответственно $T^n_G(X) = T^n_G(Y)$) следует, что $X \simeq Y$, то говорят, что для X выполнена теорема Торелли. Теорема Торелли выполняется, напр., для алгебраич. кривых. С помощью П. я. была доказана нерациональность общей кубики в проективном пространстве P^4 (см. [1]) и нек-рых других многообразий Фано.

Лит.: [1] Clemens C., Griffiths Ph., «Ann. Math.», 1972, v. 95, № 2, p. 281—356; [2] Griffiths Ph., «Amer. J. math.», 1968, v. 90, p. 568—626, 805—65; [3] Weil A., «Amer. J. math.», 1952, v. 74, p. 865—94. *Вик. С. Куликов.*

ПРОНОРМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА — подгруппа H группы G, удовлетворяющая следующему условию: если K — подгруппа из G, сопряженная с H, то K сопряжена с H в подгруппе, порожденной H и K. *Силова подгруппы* в конечных группах, *Холла подгруппы* и *Картера подгруппы* в конечных разрешимых группах пронормальны. Понятие П. п. тесно связано с понятием *абнормальной подгруппы*. Любая абнормальная подгруппа пронормальна, а нормализатор П. п. абнормален.

Лит.: [1] Шеметков Л. А., Формации конечных групп, М., 1978. *В. Д. Мазуров.*

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ — символ *формального языка*, служащий для обозначения произвольного высказывания. *С. К. Соболев.*

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ СВЯЗКА — символ *формального языка*, служащий для обозначения *логической операции*, с помощью к-рой из данных высказываний можно получать новые высказывания. Важнейшими П. с. являются конъюнкция $\&$ (иначе $\wedge$), дизъюнкция $\vee$, импликация $\supset$ (иначе $\rightarrow$ или $\Rightarrow$), отрицание $\neg$ (иначе $\sim$), эквивалентность $\equiv$ (иначе $\leftrightarrow$ или $\Leftrightarrow$). Эти П. с. соответствуют в русском языке выражениям «и», «или», «влечет», «не верно, что» и «равносильно». Иногда рассматриваются и другие П. с., напр. т. н. *Шеффера штрих*.

Символ $\equiv$ обычно вводится не как независимая П. с., а как сокращение:

$$A \equiv B \leftrightarrows (A \supset B)\,\&\,(B \supset A). \qquad (1)$$

Если же в языке имеется пропозициональная константа $\bot$, обозначающая «ложь», то отрицание можно рассматривать как сокращение: $\neg A \leftrightarrows (A \supset \bot)$.

П. с. $\&$, $\vee$, $\supset$ и $\neg$ не являются независимыми в классич. логике, поскольку в ней верны эквивалентности:

$$A\,\&\,B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \equiv \neg(A \supset \neg B), \qquad (2)$$

$$A \vee B \equiv \neg(\neg A\,\&\,\neg B) \equiv (\neg A \supset B) \equiv ((A \supset B) \supset B), \qquad (3)$$

$$A \supset B \equiv (\neg A \vee B) \equiv \neg(A\,\&\,\neg B), \qquad (4)$$

т. е. каждая из П. с. $\&$, $\vee$, $\supset$ выражается через $\neg$ и одну из остальных. Поэтому при формулировках классического *пропозиционального исчисления* высказываний в качестве исходной можно брать две П. с.: $\neg$ и одну из П. с. $\&$, $\vee$, $\supset$, а остальные рассматривать как сокращения, согласно (1) — (4). В интуиционистской логике П. с. $\&$, $\vee$, $\supset$ и $\neg$ являются независимыми. *С. К. Соболев.*

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ ФОРМА, высказывательная форма,— языковое выражение, содержащее переменные, вместо к-рых можно подставлять высказывания, получая при этом новые высказывания. В формализованных языках П. ф. наз. формулы, содержащие свободные вхождения пропозициональных переменных, принимающих значения в множестве *истинностных значений*.

П. ф. наз. также выражения, построенные по типу *пропозициональной формулы*, в к-рых вместо пропозициональных переменных используются символы *метаязыка*, обозначающие произвольные формулы *высказываний исчисления*.

Лит.: [1] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1971. *В. Н. Гришин.*

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ ФОРМУЛА — выражение, построенное из *пропозициональных переменных* с помощью *пропозициональных связок* $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\equiv$ (и, возможно, нек-рых других) по следующим правилам: 1) каждая пропозициональная переменная есть П. ф.; 2) если A, B суть П. ф., то $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ и $(\neg A)$ суть также П. ф.

Если σ — нек-рый набор пропозициональных связок (сигнатура), то под П. ф. сигнатуры σ понимается такая П. ф., в построении к-рой в 2) использовались лишь связки из σ. *С. К. Соболев.*

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, аргументами и значениями к-рой являются *истинностные значения*. Этот термин употребляют, когда речь идет об интерпретации формализованного логич. языка.

Если Ω — множество истинностных значений формул данного языка, то П. ф.— это любое отображение вида $\Omega^n \rightarrow \Omega$ $(n \geqslant 0)$. Этими функциями интерпретируются *пропозициональные связки*, позволяющие образовывать

из предложений или формул новые предложения или формулы. При классической двузначной интерпретации множества истинностных значений, т. е. когда $\Omega = \{0, 1\}$, такие функции наз. также функциями алгебры логики. *В. Н. Гришин.*

ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, исчисление высказываний,— *логическое исчисление*, в к-ром выводимыми объектами являются *пропозициональные формулы*. Каждое П. и. задается набором аксиом (произвольных пропозициональных формул) и *вывода правил*. Формула, выводимая в данном П. и., наз. теоремой этого П. и. В качестве правил вывода обычно берут *modus ponens* и подстановку (произвольных пропозициональных формул вместо переменных). Иногда П. и. задают не аксиомами, а *аксиом схемами*; тогда правило подстановки оказывается излишним.

Классическое П. и. задается следующими аксиомами:

1) $p \supset (q \supset p)$,
2) $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$,
3) $(p \,\&\, q) \supset p$,
4) $(p \,\&\, q) \supset q$,
5) $p \supset (q \supset (p \,\&\, q))$,
6) $p \supset (p \vee q)$,
7) $q \supset (p \vee q)$,
8) $(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r))$,
9) $(p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset \neg p)$,
10) $\neg\neg p \supset p$.

В этом П. и. *пропозициональные связки* $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$ не являются независимыми. Его можно задать с помощью только аксиом 1), 2), 9) и 10), основываясь на связках $\supset$, $\neg$ в качестве исходных. Тогда связки $\&$ и $\vee$ рассматриваются как сокращения:

$$A \,\&\, B \leftrightarrows \neg(A \supset \neg B), \quad A \vee B \leftrightarrows \neg A \supset B,$$

а аксиомы 3) — 8) становятся теоремами. Классическое П. и. наз. также полным П. и., поскольку добавление к нему любой невыводимой в нем формулы в качестве аксиомы приводит к противоречивому П. и., т. е. к такому, в к-ром выводимы все пропозициональные формулы. Часто классическое П. и. наз. просто П. и.

Интуиционистское (конструктивное) П. и. получается из классического П. и. заменой аксиомы 10) более слабой аксиомой

11) $\neg p \supset (p \supset q)$.

П. и., получаемое из конструктивного П. и. добавлением конечного (или рекурсивного) числа аксиом, наз. промежуточным, суперинтуиционистским (или суперконструктивным). См. также *Промежуточная логика*.

Другими примерами П. и. являются *импликативное пропозициональное исчисление*, *минимальное пропозициональное исчисление*, *позитивное пропозициональное исчисление*.

Интерпретация П. и. осуществляется с помощью алгебр (матриц) вида

$$\mathfrak{M} = \langle M,\ D;\ \&^*,\ \vee^*,\ \supset^*,\ \neg^* \rangle,$$

где M — множество *истинностных значений*, D — множество выделенных истинностных значений,

$$D \subset M, \text{ а } \&^*,\ \vee^*,\ \supset^*,\ \neg^*$$

— операции на M, соответствующие связкам $\&$, $\vee$, $\supset$ и $\neg$. Множество D должно удовлетворять следующему условию: для любых a, $b \in D$, если $a \in D$ и $(a \supset^* b) \in D$, то $b \in D$ (согласованность с правилом модус понепс). Фор-

мула наз. общезначимой на матрице $\mathfrak{M}$, если она принимает выделенное значение при любой интерпретации ее переменных элементами M. Простейшей матрицей является матрица $\mathfrak{M}_2$, состоящая из двух элементов 1, 0 («истина», «ложь») и одного выделенного значения 1, а операции $\&^*$, $\vee^*$, $\supset^*$, $\neg^*$ определяются обычным образом (см. *Алгебра логики*). Пропозициональная формула, общезначимая на $\mathfrak{M}_2$, наз. тавтологией. Формула является тавтологией тогда и только тогда, когда она является теоремой классического П. и.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960. *С. К. Соболев.*

ПРОСТАЯ АЛГЕБРА — неодноэлементная алгебра без двусторонних идеалов, отличных от 0 и всей алгебры. П. а. без единицы может и не быть *простым кольцом*, т. к. в этом случае не всякий идеал кольца является идеалом алгебры. Для нек-рых классов алгебр известна классификация конечномерных П. а. (см. *Альтернативные кольца и алгебры*, *Йорданова алгебра*, *Ли алгебра*). Любая ассоциативная алгебра над полем, обладающая единицей, вложима в П. а. с той же единицей.

Лит. см. при ст. *Простое кольцо.* *Л. А. Скорняков.*

ПРОСТАЯ ГИПОТЕЗА в математической статистике — утверждение, согласно к-рому наблюдаемая случайная величина подчиняется конкретно заданному распределению вероятностей. Распределение вероятностей, определяемое П. г., наз. гипотетическим распределением. Напр., если наблюдается случайная величина X, то утверждение «X подчиняется закону Пуассона с параметром 1» является П. г. См. также *Сложная гипотеза.*

М. С. Никулин.

ПРОСТАЯ ГРУППА — группа, не имеющая нормальных подгрупп, отличных от всей группы и единичной подгруппы. Описание всех *простых конечных групп* является центральной проблемой в теории конечных групп. В теории бесконечных групп значение П. г. значительно меньше ввиду их необозримости. Простой является группа всех четных подстановок, каждая из к-рых перемещает конечное подмножество элементов множества M, если мощность M не меньше 5. Эта группа бесконечна, если M бесконечно. Существуют конечно порожденные и даже конечно определенные бесконечные П. г. Всякая группа вложима в П. г. В теории групп Ли и алгебраич. групп определение П. г. несколько отличается от приведенного выше (см. *Ли полупростая группа*). *А. Л. Шмелькин.*

ПРОСТАЯ ДУГА — гомеоморфный образ отрезка. Внутренняя характеристика: П. д.— это *линия*, имеющая в двух точках индекс ветвления 1 (концевые точки), а во всех остальных точках — индекс ветвления 2 (внутренние точки).

М. И. Войцеховский.

ПРОСТАЯ КОНЕЧНАЯ ГРУППА — конечная группа, в к-рой нет нормальных подгрупп, отличных от всей группы и от единичной подгруппы. П. к. г.— наименьшие «строительные блоки», из к-рых с помощью расширений может быть «собрана» любая конечная группа. Каждый фактор *композиционного ряда* конечной группы является П. к. г., а минимальная нормальная подгруппа — прямое произведение П. к. г. Простейшими примерами П. к. г. служат циклич. группы простых порядков. Только таким П. к. г. изоморфны факторы композиционных рядов разрешимых групп. Все остальные П. к. г. неразрешимы и их порядки четны [см. *Бёрнсайда проблема* — 1)]. Бесконечные серии примеров неразрешимых П. к. г. дают знакопеременные группы $\mathfrak{A}_n$, проективные специальные линейные группы $PSL(n, q)$ над конечным полем порядка q, проективные симплектич. группы $PSP(2n, q)$, проективные ортогональные группы $P\Omega(n, q)$ и про-

ективные унитарные группы $PSU(n, q^2)$. Все перечисленные П. к. г. были известны еще в прошлом веке. Кроме них, в кон. 19 в. были открыты еще 5 групп (см. *Матьё группа*). В нач. 20 в. построены конечные аналоги простых групп Ли типа G_2 (см. *Диксона группа*). Открытия новых бесконечных серий П. к. г., сделанные в 50-х гг., позволили получить большинство типов известных простых групп из групп автоморфизмов простых алгебр Ли (см. *Шевалле группа*). Известные бесконечные серии П. к. г. представлены в таблице.

Обозначение, связанное с типом соответствующей алгебры Ли	Другое обозначение	Условия существования П. к. г.	Порядок группы	d
	$\mathbb{Z}_p$	p — простое число	p	
	$\mathfrak{A}_l$	$l \geqslant 5$	$l!/2$	
$A_l(q)$	$PSL(l+1, q)$	$l \geqslant 2$; $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l(l+1)/2}(q^2-1)(q^3-1)\cdots(q^{l+1}-1)/d$	$(l+1, q-1)$
$B_l(q)$	$P\Omega(2l+1, q)$	$l \geqslant 3$; $l=2$, $q \geqslant 3$; $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l^2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2l}-1)/d$	$(2, q-1)$
$C_l(q)$	$PSp(2l, q)$	$l \geqslant 3$; $l=2$, $q \geqslant 3$; $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l^2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2l}-1)/d$	$(2, q-1)$
$D_l(q)$	$P\Omega^+(2l, q)$	$l \geqslant 3$	$q^{l(l-1)}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2l-2}-1)(q^l-1)/d$	$(4, q^l-1)$
$E_6(q)$			$q^{36}(q^2-1)(q^5-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)/d$	$(3, q-1)$
$E_7(q)$			$q^{63}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{10}-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)/d$	$(2, q-1)$
$E_8(q)$			$q^{120}(q^2-1)(q^8-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)(q^{20}-1)\cdot(q^{24}-1)(q^{30}-1)$	
$F_4(q)$			$q^{24}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{12}-1)$	
$G_2(q)$			$q^6(q^2-1)(q^6-1)$	
${}^2A_l(q^2)$	$PSU(l+1, q^2)$	$l \geqslant 3$; $l=2$, $q \geqslant 3$ $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l(l+1)/2}(q^2-1)(q^3+1)(q^4-1)\cdots(q^{l+1}+(-1)^l)/d$	$(l+1, q+1)$
${}^2D_l(q^2)$	$P\Omega^-(2l, q)$	$l \geqslant 2$	$q^{l(l-1)/2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2l-2}-1)(q^l+1)/d$	$(4, q^l+1)$
${}^2E_6(q^2)$			$q^{36}(q^2-1)(q^5+1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9+1)(q^{12}-1)/d$	$(3, q+1)$
${}^3D_4(q^3)$			$q^{12}(q^2-1)(q^6-1)(q^8+q^4+1)$	
${}^2B_2(q)$	$Sz(q)$	$q=2^{2l+1}$	$q^2(q-1)(q^2+1)$	
${}^2G_2(q)$	$R(q)$	$q=3^{2l+1}$	$q^3(q-1)(q^3+1)$	
${}^2F_4(q)'$		$q=2^{2l-1}$	$q^{12}(q-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^6+1)/d$	2 при $q=2$ 1 при $q>2$

Здесь q — ненулевая степень простого числа, l — натуральное число, (s, t) — наибольший общий делитель чисел s и t. Кроме перечисленных в таблице, известны еще 26 П. к. г., не входящих ни в одну бесконечную серию П. к. г. (т. н. *спорадические простые группы*).

Главной задачей теории П. к. г. является проблема классификации П. к. г., содержанием к-рой служит доказательство того, что каждая П. к. г. изоморфна одной из известных простых групп. Другая задача состоит в изучении свойств известных простых групп: изучении их матричных представлений (см. *Конечной группы представление*), описании примитивных подстановочных представлений (см. *Подстановок группа*) или, более общо, представлений в виде групп автоморфизмов различных математич. объектов (графов, конечных геометрий), описании подгрупп, в частности максимальных подгрупп, и т. д.

Лит.: [1] Картер Р., «Математика», 1966, т. 10, № 5, с. 3—47; [2] Алыбахер М., «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, № 2, с. 141—72; [3] Huppert B., Endliche Gruppen, [Bd] 1, B., 1967; [4] Blackburn N., Huppert B., Finite groups II, III, B., 1981.

В. Д. Мазуров.

ПРОСТАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа, не содержащая собственных идеалов или конгруэнций того или иного фиксированного типа. В зависимости от рассматриваемого типа возникают различные типы П. п.: идеально простая — не содержащая собственных двусторонних идеалов (термин «П. п.» часто относят только к таким полугруппам), простая слева (справа) — не содержащая собственных левых (правых) идеалов, 0-простая (слева, справа) — полугруппа с нулем, не содержащая собственных ненулевых двусторонних (левых, правых) идеалов и не являющаяся двухэлементной полугруппой с нулевым умножением, бипростая — состоящая из одного $\mathscr{D}$-класса (см. *Грина отношения эквивалентности*), 0-бипростая — состоящая из двух $\mathscr{D}$-классов, один из к-рых нулевой, простая относительно конгруэнций — не имеющая конгруэнций, кроме универсального отношения и отношения равенства.

Всякая простая слева или справа полугруппа бипроста; всякая бипростая полугруппа идеально проста, но существуют идеально П. п., не являющиеся бипростыми (и даже такие, что все их $\mathscr{D}$-классы одноэлементны). Важнейшим типом идеально П. п. (0-простых полугрупп) является *вполне простая полугруппа* (вполне 0-простая полугруппа). Важнейшие примеры бипростых, но не вполне П. п.: *бициклическая полугруппа*, четырехспиральная полугруппа Sp_4 (см. [11]) — это полугруппа, заданная порождающими a, b, c, d и определяющими соотношениями $a^2=a$, $b^2=b$, $c^2=c$, $d^2=d$, $ba=a$, $ab=b$, $bc=b$, $cb=c$, $dc=c$, $cd=d$, $da=d$; полугруппа Sp_4 изоморфна *рисовской полугруппе матричного типа* над бицикличным полугруппой с порождающими u, v, где $uv=1$, с сэндвич-матрицей

$$\begin{Vmatrix} 1 & v \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Четырехспиральная полугруппа является в нек-ром смысле минимальной среди бипростых и не вполне П. п., порожденных конечным числом идемпотентов, и нередко возникает как подполугруппа таких полугрупп.

Простые справа полугруппы (п. с. п.) наз. также полугруппами с правым делением или полугруппами с правой обратимостью. Основанием для этих терминов является следующее свойство таких полугрупп, эквивалентное определению: для любых элементов a и b существует элемент x такой, что $ax=b$. П. с. п., содержащие идемпотенты, — это в точности *правые группы*. Важный пример п. с. п. без идемпотентов доставляет полугруппа $T(M, \delta, p, q)$ всех таких преобразований φ множества

ективные унитарные группы $PSU(n, q^2)$. Все перечисленные П. к. г. были известны еще в прошлом веке. Кроме них, в кон. 19 в. были открыты еще 5 групп (см. *Матьё группа*). В нач. 20 в. построены конечные аналоги простых групп Ли типа G_2 (см. *Диксона группа*). Открытия новых бесконечных серий П. к. г., сделанные в 50-х гг., позволили получить большинство типов известных простых групп из групп автоморфизмов простых алгебр Ли (см. *Шевалле группа*). Известные бесконечные серии П. к. г. представлены в таблице.

Обозначение, связанное с типом соответствующей алгебры Ли	Другое обозначение	Условия существования П. к. г.	Порядок группы	d
	$\mathbb{Z}_p$	p — простое число	p	
	$\mathfrak{A}_l$	$l \geqslant 5$	$l!/2$	
$A_l(q)$	$PSL(l+1, q)$	$l \geqslant 2$; $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l(l+1)/2}(q^2-1)(q^3-1)\cdots(q^{l+1}-1)/d$	$(l+1, q-1)$
$B_l(q)$	$P\Omega(2l+1, q)$	$l \geqslant 3$; $l=2$, $q \geqslant 3$; $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l^2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2l}-1)/d$	$(2, q-1)$
$C_l(q)$	$PSp(2l, q)$	$l \geqslant 3$; $l=2$, $q \geqslant 3$; $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l^2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2l}-1)/d$	$(2, q-1)$
$D_l(q)$	$P\Omega^+(2l, q)$	$l \geqslant 3$	$q^{l(l-1)}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2l-2}-1)(q^l-1)/d$	$(4, q^l-1)$
$E_6(q)$			$q^{36}(q^2-1)(q^5-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)/d$	$(3, q-1)$
$E_7(q)$			$q^{63}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{10}-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)/d$	$(2, q-1)$
$E_8(q)$			$q^{120}(q^2-1)(q^8-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)(q^{20}-1)\cdot(q^{24}-1)(q^{30}-1)$	
$F_4(q)$			$q^{24}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{12}-1)$	
$G_2(q)$			$q^6(q^2-1)(q^6-1)$	
${}^2A_l(q^2)$	$PSU(l+1, q^2)$	$l \geqslant 3$; $l=2$, $q \geqslant 3$ $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l(l+1)/2}(q^2-1)(q^3+1)(q^4-1)\cdots(q^{l+1}+(-1)^l)/d$	$(l+1, q+1)$
${}^2D_l(q^2)$	$P\Omega^-(2l, q)$	$l \geqslant 2$	$q^{l(l-1)/2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2l-2}-1)(q^l+1)/d$	$(4, q^l+1)$
${}^2E_6(q^2)$			$q^{36}(q^2-1)(q^5+1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9+1)(q^{12}-1)/d$	$(3, q+1)$
${}^3D_4(q^3)$			$q^{12}(q^2-1)(q^6-1)(q^8+q^4+1)$	
${}^2B_2(q)$	$Sz(q)$	$q=2^{2l+1}$	$q^2(q-1)(q^2+1)$	
${}^2G_2(q)$	$R(q)$	$q=3^{2l+1}$	$q^3(q-1)(q^3+1)$	
${}^2F_4(q)'$		$q=2^{2l-1}$	$q^{12}(q-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^6+1)/d$	2 при $q=2$ 1 при $q>2$

Здесь q — ненулевая степень простого числа, l — натуральное число, (s, t) — наибольший общий делитель чисел s и t. Кроме перечисленных в таблице, известны еще 26 П. к. г., не входящих ни в одну бесконечную серию П. к. г. (т. н. *спорадические простые группы*).

Главной задачей теории П. к. г. является проблема классификации П. к. г., содержанием к-рой служит доказательство того, что каждая П. к. г. изоморфна одной из известных простых групп. Другая задача состоит в изучении свойств известных простых групп: изучении их матричных представлений (см. *Конечной группы представление*), описании примитивных подстановочных представлений (см. *Подстановок группа*) или, более общо, представлений в виде групп автоморфизмов различных математич. объектов (графов, конечных геометрий), описании подгрупп, в частности максимальных подгрупп, и т. д.

Лит.: [1] Картер Р., «Математика», 1966, т. 10, № 5, с. 3—47; [2] Алыбахер М., «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, № 2, с. 141—72; [3] Huppert B., Endliche Gruppen, [Bd] 1, B., 1967; [4] Blackburn N., Huppert B., Finite groups II, III, B., 1981.

В. Д. Мазуров.

ПРОСТАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа, не содержащая собственных идеалов или конгруэнций того или иного фиксированного типа. В зависимости от рассматриваемого типа возникают различные типы П. п.: идеально простая — не содержащая собственных двусторонних идеалов (термин «П. п.» часто относят только к таким полугруппам), простая слева (справа) — не содержащая собственных левых (правых) идеалов, 0-простая (слева, справа) — полугруппа с нулем, не содержащая собственных ненулевых двусторонних (левых, правых) идеалов и не являющаяся двухэлементной полугруппой с нулевым умножением, бипростая — состоящая из одного $\mathscr{D}$-класса (см. *Грина отношения эквивалентности*), 0-бипростая — состоящая из двух $\mathscr{D}$-классов, один из к-рых нулевой, простая относительно конгруэнций — не имеющая конгруэнций, кроме универсального отношения и отношения равенства.

Всякая простая слева или справа полугруппа бипроста; всякая бипростая полугруппа идеально проста, но существуют идеально П. п., не являющиеся бипростыми (и даже такие, что все их $\mathscr{D}$-классы одноэлементны). Важнейшим типом идеально П. п. (0-простых полугрупп) является *вполне простая полугруппа* (вполне 0-простая полугруппа). Важнейшие примеры бипростых, но не вполне П. п.: *бициклическая полугруппа*, четырехспиральная полугруппа Sp_4 (см. [11]) — это полугруппа, заданная порождающими a, b, c, d и определяющими соотношениями $a^2=a$, $b^2=b$, $c^2=c$, $d^2=d$, $ba=a$, $ab=b$, $bc=b$, $cb=c$, $dc=c$, $cd=d$, $da=d$; полугруппа Sp_4 изоморфна *рисовской полугруппе матричного типа* над бицикличным полугруппой с порождающими u, v, где $uv=1$, с сэндвич-матрицей

$$\begin{Vmatrix} 1 & v \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Четырехспиральная полугруппа является в нек-ром смысле минимальной среди бипростых и не вполне П. п., порожденных конечным числом идемпотентов, и нередко возникает как подполугруппа таких полугрупп.

Простые справа полугруппы (п. с. п.) наз. также полугруппами с правым делением или полугруппами с правой обратимостью. Основанием для этих терминов является следующее свойство таких полугрупп, эквивалентное определению: для любых элементов a и b существует элемент x такой, что $ax=b$. П. с. п., содержащие идемпотенты, — это в точности *правые группы*. Важный пример п. с. п. без идемпотентов доставляет полугруппа $T(M, \delta, p, q)$ всех таких преобразований φ множества

M, что 1) ядро φ равно отношению эквивалентности δ на M, 2) мощность фактормножества M/δ равна p, 3) множество M_φ пересекается с каждым δ-классом не более чем по одному элементу, 4) множество δ-классов, не пересекающихся с $M\varphi$, имеет бесконечную мощность q, причем $q \leqslant p$. Полугруппа $T(M, \delta, p, q)$ наз. полугруппой Тесье типа (p, q), а в случае, когда δ — отношение равенства, она наз. полугруппой Бэра — Леви типа (p, q) (см. [6], [7]). Полугруппа Тесье — пример п. с. п. без идемпотентов, не обязательно удовлетворяющей правостороннему закону сокращения. Всякая п. с. п. без идемпотентов вкладывается в подходящую полугруппу Тесье, а всякая п. с. п. без идемпотентов и с правосторонним законом сокращения вкладывается в подходящую полугруппу Бэра — Леви (причем в обоих случаях можно выбрать $p=q$).

Различные типы П. п. часто возникают в качестве «блоков», из к-рых строятся рассматриваемые полугруппы. По поводу классич. примеров П. п. см. *Вполне простая полугруппа*, *Брандта полугруппа*, *Правая группа*; о бипростых инверсных полугруппах (в том числе структурные теоремы при нек-рых ограничениях на полурешетку идемпотентов) см. [1], [8], [9]. Существуют идеально простые инверсные полугруппы с произвольным числом $\mathscr{D}$-классов. При изучении вложений полугрупп в П. п. обычно либо указываются условия для возможности соответствующего вложения, либо устанавливается, что всякая полугруппа вкладывается в подходящую П. п. рассматриваемого типа; напр., любая полугруппа вкладывается в бипростую полугруппу с единицей (см. [1]), в бипростую полугруппу, порожденную идемпотентами (см. [10]), в простую относительно конгруэнций полугруппу (к-рая может обладать теми или иными наперед заданными свойствами: наличие или отсутствие нуля, полнота, пустота подполугруппы Фраттини и т. д., см. [3] — [5]).

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [3] Бокуть Л. А., «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, № 3, с. 500—18; [4] Шутов Э. Г., «Матем. сб.», 1963, т. 62, № 4, с. 496—511; [5] Климов В. Н., «Сиб. матем. ж.», 1973, т. 14, № 5, с. 1025—36; [6] Baer R., Levi F., «Sitzungsber. Heidelberg. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl.», 1932, Abh. 2, S. 3—12; [7] Teissier M., «Compt. rend. Acad. sci.», 1953, v. 236, № 11, p. 1120—22; [8] Munn W. D., в кн.: Semigroups, N. Y.— L., 1969, p. 107—23; [9] Howie J., An introduction to semigroup theory, L.— [a. o.], 1976; [10] Pastijn F., «Semigroup Forum», 1977, v. 14, № 3, p. 247—263; [11] Byleen K., Meakin J., Pastijn F., «J. Algebra», 1978, v. 54, p. 6—26.
Л. Н. Шеврин.

ПРОСТЕЙШИЙ ПОТОК — случайная последовательность моментов времени $0<\tau_1<\tau_2<\ldots$, в к-рые происходят события нек-рого потока событий (напр., потока вызовов, приходящих на телефонную станцию), удовлетворяющая условию независимости и одинаковой показательной распределенности разностей $\tau_{l+1}-\tau_l$. П. п. с распределением

$$F(x)=\mathsf{P}\{\tau_{l+1}-\tau_l \leqslant x\}=1-e^{-\lambda x},\ x \geqslant 0, \qquad (*)$$

является частным случаем процесса восстановления (см. *Восстановления теория*). С П. п. связан *пуассоновский процесс* $\xi(t)$, равный числу событий потока в отрезке времени $(0, t)$. П. п. и соответствующий ему пуассоновский процесс удовлетворяют следующим условиям.

Стационарность. Для любых $0<t_0$, $0<t_1<t_2<\ldots<t_k$ распределение случайных величин

$$\xi(t_l+t_0)-\xi(t_{l-1}+t_0),\ l=2, \ldots, k,$$

не зависит от t_0.

Ординарность. Вероятность появления в интервале $(t, t+\Delta t)$ двух или более событий потока равна $o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$.

Отсутствие последействия. При $0<t_1<t_2<\ldots<t_n$ случайные величины $\xi(t_l)-\xi(t_{l-1})$, $l=1,\ldots,k$, независимы.

Доказывается, что при выполнении этих условий и при условии

$$\mathrm{P}\{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)=1\}=\lambda\,\Delta t+o(\Delta t)$$

поток будет простейшим с показательным распределением (*).

Лит.: [1] Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963. *Б. А. Севастьянов.*

ПРОСТОГО СЛОЯ ПОТЕНЦИАЛ — выражение вида

$$u(x)=\int_S h(|x-y|)\,f(y)\,d\sigma(y), \qquad (1)$$

где S — замкнутая поверхность Ляпунова (класса $C^{(1,\,\lambda)}$) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, разделяющая $\mathbb{R}^n$ на внутреннюю область D^+ и внешнюю D^-; $h(|x-y|)$ — фундаментальное решение оператора Лапласа:

$$h(|x-y|)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-2)\,\omega_N\,|x-y|^{N-2}}, & n\geqslant 3;\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x-y|}, & n\geqslant 2;\end{cases}$$

$\omega_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $|x-y|$ — расстояние между точками x и y, $d\sigma(y)$ — элемент площади S.

Если $f(x)\in C^{(0)}(S)$, то П. с. п. $u(x)$ определен всюду в $\mathbb{R}^n$. П. с. п. представляет собой частный случай *ньютонова потенциала*, порождаемого массами, распределенными на поверхности S с поверхностной плотностью $f(y)$, и обладает следующими свойствами.

В D^+ и D^- П. с. п. $u(x)$ имеет производные всех порядков, к-рые можно вычислять под знаком интеграла, и удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u(x)=0$, т. е. является *гармонической функцией*. При $n\geqslant 3$ эта функция регулярна на бесконечности, $u(\infty)=0$. П. с. п. $u(x)$ непрерывен во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, причем $u(x)\in C^{(0,\,\nu)}(\mathbb{R}^n)$ при любом ν, $0<\nu<\lambda$. При переходе через поверхность S производная по направлению внешней нормали $\boldsymbol{n}_0$ к S в точке $y_0\in S$ терпит разрыв. Предельные значения нормальной производной из области D^+ и из области D^- существуют и непрерывны всюду на S и выражаются соответственно формулами

$$\lim_{x\to y_0}\frac{du}{d\boldsymbol{n}_0}\Big|_i=\frac{du(y_0)}{d\boldsymbol{n}_0}-\frac{f(y_0)}{2}, \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to y_0}\frac{du}{d\boldsymbol{n}_0}\Big|_l=\frac{du(y_0)}{d\boldsymbol{n}_0}+\frac{f(y_0)}{2},$$

где

$$\frac{du(y_0)}{d\boldsymbol{n}_0}=\int_S\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_0}h(|y-y_0|)\,f(y)\,d\sigma(y) \qquad (3)$$

— т. н. прямое значение нормальной производной П. с. п. в точке $y_0\in S$, причем $du(y_0)/d\boldsymbol{n}_0\in C^{(0,\,\nu)}(S)$ при всех ν, $0<\nu<\lambda$. Если $f(y)\in C^{(0,\,\lambda)}(S)$, то частные производные функции $u(x)$ непрерывно продолжаются в $\overline{D^+}$ и в $\overline{D^-}$ до функций классов $C^{(0,\,\lambda)}(\overline{D^+})$ и $C^{(0,\,\lambda)}(\overline{D^-})$ соответственно. В этом случае также

$$du(y_0)/d\boldsymbol{n}_0\in C^{(0,\,\lambda)}(S).$$

Эти свойства обобщаются в различных направлениях. Напр., если $f(y)\in L^1(S)$, то $u(x)\in L^1$ внутри и вне S, формулы (2) имеют место почти всюду на S, причем интеграл (3) суммируем на S. Изучены также свойства П. с. п., понимаемых как интегралы по произвольной радоновской мере μ, сосредоточенной на S:

$$u(x)=\int h(|x-y|)\,d\mu(y);$$

здесь также $u(x)$ — гармонич. функции вне S, формулы (2) имеют место почти всюду на S по мере Лебега с заменой $f(y)$ на производную меры $\mu'(y_0)$ по мере Лебега. В определении (1) фундаментальное решение оператора Лапласа можно заменить на произвольную функцию Леви для общего эллиптич. оператора 2-го порядка с переменными коэффициентами класса $C^{(0,\lambda)}$ с заменой нормальной производной d/dn_0 на производную по конормали. При этом перечисленные свойства остаются в силе (см. [2] — [4]).

П. с. п. используется при решении краевых задач для эллиптич. уравнений. Представление искомого решения 2-й краевой задачи в виде П. с. п. с неизвестной плотностью $f(y)$ и использование свойства (3) приводит к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода на S для определения $f(y)$ (см. [2] — [5]).

При решении краевых задач для параболич. уравнений используется тепловой потенциал простого слоя вида

$$v(x,\ t)=\int_0^t d\tau \int_S G(x,\ t;\ y,\ \tau)\, f(y,\ \tau)\, d\sigma(y),$$

где

$$G(x,\ t;\ y,\ \tau)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n (t-\tau)^{n/2}} \exp\left[-|x-y|^2/4(t-\tau)\right]$$

— фундаментальное решение уравнения теплопроводности в n-мерном пространстве, $f(y,\ \tau)$ — плотность. Функция $v(x,\ t)$ и ее обобщение на случай произвольного параболич. уравнения 2-го порядка обладают свойствами, аналогичными указанным для $u(x)$ (см. [3], [4], [6]).

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [2] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [3] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [4] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, 5 изд., М., 1958; [5] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [6] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966.
Е. Д. Соломенцев.

ПРОСТОЕ КОЛЬЦО — неодноэлементное кольцо без двусторонних идеалов, отличных от 0 и всего кольца. Ассоциативное П. к. с единицей, содержащее минимальный односторонний идеал, изоморфно кольцу матриц над нек-рым телом. Без предположения существования единицы такое кольцо оказывается локально матричным над нек-рым телом D, т. е. каждое его конечное подмножество содержится в подкольце, изоморфном кольцу матриц над D (см. [2]). Существуют П. к. без делителей нуля (даже нётеровы), отличные от тел, а также нётеровы П. к. с делителями нуля, но без идемпотентов [3]. Известны П. к., радикальные в смысле Джекобсона (см. [1]). Однако открыт вопрос о существовании простых нильколец. Описание строения альтернативных П. к. сводится к ассоциативному случаю (см. *Альтернативные кольца и алгебры*). См. также *Простая алгебра*.

Лит.: [1] Бокуть Л. А., Ассоциативные кольца, ч. 1—2, Новосиб., 1977—81; [2] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [3] Залесский А. Е., Неруславский О., «Communs. Alg.», 1977, v. 5, № 3, p. 231—44; [4] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [5] Cozzens J., Faith C., Simple Noetherian rings, Camb.— [a. o.], 1975.
Л. А. Скорняков.

ПРОСТОЕ МНОЖЕСТВО — рекурсивно перечислимое множество натуральных чисел, дополнение к-рого есть *иммунное множество*. П. м. являются промежуточными в смысле так наз. m-сводимости (см. *Рекурсивная теория множеств*) между разрешимыми множествами и творческими (креативными) множествами — последние являются наибольшими среди перечислимых множеств в смысле m-сводимости. Пусть P — произвольное П. м., а K — произвольное креативное множество натуральных чисел (напр., множество гёделевых

номеров теорем формальной арифметики). Тогда не существует общерекурсивной функции $f(x)$, сводящей K к P, т. е. такой, что

$$x \in K \Leftrightarrow f(x) \in P.$$

Сводимость P к K имеет место всегда, а к P не сводится ни одно разрешимое множество.

Лит.: [1] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [2] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [3] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972. *С. Н. Артемов.*

ПРОСТОЕ ОТНОШЕНИЕ трех точек M_1, M, M_2 на прямой — число λ такое, что

$$\overline{M_1M} = \lambda \overline{MM_2}.$$

При этом говорят, что точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ. Если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — координаты точек M_1 и M_2, то координаты точки M определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

П. о. является инвариантом аффинных преобразований. *А. Б. Иванов.*

ПРОСТОЕ ПОЛЕ — поле, не содержащее собственных подполей. Каждое поле содержит единственное простое подполе. П. п. характеристики 0 изоморфно полю рациональных чисел. П. п. характеристики p изоморфно полю вычетов по модулю p. *О. А. Иванова.*

ПРОСТОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — то же, что *неприводимое представление.*

ПРОСТОЕ ЧИСЛО — натуральное (целое положительное) число $p > 1$, имеющее только два делителя 1 и p:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, . . .

Числа, имеющие не менее трех различных делителей, наз. составными. Понятие П. ч. является основным при изучении делимости натуральных чисел. Так, основная теорема элементарной теории чисел утверждает, что всякое натуральное число, отличное от единицы, либо простое, либо, если оно составное, может быть представлено в виде произведения простых чисел. При этом такое представление единственно (с точностью до расположения сомножителей). Запись этого произведения в виде степеней одинаковых П. ч., а самих П. ч. в порядке возрастания, дает канонич. разложение натурального числа:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}.$$

С помощью канонич. разложений натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ находят наибольший общий делитель $d = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и наименьшее общее кратное $m = [a_1, a_2, \ldots, a_k]$ этих чисел. С помощью канонич. разложения натурального числа n вычисляются значения теоретико-числовых функций $\tau(n)$, $S(n)$ и $\varphi(n)$, к-рые обозначают соответственно число делителей, сумму делителей числа n и количество натуральных чисел $m \leqslant n$, взаимно простых с n (т. е. таких, что $(m, n) = 1$):

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1),$$

$$S(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1},$$

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Существенной особенностью этих формул является их зависимость от арифметич. структуры натурального аргумента n.

П. ч. играют роль своеобразных «кирпичиков», из к-рых строятся все остальные натуральные числа. Еще в 3 в. до н. э. Евклид доказал бесконечность мно-

жества П. ч., а Эратосфен нашел способ отсеивания П. ч. из множества натуральных чисел (см. *Эратосфена решето*). Л. Эйлер (L. Euler) нашел доказательство бесконечности множества П. ч., основанное на использовании средств математич. анализа. Дальнейшее развитие аналитич. метода Эйлера оказалось очень плодотворным (см. *Аналитическая теория чисел*). П. Л. Чебышев открыл ряд новых законов, к-рым подчиняются П. ч. В частности, с помощью элементарных рассуждений, использующих канонич. разложение для числа $n!$, П. Л. Чебышев нашел неравенства, к-рым должно удовлетворять количество $\pi(x)$ простых чисел $p \leqslant x$:

$$\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b\,\frac{x}{\ln x},$$

где $a<1$, $b>1$ — нек-рые положительные константы. Наиболее глубокие закономерности, к-рым подчиняется поведение последовательности П. ч., были получены путем углубления исходных идей П. Л. Чебышева с помощью аналитических и, в ряде случаев, элементарных методов (см. *Распределение простых чисел*).

П. ч. связаны не только с мультипликативной, но и с аддитивной структурой натуральных чисел. Достаточно характерной в этом отношении является *Гольдбаха проблема* о разбиении натуральных чисел на сумму трех П. ч., решенная в 1937 И. М. Виноградовым (см. *Аддитивная теория чисел*). Изучение законов разложения П. ч. в алгебраич. полях проливает свет на свойства обычных П. ч. Напр., рассматривая закон разложения П. ч. $p \neq 2$ в поле гауссовых чисел, получают т е о р е м у Г а у с с а: $p=a^2+b^2$ тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod 4$.

Существует много пока (1983) еще не решенных проблем, относящихся к П. ч. Напр.:

будет ли бесконечным множество П. ч. Мерсенна:

$$p = 2^q - 1, \text{ где } q \text{ — простое;}$$

будет ли бесконечным множество П. ч. Ферма:

$$p = 2^{2^n} + 1, \text{ где } n \geqslant 0 \text{ — целое;}$$

существует ли бесконечное множество П. ч. p_1 и p_2 «близнецов», т. е. таких, что $p_1 - p_2 = 2$.

Экспериментальные и эвристич. соображения свидетельствуют в пользу положительного решения сформулированных выше проблем и др. аналогичных задач.

Лит.: [1] Х а с с е Г., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953.

Б. М. Бредихин.

ПРОСТОЙ ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП — класс клеточных комплексов, принадлежащих одному *гомотопическому типу*, такой, что *Уайтхеда кручение* соответствующей гомотопич. эквивалентности равно нулю.

М. И. Войцеховский.

ПРОСТОЙ ИДЕАЛ — двусторонний идеал P кольца R такой, что из $AB \subseteq P$, где A и B — идеалы в R, следует, что либо $A \subseteq P$, либо $B \subseteq P$. Для ассоциативного кольца эквивалентным определением на языке элементов будет следующее:

$$aRb \subseteq P \longrightarrow a \in P \text{ или } b \in P,$$

где a, b — элементы кольца R. Всякий *примитивный идеал* прост.

Пусть R — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Тогда простота идеала $P \subset R$ эквивалентна тому, что $ab \in P \rightarrow a \in P$ или $b \in P$, т. е. тому, что факторкольцо R/P есть область целостности. В этом случае всякий максимальный идеал прост, а пересечение всех простых идеалов кольца R является радикалом нулевого идеала (т. е. множеством нильпотентных элементов).

Обобщением понятия П. и. служит понятие *примарного идеала*. В теории *примарных разложений* П. и. играют ту же роль, что простые числа в разложении целых чисел по степеням простых, а примарные идеалы — роль степеней простых чисел.

Идеал P решетки L наз. п р о с т ы м, если

$$ab \in P \longrightarrow a \in P \text{ или } b \in P.$$

Идеал P прост тогда и только тогда, когда $F = L \setminus P$ — простой фильтр, т. е. если $a+b \in F \rightarrow a \in F$ или $b \in F$.

Лит.: [1] Б у р б а к и Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Д ж е к о б с о н Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [3] З а р и с с к и й О., С а м ю э л ь П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963; [4] С к о р н я к о в Л. А., Элементы теории структур, М., 1970.

О. А. Иванова.

ПРОСТОЙ ИНТЕРВАЛ ч а с т и ч н о у п о р я д о ч е н н о г о м н о ж е с т в а — подмножество, состоящее из двух элементов $a \leqslant b$ таких, что между ними в данном частично упорядоченном множестве нет других элементов, т. е.

$$a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow a = x \wedge b = x.$$

О. А. Иванова.

ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ МЕТОД — метод приближенного решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax = b$, к-рая преобразуется к виду $x = Bx + c$ и решение к-рой находится как предел последовательности $x^{k+1} = Bx^k + c$, $k = 0, 1, \ldots$, где x^0 — начальное приближение. Для сходимости П. и. м. при любом начальном приближении x^0 необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы B были по модулю меньше единицы; и достаточно, чтобы какая-либо норма матрицы B была меньше единицы. Если для нормы матрицы B, согласованной с нормой вектора x, имеет место оценка $\|B\| \leqslant \rho < 1$, то П. и. м. сходится со скоростью геометрич. прогрессии и для погрешности метода верна оценка

$$\|x^m - x\| \leqslant \rho^m \|x^0 - x\|.$$

Для случая кубической, октаэдрической и сферической векторных норм условие $\|B\| \leqslant \rho$ будет выполнено, если имеют место оценки:

1) $\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \leqslant \rho, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$

2) $\sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \leqslant \rho, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$

3) $\sum_{i,\, j=1}^{n} b_{ij}^2 \leqslant \rho^2.$

Простейший вариант метода соответствует случаю, когда в качестве матрицы B выбирают матрицу $E - A$, где E — единичная матрица. Если все диагональные элементы матрицы A отличны от нуля, то, выбирая $b = D^{-1}(D - A)$ и $c = D^{-1}b$, где D — диагональная матрица, диагональные элементы к-рой совпадают с диагональными элементами матрицы A, получают *Якоби метод* или метод одновременных смещений.

Частным случаем П. и. м. является метод $B = E - \tau A$ и $c = \tau b$, где τ — итерационный параметр, к-рый выбирается из условия минимума по τ нормы матрицы $E - \tau A$. Если γ_1 и γ_2 — минимальное и максимальное собственные значения симметричной положительно определенной матрицы A, то при $\tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$ для сферич. нормы матрицы B имеет место оценка $\|B\| \leqslant \rho$, где $\rho = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} < 1$.

Для нелинейной системы алгебраич. уравнений

$$\varphi_i(x) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

II. и. м. имеет вид

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \tau\varphi_i(x^k), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad k \geqslant 0.$$

Вопрос о выборе итерационного параметра τ решается в зависимости от дифференциальных свойств функций $\varphi_i(x)$. Часто он подчинен требованию локальной сходимости метода в окрестности решения.

Лит.: [1] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М., 1963; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [3] Ортега Дж., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ., М., 1975; [4] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

Е. С. Николаев.

ПРОСТОЙ ЭЛЕМЕНТ — обобщение понятия простого числа. Пусть G — область целостности или коммутативная полугруппа с единицей, удовлетворяющая закону сокращения. Ненулевой элемент $p \in G$, не являющийся делителем единицы, наз. п р о с т ы м, если произведение ab может делиться на p лишь в том случае, когда хотя бы один из элементов a или b делится на p. Всякий П. э. является н е п р и в о д и м ы м, т. е. делится только на делители единицы и ассоциированные с ним элементы. Неприводимый элемент не обязан быть простым, однако в *гауссовой полугруппе* эти два понятия совпадают. Более того, если всякий неприводимый элемент из G является простым, то полугруппа G гауссова. Аналогичные утверждения имеют место для *факториальных колец*. Элемент кольца является простым тогда и только тогда, когда главный идеал, порожденный этим элементом,— *простой идеал*.

Существуют обобщения этих понятий на некоммутативный случай (см. [2]).

Лит.: [1] Кон П., Свободные кольца и их связи, пер. с англ., М., 1975; [2] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [3] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

О. А. Иванова.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ФОРМЫ — связные полные римановы пространства постоянной кривизны. Проблема классификации n-мерных римановых пространств произвольной постоянной кривизны была сформулирована В. Киллингом (W. Killing, 1891), к-рый назвал ее п р о б л е м о й п р о с т р а н с т в е н н ы х ф о р м К л и ф ф о р д а — К л е й н а; современная формулировка этой проблемы дана Х. Хопфом (H. Hopf, 1925).

П р и м е р ы П. ф.: евклидово пространство E^n размерности n есть П. ф. нулевой кривизны (так называемое плоское пространство); сфера S^n в E^{n+1} радиуса $r>0$ есть П. ф. положительной кривизны $1/r^2$; пространство Лобачевского (гиперболич. пространство) Λ^n есть П. ф. отрицательной кривизны; плоский тор $T^n = E^n/\Gamma$, где Γ — n-мерная решетка в E^n, есть П. ф. нулевой кривизны (плоское пространство).

Любая П. ф. M^n кривизны σ может быть получена из односвязной П. ф. $\tilde{M}^n$ той же кривизны факторизацией по дискретной группе Γ движений пространства $\tilde{M}^n$, действующих свободно (т. е. без неподвижных точек); при этом два пространства $M^n = \tilde{M}^n/\Gamma$ и $M'^n = \tilde{M}^n/\Gamma'$ изометричны в том и только в том случае, когда Γ и Γ' сопряжены в группе всех движений $\tilde{M}^n$. Тем самым проблема классификации П. ф. сводится к задаче описания всех несопряженных групп движений пространств S^n, E^n в Λ^n, действующих свободно. Пространство M^n наз. с ф е р и ч е с к о й п р о с т р а н с т в е н н о й ф о р м о й (с. п. ф.), если $M^n = S^n/\Gamma$, е в к л и д о в о й п р о с т р а н с т в е н н о й ф о р м о й (е. п. ф.), если $M^n = E^n/\Gamma$, и г и п е р б о л и ч е с к о й п р о с т р а н с т в е н н о й ф о р м о й (г. п. ф.), если $M^n = \Lambda^n/\Gamma$; фундаментальная группа M^n изоморфна Γ. При изучении проблемы классификации П. ф. ненулевой кривизны σ значение

$|\sigma|$ не играет существенной роли, поэтому обычно считают $|\sigma|=1$.

Если n четно, то единственным движением сферы S^n без неподвижных точек является центральная симметрия, переводящая каждую точку сферы в диаметрально противоположную; факторпространство S^n/Γ по группе Γ, порожденное этим движением, есть пространство Римана (эллиптич. пространство). Любая с. п. ф. четной размерности n изометрична либо S^n, либо P^n. Были классифицированы трехмерные с. п. ф. (см. [2]). Следующим шагом в направлении классификации с. п. ф. явилась общая программа решения этой проблемы и её применение для классификации с. п. ф. размерности $4k+1$ (см. [4]). Поскольку сфера S^n компактна, дискретная группа Γ движений S^n конечна, то для классификации n-мерных с. п. ф. достаточно описать все несопряженные конечные подгруппы ортогональной группы $O(n+1)$, действующие свободно на S^n. Говорят, что ортогональное представление π конечной группы G в E^{n+1} с в о б о д н о о т н е п о д в и ж н ы х т о ч е к, если для всех $g\in G\setminus\{1\}$ преобразование $\pi(g)$ сферы S^n не имеет неподвижных точек; в частности, π — точное представление. Согласно программе, изложенной в [4], решение проблемы с. п. ф. Клиффорда — Клейна можно разбить на ряд этапов. Во-первых, найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы абстрактная группа G могла служить фундаментальной группой с. п. ф. и классифицировать такие группы; получается нек-рое семейство $\{G_\lambda\}$ групп. Во-вторых, описать все неэквивалентные неприводимые ортогональные представления каждой из групп $\{G_\lambda\}$ и выделить среди них представления, свободные от неподвижных точек. Наконец, определить все автоморфизмы групп $\{G_\lambda\}$ и выяснить, какие из найденных представлений эквивалентны по модулю автоморфизма соответствующей группы. Эта программа в полном объеме была реализована в [5], что привело к исчерпывающей классификации с. п. ф. Любая конечная циклич. группа принадлежит семейству $\{G_\lambda\}$; чтобы нециклич. группа порядка N могла служить фундаментальной группой n-мерной с. п. ф., необходимо (но не достаточно), чтобы N было взаимно просто с $n+1$ и делилось на квадрат какого-либо целого числа.

Глобальная теория е. п. ф. возникла как приложение нек-рых результатов геометрич. кристаллографии. В работе [3] был использован известный с кон. 19 в. список кристаллографич. групп в E^3 и получена топологическая, а в компактном случае аффинная, классификация трехмерных е. п. ф. Теоремы Бибербаха о кристаллографич. группах в E^n приводят к структурной теории компактных е. п. ф. произвольной размерности. В частности, для любого $n\geqslant 2$ существует только конечное число разных классов эквивалентных компактных е. п. ф. размерности n, при этом две компактные е. п. ф. $M^n=E^n/\Gamma$ и $M'^n=E^n/\Gamma'$ аффинно эквивалентны, если и только если их фундаментальные группы Γ и Γ' изоморфны. Напр., любая двумерная компактная е. п. ф. гомеоморфна (а следовательно, аффинно эквивалентна) либо плоскому тору, либо поверхности Клейна. Абстрактная группа Γ тогда и только тогда может служить фундаментальной группой компактной е. п. ф. M^n, когда а) Γ имеет нормальную абелеву подгруппу Γ^* конечного индекса, изоморфную $\mathbb{Z}^n$; б) Γ^* совпадает со своим централизатором в Γ; в) Γ не имеет элементов конечного порядка. Если такая группа Γ реализована в виде дискретной подгруппы в группе всех движений пространства E^n, то Γ^* совпадает с множеством параллельных сдвигов, принадлежащих Γ, и имеется нормальное накрытие p пространства $M^n=E^n/\Gamma$ плоским тором $T^n=E^n/\Gamma^*$, определенное формулой $p(\Gamma^*(x))=\Gamma(x)$ для всех $x\in E^n$.

Конечная группа Γ/Γ^* изоморфна группе накрывающих преобразований для p, к-рая в свою очередь изоморфна *голономии группе* пространства M^n. Компактная е. п. ф. всегда имеет конечную группу голономии. Справедливо и обратное утверждение: компактное риманово пространство, группа голономии к-рого конечна, является плоским. Доказано, что любая конечная группа изоморфна группе голономии нек-рой компактной е. п. ф. Аффинная классификация компактных е. п. ф. заданной размерности n в настоящее время (1983) известна только для $n\leqslant 4$. При $n=3$ имеется 6 классов ориентируемых и 4 класса неориентируемых аффинно эквивалентных компактных е. п. ф. Классифицированы компактные е. п. ф. с циклич. группами голономии простого порядка. Семейство всех неизометричных плоских торов T^n можно параметризовать элементами из

$$SL(n, \mathbb{Z})\backslash GL^+(n, R)/SO(n),$$

где $GL^+(n, R)$ — связная компонента единицы в $GL(n, R)$, а изометрич. классификация компактных е. п. ф. размерности n непосредственно следует из их аффинной классификации и изометрич. классификации торов T^n. Некомпактные е. п. ф. классифицированы (с точностью до изометрии) только в размерностях 2 и 3; в частности, двумерная некомпактная е. п. ф., отличная от E^2, гомеоморфна цилиндру, либо листу Мёбиуса. Любая некомпактная е. п. ф. допускает действительную аналитич. ретракцию на компактное вполне геодезич. плоское подмногообразие; класс фундаментальных групп некомпактных е. п. ф. совпадает с классом фундаментальных групп компактных е. п. ф.

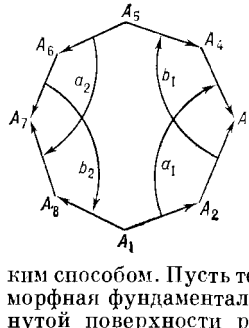
Исследование двумерных г. п. ф. по существу началось в 1888, когда А. Пуанкаре (H. Poincaré, [1]), изучая дискретные группы дробно-линейных преобразований верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,(z)>0$ комплексной плоскости — *фуксовы группы*, заметил, что их можно трактовать как группы движений плоскости Лобачевского Λ^2. Пусть $\mathscr{L}$ — группа движений Λ^2, сохраняющих ориентацию; $A_1, \ldots, A_{4m}$, $m\geqslant 2$,— выпуклый $4m$-угольник в Λ^2 с попарно конгруэнтными геодезич. сторонами

$$A_{4i-3}A_{4i-2}=A_{4i-1}A_{4i},\ A_{4i-2}A_{4i-1}=A_{4i}A_{4i+1},$$

где $i=1, \ldots, m$, $A_{4m+1}=A_1$, сумма углов к-рого 2π. Элементы a_i и b_i из $\mathscr{L}$ переводят $A_{4i-3}A_{4i-2}$ в

$$A_{4i}A_{4i-1} \text{ и } A_{4i-2}A_{4i-1} \text{ в } A_{4i-1}A_{4i}$$

соответственно (на рис. показан случай $m=2$). Тогда подгруппа $\Gamma\subset\mathscr{L}$, порожденная элементами a_i, b_i, действует на Λ^2 без неподвижных точек, а заданный $4m$-угольник служит фундаментальной областью этой группы; при этом Γ имеет единственное определяющее соотношение



$$\prod_{i=1}^{m}[a_i, b_i]=1.$$

Факторпространство Λ^2/Γ является ориентируемой компактной г. п. ф. рода m, и каждая двумерная ориентируемая компактная г. п. ф. может быть получена таким способом. Пусть теперь Γ— абстрактная группа, изоморфная фундаментальной группе ориентируемой замкнутой поверхности рода m. Тогда существует непрерывное отображение $\varphi:\Gamma\times R^{6m-6}\to\mathscr{L}$, удовлетворяющее условиям: а) для всех $x\in R^{6m-6}$ отображение $\varphi_x: g\to\varphi(g, x)$ является мономорфизмом Γ в $\mathscr{L}$; б) подгруппы $\Gamma_x=\varphi_x(\Gamma)$ и $\Gamma_{x'}=\varphi_{x'}(\Gamma)$ сопряжены в $\mathscr{L}$ тогда и только тогда, когда $x=x'$; в) если дискрет-

ная подгруппа $\Gamma' \subset \mathscr{L}$ изоморфна Γ, то она сопряжена с Γ_x для нек-рого $x \in R^{6m-6}$. Таким образом, семейство неизоморфных компактных г. п. ф. размерности 2 рода m зависит от $6m-6$ действительных параметров. Двумерная компактная г. п. ф. естественным образом наделяется структурой римановой поверхности, и только что сформулированное утверждение первоначально было доказано средствами теории униформизации; геометрич. доказательство было дано в [7]. Указанные результаты обобщаются на некомпактные г. п. ф., гомеоморфные сфере с конечным числом ручек и дырок, а также на неориентируемые г. п. ф. размерности 2. В противоположность двумерному случаю не существует непрерывных семейств неизометричных компактных г. п. ф. размерности больше 2. А именно, компактные г. п. ф. размерности $n \geqslant 3$, имеющие изоморфные фундаментальные группы, изометричны. Других общих результатов, непосредственно относящихся к классификации n-мерных г. п. ф., в настоящее время (1983) нет; примеры г. п. ф. размерности $n \geqslant 3$ приведены в [6], [8].

Кроме римановых П. ф. изучались их обобщения: псевдоримановы, аффинные и комплексные П. ф. и П. ф. симметрич. пространств (см., напр., [9]).

Лит.: [1] Пуанкаре А., Избр. труды, т. 3, М., 1974; [2] Threlfall W., Seifert H., «Math. Ann.», 1930, Bd 104, S. 1—70; [3] Nowacki W., «Comment. math. helv.», 1934, v. 7, p. 81—93; [4] Vincent G., там же; 1947, v. 20, p. 117—71; [5] Вольф Дж., Пространства постоянной кривизны, пер. с англ., М., 1982; [6] Винберг Э. Б., «Матем. сб.», 1969, т. 78, № 4, с. 633—39; [7] Натанзон С. М., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 4, с. 145—60; [8] Millson J. J., «Ann. Math.», 1976, v. 104, p. 235—47; [9] Borel A., «Topology», 1963, № 2, p. 111—22. *Н. Р. Камышанский.*

ПРОСТРАНСТВО — логически мыслимая форма (или структура), служащая средой, в к-рой осуществляются другие формы и те или иные конструкции. Напр., в элементарной геометрии плоскость или пространство служат средой, где строятся разнообразные фигуры. В большинстве случаев в П. фиксируются отношения, сходные по формальным свойствам с обычными пространственными отношениями (расстояние между точками, равенство фигур и др.), так что о таких П. можно сказать, что они представляют логически мыслимые пространственно-подобные формы. Первым и важнейшим математич. П. является трехмерное *евклидово пространство*, представляющее приближенный абстрактный образ реального П. Общее понятие «П.» в математике сложилось в результате обобщения и видоизменения понятий геометрии евклидова П. Первые П., отличные от трехмерного евклидова, были введены в 1-й пол. 19 в. Это были *Лобачевского пространство* и евклидово П. любого числа измерений (см. *Многомерная геометрия*). Общее понятие о математич. П. как «многократной протяженности» было выдвинуто в 1854 Б. Риманом (B. Riemann); оно обобщалось, уточнялось и конкретизировалось в разных направлениях: таковы, напр., *римановo пространство*, *финслерово пространство*, *векторное пространство*, *гильбертово пространство*, *метрическое пространство*, *топологическое пространство*. В современной математике П. определяют как множество каких-либо объектов, к-рые наз. его точками; ими могут быть геометрич. фигуры, функции, состояния физич. системы и т. д. Рассматривая их множество как П., отвлекаются от всяких их свойств и учитывают только те свойства их совокупности, к-рые определяются принятыми во внимание или введенными по определению отношениями. Эти отношения между точками и теми или иными фигурами, т. е. множествами точек, определяют «геометрию» П. При аксиоматич. ее построении основные свойства этих отношений выражаются в соответствующих аксиомах.

Примерами П. могут служить: 1) метрич. П., в к-рых определено расстояние между точками; напр., П. не-

прерывных функций на к.-л. отрезке $[a, b]$, где точками служат функции $f(x)$, непрерывные на $[a, b]$, а расстояние между $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определяется как максимум модуля их разности:

$$r = \max |f_1(x) - f_2(x)|.$$

2) «П. событий», играющее важную роль в геометрич. интерпретации теории относительности. Каждое событие характеризуется положением — координатами x, y, z и временем t, поэтому множество всевозможных событий оказывается четырехмерным П., где «точка» — событие определяется 4 координатами x, y, z, t. 3) Фазовые П., рассматриваемые в теоретич. физике и механике. Фазовое П. физич. системы — это совокупность всех ее возможных состояний, к-рые рассматриваются при этом как точки этого П. *А. Д. Александров.*

H-ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство с умножением, обладающим двусторонней гомотопич. единицей. Подробнее, пунктированное топологич. пространство (X, e), для к-рого задано непрерывное отображение $m : X \times X \to X$, наз. H-пространством, если $m(e, e) = e$ и отображение $X \to X$, $x \to m(x, e)$ и $x \to m(e, x)$ гомотопны rel (e, e) тождественному отображению. Отмеченная точка e наз. гомотопической единицей H-П. X. Иногда термин «H-П.» употребляется в более узком смысле, при к-ром требуется, чтобы отображение $m : X \times X \to X$ было гомотопически ассоциативным, т. е. чтобы отображения

$$m \circ (m \times id),\ m \circ (id \times m) : X \times X \times X \to X$$

были гомотопны rel (e, e, e) между собой. Иногда требуется также существование гомотопически обратных элементов. Это значит, что должно быть задано отображение $\mu : (X, e) \to (X, e)$, для к-рого отображения

$$X \to X,\ x \to m(x, \mu(x)),\ x \to m(\mu(x), x)$$

гомотопны постоянному отображению $X \to e$. Напр., для любого пунктированного топологич. пространства Y *петель пространство* ΩY является гомотопически ассоциативным H-П. с гомотопически обратными элементами, а $\Omega^2 Y = \Omega(\Omega Y)$ является также и коммутативным H-П., то есть таким, что отображения

$$X \times X \to X,\ (x, y) \to m(x, y),\ (x, y) \to m(y, x)$$

гомотопны. Группы когомологий H-П. образуют *Хопфа алгебру*.

Лит.: [1] Бордман Дж., Фогт Р., Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах, пер. с англ., М., 1977. *А. Ф. Харшиладзе.*

K-ПРОСТРАНСТВО, Канторовича пространство, — порядково полное векторное пространство, т. е. векторное *полуупорядоченное пространство*, в к-ром всякое ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань. Открыто Л. В. Канторовичем [1].

Лит.: [1] Канторович Л. В., «Матем. сб.», 1937, т. 2, с. 121—68. *М. И. Войцеховский.*

ПРОСТРАНСТВО НАД АЛГЕБРОЙ — пространство, обладающее *дифференциально-геометрической структурой*, точки к-рого могут быть снабжены координатами из нек-рой алгебры. В большинстве случаев алгебра предполагается ассоциативной с единицей, иногда — альтернативной с единицей (см. *Ассоциативные кольца и алгебры*, *Альтернативные кольца и алгебры*).

Для построения широкого класса П. н. а. можно исходить из понятия унитарного модуля над алгеброй, определение к-рого получается из определения векторного пространства над телом путем замены тела на ассоциативную алгебру с единицей (см. [1], [3]). В результате присоединения к элементам модуля, на-

зываемыми векторами, новых элементов, называемых точками, связанных с векторами теми же аксиомами, что и точки аффинного пространства с его векторами, получается аффинное пространство над ассоциативной алгеброй с единицей. Аффинные преобразования в аффинном пространстве над алгеброй имеют в координатах вид

$$x^i = \sum_{j=1}^{n} A_j^i f(x^j) + a^i,$$

где $f(x)$ — непрерывный автоморфизм алгебры. n-мерное аффинное пространство над алгеброй, имеющей ранг r над нек-рым полем, допускает естественную модель (представление) в nr-мерном аффинном пространстве над тем же полем. В этой модели каждая точка аффинного пространства над алгеброй изображается точкой nr-мерного аффинного пространства над рассматриваемым полем, координатами к-рой являются коэффициенты разложений координат точек пространства над алгеброй по базисным элементам алгебры. В случае, когда базисные элементы ε_A, $A=1, \ldots, r$, алгебры связаны между собой структурными уравнениями

$$\varepsilon_A \varepsilon_B = \gamma_{AB}^C \varepsilon_C,$$

где γ_{AB}^C — структурные константы алгебры, каждому базисному элементу ε_A соответствует в модели линейное преобразование с матрицей

$$\begin{Vmatrix} \gamma_A & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \gamma_A \end{Vmatrix}, \qquad (*)$$

где по диагонали стоят n одинаковых r-мерных блоков $\gamma_A = \|\gamma_{AB}^C\|$. В аффинных пространствах над алгебрами можно задать эрмитову метрику (евклидову и псевдоевклидову), а в случае коммутативных алгебр и квадратичную (евклидову и псевдоевклидову) метрику. Для этого в унитарном модуле определяется скалярное произведение векторов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, в первом случае обладающее свойством

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})^I,$$

где I — инволютивный антиавтоморфизм (инволюция) в алгебре, а во втором случае — свойством

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}).$$

Скалярный квадрат вектора $\overline{AB}$ определяет метрич. инварианты пары точек A и B; движения евклидовых и псевдоевклидовых пространств — аффинные преобразования, сохраняющие скалярное произведение векторов. При замене в определении эллиптических и гиперболических П. н. а. скалярного произведения векторов скалярным произведением векторов $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, для к-рого $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^I$ или $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, получается эрмитово, или квадратичное симплектическое, П. н. а.

Многообразие одномерных подмодулей $(n+1)$-мерного унитарного модуля над алгеброй K наз. n-мерным проективным пространством над алгеброй K; точками этого пространства наз. одномерные подмодули, а координаты векторов этих подмодулей наз. проективными координатами точек. В проективном П. н. а. определяются так же, как в проективных пространствах над полями, *коллинеации* и *корреляции*. В проективных координатах коллинеации имеют вид

$$x'^l = \sum_{j=1}^{n+1} A_j^i f(x^j),$$

где $f(x)$ — непрерывный автоморфизм алгебры, а корреляции имеют вид

$$lu_i = \sum_{j=1}^{n} f(x^j)\, A_{ij},$$

где $f(x)$ — непрерывный антиавтоморфизм алгебры, а u_i — проективные координаты гиперплоскости. Введение скалярного произведения векторов в унитарном модуле позволяет определить в проективном пространстве, построенном с помощью этого модуля, эрмитовы или, в случае коммутативной алгебры, квадратичные эллиптические и гиперболич. метрики. Метрич. инварианты точек этих пространств определяются скалярными произведениями векторов x и y соответствующих подмодулей с помощью двойного отношения

$$W = (x,\ x)^{-1}\,(x,\ y)\,(y,\ y)^{-1}\,(y,\ x).$$

В том случае, когда W — действительное число, инвариант ω, для к-рого $W = \cos^2\omega$, наз. р а с с т о я н и е м между соответствующими точками (см. [2]).

Проективные, эллиптические, гиперболические и симплектич. пространства над действительными простыми алгебрами (напр., алгебрами действительных, комплексных и кватернионных матриц) обладают тем свойством, что их фундаментальные группы являются простыми группами Ли бесконечных серий. Евклидовы, псевдоевклидовы и квазиэллиптические, квазигиперболические и квазисимплектич. пространства над теми же алгебрами обладают тем свойством, что их фундаментальные группы являются квазипростыми группами Ли тех же серий (см. [2]); тем же свойством обладают проективные, эллиптические, гиперболические и симплектич. пространства над полупростыми алгебрами, к к-рым относится алгебра дуальных чисел.

Несколько сложнее определяются проективные и эрмитовы (эллиптические и гиперболические) плоскости над альтернативными алгебрами. Фундаментальные группы этих плоскостей являются простыми или квазипростыми группами Ли нек-рых особых классов.

Лит.: [1] Б у р б а к и Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Р о з е н ф е л ь д Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969; [3] B e n z W., Vorlesungen über Geometrie der Algebren, B., 1973.

Б. А. Розенфельд, А. П. Широков.

ПРОСТРАНСТВО ОТОБРАЖЕНИЙ т о п о л о г и ч е с к о е — множество F отображений множества X в топологич. пространство Y с какой-нибудь естественной топологией T на F. При фиксированных множестве X и пространстве Y получаются различные П. о. в зависимости от того, какие отображения $X \to Y$ включаются в F и какая естественная топология берется на F. Выбор F связан с наличием на X и Y дополнительных структур и спецификой рассматриваемой ситуации. Так, в качестве F могут фигурировать: множество всех непрерывных отображений множества X в пространство Y, множество всех отображений множества X в пространство Y, множество всех непрерывных линейных отображений топологического векторного пространства X в топологическое векторное пространство Y, множество всех непрерывных гомоморфизмов топологич. группы X в топологич. группу Y, множество всех гладких отображений отрезка в прямую и т. д.

Важность рассмотрения П. о. в определенной мере вызвана тем, что отображения представляют собой наиболее общий способ сравнения математич. объектов.

Естественные топологии (на множестве F) обычно определяются по следующей схеме. В F фиксируется семейство S подмножеств, и *предбаза* топологии T на F составляется из множеств вида

$$V(A,\ V) = \{f \in F;\ f(A) \subset V\},$$

где $A \in S$ и V — любое открытое множество в F. Если S — семейство всех конечных (или одноточечных) под-

множеств множества X, то T наз. топологией поточечной сходимости на X. Если S состоит из всех компактных подмножеств топологич. пространства X, то T наз. компактно открытой топологией. Если $X \in S$, то T наз. топологией равномерной сходимости (на X). Впрочем, всякую топологию T на F, получаемую по этой схеме, наз. топологией равномерной сходимости на элементах семейства S.

В зависимости от области математики те или иные П. о. оказываются особенно важными. К числу центральных объектов функционального анализа относятся банаховы пространства непрерывных функций на компактах в топологии нормы, т. е. топологии равномерной сходимости, и в слабой топологии, к-рая описывается в терминах поточечной сходимости. В теории гомотопий важную роль играет пространство путей в топологич. пространстве, т. е. пространство непрерывных отображений действительного отрезка в это пространство. Гомотопии одного отображения в другое представляются путем в пространстве отображений. П. о. сфер в сферы возникает при определении гомотопических и когомотопических групп.

Особенно естественной на множестве всех отображений одного K-пространства в другое оказывается компактно открытая топология. Преимуществом топологии равномерной сходимости (на всем пространстве) является ее метризуемость. Эта топология — сильнейшая в большом классе естественных топологий на П. о. Но обладает важными преимуществами и топология поточечной сходимости — слабейшая в том же круге топологий. Во-первых, эта топология обладает наибольшим запасом компактов, как слабейшая, а компактность является одним из наиболее полезных свойств множества функций. Во-вторых, имеет место фундаментальный результат Дз. Нагаты (J. Nagata), к-рым изучение любых *тихоновских пространств* ставится в прямую связь с исследованием топологич. колец. А именно, тихоновские пространства X и Y гомеоморфны в том и только в том случае, если топологически изоморфны топологич. кольца $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ непрерывных функций на X и Y, взятые в топологии поточечной сходимости.

Рассмотрение топологич. свойств П. о. полезно при доказательстве теорем о существовании отображений с тем или иным свойством. Полнота метрич. пространства непрерывных действительных функций на компакте через принцип сжатых отображений применяется для доказательства фундаментальной теоремы о существовании решения дифференциального уравнения в известных предположениях. Следствием полноты метрич. пространства функций является *Бэра свойство*. На этой основе доказывается, напр., существование непрерывной нигде не дифференцируемой функции на отрезке. Свойство Бэра П. о. играет центральную роль при доказательстве теорем *общего положения*, при доказательстве известной теоремы о вложимости каждого n-мерного компакта со счетной базой в $(2n+1)$-мерное евклидово пространство, и т. п.

Влияние пространств действительных функций на общую топологию проявилось в следующей задаче общего характера: как связаны свойства пространств X и Y, если пространства непрерывных действительных функций над ними (в топологии поточечной сходимости, в компактно открытой топологии) гомеоморфны (линейно гомеоморфны). Известно, напр., что линейные гомеоморфизмы сохраняют компактность и размерность.

Существенное значение имеет наследование двойственности между свойствами топологич. пространства и топологич. свойствами пространства функций над ним в топологии поточечной сходимости. Примером полез-

ного результата в этой области может служить теорема: любая конечная степень пространства линделёфова в том и только в том случае, если пространство функций над ним имеет счетную тесноту. Этот результат применяется, в частности, при исследовании строения компактов Эберлейна — компактов, лежащих в банаховых пространствах, наделенных слабой топологией.

Лит.: [1] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., М., 1981.

А. В. Архангельский.

ПРОСТРАНСТВО С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ, G-пространство,— пара объектов (E, G), из к-рых первый есть векторное пространство E над полем комплексных чисел, а второй есть билинейная (точнее, полуторалинейная) форма G над E; эта форма наз. также G-метрикой. Если G — положительно определенная (т. н. дефинитная) форма, то G есть скалярное произведение в E, и с помощью G можно канонич. способом (см., напр., *Гильбертово пространство с индефинитной метрикой*) ввести норму и расстояние (т. е. обычную метрику) для элементов из E. В случае общей полуторалинейной формы нет норм или метрик, канонически связанных с G, и термин «G-метрика» лишь напоминает о тесной связи дефинитных полуторалинейных форм с нек-рыми метриками в векторных пространствах.

Теория конечномерных пространств с индефинитной метрикой, наз. чаще билинейно метрич. пространствами или пространствами с билинейной метрикой, разработана еще Г. Фробениусом и излагается в курсах линейной алгебры (см. [1]).

Основной целью общей теории П. с и. м. является выделение и исследование сравнительно простых, но важных для приложений классов *несамосопряженных операторов* в гильбертовом пространстве. П. с и. м. впервые введены Л. С. Понтрягиным [2] (подробнее см. *Понтрягина пространство*).

Теория П. с и. м. развивается по двум направлениям — геометрия этих пространств и линейные операторы в них.

Геометрия общих П. с и. м. в основном исследует: а) связь G-метрики с различными топологиями на E; б) классификацию векторных подпространств (линеалов) в E относительно G-метрики (особенно т. н. дефинитных подпространств; см. ниже); в) свойства G-проектирования; г) базисы G-пространств.

В случае эрмитовой G-метрики (G^*-метрики), т. е. такой, что $G(x, y) = \overline{G(y, x)}$ для всех $x, y \in E$, важнейшими понятиями и результатами геометрии П. с и. м. являются следующие. Пусть каждому вектору $y \in E$ поставлен в соответствие линейный функционал $G_y : x \to G(x, y)$, $x \in E$. Топология τ на E наз. подчиняющей G-метрику, если функционал G_y непрерывен в τ для всех $y \in E$; топология τ наз. согласующейся с G-метрикой, если она подчинена G и каждый τ-непрерывный функционал имеет вид G_y, $y \in E$. В пространстве E с индефинитной метрикой можно задать не более одной топологии Фреше, подчиняющей G, и, однако, не каждая G-метрика допускает такую топологию (см. [4]). Если подчиняющая G-метрику топология является предгильбертовой топологией на E и задается в E скалярным произведением $H(\cdot, \cdot)$, то форма H наз. эрмитово неотрицательной мажорантой формы G; в этом случае

$$|G(x, y)|^2 \leqslant CH(x, x)\, H(y, y), \quad C = \text{const}, \quad x, y \subset E.$$

После пополнения по H-норме получается гильбертово пространство с индефинитной метрикой $(\tilde{E}, \tilde{G})$, где $\tilde{G}$ — продолжение G по не-

прерывности на все пространство $\tilde{E}$. При этом метрика $\tilde{G}$ может оказаться вырожденной, даже если G — невырожденная метрика. Этого вырождения не происходит, если метрика G невырождена и наибольшая из размерностей $\varkappa$ положительных подпространств в E конечна. В последнем случае получается пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$.

Подпространство L в пространстве (E, G) с индефинитной метрикой наз. положительным подпространством, отрицательным подпространством (общее название — дефинитным подпространством) или нейтральным подпространством, в зависимости от того, будет ли $G(x, x)>0$, $G(x, x)<0$ или $G(x, x)=0$ для любого $x\in L$; подпространство максимально положительно, если оно положительно и не может быть расширено с сохранением этого свойства. Всякое подпространство одного из названных типов содержится в максимальном подпространстве того же типа.

Важную роль в классификации подпространств в пространствах с индефинитной метрикой играют понятия канонического разложения и G-ортогонального проектирования.

Вектор $x\in E$ наз. G-ортогональным к подпространству $L\subset E$ ($\equiv$ изотропным подпространством относительно L), если $G(x, y)=0$ для любого $y\in L$. Подпространство L наз. вырожденным, если оно содержит хотя бы один ненулевой вектор, изотропный относительно L.

Если L — подпространство в пространстве E с индефинитной метрикой, то $L'=\{y : G(x, y)=0, \forall x\in L\}$ — его G-ортогональное дополнение. Всегда $L''=L^\tau$, где τ — любая топология, согласующаяся с G. G-ортогональное дополнение L' вырожденного векторного подпространства L является вырожденным векторным подпространством, замкнутым относительно любой топологии τ, согласующейся с G, а $L\cap L^\perp$ есть векторное подпространство изотропных элементов. Подпространство L наз. проекционно полным, если каждый вектор $y\in E$ имеет G-проекцию на L, т. е. существует такое $y_0\in L$, что $G(x, y-y_0)=0$ для каждого $x\in L$. Единственность G-проекции на L равносильна невырожденности подпространства L, а ее существование зависит от непрерывности функционала G_y в топологиях на L, согласующихся с G. Если M и N являются G-ортогональными подпространствами и $M+N=E$, то M и N проекционно полны; если L — проекционно полное подпространство, то $L+L'=E$, причем сумма есть прямая сумма, если E — невырожденное пространство с индефинитной метрикой.

Пусть L — дефинитное подпространство в пространстве с индефинитной метрикой E; оно наз. регулярным, если каждый функционал G_y, $y\in E$, непрерывен на L в норме $\|x\|_G=|G(x, x)|^{1/2}$. В противном случае оно наз. сингулярным. Всякое невырожденное бесконечномерное пространство с индефинитной метрикой содержит сингулярные подпространства. Дефинитное подпространство L проекционно полно в том и только в том случае, если оно регулярно и если для любого $y\in E$ найдется такой вектор $x\in L$, что

$$\|x\|_G^2=\|G_y\|_G^2=G(x, y).$$

Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой изучались в основном в гильбертовых пространствах с индефинитной метрикой; имеется обзор банаховых аналогов (см. [8]).

Как и в случае гильбертовых пространств с индефинитной метрикой, важным инструментом изучения геометрии П. с и. м. и линейных операторов в прост-

ранствах (E, G), наделенных нек-рой топологией, согласованной с G, являются так наз. G-ортонормированные базисы в E, т. е. такие базисы $\{e_n\}$ топологического векторного пространства E, что $(Ge_k, e_n)=\pm\delta_{kn}$; $k, n=1, 2, \ldots$ (см. [4]).

Лит.: [1] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 3 изд., М., 1970; [2] Понтрягин Л. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1944, т. 8, с. 243—80; [3] Иохвидов И. С., Крейн М. Г., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1956, т. 5, с. 367—432; [4] Гинзбург Ю. П., Иохвидов И. С., «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, № 4, с. 3—56; [5] Крейн М. Г., в кн.: Вторая летняя матем. школа, ч. 1, К., 1965, с. 15—92; [6] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 4, с. 43—92; [7] Надь К., Пространства состояний с индефинитной метрикой в квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1969; [8] Иохвидов И. С., «Изв. АН Молд. ССР», 1968, № 1, с. 60—80.

Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.

ПРОСТРАНСТВО С МЕРОЙ (X, A, μ) — *измеримое пространство* (X, A) с заданной на A *мерой* μ (т. е. счетно аддитивной функцией со значениями в $[0, \infty]$, для к-рой $\mu(\varnothing)=0$; последнее свойство следует из аддитивности, если мера конечна, т. е. не принимает значения ∞, и даже если имеется хоть одно $Y\in A$ с $\mu Y<\infty$). Запись (X, A, μ) часто сокращают до (X, μ) и говорят, что μ есть мера на X; иногда эту запись сокращают даже до X. Основной случай — когда A является σ-алгеброй и X можно представить в виде $\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$ с $X_n\in A$ и $\mu X_n<\infty$; меру в этом случае наз. (вполне) *σ-конечной* (а если $\mu X<\infty$, то (вполне) *конечной*). Такова, напр., мера Лебега на $\mathbb{R}$ (см. *Лебега пространство*). Однако иногда встречаются и не σ-конечные меры, как, напр., k-мерная *Хаусдорфа мера* на $\mathbb{R}^n$ при $k<n$. Встречаются также модификации, когда μ принимает значения в $(-\infty, \infty]$, комплексные или векторные значения, а также когда μ всего лишь конечно аддитивна.

Лит.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, ч. 1 — Общая теория, пер. с англ., М., 1962.

Д. В. Аносов.

ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ — термин, обозначающий геометрич. конструкцию, к-рая описывает пространственные и временны́е отношения в тех физич. теориях, в к-рых эти отношения рассматриваются как взаимозависящие (эти теории принято наз. релятивистскими). Впервые понятие П.-в. возникло при формулировке и систематизации основных положений теории относительности. П.-в. этой теории является четырехмерным псевдоевклидовым пространством $E^4_{(1,\,3)}$ с линейным элементом

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2,$$

где x, y, z — пространственные координаты, а t — временна́я координата, c — скорость света. Эта система координат называется в физике *галилеевой системой координат* и соответствует *инерциальной системе отсчета*. Переход между различными галилеевыми системами координат, соответствующий рассмотрению инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга, осуществляется с помощью *Лоренца преобразований*. То, что значение временно́й координаты в новой системе координат оказывается при этом выраженным как через временну́ю, так и через пространственные координаты старой системы координат, отражает взаимозависимость пространственных и временны́х отношений в специальной теории относительности. П.-в. специальной теории относительности принято называть также П.-в. Минковского, лоренцевым П.-в.

В общей теории относительности в качестве П.-в. используются различные четырехмерные псевдоримановы пространства сигнатуры (1, 3). Отличие метрики этого П.-в. от плоской метрики П.-в. специальной теории относительности описывает в общей теории относительности гравитационное поле (см. *Гравитация*). В свою очередь метрика П.-в. связана с распределени-

ем и свойствами негравитационных полей и различных видов с помощью *Эйнштейна уравнений*.

Выработка концепции П.-в. сыграла важную роль в преодолении метафизич. подхода к пространству как абсолютному вместилищу тел и к времени как абсолютной длительности, не связанной с реальными физич. процессами.

В дальнейшем концепция П.-в. в той или иной форме входит в структуру других физич. теорий, рассматривающих релятивистские эффекты (релятивистской квантовой механики, квантовой теории поля и др.). В общей теории относительности были изучены многие типы П.-в., являющиеся решениями уравнений Эйнштейна.

Качественное различие между пространственными и временными отношениями с точки зрения релятивистской физики находит свое отражение в наличии в П.-в. векторов различной природы — пространственно- и времениподобных векторов, образующих в касательных пространствах конусы. Соответственно, метрика П.-в. оказывается индефинитной, пространственно- и времениподобные векторы имеют разные знаки скалярного квадрата. Границу между конусами пространственно- и времениподобных векторов образует изотропный конус, *изотропные векторы* к-рого имеют нулевой скалярный квадрат и соответствуют движению света и других частиц с нулевой массой покоя.

Многие специфич. эффекты теории относительности связаны именно с индефинитностью метрики П.-в. и с наличием структуры изотропных конусов на П.-в. Напр., лоренцево замедление времени есть следствие обратного неравенства треугольника в пространстве с индефинитной метрикой, согласно к-рому в двумерном псевдоевклидовом пространстве наклонная всегда короче своей проекции.

Во многих случаях оказывается полезным в различной степени отвлекаться от конкретного строения метрики П.-в. и рассматривать лишь свойства структуры изотропных конусов на П.-в., то есть рассматривать различные т. н. общие пространства кинематич. типа, или времениподобные пространства.

При ретроспективном анализе предшествующих физич. теорий с точки зрения теории относительности были построены различные типы П.-в., к-рые можно условно поставить в соответствие ньютоновской механике (*галилеево пространство*) и даже физич. представлениям Аристотеля (см. [5]). Эти П.-в. являются различными пространствами с вырожденным изотропным (световым) конусом (напр., полуримановым пространством). Именно вырождение изотропного конуса позволяет рассматривать эти пространства как предельные случаи П.-в. теории относительности и сопоставлять их тем теориям, исходной внутренней структуре к-рых концепция П.-в. была чужда.

Лит.: [1] Эйнштейн А., Собр. науч. трудов, т. 1—4, М., 1965—67; [2] Александров А. Д., «Вопросы философии», 1959, № 1, с. 67—84; [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973 (Теоретич. физика, т. 2); [4] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [5] Пенроуз Р., Структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1972. *Д. Д. Соколов.*

ПРОТИВОПОЛОЖНАЯ ТЕОРЕМА — теорема, получающаяся путем замены условия и заключения данной исходной теоремы их отрицаниями.

ПРОТИВОРЕЧИВЫЙ КЛАСС — класс K формул языка узкого исчисления предикатов (УИП) такой, что существует такая формула φ, что средствами УИП из K выводимо как φ, так и $\neg\varphi$ (отрицание φ). Другими словами, если к аксиомам УИП добавить все формулы из K в качестве новых аксиом, то в полученном исчислении будет выводима как формула φ, так и формула $\neg\varphi$. *В. Н. Гришин.*

ПРОТИВОРЕЧИЕ — формула φ языка узкого исчисления предикатов (УИП) такая, что во всех моделях

этого языка она ложна. Формула φ является П. тогда и только тогда, когда ¬φ выводимо в УИП.

В. Н. Гришин.

ПРОТИВОРЕЧИЯ ЗАКОН — логический закон, утверждающий, что никакое высказывание не может быть истинным одновременно со своим отрицанием. В языке исчисления высказываний П. з. выражается формулой

$$\neg (A \& \neg A).$$

Эта формула выводима как в классическом, так и в интуиционистском исчислении высказываний.

В. Н. Гришин.

ПРОЦЕДУРА — 1) Последовательность действий, выполняемая закономерно, согласно точному предписанию; *алгоритм*.

2) П.— особым образом оформленная *программа*, решающая задачу, частную по отношению к другой, более широкой задаче; фундаментальная конструкция *алгоритмических языков*.

П. является главным средством преодоления сложности *программирования* путем систематич. разделения задачи на части. Различают два способа выделения П. при программировании: нисходящий и восходящий. При нисходящем способе П. возникает при однократном разбиении задачи на малое число стандартно сопрягаемых подзадач; тем самым П. идентифицируется до того, как будет построена ее программа. При восходящем способе П. заготавливается впрок, с тем чтобы в дальнейшем быть использованной при решении более широкой задачи как элементарное действие.

Программа, образующая П., обычно содержит свободные переменные, называемые формальными параметрами П. При обращении к выполнению П. формальным параметрам придаются их значения, называемые фактич. параметрами. Описание П. обычно состоит из четырех частей: тела П., т. е. собственно программы, образующей П., имени П., списка формальных параметров и атрибутов — перечня свойств П. Обычно атрибуты характеризуют множества, к-рым принадлежат значения формальных параметров и результатов П. Простейшим видом П. являются процедуры-функции. Для них формальные параметры являются аргументами функции, а обращение к П.-функции, имеющее вид имени П., за к-рым стоит в скобках список фактич. параметров, означает «команду» вычисления значения функции, соответствующего этим параметрам.

А. П. Ершов.

ПРЮФЕРА ПОВЕРХНОСТЬ — пример двумерного действительного аналитич. многообразия, не имеющего счетного базиса открытых множеств; приведен в работе Т. Радо [1]. Имеется обобщение П. п. на случай любой четной размерности (см. [2]). Однако всякая риманова поверхность имеет счетный базис открытых множеств (теорема Радо).

Лит.: [1] Radó T., «Acta Szeged», 1925, v. 2, p. 101—21; [2] Calabi E., Rosenlicht M., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 4, p. 335—40; [3] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [4] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955.

Е. Д. Соломенцев.

ПРЯМАЯ — одно из основных геометрич. понятий. П. обычно косвенным образом определяется аксиомами геометрии; напр., евклидова П.— аксиомами инцидентности, порядка, конгруэнтности, непрерывности. П. наз. проективной, аффинной, гиперболической и т. д. в зависимости от плоскости, в к-рую она вложена. П. можно изучать по ее преобразованиям, индуцируемыми коллинеациями плоскости. Так, напр., группа алгебраич. автоморфизмов действительной проективной П. изоморфна группе перемещений действительной плоскости Лобачевского. Топологически все П. одной плоскости эквивалентны. Так, эллиптическая и дейст-

вительная проективная П. топологически эквивалентны окружности евклидовой плоскости, а комплексная проективная П.— двумерной сфере евклидова пространства. П. наз. непрерывной, дискретной или конечной, если она инцидентна со множеством точек мощности континуума, счетным или конечным множеством соответственно.

В плоскости над произвольным полем под П. понимают алгебраич. линию 1-го порядка. В прямоугольной системе координат (x, y) евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ П. задается линейным уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

коэффициенты A, B определяют координаты нормального вектора этой прямой.

Прямой (A, B) аффинного пространства над полем k (по Вейлю) наз. множество таких точек M, что $A\vec{M} = tA\vec{B}$, где $t \in k$. *В. В. Афанасьев, Л. А. Сидоров.*

ПРЯМАЯ СУММА — конструкция, широко используемая в теориях таких математич. структур, категории к-рых близки к *абелевым категориям*; в неабелевом случае конструкция прямой суммы обычно наз. дискретным прямым произведением. Пусть $\mathfrak{U}$ — нек-рый класс однотипных алгебраич. систем, содержащих одноэлементную (нулевую) подсистему. Прямой суммой или (дискретным) прямым произведением систем X_i, $i \in I$, из класса $\mathfrak{U}$ наз. подсистема *прямого произведения* $X = \prod_{i \in I} X_i$, состоящая из таких функций $f : I \to X$, все значения к-рых, кроме конечного числа, принадлежат соответствующим нулевым подсистемам. П. с. обозначается одним из следующих способов:

$$\prod\nolimits^{\otimes}_{i \in I} X_i, \quad \prod\nolimits^{\oplus}_{i \in I} X_i, \quad \sum\nolimits_{i \in I} X_i.$$

Для конечного числа слагаемых используются также обозначения

$$X_1 \dotplus \ldots \dotplus X_n, \quad X_1 \oplus \ldots \oplus X_n.$$

Непосредственно из определений следует совпадение П. с. и прямого произведения в случае конечности числа слагаемых.

Для каждого слагаемого П. с. $X = \prod^{\oplus}_{i \in I} X_i$ существует канонич. вложение $q_i : X_i \to X$, к-рое элементу $x \in X_i$ сопоставляет функцию $q_i(x) : I \to X$, принимающую значение x при значении аргумента i и равную нулю в остальных случаях. Следовательно, можно считать, что П. с. содержит свои слагаемые. В случае Ω-групп (в частности, в случае групп, абелевых групп, векторных пространств, колец) можно дать «внутреннее» определение П. с. Ω-группа G является П. с. своих Ω-подгрупп G_i, $i \in I$, если выполнены следующие условия: а) G порождается G_i, $i \in I$; б) каждая Ω-подгруппа G_i является идеалом в G; в) пересечение G_i с Ω-подгруппой, порожденной остальными идеалами, является нулевой подгруппой для каждого i.

Всякое векторное пространство есть П. с. одномерных подпространств. Всякая свободная абелева группа является П. с. бесконечных циклич. групп. Всякая конечная абелева группа есть П. с. примарных циклич. групп. Всякое ассоциативное кольцо с единицей, удовлетворяющее условию минимальности для идеалов, есть П. с. конечного числа полных колец линейных преобразований подходящих конечномерных векторных пространств.

В теории групп, решеток и категорий глубокое развитие получила проблема изоморфизма прямых разложений, начало к-рой было положено теоремой Ремака — Шмидта о центральном изоморфизме прямых

разложений групп, обладающих главным рядом (см. *Крулля — Ремака — Шмидта теорема*).

В теории категорий иногда П. с. наз. понятие, двойственное понятию произведения, т. е. *копроизведение* объектов категории. *М. Ш. Цаленко.*

0-ПРЯМОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ полугрупп с нулем — полугруппа, полученная из данного семейства $\{S_\alpha\}$ полугрупп с нулем, попарно пересекающихся лишь по этому нулю, заданием на объединении $\bigcup S_\alpha$ операции умножения, совпадающей с исходной операцией на каждой полугруппе S_α и такой, что $S_\alpha S_\beta = 0$ для любых различных α, β. 0-П. о. наз. также ортогональной суммой. Описание ряда типов полугрупп устанавливает возможность их разложения в 0-П. о. тех или иных известных полугрупп (см., напр., *Максимальный идеал*, *Минимальный идеал*, *Регулярная полугруппа*).

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 2, М., 1972.

Л. Н. Шеврин.

ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ — одна из основных общематематич. конструкций, идея к-рой принадлежит Декарту; поэтому П. п. наз. также декартовым произведением. П. п., или просто произведением, двух непустых множеств X и Y наз. множество $X \times Y$, состоящее из всех упорядоченных пар вида (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Если одно из множеств X или Y пусто, то произведение пусто. Множество $X \times Y$ можно отождествить с множеством функций, определенных на двухэлементном множестве $\{1, 2\}$ и принимающих значения в множестве X при значении аргумента, равном 1, и в множестве Y при значении аргумента, равном 2. Это отождествление позволяет распространить определение П. п. на случай любого количества множителей. Пусть I — нек-рое множество индексов и пусть X_i — произвольное семейство множеств, заиндексированных элементами множества I. П. п. семейства множеств X_i, $i \in I$, наз. множество таких функций $f : I \to X$, где $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$, что $f(i) \in X_i$ для каждого $i \in I$. Обычно П. п. обозначается $\prod_{i \in I} X_i$; для конечного множества индексов $I = \{1, \ldots, n\}$ используются также обозначения $\prod_{i=1}^{n} X_i$ или $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Если I состоит из одного элемента 1, то $\prod_{i=1} X_1 = X_1$. Иногда П. п. конечного числа множителей определяется индуктивно:

$$\prod_{i=1} X_1 = X_1,\ \prod_{i=1}^{2} X_i = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = \prod_{i=1}^{n-1} X_k \times X_n.$$

Значение конструкции П. п. определяется прежде всего тем, что в нем естественно вводится дополнительная структура, если все множители являются однотипными математич. структурами. Напр., пусть X_i, $i \in I$, — однотипные алгебраич. системы, т. е. множества с общей сигнатурой конечноместных предикатов и операций. Тогда произведение $X = \prod_{i \in I} X_i$ превращается в алгебраич. систему с той же сигнатурой: для функций $f_1, \ldots, f_n : I \to X$ и n-арной операции ω действие функции $f_1 \ldots f_n \omega$ на элемент i определяется равенством

$$f_1 \ldots f_n \omega\,(i) = f_1\,(i) \ldots f_n\,(i)\,\omega;$$

значение предиката $P(f_1, \ldots, f_n)$ истинно, если для любого $i \in I$ истинно значение $P(f_1(i), \ldots, f_n(i))$. При этом выполнение во всех X_i определенных тождеств влечет за собой их выполнение в произведении. По-

этому П. п. полугрупп, групп, колец, векторных пространств и т. п. снова являются полугруппами, группами, кольцами, векторными пространствами соответственно.

Для любого множителя П. п. $X=\prod_{i\in I}X_i$ существует естественная проекция $p_i: X\to X_i$, определяемая равенством $fp_i=f(i)$. Множество X и семейство проекций p_i, $i\in I$, обладают следующим универсальным свойством: для любого семейства отображений $g_i: Y\to X_i$ существует такое однозначно определенное отображение $h: Y\to X$, что $g_i=hp_i$ для каждого $i\in I$. Это свойство сохраняется в случае, когда все X_i — однотипные алгебраич. системы, и позволяет определить подходящую топологич. структуру П. п. топологич. пространств. Сформулированное свойство лежит в основе определения *произведения* объектов категории.

Многие задачи математики связаны с описанием математич. объектов, неразложимых в П. п., и с выяснением условий, при к-рых множители произведения определены однозначно с точностью до изоморфизма. Классич. результатами здесь являются теорема о строении конечно порожденных модулей над кольцом главных идеалов и теорема Ремака — Шмидта о центральном изоморфизме прямых разложений групп с главным рядом.

П. п. иногда наз. полным прямым произведением в отличие от дискретного прямого произведения (или *прямой суммы*), к-рое определяется в тех случаях, когда дополнительная структура в множителях позволяет выделить одноэлементные подструктуры (напр., единичные подгруппы, нулевые подпространства и т. п.). Как правило, П. п. конечного числа множителей совпадает с дискретным произведением.

М. Ш. Цаленко.

ПРЯМОЙ ПЕРЕСЧЕТ — пересчет элементов нек-рого множества натуральных чисел в порядке их возрастания. Точнее, П. п. множества A натуральных чисел есть строго возрастающая функция натурального аргумента, область значений к-рой совпадает с A. В теории алгоритмов рекурсивность и скорость возрастания П. п. множества являются его важными характеристиками. Напр., общерекурсивность (примитивная рекурсивность) П. п. бесконечного множества эквивалентна разрешимости (примитивно рекурсивной разрешимости) этого множества. Множества натуральных чисел, П. п. к-рых не мажорируются никакой общерекурсивной функцией, наз. гипериммунными, они играют существенную роль в теории *табличной сводимости*.

Лит.: [1] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [2] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972.

С. Н. Артемов.

ПРЯМОУГОЛЬНИК — четырехугольник, у к-рого все углы прямые. П. является параллелограммом.

ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ФОРМУЛА — формула вычисления интеграла по конечному промежутку $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx\cong h\sum_{k=1}^{N} f(\alpha+(k-1)h), \qquad (*)$$

где $h=(b-a)/N$ и $\alpha\in[a, a+h]$. Алгебраич. степень точности равна 1 при $\alpha=a+h/2$ и равна 0 в остальных случаях.

Квадратурная формула $(*)$ точна для тригонометрич. функций

$$\cos\frac{2\pi}{b-a}kx,\ \sin\frac{2\pi}{b-a}kx,\quad k=0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

В случае $b-a=2\pi$ квадратурная формула $(*)$ точна для всех тригонометрич. полиномов порядка не выше $N-1$, более того, ее тригонометрич. степень точности равна $N-1$. Никакая другая квадратурная формула с

N действительными узлами не может иметь тригонометрич. степень точности, большую чем $N-1$, так что П. ф. при $b-a=2\pi$ обладает наивысшей тригонометрич. степенью точности.

Пусть $R(f, \alpha)$ — погрешность П. ф., то есть разность между левой и правой частями приближенного равенства (*). Если подинтегральная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, то при $\alpha = a+h/2$ справедливо представление

$$R\left(f, a+\frac{h}{2}\right)=\frac{b-a}{24}h^2f''(\xi),$$

где ξ — нек-рая точка промежутка $[a, b]$. Если функция $f(x)$ — периодическая с периодом $b-a$ и имеет непрерывную производную порядка $2k$ (k — натуральное число) на всей действительной оси, то при любом $\alpha\in[a, a+h]$

$$R(f, \alpha)=-(b-a)B_{2k}\frac{h^{2k}}{(2k)!}f^{(2k)}(\eta),$$

где η — точка промежутка $[a, b]$ и B_{2k} — число Бернулли.

И. П. Мысовских.

ПРЯМЫХ МЕТОД — метод численного решения дифференциальных уравнений с частными производными (см. [1] — [3]). Применим для нелинейных уравнений эллиптического [4], гиперболического [5] и параболического [6] типов любых порядков и систем уравнений. П. м. позволяет проводить численные расчеты в областях с криволинейными границами [7]. П. м. используется для решения разнообразных задач механики [8].

В П. м. производится аппроксимация операции дифференцирования по нек-рым направлениям, что позволяет понизить размерность задачи и заменить решение исходной системы дифференциальных уравнений с частными производными расчетом аппроксимирующей ее системы меньшего порядка.

С помощью П. м. решен ряд задач газовой динамики [9]. При этом задача интегрирования исходной системы дифференциальных уравнений с частными производными сводится к расчету аппроксимирующей ее системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В П. м. область интегрирования разбивается поперек ударного слоя рядом прямых лучей на полосы. Замыкающий луч расположен в сверхзвуковой области. Лучи располагаются соответственно узлам многочлена Чебышева или равномерно. Газодинамич. функции аппроксимируются кусочно линейно вдоль каждой полосы либо полиномиально с узлами интерполяции на всех лучах. Получаемая аппроксимирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрируется вдоль каждого луча от ударной волны к телу. В отличие от *интегральных соотношений метода* не составляются интегральные соотношения и не выделяется минимальная область влияния затупления, что приводит к снижению точности, но упрощает вид аппроксимирующей системы (см. [10]).

П. м. проведены расчеты двумерного обтекания ряда тел вращения совершенным [11], равновесным [12] и неравновесным [13] газом. П. м. решена задача сверхзвукового обтекания сферы горючей смесью с использованием модели детонационной волны [14], ударной волны и фронта пламени [15] и др. С применением тригонометрич. аппроксимаций по меридиональному углу П. м. распространен на пространственно-трехмерный случай (см. [16], [17]), в том числе для неравновесного обтекания затупления [18].

Лит.: [1] Rothe E. H., «Math. Ann.», 1930, Bd 102, S. 650—70; [2] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С., «Бюлл. МГУ. Секц. А», 1937, т. 1, в. 6, с. 1—26; [3] Дородницын А. А., в кн.: Конференция «Пути развития советского математического машиностроения и приборостроения», М., 1956; [4] Костюкович Е. Х., «Докл. АН СССР», 1958, т. 118, № 3, с. 433—35; [5] Лебедев В. И., «Вест. МГУ», 1955, № 10, с. 47—57; [6] Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь,

«Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1958, т. 22, № 5, с. 667—704; [7] Будак Б. М., Горбунов А. Д., «Докл. АН СССР», 1958, т. 118, № 5, с. 858—61; [8] Алихашкин Я. И., «Вычислит. матем.», 1957, № 1, с. 136—52; [9] Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П., «Изв. АН СССР. Механ. и машиностр.», 1964, № 4, с. 9—28; [10] Белоцерковский О. М., Чушкин П. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 5, с. 731—59; [11] Росляков Г. С., Теленин Г. Ф., в кн.: Сб. работ ВЦ Моск. ун-та, 1968, № 11, с. 93—112; [12] Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П., «Докл. АН СССР», 1964, т. 159, № 1, с. 39—42; [13] Стулов В. П., в кн.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, в. 5, М., 1974, с. 140—227; [14] Гилинский С. М., Запрянов З. Д., Черный Г. Г., «Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа», 1966, № 5, с. 8—13; [15] Гилинский С. М., Черный Г. Г., там же, 1968, № 1, с. 20—32; [16] Миносцев В. Б., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П., «Докл. АН СССР», 1968, т. 179, № 2, с. 304—07; [17] Бажин А. П., Челышева И. Ф., «Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа», 1967, № 3, с. 119—23; [18] Семенихина О. Н., Шкадова В. П., там же, 1973, № 2, с. 99—103.

Ю. М. Давыдов.

ПСЕВДОБАЗА топологического пространства X — семейство открытых в X множеств такое, что каждая точка пространства X является пересечением всех содержащих ее элементов этого семейства. П. существует только в пространствах, все одноточечные подмножества к-рых замкнуты (т. е. в T_1-пространствах). Если T_1-пространство с базой $\mathscr{B}$ наделить другой более сильной топологией, то $\mathscr{B}$ уже не будет базой нового топологич. пространства, но останется его П. В частности, счетную П. имеет дискретное пространство мощности континуум, в к-ром счетной базы нет. Однако для бикомпактов (т. е. бикомпактных хаусдорфовых пространств) из наличия счетной П. следует существование счетной базы.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

ПСЕВДОБУЛЕВА АЛГЕБРА — решетка $L=(L, \leqslant)$, содержащая наименьший элемент 0 и такая, что для любых ее элементов a и b во множестве $\{x \in L : a \wedge x \leqslant b\}$ существует наибольший элемент $a \supset b$, где $a \wedge x$ — наибольшая нижняя грань для a и x. Элемент $a \supset b$ наз. псевдодополнением a относительно b, или импликацией от a к b. Всякая П. а. является *дистрибутивной решеткой* с наибольшим элементом 1 (таковым будет любой элемент вида $a \supset a$).

П. а. служат алгебраич. моделями *интуиционистского исчисления высказываний* Гейтинга и характеризуют его аналогично тому, как *булевы алгебры* характеризуют классич. исчисление высказываний. П. а. наз. также алгебрами Гейтинга.

Решетки с относительным псевдодополнением рассматривал еще в 1919 Т. Сколем [1], правда без связи с логикой. Впервые такая связь появилась при рассмотрении решеток, двойственных П. а. (т. е. решеток, получающихся из П. а. обращением отношения $\leqslant$; см. [2]). Такие решетки были названы алгебрами Брауэра. Позднее алгебрами Брауэра стали называть и П. а.

Класс П. а., рассматриваемых как *универсальные алгебры* $(L; 0, \wedge, \vee, \supset)$ с константой 0 и двуместными операциями $\wedge$, $\vee$, $\supset$, может быть задан с помощью нек-рой системы тождеств.

Конгруэнция $R \subseteq L \times L$ универсальной алгебры $(L; 0, \wedge, \vee, \supset)$, являющейся П. а., полностью определяется классом эквивалентности, содержащим 1, т. е. множеством

$$\nabla = \{x \in L : \langle x, 1\rangle \in R\} \qquad (1)$$

по формуле

$$\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow (x \supset y \in \nabla \text{ и } y \supset x \in \nabla). \qquad (2)$$

Множество (1) является решеточным фильтром, т. е. удовлетворяет условиям

$$(x \in \nabla \text{ и } x \leqslant y) \Rightarrow y \in \nabla \text{ и } (x \in \nabla \text{ и } y \in \nabla) \Rightarrow x \wedge y \in \nabla.$$

Наоборот, всякий непустой решеточный фильтр ∇ произвольной П. а. L определяет по формуле (2) конгруэнцию на алгебре $(L; 0, \wedge, \vee, \supset)$, класс эквивалентности единицы к-рой совпадает с исходным фильтром ∇.

В П. а. $(L, \leqslant)$ выполняется также бесконечный дистрибутивный закон

$$a \wedge \sup X = \sup \{a \wedge x : x \in X\} \tag{3}$$

для любого $a \in L$ и любого множества $X \subseteq L$, имеющего в L наименьшую верхнюю грань $\sup X$. Если решетка $(L, \leqslant)$ полна, т. е. $\sup X$ существует для любого $X \subseteq L$, то, наоборот, из того, что в ней справедливо тождество (3), вытекает, что она является П. а. Операция $\supset$ определяется равенством

$$a \supset b = \sup \{x \in L : a \wedge x \leqslant b\}.$$

П о л н ы е П. а. (т. е. полные решетки, удовлетворяющие тождеству (3)) рассматривают как алгебры $(L; 0, \wedge, \sup)$ с константой 0, двуместной операцией $\wedge : L \times L \to L$ и «бесконечноместной» операцией $\sup : \{X : X \subseteq L\} \to L$. Этот подход определяет для полных П. а. смысл таких понятий, как гомоморфизм, конгруэнция, подалгебра. Так, для конгруэнции $R \subseteq L \times L$ должно выполняться условие: если $X = \{x_i : i \in I\}$ и $Y = \{y_i : i \in I\}$ — два подмножества в L таких, что для всякого $i \in I$ имеет место $\langle x_i, y_i \rangle \in R$, то $\langle \sup X, \sup Y \rangle \in R$. Класс полных П. а., рассматриваемых как алгебры $(L; 0, \wedge, \sup)$, может быть задан нек-рой системой тождеств, содержащих операции $0, \wedge, \sup$. Поэтому он замкнут относительно подалгебр, факторалгебр и прямых произведений семейств алгебр. В классе полных П. а. существуют свободные алгебры с любым множеством образующих.

Если $J : L \to L$ — м у л ь т и п л и к а т и в н ы й о п е р а т о р з а м ы к а н и я на полной П. а. $\boldsymbol{L} = (L, \leqslant)$, т. е. такая функция, что в L тождественно выполняются условия

$$x \leqslant J(x) = J(J(x)) \quad \text{и} \quad J(x \wedge y) = J(x) \wedge J(y),$$

то отношение

$$R_J = \{\langle x, y \rangle \in L \times L : J(x) = J(y)\} \tag{4}$$

является конгруэнцией на алгебре $\boldsymbol{A}(L; 0, \wedge, \sup)$, а множество $JL = \{x \in L : J(x) = x\}$ с индуцированным из $\boldsymbol{L}$ порядком $\leqslant|_{JL}$ — полной П. а. $(JL; \leqslant|_{JL})$, изоморфной факторалгебре $\boldsymbol{A}/R_J$. Наоборот, произвольная конгруэнция R на $\boldsymbol{A}$ определяет по формуле

$$J_R(x) = \sup \{y \in L : \langle y, x \rangle \in R\} \tag{5}$$

мультипликативный оператор замыкания $J_R : L \to L$. Отображения $J \mapsto R_J$ и $R \mapsto J_R$, определяемые формулами (4) и (5), взаимнообратны.

П р и м е р ы П. а. 1) Множество $\{X : X \subseteq U\}$, упорядоченное по включению $\subseteq$, является полной П. а. Его подалгебрами будут топологии на U и только они.

2) Если функция $I : L \to L$ на полной П. а. $(L, \leqslant)$ тождественно удовлетворяет условиям

$$I(I(x)) = I(x) \leqslant x, \quad I(x \wedge y) = I(x) \wedge I(y), \tag{6}$$

то множество $IL = \{x \in L : Ix = x\}$ с индуцированным отношением порядка образует подалгебру алгебры $(L; 0, \wedge, \sup)$. Всякую подалгебру $A \subseteq L$ этой алгебры можно получить указанным способом из единственной функции I, удовлетворяющей условиям (6). Она определяется равенством

$$I(x) = \sup \{a \in A : a \leqslant x\}.$$

Функция I, удовлетворяющая условиям (6), наз. о п е р а т о р о м в з я т и я в н у т р е н н о с т и.

3) Если определить на множестве Φ всех формул языка интуиционистского исчисления высказываний

отношение $x \leqslant y$ так, что $A \leqslant B$ тогда и только тогда, когда формула $A \supset B$ выводима в этом исчислении и факторизовать это множество по отношению эквивалентности $x \leqslant y \& y \leqslant x$, то получится свободная П. а.

Лит.: [1] Skolem T., Selected works in logic, Oslo, 1970, p. 67—101; [2] McKinsey J. C. C., Tarski A., «Ann. Math.», 1946, v. 47, p. 122—62; [3] Расёва Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972; [4] Драгалин А. Г., Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., 1979; [5] Applications of sheaves. Proc. ... of sheaf theory to logic, algebra and analysis, B.— N. Y., 1979.

В. Н. Гришин.

ПСЕВДОВЕКТОР — то же, что *осевой вектор*.

ПСЕВДОВЫПУКЛОСТЬ И ПСЕВДОВОГНУТОСТЬ — свойства областей в комплексных пространствах, а также комплексных пространств и функций на них, аналогичные свойствам выпуклости и вогнутости областей и функций в пространстве $\mathbb{R}^n$. Вещественная функция φ класса C^2 на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^n$ наз. p-п с е в д о в ы п у к л о й (или p-в ы п у к л о й), если эрмитова форма

$$H(\varphi) = \sum_{j,\,k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k}\, u_j \bar{u}_k$$

имеет в каждой точке области U не менее чем $n-p+1$ неотрицательных собственных значений. В случае, когда $H(\varphi)$ имеет не менее чем $n-p+1$ положительных собственных значений, говорят, что φ с и л ь н о (или с т р о г о) p-п с е в д о в ы п у к л а. В частности, (сильно) 1-псевдовыпуклые функции — это (строго) *плюрисубгармонические функции* класса C^2. Функция на аналитич. множестве $X \subset U$ наз. (сильно) p-выпуклой, если она является ограничением сильно p-псевдовыпуклой функции на U. Наконец, (сильно) p-выпуклая функция на произвольном комплексном пространстве X — это непрерывная функция на X, к-рая в окрестности любой точки представляется (сильно) p-выпуклой функцией в соответствующей локальной модели (см. *Аналитическое пространство*).

Комплексное пространство X наз. (p, q)-в ы п у к л о-в о г н у т ы м, если существуют непрерывная функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$ и такие d_0, c_0, где $-\infty \leqslant d_0 \leqslant c_0 \leqslant \infty$, что для любых $c \geqslant c_0$ и $d \leqslant d_0$ множество

$$X_{c,\,d} = \{x \in X \mid d < \varphi(x) < c\}$$

относительно компактно в X, а φ сильно p-выпукла на $X_{\infty,\,c_0}$ и сильно q-выпукла на $X_{d_0,\,-\infty}$. Если $d_0 = -\infty$ или $c_0 = \infty$, то пространство X наз. с и л ь н о p-п с е в д о в ы п у к л ы м или с и л ь н о q-в о г н у т ы м соответственно. Если же $d_0 = c_0 = -\infty$, то X наз. p-п о л н ы м.

П р и м е р ы. 1) Открытое множество X с гладкой границей ∂X в комплексном многообразии M наз. с т р о г о p-п с е в д о в ы п у к л ы м (с т р о г о p-п с е в д о в о г н у т ы м), если всякая точка $x_0 \in \partial X$ обладает окрестностью U, в к-рой существует такая сильно p-выпуклая функция φ, что $X \cap U = \{x \in U \mid \varphi(x) < 0\}$ (соответственно $X \cap U = \{x \in U \mid \varphi(x) > 0\}$). Всякое строго p-псевдовыпуклое (строго p-псевдовогнутое) относительно компактное открытое множество является сильно p-выпуклым (сильно p-вогнутым) многообразием. Если нек-рые компоненты границы ∂X удовлетворяют условию p-псевдовыпуклости, а другие — условию q-псевдовогнутости, то получаются примеры (p, q)-выпукло-вогнутых многообразий.

2) Компактные комплексные пространства естественно считать 0-выпуклыми.

3) Класс 1-полных пространств совпадает с классом *Штейна пространств*.

4) Класс сильно 1-выпуклых пространств совпадает с классом пространств, получающихся из пространств Штейна путем собственной модификации в конечном множестве точек.

5) Пусть X — компактное комплексное многообразие размерности n, S — его замкнутое подмногообразие, все компоненты к-рого имеют размерность q. Тогда $X \setminus S$ является сильно $(q+1)$-вогнутым, а если нормальное расслоение над S положительно — сильно $(n-q)$-выпуклым пространством.

6) Если S — замкнутое подмногообразие коразмерности p в многообразии Штейна X, то $X \setminus S$ p-полно.

7) Голоморфное векторное расслоение E ранга r над многообразием X наз. p-положительным (q-отрицательным), если на E существует такая послойная эрмитова метрика h, что функция $\chi(v) = -h(v, v)$ на E является сильно $(p+r)$-выпуклой (соответственно $-\chi$ является сильно q-выпуклой) вне нулевого сечения (в случаях $p=1$ и $q=1$ получают понятия *положительного расслоения* и *отрицательного расслоения*). Если X компактно, то пространство p-положительного расслоения E является сильно $(p+r)$-вогнутым, а пространство q-отрицательного расслоения — сильно q-выпуклым. Пространство голоморфного векторного расслоения над p-полным пространством всегда p-полно.

Для (p, q)-выпукло-вогнутых пространств доказаны теоремы о конечномерности и отделимости нек-рых пространств когомологий со значениями в когерентных аналитич. пучках (см. *Конечности теоремы* в теории аналитических пространств). Аналогичные теоремы конечности доказаны также и для сильно (p, q)-выпукло-вогнутых отображений (см. [1], [2]). Пространство X является сильно 1-выпуклым тогда и только тогда, когда $\dim H^r(X, F) < \infty$ для всех r и любого когерентного аналитич. пучка F на X. Если X p-полно, то $H^r(X, F) = 0$ для всех $r \geqslant p$ и любого когерентного аналитич. пучка F на X.

Группы гомологий p-выпуклых и p-полных пространств обладают следующими свойствами. Если X есть n-мерное приведенное сильно p-выпуклое (p-полное) комплексное пространство, то $\dim H_r(X, \mathbb{C}) < \infty$ (соответственно $H_r(X, \mathbb{C}) = 0$) для $r \geqslant n+p$. Для сильно 1-выпуклых пространств известно также, что группы $H_r(X, \mathbb{Z})$ конечно порождены при $r \geqslant n+1$, а для p-полных многообразий — что $H_r(X, \mathbb{Z}) = 0$ для $r \geqslant n+p$ и что группа $H_{n+p-1}(X, \mathbb{Z})$ свободна.

Комплексное пространство X наз. псевдовогнутым, если в X существует относительно компактное открытое множество U, пересекающее каждую неприводимую компоненту пространства X и удовлетворяющее следующему условию: любая точка $x_0 \in \partial U$ обладает такой окрестностью V в X, что для любых точек $x \in V$, достаточно близких к x_0,

$$|f(x)| \leqslant \sup_{y \in V \cap U} |f(y)|$$

для всех голоморфных функций f в V. Если X есть n-мерное многообразие, $n \geqslant 2$, то достаточно, чтобы множество U было сильно $(n-1)$-псевдовогнутым в X. Любое компактное пространство псевдовогнуто. Для псевдовогнутых пространств X доказаны следующие теоремы конечности: пространство голоморфных сечений любого голоморфного векторного расслоения над X конечномерно; если X связно, то все голоморфные функции на X постоянны; поле мероморфных функций на X есть поле алгебраич. функций, степень трансцендентности к-рого не превосходит $\dim X$. Последняя теорема имеет важные приложения к *автоморфным функциям*, основанные на том, что пространство D/Γ, где Γ — собственно разрывная группа автоморфизмов ограниченной области D в $\mathbb{C}^n$, во многих случаях оказывается псевдовогнутым (в этом случае говорят, что Γ — псевдовогнутая группа). Напр., псевдовогнутыми являются арифметич. подгруппы

групп автоморфизмов ограниченных симметрич. областей.

Лит.: [1] Ermine J. L., «Ann. Sc. norm. sup. Pisa. Cl. sci», 1979, v. 6, № 1, p. 1—18; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 93—171.

А. Л. Онищик.

ПСЕВДОГАЛИЛЕЕВО ПРОСТРАНСТВО — проективное n-пространство с выделенной бесконечно удаленной $(n-1)$-плоскостью T_0 аффинного n-пространства, в к-рой, в свою очередь, выделена бесконечно удаленная $(n-2)$-плоскость T_1 псевдоевклидова пространства ${}^lR_{n-1}$, а в $(n-2)$-плоскости T_1 выделена $(n-3)$-квадрика Q_2, являющаяся абсолютом гиперболического $(n-1)$-пространства индекса l. Совокупность плоскостей T_0, T_1 и квадрики Q_2 образует абсолют (базис) П. п., обозначаемого ${}^l\Gamma_n$. Напр., 3-пространство ${}^1\Gamma_3$ имеет своим абсолютом 2-плоскость T_0, прямую T_1 в T_0 и пару действительных точек Q_2 на прямой T_1. П. п. можно определить как аффинное n-пространство, в бесконечно удаленной плоскости к-рого при дополнении до проективного n-пространства определена геометрия псевдоевклидова $(n-1)$-пространства индекса l.

Расстояние между точками определяется аналогично определению расстояния в *галилеевом пространстве*. Движениями П. п. ${}^l\Gamma_n$ являются его коллинеации, переводящие абсолют в себя. Движения образуют группу, являющуюся группой Ли.

Пространство, абсолют к-рого двойствен абсолюту П. п. ${}^l\Gamma_n$, наз. *копсевдогалилеевым пространством*. *Флаговое пространство* — предельный случай П. п. ${}^l\Gamma_n$.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров.

ПСЕВДОГРУППА преобразований дифференцируемого многообразия M — семейство диффеоморфизмов открытых подмножеств многообразия M в M, замкнутое относительно композиции отображений, перехода к обратному отображению, а также сужения и склейки отображений. Точнее, псевдогруппа преобразований (п. п.) Γ многообразия M состоит из локальных преобразований, т. е. пар вида $p=(D_p, \bar{p})$, где D_p — открытое подмножество в M, а $\bar{p}$ — диффеоморфизм $D_p \to M$, причем предполагается, что 1) $p, q \in \Gamma \Rightarrow p \circ q = (\bar{q}^{-1}(D_p \cap \bar{q}(D_q)), \ \bar{p} \circ \bar{q}) \in \Gamma$, 2) $p \in \Gamma \Rightarrow p^{-1} = (\bar{p}(D_p), \ \bar{p}^{-1}) \in \Gamma$, 3) $(M, \mathrm{id}) \in \Gamma$, 4) если $\bar{p}$ — диффеоморфизм открытого подмножества $D \subset M$ в M и $D = \bigcup_\alpha D_\alpha$, где D_α — открытые подмножества в M, то $(D, \bar{p}) \in \Gamma \Leftrightarrow (D_\alpha, \bar{p}|_{D_\alpha}) \in \Gamma$ для любого α. Видоизменяя должным образом условия 1)—4), можно определить п. п. произвольного топологич. пространства (см. [7]) или даже произвольного множества. Так же, как группа преобразований, п. п. определяет на M отношение эквивалентности; классы эквивалентности наз. ее орбитами. П. п. Γ многообразия M наз. транзитивной, если M — ее единственная орбита, и наз. примитивной, если в M нет нетривиальных гладких Γ-инвариантных слоений (в противном случае п. п. наз. импримитивной).

П. п. Γ дифференцируемого многообразия M наз. п. п. Ли, определяемой системой S дифференциальных уравнений в частных производных, если Γ состоит из тех и только тех локальных преобразований многообразия M, к-рые удовлетворяют системе S. Напр., П. конформных преобразований плоскости — это п. п. Ли, определяемая уравнениями Коши — Римана. Порядком п. п. Ли наз. минимальный порядок определяющей ее системы дифференциальных уравнений.

Примеры п. п. Ли. 1) П. всех голоморфных локальных преобразований n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. 2) П. всех голоморфных локальных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$ с постоянным яко-

бианом. 3) П. всех голоморфных локальных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$ с якобианом, равным 1. 4) Гамильтонова псевдогруппа, состоящая из всех голоморфных локальных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$ (n четно), сохраняющих дифференциальную 2-форму

$$\omega = dz^1 \wedge dz^2 + dz^3 \wedge dz^4 + \ldots + dz^{n-1} \wedge dz^n.$$

5) П. всех голоморфных локальных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$, сохраняющих форму ω с точностью до постоянного множителя. 6) Контактная псевдогруппа, состоящая из всех голоморфных локальных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$ (при $n=2m+1$, $m\geqslant 1$), сохраняющих с точностью до (функционального) множителя дифференциальную 1-форму

$$dz^n + \sum_{i=1}^{m} (z^i\, dz^{m+i} - z^{m+i}\, dz^i).$$

7) Вещественные аналоги комплексных п. п. из примеров 1) — 6). Порядки п. п. Ли из примеров 1), 3) — 6) равны 1, а в примере 2) порядок равен 2.

Любая группа Ли G преобразований многообразия M определяет п. п. $\Gamma(G)$, состоящую из ограничений преобразований из G на открытые подмножества многообразия M. П. п. вида $\Gamma(G)$ наз. глобализуемыми. Так, П. локальных конформных преобразований сферы S^n глобализуема при $n>2$ и не глобализуема при $n=2$.

П. п. Ли Γ наз. п. п. конечного типа, если найдется такое натуральное число d, что любое локальное преобразование $p\in\Gamma$ однозначно определяется своей d-струей в нек-рой точке $x\in D_p$; наименьшее такое число d наз. степенью, или типом, п. п. Γ; если же такого d не существует, то Γ наз. п. п. бесконечного типа. П. п. в примерах 1)—6) — примитивные п. п. Ли бесконечного типа.

Пусть Γ — транзитивная п. п. Ли n-мерного дифференцируемого многообразия M и $G^r(\Gamma)$ — совокупность всех r-струй локальных преобразований из Γ, сохраняющих точку $O\in M$, т. е. таких $p\in\Gamma$, что $O\in D_p$ и $p(O)=O$. Множество $G^r(\Gamma)$, снабженное естественной структурой группы Ли, наз. группой изотропии r-го порядка п. п. Γ (группа $G^1(\Gamma)$ наз. также линейной группой изотропии п. п. Γ). Алгебра Ли $\mathfrak{g}^r(\Gamma)$ группы $G^r(\Gamma)$ естественным образом вкладывается в алгебру Ли r-струй векторных полей на M в точке O. Если Γ — п. п. Ли первого порядка, то ядро $G^{(r)}(\Gamma)$ естественного гомоморфизма $G^{r+1}(\Gamma)\to G^r(\Gamma)$ при любом $r\geqslant 1$ зависит только от линейной группы изотропии $G^1(\Gamma)$ и наз. ее r-м продолжением. П. п. Ли Γ первого порядка тогда и только тогда является п. п. конечного типа d, когда

$$\dim G^{(d-1)}(\Gamma)\neq 0 \quad \text{и} \quad \dim G^{(d)}(\Gamma)=0.$$

Если при этом линейная группа изотропии $G^1(\Gamma)$ неприводима, то $d\leqslant 2$ (см. [5]). Для того чтобы п. п. Ли Γ первого порядка была п. п. конечного типа, необходимо, а в комплексном случае и достаточно, чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}^1(\Gamma)$ не содержала эндоморфизмов ранга 1 (см. [10]). Такие линейные алгебры Ли наз. эллиптическими.

Для п. п. Ли Γ первого порядка в терминах ее линейной алгебры изотропии вычислены алгебры Ли всех продолжений $G^{(r)}(\Gamma)$, $r\geqslant 1$. А именно, алгебра Ли $\mathfrak{g}^{(r)}(\Gamma)$ группы $G^{(r)}(\Gamma)$ состоит из $(r+1)$-струй векторных полей на M в точке O, имеющих в нек-рой локальной системе координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ вид

$$\sum v^i_{i_0 i_1 \ldots i_r} x^{i_0} x^{i_1} \ldots x^{i_r} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

где $v^j_{i_0 i_1 \ldots i_r}$ — произвольный тензор, симметричный по нижним индексам и удовлетворяющий условию: при

любых фиксированных $i_1, i_2, \ldots, i_r$ матрица

$$\left\| v^i_{j,\, i_1, i_2, \ldots, i_r} \right\|_{i,\, j=1,\, 2,\, \ldots,\, n}$$

содержится в алгебре Ли $\mathfrak{g}^1(\Gamma)$, отнесенной к системе координат (x^i).

Пусть M — n-мерное дифференцируемое многообразие над полем $K=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Всякая транзитивная п. п. Ли Γ порядка k многообразия M совпадает с П. всех локальных автоморфизмов нек-рой $G^k(\Gamma)$-структуры (см. *G-структура*) порядка k на M (п е р в а я о с н о в н а я т е о р е м а К а р т а н а). Классификация всех примитивных п. п. Ли бесконечного типа впервые была получена Э. Картаном [2]. Согласно его теореме всякая примитивная п. п. Ли бесконечного типа, состоящая из голоморфных локальных преобразований, локально изоморфна одной из п. п. примеров 1)—6). Эта теорема неоднократно передоказывалась; ее современные доказательства получаются чисто алгебраич. средствами. При этом локальное изучение транзитивной п. п. Ли Γ сводится к изучению нек-рой фильтрованной алгебры Ли (см. [9]). Классификация таких фильтрованных алгебр Ли может быть проведена на основе классификации простых градуированных алгебр Ли (см. [3]). Классификация примитивных п. п. Ли получена также и в вещественном случае, причем условие аналитичности действия п. п. заменено более слабым условием бесконечной дифференцируемости (см. [8], [9]).

Построены нек-рые абстрактные модели транзитивных п. п. Ли, к-рые призваны играть в теории п. п. бесконечного типа такую же роль, какую в конечномерном случае играют абстрактные группы Ли (см. [6], [9]).

Лит.: [1] С т е р н б е р г С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [2] C a r t a n É., Oeuvres complètes, v. 2, P., 1953, p. 571—714, 857—925; 1335—84; [3] G u i l l e m i n V., «J. Diff. Geom.», 1970, v. 4, № 3, p. 257—82; [4] K o b a y a s h i S., Transformation groups in differential geometry, B.— [u. a.], 1972; [5] K o b a y a s h i S., N a g a n o T., «J. Math. and Mech.», 1964, v. 13, № 5, p. 875—907; 1965, v. 14, p. 679—706; [6] K u r a n i s h i M., «Nagoya Math. J.», 1959, v. 15, p. 225—60; 1961, v. 19, p. 55—91; [7] L i b e r m a n n P., «Bull. Soc. math. France», 1959, t. 87, № 4, p. 409—25; [8] S h n i d e r S., «J. Diff. Geom.», 1970, v. 4, № 1, p. 81—89; [9] S i n g e r I. M., S t e r n b e r g S., «J. d'Analyse math.», 1965, t. 15, p. 1—114; [10] W i l s o n R. L., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1971, v. 29, № 2, p. 243—49.

Э. Б. Винберг.

ПСЕВДОГРУППОВАЯ СТРУКТУРА на м н о г о о б р а з и и M — максимальный атлас A гладких локальных диффеоморфизмов многообразия M на фиксированное многообразие V, все функции перехода между к-рыми принадлежат данной псевдогруппе Γ локальных преобразований многообразия V. Псевдогруппа Γ наз. о п р е д е л я ю щ е й п с е в д о г р у п п о й, а многообразие V — модельным пространством. П. с. с определяющей псевдогруппой Γ наз. также Γ-с т р у к т у р о й. Более подробно, множество A V-значных карт многообразия M (т. е. диффеоморфизмов $\varphi : U \to V$ открытых подмножеств $U \subset M$ на открытые подмножества $\varphi(U) \subset V$) называется П. с., если а) любая точка $x \in M$ принадлежит области определения нек-рой карты φ из A; б) для любых карт $\varphi : U \to V$, $\psi : W \to V$ из A функция перехода $\psi\circ\varphi^{-1} : \varphi(U \cap W) \to \psi(U \cap W)$ является локальным преобразованием данной псевдогруппы Γ; в) множество A является максимальным множеством карт, удовлетворяющих условию 2).

П р и м е р ы П. с. 1) Псевдогруппа Γ преобразований многообразия V задает П. с. (V, Γ) на V, картами к-рой служат локальные преобразования из Γ. Она наз. с т а н д а р т н о й п л о с к о й Γ-с т р у к т у р о й. 2) Пусть $V=K^n$ есть n-векторное пространство над $K=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или левый модуль над телом кватернионов $K=\mathbb{H}$, а Γ — псевдогруппа локальных преобразований V, главные линейные части к-рых принадлежат группе $GL(n, K)$. Соответствующая Γ-структура на

многообразии M есть структура гладкого многообразия при $K=\mathbb{R}$, комплексного аналитич. многообразия при $K=\mathbb{C}$ и специального кватернионного многообразия при $K=\mathbb{H}$. 3) Пусть Γ — псевдогруппа локальных преобразований векторного пространства V, сохраняющих данный тензор S. Задание Γ-структуры равносильно заданию интегрируемого поля тензоров типа S на многообразии M. Напр., если S — невырожденная кососимметричная 2-форма, то Γ-структура есть симплектич. структура. 4) Пусть Γ — псевдогруппа локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$, сохраняющих с точностью до функционального множителя дифференциальную 1-форму

$$dx^0+\sum_{i=1}^{n}x^{2i-1}dx^{2i}.$$

Тогда Γ-структура есть контактная структура. 5) Пусть $V=G/H$ — однородное пространство группы Ли G, а Γ — псевдогруппа локальных преобразований V, продолжающихся до преобразований из группы G. Тогда Γ-структура наз. П. с., определяемой однородным пространством V. Примерами таких структур являются структура пространства постоянной кривизны (в частности, локально евклидова пространства), плоские конформные и проективные структуры.

Пусть Γ — транзитивная псевдогруппа Ли преобразований пространства $V=\mathbb{R}^n$ порядка l; Γ-структура A на многообразии M определяет главное подрасслоение $\pi_k: B^k\to M$ расслоения кореперов любого порядка k на M, состоящее из k-струй карт из A:

$$B^k=\left\{j_x^k\varphi \mid \varphi\in A,\ \varphi(x)=0\right\},\ \pi_k(j_x^k\varphi)=x.$$

Структурной группой расслоения π_k является группа изотропии k-го порядка $G^k(\Gamma)$ псевдогруппы Γ, к-рая действует на B^k по формуле

$$j_0^k(a)\,j_{x^{-1}}^k=j_x^k(a\circ\varphi).$$

Расслоение π_k наз. k-м структурным расслоением или $G^k(\Gamma)$-структурой, определяемой П. с. A. Расслоение π_l, где l — порядок псевдогруппы Γ, в свою очередь, однозначно определяет П. с. A как множество карт $\varphi: U\to V$, для к-рых

$$j_x^l(a\circ\varphi)\in B^l,\ \text{если } a\in\Gamma,\ a\circ\varphi(x)=0.$$

Геометрия расслоения π_k характеризуется наличием канонической $G^k(\Gamma)$-эквивариантной горизонтальной относительно проекции $B^k\to B^{k-1}$ 1-формы $\theta^k: TB^k\to V+\mathfrak{g}^k(\Gamma)$ со значением в пространстве $V+\mathfrak{g}^k(\Gamma)$, где $\mathfrak{g}^k(\Gamma)$ — алгебра Ли группы изотропии $G^k(\Gamma)$. Она задается формулой

$$\theta_{b^k}^k(\dot b^k)=\frac{d}{dt}\,j_0^{k-1}(\varphi_t\circ\varphi_0^{-1})|_{t=0},$$

где

$$b^k=j_{x_0}^k(\varphi_0),\ \dot b^k=\frac{d}{dt}\,j_{x_t}^k(\varphi_t),$$

$$\varphi_t\in A,\ \varphi_t(x_t)=0,\ t\in[0,\varepsilon],$$

и удовлетворяет нек-рому структурному уравнению Маурера — Картана. Алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов Γ-структуры может быть охарактеризована как алгебра Ли векторных полей на B^l, сохраняющих каноническую 1-форму θ^l.

Основной проблемой теории П. с. является проблема описания П. с. на многообразии с определяющей псевдогруппой Γ с точностью до эквивалентности. Две П. с. на многообразии наз. эквивалентными, если одна из них может быть переведена в другую диффеоморфизмом многообразия.

Пусть Γ — глобализуемая транзитивная псевдогруппа преобразований односвязного многообразия V. Лю-

бое односвязное многообразие M с Г-структурой A допускает отображение $\rho : M \to V$, называемое разверткой Картана, к-рое локально является изоморфизмом Г-структур. Если Г-структура A обладает нек-рым условием полноты, в частности, если многообразие M компактно, то отображение ρ является изоморфизмом Г-структур и все Г-структуры рассматриваемого типа являются формами стандартной Г-структуры V, т. е. получаются из V факторизацией по свободно действующей дискретной группе автоморфизмов (V, Γ). Так обстоит дело, напр., с (псевдо)римановыми структурами постоянной кривизны и с конформно плоскими структурами на компактных многообразиях M^n, $n>2$. Важное место в теории П. с. занимает теория деформаций, первоначально развитая для комплексной структуры. В ней изучается вопрос об описании нетривиальных деформаций Г-структуры A, т. е. семейств A_t Г-структур, содержащих данную Г-структуру и гладко зависящих от параметров t по модулю тривиальных деформаций. Пространство формальных инфинитезимальных нетривиальных деформаций данной Г-структуры описывается как пространство $H^1(M, \Theta)$ одномерных когомологий многообразия M с коэффициентами в пучке ростков Θ инфинитезимальных автоморфизмов Г-структуры A. Тривиальность этого пространства влечет жесткость Г-структуры. Тривиальность двумерных когомологий: $H^2(M, \Theta)=0$ позволяет при нек-рых условиях доказать существование нетривиальных деформаций Г-структуры, соответствующих данной инфинитезимальной деформации из $H^1(M, \Theta)$.

Лит.: [1] Картан Э., Геометрия римановых пространств, пер. с франц., М.— Л., 1936; [2] Guillemin V., Sternberg S., Deformation theory of pseudogroup structures, Providence, 1966 («Mem. Amer. Math. Soc.», № 64); [3] Pollack A. S., «J. Diff. Geom.», 1974, v. 9, № 3, p. 355—90; [4] Griffiths P. A., «Math. Ann.», 1964, Bd 155, H. 4, S. 292—315; 1965, Bd 158, H. 5, S. 326—351; [5] Pommaret J. F., «Ann. Inst. H. Poincaré, n. Sér.», 1973, v. 18, p. 285—352; [6] Berard Bergery L., Bourguignon J. P., Lafontaine J., «Proc. Symp. Pure Math.», 1975, v. 27, p. 3—32; [7] Spencer D. C., «Ann. Math.», 1962, v. 76, № 2, p. 306—398; № 3, p. 399—445.

Д. В. Алексеевский.

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — оператор, действующий в функциональных пространствах на дифференцируемом многообразии и локально по определенным правилам записываемый с помощью нек-рой функции, обычно наз. символом П. о., и удовлетворяющей оценкам производных определенного типа, аналогичных оценкам производных полиномов, являющихся символами дифференциальных операторов.

Пусть Ω — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, $C_0^\infty(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, принадлежащим Ω. Простейший П. о. в Ω — это оператор $P : C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$, задаваемый формулой

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} p(x, \xi)\, \hat{u}(\xi)\, d\xi, \qquad (1)$$

где $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $d\xi$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, $x\cdot\xi$ — обычное скалярное произведение векторов x и ξ, $\hat{u}(\xi)$ — преобразование Фурье функции u, то есть

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} u(x)\, dx$$

(интеграл здесь и выше берется по $\mathbb{R}^n$), $p(x, \xi)$ — гладкая функция на $\Omega \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая нек-рым условиям и называемая с и м в о л о м П. о. P. Оператор P вида (1) обозначается также $p(x, D)$ или $p(x, D_x)$. Если

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} p_\alpha(x)\, \xi^\alpha$$

— многочлен от ξ с коэффициентами $p_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ (здесь α — мультииндекс, т. е. $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geqslant 0$,

α_j — целые, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha n)}$, то $p(x, D)$ совпадает с *дифференциальным оператором*, получаемым, если в выражение для $p(x, \xi)$ вместо ξ подставить вектор $D=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$.

Часто используется класс символов $p(x, \xi)\in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условиям

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta p(x, \xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta,\mathcal{K}}(1+|\xi|)^{m-\rho(\alpha)+\delta(\beta)},\quad x\in\mathcal{K},\ \xi\in\mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где α, β — мультииндексы, $\partial_x=\frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_\xi=\frac{\partial}{\partial\xi}$, $\mathcal{K}$ — компакт в Ω. Этот класс обозначается $S^m_{\rho,\delta}$ (или $S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^n)$).

Обычно предполагается, что $0\leqslant\rho\leqslant1$, $0\leqslant\delta\leqslant1$. Через $L^m_{\rho,\delta}$ (или $L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$) обозначается класс операторов (также называемых П. о. в Ω) вида $p(x, D)+K$, где $p\in S^m_{\rho,\delta}$, а K — интегральный оператор с бесконечно дифференцируемым ядром, т. е. оператор вида

$$Ku(x)=\int K(x, y)\,u(y)\,dy,$$

где $K(x, y)\in C^\infty(\Omega\times\Omega)$. Функцию $p(x, \xi)$ по-прежнему наз. символом П. о. $p(x, D)+K$, хотя теперь она определена уже не однозначно, а с точностью до символов, принадлежащих $S^{-\infty}=\bigcap_{m\in\mathbb{R}}S^m_{1,0}$. Оператор $A\in L^m_{\rho,\delta}$ наз. П. о. порядка не выше m и типа ρ, δ. Описанный выше дифференциальный оператор принадлежит классу $L^m_{1,0}$. Наименьшее возможное значение m часто наз. порядком П. о. Классы $S^m_{\rho,\delta}$, $L^m_{\rho,\delta}$ часто наз. классами Хёрмандера.

Можно задавать П. о. в Ω с помощью двойных символов, т. е. в виде

$$Pu=(2\pi)^{-n}\int\int e^{i(x-y)\cdot\xi}a(x, y, \xi)\,u(y)\,dyd\xi. \tag{3}$$

При $a(x, y, \xi)=p(x, \xi)$ эта формула переходит в (1). Обычно предполагается, что $a(x, y, \xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^n)$, то есть

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^{\beta'}\partial_y^{\beta''}a(x, y, \xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta',\beta'',\mathcal{K}}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta'+\beta''|},\quad x, y\in\mathcal{K} \tag{4}$$

где $\mathcal{K}$ — компакт в Ω. Если $0\leqslant\delta<\rho\leqslant1$, то построенный класс операторов вида (3) (со всевозможными функциями $a\in S^m_{\rho,\delta}$) совпадает с классом $L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$. При этом символ $p(x, \xi)$ (определенный с точностью до символов из $S^{-\infty}$) имеет следующее асимптотич. разложение:

$$p(x, \xi)\sim\sum\nolimits_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x, y, \xi)\Big|_{y=x},$$

где $\alpha!=\alpha_1!\ldots\alpha_n!$ и суммирование ведется по всем мультииндексам. Эта запись означает, что разность между $p(x, \xi)$ и частью суммы, взятой по тем α, для к-рых $|\alpha|<N$, является символом, принадлежащим $S^{m-(\rho-\delta)N}_{\rho,\delta}$, т. е. символом, порядок к-рого не выше наибольшего из порядков оставшихся членов.

П. о. P продолжается по непрерывности или с помощью двойственности до оператора $P:\mathcal{E}'(\Omega)\to D'(\Omega)$, где $D'(\Omega)$ и $\mathcal{E}'(\Omega)$ — пространства обобщенных функций и обобщенных функций с компактным носителем в Ω соответственно. Если $\delta<1$, то при этом П. о. обладает следующим свойством псевдолокальности: если $u\in\mathcal{E}'(\Omega)\cap C^\infty(\Omega')$, где $\Omega'\subset\Omega$, то $Pu\in C^\infty(\Omega')$. Другая формулировка свойства псевдолокальности: ядро $K(x, y)$ (в смысле Шварца) оператора P бесконечно дифференцируемо по x, y при $x\neq y$.

Классический П. о. порядка m в Ω — П. о. $P\in L^m_{1,0}$, символ к-рого $p(x, \xi)$ допускает асимптотич.

разложение

$$p(x,\ \xi) \sim \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \chi(\xi)\, p_{m-j}(x,\ \xi),$$

где $\chi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(\xi)=1$ при $|\xi| \geqslant 1$, $\chi(\xi)=0$ при $|\xi| \leqslant 1/2$, $p_{m-j}(x,\ \xi) \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0))$ и положительно однородна по ξ порядка $m-j$

$$p_{m-j}(x,\ t\xi) = t^{m-j} p_{m-j}(x,\ \xi),\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus Q.$$

Примером классического П. о. является дифференциальный оператор (с гладкими коэффициентами). Функция $p_m(x, \xi)$ наз. главным символом классического П. о.

П. о. в Ω наз. собственным (или П. о. с собственным носителем, или П. о. с компактным носителем), если проекции носителя его ядра при проектировании $\Omega \times \Omega$ на каждый сомножитель являются собственными отображениями. Собственный П. о. P отображает $C_0^\infty(\Omega)$ в $C_0^\infty(\Omega)$ и продолжается по непрерывности до отображений $C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$, $\mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{E}'(\Omega)$ и $D'(\Omega) \to D'(\Omega)$, он может быть записан в виде (1) с символом $p(x, \xi) = e^{-ix\cdot\xi} P(e^{ix\cdot\xi})$, где экспонента в скобках рассматривается как функция от x, а ξ является параметром.

Пусть A, B — два П. о. в Ω, из к-рых один является собственным. Тогда имеет смысл их произведение (композиция) $C=AB$. Важную роль в теории П. о. играет теорема о композиции: если $A \in L^{m_1}_{\rho,\delta}$, $B \in L^{m_2}_{\rho,\delta}$, $0 \leqslant \delta \leqslant \rho \leqslant 1$, то $C=AB \in L^{m_1+m_2}_{\rho,\delta}$. Если при этом $\delta < \rho$, $c(x, \xi)$, $a(x, \xi)$, $b(x, \xi)$ — символы операторов C, A, B, то

$$c(x,\ \xi) \sim \sum\nolimits_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \left[\partial_\xi^\alpha a(x, \xi)\right] \left[D_x^\alpha b(x,\ \xi)\right].$$

В частности, если A, B — классические П. о. порядков m_1, m_2, то C — классический П. о. порядка m_1+m_2 с главным символом $c_{m_1+m_2}(x, \xi) = a_{m_1}(x, \xi) b_{m_2}(x, \xi)$, где $a_{m_1}(x, \xi)$, $b_{m_2}(x, \xi)$ — главные символы операторов A и B.

Если $P \in L^m_{\rho,\delta}$, $0 \leqslant \delta \leqslant \rho \leqslant 1$, то существует и единственный сопряженный П. о. $P^* \in L^m_{\rho,\delta}$, для к-рого $(Pu, v) = (u, P^*v)$, $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$, где $(u, v) = \int u(x)\overline{v(x)}dx$ — скалярное произведение u и v в $L_2(\Omega)$. Если при этом $\delta < \rho$ и $p^*(x, \xi)$ — символ П. о. P^*, а $p(x, \xi)$ — символ P, то

$$p^*(x,\ \xi) \sim \sum\nolimits_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{p(x,\ \xi)}.$$

Таким образом, собственные П. о. при $\delta \leqslant \rho$ образуют алгебру с инволюцией, задаваемой переходом к сопряженному оператору. Произвольные П. о. образуют модуль над этой алгеброй.

Теорема об ограниченности П. о. классов Хёрмандера в L_2-нормах в наиболее точной форме состоит в следующем (см. [8]): пусть $\Omega = \mathbb{R}^n$, оператор P имеет вид (3) с двойным символом $a(x, y, \xi)$, удовлетворяющим оценкам (4), где числа m, ρ, δ удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \delta \leqslant 1,\ m \leqslant 0,\ \rho - \delta - \frac{m}{n} \geqslant 0; \qquad (5)$$

тогда оператор P продолжается до ограниченного оператора $P : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$. В частности, при условии (5) ограничены в $L_2(\mathbb{R}^n)$ П. о. вида (1) с символами, удовлетворяющими оценкам (2) равномерно по x (т. е. с постоянными $C_{\alpha,\beta,\mathcal{K}} = C_{\alpha,\beta}$, не зависящими от $\mathcal{K}$). Отсюда следует, напр., ограниченность в $L_2(\mathbb{R}^n)$ операторов $P \in L^0_{\rho,\delta}$, если $0 \leqslant \delta \leqslant \rho < 1$ и ядро оператора P имеет компактный носитель (или оценки символа опять-

таки равномерны по x). При $\rho<\delta$ или при $\delta=1$ операторы такого вида уже не обязательно ограничены. Аналогично, в общей ситуации невыполнение одного из двух последних условий (5) уже дает класс П. о., содержащий неограниченные операторы.

В терминах оценок символа можно дать условия ограниченности П. о. в L_p-нормах, а также в гёльдеровых и в жевреевских нормах (см. [8]).

Если в $\mathbb{R}^n$ дан оператор $P=p(x, D)$, где $P\in S^m_{\rho,\delta}$, $0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$, причем оценки (2) равномерны по $x\in\mathbb{R}^n$, то этот оператор продолжается до ограниченного оператора $P: H^s(\mathbb{R}^n)\to H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$, $s\in\mathbb{R}$, где $H^t(\mathbb{R}^n)$ означает обычное пространство Соболева на $\mathbb{R}^n$ (иногда обозначаемое также $W_2^t(\mathbb{R}^n)$).

Класс П. о. $L^m_{\rho,\delta}$ при $1-\rho\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$ в естественном смысле инвариантен относительно диффеоморфизмов так же, как и его подкласс классических П. о. Это позволяет определить класс П. о. $L^m_{\rho,\delta}(X)$ и классические П. о. на произвольном гладком многообразии X. Формула замены переменной в символе при диффеоморфизме $\varkappa:\Omega\to\Omega_1$, где Ω, Ω_1 — области в X, имеет вид

$$a_1(y,\eta)\,|_{y=\varkappa(x)}\sim\sum\nolimits_\alpha\frac{1}{\alpha!}a^{(\downarrow\alpha)}(x^t,\varkappa'(x)\eta)\times$$

$$\times D_z^\alpha e^{i\varkappa''_x(z)\cdot\eta}\,|_{z=x},$$

где $a(x,\xi)$ — символ оператора $A\in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, $a_1(y,\eta)$ — символ оператора $A_1\in L^m_{\rho,\delta}(\Omega_1)$, заданного формулой $A_1u=[A(u\circ\varkappa)]\circ\varkappa^{-1}$, т. е. полученного из A заменой переменных $\varkappa$; $\varkappa'(x)$ обозначает якобиан отображения $\varkappa$, ${}^t\varkappa'(x)$ — транспонированная матрица,

$$a^{(\alpha)}(x,\xi)=\partial^\alpha_\xi a(x,\xi),\ \varkappa''_x(z)=\varkappa(z)-\varkappa(x)-\varkappa'(x)(z-x).$$

В частности, отсюда следует, что главный символ классического П. о. на многообразии X является корректно определенной функцией на кокасательном расслоении T^*X.

Если X — компактное многообразие (без края), то П. о. на X образуют алгебру с инволюцией, если вводить инволюцию с помощью скалярного произведения, задаваемого гладкой положительной плотностью. Оператор $A\in L^0_{\rho,\delta}(X)$ ограничен в $L_2(X)$, а если $A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$, где $m<0$, то такой П. о. компактен в $L_2(X)$. Для классических П. о. A порядка 0 на X

$$\inf\|A+K\|=\sup_{(x,\xi)\in T^*X}|a_0(x,\xi)|,$$

где $a_0(x,\xi)$ — главный символ оператора A, а K пробегает множество всех компактных операторов в $L_2(X)$. Оператор $A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$ непрерывно отображает $H^s(X)$ в $H^{s-m}(X)$ при любом $s\in\mathbb{R}$.

Параметриксом П. о. A наз. такой П. о. B, что $I-AB$ и $I-BA$ — П. о. порядка $-\infty$, т. е. интегральные операторы с гладким ядром. Пусть $A\in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, $0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$, $a(x,\xi)$ — символ оператора A. Достаточным условием существования параметрикса оператора A является выполнение оценок:

$$\left.\begin{array}{c}|a(x,\xi)|\geqslant\varepsilon|\xi|^{m_0},\ |\xi|\geqslant R,\ \varepsilon>0,\ m_0\in\mathbb{R};\\ |a^{-1}(x,\xi)\,\partial^\alpha_\xi\partial^\beta_x a(x,\xi)|\leqslant\\ \leqslant c_{\alpha,\beta,K}|\xi|^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},\ |\xi|\geqslant R,\ x\in K.\end{array}\right\}\quad(6)$$

В этом случае существует параметрикс $B\in L^{-m_0}_{\rho,\delta}(\Omega)$. Простейшим следствием существования параметрикса является гипоэллиптичность оператора A: если $Au\in C^\infty(\Omega')$, где $\Omega'\subset\Omega$, то $u\in C^\infty(\Omega')$. Иными словами, $\operatorname{sing\,supp}Au=\operatorname{sing\,supp}u$. Верен также следующий более точный факт (*теорема регулярности*): если $Au\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega')$, то $u\in H^{s+m_0}_{\mathrm{loc}}(\Omega')$. Имеет место

и микролокальная теорема регулярности: $WF(Au) = WF(u)$, где $WF(u)$ означает волновой фронт обобщенной функции u.

Условия (6) при $1-\rho \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$ инвариантны относительно диффеоморфизмов. Поэтому имеет смысл соответствующий класс операторов на многообразии X. Если X — компактное многообразие, то такой оператор A фредгольмов в $C^\infty(X)$, т. е. имеет в $C^\infty(X)$ конечномерные ядро и коядро, а также замкнутый образ.

Классический П. о. A порядка m с главным символом $a_m(x, \xi)$ наз. эллиптическим, если $a_m(x, \xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$. Такой оператор удовлетворяет условиям (6) с $m_0 = m$ и имеет параметрикс, также являющийся классическим П. о. порядка $-m$. На компактном многообразии X такой П. о. задает фредгольмов оператор

$$A: H^s(X) \longrightarrow H^{s-m}(X), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Все эти определения и факты переносятся на П. о., действующие в вектор-функциях или, более общо, в сечениях векторных расслоений. Для эллиптич. оператора на компактном многообразии X индекс задаваемого им отображения $A: H^s(X) \to H^{s-m}(X)$ на соболевских классах сечений не зависит от $s \in \mathbb{R}$ и может быть явно вычислен (см. *Индекса формулы*).

Роль П. о. состоит в том, что имеется ряд операций, выводящих за класс дифференциальных операторов, но сохраняющих класс П. о. Напр., резольвента и комплексные степени эллиптического дифференциального оператора на компактном многообразии являются классическими П. о., они возникают при сведении на границу эллиптической граничной задачи (см., напр., [7], [8] и предпоследнюю статью в [1]).

Существуют разные варианты теории П. о., приспособленные к решению различных задач анализа и математич. физики. Часто возникают П. о. с параметром, необходимые, напр., для изучения резольвенты и асимптотики собственных значений. Важную роль играют различные варианты теории П. о. на $\mathbb{R}^n$, учитывающие эффекты, связанные с описанием поведения функции на бесконечности, и частично инспирированные математич. вопросами квантовой механики, возникающими при изучении квантования классич. систем (см. [5], [1]). В теории локальной разрешимости уравнений с частными производными и в спектральной теории полезны П. о., поведение к-рых описывается с помощью весовых функций, заменяющих $|\xi|$ в оценках типа (2) (см. [8], [14]). Построена алгебра П. о. на многообразии с краем, содержащая, в частности, параметрикс эллиптической граничной задачи (см. [3], [13]).

Частным случаем П. о. являются многомерные сингулярные интегральные и интегро-дифференциальные операторы, изучение которых подготовило появление теории П. о. (см. [10]).

Теория П. о. служит основой для изучения *интегральных операторов* Фурье (см. [7], [10]), играющих ту же роль в теории гиперболич. уравнений, что и П. о. в теории эллиптич. уравнений.

Лит.: [1] Псевдодифференциальные операторы, пер. с англ., М., 1967; [2] Агранович М. С., Вишик М. И., Псевдодифференциальные операторы, М., 1968; [3] Эскин Г. И., Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, М., 1973; [4] Грушин В. В., Псевдодифференциальные операторы, М., 1975; [5] Шубин М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., 1978; [6] Friedrichs K. O., Pseudo-differential operators, N. Y., 1970; [7] Treves F., Introduction to pseudo-differential and Fourier integral operators, v. 1—2, N. Y., 1980; [8] Taylor M., Pseudo-differential operators, B.— [u. a.], 1974; [9] Kumano-go H., Pseudo-differential operators, Camb., 1981; [10] Duistermaat J., Fourier integral operators, N. Y., 1973; [11] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976; [12] Агранович М. С., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 5, с. 3—120; [13] Boutet de Monvel L., «Acta math.», 1971, v. 126, p. 11—51; [14] Hörmander L., «Comm. Pure Appl. Math.», 1979, v. 32, № 3, p. 359—443.

М. А. Шубин.

ПСЕВДОДУГА — наследственно неразложимый содержащий более одной точки *змеевидный континуум*. Таков, напр., *Кнастера континуум*. *М. И. Войцеховский.*

ПСЕВДОЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — действительное аффинное пространство, в к-ром каждым двум векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ поставлено в соответствие определенное число, называемое скалярным произведением $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

1) Скалярное произведение коммутативно:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a});$$

2) скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов:

$$(\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c});$$

3) числовой множитель можно вынести за знак скалярного произведения:

$$(k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = k\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b});$$

4) существуют такие n векторов $\boldsymbol{a}_i$, что

$$(\boldsymbol{a}_c, \boldsymbol{a}_c) > 0,\ c \leqslant l;\ (\boldsymbol{a}_d, \boldsymbol{a}_d) < 0,\ d > l;$$
$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0,\ i \neq j.$$

Число n наз. размерностью П. п., l — индексом, пара чисел (l, p), $p = n - l$, — сигнатурой. П. п. обозначается $E_{(l,\,p)}$ (или ${}^{l}E_{n}$). Пространство $E_{(1,\,3)}$ наз. *Минковского пространством*. В пространстве $E_{(l,\,p)}$ во всякой системе n векторов $\boldsymbol{b}_i$, для к-рых $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i) \neq 0$ и $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) = 0$ при $i \neq j$, число векторов $\boldsymbol{b}_i$, для к-рых $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i) > 0$, равно l, а число векторов $\boldsymbol{b}_i$, для к-рых $(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i) < 0$, равно $n - l$ (закон инерции квадратичной формы).

Модуль $|\boldsymbol{a}|$ вектора $\boldsymbol{a}$ П. п. может быть определен как неотрицательный корень $\sqrt{|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})|}$. Векторы, скалярные квадраты к-рых равны 1 и -1, наз. соответственно единичными и мнимоединичными векторами. Векторы $\boldsymbol{x}$, для к-рых $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, обладают нулевым модулем и наз. изотропными векторами; направления изотропных векторов — изотропными направлениями.

В П. п. имеются три вида прямых: евклидовы, направляющий вектор к-рых имеет положительный скалярный квадрат $((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) > 0)$, псевдоевклидовы $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) < 0)$ и изотропные $((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0)$. Совокупность всех изотропных прямых, проходящих через нек-рую точку, наз. изотропным конусом.

В П. п. имеется несколько видов плоскостей: евклидовы плоскости E^2, псевдоевклидовы плоскости $E_{(1;\,1)}$ и плоскости, содержащие изотропные векторы, — т. н. полуевклидовы плоскости сигнатуры (0,1) и (1,0) и дефекта 1 (см. *Полуевклидово пространство*) и изотропные плоскости, все векторы к-рых изотропны.

За расстояние между точками $A\,(\boldsymbol{x})$ и $B\,(\boldsymbol{x})$ принимается модуль вектора $\overline{AB}$, и оно может быть вычислено следующим образом:

$$\overline{AB}^2 = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2 = |\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}),\ (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\,|.$$

П. п. не является метрич. пространством, т. к. в нем не выполняется неравенство треугольника. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ принадлежат евклидовой плоскости (или псевдоевклидовой плоскости индекса 0), то для них выполняется неравенство треугольника, а если они принадлежат псевдоевклидовой плоскости индекса 1, то для них выполняется т. н. обратное неравенство треугольника:

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \geqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|.$$

В П. п. имеются три вида сфер: сферы с положительным квадратом радиуса: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \rho^2$, сферы с отрицательным квадратом радиуса: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -\sigma^2$ и сферы нулевого радиуса: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, совпадающие с изотропным конусом.

Движения П. п. являются аффинными преобразованиями и могут быть записаны в виде

$$x' = Ux + a.$$

Оператор U удовлетворяет условию $|Ux| = |x|$, т. е. сохраняет расстояние между точками. Движения П. п. образуют группу по умножению; она зависит от $n(n+1)/2$ независимых параметров. Движения П. п. наз. движениями 1-го или 2-го рода, если они являются аффинными преобразованиями соответствующего рода.

Антидвижением П. п. называют геометрич. преобразование, при к-ром всякий вектор a переходит в вектор a' такой, что $(a, a) = -(a', a')$.

В П. п. можно ввести основные операции векторной и тензорной алгебры. Основные дифференциально-геометрич. понятия строятся в соответствии с правилами геометрии псевдоримановых пространств. Метрич. тензор П. п. имеет вид (в галилеевой системе координат)

$$g_{ij} = \left\| \begin{array}{ccccc} \left.\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}\right\} l & & & & 0 \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & -1 \end{array} \right\} p \right\|.$$

П. п. является плоским, т. е. его *Римана тензор* равен нулю. Если тензор Римана псевдориманова пространства равен нулю тождественно, то оно является локально псевдоевклидовым пространством.

Подмногообразия П. п. могут нести различные метрики: положительно или отрицательно определенную риманову метрику, псевдориманову метрику и вырожденную метрику (см. *Индефинитная метрика*). Так, напр., сферы П. п. несут (вообще говоря, индефинитную) метрику постоянной кривизны. В $E_{(1,\, n-1)}$ сфера с положительным квадратом радиуса является $(n-1)$-мерным пространством, изометричным пространству Лобачевского.

П. п. $E_{(l,\, p)}$ $(l+p=n)$ и евклидово пространство E^n можно рассматривать как подпространства комплексного пространства с формой $ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dz_i^2$. Если x^j — координаты П. п., y^j — действительного евклидова пространства, z^j — комплексного евклидова пространства, то уравнения подпространств имеют вид

$$x^j = \operatorname{Re} z^j,\ 0 < j \leqslant l;\quad x^j = \operatorname{Im} z^j,\ l < j \leqslant n,\quad y^j = \operatorname{Re} z^j.$$

Метрику П. п. можно формально получить из метрики евклидова пространства заменой $x^j = iy^j$, $l < j \leqslant n$.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, М., 1970; [2] Розенфельд Б. А., Многомерные пространства, М., 1966; [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973.

Д. Д. Соколов.

ПСЕВДОКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — *вполне регулярное пространство* X такое, что всякая действительная функция, определенная и непрерывная на X, ограничена. В классе нормальных пространств объемы понятий счетной компактности и псевдокомпактности совпадают. *М. И. Войцеховский.*

ПСЕВДОКОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — *биголоморфное отображение* области D пространства $\mathbb{C}^n$ на область $D' \subset \mathbb{C}^n$ при $n > 1$. Название связано с тем, что при $n > 1$ это отображение не является, вообще говоря, *конформным отображением*. *Е. Д. Соломенцев.*

ПСЕВДОМЕТРИКА на множестве X — неотрицательная действительная функция ρ, определенная на множестве всех пар элементов множества X

(т. е. на $X\times X$) и подчиненная следующим трем ограничениям, наз. аксиомами псевдометрики: а) если $x=y$, то $\rho(x, y)=0$; б) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$; в) $\rho(x, z)\leqslant\rho(x, y)+\rho(y, z)$, где x, y, z — любые элементы множества X.

Не требуется, чтобы из $\rho(x, y)=0$ следовало, что $x=y$. По псевдометрике ρ на множестве X определяется топология на X: точка x принадлежит замыканию множества $A\subset X$, если $\rho(x, A)=0$, где

$$\rho(x, A)=\inf\{\rho(x, y): y\in A\}.$$

Эта топология вполне регулярна, но не обязательно хаусдорфова: одноточечные множества могут быть незамкнуты. Каждая вполне регулярная топология может быть задана семейством П. как структурное объединение отвечающих этим П. топологий. Аналогично, семейства П. могут служить для определения, описания и исследования равномерных структур.

Лит.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981.

А. В. Архангельский.

ПСЕВДОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — множество X, наделенное *псевдометрикой*. Каждое П. м. нормально и удовлетворяет первой аксиоме счетности. Вторая аксиома счетности выполняется в том и только в том случае, когда X — сепарабельное пространство.

М. И. Войцеховский.

ПСЕВДОМНОГООБРАЗИЕ n-мерное замкнутое (соответственно, с краем) — конечное симплициальное разбиение со следующими свойствами. а) Неразветвленность: каждый $(n-1)$-мерный симплекс является гранью ровно двух (соответственно, одного или двух) n-мерных симплексов; б) сильная связность: любые два n-мерных симплекса можно соединить «цепочкой» n-мерных симплексов, в к-рой каждые два соседние симплекса имеют общую $(n-1)$-мерную грань; в) размерностная однородность: каждый симплекс является гранью нек-рого n-мерного симплекса. Если нек-рая *триангуляция* топологич. пространства является П., то и любая его триангуляция является П., поэтому можно говорить о свойстве топологич. пространства быть (или не быть) П.

Примеры П.: триангулируемые связные компактные гомологич. многообразия над $\mathbb{Z}$; комплексные алгебраич. многообразия (даже с особенностями); *Тома пространства* векторных расслоений над триангулируемыми компактными многообразиями. Наглядно П. можно считать комбинаторной реализацией общей идеи многообразия с особенностями, образующими множество коразмерности два. Для П. имеют смысл понятия ориентируемости, ориентации и степени отображения, причем при комбинаторном подходе П. образуют естественную область определения этих понятий (тем более что формально определение П. проще, чем определение комбинаторного многообразия). Циклы в многообразиях можно в нек-ром смысле реализовать посредством П. (см. *Стинрода задача*).

Лит.: [1] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.— Л., 1938; [2] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971.

Д. В. Аносов.

ПСЕВДОНОРМИРОВАНИЕ — обобщение понятия мультипликативного *нормирования*, заключающееся в ослаблении одной из аксиом: вместо условия $w(a, b)=w(a)\,w(b)$ требуется только $w(a, b)\leqslant w(a)\,w(b)$. Пример П.: в кольце всех непрерывных действительных функций $f(x)$, определенных на отрезке $[0,1]$, П., не являющееся нормированием, определяется формулой

$$(f)=\max_{x\in[0,\,1]}|f(x)|.$$

Всякая действительная конечномерная алгебра может быть псевдонормирована.

Лит.: [1] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973.

О. А. Иванова.

ПСЕВДООТКРЫТОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — непрерывное отображение $f: X \to Y$ такое, что для всякой точки $y \in Y$ и любой окрестности U множества $f^{-1}y$ в X непременно $y \in \mathrm{Int} fU$ (здесь $\mathrm{Int} fU$ — множество всех внутренних точек fU относительно Y).

М. И. Войцеховский.

ПСЕВДОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ с периодами $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r$ — функция $f(t, u_1, \ldots, u_r)$ от $r+1$ переменных, удовлетворяющая условиям:

$$f(t, u_1, \ldots, u_i+\omega_i, \ldots, u_r) = f(t, u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_r), \quad i=1, \ldots, r;$$

$$f(t+\omega_0, u_1, \ldots, u_r) = f(t, u_1+\omega_0, \ldots, u_r+\omega_0).$$

Пример: если $f_0(t)$ и $f_1(t)$ — непрерывные периодич. функции с периодами ω_0 и ω_1 соответственно, причем отношение ω_0/ω_1 иррационально, то $f(t, u_1) = f_0(t)+f_1(t+u_1)$ является П. ф.

П. ф. связана с *квазипериодической функцией* и определяется по ней единственным образом: функция $F(t)$ квазипериодична с периодами $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r$ тогда и только тогда, когда существует такая непрерывная П. ф. $f(t, u_1, \ldots, u_r)$ с периодами $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r$, что $F(t) = f(t, 0, \ldots, 0)$.

Ю. В. Комленко.

ПСЕВДОРИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ — совокупность геометрич. свойств поверхностей и кривых в *псевдоримановом пространстве* ${}^lV_n$. Эти свойства вытекают из свойств псевдоримановой метрики этого пространства, к-рая является знаконеопределенной квадратичной формой индекса l:

$$ds^2 = g_{ij}(X)\, dx^i\, dx^j.$$

Длина дуги кривой l выражается формулой

$$s = \int_l \sqrt{g_{ij}\, dx^i\, dx^j},$$

она может быть действительной, чисто мнимой или нулем (изотропная кривая). Геодезич. линии в ${}^lV_n$ даже в малых своих частях теряют экстремальные свойства, оставаясь линиями стационарной длины. Длина дуги l может быть больше или меньше длины геодезич. отрезка, соединяющего концы дуги l. Если рассматривается пространство ${}^{n-1}V_n$, то отрезок геодезической AB действительной длины дает длиннейшее расстояние между точками A, B (в предположении, что эту дугу геодезической можно вложить в полугеодезическую координатную систему в виде координатной линии и что для сравнения берутся гладкие кривые действительной длины из области, где определена эта координатная система). В случае, когда рассматривается псевдориманово пространство ${}^{n-1}R_n$, можно всякую прямую действительной длины принять за ось x^n ортонормированной координатной системы, в к-рой скалярный квадрат вектора x имеет вид

$$x = -\sum_{i=1}^{n-1} x^{i2} + x^{n2}.$$

Здесь любой прямолинейный отрезок действительной длины (вдоль оси x^n) будет служить длиннейшим расстоянием между точками, являющимися его концами. В случае пространства ${}^1V_n$ (или ${}^1R_n$) отрезок геодезич. линии мнимой длины будет служить длиннейшим расстоянием по сравнению со всевозможными гладкими кривыми мнимой длины, концы к-рых совпадают с концами геодезич. отрезка.

На основе псевдоримановой метрики развертывается дифференциальная геометрия поверхностей и кривых в псевдоримановом пространстве, определяются кривизны кривых и поверхностей и т. д.

П. г. возникает также на поверхностях в гиперболич. пространствах. Простейшим случаем П. г. является

геометрия *псевдоевклидова пространства* ${}^lR_n$ и, в частности, геометрия *Минковского пространства*.

Лит. см. при ст. *Псевдориманово пространство*.

Л. А. Сидоров.

ПСЕВДОРИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО — пространство аффинной связности (без кручения), касательное пространство в каждой точке к-рого является *псевдоевклидовым пространством*.

Пусть A_n есть n-пространство аффинной связности (без кручения) и ${}^lR_n$ — касательное псевдоевклидово пространство в каждой точке пространства A_n, в этом случае П. п. обозначается ${}^lV_n$. Как и в собственном римановом пространстве, метрич. тензор пространства ${}^lV_n$ является невырожденным и абсолютно постоянным, а метрич. форма пространства ${}^lV_n$ является квадратичной формой индекса l:

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j,\ i,\ j = 1,\ \ldots,\ n,$$

$g_{ij}(X)$ — метрич. тензор ${}^lV_n$, $\det||g_{ij}|| \neq 0$. Пространство ${}^lV_n$ можно определить как n-мерное многообразие, в к-ром задана инвариантная дифференциальная квадратичная форма индекса l.

Простейшим примером П. п. является пространство ${}^lR_n$.

П. п. ${}^lV_n$ наз. приводимым, если в окрестности каждой его точки существует такая система координат $(x^1, \ldots, x^n)$, что все координаты x^i можно разделить на группы x^{i_α} такие, что $g_{i_\alpha j_\alpha} \neq 0$ лишь для тех индексов i_α, j_α, к-рые принадлежат одной группе, а $g_{i_\alpha j_\alpha}$ являются функциями только координат этой группы.

В П. п. определяется кривизна пространства в двумерном направлении, она может быть истолкована как кривизна геодезической (неизотропной) 2-поверхности, проведенной в данной точке в данном двумерном направлении. Если значение кривизны в каждой точке одно и то же по всем двумерным направлениям, то оно является постоянным во всех точках (теорема Шура) и П. п. наз. в этом случае П. п. постоянной кривизны. Примером П. п. постоянной отрицательной кривизны является гиперболич. пространство ${}^lS_n$ отрицательной кривизны — оно является П. п. ${}^{n-l}V_n$; пространство ${}^lR_n$ есть П. п. нулевой кривизны.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [2] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969; [3] Эйнштейн А., Собр. науч. трудов, т. 1, М., 1965.

Л. А. Сидоров.

ПСЕВДОСКАЛЯР — величина, не изменяющаяся при переносе и повороте координатных осей, но изменяющая свой знак при замене направления каждой оси на противоположное. Примером П. может служить смешанное произведение трех векторов и скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, где $\boldsymbol{a}$ — *осевой вектор*, $\boldsymbol{b}$ — обычный (полярный) вектор.

БСЭ-3.

ПСЕВДОСКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, косое произведение, $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}$ ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — произведение их модулей на синус угла φ положительного (против часовой стрелки) вращения от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b} = |\,\boldsymbol{a}\,|\,|\,\boldsymbol{b}\,|\sin\varphi.$$

Если $\boldsymbol{a} = 0$ и (или) $\boldsymbol{b} = 0$, то П. п. полагают равным нулю. См. *Векторная алгебра*.

А. Б. Иванов.

ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫЕ ЧИСЛА — см. *Случайные и псевдослучайные числа*.

ПСЕВДОСФЕРА — поверхность постоянной отрицательной кривизны, образованная вращением трактрисы вокруг ее асимптоты (см. рис.). Линейный элемент в полугеодезич. координатах имеет вид (линия $u = 0$ — геодезическая):

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{ch}^2\,\frac{u}{a}\,dv^2,\ a = \mathrm{const};$$

в изотермич. координатах:

$$ds^2 = a^2 \frac{dx^2+dy^2}{y^2}, \quad a = \text{const}.$$



Всякая поверхность постоянной отрицательной кривизны наложима на П. Внутренняя геометрия П. локально совпадает с геометрией Лобачевского (см. *Бельтрами интерпретация*).

Лит.: [1] Выгодский М. Я., Дифференциальная геометрия, М.— Л., 1949; [2] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 2, М.— Л., 1948.

А. Б. Иванов.

ПСЕВДОТЕНЗОР — тензор, рассматриваемый с точностью до произвольного функционального множителя.

ПСЕВДОХАРАКТЕР множества A в топологическом пространстве X — наименьший из всех бесконечных кардиналов τ таких, что существует семейство мощности τ открытых в X множеств, пересечение к-рых есть A. Обозначается обычно $\psi(A, X)$. Псевдохарактер $\psi(A, X)$ определен для всех подмножеств A пространства X в том и только в том случае, если в X все одноточечные подмножества замкнуты. Под псевдохарактером $\psi(x, X)$ точки $x \in X$ в топологич. пространстве X понимается псевдохарактер $\psi(\{x\}, X)$ множества $\{x\}$ в X.

Псевдохарактер $\psi(X)$ топологич. пространства X — наименьший бесконечный кардинал τ такой, что каждая точка является пересечением семейства мощности $\leqslant\tau$ открытых в X множеств. Пространства счетного П.— те, в к-рых каждая точка имеет тип G_δ. Каждое топологич. пространство можно представить как образ при непрерывном открытом отображении нек-рого паракомпактного хаусдорфова пространства счетного П. Для бикомпактных хаусдорфовых пространств счетность П. равносильна первой аксиоме счетности. Вообще, П. замкнутого множества A в бикомпактном хаусдорфовом пространстве X равен мощности некоторой *определяющей системы окрестностей* множества A в X.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Архангельский А. В., «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, в. 3, с. 127—46.

А. В. Архангельский.

ПСЕВДОЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл вида

$$\int R\left(z, \sqrt{f(z)}\right) dz,$$

где R — рациональная функция двух аргументов, $f(z)$ — многочлен 3-й или 4-й степени без кратных корней, к-рый может быть выражен элементарно, т. е. через алгебраич. функции от z и логарифмы от таких функций. Напр.,

$$\int \frac{z^3\, dz}{\sqrt{z^4-1}}$$

есть П. и. См. *Эллиптический интеграл*. *Е. Д. Соломенцев.*

ПСИ-ФУНКЦИЯ, ψ-функция Гаусса, дигамма-функция,— первая производная от логарифма *гамма-функции*.

ПТОЛЕМЕЯ ТЕОРЕМА: во всяком выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение длин диагоналей равно сумме произведений длин его противоположных сторон. Названа по имени Клавдия Птолемея (2 в.), к-рый использовал ее для вывода нек-рых соотношений в тригонометрии. *П. С. Моденов.*

ПУАНКАРЕ ГИПОТЕЗА — утверждение, приписываемое А. Пуанкаре (H. Poincaré) и гласящее: любое замкнутое односвязное трехмерное многообразие гомеоморфно трехмерной сфере. Естественным обобщением является следующее утверждение (обобщенная гипотеза Пуанкаре): любое замкнутое

n-мерное многообразие, гомотопически эквивалентное n-мерной сфере S^n, гомеоморфно ей; в настоящее время (1983) доказана для всех n, кроме $n=3$ (при $n=4$ — лишь для гладких многообразий). *Ю. Б. Рудяк.*

ПУАНКАРЕ ГРУППА — группа движений пространства Минковского. П. г. является полупрямым произведением группы преобразований Лоренца и группы четырехмерных сдвигов (трансляций). П. г. названо по имени А. Пуанкаре (H. Poincaré), который впервые (1905) установил, что преобразования Лоренца образуют группу. *А. Б. Иванов.*

ПУАНКАРЕ ДВОЙСТВЕННОСТЬ — изоморфизм p-мерных групп (модулей) гомологий n-мерного многообразия M (в том числе обобщенного) с коэффициентами в локально постоянной системе $\mathcal{G}$ групп (модулей), изоморфных G, $(n-p)$-мерным когомологиям M с коэффициентами в ориентирующем пучке $\mathcal{H}_n(\mathcal{G})$ над M (слой этого пучка в точке $x\in M$ совпадает с локальной группой гомологий $H_n^x=H_n(M, M\setminus x; \mathcal{G})$). При этом обычные гомологии $H_p^c(M; \mathcal{G})$ изоморфны когомологиям $H_c^q(M; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$, $q=n-p$, с компактными носителями (когомологиям «второго рода»), в то время как гомологии «второго рода» $H_p(M; \mathcal{G})$ (определяемые «бесконечными» цепями) изоморфны обычным когомологиям $H^q(M; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$. В более общем виде имеют место изоморфизмы $H_p^\Phi(M; \mathcal{G})=H_\Phi^q(M; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$, где Φ — любое семейство носителей.

Аналогичные отождествления имеются также для гомологий и когомологий подмножеств $A\subset M$ и пар (M, A) (двойственность Пуанкаре — Лефшеца). Именно, пусть A — открытое или замкнутое подпространство в M и $B=M\setminus A$. Пусть Φ/B — семейство всех тех множеств из Φ, к-рые содержатся в B, и пусть $\Phi\cap A$ — семейство множеств вида $F\cap A$, $F\subset\Phi$. Тогда точная последовательность гомологий пары (M, B)

$$\ldots H_p^{\Phi/B}(B; \mathcal{G}) \longrightarrow H_p^\Phi(M; \mathcal{G}) \longrightarrow H_p^\Phi(M; B; \mathcal{G}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_{p-1}^{\Phi/B}(B; \mathcal{G}) \longrightarrow \ldots \qquad (*)$$

совпадает с когомологич. последовательностью пары (M, A)

$$\ldots \longrightarrow H_\Phi^q(M, A; \mathcal{H}_n(\mathcal{G})) \longrightarrow H_\Phi^q(M; \mathcal{H}_n(\mathcal{G})) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_{\Phi\cap A}^q(A; \mathcal{H}_n(\mathcal{G})) \longrightarrow H_\Phi^{q+1}(M; A; \mathcal{H}_n(\mathcal{G})) \longrightarrow \ldots.$$

Группы $H_p^{\Phi/B}(B; \mathcal{G})=H_p^{\Phi/B}(M; \mathcal{G})$ совпадают с $H_p^c(B; \mathcal{G})$ в случае, когда $\Phi=c$, и с $H_p(B; \mathcal{G})$ в случае, когда Φ — семейство Ψ всех замкнутых в M множеств, а множество B замкнуто (в этом случае символ Φ в первой последовательности может быть опущен, причем имеет место изоморфизм $H_p(M, B; \mathcal{G})=H_p(A; \mathcal{G})$). В случае, когда $\Phi=\Psi$, а B открыто, символ Φ можно опустить лишь во втором и третьем членах гомологич. последовательности, т. к. гомологии $H_p^{\Phi/B}(B; \mathcal{G})$ зависят не только от топологич. пространства B, но и от вложения $B\subset M$.

В случае, когда $\Phi=\Psi$, этот символ (вместе с $\Phi\cap A$) может быть опущен в когомологич. последовательности пары (M, A). Если A замкнуто, то

$$H_\Phi^q(M, A; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))=H_{\Phi/B}^q(M; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))=$$
$$=H_{\Phi/B}^q(B; \mathcal{H}_n(\mathcal{G})),$$

при $\Phi=\Psi$ возникающие когомологии B зависят не только от B, но и от вложения $B\subset M$. Если $\Phi=c$ и A замкнуто, то $\Phi\cap A$ можно заменить на c, и в этом случае также $H_c^q(M; A; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))=H_c^q(B; \mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$ — когомоло-

гии «второго рода» пространства B. Если $\Phi=c$, но A открыто, то когомологии $H^q_{c\cap A}(A;\mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$ отличаются от $H^q_c(A;\mathcal{H}_n(\mathcal{G}))$ (и зависят от вложения $A\subset M$).

Двойственность Пуанкаре — Лефшеца легко может быть применена для описания двойственности между гомологиями и когомологиями многообразия с краем. Полезно иметь в виду, что если все отличные от нуля слои пучка $\mathcal{H}_n(R)$ изоморфны основному кольцу R, то $\mathcal{H}_n(\mathcal{G})=\mathcal{H}_n(R)\otimes_R\mathcal{G}$.

В случае, когда пучок $\mathcal{H}_n(R)$ локально постоянен, существует единственный с точностью до изоморфизма локально постоянный пучок $\mathcal{L}(R)$, для к-рого $\mathcal{L}(R)\otimes_R\mathcal{H}_n(R)=R$. Поэтому если в гомологич. последовательности (*) вместо $\mathcal{G}$ использовать пучок коэффициентов $\mathcal{L}(R)\otimes_R\mathcal{G}$, то в когомологич. последовательности станет (вместо $\mathcal{H}_n(\mathcal{G})$) фигурировать пучок $\mathcal{G}$. Таким образом, наперед заданные коэффициенты в изоморфизмах двойственности могут фигурировать как в гомологиях, так и в когомологиях.

Наиболее естественное доказательство П. д. получается средствами теории пучков. П. д. в топологии — частный случай соотношений двойственности типа Пуанкаре, справедливых для производных функторов в гомологич. алгебре (другой частный случай — двойственность типа Пуанкаре для гомологий и когомологий групп).

Лит.: [1] Скляренко Е. Г., «Успехи матем. науки», 1979, т. 34, в. 6, с. 90—118; [2] его же, «Матем. заметки», 1980, т. 28, № 5, с. 769—76; [3] Масси У., Теория гомологий и когомологий, пер. с англ., М., 1981. *Е. Г. Скляренко.*

ПУАНКАРЕ ДИВИЗОР — дивизор, заданный естественной поляризацией на якобиане алгебраич. кривой. Форма пересечений одномерных циклов гомологий алгебраич. кривой X индуцирует унимодулярную кососимметрич. форму на решетке периодов. В соответствии с определением поляризованного абелева многообразия эта форма определяет главную поляризацию на якобиане кривой $I(X)$. Поэтому эффективный дивизор $\Theta\subset I(X)$, заданный этой поляризацией, определен однозначно с точностью до сдвига на элемент $x\in I(X)$. Геометрия П. д. Θ отражает геометрию алгебраич. кривой X. В частности, размерность множества особых точек П. д. $\dim_{\mathbb{C}}\operatorname{sing}\Theta\geqslant g-4$, где g — род кривой X (см. [1]).

Лит.: [1] Andreotti A., Mayer A., «Ann. Sc. norm. sup. Pisa», 1967, v. 21, № 2, p. 189—238. *Вик. С. Куликов.*

ПУАНКАРЕ ЗАДАЧА: найти гармоническую в конечной односвязной области S^+ функцию по условию на границе L области:

$$A(s)\frac{du}{dn}+B(s)\frac{du}{ds}+c(s)u=f(s),$$

где $A(s)$, $B(s)$, $c(s)$, $f(s)$ — заданные на L действительные функции, s — дуговая абсцисса, n — нормаль к L. К этой задаче пришел А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1910), разрабатывая математич. теорию приливов, и дал (неполное) решение задачи в случае, когда $A(s)=1$, $c(s)=0$, контур L и функции $B(s)$, $f(s)$ — аналитические.

См. также *Граничные задачи теории аналитических функций.* *А. Б. Иванов.*

ПУАНКАРЕ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — модель, реализующая геометрию плоскости Лобачевского (гиперболич. геометрию) на плоскости комплексного переменного. В П. и. с круговым абсолютом каждая точка единичного круга $E=\{z:|z|<1\}$ в плоскости z наз. гиперболической точкой, а сам круг — гиперболической плоскостью. Дуги окружностей (и диаметр) в E, ортогональные к граничной окружности $\Omega=\{z:|z|=1\}$, наз. гиперболическими прямыми. Каждая точка Ω наз. идеальной точкой. Гиперболич. прямые с общей гиперболич. точкой наз. пересекающимися

прямыми; с общей идеальной точкой — параллельными прямыми; прямые, к-рые не пересекаются и не параллельны,— гиперпараллельными (расходящимися) прямыми. Так, напр., на рис. 1 изображены две прямые, проходящие через точку z_1, параллельно прямой z_2z_3.

В П. и. в полуплоскости $H=\{z=x+iy|y>0\}$ каждая точка верхней полуплоскости наз. гиперболической точкой, а сама полуплоскость — гиперболической плоскостью. Полуокружности и полупрямые, ортогональные действительной оси, наз. гиперболическими прямыми. Множеством идеальных точек (абсолютом) является действительная ось и бесконечно удаленная точка

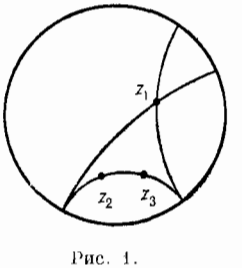


Рис. 1.

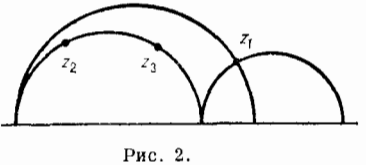


Рис. 2.

плоскости z. Аналогично П. и. с круговым абсолютом определяются параллельные, пересекающиеся и расходящиеся прямые. Так, напр., на рис. 2 изображены две прямые, проходящие через точку z_1 параллельно прямой $z_2\ z_3$.

Движения описываются конформными преобразованиями, переводящими абсолют в себя. Расстояния определяются с помощью двойного отношения четырех точек

$$\rho(z_1,\ z_2)=k\ln(z_1,\ z_2,\ z_1^*,\ z_2^*),$$

где z_1^* — идеальная точка полупрямой, исходящей из z_1 и проходящей через z_2; z_2^* — идеальная точка полупрямой, исходящей из z_2 и проходящей через z_1; k — произвольное положительное постоянное;

$$(z_1,\ z_2,\ z_1^*,\ z_2^*)=\frac{z_1^*-z_1}{z_1^*-z_2}:\frac{z_2^*-z_1}{z_2^*-z_2}.$$

Величины углов в П. и. совпадают с величинами углов в геометрии Лобачевского.

П. и. предложена А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1882).

Лит.: [1] Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей, пер. с нем., т. 2, М.— Л., 1934; [2] Каган В. Ф., Лобачевский и его геометрия, М., 1955; [3] Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, пер. с нем., 3 изд., М.— Л., 1981; [4] Пуанкаре А., Избранные труды, [пер. с франц.], М., 1974; [5] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955; [6] Sansone G., Gerretsen J., Lectures on the theory of functions of a complex variable, [v.] 2, Geometric theory, Groningen, 1969.

А. Б. Иванов.

ПУАНКАРЕ КОМПЛЕКС — обобщение понятия многообразия; пространство, группы гомологий к-рого устроены в нек-ром смысле так же, как группы гомологий замкнутого ориентируемого многообразия. А. Пуанкаре (H. Poincaré) обнаружил, что группы гомологий многообразия удовлетворяют нек-рому соотношению (изоморфному *Пуанкаре двойственности*). П. к. представляет собой пространство, где аксиоматизирован этот изоморфизм (см. также *Пуанкаре пространство*).

Алгебраический комплекс Пуанкаре — цепной комплекс с формальной двойственностью Пуанкаре — аналог прежнего.

Пусть $C=\{C_i\}$ — пополненный цепной комплекс с $C_i=0$ при $i>0$ такой, что его группы гомологий конечно порождены. Пусть, кроме того, комплекс C снабжен такой (цепной) диагональю Δ: $C\to C\otimes C$, что $(\varepsilon\otimes 1)\Delta=$

$= (1 \otimes \varepsilon)\Delta$, где $\varepsilon : C \to \mathbb{Z}$ — пополнение (и C отождествляется с $C \otimes \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \otimes C$). Наличие диагонали позволяет определить спаривание

$$H^k(C) \otimes H_n(C) \longrightarrow H_{n-k}(C),\ x \otimes y \longrightarrow x \cap y.$$

Комплекс C наз. геометрическим, если задана цепная гомотопия между Δ и $T\Delta$, где $T : C \otimes C \to C \otimes C$ — перестановка сомножителей $T(a \otimes b) = b \otimes a$.

Геометрич. цепной комплекс наз. алгебраическим П. к. формальной размерности n, если существует такой элемент бесконечного порядка $\mu \in H_n(C)$, что для любого k гомоморфизм $\cap \mu : H^k(C) \to H_{n-k}(C)$ есть изоморфизм.

Примерами алгебраич. П. к. являются комплекс сингулярных цепей ориентируемого замкнутого многообразия или, более общо, П. к., определенный выше, с подходящими условиями конечности. Можно определить также цепные пары Пуанкаре — алгебраич. аналоги пар Пуанкаре (X, A). Рассматриваются также П. к. (и цепные пары Пуанкаре) модулей над подходящими кольцами. *Ю. Б. Рудяк.*

ПУАНКАРЕ ПРОСТРАНСТВО — 1) П. п. формальной размерности n — топологическое пространство X, где задан элемент $\mu \in H_n(X) = \mathbb{Z}$, что гомоморфизм $\cap \mu : H^k(X) \to H_{n-k}(X)$ вида $x \to x \cap \mu$ является изоморфизмом для любого k (здесь $\cap$ — операция Уитни умножения, высечение). При этом $\cap \mu$ наз. изоморфизмом двойственности Пуанкаре и элемент μ порождает группу $H_n(X) = \mathbb{Z}$. Любое замкнутое ориентируемое n-мерное связное топологич. многообразие является П. п. формальной размерности n; в качестве μ берется ориентация (фундаментальный класс) многообразия.

Пусть X — конечное клеточное пространство, вложенное в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$ большой размерности N, и U — замкнутая регулярная окрестность этого вложения, а ∂U — ее край. Стандартное отображение $p : \partial U \to X$ превращается (по Серру) в расслоение. Теорема: пространство X является П. п. формальной размерности n тогда и только тогда, когда слой этого расслоения гомотопически эквивалентен сфере S^{N-n-1}. Возникающее над П. п. X описанное расслоение (слой к-рого — сфера) единственно с точностью до стационарной эквивалентности и наз. сферическим нормальным расслоением, или расслоением Спивака, П. п. X. При этом конус проекции $p : \partial U \to X$ есть *Тома пространство* нормального сферич. расслоения над X.

Если ограничиться лишь гомологиями с коэффициентами в нек-ром поле F, то получится т. н. пространство Пуанкаре над F.

Рассматриваются также пары Пуанкаре (X, A) (обобщение понятия многообразия с краем), где для нек-рой образующей $\mu \in H_n(X, A) = \mathbb{Z}$ и любого k имеется изоморфизм двойственности Пуанкаре:

$$\cap \mu : H^k(X) \longrightarrow H_{n-k}(X, A).$$

П. п. естественным образом возникают в задачах существования и классификации структур на многообразиях. Содержательна также задача сглаживания (триангуляции) П. п., то есть отыскания гладкого (кусочно линейного) замкнутого многообразия, гомотопически эквивалентного данному П. п.

2) П. п. n-мерное — замкнутое n-мерное многообразие M, *гомологий группы* $H_i(M)$ к-рого изоморфны группам гомологий $H_i(S^n)$ n-мерной сферы S^n; другое название — гомологическая сфера.

Односвязное П. п. гомотопически эквивалентно сфере (см. *Гомотопический тип*). Для группы π, реализуемой как *фундаментальная группа* нек-рого П. п., имеют место равенства $H_1(\pi) = H_2(\pi) = 0$, где $H_i(\pi)$ — группы гомологий группы π. Обратно, для любого $n \geqslant 5$ и любой

конечно представимой группы π с $H_1(\pi)=H_2(\pi)=0$ существует n-мерное П. п. M с $\pi_1(M)\pi$.

Для $n=3,4$ этих условий недостаточно для реализации группы π в виде $\pi=\pi_1(M)$. Так, напр., фундаментальная группа любого трехмерного П. п. допускает копредставление с одинаковым числом образующих и соотношений. Единственная конечная группа, реализуемая как фундаментальная группа трехмерного П. п., есть бинарная группа икосаэдра $\langle x, y \mid x^2=y^5=1\rangle$, являющаяся фундаментальной группой *додекаэдра пространства* — исторически первого примера П. п.

Лит.: [1] Браудер В., Перестройки односвязных многообразий, пер. с англ., М., 1983.

Ю. Б. Рудяк.

ПУАНКАРЕ СФЕРА — сфера в пространстве $\mathbb{R}^3$ с отождествленными диаметрально противоположными точками. П. с. диффеоморфна проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$; она была введена А. Пуанкаре (H. Poincaré, см. [1]) для исследования поведения на бесконечности фазовых траекторий двумерной автономной системы

$$\dot{x}=P(x,\ y),\ \dot{y}=Q(x,\ y) \qquad (1)$$

в случае, когда P и Q — многочлены. П. с. обычно изображают так, чтобы она касалась плоскости (x, y); при проектировании из центра П. с. взаимно однозначно отображается на $\mathbb{R}P^2$, причем паре диаметрально противоположных точек экватора отвечает бесконечно удаленная точка. Соответственно, фазовые траектории системы (1) отображаются на кривые на сфере.

Эквивалентный метод исследования системы (1) — применение преобразований Пуанкаре:

а) $x=\frac{1}{z}$, $y=\frac{u}{z}$ и б) $x=\frac{v}{z}$, $y=\frac{1}{z}$.

Первое (соответственно второе) из них пригодно вне сектора, содержащего ось y (ось x). Напр., преобразование а) приводит систему (1) к виду

$$\frac{du}{d\tau}=P^*(u,\ z),\ \frac{dz}{d\tau}=Q^*(u,\ z), \qquad (1')$$

где $dt=z^n d\tau$ и n — наибольшая из степеней P, Q; особые точки системы (1′) наз. бесконечно удаленными особыми точками системы (1). Если многочлены P, Q взаимно просты, то многочлены P^*, Q^* также взаимно просты и система (1) имеет конечное число бесконечно удаленных особых точек.

Лит.: [1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М., 1947; [2] Андронова А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966; [3] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961.

М. В. Федорюк.

ПУАНКАРЕ ТЕОРЕМА: пусть на гладком замкнутом двумерном римановом многообразии V определено векторное поле X, имеющее конечное число изолированных особых точек $A_1, \ldots, A_k$. Тогда

$$\sum j(X,\ A_i)=\chi(V);$$

здесь $j(X, A_i)$ — индекс точки A_i относительно X (см. *Особой точки индекс*), χ — *Эйлерова характеристика* V. Установлена А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1881).

М. И. Войцеховский.

ПУАНКАРЕ ТЕОРЕМА в теории устойчивости — см. *Устойчивость по Пуассону.*

ПУАНКАРЕ ТЕОРЕМА ВОЗВРАЩЕНИЯ — одна из основных теорем общей теории динамич. систем с инвариантной мерой.

Пусть движение системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ i=1,\ \ldots,\ n, \qquad (1)$$

где однозначные функции $X_i(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (MX_i)}{\partial x_i} = 0, \quad M > 0,$$

так что уравнения (1) допускают положительный интегральный инвариант

$$\int_V M \, dx_1 \ldots dx_n. \tag{2}$$

Предполагается также, что если изображающая точка P с координатами $x_1, \ldots, x_n$ в начальный момент времени t_0 находится внутри нек-рой области V конечного объема, то она будет оставаться неопределенно долго внутри этой области, и что

$$\int_V M \, dx_1 \ldots dx_n < \infty.$$

П. т. в.: если рассматривается область U_0, содержащаяся в V, то можно выбрать бесконечным числом способов начальное положение точки P таким образом, чтобы эта точка пересекла область U_0 бесконечно много раз. Если этот выбор начального положения делается наудачу внутри U_0, то вероятность того, что точка P не пересечет область U_0 бесконечное число раз, будет бесконечно мала.

Другими словами, если начальные условия не являются исключительными в указанном смысле, то точка P пройдет бесконечно много раз сколь угодно близко от своего начального положения.

Движение, при к-ром система бесконечное число раз возвращается в окрестность начального состояния, А. Пуанкаре (H. Poincaré) назвал устойчивым в смысле Пуассона. П. т. в. была впервые установлена А. Пуанкаре (см. [1], [2]), а его доказательство было улучшено К. Каратеодори [3].

Введя в метрич. пространстве R с помощью четырех аксиом абстрактное понятие меры μA любого множества $A \subset R$ и рассматривая динамич. систему $f(p, t)$ ($p = P$ для $t=0$), заданную в R, К. Каратеодори назвал меру μ инвариантной относительно системы $f(p, t)$, если для любого μ-измеримого множества A имеет место равенство

$$\mu f(A, t) = \mu A, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Инвариантная мера представляет собой естественное обобщение интегрального инварианта (2) для дифференциальных уравнений (1). Предположив меру всего пространства R конечной, К. Каратеодори доказал, что:

1) если $\mu A = m > 0$, то найдутся значения t, $|t| \geqslant 1$, такие, что $\mu[A \cdot f(A, t)] > 0$, где $A \cdot f(A, t)$ — множество точек, принадлежащих одновременно множествам A и $f(A, t)$;

2) если в пространстве R со счетной базой $\mu R = 1$ для инвариантной меры μ, то почти все точки $p \in R$ (в смысле меры μ) устойчивы по Пуассону.

А. Я. Хинчин [5] уточнил часть 1) этой теоремы, доказав, что для всякого измеримого множества E, $\mu E = m > 0$, и любого t, $-\infty < t < +\infty$, неравенство

$$\mu(t) = \mu(E \cdot f(E, t)) > \lambda m^2$$

выполняется для относительно плотного множества значений t на оси $-\infty < t < +\infty$ (при любом $\lambda < 1$).

Н. Г. Четаев (см. [6], [7]) обобщил П. т. в. на случай, когда функции X_i в (1) зависят также от времени t периодически. Именно, пусть а) действительным состояниям системы отвечают лишь действительные значения переменных; б) функции X_i в дифференциальных уравнениях движения (1) суть периодические относительно t с одним общим им всем периодом τ; в) в своем движении точка P не выйдет из нек-рой замкнутой области R, если ее начальное положение P_0 находится

где-либо внутри определенной области r_0; г) mes $W_k \geqslant$ $\geqslant a$ mes W_0, где mes $W_k = \int_{W_k} dx_1 \ldots dx_n$ обозначает меру множества W_k (объем в смысле Лебега), к-рое заполняют в момент $t = t_0 + k\tau$ движущиеся точки, вышедшие в t_0 из W_0; k — нек-рое целое число, постоянная a предполагается не бесконечно малой. Тогда почти всюду (кроме, быть может, множества точек меры нуль) в области r_0 траектории имеют устойчивость в смысле Пуассона.

Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов [8] для весьма широкого класса динамич. систем дали построение меры, инвариантной относительно данной динамич. системы (см. также [4]).

Лит.: [1] Poincaré H., «Acta math.», 1890, v. 13, p. 1—270; [2] его же, Избр. тр., пер. с франц., М., 1972; [3] Carathéodory C., «Sitz. Pres. Acad. Wiss. Berlin», 1919, S. 580; [4] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [5] Хинчин А. Я., «Comp. math.», 1934, v. 1, p. 177—79; [6] Четаев Н. Г., «C. r. Acad. sci.», 1928, t. 187, p. 637—38; [7] его же, «Уч. зап. Казанск. ун-та», 1929, т. 89, кн. 2, с. 199—201; [8] Крылов Н. Н., Боголюбов Н. Н., «Ann. Math.», 1937, v. 38, № 1, p. 65—113. *В. В. Румянцев.*

ПУАНКАРЕ ТЕОРЕМА ПОСЛЕДНЯЯ: пусть K — кольцо на плоскости, ограниченное окружностями с радиусами $r=a$ и $r=b$, и дано отображение его в себя (θ — полярный угол)

$$\tilde{r} = \varphi(r, \theta), \quad \tilde{\theta} = \psi(r, \theta),$$

удовлетворяющее условиям: 1) отображение сохраняет площадь, 2) каждая граничная окружность переходит в себя $\varphi(a, \theta) = a$, $\varphi(b, \theta) = b$, 3) точки с $r=a$ передвигаются против часовой стрелки, а точки с $r=b$ — по часовой стрелке, то есть $\psi(a, \theta) > \theta$, $\psi(b, \theta) < \theta$. Тогда это отображение имеет две неподвижные точки. Вместо сохранения площади, более общо, можно потребовать, чтобы никакая подобласть не преобразовывалась в свою (собственную) часть.

Эта теорема высказана А. Пуанкаре [1] в 1912 в связи с нек-рыми задачами небесной механики; доказана им в ряде частных случаев, однако общего доказательства этой теоремы он не получил. Работа была послана А. Пуанкаре в итальянский журнал (см. [1]) за две недели до смерти, причем автор в сопроводительном письме редактору выразил уверенность в справедливости теоремы в общем случае.

Полное доказательство дал через полгода Дж. Биркгоф [2].

Лит.: [1] Poincaré H., «Rend. circ. mat. Palermo», 1912, v. 33, p. 375—407; [2] Birkhoff G., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1913, v. 14, p. 14—22; [3] Парс Л. А., Аналитическая динамика, пер. с англ., М., 1971. *М. И. Войцеховский.*

ПУАНКАРЕ УРАВНЕНИЯ — общие уравнения механики голономных систем, представимые с помощью нек-рой группы Ли бесконечно малых преобразований.

Пусть x_i, $i=1, \ldots, n$,— переменные, определяющие положение голономной механич. системы, стесненной идеальными связями, зависящими явно от времени. Если система имеет k степеней свободы, то существует интранзитивная группа бесконечно малых преобразований

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \xi_0^j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \xi_\alpha^j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \alpha = 1, \ldots, k,$$

позволяющая перевести систему в момент времени t из положения x_i в бесконечно близкие действительное положение $x_i + dx_i$ и возможное положение $x_i + \delta x_i$ бесконечно малыми преобразованиями группы $\left(X_0 + \sum_{\alpha=1}^{k} \eta_\alpha X_\alpha\right) dt$ и подгруппы $\sum_{\alpha=1}^{k} \omega_i X_i$ соответственно. Здесь ω_α и η_α — независимые переменные,

определяющие соответственно возможные и действительные перемещения системы,— связаны уравнениями

$$\delta\eta_i = \frac{d\omega_i}{dt} - \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{k} c_{\alpha\beta i}\,\omega_\alpha \eta_\beta,\quad i=1,\ \ldots,\ k,$$

если группа возможных перемещений X_α определена своими структурными постоянными $c_{\alpha\beta i}$:

$$(X_\alpha X_\beta) = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha = \sum_{i=1}^{k} c_{\alpha\beta i} X_i,$$
$$\alpha,\ \beta=1,\ \ldots,\ k,$$

а оператор X_0 перестановочен с группой возможных перемещений

$$(X_0 X_\alpha) = 0,\ \alpha=1,\ \ldots,\ k.$$

Эти условия далее предполагаются выполненными.

П. у. имеют вид обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta_j} = \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{k} c_{\alpha j\beta}\eta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \eta_\beta} + X_j L, \qquad (1)$$

где $j=1,\ \ldots,\ k,$

$$L(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_k) = T + U$$

— функция Лагранжа, $T(t,\ x,\ \eta)$ — кинетич. энергия, $U(t,\ x)$ — силовая функция.

Уравнения (1) были получены впервые А. Пуанкаре (см. [1]) для случая транзитивной группы возможных перемещений, когда связи не зависят явно от времени, и применены (см. [2]) для исследования движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Н. Г. Четаев (см. [3]) обобщил П. у. на случай интразитивной группы перемещений, когда связи зависят явно от времени, и разработал их теорию (см. [3]—[5]), а также преобразовал к более простому канонич. виду (см. *Четаева уравнения*). В частности, им был дан (см. [5]) метод построения группы возможных и действительных перемещений, когда голономные связи заданы в дифференциальной форме, и введено важное понятие циклич. перемещения.

Перемещения X_r, $r=s+1,\ \ldots,\ k$, наз. ц и к л и ч е с к и м и, если они удовлетворяют условиям:

1) $X_r L = 0$,

2) $(X_r X_\beta) = 0,\ r=s+1,\ \ldots,\ k,\ \beta=1,\ \ldots,\ k.$

Согласно 2) циклич. перемещения X_r образуют абелеву подгруппу группы возможных перемещений, перестановочную со всеми операторами X_β. Для циклич. перемещений существуют первые интегралы П. у.

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_r} = a_r = \text{const},\ r=s+1,\ \ldots,\ k.$$

Из этих соотношений переменные η_r можно выразить через постоянные a_r и переменные t, x_i, η_1, $\ldots$, η_s и ввести ф у н к ц и ю Р а у с а

$$R(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_s;\ a_{s+1},\ \ldots,\ a_k) =$$
$$= L - \sum_{r=s+1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \eta_r}\eta_r.$$

Тогда для нециклич. перемещений П. у. принимают вид уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \eta_j} = \sum c_{\alpha j\beta}\eta_\alpha \frac{\partial R}{\partial \eta_\beta} + \sum c_{\alpha j\gamma}\eta_\alpha a_\gamma + X_j R, \qquad (2)$$
$$\alpha,\ j,\ \beta=1,\ \ldots,\ s;\ \gamma=s+1,\ \ldots,\ k.$$

После интегрирования уравнений (2) значения η_r определяются равенствами

$$\eta_r = -\frac{\partial R}{\partial a_r},\ r=s+1,\ \ldots,\ k.$$

Если дополнительно выполняются равенства $c_{\alpha j\gamma}=0$, $\alpha, j=1, \ldots, s$; $\gamma=s+1, \ldots, k$, т. е. если нециклич. перемещения X_β, $\beta=1, \ldots, k$, представляют собой подгруппу группы возможных перемещений, то по отношению к этой подгруппе рассматриваемая механич. система образует как бы самостоятельную голономную систему с s степенями свободы, описываемую уравнениями (1) при $\alpha, j, \beta=1, \ldots, s$, где роль функции L играет функция R.

П. у. содержит как частные случаи: *Лагранжа уравнения*, когда группа преобразований, увеличивающая одну из переменных на бесконечно малую постоянную, приводится к группе перестановочных между собой преобразований; *Эйлера уравнения* вращения твердого тела, когда роль η_i играют проекции p, q, r мгновенной угловой скорости.

Лит.: [1] Poincaré H., «C. r. Acad. sci.», 1901, t. 132, p. 369—71; [2] его же, «Bull. Astron.», 1910, t. 27, p. 321—56; [3] Четаев Н. Г., «Докл. АН СССР», 1928, № 7, с. 103—04; [4] его же, «C. r. Acad. sci.», 1927, t. 185, p. 1577—78; [5] его же, «Прикл. матем. и механ.», 1941, т. 5, № 2, с. 253—62.

В. В. Румянцев.

ПУАНКАРЕ — БЕНДИКСОНА ТЕОРИЯ — раздел качественной теории дифференциальных уравнений и теории динамич. систем, относящийся к предельному (при $t\to\pm\infty$) поведению траекторий автономных систем двух дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\dot{x}_i=f_i(x_1, x_2),\ i=1, 2 \qquad (*)$$

(условия, обеспечивающие существование и единственность решений, подразумеваются выполненными). В наиболее важном случае, когда в ограниченной части плоскости система имеет только конечное число *равновесия положений*, основной результат А. Пуанкаре (H. Poincaré, см. [1]) и И. Бендиксона (I. Bendixson, см. [2]) состоит в том, что любая ограниченная полутраектория (положительная или отрицательная) либо стремится к положению равновесия, либо навивается (наподобие спирали) на *предельный цикл*, либо аналогичным образом навивается на замкнутую *сепаратрису* или «сепаратрисный контур», состоящий из нескольких сепаратрис, «соединяющих» нек-рые положения равновесия, либо сама является положением равновесия или замкнутой траекторией. Наиболее часто используемое следствие: если полутраектория не выходит из нек-рой компактной области, не содержащей положения равновесия, то в этой области имеется замкнутая траектория. Для тех случаев, когда положений равновесия бесконечное число или когда полутраектория не является ограниченной, тоже имеется достаточно полное, хотя и более сложное описание (см. [4]). Наконец, можно рассматривать *непрерывный поток* на плоскости, не предполагая, что он задается дифференциальными уравнениями (*), ибо при этом все еще возможно использовать основные «технические» предпосылки П.- Б. т.: *Жордана теорему* и *последования отображение* для локальных сечений, гомеоморфных отрезку (существование их доказано в [7], см. также [8]).

К П.— Б. т. примыкают: открытая А. Пуанкаре связь между вращением векторного поля на границе области и индексами положений равновесия внутри нее (см. *Особой точки индекс*); результаты И. Бендиксона и Л. Брауэра (L. Brouwer) о возможных типах поведения траекторий возле положений равновесия (см. [2]—[5]); результаты, уточняющие роль «особых траекторий» — положений равновесия, предельных циклов и сепаратрис — в «качественной картине», возникающей на фазовой плоскости (см. [6]).

Хотя общая теория дает исчерпывающую информацию о вариантах поведения фазовых траекторий, возможных для систем (*), это не отвечает на вопрос, какой вариант реализуется для той или иной конкретной системы. Решению подобных вопросов (обычно не для

отдельной системы, а для нек-рого класса систем) посвящено большое количество работ, в к-рых, как правило, существенно используется общая теория, но к-рые никоим образом не сводятся к ее автоматич. применению.

Лит.: [1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М., 1947; [2] Бендиксон И., «Успехи матем. наук», 1941, в. 9, с. 191—211; [3] Brouwer L. E., «Verhandel. Konikl. nederl. akad. wet. Afd. natuurkunde. I. reeks», 1909, v. 11, p. 850—58; 1910, v. 12, p. 716—34; 1910, v. 13, № 1, p. 171—86; [4] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М., 1949; [5] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [6] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966; [7] Whitney H., «Ann. Math.», 1933, v. 34, № 2, p. 244—70; [8] Немыцкий В. В., «Вестн. Моск. ун-та», 1948, № 10, с. 49—61. *Д. В. Аносов.*

ПУАНКАРЕ — БЕРТРАНА ФОРМУЛА — формула перестановки порядка интегрирования в повторных несобственных интегралах в смысле главного значения по Коши.

Пусть Γ — простая замкнутая или разомкнутая гладкая линия на комплексной плоскости; $\varphi(t, t_1)$—определенная на Γ (вообще говоря, комплекснозначная) функция, удовлетворяющая равномерно условию Гёльдера по t, t_1; t_0 — фиксированная точка на Γ, отличная от концов, если Γ разомкнута. Тогда имеет место П.— Б. ф.

$$\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_0}\int_\Gamma \frac{\varphi(t,\,t_1)}{t_1-t}\,dt_1 = \\ = -\pi^2\varphi(t_0,\,t_0)+\int_\Gamma dt_1\int_\Gamma \frac{\varphi(t,\,t_1)}{(t-t_0)(t_1-t)}\,dt. \qquad (1)$$

Формула справедлива и при более общих предположениях относительно линии Γ и функции φ (см. [4]). Если $\varphi(t, t_1)=\alpha(t)\,\beta(t_1)$, где $\alpha\in L_p$, $\beta\in L_{p'}$, $p>1$, $p'=p/(p-1)$, то равенство (1) справедливо для почти всех $t_0\in\Gamma$ (см. [5], [6]). Если линия Γ замкнута и функция φ зависит от одного аргумента, то равенство (1) принимает вид

$$\frac{1}{(\pi i)^2}\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_0}\int_\Gamma \frac{\varphi(t_1)}{t_1-t}\,dt_1=\varphi(t_0) \qquad (2)$$

и имеет место для всех или почти всех $t_0\in\Gamma$ в зависимости от того, удовлетворяет φ условию Гёльдера или $\varphi\in L_p$, $p>1$. Равенство (2) также наз. П.— Б. ф.

Построены аналоги формулы (1) в случае кратных интегралов (см. [8]—[11]).

Формула (1) при определенных условиях была получена Г. Харди (см. [7]) ранее А. Пуанкаре (см. [1]) и Ж. Бертрана (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Poincaré H., Leçons de mécanique céleste, t. 3, P., 1910; [2] Bertrand G., «C. r. Acad. sci.», 1921, t. 172, p. 1458—61; [3] его же, «Ann. sci. École norm. supér.», 1923, t. 40, p. 151—258; [4] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [5] Хведелидзе Б. В., «Сообщ. АН Груз. ССР», 1947, т. 8, № 5, с. 283—90; [6] его же, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 7, М., 1975, с. 5—162; [7] Hardy G. H., «Proc. London Math. Soc.», 1909, v. 7, № 2, p. 181—208; [8] Tricomi F., «Math. Z.», 1928, Bd 27, S. 87—133; [9] Giraud G., «C. r. Acad. sci.», 1936, t. 202, № 26, p. 2124—26; [10] его же, «Ann. sci. École norm. supér.», 1934, t. 51, f. 3—4, p. 251—372; [11] Михлин С. Г., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 3, с. 29—112; [12] его же, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962. *Б. В. Хведелидзе.*

ПУАССОНА ИНТЕГРАЛ — интегральное представление решения *Дирихле задачи* для *Лапласа уравнения* в простейших областях. Так, П. и. для шара $B_n(0, R)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, радиуса R с центром в начале координат имеет вид

$$u(x)=\int_{S_n(0,\,R)} f(y)\,PB_n(x,\,y)\,dS_n(y), \qquad (1)$$

где $f(y)$ — данная непрерывная функция на сфере $S_n(0, R)$ радиуса R,

$$PB_n(x,\,y)=\frac{1}{\sigma_n}\,\frac{R^{n-2}\,(R^2-|x|^2)}{|x-y|^n}$$

— ядро Пуассона для шара, $\sigma_n = n\pi^{n/2}R^{n-1}/\Gamma(n/2+1)$ площадь сферы $S_n(0, R)$, dS_n — элемент площади $S_n(0, R)$.

С. Пуассон [1] пришел к формуле (1) в случае $n=2$ как к интегральной форме записи суммы тригонометрич. ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)\,r^k,$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $f(y)=f(e^{i\varphi})$, (r, θ) и $(1, \varphi)$— полярные координаты соответственно точек $x=re^{i\theta}$ и $y=e^{i\varphi}$, когда ядро Пуассона имеет вид

$$PB_2(x, y)=PB_2(re^{i\theta}, e^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} \quad (2)$$

(о применениях П. и. в теории тригонометрич. рядов см. [3], а также *Абеля — Пуассона метод суммирования*).

П. и. для полупространства

$$R^n_+=\{x=(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}^n:\ x_n>0\}$$

имеет вид

$$u(x)=\int_{R^n_0} f(y)\,PR^n_+(x, y)\,dR^n_0(y), \quad (3)$$

где

$$R^n_0=\{y=(y_1, \ldots, y_n)\in\mathbb{R}^n:\ y_n=0\},$$

dR^n_0 — элемент площади R^n_0, $f(y)$ — ограниченная непрерывная функция на R^n_0,

$$PR^n_+(x, y)=\frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{n\pi^{n/2}}\frac{x_n}{|x-y|^n}$$

— ядро Пуассона для полупространства. Формулы (1) и (3) суть частные случаи формулы Грина

$$u(x)=\int_\Gamma f(y)\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y}\,d\Gamma(y), \quad (4)$$

дающей решение задачи Дирихле для областей $D\subset\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ при помощи производной $dG(x, y)/dn_y$ функции Грина $G(x, y)$ по направлению внутренней нормали к Γ в точке $y\in\Gamma$. Иногда формулу (4) также наз. П. и.

Основные свойства П. и.: 1) $u(x)$ есть гармонич. функция координат точки x; 2) П. и. дает решение задачи Дирихле с граничными данными $f(y)$ в классе (ограниченных) гармонич. функций, т. е. функция $u(x)$, продолженная на границу области значениями $f(y)$, непрерывна в замкнутой области. На этих свойствах основаны применения П. и. в классической математич. физике (см. [4]).

П. и., понимаемый в смысле Лебега, от суммируемой функции $f(y)$, напр. на $S_n(0, R)$, наз. интегралом Пуассона — Лебега; интеграл вида

$$u(x)=\int_{S_n(0,\ R)} PB_n(x, y)\,d\mu(y) \quad (5)$$

по произвольной конечной борелевской мере μ, сосредоточенной на $S_n(0, R)$, наз. интегралом Пуассона — Стилтьеса. Класс A гармонич. функций $u(x)$, представимых интегралом (5), характеризуется тем, что любая функция $u(x)\in A$ есть разность двух неотрицательных гармонич. функций в $B_n(0, R)$. Класс функций, представимых интегралом Пуассона — Лебега, есть правильный подкласс класса A, содержащий, в свою очередь, все ограниченные гармонич. функции в $B_n(0, R)$. Для почти всех точек $y\in S_n(0, R)$ по мере Лебега на $S_n(0, R)$ интеграл Пуассона — Стилтьеса (5) имеет угловые граничные значения, совпадающие со

значением производной $\mu'(y)$ меры μ по мере Лебега. Теория интегралов Пуассона — Стилтьеса и Пуассона — Лебега строится и для случая полупространства (см. [5]).

Большую роль в теории аналитич. функций многих комплексных переменных и в ее применениях к квантовой теории поля играют различные модификации П. и. Напр., ядро Пуассона для поликруга

$$U^n=\{z=(z_1,\ \ldots,\ z_n)\in\mathbb{C}^n:\ |z_j|<1,\ j=1,\ \ldots,\ n\}$$

комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ получается при перемножении ядер (2):

$$PU^n(z,\ \zeta)=\prod_{j=1}^{n} PB_2(z_j,\ \zeta_j).$$

Соответствующий П. и.

$$u(z)=\int_{T^n} f(\zeta)\,PU^n(z,\ \zeta)\,dT^n(\zeta)$$

по остову поликруга $T^n=\{\zeta=(\zeta,\ \ldots,\ \zeta_n)\in\mathbb{C}^n:\ |\zeta_j|=1,\ j=1,\ \ldots,\ n\}$ дает кратногармонич. функцию $u(z)$, $z\in U^n$, принимающую на остове T^n непрерывные значения $f(\zeta)$. Рассматриваются также обобщения в виде интегралов Пуассона — Лебега и Пуассона — Стилтьеса (см. [6]).

В квантовой теории поля применяются П. и. для трубчатых областей T^C комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ над выпуклым открытым острым конусом C в пространстве $\mathbb{R}^n$ (с вершиной в начале координат) вида

$$T^C=\mathbb{R}^n+i\mathbb{C}=\{z=x+iy\in\mathbb{C}^n:$$
$$x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)\in\mathbb{R}^n;\ y=(y_1,\ \ldots,\ y_n)\in\mathbb{C}\}.$$

П. и. для полуплоскости вида (3) при $n=2$ есть частный случай таких П. и. для трубчатых областей. П. и. для ограниченных симметрич. областей пространства $\mathbb{C}^n$ представляется так же, как П. и. для трубчатой области в пространстве матриц. Понимая плотность П. и. f как обобщенную функцию, а сам П. и.— как свертку f с ядром Пуассона, приходят к важному понятию П. и. от обобщенных функций определенных классов (см. [7]—[9]).

Лит.: [1] Poisson S. D., «J. École polytechn.», 1820, t. 11, p. 295—341; 1823, t. 12, p. 404—509; [2] Schwarz H. A., «Vierteljahrsschr. Naturforsch. Ges. Zürich», 1870, Bd 15, S. 113—28; [3] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [4] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [5] Соломенцев Е. Д., Итоги науки. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964, с. 83—100; [6] Рудин У., Теория функций в поликруге, пер. с англ., М., 1974; [7] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976; [8] Хуа Ло-кен, Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, пер. с кит., М., 1959; [9] Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974.

Е. Д. Соломенцев.

ПУАССОНА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — то же, что *Абеля — Пуассона метод суммирования*.

ПУАССОНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(x-t)^2}\,d\alpha(t),\qquad(*)$$

где $\alpha(t)$ — функция ограниченного изменения в каждом конечном интервале, а также преобразование

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{1+(x-t)^2}\,dt,$$

вытекающее из (*), если $\alpha(t)$ — абсолютно непрерывная функция. Пусть

$$\hat{g}(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}u^{-2}\,[g(x+u)-2g(x)+g(x-u)]\,du$$

и

$$T_t g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}\,g^{(2k)}(x)+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\hat{g}^{(2k)}(x).$$

Имеют место следующие формулы обращения для П. н.:

$$\frac{\alpha(x+0)+\alpha(x-0)}{2}-\frac{\alpha(+0)+\alpha(-0)}{2}=$$

$$=\lim_{t\to 1-0}\int_0^x T_t f(u)\,du$$

при всех x и

$$\varphi(x)=\lim_{t\to 1-0} T_t f(x)$$

для почти всех x.

Пусть C — выпуклый открытый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в нуле и C^* — сопряженный конус, т. е.

$$C^*=\{\xi:\xi_1x_1+\ldots+\xi_nx_n\geqslant 0,\ \forall x\in C\}.$$

Функция

$$\mathscr{K}_C(z)=\int_{C^*} e^{i(z_1\xi_1+\ldots+z_n\xi_n)}d\xi$$

наз. я д р о м К о ш и трубчатой области $T^C=\{z=x+iy;\ x\in\mathbb{R}^n,\ y\in C\}$ П. н. (обобщенной) функции f наз. свертка

$$f*\mathscr{P}_C(x,\ y),\ (x,\ y)\in T^C,$$

где

$$\mathscr{P}_C(x,\ y)=\frac{|K_C(x+iy)|^2}{(2\pi)^n K_C(iy)}$$

— ядро Пуассона трубчатой области T^C (см. [2]).

Лит.: [1] P o l l a r d H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1955, v. 78, № 2, p. 541—50; [2] В л а д и м и р о в В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

ПУАССОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей случайной величины X, принимающей целые неотрицательные значения $k=0,1,2,\ldots$, с вероятностями

$$\mathsf{P}\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

где $\lambda>0$ — параметр. Производящая функция и характеристич. функция П. р. определяются соответственно равенствами

$$\varphi(z)=e^{\lambda(z-1)}\ \text{ и }\ f(t)=\exp[\lambda(e^{it}-1)].$$

Математич. ожидание, дисперсия и все семиинварианты более высокого порядка равны λ. Функция распределения П. р.

$$F(x)=\sum_{i=0}^{[x]} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$$

в точках $k=0,1,2,\ldots$ выражается формулой

$$F(k)=\frac{1}{k!}\int_\lambda^\infty y^k e^{-y}\,dy=1-S_{k+1}(\lambda),$$

где $S_{k+1}(\lambda)$ — значение в точке λ функции *гамма-распределения* с параметром $k+1$ (или формулой $F(k)=1-H_{2k+2}(2\lambda)$, где $H_{2k+2}(2\lambda)$ — значение в точке 2λ функции «*хи-квадрат*» *распределения* с $2k+2$ степенями свободы), откуда, в частности, следует соотношение

$$\mathsf{P}\{X=k\}=S_k(\lambda)-S_{k+1}(\lambda).$$

Сумма независимых случайных величин $X_1,\ldots,X_n$, имеющих П. р. с параметрами $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, подчиняется П. р. с параметром $\lambda_1+\ldots+\lambda_n$.

Обратно, если сумма X_1+X_2 двух независимых случайных величин X_1 и X_2 имеет П. р., то каждая случайная величина X_1 и X_2 подчинена П. р. Имеются общие необходимые и достаточные условия сходимости распределения сумм независимых случайных величин к П. р. При $\lambda\to\infty$ случайная величина $\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ имеет в пределе стандартное нормальное распределение.

П. р. было впервые получено С. Пуассоном (S. Poisson, 1837) при выводе приближенной формулы для

биномиального распределения в условиях, когда n (число испытаний) велико, а p (вероятность успеха) мало. См. *Пуассона теорема* 2). П. р. с хорошим приближением описывает многие физич. явления (см. [2], т. I, гл. 6). П. р. является предельным для многих дискретных распределений, таких как, напр., *гипергеометрическое распределение*, *отрицательное биномиальное распределение*, *Пойа распределение*, для распределений, возникающих в задачах о размещении частиц по ячейкам при определенном изменении их параметров. В вероятностных моделях П. р. играет большую роль как точное распределение вероятностей. Природа П. р. как точного распределения вероятностей наиболее полно раскрывается в теории случайных процессов (см. *Пуассоновский процесс*), где П. р. появляется как распределение числа $X(t)$ нек-рых случайных событий, происходящих в течение фиксированного интервала времени t:

$$\mathsf{P}\{X(t)=k\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

(параметр λ — среднее число событий в единицу времени), или, более общо, как распределение случайного числа точек в нек-рой фиксированной области евклидова пространства (параметр распределения пропорционален объему области).

Наряду с П. р., как оно определено выше, рассматривают и так наз. о б о б щ е н н о е или с л о ж н о е П. р. Так называют распределение вероятностей суммы $X_1+X_2+\ldots+X_\nu$ случайного числа ν одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ (при этом $\nu, X_1, X_2, \ldots$ считают взаимно независимыми, и ν — распределенным по П. р. с параметром λ). Характеристич. функция $\varphi(t)$ обобщенного П. р. равна

$$\varphi(t)=\exp\{\lambda(\psi(t)-1)\},$$

где $\psi(t)$ — характеристич. функция X_ν. Напр., отрицательное биномиальное распределение с параметрами n и p является обобщенным П. р., так как для него можно положить

$$\psi(t)=\frac{1}{\lambda}\log\frac{1}{1-qe^{it}},\quad \lambda=\log\frac{1}{p},\quad q=1-p.$$

Обобщенные П. р. безгранично делимы и каждое безгранично делимое распределение является пределом обобщенных П. р. (может быть «сдвинутых», т. е. с характеристич. функциями вида $\exp(\lambda_n(\psi_n(t)-1-ita_n))$. Вместе с тем все безгранично делимые распределения (и только они) могут быть получены как пределы распределений сумм вида $h_{n1}X_{n1}+\ldots+h_{nk_n}X_{nk_n}-A_n$, где $(X_{n1}, \ldots, X_{nk_n})$ образуют схему серий независимых случайных величин с П. р., $h_{nk_n}>0$ и A_n — действительные числа.

Лит.: [1] Poisson S. D., Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités, P., 1837; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [4] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972.

А. В. Прохоров.

ПУАССОНА СКОБКИ — дифференциальное выражение

$$(u, v)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i}-\frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}\right),\qquad (1)$$

зависящее от двух функций $u(q, p)$ и $v(q, p)$ $2n$ переменных $q=(q_1, \ldots, q_n)$, $p=(p_1, \ldots, p_n)$. Введены С. Пуассоном [1]. П. с.— частный случай *Якоби скобок*. П. с. есть билинейная форма от функций u, v, причем

$$(u, v)=-(v, u),$$

и имеет место тождество Якоби (см. [2])

$$(u, (v, w)) + (v, (w, u)) + (w, (u, v)) = 0.$$

П. с. применяются в теории дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка и являются удобным математич. аппаратом в аналитич. механике (см. [3]—[5]). Напр., если q, p — канонич. переменные и дано преобразование

$$Q = Q(q, p), \quad P = P(q, p), \tag{2}$$

где $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$, $P = (P_1, \ldots, P_n)$ и $(n \times n)$-матрицы

$$(P, P), \quad (Q, Q), \quad (Q, P) \tag{3}$$

составлены из элементов (P_i, P_j), (Q_i, Q_j), (Q_i, P_j) соответственно, то (2) является канонич. преобразованием тогда и только тогда, когда первые две матрицы в (3) нулевые, а третья — единичная.

П. с., вычисленные для случая, когда в (1) u и v замещены какой-либо парой координатных функций от q, p, наз. фундаментальными скобками.

Лит.: [1] Poisson S., «J. École polytechn.», 1809, t. 8, p. 266—344; [2] Jacobi C., «J. reine und angew. Math.», 1862, Bd 60, S. 1—181; [3] Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, пер. с англ., М.— Л., 1937; [4] Лурье А. И., Аналитическая механика, М., 1961; [5] Голдстейн Г., Классическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. *А. П. Солдатов.*

ПУАССОНА ТЕОРЕМА — 1) П. т.— предельная теорема теории вероятностей, являющаяся частным случаем *больших чисел закона*. П. т. обобщает *Бернулли теорему* на случай независимых испытаний, вероятность появления в к-рых нек-рого события зависит от номера испытаний (т. н. схема Пуассона). Формулировка П. т. такова: если в последовательности независимых испытаний событие A наступает с вероятностями p_k, зависящими от номера испытания k, $k = 1, 2, \ldots$, μ_n/n — частота A в первых n испытаниях, то при любом $\varepsilon > 0$ вероятность неравенства

$$\left| \frac{\mu_n}{n} - \frac{p_1 + \ldots + p_n}{n} \right| \leqslant \varepsilon$$

будет стремиться к 1 при $n \to \infty$. Теорема Бернулли следует из П. т. при $p_1 = \ldots = p_n$. П. т. была установлена С. Пуассоном [1]. Доказательство П. т. было получено С. Пуассоном из варианта *Лапласа теоремы*. Простое доказательство П. т. было дано П. Л. Чебышевым (1846), к-рому также принадлежит первая общая форма закона больших чисел, включающая П. т. в качестве частного случая.

2) П. т.— предельная теорема теории вероятностей о сходимости *биномиального распределения* к *Пуассона распределению*: если $P_n(m)$ — вероятность того, что в n испытаниях Бернулли нек-рое событие A наступает ровно m раз, причем и вероятность A в каждом испытании равна p, то при больших значениях n и $1/p$ вероятность $P_n(m)$ близка к

$$e^{-np} \frac{(np)^m}{m!}.$$

Величина $\lambda = np$ равна среднему значению числа наступлений A в n испытаниях, а последовательность значений $e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $\lambda > 0$, образует распределение Пуассона. П. т. была установлена С. Пуассоном [1] для схемы испытаний, более общей, чем схема Бернулли, когда вероятности наступления события A могут меняться от испытания к испытанию так, что $p_n \to 0$ при $n \to \infty$. Строгое доказательство П. т. в этом случае основано на рассмотрении схемы серий случайных величин такой, что в n-й серии случайные величины независимы и принимают значения 1 и 0 с вероятностями p_n и $1 - p_n$ соответственно. Более удобна форма П. т.

в виде неравенства: если $\lambda=p_1+\ldots+p_n$, $\delta=p_1^2+\ldots+p_n^2$, то при $n\geqslant 2$

$$\left| P_n(m)-e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}\right|\leqslant 2\delta.$$

Это неравенство указывает ошибку при замене $P_n(m)$ величиной $e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}$. Если $p_1=\ldots=p_n=\lambda/n$, то $\delta=\lambda^2/n$. П. т. и теорема Лапласа дают исчерпывающее представление об асимптотич. поведении биномиального распределения.

Последующие обобщения П. т. создавались в двух основных направлениях. С одной стороны, появились уточнения П. т., основанные на асимптотич. разложениях, с другой — были установлены общие условия сходимости сумм независимых случайных величин к распределению Пуассона.

Лит.: [1] Poisson S.-D., Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile..., P., 1837; [2] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [3] Боровков А. А., Теория вероятностей, М., 1976.

А. В. Прохоров.

ПУАССОНА УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными, к-рому удовлетворяет *объемный потенциал* внутри областей, занятых создающими этот потенциал массами. Для *ньютонова потенциала* в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, и *логарифмического потенциала* в $\mathbb{R}^2$ П. у. имеет вид

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=-\sigma(S^n)\,\rho(x_1,\ldots,x_n),$$

где $\rho=\rho(x_1,\ldots,x_n)$ — плотность распределения масс, $\sigma(S^n)=n\pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$ — площадь единичной сферы S^n в $\mathbb{R}^n$, $\Gamma(n/2+1)$ — значение гамма-функции.

П. у. является основным примером неоднородного уравнения эллиптич. типа. П. у. впервые рассмотрено С. Пуассоном (S. Poisson, 1812).

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [2] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

ПУАССОНА УРАВНЕНИЕ; численные методы решения — методы, заменяющие исходную краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\Delta u(x)\equiv\sum_{r=1}^{d}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_r^2}=f(x),\quad x\equiv(x_1,x_2,\ldots,x_d) \qquad (1)$$

системой из N линейных алгебраич. уравнений

$$L_N(u_N)=f_N, \qquad (2)$$

решение к-рой $u_N\equiv(u_1,u_2,\ldots,u_N)$ позволяет построить нек-рую аппроксимацию $p_N u_N$ для решения исходной задачи, $N\to\infty$.

В зависимости от способа сравнения решений исходной задачи (1) и дискретной задачи (2) определяются такие важнейшие понятия, как погрешность численного метода и оценка погрешности (точности). Другими характеристиками численных методов служат алгебраич. свойства систем (2) (дискретных аналогов краевых задач), связанные с устойчивостью их решений (корректностью дискретных задач) и возможностью отыскания точных или приближенных решений (2) теми или иными прямыми или итерационными методами при выполнении соответствующей вычислительной работы и соответствующих требованиях на объем используемой памяти ЭВМ (см. *Минимизация вычислительной работы*).

Важность численного решения краевых задач для П. у. определяется не только тем, что эти задачи часто возникают в разнообразных областях науки и техники, но и тем, что они нередко служат и средством решения более общих краевых задач как для уравнений и систем уравнений эллиптич. типа, так и различных нестационарных систем. Основными численными методами для решения рассматриваемых краевых задач являются проекционные методы и разностные методы.

Проекционные методы включают в себя ряд методов: вариационные, наименьших квадратов, Галеркина, проекционно-разностные, проекционно-сеточные, конечных элементов. Для всех них характерно сведение исходной краевой задачи к операторному уравнению

$$L(u) = f \tag{3}$$

(оператор L действует, напр., из гильбертова пространства H в H) с последующим выбором конечномерных подпространств H_N и F_N $(N \to \infty)$; сама задача (3) в этих методах заменяется задачей нахождения $\hat{u}_N \in H_N$ такой, что для любого $v \in F_N$

$$(L\hat{u}_N - f, v)_H = 0.$$

Тогда при заданных базисах в H_N и F_N система (2) является системой относительно коэффициентов разложения $\hat{u}_N$ по базису H_N и за $p_N u_N$ можно принять саму функцию $\hat{u}_N$; погрешность метода естественно определить как $\|u - \hat{u}_N\|_H$. В наиболее важных случаях H является нек-рым подпространством пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$, $H_N = F_N$, и если $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_N(x)$ — базис H_N, то система (2) принимает вид

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \int_\Omega \operatorname{grad} \psi_j \operatorname{grad} \psi_i(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, \psi_i(x)\, dx, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{4}$$

Погрешность метода при этом определяется расстоянием в H от решения исходной задачи до подпространства H_N (см. [1], [5]—[9]). В современных вариантах проекционных методов подпространства H_N стремятся выбирать так, чтобы функции $\psi_i(x)$ имели локальные носители и в каждом уравнении (4) лишь конечное число коэффициентов было отлично от нуля. Методы такого типа и наз. проекционно-сеточными методами (проекционно-разностными, вариационно-разностными, конечных элементов) (см. [1], [4], [7]—[9], [11]). Наибольшим достоинством этих методов является их применимость при достаточно сложной геометрии области Ω, в к-рой рассматривается краевая задача. К проекционным методам примыкает и относительно редко применяемый *коллокаций метод*.

Разностные (конечноразностные) методы используют аппроксимацию исходной области Ω нек-рой сеточной областью Ω_N, содержащей N узлов сетки, и обычно приводят к системе (2) на основе аппроксимации П. у. и соответствующих граничных условий их разностными (сеточными) аналогами, использующими лишь значения функции в выбранных узлах (см. [1]). Погрешность метода обычно получается сравнением вектора u_N и вектора, получаемого сужением искомого решения на множество рассматриваемых узлов. Корректность и аппроксимация могут изучаться при различных выборах норм, в частности возможно использование принципа максимума; сходимость получается как следствие корректности и аппроксимации (см. [1]—[4]).

Системы (2) могут выводиться и на основе нек-рых дискретных аналогов соответствующих вариационных задач и на основе аппроксимации нек-рых интегральных соотношений (см. [1], [2], [4], [10]); такие подходы несколько сближают эти варианты разностных методов с проекционно-разностными.

Методы решения систем сеточных уравнений (2) наиболее интенсивно изучались для простейших разностных аналогов на параллелепипедной сетке (см. [1], [9], [11]—[19]). В случае двух переменных и области Ω на плоскости, являющейся прямоугольником, часто применяются для ряда граничных условий прямые методы, позволяющие найти

решение (2) при затрате $O(N\ln N)$ арифметич. действий. Это — метод разделения переменных, использующий дискретное преобразование Фурье, и метод редукции (см. [12], [13]); известны и методы с оценкой $O(N)$ действий (см. [14]). При $d\geqslant 2$ и наличии разделения переменных (Ω в этом случае — параллелепипед) решение (2) с точностью $\varepsilon>0$ можно найти при затрате $O(N\ln N|\ln\varepsilon|)$ действий с помощью итерационного метода переменных направлений (см. [1], [12]); итерационные методы с факторизуемыми операторами (метод последовательной сверхрелаксации с симметризацией, неполной матричной факторизации, попеременно-треугольный) позволяют найти решение (2) с точностью ε при затрате $O(N^{1+1/2d}|\ln\varepsilon|)$ действий (см. [12], [15]) для довольно общих ситуаций.

В случае односвязных и многосвязных областей Ω на плоскости, составленных из конечного числа прямоугольников, решение системы (2) с точностью ε может быть найдено при затрате $O(N\ln N+N^{3/4}|\ln\varepsilon|\ \ln N)$ действий на основе разрезов Ω на прямоугольники (см. [15], [16]). Похожая асимптотика для дискретных аналогов задачи Дирихле в случае некоторых областей получена с помощью метода емкостей (см. [17]) и фиктивных неизвестных (см. [18]). Для ряда систем (2), являющихся проекционно-разностными аналогами исходных задач, затраты типа $O(N\ln N|\ln\varepsilon|)$, а иногда и $O(N\ln N)$ (при $\varepsilon\asymp N^{-\alpha}$, $\alpha>0$) достигаются с помощью итерационных методов, использующих эквивалентность операторов по спектру (см. [11], [17], [19]). Использование последовательностей сеток в ряде случаев позволяет получить итерационные методы, дающие решение (2) с точностью $\varepsilon\asymp N^{-\alpha}$, $\alpha>0$, при асимптотически минимальных затратах вычислительной работы (число действий есть $O(N)$) (см., напр., [1], [9], [11], [19]).

Лит.: [1] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977; [2] Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики, М., 1973; [3] Марчук Г. И., Шайдуров В. В., Повышение точности решений разностных схем, М., 1979; [4] Самарский А. А., Андреев В. Б., Разностные методы для эллиптических уравнений, М., 1976; [5] Михлин С. Г., Численная реализация вариационных методов, М., 1966; [6] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [7] Обэн Ж. П., Приближенное решение эллиптических краевых задач, пер. с англ., М., 1977; [8] Стренг Г., Фикс Дж., Теория метода конечных элементов, пер. с англ., М., 1977; [9] Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А., Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, ч. 1—2, Вильнюс, 1973—74 (Дифференциальные уравнения и их применение, в. 5, 8); [10] Самарский А. А., Фрязинов И. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 6, с. 167—97; [11] Дьяконов Е. Г., в кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике, Новосиб., 1978, с. 149—64; [12] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [13] Barker R. J., в кн.: Mathematical models and numerical methods, Warsz., 1978, p. 255—68 (Banach center publications, v. 3); [14] Bank R. E., Rose D. J., «SIAM J. Numer. Anal.», 1975, v. 12, № 4, p. 529—40; [15] Кузнецов Ю. А., в кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике, Новосиб., 1978, с. 178—212; [16] Дьяконов Е. Г., в кн.: Численные методы в математической физике, Новосиб., 1979, с. 45—68; [17] Астраханцев Г. П., в кн.: Разностные и вариационно-разностные методы, Новосиб., 1977, с. 63—72; [18] Капорин И. Е., Николаев Е. С., «Дифференциальные уравнения», 1980, т. 16, № 7, с. 1211—25; [19] Корнеев В. Г., Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности, Л., 1977.

Е. Г. Дьяконов.

ПУАССОНА ФОРМУЛА — 1) То же, что *Пуассона интеграл*.

2) Формула, дающая интегральное представление решения задачи Коши для волнового уравнения в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=0,\ t>0,\ M=(x,y,z),$$
$$-\infty<x,\ y,\ z<+\infty,$$
$$u(M,0)=\varphi(M),\ \frac{\partial u(M,0)}{\partial t}=\psi(M)$$

и имеющая вид

$$u(M, t) = \frac{\partial}{\partial t}\{t\Gamma_{at}(\varphi)\} + t\Gamma_{at}(\psi), \qquad (1)$$

где

$$\Gamma_{at}(\varphi) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_{at}} \varphi(P)\, d\Omega$$

— среднее значение функции φ на сфере S_{at} в пространстве (x, y, z) радиуса at с центром в точке M, $d\Omega$ — элемент площади единичной сферы. В случае неоднородного волнового уравнения в формуле (1) добавляется третье слагаемое (см. [2]).

Из формулы (1) *спуска методом* получаются формулы решения задачи Коши для случая двух (П у а с с о н а ф о р м у л а) и одного (Д' А л а м б е р а ф о р м у л а) пространственного переменного (см. [2]). См. также *Кирхгофа формула*.

3) Иногда П. ф. наз. интегральное представление решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = 0,\ t > 0,\ M = (x, y, z),$$
$$-\infty < x, y, z < +\infty,$$
$$u(M, 0) = \varphi(M),$$

имеющее вид

$$u(M, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi a^2 t})^3}\int_{\mathbb{R}_3} \varphi(P)\, e^{-\frac{|MP|^2}{4a^2t}}\, d\sigma(P). \qquad (2)$$

Формула (2) непосредственно обобщается на любое число пространственных переменных $n \geqslant 1$.

Лит.: [1] P o i s s o n S. D., «Mém. Acad. sci.», 1818, t. 3, p. 121—76; [2] Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [3] В л а д и м и р о в В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981.
Е. Д. Соломенцев.

ПУАССОНА ФОРМУЛА СУММИРОВАНИЯ — формула

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(2k\pi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-ikx}\, dx.$$

П. ф. с. имеет место, если, напр., функция $g(x)$ абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, +\infty)$, имеет ограниченное изменение и $2g(x) = g(x+0) + g(x-0)$. П. ф. с. записывается также в виде

$$\sqrt{a}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(ak) = \sqrt{b}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi(bk),$$

где a и b — любые два положительных числа, удовлетворяющие условию $ab = 2\pi$, а $\chi(u)$ есть преобразование Фурье функции g:

$$\chi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-iux}\, dx.$$

Лит.: [1] З и г м у н д А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965; [2] Т и т ч м а р ш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.— Л., 1948.
И. И. Волков.

ПУАССОНОВСКИЙ ПОТОК — то же, что *пуассоновский процесс*. Этот термин используют, как правило, в теории массового обслуживания.

ПУАССОНОВСКИЙ ПРОЦЕСС — случайный процесс $X(t)$ с независимыми приращениями $X(t_2) - X(t_1)$, $t_2 > t_1$, имеющими *Пуассона распределение*. В однородном П. п. для любых $t_2 > t_1$

$$\mathsf{P}\{X(t_2) - X(t_1) = k\} = \frac{\lambda^k (t_2 - t_1)^k}{k!}\, e^{-\lambda(t_2 - t_1)},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Коэффициент $\lambda > 0$ наз. и н т е н с и в н о с т ь ю п у а с с о н о в с к о г о п р о ц е с с а $X(t)$. Траектории П. п. $X(t)$ представляют собой ступенчатые функции со скачками размера 1. Моменты скачков $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ образуют *простейший поток*, описывающий поток тре-

бований во многих системах массового обслуживания. Распределения случайных величин $\tau_n - \tau_{n-1}$ независимы при $n=1,2,\ldots$ и имеют показательную плотность $\lambda e^{-\lambda t}$, $t \geqslant 0$.

Одним из свойств П. п. является следующее: условное распределение моментов скачков $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < t$ при $X(t) - X(0) = n$ совпадает с распределением вариационного ряда независимой выборки объема n с равномерным распределением на $[0, t]$. С другой стороны, если $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n$ — описанный выше вариационный ряд, то при $n \to \infty$, $t \to \infty$, с $n/t \to \lambda$ получают в пределе распределение скачков П. п.

В неоднородном П. п. интенсивность $\lambda(t)$ зависит от времени t и распределение $X(t_2) - X(t_1)$ определяется формулой

$$\mathsf{P}\{X(t_2) - X(t_1) = k\} = \frac{\left[\int_{t_1}^{t_2} \lambda(u)\, du\right]^k}{k!} e^{-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(u)\, du}.$$

При определенных условиях П. п. может быть показан как предел суммы неограниченно возрастающего числа независимых «редких» потоков довольно общего вида. О нек-рых поучительных парадоксах, связанных с П. п., см. [3], т. 2, гл. 1.

Лит.: [1] Боровков А. А., Теория вероятностей, М., 1976; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, 2 изд., пер. с англ., т. 1—2, М., 1967.

Б. А. Севастьянов.

ПУЛЬВЕРИЗАЦИЯ на дифференцируемом многообразии M — векторное поле W на касательном пространстве TM, имеющее в терминах локальных координат $(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n)$ на TM, естественным образом связанных с локальными координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ на M, компоненты $(v^1, \ldots, v^n, f^1, \ldots, f^n)$, где $f^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n)$ — функции класса C^1, причем при фиксированных $x^1, \ldots, x^n$ они являются положительно однородными функциями от $v^1, \ldots, v^n$ степени 2 (эти свойства W не зависят от конкретного выбора локальных координат). Определяемая этим полем система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i, \quad \frac{dv^i}{dt} = f^i(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

эквивалентна системе дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = f^i(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n),$$

поэтому П. описывает (причем инвариантным образом, т. е. не зависящим от системы координат) систему таких уравнений на M.

Важнейший случай П.— когда f^i суть многочлены 2-й степени от v^i:

$$f^i = \sum \Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)\, v^j v^k, \quad \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}. \qquad (*)$$

В этом случае Γ^i_{jk} задают на M *аффинную связность* с нулевым тензором кручения. Обратно, для всякой аффинной связности уравнения геодезич. линий задаются нек-рой П. с f^i вида (*) (причем при переходе от связности к пульверизации Γ^i_{jk} симметризуются по нижним индексам). Если поле W — класса C^2, то f^i обязаны иметь вид (*). В общем случае W, каким бы гладким оно ни было вне нулевого сечения расслоения TM, не обязано быть полем класса C^2 возле этого сечения. В такой ситуации иногда говорят об обобщенной П., оставляя термин «П.» только для специального случая (*). Дифференциальные уравнения для геодезических в финслеровой геометрии приводят к обобщенной П.

Можно дать определение П. в инвариантных терминах, пригодное и для банаховых многообразий (см. [1]).

Лит.: [1] Л е н г С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967. *Д. В. Аносов.*

ПУНКТИРОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X с отмеченной точкой x_0 в нем; пунктированный объект категории топологич. пространств. *М. И. Войцеховский.*

ПУНКТИРОВАННЫЙ ОБЪЕКТ категории C, обладающей финальным объектом,— пара (X, x_0), где $X \in 0bC$, x_0 — морфизм финального объекта в X. Важнейший пример: пунктированное топологич. пространство, т. е. пара (X, x_0), где X — топологич. пространство, $x_0 \in X$ — точка, называемая отмеченной. Пунктированные топологич. пространства образуют категорию, морфизмами в к-рой являются отображения, переводящие отмеченную точку в отмеченную. *А. Ф. Харшиладзе.*

ПУНКТИФОРМНЫЙ НАРОСТ — нарост топологич. пространства X в его бикомпактном расширении Y такой, что всякий связный бикомпакт в $Y \setminus X$ состоит из одной точки. *М. И. Войцеховский.*

ПУСТОЕ МНОЖЕСТВО — множество, не содержащее элементов. Обозначения: $\varnothing$, Λ. Иначе, $\varnothing = \{x : x \neq x\}$, при этом вместо $x \neq x$ в этом определении можно было бы использовать любое всегда ложное утверждение. П. м. является подмножеством любого множества. *М. И. Войцеховский.*

ПУСТЫХ ЯЩИКОВ КРИТЕРИЙ — статистический критерий проверки гипотезы H_0 о принадлежности независимой выборки фиксированному распределению. Подробнее, пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимая выборка, взятая из непрерывного распределения $F(x)$. Точки $z_0 = -\infty < z_1 < z_2 < \ldots < z_{N-1} < z_N = \infty$ выбираются так, чтобы $F(z_k) - F(z_{k-1}) = 1/N$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Критерий строится на основе статистики μ_0, равной числу полуинтервалов $(z_{k-1}, z_k]$, в к-рые не попало ни одного наблюдения x_i. Этот критерий имеет следующий вид: если $\mu_0 \leqslant C$, то гипотеза H_0 принимается; если $\mu_0 > C$, то гипотеза H_0 отвергается. Константа C выбирается из условия, что ошибка 1-го рода, т. е. вероятность отвергнуть гипотезу H_0 если она верна, равна заданному значению. Вычисление константы C и расчет мощности П. я. к. при больших n и N производится с помощью предельных теорем в случайных размещениях.

Лит.: [1] К о л ч и н В. Ф., С е в а с т ь я н о в Б. А., Ч и с т я к о в В. П., Случайные размещения, М., 1976. *Б. А. Севастьянов.*

ПУТЕЙ ПРОСТРАНСТВО — пространство E расслоения (E, p, X), называемое расслоением путей, где X — линейно связное пространство с отмеченной точкой $*$, E — множество *путей* в X, начинающихся в $*$, p — отображение, сопоставляющее каждому пути его концевую точку; при этом E рассматривается в компактно открытой топологии. Слоем этого расслоения (являющегося *Серра расслоением*) является *петель пространство* ΩX — множество всех *петель* пространства X в точке $*$. П. п. стягивается по себе в точку, так что гомотопич. группы $\pi_n(E) = 0$, и гомотопич. последовательность расслоения путей вырождается в т. н. изоморфизмы Гуревича:

$$\pi_n(\Omega X) \approx \pi_{n+1}(X).$$

М. И. Войцеховский.

ПУТЬ — непрерывное отображение f отрезка $[0, 1]$ в топологич. пространство X. Точки $f(0)$ и $f(1)$ наз. начальной и концевой точками пути f. П., определенный по f формулой $t \to f(1-t)$, $t \in [0, 1]$, наз. путем, обратным f, и обозначается f^{-1}. П., определяемый по путям f_1 и f_2 с $f_1(1) = f_2(0)$ формулой

$$t \longrightarrow \begin{cases} f(2t), & t \leqslant 1/2, \\ f(2t-1), & t \geqslant 1/2, \end{cases}$$

наз. произведением путей f_1 и f_2 и обозначается $f_1 f_2$. Совокупность всех П. линейно связного

пространства X с отмеченной точкой *, начинающихся в ней, образует *путей пространство*. *М. И. Войцеховский.*

ПУЧКОВ ТЕОРИЯ — специальный математич. аппарат, обеспечивающий единый подход для установления связи между локальными и глобальными свойствами топологич. пространств (в частности, геометрич. объектов) и являющийся мощным средством исследования многих задач в современной алгебре, геометрии, топологии и анализе.

На топологич. пространстве X задан п р е д п у ч о к F, если каждому открытому подмножеству $U \subset X$ сопоставлена абелева группа (кольцо, модуль над кольцом и т. п.) $F(U)$ и всякой паре открытых множеств $V \subset U$ — гомоморфизм $F_V^U : F(U) \to F(V)$ такой, что F_U^U — тождественный изоморфизм и $F_W^U = F_W^V F_V^U$ для каждой тройки $W \subset V \subset U$. Другими словами, предпучок — контравариантный функтор из категории открытых подмножеств X и их вложений в категорию групп (колец и т. п.) и их гомоморфизмов. Отображения F_V^U, наз. г о м о м о р ф и з м а м и о г р а н и ч е н и я (напр., если $F(U)$ — функции какого-либо типа, F_V^U — ограничения их на меньшее подмножество). На множестве $\mathcal{F} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$, где $\mathcal{F}_x$ — прямой предел $\varinjlim_{x \in U} F(U)$, следующим образом определена топология: для всякого $U \subset X$ и любого $\sigma \in F(U)$ в $\mathcal{F}$ объявляется открытым множество S, состоящее из тех точек $\mathcal{F}_x$, $x \in U$, к-рые служат образами σ при определении $\mathcal{F}_x$. В этой топологии слои $\mathcal{F}_x$ дискретны и замкнуты в $\mathcal{F}$, определяемые прямыми пределами послойные алгебраич. операции на $\mathcal{F}$ непрерывны, а естественная проекция $p : \mathcal{F} \to X$, при к-рой $\mathcal{F}_x = p^{-1}(x)$, является локальным гомеоморфизмом. Пространство $\mathcal{F}$ вместе с послойными алгебраич. операциями и проекцией p наз. п у ч к о м абелевых групп (колец и т. п.) над X, определяемым предпучком F.

Всякое непрерывное отображение $s : U \to \mathcal{F}$, для к-рого $x = ps(x)$, наз. с е ч е н и е м $\mathcal{F}$ над U. Сечение $\mathcal{F}$ над X, определяемое всеми нулями в $\mathcal{F}_x$, наз. н у л е в ы м. Если нек-рое сечение s равно нулю в точке x, то s совпадает с нулевым сечением в нек-рой окрестности x, поэтому множество тех точек, в к-рых s отлично от нуля (носитель сечения s), замкнуто в U.

Пусть $\Gamma(U, \mathcal{F})$ (соответственно $F_\Phi(X, \mathcal{F})$, где Φ — нек-рое семейство замкнутых множеств в X, в частности $\Gamma_c(X; \mathcal{F})$) — группа (кольцо, модуль и т. п.) всех сечений над U (соответственно сечений над X с носителями из Φ, в частности сечений с компактными носителями). Соответствие $U \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ является предпучком над X, к-рый наз. п р е д п у ч к о м с е ч е н и й пучка $\mathcal{F}$. Используемое при определении топологии на $\mathcal{F}$ соответствие $\sigma \to s$ определяет также гомоморфизмы $F(U) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$, коммутирующие с ограничениями на $V \subset U$, т. е. гомоморфизм предпучков. Этот гомоморфизм является изоморфизмом при условии, что исходный предпучок F удовлетворяет требованиям: а) если $U = \bigcup_\lambda U_\lambda$ и σ, $\sigma' \in F(U)$, то $\sigma = \sigma'$, если равны ограничения σ, σ' на все U_λ; б) если $U = \bigcup_\lambda U_\lambda$, а $\sigma_\lambda \in F(U_\lambda)$ — такой набор элементов, что ограничения σ_λ, σ_μ на $U_\lambda \cap U_\mu$ совпадают, то существует $\sigma \in F(U)$, ограничения к-рого на каждое U_λ совпадают с σ_λ. Понятие предпучка, удовлетворяющего этим требованиям, эквивалентно понятию порожденного им пучка, поэтому такие предпучки также нередко наз. п у ч к а м и.

Пучок вида $X \times G$, где G — нек-рая группа, наз. п о с т о я н н ы м и обозначается через G. Л о к а л ь н о п о с т о я н н ы м наз. пучок, постоянный в достаточно малых окрестностях $x \in X$. Топология таких пучков отделима, если X — отделимое пространство.

В более типичных ситуациях топология $\mathcal{F}$ может быть неотделимой, даже если отделимо X (таков, напр., пучок ростков непрерывных (или дифференцируемых) функций, порожденный предпучком F, где $F(U)$ — непрерывные (дифференцируемые) функции на U; однако пучок ростков аналитич. функций на многообразии отделим).

Всякий гомоморфизм предпучков $F \to F'$ приводит к отображению соответствующих пучков $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$, к-рое является локальным гомеоморфизмом и гомоморфно отображает слои в слои; такое отображение пучков наз. гомоморфизмом пучков. Стандартным образом определяются моно- и эпиморфизмы. При любом гомоморфизме $f: \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ образ $f(\mathcal{F}')$ есть открытая часть $\mathcal{F}$, замкнутая по отношению к послойным алгебраич. операциям. Всякая часть $\mathcal{F}$, удовлетворяющая этим требованиям, наз. подпучком в $\mathcal{F}$. Факторпучок пучка $\mathcal{F}$ по подпучку $\mathcal{F}'$ определяется как пучок $\mathcal{F}''$, порожденный предпучком $U \to \Gamma(U, \mathcal{F})/\Gamma(U, \mathcal{F}')$; при этом имеется эпиморфизм $\mathcal{F} \to \mathcal{F}''$, причем $\mathcal{F}''_x = \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x$. Для всякого открытого $U \subset X$ через $\mathcal{F}_U$ обозначается подпучок в $\mathcal{F}$, являющийся объединением $p^{-1}(U)$ с нулевым сечением $\mathcal{F}$ над X, а через $\mathcal{F}_{X \setminus U}$ — соответствующий факторпучок (ограничение к-рого на $X \setminus U$ совпадает с ограничением $\mathcal{F}$).

Возможность употреблять по отношению к пучкам над X такие привычные термины, как гомоморфизм, ядро, образ, подпучок, факторпучок и т. д., вкладывая в эти понятия такой же смысл, как в алгебре, позволяет рассматривать их с категорной точки зрения и применять в П. т. конструкции *гомологической алгебры*. Возникающие над X категории пучков родственны таким классическим, как категория абелевых групп или категория модулей; в частности, для пучков определяются прямые суммы, бесконечные прямые произведения, индуктивные пределы и др. понятия.

Аппарат П. т. проник в разнообразные области математики благодаря тому, что определены естественные когомологии $H^*(X, \mathcal{F})$ пространства X с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$, причем без каких-либо ограничений на X (что существенно, напр., в алгебраич. геометрии, где возникающие пространства, как правило, неотделимы), и что другие когомологии (в тех или иных конкретных условиях) сводятся к пучковым по крайней мере в тех ситуациях, где их применение оправдано.

Для определения $H^*(X, \mathcal{F})$ сначала строится каноническая резольвента

$$C^*(\mathcal{F}): 0 \to \mathcal{F} \to C^0(\mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{F}) \to \dots,$$

где $C^0(\mathcal{F})$ — пучок, определяемый предпучком F, для к-рого $F(U)$ — группа всех (включая разрывные) сечений $\mathcal{F}$ над U, при этом $\Gamma(U, C^0(\mathcal{F})) = F(U)$, $C^1(\mathcal{F}) = C^0(C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F})$, ..., $C^{p+1}(\mathcal{F}) = C^0(C^p(\mathcal{F})/\operatorname{Im} C^{p-1}(\mathcal{F}))$, ... По определению, $H^p(X, \mathcal{F}) = H^p(\Gamma(X, C^*(\mathcal{F}))$ ($H^p_\Phi(X, \mathcal{F})$ получаются заменой символа Γ на Γ_Φ)). При этом сам пучок $\mathcal{F}$ удаляется из $C^*(\mathcal{F})$, так что $H^0_\Phi(X, \mathcal{F}) = \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F})$ (для классич. когомологий $H^0(X, G)$ — группа локально постоянных функций на X со значениями в G). Резольвента $C^*(\mathcal{F})$ — точный ковариантный функтор от $\mathcal{F}$: точной тройке «коэффициентов» $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ отвечает точная тройка резольвент. Функтор Γ_Φ оказывается точным на членах C^p, $p \geqslant 0$, резольвент, поэтому указанным коэффициентам отвечает точная последовательность когомологий

$$\dots \to H^{p-1}_\Phi(X, \mathcal{F}'') \to H^p_\Phi(X, \mathcal{F}') \to$$
$$\to H^p_\Phi(X, \mathcal{F}) \to H^p_\Phi(X, \mathcal{F}'') \to \dots,$$

начинающаяся с $0 \to \Gamma_\Phi(X, \mathscr{F}') \to \Gamma_\Phi(X, \mathscr{F}) \to \dots$. Когомологич. последовательность пары (X, A) отвечает тройке $0 \to \mathscr{F}_{X \setminus A} \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}_A \to 0$ (A — замкнутое множество).

Когомологии $H^*_\Phi(X, \mathscr{F})$ обладают следующим свойством «универсальности», раскрывающим их значение: для любой другой резольвенты $\mathscr{L}^*$ (т. е. начинающейся с $\mathscr{F}$ точной последовательности пучков $\mathscr{L}^q$) имеется естественный гомоморфизм «сравнения» $H^p(\Gamma_\Phi(X, \mathscr{L}^*)) \to H^p_\Phi(X, \mathscr{F})$, для описания к-рого в терминах $H^p_\Phi(X, \mathscr{L}^q)$ применяются спектральные последовательности. Важен случай, когда пучки резольвенты Ф а ц и к л и ч н ы, т. е. когда $H^p_\Phi(X, \mathscr{L}^q) = 0$ при $p \geqslant 1$: в этом случае указанный гомоморфизм есть изоморфизм. Основными примерами ацикличных пучков являются вялые пучки (для всех $U \subset X$ отображения $\Gamma(X, \mathscr{L}) \to \Gamma(U, \mathscr{L})$ эпиморфны) и мягкие пучки (любое сечение над замкнутым множеством продолжается до сечения над всем X). Канонич. резольвента состоит из вялых пучков. Если X — паракомпактное пространство, то всякий вялый пучок является также и мягким.

Свойство универсальности позволяет сравнивать с пучковыми (а следовательно, и между собой) когомологии, возникающие в более конкретных ситуациях, определять для них те естественные границы, в к-рых их применение эффективно, а также применять методы П. т. для решения конкретных задач. Напр., когомологии Александрова — Чеха можно определить с помощью коцепей, получающихся из коцепей специально подобранной системы открытых покрытий переходом к прямому пределу. Эти коцепи оказываются сечениями пучков ростков коцепей (определяемых аналогично пучкам ростков функций), составляющих резольвенту группы (или даже пучка) коэффициентов, к-рая оказывается мягкой, если пространство паракомпактно. Таким образом, для паракомпактных пространств когомологии Александрова — Чеха совпадают с пучковыми. Аналогичный вывод имеет место для пространств Зариского (в частности, для алгебраич. многообразий). Сечениями пучков резольвенты оказываются и коцепи Александера — Спеньера, причем резольвента состоит из мягких пучков, если X паракомпактно, в частности, в этом случае когомологии Александера — Спеньера и Александрова — Чеха естественно изоморфны. В случае сингулярных когомологий отождествление коцепей, совпадающих друг с другом на сингулярных симплексах мелкости (произвольных) открытых покрытий, приводит к т. н. локализованным коцепям (дающим те же когомологии), к-рые являются сечениями пучков, определяемых предпучками обычных сингулярных коцепей. Пучки оказываются мягкими, если X паракомпактно (а если X наследственно паракомпактно, то даже вялыми), но образуют резольвенту при дополнительном требовании, чтобы X было слабо локально стягиваемым (в каждой окрестности U каждой точки $x \in X$ найдется меньшая окрестность, стягиваемая в точку внутри U). Классич. примером является т е о р е м а д е Р а м а: когомологии комплекса дифференциальных форм дифференцируемого многообразия совпадают с обычными когомологиями с коэффициентами в поле $\mathbb{R}$ действительных чисел (пучки ростков дифференциальных форм являются мягкими и образуют резольвенту $\mathbb{R}$: вблизи каждой точки каждая замкнутая дифференциальная форма является точной).

Имеются также резольвенты, отвечающие любым открытым или локально конечным замкнутым покрытиям и позволяющие сравнивать когомологии X с когомологиями покрытий (спектральные последовательности покрытий). В частности, изоморфизм обеспечивается

условием $H^q=0$ при $q \geqslant 1$ для всех элементов покрытия и их конечных пересечений (теорема Лере). Переход к прямому пределу по открытым покрытиям дает изоморфизм когомологий Александрова — Чеха $\check{H}^*$ с пучковыми и для непаракомпактных X при условии, что в X имеется достаточно много мелких открытых множеств U, для к-рых $\check{H}^q(U, \mathcal{F})=0$ при $q \geqslant 1$ (теорема Картана). Это означает, что применяемые в алгебраич. геометрии когомологии $\check{H}^*$ с коэффициентами в когерентных пучках также изоморфны стандартным пучковым когомологиям H^*.

Общие конструкции, обеспечивающие гомоморфизм сравнения, позволяют также сравнивать когомологии $H^p(X, \mathcal{H}^q)$ с $H^*(\Gamma(X, \mathcal{L}^*))$ [аналогично $H^p_\Phi(X, \mathcal{H}^q)$ с $H^*(\Gamma_\Phi(X, \mathcal{L}^*))$] в случае, когда $\mathcal{L}^*$ — любой д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы й п у ч о к (т. е. пучок, в к-ром для любого q композиция $\mathcal{L}^q \to \mathcal{L}^{q+2}$ равна нулю) с ацикличными $\mathcal{L}^q$, где $\mathcal{H}^q$ — производные пучки от $\mathcal{L}^*$ (являющиеся факторпучками ядер по образам в каждой размерности q). Соответствующие этому спектральные последовательности имеют много различных применений. При этом, если $\mathcal{H}^q=0$ при $q \geqslant 1$, то $H^*(\Gamma(X, \mathcal{L}^*))=H^*(X, \mathcal{H}^0)$. Напр., если в качестве $\mathcal{L}^*$ взять пучок цепей $\mathcal{C}_*$ (оператор границы понижает размерность на единицу, $\Gamma(U, \mathcal{C}_*)$ — цепи пары $(X, X \setminus U)$, слои $\mathcal{H}^x_q = \varinjlim_{x \in U} H_q(X, X \setminus U)=H_q(X, X \setminus x)$), то

получается зависимость гомологий $H^\Phi_*(X, G)$ от всевозможных $H^p_\Phi(X, \mathcal{H}_q)$. На многообразии $\mathcal{H}_q=0$ при $q < n=\dim X$ и $H^\Phi_p(X, G)=H^{n-p}_\Phi(X, \mathcal{H}_n)$, т. е. имеет место *Пуанкаре двойственность*. Если A — открытое или замкнутое подмножество локально компактного X, то гомологии A определяются теми сечениями $\mathcal{C}_*$, носители к-рых содержатся в A, а гомологии пары (X, A) — сечениями ограничения $\mathcal{C}_*$ на $X \setminus A$. Наоборот (и это — тоже одно из проявлений двойственности Пуанкаре), если $\mathcal{C}^*$ — любая вялая резольвента для когомологий, то ограничение $\mathcal{C}^*$ на $X \setminus A$ определяет когомологии $X \setminus A$, а сечения $\mathcal{C}^*$ с носителями в A — когомологии пары $(X, X \setminus A)$. Пучки $\mathcal{C}_*$ вялые, и в случае многообразия гомологич. последовательность пары (X, A) совпадает с точностью до обратной нумерации с когомологич. последовательностью пары $(X, X \setminus A)$. Это означает, что двойственности в многообразиях, подобные *Лефшеца двойственности* $H_p(X, U, G)=H^{n-p}(X \setminus U, \mathcal{H}_n)$, являются частными случаями двойственности Пуанкаре. Оказывается, что соотношения двойственности, не укладывающиеся в эту схему, являются следствиями двойственности Пуанкаре и ацикличности многообразия в нек-рых размерностях.

Такая же ситуация возникает в случае непрерывного отображения $f: X \to Y$. Резольвента для когомологий X определяет на Y нек-рый дифференциальный пучок $\mathcal{L}^*$, для к-рого слои $\mathcal{H}^q_y$ суть прямые пределы когомологий $H^q(f^{-1}(U), \mathcal{F})$ по окрестностям U точек y (а для замкнутых отображений $H^q_y=H^q(f^{-1}(y), \mathcal{F})$), причем $H^*(X, \mathcal{F})=H^*(\Gamma(Y, \mathcal{L}^*))$. Возникающая зависимость $H^*(X, \mathcal{F})$ от $H^p(Y, \mathcal{H}^q)$ описывается спектральной последовательностью Лере отображения f (частным случаем к-рой является спектральная последовательность *Серра расслоения*). Обращение в нуль $\mathcal{H}^q$ отвечает ацикличным отображениям, обеспечивая изоморфизмы когомологий X и Y с соответствующими коэффициентами (теорема Вьеториса и ее обобщения). Упоминавшиеся выше общие конструкции дают также спектральную последовательность отображения, учитывающую (наряду с их когомологич. струк-

турой) степень несвязности прообразов точек, к-рая особенно эффективна для нульмерных или конечнократных отображений (в случае накрытий она превращается в спектральную последовательность Картана). Имеются также специальные спектральные последовательности в категориях G-пространств (пространств, на к-рых определено действие группы G).

В пучковых когомологиях естественным образом определяется мультипликативная структура. Существование специальных вялых резольвент, отображения внутри к-рых определяются нек-рой полусимплициальной структурой, позволяет дать явные формулы для умножения коцепей, аналогичные обычным. Одновременно это дает возможность определить в П. т. и др. когомологич. операции.

Аппарат П. т. находит много применений всюду, где существенно использование абстрактных гомологич. методов: в топологии (гомологич. и когомологич. размерность, локальные гомологии и двойственность, структура различных классов непрерывных отображений, в том числе вложений на плотные подмножества, в частности бикомпактификаций, и т. п.), в теории аналитич. многообразий [гомологии и когомологии с коэффициентами в когерентных аналитич. пучках и их приложения, когомологии и аналитические дифференциальные формы, гомологии и аналитич. потоки (аналог теоремы де Рама и т. п.)], а также в абстрактной алгебраич. геометрии (когомологии аффинных, проективных и полных алгебраич. многообразий с коэффициентами в когерентных алгебраич. пучках, алгебраич. двойственность Серра, алгебраическая (комбинаторная) размерность и др.).

Нек-рые основные идеи П. т. и спектральных последовательностей появились в работе Ж. Лере (J. Leray, 1945 и позже) в связи с изучением гомологич. свойств непрерывных отображений локально компактных пространств, к-рым было дано также определение когомологий (с компактными носителями) с коэффициентами в пучке. Довольно полное изложение теории пучков с применением резольвент было дано позже А. Картаном (H. Cartan). Большое влияние на развитие П. т. оказали данное А. Вейлем (A. Weil, 1947) доказательство теоремы де Рама и работы Ж. П. Серра (J.-P. Serre, нач. 50-х гг.) по алгебраич. многообразиям. Когомологии с коэффициентами в пучке определялись первоначально способом Александрова — Чеха. Завершенный вид П. т. приобрела в конце 50-х гг. в работах А. Гротендика (A. Grothendieck) и Р. Годмана (R. Godement), в к-рых была достигнута максимальная общность, а методы значительно упрощены. В частности, было показано, что в категории пучков над X имеется образующая (т. е. пучок J, допускающий ненулевые гомоморфизмы в любой ненулевой пучок; для пучков абелевых групп $J=\sum_{U\subset X}\mathbb{Z}_U$), так что каждый пучок вкладывается в инъективный (теорема Гротендика). В этом состоит причина формальной аналогии между теорией когомологий с коэффициентами в пучках и теорией производных от функторов в категории модулей: в категории пучков над X «достаточно» инъективных объектов (хотя, как правило, мало проективных), и поэтому можно свободно применять все соответствующие средства гомологич. алгебры, в частности определять когомологии $H^*_\Phi(X, \mathcal{F})$ (без каких-либо ограничений на X) как производные точного слева функтора $\Gamma_\Phi(X, \mathcal{F})$ (и даже как $\mathrm{Ext}^*(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F})$). Это же проливает свет и на общую природу, напр., таких понятий, как когомологич. размерность (над $\mathbb{Z}$) пространства, алгебраич. размерность многообразия и глобальная размерность кольца. А. Гротендиком дано описание спектральной последовательности для функтора $E\times t$, необходимой в алгебраич. геометрии. Более простой

способ конструирования инъективных пучков был найден Р. Годеманом. Он показал также, что для построения теории когомологий вполне достаточно пользоваться предложенной им канонической вялой резольвентой, к-рая с точки зрения гомологич. алгебры оказывается просто одной из ацикличных резольвент пучка. Р. Годеман первым стал применять вялые и мягкие пучки, оказывающиеся ацикличными в том же смысле (мягкие ацикличны лишь при условии паракомпактности X, чем объясняется их использование преимущественно в топологии).

Лит.: [1] Bredon G. E., Sheaf theory, N. Y., 1967; [2] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [3] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961; [4] Swan R., The theory of sheaves, Chi.— L., 1964.

Е. Г. Скляренко.

ПУЧОК — 1) П. — *предпучок* F такой, что для всякого объединения $U=\cup_\lambda U_\lambda$ открытых подмножеств U_λ топологич. пространства X выполнены следующие условия: 1) если ограничения на каждое U_λ элементов s и s' из $F(U)$ совпадают, то $s'=s''$; 2) если $s_\lambda \in F(U_\lambda)$ таковы, что для любой пары индексов λ, μ ограничения s_λ и s_μ на $U_\lambda \cap U_\mu$ совпадают, то существует элемент $s\in F(U)$, ограничения к-рого на все U_λ совпадают с s_λ. Всякий П. на X изоморфен П. *ростков* непрерывных сечений некоторого накрывающего пространства $p : E \to X$ над X, к-рое определяется однозначно с точностью до изоморфизма (под накрывающим пространством понимается непрерывное отображение E на X, являющееся локальным гомеоморфизмом), поэтому под П. обычно понимается также и само накрывающее отображение $p : E \to X$ (см. *Пучков теория*).

Е. Г. Скляренко.

2) П.— однопараметрическое семейство линий на плоскости или поверхностей в пространстве, линейно зависящее от параметра. Пусть F_1 и F_2 — функции двух переменных, непропорциональные друг другу. Семейство линий на плоскости, определяемых уравнением

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$$

при всевозможных значениях параметров λ_1 и λ_2 (кроме $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$), представляет собой П. (фактически П. зависит от одного параметра $\lambda_1 : \lambda_2$). Аналогично записывается уравнение П. поверхностей в пространстве. Два уравнения $F_1=0$, $F_2=0$ дают два элемента П. (две линии или две поверхности), к-рые определяют весь П. Каждые два элемента П. пересекаются по одному и тому же множеству точек — н о с и т е л ю. Носитель П. может содержать как действительные, так и мнимые точки. Если исходные кривые П. являются алгебраич. кривыми *порядков* m *и* n, *то носитель* состоит из mn точек (действительных или мнимых, собственных или несобственных).

П у ч о к п р я м ы х — множество всех прямых, лежащих в одной плоскости и проходящих через фиксированную точку (с о б с т в е н н ы й П.) или параллельных фиксированной прямой (н е с о б с т в е н н ы й П.). Уравнение П. прямых имеет вид

$$\lambda_1 (A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2 (A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

П у ч о к п л о с к о с т е й — множество всех плоскостей, проходящих через фиксированную прямую (с о б с т в е н н ы й П.) или параллельных нек-рой фиксированной плоскости (н е с о б с т в е н н ы й П.). Уравнение П. плоскостей имеет вид

$$\lambda_1 (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2 (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

П у ч о к о к р у ж н о с т е й — однопараметрическое семейство окружностей, линейно зависящее от параметра. П. окружностей содержит окружности и одну прямую. Носителем (с о б с т в е н н о г о) П. окружностей являются две круговые точки и две собственные точки a и b. Если $a \neq b$, то П. окружностей

можно определить как множество окружностей (считая прямые окружностями бесконечного радиуса), проходящих через точки a и b; если $a=b$, нужно дополнительно требовать, чтобы окружности касались друг друга в точке a. Если a и b действительные и различные, П.

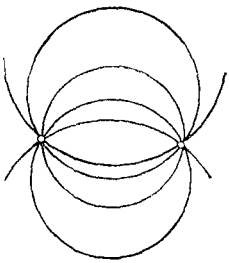


Рис. 1.

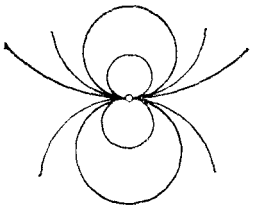


Рис. 2.

окружностей наз. эллиптическим (рис. 1), если *совпавшие* (действительные) — параболическим (рис. 2), если мнимые (различные) — гиперболическим (рис. 3). Несобственным П. окружностей наз. совокупность концентрических окружностей (рис. 4).

У каждого собственного П. окружностей существует так наз. *радикальная ось* — прямая, каждая точка к-рой

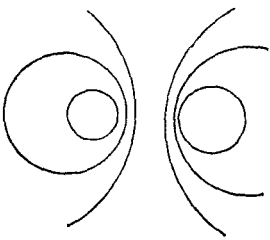


Рис. 3.

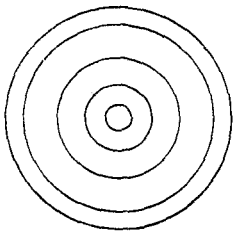


Рис. 4.

имеет одинаковую степень точки (различную для различных точек) относительно всех окружностей П. Радикальная ось эллиптического П. проходит через общие точки окружностей; параболического — является их общей касательной; гиперболического — линией центров двух окружностей, ортогональных ко всем окружностям П. Центры окружностей П. лежат на прямой, перпендикулярной радикальной оси. Точка пересечения линии центров П. и его радикальной оси наз. центром П. Степень центра П. относительно любой окружности П. одинакова и наз. степенью П. Если ось абсцисс является линией центров окружностей П., а ось ординат — радикальной осью П., то уравнение произвольной окружности П. имеет вид

$$x^2+y^2-2xt+p=0,$$

где t — параметр, определяющий данную окружность, p — степень П. Для эллиптического П. $p<0$, для параболического П. $p=0$, для гиперболического $p>0$ (степень несобственного П. можно считать бесконечной).

Окружности, ортогональные всем окружностям данного П., сами образуют П.; про этот П. говорят, что он сопряжен с данным. Эллиптический П. сопряжен с гиперболическим, параболический — с параболическим.

Любой П. окружностей является пересечением двух *связок* окружностей.

Пучок сфер — однопараметрическое семейство сфер, линейно зависящее от параметра. Любые две сферы П. пересекаются по нек-рой окружности действительного, нулевого или мнимого радиуса. В первом

случае П. сфер наз. эллиптическим, он состоит из всех сфер, проходящих через данную окружность; во втором — параболическим, П. состоит из всех сфер, касающихся друг друга в общей точке; в третьем — гиперболическим, П. состоит из всех сфер, ортогональных к нек-рым трем данным сферам, пересекающимся в двух точках. У П. сфер имеется так наз. радикальная плоскость, каждая точка к-рой имеет одинаковую степень (различную для разных точек) относительно сфер П.; центры всех сфер П. лежат на одной прямой, перпендикулярной радикальной плоскости.

П. сфер является пересечением трех сетей сфер, центры к-рых не лежат на одной прямой.

В проективной геометрии алгебраическим пучком прямых наз. множество всех прямых проективной плоскости, координаты u_1, u_2, u_3 к-рых удовлетворяют уравнению

$$F(u_1, u_2, u_3) = 0,$$

где $F(u_1, u_2, u_3)$ — не равный тождественно нулю многочлен, однородный относительно переменных u_1, u_2, u_3; степень многочлена F наз. степенью (или порядком) П. прямых. Алгебраический П. прямых первого порядка задается уравнением

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0$$

и представляет собой множество всех прямых, проходящих через точку с координатами (a_1, a_2, a_3).

Алгебраический П. прямых второго порядка задается уравнением

$$f_{11}u_1^2 + f_{22}u_2^2 + f_{33}u_3^2 + 2f_{12}u_1u_2 + 2f_{13}u_1u_3 + 2f_{23}u_2u_3 = 0, \quad f_{ij} = f_{ji}, \ i, \ j = 1, 2, 3,$$

где f_{ij} — действительные числа, среди к-рых по крайней мере одно отлично от нуля. Если дискриминант $\delta = |f_{ij}|$, $i = 1, 2, 3$, отличен от нуля, П. прямых второго порядка наз. невырожденным, если $\delta = 0$ — вырожденным. Каждый невырожденный П. второго порядка является множеством касательных к невырожденной линии второго порядка; каждая невырожденная линия второго порядка является огибающей нек-рого невырожденного П. второго порядка.

Лит.: [1] Постников М. М., Аналитическая геометрия, М., 1973.

А. Б. Иванов.

ПФАФФА ПРОБЛЕМА — проблема описания интегральных многообразий максимальной размерности для системы *Пфаффа уравнений*

$$\theta^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \ \dots, \ q, \qquad (*)$$

задаваемой набором из q дифференциальных 1-форм в нек-рой области $M \subset \mathbb{R}^n$ (или на нек-ром многообразии), линейно независимых в каждой точке. Подмногообразие $N \subset M$ наз. интегральным многообразием системы (*), если ограничение форм θ^α на N тождественно равно нулю. П. п. была поставлена И. Пфаффом (J. Pfaff, 1814).

С геометрич. точки зрения система (*) определяет $(n-q)$-мерное распределение (*Пфаффа структуру*) в M, т. е. поле

$$x \mapsto P_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \theta_x^\alpha(y) = 0\}, \quad x \in M,$$

$(n-q)$-мерных подпространств, а П. п. состоит в описании подмногообразий максимальной возможной размерности, касающихся этого поля. Важность П. п. определяется тем, что интегрирование произвольного уравнения с частными производными может быть сведено к (соответствующим образом уточненной) П. п. Напр., интегрирование уравнения 1-го порядка

$$F(x^i, u, \partial u/\partial x^i) = 0$$

сводится к П. п. для уравнения Пфаффа $\theta \equiv du - p_i dx^i = 0$ на многообразии (вообще говоря, с особенностями), задаваемом в пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ уравнением

$$F(x^i,\ u,\ p_i) = 0.$$

Вполне интегрируемая система Пфаффа (а также одно уравнение Пфаффа постоянного класса) локально может быть приведена к простому канонич. виду. В этих случаях решение П. п. сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. В общем случае (в классе гладких функций) П. п. не решена (1983). В аналитич. случае П. п. была решена Э. Картаном (E. Cartan) в его теории систем в инволюции. Формулировка основной теоремы Картана основана на понятии регулярного интегрального элемента. k-мерное подпространство E_k касательного пространства T_xM наз. k-мерным интегральным элементом системы (*), если

$$\theta^\alpha(E_k) = 0,\ d\theta^\alpha(E_k \wedge E_k) = 0,\ \alpha = 1, \ldots, q.$$

Подпространство $S(E_k)$ кокасательного пространства T_x^*M, порожденное 1-формами $\theta^\alpha|_x$, $E_k \lrcorner d\theta^\alpha|_x$, где $\lrcorner$ — операция внутреннего умножения, наз. полярной системой интегрального элемента E_k. Интегральный элемент E_k наз. регулярным, если существует такой флаг $E_k \supset E_{k+1} \supset \ldots \supset E_1 \supset 0$, для к-рого

$$\dim E_l = i,\quad \dim S(E_l) = \max \dim S(E_l'),$$

где максимум берется по всем i-мерным интегральным элементам E_l', содержащим E_{l-1}. Теорема Картана утверждает следующее: пусть N есть k-мерное интегральное многообразие системы Пфаффа с аналитич. коэффициентами и для нек-рого $x \in N$ касательное пространство T_xN является регулярным интегральным элементом. Тогда для любого интегрального элемента $E_{k+1} \supset T_xN$ размерности $k+1$ существует в некрой окрестности точки x интегральное многообразие $\tilde{N}$, локально содержащее N, для к-рого $E_{k+1} = T_x\tilde{N}$. Теорема Картана была обобщена на произвольные дифференциальные системы, задаваемые идеалами в алгебре дифференциальных форм на многообразии (теорема Картана — Кэлера).

Лит.: [1] Картан Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения, пер. с франц., М., 1962; [2] его же, Интегральные инварианты, пер. с франц., М.— Л., 1940; [3] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.— Л., 1947; [4] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970.

Д. В. Алексеевский.

ПФАФФА СИСТЕМА — система *Пфаффа уравнений* (см. также *Пфаффа структура*).

ПФАФФА СТРУКТУРА, распределение,— векторное подрасслоение $\pi : P \to M$ касательного расслоения $TM \to M$ многообразия M. Размерность p слоев $P_x = \pi^{-1}(x)$ наз. размерностью П. с. π, а число $q = n - p$ (где $n = \dim M$) — рангом, или коразмерностью. П. с. размерности p можно рассматривать как поле p-мерных подпространств $x \mapsto P_x$ на многообразии M.

Обычно П. с. задают системой *Пфаффа уравнений* $\theta^1 = \ldots = \theta^q = 0$ или, двойственным образом, указанием векторных полей, значения к-рых в произвольной точке $x \in M$ образуют базис подпространства P_x.

Подмногообразие $N \subset M$ наз. интегральным многообразием П. с., если $T_xN \subset P_x$ для всех $x \in N$. П. с. наз. вполне интегрируемой, если через каждую точку $x \in M$ проходит p-мерное интегральное многообразие или, что эквивалентно, если локально она может быть задана системой уравнений Пфаффа $dy^1 = \ldots = dy^q = 0$, где $y^1, \ldots, y^n$ — нек-рые локальные координаты в M. Это понятие соответствует понятию вполне интегрируемой системы уравнений Пфаффа. Пусть $\Gamma(\pi)$ — пространство сечений рас-

слоения $\pi : P \to M$, а $L(\pi)$ — пространство дифференциальных 1-форм, обращающихся в нуль на P. Согласно теореме Фробениуса, П. с. π вполне интегрируема тогда и только тогда, когда пространство $\Gamma(\pi)$ является подалгеброй алгебры Ли $D(M)$ векторных полей на M или, что эквивалентно, если идеал, порожденный пространством $L(\pi)$ в алгебре $\Omega(M)$ дифференциальных форм, замкнут относительно оператора внешнего дифференцирования.

Пусть $A(\pi)$ — алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов П. с. π, т. е. множество векторных полей $X \in \Gamma(\pi)$, для к-рых $[X, \Gamma(\pi)] \subset \Gamma(\pi)$. Алгебра $A(\pi)$ есть подалгебра алгебры Ли $D(M)$ и одновременно модуль над кольцом $F(M)$ гладких функций на M. Фактормодуль $\Gamma(\pi)/A(\pi)$ характеризует степень неинтегрируемости П. с.

П. с. π наз. регулярной, если размерность пространства $A_p(\pi) = \{X_p,\ X \in A(\pi)\}$ не зависит от $p \in M$. В этом случае $A(\pi)$ есть пространство сечений вполне интегрируемой П. с. $\pi' : P' = \bigcup_{p \in M} A_p(\pi) \to M$, к-рая наз. характеристической системой П. с. π. Ранг структуры π' наз. классом П. с. π, он равен наименьшему возможному числу координат локальной системы координат, через к-рые выражаются все 1-формы из $L(\pi)$. Класс регулярной П. с. ранга 1 (т. е. поля гиперплоскостей) нечетен и образует полную систему локальных инвариантов: локально в некрой системе координат y^i П. с. класса $2k+1$ задается уравнением Пфаффа

$$dy^1 + y^2\,dy^3 + \ldots + y^{2k}\,dy^{2k+1} = 0.$$

Другим важным локальным инвариантом П. с. является ее род, указывающий размерность максимальных интегральных неособых многообразий (см. *Пфаффа проблема*). Полная система локальных инвариантов П. с. размерности p при $1 < p < n-1$ неизвестна.

П. с. можно рассматривать как G-структуру бесконечного типа, где G — группа линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, оставляющих инвариантной p-мерную координатную плоскость. Ее структурная функция 1-го порядка соответствует $F(M)$-билинейному отображению $c : \Gamma(\pi) \times \Gamma(\pi) \to D(M)/\Gamma(\pi)$, к-рое определяется коммутированием векторных полей. Пространство $A(\pi)$ совпадает с ядром векторнозначной билинейной формы c.

Лит. см. при ст. *Пфаффа проблема*. *Д. В. Алексеевский.*

ПФАФФА УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$\omega \equiv a_1(x)\,dx_1 + \ldots + a_n(x)\,dx_n = 0,\quad n \geqslant 3, \qquad (1)$$

где $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, ω — дифференциальная 1-форма, функции $a_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, действительнозначны. Пусть $a_j(x) \in C^1(D)$ и векторное поле $a(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$ не имеет критич. точек в области D.

Многообразие $M^k \subset \mathbb{R}^n$ размерности $k \geqslant 1$ и класса C^1 наз. интегральным многообразием П. у. (1), если $\omega \equiv 0$ на M^k. П. у. наз. вполне интегрируемым, если через каждую точку области D проходит интегральное многообразие максимально возможной размерности $n-1$ и притом только одно.

Теорема Фробениуса: для того чтобы П. у. (1) было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно выполнение условия

$$d\omega \wedge \omega \equiv 0. \qquad (2)$$

В этом случае интегрирование П. у. сводится к интегрированию семейства систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В трехмерном евклидовом пространстве П. у. имеет вид

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \qquad (3)$$

где P, Q, R — функции от x, y, z, а условие (2) полной интегрируемости принимает вид

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0 \qquad (4)$$

или

$$(\mathrm{rot}\ F,\ F)=0,\ \text{где}\ \ F=(P,\ Q,\ R).$$

В этом случае существуют гладкие функции μ, U ($\mu\neq 0$) такие, что

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz\equiv\mu\,dU,$$

и интегральные поверхности П. у. (3) задаются уравнениями $U(x,\ y,\ z)=\mathrm{const}$. Если F есть нек-рое силовое поле, то поле $\mu^{-1}F$ имеет потенциальную функцию, равную U. Если П. у. (3) не вполне интегрируемо, то оно не имеет интегральных поверхностей, но может иметь интегральные кривые. Если заданы произвольные функции $x=x(t)$, $y=y(t)$, то (3) будет обыкновенным дифференциальным уравнением для z и кривая $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ будет интегральной.

Постановка задачи об исследовании уравнения (1) для произвольного $n\geqslant 3$ и о приведении дифференциальной 1-формы ω к канонич. виду принадлежит И. Пфаффу [1]. Условие (4) впервые было получено Л. Эйлером в 1755 (см. [2] гл. IX).

Локально любое П. у. с помощью гладкой замены переменных приводится к виду

$$dy_0-\sum_{j=1}^{p}z_j\,dy_j=0, \qquad (5)$$

где $y_0,\ \ldots,\ y_p$, $z_1,\ \ldots,\ z_p$ — новые независимые переменные ($2p+1\leqslant n$, $p\geqslant 0$). Число $2p+1$ наз. к л а с с о м П. у.; здесь p — наибольшее число такое, что дифференциальная форма $\omega\wedge d\omega\wedge\ \ldots\ \wedge d\omega$ степени $2p+1$ не равна тождественно нулю. При $p=0$ П. у. вполне интегрируемо. Функции $y_0(x),\ \ldots,\ y_p(x)$ наз. ч е р в ы м и и н т е г р а л а м и П. у. (5), а его интегральные многообразия максимально возможной размерности $n-p-1$ задаются уравнениями

$$y_0(x)=c_0,\ \ldots,\ y_p(x)=c_p.$$

С и с т е м о й П ф а ф ф а наз. система уравнений вида

$$\omega_1=0,\ \ldots,\ \omega_k=0,\quad k<n, \qquad (6)$$

где $x\in D\subset\mathbb{R}^n$, ω_j — дифференциальные 1-формы:

$$\omega_j=\sum_{k=1}^{n}\omega_{jk}(x)\,dx_k,\ \ j=1,\ \ldots,\ k.$$

Ранг r матрицы $\|\omega_{jk}(x)\|$ наз. р а н г о м с и с т е м ы П ф а ф ф а в точке x. Система Пфаффа наз. в п о л н е и н т е г р и р у е м о й, если через каждую точку $x\in U$ проходит интегральное многообразие максимально возможной размерности $n-r$ и притом только одно.

Т е о р е м а Ф р о б е н и у с а: для того чтобы система П ф а ф ф а (6) была вполне интегрируемой, необходимо и достаточно выполнение условий

$$d\omega_j\wedge\omega_1\wedge\ \ldots\ \wedge\omega_k=0,\quad j=1,\ \ldots,\ k.$$

Задача об интегрировании любой конечной нелинейной системы дифференциальных уравнений с частными производными эквивалентна задаче об интегрировании нек-рой системы Пфаффа (см. [6]).

Получен ряд результатов по аналитич. теории систем Пфаффа. Рассматривалась вполне интегрируемая система Пфаффа

$$dy=x^{-p}f\,dx+z^{-q}g\,dz$$

из m уравнений, где p, q — положительные целые числа, а вектор-функции $f(x,\ y,\ z)$, $g(x,\ y,\ z)$ голоморфны в точке $x=0$, $y=0$, $z=0$; указаны достаточные

условия существования голоморфного в начале координат решения (см. [7]), приведены обобщения на большее число независимых переменных.

Лит.: [1] Pfaff J. F., «Berl. Abh.», 1814—1815, S. 76—135; [2] Эйлер Л., Дифференциальное исчисление, пер. с лат., М.— Л., 1949; [3] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970; [4] Богданов Ю. С., Лекции по дифференциальным уравнениям, Минск, 1977; [5] Картан Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения, пер. с франц., М., 1962; [6] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.— Л., 1947; [7] Equations différentielles et systèmes de Pfaff dans le champ complexe, B., 1979.

М. В. Федорюк.

ПФАФФА ФОРМА — *дифференциальная форма* степени 1.

ПФАФФИАН знакопеременной матрицы X — многочлен $\mathrm{Pf}X$ от элементов матрицы X, квадрат к-рого равен $\det X$. Точнее, если $X=\|x_{ij}\|$ — знакопеременная (т. е. удовлетворяющая условиям $x_{ij}=-x_{ji}$, $x_{ii}=0$) матрица порядка $2n$ над коммутативно-ассоциативным кольцом A с единицей, то $\mathrm{Pf}X$ есть элемент кольца A, вычисляемый по формуле

$$\mathrm{Pf}\,X=\sum\nolimits_s \varepsilon(s)\,x_{i_1j_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_nj_n},$$

где суммирование ведется по всевозможным разбиениям s множества $\{1, \ldots, 2n\}$ на непересекающиеся пары $\{i_\alpha, j_\alpha\}$, причем считается, что $i_\alpha<j_\alpha$, $\alpha=1, \ldots, n$, а $\varepsilon(s)$ — знак подстановки

$$\begin{pmatrix}12 & \ldots & 2n-1 & 2n\\ i_1 j_1 & \ldots & i_n & j_n\end{pmatrix}.$$

П. обладает следующими свойствами:

1) $\mathrm{Pf}\,(C^TXC)=(\det C)\,(\mathrm{Pf}\,X)$ для любой матрицы C порядка $2n$;

2) $(\mathrm{Pf}\,X)^2=\det X$;

3) если E — свободный A-модуль с базисом $e_1, \ldots, e_{2n}$ и

$$u=\sum\nolimits_{i<j} x_{ij}e_i\wedge e_j\in\Lambda^2A,$$

то

$$\overset{n}{\Lambda}u=n!\;(\mathrm{Pf}\,X)\,e_1\wedge\ldots\wedge e_{2n}.$$

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966.

А. Л. Онищик.

ПЬЕРПОНТА ВАРИАЦИЯ — одна из числовых характеристик функции нескольких переменных, к-рую можно рассматривать как многомерный аналог *вариации функции* одного переменного. Пусть функция $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$, $n=2,3, \ldots$, задана на n-мерном параллелепипеде

$$D_n=[a_1, b_1]\times\ldots\times[a_n, b_n]$$

и Π_k^m, $k=1, \ldots, n$,— разбиение отрезка $[a_k, b_k]$ на m, $m=1, 2, \ldots$, равных между собой отрезков точками

$$a_k=a_k^0<a_k^1<\ldots<a_k^m=b_k$$

$$\left(a_k^s-a_k^{s-1}=(b_k-a_k)/m,\ s=1, \ldots, m\right).$$

Эти разбиения порождают разбиение

$$\Pi^m=\Pi_1^m\times\ldots\times\Pi_n^m$$

параллелепипеда D_n на m^n параллелепипедов $d_1, d_2, \ldots, d_{m^n}$ с ребрами, параллельными координатным осям.

Пусть

$$\Omega(f,\ \Pi^m)=\sum_{j=1}^{m^n}\omega(f,\ d_j),$$

где $\omega(f, d_j)$ — колебание функции $f(x)$ на d_j. Тогда

$$P(f,\ D_n)\overset{\text{def}}{=}\sup_m\sup_{\Pi^m}\frac{1}{m^{n-1}}\,\Omega(f,\ \Pi^m).$$

Если $P(f, D_n) < \infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченную (конечную) П. в. на D_n, а класс всех таких функций обозначается через $P(D_n)$. Это определение предложил Дж. Пьерпонт [1]. Класс $P(D_n)$ содержит в себе класс $A(D_n)$ функций, имеющих ограниченную *Арцела вариацию* на D_n.

Лит.: [1] Pierpont J., Lectures on the theory of functions of real variables, v. 1, N. Y., 1959; [2] Hahn H., Theorie der reellen Funktionen, Bd 1, B., 1921. *Б. И. Голубов.*

ПЭЛИ — ВИНЕРА ТЕОРЕМА: функция $f \in L^2(-\infty, +\infty)$ тогда и только тогда обращается в нуль почти всюду вне отрезка $[-A, A]$, когда ее преобразование Фурье

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ixy}\, dx, \quad y \in \mathbb{R},$$

удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(y)|^2\, dy < \infty$$

и является ограничением на действительную прямую нек-рой целой аналитич. функции $F(z)$ комплексного переменного z, причем $|F(z)| \leqslant e^{A|z|}$ для всех $z \in \mathbb{C}$ (см. [1]). Аналогом П.— В. т. наз. описание образа нек-рого пространства функций или обобщенных функций на локально компактной группе при *Фурье преобразовании* или другом инъективном интегральном преобразовании; чаще всего аналогом П.— В. т. наз. описание образа пространства $C_0^\infty(G)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций или пространства $S(G)$ быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на локально компактной группе G при преобразовании Фурье на группе G. Такие аналоги известны, в частности, для абелевых локально компактных групп, для нек-рых связных групп Ли, для нек-рых подалгебр алгебры $C_0^\infty(G)$ на вещественных полупростых группах Ли, а также для нек-рых других интегральных преобразований.

Лит.: [1] Винер Н., Пэли Р., Преобразование Фурье в комплексной области, пер. с англ., М., 1964; [2] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976; [3] Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я., Интегральная геометрия и некоторые связанные с ней вопросы теории представлений, М., 1962; [4] Желобенко Д. П., Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли, М., 1974; [5] Рудин У., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1975. *А. И. Штерн.*

ПЮИЗЁ РЯД — см. *Ветвления точка.*

ПЯТЫЙ ПОСТУЛАТ, аксиома параллельности Евклида,— через точку P вне прямой AA' в плоскости, проходящей через P и AA', можно провести лишь одну прямую, не пересекающую AA'. В «Началах» Евклида П. п. был приведен в следующей эквивалентной формулировке: «И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых» (см. [1]). У комментаторов Евклида возник взгляд, что это предложение можно доказать, опираясь на остальные аксиомы. Попытки доказательств возникли еще в Древней Греции. Эти попытки продолжались на Средневековом Востоке, а затем в Западной Европе. Если не говорить о прямых логич. ошибках, то обычно неявно (а иногда и с отчетливым пониманием) вводилось предположение, не выводимое из остальных аксиом, к-рое оказывалось таким образом эквивалентным П. п. Напр., расстояние между параллелями ограничено, пространство допускает «простое» (поступательное) движение (все траектории — прямые линии), две сближающиеся прямые всегда пересекаются, существуют подобные не равные фигуры, сумма углов треугольника равна двум прямым и др. Дж. Саккери (G. Saccheri, 1733) рассматривал четырехугольник с прямыми углами при основании и

равными боковыми сторонами. Ранее такой четырехугольник рассмотрел Омар Хайям (11—12 вв.). Из трех возможных гипотез об остальных двух равных углах (они тупые, они острые, они прямые) он стремился отвергнуть две первые, т. к. из третьей вытекал П. п. Дж. Саккери удалось привести к противоречию следствия из первой гипотезы, но он совершил логич. ошибку в опровержении гипотезы острого угла. И. Ламберт (J. Lambert, 1766, опубл. 1786) при аналогичном подходе опровергнул гипотезу острого угла, тоже совершив при этом серьезную ошибку. Он высказал предположение, что такая геометрия осуществляется на мнимой сфере. А. Лежандр (A. Legendre, 1800) в первых изданиях учебника «Элементы геометрии» исходил из суммы S углов треугольника. Опровергнув гипотезу

$S > 2d$, он допустил ошибку при выводе следствий из гипотезы $S < 2d$, а именно, он неявно ввел аксиому, что для любой точки внутри острого угла существует прямая, проходящая через эту точку и пересекающая обе стороны угла. Решение проблемы П. п. (точнее ее снятие) было получено путем создания Н. И. Лобачевским (1826) геометрии, отрицающей П. п. Из непротиворечивости *Лобачевского геометрии* следует **независимость** П. п. от др. аксиом **евклидовой геометрии.**

Лит.: [1] Начала Евклида, пер. с греч., т. 1—3, М.— Л., 1948—50; [2] К а г а н В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.—Л., 1949; [3] Е ф и м о в Н. В., Высшая геометрия, 5 изд., М., 1971; [4] Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского..., М., 1956; [5] Р о з е н ф е л ь д Б. А., История неевклидовой геометрии, М., 1976.

Б. Л. Лаптев.

РААБЕ ПРИЗНАК сходимости числовых рядов: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если при достаточно больших n выполняется неравенство

$$R_n \equiv n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - r\right) \geqslant r, \text{ где } r > 1;$$

если $R_n \leqslant 1$, начиная с нек-рого номера n, то ряд расходится.

Установлен Й. Раабе (J. Raabe). *Е. Г. Соболевская.*

РАВЕНСТВА АКСИОМЫ — аксиомы, регулирующие употребление отношения равенства в математич. доказательствах. Аксиомы эти утверждают рефлексивность отношения равенства и возможность замены равного равным. Символически Р. а. записываются так:

$$x = x,$$

$$x = y \wedge \varphi(y/v) \Rightarrow \varphi(x/v),$$

$$x = y \Rightarrow t(y/v) = t(x/v),$$

где φ — произвольная формула, а t — произвольный терм рассматриваемого языка; x, y, v — переменные, имеющие одну и ту же непустую область изменения; выражения вида $\varphi(x/v)$ и $t(x/v)$ обозначают результат замены всех свободных вхождений переменной v в формуле φ или терме t на x.

С помощью Р. а. можно доказать симметричность и транзитивность отношения равенства. Для этого в качестве φ надо взять формулу $y=v$ в первом случае и формулу $v=z$ во втором.

Если формулы и термы рассматриваемого языка строятся из атомарных формул и термов с помощью логич. связок и суперпозиций, то приведенные Р. а. можно вывести из их частных случаев, когда в качестве φ и t берутся атомарные формулы и термы. Символически:

$$x_i = y_i \wedge P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \Rightarrow P(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n),$$

$$x_i = y_i \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n),$$

где P и f суть n-местные предикатный и функциональный символы. *В. Н. Гришин.*

РАВНОВЕЛИКИЕ И РАВНОСОСТАВЛЕННЫЕ ФИГУРЫ — две фигуры в $\mathbb{R}^2$, имеющие равные площади и соответственно два многоугольника M_1 и M_2 такие, что их можно разрезать на многоугольники так, что части, составляющие M_1, соответственно конгруэнтны частям, составляющим M_2.

Для $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, равновеликость означает равенство объемов; равносоставленность многогранников определяется аналогично с $\mathbb{R}^2$. Эти понятия обобщаются также на неевклидовы геометрии.

Площадь (многоугольника) есть функция $s(M)$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

(α) $s(M) \geqslant 0$ для любого многоугольника M;

(β) если M есть объединение многоугольников $M_1, \ldots, M_k$, попарно не имеющих общих точек, то

$$s(M) = s(M_1) + \ldots + s(M_k);$$

(γ) если M_1 и M_2 конгруэнтны, то $s(M_1) = s(M_2)$;

(δ) площадь квадрата, стороной которого является единица длины, равна 1.

С помощью этих аксиом определяется площадь прямоугольника.

Т е о р е м а. Если два многоугольника равносоставлены, то они равновелики.

На этой теореме основан м е т о д р а з б и е н и я, известный еще Евклиду: для вычисления площади многоугольника пытаются разбить его на конечное число частей, из к-рых можно составить фигуру известной площади. Напр., параллелограмм равносоставлен с прямоугольником, имеющим то же основание и ту же



Рис. 1.



Рис. 2.

высоту (см. рис. 1); треугольник равносоставлен с параллелограммом, имеющим то же основание и вдвое меньшую высоту (см. рис. 2). Таким образом, вся теория площадей многоугольников может быть построена на основе теоремы о площади прямоугольника.

Существует и другой способ вычисления площадей, основанный на аксиомах (β) и (γ),— м е т о д д о п о л н е н и я. Два многоугольника наз. р а в н о д о п о л н я е м ы м и, если их можно дополнить соответственно конгруэнтными частями так, чтобы получились конгруэнтные многоугольники. Напр., параллелограмм и прямоугольник с одинаковыми основаниями и одинаковыми высотами равнодополняемы (см. рис. 3) и потому равновелики.

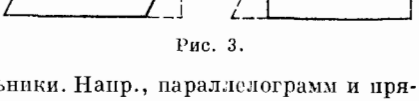


Рис. 3.

В евклидовой плоскости два многоугольника в том и только в том случае равновелики, если они равносоставлены (а также если они равнодополняемы). Аналогичная теорема справедлива в плоскости Лобачевского и в эллиптической плоскости. Напротив, в неархимедовой геометрии эквивалентны лишь равновеликость и равнодополняемость; равновеликость же им не эквивалентна.

Теория объемов в $\mathbb{R}^3$ базируется на аксиомах (α), (β), (γ), (δ), аналогичных аксиомам площади. Однако для вычисления объема тетраэдра со времен Евклида используется предельный переход («чертова лестница»), а в современных учебниках — интеграл, определение к-рого также связано с предельным переходом. Обоснование использования «лишнего» (по сравнению с планиметрией) предельного перехода, доказательство того, что методами разбиения и дополнения невозможно вычислить объем произвольного тетраэдра, составили третью проблему Гильберта. В 1900 М. Ден (M. Dehn) решил третью проблему, доказав, что правильный

тетраэдр и равновеликий ему куб не равносоставлены. Для равносоставленности двух равновеликих многогранников M_1 и M_2 в $\mathbb{R}^3$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого инварианта Дена $f(M)$ (некоторой функции от длин ребер и величин соответствующих двугранных углов, см. [2]) выполнялось равенство $f(M_1)=f(M_2)$.

Имеются многомерные обобщения инвариантов Дена, с помощью которых сформулировано необходимое условие равносоставленности и доказано, что при $n \geqslant 3$ правильный n-мерный симплекс не равносоставлен с равновеликим ему кубом. В $\mathbb{R}^4$ необходимое условие равносоставленности является также и достаточным.

Пусть G — некоторая группа движений плоскости. Два многоугольника M_1 и M_2 наз. G-конгруэнтными, если существует такое движение $g \in G$, что $g(M_1)=M_2$. Два многоугольника M_1 и M_2 наз. G-равносоставленными, если их можно разрезать на части таким образом, что части, составляющие M_1, соответственно конгруэнтны частям, составляющим M_2. Аналогично определяется G-равносоставленность многогранников.

Пусть S — группа движений, состоящая из всех параллельных переносов и центральных симметрий. Понятия равносоставленности и S-равносоставленности в $\mathbb{R}^2$ эквивалентны. В частности, равновеликие многоугольники можно разбить на части таким образом, что соответствующие их части не только конгруэнтны, но и имеют соответственно параллельные стороны.

Равносоставленность в том и только в том случае эквивалентна G-равносоставленности, если $G \supset S$ в случае $\mathbb{R}^2$ и $G \subset D_0$ в случае $\mathbb{R}^3$, где D_0 — группа всех движений, сохраняющих ориентацию.

Ниже приводится определение флаговых инвариантов, позволяющих дать необходимое и достаточное условие T-равносоставленности, где T — группа всех параллельных переносов. Пусть $\mathbb{R}^{n-1}, \ldots, \mathbb{R}^i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$,— такая последовательность подпространств пространства $\mathbb{R}^n$, что $\mathbb{R}^{n-1} \supset \ldots \supset \mathbb{R}^i$ (верхний индекс означает размерность). Пусть, далее, для каждого $j=i+1, \ldots, n$ фиксировано одно из двух полупространств, на которое $\mathbb{R}^j$ разбивается подпространством $\mathbb{R}^{j-1}$; это полупространство наз. «положительным» и обозначено через P^j. Последовательность $\Phi=(P^n, \ldots, P^{i+1})$ наз. флагом порядка i в $\mathbb{R}^n$. Пусть, наконец, $Q=(M^{n-1}, \ldots, M^i)$ — такая последовательность граней многогранника $M^n \subset \mathbb{R}^n$, что $M^{n-1} \supset \ldots \supset M^i$. Если $M^j \| \mathbb{R}^j$ для всех $j=i, \ldots, n-1$, то полагают

$$H_\Phi(Q)=\varepsilon_{n-1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_i |M^i|,$$

где $|M^i|$ есть i-мерный объем грани M^i, а $\varepsilon_j=\pm 1$ в зависимости от того, примыкает ли M^{j+1} к M^j с положительной стороны или нет. Если же $M^j \nparallel \mathbb{R}^j$ хотя бы для одного j, то $H_\Phi(Q)=0$; $H_\Phi(M^n)$ — сумма $\sum H_\Phi(Q)$ по всем последовательностям Q, составленным из граней многогранника M^n.

Два равновеликих многогранника в том и только в том случае T-равносоставлены, если для каждого флангового инварианта H_Φ его значения на этих многогранниках одинаковы.

Многогранник $M^n \subset \mathbb{R}^n$ наз. k-кратной суммой Минковского, если существуют такие многогранники $N_1, \ldots, N_k$ (положительных размерностей), несущие плоскости граней которых порождают разложение пространства $\mathbb{R}^n$ в такую прямую сумму, что $M^n=N_1+\ldots+N_k$ (в смысле векторной суммы множеств). Многогранник называется принадлежащим классу $\mathfrak{Z}_k$, если M^n можно разбить на конечное число многогранников, каждый из которых T-равносоставлен с многогранником, представляющимся в виде k-кратной суммы Минковского.

Многогранник $M^n \in \mathfrak{Z}_k$ в том и только в том случае, если $H_\Phi(M^n)=0$ для всех флаговых инвариантов H_Φ порядков, меньших k.

Пусть Γ — группа, состоящая из всех гомотетий с положительными коэффициентами и параллельных переносов. В $\mathbb{R}^n$ любые два многогранника Γ-равносоставлены. Рис. 4 иллюстрирует Γ-равносоставленность треугольника и прямоугольника (одинаковыми цифрами обозначены Γ-конгруэнтные многоугольники).

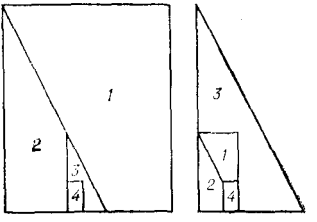


Рис. 4.

Пусть при гомотетии с коэффициентом $\lambda > 0$ объем n-мерного многогранника увеличивается в λ^n раз. Если принять это утверждение как аксиому, то объем любого многогранника может быть найден методом разбиения.

Пусть группа движений G в n-мерном евклидовом, гиперболическом или эллиптич. пространстве почти транзитивна (т. е. орбита точки всюду плотна); два многогранника в этом пространстве тогда и только тогда G-равнодополняемы, когда они G-равносоставлены.

Лит.: [1] Проблемы Гильберта, М., 1969; [2] Болтянский В. Г., Равновеликие и равносоставленные фигуры, М., 1956; [3] его же, Третья проблема Гильберта, М., 1977; [4] Хадвигер Г., Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, пер. с нем., 1966; [5] Iessen B., Thorup A., «Math. Scand.», 1978, v. 43, fasc. 2, p. 211—40.

В. Г. Болтянский.

РАВНОВЕСИЯ ПОЛОЖЕНИЕ системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x),\ x \in \mathbb{R}^n, \qquad (*)$$

— точка $\xi \in \mathbb{R}^n$ такая, что $x=\xi$ является (постоянным по времени) решением системы (*); Р. п. наз. также и само это решение. Точка $\xi \in \mathbb{R}^n$ есть Р. п. системы (*) тогда и только тогда, когда

$$f(t, \xi) = 0 \text{ при всех } t.$$

Пусть $x=\varphi(t)$ — произвольное решение системы (*). Замена переменных $x=\varphi(t)+y$ переводит это решение в Р. п. $y=0$ системы

$$\dot{y} = F(t, y),\quad F(t, y) \equiv f(t, \varphi(t)+y) - f(t, \varphi(t)).$$

Поэтому, напр., в теории устойчивости без ограничения общности можно считать, что речь всегда идет об исследовании устойчивости Р. п. в начале координат $\mathbb{R}^n$.

Р. п. $x=0$ неавтономной системы (*) часто наз. тривиальным, или нулевым, решением, а термин Р. п. предпочитают использовать в теории автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и в теории динамич. систем. Здесь употребляется много синонимов этого термина: особая точка, неподвижная точка, стационарная точка, точка покоя, состояние равновесия.

Н. Х. Розов.

РАВНОВЕСИЯ СООТНОШЕНИЕ — соотношение, выражающее связь между ростом функции $f(z)$, мероморфной при $|z| < R \leqslant \infty$, и ее распределением значений (см. *Распределения значений теория*). Каждая мероморфная функция $f(z)$ обладает следующим свойством равновесия: сумма ее считающей функции $N(r, a, f)$, характеризующей плотность распределения a-точек $f(z)$, и функции приближения $m(r, a, f)$, характеризующей скорость среднего приближения $f(z)$ к данному числу a, остается инвариантной для различных значений a. Наиболее эффективным Р. с. становится при использовании сферич. метрики.

Пусть

$$[a, b] = \frac{|a-b|}{\sqrt{1+|a|^2}\cdot\sqrt{1+|b|^2}}$$

означает сферич. расстояние между двумя числами a и b и пусть для каждого комплексного числа a

$$\overset{\circ}{m}(r, a, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{[f(re^{i\theta}), a]}\, d\theta - \alpha(a, f),$$

где

$$\alpha(a, f) = \lim_{z\to 0} \ln \frac{|z|^n}{[f(z), a]},$$

а $n = n(0, a, f)$ означает кратность a-точки $f(z)$ при $z = 0$. При $r \to R$ функция $\overset{\circ}{m}(r, a, f)$ отличается от неванлинновской функции приближения $m(r, a, f)$ на ограниченное слагаемое. Поэтому на окружности $|z| = r < R$ функция $\overset{\circ}{m}(r, a, f)$ по-прежнему характеризует среднюю скорость приближения $f(z)$ к числу a. Имеет место следующее утверждение. Для каждого значения r, $0 \leqslant r < R$, любого комплексного числа a из расширенной комплексной плоскости и для произвольной мероморфной при $|z| < R \leqslant \infty$ функции $f(z)$ выполняется равенство (соотношение равновесия):

$$\overset{\circ}{m}(r, a, f) + N(r, a, f) = \overset{\circ}{m}(r, \infty, f) + N(r, \infty, f),$$

где

$$N(r, a, f) = \int_0^r [n(t, a, f) - n(0, a, f)]\frac{dt}{t} + n(0, a, f)\ln r,$$

а $n(t, a, f)$ означает число a-точек $f(z)$, попавших в круг $\{z : |z| \leqslant t\}$.

После основополагающих работ Р. Неванлинны [1] Р. с. были перенесены на p-мерные целые кривые (см. [3]) и на голоморфные отображения (см. [4], [5]).

Лит.: [1] Nevanlinna R., Analytic functions, N. Y.—B., 1970; [2] Виттих Г., Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, пер. с нем., М., 1960; [3] Weyl H., Meromorphic functions and analytic curves, Princeton, 1943; [4] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [5] Гриффитс Ф., Кинг Дж., Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий, [пер. с англ.], М., 1976. *В. П. Петренко.*

РАВНОМЕРНАЯ АЛГЕБРА — замкнутая относительно равномерной сходимости подалгебра A алгебры $C(X)$ всех непрерывных комплексных функций на компакте X, содержащая все функции-константы и разделяющая точки компакта X. Последнее условие означает, что для каждой пары x, y различных точек из X в алгебре A имеется функция f, для к-рой $f(x) \neq f(y)$. Р. а. обычно снабжают sup-нормой:

$$\|f\| = \sup_X |f(x)|.$$

При этом $\|f^2\| = \|f\|^2$. Каждая банахова алгебра с единицей (даже без предположения коммутативности), норма в к-рой подчинена последнему условию, изоморфна нек-рой Р. а.

Р. а. составляют важный подкласс класса *коммутативных банаховых алгебр* над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Каждой точке $x \in X$ отвечает гомоморфизм $\varphi_x : A \to \mathbb{C}$, действующий по правилу $\varphi_x(f) = f(x)$. Поэтому X естественно топологически вкладывается в пространство максимальных идеалов алгебры A и при соответствующем отождествлении поглощает границу Шилова. При изучении Р. а. важную роль играют точки пика (т. е. такие точки из X, в к-рых достигается строгий максимум модуля хотя бы для одного элемента из A), мультипликативные вероятностные меры на X (т. е. представляющие меры гомоморфизмов из A в $\mathbb{C}$) и

ортогональные к A меры на X. Многие конкретные результаты, относящиеся к Р. а., касаются связей между этими объектами.

Р. а. наз. симметричной, если вместе с каждой функцией к алгебре принадлежит и комплексно сопряженная ей функция. Согласно теореме Стоуна — Вейерштрасса, каждая симметричная Р. а. на компакте X совпадает с $C(X)$. Полярный класс составляют т. н. антисимметричные Р. а., вовсе не содержащие действительных функций, кроме констант. Типичный пример — алгебра всех функций, аналитических в открытом единичном диске комплексной плоскости и непрерывных в его замыкании (диск-алгебра). Теорема Шилова — Бишопа: каждая Р. а. определенным способом может быть «склеена» из антисимметричных. Известны и более тонкие классификационные теоремы. Вместе с тем произвольные Р. а. не сводятся к алгебрам аналитич. функций типа диск-алгебра. Напр., можно сконструировать такую Р. а. на одномерном компакте, который совпадает с ее пространством максимальных идеалов, что все точки компакта являются точками пика и одновременно среди элементов алгебры только тождественный нуль может принимать нулевое значение на непустом открытом подмножестве.

Лит.: [1] Гамелин Т., Равномерные алгебры, пер. с англ., М., 1973.
Е. А. Горин.

РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ — свойство функции (отображения) $f: X \to Y$, где X и Y — метрич. пространства, означающее, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x_1, x_2) < \delta$, выполняется неравенство $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Если отображение $f: X \to Y$ непрерывно на X и X — компакт, то f равномерно непрерывно на X. Композиция равномерно непрерывных отображений равномерно непрерывна.

Р. н. отображений встречается и в теории топологич. групп. Напр., отображение $f: X_0 \to Y$, где $X_0 \subset X$, X и Y — топологич. группы, наз. равномерно непрерывным, если для любой окрестности U_y единицы группы Y существует такая окрестность U_x единицы группы X, что для любых элементов $x_1 \in X_0$, $x_2 \in X_0$, удовлетворяющих условию $x_1 x_2^{-1} \in U_x$ (соответственно $x_1^{-1} x_2 \in U_y$), выполняется включение $f(x_1)[f(x_2)]^{-1} \in U_y$ (соответственно $[f(x_1)]^{-1} f(x_2) \in U_y$).

Понятие Р. н. обобщается на отображения *равномерных пространств*.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [3] Келли Дж. Л., Общая топология, 2 изд., пер. с англ., М., 1981; [4] Бурбаки Н., Общая топология, пер. с франц., М., 1968.
Л. Д. Кудрявцев.

РАВНОМЕРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ сверху (снизу) — свойство семейства действительных функций $f_\alpha: X \to \mathbb{R}$, где $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ — нек-рое множество индексов, X — произвольное множество, означающее, что существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство $f_\alpha(x) \leqslant c$ (соответственно $f_\alpha(x) \geqslant -c$).

Семейство функций $f_\alpha: X \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, наз. равномерно ограниченным, если оно равномерно ограничено как сверху, так и снизу.

Понятие Р. о. семейства функций обобщается на случай отображений в нормированные и полунормированные пространства: семейство отображений $f_\alpha: X \to Y$, где $\alpha \in \mathfrak{A}$, X — произвольное множество, а Y — полунормированное пространство с полунормой (нормой) $\|\cdot\|_Y$, наз. равномерно ограниченным, если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство $\|f_\alpha(x)\|_Y \leqslant c$. Если в пространстве $\{X \to Y\}$ ограниченных отоб-

ражений $f : X \to Y$ ввести полунорму (норму) по формуле

$$\|f\|_{\{X \to Y\}} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y,$$

то Р. о. множества функций $f_\alpha : X \to Y$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, означает ограниченность этого множества в пространстве $\{X \to Y\}$ с полунормой $\|\cdot\|_{\{X \to Y\}}$.

Понятие Р. о. снизу и сверху обобщается на случай отображений $f : X \to Y$ в упорядоченные в том или ином смысле множества Y. *Л. Д. Кудрявцев.*

РАВНОМЕРНАЯ ПОДГРУППА локально компактной топологической группы G — такая замкнутая подгруппа $H \subset G$, что факторпространство G/H компактно. С понятием Р. п. близко связано понятие квазиравномерной подгруппы в G, т. е. такой замкнутой подгруппы H в G, для к-рой на G/H существует G-инвариантная мера μ с $\mu(G/H) < \infty$. Напр., подгруппа $SL_2(\mathbb{Z})$ группы $SL_2(\mathbb{R})$ квазиравномерна, но не равномерна в ней. С другой стороны, подгруппа T всех верхнетреугольных матриц из $SL_2(\mathbb{R})$ — Р. п. в $SL_2(\mathbb{R})$, не являющаяся квазиравномерной (на факторпространстве $SL_2(\mathbb{R})/T$ нет $SL_2(\mathbb{R})$-инвариантных мер). Однако всякая связная квазиравномерная подгруппа в группе Ли G является Р. п. (см. [1]), а всякая дискретная Р. п. в G квазиравномерна [2]. (О дискретных Р. п. в группах Ли см. *Дискретная подгруппа*.) Если G — связная группа Ли и H — Р. п. в G, то нормализатор $N_G(H^0)$ в G связной компоненты единицы H^0 группы H содержит максимальную связную треугольную подгруппу группы G (см. [3]). Алгебраич. подгруппа H связной алгебраической комплексной линейной группы Ли G тогда и только тогда является Р. п., когда H — параболич. подгруппа в G. Описаны все связные Р. п. в полупростых группах Ли (см. [4]). Недискретная Р. п. H связной полупростой группы Ли G обладает свойством сильной жесткости (см. [5]), к-рое состоит в том, что в G имеется конечное число таких подгрупп H_i, $i = 1, \ldots, m$, что любая подгруппа $H' \subset G$, изоморфная H, сопряжена одной из подгрупп H_i. Важные примеры равномерных и квазиравномерных подгрупп строятся следующим образом. Пусть G — линейная алгебраич. группа, определенная над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, G_A — ее группа аделей и $G_{\mathbb{Q}} \subset G_A$ — подгруппа главных аделей. Тогда $G_{\mathbb{Q}}$ — дискретная подгруппа в G_A, причем $G_{\mathbb{Q}}$ является Р. п. в G_A тогда и только тогда, когда 1) у группы G нет нетривиальных рациональных характеров, определенных над полем $\mathbb{Q}$, и 2) все унипотентные элементы группы $G_{\mathbb{Q}}$ принадлежат ее радикалу (см. [6], [7]). В частности, если G — унипотентная алгебраич. группа, определенная над $\mathbb{Q}$, то $G_{\mathbb{Q}}$ есть Р. п. в G_A. Условие 1) является необходимым и достаточным для квазиравномерности $G_{\mathbb{Q}}$ в G_A.

Лит.: [1] Mostow G. D., «Ann. Math.», 1962, v. 75, № 1, p. 17—37; [2] Рагунатан М., Дискретные подгруппы групп Ли, пер. с англ., М., 1977; [3] Онищик А. Л., «Матем. сб.», 1966, т. 71, № 4, с. 483—94; [4] его же, там же, 1967, т. 74, № 3, с. 398—416; [5] Goto M., Wang H.-C., «Math. Ann.», 1972, Bd 198, H. 4, S. 259—86; [6] Борель А., «Математика», 1964, т. 8, № 2, с. 73—75; [7] Mostow G. D., Tamagawa T., «Ann. Math.», 1962, v. 76, № 3, p. 446—63.

В. Л. Попов.

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ последовательности функций (отображений) — свойство последовательности $f_n : X \to Y$, где X — произвольное множество, Y — метрич. пространство, $n = 1, 2, \ldots$, к функции (отображению) $f : X \to Y$, означающее, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ и всех точек $x \in X$ выполняется неравенство

$$\rho(f(x), f_n(x)) < \varepsilon,$$

Это условие равносильно тому, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}\rho(f_n(x),\ f(x))=0.$$

Чтобы последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходилась на множестве X к функции f, необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая числовая последовательность $\{\alpha_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, и существовал такой номер n_0, что для всех $n>n_0$ и всех $x\in X$ выполнялось неравенство

$$\rho(f_n(x),\ f(x))\leqslant\alpha_n.$$

Пример. Последовательность $f_n(x)=x^n$, $n=1,2,\ldots$, равномерно сходится на любом отрезке $[0,\ a]$, $0<a<1$ и не сходится равномерно на отрезке $[0,\ 1]$.

Необходимое и достаточное условие Р. с. последовательности функций без использования понятия предельной функции дает *Коши критерий* равномерной сходимости.

Свойства равномерно сходящихся последовательностей.

1. Если Y — линейное нормированное пространство и последовательности отображений $f_n: X\to Y$ и $g_n: X\to Y$, $n=1,\ 2,\ldots$, равномерно сходятся на множестве X, то при любых $\lambda\in\mathbb{C}$ и $\mu\in\mathbb{C}$ последовательность $\{\lambda f_n+\mu g_n\}$ также равномерно сходится на X.

2. Если Y — линейное нормированное кольцо, последовательность отображений $f_n: X\to Y$, $n=1,\ 2,\ldots$, равномерно сходится на множестве X и $g: X\to Y$ — ограниченное отображение, то последовательность $\{gf_n\}$ также равномерно сходится на X.

3. Если X — топологич. пространство, Y — метрич. пространство и последовательность непрерывных в точке $x_0\in X$ отображений $f_n: X\to Y$ равномерно на множестве X сходится к отображению $f: X\to Y$, то это отображение также непрерывно в точке x_0, то есть

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x).$$

Условие равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ на X является в этом утверждении существенным в том смысле, что существуют даже последовательности числовых непрерывных на отрезке функций, сходящиеся во всех его точках к функции, не являющейся непрерывной на рассматриваемом отрезке. Примером такой последовательности является $f_n(x)=x^n$, $n=1,\ 2,\ldots$, на отрезке $[0,\ 1]$. Р. с. последовательности непрерывных функций не есть необходимое условие непрерывности предельной функции. Однако если множество X — компакт, Y — множество действительных чисел $\mathbb{R}$, последовательность непрерывных функций $f_n: X\to\mathbb{R}$ во всех точках $x\in X$ одновременно возрастает или убывает и имеет конечный предел,

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),$$

то для того, чтобы функция f была непрерывной на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n\}$ сходилась равномерно на этом множестве. Необходимые и одновременно достаточные условия для непрерывности предела последовательности непрерывных функций в общем случае даются в терминах *квазиравномерной сходимости* последовательности.

4. Если последовательность интегрируемых по Риману (по Лебегу) функций $f_n: [a,\ b]\to\mathbb{R}$, $n=1,2,\ldots$, равномерно на отрезке $[a,\ b]$, сходится к функции $f: [a,\ b]\to\mathbb{R}$, то эта функция также интегрируема по Риману (соответственно по Лебегу), и для любого $x\in[a,\ b]$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^x\lim_{n\to\infty}f_n(t)\,dt,\quad(*)$$

и сходимость последовательности $\left\{\int_a^x f_n(t)dt\right\}$ на отрезке $[a, b]$ к функции $\int_a^x f(t)dt$ равномерна. Формула (*) обобщается на случай *Стилтьеса интеграла*. Если же последовательность интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций f_n, $n=1, 2, \ldots$, просто сходится в каждой точке этого отрезка к интегрируемой же на нем функции f, то формула (*) может не иметь места.

5. Если последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится в нек-рой точке $x_0 \in [a, b]$, а последовательность их производных $\left\{\frac{df_n}{dx}\right\}$ равномерно сходится на $[a, b]$, то последовательность $\{f_n\}$ также равномерно сходится на отрезке $[a, b]$, ее предел является непрерывно дифференцируемой на этом отрезке функцией и

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{df_n(x)}{dx},\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Пусть X — произвольное множество, а Y — метрич. пространство. Семейство функций (отображений) $f_\alpha : X \to Y$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — топологич. пространство, наз. равномерно сходящимся при $\alpha \to \alpha_0 \in \mathfrak{A}$ к функции (отображению) $f : X \to Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U(\alpha_0)$ точки α_0, что для всех $\alpha \in U(\alpha_0)$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$\rho(f(x), f_\alpha(x)) < \varepsilon.$$

Для равномерно сходящихся семейств функций имеют место свойства, аналогичные указанным выше свойствам Р. с. последовательностей функций.

Понятие Р. с. отображений обобщается на случай, когда Y — равномерное пространство, в частности, когда Y — топологич. группа.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981.

Л. Д. Кудрявцев.

РАВНОМЕРНАЯ ТОПОЛОГИЯ — топология, порожденная равномерной структурой. Подробнее, пусть X — множество, наделенное равномерной структурой (т. е. *равномерное пространство*) U, и пусть для каждого $x \in X$ через $B(x)$ обозначено множество подмножеств $V(x)$ множеств X, где V пробегает все окружения U. Тогда в X существует и притом только одна топология, для к-рой $B(x)$ является *фильтром* окрестностей точки x при любой $x \in X$. Топология наз. равномеризуемой, если существует равномерная структура, ее порождающая. Не всякое топологич. пространство равномеризуемо: таковы, напр., не регулярные пространства.

М. И. Войцеховский.

РАВНОМЕРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ — *устойчивость по Ляпунову*, равномерная относительно начального момента. Решение $x_0(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

наз. равномерно устойчивым, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого $t_0 \in \mathbb{R}^+$ и всякого решения $x(t)$ той же системы, удовлетворяющих неравенству

$$|x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta,$$

выполнено неравенство

$$|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$$

для всех $t \geqslant t_0$.

Устойчивая по Ляпунову неподвижная точка автономной системы дифференциальных уравнений $\dot{x}=f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, равномерно устойчива, но устойчивое по Ляпунову решение, вообще говоря, может не быть равномерно устойчивым. Напр., решение $x(t)=0$, $t\in\mathbb{R}^+$, уравнения

$$\dot{x}=[\sin\ln(1+t)-\alpha]\,x \qquad (1)$$

при каждом $\alpha\in(1/\sqrt{2},\,1)$ устойчиво, но не равномерно устойчиво.

Пусть дана линейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=A(t)\,x,\ \ x\in\mathbb{R}^n, \qquad (2)$$

где $A(\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение $\mathbb{R}^+\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n)$.

Для того чтобы решение $x=0$ системы (2) было равномерно устойчивым, необходимо, чтобы верхний *особый показатель* $\Omega^0(A)$ системы (2) был меньше или равен нулю. Напр., в случае уравнения (1) верхний особый показатель $\Omega^0(A)=1-\alpha$, а *Ляпунова характеристический показатель* $\lambda_1(A)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\alpha$. Для существования $\delta>0$ такого, чтобы решение $x=0$ всякой системы

$$\dot{x}=A(t)\,x+g(t,\,x),\ \ x\in\mathbb{R}^n,$$

удовлетворяющей условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши и условию

$$|g(t,\,x)|<\delta\cdot|x|,$$

было равномерно устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы верхний особый показатель $\Omega^0(A)$ системы (2) был меньше нуля.

Лит.: [1] Персидский К., «Матем. сб.», 1933, т. 40, № 3, с. 284—93; [2] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967; [3] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970.

В. М. Миллионщиков.

РАВНОМЕРНО НАИБОЛЕЕ МОЩНЫЙ КРИТЕРИЙ — статистический критерий с заданным уровнем *значимости для проверки сложной гипотезы* H_0 против сложной альтернативы H_1, мощность к-рого не меньше мощности любого другого статистич. критерия, предназначенного для проверки H_0 против H_1 и имеющего тот же уровень значимости.

Пусть проверяется сложная гипотеза $H_0:\theta\in\Theta_0\subset\Theta$ против сложной альтернативы $H_1:\theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$ и пусть задана верхняя грань α, $0<\alpha<1$, вероятностей ошибок 1-го рода, к-рые можно совершить, отклоняя проверяемую гипотезу H_0 с помощью статистич. критерия, когда она в действительности верна (число α наз. уровнем значимости критерия, а про сам критерий говорят, что он имеет уровень α). Таким образом, ограничение на вероятности ошибок 1-го рода сужает множество всех статистич. критериев, предназначенных для проверки H_0 против H_1, до класса критериев уровня α. В терминах функции мощности $\beta(\theta)$, $\theta\in\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1$, статистич. критерия фиксирование уровня значимости α означает, что

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta(\theta)=\alpha.$$

Если в классе всех статистич. критериев уровня α, предназначенных для проверки H_0 против H_1, существует такой, что его функция мощности $\beta^*(\theta)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta^*(\theta)=\alpha,\ \ \beta^*(\theta)\geqslant\beta(\theta),\ \ \theta\in\Theta_1,$$

где $\beta(\theta)$ — функция мощности любого другого критерия из этого же класса, то такой критерий наз. р а в-

номерно наиболее мощным критерием уровня α для проверки H_0 против H_1. Р. н. м.к. является наилучшим критерием, если сравнение критериев производят в терминах мощности критериев.

Лит.: [1] Лсман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

М. С. Никулин.

РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИЙСЯ РЯД — функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \quad x \in X, \tag{1}$$

с (вообще говоря) комплексными членами, сходящийся на множестве X, и такой, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon,$$

где

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$$

и

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x).$$

Иными словами, последовательность частичных сумм $s_n(x)$ является равномерно сходящейся последовательностью. Определение Р. с. р. равносильно выполнению условия

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |r_n(x)| = 0,$$

что означает равномерную сходимость к нулю на множестве X последовательности остатков

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ряда (1).

Пример. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

равномерно сходится на каждом конечном круге комплексной плоскости и не сходится равномерно на всем множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Условие равномерной сходимости ряда (1) на множестве X без использования понятия суммы ряда дает *Коши критерий* равномерной сходимости ряда. Достаточное условие равномерной сходимости ряда дается *Вейерштрасса признаком*.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ наз. правильно сходящимся на множестве X, если существует такой числовой ряд $\sum \alpha_n$, $\alpha_n \geqslant 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|a_n(x)| \leqslant \alpha_n,$$

т. е. если ряд (1) удовлетворяет условиям признака Вейерштрасса равномерной сходимости рядов. В силу этого признака правильно сходящийся на множестве X ряд равномерно сходится на этом множестве. Обратное, вообще говоря, неверно; однако во всяком равномерно сходящемся на множестве X ряде можно так объединить следующие друг за другом его члены в конечные группы, что получившийся при этом ряд будет уже правильно сходиться на множестве X.

Имеются признаки равномерной сходимости ряда, аналогичные признакам Дирихле и Абеля для сходимости числового ряда. Эти признаки равномерной сходимости ряда впервые встречаются в работах Г. Харди (G. Hardy). Если в ряде

$$\sum a_n(x)\, b_n(x) \tag{2}$$

функции $a_n(x)$ и $b_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, определенные на множестве X, таковы, что последовательность $\{a_n(x)\}$

монотонна при каждом $x \in X$ и равномерно стремится к нулю на X, а последовательность частичных сумм $\{B_n(x)\}$ ряда $\sum b_n(x)$ равномерно ограничена на множестве X, то ряд (2) равномерно сходится на этом множестве.

Если последовательность $\{a_n(x)\}$ равномерно ограничена на множестве X и монотонна при каждом фиксированном $x \in X$, а ряд $\sum b_n(x)$ равномерно сходится на множестве X, то ряд (2) также равномерно сходится на X.

Свойства равномерно сходящихся рядов. Если ряды $\sum a_n(x)$ и $\sum b_n(x)$ равномерно сходятся на множестве X, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\mu \in \mathbb{C}$, то ряд

$$\sum \lambda a_n(x) + \mu b_n(x)$$

также равномерно сходится на множестве X.

Если ряд $\sum a_n(x)$ равномерно сходится на множестве X, а $b(x)$ — ограниченная на этом множестве функция, то ряд $\sum b(x)\, a_n(x)$ также равномерно сходится на X.

Непрерывность суммы ряда. Для изучения свойств суммы функционального ряда является полезным понятие «точки равномерной сходимости ряда». Пусть X — топологич. пространство и ряд (1) сходится на X. Точка $x_0 \in X$ наз. точкой равномерной сходимости ряда (1), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U = U(x_0)$ точки x_0 и такой номер x_{n_ε}, что для всех $x \in U$ и всех $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$.

Если множество X — компакт, то, для того чтобы ряд (1) равномерно сходился на X, необходимо и достаточно, чтобы каждая точка $x \in X$ являлась точкой его равномерной сходимости.

Если X — топологич. пространство, ряд (1) сходится на X, x_0 — точка равномерной сходимости ряда (1) и существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to x_0} a_n(x) = c_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то числовой ряд $\sum c_n$ сходится, сумма $s(x)$ ряда (1) имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} s(x) = \lim_{x \to x_0} \sum a_n(x) = \sum \lim_{x \to x_0} a_n(x) = \sum c_n, \quad (3)$$

т. е. при сделанных предположениях в ряде (1) возможен почленный переход к пределу в смысле формулы (3). Отсюда следует, что если ряд (1) сходится на X, его члены непрерывны в точке равномерной сходимости $x_0 \in X$, то его сумма также непрерывна в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} s(x) = \sum \lim_{x \to x_0} a_n(x) = \sum a_n(x_0) = s(x_0).$$

Поэтому если ряд непрерывных функций сходится равномерно на топологич. пространстве, то его сумма непрерывна на этом пространстве. В случае, когда пространство X является компактом и члены ряда (1) неотрицательны на X, то равномерная сходимость ряда (1) является и необходимым условием для непрерывности на X суммы ряда (1) (см. *Дини теорема*).

В общем случае необходимым и достаточным условием для непрерывности суммы сходящегося на топологич. пространстве X ряда (1), члены к-рого непрерывны на X, является *квазиравномерная сходимость* последовательности его частичных сумм $s_n(x)$ к его сумме $s(x)$ (теорема Арцела — Александрова).

Ответ на вопрос о существовании точек равномерной сходимости у сходящихся рядов, непрерывных на отрезке функций, дает теорема Осгуда — Гобсона: если ряд (1) сходится в каждой точке отрезка $[a, b]$ и члены $a_n(x)$ этого ряда непрерывны на $[a, b]$, то на отрезке $[a, b]$ существует всюду плотное множество

точек равномерной сходимости ряда (1). Отсюда следует, что сумма всякого ряда непрерывных функций, сходящегося на нек-ром отрезке, непрерывна на всюду плотном множестве этого отрезка. Вместе с тем существует и сходящийся во всех точках отрезка ряд непрерывных функций такой, что точки, в к-рых он сходится не равномерно, образуют всюду плотное множество рассматриваемого отрезка.

Почленное интегрирование равномерно сходящихся рядов. Пусть $X=[a, b]$. Если члены ряда

$$\sum a_n(x),\ x \in [a, b], \tag{4}$$

интегрируемы по Риману (по Лебегу) на отрезке $[a, b]$, а ряд (4) равномерно сходится на этом отрезке, то его сумма $s(x)$ также интегрируема по Риману (по Лебегу) на $[a, b]$ и для любого $x \in [a, b]$ имеет место равенство

$$\int_a^x s(t)\,dt = \int_a^x \left[\sum a_n(t)\right] dt = \sum \int_a^x a_n(t)\,dt, \tag{5}$$

причем ряд, стоящий в правой части равенства, сходится равномерно на отрезке $[a, b]$.

В этой теореме нельзя заменить условие равномерной сходимости ряда (4) просто условием его сходимости на отрезке $[a, b]$, так как существуют сходящиеся на отрезке ряды даже непрерывных функций с непрерывной суммой, для к-рых неверна формула (5). Вместе с тем существуют различные ее обобщения. Ниже приведен результат для интеграла Стилтьеса.

Если $g(x)$ — возрастающая на отрезке $[a, b]$ функция, $a_n(x)$ — интегрируемы по Стилтьесу относительно функции $g(x)$, ряд (4) сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, то сумма $s(x)$ ряда (4) также интегрируема по Стилтьесу относительно функции $g(x)$,

$$\int_a^x s(t)\,dg(t) = \sum \int_a^x a_n(t)\,dg(t),$$

и ряд, стоящий в правой части равенства, сходится равномерно на отрезке $[a, b]$.

Обобщается формула (5) и на функции многих переменных.

Условия почленного дифференцирования рядов в терминах равномерной сходимости. Если члены ряда (4) непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, ряд (4) сходится в нек-рой точке этого отрезка, а ряд, составленный из производных членов ряда (4), равномерно сходится на $[a, b]$, то сам ряд (4) также равномерно сходится на отрезке $[a, b]$, а его сумма $s(x)$ непрерывно дифференцируема на нем и

$$\frac{d}{dx}\,s(x) = \frac{d}{dx}\sum a_n(x) = \sum \frac{d}{dx}\,a_n(x). \tag{6}$$

В этой теореме условие равномерной сходимости ряда, получающегося из данного почленным дифференцированием, нельзя заменить просто условием его сходимости на отрезке $[a, b]$, так как существуют равномерно сходящиеся на отрезке ряды непрерывно дифференцируемых функций, для к-рых ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием, сходятся на отрезке, однако сумма исходного ряда либо недифференцируема на всем рассматриваемом отрезке, либо дифференцируема, но ее производная не равна сумме ряда из производных.

Таким образом, наличие свойства равномерной сходимости у рядов, так же как и свойства абсолютной сходимости (см. *Абсолютно сходящийся ряд*), позволяет перенести на эти ряды нек-рые правила действия с конечными суммами: равномерная сходимость — возможность почленно переходить к пределу, почленно интегриро-

вать и дифференцировать ряды (см. формулы (3) — (6)), а абсолютная сходимость — возможность переставлять члены ряда в любом порядке без изменения его суммы и перемножать ряды почленно.

Свойства абсолютной и равномерной сходимости функциональных рядов независимы друг от друга. Так, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n},$$

поскольку все его члены не отрицательны, абсолютно сходится на всей числовой оси, но заведомо точка $x=0$ не является его точкой равномерной сходимости, т. к. его сумма

$$s(x) = \begin{cases} 1+x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

разрывна в этой точке.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$$

равномерно сходится на всей действительности оси, но не сходится абсолютно ни в какой ее точке.

Лит. см. при ст. *Ряд*. *Л. Д. Кудрявцев.*

РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ — то же, что *чебышевское приближение*.

РАВНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — множество с определенной на нем равномерной структурой. Равномерная структура (равномерность) на множестве X определяется заданием нек-рой системы $\mathfrak{A}$ подмножеств произведения $X \times X$. При этом система $\mathfrak{A}$ должна быть фильтром (т. е. для любых V_1, $V_2 \in \mathfrak{A}$ пересечение $V_1 \cap V_2$ также содержится в $\mathfrak{A}$, и если $W \supset V$, $V \in \mathfrak{A}$, то $W \in \mathfrak{A}$) и должна удовлетворять следующим аксиомам.

U1) Всякое множество $V \in \mathfrak{A}$ содержит диагональ $\Delta = \{(x, x): x \in X\}$.

U2) Если $V \in \mathfrak{A}$, то $V^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in V\} \in \mathfrak{A}$.

U3) Для любого $V \in \mathfrak{A}$ существует $W \in \mathfrak{A}$ такое, что $W \circ W \subset V$, где $W \circ W = \{(x, y)$: существует такое $z \in X$, что $(x, z) \in W$ и $(z, y) \in W\}$. Элементы $\mathfrak{A}$ наз. окружениями равномерности, определяемой системой $\mathfrak{A}$.

Равномерность на множестве X может быть определена также путем задания на X системы покрытий $\mathfrak{C}$, удовлетворяющей следующим аксиомам.

C1) Если $\alpha \in \mathfrak{C}$ и α вписано в покрытие β, то $\beta \in \mathfrak{C}$.

C2) Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{C}$ существует покрытие $\beta \in \mathfrak{C}$, к-рое звездно вписано в α_1 и в α_2 (т. е. для любой точки $x \in X$ все элементы β, содержащие x, лежат в нек-рых элементах α_1 и α_2). Покрытия, принадлежащие $\mathfrak{C}$, наз. равномерными покрытиями X (относительно равномерности, определяемой системой $\mathfrak{C}$).

Указанные два способа задания равномерной структуры эквивалентны. Напр., если равномерная структура на X задана системой окружений $\mathfrak{A}$, то система $\mathfrak{C}$ равномерных покрытий X может быть построена так. Для всякого $V \in \mathfrak{C}$ семейство $\alpha(V) = \{Y(x) : x \in X\}$ (где $V(x) = \{y: (x, y) \in V\}$) является покрытием X. Покрытие α принадлежит $\mathfrak{C}$ тогда и только тогда, когда существует вписанное в α покрытие вида $\alpha(V)$, $V \in \mathfrak{A}$. Обратно, если $\mathfrak{C}$ — система равномерных покрытий Р. п., систему окружений образуют множества вида $\bigcup \{H \times H : H \in \alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{C}$, и всевозможные множества, их содержащие.

Равномерная структура на X может быть задана также с помощью системы *псевдометрик*. Всякая равномерность на множестве X порождает топологию: $T = \{G \subset X$: для любой точки $x \in G$ существует такое $V \in \mathfrak{A}$, что $V(x) \in G\}$.

Свойства Р. п. являются обобщением равномерных свойств *метрических пространств*. Если (X, ρ) — ме-

трич. пространство, на X возникает равномерность, порожденная метрикой ρ. Систему окружений этой равномерности образуют всевозможные множества, содержащие множества вида $\{(x, y) : \rho(x, y) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. При этом топологии на X, индуцированные метрикой и равномерностью, совпадают. Равномерные структуры, порожденные метриками, наз. м е т р и з у е м ы м и.

Р. п. были введены в 1937 А. Вейлем [1] (посредством окружений; определение Р. п. посредством равномерных покрытий было дано в 1940, см. [4]). Однако идея использования многократной звездной вписанности для построения функций появилась ранее у Л. С. Понтрягина (см. [5]) (впоследствии эта идея была использована при доказательстве полной регулярности топологии отделимого Р. п.). Первоначально равномерные структуры использовались как инструмент для изучения (порожденных ими) топологий (подобно тому, как метрика на метризуемом пространстве часто используется для изучения топологич. свойств этого пространства). Однако теория Р. п. имеет и самостоятельное значение, хотя и тесно связана с теорией топологич. пространств.

Отображение $f : X \to Y$ Р. п. X в Р. п. Y наз. р а в н о м е р н о н е п р е р ы в н ы м, если для любого равномерного покрытия α пространства Y система $f^{-1}\alpha = \{f^{-1}U : U \in \alpha\}$ является равномерным покрытием X. Всякое равномерно непрерывное отображение является непрерывным относительно топологий, порожденных равномерными структурами на X и Y. Если равномерные структуры на X и Y индуцированы метриками, то равномерно непрерывное отображение $f : X \to Y$ оказывается равномерно непрерывным в классич. смысле как отображение метрич. пространств.

Более содержательной является теория Р. п., к-рая удовлетворяет дополнительной аксиоме отделимости:

U4) $\bigcap_{V \in \mathfrak{A}} V = \Delta$

(в терминах окружений) или (в терминах равномерных покрытий):

С3) для любых двух точек $x, y \in X$, $x \neq y$, существует такое $\alpha \in \mathfrak{C}$, что никакой элемент α не содержит точки x и y одновременно.

Далее речь будет идти только о Р. п., наделенных отделимой равномерной структурой. Топология, порожденная на X отделимой равномерностью, является вполне регулярной и обратно, всякая вполне регулярная топология на X порождается нек-рой отделимой равномерной структурой. Как правило, существует много различных равномерностей, порождающих одинаковую топологию на X. В частности, метризуемая топология может порождаться неметризуемой отделимой равномерностью.

Р. п. $(X, \mathfrak{A})$ является метризуемым тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ имеют счетную базу. При этом б а з о й равномерности наз. (в терминах окружений) всякая подсистема $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, удовлетворяющая условию: для любого $V \in \mathfrak{A}$ существует такое $W \in \mathfrak{B}$, что $W \subset V$, или (в терминах равномерных покрытий) подсистема $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$ такая, что для любого $\alpha \in \mathfrak{C}$ существует $\beta \in \mathfrak{A}$, к-рое вписано в α. В е с о м Р. п. $(X, \mathfrak{A})$ наз. наименьшая мощность базы равномерности $\mathfrak{A}$.

Пусть M — подмножество Р. п. $(X, \mathfrak{A})$. Система окружений $\mathfrak{A}_M = \{(M \times M) \cap V : V \in \mathfrak{A}\}$ определяет равномерность на M. Пара $(M, \mathfrak{A}_M)$ наз. п о д п р о с т р а н с т в о м Р. п. $(X, \mathfrak{A})$. Отображение $f : X \to Y$ Р. п. $(X, \mathfrak{A})$ в Р. п. $(Y, \mathfrak{A}')$ наз. р а в н о м е р н ы м в л о ж е н и е м, если f взаимно однозначно, равномерно непрерывно и отображение $f^{-1} : (fX, \mathfrak{A}'_{fX}) \to (X, \mathfrak{A})$ также равномерно непрерывно.

Р. п. X наз. п о л н ы м, если всякий фильтр Коши в X (т. е. фильтр, содержащий нек-рый элемент всякого равномерного покрытия) имеет точку прикосновения

(т. е. точку, лежащую в пересечении замыканий элементов фильтра). Метризуемое Р. п. является полным тогда и только тогда, когда полна метрика, порождающая его равномерность. Любое Р. п. $(X, \mathfrak{A})$ может быть равномерно вложено в качестве всюду плотного подмножества в единственное (с точностью до равномерного изоморфизма) полное Р. п. $(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{A}})$, к-рое наз. пополнением $(X, \mathfrak{A})$. Топология пополнения $(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{A}})$ Р. п. $(X, \mathfrak{A})$ бикомпактна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ является прекомпактной равномерностью (т. е. такой, что в любое равномерное покрытие можно вписать конечное равномерное покрытие). В этом случае пространство $\tilde{X}$ является бикомпактным расширением X и наз. расширением Самюэля пространства X относительно равномерности $\mathfrak{A}$. Для всякого бикомпактного расширения bX пространства X существует единственная прекомпактная равномерность на X, расширение Самюэля относительно к-рой совпадает с bX. Таким образом, на языке прекомпактных равномерностей описываются все бикомпактные расширения bX. На бикомпактном пространстве существует единственная равномерность (полная и прекомпактная).

Всякая равномерность $\mathfrak{A}$ на множестве X индуцирует близость δ по следующей формуле:

$$A\delta B \Leftrightarrow (A\times B)\cap V \neq \varnothing$$

для любого $V\in\mathfrak{A}$. При этом топологии, порожденные на X равномерностью $\mathfrak{A}$ и близостью δ, совпадают. Любое равномерно непрерывное отображение является близостно непрерывным относительно близостей, порожденных равномерностями. Как правило, существует много различных равномерностей, порождающих на X одну и ту же близость. Тем самым множество равномерностей на X распадается на классы эквивалентности (две равномерности эквивалентны, если индуцированные ими близости совпадают). Каждый класс эквивалентных равномерностей содержит ровно одну прекомпактную равномерность, причем расширения Самюэля относительно этой равномерности совпадают с расширениями Смирнова (см. *Близости пространство*) относительно близости, индуцированной равномерностями этого класса. В множестве равномерностей на X задается естественный частичный порядок: $\mathfrak{A}>\mathfrak{A}'$, если $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}'$. Среди всех равномерностей, порождающих на X фиксированную топологию, есть наибольшая — т. н. универсальная равномерность, к-рая индуцирует на X близость Стоуна — Чеха. Всякая прекомпактная равномерность является наименьшим элементом в классе эквивалентных ей равномерностей. Если $\mathfrak{C}$ — система равномерных покрытий нек-рой равномерности на X, то система равномерных покрытий эквивалентной прекомпактной равномерности состоит из таких покрытий X, в к-рые можно вписать конечные покрытия из $\mathfrak{C}$.

Произведением Р. п. $(X_t, \mathfrak{A}_t)$, $t\in T$, наз. Р. п. $(\Pi X_t, \Pi\mathfrak{A}_t)$, где $\Pi\mathfrak{A}_t$ — равномерность на ΠX_t, базу окружений к-рой образуют множества вида

$$\{(\{x_t\}, \{y_t\}): (x_{t_i}, y_{t_i})\in V_{t_i},\ i=1, \ldots, n\},$$

$$t_i\in T,\ V_{t_i}\in\mathfrak{A}_{t_i},\ n=1,2, \ldots .$$

Топология, индуцированная на ΠX_t равномерностью $\Pi\mathfrak{A}_t$, совпадает с топологией тихоновского произведения пространств X_t. Проекции произведения Р. п. на сомножители равномерно непрерывны. Всякое Р. п. веса τ может быть вложено в произведение τ экземпляров метризуемых Р. п.

Семейство F непрерывных отображений топологич. пространства X в Р. п. $(Y, \mathfrak{A})$ наз. равностепен-

но непрерывным (относительно равномерности $\mathfrak{A}$), если для любой точки $x \in X$ и любого $V \in \mathfrak{A}$ существует окрестность $O_x \ni x$ такая, что $(f(x), f(x')) \in V$ при $x' \in O_x$ и $f \in F$. Имеет место следующее обобщение классич. теоремы Асколи: пусть X есть k-пространство, $(Y, \mathfrak{A})$ — равномерное пространство и Y^X — пространство непрерывных отображений X в Y с компактно открытой топологией. Для того чтобы замкнутое подмножество $F \subset Y^X$ было бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы F было равностепенно непрерывно относительно равномерности $\mathfrak{A}$ и все множества $\{f(x) : f \in F\}$, $x \in X$, имели бикомпактные замыкания в Y (k-пространства — это хаусдорфовы пространства, являющиеся факторным образом локально компактных пространств; класс k-пространств содержит все хаусдорфовы пространства с первой аксиомой счетности и все хаусдорфовы локально бикомпактные пространства).

Топология метризуемого Р. п. паракомпактна в силу теоремы Стоуна. Однако решается отрицательно проблема Исбелла о равномерной паракомпактности метризуемых Р. п. Построен пример метризуемого Р. п., имеющего равномерное покрытие.

В теории размерности Р. п. основными являются равномерные размерностные инварианты δd и Δd, определяемые аналогично топологич. размерности dim (δd — при помощи конечных равномерных покрытий, а Δd — при помощи всех равномерных покрытий), и равномерная индуктивная размерность $\delta \mathrm{Ind}$. Размерность $\delta \mathrm{Ind}$ определяется по аналогии с большой индуктивной размерностью Ind индукцией по размерности близостных перегородок между далекими (в смысле близости, порожденной равномерностью) множествами. При этом множество H наз. близостной перегородкой между A и B (где $A \,\delta\, B$), если для любой δ-окрестности U множества H такой, что $U \cap (A \cup B) \neq \varnothing$, имеет место $X \setminus U = A' \cup B'$, где $A' \overline{\delta} B'$, $A \subset A'$, $B \subset B'$ (U наз. δ-окрестностью H, если $H \,\overline{\delta}\, (X \setminus U)$. Таким образом, размерность $\delta \mathrm{Ind}$ (равно как и δd) является не только равномерным, но и близостным инвариантом. Размерность δd Р. п. (X, U) совпадает с обычной размерностью dim расширения Самюэля, построенного по эквивалентной $\mathfrak{A}$ прекомпактной равномерности. Если размерность ΔdX конечна, то $\Delta dX = \delta dX$. Однако может быть $\delta dX = 0$, а $\Delta dX = \infty$. Для метризуемого Р. п. всегда $\delta dX \leqslant \delta \mathrm{Ind}\, X = \Delta dX$ (и если $\Delta dX < \infty$, то $\delta dX = \delta \mathrm{Ind}\, X = \Delta dX$). Равенства $\delta dX = 0$ и $\delta \mathrm{Ind}\, X = 0$ эквивалентны для любого Р. п. Если Р. п. метризуемо, то эквивалентны также равенства $\delta dX = 0$ и $\Delta dX = 0$. Если Р. п. X' является всюду плотным подмножеством Р. п. X, то $\delta \mathrm{Ind}\, X' \geqslant \delta \mathrm{Ind}\, X$. Всегда $\delta \mathrm{Ind}\, X \leqslant \mathrm{Ind}\, X$. Для размерности δd имеет место аналог теоремы о перегородках.

Различные обобщения Р. п. получаются путем ослабления аксиом равномерности. Так, в аксиоматике квазиравномерности (см. [8]) исключена аксиома симметрии. При определении обобщенной равномерности (см. [10]) (f-равномерности) вместо равномерных покрытий рассматриваются равномерные семейства подмножеств X, к-рые, вообще говоря, не являются покрытиями (тела этих семейств оказываются всюду плотными в X в топологии, порожденной f-равномерностью). Одно из обобщений равномерности — так наз. θ-равномерность — связано с наличием топологии на Р. п. Она определяется семействами θ-покрытий хаусдорфова пространства; θ-покрытиями наз. система η канонических открытых множеств X, удовлетворяющих следующему условию: для любой точки $x \in X$ существуют $V_1, \ldots, V_n \in \eta$ такие, что $x \in \operatorname{int} \bigcup_{i=1}^{n} [V_i]$.

Лит.: [1] Weil A., Sur les espaces à structure uniforme et sur le topologie générale, P., 1937; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., 2 изд., М.,

1968; [3] его же, Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь, пер. с франц., М., 1975; [4] Tukey J., Ann. of Math. Studies 2, Princeton, 1940; [5] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [6] Isbell J., Uniform spaces, Providence, 1964; [7] Samuel P., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1948, v. 64, p. 100—32; [8] Császár A., Foundations of general topology, Oxford—[etc.], 1963; [9] Федорчук В. В., «Докл. АН СССР», 1970, т. 192, № 6, с. 1228—30; [10] Kulpa W., «Colloq. Math.», 1972, v. 25, p. 227—40; [11] Щепин Е. В., «Докл. АН СССР», 1975, т. 222, № 3, с. 541—43. *А. В. Иванов, Н. С. Стреколовская.*

РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — общее название класса распределений вероятностей, возникающего при распространении идеи «равновозможности исходов» на непрерывный случай. Подобно нормальному распределению Р. р. появляется в теории вероятностей как точное распределение в одних задачах и как предельное — в других.

Р. р. на отрезке числовой прямой (прямоугольное распределение). Р. р. на каком-либо отрезке $[a, b]$, $a<b$, — это распределений вероятностей, имеющее плотность

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a, b],\\ 0, & x\notin[a, b].\end{cases}$$

Понятие Р. р. на $[a, b]$ соответствует представлению о случайном выборе точки на этом отрезке «наудачу». Математич. ожидание и дисперсия Р. р. равны, соответственно, $(b+a)/2$ и $(b-a)^2/12$. Функция распределения задается формулой

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x\leqslant b,\\ 1, & x>b,\end{cases}$$

а характеристич. функция — формулой

$$\varphi(t)=\frac{1}{it(b-a)}(e^{itb}-e^{ita}).$$

Случайную величину с Р. р. на $[0,1]$ можно построить, исходя из последовательности независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, принимающих значения 0 и 1 с вероятностями $^1/_2$, полагая

$$X=\sum_{n=1}^{\infty}X_n2^{-n}$$

(X_n являются цифрами в двоичном разложении X). Случайное число X имеет Р. р. на отрезке $[0,1]$. Этот факт имеет важные статистич. приложения, см., напр., *Случайные и псевдослучайные числа*.

Если независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют Р. р. на $[0,1]$, то их сумма X_1+X_2 имеет так наз. треугольное распределение на $[0,2]$ с плотностью $u_2(x)=1-|1-x|$ для $x\in[0,2]$ и $u_2(x)=0$ для $x\notin[0,2]$. Сумма трех независимых случайных величин с Р. р. на $[0,1]$ имеет распределение на $[0,3]$ с плотностью

$$u_3(x)=\begin{cases}x^2/2, & 0\leqslant x<1,\\ [x^2-3(x-1)^2]/2, & 1\leqslant x<2,\\ [x^2-3(x-1)^2+3(x-2)^2]/2, & 2\leqslant x<3,\\ 0, & x\notin[0, 3].\end{cases}$$

В общем случае сумма $X_1+X_2+\ldots+X_n$ независимых величин с Р. р. на $[0,1]$ распределена с плотностью

$$u_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k(x-k)_+^{n-1}$$

для $0\leqslant x\leqslant n$ и $u_n(x)=0$ для $x\notin[0, n]$; здесь

$$z_+=\begin{cases}z, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

Распределение суммы $X_1+\ldots+X_n$, нормированной математич. ожиданием $n/2$ и среднеквадратич. отклонением $\sqrt{n/12}$, с ростом n быстро сближается с нормальным распределением с параметрами 0 и 1 (уже при $n=3$ приближение удовлетворительно для многих практич. целей).

В статистич. приложениях процедура построения случайной величины с заданной функцией распределения $F(x)$ основана на следующем факте. Пусть случайная величина Y распределена равномерно на $[0,1]$ и функция распределения $F(x)$ непрерывна и строго возрастает. Тогда случайная величина $X=F^{-1}(Y)$ имеет функцию распределения $F(x)$ (в общем случае надо заменить в определении X функцию $F^{-1}(y)$ на нек-рый ее аналог, а именно $f(y)=\inf\limits_x\{x : F(x)\leqslant y\leqslant F(x+0)\}$).

Р. р. на отрезке как предельное распределение. Ниже приводятся типичные примеры возникновения Р. р. на $[0,1]$ в качестве предельного.

1) Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие одну и ту же непрерывную функцию распределения. Тогда распределение их суммы S_n, приведенной по mod 1, т. е., иными словами, распределение дробной части $\{S_n\}$ суммы S_n, сходится к равномерному на $[0, 1]$ распределению.

2) Пусть параметры α и β имеют абсолютно непрерывное совместное распределение; тогда при $t\to\infty$ распределение $\{\alpha t+\beta\}$ сходится к равномерному на $[0,1]$.

3) Р. р. встречается как предельное распределение дробных долей нек-рых функций $g(n)$ натурального аргумента n. Напр., при иррациональном α доля тех m, $1\leqslant m\leqslant n$, из n для к-рых

$$0\leqslant a\leqslant\{n\alpha\}\leqslant b\leqslant 1,$$

имеет пределом при $n\to\infty$ величину $b-a$.

Р. р. на подмножествах $\mathbb{R}^k$. Пример Р. р. в прямоугольнике встречается уже в *Бюффона задаче* (см. также *Геометрические вероятности*, *Стохастическая геометрия*). Р. р. на нек-ром ограниченном множестве D в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ определяется как распределение, имеющее плотность

$$p(x_1, \ldots, x_n)=\begin{cases} C\neq 0, & x\in D,\\ 0, & x\notin D,\end{cases}$$

где C обратна k-мерному объему (или лебеговой мере) области D.

Рассматривают также и Р. р. на поверхностях. Так, «случайное направление» (напр., в $\mathbb{R}^3$) определяют вектором, идущим из начала координат в случайную точку поверхности единичной сферы, равномерно распределенную в том смысле, что вероятность ее попадания в какую-либо часть поверхности пропорциональна площади этой части.

Роль Р. р. на алгебраич. группах играет нормированная *Хаара мера*.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967.

А. В. Прохоров.

РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ТОПОЛОГИЯ — топология пространства $\mathcal{F}(X, Y)$ отображений множества X в *равномерное пространство* Y, порожденная равномерной структурой множества $\mathcal{F}(X, Y)$, базой окружений к-рой являются совокупности всех пар $(f, g)\in\mathcal{F}(X, Y)\times\mathcal{F}(X, Y)$ таких, что $(f(x), g(x))\in v$ для любого $x\in X$ и v пробегает базу окружений пространства Y. Сходимость направления $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}\subset\mathcal{F}(X, Y)$ к $f_0\in\mathcal{F}(X, Y)$ в такой топологии наз. сходимостью f_α к f_0 равномерной на множестве X. Если Y полно, то $\mathcal{F}(X, Y)$ — полное пространство в топологии равномерной сходимости. Если X — топологич. пространство и $\mathcal{C}(X, Y)$ — множество всех непрерывных в топологии пространства X отображений X в Y, то $\mathcal{C}(X, Y)$

замкнуто в $\mathcal{F}(X, Y)$ в Р. с. т.; в частности, предел $f_0(x)$ равномерно сходящейся последовательности $f_n(x)$ непрерывных на X отображений есть отображение, также непрерывное на X.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь, пер. с франц., М., 1975; [2] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981.

В. И. Соболев.

РАВНОСИЛЬНОСТЬ, или эквивалентность, утверждений (формул) A и B — понятие, означающее, что при каждом допустимом наборе значений параметров утверждения A и B оба истинны или оба ложны. Напр., Р. уравнений, неравенств и их систем означает совпадение множеств их решений. Р. формул *высказываний исчисления* есть совпадение задаваемых ими *булевых функций*.

Лит.: [1] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973.

С. Н. Артемов.

РАВНОСИЛЬНЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ — методы, суммирующие одни и те же последовательности (быть может, к разным пределам); иначе, Р. м. с.— методы суммирования, имеющие одно и то же *суммируемости поле*. Иногда Р. м. с. наз. методы, к-рые имеют одинаковые поля суммируемости и являются совместными методами суммирования. Примерами равносильных и совместных методов суммирования являются *Чезаро метод суммирования* (C, k) и *Рисса метод суммирования* (R, n, k) (при одном и том же $k \geqslant 0$), Чезаро метод суммирования (C, k) и *Гёльдера метод суммирования* (H, k) (при одном и том же целом $k \geqslant 0$). Существуют Р. м. с., не являющиеся совместными.

Иногда рассматривают не полные поля суммируемости, а их подмножества, принадлежащие нек-рому множеству U. Если для двух методов суммирования эти подмножества совпадают, то говорят, что методы суммирования равносильны на множестве U. Методы суммирования действительных последовательностей наз. вполне равносильными, если равенство их полей суммируемости остается справедливым при включении в них последовательностей, суммируемых к $+\infty$ и $-\infty$. Аналогично определяется равносильность методов суммирования для специальных видов суммируемости (абсолютной, сильной и др.).

Матричные методы суммирования, определенные преобразованиями последовательности в последовательность посредством матриц $\|a_{nk}\|$ и $\|b_{nk}\|$, наз. абсолютно равносильными (абсолютно эквивалентными) на множестве U последовательностей $\{s_k\}$, если $\tau_n^{(A)} - \tau_n^{(B)} \to 0$, $n \to \infty$, для любой $\{s_k\} \subset U$, где

$$\tau_n^{(A)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k, \quad \tau_n^{(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} s_k,$$

а ряды в выражениях для $\tau_n^{(A)}$ и $\tau_n^{(B)}$ сходятся для всех n.

Лит.: [1] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [3] Кангро Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70.

И. И. Волков.

РАВНОСТЕПЕННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ множества функций — понятие, тесно связанное с понятием компактности множества непрерывных функций. Пусть X, Y — компактные метрич. пространства и $C(X, Y)$ — множество непрерывных отображений X в Y. Множество $D \subset C(X, Y)$ наз. равностепенно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $\rho_X(x_1, x_2) \leqslant \delta$ вытекает $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \varepsilon$ для всех $x_1, x_2 \in X$, $f \in D$. Р. н. D эквивалентна относительной компактности D в $C(X, Y)$, наделенном метрикой

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} \rho_Y(f(x), g(x)),$$

что составляет содержание теоремы Арцела — Асколи. Понятие Р. н. переносится на топологич. пространства.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Эдвардс Р., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969.

Е. М. Семенов.

РАВНОСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ — такие сходящиеся или расходящиеся числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, разность к-рых является сходящимся рядом с суммой, равной нулю: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=0$. Если же их разность является лишь сходящимся рядом, то исходные ряды наз. равносходящимися в широком смысле.

Если $a_n=a_n(x)$ и $b_n=b_n(x)$ — функции, напр. $a_n: X \to \mathbb{R}$, $b_n: X \to \mathbb{R}$, где X — произвольное множество, а $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ наз. равномерно равносходящимися (равномерно равносходящимися в широком смысле) на множестве X, если их разность есть ряд, к-рый равномерно сходится на X и его сумма равна нулю (соответственно просто равномерно сходится на X).

Пример. Если две интегрируемые на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции равны на интервале $I \subset [-\pi, \pi]$, то их ряды Фурье — равномерно равносходящиеся на каждом интервале I^*, внутреннем к интервалу I, а сопряженные ряды Фурье — равномерно равносходящиеся на I^* в широком смысле.

Л. Д. Кудрявцев.

РАДЕМАХЕРА СИСТЕМА — ортонормированная на отрезке $[0,1]$ система $\{r_k(x)\}$. Введена Х. Радемахером [1]. Функции $r_k(x)$ можно определить равенствами

$$r_k(x)=\operatorname{sign}\sin 2^k \pi x, \quad x \in [0,\ 1],\ k=1,\ 2,\ \ldots$$

Другое определение функций Радемахера $r_k(x)$ получается путем рассмотрения двоичных разложений чисел отрезка $[0,1]$: если в двоичном разложении числа x на k-м месте стоит цифра 0, то полагают $r_k(x)=1$, если же на k-м месте стоит 1, то $r_k(x)=-1$; в случае же, когда $x=0$ или число x допускает два разложения, полагают $r_k(x)=0$. Согласно этому определению отрезок $[0,1]$ распадается на 2^k равных подинтервала, в каждом из которых функция $r_k(x)$ принимает попеременно значения $+1$ и -1, а на концах подинтервалов $r_k(x)=0$.

Система $\{r_k(x)\}$ представляет типичный пример стохастически независимых функций и имеет применения как в теории вероятностей, так и в теории ортогональных рядов.

Одно из важных свойств Р. с. устанавливается теоремой Радемахера: если $\sum c_k^2<+\infty$, то ряд $\sum c_k r_k(x)$ сходится почти всюду на $[0,1]$, и теоремой Хинчина — Колмогорова: если $\sum c_k^2=+\infty$, то ряд $\sum c_k r_k(x)$ расходится почти всюду на $[0,1]$.

Так как функции Радемахера в двоично иррациональных точках интервала $[0,1]$ принимают лишь значения ± 1, то рассмотрение ряда $\sum c_n r_n(x)$ означает, что у членов ряда $\sum c_n$ выбирается распределение знаков ± 1, зависящее от точки x. Если $x=0$, $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ — представление числа $x \in [0,1]$ в виде бесконечной двоичной дроби, то при $\alpha_n=0$ перед c_n ставится знак $+$ и при $\alpha_n=1$ ставится знак $-$.

Вышеприведенные теоремы в терминах теории вероятностей означают, что если $\sum c_n^2<+\infty$, то ряд $\sum \pm c_n$ сходится для почти всех распределений знаков (сходится с вероятностью 1), и если $\sum c_n^2=+\infty$, то ряд $\sum \pm c_n$

расходится для почти всех распределений знаков (расходится с вероятностью 1).

Наоборот, ряд теорем теории вероятностей можно сформулировать в терминах функций Радемахера. Напр., теорема Кантелли о том, что при игре «в герб и решетку» со ставкой 1 средний выигрыш с вероятностью 1 стремится к нулю, означает, что почти всюду на [0,1] выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k(x)=0.$$

Лит.: [1] Rademacher H., «Math. Ann.», 1922, Bd 87, S. 112—38; [2] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [3] Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963; [4] Кац М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963.

А. А. Талалян.

РАДИАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ — значение функции $f(z)$, определенной в единичном круге $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ в граничной точке $\zeta=e^{i\theta}$, равное пределу

$$\lim_{r\to 1-0} f(re^{i\theta})=f^*(e^{i\theta})$$

функции $f(z)$ по множеству точек радиуса $H=\{z=re^{i\theta}: 0<r<1\}$, проведенного в точку ζ. Термин «Р. г. з.» иногда употребляется в обобщенном смысле для функций $f(z)$, заданных в произвольных областях (включая многомерные) D, причем в качестве H берется множество точек нормали (или ее аналога) к границе D, проведенной в граничной точке. Напр., в случае бикруга

$$D=\{(z_1, z_2)\in\mathbb{C}^2:|z_1|<1,\quad |z_2|<1\}$$

под Р. г. з. в точке $\zeta=(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$ понимается предел

$$\lim_{r\to 1-0} f(re^{i\theta_1}, re^{i\theta_2})=f^*(\zeta).$$

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950.

Е. Д. Соломенцев.

РАДИАН — угол, соответствующий дуге, длина к-рой равна ее радиусу; содержит приблизительно $57°17'44''$, 80625. Р. принимается за единицу измерения углов при т. н. круговом, или радианном, измерении углов. Если круговая мера угла равна a Р., то угол содержит $180°\cdot a/\pi$ градусов; обратно, угол в $n°$ имеет круговую меру $\pi n°/180°$ Р. *БСЭ-3.*

РАДИКАЛ — 1) Р.— математический знак $\sqrt{\ }$ (измененное латинское r), к-рым обозначают извлечение корня, т. е. решение двучленного алгебраич. уравнения вида $x^n-a=0$. Под символом $\sqrt[n]{a}$ подразумевается один из корней этого уравнения.

Проблема решения алгебраич. уравнений над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел в Р.: выразить корни алгебраич. уравнения (с комплексными коэффициентами) через его коэффициенты с помощью конечного числа действий сложения, вычитания, умножения, деления, возвышения в степень и извлечения корня. Уравнения выше 4-й степени, вообще говоря, нельзя решить в Р. (см. *Галуа теория*).

Знак Р. используется также для обозначения *радикала идеала*.

2) Р. в нек-ром классе алгебраических систем — понятие, связанное с понятием радикального свойства. Первые примеры Р. возникли в теории ассоциативных колец (см. подробнее *Радикалы* колец и алгебр), построение общей теории Р. было начато С. Амицуром (S. Amitsur) и А. Г. Курошем. Теория Р. может быть развита в любой категории алгебраич. систем, обладающей нек-рыми необходимыми свойствами (напр., в категории мультиоператорных групп). Многие вопросы

теории Р. изучаются в рамках теории категорий. См. также *Радикал* группы, *Радикал* в классе полугрупп.

О. А. Иванова.

РАДИКАЛ в классе полугрупп — функция ρ, ставящая в соответствие каждой полугруппе S ее конгруэнцию $\rho(S)$ и обладающая следующими свойствами: 1) если S изоморфна T и $\rho(S)=0$ (через 0 обозначено отношение равенства), то $\rho(T)=0$; 2) если θ — конгруэнция на S и $\rho(S/\theta)=0$, то $\rho(S)\leqslant\theta$; 3) $\rho(S/\rho(S))=0$. При выполнении 1) и 3) свойство 2) равносильно неравенству

$$\sup\{\rho(S),\ \theta\}/\theta\leqslant\rho(S/\theta)$$

для всякой конгруэнции θ на S. Полугруппа S наз. ρ-полупростой, если $\rho(S)=0$. Класс ρ-полупростых полугрупп содержит одноэлементную полугруппу и замкнут относительно изоморфизма и подпрямых произведений. Наоборот, каждый класс полугрупп, обладающий этими свойствами, служит классом ρ-полупростых полугрупп для нек-рого радикала ρ. Если $\rho(S)=S\times S$, то полугруппа S наз. ρ-радикальной. В отличие от колец Р. в полугруппах не определяется соответствующим радикальным классом. Если в определении Р. ограничиться рассмотрением конгруэнций, определяемых идеалами, то возникает другое понятие Р., где соответствующая функция выделяет в каждой полугруппе идеал.

Если $\mathfrak{R}$ — класс полугрупп, замкнутый относительно изоморфизма и содержащий одноэлементную полугруппу, то функция, ставящая в соответствии каждой полугруппе S пересечение всех ее конгруэнций θ таких, что $S/\theta\in\mathfrak{R}$, оказывается Р., напр. $\rho_{\mathfrak{R}}$. Класс $\mathfrak{R}$ совпадает с классом $\rho_{\mathfrak{R}}$-полупростых полугрупп тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подпрямых произведений. В этом случае на $S/\rho_{\mathfrak{R}}(S)$ можно смотреть как на наибольшую факторполугруппу полугруппы S среди лежащих в $\mathfrak{R}$ (ср. *Реплика*).

Пример. Пусть $\mathfrak{R}$ — класс полугрупп, допускающих точное неприводимое представление. Тогда

$$\rho_{\mathfrak{R}}(S)=\{(a,\ b)\mid a,\ b\in S,\ (a,\ b)\in\mu(as)\bigcap\mu(bs)$$

для всех $s\in S\bigcup\varnothing\}$, где

$$\mu(a)=\{(x,\ y)\mid x,\ y\in S,\ a^mx=a^ny$$

для некоторых $m,\ n\geqslant 0\}$.

Рассматривались Р., определенные на данном классе полугрупп, замкнутом относительно гомоморфных образов.

С каждым радикалом ρ связан класс левых *полигонов* $\Sigma(\rho)$. Именно, если A — левый S-полигон, то конгруэнция θ на полугруппе S наз. A-аннулирующей, если $(\lambda,\mu)\in\theta$ влечет за собой $\lambda a=\mu a$ для всех $a\in A$. Точная верхняя грань всех A-аннулирующих конгруэнций оказывается A-аннулирующей конгруэнцией и обозначается $\mathrm{Ann}\ A$. Класс $\Sigma(\rho)$, по определению, состоит из всех таких левых S-полигонов A, что $\rho(S/\mathrm{Ann}\ A)=0$, причем S пробегает класс всех полугрупп. Если θ — конгруэнция на S, то левый (S/θ)-полигон лежит в $\Sigma(\rho)$ тогда и только тогда, когда он лежит в $\Sigma(\rho)$, будучи рассматриваемым как левый S-полигон. Наоборот, если дан класс Σ левых полигонов, обладающий этим свойством, и $\Sigma(S)$ — класс всех левых S-полигонов, лежащих в Σ, то функция

$$\rho(S)=\begin{cases} S\times S, & \text{если } \Sigma(S) \text{ пусто},\\ \bigcap\limits_{A\in\Sigma(S)}\mathrm{Ann}\ A & \text{в противном случае}\end{cases}$$

оказывается Р.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 2, М., 1972; [2] Скорняков Л. А., в кн.: Избр. вопросы алгебры и логики, Ново-

сиб., 1973, с. 283—99; [3] Clifford A. H., «Semigroup Forum», 1970, v. 1, № 2, p. 103—27; [4] Roize E. N., Schein B. M., там же, 1978, v. 16, № 3, p. 299—344. *Л. А. Скорняков.*

РАДИКАЛ группы G — наибольшая нормальная подгруппа группы G, принадлежащая данному радикальному классу групп. Класс групп наз. радикальным, если он замкнут относительно гомоморфных образов, а также относительно «бесконечных расширений», т. е. если классу обязана принадлежать всякая группа, обладающая возрастающим нормальным рядом с факторами из данного класса (см. *Нормальный ряд*). Во всякой группе имеется наибольшая радикальная нормальная подгруппа — радикал. Факторгруппа по Р. является полупростой группой, т. е. имеет единичный радикал.

Примером радикального класса является класс групп, обладающих возрастающим субнормальным рядом с локально нильпотентными факторами. Иногда термин «Р.» используется именно применительно к наибольшей локально нильпотентной нормальной подгруппе (в случае конечных групп — это нильпотентный Р., или подгруппа Фиттинга). Важнейшим Р. в конечных группах является разрешимый Р. (см. *Разрешимая группа*). Конечные группы, имеющие тривиальный разрешимый Р., допускают нек-рое описание в терминах простых групп и их групп автоморфизмов (см. [1]).

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967. *А. Л. Шмелькин.*

В классе групп Ли радикалом наз. наибольшую связную разрешимую нормальную подгруппу. В любой группе Ли G существует радикал R, причем R — замкнутая подгруппа Ли в G. Если H — нормальная подгруппа Ли в G, то группа G/H полупроста (см. *Ли полупростая группа*) тогда и только тогда, когда $H \supseteq R$. Подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G, соответствующая Р., совпадает с Р. алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Радикал алгебраической группы — наибольшая связная разрешимая нормальная подгруппа алгебраич. группы G, всегда замкнутая в G. Радикал $R(G)$ линейной алгебраич. группы G совпадает со связной компонентой единицы в пересечении всех *Бореля подгрупп* группы G; он является наименьшей из таких замкнутых нормальных подгрупп H, что группа G/H полупроста (см. *Полупростая алгебраическая группа*). Множество $R(G)_u$ всех унипотентных элементов в $R(G)$ есть связная унипотентная замкнутая нормальная подгруппа в G, являющаяся наибольшей среди всех связных унипотентных нормальных подгрупп. Эта подгруппа наз. унипотентным радикалом группы G и может быть охарактеризована как наименьшая из таких замкнутых нормальных подгрупп H в G, что G/H редуктивна. *А. Л. Онищик.*

РАДИКАЛ ИДЕАЛА A ассоциативно-коммутативного кольца R — множество всех элементов $b \in R$, нек-рая степень к-рых содержится в A. Это множество обозначается $\sqrt{A}$. Оно является идеалом в R, причем $\sqrt{A} \supset A$ и $\sqrt{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$.

Обобщением этого понятия является понятие радикала подмодуля. Пусть M — модуль над R и N — его подмодуль. Радикалом подмодуля N наз. множество всех элементов $a \in R$ таких, что $a^n M \subset N$ для нек-рого целого n (вообще говоря, зависящего от n). Радикал подмодуля будет идеалом в R. *О. А. Иванова.*

РАДИКАЛЫ колец и алгебр — понятие, впервые возникшее в классической структурной теории конечномерных алгебр в нач. 20 в. Под Р. первоначально понимался наибольший нильпотентный идеал конечномерной ассоциативной алгебры. Алгебры с нулевым Р. (называемые полупростыми) получили в классич. теории достаточно полное описание: любая полупростая конечномерная ассоциативная алгебра является прямой суммой простых матричных алгебр

над подходящими телами. Впоследствии было обнаружено, что наибольшие нильпотентные идеалы существуют в любых ассоциативных кольцах и алгебрах с условием минимальности для левых (или правых) идеалов, т. е. в любых артиновых кольцах и алгебрах, и описание артиновых полупростых колец и алгебр совпадает с описанием конечномерных полупростых алгебр. В то же время оказалось, что Р., как наибольший нильпотентный либо разрешимый идеал, может быть определен и во многих классах конечномерных неассоциативных алгебр (альтернативных, йордановых, лиевых и др.). При этом, как и в ассоциативном случае, полупростые алгебры оказываются прямыми суммами простых алгебр нек-рого специального вида.

В связи с тем, что в бесконечномерном случае наибольшего нильпотентного идеала может и не существовать, появилось много различных обобщений классического Р.: радикал Бэра, радикал Джекобсона, радикал Левицкого, радикал Кёте и др. Наиболее часто используемый из них — *Джекобсона радикал*. Были введены также Р., в нек-ром смысле противоположные классическому. Так, напр., все классически полупростые кольца (т. е. прямые суммы полных матричных колец) радикальны в смысле регулярного радикала Неймана и наследственно идемпотентного радикала Блэра. Построение общей теории Р. было начато в работах С. Амицура [1] и А. Г. Куроша [2].

Общая теория радикалов. Всюду в дальнейшем говорится только об алгебрах (имеются в виду алгебры над произвольным фиксированным ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей); кольца являются частным случаем таких алгебр. Под идеалом алгебры, если это не оговорено специально, понимается двусторонний идеал.

Пусть $\mathfrak{A}$ — нек-рый класс алгебр, замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов, т. е. содержащий вместе со всякой алгеброй любой ее идеал и любой ее гомоморфный образ. И пусть r — нек-рое абстрактное свойство, к-рым может обладать или не обладать алгебра из $\mathfrak{A}$. Алгебра, обладающая свойством r, наз. r-алгеброй. Идеал I алгебры A наз. ее r-идеалом, если I является r-алгеброй. Алгебра наз. r-полупростой, если она не имеет ненулевых r-идеалов. Говорят, что r является радикальным свойством в классе $\mathfrak{A}$ или что в $\mathfrak{A}$ задан радикал (в смысле Куроша), если выполняются следующие условия:

(А) гомоморфный образ r-алгебры есть r-алгебра;

(Б) каждая алгебра A класса $\mathfrak{A}$ обладает наибольшим r-идеалом, т. е. идеалом, содержащим любой r-идеал этой алгебры, и этот максимальный r-идеал наз. тогда r-радикалом этой алгебры и обозначается $r(A)$;

(В) факторалгебра $A/r(A)$ r-полупроста.

Алгебра, совпадающая со своим Р., наз. радикальной. В любом классе алгебр и для любого радикала $\{0\}$ является единственной одновременно радикальной и полупростой алгеброй. Подпрямое произведение любого множества полупростых алгебр само полупросто.

С каждым радикалом r связаны два подкласса алгебр в $\mathfrak{A}$: класс $\mathcal{R}(r)$ всех r-радикальных алгебр и класс $\mathcal{P}(r)$ всех r-полупростых алгебр. По любому из этих классов однозначно находится радикал $r(A)$ для каждой алгебры A из $\mathfrak{A}$, а именно:

$$r(A) = \sum \{I \mid I \text{ — идеал в } A,\ I \in \mathcal{R}(r)\};$$

$$r(A) = \bigcap \{I \mid I \text{ — идеал в } A,\ A/I \in \mathcal{P}(r)\}.$$

Алгебра r-радикальна тогда и только тогда, когда она не может быть отображена гомоморфно ни на одну ненулевую r-полупростую алгебру.

Известны условия на подклассы алгебр, необходимые и достаточные для того, чтобы эти подклассы служили классами всех радикальных или классами всех полупростых алгебр для каких-либо Р. в $\mathfrak{A}$. Такие подклассы алгебр принято называть соответственно радикальными и полупростыми подклассами.

Частичная упорядоченность радикальных классов по включению индуцирует частичный порядок на классе всех Р. в $\mathfrak{A}$. А именно, считается, что $r_1 \leqslant r_2$, если $\mathscr{R}(r_1)$ содержит $\mathscr{R}(r_2)$ (и в этом случае также $\mathscr{P}(r_1)$ содержит $\mathscr{P}(r_2)$).

Для каждого подкласса M класса $\mathfrak{A}$ нижним радикальным классом $l(M)$, порожденным классом M, наз. наименьший радикальный класс, содержащий M, а соответствующий ему Р. наз. нижним радикалом, определяемым классом M. Верхним радикальным классом $u(M)$, определенным классом M, наз. наибольший радикальный класс, относительно Р. к-рого все алгебры из M полупросты (этот Р. наз. верхним радикалом, определяемым классом M). Для любого класса M нижний радикальный класс $l(M)$ существует. Если $\mathfrak{A}$ — класс ассоциативных алгебр, то верхний Р. для любого подкласса M также всегда существует. В неассоциативном случае верхний Р. может не существовать. Известны достаточные условия на класс M, при к-рых верхний радикал для M существует. Этим условиям, в частности, удовлетворяет всякий класс, содержащий только простые алгебры.

Для любого Р. всякая простая алгебра либо радикальна, либо полупроста. Таким образом, каждому радикалу r соответствует разбиение простых алгебр на два непересекающихся класса: S_1 — класс r-полупростых простых алгебр, или верхний класс, и S_2 класс всех r-радикальных простых алгебр, или нижний класс. Принято говорить, что радикал r соответствует этому разбиению. Обратно, для произвольного разбиения простых алгебр на два непересекающихся класса, один из к-рых S_1 назван верхним, а другой S_2 — нижним, существует радикал, соответствующий данному разбиению. Такими будут верхний радикал r_1, определяемый классом S_1, а также нижний радикал r_2, определяемый классом S_2; радикалы r_1 и r_2 наз. соответственно верхним и нижним радикалами данного разбиения простых алгебр. Для любого радикала r, соответствующего тому же разбиению простых алгебр, $r_1 \geqslant r \geqslant r_2$. В классе всех ассоциативных алгебр для любого разбиения простых алгебр $r_1 > r_2$. Классический Р. в классе конечномерных ассоциативных алгебр над полем соответствует тому разбиению простых алгебр, нижний класс которого пуст, причем является единственным нетривиальным Р., соответствующим этому разбиению.

Наследственные радикалы. Радикал r наз. идеально наследственным радикалом, или кручением, в классе $\mathfrak{A}$, если для всякого идеала I алгебры A этого класса: $r(I) = r(A) \cap I$. Идеально наследственные Р. есть в точности те Р., для к-рых классы $\mathscr{R}(r)$ и $\mathscr{P}(r)$ замкнуты относительно идеалов. Радикал r наз. наследственным, если класс $\mathscr{R}(r)$ замкнут относительно идеалов. В классах ассоциативных, а также альтернативных алгебр каждый наследственный Р. является кручением. Радикал r наз. строго наследственным, если класс $\mathscr{P}(r)$ замкнут относительно подалгебр.

Класс всех кручений является полной дистрибутивной «решеткой» (см. *Дистрибутивная решетка*). Употребление кавычек здесь связано с тем, что совокупность элементов этой «решетки» является не множеством, а классом.

В классе всех кручений выделены два противоположных подкласса: класс наднильпотентных кручений, т. е. таких кручений r, что все алгебры с нулевым умножением r-радикальны, и класс подидемпотентных кручений — таких кручений r, что все алгебры с нулевым умножением r-полупросты (а все r-радикальные алгебры идемпотентны). Важным частным случаем наднильпотентных Р. являются специальные радикалы — такие кручения r, что все r-полупростые алгебры разлагаются в подпрямое произведение первичных r-полупростых алгебр. Существуют наднильпотентные неспециальные Р. (см. [5], [7]).

Радикалы в классе ассоциативных колец. Пусть $\mathfrak{A}$ — класс всех ассоциативных колец. И пусть:

φ — нижний Р., определяемый классом всех простых колец с нулевым умножением;

β (нижний радикал Бэра) — нижний Р., определяемый классом всех нильпотентных колец; верхний Р., определяемый классом всех первичных колец; наименьший специальный Р.; равен пересечению простых идеалов кольца;

$\mathscr{L}$ (радикал Левицкого) — нижний Р., определяемый классом всех локально нильпотентных колец; равен сумме всех локально нильпотентных идеалов кольца и содержит любой односторонний локально нильпотентный идеал кольца;

$\mathscr{K}$ (верхний нильрадикал, или радикал Кёте) — нижний Р., определяемый классом всех нильколец;

$\mathscr{Y}$ (радикал Джекобсона) — верхний Р., определяемый классом всех примитивных колец; равен пересечению всех примитивных идеалов кольца, а также пересечению всех модулярных максимальных правых (левых) идеалов, является квазирегулярным идеалом, содержащим все квазирегулярные правые (левые) идеалы;

$\mathscr{T}$ (радикал Брауна — Маккоя) — верхний Р., определяемый классом всех простых колец с единицей, совпадает с верхним Р. своего разбиения; равен пересечению всех максимальных модулярных идеалов кольца;

τ — верхний Р., определяемый классом всех матричных колец над телами;

$\mathscr{A}$ (обобщенный нильрадикал) — верхний Р., определяемый классом всех колец без делителей нуля;

F — верхний Р., определяемый классом всех полей.

В классе всех ассоциативных колец имеют место строгие неравенства:

$$\varphi < \beta < \mathscr{L} < \mathscr{K} < \mathscr{Y} < \mathscr{T} < \tau < F,$$
$$\mathscr{K} < \mathscr{A} < F.$$

В классе колец с условием минимальности первые семь Р. совпадают и соответствуют классическому Р. Если радикал r индуцирует в классе колец с условием минимальности классический Р., то $\varphi < r < \tau$. Для колец с условием максимальности $\beta = \mathscr{L} = \mathscr{K}$. Для коммутативных колец $\mathscr{Y} = \mathscr{T} = \tau = F$, $\beta = \mathscr{L} = \mathscr{K} = \mathscr{A}$. Радикалы β, $\mathscr{L}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{T}$, τ, $\mathscr{A}$, F являются специальными. Радикалы φ, β, $\mathscr{L}$ соответствуют одному и тому же разбиению простых колец, а $\mathscr{Y}$, $\mathscr{T}$, τ, $\mathscr{A}$, F — другим попарно различным разбиениям.

Лит.: [1] Amitsur S. A., «Amer. J. Math.», 1952, v. 74, p. 774—86; 1954, v. 76, p. 100—36; [2] Курош А. Г., «Матем. сб.», 1953, т. 33, в. 1, с. 13—26; [3] Divinsky N., Rings and radicals, Toronto, 1965; [4] Artin E., Nesbitt C., Thorall R., Rings with minimum condition, Ann Arbor, 1944; [5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969, с. 28—32; [6] Кольца, т. 2, Новосиб., 1973, с. 3—6; [7] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М., Радикалы алгебр и структурная теория, М., 1979; [8] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И., Кольца, близкие к ассоциативным, М., 1978.

В. А. Андрунакиевич.

В классе алгебр Ли обычно радикалом наз. наибольший разрешимый идеал, т. е. разрешимый идеал $\mathfrak{r}$, содержащий все разрешимые идеалы данной алгебры Ли. В конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует также наибольший нильпотентный идеал $\mathfrak{n}$ (называемый иногда нильрадикалом), к-рый совпадает с наибольшим идеалом, состоящим из нильпотентных элементов, а также с множеством таких $x \in \mathfrak{g}$, что присоединенный оператор $\mathrm{ad}\, x$ содержится в Р. ассоциативной алгебры линейных преобразований пространства $\mathfrak{g}$, порожденной присоединенной алгеброй Ли $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$. Рассматривается также нильпотентный радикал $\mathfrak{s}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это множество таких $x \in \mathfrak{g}$, что $\sigma(x) = 0$ для любого неприводимого конечномерного линейного представления σ алгебры $\mathfrak{g}$. Нильпотентный Р. совпадает также с наибольшим из идеалов, представляемых нильпотентными операторами при любом конечномерном линейном представлении алгебры $\mathfrak{g}$. При этом $\mathfrak{r} \supseteq \mathfrak{n} \supseteq \mathfrak{s}$. Если характеристика основного поля равна 0, то $\mathfrak{s}$ — это наименьший из идеалов $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{g}$, для к-рых $\mathfrak{g}/\mathfrak{f}$ — редуктивная алгебра Ли. В этом случае нильпотентный Р. связан с радикалом $\mathfrak{r}$, соотношениями

$$\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r};$$

любое дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}$ переводит $\mathfrak{r}$ в $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{s}$ в $\mathfrak{s}$. Нильрадикал и нильпотентный Р., однако, не являются Р. в смысле общей теории Р. колец и алгебр.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1962; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958. *А. Л. Онищик.*

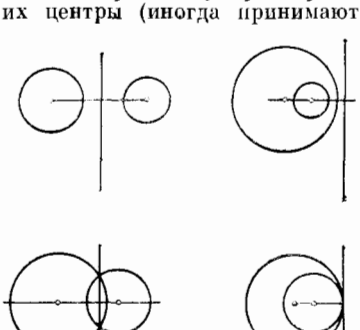
РАДИКАЛЬНАЯ ОСЬ — совокупность точек плоскости, имеющих относительно двух неконцентрич. окружностей

$$x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y - 2c_1 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y - 2c_2 = 0$$

одинаковую *степень точки*. Уравнение Р. о.:

$$(a_2 - a_1)\,x + (b_2 - b_1)\,y + (c_2 - c_1) = 0.$$

Р. о. двух непересекающихся окружностей проходит вне окружностей и перпендикулярна прямой, проходящей через их центры (иногда принимают, что Р. о.



концентрич. окружностей является несобственная прямая). Р. о. двух пересекающихся окружностей является прямая, проходящая через точки их пересечения; а Р. о. двух касающихся окружностей — их общая касательная. Для любых трех окружностей с неколлинеарными центрами Р. о. каждой пары окружностей проходят через одну точку (радикальный центр).

А. Б. Иванов.

РАДИУС окружности — отрезок, соединяющий точку окружности (или сферы) с центром. Р. наз. также длину этого отрезка. *БСЭ-3.*

РАДИУС-ВЕКТОР точки пространства — вектор, идущий в эту точку из нек-рой заранее фиксированной точки, называемой полюсом. Если в качестве полюса берется начало декартовых координат, то проекции Р.-в. точки M на оси координат (декартовых прямоугольных) совпадают с координатами точки M. *БСЭ-3.*

РАДО КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — квадратурная формула наивысшей алгебраич. степени точности для промежутка $[a, b]=[-1, 1]$ и веса $p(x)=1$ с одним фиксированным узлом — концом промежутка, напр.—1. Р. к. ф. имеет вид

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \cong Af(-1)+\sum_{j=1}^{n} C_j f(x_j).$$

Узлы x_j — корни ортогонального на $[-1,1]$ с весом $1+x$ многочлена Якоби $P_n^{(0,1)}(x)$, $A=2/(n+1)^2$. Коэффициенты C_j положительны. Алгебраич. степень точности равна $2n$. Существуют таблицы узлов и коэффициентов для Р. к. ф., напр. для $n=1(1)\ 6$ см. [2].

Формула найдена Р. Радо [1].

Лит.: [1] Rado R., «J. math. pures et appl.», 1880, v. 6, p. 283—336; [2] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967. *И. П. Мысовских.*

РАДОНА ИНТЕГРАЛ — интеграл по *Радона мере*. Подробнее, пусть даны σ-алгебра Σ подмножеств множества T и конечная счетно аддитивная функция φ на Σ (мера Радона). Тогда в совокупности всех измеримых функций выделяется класс функций, называемых суммируемыми по функции φ, к-рым сопоставляется нек-рое конечное число, к-рое и наз. интегралом Радона. *М. И. Войцеховский.*

РАДОНА МЕРА, внутренне регулярная мера,— конечная мера μ, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$ топологич. пространства X, обладающая следующим свойством. Для любого $\varepsilon>0$ найдется компакт $K=K_\varepsilon\subseteq X$ такой, что $\mu(X\setminus K_\varepsilon)<\varepsilon$. Введена И. Радоном (J. Radon, 1913), исходные построения к-рого относились к мерам на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — борелевской σ-алгебре пространства $\mathbb{R}^n$, $n=1,2,\ldots$. Топологич. пространство X наз. радоновым пространством, если любая конечная мера, определенная на σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$, является Р. м.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры, интегрирование мер, пер. с франц., М., 1967; [2] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., т. 1, М., 1962. *Р. А. Минлос.*

РАДОНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование функций от нескольких переменных, родственное *Фурье преобразованию*. Введено И. Радоном (см. [1]).

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывная и достаточно быстро убывающая на бесконечности функция от действительных переменных $x_i\in\mathbb{R}^1$, $i=1, 2, \ldots, n$, $n=1, 2, \ldots$

Для любой гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$

$$\Gamma=\{(x_1, \ldots, x_n): \xi_1 x_1+\ldots+\xi_n x_n=C\},$$
$$\xi_i\in\mathbb{R}^1,\quad i=1, \ldots, n,$$

и

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2>0,\quad C\in\mathbb{R}^1,$$

определяется интеграл

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_n, C)=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{1/2}}\int_\Gamma f(x_1, \ldots, x_n)\,dV_\Gamma,$$

где V_Γ — евклидовый $(n-1)$-мерный объем на гиперплоскости Γ. Функция

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_n, C),\quad (\xi_1, \ldots, \xi_n, C)\in\mathbb{R}^{n+1},$$

наз. преобразованием Радона функ-

ции f. Она является однородной функцией своих переменных степени —1:

$$F(\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_n; \alpha C) = \frac{1}{|\alpha|} F(\xi_1, \ldots, \xi_n; C)$$

и связана с преобразованием Фурье $\tilde{f}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_i \in \mathbb{R}^1$, функции f формулой

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_n; C) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_n) e^{-i\alpha C} d\alpha.$$

С Р. п. непосредственным образом связана задача, восходящая к И. Радону, о восстановлении функции f по значениям ее интегралов, вычисленных по всем гиперплоскостям пространства $\mathbb{R}^n$ (т. е. задача об обращении Р. п.).

Лит.: [1] Radon J., «Ber. Verh. Sächs. Acad.», 1917, Bd 69, S. 262—77; [2] Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я., Интегральная геометрия ..., М., 1962.

Р. А. Минлос.

РАДОНА — НИКОДИМА ТЕОРЕМА: у заряда ν, абсолютно непрерывного относительно нек-рой меры μ, существует плотность $p = \frac{d\nu}{d\mu}$ относительно μ, суммируемая по этой мере. Установлена И. Радоном [1] и О. Никодимом [2]. Точнее, пусть на измеримом пространстве $(X, \mathfrak{B})$, $\mathfrak{B}$ — нек-рая σ-алгебра подмножеств X, определены заряд ν, т. е. счетно аддитивная действительная или комплексная функция, заданная на $\mathfrak{B}$, и мера μ, причем заряд ν абсолютно непрерывен относительно μ. Тогда существует такая суммируемая по мере μ функция $p(x)$, $x \in X$, что для любого множества $A \in \mathfrak{B}$ имеет место

$$\nu(A) = \int_A p(x)\, d\mu(x).$$

Функция p единственна (с точностью до изменения на множестве нулевой μ-меры) и наз. плотностью заряда ν относительно меры μ. Имеются (см. [3]) обобщения этой теоремы на случай, когда заряд принимает значения из нек-рого векторного пространства.

Лит.: [1] Radon J., «Acad. Wiss.», Wien, 1919, t. 128, S. 1083—1121; [2] Nicodym O., «Fund. math.», 1930, t. 15, p. 131—79; [3] Данфорд Н., Шварц Д., Линейные операторы, ч. 1 — Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [4] Diestel J., Uhl J., Vector measures, Providence, 1977.

Р. А. Минлос.

РАЗБАВЛЕНИЕ РЯДА — включение в ряд между его соседними членами любого конечного числа нулей. Для ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \qquad (*)$$

разбавленный ряд имеет вид

$$u_0 + 0 + \ldots + 0 + u_1 + 0 + \ldots + 0 + u_2 + 0 + \ldots$$
$$\ldots + 0 + u_3 + \ldots.$$

Р. р. не отражается на его сходимости, однако может нарушить суммируемость ряда (суммируемый к числу s каким-либо методом суммирования ряд $(*)$ после разбавления может оказаться вообще не суммируемым этим методом или суммируемым к числу $a \neq s$).

И. И. Волков.

РАЗБИЕНИЕ — 1) Р.— представление заданного множества в виде объединения системы множеств, не имеющих попарно общих точек.

В дискретной геометрии часто рассматривают Р. нек-рого пространства на замкнутые области, к-рые покрывают все пространство и попарно не имеют общих внутренних точек (граничные точки могут быть общими). Напр., если зафиксировать любую точечную решетку евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и сопоставить каждой точке решетки те точки пространства, к-рые удалены от этой точки не более, чем от любой другой точки решетки, то получается т. н. разбиение Дирихле—Вороного. Р. пространства наз. правильным,

если для любых его областей D_1 и D_2 существует такое движение M, что $D_2 = M(D_1)$ и $P = M(P)$. См. также *Вороного типы решеток*.

В комбинаторной геометрии имеется ряд задач и результатов, относящихся к специальным Р. нек-рых множеств. Примером такой задачи является *Борсука проблема*: можно ли разбить любое множество диаметра d, лежащее в $\mathbb{R}^n$, на $n+1$ таких частей, что каждая из них имеет диаметр $<d$? В $\mathbb{R}^n$ существуют такие ограниченные множества, разбиение к-рых на меньшее число таких частей невозможно. Любое Р. определяет некрое *покрытие* и из любого покрытия можно получить нек-рое Р. Разбиения имеют тесную связь с *освещения задачами* и с *Хадвигера гипотезой*.

Лит.: [1] Болтянский В. Г., Солтан П. С., Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств, Кишинев, 1978; [2] Грюнбаум Б., Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел, пер. с англ., М., 1971.

П. С. Солтан.

2) Р. пространства X — система $\mathfrak{M}$ его дизъюнктных подмножеств, объединение к-рых есть X. Множество $\mathfrak{M}$ превращается в топологич. пространство, если объявить открытыми в нем множествами всякие множества $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, прообразы к-рых при естественном отображении $\mu: X \to \mathfrak{M}$ (каждой точке $x \in X$ ставится в соответствие единственное содержащее его множество $M \subset \mathfrak{M}$) являются открытыми множествами в X.

3) Р.— локально конечное покрытие пространства, элементами к-рого являются замкнутые канонич. множества с дизъюнктными открытыми ядрами.

М. И. Войцеховский.

РАЗВЕРТКА — 1) Р.— область на плоскости, изометричная заданной области на развертывающейся поверхности. Пример: Р. боковой поверхности конуса, разрезанного по образующей, есть плоский сектор. Приближенное построение Р. может осуществляться графически, средствами начертательной геометрии.

2) Р. многогранной поверхности — набор многоугольников (граней Р.) с указанием правила склеивания их сторон, порождающий *многогранную метрику*, изометричную внутренней геометрии заданной многогранной поверхности. Грани Р. не обязаны совпадать с истинными гранями поверхности: при наложении на поверхность они могут переламываться.

В. А. Залгаллер.

РАЗВЕРТЫВАЮЩАЯСЯ ПОВЕРХНОСТЬ, торс,— линейчатая поверхность нулевой гауссовой кривизны. Во всех точках одной и той же образующей Р. п. имеет одну и ту же касательную плоскость. Параметр распределения Р. п. равен нулю. Если образующие Р. п. параллельны одной и той же прямой, то она — цилиндр. Если образующие Р. п. проходят через одну точку, то она — конус. В остальных случаях Р. п. образована касательными к нек-рой кривой — ребру возврата Р. п. Для того чтобы кривая на поверхности была ее линией кривизны, необходимо и достаточно, чтобы нормали вдоль этой линии образовывали Р. п.

Р. п.— огибающая однопараметрич. семейства плоскостей (напр., спрямляющая поверхность) и потому локально является изгибанием куска плоскости.

И. Х. Сабитов.

РАЗВЕТВЛЕНИЯ ТОЧКА — то же, что *ветвления точка* аналитич. функции.

РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ МЕТОД — то же, что *Фурье метод*.

РАЗДЕЛИТЕ́ЛЬНАЯ ДИЗЪЮНКЦИЯ — одна из логич. связок. Предложение $A \vee B$, получающееся из двух предложений A и B с помощью Р. д. $\vee$, считается истинным в случае, если истинно A и ложно B, или в случае, если ложно A и истинно B. В остальных случаях оно считается ложным. Таким образом, Р. д. мо-

жет быть выражена через обычную (не разделительную) дизъюнкцию по формуле

$$A \dot{\vee} B \leftrightarrow (A \vee B) \,\&\, \neg\, (A \wedge B).$$

В. Н. Гришин.

РАЗЛИЧАЮЩАЯ, различающая коцепь,— *препятствие* к продолжению гомотопии между отображениями. Пусть X — нек-рое клеточное пространство, Y — односвязное топологич. пространство; пусть, далее, даны два отображения f, g: $X \to Y$ и гомотопия

$$F : X \times 0 \cup X^{n-1} \times I \cup X \times 1$$

(где $I=[0, 1]$ и X^n есть n-мерный остов пространства X) между ними на $(n-1)$-мерном остове. Для каждой ориентированной n-мерной клетки e^n пространства X ограничение отображения F на $\partial(e \times I)$ задает отображение $S^n \to Y$ (S^n есть n-мерная сфера) и, значит, элемент группы $\pi_n(Y)$. Таким образом возникает коцепь $d^n(f, g) \in C^n(X; \pi_n(Y))$ (более точным было бы обозначение $d^n_F(f, g)$), к-рая и наз. различающей коцепью; коцепь $d^n(f, g)$ является препятствием к продолжению отображения F на $X \times 0 \cup X^n \times I \cup X \times 1 = (X \times I)^{n-1} \cup X \times \{0, 1\}$.

Справедливы следующие утверждения: 1) $d^n(f, g)=0$ тогда и только тогда, когда гомотопия между f и g продолжается на X^n; 2) коцепь

$$d^n(f, g) \in C^n(X \times I, X \times \{0, 1\}; \pi_n(Y))$$

является коциклом; 3) класс когомологий

$$[d^n(f, g)] \in H^n(X \times I, X \times \{0, 1\}; \pi_n(Y))$$

тогда и только тогда равен нулю, когда между f и g имеется гомотопия на X^n, совпадающая с F на X^{n-2}. Без ограничения общности можно считать, что f и g совпадают на X^{n-1} и что $F(x, t)=f(x)=g(x)$ для $x \in X^{n-2}$. При этих предположениях справедливы следующие утверждения:

1) $d^n(f, g)=-d^n(g, f)$, в частности $d^n(f, f)=0$;

2) $d^n(f, g)+d^n(g, h)=d^n(f, h)$;

3) для любого отображения $f : X \to Y$ и любой коцепи $d \in C^n(X; \pi_n(Y))$ существует такое отображение g, что $f|_{X^{n-1}}=g|_{X^{n-1}}$ и $d^n(f, g)=d$.

Пусть теперь заданы два отображения f, g: $X^n \to Y$ $f|_{X^{n-1}}=g|_{X^{n-1}}$ и пусть c^{n+1}_f и c^{n+1}_g — препятствия к продолжениям соответствующих отображений. Роль Р. в теории препятствий определяется следующим предложением:

$$c^{n+1}_f - c^{n+1}_g = \delta d^n(f, g).$$

Таким образом, если g продолжается на X^{n+1}, то $[c^{n+1}_f]=0$, а если $[c^{n+1}_f]=0$, то $f|_{X^{n-1}}$ продолжается на X^{n+1}.

Ю. Б. Рудяк.

РАЗЛИЧАЮЩИЙ ЭЛЕМЕНТ в K-теории — элемент группы $K(X, A)$ (где (X, A) — пара пространств, при этом обычно X считается конечным *клеточным пространством* и A — его клеточным подпространством), строящийся по тройке (ξ, η, ζ), где ξ и η — векторные расслоения одной и той же размерности над X и $\zeta : \xi|_A \to \eta|_A$ — изоморфизм векторных расслоений (здесь $\sigma|_A$ — часть векторного расслоения σ над X, расположенная над подпространством A). Построение Р. э. осуществляется следующим образом. Пусть сначала расслоение η тривиально и фиксирована какая-нибудь тривиализация расслоения η над X. Тогда ζ задает тривиализацию расслоения $\xi|_A$ и, значит, задает элемент группы $\tilde{K}(X/A)=K(X, A)$. Этот элемент не зависит от выбора тривиализации расслоения η над всем X. В общем случае подбирается такое расслоение σ над X, что расслоение $\eta \oplus \sigma$ тривиально и тройке (ξ, η, ζ) со-

поставляется тот же элемент, что и тройке ($\xi \oplus \sigma$, $\eta \oplus \sigma$, $\zeta \oplus \mathrm{id}\ \sigma$). *Ю. Б. Рудяк.*

РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ СИСТЕМА для заданного семейства подмножеств $F = \{F_i, i \in I\}$ множества S — множество $R = \{\pi(i),\ i \in I\}$ при любом взаимно однозначном отображении $\pi : I \to S$, обладающем свойством: $\pi(i) \in F_i$ для любого $i \in I$ (здесь I — произвольное множество индексов). Другое название Р. п. с. R — т р а н с в е р с а л ь семейства F. Рассматриваются также ч а с т и ч н ы е т р а н с в е р с а л и семейства F — множества вида $\{\pi(i), i \in I_0\}$, где I_0 — подмножество I, π: $I_0 \to S$ — взаимно однозначное отображение.

Р. п. с. применяются как в чисто комбинаторных математич. исследованиях, так и в их приложениях к линейному программированию, математич. экономике и кибернетике. В пределах комбинаторной математики Р. п. с. играют существенную роль в той ее части, к-рая связана с задачами выбора и экстремальными задачами. Они используются, в частности, при изучении латинских прямоугольников, в задаче о назначениях, при исследовании матриц с неотрицательными элементами и с суммами элементов по строкам и столбцам, лежащими в заданных границах.

Критерий существования Р. п. с. для конечного I дается т е о р е м о й Х о л л а: пусть на множестве S задано семейство $F = \{F_i, i \in I\}$ из $|I| = n$ элементов, n конечно; для существования Р. п. с. необходимо и достаточно, чтобы $|F_{i_1} \cup F_{i_2} \cup \ldots \cup F_{i_k}| \geqslant k$ для каждого k-подмножества $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq I$ и каждого k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Теорема Холла представляет собой утверждение, эквивалентное теореме Кёнига (см. *Выбора теоремы*) о матрицах из нулей и единиц. Этот фундаментальный критерий применим также к бесконечному I, когда все F_i, $i \in I$, конечны. Упомянутыми случаями, вообще говоря, исчерпывается, как показывают примеры, область применения критерия Холла, но он послужил отправной точкой для различных критериев в ряде других случаев (см. [3]), напр.: а) когда существует такое подмножество $I_0 \subset I$, что $I - I_0$ конечно, а F_i конечны при всех $i \in I_0$; б) когда I — счетное множество.

Ввиду широкого использования Р. п. с. представляют интерес алгоритмы, разработанные для их практич. нахождения (см. [1]).

Одной из основных задач о Р. п. с. является задача о числе Р. п. с. для конечных семейств, состоящих из конечных множеств; она связана с вычислением *перманента* матрицы, состоящей из нулей и единиц. Для числа Р. п. с. существуют оценки снизу. Пусть семейство F состоит из n подмножеств $F_1, \ldots, F_n$ и пусть они упорядочены по мощности: $m = |F_1| \leqslant |F_2| \leqslant \ldots \leqslant |F_n|$. Тогда если F удовлетворяет критерию Холла, то число Р. п. с. не меньше, чем

$$\prod_{k=1}^{\min(m,\ n)} (|F_k| - k + 1).$$

Вопросы, связанные с системами представителей, разрабатываются также в рамках теории *матроидов* (иначе — пространств независимости, *комбинаторных геометрий*). Связь теории представителей с матроидами дается т е о р е м о й Э д м о н д с а — Ф а л к е р с о н а: для заданного семейства подмножеств конечного множества совокупность всех частичных трансверсалей есть совокупность независимых подмножеств нек-рого матроида. Матроид, полученный таким образом из семейства F, наз. т р а н с в е р с а л ь н ы м м а т р о и д о м для F. Многие матроиды могут быть представлены как трансверсальные для нек-рого семейства подмножеств.

Понятие Р. п. с. обобщается в различных направлениях, напр.: а) ρ-т р а н с в е р с а л и для заданного

семейства $F=\{F_1, \ldots, F_n\}$ и целочисленного вектора $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ суть множества $\{\pi(1), \ldots, \pi(n)\}$, где $\pi(i)\subseteq F_i$, $i=1, \ldots, n$,— такие попарно различные подмножества S, что $1\leqslant|\pi(i)|\leqslant\rho_i$; б) k-трансверсали для $F=\{F_i, i\in I\}$ и целого числа $k\geqslant 1$ суть подмножества $R=\{\pi(i), i\in I\}$ для отображений $\pi: I\to S$ со свойствами $\pi(i)\in F_i$ и $1\leqslant|\{\pi^{-1}(\pi(i))\}|\leqslant k$, $i\in I$.

Лит.: [1] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [2] Mirsky L., Transversal theory, N. Y.— L., 1971; [3] Тараканов В. Е., в кн.: Вопросы кибернетики, в. 16, М., 1975, с. 110—24.

В. Е. Тараканов.

РАЗЛОЖЕНИЕ ЕДИНИЦЫ — однопараметрическое семейство $\{E_\lambda\}$, $-\infty<\lambda<\infty$, проекционных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, такое, что

1) $E_\lambda\leqslant E_\mu$, если $\lambda<\mu$;

2) E_λ сильно непрерывно слева, т. е. $E_{\lambda-0}=E_\lambda$ для любого $\lambda\in(-\infty, \infty)$;

3) $E_\lambda\to 0$ при $\lambda\to-\infty$ и $E_\lambda\to E$ при $\lambda\to\infty$, здесь 0 и E — нулевой и единичный операторы в пространстве $\mathcal{H}$. Условие 2) можно заменить на условие непрерывности справа в каждой точке $\lambda\in(-\infty, \infty)$.

Всякий самосопряженный оператор A, действующий в $\mathcal{H}$, порождает соответствующее ему вполне определенное Р. е. При этом кроме условий 1)—3) выполняются еще условия:

4) если B — ограниченный оператор такой, что $BA=AB$, то $BE_\lambda=E_\lambda B$ для любого λ;

5) если A — ограниченный оператор, m, M — его нижняя и верхняя грани соответственно, то

$$E_\lambda=0,\ -\infty<\lambda\leqslant m, \quad \text{и} \quad E_\lambda=E \quad \text{при} \quad M<\lambda<\infty.$$

Р. е., порожденное оператором A, полностью определяет спектральные свойства этого оператора, а именно:

(α) точка λ есть регулярная точка оператора A тогда и только тогда, когда она является точкой постоянства, т. е. когда существует $\delta>0$ такое, что $E_\mu=E_\lambda$ для $\mu\in(\lambda-\delta, \lambda+\delta)$;

(β) точка λ_0 есть собственное значение оператора A тогда и только тогда, когда в этой точке E_λ имеет скачок, т. е. $E_{\lambda_0+0}-E_{\lambda_0}>0$;

(γ) если $E(\Delta)=E_\mu-E_\lambda$, то $L_{E(\Delta)}=E(\Delta)\mathcal{H}$ есть инвариантное подпространство оператора A.

Поэтому Р. е., порожденное оператором A, наз. также спектральной функцией этого оператора.

Обратно, каждое Р. е. $\{E_\lambda\}$ однозначно определяет самосопряженный оператор A, для к-рого это Р. е. является спектральной функцией. Область определения $D(A)$ оператора A состоит из тех и только тех $x\in\mathcal{H}$, для к-рых

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\langle E_\lambda x,\ x\rangle<\infty$$

и имеет место представление оператора A в виде операторного интеграла Стилтьеса

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE_\lambda.$$

Лит.: [1] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979; [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977.

В. И. Соболев.

РАЗЛОЖИМАЯ ГРУППА над полем k, расщепимая группа над k, k-разложимая группа,— линейная алгебраич. группа, определенная над k и содержащая разложимую над k *Бореля подгруппу*; при этом связная разрешимая линейная алгебраич. группа B наз. разложимой над k, если она определена над k и обладает таким композиционным рядом $B=B_0\supset B_1\supset B_2\supset\ldots\supset B_t=\{1\}$, что все B_i — связные, определенные над k алгебраич. подгруп-

пы, а каждая из факторгрупп B_i/B_{i+1} изоморфна над k либо одномерному тору $G_m=GL_1$, либо аддитивной одномерной группе G_a. В частности, *алгебраический тор* тогда и только тогда разложим над k, когда он определен над k и изоморфен над k прямому произведению нескольких экземпляров группы G_m. Для связных разрешимых k-разложимых групп справедлива *Бореля теорема* о неподвижной точке. Определенная над k редуктивная линейная алгебраич. группа тогда и только тогда разложима над k, когда она обладает разложимым над k максимальным тором, т. е. когда ее k-ранг совпадает с ее рангом (см. *Ранг алгебраической группы*). Образ k-разложимой группы при любом определенном над k рациональном гомоморфизме является k-разложимой группой. Всякая определенная над k линейная алгебраич. группа G разложима над алгебраич. замыканием поля k; если, кроме того, группа G редуктивна или разрешима и связна, то она разложима над нек-рым конечным расширением поля k. Если поле k совершенно, то связная разрешимая определенная над k линейная алгебраич. группа тогда и только тогда разложима над k, когда она приводится над k к треугольному виду. Если $\mathrm{char}\ k=0$, то определенная над k линейная алгебраич. группа тогда и только тогда разложима над k, когда ее алгебра Ли L является разложимой (или расщепляемой) над k алгеброй Ли; последнее, по определению, означает, что алгебра Ли L обладает расщепляющей подалгеброй Картана, т. е. такой *Картана подалгеброй* $H\subset L$, что все собственные значения каждого оператора $\mathrm{ad}_L h$, $h\in H$, принадлежат полю k.

Если $G_{\mathbb{R}}$ — вещественная группа Ли, совпадающая с группой вещественных точек полупростой $\mathbb{R}$-разложимой алгебраич. группы G, а $G_{\mathbb{C}}$ — комплексификация группы Ли $G_{\mathbb{R}}$, то $G_{\mathbb{R}}$ наз. нормальной вещественной формой комплексной группы Ли $G_{\mathbb{C}}$.

Существуют *квазиразложимые группы* над полем k, не являющиеся Р. г. над k; примером при $k=\mathbb{R}$ может служить группа $SO(3,1)$.

Лит.: [1] Борель А., *Линейные алгебраические группы*, пер. с англ., М., 1972; [2] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; [3] Мерзляков Ю. И., Рациональные группы, М., 1980; [4] Хамфри Дж., *Линейные* алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980. *В. Л. Попов.*

РАЗМАХ выборки — разность

$$w_n=x_{\max}-x_{\min}$$

между наибольшим $x_{\max}=x_n$ и наименьшим $x_{\min}=x_1$ значениями в выборке

$$(x_1,\ \ldots,\ x_n),\quad x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n,$$

получающейся с помощью n независимых измерений одной и той же случайной величины X. Пусть $F(x)=\mathsf{P}\{X\leqslant x\}$ — функция распределения случайной величины X. Тогда распределение вероятностей для значений Р. равно

$$\mathsf{P}\{w_n\leqslant t\}=n\int_{-\infty}^{\infty}(F(x+t)-F(x))^{n-1}\,dF(x),$$
$$0\leqslant t\leqslant\infty.$$

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1960; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968. *Т. Ю. Попова.*

РАЗМЕРНОСТЕЙ АНАЛИЗ — метод установления связи между физич. величинами, существенными для изучаемого явления, основанный на рассмотрении размерностей этих величин. В Р. а. рассматриваются проблемы установления различных систем единиц измерения, вопросы о выборе первичных величин и соответствующих им опытных единиц измерения и связанное с выбором первичных единиц измерения

образование вторичных единиц измерения для величин, определяемых через первичные.

В качестве величин, для к-рых выбираются первичные единицы измерения, можно брать различные. В разных областях приложений выгодно и удобно выбирать в качестве первичных единиц измерения свои местные единицы. В связи с этим и с установившимися обычаями на практике были созданы различные системы единиц измерения и возникла задача о переходе (задача пересчета) от одной системы единиц измерения к другой. Распространены многочисленные системы единиц измерения: в числе главных — система СГС, в к-рой первичные сантиметр, грамм-масса и секунда; система МКГСС, в к-рой первичные метр, килограмм-сила и секунда; система СИ, в к-рой первичные метр, килограмм-масса, секунда, ампер, кельвин, кандела. Число первичных единиц измерений в употребляемых или потенциально допустимых системах единиц измерения может быть разным: меньшим трех, равным трем, как в системах СГС и МКГСС, и др. Выражение производной единицы измерения через основные единицы наз. формулой размерности, к-рая записывается через символы первичных единиц измерения и имеет вид степенных одночленов. Напр., в системе СГС формулы размерности содержат три аргумента: единицу длины L, единицу времени T и единицу массы M; на основании определения силы через массу и ускорение формула размерности силы K имеет вид

$$K=\frac{ML}{T^2}=MLT^{-2}. \qquad (1)$$

В системе СГС формулы для любой величины N механической, тепловой или электромагнитной природы имеют вид

$$N=L^lT^tM^m, \qquad (2)$$

где показатели степеней l, t, m — нек-рые целые или дробные действительные числа, к-рые наз. показателями размерности, или размерностью, величины N. Принимают, что размерность первичной величины в отношении себя равна единице, а в отношении любой другой первичной величины — нулю.

Формулы размерности позволяют определить численные масштабные множители для пересчета соответствующих характеристик при изменении величин первичных единиц измерения. Если вместо заданных единиц измерения длины L, времени T и массы M перейти к новым единицам измерения, меньшим для длины в α раз, для времени в β раз и для массы в γ раз, то новая единица измерения для величины N с размерностью по формуле (2) будет меньше первоначальной в $\alpha^l\beta^t\gamma^m$ раз.

Если $l=t=m=0$, то численное значение величины не зависит от выбора масштабов для первичных единиц и, следовательно, такая величина будет безразмерной, или отвлеченной. Примерами безразмерных величин являются: число Рейнольдса $\mathrm{Re}=\rho vl/\mu$; число Фруда $\mathrm{Fr}=\frac{v^2}{lg}$, число Маха $\mathrm{M}=v/a$, число кавитации $\varkappa=2\Delta P/\rho v^2l^2$, где для характерных в нек-рых явлениях размерных величин приняты следующие обозначения: ρ — плотность, v — скорость, l — линейный размер, μ — динамич. коэффициент вязкости, ΔP — характерная разность давлений, g — ускорение силы тяжести.

Число первичных единиц измерения можно увеличивать, если кроме уже выбранных первичных единиц измерения выбирать по соглашению независимо единицы измерения для любых др. величин, напр. можно взять независимо единицы измерения: для тепловой энергии — калорию и для механич. энергии — кило-

граммометр, прибавив соотношение: I — тепловая энергия в калориях или механич. энергия в килограммометрах, где I — размерная «физическая» постоянная, называемая механич. эквивалентом тепла.

Физич. законы, содержащие размерные постоянные, можно использовать для сокращения числа первичных единиц измерения. Так, напр., постоянную скорости света можно считать абсолютной постоянной, т. е. безразмерной величиной, и таким путем выразить единицу измерения и размерность длины через единицу измерения и размерность времени; при рассмотрении гравитационной постоянной как абсолютного безразмерного числа можно выразить размерность и единицу измерения для массы через размерность и единицы измерения для длины L и времени T.

В нек-рых вопросах явно проявляется тенденция к стандартизации путем введения единой универсальной системы единиц измерения. Однако привязывание универсальной системы единиц измерения к определенным физически фиксированным масштабам или к соответствующим физич. постоянным является искусственным. Наоборот, возможность использования произвольных единиц измерения и независимость рассматриваемых закономерностей от выбора систем единиц измерения могут служить источником ценных выводов.

Физич. закономерности, вообще говоря, не зависят от выбора системы единиц измерения. Это обстоятельство обусловливает особую структуру функций и функционалов, выражающих собой через посредство размерных величин физич. закономерности, независимые от систем единиц измерения. Эта специальная структура функциональных соотношений устанавливается π-теоремой: всякое соотношение между размерными характеристиками, имеющее физич. смысл, представляет собой, по существу, соотношение между отвлеченными безразмерными комбинациями, к-рые можно составить из размерных определяемых и определяющих величин, среди к-рых должны учитываться и размерные физич. постоянные, имеющие существенное значение в рассматриваемых явлениях.

Дополнительные данные об отсутствии нек-рых физич. постоянных в рассматриваемом соотношении приводят к сокращению в этих соотношениях существенных аргументов. Напр., если в рассматриваемых тепловых и механич. явлениях нет преобразования — перехода тепловой энергии, измеряемой в калориях, в механическую, измеряемую в эргах, то постоянная механич. эквивалента тепла будет отсутствовать среди аргументов функции, описывающей соответствующую закономерность.

Для получения полезных выводов с помощью Р. а. необходимо схематизировать проблему и, прежде всего, фиксировать общее моделирование явлений и свойств рассматриваемых объектов. Во многих случаях такая схематизация может быть связана с рядом рабочих гипотез. В рамках нек-рых моделей устанавливается система характеристик, к-рые связаны между собой физич. соотношением и к-рые согласно π-теореме должны представляться как соотношения между безразмерными параметрами. Таким образом, нужно ввести систему определяющих параметров постоянных или переменных, вытекающую из постановки выделяемого класса задач и характеризующую, вообще говоря, полностью для данной среды каждую отдельно взятую задачу.

При выделении минимального числа определяющих параметров требуется учитывать условия симметрии и выбор выгодных систем координат. Независимые переменные (координаты точек пространства и времени) и физич. параметры типа коэффициентов теплопроводности, вязкости, модулей упругости и т. п. необхо-

димо включать в таблицу определяющих параметров. Такие постоянные, как ускорение силы тяжести или механич. эквивалент тепла, тоже должны фигурировать в перечне определяющих параметров, когда гравитация или переход тепловой энергии, измеряемой в калориях, в механическую, измеряемую в килограммометрах (или в эргах), существенны.

Для выделенного класса задач необходимо включать в число определяющих параметров размерные или безразмерные характеристики заданных границ рассматриваемых тел и задаваемых функций, участвующие в формулировке начальных, краевых или каких-либо других условий.

Если рассматриваемая задача сформулирована как математическая, то можно выписать полную таблицу аргументов для соотношений вида

$$a = f(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n), \qquad (3)$$

где a — искомая величина, а $a_1, \ldots, a_n$ — определяющие параметры. В зависимости от постановки задачи число n может быть конечным или бесконечным. Обычно при соответствующем фиксировании класса рассматриваемых задач можно ограничиваться случаями, когда n конечно и, вообще говоря, невелико. Параметры $a_1, \ldots, a_n$ составляются из задаваемых величин, входящих в основные уравнения, граничные условия и начальные данные. Определяющие параметры — это все исходные данные, к-рые надо знать предварительно по смыслу постановки математич. задачи для вычисления искомой функции различными путями, в том числе и при расчетах на специальных машинах или с помощью аналоговых систем.

Определяющие параметры при получении нужных ответов с помощью экспериментов — это величины, характеризующие каждый отдельный опыт, величины, к-рые необходимы и достаточны для повторения и сравнения различных экспериментов.

Можно выписать систему определяющих параметров и в тех случаях, когда детальные свойства модели и системы уравнений, описывающих рассматриваемые явления, вообще говоря, неизвестны: достаточно опереться на предварительные данные или гипотезы о виде задаваемых функций и о постоянных, к-рые входят или могут входить в определение модели, и на др. условия, выделяющие конкретные решения задачи.

Выводы Р. а. получаются на основании π-теоремы о существовании соотношения вида (3), к-рое выполняется для определяемой величины и определяющих величин $a_1, \ldots, a_n$ в любой системе единиц измерения.

Система аргументов в соотношении (3) должна в смысле теории размерностей обладать полнотой. Это значит, что если величина a отлична от нуля или бесконечности, то существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ такие, что размерности величины a и комбинаций $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$ одинаковы. На основании этого и π-теоремы соотношение (3) можно переписать в виде

$$\pi = \frac{a}{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}} = g(\pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_{n-k}), \qquad (4)$$

где $\pi_1, \ldots, \pi_{n-k}$ — степенные безразмерные одночлены (аналогичные $\pi = 3{,}14\ldots$), образованные из $a_1, \ldots, a_n$, причем $k \leqslant n$. Число k равно числу параметров среди $a_1, \ldots, a_n$ с независимыми размерностями.

После явной записи физич. закономерностей в виде (4) по существу заканчиваются возможности применений Р. а. Соответствующие результаты, полученные таким путем, носят ограниченный характер. Если видоизменить любым способом уравнения движения без внесения в них каких-либо новых параметров, то физич. закономерности (4) могут сильно измениться,

по основной вывод, содержащийся в формуле (4), сохраняет свою силу.

Существует целый ряд примеров получения плодотворных выводов и установления целесообразных удобных методов обработки экспериментальных результатов с использованием Р. а. и π-теоремы. Особая польза достигается за счет сокращения числа аргументов у искомых функций; это сокращение обеспечивается π-теоремой и во многих случаях достигается на основании постановки задачи с использованием опытных данных или нек-рых гипотез о механизмах существенных эффектов в изучаемых вопросах.

Основная практич. польза состоит в установлении возможности перенесения результатов опыта в одних условиях на др. условия, в к-рых опыт не проводился. Напр., по опытам с водой, движущейся в трубе с фиксированным диаметром, можно давать автоматически нужные ответы о движении воды в трубах той же формы, но других размеров, о движении в трубах нефти, воздуха и т. п. Однако для возможности перенесения результатов данного опыта на др. опыты необходимо обеспечивать в соответствующих случаях одинаковые значения безразмерных параметров. Значения нек-рых из этих величин легко обеспечиваются геометрич. условиями постановки опытов. Значения других параметров связаны с физико-механич. условиями проведения опытов.

Примерами применения Р. а. являются примеры установления из постановки задач автомодельности искомых решений. Свойство автомодельности состоит в следующем. При первом подходе к математич. разрешению ставящейся задачи можно отметить независимые переменные аргументы функций; обычно это три координаты точек в нек-ром объеме пространства и время. Кроме этих переменных величин среди аргументов искомых функций могут фигурировать нек-рые задаваемые постоянные параметры, возникающие при описании свойств изучаемой модели и при выделении конкретной схематизированной задачи. Всякую задачу можно сформулировать в безразмерных переменных как для искомых функций, так и для их независимо изменяющихся аргументов. Автомодельность проявляется в том, что сокращается число независимых безразмерных переменных аргументов по сравнению с числом размерных.

Эффективные результаты, связанные с автомодельностью, получаются в теории нек-рых одномерных неустановившихся задач со сферическими, цилиндрическими и плоскими волнами, когда имеются только две независимые переменные: координата r с размерностью длины и время t. Если из определяющих размерных постоянных, присутствующих в постановке задачи, нельзя образовать две комбинации — одну с размерностью длины, а другую с размерностью времени, то единственным переменным безразмерным аргументом в искомых безразмерных функциях будет параметр вида $\lambda = Cr/t^{\alpha}$, где α — нек-рый показатель, а C — размерная постоянная, выражающаяся через заданные постоянные, фигурирующие в постановке задачи. В частности, если математич. задача сводилась к решению нек-рой системы дифференциальных уравнений с частными производными по r и t, то при наличии только одного переменного параметра λ уравнения с частными производными по r и t преобразуются к обыкновенным дифференциальным уравнениям с одной независимой переменной λ, вследствие чего математич. задача сильно упрощается. Таким путем было получено решение многих практически важных задач, напр. задачи о возмущенном движении воздуха, вызванном концентрированным атомным взрывом в атмосфере.

Соображения Р. а. для автомодельных процессов могут служить не только для сведения уравнений с

частными производными к обыкновенным, но и для получения конечных соотношений между искомыми функциями (интегралов этих уравнений), что позволяет находить решения нек-рых автомодельных задач в замкнутом формульном виде. Эти методы были продемонстрированы при решении задач о сильном взрыве в атмосфере и в задачах о распространении взрывных волн в газовых средах, в к-рых в исходном состоянии плотность переменна и изменяется вдоль радиуса по степенному закону. Эти задачи ставятся как сильно схематизированные модели взрыва звезд.

Р. а. непосредственно связан с понятием о физич. подобии, к-рое изучается в *подобии теории*.

Лит.: [1] Бриджмен П. В., Анализ размерностей, пер. с англ., Л.— М., 1934; [2] Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, 9 изд., М., 1981.

Л. И. Седов.

РАЗМЕРНОСТИ АДДИТИВНЫЕ СВОЙСТВА — свойства, выражающие связь размерности топологич. пространства X, представленного в виде суммы своих *подпространств* X_α, с размерностями пространств X_α. Имеется несколько видов Р. а. с.

Теорема суммы. Если хаусдорфово и нормальное пространство X представимо в виде конечной или счетной суммы своих замкнутых подмножеств X_i, то

$$\dim X_i = \sup_i \dim X_i.$$

Если, дополнительно, пространство X совершенно нормально или наследственно паракомпактно, то

$$\operatorname{Ind} X = \sup_i \operatorname{Ind} X_i.$$

Локально конечная теорема суммы. Если хаусдорфово и нормальное пространство X представлено в виде суммы локально конечной системы своих замкнутых подмножеств X_α, то

$$\dim X = \sup_\alpha \dim X_\alpha.$$

Если, дополнительно, пространство X совершенно нормально или наследственно паракомпактно, то

$$\operatorname{Ind} X = \sup_\alpha \operatorname{Ind} X_\alpha.$$

Теорема сложения. Если пространство X хаусдорфово, наследственно нормально и $X = A \cup B$, то

$$\dim X \leqslant \dim A + \dim B + 1$$

(формула Менгера — Урысона). Если, кроме того, пространство X совершенно нормально, то

$$\operatorname{Ind} X \leqslant \operatorname{Ind} A + \operatorname{Ind} B + 1.$$

Метрич. пространство R имеет размерность $\dim R \leqslant n$ тогда и только тогда, когда

$$R = \bigcup_{i=1}^{n+1} R_i,\ \dim R_i \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, n+1;\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

В хаусдорфовом наследственно нормальном пространстве X для любого замкнутого подмножества F выполняются равенства

$$\dim X = \max(\dim F,\ \dim X \setminus F),$$
$$\operatorname{Ind} X = \max(\operatorname{Ind} F,\ \operatorname{Ind} X \setminus F).$$

Б. А. Пасынков.

РАЗМЕРНОСТИ ТЕОРИЯ — часть топологии, в к-рой для каждого компакта, а впоследствии и для более общих классов топологич. пространств тем или иным естественным образом определяется числовой топологич. инвариант — *размерность*, совпадающий, если X есть полиэдр (в частности, многообразие), с его числом измерений в смысле элементарной или дифференциальной геометрии. Первое общее определение раз-

мерности было дано Л. Брауэром (L. Brouwer, 1913) для компактов и даже более широкого класса полных метрич. пространств. Определение строится по индукции следующим образом. Пустому множеству приписывается размерность — 1. В предположении, что определены пространства, а значит и лежащие в них множества, размерности $\leqslant n$, говорят, что пространство X имеет размерность $\leqslant n+1$, если между любыми двумя дизъюнктными замкнутыми множествами A и B пространства X имеется перегородка Ф размерности $\leqslant n$ (при этом п е р е г о р о д к о й между множествами A и B в пространстве X наз. такое замкнутое множество Ф этого пространства, что дополнение $X \setminus \Phi$ есть сумма двух дизъюнктных открытых множеств C и D, из к-рых одно содержит множество A, а другое — множество B). В 1921 П. С. Урысон и К. Менгер (K. Menger) независимо от Л. Брауэра и друг от друга пришли к эквивалентному в случае компактов и даже любых сепарабельных метрич. пространств определению, отличающемуся от брауэровского тем, что одно из двух замкнутых множеств A, B предполагается состоящим из одной точки. Определения размерности в смысле Брауэра и в смысле Урысона и Менгера могут быть сформулированы для любых хаусдорфовых пространств, и определяемые ими топологич. инварианты наз. соответственно б о л ь ш о й и м а л о й и н д у к т и в н о й р а з м е р н о с т я м и и обозначаются $\operatorname{Ind} X$ и $\operatorname{ind} X$, причем всегда $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$.

Совершенно иной подход к понятию размерности берет начало от А. Лебега (H. Lebesgue), высказавшего следующую теорему: n-мерный в смысле элементарной геометрии куб Q^n при любом положительном числе ε может быть покрыт конечным числом замкнутых множеств (даже кубов) диаметра $<\varepsilon$ таким образом, что кратность этого покрытия равна $n+1$, тогда как при достаточно малом $\varepsilon>0$ не существует покрытия куба Q^n, к-рое имеет кратность $<n+1$ и состоит из замкнутых множеств диаметра $<\varepsilon$ (при этом кратностью какой-либо (конечной) совокупности множеств наз. наибольшее целое число m такое, что в данной совокупности имеется m множеств с непустым пересечением). Теперь можно теорему Лебега сформулировать так. Число измерений куба Q^n есть наименьшее такое целое число n, для к-рого имеется сколь угодно мелкое (т. е. состоящее из элементов сколь угодно малого диаметра) покрытие кратности $n+1$ замкнутыми множествами. Эта теорема, впервые доказанная лишь Л. Брауэром, приводит к следующему определению. Р а з м е р н о с т ь ю $\dim X$ к о м п а к т а X (определенной посредством покрытий) наз. наименьшее число n такое, что при любом $\varepsilon>0$ компакт X имеет покрытие кратности $n+1$, состоящее из замкнутых множеств диаметра $\leqslant\varepsilon$. Не меняя содержания этого определения, можно заменить в его формулировке замкнутые множества открытыми.

При определении размерности компакта X применяется понятие диаметра множества, относящееся к метрике, а не к топологии компакта X. Однако доказывается, что определенное так число $\dim X$ тем не менее является топологич. инвариантом компакта X, т. е. что два гомеоморфные между собою компакта имеют одну и ту же размерность $\dim X$. Этот факт устанавливается непосредственно, но его легко вывести и из того, что числу $\dim X$ можно дать и непосредственно топологич. определение, опирающееся лишь на топологию компакта X.

П о к р ы т и е м данного топологич. пространства наз. любая конечная совокупность его открытых множеств, дающих в своей сумме все это пространство. Покрытие α' мельче покрытия α, если α' вписано в α, т. е. если каждый элемент покрытия α' является подмножеством хотя бы одного элемента покрытия α. Оказывается, размерность $\dim X$ можно определить

так: число $\dim X$ есть наименьшее целое число n такое, что для всякого покрытия пространства X существует вписанное в него покрытие кратности $n+1$. Но это определение, очевидно, может быть сформулировано не только для компактов, а для любых топологич. пространств, и позволяет определить для них размерность. Размерность $\dim X$, определенная таким образом для топологич. пространств, позволяет построить содержательную и богатую математич. фактами теорию, оставаясь, по крайней мере, в классе нормальных пространств (а значит, в частности, и метризуемых пространств).

Одной из главных проблем Р. т. является выяснение наиболее широких условий, в к-рых имеет место т. н. основное тождество Урысона, а именно:

$$\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = \dim X.$$

Оказывается, оно имеет место для всех сепарабельных метризуемых пространств, т. е. для всех нормальных пространств со счетной базой, а также для пространств локально бикомпактных групп (теорема Пасынкова). Без предположения сепарабельности для метризуемых пространств можно утверждать лишь справедливость формулы Катетова

$$\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X = \dim X,$$

а для бикомпактов — формулы Александрова

$$\dim X \leqslant \operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X,$$

причем имеются бикомпакты X, для к-рых

$$\dim X \neq \operatorname{ind} X$$

(пример Лунца—Локуциевского), и бикомпакты X, для к-рых

$$\operatorname{ind} X \neq \operatorname{Ind} X$$

(пример Филиппова).

Большое общепознавательное значение имеет следующая теорема Нёбелинга — Понтрягина: необходимое и достаточное условие для того, чтобы топологич. пространство X было гомеоморфно подпространству какого-либо евклидова пространства конечного числа измерений, заключается в том, чтобы X было нормальным пространством конечной размерности, имеющим счетную базу. Это позволяет при изучении конечномерных компактов и вообще конечномерных нормальных пространств со счетной базой рассматривать их как подпространства евклидовых пространств.

В связи с этим приобретает особый интерес т. н. теорема об ε-сдвигах: для того чтобы компакт X, лежащий в каком-либо евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, имел размерность $\dim X \leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ этот компакт мог быть превращен в полиэдр размерности $\leqslant n$ посредством ε-сдвига в пространстве $\mathbb{R}^m$ (при этом ε-сдвигом подпространства X в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ наз. такое непрерывное отображение f этого подпространства X в содержащее его евклидово пространство $\mathbb{R}^m$, при к-ром расстояние $\rho(x, fx)$ любой точки $x \in X$ от ее образа fx меньше числа ε). Интуитивное содержание этой теоремы состоит в том, что всякий компакт данной конечной размерности n, рассматриваемый как множество, лежащее в каком-либо евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, может быть сколь угодно малым непрерывным видоизменением (к чему и сводится его ε-сдвиг) превращен в полиэдр той же, но не меньшей, размерности. Эта теорема так же, как и определение размерности $\dim X$ для компактов, может быть переформулирована в чисто топологич. терминах, причем снова

«сколь угодно малые» числа $\varepsilon>0$ заменяются «сколь угодно мелкими» покрытиями ω. Это позволяет аналогичную теорему сформулировать для любых нормальных пространств и придти к заключению, что в некром (все же наглядном) геометрическом смысле всякое n-мерное нормальное пространство «похоже» и даже «сколь угодно мало отличается» от n-мерного полиэдра.

Одной из важнейших теорем Р. т. является т. н. теорема о существенных отображениях, лежащая в основе значительной части всей этой теории. Пусть f — непрерывное отображение (нормального) пространства X на n-мерный шар Q^n с границей S^{n-1}. Пусть $\Phi\subset X$ — прообраз сферы S^{n-1} при этом отображении, $\Phi=f^{-1}S^{n-1}$. Отображение $f: X\to Q^n$ наз. существенным, если всякое непрерывное отображение $g: X\to Q^n$, совпадающее с f во всех точках $x\in\Phi$, есть отображение на весь шар Q^n. Упомянутая теорема Александрова утверждает, что нормальное пространство X тогда и только тогда имеет размерность $\dim X\geqslant n$, когда пространство X можно существенно отобразить на n-мерный шар. Из этой теоремы выводится теорема суммы (доказанная для компактов П. С. Урысоном и К. Менгером еще в самом начале развития Р. т.): если (нормальное) пространство X размерности $\dim X=n$ является объединением конечного или счетного числа своих замкнутых множеств Φ_k, то по крайней мере для одного из этих Φ_k имеет место $\dim\Phi_k=n$.

Теорема о существенных отображениях лежит в основе т. н. гомологической теории размерности, позволяющей применить к изучению размерности в весьма общих предположениях методы алгебраич. топологии. Понятие *гомологической размерности* связано с понятиями цикла и гомологии и поэтому предполагает, что наряду с топологич. пространством X дана и нек-рая коммутативная группа $\mathfrak{G}$, к-рая наз. группой коэффициентов. Тогда можно говорить о циклах компакта X по этой группе коэффициентов, об их носителях $\Phi\subset X$ и, в частности, о циклах, гомологичных нулю в X по области коэффициентов $\mathfrak{G}$, причем эти понятия можно эквивалентным образом понимать как в смысле теории гомологий Александрова — Чеха, так и в смысле гомологич. теории Вьеториса.

После этого можно определить гомологич. размерность компакта X по группе коэффициентов $\mathfrak{G}$ как наибольшее целое число n такое, что в компакте X имеется $(n-1)$-мерный цикл Z^{n-1}, гомологичный нулю в X, но не гомологичный нулю на нек-ром своем носителе Φ. Оказывается, что $\dim X$ есть гомологич. размерность по группе $\varkappa$, являющейся факторгруппой группы всех действительных чисел по подгруппе целых чисел, и она является наибольшей среди всех вообще гомологич. размерностей.

Если от циклов и гомологий перейти к коциклам и когомологиям, то получится *когомологическая размерность*, причем когомологич. размерность компакта по данной дискретной группе $\mathfrak{A}$ равна гомологич. размерности по бикомпактной группе $\mathfrak{B}$, двойственной группе $\mathfrak{A}$ в смысле теории характеров Понтрягина. Отсюда следует, что размерность $\dim X$ совпадает с когомологической размерностью по группе целых чисел.

Лит. см. при ст. *Размерность*. *П. С. Александров.*

РАЗМЕРНОСТИ ФУНКЦИЯ — целочисленная функция d на решетке L (т. е. отображение $d: L\to\mathbb{Z}$), удовлетворяющая условиям: 1) $d(x+y)+d(xy)=d(x)+d(y)$ для любых $x, y\in L$; 2) если $[x, y]$ — *простой интервал* в L, то $d(y)=d(x)+1$. Для решетки, все ограниченные цепи к-рой конечны, существование Р. ф. эквивалентно дедекиндовости этой решетки.

Существует и более общее определение Р. ф. на ортомодулярной решетке или ортомодулярном частично упорядоченном множестве, где значениями Р. ф. могут быть произвольные действительные числа или даже функции (см. [3]).

Лит.: [1] Скорняков Л. А., Элементы теории структур, М., 1970; [2] Birkhoff G., Lattice theory, 3 ed., Providence, 1967; [3] Kalmbach G., Omolattices, L., 1981.

Т. С. Фофанова.

РАЗМЕРНОСТНЫЙ ИНВАРИАНТ — целое число $d(X)$, определяемое для каждого топологич. пространства X данного класса $\mathscr{K}$ и обладающее достаточным количеством свойств, сближающих его с обычным числом измерений евклидовых многомерных пространств. При этом от класса $\mathscr{K}$ требуется, чтобы он содержал все кубы любого числа измерений и вместе с любым данным пространством X, являющимся его элементом, содержал в качестве элемента и всякое пространство, гомеоморфное пространству X. От Р. и. $d(X)$ предполагается, во всяком случае, что для гомеоморфных пространств X и X' всегда $d(X)=d(X')$ и что для n-мерного куба I^n выполняется $d(I^n)=n$. Среди Р. и. важнейшими являются т. н. классические размерности — *Лебега размерность* $\dim X$ и (большая и малая) *индуктивная размерность* $\operatorname{Ind} X$, $\operatorname{ind} X$.

Имеют место следующие предложения, выделяющие размерность $\dim X$ среди всех Р. и., определенных соответственно в классе всех (метрических) компактов, всех метризуемых и всех сепарабельных метризуемых пространств и тем решающие для этих пространств проблему аксиоматич. определения размерности. Единственный, удовлетворяющий нижеперечисленным условиям 1), 2), 3), определенный в классе $\mathscr{K}$ всех (метрических) компактов X размерностный инвариант $d(X)$ есть размерность $\dim X=\operatorname{Ind} X=\operatorname{ind} X$ (теорема Александрова).

Условие 1) (аксиома Пуанкаре). Если пространство принадлежит к классу $\mathscr{K}$ и $d(X)$ равно неотрицательному целому числу n, то в X содержится замкнутое подпространство X_0, для к-рого $d(x_0)<n$ и такое, что множество $X\setminus X_0$ несвязно.

Условие 2) (аксиома конечной суммы). Если принадлежащее к классу $\mathscr{K}$ пространство X есть объединение двух замкнутых подпространств X_1 и X_2, для к-рых $d(X_1)\leqslant n$, $d(X_2)\leqslant n$, то и $d(X)\leqslant n$.

Условие 3) (аксиома Брауэра в метрической форме). Если X — принадлежащее к классу $\mathscr{K}$ пространство и $d(X)$ есть неотрицательное целое число n, то существует такое положительное число ε, что для всякого пространства Y, являющегося образом пространства X при каком-либо ε-отображении, имеет место неравенство $d(Y)\geqslant n$. При этом отображение f компакта X на компакт Y наз. ε-отображением, если оно непрерывно, и полный прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y\in Y$ имеет в X диаметр $<\xi$.

Теорема Щепина [2]. Размерность $\dim X$ есть единственный, определенный соответственно в классе $\mathscr{K}$ всех метрических, всех сепарабельных метрич. пространств X размерностный инвариант $d(X)$, удовлетворяющий следующим условиям (теорема Щепина).

Условие 1) (аксиома Пуанкаре, см. выше).

Условие 2) (аксиома счетной суммы). Если принадлежащее к классу $\mathscr{K}$ пространство X есть объединение счетного числа своих замкнутых подпространств X_k, $k=1,2,\ldots$, для каждого из к-рых $d(X_k)\leqslant n$, то и $d(X)\leqslant n$.

Условие 3) (аксиома Брауэра в общей форме). Если для принадлежащего к классу $\mathscr{K}$ пространства X имеется $d(X)\leqslant n$, то существует та-

кое конечное открытое покрытие ω пространства X, что для всякого, принадлежащего к классу $\mathcal{K}$ пространства Y, являющегося образом пространства X при каком-либо ω-отображении, будет $d(Y)\geqslant n$. При этом отображение f пространства X, на к-ром зафиксировано нек-рое открытое покрытие ω, на пространство Y наз. ω-о т о б р а ж е н и е м, если каждая точка y пространства Y имеет окрестность Oy, полный прообраз к-рой $f^{-1}(Oy)$ содержится в нек-ром элементе покрытия ω.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., в кн.: Тр. Международного симпозиума по топологии и ее применениях. Херцег-Нови. 1968, Beograd, 1969, с. 38—42; [2] Щ е п и н Е., «Докл. АН СССР», 1972, т. 206, № 1, с. 31—32; [3] А л е к с а н д р о в П. С., П а с ы н к о в Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973.

А. А. Мальцев.

РАЗМЕРНОСТНЫЙ МНОГОЧЛЕН р а с ш и р е н и я д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы х п о л е й — многочлен, описывающий количество производных констант в решении системы уравнений с частными производными и являющийся аналогом *Гильберта многочлена*.

Пусть G — дифференциальное *расширение* дифференциального поля F. Максимальное подмножество поля G, дифференциально сепарабельно независимое над F, наз. б а з и с о м д и ф ф е р е н ц и а л ь н о й с е п а р а б е л ь н о с т и. Базис дифференциальной сепарабельности расширения G над F, дифференциально алгебраически независимый над F, наз. д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы м б а з и с о м т р а н с ц е н д е н т н о с т и.

Пусть G — конечно порожденное дифференциальное расширение: $G=F\langle\eta_1,\ldots,\eta_n\rangle$ и $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ — общий нуль простого дифференциального идеала $p\subset F\{Y_1,\ldots,Y_n\}$. Дифференциальная степень трансцендентности поля G над F наз. д и ф ф е р е н ц и а л ь н о й р а з м е р н о с т ь ю идеала p (она обозначается $d(p)$). Если q — другой простой дифференциальный идеал и $p\subset q$, то $d(p)\geqslant d(q)$, причем равенство может иметь место даже для строгого включения. По этой причине желательно иметь более тонкую меру для измерения идеалов.

Фильтрация кольца дифференциальных многочленов $F\{Y_1,\ldots,Y_n\}$ по степеням дифференцирований $\theta\in\Theta$ индуцирует фильтрацию полей расширения $G=F\langle\eta_1,\ldots,\eta_n\rangle$ поля F:

$$F=\mathfrak{G}_0\subset\mathfrak{G}_1\subset\ldots\subset\mathfrak{G}_s\subset\ldots$$

Существует (см. [2]) многочлен, значение к-рого в точках $s\in\mathbb{Z}$ для всех $s\geqslant N_0$ равно степени трансцендентности расширения $\mathfrak{G}_s$ поля F. Он наз. р а з м е р н о с т н ы м м н о г о ч л е н о м р а с ш и р е н и я $\mathfrak{G}/F$ и имеет вид

$$\omega_{\eta/F}(x)=\sum\nolimits_{0\leqslant i\leqslant m}a_i\binom{x+i}{i},$$

где m — мощность множества дифференцирований Δ, а a_i — целые. Р. м. является бирациональным инвариантом поля, то есть $F(\eta)=F(\zeta)\Rightarrow\omega_{\eta/F}=\omega_{\zeta/F}$, но не является дифференциальным бирациональным инвариантом, то есть из $F\langle\eta\rangle=F\langle\zeta\rangle$, вообще говоря, не следует, что $\omega_{\eta/F}=\omega_{\zeta/F}$. Тем не менее этот многочлен содержит в себе дифференциальные бирациональные инварианты, каковыми являются степень многочлена $\tau=\deg\omega_{\eta/F}$ (она наз. д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы м т и п о м р а с ш и р е н и я $F\langle\eta\rangle$ над F) и старший коэффициент a_τ (называемый т и п о в о й д и ф ф е р е н ц и а л ь н о й р а з м е р н о с т ь ю). Среди дифференциальных Р. м., соответствующих различным системам дифференциальных образующих дифференциального расширения, существует минимальный относительно нек-рого отношения порядка на множестве всех целозначных многочленов, являющийся, та-

ким образом, дифференциальным бирациональным инвариантом расширения.

Многочлен дифференциальной размерности определяется также и для дифференциальных модулей.

Р. м. вычислен для расширений, задаваемых следующими системами (см. [1], где Р. м. наз. мерой жесткости системы уравнений поля): 1) волновое уравнение; 2) уравнение Максвелла для пустого пространства; 3) уравнения электромагнитного поля, задаваемого потенциалами; 4) уравнения Эйнштейна для пустого пространства. Другие примеры вычисления Р. м. см. в [3].

Лит.: [1] Эйнштейн А., Собрание научных трудов, т. 2, М., 1966; [2] Kolchin E. R., Differential algebra and algebraic groups, N. Y.— L., 1973; [3] Михалев А. В., Панкратьев Е. В., в кн.: Алгебра, М., 1980, с. 57—67.

Е. В. Панкратьев.

РАЗМЕРНОСТЬ топологического пространства X — целочисленный инвариант $\dim X$, определяемый следующим образом. Тогда и только тогда $\dim X=-1$, когда $X=\phi$. О непустом топологич. пространстве X говорят, что оно не более чем n-мерно, и пишут $\dim X\leqslant n$, если в любое конечное открытое покрытие пространства X можно вписать конечное открытое покрытие пространства X кратности $\leqslant n+1$, $n=0, 1, 2, \ldots$. Если $\dim X\leqslant n$ для нек-рого $n=-1,0,1,\ldots$, то пространство X наз. конечномерным, пишется $\dim X<\infty$ и считается

$$\dim X=\min\{n:\dim X\leqslant n\}.$$

При этом если $\dim X=n$, то пространство наз. n-мерным. Понятие Р. топологич. пространства обобщает элементарно-геометрич. понятие числа измерений евклидова пространства (и полиэдра), т. к. размерность n-мерного евклидова пространства (и любого n-мерного полиэдра) равна n (теорема Брауэра — Лебега).

Важность понятия Р. топологич. пространства выявляется теоремой Нёбелинга — Понтрягина — Гуревича — Куратовского: n-мерное метризуемое со счетной базой пространство вкладывается в $(2n+1)$-мерное евклидово пространство. Таким образом, класс пространств, топологически эквивалентных подпространствам всевозможных n-мерных евклидовых пространств, $n=1, 2, \ldots$, совпадает с классом конечномерных метризуемых пространств со счетной базой.

Размерность $\dim X$ иногда наз. лебеговой, т.к. ее определение отталкивается от теоремы Лебега «о мостовых»: n-мерный куб для любого $\varepsilon>0$ обладает конечным замкнутым кратности $\leqslant n+1$ покрытием с диаметром элементов $<\varepsilon$; существует такое $\varepsilon_0>0$, что кратность любого конечного замкнутого покрытия n-мерного куба $\geqslant n+1$, если диаметр элементов этого покрытия $<\varepsilon_0$.

К определению Р. топологич. пространства возможен другой — индуктивный — подход (см. *Индуктивная размерность*), основанный на разбиении пространства подпространствами меньшего числа измерений. Этот подход к понятию Р. восходит к А. Пуанкаре (H. Poincaré), Л. Брауэру (L. Brouwer), П. С. Урысону и К. Менгеру (K. Menger). В случае метризуемых пространств он эквивалентен лебеговскому.

Основы теории Р. были заложены в 1-й пол. 20-х гг. 20 в. в работах П. С. Урысона и К. Менгера. К кон. 30-х гг. была построена теория Р. метризуемых пространств со счетной базой, а к нач. 60-х гг.— теория Р. любых метризуемых пространств.

Ниже все рассматриваемые топологич. пространства считаются нормальными и хаусдорфовыми. В этом случае в определении Р. без ущерба вписываемые открытые покрытия можно заменить на замкнутые.

Лебегов подход к определению Р. (в отличие от индуктивного подхода) позволяет в случае любых рассматриваемых пространств геометризовать понятие Р. посредством сравнения исходного топологич. пространства с простейшими геометрич. образованиями — *полиэдрами*. Грубо говоря, пространство n-мерно тогда и только тогда, когда оно сколь угодно мало отличается от n-мерного полиэдра. Точнее, имеет место теорема Александрова об ω-отображениях: тогда и только тогда $\dim X \leqslant n$, когда для любого конечного открытого покрытия ω пространства X существует ω-отображение пространства X на не более чем n-мерный, $n=0,1,2,\ldots$, (компактный) полиэдр. Особую наглядность сформулированная теорема приобретает в случае компактов: для компакта X тогда и только тогда $\dim X \leqslant n$, когда для любого $\varepsilon>0$ существует ε-отображение компакта на не более чем n-мерный полиэдр. Если еще X лежит в евклидовом или гильбертовом пространстве, то ε-отображение можно заменить ε-сдвигом (теорема Александрова об ε-отображениях и ε-сдвигах).

Следующее утверждение позволяет выяснить, какова Р. пространства, посредством его сравнения со всевозможными n-мерными кубами: тогда и только тогда $\dim X \geqslant n$, когда пространство обладает существенным отображением на n-мерный куб, $n=0,1,2,\ldots$ (теорема Александрова о существенных отображениях).

Этой теореме можно придать следующую форму. Тогда и только тогда $\dim X \leqslant n$, когда для любого замкнутого в X множества A и любого непрерывного отображения $f: A \to S^n$ в n-мерную сферу существует непрерывное продолжение $F: X \to S^n$, $n=0,1,\ldots$, отображения f.

Следующая характеристика Р. указывает на роль этого понятия в вопросах существования решений систем уравнений: тогда и только тогда $\dim X \geqslant n$, $n=1,2,\ldots$, когда в X существует такая система дизъюнктных пар замкнутых множеств A_i, B_i, $i=1,\ldots,n$, что для любых непрерывных на X функций f_i, удовлетворяющих условию $f_i|A_i>0$, $f_i|B_i<0$, $i=1,\ldots,n$, найдется точка $x \in X$, в к-рой $f_i(x)=0$, $i=1,\ldots,n$ (теорема Отто — Эйленберга — Хеммингсена о перегородках).

Одно из важнейших свойств Р. выражает теорема суммы Менгера — Урысона — Чеха: если пространство X есть конечная или счетная сумма своих замкнутых подмножеств размерности $\leqslant n$, то и $\dim X \leqslant n$, $n=0,1,\ldots$. В этой теореме можно условие конечности или счетности суммы заменить условием ее локальной конечности. Аналогичное теореме суммы утверждение для большой и малой индуктивных Р. не выполняется уже в классе бикомпактов. Следующие утверждения принадлежат к числу основных общих фактов теории Р. и позволяют сводить рассмотрение любых пространств к рассмотрению бикомпактов. Для любого нормального пространства

а) $\dim \beta X = \dim X$, $\operatorname{Ind} \beta X = \operatorname{Ind} X$, где βX — максимальное бикомпактное расширение Стоуна — Чеха пространства X; в то же время неравенство $\operatorname{ind} \beta X > \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$ возможно;

б) существует бикомпактное расширение bX пространства X, вес к-рого $w(bX)$ равен весу wX, и размерность $\dim bX$ равна размерности $\dim X$; аналогичное утверждение верно и для большой индуктивной Р. Особенно интересен случай счетного веса пространства, т. к. в этом случае расширение bX метризуемо.

Утверждение б) может быть усилено следующим предложением: для любого $n=0,1,\ldots$ и любой бесконечной мощности существует бикомпакт $\prod_\tau^n$ веса τ и

размерности $\dim \prod_{\tau}^{n} = n$, содержащий гомеоморфный образ любого нормального пространства X веса $\leqslant \tau$ и размерности $\dim X \leqslant n$ (теорема об универсальном бикомпакте данного веса и размерности). Аналогичное утверждение верно и для большой индуктивной Р. При этом в качестве $\prod_{\aleph_0}^{0}$ можно взять канторово совершенное множество, а в качестве $\prod_{\aleph_0}^{1}$ — менгеровскую универсальную кривую.

Казалось бы, что Р. должна обладать свойством монотонности: $\dim A \leqslant \dim X$, если $A \subset X$. Это так, если а) множество A замкнуто в X или сильно паракомпактно, или б) пространство X метризуемо (и даже совершенно нормально). Однако уже для подмножества A наследственно нормального пространства X может быть $\dim A > \dim X$ и $\operatorname{Ind} A > \operatorname{Ind} X$. Но всегда $\operatorname{ind} A \leqslant \operatorname{ind} X$ при $A \subset X$.

Одним из важнейших вопросов теории Р. является поведение Р. при непрерывных отображениях. В случае замкнутых отображений (к ним принадлежат и все непрерывные отображения бикомпактов) ответ дается формулами В. Гуревича (W. Hurewicz), полученными им первоначально в классе пространств со счетной базой.

Формула Гуревича для повышающих размерность отображений: если отображение $f: X \to Y$ непрерывно и замкнуто, то

$$\text{кратность } f + \dim X - 1 \geqslant \dim Y,$$

где кратность $f = \sup\{|f^{-1}y| : y \in Y\}$.

Формула Гуревича для понижающих размерность отображений: для непрерывного замкнутого отображения $f: X \to Y$ на паракомпакт Y выполняется неравенство

$$\dim X - \dim f \leqslant \dim Y, \qquad (1)$$

где

$$\dim f = \sup\{\dim f^{-1}y : y \in Y\}.$$

Для произвольного нормального пространства Y эта формула, вообще говоря, неверна.

В случае непрерывных отображений конечномерных компактов установлено, что непрерывное отображение f размерности $\dim f = k$ является суперпозицией k непрерывных отображений размерности 1 (это — уточнение формулы (1) и аналог того факта, что k-мерный куб есть произведение k отрезков).

В случае открытых отображений можно показать, что образ нульмерного бикомпакта нульмерен и в то же время гильбертов кирпич есть образ одномерного компакта, даже если соответствующее отображение f имеет размерность $\dim f$, равную нулю. Однако в случае открытого отображения $f: X \to Y$ бикомпактов X и Y кратности $\leqslant \aleph_0$ выполняется равенство $\dim X = \dim Y$.

Поведение Р. при взятии топологич. произведения описывают следующие утверждения:

а) существуют такие конечномерные компакты X и Y, что $\dim X \times Y < \dim X + \dim Y$;

б) если один из сомножителей произведения $X \times Y$ бикомпактен или метризуем, то $\dim X \times Y \leqslant \dim X + \dim Y$;

в) существуют такие нормальные пространства X и Y, что $\dim X \times Y > \dim X + \dim Y$.

В случае бикомпактных X и Y всегда $\operatorname{Ind} X \times Y < \infty$, если $\operatorname{Ind} X < \infty$ и $\operatorname{Ind} Y < \infty$, но может быть $\operatorname{Ind} X \times Y > \operatorname{Ind} X + \operatorname{Ind} Y$. Если же бикомпакты X и Y совершенно нормальны или одномерны, то $\operatorname{Ind} X \times Y \leqslant \operatorname{Ind} X + \operatorname{Ind} Y$.

Наиболее содержательна теория Р. прежде всего в классе метрич. пространств со счетной базой и затем

в классе любых метрич. пространств. В классе метрич. пространств со счетной базой выполняются равенства Урысона

$$\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X. \qquad (2)$$

В классе любых метрич. пространств выполняется равенство Катетова

$$\dim X = \operatorname{Ind} X \qquad (3)$$

и может быть $\operatorname{ind} X = 0 < \operatorname{Ind} X = 1$.

В случае метрич. пространств понятие n-мерного пространства следующими двумя способами может быть сведено к понятию нульмерного пространства. Для метрич. пространства X тогда и только тогда $\dim X \leqslant n$, $n = 0,1,\ldots$, когда

а) пространство X может быть представлено в виде не более чем $n+1$ нульмерных слагаемых;

б) существует непрерывное замкнутое отображение кратности $\leqslant n+1$ нульмерного метрич. пространства на пространство X.

Для любого подмножества A метрич. пространства X найдется такое подмножество $B \supset A$ типа G_δ в X, что $\dim B = \dim A$.

В классе метрич. пространств веса $\leqslant \tau$ и размерности $\leqslant n$ существует универсальное (в смысле вложений) пространство. Важную роль в построении теории Р. любых метрических (и более общих) пространств сыграла теорема Даукера: тогда и только тогда $\dim X \leqslant n$, когда в любое локально конечное открытое покрытие пространства X можно вписать открытое покрытие кратности $\leqslant n+1$.

Одним из наиболее важных вопросов теории Р. является вопрос о соотношениях между лебеговой и индуктивными Р. Хотя для произвольного пространства X значения размерностей $\dim X$, $\operatorname{ind} X$, $\operatorname{Ind} X$, вообще говоря, попарно различны, однако для нек-рых классов пространств, в том или ином смысле близких к метрическим, выполнено, напр., следующее:

а) если пространство X обладает непрерывным замкнутым отображением f размерности $\dim f = 0$ на метрич. пространство, то выполняется равенство (3), отсюда следуют равенства (2) для локально бикомпактных групп и их факторпространств;

б) если существует непрерывное замкнутое отображение метрич. пространства на пространство X, то выполняются равенство (2).

Еще одно общее условие для выполнения равенства (3) для паракомпакта X выглядит так: $\dim X = n$ и пространство X является образом нульмерного пространства при замкнутом отображении кратности $\leqslant n+1$, $n = 0,1,\ldots$

В случае произвольного пространства X всегда выполняются неравенства $\dim X \leqslant \operatorname{Ind} X$ и $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$, а равенства $\dim X = 0$ и $\operatorname{Ind} X = 0$ равносильны. Для сильно паракомпактного (в частности, бикомпактного или финально компактного) пространства X выполняется неравенство $\dim X \leqslant \operatorname{ind} X$. Для бикомпактов равенства $\operatorname{ind} X = 1$ и $\operatorname{Ind} X = 1$ равносильны. Существуют бикомпакты, удовлетворяющие первой аксиоме счетности (и даже совершенно нормальные в предположении континуум-гипотезы), для которых $\dim X = 1$, $\operatorname{ind} X = n$, $n = 2,3,\ldots$ Построен пример топологич. однородного бикомпакта с $\dim X < \operatorname{ind} X$. Для совершенно нормальных бикомпактов всегда $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$. Существуют бикомпакты даже с первой аксиомой счетности, для к-рых $\operatorname{ind} X < \operatorname{Ind} X$. Существует ли такое m, что для каждого $n > m$ найдется бикомпакт (метрич. пространство) X с $\operatorname{ind} X = m$, $\operatorname{Ind} X = n$,— неизвестно (1983).

В случае неметризуемых пространств Р. может не только не быть монотонной, но и обладает другими патологич. свойствами. Для любого $n = 2,3,\ldots$ построен

пример такого бикомпакта θ_n, что любое замкнутое подмножество его имеет Р. или 0 или $n=\dim \theta_n$. Аналогичный пример в случае индуктивных Р. невозможен. Построен также для любого $n=1,2,\ldots$ пример такого бикомпакта Φ_n, что любое разбивающее этот бикомпакт замкнутое множество имеет размерность $n=\dim \Phi_n$. Таким образом, подход к определению Р. в случае неметризуемого пространства в принципе отличен от индуктивного подхода А. Пуанкаре, основанного на разбиении пространства подпространствами меньшего числа измерений. Бикомпакты Φ_n имеют непосредственное отношение к следующему утверждению: в любом n-мерном бикомпакте содержится n-мерное кантарово многообразие.

Подмножество n-мерного евклидова пространства E^n тогда и только тогда n-мерно, когда оно содержит внутренние относительно E^n точки. Компакт имеет размерность $\leqslant n$ тогда и только тогда, когда он обладает отображением Р. нуль в E^n, и, таким образом, с точностью до нульмерных отображений n-мерные компакты не отличимы от ограниченных замкнутых, содержащих внутренние (относительно E^n) точки подмножеств E^n.

См. также *Размерности теория*.

Лит.: [1] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973; [2] Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ., М., 1948; [3] Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1—2, М.— Л., 1951. *Б. А. Пасынков.*

РАЗМЕЩЕНИЕ с повторениями из m элементов по n — конечная последовательность $\bar{a}=(a_{i_1}, a_{i_2},\ldots,a_{i_n})$ элементов некоторого множества $A=\{a_1, a_2,\ldots,a_m\}$. Если все члены $\bar{a}$ различны, то $\bar{a}$ наз. Р. без повторений. Число всех возможных Р. с повторениями из m по n равно m^n, а без повторений — $(m)_n=m(m-1)\ldots(m-n-1)$.

Р. можно рассматривать как функцию φ, заданную на $Z_n=\{1, 2, \ldots, n\}$ и принимающую значения из A: $\varphi(k)=a_{i_k}, k=1,2,\ldots,n$. Элементы A принято называть ячейками (или урнами), а элементы Z_n — частицами (или шарами); φ определяет заполнение различных ячеек различными частицами. Если речь идет о неразличимых частицах или ячейках, то подразумевается, что рассматриваются классы Р. Так, если все частицы одинаковы, то два Р., определяемые соответственно функциями φ и ψ, относятся к одному классу, если найдется подстановка σ множества Z_n такая, что $\varphi(\sigma(k))=\psi(k)$ для всех $k\in Z_n$. В этом случае число таких классов, или, как говорят, число размещений n одинаковых частиц по m различным ячейкам, есть число *сочетаний* с повторениями из n по m.

Если говорят, что все ячейки одинаковы, то имеют в виду, что Р. разбиваются на классы так, что два Р., определяемые функциями φ и ψ соответственно, относятся к одному классу, если существует подстановка τ множества A, при к-рой $\tau(\varphi(k))=\psi(k)$ для всех $k\in Z_n$. В этом случае число размещений n различных частиц по m одинаковым ячейкам, т. е. число классов, равно $\sum_{k=1}^{m} S(n,k)$, где $S(n,k)$ — числа Стирлинга II рода:

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k),\ S(0,0)=1,$$
$$S(n,k)=0 \text{ при } k>n \text{ и } k=0,\ n>0.$$

Если не различать как частицы, так и ячейки, то получают размещение n одинаковых частиц по m одинаковым ячейкам; число таких Р. равно $\sum_{k=1}^{n} p_n(k)$, где $p_n(k)$ — число разбиений n на k натуральных слагаемых.

Рассматриваются и другие разбиения Р. на классы, напр. когда вышеупомянутые подстановки σ и τ берутся из подгрупп симметрич. групп соответственно степеней n и m (см. об этом и других обобщениях в [1], [2]). Синонимами «Р.» являются термины «n-перестановка», «упорядоченная n-выборка из генеральной совокупности».

Лит.: [1] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [2] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963. *В. М. Михеев.*

РАЗНОСТНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ СХЕМА — разностная схема, построенная на основе вариационной задачи, соответствующей краевой задаче для дифференциального уравнения. Основная идея построения Р. в. с. состоит в том, чтобы при специальном выборе координатных функций в *Ритца методе* получить систему линейных алгебраич. уравнений, совпадающую по структуре с системой *разностных уравнений*; обычно неизвестными параметрами являются приближенные значения в узлах сетки точного решения и, возможно, нек-рых его производных. В качестве таких координатных функций можно использовать кусочно линейные, полилинейные и др. функции.

Разностные схемы можно получать также, выбирая специальным образом координатные функции в *Галеркина методе*. Метод получения разностных схем с помощью метода Галеркина наз. вариационно-разностным методом (или проекционно-разностным методом). Вариационно-разностный метод иногда наз. методом конечных элементов, хотя последнее название употребляется в более общем смысле.

Пусть поставлена краевая задача:

$$-(p(x)u'(x))' = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{2}$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, $p(x)$ — непрерывно дифференцируема и $p(x) \geqslant p_0 > 0$.

Умножение (1) на произвольную функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условиям (2), и интегрирование по x:

$$-\int_0^1 (pu')' \varphi \, dx = \int_0^1 f\varphi \, dx$$

приводит к тождеству

$$L(u, \varphi) \equiv \int_0^1 pu' \varphi' \, dx = \int_0^1 f\varphi \, dx, \tag{3}$$

к-рому удовлетворяет решение задачи (1), (2). Справедливо и обратное утверждение: функция $u(x)$, удовлетворяющая граничным условиям (2) и тождеству (3) при произвольных функциях $\varphi(x)$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, является решением задачи (1), (2). Тождество (3) используется для построения приближенного решения методом Галеркина. Промежуток $[0,1]$ разбивается на N частей точками $x_i = ih$, $i = 1, \ldots, N-1$, $h = N^{-1}$. Множество $\{x_i\}$ наз. сеткой, точки x_i — узлами сетки, h — шагом сетки. В качестве координатных функций в методе Галеркина берутся функции

$$\varphi_i(x) = \psi\left(h^{-1}x - i\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

где

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{при } |t| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } |t| > 1. \end{cases}$$

Функции $\varphi_i(x) \equiv 0$ вне промежутка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Это свойство координатных функций принято называть свойством локальности. Пусть приближенное решение задачи ищется в виде

$$v = \sum_{i=1}^{N-1} v_i \varphi_i(x), \tag{4}$$

где v_i — искомые параметры, к-рые являются значениями приближенного решения в узлах сетки:

$$v_i = v(x_i), \quad i = 1, \ldots, N-1.$$

Пусть K — множество функций вида (4). Функции из K линейны на промежутках $[x_i, x_{i+1}]$, непрерывны на $[0,1]$ и равны нулю при $x=0$ и $x=1$. Система метода Галеркина получается при подстановке в (3) функции $v(x)$ вместо $u(x)$ и функций $\varphi_i(x)$ вместо $\varphi(x)$:

$$L(v, \varphi_i) = \sum_{j=1}^{N-1} v_j \int_0^1 p(x) \varphi_j'(x) \varphi_i'(x)\, dx =$$

$$= \int_0^1 f(x) \varphi_i(x)\, dx, \quad i = 1, \ldots, N-1. \qquad (5)$$

При этом

$$\varphi_i'(x) = \begin{cases} 1/h & \text{при } x_{i-1} < x < x_i, \\ -1/h & \text{при } x_i < x < x_{i+1} \end{cases}$$

и

$$L(\varphi_j, \varphi_i) = \int_0^1 p \varphi_j' \varphi_i'\, dx \neq 0$$

лишь для $j = i-1, i, i+1$, т. е. в каждом уравнении имеется не более трех неизвестных.

Система (5) может быть записана в виде

$$h^{-2}\left[-\alpha_{i-1/2} v_{i-1} + (\alpha_{i-1/2} + \alpha_{i+1/2}) v_i - \alpha_{i+1/2} v_{i+1}\right] = f_i,$$
$$i = 1, \ldots, N-1,$$

где

$$\alpha_{i-1/2} = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\, dx,$$

$$f_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x)\, dx, \quad v_0 = v_N = 0.$$

Эта система по структуре сходна с обычной разностной. Системы уравнений, полученные таким способом, и наз. разностными вариационными схемами. В отличие от обычных разностных схем коэффициенты $\alpha_{i-1/2}$ и f_i являются не значениями функций p и f в фиксированных точках, а их усреднениями. Это обстоятельство позволяет использовать Р. в. с. для уравнений с «плохими» (напр., разрывными) коэффициентами.

Пусть $L_h = \{L(\varphi_j, \varphi_i)\}$ — матрица системы (5). Так как $L(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i, \varphi_j)$, то матрица L_h симметрична. Имеет место равенство

$$(L_h w_h, w_h) = \int_0^1 p (w')^2\, dx,$$

где $w_h = \{w_i\}_{i=1}^{N-1}$ — произвольный вектор из евклидова пространства E_{N-1} размерности $N-1$, $(.,.)$ — скалярное произведение в E_{N-1},

$$w = \sum_{i=1}^{N-1} w_i \varphi_i(x).$$

Из неравенства

$$\max_x u^2(x) = \max \left(\int_0^x u'(t)\, dt \right)^2 \leqslant \int_0^1 (u')^2\, dx,$$

справедливого для произвольной непрерывной и дифференцируемой функции, удовлетворяющей условию $u(0)=(0)$, следует оценка

$$\int_0^1 p(x) (w'(x))^2\, dx \geqslant p_0 \max_x (w(x))^2 \geqslant$$

$$\geqslant p_0 h \sum_{i=1}^{N-1} w_i^2,$$

из к-рой выводится неравенство

$$(L_h w_h, w_h) \geqslant p_0 h (w_h, w_h). \qquad (6)$$

Матрица L_h положительно определена; система (5) однозначно разрешима.

При малых значениях h система (5) состоит из большого числа уравнений. Точность решения системы алгебраич. уравнений и объем необходимой для этого работы в большой степени зависят от величины т. н. числа обусловленности $P=\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ матрицы системы, где $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ — наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы I_h. Из неравенства (6) следует, что $\lambda_{\min}\geqslant p_0 h$. Справедлива также оценка

$$\lambda_{\max}\leqslant 4h^{-1}\max_x p\ (x).$$

Число обусловленности $P=O\,(h^{-2})$, что совпадает по порядку h с известными оценками для матриц обычных разностных схем.

Сходимость приближенного решения к точному доказывается по обычной для метода Галеркина схеме. Из (3) и (5) для произвольной функции φ из K следует, что

$$L\ (u-v,\ \varphi)=0, \tag{7}$$

откуда

$$L\ (u-v,\ u-v)=L\ (u-v,\ u-w), \tag{8}$$

где w — произвольная функция из K. Правая часть (8) оценивается с помощью неравенства

$$[L\ (\varphi,\ \psi)]^2\leqslant L\ (\varphi,\ \varphi)\,L\ (\psi,\ \psi).$$

Таким образом,

$$L\ (u-v,\ u-v)=\int_0^1 p\ (x)\ (u'-v')^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant \inf_{w\in K}\int_0^1 p\ (x)\ (u'-w')^2\,dx.$$

Обозначение

$$|\,u\,|=\left(\int_0^1 pu'^2\,dx\right)^{1/2}$$

(число $|\,u\,|$ наз. энергетической нормой функции u) позволяет переписать последнее неравенство в виде

$$|\,u-v\,|\leqslant \inf_{w\in K}|\,u-w\,|.$$

Оценка погрешности Р. в. с. сводится к оценке наилучшего приближения точного решения функциями класса K. Если в качестве $w\,(x)$ взять кусочно линейную функцию

$$\tilde{w}\,(x)=\sum_{i=1}^{N-1} u\,(x_i)\,\varphi_i\,(x),$$

совпадающую с функцией $u\,(x)$ в узлах сетки, то справедлива оценка:

$$|\,u-v\,|\leqslant Ch^2\max p\,(x)\int_0^1\ (u'')^2\,dx,$$

где C — постоянная.

На рассмотренном примере видны нек-рые характерные черты вариационно-разностного метода: локальность координатных функций, обеспечивающих близость Р. в. с. по структуре к разностным схемам, и применимость техники проекционных методов к исследованию сходимости Р. в. с.

Основным при построении Р. в. с. является выбор локальных координатных функций, обладающих требуемыми аппроксимационными свойствами. Задача аппроксимации ставится в различных функциональных пространствах. Для задач математич. физики важны пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$, т. е. линейные множества функций с конечной нормой

$$\|\,u\,\|_{p,\,l}=\sum_{|\,\alpha\,|\,\leqslant\, l}\left(\int_\Omega |\,D^\alpha u\,|^p\,dx_1\ldots dx_n\right)^{1/p},$$

где Ω — область в E_n, $p\geqslant 1$, l — неотрицательное целое

число, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — вектор с целочисленными координатами, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$,

$$D^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Многие классы локальных координатных функций строятся по следующей схеме. Пусть заданы функции $\varphi^1(\xi)$, $\varphi^2(\xi),\ldots,\varphi^r(\xi)$, принадлежащие $W_p^k(E_n)$ и равные нулю вне n-мерного куба $|\xi_j|<R$, $j=1,2,\ldots,n$. Пусть $h=(h_1,\ldots,h_n)$ — заданный вектор с положительными координатами, $i=(i_1,\ldots,i_n)$ — произвольный целочисленный вектор,

$$h^{-1}(x)\equiv(h_1^{-1}x_1,\ h_2^{-1}x_2,\ \ldots,\ h_n^{-1}x_n).$$

Через I обозначено множество векторов i таких, что n-мерный параллелепипед $|h_j^{-1}x_j-i_j|<R$, $j=1,\ldots,n$, пересекается с Ω. Для данной области Ω в качестве координатных функций выбираются функции вида

$$\varphi_i^\mu(x)=\varphi^\mu(h^{-1}x-i),\quad i\in I,\ \mu=1,\ \ldots,\ r,$$

т. е. функции, полученные из исходных функций масштабированием аргументов и сдвигом на вектор i. Такие координатные функции принято называть р е г у л я р н ы м и. Пусть классом K наз. множество функций вида

$$w(x)=\sum_{i\in I}\sum_{\mu=1}^{r}w_i^\mu\varphi_i^\mu(x).$$

Если любой полином P_{l-1} степени l от ξ можно представить как линейную комбинацию $\varphi^1(\xi),\ldots,\varphi^r(\xi)$, то для произвольной функции $u(x)\in W_p^l(\Omega)$ можно указать функцию $w\in K$ такую, что справедливо аппроксимационное неравенство

$$\|u-w\|_{p,\,k}\leqslant C\bar{h}^{l-k}\|u\|_{p,\,l},\quad 0\leqslant k<l, \tag{9}$$

где $\bar{h}=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}h_j$, C не зависит от h и u.

Р. в. с. для краевых задач для эллиптич. уравнений строятся на основе эквивалентных задач нахождения функций, удовлетворяющих интегральным тождествам. Многие из этих задач состоят в нахождении функции $u\in W_2^m(\Omega)$, удовлетворяющей при произвольной функции $\varphi\in W_2^m(\Omega)$ интегральному тождеству

$$L(u,\,\varphi)\equiv\sum_{|\alpha|,\,|\beta|\leqslant m}\int_\Omega a_{\alpha\beta}D^\alpha uD^\beta\varphi\,d\Omega+$$

$$+\sum_{|\rho|,\,|\tau|<m}\int_S b_{\rho\tau}D^\rho uD^\tau\varphi\,dS=\int_\Omega f\varphi\,d\Omega, \tag{10}$$

где S — граница Ω, $a_{\alpha\beta}(x)$, $b_{\rho\tau}(x)$ и $f(x)$ — заданные функции. Предполагается, что

$$a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha},\ b_{\rho\tau}=b_{\tau\rho}$$

и

$$L(u,\,u)\geqslant\gamma\|u\|_{2,\,m}^2,\qquad\gamma=\text{const}>0.$$

Применение к (10) метода Галеркина с координатными функциями φ_i^μ приводит к Р. в. с. для задачи (10). Пусть решение $u(x)$ задачи (10) принадлежит $W_2^l(\Omega)$, $l>m$, и функции φ_i^μ удовлетворяют условиям, при к-рых справедливо неравенство (9). Для оценки погрешности Р. в. с. используют стандартную технику метода Галеркина:

$$\gamma\|u-v\|_{2,\,m}^2\leqslant L(u-v,\,u-v)\leqslant$$

$$\leqslant\inf_{w\in K}L(u-w,\,u-w)\leqslant Ch^{2(l-m)}\|u\|_{2l}^2,$$

где v — приближенное решение.

Задачи вида (10), для к-рых в качестве функции φ может быть взята произвольная функция из $W_2^m(\Omega)$, наз. з а д а ч а м и с е с т е с т в е н н ы м и к р а е-

выми условиями. Существует другой класс краевых задач, в к-рых на границе S ставятся краевые условия вида

$$\left(\sum_{|\alpha|<m} b_\alpha^j D^\alpha u\right)\Big|_S = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant \nu,\quad \nu \leqslant m-1. \quad (11)$$

В этом случае краевым условиям (11) в тождестве (10) должны удовлетворять и функции $\varphi \in W_2^m(\Omega)$. Для приближенного решения таких задач методом Галеркина необходимо, чтобы координатные функции удовлетворяли условиям (11). Введенные выше координатные функции $\varphi_i^\mu(x)$, в силу самого способа их построения, вообще говоря, не пригодны для представления приближенного решения, удовлетворяющего условиям (11).

Один из приемов построения Р. в. с. для задач с краевыми условиями вида (11) связан с использованием метода штрафа. Пусть, напр., требуется решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона. Эта задача эквивалентна определению функции $u(x)$, $u|_S = 0$, удовлетворяющей при произвольной функции $\varphi(x)$, $\varphi|_S = 0$, интегральному тождеству

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) d\Omega = \int_\Omega f\varphi\ d\Omega.$$

В методе штрафа вводится в рассмотрение функция v, удовлетворяющая при произвольных функциях φ интегральному тождеству

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) d\Omega + \frac{1}{\varepsilon}\int_S v\varphi\ dS = \int_\Omega f\varphi\ d\Omega,\quad \varepsilon > 0.$$

Функция v является решением задачи с естественным краевым условием. Доказывается, что при малых значениях ε решения u и v близки. Для приближенного решения последней задачи можно применить Р. в. с. с использованием регулярных координатных функций.

Общий способ построения координатных функций таков.

Пусть для произвольного положительного числа h в Ω задано множество точек z_i, $i=1, 2, \ldots, N$, наз. узлами сетки, такое, что каждая точка области отстоит от какого-либо узла не более чем на h. Пусть для каждого узла z_i определен набор функций $\varphi_1^i, \varphi_2^i, \ldots, \varphi_{\nu(i)}^i$ из $W_2^m(\Omega)$, удовлетворяющих заданным граничным условиям (11), причем $\nu(i) \leqslant M$, где M не зависит от i и h. Пусть при каждом i и всех j интеграл

$$\int_\Omega \varphi_j^i \varphi_m^k\ d\Omega$$

отличен от нуля лишь для числа индексов k, ограниченного числом, не зависящим от i и h (условие локальности координатных функций). Пусть K — класс функций вида

$$w = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\nu(i)} \lambda_j^i \varphi_j^i,$$

где λ_j^i — числовые параметры.

Если решение $u(x)$ краевой задачи может быть приближено функциями класса K с точностью, характеризуемой неравенством

$$\inf_{w \in K} \|u - w\|_{2,m} \leqslant Ch^{l-m}\|u\|_{2,l},\quad m < l,$$

то для решения, полученного при помощи Р. в. с., справедлива оценка погрешности

$$\|u - v\|_{2,m} \leqslant Ch^{l-m}\|u\|_{2,l}.$$

Нерегулярные сетки применяются иногда для более полного учета свойств задачи. Напр., для более точ-

ного воспроизведения функции в окрестности угловой точки границы можно расположить узлы на радиально-кольцевой сетке.

Для численной реализации матрица Р. в. с. должна обладать не слишком плохой обусловленностью. Для задач вида (10) оптимальной считается обусловленность, выражаемая соотношением $P=O(N^{2m/n})$, где P — число обусловленности матрицы Р. в. с., N — число узлов сетки, n — размерность пространства, содержащего область Ω. Для многих конкретных задач такая обусловленность действительно имеет место.

Использование Р. в. с. сочетает достоинства метода сеток и проекционных методов. Структура Р. в. с. позволяет использовать экономичные методы решения разностных схем. Легко устанавливается разрешимость Р. в. с.: матрица Р. в. с. положительно определена, если положительно определен дифференциальный оператор. Вопрос о сходимости сводится к вопросу об аппроксимации точного решения координатными функциями Р. в. с., и, следовательно, скорость сходимости определяется дифференциальными свойствами точного решения. Р. в. с. можно применять при весьма слабых ограничениях на данные задачи.

Исследования по Р. в. с. проводятся в следующих основных направлениях:

1) создание координатных функций, удовлетворяющих краевым условиям, исследование их аппроксимационных свойств;

2) получение оценок точности в различных нормах;

3) построение Р. в. с. для задач, имеющих те или иные особенности (линии разрыва коэффициентов, угловые точки границы и т. д.);

4) разработка методов решения Р. в. с. и способы оптимизации методов решения;

5) решение нелинейных уравнений;

6) применение Р. в. с. для нестационарных уравнений.

Лит.: [1] Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А., Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, ч. 1—2, Вильнюс, 1973—74; [2] Strang G., Fix G., An analysis of the finite element method, Englewood Cliffs, 1973; [3] Aubin J.-P., Approximation of elliptic boundary — value problems, N. Y., 1972; [4] Варга Р., Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе, пер. с англ., М., 1974; [5] Михлин С. Г., «Зап. научн. семинаров ЛОМИ», 1974, т. 48, с. 32—188; [6] Марчук Г.И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [7] Дьяконов Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, М., 1971.

Л. А. Оганесян.

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА — система *разностных уравнений*, аппроксимирующих дифференциальное уравнение и дополнительные (начальные, граничные и др.) условия. Аппроксимация исходной дифференциальной задачи Р. с.— это один из способов приближенной дискретизации исходной задачи. Он заключается в том, что заданную область изменения независимых переменных G заменяют дискретным множеством точек G_h — с е т к о й, а производные, входящие в дифференциальное уравнение, заменяют на сетке G_h разностными отношениями. В результате такой замены возникает замкнутая система большого числа алгебраич. уравнений (линейных или нелинейных в зависимости от исходной дифференциальной задачи), к-рая и представляет собой Р. с. По существу Р. с.— это семейство разностных уравнений, зависящих от шагов сетки. Решение Р. с. также зависит параметрически от шагов сетки. Р. с.— многопараметрический и сложный объект. Помимо коэффициентов исходного дифференциального уравнения она содержит свои собственные параметры такие, как шаги по времени и пространству, весовые множители и др. Влияние этих параметров может существенно исказить представление о поведении исходной дифференциальной задачи.

В связи с разностной аппроксимацией дифференциальных задач изучаются следующие вопросы: о спо-

собах построения Р. с., о сходимости при измельчении сетки решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи, о методах решения систем разностных уравнений. Все перечисленные вопросы рассматривает *разностных схем теория*. Разработаны эффективные численные методы решения типичных Р. с. для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, предполагающие использование быстродействующих ЭВМ.

Ниже приводится простой пример Р. с. Пусть имеется дифференциальная задача

$$\left.\begin{array}{c} u''(x) - q(x)\,u(x) = -f(x), \quad q(x) \geqslant 0, \quad 0 < x < 1, \\ u'(0) = \sigma u(0) - \mu_1, \quad u(1) = \mu_2, \quad \sigma > 0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Область $G\{0<x<1\}$ заменяется сеткой

$$G_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad hN = 1\}.$$

Р. с. для задачи (1) имеет вид

$$\left.\begin{array}{c} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - q_i y_i = -f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ \frac{y_1 - y_0}{h} = (\sigma + 0{,}5hq_0)\,y_0 - (\mu_1 + 0{,}5hf_0), y_N = \mu_2, \end{array}\right\} \quad (2)$$

где $y_i = y(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $x_i \in G_h$. Можно показать, что при $h \to 0$ решение разностной задачи (2) сходится к решению исходной задачи (1) и при достаточной гладкости функции $q(x)$, $f(x)$.

Р. с. (2) имеет второй порядок точности, т. е.

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant N} |y_i - u(x_i)| \leqslant Mh^2,$$

где M — постоянная, не зависящая от h. Решение Р. с. (2) находится методом прогонки.

Лит.: [1] Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977; [2] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

А. В. Гулин, А. А. Самарский.

РАЗНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО, совершенное разностное множество,— множество D, состоящее из k вычетов $d_1, d_2, \ldots, d_k$ по модулю некрого натурального числа v, причем для каждого $a \in D$, $a \not\equiv 0 \pmod v$, существует точно λ упорядоченных пар (d_i, d_j) элементов из D таких, что

$$a \equiv d_i - d_j \pmod v;$$

числа v, k, λ наз. параметрами Р. м. Напр., множество $D = \{1, 3, 4, 5, 9\}$ вычетов по модулю 11 есть Р. м. с $\lambda = 2$.

Р. м. тесно связаны с *блок-схемами*, а именно: существование Р. м. равносильно существованию симметричной блок-схемы с параметрами (v, k, λ), обладающей циклич. группой автоморфизмов порядка v (блоки такой схемы суть множества $\{d_1 + i, \ldots, d_k + i\}$, $i = 0, 1, \ldots, v-1$). Идея Р. м. обобщается следующим образом: множество D, состоящее из k различных элементов $d_1, \ldots, d_k$ группы G порядка v, наз. (v, k, λ)-разностным множеством в G, если для любого $a \in G$, $a \neq 1$, существует в точности λ упорядоченных пар (d_i, d_j), $d_i, d_j \in G$, таких, что $d_i d_j^{-1} = a$ (или, что то же, λ пар (d_i, d_j) с $d_i^{-1} d_j = a$). Тогда определенное выше Р. м. наз. циклическим Р. м. (т. к. группа классов вычетов по mod v есть циклич. группа). Существование (v, k, λ)-разностных множеств в группе G порядка v равносильно существованию симметричной блок-схемы с параметрами v, k, λ, допускающей G в качестве регулярной (т. е. без неподвижных элементов) группы автоморфизмов (эта схема получается отождествлением элементов блок-схемы с элементами группы и блоков — с множествами $\{d_1 g, \ldots, d_k g\}$, где g пробегает G).

Основным в теории Р. м. является вопрос о существовании и построении Р. м. с заданными параметрами.

При его изучении оказывается полезным понятие множителя Р. м.: автоморфизм группы G наз. множителем (v, k, λ)-разностного множества D в G, если он является также автоморфизмом блок-схемы, определяемой Р. м. D. Для циклического Р. м. множитель — это число t, взаимно простое с v и с тем свойством, что

$$\{td_1, \ldots, td_k\} = \{d_1 + i, \ldots, d_k + i\}$$

для нек-рого i, $0 \leqslant i \leqslant v-1$. Множители циклического Р. м. образуют группу. Справедливо утверждение: если D — циклическое (v, k, λ)-разностное множество и если p — простое число, делящее $k-\lambda$ и такое, что $(p, v)=1$ и $p>\lambda$, то p — множитель D (теорема о множителе Р. м.). При построении Р. м. полезен следующий результат: для любого множителя (v, k, λ)-разностного множества D в абелевой группе G порядка v в блок-схеме, определяемой D, существует блок, фиксируемый этим множителем; при $(v, k)=1$ существует блок, фиксируемый любым множителем.

Р. м. обычно строятся прямыми методами с использованием свойств конечных полей, полей деления круга (см. *Круговое поле*), а также конечных геометрий. Известно несколько бесконечных семейств Р. м., напр. следующие типы S и Q.

Тип S (разностные множества Зингера): это — гиперплоскости в n-мерной проективной геометрии над полем из q элементов; параметры:

$$v = (q^{n+1}-1)/(q-1),$$
$$k = (q^n-1)/(q-1), \quad \lambda = (q^{n-1}-1)/(q-1);$$

тип Q: квадратичные вычеты в поле $GF(p^r)$ при $p^r \equiv 3 \pmod 4$ (p — простое число); параметры:

$$v = p^r = 4t-1, \quad k = 2t-1, \quad \lambda = t-1.$$

Другие бесконечные семейства Р. м. см. в [1]—[3]. Наряду с Р. м. часто рассматриваются обобщенные Р. м., или разностные семейства,— это множества $D_1, \ldots, D_r$, состоящие из вычетов по mod v и такие, что для любого $a \not\equiv 0 \pmod v$ существует точно λ упорядоченных пар (d_i, d_j), $d_i, d_j \in D_k$, с

$$a \equiv d_i - d_j \pmod v$$

для нек-рого k, $1 \leqslant k \leqslant r$.

Имеются также другие обобщения Р. м.

Лит.: [1] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [2] Baumert L. D., Cyclic difference sets, B.— Hdlb.—N.Y., 1971; [3] Hall M., «Math. Centre Tracts», 1974, v. 57, p. 1—26.

В. Е. Тараканов.

РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, содержащее конечные разности искомой функции. Пусть $y(n) = y_n$ — функция целочисленного аргумента $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n, \quad \Delta^{m+1} y_n = \Delta(\Delta^m y_n),$$
$$\Delta^1 y_n = \Delta y_n, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

— конечные разности. Выражение $\Delta^m y_n$ содержит значения функции y в $(m+1)$-й точке n, $n+1, \ldots, n+m$. Справедлива формула

$$\Delta^m y_n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k y_{n+k}. \qquad (1)$$

Разностным уравнением наз. уравнение вида

$$F(n;\ y_n,\ \Delta y_n,\ \ldots,\ \Delta^m y_n) = 0, \qquad (2)$$

где y — искомая и F — заданная функции. Замена в (2) конечных разностей их выражениями через значения искомой функции согласно (1) приводит к уравнению вида

$$F(n;\ y_n,\ y_{n+1},\ \ldots,\ y_{n+m}) = 0. \qquad (3)$$

Если $\frac{\partial F}{\partial y_n} \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y_{n+m}} \neq 0$, т. е. уравнение (3) действительно содержит как y_n, так и y_{n+m}, то уравнение (3) наз. разностным уравнением m-го порядка, или дифференциально-разностным уравнением.

Наиболее развита теория линейных Р. у., к-рая имеет много общего с теорией обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (см. [1] — [3]). Линейным Р. у. m-го порядка наз. уравнение

$$a_m(n)\, y_{n+m} + a_{m-1}(n)\, y_{n+m-1} + \ldots + a_0(n)\, y_n = f_n, \quad (4)$$

где $f_n = f(n)$ — заданная функция, $a_k(n)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, — заданные коэффициенты, причем $a_m(n) \neq 0$, $a_0(n) \neq 0$. Решением Р. у. (4) наз. всякая функция $y_n = y(n)$, удовлетворяющая уравнению (4). Как и в случае дифференциальных уравнений, различают частное и общее решения Р. у. (4). Общим решением Р. у. (4) наз. его решение, зависящее от m произвольных параметров и такое, что каждое частное решение может быть получено из этого общего решения при нек-ром значении параметров. Обычно конкретные значения параметров находятся из дополнительных условий. Типичной является задача Коши: по заданным $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$, f_n найти решение y_n уравнения (4) при $n = m, m+1, \ldots$ Существование и способ построения решения Р. у. (4) устанавливаются по следующей схеме. Наряду с (4) рассматривается однородное Р. у.

$$a_m(n)\, y_{n+m} + a_{m-1}(n)\, y_{n+m-1} + \ldots + a_0(n)\, y_n = 0. \quad (5)$$

Справедливы следующие утверждения.

1) Пусть $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \ldots, y_n^{(k)}$ — решения уравнения (5) и $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — произвольный набор постоянных. Тогда функция $c_1 y_n^{(1)} + c_2 y_n^{(2)} + \ldots + c_k y_n^{(k)}$ также является решением уравнения (5).

2) Если $y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(m)}$ суть m решений уравнения (5) и определитель

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} & \ldots & y_0^{(m)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \ldots & y_1^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{m-1}^{(1)} & y_{m-1}^{(2)} & \ldots & y_{m-1}^{(m)} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то общее решение однородного Р. у. (5) имеет вид

$$y_n = \sum_{k=1}^{m} c_k y_n^{(k)}, \quad (6)$$

где c_k — произвольные постоянные.

3) Общее решение неоднородного Р. у. (4) представляется в виде суммы какого-либо частного его решения и общего решения однородного Р. у. (5).

Частное решение неоднородного уравнения (5) можно построить, исходя из общего решения (6) однородного уравнения, путем применения метода вариации произвольных постоянных (см., напр., [2]). В случае Р. у. с постоянными коэффициентами

$$a_m y_{n+m} + a_{m-1} y_{n+m-1} + \ldots + a_0 y_n = 0 \quad (7)$$

можно непосредственно найти m линейно независимых частных решений. Для этого рассматривается характеристич. уравнение

$$a_m q^m + a_{m-1} q^{m-1} + \ldots + a_0 = 0 \quad (8)$$

и ищутся его корни $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Если все корни простые, то функции

$$y_n^{(1)} = q_1^{(n)}, \quad y_n^{(2)} = q_2^{(n)}, \quad \ldots, \quad y_n^{(m)} = q_m^n$$

образуют линейно независимую систему решений урав-

нения (7). В случае, когда q_k — корень кратности r, линейно независимыми являются решения

$$q_k^n,\ nq_k^n,\ n^2q_k^n,\ \ldots,\ n^{r-1}q_k^n.$$

Если коэффициенты $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m$ действительные и уравнение (8) имеет комплексный корень, напр. простой корень $q_k=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то вместо комплексных решений q_k^n, $\bar{q}_k^n$ выделяют два линейно независимых действительных решения

$$\rho^n\cos n\varphi,\quad \rho^n\sin n\varphi.$$

Пусть имеется Р. у. 2-го порядка с постоянными действительными коэффициентами

$$a_2y_{n+2}+a_1y_{n+1}+a_0y_n=0. \tag{9}$$

Характеристич. уравнение

$$a_2q^2+a_1q+a_0=0$$

имеет корни

$$q_{1,2}=\left(-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}\right)/(2a_2).$$

Общее решение уравнения (9) в случае $q_2\neq q_1$ удобно записывать в виде

$$y_n=c_1\frac{q_2q_1^n-q_1q_2^n}{q_2-q_1}+c_2\frac{q_2^n-q_1^n}{q_2-q_1}, \tag{10}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Если q_1 и q_2 — комплексно сопряженные корни:

$$q_{1,\,2}=\rho(\cos\varphi\pm i\sin\varphi),$$

то другое представление общего решения имеет вид

$$y_n=-c_1\rho^n\frac{\sin(n-1)\varphi}{\sin\varphi}+c_2\rho^{n-1}\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}. \tag{11}$$

В случае кратного корня общее решение может быть получено предельным переходом из (10) или (11). Оно имеет вид

$$y_n=-c_1(n-1)q_1^n+c_2nq_1^{n-1}.$$

Как и в случае уравнений произвольного порядка, для Р. у. 2-го порядка можно рассматривать задачу Коши или различные краевые задачи. Напр., для задачи Коши

$$\left.\begin{array}{l}T_{n+2}(x)-2xT_{n+1}(x)+T_n(x)=0,\ n=0,\ 1,\ldots,\\ T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,\end{array}\right\} \tag{12}$$

где x — любое действительное число, решением (12) является многочлен $T_n(x)$ степени n (многочлен Чебышева 1-го рода), к-рый определяется формулой

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)=$$
$$=0{,}5\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^{-n}\right].$$

Краевая задача Р. у. 2-го порядка состоит в нахождении функции y_n, удовлетворяющей при $n=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1$ уравнению

$$Ly_n=a_ny_{n-1}-c_ny_n+b_ny_{n+1}=-f_n \tag{13}$$

и двум линейно независимым краевым условиям. Такими краевыми условиями могут быть, напр., условия

$$y_0=\varkappa_1y_1+\mu_1,\ y_N=\varkappa_2y_{N-1}+\mu_2 \tag{14}$$

или условия

$$y_0=\mu_1,\ y_N=\mu_2. \tag{15}$$

Для Р. у. 2-го порядка справедлив следующий принцип максимума. Пусть дана задача (13), (15) и пусть выполнены условия

$$a_n>0,\ b_n>0,\ c_n\geqslant a_n+b_n,\ n=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1.$$

Тогда если $Ly_n\geqslant 0$ $(Ly_n\leqslant 0)$, $n=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1$, то $y_n\not\equiv\text{const}$ не может принимать наибольшего положи-

тельного (наименьшего отрицательного) значения при $n=1, 2, \ldots, N-1$. Из принципа максимума следует однозначная разрешимость краевой задачи (13), (15) и устойчивость ее решения относительно изменения граничных условий μ_1, μ_2 и правых частей f_n. Для решения разностных краевых задач (13), (14) применяется *прогонки метод* (см. [2]).

Построить в явном виде решения нелинейных Р. у.

$$y_{n+1}=f_n(y_n),\ n=0,\ 1,\ \ldots \qquad (16)$$

удается лишь в отдельных очень частных случаях. Для уравнений вида (16) изучаются в основном качественные вопросы поведения решений при $n\to\infty$ и развита теория устойчивости, аналогичная теории устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [4], [5]).

При разностной аппроксимации уравнений с частными производными возникают многомерные Р. у. (см. [2], [6]). Напр., уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-f(x_1,\ x_2)$$

можно аппроксимировать Р. у.

$$\frac{u_{i+1,\ j}-2u_{i,\ j}+u_{i-1,\ j}}{h_1^2}+\frac{u_{i,\ j+1}-2u_{i,\ j}+u_{i,\ j+1}}{h_2^2}=-f_{i,j},$$

где

$$u_{i,j}=u\left(x_1^{(i)},\ x_2^{(j)}\right),\ x_1^{(i)}=ih_1,\ x_2^{(j)}=jh_2,$$
$$i,\ j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,$$

h_1, h_2 — шаги сетки.

Система многомерных Р. у. в совокупности с дополнительными начальными и граничными условиями образует разностную схему. В связи с многомерными Р. у. изучаются такие вопросы, как корректность разностных задач, методы их решения, сходимость при измельчении сетки к решениям исходных дифференциальных уравнений (см. *Разностных схем теория*).

Хотя существуют различные математические и технич. модели, приводящие к Р. у. (см., напр., [4], [5]), основной областью их применения являются приближенные методы решения дифференциальных уравнений (см. [6], [9]).

Лит.: [1] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, 3 изд., М., 1967; [2] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [3] Самарский А. А., Карамзин Ю. Н., Разностные уравнения, М., 1978; [4] Мартынюк Д. И., Лекции по качественной теории разностных уравнений, К., 1972; [5] Халанай А., Векслер Д., Качественная теория импульсных систем, пер. с рум., М., 1971; [6] Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977; [7] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962; [8] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [9] Горбунов А. Д., Разностные уравнения, М., 1972.

А. В. Гулин, А. А. Самарский.

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ — методы приближенного решения дифференциальных уравнений, основанные на замене этих уравнений уравнениями относительно функций дискретного аргумента. См. *Гиперболического типа уравнение*, численные методы решения; *Параболического типа уравнение*, численные методы решения; *Эллиптического типа уравнение*, численные методы решения; *Дифференциальное уравнение обыкновенное*, приближенные методы решения. *Н. С. Бахвалов.*

РАЗНОСТНЫЙ ОПЕРАТОР — оператор, действующий в пространстве сеточных функций. Р. о. возникают при аппроксимации дифференциальной задачи разностной и являются предметом изучения *разностных схем теории*. Разностную схему можно рассматривать как операторное уравнение с операторами, действующими в нек-ром функциональном пространстве, а именно в пространстве сеточных функций. Под пространством сеточных функций понимается множество функций,

определенных в точках заданной сетки и образующих конечномерное векторное пространство. Пространства сеточных функций обычно возникают при аппроксимации того или иного пространства функций непрерывного аргумента.

Пример 1. Пусть $C\ [0,\ 1]$ — пространство непрерывных функций, заданных на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$ с нормой

$$\|u\|_C = \max_{x\in[0,\ 1]} |u(x)|.$$

Вводится сетка

$$\omega_h = \{x_i = ih,\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ N,\ hN=1\}$$

и рассматривается множество $C_h\ [0,\ 1]$ функций $y=\{y_i\}_0^N$, $y_i = y(x_i)$, заданных на сетке ω_h. Множество $C_h[0,\ 1]$ образует $(N+1)$-мерное векторное пространство относительно покоординатного сложения и умножения на число. Норма в $C_h\ [0,\ 1]$

$$\|y\|_{C_h} = \max_{0\leqslant i\leqslant N} |y_i|$$

согласована с нормой в $C\ [0,\ 1]$ в том смысле, что для любой функции $u\in C\ [0,\ 1]$ определен вектор

$$u_h = \{u_i\}_0^N \in C_h\ [0,\ 1],\ u_i = u(x_i),$$

и существует

$$\lim_{h\to 0} \|u_h\|_{C_h} = \|u\|_C.$$

Любой линейный Р. о. A_h как оператор, действующий в конечномерном пространстве, может быть представлен матрицей. Характерными свойствами матриц, порождаемых разностными операторами, являются их большой размер и относительно большое число нулевых элементов.

В общем случае конструкция пространств сеточных функций и Р. о. может быть весьма сложной. Наиболее изучены свойства Р. о., действующих в пространствах с гильбертовой метрикой. В этом случае наибольший интерес представляют такие свойства Р. о., как самосопряженность и положительность. В основе математич. аппарата, позволяющего исследовать свойства Р. о., лежат разностные аналоги формул дифференцирования произведения и интегрирования по частям.

Пример 2. Пусть задано множество действительных функций на сетке ω_h. Вводятся обозначения:

$$y_{\bar{x},\ i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h},\quad y_{x,\ i} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h},\quad y_{\mathring{x},\ i} = \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h},$$

$$y_{\bar{x}x,\ i} = \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2},\quad (y,\ v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h,$$

$$(y,\ v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h,\quad [y,\ v) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i v_i h.$$

Справедливы следующие формулы:

$$(yv)_{\bar{x},\ i} = y_{\bar{x},\ i} v_i + y_i v_{\bar{x},\ i} - h y_{\bar{x},\ i} v_{\bar{x},\ i},$$

$$(yv)_{x,\ i} = y_{x,\ i} v_i + y_i v_{x,\ i} + h y_{x,\ i} v_{x,\ i}.$$

Имеет место также формула суммирования по частям

$$(y,\ v_{\bar{x}}] = -[y_x,\ v) + y_N v_N - y_0 v_0.$$

Из последней формулы следует, в частности, самосопряженность и положительность оператора второй разностной производной

$$(Ay)_i = -y_{\bar{x}\,x,\ i},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1$$

на множестве функций, заданных на сетке ω_h и обращающихся в нуль на границе $i=0$, $i=N$.

Многочисленные исследования посвящены изучению свойств разностных аппроксимаций дифференциальных

операторов эллиптич. типа (см. [1] — [4]). Для построения соответствующих Р. о. используются такие эффективные методы, как метод баланса, конечных элементов, вариационные и проекционные методы. Найденные разностные аппроксимации хорошо моделируют основные свойства исходных операторов, такие, напр., как эллиптичность, выполнение принципа максимума и др. Построены также Р. о., аппроксимирующие эллиптические дифференциальные операторы в областях сложной формы при различных типах краевых условий и в случае нерегулярных сеток (см. [5]).

Свойства стационарных Р. о. используются для изучения устойчивости нестационарных разностных задач и для построения итерационных методов. При этом теория итерационных методов может быть изложена как один из разделов общей теории устойчивости разностных схем (см. [6], [7]).

В связи с построением экономичных разностных схем для многомерных задач математич. физики исследованы факторизованные Р. о., то есть многомерные Р. о., представимые в виде произведения одномерных Р. о. (см. [1]). Изучались и нелинейные Р. о. (см. [8]).

Лит.: [1] Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977; [2] Самарский А. А., Андреев В. Б., Разностные методы для эллиптических уравнений, М., 1976; [3] Корнеев В. Г., Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности, Л., 1977; [4] Обэн Ж.-П., Приближенное решение эллиптических краевых задач, пер. с англ., М., 1977; [5] Самарский А. А., Фрязинов И. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 6, с. 167—97; [6] Самарский А. А., Гулин А. В., Устойчивость разностных схем, М., 1973; [7] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [8] Карчевский М. М., Лящко А. Д., «Изв. вузов. Математика», 1972, № 11, с. 23—31; 1973, № 3, с. 44—52. *А. В. Гулин, А. А. Самарский.*

РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ТЕОРИЯ — раздел вычислительной математики, изучающий методы приближенного решения дифференциальных уравнений путем их замены конечноразностными уравнениями (разностными схемами).

Р. с. т. изучает способы построения разностных схем, исследует корректность разностных задач и сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи, занимается обоснованием алгоритмов решения разностных задач. Метод конечных разностей (называемый также методом сеток) является универсальным вычислительным методом, позволяющим эффективно решать сложнейшие задачи математич. физики, включая нелинейные задачи. Отличительной чертой современной Р. с. т. является ориентация на построение и исследование методов, пригодных для ЭВМ.

Основные понятия. Метод конечных разностей применяется в теории дифференциальных уравнений как эффективное средство доказательства теорем существования. Для целей вычислительной математики задачи Р. с. т. существенно меняются. Решая приближенно ту или иную задачу математич. физики, заранее предполагают, что эта задача поставлена корректно; при этом основной целью Р. с. т. становится нахождение и обоснование наилучшего метода решения исходной дифференциальной задачи, формулировка общих принципов построения разностных схем с заданными свойствами для широких классов задач математич. физики.

Ниже излагаются на достаточно общем примере основные понятия, к-рыми оперирует Р. с. т.— понятия аппроксимации, устойчивости, сходимости; демонстрируется один из возможных подходов к построению Р. с. т.

Пусть в n-мерной области G с границей Γ ищется решение дифференциального уравнения

$$Lu(x) = f(x),\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in G, \qquad (1)$$

с дополнительными (граничными, начальными) условиями

$$lu(x)=\mu(x),\ x\in\Gamma, \qquad (2)$$

где L и l — линейные дифференциальные операторы, $f(x)$ и $\mu(x)$ — заданные функции. Пусть в нек-ром классе функций задача (1), (2) поставлена корректно (т. е. ее решение $u(x)$ существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных $f(x)$, $\mu(x)$). В методе конечных разностей область $\bar{G}=G+\Gamma$ приближенно заменяют дискретным множеством точек — с е т к о й $\bar{G}_h=G_h+\Gamma_h$. Параметр $h=(h_1, \ldots, h_n)$, шаг сетки, характеризует плотность сетки, и обычно при $|h|\to 0$ последовательность сеток G_h стремится заполнить всю область $\bar{G}$. Производные, входящие в (1), (2), аппроксимируются на сетке $\bar{G}_h$ соответствующими разностными отношениями. В результате получается система линейных алгебраич. уравнений

$$L_h y_h(x)=\varphi_h(x),\ x\in G_h;\ l_h y_h(x)=\chi_h(x),\ x\in\Gamma_h, \qquad (3)$$

где $y_h(x)$ — искомая сеточная функция, $\varphi_h(x)$, $\chi_h(x)$ — заданные сеточные функции L_h, l_h — разностные операторы. Семейство уравнений (3), зависящее от параметра h, наз. р а з н о с т н о й с х е м о й. Хотя уравнение (3) получено путем аппроксимации исходной задачи (1), (2), его можно рассматривать как независимый математич. объект. Из корректности задачи (1), (2) не следует, вообще говоря, корректность разностной задачи (3). Поэтому одной из основных задач Р. с. т. является исследование корректности задачи (3). Кроме того, Р. с. т. изучает сходимость при $h\to 0$ решения $y_h(x)$ разностной задачи к решению $u(x)$ исходной дифференциальной задачи. Корректность и сходимость тесно связаны между собой.

Пусть множество сеточных функций, заданных на $\bar{G}_h$, образует векторное пространство H_h, а операторы L_h, l_h действуют в этом пространстве; в пространствах решений $y_h(x)$ и правых частей $\varphi_h(x)$, $\chi_h(h)$ вводятся нормы $\|\cdot\|_{(1_h)}$, $\|\cdot\|_{(2h)}$, $\|\cdot\|_{(3h)}$.

Говорят, что разностная задача (3) поставлена корректно, если для всех достаточно малых $|h|$ и при любых φ_h, $\chi_h\in H_h$ ее решение существует, единственно и для него выполняется оценка

$$\|y_h\|_{(1_h)}\leq M\left(\|\varphi_h\|_{(2h)}+\|\chi_h\|_{(3h)}\right) \qquad (4)$$

с константой M, не зависящей от h. Последнее свойство, означающее равномерную по h непрерывную зависимость решения от входных данных, наз. у с т о й ч и в о с т ь ю р а з н о с т н о й с х е м ы. Оценки вида (4) решения разностной задачи через известные правые части наз. а п р и о р н ы м и о ц е н к а м и. Получение априорных оценок составляет основу Р. с. т.

Для оценки погрешности решение задачи (3) представляется в виде суммы

$$y_h(x)=u_h(x)+z_h(x),$$

где $u_h(x)$ — проекция решения $u(x)$ задачи (1), (2) в пространство H_h, $z_h(x)$ — погрешность приближенного решения. В силу линейности задачи (3) для погрешности $z_h(x)$ получаются уравнения

$$L_h z_h(x)=\psi_h(x),\ x\in G_h;\ l_h z_h(x)=\nu_h(x),\ x\in\Gamma_h, \qquad (5)$$

где

$$\psi_h(x)=\varphi_h(x)-L_h u_h(x);\ \nu_h(x)=\chi_h(x)-l_h u_h(x),$$

функции $\psi_h(x)$ и $\nu_h(x)$ наз. п о г р е ш н о с т я м и а п п р о к с и м а ц и и разностной схемой (3) уравнения (1) и дополнительного условия (2) соответствен-

но. Говорят, что схема (3) аппроксимирует задачу (1), (2) с m-м порядком аппроксимации, если

$$\|\psi\|_{(2_h)} = O(|h|^m), \quad \|v\|_{(3_h)} = O(|h|^m), \quad m > 0.$$

Схема (3) имеет m-й порядок точности или сходится со скоростью $O(|h|^m)$, если

$$\|y_h - u_h\|_{(1_h)} = O(|h|^m).$$

Для сходимости разностной схемы одной только аппроксимации, вообще говоря, недостаточно: надо потребовать еще, чтобы разностная задача (3) была корректна. Именно, справедливо следующее утверждение: если разностная схема (3) корректна и имеет m-й порядок аппроксимации, то она сходится со скоростью $O(|h|^m)$ (см. [28]).

Возможны и другие подходы к построению Р. с. т. Так, в теории Лакса (см. [8]) сходимость разностных схем изучается не в пространствах сеточных функций, а в пространстве решений исходной дифференциальной задачи; здесь доказана т. н. теорема эквивалентности: если исходная задача (1), (2) корректна и схема (3) аппроксимирует задачу (1), (2), то устойчивость необходима и достаточна для сходимости. Возможны и другие постановки вопроса о связи устойчивости и сходимости (см., напр., [9]). Исследование сходимости разностных схем проводилось и в пространствах обобщенных решений (см. [10]).

Требования к разностным схемам. При расчетах на современных ЭВМ не всегда достаточно требовать от разностной схемы только сходимости при $|h| \to 0$. Использование реальных сеток при конечном шаге сетки предъявляет к схемам ряд дополнительных требований. Они сводятся к тому, что разностная схема помимо обычной аппроксимации и устойчивости должна хорошо моделировать характерные свойства исходного дифференциального уравнения. Кроме того, разностная схема должна удовлетворять определенным условиям простоты реализации вычислительного алгоритма. Ниже рассматриваются нек-рые из этих дополнительных требований.

Под о д н о р о д н о й р а з н о с т н о й с х е м о й (см. [1], [11]) понимается разностная схема, вид к-рой не зависит ни от выбора конкретной задачи из данного класса, ни от выбора разностной сетки. Во всех узлах сетки для любой задачи из данного класса разностные уравнения имеют один и тот же вид. К однородным разностным схемам относятся, в частности, схемы сквозного счета для решения уравнений с сильно меняющимися или разрывными коэффициентами. Схемы сквозного счета не предусматривают явного выделения точек разрыва коэффициентов и позволяют вести вычисления по одним и тем же формулам. Широко используются схемы сквозного счета при расчетах разрывных решений уравнений газовой динамики (см. [1], [5], [12]).

Требование к о н с е р в а т и в н о с т и р а з н о с т н о й с х е м ы означает, что данная разностная схема имеет на сетке такой же закон сохранения, что и исходное дифференциальное уравнение. В частности, если L – самосопряженный оператор и схема (3) консервативна, то L_h — самосопряженный в H_h оператор, т. е. консервативная схема сохраняет свойство самосопряженности.

Регулярным методом получения консервативных однородных схем является т. н. м е т о д б а л а н с а, или и н т е г р о - и н т е р п о л я ц и о н н ы й м е т о д. Сущность метода баланса состоит в аппроксимации на разностной сетке интегрального закона сохранения (уравнения баланса), соответствующего данному дифференциальному уравнению. Метод баланса нашел широкое применение при аппроксимации

уравнений с переменными, в том числе и разрывными, коэффициентами. Другой группой методов построения разностных схем, сохраняющих свойства самосопряженности и положительности исходного оператора, являются методы, основанные на вариационных принципах (метод Ритца, метод конечных элементов) (см. *Разностная вариационная схема*).

При конструировании разностных схем для уравнений газовой динамики нашел применение принцип полной консервативности (см. [5]). Для уравнений гиперболич. типа оказалось полезным исследование дисперсионных свойств соответствующих разностных уравнений (см. [13]).

Если известно, что при $t \to \infty$ решение исходной дифференциальной задачи стремится к нулю, то естественно требовать того же и от решения аппроксимирующей разностной задачи. Схемы, обладающие этим свойством, наз. а с и м п т о т и ч е с к и у с т о й ч и в ы м и (см. [4]).

Другой подход к построению разностных схем лучшего качества состоит в получении схем, удовлетворяющих тем же априорным оценкам, к-рые характерны (неулучшаемы) для исходных дифференциальных уравнений (см. [14]).

Экономичные разностные схемы для многомерных задач математической физики. При решении систем разностных уравнений, аппроксимирующих нестационарные многомерные задачи математич. физики (с числом пространственных переменных два или более), возникают специфич. затруднения, связанные с тем, что число арифметич. операций, необходимых для отыскания решения на новом временном слое, резко возрастает при измельчении сетки. В то же время решение одномерных нестационарных задач осуществляется методом прогонки, к-рый экономичен в том смысле, что он требует конечного (не зависящего от шага сетки h) числа действий на одну точку сетки. В общем случае разностную схему наз. э к о н о м и ч н о й, если отношение числа действий, необходимых для отыскания решения на новом временно́м слое к числу узлов пространственной сетки, не зависит от числа узлов сетки. Обычные неявные разностные схемы не являются экономичными. Наиболее эффективным приемом построения экономичных разностных схем является метод сведения многомерных задач к нескольким одномерным задачам (метод переменных направлений, метод расщепления) (см. [1], [15], [16]).

Новые алгоритмы стимулировали и новый подход к основным понятиям теории разностных схем: аппроксимации, устойчивости, сходимости. Напр., оказалось плодотворным понятие суммарной аппроксимации или аппроксимации в слабом смысле (см. [1], [16]). Сформулирован принцип аддитивности, позволяющий в общем случае строить экономичные разностные схемы, обладающие свойством суммарной аппроксимации (см. [17]). Дальнейшим обобщением разностных схем переменных направлений явились схемы с уравнениями на графах и векторные схемы (см. [18]).

Методы исследования корректности и сходимости разностных схем. Для линейных задач из устойчивости и аппроксимации следует сходимость. Поэтому основное внимание в Р. с. т. уделяется получению априорных оценок, из к-рых следует корректность задач в той или иной норме. Методы получения априорных оценок для разностных схем во многом аналогичны тем же методам в теории дифференциальных уравнений, напр. можно указать следующие методы: разделение переменных, преобразование Фурье, принцип максимума, энергетич. неравенства.

Методы решения сеточных уравнений. Любой сеточный метод для дифференциальных уравнений приводит к большим системам линейных алгебраич. уравнений.

Напр., в случае многомерных задач число уравнений достигает порядка 10^4—10^6. Одномерные разностные задачи обычно решают методом прогонки (см. [2]), представляющим собой вариант метода последовательного исключения неизвестных. Наиболее распространенными методами решения многомерных сеточных уравнений являются итерационные методы. В вычислительной практике широко используются такие итерационные методы, как метод Ричардсона с чебышевским набором параметров, итерационные методы переменных направлений, двухступенчатые итерационные методы, представляющие собой комбинацию методов переменных направлений (внутренняя итерация) с каким-либо классич. методом (внешняя итерация). Часто используются также метод верхней релаксации и попеременно-треугóльный итерационный метод (см. [2], [6]). Теория итерационных методов может быть изложена как один из разделов общей теории устойчивости разностных схем (см. [2]).

Наметилась тенденция к использованию прямых (неитерационных) методов решения многомерных разностных задач. К таким методам относятся матричная прогонка, быстрое дискретное преобразование Фурье и его обобщения, метод суммарных представлений.

Нелинейные задачи. Развита теория однородных разностных схем для нелинейных уравнений параболич. типа (см. [19]). Обобщена на нелинейный случай теорема Лакса о связи между устойчивостью и сходимостью (см. [20], [21]). Рассматривались разностные схемы для нелинейных эллиптич. уравнений (см. [23], [24]) и для нелинейных параболич. уравнений (см. [21], [22]). Имеется ряд общих теорем о корректности разностных схем для нелинейной абстрактной задачи Коши (см. [25]). Изучалась сходимость разностных схем для нелинейных эволюционных уравнений (см. [26], [27]).

Лит.: [1] Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977; [2] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [3] Самарский А. А., Андреев В. Б., Разностные методы для эллиптических уравнений, М., 1976; [4] Самарский А. А., Гулин А. В., Устойчивость разностных схем, М., 1973; [5] Самарский А. А., Попов Ю. П., Разностные методы решения задач газовой динамики, М., 1980; [6] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [7] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы. Введение в теорию, М., 1973; [8] Рихтмайер Р. Д., Мортон К., Разностные методы решения краевых задач, пер. с англ., М., 1972; [9] Гудович Н. Н., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1966, т. 6, № 5, с. 916—21; [10] Кузнецов Н. Н., там же, 1972, т. 12, № 2, с. 334—51; [11] Тихонов А. Н., Самарский А. А., там же, 1961, т. 1, № 1, с. 5—63; [12] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М., 1978; [13] Поттер Д., Вычислительные методы в физике, пер. с англ., М., 1975; [14] Мокин Ю. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1975, т. 15, № 3, с. 661—71; [15] Фрязинов И. В., там же, 1976, т. 16, № 4, с. 908—921; [16] Яненко Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967; [17] Самарский А. А., «Докл. АН СССР», 1965, т. 165, № 6, с. 1253—56; [18] Самарский А. А., Фрязинов И. В., «Beitr. Numer. Math.», 1975, № 4, S. 191—203; [19] Самарский А. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 1, с. 25—56; [20] Якут Л. И., «Докл. АН СССР», 1964, т. 156, № 6, с. 1304—07; [21] Ansorge R., Hass R., Konvergenz von Differenzenverfahren für lineare und nichtlineare Anfangswertaufgaben, B., 1970; [22] Дьяконов Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, в. 2 — Нестационарные задачи, М., 1972; [23] Карчевский М. М., Ляшко А. Д., «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1972, № 11, с. 23—31; 1973, № 3, с. 44—52; [24] Сапагов А. Ш., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1965, т. 5, № 4, с. 638—47; [25] Карчевский М. М., Лапин А. В., Ляшко А. Д., «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1972, № 3, с. 23—31; [26] Лапин А. В., Ляшко А. Д., там же, 1973, № 1, с. 71—77; [27] Raviart P. A., «J. math. pures et appl.», 1967, t. 46, № 1, p. 11—107; № 2, p. 109—83; [28] Рябенький В. С., Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, М., 1956.

А. В. Гулин, А. А. Самарский.

РАЗНОСТЬ множеств — одна из операций над множествами. Пусть имеется два множества A и B (из к-рых второе может и не содержаться в первом).

Тогда множество тех элементов множества A, к-рые не являются элементами множества B, наз. р а з н о с т ь ю этих множеств.

Р. множеств A и B обозначается $A \setminus B$.

М. И. Войцеховский.

РАЗРЕЖЕННАЯ МАТРИЦА — матрица с малым числом ненулевых элементов. Системы линейных уравнений с такими матрицами возникают, в частности, при аппроксимации дифференциальных уравнений конечноразностными или вариационно-разностными.

Н. С. Бахвалов.

РАЗРЕЖЕННОСТЬ МНОЖЕСТВА $E \subset \mathbb{R}^n$ в точке $y_0 \in \mathbb{R}^n$ — локальный признак того, что E является *полярным множеством*. Непустое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ наз. р а з р е ж е н н ы м в т о ч к е $y_0 \in \mathbb{R}^n$ в двух случаях: 1) если y_0 не является предельной точкой E, то есть $y_0 \notin E'$, где E' — производное множество для E; 2) если $y_0 \in E'$ и в окрестности y_0 существует супергармонич. функция $v(x)$ (см. *Субгармоническая функция*) такая, что

$$\lim_{\substack{x \to y_0 \\ x \in E \setminus \{y_0\}}} \inf v(x) > v(y_0).$$

Множество E является полярным тогда и только тогда, когда оно — разреженное множество (р. м.) в каждой из своих точек. Для произвольного множества E подмножество тех точек, в к-рых E есть р. м., является полярным. Любое непустое подмножество р. м. в точке $y_0 \in \mathbb{R}^n$ является р. м. в y_0. Объединение конечного числа р. м. в точке $y_0 \in \mathbb{R}^n$ является р. м. в точке y_0.

Отрезок на плоскости $\mathbb{R}^2$ не является р. м. ни в одной из своих точек. Если $E \subset \mathbb{R}^2$ — р. м. в точке y_0, то существуют сколь угодно малые окружности с центром y_0, не пересекающиеся с E. Полярное множество $E \subset \mathbb{R}^2$ вполне разрывно. Однако канторово множество меры нуль на оси абсцисс не является р. м. ни в одной из своих точек. Вместе с тем в пространстве $\mathbb{R}^3$, напр., множество точек

$$E = \{(x, y, z) : V(x, y, z) \geqslant k > 1\},$$

имеющее острие в точке (0, 0, 0), где

$$V(x, y, z) = \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{(x-t)^2 + y^2 + z^2}}$$

— *ньютонов потенциал* плотности t на отрезке $(0 \leqslant x \leqslant 1, 0, 0)$, есть р. м. в острие $(0, 0, 0) \in E'$ (п р и м е р Л е б е г а).

Лит.: [1] Б р е л о М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [2] Л а н д к о ф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966.

Е. Д. Соломенцев.

РАЗРЕЗ области $D \subset \mathbb{C}$ по разомкнутой простой дуге $\gamma = \{z(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ — удаление из области D точек дуги γ, т. е. переход от области D к области (или областям) $D \setminus \gamma$, а также само множество γ. При этом предполагается, что области D принадлежит либо вся дуга γ, либо вся дуга за исключением начальной или конечной точек $z(0)$, $z(1)$, а $z(0)$ или $z(1)$ принадлежат границе ∂D. Каждой точке $z(t)$ разреза γ при $0 < t < 1$ соответствуют два *граничных элемента* прилегающей к γ части области D: левый и правый. В совокупности эти элементы образуют соответственно л е в ы й и п р а в ы й б е р е г а р а з р е з а γ.

Е. Д. Соломенцев.

РАЗРЕЗА МНОЖЕСТВО, м н о ж е с т в о р а з д е л а, от точки O — множество тех точек x риманова многообразия W, к-рые либо соединимы с O более чем одной кратчайшей Ox, либо Ox не продолжима как кратчайшая за точку x. В двумерном случае Р. м. является одномерным графом без циклов (см. [2]); в аналитическом W любой размерности — полиэдром из аналитич. подмногообразий (см. [3]). Р. м. непрерывно зависит от O. Р. м. определяется не только от точки, но и от других подмножеств, напр. от края ∂W,

а также в пространствах, отличных от римановых, напр. на выпуклых поверхностях (см. [4]) и в двумерных многообразиях ограниченной кривизны.

Лит.: [1] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [2] Myers S. B., «Duke Math. J.», 1935, v. 1, p. 376—91; [3] Buchner M. A., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1977, v. 64, № 1, p. 118—21; [4] Kunze J., Der Schnittort auf konvexen Verheftungsflächen, B., 1969.

В. А. Залгаллер.

РАЗРЕШАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ — то же, что *Сколема функция*.

РАЗРЕШЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ, десингуляризация,— замена особого алгебраич. многообразия на бирационально изоморфное неособое многообразие. Более точно, Р. о. алгебраич. многообразия X над основным полем k наз. собственный бирациональный морфизм $f: X' \to X$ такой, что многообразие X' неособое (гладкое). Аналогично определяется Р. о. схемы, комплексно-аналитического пространства и т. д. Существование Р. о. позволяет сводить многие вопросы к неособым многообразиям, при изучении к-рых можно использовать теорию пересечений и аппарат дифференциальных форм.

Обычно Р. о. происходит путем последовательного применения операции *моноидального преобразования*. Известно, что если центр D моноидального преобразования $X' \to X$ допустим (то есть D неособо, а X — нормальное плоское многообразие вдоль D), то численные характеристики особенностей многообразия (кратность, функция Гильберта и т. д.) не хуже, чем у X. Проблема состоит в выборе центра раздутия так, чтобы особенности у X' действительно улучшились.

В случае кривых проблема Р. о. сводится по существу к нормализации. В двумерном случае ситуация сложнее. Доказано существование Р. о. у любого многообразия над полем k нулевой характеристики. Точнее, для приведенного многообразия X_0 существует конечная последовательность допустимых моноидальных преобразований $f_i: X_{i+1} \to X_i$, $i=0, 1, \ldots, r$, с центрами $D_i \subset X_i$ такая, что D_i содержатся в множествах особых точек X_i, а X_r — неособое многообразие. Аналогичный результат верен для комплексно-аналитических пространств. В положительной характеристике существование Р. о. установлено (1983) для размерностей $\leqslant 3$.

С задачей Р. о. тесно связана задача разрешения вложенных особенностей, формулируемая следующим образом. Пусть X вложено в неособое алгебраич. многообразие Z; существует ли собственное отображение $f: Z' \to Z$ с неособым Z' такое, что а) f индуцирует изоморфизм $Z' \setminus f^{-1}(X)$ на $Z \setminus X$, б) $f^{-1}(X)$ является дивизором с нормальными пересечениями? (Дивизор на неособом многообразии имеет нормальные пересечения, если локально он задается уравнением $t_1 \ldots t_k = 0$, где $t_1, \ldots, t_k$ — часть регулярной системы параметров на Z.)

Задача разрешения вложенных особенностей является частным случаем задачи тривиализации пучка идеалов. Пусть Z — неособое многообразие, I — когерентный пучок идеалов на Z, а $D \subset Z$ — неособое замкнутое подмногообразие. Слабым прообразом идеала I при раздутии $f: Z' \to Z$ с центром в D наз. пучок идеалов

$$f^*(I) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_{Z'}(mD')$$

на Z', где $D' = f^{-1}(D)$, а m — кратность идеала I в общей точке D. Тривиализация пучка идеалов состоит в нахождении последовательности раздутий с неособыми центрами, при к-рых слабый прообраз I становится структурным пучком. Пусть Z_0 — неособое многообразие над полем нулевой характеристики, I_0 — когерентный пучок идеалов на Z_0 и, кроме того, задан нек-рый дивизор E_0 на Z_0 с нормальными пересечениями. Тогда существует последовательность раздутий

$f_i: Z_{i+1} \to Z_i$, $i=0, 1, \ldots, r-1$, с неособыми центрами $D_i \subset Z_i$, обладающая следующими свойствами: если определить I_{i+1} как слабый прообраз I_i при раздутии f_i, а E_{i+1} — как $f_i^{-1}(E_i) \cup f_i^{-1}(D)$, то $I_r = \mathcal{O}_{Z_r}$, а E_r имеет лишь нормальные пересечения (теорема Хиронака). Более того, можно считать, что D_i лежит в множестве точек максимальной кратности I_i и имеет нормальные пересечения с E_i. В положительной характеристике аналогичный результат известен лишь при $\dim Z \leqslant 3$.

Другой задачей этого типа является задача исключения точек неопределенности рационального отображения. Пусть $f: X \to Y$ — рациональное отображение неособых алгебраич. многообразий. Существует ли последовательность раздутий с неособыми центрами

$$X_r \longrightarrow X_{r-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_0 = X$$

такая, что индуцированное отображение $X_r \to Y$ является морфизмом? Эта задача сводится к задаче существования тривиализации пучка идеалов, и ответ утвердителен, если $\operatorname{char} k = 0$ или если $\dim X \leqslant 3$.

Лит.: [1] Abhyankar S., Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces, N. Y.— L., 1966; в кн.: Тр. Международного конгресса математиков. 1966, М., 1968, с. 469—481; [2] Lipman J., в кн.: Algebraic geometry, Providence, 1975, p. 531—46; [3] Хиронака Х., «Математика», 1965, т. 9, № 6, с. 2—70.
В. И. Данилов.

РАЗРЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМА — *алгоритмическая проблема*, в к-рой для заданного множества A требуется построить алгоритм, разрешающий A относительно другого множества B, включающего A ($A \subseteq B$), т. е. такой алгоритм $\mathfrak{A}$, к-рый применим ко всякому элементу из B, причем $\mathfrak{A}(x)=1$, если $x \in A$, и $\mathfrak{A}(x)=0$, если $x \in B \setminus A$. Важным классом алгоритмич. проблем являются Р. п. для формальных теорий, то есть Р. п. множества всех доказуемых в теории формул (множество A) относительно множества всех формул теории (множество B).

Термин «Р. п.» следует отличать от термина «проблема разрешимости», означающего вопрос о разрешимости той или иной математической (напр., алгоритмической) проблемы.
В. Е. Плиско.

РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА — группа, обладающая конечным субнормальным рядом с абелевыми факторами (см. *Подгрупп ряд*). Она также обладает *нормальным рядом* с абелевыми факторами (такие ряды наз. разрешимыми). Длина кратчайшего разрешимого ряда группы наз. ее длиной, или ступенью разрешимости. Важнейшим из таких рядов является ряд коммутантов, или производный ряд (см. *Коммутант* группы). Термин «Р. г.» возник в теории Галуа и связан с разрешимостью алгебраич. уравнений в радикалах.

Конечные Р. г. обладают субнормальным рядом с факторами простых порядков. Эти группы характеризуются справедливостью следующего обращения теоремы Лагранжа: для любого разложения $n = n_1 n_2$ порядка n группы на два взаимно простых сомножителя существует подгруппа порядка n_1, и все подгруппы порядка n_1 сопряжены между собой. Если порядок конечной группы делится только на два простых числа, то такая группа разрешима. В классе Р. г. конечные группы выделяются как конечно порожденные периодич. группы.

Частными случаями Р. г. являются *нильпотентные группы*, *полициклические группы*, *метабелевы группы*. Важный подкласс образуют конечно порожденные группы, являющиеся расширениями своей абелевой нормальной подгруппы с помощью полициклич. факторгруппы. Они удовлетворяют условию максимальности для нормальных подгрупп (см. *Обрыва цепей условие*) и финитно аппроксимируемы (см. *Финитно аппроксимируемая группа*). Всякая связная разрешимая

группа Ли, а также Р. г. матриц, связная в *Зариского топологии*, имеют нильпотентный коммутант. Всякая матричная Р. г. над алгебраически замкнутым полем имеет подгруппу конечного индекса, сопряженную с подгруппой треугольной группы (см. *Ли — Колчина теорема*).

Все Р. г. длины, не превосходящей числа l, образуют многообразие (см. *Групп многообразие*). Свободные группы таких многообразий наз. свободными разрешимыми группами.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977.

А. Л. Шмельькин.

π-РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА — обобщение понятия *разрешимой группы*. Пусть π — нек-рое множество простых чисел. Конечная группа, каждый индекс композиционного ряда к-рой либо не делится ни на одно число из π, либо совпадает с нек-рым числом из π, наз. π-разрешимой группой. Основные свойства π-Р. г. подобны свойствам разрешимых групп. π-Р. г. является π_1-Р. г. для любого $\pi_1 \subset \pi$; подгруппы, факторгруппы и расширения π-Р. г. с помощью π-Р. г. также являются π-Р. г. В π-Р. г. G каждая π-подгруппа (т. е. подгруппа, все простые делители порядка к-рой принадлежат π) содержится в нек-рой холловской π-подгруппе (π-подгруппа наз. холловской, если ее индекс в группе не делится ни на одно число из π), а каждая π'-подгруппа (где π' — множество, дополняющее π в множестве всех простых чисел) — в нек-рой холловской π'-подгруппе; все холловские π-подгруппы, а также холловские π'-подгруппы сопряжены в G; индекс максимальной подгруппы группы G либо не делится ни на одно число из π, либо равен степени одного из чисел множества π (см. [1]). Число холловских π-подгрупп в G равно $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_t$, где $\alpha_i \equiv 1 \pmod{p_i}$ для каждого $p_i \in \pi$, делящего порядок группы G, причем α_i делит порядок одного из главных факторов группы G (см. [2]).

Лит.: [1] Чунихин С. А., Подгруппы конечных групп, Минск, 1964; [2] Brauer W., «Arch. Math.», 1968, Bd 19, № 3, S. 245—55.

С. П. Струнков.

РАЗРЕШИМАЯ ФОРМУЛА (в данной системе) — такая формула A данной *формальной системы*, что либо она доказуема в этой системе (т. е. является теоремой), либо опровержима (т. е. доказуемо ее отрицание $\neg A$). Если всякая замкнутая формула данной формальной системы разрешима в ней, то такая система наз. полной. (Следует заметить, что нельзя требовать, чтобы в системе были разрешимы все формулы, а не только замкнутые. Так, формула $x=0$, где x — переменная для натуральных чисел, не выражает ни истинное, ни ложное суждение, и поэтому ни она, ни ее отрицание не являются теоремами формальной арифметики.)

Название «Р. ф.» связано с тем, что вопрос об истинности или ложности суждения, выражаемого такой формулой, может быть решен на основе данной системы аксиом. В силу *Гёделя теоремы о неполноте* в любой формальной системе арифметики найдется неразрешимое предложение, т. е. замкнутая формула, к-рая не является разрешимой в этой системе. В частности, неразрешимой оказывается формула, выражающая утверждение о непротиворечивости такой системы.

Термин «Р. ф.» следует отличать от термина «разрешимый предикат».

В. Е. Плиско.

РАЗРЕШИМОЕ МНОГООБРАЗИЕ, солвмногообразие,— компактное факторпространство связной разрешимой группы Ли (иногда, впрочем, компактности не требуют). Частный случай — *нильмногообразие*. По сравнению с последним общий случай значительно сложнее, но для него тоже имеется полная структурная теория.

Лит.: [1] Auslander L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1973, v. 79, № 2, p. 227—61. *Д. В. Аносов.*

РАЗРЕШИМОЕ МНОЖЕСТВО — множество *конструктивных объектов* какого-либо фиксированного типа, допускающее проверку принадлежности к нему его элементов при помощи *алгоритма*. Фактически мы можем ограничиться понятием Р. м. натуральных чисел, т. к. более общий случай может быть сведен к данному при помощи соответствующей нумерации рассматриваемых объектов. Множество M натуральных чисел наз. р а з р е ш и м ы м, если существует такая *общерекурсивная функция* f, что $M=\{n|f(n)=0\}$. В этом случае f и представляет собой алгоритм, проверяющий принадлежность к M натуральных чисел. В самом деле, $n\in M$ равносильно тому, что $f(n)=0$. Р. м. натуральных чисел часто наз. также о б щ е р е к у р с и в н ы м, или р е к у р с и в н ы м, м н о ж е с т в о м.

Многие известные математич. проблемы (такие, как проблема тождества, проблема гомеоморфии, 10-я проблема Гильберта, проблема разрешимости в математич. логике) состоят в требовании доказать или опровергнуть утверждение о том, что нек-рые конкретные множества суть Р. м. Известные (отрицательные) решения перечисленных выше проблем состоят в установлении неразрешимости соответствующих им множеств (см. также *Алгоритмическая проблема*).

Лит.: [1] У с п е н с к и й В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960. *Н. М. Нагорный.*

РАЗРЕШИМЫЙ ПОТОК — поток на *разрешимом многообразии* $M=G/H$, определяемый действием на M какой-нибудь однопараметрич. подгруппы g_t разрешимой группы Ли G: если M состоит из смежных классов gH, то под действием Р. п. такой класс за время t переходит в класс g_tgH. Частный случай Р. п.— *нильпоток*; в общем случае свойства Р. п. могут быть значительно более разнообразными.

Лит.: [1] А у с л е н д е р Л., Г р и н Л., Х а н Ф., Потоки на однородных пространствах, пер. с англ., М., 1966; [2] С т е п и н А. М., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 5, с. 241—42; [3] A u s l a n d e r L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1973, v. 79, № 2, p. 262—85; [4] С а ф о н о в А. В., «Функциональный анализ и его приложения», 1980, т. 14, № 4, с. 81—82. *Д. В. Аносов.*

РАЗРЕШИМЫЙ ПРЕДИКАТ — такой n-местный предикат P, заданный на нек-ром множестве конструктивных объектов (напр., натуральных чисел) M, для к-рого существует алгоритм, позволяющий для любого набора $a_1, \ldots, a_n$ элементов множества M найти значение (И или Л) предиката P на этом наборе. Иными словами, предикат является разрешимым, если он, рассматриваемый как n-местная функция на M со значениями во множестве {И, Л}, является *вычислимой функцией*.

Когда в качестве математич. уточнения понятия вычислимости используется понятие *рекурсивной функции* или какое-либо эквивалентное понятие, то вместо «Р. п.» обычно употребляется термин «рекурсивный предикат». *В. Е. Плиско.*

РАЗРЫВА ТОЧКА — точка, принадлежащая множеству X определения функции $f\colon X\to Y$, где X и Y — топологич. пространства, в к-рой эта функция не является непрерывной. Иногда к Р. т. относят и точки, к-рые хотя и не принадлежат множеству определения функции, но в этом множестве содержатся нек-рые их проколотые окрестности.

Среди Р. т. функций, определенных в проколотых окрестностях точек числовой оси, различают точки разрыва 1-го и 2-го рода. Если точка x_0 является Р. т. функции f, определенной в нек-рой окрестности этой точки, кроме, быть может, ее самой, и в ней существуют конечные пределы слева $f(x_0-0)$ и справа $f(x_0+0)$ функции f (по проколотой окрестности точки x_0), то эта точка наз. т о ч к о й р а з р ы в а 1-г о

рода, а число $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ скачком функции f в точке x_0, причем если он равен нулю, то x_0 наз. точкой устранимого разрыва. Если Р. т. не является точкой разрыва 1-го рода, то она наз. точкой разрыва 2-го рода. *Л. Д. Кудрявцев.*

РАЗРЫВНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА — задача вариационного исчисления, в к-рой экстремум функционала достигается на ломаной экстремали. Ломаная экстремаль — кусочно гладкое решение *Эйлера уравнения*, удовлетворяющее в угловых точках нек-рым дополнительным необходимым условиям. Эти условия принимают конкретный вид в зависимости от типа Р. в. з. Так, в Р. в. з. 1-го рода ломаная экстремаль разыскивается при обычных предположениях относительно непрерывности и непрерывной дифференцируемости подинтегральной функции. Для простейшего функционала

$$J=\int_{x_1}^{x_2} F(x,\ y,\ y')\,dx,\ y(x_1)=y_1,\ y(x_2)=y_2, \qquad (1)$$

в угловой точке x_0 ломаной экстремали необходимо выполнение условий Вейерштрасса — Эрдмана

$$F_{y'}(x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0-0))=F_{y'}(x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0+0)), \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} &F(x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0-0))- \\ &-y'(x_0-0)\,F_{y'}(x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0-0))= \\ &=F(x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0+0))+ \\ &+y'(x_0+0)\,F_{y'}(x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0+0)). \end{aligned} \qquad (3)$$

В случае, когда F зависит от n неизвестных функций, т. е. y в (1) есть n-мерный вектор $y=(y_1,\ \ldots,\ y_n)$, условия Вейерштрасса — Эрдмана в угловой точке имеют вид, аналогичный (2), (3):

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right]_{x_0-0}=\left[\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right]_{x_0+0},\ i=1,\ \ldots,\ n, \qquad (4)$$

$$\left[F-\sum_{i=1}^{n} y_i'\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right]_{x_0-0}=\left[F-\sum_{i=1}^{n} y_i'\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right]_{x_0+0}. \qquad (5)$$

Для задач на условный экстремум, в к-рых подинтегральная функция зависит от n неизвестных функций и имеется m дифференциальных ограничений типа равенства (см. *Больца задача*), условия Вейерштрасса—Эрдмана формулируются с помощью функции Лагранжа L и имеют вид (4), (5) с заменой F на L.

В терминах теории оптимального управления необходимые условия в угловой точке ломаной экстремали требуют непрерывности сопряженных переменных и функции Гамильтона в точках разрыва оптимального управления. Как следует из *Понтрягина принципа максимума*, эти условия автоматически выполняются, если управление вдоль ломаной экстремали определяется из условия максимума функции Гамильтона.

В Р. в. з. 2-го рода подинтегральная функция разрывна. Пусть, напр., $F(x,\ y,\ y')$ претерпевает разрыв вдоль линии $y=\varphi(x)$ так, что $F(x,\ y,\ y')$ соответственно равна $F_1(x,\ y,\ y')$ и $F_2(x,\ y,\ y')$ по одну и другую сторону от линии $y=\varphi(x)$. Тогда если оптимальное решение существует, то оно достигается на ломаной экстремали, имеющей угловую точку $(x_0,\ \varphi(x_0))$ и вместо функционала (1) получают функционал

$$J=\int_{x_1}^{x_0} F_1(x,\ y,\ y')\,dx+\int_{x_0}^{x_2} F_2(x,\ y,\ y')\,dx=J_1+J_2. \qquad (6)$$

Вариация функционала (6) сводится к вариации функционалов J_1 и J_2 на кривых сравнения, имеющих соответственно правый и левый подвижные концы, смещающиеся вдоль линии $y=\varphi(x)$. Для того чтобы ломаная

экстремаль доставляла минимум функционалу (6), необходимо, чтобы в угловой точке $(x_0,\ \varphi(x_0))$ выполнялось условие

$$\left[F_1-(\varphi'-y')\,F_{1y'}\right]_{x=x_0-0}=\left[F_2+(\varphi'-y')\,F_{2y'}\right]_{x=x_0+0}. \tag{7}$$

Для случая, когда F зависит от n неизвестных функций $y=(y_1,\ \ldots,\ y_n)$, а поверхность разрыва F задана в виде

$$\Phi(x,\ y)=0, \tag{8}$$

необходимые условия в угловой точке ломаной экстремали, находящейся на поверхности (8), принимают вид

$$\frac{\left[F_1-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial y_i'}\right]_{x_0-0}-\left[F_2-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_2}{\partial y_i'}\right]_{x_0+0}}{\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]_{x_0}}=$$

$$=\frac{\left[\frac{\partial F_1}{\partial y_1'}\right]_{x_0-0}-\left[\frac{\partial F_2}{\partial y_1'}\right]_{x_0+0}}{\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}\right]_{x_0}}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{\left[\frac{\partial F_1}{\partial y_n'}\right]_{x_0-0}-\left[\frac{\partial F_2}{\partial y_n'}\right]_{x_0+0}}{\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y_n}\right]_{x_0}}. \tag{9}$$

Необходимые условия (7), (9) дают недостающие условия для вычисления произвольных постоянных, определяющих ломаную экстремаль — частное решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее граничным условиям. Действительно, равенства (9) дают n необходимых условий, к-рые в совокупности с $2n$ граничными условиями, n условиями непрерывной стыковки ломаной экстремали в угловой точке и уравнением (8) дают $4n+1$ условий, с помощью к-рых можно определить абсциссу угловой точки x_0 и $4n$ произвольных постоянных — по $2n$ для каждой из экстремалей, лежащих по разные стороны от поверхности (8).

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Курс вариационного исчисления, Л.— М., 1941; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958; [3] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976.

И. Б. Вапнярский.

РАЗРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ — функция $f\colon X\to Y$, где X и Y — топологич. пространства, не являющаяся непрерывной функцией на пространстве X. Среди разрывных действительных функций $f\colon X\to\mathbb{R}$ важные классы составляют *Бэра классы*, кусочно непрерывные функции, ступенчатые функции.

Р. ф. возникают, напр., при интегрировании по параметру элементарных функций (см. *Дирихле разрывный множитель*), при вычислении суммы функциональных рядов, членами к-рых являются элементарные функции, в частности при вычислении суммы тригонометрич. рядов, в задачах оптимального управления.

Примеры.

1) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=\begin{cases}0, & \text{если } x=0,\\ 1+x^2, & \text{если } x\neq 0.\end{cases}$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}0, & \text{если } x=0,\\ \frac{\pi-x}{2}, & \text{если } 0<x<2\pi.\end{cases}$$

Л. Д. Кудрявцев.

РАЗРЫВНЫЙ МНОЖИТЕЛЬ — величина, зависящая от одного или более параметров и принимающая два (или больше) значения. Напр.,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{y^{s+2k}\,ds}{s(s+1)\ldots(s+2k)}=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{(2k)!}(y-1)^{2k}, & \text{если } y\geqslant 1,\ k>0,\\ 0, & \text{если } 0\leqslant y<1.\end{cases}$$

Р. м. применяются для формального расширения области суммирования или интегрирования, для сведения данного выражения к другому, к к-рому можно применить заданные формулы или преобразования. Другие примеры — *Дирихле разрывный множитель*, *дельта-функция* Дирака и т. п. *К. Ю. Булота.*

РАМА КОГОМОЛОГИИ, де Рама когомологии, алгебраического многообразия — теория когомологий алгебраич. многообразий, основанная на дифференциальных формах. С каждым алгебраич. многообразием X над полем k связывается комплекс регулярных дифференциальных форм (см. *Дифференциальная форма* на алгебраическом многообразии); его группы когомологий $H^p_{\mathrm{DR}}(X/k)$ наз. группами Р. к. многообразия X. Если X гладко и полно, а $\mathrm{char}\ k=0$, то Р. к. являются *Вейля когомологиями* (см. [2], [3]). Если X гладко и аффинно, а $k=\mathbb{C}$, то справедлив следующий аналог *Рама теоремы*:

$$H^p_{\mathrm{DR}}(X/k) \cong H^p(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}),\ p \geqslant 0,$$

где X^{an} — комплексное аналитич. многообразие, соответствующее алгебраич. многообразию X (см. [1]). Напр., если X — дополнение к алгебраич. гиперповерхности в $P^n(\mathbb{C})$, то когомологии $H^p(X, \mathbb{C})$ могут быть вычислены при помощи рациональных дифференциальных форм на $P^n(\mathbb{C})$ с полюсами на этой гиперповерхности.

Для любого морфизма $f: X \to S$ можно определить относительный комплекс де Рама $\sum_{p\geqslant 0}\Gamma(\Omega^p_{X/S})$ (см. *Дифференциалов модуль*), приводящий к относительным когомологиям де Рама $H^p_{\mathrm{DR}}(X/S)$. В случае, когда $X=\mathrm{Spec}\,A$ и $S=\mathrm{Spec}\,B$ аффинны, относительный комплекс де Рама совпадает с $\Lambda\Omega^1_{A/B}$. Когомологии $\mathcal{H}^p_{\mathrm{DR}}(X/S)$ комплекса пучков $\sum_{p\geqslant 0} f_*\Omega^p_{X/S}$ на S наз. пучками относительных когомологий де Рама. Эти пучки когерентны на S, если f — собственный морфизм.

Лит.: [1] Grothendieck A., «Publs math. IHES», 1966, t. 29, p. 351—59; [2] Hartshorne R., Ample subvarieties of algebraic varieties, B., 1970; [3] его же, «Manuscr. math.», 1972, v. 7, p. 125—40. *А. Л. Онищик.*

РАМА КРУЧЕНИЕ, де Рама кручение,— инвариант, позволяющий различать многие структуры в дифференциальной топологии; то же, что *Рейдемейстера кручение*.

РАМА ТЕОРЕМА, де Рама теорема,— теорема, выражающая вещественные когомологии дифференцируемого многообразия M при помощи комплекса *дифференциальных форм* на M. Если $E^*(M)=\sum_{p=0}^n E^p(M)$ — комплекс де Рама многообразия M, где $E^p(M)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых p-форм на M, снабженный внешним дифференциалом, то Р. т. устанавливает изоморфизм между градуированными алгебрами когомологий $H^*(E^*(M))$ комплекса $E^*(M)$ и когомологий $H^*(M, \mathbb{R})$ многообразия M со значениями в $\mathbb{R}$. Явная интерпретация этого изоморфизма состоит в том, что каждой замкнутой p-форме ω сопоставляется линейная форма $\gamma \to \int_\gamma \omega$ на пространстве p-мерных сингулярных циклов γ в M.

Р. т. впервые была установлена Ж. де Рамом [1], хотя идея связи между когомологиями и дифференциальными формами восходит к А. Пуанкаре (H. Poincaré).

Существует ряд вариантов Р. т. Напр., когомологии $H^*(E_c^*(M))$ комплекса $E_c^*(M)$ с компактными носителями изоморфны алгебре вещественных когомологий $H_c^*(M, \mathbb{R})$ многообразия M с компактными носителями. Когомологии многообразия M со значениями в

локально постоянном пучке векторных пространств изоморфны когомологиям комплекса дифференциальных форм со значениями в соответствующем плоском векторном расслоении [3]. Когомологии симплициального множества S со значениями в любом поле k характеристики 0 изоморфны когомологиям соответствующего полиномиального комплекса де Рама над k. В случае, когда S — сингулярный комплекс произвольного топологич. пространства X, получают таким образом градуированно-коммутативную дифференциальную градуированную k-алгебру $A_{DR}(X)$, алгебра когомологий $H^*(A_{DR}(X))$ к-рой изоморфна алгебре сингулярных когомологий $H^*(X, k)$ (см. [4]). Если X — гладкое аффинное алгебраич. многообразие над $\mathbb{C}$, то когомологии $H^*(X, \mathbb{C})$ изоморфны когомологиям комплекса регулярных дифференциальных форм на M (см. *Рама когомологии*).

Лит.: [1] Rham J. de, «J. math. pures et appl. 9 sér.», 1931, t. 10, p. 115—200; [2] Рам Ж. де, Дифференцируемые многообразия, пер. с франц., М., 1956; [3] Рагунатан М., Дискретные подгруппы групп Ли, пер. с англ., М., 1977; [4] Гомотопическая теория дифференциальных форм, пер. с англ. и франц., М., 1981.

А. Л. Онищик.

РАМАНУДЖАНА ГИПОТЕЗА — высказанное С. Рамануджаном [1] предположение, что коэффициенты Фурье $\tau(n)$ функции Δ (параболич. формы веса 12) удовлетворяют неравенству

$$|\tau(p)| \leqslant 2p^{11/2}, \quad p — \text{простое},$$

$\tau(n)$ наз. также *Рамануджана функцией*. Функция Δ есть собственная функция операторов Гекке, $\tau(n)$ — соответствующие собственные значения. Петерсон (H. Petersson) обобщил Р. г. на случай собственных значений операторов Гекке модулярных форм веса k, k — целое $\geqslant 2$ (гипотеза Петерсона). П. Делинь (P. Deligne, см. [2]) свел гипотезу Петерсона к гипотезе Вейля, затем доказал последнюю (1974). Этим была доказана и Р. г.

Лит.: [1] Ramanujan S., «Trans. Camb. Phil. Soc.», 1916, v. 22; [2] Делинь П., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 5, с. 159—90; [3] Фоменко О. М., в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 5—91.

К. Ю. Булота.

РАМАНУДЖАНА СУММЫ — зависящие от двух целочисленных параметров k и n тригонометрич. суммы

$$c_k(n) = \sum_h \exp\left(\frac{2\pi nhi}{k}\right) = \sum_h \cos\frac{2\pi nh}{k},$$

где h пробегает все целые неотрицательные числа, меньшие, чем k, и взаимно простые с k. Основные свойства Р. с.— мультипликативность относительно индекса k:

$$c_{kk'}(n) = c_k(n)\, c_{k'}(n), \text{ если } (k, k') = 1,$$

а также представление через функцию Мёбиуса μ:

$$c_k(n) = \sum_{d \setminus (k,\, n)} \mu\left(\frac{k}{d}\right) d.$$

Р. с. являются ограниченными, если ограничено k либо n. В частности, $c_k(1) = 1$.

Многие мультипликативные функции от натурального аргумента разлагаются в ряды по Р. с. и наоборот, основные свойства Р. с. позволяют просуммировать суммы вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_k(qn)}{n^s} f(n), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(qn)}{k^s} f(k),$$

где $f(n)$ — мультипликативная функция, q — целое число. В частности,

$$\sum_{k-1}^{\infty} \frac{c_k(n)}{n^s} = \frac{\sigma_{1-s}(n)}{\zeta(s)},$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, $\sigma_a(n)$ — сумма a-х степеней делителей числа n. Такие суммы тесно свя-

заны с особыми рядами нек-рых аддитивных проблем теории чисел, напр. представление натуральных чисел в виде четного числа квадратов. С. Рамануджаном [1] были получены многие формулы, содержащие Р. с.

Лит.: [1] Ramanujan S., «Trans. Camb. Phil. Soc.», 1918, v. 22, p. 259—76; [2] Hardy G. H., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1920/21, v. 20, p. 263—71; [3] Ramanujan S., Collected papers, ed. G. H., Hardy, [a. o.], Camb., 1927, p. 137—41; [4] Volkmann B., «J. reine und angew. Math.», 1974, Bd 271, S. 203—13; [5] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М., 1953; [6] Левин В. И., в кн.: Историко-математические исследования, т. 13, М., 1960.

К. Ю. Булота.

РАМАНУДЖАНА ФУНКЦИЯ — функция $n \to \tau(n)$, где $\tau(n)$ — коэффициент при x^n $(n \geqslant 1)$ разложения произведения

$$D(x) = x \prod_{m=1}^{\infty} (1-x^m)^{24}$$

в степенной ряд:

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, x^n.$$

Если положить

$$\Delta(z) = D(e^{2\pi i z}),\ \operatorname{Im} z > 0,$$

то Р. ф. является n-м коэффициентом Фурье параболич. формы $\Delta(z)$, впервые исследованной С. Рамануджаном [1]. Нек-рые значения Р. ф.: $\tau(1)=1$, $\tau(2)=-24$, $\tau(3)=252$, $\tau(4)=-1472$, $\tau(5)=4830$, $\tau(6)=-6048$, $\tau(7)=-16744$, $\tau(30)=9458784518400$. С. Рамануджан предположил (а Л. Дж. Морделл, L. J. Mordell, доказал) справедливость следующих свойств Р. ф.:

$$\tau(mn) = \tau(m)\,\tau(n);\ \text{если } (m, n)=1,$$

$$\tau(p^{n+1}) = \tau(p^n)\tau(p) - p^{1}\tau(p^{n-1}),\ \text{если } p \text{ — простое}, n \geqslant 1.$$

Следовательно, вычисление $\tau(n)$ сводится к вычислению $\tau(p)$, p — простое. Известно, что $|\tau(p)| \leqslant 2p^{11/2}$ (см. *Рамануджана гипотеза*). Известны многие сравнения, к-рым удовлетворяет Р. ф. Напр., С. Рамануджану было известно сравнение

$$\tau(p) \equiv 1 + p^1 \pmod{691}.$$

Примеры позже найденных сравнений:

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{2^1},\ \text{если } n \equiv 1 \pmod 8;$$

$$\tau(p) \equiv p + p^{10} \pmod{25};$$

и т. п.

Лит.: [1] Ramanujan S., «Trans. Camb. Phil. Soc.», 1916, v. 22, p. 159—84; [2] Серр Ж.-П., «Математика», 1969, т. 13, № 4, с. 3—15; [3] Фоменко О. М., в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 5—91.

К. Ю. Булота.

РАМСЕЯ ТЕОРЕМА — название нескольких теорем в дискретной математике, сформулированных и доказанных Ф. Рамсеем [1].

Первую из этих теорем Ф. Рамсей сформулировал следующим образом. Пусть Γ — бесконечный класс и μ и r — положительные целые числа; и пусть все те подклассы Γ, к-рые имеют r элементов или, иначе, все r-сочетания элементов Γ, разделены любым способом на μ взаимно исключающих классов C_i, $i=1, 2, \ldots, \mu$, так, что каждое r-сочетание является элементом одного и только одного класса C_i; тогда, предполагая справедливой аксиому выбора, класс Γ должен содержать бесконечный подкласс Δ такой, что все r-сочетания членов Δ принадлежат одному и тому же классу C_i. Конечный аналог этой Р. т., также установленный Ф. Рамсеем, можно сформулировать следующим образом.

Пусть S — множество, содержащее N элементов, и T — семейство всех подмножеств множества S, содержащих в точности r элементов из S. Пусть семейство T разбито на t (непересекающихся) подсемейств $T_1, T_2, \ldots, T_t$ и пусть $q_1, q_2, \ldots, q_t$, r — целые числа, $q_i \geqslant r \geqslant 1$, $i=1, 2, \ldots, t$. Тогда существует такое

минимальное число n $(q_1, q_2, \ldots, q_t, r)$, зависящее только от $q_1, q_2, \ldots, q_t, r$ и не зависящее от множества S, что если $N \geqslant n(q_1, q_2, \ldots, q_t, r)$, то для нек-рого i, $i=1, 2, \ldots, t$, в S существует подмножество A_i из q_i элементов, все r-подмножества к-рого находятся в семействе T_i (доказательства этой теоремы содержатся также в [2], [3]).

Последнюю теорему можно пояснить примером, в к-ром вычисляется число n (3, 3, 2). Рассматриваются шесть точек на плоскости, связанных попарно дугами, каждая из к-рых окрашена либо в красный, либо в голубой цвета. Существуют три точки такие, что дуги, соединяющие их, окрашены в один и тот же цвет. Из пяти дуг, соединяющих нек-рую точку P_0 с пятью другими точками, три дуги одного цвета (напр., красного). Пусть это дуги P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3. Если какая-нибудь из дуг P_1P_2, P_1P_3, P_2P_3 красная, то она и две другие, соединяющие ее концы с точкой P_0, образуют красный треугольник, если же они все голубые, то сами образуют голубой треугольник. Это означает, что $n(3, 3, 2) \leqslant 6$. Однако пять точек на плоскости можно так попарно соединить красными и голубыми дугами, что при этом не найдется треугольника одного цвета. Для этого пусть дуги P_1P_2, P_1P_3, P_2P_4, P_3P_5, P_4P_5 будут красными, а остальные — голубыми. Это показывает, что $n(3, 3, 2) > 5$. Таким образом, $n(3, 3, 2) = 6$.

Из Р. т. вытекает следующий результат: для данного натурального $n \geqslant 3$ существует целое число $N = N(n)$ такое, что любые N точек в плоскости, никакие три из к-рых не лежат на одной прямой, содержат n точек, образующих выпуклый n-угольник (см. [4]).

Лит.: [1] Ramsey F. P., «Proc. London Math. Soc. Ser. 2», 1930, v. 30, p. 264—86; [2] Райзер Г.-Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966; [3] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [4] Erdös P., Szekeres G., «Compositio math.», 1935, v. 2, p. 463—70; [5] Erdös P., Rado R., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1956, v. 62, p. 427—89.

М. П. Мичеев.

РАНГ — понятие, тесно связанное с понятием *базиса*. Обычно Р. определяется либо как минимальная из мощностей порождающего множества (так, напр., вводится базисный ранг алгебраической системы), либо как максимальная мощность независимой в нек-ром смысле подсистемы элементов.

Ранг системы векторов в векторном пространстве над телом — это максимальное число линейно независимых векторов в этой системе (см. *Линейная независимость*). Ранг, или размерность, векторного пространства, в частности, равен числу элементов базиса этого пространства (Р. не зависит от выбора базиса: все базисы имеют одну и ту же мощность). Для модулей ситуация сложнее. Существуют такие ассоциативные кольца R, что даже свободный модуль над R может обладать двумя базисами с различным числом элементов (см. *Ранг модуля*, *Свободный модуль*). Если каждый свободный R-модуль имеет единственный Р., то говорят, что R обладает свойством инвариантности базисного числа. Таким кольцом является всякое ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, что позволяет определить, напр., ранг (Прюфера) *абелевой группы* (к-рую можно рассматривать как модуль над кольцом $\mathbb{Z}$). В неабелевом случае вводятся два понятия Р. группы — общий и специальный Р. (см. *Ранг группы*). Особым образом определяются *ранг алгебраической группы* и *ранг группы Ли*.

Ранг алгебры (над телом) понимается как Р. ее аддитивного векторного пространства. Однако особо существует еще понятие Р. в теории алгебр Ли (см. *Ранг алгебры Ли*).

Ранг матрицы определяется как Р. системы векторов ее строк (строчный ранг) или системы ее столбцов (столбцовый ранг). Для

матриц над телом или коммутативным кольцом с единицей оба эти понятия Р. совпадают. Для матрицы над полем Р. равен также максимальному порядку отличного от нуля минора. Р. произведения матриц не больше Р. каждого из сомножителей. Р. матрицы не меняется при умножении ее на невырожденную матрицу.

Ранг линейного отображения — это размерность образа этого отображения. В конечномерном случае он совпадает с Р. матрицы этого отображения.

Вводятся также понятия ранга билинейной формы (см. *Билинейная форма*) и ранга квадратичной формы (см. *Квадратичная форма*). Они также (в конечномерном случае) совпадают с Р. матрицы соответствующей формы. *О. А. Иванова.*

РАНГ линейного обыкновенного дифференциального уравнения в комплексной области

$$\sum_{j=0}^{n} P_j(z)\, w^{(n-j)} = 0, \quad P_0(z) = 1, \tag{1}$$

— число $r = k+1$, где

$$k = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} n_j/j.$$

Коэффициенты уравнения (1) — сходящиеся при больших $|z|$ ряды

$$P_j(z) = \sum_{m=-\infty}^{n_j} p_{jm} z^{-m}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Понятие Р. употребляется только тогда, когда $z = \infty$ — *особая точка* дифференциального уравнения (1). Р. дифференциального уравнения наз. также рангом особой точки $z = \infty$. Если эта точка — *регулярная особая точка*, то $r = 0$; если *иррегулярная особая точка*, то $r > 0$. Число k наз. подрангом. Р. уравнения — целое или дробное число. Если подранг дробный, со знаменателем $q \geqslant 2$, то подранг уравнения, полученного из (1) заменой переменной $z = \zeta^{1/q}$, будет целым. Р. уравнения инвариантен относительно замены переменной вида $z = \zeta\varphi(\zeta)$, где функция $\varphi(\zeta)$ голоморфна и отлична от нуля в точке $\zeta = \infty$.

Понятие Р. уравнения и особой точки используется при исследовании структуры решений уравнения (1) на бесконечности. Пусть $Q(z)$ — многочлен степени p,

$$\psi(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m \zeta^{-m}$$

— формальный ряд, $s \geqslant 1$ — целое число. Ряд

$$w = e^{Q\left(z^{1/s}\right)} z^{\rho} \Psi\left(z^{1/s}\right) \tag{2}$$

наз. нормальным (соответственно поднормальным) порядка p/s, если $s = 1$ (соответственно $s \geqslant 2$). Решение уравнения (1), представимое сходящимся в окрестности точки $z = \infty$ нормальным (поднормальным) рядом, наз. нормальным (поднормальным) решением того же порядка (см. [2], [3]).

Порядок нормального (поднормального) решения не превосходит Р. уравнения; это верно и для формальных решений вида (2). Если ранг r уравнения (1) целый, то оно имеет по крайней мере одно формальное решение вида (2) порядка r. Подстановка $w(z) = e^{Q(z)} u(z)$ не меняет Р. уравнения. Если подранг $k = p/q$, где p, q — взаимно простые целые числа и $q \geqslant 2$, то уравнение имеет не менее q формальных решений вида (2) порядка r.

Уравнением Гамбургера наз. уравнение (1) с рациональными коэффициентами, если оно имеет ровно две особые точки: регулярную $z = 0$ и иррегулярную $z = \infty$. Для уравнения Гамбургера получены достаточные условия, при к-рых оно имеет

нормальные решения, а при $n=2$ — необходимые и достаточные условия существования нормальных и поднормальных решений (см. [2]).

Понятие Р. вводится и в том случае, когда уравнение (1) имеет конечную особую точку (см. [2], [3]).

В случае линейной системы из n обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области

$$w' = z^r A(z)\, w, \qquad (3)$$

где $r \geqslant -1$ — целое число, матрица-функция $A(z)$ голоморфна в точке $z=\infty$ и $A(\infty)\neq 0$, число $r+1$ наз. рангом системы (3), или рангом особой точки $z=\infty$, число r — ее подрангом (см. [4] — [6]). Если $r=-1$, то точка $z=\infty$ — регулярная особая точка; в отличие от скалярного уравнения (1), точка $z=\infty$ может быть регулярной особой, если $r>-1$ (см. [4]).

Лит.: [1] Poincaré H., «Acta math.», 1886, v. 8; [2] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Харьков, 1939; [3] Латышева К. Я., Терещенко Н. И., Орел Г. С., Нормально-регулярные решения и их приложения, К., 1974; [4] Коддингтон Э., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [5] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [6] Вазов В., Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1968.

М. В. Федорюк.

РАНГ особой точки — см. *Ранг* линейного обыкновенного дифференциального уравнения.

РАНГ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГРУППЫ G — размерность любой из ее *Картана подгрупп* (эта размерность не зависит от выбора подгруппы Картана). Наряду с Р. а. г. G рассматриваются ее полупростой ранги редуктивный ранг, к-рые, по определению, равны соответственно Р. а. г. G/R и Р. а. г. G/R_u, где R — радикал алгебраич. группы G, а R_u — ее унипотентный радикал. Редуктивный Р. а. г. G равен размерности любого из ее максимальных торов. Редуктивным k-рангом линейной алгебраич. группы G, определенной над полем k (а в случае, когда группа G редуктивна,— просто ее k-рангом), наз. размерность любого ее максимального k-разложимого тора (эта размерность не зависит от выбора тора; см. *Разложимая группа*). Если k-ранг определенной над k редуктивной линейной алгебраич. группы G равен нулю (соответственно рангу G), то группа G наз. анизотропной (соответственно разложимой) над k (см. также *Анизотропная группа*).

Примеры. 1) Р. а. г. T_n всех невырожденных верхнетреугольных квадратных матриц порядка n равен ее редуктивному рангу и равен n; полупростой ранг группы T_n равен нулю. 2) Р. а. г. U_n всех верхнетреугольных квадратных матриц порядка n с единицами на главной диагонали равен ее размерности $n(n-1)/2$, а редуктивный и полупростой ранги группы U_n равны нулю. 3) Р. а. г. $O_n(k, f)$ всех автоморфизмов определенной над полем k квадратичной формы f в n-мерном векторном пространстве над k равен $[n/2]$, а k-ранг группы $O_n(k, f)$ равен индексу Витта формы f.

Если характеристика основного поля равна 0, то Р. а. г. G совпадает с рангом ее алгебры Ли L (см. *Ранг алгебры Ли*) и равен минимальной из кратностей собственного значения $\lambda=1$ всевозможных присоединенных операторов $\mathrm{Ad}_{/G}$ (минимум берется по всем $g\in G$). Элемент $g\in G$, для к-рого эта кратность равна Р. а. г. G, наз. регулярным. Множество регулярных элементов группы G открыто в G в топологии Зарисского.

Лит.: [1] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958; [2] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; [3] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [4] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980.

В. Л. Попов.

РАНГ АЛГЕБРЫ ЛИ—минимальная из кратностей собственного значения $\lambda=0$ для линейных операторов $\mathrm{ad}_L x$ по всем x из алгебры Ли L. Предполагается, что алгебра L конечномерна. Элемент x, для к-рого эта кратность минимальна, наз. р е г у л я р н ы м. Множество регулярных элементов алгебры Ли открыто в ней (в топологии Зарискоro). Р. а. Ли равен размерности любой из ее *Картана подалгебр*. Ранг $\mathrm{rk}L$ ненулевой алгебры Ли L удовлетворяет неравенствам

$$1 \leqslant \mathrm{rk}\, L \leqslant \dim L,$$

причем равенство $\mathrm{rk}L=\dim L$ имеет место тогда и только тогда, когда L нильпотентна. Для полупростых алгебр Ли над полем k ранг совпадает со степенью трансцендентности над k подполя поля рациональных функций на L, порожденного всеми коэффициентами характеристич. многочлена эндоморфизма $\mathrm{ad}_L x$.

Р. а. Ли L/R, где R — радикал в L, наз. п о л у п р о с т ы м р а н г о м а л г е б р ы L.

П р и м е р ы. Пусть L — одна из следующих алгебр Ли: 1) алгебра $\mathfrak{Sl}_n$ всех квадратных матриц порядка n с элементами из поля k; 2) алгебра $\mathfrak{Sl}_n$ всех матриц с нулевым следом; 3) алгебра всех верхнетреугольных матриц; 4) алгебра всех диагональных матриц; 5) алгебра всех верхнетреугольных матриц с нулями на главной диагонали. Для этих алгебр ранг и полупростой ранг равны соответственно n, $n-1$, n, n, $n(n-1)/2$ и $n-1$, $n-1$, 0, 0, 0.

Лит.: [1] Д ж е к о б с о н Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] С е р р Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [3] Ш е в а л л е К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958.

В. Л. Попов.

РАНГ ГРУППЫ (общий и специальный) — понятие теории групп. Группа G имеет конечный о б щ и й р а н г r, если r — наименьшее число с тем свойством, что всякая конечно порожденная подгруппа группы G содержится в подгруппе, обладающей r' образующими ($r' \leqslant r$). Группа G имеет конечный с п е ц и а л ь н ы й р а н г r, если r является наименьшим числом с тем свойством, что всякая конечно порожденная подгруппа группы G обладает системой образующих, содержащей не более чем r элементов. В случае, если соответствующего конечного числа не существует, общий (специальный) Р. г. считается бесконечным.

Общий Р. г. меньше или равен ее специальному рангу. Существуют группы, общий ранг к-рых конечен (и даже равен двум), в то время как специальный ранг бесконечен. Такова, напр., счетная симметрич. группа. Для абелевых групп общий и специальный ранги совпадают с рангом Прюфера (см. *Абелева группа*).

Лит.: [1] К у р о ш А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

О. А. Иванова.

РАНГ ГРУППЫ ЛИ (вещественной или комплексной) — размерность (соответственно вещественная или комплексная) любой из ее *Картана подгрупп*. Р. г. Ли равен рангу ее алгебры Ли (см. *Ранг алгебры Ли*). Если группа Ли G совпадает с множеством вещественных или комплексных точек линейной алгебраич. группы $\hat{G}$, то Р. г. Ли G равен *рангу алгебраической группы* $\hat{G}$.

В. Л. Попов.

РАНГ МОДУЛЯ — 1) р а н г л е в о г о м о д у л я M над кольцом R, вложимым в тело k — размерность тензорного произведения $k_R \otimes M$, рассматриваемого как векторное пространство над k. Если $R=\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, то это определение совпадает с обычным определением ранга абелевой группы. Если тело k является плоским R-модулем (напр., k — тело частных кольца R), то для точной последовательности

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

выполняется следующее равенство между рангами:

$$\mathrm{rk}\, M = \mathrm{rk}\, M' + \mathrm{rk}\, M''.$$

2) Ранг свободного модуля M над произвольным кольцом R определяется как число его свободных образующих. Для колец, вложимых в тело, это определение совпадает с определением из пункта 1). В общем случае ранг свободного модуля определяется неоднозначно. Существуют кольца (называемые n-FI-кольцами), над к-рыми любой свободный модуль с не более, чем n свободными образующими, имеет однозначно определенный ранг, а для свободных модулей с числом образующих, большим n, это свойство не верно. Достаточным условием однозначности ранга свободного модуля над кольцом R является существование гомоморфизма $\varphi\colon R \to k$ в тело k. В этом случае понятие Р. м. распространяется на проективные модули следующим образом. Гомоморфизм φ индуцирует гомоморфизм групп проективных классов $\varphi^*\colon K_0R \to K_0k \approx \mathbb{Z}$ и рангом проективного модуля P наз. образ представителя модуля P в $\mathbb{Z}$. Гомоморфизм φ существует для произвольного коммутативного кольца R.

Лит.: [1] Кон П., Свободные кольца и их связи, пер. с англ., М., 1975; [2] Милнор Дж., Введение в алгебраическую K-теорию, пер. с англ., М., 1974. *В. Е. Говоров.*

РАНГОВ ВЕКТОР — векторная статистика $R = (R_1, \ldots, R_n)$, построенная по случайному вектору наблюдений $X = (X_1, \ldots, X_n)$, i-я компонента к-рой $R_i = R_i(X)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, определяется по правилу

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} \delta(X_i - X_j),$$

где $\delta(x)$ — характеристическая функция множества $[0, +\infty)$, т. е.

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Статистика R_i наз. рангом i-й компоненты X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, случайного вектора X. Определение Р. в. будет корректным при выполнении следующего условия:

$$\mathsf{P}\{R_i = R_j\} = 0, \quad i \neq j,$$

к-рое заведомо выполняется, если распределение вероятностей случайного вектора X задается плотностью $p(x) = p(x_1, \ldots, x_n)$. В этих условиях из определения Р. в. следует, что статистика R принимает значения в пространстве $\mathfrak{R} = \{r\}$ всех перестановок $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$, при этом реализация r_i ($r_i = 1, 2, \ldots, n$) ранга R_i численно равна количеству компонент вектора X, наблюденные значения к-рых не превосходят реализации i-й компоненты X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть $X^{(\cdot)} = (X_{(n1)}, \ldots, X_{(nn)})$ — вектор порядковых статистик, построенный по вектору наблюдений X. Тогда пара $(R, X^{(\cdot)})$ является достаточной статистикой для распределения вектора X, причем сам вектор X однозначно восстанавливается по достаточной статистике $(R, X^{(\cdot)})$. Кроме того, при дополнительном предположении о симметричности плотности вероятности $p(x)$ случайного вектора X относительно перестановок аргументов компоненты R и $X^{(\cdot)}$ достаточной статистики $(R, X^{(\cdot)})$ независимы и

$$\mathsf{P}\{R = r\} = \frac{1}{n!}, \quad r \in \mathfrak{R}.$$

В частности, если

$$p(x) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i), \qquad (1)$$

т. е. компоненты $X_1, X_2, \ldots, X_n$ случайного вектора X суть независимые одинаково распределяемые слу-

чайные величины ($f(x_i)$ — плотность вероятности случайной величины X_i), то

$$\left.\begin{gathered}\mathsf{P}\{R_i=k\}=\frac{1}{n},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\\ \mathsf{P}\{R_i=k,\ R_j=m\}=\frac{1}{n(n-1)},\ i\neq j,\ k\neq m,\\ i,\ j,\ k,\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\\ \mathsf{E}\{R_i\}=\frac{n+1}{2},\ \mathsf{D}\{R_i\}=\frac{n^2-1}{12},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\end{gathered}\right\}\quad(2)$$

для любого $k=1, 2, \ldots, n$.

При выполнении условия (1) существует совместная плотность вероятности $q(x_i, k)$, $k=1, 2, \ldots, n$, случайных величин X_i и R_i, к-рая выражается формулой

$$q(x_i,\ k)=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}[F(x_i)]^{k-1}[1-F(x_i)]^{n-k}f(x_i),\quad(3)$$

где $F(x_i)$ — функция распределения случайной величины X_i. Из (2) и (3) следует, что условная плотность вероятности $q(x_i|R_i=k)$ случайной величины X_i при условии, что $R_i=k$ ($k=1, 2, \ldots, n$), выражается формулой

$$q(x_i\mid R_i=k)=$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}[F(x_i)]^{k-1}[1-F(x_i)]^{n-k}f(x_i).\quad(4)$$

Последняя формула позволяет проследить внутреннюю связь, существующую между вектором наблюдений X, Р. в. R и вектором порядковых статистик $X^{(\cdot)}$, так как (4) есть не что иное, как плотность вероятности k-й порядковой статистики $X_{(nk)}$, $k=1, 2, \ldots, n$. Кроме того, из (3) следует, что условное распределение ранга R_i выражается формулой

$$\mathsf{P}\{R_i=k\mid X_i\}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}[F(X_i)]^{k-1}[1-F(X_i)]^{n-k}.$$

И, наконец, при допущении о существовании моментов $\mathsf{E}\{X_i\}$ и $\mathsf{D}\{X_i\}$ и выполнении (1) из (2) и (3) следует, что коэффициент корреляции $\rho(X_i, R_i)$ между X_i и R_i равен

$$\rho(X_i,\ R_i)=\sqrt{\frac{12(n-1)}{(n+1)\,\mathsf{D}\{X_i\}}}\int_{-\infty}^{\infty}x_i\left[F(x_i)-\frac{1}{2}\right]dF(x_i).$$

В частности, если X_i подчиняется равномерному распределению на отрезке [0,1], то

$$\rho(X_i,\ R_i)=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

В случае, если X_i подчиняется нормальному распределению $N(a, \sigma^2)$, то

$$\rho(X_i,\ R_i)=\sqrt{\frac{3(n-1)}{\pi(n+1)}},$$

причем $\rho(X_i, R_i)$ не зависит от параметров нормального закона.

Лит.: [1] Hoeffding W., в кн.: Proc. 2 Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, Berkeley — Los Ang., 1951, p. 83—92; [2] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [3] Тарасенко Ф. П., Непараметрическая статистика, Томск, 1976. *М. С. Никулин.*

РАНГОВАЯ СТАТИСТИКА — статистика, построенная по вектору рангов. Если $R=(R_1, \ldots, R_n)$ — *рангов вектор*, построенный по случайному вектору наблюдений $X=(X_1, \ldots, X_n)$, то любая статистика $T=T(R)$, являющаяся функцией от R, наз. ранговой статистикой. Классич. пример Р. с. дает коэффициент τ ранговой корреляции Кендалла между векторами R и $1=(1, 1, \ldots, 1)$, к-рый определяется по формуле

$$\tau=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j}\operatorname{sign}(i-j)\operatorname{sign}(R_i-R_j).$$

В классе всех Р. с. особое положение занимают т. н. линейные Р. с., к-рые определяются следующим образом. Пусть $A=\|a(i,\ j)\|$ — произвольная квадратная матрица порядка n. Тогда статистика

$$T=\sum_{i=1}^{n} a(i,\ R_i)$$

наз. линейной ранговой статистикой. Напр., коэффициент ρ ранговой корреляции Спирмена между векторами R и 1, определяемый по формуле

$$\rho=\frac{12}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{n+1}{2}\right)\left(R_i-\frac{n+1}{2}\right),$$

является линейной Р. с.

Линейные Р. с., как правило, просто устроены в вычислительном отношении и их распределения вероятностей нетрудно находить. Именно поэтому в теории Р. с. играет большую роль понятие проекции Р. с. в семейство линейных Р. с. Если T — нек-рая Р. с., построенная по случайному вектору X, относительно распределения вероятностей к-рого высказана гипотеза H_0, то проекцией $\hat{T}=\hat{T}(R)$ Р. с. T в семейство линейных Р. с. наз. такую линейную Р. с., что $\mathsf{E}\{(T-\hat{T})^2\}$ минимально при справедливости H_0. Как правило, проекция $\hat{T}$ достаточно хорошо аппроксимирует Р. с. T, и разность $T-\hat{T}$ пренебрежимо мала, когда $n\to\infty$. При справедливости гипотезы H_0, согласно к-рой компоненты $X_1,\ \dots,\ X_n$ случайного вектора X суть независимые случайные величины, проекция $\hat{T}$ Р. с. T определяется по формуле

$$\hat{T}=\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{a}(i,\ R_i)-(n-2)\,\mathsf{E}\{T\},\qquad(*)$$

где $\hat{a}(i,j)=\mathsf{E}\{T|R_i=j\}$, $1\leqslant i,\ j\leqslant n$ (см. [1]).

Существует внутренняя связь между Р. с. τ и ρ. Как показано в [1], при справедливости гипотезы H_0 проекция $\hat{\tau}$ коэффициента корреляции Кендалла τ в семейство линейных Р. с. с точностью до постоянного множителя совпадает с коэффициентом ранговой корреляции Спирмена ρ, а именно:

$$\hat{\tau}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\rho.$$

Из этого равенства следует, что коэффициент корреляции $\mathrm{corr}(\rho,\ \tau)$ между ρ и τ равен

$$\mathrm{corr}(\rho,\ \tau)=\sqrt{\frac{\mathrm{D}\hat{\tau}}{\mathrm{D}\tau}}=\frac{2(n+1)}{\sqrt{2n(2n+5)}},$$

т. е. при больших n Р. с. ρ и τ асимптотически эквивалентны (см. [2]).

Лит.: [1] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Kendall M. G., Rank correlation methods, 4 ed., L., 1970.

М. С. Никулин.

РАНГОВЫЙ КРИТЕРИЙ — статистический критерий, основанный на *ранговой статистике*. Напр., критерии Вилкоксона и Манна — Уитни являются ранговыми. Р. к. инвариантны относительно группы G всех преобразований, задаваемых непрерывными строго возрастающими функциями и, следовательно, являются инвариантными относительно изменений параметров сдвига и масштаба. Кроме того, во многих задачах статистич. проверки гипотез наиболее мощные инвариантные критерии хорошо аппроксимируются Р. к.

См. также *Непараметрический критерий*.

Лит.: [1] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

М. С. Никулин.

РАНДОМИЗАЦИИ КРИТЕРИЙ, перестановок критерий,— статистический критерий, предназначенный для проверки гипотезы о симметричности

плотности вероятности наблюдаемого случайного вектора относительно перестановки ее аргументов.

Пусть по реализации $x=(x_1, \ldots, x_n)$ случайного вектора $X=(X_1, \ldots, X_n)$ надлежит проверить гипотезу H_0, согласно к-рой неизвестная плотность вероятности $p(x)=p(x_1, \ldots, x_n)$ случайного вектора X симметрична относительно перестановок своих аргументов, т. е.

$$p(x_1, \ldots, x_n)=p(x_{r_1}, \ldots, x_{r_n}),$$

где $(r_1, \ldots, r_n)$ — вектор, получающийся в результате произвольной перестановки координат вектора $(1, 2, \ldots, n)$. Далее, пусть $X^{(\cdot)}$ и R — вектор порядковых статистик и вектор рангов соответственно, построенные по вектору наблюдений X, и пусть $\Psi=\Psi(X^{(\cdot)}, R)$ такая статистика, что

$$\mathsf{E}\{\Psi(X^{(\cdot)}, R) \mid X^{(\cdot)}\}=\alpha$$

почти всюду для нек-рого $\alpha\in(0; 1)$. В таком случае статистич. критерий с критич. функцией φ, связанной со статистикой Ψ соотношением $\varphi(X)=\Psi(X^{(\cdot)}, R)$, наз. критерием рандомизации. В силу того что $X^{(\cdot)}$ является полной *достаточной статистикой*, то при справедливости гипотезы H_0 семейство *подобных критериев* совпадает с семейством критериев перестановок.

Лит.: [1] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979. *М. С. Никулин.*

РАНДОМИЗАЦИЯ — статистическая процедура, в к-рой решение принимается случайным образом. Пусть по реализации x случайной величины X, принимающей значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta\in\Theta$ надлежит принять решение ξ из измеримого пространства решений $(\Xi, \mathcal{A})$ и пусть на этом пространстве $(\Xi, \mathcal{A})$ задано семейство $\{Q_x\}$, $x\in\mathfrak{X}$, т. н. переходных вероятностных распределений $Q_x(\cdot)$ таких, что для любого фиксированного события A, $A\in\mathcal{A}$, функция $Q(A)$ является $\mathcal{B}$-измеримой от x. В таком случае статистич. процедура принятия решения, в к-рой по наблюденной реализации x случайной величины X решение принимается с помощью розыгрыша по вероятностному закону $Q_x(\cdot)$, наз. рандомизацией.

Лит.: [1] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972. *М. С. Никулин.*

РАО — БЛЭКУЭЛЛА — КОЛМОГОРОВА ТЕОРЕМА — утверждение из теории статистич. оценивания, на основе к-рого построен метод улучшения несмещенных статистич. оценок.

Пусть X — случайная величина, принимающая значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta\in\Theta$, причем семейство вероятностных распределений $\{\mathsf{P}_\theta, \theta\in\Theta\}$ обладает достаточной статистикой $T=T(X)$, и пусть $\varphi=\varphi(X)$ — нек-рая векторная статистика с конечной матрицей вторых моментов. В этом случае математич. ожидание $\mathsf{E}_\theta\{\varphi\}$ статистики φ существует и, кроме того, условное математич. ожидание $\varphi^*=\mathsf{E}_\theta\{\varphi \mid T\}$ является несмещенной оценкой для $\mathsf{E}_\theta\{\varphi\}$, то есть

$$\mathsf{E}_\theta\{\varphi^*\}=\mathsf{E}_\theta\{\mathsf{E}_\theta\{\varphi \mid T\}\}=\mathsf{E}_\theta\{\varphi\}.$$

В этих условиях Р.— Б.— К. т. утверждает, что квадратичный риск статистики φ^* не превосходит квадратичного риска статистики φ равномерно по всем $\theta\in\Theta$, т. е. для любого вектора z, имеющего ту же размерность, что и статистика φ, выполняется неравенство

$$z\mathsf{E}_\theta\{(\varphi-\mathsf{E}_\theta\{\varphi\})^T(\varphi-\mathsf{E}_\theta\{\varphi\})\}z^T \geqslant$$

$$\geqslant z\mathsf{E}_\theta\{(\varphi^*-\mathsf{E}_\theta\{\varphi^*\})^T(\varphi^*-\mathsf{E}_\theta\{\varphi^*\})\}z^T$$

для всех $\theta\in\Theta$. В частности, когда φ является одномерной статистикой, то при любом $\theta\in\Theta$ дисперсия $\mathsf{D}_\theta\varphi^*$ статистики φ^* не превосходит дисперсии $\mathsf{D}_\theta\varphi$ статистики φ.

В самом общем случае Р.— Б.— К. т. утверждает, что операция осреднения по достаточной статистике не приводит к увеличению риска относительно произвольной выпуклой функции потерь, откуда следует, что хорошие статистич. оценки нужно искать только в терминах достаточных статистик, т. е. в классе необходимых статистик.

В случае, когда семейство $\{\mathsf{P}_\theta\}$ является полным, т. е. когда единственной несмещенной оценкой нуля является функция, почти всюду равная нулю, несмещенная оценка с равномерно минимальным риском, получаемая с помощью Р.— Б.— К. т., является единственной. Таким образом, Р.— Б.— К. т. дает рецепт построения наилучших несмещенных оценок: нужно взять любую несмещенную оценку, а затем осреднить ее по достаточной статистике. Именно таким образом в следующем примере, принадлежащем А. Н. Колмогорову, строится наилучшая несмещенная оценка функции распределения нормального закона.

Пример. Пусть по реализации случайного вектора $X=(X_1, \ldots, X_n)$, компоненты к-рого X_i, $i=1, 2, \ldots, n$, $n\geqslant 3$, суть независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же нормальному закону $N_1(\xi, \sigma^2)$, следует оценить функцию распределения

$$\Phi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-(u-\xi)^2/2\sigma^2}\,du, \quad |\xi|<\infty, \sigma>0.$$

Предполагается, что параметры ξ и σ^2 неизвестны. Так как семейство

$$\left\{\Phi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right),\ |\xi|<\infty,\ \sigma>0\right\}$$

нормальных законов является полным и существует достаточная статистика $T=(\overline{X},\ S^2)$, где

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n)$$

и

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

то для построения наилучшей несмещенной оценки функции распределения $\Phi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)$ следует воспользоваться Р.— Б.— К. т. В качестве исходной статистики φ можно взять, напр., функцию эмпирич. распределения, построенную по какой-то одной компоненте вектора X, напр. X_1, то есть

$$\varphi=\begin{cases}0, & \text{если } x<X_1\\ 1, & \text{если } x\geqslant X_1,\end{cases}$$

к-рая является тривиальной несмещенной оценкой для $\Phi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)$, так как

$$\mathsf{E}\{\varphi\}=\mathsf{P}\{X_1\leqslant x\}=\Phi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right).$$

Осреднение оценки φ по достаточной статистике T приводит к оценке

$$\varphi^*=\mathsf{E}\{\varphi\mid T\}=\mathsf{P}\{X_1\leqslant x\mid \overline{X},\ S^2\}=$$
$$=\mathsf{P}\left\{\frac{X_1-\overline{X}}{S}\leqslant\frac{x-\overline{X}}{S}\mid \overline{X},\ S^2\right\}. \qquad (1)$$

В силу того что статистика

$$V=\left(\frac{X_1-\overline{X}}{S}, \frac{X_2-\overline{X}}{S}, \ldots, \frac{X_n-\overline{X}}{S}\right),$$

являющаяся дополнительной к достаточной статистике T, имеет равномерное распределение на $(n-2)$-мерной сфере радиуса n и, следовательно, не зависит ни от неизвестных параметров ξ и σ^2, ни от достаточной стати-

стики T, то $(X_1-\bar{X})/S$ тоже не зависит от ξ, σ^2 и T, причем

$$\mathsf{P}\left\{\frac{X_1-\bar{X}}{S}\leqslant u\right\}=T_{n-2}(u),\ |u|<\sqrt{n-1}, \qquad (2)$$

где

$$T_f(u)=\frac{1}{\sqrt{\pi(f+1)}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)}\int_{-\sqrt{f+1}}^{u}\left(1-\frac{t^2}{f+1}\right)^{\frac{f-2}{2}}du \qquad (3)$$

— функция распределения Томпсона с f степенями свободы. Таким образом, из (1)—(3) следует, что наилучшей несмещенной оценкой для $\Phi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)$, построенной по n независимым наблюдениям $X_1, \ldots, X_n$, является

$$\varphi^*=T_{n-2}\left(\frac{x-\bar{X}}{S}\right)=S_{n-2}\left(\frac{x-\bar{X}}{S}\sqrt{\frac{n-2}{n-1-\left(\frac{x-\bar{X}}{S}\right)^2}}\right),$$

где $S_f(\cdot)$ — функция распределения Стьюдента с f степенями свободы.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 4, с. 303—26; [2] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [3] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] Blackwell D., «Ann. Math. Statistics», 1947, v. 18, p. 105—10. *М. С. Никулин.*

РАО — КРАМЕРА НЕРАВЕНСТВО, неравенство Фреше, неравенство информации,— неравенство в математич. статистике, устанавливающее нижнюю границу риска в задаче статистич. оценивания неизвестного параметра относительно квадратичной функции потерь.

Пусть распределение вероятностей случайного вектора $X=(X_1, \ldots, X_n)$, принимающего значения в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, задается плотностью вероятности $p(x|\theta)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)^T$, $\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}^1$, и пусть в качестве оценки неизвестного скалярного параметра θ используется статистика $T=T(X)$ такая, что

$$\mathsf{E}_\theta\, T=\theta+b(\theta),$$

где $b(\theta)$ — нек-рая дифференцируемая функция, называемая смещением статистики T. В таком случае при определенных условиях регулярности семейства $\{p(x|\theta)\}$, одно из к-рых заключается в отличии от нуля информационного количества Фишера

$$I(\theta)=\mathsf{E}\left[\frac{\partial \ln p(X|\theta)}{\partial\theta}\right]^2,$$

имеет место неравенство Рао — Крамера

$$\mathsf{E}_\theta|T-\theta|^2\geqslant\frac{|1+b'(\theta)|^2}{I(\theta)}+b^2(\theta), \qquad (1)$$

устанавливающее нижнюю границу для среднеквадратичной ошибки $\mathsf{E}_\theta|T-\theta|^2$ всех оценок T неизвестного параметра θ, имеющих одну и ту же функцию смещения $b(\theta)$.

В частности, если статистика T является несмещенной оценкой параметра θ, то есть $\mathsf{E}_\theta\, T=\theta$, то из (1) следует, что

$$\mathsf{D}T=\mathsf{E}_\theta|T-\theta|^2\geqslant\frac{1}{I(\theta)}. \qquad (2)$$

Таким образом, в этом случае Р.— К. н. показывает нижнюю границу для дисперсий несмещенных оценок T параметра θ, к-рая равна $1/I(\theta)$, и, кроме того, Р.— К. н. демонстрирует, что существование состоятельных оценок связано с неограниченным ростом информационного количества Фишера $I(\theta)$ при $n\to\infty$. В случае если в Р.— К. н. (2) достигается равенство для какой-то несмещенной оценки T, то она является наилучшей в смысле минимума квадратичного риска в классе всех

несмещенных оценок и наз. эффективной оценкой. Напр., если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же нормальному закону $N(\theta, 1)$, то статистика $T=\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n)$ является эффективной оценкой неизвестного математич. ожидания θ.

В общем случае равенство в (2) достигается тогда и только тогда, когда семейство $\{p(x|\theta)\}$ является экспоненциальным, т. е. плотность вероятности случайного вектора X представима в виде

$$p(x\,|\,\theta)=c(x)\exp\{u(\theta)\varphi(x)-v(\theta)\},$$

причем эффективной оценкой для параметра θ в этом случае является достаточная статистика $T=\varphi(X)$. В тех случаях, когда эффективные оценки не существуют, нижнюю границу дисперсий несмещенных оценок следует уточнять в силу того, что Р.— К. н. дает лишь нижнюю границу, к-рая не обязательно является точной нижней границей. Напр., если $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же нормальному закону $N(a^{1/3}, 1)$, то нижней границей для дисперсий несмещенных оценок параметра a является

$$\frac{9a^4}{n}+\frac{18a^2}{n^2}+\frac{6}{n^3},$$

в то время как

$$\frac{1}{I(\theta)}=\frac{9a^4}{n}.$$

Вообще, если в Р.— К. н. (2) равенство не достигается, то это не означает, что найденная оценка не является наилучшей, т. к. она может оказаться единственной несмещенной оценкой.

Существуют различные обобщения Р.— К. н. на случай векторного параметра, а также на случай, когда оценивается неизвестная функция от этого параметра. Именно в этих случаях большую роль играют уточнения нижней границы в Р.— К. н.

Неравенство (1) было получено независимо друг от друга М. Фреше (M. Fréchet), Рао (C. R. Rao), Г. Крамером (H. Cramér).

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [3] Большев Л. Н., «Теория вероятностей и ее применения», 1961, т. 6, № 3, с. 319—26; [4] Bhattacharyya A., «Sankhyā», 1946, v. 8, № 1, p. 1—14; 1947, v. 8, № 3, p. 201—18; 1948, v. 8, № 4, p. 315—28.

М. С. Никулин.

РАСКРОЯ ЗАДАЧА, задача рационального раскроя,— выбор такого размещения заготовок в кусках материала, к-рое дает заготовки, как правило, в требуемой комплектности при минимальном расходе материала. В соответствии с особенностями в технологии и организации раскроя различаются математич. модели рационального раскроя (р. р.) для массового и индивидуального производства: для прямых (отрезки, прямоугольники, параллелепипеды) и фигурных заготовок, для случая кусков материала постоянных размеров и формы и с разбросом формы или размещения пороков (см. [1]). В зависимости от отрасли производства и используемого оборудования учитываются ограничения на допустимые виды раскроев. С Р. з. совпадает постановка нек-рых задач размещения грузов в сушильных печах, в вагонах, на палубах судов.

В массовом производстве при поступлении одинаковых кусков материала, если можно перечислить все $i=1, 2, \ldots, N$ доступные способы раскроя одного куска материала на нек-рые из $j=1, \ldots, m$ нужных видов заготовок, Р. з. сводится к решению задачи *линейного программирования*: найти интенсивность применения $x_i\geqslant 0$ каждого из раскроев, при к-рых $\sum_i x_i=\min$ и для каждого j соблюдено условие $\sum_i a_{ij}x_i\geqslant b_j$, где a_{ij} — количество j-х заготовок в i-м раскрое, а b_j — необходи-

мое на одно изделие количество этих заготовок. На практике обычно нельзя перечислить все допустимые раскрои. Упомянутую задачу линейного программирования решают исходя из нек-рого набора допустимых раскроев методом последовательного улучшения плана. Одновременно нередко изменяют список допущенных к рассмотрению раскроев. На каждом шаге составляют (генерируют на ЭВМ) один из тех раскроев, к-рые, согласно оценкам двойственной задачи линейного программирования, способны улучшить план раскроя в целом. В случае «линейного» материала (к-рый надо кроить только по длине) упомянутое генерирование осуществимо в приемлемое время средствами *динамического программирования* (см. [1], [2]). При раскрое листов на прямоугольники этот путь принципиально тоже осуществим, но в реальных задачах может становиться громоздким. Генерирование улучшающих раскроев тогда ведут эвристич. алгоритмами: ограничиваются целенаправленным составлением раскроев с участием не более трех разнотипных заготовок (см. [2], [3]).

Сходно ставятся и решаются Р. з. при возможности выбора одного или нескольких стандартных размеров материала или при необходимости использовать имеющийся в наличии материал нескольких размеров (см. [1]). В программах решения Р. з. для прямых и прямоугольных заготовок учитываются ограничения, связанные со спецификой используемого оборудования (см. [2], [3]). В программы включают составление подетальных норм и печать карт раскроя.

В массовом производстве часто используют линейный материал смешанных длин. Здесь Р. з. состоит в выборе раскроя очередного куска конкретной длины. В машиностроении целесообразно применять специально рассчитываемую линейку, предписывающую раскрой остатка, к-рый возникает после отрезания нескольких заготовок [1]. В швейном производстве при составлении настилов ткани из рулонов разной длины используют также малые специализированные ЭВМ (см. [4]), решающие только эту Р. з. В металлургии на прокатных станах замеряют на ходу длину прокатного металла и, на основе решения Р. з. на ЭВМ, осуществляют в автоматич. режиме управление раскройным устройством (см. [5]). В зарубежной стекольной промышленности автоматизируют обнаружение пороков стекла и решают на ЭВМ Р. з., подчиняя ее обходу пороков. В лесопилении бревна также имеют разброс размеров и формы, но массовость задачи придает коэффициентам a_{ijk} (характеризующим для k-й группы бревен выход досок j-го вида при установке пил i-м способом) устойчивый статистич. характер. Р. з. в лесопилении математически поставлена давно (см. [1]) и эффективно решена в производственных условиях (см. [6]).

Для фигурных заготовок в массовом производстве есть вполне применимые программы выбора оптимального положения заготовок при однорядной и двухрядной штамповке из бесконечной ленты (см. [7], [8]), а также при штамповке из лент, нарезаемых из заданного листа. Остается эффективным также глазомерное составление наборов, включающих разные фигурные заготовки раскроев с последующим решением задачи линейного программирования только на этом множестве раскроев.

При индивидуальном производстве Р. з. требует вместо линейного программирования решения более сложной задачи *целочисленного программирования*, снова с неявно заданной матрицей коэффициентов, поскольку все допустимые раскрои не перечислены. Для линейных и прямоугольных заготовок запрограммированы практичные эвристич. алгоритмы приближенного решения этой задачи (см. [2]).

Для фигурных заготовок при индивидуальном производстве имеются различные разработки, но пока нет

(1983) достаточно удовлетворительных приемов решения Р. з. на ЭВМ. Надобность в таком решении ощущает в первую очередь судостроительная промышленность. Довольно эффективны диалоговые алгоритмы, при к-рых глазомерные возможности человека сочетаются с переносом на ЭВМ труда по воспроизведению поправок, обсчету и оформлению возникающих вариантов.

Лит.: [1] Канторович Л. В., Залгаллер В. А., Рациональный раскрой промышленных материалов, 2 изд., Новосиб., 1971; [2] Мухачева Э. А., «Кузн.- штамп. произ-во», 1979, № 6, с. 14—17; [3] Математическое обеспечение расчетов линейного и прямоугольного раскроя, Уфа, 1980 (Тр. Всесоюзного науч. семинара); [4] Галынкер И. И., Сафронова И. В., Механическая технология производства одежды, М., 1977; [5] Эпштейн В., Лагутин А., «Материально-техн. снабж.», 1976, № 11, с. 77—81; [6] Соболев И. В., Управление производством пиломатериалов, Петрозаводск, 1976; [7] Белякова Л. Б., Рябинина Н. О., «Кузн.- штамп. произ-во», 1977, № 11, с. 25—28; [8] Стоян Ю. Г., Панасенко А. А., Периодическое размещение геометрических объектов, К., 1978.
В. А. Залгаллер, Л. В. Канторович.

РАСПАДА РАЗРЫВА МЕТОД — один из методов численного решения задач математич. физики. Термин «распад разрыва» привнесен из газовой динамики. Он означает процесс, возникающий при соприкосновении двух масс газа с различными состояниями газодинамич. величин (плотности, скорости, давления, внутренней энергии). Применительно к численному решению задач газовой динамики метод заключается в следующем. В области, где численно решается задача, строится разностная сетка (см. *Подвижных сеток метод*). Принимается, что в пределах каждой ячейки разностной сетки газодинамич. величины постоянны и равны нек-рым средним значениям, полученным из имеющегося их распределения. Затем на каждой из границ ячеек сетки решается задача о распаде разрыва применительно к состоянию газов в двух соседних ячейках. Ее решение достаточно просто алгоритмизируется для двух полубезграничных, соприкасающихся по плоской поверхности газов, в каждом из к-рых распределение газодинамич. величин постоянно. Значения газодинамич. величин из решения этой задачи, отвечающие пространственно-временному положению границы, разделяющей ячейки сетки, принимаются за значения на соответствующей границе ячейки. Это приближение справедливо по крайней мере на промежутке времени Δt, пока ни одно из попарных взаимодействий на границах соседних ячеек не будет влиять друг на друга. Рассчитав потоки по значениям газодинамич. величин на границах ячеек и зная исходное ступенчатое распределение на момент t_0, из балансов массы, импульса, полной энергии по каждой ячейке разностной сетки рассчитывается ступенчатое распределение на момент $t_0 + \Delta t$. Сама разностная сетка может перестраиваться в ходе расчета. Ее движение может задаваться независимо или определяться в соответствии с особенностями решаемой задачи. Упомянутое выше ограничение на временной шаг Δt является по своей сути условием устойчивости описанной схемы расчета.

Изложенный подход к построению вычислительных алгоритмов обобщается применительно к решению задач гидродинамики с теплопроводностью, теории упругости и др. Благодаря наглядной физич. интерпретации, адекватности граничных условий исходной дифференциальной постановке и универсальности, Р. р. м. получил широкое распространение в практике численного решения задач математич. физики.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, 2 изд., М., 1954; [2] Численное решение многомерных задач газовой динамики, М., 1976.
А. В. Забродин.

РАСПИСАНИЙ ТЕОРИЯ — ветвь прикладной математики (раздел *исследования операций*), изучающая математич. постановки и методы решения задач оптимального упорядочения и согласования выполнения нек-рых действий во времени. К Р. т. относятся вопросы, свя-

занные с построением оптимальных расписаний (календарных планов, графиков) выполнения конечных (или повторяющихся) комплексов операций. Область приложения результатов Р. т. включает в себя управление производством, транспортом, строительством, вычислительными системами и др.

Исследуемые в Р. т. задачи часто формулируются как задачи оптимизации процесса обслуживания конечного множества требований в системе, содержащей ограниченные ресурсы. Конечное множество требований отличает модели Р. т. от сходных с ними моделей массового обслуживания теории, где в основном рассматриваются бесконечные потоки требований. В остальном эти теории имеют близкие отправные точки. В Р. т. для каждого требования задается момент его поступления в систему. Находясь в системе, требование должно пройти одну или несколько, в зависимости от условий задачи, стадий обслуживания. Для каждой стадии указываются допустимые наборы ресурсов и длительности обслуживания требования при использовании этих наборов. Оговаривается возможность прерываний процесса обслуживания отдельных требований. Ограничения на очередность обслуживания задаются, как правило, транзитивным, антирефлексивным бинарным отношением. Алгоритмы расчета характеристик больших частично упорядоченных множеств требований составляют основное содержание раздела Р. т., к-рый носит название теории сетевого планирования. Иногда в моделях Р. т. указываются длительности переналадок при переходе от обслуживания одного требования к обслуживанию следующего требования и др. условия.

Следует отметить, что исходя из практич. направленности Р. т. не стремится к унификации терминологии: наряду с термином «требование» употребляются, напр., термины «работа», «операция» и т. д. По той же причине по-разному формально определяется расписание обслуживания требований. В общем случае под расписанием можно понимать однозначное отображение, ставящее в соответствие каждому требованию в каждый момент времени определенный набор ресурсов. В качестве критериев обычно выбираются критерии суммарного и максимального штрафов, имеющие следующий вид:

$$F(s) = \sum_{a \in N} \varphi_a(t_a(s)) \quad \text{и} \quad F(s) = \max_{a \in N} \varphi_a(t_a(s)),$$

здесь $t_a(s)$ — момент завершения обслуживания требования a в расписании s, N — множество требований, а $\varphi_a(\cdot)$ — неубывающие функции, именуемые функциями штрафа. В практич. постановках функции штрафа имеют обычно конкретный экономич. смысл (напр., омертвление оборотных средств, ущерб от потери потребителей и т. д.). Рассматриваются многокритериальные задачи.

Помимо детерминированных изучаются и стохастич. модели. В этом случае обычно рассматривается либо задача минимизации математич. ожидания значения одного из используемых в детерминированных постановках критериев, либо задача минимизации вероятности нек-рого события. Таким событием может быть, напр., запаздывание в обслуживании требований относительно заданных сроков.

Основным подходом к решению детерминированных задач Р. т. является общая алгоритмич. схема последовательного анализа вариантов. Именно на этом пути удалось решить наиболее адекватные практике задачи, отработать оптимизационные процедуры планирования работ во времени (к а л е н д а р н о е п л а н и р о в а н и е), реализуемые в автоматизированных системах управления. Вместе с тем для ряда детерминированных задач получены быстродействующие решающие

правила, доказаны необходимые и достаточные условия их применимости, предложены эффективные приемы, имеющие значение для дискретной оптимизации в целом (см., напр., [1]—[4]). При разработке таких оптимизационных алгоритмов находят применение, в частности, результаты *графов теории* и математич. программирования. Опубликованные в нач. 70-х гг. 20 в. работы по теории *NP*-полноты привели к появлению многочисленных исследований сложности задач Р. т. (см., напр., [5]). Результаты этих исследований повысили интерес к алгоритмам приближенного решения и оценке точности таких алгоритмов (см., напр., [6]). Для многих подходов и приемов решения задач дискретной оптимизации Р. т. представляет легко формулируемые практически значимые «пробные камни» — примеры.

Лит.: [1] Танаев В. С., Шкурба В. В., Введение в теорию расписаний, М., 1975; [2] Конвей Р. В., Максвелл В. Л., Миллер Л. В., Теория расписаний, пер. с англ., М., 1975; [3] *Computer and job-shop scheduling theory*, N. Y.—[a. o.], 1976; [4] Gonzalez M. J., «ACT Computing Surveys», 1977, v. 9, № 3, p. 173—204; [5] Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., «Operations Research», 1978, v. 26, № 1, p. 22—35; [6] Garey M. R., Graham R. L., Johnson D. S., там же, p. 3—21. *Я. Б. Зиндер, В. В. Шкурба.*

РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ — раздел математич. кибернетики, разрабатывающий принципы и методы классификации, а также идентификации предметов, явлений, процессов, сигналов, ситуаций — всех тех объектов, к-рые могут быть описаны конечным набором нек-рых признаков или свойств, характеризующих объект.

Описание объекта представляет собой n-мерный вектор, где n — число признаков, используемых для характеристики объекта, причем i-я координата этого вектора равна значению i-го признака, $i=1, \ldots, n$. В описании объекта допустимо отсутствие информации о значении того или иного признака. Если необходимо расклассифицировать предъявленные объекты по нескольким группам (образам) только на основе их описаний, причем число групп не обязательно известно, то такая задача Р. о. наз. задачей таксономии (кластера, обучения без учителя, самообучения). Собственно для задач Р. о. (обучения с учителем), кроме описания объектов, необходимы дополнительные сведения о принадлежности этих объектов к тому или иному классу (образу). Количество классов конечно и задано. Классы могут пересекаться.

Совокупность описаний объектов, для к-рых известны образы, к к-рым они принадлежат, образует т. н. обучающую последовательность (набор эталонов). Основная задача Р. о. заключается в том, чтобы исходя из обучающей последовательности определить класс, к к-рому принадлежит описание нек-рого объекта, подвергаемого классификации или идентификации. К такой схеме приводится любая задача принятия решений, если только процесс принятия решения базируется в основном на изучении ранее накопленного опыта.

Прикладные задачи, решаемые методами Р. о., возникают при идентификации машинописных и рукописных текстов, идентификации фотоизображений, при автоматич. распознавании речи, в медицинской диагностике, при геологич. прогнозировании, прогнозировании свойств химич. соединений, оценке экономических, политических, производственных ситуаций, при классификации социологич. материала и т. п. Для решения этих задач накоплено большое число т. н. эвристических алгоритмов распознавания, ориентируемых на специфику каждой конкретной задачи. Кроме того, на основе нек-рых интуитивных принципов строятся модели алгоритмов распознавания, т. е. семейства алгоритмов для

решения классификационных задач. Наиболее употребительны следующие модели: модели, построенные с использованием принципа разделения, задающие класс поверхностей, разделяющих образы; модели, построенные на принципе потенциалов; модели вычисления оценок (голосования); структурные модели; статистич. модели.

На уровне модели ставится задача отыскания экстремального по качеству алгоритма распознавания (модель вычисления оценок). О качестве работы распознающего алгоритма обычно судят по результатам работы алгоритма на нек-ром тестовом наборе объектов (контрольная последовательность), для к-рого исследователю априори известна достоверная классификация. При построении общей теории распознающих алгоритмов наиболее полные результаты получены в рамках алгебраич. подхода. Распознающий алгоритм представляется в виде произведения распознающего оператора и решающего правила. Введение над распознающими операторами операций сложения, умножения, умножения на скаляр позволяет доказать существование в рамках нек-рого алгебраич. расширения исходного набора распознающих операторов такого распознающего алгоритма, к-рый обладает экстремальным качеством на любой контрольной последовательности.

К задачам Р. о. относятся также задачи минимизации описания исходных объектов, выделения информативных признаков.

Лит.: [1] Журавлев Ю. И., «Проблемы кибернетики», 1978, в. 33, с. 5—68; [2] Айзерман М. А., Браверман Э. М., Розоноэр Л. И., Метод потенциальных функций в теории обучения машин, М., 1970; [3] Вапник В. Н., Червоненкис А. Я., Теория распознавания образов, М., 1974; [4] Фу К. С., Структурные методы в распознавании образов, пер. с англ., М., 1977.

П. П. Кольцов.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — то же, что *обобщенная функция.*

***F*-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ** — см. *Фишера F-распределение.*

***t*-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ** — см. *Стьюдента распределение.*

***T*²-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ** — см. *Хотеллинга T^2-распределение.*

***W*-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ** — см. *Уишарта распределение.*

***z*-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ** — см. *Фишера z-распределение.*

В-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. *Бета-распределение.*

Г-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. *Гамма-распределение.*

χ^2-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. «*Хи-квадрат*» *распределение.*

ω^2-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. «*Омега-квадрат*» *распределение.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ — одно из основных понятий *вероятностей теории* и *математической статистики.* При современном подходе в качестве математич. модели изучаемого случайного явления берется соответствующее *вероятностное пространство* $\{\Omega, S, P\}$, где Ω — множество элементарных событий, S — выделенная в Ω σ-алгебра подмножеств, P — определенная на S мера со свойством $P(\Omega)=1$ *(вероятностная мера).*

Любую такую меру на $\{\Omega, S\}$ и называют распределением вероятностей (см. [1]). Однако это определение, являющееся основой аксиоматики А. Н. Колмогорова (1933), при последующем развитии теории оказалось чрезмерно общим и было, с целью исключения нек-рых «патологических» случаев, заменено более ограничительным, напр. требованием «совершенности» вероятностной меры P (см. [2], особенно добавление к англ. переводу [3] этой книги). От Р. в. в функциональных пространствах требуют обычно выполнения нек-рого свойства регулярности, формулируемого как сепарабельность, но допускающее форму-

лировку и в других терминах (см. *Сепарабельный процесс*, а также [4]).

Р. в., встречающиеся в большинстве конкретных задач теории вероятностей и математич. статистики, весьма немногочисленны. Все они давно известны и связаны с основными вероятностными схемами [5]. Они описываются или вероятностями отдельных значений (см. *Дискретное распределение*) или плотностями вероятности (см. *Непрерывное распределение*). В необходимых случаях для них составлены таблицы [6].

Из этих основных Р. в. одни связаны с повторениями независимых испытаний (см. *Биномиальное распределение*, *Геометрическое распределение*, *Полиномиальное распределение*), а другие — с соответствующими этой вероятностной схеме предельными закономерностями, возникающими при неограниченном возрастании числа испытаний (см. *Нормальное распределение*, *Пуассона распределение*, *Арксинуса распределение*). Однако эти предельные распределения могут возникать и как точные: в теории случайных процессов (см. *Винеровский процесс*, *Пуассоновский процесс*) или как решения уравнений, возникающих в т. н. *характеризационных теоремах* (см. также *Нормальное распределение*, *Показательное распределение*). *Равномерное распределение* вероятностей, принимаемое обычно как математич. выражение равновозможности соответствующих исходов опыта, также может быть получено как предельное (напр., при приведении по какому-то модулю суммы большого числа случайных величин или каких-либо других случайных величин с достаточно гладкими «расплывающимися» распределениями). Из упомянутых выше основных Р. в. получают другие Р. в. с помощью функциональных преобразований рассматриваемых случайных величин. Так, напр., в математич. статистике из нормально распределенных случайных величин получают величины, имеющие *«хи-квадрат» распределение*, *нецентральное «хи-квадрат» распределение*, *Стьюдента распределение*, *Фишера F-распределение* и др.

Важные классы распределений были открыты в связи с развитием асимптотич. методов теории вероятностей и математич. статистики (см. *Предельные теоремы*, *Устойчивое распределение*, *Безгранично делимое распределение*, *«Омега-квадрат» распределение*).

С теоретической и прикладной точек зрения важно умение определить понятие близости распределений. Совокупность всех Р. в. на $\{\Omega, S\}$ может быть различными способами превращена в топологич. пространство. При этом основную роль играет слабая сходимость Р. в. (см. *Распределений сходимость*). В одномерном и конечномерном случаях основным средством изучения сходимости Р. в. является аппарат *характеристических функций*.

Часто полное описание Р. в. (напр., при помощи *плотности вероятности* или *распределения функции*) заменяют заданием небольшого числа характеристик. Из этих характеристик наиболее употребительны *математическое ожидание* (среднее значение), *дисперсия*, *медиана* и *моменты* в одномерном случае. О числовых характеристиках многомерных Р. в. см. *Корреляция*, *Регрессия*.

Статистическим аналогом Р. в. является *эмпирическое распределение*. Эмпирич. распределение и его характеристики могут быть использованы для приближенного представления теоретического Р. в. и его характеристик (см. *Оценка статистическая*). О способах измерения степени согласия эмпирич. распределения с гипотетическим Р. в. см. *Статистических гипотез проверка*, *Непараметрические методы статистики*.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [3] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [3] их же, Limit distributions for sums of independent random variables,

Camb. Mass. 1954; [4] Прохоров Ю. В., в кн.: Proc. fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, v. 2, Berkeley — Los Ang., 1961, p. 403—19; [5] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967; [6] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [7] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [8] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [9] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969.

Ю. В. Прохоров.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ — распределение в единичном интервале $[0,1)$ дробных долей $\{\alpha_j\}$ последовательности действительных чисел α_j, $j=1,2,\ldots$ Последовательность дробных долей $\{\alpha_j\}$, $j=1,2,\ldots$, наз. **равномерно распределенной в интервале** $[0,1)$, если для каждого интервала $[a,b)\subset[0,1)$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n(a,b)}{n}=b-a,$$

где $\varphi_n(a,b)$ — число первых n членов $\{\alpha_j\}$, $1\leqslant j\leqslant n$, последовательности $\{\alpha_j\}$, $j=1,2,\ldots$, попавших в $[a,b)$. При этом последовательность чисел α_i, $i=1,2,\ldots$, наз. **равномерно распределенной по модулю 1**.

Критерий Вейля (см. [1]) для равномерно Р. д. д.: бесконечная последовательность дробных долей $\{\alpha_j\}$, $j=1,2,\ldots$, равномерно распределена в единичном интервале $[0,1)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(\{\alpha_j\})=\int_0^1 f(x)\,dx$$

для любой интегрируемой по Риману на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$ функции $f(x)$. Это утверждение эквивалентно следующему. Для того чтобы последовательность α_j, $j=1,2,\ldots$, была равномерно распределена по модулю 1, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}e^{2\pi i m\alpha_j}=0$$

для каждого целого $m\neq 0$. Из критерия Вейля и его оценок тригонометрич. сумм

$$\sum_{x=1}^{p}e^{2\pi i f(x)}$$

следует, что если хотя бы один из коэффициентов a_s, $1\leqslant s\leqslant k$, многочлена

$$f(x)=a_kx^k+\ldots+a_1x$$

иррационален, то последовательность дробных долей $\{f(n)\}$, $n=1,2,\ldots$, равномерно распределена в интервале $[0,1)$.

Понятию равномерного Р. д. д. $\{\alpha_j\}$, $j=1,2,\ldots$, можно придать количественный характер, если ввести в рассмотрение величину

$$D_n=\sup_{0\leqslant a<b\leqslant 1}\left|\frac{\varphi_n(a,b)}{n}-(b-a)\right|,$$

называемую **отклонением** первых n членов последовательности $\{\alpha_j\}$, $j=1,2,\ldots$ (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Weyl H., «Math. Ann.», 1916, Bd 77, S. 313—52; [2] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [3] Хуа Ло-кен, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964.

С. А. Степанов.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ МНОГОМЕРНОЕ — распределение в n-мерном единичном кубе E, $0\leqslant x_i<1$, $i=1,2,\ldots,n$, дробных долей $\{P_j\}=(\{x_1^{(j)}\},\ldots,\{x_n^{(j)}\})$ последовательности точек n-мерного евклидова пространства $P_j=(x_1^{(j)},\ldots,x_n^{(j)})$, $j=1,2,\ldots$. Здесь $\{\ \}$ — знак дробной доли.

Последовательность дробных долей $\{P_j\}$, $j=1,2,\ldots$, наз. **равномерно распределенной в**

единичном n-мерном кубе E, если для каждого прямоугольника V, содержащегося в E, имеет место равенство

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\varphi_m(V)}{m}=|V|,$$

где $\varphi_m(V)$ — число точек среди первых m членов последовательности $\{P_j\}$, попавших в V, и $|V|$ — мера прямоугольника V.

Последовательность P_j, $j=1, 2, \ldots$, точек n-мерного пространства наз. равномерно распределенной по модулю 1, если соответствующая ей последовательность дробных долей $\{P_j\}$ равномерно распределена в единичном кубе E.

Критерий Вейля для Р. д. д. м. Последовательность $\{P_j\}$, $j=1, 2, \ldots$, равномерно распределена в единичном кубе E тогда и только тогда, когда

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}e^{2\pi i\left(a_1x_1^{(j)}+a_2x_2^{(j)}+\ldots+a_nx_n^{(j)}\right)}=0$$

для каждого набора целых чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)\neq(0, 0\ldots0)$. Частным случаем этой теоремы является *Вейля критерий* для равномерного распределения по модулю 1 последовательности действительных чисел. Из критерия Вейля следует теорема Кронекера: пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, 1$ — действительные числа, линейно независимые над полем рациональных чисел, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — произвольные действительные числа и N, ε — положительные числа; тогда существуют целые m и $p_1, p_2, \ldots, p_n$ такие, что

$$m>N,\ |m\theta_i-p_i-\alpha_i|<\varepsilon$$

для всех $i=1, 2, \ldots, n$. Иначе говоря, последовательность $m\theta=(m\theta_1, m\theta_2, \ldots, m\theta_n)$, $m=1, 2, \ldots$, равномерно распределена по модулю 1.

Лит.: [1] Кассельс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1961.

С. А. Степанов.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ — раздел теории чисел, в к-ром изучаются закономерности распределения простых чисел (п. ч.) среди натуральных чисел. Центральной является проблема наилучшего асимптотич. выражения при $x\to\infty$ функции $\pi(x)$, обозначающей число п. ч., не превосходящих x, а также функции $\pi(x;\ d,\ l)$, обозначающей число п. ч., не превосходящих x в арифметич. прогрессии $dn+l$ при $1\leqslant l\leqslant d$, $n=0, 1, 2, \ldots$, для растущих вместе с x значений d.

Основная теорема арифметики: каждое натуральное число $n>1$ является или п. ч. или единственным (с точностью до перестановки сомножителей) произведением п. ч.

$$n=p_1^{n_1}\ldots p_k^{n_k}$$

(т. н. каноническое представление числа n), где $p_1, \ldots, p_k$ — различные п. ч., $n_1, \ldots, n_k$ — натуральные числа. Таким образом, п. ч. есть базис мультипликативного построения ряда натуральных чисел; это, однако, непосредственно ничего не говорит о величине $\pi(x)$.

Для нахождения п. ч. от 1 до x служит известный с 3 в. до н. э. метод *Эратосфена решета*. Решето Эратосфена является простейшей процедурой получения последовательности п. ч. Однако аналитич. формула решета

$$\pi(x)-\pi\left(\sqrt{x}\right)+1=\sum_d(-1)^{\nu(d)}\left[\frac{x}{d}\right],$$

где d пробегает делители произведения всех п. ч. $\leqslant\sqrt{x}$, $\nu(d)$ — число простых делителей d, $[u]$ — целая часть u, непригодна для изучения $\pi(x)$ при $x\to\infty$.

Рассмотрение последовательности п. ч. от 1 до x:

$$2, 3, 5, 7, 11, 14, \ldots, p \qquad (1)$$

показывает, что с увеличением x она становится в среднем все более редкой. Существуют сколь угодно длинные отрезки ряда натуральных чисел, среди к-рых нет ни одного п. ч. Напр., $n-1$ натуральных чисел вида $n!+2, \ldots, n!+n$ для любого $n\geqslant 2$ являются составными числами. В то же время в (1) встречаются п. ч. такие, как 8004119 и 8004121, разность между к-рыми равна 2 (п. ч.— *близнецы*). Проблема поведения $\pi(x)$ при $x\to\infty$ является одной из наиболее трудных и интересных проблем теории чисел.

Первый результат о величине $\pi(x)$ — т е о р е м а Е в к л и д а: $\pi(x)\to\infty$ при $x\to\infty$. Л. Эйлер (L. Euler, 1737, 1749, см. [1]) ввел функцию

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \tag{2}$$

и показал, что при $s>1$

$$\zeta(s)=\prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{3}$$

где ряд распространяется на все натуральные числа, а произведение на все п. ч. Тождество (3) и его обобщения играют фундаментальную роль в теории Р. п. ч. Исходя из него, Л. Эйлер доказал, что ряд $\sum 1/p$ и произведение $\prod(1-\frac{1}{p})^{-1}$ по простым p расходятся. Это — новое доказательство бесконечности числа п. ч. Более того, Л. Эйлер установил, что п. ч. «много», ибо

$$\pi(x)>\log\frac{x}{e},$$

и, в то же время, почти все натуральные числа являются составными, т. к.

$$\pi(x)\,x^{-1}\longrightarrow 0 \text{ при } x\longrightarrow\infty.$$

Далее значительного успеха достиг П. Л. Чебышев (1851—52, см. [2]). Он доказал, что:

1) для любых $m>0$, $M>0$ есть последовательности $x\to\infty$, $y\to\infty$, для к-рых

$$\pi(x)-\operatorname{li} x<Mx\log^{-m}x,$$

$$\pi(y)-\operatorname{li} y>-My\log^{-m}y;$$

2) если существует предел частного $\pi(x)\log x/x$ при $x\to\infty$, то он равен 1.

Тем самым впервые был решен вопрос о существовании простой функции

$$\operatorname{li} x=\int_2^x\frac{du}{\log u}=$$

$$=\frac{x}{\log x}+\frac{x}{\log^2 x}+\ldots+(r-1)!\,\frac{x}{\log^r x}+O\left(\frac{x}{\log^{r+1}x}\right),$$

к-рая служит наилучшим приближением для $\pi(x)$.

Затем П. Л. Чебышев установил истинный порядок роста $\pi(x)$, т. е. существование постоянных $a>0$, $A>0$ таких, что

$$a\frac{x}{\log x}<\pi(x)<A\frac{x}{\log x}, \tag{4}$$

причем, $a=0{,}92\ldots$, $A=1{,}05\ldots$ для $x\geqslant x_0$. Он же доказал, что при любом $n\geqslant 2$ в интервале $(n, 2n)$ содержится по крайней мере одно п. ч. (п о с т у л а т Б е р т р а н а). В основе вывода неравенств (4) лежит т о ж д е с т в о Ч е б ы ш е в а

$$F(x)=\log[x]!=\sum_{n\leqslant x}\psi\left(\frac{x}{n}\right), \tag{5}$$

в к-ром введенная П. Л. Чебышевым функция ψ определяется суммой по степеням p^m, $m=1, 2, \ldots$, п. ч. p:

$$\psi(x)=\sum_{p^m\leqslant x}\log p=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n).$$

Именно, комбинация $\log[u]!$ для $x\geqslant 30$ в форме

$$F^*(x)=F(x)+F\left(\frac{x}{30}\right)-F\left(\frac{x}{2}\right)-F\left(\frac{x}{3}\right)-F\left(\frac{x}{6}\right),$$

вследствие (5), дает тождество

$$F^*(x)=\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{6}\right)+\psi\left(\frac{x}{7}\right)-\psi\left(\frac{x}{10}\right)+\dots,$$

из к-рого следует, что

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{6}\right)<F^*(x)<\psi(x).$$

Отсюда, вследствие асимптотич. формулы Стирлинга для $n!$, вытекает аналог неравенств (4) для $\psi(x)$, из к-рых частичным суммированием получаются неравенства (4). Функция Чебышева $\psi(x)$ оказалась более удобной, чем $\pi(x)$, при изучении Р. п. ч., поскольку наилучшим приближением ее является сам аргумент x. Поэтому обычно сначала рассматривают $\psi(x)$, а затем частичным суммированием получают соответствующий результат для $\pi(x)$.

Принцип Римана. В 1859—60 Б. Риман (B. Riemann, см. [3]) рассмотрел введенную Л. Эйлером для $s>1$ функцию $\zeta(s)$ как функцию комплексного переменного $s=\sigma+it$, где σ, t — действительные переменные, определяемую рядом (2) при $\sigma>1$ (см. *Дзета-функция*), и обнаружил исключительную важность этой функции для теории Р. п. ч. В частности, он указал выражение разности $\pi(x)-\mathrm{li}\,x$ через x и нули функции $\zeta(s)$, лежащие в полосе $0\leqslant\sigma\leqslant1$. к-рые наз. нетривиальными нулями функции $\zeta(s)$.

Вместо формулы Римана обычно используется более простой конечный ее аналог для $\psi(x)$, доказанный (наряду с формулой Римана) Х. Мангольдтом (H. Mangoldt, 1895). Именно, для $x>1$

$$\psi(x)=x-\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^\rho}{\rho}+O\left(\frac{x}{T}\log^2 xT+\log 2x\right), \quad (6)$$

где $\rho=\beta+i\gamma$ пробегает нетривиальные нули $\zeta(s)$, T — любое $\geqslant2$.

Поскольку

$$\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{1}{\gamma}\ll\log^2 T,$$

формула (6) показывает, что величина разности $\psi(x)-x$ в главном определяется величиной β (действительной частью самых правых нулей ρ). В частности, если $\zeta(s)\neq0$ правее вертикали $\sigma=\theta$, $^1/_2\leqslant\theta<1$, для функций $\psi(x)$, $\pi(x)$ справедливы следующие асимптотич. выражения:

$$\psi(x)=x+O\left(x^\theta\log^2 x\right),$$

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O\left(x^\theta\log x\right).$$

Наоборот, из этих соотношений следует, что $\zeta(s)\neq0$ для $\sigma\geqslant\theta$. Если справедлива гипотеза Римана, т. е. все нетривиальные нули $\zeta(s)$ лежат на одной прямой $\sigma=^1/_2$, тогда асимптотич. закон распределения п. ч. должен иметь вид

$$\psi(x)=x+O\left(\sqrt{x}\log^2 x\right),$$

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O\left(\sqrt{x}\log x\right).$$

Причем эти соотношения существенно усилить нельзя, т. е. существуют последовательности $x\to\infty$, $y\to\infty$ такие, что

$$\pi(x)-\mathrm{li}\,x<-\sqrt{x}\frac{\log\log\log x}{\log\log x},$$

$$\pi(y)-\mathrm{li}\,y>+y\frac{\log\log\log y}{\log\log y}.$$

Таким образом, согласно принципу Римана проблема асимптотич. выражения функций Р. п. ч. $\psi(x)$, $\pi(x)$ сводится к проблеме границы действительной части нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$. До сих пор (1983), однако, не удалось найти какое-либо постоянное θ, $^1/_2\leqslant\theta<1$, с условием $\beta\geqslant\theta$. Искомая граница для β

оказывается связанной с мнимой частью γ нулей ρ, причем так, что прямая $\sigma=1$ является для нее асимптотой.

Методы Адамара и Валле Пуссена. Асимптотич. закон Р. п. ч. в простейшем виде

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1$$

был получен в 1896 независимо Ж. Адамаром (J. Hadamard) и Ш. Валле Пуссеном (Ch. La Vallée Poussin), к-рые доказали, что $\zeta(1+it)\neq 0$, т. е. что на прямой $\sigma=1$ нет нулей функции $\zeta(s)$. В 1899 Ш. Валле Пуссен показал, что $\zeta(\sigma+it)\neq 0$ в области $\sigma\geqslant 1-c/\log(|t|+2)$. Тем самым было доказано, что

$$\psi(x)=x+O\left(x\exp\left(-a\sqrt{\log x}\right)\right),$$

$$\pi(x)=\operatorname{li}x+O\left(x\exp\left(-b\sqrt{\log x}\right)\right)$$

при постоянных $a>0$, $b>0$.

Были получены также дальнейшие расширения области свободной от нулей функции $\zeta(s)$ (см. [4]—[12]).

Метод Вейля — Литлвуда. Существует определенная связь между ростом модуля функции $\zeta(s)$ и ее нулями вблизи прямой $\sigma=1$. Именно, если $\zeta(s)\ll\exp(\varphi(t))$ при $1-\theta(t)\leqslant\sigma\leqslant 2$, где $\varphi(t)$, $1/\theta(t)$ — положительные неубывающие функции $t\geqslant 0$ такие, что $\theta(t)\leqslant 1$, $\varphi(t)\to\infty$ при $t\to\infty$ и $\varphi(t)/\theta(t)\ll\exp\varphi(t)$, то существует постоянная A такая, что $\zeta(s)\neq 0$ в области

$$\sigma\geqslant 1-A\,(\theta)\,(2t+1)/\varphi\,(2t+1).$$

При этом для оценки $\zeta(s)$ используется частная сумма ее ряда (2), к-рая сводит вопрос к оценке тригонометрич. сумм вида

$$\sum\nolimits_{v<n\leqslant u}\exp(it\log n).$$

За счет оценок таких сумм по *Вейля методу* Дж. Литлвуд (J. Littlewood, 1921) показал, что для $t>A$ $\zeta(s)\ll\ll\log^5 t$ при $\sigma\geqslant 1-\log^2\log t/\log t$ и, следовательно, $\zeta(s)\neq\neq 0$ в области

$$\sigma\geqslant 1-A\log\log t/\log t.$$

Отсюда

$$\pi(x)=\operatorname{li}x+O\left(x\exp\left(-a\sqrt{\log x\log\log x}\right)\right).$$

Метод Виноградова. Дальнейший прогресс в оценках $\pi(x)$, $\psi(x)$ связан с созданием И. М. Виноградовым (см. *Виноградова метод*) нового, значительно более мощного метода оценок тригонометрич. сумм. При помощи этого метода им в 1938 было доказано, что $\zeta(s)\neq 0$ при

$$\sigma\geqslant 1-c/\log^{3/4}(|t|+2)\log^{3/4}\log(|t|+2)$$

и соответственно что

$$\pi(x)=\operatorname{li}x+O\left(x\exp\left(-a\log^{4/7}x\log^{-3/7}\log x\right)\right).$$

В 1858 И. М. Виноградов и другие (см. [6]—[11]) показали, что $\zeta(s)\neq 0$ при

$$\sigma\geqslant 1-c/\log^{2/3}(|t|+2)\log^{1/3}\log(|t|+2).$$

Это пока (1983) лучший результат о границе нетривиальных нулей функции $\zeta(s)$, к-рому отвечает лучший результат в Р. п. ч.:

$$\pi(x)=\operatorname{li}x+O\left(x\exp\left(-a\log^{3/5}x\log^{-1/5}\log x\right)\right),$$

$$\psi(x)=x+O\left(x\exp\left(-b\log^{3/5}x\log^{-1/5}\log x\right)\right).$$

Из асимптотики $\pi(x)$ следует асимптотика n-го простого числа $p_n\sim n\log n$. Показано (см. [21]) также, что $p_n>>n\log n$ для всех $n\geqslant 1$ и что для $17\leqslant x\leqslant e^{100}$, $x\geqslant e^{200}$

$$\frac{x}{\log x}<\pi(x)<\frac{x}{\log x-2};$$

для $x \geqslant 55$

$$\frac{x}{\log x + 2} < \pi(x) < \frac{x}{\log x - 4}.$$

Элементарные методы. Так называют методы изучения асимптотич. закона Р. п. ч., не опирающиеся на принцип Римана (нули дзета-функции) и, вообще, на какие бы то ни было положения теории функций комплексного переменного. Впервые такой метод открыли в 1948 А. Сельберг [16] и П. Эрдёш [17]. В основе лежит элементарная формула Сельберга

$$\psi(x) \log x + \sum_{n \leqslant x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) = 2x \log x + O(x). \quad (7)$$

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы из асимптотики в среднем для $\psi(u)$ в виде (7) вывести асимптотику $\psi(x)$. Это можно сделать по-разному, но общим во всех случаях является использованием факта медленного колебания функции ψ (см. [18]). В 1962 Э. Бомбьери (E. Bombieri) и Э. Вирзинг (E. Wirsing) доказали, что при любом фиксированном $A > 0$

$$\psi(x) = x + O(x \log^{-A} x).$$

В 1970 Х. Дайамонд и Дж. Стейниг (см. [19]) существенно усовершенствовали идею и технику оценок элементарного метода и доказали, что для $x \geqslant \exp\exp 100$

$$|\psi(x) - x| < x \exp\left(-\log^{1/7} x \log^{-2} \log x\right).$$

Наконец, в 1973 А. Ф. Лаврик и А. Ш. Собиров [20] показали, что при элементарном методе доказательства справедлива теорема: для $x \geqslant \exp\exp 10^3$

$$|\psi(x) - x| < x \exp\left(-\log^{1/6} x \log^{-3} \log x\right).$$

Этот результат представляет пока лучшее достижение элементарного метода в изучении Р. п. ч., хотя он несколько слабее того, к-рый получен аналитич. методом, в принципе эти результаты близки между собой.

Разность между простыми числами. Существует много вопросов Р. п. ч., касающихся разности между п. ч. Среди них выделяются вопросы поведения $d_n = p_{n+1} - p_n$ — разности между соседними п. ч.; проблема количества п. ч. близнецов, или, более общо, пар п. ч. разности $2k$ и, вообще, числа систем $p, p+u_1, \ldots, p+u_m$ из $m+1$ п. ч., лежащих на отрезке $[1, x]$.

С помощью гипотезы Римана доказано, что $d_n \ll \sqrt{p_n} \log p_n$; а нек-рые эвристич. рассуждения показывают, что, вероятно, справедлива оценка $d_n \ll \log^2 p_n$. Лучшей к 1983 является оценка $d_n \ll p_n^{\delta}$, где $\delta = \frac{7}{12} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, полученная М. Н. Хаксли (M. N. Huxley, 1973) по методу большого решета. Что касается пар п. ч. разности, равной 2 (близнецов), или разности, равной $2k$, $k = 1, 2, \ldots$, то до сих пор (1983) неизвестно, является количество их бесконечным или нет. Пусть $\pi_k(x)$ есть число пар п. ч., не превосходящих x, разности $2k$. В 1919 В. Брун (V. Brun) нашел метод решета (см. *Бруна решето*), к-рый позволил получить ожидаемую оценку сверху для $\pi_k(x)$:

$$\pi_k(x) \ll \frac{x}{\log^2 x} \prod_{p \mid k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Кроме этого, за счет оценок И. М. Виноградова тригонометрич. сумм с п. ч. (см. *Виноградова метод*) доказано *круговым методом* (см. [13]), что если положить

$$f(x) = 2 \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \int_2^x \frac{du}{\log^2 u},$$

то при любых фиксированных $A > 1$, $M > 0$

$$\sum_{1 \leqslant 2k \leqslant x \log^{-A} x} \left[\pi_k(x) - f(x) \prod_{p \mid k,\ p > 2} \frac{p-1}{p-2}\right]^2 \ll$$

$$\ll x^3 \log^{-A-M} x.$$

Отсюда, в частности, следует, что при $X=x\log^{-A}x$ для всех $1\leqslant k\leqslant X$, исключая не более $X\log^{-M}x$ из них, $\pi_k(x)$ имеет асимптотич. выражение в виде

$$\pi_k(x)\sim 2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\times$$
$$\times\frac{x}{\log^2 x}\prod_{p\mid k,\ p>2}\frac{p-1}{p-2}.$$

Аналогичные результаты получены для систем п. ч. p, $p+u_1$, ..., $p+u_m$ при любом $m\geqslant 1$.

Простые числа арифметической прогрессии. Первый способ (Евклида) доказательства бесконечности числа п. ч. можно перенести и на нек-рые арифметич. прогрессии. Но доказать таким путем, что в каждой арифметич. прогрессии $dn+l$, первый член к-рой l и разность d взаимно просты, содержится бесконечно много п. ч., до сих пор (1983) не удалось. Задачу другим методом решил П. Дирихле (P. Dirichlet, 1837—40), распространив идею Л. Эйлера о том, что $\sum 1/p^s\to\infty$ при $s\to 1+0$ на п. ч. $p\equiv l\pmod d$. Для этого он ввел арифметич. функции — характеры $\chi=\chi(n,\ d)$ (см. *Дирихле характер*) и функции $L(s,\ \chi)$ (см. *Дирихле L-функция*), которые подобно функции $\zeta(s)$ для $\pi(x)$, $\psi(x)$ служат в качестве основного аппарата изучения функции $\pi(x;\ d,\ l)$ и ее аналога

$$\psi(x;\ d,\ l)=\sum_{n\leqslant x,\ n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,d)}\Lambda(n).$$

В случае фиксированного значения d, $1\leqslant l\leqslant d$, $(l,\ d)=1$, большинство результатов, указанных выше для $\pi(x)$ и $\psi(x)$, перенесены и на функции $\pi(x;\ d,\ l)$ и $\psi(x;\ d,\ l)$. Однако особый интерес здесь представляют результаты для растущих вместе с x значений d, к-рые важны в аддитивной теории чисел и ряде других задач. В таком случае возникают значительные дополнительные трудности, связанные прежде всего с оценкой величины d — наибольшего действительного нуля функции $L(s,\chi)$ по mod d. При помощи *Пейджа теорем* доказано, что для $1\leqslant d\leqslant(\log x)^{2-\varepsilon}$, $0<\varepsilon<{}^1/_2$,

$$\psi(x;\ d,\ l)=\frac{x}{\varphi(d)}+O(x\exp(-a\log^{\varepsilon/3}x)),$$

а вследствие оценки К. Зигеля (K. Siegel, 1935) для любого фиксированного $A>1$ при $1\leqslant d\leqslant\log^A x$

$$\psi(x;\ d,\ l)=\frac{x}{\varphi(d)}+O\left(x\exp\left(-c_1\sqrt{\log x}\right)\right),$$

где $\varphi(d)$ — функция Эйлера, a — положительная постоянная, $c_1=c_1(A)$ — неэффективная постоянная >0, то есть c_1 не может быть вычислена по заданному A.

Если справедлива расширенная *Римана гипотеза*, то для $d\leqslant x$

$$\psi(x;\ d,\ l)=\frac{x}{\varphi(d)}+O\left(\sqrt{x}\log^2 x\right).$$

Таким образом, к 1983 доказано, что п. ч. равномерно распределены по всем $\varphi(d)$ прогрессиям $1\leqslant l\leqslant d$, $(l,\ d)=1$, разности d лишь при $d\leqslant\log^A x$. Что же касается отрезков прогрессий $dn+l\leqslant x$ разности, напр. $d=x^\varepsilon$ с каким бы то ни было постоянным $\varepsilon>0$, то из предыдущего не следует даже, что такая прогрессия содержит хотя бы одно п. ч.

Метод решета Бруна, как и его модификация, предложенная А. Сельбергом в 1947, показывает, что для всех $1\leqslant d<x$, $1\leqslant l\leqslant d$, $(l,\ d)=1$, имеет место неравенство сверху

$$\pi(x;\ d,\ l)\ll\frac{x}{\varphi(d)\ \log\frac{x}{d}},$$

с абсолютной константой $\ll$, но никаких оценок снизу для $\pi(x;\ d,\ l)$ эти методы дать не могут.

Выражение для $\psi(x;\ d,\ l)$ по принципу Римана через нули $\rho=\beta+i\gamma$, лежащие в полосе $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ функций

$L(s,\ \chi)$, имеет вид

$$\psi(x;\ d,\ l)=\frac{\psi(x)}{\varphi(d)}-$$

$$-\frac{1}{\varphi(d)}\left(\sum_{\chi}{}'\ \overline{\chi}(l)\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^{\rho}}{\rho}+\frac{\overline{\chi}(l)\,x^{\alpha}}{\alpha}\right)+R, \quad (8)$$

где штрих у суммы — знак суммирования по комплексным $\chi \bmod d$, α — действительный нуль функции $L(s,\ \chi)$, если он существует и больше $1-C_0/\log d$,

$$R\ll xT^{-1}\log^2 dx+x^{1/4}\log x,$$

T — любое $\geqslant 2$.

Из (8) видно, если не считать слагаемого, отвечающего α, что остаточный член асимптотики $\psi(x;\ d,\ l)$ определяется величиной двойной суммы, зависящей и от действительной части нулей ρ и от количества всех $L(s,\ \chi)$ с $\chi \bmod d$, имеющих нули ρ с $\operatorname{Re}\rho=\beta$. Если для $0{,}5\leqslant\sigma\leqslant 1$ через $N(\sigma,\ T,\ \chi)$ обозначить число нулей функции $L(s,\ \chi)$ в прямоугольнике: $\sigma\leqslant\operatorname{Re} s\leqslant 1$, $|t|\leqslant T$, то вопросы оценки остаточного члена для $\psi(x;\ d,\ l)$ и его среднего значения сводятся к вопросам оценки плотности распределения нулей L-функций в виде

$$\left.\begin{aligned} N_1&\equiv\sum_{\chi \bmod d}{}'\ N(\sigma,\ T,\ \chi),\\ N_2&\equiv\sum_{d\leqslant D}\sum_{\chi \bmod d}{}'\ N(\sigma,\ T,\ \chi).\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Таким образом, понижение разного рода оценок для п. ч. связывается не только с отсутствием нулей $L(s,\ \chi)$ в критич. полосе, но и с сравнительно редким их распределением здесь.

Реализация этой идеи была одним из центральных направлений исследований Р. п. ч. последних 40 лет. Начало положил Ю. В. Линник открытием в 1941 метода *большого решета* (см. [22], а также [14], [15], [24]). Особо важными являются теоремы о наименьшем п. ч. в арифметической прогрессии, о поведении $\pi(x;\ d,\ l)$ и $\psi(x;\ d,\ l)$ в среднем по $d\ll D$ и о двойном усреднении этих функций по $1\leqslant l\leqslant d$, $(l,\ d)=1$, и $d\leqslant D$.

Именно, в 1944 Ю. В. Линник [23] показал, что при $d\to\infty$ сумма N_1 в (9) имеет оценку $\ll d^{a(1-\sigma)}$, где a — постоянная; отсюда он вывел существование постоянной c такой, что любая арифметич. прогрессия $dn+l$, где $1\leqslant l\leqslant d$, $(l,\ d)=1$, содержит п. ч., меньшее d^c. Последняя к 1983 оценка постоянной Линника имеет вид $c=17$; а если верна плотностная гипотеза: $N_1\ll\ll(dT)^{2(1-\sigma+\varepsilon)}$, то $c=2+\varepsilon$.

В 1965 А. И. Виноградов и Э. Бомбьери независимо получили сильные оценки сумм N_2 из (9). Более совершенствованный метод оценки этих сумм разработал Г. Монтгомери (H. Montgomery, 1969). Одним из следствий оценок N_2 является следующий результат о Р. п. ч. в арифметич. прогрессиях в среднем:

$$\sum_{d\leqslant\sqrt{x}\log^{-B}x}\ \max_{y\leqslant x}\ \max_{(l,\ d)=1}\left|\psi(y;\ d,\ l)-\frac{y}{\varphi(d)}\right|\ll$$

$$\ll x\log^{-A}x,$$

$$\sum_{d\leqslant\sqrt{x}\log^{-B}x}\ \max_{y\leqslant x}\ \max_{(l,\ d)=1}\left|\pi(y;\ d,\ l)-\frac{\operatorname{li} y}{\varphi(d)}\right|\ll$$

$$\ll x\log^{-A}x,$$

при любом постоянном A и $B=A+7/2$. Эти оценки существенно усилить уже нельзя, т. к. из расширенной гипотезы Римана следует, что $B=A+2$.

Другие вопросы распределения простых чисел. Пусть $\pi_\nu(x;\ d,\ l)$ есть количество чисел вида $dn+l\leqslant x$, к-рые

являются произведением простых ν чисел. Х. Рихерт (H. Richert, 1953) доказал, что

$$\pi_\nu(x;\ d,\ l) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{m=0}^{r(x)} \sum_{h=0}^{\nu-1} A_\nu(h,\ m,\ d) \int_2^x \frac{\log^h \log u}{\log^{m+1} u}\, du +$$

$$+ O\left(x \exp\left(-r(x)\right)\right) + O\left(x^{1-1/bd^\varepsilon} \frac{\log^{\nu-1} d \log^{\nu-1} \log x}{\varphi(d) \log x}\right),$$

где $r(x) = c\sqrt{\log x}$, $c \geqslant 20$, $b = b(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $A\ (h,\ m,\ d)$ определяется рядами, зависящими от h, m, d и ν.

Э. Ландау (E. Landau, 1903—1918) перенес нек-рые результаты Р. п. ч. на алгебраические числовые поля. Пусть K — алгебраическое числовое поле n-й степени, $\pi(x;\ K)$ — есть число простых идеалов с нормой $\leqslant x$ в K. Тогда

$$\pi(x;\ K) = \operatorname{li} x + O\left(x \exp\left(-\frac{c}{\sqrt{n}} \sqrt{\log x}\right)\right),$$

где c — абсолютная положительная постоянная, и

$$\pi(x) - \operatorname{li} x = \pm\, \Omega\, \frac{\sqrt{x}}{\log x} \log\log\log x,$$

где Ω — отрицание символа o (малое).

Много изучалась функция $F(x,\ y)$, обозначающая число натуральных чисел $\leqslant x$, не содержащих простых делителей, меньших y. Для $y = x^{1/\xi}$, $\xi = \xi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, такие числа наз. квазипростыми числами. Методом решета для этих чисел получена достаточно полная теория их распределения, аналогичная ожидаемой теории Р. п. ч. Рассматривалось также распределение чисел с малыми простыми делителями (см. [25]).

Лит.: [1] Эйлер Л., Введение в анализ бесконечных, пер. с латин., 2 изд., т. 1, М., 1961; [2] Чебышев П. Л., Избр. матем. труды, М.— Л., 1946; [3] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948; [4] Ингам А. Е., Распределение простых чисел, пер. с англ., М.— Л., 1936; [5] Виноградов И. М., Избр. труды, М., 1952; [6] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1958, т. 22, № 2, с. 161—64; [7] его же, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [8] Титчмарш Е., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М., 1953; [9] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [10] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, М., 1975; [11] Хуа Ло-кен, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [12] Чудаков Н. Г., Введение в теорию L-функций Дирихле, М.— Л., 1947; [13] Лаврик А. Ф. «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 64, с. 90—125; [14] Девенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971; [15] Монтгомери Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1974; [16] Selberg A., «Ann. Math.», 1949, v. 50, p. 305—13; [17] Erdös P., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1949, v. 35, p. 371—84; [18] Лаврик А. Ф. (Обзорный доклад международной конференции по теории чисел, М., 1981); [19] Diamond H. G., Steinig J., «Invent. Math.», 1970, v. 11, p. 199—258; [20] Лаврик А. Ф., Собиров А. Ш., «Докл. АН СССР», 1973, т. 211, № 3, с. 534—36; [21] Rosser B., «Proc. London math. Soc.», 1939, v. 45 (2), p. 21—44; [22] Линник Ю. В., «Докл. АН СССР», 1941, т. 30, № 4, с. 290—92; [23] его же, «Матем. сб.», 1944, т. 15, с. 139—78; [24] Лаврик А. Ф., «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, в. 2, с. 55—65; [25] Halberstam H., Richert H. E., Sieve Methods, L.— [etc], 1974.

А. Ф. Лаврик.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕННЫХ ВЫЧЕТОВ И НЕВЫЧЕТОВ — распределение среди чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$ тех значений x, для к-рых сравнение

$$y^n \equiv x \pmod m,$$

$n > 1$ — целое, разрешимо (неразрешимо). В вопросах, связанных с Р. с. в. и н., наиболее полно изучен случай простого модуля p. Пусть $q = (n,\ p-1)$. Тогда сравнение $y^n \equiv x \pmod p$ разрешимо при $\frac{p-1}{q}$ значениях x из множества $1,\ 2,\ \ldots,\ p-1$ и неразрешимо при остальных $(q-1)\,\frac{p-1}{q}$ значениях x (см. *Двучленное сравнение*).

Однако сравнительно немного известно о том, как расположены эти значения среди чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ p-1$.

Первые результаты о распределении степенных вычетов были получены еще К. Гауссом (C. Gauss, см. [1]) в 1796. С того времени и до работ И. М. Виноградова в вопросах о Р. с. в. и н. были получены лишь отдельные частные результаты. В 1915 И. М. Виноградов (см. [2]) доказал ряд общих результатов о распределении степенных вычетов и невычетов, а также *первообразных корней* по модулю p среди чисел $1, 2, \ldots, p$. В частности, им была получена оценка

$$N_{\min} < p^{\frac{1}{2\sqrt{e}}} (\ln p)^2$$

для наименьшего квадратичного невычета $N_{\min}$ и оценка

$$N^*_{\min} \leqslant 2^{2k} \sqrt{p} \ln p,$$

где k — число различных простых делителей $p-1$, для наименьшего первообразного корня $N^*_{\min}$ по простому модулю p. Кроме того, И. М. Виноградовым был высказан ряд гипотез о распределении квадратичных вычетов и невычетов (см. *Виноградова гипотезы*), стимулировавших ряд исследований в этой области. Так, Ю. В. Линник [3] доказал, что при достаточно большом N на отрезке $[N^\varepsilon, N]$ количество простых чисел p, для к-рых $N_{\min} > p^\varepsilon$, не превосходит нек-рой константы $C(\varepsilon)$, зависящей лишь от $\varepsilon > 0$. Таким образом, простые числа p, для к-рых $N_{\min} > p^\varepsilon$, если только они существуют, встречаются очень редко. Другим существенным шагом в исследовании гипотез Виноградова явилась теорема Д. Бёрджесса [4]: для любого фиксированного сколь угодно малого $\delta > 0$ максимальное расстояние $d(p)$ между соседними квадратичными невычетами удовлетворяет неравенству

$$d(p) \leqslant A(\delta)\, p^{\frac{1}{4}+\delta}.$$

Отсюда, в частности, следует оценка

$$N_{\min} \leqslant B(\delta)\, p^{\frac{1}{4\sqrt{e}}+\delta}.$$

В этих неравенствах константы $A(\delta)$, $B(\delta)$ зависят только от δ и не зависят от p. Доказательство теоремы Бёрджесса, сложное само по себе, основывалось на теореме Хассе — Вейля о числе решений гиперэллиптич. сравнения

$$y^2 \equiv f(x) \pmod p,$$

доказательство к-рой требовало привлечения аппарата абстрактной алгебраич. геометрии. Простой вывод теоремы Бёрджесса см. в [5], [6].

Лит.: [1] Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел, пер. с нем., М., 1959; [2] Виноградов И. М., Избранные труды, М., 1952; [3] Линник Ю. В., «Докл. АН СССР», 1942, т. 36, с. 131; [4] Burgess D., «Mathematika», 1957, v. 4, № 8, p. 106—12; [5] Степанов С. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 132, с. 237—46; [6] Карацуба А. А., «Докл. АН СССР», 1968, т. 180, № 6, с. 1287—89.
С. А. Степанов.

РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОЛНОЕ СЕМЕЙСТВО — семейство вероятностных мер $\{\mathsf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$, заданное на измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$, для к-рого единственной несмещенной оценкой нуля в классе $\mathfrak{B}$-измеримых функций на $\mathfrak{X}$ является функция, тождественно равная нулю, т. е. для любой $\mathfrak{B}$-измеримой функции $f(\cdot)$, определенной на $\mathfrak{X}$ и удовлетворяющей соотношению

$$\int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\mathsf{P}_\theta(x) = 0 \text{ для любого } \theta \in \Theta, \qquad (*)$$

следует, что $f(x) \equiv 0$. Напр., экспоненциальное семейство распределений является полным. Если соотношение $(*)$ выполняется при дополнительном предположении об ограниченности функции $f(x)$, то семейство $\{\mathsf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$ наз. ограниченно полным. Ограниченно полные семейства распределений достаточных

статистик играют важную роль в математич. статистике, в частности в задаче построения *подобных критериев*, обладающих *Неймана структурой*.

Лит.: [1] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

М. С. Никулин.

РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СХОДИМОСТЬ — в основном слабая сходимость и сходимость по вариации, определяемые следующим образом. Последовательность распределений (вероятностных мер) $\{P_n\}$ на борелевских множествах метрич. пространства S наз. *слабо сходящейся* к распределению P, если

$$\lim_n \int_S f\,dP_n = \int_S f\,dP \qquad (*)$$

для любой действительной ограниченной непрерывной функции f на S. Слабая сходимость является основным типом сходимости, рассматриваемым в теории вероятностей. Обозначают ее обычно знаком $\Rightarrow$. Следующие условия равносильны слабой сходимости:

1) соотношение (*) выполняется для любой ограниченной равномерно непрерывной действительной функции f;

2) соотношение (*) выполняется для любой ограниченной непрерывной P-почти всюду действительной функции f;

3) $\overline{\lim_n}\, P_n(F) \leqslant P(F)$

для любого замкнутого множества $F \subset S$;

4) $\underline{\lim_n}\, P_n(G) \geqslant P(G)$

для любого открытого множества $G \subset S$;

5) $\lim_n P_n(A) = P(A)$

для любого борелевского множества $A \subset S$ такого, что $P(\partial A) = 0$, где ∂A — граница A;

6) $\lim_n \rho(P_n, P) = 0$,

где ρ есть *Леви — Прохорова метрика*.

Пусть U — замкнутый относительно пересечений класс подмножеств S такой, что всякое открытое множество из S есть конечное или счетное объединение множеств из U. Тогда если $\lim_n P_n(A) = P(A)$ при всех $A \in U$, то $P_n \Rightarrow P$. Если $S = \mathbb{R}^k$ и F_n, F — функции распределения, отвечающие P_n и P соответственно, то $P_n \Rightarrow P$ тогда и только тогда, когда $F_n(x) \to F(x)$ в каждой точке x непрерывности функции F.

Пусть пространство S сепарабельно и $\mathcal{F}$ — класс ограниченных борелевских действительных функций на S. Для того чтобы $\int_S f dP_n \to \int_S f dP$ равномерно по $f \in \mathcal{F}$ для всякой последовательности $\{P_n\}$ такой, что $P_n \Rightarrow P$, необходимо и достаточно, чтобы:

а) $\sup_{f \in F} \omega_f(S) < \infty$,

б) $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{f \in \mathcal{F}} P(\{x : \omega_f(S_{x,\varepsilon}) > \delta\}) = 0, \ \forall \delta > 0$,

где

$$\omega_f(A) = \sup\{|f(x) - f(y)|, \quad x, y \in A\},$$

и где $S_{x,\varepsilon}$ — открытый шар радиуса ε с центром в x. Если класс $\mathcal{F}$ образован индикаторами множеств из нек-рого класса E, то условия а) и б) сводятся к условию

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{A \in E} P(A^\varepsilon \setminus A^{-\varepsilon}) = 0,$$

где

$$A^\varepsilon = \bigcup_{x \in A} S_{x,\varepsilon}, A^{-\varepsilon} = S \setminus (S \setminus A)^\varepsilon$$

(когда всякий открытый шар в S связен, $A^\varepsilon \setminus A^{-\varepsilon} =$

$=(\partial A)^\varepsilon$). Если $S=\mathbb{R}^k$ и распределение P абсолютно непрерывно по мере Лебега, то $P_n \Rightarrow P$ тогда и только тогда, когда $P_n(A) \to P(A)$ равномерно по всем борелевским выпуклым множествам A.

Пусть P_n, P — распределения на метрич. пространстве S, $P_n \Rightarrow P$ и h — непрерывное P-почти всюду измеримое отображение S в метрич. пространство S'; тогда $P_n h^{-1} \Rightarrow P h^{-1}$, где для любого распределения Q на S распределение Qh^{-1} есть его h-образ на S':

$$Qh^{-1}(A) = Q(h^{-1}(A))$$

для любого борелевского $A \in S'$.

Семейство распределений $\mathcal{P}$ на S наз. с л а б о о т н о с и т е л ь н о к о м п а к т н ы м, если всякая последовательность его элементов содержит слабо сходящуюся подпоследовательность. Условие слабой относительной компактности дает теорема Прохорова. Семейство $\mathcal{P}$ наз. п л о т н ы м, если $\forall \varepsilon > 0$ существует компакт $K \subset S$ такой, что $P(k) > 1-\varepsilon$ $\forall P \in \mathcal{P}$. Т е о р е м а П р о х о р о в а: если $\mathcal{P}$ плотно, то оно относительно компактно, а если S сепарабельно и полно, то слабая относительная компактность $\mathcal{P}$ влечет его плотность. В случае, когда $S=\mathbb{R}^k$, семейство распределений $\mathcal{P}$ слабо относительно компактно тогда и только тогда, когда соответствующее $\mathcal{P}$ семейство характеристич. функций равностепенно непрерывно в нуле.

Пусть теперь P_n, P — распределения на измеримом пространстве (X, A), где A есть σ-алгебра. Под с х о д и м о с т ь ю п о в а р и а ц и и P_n к P понимают равномерную сходимость по всем множествам из A или, что равносильно, стремление вариации

$$|P_n - P| = (P_n - P)^+ + (P_n - P)^-$$

к нулю; здесь $(P_n-P)^+$ и $(P_n-P)^-$ — компоненты разложения Жордана — Хана обобщенной меры $P_n - P$.

Лит.: [1] Б и л л и н г с л и П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [2] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [3] Б х а т т а ч а р и я Р. Н., Р. Р а н г а Р а о, Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения, пер. англ., 1982. *В. В. Сазонов.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ТИП — совокупность распределений вероятностей случайных величин, получаемых одна из другой каким-либо линейным преобразованием. Точное определение в одномерном случае таково: распределения вероятностей случайных величин X_1 и X_2 называют о д н о т и п н ы м и, если существуют постоянные A и $B>0$ такие, что распределения величин X_2 и $BX_1 + A$ совпадают. Соответствующие функции распределения связаны при этом соотношением

$$F_2(x) = F_1\left(\frac{x-A}{B}\right) = F_1(bx+a),$$

где $b=1/B$ и $a=-A/B$.

Таким образом, множество функций распределения разбивается на попарно непересекающиеся типы. При этом, напр., все нормальные распределения образуют один тип, все равномерные распределения также образуют один тип.

Понятие типа широко используется в *предельных теоремах* теории вероятностей. Распределение сумм S_n независимых случайных величин часто «неограниченно расплываются» при $n \to \infty$ и сходимость к предельному распределению (например, к нормальному) оказывается возможной только после линейной «нормировки», т. е. для сумм $\frac{S_n - a_n}{b_n}$, где a_n и $b_n > 0$ — нек-рые константы, $b_n \to \infty$ при $n \to \infty$. При этом если для каких-либо случайных величин X_n распределения величин $\frac{X_n - a_n}{b_n}$ и $\frac{X_n - a_n'}{b_n'}$ сходятся к невырожденным предельным распределениям, то эти последние обязательно однотипны. Поэтому можно дать следующее определе-

ние сходимости типов (А. Я. Хинчин, 1938). Пусть $T(F)$ — тип, к-рому принадлежит функция распределения F (из дальнейшего изложения исключается вырожденный тип — тип, к-рому принадлежат вырожденные распределения). Говорят, что последовательность типов T_n сходится к типу T, если существует последовательность функций распределения $F_n \in T_n$, сходящаяся (слабо) к функции распределения $F \in T$. Топологизированное таким образом множество типов есть хаусдорфово нерегулярное пространство и, следовательно, неметризуемо (В. Дёблин, W. Doeblin, 1939).

Пусть, теперь, S_n — суммы независимых одинаково распределенных случайных величин и F_n — соответствующие функции распределения. Тогда класс типов, предельных для $T(F_n)$, совпадает с классом всех устойчивых типов, т. е. таких типов, что из $F_1 \in T$ и $F_2 \in T$ вытекает, что свертка F_1 и F_2 принадлежит T (т. е., иными словами, сумма двух независимых случайных величин с распределениями типа T снова имеет тип T, см. *Устойчивое распределение*).

Понятие Р. т. может быть распространено на многомерный случай. Однако это распространение неоднозначно. Выбирая какую-либо подгруппу G полной группы матриц, можно получить соответствующее понятие Р. т. Случайные векторы X_1 и X_2 со значениями из $\mathbb{R}^n$ называют G-однотипными, если существует такое преобразование $g \in G$, что X_2 и gX_1 имеют одно и то же распределение. Соответственно можно ввести понятие G-устойчивости Р. т. По отношению к полной группе матриц устойчивы только нормальные распределения (Г. Сакович, 1960).

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.

Ю. В. Прохоров.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАКОН в теории вероятностей — удобный описательный термин, могущий означать, в зависимости от контекста, распределение вероятностей (напр., какой-либо случайной величины) или соответствующую *распределения функцию* или *плотность вероятности*.

Ю. В. Прохоров.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ТЕОРИЯ — теория распределения значений мероморфных функций, построенная в 20-х гг. 20 в. Р. Неванлинной (R. Nevanlinna, см. [1]), основной задачей к-рой является изучение систем $\{z_n\}$ точек области G, в к-рых функция $w(z)$ принимает заданное значение $w=a$ (так наз. a-т о ч е к); при этом рассматриваются всевозможные значения $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Основные понятия. Основные положения неванлинновской теории можно проиллюстрировать на случае, когда $w=f(z)$ является трансцендентной мероморфной функцией во всей открытой комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть $n(t, a, f)$ обозначает число a-точек $f(z)$ с учетом их кратностей, попавших в круг $\{|z| \leqslant t\}$. И пусть для произвольного комплексного числа a

$$N(r, a, f) = \int_0^r [n(t, a, f) - n(0, a, f)]\, d \ln t + n(0, a, f) \ln r,$$

$$m(r, a, f) = m\left(r, \infty, \frac{1}{f-a}\right), \quad a \neq \infty,$$

$$m(r, \infty, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta,$$

$$T(r, f) = m(r, \infty, f) + N(r, \infty, f).$$

Функция $T(r, f)$ наз. неванлинновской характеристикой (или характеристической функцией) мероморфной функции $f(z)$. Функция $m(r, a, f)$ характеризует скорость среднего приближения $f(z)$ к числу a при $|z| \to \infty$, а функция $N(r, a, f)$ характеризует среднюю плотность распределения a-точек $f(z)$. Справедлива следующая тео-

рема, допускающая геометрич. интерпретацию характеристики $T(r, f)$. Пусть F_r обозначает часть римановой поверхности $f(z)$, соответствующей кругу $\{|z|<r\}$, а $\pi A(r, f)$ — сферич. площадь поверхности F_r, тогда

$$T(r, f)=\int_0^r A(s,f)\, d\ln s+O(1) \qquad (r\to\infty).$$

С помощью характеристики $T(r, f)$ определяются порядок роста ρ функции $f(z)$ и ее нижний порядок роста λ:

$$\rho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln T(r, f)}{\ln r}, \quad \lambda=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln T(r, f)}{\ln r}.$$

Первая основная теорема Неванлинны: при $r\to\infty$

$$m(r, a, f)+N(r, a, f)=T(r, f)+O(1),$$

т. е. сумма $m(r, a, f)+N(r, a, f)$, с точностью до ограниченного при $r\to\infty$ слагаемого, сохраняет постоянное для различных a значение $T(r, f)$. В этом смысле все значения w для мероморфной функции $f(z)$ являются равноправными. Особый интерес представляет поведение при $r\to\infty$ функции $N(r, a, f)$. В Р. з. т. используются следующие количественные характеристики роста функций $N(r, a, f)$ и $m(r, a, f)$ по сравнению с ростом характеристики $T(r, f)$:

$$\delta(a, f)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r, a, f)}{T(r, f)}=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m(r, a, f)}{T(r, f)}\leqslant 1,$$

$$\Delta(a, f)=1-\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r, a, f)}{T(r, f)}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m(r, a, f)}{T(r, f)}\leqslant 1.$$

Величина $\delta(a, f)$ наз. дефектом $f(z)$ в точке a в смысле Неванлинны, а величина $\Delta(a, f)$ — дефектом $f(z)$ в точке a в смысле Валирона. Пусть

$$D(f)=\{a:\delta(a, f)>0\}, \quad V(f)=\{a:\Delta(a, f)>0\}.$$

Множество $D(f)$ наз. множеством *дефектных значений* $f(z)$ в смысле Неванлинны, а множество $V(f)$ — множеством дефектных значений $f(z)$ в смысле Валирона. Теорема Неванлинны о величинах дефектов и о множестве дефектных значений $f(z)$: для произвольной мероморфной функции $f(z)$ справедливы утверждения: а) множество $D(f)$ не более чем счетно; б) дефекты $f(z)$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{(a)}\delta(a, f)\leqslant 2 \qquad (1)$$

(соотношение дефектов). Постоянная 2, фигурирующая в (1),— это эйлерова характеристика всей замкнутой плоскости $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, к-рую накрывает риманова поверхность функции $f(z)$.

Структура множества $D(f)$. Утверждение Р. Неванлинны о том, что множество $D(f)$ не более чем счетно, усилить нельзя. Справедлива теорема: каково бы ни было конечное или счетное множество E точек из расширенной комплексной плоскости и каково бы ни было число ρ, $0<\rho\leqslant\infty$, существует мероморфная функция $f_\rho(z)$ порядка ρ, для к-рой E совпадает с множеством ее дефектных значений $D(f_\rho)$. Для мероморфных функций нулевого нижнего порядка $D(f)$ может содержать самое большее одну точку. Таким образом, вопрос о структуре множества $D(f)$ полностью решен.

Кроме того, показано, что для каждого $\rho>0{,}5$ существует целая функция $g_\rho(z)$ порядка ρ, для к-рой множество $D(g_\rho)$ является счетным. Целые функции нижнего порядка $\lambda\leqslant 0{,}5$ не могут иметь конечных дефектных значений.

Структура множества $V(f)$. Множество валироновских дефектных значений $V(f)$ исследовано (1983) не в полной мере. Ж. Валирон (G. Valiron) показал, что существует целая функция $g(z)$ 1-го порядка, для к-рой

множество $V(g)$ имеет мощность континуума. С другой стороны, справедлива теорема: для произвольной мероморфной функции $f(z)$ множество $V(f)$ всегда имеет нулевую логарифмич. *емкость*.

Для каждого множества E класса F_σ нулевой логарифмич. емкости существует целая функция $g(z)$ бесконечного порядка, для к-рой $E \subset V(g)$.

Свойства дефектов мероморфных функций конечного нижнего порядка. Для мероморфных функций бесконечного нижнего порядка величины дефектов, вообще говоря, не удовлетворяют никаким дополнительным соотношениям, кроме основного соотношения (1). Однако если ограничиться рассмотрением мероморфных функций конечного нижнего порядка, то картина резко меняется. Справедлива теорема: если $f(z)$ имеет конечный нижний порядок λ, то при любом α, $^1/_3 \leqslant \alpha \leqslant 1$,

$$\sum_{(a)} \delta^\alpha (a, f) \leqslant K(\lambda, \alpha), \qquad (2)$$

где постоянная $K(\lambda, \alpha)$ зависит лишь от λ и α. С другой стороны, существуют мероморфные функции конечного нижнего порядка, для к-рых при $\alpha < 1/3$ ряд, стоящий слева в (2), уже может расходиться. Наличие у мероморфной функции $f(z)$ нижнего порядка $\lambda \leqslant 0{,}5$ одного дефектного значения a такого, что $\delta(a, f) \geqslant 1 - \cos \pi\lambda$, влияет на ее асимптотич. свойства: такая функция не может иметь других дефектных значений.

Обратная задача Р. з. т. В несколько упрощенном виде обратную задачу Р. з. т. в каком-либо классе $\mathcal{K}$ мероморфных функций можно сформулировать в следующем виде. Каждой точке нек-рой последовательности $\{a_k\}$ из расширенной комплексной плоскости поставлено в соответствие число $\delta(a_k)$, $0 < \delta(a_k) < 1$, так, что $\Sigma_k \delta(a_k) \leqslant 2$. Требуется указать мероморфную функцию $f(z) \in \mathcal{K}$ такую, что $\delta(a_k, f) = \delta(a_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\delta(a, f) = 0$ для каждого $a \neq a_k$, $k = 1, 2, \ldots$, либо доказать отсутствие таких функций в $\mathcal{K}$. Обратная задача полностью решена положительно в классе целых функций бесконечного нижнего порядка и в классе мероморфных функций бесконечного нижнего порядка. При решении обратной задачи в классе мероморфных функций конечного нижнего порядка возникают определенные трудности, к-рые объясняются тем, что в этом случае величины дефектов, кроме основного соотношения (1), подчинены еще другим соотношениям (см. (2)).

Рост мероморфных функций. Пусть для мероморфной функции $f(z)$

$$L(r, \infty, f) = \max_{|z|=r} \ln^+ |f(z)|,$$

$$L(r, a, f) = L\left(r, \infty, \frac{1}{f-a}\right), \quad a \neq \infty,$$

$$\beta(a, f) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{L(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

Величина $\beta(a, f)$ наз. *величиной отклонения* мероморфной функции $f(z)$ от числа a, а множество $\Omega(f) = \{a : \beta(a, f) > 0\}$ наз. множеством положительных отклонений мероморфной функции $f(z)$; $D(f) \subseteq \Omega(f)$. Доказано, что если $g(z)$ — целая функция конечного порядка ρ, то

$$\beta(\infty, g) \leqslant \begin{cases} \dfrac{\pi\rho}{\sin \pi\rho}, & \text{если } 0 < \rho < 0{,}5, \\ \pi\rho, & \text{если } \rho \geqslant 0{,}5. \end{cases}$$

Справедлива также теорема: если мероморфная функция $f(z)$ имеет конечный нижний порядок λ, то а) множество $\Omega(f)$ не более чем счетно; б) для каждого a

$$\beta(a, f) \leqslant \begin{cases} \dfrac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}, & \text{если } 0 < \lambda < 0{,}5, \\ \pi\lambda, & \text{если } \lambda \geqslant 0{,}5; \end{cases}$$

в) при любом α, $0{,}5<\alpha\leqslant 1$.

$$\sum_{(a)} \beta^{\alpha}(a,\ f)\leqslant K(\lambda,\ \alpha),$$

где постоянная $K(\lambda,\ \alpha)$ зависит лишь от λ и α; г) $\Omega(f)\subseteq V(f)$.

Кроме этого, существуют мероморфные функции бесконечного нижнего порядка, для к-рых множество $\Omega(f)$ имеет мощность континуума. Множество $\Omega(f)$ (подобно $V(f)$) для каждой мероморфной функции $f(z)$ имеет нулевую логарифмич. емкость. Следующая теорема характеризует отличия в свойствах величин $\delta(a,\ f)$ и $\beta(a,\ f)$: для любого λ, $0\leqslant\lambda<\infty$, существует мероморфная функция $f_{\lambda}(z)$ нижнего порядка λ, для к-рой при нек-ром a выполняются соотношения

$$\delta(a,\ f)=0 \quad \text{и} \quad \beta(a,\ f)\geqslant 1.$$

Исключительные значения мероморфных функций в смысле Пикара и Бореля. Значение a наз. *исключительным значением* мероморфной функции $f(z)$ в смысле Пикара, если число a-точек $f(z)$ при $\{|z|<\infty\}$ конечно. Значение a наз. исключительным значением $f(z)$ в смысле Бореля, если $n(r,\ a,\ f)$ при $r\to\infty$ растет в определенном смысле медленнее $T(r,\ f)$. Каждая мероморфная функция, отличная от постоянной, не может иметь более двух борелевских (а значит, и пикаровских) исключительных значений.

Успешно развивается теория распределения значений голоморфных отображений комплексных многообразий — многомерный аналог теории Неванлинны (см. [6], [7]), а также теория распределения значений минимальных поверхностей (см. [9], [10]).

Распределение значений функций, мероморфных в круге. Выше описана теория распределения значений мероморфных во всей открытой плоскости функций; это параболич. случай. Теория роста и распределения значений построена также и для случая гиперболического, т. е. когда $f(z)$ является функцией, мероморфной в единичном круге $\{|z|<1\}$ (см. [1], [8]). При этом функции $N(r,\ a,\ f)$, $m(r,\ a,\ f)$, $L(r,\ a,\ f)$ и $T(r,\ f)$ определяются для каждого r, $0\leqslant r<1$, точно так же, как и в параболическом случае. Дефект $f(z)$ в точке a в смысле Неванлинны и в смысле Валирона определяется соответственно так:

$$\delta(a,\ f)=\varliminf_{r\to 1}\frac{m(r,\ a,\ f)}{T(r,\ f)},$$

$$\Delta(a,\ f)=\varlimsup_{r\to 1}\frac{m(r,\ a,\ f)}{T(r,\ f)},$$

А величина

$$\beta(a,\ f)=\varliminf_{r\to 1}\frac{L(r,\ a,\ f)}{T(r,\ f)}$$

наз. величиной отклонения $f(z)$ относительно значения a.

Пусть $D(f)=\{a:\delta(a,\ f)>0\}$,

$$V(f)=\{a:\Delta(a,\ f)>0\} \text{ и } \Omega(f)=\{a:\beta(a,\ f)>0\}.$$

Основные положения параболич. случая о величинах $\delta(a,\ f)$, $\Delta(a,\ f)$ и $\beta(a,\ f)$, а также о структуре множеств $D(f)$, $V(f)$ и $\Omega(f)$ сохраняются и в гиперболич. случае, но не для всех функций, а лишь для функций с быстро растущей (в определенном смысле) при $r\to 1$ характеристикой $T(r,\ f)$.

Лит.: [1] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.— Л., 1941; [2] Хейман У.- К., Мероморфные функции, пер. с англ., М., 1966; [3] Аракелян Н. У., «Докл. АН СССР», 1966, т. 170, № 5, с. 999—1002; [4] Гольдберг А. А., Островский И. В., Распределение значений мероморфных функций, М., 1970; [5] Петренко В. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, № 6, с. 1330—1348; 1970, т. 34, № 1, с. 31—56; [6] Гриффитс Ф., Кинг Дж., Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий, пер. с англ., М., 1976; [7] Шабат Б. В.,

Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [8] Петренко В. П., Рост мероморфных функций, Хар., 1978; [9] его же, «Докл. АН СССР», 1981, т. 256, № 1, с. 40—42; [10] Beckenbach E. F., Hutchison G. A., «Pacific J. Math.», 1969, v. 28, № 1, p. 17—47. *В. П. Петренко.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЯ какой-либо случайной величины X — функция действительного переменного x, принимающая при каждом x значение, равное вероятности неравенства $X<x$.

Каждая Р. ф. $F(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $F(x')\leqslant F(x'')$ при $x'<x''$;

2) $F(x)$ непрерывна слева при каждом x;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$

(иногда Р. ф. определяют как вероятность неравенства $X\leqslant x$, и тогда она оказывается непрерывной справа).

В математич. анализе Р. ф. называют любую функцию, для к-рой имеют место свойства 1)—3). Существует взаимно однозначное соответствие между распределениями вероятностей P_F на σ-алгебре $\mathcal{B}$ борелевских подмножеств числовой прямой $\mathbb{R}^1$ и Р. ф. Это соответствие определяется формулой: для любого интервала $[a,\ b)$

$$P_F([a,\ b))=F(b)-F(a).$$

Каждая функция F, обладающая свойствами 1)—3), может рассматриваться как Р. ф. нек-рой случайной величины X (напр., случайной величины $X(x)=x$, заданной на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^1,\ \mathcal{B},\ P_F)$).

Всякая Р. ф. может быть однозначно представлена в виде суммы

$$F(x)=a_1F_1(x)+a_2F_2(x)+a_3F_3(x),$$

где a_1, a_2, a_3 — неотрицательные числа, сумма к-рых равна 1, а F_1, F_2, F_3 — Р. ф. такие, что $F_1(x)$ абсолютно непрерывна:

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x} p(z)\,dz,$$

$F_2(x)$ — «ступенчатая функция»:

$$F_2(x)=\sum_{x_k<x} p_k,$$

где x_k — точки скачков $F(x)$, а $p_k>0$ пропорциональны размеру этих скачков; $F_3(x)$ — «сингулярная» компонента — непрерывная функция, производная к-рой почти всюду равна нулю.

Пример. Пусть X_k, $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$,— бесконечная последовательность независимых случайных величин, принимающих значения 1 и 0 с вероятностями $0<p_k\leqslant 1/2$ и $q_k=1-p_k$, соответственно. Пусть

$$X=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{2^k},$$

тогда

1) если $p_k=q_k=1/2$ при всех k, то X имеет абсолютно непрерывную Р. ф. (с $p(x)=1$ для $0\leqslant x\leqslant 1$, т. е. X равномерно распределена на $[0,\ 1]$);

2) если $\sum_{k=1}^{\infty} p_k<\infty$, то X имеет «ступенчатую» Р. ф. (она имеет скачки во всех двоично-рациональных точках отрезка $[0,\ 1]$);

3) если $\sum_{k=1}^{\infty} p_k=\infty$, $p_k\to 0$ при $k\to\infty$, то X имеет «сингулярную» Р. ф.

Этот пример является иллюстрацией одной теоремы П. Леви (P. Lévy), в соответствии с к-рой предел бесконечной свертки дискретных Р. ф. может содержать только одну из указанных выше компонент.

«Расстояние» между распределениями P и Q на числовой прямой часто определяют в терминах соответствую-

щих Р. ф. F и S, полагая, напр.,

$$\rho_1(P,\ Q)=\sup_x|F(x)-S(x)|$$

или

$$\rho_2(P,\ Q)=\mathrm{Var}\,(F(x)-S(x))$$

(см. *Распределений сходимость*, *Леви метрика*, *Характеристическая функция*).

Р. ф. наиболее употребительных распределений вероятностей (напр., нормального, биномиального, пуассоновского распределений) табулированы.

Для проверки гипотез о Р. ф. F по результатам независимых наблюдений используют так или иначе измеренное отклонение F от эмпирической Р. ф. (см. *Колмогорова критерий*, *Колмогорова — Смирнова критерий*, *Крамера — Мизеса критерий*).

Понятие Р. ф. естественным образом распространяется на многомерный случай, но многомерные Р. ф. значительно менее употребительны, чем одномерные.

О приближенном представлении Р. ф. см. *Грама — Шарлье ряд*, *Эджворта ряд*, *Предельные теоремы*.

Лит.: [1] Крамер Г., Случайные величины и распределения вероятностей, пер. с англ., М., 1947; [2] его же, Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967; [4] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

Ю. В. Прохоров.

РАССЕИВАНИЕ ВЫБОРКИ — одна из скалярных характеристик разброса выборки на прямой относительно какой-либо конкретной точки, называемой центром рассеивания, численно равная сумме квадратов отклонений значений случайных величин, образующих выборку, от центра рассеивания. Пусть $X_1,\ \dots,\ X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же закону, и пусть точка x, $x\in\mathbb{R}^1$, выбрана в качестве центра рассеивания. Тогда величина

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^n(X_i-x)^2$$

наз. рассеиванием выборки $X_1,\ \dots,\ X_n$ относительно центра рассеивания x. Так как для любого x

$$S_n(x)=S_n(\overline{X})+n(\overline{X}-x)^2\geq S_n(\overline{X}),$$

где $\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n)$, то Р. в. будет минимальным, если в качестве центра рассеивания выбрать $\overline{X}$. Малые значения Р. в. говорят о сосредоточенности элементов выборки около центра рассеивания, и наоборот: большие значения Р. в. говорят о большой разбросанности элементов выборки. Понятие Р. в. естественным образом распространяется на многомерные выборки.

Лит.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

М. С. Никулин.

РАССЕИВАНИЯ ЭЛЛИПСОИД — эллипсоид в пространстве реализаций случайного вектора, характеризующий сосредоточенность его распределения вероятностей возле нек-рого заданного вектора в терминах моментов 2-го порядка. Пусть случайный вектор X, принимающий значения $x=(x_1,\ \dots,\ x_n)^T$ в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, имеет невырожденную ковариационную матрицу B. В таком случае для любого фиксированного вектора a, $a\in\mathbb{R}^n$, в пространстве реализаций $\mathbb{R}^n$ можно определить эллипсоид

$$(x-a)^TB^{-1}(x-a)=n+2,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

к-рый наз. эллипсоидом рассеивания распределения вероятностей случайного вектора X относительно вектора a, или эллипсоидом рассеивания случайного вектора X. В частности, если $a=\mathsf{E}X$, то Р. э. является геометрич. характеристикой концентра-

ции распределения вероятностей случайного вектора X около его математич. ожидания EX.

К задаче статистич. оценивания неизвестного n-мерного параметра θ с помощью понятия Р. э. можно ввести отношение частичного упорядочивания на множестве $\tau=\{T\}$ всех несмещенных оценок T параметра θ, имеющих невырожденные ковариационные матрицы, считая, что из двух оценок $T_1, T_2\in\tau$ предпочтительней является оценка T_1, если Р. э. оценки T_1 лежит целиком внутри Р. э. оценки T_2. Именно в этом смысле несмещенные эффективные оценки неизвестного векторного параметра являются наилучшими, то есть Р. э. несмещенной эффективной оценки лежит внутри Р. э. любой другой несмещенной оценки. См. *Рао — Крамера неравенство*, *Эффективная статистика*, *Информации количество*.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [3] Ибрагимов И. С., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979. *М. С. Никулин.*

РАССЕЛА ПАРАДОКС — см. *Антиномия.*

РАССЕЯНИЯ МАТРИЦА, S-матрица,— совокупность величин (матрица), описывающая процесс перехода квантовомеханич. систем из одних состояний в другие при их взаимодействии (рассеянии).

При рассеянии система переходит из одного квантового состояния, начального (его можно отнести к моменту времени $t=-\infty$), в другое, конечное ($t=+\infty$). Если обозначить набор квантовых чисел, характеризующих начальное состояние, через i, а конечное — через j, то амплитуда рассеяния (квадрат модуля к-рой определяет вероятность данного рассеяния) может быть записана как S_{ij}. Совокупность амплитуд рассеяния образует таблицу с двумя входами, к-рая и наз. матрицей рассеяния S.

Нахождение Р. м.— основная задача квантовой механики и квантовой теории поля. Р. м. содержит всю информацию о поведении системы, если известны не только численные значения, но и аналитич. свойства ее элементов; в частности, ее полюсы определяют связанные состояния системы (а следовательно, дискретные уровни энергии). Из основных принципов квантовой теории следует важнейшее свойство Р. м.— ее унитарность.

По материалам ст. Матрица рассеяния в БСЭ-3.

РАССЛОЕНИЕ — непрерывное сюръективное отображение $\pi: X\to B$ пространства X на пространство B (следует различать Р. как процесс и Р. как объект (X, π, B)). При этом X наз. пространством Р., B — базой Р., π — проекцией Р., $\pi^{-1}(b)$ — слоем над b. Р. представляет собой объединение слоев $\pi^{-1}(b)$, параметризованных базой B и склеенных топологией пространства X. Напр., расслоение-произведение $\pi: B\times F\to B$, где π — проекция на первый сомножитель; расслоение-база $\pi: B\to B$, где $\pi=id$, X отождествляется с B; расслоение над точкой* , где X отождествляется с (единственным) пространством F.

Сечением Р. наз. непрерывное отображение $s: B\to X$ такое, что $\pi s=id$.

Ограничением расслоения $\pi: X\to B$ на подмножестве $A\subset B$ наз. расслоение $\pi': X'\to A$, где $X'=\pi^{-1}(A)$ и $\pi'=\pi|_{X'}$. Обобщением операции ограничения является построение *индуцированного расслоения.*

Отображение $F: X\to X'$ наз. морфизмом расслоения $\pi: X\to B$ в расслоение $\pi': X'\to B'$, если оно переводит слои в слои, т. е. если для каждой точки $b\subset B$ существует такая точка $b'\in B'$, что $F(\pi^{-1}(b))\subset\pi'^{-1}(b')$. Отображение F определяет согласно формуле $f(b)=\pi' F(\pi^{-1}(b))$ нек-рое отображение $f: B\to B'$; F является *накрытием* f и имеет

место равенство $\pi' \circ F = f \circ \pi$; ограничения $F_b : \pi^{-1}(b) \to \pi'^{-1}(b')$ суть отображения слоев. Если $B = B'$ и $f = \mathrm{id}$, то морфизм F наз. B-морфизмом. Р. и их морфизмы образуют категорию, содержащую в качестве подкатегории Р. над B и их B-морфизмы.

Всякое сечение расслоения $\pi : X \to B$ представляет собой B-морфизм $s : B \to X$ расслоения (B, id, B) в расслоение (X, π, B). Если $A \subset B$, то канонич. вложение $i : \pi^{-1}(A) \to B$ является морфизмом расслоения $\pi|_A$ в расслоение π.

Гомеоморфное отображение F наз. изоморфизмом Р., изоморфное расслоению-произведению, наз. тривиальным Р., а изоморфизм $\theta : X \to B \times F$ тривиализацией π.

Если каждый слой $\pi^{-1}(b)$ расслоения гомеоморфен пространству F, то расслоение π наз. расслоением со слоем F. Напр., в любом локально тривиальном Р. над связной базой B все слои $\pi^{-1}(b)$ гомеоморфны, и в качестве F можно взять любое $\pi^{-1}(b_0)$; таким образом, определены гомеоморфизмы $\varphi_b : F \to \pi^{-1}(b)$. *М. И. Войцеховский.*

G-РАССЛОЕНИЕ, расслоение со структурной группой,— обобщение понятия прямого произведения двух топологич. пространств.

Пусть G — топологич. группа, а X — эффективное правое G-пространство, т. е. топологич. пространство с заданным правым действием группы G таким, что $xg = x$ влечет $g = 1$, $x \in X$, $g \in G$. Пусть $X^* \subset X \times X$ — подмножество таких пар (x, x'), что $x' = xg$ для некрого $g \in G$, $B = X/G$ — пространство орбит и $p : X \to B$ — отображение, сопоставляющее с каждой точкой ее орбиту. Если отображение $X^* \to G : (x, xg) \to g$ непрерывно, то набор $\xi = (X, p, B)$ наз. главным расслоением со структурной группой G.

Пусть F — левое G-пространство. Топологич. пространство $X \times F$ снабжается правым действием группы G по формуле $(xf)g = (xg, g^{-1}f)$, $f \in F$. Композиция $X \times F \xrightarrow{\mathrm{pr}_X} X \xrightarrow{p} B$ индуцирует отображение $X_F = (X \times F)\, G \xrightarrow{p_F} B$ (здесь X_F — пространство орбит действия G на $X \times F$). Набор (X_F, p_F, B, F) наз. расслоением со структурной группой, ассоциированным с главным расслоением ξ, а набор (X_F, p_F, F, ξ) — расслоением со слоем F, базой B и структурной группой G. Таким образом, главное расслоение со структурной группой является частью структуры любого расслоения со структурной группой, и оно однозначно определяет расслоение для любого левого G-пространства F.

Если $\xi = (X, p, B)$, $\xi' = (X', p', B')$ — два главных расслоения со структурной группой G, то морфизмом $\xi \to \xi'$ наз. отображение G-пространств $h : X \to X'$. Отображение h индуцирует отображение $f : B \to B'$. Главное расслоение со структурной группой наз. тривиальным, если оно изоморфно расслоению следующего вида:

$$(B \times G,\ \mathrm{pr}_B,\ B),\ (b,\ g)\, g' = (b,\ gg'),\ b \in B,\ g, g' \in G.$$

Пусть (X, p, B) — главное расслоение и $f : B' \to B$ — непрерывное отображение произвольного топологич. пространства B' в B. Пусть $X' \subset B' \times X$ — подмножество таких пар (b, x), что $f(b) = p(x)$. Проекция $\mathrm{pr}_{B'} : B' \times X \to B'$ индуцирует отображение $p' : X' \to B'$. Пространство X' обладает естественной структурой правого G-пространства, и тройка (X', p', B') представляет собой главное расслоение, оно индуцировано расслоением (X, p, B) с помощью отображения f и наз. индуцированным расслоением. Если $f : B' \to B$ — включение подпростран-

ства, то (X', p', B') наз. ограничением (X, p, B) над подпространством B'.

Главное расслоение со структурной группой наз. локально тривиальным, если его ограничение на нек-рую окрестность любой точки базы B тривиально. Для широкого класса случаев требование локальной тривиальности излишне (напр., если G — компактная группа Ли, X — гладкое G-многообразие). Поэтому часто термин «расслоение» со структурной группой используется в смысле локально тривиального расслоения (или косого произведения).

Пусть (X_F, p_F, F, ξ), (X'_F, p'_F, F, ξ') пара расслоений с одной структурной группой и одним G-пространством в качестве слоя. Для морфизма $h : \xi \to \xi'$ главных расслоений отображение $h \times \mathrm{id} : X \times F \to X' \times F$ индуцирует непрерывное отображение $\varphi : X_F \to X'_F$, и пара (h, φ) наз. морфизмом расслоений со структурной группой $(X_F, p_F, F, \xi) \to (X'_F, p'_F, F, \xi')$.

Локально тривиальное расслоение $\eta = (X_F, p_F, F, \xi)$ допускает следующее описание, лежащее в основе другого, также общепринятого определения расслоения со структурной группой. Пусть $U = \{u_\alpha\}$ — открытое покрытие базы B для к-рого ограничение η на u_α при всех α тривиально. Выбор тривиализации и их сравнение на пересечениях $u_\alpha \cap u_\beta$ приводит к непрерывным функциям (наз. функциями перехода) $\{g_{\alpha\beta}\}$, $g_{\alpha\beta} : u_\alpha \cap u_\gamma \to G$. В пересечениях трех окрестностей $u_\alpha \cap u_\beta \cap u_\gamma$ имеет место равенство $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \circ g_{\gamma\alpha} = 1 \in G$, а выбор других тривиализаций над каждой окрестностью приводит к новым функциям $g'_{\alpha\beta} = h_\alpha g_{\alpha\beta} h_\beta^{-1}$. Таким образом, функции $\{g_{\alpha\beta}\}$ образуют одномерный коцикл в смысле Александрова — Чеха с коэффициентами в пучке ростков G-значных функций (коэффициенты неабелевы), и локально тривиальное расслоение определяет этот коцикл с точностью до когранницы.

Лит.: [1] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [2] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953.
А. Ф. Харшиладзе.

РАССЛОЕННАЯ ВЫБОРКА — выборка, разбитая на несколько выборок меньших объемов по нек-рым отличительным признакам. Пусть каждый элемент какой-то выборки объема $N \geqslant 2$ обладает одним и только одним из $k \geqslant 2$ возможных признаков. В таком случае исходную выборку можно разбить на k выборок объемов $n_1, \ldots, n_k$ соответственно $(n_1 + \ldots + n_k = N)$:

$$X_{11}, \ldots, X_{1n_1},$$
$$X_{21}, \ldots, X_{2n_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{k1}, \ldots, X_{kn_k},$$

исходя из принципа: в i-ю выборку $X_{i1}, \ldots, X_{ini}$ отнесены только те элементы исходной выборки, к-рые обладают i-м признаком. В результате такого разбиения первоначальная выборка оказывается как бы расслоенной на k слоев $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$, $i = 1, \ldots, k$, причем именно i-й слой содержит информацию об i-м признаке. К понятию Р. в. приходят, наблюдая, напр., реализации компоненты X двумерной случайной величины (X, Y), вторая компонента к-рой Y подчиняется дискретному распределению.

Лит.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.
М. С. Никулин.

РАССЛОЕННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ объектов категории — частный случай понятия (обратного или проективного) предела. Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольная категория и пусть заданы морфизмы $\alpha : A \to C$, $\beta : B \to C$ из $\mathfrak{K}$. Объект D, вместе с морфизмами $\varphi : D \to A$ $\psi : D \to B$, наз. расслоенным про-

изведением объектов A и B (над α и β), если $\varphi\alpha=\psi\beta$ и для любой пары морфизмов $\gamma\colon X\to A$, $\delta\colon X\to B$, для которой $\gamma\alpha=\delta\beta$, существует такой единственный морфизм $\xi : X\to D$, что $\xi\varphi=\gamma$, $\xi\psi=\delta$. Коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\psi} & B \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ A & \xrightarrow[\alpha]{} & C \end{array}$$

часто наз. универсальным, или декартовым, квадратом. Объект D вместе с морфизмами φ и ψ есть предел диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ A & \xrightarrow[\alpha]{} & C\ . \end{array}$$

Р. п. объектов A и B над α и β обозначают одним из следующих способов:

$$\underset{C}{A\times B},\quad \underset{\alpha,\,\beta}{A\times B},\quad \underset{\alpha\ \beta}{A\prod B}.$$

Р. п., если оно существует, определено однозначно с точностью до изоморфизма.

В категории с конечными произведениями и ядрами пар морфизмов Р. п. объектов A и B над α и β строится следующим образом. Пусть $P=A\times B$ — произведение A и B с проекциями π_1 и π_2 и пусть $(D,\ \mu)$ — ядро пары морфизмов $\pi_1\alpha,\ \pi_2\beta : P\to C$. Тогда D, вместе с морфизмами $\mu\pi_1=\varphi$ и $\mu\pi_2=\psi$, есть Р. п. A и B над α и β. Во многих категориях структуризованных множеств D является подмножеством произведения $(A\times B)$, состоящим из всех таких пар $(a,\ b)$, где $a\in A$, $b\in B$, для к-рых $a\alpha=b\beta$. *М. Ш. Цаленко.*

РАССЛОЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО — тотальное пространство *расслоения*. *М. И. Войцеховский.*

РАСТЯГИВАЮЩЕЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — дифференцируемое отображение f замкнутого многообразия M на себя, под действием к-рого длины всех касательных векторов (в смысле какой-нибудь, а тогда и любой, римановой метрики) растут с экспоненциальной скоростью, т. е. существуют такие константы $C>0$ и $\lambda>1$, что для всех $X\in TM$ и всех $n>0$

$$\|\ Tf^{(n)}(X)\|\geqslant C\lambda^n\|\ X\|.$$

Имеется также вариант понятия Р. о. без условия дифференцируемости, охватывающий, в частности, многие ранее изучавшиеся одномерные примеры. Свойства Р. о. аналогичны свойствам *У-систем* и отчасти даже проще (так, Р. о. класса C^2 всегда имеет конечную инвариантную меру, задаваемую в терминах локальных координат положительной плотностью). *Д. В. Аносов.*

РАСХОДЯЩАЯСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность точек топологич. пространства, не имеющая предела. Из всякой расходящейся последовательности метрич. компакта можно выделить сходящуюся подпоследовательность. В классе Р. п. нормированных пространств выделяют бесконечно большие последовательности, т. е. такие последовательности $\{x_n\}$ точек этих пространств, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\infty$. Понятие Р. п. обобщается на кратные последовательности и на направленные (частично упорядоченные) множества. *Л. Д. Кудрявцев.*

РАСХОДЯЩИЙСЯ ИНТЕГРАЛ — понятие, противоположное понятию сходящегося интеграла (см. *Несобственный интеграл*). Напр., если функция определена на конечном или бесконечном промежутке $[a,\ b)$, $-\infty<a\leqslant b\leqslant\infty$, если для любого $\eta\in[a,\ b]$ она интегрируема на отрезке $[a,\ \eta]$ и не существует конечного

предела

$$\lim_{\eta \to b} \int_a^{\eta} f(x)\,dx,$$

то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится. В случае, когда

$$\lim_{\eta \to b} \int_a^{\eta} f(x)\,dx = +\infty \text{ или } -\infty,$$

говорят, что Р. и. $\int_a^b f(x)dx$ равен соответственно $+\infty$ или $-\infty$. *Л. Д. Кудрявцев.*

РАСХОДЯЩИЙСЯ РЯД — ряд, у к-рого последовательность частичных сумм не имеет конечного предела. Напр., ряды

$$1+1+1+1+1+\ldots,$$
$$1-1+1-1+1-\ldots,$$
$$1-2+3-4+5-\ldots,$$
$$1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots \quad (|x|\geqslant 1),$$

расходятся.

Р. р. стали появляться в работах математиков 17—18 вв. Л. Эйлер (L. Euler) первым пришел к выводу, что нужно ставить вопрос, не чему равна сумма, а как определить сумму Р. р., и нашел подход к решению этого вопроса, близкий к современному. Р. р. до кон. 19 в. не находили применения и были почти забыты. Накопление к кон. 19 в. различных фактов математич. анализа вновь пробудило интерес к Р. р. Стал выдвигаться вопрос о возможности суммирования рядов в нек-ром смысле, отличном от обычного.

Примеры. 1) Если перемножить два ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

сходящихся соответственно к A и B, то полученный в результате перемножения ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) \quad (1)$$

может оказаться расходящимся. Однако если сумму ряда (1) определить не как предел частичных сумм s_n, а как

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}, \quad (2)$$

то в этом смысле ряд (1) всегда будет сходиться (т. е. предел в (2) будет существовать) и его сумма в этом смысле равна $C=AB$.

2) Ряд Фурье функции $f(x)$, непрерывной в точке x_0 (или имеющей разрыв 1-го рода), может расходиться в этой точке. Если же сумму ряда определить по формуле (2), то в этом смысле ряд Фурье такой функции всегда будет сходиться и его сумма в этом смысле равна $f(x_0)$ (или соответственно $[f(x_0+0)+f(x_0-0)]/2$, если x_0 — точка разрыва 1-го рода).

3) Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (3)$$

сходится для $|z|<1$ к сумме $1/(1-z)$ и расходится для $|z|\geqslant 1$. Если сумму ряда определить как

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n x^n}{n!}, \quad (4)$$

где s_n — частичные суммы ряда (3), то в этом смысле ряд (3) будет сходиться для всех z, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}\, z<1$, причем его суммой будет функция $1/(1-z)$.

Для обобщения понятия суммы ряда в теории Р. р. рассматривают нек-рую операцию или правило, в результате к-рого Р. р. ставится в соответствие определенное число, наз. его суммой (в этом определении). Такое правило наз. *суммирования методом*. Так, правило, описанное в примере 1), наз. методом суммирования средних арифметических (см. *Чезаро методы суммирования*). Правило, определяемое в примере 2), наз. *Бореля методом суммирования*.

См. также *Суммирование расходящихся рядов*.

Лит.: [1] Borel E., Leçons sur les séries divergentes, P., 1928; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [3] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [4] Peyerimhoff A., Lectures on summability, B., 1969; [5] Knopp K., Theory and application on infinite series, N. Y., 1971; [6] Zeller K., Beekmann V., Theory der Limitierungsverfahren, B.— Hdlb. — N. Y., 1970.

И. И. Волков.

РАСШИРЕНИЕ алгебры Ли S с ядром A — алгебра Ли G с эпиморфизмом $\varphi : G \to S$, ядром к-рого служит идеал $A \subset G$, это равносильно заданию точной последовательности

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} S \longrightarrow 0.$$

Р. наз. расщепимым, если существует подалгебра $S_1 \subset S$ такая, что $G = S_1 \oplus A$ (прямая сумма модулей). Тогда φ индуцирует изоморфизм $S_1 \approx S$, и потому определено действие алгебры S на A дифференцированиями. Обратно, по любому гомоморфизму $\alpha : S \to \mathrm{Der}\, A$, где $\mathrm{Der}\, A$ — алгебра дифференцирований алгебры A, однозначно строится расщепимое расширение $S \oplus A$ с законом умножения

$$[(s, a), (s', a')] = ([s, s'], \alpha(s)a' - \alpha(s')a + [a, a']).$$

Для конечномерных алгебр Ли над полем характеристики 0 справедлива теорема Леви: если S полупроста, то всякое расширение алгебры S расщепимо.

Из нерасщепимых Р. наиболее изучены абелевы Р., то есть Р. с абелевым ядром A. В этом случае действие алгебры G на A индуцирует действие алгебры $G/A \cong S$ на A, то есть A есть S-модуль. Для алгебр Ли над полем всякое абелево Р. алгебры S, ядром к-рого служит S-модуль A, имеет вид $S \oplus A$ со следующим законом умножения:

$$[(s, a), (s', a')] = ([s, s'], \alpha(s)a' - \alpha(s')a + \psi(s, s')),$$

где ψ — нек-рое линейное отображение $S \wedge S \to A$. Тождество Якоби равносильно тому, что ψ — двумерный коцикл (см. *Когомологии алгебр Ли*). Р., к-рым эквивалентны когомологичные коциклы, эквивалентны в естественном смысле; в частности, Р. расщепимо тогда и только тогда, когда ψ когомологичен нулю. Таким образом, абелевы Р. алгебры S с ядром A описываются группой когомологий $H^2(S, A)$. К случаю абелевых Р. сводится изучение Р. с разрешимым ядром.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964.

А. К. Толпыго.

РАСШИРЕНИЕ ассоциативной алгебры R над коммутативным кольцом K — гомоморфизм $\varphi : S \to R$ K-алгебры S на алгебру R. Если $\mathrm{Ker}\varphi = I$ — алгебра с нулевым умножением, то Р. наз. сингулярным. В этом случае на I естественным образом вводится структура R-модуля. На множестве всех Р. ассоциативной алгебры R с ядром I вводится отношение эквивалентности (так же, как для групп, модулей и т. д.), и множество классов эквивалентных Р. обозначается $F(R, I)$. Если алгебра R является K-проективной, то алгебра S разложима в прямую сумму K-модулей $S = I + R$, и элементы алгебры S можно записать в виде пар (u, r), $u \in I$, $r \in R$, к-рые перемножаются по правилу

$$(u_1, r_1)(u_2, r_2) = (u_1 r_2 + r_1 u_2 + a(r_1, r_2), r_1 r_2),$$

где $a : R \otimes R \to I$. Ассоциативность умножения на-

кладывает ограничения на функцию a, превращая ее в коцикл. Сопоставление Р. его коцикла устанавливает изоморфизм K-модуля $F(R, I)$ со второй группой когомологий $H^2(R, I)$ алгебры R с коэффициентами в I.

Р. алгебры R наз. также алгебру, содержащую R. Такие Р. часто связаны с конкретной конструкцией (многочлены над R, локализация R, кольцо частных алгебры R и т. д.). См. также *Расширение поля*.

Лит.: [1] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [2] Hochschild G., «Ann. Math.», 1945, v. 46, p. 58—67.

В. Е. Говоров.

РАСШИРЕНИЕ группы — группа, содержащая данную группу в качестве нормального делителя. Обычно фиксируется и факторгруппа, т. е. расширением группы A при помощи группы B наз. группа G, содержащая A в качестве нормального делителя и такая, что $G/A \cong B$, или точная последовательность

$$E \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\gamma} B \longrightarrow E. \qquad (1)$$

Иногда группу G наз. расширением группы B при помощи группы A (см., напр., [2]) или эпиморфизм $\gamma : G \to B$ — Р. группы B (см., [1]). Наконец, точная последовательность (1) может называться как Р. группы A при помощи группы B, так и Р. группы B при помощи группы A. Р. группы A при помощи группы B всегда существует, однако группы A и B определяют его неоднозначно. Необходимость описания всех Р. группы A при помощи группы B вызвана как потребностями самой теории групп, так и ее приложениями. Такое описание естественно проводить с точностью до эквивалентности. Два Р. группы A при помощи группы B наз. эквивалентными, если коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & B \longrightarrow E \\ & & \| & & \downarrow & & \| \\ E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & B \longrightarrow E. \end{array}$$

Произвольное Р. (1) определяет путем трансформирования элементами группы G гомоморфизм

$$\alpha : G \longrightarrow \operatorname{Aut} A, \quad \alpha(g)\, a = gag^{-1},$$

для к-рого $\alpha(A)$ содержится в группе $\operatorname{In} A$ внутренних автоморфизмов группы A, и, следовательно, определяет гомоморфизм

$$\beta : B \longrightarrow \operatorname{Aut} A/\operatorname{In} A.$$

Тройку (A, B, β) наз. абстрактным ядром Р. Фиксируя Р. (1), выбирают для каждого $b \in B$ представителя $u(b) \in G$ так, чтобы удовлетворялись условия $\gamma u(b) = b$ и $u(1) = 1$. Тогда сопряжение элементом $u(b)$ порождает автоморфизм $\varphi(b)$ группы A:

$$\varphi(b)\, a = u(b)\, a\, u(b)^{-1} = a^b.$$

Произведение $u(b_1)\, u(b_2)$ равно $u(b_1 b_2)$ с точностью до множителя $f(b_1, b_2) \in A$:

$$u(b_1)\, u(b_2) = f(b_1, b_2)\, u(b_1 b_2).$$

Легко проверяется, что введенные функции должны удовлетворять условиям

$$[\varphi(b_1)\, f(b_2, b_3)]\, f(b_1, b_2 b_3) = f(b_1, b_2)\, f(b_1 b_2, b_3), \qquad (2)$$

$$(a^{b_1})^{b_2} = (a^{f(b_1, b_2)})^{b_1 b_2}, \qquad (3)$$

где в равенстве (3) неявно присутствует функция $\varphi : B \to \operatorname{Aut} A$.

Задание групп A и B и функций $f : B \times B \to A$, $\varphi : B \to \operatorname{Aut} A$, удовлетворяющих условиям (2) и (3) и условиям нормализованности:

$$\varphi(1) = 1, \quad f(a, 1) = 1 = f(1, b),$$

определяет Р. (1) в следующем смысле. Множество

$$B_0(A,\ B,\ \varphi,\ f)\quad \text{пар}\,(a,\ b),\ a\in A,\quad b\in B,$$

является группой относительно операции

$$(a,\ b)\,(a_1,\ b_1)=(aa_1^b f\,(b,\ b_1),\ bb_1).$$

Гомоморфизмы $a\mapsto(a,\ 1)$, $(a,\ b)\mapsto b$ задают Р.

Если задано абстрактное ядро $(A,\ B,\ \beta)$, то всегда можно найти нормализованную функцию φ, удовлетворяющую условию (3). Естественно возникает функция f, однако условие (2) не всегда выполняется; в общем случае

$$f(b_2,\ b_3)\,f\,(b_1,\ b_2\,b_3)=k\,(b_1,\ b_2,\ b_3)\,f\,(b_1,\ b_2)\,f\,(b_1\,b_2,\ b_3),$$

где $k(b_1,\ b_2,\ b_3)\in A$. Функция $f: B\times B\to A$ наз. системой факторов, а функции $k: B\times B\times B\to A$ наз. препятствиями к Р. Если группа A абелева, то системы факторов составляют группу $Z_2(B,\ A)$ относительно их естественного сложения. Факторы, соответствующие полупрямым произведениям, составляют подгруппу $B_2(B,\ A)$ группы $Z_2(B,\ A)$. Факторгруппа $Z_2(B,\ A)/B_2(B,\ A)$ изоморфна второй группе когомологий группы B с коэффициентами в группе A. Аналогичную интерпретацию имеют препятствия в третьей группе когомологий.

Идея изучения Р. с помощью систем факторов появилась давно (О. Гёльдер, O. Hölder, 1893). Однако упоминание систем факторов обычно связано с именем О. Шрайера (O. Schreier), предпринявшего с их помощью первое систематич. изучение расширений. Р. Бэр (R. Baer) впервые начал инвариантные исследования Р. групп без участия систем факторов. Теория Р. групп явилась одним из истоков гомологич. алгебры.

Лит.: [1] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [2] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1978; [3] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [4] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966.

В. Е. Говоров.

РАСШИРЕНИЕ дифференциального поля F_0 — дифференциальное поле $F\supset F_0$ с таким множеством дифференцирований Δ, что ограничение Δ на F_0 совпадает с множеством дифференцирований, заданных на F_0. В свою очередь F_0 будет дифференциальным подполем поля F.

Пересечение любого множества дифференциальных подполей в F является дифференциальным подполем поля F. Для любого множества элементов $\Sigma\subset F$ существует наименьшее дифференциальное подполе в F, содержащее все элементы из Σ и F_0; оно обозначается $F_0\langle\Sigma\rangle$ и наз. расширением поля F_0, порожденным множеством Σ (при этом говорят, что Σ является множеством, или семейством, образующих расширения $F_0\langle\Sigma\rangle$ над F_0). Р. наз. конечно порожденным, если оно имеет конечное множество образующих, и наз. просто порожденным, если множество образующих состоит из одного элемента. Если F_1 и F_2 — два дифференциальных подполя в F, то подполе

$$F_1F_2=F_1\langle F_2\rangle=F_1\,(F_2)=F_2\,(F_1)=F_2\langle F_1\rangle,$$

являющееся дифференциальным подполем поля F, наз. композитом полей F_1 и F_2.

Пусть Θ — свободная коммутативная полугруппа с множеством свободных образующих Δ (ее элементы наз. дифференциальными операторами). Семейство $(\alpha_i)_{i\in I}$ элементов дифференциального поля F наз. дифференциально алгебраически зависимым над дифференциальным полем $F_0\subset F$, если семейство $(\theta\alpha_i)_{i\in I,\theta\in\Theta}$ алгебраически зависимо над F_0, в противном случае семейство $(\alpha_i)_{i\in I}$ наз. дифференциально алгебраически независимым над F_0, или

семейством дифференциальных неизвестных над F_0. Говорят, что элементы $(\alpha_i)_{i\in I}$ дифференциально сепарабельно зависимы над F_0, если семейство $(\theta\alpha_i)_{i\in I,\theta\in\Theta}$ сепарабельно зависимо над F_0; в противном случае семейство $(\alpha_i)_{i\in I}$ наз. дифференциально сепарабельно независимым над F_0.

Расширение F наз. дифференциально алгебраическим над F_0, если таковым является каждый элемент поля F. Аналогично, F наз. дифференциально сепарабельным над F_0, если таковым является каждый элемент из F. Для дифференциальных Р. справедлива теорема о примитивном элементе: пусть множество θ независимо на F_0, тогда всякое конечно порожденное дифференциально сепарабельное расширение F поля F_0 порождается одним элементом.

Пусть J — нек-рое множество и $F_0[(y_{i\theta})_{i\in J,\theta\in\Theta}]$ — алгебра многочленов над F_0 от семейства неизвестных $(y_{j\theta})_{j\in J,\theta\in\Theta}$ с множеством индексов $J\times\theta$. Любое дифференцирование $\delta\in\Delta$ поля F_0 единственным образом продолжается до дифференцирования кольца $F_0[(y_{j\theta})_{j\in J,\theta\in\Theta}]$, отображающего $y_{j\theta}$ в $y_{j\delta\theta}$. Это дифференциальное кольцо наз. кольцом дифференциальных многочленов от дифференциальных неизвестных y_j, $j\in J$, и обозначается $F_0\{(y_j)_{j\in J}\}$. Его дифференциальное поле частных (т. е. поле частных с продолжением дифференцирований) обозначается $F_0((y)_{j\in J})$, а элементы этого поля наз. дифференциальными функциями над F_0 от дифференциальных неизвестных $(y_j)_{j\in J}$. Для обыкновенных дифференциальных полей имеет место аналог теоремы Люрота: пусть F — произвольное дифференциальное Р. дифференциального поля F_0, содержащееся в $F_0\langle u\rangle$, тогда F содержит элемент v такой, что $F=F_0\langle v\rangle$.

Для любого дифференциального поля F существует сепарабельное полууниверсальное расширение, т. е. такое Р., в к-рое вкладывается всякое конечно порожденное сепарабельное Р. поля F. Более того, существует сепарабельное универсальное расширение U, т. е. такое Р., к-рое является полууниверсальным над каждым конечно порожденным Р. дифференциального поля F, содержащимся в U.

В теории дифференциальных полей нет объекта, соответствующего алгебраически замкнутому полю в теории полей. До нек-рой степени их роль играют стесненно замкнутые поля. Основным свойством такого поля F является то, что любая конечная система алгебраических дифференциальных уравнений и неравенств с коэффициентами в F, имеющая решение, рациональное над нек-рым Р. поля F, имеет решение, рациональное над F. Семейство $\eta=(\eta_j)_{j\in J}$ элементов из нек-рого Р. дифференциального поля F наз. стесненным над F, если существует дифференциальный многочлен $c\in F\{(y_j)_{j\in J}\}$ такой, что $c(\eta)\neq 0$ и $c(\eta')=0$ для любой необщей дифференциальной специализации η' точки η над F. Расширение $\mathcal{G}$ поля F наз. стесненным над F, если любая конечная система элементов $\eta_1, \ldots, \eta_n\in\mathcal{G}$ является стесненной над F; это равносильно тому, что произвольный элемент из $\mathcal{G}$ является стесненным над F. Дифференциальное поле, не имеющее нетривиальных стесненных Р., наз. стесненно замкнутым. Пример такого поля — универсальное дифференциальное поле нулевой характеристики (универсальное Р. поля рациональных чисел Q). Для любого дифференциального поля нулевой характеристики существует стесненное

замыкание, т. е. стесненно замкнутое Р. поля F, к-рое вкладывается в любое другое стесненно замкнутое Р. поля F.

Определение нормального Р. из теории полей может быть перенесено в дифференциальную алгебру различными способами. В дифференциальной теории Галуа основную роль играют сильно нормальные Р. Пусть U — фиксированное универсальное дифференциальное поле характеристики 0 с полем констант K. Все дифференциальные поля, встречающиеся ниже, предполагаются лежащими в U, а все упоминаемые далее изоморфизмы предполагаются дифференциальными изоморфизмами, т. е. коммутируют с операторами из множества Δ. Пусть F и $\mathcal{G}$ — дифференциальные поля, над к-рыми U универсально. Пусть C — поле констант поля $\mathcal{G}$. Изоморфизм σ поля $\mathcal{G}$ наз. сильным, если σ оставляет инвариантным каждый элемент из C, $\sigma\mathcal{G}\subset\mathcal{G}K$ и $\mathcal{G}\subset\sigma\mathcal{G}K$ (то есть $\mathcal{G}K=\mathcal{G}\sigma K$). Сильно нормальным Р. дифференциального поля F наз. конечно порожденное расширение $\mathcal{G}$ поля F такое, что всякий изоморфизм поля $\mathcal{G}$ над F является сильным. Сильно нормальные Р. являются стесненными. Множество сильных изоморфизмов сильно нормального расширения $\mathcal{G}$ над F имеет естественную структуру алгебраич. группы, определенной над полем K (обозначаемой через $G(\mathcal{G}/F)$). Это — *Галуа дифференциальная группа* расширения $\mathcal{G}/F$. Частным случаем сильно нормальных Р. являются расширения Пикара — Вессио, т. е. расширения, сохраняющие поле констант и получающиеся присоединением к полю F базиса решений какой-либо системы линейных однородных дифференциальных уравнений с коэффициентами из F. Для таких Р. группа Галуа $G(\mathcal{G}/F)$ является алгебраической матричной группой, т. е. алгебраич. подгруппой группы $\mathrm{GL}_K(n)$ для нек-рого целого $n>0$.

Дифференциальные группы Галуа типичных дифференциально-алгебраических Р. имеют следующий вид.

1) Пусть $\mathcal{G}=F\langle\alpha\rangle$, где α удовлетворяет системе уравнений $\delta_i\alpha=a_i\alpha$, $\delta_i\in\Delta$, $a_i\in F$, $i=1, \ldots, m$, и пусть поля констант полей $\mathcal{G}$ и F совпадают. Тогда $\mathcal{G}$ является расширением Пикара — Вессио поля F и дифференциальная группа Галуа $G(\mathcal{G}/F)$ является подгруппой мультипликативной группы поля K (то есть $\mathrm{GL}_K(1)=K^*$). Если элемент α трансцендентен над F, то $G(\mathcal{G}/F)\approx K^*$, а если α алгебраичен, то α удовлетворяет уравнению вида $y^d-b=0$, где $b\in F$ и $G(\mathcal{G}/F)=Z_d$ (группа корней из 1 степени d). Расширение $\mathcal{G}$ поля F наз. Р. при помощи экспоненты.

2) Пусть $\mathcal{G}=F\langle\alpha\rangle$, где α удовлетворяет системе уравнений $\delta_i\alpha=a_i$, $\delta_i\in\Delta$, $a_i\in F$, $i=1, \ldots, m$ (такой элемент α наз. примитивным над F). И пусть поле констант поля $F\langle\alpha\rangle$ совпадает с C. Если $\alpha\notin F$, то α трансцендентен над F. Полученное Р. является расширением Пикара — Вессио, и группа Галуа $G(F\langle\alpha\rangle/F)$ изоморфна аддитивной группе поля K. Такие Р. наз. расширениями при помощи интеграла.

3) Пусть g_2, g_3 — элементы поля C такие, что $g_2^3-27g_3^2\neq0$. Элемент $\alpha\in U$ наз. вейерштрассовым над F, если α удовлетворяет системе уравнений $(\delta_i\alpha)^2-a_i^2(4\alpha^3-g_2\alpha-g_3)$; $\delta_i\in\Delta$, $a_i\in F$, $1\leqslant i\leqslant m$. Расширение $\mathcal{G}=F\langle\alpha\rangle$ является сильно нормальным над F, однако, если α трансцендентен над F, оно не является расширением Пикара — Вессио. Имеется мономорфизм

$$c: G(F\langle\alpha\rangle/F)\longrightarrow W_K,$$

где W_K — группа точек кубич. кривой

$$X_0X_2^2-(4X_1^3-g_2X_0^2X_1-g_3X_0^3)=0.$$

Если α трансцендентен над F, то c является изоморфизмом.

4) Пусть F — дифференциальное поле, $a_1, \ldots, a_n \in F$ и $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — фундаментальная система нулей уравнения $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0$, к-рая порождает расширение Пикара — Вессио поля F. Группа Галуа $G(F<\eta_1, \ldots, \eta_n>/F)$ содержится в $\mathrm{SL}_K(n)$ тогда и только тогда, когда уравнение $y'+a_1y=0$ имеет нетривиальный нуль в F. В частности, если $F=C(x)$ — дифференциальное поле рациональных функций одного комплексного переменного с дифференцированием d/dx и $B_\nu=y''+x^{-1}y'+(1-\nu^2x^{-2})y$ — дифференциальный многочлен Бесселя, то группа Галуа соответствующего Р. совпадает с $\mathrm{SL}_K(2)$ при $\nu-{}^1/_2 \notin \mathbb{Z}$. Если $\nu-{}^1/_2 \in \mathbb{Z}$, то группа Галуа совпадает с K^*.

Для любого натурального n можно построить Р. дифференциальных полей $\mathcal{G} \supset F$ такое, что $G(\mathcal{G}/F) \approx \mathrm{GL}_K(n)$.

Существует соответствие Галуа между множеством дифференциальных подполей сильно нормального Р. и множеством алгебраич. подгрупп его группы Галуа.

Как и в обычной теории Галуа, в дифференциальном случае рассматриваются две общие задачи.

а) Прямая задача: задано сильно нормальное расширение $\mathcal{G}$ дифференциального поля F. Определить его группу Галуа.

б) Обратная задача: заданы дифференциальное поле F и алгебраич. группа G. Описать множество сильно нормальных Р. поля F, группа Галуа к-рых изоморфна группе G (в частности, определить, не пусто ли оно).

Существует другой способ обобщения нормальности на случай Р. дифференциальных полей и построения дифференциальной теории Галуа, использующий методы дифференциальной геометрии [4].

Лит.: [1] Ritt J. F., Differential algebra, N. Y., 1950; [2] Kolchin E. R., Differential algebra and algebraic groups, N. Y., 1973; [3] Капланский И., Введение в дифференциальную алгебру, пер. с англ., М., 1959; [4] Pommaret J. F., Differential Galois theory, N. Y.—L.—P., 1983.

А. В. Михалев, Е. В. Панкратьев.

РАСШИРЕНИЕ модуля — любой модуль X, содержащий данный модуль A в качестве подмодуля. Обычно, говоря о Р. модуля A, фиксируют фактормодуль X/A, т. е. расширением модуля A с помощью модуля B наз. *точную последовательность*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

Такой модуль X всегда существует (напр., прямая сумма A и B), но не определяется модулями A и B однозначно. Как в теории модулей, так и в ее приложениях возникает потребность в обозрении всех различных Р. модуля A с помощью B. С этой целью в классе всех Р. модуля A с помощью B вводится отношение эквивалентности, а на классах эквивалентных Р.— операция умножения (см. *Бэра умножение*), относительно к-рой множество классов эквивалентности Р. модуля A над кольцом R образует абелеву группу $\mathrm{Ext}_R(A, B)$. Эта конструкция обобщается и на n-кратные Р. модуля A с помощью B, т. е. на точные последовательности вида

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0,$$

к-рым соответствует группа $\mathrm{Ext}^n_R(A, B)$. Группы

$$\mathrm{Ext}^n_R(A, B), \quad n=1, 2, \ldots,$$

являются производными функторами функтора $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ и вычисляются с помощью проективной резольвенты модуля A или инъективной резольвенты модуля B. Расширение X модуля A наз. существенным, если для любого подмодуля S модуля X из $S \cap A=0$ следует $S=0$. Всякий модуль обладает максимальным существенным Р., являющимся минимальным *инъективным модулем*, содержащим данный.

Лит. см. при ст. *Расширение группы.*

В. Е. Говоров.

РАСШИРЕНИЕ оператора — линейный оператор, график к-рого содержит график данного линейного оператора. Тот факт, что оператор B есть Р. оператора A, записывается в виде $A \subset B$. Обычные задачи теории Р.: максимально расширить оператор, сохраняя определенное свойство, или изучить Р. оператора, обладающие нек-рым дополнительным свойством.

Пусть, напр., дан изометрич. оператор A в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A) \subset H$ и областью значений $R(A) \subset H$; тогда изометрические Р. оператора A находятся во взаимно однозначном соответствии с изометрич. отображениями из $H_+ = D(A)^\perp$ в $H_- = R(A)^\perp$. В частности, A имеет унитарные Р., когда размерности H_+ и H_- совпадают.

Расширения симметрических операторов. Наиболее развитой (и важной для приложений) является теория самосопряженных Р. симметрич. операторов в гильбертовом пространстве. Оператор T является симметрическим тогда и только тогда, когда $T \subset T^*$, где T^* — сопряженный к T оператор. Поэтому область определения любого симметрического Р. оператора T содержится в $D(T^*)$, и это Р. есть сужение оператора T^*. Тем самым описание симметрических Р. сводится к нахождению их областей определения. Подпространство $L \subset D(T^*)$ является областью определения нек-рого симметрического Р. оператора T тогда и только тогда, когда $(T^*x, y) = (xT^*y)$ для любых $x, y \in L$. Оказывается, что

$$D(T^*) = D(T) \dotplus N_+ \dotplus N_-,$$

где $N_\pm = \mathrm{Ker}(T^* \mp i)$ — дефектные подпространства (их размерности $n_\pm = \dim N_\pm$ наз. дефектными числами), и симметрические Р. оператора T находятся во взаимно однозначном соответствии с изометрич. отображениями из N_+ в N_-: каждому такому отображению V соответствует Р. оператора T с областью определения $D(T) \dotplus \Gamma_V$, где Γ_V — график оператора V. Самосопряженные Р. соответствуют унитарным операторам V и, следовательно, существуют тогда и только тогда, когда дефектные числа равны.

Области определения Р. симметрич. операторов удобно описывать с помощью т. н. (абстрактных) граничных условий. Граничным значением для симметрич. оператора T наз. всякий линейный функционал на $D(T^*)$, непрерывный относительно нормы $\langle x \rangle = (\|x\|^2 + \|T^*x\|^2)^{1/2}$ и равный нулю на $D(T)$; граничным условием наз. уравнение $f(x) = 0$, где f — граничное значение. Граничные значения определяются своими значениями на $N_+ \dotplus N_-$. Если дефектные числа симметрич. оператора T конечны, то всякое его симметрич. расширение $\tilde{T}$ определяется семейством граничных условий, то есть $D(\tilde{T}) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\, f_i$, где f_i — граничные значения. Семейства граничных значений, определяющие самосопряженные Р. оператора T с дефектными числами $n_+ = n_- = n$, описываются следующим образом. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — ортонормированный базис в N_+, а $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — в N_- и пусть для $1 \leqslant i \leqslant n$

$$f_i(x) = (T^*x, \varphi_i) - (x, T^*\varphi_i),$$

$$g_i(x) = (T^*x, \psi_i) - (x, T^*\psi_i).$$

Тогда всякое самосопряженное расширение $\tilde{T}$ оператора T определяется граничными условиями

$$D(\tilde{T}) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\left(f_i - \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} g_j \right),$$

где $\|\theta_{ij}\|$ — унитарная $(n \times n)$-матрица.

В нек-рых случаях удается установить существование самосопряженных Р. (и найти нек-рые из них), не решая трудной задачи нахождения дефектных подпрост-

ранств и дефектных чисел. Напр., если T коммутирует с (антиунитарной) инволюцией пространства H, то он допускает самосопряженное Р. Это часто используется в теории дифференциальных операторов, где в качестве инволюции берется комплексное сопряжение пространства $\mathscr{L}^2$. Равенство дефектных чисел имеет место и в том случае, когда на действительной оси есть точки регулярного типа оператора T (точка λ наз. точкой регулярного типа, если $\|Tx-\lambda x\|\geqslant c\|x\|$ при нек-ром $c>0$ и для всех $x\in D(T)$).

Расширения полуограниченных операторов. Оператор T наз. полуограниченным снизу числом $a\in R$, если его числовая область $\{(Tx, x) : \|x\|=1, x\in D(T)\}$ лежит в интервале (a, ∞); оператор, полуограниченный снизу нулем, наз. положительным. Если T полуограничен снизу числом a, то все числа $\lambda<a$ — его точки регулярного типа, дефектные числа равны и существуют самосопряженные Р. Одно из них можно построить следующим образом. Полуторалинейная форма $q_T(x, y)=(Tx, y)$, определенная на $D(T)\times D(T)$, допускает замыкание $\bar{q}_T$. Но, как всякой замкнутой симметричной билинейной форме, форме $\bar{q}_T$ соответствует единственный самосопряженный оператор $\hat{T}$ такой, что $q_{\hat{T}}\subset\bar{q}_T$. Оператор $\hat{T}$ наз. расширением Фридрихса оператора T, он полуограничен, и нижняя грань его спектра равна нижней грани числовой области оператора T. Это — единственное самосопряженное Р., область определения к-рого содержится в области определения формы $\bar{q}_T$. С помощью расширения Фридрихса можно описать другие полуограниченные Р. оператора T (если дефектные числа оператора T конечны, то все его самосопряженные Р. полуограничены). Для этого достаточно найти все положительные Р. положительных операторов (общий случай сводится к данному добавлением оператора, кратного единичному). Пусть T — положительный оператор, $L=\operatorname{Ker} T^*$, тогда положительные самосопряженные Р. оператора T однозначно соответствуют положительным ограниченным операторам B в L: для каждого такого оператора B подпространство $D(T)\dotplus(\hat{T}^{-1}+B)L$ — область определения соответствующего Р. (см. [4]).

Построение расширения Фридрихса обобщается на секториальные операторы, т. е. операторы, числовая область к-рых содержится в нек-ром угле $\{z\in\mathbb{C} : |\arg(z-z_0)|\leqslant\theta<\pi/2\}$; существует Р., являющееся максимальным секториальным оператором, числовая область к-рого находится в том же угле и к-рое обладает свойством минимальности, аналогичным свойству расширения Фридрихса. Рассмотрен случай операторов, действующих из банахова пространства в сопряженное к нему (см. [5]).

Диссипативные расширения. В нек-рых задачах возникает необходимость строить симметрические Р. симметрич. операторов. Типичный результат состоит в следующем. Оператор A наз. диссипативным, если его числовая область лежит в левой полуплоскости, и максимальным диссипативным, если он диссипативен и не имеет диссипативных Р. Всякий симметрич. оператор имеет Р. вида iA, где A — максимальный диссипативный оператор; все такие Р. описываются с помощью сжимающих отображений N_+ в N_- (см. [8]).

Расширения дифференциальных операторов. Важные применения теория Р. операторов имеет при исследовании дифференциальных операторов. Пусть

$$l(y)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}(p_i(x)y^{(n-i)})^{(n-i)}$$

— формально самосопряженное дифференциальное выражение на интервале (a, b); пусть $D \in \mathscr{L}^2(a, b)$ — подпространство, состоящее из всех функций с абсолютно непрерывными квазипроизводными порядков $0, 1, \ldots, 2n-1$ и $2n$-й квазипроизводной, принадлежащей $\mathscr{L}^2(a, b)$, где D_0 — подпространство в D, состоящее из функции, носители к-рых не содержат концов интервалов. Формула $Ty=l(y)$ при $y \in D$ определяет оператор T; пусть T_0' — его сужение на D_0. Оператор T_0' — симметрический, $T_0'^* = T$ и пусть $T_0 = T_0'$ — его замыкание. Область определения оператора T_0 в регулярном случае (т. е. когда интервал (a, b) конечен и функция $1/p_0$ суммируема) образована всеми функциями из D, первые $2n-1$ квазипроизводных к-рых обращаются в 0 на концах интервала. В сингулярном случае $D(T_0)$ описывается более сложно (см. [2]). Дефектные числа оператора T_0 равны, причем в регулярном случае они равны $2n$, а в сингулярном — не превосходят $2n$. Таким образом, T_0 всегда обладает самосопряженными Р.; их спектры, спектральные разложения и резольвенты являются основными объектами теории дифференциальных операторов, поскольку выбор того или иного самосопряженного Р. является фактически точной постановкой нек-рой спектральной задачи. Это особенно наглядно проявляется в регулярном случае: (абстрактные) граничные условия, задающие область определения самосопряженного Р. оператора T_0, записывается тогда в виде обычных граничных условий:

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} y^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{2n} \beta_{jk} y^{[k-1]}(b) = 0,$$

$$j = 1, \ldots, 2n,$$

где α_{ik}, β_{ik} — набор чисел (такое описание следует из вышеприведенного описания (абстрактных) граничных условий, поскольку в регулярном случае определены граничные значения $\varphi_j(y) = y^{[j]}(a)$, $\psi_j(y) = y^{[j]}(b)$).

При $p_0(x) > 0$ оператор T_0 является полуограниченным снизу, и его расширение Фридрихса соответствует граничным условиям $y^{[j]}(a) = y^{[j]}(b) = 0$, $0 \leqslant j \leqslant 2n-1$.

В общем случае самосопряженные Р. оператора T_0 можно описать следующим образом. Пусть

$$[y, z] = \sum_{k=1}^{n} (y^{[k-1]} \bar{z}^{[2n-k]} - y^{[2n-k]} \bar{z}^{[k-1]})$$

для любых функций y и z из D; тогда существуют пределы

$$\lim_{x \to a} [y, z]_x = [y, z]_a, \quad \lim_{x \to b} [y, z](x) = [y, z]_b,$$

причем

$$[y, z]_b - [y, z]_a = (Ty, z) - (y, Tz)$$

(формула Лагранжа). Поэтому для описания самосопряженных Р. оператора T_0 достаточно выбрать базисы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и $\psi_1, \ldots, \psi_n$ в дефектных подпространствах N_+ и N_- (удобно считать, что $\psi_i = \bar{\varphi}_i$) и каждой унитарной матрице $\|\theta_{ij}\|$ поставить в соответствие самосопряженное расширение T_θ, область определения к-рого состоит из всех функций $y \in D$, удовлетворяющих граничным условиям

$$[y, \xi_j]_b - [y, \xi_j]_a = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

где

$$\xi_j = \varphi_j - \sum_{i=1}^{n} \theta_{ij} \bar{\varphi}_i.$$

Расширения, отвечающие краевым задачам. Р. полуограниченных операторов играют центральную роль в теории эллиптических краевых задач. Пусть, напр., $l(y)$ — эллиптическое дифференциальное выражение 2-го порядка в области G n-мер-

ного пространства и пусть A_0 и $A=A_0^*$ — минимальный и максимальный операторы, определенные этим выражением. Тогда оператор A_0 положительно определен, его дефектные числа бесконечны и дефектное подпространство $L_0=\mathrm{Ker}\,A$ (оно наз. п р о с т р а н с т в о м l-г а р м о н и ч е с к и х ф у н к ц и й в G) допускает естественную реализацию в виде пространства функций на границе ∂G области G. Таким образом, различные Р. оператора A_0 соответствуют тем или иным граничным условиям и определяют различные краевые задачи. В частности, расширение Фридрихса $\tilde{A}_0$ определено на всех функциях из пространства Соболева $W_2^2(G)$, обращающихся в нуль на ∂G, и уравнение $\tilde{A}_0 u=f$ соответствует задаче Дирихле:

$$l(u)=f, \quad u|_{\partial G}=0.$$

Теория уравнений с частными производными диктует постановку многих общих задач о Р. симметрич. операторов. Среди них задачи об условиях единственности самосопряженного Р. (т. н. с у щ е с т в е н н а я с а м о с о п р я ж е н н о с т ь), о существовании коммутирующих Р. у коммутирующих (в том или ином смысле) симметрич. операторов, о существовании промежуточных Р. с заданными свойствами (напр., с условиями на спектр) и т. д. (см. [7]—[9]).

Р а с ш и р е н и я с в ы х о д о м и з г и л ь б е р т о в а п р о с т р а н с т в а. Всякий симметрич. оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, может быть расширен до самосопряженного оператора, действующего в нек-ром пространстве $H_1\supset H$ (см. [10]), откуда следует существование у всякого симметрич. оператора обобщенной спектральной функции. С этим также связаны различные результаты о Р. с выходом из пространства и дилатациях (см. [11]). Так, всякое с ж а т и е, т. е. оператор с нормой $\leqslant 1$, гильбертова пространства может быть расширено до коизометрического (т. е. сопряженного к изометрическому) оператора; всякое сжатие, степени к-рого сильно сходятся к нулю, может быть расширено до обратного одностороннего сдвига (т. е. сопряженного к одностороннему сдвигу). Результаты о Р. с выходом из пространства обобщаются на коммутативные семейства, полугруппы и т. д.

Лит.: [1] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д ж.- Т., Линейные операторы, пер. с англ., т. 2, М., 1966; [2] Н а й м а р к М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [3] К а т о Т., Теория возмущения линейных операторов, пер. с англ., М., 1972; [4] К р е й н М. Г., «Матем. сб.», 1947, т. 20, с. 431—98, т. 21, с. 365—404; [5] Б и р м а н М. Ш., там же, 1956, т. 38, с. 431—50; [6] Ф и л л и п с Р. С., «Математика», 1962, т. 6, № 4, с. 11—70; [7] М о р е н К., Методы гильбертова пространства, пер. с польск., М., 1965; [8] Б е р е з а н с к и й Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965; [9] М и х л и н С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала, М.— Л., 1952; [10] Н а й м а р к М. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1940, т. 4, с. 277—318; [11] С е к е ф а л ь в и - Н а д ь Б., Ф о я ш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970; [12] B r o w n L., D o u g l a s R., F i l l m o r e P., в кн.: Proc. Conference operator theory, B.— [a.o.], 1973; [13] A r v e s o n W., «Duke math. J.», 1977, v. 44, № 2, p. 329—55; [14] Р и д М., С а й м о н Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 2 — Гармонический анализ. Самосопряженность, М., 1978.

А. И. Логинов, В. С. Шульман.

РАСШИРЕНИЕ п о л у г р у п п ы A — полугруппа S, содержащая A в качестве подполугруппы. Обычно речь идет о расширениях полугруппы A, связанных с A теми или иными условиями. Наиболее развита теория идеальных Р. полугрупп (полугрупп, содержащих A в качестве идеала). Каждому элементу s идеального расширения S полугруппы A сопоставляют ее левый и правый сдвиги $\lambda_s, \rho_s: \lambda_s x=sx$, $x\rho_s=xs (x\in A)$; пусть $\tau s=(\lambda_s, \rho_s)$. Отображение τ является гомоморфизмом полугруппы S в сдвиговую оболочку $T(A)$ полугруппы A или изоморфизмом, если A слабо редуктивна (см. *Сдви-*

ги полугрупп). Полугруппа τS наз. типом идеального расширения S. Среди идеальных расширений S полугруппы A выделяют строгие Р., для к-рых $\tau S=\tau A$, и чистые Р., в к-рых $\tau^{-1}\tau A=A$. Каждое идеальное Р. полугруппы A является чистым Р. нек-рого ее строгого Р.

Идеальное расширение S полугруппы A наз. плотным (иногда существенным), если всякий гомоморфизм полугруппы S, инъективный на A, является изоморфизмом. Полугруппа A тогда и только тогда обладает максимальным плотным идеальным расширением D, когда A слабо редуктивна; в этом случае D единственна с точностью до изоморфизма и изоморфна $T(A)$, а полугруппа A наз. плотно вложенным идеалом в D. Подполугруппы $T(A)$, содержащие τA, и только они изоморфны плотным идеальным Р. слабо редуктивной полугруппы A.

Если S — идеальное Р. полугруппы A и факторполугруппа S/A изоморфна Q, то S называется Р. полугруппы A при помощи полугруппы Q. Хорошо изучены идеальные Р. вполне простых полугрупп, идеальные Р. группы при помощи вполне 0-простой полугруппы, коммутативной полугруппы с сокращением при помощи группы с присоединенным нулем и т. д. В общем случае задача описания всех идеальных Р. полугруппы A при помощи полугруппы Q далека от решения.

Среди Р. полугруппы A других типов выделяются полугруппы S, обладающие конгруэнцией, одним из классов к-рой является A, в частности т. н. шрейеровы Р. полугруппы с единицей [1] — аналог шрейеровых расширений групп. При изучении различных видов таких Р. полугрупп (в частности, для инверсных полугрупп) используются когомологии полугрупп.

Другим широким направлением теории Р. полугрупп являются различные задачи о существовании Р. полугруппы A, принадлежащих фиксированному классу полугрупп. Так, всякую полугруппу A можно вложить в полную полугруппу, в простую относительно конгруэнций полугруппу, в бипростую полугруппу с нулем и единицей (см. *Простая полугруппа*); всякую конечную или счетную полугруппу — в полугруппу с двумя образующими. Известны условия, при к-рых полугруппу A можно вложить в полугруппу без собственных левых идеалов, в инверсную полугруппу, в группу (см. *Вложение полугруппы*) и т. д.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., М., 1972, т. 1; [2] Petrich M., Introduction to semigroups, Columbus, 1973.

Л. М. Глускин.

РАСШИРЕНИЕ поля — поле, содержащее данное поле в качестве подполя. Запись K/k означает: K — расширение поля k. Поле K в этом случае наз. также надполем поля k.

Пусть K/k и L/k — два Р. поля k. Изоморфизм полей $\varphi: K\to L$ наз. изоморфизмом расширений (или k-изоморфизмом полей), если φ тождествен на k. Если изоморфизм Р. существует, то Р. наз. изоморфными. В случае $K=L$ φ наз. автоморфизмом расширения K/k. Множество всех автоморфизмов Р. образует группу $G(K/k)=\mathrm{Aut}(K/k)$, наз. группой Галуа поля K относительно k, или группой Галуа расширения K/k. Расширение наз. абелевым, если эта группа абелева.

Элемент поля α наз. алгебраическим над k, если он удовлетворяет нек-рому алгебраич. уравнению с коэффициентами из поля k, и трансцендентным — в противном случае. Для каждого алгебраич. элемента α существует единственный многочлен $f_\alpha(x)$ со старшим коэффициентом, равным 1, неприводимый в кольце многочленов $k[x]$ и такой, что $f_\alpha(\alpha)=0$, и всякий многочлен над k, корнем к-рого является элемент α, делится на $f_\alpha(x)$. Этот многочлен наз. мини-

мальным многочленом элемента α. Расширение K/k наз. алгебраическим, если всякий элемент из K алгебраичен над k. Р., не являющееся алгебраическим, наз. трансцендентным. Р. наз. нормальным, если оно алгебраическое и всякий неприводимый в $k[x]$ многочлен, обладающий корнем в K, разлагается в $K[x]$ на линейные множители. Подполе k наз. алгебраически замкнутым в K, если каждый алгебраический над k элемент из K на самом деле лежит в k, т. е. всякий элемент из K/k трансцендентен над k. Поле, алгебраически замкнутое в любом своем Р., является *алгебраически замкнутым полем*.

Расширение K/k наз. конечно порожденным (или расширением конечного типа), если в K существует такое конечное подмножество элементов S, что K совпадает с наименьшим подполем, содержащим S и k. В этом случае говорят, что K порождается множеством S над k. Если K может быть порождено над k множеством из одного элемента α, то Р. наз. простым и обозначается $K=k(\alpha)$. Простое алгебраич. расширение $k(\alpha)$ полностью определяется минимальным многочленом f_α порождающего элемента α. Точнее, если $k(\beta)$ — другое простое алгебраическое Р. и $f_\alpha=f_\beta$, то существует изоморфизм расширений $k(\alpha)\to k(\beta)$, переводящий α в β. Далее, для любого неприводимого многочлена $f\in k[x]$ существует простое алгебраич. расширение $k(\alpha)$ с минимальным многочленом $f_\alpha=f$. Оно может быть построено как факторкольцо $k[x]/fk[x]$. С другой стороны, для всякого простого трансцендентного расширения $k(\alpha)$ существует изоморфизм расширений $k(\alpha)\to k(x)$, где $k(x)$ — поле рациональных функций от x над k. Любое Р. конечного типа может быть получено с помощью конечной цепочки простых Р.

Расширение K/k наз. конечным, если K как алгебра конечномерна над полем k, и бесконечным, если эта алгебра бесконечномерна. Размерность этой алгебры наз. степенью расширения K/k и обозначается $[K:k]$. Каждое конечное Р. является алгебраическим и каждое алгебраическое Р. конечного типа — конечным. Степень простого алгебраического Р. совпадает со степенью соответствующего минимального многочлена. Напротив, простое трансцендентное Р. бесконечно.

Пусть дана последовательность расширений $K\subset L\subset M$. Расширение M/K является алгебраическим тогда и только тогда, когда и L/K и M/L — алгебраические Р. Далее, M/K конечно тогда и только тогда, когда конечны L/K и M/L, причем

$$[M:K]=[M:L]\cdot[L:K].$$

Если P/k и Q/k — два алгебраических Р. и PQ — *композит* полей P и Q в нек-ром их общем надполе, то PQ/k также алгебраическое Р.

См. также *Сепарабельное расширение*, *Трансцендентное расширение*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [2] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, 2 изд., пер. с нем., М., 1979; [3] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, т. 1, пер. с англ., М., 1963; [4] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

О. А. Иванова.

РАСШИРЕНИЕ топологического пространства X — топологическое пространство Y, в к-ром X является всюду плотным подпространством. Если Y бикомпактно, то оно наз. бикомпактным расширением, если Y хаусдорфово — хаусдорфовым расширением.

М. И. Войцеховский.

РАСШИРЕНИЯ ОБЛАСТИ ПРИНЦИП, принцип Карлемана: *гармоническая мера* $\omega(z,\alpha,D)$ дуг α границы Γ области D может только возрастать

при расширении области D через дополнительные дуги $\beta\subset\Gamma$, $\alpha\cup\beta=\Gamma$. Точнее, пусть граница Γ области D на плоскости комплексного переменного z состоит из конечного числа жордановых кривых, α — часть Γ, состоящая из конечного числа дуг Γ, и пусть область D' есть расширение области D через дополнительные дуги $\beta=\Gamma\setminus\alpha$, то есть $D\subset D'$ и α есть часть границы Γ' области D'. Тогда для гармонич. мер справедливо неравенство $\omega(z,\alpha,D)\leqslant\omega(z,\alpha,D')$, $z\in D$, причем знак равенства здесь имеет место только в случае $D'=D$. Р. о. п. справедлив и для гармонич. меры относительно областей евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, или $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$.

Р. о. п. находит важные применения в различных ситуациях, связанных с оценками гармонич. меры. Напр., еще Т. Карлеман [1] дал при помощи Р. о. п. решение следующей проблемы Карлемана — Мийю. Пусть граница Γ односвязной области D состоит из конечного числа жордановых дуг, точка ζ расположена на Γ или $\zeta\in C\overline{D}$, $\Delta=\{z\colon |z-\zeta|<R\}$ — круг радиуса R с центром ζ, а α — часть Γ, попавшая в $\Delta_R=\Delta\cap D$. Требуется найти оценку снизу для гармонич. меры $\omega(z,\alpha,\Delta_R)$, зависящую только от R и $|z-\zeta|$, $z\in\Delta_R$. Решение выражается неравенством

$$\omega(z,\alpha,\Delta_R)\geqslant\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\theta(R)}\ln\frac{R}{|z-\zeta|}\right),\qquad(1)$$

где $R\theta(R)$ — сумма длин дуг пересечения

$$\{z\colon |z-\zeta|=R\}\cap D.$$

Поскольку $\theta(R)\leqslant 2\pi$, то

$$\omega(z,\alpha,\Delta_R)\geqslant\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\pi}\ln\frac{R}{|z-\zeta|}\right),\ z\in\Delta_R.\qquad(2)$$

Имеются обобщения проблемы Карлемана — Мийю и уточнения формул (1), (2) (см. [3]). Р. о. п. позволяет доказать также *Линделёфа теоремы*. Многочисленные применения Р. о. п. и формул типа (1), (2) дал А. Мийю (см. [2], а также [3], [4]).

Лит.: [1] Carleman T., «Ark. Mat. Astron. Fys.», 1921, v. 15, № 10; [2] Milloux H., «J. math. pures et appl.», 9 sér., 1924, t. 3; [3] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941; [4] Евграфов М. А., Аналитические функции, 2 изд., М., 1968. *Е. Д. Соломенцев.*

РАСШИРЕННАЯ КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ — плоскость комплексного переменного $\mathbb{C}$, компактифицированная посредством добавления бесконечно удаленной точки ∞ и обозначаемая $\overline{\mathbb{C}}$. Окрестностью ∞ является внешность любого круга в $\overline{\mathbb{C}}$, т. е. множество вида $\{\infty\}\cup\{z\in\mathbb{C}\colon |z-z_0|>R\}$, $R\geqslant 0$. Р. к. п. есть *Александрова бикомпактное расширение* плоскости $\mathbb{C}$, гомеоморфное и конформно эквивалентное *Римана сфере*. Сферическая, или хордальная, метрика на $\overline{\mathbb{C}}$ дается формулами

$$\rho(z,w)=\frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}},\ z,\ w\in\mathbb{C},$$

$$\rho(z,\infty)=\frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

РАСЩЕПЛЕНИЯ МЕТОД — сеточный метод решения нестационарных задач со многими пространственными переменными, в к-ром переход от заданного временного слоя t_n к новому слою $t_{n+1}=t_n+\tau$ осуществляется за счет последовательного решения сеточных аналогов родственных нестационарных задач с меньшим числом пространственных переменных (см. [1] — [4]).

Часто в этом классе методов могут быть найдены такие, что 1) весь переход от сеточного слоя в момент времени t_n к новому сеточному слою $t=t_{n+1}$ является достаточно простым и может быть осуществлен при затрате $O(N)$ арифметич. действий, где N — число узлов пространственной сетки; 2) гарантируется абсолютная устойчивость метода; 3) гарантируется наличие приемлемой точности метода (наличие аппроксимации в том или ином смысле). Р. м. довольно широко применяются при практич. решении многомерных задач математич. физики, связанных, напр., с линейными и нелинейными системами параболического, гиперболического или смешанного типа (см. [1] — [8]).

Обычно для задачи с p пространственными переменными переход от t_n к t_{n+1} в Р. м. производится с использованием p вспомогательных (дробных) шагов:

$$A_s^{(n)}\, u^{n+s/p} = B_s^{(n)}\,(u^n,\ u^{n+1/p},\ \ldots,\ u^{n+(s-1)/p}), \quad (1)$$

где

$$u^n \equiv u\,(t_n),\quad u^{n+k/p} \equiv u\,(t_{n+1}),\quad A_s^{(n)}$$

— матрица, соответствующая разностной аппроксимации нек-рого дифференциального оператора, содержащего производные только по x_s (одномерного дифференциального оператора), а правые части (1) легко вычислимы. При соответствующей нумерации неизвестных, связанной с выбором направления x_s, матрицы $A_s^{(n)}$ становятся обычно диагональными и решение систем (1) при каждом s сводится к многократному решению одномерных разностных систем по направлению x_s. Поэтому часто Р. м. наз. также или *переменных направлений методом* или *дробных шагов методом*.

Одним из типичных примеров в случае уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f,\quad (x_1,\ x_2) \in \Omega,$$

с начальным условием $u|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2)$ и краевым условием $u|_\Gamma = \psi(x_1, x_2, t)$, где $\Omega = (0,1)\times(0,1)$, Γ — граница Ω, может служить следующий метод, построенный на квадратной сетке с шагом h:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{u_i^{n+1/2} - u_i^n}{\tau/2} + [\Lambda_1\,(\sigma u^{n+1/2} + (1-\sigma)\,u^n)]_i = f_i^{n+1/2},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \bar{x}_i \in \Omega_h;\\
&u_i^{n+1/2} = \psi_i^{n+1/2} \text{ при } \bar{x}_i \in \Gamma,\ u_i^{n+1} = \psi_i^{n+1} \text{ при}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \bar{x}_i \in \Gamma;\\
&\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+1/2}}{\tau/2} + [\Lambda_2\,(\sigma u^{n+1} + (1-\sigma)\,u^{n+1/2})]_i =\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = f_i^{n+1/2},\quad \bar{x}_i \in \Omega_h,
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где $i \equiv (i_1, i_2)$, $\bar{x}_i \equiv (i_1 h,\ i_2 h)$, $u_i^n \equiv u\ (n\tau,\ \bar{x}_i)$, $\psi_i^{n+1/2} \equiv \psi\,((n+1/2)\tau,\ \bar{x}_i)$, — Λ_1 и Λ_2 — простейшие разностные аппроксимации для $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, Ω_h — совокупность внутренних узлов $\bar{x}_i$, $\sigma \geqslant 1/2$.

Имеются два альтернативных подхода к теории Р. м. В одном из них промежуточные шаги ни в чем существенном не отличаются от целых шагов, и сами разностные уравнения на дробных шагах и граничные условия для них, подобно методу (2), устроены одинаково, и можно ожидать, что u^n и $u^{n+1/2}$ будут служить аппроксимациями для решения исходной задачи в моменты времени t_n и $t_{n+1/2} = t_n + \tau/2$. Этот подход основан на использовании понятия составной схемы и суммарной аппроксимации (см. [2]). Схемы такого типа часто

наз. локальноодномерными схемами или аддитивными схемами; их можно также трактовать как обычные разностные схемы для некрого уравнения с сильно осциллирующими по времени коэффициентами, решение к-рого должно быть близко к решению исходной задачи (см. [1]—[4]). Достоинства этого подхода в его простоте и общности, напр. обобщения метода (2) возможны и для случая криволинейных областей Ω и более общих задач. Точность же получаемых на этом пути методов обычно не очень высока. Известны и иногда успешно применяются варианты Р. м., в к-рых расщепление производится не по пространственным переменным, а по физич. процессам (см. [5]).

Второй подход в плане анализа устойчивости и сходимости исключает какие-либо дробные шаги из рассмотрения. Сама разностная схема и аппроксимация трактуются традиционным образом. Необычность разностной схемы проявляется лишь в том, что на верхнем слое схемы появляется необычный разностный оператор. Напр., вместо метода (2) рассматривается метод

$$\left(A\left(\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}\right)\right)_i+(\Lambda_1 u^n)_i+(\Lambda_2 u^n)_i=f_i^{n+1/2},$$
$$\bar{x}_i\in\Omega_n \qquad (3)$$
$$u_i^n=\psi_i^n \quad \text{при} \quad \bar{x}_i\in\Gamma,$$

где $A\equiv(E+\sigma\tau\Lambda_1)(E+\sigma\tau\Lambda_2)$, E — тождественный оператор. Такие операторы A обычно наз. расщепляющимися или факторизованными операторами. Дробные шаги связываются лишь с методом решения возникающих систем и для одной и той же схемы (3) могут быть введены различными способами, граничные условия для них должны выбираться в зависимости от этого. Сами схемы типа (3) можно трактовать как обычные схемы с весом для ε-уравнения, напр., вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\varepsilon\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2\partial t}=f,\quad \varepsilon>0,$$

решения к-рого отличаются от решения исходной задачи на $O(\varepsilon)$ (см. [4]). В случае области Ω, составленной из прямоугольников, матрицы возникающих систем в методах типа (3) уже не представимы в виде произведения «одномерных» матриц. Все же решения подобных систем могут быть найдены при затрате $O(N)$ арифметич. действий (см. [4]), операторы подобного типа наз. расширенно расщепляющимися операторами. При исследовании устойчивости и сходимости схем с расщепляющимися и расширенно расщепляющимися операторами большую роль играет метод энергетич. неравенств (см. [2], [4], [6] — [8]).

Лит.: [1] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [2] Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977; [3] Яненко Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математичсской физики, Новосиб., 1967; [4] Дьяконов Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, в. 1—2, М., 1971—72; [5] Ковеня В. М., Яненко Н. Н., Метод расщепления в задачах газовой динамики, Новосиб., 1981; [6] Дрыя М., в кн.: Banach center publications, v. 3, Warszawa, 1978, p. 59—67; [7] Злотник А. А., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1980, т. 20, № 2, с. 422—32; [8] Hayes L. J., «SIAM J. Numer. Analysis», 1981, v. 18, № 4, p. 627—43.

Е. Г. Дьяконов.

РАСЩЕПЛЯЕМАЯ ГРУППА — группа G, порожденная своими подгруппами H и K такими, что H инвариантна в G и пересечение $H\cap K=E$ (так что факторгруппа G/H изоморфна K). В этом случае G наз. также расщепляемым расширением группы H при помощи группы K, или полупрямым произведением H на K. Если подгруппы H и K поэлементно перестановочны, то их полупрямое произведение совпадает с прямым произведением $H\times K$. Полупрямое произведение G группы H на группу

K существует тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм ψ группы K в группу Aut H автоморфизмов группы H. В этом случае для любых $k \in K$, $h \in H$ справедлива формула

$$k^{-1}hk = h^{k\psi},$$

определяющая умножение в G. В случае, когда $K = \mathrm{Aut}\, H$ и ψ — тождественное отображение, группа G наз. г о л о м о р ф о м группы H.

Лит.: [1] G o r e n s t e i n D., Finite groups, N. Y.— L., 1968.

Н. Н. Вильямс.

РАСЩЕПЛЯЮЩАЯСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — *точная последовательность*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

в абелевой категории, изоморфная последовательности прямой суммы:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \oplus C \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

причем этот изоморфизм таков, что A и C отображаются в A и C соответственно тождественным образом. Для расщепляемости последовательности (*) достаточно существования правого обратного f' для отображения f или левого обратного g' для отображения g. Класс расщепляющихся точных последовательностей является нулем группы $\mathrm{Ext}_R^1(A, C)$ (см. *Бэра умножение*). В категории векторных пространств (т. е. модулей над фиксированным полем) все точные последовательности являются расщепляемыми.

Для *относительной гомологической алгебры* типична ситуация, когда рассматриваются точные последовательности одной категории, являющиеся Р. п. в другой категории.

В. Е. Говоров.

РАУСА ТЕОРЕМА — теорема, позволяющая для многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами (в регулярном случае) определить с помощью схемы Рауса число комплексных корней этого многочлена с положительной действительной частью.

Пусть многочлен $f(x)$ для удобства записан в виде $f(x) = a_0x^n + b_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + b_1x^{n-3} + \ldots$ $(a_0 \neq 0)$.

С х е м о й Р а у с а этого многочлена наз. система чисел

$$\begin{array}{l} a_0a_1a_2\ \ldots \\ b_0b_1b_2\ \ldots \\ c_0c_1c_2\ \ldots \\ d_0d_1d_2\ \ldots \\ \ldots\ldots \end{array}$$

В этой схеме первые две строки составлены из коэффициентов многочлена $f(x)$, а каждая строка, начиная с третьей, получается из двух предыдущих следующим образом: из первой строки вычитается вторая, умноженная на такое число, чтобы первый элемент обратился в нуль. Выбрасывая этот первый нуль, получают искомую строку. Напр., в третьей строке

$$c_i = a_{i+1} - b_{i+1}\frac{a_0}{b_0}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots .$$

В первой строке схемы Рауса число элементов равно целой части числа $\frac{n+1}{2}$, во второй — целой части числа $\frac{n}{2}$, в k-й строке при $k > 2$ число элементов на 1 меньше, чем в $(k-2)$-й строке. Вся схема содержит $n+1$ строку. Р е г у л я р н ы м наз. тот случай, когда в схеме Рауса многочлена все числа первого столбца отличны от нуля.

Т е о р е м а Р а у с а. Для многочлена с действительными коэффициентами в регулярном случае число корней, лежащих в правой полуплоскости (т. е. име-

ющих положительные действительные части), равно числу перемен знака в ряду чисел первого столбца схемы Рауса. В регулярном случае многочлен не может иметь корней, лежащих на мнимой оси. Критерий Рауса: для того чтобы все корни многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все числа первого столбца схемы Рауса были отличны от нуля и имели одинаковые знаки. Эти теоремы были установлены Э. Раусом [1]. Метод Рауса применяется для определения числа корней многочлена в правой полуплоскости и в нек-рых нерегулярных случаях.

Построение схемы Рауса возможно лишь для многочленов с заданными числовыми коэффициентами. Более широко применим метод, в к-ром роль схемы Рауса играет матрица Гурвица, а роль первого столбца схемы Рауса — последовательность главных миноров Δ_i, $i=1, 2, \ldots, n$ (см. *Рауса — Гурвица критерий*). При этом аналогом Р. т. будет теорема Рауса — Гурвица: если все миноры Δ_i отличны от нуля, то число корней многочлена $f(x)$, лежащих в правой полуплоскости, равно числу перемен знака в ряду чисел

$$a_0, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

и $f(x)$ не имеет корней, лежащих на мнимой оси. Этот метод применим при нек-рых дополнительных условиях к случаю, когда отдельные из миноров Δ_i равны нулю.

Лит.: [1] Routh E. J., Treatise on the stability of a given state of motion..., L., 1877; [2] его же, The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, 6 ed., L., 1905; [3] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.— Л., 1950; [4] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967.

И. В. Проскуряков.

РАУСА — ГУРВИЦА КРИТЕРИЙ, Гурвица критерий, — необходимое и достаточное условие того, чтобы все корни многочлена

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с действительными коэффициентами и $a_0>0$ имели отрицательные действительные части. Р.—Г. к. состоит в том, чтобы были положительными все главные миноры Δ_i, $i=1, 2, \ldots, n$, матрицы Гурвица H, где H — матрица порядка n, i-я строка к-рой имеет вид

$$a_{2-i}, a_{4-i}, \ldots, a_{2n-i},$$

и, по определению, $a_k=0$, если $k<0$ или $k>n$ (условия Гурвица, условия Рауса — Гурвица). Этот критерий получен А. Гурвицем [1] и является обобщением работы Э. Рауса (см. *Рауса теорема*).

Многочлен $f(x)$, удовлетворяющий условиям Гурвица, наз. многочленом Гурвица, или устойчивым многочленом, что связано с применениями Р.— Г. к. в теории устойчивости колебательных систем. Известны и другие критерии устойчивости многочленов: критерий Рауса, *Льенара — Шипара критерий*, а также способы определения числа корней многочлена.

Лит.: [1] Hurwitz A., «Math. Ann.», 1895, Bd 46, S. 273—84; [2] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967.

Е. Н. Кузьмин.

РАЦИОНАЛЬНАЯ КРИВАЯ — одномерное алгебраич. многообразие, определенное над полем k, поле рациональных функций к-рого является чисто трансцендентным расширением поля k степени 1. Все неособые полные Р. к. изоморфны проективной прямой P^1. Полная неособая кривая X рациональна тогда и только тогда, когда ее геометрич. род $g=0$, то есть когда на X нет регулярных дифференциальных форм.

В случае, когда $k=\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, неособая полная Р. к. X — это сфера Римана $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Вик. С. Куликов.

РАЦИОНАЛЬНАЯ ОСОБЕННОСТЬ — нормальная *особая точка* P алгебраич. многообразия или комплексно аналитич. пространства X, допускающая разрешение особенности $\pi : Y \to X$, при к-ром прямые образы $R^i\pi_* O_Y$ структурного пучка O_Y тривиальны при $i \geqslant 1$. Тогда этим свойством будет обладать и любое разрешение данной особенности. Если основное поле имеет характеристику 0, то особенность является Р. о. тогда и только тогда, когда X — многообразие Коэна — Маколея и вложение $\pi_* : \omega_Y \to \omega_X$ дуализирующих пучков является изоморфизмом [5].

Р. о. являются, например, особые точки факторпространства $\mathbb{C}^n/G$, где G — конечная группа линейных преобразований; особая точка 0 гиперповерхности $x_0^{k_0} + \ldots + x_n^{k_n} = 0$ при $\sum_{i=1}^{n} k_i^{-1} > 1$ (см. [8]); торические особенности.

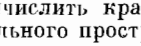
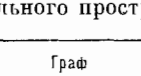
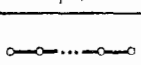
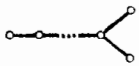
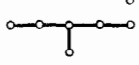
Если $P \in X$ — гореншт е йнова изолированная особенность (т. е. пучок ω_X локально свободен) над полем $\mathbb{C}$ и ω — образующая пучка ω_X, то P является Р. о. тогда и только тогда, когда

$$\int_U \omega \wedge \bar{\omega} < \infty$$

в достаточно малой окрестности U точки P (см. [7]).

В случае, когда $\dim X = 2$, особенность P рациональна тогда и только тогда, когда $h^1(O_D) = 0$ для каждого цикла D на исключительной кривой $E = \pi^{-1}(P)$ разрешения π. В этом случае для Р. о. все компоненты E_i кривой E изоморфны проективной прямой P^1, E — дивизор с нормальными пересечениями и граф Γ разрешения является деревом.

Фундаментальным циклом особенности наз. минимальный цикл $Z > 0$ на E, для к-рого $Z \cdot E_i \leqslant 0$ для всех i. В терминах цикла Z можно дать критерий рациональности: $h^1(O_Z) = 0$, а также вычислить кратность особенности и размерность касательного пространства [1].

Обозначение	Уравнение	Граф	G
A_n, $n \geqslant 1$	$x^{n+1} + y^2 + z^2$		C_{n+1}
D_n, $n \geqslant 4$	$xy^2 + x^{n-1} + z^2$		D_{n-2}
E_6	$x^3 + y^4 + z^2$		T
E_7	$x^3 + xy^3 + z^2$		O
E_8	$x^3 + y^5 + z^2$		I

Р. о. гиперповерхностей X в трехмерном аффинном пространстве A^3 или, что эквивалентно, двумерные Р. о. кратности 2 наз. д в о й н ы м и Р. о. Двойные Р. о. имеют ряд эквивалентных характеризаций и несколько различных названий: о с о б е н н о с т и К л е й н а, о с о б е н н о с т и Д ю В а л я, п р о с т ы е о с о б е н н о с т и. Уравнения двойных Р. о. возникают как уравнения, связывающие инварианты групп симметрий правильных многогранников (см. [6]). Это соответствует характеризации двойных Р. о. как особенностей факторпространств $X = \mathbb{C}^2/G \subset \mathbb{C}^3$, где G — конечная подгруппа в $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$; с точностью до сопряженности такие подгруппы исчерпываются списком: C_n — циклич. группа порядка n, бинарные группы диэдра D_n, группа тетраэдра T, группа октаэдра O, группа икосаэдра I. Если π — минимальное разрешение двойной Р. о., то все $E_i^2 = -2$ и взвешенный граф Γ совпадает со схемой простых корней одной из

полупростых алгебр Ли A_n, D_n, E_6, E_7, E_8, обозначения к-рых переносятся и на особенности. С точностью до изоморфизма такая особенность определяется своим взвешенным графом Г ([3], [11]), см. таблицу, кол. 915. Двойные Р. о. могут быть охарактеризованы как двумерные горенштейновы Р. о. Они наз. также каноническими особенностями, т. к. это в точности те особенности, к-рые появляются на канонич. моделях алгебраич. поверхностей основного типа.

Если $P \in X$ горенштейнова Р. о. произвольной размерности, то ее общее гиперповерхностное сечение есть либо рациональная, либо эллиптическая горенштейнова особенность, что позволяет, в частности, описать трехмерные Р. о. (см. [8]).

В произвольной размерности справедливы следующие факты (см. [4]). 1) Деформация Р. о. есть снова Р. о. 2) Если $f: X \to S$ — плоский морфизм, $x \in X$, причем точка $s = f(x)$ является Р. о. в S, а x — Р. о. слоя $X_s = f^{-1}(s)$, то x является Р. о. в X. 3) Если деформация $f: X \to S$ имеет гладкую базу S и допускает одновременное разрешение особенностей, то точка $x \in X$ является Р. о. тогда и только тогда, когда x является Р. о. в своем слое $f^{-1}(f(x))$.

В случае $\dim X = 2$ любая деформация многообразия Y, разрешающего Р. о. $P \in X$, определяет деформацию особенности P, к-рая получается, если стянуть исключительные кривые слоев данной деформации. В результате получается морфизм $\varphi : \mathrm{Def}\, Y \to \mathrm{Def}\, X$ баз версальных деформаций многообразия Y и особенности P. Образ $A = \varphi(\mathrm{Def}\, Y)$ есть неособая неприводимая компонента в $\mathrm{Def}\, X$, называемая компонентой Артина, а $\varphi : \mathrm{Def}\, Y \to A$ — накрытие Галуа, группа W к-рого может быть найдена при помощи графа Г особенности P (см. [2], [10]). В частности, для двойной Р. о. φ сюръективно и W совпадает с группой Вейля соответствующей алгебры Ли, т. е. версальная деформация Р. о. одновременно разрешается после накрытия Галуа базы деформации с группой Вейля W (см. [9]).

Лит.: [1] Artin M., «Amer. J. Math.», 1966, v. 88, p. 129—36; [2] его же, «J. Algebra», 1974, v. 29, № 2, p. 330—48; [3] Brieskorn E., «Invent. math.», 1968, v. 4, p. 336—58; [4] Elkik R., там же, 1978, v. 47, p. 139—47; [5] Kempf G., в кн.: Toroidal embeddings, v. 1, B.— [u. a.], 1973, p. 41—52; [6] Klein F., Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichung von fünften Grade, Lpz., 1884; [7] Laufer H. B., «Amer. J. Math.», 1972, v. 94, p. 597—608; [8] Reid M., в кн.: *Géométrie algébrique*, Rocquill, 1980, p. 273—311; [9] Slodowy P. J., Simple singularities and simple algebraic groups, B., 1980; [10] Wahl J., «Compos. math.», 1979, v. 38, p. 43—54; [11] Тюрина Г. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1968, т. 32, с. 943—70.

Вал. С. Куликов.

РАЦИОНАЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — двумерное алгебраич. многообразие, определенное над полем k, поле рациональных функций к-рого является чисто трансцендентным расширением поля k степени 2. Любая Р. п. X бирационально изоморфна проективному пространству P^2.

Геометрич. род p_g и иррегулярность q полной гладкой Р. п. X равны 0, то есть на X нет регулярных дифференциальных 2-форм и 1-форм. Все кратные роды $P_n = \dim H^0(X, O_X(nK_X))$ гладкой полной Р. п. X также равны 0, где K_X — канонич. дивизор поверхности X. Эти бирациональные инварианты выделяют Р. п. среди всех алгебраич. поверхностей, а именно, всякая гладкая полная алгебраич. поверхность с инвариантами $p_g = q = P_2 = 0$ является Р. п. (критерий рациональности Кастельнуово). Согласно другому критерию рациональности гладкая полная алгебраич. поверхность X является Р. п. тогда и только тогда, когда на X лежит неособая рациональная кривая C, индекс самопересечения к-рой $(C^2)_X > 0$.

Каждая алгебраич. поверхность, кроме Р. п. и линейчатых поверхностей, бирационально изоморфна

единственной минимальной модели. В классе Р. п. имеется счетное множество относительно минимальных моделей. Это — проективное пространство $\mathbf{P}^2$ и поверхности $F_n \simeq P(\mathscr{L}_n)$ (проективизации двумерных линейных расслоений над проективной прямой $\mathbf{P}^1$), $\mathscr{L}_n \simeq \simeq O_{\mathbf{P}^1} \oplus O_{\mathbf{P}^1}(-n)$, где $n \geqslant 0$ и $n \neq 1$. Другими словами, поверхность F_n — это расслоение на рациональные кривые над рациональной кривой, у к-рого есть сечение S_n — гладкая рациональная кривая с индексом самопересечения $(S_n^2)_F = -n$. Поверхность F_0 изоморфна прямому произведению $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, а поверхности F_n получаются из F_0 с помощью последовательности элементарных преобразований (см. [1]).

Р. п. имеют большую группу бирациональных преобразований (т. н. группу кремоновых преобразований).

Если на гладкой полной Р. п. антиканонич. пучок $O_X(-K_X)$ обилен, то X наз. поверхностью Дель Пеццо. Наибольшее целое число $r > 0$ такое, что $-K_X \sim rD$ для нек-рого дивизора D на X, наз. индексом поверхности Дель Пеццо. Индекс r может принимать значения 1, 2, 3 (см. [2]). Поверхность Дель Пеццо индекса 3 изоморфна $\mathbf{P}^2$. Для поверхности Дель Пеццо X индекса 2 рациональное отображение $\varphi_{O_X(D)} : X \to P^3$, определяемое пучком $O_X(D)$, дает бирациональный изоморфизм на квадрику в $\mathbf{P}^3$. Поверхности Дель Пеццо индекса 1 могут быть получены n моноидальными преобразованиями плоскости $\mathbf{P}^2$ с центрами в точках общего положения, где $1 \leqslant n \leqslant 8$ (см. [2]).

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [2] Исковских В. А., в сб.: Современные проблемы математики, т. 12, М., 1979, с. 59—157; [3] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981.

Вик. С. Кулихов.

РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ — 1) Р. ф. — функция $w = R(z)$, где $R(z)$ — рациональное выражение от z, т. е. выражение, полученное из независимого переменного z и нек-рого конечного набора чисел (действительных или комплексных) посредством конечного числа арифметич. действий. Р. ф. можно записать (не единственным образом) в виде

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где P, Q — многочлены, $Q(z) \not\equiv 0$. Коэффициенты этих многочленов наз. коэффициентами Р. ф. Дробь P/Q наз. несократимой, если P, Q не имеют общих нулей (то есть P, Q — взаимно простые многочлены). Всякую Р. ф. можно записать в виде несократимой дроби $R(z) = P(z)/Q(z)$; если при этом P имеет степень m, а Q — степень n, то степенью Р. ф. $R(z)$ наз. пару (m, n) или число

$$N = \max\{m, n\}.$$

Р. ф. степени (m, n) при $n = 0$, т. е. *многочлен*, наз. целой рациональной функцией, в противном случае — дробно-рациональной функцией. Р. ф. $R(z) \equiv 0$ не имеет степени. При $m < n$ дробь R наз. правильной, при $m \geqslant n$ — неправильной. Неправильную дробь можно единственным образом записать в виде

$$\frac{P}{Q} = P_1 + \frac{P_2}{Q},$$

где P_1 — многочлен, наз. целой частью дроби P/Q, а P_2/Q — правильная дробь. Правильная дробь с несократимой записью $R(z) = P(z)/Q(z)$, где

$$Q(z) = b(z - b_1)^{n_1} \ldots (z - b_l)^{n_l},$$

может быть единственным образом разложена в сумму

простейших дробей:

$$R(z) = \sum_{i=1}^{l} \frac{c_{i_1}}{z-b_i} + \frac{c_{i_2}}{(z-b_i)^2} + \ldots + \frac{c_{i_{n_i}}}{(z-b_i)^{n_i}}. \quad (1)$$

Если $P(x)/Q(x)$ — правильная Р. ф. с действительными коэффициентами и

$$Q(x) = b_0 (x-b_1)^{l_1} \ldots (x-b_r)^{l_r} (x^2+p_1x+q_1)^{t_1} \ldots \ldots (x^2+p_sx+q_s)^{t_s},$$

где $b_0, b_1, \ldots, b_r, p_1, q_1, \ldots, p_s, q_s$ — действительные числа, $p_j^2-4q_j<0$, $j=1, \ldots, s$, то $P(x)/Q(x)$ также единственным образом представляется в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r} \left[\frac{c_{i_1}}{x-b_i} + \frac{c_{i_2}}{(x-b_i)^2} + \ldots + \frac{c_{i_{l_i}}}{(x-b_i)^{l_i}} \right] + \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{D_{j_1}x+E_{j_1}}{x^2+p_jx+q_j} + \frac{D_{j_2}x+E_{j_2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + \ldots \ldots + \frac{D_{j_{t_j}}x+E_{j_{t_j}}}{(x^2+p_jx+q_j)^{t_j}} \right], \quad (2)$$

где все коэффициенты действительны. Эти коэффициенты, как и c_{ij} в (1), могут быть найдены *неопределенных коэффициентов методом*.

Р. ф. степени (m, n) в несократимой записи определена и аналитична в расширенной комплексной плоскости (т. е. плоскости, дополненной точкой $z=\infty$) за исключением конечного числа особых точек — полюсов в нулях ее знаменателя, а при $m>n$ еще и в точке ∞; при этом сумма кратностей полюсов функции R равна ее степени N. Обратно, всякая аналитич. функция, имеющая в расширенной комплексной плоскости в качестве особых точек только полюсы, является Р. ф.

В результате арифметич. действий над Р. ф. получают также Р. ф. (деление на $R(z)\equiv 0$ исключается), так что все Р. ф. образуют поле; вообще, Р. ф. с коэффициентами из нек-рого поля образуют поле. Если $R_1(z)$, $R_2(z)$ суть Р. ф., то и $R_1(R_2(z))$ является Р. ф. Производная порядка p от Р. ф. степени N есть Р. ф. степени $\leqslant (p+1)N$. Неопределенный интеграл (первообразная) от Р. ф. представляет собой сумму нек-рой Р. ф. и выражений вида $c_r \ln(z-b_r)$. Если Р. ф. $R(x)$ действительна при действительном x, то неопределенный интеграл $\int R(x)dx$ может быть записан в виде суммы нек-рой Р. ф. $R_0(x)$ с действительными коэффициентами, выражений вида

$$c_{i_1} \ln|x-b_i|, \quad M_j \ln(x^2+p_jx+q_j),$$

$$N_j \operatorname{arctg} \frac{2x+p_j}{\sqrt{4q_j-p_j^2}}, \quad i=1, \ldots, r; \ j=1, \ldots, s,$$

и произвольной постоянной C (здесь числа c_{i_1}, b_i, p_j, q_j — те же, что и в (2), M_j, N_j — нек-рые действительные числа). Функцию $R_0(x)$ по *Остроградского методу* можно найти, минуя разложение $R(x)$ на простейшие дроби (2).

Удобные для вычислений Р. ф. используются для приближенного представления функций. Рассматриваются также Р. ф. от нескольких действительных или комплексных переменных $R=P/Q$, где P, Q — многочлены от соответствующих переменных ($Q\not\equiv 0$), а также абстрактные Р. ф.

$$R = \frac{A_1\Phi_1 + \ldots + A_m\Phi_m}{B_1\Phi_1 + \ldots + B_n\Phi_n},$$

где $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ — линейно независимая система непрерывных функций на нек-ром бикомпакте X, а $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ — числа.

См. также *Дробно-линейная функция*, *Жуковского функция*.

Лит.: [1] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд., М., 1977; [2] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975. *Е. П. Долженко.*

2) Р. ф. на алгебраическом многообразии — обобщение классич. понятия рациональной функции (см. п. 1). Р. ф. на неприводимом алгебраич. многообразии X — это класс эквивалентности пар (U, f), где X — непустое открытое подмножество в X, а f — регулярная функция на U. Две пары (U, f) и (V, g) наз. эквивалентными, если $f=g$ на $U \cap V$. Р. ф. на X образуют поле, обозначаемое $k(X)$.

В случае, когда $X=\operatorname{Spec} R$ — аффинное неприводимое многообразие, поле Р. ф. на X совпадает с полем частных кольца R. Степень трансцендентности над k поля $k(X)$ наз. размерностью многообразия X.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972. *Вик. С. Куликов.*

РАЦИОНАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — алгебраическое многообразие X над алгебраически замкнутым полем k, поле рациональных функций $k(X)$ к-рого изоморфно чисто трансцендентному расширению конечной степени поля k. Другими словами, Р. м.— это алгебраич. многообразие X, бирационально изоморфное проективному пространству $\mathbf{P}^n$.

Полное гладкое Р. м. X обладает следующими бирациональными инвариантами. Размерности всех пространств $H^0(X, \Omega_X^k)$ регулярных дифференциальных k-форм на X равны 0. Кроме того, кратный род

$$P_n=\dim_k H^0(X, O_X(nK_X))=0 \text{ при } n>0,$$

где K_X — канонич. дивизор алгебраич. многообразия X, т. е. кодаировская размерность Р. м. X равна 0.

В малых размерностях перечисленные выше инварианты однозначно выделяют класс Р. м. среди всех алгебраич. многообразий. Так, если $\dim_k X=1$ и род алгебраич. кривой X равен 0, то X — рациональная кривая. Если $\dim_k X=2$, а арифметич. род

$$p_a=\dim_k H^0(X, \Omega_X^2)-\dim_k H^0(X, \Omega_X^1)=0$$

и кратный род $P_2=0$, то X — рациональная поверхность. Однако в случае $\dim_k X \geqslant 3$ нет хорошего критерия рациональности из-за отрицательного решения *Люрота проблемы*.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972. *Вик. С. Куликов.*

РАЦИОНАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — обобщение понятия *рациональной функции* на алгебраич. многообразии. А именно, рациональным отображением неприводимого алгебраич. многообразия X в алгебраич. многообразие Y (оба определены над полем k) наз. класс эквивалентности пар (U, φ_U), где U — непустое открытое подмножество в X, а φ_U — морфизм из U в Y. При этом пары (U, φ_U) и (V, φ_V) считаются эквивалентными, если φ_U и φ_V совпадают на $U \cap V$. В частности, Р. о. многообразия X в аффинную прямую есть рациональная функция на многообразии X. Для каждого Р. о. $\varphi: X \dashrightarrow Y$ существует такая пара $(\tilde{U}, \varphi_{\tilde{U}})$, что $U \subseteq \tilde{U}$ для любой эквивалентной ей пары (U, φ_U) и φ_U является ограничением $\varphi_{\tilde{U}}$ на U. Открытое подмножество $\tilde{U}$ наз. областью регулярности Р. о. φ, а $\varphi(\tilde{U})$ — образом многообразия X (обозначается $\varphi(X)$) при Р. о. φ.

Если $\varphi: X \dashrightarrow Y$ — Р. о. алгебраич. многообразий и образ $\varphi(X)$ плотен в Y, то φ определяет вложение полей $\varphi^*: k(Y) \to k(X)$. Обратно, вложение полей рациональных функций $\varphi^*: k(Y) \to k(X)$ определяет Р. о. многообразия X в Y. Если Р. о. φ индуцирует изоморфизм полей рациональных функций $k(X)$ и $k(Y)$,

то φ наз. бирациональным отображением.

Множество точек из X, в к-рых Р. о. $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ не регулярно, имеет в общем случае коразмерность 1. Но если Y — полное многообразие, а X — гладкое неприводимое многообразие, то множество точек из X, в к-рых φ не регулярно, имеет коразмерность не меньше двух. Если X и Y — полные неприводимые многообразия над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, то Р. о. $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ может быть включено в коммутативную диаграмму (см. [2]):



, (*)

где η, f — морфизмы алгебраич. многообразия Z, и η является композицией моноидальных преобразований. Если $\varphi : X \dashrightarrow Y$ — бирациональное отображение полных неособых поверхностей, то существует диаграмма (*), в к-рой оба морфизма f и η являются композициями моноидальных преобразований с неособыми центрами (теорема Зарисского), т. е. любое бирациональное отображение полных неособых поверхностей раскладывается в композицию моноидальных преобразований с неособыми центрами и обратных к ним отображений. В случае $\dim X \geqslant 3$ аналогичный вопрос о разложении бирационального отображения открыт (1983).

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Hironaka H., «Ann. Math.», 1964, v. 79, № 1—2, p. 109—326. *Вик. С. Куликов.*

РАЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ алгебраической группы G — линейное представление алгебраич. группы G над алгебраически замкнутым полем k в конечномерном векторном пространстве V над k, являющееся рациональным (и тем самым регулярным) гомоморфизмом группы G в $\mathrm{GL}(V)$. Говорят также, что V — рациональный G-модуль. Прямая сумма и тензорное произведение конечного числа Р. п. группы G являются Р. п.; подпредставление и факторпредставление нек-рого Р. п. являются Р. п.; симметрическая или внешняя степень любого Р. п. является Р. п.; представление, контрагредиентное к Р. п., является Р. п.

Если G конечна, то всякое ее линейное представление будет Р. п. и теория Р. п. сливается с теорией представлений конечных групп. В наибольшей степени специфич. методы теории линейных алгебраич. групп используются при исследовании Р. п. в том случае, когда рассматриваемая группа связна, причем наиболее глубоко развита теория Р. п. связных полупростых алгебраич. групп. Далее G — такая группа. Пусть T — ее максимальный тор, $\mathrm{X}(T)$ — его группа рациональных характеров (записываемая аддитивно), Σ — система корней группы G относительно T, W — ее группа Вейля. И пусть $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ есть Р. п. Ограничение представления φ на T разлагается в прямую сумму одномерных представлений, точнее

$$V = \oplus_{\chi \in P_\varphi} V(\chi),$$

где $P_\varphi \subset \mathrm{X}(T)$ — нек-рое множество характеров тора T, называемых весами представления, а

$$V(\chi) = \{v \in V \mid \varphi(t)\, v = \chi(t)\, v \quad \forall t \in T\} \neq 0.$$

Множество весов P_φ инвариантно относительно W.

Если $\mathrm{char}\ k = 0$, то всякое Р. п. группы G вполне приводимо, но если $\mathrm{char}\ k > 0$, то это уже не так (см. *Мамфорда гипотеза*). Однако при любой характеристике

поля k имеется полное описание неприводимых Р. п. Пусть B — борелевская подгруппа в G, содержащая T, и Δ — определяемая ею система простых корней в Σ. Группа $X(B)$ рациональных характеров группы B отождествляется с $X(T)$. В пространстве V любого неприводимого Р. п. $\varphi: G \to GL(V)$ существует единственное одномерное весовое подпространство $V(\delta_\varphi)$, $\delta_\varphi \in P_\varphi$, инвариантное относительно группы B. Характер δ_φ наз. старшим весом неприводимого Р. п. φ; он доминантен, т. е. скалярное произведение $(\delta_\varphi, \alpha) \geqslant 0$ для любого $\alpha \in \Delta$, а всякий другой вес $\chi \in P_\varphi$ имеет вид

$$\chi = \delta_\varphi - \sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha \alpha, \quad m_\alpha \in \mathbb{Z}, \quad m_\alpha \geqslant 0.$$

Отображение $\varphi \mapsto \delta_\varphi$ определяет биекцию между классами эквивалентных неприводимых Р. п. и доминантными элементами из $X(T)$. Явная конструкция всех неприводимых Р. п. может быть получена следующим образом. Пусть $k[G]$ — алгебра регулярных функций на G. Для любого $\chi \in X(T) = X(B)$ рассматривается подпространство

$$k[G]_\chi = \{f \in k[G] \mid f(gb) = \chi(b) f(g) \ \forall b \in B, \ g \in G\}.$$

Оно конечномерно и является рациональным G-модулем относительно действия группы G левыми сдвигами. Геометрич. смысл этого пространства таков: оно канонически отождествляется с пространством регулярных сечений одномерного однородного векторного расслоения над G/B, определенного характером $-\chi$. Пусть $w_0 \in W$ — элемент, переводящий положительные корни в отрицательные. Тогда если $k[G]_{-w_0(\chi)} \neq 0$, то χ — доминантный характер и минимальный ненулевой G-подмодуль в $k[G]_{-w_0(\chi)}$ является неприводимым рациональным G-модулем со старшим весом χ. Всякий неприводимый рациональный G-модуль получается при помощи такой конструкции. Если $\mathrm{char}\ k = 0$, то уже сам G-модуль $k[G]_{-w_0(\chi)}$ неприводим.

Для получения неприводимых Р. п. часто используются упомянутые выше операции над Р. п. Напр., если φ_i — неприводимое Р. п. со старшим весом χ_i, $i = 1, \ldots, d$, то нек-рое факторпредставление $\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_d$ является неприводимым Р. п. со старшим весом $\chi_1 + \ldots + \chi_d$ (оно наз. картановской композицией Р. п. $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$). Если φ — неприводимое Р. п. со старшим весом χ, то нек-рое факторпредставление S^d_φ является неприводимым Р. п. со старшим весом $d\chi$, а φ^* — неприводимо и его старшим весом является $-w_0(\chi)$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Если $\varphi: G \to GL(V)$ есть Р. п., то его дифференциал $d\varphi$ является представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Р. п. φ наз. инфинитезимально неприводимым, если $d\varphi$ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$. Инфинитезимально неприводимое Р. п. неприводимо, а в случае $\mathrm{char}\ k = 0$ верно и обратное (что в значительной степени сводит теорию Р. п. группы к теории представлений ее алгебры Ли), однако в случае $\mathrm{char}\ k > 0$ это уже не так. Инфинитезимально неприводимые Р. п. в этом случае — это в точности неприводимые Р. п. со старшими весами χ, для к-рых

$$0 \leqslant \frac{2(\chi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} < p \text{ при любом } \alpha \in \Delta.$$

Более того, все неприводимые Р. п. могут быть построены при помощи инфинитезимально неприводимых. Точнее, если G односвязна, т. е. если $X(T)$ совпадает с решеткой весов корневой системы Σ, то всякое неприводимое Р. п. однозначно разлагается в тензорное про-

изведение вида

$$\varphi_0 \otimes \varphi_1^{\mathrm{Fr}} \otimes \ldots \otimes \varphi_d^{\mathrm{Fr}^d},$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_d$ инфинитезимально неприводимы, а $\varphi_i^{\mathrm{Fr}^i}$ — представление, полученное применением к матричным элементам представления φ_i автоморфизма Фробениуса $a \mapsto a^{P^i} (a \in k)$, $P = \mathrm{char}\, k$.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] его же, в кн.: Algebraic geometry, Providence, 1975, p. 421—40 (Proc. Symposia in pure math., v. 29, Arkata, 1974); [3] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980; [4] Семинар по алгебраическим группам, пер. с англ., М., 1973; [5] Стейнберг Р., Лекции о группах Шевалле, пер. с англ., М., 1975; [6] его же, «Nagoya math. J.», 1963, v. 22, p. 33—56; [7] Hochschild G., The structure of Lie groups, S. F., 1965; [8] Humphreys J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, N. Y. — [a. o.], 1972.

В. Л. Попов.

РАЦИОНАЛЬНОЕ ЧИСЛО — число, выражаемое рациональной дробью. Формальная теория Р. ч. строится с помощью пар целых чисел. Рациональной дробью $\frac{a}{b}$ наз. упорядоченная пара (a, b) целых чисел a и b, у к-рой $b \neq 0$. Две рациональные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ наз. эквивалентными (равными) тогда и только тогда, когда $ad = bc$. Это соотношение эквивалентности, будучи рефлексивно, симметрично и транзитивно, разбивает множество всех рациональных дробей на классы эквивалентности. Рациональным числом наз. каждый класс эквивалентности рациональных дробей. Разные классы определяют разные Р. ч. Множество Р. ч. счетно. Р. ч., содержащее рациональную дробь вида $\frac{0}{b}$, наз. нулем. Если r есть Р. ч. и $\frac{a}{b} \in r$, то Р. ч., содержащее рациональную дробь $\frac{-a}{b}$, наз. рациональным числом, противоположным Р. ч. r, и обозначается через $-r$. Р. ч. r наз. положительным (отрицательным), если оно содержит рациональную дробь $\frac{a}{b}$, у к-рой a и b одного знака (разных знаков). Если Р. ч. положительно (отрицательно), то противоположное ему число отрицательно (положительно). В множестве Р. ч. вводится упорядоченность: всякое отрицательное Р. ч. считается меньшим всякого положительного, положительное Р. ч. r' считается меньшим положительного Р. ч. r'': $r' < r''$, если существуют такие рациональные дроби $\frac{a}{b} \in r'$ и $\frac{c}{d} \in r''$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, что $ad < bc$; всякое отрицательное (положительное) Р. ч. r считается меньше (больше) нуля: $r < 0$ ($r > 0$); отрицательное Р. ч. r' считается меньшим отрицательного Р. ч. r'', если положительное Р. ч.— r' больше положительного Р. ч.— r'': $-r' > -r''$. Абсолютная величина $|r|$ Р. ч. определяется как обычно: $|r| = r$, если $r \geqslant 0$, и $|r| = -r$, если $r < 0$.

Суммой рациональных дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ наз. рациональная дробь $\frac{ad + bc}{bd}$, а произведением — $\frac{ac}{bd}$. Суммой и произведением Р. ч. r' и r'' наз. классы эквивалентных рациональных дробей, содержащие соответственно сумму или произведение рациональных дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, принадлежащих r' и r'': $\frac{a}{b} \in r'$, $\frac{c}{d} \in r''$. Упорядоченность, сумма и произведение Р. ч. r' и r'' не зависят от выбора представителей в соответствующих классах эквивалентности $\frac{a}{b} \in r'$ и $\frac{c}{d} \in r''$, т. е. однозначно определяются самими Р. ч. r' и r''. Р. ч. образуют упорядоченное поле, обозначаемое $\mathbb{Q}$.

Для обозначения Р. ч. r применяются рациональные дроби $\frac{a}{b}$ из класса эквивалентности, задающего это число: $\frac{a}{b} \in r$. Таким образом, одно и то же Р. ч. может быть записано разными, но эквивалентными рациональными дробями.

Если каждому Р. ч., содержащему рациональную дробь вида $\frac{a}{1}$, поставить в соответствие целое число a, то получится изоморфное отображение множества указанных Р. ч. на кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел. Поэтому Р. ч., содержащие рациональные дроби вида $\frac{a}{1}$, обозначают через a.

Всякая функция вида

$$\varphi(r) = |r|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{1}$$

является метрикой в поле Р. ч. $\mathbb{Q}$, то есть удовлетворяет условиям:

1) $\varphi(r) > 0$ при любом $r \neq 0$, $\varphi(0) = 0$;

2) $\varphi(r' + r'') \leqslant \varphi(r') + \varphi(r'')$;

3) $\varphi(r', r'') = \varphi(r')\,\varphi(r'')$

при любых $r' \in \mathbb{Q}$ и $r'' \in \mathbb{Q}$. Поле Р. ч. не является полным в метрике (1). Пополнением поля Р. ч. по метрике (1) является поле действительных чисел.

Функция

$$\Psi_p(r) = \rho^{\nu(r)}, \tag{2}$$

где p — простое число, r — Р. ч., представимое в виде

$$r = p^{\nu(r)}\frac{a}{b}$$

($\nu(r)$ — целое, $\frac{a}{b}$ — несократимая рациональная дробь, причем числа a и b не делятся на p), а ρ — фиксированное число, $0 < \rho < 1$, также является метрикой в поле Р. ч. $\mathbb{Q}$. Она наз. p-адической метрикой. Поле Р. ч. $\mathbb{Q}$ с метрикой (2) не является полным. Пополнением поля Р. ч. по метрике (2) является поле *p-адических чисел*. Метрики (1) и (2) (для всех простых чисел) исчерпывают все нетривиальные метрики в поле Р. ч.

В десятичной записи Р. ч. и только они представимы периодическими десятичными дробями.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Пизо Ш., Заманский М., Курс математики. Алгебра и анализ, пер. с франц., М., 1971.

Л. Д. Кудрявцев.

РАЦИОНАЛЬНОСТИ ТЕОРЕМЫ для алгебраических групп — утверждения о рациональности (унирациональности) или нерациональности тех или иных групповых алгебраич. многообразий. Так как абелевы многообразия всегда нерациональны, то основной интерес представляют Р. т. для линейных алгебраич. групп. Здесь проблема рациональности имеет два существенно различных аспекта: геометрический и арифметический, отвечающие соответственно алгебраически замкнутому и незамкнутому основному полю K. Первые Р. т. над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел были фактически доказаны еще Э. Пикаром (E. Picard) и в современной терминологии устанавливают унирациональность многообразий связных комплексных групп. В явной форме проблема рациональности групповых многообразий была поставлена К. Шевалле [1] лишь в 1954. Прогресс в этом направлении тесно связан с достижениями структурной теории алгебраич. групп. Так, разложение Леви позволяет свести проблему рациональности к редуктивным группам, а разложение Бюа — доказать рациональность многообразий редуктивных групп над любым алгебраически замкнутым полем. Таким образом, в геометрич. случае имеется окончательный результат.

Гораздо более сложной оказывается ситуация для незамкнутых полей K. Примеры нерациональных K-многообразий доставляют уже алгебраич. торы; напр., трехмерный нормальный тор $T=R^{(1)}_{L/K}(G_m)$, соответствующий биквадратичному расширению $L=K(\sqrt{a},\sqrt{b})$ поля K (см. [1]). Этот пример минимален, ибо торы размерности $\leqslant 2$ рациональны. В общем случае алгебраич. торы всегда унирациональны. Произвольные связные K-группы не обязательно унирациональны [3], однако, если поле K совершенно или группа G редуктивна, унирациональность имеет место (см. [1] — [4]). Тем самым проблема рациональности групповых многообразий имеет характер *Люрота проблемы* над незамкнутым полем.

Так как произвольная редуктивная группа является почти прямым произведением тора и полупростой группы, то естественно различать два основных случая: 1) G — тор; 2) G — полупростая группа. В первом случае исследование проводится при помощи различных когомологич. инвариантов (для полупростых групп эти инварианты оказываются неэффективными). Достаточно законченные результаты имеются для торов, разложимых над абелевым расширением поля определения (см. [5]). Первый пример нерационального многообразия в классе полупростых групп был неодносвязной группой, конструкция к-рой фактически содержится в [10]. Возникшая при этом гипотеза о том, что многообразия односвязных групп всегда рациональны, была решена отрицательно В. П. Платоновым при помощи развитой им приведенной K-теории (см. [6], [7]). Оказалось, что приведенная группа Уайтхеда $SK_1(D)$ конечномерной центральной простой K-алгебры D тривиальна, если многообразие, определяемое $SL(1,\ D)$, рационально над K. Эти результаты были перенесены на унитарные группы [12]. Ряд результатов связан с исследованием рациональности спинорных многообразий $\mathrm{Spin}(n,\ f)$, где f — невырожденная квадратичная форма над K от n переменных ($\mathrm{char}\ K\neq 2$). Спинорные многообразия рациональны, если либо $n\leqslant 5$, либо поле K является недискретным локально компактным или полем рациональных чисел (см. [8], [9], [11]); для $n\geqslant 6$ существуют нерациональные спинорные многообразия [8]. Последний результат удивителен тем, что $\mathrm{Spin}\ (n,\ f)$ является двулистным накрытием рационального многообразия $\mathrm{SO}\ (n,\ f)$.

Термин «Р. т.» иногда употребляется в теории алгебраич. групп в несколько ином смысле, применительно к утверждениям о свойствах групп над не обязательно алгебраически замкнутым полем. К утверждениям такого типа относится, напр., теорема Розенлихта — Гротендика о том, что любая связная K-группа обладает максимальным тором, определенным над K (см. [4]).

Лит.: [1] Chevalley C., «J. Math. Soc. Japan», 1954, v. 6, № 3/4, p. 303—24; [2] Demazure M., Grothendieck A., Schemas en groupes, B.— [u. a.], 1970; [3] Rosenlicht M., «Ann. mat. pura appl.», 1957, v. 43, p. 25—50; [4] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [5] Воскресенский В. Е., Алгебраические торы, М., 1977; [6] Платонов В. П., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1976, т. 142, с. 198—207; [7] его же, «Докл. АН БССР», 1977, т. 21, № 3, с. 197—98; [8] его же, «Докл. АН СССР», 1979, т. 248, № 3, с. 524—27; [9] его же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1981, т. 157, с. 161—69; [10] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [11] Черноусов В. И., «Докл. АН БССР», 1981, т. 25, № 4, с. 293—96; [12] Янчевский В. И., «Матем. сб.», 1979, т. 110, № 4, с. 579—96.

А. С. Рапинчук.

РЕАЛИЗУЕМОСТЬ — один из видов неклассич. *интерпретаций* логических и логико математических языков. Различные интерпретации типа Р. определяются по следующей схеме. Для формул логико-математич. языка определяется отношение «объект e реализует замкнутую формулу F», к-рое сокращенно записывается «erF». Определение носит индуктивный характер:

сначала отношение erF определяется для элементарных формул F, а затем для сложных формул в предположении, что для составляющих их более простых формул это отношение уже определено. Замкнутая формула F наз. р е а л и з у е м о й, или истинной при данной интерпретации, если существует такой объект e, что erF. Формула F, содержащая свободные переменные $x_1, \ldots, x_n$, считается реализуемой, если реализуема замкнутая формула $\forall x_1 \ldots \forall x_n F$.

Впервые интерпретация такого вида, известная как *рекурсивная реализуемость*, была предложена С. Клини (см. [1], [2]) с целью уточнения интуиционистской (конструктивной) семантики языка формальной арифметики в терминах *рекурсивных функций*. Другие понятия Р. являются модификациями рекурсивной Р.

Интуитивный смысл отношения erF такой: объект e кодирует информацию об истинности формулы F. Напр., в рекурсивной Р. натуральное число 0 реализует элементарную формулу вида $s=t$ тогда и только тогда, когда эта формула верна (т. е. значения термов s и t совпадают); если число e реализует дизъюнкцию $A \vee B$, то по нему можно выяснить, какой ее член реализуем, и найти число, его реализующее; по числу, реализующему формулу $\forall x A(x)$, можно построить алгоритм, к-рый по любому натуральному числу n строит реализацию формулы $A(n)$. В качестве реализаций, т. е. объектов, реализующих формулы, чаще всего выступают натуральные числа. Однако при интуиционистской интерпретации языка математич. анализа в качестве реализаций могут использоваться и другие объекты, напр. одноместные теоретико-числовые функции (см., напр., [3]).

Для формул логич. языков, напр. для пропозициональных или предикатных формул, Р. определяется обычно через понятие Р. для того или иного логико-математич. языка Ω. Логич. формула $\mathfrak{A}$ считается реализуемой, если реализуема всякая формула языка Ω, получающаяся подстановкой в $\mathfrak{A}$ формул языка Ω вместо предикатных переменных.

Интерпретации типа Р. нашли широкое применение в исследовании неклассических, прежде всего интуиционистских и конструктивных, логических и логико-математич. теорий. Имеется описание различных понятий Р. и их применений в теории доказательств для исследования интуиционистских теорий (см. [3], [4]).

Лит.: [1] K l e e n e S. C., «J. Symbolic Logic», 1945, v. 10, p. 109—24; [2] К л и н и С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] К л и н и С., В е с л и Р., Основания интуиционистской математики..., пер. с англ., М., 1978; [4] Д р а г а л и н А. Г., Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., 1979.

В. Е. Плиско.

РЕБРО м н о г о г р а н н и к а — сторона грани многогранника.

РЕГРЕССИИ КОЭФФИЦИЕНТ — коэффициент при независимой переменной в уравнении *регрессии*. Так, напр., в уравнении линейной регрессии $E(Y|X=x)=\beta_0+\beta_1 x$, связывающей случайные величины Y и X, Р. к. β_0 и β_1 равны:

$$\beta_0 = m_2 - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} m_1, \quad \beta_1 = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1},$$

где ρ — *корреляции коэффициент* X и Y, $m_1=\mathsf{E}X$, $m_2=\mathsf{E}Y$, $\sigma_1^2=\mathsf{D}X$, $\sigma_2^2=\mathsf{D}Y$. Вычисление оценок Р. к. (в ы б о р о ч н ы х Р. к.) — основная задача *регрессионного анализа*.

А. В. Прохоров.

РЕГРЕССИИ МАТРИЦА — матрица B коэффициентов регрессии β_{ji}, $j=1, \ldots m$, $i=1, \ldots, r$, в многомерной линейной модели *регрессии*

$$X = BZ + \varepsilon. \qquad (*)$$

Здесь X — матрица с элементами X_{jk}, $j=1, \ldots, m$, $k=1, \ldots, n$, X_{jk}, $k=1, \ldots, n$, — наблюдения над j-й компонентой исходной m-мерной случайной величины; Z — матрица известных регрессионных пере-

менных z_{ik}, $i=1, \ldots, r$, $k=1, \ldots, n$; ε — матрица ошибок ε_{jk}, $j=1, \ldots, m$, $n=1, \ldots, n$, с $\mathsf{E}\varepsilon_{jk}=0$. Элементы β_{ji} Р. м. В неизвестны и подлежат оценке. Модель (*) является обобщением на m-мерный случай общей линейной модели *регрессионного анализа*.

Лит.: [1] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

А. В. Прохоров.

РЕГРЕССИИ ПОВЕРХНОСТЬ (гиперповерхность) — общее геометрич. представление уравнения регрессии. Если заданы случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и

$$f(x_2, \ldots, x_n)=\mathsf{E}(X_1 \mid X_2=x_2, \ldots, X_n=x_n)$$

— регрессия X_1 по $X_2, \ldots, X_n$, то уравнение $y=f(x_2, \ldots, x_n)$ задает в n-мерном пространстве соответствующую Р. п. При $n=2$ Р. п. обычно наз. кривой регрессии. Иногда эти термины используются для того, чтобы подчеркнуть, что соответствующие уравнения регрессии не являются линейными. В линейном случае Р. п. наз. соответственно плоскостью регрессии и прямой регрессии. См. *Регрессия*.

А. В. Прохоров.

РЕГРЕССИЙ СПЕКТР — спектр случайного процесса, входящего в регрессионную схему для стационарных временны́х рядов. Именно, пусть случайный процесс y_t, наблюдаемый при $t=1, \ldots, n$, представляется в виде

$$y_t=m_t+x_t, \qquad (1)$$

где x_t — стационарный процесс с $\mathsf{E}x_t=0$, а среднее значение $\mathsf{E}y_t=m_t$ выражено в форме линейной регрессии

$$m_t=\sum_{k=1}^{s}\beta_k\varphi_t^{(k)}, \qquad (2)$$

где $\varphi^{(k)}=(\varphi_1^{(k)}, \ldots, \varphi_n^{(k)})$, $k=1, \ldots, s$, — известные регрессионные векторы, $\beta_1, \ldots, \beta_s$ — неизвестные *регрессии коэффициенты*. Пусть $M(\lambda)$ — спектральная функция распределения регрессионных векторов $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(s)}$. Спектром регрессии для $M(\lambda)$ наз. множество всех λ таких, что $M(\lambda_2)-M(\lambda_1)>0$ для любого интервала (λ_1, λ_2), содержащего λ, $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$.

Р. с. играет важную роль в задачах оценки коэффициентов регрессии в схеме (1) — (2). В терминах элементов Р. с. выражается, напр., необходимое и достаточное условие асимптотич. эффективности оценок β по методу наименьших квадратов.

Лит.: [1] Гренандер У., Розенблатт М., Statistical analysis of stationary time series, Stockh., 1956.

А. В. Прохоров.

РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ — раздел математич. статистики, объединяющий практич. методы исследования регрессионной зависимости между величинами по статистич. данным (см. *Регрессия*). Проблема регрессии в математич. статистике характерна тем, что о распределениях изучаемых величин нет достаточной информации. Пусть, напр., имеются основания предполагать, что случайная величина Y имеет нек-рое распределение вероятностей при фиксированном значении x другой величины, так что

$$\mathsf{E}(Y \mid x)=g(x, \beta),$$

где β — совокупность неизвестных параметров, определяющих функцию $g(x)$, и нужно по результатам наблюдений определить значения параметров. В зависимости от природы задачи и целей анализа результаты эксперимента $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ по-разному интерпретируются в отношении переменной x. Для установления связи между величинами в эксперименте используется модель, основанная на упрощенных допущениях: величина x является контролируемой величиной, значения к-рой заранее задаются при планировании эксперимента, а наблюдаемые значения y представимы в виде

$$y_i=g(x_i, \beta)+\varepsilon_i, \quad i=1, \ldots, n,$$

где величины ε_i характеризуют ошибки, независимые при различных измерениях и одинаково распределенные с нулевым средним и постоянной дисперсией. В случае неконтролируемой переменной результаты наблюдений $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ представляют собой выборку из нек-рой двумерной совокупности. Методы Р. а. одинаковы и в том, и в другом случае, однако интерпретация результатов различается (в последнем случае анализ существенно дополняется методами теории *корреляции*).

Исследование регрессии по экспериментальным данным производится методами, основанными на принципах средней квадратич. регрессии. Р. а. решает следующие основные задачи: 1) выбор модели регрессии, что заключает в себе предположения о зависимости функций регрессии от x и β, 2) оценка параметров β в выбранной модели методом наименьших квадратов, 3) проверка статистич. гипотез о регрессии.

Наиболее естественной с точки зрения единого метода оценки неизвестных параметров является модель регрессии, линейная относительно этих параметров:

$$g(x, \beta) = \beta_0 g_0(x) + \ldots + \beta_m g_m(x).$$

Выбор функций $g_i(x)$ иногда определяется по расположению экспериментальных значений (x,y) на диаграмме рассеяния, чаще — теоретич. соображениями. Предполагается также, что дисперсия σ^2 результатов наблюдений постоянна (или пропорциональна известной функции от x). Стандартный метод оценки регрессии основан на использовании многочлена нек-рой степени m, $1 \leqslant m < n$:

$$g(x, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_m x^m$$

или в простейшем случае — линейной функции (*линейная регрессия*)

$$g(x, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Существуют критерии линейности и рекомендации по выбору степени аппроксимирующего многочлена.

В соответствии с принципами средней квадратич. регрессии оценка неизвестных *регрессии коэффициентов* $\beta_0, \ldots, \beta_m$ и дисперсии σ^2 осуществляется методом наименьших квадратов. Согласно этому методу в качестве статистич. оценок параметров $\beta_0, \ldots, \beta_m$ выбираются такие значения $\hat{\beta}_0, \ldots, \hat{\beta}_m$, к-рые обращают в минимум выражение

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - g(x_i))^2.$$

Многочлен $\hat{g}(x) = \hat{\beta}_0 + \ldots + \hat{\beta}_m x^m$, построенный методом наименьших квадратов, наз. эмпирической линией регрессии и является статистич. оценкой неизвестной истинной линии регрессии. При гипотезе линейности регрессии уравнение эмпирич. прямой регрессии имеет вид

$$\hat{g}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x,$$

где

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}, \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - y)}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_i y_i.$$

Случайные величины $\hat{\beta}_0, \ldots, \hat{\beta}_m$ наз. выборочными коэффициентами регрессии. Несмещенная оценка параметра σ^2 дается формулой

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{g}(x_i))^2 / (n - m).$$

Если дисперсия зависит от x, то метод наименьших квадратов применим с нек-рыми видоизменениями.

Если изучается зависимость случайной величины Y от нескольких переменных $x_1, \ldots, x_k$, то общую линейную модель регрессии удобнее записывать в матричной форме: вектор наблюдений y с независимыми компонентами $y_1, \ldots, y_n$ имеет среднее значение и ковариационную матрицу

$$\mathsf{E}(Y \mid x_1, \ldots, x_k) = X\beta, \ \mathsf{D}(Y \mid x_1, \ldots, x_k) = \sigma^2 I, \quad (*)$$

где $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$ — вектор коэффициентов регрессии, $X = \|x_{ij}\|$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$, — матрица известных величин, связанных друг с другом, вообще говоря, произвольным образом, I — единичная матрица n-го порядка; при этом $n > k$ и $|X^{\mathrm{T}}X| \neq 0$. В более общем случае допускается корреляция между наблюдениями y_i:

$$\mathsf{E}(Y \mid x_1, \ldots, x_k) = X\beta, \ \mathsf{D}(Y \mid x_1, \ldots, x_k) = \sigma^2 A,$$

где матрица A известна, но эта схема сводится к модели (*). Несмещенной оценкой β по методу наименьших квадратов является величина

$$\hat{\beta} = (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}y,$$

а смещенной оценкой для σ^2 служит

$$s^2 = \frac{1}{n-k}(y^{\mathrm{T}}y - \hat{\beta}^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}y).$$

Модель (*) является наиболее общей линейной моделью, поскольку она применима к различным регрессионным ситуациям и включает в себя все виды *параболической регрессии* Y по $x_1, \ldots, x_k$ (в частности, рассмотренная выше параболич. регрессия Y по x порядка m может быть сведена к модели (*), в к-рой m регрессионных переменных функционально связаны). При таком линейном понимании Р. а. задача оценки β и вычисления ковариационной матрицы оценок $\mathsf{D}\hat{\beta} = \sigma^2(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}$ сводится к задаче обращения матрицы $X^{\mathrm{T}}X$.

Указанный метод построения эмпирич. регрессии в предположении нормального распределения результатов наблюдений приводит к оценкам для β и σ^2, совпадающим с оценками наибольшего правдоподобия. Однако оценки, полученные этим методом, являются в нек-ром смысле наилучшими и в случае отклонения от нормальности, если только объем выборки достаточно велик.

В данной матричной форме общая линейная модель регрессии (*) допускает простое обобщение на тот случай, когда наблюдаемые величины y_i являются векторными случайными величинами. При этом никакой новой статистич. задачи не возникает (см. *Регрессии матрица*).

Задачи Р. а. не ограничиваются построением точечных оценок параметров β и σ^2 общей линейной модели (*). Проблема точности построенной эмпирич. зависимости наиболее эффективно разрешается при допущении, что вектор наблюдений y распределен нормально. Если вектор y распределен нормально и любая оценка $\hat{\beta}$ является линейной функцией от y, можно заключить, что величина $\hat{\beta}_i$ распределена нормально со средним β_i и дисперсией $\mathsf{D}\hat{\beta}_i = \sigma^2 b_{ii}$, где b_{ii} — диагональный элемент матрицы $(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}$. Кроме того, оценка s^2 для σ^2 распределена независимо от любой компоненты вектора $\hat{\beta}$, а величина $(n-k)s^2/\sigma^2$ имеет «*хи-квадрат*» *распределение* с $(n-k)$ степенями свободы. Отсюда следует, что статистика

$$t = (\hat{\beta}_i - \beta_i)/[s^2 b_{ii}]^{1/2}$$

подчиняется *Стьюдента распределению* с $n-k$ степенями свободы. Этот факт используется для построения до-

верительных интервалов для параметров β_i и для проверки гипотез о значениях, к-рые принимает величина β_i. Кроме того, появляется возможность найти доверительные интервалы для $\mathsf{E}(Y|x_1, \ldots, x_k)$ при фиксированных значениях всех регрессионных переменных и доверительные интервалы, содержащие следующее $(n+1)$-е значение величины y (т. н. интервалы предсказания). Наконец, можно на основе вектора выборочных коэффициентов регрессии $\hat{\beta}$ построить доверительный эллипсоид для вектора β или для любой совокупности неизвестных коэффициентов регрессии, а также доверительную область для всей линии или прямой регрессии.

Р. а. является одним из наиболее распространенных методов обработки экспериментальных данных при изучении зависимостей в физике, биологии, экономике, технике и др. областях. На моделях Р. а. основаны такие разделы математич. статистики, как дисперсионный анализ и планирование эксперимента, эти модели широко используются в *многомерном статистическом анализе*.

Лит.: [1] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Смирнов Н. В., Дунин-Барковский Н. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969; [3] Айвазян С. А., Статистическое исследование зависимостей, М., 1968; [4] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [5] Дрейпер Н., Смит Г., Прикладной регрессионный анализ, пер. с англ., М., 1973. *А. В. Прохоров.*

РЕГРЕССИЯ — зависимость среднего значения какой-либо случайной величины от нек-рой другой величины или от нескольких величин. Если, например, при каждом значении $x=x_i$ наблюдается n_i значений $y_{i1}, \ldots, y_{in_i}$ случайной величины Y, то зависимость средних арифметических

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i}(y_{i1} + \ldots + y_{in_i})$$

этих значений от x_i и является Р. в статистич. понимании этого термина. При обнаруженной закономерности изменения $\bar{y}$ с изменением x предполагается, что в основе наблюдаемого явления лежит вероятностная зависимость: при каждом фиксированном значении x случайная величина Y имеет определенное распределение вероятностей с математич. ожиданием, к-рое является функцией x:

$$\mathsf{E}(Y|x) = m(x).$$

Зависимость $y=m(x)$, где x играет роль «независимой» переменной, наз. регрессией (или функцией регрессии) в вероятностном понимании этого термина. График функции $m(x)$ наз. линией регрессии, или кривой регрессии, величины Y по x. Переменная x наз. регрессионной переменной, или регрессором. Точность, с к-рой линия регрессии Y по x передает изменение Y в среднем при изменении x, измеряется дисперсией величины Y, вычисляемой для каждого значения x:

$$\mathsf{D}(Y|x) = \sigma^2(x).$$

Графически зависимость дисперсии $\sigma^2(x)$ от x выражается т. н. скедастической линией. Если $\sigma^2(x)=0$ при всех значениях x, то с вероятностью 1 величины связаны строгой функциональной зависимостью. Если $\sigma^2(x)\neq 0$ ни при каком значении x и $m(x)$ не зависит от x, то регрессия Y по x отсутствует.

В теории вероятностей задача Р. решается применительно к такой ситуации, когда значения регрессионной переменной x соответствуют значениям нек-рой случайной величины X и предполагается известным совместное распределение вероятностей величин X и Y (при этом математич. ожидание $\mathsf{E}(Y|x)$ и дисперсия $\mathsf{D}(Y|x)$ будут соответственно условным математич. ожиданием и условной дисперсией случайной величины

Y при фиксированном значении $X=x$). В этом случае определены две Р.: Y по x и X по y, и понятие Р. может быть использовано также для того, чтобы ввести некрые меры взаимосвязанности случайных величин X и Y, определяемые как характеристики степени концентрации распределения около линий Р. (см. *Корреляция*).

Функции Р. обладают тем свойством, что среди всех действительных функций $f(x)$ минимум математич. ожидания $\mathsf{E}(Y-f(x))^2$ достигается для функции $f(x)=m(x)$, то есть регрессия Y по x дает наилучшее (в указанном смысле) представление величины Y. Наиболее важным является тот случай, когда регрессия Y по x линейна, т. е.

$$\mathsf{E}(Y \mid x)=\beta_0+\beta_1(x).$$

Коэффициенты β_0 и β_1, наз. коэффициентами Р., легко вычисляются:

$$\beta_0=m_Y-\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}m_X,\ \beta_1=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

(здесь ρ — *корреляции коэффициент* X и Y, $m_X=\mathsf{E}X$, $m_Y=\mathsf{E}Y$, $\sigma_X^2=\mathsf{D}X$, $\sigma^2=\mathsf{D}Y$), и прямая регрессии Y по x имеет вид

$$y=m_Y+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)$$

(аналогичным образом находится прямая регрессии X по y). Точная линейная Р. имеет место в случае, когда двумерное распределение величин X и Y является нормальным.

В условиях статистич. приложений, когда для точного определения Р. нет достаточных сведений о форме совместного распределения вероятностей, возникает задача приближенного нахождения Р. Решению этой задачи может служить выбор из всех функций $g(x)$, принадлежащих заданному классу, такой функции, к-рая дает наилучшее представление величины Y в том смысле, что минимизирует математич. ожидание $\mathsf{E}(Y-g(X))^2$. Найденная функция наз. средней квадратической Р.

Простейшим будет случай линейной средней квадратической Р., когда отыскивают наилучшую линейную аппроксимацию величины Y посредством величины X, т. е. такую линейную функцию $g(x)=\beta_0+\beta_1x$, для к-рой выражение $\mathsf{E}(Y-g(X))^2$ принимает наименьшее возможное значение. Данная экстремальная задача имеет единственное решение

$$\beta_0=m_Y-\beta_1m_X,\quad \beta_1=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X},$$

т. е. вычисление приближенной линии Р. приводит к тому же результату, к-рый получен в случае точной линейной Р.:

$$y=m_Y+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X).$$

Минимальное значение $\mathsf{E}(Y-g(X))^2$ при вычисленных значениях параметров равно $\sigma_Y^2(1-\rho^2)$. Если регрессия $m(x)$ существует, то при любых β_0 и β_1 имеет место соотношение

$$\mathsf{E}[Y-\beta_0-\beta_1X]^2=\mathsf{E}[Y-m(X)]^2+\mathsf{E}[m(X)-\beta_0-\beta_1X]^2,$$

откуда следует, что прямая средней квадратич. регрессии $y=\beta_0+\beta_1x$ дает наилучшее приближение к линии регрессии $m(x)$, если измерять расстояние вдоль оси y. Поэтому если линия $m(x)$ есть прямая, то она совпадает с прямой средней квадратической Р.

В общем случае, когда Р. сильно отличается от линейной, можно поставить задачу нахождения многочлена $g(x)=\beta_0+\beta_1x+\ldots+\beta_mx^m$ нек-рой степени m, для

к-рого среднее значение $\mathsf{E}(Y-g(x))^2$ имеет возможно меньшее значение.

Такое решение задачи соответствует параболической (или полиномиальной) средней квадратической Р. (см. *Параболическая регрессия*) порядка m. Кривая $y=g(x)$ есть парабола m-го порядка, дающая наилучшую аппроксимацию истинной линии Р. Обобщением параболической Р. служит функция Р., выраженная линейной комбинацией тех или иных заданных функций:

$$g(x)=\beta_0\varphi_0(x)+\beta_1\varphi_1(x)+\ldots+\beta_m\varphi_m(x).$$

Наиболее важное значение имеет случай, когда $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_m(x)$ — ортогональные многочлены соответствующих порядков, построенные по распределению $\boldsymbol{X}$. Другими примерами нелинейной (криволинейной) Р. являются случаи тригонометрической Р., показательной Р., и т. п.

Понятие Р. естественным образом обобщается на тот случай, когда вместо одной регрессионной переменной рассматривается нек-рое множество переменных. Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют совместное распределение вероятностей, то множественная Р. определяется, напр., как регрессия X_1 по $x_2, \ldots, x_n$:

$$\mathsf{E}(X_1 \mid X_2=x_2, \ldots, X_n=x_n)=m_1(x_2, \ldots, x_n).$$

Соответствующее уравнение определяет поверхность регрессии X_1 по $x_2, \ldots, x_n$. Линейная регрессия X_1 по $x_2, \ldots, x_n$ имеет вид

$$\mathsf{E}(X_1 \mid x_2, \ldots, x_n)=\beta_2x_2+\ldots+\beta_nx_n,$$

где $\beta_2, \ldots, \beta_n$ — коэффициенты Р. (при $\mathsf{E}X_k=0$). Линейная средняя квадратическая Р. величины X_1 по $x_2, \ldots, x_n$ определяется как наилучшая линейная оценка величины X_1 величинами $X_2, \ldots, X_n$ в смысле обращения в минимум выражения

$$\mathsf{E}(X_1-\beta_2X_2-\ldots-\beta_nX_n)^2.$$

Соответствующая плоскость Р. дает наилучшую аппроксимацию поверхности регрессии $x_1=m(x_2, \ldots, x_n)$, если последняя существует. Если поверхность Р. есть плоскость, то она необходимо совпадает с плоскостью средней квадратической Р. (так будет в случае, когда совместное распределение всех n величин нормально).

Простым примером регрессии Y по X является зависимость между Y и X, к-рая выражается соотношением $Y=u(x)+\delta$, где $u(x)=\mathsf{E}(Y \mid X=x)$, а случайные величины X и δ независимы. Это представление полезно, когда планируется эксперимент для изучения функциональной связи $y=u(x)$ между неслучайными величинами y и x. Эта же модель Р. используется во многих приложениях при изучении характера зависимости случайной величины Y от неслучайной величины x. На практике выбор функции $y=u(x)$ и оценку неизвестных коэффициентов Р. по экспериментальным данным производят методами *регрессионного анализа*.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

А. В. Прохоров.

РЕГУЛЯРИЗАЦИИ МЕТОД — метод построения приближенных решений некорректных задач, состоящий в том, что в качестве приближенных решений некорректных задач [точнее — некорректно поставленных задач (н. п. з.)] берутся значения регуляризирующего оператора с учетом приближенного характера исходной информации (см. *Некорректные задачи*).

Для определенности ниже рассматривается задача нахождения решений функциональных уравнений вида $Az=u$, в к-рых z и u — элементы метрич. пространств

F и U с расстоянием $\rho_F(,)$ и $\rho_U(,)$. Если, напр., A — вполне непрерывный оператор, то решения такого уравнения не обладают свойством устойчивости к малым изменениям правой части u. Пусть вместо точных значений исходной информации $(\bar{A}, \bar{u})$ даны их приближения $(\tilde{A}, \tilde{u})$. В этих условиях речь может идти лишь о нахождении приближений к решению $\bar{z}$ уравнения $\bar{A}z=\bar{u}$. Нельзя в качестве приближенного решения н. п. з. такого вида с приближенной исходной информацией $(\tilde{A}, \tilde{u})$ брать точное решение уравнения $\tilde{A}z=\tilde{u}$, т. к. такого решения может не существовать, а если оно и существует, то не будет устойчивым к малым изменениям исходной информации и, следовательно, такое «решение» может не допускать физич. интерпретации. В дальнейшем полагается для простоты, что приближенной может быть лишь правая часть u, а оператор A задан точно.

Пусть δ — оценка уклонения $\tilde{u}$ от $\bar{u}$, т. е. расстояния $\rho_U(\bar{u}, \tilde{u})$, и $F_0 \subset F$ — заданный класс возможных решений (моделей сравнения). Естественно искать приближенные решения уравнения $Az=\tilde{u}$ среди элементов $z \in F_0$, сопоставимых с исходной информацией, т. е. таких, что $\rho_U(Az, \tilde{u}) \leqslant \delta$. Пусть F_δ — множество всех таких элементов из F_0. Если в выбранном классе F_0 возможных решений нет элементов (напр., функций $z(s)$), сопоставимых с исходными данными, то это значит, что элементы z из F_0 имеют слишком упрощенную (грубую) структуру. В этом случае надо расширять класс F_0, беря, возможно, последовательность расширяющихся классов $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$, пока не найдется класс F_n, содержащий элементы (напр., функции), сопоставимые с исходными данными.

Если F_n не пусто, то оно может содержать существенно отличающиеся друг от друга элементы(функции). В таких случаях одно лишь требование сопоставимости возможных решений с исходными данными не может служить критерием нахождения однозначно определенных приближенных решений уравнений $Az=\tilde{u}$, т. к. нет достаточных оснований для выбора в качестве приближенного решения того или иного сопоставимого элемента из F_n.

Для однозначного определения устойчивых решений необходим нек-рый принцип отбора сопоставимых с $\tilde{u}$ решений. Обычно его формулируют, пользуясь смыслом задачи. Такой отбор может быть произведен, напр., по принципу выбора элемента (функции) из F_n, имеющего минимальную сложность. Понятие сложности элемента z может быть формализовано, напр., с помощью функционалов сложности $\Omega[z]$ — непрерывных, неотрицательных и удовлетворяющих нек-рым специальным условиям (см. [1]). За меру сложности элемента z принимается значение функционала $\Omega[z]$. Так, если элементами z являются непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции $z(s)$ класса W_2^1, то функционал сложности $\Omega[z]$ можно взять, напр., в виде

$$\Omega[z] = \int_a^b \left\{ z^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \right\} ds.$$

Желание искать приближенные решения уравнений $Az=\tilde{u}$ среди простейших элементов (функций), сопоставимых с исходными данными, приводит к задаче нахождения элемента из F_δ, минимизирующего $\Omega[z]$ на F_δ. Если оператор A линейный и функционал $\Omega[z]$ не имеет локальных минимумов на области своего определения F_Ω, то эта задача может быть сведена (см. подробнее в [1]) к задаче нахождения элемента z_α из множества $F_\delta \cap F_\Omega$, минимизирующего функционал

$$M^\alpha[z, A, \tilde{u}] = \rho_U^2(Az, \tilde{u}) + \alpha\Omega[z].$$

Значение параметра α (параметра регуляризации) должно быть согласовано с уровнем погрешности исходных данных. Его можно определить, напр., по невязке, т. е. из условия $\rho_U(Az_\alpha, \tilde{u})=\delta$, если известно число δ. Но возможны и др. способы определения α (см. [1]). Таким образом, параметр α должен зависеть от δ и $\tilde{u}$, $\alpha=\alpha(\delta, \tilde{u})$. Элемент $z_{\alpha(\delta,\tilde{u})}$ и принимается за приближенное решение уравнения $Az=\tilde{u}$. Это и есть одна из форм разработанного в [2], [3] Р. м. Аналогично строятся приближенные решения уравнений $\tilde{A}z=\tilde{u}$ с приближенно заданным оператором $\tilde{A}$ и правой частью $\tilde{u}$. При этом минимизируется функционал типа $M^\alpha[z, \tilde{A}, \tilde{u}]$ (см., напр., [1]). Возможны и другие формы Р. м. и применение его к иным классам задач(см. [1]). Р. м. развит и для решения нелинейных задач (см. [1], [4]).

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, 2 изд., М., 1979; [2] Тихонов А. Н., «Докл. АН СССР», 1963, т. 151, № 3, с. 501—04; [3] его же, там же, т. 153, № 1, с. 49—52; [4] Лаврентьев М. М., О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосиб., 1962.

В. Я. Арсенин, А. Н. Тихонов.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ — использование той или иной формы отбора допустимых решений при построении устойчивых к исходной информации приближенных решений некорректно поставленных задач (см. также *Некорректные задачи* и *Регуляризации метод*).

В. Я. Арсенин, А. Н. Тихонов.

РЕГУЛЯРНАЯ ГРАНИЧНАЯ ТОЧКА — точка y_0 границы Γ области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, в к-рой для любой непрерывной на Γ функции $f(y)$ обобщенное решение $u(x)$ *Дирихле задачи* в смысле Винера — Перрона (см. *Перрона метод*) принимает граничное значение $f(y_0)$, то есть

$$\lim_{x\to y_0,\, x\in D} u(x)=f(y_0).$$

Р. г. т. для области D образуют множество R, в точках к-рого дополнение $CD=\mathbb{R}^n\setminus D$ не является разреженным множеством; множество $\Gamma\setminus R$ *иррегулярных граничных точек* есть полярное множество типа F_σ. Если все точки Γ суть Р. г. т., то область D наз. регулярной относительно задачи Дирихле.

Для того чтобы точка $y_0\in\Gamma$ была Р. г. т., необходимо и достаточно, чтобы в пересечении $U_0=U\cap D$ области D с нек-рой окрестностью U точки y_0 существовал *барьер*, т. е. супергармонич. функция $\omega(x)>0$ в U_0 такая, что $\lim\limits_{x\to y_0}\omega(x)=0$ (критерий барьера Лебега). А. Лебег (H. Lebesgue, 1912) впервые показал, что при $n\geqslant 3$ вершина достаточно острого входящего в D острия может не быть Р. г. т.

Пусть

$$E_k=\{x\in CD: 2^{-k}\leqslant|x-y_0|\leqslant 2^{-k+1}\},$$

$c_k=C(E_k)$ — *емкость* E_k. Для того чтобы точка $y_0\in\Gamma$ была Р. г. т., необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(n-2)}c_k,\ n\geqslant 3,$$

при $n=2$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k c_k,$$

причем здесь

$$E_k=\left\{x\in CD: 2^k\leqslant \ln\frac{1}{|x-y_0|}\leqslant 2^{k+1}\right\}$$

(критерий Винера).

При $n=2$ точка $y_0\in\Gamma$ является Р. г. т., если существует непрерывный путь $x(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, такой, что $x(1)=y_0$, $x(t)\in CD$ при $0\leqslant t<1$. При $n\geqslant 3$ точка $y_0\in\Gamma$ является Р. г. т., если ее можно коснуться вершиной прямого кругового конуса, принадлежащего CD в

достаточно малой окрестности y_0. В случае области D компактифицированного пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$, $n\geqslant 3$, бесконечно удаленная точка $\infty\in\Gamma$ всегда является Р. г. т.; при $n=2$ бесконечно удаленная точка $\infty\in\Gamma$ является Р. г. т., если существует непрерывный путь $x(t)$, $0\leqslant t<1$, такой, что $x(t)\in CD$ при $0\leqslant t<1$ и $\lim\limits_{t\to 1-0} x(t)=\infty$.

См. также *Иррегулярная граничная точка*.

Лит.: [1] Келдыш М. В., «Успехи матем. наук», 1941, в. 8, с. 171—232; [2] Лаидкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [3] Хейман У., Кеннеди П., Субгармонические функции, пер. с англ., М., 1980.

Е. Д. Соломенцев.

РЕГУЛЯРНАЯ p-ГРУППА — p-группа G такая, что для любых ее элементов a, b и любого целого $n=p^\alpha$ справедливо равенство

$$(ab)^n=a^nb^ns_1^n\dots s_t^n,$$

где $s_1,\dots,s_t$ — нек-рые элементы из *коммутанта* подгруппы, порожденной элементами a и b. Подгруппы и факторгруппы Р. p-г. регулярны. Конечная p-группа регулярна тогда и только тогда, когда для любых ее элементов a и b справедливо равенство

$$a^pb^p=(ab)^ps^p,$$

где s — нек-рый элемент коммутанта подгруппы, порожденной элементами a и b.

Элементы Р. p-г. G, имеющие вид a^{p^α}, $a\in G$, образуют характеристич. подгруппу $C^\alpha(G)$, а элементы порядка, не большего числа p^α,— вполне характеристич. подгруппу $C_\alpha(G)$.

Примерами Р. p-г. являются любая p-группа, класс нильпотентности к-рой меньше p, а также любая p-группа порядка, не большего числа p^p. Для любого p существует нерегулярная p-группа порядка p^{p+1}, а именно, силовская подгруппа S_p симметрич. группы $S(p^2)$ степени p^2 (она изоморфна сплетению циклич. группы порядка p с самой собой).

Лит.: [1] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

Н. Н. Вильямс.

РЕГУЛЯРНАЯ МЕРА — мера, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(T)$ топологич. пространства T такая, что для любого борелевского множества $X\in\mathfrak{B}(T)$ и любого $\varepsilon>0$ найдется открытое множество $G\subset T$, покрывающее X: $X\subset G$ и $\mu(G\setminus X)<\varepsilon$. Равносильное определение: для любого $X\in\mathfrak{B}(T)$ и $\varepsilon>0$ найдется замкнутое множество $F\subset X$ такое, что $\mu(X\setminus F)<\varepsilon$.

Р. А. Минлос.

РЕГУЛЯРНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА — понятие теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с комплексным независимым переменным. Точка $a\in\mathbb{C}$ наз. Р. о. т. уравнения

$$y^{(n)}+a_1(t)\,y^{(n-1)}+\dots+a_n(t)\,y=0 \qquad (1)$$

или системы

$$\dot z=A(t)\,z,\quad z\in\mathbb{C}^n, \qquad (2)$$

с аналитич. коэффициентами, если a — изолированная особенность коэффициентов и все решения уравнения (1) или системы (2) растут не быстрее, чем $|t-a|^d$ для нек-рого $d\in\mathbb{R}$, когда t стремится к a, оставаясь внутри произвольного острого угла с вершиной a. Последнее ограничение вызвано тем, что в окрестности Р. о. т. решения являются неоднозначными аналитич. функциями и при $t\to a$ по произвольной кривой могут расти существенно быстрее, чем при стремлении $t\to a$ по лучу с вершиной a.

Для того чтобы особая точка коэффициентов уравнения (1) или системы (2) была Р. о. т., необходимо, чтобы она была *полюсом*, а не *существенно особой точкой* коэффициентов. Для уравнений (1) имеет место условие Фукса: особая точка $t=0$ коэффициен-

тов $a_j(t)$ регулярна для уравнений (1) тогда и только тогда, когда все функции $(t-a)^j a_j(t)$, $j=1, \ldots, n$, голоморфны в нуле. Для систем (2) справедливо следующее достаточное условие: если элементы матрицы $A(t)$ имеют простой полюс в точке a, то эта точка — Р. о. т. системы (2). Явное условие на матрицу $A(t)$, необходимое и достаточное для того, чтобы точка a была Р. о. т. системы (2), пока (1983) не получено.

Лит.: [1] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950; [2] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [3] Levelt A. H. M., «Proc. Koninkl. Nederl. akad. wet. Ser. A», 1961, v. 64, № 4, p. 362—403; [4] Deligne P., Equations différentielles à points singuliers réguliers, B., 1970 (Lect. Notes in Math., № 163); [5] Plemelj J., Problems in the sense of Riemann and Klein, Univ. of Adelaide, 1964.

Ю. С. Ильяшенко.

РЕГУЛЯРНАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа, каждый элемент к-рой регулярен.

Произвольная Р. п. S содержит идемпотенты (см. *Регулярный элемент*), и строение S в значительной степени определяется «строением» и «расположением» в S множества всех ее идемпотентов $E(S)$. Р. п. с единственным идемпотентом — это в точности группы. На $E(S)$ прежде всего можно смотреть как на частично упорядоченное множество относительно естественного частичного порядка (см. *Идемпотент*); известны структурные теоремы, описывающие Р. п. S с нек-рыми естественными ограничениями на множество $E(S)$. Одно из таких ограничений (для полугрупп с нулем) состоит в том, что все ненулевые идемпотенты примитивны (см. *Вполне простая полугруппа*); полугруппа с этим свойством наз. примитивной. Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: а) S есть примитивная Р. п., б) S есть Р. п., равная объединению своих 0-минимальных (см. *Минимальный идеал*) правых идеалов, в) S есть 0-*прямое объединение* вполне 0-простых полугрупп. Описано строение Р. п., у к-рых $E(S)$ есть цепь, упорядоченная по типу отрицательных целых чисел [2].

Более информативный взгляд на $E(S)$ состоит в рассмотрении на этом множестве частичной операции $\circ$, заданной следующим образом. Если для e, $f \in E(S)$ хотя бы одно из произведений ef, fe равно одному из элементов e, f, то $ef \in E(S)$; полагают тогда $e \circ f = ef$. Возникающая частичная алгебра может быть охарактеризована аксиомами, использующими два отношения квазипорядка ω^r и ω^l, тесно связанные с заданной частичной операцией (реализация этих отношений в $E(S)$ такова: $e\omega^r f$ означает $fe=e$, $e\omega^l f$ означает $ef=e$; тогда $\omega^r \bigcap \omega^l$ есть отношение естественного частичного порядка на $E(S)$); такая частичная алгебра наз. биупорядоченным множеством (см. [5]). Произвольная Р. п. может быть определенным образом сконструирована из биупорядоченного множества и групп. Таким образом, в терминах биупорядоченных множеств можно проводить классификацию Р. п. Среди исследованных в этом направлении типов полугрупп — комбинаторные Р. п. (см. [7]), т. е. имеющие лишь одноэлементные подгруппы.

Гомоморфный образ Р. п. будет Р. п. Всякий *нормальный комплекс* Р. п., являющийся подполугруппой, содержит идемпотент. Произвольная конгруэнция на Р. п. однозначно определяется своими классами, содержащими идемпотенты. Конгруэнция на Р. п. S разделяет идемпотенты тогда и только тогда, когда она содержится в отношении $\mathcal{H}$ (см. *Грина отношения эквивалентности*); множество таких конгруэнций составляет модулярную подрешетку с нулем и единицей в решетке всех конгруэнций на S. Р. п. наз. фундаментальной, если эта подрешетка состоит лишь из отношения равенства. Всякая комбинаторная Р. п. будет фундаментальной. Фундаментальные Р. п. важны не только как один из более обозримых типов Р. п.,

но и в силу определенной «универсальности» их класса для Р. п. А именно, для любого биупорядоченного множества E можно канонич. образом сконструировать фундаментальную Р. п. T_E, для к-рой E будет биупорядоченным множеством всех идемпотентов, причем для любой Р. п. S такой, что $E(S)=E$, существует разделяющий идемпотенты гомоморфизм $\varphi : S \to T_E$, для к-рого $\varphi(S)$ будет подполугруппой в T_E, содержащей E (о различных конструкциях для T_E см. [3], [5], [8], [10]). Р. п. S фундаментальна тогда и только тогда, когда гомоморфизм φ инъективен.

Если S — Р. п., то подполугруппа $\langle E(S)\rangle$, порожденная всеми ее идемпотентами, также будет Р. п. Подполугруппа $\langle E(S)\rangle$ оказывает существенное влияние на строение S. Р. п. идемпотентно порождена тогда и только тогда, когда таков каждый ее главный фактор [10]. В идемпотентно порожденной Р. п. S для произвольного элемента x существует представление $x=e_1e_2\ldots e_n$, где $e_i\in E(S)$ и $e_i(\mathscr{L}\cup\mathscr{R})e_{i+1}$ при $i=1,\ldots,n-1$ (здесь $\mathscr{L}$ и $\mathscr{R}$ — отношения эквивалентности Грина) (см. [5]). Последовательность идемпотентов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ с указанным свойством наз. E-цепью. В бипростой идемпотентно порожденной полугруппе любые два идемпотента связаны нек-рой E-цепью, и если они сравнимы в смысле естественного частичного порядка, то длина такой цепи $\geqslant 4$.

Если $\langle E(S)\rangle=E(S)$, т. е. произведение любых двух идемпотентов снова есть идемпотент, то Р. п. S наз. о р т о д о к с а л ь н о й. Класс ортодоксальных полугрупп содержит, в частности, все инверсные полугруппы. Полугруппа ортодоксальна тогда и только тогда, когда каждый ее главный фактор ортодоксален. Имеются структурные теоремы об ортодоксальных полугруппах (см. [4], [9]).

Отношение естественного частичного порядка на $E(S)$ может быть продолжено на Р. п. S следующим образом: $x\leqslant y$, если существуют идемпотенты e и f такие, что $x=ey=yf$. В случае, когда S инверсна, отношение $\leqslant$ превращается в отношение естественного частичного порядка, для произвольной Р. п. оно также наз. отношением е с т е с т в е н н о г о ч а с т и ч н о г о п о р я д к а. Отношение $\leqslant$ на Р. п. S согласовано с умножением тогда и только тогда, когда для любого идемпотента e подполугруппа eSe инверсна [6]. Р. п., обладающие таким свойством, наз. п с е в д о и н в е р с н ы м и. Более широкий класс составляют п с е в д о о р т о д о к с а л ь н ы е полугруппы (*для любого идемпотента* e подполугруппа eSe ортодоксальна). Для указанных классов полугрупп использовались также термины «локально инверсная» и «локально ортодоксальная». Р. п. наз. е с т е с т в е н н о й, если множество всех ее групповых элементов (см. *Регулярный элемент*) есть подполугруппа. Имеются структурные теоремы о псевдоинверсных, псевдоортодоксальных [11] и естественных [12] Р. п.

Многие структурные теоремы о различных типах Р. п. представляют собой (подчас весьма далекие) обобщения и модификации конструкции *рисовской полугруппы матричного типа* или суммы прямого спектра групп (см. *Клиффордова полугруппа*), либо опираются на те или иные представления полугрупп и разложения их в подпрямые произведения (см. [1], [13]). См. также ст. *Полугруппа*.

Лит.: [1] К л и ф ф о р д А., П р е с т о н Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [2] M u n n W. D., «Glasgow Math. J.», 1968, v. 9, pt. 1, p. 46—66; [3] C l i f f o r d A., «Semigroup Forum», 1975, v. 10, p. 84—92; [4] е г о ж е, «J. pure and appl. algebra», 1976, v. 8, p. 23—50; [5] N a m b o o r i p a d K. S. S., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1979, v. 22, № 224; [6] е г о ж е, «Proc. Edinburgh Math. Soc.», 1980, v. 23, pt 3, p. 249—60; [7] N a m b o o r i p a d K. S. S. S., R a j a n A. R., «Quart. J. Math.», 1978, v. 29, № 116, p. 489—504; [8] G r i l l e t P. A., «Semigroup Forum», 1974, v. 8, p. 177—83; p. 254—65; p. 368—73; [9] H a l l T. E., «Pacif. J. Math.», 1971, v. 39, p. 677—86; [10] е г о ж е, «J. Algebra», 1973, v. 24,

p. 1—24; [11] Meakin J., Namboripad K. S. S., «J. Austral. Math. Soc.», 1980/1981, v. 30, p. 73—86; [12] Warne R. J., в кн.: Algebraic theory of semigroups, Amst., 1979, p. 685—720; [13] Lallement G., «Semigroup Forum», 1972, v. 4, p. 95—123. *Л. Н. Шеврин.*

РЕГУЛЯРНАЯ РЕШЕТКА, структура регулярная,— условно полная решетка (структура), в к-рой выполняется следующее условие (наз. также аксиомой регулярности): для любой последовательности $\{E_n\}$ ограниченных множеств, для к-рой

$$\sup E_n \xrightarrow{(o)} a, \quad \inf E_n \xrightarrow{(o)} b,$$

найдутся конечные подмножества $E_n' \subset E_n$ с тем же свойством ($\xrightarrow{(o)}$ означает сходимость по упорядочению). Такие структуры (в первую очередь регулярные K-пространства и булевы алгебры) чаще всего встречаются в функциональном анализе и теории меры. Они естественно возникают в задаче продолжения гомоморфизмов и линейных положительных операций. В Р. р. выполняются следующие два принципа: а) принцип диагонали (если $x_{nm} \xrightarrow{(o)} x_n$, $x_n \xrightarrow{(o)} x$, то $x_{nm_n} \xrightarrow{(o)} x$ для нек-рой последовательности индексов m_n) и б) принцип счетности типа (всякое бесконечное ограниченное множество содержит счетную часть с теми же гранями). В свою очередь, а) и б) вместе эквивалентны аксиоме регулярности. Примеры Р. р.: всякое KB-пространство и, в частности, всякое L^p, $1 \leqslant p < +\infty$; булева алгебра mod 0 измеримых множеств произвольного пространства с конечной счетно аддитивной мерой. Другие известные примеры регулярных булевых алгебр основываются на отрицании *Суслина гипотезы.*

Лит.: [1] Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах, М.— Л., 1950. *Д. А. Владимиров.*

РЕГУЛЯРНАЯ СХЕМА — схема $(X, \mathcal{O}_X)$, локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ любой точки x к-рой регулярно. Для схем конечного типа над алгебраически замкнутым полем k регулярность эквивалентна тому, что пучок дифференциалов $\Omega^1_{X/k}$ локально свободен. Регулярные локальные кольца факториальны, поэтому любая замкнутая приведенная неприводимая подсхема коразмерности 1 на Р. с. $(X, \mathcal{O}_X)$ локально задается одним уравнением (см. [2]). Важной задачей является построение Р. с. $(X, \mathcal{O}_X)$ с заданным полем K рациональных функций, снабженной собственным морфизмом $X \to S$ на нек-рую базисную схему S. Эта задача решена в случае, когда S — спектр поля характеристики 0 (см. [3]), а для малых размерностей схемы и в случае простой характеристики, а также в случае, когда S — спектр дедекиндовой области и $\dim X/S \leqslant 1$ (см. [1]).

Лит.: [1] Abhyankar Sh. Sh., в кн.: Тр. Международного конгресса математиков (Москва — 1966), М., 1968, с. 469—481; [2] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [3] Хиронака Х., «Математика», 1965, т. 9, № 6, с. 2—70; 1966, т. 10, № 1, с. 3—89; № 2, с. 3—58. *С. Г. Танкеев.*

РЕГУЛЯРНАЯ ФУНКЦИЯ, правильная функция, в области — функция $f(z)$ комплексного переменного z, однозначная в этой области и имеющая в каждой ее точке конечную производную (см. *Аналитическая функция*). Р. ф. в точке a — это Р. ф. в нек-рой окрестности a. *Ю. Д. Максимов.*

РЕГУЛЯРНАЯ ФУНКЦИЯ МНОЖЕСТВА — аддитивная функция μ, определенная на системе множеств топологич. пространства, полная вариация к-рой $|\mu|$ удовлетворяет условию

$$|\mu|(E) = \inf |\mu|(G) = \sup |\mu|(F), \quad \mathring{G} \supset E \supset \overline{F},$$

$\mathring{G}$ — внутренность множества G, $\overline{F}$ — замыкание множества F (E, G, F — из области определения μ). Ограниченная аддитивная Р. ф. м., определенная на полукольце множеств бикомпактного топологич. про-

странства, является счетно аддитивной функцией (теорема Александрова).

Свойство регулярности можно относить и к мере как частному случаю функции множества и говорить о регулярной мере, заданной на топологич. пространстве. Примером регулярной меры является *Лебега мера*.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 1, М., 1962; [2] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1941, т. 9, с. 563—628. *А. П. Терехин.*

РЕГУЛЯРНАЯ ЭКСТРЕМАЛЬ, неособенная экстремаль,— экстремаль $y(x)$, во всех точках к-рой выполняется условие

$$F_{y'y'}(x,\ y(x),\ y'(x)) \neq 0, \qquad (1)$$

где $F(x, y, y')$ — подинтегральная функция, входящая в минимизируемый функционал

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x,\ y,\ y')\,dx.$$

Как всякая экстремаль, Р. э. есть, по определению, гладкое решение *Эйлера уравнения*

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Точки экстремали, в к-рых выполнено условие (1), наз. регулярными точками. Доказано, что в каждой регулярной точке экстремаль имеет непрерывную 2-ю производную $y''(x)$. На Р. э. 2-я производная $y''(x)$ непрерывна. Для Р. э. уравнение Эйлера

$$F_y - F_{y'x} - F_{y'y}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

можно записать в виде, разрешенном относительно старшей производной

$$y'' = f(x,\ y,\ y').$$

Свойство регулярности (1) непосредственно связано с необходимым *Лежандра условием* (в усиленной форме), согласно к-рому во всех точках экстремали должно выполняться неравенство

$$F_{y'y'}(x,\ y(x),\ y'(x)) < 0.$$

Регулярность существенно используется при доказательстве возможности включения экстремали $y(x)$ в окружающее ее поле экстремалей. Если хотя бы в одной точке условие (1) нарушается, то экстремаль не всегда может быть включена в поле. Условие включения экстремали в поле является одним из достаточных условий экстремума.

Приведенное определение Р. э. дано для простейшей задачи вариационного исчисления, в к-рой рассматривается функционал, зависящий от одной неизвестной функции. Для функционалов, зависящих от n неизвестных функций:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\,dx,$$

Р. э. наз. такая экстремаль, во всех точках к-рой определитель n-го порядка

$$\left| F_{y_i'y_j'} \right| \neq 0. \qquad (2)$$

Для более общих задач вариационного исчисления на условный экстремум (см. *Больца задача*) Р. э. определяется аналогично: только вместо F в (2) следует подставить *Лагранжа функцию* L.

Экстремаль, у к-рой на нек-ром участке условие регулярности ((1) или (2)) нарушается во всех точках, наз. особой экстремалью, а указанный участок наз. участком особого режима. Для особых режимов выведены необходимые условия, дополняющие известные классические необходимые условия экстремума (см. *Оптимальный режим особый*).

Лит.: [1] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950. *И. Б. Вапнярский.*

РЕГУЛЯРНОЕ КОЛЬЦО в коммутативной алгебре — нётерово кольцо A, все локализации $A_{\mathfrak{p}}$ к-рого регулярны; здесь $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A. При этом локальное нётерово кольцо A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ наз. регулярным, если $\mathfrak{m}$ порождается n элементами, где $n=\dim A$, т. е. если касательное пространство $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ (как векторное пространство над полем вычетов) имеет размерность, равную $\dim A$. Это равносильно отсутствию особенностей у схемы Spec A. Локальное Р. к. A всегда целостно и нормально, а также факториально (теорема Ауслендера — Буксбаума), глубина его равна $\dim A$. Ассоциированное градуированное кольцо

$$G_{\mathfrak{m}}(A)=\oplus_{i\geqslant 0}\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$$

изоморфно кольцу многочленов $k[X_1, \ldots, X_n]$. Локальное нётерово кольцо A регулярно тогда и только тогда, когда регулярно его пополнение $\hat{A}$; вообще, если $A\subset B$ — плоское расширение локальных колец и B регулярно, то и A регулярно. Для полных локальных Р. к. имеет место структурная теорема Коэна: они имеют вид $R[[X_1, \ldots, X_n]]$, где R — поле или кольцо дискретного нормирования. Любой модуль конечного типа над локальным Р. к. обладает конечной свободной резольвентой (см. *Гильберта теорема* о сизигиях); верно и обратное (см. [2]).

Р. к. являются любое поле и любое дедекиндово кольцо. Если A регулярно, то регулярно кольцо многочленов $A[X_1, \ldots, X_n]$ и кольцо формальных степенных рядов $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ над A. Если $a\in A$ — необратимый элемент локального Р. к., то A/aA регулярно тогда и только тогда, когда $a\notin\mathfrak{m}^2$.

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [2] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5, с. 3—93; [3] Grothendieck A., Dieudonné J. (red.), Eléments de géométrie algébrique, chap. 4, P., 1964. *В. И. Данилов.*

РЕГУЛЯРНОЕ КОЛЬЦО (в смысле Неймана) — ассоциативное кольцо (обычно с единицей), в к-ром уравнение $axa=a$ разрешимо для любого a. Следующие свойства ассоциативного кольца R с единицей равносильны: а) R есть Р. к.; б) каждый главный левый идеал кольца R порождается идемпотентом; в) главные левые идеалы кольца R образуют подрешетку в решетке всех его левых идеалов, являющуюся дедекиндовой решеткой с дополнениями; г) каждый главный левый идеал кольца R имеет дополнение в структуре всех его левых идеалов; д) все левые R-модули плоские; е) имеют место правые аналоги свойств б) — д) (см. [3], [4], [5], [8], [10]). Ввиду д) Р. к. иногда наз. абсолютно плоскими. Коммутативное кольцо регулярно тогда и только тогда, когда инъективны все простые модули над ним (см. [5]). Любой конечно порожденный левый (правый) идеал Р. к. оказывается главным и, следовательно, выделяется прямым слагаемым. Всякий неделитель нуля в Р. к. обратим. Радикал Джекобсона Р. к. равен нулю. Кольцо матриц над Р. к. оказывается Р. к. Класс Р. к. замкнут относительно перехода к прямым произведениям и факторкольцам. Идеал Р. к. является Р. к. (возможно, без единицы). Если Р. к. нётерово или совершенно (слева или справа), то оно оказывается классически полупростым кольцом. Всякое классически полупростое кольцо регулярно. Более того, регулярным оказывается кольцо эндоморфизмов векторного пространства над телом (даже бесконечномерного), а также факторкольцо кольца эндоморфизмов инъективного левого (правого) модуля над любым кольцом по его радикалу Джекобсона (см. [3]). В частности, всякое самоинъективное слева (справа) кольцо с нулевым радикалом Джекобсона регулярно.

Групповое кольцо группы G над Р. к. регулярно тогда и только тогда, когда любая конечно порожденная подгруппа в G конечна и порядок каждой из таких подгрупп обратим в исходном Р. к. (см. [3]). Кольца эндоморфизмов всех свободных левых R-модулей регулярны в том и только в том случае, когда R классически полупросто [6]. Счетно порожденные односторонние идеалы Р. к. проективны [8].

Если R есть Р. к., то конечно порожденные подмодули левого R-модуля R^n n-мерных строк над R образуют дедекиндову решетку L с дополнениями, являющуюся подрешеткой решетки всех подмодулей модуля R^n. Решетка L содержит однородный базис $a_1, \ldots, a_n$, то есть эти элементы независимы (см. *Дедекиндова решетка*), их сумма равна наибольшему элементу из L (а именно, R^n) и любые a_i и a_j перспективны, что означает существование для них общего дополнения. Наоборот, всякая дедекиндова решетка с дополнениями, обладающая однородным базисом, содержащим не менее четырех элементов, изоморфна решетке L для подходящего Р. к. R. Решетка L изоморфна решетке главных левых идеалов кольца всех $(n\times n)$-матриц над R (см. [4], [10]).

Важный частный случай Р. к.— строго регулярное кольцо, в к-ром, по определению, разрешимо уравнение $a^2x=a$. Равносильны следующие свойства Р. к. R: а) R строго регулярно; б) R не содержит ненулевых пильпотентных элементов; в) все идемпотенты кольца R центральны; г) каждый левый (или каждый правый) идеал кольца R является двусторонним; д) решетка главных левых (правых) идеалов кольца R дистрибутивна; е) мультипликативная полугруппа кольца R является инверсной полугруппой (см. [7], [8]).

Другой подкласс класса Р. к. образуют u-регулярные кольца, где, по определению, уравнение $axa=a$ имеет в качестве решения обратимый элемент. В классе Р. к. u-регулярные кольца характеризуются транзитивностью перспективности в решетке конечно порожденных подмодулей суммы двух экземпляров основного кольца, а также возможностью сокращать прямую сумму на конечно порожденный проективный модуль (см. [4], [8]).

Р. к. наз. непрерывным слева, если непрерывна решетка его главных левых идеалов. Непрерывное Р. к. u-регулярно и разлагается в прямую сумму строго Р. к. и самоинъективного кольца. На Р. к. может быть определена псевдоранг-функция, являющаяся аналогом меры на булевой алгебре. Она определяет псевдометрику. Пополнение Р. к. по этой метрике оказывается самоинъективным Р. к. (см. [8]).

Р. к. являются частным случаем π-регулярных колец, в к-рых, по определению, для каждого элемента a найдутся элемент x и натуральное число n такие, что $a^nxa^n=a^n$.

Как двусторонний аналог Р. к. можно рассматривать бирегулярные кольца, в к-рых, по определению, каждый главный двусторонний идеал порождается центральным идемпотентом. Каждый двусторонний идеал бирегулярного кольца является пересечением его максимальных двусторонних идеалов. Всякое бирегулярное кольцо с единицей изоморфно кольцу глобальных сечений с бикомпактными носителями пучка простых колец с единицей над бикомпактным вполне несвязным хаусдорфовым топологич. пространством, и всякое такое кольцо глобальных сечений бирегулярно (см. [2]). В коммутативном случае классы бирегулярных, строго Р. к. и Р. к. совпадают, и простые кольца в последней теореме заменяются полями.

Близки к Р. к. бэровские кольца, определяемые тем условием, что каждый левый (или, что при наличии единицы равносильно, каждый правый)

аннулятор порождается идемпотентом. Примерами бэровских колец служат кольцо эндоморфизмов векторного пространства над телом и кольцо ограниченных операторов гильбертова пространства. Бэровское кольцо наз. абелевым, если все его идемпотенты центральны, и конечным (по Дедекинду), если $xy=1$ влечет за собой $yx=1$. Идемпотент e бэровского кольца R наз. абелевым (конечным), если кольцо eRe абелево (конечно по Дедекинду). Различаются следующие типы бэровских колец: $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$ — конечные кольца, содержащие абелев идемпотент, не принадлежащий никакому собственному прямому слагаемому; $\mathrm{I}_{\mathrm{inf}}$ — бесконечные по Дедекинду (т. е. не содержащие ненулевых конечных центральных идемпотентов) кольца, содержащие абелев идемпотент, не принадлежащий никакому собственному прямому слагаемому; $\mathrm{II}_{\mathrm{fin}}$ (или II_1) — конечные по Дедекинду кольца без ненулевых абелевых идемпотентов, содержащие конечный идемпотент, не принадлежащий никакому собственному прямому слагаемому; $\mathrm{II}_{\mathrm{inf}}$ — бесконечные по Дедекинду кольца с условием, указанным в $\mathrm{II}_{\mathrm{fin}}$; III — кольца без ненулевых конечных идемпотентов. Каждое бэровское кольцо единственным способом разлагается в прямую сумму колец перечисленных типов (см. [9]).

Р. к. были введены для координатизации непрерывных геометрий, бирегулярные — в связи с исследованием функциональных представлений колец, бэровские (и риккатовы) — при исследовании колец операторов.

Рассматривались неассоциативные Р. к. См. также **-регулярное кольцо*, *риккатово кольцо*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Даунс Дж., Гофман К., «Математика», 1968, т. 12, № 4, с. 3—24; [3] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971; [4] Скорняков Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961; [5] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [6] Цукерман Г. М., «Сиб. матем. ж.», 1966, т. 7, № 5, с. 1161—67; [7] Шайн Б. М., «Изв. ВУЗов. Математика», 1966, № 2, с. 111—22; [8] Goodearl K. R., Von Neumann regular rings, L.— [a. o.], 1979; [9] Kaplansky I., Rings of operators, N. Y.— Amst., 1968; [10] Neumann J., Continuous geometry, Princeton, 1960.

Л. А. Скорняков.

***-РЕГУЛЯРНОЕ КОЛЬЦО** — регулярное кольцо, допускающее инволюционный антиавтоморфизм $\alpha\mapsto\alpha^*$ такой, что $\alpha\alpha^*=0$ влечет за собой $\alpha=0$. Идемпотент e из *-Р. к. наз. проекцией, если $e^*=e$. Каждый левый (правый) идеал *-Р. к. порождается однозначно определенной проекцией. Поэтому можно говорить о решетке проекций *-Р. к. Если эта решетка полна, то она является непрерывной геометрией. Дедекиндова решетка с дополнениями, обладающая однородным базисом $a_1, \ldots, a_n$, где $n\geqslant 4$ (см. *Регулярное кольцо*), является решеткой с ортодополнениями тогда и только тогда, когда она изоморфна решетке проекций нек-рого *-Р. к.

Лит.: [1] Скорняков Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961; [2] Berberian S. K., Baer *-rings, B.— [a. o.], 1972; [3] Kaplansky I., Rings of operators, N. Y.— Amst., 1968.

Л. А. Скорняков.

РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — 1) Р. п. (левое) алгебры A — линейное представление L алгебры A в векторном пространстве $E=A$, определяемое формулой $L(a)b=ab$ для всех $a, b\in A$; аналогично, формула $R(a)b=ba$, $a, b\in A$, определяет (анти)-представление алгебры A в пространстве $E=A$, наз. (правым) Р. п. A. Если A — топологич. алгебра (с умножением, непрерывным по совокупности переменных), то L и R — непрерывные представления. Если A — алгебра с единицей или полупростая алгебра, то все ее Р. п.— точные.

2) Р. п. (правое) группы G — линейное представление R группы G в пространстве E комплекснозначных функций на G, определенное формулой

$$(R(g)f)(g_1)=f(g_1g),\ g,\ g_1\in G,\ f\in E,$$

причем пространство E разделяет точки группы G и обладает тем свойством, что функция $g_1 \to f(g_1 g)$, $g_1 \in G$, принадлежит пространству E для всех $f \in E$, $g \in G$. Аналогично, формула

$$(L(g)f)(g_1) = f(g^{-1}g_1),\ g, g_1 \in G,\ f \in E,$$

определяет (левое) Р. п. группы G в пространстве E, если функция $g_1 \to f(g^{-1}g_1)$, $g_1 \in G$, принадлежит E для всех $g \in G$, $f \in E$. Если G — топологич. группа, то в качестве пространства E часто рассматриваются пространства непрерывных функций на G. Если G — локально компактная группа, то (правым) Р. п. группы G наз. (правое) Р. п. группы G в пространстве $L^2(G)$, построенном по правоинвариантной мере Хаара на G; Р. п. локально компактной группы является ее непрерывным унитарным представлением, причем левое и правое Р. п. унитарно эквивалентны. *А. И. Штерн.*

РЕГУЛЯРНОЕ ПРОСТОЕ ЧИСЛО — простое нечетное число p, для к-рого число классов идеалов кругового поля $R(e^{2\pi i/p})$ не делится на p. Все остальные простые нечетные числа наз. иррегулярными (см. *Иррегулярное простое число*). *О. А. Иванова.*

РЕГУЛЯРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, в к-ром для каждой точки x и каждого не содержащего ее замкнутого множества A найдутся непересекающиеся множества U и V такие, что $x \in U$ и $A \in V$. Регулярными являются все *вполне регулярные пространства* и, в частности, все *метрические пространства*.

Если в Р. п. все одноточечные подмножества замкнуты (а это выполняется не всегда!), то оно наз. T_3-пространством. Не всякое Р. п. вполне регулярно: существует бесконечное T_3-пространство, на к-ром каждая непрерывная действительная функция постоянна. Тем более, не каждое Р. п. является нормальным пространством. Однако если пространство регулярно и из каждого его открытого покрытия можно выделить счетное подпокрытие, то оно нормально. Пространство со счетной базой метризуемо в том и только в том случае, если оно является T_3-пространством. Регулярность наследуется любыми пространствами и мультипликативна.

Лит.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974. *А. В. Архангельский.*

РЕГУЛЯРНОЕ СОБЫТИЕ — множество слов конечного алфавита, к-рое на алгебраич. языке может быть задано с использованием выражений специального вида — регулярных выражений. Пусть A — конечный алфавит и $\cup$, $\circ$, $*$ — символы операций, наз. объединением, конкатенацией и итерацией соответственно. Регулярные выражения в алфавите A задаются индуктивно: 1) каждая буква из алфавита A есть регулярное выражение, 2) если R_1, R_2 и R — регулярные выражения, то $(R_1 \cup R_2)$, $(R_1 \circ R_2)$ и R^* суть также регулярные выражения. Язык регулярных выражений интерпретируется следующим образом.

Пусть A^* — множество всех слов в алфавите A, $\mathfrak{A}_1 \subseteq A^*$, $\mathfrak{A}_2 \subseteq A^*$. Символ любой буквы из A понимается как множество, состоящее из одной буквы, а $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ — как обычное теоретико-множественное объединение. Множество $\mathfrak{A}_1 \circ \mathfrak{A}_2$ состоит из всех слов, к-рые представимы в виде $\alpha_1\alpha_2$, где $\alpha_1 \in \mathfrak{A}_1$, $\alpha_2 \in \mathfrak{A}_2$, причем если $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ содержат пустое слово Λ, то $\Lambda\alpha_2 = \alpha_2$, $\alpha_1\Lambda = \alpha_1$, $\Lambda\Lambda = \Lambda$. Пусть $\mathfrak{A} \subseteq A^*$ и для любого $n \geqslant 2$ имеет место обозначение $\mathfrak{A}^n = \mathfrak{A} \circ \ldots \circ \mathfrak{A}$ (n раз). Тогда $\mathfrak{A}^*$ совпадает с $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^2 \cup \mathfrak{A}^3 \cup \ldots$, т. е. если $\alpha \in \mathfrak{A}^*$, то существует $m \geqslant 1$ такое, что α представимо в виде $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m$, где $\alpha_i \in \mathfrak{A}$ для любого $i = 1, \ldots, m$. Таким образом, множество слов конечного алфавита является регулярным событием

тогда и только тогда, когда оно может быть получено из однобуквенных множеств с помощью применения конечного числа операций объединения, конкатенации и итерации. Р. с. могут быть заданы и с помощью других операций, сохраняющих регулярность (напр., пересечение, дополнение и т. п.), а также путем задания множества слов, выводимых в формальных системах типа систем полу-Туэ (см. *Туэ система*), грамматик и т. д.

Понятие «Р. с.» возникло при исследовании поведения *автомата конечного*, рассматриваемого в качестве акцептора. Одной из основных для конечных автоматов является теорема: событие представимо в конечном автомате тогда и только тогда, когда оно регулярно. В связи с этим в теории автоматов рассматривают две задачи: з а д а ч у а н а л и з а — по данному автомату, представляющему нек-рое событие, построить регулярное выражение, задающее это событие; и з а д а ч у с и н т е з а — имея нек-рое регулярное выражение, построить автомат, представляющий соответствующее событие.

Множество всех подмножеств слов в конечном алфавите A (событий) вместе с введенными на этом множестве операциями образуют нек-рую а л г е б р у с о б ы т и й; важнейшими среди таких алгебр являются алгебры Р. с. с операциями, позволяющими все Р. с. получить из однобуквенных множеств. Наибольший интерес представляет вопрос о конечно-аксиоматизируемости алгебр Р. с., то есть вопрос о существовании в таких алгебрах конечных полных систем тождеств. В самой общей постановке ответ на этот вопрос отрицателен, хотя существуют важные подалгебры алгебр Р. с., в к-рых конечная полная система тождеств существует.

См. также *Автомат*, *Автоматов способы задания*, *Синтеза задачи*.

Лит.: [1] К у д р я в ц е в В. Б., А л е ш и н С. В., П о д к о л з и н А. С., Элементы теории автоматов, М., 1978; [2] С а л о м а а А., «Проблемы кибернетики», 1966, в. 17, с. 237—246; [3] Я н о в Ю. И., там же, 1964, в. 12, с. 253—58; 1966, в. 17, с. 255—58; [4] У ш ч у м л и ч Ш., «Докл. АН СССР», 1979, т. 247, № 3, с. 561—65.

В. А. Буевич.

РЕГУЛЯРНОСТИ ПРИЗНАКИ для м е т о д о в с у м м и р о в а н и я — условия регулярности *суммирования метода*.

Для *матричного метода суммирования*, определенного преобразованием последовательности в последовательность посредством матрицы $\|a_{nk}\|$, $n, k=1, 2, \ldots$, условия:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leqslant M, \\ &2)\ \lim_{n\to\infty} a_{nk}=0, \\ &3)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}=1, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

являются необходимыми и достаточными для регулярности метода суммирования. Для матричного метода суммирования, определенного преобразованием ряда в последовательность посредством матрицы $\|g_{nk}\|$, $n, k=1, 2, \ldots$, необходимыми и достаточными условиями регулярности являются:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \sum_{k=1}^{\infty} |g_{n,\,k}-g_{n,\,k-1}| \leqslant M, \\ &2)\ \lim_{n\to\infty} g_{nk}=1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Условия (1) первоначально были установлены О. Тёплицем [1] для треугольных методов суммирования, а затем Х. Штейнхаузом [2] распространены на произвольные матричные методы суммирования. В связи с этим матрицу, удовлетворяющую условиям (1), наз. м а т р и ц е й Т ё п л и ц а, или Т-м а т р и ц е й.

Для *полунепрерывных методов суммирования*, определенных преобразованием последовательности в функцию посредством полунепрерывной матрицы $\|a_k(\omega)\|$ или преобразованием ряда в функцию посредством полунепрерывной матрицы $\|g_k(\omega)\|$, Р. п. подобны соответственно условиям (1) и (2).

Регулярный матричный метод суммирования является в п о л н е р е г у л я р н ы м, если все элементы матрицы преобразования неотрицательны. Это условие в общем случае не является необходимым для полной регулярности.

Лит.: [1] T o e p l i t z O., «Prace mat.-fizyczne», 1911, v. 22, p. 113—19; [2] S t e i n h a u s H., там же, p. 121—34; [3] Х а р д и Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [4] К у к Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960.

И. И. Волков.

РЕГУЛЯРНЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ, п е р м а н е н т н ы е м е т о д ы с у м м и р о в а н и я,— методы суммирования рядов (последовательностей), суммирующие каждый сходящийся ряд (последовательность) к той же сумме, к к-рой этот ряд (последовательность) сходится. Р. м. с. являются частным случаем к о н с е р в а т и в н ы х м е т о д о в с у м м и р о в а н и я — методов, к-рые каждый сходящийся ряд (последовательность) суммируют к конечной сумме, хотя быть может и отличной от той, к к-рой он сходится. Если Р. м. с. определен преобразованием последовательности $\{s_n\}$ в последовательность $\{\sigma_n\}$ посредством бесконечной матрицы $\|a_{nk}\|$:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (*)$$

(см. *Матричные методы суммирования*), то преобразование (*) и матрицу этого преобразования $\|a_{nk}\|$ наз. р е г у л я р н ы м и.

Наиболее распространенные методы суммирования, как правило, регулярны. Напр., регулярными являются *Чезаро метод суммирования* (C, k) при $k \geqslant 0$, *Гёльдера методы суммирования*, *Абеля метод суммирования* и др. Существуют нерегулярные методы суммирования. Напр., метод суммирования Чезаро (C, k) при $k < 0$, *Римана метод суммирования* не являются регулярными.

Метод суммирования наз. в п о л н е р е г у л я р н ы м м е т о д о м с у м м и р о в а н и я, если он регулярен и каждый ряд (последовательность) с действительными членами, сходящийся к $+\infty$ (или $-\infty$), суммируется этим методом также к $+\infty$ (соответственно $-\infty$). Р. м. с., определенный положительной матрицей, является вполне регулярным (см. также *Регулярности признаки*).

Лит.: [1] Х а р д и Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] К у к Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] К а н г р о Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70; [4] Б а р о н С., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, 1977.

И. И. Волков.

РЕГУЛЯРНЫЙ АВТОМОРФИЗМ — автоморфизм φ группы G такой, что $g\varphi \neq g$ ни для какого неединичного элемента g группы G (т. е. образы всех неединичных элементов группы при Р. а. должны быть отличны от своих прообразов). Если φ — Р. а. конечной группы G, то для каждого простого p, делящего порядок группы, он оставляет инвариантной (т. е. отображает в себя) единственную силовскую p-подгруппу S_p и любая инвариантная относительно φ p-подгруппа группы G содержится в S_p. Конечная группа, допускающая Р. а. простого порядка, нильпотентна [2], однако существуют разрешимые ненильпотентные группы, допускающие Р. а. составного порядка.

Лит.: [1] G o r e n s t e i n D., Finite groups, N. Y., 1968; [2] T h o m p s o n J. G., «Proc. Nac. Res. Acad. Sci.», 1959, v. 45, p. 578—81.

Н. Н. Вильямс.

РЕГУЛЯРНЫЙ ИДЕАЛ — то же, что и *модулярный идеал*.

РЕГУЛЯРНЫЙ ТОР — *алгебраический тор* в связной алгебраич. группе G, содержащийся лишь в конечном числе борелевских подгрупп. Максимальные торы в G всегда регулярны. В общем случае тор $S \subset G$ является регулярным тогда и только тогда, когда его централизатор $C_G(S)$ — разрешимая группа. В теории алгебраич. групп важную роль играют одномерные Р. т. S и соответствующие им однопараметрич. подгруппы $\lambda : G_m \to S$ (т. н. регулярные параметры). Тор, не являющийся регулярным, наз. сингулярным. Для редуктивной группы G можно дать критерий сингулярности тора $S \subset G$ в терминах системы корней. А именно, если T — максимальный тор в G, содержащий S, и $\Phi(T, G)$ — соответствующая система корней, то S сингулярен в том и только в том случае, если $S \subset \operatorname{Ker} \alpha$ для нек-рого $\alpha \in \Phi(T, G)$.

Иногда под Р. т. в G понимают тор S, содержащий регулярный элемент (элемент $s \in S$ регулярен, если размерность централизатора $C_G(s)$ в G минимальна), и называют полурегулярным тор, являющийся регулярным в смысле первоначального определения (см., напр., [1]). Для редуктивных групп оба эти определения эквивалентны.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980. *В. П. Платонов.*

РЕГУЛЯРНЫЙ ЭЛЕМЕНТ полугруппы — элемент a такой, что $a = axa$ для нек-рого элемента x данной полугруппы; если при этом $ax = xa$, то a наз. вполне регулярным. Если a — Р. э. полугруппы S, то главный правый (левый) идеал в S, порожденный a, порождается нек-рым идемпотентом; обратно, каждое из этих двух симметричных свойств влечет регулярность a. Если $aba = a$ и $bab = b$, то элементы a и b наз. инверсными друг к другу (а также обобщенно обратными, регулярно сопряженными). Всякий Р. э. имеет инверсный к нему элемент, вообще говоря, не обязательно единственный (ср. *Инверсная полугруппа.*) Полугруппы, в к-рых всякие два элемента инверсны друг к другу,— это в точности прямоугольные полугруппы (см. *Идемпотентов полугруппа).* Всякий вполне Р. э. a имеет инверсный к нему элемент, перестановочный с a. Элемент вполне регулярен тогда и только тогда, когда он групповой, т. е. принадлежит нек-рой подгруппе полугруппы (ср. *Клиффордова полугруппа*). О регулярных $\mathcal{D}$-классах см. *Грина отношения эквивалентности.*

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960. *Л. Н. Шеврин.*

РЕГУЛЯТОР поля K алгебраических чисел — число R_K, к-рое, по определению, равно 1, если K есть поле $\mathbb{Q}$ или мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, а в остальных случаях равно $\frac{v}{\sqrt{r+1}}$, где r — ранг группы E единиц поля K (см. *Алгебраическое число*, *Алгебраическая теория чисел*), а v — r-мерный объем основного параллелепипеда r-мерной решетки в $\mathbb{R}^{r+1}$, являющейся образом группы E при ее логарифмическом изображении l в $\mathbb{R}^{r+1}$. При этом гомоморфизм l определяется следующим образом. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ — все вещественные, а $\sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_{s+t}$ — комплексные попарно несопряженные изоморфизмы K в $\mathbb{C}$; $s + 2t = \dim_{\mathbb{Q}} K$ (см. *Дирихле теорема* о единицах). Тогда $r + 1 = s + t$, а гомоморфизм $l : E \to \mathbb{R}^{r+1}$ определяется формулой

$$l(\alpha) = (l_1(\alpha), \ldots, l_{s+t}(\alpha)),$$

где

$$l_i(\alpha) = \begin{cases} \ln |\sigma_i(\alpha)| & \text{при } 1 \leqslant i \leqslant s, \\ \ln |\sigma_i(\alpha)|^2 & \text{при } s+1 \leqslant i \leqslant s+t. \end{cases}$$

Образом гомоморфизма l является r-мерная решетка в $\mathbb{R}^{r+1}$, лежащая в плоскости $\sum_{i=0}^{r+1} x_i=0$ (x_i—канонич. координаты).

Единицы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$, для к-рых $l(\varepsilon_1), \ldots, l(\varepsilon_r)$ является базисом решетки $l(E)$, наз. основными единицами поля K и

$$R_K = |\det(l_i(\varepsilon_j))_{i,\ j=1,\ \ldots,\ r}|.$$

Имеются и другие формулы, связывающие Р. с другими инвариантами поля K (см., напр., *Дискриминант*, 3)).

Если вместо E рассматривать пересечение этой группы с каким-либо порядком $\mathcal{O}$ поля K, то аналогично можно определить регулятор $R_{\mathcal{O}}$ порядка $\mathcal{O}$.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Ленг С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966. *В. Л. Попов.*

РЕДУКТИВНАЯ ГРУППА — линейная алгебраич. группа G, удовлетворяющая одному из следующих эквивалентных условий: 1) радикал связной компоненты единицы G^0 группы G есть *алгебраический тор*, 2) унипотентный радикал группы G^0 тривиален, 3) группа G^0 разлагается в произведение замкнутых нормальных подгрупп S и T, являющихся соответственно *полупростой алгебраической группой* и алгебраич. тором. При этом S — коммутант группы G^0, а T совпадает с радикалом группы G^0, а также со связной компонентой единицы ее центра; $S \cap T$ конечно, любая полупростая, а также любая унипотентная подгруппа группы G^0 содержится в S.

Линейная алгебраич. группа G наз. линейно редуктивной, если выполнено любое из следующих двух эквивалентных условий: а) каждое рациональное линейное представление группы G вполне приводимо, б) для каждого рационального линейного представления $\rho: G \to \mathrm{GL}(W)$ и любого $\rho(G)$-инвариантного вектора $w \in W \setminus \{0\}$ существует такая $\rho(G)$-инвариантная линейная функция f на W, что $f(w) \neq 0$. Всякая линейно Р. г. является Р. г. Если характеристика основного поля K равна 0, то верно и обратное. В случае $\mathrm{char}\, K > 0$ это не так — всякая связная линейно Р. г. является алгебраич. тором. Однако и в общем случае Р. г. могут быть охарактеризованы в терминах теории представлений. Линейная алгебраич. группа G наз. геометрически редуктивной (или полуредуктивной), если для каждого рационального линейного представления $\rho: G \to \mathrm{GL}(W)$ и любого $\rho(G)$-инвариантного вектора $w \in W \setminus \{0\}$ существует такая $\rho(G)$-инвариантная полиномиальная функция f на W, что $f(w) \neq 0$. Линейная алгебраич. группа тогда и только тогда является Р. г., когда она геометрически редуктивна (см. *Мамфорда гипотеза*).

Для Р. г. справедлива обобщенная *Гильберта теорема* об инвариантах. Верно и обратное: если G — линейная алгебраич. группа над алгебраически замкнутым полем K и при любом ее локально конечномерном рациональном представлении автоморфизмами произвольной конечно порожденной ассоциативно-коммутативной K-алгебры A с единицей алгебра инвариантов A^G конечно порождена, то G есть Р. г. (см. [4]).

Каждая конечная линейная группа является Р. г., а если ее порядок не делится на $\mathrm{char}\, K$, то и линейно Р. г. Связные Р. г. допускают структурную теорию, во многом аналогичную структурной теории редуктивных алгебр Ли (система корней, группа Вейля и т. п., см. [2]). Эта теория распространяется и на группы вида G_k, где G — связная Р. г., определенная над нек-рым подполем $k \subset K$, а G_k — группа ее k-рациональных точек (см. [3]). При этом роль борелевских подгрупп, максимальных торов, групп Вейля играют соответственно минимальные определенные над k параболич. подгруппы, максимальные разложимые над k торы, относительные группы Вейля (см. *Вейля группа*). Лю-

бые две минимальные определенные над k параболич. подгруппы группы G сопряжены над k, т. е. при помощи элемента группы G_k; то же верно и для любых двух максимальных k-разложимых торов группы G.

Если G — связная Р. г., определенная над полем k, то G — разложимая группа над нек-рым сепарабельным расширением конечной степени поля k; если, кроме того, поле k бесконечно, то G_k плотна в G в смысле топологии Зарискоro. Если G — Р. г. и H — ее замкнутая подгруппа, то факторпространство G/H аффинно тогда и только тогда, когда H — Р. г. Линейная алгебраич. группа над полем характеристики 0 редуктивна тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли является *Ли редуктивной алгеброй* или когда она является комплексификацией нек-рой компактной группы Ли (см. *Комплексификация группы Ли*).

Лит.: [1] Спрингер Т., Теория инвариантов, пер. с англ., М., 1981; [2] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980; [3] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; № 2, с. 3—31; [4] Попов В. Л., «Докл. АН СССР», 1979, т. 249, № 3, с. 551—55.

В. Л. Попов.

РЕДУКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО — такое однородное пространство G/H связной группы Ли G, что в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G существует $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$-инвариантное подпространство, дополнительное к подалгебре $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$, являющейся алгеброй Ли группы H. Выполнение любого из следующих условий достаточно для того, чтобы однородное пространство G/H было Р. п.: 1) линейная группа $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ вполне приводима, 2) на $\mathfrak{g}$ существует $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$-инвариантная билинейная форма, сужение к-рой на $\mathfrak{h}$ невырождено. В частности, всякое однородное риманово пространство является Р. п. Если $M=G/H$ — Р. п. и группа G действует эффективно на M, то линейное представление изотропии группы H в касательном пространстве M_o к многообразию M в точке $o=eH\in M$ точно. С каждым $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$-инвариантным подпространством $\mathfrak{m}\subset\mathfrak{g}$, дополнительным к $\mathfrak{h}$, связаны две важные G-инвариантные аффинные связности на M: каноническая связность и естественная связность без кручения. Канонич. связность на Р. п. $M=G/H$ с фиксированным $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$-инвариантным разложением $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ — единственная G-инвариантная аффинная связность на M, обладающая тем свойством, что для любого вектора $X\in\mathfrak{m}$ и любого репера u в точке o кривая $(\exp tX)u$ в главном расслоении реперов над M горизонтальна. Канонич. связность полна и множество ее геодезических, проходящих через точку o, совпадает с множеством кривых вида $(\exp tX)\,o$, где $X\in\mathfrak{m}$. После естественного отождествления пространств $\mathfrak{m}$ и M_o тензор кривизны R и тензор кручения T канонич. связности определяются формулами $(R(X,Y)Z)_o=-[[X,Y]_{\mathfrak{h}},Z]$ и $T(X,Y)_o=-[X,Y]_{\mathfrak{m}}$, где X, Y, $Z\in\mathfrak{m}$, а через $W_{\mathfrak{h}}$ и $W_{\mathfrak{m}}$ обозначены проекции вектора $W\in\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Тензорные поля R и T параллельны относительно канонич. связности так же, как и любое другое G-инвариантное тензорное поле на M. Алгебра Ли линейной группы голономии (см. *Голономии группа*) канонич. связности на M с опорной точкой o порождается множеством $\{\lambda([X,Y]_{\mathfrak{h}})\mid X,Y\in\mathfrak{m}\}$, где λ — линейное представление изотропии алгебры Ли $\mathfrak{h}$ в пространстве M_o. Всякое связное односвязное многообразие, снабженное полной аффинной связностью с параллельными полями кривизны и кручения, может быть представлено в виде Р. п., канонич. связность к-рого совпадает с заданной аффинной связностью. На Р. п. $M=G/H$ с фиксированным $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$-инвариантным разложением $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ существует единственная G-инвариантная аффинная связность с нулевым кручением, имеющая те же геодезиче-

ские, что и канонич. связность. Эта связность наз. естественной связностью без кручения на M (относительно разложения $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$). Однородное риманово или псевдориманово пространство $M=G/H$ наз. естественно редуктивным, если оно допускает такое $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$-инвариантное разложение $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$, что

$$B(X,[Z,Y]_{\mathfrak{m}})+B([Z,X]_{\mathfrak{m}},Y)=0 \qquad (*)$$

для всех $X, Y, Z\in\mathfrak{m}$, где B — невырожденная симметрическая билинейная форма на $\mathfrak{m}$, индуцированная римановой (псевдоримановой) структурой на M при естественном отождествлении пространств $\mathfrak{m}$ и M_o. Если $M=G/H$ — естественно редуктивное риманово или псевдориманово пространство с фиксированным $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$-инвариантным разложением $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$, удовлетворяющим условию (*), то естественная связность без кручения совпадает с соответствующей римановой или псевдоримановой связностью на M. Если M — односвязное естественно редуктивное однородное риманово пространство и $M=M_0\times M_1\times\ldots\times M_r$ — его разложение де Рама, то M может быть представлено в виде $M=G/H$, причем $G=G_0\times G_1\times\ldots\times G_r$, $H=H_0\times H_1\times\ldots\times H_r$ и $M_i=G_i/H_i$ $(i=0,1,2,\ldots,r)$.

Важным обобщением Р. п. являются ν-редуктивные однородные пространства [4]. Однородное пространство G/H наз. ν-редуктивным, если его стационарная подалгебра $\mathfrak{h}$ допускает разложение в прямую сумму подпространств $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2+\ldots+\mathfrak{h}_\nu$, где $\mathfrak{h}_\nu\neq\{0\}$, причем в $\mathfrak{h}$ существует такое дополнительное к $\mathfrak{h}$ подпространство $\mathfrak{m}$, что $[\mathfrak{h}_i,\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{h}_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,\nu$, где $\mathfrak{h}_0=\mathfrak{m}$. При этом 1-редуктивные однородные пространства — это в точности Р. п.; примерами 2-редуктивных однородных пространств являются проективное и конформное пространства, на к-рых действуют группа проективных преобразований и группа конформных преобразований соответственно. Если $M=G/H$ есть ν-редуктивное однородное пространство и $\nu>1$, то линейное представление изотропии алгебры Ли $\mathfrak{h}$ не является точным (так как $[\mathfrak{h}_i,\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{h}$ при $i>1$) и, следовательно, на M не существует G-инвариантной аффинной связности. Однако на ν-редуктивном однородном пространстве существует каноническая G-инвариантная связность, слоем к-рой является однородное пространство нек-рой транзитивной дифференциальной группы порядка ν (см. [4]).

Наряду с Р. п. рассматриваются также частично редуктивные пространства, т. е. такие однородные пространства G/H, что существует разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в прямую сумму двух ненулевых $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$-инвариантных подпространств, одно из к-рых содержит подалгебру $\mathfrak{h}$ (см. [5]).

Лит.: [1] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 2, М., 1981; [2] Рашевский П. К., «Тр. Семинара по вект. и тенз. анализу», 1952, в. 9, с. 49—74; [3] Nomizu K., «Amer. J. Math.», 1954, v. 76, № 1, p. 33—65; [4] Кантор И. Л., «Тр. Семинара по вект. и тенз. анализу», 1966, в. 13, с. 310—98; [5] Винберг Э. Б., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1960, т. 9, с. 191—210.

Д. В. Алексеевский.

РЕЗИДУАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — изотонное отображение φ частично упорядоченного множества P в частично упорядоченное множество P', для к-рого существует изотонное отображение φ' из P' в P такое, что $\varphi'(\varphi(x))\geqslant x$ для всех $x\in P$ и $\varphi(\varphi'(x'))\leqslant x'$ для всех $x'\in P'$. Если P и P' — полные решетки и φ сюръективно, то это равносильно равенству

$$\varphi(\sup A)=\sup\varphi(A)$$

для всякого подмножества A из P. Совокупность Р. о. частично упорядоченного множества P в себя образует полугруппу, к-рую можно сделать частично упорядо-

ченной (см. *Упорядоченная полугруппа*), полагая $\varphi \leqslant \psi$, если $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ для всех $x \in P$. Свойства этой частично упорядоченной полугруппы тесно связаны со свойствами частично упорядоченного множества P (см. *Решетка*).

Л. А. Скорняков.

РЕЗНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, образованная из ортогональных траекторий однопараметрич. семейства плоскостей. Р. п. имеет одно семейство плоских линий кривизны, к-рые одновременно являются для Р. п. геодезическими. Если семейство плоскостей вырождается в пучок, то Р. п. будет поверхностью вращения. Сечения Р. п. плоскостями семейства наз. меридианами, а ортогональные траектории — параллелями Р. п. Все меридианы конгруэнтны, так что Р. п. можно образовать движением плоской линии L (меридиана), плоскость к-рой катится без скольжения по нек-рой развертывающейся поверхности, называемой направляющей поверхностью Р. п. и являющейся одной из полостей ее эволюты.

Если $\rho(s)$ — радиус-вектор одной параллели, то радиус-вектор Р. п. есть

$$r = \rho(s) + \eta(v)\, p(s) + \zeta(v)\, q(s),$$

где $p = \nu \cos\theta + \beta \sin\theta$, $q = -\nu \sin\theta + \beta \cos\theta$, ν — главная нормаль, β-бинормаль, x — кручение кривой Γ, а $\theta = -\int x\,ds$. Ее линейный элемент:

$$ds^2 = [1 + k(\zeta \sin\theta - \eta \cos\theta)]^2\, ds^2 + (\eta'^2 + \zeta'^2)\, dv^2,$$

где $\eta(v)$, $\zeta(v)$ — уравнения Γ, а k — кривизна.

И. Х. Сабитов.

РЕЗОЛЬВЕНТА — 1) Р. алгебраического уравнения $f(x)=0$ степени n — алгебраическое уравнение $g(y)=0$ с коэффициентами, рационально зависящими от коэффициентов $f(x)$, такое, что знание корней этого уравнения позволяет найти корни данного уравнения $f(x)=0$ в результате решения более простых уравнений, степеней не больших n. Иногда Р. называют само рациональное выражение $y = y(x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть $f(x)$ — сепарабельный многочлен над полем k с группой Галуа G и H — нормальный делитель группы G. Пусть $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ — рациональное выражение от $x_1, \ldots, x_n$, остающееся инвариантным при всех подстановках корней $x_1, \ldots, x_n$ из группы H, и $y \notin k$. Тогда y является корнем нек-рого уравнения $g(y)=0$ с коэффициентами из k, группа Галуа к-рого является собственной факторгруппой группы G. Таким образом, решение уравнения $f(x)=0$ сводится к решению уравнения $g(y)=0$ и решению уравнения $f(x)=0$ над полем $k(u_1, \ldots, y_s)$.

Напр., для решения уравнения 4-й степени

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

(любое уравнение 4-й степени приводится к такому виду) используют кубич. Р.

$$y^3 - 2py^2 + (p^2 - 4r^2)\, y + q^2 = 0,$$

корни к-рой y_1, y_2, y_3 связаны с корнями x_1, x_2, x_3, x_4 соотношениями $y_1 = (x_1+x_2)(x_3+x_4)$, $y_2 = (x_1+x_3)(x_2+x_4)$, $y_3 = (x_2+x_4)(x_2+x_3)$. Корни y_1, y_2, y_3 определяются с помощью формулы Кардано, что позволяет определить и корни x_1, x_2, x_3, x_4.

Последовательное применение метода Р. позволяет свести решение любого уравнения с разрешимой группой Галуа к решению цепочки уравнений с циклич. группой Галуа. Для решения последних используются резольвенты Лагранжа.

Пусть $f(x)=0$ — уравнение над полем k с циклич. группой Галуа G порядка n и пусть k содержит первообразный корень из единицы ζ_n степени n. Для элемента α, принадлежащего полю разложения многочлена $f(x)$, и характера χ группы G в группу корней из

единицы степени n р е з о л ь в е н т а Л а г р а н ж а $\rho(\chi, \alpha)$ определяется формулой

$$\rho(\chi, \alpha) = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma)^{-1} \sigma(\alpha). \qquad (*)$$

Пусть $\alpha = x_1$ — один из корней многочлена $f(x)$ и χ пробегает все характеры группы G. Тогда система линейных уравнений (*) позволяет определить корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если известны резольвенты Лагранжа для всех характеров χ группы G.

Для $\tau \in G$ выполняется соотношение

$$\tau\rho(\chi, \alpha) = \chi(\tau)\rho(\chi, \alpha),$$

к-рое показывает, что элементы $a = \rho(\chi, \alpha)^n$ и $b_i = \rho(\chi, \alpha)^{-i}\rho(\chi^i, \alpha)$ при любом целом i инвариантны относительно G и, следовательно, являются однозначно определенными рациональными выражениями от коэффициентов многочлена $f(x)$ и корня ξ_n. Если χ порождает группу характеров группы G, то имеют место равенства $\rho(\chi, \alpha) = \sqrt[n]{a}$ и $\rho(\chi', \alpha) = b_i\rho(\chi, \alpha)^i$ для $\chi' = \chi^i$.

Р е з о л ь в е н т о й Г а л у а уравнения $f(x) = 0$ наз. такое неприводимое над данным полем алгебраич. уравнение $y(x) = 0$ (см. *Галуа теория*), что в результате присоединения одного из его корней к этому полю получается поле, содержащее все корни уравнения $f(x) = 0$.

Лит.: [1] В а н д е р В а р д е н Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979.

Л. В. Кузьмин.

2) В теории интегральных уравнений под Р. (р а з р е ш а ю щ и м я д р о м) уравнения

$$\varphi(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s) \qquad (**)$$

понимают функцию $\Gamma(s, t; \lambda)$ переменных s, t и параметра λ, при помощи к-рой решение уравнения (**) представляют в виде

$$f(s) + \lambda \int_a^b \Gamma(s, t, \lambda) f(t)\,dt,$$

если λ не есть собственное значение уравнения (**), напр. для ядра $K(s, t) = s + t$ резольвентой является функция

$$\Gamma(s, t; \lambda) = \frac{s + t - \left(\frac{s+t}{2} - st - \frac{1}{3}\right)\lambda}{1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}}.$$

БСЭ-3.

3) Р. о п е р а т о р а — оператор R_λ, обратный к $T_\lambda = A - \lambda T$, где A — замкнутый линейный оператор, определенный на плотном множестве D_A банахова пространства X со значениями в том же пространстве, при условии, что λ таково, что T_λ^{-1} есть линейный непрерывный оператор, определенный на всем X. Точки λ, для к-рых Р. существует, наз. р е г у л я р н ы м и т о ч к а м и оператора A, а совокупность всех регулярных точек — р е з о л ь в е н т н ы м м н о ж е с т в о м $\rho(A)$ этого оператора. Множество $\rho(A)$ — открытое и на каждой его связной компоненте оператора R_λ является аналитич. функцией параметра λ.

Свойства Р.:

1) $R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu$ для любых двух точек λ, $\mu \in \rho(A)$;

2) из $R_\lambda x = 0$ следует $x = 0$;

3) если X — гильбертово пространство, то $R_{\bar\lambda} = R_\lambda^*$.

Лит.: [1] И о с и д а К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] А х и е з е р Н. И., Г л а з м а н И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [3] К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977.

В. И. Соболев.

4) В гомологической алгебре Р. м о д у л я — *комплекс* C, определенный для положительных степеней и снабженный пополняющим гомоморфизмом $A \to C$ (мо-

дуль A рассматривается как комплекс, равный нулю в ненулевых степенях) таким образом, что последовательность $0\to A\to C^0\to C^1\to\ldots$ точна. Р. наз. инъективной, если все C^i инъективны. Двойственным образом определяется проективная резольвента. Р. является основным средством вычисления *производных функторов*. В частных случаях удобно использовать специальные виды Р. Напр., для кольца многочленов $R=k[x_1,\ldots,x_n]$ *внешняя алгебра* $E_R(u_1,\ldots,u_n)$ превращается в Р. тривиального R-модуля k, если задать дифференциал $\partial(u_i)=x_i$ и пополняющий гомоморфизм $\varepsilon(u_i)=0$. Эта конструкция применима к кольцам степенных рядов (как сходящихся, так и формальных) и носит название комплекса Козюля.

В. Е. Говоров.

РЕЗОЛЬВЕНТНОЕ МНОЖЕСТВО — множество $\rho(T)$, где T — линейный оператор в банаховом пространстве, такое, для к-рого существует оператор $R_z=(T-zI)^{-1}$, ограниченный и имеющий область определения, плотную в X. Дополнительное к Р. м. множество есть спектр оператора T.

Лит.: [1] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979.

М. И. Войцеховский.

РЕЗОНАНС — явление увеличения амплитуды *вынужденных колебаний* при приближении частоты внешнего воздействия к одной из частот *собственных колебаний* динамич. системы. Явление Р. имеет наиболее простой характер в линейной динамич. системе. Дифференциальное уравнение движения линейной системы с одной степенью свободы в среде с вязким трением при гармонич. воздействии имеет вид

$$a\ddot{q}+b\dot{q}+cq=H\sin(pt+\delta),$$

где q — обобщенная координата; a, b, c — постоянные параметры, характеризующие систему; H, p, δ — соответственно амплитуда, частота, начальная фаза внешнего воздействия. Установившиеся вынужденные колебания происходят по гармонич. закону с частотой p и амплитудой

$$D=\frac{H}{a\sqrt{(k^2-p^2)^2+\frac{b^2}{a^2}p^2}},$$

где $k=\sqrt{c/a}$ — частота собственных колебаний при отсутствии рассеивания энергии ($b=0$). Амплитуда D имеет максимальное значение при $\frac{p}{k}=\sqrt{1-\frac{b^2}{2ac}}$ и при малом рассеивании энергии близка к ее значению при $p=k$. Принято называть резонансом тот случай, когда $p=k$. Если $b=0$, то при $p=k$ амплитуда вынужденных колебаний возрастает пропорционально времени.

Если линейная система имеет n степеней свободы, то Р. наступает при совпадении частоты внешней силы с одной из собственных частот системы. При негармонич. воздействии Р. может иметь место лишь при совпадении частот его гармонич. спектра с частотами собственных колебаний.

Лит.: [1] Стрелков С. П., Введение в теорию колебаний, М.— Л., 1951.

Н. В. Бутенин.

РЕЗОНАНСНЫЕ ЧЛЕНЫ — те члены $f_{PQ}X^P\times\exp\{i\langle Q,Y\rangle\}$ ряда Тейлора — Фурье

$$f(X,Y)=\sum f_{PQ}X^P\exp\{i\langle Q,Y\rangle\},\qquad(1)$$

$$P\in\mathbb{Z}^m,\ P\geqslant 0,\ Q\in\mathbb{Z}^n,$$

$$X^P=x_1^{p_1}\ldots x_m^{p_m},$$

у к-рых показатели P и Q удовлетворяют линейному соотношению вида

$$\langle P,\Lambda\rangle+i\langle Q,\Omega\rangle=c.\qquad(2)$$

Здесь f_{PQ} — постоянные коэффициенты, $\langle Q,Y\rangle$ —

скалярное произведение Q и Y; постоянные $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)=\Lambda$ и $(\omega_1, \ldots, \omega_n)=\Omega$ — обычно собственные значения и базис частот нек-рой системы обыкновенных дифференциальных уравнений; константа c не зависит от P и Q, она определяется ролью ряда (1) в рассматриваемой задаче.

Если в линейной системе

$$\dot{x}_j=\lambda_j x_j,\ j=1, \ldots, m,\ \dot{y}_k=\omega_k,\ k=1, \ldots, n, \quad (3)$$

все λ_j чисто мнимые и в (2) $c=0$, то сумма Р. ч. ряда (1) совпадает с осреднением этого ряда вдоль решений системы (3). Систему обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности нек-рых инвариантных многообразий можно привести к *нормальной форме*, в к-рой ряды содержат только Р. ч. (см. [1]). Так, для *гамильтоновой системы* в окрестности неподвижной точки гамильтониан может быть приведен к виду (1), где $n=0$, и выполнено (2) с $c=0$, причем $\Lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_l, -\lambda_1, \ldots, -\lambda_l)$ — вектор из собственных значений линеаризованной системы (см. [2]). В этом случае иногда члены с $p_j=p_{j+l}$, $j=1, \ldots, l$, наз. вековыми (для них (2) выполняется тривиально), а резонансными наз. остальные члены ряда (1), для к-рых выполнено (2).

Выделение Р. ч., производимое в задачах с малым параметром, зачастую также может быть обосновано с помощью нормальной формы (см. [1]). Для точечного преобразования с мультипликаторами $(\mu_1, \ldots, \mu_m)=M$ показатели Р. ч. ряда (1) с $n=0$ удовлетворяют соотношению $M^P=1$; если положить $\Lambda=\ln M$ и $\omega_1=1$, то получится соотношение (2) с $c=0$.

Лит.: [1] Брюно А. Д., Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений, М., 1979; [2] его же, «Тр. Моск. матем. об-ва», 1971, т. 25, с. 119—262; 1972, т. 26, с. 199—239.

А. Д. Брюно.

РЕЗУЛЬТАНТ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ — элемент поля Q, определяемый формулой

$$R(f, g)=a_0^s b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{s} (\alpha_i-\beta_j), \quad (1)$$

где Q — поле разложения многочлена fg, α_i, β_j — корни многочленов

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

и

$$g(x)=b_0x^s+b_1x^{s-1}+\ldots+b_s$$

соответственно. Если $a_0b_0\neq 0$, то многочлены тогда и только тогда имеют хотя бы один общий корень, когда их Р. равен нулю. Имеет место равенство

$$R(g, f)=(-1)^{ns}R(f, g).$$

Р. можно записать в любом из следующих видов:

$$R(f, g)=a_0^s \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i), \quad (2)$$

$$R(f, g)=(-1)^{ns}b_0^n \prod_{j=1}^{s} f(\beta_j). \quad (3)$$

Выражения (1), (2) и (3) неудобны для вычисления Р., так как они содержат корни многочленов. Через коэффициенты многочленов Р. можно выразить в виде следующего определителя порядка $n+s$:

$$R(f, g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n & & \\ & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & & a_0 & a_1 \ldots a_{n-1} & a_n & \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_{s-1} & b_s & & \\ & b_0 & b_1 & \ldots & b_{s-1} & b_s & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & & b_0 & b_1 \ldots b_{s-1} & b_s & \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Этот определитель в первых s строках содержит коэффициенты многочлена $f(x)$, в последних n строках — коэффициенты многочлена $g(x)$, а на свободных местах — нули.

Р. многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с числовыми коэффициентами можно представить в виде определителя порядка n (или s). Для этого находят остаток от деления $x^k g(x)$ на $f(x)$, $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$. Пусть это будет

$$a_{k0}+a_{k1}x+\ldots+a_{kn-1}x^{n-1}.$$

Тогда

$$R(f, g)=\begin{Vmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0\,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1\,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1\,0} & a_{n-1\,1} & \ldots & a_{n-1\,n-1} \end{Vmatrix}.$$

Дискриминант $D(f)$ многочлена

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}\ldots a_n,\ a_0\neq 0,$$

выражается через Р. многочлена $f(x)$ и его производной $f'(x)$ следующим образом:

$$D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{-1}R(f, f').$$

Применение к решению систем уравнений. Пусть дана система двух алгебраич. уравнений с коэффициентами из поля P:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y)&=0, \\ g(x, y)&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Многочлены f и g записывают по степеням x:

$$f(x, y)=a_0(y)x^k+a_1(y)x^{k-1}+\ldots+a_k(y),$$
$$g(x, y)=b_0(y)x^l+b_1(y)x^{l-1}+\ldots+b_l(y),$$

и по формуле (4) вычисляют Р. этих многочленов как многочленов от x. Получается многочлен, зависящий только от y:

$$R(f, g)=F(y).$$

Говорят, что многочлен $F(y)$ получен путем исключения x из многочленов $f(x,y)$ и $g(x,y)$. Если $x=\alpha$, $y=\beta$ — решение системы (5), то $F(\beta)=0$, и обратно, если $F(\beta)=0$, то или многочлены $f(x, \beta)$, $g(x, \beta)$ имеют общий корень (к-рый надо искать как корень их наибольшего общего делителя), или $a_0(\beta)=b_0(\beta)=0$. Тем самым решение системы (5) сводится к вычислению корней многочлена $F(y)$ и общих корней многочленов $f(x, \beta)$, $g(x, \beta)$ с одним неизвестным.

Аналогично можно решать и системы уравнений с любым числом неизвестных, но эта задача приводит к весьма громоздким вычисл ниям (см. также *Исключения теория*).

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [2] Окунев Л. Я., Высшая алгебра, 4 изд., М.—Л., 1949; [3] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [4] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1—3, М., 1954—55.

И. В. Проскуряков.

РЕЙДЕМЕЙСТЕРА КРУЧЕНИЕ, кручение де Рама, кручение Франца,— инвариант, позволяющий различать многие структуры в дифференциальной топологии, напр. узлы, гладкие структуры на многообразиях, в частности на линзовых пространствах. Впервые Р. к. введено К. Рейдемейстером (см. [1]) при изучении трехмерных линз, обобщения для n-мерных линз были независимо получены в [2] и [3].

Пусть C — свободный комплекс левых A-модулей, где A — ассоциативное кольцо с единицей. Пусть, далее, h — матричное представление кольца A, т. е. гомоморфизм кольца A в кольцо $R^{n\times n}$ всех действительных $(n\times n)$-матриц. И пусть в модулях C_k комплекса C отмечены базисы c_k, а комплекс $C'=R^{n\times n}\otimes_A C$ $R^{n\times n}$-модулей ациклич; тогда определено *Уайтхеда кручение* $\tau(C')\in \overline{K}_1 R^{n\times n}=\overline{K}_1 R=R_+$, где R_+ — мультипликативная группа поля действительных чисел. Число $\tau(C')$ наз. кручением Рейдемейстера комплекса C', а также действительным Р. к.

Эффективность замены кручения Уайтхеда на Р. к. основывается на теореме Басса [4]: если π — конечная группа, то элемент $\omega \in Wh(\pi)$ имеет конечный порядок, если $h_*(\omega)=1$ для любого представления h, где $h_*(\omega)$ — Р. к., индуцированное элементом ω.

Лит.: [1] Reidemeister K., «Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg», 1935, Bd 11, S. 102—09; [2] Franz W., «J. für r. und ang. Math.», 1935, Bd 173, S. 176—84; [3] Rham G. de, «Матем. сб.», 1936, т. 1, № 5, с. 737—43; [4] Bass H., «Publ. math.», 1964, № 22, p. 5—60 [IHES]. *А.С.Мищенко.*

РЕЙНОЛЬДСА ЧИСЛО — один из критериев подобия для течений вязких жидкостей и газов, характеризующий соотношение между инерционными силами и силами вязкости:

$$\mathrm{Re}=\rho v l/\mu,$$

где ρ — плотность, μ — динамич. коэффициент вязкости жидкости или газа, v — характерная скорость потока, l — характерный линейный размер.

От Р. ч. зависит также режим течения жидкости, характеризуемый критическим Р. ч. $\mathrm{Re}_{кр}$. При $\mathrm{Re}<\mathrm{Re}_{кр}$ возможно лишь ламинарное течение жидкости, а при $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{кр}$ течение может стать турбулентным.

Р. ч. названо по имени О. Рейнольдса (O. Reynolds).

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

РЕКУРРЕНТНАЯ ТОЧКА динамической системы — точка x динамич. системы f^t (или, в иных обозначениях, $f(t,\cdot)$, см. [2]), заданной на метрич. пространстве S, удовлетворяющая условию: для всякого $\varepsilon>0$ найдется $T>0$ такое, что все точки траектории $f^t x$ содержатся в ε-окрестности всякой дуги временно́й длины T этой траектории (иными словами, при любом $\tau\in\mathbb{R}$ ε-окрестность множества

$$\{f^t x\},\ t\in[\tau,\ \tau+T],$$

содержит всю траекторию $f^t x$). В этом случае $f^t x$ наз. рекуррентной траекторией.

Теорема Биркгофа: если пространство S полное (напр., $S=\mathbb{R}^n$), то 1) для того чтобы точка была рекуррентной, необходимо и достаточно, чтобы замыкание ее траектории было *минимальным множеством*; 2) для того чтобы существовала Р. т., достаточно, чтобы существовала точка, устойчивая по Лагранжу (см. *Устойчивость по Лагранжу*).

Р. т. устойчива по Лагранжу и по Пуассону (см. *Устойчивость по Пуассону*). Почти периодическая (в частности, неподвижная или периодическая) точка динамич. системы рекуррентна. Вообще, всякая точка строго эргодической динамич. системы рекуррентна, но сужение динамич. системы на замыкание рекуррентной траектории (минимальное множество) может не быть строго эргодической динамич. системой (пример Маркова, см. [2]).

Лит.: [1] Биркгоф Д. Д., Динамические системы, пер. с англ., М., 1941; [2] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949. *В. М. Миллионщиков.*

РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА — то же, что *рекуррентное соотношение*.

РЕКУРРЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, являющаяся *рекуррентной точкой* сдвигов динамич. системы. Эквивалентное определение: функция $\varphi:\mathbb{R}\to S$, где S — метрич. пространство, наз. рекуррентной, если она имеет предкомпактное множество значений, равномерно непрерывна и для всякой последовательности чисел $t_k\in\mathbb{R}$ такой, что существует предел

$$\tilde{\varphi}(t)=\lim_{k\to\infty}\varphi(t_k+t)$$

(предел в компактно открытой топологии, т. е. равномерный на каждом отрезке), най-

дется последовательность чисел $\tau_k \in \mathbb{R}$ такая, что

$$\varphi(t) = \lim_{k \to \infty} \tilde{\varphi}(\tau_k + t)$$

в компактно открытой топологии.

Если $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ — ограниченная равномерно непрерывная функция, то найдутся $t_k \in \mathbb{R}$ такие, что предел

$$\tilde{\varphi}(t) = \lim_{k \to \infty} \varphi(t_k + t)$$

(в компактно открытой топологии) существует и является Р. ф. Всякая почти периодич. функция и, в частности, всякая периодич. функция являются Р. ф.

Лит.: [1] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146.

В. М. Миллионщиков.

РЕКУРРЕНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ, рекуррентная формула,— соотношение вида

$$a_{n+p} = F(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+p-1}),$$

к-рое позволяет вычислять все члены последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$, если заданы ее первые p членов. Примеры Р. с.: 1) $a_{n+1} = q \cdot a_n (q \neq 0)$ — геометрич. прогрессия, 2) $a_{n+1} = a_n + d$ — арифметич. прогрессия, 3) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ — последовательность чисел Фибоначчи.

В случае, когда Р. с. линейно (см. *Возвратная последовательность*), задача описания множества всех последовательностей, удовлетворяющих данному Р. с., имеет аналогии с решением обыкновенного однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Возвратные последовательности, 2 изд., М., 1975.

С. Н. Артемов.

РЕКУРРЕНТНЫЕ СОБЫТИЯ в последовательности повторных испытаний со случайными исходами — ряд событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ таких, что наступление события A_n определяется исходами первых n испытаний, $n = 1, 2, \ldots$, а при условии, что наступило событие A_n, наступление события A_m, $m > n$, определяется исходами $(n+1)$-го, $(n+2)$-го и т. д. до m-го испытаний, причем при условии одновременного наступления событий A_n и A_m $(m > n)$ исходы первых n и последующих $m-n$ испытаний условно независимы.

Более точно, пусть X — совокупность (конечная или счетная) всех исходов отдельного испытания, $X^{[1, n]}$ — пространство последовательностей $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in X$, $i = 1, \ldots, n$, исходов при n испытаниях, $n = 1, 2, 3, \ldots$, и $X^{[1, \infty]}$ — пространство бесконечных последовательностей $(x_1, \ldots, x_n \ldots)$, $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, исходов, в к-ром задано нек-рое распределение вероятностей p. Пусть в каждом пространстве $X^{[1, n]}$, $n = 1, 2, \ldots$, выделено нек-рое подмножество $\varepsilon_n \subseteq X^{[1, n]}$ так, что для любых n и m, $1 \leqslant n < m < \infty$, последовательность $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m) \in X^{[1, m]}$ такая, что $\bar{x}|_1^n \equiv (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in \varepsilon_n$, принадлежит ε_m в том и только в том случае, когда последовательность

$$\bar{x}|_{n+1}^m \equiv (\bar{x}_{n+1}, \ldots, \bar{x}_m) \in \varepsilon_{m-n}.$$

Если последнее условие выполнено и $\bar{x} \in \varepsilon_m$, то

$$p\{x \in X^{[1, \infty)}: x|_1^m = \bar{x}\} = p\{x \in X^{[1, \infty)}: x|_1^n = \bar{x}|_1^n\} \, p\{x \in X^{[1, \infty)}: x|_{n+1}^m = \bar{x}|_{n+1}^m\},$$

где для последовательности $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in X^{[1, \infty]}$ через $x|_i^j$ обозначена последовательность

$$x|_i^j = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j), \quad i \leqslant j, \quad (i, j) = 1, 2, \ldots$$

Событие

$$A_n = \{x \in X^{[1, \infty)}: x|_1^n \in \varepsilon_n\}$$

наз. рекуррентным событием, наступившим после n испытаний.

Примеры. 1) В последовательности независимых бросаний монеты — события, состоящие, соответственно, в том, что при n испытаниях герб и решка выпадут одинаковое число раз (такое событие возможно только при четных n).

2) При случайном блуждании точки по одномерной решетке Z^1, начинающемся в нуле (с независимыми при разных шагах переходами в соседние точки с вероятностями p и q, $p+q=1$), события, состоящие, соответственно, в том, что блуждающая точка окажется в нуле после n-го шага, $n=2,4,\ldots$, являются рекуррентными.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1967.

Т. Ю. Попова.

РЕКУРСИВНАЯ ИГРА — *стохастическая игра* с терминальным выигрышем (см. также *Динамическая игра*). Ввиду того, что Р. и. может никогда не закончиться, необходимо определять выигрыши игроков в случае бесконечных партий. Анализ любой игры Шепли может быть сведен к анализу нек-рой Р. и., но из-за возможности бесконечных партий исследование Р. и. в общем случае сложнее, чем исследование стохастич. игр. Любая антагонистическая конечная Р. и. обладает значением, и оба игрока имеют стационарные ε-оптимальные стратегии. Х. Эверетт [1] указал метод нахождения как значений игры, так и оптимальных стратегий.

Лит.: [1] Everett H., в кн.: Contributions to the theory of games, v. 3, Princeton, 1957, p. 47—78.

В. К. Домашский.

РЕКУРСИВНАЯ РЕАЛИЗУЕМОСТЬ — уточнение интуиционистской семантики арифметич. суждений на основе понятия частично рекурсивной функции, предложенное С. Клини (см. [1], [2]). Для всякой замкнутой арифметич. формулы F определяется отношение «натуральное число e реализует формулу F», обозначаемое erF. Отношение erF определяется индуктивно в соответствии с построением формулы F.

1) Если F — элементарная формула без свободных переменных, т. е. формула вида $s=t$, где s и t — постоянные термы, то erF тогда и только тогда, когда $e=0$ и значения термов s и t совпадают.

Пусть A и B — формулы без свободных переменных.

2) $er(A\&B)$ тогда и только тогда, когда $e=2^a\cdot 3^b$, где arA, brB.

3) $er(A\vee B)$ тогда и только тогда, когда $e=2^0\cdot 3^a$ и arA или $e=2^1\cdot 3^b$ и brB.

4) $er(A\supset B)$ тогда и только тогда, когда e — гёделев номер такой одноместной частично рекурсивной функции φ, что для любого натурального числа a, если arA, то φ применима к a и $\varphi(a)rB$.

5) $er(\neg A)$ тогда и только тогда, когда $er(A\supset 1=0)$.

Пусть $A(x)$ — формула без свободных переменных, отличных от x; если n — натуральное число, то $\overline{n}$ — терм, изображающий в формальной арифметике число n.

6) $er(\exists xA(x))$ тогда и только тогда, когда $e=2^n\cdot 3^a$ и $arA(\overline{n})$.

7) $er(\forall xA(x))$ тогда и только тогда, когда e — гёделев номер такой общерекурсивной функции f, что для любого натурального n число $f(n)$ реализует $A(\overline{n})$.

Замкнутая формула F *называется* реализуемой, если существует число e, реализующее F. Формула $A(y_1,\ldots,y_m)$, содержащая свободные переменные $y_1,\ldots,y_m$, может рассматриваться как предикат от $y_1,\ldots,y_m$ («формула $A(y_1,\ldots,y_m)$ реализуема»). Если формула F выводима из реализуемых формул в интуиционистском арифметическом исчислении, то F реализуема (см. [3]). В частности, всякая формула, доказуемая в интуиционистской арифметике, реализуема,

Можно указать такую формулу $A(x)$, что формула $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ не реализуема. Соответственно, в этом случае формула $\neg\forall x(A(x) \vee A(x))$ реализуема, хотя является классически ложной.

Всякая предикатная формула $\mathfrak{A}$, доказуемая в интуиционистском исчислении предикатов, обладает тем свойством, что каждая арифметич. формула, получающаяся из $\mathfrak{A}$ подстановкой, реализуема. Предикатные формулы, обладающие этим свойством, наз. р е а л и з у е м ы м и. Было показано [4], что пропозициональная формула

$$((\neg\neg D \supset D) \supset (\neg\neg D \vee \neg D)) \supset (\neg\neg D \vee \neg D),$$

где D обозначает формулу $\neg p \vee \neg q$, реализуема, но не выводима в интуиционистском исчислении высказываний.

Лит.: [1] K l e e n e S. C., «J. Symbolic Logic», 1945, v. 10, p. 109—24; [2] К л и н и С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] N e l s o n D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 61, p. 307—68; [4] R o s e G. F., там же, 1953, v. 75, p. 1—19; [5] Н о в и к о в П. С., Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., 1977.

В. Е. Плиско.

РЕКУРСИВНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ — раздел теории *рекурсивных функций*, в к-ром рассматриваются и классифицируются подмножества натуральных чисел с алгоритмич. точки зрения, а также исследуются структуры, возникающие в результате такой классификации. Для каждого множества A, к-рое является подмножеством множества всех натуральных чисел N, можно сформулировать следующую п р о б л е м у р а з р е ш и м о с т и: существует ли алгоритм, позволяющий для любого $x \in N$ ответить на вопрос о принадлежности x к A?

Математическая постановка проблем такого рода, как и развитие Р. т. м., стала возможна лишь в 40-х гг. 20 в. после успешной формализации интуитивного понятия (алгоритмически) *вычислимой функции*. Области значений таких функций образуют семейство р е к у р с и в н о п е р е ч и с л и м ы х м н о ж е с т в (р. п. м.). Множества, для к-рых сформулированная выше проблема разрешима, наз. р е к у р с и в н ы м и. Точнее, A рекурсивно тогда и только тогда, когда A и $N \setminus A$ оба являются р. п. м. Первыми примерами нерекурсивных р. п. м. оказались т. н. креативные (творческие) множества. Именно, р. п. м. K наз. к р е а т и в н ы м, если существует вычислимая функция, к-рая по номеру любого р. п. м. A, не пересекающегося с K, выдает число, принадлежащее $N \setminus (K \cup A)$. Одновременно с креативными множествами были обнаружены и другие нерекурсивные р. п. м., в частности простые. Р. п. м. наз. п р о с т ы м, если оно имеет бесконечное дополнение, к-рое не содержит бесконечных р. п. м. Таким образом, уже для р. п. м. возникает тонкая проблема классификации их проблем разрешимости. Одним из инструментов для такой классификации служит понятие с в о д и м о с т и. На интуитивном уровне множество A с в о д и м о к множеству B, если существует алгоритм, к-рый решал бы проблему вхождения элементов для множества A при условии, что есть возможность по мере надобности пользоваться информацией о принадлежности тех или иных натуральных чисел множеству B. В этом случае A оказывается в определенном смысле «рекурсивным» относительно B, а обычные рекурсивные множества — «рекурсивными» относительно любого множества. Такая сводимость в самом общем виде (точная формулировка к-рой достаточно сложна) наз. т ь ю р и н г о в о й, или T-с в о д и м о с т ь ю. Накладывая те или иные ограничения на алгоритм, участвующий в понятии сводимости, приходят к определению других сводимостей, напр. 1-, m-, btt- или tt-сводимости. В частности, A m-с в о д и м о

к B, если существует всюду определенная вычислимая функция f такая, что для всех x из N

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Если f можно выбрать разнозначной, то говорят, что A 1-с в о д и м о к B.

Обобщением m-сводимости является т а б л и ч н а я *(tt-)* сводимость. Множество A tt-сводимо к множеству B, если существует алгоритм, к-рый для каждого x дает набор чисел $\langle t_1^x, t_2^x, \ldots, t_{n(x)}^x \rangle$ и булеву функцию $\beta_x(y_1 \ldots, y_{n(x)})$, причем

$$x \in A \Leftrightarrow \beta_x(\chi(t_1^x), \ldots, \chi(t_{n(x)}^x)) = 1,$$

где $\chi(t)=1$, если $t \in B$, и $\chi(t)=0$ в противном случае. Если A можно таблично свести к B так, что $n(x)$ будет ограничено нек-рой константой, то говорят, что A о г р а н и ч е н н о т а б л и ч н о *(btt-)* с в о д и т с я к B.

Пусть r — нек-рая сводимость. Пишут $A \leqslant_r B$, если множество A r-сводимо к B. Отношение $\leqslant_r$ должно быть предпорядком. Если положить

$$A \equiv_r B \Leftrightarrow (A \leqslant_r B \;\&\; B \leqslant_r A),$$

то $\equiv_r$ будет отношением эквивалентности, отдельный класс к-рой наз. r-с т е п е н ь ю (и рекурсивно перечислимой r-степенью, если этот класс содержит р. п. м.). Тьюринговы степени известны в литературе и как с т е п е н и н е р а з р е ш и м о с т и. Отношение $\leqslant_r$ порождает частичное упорядочение всех r-степеней. Сводимость r' слабее, чем r, если $A \leqslant_r B$ влечет $A \leqslant_{r'} B$. Частично упорядоченные множества r-степеней для m- и более слабых сводимостей образуют верхние полурешетки (что неверно для 1-степеней), имеющие наименьший элемент **0**—r-степень рекурсивных множеств. Если ограничиться изучением только рекурсивно перечислимых r-степеней, то они имеют также и наибольший элемент **1**, к-рый наз. п о л н о й r-с т е п е н ь ю. Р. п. м., содержащиеся в полной r-степени, наз. r-п о л н ы м и. М и н и м а л ь н ы м и r-с т е п е н я м и наз. такие, к-рые имеют лишь единственную строго меньшую r-степень, а именно **0**.

После определения той или иной сводимости ее изучение развивается в основном в двух направлениях. Первое связано с вопросами описания верхней полурешетки степеней относительно введенной сводимости. Известным примером проблемы такого типа явилась п р о б л е м а П о с т а [1]: верно ли, что все рекурсивно перечислимые нерекурсивные множества имеют одну и ту же степень неразрешимости? Или, другими словами, верно ли, что полурешетка рекурсивно перечислимых степеней неразрешимости состоит лишь из двух элементов? Получено отрицательное решение этой проблемы [2]. Решения этих вопросов о строении верхних полурешеток рекурсивно перечислимых m-, tt- и T-степеней являются определенными вехами в изучении сводимостей. В нач. 1960-х гг. было доказано, что полурешетка T-степеней (везде ниже подразумеваются полурешетки рекурсивно перечислимых степеней) не является решеткой и не имеет минимальных элементов; тогда же было отмечено существование минимальных m-степеней и показано, что полная m-степень не является точной верхней гранью двух несравнимых m-степеней. Позднее выяснилось, что этот факт не имеет места для btt- и более слабых сводимостей. Ю. Л. Ершов [4] доказал, что верхняя полурешетка m-степеней не является решеткой и что под нек-рыми ее элементами нет минимальных. Аналогичные результаты, а также существование минимальных элементов, были получены для полурешеток btt- и tt-степеней [5]. Установлено, что элементарные теории полурешеток m-, btt-, tt-, T- и нек-рых других степеней попарно различны.

Второе направление связано с вопросами о том, какие r-степени, сколько их и как они расположены в сте-

пенях относительно более слабой сводимости, чем r. В частности, полная T (tt-, btt-)степень содержит счетное число рекурсивно перечислимых tt (соответственно btt-, m-)степеней. С другой стороны, существуют нерекурсивные T (btt-)степени, состоящие из одной tt (m-)степени, но каждая нерекурсивная tt-степень содержит, по крайней мере, две btt-степени.

К изучению р. п. м. имеются и другие подходы, не связанные с понятием сводимости. Один из них заключается в следующем. Все р. п. м. вместе с операциями объединения и пересечения образуют решетку $\mathscr{E}$. Нек-рое свойство р. п. м. наз. теоретико-решеточным, если оно сохраняется при всех автоморфизмах $\mathscr{E}$. Такими, напр., являются свойства «быть рекурсивным», «быть простым» или «быть максимальным» множеством. Р. п. м. A наз. максимальным (r-максимальным), если его дополнение бесконечно и не может быть разбито р. п. м. (соответственно рекурсивным множеством) на две бесконечные части. Классич. результатами, связанными с изучением $\mathscr{E}$, могут служить теоремы о существовании максимальных множеств и о возможности разбиения любого нерекурсивного р. п. м. на два нерекурсивных р. п. м. (см. [2]) и теорема о существовании r-максимального множества без максимальных надмножеств (см. [3]).

Понятие максимального множества возникло в связи с надеждой, что они окажутся не T-полными. Это было бы естественным решением проблемы Поста. Сам Э. Пост, накладывая все более жесткие ограничения на дополнения р. п. м., определил классы гиперпростых и гипергиперпростых множеств, показав, что гиперпростые множества не могут быть tt-полными. При этом р. п. м. A с бесконечным дополнением наз. гиперпростым (гипергиперпростым), если не существует вычислимой последовательности попарно непересекающихся конечных (соответственно рекурсивно перечислимых) множеств, каждое из к-рых имеет непустое пересечение с дополнением A. Определение этих классов множеств дается не в теоретико-решеточных терминах, и в действительности удалось показать, что «быть гиперпростым» не является теоретико-решеточным свойством. Однако доказано, что р. п. м. A с бесконечным дополнением является гипергиперпростым тогда и только тогда, когда для любого р. п. м. B существует рекурсивное множество R такое, что $R \subseteq B$ и $(B \setminus A) \subseteq R$, т. е. свойство «быть гипергиперпростым» оказалось теоретико-решеточным. Было построено гипергиперпростое множество без максимальных надмножеств, а также доказано, что для любого нерекурсивного р. п. м. A существует автоморфизм Ф решетки $\mathscr{E}$ такой, что $\Phi(A)$ является T-полным множеством [6]. Таким образом, надежда найти теоретико-решеточное свойство, к-рым не обладали бы рекурсивные и T-полные множества, не оправдалась.

Имеется также концепция (в духе [7]), согласно к-рой Р. т. м. должна изучать свойства подмножеств N, сохраняющиеся при рекурсивных перестановках. В соответствии с этим говорят, что множества A и B имеют один и тот же тип рекурсивной эквивалентности, если существует разнозначная вычислимая функция f такая, что $f(A)=B$ и $f^{-1}(B)=A$. Типы рекурсивной эквивалентности, не содержащие множеств, имеющих бесконечные рекурсивно перечислимые подмножества, наз. изолями. После определения для изолей подходящим образом операции сложения и умножения стала развиваться «арифметика» изолей.

Изучение свойств р. п. м. и сводимостей не только взаимосвязано с другими направлениями теории рекурсивных функций, но и находит применение в логике, теории моделей и алгебре. Р. т. м. имеет в своем арсенале собственные, присущие пока только ей мето-

ды исследований. Наиболее известным является т. н. *приоритета метод*, с помощью к-рого получаются особенно глубокие результаты.

Лит.: [1] Post E. L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1944, v. 50, p. 284—316; [2] Friedberg R. M., «J. Symbolic Logic», 1958, v. 23, p. 309—16; [3] Lachlan A. H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1968, v. 130, № 1, p. 1—37; [4] Ершов Ю. Л., «Алгебра и логика», 1969, т. 8, № 5, с. 523—52; [5] Дегтев А. Н., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 3, с. 137—68; [6] Soare R. I., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 84, № 6, p. 1149—81; [7] Dekker J. C. E., Myhill J., «Univ. Calif. publ. math.», 1960, v. 3, № 3, p. 67—213; [8] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [9] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972.

А. Н. Дегтев.

РЕКУРСИВНАЯ ФУНКЦИЯ, частично рекурсивная функция,— одно из математич. уточнений интуитивного понятия *вычислимой функции*, определяемое следующим образом. Рассматриваются функции, заданные на натуральных числах и с натуральными значениями. Функции предполагаются частичными, т. е. определенными, вообще говоря, не для всех значений аргументов. Следующие функции наз. простейшими: $S(x)=x+1$, $o(x)=0$, $I_m^n(x_1,\ldots,x_n)=x_m (1\leqslant m\leqslant n)$. Будем говорить, что n-местная функция ψ получена из m-местной функции φ и n-местных функций $f_1,\ldots,f_m$ с помощью оператора суперпозиции, если для всех $x_1,\ldots,x_n$ имеет место равенство

$$\psi(x_1,\ldots,x_n)=\varphi(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)).$$

Скажем, что $(n+1)$-местная функция f получается из n-местной функции φ и $(n+2)$-местной функции ψ с помощью оператора примитивной рекурсии, если при любых значениях $x_1,\ldots,x_n$, y выполняются равенства

$$f(x_1,\ldots,x_n,0)=\varphi(x_1,\ldots,x_n),$$
$$f(x_1,\ldots,x_n,y+1)=\psi(x_1,\ldots,x_n,y,f(x_1,\ldots,x_n,y)).$$

Будем говорить, что n-местная функция f получается из $(n+1)$-местной функции φ с помощью оператора минимизации, или *наименьшего числа оператора*, если для любых $x_1,\ldots,x_n$, y выполнено условие $f(x_1,\ldots,x_n)=y$ тогда и только тогда, когда значения $\varphi(x_1,\ldots,x_n,0),\ldots,\varphi(x_1,\ldots,x_n,y-1)$ определены и не равны 0, а $\varphi(x_1,\ldots,x_n,y)=0$. Частичная функция f наз. рекурсивной, если она может быть получена из простейших функций с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

Иными словами, f является Р. ф., если существует такая конечная последовательность частичных функций $g_1,\ldots,g_k$, что $g_k=f$ и каждая функция этой последовательности либо является простейшей, либо получается из предыдущих с помощью операторов суперпозиции, примитивной рекурсии или минимизации. С помощью метода *арифметизации* можно получить пересчет всех таких описаний Р. ф., а именно, можно указать алгоритм, к-рый каждому натуральному числу x сопоставляет нек-рое описание Р. ф. Задаваемую этим описанием Р. ф. обычно обозначают φ_x, а x наз. ее гёделевым номером.

Всюду определенные Р. ф. наз. общерекурсивными. Существуют Р. ф., к-рые не могут быть продолжены до общерекурсивных.

Для любой Р. ф. можно указать алгоритм вычисления ее значений, т. е. все Р. ф. суть вычислимые функции. Распространенная гипотеза, известная под названием тезиса Чёрча, состоит в том, что всякая вычислимая функция является Р. ф. Эта гипотеза подтверждается рядом фактов. Так, все рассматривавшиеся в математике конкретные функции, признаваемые вычислимыми в интуитивном смысле этого слова, оказывались рекурсивными. Понятие Р. ф. оказывается совпадающим по объему с другими математич. уточнениями

понятия вычислимой функции (напр., с понятиями функции, вычислимой на машине Тьюринга, вычислимой с помощью нормального алгорифма Маркова и др.).

Возможны различные определения класса всех Р. ф. через исходные функции и порождающие операции. В частности, всякая Р.ф. может быть получена из функций

$$a(x, y) = x + y,\ m(x, y) = x \cdot y,\ I_m^n$$

и

$$k(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < y, \\ 1, & \text{если } x \geqslant y, \end{cases}$$

с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции и минимизации.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [2] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972.

В. Е. Плиско.

РЕКУРСИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ — часто применяемый в математике способ задания функций, при к-ром значение искомой функции в данной точке определяется через ее значения в предшествующих точках (при подходящем отношении предшествования). Р. о. теоретико-числовых функций являются объектами изучения в теории алгоритмов (см. *Рекурсия*). В теории множеств постоянно используется для определения функций на ординалах *трансфинитная рекурсия*. В более общем плане Р. о. рассматриваются в теории допустимых множеств, в основе к-рой лежит некий синтез идей теории множеств и теории алгоритмов (см. [2]).

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [2] Barwise J., Admisible sets and structures, B., 1975.

Н. В. Белякин.

РЕКУРСИВНОЕ ОТНОШЕНИЕ — такое отношение $R \subseteq \mathbb{N}^n$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, что функция f, определенная на $\mathbb{N}^n$ условием

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in R, \\ 0, & \text{если } \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \notin R, \end{cases}$$

является *рекурсивной функцией*. В частности, при любом n универсальное отношение $\mathbb{N}^n$ и нуль-отношение $\varnothing$ являются Р. о. Если R и S суть n-местные Р. о., то отношения $R \cup S$, $R \cap S$, $R' = \mathbb{N}^n \setminus R$, $R \setminus S$ также будут Р. о. Относительно операций $\cup$, $\cap$, $'$ система всех n-местных Р. о. образует булеву алгебру. *В. Е. Плиско.*

РЕКУРСИВНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ТИП — класс эквивалентности для отношения рекурсивной эквивалентности, т. е. совокупность всех подмножеств натурального ряда, каждые два из к-рых могут быть приведены во взаимно однозначное соответствие с помощью *частично рекурсивной функции*. Таким образом, понятие Р. э. т. служит в *рекурсивной теории множеств* аналогом понятия мощности в классич. теории множеств. Так как любые два конечных множества рекурсивно эквивалентны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов, то Р. э. т. конечного множества полностью характеризуется мощностью этого множества. Для бесконечных множеств натуральных чисел, несмотря на их равномощность, это не так: совокупность всех таких множеств распадается на множество континуальной мощности различных Р. э. т. При этом всякий Р. э. т. (кроме Р. э. т. пустого множества) сам является счетным множеством. Множества, принадлежащие одному Р. э. т., сходны в отношении нек-рых алгоритмич. свойств. Так, бесконечные рекурсивно перечислимые множества (как рекурсивные, так и нерекурсивные) образуют один Р. э. т. Так как множество, рекурсивно эквивалентное продуктивному, само является продуктивным, всякий Р. э. т., содержащий *продуктивное множество*, состоит

только из продуктивных множеств; так же обстоит дело с *иммунными множествами*. Теория Р. э. т. иммунных множеств, называемых вместе с Р. э. т. конечных множеств *изолями*, разрабатывалась особенно интенсивно.

Над Р. э. т. определяются алгебраич. операции, важнейшими из к-рых являются сложение и умножение: если A и B суть Р. э. т., $\alpha \in A$, $\beta \in B$, причем α состоит из четных чисел, а β — из нечетных, то $A+B$ есть Р. э. т. множества $\alpha \cup \beta$; $A \cdot B$ есть Р. э. т. множества $j(\alpha \times \beta)$, где j — общерекурсивная функция, взаимно однозначно отображающая декартов квадрат натурального ряда на натуральный ряд. Алгебра Р. э. т. тесно связана с алгеброй кардинальных чисел, развиваемой без аксиомы выбора. Совокупность изолей замкнута относительно указанных операций.

Предпринимались попытки перенесения понятия Р. э. т. на классы множеств.

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [2] Dekker J. C. E., Myhill J., Recursive equivalence types, Berk.— Los Ang., 1960.

В. А. Душский.

РЕКУРСИВНЫЙ ОПЕРАТОР — всюду определенный *частично рекурсивный оператор*. *В. Е. Плиско.*

РЕКУРСИВНЫЙ ПРЕДИКАТ — предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$, определенный на натуральных числах и такой, что функция f, заданная на натуральных числах условием

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } P(x_1, \ldots, x_n) \text{ истинно,} \\ 0, & \text{если } P(x_1, \ldots, x_n) \text{ ложно,} \end{cases}$$

является *рекурсивной функцией*. *В. Е. Плиско.*

РЕКУРСИЙ ВЫСШИХ СТУПЕНЕЙ — *рекурсивные определения*, в к-рых в качестве вспомогательных объектов наряду с числовыми функциями используются нек-рые функционалы более высоких типов. Напр., для случая рекурсии второй ступени таковыми являются «подстановочные» функционалы вида

$$V_{x_1 \ldots x_n}(a_1, \ldots, a_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = f(a_1, \ldots, a_n),$$

а также функционалы, получаемые из них посредством этой рекурсии. Интересное свойство Р. в. с. заключается в том, что *многократную рекурсию* можно свести к однократной за счет перехода к более высокой ступени. На этом основан метод приведения многократных рекурсий к нормальной форме. Следует иметь в виду, что терминологию в этой области нельзя считать окончательно установившейся. В частности, под термином «Р. в. с.» иногда понимают нормальные формы многократных рекурсий.

Лит.: [1] Петер Р., Рекурсивные функции, пер. с нем., М., 1954.

Н. В. Белякин.

РЕКУРСИЯ — способ определения функций, являющийся объектом изучения в теории алгоритмов и других разделах математич. логики. Этот способ давно применяется в арифметике для определения числовых последовательностей (прогрессии, чисел Фибоначчи и пр.). Существенную роль играет Р. в вычислительной математике (рекуррентные методы). Наконец, в теории множеств часто используется трансфинитная Р.

Долгое время термин «Р.» употреблялся математиками, не будучи точно определенным. Его приблизительный интуитивный смысл можно описать следующим образом. Значение искомой функции f в произвольной точке $\bar{x}$ (под точкой подразумевается набор значений аргументов) определяется, вообще говоря, через значения этой же функции в других точках $\bar{y}$, к-рые в каком-то смысле «предшествуют» $\bar{x}$. (Само слово «рекурсия» означает «возвращение».) Конечно, в нек-рых «исходных» точках значения f должны задаваться непосредственно. Иногда при помощи Р. определяются одновременно несколько функций; тогда вышеприведенные разъяснения нуждаются в соответствующей мо-

дификации. Примеры разнообразных Р. будут даны ниже. Отношение «$\overline{x_1}$ предшествует $\overline{x_2}$» (где x_1, x_2 принадлежат области определения искомой функции) в разных видах Р. («рекурсивных схемах») может иметь разный смысл, однако оно должно быть «фундированным» (т. е. не должно существовать бесконечной последовательности точек $\overline{x_n}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, такой, что $\overline{x_{n+1}}$ предшествует $\overline{x_n}$). Кроме того, неявно подразумевается, что оно является «достаточно естественным» (напр., желательно, чтобы это отношение усматривалось из самого описания рекурсивной схемы, а не из процесса ее применения). Последнее условие имеет чисто эвристич. значение (напр., для определения каких-нибудь специальных, сравнительно простых видов Р.). Уточнение этого условия по существу неотделимо от уточнения самого понятия Р., а для этого необходимо установить, какого рода формальные выражения могут быть признаны в качестве рекурсивных определений.

В тех случаях, когда речь идет о рекурсивных описаниях числовых функций (т. е. функций от натуральных аргументов и с натуральными значениями), обычно подразумевается, что такие описания задают способ вычисления определяемых функций. Ниже всюду (кроме заключительных замечаний) термин «Р.» будет пониматься именно в таком смысле. Простейшей и наиболее употребительной рекурсивной схемой является **примитивная** Р.:

$$f(0, x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n),$$
$$f(y+1, x_1, \ldots, x_n) = h(y, f(y, x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n),$$

где функции g, h предполагаются известными, f — определяемая функция, y — переменная, по к-рой ведется Р., $x_1, \ldots, x_n$ — параметры, не участвующие в Р. Ближайшим обобщением этой схемы является т. н. **возвратная** Р., охватывающая такие виды рекурсивных определений, у к-рых, подобно примитивной Р., только одна переменная участвует в Р., а соответствующее отношение предшествования совпадает с обычным упорядочением натуральных чисел (иногда, впрочем, этот термин употребляется и в более широком смысле). Наиболее типичная разновидность возвратной Р. такова:

$$f(0, x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n),$$
$$f(y+1, x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= h(y, f(\alpha_1(y), x_1, \ldots, x_n), \ldots, f(\alpha_k(y), x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n),$$

где $\alpha_i(y) \leqslant y$, $i=1, \ldots, k$. Представляет интерес тот факт, что возвратную Р. можно заменить конечным числом примитивных Р. и подстановок. Другой пример рекурсивной схемы, сводящейся к примитивной Р., дает **одновременная** Р. вида

$$f_i(0, x_1, \ldots, x_n) = g_i(x_1, \ldots, x_n),$$
$$f_i(y+1, x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= h_i(y, f_1(y, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(y, x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n),$$

где $i=1, \ldots, k$. Математич. логика часто имеет дело с **примитивно рекурсивными функциями**, т. е. с такими, к-рые можно получить за конечное число шагов при помощи подстановок и примитивных Р., исходя из нек-рого фиксированного запаса совсем простых функций (напр., $f(x)=x+1$, $f(x, y)=y$ и т. п.).

Последовательность функциональных равенств, описывающая такое построение, наз. **примитивно рекурсивным описанием** соответствующей функции. Эти описания суть синтаксич. объекты (т. е. цепочки символов), обладающие определенной эффективно распознаваемой структурой. Практически

все числовые функции, употребляемые в математике по какому-либо конкретному поводу, оказываются примитивно рекурсивными. Этим в значительной мере объясняется интерес к данному классу функций.

Более сложные виды рекурсивных определений получаются, когда Р. идет сразу по нескольким переменным. Такие определения, вообще говоря, выводят из класса примитивно рекурсивных функций, хотя соответствующее отношение предшествования может выглядеть как вполне естественное. Напр., в определении $f(x, y)$ могут участвовать значения $f(u, v)$, где $u<x$ или $u=x$, $v<y$, как это имеет место в следующей схеме д в у к р а т н о й Р.:

$$f(x, y)=g(x, y), \text{ если } x=0 \text{ или } y=0,$$

$$f(x+1, y+1)=$$

$$=h(x, y, f(x, \alpha(x, y, f(x+1, y))), f(x+1, y)).$$

Эта схема уже не сводится к примитивной Р. С другой стороны, к ней сводимы многие более сложные рекурсивные определения (см. [1]).

Перечисленные частные виды Р. имеют точные математич. определения — в отличие от расплывчатых «около математических» представлений о «рекурсии вообще». Уточнение этих представлений естественно мыслить как отыскание подходящего алгоритмич. языка (т. е. формального языка для описания вычислительных процедур), включающего все вообразимые виды Р., но и не слишком широкого. Правомерно ожидать, что выработка такого уточнения может потребовать дополнительных соглашений, вносящих нечто новое в интуитивное понимание Р. В этой связи небезынтересно отметить, что все рассмотренные выше рекурсивные схемы ориентированы на порождение тотальных (всюду определенных) функций. Так, если в схеме примитивной рекурсии g, h тотальны, то такова же и f. И вообще, рекурсивные определения, задающие частичные функции, с интуитивной точки зрения выглядят несколько искусственно. Однако есть причины привлечь такие Р. к рассмотрению. Это связано с т. н. д и а г о н а л ь н ы м м е т о д о м. Именно, пусть дан алгоритмич. язык L, в к-ром определимы лишь тотальные функции, и пусть синтаксич. конструкция L не выводят за пределы интуитивно понимаемой рекурсивности. Конечно подразумевается, что выражения языка L (являющиеся описаниями функций) алгоритмически распознаваемы и что имеется единообразный способ вычисления функций, представимых в L, по их описаниям. Если рассматривать выражения в L просто как цепочки символов, то каждую такую цепочку можно считать изображением натурального числа в подходящей системе счисления, являющегося «кодом» данного выражения. Пусть теперь функция $G(m, x)$ определена так. Если m есть код описания (в языке L) нек-рой одноместной функции f_m, то $G(m, x)=f_m(x)$. В противном случае $G(m, x)=\varphi(x)$, где φ — какая-нибудь фиксированная функция, представимая в L. Ясно, что $G(m, x)$ вычислима и тотальна и такова же функция $F(x)=G(x, x)+1$. Но F невыразима в L, ибо ни при каком m невозможно равенство $F(m)=f_m(m)$. (В этом рассуждении существенно использована тотальность F.) Возникает вопрос: является ли данное описание F рекурсивным? Если в качестве L взять язык примитивно рекурсивных описаний, то оно оказывается сводимым к двукратной Р. В общем случае ситуация неясна из-за расплывчатости интуитивных представлений о Р., так что положительный ответ на поставленный вопрос представляет собой дополнительное соглашение. Если принять его (как это неявно делает современная логика), то язык L, описывающий в точности все виды «тотальной» Р., оказывается невозможным.

Между тем, если в L выразимы также частичные функции (и их описания признаются рекурсивными), то диагонализация не обязательно выводит за пределы L, так что такой язык в принципе может быть пригодным для адекватного уточнения рекурсивности. Правда, это связано с нек-рым переосмыслением самого понятия Р., и современное строгое определение этого понятия не вполне согласовано с имевшимися ранее интуитивными представлениями. В новом уточненном смысле Р. есть нек-рая синтаксич. операция (с фиксированной интерпретацией), употребляемая для построения выражений в различных алгоритмич. языках. Если L—один из таких языков, то естественно предполагать, что в нем есть и другие синтаксич. операции, от к-рых зависит конкретный вид рекурсивных описаний в L. Вообще говоря, выражения языка L не обязательно описывают только числовые функции. Нек-рые из них могут задавать функциональные операторы и другие объекты. Это нужно, в частности, для определения Р. Рекурсивные описания в L — это системы функциональных уравнений вида $f_i = T_i(f_1, \ldots, f_n)$, $i=1, \ldots, n$, где f_i — определяемые функции, а T_i — выражения в L, задающие в совокупности нек-рый оператор. Но все выразимые в L операторы должны быть эффективными (поскольку L — алгоритмич. язык) и потому монотонными (т. е. они сохраняют отношение $\varphi \prec \psi$, означающее, что ψ доопределяет φ). В силу этого всякая система указанного вида обладает минимальным (в смысле отношения $\prec$) решением и, по определению, является рекурсивным описанием функций, составляющих это решение. Исходя из данного описания, искомое минимальное решение можно получить посредством следующего процесса. Для $i=1, \ldots, n$ пусть f_i^0— нигде не определенная функция и $f_i^{k+1} = T_i(f_1^k, \ldots, f_n^k)$, так что $f_i^k \prec f_i^{k+1}$. Нетрудно убедиться, что искомые функции f_i получаются «объединением» f_i^k ($k=0, 1, 2, \ldots$). Тем самым задан способ совместного вычисления f_i. Этот же процесс задает более или менее естественное отношение предшествования на аргументах, к-рое и оправдывает (в удовлетворительной мере) употребление термина «Р.» в данной связи.

Для того чтобы приведенные ранее рекурсивные схемы подходили под такое определение, необходимо, чтобы язык L был не слишком беден. Так, уже в случае примитивной Р. нужны подстановка и «кусочное» определение (т. е. задание функции несколькими равенствами). Вместе с тем этих двух синтаксич. операций, в сочетании с только что определенной Р., уже достаточно для получения всех вычислимых функций (исходя из простейших). При соответствующих предположениях об L можно также достаточно уверенно утверждать, что данное определение Р. охватывает все интуитивно мыслимые рекурсивные описания. В то же время введенное общее определение обладает характерными чертами неформально понимаемой рекурсивности, к-рые признаются существенными в современной математике.

Плодотворность данного определения Р. заключается не только в его значении для теории алгоритмов, но и в том, что оно позволяет взглянуть с «алгоритмической» (в обобщенном смысле) точки зрения также и на нек-рые конструкции абстрактной математики, имеющие определенное сходство с «числовыми» Р. (трансфинитная Р., индуктивные определения, рекурсивные иерархии и т. п.).

Лит.: [1] Петер Р., Рекурсивные функции, пер. с нем., М., 1954; [2] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [3] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [4] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [5] Moschovakis Y. N., Elementary induction on abstract structures, Amst.,— [a. o.], 1974.

Н. В. Белякин.

РЕЛАКСАЦИИ МЕТОД, ослабления метод, — метод итерационного решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax=b$, элементарный шаг к-рого состоит в изменении только одной компоненты вектора неизвестных, причем номера изменяемых компонент выбираются в нек-ром циклич. порядке. Наиболее часто Р. м. используется для решения систем с положительно определенной матрицей A.

Если изменение одной компоненты вектора неизвестных x^k осуществляется так, что для нового приближения x^{k+1} квадратичная форма $(A(x^{k+1}-x),\ x^{k+1}-x)$ минимизируется, то Р. м. наз. методом полной релаксации. Если же за один элементарный шаг значение квадратичной формы лишь уменьшается, но не минимизируется, то Р. м. наз. методом неполной релаксации.

Наиболее полно исследован метод последовательной верхней релаксации, когда матрица A обладает т. н. свойством (А) и согласованно упорядочена. Матрица A наз. матрицей, обладающей свойством (А), если существует матрица перестановок P такая, что матрица PAP^T имеет форму $\left\|\begin{matrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{matrix}\right\|$, где D_1 и D_2 — квадратные диагональные матрицы.

Итерационная схема Р. м. имеет следующий вид:

$$(D+\omega L)\,x^{k+1}=((1-\omega)\,D-\omega U)\,x^k+\omega b,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

где ω — параметр релаксации, D — диагональная, L — нижняя треугольная и U — верхняя треугольная матрицы из разложения $A=D+L+U$. Если $\omega>1$, то метод наз. методом верхней релаксации (сверхрелаксации), если $\omega<1$ — методом нижней релаксации. Параметр ω выбирается из условия минимизации спектрального радиуса матрицы S перехода от итерации к итерации:

$$S=(D+\omega L)^{-1}((1-\omega)\,D-\omega U).$$

Если A — симметричная матрица с положительными диагональными элементами и λ_i — корни детерминантного уравнения $\det(L+\lambda D+U)=0$, то оптимальное значение параметра ω дается формулой

$$\omega=\omega_0=\frac{2}{1+\sqrt{1-\lambda_0^2}},$$

где $\lambda_0^2=\max\lambda_i^2$. Для $\omega=\omega_0$ спектральный радиус матрицы S равен

$$\omega_0-1=\frac{1-\sqrt{1-\lambda_0^2}}{1+\sqrt{1-\lambda_0^2}}<1.$$

Рассмотрены случаи, когда нек-рые λ_i комплексны. Разработаны методы блочной релаксации.

Лит.: [1] Young D. M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1954, v. 76, № 1, p. 92—111; [2] его же, Iterative solution of large linear systems, N. Y.—L., 1971; [3] Вазов В., Форсайт Дж., Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, пер. с англ., М., 1963; [4] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1960.

Е. С. Николаев.

РЕЛАКСАЦИОННОЕ КОЛЕБАНИЕ — периодический процесс, при к-ром медленное, плавное изменение состояния объекта в течение конечного промежутка времени чередуется с быстрым, скачкообразным изменением его состояния за бесконечно малое время. Такие колебательные процессы наблюдаются во многих реальных механических, радиотехнических, биологических и др. объектах (см., напр., [1]—[3]).

Математич. моделью, описывающей Р. к., являются *автономные системы* обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных:

$$\varepsilon\dot{x}=f(x,\ y),\quad \dot{y}=g(x,\ y),\quad \dot{}=d/dt, \qquad (1)$$
$$x\in\mathbb{R}^k,\quad y\in\mathbb{R}^m,\quad 0<\varepsilon\ll 1.$$

Периодическое по времени t решение такой системы и наз. релаксационным колебанием. Классич. примером системы с одной степенью свободы, имеющей Р. к., служит *Ван дер Поля уравнение*

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \lambda(1-x^2)\frac{dx}{d\tau} + x = 0 \qquad (2)$$

при больших положительных значениях параметра λ (с этой точки зрения уже значение $\lambda = 10$ можно считать большим). Если положить

$$y = \int_0^x (x^2-1)\,dx + \frac{1}{\lambda}\frac{dx}{d\tau}, \quad t = \frac{\tau}{\lambda}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda^2},$$

то уравнение (2) приводится к системе типа (1):

$$\varepsilon\dot{x} = y - \frac{x^3}{3} + x, \quad \dot{y} = -x.$$

Вопрос о существовании и числе Р. к. системы (1) решается в терминах вырожденной системы

$$f(x, y) = 0, \quad \dot{y} = g(x, y), \qquad (3)$$

являющейся гибридной системой уравнений. Траектории системы (3) в фазовом пространстве $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ естественно трактовать как пределы фазовых траекторий невырожденной системы (1) при $\varepsilon \to 0$. В частности, траектория Р. к. системы (1) при $\varepsilon \to 0$ стремится к замкнутой траектории системы (3), состоящей из чередующихся участков двух типов: участков, проходимых фазовой точкой системы (3) за конечное время (каждый из них лежит на поверхности $f(x, y) = 0$), и участков, проходимых фазовой точкой системы (3) мгновенно (каждый из них начинается в точке срыва, т. е. в точке, где

$$f(x, y) = 0, \quad \det \| \partial f/\partial x \| = 0,$$

лежит в плоскости, параллельной $\mathbb{R}^k$, и кончается на поверхности $f(x, y) = 0$). Решение системы (3), соответствующее такой замкнутой траектории, наз. разрывным периодическим решением, а потому Р. к. системы (1) часто наз. периодическим решением, близким к разрывному, или даже просто разрывным колебанием. (Система (3) может иметь замкнутую траекторию, целиком лежащую на поверхности $f(x, y) = 0$ и не проходящую через точки срыва. В таком случае система (1) имеет близкую к ней замкнутую траекторию, однако соответствующее ей периодич. решение системы (1) не будет Р. к.; см. [6].)

Важной задачей является асимптотич. (при $\varepsilon \to 0$) вычисление фазовой траектории Р. к. системы (1), а также получение асимптотич. формул для характеристик этого колебания — его периода, амплитуды и т. д. Вычисление траектории Р. к. уравнения Ван дер Поля (2) проводил А. А. Дородницын [7], построивший асимптотич. приближения при $\lambda \to \infty$ для амплитуды

$$a = 2 + 0{,}77937\lambda^{-4/3} - \frac{16}{27}\frac{\ln\lambda}{\lambda^2} - 0{,}8762\lambda^{-2} + O(\lambda^{-8/3})$$

и для периода (см. также [8])

$$T = 1{,}613706\lambda + 7{,}01432\lambda^{-1/3} - \frac{2}{3}\frac{\ln\lambda}{\lambda} - 1{,}3233\lambda^{-1} + O(\lambda^{-5/3}).$$

В случае системы (1) 2-го порядка (т. е. при $k = m = 1$) с точками срыва общего положения проблема асимптотич. вычисления Р. к. решена полностью [9]. В частности, выяснена структура асимптотич. разложения при $\varepsilon \to 0$ периода Р. к.:

$$T = T_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\chi(n-2)} K_{n,\nu} \ln^{\nu}\frac{1}{\varepsilon},$$

где

$$\chi(n) = \frac{n}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{tg}\frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

а $K_{n,\nu}$ — коэффициенты, эффективно вычисляемые непосредственно по функциям $f(x, y)$ и $g(x, y)$ (см. [10]). Для общей системы (1) произвольного порядка остается (1983) не перекрытым результат Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко, вычисливших асимптотику Р. к. с точностью до $O(\varepsilon)$ (см. [11], [12], [9]).

Изучался также вопрос о периодич. решениях типа Р. к. неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см., напр., [13]).

Лит.: [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [2] Ланда П. С., Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы, М., 1980; [3] Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С., Математическое моделирование в биофизике, М., 1975; [4] Van der Pol B., «Phil. Mag. Ser. 7», 1926, v. 2, № 11, p. 978—92; [5] Железцов Н. А., Родыгин Л. В., «Докл. АН СССР», 1951, т. 81, № 3, с. 391—94; [6] Аносов Д. В., «Матем. сб.», 1960, т. 50, № 3, с. 299—334; [7] Дородницын А. А., «Прикл. матем. и механ.», 1947, т. 11, № 3, с. 313—28; [8] Жаров М. И., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., «Докл. АН СССР», 1981, т. 261, № 6, с. 1292—96; [9] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975; [10] Розов Н. Х., «Докл. АН СССР», 1962, т. 145, № 1, с. 38—40; [11] Понтрягин Л. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, № 5, с. 605—26; [12] Мищенко Е. Ф., там же, с. 627—54; [13] Levi M., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1981, v. 32, № 244.

Н. Х. Розов.

РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНАЯ СХЕМА — математическая модель электротехнич. устройств, состоящих из контактов и промежуточных реле, функционирующих в дискретные моменты времени. Р.-к. с.— один из первых классов *управляющих систем*, рассмотренных с математич. точки зрения, а также один из первых вариантов понятия *автомата конечного*. Первые описания Р.-к. с. появились в 1938—44 (см. [1]—[3]).

Математически Р.-к. с. представляет собой конечный граф, всем ребрам и нек-рым выделенным вершинам к-рого приписаны символы из алфавитов

$$x=\{x_1, \bar{x}_1, \ldots, x_n, \bar{x}_n\},\ Y=\{Y_1, \ldots, Y_m\},$$

$$y=\{y_1, \bar{y}_1, \ldots, y_m, \bar{y}_m\},\ a=\{a_+, a_-, a_1, \ldots, a_s\}$$

следующим образом. Каждой выделенной вершине графа (эти вершины наз. полюсами) приписан символ из алфавита a так, что различным полюсам приписаны различные символы. Множество ребер графа разбито на три непересекающиеся подмножества: R, K_1, K_2. Ребрам каждого из этих подмножеств приписаны символы из Y, x, y следующим образом. Каждому ребру из R приписан символ из Y, всем ребрам из R приписаны различные символы, и все символы из Y приписаны ребрам из R. Каждому ребру множества K_1 (соответственно K_2) приписаны символы из x (соответственно y) так, что каждый символ может быть приписан нескольким ребрам, нек-рые символы могут быть не приписаны никаким ребрам. Если множество Y пусто, то пусто и множество K_2. В таком случае (если непусто только K_1) Р.-к. с. является *контактной схемой*. Две Р.-к. с. наз. изоморфными, если изоморфны их графы и соответствующим ребрам и полюсам приписаны одинаковые символы.

Полюс a_+ наз. входным, полюсы $a_1, \ldots, a_s$ наз. выходными, полюс a_- может иногда также быть выходным. Ребра, к-рым приписаны символы из x, наз. контактами основных реле (или основными контактами); множество всех ребер, помеченных символами Y_i, y_i, $\bar{y}_i$, наз. i-м промежуточным реле, $i=1, \ldots, m$; ребра, помеченные символами из y, наз. контактами промежуточных реле; ребра, помеченные символами из Y, наз. обмотками. Последовательность контактов и обмоток между нек-рыми вершинами Р.-к. с., соответствующая простой цепи графа, наз. цепью.

Функционирование Р.-к. с. происходит в дискретные моменты времени 1, 2, ... , t, ... и рассматривается в терминах проводимостей, к-рые в каждый момент представляют собой (в рассматриваемой модели) функции алгебры логики. Проводимость контактов x_j, $\bar{x}_j$, $j=1$, ... , n, в любой момент t равна значению соответствующей переменной (x_j или $\bar{x}_j$). Проводимость контакта y_i, $i=1$, ... , m, промежуточного реле в момент 1 равна нулю, проводимость контакта $\bar{y}_i$ в момент 1 равна единице; проводимость обмотки всегда равна единице. Всякая обмотка в момент t может находиться в различных состояниях. Состояние обмотки в момент t (в рассматриваемой двузначной модели — 1 и 0 — «возбуждена» и «не возбуждена») может определяться по-разному. Напр., обмотка Y_i находится в состоянии 1 в момент времени t тогда и только тогда, когда либо а) существует цепь σ между полюсами a_+ и a_-, проходящая через Y_i и имеющая в момент t проводимость 1; либо б) выполнено условие а) и не существует цепи, состоящей только из контактов, имеющей в момент t проводимость 1 и соединяющей некоторые вершины цепи σ, расположенные по разные стороны от Y_i.

Проводимость промежуточного контакта y_i ($\bar{y}_i$) в момент t зависит от состояния обмотки Y_i в момент $t-1$, а именно: проводимость y_i с ним совпадает, проводимость $\bar{y}_i$ — противоположна. Проводимость цепи Р.-к. с. между двумя вершинами в момент t равна конъюнкции проводимостей в момент t образующих ее контактов и обмоток. Состояния обмоток, таким образом, в момент t, вообще говоря, зависят от последовательности наборов значений переменных x_1, ... , x_n в предыдущие моменты времени. При подаче в последовательные моменты времени на переменные x_1, ..., x_n последовательности наборов значений между парой полюсов a_+ и a_k, $k=1$, ... , s, а в частном случае и между a_+ и a_-, реализуется *ограниченно-детерминированная функция*. Изоморфные Р.-к. с. реализуют одну и ту же ограниченно-детерминированную функцию. Если Р.-к. с. такова, что при подаче на переменные x_1, ... , x_n одного и того же набора значений (σ_1, ... , σ_n), начиная с нек-рого момента t, обмотки промежуточных реле не меняют своих состояний (и так для каждого набора значений переменных x_1, ... , x_n), то говорят об «установившихся» состояниях обмоток, и посредством Р.-к. с. реализуются функции алгебры логики. Если стабилизация обмоток с момента t наступает сразу для всех наборов значений переменных x_1, ... , x_n, то Р.-к. с. наз. однотактной; если стабилизация наступает в момент $t+\tau$, то Р.-к. с. наз. τ-тактной.

Сложность Р.-к. с. определяется как сумма весов (или индексов сложности) всех основных контактов, промежуточных контактов и обмоток Р.-к. с. Асимптотич. выражение для сложности самой простой Р.-к. с., реализующей самую сложно реализуемую функцию алгебры логики, имеет вид $\rho 2^n/n$, где ρ — константа, зависящая от выбранного способа функционирования, топологии схем и сложности контактов и обмоток реле.

Лит.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 9—45; [2] Гаврилов М. А., Теория релейно-контактных схем, 2 изд., Минск, [illegible]; [3] Шестаков В. И., «Уч. зап. МГУ. Математика», [illegible], в. 73, кн. 5, с. 45—48; [4] Лупанов О. Б., «Проблемы кибернетики», 1964, в. 11, с. 25—47.

Н. А. Карпова.

РЕЛЬЕФ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ — то же, что *аналитический ландшафт*.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА — раздел частной теории относительности, посвященный изучению движения материальных тел под действием приложенных к ним сил.

В теории относительности свободные, т. е. не подверженные действию сил, материальные точки имеют в качестве своих мировых линий времениподобные или изотропные геодезические. Этот факт является выражением закона инерции в теории относительности.

Если на частицу действуют силы, то ее мировая линия не совпадает с геодезической. Для описания движения частицы вводятся понятия четырехмерного вектора энергии-импульса p^i и вектора четырехмерной силы g^i. Именно,

$$p^i = (\boldsymbol{E}/c;\ \boldsymbol{p}), \qquad (1)$$

где E — энергия частицы, m — масса покоя, $\boldsymbol{p}$ — трехмерный импульс частицы. Вектор g^i определяется соотношением

$$g^i = \left(\frac{\boldsymbol{F}\boldsymbol{V}}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}};\ \frac{\boldsymbol{F}}{c\sqrt{1-V^2/c^2}} \right),$$

где $\boldsymbol{F}$ — трехмерная сила, V — скорость. С использованием этих векторов основные уравнения Р. д. могут быть записаны в виде, аналогичном виду уравнений второго закона Ньютона:

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc\frac{du^i}{ds}. \qquad (2)$$

Конкретный вид силы g^i устанавливается в тех разделах теории относительности, к-рые изучают конкретные свойства различных взаимодействий. Напр., сила, действующая на частицу в электромагнитном поле — сила Лоренца, имеет вид

$$g^i = \frac{e}{c} F^{ik}u_k,$$

где e — заряд частицы, F^{ik} — тензор электромагнитного поля, u_k — четырехмерная скорость.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973.

Д. Д. Соколов.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ — свойство физич. законов сохранять свой вид при преобразованиях Лоренца, описывающих переход от одной инерциальной системы отсчета к другой. Это свойство физич. законов наз. лоренц-инвариантностью. В тех случаях, когда необходимо подчеркнуть, что Р. и. включает и инвариантность при параллельных переносах во времени и пространстве, говорят о пуанкаре-инвариантности. Лоренц-инвариантность означает равноправие всех инерциальных систем и однородность пространства-времени.

В общей теории относительности инвариантность физич. законов при переходе от одной локальной инерциальной системы отсчета к другой наз. локальной лоренц-инвариантностью. В нек-рых случаях в общей теории относительности рассматривают также величины, к-рые определены при задании конгруэнции линий времени (т. е. задании системы отсчета) и инвариантны относительно выбора пространственных сечений. Эти величины наз. хронометрическими инвариантами.

Лит.: [1] Фок В. А., Теория Эйнштейна и физическая относительность, М., 1967.

Д. Д. Соколов.

РЕЛЯТИВИСТСКОЙ АСТРОФИЗИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, возникающие при изучении астрофизич. явлений, в к-рых существенны релятивистские эффекты, т. е. эффекты специальной или общей теории относительности.

Принято разделять Р. а. м. з. на задачи, относящиеся к космологии — науке о строении и эволюции Вселенной, и задачи релятивистской астрофизики отдельных небесных тел. Примером космологич. решения, описывающего расширение (или сжатие) однородной и изотропной Вселенной, является решение А. А. Фридмана. Однородные анизотропные космологич. решения классифицированы (выделено 9 типов по Бианки) и хорошо изучены. Детально изучены анизотропные и не-

однородные решения, представляющие собой малые отклонения от решения Фридмана (линейное приближение), и построены некоторые простые нелинейные решения.

Особое место занимает проблема, связанная с наличием особой точки в общем космологич. решении, в к-рой достигается бесконечная плотность вещества и бесконечная кривизна пространства-времени. Показано, что сингулярность неизбежна в прошлом в условиях, имеющих место в реальной Вселенной, и построено общее решение уравнений общей теории относительности с сингулярностью. Активно исследуется возможность построения космологич. решений без сингулярности, связанная с выходом за рамки классической общей теории относительности.

Большой класс Р. а. м. з. связан с изучением взаимодействия реликтового излучения, заполняющего пространство, с веществом в ходе расширения Вселенной и физич. процессов, способных породить такое излучение.

Р. а. м. з. для отдельных небесных тел касаются равновесия и устойчивости звезд и звездных скоплений. Найдены равновесные массы белых карликов и нейтронных звезд и изучен релятивистский коллапс более массивных звезд, превращающихся в т. н. «черные дыры» — объекты, к-рые можно обнаружить лишь по проявлению их гравитационного поля. В связи с задачей поиска и изучения релятивистских объектов (нейтронных звезд, «черных дыр» и др.) рассматривается задача об аккреции на них вещества с магнитным полем.

К Р. а. м. з. относится также исследование гравитационного излучения. В слабом гравитационном поле в пустоте возмущения, напр. инварианта кривизны, подчиняются волновому уравнению, и поле тяготения распространяется в пространстве подобно электромагнитным волнам.

Лит.: [1] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Релятивистская астрофизика, М., 1967; [2] их же, Теория тяготения и эволюция звезд, М., 1971; [3] их же, Строение и эволюция Вселенной, М., 1975; [4] Цицлин Н., Физическая космология, пер. с англ., М., 1975; [5] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, т. 2—3, пер. с англ., М., 1977; [6] Лифшиц Е. М., «Ж. экспериментальной и теоретич. физики», 1946, т. 16, с. 587—602; [7] Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М., «Успехи физ. наук», 1970, т. 102, с. 463—500; [8] Брагинский В. Б., там же, 1965, т. 86, с. 433—46.

А. А. Рузмайкин.

РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи для системы уравнений, описывающей течения жидкости со скоростями, близкими к скорости света c, и ее взаимодействие с сильными гравитационными полями. В предельном случае малых скоростей $v \ll c$ и слабых гравитационных полей $\varphi \ll c^2$, где φ — гравитационный потенциал, Р. г. м. з. сводятся к *гидродинамики математическим задачам*. Система уравнений релятивистской гидродинамики образуется путем приравнивания к нулю ковариантных дивергенций тензора энергии-импульса и вектора плотности потока вещества:

$$T_{ik} = (\varepsilon + p)\, u_i u_k - p g_{ik} + \tau_{ik}, \qquad (1)$$

$$n_i = n u_i + \nu_i, \quad i, \ k = 1, \ 2, \ 3, \ 4, \qquad (2)$$

где ε, p и n — плотность энергии, давление и плотность числа частиц в системе отсчета, покоящейся относительно рассматриваемого элемента жидкости, g_{ik} — метрич. тензор, u_i — четырехмерная скорость, τ_{ik} и ν_i — части тензора энергии-импульса и вектора потока вещества, описывающие эффекты, связанные с вязкостью (см. [1]).

Пример решений Р. г. м. з.: распространение звука в веществе с ультрарелятивистским уравнением состояния $p = \varepsilon/3$, для возмущения давления или плотности энергии получается волновое уравнение со скоростью звука $u = c\sqrt{3}$.

Р. г. м. з. возникают, напр., при рассмотрении физич. процессов, протекающих в окрестности звезд, обладающих сильными гравитационными полями (нейтронные звезды и т. н. «черные дыры») и расширяющейся Вселенной, заполненной излучением и веществом.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, 2 изд., М., 1954; [2] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Теория тяготения и эволюция звезд, М., 1971; [3] их же, Строение и эволюция Вселенной, М., 1975; [4] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, пер. с англ., т. 2, М., 1977.

А. А. Рузмайкин.

РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — установление соотношений между величинами, характеризующими макроскопич. состояния тел (термодинамич. величинами), при наличии сильных гравитационных полей и скоростей, сравнимых со скоростью света.

Обычно рассматривается равновесная термодинамика идеальной жидкости с заданным химич. составом. Установленные в нерелятивистской термодинамике соотношения между термодинамич. величинами сохраняются как при релятивистском макроскопич. движении частиц, составляющих тело, так и релятивистском движении самого тела, а также в сильных гравитационных полях, если значения термодинамич. величин взяты в системе отсчета, покоящейся относительно рассматриваемого элемента объема жидкости или тела, и в энергию и химич. потенциал включены все формы энергии (в частности, энергия покоя).

Основные уравнения релятивистской термодинамики формулируются в следующем виде:

$(nu^i)_{,i}=0$ — закон сохранения барионов,

$d\varepsilon=\mu dn+nTd\sigma$ — первый закон термодинамики,

$(\sigma u^i)_{,i}=0$ — условие адиабатичности,

где u^i — четырехмерная скорость (величины n — плотность барионов, ε — плотность энергии, T — температура, $\mu=\frac{\varepsilon+p}{n}$ — химич. потенциал, p — давление, σ — плотность энтропии относятся к системе отсчета, покоящейся относительно рассматриваемого элемента объема). При этом давление и плотность энергии связаны соотношением $p\leqslant\varepsilon/3$. При переходе к движущейся относительно элемента объема системе отсчета или к локализованному наблюдателю (при наличии гравитационных полей) нек-рые величины (напр., плотность барионов n или энтропия S) не изменяются, т. е. являются скалярами, другие преобразуются, напр.

$$\tilde{T}=Tu^0,\ \tilde{\mu}=\mu u^0,$$

где компонента четырехмерной скорости u^0 берется вдоль мировой линии, описываемой данной точкой тела. Следствием этого является, напр., тот факт, что в постоянном гравитационном поле условие теплового равновесия требует постоянства вдоль тела не температуры, а величины $T\sqrt{g_{00}}=\text{const}$, где g_{00} — компонента метрич. тензора, $g_{00}=1-2\varphi/c^2$ в слабом гравитационном поле (φ — гравитационный потенциал, c — скорость света). А температура, измеренная наблюдателем, относительно к-рого тело движется со скоростью v, равна

$$\tilde{T}=T/(1-v^2/c^2)^{1/2}.$$

Релятивистская инвариантность энтропии S позволяет записать второй закон термодинамики в форме, принятой в нерелятивистской термодинамике:

$$dS\geqslant\delta Q/T,$$

где изменение тепла δQ и T преобразуются по одинаковому закону. Равенство достигается для обратимых процессов.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, 2 изд., М., 1964; [2] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, пер. с англ., т. 2—3, М., 1977; [3] Мёллер К., Теория относительности, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

А. А. Рузмайкин.

РЕЛЯТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — геометрия конфигурации, состоящей из двух поверхностей $S_0 : \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(u^1, u^2)$ и $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2)$, находящихся в *Петерсона соответствии*. Аналогия между этим соответствием и *сферическим отображением* позволила ввести понятия релятивной площади, полной и средней кривизны и т. д., в частности релятивно минимальной поверхности (см. [1]).

Рассмотрение деривационных уравнений для репера $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}$, $\boldsymbol{n}$ привело к понятию внутренней Р. г. поверхности S (см. [2]). Это есть геометрия аффинной связности (точнее эквиаффинной) без кручения. Было введено понятие геометрии 2-го рода, аналогичной геометрии сферич. отображения (см. [3]).

Р. г. позволяет включить в общую схему, кроме геометрии поверхностей евклидова и псевдоевклидова пространств, также и геометрию аффинной дифференциальной геометрии. Вектор $\boldsymbol{n}$ аффинной нормали характеризуется тем, что асимптотич. сеть поверхности S — чебышевская (см. [3]).

Дальнейшим обобщением Р. г. является теория нормализованных поверхностей (см. [4]). С каждой точкой поверхности S проективного пространства связываются две прямые: нормаль 1-го рода, проходящая через точку поверхности A, но не имеющая с касательной плоскостью α других общих точек и нормаль 2-го рода, принадлежащая α, но не проходящая через A. На поверхности S определяются при этом две внутренние геометрии, сопряженные относительно асимптотич. сети. Построения Р. г. допускают многомерное обобщение (см. [4]).

Лит.: [1] Müller E., «Monatsh. Math. und Physik», 1921, Bd 31, S. 3—19; [2] Norden A. P. (Норден А. П.), «C. r. Acad. sci.», 1931, t. 192, p. 135—37; [3] его же, «Изв. ВУЗов. Математика», 1958, № 4, с. 172—83; [4] его же, Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976.

А. П. Норден.

РЕНЬИ КРИТЕРИЙ — статистический критерий, применяемый для проверки простой непараметрич. гипотезы H_0, согласно к-рой независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют заданную непрерывную функцию распределения $F(x)$, против альтернатив следующего вида:

$$H_1^+ : \sup_{|x| < \infty} \psi[F(x)] (\mathsf{E}F_n(x) - F(x)) > 0,$$

$$H_1^- : \inf_{|x| < \infty} \psi[F(x)] (\mathsf{E}F_n - (x)F(x)) < 0.$$

$$H_1 : \sup_{|x| < \infty} \psi[F(x)] |\mathsf{E}F_n(x) - F(x)| > 0,$$

где $F_n(x)$ — функция эмпирич. распределения, построенная по выборке $X_1, \ldots, X_n$, $\psi(F)$, $\psi \geqslant 0$, — весовая функция. В случае, если

$$\psi[F(x)] = \begin{cases} 1/F(x) & \text{при } F(x) \geqslant a, \\ 0 & \text{при } F(x) < a, \end{cases}$$

где a — любое фиксированное число из отрезка $[0, 1]$, то Р.к., предназначенный для проверки H_0 против указанных альтернатив H_1^+, H_1^-, H_1, основан на соответствующих им статистиках Реньи:

$$R_n^+(a, 1) = \sup_{F(x) \geqslant a} \frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)} = \max_{F(X_{(m)}) \geqslant a} \frac{\frac{m}{n} - F(X_{(m)})}{F(X_{(m)})},$$

$$R_n^-(a, 1) = -\inf_{F(x) \geqslant a} \frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)} =$$

$$= \max_{F(X_{(m)}) \geqslant a} \frac{F(X_{(m)}) - \frac{m-1}{n}}{F(X_{(m)})},$$

$$R_n(a, 1) = \sup_{F(x) \geqslant a} \frac{|F_n(x) - F(x)|}{F(x)} =$$

$$= \max\left\{R_n^+(a, 1), R_n^-(a, 1)\right\},$$

где $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ — члены вариационного ряда

$$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)},$$

построенного по наблюдениям $X_1, \ldots, X_{(n)}$.

Статистики $R_n^+(a, 1)$ и $R_n^-(a, 1)$ подчиняются одному и тому же вероятностному закону, и если $0<a\ll 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\sqrt{\frac{na}{1-a}}\, R_n^+(a, 1) < x\right\} = 2\Phi(x) - 1, \quad x > 0, \quad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{\sqrt{\frac{na}{1-a}}\, R_n(a, 1) < x\right\} = L(x), \quad x > 0, \quad (2)$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона, $L(x)$ — функция распределения Реньи, определяемая формулой:

$$L(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp\left\{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{8x^2}\right\}.$$

В случае, если $a=0$, то

$$\mathsf{P}\{R_n^+(0, 1) \geqslant x\} = 1 - \frac{x}{1+x}, \quad x > 0.$$

Из (1) и (2) следует, что при больших значениях n для вычисления Q-процентных критич. значений ($0\% < Q < 50\%$) для статистик $R_n^+(a, 1)$ и $R_n(a, 1)$ можно воспользоваться следующими приближенными значениями:

$$\sqrt{\frac{1-a}{na}}\, \Phi^{-1}(1-0{,}005Q) \text{ и } \sqrt{\frac{1-a}{na}}\, L^{-1}(1-0{,}01Q)$$

соответственно, где $\Phi^{-1}(x)$ и $L^{-1}(x)$ функции, обратные $\Phi(x)$ и $L(x)$ соответственно, при этом имеют в виду, что если $0\% < Q < 10\%$, то $\Phi^{-1}(1-0{,}005Q) \approx L^{-1}(1-0{,}02Q)$.

Кроме того, если $x>2{,}99$, то при вычислении значений функции распределения Реньи $L(x)$ рекомендуется пользоваться приближенным равенством

$$L(x) \approx 4\Phi(x) - 3,$$

погрешность к-рого не превосходит $5\cdot 10^{-7}$.

Кроме рассмотренных Р. к., существуют аналогичные критерии, отвечающие весовой функции

$$\psi[F(x)] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-F(x)}, & \text{если } F(x) \leqslant a, \\ 0, & \text{если } F(x) > a, \end{cases}$$

где a — любое фиксированное число из отрезка $[0, 1]$.

Лит.: [1] Rényi A., «Acta math. Acad. scient. hung.», 1953, v. 4, p. 191–231; [2] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968. *М. С. Никулин.*

РЕПЕР — совокупность линейно независимых векторов, взятых в определенном порядке и отложенных от общего начала. Для векторов в пространстве Р. может служить любая тройка неараллельных одной плоскости векторов. Если векторы, составляющие Р., попарно ортогональны, то Р. наз. ортогональным; если при этом векторы имеют длину, равную единице, то Р. наз. ортонормированным. *БСЭ-3.*

РЕПЛИКА алгебраической системы A в заданном классе $\mathfrak{K}$ алгебраических систем той же сигнатуры — алгебраическая система K_0 из $\mathfrak{K}$, обладающая следующими свойствами: 1) существует сюръективный гомоморфизм φ_0 системы A на K_0; 2) если $K \in \mathfrak{K}$ и φ — гомоморфизм системы A в K, то $\varphi = \varphi_0\psi$ для нек-рого сюръективного гомоморфизма ψ системы K_0 на K. Р. системы A в классе $\mathfrak{K}$ (если она существует) определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Класс $\mathfrak{K}$ наз. реплично полным, если он содержит Р. любой алгебраич. системы той же сигнатуры. Класс алгебраич. систем фиксированной сигнатуры реплично полон тогда и только тогда, когда он содержит одноэлементную систему и замкнут относительно под-

систем и прямых произведений. Аксиоматизируемыми реплично полными классами являются квазимногообразия и только они.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970.

Л. А. Скорняков.

РЕПЛИКА эндоморфизма X конечномерного векторного пространства V над полем k характеристики 0 — элемент наименьшей, содержащей X, алгебраич. подалгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ (см. *Ли алгебраическая алгебра*). Эндоморфизм $X' \in \mathfrak{gl}(V)$ является Р. эндоморфизма X тогда и только тогда, когда всякий тензор на V, аннулируемый эндоморфизмом X, аннулируется также и эндоморфизмом X'.

Каждая Р. эндоморфизма X может быть представлена в виде многочлена от X с коэффициентами из поля k с нулевым свободным членом. Полупростая и нильпотентная компоненты эндоморфизма X (см. *Жордана разложение*, 2) являются его Р. Подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ тогда и только тогда алгебраична, когда она содержит все Р. любого своего элемента. Эндоморфизм X пространства V тогда и только тогда нильпотентен, когда $\mathrm{Tr}\, XX'=0$ для любой реплики X' эндоморфизма X.

Пусть k алгебраически замкнуто, φ — автоморфизм поля k, X — полупростой эндоморфизм пространства V, а $\varphi(X)$ — такой эндоморфизм пространства V, что всякий собственный вектор эндоморфизма X, отвечающий собственному значению λ, является собственным вектором и для $\varphi(X)$, но отвечающим собственному значению $\varphi(\lambda)$. Эндоморфизм $X' \in \mathfrak{gl}(V)$ тогда и только тогда является Р. эндоморфизма X, когда $X'=\varphi(X)$ для нек-рого автоморфизма φ поля k.

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [2] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, пер. с франц., М., 1962; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 2, М., 1958.

В. Л. Попов.

РЕПРЕЗЕНТАТИВНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО — подпространство X топологич. пространства Y такое, что включение $X \subset Y$ является слабой гомотопич. эквивалентностью.

А. Ф. Харшиладзе.

РЕТРАКТ объекта категории — понятие, обобщающее соответствующие понятия алгебры и топологии. Объект R категории $\mathfrak{K}$ наз. ретрактом объекта A, если существуют такие морфизмы

$$\mu : R \longrightarrow A \text{ и } \nu : A \longrightarrow R,$$

что $\mu\nu=1_R$. Морфизм μ при этом оказывается мономорфизмом и, более того, ядром пары морфизмов 1_A, $\nu\mu$. Двойственно, морфизм ν — эпиморфизм и, более того, коядро пары морфизмов 1_A, $\nu\mu$. Иногда μ наз. сечением, а ν — расслоением.

Если R есть Р. объекта A и объект R' изоморфен R, то R' есть ретракт A. Поэтому изоморфные Р. образуют один подобъект объекта A. Каждому ретракту R, определяемому морфизмами $\mu : R \to A$ и $\nu : A \to R$, соответствует идемпотентный морфизм $\varphi=\nu\mu : A \to A$. Два ретракта R и R' объекта A принадлежат одному и тому же подобъекту тогда и только тогда, когда им соответствует общий идемпотент. Р. любого объекта произвольной категории образуют множество.

М. Ш. Цаленко.

РЕТРАКТ топологического пространства X — подпространство A этого пространства, для к-рого существует *ретракция* X на A. Если пространство X хаусдорфово, то всякий Р. пространства X замкнут в X. Всякое непустое замкнутое множество канторова совершенного множества является его Р. При переходе от пространства к его Р. сохраняются многие важные свойства. В частности, всякое свойство, сохраняющееся при переходе к непрерывному образу, равно как и любое свойство, наследуемое замкнутыми подпространствами, устойчиво относительно перехода к Р. Поэтому компактность, связность, линейная связность, сепарабельность, ограничение сверху на размерность,

паракомпактность, нормальность, локальная компактность, локальная связность сохраняются при переходе к Р. В то же время Р. пространства может быть устроен гораздо проще его самого, более обозрим, более удобен для конкретного исследования. Так, одноточечное множество является Р. отрезка, прямой, плоскости и т. д. Если пространство X имеет свойство неподвижной точки, т. е. для каждого непрерывного отображения $f: X \to X$ существует точка $x \in X$ такая, что $f(x)=x$, то и каждый Р. пространства X обладает свойством неподвижной точки. В частности, n-мерная сфера не является Р. $(n+1)$-мерного шара евклидова пространства, где $n=0, 1, \ldots$, так как замкнутый шар обладает свойством неподвижной точки (теорема Брауэра), а сфера этого свойства не имеет. Подпространство A пространства X наз. окрестностным Р. этого пространства, если существует в X открытое подпространство, содержащее A, ретрактом к-рого A является. Понятие Р. имеет прямое отношение к вопросу о продолжаемости непрерывных отображений. Так, подпространство A пространства X является его Р. в том и только в том случае, если всякое непрерывное отображение пространства A в произвольное топологич. пространство Y можно продолжить до непрерывного отображения всего пространства X в Y.

Метризуемое пространство X наз. абсолютным Р. (абсолютным окрестностным Р.), если оно является Р. (соответственно окрестностным Р.) всякого метризуемого пространства, содержащего X в качестве замкнутого подпространства. Для того чтобы метризуемое пространство X было абсолютным Р., необходимо, чтобы оно было Р. нек-рого выпуклого подпространства линейного нормированного пространства, и достаточно, чтобы X было Р. выпуклого подпространства локально выпуклого линейного пространства.

Таким образом, все выпуклые подпространства локально выпуклых линейных пространств являются абсолютными Р.; в частности, таковы точка, отрезок, шар, прямая и т. д. Из приведенной характеристики вытекают следующие свойства абсолютных Р. Всякий Р. абсолютного Р. снова есть абсолютный Р. Каждый абсолютный Р. стягиваем по себе и локально стягиваем. Все гомологические, когомологические, гомотопические и когомотопич. группы абсолютного Р. тривиальны. Метризуемое пространство Y является абсолютным Р. в том и только в том случае, если, каковы бы ни были метризуемое пространство X, его замкнутое подпространство A и непрерывное отображение пространства A в Y, его можно продолжить до непрерывного отображения всего пространства X в Y. Абсолютные окрестностные Р. характеризуются как Р. открытых подмножеств выпуклых подпространств линейных нормированных пространств. К их числу относятся все компактные полиэдры. Существенным их свойством является локальная стягиваемость.

Если ретракция пространства X на его подпространство A гомотопна тождественному отображению пространства X на себя, то A наз. деформационным Р. пространства X. Деформационный Р. пространства гомотопически эквивалентен этому пространству, т. е. имеет с ним один и тот же гомотопич. тип. Обратно, два гомотопически эквивалентных пространства всегда можно вложить в нек-рое третье пространство таким образом, что оба они будут его деформационными Р.

Лит.: [1] Борсук К., Теория ретрактов, пер. с англ., М., 1971.

А. В. Архангельский.

РЕТРАКЦИЯ — непрерывное отображение f топологич. пространства X на его подпространство A, тождественное на A, то есть такое, что $f(x)=x$ при всех $x \in A$.

М. И. Войцеховский.

РЕФАЛ, алгоритмический язык рекурсивных функций, — *алгоритмический язык*,

ориентированный на задачи преобразования символьной информации; в первоначальном варианте назывался «метаалгоритмическим языком» (см. [1]). Р. был создан как универсальный метаязык для описания преобразований языковых объектов. Он используется для трансляции с одного алгоритмич. языка на другой, для машинного выполнения аналитич. выкладок, доказательства теорем, перевода с естественных языков и т. п.

Запись алгоритма на Р. представляет описание некрого числа рекурсивных функций на множестве выражений (т. е. последовательностей символов и скобок), правильно построенных (в обычном смысле) относительно скобок. Значение функции φ при аргументе $\mathscr{E}$ изображается на Р. в виде $\boldsymbol{K}\varphi\mathscr{E}\dot{-}$, где $\boldsymbol{K}$ — знак конкретизации, служащий для явного указания на необходимость вычисления значения функции, а символ $\dot{-}$ означает закрывающую скобку для $\boldsymbol{K}$. Описание функции распадается на несколько предложений (правил конкретизации), относящихся к случаям, когда аргумент имеет тот или иной частный вид. Напр., функция сложения в рекурсивной арифметике описывается на Р. двумя предложениями:

1) $\boldsymbol{K}+(\boldsymbol{EA})\,(0) \supseteq \boldsymbol{EA}$,

2) $\boldsymbol{K}+(\boldsymbol{EA})\,(\boldsymbol{EB}1) \supseteq \boldsymbol{K}+(\boldsymbol{EA})\,(\boldsymbol{EB})\dot{-}1$.

Предложение состоит из левой и правой частей, разделяемых знаком $\supseteq$, и может включать свободные переменные (в примере это — $\boldsymbol{EA}$ и $\boldsymbol{EB}$). Оно считается применимым для конкретизации выражения вида $\boldsymbol{K}\varphi\mathscr{E}\dot{-}$, если это последнее может быть отождествлено с левой частью предложения при нек-рых значениях входящих в нее свободных переменных. Применение предложения состоит в замене конкретизируемого выражения на правую часть предложения, в к-рой свободные переменные замещены их значениями. Для вычисления значения функции предложения рассматриваются последовательно, и применяется первое из них, оказавшееся подходящим. Этот процесс повторяется, пока в объект работы входят знаки $\boldsymbol{K}$.

Для реализации программ на Р. разработаны эффективные трансляторы (см. [3], [4]; пример использования Р. для машинного выполнения выкладок в теоретич. физике см. в [5]).

Лит.: [1] Турчин В. Ф., «Кибернетика», 1968, № 4, с. 45—54; [2] Турчин В. Ф., Сердобольский В. И., «Кибернетика», 1969, № 3, с. 58—62; [3] Флоренцев С. Н., Олюнин В. Ю., Турчин В. Ф., «Тр. 1 Всесоюзн. конференции по программированию», К., 1968, с. 114—33; [4] Романенко С. А., Турчин В. Ф., «Тр. 2-й Всесоюзн. конференции по программированию», Новосиб., 1970, с. 31—42; [5] Будник А. П. [и др.], «Ядерная физика», 1971, т. 14, с. 304—13.

В. Ф. Турчин.

РЕФЛЕКСИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО — банахово пространство X, совпадающее при каноническом вложении со своим вторым сопряженным X^{**}. Подробнее, пусть X^* — пространство, сопряженное с X, то есть совокупность всех непрерывных линейных функционалов, определенных на X. Если $\langle x, f\rangle$ — значение функционала $f\in X^*$ на элементе $x\in X$, то при фиксированном x и f, пробегающем X^*, выражение $\langle x, f\rangle = \mathscr{F}_x(f)$ будет линейным функционалом на X^*, то есть элементом пространства X^{**}. Пусть $\tilde{X}\subset X^{**}$ — множество таких функционалов. Соответствие $x\to\mathscr{F}_x$ есть изоморфизм, не меняющий нормы $\|x\| = \|\mathscr{F}_x\|$. Если $\tilde{X} = X^{**}$, то пространство X наз. рефлексивным. Пространства l_p и $L_p(a, b)$, $p>1$, рефлексивны, пространство $C[a, b]$ не рефлексивно.

Пространство X рефлексивно тогда и только тогда, когда X^* рефлексивно. Другим критерием рефлексивности банахова пространства X является слабая компактность единичного шара этого пространства.

Р. п. слабо полно, и замкнутое подпространство Р. п. рефлексивно.

Понятие рефлексивности естественным образом распространяется на *локально выпуклые пространства*.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, ч. 1 — Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [2] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977. *В. И. Соболев.*

РЕФЛЕКСИВНОСТЬ — одно из свойств *бинарных отношений*. Отношение R на множестве A наз. рефлексивным, если aRa для любого $a \in A$. Примерами рефлексивных отношений являются равенство, эквивалентность, порядок. *Т. С. Фофанова.*

РЕФЛЕКТИВНАЯ ПОДКАТЕГОРИЯ — подкатегория, содержащая «наибольшую» модель любого объекта категории. Точнее, полная подкатегория $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$ наз. рефлективной, если $\mathfrak{C}$ содержит $\mathfrak{C}$-рефлектор (см. *Рефлектор*) для любого объекта категории. Полная подкатегория $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$ рефлективна тогда и только тогда, когда функтор вложения $\mathrm{Id}_{\mathfrak{C},\mathfrak{K}} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ обладает сопряженным слева функтором $S : \mathfrak{K} \to \mathfrak{C}$. Функтор S сопоставляет каждому объекту A из $\mathfrak{K}$ его $\mathfrak{C}$-рефлектор $S(A)$; морфизмы $\pi_A : A \to S(A)$, входящие в определение $\mathfrak{C}$-рефлектора, определяют естественное преобразование тождественного функтора $\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}$ в композицию функторов $S\mathrm{Id}_{\mathfrak{C},\mathfrak{K}}$. Двойственным к понятию Р. п. является понятие корефлективной подкатегории.

Р. п. $\mathfrak{C}$ наследует многие свойства объемлющей категории $\mathfrak{K}$. Напр., морфизм $\mu \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{C}$ тогда и только тогда является мономорфизмом в $\mathfrak{C}$, когда он мономорфизм в $\mathfrak{K}$. Поэтому всякая Р. п. локально малой слева категории локально мала слева. Р. п. обладает произведениями тех семейств объектов, для к-рых произведение существует в самой категории, при этом оба произведения оказываются изоморфными. То же самое справедливо и для любых пределов. С другой стороны, функтор S переводит копределы из $\mathfrak{K}$ в копределы в $\mathfrak{C}$. Поэтому Р. п. полной (слева) категории является полной (слева) категорией.

Пусть $\mathfrak{K}$ — полная локально малая категория. Всякая полная подкатегория $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$, замкнутая относительно произведений и подобъектов своих объектов и содержащая правый нуль, является Р. п. В частности, всякое многообразие категории $\mathfrak{K}$ есть Р. п.

$\mathfrak{C}$-рефлектор произвольного объекта A строится следующим образом. Выбираются представители (ν_i, A_i), $i \in I$, таких факторобъектов объекта A, что $A_i \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$. Произведение

$$P = \Pi_{i \in I} A_i \, (\pi_i)$$

принадлежит $\mathfrak{C}$, и $\mathfrak{C}$-рефлектор $S(A)$ является образом однозначно определенного морфизма $\gamma : A \to P$, для к-рого $\gamma\pi_i = \nu_i$, $i \in I$.

Примеры. 1) Пусть R — область целостности. Полная подкатегория инъективных модулей без кручения является Р. п. категории R-модулей без кручения: рефлекторами являются инъективные оболочки модулей. В частности, подкатегория полных абелевых групп без кручения есть Р. п. категории абелевых групп без кручения.

2) Полная подкатегория нормальных топологич. пространств есть Р. п. категории вполне регулярных топологич. пространств: рефлекторы строятся с помощью компактификации Чеха.

3) Полная подкатегория пучков есть Р. п. категории предпучков: рефлекторы определяются функтором ассоциированного пучка. *М. Ш. Цаленко.*

РЕФЛЕКТОР объекта категории — понятие, описывающее «наибольшую» модель данного объекта в нек-ром классе объектов. А именно, пусть $\mathfrak{C}$ — подкатегория категории $\mathfrak{K}$; объект $B \in \mathfrak{C}$ наз. рефлектором объекта $A \in \mathfrak{K}$ в $\mathfrak{C}$, или $\mathfrak{C}$-реф-

лектором, если существует такой морфизм $\pi : A \to B$, что для любого объекта X из $\mathfrak{S}$ отображение

$$H_X(\pi): H_{\mathfrak{S}}(B, X) \to H_{\mathfrak{R}}(A, X)$$

биективно. Другими словами, для любого морфизма $\alpha : A \to X$ существует такой единственный морфизм $\alpha' : B \to X \in \mathfrak{S}$, что $\alpha = \pi\alpha'$. $\mathfrak{S}$-рефлектор объекта A определен неоднозначно, но любые два $\mathfrak{S}$-рефлектора объекта A изоморфны. $\mathfrak{S}$-рефлектор левого нуля (инициального объекта) категории $\mathfrak{R}$ является левым нулем в $\mathfrak{S}$.

Примеры. В категории групп факторгруппа G/G' произвольной группы G по коммутанту является Р. группы G в подкатегории абелевых групп. Для абелевой группы A ее факторгруппа $A/T(A)$ по периодич. подгруппе $T(A)$ является Р. группы A в полной подкатегории абелевых групп без кручения. Пополнение (инъективная оболочка) $\tilde{A}$ группы $A/T(A)$ является Р. групп A и $A/T(A)$ в подкатегории полных абелевых групп без кручения.

Обычно Р. рассматриваются в полных подкатегориях. Полная подкатегория $\mathfrak{S}$ категории $\mathfrak{R}$, в к-рой существуют Р. для любых объектов из $\mathfrak{R}$, наз. рефлективной. *М. Ш. Цаленко.*

РЕШАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ, решающая процедура, статистическое решающее правило,— правило, согласно к-рому на основании полученных наблюдений делают статистич. выводы (принимают решения).

Пусть X — случайная величина, принимающая значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, P_\theta)$, $\theta \in \Theta$, и пусть $D = \{d\}$ — множество всех возможных решений d, к-рые можно вынести относительно параметра θ по реализации случайной величины X. Согласно терминологии, принятой в математич. статистике и теории игр, любое $\mathfrak{B}$-измеримое отображение $\delta : \mathfrak{X} \to D$ пространства реализаций $\mathfrak{X}$ случайной величины X в множество возможных решений D наз. Р. ф. Напр., в задаче статистич. оценивания параметра θ любая точечная оценка $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$ является Р. ф. Основной задачей статистики при получении статистич. выводов является выбор такой Р. ф. $\delta(\cdot)$, к-рая минимизирует риск

$$R(\theta, \delta) = E_\theta [L(\theta, \delta(X))]$$

относительно используемой функции потерь $L(\cdot, \cdot)$.

Понятие Р. ф. является основным в теории статистических Р. ф., созданной А. Вальдом (A. Wald).

Лит.: [1] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [2] Вальд А., Статистические решающие функции, в сб.: Позиционные игры, М., 1967, с. 300—522. *М. С. Никулин.*

РЕШЕНИЕ в теории игр — исход (или множество исходов), удовлетворяющий принятому в данной модели принципу оптимальности. Выделяют следующие основные типы Р.: 1) решение по Нэшу (см. *Бескоалиционная игра*), в частности *седловая точка* функции выигрыша в антагонистич. играх; 2) решение по Нейману — Моргенштерну (Н — М-решение) — множество дележей, никакие два из к-рых не доминируют друг друга, причем для каждого дележа, не принадлежащего этому множеству, найдется доминирующий его дележ из этого множества (см. *Доминирование*); 3) решение Нэша в *арбитражных схемах*.

Лит.: [1] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [2] Оуэн Г., Теория игр, пер. с англ., М., 1971. *А. Н. Ляпунов.*

РЕШЕТА МЕТОД — один из общих методов теории чисел, обобщающий принцип высеивания составных чисел из натурального ряда (см. *Эратосфена решето*). Проблема Р. м. состоит в оценке для конечного множества A целых чисел количества тех элементов, к-рые не делятся ни на какое простое число p из пек-рого мно-

жества P простых чисел. Оценивается «просеивающая» функция $S(A; P, z)$, обозначающая количество указанных элементов из A при дополнительном условии: $p<z$. Для получения оценок просеивающей функции часто используется информация о числе $N(A_q)$ элементов множества A_q, состоящего из элементов A, к-рые делятся на свободное от квадратов число q. При $q=1$ множество $A_q=A$. Поэтому обычно оценивается более общая просеивающая функция $S(A_q; P, z)$.

При выборе ожидаемого значения для $N(A_q)$ в форме $(\omega(q)/q)X$, где X — ожидаемое значение для $N(A)$ и $\omega(q)$ — мультипликативная функция, руководствуются тем, чтобы погрешность

$$R(X, q)=N(A_q)-(\omega(q)/q)X$$

была относительно мала. Если при этом $\omega(p)=k$ (по крайней мере, «в среднем»), то k наз. р а з м е р н о с т ь ю р е ш е т а.

Общая теория Р. м. с ее приложениями продвинулась наиболее далеко в случае линейного решета (при $k=1$). Существуют различные специализации Р. м., наиболее важные из к-рых принадлежат В. Бруну (V. Brun; см. *Бруна решето*) и А. Сельбергу (A. Selberg; см. *Сельберга решето*).

В приложениях Р. м. к аддитивным задачам (см. *Аддитивная теория чисел*), кроме оценок просеивающей функции сверху, необходимы оценки этой функции снизу. Получение оценок снизу может быть основано на логическом комбинаторном тождестве

$$S(A_q; P, z)=N(A_q)-\sum_{p<z,\ p\in P}S(A_{qp}; P, p).$$

Наиболее точные оценки снизу получаются с добавлением комбинаторных соображений, связанных с использованием весовых функций. Сильный результат в приложениях Р. м. с весовыми функциями состоит в том, что каждое достаточно большое четное число N представимо в виде $N=p+P_2$, где p — простое число, P_2 содержит не более двух простых множителей.

Лит.: [1] П р а х а р К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [2] Г е л ь ф о н д А. О., Л и н н и к Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962; [3] H a l b e r s t a m H., R i c h e r t H., Sieve methods, L.— [a. o.], 1974.

Б. М. Бредихин.

РЕШЕТКА в г р у п п е Л и — *дискретная подгруппа* Γ группы Ли G такая, что G/Γ имеет конечный объем относительно G-инвариантной меры.

Р. р а з м е р н о с т и (или р а н г а) n в векторном пространстве V над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ — свободная абелева подгруппа в V, порожденная n векторами, линейно независимыми над полем $\mathbb{R}$. Подгруппа аддитивной группы конечномерного векторного пространства V над $\mathbb{R}$ дискретна тогда и только тогда, когда она является решеткой [1].

Лит.: [1] М о р р и с С., Двойственность Понтрягина и строение локально-компактных абелевых групп, пер. с англ., М., 1980.

А. Л. Онищик.

РЕШЕТКА, с т р у к т у р а,— *частично упорядоченное множество*, в к-ром каждое двухэлементное подмножество имеет как точную верхнюю, так и точную нижнюю грани. Отсюда вытекает существование этих граней для всякого непустого конечного подмножества.

П р и м е р ы. 1) Линейно упорядоченное множество M (или цепь), где для $a, b\in M$, если $a\leqslant b$, то

$$\sup\{a, b\}=b,\quad \inf\{a, b\}=a.$$

2) Подпространства векторного пространства, упорядоченные по включению, где

$$\sup\{A, B\}=\{x\mid x=a+b,\ a\in A,\ b\in B\},$$
$$\inf\{A, B\}=A\cap A.$$

3) Подмножества данного множества, упорядоченные по включению, где

$$\sup\{A, B\}=A\cup B,$$
$$\inf\{A, B\}=A\cap B.$$

4) Неотрицательные целые числа, упорядоченные по делимости: $a \leqslant b$, если $b=ac$ для нек-рого c, где $\sup\{a, b\}$ — наименьшее общее кратное a и b, а $\inf\{a, b\}$ — наибольший общий делитель a и b.

5) Действительные функции, определенные на отрезке $[0, 1]$ и упорядоченные условием: $f \leqslant g$, если $(t) \leqslant g(t)$ для всех $t \in [0, 1]$, где

$$\sup\{f, g\} = u,$$

причем

$$u(t) = \max\{f(t), g(t)\},$$

а

$$\inf\{f, g\} = v,$$

причем

$$v(t) = \min\{f(t), g(t)\}.$$

Пусть M — решетка. M становится *универсальной алгеброй* с двумя бинарными операциями, если определить

$$a+b = \sup\{a, b\},$$
$$a \cdot b = \inf\{a, b\}$$

(вместо $+$ и $\cdot$ часто употребляются символы $\cup$ и $\cap$ или $\vee$ и $\wedge$). Эта универсальная алгебра удовлетворяет следующим тождественным соотношениям:

(1) $a+a=a$; (1′) $a \cdot a = a$;

(2) $a+b=b+a$; (2′) $a \cdot b = b \cdot a$;

(3) $(a+b)+c=a+(b+c)$; (3′) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

(4) $a(a+b)=a$; (4′) $a+a \cdot b = a$.

Наоборот, если M — множество с двумя бинарными операциями, обладающими перечисленными выше свойствами (1)—(4), (1′)—(4′), то на M можно задать порядок $\leqslant$, полагая $a \leqslant b$, если $a+b=b$ (при этом окажется, что $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $a \cdot b = a$). Возникающее частично упорядоченное множество будет Р., причем

$$\sup\{a, b\} = a+b, \text{ а } \inf\{a, b\} = a \cdot b.$$

Таким образом, Р. можно определить как универсальную алгебру, описываемую тождествами (1)—(4), (1′)—(4′), то есть Р. образует *универсальных алгебр многообразие*.

Если частично упорядоченное множество рассматривать как *малую категорию*, то оно оказывается Р. в том и только в том случае, когда для любых двух объектов этой категории существует их произведение и копроизведение.

Если P и P' — решетки и f — изоморфизм этих частично упорядоченных множеств, то f является также изоморфизмом соответствующих универсальных алгебр, т. е.

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \text{ и } f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

для любых $x, y \in P$. Однако произвольное изотонное отображение решетки P в решетку P' не обязано быть гомоморфизмом этих Р., рассматриваемых как универсальные алгебры. Так, для любого $a \in P$ отображения $f(x)=x+a$ и $g(x)=x \cdot a$ — изотонные отображения решетки P в себя, являющиеся гомоморфизмами лишь в том и только в том случае, когда P — *дистрибутивная решетка*. Впрочем, первое из этих отображений является гомоморфизмом *полурешетки* P с операцией $+$, а второе — гомоморфизмом полурешетки P с операцией $\cdot$. Совокупность всех Р. образует категорию, если морфизмами считать гомоморфизмы.

Антигомоморфизм решетки P в решетку P' есть такое отображение $f: P \to P'$, что

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \text{ и } f(x \cdot y) = f(x)+f(y)$$

для любых $x, y \in P$. Последовательное выполнение двух антигомоморфизмов является гомоморфизмом. Частично упорядоченное множество, антиизоморфное Р., есть Р.

Под координатизацией Р. понимают нахождение *алгебраической системы* (чаще, универсальной алгебры) такой, что данная Р. изоморфна Р. подсистем, Р. конгруэнций или какой-либо другой Р., связанной с этой алгебраич. системой или универсальной алгеброй. Произвольная Р. с 0 и 1 координатизируется частично упорядоченной полугруппой ее резидуальных отображений в себя, оказываясь изоморфной Р. правых аннуляторов этой полугруппы. Сама полугруппа является бэровской, т. е. как правый, так и левый аннулятор каждого из ее элементов порождается идемпотентом.

Наиболее важные результаты получены для Р., подчиненных тем или иным дополнительным ограничениям (см. *Алгебраическая решетка*, *Атомная решетка*, *Брауэра решетка*, *Векторная решетка*, *Дедекиндова решетка*, *Дистрибутивная решетка*, *Мультипликативная решетка*, *Ортомодулярная решетка*, *Полная решетка*, *Свободная решетка*, *Решетка с дополнениями*, *Булева алгебра*). По отдельным вопросам теории Р. см. *Идеал*, *Фильтр*, *Пополнение сечениями*. Особую роль играют алгебраич. образования, являющиеся в то же время Р. (см. *Структурно упорядоченная группа*). Наибольшее число приложений теории Р. связано с булевыми алгебрами. Другие классы Р. использовались в квантовой механике и физике.

Появление понятия «Р.» относится к сер. 19 в. и связано с тем, что многие факты, касающиеся множества идеалов кольца и множества нормальных подгрупп группы, выглядят аналогично и могут быть доказаны в рамках теории дедекиндовых Р. Как самостоятельное направление алгебры теория Р. сформировалась в 30-х гг. 20 в.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория решеток, пер. с англ., М., 1983; [2] Гретцер Г., Общая теория решеток, пер. с англ., М., 1982; [3] Салий В. Н., Лекции по теории решеток, Саратов, 1970; [4] Скорняков Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961; [5] его же, Элементы теории структур, 2 изд., М., 1982; [6] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 237—74; [7] Итоги науки. Алгебра, топология, геометрия. 1968, М., 1970, с. 101—54; [8] Упорядоченные множества и решетки, в. 3, Саратов, 1975; [9] Blyth T., Janowitz M., Residuation theory, N. Y., 1972.

Л. А. Скорняков.

РЕШЕТКА ПОДАЛГЕБР универсальной алгебры A — частично упорядоченное (отношением теоретико-множественного включения) множество $\mathrm{Sub}\,A$ всех подалгебр алгебры A. Для произвольных $X, Y \in \mathrm{Sub}\,A$ их супремумом будет подалгебра, порожденная X и Y, а их инфинумом — пересечение $X \cap Y$. Пересечение подалгебр может быть пустым, поэтому для нек-рых типов алгебр (напр., для полугрупп и решеток) к числу подалгебр относят и пустое множество. Для любой алгебры A Р. п. $\mathrm{Sub}\,A$ является алгебраической и обратно, для любой алгебраической решетки L существует алгебра A такая, что $L \cong \mathrm{Sub}\,A$ (теорема Биркгофа — Фринка). Любая решетка вложима в решетку $\mathrm{Sub}\,A$ для нек-рой группы A.

Р. п. $\mathrm{Sub}\,A$ — одна из основных производных структур, сопоставляемых алгебре A (наряду с такими структурами, как группа автоморфизмов, полугруппа эндоморфизмов, решетка конгруэнций и т. п.). Проблематика, посвященная изучению связей между алгебрами и их Р. п. делится на такие аспекты: решеточные изоморфизмы, решеточные характеристики тех или иных классов алгебр, исследование алгебр с различными ограничениями на Р. п. Алгебры A и B наз. решеточно изоморфными, если $\mathrm{Sub}\,A \cong \mathrm{Sub}\,B$; всякий изоморфизм $\mathrm{Sub}\,A$ на $\mathrm{Sub}\,B$ наз. решеточным изоморфизмом (или проектированием) A на B. Изоморфные алгебры решеточно изоморфны, обратное же далеко не обязательно. Говорят, что алгебра A решеточно определяется (в данном классе $\mathcal{K}$), если для любой однотипной с ней алгебры B (из $\mathcal{K}$) из $\mathrm{Sub}\,B \cong \mathrm{Sub}\,A$ следует $B \cong A$. В некото-

рых случаях (напр., для полугрупп) понятие решеточной определяемости расширяют добавлением в заключение импликации условия «или B антиизоморфна A», так как антиизоморфные полугруппы также решеточно изоморфны. Классический пример решеточной определяемости доставляет первая основная теорема проективной геометрии (см. [1]), где в качестве A рассматриваются векторные пространства над телами. Решеточно определяющимися являются также всякая абелева группа, содержащая два независимых элемента бесконечного порядка, всякая свободная группа (свободная полугруппа) и группа (полугруппа), нетривиально разложимая в свободное произведение, всякая нильпотентная группа без кручения, всякая коммутативная полугруппа с законом сокращения и без идемпотентов, всякая свободная полугруппа идемпотентов, свободная полурешетка более чем с двумя свободными образующими. При этом нередко оказывается, что каждое проектирование алгебры индуцируется ее изоморфизмом (или антиизоморфизмом). Класс однотипных алгебр $\mathcal{K}$ может содержать решеточно не определяющиеся алгебры, но обладать тем свойством, что из $A \in \mathcal{K}$ и $\mathrm{Sub}\, B \cong \mathrm{Sub}\, A$ вытекает, что $B \in \mathcal{K}$; в этом случае говорят, что $\mathcal{K}$ р е ш е т о ч н о о п р е д е л я е т с я (или р е ш е т о ч н о з а м к н у т); если при этом алгебры B берутся только из класса $\mathcal{M}$, то к соответствующему термину добавляют «в классе $\mathcal{M}$». Среди решеточно замкнутых классов — класс всех разрешимых групп.

Многие ограничения, накладываемые на изучаемые алгебры, формулируются в терминах Р. п.; классический пример — условия минимальности и максимальности для подалгебр. $\mathrm{Sub}\, A$ удовлетворяет условию максимальности тогда и только тогда, когда все подалгебры в A конечно порожденные (см. также *Группа с условием конечности*, *Полугруппа с условием конечности*). В качестве других накладываемых на Р. п. ограничений рассматриваются такие теоретико-решеточные свойства как дистрибутивность, модулярность, различные виды полумодулярности, условие Жордана — Дедекинда, дополняемость, относительная дополняемость и т. д. Напр., для группы A Р. п. дистрибутивна тогда и только тогда, когда A локально циклическая (т е о р е м а О р е); условия дистрибутивности изучены и в случае полугрупп, ассоциативных колец, модулей, алгебр Ли и др.

Наряду с изоморфизмами Р. п. рассматриваются д у а л и з м ы (т. е. антиизоморфизмы), гомоморфизмы. В случае, когда A — топологическая алгебра, наиболее естественно сопоставлять ей решетку всех замкнутых подалгебр; соответствующая проблематика также активно разрабатывается.

Лит.: [1] Б э р Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, пер. с англ., М., 1955; [2] С у д з у к и М., Строение группы и строение структуры ее подгрупп, пер. с англ., М., 1960; [3] С к о р н я к о в Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961; [4] К о н П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [5] С а д о в с к и й Л. Е., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 3, с. 123—57; [6] А р ш и н о в М. П., С а д о в с к и й Л. Е., там же, 1972, т. 27, в. 6, с. 139—80; [7] Ш е в р и н Л. Н., «Сибирск. матем. ж.», 1962, т. 3, № 3, с. 446—470; [8] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 237—74; [9] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М., 1970, с. 101—54; [10] Упорядоченные множества и решетки, в. 3, Саратов, 1975, с. 50—74. *Л. Н. Шеврин.*

РЕШЕТКА С ДОПОЛНЕНИЯМИ — решетка L с нулем 0 и единицей 1, в к-рой для любого элемента a существует такой элемент b (наз. д о п о л н е н и е м э л е м е н т а a), что $a \vee b = 1$ и $a \wedge b = 0$. Произвольную решетку можно вложить в решетку, каждый элемент к-рой обладает единственным дополнением. Если для любых a, $b \in L$ *интервал* $[a, b]$ является Р. с д., то L наз. р е ш е т к о й с о т н о с и т е л ь н ы м и д о п о л н е н и я м и. Каждая модулярная Р. с д. является решеткой с относительными дополнениями. Решетка L

с нулем 0 называется: а) р е ш е т к о й с ч а с т и ч н ы м и д о п о л н е н и я м и, если каждый ее интервал вида $[0, a]$, $a \in L$, является Р. с д.; б) р е ш е т к о й с о с л а б ы м и д о п о л н е н и я м и, если для любых a, $b \in L$ существует такой элемент $c \in L$, что $a \wedge c = 0$ и $b \wedge c \neq 0$; в) р е ш е т к о й с п о л у д о п о л н е н и я м и, если для любого $a \in L$, $a \neq 1$, существует такой элемент $b \in L$, $b \neq 0$, что $a \wedge b = 0$; г) р е ш е т к о й с п с е в д о д о п о л н е н и я м и, если для любого $a \in L$ существует такой элемент a^*, что $a \wedge x = 0$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant a^*$; д) р е ш е т к о й с к в а з и д о п о л н е н и я м и, если для любого $x \in L$ существует такой элемент $y \in L$, $y \neq x$, что $x \vee y$ является плотным элементом. Большую роль играют также решетки с ортодополнениями (см. *Ортомодулярная решетка*). О связи между различными типами дополнений в решетках см. [4].

Лит.: [1] Б и р к г о ф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] С к о р н я к о в Л. А., Элементы теории структур, 2 изд., М., 1982; [3] е г о ж е, Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961; [4] G r i l l e t P. A., V a r l e t J. C., «Bull. Soc. roy. Sci. Liège», 1967, t. 36, № 11—12, p. 628—42.

Т. С. Фофанова.

РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННАЯ ГРУППА — то же, что *структурно упорядоченная группа*.

РЕШЕТЧАТОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — дискретное вероятностное распределение, сосредоточенное на множестве точек вида $a+nh$, где $h>0$, a — действительное число, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Число h наз. ш а г о м Р. р., и если ни при каких a_1 и $h_1 > h$ распределение не сосредоточено на множестве вида a_1+nh_1, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то шаг h наз. м а к с и м а л ь н ы м. Частным случаем Р. р. является арифметич. распределение.

Для того чтобы вероятностное распределение с характеристич. функцией $f(t)$ было р е ш е т ч а т ы м, необходимо и достаточно, чтобы существовало действительное число $t_0 \neq 0$ такое, что $|f(t_0)|=1$; причем h является максимальным шагом тогда и только тогда, когда $|f(t)|<1$ при $0<t<2\pi/h$ и $|f(2\pi/h)|=1$. Характеристич. функция Р. р. является периодич. функцией.

Формула обращения для Р. р. имеет вид

$$p_n = \frac{h}{2\pi} \int_{|t| < \pi/h} e^{-it(a+nh)} f(t)\, dt,$$

где p_n — вероятность, к-рую Р. р. приписывают точке $a+nh$, $f(t)$ — соответствующая характеристич. функция. Справедливо также равенство

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n^2 = \frac{h}{2\pi} \int_{|t| < \pi/h} |f(t)|^2\, dt.$$

Свертка двух Р. р. с шагами h_1 и h_2 является Р. р. тогда и только тогда, когда h_1/h_2 — рациональное число.

При исследовании предельного поведения сумм независимых случайных величин, имеющих Р. р., основной результат центральной предельной теоремы о сходимости к нормальному распределению существенно дополняется локальными теоремами для Р. р. Простейшим примером локальной теоремы для Р. р. является *Лапласа теорема*. Ее обобщением служит следующее утверждение: пусть X_1, X_2, ... — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathsf{E}X_1=m$, $\mathsf{D}X_1=\sigma^2$ и $S_k=X_1+\ldots+X_k$ и X_1 принимает значения вида $a+nh$, $h>0$; тогда если

$$P_k(n) = \mathsf{P}\{S_k = ka+nh\},$$

для выполнения при $k \to \infty$ предельного соотношения

$$\left| \frac{\sigma\sqrt{k}}{h} P_k(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{ka+nh-km}{\sigma\sqrt{k}} \right)^2 \right\} \right| \to 0$$

равномерно относительно n, необходимо и достаточно, чтобы шаг h был максимальным.

Лит.: [1] Г н е д е н к о Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [2] П е т р о в В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [3] П р о х о р о в Ю. В., Р о з а н о в Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973.

Н. Г. Ушаков.

РИБОКУРА КОНГРУЭНЦИЯ — конгруэнция прямых, развертывающиеся поверхности к-рой секут ее среднюю поверхность по сопряженной сети линий.

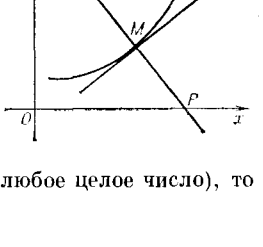
Пусть S — средняя поверхность Р. к. Тогда существует семейство поверхностей, к-рые соответствуют поверхности S ортогональностью линейных элементов и в каждой паре соответствующих точек имеют нормаль, параллельную лучу конгруэнции. Наоборот, если задана пара поверхностей S и $\tilde{S}$, соответствующих ортогональностью линейных элементов, то конгруэнция, образованная лучами, проходящими через точки поверхности S и коллинеарными нормалям поверхности $\tilde{S}$ в соответствующих точках, является Р.к. со средней поверхностью S. Поверхность $\tilde{S}$ наз. о б р а з у ю щ е й п о в е р х н о с т ь ю Р. к. Линии кривизны образующей поверхности $\tilde{S}$ соответствуют тем линейчатым поверхностям конгруэнции, линии сжатия к-рых пересекают луч в центре. Развертывающиеся поверхности Р. к. соответствуют асимптотич. линиям образующей поверхности $\tilde{S}$. У нормальной Р. к. образующая поверхность минимальная. Такая конгруэнция образована нормалями поверхности с изотермическим сферич. изображением линий кривизны.

Конгруэнция впервые рассмотрена А. Рибокуром (A. Ribaucour, 1881).

Лит.: [1] Ф и н и к о в С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М.— Л., 1937; [2] е г о ж е, Теория конгруэнций, М.— Л., 1950.

В. С. Малаховский.

РИБОКУРА КРИВАЯ — плоская кривая, радиус кривизны R к-рой в произвольной точке M пропорционален длине отрезка нормали MP (см. рис.). Уравнение Р. к. в декартовых прямоугольных координатах:



$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{2n} - 1}},$$

где $n = \frac{MP}{R}$. Если $n = 1/h$ (h — любое целое число), то параметрич. уравнения Р. к.:

$$x = (m+1)\, C \int_0^t \sin^{m+1} t\, dt, \quad y = C \sin^{m+1} t,$$

где $m = -(n+1)n$. При $m=0$ Р. к. есть окружность, при $m=1$ — *циклоида*, при $m=-2$ — *цепная линия*, при $m=-3$ — *парабола*.

Длина дуги Р. к.:

$$l = (m+1)\, C \int_0^t \sin^m t\, dt;$$

радиус кривизны:

$$R = -(m+1)\, C \sin^m t.$$

Эту кривую исследовал А. Рибокур (A. Ribaucour, 1880).

Лит.: [1] С а в е л о в А. А., Плоские кривые, М., 1960; [2] Р а ш е в с к и й П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956.

Д. Д. Соколов.

РИККАРТОВО КОЛЬЦО левое, л е в о е РР-к о л ь ц о,— кольцо, в к-ром левый аннулятор любого элемента порождается идемпотентом (симметричным образом определяются п р а в ы е Р. к.). Р. к. характеризуются проективностью всех главных левых (правых) идеалов. Риккартовыми являются регулярные, бэровские и полунаследственные кольца. Левое Р. к. не обязано быть правым Р. к. Может не быть риккартовым и кольцо матриц над Р. к. Кольца эндоморфизмов всех свободных левых R-модулей суть Р. к. тогда и только тогда, когда R наследственно слева. Все эти кольца будут правыми Р. к. в том и только в том случае, когда R наследственно слева, совершенно слева и когерентно

справа. Сами же кольца эндоморфизмов при этих условиях оказываются бэровскими (см. *Регулярное кольцо*). Коммутативное кольцо R является Р. к. тогда и только тогда, когда его полное кольцо частных регулярно в смысле Неймана и для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца R кольцо частных $R_{\mathfrak{m}}$ не имеет делителей нуля. Кольцо многочленов над коммутативным Р. к. является Р. к.

Кольцо с инволюцией $*$ наз. р и к к а р т о в ы м $*$-к о л ь ц о м, если левый аннулятор любого элемента порождается проекцией, т. е. таким элементом e, что $e=e^2=e^*$. Аналогичное свойство для правых аннуляторов при этом выполняется автоматически. Проекции риккартова $*$-кольца образуют решетку. Эта решетка полна в том и только в том случае, когда проекцией порождается аннулятор любого множества. Такие кольца наз. б э р о в с к и м и $*$-к о л ь ц а м и.

Термин «Р. к.» введен в честь Ч. Риккарта, рассмотревшего соответствующее свойство в кольцах операторов (см. [1]).

Лит.: [1] R i c k a r t C. E., «Ann. math.», 1946, v. 47, p. 528—50; [2] B e r b e r i a n S. K., B a e r $*$-rings, B— [a. o.], 1972; [3] K a p l a n s k y I., Rings of operators, N. Y.— Amst., 1968; [4] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1981, с. 31—134. *Л. А. Скорняков.*

РИККАТИ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$z'+az^2=bt^\alpha, \tag{1}$$

где a, b, α — постоянные. Впервые это уравнение исследовал Я. Риккати (1723, см. [1]); отдельные частные случаи рассматривались раньше. Д. Бернулли (D. Bernoulli, 1724—25) установил, что уравнение (1) интегрируется в элементарных функциях, если $\alpha=-2$ или $\alpha=-4k(2k-1)$, где k — целое число. Ж. Лиувилль (J. Liouville, 1841) доказал, что при других значениях α решение уравнения (1) нельзя выразить в квадратурах от элементарных функций. Общее решение уравнения (1) может быть записано с помощью *цилиндрических функций* (см. [1]).

Дифференциальное уравнение

$$z'=2a(t)\,z+b(t)-c(t)\,z^2, \tag{2}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — непрерывные функции, наз. о б щ и м у р а в н е н и е м Р и к к а т и (в отличие от него уравнение (1) наз. с п е ц и а л ь н ы м у р а в н е н и е м Р и к к а т и). При $c(t)\equiv 0$ общее Р. у. является линейным дифференциальным уравнением, при $b(t)\equiv 0$ — *Бернулли уравнением*; решения этих двух уравнений находятся в квадратурах. Изучены также другие случаи интегрируемости общего Р. у. (см. [2]).

Уравнение (2) тесно связано с системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x'&=a(t)\,x+b(t)\,y,\\ y'&=c(t)\,x-a(t)\,y. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Если $(x(t), y(t))$ — решение системы (3) при $t\in I=(t_0, t_1)$ и $y(t)$ не обращается в нуль на I, то $z=x(t)y^{-1}(t)$ есть решение уравнения (2); если $z(t)$ — решение уравнения (2), а $y(t)$ — решение уравнения

$$y'=[c(t)\,z(t)-a(t)]\,y,$$

то пара $(x(t)=z(t)y(t),\ y(t))$ является решением системы (3). В частности, решения уравнения (2) при $c(t)\equiv 1$ связаны с решениями уравнения

$$y''=2a(t)\,y'+b(t)\,y,\ t\in I,$$

равенством $z(t)=y'(t)y^{-1}(t)$, если $y(t)$ не обращается в нуль на I. В силу отмеченной связи, уравнение (2) часто привлекается для исследования колеблемости, неосцилляции, приводимости и многих других вопросов качественного поведения линейных уравнений и систем 2-го порядка (см. [3], [4]).

Уравнение

$$Z' = A(t)\,Z + B(t) - ZC(t)\,Z - ZD(t), \qquad (4)$$

где $Z \equiv Z(t)$ — неизвестная $(n \times m)$-матрица-функция, а матрицы-функции A, B, C, D имеют размеры $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$ соответственно, наз. матричным уравнением Риккати. Решения $Z(t)$ матричного Р. у. (4) связаны с решениями $(X(t), Y(t))$ матричной линейной системы:

$$\left.\begin{aligned} X' &= A(t)\,X + B(t)\,Y, \\ Y' &= C(t)\,X + D(t)\,Y \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

равенством $X(t) = Z(t)Y(t)$.

Матричное Р. у. играет важную роль в теории линейных гамильтоновых систем, вариационном исчислении, задачах оптимального управления, фильтрации, стабилизации управляемых линейных систем и др. (см. [6], [7]). Напр., оптимальное управление u_0 в задаче минимизации функционала

$$x^{\tau}(t_1)\,\Phi x(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} [x^{\tau}(t)\,M(t)\,x(t) + u^{\tau}(t)\,N(t)\,u(t)]\,dt$$

на решениях системы

$$x' = A(t)\,x + B(t)\,u, \quad x(t_0) = x_0,$$

($(n \times n)$-матрицы Φ, $M(t)$ симметричны и неотрицательно определены, а $(m \times m)$-матрица $N(t)$, положительно определенная при $t \in [t_0, t_1]$), дается равенством

$$u_0(t) = -N^{-1}(t)\,B^{\tau}(t)\,Z(t)\,x,$$

где $Z(t)$ — решение матричного Р. у.

$$Z' = -ZA(t) - A^{\tau}(t)\,Z + ZB(t)\,N^{-1}(t)\,B^{\tau}(t)\,Z - M(t) \qquad (6)$$

с граничным условием $Z(t_1) = \Phi$ (см. [5], [8]).

В задачах управления на бесконечном интервале времени важными являются вопросы о существовании у матричного Р. у. неотрицательно определенного ограниченного на $[t_0, \infty)$ решения, о существовании периодического или почти периодического решения (в случае периодических или почти периодических коэффициентов уравнения) и о способах приближенного построения таких решений.

В вариационных задачах с дискретным временем и задачах дискретной оптимизации аналогом уравнения (4) служит матричное рекуррентное уравнение Риккати

$$Z_{k+1} = A_k Z_k + B_k - Z_k C_k Z_k - Z_k D_k.$$

Уравнению (4) можно естественным образом поставить в соответствие динамич. систему на многообразии Грассмана $G_{m,n}$ (см. [9]), что позволяет привлечь к исследованию уравнения (4) теорию динамич. систем. Напр., если матрицы A, B, C, D в уравнении (4) периодичны с периодом $\omega > 0$ и $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots < |\lambda_{n+m}|$, где λ_i - мультипликаторы (см. *Флоке — Ляпунова теорема*) системы (5), то соответствующая динамич. система порождается диффеоморфизмом Морса — Смейла (см. *Морса — Смейла система*), и потому она структурно устойчива.

Лит.: [1] Riccati J., Opere, Treviso, 1758 (2 Aufl., Lucca, 1761—65); [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер с нем., 5 изд., М., 1976; [3] Еругин Н. П., Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, 3 изд., Минск, 1979; [4] его же, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Минск, 1963; [5] Reid W. T., Riccati differential equations, N. Y.— L., 1972; [6] Калман Р., Фалб П., Арбиб М., Очерки по математической теории систем, пер. с англ., М., 1971; [7] Лионс Ж.-Л., Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, пер. с франц., М., 1972; [8] Захар-Итгин М. Х., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 3, с. 83—120; [9] Schneider C. R., «Math. Syst. Theory», 1973, v. 7, № 3, p. 281—86. *Е. Л. Тонков.*

РИМАНА ГЕОМЕТРИЯ, эллиптическая геометрия,— одна из неевклидовых геометрий,

т. е. геометрич. теория, основанная на аксиомах, требования к-рых отличны от требований аксиом *евклидовой геометрии*. В отличие от евклидовой геометрии в Р. г. осуществляется одно из двух возможных отрицаний аксиомы параллельности евклидовой геометрии: в плоскости через точку, не инцидентную данной прямой, не проходит ни одной прямой, не пересекающей данную; другое отрицание евклидовой аксиомы параллельности осуществляется в *Лобачевского геометрии*: в плоскости через данную точку, не инцидентную данной прямой, проходит по крайней мере две прямые, не пересекающие данную.

Система аксиом трехмерной Р. г. может быть построена по основе тех же понятий, что и *Гильберта система аксиом* евклидовой геометрии, где в качестве основных понятий полагаются «точка», «прямая», «плоскость». «Прямая» и «плоскость» понимаются как нек-рые классы «точек», а под «пространством» подразумевается совокупность всех объектов: «точек», «прямых» и «плоскостей».

Система аксиом состоит из четырех групп.

I группа — аксиомы принадлежности — содержит все аксиомы, составляющие I группу гильбертовой системы аксиом, и, кроме того, дополняется еще одной аксиомой: каждым двум различным прямым в плоскости принадлежит одна и только одна общая им точка.

II группа — аксиомы порядка, или расположения точек на прямой. Аксиомы этой группы описывают понятие «разделенность двух пар точек прямой», с помощью к-рого определяется порядок точек на прямой. II_1. Каковы бы ни были три различные точки A, B, C произвольной прямой, существует на этой прямой такая точка D, что пара A, B разделяет пару C, D (обозначается $AB \div CD$). Если $AB \div CD$, то все четыре точки A, B, C, D различны. II_2. Если $AB \div CD$, то $BA \div CD$ и $CD \div AB$. II_3. Каковы бы ни были четыре различные точки A, B, C, D прямой, из них могут быть всегда и единственным образом составлены две разделенные пары. II_4. Пусть точки A, B, C, D, E лежат на одной прямой, если $CD \div AB$ и $CE \div AB$, то пара DE не разделяет пару AB. II_5. Если пары CD и CE не разделяют пару AB, то и пара DE не разделяет пару AB (см. II_4). II_6. Пусть четыре различные прямые нек-рого пучка пересекаются двумя различными прямыми соответственно в точках A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1, тогда если $AB \div CD$, то и $A_1B_1 \div C_1D_1$.

III группа — аксиомы конгруэнтности — описывает отношение «конгруэнтность» отрезков, углов и т. д. Под отрезком подразумевается множество точек прямой, определенное парой различных точек A, B этой прямой следующим образом. Вследствие аксиом II группы на прямой существует такая пара точек M, N, что $AB \div MN$; множество точек X, к-рые удовлетворяют соотношению $AB \div MX$, образуют класс внутренних точек отрезка, определяемого точками A и B; обозначается $[AB]_M$. Точки прямой, внешние относительно $[AB]_M$, образуют взаимно дополнительный отрезок $[AB]_N$, точки A и B наз. концами отрезков $[AB]_M$ и $[AB]_N$. В аксиомах, относящихся к понятию отрезка, под отрезком подразумевается всегда класс внутренних точек или всегда класс внешних точек. III_1. Каждый отрезок конгруэнтен самому себе. III_2. Если первый отрезок конгруэнтен второму, то второй отрезок конгруэнтен первому. III_3. Если первый отрезок конгруэнтен второму, а второй конгруэнтен третьему, то и первый конгруэнтен третьему. III_4. Из конгруэнтности двух отрезков следует конгруэнтность их взаимно дополнительных отрезков. III_5. Каждый отрезок не конгруэнтен своей части. Полупрямыми наз. конгруэнтные взаимно дополнительные отрезки одной прямой. Концы таких отрезков наз. про-

тивоположными точками прямой. III_6. Для каждой точки прямой существует ей противоположная. III_7. Все полупрямые конгруэнтны между собой. III_8. Если отрезок $[AB]$ конгруэнтен отрезку $[A_1B_1]$ и точка C есть внутренняя точка первого отрезка, то внутри второго отрезка существует такая точка C_1, что отрезок $[A_1C_1]$ конгруэнтен отрезку $[AC]$ и отрезок $[C_1B_1]$ конгруэнтен отрезку $[CB]$. Пусть на сторонах угла, образованного двумя прямыми, отмечены противоположные точки относительно вершины угла, тогда отрезком, соотнесенным углу, наз. отрезок прямой, проходящий через эти две точки, к-рый расположен внутри данного угла. Два угла наз. конгруэнтными, если конгруэнтны соотнесенные им отрезки. III_9. *Если в двух треугольниках* ABC и $A_1B_1C_1$ сторона AB конгруэнтна стороне A_1B_1, а сторона AC — стороне A_1C_1, то угол A конгруэнтен углу A_1 тогда и только тогда, если конгруэнтны стороны BC и B_1C_1.

IV группа — аксиома непрерывности. Пусть внутренние точки отрезка $[AB]_M$ разделены на два класса таких, что 1) каждая точка отрезка попадает в один из этих классов, 2) каждый класс не пуст, 3) если точка X принадлежит первому классу, а точка Y — второму, то X — всегда внутренняя точка отрезка $[AY]_M$. Тогда на отрезке $[AB]_M$ существует такая точка C, что всякая внутренняя точка отрезка $[AC]_M$ принадлежит первому классу, а всякая внутренняя точка отрезка $[CB]_M$ — второму.

Имеются и другие системы аксиом Р. г., в основе к-рых лежат иные основные понятия и отношения (см., напр., [3], [5]).

Метрич. свойства Р. г. «в малом» совпадают с метрич. свойствами нек-рой гиперсферы в соответствующем евклидовом пространстве. Напр., для любой точки плоскости Римана существует содержащая эту точку часть плоскости, изометричная нек-рой части сферы в 3-мерном евклидовом пространстве, радиус r этой сферы — один и тот же для всех плоскостей данного пространства Римана — наз. радиусом кривизны этого пространства; метрич. свойства 3-мерного пространства Римана «в малом» совпадают с метрич. свойствами гиперсферы 4-мерного евклидова пространства и т. д. Число $k=1/r^2$ наз. кривизной пространства Римана.

Ниже приведены основные факты Р. г. прямой, плоскости и 3-мерного пространства.

Прямая Римана (эллиптическая прямая) — замкнутая конечная линия $\mathcal{P}^1$. Моделью прямой в евклидовой плоскости E^r может служить окружность радиуса r с отождествленными диаметрально противоположными точками. Две различные точки прямой делят ее на две части. Взаимное расположение точек на прямой определяется с помощью понятия «разделенности двух пар точек». Расстояние между двумя точками прямой определяется двузначно: меньшее из них не превышает $\pi r/2$, большее — превосходит $\pi r/2$. Длина всей прямой равна πr. Две точки, расстояние между к-рыми равно $\pi r/2$, наз. взаимно полярными; каждой точке прямой соответствует единственная, полярная ей.

Плоскость Римана (эллиптическая плоскость) — замкнутая конечная односторонняя поверхность $\mathcal{P}^2$, гомеоморфная листу Мёбиуса, граница к-рого заклеена кругом. Моделью плоскости Р. г. с кривизной $1/r^2$ в 3-мерном евклидовом пространстве может служить сфера радиуса r с отождествленными диаметрально противоположными точками. Прямая не разделяет плоскость на две области.

Всякие две прямые на плоскости обладают общим перпендикуляром; его длина равна αr, где α — угол между прямыми, r — радиус кривизны плоскости Римана. Две различные прямые делят плоскость на две области,

к-рые наз. у г л а м и. Трехсторонник разделяет всю плоскость на 4 области, к-рые наз. т р е у г о л ь н и к а м и.

Метрич. соотношения в треугольнике на плоскости $\mathcal{Э}^2$ кривизны $1/r^2$ выражаются соответствующими соотношениями сферич. тригонометрии на сфере радиуса r в евклидовом пространстве E^3. Вообще, формулы тригонометрии в $\mathcal{Э}^2$ Р. г. тождественны формулам *сферической тригонометрии* на сфере соответствующего радиуса в евклидовом пространстве, однако существуют определенные условия справедливости сферич. формул на плоскости $\mathcal{Э}^2$.

Множество точек плоскости, отстоящих от данной точки (п о л ю с а) на расстоянии $\pi r/2$, есть прямая — п о л я р а полюса. Любая прямая однозначно определяется своим полюсом и, обратно, определяет свой полюс. Полюсы прямых, проходящих через данную точку, располагаются на поляре этой точки, а поляры точек, лежащих на нек-рой прямой, пересекаются в полюсе этой прямой. В з а и м н о п о л я р н ы е т р е у г о л ь н и к и имеют вершинами полюсы соответствующих сторон. Для двух взаимно полярных треугольников имеет место т е о р е м а Ш а л я о пересечении в одной точке трех прямых, соединяющих соответствующие вершины этих треугольников. Если вершины треугольника являются полюсами его сторон, то его наз. а в т о п о л я р н ы м т р е у г о л ь н и к о м.

Сумма углов треугольника больше π; его площадь $S=r^2\cdot\Delta$ пропорциональна угловому избытку $\Delta=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi$, где r — радиус кривизны плоскости Римана.

О к р у ж н о с т ь в $\mathcal{Э}^2$ — множество точек, расположенных на одинаковом расстоянии от нек-рой точки (ее ц е н т р а). Под радиусом окружности R можно понимать любой из взаимно дополнительных отрезков длины R и $\pi r-R$, обычно выбирается радиус, не больший $\pi r/2$. Окружность является эквидистантой нек-рой прямой (б а з ы о к р у ж н о с т и). При $R=\pi r/2$ окружность является прямой — п о л я р о й центра. Длина окружности радиуса R равна $2\pi r\sin(R/r)$, а площадь круга равна $4\pi r^2\sin^2(R/2r)$.

Существуют четыре и только четыре окружности, проходящие через три данные точки, не лежащие на одной прямой. Две различные окружности могут пересекаться не более, чем в четырех различных точках. Площадь всей плоскости $\mathcal{Э}^2$ радиуса кривизны r равна $2\pi r^2$.

В Р. г. плоскости имеет место п р и н ц и п д в о й с т в е н н о с т и: во всяком верном утверждении можно взаимно заменить термины «точка» и «прямая», в результате получается верное утверждение.

П р о с т р а н с т в о Р и м а н а трехмерное (э л л и п т и ч е с к о е п р о с т р а н с т в о) — замкнутое конечное двустороннее (ориентируемое) пространство $\mathcal{Э}^3$. Моделью пространства $\mathcal{Э}^3$ в евклидовом пространстве E^4 может служить гиперсфера радиуса r с отождествленными диаметрально противоположными точками. Пространство Римана с радиусом кривизны r имеет объем π^2r^3.

Плоскость не разделяет пространство на две области. Две различные плоскости в $\mathcal{Э}^3$ пересекаются по прямой. Прямая, не лежащая в плоскости, пересекает ее в одной точке.

Множество точек пространства, отстоящих от данной точки (п о л ю с а) на расстоянии $\pi r/2$, есть плоскость — п о л я р а полюса. Любая плоскость определяется однозначно своим полюсом и обратно, определяет свой полюс. Если три плоскости проходят через одну прямую, то их полюсы лежат на одной прямой и обратно, если полюсы трех плоскостей лежат на одной прямой, то эти плоскости пересекаются по одной прямой. Для

каждой прямой существует такая скрещивающаяся с ней прямая, что полюсы плоскостей, проходящих через одну прямую, лежат на другой, а полярные плоскости точек, лежащих на одной прямой, проходят через другую. Такие скрещивающиеся прямые наз. взаимно полярными (взаимные поляры). Две скрещивающиеся прямые наз. косыми, если они не являются *взаимными полярами или если каждая из них не пересекает* поляру другой. Две косые прямые имеют два общих перпендикуляра, являющихся взаимными полярами. Если два общих перпендикуляра косых прямых неравновелики (имеют разные длины), то эти косые прямые наз. расходящимися, а длины общих перпендикуляров дают наименьшее и наибольшее расстояния одной прямой от другой. Две косые прямые, имеющие бесконечное множество общих перпендикуляров одинаковой длины, наз. параллелями Клиффорда (равноотстоящими, паратактичными прямыми). Через каждую точку пространства, лежащую вне данной прямой и вне полярной ей прямой, проходят две параллели Клиффорда к данной прямой. Множество точек, отстоящих от данной прямой на одном и том же расстоянии, меньшем $\pi r/2$, наз. поверхностью Клиффорда. Данная прямая наз. осью, а расстояние ρ точек от оси — радиусом поверхности Клиффорда. Эта поверхность имеет две взаимно полярные оси и соответственно два радиуса, дополняющих друг друга до полупрямой. Плоскости, проходящие через ось поверхности Клиффорда, пересекают ее по окружности. Через каждую точку поверхности Клиффорда проходят две прямые, равноотстоящие от ее осей и целиком принадлежащие поверхности; эти прямые наз. прямолинейными образующими поверхности Клиффорда. Всякие три прямые, равноотстоящие друг от друга, определяют поверхность Клиффорда, для к-рой они являются образующими. Каждая пара прямолинейных образующих различных семейств пересекается под постоянным углом. Поверхность Клиффорда изометрична евклидову ромбу с острым углом, равным углу между образующими различных семейств, и стороной длины πr, у к-рого отождествлены точки противоположных сторон, соединяемых прямыми, параллельными другим сторонам. Иными словами, поверхность Клиффорда несет на себе евклидову геометрию. Площадь поверхности Клиффорда радиуса ρ равна $\pi^2 r^2 \sin(2\rho/r)$.

Сфера в $\mathcal{Э}^3$ — множество точек, расположенных на одинаковом расстоянии от нек-рой точки (ее центра). Сфера является эквидистантой нек-рой плоскости (базы сферы). Площадь сферы радиуса R равна $4\pi r^2 \sin^2(R/r)$.

В Р. г. пространства имеет место принцип двойственности: во всяком верном утверждении можно взаимно заменить термины «точка» и «плоскость», в результате получается также верное утверждение.

По-видимому, первое сообщение о Р. г. сделано Б. Риманом (B. Riemann) в его лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1854, опубл. 1867, см. [1]), где Р. г. рассматривалась как *риманова геометрия* постоянной положительной гауссовой кривизны.

Лит.: [1] Риман Б., в кн.: Об основаниях геометрии, М., 1956, с. 309—25; [2] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [3] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969; [4] Каган В. Ф., *Основания геометрии*, ч. 2, М., 1956; [5] Богомолов С. А., Введение в неевклидову геометрию Римана, Л.— М., 1934.

Л. А. Сидоров.

РИМАНА ГИПОТЕЗЫ в аналитической теории чисел — пять гипотез, высказанных Б. Риманом (B. Riemann, 1876) относительно распределения нетривиальных нулей дзета-функции $\zeta(s)$ и относительно выражения через эти нули числа простых чисел, не превосходящих x (см. *Дзета-функция*). Не

доказана и не опровергнута одна Р. г.: все нетривиальные нули дзета-функции $\zeta(s)$ лежат на прямой $\mathrm{Re}\, s = 1/2$. *А. Ф. Лаврик.*

РИМАНА ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ — см. *Дзета-функция.*

РИМАНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка в комплексной плоскости, имеющее три заданные *регулярные особые точки* a, b, c с соответствующими характеристич. показателями α, α', β, β', γ, γ' в этих точках. Общий вид такого уравнения впервые выписал Э. Папперитц (E. Papperitz), из-за чего оно также наз. *Папперица уравнением*. Решения Р. д. у. записываются в виде так наз. *Р-функции Римана*

$$w = P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

Р. д. у. принадлежит *Фукса классу уравнений* с тремя особыми точками. Частным случаем Р. д. у. является *гипергеометрическое уравнение* (особые точки: 0, 1, ∞); поэтому само Р. д. у. иногда наз. обобщенным гипергеометрическим уравнением. Р. д. у. приводится к *Похгаммера уравнению*, а потому решение Р. д. у. можно записать в виде интеграла по специальному контуру в комплексной плоскости.

Лит. см. при ст. *Папперица уравнение.* *Н. Х. Розов.*

РИМАНА ИНТЕГРАЛ — обобщение понятия *Коши интеграла* на нек-рый класс разрывных функций, введенное Б. Риманом (B. Riemann, 1853). Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$. Сумму вида

$$\sigma = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \ldots + f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \ldots \\ \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}), \qquad (1)$$

где $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, наз. интегральной суммой, отвечающей данному разбиению отрезка $[a, b]$ точками x_i и выбору точек ξ_i. Число I наз. пределом интегральных сумм (1) при $\max\limits_i \Delta x_i < \delta$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$ справедливо неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$. Если существует конечный предел I интегральных сумм при $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$, то функцию $f(x)$ наз. интегрируемой в смысле Римана на отрезке $[a, b]$ при $a < b$, а указанный предел — определенным интегралом Римана от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)\, dx. \qquad (2)$$

При $a = b$, по определению, полагают

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0,$$

а при $a > b$ определяют интеграл (2) с помощью равенства

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

Необходимым и достаточным условием интегрируемости $f(x)$ на $[a, b]$ в смысле Римана являются ограниченность $f(x)$ на этом отрезке и равенство нулю *Лебега меры* множества всех точек разрыва $f(x)$, содержащихся на $[a, b]$.

Свойства Р. и. 1) Всякая интегрируемая по Риману на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ ограничена на этом отрезке (обратное неверно: примером ограниченной и неинтегрируемой на $[a, b]$ функции служит *Дирихле функция*).

2) Линейное свойство: для любых постоянных α и β из интегрируемости на $[a, b]$ каждой из функций $f(x)$ и $g(x)$ следуют интегрируемость на этом отрезке функции $[\alpha f(x)+\beta g(x)]$ и равенство

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx.$$

3) Из интегрируемости на отрезке $[a, b]$ каждой из функций $f(x)$ и $g(x)$ следует интегрируемость на этом отрезке произведения $f(x)g(x)$.

4) Аддитивность: из интегрируемости функции $f(x)$ на каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ следуют интегрируемость $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

5) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и если $f(x)\geqslant g(x)$ всюду на этом отрезке, то

$$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant\int_a^b g(x)\,dx.$$

6) Из интегрируемости на $[a, b]$ функции $f(x)$ следуют интегрируемость на этом отрезке функции $|f(x)|$ и справедливость оценки

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

7) Формула среднего значения: если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, функция $g(x)$ неотрицательна или неположительна всюду на этом отрезке, а M и m — точные верхняя и нижняя грани $f(x)$ на $[a, b]$, то найдется число μ из отрезка $m\leqslant\mu\leqslant M$ такое, что справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=\mu\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (3)$$

Если, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то на этом отрезке найдется точка ξ такая, что в формуле (3)

$$\mu=f(\xi).$$

8) Вторая формула среднего значения (формула Бонне): если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, а функция $g(x)$ монотонна на этом отрезке, то найдется точка ξ на $[a, b]$ такая, что справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Лит.: [1] Riemann B., «Göttinger Akad. Abhandl.», 1868, Bd 13; [2] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971, 2 изд., ч. 2, М., 1980; [3] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1981; [4] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975. *В. А. Ильин.*

РИМАНА МЕТОД, Римана — Вольтерра метод,— метод решения *Гурса задачи* и *Коши задачи* для линейных гиперболич. типа уравнений 2-го порядка с двумя независимыми переменными

$$Lu\equiv u_{xy}+a(x, y)\,u_x+b(x, y)\,u_y+c(x, y)\,u=f(x, y). \qquad (1)$$

В Р. м. фундаментальную роль играет функция Римана $R=R(x, y; \xi, \eta)$, к-рая при определенных предположениях относительно заданных функций a, b, c и f однозначно определяется как решение специальной задачи Гурса:

$$R(\xi, y; \xi, \eta)=\exp\int_\eta^y a(\xi, t)\,dt;$$

$$R(x, \eta; \xi, \eta)=\exp\int_\xi^x b(t, \eta)\,dt$$

для сопряженного уравнения

$$L^*R \equiv R_{xy} - \frac{\partial}{\partial x}(a, R) - \frac{\partial}{\partial y}(bR) + cR = 0.$$

Функция R по переменным ξ, η является решением однородного уравнения

$$R_{\xi\eta} + a(\xi, \eta) R_\xi + b(\xi, \eta) R_\eta + c(\xi, \eta) R = 0.$$

При $a = b = 0$, $c = \text{const}$ функция $R = J_0(\sqrt{4c(x-\xi)(y-\eta)})$, где $J_0(z)$ — функция Бесселя порядка нуль.

Функцию Римана можно определить как решение нагруженного интегрального уравнения Вольтерра:

$$R(x, y; \xi, \eta) - \int_\eta^y a(x, \tau) R(x, \tau; \xi, \eta)\, d\tau - \int_\xi^x b(t, y) R(t, y; \xi, \eta)\, dt + \int_\xi^x dt \int_\eta^y c(t, \tau) R(t, \tau; \xi, \eta)\, d\tau = 1. \quad (2)$$

Р. м. решения задачи Гурса реализуется следующим образом: для любой дифференцируемой до соответствующего порядка функции $u = u(x, y)$ имеет место тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}[uR(x, y; \xi, \eta)] - R(x, y; \xi, \eta) Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial y} - aR\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial x} - bR\right)\right],$$

из к-рого интегрированием по частям получается, что любое решение u уравнения (1) представляет собой решение нагруженного интегрального уравнения:

$$u(x, y) = R(x, y_0; x, y)\, u(x, y_0) + R(x_0, y; \xi, y)\, u(x_0, y) - R(x_0, y_0; x, y) + \int_{x_0}^x \left[b(t, y_0) R(t, y_0; x, y) - \frac{\partial R(t, y_0; x, y)}{\partial t}\right] \times u(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^y \left[a(x_0, \tau) R(x_0, \tau; x, y) - \frac{\partial R(x_0, \tau; x, y)}{\partial \tau}\right] u(x_0, \tau)\, d\tau + \int_{x_0}^x dt \int_{y_0}^y R(t, \tau; x, y) f(x, \tau)\, d\tau, \quad x > x_0, \ y > y_0. \quad (3)$$

Из (3) непосредственно вытекает корректность задачи Гурса

$$u(x, y_0) = \varphi(x), \ u(x_0, y_0) = \psi(y), \ \varphi(x_0) = \psi(y_0)$$

для уравнения (1).

Р. м. приводит решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными на любой гладкой нехарактеристич. кривой к нахождению функции Римана и дает возможность в квадратурах выписать решение этой задачи.

Р. м. обобщен на широкий класс линейных гиперболич. уравнений и систем.

Для случая гиперболич. типа системы линейных уравнений с частными производными 2-го порядка

$$u_{xx} - u_{yy} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y),$$

где a, b, c — заданные действительные квадратные симметрич. матрицы порядка m, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ — заданный, а $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — искомый векторы, матрица Римана однозначно определяется как решение системы нагруженных интегральных уравнений Вольтерра вида (2), в правой части к-рой стоит единичная матрица I порядка m.

В. Вольтерра (V. Volterra) впервые обобщил Р. м. на волновое уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = f(x, y, t). \quad (4)$$

Роль функции Римана, позволяющей выписать в квадратурах решение задачи Коши с начальными данными на плоскости $t=\text{const}$ и задачи Гурса с данными на характеристич. конусе для уравнения (4), играет функция

$$R=\log\left[\sqrt{\frac{(t-\tau)^2}{r^2}-1}+\frac{\tau-t}{r}\right],$$

где $r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$.

Метод предложен Б. Риманом (B. Riemann, 1860).

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения смешанного типа, М., 1959; [2] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [3] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958.

А. М. Нахушев.

РИМАНА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования числовых рядов. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ суммируется методом Римана к числу S, если

$$\lim_{h\to 0}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\right]=S.$$

Впервые этот метод ввел и доказал его регулярность Б. Риман (B. Riemann, см. [1]) в 1854. Р. м. с. применяется в теории тригонометрич. рядов, где его обычно формулируют следующим образом: тригонометрич. ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

с ограниченными коэффициентами a_n, b_n суммируется методом Римана в точке x_0 к числу S, если функция

$$F(x)=\frac{a_0x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}$$

имеет в точке x_0 *Римана производную*, равную S.

Лит.: [1] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [3] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965; [4] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951.

Т. П. Лукашенко.

РИМАНА ОБОБЩЕННАЯ ГИПОТЕЗА — высказывание о нетривиальных нулях *Дирихле L-функций*, *дзета-функций* Дедекинда и нек-рых других подобных функций, вполне аналогичное *Римана гипотезе* относительно нетривиальных нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$. Р. о. г. в случае Дирихле L-функций наз. также расширенной гипотезой Римана.

А. Ф. Лаврик.

РИМАНА ПРОИЗВОДНАЯ, производная Шварца, вторая симметрическая производная, функции $f(x)$ в точке x_0 — предел

$$D^2f(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}.$$

Введена Б. Риманом (B. Riemann, 1854); он доказал, что если в точке x_0 существует 2-я производная $f''(x_0)$, то существует Р. п. и $D^2f(x_0)=f''(x_0)$. Верхний и нижний пределы

$$\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0+h)}{h^2}$$

при $h\to 0$ наз. соответственно верхней $\overline{D}^2f(x_0)$ и нижней $\underline{D}^2f(x_0)$ Р. п.

Р. п. получила широкое применение в теории представления функций тригонометрич. рядами; в частности, в связи с *Римана методом суммирования*.

Т. П. Лукашенко.

РИМАНА СООТНОШЕНИЕ, билинейные соотношения Римана,— см. *Абелев дифференциал*.

РИМАНА СФЕРА — сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3(\xi,\eta,t)$, на к-рую расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ отображается взаимно однозначно и конформно при помощи *стереографической проекции*. Напр., в качестве Р. с. можно взять единичную сферу

$$S_2=\{(\xi,\eta,t)\in\mathbb{R}^3;\ \xi^2+\eta^2+t^2=1\},$$

а плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ совместить с плоскостью $t=0$ так, чтобы действительная ось совпала с осью $\eta=0$, $t=0$, а мнимая ось — с осью $\xi=0$, $t=0$ (см. рис.). Каждой точке $z=x+iy\neq\infty$ при стереограф. проекции соответствует точка сферы $M(\xi, \eta, t)\neq P(0, 0, 1)$, получающаяся как точка пересечения луча со сферой S_2, проведенного из северного полюса сферы $P(0, 0, 1)$ в точку z; бесконечно удаленной точке $z=\infty$ соответствует северный полюс $P(0, 0, 1)$. Аналитически это соответствие выражается формулами



$$\xi+i\eta=\frac{2z}{|z|^2+1},\quad t=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1},\quad z=\frac{\xi+i\eta}{1-t}. \qquad (*)$$

Иначе говоря, соответствие (*) определяет дифференцируемое вложение одномерного комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^1$ в пространство $\mathbb{R}^3$ в виде сферы S_2. Во многих вопросах теории функций расширенную комплексную плоскость отождествляют с Р. с. От исключительной роли бесконечно удаленной точки плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ можно избавиться, если за расстояние между двумя точками z, $w\in\overline{\mathbb{C}}$ принять хордальное, или сферическое, расстояние $\chi(z, w)$ между их образами M, $N\in S_2$:

$$\chi(z, w)=\frac{2|z-w|}{\sqrt{|z|^2+1}\sqrt{|w|^2+1}},\quad \chi(z, \infty)=\frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}.$$

Вложение многомерного комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^n$, $n>1$, в пространство $\mathbb{R}^{n(n+2)}$ можно осуществить при помощи формул комплексно n-мерной стереограф. проекции, обобщающих формулы (*) (см. [2]).

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [2] Фукс Б. А., Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, [2 изд.], М., 1962.

Е. Д. Соломенцев.

РИМАНА ТЕНЗОР — четырехвалентный тензор, рассматриваемый в теории кривизны пространств. Пусть L_n — пространство аффинной связности, Γ^k_{ij} — объект связности пространства L_n, компоненты (координаты) Р. т., один раз контравариантного и трижды ковариантного, имеют вид

$$R^q_{lk,\,i}=\frac{\partial\Gamma^q_{li}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^q_{ki}}{\partial x^l}-\Gamma^q_{lp}\Gamma^p_{ki}+\Gamma^q_{kp}\Gamma^p_{li},$$

$$l,\ k,\ i,\ q=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $\frac{\partial}{\partial x^k}$ — символ дифференцирования по пространственной координате x^k, $k=1, \ldots, n$. В римановом пространстве V_n с основным метрич. тензором g_{ij}, кроме тензора $R^q_{lk,\,i}$, рассматривается четырежды ковариантный Р. т., получаемый опусканием верхнего индекса q с помощью метрич. тензора g_{ij}:

$$R^q_{lk,\,i}g_{qj}=R_{lk,\,ij}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^k\partial x^i}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^k\partial x^j}-\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^l\partial x^i}+\frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^l\partial x^j}\right)+g_{pq}\left(\Gamma^p_{lj}\Gamma^q_{ki}-\Gamma^p_{kj}\Gamma^q_{li}\right).$$

Здесь $\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$, так как V_n снабжено римановой связностью (без кручения). В произвольном пространстве с аффинной связностью без кручения координаты Р. т. удовлетворяют тождеству Риччи

$$R^q_{lki}+R^q_{ki,\,l}+R^q_{il,\,k}=0,$$

$$R_{lk,\,ij}+R_{ki,\,lj}+R_{il,\,kj}=0,$$

т. е. циклирование по трем первым (нижним) индексам дает нуль.

Р. т. обладает следующими свойствами:

$$1)\ R_{lk,\,ij}=R_{ij,\,lk};\quad 2)\ R^q_{i,\,lk}=-R^q_{i,\,kl};$$
$$3)\ R_{lk,\,ij}=-R_{kl,\,ij},\ R_{lk,\,ij}=-R_{lk,\,ji};$$
$$4)\ R_{aa,\,ij}=0,\ R_{lk,\,bb}=0,$$

если оба индекса одной пары одинаковы, то соответствующая координата равна нулю: $R^q_{aa,\,i}=0$;

5) для абсолютных производных Р. т. имеет место тождество Бианки

$$\nabla_m R^q_{kl,\,i}+\nabla_k R^q_{lm,\,i}+\nabla_l R^q_{mk,\,i}=0,$$

где ∇_m — символ ковариантного дифференцирования по координате x^m. Аналогичное тождество имеет место и для тензора $R_{lk,\,ij}$.

Р. т. имеет всего n^4 координат, где n — размерность пространства, из них $n^2(n^2-1)/12$ существенных, между к-рыми нет тождественных зависимостей, вытекающих из указанных свойств.

В случае $n=2$ Р. т. имеет одну существенную координату $R_{12,\,12}$, к-рая входит в определение внутренней, или римановой, кривизны поверхности $K=\frac{R_{12,\,12}}{\det g_{ij}}$ (см. *Гауссова кривизна*).

Р. т. был определен Б. Риманом (B. Riemann) в 1861 (опубл. в 1876).

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [2] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [3] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971. *Л. А. Сидоров.*

РИМАНА ТЕОРЕМА — 1) Р. т. о конформном отображении: каковы бы ни были две односвязные области G_1 и G_2 расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, отличные от $\overline{\mathbb{C}}$, а также от $\overline{\mathbb{C}}$ с какой-либо исключенной из нее точкой, найдется бесконечное число аналитических и однолистных в области G_1 функций, каждая из к-рых осуществляет взаимно однозначное и конформное отображение G_1 на G_2. При этом для любой пары точек $a\in G_1$, $a\neq\infty$, и $b\in G_2$ и любого действительного числа α, $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$, найдется, и притом единственная, функция f этого класса, для к-рой $f(a)=b$, $\arg f'(a)=\alpha$. Условие $\arg f'(a)=\alpha$ геометрически означает, что каждый бесконечно малый вектор, выходящий из точки a, при отображении $w=f(z)$ переходит в бесконечно малый вектор, направление к-рого образует с направлением исходного вектора угол α.

Р. т. является основной в теории конформных отображений и вообще в геометрич. теории функций комплексного переменного. Вместе со своими обобщениями на многосвязные области она имеет обширные применения в теории функций комплексного переменного, математич. физике, теории упругости, аэро- и гидромеханике, электро- и магнитостатике и т. д. Эта теорема для более общего случая односвязных и, вообще говоря, неоднолистных областей над комплексной плоскостью была сформулирована Б. Риманом (B. Riemann, 1851). При этом вместо условий нормировки «$f(a)=b$, $\arg f'(a)=\alpha$» конформного отображения $w=f(z)$, обеспечивающих его единственность, в формулировке Б. Римана для той же цели использовались условия «$f(a)=b$, $f(\zeta)=\omega$», где $a\in G_1$, $b\in G_2$, а ζ и ω — наперед заданные точки границ областей G_1 и G_2 соответственно. Последние условия при современном определении понятия односвязной области не всегда корректны. Б. Риман доказывал свою теорему в значительной степени исходя из физич. представлений, к-рые его также убедили в важности этой теоремы для приложений. В современном понимании математич. строгость

доказательству Б. Римана придал Д. Гильберт (D. Hilbert), обосновавший использованный Б. Риманом в его доказательстве т. н. *Дирихле принцип*.

См. также *Конформное отображение*.

Лит.: [1] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948, с. 49—87; [2] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд., М., 1977; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

Е. П. Долженко.

2) Р. т. о перестановке членов ряда: если ряд, члены к-рого являются действительными числами, сходится, но не абсолютно, то каково бы ни было число A, можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равна A. Кроме того, члены ряда можно так переставить, что его сумма будет равна одной из наперед заданных бесконечностей со знаком $+\infty$ или $-\infty$, а также так, что его сумма не будет равна ни $+\infty$, ни $-\infty$, но последовательность его частичных сумм будет бесконечно большой, и, наконец, так, что последовательность его частичных сумм не будет иметь ни конечного, ни бесконечного предела (см. *Ряд*).

Л. Д. Кудрявцев.

РИМАНА ТЕТА-ФУНКЦИЯ — суперпозиция *тета-функций* 1-го порядка $\Theta_H(u)$, $u=(u_1, \ldots, u_p)$, с полуцелыми характеристиками H и *абелевых интегралов* 1-го рода, примененная Б. Риманом (B. Riemann, 1857) для решения *Якоби проблемы обращения*.

Пусть $F(u, w)=0$ — алгебраич. уравнение, определяющее компактную риманову поверхность F рода p; $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ — базис *абелевых дифференциалов* 1-го рода на F с матрицей периодов размера $p\times 2p$:

$$W=\|\pi i E,\ A\|=\begin{Vmatrix} \pi i & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ 0 & \pi i & \ldots & 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \pi i & a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{Vmatrix}.$$

Пусть

$$u(w)=\left(u_1(w_1)=\int_{c_1}^{w_1}\varphi_1,\ \ldots,\ u_p(w_p)=\int_{c_p}^{w_p}\varphi_p\right)$$

— вектор базисных абелевых интегралов 1-го рода, где $(c_1, \ldots, c_p)$ — фиксированная система точек на F, а $w=(w_1, \ldots, w_p)$ — текущая система точек на F. Для любой тета-характеристики

$$H=\begin{Vmatrix} h \\ h' \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} h_1 & \ldots & h_p \\ h_1' & \ldots & h_p' \end{Vmatrix},$$

где целые числа h_i, h_i' принимают только значения 0 или 1, можно построить тета-функцию $\Theta_H(u)$ с матрицей периодов W, причем $\Theta_H(u)$ удовлетворяет основным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_H(u+\pi i e_\mu)&=(-1)^{h_\mu}\Theta_H(u), \\ \Theta_H(u+e_\mu A)&=(-1)^{h'_\mu}\exp(-a_{\mu\mu}-2u_\mu)\cdot\Theta_H(u), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где e_μ есть μ-я вектор-строка единичной матрицы E, $\mu=1, \ldots, p$.

Если $z=(z_1, \ldots, z_p)$ — нек-рый фиксированный вектор в комплексном пространстве $\mathbb{C}^p$, то тета-функция Римана $\Phi_H(w)$ представляет из себя суперпозицию

$$\Phi_H(w)=\Theta_H(u(w)-z). \quad (2)$$

В области F^*, получающейся из F после удаления разрезов вдоль циклов $a_1b_1 \ldots a_pb_p$ базиса гомологий F, Р. т.-ф. (2) всюду определены и аналитичны. При переходе через разрезы Р. т.-ф., вообще говоря, умножаются на мультипликаторы, значения к-рых определяются из основных соотношений (1). Особую роль при этом играет тета-функция 1-го порядка $\Theta(u)=\theta_0(u)$ с нулевой характеристикой $H=0$. Именно нули $\eta_1, \ldots, \eta_p$ соот-

ветствующей Р. т.-ф. $\Phi(w)=\Phi_0(w)$ определяют решение проблемы обращения Якоби.

Для фактич. построения аналитич. выражений, *решающих проблему обращения, используются отношения* Р. т.-ф. вида $\Psi_H(w)=\Theta_H(u(w))$ с общим знаменателем $\Psi(w)=\Theta(u(w))=\theta_0(u(w))$. Из (1) видно, что такие отношения $\Psi_H(w)/\Psi(w)$ могут иметь в качестве нетривиальных мультипликаторов только -1, а квадраты этих отношений являются однозначными мероморфными на F функциями, т. е. рациональными функциями точки поверхности F. Используемые при этом квадраты и другие рациональные функции от отношений тета-функций представляют собой специальные *абелевы функции* с $2p$ периодами. Специализация выражается в том, что $p(p+1)/2$ различных элементов $a_{\mu\nu}$ симметрич. матрицы A при $p>3$ связаны определенными соотношениями, налагаемыми конформной структурой поверхности F, так что независимых среди них остается $3(p-1)$.

Р. т.-ф., построенные для случая гиперэллиптич. поверхности F, когда $F(u,\ w)=u^2-P(u)$, где $P(u)$ — многочлен степени $n\geqslant 5$ без кратных корней, иногда выделяются под названием гиперэллиптических тета-функций.

Лит.: [1] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948, гл. 9; [2] Маркушевич А. И., *Введение в классическую теорию абелевых функций*, М., 1979; [3] Krazer A., Lehrbuch der Thetafunktionen, Lpz., 1903; [4] Conforto F., Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, B., 1956.

Е. Д. Соломенцев.

РИМАНА ФУНКЦИЯ — 1) Р. ф. в теории тригонометрических рядов — функция, введенная Б. Риманом (B. Riemann, 1851) (см. [1]) для изучения вопроса о представимости функции тригонометрич. рядом. Пусть дан ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (*)$$

с ограниченными последовательностями $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Функцией Римана для этого ряда наз. функция $F(x)$, полученная почленным двукратным интегрированием данного ряда:

$$F(x)=\frac{a_0x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+Cx+D,$$
$$C,\ D=\text{const}.$$

Теоремы Римана. 1) Пусть ряд (*) сходится в точке x_0 к числу S. Тогда производная Шварца $D_2F(x_0)=S$. 2) Пусть $a_n,\ b_n\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда в любой точке x

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h}=0,$$

причем сходимость на любом промежутке равномерная, то есть $F(x)$ — равномерно гладкая функция.

Если ряд (*) сходится на $[0,\ 2\pi]$ к $f(x)$ и $f(x)\in L\ [0,\ 2\pi]$, то $D_2F(x)=f(x)$ на $[0,\ 2\pi]$ и

$$F(x)=\int_0^x dt\int_0^t f(u)\,du+Cx+D.$$

Пусть $a_n,\ b_n\to 0$ при $n\to\infty$ и пусть

$$\underline{S}(x)=\varliminf_{n\to\infty}S_n(x)\ \text{ и }\ \overline{S}(x)=\varlimsup_{n\to\infty}S_n(x)$$

конечны в точке x, а

$$S(x)=\frac{1}{2}(\underline{S}(x)+\overline{S}(x)),\ \delta(x)=\frac{1}{2}(S(x)-\underline{S}(x)).$$

Тогда нижняя и верхняя производные Шварца $\underline{D}_2F(x)$ и $\overline{D}_2F(x)$ принадлежат $[S-\mu\delta,\ S+\mu\delta]$, где μ — нек-рая абсолютная постоянная (лемма Дюбуа-Реймона).

Лит.: [1] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.—Л., 1948; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961.

А. А. Конюшков.

2) Р. ф. в теории дифференциальных уравнений — см. *Римана метод.*

РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА ЗАДАЧА — см. *Граничные задачи теории аналитических функций.*

РИМАНА — ГУРВИЦА ФОРМУЛА, формула Гурвица, соотношение Гурвица,— формула, связывающая род замкнутой *римановой поверхности* с числом ее листов и кратностью точек ветвления. Пусть R — замкнутая риманова поверхность рода g, $\tilde{R}$ — накрывающая R риманова поверхность, имеющая m листов над R, конечное число точек ветвления с кратностями $k_1, \ldots, k_s$ и род $\tilde{g}$. Тогда имеет место Р.— Г. ф.:

$$2\tilde{g}-2=m(2g-2)+\sum_{\nu=1}^{s}(k_\nu-1).$$

В частности, если риманова поверхность $\tilde{R}$ рассматривается как накрывающая поверхность над *Римана сферой*, то $g=0$ и Р.— Г. ф. дает соотношение

$$\tilde{g}=\sum_{\nu=1}^{s}\frac{k_\nu-1}{2}-m+1.$$

Р.— Г. ф. позволяет подсчитать род алгебраич. функции (т. е. род соответствующей римановой поверхности), определяемой алгебраич. уравнением $F(z, w)=0$. В более общем понимании Р.— Г. ф. связывает род g поля алгебраич. функций с родом $\tilde{g}$ его конечного (сепарабельного) расширения степени m и индексами ветвления k_ν (см., напр., [4], [5]).

Р.— Г. ф. была высказана Б. Риманом [1] и доказана А. Гурвицем [2].

Лит.: [1] Riemann B., Gesammelte mathematische Werke, Lpz., 1876, S. 129; [2] Hurwitz A., Mathematische Werke, Bd 1, Basel, 1932, S. 321—83; [3] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [4] Шевалле К., Униформизация, пер. с нем., М., 1955; [5] Ленг С., Введение в алгебраические и абелевы функции, пер. с англ., М., 1976.

К. Л. Соломенцев.

РИМАНА — КРИСТОФФЕЛЯ ТЕНЗОР — четырехвалентный тензор, координаты (компоненты) к-рого определяются объектами Γ_{ij}^{k} связности пространства, называемыми *Кристоффеля символами* 2-го рода. Р.— К. т. наз. также *Римана тензором.*

Л. А. Сидоров.

РИМАНА — РОХА ТЕОРЕМА — теорема, позволяющая выразить эйлерову характеристику $\chi(E)$ локально свободного пучка E на алгебраическом или аналитич. многообразии X в терминах характеристич. классов Чжэня пучка E и многообразия X. Она может быть применена для вычисления размерности пространства сечений пучка E (проблема Римана — Роха).

Классическая Р.— Р. т. относится к случаю неособых алгебраич. кривых X и утверждает, что для любого дивизора D на X

$$l(D)-l(K_X-D)=\deg D-g+1, \qquad (*)$$

где $l(D)=\dim H^0(X, O_X(D))$ — размерность пространства функций $f\in k(X)$, для к-рых $(f)+D\geqslant 0$, K_X канонич. дивизор, а g — род кривой X. В сер. 19 в. Б. Риман (B. Riemann) аналитич. методами получил неравенство

$$l(D)\geqslant \deg D-g+1.$$

Равенство (*) было доказано Э. Рохом (E. Roch).

Р.— Р. т. для кривых представляет собой одномерный случай более общей теоремы Римана — Роха — Хирцебруха — Гротендика. Пусть X — неособое проективное многообразие размерности n, а H^*X — подходящая теория когомологий: либо $H^*X=H^*(X, \mathbb{Q})$ — сингулярные когомологии в случае, когда основное поле $k=\mathbb{C}$, либо $H^*X=A(X)\otimes\mathbb{Q}$, где $A(X)$ — *Чжоу кольцо*, либо H^*X — кольцо, присоединенное к кольцу

Гротендика $K^0(X)$ (см. *K-функтор* в алгебраической геометрии) относительно нек-рой специальной γ-фильтрации (см. [2], [7]). Пусть E — локально свободный пучок ранга r на X. Для пучка E следующим образом определяются универсальные многочлены с рациональными коэффициентами ch (—) и td (—) от классов Чжэня $c_i(E) \in H^iX$ пучка E. Для многочлена Чжэня рассматривается разложение на множители

$$c_t(E) = c_0(E) + \ldots + c_r(E)\, t^r = \prod_{i=1}^{r} (1 + a_i t),$$

где a_i — формальные символы. Экспоненциальный характер Чжэня определяется формулой

$$\mathrm{ch}(E) = \sum_{i=1}^{r} e^{a_i} \left(e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \ldots \right),$$

и, соответственно, класс Тодда

$$\mathrm{td}(E) = \prod_{i=1}^{r} \frac{a_i}{1 - e^{-a_i}};$$

$\mathrm{ch}(E)$ и $\mathrm{td}(E)$ — симметрич. функции от a_i, и их можно записать в виде многочленов от $c_i(E)$.

Теорема Римана — Роха — Хирцебруха: если X — неособое проективное многообразие или компактное комплексное многообразие размерности n, E — векторное расслоение ранга r на X, то

$$\chi(E) = \deg(\mathrm{ch}(E)\, \mathrm{td}(T_X))_n,$$

где T_X — касательный пучок на X, а $\deg(\ )_n$ обозначает компоненту степени n в H^*X. Эта теорема была доказана Ф. Хирцебрухом (F. Hirzebruch) в случае основного поля $\mathbb{C}$. В случае $n=2$ и обратимого пучка $E = \mathcal{O}_X(D)$ она приводит к равенству

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \frac{1}{2} D(D - K_X) + \frac{1}{12}(K_X^2 + c_2),$$

где $c_2 = c_2(X)$ — 2-й класс Чжэня поверхности X, а K_X — ее канонич. класс. В частности, при $D=0$ получается формула Нётера

$$\chi(\mathcal{O}_X) = 1 + p_a = \frac{1}{12}(K_X^2 + c_2).$$

Для трехмерных многообразий ($n=3$) теорема приводит к равенству

$$\chi(\mathcal{O}_X(D)) = \frac{1}{6} D^3 - \frac{1}{4} D^2 K_X + \frac{1}{12} D(K_X^2 + c_2) - \frac{1}{24} K_X c_2.$$

В частности, при $D=0$

$$\chi(\mathcal{O}_X) = -\frac{1}{24} K_X c_2.$$

В 1957 А. Гротендик (A. Grothendieck) обобщил теорему Римана — Роха — Хирцебруха на случай морфизмов неособых многообразий над произвольным алгебраически замкнутым полем (см. [1]). Пусть K_0X и K^0X — группы Гротендика соответственно когерентных и локальных свободных пучков на X. Функтор K_0X является ковариантным функтором из категории схем и собственных морфизмов в категорию абелевых групп, при этом для собственного морфизма $f : X \to Y$ гомоморфизм $f_! : K_0X \to K_0Y$ определяется формулой

$$f_!(\mathcal{F}) = \sum (-1)^i R^i f_* (\mathcal{F}),$$

где $\mathcal{F}$ — произвольный когерентный пучок на X; K^0X — контравариантный функтор в категорию колец. Для регулярных схем с обильным пучком группы K_0X и K^0X совпадают и обозначаются $K(X)$. Характер Чжэня $\mathrm{ch} : K(X) \to H^*X$ является гомоморфизмом колец; H^*X также является ковариантным функтором: определен гомоморфизм **Гизина** $f_* : H^*X \to H^*Y$.

В случае, когда $H^*X = H^*(X, \mathbb{Q})$, гомоморфизм f_* получается из f_* для гомологий с помощью двойственности Пуанкаре. Обобщенная А. Гротендиком теорема выражает меру отклонения от коммутативности гомоморфизмов $f_!$ и ch.

Теорема Римана — Роха — Хирцебруха — Гротендика: пусть $f: X \to Y$ — гладкий проективный морфизм неособых проективных многообразий; тогда для любого $x \in K(X)$ в H^*X справедливо равенство

$$\mathrm{ch}\,(f_!(x)) = f_*(\mathrm{ch}\,(x)\ \mathrm{td}\,(T_f)),$$

где $T_f = T_X - f^*(T_Y) \in K_X$ (относительный касательный пучок морфизма f).

В случае, когда Y — точка, эта теорема сводится к теореме Римана — Роха — Хирцебруха. Имеются обобщения (см. [5]—[7]) на случаи, когда Y — нётерова схема, обладающая обильным обратимым пучком, когда f — проективный морфизм, слои к-рого — локально полные пересечения, а также на особые квазипроективные многообразия.

Нек-рые варианты Р.— Р. т. тесно связаны с проблемой индекса эллиптич. операторов (см. *Индекса формулы*). Напр., теорема Римана — Роха — Хирцебруха для компактных комплексных многообразий является частным случаем теоремы Атьи — Зингера об индексе.

Лит.: [1] Борель А., Серр Ж.-П., «Математика», 1961, т. 5, № 5, с. 17—54; [2] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 5, с. 3—86; [3] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981; [4] Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1973; [5] Baum P., Fulton W., Mac Pherson R., «Publ. Math. IHES», 1975, № 45, p. 101—145; [6] их же, «Acta math.», 1979, v. 143, № 3—4, p. 155—92; [7] Théorie des intersections et théorème de Riemann — Roch (SGA, A6), B.— [e. a.], 1971.

Вал. С. Куликов.

РИМАНА — СТИЛТЬЕСА ИНТЕГРАЛ — см. *Стилтьеса интеграл.*

РИМАНА — ШВАРЦА ПОВЕРХНОСТЬ — *минимальная поверхность*, натянутая на полигональный контур, многоугольник. Она представляет собой одно из первых достаточно общих решений *Плато задачи*. Аналитически выражается с помощью *Кристоффеля — Шварца формулы*. Рассмотрена впервые Б. Риманом (B. Riemann, 1872) и Г. Шварцем (H. Schwarz, 1874).

М. И. Войцеховский.

РИМАНА — ШВАРЦА ПРИНЦИП, принцип симметрии Римана — Шварца,— метод продолжения конформных отображений и аналитич. функций комплексного переменного, сформулированный Б. Риманом (B. Riemann) и обоснованный Г. Шварцем (H. Schwarz) в 19 в.

Р.— Ш. п. для конформных отображений состоит в следующем. Пусть области D_1, D_2 на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ симметричны относительно действительной оси $\mathbb{R}$ и не пересекаются, а их границы содержат общий интервал $\gamma \subset \mathbb{R}$, причем $D = D_1 \cup \gamma \cup D_2$ — тоже область. Пусть аналогично определены D_1^*, D_2^*, γ^* и D^*. Если функция f_1, непрерывная на $D_1 \cup \gamma$, конформно отображает D_1 на D_1^* и если $f_1(\gamma) = \gamma^*$, то функция $f(z)$, равная $f_1(z)$ при $z \in D_1 \cup \gamma$ и $\overline{f_1(z)}$ при $z \in D_2$, осуществляет конформное отображение области D на область D^*.

Более общая формулировка Р.— Ш. п. получается, когда D_1, D_2 и D_1^*, D_2^* — области на *Римана сфере* $\overline{\mathbb{C}}$, симметричные относительно окружностей C, $C^* \subset \overline{\mathbb{C}}$ соответственно, и $\gamma \subset C$, $\gamma \subset C^*$ — открытые дуги (см. *Симметрии принцип*).

Р.— Ш. п. для голоморфных функций. Пусть граница области $D \subset \mathbb{C}$ содержит открытый участок γ, к-рый является гладкой вещественно аналитической дугой. Если функция f голоморфна в D, непрерывна в $D \cup \gamma$ и ее значения на γ принадлежат нек-рой

другой гладкой вещественно аналитической дуге γ^*, то f аналитически продолжается в нек-рую окрестность дуги γ.

Р.— Ш. п. используется для построения конформных отображений плоских областей, а также в теории аналитич. продолжения функций одного и многих комплексных переменных.

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973.

Е. М. Чирка.

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ — теория риманова пространства. Римановым пространством наз. n-мерное связное дифференцируемое многообразие M_n, на к-ром задано дифференцируемое поле ковариантного, симметрического и положительно определенного тензора g ранга 2. Тензор g наз. метрическим тензором. Р. г. есть многомерное обобщение *внутренней геометрии* двухмерных поверхностей в эвклидовом пространстве E^3. Метрика риманова пространства с точностью до первого порядка малости, по сравнению с размерами рассматриваемой области, совпадает с евклидовой метрикой. Отличие этих метрик оценивается (локально) римановой кривизной — многомерным обобщением понятия гауссовой кривизны поверхности в E^3.

В основании Р. г. лежат три идеи. Первая идея — осознание факта существования неевклидовой геометрии — геометрии Н. И. Лобачевского. Вторая идея — понятие внутренней геометрии поверхностей, созданной К. Гауссом (C. Gauss). Третья идея — понятие n-мерного пространства, разработанное в 1-й пол. 19 в. Б. Риман (B. Riemann) соединил и обобщил эти идеи в лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Понятия Р. г. сыграли важную роль в создании А. Эйнштейном (A. Einstein) общей теории относительности, дальнейшее ее развитие связано с созданием аппарата тензорного исчисления. Р. г. и ее многочисленные обобщения успешно развиваются, особенно в той ее части, к-рая наз. *римановой геометрией в целом*, и находят обширные и глубокие механические и физич. применения.

Основные понятия Р. г. следующие.

Скалярное произведение. В каждом касательном пространстве $(TM^n)_p$, $p \in M^n$, тензор g определяет скалярное (внутреннее) произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ по формуле

$$\langle X, Y \rangle = g(X, Y), \quad X, Y \in (TM^n)_p.$$

Верно и обратное: если для любого $p \in M^n$ в $(TM^n)_p$ определено скалярное произведение, дифференцируемо зависящее от p, то оно определяет тензорное поле g с указанными выше свойствами. Степени гладкости M^n и g варьируются в зависимости от поставленной задачи. В большинстве случаев достаточно потребовать, чтобы M^n было трижды непрерывно дифференцируемо, а поле тензора g — дважды непрерывно дифференцируемо (далее необходимая степень гладкости указываться не будет). В локальных координатах $\{x^i\}$ с локальным базисом $\{\partial_i\}$, $i=1, \ldots, n$, компоненты тензора g имеют вид

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle,$$

так что

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i,\ j=1}^{n} g_{ij} X^i Y^j,$$

где

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} Y^j \partial_j.$$

Риманово пространство как метрическое пространство. Длина l гладкой

кривой $c(t) : [0, 1] \to M^n$ определяется формулой

$$l = \int_0^1 |\dot{c}|\, dt,$$

где $\dot{c}$ — касательный вектор к $c(t)$. Длина кусочно гладкой кривой равна сумме длин ее гладких звеньев. Если $x^i = x^i(t)$ — уравнения $c(t)$ в локальных координатах, то

$$\dot{c} = \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt}\,\partial_i, \quad l = \int_0^1 \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\, dt.$$

Имея в виду эту формулу, метрику на M^n записывают в традиционной форме

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

и ds наз. элементом длины, а функции $g_{ij}(x)$ — коэффициентами метрической (основной, первой квадратичной) формы. Угол между двумя кривыми в точке их пересечения определяется как угол между касательными к ним. Объём $V(U)$ области U, принадлежащей координатной окрестности, определяется формулой

$$V(U) = \int_U |g|^{1/2}\, dx^1 \ldots dx^n,$$

где $g = \det \|g_{ij}\|$. Объем произвольной области равен сумме объемов ее частей, причем каждая из частей лежит в нек-рой координатной окрестности.

Расстояние $\rho(p, q)$ между точками p, $q \in M^n$ определяется как точная нижняя грань длин всех кусочно гладких кривых, соединяющих p с q. Аналогично определяется метрика ρ_U в произвольной связной области U. Два римановых пространства M_1^n и M_2^n наз. изометричными, если существует отображение $\varphi : M_1^n \to M_2^n$, при к-ром

$$\rho_{M^n}(p, q) = \rho_{M_2^n}(\varphi(p), \varphi(q)),$$

или, что то же, $l(c) = l(\varphi(c))$, где c — произвольная кривая в M_1^n. Если φ — изометрия, то для любой точки $p \in M_1^n$ существует координатная окрестность $U_1 \ni p$ и координатная окрестность $U_2 \ni \varphi(p)$ такие, что $g_{ij}^1(x) = g_{ij}^2(\varphi(x))$, $x \in U_1$, $i, j = 1, \ldots, n$. Изометрич. отображение M^n на себя наз. движением.

Кривая с концами в точках p и q наз. кратчайшей, если ее длина равна $\rho(p, q)$. Стационарная кривая функционала длины l наз. геодезической линией. Каждая кратчайшая в M^n есть геодезическая, и каждая достаточно малая дуга геодезической есть кратчайшая. Область $U \subset M^n$ наз. геодезически выпуклой, если кратчайшие, определенные по метрике ρ_U, есть геодезические M^n. Если $x^i = x^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$,— уравнения геодезической в локальной системе координат $\{x^i\}$, то функции $x^i(t)$ удовлетворяют системе уравнений, к-рая в случае, когда t — параметр, пропорциональный длине дуги, имеет вид

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где

$$\Gamma_{jk}^i = \sum_{a=1}^n g^{ai}\Gamma_{jk,\,a},$$

$$\Gamma_{jk,\,a} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ja}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ka}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^a}\right)$$

— символы Кристоффеля, g^{ab} — элементы матрицы, обратной к $\|g_{ij}\|$, $i, j, k, a, b = 1, \ldots, n$.

Риманово пространство наз. полным (геодезически полным), если оно полно как метрич. пространство (если любую дугу геодезической можно неограниченно продолжить в обе стороны). Риманово

пространство полно тогда и только тогда, когда оно геодезически полно. В полном римановом пространстве любые две точки можно соединить кратчайшей (не обязательно единственной). На любом дифференцируемом многообразии можно ввести структуру полного риманова пространства.

Римановопространство как многообразие со связностью. *Ковариантная производная* ∇ наз. симметрической и совместной с метрикой g пространства M^n, если выполняются условия симметричности

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

и совместности

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle,$$

где X, Y, Z — дифференцируемые векторные поля, а $[X, Y]$ — их коммутатор. Этими условиями производная ∇ определяется однозначно через поле метрич. тензора g. В локальных координатах $\{x^i\}$ компоненты связности ∇ имеют вид $\Gamma_{kj,\, i} = \langle \nabla_k \partial_j, \partial_i\rangle$ и совпадают с символом Кристоффеля 1-го рода, а

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} X^k + \sum_{j,\, k=1}^n \Gamma^i_{jk} X^j Y^k \right) \partial_i.$$

Аналогичной формулой определяется ковариантная производная любого тензора.

Векторное поле $Y(t)$ вдоль кривой $c(t)$ наз. параллельным, если $\nabla_{\dot c} Y = 0$. Аналитически параллельное поле $Y(t)$ определяется решением системы

$$\frac{dY^i}{dt} + \sum_{j,\, k=1}^n \Gamma^i_{jk} Y^j \frac{dx^k}{dt}, \quad i = 1, \ \ldots, \ n,$$

где $x^i = x^i(t)$ — уравнения кривой $c(t)$. Решения этой системы при различных начальных условиях дают отображение $(TM^n)_{c(0)}$ в $(TM^n)_{c(1)}$; оно оказывается изометричным и наз. параллельным перенесением Леви-Чивита. Результат перенесения зависит, вообще говоря, не только от конечных точек $c(0)$ и $c(1)$, но и от самого пути $c(t)$. Кривая, для к-рой $\nabla_{\dot c} \dot c = 0$, является геодезической, и это свойство геодезической можно взять за ее определение.

Подмногообразия риманова пространства. Если M^k, $k \leqslant n$, — дифференцируемое подмногообразие риманова пространства M^n, то в каждом касательном пространстве к M^k $((TM^k)_p \subset (TM^n)_p)$ индуцируется скалярное произведение и тем самым на M^k возникает структура риманова пространства с метрич. тензором a, компоненты к-рого вычисляются по формулам

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{i,\, j=1}^n g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}, \quad \alpha, \ \beta = 1, \ \ldots, \ k,$$

где $x^i = x^i(u^1, \ \ldots, \ u^k)$ — уравнения M^k в локальных координатах. Внешняя геометрия M^k, $k \geqslant 2$, описывается вторыми квадратичными формами $B(\nu_p)$, к-рые определяются для каждой единичной нормали ν_p к M^k формулой

$$B(\nu_p)(X, Y) = -(\nabla_X \nu, Y),$$

где X и Y — векторные поля на M^k, а ν — произвольное поле единичных нормалей, содержащее ν_p. Для любой формы $B(\nu_p)$ определяются нормальные кривизны, главные направления и кривизны, средняя и полная кривизны и т. д. и выводятся уравнения Гаусса — Кодацци — Риччи, связывающие коэффициенты первой и вторых квадратичных форм. Свойствами вторых форм характеризуются важные классы подмногообразий, напр. минимальные, вполне геодезические, выпуклые и т. п. Для $M^1 = c(t)$ (гладкая кривая) строится теория,

аналогичная теории кривых в E^n, определяются первая, вторая и т. д. кривизны и выводятся уравнения, аналогичные формулам Френе. Первая кривизна кривой k_1 обычно наз. геодезической кривизной и вычисляется по формуле

$$k_1 = |\nabla_{\dot{c}} \dot{c}|,$$

если t — длина дуги; в локальных координатах

$$k_1 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\,\mu^i\,\mu^j},$$

где

$$\mu^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt},$$

а $x^i = x^i(t)$ — уравнения $c(t)$.

Большой круг задач Р. г. связан с *изометрическими погружениями* одного риманова пространства в другое и изучением свойств этих погружений. Эти задачи трудны и исследованы мало (более подробно — в двумерном случае).

Экспоненциальное отображение $\exp_q : (TM^n)_q \to M^n$ определяется условием: $\exp_q X = r$, где r — конец дуги геодезической с началом в q, с направлением $X \in (TM^n)_q$ и длины $|X|$. Если в окрестности точки p ввести систему координат, сопоставляя точке p декартовы координаты точки $\exp_q^{-1} p \in (TM^n)_q$, то окажется

$$\Gamma^i_{jn}\big|_{x=q} = \Gamma_{jk,\,i}\big|_{x=q} = 0, \text{ то есть}$$

$$\left.\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right|_{x=q} = 0, \quad i,\ j,\ k = 1,\ \ldots,\ n;$$

это — т. н. (римановы) нормальные координаты.

Кривизна. Если в окрестности точки q ввести нормальные координаты, то компоненты метрич. тензора записываются в виде

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3}\sum_{k,\,l=1}^{n} R_{ik,\,jl}\,x^k x^l + \sum_{k,\,l=1}^{n} \varepsilon_{ik,\,jl}\,x^k\,x^l,$$

где $\varepsilon_{ik,\,jl} \to 0$ при $x^i \to 0$, $i,\ j,\ k,\ l = 1,\ \ldots,\ n$. Отсюда выводится важное свойство римановой метрики: для любой точки $q \in M^n$ экспоненциальное отображение $\varphi = \exp_q : (TM^n)_q \to M^n$ обладает свойством

$$\rho_{(TM^n)_q}(X,\ Y) = |X - Y| = \rho_{M^n}(\varphi(X),\ \varphi(Y)) \times$$
$$\times (1 + \varepsilon(X,\ Y)),$$

где $\varepsilon(X,\ Y) \to 0$ при $|X|,\ |Y| \to 0$. Добиться более высокого по порядку малости совпадения метрик M^n и $(TM^n)_q$ за счет удачного выбора отображения φ в общем случае невозможно. Поэтому коэффициенты $R_{ik,\,jl}$ характеризуют отличие метрики M^n от евклидовой метрики $(TM^n)_q$. Эти коэффициенты являются компонентами т. н. тензора кривизны, или тензора Римана — Кристоффеля (в точке q). В локальных координатах $\{x^i\}$ они выражаются через коэффициенты метрич. тензора и их первые и вторые производные по формуле

$$R_{ik,\,jl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\,\partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^i\,\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k\,\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\,\partial x^j}\right) +$$
$$+ \sum_{a,\,b=1}^{n} g^{ab}\,(\Gamma_{kj,\,a}\,\Gamma_{il,\,b} - \Gamma_{kl,\,a},\ \Gamma_{ij,\,b}),$$
$$i,\ j,\ k,\ l,\ a,\ b = 1,\ \ldots,\ n.$$

С тензором кривизны связан целый ряд других понятий, также (с разных сторон) характеризующих меру отли-

чия метрики M^n от евклидовой. Так, через тензор кривизны определяются тензоры Риччи

$$R_{ij} = \sum_{k,\ l=1}^{n} g^{kl} R_{ik,jl}$$

и Эйнштейна

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij},$$

где

$$R = \sum_{i,\ j=1}^{n} g^{ij} R_{ij}$$

— т. н. скалярная кривизна M^n.

Трилинейное отображение, сопоставляющее трем векторным полям X, Y, Z поле

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{[XY]} Z,$$

наз. преобразованием кривизны. Его свойства:

1) $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$;

2) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (тождество Риччи);

3) $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle R(X, Y)W, Z\rangle$;

4) $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle R(Z, W)X, Y\rangle$.

Кроме того, имеет место тождество Бианки

$$\nabla_X(R(Y, Z)W) + \nabla_Y(R(Z, X)W) + \nabla_Z(R(X, Y)W) = 0.$$

Преобразование кривизны можно связать нек-рой конструкцией с параллельным перенесением. Алгебраич. свойства тензора кривизны выводятся из свойств преобразования кривизны, т. к. через него, а именно через «биквадратичную форму» $k(X, Y) = \langle R(X, Y)Y, X\rangle$, тензор кривизны (точнее, его значения на векторах X, Y, Z, W) однозначно (алгебраически) выражается (см. *Кривизна*).

Секционная кривизна. Пусть F^2 — двумерная поверхность в M^n, проходящая через p, $\sigma = (TF^2)_p$, Γ — простая замкнутая кривая на Γ^2, проходящая через p, S — площадь области на F^2, ограниченной кривой Γ, $z \in (TF^2)_p$, $\bar{z}$ — вектор, полученный из z параллельным перенесением вдоль Γ, φ — угол между вектором z и касательной составляющей вектора $\bar{z}$. Тогда при стягивании Γ к точке p существует предел $K(p, \sigma) = \lim \frac{\varphi}{S}$, к-рый наз. римановой секционной кривизной пространства M^n в данной точке p и в данном двумерном направлении σ ($K(p, \sigma)$ не зависит от поверхности F^2, а зависит только от σ). Секционная кривизна показывает меру «искривления» M^n в данной точке и в данном двумерном направлении. Вообще говоря, в разных двумерных направлениях это искривление различно; но если в каждой точке кривизна $K(p, \sigma)$ не зависит от выбора σ, то она не меняется и от точки к точке (теорема Шура). Тождественное обращение секционной кривизны в нуль — необходимое и достаточное условие того, чтобы M^n было локально изометрично E^n (в целом оно может отличаться от E^n). Секционную кривизну M^n можно связать и с другими объектами Р. г., напр. с дефектом (избытком) геодезич. треугольника (см. *Гаусса — Бонне теорема*). Сам Б. Риман определял секционную кривизну как гауссову кривизну двумерной поверхности $\exp_p \sigma$, вычисленную по формуле Гаусса в точке p. В свою очередь, по секционной кривизне метрика M^n определяется однозначно в следующем смысле: если у двух многообразий M_1^n и M_2^n секционные кривизны постоянны и равны одному и тому же числу a, то M_1^n и M_2^n локально изометричны, если они к тому же оба односвязны, то — просто изометричны. Односвязное риманово пространство постоянной секционной кривизны a изометрично:

n-мерному пространству Лобачевского L_n при $a<0$; n-мерному евклидову пространству E_n при $a=0$; n-мерной сфере S^n в E^{n+1} радиуса $1/\sqrt{a}$ при $a>0$. В общем случае известен следующий результат. Если M_1^n — аналитическое риманово пространство непостоянной секционной кривизны и существует диффеоморфизм $\varphi : M_1^n \to M_2^n$, при к-ром $K(p, \sigma) = K(\varphi(p), d\varphi(\sigma))$, то при $n \geqslant 4$ отображение φ — изометрия; в случае $n=3$ это утверждение доказано при нек-рых дополнительных предположениях, а в случае $n=2$ теорема не верна. Однако неизвестно (1983), кроме двумерного случая, какова должна быть функция $K(p, \sigma)$, чтобы для нее существовала метрика g, для к-рой $K(p, \sigma)$ была бы секционной кривизной. В этом направлении известны только нек-рые отрицательные результаты.

Секционная кривизна связана с преобразованием кривизны формулой

$$K(p, \sigma) = \frac{\langle R(X_p, Y_p) X_p, Y_p \rangle}{|X_p|^2 |Y_p|^2 - \langle X_p, Y_p \rangle^2},$$

а через компоненты тензора кривизны выражается так:

$$K(p, \sigma) = \frac{\sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{ik,jl} (X^i Y^k - X^k Y^i)(X^j Y^l - X^l Y^j)}{\sum_{i,j,k,l=1}^{n} \begin{vmatrix} g_{ij} & g_{il} \\ g_{kj} & g_{kl} \end{vmatrix} (X^i Y^j - X^j Y^i)(X^k Y^l - X^l Y^k)},$$

где σ определено векторами

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} Y^j \partial_j.$$

Значение тензора Риччи R_{ij} на векторе X связано с секционной кривизной следующим образом: пусть векторы $X, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ образуют ортонормированный базис в $(TM^n)_p$, тогда

$$\sum_{i,j=1}^{n} R_{ij} X^i X^j = \sum_{k=1}^{n} K(p, \sigma_k),$$

где σ_k — двумерное направление векторов X и Y_k.

Классы римановых пространств. Помимо общих (произвольных) римановых пространств существуют римановы пространства, на к-рых могут быть введены дополнительные структуры. Эти структуры возникают тогда, когда непосредственно на метрику или на кривизну накладываются те или иные условия геометрического или алгебраич. характера. Таким способом определяются важные классы римановых пространств: многообразия постоянной секционной кривизны (см. *Пространственные формы*), *однородное пространство*, *симметрическое пространство*, эрмитовы и кэлеровы *многообразия*, *пространства Эйнштейна* и т. д.

Обобщения. Развитие идей Р. г. и геометрии в целом привело к ряду обобщений понятия Р. г.

Псевдориманова геометрия — теория псевдориманова пространства. Псевдоримановым пространством наз. дифференцируемое многообразие, на к-ром задано поле знакопеременного симметричного невырожденного тензора.

Финслерова геометрия — теория дифференцируемого многообразия, на касательном расслоении к-рого задана функция $F(x, \lambda)$, однородная первой степени по λ. Длина l кривой $c(t)$ вычисляется:

$$l = \int_0^1 F(c, \dot{c})\, dt.$$

Пространства ограниченной кривизны — теория двумерных метрич. многообразий с *внутренней метрикой* (без всяких предположений гладкости), в к-рых определена интегральная кривизна любого ограниченного борелевского множества. Сюда, в частности, относится внутренняя геометрия выпуклых

поверхностей. Этот класс метрич. пространства можно получить, присоединяя к двумерным римановым пространствам двумерные метризованные многообразия, метрика к-рых в окрестности каждой точки допускает равномерное приближение римановыми метриками с ограниченными в совокупности интегралами от абсолютной гауссовой кривизны.

Пространства кривизны не больше K — теория полных метрич. многообразий с внутренней метрикой, в к-рых сумма верхних углов треугольников, составленных из кратчайших, не превосходит суммы углов треугольника на плоскости постоянной кривизны K с такими же длинами сторон (кроме того, предполагается, что любые две точки можно соединить единственной кратчайшей).

См. также *Геодезических геометрия*, *Конформная геометрия*, *Риманово пространство обобщенное*.

Лит.: [1] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.—Л., 1948; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [3] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [4] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [5] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.—Л., 1948; [6] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 3, с. 3—55; [7] Милнор Дж., Теория Морса, пер. с англ., М., 1965; [8] Картан Э., Геометрия римановых пространств, пер. с франц., М.—Л., 1936; [9] Kuikarni R. S., «Ann. Math.», 1970, v. 91, № 2, p. 311—31; [10] Wolf J. A., Spaces of constant curvature, N. Y., 1967. *В. А. Топоногов.*

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ В ЦЕЛОМ — раздел римановой геометрии, изучающий связи между локальными и глобальными характеристиками римановых многообразий (р. м.). Термин Р. г. в ц. обычно относят к определенному кругу проблем и методов, характерных для *геометрии в целом*. Основное место в Р. г. в ц. занимает изучение связи между кривизной и топологией р. м. При этом исследуются вопрос о топологическом и метрич. строении р. м. с данными условиями на кривизну и вопрос о существовании на заданном гладком многообразии римановой метрики с предписанными свойствами кривизны (*секционной кривизны* K_σ, *Риччи кривизны* Ric, *скалярной кривизны* $K_{\text{ск}}$). Бо́льшая часть полученных результатов относится к пространствам с кривизнами постоянного знака. Р. г. в ц. тесно соприкасается с теорией *однородных пространств* и вариационной теорией *геодезических линий*. О подмногообразиях Р. м. см. в статьях *Изометрическое погружение* и *Погруженных многообразий геометрия*.

Методы Р. г. в ц. носят синтетич. характер. Наряду с локальной дифференциальной геометрией широко используются теория дифференциальных уравнений и *Морса теория*. Но основные достижения связаны с нахождением удачных конструкций, напр. построением замкнутых геодезических, минимальных пленок или пленок из геодезических, орисфер, выпуклых множеств. Исследованию топологии р. м. обычно предшествует изучение их метрич. свойств. Последнее часто осуществляется путем сравнения р. м. с подходящим эталонным пространством (см. ниже теоремы сравнения).

Топологическое строение. Для замкнутых поверхностей связь между кривизной и топологией по существу исчерпывается формулой Гаусса — Бонне. Среди замкнутых поверхностей метрику положительной кривизны могут нести только сфера S^2 и проективная плоскость P^2, а нулевой кривизны — тор и бутылка Клейна. Строение р. м. размерности $n>2$ известно хуже (1983). Вот примеры известных теорем.

Полное односвязное р. м. M^n с $K_\sigma \leqslant 0$ диффеоморфно $\mathbb{R}^n$ (теорема Адамара — Картана), причем для любой точки $x \in M^n$ экспоненциальное отображение $\exp_x$ есть диффеоморфизм касательного пространства T_xM^n на M^n.

Для замкнутых р. м. с $K_\sigma > 0$ имеет место следующая теорема о сфере: полное р. м. M^n с $0<\delta \leqslant$

$\leqslant K_\sigma \leqslant 1$ наз. δ-з а щ е м л е н н ы м; если оно односвязно и $\delta > 1/4$, то M^n гомеоморфно S^n. Для четных n граница здесь точная: при $\delta = 1/4$ существуют M^n, негомеоморфные S^n, это — *симметрические пространства* ранга 1 и только они. Для нечетных n теорема о гомеоморфности M^n и S^n верна и при $\delta = 1/4$. При $n < 7$, $n \neq 4$, гомеоморфность сфере S^n влечет диффеоморфность. При $n \geqslant 7$ диффеоморфность сфере установлена при более жестком, чем в теореме о сфере, защемлении (достаточно взять $\delta > 0{,}87$, а при $n \to \infty$ взять $\delta > 0{,}66$). Известно также, что при еще более жестком защемлении (достаточно $\delta > 0{,}98$ и $\delta > 0{,}66$ при $n \to \infty$) неодносвязное M^n диффеоморфно пространству постоянной кривизны (факторпространству S^n по дискретной подгруппе изометрий). Есть ряд результатов об условиях на K_σ, обеспечивающих гомеоморфизм симметрич. пространству ранга 1 (см. [14], [15]).

Открытое, т. е. полное некомпактное, р. м. с $K_\sigma > 0$ всегда диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. Множество $X \subset M^n$ наз. а б с о л ю т н о в ы п у к л ы м, если каждая геодезическая с концами в X вся лежит в X. Пусть M^n — открытое р. м. с $K_\sigma \geqslant 0$, тогда в M^n существует вполне геодезическое абсолютно выпуклое замкнутое подмногообразие N такое, что M^n диффеоморфно пространству $\nu(N)$ *нормального расслоения* N в M^n (если $K_\sigma > 0$, то $\dim N = 0$). В случаях $\dim N = 1$ или $n-1$, а для однородных пространств — всегда, M^n даже изометрично $\nu(N)$ со стандартной метрикой нормального расслоения. При $n \leqslant 3$ это дает полную классификацию открытых р. м. с $K_\sigma \geqslant 0$.

П р я м о й наз. полная геодезическая, кратчайшая на любом своем участке. Т е о р е м а о ц и л и н д р е: открытое M^n с $K_\sigma \geqslant 0$ изометрично прямому метрич. произведению $M^{n-k} \times \mathbb{R}^k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, где M^{n-k} не содержит прямых. Условие $K_\sigma \geqslant 0$ здесь можно заменить на $\mathrm{Ric} \geqslant 0$.

Ф у н д а м е н т а л ь н а я г р у п п а. При $K_\sigma > 0$ и четном n замкнутое M^n либо ориентируемо и односвязно, либо неориентируемо и фундаментальная группа $\pi_1(M^n) = \mathbb{Z}_2$; при нечетном n оно всегда ориентируемо, но о $\pi_1(M^n)$ за пределами теоремы о сфере мало что известно. Даже для M^n постоянной кривизны $K_\sigma = 1$ полное описание возможных строений $\pi_1(M^n)$ для нечетных n оказалось трудной задачей (см. [9]).

Если $K_\sigma = 0$, то универсальное накрывающее $\tilde{M}^n$ пространства M^n изометрично $\mathbb{R}^n$ и фундаментальная группа $\pi_1(M^n)$ изоморфна дискретной группе изометрий $\mathbb{R}^n$ без неподвижных точек; она содержит подгруппу сдвигов конечного индекса. (Тем самым M^n допускает конечное изометрич. накрытие плоским тором.)

Если в $\tilde{M}^n$ все $K_\sigma \leqslant 0$, то $\tilde{M}^n$ диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. Поэтому все гомотопич. группы $\pi_i(M^n)$ для $i > 1$ тривиальны, и гомотопич. тип определяется $\pi_1(M^n)$. Если $K_\sigma < 0$, то $\pi_1(M^n)$ полностью некоммутативна в том смысле, что любая абелева (и даже любая разрешимая) ее подгруппа является бесконечной циклической. В случае $K_\sigma \leqslant 0$ известно следующее. Пусть Γ — разрешимая подгруппа $\pi_1(M^n)$. Тогда Γ изоморфна дискретной группе изометрий $\mathbb{R}^n$ (без неподвижных точек) и M^n содержит компактное вполне геодезич. подмногообразие, изометричное $\mathbb{R}^n/\Gamma$. Вместо $K_\sigma \leqslant 0$ достаточно при этом потребовать отсутствия на геодезических сопряженных точек.

Для двух многообразий одинаковой постоянной отрицательной кривизны и одинаковой размерности $n \geqslant 3$ изоморфизм π_1 влечет изометрию (т е о р е м а М о с т о в а).

Римановы многообразия, для к-рых $\max |K_\sigma| \times \mathrm{diam}\, M^n < \varepsilon$, наз. ε-п л о с к и м и. Такие многообразия могут при произвольном $\varepsilon > 0$ топологически отличаться от локально плоских. Для них при любом $n \geqslant 2$ существует такое ε_n, что для ε_n-плоского M^n в $\pi_1(M^n)$

есть нильпотентная подгруппа конечного индекса. При этом M^n допускает конечное (с кратностью, зависящей лишь от n) накрытие, диффеоморфное факторпространству нильпотентной группы Ли по ее дискретной подгруппе (см. [8]).

Полное р. м. с кривизной $\mathrm{Ric}\geqslant a>0$ имеет конечный $\mathrm{diam}\, M^n\leqslant\pi/\sqrt{a}$ и потому конечную группу $\pi_1(M^n)$. Если для замкнутого M^n $\mathrm{Ric}\geqslant 0$, то существует такая конечная нормальная подгруппа $\Gamma\subset\pi_1(M^n)$, что π_1/Γ — дискретная группа изометрий $\mathbb{R}^k$, $0\leqslant k\leqslant n$, причем $\tilde{M}^n$ разлагается в прямое метрич. произведение $M^*\times\mathbb{R}^k$, где M^* замкнуто, разложение инвариантно относительно $\pi_1(M^n)$, а Γ — тривиальна на $\mathbb{R}^k$.

Наряду с изучением $\pi_1(M^n)$ получены с помощью теории гармонических дифференциальных форм нек-рые оценки для чисел Бетти b_k для δ-защемленных M^n. Так, $b_2=0$ при $\delta>(n-3)(4n-9)^{-1}$ и нечетном $n\geqslant 5$.

Теоремы сравнения. Многие глобальные свойства р. м. доказываются путем сравнения конструкций в изучаемом р. м. с аналогичными конструкциями в эталонном пространстве. В качестве последнего берут многообразие постоянной кривизны, реже — другое симметрич. пространство. Ниже c-плоскостью называем $\mathbb{R}^2$ при $c=0$, сферу S^2_c радиуса $c^{-1/2}$ при $c>0$, плоскость Лобачевского кривизны c при $c<0$.

Многочисленные применения имеет следующая теорема Топоногова сравнения углов. Пусть в р. м. M^n все $K_\sigma\geqslant c$ и α_1, α_2, α_3 — углы треугольника из кратчайших, а α_1', α_2', α_3' — соответствующие углы треугольника с теми же длинами сторон на c-плоскости; тогда $\alpha_i\geqslant\alpha_i'$. Если $K_\sigma\leqslant c$ и любые две точки сторон рассматриваемого в M^n треугольника соединимы единственной кратчайшей, то $\alpha_i\leqslant\alpha_i'$. Эта теорема эквивалентна следующему условию выпуклости: если в M^n кратчайшие ab, ac образуют тот же угол, что кратчайшие $a'b'$, $a'c'$ тех же длин на c-плоскости, то $\rho_{M^n}(b,c)\leqslant\rho_c(b',c')$. Здесь по существу сравнивается быстрота расходимости кратчайших.

В теореме сравнения Рауха сравниваются скорости движения концов b и b' кратчайших ab, $a'b'$ в двух р. м. M^n и M'^n при условии, что ab и $a'b'$ поворачиваются вокруг своих начал a, a' с одинаковой скоростью в условиях, когда (при нек-ром естественном сопоставлении) секционные кривизны в M^n не меньше, чем в M'^n. Тогда скорость движения b не больше, чем скорость b'. В основном случае (при сравнении с c-плоскостью) теорема Рауха равносильна инфинитезимальному варианту теоремы сравнения углов.

Имеются аналоги теоремы Рауха, в к-рых точки a, a' смещаются по гиперповерхностям, к к-рым ab, $a'b'$ остаются ортогональными. Есть также теоремы сравнения для объемов трубчатых окрестностей подмногообразий (см. [13], [16]).

Экстремальные теоремы. Теоремы сравнения приводят к оценкам таких характеристик M^n, как диаметр, радиус инъективности, длина замкнутой геодезической, объем шара данного радиуса и т. п. Ответы на вопросы о случаях достижения равенства в таких оценках дают экстремальные теоремы.

Для M^n с $K_\sigma\geqslant 1$ всегда $\mathrm{diam}\, M^n\leqslant\pi$. Равенство достигается только для единичной сферы. Если M^n замкнуто и $0<K_\sigma\leqslant 1$ при четном n или $1/4<K_\sigma\leqslant 1$ при нечетном n, то радиус инъективности $r_{in}(M^n)\geqslant\pi$ и длина замкнутой геодезической $\geqslant 2\pi$. Если при этом в M^n есть замкнутая геодезическая γ длины 2π, то при четном n в M^n существует вполне геодезич. поверхность, содержащая γ и изометричная S^n_1, а при $1/4<K_\sigma\leqslant 1$, независимо от четности n, M^n изометрично S^n_1 (см. [6]). Объем шара

D радиуса $r<r_{in}(M^n)$ в M^n с $K_\sigma \leqslant c\,(K_\sigma \geqslant c)$ не меньше (не больше), чем объем шара D_c того же радиуса в пространстве постоянной кривизны c, с равенством, лишь если D изометрично D_c.

Экстремальные теоремы не всегда связаны с оценками кривизны. Пусть, напр., на замкнутой поверхности F для любой точки множество точек, ей сопряженных, состоит из единственной точки. Тогда F изометрично сфере.

Конечность топологических типов. Среди замкнутых р. м. с равномерно ограниченными кривизнами и ограниченными снизу радиусами инъективности $\mathrm{Vol}\ M^n<C_1$, $r_{in}>C_2>0$, $K_\sigma<C_3$, есть лишь конечное число попарно гомотопически неэквивалентных, а при замене $K_\sigma<C_3$ на $|K_\sigma|<C_3$ — лишь конечное число попарно негомеоморфных. В этом утверждении условие $r_{in}>C_2>0$ можно заменить обеспечивающими его, но легче проверяемыми условиями $\mathrm{Vol}\ M^n \geqslant C_4>0$, $\mathrm{diam}\ M^n<C_5$ (см. [14]).

Для р. м. со знакопостоянными K_σ условия, обеспечивающие конечность их топологич. типов, упрощаются. Напр., для четных n и $K_\sigma>0$ достаточно условия $\max K_\sigma<C \min K_\sigma$.

При $n>3$ для M^n с $-1 \leqslant K_\sigma<0$ справедлива оценка $\mathrm{Vol}\ M^n>C(1+\mathrm{diam}\ M^n)$. Поэтому при $n \neq 3$ конечно число топологич. типов замкнутых р. м., удовлетворяющих условиям $\mathrm{Vol}\ M^n<C_1$, $C_2<K_\sigma<0$. Но при $n=3$ существует бесконечная серия попарно негомеоморфных M^3, удовлетворяющих условиям (см. [12]).

Метрики с заданной кривизной. Пусть χ — эйлерова характеристика замкнутой поверхности M^2. Чтобы гладкая функция f на M^n была кривизной нек-рой римановой метрики на M^2, необходимо: $\max f>0$ при $\chi>0$, $\min f<0$ при $\chi<0$ и f меняет знак или $f \equiv 0$ при $\chi=0$. Эти условия и достаточны. Условие $\int_{M^2}\omega=2\pi\chi$ необходимо и достаточно, чтобы 2-форма ω была формой кривизны $\omega=\int K\,dS$ римановой метрики на M^2. Если M^2 — открытое подмногообразие замкнутого многообразия N^2, то любая гладкая f на M^2 есть кривизна нек-рой (быть может, неполной) римановой метрики на M^2. Необходимые и достаточные условия, при к-рых f есть кривизна полной римановой метрики на некомпактной поверхности, выяснены (1983) лишь для конечносвязных поверхностей.

С ростом размерности число независимых компонент тензора кривизны растет быстрее числа компонент метрич. тензора. Условия, при к-рых данное поле тензора служит, хотя бы локально, полем тензора кривизны нек-рой метрики, неизвестны (1983). Но для скалярной кривизны при $n>2$ каждая гладкая функция f на замкнутом M^n, для к-рой $\min f<0$, является скалярной кривизной нек-рой римановой метрики на M^n (см. [4]). Существуют многообразия, не допускающие метрики с положительной скалярной кривизной, напр. трехмерный тор (см. [5]).

Выпуклые функции. Существование на р. м. M^n скалярной функции f, выпуклой вдоль любой геодезической, налагает жесткие ограничения на строение такого M^n. Напр., если на M^n есть выпуклая функция f, то $\mathrm{Vol}\ M^n=\infty$. Если f строго выпукла и при любом c компактны множества $f^{-1}(c)$, то M^n диффеоморфно $\mathbb{R}^n$.

В ряде случаев выпуклые функции удается построить. Напр., при $K_\sigma \leqslant 0$ выпуклы функции $f_1(x)=\rho(x, p)$, $f_2(x)=\rho(x, p)^2$, $p \in M^n$. Если $K_\sigma \leqslant 0$ и $\gamma\colon M^n \to M^n$ — изометрия, то выпукла функция $\delta_\gamma(x)=\rho(x, \gamma x)$. При $K_\sigma \geqslant 0$ существуют выпуклые f с компактными $f^{-1}(c)$; это связано с абсолютной выпуклостью (при $K_\sigma \geqslant 0$) дополнений к оришарам и с тем обстоятельством, что при $K_\sigma \geqslant 0$ выпуклость множества $U \subset M^n$ влечет выпуклость множества $\{x \in U : \rho(x, \partial U) \geqslant t\}$.

Изучались и проблемы Р. г. в ц. для р. м. с дополнительными структурами, напр. для кэлеровых многообразий (см. [10]).

Лит.: [1] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [2] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 3, с. 3—55; [3] Cheeger J., Ebin D., Comparison theorems in riemannian geometry, Amst.— Oxf.—N. Y., 1975; [4] Исследования по метрической теории поверхностей, пер. с англ. и франц., М., 1980; [5] Schoen R., Yau S., «Ann. Math.», 1979, v. 110, p. 127—42; [6] Топоногов В. А., «Сиб. матем. ж.», 1974, т. 15, № 6, с. 1348—71; [7] Gromov M., Lawson B., «Ann. Math.», 1980, v. 111, № 2, p. 209—30; [8] Buser P., Karcher H., Gromov's almost flat manifolds, «Asterisque», 1981, v. 81; [9] Вольф Дж., Пространства постоянной кривизны, пер. с англ., М., 1982; [10] Goldberg S., Curvature and homology, N. Y., 1963; [11] Бессе А., Многообразия с замкнутыми геодезическими, пер. с англ., М., 1981; [12] Thurston W., The geometry and topology of 3 manifolds, Preprint, Princeton, 1978; [13] Heintze E., Karcher H., «Ann. scient. École norm. super.», 1978, v. 11, № 4, p. 451—70; [14] Cheeger J., «Amer. J. Math.», 1969, v. 91, № 3, p. 807—34; [15] Min-Oo, Ruh E., «Ann. scient. École, norm. super.», 1979, v. 12, p. 335—53; [16] Gray A., «Topology», 1982, v. 21, № 2, p. 201—28.

Ю. Д. Бураго, В. А. Топоногов.

РИМАНОВА КРИВИЗНА — мера отличия метрик риманова и евклидова пространств. Пусть M — точка риманова пространства, F — двумерная регулярная поверхность $x^i = x^i(u, v)$, проходящая через M, L — простой замкнутый контур на F, проходящий через M, σ — площадь участка поверхности, ограниченного контуром L. Пусть произвольный вектор a^i, касательный к поверхности F (т. е. линейно выражающийся через векторы $\frac{\partial x^i}{\partial u}$, $\frac{\partial x^i}{\partial v}$), перенесен параллельно по L. Тогда составляющая перенесенного вектора, касательная к F, окажется повернутой по отношению к a^i на угол φ (положительное направление отсчета углов должно совпадать с направлением обхода L). Если при стягивании L в точку M существует предел

$$K = \lim \frac{\varphi}{\sigma},$$

то он наз. р и м а н о в о й к р и в и з н о й (*кривизной* риманова пространства) в данной точке в направлении двумерной поверхности; Р. к. зависит не от поверхности, а лишь от ее направления в точке M, т. е. от направления двумерной плоскости касательного евклидова пространства, содержащего векторы $\frac{\partial x^i}{\partial u}$, $\frac{\partial x^i}{\partial v}$.

Р. к. K связана с тензором кривизны формулой

$$K = \sum\nolimits_{m,\, l,\, k,\, j} R_{mlkj}\, x^{ml}\, x^{kj},$$

где

$$x^{ml} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^m}{\partial u}\frac{\partial x^l}{\partial v} - \frac{\partial x^l}{\partial u}\frac{\partial x^m}{\partial v}\right),$$

причем параметры u, v выбраны так, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\frac{\partial x^i}{\partial u}$, $\frac{\partial x^i}{\partial v}$, равна 1.

По материалам ст. *Риманова геометрия в БСЭ-3.*

РИМАНОВА МЕТРИКА — метрика пространства, задаваемая положительно определенной квадратичной формой. Если в пространстве V_n введена локальная система координат $(x^1, \ldots, x^n)$ и в каждой точке $X(x^1, \ldots, x^n) \in V_n$ определены функции $g_{ij}(X)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $\det(g_{ij}) > 0$, $g_{ij}(X) = g_{ji}(X)$, являющиеся компонентами ковариантного симметричного тензора второй валентности, то этот тензор наз. о с н о в н ы м м е т р и ч е с к и м т е н з о р о м пространства V_n. С помощью основного тензора выражается длина ds контравариантного вектора $(dx^1, \ldots, dx^n)$:

$$ds^2 = g_{ij}(X)\, dx^i\, dx^j;$$

форма $g_{ij} dx^i dx^j$ является положительно определенной квадратичной формой. Метрика пространства V_n, определенная с помощью формы ds^2, наз. римановой, а про-

странство с введенной в нем Р. м. наз. *римановым пространством*. Задание Р. м. на нек-ром дифференцируемом многообразии означает задание на этом многообразии евклидовой структуры, дифференцируемым образом зависящей от точки.

Р. м. является обобщением первой квадратичной формы поверхности в трехмерном евклидовом пространстве — внутренней метрики поверхности. Геометрия пространства V_n, основанная на определенной Р. м., наз. *римановой геометрией*.

Существуют обобщения понятия Р. м. Так, псевдориманова метрика определяется с помощью неопределенной квадратичной формы (см. *Псевдориманово пространство* и *Относительности теория*). Вырожденная Р. м., то есть метрич. форма, определенная с помощью функций $g_{ij}(X)$, для к-рых $\det(g_{ij})=0$, определяет нек-рое *полуриманово пространство*.

Лит.: [1] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [3] Риман Б., О гипотезах, лежащих в основании геометрии, пер. с нем., в кн.: Об основаниях геометрии, М., 1956. *Л. А. Сидоров.*

РИМАНОВА ОБЛАСТЬ, комплексное (аналитическое) многообразие над $\mathbb{C}^n$,— аналог *римановой поверхности* аналитич. функции $w=f(z)$ одного комплексного переменного z для случая аналитич. функции $w=f(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)$, многих комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$, $n\geqslant 2$.

Точнее, линейно связное хаусдорфово топологич. пространство R наз. (абстрактной) римановой областью, если существует локальный гомеоморфизм (проекция) $\pi: R\to\mathbb{C}^n$ такой, что для каждой точки $p_0\in R$ существует окрестность $U(p_0;\varepsilon)$, гомеоморфно отображающаяся на нек-рый поликруг

$$D(z^0;\varepsilon)=\{z=(z_1, \ldots, z_n)\in\mathbb{C}^n: |z_j-z_j^0|<\varepsilon,\ j=1, \ldots, n\}$$

в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. Р. о. сепарабельна.

Комплексная функция g наз. голоморфной на R, если для любой точки $p_0\in R$ функция $g[\pi^{-1}(z)]$ от n комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$ голоморфна в соответствующем поликруге $D(z^0;\varepsilon)$. Проекция π задается набором n голоморфных функций $\pi=(\pi_1, \ldots, \pi_n)$, соответствующих координатам $z_1, \ldots, z_n$ в $\mathbb{C}^n$. Исходя из данного регулярного элемента аналитич. функции $w=f(z)$, ее Р. о. строится аналогично тому, как строится риманова поверхность данной аналитич. функции одного комплексного переменного, т. е. сначала посредством аналитич. продолжения строится *полная аналитическая функция* $w=f(z)$, а затем с помощью окрестностей вводится топология на множестве элементов полной аналитич. функции. Так же, как и римановы поверхности, Р. о. неизбежно возникают при аналитич. продолжении данного элемента аналитич. функции, когда полную аналитич. функцию $w=f(z)$ стремятся представить, следуя идеям Б. Римана (B. Riemann), как однозначную функцию точки соответствующей Р. о.

В частности, Р. о. возникают как многолистные *голоморфности области* аналитич. функций многих комплексных переменных. Теорема Ока утверждает, что Р. о. является областью голоморфности тогда и только тогда, когда она голоморфно выпукла (см. *Голоморфно выпуклое комплексное пространство*).

Современное изучение Р. о. проводится в рамках общей теории аналитич. пространств. Обобщение понятия области голоморфности приводит к *Штейна пространствам*.

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [2] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [3] Хермандер Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968. *Е. Д. Соломенцев.*

РИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ аналитической функции $w=f(z)$ комплексного переменного z — поверхность R такая, что данная *полная аналитическая функция* $w=f(z)$, вообще говоря многозначная, может рассматриваться как однозначная аналитич. функция $w=F(p)$ точки p поверхности R.

Понятие Р. п. возникло в связи с изучением алгебраич. функций $w=f(z)$, определяемых алгебраич. уравнением

$$a_0(z)\,w^m+a_1(z)\,w^{m-1}+\ldots+a_m(z)=0, \qquad (1)$$

где $a_j(z)$, $j=0, \ldots, m$,— многочлены с постоянными коэффициентами, $a_0(z)\not\equiv 0$, $a_m(z)\not\equiv 0$. В работах В. Пюизё (V. Puiseaux, 1850—51) было достигнуто ясное понимание многозначности, присущей этим функциям $w=f(z)$, когда каждому значению переменного z ставится в соответствие m значений переменного w. Б. Риман (B. Riemann, 1851—57, см. [1]) впервые показал, как для любой алгебраич. функции построить поверхность, на к-рой ее можно рассматривать как однозначную рациональную функцию точки. Полученную Р. п. можно отождествить с алгебраич. кривой, определяемой уравнением (1). Вообще, *для всего дальнейшего развития* теории Р. п., связанного с именами Ф. Клейна (F. Klein), А. Пуанкаре (H. Poincaré), П. Кёбе (P. Koebe) и др., характерно (то усиливающееся, то несколько ослабевающее) взаимопроникновение, с одной стороны, идей и методов теории функций комплексного переменного, с другой — алгебры и алгебраич. геометрии. *Важной вехой в этом развитии явилось первое издание* книги Г. Вейля [18], в к-рой было сформулировано общее понятие абстрактной Р. п.

Определение А: связное хаусдорфово топологич. пространство R наз. абстрактной римановой поверхностью, или просто римановой поверхностью, если оно допускает покрытие открытыми множествами U с соответствующим каждому множеству U гомеоморфным отображением $\alpha: U\to D$, где $D=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ есть единичный круг на плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z, причем если точка $p\in R$ принадлежит U и U', то взаимно однозначное соответствие $z'=\alpha'\alpha^{-1}(z)$ есть конформное отображение I рода в окрестности точки $\alpha(p)\in D$, то есть $z'=\alpha'\alpha^{-1}(z)$ есть однолистная аналитич. функция в окрестности точки $\alpha(p)\in D$. Иначе говоря, абстрактная Р. п. есть двумерное комплексное аналитич. многообразие.

Определение римановой поверхности с краем $\bar{R}$ отличается от определения А тем, что наряду с гомеоморфизмами $\alpha: U\to D$ допускаются гомеоморфизмы $\alpha: U\to D_0^+$, где $D_0^+=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1,\ \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$ — единичный полукруг на плоскости $\mathbb{C}$, причем обычно предполагается, что $\bar{R}$ не является Р. п. в смысле определения А. Точки Р. п. с краем $\bar{R}$, имеющие окрестности, гомеоморфные D, наз. внутренними, а остальные точки, отображающиеся в точки отрезка

$$\{z=x+iy\in\mathbb{C}: -1<x<1,\ y=0\},$$

образуют край $\partial\bar{R}$. Совокупность внутренних точек $\bar{R}$ (внутренность $\bar{R}$) есть Р. п. в смысле определения А. Таким образом, в случае Р. п. с краем обычно край предполагается непустым множеством.

Р. п. (или Р. п. с краем) есть триангулируемое и ориентируемое многообразие со счетной базой, к-рое, следовательно, сепарабельно и метризуемо. Компактная Р. п. (без края) наз. замкнутой Р. п.; более широкий класс конечных Р. п. включает замкнутые Р. п. и компактные Р. п. с краем, состоящим из конечного числа связных компонент. Некомпактные Р. п. с краем или без него наз. открытыми Р. п. В не-

к-рых случаях в определении А более удобно допускать конформное отображение не только I рода, но и II рода. Получающаяся при таком подходе Р. п. с краем $\overline{R}$ (или без него) не является уже, вообще говоря, ориентируемой, но в предположении ее конечности она может быть вложена конформно в ориентируемую замкнутую Р. п.— *дубль римановой поверхности* $\overline{R}$ (см. [8]).

Пусть аналитич. функция $w=f(z)$ задана одним из своих регулярных элементов $(a, P)=(a, P(z-a))$, т. е. парой, состоящей из точки $a\in\mathbb{C}$ и степенного ряда

$$P(z-a)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$

с центром a и радиусом сходимости $r(a)$, $0<r(a)\leqslant\infty$. *Аналитическое продолжение* элемента (a, P) вдоль всевозможных путей в расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ позволяет получить все регулярные элементы такого же типа (b, Q), составляющие в совокупности полную аналитич. функцию, к-рую мы будем продолжать обозначать $w=f(z)$. Кроме того, при аналитич. продолжении появляются элементы более общей природы

$$(b, S)=\left(b, S\left(\sqrt[n]{z-b}\right)\right),$$

т. е. пары, состоящие из точки $b\in\overline{\mathbb{C}}$ и обобщенного степенного ряда (р я д а П ю и з ё):

$$S\left(\sqrt[n]{z-b}\right)=\sum_{\nu=m}^{\infty} b_\nu (z-b)^{\nu/n}$$

или (в случае, когда $b=\infty$ — *бесконечно удаленная* точка):

$$S(z^{-1/n})=\sum_{\nu=m}^{\infty} b_\nu z^{-\nu/n},$$

где m — целое, а n — натуральное числа, причем эти ряды сходятся соответственно при $|z-b|<r(b)$ или при $|z|>r(\infty)>0$. Обобщенные элементы (b, S), а точнее их классы эквивалентности, составляют в совокупности *аналитический образ* A_f, соответствующий данной аналитич. функции $w=f(z)$. Среди составляющих аналитич. образ классов эквивалентности элементов (b, S) различаются регулярные с $n=1$ и разветвленные с $n>1$. Введение подходящей топологии на аналитич. образе A_f превращает его в Р. п. R_f аналитич. функции $w=f(z)$. Это получается, напр., если задавать окрестность элемента (b, S), $b\neq\infty$, как множество, состоящее из самого элемента (b, S) и всех тех регулярных элементов (a, P) из A_f, для к-рых $|b-a|<\rho^n$, $\rho<r(b)$ и ряд $P(z-a)$ сходится к одному из n определений ряда $S(\sqrt[n]{z-b})$ в их общей области определения, т. е.

$$P(z-a)\equiv S\left(\varepsilon\sqrt[n]{z-b}\right),$$

где ε — один из корней из единицы степени n, $\varepsilon^n=1$. Окрестность элемента (∞, S) состоит из самого элемента (∞, S) и всех тех регулярных элементов (a, P) из A_f, для к-рых $|a|>\rho^{-n}$, $\rho<r(b)$ и ряд $P(z-a)$ сходится к одному из n определений ряда $S(z^{-1/n})$. Пространство R_f *удовлетворяет всем условиям определения* А.

Таким образом, каждой аналитич. функции $w=f(z)$ соответствует Р. п. R_f, на к-рой эта функция представляется как однозначная аналитич. функция точки $w=F(p)$, $p=(b, S)\in R_f$. Это означает, что в окрестности любой точки $p_0=(b, S)$ существует *локальный униформизирующий параметр* $t=\sqrt[n]{z-b}$, через к-рый w выражается как однозначная аналитич. функция $w=P(t)=F(p)$. Иначе говоря, Р. п. R_f аналитич. функции есть геометрич. конструкция для глобальной *униформизации* многозначного, вообще говоря, соотношения $w=f(z)$. В окрестности каждой точки $p_0=(b, S)\in R_f$ оно униформизируется посредством двух однозначных аналитич. функций $z=b+t^n$ и $w=S(t)$. С другой стороны,

отображение проектирования $\Pi : (b, S) \to b$, ставящее в соответствие каждому элементу $p_0=(b, S)\in R_f$ его центр b, показывает, что Р. п. R_f аналитич. функции есть (разветвленная) накрывающая поверхность над расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$ или, что то же, над *Римана сферой*. Проекции разветвленных элементов (b, S) с $n>1$ суть точки ветвления этого накрытия.

В то же время каждой априори заданной Р. п. R соответствует бесконечно много аналитич. функций $w=f(z)$, для к-рых именно R является их Р. п., $R_f=R$. Это утверждение для случая замкнутых Р. п. было высказано и обосновано еще Б. Риманом в 1851. Центральным пунктом соответствующего доказательства является конструкция гармонич. функций на R с заданными особенностями. Данное Б. Риманом обоснование опиралось на некритич. применение т. н. *Дирихле принципа*; строгое доказательство впервые было дано П. Кёбе (1909); позднее были даны более простые доказательства этого фундаментального положения, в том числе и опирающиеся на надлежащим образом применяемый принцип Дирихле (см., напр., [3], [4], [17], [18]).

Какова бы ни была ориентируемая топологич. поверхность S, можно построить Р. п. R, гомеоморфную S, т. е. построить Р. п. R того же топологич. типа, что и S. Замкнутые Р. п. топологически вполне характеризуются одним числом — родом g, $0\leqslant g<+\infty$. Топологич. тип такой Р. п. R при $g=0$ есть сфера, при $g=1$ — тор, при $g>1$ — обобщенный тор, или сфера с g ручками. Разрезав Р. п. R рода $g=0$ вдоль нек-рой дуги, получают в качестве ее топологич. модели, или н о р м а л ь н о й ф о р м ы, двуугольник с символом $s=aa^{-1}$, указывающим, что точки сторон a и a^{-1} отождествляются; при $g\geqslant 1$ необходимо сделать $2g$ *канонических разрезов* $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$, после чего получается нормальная форма замкнутой Р. п. R — многоугольник с $4g$ сторонами, попарно отождествляемыми, символ $s=a_1 \ldots$ должен указывать порядок следования сторон. Напр., на рис. 1 изображены нормальные формы сферы при $g=0$ и тора при $g=1$ с их символами. С аналитич. точки зрения замкнутая Р. п. R характеризуется тем, что она есть Р. п. нек-рой алгебраич. функции $w=f(z)$, определяемой алгебраич. уравнением (1) степени m. Эту Р. п. R можно представлять себе также в виде m листов, про-

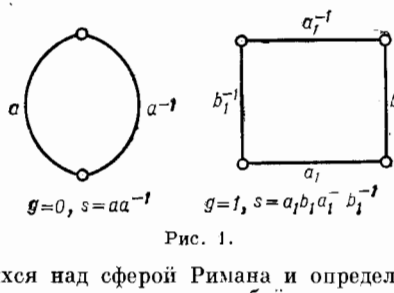


Рис. 1.

стирающихся над сферой Римана и определенным образом соединяющихся между собой в точках ветвления и вдоль нек-рых линий, соединяющих эти точки (способ соединения определяется конкретным видом уравнения (1)). При этом род g Р. п. R выражается через число листов m и порядки $k_1, \ldots, k_s$ точек ветвления *Римана — Гурвица формулой*

$$g=\sum_{\nu=1}^{s}\frac{k_\nu-1}{2}-m+1.$$

Конечные Р. п. $\overline{R}$ топологически вполне характеризуются родом g, $0\leqslant g<\infty$, и числом l связных компонент края, $0\leqslant l<\infty$; их топологич. типом является сфера с g ручками и l отверстиями. В нормальной форме конечной Р. п. число сторон не обязательно четное, нек-рые стороны, соответствующие компонентам края,

остаются свободными, не отождествляются. Понятие рода обобщается и для открытых Р. п. R, напр. при помощи исчерпания R последовательностью $\{\overline{R}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ принадлежащих R компактных Р. п. с краем $\overline{R}_\nu$ таких, что $\overline{R}_\nu$ содержится внутри $\overline{R}_{\nu+1}$, $\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\overline{R}_\nu=R$. Род g Р. п. R полагают равным $g=\lim\limits_{\nu\to\infty} g_\nu$, где g_ν — род $\overline{R}_\nu$. Этот предел существует и не зависит от выбора исчерпания $\{\overline{R}_\nu\}$, $0\leqslant g\leqslant+\infty$. Однако род не полностью определяет топологич. тип открытой Р. п.; топологич. типы открытых Р. п. могут быть весьма разнообразными. Так, на рис. 2 изображены две модели с $g=0$ и $g=2$.

Важной топологич. характеристикой Р. п. R является порядок связности: R наз. о д н о с в я з н о й, если любую простую замкнутую кривую на R можно непрерывно деформировать в точку, не выходя за пределы R, т. е., иначе говоря, если *фундаментальная группа* поверхности R тривиальна. В противном случае Р. п. R наз. м н о г о с в я з н о й. Важный класс составляют Р. п., п о д о б н ы е о д н о л и с т н ы м: так наз. Р. п. (с краем или без края), к-рые разделяются любой простой замкнутой кривой на две непересекающиеся части. Напр., на рис. 2, *а* представлена топологич. модель многосвязной Р. п., подобной однолистной. Р. п., подобная однолистной, необходимо имеет род нуль. Р. п. R, подобная однолистной, наз. n-с в я з-

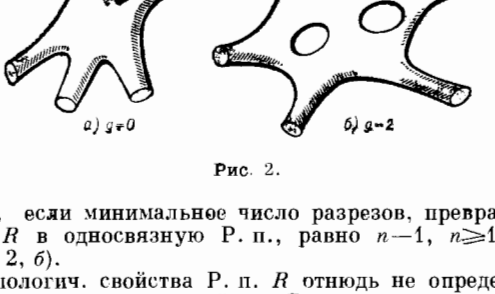


Рис. 2.

н о й, если минимальное число разрезов, превращающих R в односвязную Р. п., равно $n-1$, $n\geqslant 1$ (см. рис. 2, *б*).

Топологич. свойства Р. п. R отнюдь не определяют полностью аналитич. свойства R, т. е. топологич. свойства R не определяют полностью поведение функций различных классов на R. В частности, пусть $f: R_1\to R_2$ — функция на Р. п. R_1 со значениями на другой Р. п. R_2. Функция f наз. аналитической на R_1, если для любой точки $p_0\in R_1$, $f(p_0)=q_0$, можно найти локальные униформизирующие параметры соответственно $t=\varphi(p)$ в окрестности p_0 на R_1 и $\tau=\psi(q)$ в окрестности q_0 на R_2 такие, что сложная функция

$$\tau=\psi\{f[\varphi^{-1}(t)]\}=g(t)$$

является аналитич. функцией комплексного переменного t в окрестности значения $t_0=\varphi(p_0)$. Две Р. п. R_1 и R_2 наз. к о н ф о р м н о э к в и в а л е н т н ы м и, или принадлежащими одному и тому же конформному классу, если существует аналитич. функция $f: R_1\to R_2$, взаимно однозначно отображающая R_1 на R_2. С точки зрения поведения аналитич. функций на Р. п., конформно эквивалентные Р. п. следует рассматривать как одну и ту же Р. п., но топологически эквивалентные Р. п. не всегда являются конформно эквивалентными.

Применительно к Р. п. можно следующим образом сформулировать т е о р е м у Р и м а н а о к о н ф о р м н о м о т о б р а ж е н и и: всякая односвязная Р. п. R конформно эквивалентна одной из трех областей: 1) расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, или сфере Римана (э л л и п т и ч е с к и й

случай); 2) конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$, или сфере Римана с одной выколотой точкой (параболический случай); 3) единичному кругу $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ на плоскости $\mathbb{C}$, или сфере Римана с разрезом положительной длины (гиперболический случай). Важный результат состоит в том, что любая Р. п., подобная однолистной, конформно эквивалентна нек-рой канонич. области расширенной комплексной плоскости. В качестве такой канонич. области можно взять всю расширенную плоскость с конечным или бесконечным числом разрезов, параллельных действительной оси, причем нек-рые из этих разрезов могут вырождаться в точки. Как указано выше, в случае односвязной Р. п. канонич. область либо не имеет ни одного разреза (эллиптический тип), либо разрез вырождается в точку (параболический тип), либо разрез имеет положительную длину (гиперболический тип). Все три типа односвязных Р. п. конформно различны, хотя последние два из них топологически эквивалентны. Проблема типа, пока (1983) не получившая полного решения, состоит в разыскании дополнительных условий на односвязную Р. п., при к-рых она принадлежит гиперболическому или параболич. типу (см. [6], [7], [10], [11]).

В общем случае произвольной Р. п. R односвязной Р. п. будет всегда ее универсальная накрывающая поверхность $\hat{R}$, к-рая, следовательно, принадлежит одному из трех указанных типов. Сама Р. п. R считается Р. п. эллиптического, параболического или гиперболического типа в соответствии с тем, какого типа будет ее универсальная накрывающая $\hat{R}$. Эта классификация Р. п. оправдывается следующими соображениями. Пусть D — одна из трех областей: расширенная комплексная плоскость, конечная комплексная плоскость или единичный круг, а Λ — нек-рая группа дробно-линейных отображений области D на себя (автоморфизмов), не имеющая неподвижных точек в D. Конформное отображение $w=W(q)$ универсальной накрывающей $\hat{R}$ на D переводит группу $\hat{\Lambda}$ преобразований накрытия $\hat{R}$, изоморфную фундаментальной группе $\pi_1(R)$, в нек-рую группу Λ автоморфизмов области D. При этом $w=W(q)$ можно рассматривать как конформное отображение факторпространства $\hat{R}/\hat{\Lambda}$ на факторпространство D/Λ, а $\hat{R}/\hat{\Lambda}$ можно отождествить с R. Таким образом, $w=W(q)$ можно рассматривать как конформное отображение Р. п. R на факторпространство D/Λ с нек-рой группой автоморфизмов Λ, изоморфной фундаментальной группе $\pi_1(R)$.

Так как Р. п. R эллиптич. типа обязательно односвязна, то группа Λ тривиальна, а значит, такая Р. п. есть обязательно Р. п. функции, обратной рациональной. Односвязная Р. п. параболич. типа обязательно является Р. п. функции, обратной мероморфной в конечной плоскости. Компактная Р. п. рода $g=0$, $g=1$ и $g>1$ является соответственно Р. п. эллиптического, параболического и гиперболич. типа.

В связи с конформной эквивалентностью Р. п. возникает также вопрос о строении группы Σ конформных автоморфизмов Р. п. R. За нек-рыми простыми исключениями эта группа Σ дискретна, а для компактных Р. п. рода $g>1$ она конечна (теорема Шварца). Исключительных случаев, когда группа Σ непрерывна, всего семь, а именно (указаны представители соответствующих конформных классов): сфера в эллиптич. случае; сфера с одной или двумя выколотыми точками и тор в параболич. случае; круг, круг с выколотой точкой и кольцо в гиперболич. случае.

Важное значение имеет также проблема модулей Р. п. в различных постановках. Это вопрос о возможном описании разнообразия конформно неэквива-

лентных Р. п. того или иного вида. Напр., легко устанавливаются следующие положения. Множество видов конформно неэквивалентных двусвязных Р. п., подобных однолистным (колец), зависит от одного действительного параметра (м о д у л я) k, $0<k<1$; т. е. два кольца $0<r_\nu<|z|<R_\nu$, $\nu=1, 2$, конформно эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают отношения их радиусов: $k=(r_1/R_1)=(r_2/R_2)$. Множество видов конформно неэквивалентных n-связных Р. п., подобных однолистным, при $n>2$ зависит от $3n-6$ действительных параметров. Множество видов конформно неэквивалентных замкнутых Р. п. рода $g\geqslant 1$ при $g=1$ зависит от двух действительных параметров, а при $g>1$ — от $6g-6$ действительных параметров (см. *Римановых поверхностей конформные классы*, а также [3], [12], [13], [15], [16]; относительно поведения функций других классов на Р. п. см. *Римановых поверхностей классификация*).

Важным аспектом теории Р. п. является связь с понятием униформизации. Для многозначной, вообще говоря, аналитич. функции

$$w=f(z) \tag{2}$$

ее Р. п. R_f дает геометрич. средство униформизации: многозначное соотношение (2) заменяется двумя однозначными представлениями:

$$w=F(p),\ z=g(p),\ p\in R_f, \tag{3}$$

выражающими переменные z и w однозначно во всей области существования функции (2) как полной аналитич. функции. С другой стороны, подход К. Вейерштрасса (K. Weierstrass) к построению понятия полной аналитич. функции (2) состоит в использовании локального униформизирующего параметра t, позволяющего выразить переменные z и w аналитически в виде однозначных аналитич. функций $z=z(t)$ и $w=w(t)$ локально в окрестности нек-рой точки (z_0, w_0), $w_0=f(z_0)$. Задача униформизации в ее простейшей классич. постановке есть задача синтеза этих двух идей. Требуется заменить соотношение (2) во всей области его определения двумя аналитич. представлениями $z=z(t)$, $w=w(t)$, где t — униформизирующее комплексное переменное, изменяющееся в нек-рой области на плоскости.

Возможность униформизации в указанной постановке установлена П. Кёбе и независимо А. Пуанкаре почти одновременно в 1907. Если Р. п. R_f функции (2) односвязна или подобна однолистной, то задача униформизации сводится к построению конформного отображения $\varphi: R_f\to D$ Р. п. R_f на плоскую область D. Представления (3) тогда дают искомую униформизацию:

$$z=g[\varphi^{-1}(t)],\ w=F[\varphi^{-1}(t)],\ t\in D.$$

Конформное отображение f на плоскую область существует для Р. п. R_f, подобных однолистным, и только для них (о б щ а я т е о р е м а у н и ф о р м и з а ц и и).

В общем случае произвольного аналитич. соотношения (2) Р. п. R_f не является подобной однолистной, но ее универсальная накрывающая $\hat{R}_f$ односвязна, и следовательно, существует конформное отображение

$$\psi: \hat{R}_f\longrightarrow D,$$

где D — одна из упоминавшихся областей: $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ или единичный круг. Функция $w=f(z)$ мероморфна на Р. п. R_f, а следовательно и на $\hat{R}_f$, причем она зависит только от проекции $p=p(q)$, $p\in R_f$, точки $q\in\hat{R}_f$. Таким образом, получается геометрич. униформизация в виде

$$z=g[p(q)],\ w=F[p(q)],$$

а отсюда и аналитич. униформизация:

$$z = g\{p[\psi^{-1}(t)]\} = \Psi(t),$$
$$w = F\{p[\psi^{-1}(t)]\} = \Phi(t),\ t \in D,$$

где z и w выражаются как мероморфные функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ переменного $t \in D$. Эти функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ суть *автоморфные функции* в области D относительно группы автоморфизмов Λ, изоморфной фундаментальной группе $\pi_1(R_f)$ Р. п. R_f униформизируемой функции (см. [3], [7], [15], [16]).

Лит.: [1] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.—Л., 1948; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [3] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [4] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1—2, М., 1962; [5] его же, Лекции о топологических принципах теории аналитических функций, пер. с франц., М., 1964; [6] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [7] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955; [8] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957; [9] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.—Л., 1948; [10] Волковыский Л. И., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1950, т. 34, с. 3—171; [11] его же, «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, в. 5, с. 77—84; [12] Крушкаль С. Л., Квазиконформные отображения и римановы поверхности, Новосиб., 1975; [13] Крушкаль С. Л., Апанасов Б. Н., Гусевский Н. А., Клейновы группы в примерах и задачах, Новосиб., 1978; [14] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 16, М., 1978, с. 191—245; [15] Альфорс Л., Берс Л., Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, пер. с англ., М., 1961; [16] Берс Л., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 4, с. 153—98; 1974, т. 29, в. 2, с. 86—102; [17] Klein F., Riemannsche Flächen... Vorlesung von F. Klein, Gött., 1894; [18] Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche, 3 Aufl., Stuttg., 1955; [19] Ahlfors L., Sario L., Riemann surfaces, Princeton, 1960; [20] Pfluger A., Theorie der Riemannschen Flächen, B.— [u. a.], 1957; [21] Sario L., Nakai M., Classification theory of Riemann surfaces, B.— [u. a.], 1970; [22] Heins M., Hardy classes on Riemann surfaces, B.— [u. a.], 1969; [23] Gunning R. C., Lectures on Riemann surfaces, Princeton, 1966; [24] его же, Lectures on Riemann surfaces, Jacobi varieties, Princeton, 1972; [25] Форстер О., Римановы поверхности, пер. с нем., М., 1980.

Е. Д. Соломенцев.

РИМАНОВА СВЯЗНОСТЬ — *аффинная связность* на римановом пространстве M, относительно к-рой метрич. тензор пространства g_{ij} является ковариантно постоянным. Если аффинная связность на M задана с помощью матрицы локальных форм связности

$$\left.\begin{aligned} &\omega^i = \Gamma^i_k\, dx^k,\ \det|\Gamma^i_k| \not\equiv 0, \\ &\omega^i_j = \Gamma^i_{jk}\, dx^k \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

и метрич. формой на M является $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$, то последнее условие выражается в виде

$$dg_{ij} = g_{kj}\omega^k_i + g_{ik}\omega^k_j. \qquad (2)$$

Оно может быть выражено еще следующим образом: при *параллельном перенесении* вдоль любой кривой многообразия M скалярное произведение $\langle X, Y\rangle = g_{ij}\omega^i(X)\omega^j(Y)$ произвольных двух векторов сохраняет свое значение, т. е. для любых векторных полей X, Y, Z на M справедливо равенство

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle,$$

где $\nabla_Z X$ — векторное поле, называемое ковариантной производной поля X относительно поля Z и определяемое формулой

$$\omega^i(\nabla_Z X) = Z\omega^i(X) + \omega^i_k(Z)\,\omega^k(X).$$

Если на M перейти к локальному полю ортонормированных реперов, то $g_{ij} = \delta_{ij}$ (если ограничиться случаем положительно определенной ds^2) и условие (2) принимает вид

$$\omega^j_i + \omega^i_j = 0,$$

т. е. матрица ω, составленная из форм (1), принимает значения в алгебре Ли группы движений евклидова

пространства E_n размерности $n=\dim M$. Поэтому Р. с. может быть интерпретирована как связность в расслоенном пространстве ортонормированных реперов в касательных к M евклидовых пространствах. *Голономии группа* Р. с. есть нек-рая подгруппа группы движений пространства E_n; римановой связностью для нек-рой римановой метрики на M является каждая аффинная связность, группа голономии к-рой — группа движений или нек-рая ее подгруппа.

Если в (1) $\omega^i=dx^i$ (то есть M отнесено к полю натуральных реперов локальной координатной системы), то

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}=g_{kj}\Gamma^k_{il}+g_{ik}\Gamma^k_{jl},$$

и

$$\Gamma^k_{ij}=\left\{\begin{matrix}k\\ij\end{matrix}\right\}-\frac{1}{2}S^k_{ij}-g^{kl}g_{m\,(i}S^m_{j)l},$$

где

$$\left\{\begin{matrix}k\\ij\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\,g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

— т. н. символ Кристоффеля и $S^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji}$ — тензор кручения Р. с. Существует одна и только одна Р. с. без кручения (т. е. такая, что $S^k_{ij}=0$), к-рая определяется формами $\omega^i_j=\left\{\begin{matrix}i\\jk\end{matrix}\right\}dx^k$ и наз. *Леви-Чивита связностью*.

Лит.: [1] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [2] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960.

Ю. Г. Лумисте.

РИМАНОВО МНОГООБРАЗИЕ — дифференцируемое многообразие, наделенное *римановой метрикой*. По существу Р. м.— то же, что и *риманово пространство*.

М. И. Войцеховский.

РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО — пространство, в малых областях к-рого имеет место приближенно (с точностью до малых высшего порядка сравнительно с размерами областей) евклидова геометрия, хотя в целом такое пространство может не быть евклидовым. Р. п. названо по имени Б. Римана (B. Riemann), наметившего в 1854 основы теории таких пространств (см. *Римановa геометрия*). Простейшими Р. п. являются евклидово пространство и примыкающие к нему два других пространства постоянной кривизны, в к-рых имеет место *Лобачевского геометрия* и *Римана геометрия* (не смешивать последнюю с общей римановой геометрией, к-рая изучает Р. п. вообще).

По материалам одноименной статьи в БСЭ-3.

РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО ОБОБЩЕННОЕ — пространство с *внутренней метрикой*, подчиненное нек-рым ограничениям на кривизну. К ним относятся пространства с «кривизной, ограниченной сверху», и др. (см. [3]). Р. п. о. отличаются от *римановых пространств* не только большей общностью, но и тем, что они определяются и исследуются, исходя из метрики, без координат. При нек-ром соединении условий на кривизну и поведении кратчайших (т. е. кривых, длины к-рых равны расстояниям между концами) Р. п. о. оказывается римановым, что дает чисто метрич. определение риманова пространства.

Определения Р. п. о. исходят из классич. связи кривизны с избытком *геодезического треугольника* (избыток — сумма углов минус π). Эти понятия переносятся на пространство с внутренней метрикой такое, что у каждой точки его есть окрестность, любые две точки к-рой соединены кратчайшей. Это условие далее подразумевается без оговорок. Треугольником $T=ABC$ наз. тройка кратчайших AB, BC, CA — сторон треугольника, соединяющих попарно три различных точки A, B, C — вершины треугольника. Угол определяется между кривыми в любом метрич. пространстве.

Пусть L, M — исходящие из одной точки O кривые в пространстве с метрикой ρ. Выбираются точки $X \in L$, $Y \in M$ (X, $Y \neq O$), строится евклидов треугольник со сторонами $x=\rho(O, X)$, $y=\rho(O, Y)$, $z=\rho(X, Y)$ и углом $\gamma(x, y)$, противолежащим стороне z. Определяется **верхний угол между L и M**:

$$\overline{\alpha} = \overline{\lim_{xy \to 0}} \gamma(x, y). \tag{1}$$

Верхние углы треугольника — это верхние углы $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ между его сторонами при вершинах A, B, C, а избыток треугольника $\overline{\delta}(T)=\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+\tilde{\gamma}-\pi$.

Р. п. о. с ограниченной кривизной ($\leqslant K$ и $\geqslant K'$) определяется условием:

(A) для каждой последовательности треугольников T_n, стягивающихся к точке,

$$K \geqslant \overline{\lim} \frac{\overline{\delta}(T_n)}{\sigma(T_n^0)} \geqslant \lim \frac{\overline{\delta}(T_n)}{\sigma(T_n^0)} \geqslant K', \tag{2}$$

где $\sigma(T_n^0)$ — площадь евклидова треугольника с такими же сторонами, что T_n (если $\sigma(T_n^0)=0$, то $\overline{\delta}(T_n)=0$). Такое пространство оказывается римановым при двух естественных дополнительных условиях:

(1) **локальная компактность пространства** (в пространстве с внутренней метрикой это уже обеспечивает условие локального существования кратчайших);

(2) **локальная продолжаемость кратчайших** — у каждой точки существует окрестность U такая, что любую кратчайшую XY, где X, $Y \in U$, можно продолжить за ее концы. При всех этих условиях пространство является римановым (см. [4]), причем в окрестности каждой точки можно ввести координаты x^i так, что метрика будет задаваться линейным элементом $ds^2=g_{ij}dx^i dx^j$ с коэффициентами $g_{ij} \in W_q^2 \cap C^{1,\alpha}$, $0<\alpha<1$. Тем самым имеется параллельный перенос (с непрерывными Γ_{jk}^i) и почти везде — тензор кривизны.

Кроме того, доказано [7], что координаты x^i можно взять гармоническими, т. е. удовлетворяющими равенствам $\sum_{ij} g^{ij}\Gamma_{ij}^l=0$. Гармонич. системы координат составляют атлас класса $C^{3,\alpha}$ при любом α, $0<\alpha<1$.

Р. п. о. с ограниченной кривизной при $K=K'$, удовлетворяющее условиям (1) и (2), является римановым пространством постоянной римановой кривизны K (см. [3]).

Всякое риманово пространство с римановой кривизной, заключенной между K и K' ($K' \leqslant K$), является Р. п. о. кривизны $\leqslant K$ и $\geqslant K'$ и удовлетворяет условиям (1) и (2).

«Пространство с кривизной $\leqslant K$» определяется левым неравенством (2), т. е. условием:

(A^-) для любой последовательности треугольников T_n, стягивающихся в точку,

$$\overline{\lim} \frac{\overline{\delta}(T_n)}{\sigma(T_n^0)} \leqslant K. \tag{3}$$

Другое равносильное определение и начало исследования Р. п. о. исходят из сравнения произвольного треугольника $T=ABC$ с треугольником T^k со сторонами той же длины в пространстве постоянной кривизны K. Пусть α_k, β_k, γ_k — углы такого треугольника; относительный верхний избыток треугольника T определяется как $\overline{\delta}_k(T)=(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+\tilde{\gamma})-(\alpha_k+\beta_k+\gamma_k)$. Условие ($A^-$) в определении пространства с кривизной $\leqslant K$ можно заменить на условие:

(A_1^-) у каждой точки есть окрестность R_k, в к-рой $\overline{\delta}_k(T) \leqslant 0$ для всякого треугольника T. Выполняется и более сильное свойство вогнутости метрики. Именно,

пусть L, M — кратчайшие, исходящие из одной точки O, и $\gamma_k(x, y)$ — угол в треугольнике T^k со сторонами $x=\rho(O, X)$, $y=\rho(O, X)$, $z=\rho(X, Y)$, $X\in L$, $Y\in M$, в пространстве постоянной кривизны K, противолежащий стороне z. В R_k (локально) угол $\gamma_k(x, y)$ оказывается неубывающей функцией ($\gamma_k(x_1, y_1)\leqslant\gamma_k(x_2, y_2)$ при $x_1\leqslant x_2$, $y_1\leqslant y_2$). Отсюда следуют локальные свойства:

(I) между любыми двумя кратчайшими, исходящими из одной точки, существует угол и даже «угол в сильном смысле» $\alpha_C=\lim\limits_{xy\to 0}\gamma_k(x, y)$ (так что, в частности, если $y=\text{const}$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y-z}{x}=\cos\alpha_C$);

(II) для углов α, β, γ треугольника в R_k и соответствующего треугольника T^k

$$\alpha\leqslant\alpha_k,\ \beta\leqslant\beta_k,\ \gamma\leqslant\gamma_k;$$

(III) в R_k, если $A_n\to A$, $B_n\to B$, кратчайшие $A_nB_n\to AB$ (тем самым кратчайшая в R_k с данными концами единственна).

Двойственными пространствами с кривизной $\leqslant K$ будут пространства с кривизной $\geqslant K$, определяемые аналогично через нижние избытки, к-рые вычисляются по нижним углам в сильном смысле. Для кратчайших L, M этот угол есть

$$\alpha=\varliminf_{xy\to 0}\gamma(x, y).$$

Нижний избыток треугольника есть $\underline{\delta}=\underline{\alpha}+\underline{\beta}+\underline{\gamma}-\pi$. Пространство с кривизной $\geqslant K$ — это такое пространство, в к-ром вместо (A^-) выполняется условие:

(A^+) для любой последовательности T_n треугольников, стягивающихся к точке,

$$\varliminf\frac{\underline{\delta}(T_n)}{\sigma(T_n^0)}\geqslant K. \tag{4}$$

Неравенство с верхним избытком $\overline{\delta}$, противоположное неравенству (3), не дает содержательных результатов, их не дает и неравенство с избытком, вычисляемым просто с нижними углами

$$\varliminf_{xy\to 0}\gamma(x, y).$$

Условие (A^+) можно заменить на условие:

(A_1^+) у каждой точки есть окрестность R_k^+, в к-рой $\underline{\delta}_k(T)\geqslant 0$ для всякого треугольника T. В R_k^+ (локально) угол $\gamma_k(x, y)$ для двух кратчайших L, M оказывается невозрастающей функцией *(выпуклая метрика)*.

Аналогично пространствам с кривизной $\leqslant K$ для пространств с кривизной $\geqslant K$ выполняются (локальные) свойства, подобные (I) и (II): между кратчайшими существует угол в сильном смысле; $\alpha\geqslant\alpha_k$, $\beta\geqslant\beta_k$, $\gamma\geqslant\gamma_k$ для всякого треугольника в R_k^+. Вместо (III) выполняется условие неналегания кратчайших или, что то же, единственность их продолжения: если $AC\supset AB$ и $AC_1\supset AB$ в R_k^+, то либо $AC\supset AC_1$, либо $AC_1\supset AC$.

Таким образом, пространство с ограниченной кривизной получается соединением условий, определяющих оба класса пространств — с кривизной, ограниченной сверху или снизу (причем в левой части неравенства (3) нет нужды брать $\underline{\delta}$). Условие (A) можно заменить, подобно (A_1^+) и (A_1^-), на условие:

(A_1) у каждой точки есть окрестность $R_{kk'}$, где $\underline{\delta}_k(T)\leqslant 0$, $\underline{\delta}_{k'}(T)\geqslant 0$ для всякого треугольника T. Это оказывается также равносильным следующему:

(A_2) для всякой четверки точек в $R_{kk'}$ существует четверка точек с теми же попарными расстояниями в пространстве постоянной кривизны k, где $K'\leqslant k\leqslant K$ и k зависит, вообще говоря, от выбранной четверки точек в $R_{kk'}$.

Примером Р. п. о. с кривизной $\leqslant K$ ($\geqslant K'$) является область риманова пространства, в к-рой римановы кривизны всех двумерных площадок во всех точках ограничены сверху (снизу) числом K (K').

Множество V в пространстве с внутренней метрикой наз. выпуклым, если любые две точки $X, Y \in V$ можно соединить кратчайшей X, Y и всякая такая кратчайшая содержится в V.

Установлен [8] следующий результат: если пространство R с внутренней метрикой получено склеиванием двух пространств R', R'' кривизны $\leqslant K$ по выпуклым множествам $V' \subset R''$ и $V'' \subset R''$, то R само есть пространство кривизны $\leqslant K$. Условие склеивания заключается в том, что $R = R' \cup R''$, $V' = V'' = R' \cap R''$ и в R', R'' индуцируется метрика пространства R.

Две выходящие из точки O кривые L, M (по определению) имеют в O одинаковое направление, если верхний угол между ними равен нулю (если $L = M$, то говорят, что L имеет в O определенное направление). Направление в точке O определяется как класс кривых, имеющих в O одинаковое направление. Направления в точке O образуют метрич. пространство, в к-ром расстояние между направлениями определяется верхним углом между любыми их представителями. Это пространство наз. пространством направлений в точке O.

Доказано [5]: если точка O содержится в окрестности пространства кривизны $\leqslant K$, гомеоморфной E^n, то пространством направлений в точке O является пространством кривизны $\leqslant 1$. Неизвестно (1983), гомеоморфно ли оно $(n-1)$-мерной сфере.

В двумерном случае теория многообразий ограниченной кривизны (см. *Двумерное многообразие ограниченной кривизны*) включает в себя как частный случай теорию многообразий с кривизной $\leqslant K$. Примером двумерного многообразия с кривизной $\leqslant K$ является линейчатая поверхность в R_k, снабженная внутренней метрикой, т. е. поверхность, образованная внутренними частями кратчайших, концы к-рых зачеркивают две спрямляемые кривые L_1, L_2. Если кривая L_2 вырождается в точку O, поверхность наз. конусом кратчайших, натянутым из точки O на кривую L_1. Если L_1 есть треугольник OAB, то такой конус наз. поверхностным треугольником (см. [3]).

Отображение $\varphi : M_1 \to M_2$ метрич. пространства наз. нерастягивающим, если $\rho_{M_1}(X, Y) \geqslant \rho_{M_2}(\varphi(X), \varphi(Y))$ для любых $X, Y \in M_1$. Отображение $\varphi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ замкнутой кривой Γ_1 в M_1 на замкнутую кривую Γ_2 в M_2 наз. эквилонгальным, если длины соответствующих при отображении φ дуг кривых Γ_1 и Γ_2 совпадают. Пусть V — выпуклая область в пространстве постоянной кривизны K и L — краевой контур V. Область V мажорирует замкнутую кривую Γ в метрич. пространстве M, если существует нарастающее отображение области V в M, эквилонгально отображающее L на Γ. Само отображение наз. мажорирующим.

Пусть R_k — выпуклое пространство с внутренней метрикой; C — конус кратчайших, натянутый на замкнутую спрямляемую кривую Γ в R_k из точки $O \in \Gamma$, причем в случае $K > 0$ длина l кривой Γ меньше $2\pi/\sqrt{K}$. Тогда в пространстве постоянной кривизны K существует выпуклая область V, мажорирующая Γ, такая, что $\varphi(V) = C$ для соответствующего мажорирующего отображения φ. Это свойство характеризует пространства кривизны $\leqslant K$. Достаточным является уже существование эквилонгального нерастягивающего отображения контура L области V на Γ.

Поверхностью в метрич. пространстве M наз. непрерывное отображение f круга B в M. Пусть P — триангулируемый многоугольник, т. е. комплекс

из треугольников T_i, вписанный в B. Треугольнику T_i с вершинами X, Y, Z сопоставляется евклидов треугольник T_i^0 со сторонами, равными расстоянию между точками $f(X)$, $f(Y)$, $f(Z)$. Пусть $S_0(P)$ обозначает сумму площадей $S(T_i^0)$ всех треугольников T_i^0; тогда площадь $S(f)$ поверхности f определяется (см. [3]) как нижний предел величин $S_0(P)$ при условии, что вершины комплекса P неограниченно сгущаются в B: $S(f)=\lim S_0(P)$. Это определение модифицировано так (см. [6]). Вместо точек $f(X)$, $f(Y)$, $f(Z)$ вершинам X, Y, Z треугольника T_i комплекса P сопоставляются нек-рые точки X^P, Y^P, Z^P в M, причем вершинам комплекса P сопоставляются одинаковые точки в том и только в том случае, когда образы вершин при отображении f совпадают. За площадь $L(f)$ поверхности f принимается нижний предел сумм площадей евклидовых треугольников T_i^0 со сторонами, равными расстояниям между точками X^P, Y^P, Z^P при дополнительном предположении, что $\rho(f(X_k), X_k^P)$ по всем вершинам X_k комплекса P стремится к нулю. Всегда $L(f)\leqslant S(f)$.

1) Если последовательность поверхностей f_n в R_k равномерно сходится к поверхности f, то

$$L(f)\leqslant \lim L(f_n) \text{ (полунепрерывность).}$$

2) Если p — нерастягивающее отображение из R_k в R_k и f — поверхность в R_k, то

$$L(p\circ f)\leqslant L(f) \text{ (принцип Колмогорова).}$$

3) Площадь $S(f)$ поверхностного треугольника T в R_k не больше площади соответствующего треугольника T^k и равна ему тогда и только тогда, когда треугольник T изометричен T^k (локальное свойство).

4) В условиях теоремы о существовании мажорирующего отображения (см. выше) площадь $S(G)$ не больше площади круга в пространстве постоянной кривизны K с периметром l (изопериметрическое неравенство) (см. [3], [6]).

Решается [6] задача Плато в R_k о существовании поверхности минимальной площади, натянутой на замкнутую кривую Γ. Доказано следующее. Пусть R_k — метрически полное пространство кривизны $\leqslant K$ (при $K>0$ диаметр $d(R_k)<\pi/2\sqrt{K}$), Γ — замкнутая жорданова кривая в R_k. Тогда существует поверхность f минимальной площади $L(f)$, натянутая на кривую Γ. Пусть Γ, Γ_n, $n=1, 2, \ldots$,— замкнутые жордановы кривые в таком пространстве и $a(\Gamma)$, $a(\Gamma_n)$ — минимальные площади поверхностей, натянутых соответственно на Γ и Γ_n. Если Γ_n равномерно сходятся в нек-рых параметризациях к Γ, то $a(\Gamma)\leqslant\lim a(\Gamma_n)$.

Рассматривались двумерные многообразия с индефинитной метрикой ограниченной кривизны. Не решена (1983) задача бескоординатного определения многомерных пространств с индефинитной метрикой ограниченной кривизны, в частности пространств общей теории относительности.

Лит.: [1] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.—Л., 1948; [2] его же, «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 5—23; [3] его же, «Schrift. Inst. Math. Deutsch. Acad. Wiss.», 1957, H. 1, S. 33—84; [4] Берестовский В. Н., «Сиб. матем. ж.», 1975, т. 16, № 4, с. 651—62; [5] Николаев И. Г., там же, 1978, т. 19, № 6, с. 1341—48; [6] его же, там же, 1979, т. 20, № 2, с. 345—53; [7] Решетняк Ю. Г., «Матем. сб.», 1960, т. 52, № 3, с. 789—98; [8] его же, «Сиб. матем. ж.», 1968, т. 9, № 4, с. 918—27.

А. Д. Александров, В. Н. Берестовский.

РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО ОДНОРОДНОЕ — риманово пространство (M, γ) вместе с транзитивной эффективной группой G его движений. Пусть K — стационарная подгруппа фиксированной точки $o\in M$. Тогда многообразие M отождествляется с факторпространством G/K с помощью биекции $G/K\ni gK\Longleftrightarrow go\in M$, а риманова метрика γ рассматривается как G-инвариантная метрика на G/K. Обычно предполагается дополни-

тельно, что группа G замкнута в полной группе движений. В этом случае стационарная подгруппа K компактна.

Пусть K — компактная подгруппа группы Ли G, не содержащая нормальных делителей группы G. Тогда однородное пространство $M=G/K$ допускает инвариантную риманову метрику γ, к-рая определяется следующим образом. Пусть $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{M}$ — редуктивная структура в M, т. е. разложение алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы Ли G в прямую сумму алгебры Ли $\mathfrak{K}$ группы K и подпространства $\mathfrak{M}$, инвариантного относительно присоединенного представления $\mathrm{Ad}\,K$ группы K в пространстве $\mathfrak{G}$. Пространство $\mathfrak{M}$ естественным образом отождествляется с касательным пространством $T_oM\approx\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ точки $o=eK$, а представление изотропии группы K в T_oM — с представлением $\mathrm{Ad}\,K|\mathfrak{M}$. Любая G-инвариантная риманова метрика γ на M получается из нек-рого $\mathrm{Ad}\,K$-инвариантного скалярного произведения γ_0 в $\mathfrak{M}$ разнесением с помощью преобразований из G:

$$\gamma_{go}(X, Y)=\gamma_0\left(g^{-1}X, g^{-1}Y\right),\ X, Y\in T_{go}M,\quad g\in G.$$

Существование такого скалярного произведения следует из компактности группы изотропии $\mathrm{Ad}\,K|\mathfrak{M}$.

Любое Р. п. о., локально изометричное односвязному Р. п. о. M, получается из M факторизацией по произвольной дискретной группе изометрий Клиффорда — Вольфа (т. е. движений многообразия M, перемещающих все точки на одинаковые расстояния [2]).

Наиболее изученными классами Р. п. о. являются римановы симметрич. пространства, однородные кэлеровы пространства и однородные кватернионные пространства, изотропно неприводимые Р. п. о. (классифицированы в [9], [10]), нормальные Р. п. о., в к-рых скалярное произведение γ_0 в $\mathfrak{M}$ продолжается до невырожденной симметрической $\mathrm{Ad}\,G$-инвариантной билинейной формы на $\mathfrak{G}$, естественно редуктивные Р. п. о., характеризуемые тем, что в них любая геодезическая является траекторией однопараметрич. группы движений.

Изучена структура Р. п. о. с различными условиями на тензор кривизны. Напр., известна классификация Р. п. о. положительной секционной кривизны [5]. Описана структура просто транзитивных групп движений Р. п. о. неположительной кривизны [8], неотрицательной кривизны и неотрицательной кривизны Риччи [4]. Р. п. о. с разрешимой группой движений G всегда имеет неположительную скалярную кривизну sk, и случай $\mathrm{sk}=0$ возможен только для локально евклидова пространства. Любая инвариантная риманова метрика на односвязном Р. п. о. G/K имеет неположительную скалярную кривизну тогда и только тогда, когда K есть максимальная компактная подгруппа группы G (см. [4]).

Р. п. о. (M, γ) наз. эйнштейновым, если его тензор Риччи ρ пропорционален метрике: $\rho=\lambda\gamma$, $\lambda=\mathrm{const}$. Проблема описания эйнштейновых Р. п. о. не решена (1983). Известен ряд частных результатов. Пусть $(M=G/K,\ \gamma)$ — эйнштейново Р. п. о. со скалярной кривизной sk. 1) Если $\mathrm{sk}>0$, то многообразие M компактно. Описаны все такие пространства: а) если (M, γ) — кватернионное пространство, б) если M диффеоморфно симметрич. пространству ранга один, в) для нек-рого класса естественно редуктивных Р. п. о. (см. [7]) и для изотропно неприводимых Р. п. о. (см. [10]). 2) Если $\mathrm{sk}=0$, то M есть локально евклидово пространство. 3) Если $\mathrm{sk}<0$ и группа G унимодулярна (т. е. определитель операторов ее присоединенного представления равен 1), то группа G полупроста.

Лит.: [1] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 2, М., 1981; [2] Вольф Дж., Пространства постоянной кривизны, пер. с англ., М., 1982; [3] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М.,

1964; [4] Bérard Bergery L., «Ann. sci Ec. norm. sup.», 1978, t. 11, № 4, p. 543—76; [5] его же, «J. Math. pures et appl.», 1976, t. 55, p. 47—67; [6] Jensen G. R., «J. Dif. Geom.», 1973, v. 8, p. 599—614; [7] D'Atri J. E., Ziller W., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1979, v. 18, p. 1—72; [8] Azencott R., Wilson E. N., там же, 1976, v. 8, p. 1—102; [9] Мантуров О. В., «Тр. сем. по вект. и тенз. анализу», 1966, т. 13, 68—145; [10] Wolf J., «Acta math.», 1968, v. 120, p. 59—148.

Д. В. Алексеевский.

РИМАНОВЫ КООРДИНАТЫ — см. *Геодезические координаты.*

РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КЛАССИФИКАЦИЯ — изучение римановых поверхностей (р. п.), связанное с рассмотрением поведения функций различных классов на этих поверхностях.

Комплексная функция $f: R \to \overline{\mathbb{C}}$ на р. п. R наз. аналитической на R, если для любой точки $p_0 \in R$ существуют окрестность U и *локальный униформизирующий параметр* $z=\varphi(p)$, $\varphi(p_0)=0$, отображающий гомеоморфно U на единичный круг $D=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ и такой, что сложная функция $F(z)=f[\varphi^{-1}(z)]$ является однозначной аналитич. функцией в D. Аналогично определяются на р. п. действительные и комплексные гармонич. функции, субгармонич. функции и др. Пусть W — нек-рый конформно инвариантный класс функций на р. п. R, содержащий константы. Задача Р. п. к. в простейшей постановке состоит в определении условий, при к-рых данная р. п. R принадлежит или не принадлежит классу O_W таких р. п., что класс W на них состоит только из констант. Теория Р. п. к. выросла в 20 в. из классич. теоремы Римана о конформном отображении односвязных р. п., проблемы типа, проблемы существования *Грина функции* р. п. и понятия идеальной границы р. п.

Теорема Римана утверждает, что любая односвязная р. п. R отображается конформно (и, следовательно, гомеоморфно) на плоскую область D одного из трех видов: $D=\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ — расширенная комплексная плоскость (случай р. п. R эллиптического типа); $D=\mathbb{C}$ — конечная комплексная плоскость (R — параболического типа); $D=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ — единичный круг (R — гиперболического типа). Поскольку эллиптич. случай отличается от остальных уже топологически, остается трудная задача распознавания, когда данная р. п. R принадлежит гиперболическому или параболич. типу. Это и есть классич. проблема типа, полностью пока не решенная (1983). Известно, что замкнутая р. п. рода g при $g=0$ эллиптич. типа, при $g=1$ параболич. типа, при $g>1$ гиперболич. типа, поэтому проблема типа важна в основном для открытых р. п. В случае произвольной р. п. R, не обязательно односвязной, ее типом является тип ее универсальной накрывающей поверхности (см. *Универсальное накрытие*) $\hat{R}$, к-рая всегда односвязна.

Для односвязных конечных р. п. R задача отыскания конформного отображения R на единичный круг D эквивалентна задаче отыскания функции Грина $G(p, p_0)$ для R, т. е. положительной гармонич. функции с логарифмич. особенностью вида $\ln(1/|z-z_0|)$ в полюсе $p_0\in R$ ($z=\varphi(p)$ — параметр в окрестности p_0, $z_0=\varphi(p_0)$, обращающийся в нуль во всех точках края ∂R). Функция Грина строится и для многосвязных конечных р. п. гиперболич. типа. В случае произвольной открытой р. п. R можно построить исчерпание $\{\overline{R}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ поверхности R с помощью конечных р. п. $\overline{R}_\nu$ с краем, имеющих функции Грина

$$G_\nu(p, p_0)=\ln\frac{1}{|z-z_0|}+\gamma_\nu+O(|z-z_0|),\ z\to z_0$$

(или $G_\nu(p, p_0)\equiv+\infty$, начиная с нек-рого номера ν), и таких, что $\overline{R}_\nu\subset R_{\nu+1}$, $\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\overline{R}_\nu=R$. Постоянная

$\gamma_\nu, -\infty < \gamma_\nu \leqslant +\infty$, наз. *Робена постоянной* р. п. $\bar{R}_\nu$, $c_\nu = e^{-\gamma_\nu}$ есть *емкость* края $\partial\bar{R}_\nu$ (относительно фиксированного полюса $p_0 \in R$). При стремлении ν к ∞ значения $G_\nu(p, p_0)$ и γ_ν могут только возрастать. Функция Грина открытой р. п. R определяется как предел $G(p, p_0)$ возрастающей последовательности $\{G_\nu(p, p_0)\}$, если он существует; в противном случае, когда

$$\lim_{\nu\to\infty} G_\nu(p, p_0) \equiv +\infty,$$

говорят, что р. п. R не имеет функции Грина, причем существование или несуществование функции Грина не зависит от выбора полюса $p_0 \in R$. Класс р. п., для к-рых функция Грина не существует, обозначается $\mathcal{O}_G$. Иными словами, класс $\mathcal{O}_G$ характеризуется тем, что

$$\lim_{\nu\to\infty} \gamma_\nu = +\infty \quad \text{или} \quad \lim_{\nu\to\infty} c_\nu = 0,$$

причем эти соотношения также не зависят от выбора полюса.

Пусть R — открытая р. п. и $\{\Delta_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ — т. н. *определяющая последовательность* замкнутых на R областей Δ_ν, т. е. такая последовательность, что 1) граница Δ_ν есть простая замкнутая кривая на R; 2) $\Delta_{\nu+1} \subset \Delta_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$; 3) $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu = \varnothing$, то есть Δ_ν не компактны на R. Две определяющие последовательности $\{\Delta_\nu\}$ и $\{\Delta'_\nu\}$ эквивалентны, если каждому ν соответствуют такие n и m, что $\Delta'_n \subset \Delta_\nu$ и $\Delta_m \subset \Delta'_\nu$. Классы эквивалентности определяющих последовательностей наз. *граничными элементами* р. п. R, а совокупность всех граничных элементов образует *идеальную границу* Г р. п. R, рассматриваемой как топологич. поверхность. Напр., идеальная граница единичного круга D состоит из одного граничного элемента. Отметим, что функция Грина открытой р. п. R, в отличие от случая гиперболич. конечной р. п., не обязательно обращается в нуль на всех элементах идеальной границы Г. Класс $\mathcal{O}_G$ характеризуется также как класс р. п. с идеальной границей нулевой емкости, или, короче, как класс р. п. с нулевой границей; если $R \notin \mathcal{O}_G$, то $\lim_{\nu\to\infty} c_\nu = c > 0$ наз. емкостью идеальной границы. Существование или несуществование функции Грина р. п. R, а также объем других функциональных классов на R определяются прежде всего этой и другими более тонкими характеристиками идеальной границы, связанными с самими функциональными классами.

Основными функциональными классами W на р. п. R являются следующие:

AB — класс ограниченных однозначных аналитич. функций на R;

AD — класс однозначных аналитич. функций $f(z)$ на R с конечным *Дирихле интегралом*

$$D_R(f) = \iint_R \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 dx\,dy, \quad z = x + iy;$$

HP, HB и HD — классы однозначных гармонич. функций на R соответственно положительных, ограниченных и с конечным интегралом Дирихле. Эти классы могут комбинироваться, напр. ABD — класс ограниченных однозначных аналитич. функций на R с конечным интегралом Дирихле. Для соответствующих классов $\mathcal{O}_W$ р. п. R установлены следующие строгие включения и равенства:

$$\mathcal{O}_G \subset \mathcal{O}_{HP} \subset \mathcal{O}_{HB} \subset \mathcal{O}_{AB} \subset \mathcal{O}_{ABD} = \mathcal{O}_{AD},$$
$$\mathcal{O}_{HB} \subset \mathcal{O}_{HD} \subset \mathcal{O}_{AD}, \quad \mathcal{O}_{HBD} = \mathcal{O}_{HD}.$$

Для плоских областей R эти соотношения упрощаются:

$$\mathcal{O}_G = \mathcal{O}_{HP} = \mathcal{O}_{HB} = \mathcal{O}_{HD},$$

$$\mathcal{O}_{AB} \subset \mathcal{O}_{ABD} = \mathcal{O}_{AD}.$$

Важное значение имеют также классы Харди AH_p, $0<p\leqslant+\infty$, однозначных аналитич. функций $w=f(z)$ на р. п. R. При $0<p<+\infty$ функция $f\in AH_p$, если субгармонич. функция $|f|^p$ имеет на всей р. п. R гармонич. мажоранту, а $AH_\infty = AB$ (см. *Граничные свойства аналитических функций*).

Р. п. параболич. типа принадлежит классу $\mathcal{O}_G$, поэтому иногда вопрос о характеризации р. п. класса $\mathcal{O}_G$ наз. обобщенной проблемой типа. Имеется много результатов, в к-рых в различных терминах устанавливаются условия принадлежности р. п. указанным выше классам. Глубокие исследования были посвящены выяснению внутренних свойств р. п. определенных классов. В частности, оказалось, что р. п. с нулевой границей во многих отношениях аналогичны замкнутым р. п. На них строятся аналоги *абелевых дифференциалов* и соответствующие интегралы.

Более тонкие свойства идеальной границы р. п. R удается исследовать также с помощью различных компактификаций R. Напр., пусть $N(R)$ — винеровская алгебра функций u на р. п. R, ограниченных, непрерывных и гармонизуемых на R; последнее означает, что для любой регулярной области $G\subset R$ существует обобщенное решение задачи Дирихле в смысле Винера — Перрона (см. *Перрона метод*) с граничными данными u на границе ∂G. Компактификацией Винера р. п. R наз. компактное хаусдорфово пространство R^* такое, что R есть открытое плотное подпространство R^*, каждая функция $u\in N(R)$ непрерывно продолжается на R^* и $N(R)$ разделяет точки R^*. Компактификация Винера существует для любой р. п. R. Множество $\Gamma(R)=R^*\setminus R$ наз. винеровской идеальной границей р. п. R, а подмножество $\Delta(R)\subset\Gamma(R)$, состоящее из тех точек R^*, в к-рых все потенциалы из $N(R)$ обращаются в нуль,— винеровской гармонической границей. В этих терминах, напр., включение $R\in\mathcal{O}_G$ равносильно равенству $\Delta(R)=\varnothing$; отсюда получается также строгое включение $\mathcal{O}_{HP}\subset\mathcal{O}_{HB}$.

С Р. п. к. связан также вопрос об *устранимых множествах* на р. п. Так, компакт K на р. п. R наз. AB-устранимым, если для нек-рой окрестности $U\supset K$ на R все AB-функции на $U\setminus K$ имеют аналитич. продолжение на всю окрестность U.

Внимание многих исследователей привлечено также к вопросам классификации римановых многообразий произвольных размерностей $N\geqslant 2$, связанной с рассмотрением описанных выше классов функций.

Лит. см. при ст. *Риманова поверхность*.

Е. Д. Соломенцев.

РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОНФОРМНЫЕ КЛАССЫ — классы, состоящие из конформно эквивалентных римановых поверхностей. Замкнутые римановы поверхности (р. п.) имеют простой топологич. инвариант — род g; при этом любые две поверхности одного рода гомеоморфны. В простейших случаях топологич. эквивалентность двух р. п. обеспечивает и их принадлежность к одному и тому же Р. п. к. к., то есть конформную эквивалентность, или, говоря иначе, совпадение их конформных структур. Это выполняется, напр., для поверхностей рода 0, то есть гомеоморфных сфере. В общем случае дело обстоит не так. Еще Б. Риман (B. Riemann) заметил, что классы конформной эквивалентности р. п. рода $g>1$ зависят от $3g-3$ комплексных параметров, называемых *модулями римановых поверхностей*; для конформно эквивалентных поверхностей эти модули совпадают. Случай $g=1$ описан ниже. Если же рассматривать компактные р. п. рода g с n

аналитич. компонентами края, то для их конформной эквивалентности требуется совпадение $6g-6+3n$ действительных параметров-модулей ($g\geqslant 0$, $n\geqslant 0$, $6g-6+3n>0$). В частности, для n-связных плоских областей ($n\geqslant 3$) таких модулей $3n-6$; всякая двусвязная плоская область конформно эквивалентна кольцу с определенным отношением радиусов.

Указанное выше замечание Б. Римана послужило истоком классич. проблемы модулей р. п., к-рая заключается в том, чтобы изучить природу этих параметров и, если возможно, ввести их так, чтобы они определяли на множестве р. п. данного рода g комплексно-аналитич. структуру. Имеются два подхода к проблеме модулей: алгебраический и аналитический. Алгебраич. подход связан с изучением полей $K(S)$ мероморфных функций на р. п. S. В случае замкнутой поверхности $K(S)$ есть поле алгебраич. функций (для $g=0$ — это поле рациональных, а для $g=1$ — поле эллиптич. функций). Каждая замкнутая р. п. S конформно эквивалентна р. п. нек-рой алгебраич. функции, определяемой уравнением $P(z, w)=0$, где P — неприводимый многочлен над $\mathbb{C}$. Это уравнение задает плоскую алгебраич. кривую X, и поле рациональных функций на X отождествляется с полем мероморфных функций на S. Конформной эквивалентности р. п. соответствует бирациональная эквивалентность (совпадение) полей их алгебраич. функций или, что равносильно, бирациональная эквивалентность определяемых этими поверхностями алгебраич. кривых.

Аналитич. подход опирается на геометрические и аналитич. свойства р. п. Оказывается удобным ослабить конформную эквивалентность р. п., наложив топологич. ограничения. Вместо р. п. S данного рода $g\geqslant 1$ берутся пары (S, f), где f — гомеоморфизм фиксированной поверхности S_0 рода g на S; две пары (S, f), (S', f') считаются эквивалентными, если существует такой конформный гомеоморфизм $h: S\to S'$, что отображение

$$(f')^{-1}\circ h\circ f\colon S_0\longrightarrow S_0$$

гомотопно тождественному. Множество классов эквивалентности $\{(S, f)\}$ наз. пространством Тайхмюллера $T(S_0)$ поверхности S_0. В $T(S_0)$ вводится метрика с помощью квазиконформных гомеоморфизмов $S\to S'$. Аналогичным образом определяется пространство Тайхмюллера и для некомпактной р. п., но тогда берутся только квазиконформные гомеоморфизмы f. Для замкнутых поверхностей S_0 данного рода g пространства $T(S_0)$ изометрически изоморфны, и можно говорить о пространстве Тайхмюллера T_g поверхностей рода g. Пространство R_g Р. п. к. к. рода g получается факторизацией T_g по нек-рой счетной группе Γ_g его автоморфизмов, называемой *модулярной группой*.

Наиболее простым является случай поверхностей рода 1 — торов. Каждый тор S после конформного отображения его универсальной накрывающей на комплексную плоскость $\mathbb{C}$ представляется в виде $\mathbb{C}/G$, где G — группа сдвигов с двумя образующими ω_1, ω_2 такими, что $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1)>0$; при этом два тора S и S' конформно эквивалентны тогда и только тогда, когда отношения $\tau=\omega_2/\omega_1$ и $\tau'=\omega_2'/\omega_1'$ соответствующих образующих связаны модулярным преобразованием

$$\tau'=(a\tau+b)/(c\tau+d),\ ad-bc=1;$$
$$a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Z}.$$

В качестве (комплексного) модуля данного Р. п. к. к. $\{S\}$ можно взять значение эллиптической модулярной функции $J(\tau)$. Пространство Тайхмюллера T_1 совпадает с полуплоскостью $H=\{\tau\in\mathbb{C}: \operatorname{Im}\tau>0\}$, Γ_1 есть эллиптическая модулярная группа $SL(2, \mathbb{Z})/\{\pm 1\}$, а $R_1=T_1/\Gamma_1$ — риманова поверхность, конформно эквивалентная $\mathbb{C}\setminus\{0, 1\}$. Все эллиптич. кривые (п поверх-

ности рода 1) допускают одновременную униформизацию с помощью функции Вейерштрасса $\wp(z; 1, \tau)$ и ее производной $\wp'(z; 1, \tau)$.

При $g>1$ ситуация значительно сложнее. Установлены, в частности, следующие основные свойства пространства T_g: 1) T_g гомеоморфно R^{6g-6}; 2) T_g биголоморфно вкладывается в виде ограниченной области в $\mathbb{C}^{3g-3}$, к-рая голоморфно выпукла; 3) модулярная группа Γ_g дискретна (даже собственно разрывна) и при $g>2$ является полной группой биголоморфных автоморфизмов T_g; 4) накрытие $T_g \to T_g/\Gamma_g$ является разветвленным, а $T_g/\Gamma_g = R_g$ есть нормальное комплексное пространство с неуниформизируемыми особенностями. Такие же свойства, за отдельными исключениями в 3), имеют место и для более общего случая замкнутых р. п. с конечным числом проколов, к-рым соответствуют конечномерные пространства Тайхмюллера. Указанное биголоморфное вложение T_g в $\mathbb{C}^{3g-3}$ получается с помощью *униформизации* и свойств *квазиконформных отображений*. Поверхность S_0 представляется в виде $S_0 = H/\Gamma_0$, где Γ_0 — *фуксова группа*, действующая разрывно в верхней полуплоскости H (определяемая с точностью до сопряжения в группе всех конформных автоморфизмов H), и рассматриваются квазиконформные автоморфизмы $w = f^\mu(z)$ плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, т. е. решения уравнения Бельтрами $w_{\bar z} = \mu(z) w_z$, где $\mu(z)\overline{dz}/dz$ — инвариантные относительно Γ_0 формы с носителями в H, $\|\mu\|_{L_\infty} < 1$. Пусть еще f^μ оставляют неподвижными точки 0, 1, ∞. Тогда T_g можно отождествить с пространством сужений $f^\mu|R$ или, что равносильно, сужений $f^\mu|L$, $L = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$, и T_g биголоморфно эквивалентно области, заполняемой производными Шварца

$$\{f^\mu, z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]^2, \quad f = f^\mu, \quad z \in L,$$

в комплексном пространстве $B(L, \Gamma_0)$ голоморфных в L решений уравнения

$$\varphi(\gamma(z))\,\gamma'^2(z) = \varphi(z), \quad \gamma \in \Gamma_0,$$

с нормой

$$\|\varphi\| = \sup_L |\operatorname{Im} z|^2 |\varphi(z)|;$$

при этом $\dim B(L, \Gamma_0) = 3g-3$. Используя это вложение, можно построить расслоенное пространство $\tilde T_g$ с базой T_g, также допускающее введение комплексной структуры, и голоморфные функции $\psi_1, \ldots, \psi_{5g-5}$ на $\tilde T_g$, позволяющие дать параметрич. представление всех алгебраич. кривых рода g в комплексном проективном пространстве P^n, $n \geqslant 2$. Указанная конструкция, связанная с вложением T_g в $B(L, \Gamma_0)$, обобщается на произвольные р. п. и фуксовы группы. В частности, для компактных р. п. с аналитич. границами получающееся пространство Тайхмюллера допускает введение в нем глобальной вещественно аналитич. структуры соответствующей размерности.

Другое описание Р. п. к. к. рода $g>1$ получается с помощью т. н. *матриц периодов* этих поверхностей. Это — симметрические $(g \times g)$-матрицы с положительно определенной мнимой частью. Пространство T_g голоморфно вкладывается во множество всех таких матриц (верхнюю полуплоскость Зигеля) H_g (см. [4], [5]).

Имеются замкнутые р. п. с определенной симметрией, конформные классы к-рых зависят от меньшего числа параметров. Это — *гиперэллиптические поверхности*, эквивалентные двулистным р. п. функций $w = \sqrt{p(z)}$, где $p(z)$ — многочлены вида $(z-z_1) \ldots (z-z_{2g+2})$. Они допускают конформную инво-

люцию и зависят от $2g-1$ комплексных параметров. Все поверхности рода 2 гиперэллиптичны; при $g>2$ такие поверхности образуют в T_g аналитич. подмногообразия размерности $2g-1$.

С Р. п. к. к. связан вопрос о конформных автоморфизмах данной римановой поверхности S. За исключением нескольких частных случаев группа $\mathrm{Aut}\, S$ таких автоморфизмов дискретна. В случае замкнутых поверхностей рода $g>1$ она конечна, причем тогда порядок $\mathrm{Aut}\, S$ не превосходит $84(g-1)$.

Имеющаяся классификация некомпактных р. п. бесконечного рода основана на выделении отдельных конформных инвариантов и не определяет Р. п. к. к. полностью; обычно это делается в терминах существования аналитических или гармонич. функций с определенными свойствами.

Лит.: [1] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955; [2] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Крушкаль С. Л., Квазиконформные отображения и римановы поверхности, Новосиб., 1975; [4] Берс Л., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 4, с. 153—98; [5] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957; [6] Abikoff W., The real analytic theory of Teichmüller space, B.— [u. a.], 1980. *С. Л. Крушкаль.*

РИМСКИЕ ЦИФРЫ — цифры древних римлян. Система Р. ц. основана на употреблении особых знаков для десятичных разрядов I=1, X=10, C=100, M=1000 и их половин V=5, L=50, D=500. Натуральные числа записываются при помощи повторения этих цифр. При этом если большая цифра стоит перед меньшей, то они складываются (принцип сложения), если же меньшая — перед большей, то меньшая вычитается из большей (принцип вычитания). Последнее правило применяется только во избежание четырехкратного повторения одной и той же цифры. Выполнение арифметич. действий над многозначными числами в этой записи весьма неудобно. Система Р. ц. в настоящее время не применяется, за исключением, в отдельных случаях, обозначения веков, годов н. э. и месяцев при указании дат, порядковых числительных, а также иногда производных небольших порядков, больших трех: y^{IV}, y^{V} и т. д. *БСЭ-3.*

РИСК статистической процедуры — характеристика, выражающая средние потери экспериментатора в задаче принятия статистич. решения и этим самым определяющая качество используемой статистич. процедуры.

Пусть по реализации случайной величины X, принимающей значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta\in\Theta$, надлежит принять решение d из измеримого пространства решений $(D, \mathcal{A})$ относительно параметра θ. Далее, пусть потери статистика от принятия решения d, если случайная величина X подчиняется закону P_θ, равны $L(\theta, d)$, где L — нек-рая функция потерь, заданная на $\Theta\times D$. В таком случае, если статистик в задаче принятия решения d пользуется нерандомизированной *решающей функцией* $\delta: \mathfrak{X}\to D$, то в качестве характеристики этой решающей функции δ используют функцию

$$R(\theta, \delta)=\mathsf{E}_\theta L(\theta, \delta(X))=\int_{\mathfrak{X}} L(\theta, \delta(X))\, d\mathsf{P}_\theta(x),$$

называемую функцией риска, или просто риском, статистич. процедуры, основанной на решающей функции δ относительно функции потерь L.

Понятие Р. позволяет ввести отношение частичного упорядочивания на множестве $\Delta=\{\delta\}$ всех нерандомизированных решающих функций, при этом считают, что из двух различных решающих функций δ_1 и δ_2 предпочтительнее является δ_1, если $R(\theta, \delta_1)\leqslant R(\theta, \delta_2)$ равномерно по всем θ.

В случае, если решающая функция δ является рандомизированной, Р. статистич. процедуры определяется

по формуле

$$R(\theta, \delta) = \int_{\mathfrak{X}} \int_{D} L(\theta, d)\, d_d Q_x(d)\, d\mathbf{P}_\theta(x),$$

где $\{Q_x(d)\}$ — семейство марковских переходных распределений вероятностей, определяющих процедуру рандомизации.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [3] Вальд А., Статистические решающие функции, в сб.: Позиционные игры, М., 1967. *М. С. Никулин.*

РИСОВСКАЯ ПОЛУГРУППА МАТРИЧНОГО ТИПА — теоретико-полугрупповая конструкция, определяемая следующим образом. Пусть S — произвольная полугруппа, I и Λ — (индексные) множества, $P = (p_{\lambda i})$ — $(\Lambda \times I)$-матрица над S, т. е. отображение декартова произведения $\Lambda \times I$ в S. На множестве $M = I \times S \times \Lambda$ определяется операция посредством формулы

$$(i, s, \lambda)(j, t, \mu) = (i, s p_{\lambda j} t, \mu).$$

Тогда M превращается в полугруппу, к-рая наз. Р. п. м. т. над полугруппой S и обозначается $\mathscr{M}(S; I, \Lambda; P)$; матрица P наз. сэндвич-матрицей полугруппы $\mathscr{M}(S; I, \Lambda; P)$. Если S есть полугруппа с нулем 0, то $Z = \{(i, 0, \lambda) \mid i \in I, \lambda \in \Lambda\}$ есть идеал в $M = \mathscr{M}(S; I, \Lambda; P)$ и факторполугруппа Риса M/Z (см. *Полугруппа*) обозначается $\mathscr{M}^0(S; I, \Lambda; P)$; в случае, когда $S = G^0$ есть группа G^0 с присоединенным нулем, вместо $\mathscr{M}^0(G^0; I, \Lambda; P)$ пишут $\mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ и называют эту полугруппу Р. п. м. т. над группой с присоединенным нулем G^0. Для полугрупп $\mathscr{M}(G; I, \Lambda; P)$ и $\mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ группа G наз. структурной группой.

Другое представление Р. п. м. т. над полугруппой S с нулем и $(\Lambda \times I)$-сэндвич-матрицей P осуществляется следующим образом. $(I \times \Lambda)$-матрица над S наз. матрицей Риса, если она содержит не более одного ненулевого элемента. Через $\|a\|_{i\lambda}$ обозначается матрица Риса над S, у к-рой в i-й строке и λ-м столбце стоит a, а на остальных местах — нули. На множестве всех $(I \times \Lambda)$-матриц Риса над S задается операция:

$$A \circ B = APB, \qquad (*)$$

где в правой части — «обычное» матричное умножение. Относительно этой операции указанное множество образует полугруппу. Отображение $\|a\|_{i\lambda} \mapsto (i, a, \lambda)$ является изоморфизмом этой полугруппы на полугруппу $\mathscr{M}^0(S; I, \Delta; P)$; обозначение $\mathscr{M}^0(S; I, \Lambda; P)$ применяется для обеих этих полугрупп. Формула $(*)$ объясняет термин «сэндвич-матрица» для P. Если G — группа, то полугруппа $\mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ будет регулярной тогда и только тогда, когда каждая строка и каждый столбец матрицы P содержит ненулевой элемент; всякая полугруппа $\mathscr{M}(G; I, \Lambda; P)$ вполне проста, всякая регулярная полугруппа $\mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ вполне 0-проста. Обращение последних двух утверждений составляет основное содержание теоремы Риса [1]: всякая вполне простая (вполне 0-простая) полугруппа изоморфно представима Р. п. м. т. над группой (регулярной Р. п. м. т. над группой с присоединенным нулем). Если $\mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ и $\mathscr{M}^0(G'; I', \Lambda'; P')$ изоморфны, то группы G и G' изоморфны, I и I' равномощны, Λ и Λ' равномощны; необходимые и достаточные условия изоморфизма полугрупп $\mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ и $\mathscr{M}^0(G'; I', \Lambda'; P')$ хорошо известны и наряду с только что приведенными условиями включают вполне определенную связь между сэндвич-матрицами P и P' (см. [1]—[3]). В частности, любая вполне 0-простая полугруппа изоморфно представима Р. п. м. т., у сэндвич-матрицы P к-рой каждый элемент в данной строке и данном столбце равен либо 0, либо единице структурной группы; такая сэндвич-матрица

наз. нормализованной. Аналогичные свойства выполняются для вполне простых полугрупп.

Лит.: [1] Rees D., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1940, v. 36, p. 387—400; [2] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [3] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960. *Л. Н. Шеврин.*

РИССА БАЗИС — см. *Рисса система.*

РИССА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — формула, дающая выражение для производной тригонометрич. полинома в нек-рой точке через значения самого полинома в конечном числе точек: если $T_n(x)$ — тригонометрич. полином с действительными коэффициентами степени n, то для любого действительного x имеет место равенство

$$T_n'(x)=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{\sin^2\left(x_k^{(n)}/2\right)}T_n\left(x+x_k^{(n)}\right),$$

где $x_k^{(n)}=(2k-1)\pi/2n$, $k=1, 2, \ldots, 2n$.

Р. и. ф. обобщается на целые функции экспоненциального типа: если f — целая функция, ограниченная на действительной оси $\mathbb{R}$ и имеющая степень σ, то

$$f'(x)=\frac{\sigma}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1/2)^2}f\left(x+\frac{2k+1}{2\sigma}\pi\right),\ x\in\mathbb{R},$$

причем ряд, стоящий в правой части равенства, сходится равномерно на всей действительной оси.

Установлена М. Риссом [1].

Лит.: [1] Riesz M., «C. r. Acad. sci.», 1914, t. 158, p. 1152—54; [2] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, ч. 1, Л.—М., 1937; [3] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977. *Л. Д. Кудрявцев.*

РИССА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — метод суммирования числовых и функциональных рядов; обозначается (R, λ, k). Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ суммируем методом суммирования Рисса (R, λ, k) к сумме s, если

$$\lim_{\omega\to+\infty}\sum_{\lambda_n\leqslant\omega}\left(1-\frac{\lambda_n}{\omega}\right)^k a_n=s,$$

где $k>0$, $0\leqslant\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\to\infty$, ω — непрерывный параметр. Метод был введен М. Риссом [1] для суммирования рядов Дирихле. Метод (R, λ, k) регулярен; при $\lambda_n=n$ равносилен *Чезаро методу суммирования* (C, k) и совместен с ним.

М. Рисс рассматривал также метод, в к-ром суммируемость ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ определяется через предел последовательности $\{\sigma_m\}$, где

$$\sigma_m=\frac{1}{P_m}\sum_{k=0}^{m}p_k s_k,$$

$$P_m=\sum_{k=0}^{m}p_k\neq 0,\ s_k=\sum_{n=0}^{k}a_n.$$

Этот метод обозначается (R, p_n). Метод (R, λ, k) является модификацией метода (R, p_n) (при $k=1$) и обобщением его на произвольные $k>0$.

Лит.: [1] Riesz M., «C. r. Acad. sci.», 1911, t. 152, p. 1651—54; [2] его же, там же, 1909, t. 149, p. 18—21; [3] Hardy G. H., Riesz M., The general theory of Dirichlet's series, Camb., 1915; [4] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951. *И. И. Волков.*

РИССА НЕРАВЕНСТВО — 1) Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система функций на отрезке $[a, b]$, $|\varphi_n|\leqslant M$ почти всюду на $[a, b]$ для любого n.

а) Если $f\in L^p[a, b]$, $1<p\leqslant 2$, то ее коэффициенты Фурье

$$c_n=\int_a^b f\overline{\varphi}_n dx$$

удовлетворяют неравенству Рисса

$$\|\{c_n\}\|_q\leqslant M^{2/p-1}\|f\|_p,\ 1/p+1/q=1.$$

б) Для любой последовательности $\{c_n\}$ с $\|\{c_n\}\|_p<\infty$, $1<p\leqslant 2$, существует функция $f\in L^q[a,\ b]$, имеющая c_n своими коэффициентами Фурье и удовлетворяющая неравенству Рисса

$$\|f\|_q\leqslant M^{2/p-1}\|\{c_n\}\|_p,\quad 1/p+1/q=1.$$

2) Если $f\in L^p[0,\ 2\pi]$, $1<p<\infty$, то сопряженная функция $\overline{f}\in L^p[0,\ 2\pi]$ и справедливо неравенство Рисса

$$\|\overline{f}\|_p\leqslant A_p\|f\|_p,$$

где A_p — постоянная, зависящая только от p.

Утверждение 1) впервые доказано Ф. Риссом [1], частные случаи этого утверждения ранее рассматривали У. Юнг (W. Young) и Ф. Хаусдорф (F. Hausdorf). Утверждение 2) впервые доказано М. Риссом [2].

Лит.: [1] Riesz F., «Math. Z.», 1923, Bd 18, S. 117—24; [2] Riesz M., там же, 1927, Bd 27, S. 218—44; [3] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, с. 211, 566; [4] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1965, с. 404 (т. 1), с. 154 (т. 2). *Т. П. Лукашенко.*

РИССА ПОТЕНЦИАЛ, α-потенциал,— потенциал вида

$$V_\alpha(x)=V(x;\ \alpha,\ \mu)=\int\frac{d\mu(y)}{|x-y|^\alpha},\ \alpha>0,$$

где μ — положительная борелевская мера с компактным носителем на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $|x-y|$ — расстояние между точками x, $y\in\mathbb{R}^n$. При $n\geqslant 3$ и $\alpha=n-2$ Р. п. совпадает с классическим *ньютоновым потенциалом*; при $n=2$ и $\alpha\to 0$ предельным случаем Р. п. в нек-ром смысле является *логарифмический потенциал*. При $n\geqslant 3$ и $0<\alpha\leqslant n-2$ Р. п. есть супергармонич. функция во всем пространстве $\mathbb{R}^n$; при этом в классич. случае $\alpha=n-2$ вне носителя $S'(\mu)$ меры μ потенциал $V(x)=V_{n-2}(x)$ есть гармонич. функция. При $\alpha>n-2$ Р. п. $V_\alpha(x)$ есть субгармонич. функция вне $S(\mu)$. При всех $\alpha>0$ Р. п. $V_\alpha(x)$ — полунепрерывная снизу функция в $\mathbb{R}^n$, непрерывная вне $S(\mu)$.

Из общих свойств Р. п. важнейшими являются следующие. Принцип непрерывности: если $x_0\in S(\mu)$ и сужение $V_\alpha(x)|S(\mu)$ непрерывно в точке x_0, то $V_\alpha(x)$ непрерывен в x_0 как функция на всем $\mathbb{R}^n$. Ограниченный принцип максимума: если $V_\alpha(x)|S(\mu)\leqslant M$, то $V_\alpha(x)\leqslant 2^\alpha M$ всюду в $\mathbb{R}^n$. При $n-2\leqslant\alpha<n$ справедлив более точный принцип максимума: если $V_\alpha(x)|S(\mu)\leqslant M$, то $V_\alpha(x)\leqslant M$ всюду в $\mathbb{R}^n$ (это утверждение остается верным и при $n=2$ и $\alpha\to 0$, то есть для логарифмич. потенциала).

Теория *емкости* для Р. п. строится, напр., исходя из понятия α-энергии меры μ:

$$E_\alpha(\mu)=\int\int\frac{d\mu(x)\,d\mu(y)}{|x-y|^\alpha},\ \alpha>0.$$

Для компакта K можно положить

$$V_\alpha(K)=\inf\{E_\alpha(\mu)\},$$

где нижняя грань берется по всем мерам μ, сосредоточенным на K и таким, что $\mu(K)=1$; тогда α-емкость равна

$$C_\alpha(K)=[V_\alpha(K)]^{-1/\alpha}.$$

Если $V_\alpha(K)<+\infty$, то нижняя грань достигается на сосредоточенной на K емкостной мере λ, $\lambda(K)=1$, порождающей соответствующий емкостный α-потенциал $V(x;\ \alpha,\ \lambda)$. Дальнейшее построение α-емкостей произвольных множеств производится так же, как и для классич. емкостей.

Р. п. назван по имени М. Рисса (см. [2]), получившего ряд важных свойств Р. п.; впервые такие потенциалы были исследованы О. Фростманом (см. [1]).

Лит.: [1] Frostmann O., «Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.», 1935, v. 3; [2] Riesz M., «Acta sci. math. Szeged», 1938, v. 9, p. 1—42; [3] Ландкоф Н. С., Основы современ-

ной теории потенциала, М., 1966; [4] Хейман У., Кеннеди П., Субгармонические функции, пер. с англ., т. 1, М., 1980. *Е. Д. Соломенцев.*

РИССА ПРОИЗВЕДЕНИЕ — бесконечное произведение вида

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k\cos n_k x),\ \frac{n_{k+1}}{n_k}\geqslant q>1,\ |a_k|\leqslant 1, \quad (1)$$

для всех $k\in\mathbb{N}$. $x\in[0,\ \pi]$.

С помощью таких произведений ($a_k=1$, $n_k=3^k$ при всех $k\in\mathbb{N}$) Ф. Рисс (F. Riesz) указал первый пример непрерывной функции с ограниченным изменением, коэффициенты Фурье к-рой не равны $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Если $q>3$, то тождество

$$\prod_{k=1}^{m}(1+a_k\cos n_k x)=1+\sum_{k=1}^{p_m}\gamma_k\cos kx,$$

$$p_m=n_1+\ldots+n_m,\ m\in\mathbb{N},\ x\in[0,\ \pi],$$

определяет ряд

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\cos kx, \quad (2)$$

о к-ром говорят, что он представляет Р. п. (1). В случае, когда $q\geqslant 3$, $-1\leqslant a_k\leqslant 1$ для всех $k\in\mathbb{N}$, ряд (2) есть ряд Фурье — Стилтьеса неубывающей непрерывной функции F. Если $q>3$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2=+\infty,\ -1\leqslant a_k\leqslant 1$$

при всех $k\in\mathbb{N}$, то $F'(x)=0$ почти всюду. Если дополнительно $a_k\to 0$, то ряд (2) сходится к нулю почти всюду.

Ряд проблем, относящихся в основном к теории тригонометрич. рядов, удалось решить, используя естественное обобщение Р. п., когда в (1) вместо $a_k\cos n_k x$ записаны специально выбранные тригонометрич. полиномы $T_k(x)$.

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1—2, М., 1965. *В. Ф. Емельянов.*

РИССА ПРОСТРАНСТВО, векторная решетка, — вещественное частично упорядоченное векторное пространство X, в к-ром

1) структуры векторного пространства и упорядоченного множества согласованы, т. е. из $x,\ y,\ z\in X$ и $x<y$ следует $x+z<y+z$ и из $x\in X$, $x>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$ следует $\lambda x>0$;

2) для любых двух элементов $x,\ y$ существует $\sup(x,\ y)\in X$. В частности, существуют sup и inf любого конечного множества.

В отечественной литературе Р. п. обычно наз. K-л и н е а л а м и. Впервые такие пространства были введены Ф. Риссом (F. Riesz, 1928).

Примером Р. п. может служить пространство $C[a,\ b]$ действительных непрерывных на $C[a,\ b]$ функций с поточечным упорядочением. Для любого элемента x Р. п. определяются $x_+=\sup(x,\ 0)$, $x_-=\sup(-x,\ 0)$ и $|x|=x_++x_-$. При этом оказывается, что $x=x_+-x_-$. В Р. п. вводятся два вида сходимости последовательности $\{x_n\}$. Порядковая сходимость, o-сходимость: $x_n\xrightarrow{o}x_0$, если существуют монотонно возрастающая последовательность $\{y_n\}$ и монотонно убывающая последовательность $\{z_n\}$ такие, что $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ и $\sup y_n=\inf z_n=x_0$. Относительно равномерная сходимость, r-сходимость: $x_n\xrightarrow{r}x_0$, если существует элемент $u>0$ такой, что для любого $\varepsilon>0$ существует n_0 такое, что $|x_n-x_0|<\varepsilon u$ при $n\geqslant n_0$ (r-сходимость наз. также сходимостью с регулятором). Понятия o- и r-сходимости обладают многими обычными свойствами сходимости числовых последовательностей и

естественным образом распространяются на направления $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}\subset X$.

Р. п. наз. архимедовым, если из x, $y\in X$ и $nx\leqslant y$ для $n=1,2,\ldots$ следует $x\leqslant 0$. В архимедовом Р. п. из $\lambda_n\to\lambda_0$ и $x_n\to x_0$ следует $\lambda_n x_n\to\lambda_0 x_0$ (λ_n, $\lambda\in\mathbb{R}$, x_n, $x_0\in X$) и из r-сходимости следует o-сходимость.

Лит.: [1] Riesz F., в кн.: Atti del Congr. Int. dei Math., v. 3, Bologna, 1930, p. 143—48; [2] Luxemburg W., Zaanen A., Rieszspaces, v. 1, Amst.—L., 1971; [3] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961.

В. И. Соболев.

РИССА СИСТЕМА — понятие теории ортогональных систем. Пусть фиксирована в пространстве $L^2=L^2(a,b)$ полная система функций $\{\psi_n\}$. Ее считают нормированной или, более общо, почти нормированной, т. е. допускают наличие чисел $m>0$ и $M>0$, при к-рых $m\leqslant\|\psi_n\|\leqslant M$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Ослабляя требования ортогональности системы $\{\psi_n\}$, предполагают, что существует полная в L^2 система функций $\{g_n\}$ и такая, что $(\psi_n, g_n)=1$, $(\psi_n, g_m)=0$ для всех $n\neq m$. В частном случае, когда система $\{\psi_n\}$ ортонормирована, $g_n=\psi_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\psi_n$$

сходится в L^2 к функции f, то $a_n=(f, g_n)$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Поэтому имеет смысл называть число $a_n=(f, g_n)$ n-коэффициентом Фурье функции f по системе $\{\psi_n\}$. В доказательстве ряда теорем теории ортогональных рядов играют важную роль неравенство Бесселя и теорема Рисса—Фишера. В общем случае эти теоремы не верны, и поэтому приходится выделять специальный класс Р. с. с помощью следующих требований к системе $\{\psi_n\}$.

1) Для любой функции f сходится ряд из квадратов коэффициентов Фурье, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f, g_n)^2<+\infty.$$

2) Для любой последовательности чисел $\{a_n\}\in l^2$ существует функция f, имеющая числа a_n своими n-коэффициентами Фурье по системе $\{\psi_n\}$, то есть $a_n=(f, g_n)$ для всех $n\in\mathbb{N}$.

Первое требование к системе $\{\psi_n\}$ заменяет неравенство Бесселя, второе — теорему Рисса — Фишера. Н. К. Бари доказала (см. [2]), что система $\{\psi_n\}$ есть Р. с. тогда и только тогда, когда существует линейный непрерывный обратимый в L^2 оператор A такой, что система функций $\{A\psi_n\}$ является полной и ортонормированной. Поэтому Р. с. наз. также базисом Рисса, эквивалентным ортонормированному. Н. К. Бари указала удобный критерий для Р. с. Полная в L^2 система функций $\{\psi_n\}$ является Р. с. тогда и только тогда, когда матрица Грама $\|(\psi_n, \psi_m)\|$ определяет линейный непрерывный обратимый оператор в l^2. Если в Р. с. переставить произвольно члены, то получится Р. с. Обратно, если базис в L^2 остается базисом после любой перестановки его членов, то, нормируя его, получают Р. с. Естественное обобщение Р. с. получают, если заменить L^2 на замыкание линейной оболочки системы $\{\psi_n\}$ по норме того гильбертова пространства, из к-рого взяты элементы ψ_n (см. [4]).

Лит.: [1] Бари Н. К., «Докл. АН СССР», 1946, т. 54, с. 383—86; [2] ее же, «Уч. зап. МГУ», 1951, в. 148, № 4, с. 69—107; [3] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1965; [4] Гапошкин В. Ф., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 6, с. 3—82.

В. Ф. Емельянов.

РИССА ТЕОРЕМА — 1) Р. т. о представлении субгармонической функции: если $u(x)$ — субгармонич. функция в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, то существует единственная положительная борелевская мера μ на D такая, что для любого относительно компактного множества $K\subset D$

справедливо представление Рисса функции $u(x)$ в виде суммы потенциала и гармонич. функции $h(x)$:

$$u(x) = -\int_K E_n(|x-y|)\, d\mu(y) + h(x), \qquad (1)$$

где

$$E_2(|x-y|) = \ln\frac{1}{|x-y|}, \quad E_n(|x-y|) = \frac{1}{|x-y|^{n-2}},$$

$n \geqslant 3$, $|x-y|$ — расстояние между точками x, $y \in \mathbb{R}^n$ (см. [1]). Мера μ наз. ассоциированной мерой для функции $u(x)$ или мерой Рисса.

Если $K = \overline{H}$ есть замыкание области H, причем существует обобщенная функция Грина $g(x, y; H)$, то формулу (1) можно записать в виде

$$u(x) = -\int_{\overline{H}} g(x, y; H)\, d\mu(y) + h^*(x), \qquad (2)$$

где $h^*(x)$ — наименьшая гармонич. мажоранта $u(x)$ в области H.

Формулы (1), (2) можно распространить при нек-рых дополнительных условиях на всю область D (см. *Субгармоническая функция*, а также [3], [5]).

2) Р.т. о среднем значении субгармонической функции: если $u(x)$ — субгармонич. функция в кольцевой области $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant r \leqslant |x - x_0| \leqslant R\}$, то ее среднее значение по площади сферы $S_n(x_0, \rho)$ с центром x_0 и радиусом ρ, $r \leqslant \rho \leqslant R$, равно

$$J(\rho) = J(\rho; x_0, u) = \frac{1}{\sigma_n(\rho)} \int_{S_n(x_0, \rho)} u(y)\, d\sigma_n(y),$$

где $\sigma_n(\rho)$ — площадь $S_n(x_0, \rho)$, и является выпуклой функцией относительно $1/\rho^{n-2}$ при $n \geqslant 3$ и относительно $\ln\rho$ при $n = 2$. Если же $u(x)$ — субгармонич. функция во всем шаре $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leqslant R\}$, то $J(\rho)$, кроме того, — неубывающая непрерывная функция относительно ρ при условии, что $J(0) = u(x_0)$ (см. [1]).

3) Р.т. об аналитических функциях классов Харди H_δ, $\delta > 0$: если $f(z)$ — регулярная аналитич. функция в единичном круге $D = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ класса Харди H_δ, $\delta > 0$ (см. *Граничные свойства аналитических функций*), то для нее имеют место соотношения

$$\lim_{r \to 1} \int_E |f(re^{i\theta})|^\delta\, d\theta = \int_E |f(e^{i\theta})|^\delta\, d\theta,$$

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^\delta\, d\theta = 0,$$

где E — любое множество положительной меры на окружности $\Gamma = \{z = e^{i\theta} : |z| = 1\}$, $f(e^{i\theta})$ — граничные значения $f(z)$ на Γ. Кроме того, $f(z) \in H_1$ тогда и только тогда, когда ее первообразная непрерывна в замкнутом круге $D \cup \Gamma$ и абсолютно непрерывна на Γ (см. [2]).

Теоремы 1) — 3) доказаны Ф. Риссом (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Riesz F., «Acta math.», 1926, v. 48, p. 329—43; 1930, v. 54, p. 321—60; [2] его же, «Math. Z.», 1923, Bd 18, S. 87—95; [3] Привалов И. И., Субгармонические функции, М.—Л., 1937; [4] его же, Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950; [5] Хейман У. К., Кеннеди П. Б., Субгармонические функции, пер. с англ., т. 1, М., 1980.

Е. Д. Соломенцев.

РИССА ТЕОРЕМА ВЫПУКЛОСТИ: логарифм $\ln M(\alpha, \beta)$ точной верхней грани модуля $M(\alpha, \beta)$ билинейной формы

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

на множестве

$$\sum_{i=1}^m |x_i|^{1/\alpha} \leqslant 1, \quad \sum_{j=1}^m |y_j|^{1/\beta} \leqslant 1$$

(если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, то соответственно $|x_i| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, m$ или $|y_j| \leqslant 1$, $j = 1, \ldots, n$) является выпуклой

функцией от параметров α и β в области $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, если форма действительна (a_{ij}, x_i, $y_j \in \mathbb{R}_+$), и в области $0 \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant 1$, $\alpha + \beta \geqslant 1$, если форма комплексна (a_{ij}, x_i, $y_j \in \mathbb{C}$). Эта теорема была доказана М. Риссом [1].

Обобщение Р. т. в. на линейные операторы (см. [3]): пусть L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,— совокупность всех комплекснозначных суммируемых в p-й степени при $1 \leqslant p < \infty$ и существенно ограниченных при $p = \infty$ функций на нек-ром пространстве с мерой; пусть, далее, $T : L_{p_i} \to L_{q_i}$, $1 \leqslant p_i$, $q_i \leqslant \infty$, $i = 0, 1$,— линейный непрерывный оператор; тогда T является непрерывным оператором из L_{p_t} в L_{q_t}, где

$$1/p_t = (1-t)/p_0 + t/p_1,\ 1/q_t = (1-t)/q_0 + t/q_1,\ t \in [0, 1]$$

и норма k_t оператора T (как оператора из L_{p_t} в L_{q_t}) удовлетворяет неравенству $k_t \leqslant k_0^{1-t} k_1^t$ (т. е. является *логарифмически выпуклой функцией*). Эту теорему наз. теоремой Рисса — Торина об интерполяции, но иногда теоремой выпуклости Рисса [4].

Р. т. в. явилась отправным пунктом для целого направления в анализе, где изучаются интерполяционные свойства линейных операторов. Среди первых из обобщений Р. т. в.— теорема Марцинкевича *об интерполяции* [5], к-рая гарантирует *при* $1 \leqslant p_i \leqslant q_i \leqslant \infty$, $i = 0, 1$, непрерывность оператора $T : L_{p_t} \to L_{q_t}$, $t \in (0, 1)$, при более слабых предположениях, чем в теореме Рисса — Торина. См. также *Интерполирование операторов*.

Лит.: [1] Riesz M., «Acta math.», 1926, v. 49, p. 465—97; [2] Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; [3] Thorin G., «Comm. Sém. Math. Univ. Lund.», 1939, v. 4, p. 1—5; [4] Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974; [5] Marcinkiewicz J., «C. r. Acad. Sci.», 1939, t. 208, p. 1272—73; [6] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., Интерполяция линейных операторов, М., 1978; [7] Triebel H., Interpolation theory, B., 1978.

В. М. Тихомиров.

РИССА — ФИШЕРА ТЕОРЕМА — теорема, устанавливающая связь между пространствами l^2 и $L^2[a, b]$: если система функций $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована на отрезке $[a, b]$, а последовательность чисел $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$$

(то есть $c_n \in l^2$), то существует функция $f(t) \in L^2[a, b]$, для к-рой

$$\int_a^b |f(t)|^2\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2,\ c_n = \int_a^b f(t)\, \varphi_n(t)\, dt.$$

При этом функция $f(t)$ единственна как элемент пространства $L^2[a, b]$, т. е. с точностью до ее значений на множестве нулевой меры Лебега. В частности, если ортонормированная система $\{\varphi_n(t)\}$ замкнута (полна) в $L^2[a, b]$, то с помощью Р.— Ф. т. устанавливается, что пространства l^2 и $L^2[a, b]$ изоморфны и изометричны.

Р.— Ф. т. доказана независимо Ф. Риссом [1] и Э. Фишером [2].

Лит.: [1] Riesz F., «C. r. Acad. sci.», 1907, t. 144, p. 615—19; [2] Fischer E., там же, 1907, t. 144, p. 1022—24, 1148—50; [3] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974, с. 168.

Б. И. Голубов.

РИССОВ ТЕОРЕМА — 1) Р. т. единственности для ограниченных аналитических функций: если $f(z)$ — ограниченная регулярная аналитич. функция в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, имеющая *радиальные граничные значения* нуль на множестве E точек окружности $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$ положительной меры, $\operatorname{mes} E > 0$, то $f(z) \equiv 0$. Теорема

сформулирована и доказана братьями Ф. Риссом и М. Риссом (F. Riesz, M. Riesz, 1916, см. [1]).

Это — одна из первых граничных теорем единственности для аналитич. функций. Независимо от братьев Риссов наиболее общие граничные теоремы единственности были получены Н. Н. Лузиным и И. И. Привало́вым (см. [2], [3]).

2) Р. т. об интеграле Коши: если $f(z)$ есть интеграл Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}$$

в единичном круге D и его граничные значения $f(\zeta)=f(e^{i\theta})$ образуют функцию ограниченной вариации на Γ, то $f(\zeta)$ есть абсолютно непрерывная функция на Γ (см. [1]).

Эта теорема допускает обобщение для интегралов Коши по любому спрямляемому контуру Γ (см. [3]).

Лит.: [1] Riesz F., Œuvres complètes, t. 1, P.— Bdpst, 1960, p. 537—54; [2] Привалов И. И., Интеграл Cauchy, Саратов, 1918; [3] его же, Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950. *Е. Д. Соломенцев.*

РИТЦА МЕТОД — метод решения задач вариационного исчисления и вообще бесконечномерных задач на экстремум, основанный на минимизации функционала на конечномерных подпространствах или многообразиях.

Пусть поставлена задача нахождения точки минимума ограниченного снизу функционала $J: U\to\mathbb{R}$ на сепарабельном банаховом пространстве U. Задается нек-рая (т. н. координатная) система элементов $\{\varphi_n\}_1^\infty\subset U$, полная в U. По Р. м. минимизирующий элемент в n-м приближении разыскивается в линейной оболочке первых n координатных элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, т. е. коэффициенты $c_1^{(n)}, \ldots, c_n^{(n)}$ приближения

$$u_n=\sum_{j=1}^n c_j^{(n)}\varphi_j$$

определяются из условия минимальности $J(u_n)$ среди элементов указанного вида. Вместо координатной системы можно задать последовательность подпространств $U_n\subset U$, не обязательно вложенных друг в друга.

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (u, v), A — самосопряженный, положительно определенный, вообще говоря, неограниченный оператор в H, а H_A — гильбертово пространство, получаемое пополнением области определения $D(A)\subseteq H$ оператора A по норме $\|u\|_A$, порожденной скалярным произведением $(u, v)_A=(Au, v)$, $u, v\in D(A)$. Пусть нужно решить задачу

$$Au=f. \tag{1}$$

Она равносильна задаче отыскания точки минимума квадратичного функционала

$$\Phi(u)=(Au, u)-(u, f)-(f, u),$$

к-рый можно записать в виде

$$\Phi(u)=\|u-u_0\|_A^2-\|u_0\|_A^2,\ u\in H_A,$$

где $u_0=A^{-1}f$ — решение уравнения (1). Пусть $H_n\subset H_A$, $n=1, 2, \ldots$,— замкнутые (обычно конечномерные) подпространства такие, что $\|u-P_nu\|_A\to 0$ при $n\to\infty$ для каждого $u\in H_A$, где P_n — ортопроектор в H_A, проектирующий на H_n. Минимизируя Φ в H_n, получают ритцовское приближение $u_n=P_nu_0$ к решению уравнения (1); при этом $\|u_n-u_0\|_A=\|u_0-P_nu_0\|_A\to 0$ при $n\to\infty$. Если $\dim H_n=n$ и $\varphi_1^{(n)}, \ldots, \varphi_n^{(n)}$ — базис H_n, то коэффициенты элемента

$$u_n=\sum_{j=1}^n c_j^{(n)}\varphi_j^{(n)} \tag{2}$$

определяются из линейной системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j^{(n)}, \varphi_i^{(n)})_A c_j^{(n)} = (f, \varphi_i^{(n)}), \quad i=1, \ldots, n. \qquad (3)$$

К ритцовскому приближению можно прийти и минуя вариационную формулировку задачи (1). А именно, определив приближение (2) из условий

$$(Au_n - f, \varphi_i^{(n)}) = 0, \quad i=1, \ldots, n$$

(м е т о д Г а л е р к и н а), приходят к той же системе уравнений (3). Поэтому Р. м. для уравнения (1) иногда наз. м е т о д о м Р и т ц а — Г а л е р к и н а.

Р. м. широко применяется и при решении задач на собственные значения, краевых задач и вообще операторных уравнений. Пусть A и B — самосопряженные операторы в H, причем A положительно определен, B положителен, $D(A) \subseteq D(B)$ и оператор $A^{-1}B$ вполне непрерывен в пространстве H_A. В силу наложенных условий $A^{-1}B$ самосопряжен и положителен в H_A и спектр задачи

$$Au = \lambda Bu \qquad (4)$$

состоит из положительных собственных значений:

$Au_k = \lambda_k Bu_k$, $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$; $\lambda_k \longrightarrow \infty$ при $k \longrightarrow \infty$.

Р. м. основан на вариационной характеризации собственных значений. Напр.,

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_A} \frac{(Au, u)}{(Bu, u)},$$

и, проведя минимизацию лишь по подпространству $H_n \subset H_A$, получают ритцовские приближения λ_{1n}, u_{1n} к λ_1, u_1. Если $\varphi_1^{(n)}, \ldots, \varphi_n^{(n)}$, как и выше, базис H_n, то ритцовские приближения λ_{kn} к λ_k, $k=1, \ldots, n$, определяются из уравнения

$$\det(A_n - \lambda B_n) = 0,$$

$$A_n = \{(A\varphi_j^{(n)}, \varphi_i^{(n)})\}_{i,j=1}^{n}, \quad B_n = \{(B\varphi_j^{(n)}, \varphi_i^{(n)})\}_{i,j=1}^{n},$$

а вектор коэффициентов $c_{k,n} = (c_{1k}^{(n)}, \ldots, c_{nk}^{(n)})$ приближения

$$u_{kn} = \sum_{j=1}^{n} c_{jk}^{(n)} \varphi_j^{(n)}$$

к u_k определится как нетривиальное решение линейной однородной системы $(A_n - \lambda_{kn} B_n) c_{kn} = 0$. Р. м. приближает собственные значения сверху, то есть $\lambda_{kn} \geqslant \lambda_k$, $k=1, \ldots, n$. Если k-е собственное значение задачи (4) простое ($\lambda_{k-1} < \lambda_k < \lambda_{k+1}$), то быстрота сходимости Р. м. характеризуется соотношениями

$$\lambda_{kn} - \lambda_k = \lambda_k (1 + \varepsilon_{kn}) \| u_k - P_n u_k \|_A^2,$$

$$\| u_k \|_A = 1, \ \| u_{kn} - u_k \|_A = (1 + \varepsilon'_{kn}) \| u_k - P_n u_k \|_A,$$

$$\| u_{kn} \|_A = \| u \|_A = 1,$$

где ε_{kn}, $\varepsilon'_{kn} \to 0$ при $n \to \infty$. Подобные соотношения распространяются и на случай кратного λ_k, но требуют нек-рых уточнений (см. [2]). В. Ритц [4] предложил свой метод в 1908, но ранее Рэлей (Rayleigh) применял этот метод при решении нек-рых задач на собственные значения. В связи с этим Р. м. часто наз. м е т о д о м Р э л е я — Р и т ц а, особенно, если речь идет о решении проблемы собственных значений.

Лит.: [1] В а й н б е р г М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972; [2] К р а с н о с е л ь с к и й М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [3] М и х л и н С. Г., Вариационные методы в математической физике, 2 изд., М., 1970; [4] R i t z W., «J. reine und angew. Math.», 1908, Bd 135, S. 1—61.

Г. М. Вайникко.

РИЧАРДСОНА ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ — метод ускорения сходимости решений разностных задач (см. *Аппроксимация дифференциальной краевой задачи*

разностной). Основная идея метода состоит в исследовании решения $u_h(x)$ сходящейся разностной задачи при фиксированных x как функции параметра h разностной сетки, стремящегося к нулю, в подборе подходящей интерполяционной функции $\chi(h)$, построенной по нескольким значениям решения $u_h(x)$ при различных h, и вычислении величины $\chi(0)$, являющейся приближенным значением искомого решения $u(x)$ — предела последовательности $u_h(x)$ при $h \to 0$. Чаще всего функция $\chi(h)$ ищется в виде интерполяционного многочлена от h.

Метод носит имя Л. Ричардсона [1], к-рый впервые использовал его как средство для улучшения точности решений разностных задач и называл п о с т е п е н н ы м п е р е х о д о м к п р е д е л у.

Теоретич. основой применимости метода служит существование разложения вида

$$u_h(x) = u(x) + \sum_{i=1}^{m-1} h^{\beta_i} v_i(x) + h^B \eta_h(x),$$

где $B > \beta_{m-1} > \ldots > \beta_1 > 0$ и функции v_i не зависят от h, а $\eta_h(x)$ — значения сеточной функции, ограниченные при $h \to 0$. Имеется несколько теоретич. приемов для выяснения существования таких разложений [4].

Чаще всего используется линейная экстраполяция: с помощью m значений $u_h(x)$ в одной точке x для различных параметров $h = h_1, \ldots, h_m$ вычисляется экстраполированное значение $u_H(x)$ по правилу

$$u_H(x) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k u_{h_k}(x),$$

где веса γ_k определяются из системы уравнений:

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k = 1; \quad \sum_{k=1}^{m} \gamma_k h_k^{\beta_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m-1.$$

Если среди h_k нет слишком близких значений, то

$$|u_H(x) - u(x)| = O(\hat{h}^B),$$

где $\hat{h} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} h_k$, то есть величина $u_H(x)$ сходится к $u(x)$ при $h \to 0$ с порядком B, что больше β_1 — порядка сходимости $u_h(x)$ к $u(x)$. В двух частных случаях существуют алгоритмы вычисления величины $u_H(x)$, минуя определение коэффициентов γ_k:

а) в случае $\beta_i = ip$, $p > 0$, $i = 1, \ldots, m-1$, метод приводит к интерполяции многочлена от h^p и из свойств *Лагранжа интерполяционной формулы* следует, что

$$u_H(x) = a_1^{(m-1)},$$

где

$$a_j^{(0)} = u_{h_j}(x), \quad j = 1, 2, \ldots, m;$$

$$a_j^{(i)} = a_{j+1}^{(i-1)} + \frac{a_{j+1}^{(i-1)} - a_j^{(i-1)}}{(h_j/h_{i+j})^p - 1}, \qquad (*)$$

$$j = 1, \ldots, m-i, \quad i = 1, \ldots, m-1;$$

б) в случае $h_i = h_0 b^i$, $0 < b < 1$, $i = 1, \ldots, m-1$, формула (*) заменяется следующей:

$$a_j^{(i)} = a_{j+1}^{(i-1)} + \frac{a_{j+1}^{(i-1)} - a_j^{(i-1)}}{b^{\beta_i} - 1}.$$

Этот алгоритм, называемый п р а в и л о м Р о м б е р г а (W. Romberg, 1955), нашел распространение при конструировании квадратурных формул (см. [5]). Для того чтобы при различных h_i сетки $D_{h_i U}$ (см. *Аппроксимация дифференциального оператора разностным*) имели возможно больше общих узлов для осуществления Р. э., параметры h_i выбирают как часть одной из последовательностей: $h_i = h_0/i$, $i = 1, 2, \ldots$; $h_i = h_0 2^{1-i}$, $i = 1, 2, \ldots$; h_0, $h_0/2$, $h_0/3$, $h_0/4$, $h_0/6$, $h_0/8$, $h_0/12$, ...

Линейная экстраполяция не является единственно возможной. Напр., в случае $\beta_i = ip$, $p > 0$, в качестве интерполяционной функции $\chi(h)$ используют рациональные функции вида $\varphi(h^p)/\psi(h^p)$, где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — многочлены от t степени $[(m-1)/2]$ и $[m/2]$ соответственно. Тогда результат рациональной экстраполяции $u_H(x) = \chi(0)$ может быть вычислен с помощью рекуррентной процедуры:

$$d_j^{(-1)} = 0,\ j = 2,\ \ldots,\ m;$$

$$d_j^{(0)} = u_{h_j}(x),\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;$$

$$d_j^{(i)} = d_{j+1}^{(i-1)} + \left(d_{j+1}^{(i-1)} - d_j^{(i-1)}\right) \times$$

$$\times \left\{ \left(\frac{h_j}{h_{i+j}}\right)^p \left[1 - \frac{d_{j+1}^{(i-1)} - d_j^{(i-1)}}{d_{j+1}^{(i-1)} - d_{j+1}^{(i-1)}}\right] - 1 \right\}^{-1},$$

$$j = 1,\ \ldots,\ m-i,\ i = 1,\ \ldots,\ m-1;$$

$$u_H(x) = d_1^{(m-1)}.$$

Р. э. удобна для реализации на ЭВМ, поскольку для достижения высокой точности использует многократное решение простых разностных задач (иногда с небольшими модификациями) невысокого порядка аппроксимации, для к-рых обычно хорошо разработаны стандартные приемы решения и программы для ЭВМ.

Лит.: [1] Richardson L. F., «Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A», 1910, v. 210, p. 307—57; [2] Bulirsch R., Stoer J., «Numer. Math.», 1964, Bd 6, H. 5, S. 413—27; [3] Joice D. C., «SIAM Review», 1971, v. 13, № 4, p. 435—90; [4] Марчук Г. И., Шайдуров В. В., Повышение точности решений разностных схем, М., 1979; [5] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975. *В. В. Шайдуров.*

РИЧЧИ КРИВИЗНА риманова многообразия M в точке $p \in M$ — число, сопоставляемое каждому одномерному подпространству из касательного пространства M_p по формуле

$$r(v) = \frac{(cR)(v, v)}{g(v, v)},$$

где cR — *Риччи тензор*, v — вектор, порождающий одномерное подпространство, g — метрич. тензор риманова многообразия M. Р. к. выражается через секционные кривизны многообразия M. Пусть $K_p(\alpha, \beta)$ — секционная кривизна в точке $p \in M$ в направлении площадки, определяемой векторами α и β, $l_1, \ldots, l_{n-1}$ — нормированные векторы, ортогональные друг другу и вектору v, n — размерность M, тогда

$$r(v) = \sum_{i=1}^{n-1} K_p(v, l_i).$$

Для многообразий M размерности больше двух имеет место следующее предложение: если Р. к. в точке $p \in M$ имеет одно и то же значение r по всем направлениям v, то Р. к. имеет одно и то же значение r во всех точках многообразия. Многообразия с постоянной Р. к. наз. пространствами Эйнштейна. Тензор Риччи пространства Эйнштейна имеет вид $cR = rg$, где r — Р. к. Для пространства Эйнштейна выполняется равенство

$$nR_{ij}R^{ij} - s^2 = 0,$$

где R_{ij}, R^{ij} — ковариантные и контравариантные координаты тензора Риччи, n — размерность пространства, s — скалярная кривизна пространства.

Р. к. может быть определена и на псевдоримановых многообразиях с помощью аналогичных формул, в этом случае вектор предполагается неизотропным.

По Р. к. однозначно восстанавливается тензор Риччи:

$$(cR)(u, v) = \frac{1}{2}\left[r(u+v)\, g(u+v, u+v) - r(u)\, g(u, u) - r(v)\, g(v, v)\right].$$

Лит.: [1] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [2] Петров А. З., Пространства Эйнштейна, М., 1961.

Л. А. Сидоров.

РИЧЧИ ТЕНЗОР — дважды ковариантный тензор, получаемый из *Римана тензора* R^l_{jkl} путем свертывания верхнего индекса с нижним:

$$R_{ki}=R^m_{mk,\,i}.$$

В римановом пространстве V_n Р. т. является симметрическим: $R_{ki}=R_{ik}$. В результате свертывания Р. т. с контравариантным метрич. тензором g^{ij} пространства V_n получается скалярная величина $R=g^{ij}R_{ij}$, называемая инвариантом кривизны, или скалярной кривизной V_n. Компоненты Р. т. выражаются через основной метрич. тензор g_{ij} пространства V_n:

$$R_{ij}=\frac{\partial^2 \ln\sqrt{g}}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij}+\Gamma^m_{ik}\Gamma^k_{mj}-\Gamma^m_{ij}\frac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial x^m},$$

где $g=\det g_{ij}$, Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля 2-го рода, вычисленные относительно тензора g_{ij}.

Тензор введен Г. Риччи [1].

Лит.: [1] Ricci G., «Atti Reale Inst. Veneto», 1903—04, t. 53, № 2, p. 1233—39; [2] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948.

Л. А. Сидоров.

РИЧЧИ ТЕОРЕМА: для того чтобы поверхность S с метрикой ds^2 и гауссовой кривизной $K\leqslant 0$ была локально изометрична нек-рой минимальной поверхности F, необходимо и достаточно, чтобы метрика $\tilde{ds}^2=\sqrt{-K}ds^2$ имела (во всех точках, где $K<0$) гауссову кривизну $\tilde{K}=0$.

И. Х. Сабитов.

РИЧЧИ ТОЖДЕСТВО — 1) Тождество, выражающее одно из свойств *Римана тензора* $R^l_{ij,\,k}$ (или $R_{i,\,j,\,kl}$):

$$R^l_{ij,\,k}+R^l_{jk,\,i}+R^l_{ki,\,j}=0.$$

Для ковариантного тензора $R_{ij,\,kl}$ тождество имеет вид

$$R_{ij,\,kl}+R_{jk,\,il}+R_{ki,\,jl}=0,$$

т. е. циклирование по трем первым индексам дает нуль.

2) Тождество, к-рому должны удовлетворять ковариантные производные 2-го порядка относительно метрич. тензора g_{ij} риманова пространства V_n, отличающиеся лишь порядком дифференцирования. Если λ_i — тензор 1-й валентности, $\lambda_{i,\,jk}$ — ковариантная производная 2-го порядка по x^j и по x^k относительно тензора g_{ji}, то Р. т. имеет вид

$$\lambda_{i,\,jk}-\lambda_{i,\,kj}=\lambda_l R^l_{ij,\,k},$$

где $R^l_{ij,\,k}$ — тензор Римана, определяемый метрич. тензором g_{ij}, то есть в метрике пространства V_n (иными словами, альтернированная 2-я абсолютная производная тензорного поля λ_i в метрике g_{ij} выражается через тензор Римана и компоненты λ_i).

Для ковариантного тензора 2-й валентности a_{ij} Р. т. имеет вид

$$a_{ij,\,kl}-a_{ij,\,lk}=a_{ih}R^h_{jk,\,l}+a_{hj}R^h_{ik,\,l}.$$

Вообще, для ковариантного тензора m-й валентности $a_{r_1\ldots r_m}$ тождество имеет вид

$$a_{r_1\ldots r_m,\,kl}-a_{r_1\ldots r_m,\,l_k}=$$
$$=\sum_{\alpha}^{1\ldots m}a_{r_1\ldots r_{\alpha-1}hr_{\alpha+1}\ldots r_m}R^h_{r_\alpha kl}.$$

Аналогичные тождества образуются и для ковариантных и смешанных тензоров в V_n. Р. т. применяется, напр., при построении геометрии подпространств в V_n в качестве условия интегрируемости основных дериваривационных уравнений, из к-рого выводятся уравнения Гаусса и Петерсона — Кодацци для подпространств в V_n.

Тождество установлено Г. Риччи (см. [1]).

Лит.: [1] Ricci G., Levi-Civita T., «Math. Ann.», 1901, Bd 54, S. 125—201; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [3] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948.

Л. А. Сидоров.

РИШАРА ПАРАДОКС — см. *Антиномия.*

РОБЕНА ЗАДАЧА, задача равновесия, электростатическая задача,— задача о таком распределении положительной борелевской меры λ на границе S компакта K в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, к-рое создает постоянный *ньютонов потенциал* при $n > 2$ или *логарифмический потенциал* при $n = 2$ на каждой из связных компонент внутренности K, т. е. задача о равновесном распределении электрич. заряда $\lambda(K)$ на поверхности S проводника K.

В простейшем классич. случае, когда K есть гомеоморфная шару замкнутая область в $\mathbb{R}^n$, ограниченная гладкой простой замкнутой поверхностью или (при $n=2$) кривой S класса $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $0 \in K$, решение Р. з. сводится к отысканию нетривиального решения $\nu(x)$, $x \in S$, однородного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\frac{1}{2}\nu(x) + \frac{1}{k_n}\int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}E_n(x, y)\,dS(y) = 0,\ x \in S, \quad (1)$$

с условием нормировки

$$\lambda(S) = \int_S \nu(y)\,dS(y) = 1. \quad (2)$$

Здесь

$$E_2(x, y) = \ln\frac{1}{|x-y|},\ E_n(x, y) = \frac{1}{|x-y|^{n-2}}$$

при $n \geqslant 3$, $|x-y|$ — расстояние между точками $x, y \in \mathbb{R}^n$, n_x — направление внешней нормали к S в точке $x \in S$, $\nu(x)$ — производная, или плотность, абсолютно непрерывной меры λ по мере Лебега на S,

$$k_2 = 2\pi,\ k_n = \frac{2(n-2)\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

при $n \geqslant 3$, $dS(y)$ — элемент площади поверхности S. Уравнение (1) получается при рассмотрении внутренней задачи Неймана для области с границей S при нулевых граничных данных, т. к. потенциал простого слоя

$$u(x) = u(x; K) = \int_S \nu(y)\,E_n(x, y)\,dS(y),$$

называемый потенциалом Робена, или равновесным потенциалом, должен, по условию Р. з., иметь постоянное значение на K (см. *Потенциала теория*, а также [2]). Решение $\nu(x)$ задачи (1), (2) при указанных условиях всегда существует в классе непрерывных функций $C(S)$. Мера

$$\lambda(E) = \int_E \nu(y)\,dS(y),\ E \subset S,$$

дающая решение Р. з., наз. равновесной мерой. Аналогично решается Р. з. и в более сложном случае, когда граница компакта K состоит из конечного числа непересекающихся простых замкнутых поверхностей или (при $n=2$) кривых класса $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ (см. [2]). При этом на ограниченных связных компонентах открытого множества $G = CK = \mathbb{R}^n \setminus K$ потенциал Робена $u(x)$ также сохраняет постоянное значение, т. е. на границах этих компонент плотность $\nu(x) = 0$.

Пусть компакт K есть связное множество. Постоянное значение потенциала Робена $u(x)$ на K

$$\gamma = \int_S \nu(y)\,E_n(x, y)\,dS(y),\ x \in K,$$

наз. постоянной Робена компакта K. При $n \geqslant 3$ она связана с гармонической, или ньютоновой,

емкостью компакта K простым соотношением $C(K)=1/\gamma$, причем $0<\gamma<+\infty$, $0<C(K)<+\infty$. При $n=2$ постоянная Робена может принимать все значения $-\infty<\gamma<+\infty$, гармонич. емкость выражается формулой $C(K)=e^{-\gamma}$.

Иначе, равновесная мера λ определяется как мера, дающая минимум интегралу энергии

$$\iint_{K\times K} E_n(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

в классе всех мер μ, сосредоточенных на K и таких, что $\mu\geqslant 0$, $\mu(K)=1$. Такая мера λ в случае компакта K с гладкой границей совпадает с найденной выше, но она существует и в общем случае произвольного компакта $K\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, если только $C(K)>0$. Соответствующий **равновесный потенциал**

$$u(x)=u(x; K)=\int E_n(x, y)\, d\lambda(y),$$

являющийся обобщением потенциала Робена, сохраняет постоянное значение $\gamma=1/C(K)$ при $n\geqslant 3$ или $\gamma=-\ln C(K)$ при $n=2$ всюду на K, за возможным исключением точек нек-рого множества емкости нуль.

Название Р. з. связано с исследованиями Г. Робена (см. [1]).

Лит.: [1] Robin G., «Ann. sci. Éc. norm. supér.», 1886, v. 3; [2] Гюнтер Н. М., *Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики*, М., 1953; [3] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [4] Хейман У., Кеннеди П., Субгармонические функции, пер. с англ., т. 1, М., 1980. *Е. Д. Соломенцев.*

РОБЕНА ПОСТОЯННАЯ — числовая характеристика множества точек евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, тесно связанная с *емкостью* множества.

Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$, μ — положительная борелевская мера, сосредоточенная на K и нормированная условием $\mu(K)=1$. Интеграл

$$V(\mu)=\iint_{K\times K} E_n(x, y)\, d\mu(x)\, d\mu(y),$$

где

$$E_2(x, y)=\ln\frac{1}{|x-y|},\quad E_n(x, y)=\frac{1}{|x-y|^{n-2}} \text{ при } n\geqslant 3,$$

$|x-y|$ — расстояние между точками x, $y\in R^n$, есть *энергия меры* μ. **Постоянной Робена компакта** K наз. нижняя грань $\gamma(K)=\inf V(\mu)$ по всем мерам μ указанного вида. Если $\gamma(K)<+\infty$, то эта грань конечна и достигается на нек-рой (единственной) **равновесной (или емкостной) мере** $\lambda>0$, $\gamma(K)=V(\lambda)$, $\lambda(K)=1$, сосредоточенной на K; если $\gamma(K)=+\infty$, то $V(\mu)=+\infty$ для всех мер μ указанного вида. Р. п. компакта K связана с его емкостью соотношениями

$$\gamma(K)=1/C(K) \text{ при } n\geqslant 3,$$
$$\gamma(K)=-\ln C(K) \text{ при } n=2.$$

Если граница S компакта K достаточно гладкая, напр. состоит из конечного числа попарно непересекающихся простых замкнутых поверхностей (при $n\geqslant 3$) или кривых (при $n=2$) класса $C^{1,\alpha}$, $0<\alpha<1$, то равновесная мера λ сосредоточена на части $\tilde{S}\subset S$, к-рая составляет границу той связной компоненты дополнения $CK=\mathbb{R}^n\setminus K$, к-рая содержит бесконечно удаленную точку. **Равновесный потенциал**, т. е. потенциал равновесной меры

$$u(x)=\int E_n(x, y)\, d\lambda(y),$$

в этом случае принимает на $\tilde{S}$ постоянное значение, равное $\gamma(K)$, что и позволяет вычислить Р. п. компакта в простейших случаях (см. *Робена задача*). Напр., Р. п. круга радиуса $r>0$ в $\mathbb{R}^2$ равна $-\ln r$, а Р. п. шара

радиуса $r>0$ в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, равна $1/r^{n-2}$. В случае произвольного компакта K положительной емкости всюду $u(x)\leqslant\gamma(K)$ и $u(x)=\gamma(K)$ всюду на носителе $S(\lambda)$ равновесной меры λ, кроме, быть может, точек нек-рого полярного множества, причем всегда $S(\lambda)\subset K$.

Пусть D — область расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, содержащая внутри бесконечно удаленную точку и допускающая функцию Грина $g(z,\infty)$ с полюсом в бесконечности. Тогда имеет место представление

$$g(z,\infty)=\ln|z|+\gamma(D)+\varepsilon(z,\infty), \qquad (1)$$

где $z=x+iy$ — комплексное переменное, $\gamma(D)$ — п о с т о я н н а я Р о б е н а о б л а с т и D, $\varepsilon(z,\infty)$ — гармонич. функция в D, причем

$$\lim_{|z|\to\infty}\varepsilon(z,\infty)=0.$$

Определяемая формулой (1) Р. п. области D совпадает с Р. п. компакта ∂D, $\gamma(D)=\gamma(\partial D)$. Если функция Грина для области D не существует, то полагают $\gamma(D)=+\infty$.

Обобщая представление (1), для римановой поверхности R, допускающей функцию Грина, может быть получено локальное представление функции Грина $g(p,p_0)$ с полюсом $p_0\in R$:

$$g(p,p_0)=\ln\frac{1}{|z-z_0|}+\gamma(R;p_0)+\varepsilon(p,p_0), \qquad (2)$$

где $z=z(p)$ — локальный униформизирующий параметр в окрестности полюса p_0, $z(p_0)=z_0$, $\gamma(R;p_0)$ — постоянная Робена римановой поверхности R относительно полюса p_0, $\varepsilon(p,p_0)$ — гармонич. функция в окрестности p_0, причем $\lim\limits_{p\to p_0}\varepsilon(p,p_0)=0$. Для римановых поверхностей R, не допускающих функцию Грина, полагают $\gamma(R;p_0)=+\infty$. В выражении (2) значение Р. п. $\gamma(R;p_0)$ зависит уже от выбора полюса $p_0\in P$, но соотношения $\gamma(R;p_0)<+\infty$ и $\gamma(R;p_0)=+\infty$ не зависят от выбора полюса, что и позволяет использовать понятие Р. п. для классификации римановых поверхностей.

Лит.: [1] Н е в а н л и н н а Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941; [2] С т о и л о в С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 2, М., 1962; [3] S a r i o L., N a k a i M., Classification theory of Riemann surfaces, B.—N. Y., 1970. *Е. Д. Соломенцев.*

L-РОД — характеристическое число, соответствующее L-классу Хирцебруха (см. *Понтрягина класс*). *А. Ф. Харшиладзе.*

РОД АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ — см. *Алгебраическая функция.*

РОД КРИВОЙ — численный инвариант одномерного алгебраич. многообразия, определенного над полем k. Род g гладкой полной алгебраич. кривой X равен размерности пространства регулярных дифференциальных 1-форм на X. Род алгебраич. кривой X, по определению, равен роду полной гладкой алгебраич. кривой, бирационально изоморфной кривой X. Для любого целого $g\geqslant 0$ существует алгебраич. кривая рода g. Алгебраич. кривая над алгебраически замкнутым полем рода $g=0$ является *рациональной кривой*, т. е. *бирационально изоморфна проективной прямой* P^1. Кривые рода $g=1$ (эллиптич. кривые) бирационально изоморфны гладким кубич. кривым в P^2. Алгебраич. кривые рода $g>1$ распадаются на два класса: гиперэллиптич. кривые и негиперэллиптич. кривые. Для негиперэллиптич. кривых X рациональное отображение $\varphi_{|K_X|}: X\to P^{g-1}$, определяемое канонич. классом K_X полной гладкой кривой, является изоморфным вложением. Для гиперэллиптич. кривой X отображение $\varphi_{|K_X|}: X\to P^{g-1}$ является двулистным накрытием рациональной кривой $\varphi_{|K_X|}(X)$, разветвленным в $2g+2$ точках.

Если X — проективная плоская кривая степени m, то

$$g=\frac{(m-1)(m-2)}{2}-d,$$

где d — неотрицательное целое число, измеряющее отклонение от гладкости кривой X. Если X имеет только обыкновенные двойные особые точки, то d равно числу особых точек алгебраич. кривой X. Для пространственной кривой X имеет место оценка

$$g\leqslant\begin{cases}\frac{(m-2)^2}{4}, & \text{если } m\text{ — четно},\\ \frac{(m-1)(m-3)}{4}, & \text{если } m\text{ — нечетно},\end{cases}$$

где m — степень кривой X в P^3.

Если $k=\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел, то алгебраич. кривая X может быть рассмотрена как риманова поверхность. В этом случае гладкая полная кривая X рода g гомеоморфна сфере с g ручками.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981.
Вик. С. Куликов.

РОД ПОВЕРХНОСТИ — численный бирациональный инвариант двумерного алгебраич. многообразия, определенного над алгебраически замкнутым полем k. Различают два рода — арифметический и геометрический. Геометрический род p_g полной гладкой алгебраич. поверхности X равен

$$p_g=\dim_k H^0(X,\ \Omega_X^2)$$

размерности пространства регулярных дифференциальных 2-форм на X. Арифметический род p_a полной гладкой алгебраич. поверхности X равен

$$p_a=\chi(X,\ O_X)-1=\dim_k H^2(X,\ O_X)-\dim_k H^1(X,\ O_X).$$

Геометрический и арифметич. роды полной гладкой алгебраич. поверхности X связаны соотношением $p_g-p_a=q$, где q — иррегулярность поверхности X, равная размерности пространства регулярных дифференциальных 1-форм на X.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Труды МИАН СССР, т. 75).
Вик. С. Куликов.

РОД ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ — целое число, равное наибольшему из чисел p и q в представлении целой функции $f(z)$ в форме

$$f(z)=z^{\lambda}e^{Q(z)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{\frac{z}{a_k}+\frac{z^2}{2a_k^2}+\ldots+\frac{z^p}{pa_k^p}},\quad(*)$$

где q — степень многочлена $Q(z)$, а p — наименьшее целое, удовлетворяющее условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^{p+1}}<\infty.$$

Число p наз. родом произведения, участвующего в формуле $(*)$.

Лит.: [1] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., 1956.
А. Ф. Леонтьев.

РОД ЭЛЕМЕНТА арифметической группы — совокупность элементов группы единиц $G_{\mathbb{Z}}$ связной алгебраической $\mathbb{Q}$-группы G, сопряженных с данным элементом a в группах $G_{\mathbb{Q}}$ и $G_{\mathbb{Z}_p}$ для всех простых p, где $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$ — соответственно поле рациональных чисел и кольцо целых p-адических чисел; класс элемента a определяется как его класс сопряженности в $G_{\mathbb{Z}}$. Число непересекающихся классов, на к-рые распадается род элемента a, конечно [1], обозначается $f_G(a)$ и наз. числом классов в роде элемента a. Возникающая здесь функция f_G на $G_{\mathbb{Z}}$ является важной арифметич. характеристикой, выражающей отклонение от локально-глобального принципа в вопросах сопряженности. Вообще говоря, $f_G(a)>1$. Более того,

если группа G полупроста, а группа $G_{\mathbb{Z}}$ бесконечна, то $\sup_{a \in H} f_G(a) = \infty$ для любой арифметич. подгруппы $H \subset G_{\mathbb{Z}}$ (см. [1], [3]). Рассмотренные понятия представляют естественную модификацию соответствующих классич. понятий из теории квадратичных форм и применяются при исследовании финитной аппроксимируемости арифметич. групп относительно сопряженности (см. [2]).

Лит.: [1] Платонов В. П., «Докл. АН СССР», 1971, т. 200, № 4, с. 793—96; [2] Платонов В. П., Матвеев Г. В., «Докл. АН БССР», 1970, т. 14, № 9, с. 777—79; [3] Рапинчук А. С., «Докл. АН БССР», 1981, т. 25, № 2, с. 101—04.

А. С. Рапинчук.

РОДРИГА ФОРМУЛА — 1) Р. ф. — формула, связывающая дифференциал нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности с дифференциалом радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ поверхности в главном направлении:

$$d\boldsymbol{n} = -k_1 d\boldsymbol{r} \text{ или } d\boldsymbol{n} = -k_2 d\boldsymbol{r},$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны.

Формула получена О. Родригом (O. Rodrigues, 1815).

А. Б. Иванов.

2) Р. ф.— представление ортогональных многочленов через весовую функцию с помощью дифференцирования. Если весовая функция $h(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2} \equiv \frac{A(x)}{B(x)}, \quad x \in (a, b),$$

причем на концах интервала ортогональности выполняются условия

$$\lim_{x \to a+0} h(x) B(x) = \lim_{x \to b-0} h(x) B(x) = 0,$$

то ортогональный многочлен $P_n(x)$ представляется в виде формулы Родрига

$$P_n(x) = c_n [h(x) B^n(x)]^{(n)} / h(x),$$

где c_n — постоянная. Р. ф. имеет место только для классических ортогональных многочленов и для многочленов, полученных из последних линейными преобразованиями аргумента. Первоначально эта формула была установлена О. Родригом [1] для *Лежандра многочленов.*

Лит.: [1] Rodrigues O., «Correspondance sur l'École polytechnique», 1816, t. 3, p. 361—85.

П. К. Суетин.

РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ ПРОЦЕСС — марковский процесс с состояниями 0, 1, 2, . . ., в к-ром за время $(t, t+h)$ возможны переходы из состояния n в состояния $n+1$ и $n-1$ с вероятностями $\lambda_n(t)h + o(h)$ и $\mu_n(t)h + o(h)$ соответственно, а вероятность остальных переходов равна $o(h)$. При специальном выборе коэффициентов размножения $\lambda_n(t)$ и гибели $\mu_n(t)$ получаются частные случаи, к-рые дают удовлетворительное описание различных реальных процессов: радиоактивных превращений, работы телефонных станций, эволюции биологич. популяций и т. д. Использованию Р. и г. п. в приложениях способствует простота уравнений для переходных вероятностей, к-рые часто удается найти в явном виде. Напр., в случае пуассоновского процесса $\lambda_n(t) = \lambda$, $\mu_n(t) = 0$, вероятности $P_n(t)$ ($P_n(t)$ — вероятность нахождения в момент времени t в состоянии n, если процесс начался из состояния 0) удовлетворяют системе уравнений:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$
$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \quad n \geqslant 1.$$

Решение этой системы:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Более общим является процесс, для к-рого $\lambda_n(t)=n\lambda$, $\mu_n(t)=0$. Этот тип процесса был впервые изучен Дж. Юлом (G. Jule, 1924) в связи с математич. теорией эволюции. Процесс Юла является частным случаем процесса чистого размножения, к-рый получается из общего Р. и г. п., если положить $\lambda_n(t)=\lambda_n$, $\mu_n(t)=0$. Если λ_n растут очень быстро, то за конечное время можно с положительной вероятностью пройти по всем состояниям и тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) < 1$$

Условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$$

для процесса чистого размножения выполняется тогда и только тогда, когда расходится ряд $\sum 1/\lambda_n$. Если $\lambda_n(t)=n\lambda+\nu$, $\mu_n(t)=n\mu$, то Р. и г. п. представляет собой *ветвящийся процесс* с иммиграцией, в к-ром состояние n означает число частиц, причем каждая частица за время $(t, t+h)$ с вероятностью $\mu h+o(h)$ погибает, с вероятностью $\lambda h+o(h)$ делится на две и, кроме того, извне иммигрирует одна частица с вероятностью $\nu h+o(h)$. Если $\nu=0$, то получится простейший ветвящийся процесс без иммиграции. Если $\lambda=0$, а $\nu>0$, то этот вид процесса с иммиграцией можно применить к описанию работы телефонной системы с бесконечным числом линий. Состоянием тогда является число занятых линий. Коэффициент размножения $\lambda_n(t)=\nu$ характеризует поступающий поток вызовов, а μ — длительность разговора.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1—2, М., 1964—67; [2] Севастьянов Б. А., Теория ветвящихся процессов, в кн.: Итоги науки. Серия Математика, т. 14— Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1967, М., 1968, с. 5—46; [3] Саати Т. Л., Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, пер. с англ., М., 1965.

В. П. Чистяков.

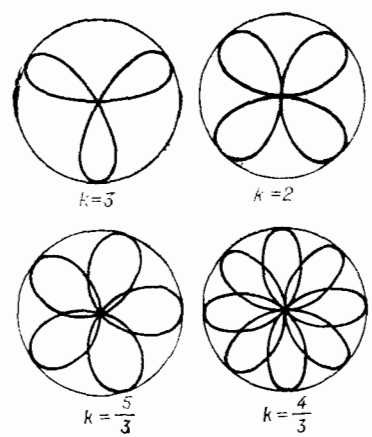
РОЖДЕНИЯ ОПЕРАТОРЫ — семейство замкнутых линейных операторов $\{a^*(f), f\in H\}$, где H — нек-рое гильбертово пространство, действующих в *Фока пространстве*, построенном над H, и являющихся сопряженными к *уничтожения операторам* $\{a(f), f\in H\}$.

Р. А. Минлос.

РОЗЫ — плоские кривые, уравнения к-рых в полярных координатах имеют вид

$$\rho = a\sin k\varphi,$$

где a и k — постоянные. Если $k=m/n$ — число рациональное, то Р.— алгебраич. кривая четного порядка. Порядок Р. равен $m+n$, если m и n — нечетные числа, и равен $2(m+n)$, если одно из чисел m или n — нечетное. Вся кривая расположена внутри круга радиуса a, состоит из конгруэнтных лепестков (см. рис.). Если k — целое, то Р. состоит из k лепестков при k нечетном и из $2k$ лепестков при k четном. Если $k=m/n$ и m, n — взаимно простые, то Р. состоит из m лепестков, когда m и n нечетные, и из $2m$ лепестков, если одно из чисел m или n является четным.



При иррациональном k лепестков бесконечное множество. Р. относятся к семейству *циклоидальных кривых*. Р. являются гипоциклоидами, если $k>1$, и эпициклоидой, если $k<1$.

С семейством циклоидальных кривых Р. связаны и тем, что они являются подэрами эпи- и гипоциклоид относительно центра их неподвижного круга.

Длина дуги Р. выражается эллиптич. интегралом 2-го рода. Площадь одного лепестка: $S=\pi a^2/4k$.

Р. наз. также кривыми Гуидо Гранди (G. Grandi), впервые описавшего их в 1728.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

РОЛЛЯ ТЕОРЕМА: если действительная функция f непрерывна на нек-ром отрезке $[a, b]$, имеет в каждой его внутренней точке конечную или определенного знака бесконечную производную, а на его концах принимает равные значения, то на интервале (a, b) существует по крайней мере одна точка, в к-рой производная функции f равна нулю.

Геометрич. смысл Р. т. состоит в том, что на графике функции f, удовлетворяющей условиям Р. т., существует такая точка $(\xi, f(\xi))$, $a<\xi<b$, что в ней касательная к графику параллельна оси x.

Механич. интерпретация Р. т. означает, что для материальной точки, непрерывно двигающейся по прямой и вернувшейся через нек-рый промежуток времени в исходную точку, существует момент времени, в к-рый ее мгновенная скорость равнялась нулю.

Впервые теорема была получена для алгебраич. многочленов М. Роллем [1].

Лит.: [1] Rolle M., Traité d'algèbre, P., 1690; [2] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев.

РОМБ — плоский четырехугольник с равными сторонами. Р. можно рассматривать как частный случай параллелограмма, у к-рого или две смежные стороны равны, или диагонали взаимно перпендикулярны, или диагональ делит угол пополам. Р. с прямыми углами наз. квадратом.

Б. С.

РОМБЕРГА МЕТОД, правило Ромберга — метод вычисления определенного интеграла, основанный на *Ричардсона экстраполяции*. Пусть вычисляется значение I нек-рого функционала, при этом вычисляемое приближенное значение $T(h)$ зависит от параметра h, так что в результате вычисления получается приближенное равенство $I\cong T(h)$. Пусть известна информация о поведении разности $I-T(h)$ как функции от h, а именно:

$$I-T(h)=\alpha h^m, \qquad (1)$$

где m — натуральное число и α зависит от приближаемого функционала и той функции, на к-рой он вычисляется, от способа приближения и (слабо) от h. Если наряду с $T(h)$ вычислено $T(2h)$, то способ Ричардсона дает для I приближение

$$I\cong\frac{2^mT(h)-T(2h)}{2^m-1}. \qquad (2)$$

Это приближение тем лучше, чем слабее α из равенства (1) зависит от h. В частности, если α от h не зависит, то в (2) имеет место точное равенство.

Р. м. применяется к вычислению интеграла

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Промежуток $[0, 1]$ взят для простоты записи, он может быть любым конечным. Пусть

$$T_{k0}\overset{\text{def}}{=}2^{-k-1}\left[f(0)+2\sum_{j=1}^{2^k-1}f(j2^{-k})+f(1)\right], \qquad (3)$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Вычисления в Р. м. сводятся к составлению следующей таблицы:

$$\begin{array}{ccccccc} T_{00} & T_{01} & T_{02} & \dots & T_{0,n-1} & T_{0n} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1,n-1} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ T_{n-2,0} & T_{n-2,1} & T_{n-2,2} & & & \\ T_{n-1,0} & T_{n-1,1} & & & & \\ T_{n0}, & & & & & \end{array}$$

где первый столбец состоит из квадратурных сумм (3) формулы трапеций. Элементы $(l+2)$-го столбца получаются из элементов $(l+1)$-го столбца по формуле

$$T_{k,\,l+1}=\frac{2^{2l+2}T_{k+1,\,l}-T_{kl}}{2^{2l+2}-1},\quad k=0,\,1,\,2,\,\dots,\,n-l-1. \quad (4)$$

При составлении таблицы главная часть вычислительного труда затрачивается на вычисление элементов первого столбца. Элементы следующих столбцов вычисляются чуть сложнее конечных разностей.

Каждый элемент T_{kl} таблицы есть квадратурная сумма, приближающая интеграл

$$I\cong T_{kl}. \quad (5)$$

Узлами квадратурной суммы T_{kl} являются точки $j2^{-k-l}$, $j=0,\,1,\,2,\,\dots,\,2^{k+l}$, а ее коэффициенты — положительные числа. Квадратурная формула (5) точна для всех многочленов степени не выше $2l+1$.

В предположении, что подинтегральная функция $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка $2l+2$ на $[0,\,1]$, разность $I-T_{kl}$ имеет представление вида (1), в к-ром $m=2l+2$. Отсюда следует, что элементы $(l+2)$-го столбца, вычисляемые по формуле (4), являются улучшениями по Ричардсону элементов $(l+1)$-го столбца. В частности, для погрешности квадратурной формулы трапеций справедливо представление

$$I-T_{k0}=-\frac{f''(\xi)}{12}h^2,\quad h=2^{-k},\quad \xi\in[0,\,1],$$

и способ Ричардсона дает более точное приближение к I:

$$T_{k1}=\frac{4T_{k+1,\,0}-T_{k0}}{3},\quad k=0,\,1,\,2,\,\dots,\,n-1.$$

T_{k1} оказывается квадратурной суммой формулы Симпсона, и т. к. для погрешности этой формулы справедливо представление

$$I-T_{k1}=-\frac{f^{(\mathrm{IV})}(\eta)}{180}h^4,\quad h=2^{-k-1},\quad \eta\in[0,\,1],$$

то снова можно воспользоваться способом Ричардсона и т. д.

В Р. м. в качестве приближения к I берется T_{0n}, при этом предполагается, что существует непрерывная производная $f^{(2n)}(x)$ на $[0,\,1]$. Ориентировочное представление о точности приближения T_{0n} можно получить, сравнивая T_{0n} и $T_{1,\,n-1}$.

Впервые метод изложен В. Ромбергом [1].

Лит.: [1] Romberg W., «Kgl. norske vid. selskabs forhandl.», 1955, Bd 28, № 7, s. 30—36; [2] Bauer F. L., Rutishauser H., Stiefel E., «Proc. Symp. Appl. Math.», 1963, v. 15, p. 199—218.

И. П. Мысовских.

РОМБИЧЕСКАЯ СЕТЬ, конформно-чебышевская сеть,— сеть, в каждом четырехугольнике к-рой, образованном двумя парами линий различных семейств, стороны равны с точностью до бесконечно малых 1-го порядка. На поверхности вращения ее *асимптотическая сеть* есть Р. с. Напр., на гиперболоиде вращения его прямолинейные образующие составляют Р. с.

А. Б. Иванов.

РОСТА ИНДИКАТРИСА, индикатор целой функции,— величина

$$h(\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho}},$$

характеризующая рост целой функции $f(z)$ конечного порядка $\rho>0$ и конечного типа σ вдоль луча $\arg z=\varphi$ при больших $r\,(z=re^{i\varphi})$. Напр., для функции

$$f(z)=e^{(a-ib)z^{\rho}}$$

порядок равен ρ и Р. и. равна $h(\varphi)=a\cos\rho\varphi+b\sin\rho\varphi$; для функции $\sin z$ порядок $\rho=1$ и $h(\varphi)=|\sin\varphi|$. Функция $h(\varphi)$ всюду конечна, непрерывна, имеет в каждой точке производную слева и справа, имеет производную всюду, кроме, быть может, счетного множества точек; всегда $h(\varphi)\leqslant\sigma$ и имеется, по крайней мере, одно φ, когда $h(\varphi)=\sigma$; обладает характерным свойством тригонометрич. выпуклости, т.е. если

$$h(\varphi_1)\leqslant H(\varphi_1),\quad h(\varphi_2)\leqslant H(\varphi_2),$$
$$H(\varphi)=a\cos\rho\varphi+b\sin\rho\varphi,$$
$$\varphi_1<\varphi_2,\ \varphi_2-\varphi_1<\min\left(\pi/\rho,\ 2\pi\right),$$

то

$$h(\varphi)\leqslant H(\varphi),\ \varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2.$$

Выполняется неравенство

$$|f(re^{i\varphi})|\leqslant e^{[h(\varphi)+\varepsilon]r^{\rho}},\ r>r_0(\varepsilon),\ \forall\varepsilon>0,$$

где $r_0(\varepsilon)$ не зависит от φ.

Р. и. вводится также для функции, аналитической в угле и имеющей в этом угле конечный порядок или уточненный порядок и конечный тип.

Лит.: [1] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., 1956; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968. *А. Ф. Леонтьев.*

РОСТОК — термин, означающий точечную локализацию различных математич. объектов (Р. функций, Р. отображений, Р. аналитических множеств и т. п.). Пусть, напр., x есть точка топологич. пространства и F — нек-рое семейство функций, определенных в окрестности x (каждая в своей). Функции f, g считаются эквивалентными (в точке x), если они совпадают в нек-рой окрестности x. Класс эквивалентности по этому отношению наз. ростком функций класса F в точке x. Так определяются Р. непрерывных функций, дифференцируемых функций в точках дифференцируемого многообразия, голоморфных функций в точках комплексного многообразия и т. п. Если семейство F обладает нек-рой алгебраич. структурой, то множество Р. функций семейства F наследует эту структуру (операции при помощи представителей классов). В частности, Р. голоморфных функций в точке z образуют кольцо. Элементы поля частных этого кольца наз. ростками мероморфных функций в точке z.

Аналогично определяется Р. семейства подмножеств топологич. пространства. Напр., в точках аналитич. многообразия есть Р. аналитических множеств (класс эквивалентности определяется по совпадению в окрестности данной точки). На Р. семейств подмножеств естественно определяются теоретико-множественные операции и отношения. Понятие Р. имеет смысл и для других объектов, определенных на открытых подмножествах топологич. пространства.

См. также *Аналитическая функция*, *Мероморфная функция*, *Пучок*.

Лит.: [1] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969. *Е. М. Чирка.*

РОТОР — то же, что *вихрь*.

РУЛЕТТА — название плоской кривой, рассматриваемой как траектория точки, жестко связанной с некрой кривой, катящейся по другой неподвижной кривой. В случае, когда окружность катится по прямой,

Р. есть *циклоида*; если окружность катится по окружности — *циклоидальная кривая*; если по прямой катится гипербола, эллипс или парабола — *Штурма кривая*. Траектория точки эллипса, катящегося по др. эллипсу, наз. эпиэллипсом. Каждая плоская кривая многими способами может быть рассмотрена как Р.; напр., всякая кривая может быть образована качением прямой по *эволюте*.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

РУНГЕ ОБЛАСТЬ, область Рунге первого рода,— область G в пространстве $\mathbb{C}^n$ комплексных переменных $(z_1, \ldots, z_n)$, обладающая тем свойством, что для любой голоморфной в G функции $f(z_1, \ldots, z_n)$ существует последовательность многочленов

$$\{P_k(z_1, \ldots, z_n)\}_{k=1}^{\infty}, \qquad (*)$$

сходящаяся в G к $f(z_1, \ldots, z_n)$ равномерно на каждом замкнутом ограниченном множестве $E \subset G$. Определение Р. о. второго рода получается отсюда заменой последовательности $(*)$ последовательностью рациональных функций $\{R_k(z_1, \ldots, z_n)\}_{k=1}^{\infty}$. При $n=1$ всякая односвязная область является Р. о. первого рода, всякая область — Р. о. второго рода (см. *Рунге теорема*). При $n \geqslant 2$ не всякая односвязная область есть Р. о. и не всякая Р. о. односвязна.

Лит.: [1] Фукс Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. П. Долженко.

РУНГЕ ПРАВИЛО — один из методов оценки погрешности формул численного интегрирования. Пусть $R=h^kM$ — остаточный член формулы численного интегрирования, где h — длина отрезка интегрирования или какой-то его части, k — фиксированное число и M — произведение постоянной на производную подинтегральной функции порядка $k-1$ в какой-то точке промежутка интегрирования. Если J — точное значение интеграла, а I — его приближенное значение, то $J=I+h^kM$.

Согласно Р. п. вычисляется тот же самый интеграл по той же формуле численного интегрирования, но вместо h берется величина $h/2$. При этом, чтобы получить значение интеграла по всему отрезку, формула интегрирования применяется дважды. Если производная, входящая в M, меняется не сильно на рассматриваемом промежутке, то

$$R = h^kM = \frac{I_1 - I}{1 - \frac{1}{2^{k-1}}},$$

где I_1 — значение интеграла, вычисленное по $h/2$. Р. п. используется и при численном решении дифференциальных уравнений.

Правило предложено К. Рунге (C. Runge, нач. 20 в.).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; 2 изд., т. 2, М., 1962; [2] Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1979.

А. Б. Иванов.

РУНГЕ ТЕОРЕМА — теорема о возможности полиномиальных приближений голоморфных функций, впервые доказанная К. Рунге (C. Runge, 1885).

Пусть D — односвязная область на плоскости комплексного переменного z. Тогда всякая функция f, голоморфная в D, приближается равномерно внутри D многочленами от z. Точнее, для любого компакта $K \subset D$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $p(z)$ с комплексными коэффициентами такой, что $|f(z) - p(z)| < \varepsilon$ для всех $z \in K$.

В иной формулировке: любая функция f, голоморфная в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, представляется в виде ряда из многочленов от z, абсолютно и равномерно сходящегося к f внутри D.

Эквивалентная формулировка Р. т.: пусть K — компакт на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ со связным дополнением $\mathbb{C}\setminus K$; тогда всякая функция, голоморфная в окрестности K, равномерно на K приближается многочленами от z. В такой форме Р. т. есть частный случай *Мергеляна теоремы*.

Р. т. наз. также следующая т е о р е м а о р а ц и о н а л ь н ы х п р и б л и ж е н и я х: всякая функция f, голоморфная в области $D\subset\mathbb{C}$, равномерно внутри D приближается рациональными функциями с полюсами вне D.

Р. т. имеет многочисленные применения в теории функций комплексного переменного и в функциональном анализе. Аналог Р. т. справедлив на некомпактных римановых поверхностях. Обобщением Р. т. для функций многих комплексных переменных является теорема Ока — Вейля (см. *Ока теоремы*).

Лит.: [1] М а р к у ш е в и ч А. И., Краткий курс теории аналитических функций, 4 изд., М., 1978; [2] Ш а б а т Б. В., *Введение в комплексный анализ*, 2 изд., ч. 1, М., 1976.

Е. М. Чирка.

РУНГЕ — КУТТА МЕТОД — одношаговый метод численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$u' = f(t,\ u). \tag{1}$$

Основная идея Р.— К. м. была предложена К. Рунге [1] и развита затем В. Кутта [2] и др. Первоначально эта идея использовалась лишь для построения явных схем Р.— К. м., к-рые разыскивались в виде

$$y_{j+1} = y_j + \tau \sum_{i=1}^{q} A_i k_i, \tag{2}$$

где

$$y_{j+\alpha} \approx u(t_j+\alpha\tau),\ k_1 = f(t_j,\ y_j),$$

$$k_n = f\left(t_j+\alpha_n\tau,\ y_j+\tau\sum_{m=1}^{n-1}\beta_{nm}k_m\right),\ n=2,\ 3,\ \ldots,\ q,$$

при этом значения постоянных $A_i, \alpha_n, \beta_{nm}$, $i=1, 2,\ldots, q$; $n=2, 3, \ldots, q$; $m=1, 2, \ldots, n-1$, определялись из требования, чтобы погрешность равенства (2) на точном решении уравнения (1) имела возможно высокий порядок малости в сравнении с шагом τ для любых уравнений вида (1).

В отличие от *Адамса метода* и др. многошаговых методов, Р.— К. м., как и всякий одношаговый метод, не требует предварительного построения начала таблицы значений приближенного решения и дает возможность вести вычислительный процесс при естественных для уравнения (1) начальных условиях, что позволяет использовать его непосредственно и в случае неравномерных сеток. Однако поскольку в этом методе не используется информация о решении в предыдущих узлах сетки, то он, вообще говоря, оказывается локально менее экономичным, чем, напр., метод Адамса.

Наиболее широко известным (см., напр., [3]) среди Р.— К. м. является метод

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}\tau\,(k_1+2k_2+2k_3+k_4),$$

$$k_1 = f(t_j,\ y_j),\ k_2 = f\left(t_j+\frac{1}{2}\tau,\ y_j+\frac{1}{2}\tau k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_j+\frac{1}{2}\tau,\ y_j+\frac{1}{2}\tau k_2\right),\quad k_4 = f(t_j+\tau,\ y_j+\tau k_3),$$

принадлежащий зависящему от двух свободных параметров семейству методов четвертого порядка точности вида (2) с $q=4$. Популярен и простейший явный Р.— К. м. первого порядка точности, получающийся из (2) при $q=1$. Этот метод известен под названием м е т о д а Э й л е р а. При значениях q, равных 2 и 3, из (2) могут быть найдены семейства Р.— К. м. второго и третьего порядка точности, зависящие от одного и двух

свободных параметров соответственно. В случае $q > 4$ имевшее место ранее соответствие между значением q и порядком точности метода уже нарушается. Р.— К. м. вида (2) пятого порядка точности удается построить лишь при $q=6$, шестого — при $q=7$, седьмого — при $q=9$ и т. д. В этом случае с увеличением значения q на единицу расширение множества подлежащих выбору в (2) постоянных A_j, α_n, β_{nm} часто оказывается уже недостаточным, чтобы удовлетворить условиям, возникающим из требования повышения на единицу порядка точности явного Р.— К. м. С целью увеличения числа выбираемых в (2) параметров можно рассмотреть, напр., следующее обобщение конструкции одношаговых методов, основанных на идее К. Рунге:

$$k_n = f\left(t_j + \alpha_n \tau,\ y_j + \tau \sum_{m=1}^{q} \beta_{nm} k_m\right), \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ q. \tag{3}$$

Методы вида (2), (3) в общем случае являются уже неявными, что значительно осложняет их численную реализацию: величины k_n, $n=1,\ 2,\ \ldots,\ q$, на каждом шаге приходится находить из системы, вообще говоря, нелинейных уравнений (3). Однако за счет достигнутого здесь значительного увеличения числа подлежащих выбору констант такие методы приобретают следующее свойство (см. [4]): для каждого значения q существует неявный Р.— К. м. порядка точности $2q$. Кроме того, при таком расширении класса Р.— К. м. появляются методы, хорошо ориентированные на случай *жестких дифференциальных систем*.

Имеется еще одно видоизменение (см., напр., [5]) идеи К. Рунге конструирования одношаговых методов численного решения уравнений вида (1). Именно, исходя из (1) записывается равенство

$$u(t_j+\tau) - u(t_j) = \tau \int_0^1 f(t_j+\alpha\tau,\ u(t_j+\alpha\tau))\, d\alpha.$$

Приближенное представление последнего интеграла квадратурной формулой с q узлами дает

$$u(t_j+\tau) \cong u(t_j) + \tau \sum_{i=1}^{q} A_i f(t_j+\alpha_i\tau,\ u(t_j+\alpha_i\tau)). \tag{4}$$

Если выбор узлов α_i и коэффициентов A_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ q$, рассматриваемой квадратурной формулы подчинить условиям

$$\sum_{i=1}^{q} A_i = 1,\ \sum_{i=1}^{q} A_i \alpha_i^n = \frac{1}{n+1},\quad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1, \tag{5}$$

то погрешность приближенного равенства (4) будет величиной порядка τ^{p+1}. При $p \leqslant 2q$ система уравнений (5) разрешима и приближенное равенство (4) может быть построено. Аналогично можно записать приближенные равенства для неизвестных величин $u(t_j+\alpha_i\tau)$, входящих в правую часть (4), при этом требования к их точности могут быть понижены на порядок, и т. д.

В качестве примера так построенного одношагового метода ниже приводится (см. [6]) метод третьего порядка точности предсказывающе-исправляющего характера:

$$y_{j+1/4} = y_j + \frac{1}{4}\tau f(t_j,\ y_j),$$

$$y_{j+1/2} = y_j + \frac{1}{2}\tau f\left(t_j + \frac{1}{4}\tau,\ y_{j+1/4}\right),$$

$$y^*_{j+1} = y_j + \tau f\left(t_j + \frac{1}{2}\tau,\ y_{j+1/2}\right),$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}\tau\left(f(t_j, y_j) + 4f\left(t_j + \frac{1}{2}\tau,\ y_{j+1/2}\right) + f(t_j+\tau,\ y^*_{j+1})\right).$$

Если положить в (4) одно из значений α_i равным единице, на этом пути можно строить также и неявные

методы, напр. метод

$$y_{j+1}=y_j+\frac{1}{2}\tau\left(f(t_j, y_{j+1}-\tau f(t_j+\tau, y_{j+1}))+\right.$$
$$\left.+f(t_j+\tau, y_{j+1})\right)$$

второго порядка точности.

Рассмотренные выше на примере уравнений вида (1) подходы к построению численных методов могут быть распространены на обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков (см. [6], [7]), а также использованы при конструировании разностных схем в случае дифференциальных уравнений с частными производными.

Лит.: [1] Runge C., «Math. Ann.», 1895, Bd 46, S. 167—178; [2] Kutta W., «Z. Math. und Phys.», 1901, Bd 46, S. 435—53; [3] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [4] Butcher J. C., «Math. Comp.», 1964, v. 18, p. 50—64; [5] Бобков В. В., «Вести АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук», 1967, № 4, с. 27—35; [6] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы, т. 2, М., 1977; [7] Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, пер. с нем., М., 1953.

В. В. Бобков.

РУЧЕК ТЕОРИЯ — один из методов изучения топологич. многообразий, основанный на представлении многообразия в виде объединения топологич. шаров с непересекающимися внутренностями и специальным образом пересекающимися краями.

Пусть M^n есть n-мерное многообразие, k — такое целое число, что $0 \leqslant k \leqslant n$, и пусть топологич. шар H является образом гомеоморфного отображения $h: B^k \times B^{n-k} \to M^n$, где B^m обозначает стандартный m-мерный шар с центром в точке O. Тогда пара (H, h) (или просто H) наз. ручкой индекса k в многообразии M^n. Гомеоморфизм h наз. характеристическим отображением ручки H, диск $h(B^k \times O)$ — срединным, а диск $h(O \times B^{n-k})$ — секущим. Сфера $h(\partial B^k \times O)$ наз. приклеивающей (или подошвенной) сферой, а сфера $h(O \times \partial B^{n-k})$ — секущей. Пространство $h(\partial B^k \times B^{n-k})$ наз. подошвой ручки H.

Если многообразие M^n кусочно линейно, то имеет смысл говорить о кусочно линейных ручках, имея в виду кусочную линейность характеристич. отображения. Точно также в случае гладкого многообразия M^n можно говорить о гладких ручках.

Пусть (H, h) — ручка индекса k в многообразии M^n, P — ее подошва и M_1^n — такое подмногообразие M^n, что $H \cap M_1^n = P$. Операция перехода от многообразия M_1^n к многообразию $M_2^n = M_1^n \cup H$ наз. операцией приклеивания ручки индекса k. Вложение $f = h|_{\partial B^k \times B^{n-k}}$ наз. приклеивающим отображением. С точностью до неподвижного на M_1^n гомеоморфизма многообразие M_2^n полностью определяется приклеивающим отображением f и не зависит от объемлющего многообразия M. Если f — произвольное вложение $\partial B^k \times B^{n-k}$ в ∂M_1^n, то результат приклеивания ручки по вложению f можно описать так: $M_2^n = (M_1^n \cup (B^k \times B^{n-k}))/\infty$, где отношение эквивалентности ∞ порождено отождествлением точек $\partial B^k \times B^{n-k}$ и ∂M_1^n по вложению f. Операция перехода от ∂M_1^n к ∂M_2^n наз. сферической перестройкой. По аналогии с этим приклеивание ручек наз. иногда пристройками. Многообразия, получающиеся приклеиванием ручки по изотопным вложениям, гомеоморфны. На рис. 1 изображено приклеивание трехмерных ручек индексов 1 и 2. Приклеивание к M_1^n ручки индекса 0 состоит в добавлении к M_1^n отдельно взятого шара размерности n. Добавление ручки индекса n заключается в заклеивании n-мерным шаром одной из компонент ∂M_1^n.

Если многообразие M_1^n и приклеивающее вложение $f : \partial B^k \times B^{n-k} \to \partial M_1^n$ кусочно линейны, то многообразие M_2^n, получающееся приклеиванием ручки по вложению f, также кусочно линейно. В случае гладких M_1^n и f многообразие M_2^n обладает естественной гладкой структурой во всех точках, кроме «угловых» точек, объединение к-рых совпадает с краем подошвы ручки. Эту структуру можно единственным образом продолжить до гладкой структуры на всем M_2^n. Такое продолжение наз. с г л а ж и в а н и е м у г л о в. В гладком случае операцию сглаживания углов включают в операцию приклеивания ручки. Приклеивание гладкой ручки полностью определяется приклеивающей сферой вместе с тривиализацией ее нормального расслоения.

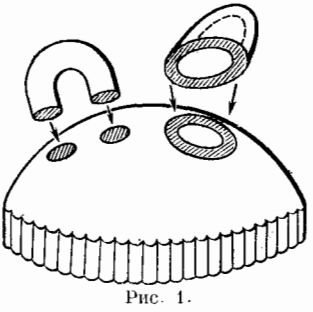


Рис. 1.

Представление компактного многообразия M^n в виде объединения конечного упорядоченного семейства ручек в M^n наз. р а з л о ж е н и е м M^n н а р у ч к и, если каждая следующая ручка пересекается с объединением предыдущих в точности по своей подошве. Другими словами, M^n допускает разложение на ручки, если его можно получить из шара (или из пустого множества) последовательным приклеиванием ручек. Аналогично, под разложением пары (M^n, M_0^n), где M_0^n — подмногообразие многообразия M^n, понимается представление M^n в виде результата последовательных приклеиваний ручек к M_0^n. В частности, р а з л о ж е н и е м б о р д и з м а (W, M_0, M_1) н а р у ч к и наз. разложение пары $(W, M_0 \times I)$, где $M_0 \times I$ — воротник M_0. Разложение на ручки некомпактного многообразия M^n состоит из бесконечного числа ручек. При этом обычно требуется, чтобы разложение было локально конечным, т. е. чтобы каждый компакт в M^n пересекался только с конечным числом ручек.

Применяя приведение в *общее положение* секущих сфер уже приклеенных ручек и подошвенной сферы приклеиваемой ручки и заменяя приклеивающие отображения на изотопные, можно добиться, чтобы ручки одного индекса не пересекались и чтобы индексы последовательно приклеиваемых ручек не убывали. Такое разложение на ручки наз. п р а в и л ь н ы м.



Рис. 2.

Каждое кусочно линейное многообразие раскладывается на кусочно линейные ручки. Если T — триангуляция M^n и T'' — ее второе барицентрическое подразделение, то в качестве ручек индекса k можно взять замкнутые звезды в T'' барицентров k-мерных симплексов T (см. рис. 2; определение звезды дано в ст. *Комплекс*).

Существует тесная связь между разложениями гладкого многообразия M^n на гладкие ручки и гладкими функциями на M^n с невырожденными критич. точками — *Морса функциями*. Эта связь заключается в следующем. Пусть x_0 — такая критич. точка индекса k

функции Морса $f: M^n \to R$, что для нек-рого $\varepsilon > 0$ в прообразе отрезка $[f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon]$ нет других критич. точек, и пусть $M_c = \{x \in M^n : f(x) \leqslant c\}$. Тогда многообразие $M_{f(x_0)+\varepsilon}$ получается из многообразия $M_{f(x_0)-\varepsilon}$ приклеиванием гладкой ручки индекса k. Таким образом, каждая функция Морса на компактном многообразии M^n порождает разложение M^n на гладкие ручки, причем число ручек индекса k в этом разложении совпадает с числом критич. точек индекса k. Этим доказывается существование разложения любого гладкого многообразия на гладкие ручки. Обратно, каждое разложение M^n на гладкие ручки порождено нек-рой функцией Морса на M^n.

Сложнее обстоит дело с разложением на ручки топологич. многообразий. Известно, что любое замкнутое топологич. многообразие размерности $n \geqslant 5$ раскладывается на топологич. ручки. Многообразия размерности $n \leqslant 3$ комбинаторно триангулируемы и поэтому раскладываются на ручки. Доказано, что существует многообразие размерности 4, не допускающее разложения на ручки.

Если в правильном разложении на ручки многообразия M^n последовательно стянуть все ручки на их срединные диски, то получится *клеточное пространство* K. Каждой ручке индекса k в разложении M^n отвечает k-мерная клетка в *клеточном разбиении* пространства K. Пространство K имеет тот же *гомотопический тип*, что и M^n. В случае замкнутого M^n пространство K совпадает с M^n.

Из определения ручки следует, что каждая n-мерная ручка H индекса k является одновременно ручкой индекса $n-k$. Если P_k — подошва H как ручки индекса k, а P_{n-k} — подошва H как ручки индекса $n-k$, то $P_k \cup P_{n-k} = \partial H$ и $P_k \cap P_{n-k} = \partial P_k = \partial P_{n-k}$. Каждое разложение замкнутого многообразия M^n на ручки порождает т. н. двойственное разложение M^n на ручки. Двойственное разложение состоит из взятых в обратном порядке ручек исходного разложения, причем каждая ручка индекса k считается уже ручкой индекса $n-k$. Этот факт служит геометрич. основой *Пуанкаре двойственности*. Если многообразие M^n имеет край, то двойственное разложение можно рассматривать как разложение пары $(M^n \cup (\partial M^n \times I), \partial M^n \times I)$.

Пусть H_1, H_2 — непересекающиеся ручки индекса k, приклеенные к многообразию M^n с односвязным краем по вложениям $f_1, f_2 : \partial B^k \times B^{n-k} \to \partial M^n$. Пусть $k \geqslant 2$ и $n-k \geqslant 2$, а $[f]$ обозначает элемент группы $\pi_{k-1}(\partial M^n)$, определяемый отображением f. Тогда вложение f_2 изотопно в $\partial(M^n \cup H_1)$ такому вложению $f_2' : \partial B^k \times B^{n-k} \to \partial M^n$, что $[f_2] = [f_1] + [f_2]$. Это означает, что многообразия $M^n \cup H_1 \cup H_2$ и $M^n \cup H_1 \cup H_2'$, где H_2' — ручка, приклеенная по вложению f_2', гомеоморфны. Операция перехода от многообразия $M^n \cup H_1 \cup H_2$ к многообразию $M^n \cup H_1 \cup H_2'$ наз. сложением ручек.

Пусть многообразие M_2^n получено из многообразия M_1^n последовательным приклеиванием ручки H_1 индекса k и ручки H_2 индекса $k+1$ так, что подошвенная сфера ручки H_2 трансверсально пересекает секущую сферу ручки H_1 ровно в одной точке. Тогда эту пару ручек можно устранить. Это означает, что существует гомеоморфизм M_2^n на M_1^n, неподвижный вне окрестности $H_1 \cup H_2$. Операция устранения иногда наз. сокращением дополнительных ручек. Сложение ручек и сокращение ручек можно производить, оставаясь в рамках кусочно линейной или гладкой категории. С помощью сокращения ручек индексов 0 и 1 можно, напр., любое разложение на ручки связного

компактного многообразия M^n заменить на разложение с ровно одной ручкой индекса 0. Если M^n односвязно и $n > 5$, то, складывая и сокращая ручки, можно любое разложение на ручки свести к разложению с минимальным числом ручек, совместимым с гомологич. структурой M^n.

Пусть (H, h) — топологич. ручка индекса k в кусочно линейном многообразии M^n, причем характеристич. отображение h кусочно линейно в окрестности $\partial B^k \times B^{n-k}$. Существует ли неподвижная на окрестности $\partial B^k \times B^{n-k}$ изотопия отображения h, выпрямляющая ручку H, т. е. переводящая ее в кусочно линейную ручку? Если бы ответ на этот вопрос был всегда положительным, то на каждом топологич. многообразии можно было бы ввести кусочно линейную структуру, согласовывая структуры на координатных окрестностях с помощью выпрямления кусочно линейных ручек одной окрестности внутри другой. На самом деле ответ зависит от индекса k и размерности n ручки H. Если $n \leqslant 3$ или $n \geqslant 5$ и $k \neq 3$, то любая ручка выпрямляема. Известно, что при $n \geqslant 5$ существуют невыпрямляемые ручки индекса 3, причем препятствие к выпрямлению лежит в группе $\mathbb{Z}_2$. В размерности 4 ручки индексов 0 и 1 выпрямляемы, а индексов 2 и 3, вообще говоря, нет. Препятствием к сглаживанию кусочно линейных ручек служат т. н. группы Милнора Γ_k.

Лит.: [1] Смейл С., «Математика», 1962, т. 6, № 3, с. 138—55; [2] его же, там же, 1964, т. 8, № 4, с. 95—108; [3] его же, «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 1, с. 125—38; [4] Kirby R. C., Siebenmann L. C., «Ann. Math. Stud.», 1977, № 88; [5] Рурк К., Сандерсон Б., Введение в кусочно линейную топологию, пер. с англ., М., 1974; [6] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977. *С. В. Матвеев.*

РУЧНОЕ ВЛОЖЕНИЕ — вложение топологич. *полиэдра* P в пространство $\mathbb{R}^n$ такое, что существует гомеоморфизм $\mathbb{R}^n$ на себя, при к-ром P переходит в прямолинейный полиэдр. Тогда P наз. ручным. В противном случае P наз. *диким*, а вложение — *диким вложением*. *М. И. Войцеховский.*

РУШЕ ТЕОРЕМА: пусть $f(z)$ и $g(z)$ — регулярные аналитич. функции комплексного переменного z в области D, простая замкнутая кусочно гладкая кривая Γ вместе с ограничиваемой ею областью G принадлежит D и всюду на Γ выполняется неравенство $|f(z)| > |g(z)|$; тогда в области G сумма $f(z)+g(z)$ имеет столько же нулей, сколько и $f(z)$.

Эта теорема была получена Э. Руше [1]. Она является следствием *аргумента принципа*, и из нее в свою очередь получается основная теорема алгебры многочленов.

Справедливо также о б о б щ е н и е Р. т. для многомерных голоморфных отображений, напр. в следующем виде. Пусть $f(z)=(f_1(z),\ldots, f_n(z))$ и $g(z)=(g_1(z),\ldots, g_n(z))$ — голоморфные отображения области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, с изолированными нулями, пусть гомеоморфная сфере гладкая поверхность Γ вместе с ограничиваемой ею областью G принадлежит D и всюду на Γ выполняется неравенство

$$|f(z)| = \sqrt{|f_1(z)|^2+\ldots+|f_n(z)|^2} > |g(z)|.$$

Тогда отображение $f(z) + g(z)$ имеет в G столько же нулей, сколько и $f(z)$.

Лит.: [1] Rouché E., «J. École polyt.», 1858, t. 21; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

РЭЛЕЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное распределение вероятностей с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

зависящей от *масштабного параметра* $\sigma > 0$. Р. р.

имеет положительную асимметрию, его единственная мода находится в точке $x=\sigma$. Все моменты Р. р. конечны, математич. ожидание и дисперсия равны соответственно $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ и $2\sigma^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$. Функция распределения Р. р. имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x^2/2\sigma^2}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

Р. р. является частным случаем распределения с плотностью

$$\frac{2}{2^{n/2}\sigma^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{n-1}e^{-x^2/2\sigma^2},$$

при $n=2$ и, следовательно, при $\sigma=1$ Р. р. совпадает с распределением арифметического квадратного корня из случайной величины, имеющей «*хи-квадрат*» *распределение* с двумя степенями свободы. Иначе, Р. р. может быть интерпретировано как распределение длины вектора в прямоугольной системе координат на плоскости, координаты к-рого независимы и имеют *нормальное распределение* с параметрами 0 и σ^2. Аналогом Р. р. в 3-мерном пространстве служит *Максвелла распределение*.

Р. р. находит основное применение в теории стрельбы и статистич. теории связи. Р. р. впервые рассмотрено Рэлеем (Rayleigh, 1880), как распределение результирующей амплитуды при сложении гармонич. колебаний.

Лит.: [1] Стретт Дж. В. (лорд Рэлей), Волновая теория света, пер. с англ., М.— Л., 1940. *А. В. Прохоров.*

РЭЛЕЯ УРАВНЕНИЕ — нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\ddot{x}+F(\dot{x})+x=0,\quad \dot{x}=dx/dt, \qquad (*)$$

где функция $F(u)$ удовлетворяет предположению:

$$uF(u)<0 \text{ при малых } |u|,$$
$$uF(u)>0 \text{ при больших } |u|.$$

Р. у. описывает типичную нелинейную систему с одной степенью свободы, в к-рой возможны *автоколебания*. Названо по имени Рэлея (Rayleigh), изучавшего уравнение такого типа в связи с задачами акустики [1].

Если уравнение (*) продифференцировать, а затем положить $y=\dot{x}$, то получится *Льенара уравнение*

$$\ddot{y}+f(y)\dot{y}+y=0;\ f(u)=F'(u).$$

Частным случаем Р. у. при

$$F(u)=-\lambda\left(u-\frac{u^3}{3}\right),\ \lambda=\text{const},$$

является *Ван дер Поля уравнение*. Иногда Р. у. наз. частный случай уравнения (*):

$$\ddot{x}-(a-b\dot{x}^2)\dot{x}+x=0,\ a>0,\ b>0.$$

Имеется большое число работ, в к-рых выясняются условия существования и единственности устойчивого *предельного цикла* у Р. у., то есть условия возникновения автоколебаний. Вопрос о периодич. решениях изучался и для различных обобщений Р. у., напр. для

$$\ddot{x}+F(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=e(t),$$

где $e(t)$ — периодич. функция.

Системой типа Рэлея часто наз. уравнение

$$\ddot{x}+F(\dot{x})+G(x)=H(t,x,\dot{x}),$$
$$x\in\mathbb{R}^n,\ F:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n,\ G:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n,$$

причем обычно предполагается, что

$$F=\operatorname{grad} f,\ f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R},\ f\in C^1,$$

$$G=\operatorname{grad} g,\ g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R},\ g\in C^2,$$

а H — ограниченная и периодическая по t вектор-функция. Представляет интерес получение достаточных условий существования периодич. решений таких систем.

Лит.: [1] Стретт Дж. В. (лорд Рэлей), Теория звука, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М.— Л., 1955; [2] Чезари Л., Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1964. См. также лит. при ст. *Ляпунова уравнение.* *Н. Х. Розов.*

РЯД, бесконечная сумма,— последовательность элементов (наз. членами данного ряда) нек-рого линейного топологич. пространства и определенное бесконечное множество их конечных сумм (наз. частичными суммами ряда), для к-рых определено понятие предела. Простейшими примерами Р. являются следующие.

Однократные числовые ряды. Пара последовательностей комплексных чисел $\{a_n\}$ и $\{s_n\}$ таких, что

$$s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n,\ n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{1}$$

наз. числовым (однократным) рядом и обозначается так:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

или

$$\sum a_n. \tag{2}$$

Элементы последовательности $\{a_n\}$ наз. членами ряда, а элементы последовательности $\{s_n\}$ — его частичными суммами, причем a_n наз. n-м членом Р. (2), а s_n — его частичной суммой порядка n. Р. (2) однозначно определяется каждой из двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{s_n\}$: члены последовательности $\{s_n\}$ получаются из членов последовательности $\{a_n\}$ по формуле (1), а последовательность $\{a_n\}$ восстанавливается по последовательности $\{s_n\}$ согласно формулам

$$a_1=s_1,\ a_{n+1}=s_{n+1}-s_n,\quad n=1,\ 2,\ \ldots$$

В этом смысле изучение Р. равносильно изучению последовательностей: для каждого утверждения о Р. можно сформулировать равносильное ему утверждение о последовательностях.

Р. (2) наз. сходящимся, если последовательность его частичных сумм $\{s_n\}$ имеет конечный предел

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n,$$

к-рый наз. суммой Р. (2), и пишут

$$s=\sum a_n.$$

Таким образом, обозначение (2) применяется как для самого Р., так и для его суммы. Если последовательность частичных сумм Р. (2) не имеет конечного предела, то он наз. расходящимся.

Примером сходящегося Р. является сумма членов бесконечной геометрич. прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n \tag{3}$$

при условии, что $|q|<1$. В этом случае ее сумма равна $\frac{1}{1-q}$, то есть $\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$. Если же $|q|\geqslant 1$, то Р. (3) дает пример расходящегося Р.

Если Р. (2) сходится, то последовательность его членов стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

Обратное утверждение неверно: последовательность членов $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ *гармонического ряда*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

стремится к нулю, однако этот Р. расходится. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ наз. о с т а т к о м порядка n Р. (2). Если Р. сходится, то каждый его остаток сходится. Если нек-рый остаток Р. сходится, то и сам Р. сходится. Если остаток порядка n Р. (2) сходится и его сумма равна r_n, то есть $r_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$, то

$$s=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=s_n+r_n.$$

Если Р. (2) и ряд

$$\sum b_n \tag{4}$$

сходятся, то сходится и ряд

$$\sum (a_n+b_n),$$

наз. с у м м о й рядов (2) и (3), причем его сумма равна сумме этих Р.

Если Р. (2) сходится и λ — комплексное число, то ряд $\sum \lambda a_n$, наз. п р о и з в е д е н и е м Р. (2) на число λ, также сходится и $\sum \lambda a_n=\lambda \sum a_n$.

Условие сходимости Р., не использующее понятие его суммы, дает *Коши критерий* сходимости Р.

Если все члены Р. (2) являются действительными числами: $a_n\in\mathbb{R}$, то Р. (2) наз. действительным. Важную роль в теории Р. играют действительные Р. с неотрицательными членами:

$$\sum a_n,\ a_n\geqslant 0,\ n=1,\ 2,\ \ldots\ . \tag{5}$$

Для того чтобы Р. (5) сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху. Если же он расходится, то его частичные суммы стремятся к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} s_n=+\infty,$$

поэтому в этом случае пишут

$$\sum a_n=+\infty.$$

Для Р. с неотрицательными членами существует много различных признаков сходимости. Основными являются следующие.

П р и з н а к с р а в н е н и я. Если для Р. (5) и

$$\sum b_n,\ b_n\geqslant 0,\quad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{6}$$

с неотрицательными членами существует такая постоянная $c>0$, что $0\leqslant a_n\leqslant cb_n$, то из сходимости Р. (6) следует сходимость Р. (5), а из расходимости Р. (5) — расходимость Р. (6).

При применении признака сравнения для исследования сходимости заданного Р. с неотрицательными членами часто оказывается целесообразным выделить главную часть его n-го члена относительно $\frac{1}{n}$ при $n\to\infty$ в виде $\frac{a}{n^{\alpha}}$ (a — нек-рая постоянная), а в качестве Р., с к-рым сравнивается данный Р., взять ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},\ \alpha\in\mathbb{R}, \tag{7}$$

сходящийся при $\alpha>1$ и расходящийся при $\alpha\leqslant 1$.

Как следствие признака сравнения в случае, когда в качестве Р. сравнения взят Р. (7), получается следующее правило: если

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n = b,$$

то при $\alpha > 1$ и $0 \leqslant b < +\infty$ Р. (5) сходится, а при $\alpha \leqslant 1$ и $0 < b \leqslant +\infty$ Р. (5) расходится.

Следствиями признака сравнения являются также *Д'Аламбера признак* и *Коши признак* сходимости числовых рядов с положительными членами. Для таких Р. имеются еще *Бертрана признак*, *Гаусса признак*, *Ермакова признак*, *Куммера признак*, *Раабе признак*.

Интегральный признак сходимости дает достаточные условия сходимости Р. (5) с неотрицательными членами, образующими убывающую последовательность: $a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть Р. (5) таков, что для него существует функция f определенная и убывающая при $x \geqslant 1$, у к-рой ее значения в целочисленных точках совпадают с членами данного ряда: $f(n) = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда если s_n — частичные суммы, а r_n — остатки ряда (5), то для них имеют место следующие оценки:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant r_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(x)\,dx$$

и

$$s_n = \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx + c + \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где c — нек-рая постоянная, а

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Поэтому Р. (5) сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Если же Р. (5) расходится, то его частичные суммы s_n растут так же, как интегралы

$$\int_{1}^{n+1} f(x)\,dx,$$

т. е. s_n асимптотически равны указанным интегралам:

$$s_n \sim \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx, \quad n \to +\infty.$$

Для Р. (5), члены к-рого образуют убывающую последовательность, имеет место теорема Коши: если члены Р. (5) убывают, то он сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}.$$

Необходимым условием сходимости Р. (5) с убывающей последовательностью членов является условие

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Пример расходящегося ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

показывает, что условие (8) не является достаточным для сходимости Р. (5) с убывающей последовательностью членов.

Важный класс числовых Р. составляют *абсолютно сходящиеся ряды*, т. е. такие Р. (2), для к-рых сходятся ряды $\sum |a_n|$. Если Р. абсолютно сходится, то он просто сходится и его сумма не зависит от порядка следования слагаемых. Сходящиеся, но не абсолютно сходящиеся

Р. наз. условно сходящимися. Примером условно сходящегося Р. является ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Сумма условно сходящегося Р. зависит от порядка его членов (см. *Римана теорема* о перестановке членов ряда): каковы бы ни были α и β, принадлежащие множеству действительных чисел, дополненному бесконечностями $+\infty$ и $-\infty$, $\alpha \leqslant \beta$, можно так переставить члены любого условно сходящегося Р., членами к-рого являются действительные числа, что для частичных сумм s_n полученного Р. будут иметь место равенства

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = \alpha, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = \beta.$$

Таким образом, для условно сходящихся Р. не имеет места коммутативный закон сложения. Не для всех Р. оказывается справедлив и ассоциативный закон сложения: если Р. расходится, то Р., полученный из данного последовательной группировкой его членов, может сходиться, причем его сумма зависит от способа группировки членов исходного Р. Напр., ряд

$$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$$

расходится, а ряды $(1-1)+(1-1)+\ldots$ и $1-(1-1)-(1-1)-\ldots$, полученные из него попарной группировкой его членов, сходятся и имеют различные суммы. Однако если Р. сходится, то, конечно, всякий Р., получающийся последовательной группировкой его членов, сходится, и его суммой является сумма данного Р., ибо последовательность частичных сумм нового Р. есть подпоследовательность частичных сумм исходного Р.

Среди Р. с членами разных знаков выделяют знакочередующиеся Р., для к-рых имеется *Лейбница признак* сходимости. Различные признаки сходимости для произвольных числовых Р. могут быть получены с помощью *Абеля преобразования* сумм попарных произведений, напр. *Абеля признак*, *Дедекинда признак*, *Дирихле признак*, *Дюбуа-Реймона признак* сходимости Р.

Умножение рядов. Для умножения Р. существуют различные правила. Наиболее известно правило Коши, согласно к-рому при перемножении рядов (2) и (4) сначала суммируются по конечным «диагоналям» попарные произведения $a_m b_n$, т. е. такие, у к-рых сумма индексов $m+n$ имеет одно и то же значение:

$$c_p = \sum_{m+n=p} a_m b_n, \qquad (9)$$

и ряд $\sum c_p$, членами к-рого являются полученные суммы, наз. произведением данных Р. Это правило умножения Р. подсказывается формулой умножения степенных рядов:

$$\sum a_m x^m \sum b_n x^n = \sum c_p x^p.$$

Пусть Р. (2), (4), (9) сходятся и

$$\sum a_m = a, \quad \sum b_n = b, \quad \sum c_p = c.$$

Если Р. (2) и (4) абсолютно сходятся, то Р. (9) также абсолютно сходится и $ab=c$. Если Р. (2) абсолютно сходится, а Р. (4) сходится, то сходится Р. (9) и $ab=c$ (теорема Мертенса). Если же ряды (2) и (4) условно сходятся, то Р. (9) может не сходиться; напр., ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

условно сходится, а ряд

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)^2 =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}}$$

расходится. Если все три Р.— (2), (4), (9)— сходятся, то $ab=c$.

Примером другого правила умножения Р. является суммирование сначала попарных произведений $a_m b_n$, у к-рых произведение индексов mn имеет фиксированное значение

$$c_p=\sum_{mn=p}a_m b_n,$$

и определение произведения рядов (2) и (4) как ряда $\sum c_p$. Это правило умножения Р. подсказывается формулой умножения *Дирихле рядов*:

$$\sum\frac{a_m}{m^x}\sum\frac{b_n}{n^x}=\sum\frac{c_p}{p^x}.$$

Встречаются также Р., члены к-рых a_n занумерованы всеми целыми числами $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$. Они обозначаются:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n. \qquad (10)$$

Р. (10) наз. с х о д я щ и м с я, если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_{-n},$$

и сумма этих Р. наз. суммой Р. (10).

Числовыми Р. более сложной структуры являются *кратные ряды*, члены $a_{n_1 \ldots n_m}$ к-рых снабжены мультииндексами, где n_k — натуральные числа, $k=1, 2, \ldots, m$, $m=2, 3, \ldots$. В теории кратных Р. рассматриваются различные типы частичных сумм: треугольные

$$s_n=\sum_{k_1+\ldots+k_m\leqslant n}a_{k_1\ldots k_m},$$

прямоугольные

$$s_{n_1\ldots n_m}=\sum_{k_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{k_m=1}^{n_m}a_{k_1\ldots k_m},$$

сферические

$$s_r=\sum_{k_1^2+\ldots+k_m^2\leqslant r^2}a_{k_1\ldots k_m},\ r>0,$$

и др. В зависимости от выбора типа частичных сумм определяется понятие суммы кратного Р. как соответствующего их предела. В случае $m=2$ кратный Р. наз. *двойным рядом*. Для кратных Р., в отличие от однократных, члены Р. уже могут не определяться заданием множества частичных сумм, т. е., вообще говоря, для того чтобы кратный Р. был определен, необходимо задать как кратную последовательность членов Р., так и множество его частичных сумм.

В математич. анализе находят применение не только сходящиеся Р., но и расходящиеся. Для последних разработаны разнообразные методы суммирования.

В виде сумм числовых Р. записываются многие важные иррациональные постоянные, напр.:

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},\quad \pi^2=6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

а также значения определенных интегралов, первообразные подинтегральных функций к-рых не выражаются через элементарные функции:

$$\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2},$$

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}.$$

Функциональные ряды. Функциональным (однократным) рядом

$$\sum a_n(x), \quad x \in X, \tag{11}$$

наз. пара функциональных последовательностей $\{a_n(x)\}$ и $\{s_n(x)\}$, состоящих из числовых функций, определенных на нек-ром множестве X и таких, что

$$s_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Как и в случае числовых Р., элементы последовательности $\{a_n(x)\}$ наз. членами Р. (11), а последовательности $\{s_n(x)\}$ — его частичными суммами. Р. (11) наз. сходящимся на множестве X, если при любом фиксированном $x_0 \in X$ сходится числовой ряд

$$\sum a_n(x_0).$$

Пример. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

сходится на всей комплексной плоскости, а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

только при $z=0$.

Сумма сходящегося Р. непрерывных, напр. на нек-ром отрезке, функций не обязательно является непрерывной функцией, напр. ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$$

сходится на отрезке $[0, 1]$, его члены непрерывны на этом отрезке, а сумма

$$s(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{если} \quad x = 1 \end{cases}$$

разрывна в точке $x=1$. Ряд условий, при к-рых на функциональные Р. переносятся свойства непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости конечных сумм соответственно непрерывных, дифференцируемых или интегрируемых функций, формулируется в терминах равномерной сходимости рядов (см. *Равномерно сходящийся ряд*).

Ряды измеримых функций. Пусть X — измеримое по Лебегу подмножество n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, μ — мера Лебега и члены $a_k(x)$ ряда

$$\sum a_k(x), \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n, \tag{12}$$

являются измеримыми почти всюду конечными на X функциями, принимающими значения из расширенной числовой прямой (т. е. наряду с действительными числами они могут принимать значения $+\infty$ и $-\infty$). Если Р. (12) сходится почти всюду на множестве X, то его сумма $s(x)$ также является измеримой функцией и, в силу *Егорова теоремы*, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $E \subset X$, что $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$, а Р., членами к-рого являются сужения $a_k(x)|_E$ функций $a_k(x)$ на компакте E, сходится на нем равномерно и его суммой является $s(x)|_E$ — сужение суммы Р. (12) на рассматриваемом компакте.

Пусть $L_p(X)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, — пространство функций $f : X \to \mathbb{R}$ соответственно с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

при $1 \leqslant p < +\infty$ и с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \operatorname{vrai} |f(x)|$$

при $p=\infty$. Р. (12) наз. сходящимся в пространстве $L_p(X)$, если последовательность его частичных сумм $\{s_n(x)\}$ сходится в $L_p(X)$ и ее предел $s(x)$ наз. суммой Р. (12) в этом пространстве:

$$s(x)=\sum a_k(x) \text{ в } L_p(X).$$

Если Р. (12) сходится в $L_p(X)$ и $s(x)$ — его сумма, то существует подпоследовательность последовательности его частичных сумм, к-рая сходится к $s(x)$ почти всюду на X.

Почленное интегрирование рядов. Обобщением теоремы о почленном интегрировании равномерно сходящихся Р. являются следующие теоремы.

Теорема 1. Если существует такая суммируемая на множестве X функция f, что для всех $m=1, 2, \ldots$ и всех $x\in X$ частичные суммы $s_n(x)$ Р. (12) удовлетворяют неравенству

$$|s_m(x)|\leqslant f(x),$$

Р. (12) сходится почти всюду на X и его сумма равна $s(x)$, то

$$\int_X s(x)\,dx=\int_X\left[\sum a_k(x)\right]dx=\sum\int_X a_k(x)\,dx. \quad (13)$$

Теорема 2. Если $a_k(x)\in L_p(X)$, $s(x)\in L_p(X)$, $1<p<+\infty$, $\mu X<+\infty$, и последовательность частичных сумм $\{s_m(x)\}$ Р. (12) слабо сходится на множестве X к функции $s(x)$ (т.е. для любой функции $b=b(x)\in L_q(x)$, $1/p+1/q=1$, выполняется условие

$$\lim_{m\to\infty}(s-s_m,\ b)\equiv\lim_{m\to\infty}\int_X[s(x)-s_m(x)]\,b(x)\,dx=0),$$

то имеет место формула (13).

Можно почленно интегрировать и Р. (12), все члены к-рых неотрицательны на множестве X. У таких Р. последовательность их частичных сумм в каждой точке $x\in X$ возрастает и потому имеет конечный или бесконечный предел, к-рый наз. значением суммы $s(x)$ рассматриваемого Р. в этой точке.

Теорема 3. Если члены Р. (12) неотрицательны, то имеет место формула (13).

В предположениях теоремы 3 обе части формулы (13) могут обратиться в $+\infty$. Достаточные условия их конечности даются следующей теоремой.

Теорема 4. Если члены Р. (12) неотрицательны и интегралы от его частичных сумм $s_m(x)$ ограничены в совокупности:

$$\int_X s_m(x)\,dx\leqslant c, \text{ где } c\text{ — постоянная},$$
$$m=1, 2, \ldots,$$

то сумма $s(x)$ Р. (12) является суммируемой функцией.

Почленное дифференцирование рядов. Пусть $\mathbb{R}^n$ есть n-мерное арифметическое евклидово пространство точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i\in\mathbb{R}$, G — открытое в $\mathbb{R}^n$ множество, $f: G\to\mathbb{R}$. И пусть $D_{x_i}f$ — обобщенная производная функции f по переменной x_i, $i=1, 2, \ldots, n$. Если $a_k(x)\in L_p(G)$, $D_{x_{i_0}}a_k(x)\in L_p(G)$ (i_0 — фиксировано), $1\leqslant p\leqslant+\infty$, и ряды $\sum a_k(x)$, $\sum D_{x_{i_0}}a_k(x)$, $x\in G$, сходятся в $L_p(G)$: $s(x)=\sum a_k(x)$, $\sigma(x)=\sum D_{x_{i_0}}a_k(x)$, то функция $s(x)$ имеет в G обобщенную производную по переменной x_{i_0} и $D_{x_{i_0}}s(x)=\sigma(x)$, то есть

$$D_{x_{i_0}} \sum a_k(x) = \sum D_{x_{i_0}} a_k(x) \text{ в } L_p(G).$$

Среди функциональных Р. особо важную роль играют *степенные ряды*, *Фурье ряды*, *Дирихле ряды* и вообще Р., получающиеся при разложении функций по собственным функциям того или иного оператора. Многие из перечисленных свойств функциональных Р. обобщаются на более общие Р., когда их членами являются функции со значениями в линейных нормированных пространствах или, более общо, в линейных топологич. пространствах, а также на кратные функциональные Р., то есть Р., члены к-рых снабжены мультииндексами:

$$\sum a_{n_1 \dots n_m}(x).$$

Теория функциональных рядов дает удобные и весьма общие методы для изучения функций, поскольку функции весьма широкого класса могут быть представлены в определенном смысле в виде суммы нек-рого ряда элементарных функций. Напр., однозначная аналитич. функция является в окрестности каждой внутренней точки из множества своего определения суммой своего *Тейлора ряда*; всякая непрерывная на отрезке функция является суммой равномерно сходящегося на этом отрезке ряда, членами к-рого являются алгебраич. многочлены; наконец, для всякой измеримой и конечной почти всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции существует тригонометрич. ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

сумма к-рого почти всюду совпадает с заданной функцией.

Разложение функций в Р. применяется в различных разделах математики: в анализе для исследования функций, при отыскании решений в виде Р. тех или иных уравнений, содержащих неизвестные функции, напр. *неопределенных коэффициентов методом*, в численных методах для приближенного вычисления значений функций и т. п.

Историческая справка. К понятию бесконечных сумм подошли еще ученые Др. Греции, у них уже встречалась сумма членов бесконечной геометрич. прогрессии с положительным знаменателем, меньшим единицы. Как самостоятельное понятие Р. вошел в математику в 17 в. И. Ньютон (J. Newton) и Г. Лейбниц (G. Leibniz) систематически использовали Р. для решения как алгебраических, так и дифференциальных уравнений. Формальная теория Р. усиленно развивалась в 18—19 вв. в работах Я. и И. Бернулли (Jakob und Johann Bernoulli), Б. Тейлора (B. Taylor), К. Маклорена (C. Maclaurin), Л. Эйлера (L. Euler), Ж. Д'Аламбера (J. D'Alembert), Ж. Лагранжа (J. Lagrange) и др. В этот период использовались как сходящиеся, так и расходящиеся Р., хотя не было полной ясности в вопросе о законности действий над ними. Точная теория Р. была создана в 19 в. на основе понятия предела в трудах К. Гаусса (C. Gauss), Б. Больцано (B. Bolzano), О. Коши (A. Cauchy), П. Дирихле (P. Dirichlet), Н. Абеля (N. Abel), К. Вейерштрасса (K. Weierstrass), Б. Римана (B. Riemann) и др.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Лузин Н. Н., Теория функций действительного переменного, 2 изд., М., 1948; [3] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [4] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [5] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [6] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971, 2 изд., ч. 2, М., 1980; [7] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1981; [8] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975; [9] Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М.— Л., 1944.

Л. Д. Кудрявцев.

САККЕРИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК — четырехугольник $ABCD$, имеющий при вершинах A и B прямые углы и равные стороны AD и BC. Рассматривался Дж. Саккери (G. Saccheri, 1733) при попытках доказать постулат Евклида о параллельных. Из трех предположений о величинах углов при вершинах C и D: либо углы прямые, либо углы тупые, либо острые, первая гипотеза является утверждением, эквивалентным постулату Евклида о параллельных; вторая приводит к противоречию с др. аксиомами и постулатами Евклида. Относительно третьей гипотезы Дж. Саккери пришел к ошибочному выводу, что она противоречит др. аксиомам и постулатам Евклида.

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.— Л., 1949; [2] Погорелов А. В., Основания геометрии, 3 изд., М., 1968.

А. Б. Иванов.

САЛОННАЯ ИГРА — игра с несколькими участниками, в к-рой исход определяется не только искусством играющих, но и случайными факторами (раскладами карт, выпадениями игральных костей и т. п.). Исследование С. и. (преимущественно карточных) занимает значительное место в *игр теории*. С. и., с одной стороны, являются неисчерпаемым источником интересных с математич. точки зрения игровых моделей; а с другой — сами являются моделями более серьезных конфликтов — военных, экономических и т. п. Покер, первая модель к-рого исследовалась Дж. Нейманом в 1928 (см. [1]), сыграл при возникновении теории игр роль, аналогичную роли игры в кости в возникновении теории вероятностей. Позднее были построены и решены многие частные модели игр типа покера, а в сер. 50-х гг. С. Карлином (S. Karlin) и Р. Рестрепо (R. Restrepo) были заложены основы общей теории *антагонистических игр* типа «покер». В их модели игрок I (II) знает свою карту ξ (соответственно η) — реализацию случайной величины, имеющей распределение $F(\xi)$ [соответственно $G(\eta)$]. *Стратегии* игроков I и II представляют собой соответственно векторы $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$, а функция выигрыша имеет вид

$$K(\varphi, \psi) = \int\int P[\xi, \eta, \varphi(\xi), \psi(\eta)]\, dF(\xi)\, dG(\eta).$$

С. Карлин и Р. Рестрепо нашли достаточно эффективные методы решения подобных игр (см. [2]).

Довольно много исследований было посвящено бриджу. Ввиду того что в бридже два партнера представляют собой фактически одного игрока, он является примером игры без полной памяти.

Лит.: [1] Нейман Дж., в сб.: Матричные игры, М., 1961, с. 173—204; [2] Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, пер. с англ., М., 1964; [3] Thompson G. L., в кн.: Contributions to the theory of games, v. 2, Princeton, 1953, p. 267—77.

В. К. Доманский.

САМОИНЪЕКТИВНОЕ КОЛЬЦО левое — кольцо, инъективное как левый модуль над собой. Симметричным образом определяется правое С. к. Классически полупростые кольца и все кольца вычетов суть С. к. Если R — С. к. с радикалом Джекобсона J, то факторкольцо R/J регулярно в смысле Неймана (см. *Регулярное кольцо*). Регулярное С. к. непрерывно. Всякое счетное С. к. квазифробениусово. Левое С. к. может не быть правым С. к. Кольцо матриц над С. к.

и полное кольцо линейных преобразований векторного пространства над телом самоинъективны. Кольца эндоморфизмов всех свободных левых R-модулей являются С. к. тогда и только тогда, когда R квазифробениусово. Если M — кообразующий категории левых R-модулей, то $\mathrm{End}_R M$ есть С. к. Если сингулярный идеал кольца R равен нулю, то его инъективная оболочка естественным образом превращается в С. к. Групповое кольцо RG самоинъективно слева тогда и только тогда, когда R есть С. к., а группа G конечна. Прямое произведение самоинъективных колец самоинъективно. Кольцо R изоморфно прямому произведению полных колец линейных преобразований над телами в том и только в том случае, когда R — левое С. к. без нильпотентных идеалов, каждый ненулевой левый идеал к-рого содержит минимальный левый идеал.

Лит.: [1] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 14, М., 1976, с. 57—190; [2] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [3] Lawrence J., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1977, v. 65, № 2, p. 217—20. *Л. А. Скорняков.*

САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯ ТОЧКА — одна из *особых точек* кривой или поверхности. См., напр., *Двойная точка*.

САМОПЕРИМЕТР — длина $2\pi_S$ центрально-симметричной замкнутой выпуклой кривой S на плоскости, измеренная в той метрике Минковского, для к-рой сама S играет роль единичной окружности. Всегда $3 \leqslant 2\pi_S \leqslant 4$ (см. [1]). При обобщении на несимметричный случай С. приписывается направленной кривой S и зависит от выбора начала внутри S (см. [2], [3]). Рассмотрен случай звездной S (см. [4]). Существуют различные обобщения С. для единичной сферы S в нормированном пространстве размерности, большей двух (см. [5], [6]).

Лит.: [1] Решетняк Ю. Г., «Успехи матем. наук», 1953, т. 8, в. 6, с. 125—26; [2] Сорокин В. А., «Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та», 1965, № 243, с. 160—85; [3] Chakerian G. D., Talley W. K., «Arch. math.», 1969, v. 20, № 4, p. 431—43; [4] Goląb S., «Colloq. math.», 1966, v. 15, № 1, p. 141—44; [5] Schäffer J. J., «Math. Ann.», 1971, Bd 190, № 3, S. 242—47; [6] Petty C. M., «Geom. dedic.», 1974, v. 3, № 1, p. 77—97. *В. А. Залгаллер.*

САМОПРИКОСНОВЕНИЯ ТОЧКА — одна из *особых точек* кривой или поверхности. См., напр., *Двойная точка*.

САМОСОПРЯЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение $l(y)=0$, совпадающее с *сопряженным дифференциальным уравнением* $l^*(y)=0$. Здесь

$$l(y) \equiv a_0(t)\,y^{(n)} + \ldots + a_k(t)\,y^{(n-k)} + \ldots + a_n(t)\,y,$$

$$l^*(y) \equiv (-1)^n (\overline{a_0} y)^{(n)} + \ldots + (-1)^{n-k} (\overline{a_k} y)^{(n-k)} + \ldots + \overline{a_n} y,$$

где

$$y^{(\nu)} = d^\nu y/dt^\nu,\ y(\cdot) \in C^n(I),\ a_k(\cdot) \in C^{n-k}(I),$$

$$a_0(t) \neq 0,\ t \in I;$$

$C^m(I)$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых комплекснозначных функций на $I=(\alpha, \beta)$; черта означает операцию комплексного сопряжения.

Левая часть всякого С. д. у. $l(y)=0$ есть сумма выражений вида

$$l_{2m}(y) = (p_m y^{(m)})^{(m)},$$

$$l_{2m-1}(y) = \frac{1}{2}\left[(iq_m y^{(m-1)})^{(m)} + (iq_m y^{(m)})^{(m-1)}\right],$$

где $p_m(t)$, $q_m(t)$ — действительнозначные достаточно гладкие функции, $i^2=-1$. С. д. у. с действительными коэффициентами — обязательно четного порядка и имеет вид

$$(p_0y^{(m)})^{(m)}+\ldots+(p_ky^{(m-k)})^{(m-k)}+\ldots+p_my=0$$

(см. [1] — [3]).

Линейная система дифференциальных уравнений

$$L(x)=0,\ L(x)\equiv\dot{x}+A(t)x,\ t\in I,$$

с непрерывной комплекснозначной $(n\times n)$-матрицей $A(t)$ наз. самосопряженной, если $A(t)=-A^*(t)$, где $A^*(t)$ — эрмитово сопряженная матрица к матрице $A(t)$ (см. [1], [4]). Это определение не согласовано с определением С. д. у. Напр., система

$$\dot{x}_1-x_2=0,\ \dot{x}_2+p(t)x_1=0,$$

эквивалентная С. д. у.

$$\ddot{y}+p(t)y=0,$$

— самосопряженная только в том случае, если $p(t)\equiv1$.

Краевая задача

$$l(y)=0,\ t\in\Delta=[t_0,\ t_1], \tag{1}$$

$$U_k(y)=0,\ k=1,\ \ldots,\ n, \tag{2}$$

где $U_k: C^{(n)}(\Delta)\to\mathbb{R}^1$ — линейные и линейно независимые функционалы, описывающие краевые условия, наз. самосопряженной, если она совпадает со своей сопряженной краевой задачей, то есть (1) — С. д. у., а $U_k(y)=U_k^*(y)$ для всех $y(\cdot)\in C^n(\Delta)$ и всех $k=1,\ldots,n$ (см. [1] — [3], [5]). Если (1), (2) — самосопряженная краевая задача, то справедливо равенство (см. *Грина формулы*)

$$\int_{t_0}^{t_1}\xi l(y)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\overline{l}(\xi)\,y\,dt$$

для любой пары функций $y(\cdot)$, $\xi(\cdot)\in C^n(\Delta)$, удовлетворяющей краевым условиям (2).

Все собственные значения самосопряженной задачи

$$l(y)=\lambda y,\ U_k(y)=0,\ k=1,\ \ldots,\ n,$$

действительны, а собственные функции φ_1, φ_2, отвечающие различным собственным значениям λ_1, λ_2, ортогональны

$$\int_{t_0}^{t_1}\overline{\varphi}_1(t)\varphi_2(t)\,dt=0.$$

Линейная краевая задача

$$L(x)\equiv\dot{x}+A(t)x=0,\ U(x)=0,\ t\in\Delta, \tag{3}$$

где $A(t)$ — непрерывная комплекснозначная $n\times n$ матрица, U есть n-вектор-функционал на пространстве $C_n^1(\Delta)$ непрерывных комплекснозначных функций $x:\Delta\to\mathbb{R}^n$, наз. самосопряженной, если она совпадает со своей сопряженной краевой задачей,

$$L^*(x)=0,\ U^*(x)=0,\ t\in\Delta,$$

т. е.

$$L(x)=-L^*(x),\ U(x)=U^*(x)$$

для всех $x(\cdot)\in C_n^1(\Delta)$. Самосопряженная краевая задача обладает свойствами, аналогичными свойствам задачи (1), (2) (см. [4]).

Понятия С. д. у. и самосопряженной краевой задачи тесно связаны с понятием самосопряженного оператора [6]. С. д. у. и самосопряженная краевая задача определяются также для линейного уравнения с частными производными (см. [5], [7]).

Лит.: [1] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [2] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [3] Коддингтон Э. А., Левинсон Н.,

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [4] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [5] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [6] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, пер. с англ., ч. 2, М., 1966; [7] Михайлов В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных, М., 1976.

Е. Л. Тонков.

САМОСОПРЯЖЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — линейное преобразование евклидова или унитарного пространства, совпадающее со своим *сопряженным линейным преобразованием*. В евклидовом пространстве С. л. п. наз. также *симметрическим*, а в унитарном пространстве — *эрмитовым*. Необходимое и достаточное условие самосопряженности линейного преобразования конечномерного пространства состоит в том, что его матрица A в произвольном ортонормированном базисе совпадает с сопряженной матрицей A^*, т. е. является симметрич. матрицей (в евклидовом случае) или эрмитовой матрицей (в унитарном случае). Собственные значения С. л. п. действительны (даже в унитарном случае), а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Линейное преобразование конечномерного пространства L является самосопряженным тогда и только тогда, когда в L существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов, и в этом базисе записывается действительной диагональной матрицей.

С. л. п. A наз. *неотрицательным* (или *положительно полуопределенным*), если $(Ax, x) \geqslant 0$ для любого вектора x, и *положительно определенным*, если $(Ax, x) > 0$ для любого вектора $x \neq 0$. Для неотрицательности (положительной определенности) нек-рого С. л. п. в конечномерном пространстве необходимо и достаточно, чтобы все его собственные значения были неотрицательны (соответственно положительны) или чтобы соответствующая ему матрица была положительно полуопределенной (соответственно положительно определенной). В этом случае существует единственное неотрицательное С. л. п. B, удовлетворяющее условию $B^2 = A$ — *квадратный корень* из С. л. п. A.

А. Л. Онищик.

САМОСОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР, *эрмитов оператор*,— линейный оператор A, определенный на линейном всюду плотном множестве $D(A)$ гильбертова пространства H и совпадающий со своим *сопряженным оператором* A, т. е. такой, что $D(A) = D(A^*)$ и

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \qquad (*)$$

для любых $x, y \in D(A)$. Всякий С. о. замкнут и не допускает расширения с сохранением равенства (*) на более широкое, чем $D(A)$, линейное многообразие, в силу чего С. о. наз. также *гипермаксимальным*. Поэтому если A ограниченный С. о., то он определен на всем пространстве H.

Каждый С. о. однозначно определяет *разложение единицы* F_λ, $-\infty < \lambda < \infty$; имеет место интегральное представление

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dF_\lambda x,$$

где интеграл понимается как сильный предел интегральных сумм, для каждого $x \in D(A)$ и

$$D(A) = \left\{ x \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\langle E_\lambda x, x\rangle < \infty \right\}.$$

Спектр С. о. A не пуст и лежит на действительной оси. Квадратичная форма $K(A) = \langle Ax, x\rangle$, порожденная С. о. A, действительна, что позволяет ввести понятие *положительного оператора*.

С помощью С. о. описываются многие краевые задачи математич. физики.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1966; [3] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979. *В. И. Соболев.*

САРДА ТЕОРЕМА: пусть $f: M \to N$ — отображение класса C^r многообразий M и N размерности m и n соответственно; если $r > \max(0, m-n)$, то *критические значения* f образуют множество меры нуль. Множество же регулярных значений оказывается массивным и всюду плотным. Установлена А. Сардом [1].

Лит.: [1] Sard A., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1942, v. 48, p. 883—90. *М. И. Войцеховский.*

СБАЛАНСИРОВАННОЕ КОЛЬЦО левое (правое) — кольцо, над к-рым все левые (правые) модули сбалансированы. Кольцо сбалансировано слева тогда и только тогда, когда все его факторкольца суть QF-1-кольца, т. е. все точные левые модули над ними сбалансированы. В частности, кольцо сбалансировано, если все эти факторкольца квазифробениусовы. Всякое С. к. разлагается в прямую сумму однорядного кольца и колец матриц над локальными кольцами специального типа. Любое С. к. полусовершенно. Нётерово С. к. оказывается артиновым.

Лит.: [1] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 19, М., 1981, с. 31—134; [2] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79. *Л. А. Скорняков.*

СБАЛАНСИРОВАННЫЙ МОДУЛЬ — модуль M такой, что естественный кольцевой гомоморфизм $\varphi: R \to \mathrm{End}_{\mathrm{End}_R M} M$, в случае правого модуля определяемый равенством $\varphi(r)(m) = mr$ для любых $r \in R$ и $m \in M$, сюръективен. Модуль P над кольцом R оказывается образующим категории R-модулей тогда и только тогда, когда P есть С. м. как R-модуль, проективен и конечно порожден как $\mathrm{End}_R P$-модуль.

Лит.: [1] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79. *Л. А. Скорняков.*

СВЕРТКА функций $f(x)$ и $g(x)$, принадлежащих $L(-\infty, \infty)$,— функция $h(x)$, определяемая равенством

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy$$

и обозначаемая символом $(f*g)(x)$. Функция $f*g$ определена почти всюду и также принадлежит $L(-\infty, \infty)$. Свертка обладает основными свойствами операции умножения, а именно: $f*g = g*f$,

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)*g = \alpha_1 (f_1*g) + \alpha_2 (f_2*g),\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R},$$
$$(f*g)*h = f*(g*h)$$

для любых трех функций из $L(-\infty, \infty)$. Поэтому $L(-\infty, \infty)$ с обычным сложением и умножением на число, с операцией С. в качестве умножения элементов из $L(-\infty, \infty)$ и с нормой

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx,$$

превращается в *банахову алгебру* (при такой норме $\|f*g\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$). Если $F[f]$ — преобразование Фурье функции f, то

$$F[f*g] = \sqrt{2\pi}\, F[f]\, F(g)$$

и это используется при решении ряда прикладных задач.

Так, если задача сведена к интегральному уравнению вида

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\, f(y)\, dy, \qquad (*)$$

где $g(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, $K(x) \in L(-\infty, \infty)$,

$$\sup_x |F[K](x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

то в предположении, что $f(x) \subset L(-\infty, \infty)$, применяя к уравнению (*) преобразование Фурье, получают

$$F[f] = F[g] + \sqrt{2\pi}\, F[f]\, F[K],$$

откуда

$$F[f] = \frac{F[g]}{1 - \sqrt{2\pi}\, F[K]},$$

и обратное преобразование Фурье приводит к решению

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F[g](\zeta)\, e^{-i\zeta x}}{1 - \sqrt{2\pi}\, F[K](\zeta)}\, d\zeta$$

уравнения (*).

Свойства С. функций находят важные приложения в теории вероятностей. Если $f(x)$ и $g(x)$ являются плотностями вероятности независимых случайных величин X и Y, то С. $(f*g)x$ есть плотность вероятности случайной величины $X+Y$.

Операция С. распространяется на *обобщенные функции*. Если f и g — обобщенные функции, из к-рых по крайней мере одна имеет компактный носитель, и $\varphi(x)$ принадлежит пространству основных функций, то $f*g$ определяется равенством

$$\langle f*g,\ \varphi\rangle = \langle f(x) \times g(y),\ \varphi(x+y)\rangle,$$

где $f(x) \times g(y)$ — прямое произведение обобщенных функций f и g, т. е. функционал в пространстве основных функций двух независимых переменных такой, что

$$\langle f(x) \times g(x),\ u(x,\ y)\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle f(x),\ \langle g(y),\ u(x,\ y)\rangle\rangle$$

для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $u(x, y)$.

С. обобщенных функций также обладает свойством коммутативности, линейности по каждому аргументу, а если по крайней мере две из трех обобщенных функций имеют компактные носители, то и свойством ассоциативности. Справедливы равенства:

$$D^{\alpha}(f*g) = D^{\alpha} f*g = f*D^{\alpha} g,$$

где D оператор дифференцирования и α — любой мультииндекс, $(D^{\alpha}\delta)*f = D^{\alpha} f$, в частности $\delta*f = f$, где δ — дельта-функция, и если f_n, $n=1, 2, \ldots$,— обобщенные функции такие, что $f_n \to f_0$ и существует компакт

$$K \supset \operatorname{supp} f_n,\ n = 1, 2, \ldots,$$

то

$$f_n*g \to f_0*g.$$

Наконец, если g — финитная обобщенная функция и f — обобщенная функция медленного роста, то к $f*g$ применимо преобразование Фурье и снова

$$F[f*g] = \sqrt{2\pi}\, F[f]\, F[g].$$

С. обобщенных функций широко используется при решении краевых задач для уравнений с частными производными. Так, интеграл Пуассона, написанный в виде

$$U(x,\ t) = \mu(x) * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t},$$

дает решение уравнения теплопроводности для бесконечного стержня, когда начальная температура $\mu(x)$ может быть не только обычной, но и обобщенной функцией.

Понятие С. как обычных, так и обобщенных функций естественным образом переносится на случай функций многих независимых переменных: надо в предыдущем считать x, y не действительными числами, а векторами из $\mathbb{R}^n$.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [2] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, М., 1958; [3] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.— Л., 1948.

В. И. Соболев.

СВЕРТКА ТЕНЗОРА — операция тензорной алгебры, ставящая в соответствие тензору $a^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$, $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, тензор

$$b^{i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{q-1}} = a^{1 i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{q-1} 1} + a^{2 i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{q-1} 2} + \dots + a^{n i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{q-1} n} = a^{\alpha i_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{q-1} \alpha}$$

(здесь свертка производится по паре индексов i_1, j_q). Аналогично определяется С. т. по любой паре верхнего и нижнего индексов. p-кратная С. т., p раз ковариантного и p раз контравариантного, является инвариантом. Так, С. т. a^i_j есть инвариант a^i_i, называемый с л е д о м т е н з о р а $\mathrm{Sp}(a^i_j)$, или $\mathrm{tr}\, a^i_j$. Сверткой произведения двух тензоров наз. свертка их произведения по верхнему индексу одного сомножителя и нижнему индексу другого.

А. Б. Иванов.

СВЕРТКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\, f(t)\, dt.$$

Функция $G(x)$ наз. я д р о м С. п. Для определенных типов ядер G после соответствующих замен переменных С. п. переходит в одностороннее *Лапласа преобразование*, *Стилтьеса преобразование*, *Мейера преобразование*. Обращение С. п. осуществляется линейными дифференциальными операторами бесконечного порядка, инвариантными относительно сдвига.

С. п. введено также для нек-рых классов обобщенных функций (см. [2]).

Лит.: [1] Х и р ш м а н И. И., У и д д е р Д. В., Преобразования типа свертки, пер. с англ., М., 1958; [2] Б р ы ч к о в Ю. А., П р у д н и к о в А. П., Интегральные преобразования обобщенных функций, М., 1977.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

СВЕРХРАЗРЕШИМАЯ ГРУППА — группа G, обладающая конечным инвариантным рядом подгрупп

$$G = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_r = 1,$$

в к-ром каждая факторгруппа A_{i-1}/A_i циклична. Всякая С. г. является *полициклической группой*. Подгруппы и факторгруппы С. г. также сверхразрешимы, коммутант С. г. нильпотентен. Конечная группа является С. г. тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы имеют простые индексы (т е о р е м а Х у п п е р т а).

Н. Н. Вильямс.

СВЕРХРЕЛАКСАЦИИ МЕТОД, п о с л е д о в а т е л ь н о й в е р х н е й р е л а к с а ц и и м е т о д, — метод решения систем алгебраич. уравнений. См. *Релаксации метод*.

СВЕРХСХОДИМОСТЬ — сходимость нек-рой подпоследовательности частных сумм ряда в области, большей, чем область сходимости ряда. Имеют место следующие т е о р е м ы о с в е р х с х о д и м о с т и:

1) если в степенном ряде

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$$

с радиусом сходимости R, $0 < R < \infty$, показатели λ_n таковы, что для бесконечного множества значений n_ν индекса n

$$\lambda_{n_\nu + 1} - \lambda_{n_\nu} > \theta \lambda_{n_\nu},$$

где θ — фиксированное положительное число, то последовательность частных сумм порядков n_ν

$$S_{n_\nu}(z) = \sum_{m=1}^{n_\nu} a_m z^{\lambda_m}, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

сходится равномерно в достаточно малой окрестности каждой точки z_0 окружности $|z| = R$, в к-рой сумма ряда $f(z)$ регулярна;

2) если

$$\lambda_{n_{\nu}+1}-\lambda_{n_{\nu}} > \theta_{\nu}\lambda_{n_{\nu}},\ \lim_{\nu\to\infty}\theta_{\nu}=+\infty,$$

то последовательность $\{S_{n_{\nu}}(z)\}$ сходится равномерно в любой замкнутой ограниченной части области существования функции $f(z)$.

Имеет место и следующая теорема (обратная первой теореме): если у степенного ряда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

с радиусом сходимости R, $0<R<\infty$, имеется подпоследовательность частных сумм, к-рая равномерно сходится в нек-рой окрестности точки z_0, $|z_0|\geqslant R$, то данный степенной ряд может быть представлен суммой ряда с радиусом сходимости, бо́льшим $\mathbf{R}$, и *лакунарного степенного ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}d_n z^{\lambda_n},\ \lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}>\theta\lambda_{n_k},\ k=1,\ 2,\ \ldots;\ \theta>0.$$

Первые теоремы верны и для многих других рядов, в частности для рядов Дирихле.

Лит.: [1] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Леонтьев А. Ф., Ряды экспонент, М., 1976.

А. Ф. Леонтьев.

СВЕРХЭФФЕКТИВНАЯ ОЦЕНКА, суперэффективная оценка, — общепринятое сокращение термина «сверхэффективная (суперэффективная) последовательность оценок», употребляемого по отношению к состоятельной последовательности асимптотически нормальных оценок неизвестного параметра, к-рая является более эффективной, чем состоятельная последовательность оценок максимального правдоподобия.

Пусть $X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X},\ \mathcal{B},\ \mathrm{P}_{\theta})$, $\theta\in\Theta$, и пусть семейство распределений $\{P_{\theta}\}$ таково, что существует состоятельная последовательность $\{\hat{\theta}_n\}$ оценок $\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,\ldots,\ X_n)$ максимального правдоподобия параметра θ. Далее, пусть $\{T_n\}$ — последовательность асимптотически нормальных оценок $T_n=T_n(X_1\ldots,\ X_n)$ параметра θ. Если при всех $\theta\in\Theta$

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}_{\theta}[n(T_n-\theta)^2]\leqslant\frac{1}{I(\theta)},$$

где $I(\theta)$ — информационное количество Фишера, и, кроме того, хотя бы в одной точке θ^*, $\theta^*\in\Theta$, выполняется строгое неравенство

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}_{\theta^*}[n(T_n-\theta^*)]<\frac{1}{I(\theta^*)},\qquad(*)$$

то такая последовательность оценок $\{T\}$ наз. сверхэффективной (суперэффективной) относительно квадратичной функции потерь, а точки θ^*, в к-рых выполняется $(*)$, наз. точками суперэффективности.

Лит.: [1] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [2] Шметтерер Л., Введение в математическую статистику, пер. с нем., М., 1976; [3] Le Cam L., «Univ. California Publ. Stat.», 1953, v. 1, p. 277—330.

М. С. Никулин.

СВОБОДНАЯ АБЕЛЕВА ГРУППА — группа, свободная в многообразии всех абелевых групп (см. *Свободная алгебра*). Прямые суммы (в конечном или бесконечном числе) бесконечных циклич. групп и только они являются свободными группами в классе абелевых групп. При этом совокупность образующих элементов всех циклич. прямых слагаемых служит системой свободных образующих (называемой также б а з о й) С. а. г. Не всякая максимальная линейно независимая система элементов С. а. г. служит для нее базой. С. а. г.

изоморфны тогда и только тогда, когда их базы равномощны. Мощность базы С. а. г. совпадает с рангом Прюфера этой группы. Всякая подгруппа С. а. г., отличная от нулевой, сама свободна. Абелева группа свободна тогда и только тогда, когда она обладает возрастающим рядом подгрупп (см. *Подгрупп ряд*), каждый фактор к-рого изоморфен бесконечной циклич. группе.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982. *О. А. Иванова.*

СВОБОДНАЯ АЛГЕБРА класса $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр — алгебра F из класса $\mathfrak{K}$, обладающая свободной порождающей системой (или базой) X, т. е. таким множеством порождающих X, что всякое отображение множества X в любую алгебру A из $\mathfrak{K}$ продолжается до гомоморфизма алгебры F в A (ср. *Свободная алгебраическая система*). С. а. обладает любой непустой класс алгебр, замкнутый относительно подалгебр и прямых произведений и содержащий неодноэлементные алгебры. В частности, С. а. всегда существует в нетривиальных многообразиях и квазимногообразиях универсальных алгебр (см. *Универсальных алгебр многообразие*, *Алгебраических систем квазимногообразие*). С. а. класса, состоящего из всех алгебр данной сигнатуры Ω, наз. абсолютно свободной. Алгебра A сигнатуры Ω является С. а. нек-рого класса универсальных алгебр сигнатуры Ω тогда и только тогда, когда A внутренне свободна, т. е. обладает таким порождающим множеством X, что всякое отображение X в A продолжается до эндоморфизма алгебры A. Если С. а. обладает бесконечной базой, то все ее базы имеют одну и ту же мощность (см. *Свободная абелева группа*, *Свободная алгебра* над ассоциативно-коммутативным кольцом, *Свободная ассоциативная алгебра*, *Свободная булева алгебра*, *Свободная группа*, *Свободная полугруппа*, *Свободная решетка*, *Свободный группоид*, *Свободный модуль*, а также *Свободное произведение*). Ясно, что каждый элемент С. а. с базой X записывается как слово в алфавите X в сигнатуре рассматриваемого класса. Естествен вопрос: когда различные слова равны как элементы С. а.? В нек-рых случаях ответ почти тривиален (полугруппы, кольца, группы, ассоциативные алгебры), в других — достаточно сложен (алгебры Ли, решетки, булевы алгебры), а иногда и не поддается решению (альтернативные кольца). *Л. А. Скорняков.*

СВОБОДНАЯ АЛГЕБРА над ассоциативно-коммутативным кольцом Φ — свободная алгебра многообразия алгебр над Φ (см. *Кольца и алгебры*). Элементами такой С. а. со свободной порождающей системой X служат линейные комбинации элементов *свободного группоида* со свободной порождающей системой X с коэффициентами из Φ. Другими словами, эта С. а. является *свободным модулем* над Φ с вышеупомянутым группоидом в качестве базы. Если Φ — кольцо целых чисел, то С. а. над Φ наз. свободным кольцом (ср. *Свободная ассоциативная алгебра*). Ненулевая подалгебра С. а. над полем Φ сама является С. а. *Л. А. Скорняков.*

СВОБОДНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — свободный объект в нек-ром классе алгебраич. систем.

Пусть $\mathfrak{K}$ — непустой класс алгебраич. систем (см. *Алгебраических систем класс*). Система F наз. свободной в классе $\mathfrak{K}$, или $\mathfrak{K}$-свободной, если она принадлежит классу $\mathfrak{K}$ и обладает таким множеством X порождающих, что всякое отображение $\varphi_0: X \to A$ множества X в любую систему A из $\mathfrak{K}$ продолжаемо до гомоморфизма $\varphi : F \to A$. В этом случае говорят также, что F свободна над X в классе $\mathfrak{K}$. Множество порождающих X с таким свойством наз. $\mathfrak{K}$-свободным базисом системы F, а его мощность — рангом системы F. $\mathfrak{K}$-свободные системы одного

и того же ранга изоморфны. Если класс $\mathfrak{K}$ обладает свободной системой ранга r, то всякая система из $\mathfrak{K}$, допускающая порождающее множество мощности $\leqslant r$, является ее гомоморфным образом. $\mathfrak{K}$-свободный базис X $\mathfrak{K}$-свободной системы является и ее минимальным порождающим множеством, поэтому если класс $\mathfrak{K}$ обладает изоморфными свободными системами F и F' различных рангов r и r', то оба кардинала r и r' конечны.

Класс алгебраич. систем наз. т р и в и а л ь н ы м, или в ы р о ж д е н н ы м, если в каждой его системе истинно тождество $x=y$, т. е. все его системы одноэлементны. В противном случае класс наз. н е т р и в и а л ь н ы м, или н е в ы р о ж д е н н ы м. Во всяком невырожденном квазимногообразии (многообразии) алгебраич. систем (см. *Алгебраических систем квазимногообразие*, *Алгебраических систем многообразие*) существует С. а. с. любого ранга. Всякий вырожденный класс алгебраич. систем обладает только свободной системой ранга 1.

Пусть класс $\mathfrak{K}$ обладает свободными системами F_l и F_k конечных рангов l и k соответственно и $k < l$. Изоморфизм $F_k \cong F_l$ имеет место тогда и только тогда, когда существуют такие термы

$$s_i(x_1, \ldots, x_k),\ i=1, \ldots, l,$$
$$t_j(x_1, \ldots, x_l),\ j=1, \ldots, k,$$

в сигнатуре класса $\mathfrak{K}$, что в классе $\mathfrak{K}$ истинны тождества

$$s_i(t_1(x_1, \ldots, x_l), \ldots, t_k(x_1, \ldots, x_l)) = x_i,$$
$$t_j(s_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, s_l(x_1, \ldots, x_k)) = x_j,$$

где $i=1,\ldots,l$, $j=1,\ldots,k$. Если же класс $\mathfrak{K}$ содержит конечную систему A мощности $\geqslant 2$, то $\mathfrak{K}$-свободные системы различных рангов не изоморфны. В частности, во всех многообразиях групп, полугрупп, решеток, ассоциативных колец свободные системы различных рангов не изоморфны. С другой стороны, в нек-рых многообразиях модулей (см. *Свободный модуль*) все свободные модули конечного ранга изоморфны.

Существуют также многообразия алгебраич. систем конечного типа (см. *Алгебраическая система*), в к-рых все С. а. с. конечных рангов изоморфны между собой; напр., многообразие $\mathfrak{A}_{1,2}$ алгебр $\langle A, \varphi_1, \varphi_2, \omega\rangle$ типа $\langle 1, 1, 2\rangle$, определяемое тождествами

$$\varphi_i(\omega(x_1, x_2)) = x_i,\ i=1, 2,$$
$$\omega(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = x.$$

Доказано (см. [3]), что в многообразиях $\mathfrak{A}_{m,n}$ $(1 \leqslant m < n)$ алгебр $\langle A, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \omega_1, \ldots, \omega_m\rangle$ с m-арными операциями $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и n-арными операциями $\omega_1, \ldots, \omega_m$, определяемых тождествами

$$\varphi_i(\omega_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \omega_m(x_1, \ldots, x_n)) = x_i,$$
$$\omega_j(\varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_m)) = x_j,$$
$$i=1, \ldots, n,\ j=1, \ldots, m,$$

при фиксированных m и n свободные алгебры конечных рангов $k \neq l$ изоморфны тогда и только тогда, когда

$$k \equiv l \pmod{(n-m)},\ k \geqslant m,\ l \geqslant m.$$

Существуют универсальные классы, не имеющие свободных систем. Примером такого класса может служить класс групп, определяемый универсальными формулами

$$(x^2=1) \vee (x^3=1),\ xy=yx$$

(кванторы опущены). Универсальный класс $\mathfrak{U}$, обладающий свободной системой любого конечного ранга, имеет свободные системы любых рангов.

Пусть Σ — совместное множество универсальных формул $G(x_1, \ldots, x_n)$ вида

$$\neg G_1 \vee \ldots \vee \neg G_p \vee G_{p+1} \vee \ldots \vee G_q,$$

где $G_1, \ldots, G_q$ — атомные формулы сигнатуры Ω. Пусть

$$ngG = G_1 \& \ldots \& G_p.$$

Говорят, что Σ обладает r-п о д с т а н о в о ч н ы м свойством ($r \geqslant 1$), если для любой формулы $G(x_1, \ldots, x_n)$ из Σ и любых термов

$$t_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_r)$$

от r переменных $x_1, \ldots, x_r$ верно утверждение:

$$\Sigma \vdash (\forall x_1) \ldots (\forall x_r)\, ngG(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists i > p)\, \Sigma \vdash (\forall x_1) \ldots (\forall x_r)\, G_i(t_i, \ldots, t_n).$$

В невырожденном универсальном классе $[\Sigma]$, определяемом множеством универсальных формул Σ, свободная система конечного ранга $r \geqslant 1$ существует тогда и только тогда, когда Σ обладает r-подстановочным свойством [4]. В частности, если все формулы из Σ несократимы и Σ содержит позитивную формулу

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_r)\, G_1 \vee \ldots \vee G_q$$

с числом дизъюнктных членов $q \geqslant 2$, то универсальный класс $[\Sigma]$ не имеет свободных систем ранга $n \geqslant r$. Напр., класс линейно упорядоченных групп в сигнатуре $\langle \leqslant, \cdot, {}^{-1} \rangle$ не имеет С. а. с. ранга $r \geqslant 2$.

Лит.: [1] М а л ь ц е в А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [2] J ó n s s o n B., T a r s k i A., «Math. Scand.», 1961, v. 9, p. 95—101; [3] S w i e r c z k o w s k i S., «Fund. Math.», 1961, v. 50, № 1, p. 35—44; [4] G r ä t z e r G., «Math. Nachr.», 1968, Bd 36, H. 3/4, S. 135—40. *Д. М. Смирнов.*

СВОБОДНАЯ АССОЦИАТИВНАЯ АЛГЕБРА — алгебра $k\langle X \rangle$ многочленов (со свободными членами) над полем k от некоммутирующих переменных X. С в о й с т в о у н и в е р с а л ь н о с т и определяет алгебру $k\langle X \rangle$ единственным с точностью до изоморфизма образом: существует отображение $i : X \to k\langle X \rangle$ такое, что любое отображение X в нек-рую ассоциативную алгебру A с единицей над k можно единственным образом пропустить через отображение i. Основные свойства алгебры $k\langle X \rangle$:

1) алгебра $k\langle X \rangle$ вложима в тело (т е о р е м а М а л ь ц е в а — Н е й м а н а);

2) алгебра $k\langle X \rangle$ обладает слабым алгоритмом деления, т. е. из соотношения

$$d\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) < \max_i \{d(a_i) + d(b_i)\},$$

где a_i, $b_i \in k\langle X \rangle$, все a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, не равны нулю, $d(a_1) \leqslant \ldots \leqslant d(a_n)$, всегда следует, что существуют целое число r, $1 < r \leqslant n$, и элементы $c_1, \ldots, c_{r-1}$ такие, что

$$d\left(a_r - \sum_{i=1}^{r-1} a_i c_i\right) < d(a_r)$$

и $d(a_i) + d(c_i) \leqslant d(a_r)$, $1 \leqslant i \leqslant r-1$

(здесь $d(a)$ — обычная степень многочлена $a \in k\langle X \rangle$, $d(0) = -\infty$);

3) алгебра $k\langle X \rangle$ является левым (правым) кольцом свободных идеалов (т. е. любой левый (правый) идеал алгебры $k\langle X \rangle$ является свободным модулем однозначно определенного ранга);

4) централизатор любого нескалярного элемента алгебры $k\langle X \rangle$ (т. е. множество элементов, перестановочных с данным) изоморфен алгебре многочленов над k от одного переменного (т е о р е м а Б е р г м а н а).

Лит.: [1] К о н П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] е г о ж е, Свободные кольца и их связи, пер. с англ., М., 1975. *Л. А. Бокутъ.*

СВОБОДНАЯ БУЛЕВА АЛГЕБРА — булева алгебра, обладающая такой системой образующих, что всякое отображение этой системы в какую-либо булеву алгебру допускает продолжение до гомоморфизма. Любая булева алгебра изоморфна факторалгебре некрой С. б. а.

Для любого кардинального числа a существует единственная с точностью до изоморфизма С. б. а. с a образующими. Ее стоуновский бикомпакт есть топологич. произведение a простых двоеточий — *двоичный дисконтинуум*.

Конечная булева алгебра свободна тогда и только тогда, когда число ее элементов имеет вид 2^{2^n}; здесь n — число образующих. Такая С. б. а. реализуется в виде алгебры *булевых функций* от n переменных. Счетная С. б. а. изоморфна алгебре открыто-замкнутых подмножеств *канторова множества*. Всякое множество попарно дизъюнктных элементов С. б. а. конечно или счетно.

Бесконечная С. б. а. не может быть полной. В то же время мощность любой бесконечной полной булевой алгебры есть верхняя грань мощностей ее свободных подалгебр (см. [5]).

Лит.: [1] Сикорский Р., Булевы алгебры, пер. с англ., М., 1969; [2] Владимиров Д. А., Булевы алгебры, М., 1969; [3] Halmos P. R., Lectures on Boolean algebras, Princeton — [a.o.], 1963; [4] Биркгофф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [5] Кисляков С. В., «Сиб. матем. ж.», 1973, т. 14, № 3, с. 569—81. *Д. А. Владимиров.*

СВОБОДНАЯ ГРУППА — группа F с системой X порождающих элементов такая, что любое отображение множества X в любую группу G продолжается до гомоморфизма F в G. Такая система X наз. системой свободных порождающих; ее мощность наз. рангом свободной группы F. Множество X наз. также алфавитом. Элементы из F представляют собой слова в алфавите X, т. е. выражения вида

$$v = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n},$$

где $x_{i_j} \in X$, $\varepsilon_j = \pm 1$ при всех j, а также пустое слово. Слово v наз. несократимым, если $x_{i_j}^{\varepsilon_j} \neq x_{i_{j+1}}^{-\varepsilon_{j+1}}$ при любом $j = 1, 2, \dots, n-1$. Несократимые слова являются разными элементами С. г. F, и каждое слово равно единственному несократимому слову. Число n наз. длиной слова v, если оно несократимо. Преобразованиями Нильсена конечного упорядоченного множества элементов $a_1, \dots, a_k$ группы называются: 1) перестановка двух элементов в этом множестве, 2) замена одного из a_i на a_i^{-1}, 3) замена одного из a_i на $a_i a_j$, где $j \neq i$. Если С. г. F имеет конечный ранг, то преобразования Нильсена над системой свободных порождающих приводят к новым системам свободных порождающих, причем любая система свободных порождающих может быть получена из любой другой последовательности применением этих преобразований (теорема Нильсена, см. [2]). Значение С. г. определяется тем, что всякая группа изоморфна нек-рой факторгруппе подходящей С. г. Всякая подгруппа С. г. также свободна (теорема Нильсена — Шрайера, см. [1], [2]).

С. г. *групп многообразия* $\mathfrak{V}$ определяется аналогично С. г., но в пределах $\mathfrak{V}$. Ее наз. также $\mathfrak{V}$-свободной группой, или относительно свободной (а также приведенно свободной). Если $\mathfrak{V}$ определяется системой тождеств $v = 1$, где $v \in V$, то С. г. многообразия $\mathfrak{V}$ с системой X свободных порождающих изоморфна факторгруппе $F/V(F)$ С. г. F с системой X свободных порождающих по вербальной подгруппе $V(F)$ — подгруппе, порожденной всеми значениями слов $v \in V$ в F. С. г. нек-рых многообразий имеют специальные названия, напр.: свободная абелева, свободная нильпотентная, свободная разрешимая, свободная бернсайдова — С. г. многообразий $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}_C$, $\mathfrak{A}^l$, $\mathfrak{B}_n$ соответственно.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп, пер. с англ., М., 1974; [3] Нейман Х., Многообразия групп, пер. с англ., М., 1969.

А. Л. Шмелькин.

СВОБОДНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ, свободное вхождение переменной,— вхождение переменной в языковое выражение, являющееся параметром этого выражения. Строгое определение этого понятия может быть дано только для *формализованного языка*. Для каждого языка дается свое определение С. п., зависящее от правил образования выражений данного языка. Семантич. критерием здесь служит следующее требование: подстановка какого-либо объекта из подразумеваемой интерпретации на место данного вхождения переменной не должна приводить к бессмысленному выражению. Напр., в выражении $\{(x, y)|x^2+y^2=z^2\}$, обозначающем множество точек окружности радиуса z, переменная z входит свободно, а переменные x и y нет (см. *Связанная переменная*). Если f обозначает отображение вида $X\times Y\to Z$ и переменные x, y пробегают множества X, Y соответственно, то в выражении $f(x, y)$ переменные x и y свободны (так же, как и f, если f рассматривать как переменную по функциям). При фиксировании x и варьировании y получается функция вида $Y\to Z$. Она обозначается через $\lambda yf(x, y)$. В этом выражении x свободно, а y нет. В выражении $(\lambda yf(x, y))(y)$, обозначающем значение функции $\lambda yf(x, y)$ в произвольной точке y, последнее вхождение переменной y будет свободным. Два других вхождения не являются свободными. Первое наз. операторным (находящимся под знаком оператора), второе — связанным.

Для неформализованных языков, т. е. в реальных математич. текстах, у отдельно взятого выражения не всегда можно определенно выяснить какие переменные у него свободны, а какие связанны. Напр., в выражении $\sum_{i<h}a_{ik}$ в зависимости от контекста переменная i может быть свободной, а k связанной или наоборот, но обе свободными быть не могут. Указание на то, какая переменная считается свободной, дается с помощью дополнительных средств. Напр., если это выражение встречается в контексте вида «пусть $f(k)=\sum_{i<k}a_{ik}$», то k свободна. Иногда принимают соглашение, что по k суммирование производиться не будет; тогда k — это параметр. Выражение $\{a_i\}$, часто используемое в математике, обозначает иногда одноэлементное множество, и тогда переменная i входит свободно; а иногда оно обозначает множество всех a_i, когда i пробегает отведенную ему область предметов, и тогда переменная i входит связанно. *В. Н. Гришин.*

СВОБОДНАЯ ПОЛУГРУППА над алфавитом A — полугруппа, элементами к-рой являются всевозможные конечные последовательности элементов из A (букв), а операция состоит в приписывании одной последовательности к другой. Элементы С. п. принято называть *словами*, а операцию часто называют конкатенацией. Ради удобства нередко рассматривают также и пустое слово 1 (длина к-рого по определению равна нулю), полагая $w1=1w=w$ для любого слова w; возникающая таким образом полугруппа с единицей наз. свободным моноидом над A. С. п. (свободный моноид) над A часто обозначают A^+ (соответственно A^*). Для С. п. A^+ алфавит A является единственным неприводимым порождающим множеством; он состоит в точности из элементов, неразложимых в произведение. Буквы из A наз. свободными образующими. С. п. определяется однозначно с точностью до изоморфизма мощностью своего алфавита; эта мощность наз. рангом свободной полугруппы. С. п. ранга 2 имеет подполугруппы, являющиеся С. п. счетного ранга.

С. п. являются *свободными алгебрами* в классе всех полугрупп. Следующие условия для полугруппы F эквивалентны: 1) F есть С. п.; 2) F имеет порождаю-

щее множество A такое, что любой элемент из F единственным образом представим в виде произведения элементов из A; 3) F удовлетворяет закону сокращения, не содержит идемпотентов, каждый элемент из F имеет конечное число делителей, и для любых $u, v, u', v' \in F$ равенство $uv = u'v'$ влечет, что $u = u'$ или один из элементов u, u' есть левый делитель другого.

Всякая подполугруппа H в С. п. имеет единственное неприводимое порождающее множество, состоящее из элементов, неразложимых в H в произведение; однако не всякая подполугруппа С. п. сама свободна. Следующие условия для подполугруппы H в С. п. F эквивалентны: 1) H есть С. п.; 2) для любого $w \in F$ из того, что $wH \cap H \neq \phi$ и $Hw \cap H \neq \phi$, следует, что $w \in H$; 3) для любого $w \in F$ из того, что $wH \cap Hw \cap H \neq \phi$, следует, что $w \in H$. Для произвольных различных слов u, v в С. п. F либо u и v являются свободными образующими порожденной ими подполугруппы, либо существует $w \in F$ такое, что $u = w^k$, $v = w^l$ для нек-рых натуральных k, l; вторая альтернатива выполняется тогда и только тогда, когда $uv = vu$. Всякая подполугруппа с тремя образующими в С. п. будет конечно определенной полугруппой, но существуют подполугруппы с четырьмя образующими, не являющиеся конечно определенными.

С. п. естественно возникают в *автоматов алгебраической теории* (см. также [5], [6]), теории кодирования (см. *Кодирование алфавитное*, [4] — [6]), теории формальных языков и формальных *грамматик* (см. [3], [5], [6]). С указанными областями связана проблематика решения уравнений в С. п. (см. [7] — [9]). Существует алгоритм, распознающий разрешимость произвольных уравнений в С. п.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [3] Гросс М., Лантен А., Теория формальных грамматик, пер. с франц., М., 1971; [4] Марков А. А., Введение в теорию кодирования, М., 1982; [5] Eilenberg S., Automata, languages and machines, v. A—B, N. Y.—L., 1974—76; [6] Lallement G., Semigroups and combinatorial applications, N. Y.— [a. o.], 1979; [7] Lentin A., Equations dans les monoïdes libres, P., 1972; [8] Хмелевский Ю. И., Уравнения в свободной полугруппе, М., 1971 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 107); [9] Маканин Г. С., «Матем. сб.», 1977, т. 103, № 2, с. 147—236.
Л. Н. Шеврин.

СВОБОДНАЯ РЕЗОЛЬВЕНТА — частный случай проективной резольвенты. Всякий модуль M над ассоциативным кольцом R является фактормодулем F_0/N_0 свободного R-модуля F_0 по нек-рому его подмодулю N_0. Для подмодуля N_0 существует аналогичное представление F_1/N_1 и т. д. В результате получается точная последовательность свободных модулей

$$F_0 \leftarrow F_1 \leftarrow F_2 \leftarrow \ldots \leftarrow F_n \leftarrow,$$

называемая С. р. модуля M. Канонич. гомоморфизм $F_0 \to M$ наз. пополняющим гомоморфизмом.
В. Е. Говоров.

СВОБОДНАЯ РЕШЕТКА — *свободная алгебра* многообразия всех решеток. Решены [1] проблемы тождества слов и канонич. представления слова в С. р.

Лит.: [1] Whitman P. M., «Annals Math.», 1941, v. 42, p. 325—30; 1942, v. 43, p. 104—15.
Т. С. Фофанова.

СВОБОДНО СТАНОВЯЩАЯСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — см. *Интуиционизм.*

СВОБОДНОЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ — синусоидальное колебание. Если механическая или физич. величина $x(t)$, где t — время, меняется по закону

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \qquad (1)$$

то говорят, что $x(t)$ совершает С. г. к. Здесь A, ω, φ — действительные постоянные, $A > 0$, $\omega > 0$. Величины A, ω, φ наз. соответственно амплитудой, частотой, фазой С. г. к. Период С. г. к. равен

$T=2\pi/\omega$. В физике и технике часто употребляется такая терминология: С. г. к. наз. гармоническим колебанием, или простым гармоническим колебанием, функция вида (1) наз. *гармоникой*, переменная величина $\omega t+\varphi$ наз. мгновенной фазой, а постоянная φ — начальной фазой. Величина ω наз. также круговой, или циклической, частотой, а $f=\omega/2\pi$ — частотой. С. г. к. (1) можно записать в виде

$$x(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t,$$

где a, b и A, φ связаны соотношениями

$$A=\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

или в виде

$$x(t)=\mathrm{Re}\,(Ae^{i(\omega t+\varphi)}).$$

Часто фазой наз. не φ, а $-\varphi$.

Малые колебания механических или физич. систем с одной степенью свободы вблизи устойчивого невырожденного положения равновесия представляют собой С. г. к. с большой степенью точности. Таковы, напр., малые колебания маятника; колебания груза, подвешенного на пружинке; колебания камертона; изменение напряжения и силы тока в электрическом колебательном контуре; качка корабля и т. д. Система, совершающая С. г. к., наз. линейным гармоническим осциллятором, и ее колебания описываются уравнением

$$\ddot{x}+\omega^2x=0.$$

Для математич. маятника длины l и массы m : $\omega^2=g/l$, для груза массы m на пружинке с коэффициентом упругости k : $\omega^2=k/m$; для электрического колебательного контура, состоящего из емкости C и индуктивности L : $\omega^2=1/CL$. На фазовой плоскости $(x,\dot{x})$ положение равновесия $x=0$, $\dot{x}=0$ для С. г. к. есть центр, а фазовые траектории — окружности.

Сумма двух С. г. к. $x_1(t)+x_2(t)$,

где $$x_j(t)=A_j\cos(\omega_j t+\varphi_j),\quad j=1,\ 2,$$

с соизмеримыми частотами ω_1, ω_2 есть С. г. к. Если же частоты ω_1, ω_2 несоизмеримы, то $x_1(t)+x_2(t)$ есть *почти периодическая функция* и

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}(x_1(t)+x_2(t))=A_1+A_2=-\inf_{t\in\mathbb{R}}(x_1(t)+x_2(t)).$$

Сумма n С. г. к. с частотами $\omega_1,\ldots,\omega_n$, к-рые рационально независимы, также есть почти периодич. функция. Для суммы двух С. г. к. величина $\Omega=|\omega_1-\omega_2|$ наз. расстройкой. Если расстройка мала: $\Omega/\omega_1\ll 1$, а ω_1, ω_2 — одного порядка, то

$$x_1(t)+x_2(t)=A(t)\cos(\omega_1 t+\varphi(t)),$$

$$A^2(t)=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\psi(t)-\varphi_1),$$

$$\psi(t)=\Omega t+\varphi_2.$$

«Амплитуда» $A(t)$ — медленно меняющаяся функция, имеющая период $2\pi/\Omega$, и $A^2(t)$ меняется в пределах от $(A_1-A_2)^2$ до $(A_1+A_2)^2$. Колебание $x_1(t)+x_2(t)$ наз. биением: «амплитуда» $A(t)$ поочередно увеличивается и уменьшается. Этот случай важен для анализа приемных устройств.

Пусть имеется система из n уравнений:

$$M\ddot{x}+Kx=0,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

где M, K — действительные симметрические положительно определенные матрицы с постоянными элементами. С помощью ортогонального преобразования

$x=Ty$ эта система приводится к расщепляющейся системе:

$$\ddot{y}_j+\omega_j^2 y_j=0,\quad j=1,\ \ldots,\ n.$$

Координаты $y_1,\ \ldots,\ y_n$ наз. нормальными. В нормальных координатах $x(t)$ есть векторная сумма С. г. к. вдоль координатных осей.

Лит.: [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1981; [2] Горелик Г. С., Колебания и волны, М., 1959; [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, 3 изд., т. 1, М., 1973.

М. В. Федорюк.

СВОБОДНОЕ МНОЖЕСТВО в векторном пространстве X над полем K — то же, что линейно независимая система векторов из X, т. е. множество элементов $A=\{a_t\}\subset X$, $t\in T$, такое, что соотношение $\Sigma\xi_t a_t=0$, где $\xi_t=0$ для всех кроме конечного числа индексов t, влечет $\xi_t=0$ для всех t. Несвободное множество наз. также зависимым.

Свободное множество в топологическом векторном пространстве X над полем K (топологически свободное множество) — множество $A=\{a_t\}\subset X$ такое, что для любого $s\in T$ замкнутое подпространство, порожденное точками a_t, $t\neq s$, не содержит a_s. Топологически С. м. является С. м. векторного пространства; обратное неверно. Напр., в нормированном пространстве C непрерывных функций на $[0, 1]$ функции $e^{2k\pi ix}$, $k\in Z$, образуют топологически С. м. в отличие от функций x^k (поскольку x содержится в замкнутом подпространстве, порожденном $\{x^{2k}\}$).

Совокупность всех (топологически) С. м. в X, вообще говоря, не индуктивна относительно включения; кроме того, она не обязательно содержит максимальное топологически С. м. Напр., пусть X — пространство над $\mathbb{R}$, образованное непрерывными функциями и наделенное отделимой топологией: соответствующая фундаментальная система окрестностей нуля в X состоит из уравновешенных поглощающих множеств $V_{S,\varepsilon}=\{x: |f(x)|\leqslant\delta$ всюду вне (зависящего от f) открытого множества меры $\leqslant\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$, $\delta>0\}$. Тогда каждый непрерывный линейный функционал равен нулю и в X не существует максимального С. м.

Для того чтобы A было (топологически) С. м. в ослабленной топологии $\sigma(X, X^*)$ в X, необходимо и достаточно, чтобы для каждого t существовал элемент $b_t\in X^*$ такой, что $\langle a_t, b_t\rangle\neq 0$ и $\langle a_s, b_t\rangle=0$ для всех $s\neq t$. Для локально выпуклого пространства С. м. в ослабленной топологии является С. м. и в исходной топологии.

М. И. Войцеховский.

СВОБОДНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ — операция в нек-ром классе универсальных алгебр, сопоставляющая заданной совокупности алгебр из этого класса в нек-ром смысле «самую свободную» алгебру этого же класса, содержащую подалгебры, изоморфные заданным, и порождаемую ими. Термин в настоящее время вытеснен термином *свободное произведение*.

О. А. Иванова.

СВОБОДНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ в классе $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр A_α, $\alpha\in\Omega$, из класса $\mathfrak{K}$ — алгебра A из класса $\mathfrak{K}$, содержащая все A_α в качестве подалгебр и такая, что любой набор гомоморфизмов алгебр A_α в любую алгебру B из $\mathfrak{K}$ продолжается до гомоморфизма алгебры A в B. С. п. заведомо существует, если $\mathfrak{K}$ — многообразие универсальных алгебр. Каждая свободная алгебра является С. п. однопорожденных свободных алгебр. В классе всех абелевых групп С. п. совпадает с прямой суммой. В нек-рых случаях поддаются описанию подалгебры С. п.; напр., в группах (см. *Свободное произведение* групп), неассоциативных алгебрах, алгебрах Ли.

С. п. в категориях универсальных алгебр совпадает с *копроизведением* в этих категориях.

Л. А. Скорняков.

СВОБОДНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ групп G_i, $i\in I$,— группа G, порожденная группами G_i, причем

любые гомоморфизмы $\varphi_i : G_i \to H$ групп G_i в любую группу H продолжаются до гомоморфизма $\varphi : G \to H$. Для обозначения С. п. используется знак $*$, напр.:

$$G = \prod\nolimits_{i \in I}^{*} G_i \quad \text{и} \quad G = G_1 * G_2 * \ldots * G_k$$

в случае конечного множества I. Каждый не равный единице элемент С. п. G единственным образом выражается в виде несократимого слова $v = g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_n}$, где $g_{i_j} \in G_{i_j}$, $g_{i_j} \neq 1$, и при любом $j = 1, 2, \ldots, n-1$, $i_j \neq i_{j+1}$. Конструкция С. п. является важной в изучении групп, заданных множеством порождающих элементов и определяющих соотношений. В этих терминах оно может быть определено следующим образом. Пусть каждая группа G_i задана множествами X_i порождающих и Φ_i определяющих соотношений, причем $X_i \cap X_j = \phi$, если $i \neq j$. Тогда группа G, заданная множеством $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ порождающих и множеством $\Phi = \bigcup_{i \in I} \Phi_i$ определяющих соотношений, будет С. п. групп G_i, $i \in I$.

Всякая подгруппа С. п. G сама разлагается в С. п. своих подгрупп, из к-рых нек-рые являются бесконечными циклическими, а каждая из других сопряжена с нек-рой подгруппой какой-либо группы G_i, входящей в свободное разложение группы G (теорема Куроша).

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп, пер. с англ., М., 1974.

А. Л. Шмелькин.

СВОБОДНЫЙ ВЕКТОР — см. *Вектор*.

СВОБОДНЫЙ ГРУППОИД — свободная алгебра многообразия всех группоидов. С. г. с множеством X свободных образующих совпадает с группоидом *слов*, если под словом понимать любую упорядоченную систему элементов из X с любыми повторениями, причем в этой системе задано распределение скобок (каждый символ считается взятым в скобки, а затем скобки расставлены так, что каждый раз перемножаются лишь две скобки). Произведением слов (a) и (b) считается слово $((a)\ (b))$.

О. А. Иванова.

СВОБОДНЫЙ МОДУЛЬ — свободный объект (свободная алгебра) в многообразии модулей над фиксированным кольцом R. Если R — ассоциативное кольцо с единицей, то С. м.— это модуль, обладающий базисом, т. е. линейно независимой системой порождающих. Мощность базиса С. м. наз. его рангом. Ранг не всегда определен однозначно, т. е. существуют кольца, над к-рыми С. м. может обладать двумя базисами, состоящими из различного числа элементов. Это равносильно существованию над кольцом R двух прямоугольных матриц A и B, для к-рых

$$AB = I_m, \quad BA = I_n, \quad m \neq n,$$

где I_m и I_n — единичные матрицы порядков m и n соответственно. Неоднозначность, однако, имеет место лишь для конечных базисов, если же ранг С. м. бесконечен, то все базисы С. м. равномощны. Кроме того, над кольцами, допускающими гомоморфизм в тело (в частности, над коммутативными кольцами), ранг С. м. определен всегда однозначно.

Кольцо R, рассматриваемое как левый модуль над самим собой, является С. м. ранга один. Всякий левый С. м. является прямой суммой С. м. ранга один. Любой модуль M представим как фактормодуль F_0/H_0 нек-рого С. м. F_0. Подмодуль H_0 в свою очередь представим как фактормодуль F_1/H_1 С. м. F_1. Продолжая этот процесс, получают точную последовательность:

$$\ldots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0,$$

к-рая наз. свободной резольвентой модуля M. Тела могут быть охарактеризованы как кольца,

над к-рыми все модули свободны. Над областью главных идеалов подмодуль С. м. свободен. Близкими к С. м. являются *проективные модули* и *плоские модули*.

Лит.: [1] Кон П., Свободные кольца и их связи, пер. с англ., М., 1975; [2] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966.

В. Е. Говоров.

СВОДИМОСТИ АКСИОМА — аксиома, добавленная Б. Расселом (B. Russell) к его разветвленной теории типов с целью избежать расслоения понятий (см. *Непредикативное определение*). В разветвленной теории типов множества данного типа разделяются на порядки. Так, вместо понятия множества натуральных чисел появляется понятие множества натуральных чисел данного порядка. При этом множество натуральных чисел, определяемое формулами без использования каких-либо множеств, принадлежит первому порядку. Если в определении используется совокупность множеств первого порядка, а совокупности множеств высшего порядка не используются, то определяемое множество принадлежит второму порядку, и т. д. Напр., если S — семейство множеств, состоящее из множеств одного и того же порядка, то множество

$$M = \{x \mid \exists y\ (y \in S \wedge x \in y)\}$$

должно принадлежать следующему порядку, т. к. в его определении содержится квантор по множествам данного порядка. С. а. утверждает, что для каждого множества существует равнообъемное ему (т. е. состоящее из тех же самых элементов) множество первого порядка. Таким образом, С. а. фактически сводит разветвленную теорию типов к простой теории типов.

Лит.: [1] Гильберт Д., Аккерман В., Основы теоретической логики, пер. с нем., М., 1947.

В. Н. Гришин.

СВЯЗАННАЯ ПЕРЕМЕННАЯ, связанное вхождение переменной,— тип вхождения переменной в языковое выражение. Точное определение для каждого формализованного языка — свое и зависит от правил образования этого языка. Вместо С. п. нельзя подставлять объекты. Такая подстановка приводит к бессмысленным выражениям. Но замена С. п. всюду, где она встречается, на новую для данного выражения переменную приводит к выражению с тем же самым смыслом. Напр., в выражениях

$$\int f(x,\ y)\,dx,\ \{x \mid f(x,\ y) = 0\}$$

переменная x является связанной. Подстановка вместо x какого-нибудь числа приводит к бессмысленным выражениям. В то же время, написав всюду вместо x, например z, получают выражения, обозначающие те же самые сущности.

С. п. всегда возникают при применении к нек-рому выражению e со свободными вхождениями переменной x какого-нибудь оператора с операторной переменной x (см. *Свободная переменная*). В получившемся выражении все вхождения переменной x в e, бывшие свободными, становятся связанными. Ниже указаны нек-рые наиболее употребительные операторы (помимо уже использованных операторов $\int \ldots dx$ и $\{x \mid \ldots\}$), в к-рых x является операторной переменной:

$\forall x(\ldots)$, $\exists x(\ldots)$ — кванторы общности и существования;

$\int_{\ldots}^{\ldots} \ldots dx$ — определенный интеграл по x;

$\Sigma_x \ldots$ — сумма по x;

$\lambda x(\ldots)$ — функция от x, значение к-рой в точке x равно $\ldots$

Вместо многоточий можно подставлять определенные языковые выражения.

В реальных (не формализованных) математич. текстах возможно неоднозначное употребление одних и тех же выражений, в связи с чем выделение С. п. в данном

выражении зависит от контекста и смысла выражения. В формализованных языках имеется формальная процедура выделения свободных и связанных вхождений переменных. *В. Н. Гришин.*

СВЯЗАННЫЙ ВЕКТОР — см. *Вектор*.

СВЯЗКА — двупараметрическое семейство линий на плоскости или поверхностей в пространстве, линейно зависящее от параметров. Пусть F_1, F_2, F_3 — функции двух переменных, из к-рых ни одна не является линейной комбинацией двух других. Семейство линий на плоскости, определяемых уравнением

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0$$

при всевозможных значениях параметров λ_1, λ_2, λ_3 (кроме $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$), представляет собой С. (фактически зависит от двух отношений $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$). Аналогично записывается уравнение С. поверхностей в

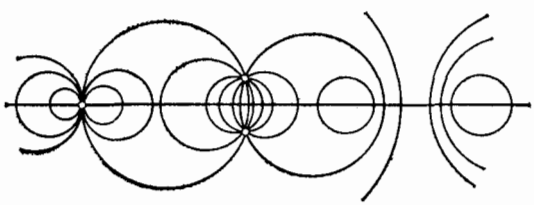


Рис. 1.

пространстве. Три уравнения $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ дают три элемента С. (три линии или три поверхности), к-рые определяют всю С.

С в я з к а п р я м ы х — множество всех прямых, каждая пара из к-рых лежит в одной плоскости. В евклидовой геометрии С. прямых — множество всех прямых, проходящих через одну точку. Если эта точка конечная, то С. прямых наз. э л л и п т и ч е с к о й, если бесконечно удаленная, — п а р а б о л и ч е с к о й.

С в я з к а п л о с к о с т е й — множество всех плоскостей, проходящих через одну точку (с о б с т в е н н а я С.) или параллельных нек-рой прямой (н е с о б с т в е н н а я С.).

С в я з к а о к р у ж н о с т е й — двупараметрич. семейство окружностей, линейно зависящее от параметров. С о б с т в е н н о й С. окружностей является множество тех окружностей, относительно к-рых данная

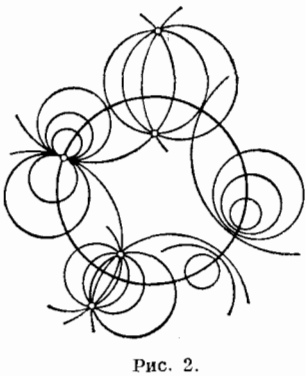


Рис. 2.

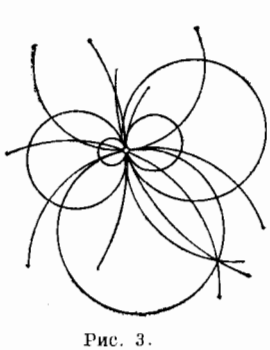


Рис. 3.

точка (ц е н т р С.) имеет данную степень точки. Н е с о б с т в е н н о й С. окружностей наз. множество всех окружностей, центры к-рых принадлежат нек-рой фиксированной прямой (т. н. ф у н д а м е н т а л ь н о й п р я м о й) (см. рис. 1). Если (0,0) — центр собственной связки, то ее уравнение

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + p = 0, \quad a^2 + b^2 > p,$$

где a и b — параметры, определяющие окружность,

p — степень центра С. относительно окружностей С. (степень несобственной С. считается бесконечной).

Имеются три типа собственных С. окружностей:

1) гиперболическая С. ($p > 0$), состоящая из всех окружностей, ортогональных нек-рой данной окружности (фундаментальной окружности) (см. рис. 2);

2) параболическая С. ($p=0$), состоящая из всех окружностей, проходящих через нек-рую данную точку (центр С.) (см. рис. 3);

3) эллиптическая С. ($p < 0$), состоящая из окружностей, пересекающих нек-рую данную окружность в двух диаметрально противоположных точках последней (см. рис. 4).

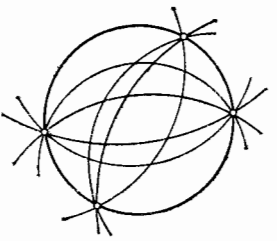


Рис. 4.

Пересечение двух С. окружностей является *пучком* окружностей. Эллиптическая С. содержит только эллиптич. пучки, параболическая С.— только эллиптич. и параболич. пучки, гиперболическая С.— три типа собственных пучков. Несобственная С. содержит как несобственные пучки, так и собственные пучки всех трех типов.

Пересечение двух С., из к-рых одна эллиптическая, может быть только эллиптич. пучком. Пересечения двух С., из к-рых одна параболич., может быть только эллиптическим или параболич. пучком. Пересечение двух С., из к-рых одна собственная, может быть только собственным пучком.

Связка сфер — двупараметрич. семейство сфер, линейно зависящее от параметров. С. сфер состоит из множества сфер, относительно к-рых точки нек-рой прямой (радикальной оси) имеют одинаковую степень (различную для разных точек). Радикальная ось пересекает все сферы С. в двух точках. В зависимости от того, являются ли эти точки действительными (различными), комплексно сопряженными или совпадающими, С. сфер наз. эллиптической С., к-рая состоит из всех сфер, проходящих через две общие точки; гиперболической С., к-рая состоит из всех сфер, ортогональных двум нек-рым пересекающимся сферам; параболической С., к-рая состоит из всех сфер, касающихся нек-рой данной прямой в данной точке. Центры всех сфер С. лежат в одной плоскости, перпендикулярной к радикальной оси.

С. является пересечением всех общих сфер двух *сетей* сфер.

В проективной геометрии С.— множество всех прямых и плоскостей, проходящих через данную точку.

Лит.: [1] Постников М. М., Аналитическая геометрия, М., 1973; [2] Моденов П. С., Аналитическая геометрия, М., 1969.

А. Б. Иванов.

СВЯЗКА ПОЛУГРУПП данного семейства $\{S_\alpha\}$ — полугруппа S, обладающая разбиением на подполугруппы, классы к-рого суть в точности полугруппы S_α, и для любых S_α, S_β существует S_γ такая, что $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\gamma$. В этом случае говорят также, что S разложима в связку полугрупп S_α. Другими словами, S есть С. п. S_α, если все S_α — подполугруппы в S и существует конгруэнция ρ на S такая, что ρ-классы суть в точности S_α. Полугруппы S_α наз. компонентами данной связки. Термин «С. п.» согласуется с использованием нередко слова «связка» как синонима термина «полугруппа идемпонентов», так как конгруэнция ρ на полугруппе S определяет разложение S в связку тогда и только тогда, когда факторполугруппа S/ρ — полугруппа идемпотентов.

Многие полугруппы разложимы в связку полугрупп с теми или иными «более хорошими» свойствами; таким

образом, изучение их строения в известной мере сводится к рассмотрению типов, к к-рым принадлежат компоненты связки, и к рассмотрению полугрупп идемпотентов (см., напр., *Архимедова полугруппа*, *Вполне простая полугруппа*, *Клиффордова полугруппа*, *Периодическая полугруппа*, *Сепаративная полугруппа*).

С. п. S_α наз. коммутативной, если для соответствующей конгруэнции ρ факторполугруппа S/ρ коммутативна; тогда S/ρ — полурешетка (в этом случае часто говорят, что S есть полурешетка полугрупп S_α, в частности, если S/ρ — цепь, то говорят, что S есть цепь полугрупп S_α). С. п. наз. прямоугольной (иногда — матричной), если S/ρ — прямоугольная полугруппа (см. *Идемпотентов полугруппа*). Это эквивалентно тому, что компоненты связки могут быть индексированы парами индексов $S_{i\lambda}$, где i и λ пробегают нек-рые множества I и Λ соответственно, причем для любых $S_{i\lambda}$, $S_{j\mu}$ выполняется включение $S_{i\lambda}S_{j\mu}\subseteq S_{i\mu}$. Любая С. п. есть полурешетка прямоугольных связок, т. е. ее компоненты могут быть распределены на подсемейства так, что объединение компонент каждого подсемейства есть прямоугольная связка этих компонент, а исходная полугруппа разложима в полурешетку указанных объединений (теорема Клиффорда [1]). Поскольку свойства быть полугруппой идемпотентов, полурешеткой, прямоугольной полугруппой характеризуются тождествами, на любой полугруппе S для каждого из перечисленных свойств θ существует наименьшая конгруэнция, для к-рой соответствующая факторполугруппа обладает свойством θ, т. е. существуют наибольшие (или наиболее дробные) разложения S в С. п., в коммутативную С. п., в прямоугольную С. п.

К специальным типам С. п. относится сильная связка [4]: для любых элементов a и b из разных компонент произведение ab равно степени одного из этих элементов. Важным частным случаем сильной связки и одновременно частным случаем цепи полугрупп является ординальная сумма (или последовательно аннулирующая связка): множество ее компонент $\{S_\alpha\}$ линейно упорядочено и для любых S_α, S_β таких, что $S_\alpha < S_\beta$, и любых $a\in S_\alpha$, $b\in S_\beta$ имеет место равенство $ab=ba=a$. Заданием компонент и способа их упорядочения ординальная сумма определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

Лит.: [1] Clifford A., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1954, v. 5, p. 499—504; [2] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [3] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [4] Шеврин Л. Н., «Изв. вузов. Матем.», 1965, № 6, с. 156—65. *Л. Н. Шеврин.*

СВЯЗНАЯ КОМПОНЕНТА ЕДИНИЦЫ группы G — наибольшее связное подмножество G° топологической (или алгебраической) группы G, содержащее единицу этой группы. С. к. е. G° является замкнутой нормальной подгруппой в G; смежные классы по этой подгруппе совпадают со связными компонентами группы G. Факторгруппа G/G° вполне несвязна и хаусдорфова, причем G° — наименьшая из таких нормальных подгрупп $H\subset G$, что G/H вполне несвязна. Если G локально связна (напр., G — группа Ли), то G° открыта в G и G/G° дискретна.

В произвольной алгебраич. группе G С. к. е. G° также открыта и имеет конечный индекс, причем G° является минимальной замкнутой подгруппой конечного индекса в G. Связные компоненты алгебраич. группы G совпадают с неприводимыми компонентами. Для любого регулярного гомоморфизма $\varphi: G\to G'$ алгебраич. групп справедливо равенство $\varphi(G^\circ)=\varphi(G)^\circ$. Если G определена над нек-рым полем k, то и G° определена над k.

Если G — алгебраич. группа над полем $\mathbb{C}$, то ее С. к. е. G° совпадает со С. к. е. группы G, рассматриваемой как

комплексная группа Ли. Если G определена над $\mathbb{R}$, то группа $G^0(\mathbb{R})$ вещественных точек в G^0 не обязательно связна в топологии группы Ли $G(\mathbb{R})$, но число ее связных компонент конечно и имеет вид 2^l, где $l \geqslant 0$. Напр., группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ распадается на две компоненты, хотя $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ связна. Псевдоортогональная унимодулярная группа $\mathrm{SO}(p, q)$, к-рая может рассматриваться как группа вещественных точек связной комплексной алгебраич. группы $\mathrm{SO}_{p+q}(\mathbb{C})$, связна при $p=0$ или $q=0$ и распадается на две компоненты при $p, q > 0$.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [3] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [4] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972. *А. Л. Онищик.*

СВЯЗНАЯ СУММА семейства множеств — объединение этих множеств в единое связное множество. Само понятие С. с. возникло из необходимости отличить такого рода объединение от понятия несвязной или открыто-замкнутой суммы, т. е. такого объединения множеств, когда они не пересекаются и связными подмножествами в этом объединении могут быть только подмножества-слагаемые. *В. И. Малыхин.*

СВЯЗНОЕ МНОЖЕСТВО — подмножество объемлющего множества, в к-ром определено понятие *связности* и в смысле к-рого само подмножество связно. Напр., С. м. пространства действительных чисел являются выпуклые множества и только они; С. м. графа является такое множество, в к-ром любые две точки соединены путем, целиком лежащим в этом множестве. *В. И. Малыхин.*

СВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, к-рое нельзя представить в виде суммы двух отделенных друг от друга частей или, более строго, непустых непересекающихся открыто-замкнутых подмножеств. Пространство связно тогда и только тогда, когда каждая непрерывная числовая функция принимает на нем все промежуточные значения. Непрерывный образ С. п., произведение С. п., пространство замкнутых подмножеств в топологии Вьеториса С. п. суть С. п. Каждое связное вполне регулярное пространство имеет мощность не менее континуума, хотя существуют и счетные связные хаусдорфовы пространства. *В. И. Малыхин.*

СВЯЗНОСТИ НА МНОГООБРАЗИИ — *дифференциально-геометрические структуры* на гладком *многообразии* M, являющиеся *связностями* в приклеенных к M гладких расслоенных пространствах E с однородными типовыми слоями G/H размерности $\dim M$. В зависимости от выбора однородного пространства G/H получаются, напр., *аффинные связности*, *проективные связности*, *конформные связности* и др. на многообразии M. Общее понятие С. на м. ввел Э. Картан [1]; он назвал многообразие M с заданной на нем связностью «неголономным пространством с фундаментальной группой».

Современное определение С. на м. опирается на понятие гладкого расслоенного пространства, приклеенного к многообразию M. Пусть $F=G/H$ является *однородным пространством* размерности $\dim M$ (напр., аффинным пространством, проективным пространством и т. п.). Пусть $p : E \to M$ является гладким локально тривиальным расслоением с типовым слоем F и пусть в этом расслоении существует и фиксировано гладкое сечение s, т. е. такое гладкое отображение $s : M \to E$, что $p(s(x))=x$ для любого $x \in M$. Последнее условие гарантирует, что s является диффеоморфизмом M на $s(M)$, и поэтому M и $s(M)$ можно при желании отождествлять. Другими словами, к каждой точке $x \in M$ присоединен экземпляр F_x однородного пространства F размерности $\dim M$ — слой расслоения $p : E \to M$ над x — с фиксированной в ней точкой $s(x)$, отождествляемой с x.

С. на м. является частным случаем общего понятия связности; самостоятельно она может быть определена следующим образом. Пусть для каждой кусочно гладкой кривой $L(x_0, x_1)$ многообразия M определен изоморфизм $\Gamma L : F_{x_1} \to F_{x_0}$ касательных однородных пространств в концах кривой (напр., если F является аффинным, проективным и т. д. пространством, то ΓL — соответственно аффинное, проективное и т. д. отображение). Пусть, кроме того:

1) при $L(x_0, x_1)$, $L'(x_1, x_2)$, $L^{-1}(x_1, x_0)$ и $LL'(x_0, x_2)$ справедливы $\Gamma L^{-1} = (\Gamma L)^{-1}$, $\Gamma(LL') = (\Gamma L)(\Gamma L')$;

2) для каждой точки $x \in M$ и касательного вектора $X_x \in T_x(M)$ изоморфизм $\Gamma L_t : F_{x_t} \to F_x$, где L_t — образ отрезка $[0, t]$ при параметризации $\lambda : [0, 1] \to L(x, x_1)$ кривой L с касательным вектором X, стремится при $t \to 0$ к тождественному изоморфизму, и его отклонение от последнего зависит в своей главной части только от x и X, причем гладко.

В этом случае говорят, что на многообразии M дана связность Γ типа F; изоморфизм ΓL наз. *параллельным перенесением* вдоль L. Для каждой кривой $L(x, x_1) \in M$ определяется ее развертка: кривая в F_x, состоящая из образов точек x_t кривой L при параллельном перенесении вдоль L_t. Из 2) следует, что кривые с общим касательным X в точке x дают развертки с общим касательным вектором Y, гладко зависящим от x и X, вследствие чего для каждой точки x возникает отображение

$$f_x : T_x(M) \to T_{s(x)}(F_x).$$

Наиболее изучены линейные С. на м., к-рые обладают следующим дополнительным свойством:

3) элемент $\omega(X)$ в алгебре Ли g структурной группы G, к-рый определяет главную часть отклонения изоморфизма ΓL_t от тождественного изоморфизма при $t \to 0$ относительно нек-рого поля реперов, зависит от X линейно.

В этом случае отображение f_x является линейным. Если f_x оказывается изоморфизмом для любой точки x, то говорят о невырожденной С. на м. или о связности Картана; в этом случае изоморфизм f_x^{-1} трактуется также как приклеивание расслоения p: $E \to M$ к базе M (вдоль заданного сечения S). Связность Картана на M наз. полной, если для каждой точки x всякая гладкая кривая в F_x с началом в x является разверткой нек-рой кривой в M.

С точки зрения общей теории связностей, где линейная связность в расслоении $p : E \to M$ задается с помощью *горизонтального распределения* Δ на E, отображение f_x является композицией изоморфизма s^*, отображающего X в соответствующий касательный к $s(M)$ вектор, и последующей проекции пространства $T_{s(x)}(E) = \Delta_{s(x)} \oplus T_{s(x)}(F_x)$ на второе прямое слагаемое. Отсюда следует, что связность невырождена тогда и только тогда, когда $\Delta_{s(x)} \cap T_{s(x)}(s(M)) = \{0\}$ для любой точки $x \in M$. На M применимы все понятия и результаты общей теории связностей, напр. такие, как *голономии группа*, *кривизны форма*, теорема о голономии и др. Дополнительная структура расслоения, приклеенного к многообразию M, позволяет, однако, ввести нек-рые более специальные понятия. Кроме развертки наиболее важным из них является понятие *кручения формы* связности на M в точке x.

Особое место в теории С. на м. занимают связности Картана в случае, когда $F = G/H$ является однородным *редуктивным пространством*, т. е. когда существует прямое разложение $g = h + m$ со свойством $[hm] \subset m$. В этом случае происходит расщепление формы кривизны Ω на два самостоятельных объекта: ее компонента в m порождает форму кручения, а компонента в h порождает форму кривизны. Здесь наиболее известным примером

является аффинная связность на M, у к-рой F является аффинным пространством размерности $\dim M$.

Редуктивное пространство F обладает инвариантной аффинной связностью. Вообще, если на F существует инвариантная аффинная или проективная связность, то определяются *геодезические линии* связности типа F на M как такие линии в M, развертки к-рых являются геодезич. линиями указанной инвариантной связности.

Лит.: [1] Cartan E., «Acta math.», 1926, t. 48, p. 1—42 (в рус. пер. — Картан Э., Группы голономии обобщенных пространств, пер. с франц., Казань, 1933); [2] Лаптев Г. Ф., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1953, т. 2, с. 275—382; [3] Ehresmann C., Coll. de Topologie (Bruxells, 1950), P., 1951, p. 29—55; [4] Kobayashi S., «Canad. J. Math.», 1956, v. 8, № 2, p. 145—156; [5] Clifton Y. H., «J. Math. and Mech.», 1966, v. 16, № 6, p. 569—76. *Ю. Г. Лумисте.*

СВЯЗНОСТИ ОБЪЕКТ — дифференциально-геометрический объект на гладком главном расслоенном пространстве P, с помощью к-рого задается *горизонтальное распределение* Δ связности в P. Пусть $R_0(P)$ является расслоением всех таких реперов в касательных к P пространствах, что первые r векторов $e_1, \ldots, e_r$ касательны к слою и порождаются определенными r базисными элементами в алгебре Ли структурной группы G пространства P, $r=\dim G$. С. о. составляют тогда функции Γ_i^ρ на $R_0(P)$ такие, что подпространство распределения Δ натянуто на векторы $e_i+\Gamma_i^\rho e_\rho$ ($\rho, \sigma=1,\ldots, r$; $i, j,\ldots=r+1,\ldots, r+n$). Условия, к-рым должны удовлетворить функции Γ_i^ρ на $R_0(P)$, чтобы они составили С. о., следующие:

$$d\Gamma_i^\rho-\Gamma_j^\rho\omega_i^j+\Gamma_i^\sigma\omega_\sigma^\rho+\omega_i^\rho=\Gamma_{ij}^\rho\omega^j. \qquad (1)$$

Они выражены с помощью 1-форм на $R_0(P)$, входящие в структурные уравнения для форм ω^i, ω^ρ, составляющих дуальный кобазис к $\{e_i, e_\rho\}$:

$$\left.\begin{aligned} d\omega^i&=\omega^j\wedge\omega_j^i,\\ d\omega^\rho&=-\frac{1}{2}C_{\sigma\tau}^\rho\omega^\sigma\wedge\omega^\tau+\omega^i\wedge\omega_i^\rho,\\ \omega_\sigma^\rho&=-C_{\sigma\tau}^\rho\omega^\tau. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

С. о. определяет также *связности форму* θ согласно формуле $\theta^\rho=\omega^\rho-\Gamma_i^\rho\omega^i$ и *кривизны форму* Ω согласно формулам

$$\Omega^\rho=-\frac{1}{2}R_{ij}^\rho\omega^i\wedge\omega^j,$$

$$R_{ij}^\rho=-2\left(\Gamma_{[ij]}^\rho+C_{\sigma\tau}^\rho\Gamma_i^\sigma\Gamma_j^\tau\right).$$

Напр., пусть P является пространством аффинных реперов в касательных пространствах n-мерного гладкого многообразия M. Тогда вторые из уравнений (2) имеют вид

$$d\omega_j^i=-\omega_k^i\wedge\omega_j^k+\omega^k\wedge\omega_{jk}^i$$

и (1) сводятся к

$$d\Gamma_{ik}^j-\Gamma_{lk}^j\omega_i^l-\Gamma_{il}^j\omega_k^l+\Gamma_{ik}^l\omega_l^j+\omega_{ik}^j=\Gamma_{jkl}^i\omega^l.$$

При *параллельном перенесении* должно быть $\omega_j^i-\Gamma_{jk}^i\omega^k=0$. Если на M выбрана локальная карта и в ее области сделан переход к натуральному реперу карты, то $\omega^k=dx^k$ и параллельное перенесение определяется с помощью $\omega_j^i=\Gamma_{jk}^i dx^k$. Классич. определение С. о. аффинной связности на M как совокупности функций Γ_{jk}^i, заданных на области каждой карты и преобразующихся при переходе к координатам другой карты по формулам

$$\Gamma_{j'k'}^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma_{jk}^i+\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i},$$

следует из условия инвариантности перенесения.

Ю. Г. Лумисте.

СВЯЗНОСТИ ФОРМА — линейная дифференциальная форма θ на главном расслоенном пространстве P, к-рая принимает значения в алгебре g структурной группы G пространства P, определяется нек-рой *линейной связностью* Γ в P и сама определяет эту связность однозначно. По связности Γ значение С. ф. $\theta_y(Y)$, где $y \in P$, $Y \in T_y(P)$, определяется как тот элемент в g, к-рый в действии G на P порождает вторую компоненту вектора Y относительно прямого расслоения $T_y(P) = \Delta_y \oplus T_y(G_y)$, где G_y — слой, содержащий y, а Δ — горизонтальное распределение связности Γ. По С. ф. θ горизонтальное распределение Δ, а тем самым и связность Γ, восстанавливается следующим образом.

Теорема Картана — Лаптева. Чтобы нек-рая форма θ на P со значениями в g была С. ф., необходимо и достаточно следующее: 1) при $Y \in T_y(G_y)$ значением $\theta_y(Y)$ является тот элемент в g, к-рый в действии G на P порождает Y, 2) g-значная 2-форма

$$\Omega = d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta],$$

составленная из θ, является полубазовой, или горизонтальной, т. е. $\Omega_y(Y, Y') = 0$, если хотя бы один из векторов Y и Y' принадлежит $T_y(G_y)$. 2-форма Ω наз. *кривизны формой* связности. Если в g задан базис $\{e_1, \ldots, e_r\}$, то условие 2) выражается локально в виде равенств:

$$d\theta^\rho + \frac{1}{2} C^\rho_{\sigma\tau} \theta^\sigma \wedge \theta^\tau = \frac{1}{2} R^\rho_{ij} \omega^i \wedge \omega^j \qquad (*)$$

$$(\rho, \sigma, \tau = 1, \ldots, r;\ i, j = r+1, \ldots, r+n = \dim P),$$

где $\omega^1, \ldots, \omega^n$ — нек-рые линейно независимые полубазовые 1-формы. В такой форме необходимость условия 2) установил Э. Картан [1]; его достаточность при выполнении условия 1) доказал Г. Ф. Лаптев [2]. Уравнения (*) на компоненты С. ф. наз. структурными уравнениями связности в P, в них R^ρ_{ij} составляют объект кривизны.

Пусть P, в качестве примера, является пространством аффинных реперов в касательных пространствах n-мерного гладкого многообразия M. Тогда G и g являются соответственно группой и алгеброй Ли матриц вида

$$\left\| \begin{matrix} 1 & a^l \\ 0 & A^i_j \end{matrix} \right\|, \quad \det |A^i_j| \neq 0,$$

и

$$\left\| \begin{matrix} 0 & \mathfrak{A}^l \\ 0 & \mathfrak{A}^i_j \end{matrix} \right\| (i, j = 1, \ldots, n).$$

В силу теоремы Картана — Лаптева g-значная 1-форма

$$\theta = \left\| \begin{matrix} 0 & \omega^i \\ 0 & \omega^i_j \end{matrix} \right\|$$

на P является С. ф. нек-рой *аффинной связности* на M тогда и только тогда, когда

$$d\omega^i + \omega^i_j \wedge \omega^j = \frac{1}{2} T^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k,$$

$$d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l.$$

Здесь T^i_{jk} и R^i_{jkl} составляют соответственно тензор кручения и тензор кривизны аффинной связности на M. Последние два уравнения на компоненты С. ф. наз. структурными уравнениями полученной на M аффинной связности.

Лит.: [1] Cartan E., «Acta math.», 1926, v. 48, p. 1—42; [2] Лаптев Г. Ф., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1953, т. 2, с. 275—382; [3] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии, т. 2, пер. с англ., М., 1981.

Ю. Г. Лумисте.

СВЯЗНОСТИ ЧИСЛО — мощность семейства компонент связности топологич. пространства. Напр., если из числовой прямой выбросить n точек $a_1, \ldots, a_n$, то компонентами остатка являются множества

$$]-\infty, a_1[, \ ]a_1, a_2[, \ \ldots, \ ]a_n, \infty[$$

и, таким образом, С. ч. остатка равно $n+1$.

Термин «С. ч.» используется и в следующем смысле: область евклидова пространства наз. n-с в я з н о й, если ее граница состоит из n непересекающихся связных подмножеств. Напр., внутренность круга — односвязная область, внутренность кольца — двусвязная.

В. И. Малыхин.

СВЯЗНОСТЬ — свойство топологич. пространства, состоящее в том, что пространство нельзя представить в виде суммы двух отделенных друг от друга частей, или, более строго, непустых непересекающихся открыто-замкнутых подмножеств. Пространство, не являющееся связным, наз. н е с в я з н ы м. Напр., обычная евклидова плоскость — связное пространство; если удалить из нее точку, то остаток связен; если удалить какую-нибудь окружность, не сводящуюся к точке, то остаток уже несвязен.

Абстрактное свойство С. выражает интуитивное представление о С. пространства в единое целое, об отсутствии в нем каких-либо изолированных «островков». С. топологич. пространства сохраняется при гомеоморфизмах и является одним из важнейших свойств топологич. пространства.

Подмножество топологич. пространства наз. с в я з н ы м, если оно — связное подпространство. После введения этого понятия можно утверждать, что пространство связно, если любые его две точки лежат в некром связном подмножестве, т. е. их можно соединить нек-рым связным множеством. С этой точки зрения абстрактное свойство С. можно рассматривать как обобщение л и н е й н о й с в я з н о с т и, т. е. свойства пространства, заключающегося в возможности связать любые его две точки нек-рым путем — непрерывным образом отрезка. Открытое связное подмножество наз. о б л а с т ь ю. Области и выпуклые подмножества в евклидовых пространствах являются линейно связными и, тем более, связными.

Если семейство связных подмножеств имеет непустое пересечение, то объединение этого семейства — связное множество. Для всякой точки топологич. пространства объединение всех связных подмножеств, ее содержащих, есть наибольшее связное подмножество, ее содержащее, оно наз. к о м п о н е н т о й этой точки. Компоненты — замкнутые множества, различные компоненты не пересекаются.

К в а з и к о м п о н е н т о й точки наз. пересечение всех содержащих ее открыто-замкнутых подмножеств. Компонента точки содержится в ее квазикомпоненте. В бикомпактных пространствах компоненты и квазикомпоненты совпадают.

Пространство наз. н а с л е д с т в е н н о н е с в я з н ы м (дисперсным), если все его компоненты одноточечны, т. е. все его связные подмножества только одноточечны. Пространство наз. в п о л н е н е с в я з н ы м (нигде не связным), если все его квазикомпоненты одноточечны. Пространство наз. э к с т р е м а л ь н о н е с в я з н ы м, если замыкание любого открытого множества открыто. Хаусдорфово экстремально несвязное пространство вполне несвязно, а всякое вполне несвязное пространство наследственно несвязно. Существует связное пространство, содержащее точку дисперсии, но удалении к-рой остаток есть вполне несвязное пространство. Пример — *Куратовского — Кнастера веер*.

Связное бикомпактное пространство наз. к о н т и н у у м о м. Пересечение убывающего семейства не-

пустых континуумов есть непустой континуум. Однако никакой континуум нельзя разложить в объединение счетного семейства непустых непересекающихся замкнутых подмножеств (теорема Серпинского).

Пространство наз. неприводимым между нек-рыми своими двумя точками, если оно связно и эти две точки нельзя соединить никаким связным множеством, отличным от всего пространства. Всякий континуум для любых своих двух точек содержит неприводимый между ними подконтинуум (теорема Мазуркевича — Янишевского).

Пространство наз. локально связным в точке, если всякая окрестность этой точки содержит нек-рую связную ее окрестность.

Пространство наз. связным в размерности n, если каждое непрерывное отображение n-мерной сферы в него продолжается до непрерывного отображения n-мерного шара. С. в размерности 1 эквивалентна тривиальности *фундаментальной группы* пространства.

Непрерывное отображение одного топологич. пространства в другое наз. монотонным, если прообраз каждой точки — связное подмножество. Для замкнутых отображений монотонность эквивалентна связности прообраза каждого связного подмножества.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 2, М., 1969.

В. И. Малыхин.

СВЯЗНОСТЬ на расслоенном пространстве — *дифференциально-геометрическая структура* на гладком расслоенном пространстве со структурной группой Ли, обобщающая *связности на многообразии*, в частности, напр., *Леви-Чивита связность* в римановой геометрии. Пусть $p : E \to B$ является гладким локально тривиальным расслоением, на типовом слое F к-рого эффективно и гладко действует группа Ли G. С. в этом расслоении — это отображение категории кусочно гладких кривых базы B в категорию диффеоморфизмов слоя на слой, к-рое кривой $L = L(x_0, x_1)$ с началом x_0 и концом x_1 сопоставляет диффеоморфизм $\Gamma L : p^{-1}(x_1) \to p^{-1}(x_0)$ и удовлетворяет следующим аксиомам:

1) при $L(x_0, x_1)$, $L'(x_1, x_2)$, $L^{-1}(x_1, x_0)$ и $LL'(x_0, x_1)$ справедливы

$$\Gamma L^{-1} = (\Gamma L)^{-1},$$

$$\Gamma(LL') = (\Gamma L)(\Gamma L');$$

2) при произвольном тривиализующем диффеоморфизме $\varphi : U \times F \to p^{-1}(U)$ и при $L(x_0, x_1) \in U$ диффеоморфизм $\varphi_{x_0}^{-1}(\Gamma L)\varphi_{x_1} : (x_1, F) \to (x_0, F)$, где $\varphi_x = \varphi|_{(x, F)}$, определяется действием нек-рого элемента $g_\varphi^L \in G$;

3) для нек-рой кусочно гладкой параметризации $\lambda : [0,1] \to L(x_0, x_1) \subset U$ отображение $t \mapsto g_\varphi^{L_t}$, где L_t — образ отрезка $[0, t]$ при λ, определяет кусочно гладкую кривую в G, начинающуюся в единице $e = g_\varphi^{L_0}$, причем λ и $\lambda' : [0, 1] \to L'(x_0, x_1) \in U$ с общим ненулевым касательным вектором $X \in T_{x_0}B$ определяют пути в G с общим касательным вектором $\theta_\varphi(x_0, X) \in T_e(G) = g$, гладко зависящим от x_0 и X.

Диффеоморфизм ΓL наз. *параллельным перенесением* вдоль L. Параллельные перенесения вдоль всевозможных замкнутых кривых $L(x_0, x_0)$ составляют *голономии группу* связности Γ в точке x_0, изоморфную нек-рой подгруппе Ли в G, не зависящей от x_0. Кривая $\Lambda(y_0, y_1)$ в E наз. горизонтальной для связности Γ, если $\Gamma(p\Lambda_t)y_t = y_0$ для любого $t \in [0, 1]$ при нек-рой ее кусочно гладкой параметризации. Если заданы $L(x_0, x_1)$ и $y_0 \in p^{-1}(x_0)$, то всегда существует единственная горизонтальная $\Lambda(y_0, y_1)$, наз. горизонталь-

ным поднятием кривой L, такая, что $p\Lambda = L$; она состоит из $\Gamma L_t^{-1} y_0$. Множество горизонтальных поднятий всех L в B определяет связность Γ однозначно: ΓL отображает концы всех поднятий кривой L в их начала.

С. наз. линейной, если $\theta_\varphi(x, X)$ при произвольных φ и x зависит от X линейно или, что равносильно, если для любой $y \in E$ касательные векторы горизонтальных кривых с началом y образуют в $T_y(E)$ векторное подпространство Δ_y, наз. горизонтальным подпространством. При этом $T_y(E) = \Delta_y \oplus T_y(F_y)$, где F_y — слой, проходящий через y, то есть $F_y = p^{-1}(p(y))$. Гладкое распределение Δ: $y \mapsto \Delta_y$ наз. *горизонтальным распределением* линейной связности Γ. Оно определяет Γ однозначно: горизонтальными поднятиями являются его интегральные кривые.

Расслоенное пространство E наз. главным (соответственно пространством однородного типа) и обозначается P (соответственно Q), если G действует на F просто транзитивно (соответственно транзитивно), т. е. если для произвольных $z, z' \in F$ существует точно один (соответственно существует) элемент $g \in G$, к-рый переводит z в z'. Пусть G действует на F слева; тогда на P определяется ее естественное правостороннее действие, в к-ром g определяет $R_g : z \mapsto z \circ g$. При этом Q отождествимо с факторногообразием P/H, составленном из орбит $y \circ H$, где H — стационарная подгруппа нек-рой точки из $F = G/H$. Общее E отождествимо с факторногообразием $(P \times F)/G$ орбит $(y, z) \circ G$ относительно действия, определяемого формулой $(y, z) \circ g = (y \circ g, g^{-1} \circ z)$.

Гладкое распределение Δ на P является горизонтальным распределением нек-рой линейной С. (к-рую оно определяет однозначно) тогда и только тогда, когда

$$T_y(P) = \Delta_y \oplus T_y(F_y), \quad R_g^* \Delta_y = \Delta_{y \circ g}$$

для произвольных $y \in P$ и $g \in G$. Все горизонтальные распределения на Q (соответственно E) являются образами таких Δ при канонич. проекции $P \to Q = P/H$ (соответственно естественных поднятий таких Δ на $P \times F$ при канонич. проекции $P \times F \to E = (P \times F)/G$). Часто линейная С. определяется прямо как распределение с указанными выше свойствами. Известно, что в каждом P, а вместе с тем и в каждом Q и E, существует нек-рая линейная С.

Исследование линейной С. в P проводится обычно с помощью *связности формы*, к-рая определяет С. однозначно и может быть положена в основу еще одного ее определения. Важной ее характеристикой является *кривизны форма*, с помощью к-рой можно вычислить алгебру Ли группы голономии.

Впервые понятие С. возникло в 1917 в работе Т. Леви-Чивита [1] о параллельном перенесении вектора в римановой геометрии. Уже в 1918 Г. Вейль [2] дал понятие *аффинной связности*. В 20-е гг. Э. Картан (см. [3] — [5]) перешел к исследованию *проективной связности* и *конформной связности*, в 1926 дал общую концепцию «неголономного пространства с фундаментальной группой» (см. *Связности на многообразии*), где эти пространства освещены с точки зрения общей теории С. В 40-е гг. В. В. Вагнер развивал еще более общую концепцию, близкую по духу (но не по методу) к современному понятию С. Решающим был 1950, когда появились сводное изложение В. В. Вагнера [6], первые заметки Г. Ф. Лаптева, открывающие новые подходы, особенно в части аналитич. аппарата, и работа Ш. Эресмана [7], положившая начало современной глобальной теории С. См. также *Вейля связность*, *Линейная связность*, *Риманова связность*, *Симплектическая связность*, *Эрмитова связность*.

Лит.: [1] Levi-Civita T., «Rend. circ. mat. Palermo», 1917, t. 2, p. 173—205; [2] Weyl H., Raum, Zeit, Materie,

5 Aufl., B., 1923; [3] Cartan E., «Ann. Soc. pol. math.», 1923, t. 2, p. 171—221; [4] его же, «Bull. Soc. math. de France», 1924 t. 52, p. 205—41; [5] его же, «Acta math.», 1926, t. 48, p. 1—42; [6] Вагнер В. В., «Тр. Семин. по вект. и тенз. анализу», 1950, в. 8, с. 11—72; [7] Ehresmann C., в кн.: Coll. de Topologie. Bruxelles, 1950, P., 1951, p. 29—55; [8] Лаптев Г. Ф., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1953, т. 2, с. 275—382; [9] Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия, пер. с англ., М., 1960; [10] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [11] Лумисте Ю. Г., в кн.: Итоги науки. Сер. Математика, в. 21 — Алгебра. Топология. Геометрия. 1969, М., 1971, с. 123—68.

Ю. Г. Лумисте.

СГУЩЕНИЯ ТОЧКА, накопления точка,— то же, что *предельная точка*.

М. И. Войцеховский.

СДВИГ — аффинное преобразование плоскости, при к-ром каждая точка смещается по направлению оси Ox на расстояние, пропорциональное ее ординате. В декартовой системе координат С. задается соотношениями

$$x' = x + ky,\ y' = y,\ k \neq 0.$$

При С. сохраняются площади и ориентация.

С. пространства по направлению оси Ox задается соотношениями

$$x' = x + kz,\ y' = y,\ z' = z,\ k \neq 0.$$

При С. пространства сохраняются объемы и ориентация.

А. Б. Иванов.

СДВИГА ОПЕРАТОР — оператор T_t, зависящий от параметра t и действующий на нек-ром множестве Φ отображений $\varphi : A \to E$ (где A — абелева полугруппа, E — множество) по формуле

$$T_t\varphi(\cdot) = \varphi(\cdot + t)$$

(говорят также, что T_t — оператор сдвига на t). В качестве A часто фигурируют $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ (тогда T_t — сдвиг в том или ином пространстве функций действительного переменного), $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{N}$ (тогда T_t — сдвиг в том или ином пространстве последовательностей). Множество E, а соответственно этому и множество Φ, обычно наделено нек-рой структурой (векторного, векторного топологического, нормированного, метрического, вероятностного пространства).

С. о. используется, в частности, в теории динамич. систем (см. *Сдвигов динамическая система*, *Бернулли автоморфизм*). Употребляется также термин «С. о. по траекториям дифференциальных уравнений» (см. *Коши оператор*).

В. М. Миллионщиков.

СДВИГА ПАРАМЕТР — параметр θ, $\theta \in \Theta \subset R^k$, семейства функций $\{\varphi_\theta(\cdot)\}$, заданных на R^k по следующему правилу:

$$\varphi_\theta(\cdot) = \varphi(\cdot - \theta) \text{ для любого } \theta \in \Theta,$$

где $\varphi(\cdot)$ — нек-рая заданная функция на R^k.

Лит.: [1] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

М. С. Никулин.

СДВИГИ ПОЛУГРУППЫ — преобразования полугруппы, удовлетворяющие специальным условиям: правым сдвигом полугруппы S наз. преобразование ρ такое, что для любых $x, y \in S$ имеет место $(xy)\rho = x(y\rho)$; левый сдвиг определяется симметричным образом, при этом ради удобства левые сдвиги чаще записывают как левые операторы. Таким образом, левый сдвиг полугруппы S — такое ее преобразование λ, что для любых $x, y \in S$ имеет место $\lambda(xy) = (\lambda x)y$. Соответственно последовательность выполнения двух левых сдвигов в произведении (см. *Преобразований полугруппа*) осуществляется справа налево. Произведение двух левых (правых) С. п. само будет левым (правым) С. п., так что множество $\Lambda(S)$ (соответственно $P(S)$) всех левых (правых) С. п. S будет подполугруппой симметрич. полугруппы $\mathscr{T}_S$. Для произвольного элемента $a \in S$ преобразование $\lambda_a(\rho_a)$, заданное формулой $\lambda_a x = ax$ ($x\rho_a = xa$) является левым (правым) сдвигом, соответствующим элементу a. Он наз. внутренним левым

(правым) сдвигом. Множество $\Lambda_0(S)$ (соответственно $P_0(S)$) всех внутренних левых (правых) С. п. S есть левый идеал в $\Lambda(S)$ (правый идеал в $P(S)$).

Левый сдвиг λ и правый сдвиг ρ полугруппы S наз. связанными, если $x(\lambda y)=(x\rho)y$ для любых $x, y\in S$; в этом случае пару (λ, ρ) наз. бисдвигом S. Для любого $a\in S$ пара (λ_a, ρ_a) есть бисдвиг; он наз. внутренним бисдвигом, соответствующим элементу a. В полугруппах с единицей и только в них всякий бисдвиг внутренний. Множество $\mathrm{T}(S)$ всех бисдвигов полугруппы S есть подполугруппа декартова произведения $\Lambda(S)\times\mathrm{P}(S)$; она наз. сдвиговой оболочкой полугруппы S. Множество $\mathrm{T}_0(S)$ всех внутренних бисдвигов есть идеал в $\mathrm{T}(S)$; он наз. внутренней частью $\mathrm{T}(S)$. Отображение $\tau: S\to\mathrm{T}_0(S)$, заданное формулой $\tau(a)=(\lambda_a, \rho_a)$, есть гомоморфизм S на $\mathrm{T}_0(S)$, называемый каноническим. Полугруппа S наз. слабо редуктивной, если для любых $a, b\in S$ из того, что $ax=bx$ и $xa=xb$ для всех $x\in S$, следует $a=b$; т. е. канонич. гомоморфизм полугруппы S есть изоморфизм. Если S слабо редуктивна, то $\mathrm{T}(S)$ совпадает с идеализатором $\mathrm{T}_0(S)$ в $\Lambda(S)\times\mathrm{P}(S)$, т. е. с наибольшей подполугруппой из $\Lambda(S)\times\mathrm{P}(S)$, содержащей $\mathrm{T}_0(S)$ в качестве идеала.

С. п. и, в частности, сдвиговые оболочки играют существенную роль при изучении идеальных *расширений* полугрупп. Роль сдвиговой оболочки при этом в известной степени аналогична роли *гомоморфа группы* в теории групп.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [2] Petrich M., Introduction to semigroups. Columbus, Ohio, 1973; [3] его же, «Semigroup Forum», 1970, v. 1, p. 283—360.

Л. Н. Шеврин.

СДВИГОВ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — динамическая система f^t (или, в иных обозначениях, $f(t, \cdot)$) на пространстве непрерывных функций $\varphi: \mathbb{R}\to S$ (S — метрич. пространство), наделенном компактно открытой топологией (т. е. топологией равномерной сходимости на отрезках), заданная формулой

$$f^t\varphi = T_t\varphi,$$

где T_t — *сдвига оператор* на t, то есть

$$T_t\varphi(\cdot)=\varphi(\cdot+t).$$

Таким образом, траектория точки φ в С. д. с. есть множество всех сдвигов функции φ, т. е. всех функций вида $\varphi(t+\tau)$ переменного $\tau\in\mathbb{R}$, а замыкание этой траектории — множество всех функций вида

$$\tilde{\varphi}(\tau)=\lim_{k\to\infty}\varphi(t_k+\tau),$$

где предел равномерен на каждом отрезке. С. д. с. наделяется нормированными *инвариантными мерами*, существующими в силу теоремы Боголюбова — Крылова (инвариантные меры Боголюбова — Крылова сосредоточены на компактах).

С. д. с. используется в теории динамич. систем, главным образом — для построения примеров (при этом в качестве S обычно берут $\mathbb{R}$; пример Маркова не строго эргодич. системы на компакте, каждая траектория к-рой всюду плотна, и др.), а также в теории неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, где в качестве S берется обычно $\mathbb{R}^n$ или нек-рое пространство отображений $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ (в теории линейных однородных неавтономных систем обычно берется $S=\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$).

См. также *Особые показатели*, *Центральные показатели*.

В. М. Миллионщиков.

СЕГМЕНТ — 1) С. на плоскости — плоская фигура, заключенная между кривой и ее хордой. Пло-

щадь С. круга (кругового сегмента) $S=2\sqrt{2hr-h^2}$, где r — радиус круга, h — высота С.

2) С. в пространстве — часть тела, ограниченная плоскостью и отсекаемой ею частью поверхности. Объем С. шара (шарового сегмента): $V=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$, где R — радиус шара, h — высота С. шара. Площадь кривой поверхности С. шара: $S=2\pi Rh$.

А. Б. Иванов.

СЕГМЕНТ — см. *Интервал и сегмент*.

СЕГРЕ ВЛОЖЕНИЕ — вложение $\varphi: P^n\times P^m\to P^N$ произведения проективных пространств $P^n\times P^m$ в проективное пространство P^N, где $N=nm+n+m$. Если $x=(u_0\ldots u_n)\in P^n$, $y=(v_0\ldots v_m)\in P^m$, а $w_{i,j}$, $i=0,\ldots,n$, $j=0,\ldots,m$, — однородные координаты в P^N, то отображение определяется формулами

$$\varphi(x\times y)=(w_{i,j})\in P^N,$$

где $w_{ij}=u_iv_j$. Отображение φ корректно определено и является замкнутым вложением. Образ С. в. $\varphi(P^n\times P^m)$ наз. многообразием Сегре. Случай $n=m=1$ имеет простой геометрич. смысл: $\varphi(P^1\times P^1)$ — это невырожденная квадрика в P^3 с уравнением $w_{11}w_{00}=w_{01}w_{10}$. Образы $\varphi(x\times P^1)$ и $\varphi(P^1\times y)$ дают два семейства прямолинейных образующих на квадрике.

Названо в честь Б. Сегре (B. Segre).

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

Вал. С. Куликов.

СЕДЛО — тип расположения траекторий автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\dot{x}=f(x),\ x\in\mathbb{R}^2,\ f: G\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, \qquad (*)$$

$f\in C(G)$, G — область единственности, в окрестности особой точки (*равновесия положения*) x_0. Этот тип характеризуется следующим образом. Существует окрестность U точки x_0 такая, что для всех траекторий системы, начинающихся в $U\setminus\{x_0\}$, как положительные, так и отрицательные полутраектории являются уходящими (с течением времени покидают любой компакт $V\subset U$). Исключение составляют лишь четыре траектории (сепаратрисы седла). Для двух из них отрицательные полутраектории являются уходящими, а положительные полутраектории примыкают к точке x_0, для двух других — наоборот. Первые две сепаратрисы наз. устойчивыми, две вторые — неустойчивыми. Устойчивые сепаратрисы, будучи дополнены точкой x_0, образуют проходящую через x_0 гладкую кривую — устойчивое многообразие седла. Неустойчивые сепаратрисы вместе с точкой x_0 образуют гладкое неустойчивое многообразие седла. С. при этом наз. и сама точка x_0.

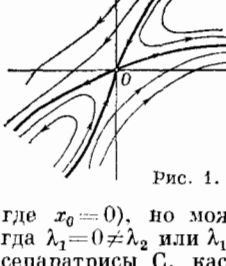


Рис. 1.

Седло x_0 неустойчиво по Ляпунову. Его индекс Пуанкаре равен -1. Для системы (*) класса C^1 ($f\in C^1(G)$) с ненулевой матрицей $A=f'(x_0)$ точка покоя x_0 является С. в случае, когда собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A удовлетворяют условию $\lambda_1\lambda_2<0$ (простое С., рис. 1, где $x_0=0$), но может быть С. и в тех случаях, когда $\lambda_1=0\neq\lambda_2$ или $\lambda_1=\lambda_2=0$. В любом из этих случаев сепаратрисы С. касаются в точке x_0 направлений, определяемых собственными векторами матрицы A.

Если система (*) линейна ($f(x)=A(x-x_0)$, A — постоянная матрица с собственными значениями λ_1,λ_2), то для нее точка x_0 является С. лишь при условии $\lambda_1\lambda_2<0$. Сепаратрисы седла x_0 в этом случае прямолинейны, а все остальные траектории (отличные от точки

x_0) суть аффинные образы гипербол вида $x_2 = c|x_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (рис. 2).

Термин «С.» применяют и для наименования любого расположения траекторий системы (*) в окрестности U изолированной точки покоя x_0, при к-ром из $U \setminus \{x_0\}$ к точке x_0 примыкает лишь конечное число m ($\geqslant 2$) траекторий, и каждая из них, будучи дополнена точкой x_0, касается в ней определенного направления (m-с е п а р а т р и с н о е С.). С. наз. и нек-рые типы точек покоя автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $n \geqslant 3$.

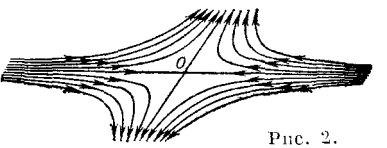


Рис. 2.

Лит. см. при ст. *Особая точка* дифференциального уравнения. *А. Ф. Андреев.*

СЕДЛО В БЕСКОНЕЧНОСТИ, н е с о б с т в е н н а я с е д л о в а я т о ч к а,— тип расположения траекторий динамич. системы. Говорят, что динамич. система f^t (или, иначе, $f(\ ,p)$, см. [1]), заданная на $\mathbb{R}^n$, имеет С. в б., если найдутся точки x_k и числа $\tau_k < 0$, $\theta_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что последовательности

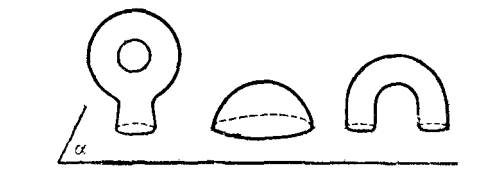
$$\{f^{\tau_k} x_k\}_{k \in \mathbb{N}},\ \{f^{\theta_k} x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$$

— сходящиеся, а $|x_k| \to \infty$ при $k \to \infty$. Это определение В. В. Немыцкого было обобщено М. В. Бебутовым на динамич. системы, заданные на произвольном метрич. пространстве; при этом требование «$|x_k| \to \infty$ при $k \to \infty$» заменяется требованием: «последовательность $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ не содержит ни одной сходящейся подпоследовательности».

Отсутствие С. в б.— необходимое условие глобальной выпрямляемости динамич. системы (см. *Полная неустойчивость*). Для того чтобы вполне неустойчивая динамич. система, заданная на метрич. пространстве, не имела С. в б., необходимо и достаточно, чтобы факторпространство динамич. системы было хаусдорфовым.

Лит.: [1] Н е м ы ц к и й В. В., С т е п а н о в В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М., 1949. *В. М. Миллионщиков.*

СЕДЛОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — обобщение поверхности отрицательной кривизны. Пусть M — поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, определяемая погружением $f : W \to E^3$ двумерного многообразия W в E^3. Плоскость α отсекает от M горбушку, если среди компонент прообраза множества $M \setminus \alpha$ в W имеется компонента с компактным замыканием. Часть поверхности M, соответствующая этой компоненте, наз. г о р б у ш к о й (см. рис.). Поверхность M наз.



С. п., если от нее нельзя отсечь горбушки никакой плоскостью. Примерами С. п. являются однополостный гиперболоид, гиперболич. параболоид, линейчатые поверхности. Для того чтобы дважды непрерывно дифференцируемая поверхность была С. п., необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке поверхности ее гауссова кривизна была неположительна. Поверхность, все точки к-рой *седловые точки*, является С. п.

С. п., ограниченная спрямляемым контуром, по своей внутренней метрике, индуцированной метрикой пространства, является двумерным многообразием неположительной кривизны. На класс С. п. можно обобщить

ряд свойств поверхностей отрицательной кривизны, однако эти поверхности не образуют, по-видимому, столь же естественного класса поверхностей, как выпуклые поверхности.

Лит.: [1] Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е., Введение в дифференциальную геометрию «в целом», М., 1973; [2] Шефель С. З., Исследования по геометрии седловых поверхностей, Новосиб., 1963.

Д. Д. Соколов.

СЕДЛОВАЯ ТОЧКА — точка гладкой поверхности, вблизи к-рой поверхность лежит по разные стороны от своей касательной плоскости. Если С. т. является точкой двукратно непрерывно дифференцируемой поверхности, то ее гауссова кривизна в этой точке неположительна. С. т. является обобщением гиперболич. точки.

Д. Д. Соколов.

СЕДЛОВАЯ ТОЧКА (в теории игр) функции F, заданной на декартовом произведении двух множеств $X\times Y$,— точка $(x^*,\ y^*)\in X\times Y$, для к-рой

$$F(x^*,\ y^*)=\max_{x\in X}F(x,\ y^*)=\min_{y\in Y}F(x^*,\ y).$$

Наличие С. т. у функции F равносильно существованию оптимальных стратегий у игроков в *антагонистической игре* $\Gamma=(X,\ Y,\ F)$.

В. Л. Крепс.

СЕДЛО-УЗЕЛ — тип расположения траекторий автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\dot{x}=f(x),\ x\in\mathbb{R}^2,\ f\colon G\to\mathbb{R}^2, \qquad (*)$$

$f\in C(G)$, G — область единственности, в окрестности особой точки x_0. Этот тип характеризуется следующим образом: нек-рая окрестность U точки x_0 разбивается примыкающими к x_0 полутраекториями (сепаратрисами С.-у.) на m криволинейных *секторов* ($3\leqslant m<+\infty$), из к-рых h, $2\leqslant h<m$, являются седловыми, а остальные — открытыми узловыми; каждая примыкающая к x_0 полутраектория, будучи дополнена точкой x_0, касается в ней определенного луча. С.-у. наз. при этом и сама точка x_0.

С.-у. неустойчив по Ляпунову. Его индекс Пуанкаре равен $1-(h/2)$. Если $f\in C^1(G)$, а матрица $A=f'(x_0)\neq 0$, то особая точка x_0 может быть для системы (*) С.-у. лишь в случаях, когда собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A удовлетворяют одному из следующих условий:

а) $\lambda_1=0\neq\lambda_2$; б) $\lambda_1=\lambda_2=0$.

В любом из этих случаев точка x_0 может быть для системы (*) также *седлом* или *узлом*, а в случае б) и точкой иного типа. Если же она является С.-у., то для

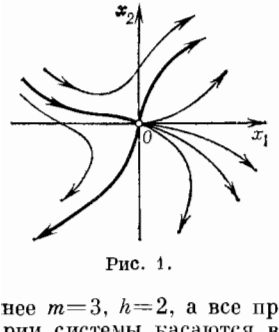


Рис. 1.

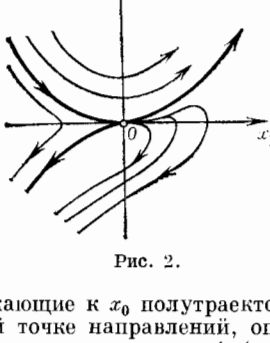


Рис. 2.

нее $m=3$, $h=2$, а все примыкающие к x_0 полутраектории системы касаются в этой точке направлений, определяемых собственными векторами матрицы A (см. рис. 1 и 2, где жирными линиями изображены сепаратрисы С.-у. $x_0=0$, а стрелки указывают направление движения по траекториям системы с возрастанием t; оно может быть и противоположным).

Лит.: [1] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А., Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости, М., 1976. *А. Ф. Андреев.*

СЕКАНС — одна из *тригонометрических функций*:

$$y=\sec x=\frac{1}{\cos x},$$

другое обозначение $\operatorname{sc} x$. Область определения — вся числовая прямая за исключением точек, абсциссы к-рых

$$x=\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

С.— неограниченная четная периодическая (с периодом 2π) функция. Производная С.:

$$(\sec x)'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x\ \sec x.$$

Интеграл от С.:

$$\int \sec x\,dx=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C.$$

С. разлагается в ряд

$$\sec x=\frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-x^2}-\frac{3\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2-x^2}+\frac{5\pi}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2-x^2}-\ldots$$

Ю. А. Горьков.

СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство (условие Больцано — Вейерштрасса), любая бесконечная последовательность точек к-рого содержит сходящуюся подпоследовательность. В классе T_1-пространств С. к. п. является счетно компактным пространством. Если к тому же пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности, то из его счетной компактности следует секвенциальная компактность. С. к. п. не обязательно является бикомпактным пространством: таково, напр., множество всех порядковых чисел, меньших первого несчетного числа, наделенное топологией, база к-рой — всевозможные интервалы. *М. И. Войцеховский.*

СЕКВЕНЦИАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X такое, что из $A\subset X$ и $A\neq[A]$ (т. е. множество A незамкнуто) следует существование последовательности x_k, $k=1, 2, \ldots$, точек из A, сходящихся к нек-рой точке $[A]\setminus A$. Если из $x\in[A]\subset X$ всегда следует, что существует последовательность x_k точек из A, сходящаяся к x, то X наз. пространством Фреше — Урысона. *М. И. Войцеховский.*

СЕКВЕНЦИЙ ИСЧИСЛЕНИЕ — одна из формулировок *предикатов исчисления*. Благодаря удобной форме вывода С. и. находит широкое применение в *доказательств теории*, основаниях математики, при автоматич. поиске вывода. С. и. было предложено Г. Генценом в 1934 (см. [1]). Ниже приводится один из вариантов классич. исчисления предикатов в форме С. и.

Набором формул наз. конечное множество формул нек-рого логико-математического языка Ω, причем в этом множестве допускаются повторения формул. Порядок формул в наборе Γ несуществен, но для каждой формулы указано, в скольких экземплярах она присутствует в Γ. Набор формул может быть и пустым. Набор $\varphi\Gamma$ получается из Γ присоединением одного экземпляра формулы φ. Секвенцией наз. фигура вида $\Gamma\to\Delta$, где Γ и Δ — наборы формул, Γ наз. антецедентом секвенции, а Δ—ее сукцедентом.

Аксиомы С. и. имеют вид $\varphi\Gamma\to\Delta\varphi$, где Γ, Δ — произвольные наборы формул, а φ — произвольная атомарная (элементарная) формула. Правила вывода исчисления устроены очень симметрично и вводят ло-

гич. связки в антецедент или сукцедент секвенции:

$$(\wedge \rightarrow)\ \frac{\varphi\psi\Gamma \rightarrow \Delta}{(\varphi \wedge \psi)\,\Gamma \rightarrow \Delta};\quad (\rightarrow \wedge)\ \frac{\Gamma \rightarrow \Delta\varphi;\ \Gamma \rightarrow \Delta\psi}{\Gamma \rightarrow \Delta\,(\varphi \wedge \psi)};$$

$$(\vee \rightarrow)\ \frac{\varphi\Gamma \rightarrow \Delta;\ \psi\Gamma \rightarrow \Delta}{(\varphi \vee \psi)\,\Gamma \rightarrow \Delta};\quad (\rightarrow \vee)\ \frac{\Gamma \rightarrow \Delta\varphi\psi}{\Gamma \rightarrow \Delta\,(\varphi \vee \psi)};$$

$$(\supset \rightarrow)\ \frac{\Gamma \rightarrow \Delta\varphi;\ \psi\Gamma \rightarrow \Delta}{(\varphi \supset \psi)\,\Gamma \rightarrow \Delta};\quad (\rightarrow \supset)\ \frac{\varphi\Gamma \rightarrow \Delta\psi}{\Gamma \rightarrow \Delta\,(\varphi \supset \psi)};$$

$$(\neg \rightarrow)\ \frac{\Gamma \rightarrow \Delta\varphi}{\neg\varphi\Gamma \rightarrow \Delta};\quad (\rightarrow \neg)\ \frac{\varphi\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta\neg\varphi};$$

$$(\forall \rightarrow)\ \frac{\forall x\varphi\ \varphi\,(x \mid t)\ \Gamma \rightarrow \Delta}{\forall x\varphi\Gamma \rightarrow \Delta};\quad (\rightarrow \forall)\ \frac{\Gamma \rightarrow \Delta\varphi}{\Gamma \rightarrow \Delta\forall x\varphi\ (y|x)};$$

$$(\exists \rightarrow)\ \frac{\varphi\Gamma \rightarrow \Delta}{\exists x\varphi\ (y \mid x)\,\Gamma \rightarrow \Delta};\quad (\rightarrow \exists)\ \frac{\Gamma \rightarrow \Delta\varphi\ (x \mid t)\ \exists x\varphi}{\Gamma \rightarrow \Delta\exists x\varphi}.$$

Здесь в правилах $(\rightarrow \forall)$ и $(\exists \rightarrow)$ предполагается, что переменная y не есть параметр Γ и Δ, а x не есть параметр φ.

С. и. эквивалентно обычной форме исчисления предикатов в том смысле, что формула φ выводима в исчислении предикатов тогда и только тогда, когда секвенция $\rightarrow \varphi$ выводима в С. и. Для доказательства этого утверждения существенна основная теорема Генцена (или теорема о нормализации), к-рая для С. и. может быть сформулирована следующим образом: если в С. и. выводимы секвенции $\Gamma \rightarrow \Delta\varphi$ и $\varphi\Gamma \rightarrow \Delta$, то выводима и секвенция $\Gamma \rightarrow \Delta$. Правило вывода $\frac{\Gamma \rightarrow \Delta\varphi;\ \varphi\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta}$ наз. правилом сечения, и теорема о нормализации утверждает, таким образом, что правило сечения допустимо в С. и. или что добавление правила сечения не изменяет объема выводимых секвенций. Ввиду этого теорему Генцена наз. также теоремой об устранении сечения.

Симметричное устройство С. и. в значительной мере облегчает изучение его свойств, поэтому в теории доказательств важное место занимает поиск секвенциальных вариантов прикладных исчислений: арифметики, анализа, теории типов и доказательство для таких исчислений теоремы об устранении сечения в той или иной форме (см. [2], [3]). Найдены секвенциальные варианты и для многих исчислений, основанных на неклассич. логиках — интуиционистской, модальных и релевантных логиках и др. (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Математическая теория логического вывода. Сб. переводов, М., 1967; [2] Такеути Г., Теория доказательств, пер. с англ., М., 1978; [3] Драгалин А. Г., Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., 1979; [4] Фейс Р., Модальная логика, пер. [с англ.], М., 1974.

А. Г. Драгалин.

СЕКВЕНЦИЯ — выражение вида

$$A_1,\ \ldots,\ A_n \rightarrow B_1,\ \ldots,\ B_m,$$

где $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ — формулы. Читается: «при допущениях $A_1, \ldots, A_n$ имеет место B_1 или B_2, или ..., или B_m». Часть С., стоящая слева от стрелки, наз. антецедентом; часть С., стоящая справа от стрелки, наз. сукцедентом (консеквентом). Формула $(A_1\& \ldots \&A_n) \supset (B_1 \vee \ldots \vee B_m)$ (пустая конъюнкция обозначает ложь, пустая дизъюнкция — истину) наз. формульным образом С.

Г. Е. Минц.

СЕКТОР — 1) С. на плоскости — плоская фигура, ограниченная двумя полупрямыми, исходящими из внутренней точки фигуры, и дугой контура. С. круга (круговой сектор) — фигура, ограниченная двумя радиусами и дугой, на к-рую они опираются. Площадь С. круга: $S = lr/2$, где r — радиус круга, l — длина дуги.

2) С. в пространстве — часть тела, ограниченная конич. поверхностью, вершина к-рой нахо-

дится внутри тела, и вырезаемой частью поверхности тела. Шаровой сектор — тело, возникающее при вращении сектора большого круга вокруг одного из радиусов (шаровой С. 1-го рода) или вокруг диаметра, не пересекающего его дуги (шаровой С. 2-го рода). Объем шарового сектора: $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$, где R — радиус сферы, h — проекция хорды, стягивающей дугу С. на ось вращения. *БСЭ-3.*

СЕКТОР в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. 1) С.— открытый криволинейный сектор S с вершиной в изолированной особой точке O *автономной системы* обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\dot{x}=f(x),\ x\in\mathbb{R}^2, \qquad (*)$$

$f\in C(G)$, G — область единственности, удовлетворяющая следующим четырем условиям. 1) Каждая из боковых стенок S является TO-кривой системы (*) (полутраекторией, примыкающей при $|t|\to+\infty$ к точке O, касаясь в ней определенного направления). 2) Задней стенкой S является простая параметрич. дуга (гомеоморфный образ отрезка). 3) В $\overline{S}\setminus\{0\}$ нет особых точек системы (*). Четвертым условием является

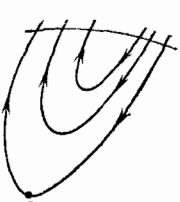


Рис. 1.



Рис. 2.



Рис. 3.

одно из трех следующих. 4а) Все траектории системы (*), начинающиеся в S, покидают этот сектор как с возрастанием, так и с убыванием t; такой С. наз. гиперболическим, или седловым (рис. 1). 4б) Все траектории системы (*), начинающиеся в S в достаточной близости от O, с возрастанием t, не выходя из S, примыкают к точке O, а с убыванием t покидают S (или наоборот); такой С. наз. параболическим, или открытым узловым (рис. 2). 4в) Все траектории системы (*), начинающиеся в S в достаточной близости от O, как с возрастанием, так и с убыванием t, не выходя из S, примыкают к точке O, образуя вместе с O замкнутые кривые (петли), причем из любых двух петель одна охватывает другую; такой С. наз. эллиптическим, или замкнутым узловым (рис. 3).

Для аналитич. системы (*), имеющей TO-кривые, круг Q достаточно малого радиуса с центром в точке O всегда может быть разбит на конечное число С. описанного вида: h гиперболических, p параболических и e эллиптических (см. [1], [2]). Выявить все эти С., определить тип каждого из них и установить для них закон следования друг за другом при обходе точки O по границе круга Q (и тем самым выяснить топологич. структуру расположения траекторий системы (*) в окрестности точки O) можно, напр., с помощью *Фроммера метода*. Для чисел h, p и e имеются априорные оценки сверху через порядок малости нормы $\|f(x)\|$ при $x\to O$ (см. [1], [4], [5]).

Иногда (см., напр., [3]) понятие «С.» определяется свободнее: в гиперболич. и параболич. С. допускается наличие петель, покрывающих множество, не имеющее предельных точек на задней стенке С., а в эллиптич. С. — наличие петель, не охватывающих друг друга.

При этом первая фраза предыдущего абзаца сохраняет силу и для систем (*) общего вида, а индекс Пуанкаре особой точки O системы (*) выражается формулой Бендиксона:

$$i = 1 + (e - h)/2.$$

Лит.: [1] Bendixson I., «Acta math.», 1901, v. 24, p. 1—88; [2] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966; [3] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [4] Берлинский А. Н., «Докл. АН СССР», 1969, т. 187, № 3, с. 502—05; [5] Сагалович М. Е., «Дифференц. уравнения», 1979, т. 15, № 2, с. 360—62.

2) Сектор Фроммера, нормальная область Фроммера,— круговой С.

$$N = \{(r, \varphi) \mid 0 < r \leqslant \delta, \ |\varphi - \varphi_0| \leqslant \varepsilon\}$$

с вершиной в изолированной особой точке $O(x = x_0)$ системы (*) (см. п. 1), боковыми стенками OA и OB, $\varphi_A = \varphi_0 - \varepsilon$, $\varphi_B = \varphi_0 + \varepsilon$, и задней стенкой AB (здесь r, φ — полярные координаты на x-плоскости с полюсом в точке O, δ, ε, $\varphi_0 \in \mathbb{R}$), удовлетворяющий следующим условиям:

(1) $\varphi = \varphi_0$ — исключительное направление системы (*) в точке O, т. е. существует последовательность $x_k = x_0 + (r_k \cos \varphi_k, r_k \sin \varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, $r_k \to 0$, $\varphi_k \to \varphi_0$ при $k \to +\infty$, такая, что если $\alpha(x) = (f(x) \widehat{\ } x - x_0)$, то $\operatorname{tg} \alpha(x_k) \to 0$ при $k \to +\infty$, и такое направление единственно в N,

(2) $\operatorname{tg} \alpha(x) \neq 0$ для любого $x \in OA \cup OB$,

(3) $\alpha(x) \neq \pi/2$ для любого $x \in N$.



Рис. 4.

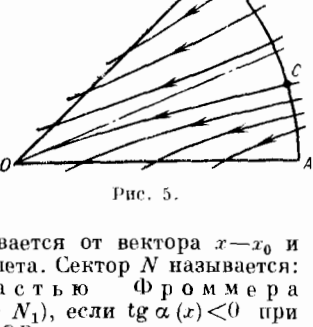


Рис. 5.

Пусть угол $\alpha(x)$ отсчитывается от вектора $x - x_0$ и имеет знак направления отсчета. Сектор N называется: нормальной областью Фроммера 1-го типа (обозначение N_1), если $\operatorname{tg} \alpha(x) < 0$ при $x \in OA$, $\operatorname{tg} \alpha(x) > 0$ при $x \in OB$;

нормальной областью 2-го типа (N_2), если $\operatorname{tg} \alpha(x) > 0$ на OA, $\operatorname{tg} \alpha(x) < 0$ на OB;

нормальной областью 3-го типа (N_3), если $\operatorname{tg} \alpha(x)$ на OA и на OB имеет один и тот же знак. Эти области были введены М. Фроммером [1].



Рис. 6.

Траектории системы (*) в нормальных областях Фроммера ведут себя следующим образом. Область N_1 покрыта O-кривыми системы (рис. 4). Они образуют открытый пучок — семейство одноименных O-кривых, непрерывно зависящее от параметра, пробегающего открытый промежуток. В области N_2 существует либо (а) единственная O-кривая (рис. 5), либо (б) бесконечно много O-кривых (замкнутый пучок, рис. 6). В области N_3 либо (а) существует бесконечно много O-кривых (полуоткрытый пучок, рис. 7), либо (б) не существует O-кривых (рис. 8). В нормальной области N любого типа O-кривые при $t \to +\infty$ (или $t \to -\infty$)

примыкают к точке O по направлению $\varphi=\varphi_0$, а с убыванием (возрастанием) t покидают область N; все остальные траектории покидают область N как с возрастанием, так и с убыванием t. Задачи различения случаев (а) и (б) для областей N_2 и N_3 наз. соответственно 1-й и 2-й проблемами различения Фроммера.

Если система (*) имеет в точке O конечное число (>0) исключительных направлений, каждое из них

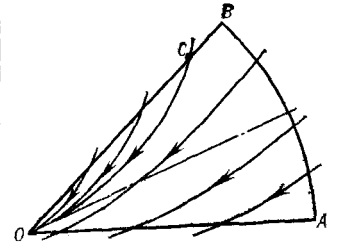


Рис. 7.

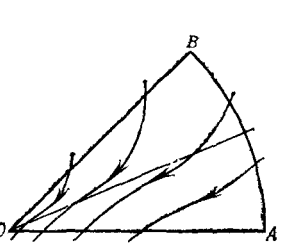


Рис. 8.

можно заключить в нормальную область N, и для всех областей N_2 и N_3 будут решены проблемы различения Фроммера, то топологич. структура расположения траекторий системы в окрестности точки O будет выяснена полностью, ибо секторы с вершиной в O, расположенные между нормальными областями, в достаточной близости от точки O полностью пересекаются траекториями системы (как на рис. 8). Такая ситуация имеет место, напр., в случае, когда

$$f(x)=P(x)+p(x), \quad P=(P_1, P_2),$$

P_1, P_2 — формы степени $n\geqslant 1$ от компонент x_1, x_2 вектора x,

$$p(x)=o(\|x\|^n) \text{ при } \|x\|\to 0,$$

причем выполняются следующие условия: форма $x_1P_2(x)-x_2P_1(x)$ имеет действительные линейные множители; формы P_1, P_2 не имеют общих действительных линейных множителей; $p\in C^{n+1}$. При этом в каждой из областей N_2, N_3 будет иметь место расположение (а).

Аналоги нормальных областей Фроммера введены и для систем вида (*) порядка $\geqslant 3$.

Лит.: [1] Frommer M., «Math. Ann.», 1928, Bd 99, S. 222—72; [2] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1949; [3] Андреев А. Ф., в сб.: Тр. Четвертого Всесоюзного матем. съезда, т. 2, Л., 1964, с. 394—402.

А. Ф. Андреев.

СЕКУНДА — единица измерения плоских углов, равная $^1/_{3600}$ части градуса или $^1/_{60}$ части минуты; обозначается знаком $''$. Метрическая С.—$1/10^6$ часть прямого угла; обозначается знаком сс.

СЕКУЩИХ МЕТОД — метод вычисления нулей непрерывных функций. Пусть в $[a, b]$ содержится нуль α непрерывной функции $f(x)$; x_0, x_1 — различные точки этого отрезка. Итерационная формула С. м.:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{(f(x_k)-f(x_{k-1}))/(x_k-x_{k-1})}, \quad k=1, 2, \ldots \quad (1)$$

Если последовательность $\{x_k\}$ сходится, то обязательно к нулю функции $f(x)$. При наличии у f непрерывной производной на $[a, b]$ локальная сходимость С. м. к простому корню будет сверхлинейной. Если усилить требования к гладкости f, можно указать точный порядок (локальной) сходимости [1]. Именно, для $f\in C^2[a, b]$ и α такого, что $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq 0$, $f''(\alpha)\neq 0$,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^p}=k.$$

Здесь $p=(\sqrt{5}+1)/2\approx 1{,}618$, $k=|f''(\alpha)/2f'(\alpha)|$.

Сверхлинейная сходимость С. м. для гладких функций — очень важное обстоятельство, поскольку вы-

числения производных не требуется и на каждом шаге вычисляется лишь одно новое значение функции. Так, для сравнения, в методе Ньютона, порядок (локальной) сходимости к-рого равен 2, на каждом шаге требуется вычисление значения функции и ее производной, что, как правило, не менее трудоемко, чем вычисление *двух значений функции*.

Поскольку сходимость С. м. зависит от гладкости функции и выбора начальных приближений, в стандартных машинных подпрограммах вычисления нулей непрерывных функций этот метод комбинируется с каким-либо методом, обладающим гарантированной сходимостью, напр. методом деления отрезка пополам. На каждом шаге такого комбинированного метода корень α локализован в отрезке $[a_k,\ b_k]$, на концах к-рого функция меняет знак (предполагается, что это условие выполнено для исходного отрезка $[a,\ b]$). В соответствии с нек-рым тестом очередное приближение выбирается либо по формуле (1), либо по формуле деления пополам. При этом если $f(x)$ — гладкая функция, то итерации, начиная с нек-рого номера k_0, автоматически идут по С. м. Возможна еще более сложная комбинация методов, напр. алгоритм ZEROIN (см. [2]), в к-ром, кроме упомянутых выше, используется еще метод обратной квадратичной интерполяции. Иногда С. м. называют метод с итерационной формулой

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{(f(x_k)-f(x_0))/(x_k-x_0)},\quad k=1,\ 2,\ \ldots \qquad (2)$$

Другое название метода (2) — м е т о д л о ж н о г о п о л о ж е н и я, или regula falsi. Такой метод сходится лишь линейно.

При обобщении С. м. на случай системы уравнений возможен двоякий взгляд на итерационную формулу (1). Можно считать, что она получена из формулы метода Ньютона дискретной аппроксимацией производной. Другая возможность — считать, что для $f(x)$ произведена линейная интерполяция по точкам $(x_{k-1},\ f(x_{k-1}))$ и $(x_k,\ f(x_k))$ и за x_{k+1} взят нуль линейной интерполянты. Обе интерпретации позволяют получить большое количество многомерных аналогов С. м.; нек-рые из них (но далеко не все) имеют тот же порядок (локальной) сходимости $p=(1+\sqrt{5})/2$ (см. [3]).

Лит.: [1] Brent R. P., Algorithms for minimization without derivatives, Englewood cliffs (N. J.), 1973; [2] Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К., Машинные методы математических вычислений, пер. с англ., М., 1980; [3] Ортега Дж., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ., М., 1975.

Х. Д. Икрамов.

СЕКЦИОННАЯ КРИВИЗНА — *риманова кривизна* дифференцируемого риманова многообразия M в точке p в направлении двумерной плоскости α (в направлении бивектора, определяющего плоскость α в точке p многообразия M).

Л. А. Сидоров.

СЕЛЬБЕРГА РЕШЕТО, С е л ь б е р г а м е т о д,— специальный и в то же время достаточно универсальный *решета метод*, созданный А. Сельбергом [1]. С. р. позволяет хорошо оценивать сверху просеивающую функцию $S(A;\ P,\ z)$, обозначающую количество элементов конечного множества A целых чисел, к-рые не делятся на простые числа $p<z$ и принадлежат некрому множеству P простых чисел.

Пусть $P(z)=\prod_{p<z;\ p\in P}p$. Метод Сельберга основан на очевидном неравенстве

$$S(A;\ P,\ z)\leqslant\sum_{a\in A}\Big(\sum_{d\mid a;\ d\mid P(z)}\lambda_d\Big)^2, \qquad (*)$$

к-рое верно при $\lambda_1=1$ для произвольных действительных чисел λ_d $(d\geqslant 2)$. Идея Сельберга состоит в том, чтобы, положив $\lambda_d=0$ для $d\geqslant z$, минимизировать правую часть неравенства (*) путем надлежащего выбора оставшихся чисел λ_d $(2\leqslant d<z)$.

В комбинации с другими методами решета С. р. позволяет получать оценки снизу, особенно сильные при использовании весовых функций.

Лит.: [1] Selberg A., «Norske Vid. Selsk. Forh.», 1947, Bd 19, № 18, p. 64—67; [2] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [3] Halberstam H., Richert H., Sieve methods, L.— [a. o.], 1974.

Б. М. Бредихин.

СЕМАНТИКА в математической логике — исследование интерпретаций *логического исчисления*, формальной аксиоматич. теории; изучение смысла и значения конструкций формализованного языка теории, способа понимания его логич. связок и формул. С. уделяет внимание возможности точного описания и определения таких понятий, как «истина», «определимость», «обозначение», по крайней мере применительно к точно описанным языкам. В несколько более узком смысле под С. формализованного языка понимают систему *соглашений, определяющих понимание* формул языка, задающих условия истинности этих формул.

С. логич. связок в классической и интуиционистской логике носит экстенсиональный характер, т. е. истинность сложного высказывания определяется только характером истинности составляющих его высказываний. В иных классич. логиках, напр. релевантных, может учитываться и смысловое содержание понятий (такие логики наз. интенсиональными). В такого рода логиках, напр., не обязательно, чтобы все истинные высказывания были эквивалентны.

Построение четкой С. достаточно сложных формализованных языков типа языков *аксиоматической теории множеств* является трудной проблемой. Это связано по существу с тем, что процесс абстрагирования в математике является весьма сложным и многоступенчатым с привлечением таких глубоких и неочевидных абстракций, как *абстракция актуальной бесконечности* или *абстракция потенциальной осуществимости*. В результате объем объектов исследования в математике, способы обращения с этими объектами и способы доказательства утверждений относительно таких объектов, как множества произвольной природы, становятся весьма неопределенными. При неосторожном обращении с принципами доказательства в рамках теории возникают *антиномии*, напр. парадокс Рассела в теории множеств. В такой ситуации приходится отказываться от построения исчерпывающей и интуитивно убедительной С. языка и ограничиваться формулировкой нек-рых семантич. соглашений. При формализации теории при этом стремятся, чтобы правила вывода полученного исчисления были корректны по отношению к этим соглашениям, т. е. при применении к верным формулам вновь давали верные формулы. Полученная формальная система может уже изучаться в рамках нек-рой *метатеории* с более ясной С.

Часто семантич. понятия для нек-рого языка могут быть точно сформулированы в рамках более богатого языка, играющего для первого роль *метаязыка*. Напр., средствами теории множеств можно дать строгое математич. определение (классической) истинности формулы данного языка 1-го порядка на алгебраич. системе. Это понятие является основным в *моделей теории*. С другой стороны, как показал А. Тарский (A. Tarski, 1936), для достаточно богатых теорий их истинность не может быть выражена на языке самой теории.

Широко изучаются С. неклассич. теорий, напр. математич. теорий, развиваемых в рамках *интуиционизма*. Роль моделей в таких исследованиях играют алгебраич. структуры, учитывающие неклассич. характер понимания логич. связок. Таковы, напр., *Крипке мо-*

дели, реализуемость по Клини, *ступенчатая семантическая система* А. А. Маркова.

Лит.: [1] Карнап Р., Значение и необходимость пер. с англ., М., 1959; [2] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960; [3] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [4] Драгалин А. Г., Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., 1979; [5] Фейс Р., Модальная логика, пер. с англ., М., 1974.

А. Г. Драгалин.

СЕМИИНВАРИАНТ — 1) С.— то же, что *полуинвариант*. 2) С.— одна из числовых характеристик случайных величин, родственная понятию *момента* старшего порядка. Если $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ — случайный вектор, $\varphi_\xi(t)=\mathsf{E}e^{i(t,\,\xi)}$ — его характеристич. функция, $t=(t_1, \ldots, t_k)$, $t_i\in R$,

$$(t,\,\xi)=\sum_{i=1}^{k} t_i\xi_i$$

и для нек-рого $n\geqslant 1$ моменты $\mathsf{E}|\xi_i|^n<\infty$, $i=1, \ldots, k$, то существуют (смешанные) моменты

$$m_\xi^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)}=\mathsf{E}\xi_1^{\nu_1}\ldots\xi_k^{\nu_k}$$

для всех неотрицательных целочисленных $\nu_1, \ldots, \nu_k$ таких, что $\nu_1+\ldots+\nu_k\leqslant n$. Тогда

$$\varphi_\xi(t)=\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_k\leqslant n}\frac{i^{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\nu_1!\ldots\nu_k!}m_\xi^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)}\times$$
$$\times t_1^{\nu_1}\ldots t_k^{\nu_k}+o(|t|^n),$$

где $|t|=|t_1|+\ldots+|t_k|$ и для достаточно малых $|t|$ главное значение $\ln\varphi_\xi(t)$ представимо по формуле Тейлора в виде

$$\ln\varphi_\xi(t)=\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_k\leqslant n}\frac{i^{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\nu_1!\ldots\nu_k!}s_\xi^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)}\times$$
$$\times t_1^{\nu_1}\ldots t_k^{\nu_k}+o(|t|^n),$$

где коэффициенты $s_\xi^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)}$ наз. (**смешанными**) **семиинвариантами, или кумулянтами**, порядка $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ вектора $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Для независимых случайных векторов $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ и $\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_k)$

$$s_{\xi+\eta}^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)}=s_\xi^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)}+s_\eta^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)},$$

то есть С. суммы независимых случайных векторов есть сумма С. Именно это и послужило причиной термина «семиинвариант», отражающего свойство аддитивности для случая независимых величин (но это свойство уже, вообще говоря, не верно для зависимых величин).

Между моментами и С. справедливы следующие формулы связи:

$$m_\xi^{(\nu)}=\sum{}^{*}\frac{1}{q!}\frac{\nu!}{\lambda^{(1)}!\ldots\lambda^{(q)}!}\prod_{p=1}^{q}s_\xi^{(\lambda^{(p)})},$$

$$s_\xi^{(\nu)}=\sum{}^{*}\frac{(-1)^{q-1}}{q}\frac{\nu!}{\lambda^{(1)}!\ldots\lambda^{(q)}!}\prod_{p=1}^{q}m_\xi^{(\lambda^{(p)})},$$

где $\sum^{*}$ означает суммирование по всем упорядоченным наборам целых неотрицательных векторов $\lambda^{(p)}$, $|\lambda^{(p)}|>0$, дающих в сумме вектор ν. В частности, если ξ — случайная величина ($k=1$), $m_n=m_\xi^{(n)}=\mathsf{E}\xi^n$, $s_n=s_\xi^{(n)}$, то

$$m_1=s_1,$$
$$m_2=s_2+s_1^2,$$
$$m_3=s_3+3s_1s_2+s_1^3,$$
$$m_4=s_4+3s_2^2+4s_1s_3+6s_1^2s_2+s_1^4,$$

и

$$s_1=m_1\ (=\mathsf{E}\xi),$$
$$s_2=m_2-m_1^2\ (=\mathsf{D}\xi),$$
$$s_3=m_3-3m_1m_2+2m_1^3,$$
$$s_4=m_4-3m_2^2-4m_1m_3+12m_1^2m_2-6m_1^4.$$

Лит.: [1] Леонов В. П., Ширяев А. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 342—55.

А. Н. Ширяев.

СЕМИМАРТИНГАЛ — стохастический процесс, представимый в виде суммы локального мартингала и процесса локально ограниченной вариации. При формальном определении С. исходят из допущения, что все рассмотрения ведутся на стохастич. базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$, где $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Стохастич. процесс $X=(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ наз. с е м и м а р т и н г а л о м, если его траектории непрерывны справа и имеют пределы слева и он представим в виде $X_t=M_t+V_t$, где $M=(M_t, \mathcal{F}_t)$ — локальный мартингал, а $V=(V_t, \mathcal{F}_t)$ — процесс локально ограниченной вариации, т. е.

$$\int_0^t |\, dV_s\,(\omega)\,| < \infty,\ t>0,\ \omega\in\Omega.$$

Такое представление, вообще говоря, неоднозначно. Однако в классе разложений с предсказуемыми процессами V рассматриваемое представление единственно (с точностью до стохастич. эквивалентности). К классу С. относятся (помимо локальных мартингалов и процессов с локально ограниченными вариациями) локальные супермартингалы и субмартингалы, процессы X с независимыми приращениями, для к-рых функция $f(t)=\mathsf{E}e^{i\lambda X_t}$ является функцией локально ограниченной вариации для любого $\lambda\in\mathbb{R}$ (и значит — все процессы со стационарными независимыми приращениями), процессы Ито, процессы диффузионного типа и др. Класс С. инвариантен относительно эквивалентной замены меры. Если X есть С., а $f=f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, то $f(X)=(f(X_t), \mathcal{F}_t)$ также С. При этом (ф о р м у л а И т о)

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_{s-})dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_{s-})\,d\,[X, X]_s^c+$$
$$+\sum_{0<s\leqslant t}[f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\,\Delta X_s]$$

или, что эквивалентно,

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_{s-})\,dX_s+\tfrac{1}{2}\int_0^t f''(X_{s-})\,d[X, X]_s+$$
$$+\sum_{0<s\leqslant t}\Big[f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s-$$
$$-\tfrac{1}{2}f''(X_{s-})\,(\Delta X_s)^2\Big],$$

где $[X,\ X]=([X,\ X]_t,\ \mathcal{F}_t)$ — квадратич. вариация семимартингала X, то есть

$$[X,\ X]_t=X_0^2+2\int_0^t X_{s-}\,dX_s,$$

$$[X,\ X]_t^c=[X,\ X]_t-\sum_{0<s\leqslant t}(\Delta X_s)^2$$

— непрерывная часть квадратич. вариации $[X,\ X]$, $\Delta X_s=X_s-X_{s-}$, а рассматриваемые интегралы понимаются как стохастич. интегралы по С.

Если X есть С., то процесс $X^{(\leqslant 1)}=(X_t^{(\leqslant 1)}, \mathcal{F}_t)$ с

$$X_t^{(\leqslant 1)}=X_t-\sum_{0<s\leqslant t}\Delta X_s I\,(|\,\Delta X_s\,|>1)$$

имеет ограниченные скачки, $|\Delta X_t^{(\leqslant 1)}|\leqslant 1$, и в силу этого он допускает единственное представление вида

$$X_t^{(\leqslant 1)}=X_0+B_t+M_t,$$

где $B=(B_t,\ \mathcal{F}_t)$ — предсказуемый процесс локально ограниченной вариации, а $M=(M_t,\ \mathcal{F}_t)$ — локальный мартингал. Этот мартингал однозначным образом представим как $M=M^c+M^d$, где $M^c=(M_t^c, \mathcal{F}_t)$ — непрерывный локальный мартингал (непрерывная мартингальная составляющая семимартингала X), а

$M^d=(M_t^d,\ \mathcal{F}_t)$ — чисто разрывный локальный мартингал, к-рый может быть записан в виде

$$M_t^d=\int_0^t\int_{|x|\leqslant 1} x\,d\,(\mu-\nu),$$

где $d\mu=\mu(\omega,\ dt,\ dx)$ — случайная мера скачков семимартингала X, то есть

$$\mu(\omega,\ (0,\ t],\ \Gamma)=\sum_{0<s\leqslant t} I(\Delta X_s\in\Gamma),\ \Gamma\in\mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\}),$$

а $d\nu=\nu(\omega,\ dt,\ dx)$ — ее компенсатор. Поскольку

$$\sum_{0<s\leqslant t}\Delta X_s I(|\Delta X_s|>1)=\int_0^t\int_{|x|>1} x\,d\mu,$$

то всякий семимартингал X допускает представление

$$X_t=X_0+B_t+M_t^c+\int_0^t\int_{|x|\leqslant 1} x\,d\,(\mu-\nu)+\int_0^t\int_{|x|>1} x\,d\mu,$$

к-рое наз. каноническим представлением (разложением).

Набор (предсказуемых) характеристик $(B,\ \langle M^c\rangle,\ \nu)$, где $\langle M^c\rangle$ — квадратич. характеристика M^c, т. е. такой предсказуемый возрастающий процесс, что $(M^c)^2-\langle M^c\rangle$ является локальным мартингалом, наз. триплетом локальных (предсказуемых) характеристик X.

Лит.: [1] Jacod J., Calcul stochastique et problemès de mar-tingales, B., 1979 (Lecture notes in mathematics, № 714).

А. Н. Ширяев.

СЕПАРАБЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА — конечномерная полупростая ассоциативная алгебра A над полем k, остающаяся полупростой при любом расширении K поля k (т. е. алгебра $A\otimes_k K$ полупроста для любого поля $K\supseteq k$). Алгебра A сепарабельна тогда и только тогда, когда центры простых компонент этой алгебры (см. *Ассоциативные кольца и алгебры*) являются сепарабельными расширениями поля k.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [2] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969.

Л. А. Бокутъ.

СЕПАРАБЕЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — доминантный морфизм f неприводимых алгебраич. многообразий X и Y, $f: X\to Y$, для к-рого поле $K(X)$ является сепарабельным расширением подполя $f^*K(Y)$ (изоморфного $K(Y)$ ввиду доминантности). Несепарабельные отображения существуют только тогда, когда характеристика p основного поля больше нуля. Если f — конечный морфизм и его степень не делится на p, то он сепарабелен. При С. о. для точек в нек-ром открытом подмножестве $U\subset X$ дифференциал $(df)_x$ отображения f сюръективно отображает касательное пространство $T_{X,x}$ в $T_{Y,f(x)}$ и наоборот: если точки x и $f(x)$ неособые и $(df)_x$ — сюръективен, то f есть С. о.

Термин «сепарабельность» употребляется для морфизмов и в ином смысле. Морфизм $f: X\to Y$ схем X и Y наз. сепарабельным, или (чаще) отделимым, если диагональ в $X\times_Y X$ замкнута. Композиция отделимых морфизмов отделима; $f: X\to Y$ отделим тогда и только тогда, когда для любой точки $y\in Y$ существует такая окрестность $V\ni y$, что морфизм $f: f^{-1}(V)\to V$ отделим. Морфизм аффинных схем всегда отделим. Существует критерий отделимости для нётеровых схем.

А. Н. Рудаков.

СЕПАРАБЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, обладающее счетной базой. Про такие пространства иногда говорят, что они удовлетворяют второй аксиоме счетности.

М. И. Войцеховский.

СЕПАРАБЕЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ поля — расширение K/k такое, что для нек-рого натурального n поля K и $k^{p^{-n}}$ линейно разделены над k (см. *Линейно разделенные расширения*). Расширение, не являющееся сепарабельным, наз. несепарабельным.

В дальнейшем рассматриваются только алгебраич. расширения (о трансцендентных сепарабельных расширениях см. *Трансцендентное расширение*). Конечное расширение сепарабельно тогда и только тогда, когда отображение *следа* $\mathrm{Sp}: K \to k$ является ненулевой функцией. Алгебраич. расширение сепарабельно, если любое конечное его подрасширение сепарабельно. В характеристике 0 все расширения сепарабельны.

С. р. образуют отмеченный класс расширений, т. е. в башне полей $L \supset K \supset k$ расширение L/k сепарабельно тогда и только тогда, когда сепарабельны и L/K и K/k. Если K_1/k и K_2/k суть С. р., то и K_1K_2/k сепарабельно; для С. р. K/k и произвольного расширения L/k расширение KL/L снова сепарабельно. Расширение K/k сепарабельно тогда и только тогда, когда оно допускает погружение в некрое расширение Галуа L/k. При этом для конечного расширения K/k число различных k-изоморфизмов поля K в L совпадает со степенью $[K:k]$. Любое конечное С. р. является простым.

Многочлен $f(x) \in k[X]$ наз. сепарабельным над k, если его неприводимые множители не имеют кратных корней. Алгебраич. элемент α наз. сепарабельным (над k), если он является корнем сепарабельного над k многочлена. В противном случае α наз. несепарабельным. Элемент α наз. чисто несепарабельным над k, если $\alpha^{p^n} \in k$ для нек-рого n. Неприводимый многочлен $f(x)$ несепарабелен тогда и только тогда, когда производная $f'(x)$ тождественно равна 0 (это возможно только в случае, когда k имеет характеристику p и $f(x) = f_1(x^p)$. Произвольный многочлен $f(x)$ однозначно представим в виде $f(x) = g(x^{p^e})$, где $g(x)$ — сепарабельный многочлен. Степень многочлена $g(x)$ и число e наз. соответственно редуцированной степенью и индексом многочлена $f(x)$.

Пусть L/k — произвольное алгебраич. расширение. Все элементы поля L, сепарабельные над k, образуют поле K, к-рое является максимальным С. р. поля k, содержащимся в L. Поле K наз. сепарабельным замыканием поля k в L. Степень $[K:k]$ наз. сепарабельной степенью расширения L/k, а степень $[L:K]$ — несепарабельной степенью, или степенью несепарабельности. Несепарабельная степень равна нек-рой степени числа $p = \mathrm{char}\, k$. Если $K = k$, то поле k наз. сепарабельно замкнутым в L. В этом случае расширение L/k наз. чисто несепарабельным. Расширение K/k чисто несепарабельно тогда и только тогда, когда

$$K \subset k^{p^{-\infty}} = \bigcup_n k^{p^{-n}},$$

т. е. когда любой элемент поля K чисто несепарабелен над k. Чисто несепарабельные расширения поля k образуют отмеченный класс расширений. Если расширение K/k одновременно сепарабельно и чисто несепарабельно, то $K = k$.

Лит. см. при ст. *Расширение поля.*

Л. В. Кузьмин.

СЕПАРАБЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС — случайный процесс, поведение траекторий к-рого по существу определяется их поведением на нек-ром счетном пространстве. Именно, определенный на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ действительный случайный процесс $\{X_t, t \in T\}$, где T — подмножество действительной прямой $\mathbb{R}$, сепарабелен относительно класса $\mathcal{A}$ подмножеств $\mathbb{R}$, если существует счетное множество $T_1 \subset T$ (сепаранта) и множество $N \subset \mathcal{F}$, $\mathsf{P}(N) = 0$, такое, что для любого $A \subset \mathcal{A}$ и любого открытого интервала $I \subset \mathbb{R}$

$$\bigcap_{t \in IT_1} \{X_t \in A\} \setminus \bigcap_{t \in IT} \{X_t \in A\} \subset N.$$

Наиболее важны понятия сепарабельности относительно класса замкнутых множеств и относительно класса замкнутых интервалов (в последнем случае процесс называется просто с е п а р а б е л ь н ы м). Если процесс $\{X_t,\ t\in T\}$ сепарабелен, то для любого $\omega\notin N$ и любого открытого интервала $I\subset\mathbb{R}$

$$\inf_{t\in IT_1} X_t(\omega)=\inf_{t\in IT} X_t(\omega),\quad \sup_{t\in IT_1} X_t(\omega)=\sup_{t\in IT} X_t(\omega), \tag{1}$$

$$\inf_{t\in IT_1} X_t(\omega)\leqslant X_t(\omega)\leqslant \sup_{t\in IT_1} X_t(\omega),\quad t\in IT, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\liminf_{u\to t,\ u\in T_1} X_u(\omega)&=\liminf_{u\to t,\ u\in T} X_u(\omega),\\ \limsup_{u\to t,\ u\in T_1} X_u(\omega)&=\limsup_{u\to t,\ u\in T} X_u(\omega),\ t\in\overline{T},\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\liminf_{u\to t,\ u\in T_1} X_u(\omega)\leqslant X_t(\omega)\leqslant \limsup_{u\to t,\ u\in T} X_u(\omega),\ t\in T. \tag{4}$$

Каждое из свойств (1) — (4) равносильно сепарабельности. Если t — левая предельная точка множества T, то существует последовательность $t_n\uparrow t$ точек из T такая, что

$$\liminf_n X_{t_n}=\liminf_{u\to t+0} X_u,\quad \limsup_n X_{t_n}=\limsup_{u\to t+0} X_u$$

с вероятностью 1 (аналогично для пределов справа). Если X_t — сепарабельный случайный процесс, непрерывный по вероятности, то любое всюду плотное в T счетное множество $T_1\subset T$ является сепарантой; кроме того, для любого открытого интервала I, $I\cap T\neq\phi$ и любой последовательности $s_n=\{s_{nk},\ k\leqslant k_n\}$ конечных подмножеств IT, удовлетворяющей условию $\sup_{t\in IT}\inf_k|t-s_{nk}|\to 0$,

$$\inf_k X_{s_{nk}}\to\inf_{t\in IT} X_t,\quad \sup_k X_{s_{nk}}\to\sup_{t\in IT} X_t \tag{5}$$

по вероятности. Сходимость в (5) можно заменить сходимостью с вероятностью 1, если X_t непрерывен с вероятностью 1.

Для всякого случайного процесса X_t, $t\in T$, существует на том же вероятностном пространстве сепарабельный относительно класса замкнутых множеств процесс $\tilde{X}_t$, $t\in T$, принимающий значения из расширенной числовой прямой, и такой, что $\mathsf{P}\{\tilde{X}_t=X_t\}=1$, $t\in T$. Понятие сепарабельности и его свойства обобщаются на процессы, у к-рых T и область значений суть различные общие топологич. пространства. Переход к С. п. позволяет утверждать применимость ряда важных функционалов и множеств, связанных с процессом. Альтернативный подход состоит не в изменении случайных величин, образующих процесс, а в расширении σ-алгебры, на к-рой он определен (напр., в случае функционального пространства — произведения хаусдорфовых компактов меру с обычной σ-алгебры, порожденной цилиндрич. множествами, можно однозначно продолжить на весьма богатую σ-алгебру борелевских множеств).

Лит.: [1] Д у б Д ж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Л о э в М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [3] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [4] D o o b T. L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1947, v. 53, № 1, p. 15—30; [5] N e l s o n E., «Ann. Math.», 1959, v. 69, № 3, p. 630—43.

В. В. Сазонов.

СЕПАРАТИВНАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа, в к-рой для любых элементов x, y из $x^2=xy=y^2$ следует $x=y$. Если полугруппа S обладает разбиением на подполугруппы, удовлетворяющие закону сокращения, то S будет С. п. Для коммутативных полугрупп верно и обратное; более того, всякая коммутативная С. п. разложима в *связку полугрупп* (автоматически в полурешетку) с законом сокращения. Коммутатив-

ная полугруппа будет С. п. тогда и только тогда, когда она вложима в клиффордову полугруппу. Периодич. полугруппа будет С. п. тогда и только тогда, когда она клиффордова. Коммутативная полугруппа S будет С. п. тогда и только тогда, когда ее характеры отделяют элементы S.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т.1,М.,1972. *Л. Н. Шеврин.*

СЕПАРАТРИСА — термин качественной теории дифференциальных уравнений.

1) С. в первоначальном смысле слова — траектория $\{S_t p\}$ *потока* $\{S_t\}$ на плоскости, стремящаяся (при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$) к нек-рому *равновесия положению* p_0, причем сколь угодно близко к ней имеются траектории, к-рые вначале приближаются к p_0, как бы «идя вдоль траектории $\{S_t p\}$», а затем отходят от него на нек-рое конечное расстояние. Формально последнее означает существование таких окрестности U точки p_0, последовательности точек $p_n \to p$ и последовательностей чисел s_n, t_n, что $s_n \to \infty$ (соответственно $s^n \to -\infty$),

$$S_{s_n} p_n \to p_0, \quad S_{t_n} p_n \notin U, \quad t_n > s_n \quad (t_n < s_n).$$

Основной пример — С. невырожденного (или простого) *седла*. Для последнего под С. может пониматься также его устойчивое (соответственно неустойчивое) *многообразие*, т. е. (в данном случае) *линия*, включающая седло и обе траектории, стремящиеся к нему при $t \to +\infty$ (соответственно при $t \to -\infty$).

Название «С.» связано с наблюдением, что С. наряду с замкнутыми траекториями делят фазовую плоскость на области с одинаковым поведением траекторий. Это наблюдение может быть строго формализовано (см. [1], [3]). С. могут входить в состав *предельных множеств* траекторий. Так, траектория может навиваться на «петлю С.» — замкнутую кривую, образованную траекторией, стремящейся к одному и тому же седлу как при $t \to -\infty$, так и при $t \to \infty$, или на «сепаратрисный контур (цикл)» — замкнутую кривую, состоящую из нескольких С., соединяющих седла. При малом возмущении из петли С. может возникнуть *предельный цикл* (это один из основных типов *бифуркаций* для потоков на плоскости; см. [2], [3]).

2) В многомерном случае под С. (или сепаратрисными многообразиями) чаще всего понимают устойчивое и неустойчивое многообразия гиперболич. положения равновесия или периодич. траектории.

Имеются попытки выделить под названием «С.» класс траекторий, входящих в множества, которые в некотором смысле «разделяют» траектории с различным поведением. Непосредственное обобщение случая плоскости имело бы ограниченную применимость, поскольку в многомерном случае фазовое пространство, вообще говоря, не разбивается на области, заполненные траекториями с одинаковыми предельными множествами (тогда как на плоскости такая ситуация «типична»). Предложенные формулировки являются довольно сложными (см. [4]), и не приходится ожидать полного описания различных типов С. и составленных из них множеств.

Лит.: [1] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966;[2] их же, Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, М., 1967; [3] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А., Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости, М., 1976; [4] Hartzman C. S., «Aequationes math.», 1980, v. 20, № 1, p. 59—72. *Д. В. Аносов.*

СЕРВАНТНАЯ ПОДГРУППА, чистая подгруппа,— такая подгруппа C абелевой группы G, что для любого элемента $c \in C$ из разрешимости в G уравнения $nx=c$ следует его разрешимость в подгруппе C. Примерами С. п. служат нулевая подгруппа, сама

группа G, периодич. часть данной группы и прямые слагаемые. Даже для примарной группы не всякая С. п. должна быть ее прямым слагаемым. Однако если C — периодическая С. п. абелевой группы G, причем порядки ее элементов ограничены в совокупности, то C — прямое слагаемое в G. Имеется (см. [1]) полное описание абелевых групп, в к-рых каждая С. п. служит прямым слагаемым. Полностью исследован также вопрос о мощности множества С. п. абелевой группы.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

О. А. Иванова.

СЕРИАЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ — статистика, к-рая служит оценкой *автокорреляции* (автокорреляционной функции) временного ряда. Именно, пусть $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — временной ряд. С. к. к. порядка k наз. статистика r_k, задаваемая формулой

$$r_k = \frac{\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}\left\{\left(x_i - \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}x_i\right)\left(x_{i+k} - \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}x_{i+k}\right)\right\}}{\left[\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}\left\{x_i - \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}x_i\right\}^2 \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}\left\{x_{i+k} - \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}x_{i+k}\right\}^2\right]^{1/2}} \quad (*)$$

В качестве С. к. к. используются статистики, близкие к (*) несколько упрощенного вида. Совокупность С. к. к. наз. коррелограммой; этот термин употребляется также для обозначения графика r_k как функции k.

При различных предположениях относительно распределений x_i имеются точные и приближенные выражения для распределения С. к. к. и их моментов. С. к. к. используются в статистич. задачах для обнаружения зависимости членов временного ряда.

Наряду с термином «С. к. к.» используется термин «выборочная автокорреляция».

Лит.: [1] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964.

В. Г. Ушаков.

СЕРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ — семейства (непрерывных неприводимых унитарных) представлений локально компактной группы (точнее, неприводимые множества классов унитарной эквивалентности таких представлений), обладающие общими свойствами по отношению к регулярному представлению этой группы. Так, семейство неприводимых унитарных представлений группы, матричные элементы к-рых являются равномерными на компактах пределами матричных элементов регулярного представления, образуют основную серию представлений; остальные неприводимые унитарные представления (если они существуют) образуют дополнительную серию представлений; семейство (классов эквивалентности) неприводимых прямых слагаемых регулярного представления образует дискретную серию представлений данной группы. Для редуктивных групп Ли или групп Шевалле понятие С. п. имеет смысл также для подмножеств множества классов эквивалентности представлений этой группы, элементы к-рых обладают теми или иными свойствами по отношению к регулярному представлению редуктивных факторгрупп параболич. подгрупп этой группы. Так, семейство представлений редуктивной группы, индуцированных конечномерными представлениями ее параболич. подгруппы, образует связанную с этой параболич. подгруппой часть пространства представлений, называемую соответствующей основной (основной вырожденной, если параболич. подгруппа не является борелевской) С. п.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Nguen Huu Anh, «Ann. Inst. Fourier», 1980, v. 30, fasc. 1, p. 152—92; [3] Callez J., Les sous-groups paraboliques de $SU(p, q)$ et $Sp(n, R)$ et applications, P., 1979.

А. И. Штерн.

СЕРИЙ СХЕМА, последовательность серий,— двойная последовательность случайных величин ξ_{nk}, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $k_n \to \infty$, $n \geqslant 1$, в к-рой случайные величины $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n}$, образующие n-ю серию, взаимно независимы при любом n. Простейшая С. с. соответствует случаю $k_n = n$. Класс случайных величин, образующих С. с., играет в предельных теоремах теории вероятностей особую роль, к-рая определяется предельным поведением при $n \to \infty$ распределений сумм случайных величин:

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}. \quad (1)$$

При определенных условиях класс предельных распределений для таких последовательностей совпадает с классом безгранично делимых распределений. Именно, пусть С. с. ξ_{nk} удовлетворяет условию бесконечной малости (условию асимптотической пренебрегаемости), то есть при $n \to \infty$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \mathsf{P}\{|\xi_{nk}| \geqslant \varepsilon\} \to 0. \quad (2)$$

Говорят, что ξ_{nk} образуют нулевую схему серий. Тогда множество распределений, предельных в смысле слабой сходимости для распределений (1), где ξ_{nk} — нулевая С. с., удовлетворяющая условию бесконечной малости, совпадает с множеством безгранично делимых распределений.

Известны условия сходимости распределений η_n к заданному безгранично делимому распределению (см. [1]). В частности, условие сходимости к *нормальному распределению* имеет следующий вид.

Пусть ξ_{nk} есть С. с., F_{nk} — функция распределения ξ_{nk}. Для того чтобы ξ_{nk} удовлетворяла условию (2) и распределение сумм (1) слабо сходилось к нормальному распределению с параметрами a и b, необходимо и достаточно, чтобы для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ выполнялись условия:

1) $\sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{P}\{|\xi_{nk}| \geqslant \varepsilon\} \to 0$,

2) $\sum_{k=1}^{k_n} \left\{\int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x)\right)^2\right\} \to b^2$,

3) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) \to a$.

Изучение предельных распределений для нормированных частичных сумм последовательности независимых случайных величин сводится к С. с.

По поводу С. с. см. также *Безгранично делимое распределение*, *Больших чисел закон*, *Предельные теоремы*. Так, напр., в классич. вариантах центральной предельной теоремы и закона больших чисел рассматриваются частные случаи С. с., образованные случайными величинами

$$\xi_{nk} = \frac{\xi_k - \mathsf{E}\xi_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}\xi_k}},$$

$$\xi_{nk} = \frac{\xi_k - \mathsf{E}\xi_k}{n},$$

где ξ_k — независимые случайные величины.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [3] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [4] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967.

Н. Г. Ушаков.

СЕРПИНЬСКОГО КРИВАЯ, ковер Серпиньского,— пример *канторовой кривой*, содержащей подмножество, гомеоморфное любой наперед заданной

СЕРИЙ СХЕМА, последовательность серий,— двойная последовательность случайных величин ξ_{nk}, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $k_n \to \infty$, $n \geqslant 1$, в к-рой случайные величины $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n}$, образующие n-ю серию, взаимно независимы при любом n. Простейшая С. с. соответствует случаю $k_n = n$. Класс случайных величин, образующих С. с., играет в предельных теоремах теории вероятностей особую роль, к-рая определяется предельным поведением при $n \to \infty$ распределений сумм случайных величин:

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}. \qquad (1)$$

При определенных условиях класс предельных распределений для таких последовательностей совпадает с классом безгранично делимых распределений. Именно, пусть С. с. ξ_{nk} удовлетворяет условию бесконечной малости (условию асимптотической пренебрегаемости), то есть при $n \to \infty$

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \mathsf{P}\{|\xi_{nk}| \geqslant \varepsilon\} \to 0. \qquad (2)$$

Говорят, что ξ_{nk} образуют нулевую схему серий. Тогда множество распределений, предельных в смысле слабой сходимости для распределений (1), где ξ_{nk} — нулевая С. с., удовлетворяющая условию бесконечной малости, совпадает с множеством безгранично делимых распределений.

Известны условия сходимости распределений η_n к заданному безгранично делимому распределению (см. [1]). В частности, условие сходимости к *нормальному распределению* имеет следующий вид.

Пусть ξ_{nk} есть С. с., F_{nk} — функция распределения ξ_{nk}. Для того чтобы ξ_{nk} удовлетворяла условию (2) и распределение сумм (1) слабо сходилось к нормальному распределению с параметрами a и b, необходимо и достаточно, чтобы для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ выполнялись условия:

1) $\sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{P}\{|\xi_{nk}| \geqslant \varepsilon\} \to 0$,

2) $\sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} \to b^2$,

3) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) \to a$.

Изучение предельных распределений для нормированных частичных сумм последовательности независимых случайных величин сводится к С. с.

По поводу С. с. см. также *Безгранично делимое распределение*, *Больших чисел закон*, *Предельные теоремы*. Так, напр., в классич. вариантах центральной предельной теоремы и закона больших чисел рассматриваются частные случаи С. с., образованные случайными величинами

$$\xi_{nk} = \frac{\xi_k - \mathsf{E}\xi_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}\xi_k}},$$

$$\xi_{nk} = \frac{\xi_k - \mathsf{E}\xi_k}{n},$$

где ξ_k — независимые случайные величины.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [3] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [4] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967. *Н. Г. Ушаков.*

СЕРПИНЬСКОГО КРИВАЯ, ковер Серпиньского,— пример *канторовой кривой*, содержащей подмножество, гомеоморфное любой наперед заданной

канторовой кривой. Построена В. Серпиньским [1], конструкцию см. в ст. *Линия*. Эта кривая в каждой точке имеет континуальный индекс ветвления.

Лит.: [1] Sierpiński W., «Compt. Rend. Acad. sci.», 1915, v. 160, p. 302; 1916, v. 162, p. 629; [2] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [3] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 2, М., 1969. *М. И. Войцеховский.*

СЕРРА ПОДКАТЕГОРИЯ — ненулевая полная локально малая подкатегория $\mathcal{S}$ абелевой категории $\mathfrak{A}$ такая, что для каждой точной последовательности

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

в $\mathfrak{A}$ верно, что $B \in \mathcal{S}$ эквивалентно $A \in \mathcal{S}$ и $C \in \mathcal{S}$. Локальная малость категории есть условие: совокупность представителей классов эквивалентных подобъектов любого объекта составляет множество. С. п. можно охарактеризовать как ядро точного функтора в категории $\mathfrak{A}$.

С. п. позволяет определить факторкатегорию $\mathfrak{A}/\mathcal{S}$, объектами к-рой являются объекты категории $\mathfrak{A}$, а морфизмы определяются равенством

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{A}/\mathcal{S}}(X, Y) = \varinjlim_{Y',\ X/X' \in \mathcal{S}} \mathrm{Mor}_{\mathfrak{A}}(X', Y/Y').$$

Факторкатегория $\mathfrak{A}/\mathcal{S}$ является абелевой.

С. п. наз. локализующей, если канонич. функтор $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\mathcal{S}$ имеет правый сопряженный функтор $S : \mathfrak{A}/\mathcal{S} \to \mathfrak{A}$, наз. функтором сечений. Если $\mathfrak{A}$ — *Гротендика категория*, обладающая копроизведениями, то локализующий функтор существует. Таким образом получается обобщение классич. теории *локализации модулей над коммутативным кольцом*. Этот метод охватывает многочисленные конструкции колец частных и теории кручений (радикалов) модулей над ассоциативными кольцами.

Понятие «С. п.» было введено Ж. П. Серром [1] и названо им классом. Используя это понятие, он получил далеко идущее обобщение теоремы Гуревича (см. *Гомотопическая группа*).

Лит.: [1] Serre J.-P., «Ann. Math.», 1953, v. 58, № 2, p. 258—94 (рус. пер., в сб.: Расслоенные пространства и их приложения, М., 1958, с. 124—59); [2] Фейс К., Алгебры: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1, М., 1977; [3] Popesco N., Gabriel P., «C. r. Acad. sci.», 1964, t. 258, № 17, p. 4188—90. *В. Е. Говоров.*

СЕРРА РАССЛОЕНИЕ — тройка (X, p, Y), где X, Y — топологич. пространства, $p : X \to Y$ — непрерывное отображение, обладающее следующим свойством (наз. свойством существования накрывающей гомотопии для полиэдров). Для любых конечного полиэдра K и отображений

$$f : K \times [0, 1] \to Y,\ F_0 : K = K \times \{0\} \to Y$$

с

$$f \mid (K \times \{0\}) = pF_0$$

существует отображение

$$F : (K \times [0, 1]) \to X$$

такое, что $F|(K \times \{0\}) = F_0$, $pF = f$. С. р. было определено Ж. П. Серром (J.-P. Serre) в 1951 (см. [1]).

Лит.: [1] Расслоенные пространства и их приложения. Сб. пер., М., 1958, с. 9—114. *А. Ф. Харшиладзе.*

СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ — интерпретация программы (плана) реализации нек-рого комплекса взаимосвязанных работ в виде *графа ориентированного* без контуров, отражающего естественный порядок выполнения работ во времени с нек-рыми дополнительными данными комплекса (стоимость, ресурсы, продолжительность и т. д.). Обычно С. м. изображают графически на плоскости и в этом случае ее наз. сетевым графиком. С. м. лежит в основе метода *сетевого планирования* и управления и календарного планирования. В зависимости от условий при обработке информации С. м. может иметь и другие формы представ-

ления — табличную, цифровую и т. п. Все формы представления С. м. равносильны.

Основой С. м. является ее структура, т. е. граф комплекса работ, к-рый, как правило, определяется следующим образом. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — комплекс работ (напр., возведение многоэтажного здания), для к-рого определены стадии $x_1, x_2, \ldots, x_m$: начало x_1, конец x_m и, в зависимости от логики частичного порядка, обусловленной взаимосвязью работ, каждая промежуточная стадия x_i (напр., нельзя закончить монтаж каркаса десятого этажа, не выполнив соответствующие работы по девятому этажу). Промежуточные стадии, равно как и их число, являются в достаточной мере условными и во многом определяются ответственными за реализацию комплекса. Пусть $V=\{v_i\}$ — комплекс работ, а $X=\{x_i\}$ — множество стадий. Если теперь определить граф G, для к-рого X является множеством вершин, а работа v_j, $j=1, 2, \ldots, n$, имеющая началом стадию x_r и концом стадию x_s, является его дугой, то полученный ориентированный граф $G=(X, V)$ без контуров и есть искомая структура С. м. рассматриваемого комплекса работ. На языке С. м. работы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ наз. операциями, а стадии $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — событиями.

С. м. строится на основе своей структуры в зависимости от целей, к-рые ставятся при этом относительно комплекса работ. Напр., в случае, когда относительно комплекса ставится задача выполнить его в минимальный срок при заданных ресурсах, то С. м. включает в себя и данные о времени, необходимом для выполнения каждой работы v_j, и в этом случае говорят, что С. м. построена по критерию времени. С. м. может быть построена и по другому критерию или одновременно по нескольким критериям. В зависимости от этого С. м. наз. одномерной или многомерной. Различают С. м. канонические и альтернативные (см. [1], [3]). Первые определяются при помощи фиксированной структуры и условия, что любая операция $v_j=(x_r, x_s)$ не может быть начата, пока не выполнены все операции с концом в x_r. Вторые имеют переменную структуру и допускают начало нек-рой операции $v_j=(x_r, x_s)$ после выполнения какой-либо одной операции с концом в x_r. С. м. бывают также детерминированными и вероятностными в зависимости от того, точны критерии или прогнозированы с какой-либо вероятностью.

Лит.: [1] Основные положения по разработке и применению систем сетевого планирования и управления, 3 изд., М., 1974; [2] Энциклопедия кибернетики, К., 1974; [3] Лопатников Л. И., Краткий экономико-математический словарь, М., 1979.

П. С. Солтан.

СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ, сетевой метод планирования и управления,— метод управления при реализации нек-рого комплекса работ (проекта, программы, темы и т. п.) на основе *сетевой модели* комплекса, известной также под названием ПЕРТ (см. [2]). С. п. позволяет существенно поднять качество планирования и управления при реализации комплекса работ, в частности оно дает возможность четко координировать деятельность всех сторон (организаций), участвующих в реализации комплекса, выделить наиболее важные задачи, судить о наиболее целесообразных сроках реализации проекта, своевременно корректировать планы реализации и т. д.

С. п. может быть условно разбито на два этапа: 1) построение сетевой модели (с. м.) комплекса работ, 2) использование с. м. для планирования и управления при реализации комплекса работ (см. [1] — [3]). Построение с. м. комплекса сводится к отображению в виде специально ориентированного графа множества стадий (событий) и естественного порядка (вообще говоря, частичного) самих работ (операций) комплекса, а

также и нек-рой числовой информации, необходимой при этом (время выполнения каждой операции, ресурсы и др.). В зависимости от сформулированных целей, после составления с. м. приступают к ее анализу для лучшей подготовки плана их достижения. Напр., если с. м. построена по критерию времени, т. е. когда необходимо добиться минимальной продолжительности всего комплекса работ при заданных ресурсах, то этот анализ сводится к нахождению критич. пути и выяснению того времени, меньше к-рого делает задачу реализации комплекса неразрешимой. Это означает следующее. Пусть $G=(X, V)$ — структура с. м. комплекса, где

$$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \text{ и } V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

— соответственно множества событий и операций, а $t(v_j)$ — время выполнения операции $v_j \in V$. Рассматривается множество P всех путей графа G, максимальных по включению. Таких путей в G, вообще говоря, много, и для более простой ситуации, когда имеется одно начальное событие x_1 и одно конечное событие x_m, все эти пути начинаются в x_1 и кончаются в x_m. Среди всех путей множества P ищется тот, к-рый обладает наибольшей длиной (под длиной пути $p=\{v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_k}\}$ понимается число $t(p)=t(v_{j_1})+t(v_{j_2})+\ldots+t(v_{j_k})$). Путь $p \in P$, обладающий этим свойством, наз. критическим путем с. м., и его длина выражает, что реализация комплекса работ за меньшее время, чем $t(p)$, невозможна. Поэтому метод С. п. наз. также методом критического пути (см. [1] — [4]).

С. п. на период самой реализации комплекса работ играет роль механизма в управлении, помогающего обрабатывать информацию о фактич. состоянии работ для данного момента времени и о прогнозируемых изменениях и необходимой корректировке планов для выполнения оставшихся работ.

Лит.: [1] Основные положения по разработке и применению систем сетевого планирования и управления, 3 изд., М., 1974; [2] Кофман А., Дебазей Г., Сетевые методы планирования. Применение системы ПЕРТ и ее разновидностей при управлении производственными и научно-исследовательскими проектами, пер. с франц., М., 1968; [3] Сетевое планирование и управление, М., 1967; [4] Абрамов С. А., Мариничев М. И., Поляков П. Д., Сетевые методы планирования и управления, М., 1965; [5] Энциклопедия кибернетики, К., 1974; [6] Лопатников Л. И., Краткий экономико-математический словарь, М., 1979.

И. С. Солтан.

СЕТЕВОЙ ГРАФИК — *сетевая модель*, изображенная графически на плоскости.

И. С. Солтан.

СЕТОК МЕТОД — собирательное название группы приближенных методов решения дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Применительно к дифференциальным уравнениям с частными производными термин «С. м.» используется в качестве синонима терминов «метод конечных разностей» и «разностный метод». С. м.— один из наиболее распространенных приближенных методов решения задач, связанных с дифференциальными уравнениями. Широкое применение С. м. объясняется его большой универсальностью и сравнительной простотой реализации на ЭВМ.

См. *Разностных схем теория.*

По материалам одноименной статьи в БСЭ-3.

СЕТЬ — обобщение понятия *графа*. С. задается парой вида $(V, \mathcal{E})$, в к-рой V — нек-рое множество, $\mathcal{E}=(E_0; E_1, E_2, \ldots)$ — семейство наборов элементов из V. В наборах $E_i \in \mathcal{E}$ элементы могут, вообще говоря, повторяться. Элементы множества V наз. вершинами С., элементы набора E_0 — полюсами С., наборы E_i, $i=1, 2, \ldots$,— ребрами С. В случае, когда множество полюсов пусто и каждый из наборов E_i является множеством, С. представляет собой гиперграф. Если каждый из наборов E_i, $i=1, 2, \ldots$, содержит ровно два элемента, С. есть

граф с выделенными полюсами. Часто под С. понимается граф (с полюсами или без них), элементам к-рого приписаны символы из нек-рого множества. Напр., граф с полюсами, ребрам к-рого приписаны неотрицательные числа, называемые пропускными способностями, представляет собой транспортную сеть.

Понятие С. используется в определении и описании *управляющей системы* и специальных классов управляющих систем (контактные схемы, схемы из функциональных элементов), диаграмм переходов автоматов, коммуникационных сетей и др.

Лит.: [1] Яблонский С. В., «Проблемы кибернетики», 1959, в. 2, с. 7—38; [2] Форд Л., Фалкерсон Д., *Потоки в сетях*, пер. с англ., М., 1966; [3] Kuntzmann J., Théorie des réseaux Graphes, P., 1972. *А. А. Сапоженко.*

СЕТЬ — система $\Sigma_n=\{\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^n\}$ n семейств ($n\geqslant 2$) достаточно гладких линий, определенных в области G n-мерного дифференцируемого многообразия M так, что 1) через каждую точку $x\in G$ проходит точно по одной линии каждого семейства σ^i; 2) векторы, касательные к этим кривым в точке x, образуют базис пространства T_x — касательного пространства к многообразию M в точке x. Векторы, касательные к линиям одного семейства σ^i, принадлежат одномерному распределению Δ_1^i, определенному в области G. Условия того, что семейства линий составляют С. в некрой окрестности точки, могут не выполняться при продолжении линий. Линии семейства σ^i являются интегральными кривыми распределения Δ_1^i. Сеть $\Sigma_n\subset G$ определяется заданием n одномерных распределений Δ_1^i таких, что в каждой точке $x\in G$ касательное пространство T_x является прямой суммой подпространств Δ_1^i, $i=1, 2, \ldots, n$. Сеть $\Sigma_n\subset G$ определяет в области G $(n-1)$-мерные распределения Δ_{n-1}^i такие, что в каждой точке $x\in G$ подпространство $\Delta_{n-1}^i(x)\subset T_x$ является прямой суммой $n-1$ одномерных подпространств $\Delta_1^j(x)$, $j\neq i$. Различают следующие типы С.: голономные С., для к-рых каждое из распределений Δ_{n-1}^i интегрируемо (при $n=2$ всякая С. голономна); частично голономные С., для к-рых нек-рые из распределений Δ_{n-1}^i интегрируемы, а остальные неинтегрируемы (такие С. подразделяются по числу неинтегрируемых распределений); неголономные С., для к-рых все распределения Δ_{n-1}^i неинтегрируемы.

Если распределение Δ_{n-1}^i, $n>2$, интегрируемо и γ^i — интегральная кривая распределения Δ_1^i, то через каждую точку $x\in\gamma^i$ проходит интегральное многообразие распределения Δ_{n-1}^i, несущее сеть $\Sigma_{n-1}(x)$ из кривых, принадлежащих семействам σ^j, $j\neq i$.

Сеть $\Sigma_n\subset G$ можно задать также одним из следующих способов: а) системой векторных полей $X_i\subset\Delta_1^i$, б) системой дифференциальных 1-форм ω^i таких, что $\omega^i(X_j)=\delta_j^i$, в) полем аффинора Φ такого, что $\Phi^n=E$ (E — единичный аффинор).

При изучении С. рассматриваются три основные проблемы: внутренние свойства С., внешние свойства С. и исследование диффеоморфизмов С.

Внутренние свойства С. индуцируются структурой многообразия, несущего С. Напр., сеть Σ_n в пространстве M аффинной связности ∇ наз. геодезической сетью, если все ее линии геодезические. Если риманово многообразие M со связностью без кручения, в к-рой метрич. тензор ковариантно постоянен, несет ортогональную *чебышевскую сеть* 1-го рода, то M — локально евклидово. Связь таких С. с параллельным перенесением векторов на поверхности была установлена Л. Бьянки (L. Bianchi, 1922). Эта связь

была положена А. П. Норденом в основу определения чебышевской С. 1-го рода в пространстве аффинной связности.

Внешние свойства С. индуцируются структурой объемлющего пространства E. Так, напр., пусть сеть Σ_n, заданная в нек-рой области G на гладкой поверхности V_n проективного $(n+k)$-мерного пространства ($k\geqslant 1$), — **сопряженная** С., то есть в каждой точке $x\in G$ сопряжены направления $\Delta_1^i(x)$, $\Delta_1^j(x)$ касательных к любым двум линиям С., проходящим через точку x (два направления сопряжены, если каждое из них принадлежит характеристике касательной плоскости T_x при ее смещении в другом направлении). Если V_n не вмещается в проективное пространство размерности, меньшей $n+k$, то при $k=1$ поверхность V_n несет бесконечное множество сопряженных С.; при $k=2$ поверхность несет в общем случае единственную сопряженную С., но существуют и такие n-мерные поверхности, на к-рых нет ни одной сопряженной С.; при $k>2$ только n-мерные поверхности специального строения несут сопряженную С. При $n>2$ сопряженная С. может и не быть голономной (см. [3]). Частным случаем голономной сопряженной С. является n-**сопряженная система**: сеть Σ_n, обладающая тем свойством, что касательные к линиям каждого семейства, взятые вдоль любой линии любого другого семейства, образуют развертывающуюся поверхность. Сопряженные системы существуют в проективном пространстве любой размерности $n+k$ при $n\geqslant 2$, $k\geqslant 0$. Поверхности V_n, несущие n-сопряженную систему в проективном $(n+k)$-мерном пространстве, когда $k\geqslant n$, и в каждой точке $x\in V_n$ соприкасающееся к V_n пространство (пространство вторых дифференциалов точки x) размерности $2n$, впервые рассматривал Э. Картан [4] под названием «многообразия особого проективного типа» (**поверхности Картана**). На такие С. было распространено понятие *Лапласа преобразования* (см. [5], [6]).

При изучении диффеоморфизмов С. по известным свойствам сети $\Sigma_n\subset M$ описываются свойства сети $\varphi(\Sigma_n)\subset N$ при заданном диффеоморфизме $\varphi: M\to N$ (напр., при изгибании или при конформном отображении поверхности, несущей С.) или ищется диффеоморфизм φ, сохраняющий нек-рые из свойств сети Σ_n. Так, напр., сеть Σ_2 на поверхности евклидова пространства наз. *ромбической сетью* (конформно-чебышевской), если она допускает конформное отображение на чебышевскую С. На всякой поверхности вращения *асимптотическая сеть* является ромбической.

Лит.: [1] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976; [2] Дубнов Я. С., Фукс С. А., «Докл. АН СССР», 1940, т. 28, № 2, с. 102—04; [3] Базылев В. Т., в кн.: Итоги науки. Геометрия, 1963, М., 1965; [4] Cartan E., «Bull. Soc. math. de France», 1919, t. 47, p. 125—60; [5] Chern S. S., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1944, v. 30, p. 95—97; [6] Смирнов Р. В., «Докл. АН СССР», 1950, т. 71, № 3, с. 437—439.

В. Т. Базылев.

СЕТЬ — отображение *направленного множества* в (топологическое) пространство. *М. И. Войцеховский.*

СЕТЬ сфер — совокупность всех сфер, относительно к-рых данная точка (**центр** С., или **радикальный центр**) имеет данную степень p — **степень** С. Существуют три типа С. сфер:

1) **гиперболическая** С. ($p>0$), состоящая из всех сфер, ортогональных нек-рой данной сфере;

2) **эллиптическая** С. ($p<0$), состоящая из всех сфер, пересекающих нек-рую данную сферу по какому-либо большому кругу последней;

3) **параболическая** С. ($p=0$), состоящая из всех сфер, проходящих через нек-рую данную точку. Совокупность всех общих сфер двух С. наз. *связкой* сфер. Совокупность всех общих сфер, центры к-рых не лежат на одной прямой, наз. *пучком* сфер.

А. Б. Иванов.

СЕТЬ топологического пространства X — семейство $\mathcal{P}$ подмножеств этого пространства такое, что для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности Ox найдется элемент M семейства $\mathcal{P}$ такой, что $x \in M \subset Ox$.

Семейство всех одноточечных подмножеств пространства и каждая его *база* всегда является его С. Отличие С. от базы в том, что элементы С. не обязаны быть открытыми множествами. С. появляются при непрерывных отображениях: если f — непрерывное отображение топологич. пространства X на топологич. пространство Y и $\mathcal{B}$ — база пространства X, то образы элементов базы $\mathcal{B}$ при f составляют сеть $\mathcal{P} = \{fU : U \in \mathcal{B}\}$ пространства Y. Далее, если пространство X покрыто каким-либо семейством $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ своих подпространств, то, фиксируя при каждом $\alpha \in A$ какую-либо $\mathcal{B}_\alpha$ пространства X_α и соединяя все эти базы вместе, получают сеть $\mathcal{P} = U\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha \in A\}$ пространства X. Пространства со счетной С. характеризуются как образы сепарабельных метрич. пространств при непрерывных отображениях.

Минимум мощностей всевозможных С. пространства X наз. сетевым весом этого пространства и обозначается $nw(X)$. Сетевой вес пространства всегда не превосходит его *веса*, но, как показывают примеры счетных пространств без счетной базы, сетевой вес может отличаться от веса. Для всех бикомпактных хаусдорфовых пространств сетевой вес совпадает с весом. Это утверждение распространяется на локально бикомпактные пространства, пространства, полные по Чеху, и на *перистые пространства*. Отсюда, в частности, следует, что вес не увеличивается при отображениях на такие пространства. Другое следствие: если перистое пространство X (в частности, бикомпакт) представлено в виде объединения семейства мощности $\leqslant \tau$ своих подпространств, вес каждого из к-рых не превосходит кардинала τ, предполагаемого бесконечным, то и вес всего пространства X не больше, чем τ.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Архангельский А., «Докл. АН СССР», 1959, т. 126, № 2, с. 239—41.

А. В. Архангельский.

СЕЧЕНИЕ, секущая поверхность, расслоения $p : X \to Y$ — непрерывное отображение $s : Y \to X$ такое, что $p \circ s = \mathrm{id}_Y$. Если (X, p, Y) — расслоение Серра, обладающее С., то

$$\pi_n(X) = \pi_n(p^{-1}(pt)) \oplus \pi_n(Y).$$

Для главного расслоения из существования С. следует его тривиальность. Векторное расслоение всегда обладает т. н. нулевым сечением.

А. Ф. Харшиладзе.

СЕЧЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ $p : X \to Y$ — отображение $s : Y \to X$, для к-рого $p \circ s = \mathrm{id}_Y$. В более широком смысле С. о. любого морфизма в произвольной категории — обратный справа морфизм.

А. Ф. Харшиладзе.

СЖАТИЕ — аффинное преобразование плоскости, при к-ром каждая точка смещается к оси Ox по направлению оси Oy на расстояние, пропорциональное ее ординате. В декартовой системе координат С. задается соотношениями

$$x' = x,\ y' = ky,\ k > 0.$$

С. пространства к плоскости Oxy по направлению оси Oz задается соотношениями

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = kz,\ k > 0.$$

Н. В. Реверди.

СЖАТИЕ, сжимающий оператор,— ограниченное линейное отображение T гильбертова пространства H в гильбертово пространство H' с $\|T\| \leqslant 1$. При $H = H'$ сжатие T наз. вполне неуни-

тарным, если оно не является унитарным оператором ни при каком отличном от $\{0\}$ приводящем T подпространстве. Таковы, напр., односторонние сдвиги (в отличие от двусторонних сдвигов, являющихся унитарными С.). Всякому С. в H отвечает единственное ортогональное разложение $H=H_0\oplus H_1$ на приводящие T подпространства такое, что $T_0=T|_{H_0}$ унитарен, а $T_1=T|_{H_1}$ вполне неунитарен. $T=T_0\oplus T_1$ наз. каноническим разложением сжатия T.

Дилатацией, или растяжением, данного сжатия T, действующего в H, наз. ограниченный оператор B, действующий в нек-ром объемлющем гильбертовом пространстве $K\supset H$ и такой, что $T^n=PB^n$, $n=1, 2, \ldots$, где P — ортопроектор из K на H. Всякое С. в гильбертовом пространстве H обладает унитарной дилатацией U в пространстве $K\supset H$ и притом минимальной в том смысле, что $K=$ з. л. о. $\{U^nH\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ (теорема Сёкефальви-Надя). Минимальные унитарные дилатации и определенные на основе спектральной теории функции от них позволяют построить функциональное исчисление для С., развитое в основном для ограниченных аналитич. функций в открытом единичном круге D (класс Харди H^∞). Вполне неунитарное сжатие T принадлежит, по определению, классу C_0, если существует функция $u\in H^\infty$, $u(\lambda)\not\equiv 0$, такая, что $u(T)=0$. Класс C_0 содержится в классе C_{00} сжатий T, для к-рых $T^n\to 0$, $T^{*n}\to 0$ при $n\to\infty$. Для всякого сжатия T класса C_0 существует т. н. минимальная функция $m_T(\lambda)$ (т. е. внутренняя функция $u\in H^\infty$, $|u(\lambda)|\leqslant 1$ в D, $|u(e^{it})|=1$ почти всюду на границе D) такая, что $u(T)=0$ и $u(\lambda)$ является делителем всех прочих внутренних функций, обладающих тем же свойством. Множество нулей минимальной функции $m_T(\lambda)$ сжатия T в D вместе с дополнением до единичной окружности к объединению тех дуг, через к-рые $m_T(\lambda)$ допускает аналитич. продолжение, совпадает со спектром $\sigma(T)$. Понятие минимальной функции сжатия T класса C_0 позволяет распространить для этого класса С. функциональное исчисление на нек-рые мероморфные в D функции.

Теоремы об унитарных дилатациях получены не только для индивидуальных С., но и для дискретных $\{T^n\}$, $n=0, 1, \ldots$, и непрерывных $\{T(s)\}$, $0\leqslant s<\infty$, полугрупп С.

Как и для *диссипативных операторов*, для С. построена теория их характеристич. оператор-функций и на ее основе — функциональная модель, позволяющая изучать структуру С. и соотношения между спектром, минимальной функцией и характеристич. функцией (см. [1]). Преобразованием Кэли

$$A=(I+T)(I-T)^{-1},\quad 1\notin\sigma_p(T),$$

сжатие T связано с максимальным аккретивным оператором A, т. е. таким, что iA — максимальный диссипативный оператор. На этой основе строится теория диссипативных расширений B_0 симметрич. операторов A_0 (соответственно диссипативных по Филлипсу расширений iB_0 консервативных операторов iA_0).

Для С. разработана теория подобия, квазиподобия и одноклеточности. Теория С. тесно связана с теорией прогнозирования стационарных случайных процессов и теорией рассеяния. В частности, схему Лакса — Филлипса [2] можно рассматривать как континуальный аналог теории Сёкефальви-Надя—Фояша С. класса C_{00}.

Лит.: [1] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970; [2] Лакс П. Д., Филлипс Р. С., Теория рассеяния, пер. с англ., М., 1971. *И. С. Иохвидов.*

СЖАТИЕ алгебры Ли, стягивание алгебры Ли,— операция, противоположная *деформации* алгебры Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная вещественная алгебра Ли, $\{c_{ij}^k\}$ — набор ее структур-

ных констант в фиксированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ и $A(t)$, $0<t\leqslant 1$,— кривая в группе невырожденных линейных преобразований пространства $\mathfrak{g}$ такая, что $A(1)=E$. Пусть $e_i(t)=A(t)e_i$ и $c_{ij}^k(t)$ — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ в базисе $\{e_i(t)\}$. Если $c_{ij}^k(t)$ при $t\to 0$ стремятся к нек-рому пределу $c_{ij}^k(0)$, то алгебра $\overline{\mathfrak{g}}$, определяемая этими константами в исходном базисе, наз. с ж а т и е м исходной алгебры $\mathfrak{g}$. Сжатие $\overline{\mathfrak{g}}$ также является алгеброй Ли, причем $\mathfrak{g}$ можно получить путем деформации алгебры $\overline{\mathfrak{g}}$. Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G, то группу Ли $\overline{G}$, соответствующую $\overline{\mathfrak{g}}$, также наз. с ж а т и е м г р у п п ы G.

Хотя $\dim\mathfrak{g}=\dim\overline{\mathfrak{g}}$, эти алгебры, вообще говоря, не изоморфны: напр., если $A(t)=tE$, то $c_{ij}^k(t)=tc_{ij}^k\to 0$, так что при таком С. предельная алгебра всегда коммутативна. Естественное обобщение этого примера состоит в следующем: пусть $\mathfrak{a}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ — дополнительное к $\mathfrak{a}$ подпространство, причем $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]\subseteq\mathfrak{b}$, и $A(t)v=v$ для $v\in\mathfrak{a}$, $A(t)v=tv$ для $v\in\mathfrak{b}$. Тогда в пределе $\mathfrak{b}$ становится коммутативным идеалом алгебры $\overline{\mathfrak{g}}$, в то время как умножение в $\mathfrak{a}$ и присоединенное действие алгебры $\mathfrak{a}$ на $\mathfrak{b}$ остаются неизменными.

В частности, пусть G — группа Лоренца, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — подалгебра, соответствующая подгруппе вращений 3-мерного пространства. Тогда описанное С. алгебры $\mathfrak{g}$ дает алгебру Ли группы Галилея $\overline{G}$ (см. *Галилея преобразование*, *Лоренца преобразование*). Соответственно алгебра Лоренца является деформацией алгебры Галилея и можно показать, что комплексификация алгебры Галилея других деформаций не имеет; в вещественном случае алгебру Галилея можно получить также С. ортогональной алгебры Ли $so(4)$. Эквивалентный способ получения алгебры Галилея из алгебры Лоренца состоит в том, чтобы определить алгебру Лоренца как алгебру, сохраняющую форму Минковского $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$, и затем устремить скорость света c к ∞. Пока $c<\infty$, возникающие алгебры изоморфны $\mathfrak{g}$. Аналогично, деформируя алгебру Пуанкаре (неоднородную алгебру Лоренца), можно получить алгебры де Ситтера $so(4,1)$ и $so(3,2)$ движений пространства постоянной кривизны. Соответственно, устремляя кривизну к 0, получают группу Пуанкаре как С. групп де Ситтера.

Связь между этими алгебрами продолжается на представления. Если, как в описанных примерах, существует матрица $A(0)=\lim\limits_{t\to 0}A(t)$, то каждое представление S алгебры $\mathfrak{g}$ порождает представление $\overline{S}$ сжатой алгебры по формуле

$$\overline{S}(x)=S(A(0)x)$$

для любого $x\in\overline{\mathfrak{g}}$. Обратная операция (деформация представлений), вообще говоря, невозможна.

Лит.: [1] Б а р у т А., Р о н ч к а Р., Теория представлений групп и ее приложения, пер. с англ., т. 1, М., 1980; [2] I n ö n ü E., W i g n e r E. P., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1953, v. 39, p. 510—24; [3] S a l e t a n E. J., «J. Math. Phys.», 1961, v. 2, p. 1—22.

А. К. Толпыго.

СЖАТИЙ ПОЛУГРУППА — однопараметрически сильно непрерывная полугруппа $T(t)$, $0\leqslant t<\infty$, $T(0)=I$, линейных операторов в банаховом пространстве E, для к-рых $\|T(t)\|\leqslant 1$. Плотно определенный в E оператор A будет п р о и з в о д я щ и м о п е р а т о р о м (г е н е р а т о р о м) С. п. тогда и только тогда, когда выполнено условие Хилле — Иосиды

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\lambda}$$

при всех $\lambda>0$. В других терминах: плотно определенный оператор A — генератор С. п. тогда и только тогда, когда он является максимальным *диссипативным оператором*.

Детально изучены С. п. в гильбертовом пространстве H. Частными видами С. п. являются полугруппы изометрий ($\|Tx\|=\|x\|$), унитарные полугруппы ($T^*(t)=T^{-1}(t)$), самосопряженные полугруппы ($T^*(t)=T(t)$), нормальные полугруппы ($T^*(t)T(t)=T(t)T^*(t)$). Вместо генератора A иногда удобно рассматривать его преобразование Кэли: $B=(A+I)(A-I)^{-1}$ (когенератор). Оказывается, что полугруппа будет полугруппой изометрий, унитарной, самосопряженной, нормальной полугруппой тогда и только тогда, когда когенератор соответственно будет изометрическим, унитарным, самосопряженным, нормальным оператором.

С. п. наз. вполне неунитарной, если ее сужение на любое инвариантное подпространство не является унитарным. Для вполне неунитарной полугруппы $(T(t)x,\ y)\to 0$ при $t\to\infty$ и любых $x,\ y\in H$. Для того чтобы С. п. была вполне неунитарной, достаточно, чтобы она была устойчивой, т. е. чтобы $\|T(t)x\|\to 0$ при $t\to\infty$ и $x\in H$.

Для всякой С. п. $T(t)$ существует такое ортогональное разложение $H=H_1\oplus H_2$ на инвариантные относительно $T(t)$ подпространства, что на H_1 полугруппа унитарна, а на H_2 вполне неунитарна.

Если $T(t)$ есть С. п. в гильбертовом пространстве H, то существует более широкое гильбертово пространство $\tilde{H}$, содержащее H как подпространство, и в нем такая унитарная группа $U(t)$, $-\infty<t<\infty$, что $T(t)=PU(t)$ при $t\geqslant 0$, где P — ортогональный проектор из $\tilde{H}$ на H. Группа $U(t)$ наз. унитарной дилатацией полугруппы $T(t)$. Дилатация определяется однозначно с точностью до изоморфизма, если потребовать, чтобы $\tilde{H}$ совпадало с замкнутой линейной оболочкой множества $\bigcup U(t)H$ $(-\infty<t<\infty)$ (минимальная дилатация).

Пусть N — гильбертово пространство и $L_2(\mathbb{R},\ N)$ — гильбертово пространство всех измеримых N-значных функций $f(s)$, $s\in\mathbb{R}$, с интегрируемым квадратом нормы. В этом пространстве определена унитарная группа двустороннего сдвига $(U(t)f)(s)=f(s-t)$. Аналогично, в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+,\ N)$, $\mathbb{R}_+=(0,\ \infty)$ определена полугруппа одностороннего сдвига

$$(U(t)f)(s)=f(s-t) \text{ при } 0\leqslant t<s \text{ и } 0 \text{ при } t>s.$$

Всякая вполне неунитарная полугруппа изометрий изоморфна одностороннему сдвигу в $L_2(\mathbb{R}_+,\ N)$, при нек-ром вспомогательном пространстве N.

Если $T(t)$ — вполне неунитарная С. п. и $U(t)$ — ее минимальная унитарная дилатация, то на нек-ром инвариантном подпространстве $\tilde{H}$ (а если $T(t)$ устойчива, то и на всем $\tilde{H}$) группа изоморфна двустороннему сдвигу. О полугруппах сжатия с нелинейными операторами см. *Полугруппа нелинейных операторов*.

Лит.: [1] Davies E., One-parameter semigroups, L.—[a.o.], 1980; [2] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970.

С. Г. Крейн.

СЖАТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРИНЦИП — одно из основных положений теории метрич. пространств о существовании и единственности неподвижной точки множества при нек-ром специальном («сжимающем») отображении его в себя. См. *Сжимающих отображений принцип*.

СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРИНЦИП, сжатых отображений принцип,— теорема, утверждающая существование и единственность *неподвижной точки*

у отображения f полного метрич. пространства (X, ρ) (или замкнутого подмножества такого пространства) в себя, если для любых x', x'' выполняется неравенство

$$\rho(f(x'), f(x'')) \leqslant q\rho(x', x''), \qquad (1)$$

где $0<q<1$. Этот принцип широко используется для доказательства существования и единственности решения не только уравнения вида $f(x)=x$, но и уравнений $f(x)=y$ путем замены такого уравнения на эквивалентное: $\tilde{f}(x)=x$, где $\tilde{f}(x)=x\pm(f(x)-y)$.

Схема применения С. о. п. обычно такова: исходя из свойств отображения f находят сначала замкнутое множество $M\subset X$, обычно замкнутый шар, такое, что $f(M)\subset M$, а затем доказывают, что на этом множестве f является отображением сжатия. После этого, отправляясь от произвольного элемента $x_0\in M$, строят последовательность $\{s_n\}$, $x_n=f(x_{n-1})$, $n=1, 2, \ldots$, принадлежащую M, к-рая сходится к нек-рому элементу $\tilde{x}\in M$. Это и будет единственное решение уравнения $f(x)=x$, а x_n будут последовательными приближениями решения.

В общем случае условие (1) нельзя заменить условием

$$\rho(f(x'), f(x'')) < \rho(x', x''), \qquad (2)$$

однако если это условие выполняется на компактном множестве K, к-рое f отображает в себя, то условие (2) обеспечивает у f существование единственной неподвижной точки $\tilde{x}\in K$.

Имеет место следующее обобщение С. о. п. Пусть снова f отображает полное метрич. пространство X в себя и

$$\rho(f(x'), f(x'')) \leqslant q(\alpha, \beta)\rho(x', x'')$$

при $\alpha\leqslant\rho(x', x'')\leqslant\beta$, где $0<q(\alpha, \beta)<1$ для $0<\alpha\leqslant\beta<\infty$. Тогда отображение f имеет на X единственную неподвижную точку.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [3] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [4] Треногин В. А., Функциональный анализ, М., 1980.
В. И. Соболев.

СИГНАТУРА — 1) С. алгебраической системы — совокупность отношений и операций, действующих на основном множестве данной алгебраич. системы, вместе с указанием их арностей. Алгебраич. система (универсальная алгебра) с сигнатурой Ω наз. также Ω-системой (соответственно Ω-алгеброй).

2) С. квадратичной или симметрической билинейной формы над упорядоченным полем — пара целых неотрицательных чисел (p, q), где p — положительный, а q — отрицательный индекс инерции данной формы (см. *Инерции закон*, *Квадратичная форма*). Иногда С. формы наз. число $p-q$.
О. А. Иванова.

3) С. многообразия M^n — сигнатура квадратичной формы

$$Q_M(x)=(x\cup x, O),$$

где $\cup$ — внутреннее когомологическое умножение, $O\in H_n(M; \mathbb{Z})$ — фундаментальный класс. Многообразие предполагается компактным и ориентируемым. С. обозначается $\sigma(M)$.

Если $n\not\equiv 0 \bmod 4$, то полагают $\sigma(M)=0$. С. обладает свойствами:

1) $\sigma(M+M')=\sigma(M)+\sigma(M')$;

2) $\sigma(M\times M')=\sigma(M)\sigma(M')$;

3) $\sigma(\partial N)=0$.

С. многообразия может быть представлена как линейная функция от его *Понтрягина классов* (см. [2]).

О представлении С. как индекса нек-рого дифференциального оператора см. *Индекса формулы*.

Лит.: [1] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976; [2] Милнор Дж., Сташеф Дж., Характеристические классы, пер. с англ., М., 1979.

М. И. Войцеховский.

СИГНУМ — функция действительного переменного x, равная 1, если x положительно, равная 0, если x равно нулю, и равная -1, если x отрицательно. Обозначение: $\operatorname{sgn} x$ или $\operatorname{sign} x$. Таким образом,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Ю. А. Горьков.

СИЗИГИЯ — астрономический термин, означающий расположение трех небесных тел на одной прямой. В алгебре употребляется в значении соотношения. Пусть M — левый A-модуль, $(m_i)_{i \in I}$ — семейство элементов из M; соотношением, или сизигией, между (m_i) наз. набор $(a_i)_{i \in I}$ элементов кольца A такой, что $\sum_i a_i m_i = 0$. Так возникает модуль сизигий, цепь сизигий и т. д. См. *Гильберта теорема* о сизигиях.

В. И. Данилов.

СИЛОВА ПОДГРУППА, силовская подгруппа,— максимальная π-подгруппа группы, где π — нек-рое множество простых чисел, т. е. периодич. подгруппа, порядки элементов к-рой делятся только на простые числа из π, и не содержащаяся ни в какой большей подгруппе с таким свойством (силовская π-подгруппа). Основное значение для теории групп имеют силовские p-подгруппы, то есть С. п., множество π у к-рых состоит из единственного простого числа p. Название дано в честь Л. Силова (L. Sylow), доказавшего ряд теорем о таких подгруппах в конечной группе (см. *Силова теоремы*).

С. п. играют важную роль в теории конечных групп. Так, вопрос о дополняемости нормальной абелевой подгруппы сводится к такому же вопросу для силовских подгрупп; существование нетривиальной p-факторгруппы связано с существованием нетривиальной p-факторгруппы у нормализатора силовской p-подгруппы; строение конечной простой группы во многом определяется строением ее силовской 2-подгруппы. В теории бесконечных групп, исключая теорию локально конечных групп, роль С. п. меньше, поскольку уже основной вопрос о сопряженности силовских p-подгрупп решается положительно только в отдельных классах бесконечных групп.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982; [2] Шеметков Л. А., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, № 2, с. 179—98; [3] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 45—61; [4] Huppert B., Endliche Gruppen, [Bd] 1, B., 1974.

В. Д. Мазуров.

СИЛОВА ТЕОРЕМЫ — три теоремы о максимальных p-подгруппах конечной группы, доказанные Л. Силовым [1] и играющие большую роль в теории конечных групп. Иногда объединение всех трех теорем наз. теоремой Силова.

Пусть G — конечная группа порядка $p^m s$, где p — простое число, не делящее число s. Тогда имеют место следующие теоремы.

Первая теорема Силова: группа G содержит подгруппы порядков p^i для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, причем каждая подгруппа порядка p^{i-1} является нормальной подгруппой по крайней мере в одной подгруппе порядка p^i. Из этой теоремы, в частности, следуют такие важные утверждения: в группе G существует *Силова подгруппа* порядка p^m; любая p-подгруппа группы G содержится в нек-рой силовской p-подгруппе порядка p^m, индекс силовской p-подгруппы не делится на p; если $G = P$ есть группа

порядка p^m, то любая ее собственная подгруппа содержится в нек-рой максимальной подгруппе порядка p^{m-1} и все максимальные подгруппы группы P нормальны.

Вторая теорема Силова: все силовские p-подгруппы конечной группы сопряжены между собой. Для бесконечных групп аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно.

Третья теорема Силова: число силовских p-подгрупп конечной группы делит порядок группы и сравнимо с единицей по модулю p.

Для произвольных множеств π простых чисел аналогичные теоремы о силовских π-подгруппах получены лишь в классе конечных разрешимых групп (см. *Холла подгруппа*). В неразрешимых группах ситуация иная. Напр., в знакопеременной группе A_5 степени 5 для $\pi=\{2, 3\}$ есть силовская π-подгруппа S порядка 6, индекс к-рой делится на число из π. Кроме того, в A_5 есть силовская π-подгруппа, изоморфная A_4 и несопряженная с S. Число силовских π-подгрупп в A_5 не делит порядок группы A_5.

Лит.: [1] Sylow L., «Math. Ann.», 1872, Bd 5, S. 584—94; [2] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

В. Д. Мазуров.

СИЛЬНАЯ ГОМОЛОГИЯ — см. *Слабая гомология*.

СИЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — то же, что *Фреше производная*.

СИЛЬНО НЕПРЕРЫВНАЯ ПОЛУГРУППА — семейство линейных ограниченных операторов $T(t)$, $t>0$, в банаховом пространстве X, обладающее свойствами:

1) $T(t+\tau)x=T(t)\,T(\tau)x$, $t,\ \tau>0$, $x\in X$;

2) функции $T(t)x$ непрерывны на $(0, \infty)$ при любом $x\in X$.

При выполнении 1) из измеримости всех функций $T(t)x$, $x\in X$, и, в частности, из односторонней (справа или слева) слабой непрерывности следует сильная непрерывность $T(t)$. Для С. н. п. конечное число

$$\omega=\inf_{t>0} t^{-1}\ln\|T(t)\|=\lim_{t\to\infty} t^{-1}\ln\|T(t)\|$$

наз. типом полугруппы. Таким образом, нормы всех функций $T(t)x$ растут на ∞ не быстрее экспоненты $e^{\omega t}$. Классификация С. н. п. основана на их поведении при $t\to 0$. Если существует такой ограниченный оператор J, что $\|T(t)-J\|\to 0$ при $t\to 0$, то J — проекционный оператор и $T(t)=Je^{tA}$, где A — ограниченный линейный оператор, коммутирующий с J. В этом случае $T(t)$ непрерывна по норме операторов. Если $J=I$, то $T(t)=e^{tA}$, $-\infty<t<\infty$,— равномерно непрерывная группа операторов.

Если $T(t)x\to Jx$ при каждом $x\in X$, то J— также проекционный оператор, проектирующий X на подпространство X_0 — замыкание объединения всех значений $T(t)x$, $t>0$, $x\in X$.

Для того чтобы J существовал и равнялся I, необходимо и достаточно, чтобы $\|T(t)\|$ была ограничена на $(0,1)$ и чтобы $X_0=X$. В этом случае полугруппа $T(t)$, доопределенная равенством $T(0)=I$, сильно непрерывна при $t\geqslant 0$ (удовлетворяет C_0-условию). Для более широких классов полугрупп предельное соотношение $T(t)\to I$ выполняется в обобщенном смысле:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(\tau)x\,d\tau=x,\ x\in X$$

(суммируемость по Чезаро, C_1-условие), или

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}T(\tau)x\,d\tau=x,\ x\in X$$

(суммируемость по Абелю, A-условие). При этом предполагается, что функции $\|T(t)x\|$, $x\in X$, интегри-

руемы на $[0,1]$ (а значит, и на любом конечном отрезке).

Поведение С. н. п. при $t \to 0$ может быть совсем нерегулярным. Напр., функции $\|T(t)x\|$ могут иметь при $t=0$ степенную особенность.

Для плотного в X_0 множества элементов x функции $T(t)x$ дифференцируемы на $[0, \infty)$. Важную роль играют С. н. п., для к-рых функции $T(t)x$ дифференцируемы при всех x для $t>0$. В этом случае оператор $T'(t)$ ограничен при каждом t и его поведение при $t \to 0$ дает новые возможности для классификации полугрупп. Выделены классы С. н. п., для к-рых $T(t)$ допускает голоморфное продолжение в сектор комплексной плоскости, содержащий полуось $(0, \infty)$.

См. *Полугруппа операторов*, *Производящий оператор* полугруппы.

Лит.: [1] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., М., 1962.

С. Г. Крейн.

СИЛЬНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ неопределенного интеграла — нахождение сильной производной неопределенного интеграла

$$F(I) = \int_I f(x)\,dx$$

действительнозначной функции f, суммируемой на открытом подмножестве G n-мерного евклидова пространства, рассматриваемого как функция сегмента. Если

$$|f|\,(\ln(1+|f|))^{n-1}$$

суммируема на G (в частности, если $f \in L^p(G)$, $p>1$), то интеграл F от f сильно дифференцирует почти всюду на G. Для любой $\varphi(u)$, $u \geqslant 0$, положительной, неубывающей и такой, что

$$\varphi(u) = o(u \ln^{n-1} u)$$

при $u \to \infty$, существует такая суммируемая на G функция $f \geqslant 0$, что $\varphi(f(t))$ также суммируема и отношение $F(I)/|I|$ неограниченно в каждой точке $x \in G$ при I, стремящемся к x, то есть F не является С. д.

Лит.: [1] Jessen B., Marcinkiewicz J., Zygmund A., «Fund. Math.», 1935, v. 25, p. 217—34; [2] Saks S., «Fund. Math.», 1935, v. 25, p. 235—52; [3] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [4] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., [2 изд.], т. 2, М., 1965.

Т. П. Лукашенко.

СИЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ дифференциального уравнения

$$Lu \equiv \sum\nolimits_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\, D^\alpha u = f \qquad (*)$$

в области D — это локально интегрируемая функция u, к-рая имеет локально интегрируемые обобщенные производные всех порядков $\leqslant m$ и удовлетворяет уравнению $(*)$ почти всюду в области D.

Понятие «С. р.» может быть введено и таким образом. Функция u наз. С. р. уравнения $(*)$, если существуют такие последовательности гладких (напр., класса C^∞) функций $\{u_n\}$, $\{f_n\}$, что $u_n \to u$, $f_n \to f$ и $Lu_n = f_n$ при каждом n, где сходимость понимается в $L_1(K)$ для любого компакта $K \subseteq D$. В этих определениях L_1 можно заменить классом L_p локально интегрируемых со степенью $p \geqslant 1$ функций. Наиболее употребительным является класс L_2.

В случае эллиптич. уравнения $(*)$ оба понятия С. р. совпадают.

А. П. Солдатов.

СИЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл лебеговского типа от функций со значениями в линейном топологич. пространстве по скалярной мере или от скалярной функции по мере со значениями в векторном пространстве. При этом предельные процессы, с помощью к-рых определяется интеграл, понимаются в смысле сильной топологии. Примерами С. и. являются:

1) *Бохнера интеграл* от векторнозначной функции;

2) *Даниеля интеграл*, если значения подинтеграль-

ной функции принадлежат σ-полной векторной решетке;

3) интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dF_\lambda$, дающий *спектральное разложение* самосопряженного оператора, действующего в гильбертовом пространстве.

В С. и. от скалярных функций по векторной мере значения меры во многих случаях предполагаются принадлежащими векторному *полуупорядоченному пространству*.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж.-Т., Линейные операторы, пер. с англ., т. 1—2, М., 1962—66; [2] Hildebrandt T. H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 59, p. 111—139.

В. И. Соболев.

СИЛЬНЫЙ ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ МИНИМУМ — минимальное значение $J(\tilde{y})$, достигаемое функционалом $J(y)$ на кривой $\tilde{y}(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, такое, что

$$J(\tilde{y}) \leqslant J(y) \tag{1}$$

для всех кривых сравнения $y(x)$, удовлетворяющих условию ε-близости нулевого порядка:

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

на всем промежутке $[x_1, x_2]$. Предполагается, что кривые $\tilde{y}(x)$, $y(x)$ удовлетворяют заданным граничным условиям.

Если, помимо условия (2), требующего ε-близости по ординате, добавить условие ε-близости по производной:

$$|y'(x) - \tilde{y}'(x)| \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

на всем промежутке $[x_1, x_2]$, то говорят об условии ε-близости первого порядка.

Значение, достигаемое функционалом $J(y)$ на кривой $\tilde{y}(x)$, для к-рого неравенство (1) выполняется для всех кривых сравнения $y(x)$, удовлетворяющих условию ε-близости первого порядка, наз. *слабым относительным минимумом*.

Поскольку условие ε-близости нулевого порядка (2) выделяет более широкий класс кривых по сравнению с условием ε-близости первого порядка (2), (3), то всякий сильный минимум является одновременно слабым минимумом, но не всякий слабый минимум является сильным. В связи с указанным различием необходимые, а также достаточные условия оптимальности для сильного и слабого относительного минимума имеют неодинаковый вид.

Наряду с понятием С. о. м. можно ввести понятие *абсолютного минимума*. Абсолютный минимум — это минимальное значение $J(\tilde{y})$, достигаемое функционалом $J(y)$ на всем множестве кривых, на к-рых функционал $J(y)$ имеет смысл. Абсолютный минимум является глобальным, а сильный и слабый относительные минимумы — локальными минимумами.

Абсолютный минимум является одновременно и С. о. м., но не всякий С. о. м. является абсолютным минимумом.

Вариационную задачу, имеющую более одного С. о. м., наз. *многоэкстремальной задачей*. При решении практических вариационных задач С. о. м. находят приближенно, используя численные методы вариационного исчисления (см. *Вариационное исчисление*; численные методы).

Для задач, в к-рых С. о. м. единственный, необходимые условия оптимальности С. о. м. являются одновременно достаточными условиями абсолютного минимума. Такая ситуация имеет место, напр., в теории оптимального управления для линейных задач оптимального быстродействия (см. *Оптимального быстродействия задача*), а также для нек-рых других классов задач вариационного исчисления.

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.—Л., 1950; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М., *И. Б. Вапнярский.*

СИЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ — минимальное или максимальное значение $J(\tilde{y})$, достигаемое функционалом $J(\tilde{y})$ на кривой $\tilde{y}(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, для к-рого выполняется одно из неравенств

$$J(\tilde{y}) \leqslant J(y) \text{ или } J(\tilde{y}) \geqslant J(y)$$

для всех кривых сравнения $y(x)$, находящихся в ε-окрестности кривой $\tilde{y}(x)$. Кривые $\tilde{y}(x)$, $y(x)$ должны удовлетворять заданным граничным условиям.

Поскольку максимизация функционала $J(y)$ эквивалентна минимизации функционала — $J(y)$, то часто вместо сильного экстремума говорят о сильном минимуме. Термин «сильный» подчеркивает, что на кривые сравнения $y(x)$ наложено условие ε-близости только по $y(x)$:

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant \varepsilon$$

на всем промежутке $[x_1, x_2]$, тогда как по производной кривые $y(x)$ и $\tilde{y}(x)$ могут отличаться как угодно «сильно».

По самому своему определению С. э. является сильным относительным экстремумом, поскольку дает экстремум не абсолютный, т. е. не на всем классе допустимых кривых сравнения $y(x)$, на к-рых функционал $J(y)$ имеет смысл, а локальный, относительный, соответствующий подмножеству всех допустимых кривых сравнения, находящихся в ε-окрестности кривой $\tilde{y}(x)$. Однако для краткости термин «относительный» часто опускают и говорят о С. э., имея в виду сильный относительный экстремум (см. *Сильный относительный минимум*).

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.—Л., 1950; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М., 1957. *И. Б. Вапнярский.*

СИМВОЛ ОПЕРАТОРА — скалярная или матричная функция, ассоциированная с оператором и обладающая свойствами, в той или иной форме отражающими свойства этого оператора. Обычно считается, что С. о. заданы для операторов, принадлежащих нек-рой алгебре. Тогда, как правило, при сложении операторов их символы складываются, а при умножении — перемножаются с точностью до членов, в нек-ром смысле являющихся младшими, но иногда и точно. Бывает, что С. о. — это функция со значениями в нек-рой алгебре (в частности, операторной алгебре), более простой, чем исходная.

Обычно символы ассоциируются с операторами, действующими в функциональных пространствах. Тогда одна из типичных ситуаций состоит в том, что если оператор действует на функции от n переменных (или, более общо, на функции на n-мерном многообразии), то его символ — функция от $2n$ переменных (или на $2n$-мерном многообразии). На основе использования таких С. о. строится теория *псевдодифференциальных операторов.* Соответствие между символами и операторами является основой квантования, при к-ром символ является классич. величиной, а сам оператор — соответствующей квантовой величиной.

Символы операторов в $\mathbb{R}^n$. Пусть дан полином

$$a(p, q) = \sum_{|\alpha+\beta| \leqslant m} a_{\alpha\beta} q^\alpha p^\beta,$$

где $q, p \in \mathbb{R}^n$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ — мультииндексы (т. е., напр., $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geqslant 0$, α_j — целые, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$). Тогда по нему несколькими различными способами можно пост-

роить оператор A, действующий на функциях на $\mathbb{R}^n$, подставляя вместо q_j оператор $\hat{q}_j$ умножения на одну из координат x_j в $\mathbb{R}^n$, а вместо p_j — оператор $\hat{p}_j = \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, где $i = \sqrt{-1}$, h — произвольная постоянная (играющая роль постоянной Планка). Если при этом менять порядок букв q и p, то получатся разные операторы. Если положить

$$A = a\left(\overset{2}{\hat{q}}, \overset{1}{\hat{p}}\right) = \sum_{|\alpha+\beta| \leqslant m} a_{\alpha\beta} \hat{q}^\alpha \hat{p}^\beta,$$

то $a(q, p)$ наз. qp-с и м в о л о м, или л е в ы м с и м в о л о м оператора A. Получаемое таким образом соответствие между левыми символами и операторами является взаимно однозначным соответствием между полиномами и дифференциальными операторами с полиномиальными коэффициентами и может быть распространено на значительно более широкие классы операторов и символов, если воспользоваться формулой

$$(Au)(x) = (2\pi h)^{-n} \int e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} a(x, \xi)\, u(y)\, dy\, d\xi,$$

где $z\xi = z_1\xi_1 + \ldots + z_n\xi_n$ для n-мерных векторов $z = (z_1, \ldots, z_n)$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $dy = dy_1, \ldots, dy_n$, $d\xi = d\xi_1 \ldots d\xi_n$.

Оператор A с pq-с и м в о л о м, или п р а в ы м с и м в о л о м $a(q, p)$ определяется формулой

$$A = a\left(\overset{1}{\hat{q}}, \overset{2}{\hat{p}}\right) = \sum_{|\alpha+\beta| \leqslant m} a_{\alpha\beta} \hat{p}^\beta \hat{q}^\alpha$$

или для более общих символов

$$(Au)(x) = (2\pi h)^{-n} \int e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} a(y, \xi)\, u(y)\, dy\, d\xi.$$

Более симметричный способ построения оператора по полиному $a(q, p)$ получается, если ввести для некоммутирующих операторов B, C симметризованное произведение $(B^k C^l)$ формулой

$$(sB + tC)^n = \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!\, l!} s^k t^l (B^k C^l),$$

а затем положить

$$A = \sum_{|\alpha+\beta| \leqslant m} a_{\alpha\beta} \left(\hat{q}_1^{\alpha_1} \hat{p}_1^{\beta_1}\right) \ldots \left(\hat{q}_n^{\alpha_n} \hat{p}_n^{\beta_n}\right).$$

Тогда $a(q, p)$ наз. с и м в о л о м В е й л я оператора A. Оператор A может быть записан через символ Вейля по формуле

$$(Au)(x) = (2\pi h)^{-n} \int e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, dy\, d\xi.$$

Вторичное квантование приводит к появлению еще двух видов символов операторов на $\mathbb{R}^n$ — виковского и антивиковского. А именно, если ввести операторы рождения $a_j^+ = \hat{q}_j - i\hat{p}_j$ и операторы уничтожения $a_j^- = \hat{q}_j + i\hat{p}_j$ и записать дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами в виде

$$A = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} (a^+)^\alpha a^\beta$$

или в виде

$$A = \sum_{\alpha,\beta} c'_{\alpha\beta} a^\beta (a^+)^\alpha,$$

то его в и к о в с к и й с и м в о л $c(q, p)$ и а н т и в и к о в с к и й с и м в о л $a(q, p)$ задаются соответственно формулами

$$c(q, p) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} (q - ip)^\alpha (q + ip)^\beta,$$

$$a(q, p) = \sum_{\alpha,\beta} c'_{\alpha\beta} (q - ip)^\alpha (q + ip)^\beta.$$

О формулах, связывающих разные виды символов одного и того же оператора, см. в [1]–[4].

Символы операторов на многообразии. Если символы описанных выше типов на $\mathbb{R}^n$ взаимно однозначно соответствуют операторам некрых достаточно широких классов, то на многообразии, как правило, нет естественных символов, для к-рых существовало бы такое взаимно однозначное соответствие. На многообразии важную роль играет т. н. главный символ, к-рый определяется для нек-рых псевдодифференциальных операторов и является однородной функцией на $T^*X\setminus O$ — кокасательном расслоении многообразия X без нулевого сечения. Его обратимость означает, что рассматриваемый оператор A является эллиптическим и гарантирует выполнение теоремы регулярности, т. е. гладкости решений уравнения $Au=f$ с гладкой правой частью f, а также фредгольмовость оператора A (в случае компактного X) в подходящих пространствах Соболева. При сложении и умножении операторов их главные символы соответственно складываются и перемножаются. Главный символ не меняется при добавлении к оператору членов меньшего порядка.

Символы операторов на многообразии с краем. На многообразии с краем X псевдодифференциальный оператор имеет вид матрицы (см. [5]):

$$\mathfrak{A}=\begin{Vmatrix} A+B & K \\ T & Q \end{Vmatrix} : \begin{matrix} \Gamma(E_1) \\ \oplus \\ \Gamma(G_1) \end{matrix} \to \begin{matrix} \Gamma(E_2) \\ \oplus \\ \Gamma(G_2) \end{matrix},$$

где E_1, E_2 — векторные расслоения на X, G_1, G_2 — векторные расслоения на Y, A — псевдодифференциальный оператор на X, удовлетворяющий *трансмиссии условию*, T — граничный оператор, т. е. оператор взятия каких-то граничных условий (вообще говоря, псевдодифференциальных), K — кограничный оператор, или оператор типа потенциала, B — сингулярный оператор Грина (так называются композиции граничных и кограничных операторов и нек-рые более общие операторы аналогичной структуры), Q — псевдодифференциальный оператор на Y. Оператор $\mathfrak{A}$ имеет символы двух типов: внутренний и граничный. Внутренний символ $\sigma^0(\mathfrak{A})$ — это обычный символ оператора A, являющийся функцией на $T^*X\setminus O$, точнее, сечением расслоения $\mathrm{Hom}(\pi^*E_1, \pi^*E_2)$, где $\pi: T^*X\setminus O \to X$ — канонич. проекция. Граничный символ $\sigma_Y(\mathfrak{A})$ — это функция на $T^*Y\setminus O$, значения к-рой — операторы на полуоси $[0, \infty)$, получающиеся из $\mathfrak{A}$ замораживанием коэффициентов главной части в точке границы (в координатах, в к-рых граница является гиперплоскостью) и последующим преобразованием Фурье по касательным переменным. Обратимость $\sigma^0(\mathfrak{A})$ — это обычная эллиптичность оператора A. Если предположить эту эллиптичность, то обратимость $\sigma_Y(\mathfrak{A})$ в классах убывающих функций на полуоси — это фактически условие эллиптичности граничной задачи, определяемой оператором $\mathfrak{A}$, или т. н. условие Шапиро—Лопатинского. Таким образом, символом $\mathfrak{A}$ естественно называть пару $\{\sigma^0(\mathfrak{A}), \sigma_Y(\mathfrak{A})\}$. Если обратимы оба символа $\sigma^0(\mathfrak{A})$ и $\sigma_Y(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{A}$ наз. эллиптическим, и в этом случае для него верны обычные теоремы о регулярности и фредгольмовости (последняя — когда X компактно).

Лит.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965; [2] Маслов В. П., Операторные методы, М., 1973; [3] Шубин М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., 1978; [4] Березин Ф. А., «Матем. сб.», 1971, т. 86, № 4, с. 578—610; [5] Boutet de Monvel L., «Acta math.», 1971 v. 126, p. 11—51. *М. А. Шубин.*

СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА — 1) С. д. в узком смысле слова — исследование определяемого ниже

топологич. автоморфизма Бернулли σ — его инвариантных замкнутых подмножеств, инвариантных мер и т. д. Топологический автоморфизм Бернулли σ действует в пространстве Ω бесконечных двусторонних последовательностей символов из нек-рого алфавита A (обычно конечного), снабженном топологией прямого произведения бесконечного числа экземпляров A (в каждом из к-рых обычно берется дискретная топология). А именно, σ переводит последовательность $\omega=\{\omega_i\}$ в $\omega'=\{\omega_i'\}$, где $\omega_i'=\omega_{i+1}$ («сдвиг последовательности на один шаг налево»). Очевидное обобщение — действие группы (или полугруппы) G в пространстве A^G.

Пусть нек-рые пары (a, b) символов из A объявлены «допустимыми». Всевозможные последовательности $\{\omega_i\}$, для к-рых при всех i пары (ω_i, ω_{i+1}) допустимы, образуют нек-рое замкнутое инвариантное (относительно σ) подмножество $\Omega_1\subset\Omega$. Это — важнейший пример инвариантного подмножества топологич. автоморфизма Бернулли. Динамич. система в Ω_1, порожденная сдвигом $\sigma|\Omega_1$, наз. топологической цепью Маркова.

2) С. д. в широком смысле слова — применение С. д. в узком смысле слова к исследованию динамич. систем, к-рые сами по себе определяются совершенно независимо от Ω и σ.

Лит.: [1] Алексеев В. М., Символическая динамика. К., 1976 (Одиннадцатая [летняя] математическая школа, ч. 1); [2] Боуэн Р., *Методы символической динамики*, пер. с англ., М., 1979 (Новое в зарубежной науке. Математика, в. 13).

Д. В. Аносов.

СИММЕТРИЗАЦИИ МЕТОД (в теории функций) — один из методов решения экстремальных задач геометрич. теории функций. В основе метода лежит понятие *симметризации* замкнутых и открытых множеств n-мерного евклидова пространства. Впервые С. м. в теории функций был применен к изучению свойств трансфинитного диаметра (см. [1]), несколько позднее — к решению проблемы Карлемана — Миллу (см. [2]), а затем использовался достаточно широко (см. [3] — [6], [9]).

Использование С. м. в теории функций основано на монотонном характере изменения емкости конденсатора и внутреннего радиуса области при различных видах симметризаций. Возможность применения С. м. при решении экстремальных задач геометрич. теории функций обусловливается определенной симметрией экстремальных отображений. Опираясь на свойство неубывания внутреннего радиуса области при ее симметризации относительно прямой или луча, с помощью теоремы об изменении внутреннего радиуса области при отображении ее посредством регулярной функции был получен следующий принцип симметризации (см. [4]): если функция $w=f(z)$, $f(0)=w_0$, $f'(0)=a_1$, регулярна в круге E: $|z|<1$, E_f — множество значений функции $w=f(z)$ в E, E_f^* — результат симметризации E_f относительно луча или прямой, проходящих через $w=w_0$, а $r(E_f^*, w_0)$ — внутренний радиус области E_f^* относительно точки $w=w_0$, то

$$r(E_f^*, w_0)\geqslant|a_1|. \qquad (*)$$

Равенство в (*) имеет место тогда и только тогда, когда функция $w=f(z)$ однолистна в E, а область E_f^* совпадает с E_f (при симметризации Штейнера) или получается из E_f в результате поворота вокруг $w=w_0$ (при симметризации Пойа). Аналогичный результат имеет место и для других видов симметризаций, для к-рых справедливо свойство неубывания внутреннего радиуса. Дополнительное исследование обычно необходимо для выяснения условий достижимости в (*) равенства.

Имеются обобщения принципа симметризации на случай кольца и областей произвольной связности (см. [6]). Плодотворным оказывается сочетание С. м. с другими методами решения экстремальных задач геометрич. теории функций (*экстремальной метрики методом*, теорией *квадратичных дифференциалов* и др.). Таким путем был получен ряд теорем покрытия и искажения для различных классов регулярных в данной области функций (однолистных, однолистных в среднем, слабо p-листных в круге или в кольце и др., см. [4] — [6]).

С. м. применяется также при изучении свойств пространственных квазиконформных отображений. Это обстоятельство особенно существенно в связи с ограниченными возможностями исследования таких отображений. С. м. позволяет находить среди двусвязных пространственных областей, обладающих определенными геометрич. свойствами, область с наибольшим конформным модулем. Определение такой области в свою очередь позволяет установить нек-рое экстремальное свойство квазиконформного отображения. В частности, с помощью С. м. установлены нек-рые теоремы искажения для квазиконформных отображений в трехмерном евклидовом пространстве (см. [7], [8]).

Лит.: [1] Faber G., «Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl.», 1920, Bd 20, S. 49—64; [2] Beurling A., Études sur un problème de majoration, Uppsala, 1933; [3] Полиа Г., Сегё Г., Изопериметрические неравенства в математической физике, пер. [с англ.], М., 1962; [4] Хейман В. К., Многолистные функции, пер. с англ., М., 1960; [5] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [6] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [7] Шабат Б. В., «Докл. АН СССР», 1960, т. 132, № 5, с. 1045—48; [8] Gehring F. W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1961, v. 101, № 3, p. 499—519; [9] Baernstein A., «Acta math.», 1974, v. 133, p. 139—69.

И. П. Митюк.

СИММЕТРИЗАЦИЯ — сопоставление каждому объекту F объекта F^* (того же класса), обладающего нек-рой симметрией. Обычно С. подвергают замкнутые множества F в евклидовом пространстве E^n (или в пространстве постоянной кривизны), а также отображения, причем С. строится так, что F^* непрерывно зависит от F. С. сохраняют одни и монотонно изменяют другие характеристики объекта. С. используются в геометрии, математич. физике, теории функций при решении экстремальных задач. Впервые С. введена Я. Штейнером (J. Steiner) в 1836 для доказательства *изопериметрического неравенства*.

С. относительно плоскости E^{n-k} в E^n: для каждого непустого сечения множества F плоскостью $E^k \perp E^{n-k}$ в E^k строят шар с центром $E^k \cap E^{n-k}$ и тем же k-мерным объемом, что $F \cap E^k$; заполняемое шарами множество F^* есть результат симметризации. С. относительно плоскости сохраняет объем, выпуклость, не увеличивает площадь границы и интегралы поперечных мер (см. [2]). При $k=1$ эта С. есть симметризация Штейнера, при $k=n-1$ — симметризация Шварца.

С. относительно полуплоскости H^{n-k} в E^n: для каждого непустого сечения F сферой S^k, имеющей центр на границе ∂H^{n-k} и лежащей в $E^{k+1} \perp \partial H^{n-k}$, строят сферич. шапочку $S^k \cap D^n$ (D^n — шар с центром $H^{n-k} \cap S^k$) того же k-мерного объема, что $F \cap S^k$; заполняемое шапочками множество F^* есть результат С. При $k=n-1$ это — сферическая С., если $n=2$ — круговая С.

С. смещением: для выпуклого множества $F \subset E^n$ строят симметричное ему относительно плоскости E^k множество F'; результатом С. является множество $F^* = (F + F')/2$, где сложение множеств понимается как векторная сумма.

С. окатыванием: для выпуклого тела $F \subset E^n$ его *опорная функция* усредняется на параллельных

сечениях единичной сферы; результатом С. считается тело F^*, восстановленное по получившейся опорной функции.

В E^3 симметризация Штейнера не увеличивает емкость; симметризация Шварца сохраняет непрерывность гауссовой кривизны границы и не уменьшает ее минимум; С. относительно полуплоскости не увеличивает основную частоту области и площадь границы; сферическая С. не увеличивает емкость; С. смещением сохраняет интеграл средней кривизны границы и не уменьшает площадь последней; С. окатыванием сохраняет ширину (см. [1], [3]).

В E^2 симметризация Штейнера не увеличивает полярный момент инерции, внешний радиус, емкость, основную частоту; не уменьшает жесткость кручения, максимальный внутренний конформный радиус (см. [3]).

В связи с многократным применением С. рассматриваются вопросы сходимости С. Определения аналогов С. для незамкнутых множеств допускают ветвления. О применении С. в теории функций см. *Симметризации метод.*

Лит.: [1] Бляшке В., Круг и шар, пер. с нем., М., 1967; [2] Хадвигер Г., Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, пер. с нем., М., 1966; [3] Полиа Г., Сегё Г., Изопериметрические неравенства в математической физике, пер. с англ., М., 1962; [4] Leichtweiss K., Konvexe Mengen, B., 1980.

С. Л. Печерский.

СИММЕТРИИ КРИТЕРИЙ — статистический критерий для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой одномерная плотность вероятности симметрична относительно нуля.

Пусть проверяется гипотеза симметрии H_0, согласно к-рой плотность вероятности $p(x)$ вероятностного закона, к-рому подчиняются независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$, симметрична относительно нуля, то есть $p(x)=p(-x)$ для любого x из области определения плотности $p(x)$. Любой статистич. критерий, предназначенный для проверки H_0, наз. критерием симметрии.

Наиболее часто в качестве альтернативы к H_0 рассматривается гипотеза H_1, согласно к-рой все рассматриваемые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют плотность вероятности $p(x-\Delta)$, $\Delta\neq 0$. Иначе говоря, согласно гипотезе H_1 плотность вероятности случайной величины X_i получается в результате сдвига плотности $p(x)$ вдоль оси Ox на расстояние $|\Delta|$ вправо или влево, в зависимости от знака Δ. Если знак смещения Δ известен, то конкурирующая гипотеза H_1 наз. односторонней, в противном случае — двусторонней. Простой пример С. к. дает *знаков критерий*.

С. к. является частным случаем *рандомизации критерия*.

Лит.: [1] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

М. С. Никулин.

СИММЕТРИИ ПРИНЦИП, принцип симметрии Шварца, принцип симметрии Римана — Шварца для аналитических функций: пусть область G расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ ограничена замкнутой жордановой кривой Γ, в состав к-рой входит дуга l окружности L расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть, далее, функция $f(z)$ определена и непрерывна на $G\cup l$, аналитична в G, а на l принимает значения, принадлежащие нек-рой окружности C расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда $f(z)$ продолжается через дугу l в область G^*, симметричную с G относительно L, до функции, аналитической в области $G\cup l\cup G^*$. Такое продолжение (через l) единственно и определяется следующим свойством продолженной функции $f(z)$: если точки $z\in G$ и $z^*\in G^*$ симметричны (инверсны) относительно L, то

точки $w=f(z)$ и $w^*=f(z^*)$ симметричны относительно C. В частности, если L и C совпадают с действительной осью плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, то $f(z)=\overline{f(\bar{z})}$ при $z\in G\cup l\cup G^*$. Под окружностями расширенной комплексной плоскости понимаются как собственно окружности, так и прямые. Непрерывность также может пониматься как в обычном, так и в обобщенном смысле, т. е. когда $f(z)$ наз. непрерывной в точке z_0, если $f(z)\to f(z_0)$ при $z\to z_0$, независимо от конечности или бесконечности величины $f(z_0)$. Кривая Γ, равно как и l, может проходить через точку ∞. По условию, $f(l)\subset C$, но не обязательно $f(l)=C$. Кроме того, если G и G^* имеют общие внутренние точки, то продолженная функция в этих точках может быть неоднозначной.

С. п. для гармонических функций при тех же G, L, l и G^* формулируется так: если функция $u(x, y)$ гармонична в G, непрерывна на $G\cup l$ и равна нулю на l, то u продолжается через l в G^* до функции, гармонической в $G\cup l\cup G^*$. При этом если точки $(x, y)\in G$ и $(x^*, y^*)\in G^*$ симметричны относительно L, то $u(x^*, y^*)=-u(x, y)$.

Обобщением С. п. на случай аналитич. дуг l (и C) является принцип Шварца аналитич. продолжения аналитических и гармонич. функций (см. [1], [2]). Обобщение С. п. для гармонич. функций на случай функции любого числа переменных наз. *отражения принципом*. С. п. широко используется в приложениях теории аналитических и гармонич. функций (при конформных отображениях областей с одной или несколькими осями симметрии, в теории упругости, гидромеханике, электростатике и т. д.).

Лит.: [1] Schwarz H., Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd 2, B., 1890; [2] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд., М., 1977, с. 350—60; [3] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973, с. 158—97, 214—15.

Е. П. Долженко.

СИММЕТРИКА на множестве X — неотрицательная действительная функция d, определенная на множестве пар всех элементов множества X и удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $d(x, y)=0$ в том и только в том случае, если $x=y$;

2) $d(x, y)=d(y, x)$ при любых $x, y\in X$.

В отличие от *метрики* и *псевдометрики* С. может не удовлетворять аксиоме треугольника. По симметрике d на множестве X определяется топология на X: множество $A\subset X$ замкнуто (относительно симметрики d) в том и только в том случае, если $d(x, A)>0$ для каждого $x\in X\setminus A$. При этом

$$d(x, A)=\inf\{d(x, y): y\in A\}.$$

Замыкание множества A в так определенном топологич. пространстве содержит множество всех тех точек $x\in X$, для к-рых $d(x, A)=0$, но может этим множеством не исчерпываться. Соответственно, ε-шары вокруг точек множества X могут иметь пустую внутренность. Топологич. пространство наз. симметризуемым, если топология его порождается по указанному правилу нек-рой С. Класс симметризуемых пространств гораздо шире класса *метризуемых пространств*: симметризуемое пространство может не быть ни паракомпактным, ни нормальным, ни хаусдорфовым. Кроме того, симметризуемое пространство может не удовлетворять первой аксиоме счетности.

Но каждое симметризуемое пространство X секвенциально, т. е. его топология определяется сходящимися последовательностями по правилу: множество A замкнуто в том и только в том случае, если предел каждой сходящейся в X последовательности точек множества A принадлежит A. Для бикомпактных хаусдорфовых пространств симметризуемость равносильна метризуемости.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Недев С. Й., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1971, т. 24, с. 201—36.

А. В. Архангельский.

СИММЕТРИРОВАНИЕ, симметризация,— одна из операций тензорной алгебры, при помощи к-рой по данному тензору строится симметричный (по группе индексов) тензор. С. всегда производится над несколькими верхними или нижними индексами. Тензор S с координатами $\{s^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q},\ 1\leqslant i_\nu,\ j_\mu\leqslant n\}$ является результатом С. тензора T с координатами $\{t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q},\ 1\leqslant i_\nu,\ j_\mu\leqslant n\}$ по m верхним индексам, напр. по группе индексов $I=(i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_m)$, если

$$s^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}=\frac{1}{m!}\sum_{I\to\alpha} t^{\alpha_1\dots\alpha_m i_{m+1}\dots i_p}_{j_1\dots j_q}. \qquad (*)$$

Здесь суммирование производится по всем $m!$ перестановкам $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_m)$ группы индексов I. С. по группе нижних индексов определяется аналогично. С. по группе индексов обозначается взятием этих индексов в круглые скобки ( ). Посторонние индексы (не участвующие в С.) отделяются вертикальными черточками. Напр.,

$$t^{(4\,|5|\,17)}=\frac{1}{3!}\,[t^{4517}+t^{1574}+t^{7541}+t^{4571}+t^{7514}+t^{1547}].$$

Последовательное С. по группам индексов I_1 и I_2, $I_1\subset I_2$, совпадает с С. по группе индексов I_2. Другими словами, если $s_{j_1\dots j_q}=t_{(j_1\dots(j_k\dots j_l)\dots j_q)}$, то $s_{j_1\dots j_q}=t_{(j_1\dots j_q)}$ (внутренние скобки снимаются).

Тензор, не изменяющийся при С. по нек-рой группе индексов, наз. *симметрическим тензором*.

С. по нек-рой группе индексов тензора, альтернированного (см. *Альтернирование*) по этой группе, дает нулевой тензор.

Умножение двух и более тензоров с последующим С. их произведения по всем индексам наз. симметрическим умножением. С. тензоров, наряду с операцией альтернирования, применяется для разложения тензора на тензоры более простого строения. С. применяется также для образования сумм вида (*) с многоиндексными слагаемыми. Напр., если элементы матрицы

$$\left\|\begin{matrix} a^1_1 & a^1_2\dots & a^1_n\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ a^n_1 & a^n_2\dots & a^n_n\end{matrix}\right\|$$

коммутируют при умножении, то выражение

$$n!\,a^{(1}_{1}a^{2}_{2}\dots a^{n)}_{n}=n!\,\left(a_{(1}{}^{1}a^{2}_{2}\dots a^{n}_{n)}\right)=n!\,a^{(1}_{(1}a^{2}_{2}\dots a^{n)}_{n)}$$

наз. перманентом матрицы.

Лит.: [1] Широков П. А., Тензорное исчисление, 2 изд., Казань, 1961; [2] Беклемишев Д. В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., 1971; [3] Схоутен Я. А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., М., 1965.

Л. П. Купцов.

СИММЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА — обобщение алгебры многочленов. Если M — унитарный модуль над коммутативно-ассоциативным кольцом A с единицей, то С. а. модуля M наз. алгебра $S(M)=T(M)/I$, где $T(M)$ — *тензорная алгебра* модуля M, I — ее идеал, порожденный элементами вида $x\otimes y-y\otimes x$ ($x,\ y\in M$). С. а.— коммутативно-ассоциативная A-алгебра с единицей; она градуирована:

$$S(M)=\sum\nolimits_{p\geqslant 0}S^p(M),$$

где $S^p(M)=T^p(M)/I\cap T^p(M)$, причем $S^0(M)=A$, $S^1(M)=M$. Модуль $S^p(M)$ наз. p-й симметрической степенью модуля M. Если M —

свободный модуль с конечным базисом $x_1, \ldots, x_n$, то соответствие $x_i \to X_i$ ($i=1, \ldots, n$) продолжается до изоморфизма алгебры $S(M)$ на алгебру многочленов $A[X_1, \ldots, X_n]$ (см. *Многочленов кольцо*).

Для любого гомоморфизма A-модулей $f\colon M \to N$ p-я тензорная степень $T^p(f)\colon T^p(M) \to T^p(N)$ индуцирует гомоморфизм $S^p(f)\colon S^p(M) \to S^p(N)$ (p-я симметрическая степень гомоморфизма f). Получается гомоморфизм A-алгебр $S(f)\colon S(M) \to S(N)$. Соответствия $f \to S^p(f)$ и $f \to S(f)$ являются соответственно ковариантными функторами из категории A-модулей в себя и в категорию A-алгебр. Для любых двух A-модулей M и N имеет место естественный изоморфизм $S(M \oplus N) \cong S(M) \otimes S(N)$.

Если M — векторное пространство над полем характеристики 0, то *симметрирование* $\sigma\colon T(M) \to T(M)$ определяет изоморфизм С. а. $S(M)$ на алгебру $\tilde{S}(M) \subset T(M)$ симметрических контравариантных тензоров на M относительно симметрич. умножения:

$$u \vee v = \sigma(u \otimes v),\ u \in \tilde{S}^p(M),\ v \in \tilde{S}^q(M).$$

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [2] Кострикин А. И., Манин Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980.

А. Л. Онищик.

СИММЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа всех подстановок (биекций) нек-рого множества X с операцией суперпозиции (см. *Подстановок группа*). С. г. подстановок множества X обозначается $S(X)$. Для равномощных X и X' группы $S(X)$ и $S(X')$ подобны. В случае конечного множества $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ С. г. обозначается S_n. Всякая абстрактная группа изоморфна подходящей подгруппе симметрич. группы $S(X)$ нек-рого множества X (теорема Кэли).

Пусть множество X конечно. Всякая подстановка π на X однозначно записывается в виде произведения независимых или взаимно простых циклов (циклова запись подстановки); числовой вектор

$$z(\pi) = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

где a_i — число циклов длины i в цикловой записи подстановки π, наз. цикловым типом подстановки π. Две подстановки π и π' сопряжены в группе S_n тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же цикловой тип. Подстановки с цикловым типом

$$\{n-2, 2, 0, \ldots, 0\}$$

наз. транспозициями; их совокупность является системой образующих группы S_n. Множество транспозиций $\Sigma = \{(i, i+1) | i = 1, \ldots, n-1\}$ является минимальной системой образующих (базой) для S_n. Вообще, множество $\Delta = \{(i_k, j_k) | i_k \neq j_k\}$ образует базу для S_n, если граф с X в качестве множества вершин и с парами (i_k, j_k) в качестве ребер является *деревом* [2]. Число таких баз равно n^{n-2}.

Знакопеременная группа A_n — нормальный делитель в группе S_n, причем если $n \neq 4$, то A_n — единственный нетривиальный собственный нормальный делитель, а S_4 содержит еще один нетривиальный нормальный делитель — четверную группу Клейна: $K_4 = \{1, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$. При $n \leqslant 4$ группа S_n разрешима, а при $n \geqslant 5$ неразрешима и A_n — простая неабелева группа. Теорема Гёльдера: при $n \neq 2, 6$ группа S_n совершенна (см. *Совершенная группа*). Группа S_2 коммутативна, а группа S_6 обладает внешним автоморфизмом порядка 2.

Известны все максимальные интранзитивные и импримитивные подгруппы в S_n. Для всякого разбиения $n = m_1 + m_2$, $m_1 \neq m_2$, максимальными интранзитивными в S_n будут все подгруппы $S_{m_1} + S_{m_2}$ и только они. Транзитивными импримитивными максимальными подгруппами в S_n будут сплетения S_{m_1} с S_{m_2} (для всякого

разложения $n=m_1m_2$) и только они. Примитивные максимальные подгруппы в S_n не описаны (1983), но известны нек-рые их бесконечные серии. Напр., группа S_n естественным образом действует на множестве B_n^m всех подмножеств мощности m множества конечной мощности n; при $n\neq 2m$ тем самым определяется примитивная группа подстановок множества B_n^m. Она максимальна в $S(B_n^m)$, если $(m,\ n)\neq(2,6),\ (2,8),\ (3,10),\ (4,12),\ (m,\ 2m),\ (m,\ 2m+1)$ (см. [1]). Другая серия (см. [6]) получается при рассмотрении группы $\Gamma L_n(GF(q))$ полулинейных преобразований пространств $G(F(q))$ над конечным полем из q элементов. Эта группа определяет примитивную группу подстановок *Грассмана многообразия* $G_{n,\,m}(GF(q))$, $1\leqslant m\leqslant n-1$, к-рая максимальна в $S(G_{n,\,m}(GF(q))$ при $n\geqslant 3$.

Пусть X — бесконечное множество. Группа всех подстановок множества X, перемещающих лишь конечное число элементов из X, наз. финитной, или ограниченной симметрической, группой множества X и обозначается $SF(X)$, а ее подгруппа, состоящая из всех четных подстановок, наз. финитной, или ограниченной знакопеременной, группой множества X и обозначается $AF(X)$. Подгруппы $SF(X)$ и $AF(X)$ — нормальные делители в $S(X)$. Более общо, пусть α — мощность множества X и $\beta\leqslant\alpha$ — нек-рое бесконечное кардинальное число; совокупность всех подстановок множества X, перемещающих не более чем β элементов множества X, является подгруппой в $S(X)$, обозначаемой $S_\beta(X)$. Наряду с $SF(X)$ и $AF(X)$ группы $S_\beta(X)$ — нормальные делители в $S(X)$ для всех $\beta\leqslant\alpha$, и других нетривиальных нормальных делителей у $S(X)$ нет (теорема Шрейера — Улама — Бэра, см. [3]).

Лит.: [1] Калужнин Л. А., Клини М. Х., «Матем. сб.», 1972, т. 87, № 1, с. 91—121; [2] Оре О., Теория графов, пер. с англ., 2 изд., М., 1980; [3] Плоткин Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966; [4] Устименко-Бакумовский В. А., «Докл. АН СССР», 1978, т. 240, № 6, с. 1305—08. См. также лит. при ст. *Подстановок группа*.

Л. А. Калужнин.

СИММЕТРИЧЕСКАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица, в к-рой любые два элемента, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой, т. е. матрица $A=\|a_{ik}\|_1^n$, совпадающая со своей транспонированной матрицей

$$a_{ik}=a_{ki},\ i,\ k=1,\ \ldots,\ n.$$

Действительная С. м. порядка n имеет ровно n действительных собственных значений (с учетом кратности). Если A есть С. м., то A^{-1} и A^p суть С. м., если A и B суть С. м. одного порядка, то $A+B$ есть С. м., а произведение AB есть С. м. тогда и только тогда, когда $AB=BA$.

Т. С. Пиголкина.

СИММЕТРИЧЕСКАЯ ОБЛАСТЬ — комплексное многообразие D, изоморфное ограниченной области в $\mathbb{C}^n$, для каждой точки p к-рого существует инволютивное голоморфное преобразование $\sigma_p\colon D\to D$, имеющее p единственной неподвижной точкой. С. о. является эрмитовым симметрич. пространством отрицательной кривизны относительно метрики Бергмана. Группа ее автоморфизмов как комплексного многообразия содержится в группе движений и имеет ту же связную компоненту $G(D)$, к-рая является некомпактной вещественной полупростой группой Ли без центра. Стационарная подгруппа $H(D)$ точки $p\in D$ в группе $G(D)$ есть связная компактная группа Ли с одномерным центром. Как вещественное многообразие С. о. диффеоморфна $\mathbb{R}^{2n}$.

Всякая С. о. единственным образом разлагается в прямое произведение неприводимых С. о., перечисленных в следующей таблице (где $M_{p,\,q}$ обозначает пространство комплексных матриц размера $p\times q$).

Тип по Э. Картану	Тип $G(D)$	Тип $H(D)'$	dim D	Модель D
I	A_{p+q-1}	$A_{p-1}+A_{q-1}$ $(p \geqslant q)$	pq	$\{Z \in M_{p,q} : Z^*Z < E\}$
II	D_p	A_{p-1}	$\frac{p(p-1)}{2}$	$\{Z \in M_{p,p} : Z^t = -Z, Z^*Z < E\}$
III	C_p	A_{p-1}	$\frac{p(p+1)}{2}$	$\{Z \in M_{p,p} : Z^t = Z, Z^*Z < E\}$
IV	$D_{p/2+1}$ $B_{(p+1)/2}$	$D_{p/2-1}$ $B_{(p-1)/2}$	p	$\left\{ z \in \mathbb{C}^p : \sum \lvert z_i \rvert^2 < \frac{1}{2}\left(1+\lvert \sum z_i^2 \rvert^2\right) < 1 \right\}$
V	E_6	D_5	16	
VI	E_7	E_6	27	

С. о. типа III может быть представлена как верхняя полуплоскость Зигеля:

$$\{Z \in M_{p,p} : Z^t = Z,\ \operatorname{Im} Z > 0\}.$$

Ее точки параметризуют главно поляризованные абелевы многообразия. Остальные С. о. также могут быть представлены как *Зигеля области* первого или второго рода (см. [2]).

Лит.: [1] Зигель К., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1954; [2] Пятецкий-Шапиро И. И., Геометрия классических областей и теория автоморфных функций, М., 1961; [3] Cartan E., «Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg», 1935, Bd 1, S. 116—62; [4] Drucker D., Exceptional Lie algebras and the structure of hermitian symmetric spaces, Providence, 1978 (Mem. Amer. Math. Soc., v. 16, № 208).

Э. Б. Винберг.

СИММЕТРИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — обобщение понятия производной на случай функций множества Φ в n-мерном евклидовом пространстве. С. п. в точке x есть предел

$$\lim_{r \to +0} \frac{\Phi(S(x;\ r))}{|S(x;\ r)|} \equiv D_{\mathrm{sym}}\Phi(x),$$

где $S(x;\ r)$ — замкнутый шар с центром в точке x и радиусом r. С. п. порядка n в точке x функции действительного переменного $f(x)$ наз. предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_s^n f(x,\ h)}{h^n} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k f\left(x + \frac{n-2k}{2} h\right)}{h^n} = D^n f(x).$$

Функция действительного переменного $f(x)$ имеет С. п. в точке x порядка $2r$:

$$D^{2r} f(x) = \beta_{2r},$$

если

$$\frac{1}{2}(f(x+h)+f(x-h)) - \sum_{k=0}^{r} \beta_{2r} \frac{h^{2k}}{(2k)!} = o(h^{2r});$$

порядка $2r+1$:

$$D^{2r+1} f(x) = \beta_{2r+1},$$

если

$$\frac{1}{2}(f(x+h)-f(x-h)) - \sum_{k=0}^{r} \beta_{2k+1} \frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!} = o(h^{2r+1}).$$

Если в точке x существует n-я производная $f^{(n)}(x)$, то в этой точке существует (в обоих смыслах) С. п. и она равна $f^{(n)}(x)$. Если $f(x)$ имеет в точке x производ-

ную $D^{2r}f(x)$ или $D^{2r+1}f(x)$, то она имеет производную $D^nf(x)$. Обратное утверждение справедливо при условии существования всех производных $D^nf(x)$ меньшего порядка той же четности.

Лит.: [1] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [2] James R. D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1954, v. 76, № 1, p. 149–76.

Т. П. Лукашенко.

СИММЕТРИЧЕСКАЯ РАЗНОСТЬ множеств — одна из операций над множествами. Пусть имеются два множества A и B. Тогда их симметрическая разность обозначается $A\Delta B$ и определяется равенствами

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cap B')\cup(B'\cap A),$$

где символы $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $'$ означают соответственно операции объединения, пересечения, разности и дополнения надлежащих множеств.

М. И. Войцеховский.

СИММЕТРИЧЕСКАЯ РАЗНОСТЬ порядка n в точке x функции действительного переменного $f(x)$ — выражение

$$\Delta_s^nf(x,\ h)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^kf\left(x+\frac{n-2k}{2}h\right).$$

Часто также симметрич. разностью называют выражение

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^kf(x+(n-2k)\,h),$$

получающееся из вышеприведенного заменой h на $2h$. Если функция $f(x)$ имеет в точке x производную $f^n(x)$ порядка n, то

$$\Delta_s^nf(x,\ h)=f^{(n)}(x)\,h^n+o(h^n).$$

Т. П. Лукашенко.

СИММЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция, не изменяющаяся при любой перестановке своих аргументов. С. ф. являются, напр., $x_1+x_2+\ldots+x_n$, $x_1x_2\ldots x_n$,

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j,\ \max(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),$$
$$x_1+\ldots+x_n\ (\mathrm{mod}\ m),$$

цифры в десятичной записи суммы произвольного количества одноразрядных чисел, «функция голосования», к-рая характеризуется тем, что ее аргументы принимают лишь два значения: 1 («за») и 0 («против»), а сама функция равна 1, если больше половины ее аргументов равны 1, и 0 в противном случае. Тривиальными примерами С. ф. являются константы и функция одной переменной.

Любая С. ф., отличная от константы, существенно зависит от всех своих переменных. Поэтому при добавлении несущественных переменных отличная от константы функция становится несимметрической, а при их изъятии может стать С. ф. Таким образом, понятие С. ф. связано с точным указанием всех ее переменных. Простой критерий симметричности функции $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ состоит в одновременном выполнении двух равенств:

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n)=f(x_2,\ x_1,\ x_3,\ \ldots,\ x_n),$$
$$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n)=f(x_n,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})$$

или n равенств вида

$$f(x_1,\ \ldots,\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n)=f(x_1,\ \ldots,\ x_{i+1},\ x_i,\ \ldots,\ x_n).$$

К С. ф. относятся *симметрические многочлены*. Всякая рациональная С. ф. (над полем характеристики 0) является отношением двух симметрич. многочленов. Любая булева С. ф. на наборах значений аргументов, содержащих одинаковое число единиц, принимает одинаковые значения. Эти функции играют важную роль в математич. кибернетике и ее приложениях, в частности они встречаются при схемной реализации арифметических и нек-рых других операций.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [2] Яблонский С. В., Введение в дискретную математику, М., 1979. *В. М. Храпченко.*

СИММЕТРИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН — многочлен f с коэффициентами из нек-рого поля или ассоциативно-коммутативного кольца K с единицей, являющийся *симметрической функцией* от своих переменных, т. е. инвариантный при любых подстановках переменных:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)). \qquad (*)$$

С. м. образуют алгебру $S(x_1, \ldots, x_n)$ над K.

Важнейшие примеры С. м.— элементарные симметрические многочлены

$$s_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$$

и степенные суммы, т. е. многочлены

$$p_k(x_1, \ldots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k.$$

Для выражения степенных сумм $p_k(x_1, \ldots, x_n)$ в виде многочленов от элементарных симметрич. многочленов имеются рекуррентные формулы, называемые формулами Ньютона:

$$p_k - p_{k-1}s_1 + p_{k-2}s_2 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1} p_1 s_{k-1} + (-1)^k k s_k = 0 \text{ при } 1 \leqslant k \leqslant n;$$

$$p_k - p_{k-1}s_1 + p_{k-2}s_2 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} p_{k-n+1} s_{n-1} + (-1)^n p_{k-n} s_n = 0 \text{ при } k > n.$$

Элементарные С. м. от корней произвольного многочлена одной переменной со старшим коэффициентом 1 с точностью до знака совпадают с остальными коэффициентами этого многочлена (см. *Виета теорема*).

Основная теорема о симметрических многочленах: каждый С. м. является многочленом от элементарных С. м., причем представим в этом виде единственным образом. Другими словами, элементарные С. м. являются свободной системой образующих алгебры $S(x_1, \ldots, x_n)$. Если поле имеет характеристику 0, то многочлены $p_1, \ldots, p_n$ также являются системой свободных образующих алгебры $S(x_1, \ldots, x_n)$.

Кососимметрическим, или знакопеременным, многочленом наз. многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий соотношению (*), если подстановка π четная, и соотношению

$$f(x_1, \ldots, x_n) = -f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)),$$

если π нечетная. Любой кососимметрич. многочлен представим в виде $\Delta_n g$, где g есть С. м., а

$$\Delta_n = \prod_{i<j} (x_i - x_j).$$

Это представление не однозначно, поскольку имеется соотношение $\Delta_n^2 = \mathrm{Dis}(s_1, \ldots, s_n)$.

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [2] Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [3] Мишина А. П., Проскуряков И. В., Высшая алгебра, 2 изд., М., 1965. *О. А. Иванова.*

СИММЕТРИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР — отображение A множества D_A гильбертова пространства H (в общем случае комплексного) в себя такое, что $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ для любых $x, y \in D_A$. Если D_A — линейное многообразие, всюду плотное в H (что предполагается в дальнейшем), то A — линейный оператор. Если $D_A = H$, то A ограничен и, следовательно, непрерывен на H. С. о. A порождает на D_A билинейную эрмитову форму $B(x, y) = \langle Ax, y\rangle$, т. е. такую, что $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$. Соответствующая квадратичная форма $\langle Ax, x\rangle$ действительна. Обратно, действительная на D_A форма $\langle Ax, x\rangle$ влечет симметричность A. Сумма $A+B$ С. о. A и B с общей областью определения $D_A = D_B$ есть снова С. о., и если λ действительно, то λA также сим-

метричен. Для всякого С. о. A существует однозначно определенное замыкание $\bar{A}$ и сопряженный оператор $A^* \supset \bar{A}$. В общем случае A^* не является С. о. и $A^* \neq \bar{A}$. Если $A^* = A$, то С. о. наз. самосопряженным оператором. Таким будет, в частности, С. о., определенный на всем H. С. о., ограниченный на D_A, допускает продолжение на все H с сохранением симметричности и ограниченности.

Примеры. 1) Пусть бесконечная матрица $\|a_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots$, такова, что $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, и

$$\sum_{i,\, j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty.$$

Тогда система равенств

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

ставящая в соответствие элементу $x = \{\xi_i\} \in l_2$ элемент $y = \{\eta_i\}$, определяет ограниченный С. о., причем он оказывается самосопряженным в комплексном пространстве l_2.

2) В комплексном пространстве $L_2(0, 1)$ оператор $A = i\frac{d}{dt}$, определенный на множестве D_A абсолютно непрерывных на $[0, 1]$ функций, имеющих суммируемую с квадратом производную и удовлетворяющих условию $x(0) = x(1) = 0$, есть С. о., не являющийся самосопряженным.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., М., 1954. *В. И. Соболев.*

СИММЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР, симметричный тензор, по паре индексов — тензор, к-рый не меняется при перестановке данной пары индексов. Результат *альтернирования* С. т. по этой паре индексов равен нулю. Тензор симметричен по группе индексов, если он симметричен по любым двум индексам из этой группы. *А. Б. Иванов.*

СИММЕТРИЧЕСКОЕ ПРОИЗВОДНОЕ ЧИСЛО в точке x — обобщение понятия производного числа на случай функций множества Φ в n-мерном евклидовом пространстве. С. п. ч. в точке x есть предел

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\Phi(S(x; r_k))}{|S(x; r_k)|},$$

где $S(x, r_k)$ — нек-рая последовательность замкнутых шаров с центрами в точке x и радиусами r_k, $r_k \underset{k \to \infty}{\to} 0$.

С. п. ч. порядка n в точке x функции действительного переменного $f(x)$ наз. предел

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\Delta_s^n f(x, h_k)}{h_k^n} =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n} C_n^m (-1)^m f\left(x + \frac{n-2m}{2} h_k\right)}{h_k^n},$$

где $h_k \to 0$ при $k \to \infty$, $\Delta_s^n f(x, h_k)$ — *симметрическая разность* f.

Лит.: [1] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949. *Т. П. Лукашенко.*

СИММЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — общее название нескольких видов пространств, встречающихся в дифференциальной геометрии.

1) Многообразие с аффинной связностью наз. аффинным локально симметрическим пространством, если тождественно равны нулю тензор кручения и ковариантная производная тензора кривизны.

2) (Псевдо) риманово многообразие наз. (псевдо) римановым локально симметриче-

ским пространством, если ковариантная производная тензора его кривизны тождественно равна нулю.

3) Псевдориманово многообразие (соответственно многообразие с аффинной связностью) M наз. псевдоримановым (аффинным) глобально симметрическим пространством, если с каждой точкой $x \in M$ связана изометрия (аффинное преобразование) S_x многообразия M такая, что $S_x^2 = \mathrm{id}$ и x есть изолированная неподвижная точка преобразования S_x.

4) Пусть G — связная группа Ли, Φ — ее инволютивный автоморфизм ($\Phi^2 = \mathrm{id}$), G^Φ — замкнутая подгруппа всех Φ-неподвижных точек, G_0^Φ — компонента единицы группы G_0^Φ и H — замкнутая подгруппа в G, удовлетворяющая условию

$$G_0^\Phi \subset H \subset G^\Phi.$$

Тогда однородное пространство G/H наз. симметрическим однородным пространством.

5) Симметрическим пространством в смысле Лоса наз. многообразие M, на к-ром задано умножение

$$M \times M \longrightarrow M, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y,$$

удовлетворяющее следующим четырем условиям:

а) $x \cdot x = x$;

б) $x \cdot (x \cdot y) = y$;

в) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$;

г) для каждой точки $x \in M$ существует такая окрестность U, что $x \cdot y = y \Rightarrow y = x$ для $\forall y \in U$.

Каждое аффинное (псевдориманово) глобально симметрич. пространство является аффинным (псевдоримановым) локально симметрич. пространством и однородным С. п. Любое однородное С. п. есть аффинное глобально симметрич. пространство и симметрич. пространство в смысле Лоса. Всякое связное С. п. Лоса есть однородное С. п.

Пусть M — связное С. п. Лоса, а значит и однородное пространство: $M = G/H$. Пространство G/H можно снабдить инвариантной аффинной связностью без кручения, обладающей следующими свойствами: 1) ковариантная производная тензора кривизны равна нулю, 2) каждая геодезическая γ есть траектория нек-рой однопараметрич. подгруппы ψ группы G, и параллельный перенос векторов вдоль γ совпадает с их трансляцией с помощью ψ; 3) геодезические замкнуты относительно умножения и наз. одномерными подпространствами. Аналогично вводится понятие произвольного подпространства M как такого подмногообразия N в M, к-рое замкнуто относительно умножения и с индуцированным умножением является С. п. Замкнутое подмножество N в M, устойчивое относительно умножения, является подпространством. Аналог алгебры Ли для С. п. G/H вводится следующим образом. Пусть g и h — алгебры Ли групп G и H, а $\varphi = d\Phi_e$ (дифференциал в единице), где Φ — инволютивный автоморфизм, определяющий симметрическое однородное пространство G/H. Собственные векторы эндоморфизма пространства φ, соответствующие собственному значению -1, образуют подпространство m такое, что g есть прямая сумма подпространств m и h, а m можно отождествить с касательным пространством к пространству G/H в точке $o = H$. Если ввести в векторном пространстве m трилинейную композицию

$$m \times m \times m \longrightarrow m, \quad (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z,$$

где R — тензор кривизны, то m станет *Ли тройной системой*. Если N — подпространство пространства M,

проходящее через точку o, то касательное пространство к N в точке o есть подсистема в m и обратно.

Если M есть С. п. Лоса, то произведение $M\times M$ также является С. п. Лоса. Пусть R есть подпространство в $M\times M$ и отношение эквивалентности в M. Тогда R наз. конгруэнцией. Это понятие используется для построения теории накрывающих для С. п. Две точки $x,\ y\in M$ наз. коммутирующими, если

$$x\cdot(a\cdot(y\cdot b))=y\cdot(a\cdot(x\cdot b)),\ \forall a,\ b\in M.$$

Центром $Z(M)$ пространства M относительно точки $o\in M$ наз. множество всех точек из M, к-рые коммутируют с точкой o. Центр $Z(M)$ есть замкнутое подпространство в M, к-рое можно снабдить структурой абелевой группы. Пусть M — односвязное С. п. Тогда разыскание С. п., для к-рых M является накрывающим пространством, сводится к классификации дискретных подгрупп группы $Z(M)$.

Большое внимание при построении теории С. п. уделяется вопросам классификации (см. [2]). Пусть M — локально симметрическое риманово пространство; оно наз. приводимым, если в нек-рой системе координат его основная квадратичная форма может быть представлена в виде

$$ds^2=g_{ij}(x^1,\ \ldots,\ x^k)\,dx^i\,dx^j+g_{\alpha\beta}(x^{k+1},\ \ldots,\ x^n)\,dx^\alpha dx^\beta,$$
$$i,\ j=1,\ \ldots,\ k;\ \alpha,\ \beta=k+1,\ \ldots,\ n.$$

В противном случае пространство наз. неприводимым. Э. Картан (É. Cartan) показал, что разыскание всех неприводимых локально симметрических римановых пространств сводится к классификации инволютивных автоморфизмов вещественных компактных алгебр Ли, и проделал эту классификацию. Вместе с тем была решена задача локальной классификации симметрических однородных пространств с простыми компактными основными группами. Получена классификация симметрических однородных пространств с простыми некомпактными основными группами (см. [2], [3], [5]).

Лит.: [1] Широков П. А., Избранные работы по геометрии, Казань, 1966; [2] Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства, пер. с франц., М., 1949; [3] Berger M., «Ann. Sci. École norm. supér.», 1957, v. 74, p. 85—177; [4] Loos O., Symmetric spaces, t. 1—2, N. Y.— Amst., 1969; [5] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964.

А. С. Феденко.

СИММЕТРИЧНАЯ АЛГЕБРА — алгебра E над полем комплексных чисел, снабженная *инволюцией* $x\to x^*$, $x\in E$. Примерами С. а. являются: алгебра непрерывных функций на компакте, в к-рой инволюция определяется как переход к комплексно-сопряженной функции; алгебра ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве, в к-рой инволюция определяется как переход к сопряженному оператору; групповая алгебра локально компактной группы; алгебра мер на локально компактной группе. Элемент x^* алгебры E наз. сопряженным к элементу x; элемент $x\in E$ наз. самосопряженным, или эрмитовым, если $x^*=x$, и нормальным, если $x^*x=xx^*$; если алгебра E содержит единичный элемент 1, то элемент $x\in E$, удовлетворяющий условию $x^*x=xx^*=1$, наз. унитарным. Множество E_h эрмитовых элементов алгебры есть действительное векторное подпространство в E, и любой элемент $x\in E$ однозначно представляется в виде $x=x_1+ix_2$, где $x_1,\ x_2\in E_h$; элемент $x\in E$ нормален тогда и только тогда, когда элементы $x_1,\ x_2$ перестановочны. Всякий элемент вида x^*x эрмитов; единичный элемент эрмитов. Если x обратим, то x^* также обратим и $(x^*)^{-1}=(x^{-1})^*$. Спектр каждого эрмитова элемента симметричен относительно действительной оси. С. а. E наз. вполне симметричной алгеброй, если спектр любого элемента вида x^*x, $x\in E$, содержится в множестве неотри-

цательных действительных чисел. Примерами вполне симметричных алгебр являются: С. а. непрерывных функций на компакте; С. а. ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве; групповые алгебры компактных и коммутативных локально компактных групп. Групповые алгебры некомпактных полупростых групп Ли не являются вполне симметричными. Коммутативная С. а. E тогда и только тогда вполне симметрична, когда все максимальные идеалы в E симметричны, или тогда и только тогда, когда всякий характер коммутативной алгебры E эрмитов. Любая C^*-алгебра вполне симметрична.

Подмножество M С. а. E наз. симметричным, если $x^* \in M$ для всех $x \in M$. Отображение φ С. а. E в С. а. F наз. симметричным, если $\varphi(x)^* = \varphi(x^*)$ для всех $x \in E$. Ядро симметричного гомоморфизма С. а. E в С. а. F есть симметричный двусторонний идеал; всякий симметричный односторонний идеал является двусторонним, и факторалгебра С. а. по симметричному идеалу естественно снабжается структурой С. а. Радикал С. а. симметричен. Симметричная подалгебра F в С. а. E является С. а. Пусть $\tilde{E}$ — прямая сумма С. а. E и поля $\mathbb{C}$, в к-рой линейные операции и инволюция определяются покомпонентно, а умножение определяется формулой

$$\{x, \lambda\}\{y, \mu\} = \{xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu\}$$

для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $x, y \in E$; тогда $\tilde{E}$ есть С. а. с единичным элементом.

Линейный функционал f на С. а. наз. эрмитовым, если $f(x^*) = \overline{f(x)}$ для всех $x \in E$, и положительным, если $f(x^*, x) \geqslant 0$ для всех $x \in E$. Множество E'_h эрмитовых линейных функционалов на E есть действительное векторное подпространство пространства E', сопряженного E, и E' есть прямая сумма подпространств E'_h и iE'_h. Если E содержит единицу 1, то всякий положительный функционал f на E эрмитов и $|f(x)|^2 \leqslant f(1) f(x^*x)$ для всех $x \in E$. Если f — положительный функционал на С. а. E, то $f(y^*x) = f(x^*y)$ и $|f(y^*x)|^2 \leqslant f(y^*y) f(x^*x)$ для всех $x, y \in E$.

Пусть С. а. E снабжена нормой, превращающей E в нормированную алгебру и удовлетворяющей условию $\|x^*\| = \|x\|$ для всех $x \in E$; тогда E наз. нормированной С. а. Если E полна относительно рассматриваемой нормы, то E наз. банаховой С. а. Всякая нормированная С. а. E может быть вложена в нек-рую банахову С. а. $\bar{E}$, содержащую E как плотную симметричную подалгебру; $\bar{E}$ определена однозначно с точностью до изометрического симметричного изоморфизма: $\bar{E}$ наз. пополнением E. Если E — банахова С. а., причем E имеет аппроксимативную единицу, то всякий положительный функционал f на E непрерывен и допускает продолжение до положительного линейного функционала на $\tilde{E}$. Если E содержит единичный элемент 1 и $\|1\| = 1$, то для любого положительного линейного функционала f на E выполняются соотношения $\|f\| = f(1)$ и $f(x^*x) \leqslant f(1) r(x^*x)$, где $r(x^*x)$ — спектральный радиус элемента x^*x (см. *Банахова алгебра*).

Эрмитов элемент вполне С. а. имеет действительный спектр, для любого максимального замкнутого левого идеала I во вполне С. а. E с единичным элементом существует такой положительный линейный функционал f на E, что $I = \{x \in E : f(x^*x) = 0\}$, и элемент $x \in E$ обратим слева в E тогда и только тогда, когда $f(x^*x) > 0$ для всех ненулевых положительных функционалов f на E. Радикал вполне С. а. E совпадает с множеством таких элементов $x \in E$, что $f(x^*x) = 0$ для всех положительных линейных функционалов f на E. Банахова С. а. E

с единичным элементом 1 тогда и только тогда вполне симметрична, когда $r(x^*x)=\sup f(x^*x)$, где верхняя грань берется по множеству таких положительных линейных функционалов f на E, что $f(1)=1$.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [2] Диксмье Ж., С*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [3] Pták V., «Manuscripta Math.», 1972, v. 6, № 3, p. 245—90; [4] Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 2, М., 1975.

А. И. Штерн.

СИММЕТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — представление π *симметричной алгебры* A непрерывными линейными операторами в гильбертовом пространстве такое, что $\pi(x)^*=\pi(x^*)$ для всех $x\in A$ (здесь x^* — образ x при инволюции A).

А. И. Штерн.

СИММЕТРИЧНОСТЬ — одно из свойств *бинарных отношений*. Отношение R на множестве A наз. с и м м е т р и ч н ы м, если для любой пары элементов a, $b\in A$ из aRb следует, что bRa, т. е. если $R^{-1}\subseteq R$. Примером симметричного отношения является *эквивалентность*.

Т. С. Фофанова.

СИММЕТРИЧНЫЙ ОПЕРАТОР — см. *Симметрический оператор*.

СИММЕТРИЯ — 1) С.— инволютивное ортогональное преобразование, изменяющее ориентацию; инволютивность преобразования означает, что двукратное применение его дает тождественное преобразование. Напр., о т р а ж е н и е относительно плоскости α в пространстве (относительно прямой a на плоскости) есть С., при к-рой каждая точка M переходит в точку M' такую, что отрезок MM' перпендикулярен плоскости α (прямой a) и делится ею пополам. Плоскость α (прямая a) наз. п л о с к о с т ь ю (о с ь ю) С. (рис. 1). Любое ортогональное преобразование можно осуществить последовательным выполнением конечного числа отражений.

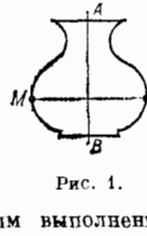


Рис. 1.

2) С.— свойство геометрич. фигуры Ф совмещаться с собой при действии нек-рой группы G ортогональных преобразований, наз. г р у п п о й с и м м е т р и и Ф; таким образом, С. отражает нек-рую правильность формы фигуры, инвариантность ее при действии преобразований из G. Напр., если на плоскости фигура Ф такова, что повороты относительно какой-либо точки O на угол $360°/n$, n — целое, переводят ее в себя, то Ф обладает С. n-го порядка, а O наз. ц е н т р о м С. n-го порядка (рис. 2); здесь G — циклическая группа n-го порядка. Окружность обладает С. бесконечного порядка (поскольку совмещается с собой поворотом на любой угол).

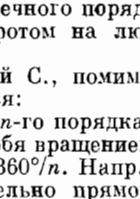


Рис. 2.

Простейшими видами пространственной С., помимо С., порожденной отражениями, являются:

а) С. о т н о с и т е л ь н о п р я м о й n-го порядка: в этом случае фигура накладывается на себя вращением вокруг нек-рой прямой (оси С.) на угол $360°/n$. Напр., плоская фигура, симметричная относительно прямой AB, имеет в пространстве эту прямую осью С. 2-го

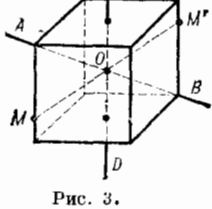


Рис. 3.

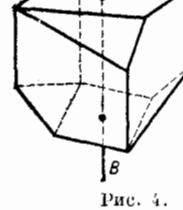


Рис. 4.

порядка (рис. 3). Куб имеет прямую AB осью С. 3-го порядка, а прямую CD — осью С. 4-го порядка (рис. 4); вообще, правильные и полуправильные многогранники симметричны относительно ряда прямых. Расположение, количество и порядок осей С. играют основную роль в кристаллографии.

б) С. переноса; в этом случае фигура накладывается на себя переносом вдоль нек-рой прямой (оси переноса) на какой-либо отрезок. Напр., фигура с единственной осью переноса обладает бесконечным множеством плоскостей С. (поскольку любой перенос можно осуществить двумя последовательными отражениями), перпендикулярных оси переноса (рис. 5). Фигуры, имеющие несколько осей переноса, играют важную роль при исследовании кристаллич. решеток.



Рис. 5.



Рис. 6.

Комбинации С., порожденные отражениями и вращениями (исчерпывающие простейшие виды С. конечных фигур), а также переносами, представляют интерес и являются предметом исследования в различных областях естествознания, искусства и т. д. Напр., винтовая С., осуществляемая поворотом на нек-рый угол вокруг оси, дополненным переносом вдоль той же оси, наблюдается в расположении листьев у растений (рис. 6). С. широко распространена как один из приемов построения бордюров и орнаментов (плоских фигур, обладающих одной или несколькими С. переноса в сочетании с отражениями) (рис. 7, 8).



Рис. 7.



Рис. 8.

Лит.: [1] Шубников А. В., Симметрия. (Законы симметрии и их применение в науке, технике и прикладном искусстве), М.— Л., 1940; [2] Кокстер Г. С. М., Введение в геометрию, пер. с англ., М., 1966; [3] Вейль Г., Симметрия, пер. с англ., М., 1968.

М. И. Войцеховский.

СИМПЛЕКС — n-мерный многогранник, являющийся выпуклой оболочкой $n+1$ точек (вершин С.), к-рые не лежат в $(n-1)$-мерной плоскости. При $n=0$, 1, 2, 3 С.— точка, отрезок, треугольник, тетраэдр. Грани С. суть С. меньшей размерности. Два С. одинаковой размерности аффинно эквивалентны. Каждой точке С. соответствует единственный способ распределения единичной массы между вершинами С. так, чтобы центр тяжести был в данной точке С. Это используется при введении в С. барицентрич. координат, а также служит источником обобщения понятия С. для бесконечномерного случая (см. *Шоке симплекс*). С. может приписываться одна из двух ориентаций, что индуцирует определенную ориентацию его $(n-1)$-мерных граней.

В. А. Залгаллер.

СИМПЛЕКС — топологическое пространство $|A|$, точками к-рого служат неотрицательные функции $\varphi: A \to \mathbb{R}$, определенные на конечном множестве A и

удовлетворяющие условию $\sum_{a\in A}\varphi(a)=1$. Топология в $|A|$ полагается индуцированной из $\mathbb{R}^A$ — пространства всех функций из A в $\mathbb{R}$. Действительное число $\varphi(a)$ наз. a-й барицентрической координатой точки φ, размерностью симплекса $|A|$ наз. число $\operatorname{car} dA-1$. В случае, когда A является линейно независимым подмножеством евклидова пространства, симплекс $|A|$ гомеоморфен выпуклой оболочке множества A (гомеоморфизм задается соответствием $\varphi\to\sum_{a\in A}\varphi(a)\cdot a$). В связи с этим выпуклая оболочка линейно независимого подмножества евклидова пространства наз. евклидовым С.

Для любого отображения $f\colon A\to B$ конечных множеств формула $(|f|\varphi)(b)=\sum_{f(a)=b}\varphi(a)$, $b\in B$, определяет непрерывное отображение $|f|\colon|A|\to|B|$, являющееся для евклидовых С. аффинным (неоднородным линейным) отображением, продолжающим отображение f. Этим задается функтор из категории конечных множеств в категорию топологич. пространств. Если $B\subset A$ и $i\colon B\to A$ — соответствующее вложение, то $|i|$ — гомеоморфизм на замкнутое подмножество, наз. гранью симплекса $|A|$ и обычно отождествляемое с $|B|$. Нульмерные грани наз. вершинами (как правило, вершины отождествляются с элементами множества A).

Топологическим упорядоченным С. наз. топологич. пространство X, для к-рого задан гомеоморфизм $h\colon\Delta^n\to X$, где Δ^n — *стандартный симплекс*. Образ граней Δ^n при гомеоморфизме h наз. гранью топологического упорядоченного симплекса X. Отображение $X\to Y$ топологических упорядоченных симплексов X и Y наз. линейным, если оно имеет вид $k\circ F\circ h^{-1}$, где k и h — заданные гомеоморфизмы, F — произвольное отображение $\Delta^n\to\Delta^n$ вида $|f|$.

Топологическим С. (размерности n) наз. топологич. пространство X, наделенное $(n+1)!$ гомеоморфизмами $\Delta^n\to X$ (то есть $(n+1)!$ структурами топологического упорядоченного С.), отличающимися на гомеоморфизмы $\Delta^n\to\Delta^n$ вида $|f|$, где f — произвольная перестановка вершин. Аналогично, отображение топологического С. наз. линейным, если оно является линейным отображением соответствующих топологических упорядоченных С.

С. наз. также элементы *симплициальных множеств* и отмеченные подмножества *симплициальных схем*.

А. В. Хохлов.

СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД, симплекс-метод, метод последовательного улучшения плана,— метод решения общей задачи *линейного программирования*:

$$\sum_{j=1}^n c_jx_j\to\max;\quad\sum_{j=1}^n A_jx_j=A_0;\quad x_j\geqslant 0,\ j=1,\ \ldots,\ n,$$

где $A_j=(a_{1j},\ \ldots,\ a_{mj})^\tau$, $j=0,\ \ldots,\ n$.

С. м.— наиболее распространенный метод линейного программирования (л. п.). Он состоит в движении по соседним вершинам многогранного множества задачи *л. п.*, определяемого ее ограничениями, и реализуется в виде конечной последовательности итераций. Базисом вершины $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ многогранного множества задачи наз. такая система m линейно независимых векторов $A_{s_1},\ \ldots,\ A_{s_m}(s_\alpha\geqslant 1,\ \alpha=1,\ \ldots,\ m)$, что $x_j=0$, если $j\notin\{s_1,\ \ldots,\ s_m\}$. Исходная информация для каждой итерации С. м. складывается из базиса $A_x=(A_{s_1},\ \ldots,\ A_{s_m})$ вершины x, параметров x_{ij}, определяемых из соотношений

$$A_j=\sum_{i=1}^m x_{ij}A_{s_i},\quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ n$$

(в частности, $x_{i0}=x_{s_i}$ — базисные компоненты вершины x), и параметров

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{m} c_{s_i}x_{ij}-c_j,\ j=1,\ \ldots,\ n.$$

Если $\Delta_j\geqslant 0,\ \forall j$ (1), то x — искомое решение задачи л. п. В противном случае выбирается отрицательный параметр Δ_k. Отсутствие среди $x_{ik},\ i=1,\ \ldots,\ m$, положительных величин (2) указывает на неразрешимость задачи л. п., обусловленную неограниченностью целевой функции задачи на ее многогранном множестве. В случае положительности нек-рых x_{ik} (3) вершина x заменяется вершиной $x'=x+\theta x^k$, где

$$x^k=(x_1^k,\ \ldots,\ x_n^k),\ x^k_{s_i}=-x_{ik},\ i=1,\ \ldots,\ m,\ x_k^k=1,$$

остальные компоненты x^k — нули,

$$\theta=\min_{i:\,x_{ik}>0}\frac{x_{i0}}{x_{ik}}=\frac{x_{r0}}{x_{rk}}.$$

Вершина x' имеет базис $A_{x'}$, отличающийся от A_x тем, что A_{s_r} заменен на A_k. Параметры x'_{ij} и Δ'_j, связанные с $A_{x'}$, определяются по простым рекуррентным формулам, исходя из x_{ij} и Δ_j.

Случай (1) означает, что вдоль каждого ребра многогранного множества задачи, выходящего из вершины x, целевая функция задачи не возрастает. Случаи (2) и (3) соответствуют наличию ребра, вдоль к-рого целевая функция возрастает, причем в случае (2) это ребро — луч, а в случае (3) — отрезок, другой конец к-рого — вершина x'. Итерации проводятся до получения оптимальной вершины либо до выяснения неразрешимости задачи л. п.

Программная реализация С.м., рассчитанная на задачи достаточно большого размера, обычно основывается на иной его алгоритмич. реализации, в к-рой основой исходной информации для каждой итерации служит обратная матрица A_x^{-1} базиса A_x (м е т о д о б р а т н о й м а т р и ц ы). Она предназначена для задач л. п., матрица условий $A=(A_1A_2\ldots A_n)$ к-рых обладает с в о й с т в о м с л а б о й з а п о л н е н н о с т и (число ненулевых a_{ij} мало по сравнению с mn). Слабо заполненные матрицы хранятся в запоминающих устройствах ЭВМ в компактном виде, когда фиксированы лишь ненулевые элементы и их позиции. Разработаны специальные приемы хранения обратного базиса, направленные на сокращение информации, необходимой для восстановления A_x^{-1}. Они основаны на представлении A_x^{-1} в виде произведения матричных множителей (мультипликаторов), отличающихся от единичной матрицы лишь одним столбцом. Заполненность петривиальных столбцов мультипликаторов зависит от порядка введения векторов в базис. Поэтому после накопления нек-рого числа мультипликаторов организуется т. н. повторение, в результате к-рого образуется более экономное мультипликативное представление A_x^{-1}.

Важная часть алгоритма С. м.— стратегия выбора вектора A_k для включения в базис. С одной стороны, она должна способствовать сокращению информации, необходимой для хранения A_x^{-1}; с другой стороны — препятствовать попаданию в плохо обусловленный базис.

Существуют программные реализации С. м., позволяющие решать на ЭВМ задачи л. п. с мало заполненной матрицей условий при m порядка тысяч и n порядка десятков тысяч. Разработаны многочисленные варианты С. м., учитывающие особенности различных специальных классов задач л. п. (блочные задачи, задачи транспортного типа и др.).

Несмотря на то, что С. м. теоретически не достаточно эффективен (он имеет экспоненциальную оценку трудоемкости на всем классе задач л. п., хотя алгоритмич. сложность этого класса всего лишь полиномиальна), опыт его применения и сравнения с другими методами позволяет сделать вывод, что для него пока (1983) нет серьезного конкурента.

Лит.: [1] Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Линейное программирование, М., 1963; [2] Данциг Дж., Линейное программирование, его применения и обобщения, пер. с англ., М., 1966; [3] Ашманов С. А., Линейное программирование, М., 1981. *Е. Г. Гольштейн.*

СИМПЛЕКСНЫЙ ПОИСК — один из методов максимизации и минимизации функций многих переменных, при к-ром выбор направления спуска (подъема) производится упорядоченным перебором вершин допустимого многогранного множества (см. *Симплексный метод*). *А. Б. Иванов.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГРУППА — одна из *классических групп*, определяемая как группа автоморфизмов знакопеременной билинейной формы Φ на левом K-модуле E, где K — коммутативное кольцо. В случае, когда $E=K^{2m}$ и матрица формы Φ в канонич. базисе $\{e_i\}$ модуля E имеет вид

$$J_m=\begin{Vmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{Vmatrix},$$

где I_m — единичная матрица порядка m, соответствующая С. г. называется С. г. от $2m$ переменных над кольцом K и обозначается $\mathrm{Sp}(m, K)$ или $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$. Матрица любого автоморфизма из $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ в базисе $\{e_i\}$ наз. симплектической матрицей.

Пусть K — поле и Φ — невырожденная знакопеременная билинейная форма в n-мерном векторном пространстве E над K. Тогда n четно, ассоциированная с формой Φ С. г., изоморфная группе $\mathrm{Sp}_n(K)$, порождается всевозможными линейными преобразованиями пространства E вида $\sigma_{e,\,\alpha}$,

$$x \longmapsto \sigma_{e,\,\alpha}(x)=x+\alpha\Phi(e,\,x)\,e,$$

где $e\in E$, $\alpha\in K$. Линейные преобразования вида $\sigma_{e,\,\alpha}$ наз. симплектическими трансвекциями, или сдвигами, в направлении прямой Ke. Центр Z группы $\mathrm{Sp}_n(K)$ состоит из матриц I_n и $-I_n$, если $\mathrm{char}\,K\neq 2$; если же $\mathrm{char}\,K=2$, то $Z=\{I_n\}$. Факторгруппа $\mathrm{Sp}_n(K)/Z$ наз. проективной симплектической группой и обозначается $\mathrm{PSp}_n(K)$. Все проективные С. г. просты за исключением

$$\mathrm{PSp}_2(F_2)=\mathrm{Sp}_2(F_2),\ \mathrm{PSp}_4(F_2)=\mathrm{Sp}_4(F_2)\ \text{и}\ \mathrm{PSp}_2(F_3),$$

к-рые изоморфны соответственно симметрич. группам S_3 и S_6 и знакопеременной группе A_4 (через F_q обозначено поле из q элементов). Порядок С. г. $\mathrm{Sp}_{2m}(F_q)$ равен

$$(q^{2m}-1)\,q^{2m-1}(q^{2m-2}-1)\,q^{2m-3}\ldots(q^2-1)\,q.$$

С. г. $\mathrm{Sp}_2(K)$ совпадает со специальной линейной группой $\mathrm{SL}_2(K)$; если $\mathrm{char}\,K\neq 2$, то группа $\mathrm{PSp}_4(K)$ изоморфна факторгруппе группы $\Omega_5(K, f)$ по ее центру (где $\Omega_5(K, f)$ — коммутант ортогональной группы симметрической билинейной формы f от пяти переменных индекса 2).

За исключением случая $m=2$, $\mathrm{char}\,K=2$, всякий автоморфизм φ группы $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ может быть представлен в виде

$$\varphi(g)=h_1h_2g^{\tau}h_2^{-1}h_1^{-1},$$

где τ — автоморфизм поля K, $h_1\in\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ и h_2 — ли-

нейное преобразование пространства E, представляющееся в базисе $\{e_i\}$ матрицей вида

$$\begin{Vmatrix} I_m & 0 \\ 0 & \beta I_m \end{Vmatrix}$$

(β — ненулевой элемент поля K).

С. г. $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ совпадает с группой K-точек линейной алгебраич. группы Sp_{2m}, задаваемой уравнением $A^{\perp}J_mA=J_m$. Эта алгебраич. группа, тоже называемая С. г., является простой односвязной линейной алгебраич. группой типа C_m, ее размерность равна $2m^2+m$.

В случае, когда $K=\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, С. г. $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ есть связная односвязная простая комплексная (соответственно вещественная) группа Ли. Группа $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ является одной из вещественных форм комплексной С. г. $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$. Остальные вещественные формы этой группы тоже иногда называют С. г. Это — подгруппы $\mathrm{Sp}(p, q)$, $p, q\geqslant 0$, $p+q=m$, выделяемые из группы $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$ условием сохранения эрмитовой формы вида

$$\sum_{i=1}^{2m}\varepsilon_i z_i\bar{z}_i,$$

где $\varepsilon_i=1$ при $1\leqslant i\leqslant p$ и $m+1\leqslant i\leqslant m+p$ и $\varepsilon_i=-1$ при остальных i. Группа $\mathrm{Sp}(0, m)$ — компактная вещественная форма комплексной С. г. $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$. С. г. $\mathrm{Sp}(p, q)$ изоморфна группе всех линейных преобразований правого векторного пространства $\mathbb{H}^m$ над телом кватернионов $\mathbb{H}$ размерности $m=p+q$, к-рые сохраняют кватернионную эрмитову форму индекса $\min(p, q)$, то есть форму вида

$$(x, y)=\sum_{i=1}^{p}x_i\bar{y}_i-\sum_{i=p+1}^{m}x_i\bar{y}_i,$$

где

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_m),\ y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)\in\mathbb{H}^m,$$

а черта означает переход к сопряженному кватерниону.

Лит.: [1] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [3] Дьёдонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [4] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [5] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948.

В. Л. Попов.

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ — *аффинная связность* на гладком многообразии M размерности $2n$, обладающая ковариантно постоянной относительно нее невырожденной 2-формой Φ. Если аффинная связность на M задана с помощью локальных форм связности

$$\omega^i=\Gamma^i_k\,dk^k,\quad \det\|\Gamma^i_k\|\neq 0,$$
$$\omega^i_j=\Gamma^i_{jk}\omega^k$$

и

$$\Phi=a_{ij}\omega^i\wedge\omega^j,\ a_{ij}=-a_{ji},$$

то условие ковариантного постоянства Φ выражается в виде

$$da_{ij}=a_{kj}\omega^k_i+a_{ik}\omega^k_j.$$

2-форма Φ определяет на M симплектич. структуру (или почти гамильтонову структуру), превращая каждое касательное пространство $T_x(M)$ в симплектич. пространство с кососимметрич. скалярным произведением $\Phi(X, Y)$. С. с. можно определить так же, как аффинную связность на M, сохраняющую при параллельном перенесении векторов это произведение. Репер в каждом $T_x(M)$ может быть выбран так, что

$$\Phi=2\sum_{\alpha=1}^{n}\omega^\alpha\wedge\omega^{n+\alpha}.$$

Все такие реперы образуют главное расслоенное пространство над M, структурной группой к-рого является

симплектич. группа. С. с.—это связность в этом главном расслоенном пространстве. Существуют многообразия M четной размерности, на к-рых нет невырожденной глобально определенной 2-формы Φ и, следовательно, нет С. с. Однако если Φ существует, то С. с., относительно к-рой Φ ковариантно постоянно, определяется неоднозначно.

Лит.: [1] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970. *Ю. Г. Лумисте.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА — *инфинитезимальная структура* 1-го порядка на четномерном гладком ориентируемом многообразии M^{2n}, к-рая определяется заданием на M^{2n} невырожденной 2-формы Φ. В каждом касательном пространстве $T_x(M^{2n})$ возникает структура симплектич. пространства с кососимметрическим скалярным произведением $\Phi(X, Y)$. Все касательные к M^{2n} реперы, адаптированные к С. с. (т. е. реперы, относительно к-рых Φ имеет канонич. вид

$$\Phi = 2\sum_{\alpha=1}^{n} \omega^{\alpha} \wedge \omega^{n+\alpha}),$$

образуют главное расслоенное пространство над M^{2n}, структурной группой к-рого является симплектич. группа $\mathrm{Sp}(n)$. Вообще, задание С. с. на M^{2n} равносильно заданию $\mathrm{Sp}(n)$-структуры на M^{2n}, как нек-рой G-*структуры*.

На M^{2n} со С. с. существует изоморфизм между модулями векторных полей и 1-форм на M^{2n}, к-рый векторному полю X ставит в соответствие 1-форму $\omega_X: Y \to \Phi(X, Y)$. Образ скобки Ли $[X, Y]$ наз. при этом скобкой Пуассона $[\omega_X, \omega_Y]$; в частности, когда ω_X и ω_Y полные дифференциалы, получается понятие скобки Пуассона двух функций на M^{2n}, к-рое обобщает соответствующее классич. понятие.

С. с. наз. почти гамильтоновой структурой, а если Φ замкнута, т. е. $d\Phi = 0$, то гамильтоповой структурой; впрочем, иногда условие $d\Phi = 0$ включают в определение С. с. Эти структуры, находящие применения в глобальной аналитич. механике, основаны на том факте, что на касательном расслоенном пространстве $T^*(M)$ любого гладкого многообразия M существует каноническая гамильтонова структура. Она определяется формой $\Phi = d\theta$, где 1-форма θ на $T^*(M)$, наз. формой Лиувилля, задается следующим образом: $\theta_u(X_u) = u(\pi_* X_u)$ для любого касательного вектора X_u в точке $u \in T^*(M)$, где π — проекция $T^*(M) \to M$. Если на M выбраны локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$ и $u = y_i(u)dx^i_{\pi(u)}$, то $\theta = y_i dx^i$, вследствие чего $\Phi = dy_i \wedge dx^i$. В классич. механике M интерпретируется как конфигурационное пространство, а $T^*(M)$ как фазовое пространство.

Векторное поле X на M^{2n} с гамильтоновой структурой наз. гамильтоновым (или гамильтоновой системой), если 1-форма ω_X замкнута. Если она, кроме того, точна, т. е. $\omega_X = -dH$, то функция H на M^{2n} наз. гамильтонианом и является обобщением соответствующего классического понятия.

Лит.: [1] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [2] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973. *Ю. Г. Лумисте.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — многообразие, снабженное *симплектической структурой*.

СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — нечетномерное проективное пространство P_{2n+1} над полем k с заданной в нем инволюционной корреляцией — нуль-системой; обозначается Sp_{2n+1}.

Пусть характеристика поля k не равна 2. Абсолютная нуль-система в Sp_{2n+1} всегда может быть записана в виде $u_i = a_{ij}x^j$, где $\|a_{ij}\|$ — кососимметрич. матрица

($a_{ij} = -a_{ji}$). В векторной форме абсолютная нуль-система может быть записана в виде $\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x}$, где A — кососимметрич. оператор, матрица к-рого надлежащим выбором базиса приводится к виду

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} 0 & +1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & 0 & +1 & \\ & & & & -1 & 0 & +1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

В этом случае абсолютная нуль-система принимает канонич. вид:

$$u_{2i} = x^{2i+1}, \quad u_{2i+1} = -x^{2i}.$$

Абсолютная нуль-система порождает билинейную форму, к-рая записывается в канонич. виде:

$$\boldsymbol{xAy} = \sum_i (x^{2i}y^{2i+1} - x^{2i+1}y^{2i}).$$

Коллинеации пространства Sp_{2n+1}, перестановочные с его нуль-системой, наз. симплектическими преобразованиями; операторы, определяющие эти коллинеации, — симплектическими. Для указанной выше канонич. формы матрицы $\|A\|$ определяется $(2n+2)$-матрица симплектич. оператора U, элементы к-рой удовлетворяют условиям

$$\sum_i (U_j^{2i}U_k^{2i+1} - U_j^{2i+1}U_k^{2i}) = \delta_{j,\,k-1} - \delta_{j,\,k+1},$$

где $\delta_{a,\,b}$ — символ Кронекера, а матрица такого оператора U наз. симплектической; ее определитель равен единице. Симплектич. преобразования образуют группу, являющуюся группой Ли.

Всякая точка пространства Sp_{2n+1} лежит в $(2n-1)$ плоскости, соответствующей ей в абсолютной нуль-системе. Можно определить также и нулевые m-плоскости в Sp_{2n+1}. Многообразие нулевых прямых пространства Sp_{2n+1} наз. его абсолютным линейным комплексом. В связи с этим симплектич. группа наз. также группой линейного комплекса, или комплекс-группой.

Всякая пара прямых и соответствующих в нуль-системе двух $(2n-1)$-плоскостей определяют единственный в пространстве Sp_{2n+1} симплектич. инвариант относительно группы симплектич. преобразований этого пространства. Через каждую точку обеих прямых проходит трансверсаль этих прямых и $(2n-1)$-плоскостей так, что определяет проективные четверки точек. Это составляет геометрический смысл симплектического инварианта, который утверждает равенство двойных отношений получаемых четверок точек.

Симплектич. 3-пространство допускает интерпретацию в гиперболич. пространстве, что указывает, в частности, на связь симплектич. пространств с гиперболическими. Так, группа симплектич. преобразований пространства Sp_3 изоморфна группе движений гиперболич. пространства ${}^2S_4$. В этой интерпретации симплектич. инвариант связан с расстоянием между точками гиперболич. пространства.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров.

СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО ОДНОРОДНОЕ — симплектическое многообразие (M, ω) вместе с транзитивной группой Ли G его автоморфизмов. Элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G можно рассматривать как симплектические векторные поля на M, т. е. поля X, сохраняющие симплектическую 2-форму ω:

$$X \cdot \omega = di_X\omega = 0,$$

где точкой обозначена производная Ли, i_X — оператор внутреннего умножения на X, d — внешний дифференциал. С. п. о. наз. строго симплектическим, если все поля $X \in \mathfrak{g}$ гамильтоновы, то есть $i_X\omega = dH_X$, где H_X функция на M (гамильтониан поля X), причем гамильтониан H_X можно выбрать так, чтобы отображение $X \longmapsto H_X$ было гомоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли функций на M относительно скобки Пуассона. Примером строго С. п. о. является орбита $M_\alpha = (\mathrm{Ad}^* G)\alpha$ группы Ли G относительно коприсоединенного представления $\mathrm{Ad}^* G$ группы G в пространстве $\mathfrak{g}^*$ линейных форм на $\mathfrak{g}$, проходящая через произвольную точку $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. Инвариантная симплектическая 2-форма ω на M_α задается формулой

$$\omega(X_\beta, Y_\beta) = d\beta(X, Y) \equiv \beta([X, Y]),$$

где X_β, Y_β — значения векторных полей X, $Y \in \mathfrak{g}$ в точке $\beta \in M_\alpha$. Поле $X \in \mathfrak{g}$ имеет гамильтониан $H_X(\beta) = \beta(X)$.

Для произвольного строго С. п. о. (M, ω, G) определено G-эквивариантное отображение момента

$$\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \; x \longmapsto \mu_x, \; \mu_x(X) = H_X(x),$$

к-рое отображает M на орбиту $\mu(M)$ группы G в $\mathfrak{g}^*$ и является локальным изоморфизмом симплектич. многообразий. Таким образом, любое строго С. п. о. группы G является накрытием над орбитой группы G в коприсоединенном представлении.

Односвязные С. п. о. с односвязной, но не обязательно эффективно действующей группой автоморфизмов G находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами естественного действия группы G в пространстве $Z^2(\mathfrak{g})$ замкнутых 2-форм на ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Соответствие определяется следующим образом: ядро $\mathfrak{K}^\sigma$ любой 2-формы $\sigma \in Z^2(\mathfrak{g})$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Соответствующая $\mathfrak{K}^\sigma$ связная подгруппа K^σ группы Ли G замкнута и определяет односвязное однородное пространство $M^\sigma = G/K^\sigma$. Форма σ задает невырожденную 2-форму в касательном пространстве $T_0 M^\sigma \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{K}^\sigma$ точки $o = eK^\sigma$ многообразия M^σ, к-рая продолжается до G-инвариантной симплектич. формы ω^σ на M^σ. Таким образом, форме σ отвечает односвязное С. п. о. $(M^\sigma, \omega^\sigma)$. Если $\mathfrak{K}^\sigma$ не содержит идеалов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то действие G на M^σ локально эффективно. С. п. о. M^σ и $M^{\sigma'}$ изоморфны тогда и только тогда, когда формы σ, σ' принадлежат одной орбите группы G в $Z^2(\mathfrak{g})$. Для точной 2-формы $\sigma = d\alpha$ С. п. о. M^σ отождествляется с универсальной накрывающей С. п. о. M_α, являющегося орбитой точки α в коприсоединенном представлении. Если $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, то орбита $G\sigma$ любой точки $\sigma \in Z^2(\mathfrak{g})$ канонически снабжается структурой С. п. о. и любое С. п. о. односвязной группы G изоморфно накрытию над одной из таких орбит. В частности, M^σ есть универсальная накрывающая орбиты $G\sigma$.

Пусть (M, ω) — компактное С. п. о. односвязной связной группы G, действующей локально эффективно. Тогда G есть прямое произведение полупростой компактной группы S и разрешимой группы R, разлагающейся в полупрямое произведение абелевой подгруппы и абелева нормального делителя, а С. п. о. (M, ω) разлагается в прямое произведение С. п. о. с группами автоморфизмов S и R соответственно.

Частным случаем С. п. о. является симплектическое групповое пространство — группа Ли вместе с левоинвариантной симплектич. формой ω. Известно, что из редуктивности группы Ли, допускающей левоинвариантную симметрич. форму, следует ее коммутативность, а из унимодулярности — разрешимость. Все такие группы размерности $\leqslant 4$ разрешимы, но начиная

с размерности 6 существуют неразрешимые симплектические групповые пространства [3].

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Гийемин В., Стернберг С., Геометрические асимптотики, пер. с англ., М., 1981; [3] Chu B.-Y., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1974, v. 197, p. 145—59; [4] Zwart Ph. B., Boothby W. M., «Ann. Inst. Fourier», 1980, t. 30, № 1, p. 129—57. *Д. В. Алексеевский.*

СИМПЛИЦИАЛЬНАЯ СХЕМА (прежние названия — симплициальный комплекс, абстрактный симплициальный комплекс) — множество, элементы к-рого наз. вершинами и в к-ром выделены такие конечные непустые подмножества, наз. симплексами, что каждое непустое подмножество симплекса s является симплексом, наз. гранью симплекса s, и каждое одноэлементное подмножество является симплексом.

Симплекс наз. q-мерным, если он состоит из $q+1$ вершин. Размерностью $\dim K$ симплициальной схемы K наз. максимальная размерность ее симплексов (она может быть и бесконечной). С. с. наз. локально конечной, если каждая ее вершина принадлежит лишь конечному числу симплексов. С. с. наз. упорядоченной, если на ней задано частичное упорядочение, линейное на каждом симплексе.

Пример С. с. Пусть X — множество и $U=\{U_\alpha|\alpha\in A\}$ — нек-рое семейство его непустых подмножеств. Непустое конечное подмножество $a\in A$ наз. симплексом, если множество $\bigcap_{\alpha\in A}U_\alpha$ непусто. Получающаяся С. с. A наз. нервом семейства U.

Симплициальным отображением С. с. K_1 в симплициальную схему K_2 наз. такое отображение $f: K_1\to K_2$, что для каждого симплекса s в С. с. K_1 его образ $f(s)$ является симплексом в С. с. K_2. С. с. и их симплициальные отображения составляют категорию.

Если симплициальное отображение $f: L\to K$ является вложением, то С. с. L наз. симплициальной подсхемой С. с. K. Все симплексы С. с. K размерности, меньшей или равной n, составляют симплициальную подсхему С. с. K, к-рая обозначается K^n и наз. n-мерным (или n-м) остовом С. с. K. Симплициальная подсхема L С. с. K наз. полной, если каждый симплекс в K, все вершины к-рого принадлежат L, сам лежит в L.

Каждой С. с. K канонически сопоставляется *симплициальное множество* $O(K)$, симплексами размерности n к-рого являются $(n+1)$-членные последовательности $(x_0, \ldots, x_n)$ вершин С. с. K, обладающие тем свойством, что в K существует такой симплекс s, что $x_i\in s$ для любого $i=0, 1, \ldots, n$. Операторы граней d_i и вырождения s_i этого симплициального множества определяются формулами

$$d_i(x_0, \ldots, x_n)=(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n),$$
$$s_i(x_0, \ldots, x_n)=(x_0, \ldots, x_i, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

где знак $\wedge$ означает, что символ, стоящий под ним, опускается. Для упорядоченной С. с. K определено симплициальное подмножество $O^+(K)\subset O(K)$, состоящее из тех симплексов $(x_0, \ldots, x_n)$, для к-рых $x_0\leqslant x_1\leqslant \ldots \leqslant x_n$. Группы (ко)гомологий симплициального множества $O(K)$ изоморфны группам (ко)гомологий симплициального множества $O^+(K)$ и наз. группами (ко)гомологий С. с.

Каждому симплициальному разбиению (симплициальному пространству) X отвечает С. с. симплициального разбиения, вершинами к-рой являются вершины разбиения X, а симплексами — те непустые конечные множества вершин, на к-рые в X натянут симплекс. Для каждой С. с. K существует однозначно определенное с точностью до изоморфизма симплициальное разбиение, С. с. к-рого является K. Оно наз. гео-

метрической реализацией (или телом) С. с. K и обозначается $|K|$. Им является геометрич. реализация в смысле Дживера — Ху (см. *Симплициальное множество*) $\|O(K)\|$ симплициального множества $O(K)$, а если С. с. K упорядочена — геометрич. реализация в смысле Милнора $|O^+(K)|$ симплициального множества $O^+(K)$. Соответствие $K \to \|O(K)\|$ является ковариантным функтором из категории С. с. в категорию клеточных разбиений (клеточных пространств). Топологич. пространство X, гомеоморфное телу $|K|$ нек-рой С. с. K, наз. полиэдром (а также триангулируемым пространством), а пара (K, f), где $f: |K| \to X$ — гомеоморфизм, наз. триангуляцией пространства X.

Точки топологич. пространства $|K|$ можно отождествить с функциями $\alpha: K \to [0, 1]$, для к-рых множество $\{x \in K | \alpha(x) \neq 0\}$ является симплексом в K и

$$\sum_{x \in K} \alpha(x) = 1.$$

Число $\alpha(x)$ наз. x-й барицентрической координатой точки α. Формула

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{x \in K} (\alpha(x) - \beta(x))^2}$$

определяет на множестве $|K|$ метрику, но соответствующая метрич. топология, вообще говоря, сильнее топологии пространства $|K|$. Множество $|K|$, снабженное метрич. топологией, обозначается $|K|_d$.

С. с. K изоморфна нерву семейства звезд вершин пространства $|K|$, т. е. открытых подмножеств $\mathrm{St}x = \{\alpha \in |K| | \alpha(x) \neq 0\}$, где $x \in K$.

Следующие утверждения равносильны: 1) С. с. K локально конечна; 2) пространство $|K|$ локально компактно; 3) $|K| = |K|_d$; 4) пространство $|K|$ метризуемо; 5) пространство $|K|$ удовлетворяет первой аксиоме счетности. Пространство $|K|$ сепарабельно (компактно) тогда и только тогда, когда С. с. K не более чем счетна (конечна).

Клетки клеточного разбиения $|K|$ находятся в биективном соответствии с симплексами С. с. $|K|$, и замыкание $|s|$ клетки, соответствующей симплексу s, определяется формулой

$$|s| = \{\alpha \in |K| | \alpha(x) \neq 0 \Rightarrow x \in s\}.$$

Оно гомеоморфно q-мерному ($q = \dim s$) замкнутому шару (так что клеточное разбиение $|K|$ регулярно). Более того, на каждом множестве $|s|$ имеется канонич. линейная (аффинная) структура, по отношению к к-рой оно изоморфно *стандартному симплексу* Δ^q. Отсюда и из того, что $|s \cap s'| = |s| \cap |s'|$ для любых симплексов $s, s' \subset K$, вытекает, что пространство $|K|$ может быть гомеоморфно отображено (вложено) в пространство $\mathbb{R}^n$ (возможно, с трансфинитным n) так, чтобы все замкнутые клетки $|s|$ оказались (прямолинейными) симплексами. Это означает, что образ $|K|$ в $\mathbb{R}^n$ является *симплициальным пространством* (полиэдром), т. е. объединением замкнутых симплексов, пересекающихся только по целым граням. Это симплициальное пространство наз. реализацией С. с. K в $\mathbb{R}^n$.

С. с. K тогда и только тогда реализуется в пространстве $\mathbb{R}^n$ с конечным n, когда С. с. K локально конечна, не более чем счетна и ее размерность конечна. При этом, если $\dim K \leqslant n$, то K реализуется в $\mathbb{R}^{2n+1}$. С. с., состоящая из $2n+3$ вершин, каждое $(n+1)$-элементное подмножество к-рой является симплексом, в $\mathbb{R}^{2n}$ не реализуется.

По любой С. с. K можно построить новую С. с. $\mathrm{Bd}K$, вершинами к-рой являются симплексы С. с. K, а симплексами — такие семейства $(s_0, \ldots, s_q)$ симплексов из K, что $s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_q$. С. с. $\mathrm{Bd}K$ наз. барицентрическим пмельчением (или подраз-

деление м) С. с. K. Клеточные пространства $|\mathrm{Bd}K|$ и $|K|$ естественно гомеоморфны (но не изоморфны). При этом гомеоморфизме каждая вершина $|s|$ из $|\mathrm{Bd}K|$ (т. е. нульмерная клетка, отвечающая вершине $s \in \mathrm{Bd}K$) переходит в центр тяжести (барицентр) замкнутого симплекса $|s| \subset |K|$.

С. с. $\mathrm{Bd}K$ естественным образом упорядочена. Если С. с. K упорядочена, то соответствие $s \to$ (первая вершина s) определяет симплициальное отображение $\mathrm{Bd}K \to K$, сохраняющее упорядоченность. Оно наз. каноническим сдвигом. Его геометрич. реализация (являющаяся непрерывным отображением $|\mathrm{Bd}K| \to |K|$) гомотопна естественному гомеоморфизму $|\mathrm{Bd}K| \to |K|$.

Симплициальное отображение $\varphi : K \to L$ (или его геометрич. реализация $|\varphi| : |K| \to |L|$) наз. симплициальной аппроксимацией непрерывного отображения $f : |K| \to |L|$, если для каждой точки $\alpha \in |K|$ точка $|\varphi|(\alpha)$ принадлежит минимальному замкнутому симплексу, содержащему точку $f(\alpha)$, т. е., что равносильно, если для каждой вершины $x \in K$ имеет место вложение $f(\mathrm{St}x) \subset \mathrm{St}\varphi(x)$. При этом отображения f и $|\varphi|$ гомотопны.

Теорема о симплициальной аппроксимации утверждает, что если С. с. K конечна, то для каждого непрерывного отображения $f : |K| \to |L|$ найдется такое число N, что для всех $n \geqslant N$ существует симплициальная аппроксимация $\mathrm{Bd}^n K \to L$ отображения f (рассматриваемого как отображение $|\mathrm{Bd}^n K| \to |L|$).

Лит.: [1] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [2] Хилтон П., Дж., Уайли С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, пер. с англ., М., 1966; [3] Whitehead J. H. C., «Proc. London Math. Soc.», 1939, v. 45, p. 243—327.

С. Н. Малыгин, М. М. Постников.

СИМПЛИЦИАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО (прежние названия — полусимплициальный комплекс, полный полусимплициальный комплекс) — *симплициальный объект* категории множеств Ens, т. е. система множеств (n-х слоев) K_n, $n \geqslant 0$, связанных отображениями $d_i : K_n \to K_{n-1}$, $0 \leqslant i \leqslant n$ (операторами граней), и $s_i : K_n \to K_{n+1}$, $0 \leqslant i \leqslant n$ (операторами вырождения), удовлетворяющих соотношениям

$$\left.\begin{array}{l} d_i d_j = d_{j-1} d_i, \text{ если } i < j, \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i, \text{ если } i \leqslant j; \\ d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i, & \text{если } i < j, \\ \mathrm{id}, & \text{если } i = j \text{ или } i = j+1, \\ s_j d_{i-1}, & \text{если } i > j+1. \end{cases} \end{array}\right\} \quad (*)$$

Точки слоя K_n наз. n-мерными симплексами С. м. K. Если заданы только операторы d_i, удовлетворяющие соотношениям $d_i d_j = d_{j-1} d_i$, $i < j$, то система $\{K_n, d_n\}$ наз. полусимплициальным множеством.

Симплициальным отображением $f : K \to K'$ С. м. K в С. м. K' наз. морфизм функторов, т. е. последовательность отображений $f_n : K_n \to K'_n$, $n \geqslant 0$, удовлетворяющих соотношениям

$$d_i f_{n+1} = f_n d_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant n+1; \quad s_i f_n = f_{n+1} s_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

С. м. и их симплициальные отображения образуют категорию $\Delta^0\mathrm{Ens}$. Если все отображения f_n являются вложениями, то С. м. K наз. симплициальным подмножеством С. м. K'. При этом операторы граней и вырождения в С. м. K представляют собой ограничения соответствующих операторов в С. м. K'.

Для любого топологич. пространства X определено С. м. $S(X)$, наз. с и н г у л я р н ы м С. м. пространства X, симплексами к-рого являются сингулярные симплексы пространства X (см. *Сингулярные гомологии*), т. е. непрерывные отображения $\sigma: \Delta^n \to X$, где Δ^n — n-мерный геометрический *стандартный симплекс*

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \ldots, t_n) \mid 0 \leqslant t_i \leqslant 1, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Операторы граней d_i и вырождения s_i этого С. м. определяются формулами

$$(d_i\sigma)(t_0, \ldots, t_{n-1}) = \sigma(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}),$$
$$(s_i\sigma)(t_0, \ldots, t_{n+1}) =$$
$$= \sigma(t_0, \ldots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots, t_{n+1}).$$

Соответствие $X \mapsto S(X)$ является функтором (наз. с и н г у л я р н ы м ф у н к т о р о м) из категории топологич. пространств Top в категорию С. м. Δ^0Ens.

Произвольная *симплициальная схема* K определяет С. м. $O(K)$, симплексами размерности n к-рого являются $(n+1)$-членные последовательности $(x_0, \ldots, x_n)$ вершин схемы K, обладающие тем свойством, что в K существует такой симплекс s, что $x_i \in s$ для любого $i = 0, 1, \ldots, n$. Операторы граней d_i и вырождения s_i этого С. м. определяются формулами

$$d_i(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n),$$
$$s_i(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_i, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

где знак $\wedge$ означает, что символ, стоящий под ним, опускается. Если симплициальная схема K упорядочена, то симплексы $(x_0, \ldots, x_n)$, для к-рых $x_0 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, образуют симплициальное подмножество $O^+(K)$ С. м. $O(K)$. Соответствие $K \mapsto O(K)$ (и $K \mapsto O^+(K)$) является функтором из категории симплициальных схем (упорядоченных симплициальных схем) в категорию Δ^0Ens. Для произвольной группы π определено С. м. $K(\pi)$, симплексами размерности n к-рого являются классы пропорциональных $(n+1)$-членных последовательностей $(x_0, \ldots, x_n)$, $x_i \in \pi$ (по определению $(x_0, \ldots, x_n) \sim (x_0', \ldots, x_n')$, если существует такой элемент $y \in \pi$, что $x_i' = yx_i$ для всех $i = 0, \ldots, n$). Операторы граней d_i и вырождения s_i С. м. $K(\pi)$ определяются формулами

$$d_i(x_0 : \ldots : x_n) = (x_0 : \ldots : x_{i-1} : x_{i+1} : \ldots : x_n),$$
$$s_i(x_0 : \ldots : x_n) = (x_0 : \ldots : x_{i-1} : x_i : x_i : x_{i+1} : \ldots : x_n).$$

С. м. $K(\pi)$ является на самом деле симплициальной группой.

Для произвольной абелевой группы π и любого целого $n \geqslant 1$ определено С. м. (на самом деле, симплициальная абелева группа) $E(\pi, n)$, симплексами размерности q к-рого являются n-мерные коцепи q-мерного геометрического стандартного симплекса Δ^q с коэффициентами в группе π (таким образом, $E(\pi, n)_q = C^n(\Delta^q; \pi)$). Обозначая вершины симплекса Δ^q символами e_j^q, $j = 0, \ldots, q$, определяют симплициальные отображения $\delta_i: \Delta^{q-1} \to \Delta^q$ и $\sigma_i: \Delta^q \to \Delta^{q-1}$ формулами

$$\delta_i(e_j^{q-1}) = \begin{cases} e_j^q, & \text{если } j < i, \\ e_{j+1}^q, & \text{если } j \geqslant i; \end{cases}$$

$$\sigma_i(e_j^q) = \begin{cases} e_j^{q-1}, & \text{если } j \leqslant i, \\ e_{j-1}^{q-1}, & \text{если } j > i. \end{cases}$$

Индуцированные гомоморфизмы групп коцепей

$$d_i = \delta_i^*: C^n(\Delta^q; \pi) \longrightarrow C^n(\Delta^{q-1}; \pi),$$
$$s_i = \sigma_i^*: C^n(\Delta^{q-1}; \pi) \longrightarrow C^n(\Delta^q; \pi)$$

являются, по определению, операторами граней и

вырождения С. м. $E(\pi, n)$. Симплексы, являющиеся коциклами, образуют симплициальное подмножество С. м. $E(\pi, n)$, к-рое наз. С. м. Эйленберга — Маклейна и обозначается $K(\pi, n)$. Кограничный оператор на группах $C^*(\Delta^q; \pi)$ определяет каноническое симплициальное отображение $E(\pi, n) \to K(\pi, n+1)$, к-рое обозначается δ. Поскольку понятие одномерного коцикла имеет смысл и для неабелевой группы π (см. *Неабелевы когомологии*), С. м. $K(\pi, 1)$ определено и без предположения, что группа π абелева. Это С. м. изоморфно С. м. $K(\pi)$ (следует каждому симплексу $z \in K(\pi, 1)_q = Z^1(\Delta^q, \pi)$ сопоставить значения нульмерной коцепи, кограницей к-рой является коцикл z, на вершинах e_j^q).

Сопоставив каждому слою K_n С. м. K свободную абелеву группу, им порожденную, получают симплициальную абелеву группу и, следовательно, цепной комплекс. Этот комплекс обозначается $C(K)$ и наз. комплексом цепей С. м. K. Группы (ко)гомологий комплекса $C(K)$ (с коэффициентами в группе G) наз. группами (ко)гомологий $H_*(K; G)$ и $H^*(K; G)$ С. м. K. Группы (ко)гомологий сингулярного С. м. $S(X)$ являются сингулярными группами (ко)гомологий топологич. пространства X. Группы (ко)гомологий С. м. $O(K)$ и $O^+(K)$ изоморфны и наз. группами (ко)гомологий симплициальной схемы K. Группы (ко)гомологий С. м. $K(\pi)$ суть группы (ко)гомологий группы π.

Симплекс $x \in K_n$ С. м. K наз. вырожденным, если существует такой симплекс $y \in K_{n-1}$ и такой оператор вырождения s_i, что $x = s_i y$. Лемма Эйленберга — Зильбера утверждает, что любой симплекс $x \in K_n$ С. м. K единственным образом представляется в виде $x = K(s)y$, где s — нек-рый эпиморфизм $s_i : [n] \to [m]$, $m \leqslant n$, а $y \in K_m$ — невырожденный симплекс. Наименьшее симплициальное подмножество С. м. K, содержащее все его невырожденные симплексы размерности, меньшей или равной n, обозначается K^n или $\mathrm{Sk}^n K$ и наз. n-мерным остовом С. м. K.

Геометрические стандартные симплексы

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \ \ldots, \ t_n) \mid 0 \leqslant t_i \leqslant 1, \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

составляют косимплициальное топологич. пространство относительно операторов кограней δ_i и ковырождения σ_i, определенных формулами

$$\delta_i (t_0, \ \ldots, \ t_{n-1}) = (t_0, \ \ldots, \ t_{i-1}, \ 0, \ t_i, \ \ldots, \ t_{n-1}),$$
$$\sigma_i (t_0, \ \ldots, \ t_{n+1}) = (t_0, \ \ldots, \ t_{i-1}, \ t_i + t_{i+1}, \ t_{i+2}, \ \ldots, \ t_{n+1}).$$

В дизъюнктном объединении $U_{n=0}^{\infty} K_n \times \Delta^n$, где все K_n рассматриваются как дискретные множества, формулы

$$(d_i x, \ u) \sim (x, \ \delta_i u), \ x \in K_n, \ u \in \Delta^{n-1};$$
$$(s_i x, \ u) \sim (x, \ \sigma_i u), \ x \in K_n, \ u \in \Delta^{n+1},$$

определяют отношение эквивалентности, факторпространство по к-рому является клеточным разбиением (клеточным пространством), клетки к-рого находятся в биективном соответствии с невырожденными симплексами С. м. K. Это клеточное разбиение обозначается $|K|$ или RK и наз. геометрической реализацией в смысле Милнора С. м. K. Каждое симплициальное отображение $f : K \to L$ индуцирует по формуле

$$Rf [x, \ u] = [f(x), \ u]$$

непрерывное отображение $Rf : RK \to RL$, и соответствия $K \longmapsto RK$, $f \longmapsto Rf$ представляют собой функтор R: $\Delta^0\mathrm{Ens} \to \mathrm{Top}$. Этот функтор сопряжен слева к сингу-

лярному функтору $S : \mathrm{Top} \to \Delta^0\mathrm{Ens}$. Соответствующие изоморфизмы функторов

$$\varphi : \Delta^0\,\mathrm{Ens}\,(K,\ S\,(X)) \longrightarrow \mathrm{Top}\,(RK,\ X),$$

$$\psi : \mathrm{Top}\,(RK,\ X) \longrightarrow \Delta^0\,\mathrm{Ens}\,(K,\ S\,(X))$$

определяются формулами

$$\varphi\,(f)\,[x,\ u] = f\,(x)\,(u),$$

$$(\psi\,(g)\,(x))\,(u) = g\,[x,\ u],$$

где

$x \in K_n$, $u \in \Delta^n$, $f \in \Delta^0\,\mathrm{Ens}\,(K, S\,(X))$, $g \in \mathrm{Top}\,(RK, X)$.

Морфизм сопряжения $\Phi(X) : RS(X) \to X$ является для любого топологич. пространства X слабой гомотопич. эквивалентностью (это, в частности, доказывает, что произвольное топологич. пространство слабо гомотопически эквивалентно клеточному разбиению).

Конструкция геометрич. реализации $|K|$ обобщается на симплициальные топологич. пространства K. Можно также определить геометрическую реализацию в смысле Дживера — Ху $\|K\|$, учитывающую только операторы граней d_i (в этой реализации имеются клетки для всех симплексов из K, а не только невырожденных). Если каждый оператор вырождения s_i является замкнутым корасслоением (условие, автоматически выполненное для С. м.), то естественное отображение $p : \|K\| \to |K|$ является гомотопич. эквивалентностью.

Категория Δ^0Ens допускает произведения, при этом для любых С. м. $K = \{K_n,\ d_i^K,\ s_i^K\}$ и $L = \{L_n,\ d_i^L,\ s_i^L\}$ их произведением будет С. м. $K \times L$, для к-рого

$$(K \times L)_n = K_n \times L_n,$$

$$d_i^{K \times L} = d_i^K \times d_i^L,$$

$$s_i^{K \times L} = s_i^K \times s_i^L.$$

В частности, для каждого С. м. K определено его произведение на симплициальный отрезок Δ^1. Проекции $\pi_1 : K \times L \to K$ и $\pi_2 : K \times L \to L$ определяют биективное отображение

$$R\pi_1 \times R\pi_2 : R\,(K \times L) \longrightarrow RK \times RL,$$

к-рое является гомеоморфизмом, когда произведение $RK \times RL$ представляет собой клеточное разбиение (напр., если оба С. м. K и L счетны или же если одно из клеточных разбиений RK или RL локально конечно). Отсюда, в частности, следует, что геометрич. реализация любого счетного симплициального моноида (группы, абелевой группы) является топологич. моноидом (группой, абелевой группой).

Симплициальные отображения $f,\ g : K \to L$ наз. гомотопными, если существует такое симплициальное отображение (гомотопия) $F : K \times \Delta^1 \to L$, что

$$F\,(x,\ sd_0\iota_1) = f\,(x),$$

$$F\,(x,\ sd_1\iota_1) = g\,(x)$$

для любого симплекса $x \in K_n$ и для любой композиции s (длины n) операторов вырождения. Это определение (моделирующее обычное определение гомотопии непрерывных отображений) равносильно (для случая С. м.) общему определению гомотопности симплициальных отображений любых симплициальных объектов.

Имея понятие гомотопии, можно развивать теорию гомотопий С. м. аналогично теории гомотопий полиэдров. Оказывается, что эти две теории полностью параллельны; это находит свое выражение в том, что соответствующие категории эквивалентны (эквивалентность осуществляется функтором геометрич. реализации). В частности, геометрич. реализации гомотоп-

ных симплициальных отображений гомотопны, и, напр., геометрич. реализация С. м. $K(\pi, n)$ будет *Эйленберга — Маклейна пространством* $K(\pi, n)$. Однако фактич. построение теории гомотопий для С. м. в деталях несколько отличается от построения теории гомотопий для топологич. пространств. Основное отличие состоит в том, что отношение гомотопности симплициальных отображений не является, вообще говоря, отношением эквивалентности. Эта трудность преодолевается следующим образом.

Симплициальное отображение $\Lambda^n_k \to K$ стандартного фунтика (см. *Стандартный симплекс*) в С. м. K наз. ф у н т и к о м в K. Каждый фунтик однозначно задается $(n+1)$-членной последовательностью n-мерных симплексов $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}$, для к-рых $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ при любых $i<j$, $i \neq k$. Говорят, что фунтик з а п о л н я е т с я, если он распространяется на все С. м. Δ^{n+1}, т. е. найдется такой $(n+1)$-мерный симплекс x, что $d_i x = x_i$ для каждого $i \neq k$. С. м. K наз. п о л н ы м (или у д о в л е т в о р я ю щ и м у с л о в и ю К а н а), если каждый его фунтик заполняется.

Сингулярное С. м. $S(X)$ произвольного топологич. пространства X всегда полно. Любая симплициальная группа полна, в частности полны С. м. Эйленберга — Маклейна $K(\pi)$ и $K(\pi, n)$. Значение полных С. м. состоит в том, что отношение гомотопности симплициальных отображений произвольного С. м. в полное С. м. является отношением эквивалентности. Поэтому на подкатегории полных С. м. построение теории гомотопий принципиальных трудностей не вызывает. Вместе с тем существует [4] функтор $\mathrm{Ex}^\infty : \Delta^0\mathrm{Ens} \to \Delta^0\mathrm{Ens}$, сопоставляющий каждому С. м. K полное С. м. $\mathrm{Ex}^\infty K$, геометрич. реализация к-рого гомотопически эквивалентна геометрич. реализации С. м. K и к-рое поэтому вполне заменяет С. м. K во всех гомотопических вопросах.

Два n-мерных симплекса x и x' С. м. K наз. с р а в н и м ы м и, если $d_i x = d_i x'$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Сравнимые симплексы наз. г о м о т о п н ы м и, если существует такой $(n+1)$-мерный симплекс y, что $d_n y = x$, $d_{n+1} y = x'$ и $d_i y = s_{n-1} d_i x = s_{n-1} d_i x'$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Для полных С. м. это отношение является отношением эквивалентности, причем симплексы тогда и только тогда гомотопны, когда их характеристические симплициальные отображения гомотопны $\mathrm{relSk}^{n-1}\Delta^n$.

С. м. K наз. п у н к т и р о в а н н ы м, если в нем отмечен нек-рый нульмерный симплекс θ (тем же символом θ обозначаются все вырождения этого симплекса, а также порожденное им симплициальное подмножество, к-рое обычно наз. о т м е ч е н н о й т о ч к о й в K). Для полного пунктированного С. м. K множество $\pi_n(K)$ классов гомотопных n-мерных симплексов, сравнимых с симплексом θ, является при $n \geqslant 1$ группой. Эта группа наз. n-м е р н о й г о м о т о п и ч е с к о й г р у п п о й пунктированного полного С. м. K; эта терминология оправдывается тем, что $\pi_n(K) = \pi_n(|K|)$, и в частности $\pi_n(K(\pi, n)) = \pi$ и $\pi_i(K(\pi, n)) = 0$ при $i \neq n$. С. м. K, для к-рого $\pi_i(K) = 0$ при всех $i \leqslant n$, наз. n-с в я з н ы м; при этом 0-связное С. м. наз. с в я з н ы м, а 1-связное С. м.— о д н о с в я з н ы м. Сложение в группе $\pi_n(K)$, $n \geqslant 1$, индуцируется операцией, сопоставляющей симплексам x и y (сравнимым с θ) симплекс $d_n z$, где z — симплекс размерности $n+1$, заполняющий фунтик $x_i = \theta$, $i \leqslant n-2$, $x_{n-1} = x$, $x_{n+1} = y$. Если С. м. K является симплициальным моноидом с единицей θ, то сложение индуцируется также умножением в этом моноиде (произведение двух симплексов, сравнимых с θ, сравнимо с θ).

Поскольку любой симплекс x, сравнимый с θ, является циклом (цепного комплекса $C(K)$, определяемого С. м. K), то возникает естественный г о м о м о р-

физм Гуревича $h:\pi_n(K)\to H_n(K)$, при $n=1$ индуцирующий изоморфизм

$$\pi_1(K)/[\pi_1(K),\ \pi_1(K)]\longrightarrow H_1(K)$$

(теорема Пуанкаре), а при $n>1$ являющийся изоморфизмом, когда С. м. K $(n-1)$-связно (теорема Гуревича). Для полных С. м. справедлива также и теорема Уайтхеда в обоих ее вариантах, т. е. симплициальное отображение $f:K\to L$ полных С. м. тогда и только тогда является гомотопич. эквивалентностью, когда оно индуцирует изоморфизм гомотопич. групп, причем для односвязных С. м. это условие равносильно тому, что индуцированные гомоморфизмы групп гомологий являются изоморфизмами.

В случае, когда K является симплициальной группой, гомотопич. группа $\pi_n(K)$ изоморфна группе гомологий $H_n(\overline{K})$ цепного (не обязательно абелева) комплекса $\overline{K}$, для к-рого

$$\overline{K}_n=K_n\cap\operatorname{Ker}d_0\cap\ldots\cap\operatorname{Ker}d_{n-1},$$

а граничный оператор является ограничением на $\overline{K}_n$ оператора $(-1)^nd_n$. Если симплициальная группа K абелева, то комплекс $\overline{K}$ является подкомплексом этой группы, рассматриваемой как цепной комплекс, и, более того, ее цепным деформационным ретрактом, и, в частности, ее прямым слагаемым. Оказывается, что дополнительным прямым слагаемым служит подкомплекс, порожденный вырожденными симплексами. Поэтому соответствующий факторкомплекс комплекса K ему цепно эквивалентен. Напр., для групп когомологий произвольного С. м. K отсюда следует (теорема о нормализации), что они изоморфны нормализованным группам когомологий, т. е. группам, получающимся, если ограничиться коцепями, равными нулю на всех вырожденных симплексах. Кроме того, $\pi_n(C(K))=H_n(K)$.

Функтор $K\longmapsto\overline{K}$ осуществляет эквивалентность теории гомотопий симплициальных абелевых групп с теорией гомологий цепных комплексов. Отсюда, в частности, следует, что любая связная симплициальная абелева группа K гомотопически эквивалентна произведению С. м. Эйленберга — Маклейна $K(\pi_n(K),\ n)$.

Полное С. м. K наз. минимальным, если сравнимые симплексы тогда и только тогда гомотопны, когда они совпадают. С. м. $K(\pi,\ n)$ минимально. Всякая гомотопич. эквивалентность минимальных С. м. является изоморфизмом. Каждое полное С. м. K обладает минимальным симплициальным подмножеством. Оно является его деформационным ретрактом, и поэтому с точностью до изоморфизма определено однозначно.

Симплициальное отображение $p:E\to B$ наз. расслоением в смысле Кана, если в E заполняется любой фунтик $f:\Lambda^n_k\to E$, для к-рого фунтик $p\circ f:\Lambda^n_k\to B$ заполнен, причем для любого заполнения $g:\Delta^{n+1}\to B$ фунтика $p\circ f$ существует такое заполнение $\tilde{f}:\Delta^{n+1}\to E$ фунтика f, что $p\circ\tilde{f}=g$. Расслоение в смысле Кана является симплициальным аналогом расслоения в смысле Серра и для него имеет место теорема о накрывающей гомотопии в следующей форме: если для симплициальных отображений $\tilde{f}:K\to E$ и $\Phi:K\times\Delta^1\to B$ имеет место равенство $\Phi\circ(\mathrm{id}\times\delta_1)=p\circ\tilde{f}$, то существует такое симплициальное отображение $\tilde{\Phi}:K\times\Delta^1\to E$, что $\tilde{\Phi}\circ(\mathrm{id}\times\delta_1)=\tilde{f}$ и $p\circ\tilde{\Phi}=\Phi$. Если расслоение p является сюръективным отображением, то С. м. E полно тогда и только тогда, когда полно С. м. B. Слоем расслоения $p:E\to B$ наз. (автоматически полное) С. м. $F=p^{-1}(\theta)$, где θ — отмеченная точка в B. Для любого расслоения в смысле

Серра $p : E \to B$ симплициальное отображение $S(p)$: $S(E) \to S(B)$ является расслоением в смысле Кана, и для любого расслоения в смысле Кана $p : E \to B$ отображение $R_p : RE \to RB$ является расслоением в смысле Серра (см. [5]).

Пусть K — полное пунктированное С. м. и $n \geqslant 0$. Положим $x \underset{n}{\sim} y$, где $x, y \in K_q$, если $d_i x = d_i y$ для всех $i \leqslant n$, т. е. если

$$\chi_x \big|_{Sk^n \Delta^q} = \chi_y \big|_{Sk^n \Delta^q}$$

(см. *Стандартный симплекс*). Это отношение является эквивалентностью, и фактормножества $(\mathrm{Cosk}^n K)_q = K_q / \underset{n}{\sim}$ составляют (по отношению к индуцированным операторам граней и вырождения) С. м. $\mathrm{Cosk}^n K$, к-рое наз. n-м к о о с т о в о м С. м. K. По определению, полагается $\mathrm{Cosk}^n K = K$. Для любого $n \geqslant 0$ С. м. $\mathrm{Cosk}^n K$ полно и $\pi_q(\mathrm{Cosk}^n K) = 0$ при $q > n$. Кроме того, для любого $m \leqslant n$ естественное сюръективное симплициальное отображение

$$p_m^n : \mathrm{Cosk}^n K \longrightarrow \mathrm{Cosk}^m K$$

является расслоением, индуцирующим в размерностях, меньших или равных m, изоморфизм гомотопич. групп. В частности, слой расслоения p_{n-1}^n гомотопически эквивалентен С. м. Эйленберга — Маклейна $K(\pi_n(K), n)$. Последовательность расслоений

$$K \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathrm{Cosk}^{n+1} K \longrightarrow \mathrm{Cosk}^n K \longrightarrow \mathrm{Cosk}^{n-1} K \longrightarrow \ldots$$

наз. *Постникова системой* полного С. м. K. Если С. м. K минимально, то эта последовательность является его резольвентой (см. *Гомотопический тип*).

Конструкция системы Постникова непосредственно обобщается на произвольное расслоение $p : E \to B$ полного С. м. E над полным С. м. B. Пусть $\mathrm{Cosk}^n p$ есть С. м., слоями $(\mathrm{Cosk}^n p)_q$ к-рого являются фактормножества слоев E_q по отношению $x \underset{n}{\sim} y$, к-рое имеет место тогда и только тогда, когда $p(x) = p(y)$ и $d_i x = d_i y$ при всех $i \leqslant n$. По определению, полагается $\mathrm{Cosk}^\infty p = E$. При этом $\mathrm{Cosk}^0 p = B$. При $m \leqslant n \leqslant \infty$ естественное сюръективное симплициальное отображение

$$p_m^n : \mathrm{Cosk}^n p \longrightarrow \mathrm{Cosk}^m p$$

является расслоением, индуцирующим в размерностях, меньших или равных m и больших $n+1$, изоморфизм гомотопич. групп. В частности, слой расслоения p_{n-1}^n гомотопически эквивалентен С. м. Эйленберга — Маклейна $K(\pi_n(F), n)$. Слоем расслоения $p_0^n : \mathrm{Cosk}^n p \to B$ является С. м. $\mathrm{Cosk}^n F$, где F — слой расслоения $p : E \to B$. Последовательность расслоений

$$E \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathrm{Cosk}^{n+1} p \longrightarrow \mathrm{Cosk}^n p \longrightarrow \mathrm{Cosk}^{n-1} p \longrightarrow \ldots \longrightarrow B$$

наз. с и с т е м о й М у р а — П о с т н и к о в а расслоения $p : E \to B$.

На языке С. м. удобно определять спектры. С и м п л и ц и а л ь н ы м с п е к т р о м наз. последовательность $\{X_{(q)}\}$ пунктированных множеств (его элементы наз. симплексами, отмеченный симплекс обозначается 0), определенных для произвольного целого числа q, снабженная отображениями $d_i : X_{(q)} \to X_{(q-1)}$, $i \geqslant 0$ (о п е р а т о р а м и г р а н е й), и $s_i : X_{(q)} \to X_{(q-1)}$, $i \geqslant 0$ (о п е р а т о р а м и в ы р о ж д е н и я), к-рые удовлетворяют соотношениям (*) и следующему условию: для каждого симплекса $x \in X$ существует такое целое n, что $d_i x = 0$ при $i > n$. Каждому спектру X и произвольному целому n можно сопоставить С. м. X_n, определив его формулой

$$(X_n)_q = \{x \in X_{(q-n)} \mid d_i x = 0$$

при $i > q$, $d_0, \ldots, d_q x = 0\}$.

Для так определенных С. м. X_n имеют место вложения $SX_n \subset X_{n+1}$, где S — надстройка. По последовательности С. м. X_n и вложений $SX_n \subset X_{n+1}$ симплициальный спектр X, в свою очередь, восстанавливается однозначно. Если все С. м. X полны, то $X_n = \Omega X_{n+1}$, где Ω — функтор петель. Функтор геометрич. реализации осуществляет эквивалентность категории *симплициальных спектров с категорией топологич. спектров*. Симплициальные спектры могут быть определены для произвольной категории. Категория абелевых групповых спектров изоморфна категории (абелевых) цепных комплексов.

Лит.: [1] Габриель П., Цисман М., Категории частных и теория гомотопий, пер. с англ., М., 1971; [2] May J. P., Simplicial objects in algebraic topology, Princeton, 1967; [3] Lamotke K., Semisimpliziale algebraische Topologie, B. — [u. a.], 1968; [4] Kan D., «Amer. J. Math.», 1957, v. 79, p. 449—76; [5] Quillen D., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1968, v. 19, p. 1499—500; [6] Браун Э. Х., «Математика», 1958, т. 2, № 2, с. 3—24; [7] Кан Д., там же, 1962, т. 6, № 1, с. 3—32; [8] его же, там же, 1966, т. 10, № 3, с. 12—28.

С. П. Малыгин, М. М. Постников.

СИМПЛИЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — морфизм либо категории *симплициальных пространств*, либо категории *симплициальных схем*.

А. В. Хохлов.

СИМПЛИЦИАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X, снабженное таким покрытием топологическими симплексами (наз. триангуляцией), что грани любого симплекса триангуляции принадлежат триангуляции, пересечение любых двух симплексов триангуляции является гранью каждого из них (возможно, пустой); множество $F \subset X$ тогда и только тогда замкнуто, когда замкнуто его пересечение с любым симплексом триангуляции. Каждое С. п. является *клеточным пространством*. Задание триангуляции равносильно заданию гомеоморфизма $|S| \to X$, где $|S|$ — геометрич. реализация нек-рой *симплициальной схемы*. С. п. наз. также симплициальными комплексами, симплициальными разбиениями. С. п. являются объектами категории, морфизмами к-рой $X \to Y$ служат отображения такие, что каждый симплекс триангуляции пространства X линейно отображается на нек-рый симплекс триангуляции пространства Y. Морфизмы наз. также симплициальными отображениями.

А. В. Хохлов.

СИМПЛИЦИАЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС — то же, что *симплициальное пространство*.

СИМПЛИЦИАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ категории $\mathscr{C}$ — произвольный контравариантный функтор $X\colon \Delta \to \mathscr{C}$ (или, что то же самое, ковариантный функтор $X\colon \Delta^{op} \to \mathscr{C}$) из категории Δ, объектами к-рой являются упорядоченные множества $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$, $n \geqslant 0$, а морфизмами — неубывающие отображения $\mu\colon [n] \to [m]$. Ковариантный функтор $X\colon \Delta \to \mathscr{C}$ (или, что то же самое, контравариантный функтор $X\colon \Delta^{op} \to \mathscr{C}$) наз. косимплициальным объектом категории $\mathscr{C}$.

Морфизмы

$$\delta_i = \delta_i^n : [n-1] \longrightarrow [n],\ 0 \leqslant i \leqslant n,$$

$$\sigma_i = \sigma_i^n : [n+1] \longrightarrow [n],\ 0 \leqslant i \leqslant n,$$

категории Δ, определенные формулами

$$\delta_i^n(j) = \begin{cases} j, & \text{если } j < i, \\ j+1, & \text{если } j \geqslant i, \end{cases}$$

$$\sigma_i^n(j) = \begin{cases} j, & \text{если } j \leqslant i, \\ j-1, & \text{если } j \geqslant i, \end{cases}$$

порождают любой морфизм категории Δ, так что С. о. X полностью определен, если для любого $n \geqslant 0$ задан объект $X([n]) = X_n$ (наз. n-м слоем, или n-й компонентой, С. о. X) и морфизмы

$$d_i = X(\delta_i)\colon X_n \longrightarrow X_{n-1} \quad \text{и} \quad s_i = X(\sigma_i)\colon X_n \longrightarrow X_{n-1}$$

(наз. соответственно операторами граней и операторами вырождения). В случае, когда $\mathscr{C}$ является категорией структуризованных множеств, точки множества X_n наз. обычно n-мерными симплексами С. о. X. Отображения δ_i и σ_i удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{array}{l}\delta_j\delta_i=\delta_i\delta_{j-1},\ \text{если } i<j,\\ \sigma_j\sigma_i=\sigma_i\sigma_{j+1},\ \text{если } i\leqslant j;\\ \sigma_j\delta_i=\begin{cases}\delta_i\sigma_{j-1}, & \text{если } i<j,\\ \mathrm{id}, & \text{если } i=j \text{ или } i=j+1,\\ \delta_{i-1}\sigma_j, & \text{если } i>j+1;\end{cases}\end{array}\right\}\quad (*)$$

причем любое соотношение между этими отображениями является следствием соотношений (*). Это означает, что С. о. X можно отождествить с системой $\{X_n,\ d_i,\ s_i\}$, состоящей из объектов X_n, $n\geqslant 0$, категории $\mathscr{C}$ и морфизмов d_i: $X_n\to X_{n-1}$, $0\leqslant i\leqslant n$, и s_i: $X_n\to X_{n+1}$, $0\leqslant i\leqslant n$, удовлетворяющих соотношениям

$$d_id_j=d_{j-1}d_i,\ \text{если } i<j;$$
$$s_is_j=s_{j+1}s_i,\ \text{если } i\leqslant j;$$
$$d_is_j=\begin{cases}s_{j-1}d_i, & \text{если } i<j,\\ \mathrm{id}, & \text{если } i=j \text{ или } i=j+1,\\ s_jd_{i-1}, & \text{если } i>j+1.\end{cases}$$

Аналогично, косимплициальный объект X можно рассматривать как систему $\{X_n,\ d^i,\ s^i\}$, состоящую из объектов X^n, $n\geqslant 0$ (n-х кослоев), и морфизмов d^i: $X^{n-1}\to X^n$, $0\leqslant i\leqslant n$ (операторов кограней), и s^i: $X^{n+1}\to X^n$, $0\leqslant i\leqslant n$ (операторов вырождения), удовлетворяющих соотношениям (*) (в к-рых положено $\delta_i=d^i$, $\sigma_i=s^i$).

Симплициальным отображением f: $X\to Y$ С. о. X в С. о. Y (одной и той же категории $\mathscr{C}$) наз. произвольное преобразование (морфизм) функтора X: $\Delta\to\mathscr{C}$ в функтор Y: $\Delta\to\mathscr{C}$, т. е. такая система морфизмов f_n: $X_n\to Y_n$, $n\geqslant 0$, критерии $\mathscr{C}$, что

$$d_if_{n+1}=f_nd_i,\quad 0\leqslant i\leqslant n+1,$$
$$s_if_n=f_{n+1}s_i,\quad 0\leqslant i\leqslant n.$$

Симплициальные объекты категории $\mathscr{C}$ и их симплициальные отображения образуют категорию $\Delta^\circ\mathscr{C}$.

Симплициальной гомотопией h: $f\simeq g$, связывающей симплициальные отображения f, g: $X\to Y$ симплициальных объектов категории С, наз. такое семейство морфизмов $h_i: X_n\to Y_{n+1}$, $0\leqslant i\leqslant n$, категории $\mathscr{C}$, что

$$d_0h_0=f_n;$$
$$d_nh_n=g_n;$$
$$d_ih_j=\begin{cases}h_{j-1}d_i, & \text{если } i<j,\\ d_jh_{j-1}, & \text{если } i=j>0,\\ h_jd_{i-1}, & \text{если } i>j+1;\end{cases}$$
$$s_ih_j=\begin{cases}h_{j+1}s_i, & \text{если } i\leqslant j,\\ h_js_{i-1}, & \text{если } i>j.\end{cases}$$

На основе этого определения в категории $\Delta^\circ\mathscr{C}$ над произвольной категорией $\mathscr{C}$ можно воспроизвести по существу всю обычную теорию гомотопий. В случае категории множеств или топологич. пространств функтор геометрич. реализации (см. *Симплициальное множество*) переводит эту «симплициальную» теорию в обычную.

Примеры С. о.: симплициальное множество, симплициальное топологич. пространство, симплициальное алгебраич. многообразие, симплициальная группа, симплициальная абелева группа, симплициальная алгебра Ли, симплициальное гладкое многообразие и т. д.

Каждая симплициальная абелева группа является цепным комплексом с граничным оператором $d=\Sigma(-1)^i d_i$.

Лит.: [1] Габриель П., Цисман М., Категории частных и теории гомотопий, пер. с англ., М., 1971; [2] May J. P., Simplicial objects in algebraic topology, Princeton, 1967; [3] Lamotke K., Semisimpliziale algebraische Topologie, B.— [u. a.], 1968. *С. Н. Малыгин, М. М. Постников.*

СИМПСОНА ФОРМУЛА — частный случай *Ньютона — Котеса квадратурной формулы*, в к-рой берутся три узла:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]. \qquad (1)$$

Пусть промежуток $[a, b]$ разбит на n частичных промежутков $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1, 2, \ldots, n-1$, длины $h=(b-a)/n$, при этом n считается четным числом, и для вычисления интеграла по промежутку $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ использована квадратурная формула (1):

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})\right].$$

Суммирование по k от 0 до $n/2-1$ левой и правой частей этого равенства приводит к составной С. ф.:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\{f(a)+f(b)+2[f(x_2)+f(x_4)+\ldots$$
$$\ldots+f(x_{n-2})]+4[f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{n-1})]\}, \qquad (2)$$

где $x_j=a+jh$, $j=0, 1, 2, \ldots, n$. Квадратурную формулу (2) также называют С. ф. (без добавления слова составная). Алгебраич. степень точности квадратурной формулы (2), как и формулы (1), равна 3.

Если подинтегральная функция $f(x)$ имеет непрерывную производную 4-го порядка на $[a, b]$, то погрешность $R(f)$ квадратурной формулы (2) — разность между левой и правой частями приближенного равенства (2) — имеет представление

$$R(f)=-\frac{b-a}{180}h^4 f^{(\mathrm{IV})}(\xi),$$

где ξ — нек-рая точка из промежутка $[a, b]$.

С. ф. названа по имени Т. Симпсона (Th. Simpson), получившего ее в 1743, хотя эта формула была известна ранее, напр. Дж. Грегори (J. Gregory, 1668). *И. П. Мысовских.*

СИМСОНА ПРЯМАЯ — прямая, на к-рой лежат основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки P окружности, описанной вокруг треугольника, на его стороны. С. п. делит на две равные части отрезок, соединяющий точку P с точкой пересечения высот треугольника. С. п. названа по имени Р. Симсона (R. Simson), хотя она впервые была указана ранее. *А. Б. Иванов.*

СИМУЛА (от англ. «SIMUlation LAnguage», т. е. «язык моделирования») — название двух алгоритмич. языков, разработанных на основе *алгола* в Норвежском вычислительном центре и неофициально различаемых как симула 1 и симула-67.

Симула 1 — *проблемно-ориентированный язык* для моделирования систем с дискретными событиями (напр., систем массового обслуживания), разработан в 1964. Спецификация модели сопоставляет компонентам системы (клиентам, станкам, материалам и т. п.) процессы. Процесс имеет атрибуты (структуру данных) и программу действий (алгоритм). Модель работает по принципу квазипараллелизма: в каждый момент активен только один процесс; исполняя свою программу, он может использовать свои и чужие атрибуты, порождать новые процессы, планировать себе и другим процессам события — новые фазы активности (применяя встроенное в язык понятие дискретного времени), приостановить себя. Реализация С.1 привела к разработке алгоритмич.

средств большой общности, позволяющих выразить также иные подходы к моделированию (и не только дискретному). Включение их в язык привело к созданию С.-67.

С и м у л а - 6 7 определена как база для построения проблемно-ориентированных языков. Ее элементарные средства включают весь алгол-60 (с небольшими изменениями), а механизм расширения основан на концепции к л а с с а о б ъ е к т о в.

Понятие объекта возникло из понятия процесса С.1 путем абстрагирования от сравнительно частной организации квазипараллельного исполнения в терминах дискретного времени. Оригинальные средства задания программы и атрибутов объектов через описания классов составляют главное достижение С.-67. Особенно важен принцип п р е ф и к с а ц и и к л а с с о м, позволяющий включить в описание нового класса объектов (напр., класса «студент») атрибуты и действия более общего класса (напр., «человек»). Префиксация применима и к блокам в смысле алгола; такой б л о к с п р е ф и к с о м получает «пролог» и «эпилог» из программы своего префикса, а также все его атрибуты (переменные и *процедуры*). Это позволяет оформить разработку проблемно-ориентированного языка как описание класса. В частности, поставив префиксом стандартный класс SIMULATION, пользователь получает доступ к средствам, эквивалентным средствам С. 1 (и описанным через базу).

Идеи С.-67 оказали большое влияние на позднейшие языки программирования. Понятие объекта как сочетания действий и данных привело к концепции а к т о р а во многих языках программирования задач искусственного интеллекта и повлияло на развитие концепции абстрактных типов данных. Непосредственно средствами С.-67, помимо языков моделирования, описаны языки работы с базами данных, машинной графики и т. д.

С.-67 реализована на БЭСМ-6 и ЕС ЭВМ.

Лит.: [1] Д а л О. И., Н и г а р д К., СИМУЛА — язык для программирования и описания систем с дискретными событиями, пер. с англ., «Алгоритмы и алгоритмические языки», 1967, в. 2, с. 3—72; [2] Д а л У. И., М ю р х а у г Б., Н ю г о р д К., СИМУЛА-67 универсальный язык программирования, пер. с англ., М., 1969. *В. В. Окольнишников, С. Б. Покровский.*

СИНГУЛЯРНАЯ ФУНКЦИЯ — отличная от постоянной непрерывная *ограниченной вариации функция*, производная к-рой почти всюду на рассматриваемом отрезке равна нулю. С. ф. входят в качестве слагаемых в *Лебега разложение* функций ограниченной вариации. Напр., всякая непрерывная функция ограниченной вариации $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ единственным образом представима в виде суммы $f(x)=\varphi(x)+r(x)$, где $\varphi(x)$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\varphi(a)=f(a)$, а $r(x)$ есть С. ф. или тождественный нуль.

П р и м е р. Пусть $X=[0, 1]$. Любое $x\in X$ может быть представлено в виде

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}=0,\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots,$$

где $\alpha_i=0$, 1 или 2, $i=1, 2, \ldots$ При этом если $x\in C$, где C — *канторово множество*, то $\alpha_i=0$ или 2, $i=1, 2, \ldots$. Пусть $n=n(x)$ — первый индекс, при к-ром $\alpha_n=1$; если таких индексов нет, то полагают $n(x)=\infty$. Функция

$$\psi(x)=\sum_{1\leqslant i<n}\frac{\alpha_i}{2^{i+1}}+\frac{1}{2^n}$$

является монотонной С. ф.

Лит.: [1] Л е б е г А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.—Л., 1934; [2] Н а т а н с о н И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974; [3] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.
Б. И. Голубов.

СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, содержащее искомую функцию под знаком несобственного интеграла в смысле главного значения по Коши. В зависимости от размерности многообразия, по к-рому распространены интегралы, различают одномерные и многомерные С. и. у. По сравнению с теорией уравнений Фредгольма теория С. и. у. является более сложной. Так, напр., теории одномерных и многомерных С. и. у. как в смысле формулировок окончательных результатов, так и применяемых для их установления методов значительно отличаются друг от друга. Теория одномерных С. и. у. разработана более полно, причем ее результаты формулируются проще, чем аналогичные результаты в многомерном случае. Ниже в основном будет рассмотрен одномерный случай.

Важным классом одномерных С. и. у. являются уравнения с ядром Коши:

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\int_\Gamma k(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),\quad t\in\Gamma, \tag{1}$$

где a, b, k, f — известные функции, из к-рых k — ядро Фредгольма (см. *Интегральный оператор*), φ — искомая функция, Γ — плоская линия, а несобственный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, т. е.

$$\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,\quad t\in\Gamma,$$

где $\Gamma_\varepsilon=\Gamma\setminus l_\varepsilon$, l_ε обозначает дугу $t't t''$ линии Γ такую, что длины дуг tt' и tt'' равны ε.

Оператор K, определяемый левой частью равенства (1), наз. сингулярным оператором (иногда его наз. общим сингулярным оператором):

$$K=aI+bS+V, \tag{2}$$

где I — тождественный оператор, S — сингулярный интегральный оператор (иногда его наз. сингулярным интегральным оператором с ядром Коши), т. е.

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,\ t\cup\Gamma,$$

V — интегральный оператор с ядром $k(t,\tau)$.

Оператор $K_0=aI+bS$ наз. характеристической частью сингулярного оператора K, или характеристическим сингулярным оператором, а уравнение

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau=f(t),\ t\in\Gamma, \tag{3}$$

— характеристическим С. и. у., функции a, b — коэффициентами соответствующего оператора или уравнения.

Уравнение

$$a(t)\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+$$
$$+\int_\Gamma k(\tau,t)\psi(\tau)\,d\tau=g(t),\ t\in\Gamma,$$

наз. союзным с уравнением (1), а оператор $K'=aI+SbI+V'$ (V' — интегральный оператор с ядром $k(\tau,t)$) — союзным с оператором K. В частности, $K_0'=aI+SbI$ является союзным с K_0.

Операторы K, K_0, K', K_0' или соответствующие им уравнения наз. нормального типа, если функции

$$A=a+b,\ B=a-b$$

не обращаются в нуль нигде на Γ. В этом случае говорят также, что коэффициенты оператора или уравнения удовлетворяют условию нормальности.

Пусть $H_\alpha(\Gamma)$, $0<\alpha\leqslant 1$,— класс функций $\{f\}$, определенных на Γ и удовлетворяющих условию

$$\forall\,(t_1,\ t_2\in\Gamma)\,|\,f(t_1)-f(t_2)\,|\leqslant \mathrm{const}\,|\,t_1-t_2\,|^{\alpha}.$$

Когда предполагается, что функция f принадлежит классу $H_\alpha(\Gamma)$ при нек-ром допустимом значении α и не требуется знания численного значения α, то будет употребляться обозначение $f\in H(\Gamma)$ или $f\in H$, если из контекста ясно, о какой линии Γ идет речь.

Множество H наз. функциональным классом Гёльдера; если $f\in H$, то говорят, что f удовлетворяет условию Гёльдера или что f является H-функцией.

Пусть G — комплекснозначная непрерывная функция, не обращающаяся в нуль на ориентированной замкнутой простой гладкой линии Γ, и

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi}\,[\arg G(t)]_\Gamma\,, \tag{4}$$

где $[\ ]_\Gamma$ обозначает приращение функции, заключенной в скобках, при однократном обходе линии Γ в положительном направлении. Целое число $\varkappa$ наз. индексом функции G: $\varkappa=\mathrm{ind}G$.

Решение характеристического и союзного с ним С. и. у. Пусть Γ — простая замкнутая, ориентированная гладкая линия, на к-рой положительное направление выбрано так, что оно оставляет конечную область с границей Γ слева, начало координат лежит в этой области и a, b, $f\in H(\Gamma)$, причем a, b удовлетворяют условию нормальности. Пусть, далее $\varkappa$ определено равенством (4), в к-ром

$$G=\frac{a-b}{a+b}\ . \tag{5}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если $\varkappa\geqslant 0$, то уравнение (3) разрешимо в классе $H(\Gamma)$ при любой правой части $f\in H(\Gamma)$ и все его H-решения представляются (см. [1], [2]) формулой

$$\varphi(f)=a_*(t)\,f(t)-\frac{b_*(t)\,\omega(t)}{\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\tau)}{\omega(\tau)\,(\tau-t)}\,d\tau+ \\ +b_*(t)\,\omega(t)\,p_{\varkappa-1}(t), \tag{6}$$

где

$$a_*=\frac{a}{a^2-b^2}\,,\ b_*=\frac{b}{a^2-b^2}\,,$$

$$\omega(t)=t^{-\frac{\varkappa}{2}}\sqrt{a^2(t)-b^2(t)}\,\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\ln[\tau^{-\varkappa}G(\tau)]}{\tau-t}\,d\tau\right],$$

$p_{\varkappa-1}$— произвольный многочлен степени $\varkappa-1$ ($p_{-1}=0$). Если $\varkappa<0$, то уравнение (3) разрешимо в классе $H(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда правая часть f удовлетворяет условиям

$$\int_\Gamma\frac{t^k}{\omega(t)}\,f(t)\,dt=0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ -\varkappa-1.$$

При соблюдении этих условий уравнение (3) имеет единственное H-решение, определяемое формулой (6), в к-рой $p_{\varkappa-1}=0$.

2) Союзное с (3) С. и. у.

$$a(t)\,\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{b(\tau)\,\psi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=g(t),\ t\in\Gamma, \tag{7}$$

разрешимо в классе H при любой правой части $g\in H(\Gamma)$, если $\varkappa\leqslant 0$, и все его H-решения представляются формулой

$$\psi(t)=a_*(t)\,g(t)+ \\ +\frac{1}{\pi i\omega(t)}\int_\Gamma\frac{\omega(\tau)\,b_*(\tau)\,g(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{p_{-\varkappa-1}(t)}{\omega(t)}\,. \tag{8}$$

Если же $\varkappa>0$, то уравнение (7) разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть g удовлетворяет $\varkappa$ условиям:

$$\int_\Gamma t^k b_*(t)\,\omega(t)\,g(t)\,dt=0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ \varkappa-1,$$

при соблюдении к-рых решение дается формулой (8), где нужно положить $p_{-\varkappa-1}=0$.

Теоремы Нётера. Пусть ν и ν' — числа линейно независимых решений однородных уравнений $K_0'\varphi=0$ и $K_0'\psi=0$ соответственно. Тогда разность $\nu-\nu'$ наз. индексом оператора K_0 или уравнения $K_0\varphi=0$:

$$\operatorname{ind} K_0=\nu-\nu'.$$

Теорема 1. Однородные С. и. у. $K_0\varphi=0$ и $K_0'\psi=0$ имеют конечное число линейно независимых решений.

Теорема 2. Необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородного уравнения (3) заключаются в том, что

$$\int_\Gamma f(t)\,\psi_j(t)\,dt=0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu',$$

где $\psi_1,\ \ldots,\ \psi_{\nu'}$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения $K_0'\psi=0$.

Теорема 3. Индекс оператора K_0 равен индексу функции G, определяемой равенством (5), т. е.

$$\operatorname{ind} K_0=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a-b}{a+b}\right]_\Gamma. \qquad (9)$$

Эти теоремы остаются в силе и в случае общего С. и. у. (1), то есть в сформулированных теоремах операторы K_0, K_0' можно заменить операторами K, K'. Надо только иметь в виду, что в случае общих С. и. у. числа ν и ν', вообще говоря, оба отличны от нуля, в отличие от характеристических С. и. у., когда одно из этих чисел обязательно равно нулю.

Теоремы 1—3 наз. теоремами Нётера, в честь Ф. Нётера (F. Noether), впервые доказавшего их [9] в случае одномерного С. и. у. с *Гильберта ядром*:

$$a(s)\varphi(s)+\frac{b(s)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,dt+$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi}k(s,\ t)\varphi(t)\,dt=f(s),\ \ -\pi\leqslant s\leqslant\pi. \qquad (10)$$

Эти теоремы аналогичны теоремам Фредгольма (см. *Фредгольма уравнение*) и отличаются от них только тем, что числа линейно независимых решений однородного уравнения и союзного с ним уравнения, вообще говоря, различны, т. е. тогда как индекс уравнения Фредгольма всегда равен нулю, С. и. у. может иметь отличный от нуля индекс.

Формулы (6), (8) так же, как теоремы Нётера, остаются в силе и в случае, когда $\Gamma=\bigcup\Gamma_k$ состоит из конечного числа гладких взаимонепересекающихся замкнутых линий. В этом случае в равенстве (4) символ $[\ ]_\Gamma$ обозначает сумму приращений выражения, заключенного в скобках при обходе отдельных линий Γ_k. Случай же, когда Γ— конечная совокупность гладких разомкнутых взаимонепересекающихся линий ($\Gamma=\bigcup\Gamma_k$), требует специального рассмотрения.

Если функция φ является H-функцией внутри каждой из закрытой части линий Γ_k, не содержащей концов этой линии, вблизи же любого конца c представима в виде $\varphi(t)=\varphi_*(t)|t-c|^{-\alpha}$, $0\leqslant\alpha=\text{const}<1$, где φ_* является H-функцией в окрестности c, включая c, то говорят, что φ принадлежит классу H^*. Если $a,\ b\in H$, $f,\ g\in H^*$ и решения уравнений (3), (7) разыскиваются в классе H^*, то можно так определить число $\varkappa$ и функцию ω, что и в этом случае остаются в силе формулы (6), (8). Далее, если соответствующим

образом определить подклассы класса H^*, в к-рых разыскиваются решения данного и союзного с ним С. и. у., то остаются в силе и теоремы Нётера (см. [1]).

Указанные выше результаты обобщены в различных направлениях. Показано (см. [1]), что при нек-рых условиях они остаются справедливыми и в случае кусочно гладкой линии Γ (т. е. когда Γ-объединение конечного числа гладких разомкнутых дуг, к-рые могут попарно пересекаться только по своим концам). С. и. у. исследованы также в функциональных пространствах Лебега $L_p(\Gamma)$ и $L_p(\Gamma, \rho)$, где $p>1$, а ρ — нек-рый вес (см. [4] — [7]). В работах [4] — [6] приведены результаты, к-рые непосредственно обобщают выше сформулированные утверждения.

Пусть уравнение простой спрямляемой линии Γ есть $t=t(s)$, $0\leqslant s\leqslant\gamma$, где s — дуга этой линии, отсчитываемая от нек-рой фиксированной точки на ней, γ — длина Γ. Говорят, что функция f, определенная на Γ, почти всюду конечна, измерима, интегрируема и т. д., если функция $f(t(s))$ на сегменте $[0, \gamma]$ обладает соответствующим свойством. Интеграл Лебега от f на Γ определяют равенством

$$\int_\Gamma f(t)\,dt = \int_0^\gamma f(t(s))\,t'(s)\,ds.$$

Через $L_p(\Gamma)$ обозначается множество измеримых на Γ функций таких, что $|f|^p$ интегрируема на Γ. Функциональный класс $L_p(\Gamma)$, $p\geqslant 1$, превращается в банахово пространство, если норму элемента f определить равенством

$$\|f\| = \left(\int_\Gamma |f|^p\,ds\right)^{1/p}.$$

Если в уравнениях (3), (7), в к-рых равенства соблюдаются почти всюду, коэффициенты a, b непрерывны и удовлетворяют условию нормальности, f, $g\in L_p(\Gamma)$, $p>1$, то остаются в силе утверждения 1) и 2), если в них класс H заменить классом $L_p(\Gamma)$, $p>1$. Далее, если решения уравнения $K\varphi=f$, где оператор K имеет вид (2), разыскиваются в банаховом пространстве $L_p(\Gamma)$, $p>1$, а решения союзного однородного с ним уравнения $K'\psi=0$ — в пространстве $L_{p'}(\Gamma)$, где $p'=p/(p-1)$, то остаются в силе и теоремы Нётера, причем V может быть любым вполне непрерывным оператором в $L_p(\Gamma)$.

Когда Γ является конечной совокупностью разомкнутых линий или Γ замкнута, но коэффициенты С. и. у. терпят разрывы, то решения уравнений часто разыскиваются в весовых функциональных пространствах $L_p(\Gamma, \rho)$, $p>1$ ($f\in L_p(\Gamma, \rho)\Longleftrightarrow \rho f\in L_p(\Gamma)$). При определенных условиях относительно весовой функции ρ остаются справедливыми результаты, аналогичные вышеприведенным.

Задача регуляризации. Одной из основных задач, возникающих при построении теории С. и. у., является задача регуляризации, т. е. задача приведения С. и. у. к уравнению Фредгольма.

Пусть E и E_1 — банаховы пространства, к-рые могут и совпадать, A — линейный ограниченный оператор $A: E\to E_1$. Ограниченный оператор B наз. левым регуляризатором оператора A, если $BA=I+V$, где I, V — тождественный и вполне непрерывный операторы в E. Если уравнения $A\varphi=f$ и $BA\varphi=Bf$ эквивалентны, каков бы ни был элемент $f\in E_1$, то B наз. левым эквивалентным регуляризатором оператора A. Ограниченный оператор B наз. правым регуляризатором оператора A, если $AB=I_1+V_1$, где I_1, V_1 — тождественный и вполне непрерывный операторы в E_1 соответственно. Если при любом $f\in E_1$ уравнения $A\varphi=f$ и $AB\psi=f$ одновременно разрешимы или неразрешимы, причем в случае разрешимости

между их решениями существует связь $\varphi = B\psi$, то B наз. правым эквивалентным регуляризатором оператора A. Если B является одновременно левым и правым регуляризатором оператора A, то его наз. двусторонним регуляризатором, или просто регуляризатором, оператора A. Говорят, что оператор A допускает регуляризацию левую, правую, двустороннюю, эквивалентную, если существует его регуляризатор (соответственно левый, правый, двусторонний, эквивалентный).

Пусть K — оператор, определяемый равенством (2), где Γ — замкнутая простая гладкая линия, a, b суть H-функции (или непрерывные функции), удовлетворяющие условию нормальности, V — вполне непрерывный оператор в пространстве $L_p(\Gamma)$, $p>1$. Тогда в этом последнем пространстве оператор K имеет бесчисленное множество регуляризаторов, среди к-рых находится, напр., оператор

$$M = \frac{a}{a^2-b^2} I - \frac{b}{a^2-b^2} S.$$

Для того чтобы оператор K допускал левую эквивалентную регуляризацию, необходимо и достаточно, чтобы индекс $\varkappa$ оператора K был неотрицательным [7]. В качестве эквивалентного левого регуляризатора можно взять оператор M. Если $\varkappa<0$, то оператор K допускает правую эквивалентную регуляризацию, к-рую можно осуществить с помощью оператора M (см. [1]).

Системы С. и. у. Если в (1) a, b, k — квадратные матрицы n-го порядка, рассматриваемые как матрицы линейных преобразований искомого вектора $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, а $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — известный вектор, то (1) наз. системой С. и. у. Система (1) наз. нормального типа, если матрицы $A=a+b$ и $B=a-b$ неособенные на Γ, то есть $\forall (t \in \Gamma)$ $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$.

Теоремы Нётера остаются в силе для системы С. и. у. в классе H (см. [1], [3]) и обобщаются на случай функциональных пространств Лебега (см. [4], [5]). В отличие от одного уравнения характеристич. системы С. и. у. в общем случае не решаются в квадратурах, но для вычисления индекса и в этом случаен айдена (см. [1]) формула, аналогичная формуле (9):

$$\operatorname{ind} K = \frac{1}{2\pi} [\arg \det A^{-1} B]_\Gamma .$$

В случае системы С. и. у. задачи регуляризации (см. [3]) аналогичны задачам регуляризации для одного С. и. у.

В различных постановках исследованы как одно С. и. у., так и их системы, когда нарушаются условия нормальности (см. [11] и указанную там библиографию).

Многомерные С. и. у. Так называются уравнения вида

$$a(t)\varphi(t) + \int_\Gamma \frac{g(t, \vartheta)}{r^m} \varphi(\tau)\, d\tau + (V\varphi)(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{11}$$

где Γ — область евклидова пространства E_m, $m>1$; Γ может быть конечной или бесконечной, в частности может совпасть с E_m; t, τ — точки пространства E_m, $r=|t-\tau|$, $\vartheta=(\tau-t)/r$, $d\tau$ — элемент объема в пространстве E_m, V — вполне непрерывный оператор в банаховом функциональном пространстве, в к-ром ищется решение φ; a, g — заданные функции; несобственный сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения, т. е.

$$\int_\Gamma \varphi(\tau) \frac{g(t, \vartheta)}{r^m} d\tau = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma \setminus \{r<\varepsilon\}} \varphi(\tau) \frac{g(t, \vartheta)}{r^m} d\tau; \tag{12}$$

точка t наз. полюсом, функция $g(t, \vartheta)$ — характеристикой, функция φ — плотностью спи-

гулярного интеграла (12). Предел в равенстве (11), как правило, не существует, если не выполняется условие

$$\int_{\sigma} g(t, \vartheta)\, d\sigma = 0, \qquad (13)$$

где σ — единичная сфера с центром в начале координат. Поэтому условие (13) всегда предполагается выполненным.

В теории многомерных С. и. у. важную роль играет понятие символа сингулярного оператора A, к-рый строится с помощью функций a, g, причем по данному символу сингулярный оператор восстанавливается с точностью до вполне непрерывного слагаемого. Композиции сингулярных операторов соответствует произведение их символов. Доказано [7], что при нек-рых ограничениях уравнение (11) допускает регуляризацию в пространстве L_p, $p>1$, тогда и только тогда, когда модуль его символа имеет положительную нижнюю грань и в этом случае справедливы теоремы Фредгольма.

Историческая справка. Исследование одномерных С. и. у. было начато почти одновременно с построением теории *Фредгольма уравнения* в работах Д. Гильберта (D. Hilbert) и А. Пуанкаре (A. Poincaré). В одном частном случае С. и. у. с ядром Коши было рассмотрено гораздо раньше в докторской диссертации Ю. В. Сохоцкого, опубликованной в Петербурге в 1873; однако это исследование осталось незамеченным.

Основополагающие результаты по построению общей теории уравнения (1), (10) были получены в нач. 20-х гг. 20 в. Ф. Нётером [9] и Т. Карлеманом [10]. Ф. Нётер впервые ввел понятие индекса и доказал сформулированные выше теоремы 1—3 с помощью применения способа левой регуляризации. Этот способ впервые был указан (в различных частных случаях) А. Пуанкаре и Д. Гильбертом, но в общем виде он появляется именно у Ф. Нётера. Основным моментом в реализации упомянутого способа является применение формулы перестановки (композиции) в повторных сингулярных интервалах в смысле главного значения по Коши *(Пуанкаре — Бертрана формула)*. Т. Карлеман для нек-рых частных классов уравнения (3) дал основную идею метода редукции этого уравнения к следующей *граничной задаче теории аналитических функций* (задача линейного сопряжения, см. [1]):

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma,$$

и указал путь построения явного решения. Т. Карлеману и И. Н. Векуа принадлежит способ регуляризации уравнения (1) с привлечением решения характеристич. уравнения (3).

Большое теоретическое и прикладное значение С. и. у. особенно проявилось с кон. 30-х гг. в связи с решением нек-рых весьма важных задач механики сплошной среды (теории упругости, гидро- и аэромеханики и др.) и теоретич. физики. Теория одномерных С. и. у. была значительно продвинута в 40-х гг. и получила в определенном смысле законченный вид в трудах советских математиков. Изложение такой теории одномерных С. и. у. в гёльдеровых классах функций дано в монографии одного из создателей этой теории Н. И. Мусхелишвили (см. [1]). Эта монография стимулировала научные исследования и в нек-рых других направлениях, напр. в теории С. и. у., не удовлетворяющих условию нормальности по Хаусдорфу, С. и. у. с недиагональными особенностями (со смещениями), уравнений Винера — Хопфа, многомерных С. и. у. и т. д.

Первые исследования по многомерным С. и. у. принадлежат Ф. Трикоми (F. Tricomi, 1928), к-рый установил формулу перестановки двумерных сингулярных

интегралов и применил ее к решению одного класса С. и. у. В этом направлении фундаментальное исследование принадлежит Ж. Жиро (G. Giraud, 1934), доказавшему справедливость теорем Фредгольма для некрых классов многомерных С. и. у. на ляпуновских многообразиях.

Лит.: [1] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [2] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977; [3] Векуа Н. П., Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, 2 изд., М., 1970; [4] Хведелидзе Б. В., «Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН Груз. ССР», 1956, т. 23, с. 3—158; [5] Данилюк И. И., Нерегулярные граничные задачи на плоскости, М., 1975; [6] Гохберг И. Ц., Крупник Н., Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов, Киш., 1973; [7] Михлин С. Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962; [8] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [9] Noether F., «Math. Ann.», 1921, Bd 82, S. 42—63; [10] Carleman T., «Arkiv mat., astron. och fys.», 1922, Bd 16, № 26, S. 1—19; [11] Пресдорф З., Некоторые классы сингулярных уравнений, пер. с нем., М., 1979. *А. В. Бицадзе, Б. В. Хведелидзе.*

СИНГУЛЯРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей в $\mathbb{R}^n$, сосредоточенное на множестве нулевой меры Лебега и приписывающее каждому одноточечному множеству нулевую вероятность.

На прямой $\mathbb{R}^1$ определение С. р. эквивалентно следующему: распределение сингулярно, если соответствующая функция распределения непрерывна, а ее множество точек роста имеет нулевую меру Лебега.

Примером С. р. на прямой может служить распределение, сосредоточенное на канторовом множестве, т. н. канторово распределение, к-рое можно описать следующим образом. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из к-рых принимает значения 0 и 1 с вероятностями $^1/_2$. Тогда случайная величина

$$Y=2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{3^j}X_j$$

имеет канторово распределение, и его характеристич. функция равна

$$f(t)=e^{it/2}\prod_{j=1}^{\infty}\cos\frac{t}{3^j}.$$

Пример С. р. в $\mathbb{R}^n$ ($n\geqslant 2$) — равномерное распределение на сфере положительного радиуса.

Свертка двух С. р. может быть либо сингулярной, либо абсолютно непрерывной, либо представлять собой смесь сингулярного и абсолютно непрерывного распределений.

Любое вероятностное распределение P может быть единственным образом представлено в виде

$$P=a_1P_d+a_2P_a+a_3P_s,$$

где P_d — дискретное, P_a — абсолютно непрерывное, а P_s — С. р., $a_i\geqslant 0$, $a_1+a_2+a_3=1$ (разложение Лебега).

Иногда сингулярность понимается в более широком смысле: вероятностное распределение F является С. р. по отношению к мере P, если оно сосредоточено на множестве N таком, что $P\{N\}=0$. При таком определении каждое дискретное распределение является С. р. по отношению к мере Лебега.

По поводу сингулярных функций множеств см. также *Абсолютная непрерывность* функции множества.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967. *В. Г. Ушаков.*

СИНГУЛЯРНЫЕ ГОМОЛОГИИ — гомологии, определяемые исходя из сингулярных симплексов топологич. пространства X таким же образом, как обычные (симплициальные) гомологии (и когомологии) полиэдра — исходя из линейных симплексов. Под сингу-

лярным симплексом σ^n понимается непрерывное отображение n-мерного *стандартного симплекса* Δ^n в X, причем образ σ^n обычно наз. носителем σ^n и обозначается $|\sigma^n|$. Сингулярные цепи — это формальные линейные комбинации сингулярных симплексов коэффициентами в абелевой группе G. Они образуют группу $S_n(X; G)$, изоморфную прямой сумме групп $G_{\sigma^n = G}$ (по всем σ^n). Группы цепей объединяются в сингулярный цепной комплекс $S_*(X; G)$ с граничным гомоморфизмом ∂: $S_n(X; G) \to S_{n-1}(X; G)$, определяемым соотношением

$$\partial\sigma^n = \sum_i (-1)^i \sigma_i^{n-1},$$

где σ_i^{n-1} — композиция с σ^n стандартного наложения Δ^{n-1} на i-ю грань Δ^n. Как обычно, циклами считаются цепи, принадлежащие ядру, а границами — цепи, содержащиеся в образе ∂^n. Группа n-мерных сингулярных гомологий $H_n^S(X; G)$ определяется как факторгруппа группы n-мерных циклов по подгруппе границ.

Если $A \subset X$, то группы $H_n^S(A; G)$ определяются подкомплексом в $S_*(X; G)$, состоящим из всех цепей с носителями в A, а группы пары $H_n^S(X, A; G)$ — соответствующим факторкомплексом. Имеет место точная гомологич. последовательность

$$\ldots \longrightarrow H_n^S(A; G) \longrightarrow H_n^S(X; G) \longrightarrow H_n^S(X, A; G) \xrightarrow{\delta} \longrightarrow H_{n-1}^S(A; G) \longrightarrow \ldots,$$

являющаяся ковариантным функтором на категории пар (X, A) топологич. пространств и их непрерывных отображений.

Гомоморфизм δ определяется границей в X цикла пары (X, A), представляющего соответствующий элемент из $H_n^S(X, A; G)$. С. г.— гомологии с компактными носителями в том смысле, что группы X равны прямому пределу гомологий компактных $C \subset X$.

Сингулярные когомологии определяются *дуальным образом*. Комплекс коцепей $S^*(X; G)$ определяется как комплекс гомоморфизмов в G комплекса целочисленных сингулярных цепей $S_*(X; \mathbb{Z})$. Менее формально, коцепи — это функции ξ, определенные на сингулярных симплексах и принимающие значения в G, а кограничный гомоморфизм d определяется формулой

$$(d\xi)(\sigma^{n+1}) = \sum_i (-1)^i \xi(\sigma_i^n).$$

Сингулярные когомологии $H_S^n(X; G)$ — это факторгруппы групп n-мерных коциклов (ядер d) по подгруппам кограниц (образов d). Когомологии подпространства A совпадают с когомологиями ограничения $S^*(X; G)$ на A, в то время как когомологии пары $H_S^n(X, A; G)$ — с подкомплексом в $S^*(X; G)$, состоящим из всех коцепей, обращающихся в нуль на сингулярных симплексах из A. Имеет место точная последовательность

$$\ldots \longrightarrow H_S^n(X, A; G) \longrightarrow H_S^n(X; G) \longrightarrow \longrightarrow H_S^n(A; G) \xrightarrow{\delta} H_S^{n+1}(X, A; G) \longrightarrow \ldots,$$

являющаяся контравариантным функтором (X, A). Отображение δ определяется кограницей в X коцикла из A, представляющего нужный элемент $H_S^n(A; G)$.

Гомологии и когомологии с коэффициентами в произвольной группе G могут быть выражены через целочисленные гомологии с помощью формул универсальных коэффициентов. Когомологии с коэффициентами в группе G связаны с целочисленными когомологиями формулами универсальных коэффициентов только для конечно порожденных групп G.

В категории полиэдров сингулярная теория эквивалентна симплициальной (а также клеточной). Этим обычно устанавливается топологич. инвариантность последних. Однако значение групп С. г. этим не исчерпывается. Имея простое описание, они применимы в достаточно широких категориях топологич. пространств, гомотопически инвариантны. Естественные связи с теорией гомотопий делают сингулярную теорию незаменимой в гомотопич. топологии.

Однако, хотя группы С. г. определены для любых топологич. пространств без каких-либо ограничений, их применение оправдано лишь при существенных ограничениях типа локальной стягиваемости или гомологической локальной связности. Сингулярные цепи, будучи по своей природе «слишком» линейно связными, не несут в себе информацию о «непрерывных» циклах, если они не являются «достаточно» линейно связными. Возможны и другие «аномалии» (напр., гомологии компактных подпространств евклидова пространства могут отличаться от нуля в сколь угодно высоких размерностях, гомологии и когомологии пары (X, A) могут неизоморфно отображаться при отображении X на факторпространство X/A, отвечающее замкнутому подмножеству $A \subset X$, и т. п.). Поэтому в общих категориях топологич. пространств вместо сингулярных обычно используются когомологии Александрова — Чеха и ассоциированные с ними гомологии. Эти теории свободны от указанных недостатков и совпадают с сингулярной всякий раз, когда ее применение не вызывает сомнений.

Лит.: [1] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976; [2] Масси У., Теория гомологий и когомологий, пер. с англ., М., 1981, гл. 8—9; [3] Скляренко Е. Г., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 6, с. 90—118; [4] Massey W., Singular homology theory, N. Y., 1980.

Е. Г. Скляренко.

СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл

$$I_n(f, x) = \int_a^b f(t)\, \Phi_n(t, x)\, dt$$

с особенностью в точке x, определенный для интегрируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$, ядро к-рого $\Phi_n(t, x)$ удовлетворяет условиям: для любого $\delta > 0$ и произвольного интервала $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[a, b] \cap [x-\delta, x+\delta]} \Phi_n(t, x)\, dt = 1, \qquad (1)$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[\alpha, \beta] - [x-\delta, x+\delta]} \Phi_n(t, x)\, dt = 0 \qquad (2)$$

и

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t \in [a, x-\delta] \cup [x+\delta, b]} |\Phi_n(t, x)| \leqslant \Phi_x(\delta). \qquad (3)$$

причем $\Phi_x(\delta)$ зависит только от δ и x и не зависит от n. Если условия (1), (2) и (3) выполняются равномерно на x-множестве $E \subset [a, b]$, то интеграл $I_n(f, x)$ наз. равномерно сингулярным на E. Наиболее изучены свойства т. н. положительных ядер $(\Phi_n(t, x) \geqslant 0)$, Дирихле ядер

$$D_n(t, x) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}},$$

ядер Фейера

$$F_n(t, x) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}(t-x)}{2(n+1) \sin^2 \frac{t-x}{2}},$$

ядер Пуассона — Абеля

$$P_r(t, x) = \frac{1-r^2}{2[1-2r\cos(t-x)+r^2]},\ 0 \leqslant r < 1,$$

ядер, порожденных различными методами суммирования ортогональных разложений по ортонормированным полиномам.

Понятие «С. и.» введено А. Лебегом [1], указавшим на его важность при исследовании вопросов сходимости. Так, к исследованию сходимости С. и. приводят вопросы сходимости и суммируемости тригонометрич. рядов Фурье, рядов по ортогональным многочленам, а также разложений по общим ортогональным системам.

А. Лебегом был установлен критерий сходимости С. и. для непрерывных функций $f(x)$ с ограниченной вариацией. Д. К. Фаддеев [2] установил необходимые и достаточные условия для сходимости С. и. в точках Лебега суммируемой функции $f(x)$. Так как данные А. Лебегом и Д. К. Фаддеевым условия сходимости С. и. трудно проверяемы для конкретных С. и., то целый ряд работ был посвящен отысканию эффективных достаточных условий сходимости С. и. как в отдельных точках, так и для равномерной сходимости. Для сходимости С. и. в точках непрерывности достаточна ограниченность нормы оператора $I_n(f, x)$, т. е. ограниченность интеграла

$$\int_a^b |\Phi_n(t, x)|\, dt,$$

а для сходимости в точках Лебега необходимо существование т. н. «горбатой мажоранты» для ядра $\Phi_n(t, x)$, т. е. такой интегрируемой функции $\Psi_n(t, x) \geqslant 0$, к-рая монотонно возрастает на $[a, x)$, монотонно убывает на $(x, b]$ и для почти всех $t \in [a, b]$

$$|\Phi_n(t, x)| \leqslant \Psi_n(t, x),$$

причем

$$\int_a^b \Psi_n(t, x)\, dt = O(1).$$

Лит.: [1] Lebesque H., «Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse», 1909, v. 1, p. 25—117; [2] Фаддеев Д. К., «Матем. сб.», 1936, т. 1, с. 351—68; [3] Коровкин П. П., Линейные операторы и теория приближений, М., 1959; [4] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974; [5] Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963; [6] Ефимов А. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1960, т. 24, в. 5, с. 743—56; [7] Теляковский С. А., там же, 1964, т. 28, в. 6, с. 1209—36.

А. В. Ефимов.

СИНТАКСИС в математической логике — описание и изучение формальной аксиоматич. теории как чисто знаковой системы (в отличие от *семантики*, исследующей смысл и содержание объектов формальной теории). Различие между С. и семантикой особенно существенно в основаниях математики, когда изучаются формальные теории, семантика к-рых интуитивно недостаточно ясна. В этом случае описание и исследование С. формальной теории часто может быть осуществлено гораздо более надежными и интуитивно убедительными средствами в рамках нек-рой *метатеории* и, таким образом, может служить обоснованием и косвенным разъяснением существенных черт сложной семантики изучаемой теории. Напр., в *аксиоматической теории множеств* известный результат К. Гёделя (K. Gödel) о совместности аксиомы выбора можно трактовать как синтаксическое и финитно доказываемое утверждение о том, что если формальная теория Цермело — Френкеля непротиворечива, то она остается таковой и после присоединения аксиомы выбора.

Вне рамок оснований математики в *доказательств теории* различие между С. и семантикой не столь существенно. Употребляются т. н. полуформальные системы, понятие вывода в к-рых зависит от тех или иных семантич. соглашений. Формальные языки могут определяться существенно теоретико-множественно, с привлечением бесконечно длинных

формул и т. п. С другой стороны, для формальных языков с ограниченными выразительными возможностями типа языков *комбинаторной логики* или *алгоритмических языков* семантика может быть точно сформулирована в чисто синтаксических терминах самого языка.

Лит.: [1] Carnap R., Logische Syntax der Sprache, Wien, 1934; [2] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960; [3] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *А. Г. Драгалин.*

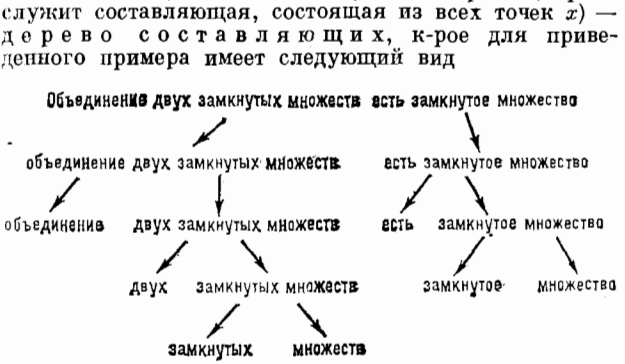
СИНТАКСИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА — математическая конструкция, используемая в *математической лингвистике* для описания строения предложений естественного языка. Наиболее широко употребляются два типа С. с.— системы составляющих и отношения синтаксического подчинения. Понятие системы составляющих можно определить следующим образом. Пусть x — непустая цепочка (*слово*) в *алфавите* V; *вхождения* символов (*букв*) в цепочку в дальнейшем наз. ее точками; множество точек цепочки, имеющее вид $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, где a, b — фиксированные точки, наз. отрезком цепочки. Множество C отрезков цепочки x наз. системой составляющих этой цепочки, если 1) C содержит отрезок, состоящий из всех точек x, и все одноточечные отрезки x; 2) любые два отрезка из C либо не пересекаются, либо один из них содержится в другом. Элементы C наз. составляющими. Если алфавит V интерпретируется как множество слов естественного языка и x — как предложение, то при подходящем выборе системы составляющих для x нетривиальные составляющие (т. е. отличные от входящих в C по п. 1) представляют собой словосочетания, т. е. группы слов, к-рые интуитивно ощущаются носителем языка как «синтаксически связные» куски предложения. Напр., предложение

„Объединение двух замкнутых множеств есть замкнутое множество"

допускает следующую «естественную» систему составляющих (границы нетривиальных составляющих отмечены скобками):

(Объединение (двух (замкнутых множеств))) (есть (замкнутое множество)).

Если на системе составляющих C введено отношение непосредственного включения, то C представляет собой по этому отношению дерево с корнем (корнем служит составляющая, состоящая из всех точек x) — дерево составляющих, к-рое для приведенного примера имеет следующий вид



Обычно составляющие снабжаются метками, к-рые представляют собой «синтаксические характеристики» словосочетаний (составляющая может иметь более одной метки). В приведенном примере составляющую, совпадающую со всем предложением, естественно пометить символом ПРЕДЛ, означающим

«предложение», составляющую «объединение двух замкнутых множеств» — символом $S_{\text{ср.ед.им}}$, означающим «группа существительного среднего рода в единственном числе и именительном падеже», и т. д. Получаемый при этом объект — дерево с помеченными вершинами — наз. размеченным деревом составляющих.

Другой способ описания строения предложения получается, если определить на множестве X точек цепочки x бинарное отношение $\rightarrow$ таким образом, чтобы граф $(X; \rightarrow)$ был (ориентированным) деревом с корнем. Всякое такое отношение наз. отношением (синтаксического) подчинения, а соответствующее дерево — деревом (синтаксического) подчинения. Понятие отношения подчинения является формализацией обычного в «школьной» грамматике, в частности русского языка, представления о подчинении одних слов в предложении другим. При графич. изображении дерева подчинения обычно располагают точки цепочки на горизонтальной прямой и проводят стрелки сверху от нее. Приведенное выше предложение допускает следующее «естественное» дерево подчинения:

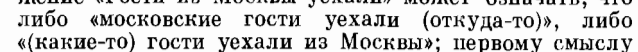


(корнем дерева подчинения принято считать сказуемое, т. к. оно представляет собой организующий элемент предложения).

Дуги дерева подчинения часто снабжаются метками, указывающими типы представляемых этими дугами синтаксич. связей. В рассмотренном примере связь между «есть» и «объединение» естественным образом получает «предикативный» тип, связь между «множеств» и «замкнутых» — «определительный» тип и т. д.

Деревья подчинения предложений, встречающихся в деловых и научных текстах, удовлетворяют, как правило, т. н. условию проективности, к-рое при указанном выше способе графич. изображения формулируется так: во всякую точку, лежащую под нек-рой стрелкой, идет путь из начала этой стрелки; отсюда следует, в частности, что никакие две стрелки не пересекаются (последнее условие иногда называют условием слабой проективности). В художественной литературе это условие часто нарушается, но такие нарушения обычно значимы, т. е. служат цели создания определенного художественного эффекта.

Одно предложение может допускать несколько различных «естественных» систем составляющих (деревьев подчинения). Чаще всего это бывает в тех случаях, когда смысл предложения можно понимать по-разному, и разные системы составляющих (деревья подчинения) отвечают разным толкованиям смысла (синтаксическая омонимия). Напр., предложение «Гости из Москвы уехали» может означать, что либо «московские гости уехали (откуда-то)», либо «(какие-то) гости уехали из Москвы»; первому смыслу отвечают система составляющих «(Гости (из Москвы)) уехали» и дерево подчинения



второму — соответственно «Гости ((из Москвы) уехали)» и



Если на цепочке задано дерево подчинения и α — точка цепочки, то множество точек цепочки, в к-рые идут пути из α (включая саму точку α), наз. г р у п п о й з а в и с и м о с т и точки α. Всякое множество, получающееся из группы зависимости точки α выбрасыванием групп зависимости нек-рых (или всех) точек, подчиненных α (т. е. таких, в к-рые из α идут дуги), наз. у с е ч е н н о й г р у п п о й з а в и с и м о с т и точки α.

Система составляющих C цепочки x и заданное на x дерево подчинения наз. с о г л а с о в а н н ы м и, если группы зависимости всех точек x являются составляющими и каждая составляющая есть группа зависимости или усеченная группа зависимости нек-рой точки цепочки x. «Естественные» система составляющих и дерево подчинения, построенные для одного и того же предложения и отвечающие одному и тому же его смыслу, обычно согласованы (см. приведенные выше примеры). Дерево подчинения, согласованное с системой составляющих, проективно. Для данной системы составляющих может существовать больше одного согласованного с ним дерева подчинения; однако, если дополнительно задать нек-рое отношение «главенствования» между составляющими, можно добиться, чтобы «естественное» дерево подчинения определялось однозначно. Именно, если в системе составляющих C цепочки x для каждой неточечной составляющей выделить в множестве всех непосредственно вложенных в нее составляющих одну, называемую г л а в н о й, то упорядоченная пара (C, C'), где C' — множество всех главных составляющих, наз. и е р а р х и з о в а н н о й с и с т е м о й с о с т а в л я ю щ и х; иерархизованная система составляющих с в я з а н а с деревом подчинения, если система C согласована с этим деревом и для каждой неточечной составляющей A корень отвечающего ей поддерева дерева подчинения совпадает с корнем поддерева, отвечающего главной из непосредственно вложенных в A составляющих. «Естественная» система составляющих предложения при «естественной» иерархизации, как правило, связана с «естественным» деревом подчинения. Так, если в рассмотренном выше примере иерархизовать систему составляющих следующим образом: ([Объединение] (двух [замкнутых [множеств]])) [[есть] (замкнутое [множество])] (главные составляющие выделены квадратными скобками), то полученная иерархизованная система составляющих будет связана с указанным выше для данного предложения деревом подчинения.

Не все типы предложений допускают достаточно адекватное описание с помощью систем составляющих и деревьев подчинения. В частности, затруднения возникают при описании предложений, содержащих словосочетания с «особо тесными» внутренними связями (напр., сложные формы глагола), а также сочиненные конструкции. Кроме того, при описании строения предложений и иных отрезков речи на более «глубоких» уровнях возникает необходимость использовать графы более сложного вида, чем деревья. Для большей адекватности описания языка нужно учитывать наряду с синтаксическими еще т. н. а н а ф о р и ч е с к и е с в я з и — связи между вхождениями слов, «называющими одно и то же»; напр.:

„Если f есть отображение E на F

и существует обратное отображение

f^{-1}, то последнее есть отображение F на E".

Поэтому разрабатываются и другие, более сложные концепции С. с.

Лит.: [1] T e s n i è r e L., Eléments de syntaxe structurale, 2 изд., P., 1965; [2] П а д у ч е в а Е. В., «Вопросы языкознания», 1964, № 2, с. 99—113; [3] Г л а д к и й А. В., «Научно-техни-

ческая информация. Сер. 2», 1971, № 9, с. 35—38; [4] его же, Формальные грамматики и языки, М., 1973; [5] его же, «Slavica», 1981, v. XVII, XVIII. *А. В. Гладкий.*

СИНТАКСИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА — теорема *синтаксического языка*, т. е. теорема о формализованной теории. Примеры С. т.: теорема дедукции для исчисления предикатов, теорема Гёделя о неполноте арифметики. Эти теоремы относятся к элементарному синтаксису. Примером неэлементарной С. т., то есть теоремы, доказательство к-рой существенно использует бесконечные совокупности, может служить теорема о непротиворечивости элементарной арифметики. *В. Н. Гришин.*

СИНТАКСИЧЕСКИЙ ЯЗЫК — язык, предназначенный для изучения формализованного языка в отвлечении от его главной интерпретации. Понятие о С. я. возникло в математич. логике в связи с вопросами формализации и исследования содержательных математич. теорий. Результатом формализации какой-либо содержательной теории является *формальная система*, к-рую можно рассматривать как самостоятельный объект исследования, забыв о ее происхождении. Для исследования формальных систем в таком плане служит С. я.

В С. я. дается описание языка формальной системы, т. е. его исходных символов, термов, формул и пр., определяется понятие вывода в формальной системе, формулируются и доказываются теоремы о формальной системе. Таким образом, с формальной системой связываются два языка: один — исследуемый язык самой формальной системы (о б ъ е к т н ы й, или п р е д м е т н ы й, я з ы к), другой — язык, на к-ром ведется исследование формальной системы (С. я.).

С. я. должен содержать имена для символов и формул языка-объекта, а также переменные, значениями к-рых являются сами символы и формулы. При этом символы и формулы языка-объекта выступают в С. я. в качестве своих собственных имен (т. е. в качестве имен, обозначающих сами эти символы и формулы). С. я., как правило, не должен содержать языковых средств для рассуждения о бесконечных совокупностях как самостоятельных объектах. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, говорят об э л е м е н т а р н о м с и н т а к с и с е для данной формальной системы, в противоположность с и н т а к с и с у т е о р е т и ч е с к о м у, в к-ром допускается рассмотрение произвольных образований. Язык теоретич. синтаксиса наз. также *метаязыком*. Достаточно четко очерченный С. я. может быть формализован и стать объектным языком. Многие достаточно сильные формальные системы могут служить формализациями своего собственного элементарного С. я. На этом факте основано доказательство *Гёделя теоремы о неполноте* формальных систем.

В языках теоретич. синтаксиса можно рассматривать модели данной формальной системы и говорить об истинности формул формальной системы в моделях. В качестве примера формализованного языка теоретич. синтаксиса элементарной арифметики можно указать на язык арифметики 2-го порядка.

Лит.: [1] Ч ё р ч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960. *В. Н. Гришин.*

СИНТЕЗА ЗАДАЧИ — совокупность задач, концентрирующихся вокруг проблемы построения *управляющей системы* (у. с.), имеющей предписанное функционирование. У. с. строится из элементов, к-рые обычно сами являются простыми у. с. При синтезе заранее заданы состав элементов, правила их соединения между собой и способ определения по структуре у. с. функции, к-рую она реализует.

С каждым классом у. с. естественным образом связан определенный класс функций. З а д а ч а с и н т е з а в ее исходной постановке состоит в том, чтобы по заданной функции из этого класса построить реализующую ее у. с. Напр.: 1) задана *булева функция* —

требуется построить формулу, к-рая ее реализует; 2) задана система булевых функций — требуется построить многополюсную *контактную схему*, реализующую эту систему; 3) имеется точное описание поведения *автомата* — требуется построить такой автомат; 4) задана *вычислимая функция* — требуется найти алгоритм, к-рый ее вычисляет, либо составить соответствующую программу.

Приведенные примеры относятся к дискретной ветви математики. Однако аналогичные примеры характерны и для непрерывной ветви математики: 1) задана логарифмическая амплитудно-частотная характеристика системы автоматич. регулирования (или, в более общем случае, условия ее работы, т. е. возмущающие и управляющие воздействия, помехи, ограничения по времени работы и т. д.) — требуется синтезировать систему автоматич. регулирования, обладающую заданной характеристикой; 2) задана система линейных уравнений и неравенств, а также нек-рая линейная функция — требуется построить схему вычисления, к-рая максимизирует заданную линейную функцию на множестве решений заданной системы; 3) задана система дифференциальных уравнений и указана необходимая точность ее решения — требуется найти алгоритм численного решения этой системы с указанной точностью.

Имеется определенная условность в том, что последние три примера отнесены к непрерывной математике, ибо поиск приближенного численного решения уже предполагает аппроксимацию непрерывных функций дискретными, а значит, в этих задачах непрерывная ветвь математики тесно переплетается с дискретной.

Математическая постановка С. з. предполагает точное указание языка, на к-ром задается функция. От этого языка зависит, какие трудности могут возникнуть при решении С. з. В большинстве случаев существует сравнительно простой метод построения у. с. канонич. вида.

Однако (если только класс у. с. не слишком беден) задача имеет и много других решений; естественно возникает задача выбора среди них в каком-то смысле наилучшего. При таком подходе вводится параметр, характеризующий качество у. с. Это может быть число элементов у. с., ее стоимость, занимаемый ею объем, максимальное число ее элементов, находящихся в активном состоянии (т. е. мощность), время ее работы, вероятность выхода ее из строя и т. д. Важно, чтобы этот параметр, обычно наз. с л о ж н о с т ь ю, правильно отражал требующееся свойство у. с. и по возможности просто по ней вычислялся. В уточненной постановке С. з. состоит в том, чтобы по заданной функции построить такую реализующую ее у. с., на к-рой достигается минимум сложности.

На самом деле столь определенная постановка задачи возможна лишь для конечных моделей у. с. Как следствие, для них и вся синтезная проблематика оказывается очерченной лучше. Поэтому ниже основное внимание уделено конечным моделям.

Для конечных моделей у. с. типична ситуация, когда существует тривиальное решение поставленной задачи. Напр., если минимизируется число элементов в схеме, то тривиальный метод решения состоит в переборе сначала всех схем, содержащих один элемент, с проверкой того, есть ли среди них схема, реализующая заданную функцию, затем в переборе всех схем, содержащих два элемента, и т. д. до тех пор, пока не встретится схема, реализующая заданную функцию. На этой схеме и достигается минимум числа элементов.

Однако из-за большого числа требующихся шагов тривиальный метод малоэффективен. Более того, если сложность реализуемой функции превышает нек-рый сравнительно невысокий порог, то тривиальный метод

становится практически неосуществимым, причем использование самых быстрых вычислительных машин лишь несущественно расширяет границы его применимости. *Это означает, что требуется дальнейшее уточнение* постановки С. з.

Сложившиеся здесь тенденции продемонстрированы ниже на примере одного из классов у. с.— *схем из функциональных элементов* для одного частного случая, когда сложность понимается как число элементов в схеме. Функции, реализуемые этим классом у. с.,— это функции алгебры логики (булевы функции).

Прежде всего следует отметить, что неприемлемость решения, к-рое дает тривиальный метод,— это лишь одна из причин, ведущих к пересмотру постановки С. з. Существует гипотеза, что любой алгоритм, к-рый для каждой булевой функции строит схему с минимальным числом элементов, неизбежно содержит в себе в каком-то смысле перебор всех булевых функций. В пользу этой гипотезы говорит теорема о том, что если рассмотреть бесконечное множество булевых функций, содержащее при каждом числе переменных по одной самой сложной функции, и замкнуть это множество относительно операций переименования переменных (без отождествления) и подстановки констант, то получится множество, состоящее из всех вообще булевых функций (с точностью до несущественных переменных функции). Эта гипотеза получила много других косвенных подтверждений, причем нек-рые из них свидетельствуют о том, что если даже ослабить требование по числу элементов, допуская построение схем, близких к оптимальным, но сохранить требование применимости алгоритма к каждой булевой функции, то перебор не должен существенно уменьшиться. Идея о принципиальной неизбежности перебора и является основной причиной видоизменения постановки С. з. Здесь имеется несколько возможностей.

Шенноновский подход (по имени К. Э. Шеннона, к-рый впервые предложил его для контактных схем) связан с рассмотрением функции

$$L(n) = \max L(f),$$

где $L(f)$ — *минимально возможное число элементов* в схеме, реализующей функцию f, а максимум берется по всем булевым функциям f от n переменных. При этом $L(f)$ и $L(n)$ зависят от базиса, т. е. от множества функциональных элементов, к-рые можно использовать при построении схем. С. з. состоит в том, чтобы найти эффективный метод построения для каждой булевой функции от n переменных схем с числом элементов, существенно не превосходящим $L(n)$.

При более общей постановке задачи каждому функциональному элементу E сопоставляется положительное *число* $L(E)$ — *сложность этого элемента*, к-рая зависит только от функции, реализуемой элементом E, а каждой схеме S приписывается сложность

$$L(S) = \sum L(E),$$

где суммирование производится по всем элементам схемы S. Для каждой булевой функции f определяется сложность ее реализации (в заданном базисе):

$$L(f) = \min L(S),$$

где минимум берется по всем схемам S, реализующим функцию f. Затем, как и раньше, вводится $L(n) = \max L(f)$ и требуется для произвольной булевой функции от n переменных построить схему, имеющую сложность не выше (или не на много выше), чем $L(n)$.

При таком подходе нужно уметь вычислять или хорошо оценивать хотя бы снизу величину $L(n)$. Оказывается, что неплохую нижнюю оценку для $L(n)$ дает уже м о щ н о с т н о й м е т о д, основанный на следующем соображении: число всевозможных схем,

реализующих булевы функции от n переменных и имеющих сложность не более $L(n)$, должно быть не меньше числа всех булевых функций от n переменных. В мощностном методе требуется только получить удовлетворительную верхнюю оценку для числа рассматриваемых схем.

После этого о качестве любого универсального метода синтеза (т. е. метода, пригодного для произвольной булевой функции) можно в значительной мере судить по тому, во сколько раз сложность построенных им схем при соответствующем n отличается от нижней оценки для $L(n)$. Одновременно сложность этих схем служит конструктивной верхней оценкой для $L(n)$. Основным достижением в этом направлении является создание эффективного универсального метода синтеза, к-рый дает схемы со сложностью, мало отличающейся от нижней оценки для $L(n)$, а при $n \to \infty$ асимптотически совпадающей с ней. Таким образом, это асимптотически наилучший метод синтеза, позволяющий к тому же установить асимптотич. поведение функции $L(n)$. Пусть

$$\rho = \min L(E)/(i-1),$$

где i — число входов элемента E, а минимум берется по всем элементам, имеющим не менее двух входов. Тогда

$$L(n) \sim \rho \frac{2^n}{n}.$$

Для других классов у. с. сложность $L(S)$, а с ней и сложности $L(f)$ и $L(n)$ вводятся аналогичным образом. Обычно $L(S)$ для контактной схемы S есть число контактов в ней, а для формулы S — это число символов переменных в ней. Для автоматов и машин Тьюринга $L(S)$ иногда вводится как число состояний автомата S или машины Тьюринга S. Соответствующее асимптотическое поведение величины $L(n)$ для этих классов показано в таблице 1.

Таблица 1

Классы управляющих систем	$L(n)$	Примечание
Схемы из функциональных элементов	$\sim p \frac{2^n}{n}$	$p = \min \frac{L(E)}{i-1}$
Контактные схемы	$\sim \frac{2^n}{n}$	
Формулы	$\sim \frac{2^n}{\log_2 n}$	
Автоматы	$\sim \alpha(n) \frac{2^n}{n}$	$1 \leqslant \alpha(n) \leqslant 2$
Машины Тьюринга	$\sim \frac{2^n}{n(k-1)}$	k — число букв во внешнем алфавите машины Тьюринга

Если понятие сложности вводится иначе, напр. как вероятность ошибки, или если рассматривается другой класс у. с., напр. автоматы, то соответствующее асимптотич. соотношение может содержать не один, а два и более параметров, причем в общем случае задача о получении асимптотики, напр. для автоматов, алгоритмически неразрешима.

Анализ нижней оценки для $L(n)$ показывает, что на самом деле для почти всех булевых функций от n переменных сложность реализации асимптотически не меньше $L(n)$. Это означает, что данный метод синтеза для почти всех булевых функций дает почти самые простые схемы.

Однако, во-первых, при достаточно большом n ни одну из функций этого класса, несмотря на то, что он содержит почти все булевы функции, не удается явно указать, а во-вторых, этот класс состоит из наиболее сложно реализуемых функций, к-рые, по-видимому, не встречаются в задачах прикладного характера. Поэтому такие функции не представляют большого интереса. И снова появляется необходимость в видоизменении постановки С. з.

При этом следует иметь в виду, что функции, для к-рых С. з. актуальна, составляют ничтожную долю всех булевых функций, и что любой эффективный универсальный метод синтеза (если гипотеза о необходимости перебора верна в полном объеме) для нек-рых из них заведомо даст далеко не самые простые схемы. Описать множество таких функций невозможно, но проблема классификации булевых функций для целей синтеза возникает. Такой подход к постановке С. з. связан с выделением важных классов функций, созданием для них специальных методов синтеза, каждый из к-рых ориентирован на функции определенного класса, а также с оценкой качества получающихся при этом схем.

Эффективно решать такие задачи позволяет принцип локального кодирования. Этот принцип предполагает такое кодирование функций из рассматриваемого класса, при к-ром значение функции можно вычислять по сравнительно небольшой части кода. Если при этом удается достаточно просто реализовать нек-рые вспомогательные операторы, то принцип локального кодирования дает асимптотически наилучший метод синтеза для рассматриваемого класса, причем в довольно широких пределах справедливо соотношение

$$L(N_n) \sim \rho \frac{\log_2 |N_n|}{\log_2 \log_2 |N_n|},$$

где N_n — подмножество тех функций из рассматриваемого класса, к-рые зависят от заданных n переменных, а

$$L(N_n) = \max L(f),$$

где максимум берется по всем булевым функциям f из N_n. (здесь $\rho=1$).

Таблица 2

Число точек, в к-рых функция равна 1	$L(N_n)$
$(\log_2 n)^c$, $c>1$	$\sim n\,(\log_2 n)^{c-1}$
n^c, $c>0$	$\sim \frac{n^{c+1}}{(c+1)\log_2 n}$
2^{n^c}, $0<c<1$	$\sim n^{1-c} 2^{n^c}$
2^{cn}, $0<c<1$	$\sim \frac{1-c}{c} 2^{cn}$
$\frac{2^n}{n^c}$, $c>0$	$\sim c\frac{2^n \log_2 n}{n^{c+1}}$

Конкретный вид, который может иметь это асимптотическое соотношение, удобнее всего проиллюстрировать на классах булевых функций, принимающих значение 1 в заданном числе точек. Наиболее характерные примеры приведены в таблице 2.

На основе принципа локального кодирования были получены хорошие методы синтеза и для весьма узких классов функций (напр., для симметрич. функций), т. е. для тех функций, к-рые с практической точки зрения наиболее интересны. Однако в данном случае нижняя оценка, получающаяся мощностным методом, оказывается слишком слабой, для того чтобы по ней судить о качестве схем. По мере сужения класса рассматриваемых функций в какой-то момент это неизбежно должно было произойти, поскольку предельным случаем узкого класса является класс, содержащий не более чем по одной функции от каждого числа переменных. Фактически это означает, что рассматриваются отдельные конкретные функции.

Здесь возникают две проблемы: 1) построить для заданной конкретной функции f схему с возможно

меньшим числом элементов и тем самым получить верхнюю оценку для $L(f)$; 2) получить возможно лучшую нижнюю оценку для $L(f)$. Среди этих задач первая обычно бывает легче, так как для ее решения достаточно, в конечном счете, построить одну схему, а вторая требует в каком-то смысле просмотра всех схем, реализующих функцию f. По этой причине возникло целое направление, связанное с поиском методов получения нижних оценок для конкретных функций.

Получение нижних оценок, линейных относительно n — числа аргументов функции (или в общем случае относительно объема входной информации), обычно все-таки не вызывает больших трудностей. Получение более сильных нижних оценок — значительно более сложная задача. Первыми примерами в этом направлении были нижняя оценка порядка $n^{1,5}$ для формул в базисе $\{\&, \vee, {}^-\}$, реализующих линейную функцию (сумму по модулю 2) n аргументов, и нижняя оценка порядка $n^2/\log_2^2 n$ для *нормальных алгорифмов* Маркова, к-рые обращают слова длины n. Наиболее высокие нижние оценки, к-рые к настоящему времени (1984) удалось получить, имеют порядок n^2, если не считать оценок, получающихся при очень сильных ограничениях на класс у. с. (напр., неполнота системы элементов) либо при использовании столь мощных средств для задания функции, что они фактически содержат в себе перебор всех функций.

О нетривиальности исследования сложности реализации конкретных функций говорит и то, что многие задачи, такие, как умножение целых чисел, умножение матриц, распознавание симметрии слова на многоленточных машинах Тьюринга, для к-рых ожидались сравнительно высокие нижние оценки, оказались на самом деле проще, чем предполагалось раньше.

При минимизации других параметров схем — задержек, вероятности сбоя и т. д.— возникают примерно такие же задачи. При этом удается установить определенную связь между различными параметрами, причем благодаря моделированию одних объектов на других такую связь часто удается установить между различными параметрами у. с. из разных классов. Таким образом, полученные в С. з. результаты не являются изолированными, а тесно переплетаются друг с другом и часто переносятся из одной области в другую.

Многое из сказанного выше относится и к бесконечным моделям у. с. Однако с постановкой задачи синтеза, а тем более с ее решением дело обстоит значительно сложнее.

Лит.: [1] Лупанов О. Б., «Проблемы кибернетики», 1965, в. 14, с. 31—110; [2] Яблонский С. В., там же, 1959, в. 2, с. 75—121.

В. М. Храпченко.

СИНУС — одна из тригонометрич. функций:

$$y = \sin x.$$

Область определения — вся числовая прямая, область значений — отрезок $[-1; 1]$; С.— функция нечетная, периодическая с периодом 2π. С. и косинус связаны формулой

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

С. и косеканс связаны формулой

$$\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}.$$

Производная С.:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Интеграл от С.:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$$

С. разлагается в степенной ряд:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \quad -\infty < x < \infty.$$

Функция, обратная С., наз. а р к с и н у с о м.

С. и косинус комплексного аргумента z связаны с показательной функцией ф о р м у л а м и Э й л е р а

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

если $z = ix$ (чисто мнимое число), то

$$\sin ix = -\operatorname{sh} x,$$

где $\operatorname{sh} x$ — гиперболич. синус.

Ю. А. Горьков.

СИНУС АМПЛИТУДЫ, э л л и п т и ч е с к и й с и н у с,— одна из трех основных *Якоби эллиптических функций*, обозначаемая

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(u, k) = \sin \operatorname{am} u.$$

С и н у с а м п л и т у д ы определяется через тета-функции или при помощи рядов следующим образом:

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(u, k) = \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2'(0)} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)} =$$

$$= u - (1 + k^2)\frac{u^3}{3!} + (1 + 14k^2 + k^4)\frac{u^5}{5!} - \dots,$$

где k — модуль С. а. (чаще всего $0 \leqslant k \leqslant 1$), $v = u/2\omega$, $2\omega = \pi\vartheta_3^2(0)$. При $k = 0$, 1 соответственно $\operatorname{sn}(u, 0) = \sin u$, $\operatorname{sn}(u, 1) = \operatorname{th} u$.

Лит.: [1] Г у р в и ц А., К у р а н т Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968, ч. 2, гл. 3.

Е. Д. Соломенцев.

СИНУС ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ — см. *Гиперболические функции*.

СИНУС ГОРДОНА УРАВНЕНИЕ, S i n e - G o r d o n у р а в н е н и е,— релятивистски инвариантное уравнение, в пространственно-временных переменных имеющее вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m^2 \sin u = 0;$$

$$-\infty < x,\ t < \infty,\ u \in \mathbb{R}^1,\ m > 0. \qquad (A)$$

Название предложено М. Крускалом по аналогии с линейным *Клейна — Гордона уравнением* (где вместо $\sin u$ стоит u). В характеристических (светоподобных) переменных С. Г. у. выглядит так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma\, \partial \tau} + m^2 \sin u = 0,\ \sigma,\ \tau,\ u \in \mathbb{R}^1,\ m > 0. \qquad (B)$$

Как в случае (А), так и в случае (В) С. Г. у. допускает п р е д с т а в л е н и е Л а к с а

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L, M]$$

с линейными операторами L и M, что позволяет применить к нему метод обратной задачи рассеяния ($[L, M] = LM - ML$).

Задача Коши для С. Г. у. формулируется следующим образом.

Случай (А):

$$u\Big|_{t=0} = u_1,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_2;$$

$$\frac{du_1}{dx},\ u_2 \in S(\mathbb{R}^1);\ \lim_{|x| \to \infty} u_1(x) \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Случай (В):

$$u|_{\tau=0} = u_0;\ \frac{du_0}{d\sigma} \in S(\mathbb{R}^1);$$

$$\lim_{|\sigma| \to \infty} u_0(\sigma) \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Здесь $S(\mathbb{R}^1)$ — пространство Шварца быстроубывающих функций. Задачи Коши (А) и (В) при некоторых дополнительных ограничениях на начальные данные однозначно разрешимы в указанных классах, и множества их решений совпадают. Эволюция данных рассеяния соответствующих L-операторов дается явными формулами, а решения $u(x, t)$ и $u(\sigma, \tau)$ находятся

с помощью интегральных уравнений типа Гельфанда — Левитана — Марченко.

Периодич. задача для С. Г. у. может быть исследована с помощью алгебро-геометрич. метода (подобно тому, как это делается для *Кортевега — де Фриса уравнения*); в частности, получены явные выражения для конечнозонных решений С. Г. у. через θ-функции на соответствующих абелевых многообразиях.

Гамильтонова формулировка С. Г. у. заключается в том, что, напр., в случае (A) оно представляет собой гамильтонову систему с гамильтонианом

$$p_0 = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\pi^2(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + m^2(1-\cos u)\right)dx, \quad \gamma > 0,$$

и симплектич. формой

$$\Omega = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty} d\pi(x) \wedge du(x)\,dx, \quad \pi = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Эта система является вполне интегрируемой, и переход от переменных u и π к данным рассеяния соответствующего оператора L является канонич. преобразованием к переменным типа действие-угол. Фазовое пространство параметризуется канонически сопряженными переменными трех типов:

1) $0 \leqslant \rho(p) < \infty$, $0 \leqslant \varphi(p) < 2\pi$, $p \in \mathbb{R}^1$;

2) $p_a, q_a \in \mathbb{R}^1$, $a = 1, \ldots, N_1$, $N_1 \geqslant 0$, $N_1 \in \mathbb{Z}$;

3) $\eta_b, \xi_b \in \mathbb{R}^1$, $0 \leqslant \alpha_b < \frac{8\pi}{\gamma}$, $0 \leqslant \beta_b < 2\pi$, $b = 1, \ldots, N_2$, $N_2 \geqslant 0$, $N_2 \in \mathbb{Z}$.

Полная энергия P_0 и полный импульс

$$P_1 = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\,dx$$

поля u в новых переменных выглядят следующим образом:

$$P_0 = \int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{p^2+m^2}\rho(p)\,dp + \sum_{a=1}^{N_1}\sqrt{p_a^2+M^2} + \sum_{b=1}^{N_2}\sqrt{\eta_b^2 + (2M\sin\theta_b)^2};$$

$$P_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p\rho(p)\,dp + \sum_{a=1}^{N_1} p_a + \sum_{b=1}^{N_2}\eta_b, \quad M = \frac{8m}{\gamma}, \quad \theta = \frac{\gamma}{16}\alpha.$$

В случае (B) также получается вполне интегрируемая гамильтонова система.

Одно из приложений к квантовой теории поля. Пусть $u(x, t)$ — скалярное поле с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2m^2(1-\cos u)\right)dx$$

(здесь γ — константа связи). С. Г. у. является уравнением Эйлера — Лагранжа для этого лагранжиана. При квазиклассич. квантовании поля u основную роль играют приведенные выше выражения для P_0 и P_1. Первые члены в правых частях указанных формул отвечают частицам с массой m — частицам основного поля. Переменным второго и третьего типов соответствуют локализованные решения С. Г. у.— *солитоны* и двойные солитоны с массами M и $2M\sin\theta$. Система обладает законом сохранения (топологич. заряд):

$$Q = \frac{1}{2\pi}(u(+\infty, t) - u(-\infty, t)), \quad Q \in \mathbb{Z}.$$

Частицы первого и третьего типов имеют заряд, равный 0, а у частиц второго типа заряд равен ± 1. Частицы с одинаковыми зарядами отталкиваются, а с разными зарядами — притягиваются. Наличие бес-

конечного числа законов сохранения означает, что при рассеянии сохраняются количества частиц каждого типа; n-частичная S-матрица сводится к парным S-матрицам. С помощью *интеграла по траекториям* можно вычислить квантовые поправки к массам и к квазиклассической S-матрице солитонов. Одним из нетривиальных свойств указанной модели является появление целого спектра частиц (солитонов), в то время как лагранжиан теории содержит только одно поле. Кроме того, в приближении слабого взаимодействия (т. е. когда γ мало) солитоны — тяжелые частицы и сильно взаимодействуют.

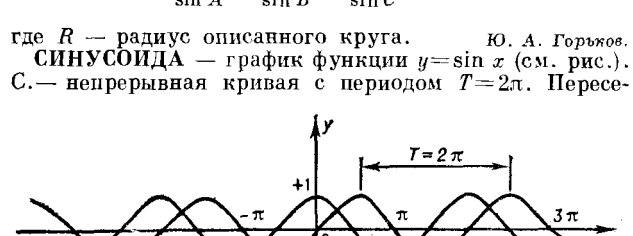
Лит.: [1] Ablowitz M. [и др.], «Phys. Rev. Lett.», 1973, v. 30, p. 1262—64; [2] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д., «Теоретич. и матем. физика», 1974, т. 21, № 2, с. 160—174; [3] их же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1976, т. 142, с. 254—66; [4] Козел В. А., Котляров В. П., «Докл. АН УССР, сер. А.», 1976, № 10, с. 878—81; [5] Корепин В. Е., Фаддеев Л. Д., «Теоретич. и матем. физика», 1975, т. 25, № 2, с. 147—63; [6] Bianchi L., Lezioni di geometria differenziale, v. 2, pt 1—2, Pisa, 1923—24; [7] Фиников С. П., Изгибание на главном основании..., М.— Л., 1937; [9] Пелиновский Е. Н., «Изв. вузов. Радиофизика», 1976, т. 19, № 5—6, с. 883—901. *Л. А. Тахтаджян.*

СИНУСОВ ТЕОРЕМА: для произвольного треугольника со сторонами a, b, c и противолежащими им углами A, B, C имеют место соотношения

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанного круга. *Ю. А. Горьков.*

СИНУСОИДА — график функции $y=\sin x$ (см. рис.). С.— непрерывная кривая с периодом $T=2\pi$. Пересе-



чения с осью Ox — точки $(k\pi, 0)$; они же — точки перегиба с углом $\pm\pi/4$ наклона к оси Ox; экстремумы $((k+1/2)\pi, (-1)^k)$.

График функции $y=\cos x=\sin(x+\pi/2)$ — к о с и н у с о и д а — представляет собой С., сдвинутую влево на $\pi/2$. Пересечения косинусоиды с осью Ox — точки $((k+1/2)\pi, 0)$; экстремумы $(k\pi, (-1)^k)$.

Многие колебательные процессы описываются периодич. функцией вида $y=a\sin(bx+c)$, где a, b и c — постоянные. График этой функции (т. н. о б щ а я с и н у с о и д а, по сравнению с графиком функции $y=\sin x$ (о б ы к н о в е н н а я с и н у с о и д а) вытянут вдоль оси Oy в $|a|$ раз, сжат вдоль оси Ox в b раз, сдвинут влево на отрезок c/b и при $a<0$ зеркально отражен относительно оси Ox; период $T=2\pi/b$, пересечения с осью Ox — точки $\left(\frac{k\pi-c}{b}, 0\right)$; экстремумы $\left(\frac{(k+1/2)\pi-c}{b}, \left(-1\right)^k a\right)$. *Ю. А. Горьков.*

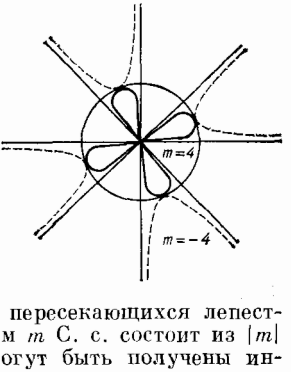
СИНУСОИДАЛЬНАЯ СПИРАЛЬ — плоская кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид

$$\rho^m = a^m \cos m\varphi.$$

При рациональном m С. с. является алгебраич. кривой. В частности, при $m=1$ — окружность, при $m=-1$ — равносторонняя гипербола, при $m=1/2$ — *кардиоида*, при $m=-1/2$ —парабола.

В общем случае для $m>0$ С. с. проходит через полюс и полностью помещается внутри круга радиуса a. При отрицательном m радиус-вектор кривой может

принимать сколь угодно большие значения и не проходит через полюс. С. с. симметрична относительно полярной оси, при рациональном $m=p/q$ (где p и q взаимно простые числа) имеет p осей симметрии, проходящих через полюс. При целом положительном m радиус-вектор С. с. является периодич. функцией с периодом $2\pi/m$. При изменении φ от 0 до 2π кривая состоит из m лепестков, каждый из которых располагается внутри угла, равного π/m. Полюс в этом случае — кратная точка (см. рис.). При дробном положительном $m=p/q$ кривая состоит из p пересекающихся лепестков. При целом отрицательном m С. с. состоит из $|m|$ бесконечных ветвей, к-рые могут быть получены инверсией спирали с $m'=-m$.



Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

СИНУС-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ — см. *Фурье преобразование.*

A-СИСТЕМА — счетно ветвящаяся система множеств, т. е. семейство $\{A_{n_1\dots n_k}\}$ подмножеств множества X, занумерованных всеми конечными последовательностями натуральных чисел. A-С. $\{A_{n_1\dots n_k}\}$ наз. регулярной, если $A_{n_1\dots n_k\, n_{k+1}}\subset A_{n_1\dots n_k}$. Последовательность A_{n_1}, ..., $A_{n_1\dots n_k}$, ... элементов A-С., занумерованных всеми отрезками одной и той же бесконечной последовательности натуральных чисел, наз. цепью этой A-С. Пересечение всех элементов цепи наз. ее ядром, а объединение ядер всех цепей A-С.— ядром этой A-С., или результатом A-операции, примененной к этой A-С., или A-множеством, порожденным этой A-С. Всякая A-С. может быть регуляризована без изменения ядра (достаточно положить $A'_{n_1\dots n_k}=A_{n_1}\cap\dots\cap A_{n_1\dots n_k}$). Если $\mathscr{M}$ — нек-рая система множеств, то ядра A-С., составленных из элементов системы $\mathscr{M}$, наз. A-множествами, порожденными системой $\mathscr{M}$. A-множества, порожденные замкнутыми множествами топологич. пространства, наз. A-множествами этого пространства.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Куратовский К., Топология, пер. с франц., т. 1, М., 1966.

А. Г. Елькин.

K-СИСТЕМА $\{T^t\}$ — такой *измеримый поток* (K-поток) или каскад (K-каскад) в *Лебега пространстве*, что существует *измеримое разбиение* ξ фазового пространства со следующими свойствами: а) оно возрастающее (в более старой терминологии — инвариантное) относительно $\{T^t\}$, то есть $T^t\xi$ мельче ξ mod 0 при $t>0$; б) оно является двусторонним образующим для $\{T^t\}$, т. е. единственным mod 0 измеримым разбиением, к-рое мельче mod 0 всех $T^t\xi$, является разбиение на точки; в) единственным mod 0 измеримым разбиением, к-рое крупнее mod 0 всех $T^t\xi$, является тривиальное разбиение, единственный элемент к-рого — все фазовое пространство.

Автоморфизм пространства с мерой, итерации к-рого образуют K-каскад, наз. K-автоморфизмом. Если $\{T^t\}$ — K-С., то все T^t с $t\neq 0$ являются K-автоморфизмами; обратно, если для измеримого потока или каскада $\{T^t\}$ хоть одно T^t является K-автоморфизмом, то $\{T^t\}$ — K-С. K-система обладает сильными эргодич. свойствами: положительная энтропия, эргодичность, перемешивание всех степеней, счетнократ-

ный лебеговский спектр (см. *Спектр динамической системы*, а также [2]).

Эндоморфизм пространства Лебега имеет **вполне положительную энтропию**, если любой его нетривиальный факторэндоморфизм имеет положительную энтропию. Среди таких эндоморфизмов содержатся как K-автоморфизмы (именно последние суть в точности автоморфизмы с вполне положительной энтропией), так и другие интересные объекты (*точные эндоморфизмы*). Имеются обобщения K-С. в других направлениях: на случай бесконечной инвариантной меры (см. [6], [7], [11]) и для действия группы, отличной от $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ (см. [8] — [10], [12]).

K-С. наз. также **системами** (**потоками** и т. д.) **Колмогорова**, к-рый впервые ввел их (см. [1]) под названием «квазирегулярных». Последнее подчеркивает аналогию с регулярными случайными процессами (см. [4]). Если случайный процесс $\{X_t\}$, стационарный в узком смысле слова, интерпретировать как динамич. систему, то значения процесса «в прошлом» определяют нек-рое измеримое возрастающее разбиение ξ — наименьшее, относительно к-рого измеримы все X_t с $t<0$. Если ξ обладает свойствами б) и в) (закон «все или ничего»), то процесс наз. **регулярным**. В частности, вероятностное происхождение имеет простейший пример K-автоморфизма — *Бернулли автоморфизм*.

Если у измеримого потока или каскада в пространстве Лебега одно из преобразований T^t изоморфно автоморфизму Бернулли, то и все они (при $t\neq 0$) изоморфны автоморфизмам Бернулли; в этом случае динамич. система наз. **бернуллиевской** (см. [5]). Существуют K-С., не являющиеся бернуллиевскими. K-С. (даже бернуллиевские) естественно возникают не только в теории вероятностей, но и в других вопросах (алгебраической, геометрической и даже физич. природы; см. [2], [3], [5]).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1958, т. 119, № 5, с. 861—64; 1959, т. 124, № 4, с. 754—55; [2] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., **Эргодическая теория**, М., 1980; [3] **Итоги науки и техники. Математический анализ**, т. 13, М., 1975, с. 129—262; [4] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [5] Орнстейн Д., Эргодическая теория, случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [6] Parry W., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 16, № 5, p. 960—66; [7] Dugdale J. K., «Publ. math.», (Debrecen), 1967, t. 14, № 1/4, p. 79—81; [8] Conze J. P., «Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete», 1972, Bd 25, H. 1, S. 11—30; [9] Burton R. M., там же, 1979, Bd 47, H. 2, S. 207—12; [10] Dani S., «Amer. J. Math.», 1976, v. 98, № 1, p. 119—63; [11] Krengel U., Sucheston L., «Ann. Math. Statistics», 1969, v. 40, № 2, p. 694—96; [12] Kamiński B., «Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.», 1978, v. 26, № 2, p. 95—97.

Д. В. Аносов.

U-СИСТЕМА — гладкая динамич. система (*поток* или *каскад*) с компактным фазовым многообразием, к-рое все является *гиперболическим множеством*. Диффеоморфизм, порождающий U-каскад, наз. **U-диффеоморфизмом**. U-С. были введены Д. В. Аносовым (см. [1], [2]), поэтому иногда их наз. **системами Аносова**.

U-С. являются *грубыми системами*, причем при **малом** (в смысле C^1) возмущении U-С. снова получается U-С.; число периодич. траекторий U-С. периода не больше T экспоненциально растет с ростом T. U-С. обладают сильными эргодич. свойствами по отношению к широкому классу т. н. «гиббсовских» инвариантных мер (см. [4]—[6]). [В частности, если U-С. имеет конечную инвариантную меру, «совместимую с гладкостью», т. е. задаваемую в терминах локальных координат положительной плотностью (в первых работах только такие меры и рассматривались, см. [1] — [3]), то эта мера — гиббсовская.] Так, если у U-диффеоморфизма нет *блуждающих точек*, то он метрически изоморфен *Бернулли автоморфизму*; сходимость временных средних к пространственному среднему в

широких предположениях подчиняется центральной предельной теореме, а скорость перемешивания — экспоненциальная («экспоненциальное убывание корреляций»).

При исследовании *У*-С. нередко используется *символическая динамика*, что стало возможным благодаря введенным в [7], [8] (окончательный вариант в [5]) марковским разбиениям. Ряд результатов об *У*-С. оказался справедливым и для нек-рых других типов гиперболич. множеств; имеются и менее непосредственные обобщения, при к-рых несколько ослабляются условия гиперболичности (см. [6], [14]).

У-С. являются гиперболич. автоморфизмы торов и *геодезические потоки* на замкнутых многообразиях отрицательной кривизны; имеются и другие примеры родственной алгебро-геометрич. природы. В этих примерах *У*-С. имеет инвариантную меру, совместимую с гладкостью. При малом возмущении такая мера может исчезнуть, но ввиду грубости все точки остаются неблуждающими. Принципиально иной характер имеют примеры *У*-С. с блуждающими точками (см. [9]).

Существование *У*-С. на многообразии налагает ограничения на его топологич. свойства. В общем случае об этом известно немногое (см. [10], [11]); хорошо изучен тот случай, когда устойчивое или неустойчивое подпространство (см. *Гиперболическое множество*) одномерно (см. [9], [12], [13]).

Лит.: [1] Аносов Д. В., «Докл. АН СССР», 1962, т. 145, № 4, с. 707—09; 1963, т. 151, № 6, с. 1250—52; [2] его же, Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, М., 1967; [3] Аносов Д. В., Синай Я. Г., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 107—72; [4] Синай Я. Г., там же, 1972, т. 27, в. 4, с. 21—64; [5] Боуэн Р., Методы символической динамики, пер. с англ., М., 1979; [6] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975, с. 129—262; [7] Adler R. L., Weiss B., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1967, v. 57, № 6, p. 1573—76; [8] Синай Я. Г., «Функциональный анализ и его приложения», 1968, т. 2, № 1, с. 64—89; [9] Franks J. M., Williams B., в кн.: Global theory of dynamical systems, B.—[u. a.], 1980, p. 158—74 (Lecture notes in math., № 819); [10] Hirsch M. W., «Topology», 1971, v. 10, № 3, p. 177—83; [11] Shiraiwa K., «Nagoya Math. J.», 1973, v. 49, p. 111—15; [12] Гладкие динамические системы, пер. с англ., М., 1977; [13] Verjovsky A., «Bolet. Soc. Matem. Mexicana», 1974, v. 19, № 2, p. 49—77; [14] Fathi A., Laudenbach F., Poénaru V., «Asterisque», 1979, t. 66—67, p. 71—79, 139—58, 225—42.

Д. В. Аносов.

СИСТЕМНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — 1) Инженерная дисциплина, разрабатывающая методы построения системных программ, т. е. программ, входящих в состав больших программных комплексов (программных систем), придающих вычислительным средствам постоянные функции нек-рой специальной системы обработки информации.

2) Процесс составления системных программ — в этом качестве все больше становится синонимом профессионального программирования, т. е. составления программ (иначе называемых программным продуктом), отчуждаемых от их автора и применяемых впоследствии многократно.

В начальный период применения ЭВМ, главным образом для математич. расчетов, основной сферой приложения С. п. была разработка базового математич. обеспечения: операционных систем, систем программирования, библиотек стандартных подпрограмм. В связи с расширением и усложнением применения ЭВМ в методах С. п. все больше начинает нуждаться разработка прикладного математич. обеспечения — пакетов прикладных программ, автоматизированных систем управления и банков данных.

С. п. в своем развитии встречается с рядом трудностей. Главными источниками их являются большой объем программных систем (до 1 млн. машинных команд), сугубо нелинейная зависимость сложности от объема, слабая устойчивость системных программ к ошибкам программиста и отказам оборудования.

В методах С. п. различается программирование «в малом», т. е. методы разработки системной программы одним человеком, и «в большом», т. е. методы объединения индивидуального программного продукта в большую систему.

В С. п. «в малом» на первый план выступают математич. методы программирования: описание и свойства математич. модели программируемой задачи, методы систематич. преобразования исходной формулировки задачи в программный текст, методы доказательства правильности (верификации) программы. С. п. «в большом» сближается с теорией больших систем, общей системотехникой, методами организации коллективной работы и даже с вопросами эволюции динамич. систем.

Лит.: [1] Брукс Ф., Как проектируются и создаются программные комплексы. Мифический человеко-месяц, пер. с англ., М., 1979; [2] Создание качественного программного обеспечения. Тр. Рабочей конференции Междунар. федерации по обработке информации, пер. с англ., т. 1—2, Новосиб., 1978.

А. П. Ершов.

СКАЛЯР — величина, каждое значение к-рой может быть выражено одним (действительным) числом (см. *Величина*). В общем случае С.— элемент нек-рого поля.

СКАЛЯРНАЯ КРИВИЗНА риманова многообразия в точке p — след *Риччи тензора* по отношению к метрич. тензору g. Скалярная кривизна $s(p)$ связана с *Риччи кривизной* r и *секционной кривизной* k формулами

$$s(p) = \sum_{i=1}^{n} r(e_i) = \sum_{i,\, j=1}^{n} k(e_i,\, e_j),$$

где $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис касательного пространства. В эквивалентной индексной форме эти равенства имеют вид

$$s(p) = g^{ij} R_{ij} = g^{ij} g^{kl} R_{kijl},$$

где R_{ij} и R_{kijl} — координаты тензора Риччи и тензора кривизны соответственно, g^{ij} — контравариантные координаты метрич. тензора.

Лит.: [1] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [2] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.

Л. А. Сидоров.

СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ — скалярная функция точки области нек-рого пространства. Примеры С. п.: поле температуры внутри тела, поле плотности.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, внутреннее произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$,— произведение их модулей на косинус угла φ между ними:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\varphi.$$

За φ принимается угол между векторами, не превосходящий π. Если $\boldsymbol{a}=0$ и $\boldsymbol{b}=0$, то С. п. полагают равным нулю. С. п. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^2 = |\boldsymbol{a}|^2$ наз. скалярным квадратом вектора $\boldsymbol{a}$. См. *Векторная алгебра*.

С. п. двух n-мерных векторов $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \ldots a_n)$ и $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \ldots b_n)$ в случае действительных координат наз. число

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n,$$

в случае комплексных координат — число

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \ldots + a_n \bar{b}_n.$$

Бесконечномерное векторное пространство, в к-ром определено С. п. и выполнена аксиома полноты, наз. *гильбертовым пространством*.

А. Б. Иванов.

СКАНИРОВАНИЯ МЕТОД — метод максимизации и минимизации функции путем последовательного перебора и сравнения значений функции во всех точках нек-рого подмножества допустимого множества. В отличие от перебора методом Монте-Карло указанные точки в С. м. лежат на заранее детерминированной траектории.

Название «С. м.» пришло из техники, где часть задач обзора и обнаружения целей эквивалентна максимиза-

ции или минимизации функции яркости и решается с помощью аналоговых или цифровых разновидностей С. м. В дальнейшем С. м. привлек внимание в качестве удобного средства оптимизации на ЭВМ в диалоговом режиме.

Траектория сканирования, в частности, может образовывать всюду плотное множество в допустимом множестве аргумента.

Достоинствами С. м. являются отсутствие ограничений на способ задания функции и функциональные классы, к к-рым она может принадлежать. Последнее (наряду с большой трудоемкостью перебора) является в то же время и главным недостатком С. м.: не используется для сокращения вычислений дополнительная информация, имеющаяся у вычислителя. Поэтому в вычислительной практике С. м. редко применяется без комбинации с другими методами оптимизации. Например, для функций, удовлетворяющих условию Липшица, поиск глобального экстремума эффективнее производить вместо С. м. методом «перебора на неравномерной сетке» (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Растригин Л. А., Системы экстремального управления, М., 1974; [2] Евтушенко Ю. Г., Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации, М., 1982; [3] Towards Global Optimisation, v. 1—2, Amst.— N. Y., 1975—78.

Ю. П. Иванилов, В. В. Охрименко.

СКАЧКОВ ФУНКЦИЯ — одна из трех компонент в *Лебега разложении* функции ограниченной вариации. Пусть $f(x)$ — *ограниченной вариации функция* на отрезке $[a, b]$. Пусть $d_л(x)=f(x)-f(x-0)$ при $a<x\leqslant b$ и $d_п(x)=f(x+0)-f(x)$ при $a\leqslant x<b$. Число $d_л(x)$ наз. скачком функции f в точке x слева, а число $d_п(x)$ — скачком функции f в точке x справа. Если $a<x<b$, то число

$$d(x)=f(x+0)-f(x-0)=d_л(x)+d_п(x)$$

наз. скачком функции f в точке x. Пусть $\{x_i\}$ — последовательность всех точек разрыва функции f на отрезке $[a, b]$ и

$$s(x)=\sum_{a\leqslant x_i<x} d_п(x_i)+\sum_{a<x_i\leqslant x} d_л(x_i)\ (s(a)=0).$$

Функция $s(x)$ наз. функцией скачков для функции $f(x)$. При этом разность $f(x)-s(x)=\varphi(x)$ является непрерывной функцией ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$, причем $V_a^b(f)=V_a^b(\varphi)+V_a^b(s)$, где $V_a^b(F)$ — *вариация функции* F на отрезке $[a, b]$. При этом

$$V_a^b(s)=\sum_{a\leqslant x_i<b}|d_п(x_i)|+\sum_{a<x_i\leqslant b}|d_л(x_i)|.$$

Лит.: [1] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.—Л., 1934; [2] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974.

Б. И. Голубов.

СКАЧКООБРАЗНЫЙ ПРОЦЕСС — случайный процесс, к-рый изменяет свое состояние только в случайные моменты времени, образующие возрастающую последовательность. Иногда термин «С. п.» относят к любому процессу с кусочно постоянными траекториями.

Важный класс С. п. образуют марковские С. п. Марковский процесс является С. п., если его переходная функция $P(s, x, t, B)$ такова, что

$$\lim_{t\downarrow s}\left[P(s, x, t, B)-I_B(x)\right]/(t-s)=q(s, x, B), \quad (1)$$

где $I_b(x)$ — индикатор множества B в фазовом пространстве $(E, \mathscr{E})$, и выполнены условия регулярности, заключающиеся в том, что сходимость в (1) равномерна и ядро $q(s, x, B)$ удовлетворяет нек-рым требованиям ограниченности и непрерывности.

Пусть

$$a(t,\ s) = -q(t,\ x,\ \{x\}),\ a(t,\ x,\ B) = q(t,\ x,\ B \setminus \{x\}),$$
$$\Pi(t,\ x,\ B) = a(t,\ x,\ B)/a(t,\ x),\ \text{если } a(t,\ x) > 0,$$

и

$$\Pi(t,\ x,\ B) = 0.$$

— в противном случае. Введенные величины допускают следующую интерпретацию: с точностью до $o(\Delta t)$ (при $\Delta t \to 0$) $a(t, x)\Delta t$ есть вероятность того, что в промежуток времени $(t,\ t+\Delta t)$ процесс покинет состояние x; $\Pi(t, x, B)$, когда $a(t, x) > 0$, есть условная вероятность попадания процесса во множество B при условии, что в момент t он покидает состояние x.

При выполнении условий регулярности переходная функция С. п. дифференцируема по t при $t > s$, по s при $s < t$ и удовлетворяет прямому и обратному уравнениям Колмогорова с соответствующими граничными условиями:

$$\frac{\partial P(s,\ x,\ t,\ B)}{\partial t} = -\int_B a(t,\ y)\, P(s,\ x,\ t,\ dy) + \int_E a(t,\ y,\ B)\, P(s,\ x,\ t,\ dy),$$
$$\lim_{t \downarrow s} P(s,\ x,\ t,\ B) = I_B(x);$$
$$\frac{\partial P(s,\ x,\ t,\ B)}{\partial s} = a(s,\ x)\left[P(s,\ x,\ t,\ B) - \int_E P(s,\ y,\ t,\ B)\,\Pi(s,\ x,\ dy)\right],$$
$$\lim_{s \uparrow t} P(s,\ x,\ t,\ B) = I_B(x).$$

Пусть $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ — непрерывный справа строго марковский С. п., T_n — момент n-го скачка процесса, $T_0 = 0$, $Y_n = X_{T_n}$, S_n — время пребывания в n-м состоянии, $T_\infty = \lim T_n$ — момент обрыва, $X_{T_\infty} = \delta$, где δ — точка вне E. Тогда последовательность $(T_n,\ Y_n)$ образует однородную цепь Маркова. При этом если X — однородный марковский процесс, то распределение S_n при заданном $Y_n = x$ — показательное с параметром $\lambda(x)$.

Естественным обобщением марковских С. п. являются полумарковские С. п., для к-рых последовательность (Y_n) является цепью Маркова, однако время пребывания в n-м состоянии зависит от Y_n и Y_{n+1} и имеет произвольное распределение.

При исследовании общих С. п. оказался плодотворным т. н. мартингальный подход. В рамках этого подхода удается получить содержательные результаты без дополнительных предположений о вероятностной структуре С. п. При мартингальном подходе предполагается, что на вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$, где задан С. п. X, фиксировано неубывающее непрерывное справа семейство σ-алгебр $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, причем для каждого t случайная величина X_t является $\mathcal{F}_t$-измеримой и, значит, моменты T_n — марковскими.

Пусть $\mathcal{P}$ — предсказуемая σ-алгебра на $\Omega \times \mathbb{R}_+$, $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \times \mathcal{E}$. Случайная мера η на $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E})$ наз. предсказуемой, если для любой неотрицательной $\tilde{\mathcal{P}}$-измеримой функции f процесс $(f * \eta_t)_{t \geqslant 0}$, где

$$f * \eta_t = \int_{(0,\ t] \times E} f(t,\ x)\, \eta(dt,\ dx),$$

является предсказуемым.

Пусть $\mu = \mu(dt,\ dx)$ — мера скачков процесса X, т. е. целочисленная случайная мера на $(\mathbb{R}_+ \times E,\ \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E})$, определенная равенством

$$\mu([0,t] \times B) = \sum\nolimits_{n \geqslant 1} I_{[0,\ t] \times B}(T_n,\ Y_n),\ t \in \mathbb{R}_+,\ B \in \mathcal{E}.$$

При весьма широких предположениях на $(E, \mathscr{E})$ (выполненных, в частности, когда E — полное сепарабельное метрич. пространство с борелевской σ-алгеброй $\mathscr{E}$) существует предсказуемая случайная мера $\nu = \nu(dt, dx)$ такая, что имеет место любое из следующих двух эквивалентных условий:

1) $Ef*\mu_\infty = Ef*\nu_\infty$ для любой неотрицательной $\mathscr{P}$-измеримой функции f;

2) при любых $n \geqslant 1$ и $B \in \mathscr{E}$ процесс

$$(\mu([0,\ t \wedge T_n] \times B) - \nu([0,\ t \wedge T_n] \times B))_{t \geqslant 0}$$

является мартингалом, выходящим из нуля.

Предсказуемая случайная мера ν определена однозначно с точностью до множества P-меры нуль и наз. компенсатором (или дуальной предсказуемой проекцией) μ. Можно выбрать такой вариант ν, что

$$\nu((T_\infty,\ \infty) \times E) = 0,\ \nu(\{t\} \times E) \leqslant 1,\ \forall t. \qquad (2)$$

Пусть Ω — пространство траекторий С. п. X, принимающих значения в $(E, \mathscr{E})$, $\mathscr{F}_t = \sigma(X_s, s \leqslant t)$, $\mathscr{F} = \bigcup_{t > 0} \mathscr{F}_t$, P_0 — вероятностная мера, для к-рой выполнено (2). Тогда на $(\Omega, \mathscr{F})$ найдется и притом единственная вероятностная мера P такая, что ν является компенсатором μ относительно P и сужение P на $\mathscr{F}_0$ совпадает с P_0. Доказательство этого утверждения опирается на явную формулу, связывающую условные распределения величин (T_n, Y_n) и компенсатор, к-рый в ряде случаев оказывается более удобным средством для описания С. п.

С. п. является процессом с независимыми приращениями тогда и только тогда, когда ему отвечает детерминированный компенсатор.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Успехи матем. наук», 1938, т. 5, с. 5—41; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [3] Jacod J., Calcul stochastique et problèmes de martingales, B.— [a. o.] 1979.

Ю. М. Кабанов.

СКЕЛЕТ КАТЕГОРИИ — минимальная *полная подкатегория* категории, эквивалентная самой категории. В произвольной категории $\mathfrak{K}$ существует, вообще говоря, много скелетов. Любой скелет можно построить следующим образом. В каждом классе изоморфных объектов категории $\mathfrak{K}$ выбирается по одному представителю. Тогда полная подкатегория категории $\mathfrak{K}$, порожденная выбранным подклассом объектов, является С. к. $\mathfrak{K}$.

Две категории эквивалентны тогда и только тогда, когда их скелеты изоморфны. С. к. наследует многие свойства самой категории: локальную малость, наличие бикатегорных структур, различные виды полноты и т. д.

М. Ш. Цаленко.

СКЛЕИВАНИЯ МЕТОД в теории поверхностей — метод построения поверхностей, изометричных данной. С. м. имеет приложения к доказательствам реализуемости абстрактно заданных выпуклых метрик, к вопросам изгибания выпуклых поверхностей и к количественным оценкам изгибаемости; сила его в том, что он работает там, где дифференциальные уравнения бессильны.

Теорема Александрова: пусть $G_1, \ldots, G_n$ — замкнутые области в многообразиях с внутренней метрикой и положительной кривизной, ограниченные конечным числом кривых с ограниченной вариацией поворота. Пусть G — многообразие, составленное из областей G_i путем отождествления точек их границ таким образом, что 1) отождествленные отрезки границ областей G_i и G_j имеют равные длины; 2) сумма поворотов отождествленных отрезков границ областей G_i и G_j со стороны этих областей неотрицательна; 3) сумма углов секторов в отождествленных точках областей G_k со стороны этих областей не превосходит 2π. Тогда многообразие G имеет внутреннюю метрику положи-

тельной кривизны, совпадающую с метриками областей в окрестностях соответствующих точек.

Лит.: [1] Александрова А. Д., Залгаллер В. А., Двумерные многообразия ограниченной кривизны. М.—Л., 1962; [2] Погорелов А. В., Изгибание выпуклых поверхностей, М.— Л., 1951.

М. И. Войцеховский.

СКЛЕИВАНИЯ ТЕОРЕМЫ — теоремы, к-рые устанавливают существование аналитич. функций, подчиненных определенным соотношениям на границе области.

Теорема склеивания Лаврентьева [1]: какова бы ни была аналитич. функция $x_1=\varphi(x)$, определенная на сегменте $[-1,1]$, $\varphi(\pm1)=\pm1$, $\varphi'(x)>0$, можно построить две аналитич. функции $f_1(z,\ h)$ и $f_2(z,\ h)$, $z=x+iy$, $h=\text{const}$, отображающие однолистно и конформно прямоугольник $|x|<1$, $-h<y<0$ и прямоугольник $|x|<1$, $0<y<h$ соответственно на области D_1 и D_2 без общих точек так, что $f_1(x,\ h)=f_2(\varphi(x),\ h)$.

Эта С. т. была использована (см. [6]) для доказательства теоремы о существовании функции $w=f(z)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, осуществляющей квазиконформное отображение круга $|z|\leqslant1$ на круг $|w|\leqslant1$ и обладающей почти всюду заданной характеристикой $h(z)$, где

$$h(z)=w_{\bar z}/w_z,\ |h(z)|\leqslant h_0<1,$$

$h(z)$ — измеримая функция, определенная почти для всех $z=x+iy$, $|z|\leqslant1$. С. т., являющаяся видоизменением С. т. Лаврентьева, была также использована при решении вопроса о конформном отображении односвязной римановой поверхности на однолистный круг [5].

Были получены и другие С. т. (см. [2]), сыгравшие важную роль в теории римановых поверхностей (при этом брались более слабые ограничения на функцию типа $x_1=\varphi(x)$). Имеет место следующая С. т. (см. [3], [5]): пусть на окружности $|z|=1$ дана дуга γ_1 с концами a и b, $a\neq b$, и на γ_1 задана функция $g(z)$, обладающая свойствами: 1) она регулярна во всех внутренних точках дуги γ_1 и в них $g'(z)\neq0$; 2) функция $z_1=g(z)$ устанавливает взаимно однозначное отображение дуги γ_1 на дополнительную дугу γ_2 на $|z|=1$ с сохранением концов a и b; тогда существует функция

$$w=F(z)=\frac{1}{z}+a_1z+\dots,$$

регулярная в $|z|\leqslant1$, за исключением точек 0, a и b, и во внутренних точках дуги γ_1 удовлетворяющая соотношению $F(z)=F(g(z))$.

Доказано также существование функции $F(z)$, однолистной в $|z|<1$ (см. [4], гл. 2).

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., «Матем. сб.», 1935, т. 42, № 4, с. 407—24; [2] Волковыский Л. И., там же, 1946, т. 18, № 2, с. 185—212; [3] Schaeffer A. C., Spencer D. C., «Duke Math. J.», 1947, v. 14, № 4, p. 949—66; [4] их же, «Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.», 1950, v. 35; [5] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966, гл. 11, § 1—2; [6] Белинский П. П., Общие свойства квазиконформных отображений, Новосиб., 1974, гл. 2, § 1.

Е. Г. Голузина.

СКОЛЕМА ПАРАДОКС — следствие теоремы Лёвенхейма—Сколема (см. *Гёделя теорема о полноте*), состоящее в том, что всякая непротиворечивая формальная аксиоматич. теория, заданная счетным семейством аксиом, выполнима в счетной области. В частности, если предположить непротиворечивость аксиоматич. системы теории множеств Цермело — Френкеля или простой теории типов (см. *Аксиоматическая теория множеств*), то существует *интерпретация* этих теорий на счетной области. И это несмотря на то, что сами эти теории предназначены для описания весьма обширных фрагментов наивной теории множеств и в рамках этих теорий можно доказать существование множеств весьма большой несчетной мощности, так что в любой интерпретации этой теории должны существовать несчетные множества.

Следует подчеркнуть, что С. п. не является парадоксом в строгом смысле этого слова, т. е. отнюдь не свидетельствует о противоречивости теории, в рамках к-рой он установлен (см. также *Антиномия*). Кажущаяся парадоксальность С. п. может быть прояснена тем, что счетно-бесконечная интерпретация теории множеств является в нек-ром роде нестандартной. Элемент интерпретации может оказаться счетным в широком интуитивном смысле и несчетным внутри самой теории. Последнее означает, что среди элементов интерпретации отсутствует функция, задающая взаимно однозначное соответствие между элементами данного множества и элементами множества натуральных чисел, в то время как с теоретико-множественной точки зрения существование такой функции можно доказать.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

А. Г. Драгалин.

СКОЛЕМА ФУНКЦИЯ, функция Скулема, сколемовская функция, — понятие логики предикатов. Если $A(x_1, \ldots, x_n, y)$ — предикатная формула от *индивидных переменных* $x_1, \ldots, x_n, y$, области изменения к-рых суть множества $X_1, \ldots, X_n, Y$ соответственно, то функция $f: X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ наз. функцией Сколема, или разрешающей функцией, для формулы $\exists y\, A(x_1, \ldots, x_n, y)$, если для всех $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$ имеет место импликация

$$\exists y A(x_1, \ldots, x_n, y) \Rightarrow A(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)).$$

С. ф. были введены Т. Сколемом (T. Skolem) в 20-х гг. 20 в. Понятие С. ф. широко применяется в работах по математич. логике. Объясняется это тем, что с помощью С. ф. можно исключить чередование кванторов $\forall$ и $\exists$. Так, напр., для всякой формулы A языка узкого исчисления предикатов можно построить формулу вида $\exists x_1, \ldots, x_n \forall y_1, \ldots, y_m C$, называемую сколемовской нормальной формой формулы A, где C не содержит кванторов, но содержит новые (т. е. не встречающиеся в A) предикатные символы, и такую, что в исчислении предикатов формула A выводима тогда и только тогда, когда выводима ее сколемовская нормальная форма.

Идея С. ф. используется в таких фундаментальных теоремах математич. логики, как теорема Эрбрана, сводящая вопрос о выводимости в исчислении предикатов предикатной формулы к исследованию вопроса о выводимости в исчислении высказываний бесконечной последовательности пропозициональных формул, теорема Лёвенхейма — Сколема и др.

В тех случаях, когда предметная область, на к-рой рассматриваются формулы, обладает дополнительной структурой, можно потребовать от С. ф. определенной связи с этой структурой. Напр., если рассматриваемая предметная область принадлежит иерархии *конструктивных по Гёделю множеств*, то можно потребовать, чтобы С. ф. также принадлежали определенному уровню в конструктивной иерархии. Существование С. ф., удовлетворяющих дополнительным свойствам, не всегда гарантировано, но эффект от их использования в случае, когда они существуют, оказывается более значительным.

В качестве примера можно указать на результат Йенсена о выводимости гипотезы Чэна о двух кардиналах (см. [6]) и отрицания *Суслина гипотезы* (см. [5]) из аксиомы конструктивности Гёделя. Теорема Новикова — Кондо об униформизации Π^1_1-отношений из дескриптивной теории множеств утверждает существование определенного рода С. ф. (см. [2], с. 280).

Лит.: [1] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [2] Шенфилд Дж. Р., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975; [3] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч., Теория моделей, пер. с англ., М., 1977; [4] Ершов Ю. Л.,

Н а л ю т и н Е. А., Математическая логика М., 1979; [5] Handbook of mathematical logic, Amst., 1977; [6] D e v l i n K. J., Aspects of constructibility, B.— [a. o.], 1973. *В. Н. Гришин.*

СКОЛЬЖЕНИЙ ГРУППА регулярного накрытия $p\colon X\to Y$ — группа $\Gamma(p)$ таких гомеоморфизмов γ пространства X на себя, что $\gamma p=p$ (X и Y — связные локально линейно связные хаусдорфовы топологич. пространства). Так, С. г. накрытия окружности действительной прямой $\mathbb{R}$, определяемого формулой $t\mapsto(\cos t, \sin t)$, будет группа сдвигов $t\mapsto t+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Группа $\Gamma(p)$ является *дискретной группой* преобразований пространства X, действующей свободно (т. е. $\gamma(x)=x\Rightarrow\gamma=1$), и пространство Y естественно изоморфно факторпространству $X/\Gamma(p)$. С. г. $\Gamma(p)$ изоморфна факторгруппе *фундаментальной группы* $\pi_1(Y, y_0)$, где $y_0\in Y$, по образу группы $\pi_1(X, x_0)$, где $p(x_0)=y_0$, при гомоморфизме, индуцированном отображением p. В частности, для универсального накрытия p С. г. изоморфна фундаментальной группе пространства Y.

Лит.: К у С ы-ц з я н, Теория гомотопий, пер. с англ., М., 1964. *Э. Б. Винберг.*

СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО ПРОЦЕСС — стационарный в широком смысле случайный процесс, к-рый может быть получен с помощью применения нек-рого линейного преобразования к процессу с некоррелированными значениями (т. е. к процессу белого шума). Часто С. с. п. наз. также более частный процесс $X(t)$ с дискретным временем $t=0, \pm1, \dots$, представимый в виде

$$X(t)=Y(t)+b_1Y(t-1)+\dots+b_qY(t-q), \quad (1)$$

где $\mathsf{E}Y(t)=0$, $\mathsf{E}Y(t)\,Y(s)=\sigma^2\delta_{ts}$, δ_{ts} — символ Кронекера (так что $Y(t)$ — процесс белого шума со спектральной плотностью $\sigma^2/2\pi$), q — нек-рое целое положительное число, а $b_1, \dots, b_q$ — постоянные коэффициенты. Спектральная плотность $f(\lambda)$ такого С. с. п. определяется формулой

$$f(\lambda)=(\sigma^2/2\pi)\,|\,\psi(e^{i\lambda})\,|^2,$$

$$\psi(z)=b_0+b_1z+\dots+b_qz^q,\ b_0=1,$$

а его корреляционная функция $r(k)=\mathsf{E}X(t)X(t-k)$ имеет вид

$$r(k)=\sigma^2\sum_{j=0}^{q-|k|}b_jb_{j+|k|}\ \text{при}\ |k|\leqslant q,$$

$$r(k)=0\ \text{при}\ |k|>q.$$

Обратно, если корреляционная функция $r(k)$ стационарного процесса $X(t)$ с дискретным временем t обладает тем свойством, что $r(k)=0$ при $|k|>q$ для какого-то целого положительного q, то $X(t)$ — это С. с. п. порядка q, т. е. он допускает представление вида (1), где $Y(t)$ — белый шум (см., напр., [1], § 5.7).

Наряду со С. с. п. конечного порядка q, представимыми в виде (1), существуют также два типа С. с. п. с дискретным временем бесконечного порядка, а именно: односторонние С. с. п., допускающие представление вида

$$X(t)=\sum_{j=0}^{\infty}b_jY(t-j), \quad (2)$$

где $Y(t)$ — белый шум, а ряд в правой части (2) сходится в среднем квадратичном (и, значит, $\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|^2<\infty$), и более общие двусторонние С. с. п., представимые в виде

$$X(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}b_jY(t-j), \quad (3)$$

где $Y(t)$ — белый шум, а $\sum_{j=-\infty}^{\infty}|b_j|^2<\infty$. Класс двусторонних С. с. п. совпадает с классом стационарных процессов $X(t)$, имеющих спектральную плотность $f(\lambda)$, а класс односторонних С. с. п.— с классом про-

цессов, имеющих спектральную плотность $f(\lambda)$ такую, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\, d\lambda > -\infty$$

(см. [2], [1], [3]).

Односторонним или соответственно двусторонним С. с. п. с непрерывным временем наз. стационарный процесс $X(t), -\infty < t < \infty$, представимый в виде

$$X(t) = \int_0^{\infty} b(s)\, dY(t-s), \quad \int_0^{\infty} |b(s)|^2\, ds < \infty,$$

или соответственно в виде

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(s)\, dY(t-s), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |b(s)|^2\, ds < \infty,$$

где $\mathsf{E}|dY(t)|^2 = \sigma^2 dt$, т. е. $Y'(t)$ — обобщенный процесс белого шума. Класс двусторонних С. с. п. с непрерывным временем совпадает с классом стационарных процессов $X(t)$, имеющих спектральную плотность $f(\lambda)$, а класс односторонних С. с. п. с непрерывным временем — с классом процессов, имеющих такую спектральную плотность $f(\lambda)$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log f(\lambda)\,(1+\lambda^2)^{-1}\, d\lambda > -\infty$$

(см. [4], [3], [5]).

Лит.: [1] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [2] Колмогоров А. Н., «Бюлл. Моск. гос. ун-та», 1941, т. 2, в. 6, с. 1—40; [3] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [4] Karhunen K., «Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math.-Phys.», 1947, № 37, p. 3—79; [5] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963.

А. М. Яглом.

СКОЛЬЗЯЩИЙ ВЕКТОР — см. *Вектор.*

СКРЕЩЕННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ группы G и кольца K — ассоциативное кольцо, определяемое следующей конструкцией. Пусть заданы однозначное отображение σ группы G в группу автоморфизмов ассоциативного кольца K с единицей и семейство

$$\rho = \{\rho_{g,\,h} \mid g,\ h \in G\}$$

обратимых элементов кольца K, удовлетворяющее условиям

$$\rho_{g_1,\,g_2}\,\rho_{g_1 g_2,\,g_3} = \rho_{g_1,\,g_2 g_3}\,\rho_{g_2,\,g_3}^{g_1\sigma};$$

$$\alpha^{g_1\sigma \cdot g_2\sigma} = \rho_{g_1,\,g_2}^{-1}\,\alpha^{(g_1 g_2)\,\sigma}\,\rho_{g_1,\,g_2}$$

для всех $\alpha \in K$ и $g_1, g_2, g_3 \in G$. Семейство ρ наз. системой факторов. Элементами С. п. группы G и кольца K при системе факторов ρ и отображении σ будут всевозможные формальные конечные суммы вида

$$\sum_{g \in G} \alpha_g t_g, \quad g \in G, \quad \alpha_g \in K$$

(t_g — символ, однозначно сопоставляемый каждому элементу $g \in G$), а операции определяются формулами

$$\sum_{g \in G} \alpha_g t_g + \sum_{g \in G} \beta_g t_g = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g)\, t_g;$$

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g t_g\right)\left(\sum_{g \in G} \beta_g t_g\right) =$$

$$= \sum_{h \in G}\left(\sum_{xy = h,\ x,\ y \in G} \left(\alpha_x \beta_y^{x\sigma} \rho_{x,\,y}\right)\right) t_h.$$

Это кольцо обозначается $K(G, \rho, \sigma)$; элементы t_g образуют K-базис С. п. $K(G, \rho, \sigma)$.

Если σ отображает G в единичный автоморфизм кольца K, то С. п. $K(G, \rho)$ наз. скрещенным групповым кольцом, а если, кроме того, $\rho_{g,\,h} = 1$ для всех $g, h \in G$, то $K(G, \rho, \sigma)$ — групповое кольцо группы G над кольцом K (см. *Групповая алгебра*).

Пусть K — поле и σ — мономорфизм. Тогда С. п. $K(G, \rho, \sigma)$ — простое кольцо, являющееся С. п. поля с его группой Галуа.

Лит.: [1] Sehgal S. K., Topics in group rings, N. Y., 1978; [2] Бовди А. А., «Сиб. матем. ж.», 1963, т. 4, с. 481—500; [3] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 2, М., 1973, с. 5—118.

А. А. Бовди.

СКРЕЩЁННЫЕ МОДУЛИ — понятие, родственное понятию G-модулей (см. *Модуль*). Группа M (не обязательно коммутативная) с группой операторов G, снабженная гомоморфизмом $f: M \to G$ таким, что для любого $g \in G$ и любых $x, y \in M$ имеют место соотношения

$$f(gx) = g(fx)\,g^{-1}, \quad (fx)\,y = xyx^{-1},$$

наз. с к р е щ е н н ы м (G, f)-м о д у л е м. Тогда и только тогда M является G-модулем (то есть M — абелева группа), когда $f = \text{const}$ ($\equiv e \in G$). *М. И. Войцеховский.*

СКРЕЩЁННЫЙ ГОМОМОРФИЗМ группы G в операторную группу Γ над G — отображение $\varphi: G \to \Gamma$, удовлетворяющее условию $\varphi(ab) = \varphi(a)(a\varphi(b))$. Если G действует на Γ тождественно, то С. г. — это обычный гомоморфизм. С. г. наз. также 1-к о ц и к л а м и группы G со значениями в Γ (см. *Неабелевы когомологии*). Каждый элемент $\gamma \in \Gamma$ определяет С. г. $\varphi(a) = \gamma^{-1}(a\gamma)$ ($a \in G$), наз. г л а в н ы м С. г., или коциклом, когомологичным e. Отображение $\varphi: G \to \Gamma$ является С. г. тогда и только тогда, когда отображение ρ группы G в *голоморф группы* Γ, заданное формулой $\rho(a) = (\varphi(a), \sigma(a))$, где $\sigma: \Gamma \to \mathrm{Aut}\,\Gamma$ — гомоморфизм, определяющий на Γ структуру операторной группы, является гомоморфизмом. Напр., если σ — линейное представление группы G в векторном пространстве V, то С. г. $\varphi: G \to \Gamma$ определяет представление ρ группы G аффинными преобразованиями пространства V. Я д р о м С. г. φ наз. множество $\varphi^{-1}(e) \subset G$; оно всегда является подгруппой в G. *А. Л. Онищик.*

СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ — прямые в пространстве, не лежащие в одной плоскости.

У г л о м между С. п. наз. любой из углов между двумя параллельными им прямыми, проходящими через произвольную точку пространства. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — направляющие векторы С. п., то косинус угла между С. п. выражается формулой

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}.$$

О б щ и м п е р п е н д и к у л я р о м двух С. п. наз. прямая, пересекающая каждую из прямых и им перпендикулярная. Для любых двух С. п. существует единственный общий перпендикуляр. Уравнения (как линии пересечения двух нек-рых плоскостей) общего перпендикуляра к двум С. п. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}t_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{b}t_2$ имеют вид

$$((\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1),\ \boldsymbol{a},\ [\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]) = 0,$$
$$((\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2),\ \boldsymbol{b},\ [\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]) = 0.$$

Р а с с т о я н и е м между С. п. наз. длина отрезка общего перпендикуляра к этим двум прямым, концы к-рого лежат на этих прямых (или расстояние между параллельными плоскостями, в к-рых лежат С. п.). Расстояние d между С. п. выражается формулой

$$d = \frac{|((\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2),\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})|}{|[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]|}.$$

А. Б. Иванов.

СЛАБАЯ ГОМОЛОГИЯ — отношение эквивалентности между циклами, приводящее к определению групп *спектральных гомологий* $\check{H}_p(C; G)$. Известно, что гомологии Стинрода — Ситникова компактного пространства $H_p(C; G)$ отображаются на $\check{H}_p(C; G)$ эпиморфно, причем ядро K этого отображения изоморфно первому производному функтору $\varprojlim{}^1$ от обратного предела гомологий $H_p(\alpha; G)$ нервов открытых покрытий α пространства C. Первоначально группы H_p определялись в терминах циклов Вьеториса, причем циклы, задающие элементы подгруппы $K \subset H_p(C; G)$, наз. с л а б о г о м о л о г и ч н ы м и н у л ю. Наоборот, циклы Вьеториса, гомологичные нулю в указанном выше определении групп H_p, иногда наз. с и л ь н о г о м о л о г и ч-

ными нулю (а соответствующее отношение эквивалентности между ними — сильной гомологией). В случае, когда G — компактная группа или поле, ядро K равно нулю, и понятия сильной и слабой гомологий оказываются эквивалентными.

Лит.: [1] Александров П. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1959, т. 54, с. 3—136; [2] Масси У., Теория гомологий и когомологий, пер. с англ., М., 1981. *Е. Г. Скляренко.*

СЛАБАЯ ОСОБЕННОСТЬ, полярная особенность,— неограниченность ядра интегрального оператора $K(x, s)$ при ограниченном произведении $|x-s|^{\alpha}K(x, s)$, $(x, s)\in\Omega\times\Omega$, где Ω — множество пространства $\mathbb{R}^n$, $|x-s|$ — расстояние между точками x, s и $0<\alpha=\text{const}<n$. Интегральный оператор, к-рый порождается таким ядром

$$K\varphi(t)=\int_{\Omega}\frac{M(x, s)}{|x-s|^{\alpha}}\varphi(s)\,ds, \qquad (1)$$

наз. интегральным оператором со слабой особенностью (или с полярной особенностью). Пусть Ω — компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда если $M(x, s)$ непрерывна на $\Omega\times\Omega$, то оператор (1) вполне непрерывен в пространстве непрерывных функций $\mathbf{C}(\Omega)$, а если M — ограниченная функция, то — в пространстве $L_2(\Omega)$.

Ядро

$$(K_1 * K_2)(x, s)=\int_{\Omega}K_1(x, t)\,K_2(t, s)\,dt \qquad (2)$$

наз. сверткой ядер K_1 и K_2. Пусть эти ядра имеют С. о., причем

$$|K_i(x, s)|\leqslant\frac{\text{const}}{|x-s|^{\alpha_i}},\ \alpha_i=\text{const}<n,\ i=1, 2,$$

тогда их свертка (2) ограничена или будет ядром со С. о., а именно:

$$|(K_1 * K_2)(x, s)|\leqslant\begin{cases} c & \text{если } \alpha_1+\alpha_2<n,\\ c\,|\ln|x-s||, & \text{если } \alpha_1+\alpha_2=n,\\ c\,|x-s|^{n-\alpha_1-\alpha_2}, & \text{если } \alpha_1+\alpha_2>n,\end{cases}$$

где c — нек-рая постоянная.

Если ядро имеет С. о., то все его итерированные ядра, начиная с нек-рого, ограничены.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1976; [3] Красносельский М. А. [и др.], Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966. *В. В. Хведелидзе.*

СЛАБАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — то же, что *Гато производная*.

СЛАБАЯ ТОПОЛОГИЯ — *локально выпуклая топология* на векторном пространстве X, порожденная семейством *полунорм* $p(x)=|f(x)|$, где f пробегает нек-рое подмножество F *сопряженного пространства* X'.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Краткий курс функционального анализа, М., 1982; [2] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971. *М. И. Войцеховский.*

СЛАБО БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X, для любой бесконечной системы пар множеств к-рого

$$(A_i, B_i),\ A_i\cap B_i=\varnothing,\ i=1, 2, \ldots,$$

найдутся *перегородки* C_i (между A_i и B_i) такие, что $\bigcap C_i=\varnothing$. Пространство, не являющееся слабо бесконечномерным, наз. сильно бесконечномерным. С. б. п. наз. также A-слабо бесконечномерным. Если в определении С. б. п. еще потребовать, чтобы пары множеств были дизъюнктны, то получится понятие S-слабо бесконечномерного пространства.

Лит.: [1] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973. *М. И. Войцеховский.*

СЛАБО БЛУЖДАЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО для обратимого измеримого преобразования T *измеримого пространства* $(X, \mathfrak{B})$ — измеримое подмножество $A\subset X$, для

к-рого существует такая бесконечная последовательность целых чисел n_i, что множества $T^{n_i}A$ попарно не пересекаются (здесь обратимость T подразумевает измеримость T^{-1}). Если T имеет σ-конечную *квазиинвариантную меру* μ (определенную на $\mathfrak{B}$), то необходимое и достаточное условие существования у T конечной *инвариантной меры*, эквивалентной μ, состоит в том, чтобы для любого С. б. м. A было $\mu A=0$.

Лит.: [1] Hajian A. B., Kakutani Sh., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1964, v. 110, № 1, p. 136—51; [2] Hajian A., Ito Y., «J. math. and mech.», 1969, v. 18, № 12, p. 1203—16.

Д. В. Аносов.

СЛАБОЕ РЕШЕНИЕ дифференциального уравнения

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f \qquad (*)$$

в области D — локально интегрируемая функция u, удовлетворяющая равенству

$$\int_D u L^* \varphi dx = \int_D f \varphi dx$$

для любой гладкой (напр., класса C^∞) функции φ с компактным носителем в D. Здесь коэффициенты $a_\alpha(x)$ уравнения $(*)$ предполагаются достаточно гладкими и L^* означает формально сопряженный по Лагранжу с L дифференциальный оператор

$$L^*\varphi = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi).$$

Напр., обобщенную производную $f = D^\alpha u$ можно определить как такую локально интегрируемую функцию f, что u есть С. р. уравнения $D^\alpha u = f$.

При рассмотрении С. р. уравнения $(*)$ возникает задача: при каких условиях они являются *сильными решениями*. Напр., для эллиптич. уравнений всякое С. р. является сильным.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981.

А. П. Солдатов.

СЛАБЫЙ ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ МИНИМУМ — минимальное значение $J(\tilde{y})$, достигаемое функционалом $J(y)$ на кривой $\tilde{y}(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, такое, что $J(\tilde{y}) \leqslant J(y)$ для всех кривых сравнения $y(x)$, удовлетворяющих условию ε-близости 1-го порядка

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant \varepsilon, \ |y'(x) - \tilde{y}'(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (1)$$

на всем промежутке $[x_1, x_2]$. Предполагается, что кривые $\tilde{y}(x)$, $y(x)$ удовлетворяют заданным граничным условиям.

Если в (1) отбросить условие ε-близости по производной, то это приведет к условию ε-близости нулевого порядка. Минимальное значение функционала $J(\tilde{y})$ и ε-окрестности нулевого порядка наз. *сильным относительным минимумом*.

Поскольку условие ε-близости нулевого порядка выделяет более широкий класс кривых по сравнению с условием ε-близости 1-го порядка, всякий сильный относительный минимум является одновременно С. о. м., но не всякий С. о. м. является сильным относительным минимумом.

Для того чтобы экстремаль $\tilde{y}(x)$ доставляла С. о. м., необходимо, чтобы на ней выполнялось *Лежандра условие*. Для сильного относительного минимума вместо условия Лежандра необходимо выполнение более общего *Вейерштрасса условия*. В терминах теории оптимального управления это различие в формулировках необходимых условий означает следующее: для С. о. м. необходимо, чтобы *Гамильтона функция* в точках экстремали достигала локального максимума, а для сильного минимума — абсолютного максимума по управлению (в соответствии с принципом максимума Понтрягина).

Достаточные условия С. о. м. налагают нек-рые требования только на экстремаль $\tilde{y}(x)$, тогда как в случае сильного минимума требуется выполнение сходных по смыслу условий не только на экстремали $\tilde{y}(x)$, но и в нек-рой ее ε-окрестности нулевого порядка. Экстремаль доставляет С. о. м., если вдоль нее выполняется усиленное условие Лежандра и усиленное условие Якоби. Экстремаль доставляет сильный относительный минимум, если она может быть окружена полем экстремалей и для всех точек этого поля функция Вейерштрасса неотрицательна.

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.—Л., 1950; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М., 1957.

И. Б. Вапнярский.

СЛАБЫЙ ЭКСТРЕМУМ — минимальное или максимальное значение $J(\tilde{y})$, достигаемое функционалом $J(y)$ на кривой $\tilde{y}(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, для к-рого выполняется одно из неравенств

$$J(\tilde{y}) \leqslant J(y) \text{ или } J(\tilde{y}) \geqslant J(y)$$

для всех кривых сравнения $y(x)$, находящихся в ε-близости от кривой $\tilde{y}(x)$ как по ординате, так и по производной:

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant \varepsilon, \quad |y'(x) - \tilde{y}'(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Кривые $\tilde{y}(x)$, $y(x)$ должны удовлетворять заданным граничным условиям.

Поскольку максимизация функционала $J(y)$ эквивалентна минимизации функционала $-J(y)$, то часто вместо С. э. говорят о слабом минимуме. Термин «слабый» подчеркивает, что на кривые сравнения $y(x)$ наложено условие ε-близости не только по ординате, но и по производной (в отличие от сильного экстремума, где от $y(x)$ требуется ε-близость к $\tilde{y}(x)$ только по ординате).

По определению, С. э. является слабым относительным экстремумом, поскольку дает экстремум не абсолютный, т. е. не на всем классе допустимых кривых сравнения $y(x)$, на к-рых функционал $J(y)$ имеет смысл, а локальный, относительный, соответствующий некрому подмножеству всех допустимых кривых сравнения. Однако для краткости употребляют термин «С.э.».

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.—Л., 1950; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М., 1957.

И. Б. Вапнярский.

СЛАВЯНСКИЕ ЦИФРЫ — цифры древнерусского счета, в к-ром каждое из целых чисел от 1 до 9, а также десятки и сотни обозначались буквами славянского алфавита с надписанным над ними знаком (титло). Целые числа до 999 составлялись с помощью рядом стоящих С. ц. Тысячи обозначались с помощью приставки некрого знака к цифре, выражающей число тысяч.

СЛЕД — отображение $\mathrm{Sp}_{K/k}$ поля K в поле k (где K — расширение k), являющееся гомоморфизмом аддитивных групп и ставящее в соответствие элементу $\alpha \in K$ след матрицы k-линейного отображения $K \to K$, переводящего β из K в $\alpha\beta$.

Если K/k — сепарабельное расширение, то

$$\mathrm{Sp}_{K/k}(\alpha) = \sum \sigma_i(\alpha),$$

где σ_i пробегают все k-изоморфизмы поля K в алгебраич. замыкание $\bar{k}$ поля k. Отображение следа обладает свойством транзитивности: если L/K и K/k — конечные расширения, то для любого $\alpha \in L$

$$\mathrm{Sp}_{L/k}(\alpha) = \mathrm{Sp}_{K/k}(\mathrm{Sp}_{L/K}(\alpha)).$$

Л. В. Кузьмин.

СЛЕД квадратной матрицы — сумма элементов этой матрицы, стоящих на главной диагонали. С. матрицы $A = \|a_{ij}\|$ обозначается $\mathrm{tr}\, A$ или $\mathrm{Sp}\, A$:

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Пусть A — квадратная матрица порядка n над полем K. С. матрицы A совпадает с суммой корней характеристич. многочлена матрицы A. Если K — поле характеристики 0, то n следов: $\operatorname{tr} A, \ldots, \operatorname{tr} A^n$ однозначно определяют характеристич. многочлен матрицы A; в частности, матрица A нильпотентна тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} A^k=0$ для всех $k=1, \ldots, n$.

Если A и B — квадратные матрицы одного порядка над полем K, а $\alpha, \beta \in K$, то

$$\operatorname{tr}(\alpha A+\beta B)=\alpha \operatorname{tr} A+\beta \operatorname{tr} B,$$

$$\operatorname{tr} AB=\operatorname{tr} BA$$

и при $\det B \neq 0$

$$\operatorname{tr}(BAB^{-1})=\operatorname{tr} A.$$

С. тензорного произведения квадратных матриц над полем равен произведению следов сомножителей.

Д. А. Супруненко.

СЛЕД на C^*-алгебре A — функция f на множестве A^+ положительных элементов алгебры A, принимающая значения в $[0, +\infty]$, аддитивная, однородная относительно умножения на положительные числа и удовлетворяющая условию $f(xx^*)=f(x^*x)$ для всех $x \in A$. След f наз. конечным, если $f(x)<+\infty$ для всех $x \in A^+$; полуконечным, если $f(x)=\sup\{f(y) : y \in A, y \leqslant x, f(y)<+\infty\}$ для всех $x \in A^+$. Конечные следы на A суть ограничения на A^+ таких положительных линейных функционалов φ на A, что $\varphi(xy)=\varphi(yx)$ для всех $x, y \in A$. Пусть f — след на A, $\mathfrak{N}_f$ — множество таких элементов $x \in A$, что $f(xx^*)<+\infty$, $\mathfrak{M}_f$ — множество линейных комбинаций попарных произведений элементов из $\mathfrak{N}_f$; тогда $\mathfrak{N}_f$ и $\mathfrak{M}_f$ — самосопряженные двусторонние идеалы в A и на $\mathfrak{M}_f$ существует однозначно определенный линейный функционал φ, совпадающий с f на $\mathfrak{M}_f \cap A^+$. Пусть f — полунепрерывный снизу полуконечный след на C^*-алгебре A; формула $s(x, y)=\varphi(y^*x)$ определяет на $\mathfrak{N}_f$ эрмитову форму, и для любого $x \in A$ отображение $\lambda_f(x) : y \to xy$ пространства $\mathfrak{N}_f$ в себя непрерывно относительно этой формы. Пусть $N_f=\{x \in \mathfrak{N}_f, s(x, x)=0\}$, H_f — пополнение факторпространства $\mathfrak{N}_f/N_f$ относительно скалярного произведения, определенного формой s. Операторы $\lambda_f(x)$ определяют при переходе к факторпространству и пополнению нек-рые операторы $\pi_f(x)$ в гильбертовом пространстве H_f, и отображение $x \to \pi_f(x)$ есть представление C^*-алгебры A в H_f. Соответствие $f \to \pi_f$ есть взаимнооднозначное соответствие между множеством полунепрерывных снизу полуконечных следов на C^*-алгебре A и множеством представлений C^*-алгебры A со следом, определенных с точностью до квазиэквивалентности.

Лит.: [1] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974.

А. И. Штерн.

СЛОВО — горизонтальный ряд *букв* нек-рого *алфавита*. Напр., ряд знаков «словоалфавите» является С. в алфавите, состоящем из букв е, т, и, в, а, ф, л, о, с. Для удобства к рассмотрению допускается и пустое слово, т. е. С., не содержащее ни одной буквы. Оно является С. в любом алфавите.

Возможно, несколько более точной является и индуктивная характеризация С., согласно к-рой С. в алфавите A определяются как объекты, получающиеся в результате развертывания порождающего процесса, определяемого следующими правилами: а) пустое С. считается С. в алфавите A; б) если объект P оказался С. в алфавите A, а ξ является буквой этого алфавита, то объект $P\xi$ также считается С. в алфавите A. Индуктивная характеризация С. делает оправданным применение правила индукции для доказательства утверждений типа всеобщности о С. в данном алфавите.

С. представляет собой достаточно общий тип *конструктивного объекта*, и в силу этого обстоятельства

понятие С. играет важную роль в конструктивной математике. Понятие С. широко используется также в алгебраич. исследованиях, работах по математич. лингвистике и т. п.

Лит.: [1] Марков А. А., Теория алгорифмов, М.—Л., 1954 («Тр. матем. ин-та АН СССР», т. 42, с. 12—25). *Н. М. Нагорный.*

СЛОЕНИЕ на n-мерном многообразии M^n — такое разбиение M^n на линейно связные подмножества, именуемые слоями, что M^n можно покрыть координатными окрестностями U_α с локальными координатами $x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha$, в терминах к-рых локальные слои — компоненты связности пересечения слоев с U_α, задаются уравнениями $x^{p+1}_\alpha = \mathrm{const}, \ldots, x^n_\alpha = \mathrm{const}$. С. в этом смысле наз. топологическим С.; требуя же, чтобы M^n имело кусочно линейную, дифференцируемую или аналитич. структуру и чтобы локальные координаты были кусочно линейными, дифференцируемыми (класса C^r) или аналитическими, получают определение кусочно линейного, дифференцируемого (класса C^r) или аналитического С. Определение дифференцируемого С. класса C^r формально годится и при $r=0$, совпадая в этом случае с определением топологич. С. Обычно, говоря о дифференцируемом С., подразумевают, что $r \geqslant 1$. Слои естественно снабжаются структурой n-мерных многообразий (топологических, кусочно линейных, дифференцируемых или аналитических) и тем самым оказываются подмногообразиями (в широком смысле слова) многообразия M^n. Число p (размерность слоев) наз. размерностью С., а $q = n-p$ — его коразмерностью. Рассматривая С. на многообразии с краем, обычно требуют либо трансверсальности слоев к краю, либо же того, чтобы слой, пересекающийся с краем, целиком в нем содержался. Очевидным образом определяются комплексно-аналитические С. Основным в теории С. является дифференцируемый случай (ниже С. и отображения, как правило, подразумеваются дифференцируемыми).

Отображение

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^q,\ u \longrightarrow \left(x^{p+1}_\alpha(u), \ldots, x^n_\alpha(u)\right)$$

является *субмерсией*. Локальные слои суть $\varphi^{-1}_\alpha(c)$, $c \in \mathbb{R}^q$. Система локальных субмерсий $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ является согласованной в том смысле, что если $u \in U_\alpha \cap U_\beta$, то возле u можно перейти от $\varphi_\alpha(v)$ к $\varphi_\beta(v)$ с помощью нек-рого локального диффеоморфизма $\Phi_{\beta\alpha,\,u}$ (класса C^r) пространства $\mathbb{R}^q$, т. е. для всех v, достаточно близких к u, имеет место $\varphi_\beta(v) = \Phi_{\beta\alpha,\,u}\,\varphi_\alpha(v)$. Обратно, если M^n покрыто областями U_α и заданы субмерсии $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^q$, согласованные в том же смысле, что и выше, то путем подходящего «склеивания» $\varphi^{-1}_\alpha(c)$ между собой получается такое С., что каждое $\varphi^{-1}_\alpha(c)$ содержится в нек-ром слое.

Сопоставление каждой точке $u \in M^n$ касательного пространства к проходящему через эту точку слою, приводит к нек-рому полю p-мерных касательных подпространств (по другой терминологии, p-мерному расслоению), к-рое наз. касательным полем С. При $p=1$ любое поле p-мерных касательных подпространств, при самых минимальных требованиях дифференцируемости, является касательным полем некрого однозначно определенного С. При $p>1$ это не так. Данный вопрос имеет локальный характер (см. *Фробениуса теорема*). Непосредственное применение теоремы Фробениуса к инволютивному распределению показывает, что при выполнении соответствующих условий имеется система согласованных локальных суб-

мерсий, для к-рых заданное поле касается, переход к С. осуществляется путем надлежащих «склеиваний» (в других терминах это описано в [3]).

Формирование понятия С. произошло в 40-х гг. 20 в. в цикле работ Ж. Риба (G. Reeb) и Ш. Эресмана (Ch. Ehresmann), завершившемся книгой [1] (в связи с историей см. [2]), и было связано с переходом к глобальной точке зрения. Этому отчасти способствовала теория гладких *динамических систем*, где разбиение фазового многообразия (с выкинутыми *равновесия положениями*) на траектории потока является одномерным С. Особое положение, к-рое в этой теории занимают потоки на поверхностях (*Пуанкаре — Бендиксона теория*, *Дифференциальные уравнения на торе*, *Кнезера теорема*). Особое положение, где траектории локально разбивают пространство, способствовало привлечению внимания к С. коразмерности 1. Другой пример С., проанализированный в 40-х гг.,— разбиение группы Ли на смежные классы по аналитич. подгруппе (не обязательно замкнутой) (см. [3]). Наконец, в комплексной области решения дифференциального уравнения $dw/dz=f(z,\ w)$ с аналитической правой частью образуют (с вещественной точки зрения) двумерное С.

После первых работ наступил перерыв в развитии теории С., к-рая тогда была еще бедна значительными результатами. Интенсивное развитие началось с работ А. Хефлигера [4] и С. П. Новикова [7], наиболее известные результаты к-рых таковы (см. [17]): С. коразмерности 1 на трехмерной сфере имеет компактный слой [7] и не может быть аналитическим [4], хотя еще Ж. Риб построил С. класса C^∞. Тогда же при изучении нек-рых динамич. систем (*У-системы* и родственные им) возникли нек-рые вспомогательные С. (уже не одномерные, что тоже стимулировало исследование С. (см. [7], [8]). Все эти работы и ряд последующих можно отнести к «геометрическому» или «качественному» направлению [16]. В нем большое внимание уделяется С. коразмерности 1, существованию компактных слоев, теоремам устойчивости (устанавливающим, что при определенных условиях С. с компактным слоем устроено в его окрестности и глобально как расслоение; первые такие теоремы доказал еще Ж. Риб, см. [17]), характеристике «роста» слоев (т. е. зависимости p-мерного объема геодезич. шара радиуса r на слое от r) или их фундаментальных групп. Отметим также недавнее решение вопроса: если на замкнутом M^n имеется p-мерное С., все слои к-рого компактны, то обязательно ли ограничен p-мерный объем слоев? Д. Эпстейн (D. Epstein), Д. Салливан (D. Sullivan) и др. выяснили, что ответ положительный только при $q\leqslant 2$ (см. [9]).

Позднее возникло «гомотопическое» направление, прообразом к-рого послужила гомотопич. теория *расслоений*. Отличия, возникающие для С., отчасти связаны с тем, что для С., вообще говоря, нет аналога *индуцированному расслоению*. Это вынуждает перейти от С. к более общим объектам — *Хефлигера структурам* (нечто вроде С. с особенностями), для к-рых такой аналог имеется.

Слоения F_0 и F_1 на M наз. конкордантными и, если на «цилиндре» $M\times[0,\ 1]$ существует такое С. (той же коразмерности), слои к-рого трансверсальны ко «дну» и «крышке» цилиндра и «высекают» на них слоения F_0 и F_1. Сходным образом определяется конкордантность структур Хефлигера. Всякая структура Хефлигера конкордантна такой, к-рая вне множества «особых точек» на M соответствует нек-рому С., причем выполняются определенные условия о поведении слоев последнего возле этих точек. В этом смысле структуру Хефлигера можно представить себе как С. с особенностями. Имеется естественное биективное соответствие между классами конкордантных структур Хефлигера и гомотопич. классами непрерывных отображений M

в т. н. классифицирующее пространство $B\Gamma_q^r$ (q указывает коразмерность, r — класс гладкости структуры Хефлигера).

Гомотопич. теория устанавливает, какие гомотопич. объекты определяют конкордантность С.: два С. конкордантны тогда и только тогда, когда они конкордантны как структуры Хефлигера, а их касательные поля гомотопны (см. [6], [10], [11]). Родственный результат — доказательство существования p-мерных С. на любых открытых M (см. [6]) и на таких замкнутых M, на к-рых существует непрерывное поле p-мерных касательных подпространств (что является очевидным необходимым условием существования С., см. [10], [11]), ранее различными учеными было доказано существование С. на ряде многообразий путем непосредственных построений [12]. Идея (см. [10], [11]) состоит в том, чтобы, начав со С. с особенностями, ликвидировать их путем нек-рых модификаций С. Случай $q>1$ оказывается более простым (см. [10], [13]) и ликвидация особенностей может быть проведена в духе «геометрической» теории [14]; случай $q=1$ сложнее [11].

Отображение $f: M^n \to B\Gamma_q^r$ порождает отображение когомологий, что приводит к *характеристическим классам* С. В возникающую здесь «гомологическую» или «количественную» теорию С. (см. [13], [15], [16]) включаются и нек-рые результаты, полученные ранее без обращения к $B\Gamma_p^r$, напр. инвариант Годбийона—Вея; для $n=3$ (см. [17]) или указанные Р. Боттом (R. Bott) условия, необходимые для того, чтобы непрерывное поле касательных подпространств было гомотопно касательному полю С.

Лит.: [1] Reeb G., в кн.: Actualités Sci. Ind., № 1183, P., 1952; [2] Reeb G., Schweitzer P. A., в кн.: Differential topology..., B., 1978; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948; [4] Haefliger A., «Ann. Scuola norm. Sup. Pisa», ser. 3, 1962, t. 16, p. 367—97; [5] его же, в кн.: Manifolds, Amst., 1970, B., 1971; [6] его же, «Topology», 1970, v. 9, № 2, p. 183—94; [7] Новиков С. П., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1965, т. 14, с. 248—78; [8] Гладкие динамические системы, [пер.], М., 1977; [9] Бессе А., Многообразия с замкнутыми геодезическими, пер. с англ., М., 1981; [10] Thurston W., «Comm. math. Helv.», 1974, v. 49, p. 214—31; [11] его же, «Ann. Math.», 1976, v. 104, № 2, p. 249—68; [12] Lawson H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1974, v. 80, p. 369—418; [13] его же, The quantitative theory of foliations, Providence, 1977; [14] Мишачев Н. М., Элиашберг Я. М., «Функц. анализ и его прил.», 1977, т. 11, № 3, с. 43—53; [15] Фукс Д. Б., в кн.: Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. матем., М., 1978, т. 10, с. 179—285; [16] его же, в кн.: Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия, М., 1981, т. 18, с. 151—213; [17] Тамура И., Топология слоений, пер. с япон., М., 1979. *Д. В. Аносов.*

СЛОЖЕНИЕ — одна из основных арифметич. операций. Результат С. наз. суммой. Сумма чисел a и b обозначается $a+b$, при этом a и b наз. слагаемыми. С. чисел коммутативно: $a+b=b+a$, и ассоциативно: $(a+b)+c=a+(b+c)$. Операция, обратная С., наз. вычитанием.

Обычно С. называют также операцию в *абелевой группе* (аддитивная запись) и ту бинарную операцию в *кольце*, относительно к-рой элементы кольца образуют абелеву группу. Здесь также С. ассоциативно и коммутативно. Иногда сложением наз. и некоммутативная операция в группе, напр. операция в *мультипликаторной группе*. *О. А. Иванова.*

СЛОЖЕНИЕ множеств — векторное сложение и нек-рые другие (ассоциативные и коммутативные) действия над множествами A_i. С. рассматривается чаще всего для выпуклых множеств A_i в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Векторная сумма (с коэффициентами λ_i) определяется в линейном пространстве правилом

$$S=\sum\nolimits_i \lambda_i A_i = \bigcup\nolimits_{x_i \in A_i} \left\{ \sum\nolimits_i \lambda_i x_i \right\},$$

где λ_i — действительные числа (см. [1]). В пространстве $\mathbb{R}^n$ векторная сумма наз. также суммой Минк-

ковского. С зависимостью объема S от λ_i связана *смешанных объемов теория*. Для выпуклых A_i С. сохраняет выпуклость и сводится к С. *опорных функций*, а для C^2-гладких строго выпуклых $A_i \subset \mathbb{R}^n$ характеризуется С. средних значений радиусов кривизны в точках с общей нормалью.

Рассматриваются также: С. множеств с точностью до сдвига; С. замкнутых множеств, сопровождаемое замыканием результата (см. *Выпуклых множеств пространство*); интегрирование континуального семейства множеств; С. в коммутативных полугруппах (см. [4]).

p-с у м м ы Ф а й р и определены в классе выпуклых тел $A_i \subset \mathbb{R}^n$, содержащих нуль. При $p \geqslant 1$ опорная функция p-суммы определяется как $(\Sigma_i H_i^p)^{1/p}$, где H_i — опорные функции слагаемых. При $p \leqslant -1$ выполняют $(-p)$-сложение полярных для A_i тел и берут поляру результата (см. [2]). p-сумма Файри непрерывна по A_i и p. Проекция p-суммы на подпространство есть p-сумма проекций. При $p=1$ сумма совпадает с векторной, при $p=-1$ наз. и н в е р с н о й с у м м о й (см. [1], с. 38), при $p=+\infty$ дает выпуклую оболочку слагаемых, при $p=-\infty$ — их пересечение. При этих четырех значениях p-сумма многогранников есть многогранник; при $p=\pm 2$ сумма эллипсоидов есть эллипсоид (см. [2]).

С у м м а Б л я ш к е определена для выпуклых тел $A_i \subset \mathbb{R}^n$, рассматриваемых с точностью до сдвига. Определяется сложением поверхностных функций [3].

С у м м а в д о л ь п о д п р о с т р а н с т в а определена в векторном пространстве X, разложенном в прямую сумму подпространств Y и Z. Сумма A_i вдоль Y определяется как

$$\bigcup_{z \subset Z} \left\{ \sum_i (Y_z \cap A_i) \right\},$$

где Y_z — так сдвинутое Y, что $Y_z \cap Z = \{z\}$ (см. [1]).

Лит.: [1] Р о к а ф е л л а р Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973; [2] F i r e y W. J., «Pacif. J. Math.», 1964, v. 14, p. 53—60; [3] е г о ж е, «Proc. Colloq. on Conv.», Copenhagen, 1965, Kbh., 1967, p. 94—101; [4] D i n g h a s A., Minkowskische Summen und Integrale. Superadditive mengen-funktionale. Isoperimetrische Ungleichungen, P., 1961.

В. П. Федотов.

СЛОЖНАЯ ГИПОТЕЗА — утверждение (предположение) о принадлежности функции распределения (плотности вероятности) случайной величины некому множеству функций распределения, содержащему более одного элемента. См. *Статистических гипотез проверка*, *Простая гипотеза*.

Лит.: [1] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

М. С. Никулин.

СЛОЖНАЯ СИСТЕМА — собирательное название систем, состоящих из большого числа взаимосвязанных элементов. Следует подчеркнуть неформальность этого понятия, поскольку на современном этапе развития науки нет строгого математич. определения С. с., охватывающего все интуитивные представления о реальных С. с. Типичными примерами С. с. являются: нервная система, мозг, ЭВМ, система управления в человеческом обществе и т. д.

В 20 в. в связи с необходимостью изучения все более сложных объектов к понятию С. с. подошли многие науки: биология, техника, экономика, социология и др. Особо следует отметить рождение *кибернетики* как самостоятельной науки, основным предметом к-рой являются сложные *управляющие системы*. В результате этого процесса появился также ряд специальных дисциплин, имеющих в своем названии слово «система»: системный анализ, системотехника, общая теория систем и др.

Существуют различные подходы к математич. описанию и изучению С. с. в зависимости от используемого математич. аппарата. Можно выделить два типа математич. моделей С. с.: дискретные и непрерывные. Первые изучаются преимущественно в математич. киберне-

тике (теория управляющих систем) и опираются на аппарат дискретной математики, а вторые – в теории *динамических систем* и теории автоматич. управления, математич. основой к-рых является теория дифференциальных уравнений. Широко применяются также при изучении С. с. вероятностно-статистические методы — теория массового обслуживания, методы стохастич. программирования и стохастич. моделирования. Несмотря на различие форм и математич. аппарата, все эти подходы к описанию С. с. объединяет общая методология и общий предмет изучения.

Одним из наиболее трудных моментов при всех попытках математич. описания С. с. является формализация понятия с л о ж н о с т и. Реальным С. с. присущи многие характерные черты «сложности»: большое число элементов, из к-рых состоит система; многообразие возможных форм связи элементов системы между собой; сложное функционирование; иерархичность структуры и т. д. Необходимо отметить, что понятия С. с. и «большая система» не являются синонимами, т. к. последний термин охватывает системы, обладающие лишь одной чертой сложности — большим числом элементов.

К настоящему времени (1983) основные продвижения в формализации понятия сложности в математич. изучении С. с. получены для достаточно простых (модельных) классов управляющих систем — *Тьюринга машин*, *схем из функциональных элементов*, *автоматов конечных* и т. п. Дальнейшее изучение С. с. идет по пути рассмотрения все более сложных математич. моделей, позволяющих полнее отразить структуру и функционирование реальных С. с. При этом многие закономерности, установленные для более простых моделей, часто переносятся на более сложные.

Лит.: [1] Ляпунов А. А., Яблонский С. В., «Проблемы кибернетики», 1963, в. 9, с. 5—22; [2] Бусленко Н. П., Калашников В. В., Ковалево И. Н., Лекции по теории сложных систем, М., 1973; [3] Энциклопедия кибернетики, т. 2, К., 1975, с. 373—75.

Н. Н. Кузюрин.

СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, представленная как композиция нескольких функций. Если множество значений Y_i функции f_i содержится во множестве определения X_{i+1} функции f_{i+1}, т. е.

$$f_i : X_i \longrightarrow Y_i \subset X_{i+1},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

то функция

$$f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1,\ n \geqslant 2,$$

определяемая равенством

$$(f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1)(x) = f_n(f_{n-1}(\ldots(f_1(x))\ldots)),\ x \in X_1,$$

наз. с л о ж н о й ф у н к ц и е й или $(n-1)$-кратной к о м п о з и ц и е й (с у п е р п о з и ц и е й) функций $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$. Напр., всякая рациональная функция любого числа переменных является композицией четырех арифметич. действий, т. е. композицией функций $x+y$, $x-y$, xy, x/y.

С. ф. сохраняет многие свойства функций, композицией к-рых она является. Так, композиция непрерывных функций непрерывна. Это означает, что если функция $f_1 : X \to Y$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, а функция $f_2 : Y \to Z$ непрерывна в точке $f_1(x_0) \in Y$, то С. ф. $f_2 \circ f_1$ также непрерывна в точке x_0 (здесь X, Y и Z являются, напр., топологич. пространствами). Подобным образом, композиция n раз (непрерывно) дифференцируемых функций представляет собой также n раз (непрерывно) дифференцируемую функцию, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ Композиция возрастающих (убывающих) функций есть возрастающая (соответственно убывающая) функция. При композиции функций иногда меняются количественные характеристики свойств функций: композиция функций f_1 и f_2, удовлетворяющих условию Гёльдера некрых степеней, есть функция, удовлетворяющая условию Гёльдера степени, равной произведению степеней

условий Гёльдера, к-рым удовлетворяют функции f_1 и f_2. Нек-рые характеристики функций не сохраняются при композиции. Так, композиция функций, интегрируемых по Риману или по Лебегу, не является, вообще говоря, функцией, интегрируемой по Риману или, соответственно, по Лебегу; композиция абсолютно непрерывных функций может оказаться не абсолютно непрерывной функцией. Вместе с тем, согласно результатам Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова [1], композиция трех абсолютно непрерывных на отрезке функций не приводит к новому классу функций по сравнению с композицией двух абсолютно непрерывных функций. Н. К. Бари [2] доказала, что любая непрерывная на отрезке функция может быть представлена в виде суммы трех композиций абсолютно непрерывных функций, и есть такие непрерывные функции, к-рые не могут быть представлены в виде суммы двух таких композиций. Вместе с тем, всякая непрерывная на отрезке функция является суммой двух композиций функций с ограниченным изменением; однако n-кратные композиции функций с ограниченным изменением для каждого $n=1, 2, \ldots$ приводят к существенно новым классам функций и существуют однократные композиции функций с ограниченным изменением, не являющиеся непрерывными функциями [3].

Понятие композиции функций представляет собой наиболее широкое понимание термина «представление функции формулой». Задача о представлении функций в виде композиций возникла в связи с отысканием формул для решений алгебраич. уравнений. Всякий корень уравнения степени не выше четвертой может быть представлен формулой, выражающей его через коэффициенты уравнения и представляющей собой композицию четырех арифметич. действий и радикалов. Всякое уравнение степени $n\geqslant 5$ может быть с помощью подстановки (наз. преобразованием Чирнгаузена) приведено к виду

$$x^n+a_1x^{n-4}+\ldots+a_{n-4}x+1=0.$$

Таким образом, каждый корень уравнения степени $n\geqslant 5$ представляет собой функцию $n-4$ параметров. Задача состоит в выяснении: можно ли эти функции представить в виде композиции алгебраич. функций меньшего числа переменных. Одна из 23 проблем Д. Гильберта (D. Hilbert), поставленных им на Международном конгрессе математиков в Париже в 1900, относилась к этой задаче. Именно, 13-я проблема состояла в следующем (см. [4]): представляется ли корень f уравнения

$$f^7+xf^3+yf^2+zf+1=0 \qquad (*)$$

через коэффициенты x, y и z этого уравнения посредством композиций каких-либо непрерывных функций двух переменных (следует отметить, что всякая функция конечного числа переменных является композицией разрывных функций двух переменных). Д. Гильбертом была показана невозможность получения всех аналитич. функций трех переменных в виде композиций аналитич. функций двух переменных. Он же для уравнения 9-й степени доказал [5], что решение уравнения 9-й степени можно представить в виде композиции алгебраич. функций четырех переменных (вместо пяти, как это сразу следует из применения преобразования Чирнгаузена). Эти исследования были продолжены многими математиками (см. [6] — [19]).

А. Г. Витушкин в 1954 доказал [10], что если натуральные числа m, n, m_1 и n_1 удовлетворяют неравенству $\frac{m}{n}>\frac{m_1}{n_1}$, то можно указать n раз дифференцируемую функцию m переменных, непредставимую в виде композиции n_1 раз дифференцируемых функций от m_1 переменных. В частности, при всяком n можно

указать функцию n переменных наперед заданной гладкости, непредставимую композицией функций меньшего числа переменных той же гладкости. В этом смысле среди гладких функций любого числа переменных существуют функции, существенно зависящие от всех своих аргументов.

В 1956 А. Н. Колмогоров показал [11], что всякая определенная на n-мерном ($n\geqslant 4$) кубе непрерывная функция является композицией непрерывных функций трех переменных. Затем В. И. Арнольд уменьшил число переменных с трех до двух. Именно, он доказал [12], что любую непрерывную на кубе функцию трех переменных можно представить в виде композиции непрерывных функций двух переменных (и даже, более точно, в виде суммы 9 функций, каждая из к-рых является однократной композицией непрерывных функций двух переменных). Тем самым было показано, что каждая непрерывная на n-мерном ($n\geqslant 3$) кубе функция представима в виде композиции непрерывных функций двух переменных. Это явилось последним словом по опровержению гипотезы Гильберта о невозможности представления корней уравнения (*) в виде композиций непрерывных функций двух переменных. Работы А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда дали, в частности, положительный ответ на вопрос о представимости корней алгебраич. уравнений любой степени в виде композиции непрерывных функций не более чем двух переменных. Для композиций аналитич. и алгебраич. функций аналогичный вопрос не решен. До сих пор (1983) неизвестно, являются ли корни уравнения (*) композицией аналитич. функций или нет.

Этот цикл работ завершает следующая т е о р е м а К о л м о г о р о в а [13]: любая непрерывная функция n переменных может быть получена с помощью композиций непрерывных функций одного переменного и единственной функции двух переменных $g(x, y)$ $x+y$; именно, он доказал, что любая функция f, непрерывная на n-мерном кубе, может быть представлена в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i=1}^{2n+1} h_i\left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_j)\right),$$

где функции h_i и φ_{ij} — непрерывны, а функции φ_{ij}, кроме того, стандартны, т. е. не зависят от выбора функции f.

А. Г. Витушкин показал [14], что для любых конечных наборов непрерывных функций p_k и непрерывно дифференцируемых функций q_k, зависящих от n переменных, $k=1, 2, \ldots, m$, $n=1, 2, \ldots$, существуют даже аналитич. функции n переменных, не представимые композицией вида

$$\sum_{k=1}^{m} p_k \circ (f_k \circ q_k),$$

где f_k — произвольные непрерывные функции одного переменного.

Лит.: [1] Б а р и Н. К., М е н ь ш о в Д. Е., «Ann. di Mat.», 1927, v. 5, p. 19—54; [2] Б а р и Н. К., «Math. Ann.», 1930, Bd 103, S. 185—248, pt 2, S. 598—653; [3] е е ж е, «Матем. сб.», 1933, т. 40, с. 326—72; [4] Проблемы Гильберта, М., 1969; [5] H i l b e r t D., «Math. Ann.», 1927, Bd 97, S. 243—51; [6] B i e b e r b a c h L., «J. reinc u. angew. Math.», 1931, Bd 165, S. 89—92; [7] Ч е б о т а р е в Н. Г., Собр. соч., т. 1, М.—Л., 1949, с. 255—340; [8] Ч е б о т а р е в Г. Н., «Уч. зап. Казанск. ун-та», 1954, т. 114, кн. 2, с. 189—93; [9] М о р о з о в В. В., там же, 1954, т. 114, кн. 2, с. 173—87; [10] В и т у ш к и н А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955; [11] К о л м о г о р о в А. Н., «Докл. АН СССР», 1956, т. 108, № 2, с. 179—82; [12] А р н о л ь д В. И., там же, 1957, т. 114, № 4, с. 679—81; [13] К о л м о г о р о в А. Н., там же, 1957, т. 114, № 5, с. 953—56; [14] В и т у ш к и н А. Г., там же, 1964, т. 156, № 6, с. 1258—61; [15] L o r e n t z G. G., Approximation of functions, N. Y.,—[a.o.], 1966; [16] S p r e c h e r D. A., «J. Approxim. Theory», 1972, v. 6, № 2, p. 123—34; [17] K a h a n e J. P., там же, 1975, v. 13, p. 229—34; [18] Л и н В. Я., «Функц. анализ и его прилож.», 1976, т. 10, № 1, с. 37—45; [19] В и т у ш к и н А. Г., «Enseign. math.», 1977, t. 23, p. 255—320.

Л. Д. Кудрявцев.

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА — одно из основных понятий теории вероятностей. Роль понятий С. в. и ее *математического ожидания* впервые ясно оценил П. Л. Чебышев (1867, см. [1]). Понимание того факта, что понятие С. в. есть частный случай общего понятия функции, пришло значительно позднее. Полное и свободное от всяких излишних ограничений изложение основ теории вероятностей на основе теории меры дано А. Н. Колмогоровым (1933, см. [2]); оно сделало совершенно очевидным, что С. в. есть ни что иное, как измеримая функция на каком-либо *вероятностном пространстве*. Это обстоятельство весьма важно учитывать даже при первоначальном изложении теории вероятностей. В учебной литературе эта точка зрения последовательно проведена впервые У. Феллером (см. предисловие к [3], где изложение строится на понятии пространства элементарных событий и подчеркивается, что лишь в этом случае представление о С. в. становится содержательным).

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство. Однозначную действительную функцию $X=X(\omega)$, определенную на Ω, наз. с л у ч а й н о й в е л и ч и н о й, если при любом действительном x множество $\{\omega : X(\omega)<x\}$ входит в класс $\mathcal{A}$. Пусть X — какая-либо С. в. и $\mathcal{A}_X$ — класс тех $C\subset\mathbb{R}^1$, для к-рых $\{\omega : X(\omega)\in C\}\in\mathcal{A}$; это будет σ-алгебра. Класс $\mathcal{B}_1$ всех борелевских подмножеств числовой прямой $\mathbb{R}_1$ во всяком случае содержится в $\mathcal{A}_X$. Меру P_X, определенную на $\mathcal{B}_1$ равенством $\mathsf{P}_X(B)=\mathsf{P}\{\omega : X(\omega)\in B\}$, $B\in\mathcal{B}_1$, наз. *распределением вероятностей* С. в. X. Эта мера однозначно определяется по *распределения функции* С. в. X, т. е. по функции

$$F_X(x)=\mathsf{P}_X\{-\infty,\ x\}=\mathsf{P}\{\omega : X(\omega)<x\}.$$

Значения вероятностей $\mathsf{P}\{\omega : X(\omega)\in C\}$, $C\in\mathcal{A}_X$ (т. е. значения меры, служащей продолжением распределения P_X на σ-алгебру $\mathcal{A}_X$) по функции распределения F_X однозначно, вообще говоря, не определяются (достаточным для такой однозначности является т. н. условие с о в е р ш е н н о с т и м е р ы P, см. *Совершенная мера*, а также [4]). Указанное обстоятельство надо постоянно иметь в виду (напр., при доказательстве того, что распределение С. в. однозначно определяется по его *характеристической функции*).

Если С. в. X принимает конечное или счетное число попарно различных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ $p_n=\mathsf{P}\{\omega : X(\omega)=x_n\}$, то ее распределение вероятностей (называемое в этом случае д и с к р е т н ы м) задается формулой

$$\mathsf{P}_X(A)=\sum_{x_n\in A} p_n.$$

Распределение С. в. X наз. н е п р е р ы в н ы м, если существует функция $p_X(x)$ (плотность вероятности) такая, что

$$\mathsf{P}_X(B)=\int_B p_X(x)\,dx$$

для всякого интервала B (или, что то же самое, для любого борелевского множества B). В обычной терминологии математич. анализа это означает абсолютную непрерывность P_X по отношению к мере Лебега на $\mathbb{R}^1$.

Ряд общих свойств распределения вероятностей С. в. достаточно полно описывается небольшим коли-

чеством числовых характеристик. При этом *медиана* и *квантили* имеют то преимущество, что они определены для любых распределений, хотя наиболее употребительны *математическое ожидание* $\mathsf{E}X$ и *дисперсия* $\mathsf{D}X$ С. в. X. См. также *Вероятностей теория*.

Комплексная С. в. X определяется парой действительных С. в. X_1 и X_2 по формуле

$$X(\omega) = X_1(\omega) + iX_2(\omega).$$

Упорядоченный набор $(X_1, \ldots, X_s)$ С. в. можно рассматривать как случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^s$.

Обобщением понятия С. в. на бесконечномерный случай служит понятие *случайного элемента*.

Следует отметить, что в нек-рых задачах математич. анализа и теории чисел целесообразно рассматривать участвующие в их формулировках функции как С. в., определенные на подходящих вероятностных пространствах (см., напр., [5]).

Лит.: [1] Чебышев П. Л., О средних величинах, в кн.: Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947; [2] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1967; [4] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [5] Кац М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963. *Ю. В. Прохоров.*

СЛУЧАЙНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, случайный процесс с дискретным временем, временной ряд,— случайная функция, заданная на множестве всех целых чисел $t=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ или целых положительных чисел $t=1, 2, \ldots$ *А. М. Яглом.*

СЛУЧАЙНАЯ ФУНКЦИЯ — функция произвольного аргумента t (заданная на множестве T его значений и принимающая числовые значения или, более общо, значения из какого-то векторного пространства) такая, что ее значения определяются с помощью нек-рого испытания и в зависимости от его исхода могут быть различными, причем для них существует определенное распределение вероятностей. В теории вероятностей основное внимание обычно уделяется числовым (т. е. скалярным) С. ф. $X(t)$; векторные же С. ф. $\boldsymbol{X}(t)$ можно рассматривать как совокупность скалярных функций $X_\alpha(t)$, где α пробегает конечное или счетное множество A номеров компонент вектора $\boldsymbol{X}$, т. е. как числовую С. ф., заданную на новом множестве $T_1 = T \otimes A$ пар (t, α), $t \in T$, $\alpha \in A$.

Если множество T конечно, то С. ф. $X(t)$ на T представляет собой конечный набор случайных величин, к-рый можно считать одной многомерной (векторной) случайной величиной, характеризуемой многомерной функцией распределения. Из числа С. ф. с бесконечным T наиболее изучен частный случай, когда t принимает числовые (действительные) значения; в этом случае чаще всего t является временем, а С. ф. $X(t)$ наз. *случайным процессом* (если же время t пробегает лишь целочисленные значения, то также и *случайной последовательностью*, или временным рядом). Если значениями аргумента t являются точки нек-рого многомерного многообразия (напр., k-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^k$), то С. ф. $X(t)$ наз. *случайным полем*.

Распределение вероятностей значений С. ф. $X(t)$, определенной на бесконечном множестве T, можно

охарактеризовать совокупностью конечномерных распределений вероятностей для групп случайных величин $X(t_1)$, $X(t_2)$, . . ., $X(t_n)$, отвечающих всевозможным конечным подмножествам $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ элементов T, т. е. совокупностью соответствующих конечномерных функций распределения $F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих следующим условиям согласованности:

$$F_{t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{n+m}}(x_1, \ldots, x_n, \infty, \ldots, \infty) = F_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n), \quad (1)$$

$$F_{t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = F_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n), \quad (2)$$

где $i_1, \ldots, i_n$ — произвольная перестановка индексов $1, \ldots, n$. Такое задание распределения вероятностей С. ф. $X(t)$ достаточно во всех случаях, когда интересуются лишь событиями, зависящими от значений $X(t)$ на конечных множествах значений аргумента t. Однако такое задание С. ф. не позволяет определить вероятности свойств С. ф., зависящих от ее значений на непрерывном множестве значений t, типа вероятности непрерывности или дифференцируемости С. ф. или вероятности того, что С. ф. $X(t)$ на непрерывном множестве значений t будет удовлетворять неравенству $X(t)<a$ (см. *Сепарабельный процесс*).

Более общее задание С. ф. связано с ее описанием как совокупности случайных величин $X=X(\omega)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ (где Ω — непустое множество точек ω, $\mathcal{A}$ — выделенная σ-алгебра подмножеств Ω, а P — заданная на $\mathcal{A}$ вероятностная мера) и отвечающих всевозможным точкам t множества T. При таком подходе под С. ф. на множестве T следует понимать функцию $X(t, \omega)$ двух переменных $t \in T$ и $\omega \in \Omega$, являющуюся $\mathcal{A}$-измеримой функцией ω при каждом фиксированном значении t (т. е. при фиксированном t обращающуюся в случайную величину, определенную на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$). Фиксируя значение аргумента $\omega=\omega_0$ функции $X(t, \omega)$, получают числовую функцию $X(t, \omega_0)=x(t)$ на T, называемую р е а л и з а ц и е й (или в ы б о р о ч н о й ф у н к ц и е й, или, если t — это время, т р а е к т о р и е й) С. ф. $X(t)$; σ-алгебра $\mathcal{A}$ и мера P при этом индуцируют σ-алгебру подмножеств и определенную на ней вероятностную меру в функциональном пространстве $\mathbb{R}^T=\{x(t),\ t \in T\}$ реализацией $x(t)$, задание к-рой также можно считать эквивалентным заданию С. ф. Задание С. ф. как вероятностной меры, определенной на σ-алгебре подмножеств функционального пространства $\mathbb{R}^T$ всевозможных реализаций $x(t)$, можно рассматривать как частный случай общего задания С. ф. как функции двух переменных $X(t, \omega)$ (где ω принадлежит вероятностному пространству $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$), соответствующий условию, что $\Omega=\mathbb{R}^T$, т. е. что элементарные события (точки ω исходного вероятностного пространства) с самого начала отождествляются с реализациями $x(t)$ С. ф. $X(t)$; с другой стороны, можно также показать, что к такому заданию С. ф. с помощью указания вероятностной меры на $\mathbb{R}^T$ сводятся и все другие способы задания С. ф. $X(t)$. В частности, задание совокупности всевозможных конечномерных функций распределения $F_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условиям согласованности (1) и (2), в силу фундаментальной теоремы Колмогорова о согласованных распределениях (см. *Вероятностное пространство*), определяет вероятностную меру на σ-алгебре подмножеств функционального пространства $\mathbb{R}^T=\{x(t),\ t \in T\}$, порожденной совокупностью цилиндрич. множеств вида $\{x(t) : [x(t_1), \ldots, x(t_n)] \in B^n\}$, где n — произвольное целое положительное число, а B^n — произвольное борелевское множество n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ векторов $[x(t_1), \ldots, x(t_n)]$.

Лит. см. при ст. *Случайный процесс*.

А. М. Яглом.

СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ — специального вида случайный процесс, к-рый можно интерпретировать как модель, описывающую перемещение частицы в нек-ром фазовом пространстве под воздействием какого-либо случайного механизма. Фазовым пространством обычно бывает d-мерное евклидово пространство или целочисленная решетка в нем. Случайные механизмы могут быть различными; чаще рассматривают С. б., порожденные суммированием независимых случайных величин или цепями Маркова. Точного общепринятого определения С. б. нет.

Траектории простейших С. б. в случае $d=1$ описываются начальным положением $S_0=0$ и последовательностью сумм

$$S_n=X_1+\ldots+X_n,\ n=1,\ 2,\ \ldots, \qquad (1)$$

где X_i независимы и имеют распределение Бернулли

$$\mathsf{P}\{X=1\}=p,\ \mathsf{P}\{X_i=-1\}=q=1-p,\ p\in(0,\ 1).$$

Значение S_n можно интерпретировать как выигрыш одного из двух игроков после n партий в игре, в к-рой этот игрок в каждой из партий выигрывает один рубль с вероятностью p и проигрывает его с вероятностью $1-p$. Если игра ведется с помощью подбрасывания симметричной монеты, то следует положить $p=1/2$ (с и м м е т р и ч н о е б л у ж д а н и е, см. *Бернулли блуждание*). При допущении, что начальный капитал 1-го игрока равен b, а начальный капитал 2-го игрока равен a, игра закончится, когда блуждающая частица (с координатами $S_1,\ S_2,\ \ldots$) впервые коснется одного из уровней a или $-b$. В этот момент один из игроков разорится. Эта классич. задача о разорении, в к-рой барьеры в точках a и $-b$ можно рассматривать как п о г л о щ а ю щ и е.

В приложениях, связанных с *массового обслуживания теорией*, частица вблизи барьеров a и $-b=0$ может вести себя иначе: напр., если $a=\infty$, $b=0$, то положение Z_{n+1} блуждающей частицы в момент $n+1$ в соответствии с (1) описывается соотношением

$$Z_{n+1}=\max(0,\ Z_n+X_{n+1}), \qquad (2)$$

и барьер в точке 0 можно наз. з а д е р ж и в а ю щ и м. Существуют и другие возможности для поведения частицы вблизи барьеров.

Если $a=\infty$, то получают задачи для С. б. с о д н о й г р а н и ц е й. Если $a=b=\infty$, то получают н е о г р а н и ч е н н о е С. б. Изучение описанных С. б. происходит обычно с помощью аппарата дискретных цепей Маркова и, в частности, путем исследования соответствующих уравнений в конечных разностях. Пусть, напр., u_k есть вероятность разорения 1-го игрока в задаче о разорении, если его капитал равен k, $0\leqslant k\leqslant a+b$, а суммарный капитал обоих игроков фиксирован и равен $a+b$. Тогда из формулы полной вероятности (по первому скачку) следует, что u_k удовлетворяет уравнению

$$u_k=pu_{k+1}+qu_{k-1},\ 0<k<a+b,$$

и граничным условиям $u_a=0$, $u_{-b}=1$. Отсюда получают

$$u_a=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}-\left(\frac{q}{p}\right)^{b}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}-1}\quad\text{при } p\neq q;$$

$$u_a=\frac{a}{a+b}\quad\text{при } p=q=1/2.$$

Вторая из этих формул показывает, что даже «безобидная» игра (в к-рой оба игрока имеют одинаковые шансы) приводит к разорению с вероятностью, близкой к 1, если капитал 2-го игрока a велик по сравнению с b ($u_\infty=1$ при $b<\infty$).

Задача о разорении может быть исследована весьма полно. Ж. Лагранжем (J. Lagrange) было, напр., установлено (см. [1], т. 1), что вероятность $u_{a,n}$ разорения 1-го игрока на n-м шаге равна

$$u_{a,n}=(a+b)^{-1}2^n p^{\frac{n-a}{2}} q^{\frac{n+a}{2}} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{a+b-1} \cos^{n-1}\frac{\pi k}{a+b} \sin\frac{\pi k}{a+b} \sin\frac{\pi a k}{a+b}.$$

Среднее время m_a до разорения одного из игроков:

$$m_a=\frac{a}{q-p}-\frac{a+b}{q-p}\,\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}},\quad p\neq q;$$

$$m_a=ab,\quad p=q={}^1/_2.$$

Для С. б. с одной границей ($a=\infty$), описываемых соотношениями (2), существует при $p<q$ и $n\to\infty$ стационарное распределение Z_n, совпадающее с распределением случайной величины $S=\sup\limits_{k\geqslant 0} S_k$, при этом

$$\mathsf{P}\{S\geqslant k\}=\left(\frac{p}{q}\right)^k,\quad k=0,\ 1,\ \ldots\ . \tag{3}$$

Законы, описывающие неограниченное С. б., следуют из теорем о поведении последовательных сумм S_n, $n=1,\ 2,\ \ldots$ Один из этих законов утверждает, что для симметричного С. б. ($p={}^1/_2$) частица с вероятностью 1 попадет (притом бесконечное число раз) в любую фиксированную точку a. При $p<{}^1/_2$ блуждание с вероятностью 1 уходит влево, при этом случайная величина S (см. (3)) с вероятностью 1 конечна.

Для симметричного С. б. время K_n, проведенное частицей на положительной полуоси (число положительных членов в последовательности $S_1,\ \ldots,\ S_n$), будет с большей вероятностью ближе к 0 или n, чем к ${}^n/_2$. Это видно из т. н. *арксинуса закона*, в силу к-рого при больших n (см. [1], т. 1)

$$\mathsf{P}=\left\{\frac{K_n}{n}<x\right\}\approx\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}.$$

Отсюда следует, напр., что

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{K_n}{n}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{4}\right\}=1-2\mathsf{P}\left\{\frac{K_n}{n}<\frac{1}{4}\right\}\approx 1-\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

и что с вероятностью 0,2 частица проводит не менее 97,6% всего времени на одной стороне.

Существуют соотношения, связывающие С. б. при наличии границ с неограниченным С. б. Напр., если положить $Y(x)=\min\{k:\ S_k\leqslant x\}$, то (см. [2])

$$\mathsf{P}\{Y(x)=n\}=\frac{x}{n}\,\mathsf{P}\{S_n=x\}.$$

Положение S_n блуждающей частицы для неограниченного С. б. при больших n описывается *больших чисел законом* и *центральной предельной теоремой*.

Если величины скачков ± 1 заменить на $\pm\Delta$ при малом Δ и положить $p=\frac{1+\alpha\Delta}{2}$, то положение частицы Z_n после $n=t\Delta^{-2}$ скачков будет описывать приближенно (при $\Delta\to 0$) поведение в момент времени t процесса диффузии со сносом α, коэффициентом диффузии 1 и с соответствующим поведением на границах a и $-b$ (если таковые для С. б. Z_n заданы).

Существует много обобщений рассмотренных С. б. Простейшие С. б. в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d>1$, определяются следующим образом. Частица выходит из начала координат и перемещается за один шаг на расстояние 1 в одном из $2d$ направлений, параллельных осям координат. Таким образом, возможными положениями блуждающей частицы являются все точки R^d с целочисленными координатами. Чтобы задать С. б., надо определить $2d$ вероятностей, соответствующих различным переходам. Получают симметричное

С. б., если каждая из этих вероятностей равна $^1/_2 d$. В многомерном случае задачи с границами для С. б. значительно сложнее, т. к. при $d>1$ существенно усложняется форма границ. Для неограниченных С. б. справедлива следующая теорема Пойа (см. [1], т. 1). Для симметричного С. б. при $d\leqslant 2$ частица с вероятностью 1 рано или поздно вернется в свое начальное положение (один, а стало быть, и бесконечное число раз). При $d=3$ эта вероятность равна приближенно всего лишь 0,35 (при $d>3$ она еще меньше).

Другое возможное обобщение простейших С. б. состоит в том, чтобы рассматривать в (1) произвольно распределенные независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Основные качественные закономерности для неограниченных С. б. и для блужданий с границами при этом сохраняются. Напр., блуждающая частица с вероятностью 1 достигает одной из границ a или $-b$. Если $\mathsf{E}X_j\leqslant 0$, $a=\infty$, то граница $-b$ будет достигаться с вероятностью 1. Если ξ_j целочисленны, $\mathsf{E}X_j=0$, то частица с вероятностью 1 вернется в исходное положение. Для произвольно распределенных X_j с $\mathsf{E}X_j=0$ это утверждение сохранится лишь в случае, когда рассматривается возвращение не в точку, а в интервалы.

Решение задач, связанных с выходом С. б. за границы интервала $(-b, a)$, в общем случае оказывается значительно более трудным. В то же время эти задачи имеют многочисленные приложения в математич. статистике (последовательный анализ), в страховом деле, в теории массового обслуживания и др. При их исследовании определяющую роль играет совокупность функционалов от С. б. $\{S_n\}$, $n=0, 1, \ldots$, наз. граничными. К ним относятся $S=\sup\limits_{k\geqslant 0} S_k$, время первого прохождения нулевого уровня (в положительном направлении) $Y_+=\min\{k: S_k>0\}$, время первого достижения нулевого уровня (в отрицательном направлении) $Y_-=\min\{k\geqslant 1: S_k>0\}$, величина первой положительной суммы $\chi_+=S_{Y_+}$, величина первой неотрицательной суммы $\chi_-=S_{Y_-}$ и др. Оказывается, что распределение скачка X_j связано с распределениями названных функционалов следующим т. н. факторизационным тождеством (см. [1], т. 1; [2], [3]). Пусть $\varphi(\lambda)=\mathsf{E}e^{i\lambda X_1}$ есть характеристич. функция X_1. Тогда при $|z|<1$, $\mathrm{Im}\lambda=0$:

$$1-z\varphi(\lambda)=\left[1-\mathsf{E}\left(e^{i\lambda\chi_+}z^{Y_+};\ Y_+<\infty\right)\right]\times$$
$$\times\left[1-\mathsf{E}\left(e^{i\lambda\chi_-}z^{\chi_-};\ Y_-<\infty\right)\right]. \qquad (4)$$

Это тождество обнаруживает связь граничных задач для С. б. с граничными задачами теории функций комплексного переменного, т. к. компоненты факторизации в правой части (4) однозначно определяются компонентами канонич. факторизации функции $1-z\varphi(\lambda)$ на оси $\mathrm{Im}\lambda=0$, т. е. разложения этой функции в произведение $1-z\varphi(\lambda)=A_{z_+}(\lambda)\,A_{z_-}(\lambda)$, $\mathrm{Im}\,\lambda=0$, где $A_{z_\pm}(\lambda)$ аналитичны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, не имеют там нулей и непрерывны, включая границу. В тождестве (4) при $z=1$ вместо первого множителя можно поставить также

$$\frac{1-\mathsf{P}\{Y_+<\infty\}}{1-\mathsf{E}e^{i\lambda S}}=1-\mathsf{E}\left(e^{i\lambda\chi_+};\ Y_+<\infty\right).$$

Тождество (4) — лишь одно из группы факторизационных тождеств, связывающих распределения различных граничных функционалов. К ним относится тождество Полячека — Спицера

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n\mathsf{E}e^{i\lambda S_n}=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\mathsf{E}e^{i\lambda\max(0,\,S_n)}\right\},$$

где $\overline{S}_n = \max(0, S_1, \ldots, S_n)$. Факторизационные тождества представляют собой мощное средство изучения граничных задач для С. б. (см. [1], т. 2; [2], [3]).

В настоящее время граничные задачи для С. б. исследованы весьма полно, включая асимптотический их анализ (см. [1], т. 2; [4]—[6]).

Аналитически решение граничных задач приводит к интегрально-разностным уравнениям. Напр., вероятность $u_n(x, a, b)$ того, что частица, вышедшая из точки $x \in (-b, a)$, покинет за время n интервал $(-b, a)$, удовлетворяет уравнению (формула полной вероятности по первому скачку)

$$u_{n+1}(x, a, b) = \int_{-b-x}^{a-x} u_n(x+y, a, b)\, dF(y) + 1 - F(a-x) + F(-b-x),$$

где $F(x) = \mathsf{P}\{X_1 < x\}$. Если перейти к производящим функциям $u(z, x, a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n u_n(x, a, b)$, то получают обычные интегральные уравнения. Существует, по крайней мере, два подхода к исследованию асимптотич. свойств решений этих уравнений. Один из них основан на изучении аналитич. свойств двойного преобразования

$$U(z, \lambda, a, b) = \int e^{i\lambda x} u(z, x, a, b)\, dx$$

и последующего его обращения (см. [4] — [6]). Другой связан с привлечением методов Вишика и Люстерника решения уравнений с малым параметром (см. [6]). На втором пути обнаруживаются глубокие связи рассматриваемых задач с *теорией потенциала*.

Многое из сказанного выше переносится и на С. б. с зависимыми скачками, когда случайные величины S_n связаны в цепь Маркова, а также на многомерные С. б. в $\mathbb{R}^d$, $d>1$ (см. [6], [7]).

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1967; [2] Боровков А. А., Теория вероятностей, М., 1976; [3] его же, Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [4] Королюк В. С., Боровских Ю. В., Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений, К., 1981; [5] Боровков А. А., «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 5, с. 645—94; [6] Лотов В. И., «Теория вероятн. и ее примен.», 1979, т. 24, № 3, с. 475—85; № 4, с. 873—79; [7] Спицер Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969.

А. А. Боровков.

СЛУЧАЙНОЕ КОДИРОВАНИЕ — один из методов кодирования (см. *Кодирование и декодирование*), при к-ром каждому возможному значению сообщения, вырабатываемому *источником сообщений*, ставится в соответствие случайно выбранное значение сигнала на входе *канала связи*. При этом на множестве значений сигналов на входе канала задается нек-рое распределение вероятностей. Часто предполагается, что каждый элемент кода (т. е. значение сигнала на входе, соответствующее данному значению сообщения) выбирается независимо от других и в соответствии с данным распределением вероятностей. Иногда С. к. определяют так, чтобы каждая реализация С. к. была групповым кодом.

Важность рассмотрения С. к. связана с тем обстоятельством, что осредненная по всем реализациям *ошибочного декодирования вероятность* дает относительно легко исследуемую оценку сверху для вероятности ошибочного декодирования оптимального кода.

Лит.: [1] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243—332; [2] Добрушин Р. Л., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 6, с. 3—104; [3] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

СЛУЧАЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ σ множества $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ в себя — случайная величина, принимающая значения из множества $\sum_n$ всех однозначных отображений множества X в себя. С. о. σ, для к-рых вероятность $\mathsf{P}\{\sigma = s\} > 0$ только для взаимно однозначных отображений $s \in \sum_n$, наз. случайными

подстановками степени n. Наиболее полно изучены С. о., для к-рых $\mathsf{P}\{\sigma = s\} = n^{-n}$ при всех $s \in \sum_n$. Реализация такого С. о. представляет собой результат простого случайного выбора из множества $\sum_n$.

Лит.: [1] Колчин В. Ф., *Случайные отображения*, М., 1984.

В. Ф. Колчин.

СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ, случайный процесс с многомерным временем, или с многомерным параметром,— случайная функция, заданная на множестве точек какого-то многомерного пространства. С. п. представляют собой важный тип *случайных функций*, часто встречающийся в различных приложениях. Примерами С. п., зависящих от трех пространственных координат x, y, z (а также и от времени t), могут служить, в частности, поля компонент скорости, давления и температуры турбулентного течения жидкости или газа (см. [1]); С. п., зависящим от двух координат x и y, будет высота z взволнованной морской поверхности или поверхности какой-либо шероховатой пластинки (см. [2]); при исследовании глобальных атмосферных процессов в масштабе всей Земли поля наземного давления и др. метеорологич. характеристик иногда рассматриваются как С. п. на сфере и т. д.

Теория С. п. общего вида фактически не отличается от общей теории случайных функций; более содержательные конкретные результаты удается получить лишь для ряда специальных классов С. п., обладающих дополнительными свойствами, облегчающими их изучение. Одним из таких классов является класс *случайных полей однородных*, заданных на однородном пространстве S с группой преобразований G и обладающих тем свойством, что распределения вероятностей значений поля на произвольной конечной группе точек пространства S или же среднее значение поля и вторые моменты его значений в парах точек не меняются при применении к аргументам поля какого-либо преобразования из группы G. Однородные С. п. на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$, $k = 1, 2, \ldots$, или на решетке $\mathbb{Z}^k$ точек $\mathbb{R}^k$ с целочисленными координатами, отвечающие выбору в качестве группы G совокупности всевозможных (или всех целочисленных) параллельных переносов, являются естественным обобщением *стационарных случайных процессов*, на к-рое просто переносится бо́льшая часть результатов, доказанных для таких процессов; большой интерес для приложений (в частности, для механики турбулентности, ср. [1]) представляют также *т. н.* однородные и изотропные поля на $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$, отвечающие выбору в качестве группы G совокупности всевозможных изометрич. преобразований соответствующего пространства. Важной особенностью однородных С. п. является существование *спектральных разложений* специального вида как самих таких полей, так и их корреляционных функций (см., напр., [3], [4]).

Другим привлекающим много внимания классом С. п. является класс марковских случайных полей, заданных в нек-рой области K пространства $\mathbb{R}^k$. Условие марковости С. п. $U(x)$, грубо говоря, означает, что для достаточно широкой совокупности открытых множеств Q, имеющих границу Γ, фиксация значений поля в ε-окрестности Γ^ε границы Γ при любом $\varepsilon > 0$ делает семейства случайных величин $\{U(x),\ x \in Q \setminus \Gamma^\varepsilon\}$ и $\{U(x),\ x \in T \setminus \Gamma^\varepsilon\}$, где T — дополнение замыкания Q в K, взаимно независимыми (или, в случае марковости в широком смысле, взаимно некоррелированными; см., напр., [5]). Обобщением понятия марковского С. п. является понятие L-марковского С. п., для к-рого указанная выше независимость (или некоррелированность) имеет место лишь при замене границы Γ области Q специальным образом оп-

ределенной утолщенной границей $\Gamma+L$. Теория марковских С. п. и L-марковских полей имеет ряд важных применений в физич. теории квантовых полей и в статистич. физике (см. [6], [7]). Еще одним классом С. п., возникшим из задач статистич. физики, является класс гиббсовских случайных полей, распределения вероятностей к-рых могут быть выражены через *Гиббса распределение* (см. [7], [8]). Удобным способом задания гиббсовских С. п. оказалось их задание с помощью совокупности условных распределений вероятностей значений поля в конечной области, отвечающих фиксированным всем его значениям вне этой области. Следует отметить, что С. п. на гладком многообразии S часто удобно рассматривать как частный случай *случайного поля обобщенного*, для которого могут не существовать значения в одной заданной точке, но имеют смысл сглаженные значения $U(\varphi)$, представляющие собой случайные линейные функционалы, определенные на нек-ром пространстве D гладких основных функций $\varphi(x)$. Обобщенные С. п. (особенно обобщенные марковские С. п.) используются в физич. приложениях; рассматривая лишь функции $\varphi(x)$ такие, что

$$\int \varphi(x)\, dx = 0,$$

в рамках теории обобщенных С. п. можно определить также родственные *случайным процессам со стационарными приращениями* локально однородные (и локально однородные и локально изотропные) С. п., играющие важную роль в статистич. теории турбулентности (см., напр., [1], [9]).

Лит.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1—2, М., 1965—67; [2] Хусу А. П., Витенберг Ю. Р., Пальмов В. А., Шероховатость поверхностей (теоретико-вероятностный подход), М., 1975; [3] Хеннан Э., Представления групп и прикладная теория вероятностей, пер. с англ., М., 1970; [4] Ядренко М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [5] Розанов Ю. А., Марковские случайные поля, М., 1981; [6] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [7] Престон К., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1977; [8] Многокомпонентные случайные системы, М., 1978; [9] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я, Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961.

А. М. Яглом.

СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ ОБОБЩЕННОЕ, обобщенный случайный процесс,— случайная функция на гладком многообразии G, типичными реализациями к-рой являются обобщенные функции, заданные на этом многообразии G. Точнее, пусть G — бесконечногладкое многообразие и $D(G)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, определенных на G, с обычной топологией равномерной сходимости последовательностей равномерно финитных функций и всех их производных. Тогда на G определено С. п. о., если задано непрерывное линейное отображение

$$D(G) \longrightarrow L_0(\Omega, \mathfrak{B}, \mu),\ \varphi \longrightarrow f_\varphi,\ \varphi \in D(G),$$

пространства $D(G)$ в пространство $L_0(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ случайных величин, определенных на нек-ром вероятностном пространстве Ω с выделенной σ-алгеброй его подмножеств $\mathfrak{B}$ и вероятностной мерой μ, определенной на $\mathfrak{B}$; $L_0(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ снабжено топологией сходимости по мере [7]. В случае когда вероятностным пространством является пространство $D'(G)$ обобщенных функций на G с σ-алгеброй $\mathfrak{B}_0$, порожденной цилиндрич. множествами в $D'(G)$, а отображение задается формулами

$$f_\varphi(T) = (T, \varphi),\ T \in D'(G),\ \varphi \in D(G),$$

С. п. о. $\{f_\varphi, \varphi \in D'(G)\}$ наз. каноническим. Оказывается, что любое С. п. о. на конечномерном многообразии G вероятностно изоморфно нек-рому (единственному) канонич. случайному полю на G (см. [2]).

Приведенное здесь определение допускает ряд естественных модификаций: напр., можно рассмотреть С. п. о. с векторными значениями или вместо пространства $D(G)$ использовать в определении какое-нибудь более обширное пространство основных функций на G (скажем, в случае $G=\mathbb{R}^n$, $n=1, 2, 3$, пространства $S(\mathbb{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными, быстрее любой отрицательной степени $|x|^k$, $k=-1, -2, -3, \ldots$, $x\in\mathbb{R}^n$).

Понятие С. п. о. включает в себя классич. случайные поля и процессы, реализациями к-рых являются обычные функции. Это понятие возникло в сер. 50-х гг. 20 в., когда обнаружилось, что многие естественные стохостич. образования не могут быть достаточно просто выражены в терминах классических случайных полей, а на языке С. п. о. имеют простое и изящное описание. Так, напр., любая положительно определенная билинейная форма на $D(\mathbb{R}^n)$, $n=1, 2, \ldots$,

$$(\varphi_1, \varphi_2)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} W(x_1, x_2)\,\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\,dx_1\,dx_2,$$

$\varphi_1, \varphi_2\in D(\mathbb{R}^n)$, где $W(x_1, x_2)$ — положительно определенная симметрическая обобщенная функция двух переменных, однозначно определяет гауссовское С. п. о. $\{f_\varphi, \varphi\in D(\mathbb{R}^n)\}$ на $\mathbb{R}^n$ (с нулевым средним) так, что ковариация этого поля

$$\int f_{\varphi_1} f_{\varphi_2}\,d\mu=(\varphi_1, \varphi_2)$$

(μ — соответствующая этому полю вероятностная мера в $D'(\mathbb{R}^n)$). Это С. п. о. оказывается классическим лишь при достаточно хорошей функции $W(x_1, x_2)$ (напр., непрерывной и ограниченной). Другие примеры: С. п. о. на $\mathbb{R}^n$ с независимыми значениями (см. [2]) или т. н. автомодельные случайные поля на $\mathbb{R}^n$ (см. [6]), среди к-рых вообще нет классич. полей.

Интерес к исследованию С. п. о. (особенное марковских случайных полей) возрос в последнее время из-за обнаруженной в нач. 70-х гг. связи между задачей построения квантового физич. поля и построением марковских С. п. о. на $\mathbb{R}^n$ при $n>1$ (см. [5]).

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958; [2] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [3] Гельфанд И. М., «Докл. АН СССР», 1955, т. 100, № 5, с. 853—56; [4] Kiyosi Itô, «Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A», 1954, v. 28. № 3, p. 209—23; [5] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [6] Добрушин Р. Л., в сб.: Многокомпонентные случайные системы, М.— Л., 1978, с. 179—213; [7] Добрушин Р. Л., Минлос Р. А., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 2, с. 67—122.

Р. А. Минлос.

СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ ОДНОРОДНОЕ — случайное поле $X(s)$, заданное на *однородном пространстве* $S=\{s\}$ точек s, снабженном транзитивной группой $G=\{g\}$ преобразований, переводящих пространство S в себя, и обладающее тем свойством, что определенные статистич. характеристики значений этого поля не меняются при применении к аргументам s произвольного преобразования группы G. Различают два разных класса С. п. о.: поле $X(s)$ наз. С. п. о. в *узком смысле*, если при любых $n=1, 2, \ldots$ и $g\in G$ конечномерное распределение вероятностей значений поля в произвольных n точках $s_1, \ldots, s_n$ совпадает с распределением вероятностей значений того же поля в точках $gs_1, \ldots, gs_n$; если же $\mathsf{E}|X(s)|^2<\infty$ и $\mathsf{E}X(s)=\mathsf{E}X(gs)$, $\mathsf{E}X(s)\overline{\mathsf{E}X(s_1)}=\mathsf{E}X(gs)\overline{X(gs)}$ при всех $s\in S$, $s_1\in S$ и $g\in G$, то $X(s)$ наз. С. п. о. в *широком смысле*.

Важный частный случай — С. п. о. на евклидовом k-мерном пространстве $\mathbb{R}^k$ (или на решетке $\mathbb{Z}^k$ точек $\mathbb{R}^k$ с целочисленными координатами), отвечающее выбору группы всевозможных параллельных переносов в качестве группы G; иногда под С. п. о. вообще пони-

мают лишь поле этого последнего типа. С. п. о. на $\mathbb{R}^k$, отвечающее группе G всевозможных изометрич. преобразований $\mathbb{R}^k$ (порожденных параллельными переносами, вращениями и симметриями), часто наз. о д н о р о д н ы м и и з о т р о п н ы м с л у ч а й н ы м п о л е м.

Понятие С. п. о. представляет собой естественное обобщение понятия *стационарного случайного процесса*; как и в случае стационарного процесса и само С. п. о., и его ковариационная функция допускают *спектральное разложение* специального вида (см., напр., [1] — [3]). С. п. о. и нек-рые их обобщения часто возникают в различных прикладных вопросах. В частности, в статистич. теории турбулентности важную роль играют как однородные и изотропные случайные поля на $\mathbb{R}^k$ (скалярные и векторные), так и т. н. локально однородные и локально изотропные случайные поля (иначе — поля с однородными и изотропными приращениями), представляющие собой простое обобщение однородных и изотропных полей (см., напр., [4]), а в современной теории физических квантовых полей и в статистич. физике применяется теория обобщенных С. п. о., также включающих С. п. о. в качестве частного случая (см. *Случайное поле обобщенное*).

Лит.: [1] Yaglom A. M., в кн.: Proc. 4-th Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., v. 2, Berk.—Los Ang., 1961, p. 593—622; [2] Хеннан Э., Представления групп и прикладная теория вероятностей, пер. с англ., М., 1970; [3] Ядренко М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [4] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., 1967.

А. М. Яглом.

СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ — любая комбинация исходов нек-рого опыта, имеющая определенную вероятность наступления.

П р и м е р 1. При бросании двух игральных костей каждый из 36 исходов опыта может быть представлен парой (i, j), где i — число очков на верхней грани первой кости, а j — на верхней грани второй. Событие «сумма выпавших очков равна 11» есть ни что иное, как комбинация двух исходов: (5, 6) и (6, 5).

П р и м е р 2. При бросании наудачу двух точек на отрезок $[0, 1]$ совокупность всех исходов опыта можно представить точками (x, y) (x — координата первой точки, y — второй) квадрата $\{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Событие «длина отрезка, соединяющего x и y меньше α, $0 < \alpha < 1$» есть ни что иное, как множество исходов — точек квадрата, отстоящих от диагонали, проходящей через начало координат, на расстоянии, меньшем $\alpha/\sqrt{2}$.

В рамках общепринятой аксиоматики теории вероятностей (см. [1]), где в основе вероятностной модели лежит *вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ (Ω — пространство элементарных событий, т. е. совокупность всех исходов данного опыта, $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра подмножеств Ω и P — вероятностная мера, определенная на классе $\mathcal{A}$), случайные события — это множества, входящие в класс $\mathcal{A}$.

В первом из приведенных выше примеров пространство Ω — это конечное множество, состоящее из 36 элементов — пар (i, j), $1 \leqslant i, j \leqslant 6$, $\mathcal{A}$ — класс всех 2^{36} подмножеств Ω (включая само Ω и пустое множество ϕ) и для каждого $A \in \mathcal{A}$ вероятность $\mathsf{P}(A)$ равна $m/36$, где m — число элементов A. Во втором примере Ω есть множество точек единичного квадрата, $\mathcal{A}$ — класс его борелевских подмножеств, P — обычная мера Лебега на $\mathcal{A}$ (совпадающая для простых фигур с их площадью).

Класс $\mathcal{A}$ событий, связанных с вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, является по отношению к операциям $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (симметрич. разность) и $A \cdot B = A \cap B$ *булевым кольцом* с единицей Ω, т. е. *булевой алгеброй*. Определенная на этой булевой алгебре функция $P(A)$ обладает всеми свойствами нормы,

кроме одного: равенство $P(A)=0$ не влечет $A=\phi$. Объявляя события эквивалентными, если P-мера их симметрич. разности равна нулю, и рассматривая вместо событий A классы эквивалентности $\bar{A}$, приходят к нормированной булевой алгебре $\mathcal{A}$ классов $\bar{A}$. На этом замечании основан другой возможный подход к аксиоматике теории вероятностей, при к-ром исходным является не вероятностное пространство, связанное с данным опытом, а нормированная булева алгебра С. с. (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Теория вероятностей, в кн.: Математика в СССР за тридцать лет. 1917—1947, М.—Л., 1948; [3] Колмогоров А. Н., Algèbres de Bool métriques complètes, в кн.: VI Zjazd Mathematyków Polskich, Kraków, 1950; [4] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

Ю. В. Прохоров.

СЛУЧАЙНЫЕ И ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫЕ ЧИСЛА — числа ξ_n (или цифры α_n), последовательность появления к-рых обладает теми или иными статистич. закономерностями (см. *Вероятностей теория*). Различают с л у ч а й н ы е ч и с л а (с. ч.), генерируемые каким-либо стохастич. устройством, и п с е в д о с л у ч а й н ы е ч и с л а (п. ч.), конструируемые с помощью арифметич. алгоритмов. При этом обычно (с бо́льшим или меньшим основанием) принимают, что полученная (или построенная) последовательность обладает комплексом частотных свойств, «типичным» для последовательности независимых реализаций какой-либо случайной величины ζ с функцией распределения $F(z)$, и говорят о (независимых) с. ч., распределенных по закону $F(z)$. Наиболее употребительны равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$ с. ч. ξ_n (р. р. с. ч.), $\mathsf{P}\{\xi_n<x\}=x$, а также равновероятные двоичные случайные знаки α_n (р. д. с. з.), $\mathsf{P}\{\alpha_n=0\}=\mathsf{P}\{\alpha_n=1\}=1/2$, и нормальные с. ч. η_n (н. р. с. ч.), распределенные по нормальному закону со средним 0 и дисперсией 1. С. ч. с произвольной функцией распределения $F(z)$ могут быть построены по последовательности р. р. с. ч. ξ_n как $\zeta_n=F^{-1}(\xi_n)$, т. е. найдены из уравнения $\xi_n=F(\zeta_n)$, $n=1, 2, \ldots$. Существуют и др. приемы построения; так, н. р. с. ч. аналитически проще получать из р. р. с. ч. парами:

$$\zeta_{2n-1}=\cos 2\pi\xi_{2n-1}\sqrt{-2\ln\xi_{2n}},$$

$$\zeta_{2n}=\sin 2\pi\xi_{2n-1}\sqrt{-2\ln\xi_{2n}}.$$

Разряды двоичной записи р. р. с. ч. являются р. д. с. з.; наоборот, группируя р. д. с. з. в последовательность бесконечных последовательностей, получают р. р. с. ч.

С. и п. ч. используются на практике в *игр теории*, *математической статистике*, *статистических испытаний методе* и *криптографии* для конкретной реализации недетерминированных алгоритмов и поведения, предсказуемого лишь «в среднем». Напр., если очередное $\alpha_n=0$, то игрок выбирает первую стратегию, а если $\alpha_n=1$, то — вторую.

Придать строгий математич. смысл понятию с. ч. удается только в рамках алгоритмич. теории вероятностей А. Н. Колмогорова [2] — П. Мартин-Лёфа [5]. Пусть $H=\times_{n=1}^{\infty}\{x_n : 0\leqslant x_n\leqslant 1\}$ — единичный счетномерный гиперкуб с лебеговой мерой λ на нем. В H существует наибольшее конструктивно описываемое измеримое множество G нулевой меры. Тогда любую последовательность $\{x_n\}\notin G$ можно считать типичной и принять за последовательность р. р. с. ч. Аналогично может быть введено понятие конструктивной (ε, l)-типичности N-последовательности двоичных знаков a_j, $j=1, \ldots, N$, относительно системы всех событий $B\subset\{0;1\}^N$ меры не более ε и длины описания не более l. Как видно из определения, типичная последовательность р. р. с. ч. сама не может быть конструктивной, и даже построение (ε, l)-типичной последовательности

случайных знаков требует чрезвычайно большого перебора. Поэтому на практике используют более просто устроенные алгоритмы, проверяя их статистич. «качества» небольшим количеством тестов. Так, конструируя р. р. с. ч., обязательно тестируют равномерную распределенность последовательности (см. [3]). В простых задачах выполнение нескольких тестов уже может гарантировать применимость последовательности. Иногда более эффективно использование коррелированных с. ч., как правило, их строят по последовательности р. р. с. ч.

Созданы также таблицы с. ч. и случайных знаков. Однако, по-видимому, нельзя гарантировать, что они удовлетворяют всем разумным статистич. тестам на некоррелированность.

Лит.: [1] Ермаков С. М., Метод Монте-Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975; [2] Kolmogorov A. N., «Sankhya», ser. A., 1963, v. 25, p. 369—76; [3] Коробов Н. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 3, с. 215—38; [4] Кнут Д., Искусство программирования для ЭВМ, пер. с англ., т. 2, М., 1977; [5] Martin-Löf P., IEEE Transaction, IT, 1968, v. 14, p. 662—64; [6] Ченцов Н. Н., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1967, т. 7, № 3, с. 632—43; [7] Шень А., «Семиотика и информатика», 1982, в. 18, с. 14—42.
Н. Н. Ченцов.

СЛУЧАЙНЫЕ РАЗМЕЩЕНИЯ — вероятностная схема, в к-рой n частиц случайно размещаются в N ячейках. В наиболее простой схеме равновероятных размещений каждая из n частиц независимо от других частиц может попасть в любую фиксированную ячейку с вероятностью $1/N$. Пусть $\mu_r=\mu_r(n,\ N)$ — число ячеек, в к-рых после такого размещения оказалось ровно r частиц и пусть $0\leqslant r_1<r_2<\ldots<r_s$. Производящая функция

$$\Phi(z;\ x_1,\ \ldots,\ x_s)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1,\ \ldots,\ k_S=0}^{\infty}\frac{N^n n^n}{n!}\times$$
$$\times\mathsf{P}\{\mu_{r_1}=k_1,\ \ldots,\ \mu_{r_s}=k_s\}\,x_1^{k_1}\ldots x_s^{k_s}$$

имеет следующий вид:

$$\Phi(z;\ x_1,\ \ldots,\ x_s)=$$
$$=\left[e^z+\frac{z^{r_1}}{r_1}(x_1-1)+\ldots+\frac{z^{r_s}}{r_s!}(x_s-1)\right]^N. \qquad (1)$$

Производящая функция (1) позволяет вычислять моменты μ_r и изучать асимптотич. свойства распределений μ_r при $n,\ N\to\infty$. Эти асимптотич. свойства в значительной степени определяются поведением параметра $\alpha=n/N$ — среднего числа частиц на одну ячейку. Если $n,\ N\to\infty$ и $\alpha=o(N)$, то при фиксированных r и t

$$\mathsf{E}\mu_r\sim Np_r(\alpha),\ \mathrm{Cov}(\mu_r,\ \mu_t)\sim N\sigma_{rt}(\alpha), \qquad (2)$$

$$p_r(\alpha)=\frac{\alpha^r}{r!}e^{-\alpha},$$

$$\sigma_{rt}(\alpha)=p_r(\alpha)\left[\delta_{rt}-p_t(\alpha)-p_t(\alpha)\frac{(\alpha-r)(\alpha-t)}{\alpha}\right],$$

δ_{rt} — символ Кронекера. Можно выделить пять различных типов областей, в к-рых асимптотич. поведение μ_r различны.

Центральной областью наз. такая область изменения $n,\ N\to\infty$, для к-рой $\alpha=n/N\asymp 1$. Область $n,\ N\to\infty$, в к-рой

$$\alpha\longrightarrow\infty,\ \mathsf{E}\mu_r\longrightarrow\lambda,\ 0<\lambda<\infty,$$

наз. правой r-областью. Правой промежуточной областью наз. область изменения $n,\ N\to\infty$, в к-рой

$$\alpha\longrightarrow\infty,\ \mathsf{E}\mu_r\longrightarrow\infty.$$

Для $r\geqslant 2$ левой r-областью наз. область изменений $n,\ N\to\infty$, для к-рой

$$\alpha\longrightarrow 0,\ \mathsf{E}\mu_r\longrightarrow\lambda,\ 0<\lambda<\infty.$$

Левой промежуточной r-областью наз. область, в к-рой

$$\alpha \longrightarrow 0,\ \mathsf{E}\mu_r \longrightarrow \infty.$$

Левые и левые промежуточные r-области для $r=0,1$ считают совпадающими с соответствующими 2-областями.

В равновероятной схеме размещения в правой r-области μ_r имеет асимптотически пуассоновское распределение. В левой r-области μ_r имеет при $r\geqslant 2$ также в пределе пуассоновское распределение; при $r=0$ и $r=1$ предельные пуассоновские распределения имеют μ_0-N+n и $(n-\mu_1)/2$. В левых и правых промежуточных r-областях μ_r имеют асимптотически нормальное распределение. В центральной области доказана многомерная нормальная теорема для $\mu_{r_1}, \mu_{r_2}, \ldots, \mu_{r_s}$; параметры предельного нормального распределения определяются асимптотич. формулами (2) (см. [1]).

Размещение, в к-ром n частиц независимо друг от друга распределяются по N ячейкам и вероятность каждой из частиц попасть в j-ю ячейку равна $a_j, \sum_{i=1}^{N} a_i = 1$, наз. полиномиальным. Для полиномиального размещения также можно ввести центральную, правые и левые области изменений n, N и a_i, для к-рых доказаны предельные нормальные и пуассоновские теоремы (см. [1], [3]). Пользуясь этими теоремами, можно рассчитать мощность *пустых ящиков критерия*. Пусть имеются независимые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_2$, каждая из к-рых имеет непрерывную функцию распределения $F(x)$ (гипотеза H_0). Конкурирующая гипотеза H_1 соответствует другой функции распределения $F_1(x)$. Точки $z_0=-\infty<z_1<z_2<\ldots z_{N-1}<z_N=\infty$ выбирают так, чтобы $F(z_k)-F(z_{k-1})=1/N$, $k=1, \ldots, N$. Критерий пустых ящиков строится на основе статистики μ_0, равной числу полуинтервалов $(z_{k-1}, z_k]$, в к-рые не попало ни одного значения ξ_i. Критерий пустых ящиков определяется критич. множеством $\mu_0>C$, при к-ром гипотеза H_0 отвергается. Поскольку μ_0 имеет при основной гипотезе H_0 распределение, определяемое равномерным размещением, а при конкурирующей гипотезе H_1 — распределение, определяемое полиномиальным размещением, то можно воспользоваться предельными теоремами для μ_0 при расчете мощности $\mathsf{P}\{\mu_0>C/H_1\}$ этого критерия (см. [2]).

В схеме размещения частиц комплектами предполагается, что частицы размещаются в N ячейках комплектами по m частиц, причем частицы одного комплекта могут располагаться в ячейках только по одной, а расположения комплектов независимы. Если все C_N^m расположения комплектов равновероятны, а число комплектов $n\to\infty$, то при ограниченных или слабо растущих m сохраняются свойства асимптотич. нормальности и предельной пуассоновости случайных величин μ_r.

Возможны различные обобщения схем размещения (см. [1]), связанные с целым рядом комбинаторных задач теории вероятностей (случайные подстановки, отображения, деревья и т. п.).

Лит.: [1] Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Случайные размещения, М., 1976; [2] Севастьянов Б. А., «Труды ин-та прикладной математики Тбилисского ун-та», 1969, т. 2, с. 229—33; [3] Михайлов В. Г., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1981, т. 157, с. 138—152.

Б. А. Севастьянов.

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС, стохастический процесс, вероятностный процесс, случайная функция времени,— процесс (т. е. изменение во времени состояния нек-рой системы), течение к-рого зависит от случая и для к-рого определена вероятность того или иного его течения. Типичным примером С. п. может служить *броуновского движения процесс*. Другими практически важными

примерами С. п. являются: процесс протекания тока в электрич. цепи, сопровождающийся неупорядоченными флуктуациями силы тока и напряжения (шумами); распространение радиоволн при наличии случайных замираний радиосигналов (фединго в), создаваемых метеорологическими или иными помехами, и турбулентные течения жидкости или газа. К числу С. п. могут быть причислены и многие производственные процессы, сопровождающиеся случайными флуктуациями, а также процессы, встречающиеся в геофизике (напр., вариации земного магнитного поля, морское волнение, или микросейсмы,— высокочастотные беспорядочные колебания уровня земной поверхности), биофизике (напр., изменения биоэлектрич. потенциалов мозга, регистрируемые на электроэнцефалограмме) и экономике.

Математич. теория С. п. рассматривает мгновенное состояние системы, о к-рой идет речь, как точку нек-рого фазового пространства (пространства *состояний*) R; при этом С. п. представляется функцией $X(t)$ времени t со значениями из R. Обычно считается, что R — векторное пространство, причем наиболее изученным (и в то же время наиболее важным с точки зрения приложений) является еще более узкий случай, когда точки R задаются одним или несколькими числовыми параметрами (обобщенными координатами системы), т. е. С. п. можно рассматривать или просто как числовую функцию времени $X(t)$, в зависимости от случая принимающую различные значения, т. е. допускающую различные реализации $x(t)$ (о д н о м е р н ы й С. п.), или как подобную же векторную функцию $\boldsymbol{X}(t)=\{X_1(t), \ldots, X_k(t)\}$ (м н о г о м е р н ы й, или в е к т о р н ы й, С. п.). Изучение многомерных С. п. можно свести к изучению одномерных С. п. с помощью перехода от $\boldsymbol{X}(t)$ к вспомогательному процессу

$$X_{\boldsymbol{a}}(t)=(\boldsymbol{X}(t),\ \boldsymbol{a})=\sum_{j=1}^{k} a_j X_j(t),$$

где $\boldsymbol{a}=(a_1, \ldots, a_k)$ — произвольный k-мерный вектор; поэтому центральное место в теории С. п. занимает исследование одномерных процессов $X(t)$. Параметр t обычно принимает произвольные действительные значения или же значения из какого-то интервала действительной оси $\mathbb{R}^1$ (когда хотят подчеркнуть это обстоятельство, то говорят о С. п. с н е п р е р ы в н ы м в р е м е н е м), но он может пробегать и только целочисленные значения — тогда t наз. С. п. с д и с к р е т н ы м в р е м е н е м (или с л у ч а й н о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю, или в р е м е н н ы м р я д о м).

Задание распределения вероятностей в бесконечномерном пространстве всевозможных вариантов протекания С. п. $X(t)$ (т. е. в пространстве реализаций $x(t)$) не укладывается в рамки классич. методов теории вероятностей и требует привлечения специального математич. аппарата. Исключением являются лишь частные классы С. п., вероятностный характер к-рых полностью определяется зависимостью функции $X(t)=X(t;\ \boldsymbol{Y})$ от нек-рого конечномерного случайного вектора $\boldsymbol{Y}=(Y_1, \ldots, Y_k)$, т. к. в данном случае вероятность того или иного протекания $X(t)$ зависит только от конечномерного распределения вероятностей вектора $\boldsymbol{Y}$. Практически важным примером С. п. такого рода может служить случайное гармонич. колебание вида

$$X(t)=A\cos(\omega t+\Phi),$$

где ω — фиксированное число, A и Φ — независимые случайные величины, часто используемое при исследовании амплитудно-фазовой модуляции в радиотехнике.

Широкий класс распределений вероятностей для С. п. может быть охарактеризован бесконечной сово-

купностью согласованных друг с другом конечномерных распределений вероятностей случайных векторов $\{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\}$, отвечающих всевозможным конечным подмножествам $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ значений аргумента t (см. *Случайная функция*). Однако задание всех этих распределений все же недостаточно для определения вероятностей событий, зависящих от значений $X(t)$ на бесконечном множестве значений t, т. е. не определяет однозначно С. п. $X(t)$.

Пример. Пусть $X(t)=\cos(\omega t+\Phi)$, $0\leqslant t\leqslant 1$,— гармонич. колебание со случайной фазой Φ, Z — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$, а С. п. $X_1(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, задается равенствами

$$X_1(t)=X(t) \text{ при } t\neq Z, \quad X_1(t)=X(t)+3 \text{ при } t=Z.$$

Так как $\mathsf{P}\{Z=t_1, \text{ или } Z=t_2, \ldots, \text{ или } Z=t_n\}=0$ для любой фиксированной конечной группы точек $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, то все конечномерные распределения С. п. $X(t)$ и $X_1(t)$ являются одинаковыми. В то же время процессы $X(t)$ и $X_1(t)$ различаются между собой: в частности, все реализации процесса $X(t)$ непрерывны (имеют форму синусоиды), в то время как все реализации $X_1(t)$ имеют точку разрыва; все реализации $X(t)$ не превосходят числа 1, но ни одна реализация $X_1(t)$ этим свойством не обладает. Отсюда следует, что заданной системе конечномерных распределений вероятностей могут отвечать различные модификации С. п. и по одним только конечномерным распределениям нельзя вычислить ни вероятность того, что реализация С. п. будет непрерывной, ни того, что она будет ограничена нек-рой фиксированной постоянной.

Задание совокупности конечномерных распределений вероятностей часто позволяет, однако, выяснить, существует ли хоть один С. п. $X(t)$, имеющий эти конечномерные распределения, и такой, что его реализации являются непрерывными (или, напр., дифференцируемыми, или нигде не превосходящими заданной постоянной B) функциями с вероятностью 1, или же таких С. п. $X(t)$ вообще не существует. Типичным примером общего условия, гарантирующего существование С. п. $X(t)$ с непрерывными с вероятностью 1 реализациями, имеющего заданные конечномерные распределения, является условие Колмогорова: если конечномерные распределения вероятностей С. п. $X(t)$, определенного на интервале $[a, b]$, таковы, что при нек-рых $\alpha>0$, $b>0$ и $C<\infty$ для всех достаточно малых h выполняется неравенство

$$\mathsf{E}\,|X(t+h)-X(t)|^{\alpha}<C\,|h|^{1+\delta} \qquad (1)$$

(очевидно, накладывающее ограничения лишь на двумерные распределения $X(t)$), то С. п. $X(t)$ имеет модификацию с непрерывными с вероятностью 1 реализациями (см., напр., [1] — [6]). В частном случае гауссовского процесса $X(t)$ условие (1) может быть заменено более слабым условием:

$$\mathsf{E}\,|X(t+h)-X(t)|^{\alpha_1}<C_1\,|h|^{\delta_1} \qquad (2)$$

для нек-рых $\alpha_1>0$, $\delta_1>0$, $C_1>0$; при $\alpha_1=2$, $\delta_1=1$ условие (2) выполняется, напр., для *винеровского процесса* и *Орнштейна — Уленбека процесса*. В случаях когда при заданных конечномерных распределениях вероятностей существует модификация С. п. $X(t)$ такая, что ее реализации непрерывны (или, напр., дифференцируемы, или ограничены постоянной B) с вероятностью 1, все другие модификации этого же процесса обычно можно исключить из рассмотрения, потребовав, чтобы С. п. $X(t)$ удовлетворял нек-рому очень общему условию регулярности, к-рое в прикладных задачах практически всегда можно считать выполняющимся (см. *Сепарабельный процесс*).

Вместо того чтобы задавать бесконечную совокупность конечномерных распределений вероятностей С. п.

$X(t)$, можно также определить С. п., указав значение соответствующего *характеристического функционала*

$$\psi[l] = \mathsf{E} \exp\{il[X(t)]\}, \qquad (3)$$

где $l[X(t)]$ пробегает достаточно широкий класс линейных функционалов, зависящих от $X(t)$. Если $X(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — непрерывный по вероятности С. п. (т. е. $\mathsf{P}\{|X(t+h)-X(t)|>\varepsilon\} \to 0$ при $h \to 0$ для любого $\varepsilon>0$), а $g(t)$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$, то

$$\int_a^b X(t)\, dg(t) = l^{(g)}[X(t)]$$

будет случайной величиной; при этом можно считать, что $l[X]=l^{(g)}[X]$ в формуле (3) (причем $\psi[l^{(g)}]$ здесь удобно обозначить символом $\psi[g]$). Во многих случаях можно также еще сузить класс рассматриваемых линейных функционалов $l[X]$, ограничившись лишь функционалами вида

$$\int_a^b X(t)\, \varphi(t)\, dt = l_\varphi[X],$$

где $\varphi(t)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция t (интервал $[a, b]$ при этом может быть и бесконечным). Значения $\psi[l_\varphi]=\psi[\varphi]$ при широких условиях регулярности однозначно определяют все конечномерные распределения вероятностей С. п. $X(t)$, так как

$$\psi[\varphi] \longrightarrow \psi_{t_1, \ldots, t_n}(\theta_1, \ldots, \theta_n),$$

где $\psi_{t_1, \ldots, t_n}(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ — характеристич. функция случайного вектора $\{X(t_1), \ldots, X(t_n)\}$, при

$$\varphi(t) \longrightarrow \theta_1 \delta(t-t_1) + \ldots + \theta_n \delta(t-t_n)$$

(здесь $\delta(t)$ есть δ-функция Дирака, а сходимость понимается в смысле сходимости обобщенных функций). Если же при таком предельном переходе функционал $\psi[\varphi]$ не стремится к конечному пределу, то это означает, что для С. п. X не существует конечных значений в фиксированной точке, а имеют смысл лишь сглаженные значения $l_\varphi[X]$, т. е. что характеристич. функционал $\psi[\varphi]$ задает не обыкновенный («классический») С. п. $X(t)$, а *случайный процесс обобщенный* $X=X(\varphi)$.

Задание совокупности конечномерных распределений вероятностей С. п. $X(t)$ упрощается в тех случаях, когда все они однозначно определяются распределениями лишь немногих низших порядков. Важнейшим классом С. п., для к-рых все многомерные распределения могут быть определены по значениям одномерных распределений случайных величин $X(t)$, являются последовательности независимых случайных величин (представляющие собой специальные С. п. с дискретным временем). Такие весьма частные С. п. могут изучаться в рамках классич. теории вероятностей, но существенно, что нек-рые важные классы С. п. могут быть эффективно заданы в виде функции от последовательности $Y(t)$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, независимых случайных величин. Так, напр., значительный интерес представляют С. п.

$$X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j Y(t-j)$$

или

$$X(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j Y(t-j), \quad t=0, \pm 1, \ldots,$$

(см. *Скользящего среднего процесс*) и

$$X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j h_j(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

где $h_j(t)$, $j=1, 2, \ldots$,— заданная система функций на интервале $[a, b]$ (см. *Спектральное разложение* случайной функции).

Весьма важны следующие три класса С. п., все конечномерные распределения к-рых определяются одномерными распределениями значений $X(t)$ и двумерными распределениями пар $\{X(t_1),\ X(t_2)\}$.

1) Класс *случайных процессов с независимыми приращениями* $X(t)$, для к-рых $X(t_2)-X(t_1)$ и $X(t_4)-X(t_3)$ при $t_1<t_2\leqslant t_3<t_4$ являются независимыми величинами. Здесь для задания С. п. $X(t)$ на интервале $[a,\ b]$ удобно использовать функции распределения $F_a(x)$ и $\Phi_{t_1,\ t_2}(z)$, где $a\leqslant t_1<t_2\leqslant b$, случайных величин $X(a)$ и $X(t_2)-X(t_1)$, причем функция $\Phi_{t_1,\ t_2}(z)$, очевидно, должна удовлетворять функциональному уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{t_1,\ t_2}(z-u)\,d\Phi_{t_2,\ t_3}(u)=\Phi_{t_1,\ t_3}(z),\qquad(4)$$

$$a\leqslant t_1<t_2<t_3\leqslant b.$$

Используя (4), можно показать, что если С. п. $X(t)$ непрерывен по вероятности, то его характеристич. функционал $\psi[g]$ может быть представлен в виде

$$\psi[g]=\exp\left\{i\int_a^b\gamma(t)\,dg(t)-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b\beta(t)\,[g(b)-g(t)]\,dg(t)+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_a^b\left[e^{iy\,[g(b)-g(t)]}-1-\frac{iy\,[g(b)-g(t)]}{1+y^2}\right]\times$$

$$\left.\times\frac{1+y^2}{y^2}d_t\Pi_t(dy)\right\},$$

где $\gamma(t)$ — непрерывная функция, $\beta(t)$ — неубывающая непрерывная функция и $\Pi_t(dy)$ — возрастающая непрерывная по t мера, определяющие процесс с независимыми приращениями $X(t)$.

2) Класс *марковских процессов* $X(t)$, для к-рых в случае, когда $t_1<t_2$, условное распределение вероятностей $X(t_2)$ при условии, что заданы все значения $X(t)$ при $t\leqslant t_1$, зависит только от $X(t_1)$. Для задания марковского процесса $X(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, удобно использовать функцию распределения $F_a(x)$ значений $X(a)$ и переходную функцию $\Phi_{t_1,\ t_2}(x,\ z)$, где $t_1<t_2$, равную условной вероятности того, что $X(t_2)<z$ при условии, что $X(t_1)=x$. Функция $\Phi_{t_1,\ t_2}(x,\ z)$ должна удовлетворять родственному (4) функциональному *Колмогорова — Чепмена уравнению*, позволяющему при определенных условиях получить для нее более простые прямое и обратное *Колмогорова уравнения* и в ряде случаев дающему возможность определить эту функцию.

3) Класс *гауссовских процессов* $X(t)$, для к-рых все многомерные распределения вероятностей векторов $\{X(t_1),\ldots,\ X(t_n)\}$ являются гауссовскими (нормальными) распределениями. Так как нормальное распределение однозначно определяется своими первым и вторым моментами, то для задания гауссовского процесса $X(t)$ достаточно указать значения функций

$$\mathsf{E}X(t)=m(t)$$

и

$$\mathsf{E}X(t)\,X(s)=B(t,\ s),$$

где $B(t,\ s)$ должно быть неотрицательно определенным ядром таким, что и

$$b(t,\ s)=B(t,\ s)-m(t)\,m(s)$$

также является неотрицательно определенным ядром. Характеристич. функционал $\psi[g]$ гауссовского процесса $X(t)$ имеет вид

$$\psi[g]=\exp\left\{i\int_a^b m(t)\,dg(t)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b b(t,\ s)\,dg(t)\,dg(s)\right\}.$$

4) Еще одним важным классом С. п. является класс *стационарных случайных процессов* $X(t)$, статистич.

характеристики к-рых не меняются с течением времени, т. е. инвариантны относительно преобразования $X(t) \to X(t+a)$, где a — произвольное фиксированное число. Многомерные распределения вероятностей общего стационарного С. п. $X(t)$ не могут быть просто описаны, но для многих задач, касающихся таких процессов, достаточно знать лишь значения первых двух моментов $\mathsf{E}X(t)=m$ и $\mathsf{E}X(t)X(t+s)=B(s)$ (так что здесь оказывается нужным лишь предположение о стационарности в широком смысле, т. е. о том, что от t не зависят моменты $\mathsf{E}X(t)$ и $\mathsf{E}X(t)X(t+s)$). Существенно, что любой стационарный (или хотя бы стационарный в широком смысле) С. п. допускает спектральное разложение вида

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\,dZ(\lambda), \tag{5}$$

где $Z(\lambda)$ — случайный процесс с некоррелированными *приращениями*; *отсюда*, в частности, следует, что

$$B(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\,dF(\lambda), \tag{6}$$

где $F(\lambda)$ — монотонно неубывающая *спектральная функция* С. п. $X(t)$. Спектральные разложения (5) и (6) лежат в основе решения задач о наилучшей (в смысле минимума среднеквадратической ошибки) линейной экстраполяции, интерполяции и фильтрации стационарных случайных процессов.

Математич. теория С. п. включает также большое число результатов, относящихся к ряду подклассов или, наоборот, обобщений перечисленных выше классов С. п. (в частности, к *Маркова цепям*, *диффузионным процессам*, *ветвящимся процессам*, *мартингалам*, *случайным процессам со стационарными приращениями* нек-рого порядка и др.).

Лит.: [1] Слуцкий Е. Е., Избр. труды, М., 1960, с. 269—80; [2] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; [4] их же, Теория случайных процессов, т. 1—3, М., 1971—75; [5] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969; [6] Вентцель А. Д., Курс теории случайных процессов, М., 1975; [7] Розанов Ю. А., Случайные процессы, 2 изд., М., 1979; [8] Ито К., Вероятностные процессы, пер. с япон., в. 1—2, М., 1960—63; [9] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, М., 1964; [10] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963, [11] Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970; [12] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963.

А. М. Яглом.

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЙ — случайный процесс $X(t)$ такой, что существует предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}=X'(t),$$

называемый производной случайного процесса $X(t)$; в зависимости от того, в каком смысле понимается этот предел, различают дифференцирование с вероятностью 1 и дифференцирование в среднем квадратичном. Условия дифференцируемости в среднем квадратичном естественно выражаются в терминах корреляционной функции

$$B(t_1, t_2)=\mathsf{E}X(t_1)\,X(t_2),$$

а именно $X'(t)$ существует тогда и только тогда, когда существует предел

$$B''(t_1, t_2)=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta t_1\to 0\\ \Delta t_2\to 0}}\frac{B(t_1+\Delta t_1, t_2+\Delta t_2)-B(t_1-\Delta t_1, t_2)-B(t_1, t_2+\Delta t_2)+B(t_1, t_2)}{\Delta t_1\,\Delta t_2}.$$

Случайный процесс, имеющий среднеквадратичную

производную, является абсолютно непрерывным, точнее, при каждом t с вероятностью 1

$$X(t)=X(t_0)+\int_{t_0}^{t} X'(s)\,ds, \quad t\geqslant t_0.$$

Достаточным условием того, чтобы существовал эквивалентный данному процесс с непрерывно дифференцируемыми траекториями, может служить условие непрерывности его среднеквадратичной производной $X'(t)$, имеющей своей корреляционной функцией $B''(t_1,t_2)$. Для гауссовских процессов это условие является также необходимым.

Лит.: Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977. *Ю. А. Розанов.*

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС ОБНОВЛЯЮЩИЙ — случайный процесс с достаточно «простой» структурой, построенный по исходному процессу и содержащий всю требуемую информацию об этом процессе. С. п. о. использовались в задаче линейного прогноза стационарных случайных последовательностей, в нелинейных задачах статистики случайных процессов и т. д. (см. [1] — [3]).

Понятие С. п. о. по-разному вводится в линейной и нелинейной теориях случайных процессов. В линейной теории (см. [4]) векторный случайный процесс x_t наз. обновляющим процессом для случайного процесса ξ_t с $\mathsf{E}\,|\xi_t|^2<\infty$, если x_t имеет некоррелированные компоненты с некоррелированными приращениями и

$$H_t(\xi)=H_t(x) \text{ для всех } t,$$

где $H_t(\xi)$, $H_t(x)$ — замкнутые в среднем квадратичном линейные оболочки всех значений ξ_s, x_s, $s\leqslant t$. Число компонент N, $N\leqslant\infty$, процесса x_t наз. кратностью обновляющего процесса и определяется однозначно по процессу ξ_t. В случае дискретного времени $N=1$, а в случае непрерывного времени $N<\infty$ только при нек-рых специальных предположениях относительно корреляционной функции процесса ξ_t (см. [4], [5]). В приложениях используется возможность представления ξ_t в виде линейной комбинации значений x_s, $s\leqslant t$.

В нелинейной теории (см. [5], [6]) обычно обновляющим случайным процессом наз. винеровский процесс x_t такой, что

$$\mathcal{F}_t^{\xi}=\mathcal{F}_t^{x},$$

где $\mathcal{F}_t^{\xi}$, $\mathcal{F}_t^{x}$ суть σ-алгебры событий, порожденные значениями ξ_s, x_s, $s\leqslant t$. В случае когда ξ_t, $0\leqslant t\leqslant T$, является *Ито процессом* со стохастич. дифференциалом

$$d\xi_t=a(t)\,dt+dw_t,$$

винеровский процесс $\overline{w_t}$, определяемый равенством

$$\overline{w}_t=\xi_t-\int_0^t \mathsf{E}\,(a(s)\mid\mathcal{F}_s^{\xi})\,ds,$$

является С. п. о. для ξ_t, если, напр.,

$$\mathsf{E}\int_0^T a^2(s)\,ds<\infty$$

и процессы a и w образуют гауссовскую систему (см. [6]).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1941, т. 5, № 1, с. 3—14; [2] Ширяев А. Н., «Пробл. передачи информации», 1966, т. 2, № 3, с. 3—22; [3] Kailath T., «IEEE Trans. Inform. Theory», 1974, v. IT—20, № 2, p. 146—81; [4] Розанов Ю. А., Теория обновляющих процессов, М., 1974; [5] Ширяев А. Н., в кн.: Тр. Школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 1974), ч. 2, Вильнюс, 1975, с. 235—67; [6] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

А. А. Новиков.

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС ОБОБЩЕННЫЙ — случайный процесс X, зависящий от непрерывного временно́го аргумента t и такой, что его значения в фик-

сированные моменты времени, вообще говоря, не существуют, а существуют только «сглаженные значения процесса» $X(\varphi)$, описывающие результаты измерений значений этого процесса при помощи всевозможных линейных измерительных приборов, имеющих достаточно гладкую весовую (т. е. импульсную переходную) функцию $\varphi(t)$. С. п. о. $X(\varphi)$ представляет собой непрерывное линейное отображение пространства D бесконечно дифференцируемых финитных функций φ (или какого-либо другого пространства основных функций, используемого в теории обобщенных функций) в пространство L_0 случайных величин X, определенных на нек-ром вероятностном пространстве; его реализации $x(\varphi)$ являются обычными обобщенными функциями аргумента t. Классические (т. е. обыкновенные) случайные процессы $X(t)$ также можно рассматривать как специальные С. п. о., для к-рых

$$X(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,X(t)\,dt;$$

такое рассмотрение может быть полезным, в частности, в связи с тем, что для С. п. о. X всегда существуют производные $X^{(n)}$ любого порядка n, к-рые можно определить с помощью равенства

$$X^{(n)}(\varphi)=(-1)^n\,X(\varphi^{(n)})$$

(см., напр., *Случайный процесс со стационарными приращениями*). Важнейший пример С. п. о., не являющийся классическим случайным процессом,— процесс *белого шума*; обобщением понятия С. п. о. является понятие обобщенного случайного поля.

Лит. см. при ст. *Случайное поле обобщенное*. *А. М. Яглом.*

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ — случайный процесс $X(t)$ такой, что для любого натурального n и любых действительных $0\leqslant\alpha_1<\beta_1\leqslant\alpha_2<\beta_2\leqslant\ldots\leqslant\alpha_n<\beta_n$ приращения

$$X(\beta_1)-X(\alpha_1),\ X(\beta_2)-X(\alpha_2),\ \ldots,\ X(\beta_n)-X(\alpha_n)$$

являются взаимно независимыми случайными величинами. С. п. с н. п. наз. о д н о р о д н ы м, если распределение вероятностей для приращений $X(\alpha+h)-X(\alpha)$, $0\leqslant\alpha$, $0<h$, зависит только от h (но не от α). Так как добавление к $X(t)$ любой неслучайной функции $A(t)$ приводит снова к С. п. с н. п., то реализации С. п. с н. п. могут быть, вообще говоря, сколь угодно иррегулярными. Однако, «центрируя» процесс надлежащим образом (вычитая, напр., из процесса $X(t)$ функцию $f(t)$, определяемую соотношением $\operatorname{Earctg}(X(t)-f(t))=0$), можно высказать о структуре «центрированного» процесса более определенные суждения. У него имеется не более чем счетное множество (неслучайное) точек t_j, в к-рых $X(t)$ имеет случайные скачки

$$X_j=X(t_j+0)-X(t_j-0),$$

а разность

$$Y(t)=X(t)-\sum\nolimits_{t_j<t}X_j$$

является стохастически непрерывным С. п. с н. п.: при любом $\varepsilon>0$ и $t'\to t$

$$\mathsf{P}\{|Y(t')-Y(t)|>\varepsilon\}\longrightarrow 0.$$

Винеровский процесс и *пуассоновский процесс* служат примерами стохастически непрерывных С. п. с н. п. (при этом реализации первого непрерывны с вероятностью единица, а реализации второго суть кусочно постоянные функции со скачками, равными единице). Важным примером С. п. с н. п. служат устойчивые процессы. Реализации стохастически непрерывного С. п. с н. п. с вероятностью единица могут иметь разрывы только 1-го рода. Распределение у такого процесса при любом t является безгранично делимым (см. *Безгранично делимое распределение*). При изучении С. п. с н. п. применяют метод *характеристических*

функций. Задачи о вероятности достижения процессом каких-либо границ и о распределении вероятностей времени достижения решаются с привлечением т. н. *факторизационных тождеств*.

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [2] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, М., 1964.

Ю. В. Прохоров.

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС СО СТАЦИОНАРНЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ — случайный процесс $X(t)$ с дискретным или непрерывным временем t такой, что статистич. характеристики его приращений нек-рого фиксированного порядка не меняются во времени (т. е. инвариантны относительно временны́х сдвигов $t \to t+a$). Как и в случае *стационарных случайных процессов*, различают два типа С. п. со с. п., а именно — С. п. со с. п. в узком смысле, для к-рого все конечномерные распределения вероятностей приращений $X(t)$ заданного порядка в точках $t_1, \ldots, t_n$ и точках $t_1+a, \ldots, t_n+a$ при любом a совпадают друг с другом, и С. п. со с. п. в широком смысле, для к-рых средние значения приращения в момент t и вторые моменты приращений в моменты t и $t+s$ не зависят от t.

В случае процессов $X(t)$ с дискретным временем $t=0, \pm 1, \ldots$ всегда можно перейти от рассмотрения случайного процесса $X(t)$ к рассмотрению нового случайного процесса

$$\Delta^{(n)} X(t) = X(t) - C_n^1 X(t-1) + \ldots + (-1)^n C_n^n X(t-n),$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты. Если $X(t)$ — С. п. со с. п. n-го порядка, то процесс $\Delta^{(n)} X(t)$ будет уже стационарным в обычном смысле; поэтому в случае дискретного времени теория С. п. со с. п. сводится к теории более частных стационарных случайных процессов. Однако с точки зрения приложений использование понятия С. п. со с. п. и дискретным временем t часто оказывается весьма удобным, т. к. для многих встречающихся на практике явно нестационарных временны́х рядов $x(t)$, $t=1, 2, \ldots$, ряды их приращений $\Delta^{(n)} x(t)$ нек-рого порядка n уже можно считать реализациями стационарного случайного процесса $\Delta^n X(t)$. В частности, Дж. Бокс (G. Box) и Г. Дженкинс (G. Jenkins) (см. [1]) указали, что при решении многих практич. задач реальные временны́е ряды часто можно считать реализациями т. н. процесса авторегрессии — проинтегрированного скользящего среднего, представляющего собой специальный С. п. со с. п. и дискретным временем (см. также [2] — [4]).

Примерами С. п. со с. п. 1-го порядка (в узком смысле) с непрерывным временем t являются, в частности, *винеровский процесс* и *пуассоновский процесс*; оба эти процесса принадлежат также и к более узкому классу процессов с независимыми стационарными приращениями 1-го порядка. В случае непрерывного t теория С. п. со с. п. уже не сводится непосредственно к теории более простых стационарных процессов. Корреляционная теория (т. е. теория соответствующих процессов в широком смысле) С. п. со с. п. 1-го порядка была развита А. Н. Колмогоровым [5] (см. также [6]); подобная же теория С. п. со с. п. n-го порядка, где n — произвольное целое положительное число, рассматривалась в работах [7] — [9]. Центральное место в корреляционной теории С. п. со с. п. занимает вывод спектрального разложения таких процессов и их моментов 2-го порядка. Использование понятия обобщенного случайного процесса позволяет заметно упростить теорию С. п. со с. п.; так как в рамках теории обобщенных случайных процессов любой случайный процесс $X(t)$ имеет производные всех порядков (являющиеся, вообще говоря, обобщенными случайными процессами), то С. п. со с. п. n-го порядка можно также определить как случайный процесс $X(t)$, n-я

производная которого $X^{(n)}$ является (вообще говоря, обобщенным) стационарным случайным процессом (см. [9]).

Лит.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1—2, М., 1974; [2] Nelson C. R., Applied time series analysis for managerial forecating, S. F., 1973; [3] Anderson O. D., Time series analysis and forecasting. The Box—Jenkins approach, L.—Boston, 1976; [4] Robinson E. A., Silva M. T., Digital foundations of time series analysis: the Box — Jenkins approach, S. F., 1979; [5] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1940, т. 26, № 1, с. 6—9; [6] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [7] Яглом А. М., «Матем. сб.», 1955, т. 37, № 1, с. 141—96; [8] Пинскер М. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1955, т. 19, с. 319—45; [9] Ито К., «Математика», 1957, т. 1, № 3, с. 139—51. *А. М. Яглом.*

СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС СОГЛАСОВАННЫЙ — семейство случайных величин $X=(X_t(\omega))_{t\geqslant 0}$, заданных на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$, с выделенным на нем неубывающим семейством $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ под-σ-алгебр $\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}$ таких, что X_t являются $\mathcal{F}_t$-измеримыми при каждом $t\geqslant 0$. Чтобы подчеркнуть свойство согласованности для таких процессов, часто используют запись

$$X=(X_t,\ \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$$

или

$$X=(X_t, \mathcal{F}_t)$$

и говорят, что X является $\mathbb{F}$-адаптированным или адаптированным относительно семейства $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ или что X есть стохастич. процесс. Соответствующие определения даются и в случае дискретного времени, при этом термин «процесс» заменяется термином «последовательность».

Лит.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975. *А. Н. Ширяев.*

СЛУЧАЙНЫЙ ТОЧЕЧНЫЙ ПРОЦЕСС — случайный процесс, соответствующий на прямой $\mathbb{R}^1$ последовательности случайных величин $\{t_i\}, \ldots, t_{-1}<t_0\leqslant 0<t_1<t_2<\ldots$. Каждому значению t_i ставится в соответствие случайная величина $\Phi\{t_i\}=1, 2, \ldots$, называемая кратностью. В теории массового обслуживания С. т. п. порождается моментами поступления заявок на обслуживание, в биологии — моментами импульсов в нервных волокнах и т. п.

Пусть X — полное сепарабельное метрич. пространство, $\mathfrak{B}_0$ — класс ограниченных борелевских множеств $B\subset X$, $N=\{\varphi\}$ — совокупность мер, принимающая целые значения, $\varphi(B)=l<\infty$, $\mathfrak{N}$ — минимальная σ-алгебра, порожденная подмножествами мер $\{\varphi:\varphi(B)=l\}\subset N$, $B\in\mathfrak{B}_0$, $l=0, 1, 2, \ldots$ Задание вероятностной меры P в измеримом пространстве $(N, \mathfrak{N})$ определяет С. т. п. Φ с фазовым пространством X, реализациями к-рого являются целозначные меры из N. Значения $x\in X$, для к-рых $\Phi\{x\}>0$, наз. точками С. т. п. Величина $\Phi(B)$ равна сумме кратностей точек С. т. п., попавших в B. С. т. п. Φ наз. простым, если $\Phi\{x\}\leqslant 1$ для любого $x\in X$. С. т. п. наз. ординарным, если для любых $B\in\mathfrak{B}_0$ и $\varepsilon>0$ найдется такое разбиение $\zeta=(z_1, \ldots, z_n)$ множества B, что

$$\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\{\Phi(z_k)>1\}<\varepsilon.$$

Ординарные С. т. п. являются простыми. Важную роль играют факториальные моментные меры

$$\Lambda_k(B)=\mathsf{E}_p\Phi(B)[\Phi(B)-1]\ldots[\Phi(B)-k+1]$$

и их обобщения (E_p — математич. ожидание, $\Lambda_1(B)$ наз. мерой интенсивностей). Если $\Lambda_{2n}(B)<\infty$, то

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\Lambda_k(B)\leqslant\mathsf{P}\{\Phi\{B\}=0\}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}\Lambda_k(B),$$

$$\Lambda_0(B)=1.$$

Особую роль в теории С. т. п. играют пуассоновские С. т. п. Ф, для к-рых: а) значения $\Phi(B_i)$ на непересекающихся $B_i \in \mathfrak{B}_0$ являются взаимно независимыми случайными величинами (свойство отсутствия последействия), б)

$$\mathsf{P}\{\Phi(B_i) = l\} = \frac{[\Lambda_1(B)]^l}{l!} \exp\{-\Lambda_1(B)\}.$$

Для простого С. т. п.

$$\Lambda_1(B) = \inf \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\Phi(z_k) > 0\}, \qquad (*)$$

где inf берется по всем разбиениям ζ множества B. Соотношение $(*)$ дает возможность находить явные выражения меры интенсивностей для многих классов С. т. п., порожденных случайными процессами или полями.

Обобщением С. т. п. являются т. н. маркированные С. т. п., в к-рых точкам x, $\Phi\{x\}>0$, сопоставляются метки $k(x)$ из нек-рого измеримого пространства $[K, \mathfrak{K}]$. Продолжительности обслуживания заявок, поступающих в систему массового обслуживания, можно рассматривать как метки.

В теории С. т. п. важное значение имеют соотношения, связывающие специальным образом заданные условные вероятности различных событий (пальмовские вероятности). Получены предельные теоремы для суперпозиции (суммирования), прореживания и др. операций над последовательностями С. т. п. В приложениях широко используются различные обобщения пуассоновских С. т. п.

Лит.: [1] Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963; [2] Cox D. R., Isham V., Point processes, L., 1980; [3] Керстан Й., Маттес К., Мекке Й., Безгранично делимые точечные процессы, пер. с англ., М., 1982; [4] Беляев Ю. К., Элементы общей теории случайных процессов, в кн.: Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы, пер. с англ., М., 1969, с. 358—72.

Ю. К. Беляев.

СЛУЧАЙНЫЙ ТОЧЕЧНЫЙ ПРОЦЕСС С ОГРАНИЧЕННЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ — случайный точечный процесс, задаваемый последовательностью случайных величин $\{t_i\}$

$$\ldots < t_{-1} < t_0 \leqslant 0 < t_1 < t_2 < \ldots,$$

в к-рой интервалы $s_i = t_{i+1} - t_i$ являются взаимно независимыми случайными величинами. С. т. п. с о. п. тесно связаны с процессами восстановления (см. *Восстановления теория*), в к-рых s_i являются независимыми одинаково распределенными (при $i \neq 0$) случайными величинами.

Ю. К. Беляев.

СЛУЧАЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ — обобщение понятия *случайной величины*. Термин «С. э.» был введен, по-видимому, М. Фреше [1], отмечавшим, что развитие теории вероятностей и расширение области ее приложений привело к необходимости перейти от схем, где (случайные) исходы опыта могут быть описаны числом или конечным набором чисел, к схемам, где исходы опыта представляют собой, напр., ряды, функции, кривые, преобразования и т. п.

Впоследствии термин «С. э.» стал употребляться в основном применительно к выбранным «случайным образом» элементам какого-либо линейного топологич. пространства, в первую очередь гильбертовых и банаховых пространств. Точное определение, напр., С. э. X в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, напоминает определение случайной величины. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — нек-рое *вероятностное пространство*, $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, $\mathfrak{X}^*$ — сопряженное к $\mathfrak{X}$ пространство. Отображение $X = X(\omega)$ пространства Ω элементарных событий ω в $\mathfrak{X}$ наз. случайным элементом, если всякий непрерывный линейный функционал $x^*(X(\omega))$ оказывается при этом случайной величиной, т. е. $\mathcal{A}$-измеримой функцией.

Пусть $\mathscr{L}$ — наименьшая σ-алгебра, относительно к-рой измеримы все непрерывные линейные функционалы. X есть С. э. в том и только в том случае, когда полные прообразы всех множеств из $\mathscr{L}$ A-измеримы. В случае когда $\mathfrak{X}$ сепарабельно, $\mathscr{L}$ совпадает с σ-алгеброй борелевских подмножеств $\mathfrak{X}$.

На С. э. могут быть распространены основные понятия теории вероятностей, такие, как характеристич. функция, математич. ожидание, ковариация и т. п.; С. э. X наз. нормальным (гауссовым), если распределение вероятностей любого непрерывного линейного функционала $x^*(X)$ является нормальным. На последовательности независимых С. э. могут быть распространены закон больших чисел, усиленный закон больших чисел, закон повторного логарифма, центральная предельная теорема и др. вероятностные утверждения. Возможность перенесения этих теорем в их классич. форме на случай банаховых пространств тесно связана с геометрией пространства. Важно отметить, что эта связь носит взаимный характер, так как вероятностные свойства часто оказываются на самом деле вероятностно-геометрическими — их справедливость в данном банаховом пространстве не только определяется геометрич. свойствами пространства, но и сама определяет эти свойства.

Так, напр., для того чтобы для любой последовательности независимых одинаково распределенных С. э. $X_1, X_2, \ldots$ со значениями в $\mathfrak{X}$ с нулевыми математич. ожиданиями и $\mathsf{E}\|X_j\|^2<\infty$ распределение нормированных сумм $\frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{n}}$ слабо сходилось к распределению нормального С. э., необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{X}$ было т. н. пространством типа 2 (см. [4]).

Лит.: [1] Fréchet M., «Ann. inst. H. Poincaré», 1948, v. 10, p. 215—310; [2] Mourier E., Eléments aléatoires dans un espace de Banach (Thèse), P., 1955; [3] Вахания Н. Н., Вероятностные распределения в линейных пространствах, Тбилиси, 1971; [4] Hoffmann-Jørgensen J., Pisier G., «Ann. Probab.», 1976, v. 4, p. 587—89.

Ю. В. Прохоров.

СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — отыскание функций от каких-либо случайных величин, распределения вероятностей к-рых обладают заданными свойствами.

Пример 1. Пусть X — случайная величина, имеющая непрерывную и строго возрастающую функцию распределения $F(x)$. Тогда случайная величина $Y=F(X)$ имеет равномерное на отрезке $[0, 1]$ распределение, а случайная величина $Z=\Phi^{-1}(F(X))$ (где $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения) имеет нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Обратно, формула $X=F^{-1}(\Phi(Z))$ позволяет из случайной величины Z со стандартным нормальным распределением получить случайную величину X, имеющую заданную функцию распределения $F(x)$.

С. в. п. часто используются в связи с предельными теоремами теории вероятностей. Пусть, напр., последовательность случайных величин Z_n асимптотически нормальна с параметрами (0, 1). Ставится задача построения простых (и просто обратимых) функций f_n таких, чтобы случайные величины $V_n=Z_n+f_n(Z_n)$ были «более нормальны», чем Z_n.

Пример 2. Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы и имеют каждая равномерное распределение на $[-1, 1]$ и пусть

$$Z_n=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{\sqrt{n/3}}.$$

По центральной предельной теореме

$$\mathsf{P}\{Z_n<x\}-\Phi(x)=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Полагая

$$V_n=Z_n-\frac{1}{20n}(3Z_n-Z_n^3),$$

получают

$$\mathsf{P}\{V_n < x\} - \Phi(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Пример 3. Случайные величины χ_n^2, $\sqrt{2\chi_n^2}$ и $(\chi_n^2/n)^{1/3}$ асимптотически нормальны при $n \to \infty$ (см. «*Хи-квадрат» распределение*). Равномерное отклонение соответствующих функций распределения от их нормальных аппроксимаций становится меньше 0,01 для χ_n^2 при $n \geqslant 354$, для $\sqrt{2\chi_n^2}$ (преобразование Фишера) при $n \geqslant 23$, для $(\chi_n^2/n)^{1/3}$ (преобразование Вилсона — Хилферти) при $n \geqslant 3$ это отклонение не превосходит 0,007.

С. в. п. издавна применялись и применяются в задачах математич. статистики как основа построения простых асимптотич. формул высокой точности. С. в. п. используют и в теории случайных процессов (напр., метод «одного вероятностного пространства»).

Лит.: [1] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, № 2, с. 136—49; [2] его же, там же, 1963, т. 8, № 2, с. 129—55; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, [3 изд.], М., 1983.

В. И. Пагурова, Ю. В. Прохоров.

СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ — задача об оценке значений случайного процесса $X(t)$ на нек-ром интервале $a<t<b$ по его наблюдаемым значениям вне этого интервала. Обычно имеют в виду интерполяционную оценку $\hat{X}(t)$, для к-рой среднеквадратичная ошибка интерполяции является минимальной в сравнении со всеми другими оценками:

$$\mathsf{E}\,|\hat{X}(t) - X(t)|^2 = \min;$$

интерполяция наз. линейной, если ограничиваются линейными оценками. Одной из первых была поставлена и решена задача линейной интерполяции значения $X(0)$ стационарной последовательности, имеющая следующий аналог: в пространстве L_2 интегрируемых в квадрате функций на отрезке $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$ найти проекцию функции $\varphi(\lambda) \in L_2$ на подпространство, порожденное функциями $e^{i\lambda k}\varphi(\lambda)$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$; эта задача получила широкое обобщение в теории *стационарных случайных процессов* (см. [1], [2]). Примером для приложений может служить задача интерполяции случайного процесса, возникающего в системе

$$LX(t) = Y(t), \quad t > t_0,$$

с линейным дифференциальным оператором L порядка l и белым шумом $Y(t)$, $t > t_0$, в правой части; здесь при независимых от белого шума начальных значениях $X^{(k)}(t_0)$, $k = 0, \ldots, l-1$, наилучшая интерполяционная оценка $\hat{X}(t)$, $a<t<b$, есть решение соответствующей краевой задачи

$$L^*L\hat{X}(t) = 0, \quad a < t < b,$$

с формально-сопряженным оператором L^* и граничными условиями

$$\hat{X}^{(k)}(s) = X^{(k)}(s), \quad k = 0, \ldots, l,$$

в граничных точках $s = a, b$. Для систем стохастических дифференциальных уравнений задача интерполяции одних компонент по значениям других наблюдаемых компонент приводит к соответствующим уравнениям интерполяции (см. [3]).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Бюлл. МГУ», 1941, секц. А, т. 2, в. 6, с. 1—40; [2] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [3] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

Ю. А. Розанов.

СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ, случайных процессов экстраполяция, — задача об оценке значений случайного процесса $X(t)$ в будущем $t>s$ по его наблюдаемым значениям до текущего момента времени s. Обычно имеют в виду экстраполяционную оценку $\hat{X}(t)$, $t>s$, для к-рой

среднеквадратичная ошибка $\mathsf{E}|\hat{X}(t)-X(t)|^2$ является минимальной в сравнении со всеми другими оценками, составленными по значениям рассматриваемого процесса в прошлом до момента s (прогнозирование наз. л и н е й н ы м, если ограничиваются линейными оценками).

Одной из первых была поставлена и решена задача линейного прогнозирования стационарной последовательности, имеющая следующий аналог: в пространстве L_2 интегрируемых в квадрате функций на отрезке $-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi$ найти проекцию функции $\varphi(\lambda)\in L_2$ на подпространство, порожденное функциями $e^{i\lambda k}\varphi(\lambda)$, $k=0, -1, -2, \ldots$; эта задача получила широкое обобщение в теории *стационарных случайных процессов*. Примером для приложений может служить задача прогнозирования случайного процесса, возникающего в системе

$$L\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{Y}(t), \quad t>t_0,$$

с линейным дифференциальным оператором L порядка l и белым шумом $Y(t)$, $t>t_0$ в правой части; здесь наилучший прогноз $\hat{X}(t)$, $t>s$ по значениям в моменты $t_0\leqslant t\leqslant s$ при независимых от белого шума начальных значениях $X^{(k)}(t_0)$, $k=0, \ldots, l-1$, может быть дан с помощью решения соответствующего уравнения

$$L\hat{X}(t)=0, \quad t>s,$$

с начальными условиями

$$\hat{X}^{(k)}(s)=X^{(k)}(s), \quad k=0, \ l-1.$$

Для систем стохастических дифференциальных уравнений задача прогнозирования одних компонент по значениям других наблюдаемых компонент приводит к соответствующим стохастич. уравнениям экстраполяции.

Лит. см. при ст. *Случайных процессов интерполяция.*

Ю. А. Розанов.

СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИЯ — задача об оценке значения случайного процесса $Z(t)$ в текущий момент t по каким-либо значениям другого, связанного с ним случайного процесса. Напр., речь может идти об оценке стационарного процесса $Z(t)$ по значениям $X(s)$, $s\leqslant t$, стационарно с ним связанного стационарного процесса (см., напр., [1]). Обычно имеют в виду оценку $\hat{Z}(t)$ с наименьшей среднеквадратичной ошибкой $\mathsf{E}|\hat{Z}(t)-Z(t)|^2$. Употребление термина «фильтрация» восходит к задаче о выделении сигнала из «смеси» сигнала и случайного шума, одна из важных модификаций к-рой есть задача оптимальной фильтрации в схеме, когда связь $Z(t)$ и $X(t)$ описывается *стохастическим дифференциальным уравнением*

$$dX(t)=Z(t)\,dt+dY(t), \quad t>t_0,$$

где независимый от $Z(t)$ шум представлен стандартным винеровским процессом $Y(t)$.

Широкое распространение в приложениях получил метод фильтрации (м е т о д К а л м а н а — Б ь ю с и), применимый к процессам $Z(t)$, к-рые описываются линейными стохастическими дифференциальными уравнениями. Напр., если в указанной выше схеме

$$dX(t)=a(t)\,Z(t)\,dt+dY(t)$$

при нулевых начальных условиях, то

$$\hat{Z}(t)=\int_{t_0}^{t} c(t, s)\,dX(t),$$

где весовая функция $c(t, s)$ находится из уравнений:

$$\frac{d}{dt}c(t, s)=[a(t)-b(t)]\,c(t, s), \quad t>s,$$

$$c(s, s)=b(s),$$

$$\frac{d}{dt}b(t)=2a(t)\,b(t)-[b(t)]^2+1, \quad t>t_0, \qquad b(t_0)=0;$$

обобщение этого метода на нелинейные уравнения приводит к общим стохастич. уравнениям фильтрации (см. [2]).

В случае когда

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k Z_k(t)$$

зависит от неизвестных параметров $c_1, \ldots, c_n$, интерполяционную оценку $\hat{Z}(t)$ можно дать, оценивая эти параметры по $X(s)$, $s \leqslant t$,— здесь применим метод наименьших квадратов и его обобщения (см., напр., [3]).

Лит.: [1] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [3] Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970. *Ю. А. Розанов.*

СМЕЖНЫЙ КЛАСС группы G по подгруппе H (левый) — множество элементов группы G, равное

$$aH = \{ah \mid h \in H\},$$

где a — нек-рый фиксированный элемент из G. С. к. наз. также левосторонним С. к. группы G по подгруппе H, определяемым элементом a. Всякий левый С. к. определяется любым из своих элементов. $aH = H$ тогда и только тогда, когда $a \in H$. Для любых a, $b \in G$ С. к. aH и bH либо совпадают, либо не пересекаются. Таким образом, группа G распадается на непересекающиеся левые С. к. по подгруппе H — это разложение наз. левосторонним разложением группы G по подгруппе H. Аналогично определяются правые смежные классы (множества Ha, $a \in G$) и правостороннее разложение группы G по подгруппе H. Оба разложения — правостороннее и левостороннее — группы G по H состоят из одного и того же числа классов (в бесконечном случае совпадают мощности множеств этих классов). Это число (мощность) наз. индексом подгруппы H в группе G. Для нормальных делителей левостороннее и правостороннее разложения совпадают, и в этом случае говорят просто о разложении группы по ее нормальному делителю. *О. А. Иванова.*

СМЕШАННАЯ ГРУППА — группа, к-рая содержит как элементы бесконечного порядка, так и отличные от единицы элементы конечных порядков (см. *Порядок* элемента группы). *О. А. Иванова.*

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА — задача для дифференциальных уравнений и систем с частными производными, содержащая *начальные условия* и *краевые условия*, а также задача с носителем данных, состоящем как из характеристич., так и нехарактеристических определенным образом ориентированных многообразий (см. *Смешанная и краевая задачи для гиперболических уравнений и систем*, *Смешанная и краевая задачи для параболических уравнений и систем*, *Смешанного типа уравнение*). С. з. наз. и краевые задачи для эллиптич. уравнений, когда на различных частях границы заданы условия разного рода (см. *Краевая задача* для эллиптического уравнения). *А. М. Нахушев.*

СМЕШАННАЯ И КРАЕВАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ — задачи отыскания решений уравнений и систем с частными производными гиперболич. типа, удовлетворяющих на границе области их задания (или ее части) определенным условиям (см. *Краевые условия*, *Начальные условия*).

Краевая задача для гиперболич. уравнений и систем, заданных в нек-рой области D евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, наз. смешанной, или начально-краевой, если искомое решение, наряду с краевыми условиями, должно удовлетворять и начальным или если носитель ∂D граничных данных состоит

как из характеристических, так и нехарактеристических определенным образом ориентированных многообразий.

Для гиперболич. уравнений 2-го порядка носителем начальных данных при постановке смешанной задачи является пространственно ориентированная часть границы ∂D. На временны́м образом ориентированной части ∂D, как правило, задаются краевые условия такого же типа, как и для параболич. уравнений (см. *Смешанная и краевая задачи для параболических уравнений и систем*).

Пусть Ω — область пространства $\mathbb{R}^n$ точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, а

$$D=\{(x, x_0): x\in\Omega,\ 0<x_0<T\},$$

$$S=\{(x, x_0): x\in\partial\Omega,\ 0<x_0<T\},$$

$$\Omega_0=\{(x, x_0): x\in\Omega,\ x_0=0\},\ \Omega_T=\{(x, x_0): x\in\Omega,\ x_0=T\}.$$

В области D задано линейное гиперболич. уравнение 2-го порядка

$$u_{x_0x_0}-a^{ij}(x, x_0)\,u_{x_ix_j}+a^i(x, x_0)\,u_{x_i}+ \\ +a^0(x, x_0)\,u_{x_0}+a(x, x_0)\,u=f(x, x_0), \qquad (1)$$

где подразумевается суммирование от 1 до n по повторяющимся индексам i, j и форма $a^{ij}(x, x_0)\xi_i\xi_j$ положительно определена.

Основные смешанные задачи для уравнения (1) охватываются следующей постановкой: в области D найти решение $u=u(x, x_0)$ уравнения (1), удовлетворяющее на Ω_0 начальным условиям

$$u|_{x_0=0}=\tau(x), \quad u_{x_0}|_{x_0=0}=\nu(x), \qquad (2)$$

а на S — одному из краевых условий

$$u|_S=\varphi_1(x, x_0); \qquad (3)$$

$$\partial u/\partial N|_S=\varphi_2(x, x_0); \qquad (4)$$

$$(\partial u/\partial N+\sigma(x, x_0)\,u)|_S=\varphi_3(x, x_0), \qquad (5)$$

где N — конормаль относительного оператора $a^{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$. Задачи (2), (3); (2), (4) и (2), (5) принято соответственно называть п е р в о й, в т о р о й и т р е т ь е й с м е ш а н н о й з а д а ч е й для уравнения (1).

Для уравнения (1) при довольно общих предположениях относительно его коэффициентов и границы ∂D, а также для заданных функций доказаны существование и единственность как регулярных, так и обобщенных решений всех трех смешанных задач, исследованы структурные и дифференциальные свойства этих решений в замкнутой области $\overline{D}$ в зависимости от гладкости ее границы [8]. При $n=1$ решение смешанных задач выписывается в явном виде.

Смешанные задачи исследованы для широкого класса линейных и нелинейных гиперболич. уравнений и систем (см. *Квазилинейные гиперболические уравнения и системы*). Построена удовлетворительная теория смешанных задач для строго гиперболич. уравнений и систем вида

$$u_{x_0x_0}=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x, x_0)\,\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}+f(x, x_0)$$

с начальными данными на (пространственно ориентированной) части границы области D, лежащей на плоскости $x_0=0$. Определенный успех достигнут и при изучении смешанных задач для гиперболич. уравнений и систем в случае, когда носители начальных или краевых условий представляют собой поверхности вырождения типа или порядка этих уравнений (см. *Вырожденное уравнение* с частными производными).

Наиболее существенные результаты получены для линейных уравнений 2-го порядка вида

$$u_{x_0x_0}-\frac{\partial}{\partial x_j}[a^{ij}(x,\ x_0)\,u_{x_i}]+b^i(x,\ x_0)\,u_{x_i}+$$
$$+b^0(x,\ x_0)\,u_{x_0}+c(x,\ x_0)\,u=f(x,\ x_0)$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$a^{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\lambda_0|\mu_0x_0(b^i\xi_i)^2-\mu_0a^{ij}_{x_0}\xi_i\xi_j\quad(\forall\xi\in\mathbb{R}^n),$$

где λ_0 и μ_0 — нек-рые положительные постоянные, и особенно для уравнений вида

$$y^mu_{xx}-u_{yy}+a(x,\ y)\,u_x+b(x,\ y)\,u_y+$$
$$+c(x,\ y)\,u=f(x,\ y),\ x_1=x,\ x_0\equiv y\geqslant 0,\ m=\text{const}. \quad (6)$$

К смешанным задачам с внутренними или внешними краевыми условиями (см. *Внешняя и внутренняя краевые задачи*) редуцируются математич. модели многих процессов теории рассеяния волн на препятствиях. Напр., к условию излучения Зоммерфельда (см. *Излучения условия*) приводит задача отыскания решения u волнового уравнения

$$\Box u\equiv u_{x_0x_0}-u_{x_1x_1}-\ldots-u_{x_nx_n}=0$$

для всех точек $x\in\mathbb{R}^n$, лежащих вне ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, если известно, что производная u по направлению внешней нормали и $\partial\Omega$ обращается в нуль для любого момента времени $x_0\geqslant 0$, а начальные условия соответствуют плоской волне, идущей из бесконечности в направлении оси x_1.

Основными краевыми задачами для гиперболич. уравнений и систем являются Гурса, Дарбу — Пикара и их многомерные аналоги (см. *Гурса задача*, *Коши характеристическая задача*, а также [1]).

Задачи Гурса, Дарбу — Пикара и их различные обобщения хорошо исследованы для гиперболич. уравнений и систем 2-го порядка с расщепленными главными частями вида

$$u_{xx}-u_{yy}+a(x,\ y)\,u_x+b(x,\ y)\,u_y+c(x,\ y)\,u=f(x,\ y),$$

где a, b и c — заданные действительные $(m\times m)$-матрицы, f — заданный, а u — искомый m-мерные векторы. Существенные результаты получены и для довольно широкого класса гиперболич. систем уравнений 2-го порядка с нерасщепленными главными частями при отсутствии параболич. вырождения. Обнаружен факт неединственности решения характеристич. задачи Гурса

$$u_i(x,\ x)=\varphi_i(x),\ u_i(x,\ -x)=\psi_i(x),\ x\geqslant 0,\ i=1,\ 2,$$

для гиперболич. системы

$$\frac{\partial^2u_i}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u_i}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2u_j}{\partial x\partial y}=0,\ i=1,\ 2,\ i+j=3,$$

с двумя независимыми переменными x, y и найден эффект влияния младших членов на корректность этой задачи [3]. Достаточно полно изучен вопрос влияния характера параболич. вырождений на корректность как локальных, так и нелокальных краевых задач для вырождающихся гиперболич. уравнений и систем [3]. В частности, исследованы основные (локальные) краевые задачи для линейных вырождающихся гиперболич. уравнений вида

$$u_{yy}-k(x,\ y)\,u_{xx}+a(x,\ y)\,u_x+b(x,\ y)\,u_y+$$
$$+c(x,\ y)\,u=f(x,\ y)$$

в ограниченных областях с произвольной кусочно гладкой границей, установлен факт влияния порядка нехарактеристич. вырождения на корректность задачи Дарбу и неравноправия характеристик как носителей краевых условий [10].

В связи с проблемой поиска многомерных аналогов задач Дарбу и Трикоми (см. *Смешанного типа урав-*

шения) начались интенсивные исследования нелокальных краевых задач и особенно задачи со смещением (см. [9]) для гиперболич. уравнений, когда на характеристич. частях границы задано условие, поточечно связывающее значения искомого решения или его (дробных) производных или интегралов определенного порядка.

Многие краевые задачи со смещением, изучаемые с большой полнотой и общностью в случае уравнения (1), охватываются следующей постановкой. В области, ограниченной характеристиками

$$\Gamma_0\colon\ x-\frac{2}{m+2}\,y^{(m+2)/2}=0,\ \Gamma_1\colon\ x+\frac{2}{m+2}\,y^{(m+2)/2}=1$$

и отрезком $I\colon 0<x<1$ прямой $y=0$, найти (достаточно гладкое) решение $u(x,\ y)$ уравнения (1), удовлетворяющее на I локальному условию

$$\lim_{y\to+0}\left[A_1(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}+A_2(x)\,\frac{\partial u}{\partial y}+A_3u\right]=A_4(x),\ x\in I, \quad (7)$$

а на $\Gamma_0\cup\Gamma_1$ — нелокальному условию

$$B_1(x)\,D_{0x}^{\alpha}u\,[\theta_0(x)]+B_2(x)\,D_{1x}^{\beta}u\,[\theta_1(x)]+$$
$$+\lim_{y\to+0}\left[a_1(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}+a_2(x)\,\frac{\partial u}{\partial y}+a_3(x)\,u\right]=$$
$$=B_3(x),\ x\in I. \quad (8)$$

Здесь A_i, B_i, a_i — заданные функции, D_{jx}^{ε} — оператор дробного интего-дифференцирования порядка $|\varepsilon|$, задаваемый формулой

$$D_{jx}^{\varepsilon}\varphi(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(-\varepsilon)}\int_j^x|x-t|^{-\varepsilon-1}\varphi(t)\,dt,$$

если $\varepsilon<0$, и

$$D_{jx}^{\varepsilon}\varphi(x)=\frac{d^{[\varepsilon]+1}}{dx^{[\varepsilon]+1}}\,D^{\varepsilon-[\varepsilon]-1}\varphi(x),\ j=0,\ 1,$$

если $\varepsilon>0$, где $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $[\varepsilon]$ — целая часть ε; $\theta_j(x)$ — точка пересечения характеристики, выходящей из точки $x\in I$, с характеристикой Γ_j уравнения (1):

$$u\,[\theta_j(x)]=u\,(\operatorname{Re}\theta_j,\ \operatorname{Im}\theta_j).$$

Подробно изучены краевые задачи со смещением для уравнения вида (1), к-рые в характеристич. координатах ξ и η редуцируются к уравнению Эйлера — Дарбу — Пуассона

$$(\xi-\eta)\,u_{\xi\eta}-\beta u_{\xi}+\beta' u_{\eta}=0.$$

Частным случаем задачи (7) — (8) является з а д а ч а Д а р б у, к-рая состоит в отыскании (достаточно гладкого) решения $u(x,\ y)$ уравнения (6), удовлетворяющего (локальным) краевым условиям

$$u\,[\theta_0(x)]=\psi(x),\ u(x,\ 0)=\tau(x),\ x\in I;$$

или

$$u\,[\theta_1(x)]=\varphi(x),\ u_y(x,\ 0)=\nu(x),\ x\in I.$$

Условие $m<2$ или $a(x,\ y)=0\,(1)y^p$, $p>m/2-1$, $m\geqslant 2$ (у с л о в и е Г е л л е р с т е д т а), является существенным для корректности задачи Дарбу (см. [3], [10]).

Качественно новым многомерным аналогом задачи Дарбу является з а д а ч а Б и ц а д з е, к-рая в случае волнового уравнения $\Box u=f(x,\ x_0)$ ставится следующим образом (см. [1]). В конечной области $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$, ограниченной частью S_0 плоскости $x_n=0$ и двумя характеристич. поверхностями

$$S_1\colon x_0=|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2},\ x_n\leqslant 0,$$

и

$$S_2\colon 1-x_0=|x|,\ x_n\leqslant 0,$$

найти решение уравнения, удовлетворяющее условиям $u|_{S_0}=0$, $u|_{S_2}=0$ или $u_{x_n}|_{S_0}=0$, $u|_{S_2}=0$.

Изучены и другие многомерные аналоги как задачи Дарбу, так и нелокальных краевых задач (типа [2], [3]) для гиперболич. уравнений в специальных областях, нехарактеристич. часть границы к-рых, как правило, представляет собой пространственно ориентированную поверхность. Наиболее полные результаты получены в случае уравнения Эйлера — Дарбу — Пуассона $x_0 \square u = k u_{x_0}$.

Для уравнения вида

$$u_{xy} + A(x, y)\, u_x + B(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u = f(x, y) \qquad (9)$$

весьма полно исследована нелокальная задача в следующей постановке. В области $\{(x, y) : 0 < x < h,\ 0 < y < T\}$ найти (достаточно гладкое) решение $u(x, y)$ уравнения (9), если для всех $y \in [0, T]$ известно, что

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant h,\ \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{x_0} u(x, y)\, dx = \tau(y),$$

или

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant h,\ \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^{q} \alpha_j(y)\, u(x^j, y) = \tau(y),$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_q$ — заданные точки из сегмента $[0, h]$.

В теорию краевых задач вносится новый аспект при переходе к гиперболич. уравнениям 3-го порядка вида

$$u_{xxy} + A(x, y)\, u_{xx} + a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u = f(x, y), \qquad (10)$$

к-рые лежат в основе математич. моделей многих процессов и явлений теории тепломассообмена в пористых средах. Построена содержательная теория как локальных, так и нелокальных линейных краевых задач для гиперболич. уравнений вида (10), в частности создан аналог метода Римана.

Для линейных симметрических гиперболич. систем 1-го порядка (см. *Линейное гиперболическое уравнение и система*) в рамках теории систем уравнений 1-го порядка изучены краевые задачи с допустимыми (см. [6]) краевыми условиями на $\partial\Omega$.

Задача Дирихле, вообще говоря, не является корректной для гиперболич. уравнений и систем в произвольных областях. Методами энергетич. оценок и интегральных уравнений установлена корректность этой задачи для широкого класса гиперболич. уравнений 2-го порядка в специальных цилиндрич. областях.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [3] Gellerstedt S., «Ark. mat., astr., fys.», 1937, bd 25A, № 29, s. 1—23; [4] Годунов С. К., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1979; [5] Джураев Т. Д., Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов, Ташкент, 1979; [6] Дезин А. А., Общие вопросы теории граничных задач, М., 1980; [7] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Васильев В. Г., Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений, Новосиб., 1969; [8] Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953; [9] Нахушев А. М., «Дифференциальные уравнения», 1969, т. 5, № 1, с. 44—59; [10] его же, там же, 1971, т. 7, № 1, с. 49—56; [11] Салахитдинов М. С., Уравнения смешанно-составного типа, Ташкент, 1974; [12] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [13] Шхануков М. Х., «Дифференциальные уравнения», 1982, т. 18, № 4, с. 689—99.

А. М. Нахушев.

СМЕШАННАЯ И КРАЕВАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ — задачи отыскания решений

$$u(x, t) = (u_1(x, t), \ldots, u_m(x, t))$$

в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ ($(x, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)$ — точка пространства $\mathbb{R}^{n+1}$) параболич. системы уравнений или при $m = 1$ параболич. уравнения, удовлетворяющих нек-рым дополнительным условиям на границе ∂D (или на ее части) области D.

Пусть Ω — область пространства $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, а D — цилиндр $\{x\in\Omega,\ 0<t<T\}$ с боковой поверхностью $\Gamma=\{x\in\partial\Omega,\ 0<t<\Gamma\}$, нижним основанием $\Omega_0=\{x\in\Omega,\ t=0\}$ и верхним основанием $\Omega_T=\{x\in\Omega,\ t=T\}$. Смешанные задачи для линейной параболической по Петровскому системы

$$u_1+\sum_{|\alpha|\leqslant 2p} A_\alpha(x,\ t)\,D_x^\alpha u=f(x,\ t),\ (x,\ t)\in D,\ (1)$$
$$f(x,\ t)=(f_1(x,\ t),\ \ldots,\ f_m(x,\ t)),$$

в цилиндре D заключаются в отыскании решений этой системы, удовлетворяющих начальному условию

$$u\,|_{\Omega_0}=\varphi(x),\qquad (2)$$

$\varphi(x)=(\varphi_1(x_1),\ \ldots,\ \varphi_m(x))$, и краевому условию

$$B\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)u\,|_\Gamma=\psi(x,\ t),\qquad (3)$$

где $\psi(x,\ t)=(\psi_1(x,\ t),\ \ldots,\ \psi_p(x,\ t))$, а $B\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — прямоугольная матрица с элементами

$$B_{ij}\left(x,\ t,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{|\alpha|\leqslant q_{i,\ j}} b_\alpha^{i,\ j}(x,\ t)\,D_x^\alpha,$$
$$i=1,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ \ldots,\ p.$$

Пусть рассматриваемая система равномерно параболична.

Классич. решением смешанной задачи (1) — (3) наз. вектор-функция $u(x,\ t)$, принадлежащая

$$C_{x,\ t}^{2p,\ 1}(D)\cap C_{x,\ t}^{q,\ 0}(D\cup\Gamma)\cap C(D\cup\Gamma\cup\overline{\Omega}_0),$$

где $q=\max q_{i,j}$ при $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant p$, и удовлетворяющая в D системе (1), а на Ω_0 и Γ — условиям (2) и (3) соответственно. Иногда рассматриваются обобщения понятия классич. решения; в частности, при определении классич. решения можно отказаться от требования непрерывности в точках из $\overline{\Gamma\cap\overline{\Omega}_0}$, заменив его условием ограниченности решения в D.

Если для рассматриваемой задачи выполнено дополнительности условие (условие Лопатинского), то (пусть для простоты область Ω ограничена) при достаточной гладкости данных задачи (коэффициентов в (1) и (3) и вектор-функций f, φ и ψ) и выполнения согласований условий существует и единственно классич. решение.

Основными смешанными задачами для общего линейного равномерно параболич. уравнения 2-го порядка

$$u_t-Lu\equiv u_t-\sum_{i,\ j=1}^n (a_{ij}(x,\ t)\,u_{x_i})_{x_j}-$$
$$-\sum_{i=1}^n b_i(x,\ t)\,u_{x_i}-c(x,\ t)\,u=f(x,\ t),\ (x,\ t)\in D,\ (1')$$
$$a_{ij}(x,\ t)=a_{j,\ i}(x,\ t),\ i=1,\ \ldots,\ n;\ j=1,\ \ldots,\ n,$$

являются задачи отыскания решений этого уравнения, удовлетворяющих начальному условию

$$u\,|_{\Omega_0}=\varphi(x)\qquad (2')$$

и одному из краевых условий

$$u\,|_\Gamma=\psi(x,\ t)\qquad (4)$$

— первая смешанная задача, или

$$\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_\Gamma=\psi(x,\ t)\qquad (5)$$

— вторая смешанная задача, или

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N}+\sigma(x,\ t)\,u\right)\Big|_\Gamma=\psi(x,\ t)\qquad (6)$$

— третья смешанная задача, где N — конормаль эллиптич. оператора L.

Каждая из этих задач удовлетворяет дополнительности условию и, следовательно, при достаточной гладкости данных задачи и выполнении условий согласования имеет классич. решение; это решение может быть получено с помощью метода потенциала, метода конечных разностей, *Галеркина метода*, а в случае, когда функции $a_{i,j}$, $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, n$, c, σ, не зависят от t, $b_i \equiv 0$, $i=1, \ldots, n$, и с помощью *Фурье метода*. Для разрешимости, напр., первой смешанной задачи для уравнения (1) достаточно потребовать, чтобы коэффициенты уравнения принадлежали пространству Гёльдера $C^{\alpha}(\overline{D})$ при нек-ром $\alpha>0$ и, кроме того, коэффициенты $\alpha_{i,j}(x, t)$ имели принадлежащие $C^{\alpha}(\overline{D})$ производные $\frac{\partial a_{i,j}}{\partial x_i}$, $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, n$, функция $f(x, t)$ принадлежала $C^{\alpha}(\overline{D})$, функции φ и ψ были непрерывны соответственно на $\overline{\Omega}_0$ и $\overline{\Gamma}$ и $\varphi|_{\partial\Omega}=\psi(x, 0)$. При этом достаточно, чтобы граница $\partial\Omega$ области Ω удовлетворяла следующему условию: для любой точки $x^0 \in \partial\Omega$, существует замкнутый шар S, имеющий единственную общую точку с Ω — точку x^0 : $S \cap \Omega = x^0$. Аналогичное утверждение при нек-рых условиях на боковую поверхность (пусть боковая поверхность не содержит характеристич. точек — точек касания с плоскостями $t=\text{const}$) справедливо и в случае нецилиндрич. области D.

Теоремы существования основных смешанных задач для уравнения (1′) справедливы и при других требованиях на заданные функции и область Ω. Напр., решение первой смешанной задачи в цилиндрич. области D для однородного *теплопроводности уравнения* с непрерывными функциями φ и ψ, удовлетворяющими условию согласования $\varphi|_{\partial\Omega}=\psi(x, 0)$, существует, если область Ω такова, что *Дирихле задача* для *Лапласа уравнения* разрешима в Ω (существует классич. решение) при произвольной непрерывной граничной функции.

Пусть коэффициенты a_{ij}, b_i, c измеримы и ограничены в D, а функция σ измерима и ограничена на Γ, $f \in L_2(D)$, $\varphi \in L_0(\Omega)$, функция ψ в случае первой смешанной задачи является следом на Γ нек-рой функции из *Соболева пространства* $W_2^{1,0}(D)$, а в случае третьей (и второй) смешанной задачи принадлежат $L_2(\Gamma)$.

Принадлежащая пространству $W_2^{1,0}(D)$ функция $u(x, t)$, след к-рой на Γ равен ψ: $u|_{\Gamma}=\psi$, наз. обобщенным решением первой смешанной задачи (1′), (2′), (4), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_D \left[-uv_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} u_{x_i} v_{x_j} - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu \right) v \right] dx\, dt = \int_D fv\, dx\, dt + \int_{\Omega_0} \varphi v\, dx$$

при всех v из пространства Соболева $W_2^1(D)$, удовлетворяющих условиям $v|_{\Gamma}=0$, $v|_{\Omega_T}=0$.

Принадлежащая пространству $W_2^{1,0}(D)$ функция $u(x, t)$ наз. обобщенным решением третьей (второй, если $\sigma=0$) смешанной задачи (1), (2), (6), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_D \left[-uv_t + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} u_{x_i} v_{x_j} - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu \right) v \right] dx\, dt + \int_{\Gamma} \sigma uv\, dS = \int_D fv\, dx\, dt + \int_{\Omega_0} \varphi v\, dx + \int_{\Gamma} \psi v\, dS$$

при всех v из $W_2^1(D)$, удовлетворяющих условию $v|_{\Omega_T}=0$.

Обобщенное решение каждой из этих задач существует, единственно и, если $f\in L_p(D)$ при достаточно большом p, непрерывно в D и даже удовлетворяет условию Гёльдера с нек-рым показателем $\alpha>0$. При увеличении гладкости заданных функций и границы области и при выполнении условий согласования увеличивается гладкость обобщенного решения. Так, напр., пусть для уравнения теплопроводности $\varphi\equiv 0$ и $\psi\equiv 0$ и $\partial\Omega$ является достаточно гладкой поверхностью; обобщенное решение первой смешанной задачи принадлежит $W_2^{2(s+1),\,s+1}(D)$, если $f\in W_2^{2s,\,s}(D)$ и выполнены условия согласования

$$f^i|_{\partial\Omega_0}=(\Delta f+f_t)|_{\partial\Omega_0}=\ldots=\sum_{i=0}^{s-1}\Delta^i\frac{\partial^{s-1-i}f}{\partial t^{s-1-i}}\Big|_{\partial\Omega_0}. \quad (7)$$

В частности, если $f\in L_2(D)$, то решение принадлежит $W_2^{2,\,1}(D)$, для $(x,\,t)\in D$ удовлетворяет уравнению теплопроводности и его след на Ω_0 равен нулю; если $f\in W_2^{2s,\,s}$ при достаточно большом s и выполнены условия согласования (7), то в силу *вложения теорем* обобщенное решение является классическим. Аналогичное утверждение справедливо и для обобщенных решений основных смешанных задач для уравнения (1′) при достаточной гладкости коэффициентов.

Пусть $\Omega=\mathbb{R}^n$; задача отыскания решения в полосе $D=\mathbb{R}^n\times(0,\,T)$ параболич. системы уравнений (1), удовлетворяющих на характеристике $\Omega_0=\{x\in\mathbb{R}^n,\,t=0\}$ начальному условию (2), наз. *Коши задачей* для уравнения (1). Классич. решением задачи Коши (1), (2) наз. вектор-функция $u(x,\,t)$, принадлежащая $C^{2p,\,1}(D)\cap C(D\cup\Omega_0)$ и удовлетворяющая в D системе (1), а на Ω_0 — начальному условию (2). Если правая часть $f(x,\,t)$ принадлежит пространству Гёльдера $C^\alpha(\overline{D})$ при нек-ром $\alpha>0$, а коэффициенты — достаточно гладкие в $\overline{D}$, ограниченные вместе со своими производными функции, то для любой непрерывной и ограниченной в $\mathbb{R}^n$ начальной вектор-функции $\varphi(x)$ существует ограниченное в D решение задачи Коши и ограниченное решение задачи Коши единственно.

Условие ограниченности может быть заменено условием «не слишком быстрого роста». Напр., для уравнения 2-го порядка справедливо следующее утверждение. Пусть коэффициенты уравнения (1′)

$$a_{i,\,j}(x,\,t),\ b_i(x,\,t),\ c(x,\,t)\ \text{и}\ \frac{\partial a_{i,\,j}(x,\,t)}{\partial x_i}$$

принадлежат пространству Гёльдера $C^\alpha(\overline{D})$ при нек-ром $\alpha>0$, а непрерывная в $\mathbb{R}^n$ функция $\varphi(x)$ и непрерывная в $\overline{D}$ и локально непрерывная по Гёльдеру по переменным x равномерно по $t\in[0,\,T]$ (с нек-рым показателем $\alpha>0$) функция $f(x,\,t)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi(x)|\leqslant Ce^{h|x|^2},\ x\in\mathbb{R}^n,$$

$$|f(x,\,t)|\leqslant Ce^{h|x|^2},\ (x,\,t)\in D.$$

Тогда в полосе $D=\mathbb{R}^n\times(0,\,T)$ при достаточно малом (зависящем от h) T существует решение задачи Коши (1′), (2′); оно представляется в виде

$$u(x,\,t)=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x,\,t;\,\xi,\,0)\,\varphi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x,\,t;\,\xi,\,\tau)\,f(\xi,\,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где $\Gamma(x,\,t;\,\xi,\,\tau)$ — фундаментальное решение уравнения (1′), и удовлетворяет оценке

$$|u(x,\,t)|\leqslant C_1e^{h|x|^2} \quad (8)$$

с нек-рыми положительными и постоянными C_1 и k. Условие (8) гарантирует единственность решения задачи Коши.

В случае уравнения с постоянными коэффициентами можно указать условие типа (8) на рост решения, необходимое и достаточное для единственности решения задачи Коши. Напр., для того чтобы в классе функций, удовлетворяющих неравенству

$$|u(x,\ t)| \leqslant Ce^{|x|\,h(|x|)},$$

где $h(|x|)$ — положительная непрерывная на $[0,\ \infty)$ функция, решение задачи Коши для уравнения теплопроводности было единственно, необходимо и достаточно, чтобы расходился интеграл $\int_0^\infty \frac{dr}{h(r)}$.

Для параболич. уравнений можно рассматривать и задачи без начальных условий (задача Фурье). Напр., для однородного уравнения теплопроводности — задачу отыскания решения этого уравнения в цилиндре $D=\{x\in\Omega,\ -\infty<t<+\infty\}$, где Ω — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, удовлетворяющего краевому условию

$$u(x,\ t)\,|_{x\,\in\,\partial\Omega}=\psi(x,\ t).$$

Если функция ψ непрерывна и ограничена, то существует ограниченное решение задачи Фурье; ограниченное решение задачи Фурье единственно.

Для параболич. уравнений и систем можно рассматривать первую смешанную задачу в нецилиндрич. области D и в случае, когда боковая поверхность содержит характеристич. точки (точки касания с плоскостями $t=\text{const}$). В частности, можно рассматривать *Дирихле задачу* — краевые условия задаются на всей границе ∂D. При определенных условиях на множество характеристич. точек и на порядок касания в характеристич. точках границы ∂D с характеристич. плоскостью задача Дирихле однозначно разрешена (в пространстве $W_2^{k_0}$). Напр., пусть (для простоты) $D\subset\mathbb{R}^2$ — строго выпуклая плоская область и пусть уравнение границы в окрестности верхней характеристич. точки $(x^0,\ t^0)$ имеет вид $x-x^0=\varphi_1(t)$ при $x\leqslant x^0$ и $x-x^0=\varphi_2(t)$ при $x\geqslant x^0$, $t^0-\delta<t\leqslant t^0$. Тогда условие расходимости обоих интегралов $\int_{t^0-\delta}^{t^0}|\varphi_i(t)|^{-2p}dt$, $i=1,2$, гарантирует существование и единственность решения задачи Дирихле для параболич. уравнения 2-го порядка. Это условие является и необходимым в данном классе уравнений.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [2] Ильин В. А., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 2, с. 97—154; [3] Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А., «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, № 3, с. 3—146; [4] Кружков С. Н., «Матем. сб.», 1964, т. 65, № 4, с. 522—70; [5] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., 1967; [6] Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики, М., 1973; [7] ее же, «Математ. сб.», 1950, т. 27, № 2, с. 175—84; [8] Михайлов В. П., «Матем. сб.», 1963, т. 61, № 1, с. 40—64; [9] его же, «Матем. сб.», 1963, т. 62, № 2, с. 140—59; [10] Нэш Дж., «Математика», 1960, т. 4, № 1, с. 31—52; [11] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [12] его же, «Бюлл. Моск. ун-та (А)», 1938, т. 1, в. 7, с. 1—72; [13] его же, «Comp. math.», 1934, № 1, с. 383—419; [14] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; [15] Солонников В. А., «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1965, т. 83, с. 3—163; [16] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [17] Тихонов А. Н., «Бюлл. Моск. ун-та (А)», 1938, т. 1, в. 9, с. 1—43; [18] его же, «Матем. сб.», 1935, т. 42, № 2, с. 199—216; [19] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [20] Эйдельман С. Д., Параболические системы, М., 1964.

В. П. Михайлов.

СМЕШАННОГО ТИПА УРАВНЕНИЕ — дифференцированное уравнение с частными производными, к-рое в области задания принадлежит различным ти-

пам (эллиптическому, гиперболическому или параболическому).

Линейное (или квазилинейное) дифференциальное уравнение 2-го порядка с двумя неизвестными переменными

$$Au_{xx}+2B_{xy}+Cu_{yy}=f(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y) \qquad (1)$$

и с непрерывными коэффициентами в области задания Ω является С. т. у., если в этой области дискриминант $\Delta=AC-B^2$ характеристич. формы

$$A dy^2+2B\,dx\,dy+C\,dx^2\equiv Q$$

обращается в нуль, не будучи там тождественно равным нулю.

Кривая δ, определяемая уравнением $\Delta=0$, наз. параболической линией уравнения (1), или линией вырождения (изменения) типа уравнения.

Если дискриминант Δ в области Ω не меняет знака при переходе точки $(x,\ y)$ через параболич. линию δ, то уравнение (1) относится к вырожденным уравнениям эллиптико-параболического ($\Delta\geqslant 0$) или гиперболо-параболического ($\Delta\leqslant 0$) типа (см. *Вырожденное уравнение* с частными производными).

При нек-рых условиях гладкости коэффициентов A, B, C и параболич. линии δ существуют неособое действительное преобразование независимых переменных, приводящее уравнение (1) со знакопеременным дискриминантом Δ (в окрестности выбранной точки линии δ, где $A^2+B^2+C^2\neq 0$) к одному из следующих канонич. видов (обозначения для независимых переменных сохранены):

$$y^{2m+1}u_{xx}+u_{yy}=F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y), \qquad (2)$$

$$u_{xx}+y^{2m+1}u_{yy}=F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y). \qquad (3)$$

Уравнения (2) и (3) являются С. т. у. (эллиптико-параболич. типа) в любой области, содержащей внутри себя интервал линии вырождения $y=0$.

Область Ω задания С. т. у. принято называть смешанной областью, а краевые задачи в смешанных областях — смешанными краевыми задачами. Часть Ω^+ (Ω^-) смешанной области Ω, где уравнение принадлежит эллиптическому (гиперболическому) типу, наз. областью эллиптичности (гиперболичности).

К отысканию определенных решений С. т. у. сводятся многие проблемы прикладного характера, в частности проблемы околозвукового течения сжимаемой среды и безмоментной теории оболочек.

С. т. у. (1) наз. уравнением первого рода (второго рода), если всюду вдоль параболич. линии характеристич. форма $Q\neq 0$ ($Q=0$). Уравнение Чаплыгина

$$k(y)\,u_{xx}+u_{yy}=0, \qquad (4)$$

где $k(y)$ — непрерывно дифференцируемая монотонная функция такая, что $yk(y)>0$ при $y\neq 0$, — типичный пример С. т. у. 1-го рода. При $k(y)=y$ уравнение (4) принято называть *Трикоми уравнением*.

Важной моделью С. т. у. (с разрывными коэффициентами при старших производных) является уравнение Лаврентьева — Бицадзе

$$\operatorname{sign} y\,u_{xx}+u_{yy}=0. \qquad (5)$$

Одной из основных краевых задач для С. т. у. (первого рода) является задача Трикоми, к-рая для уравнения вида (2) ставится следующим образом. Пусть Ω — конечная односвязная область евклидовой плоскости независимых переменных x и y, ограниченная простой жордановой кривой σ с концами в точках $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, лежащей в полуплоскости $y>0$, и

частями AC и BC характеристик уравнения (2), выходящими из точки $C(1/2, y_C)$, $y_C<0$. Задача Трикоми заключается в отыскании решения $u(x, y)$ уравнения (2), непрерывного в замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω и принимающего наперед заданные значения на кривой $\sigma \cup AC$.

В теории задачи Трикоми существенную роль играет принцип экстремума Бицадзе, к-рый в случае уравнения (5) гласит: решение $u(x, y)$ уравнения (5) из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, обращающееся в нуль на характеристике $AC: x+y=0$, $0 \leqslant x \leqslant 1/2$, в замыкании $\overline{\Omega}^+$ области эллиптичности $\Omega^+ = \Omega \cap \{y>0\}$ своего экстремума достигает на кривой σ.

Этот принцип, из к-рого следует единственность и устойчивость решения задачи Трикоми, а также обоснование альтернирующего метода его отыскания, распространен на весьма широкий класс линейных и квазилинейных С. т. у. В частности, этому классу принадлежат уравнения Чаплыгина (и Трикоми), если $k(y)$ дважды непрерывно дифференцируема и $5k'^2 \geqslant 4kk'$ при $y<0$. Принцип экстремума Бицадзе остается в силе и для уравнения

$$\operatorname{sign} y \cdot |y|^{\alpha} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ \alpha = \text{const} > 0. \qquad (6)$$

Решение задачи Трикоми для уравнения (6) в соответствующей смешанной области Ω выписывается в явном виде, если эллиптич. часть σ границы этой области совпадает с т. н. нормальным контуром σ_0:

$$x^2 + \left(\frac{2}{\alpha+2}\right)^2 y^{\alpha+2} = 1/4.$$

В общем случае при определенных условиях на кривую σ и на класс искомых решений задача Трикоми для уравнения (6) эквивалентно редуцируется к сингулярному интегральному уравнению, безусловная разрешимость к-рого следует из единственности решения. Метод интегральных уравнений успешно применяется и при доказательстве существования решения задачи Трикоми и др. смешанных задач для более общих уравнений вида

$$\operatorname{sign} y \cdot |y|^{\alpha} u_{xx} + u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

со степенным вырождением порядка α.

Методы теории функций и функционального анализа, особенно метод априорных оценок, позволили значительно расширить класс С. т. у. и смешанных областей, для к-рых имеет место единственность и существование (обобщенного) решения как задачи Трикоми, так и ряда др. смешанных задач.

Существенным обобщением задачи Трикоми является общая смешанная задача Бицадзе, к-рая в случае уравнения (5) ставится следующим образом. Пусть Ω — односвязная смешанная область, ограниченная лежащей в полуплоскости $y>0$ простой жордановой кривой σ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и выходящими из этих точек (гладкими) монотонными кривыми Γ_0 и Γ_1, к-рые пересекаются в точке $C(x_1, y_1)$, $y_1<0$. Предполагается, что кривые Γ_0 и Γ_1 принадлежат области, ограниченной характеристиками $x+y=0$, $x-y=1$ и отрезком $AB: 0 \leqslant x \leqslant 1$ прямой $y=0$. Через B_0 и B_1 обозначены точки пересечения характеристик $x-y=x_0$ и $x+y=x_0$ с кривыми Γ_0 и Γ_1, где x_0 — любая фиксированная точка из полуинтервала $x_1+y_1<x_1 \leqslant x_1-y_1$, а через γ_0 и γ_1 — части кривых Γ_0 и Γ_1, лежащих между точками A, B_0 и B, B_1 соответственно. Общая смешанная задача Бицадзе заключается в отыскании регулярного (при $y \neq 0$, $x \pm y \neq x_0$) решения уравнения (5) в области Ω, к-рое непрерывно в $\overline{\Omega}$, имеет непрерывные первые производные в Ω при $x \pm y \neq x_0$ и удовлетворяет заданным краевым условиям на кривых σ, γ_0 и γ_1. Единствен-

ность и существование решения этой задачи как для уравнения (5), так и для более общих уравнений доказаны при нек-рых условиях геометрич. характера на границу области Ω, особенно на кривую σ. Общую смешанную задачу Бицадзе можно считать полностью исследованной в частном случае, когда кривая Γ_1 совпадает ($x_0=1$) с выходящей из точки B характеристикой BC. Важным следствием корректности общей смешанной задачи Бицадзе, напр. для уравнения (5), является тот факт, что для смешанных областей вида Ω *Дирихле задача* некорректна независимо от величины и формы области гиперболичности Ω^-.

Для довольно широкого класса линейных уравнений

$$k(y)\,u_{xx}+u_{yy}+au_x+bu_y+cu=f$$

установлено, что на корректность задачи Дирихле в соответствующих смешанных областях вида Ω существенное влияние может оказать коэффициент $a(x,\ y)$.

Смешанной задачей нового типа является з а д а ч а Ф р а н к л я. Пусть односвязная область Ω ограничена: отрезком $A'A$, $-1\leqslant y\leqslant 1$, прямой $x=0$; гладкой кривой σ с концами в точках A (0, 1) и B (a, 0), расположенной в квадранте $x>0$, $y>0$; отрезком CB : $a_1\leqslant x\leqslant a$ прямой $y=0$ и проходящей через точки A' (0, -1), C (a_1, 0) характеристикой рассматриваемого С. т. у., напр. уравнения (4). Задача Франкля состоит в отыскании решения $u(x,\ y)$ С. т. у. в области Ω, когда на $\sigma\cup CB$ задаются значения $u(x,\ y)$, а на $A'A$ — условие

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(0,\ y)-u(0,\ -y)=f(y),\ -1\leqslant y\leqslant 1,\ x=0.$$

Эта задача исследована в основном для модельных С. т. у. Задача Франкля весьма полно решена для уравнения (5), если кривая σ : $x=x(s)$, $y=y(s)$ такова, что $dy/ds\geqslant 0$, где s — длина σ, отсчитываемая от точки B (a, 0).

Сформулированные основные краевые задачи для С. т. у. 1-го рода с соответствующими изменениями перенесены на С. т. у. 2-го рода. Эти изменения вызваны тем, что задача Дирихле для эллиптич. уравнений с характеристич. вырождением на части границы не всегда является корректно поставленной.

В постановке краевых задач для уравнения (1) в смешанных областях вносится новый аспект, если линия δ изменения типа одновременно представляет собой линию вырождения порядка уравнения, напр. в случае уравнения

$$y^{2p}u_{xx}+yu_{yy}+\beta u_y=0, \qquad (7)$$

где p — натуральное число, а β — постоянная, удовлетворяющая неравенству $1-2p\leqslant 2\beta<1$.

Для уравнений (5), (6), (7), помимо указанных задач, исследован также ряд принципиально новых краевых задач, к-рые в основном характеризуются тем, что вся граница $\sigma\cup AC\cup BC$ области Ω (где ставится задача Трикоми) является носителем краевых условий: на кривой σ задано, напр., условие Дирихле, а на $AC\cup BC$ — нек-рое нелокальное условие, поточечно связывающее значения искомого решения или его (дробной) производной определенного порядка. В частности, эти задачи включают простой пример корректной самосопряженной смешанной краевой задачи.

Изучаются краевые задачи для С. т. у. и систем в областях, содержащих внутри себя части нескольких линий вырождения типа или одну замкнутую параболич. линию.

Аналоги задачи Трикоми рассматривались и для нек-рого класса С. т. у. и систем с двумя независимыми переменными и уравнений высокого порядка.

Значительные затруднения возникают при отыскании правильно поставленных задач для С. т. у. с многими независимыми переменными. Тем не менее в этом направлении получен ряд важных результатов. Установлено, что для уравнения

$$\operatorname{sign} z \cdot u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x,\ y,\ z), \qquad (8)$$

к-рое представляет собой простую модель С. т. у. с временным образом ориентированной плоскостью $z=0$ вырождения типа, корректно поставленной является следующая задача. Пусть Ω — конечная односвязная трехмерная область, ограниченная нек-рой кусочно гладкой поверхностью $z=f(x,\ y)\geqslant 0$ и характеристиками $S_1: x+x_0=\sqrt{y^2+z^2}$, $S_2: x-x_0=\sqrt{y^2+z^2}$ уравнения (8). Требуется найти непрерывную в Ω функцию $u(x,\ y,\ z)$ с непрерывными в Ω производными 1-го порядка, удовлетворяющую уравнению (8) в области Ω при $z\neq 0$ и обращающуюся в нуль на σ и на одной из характеристик S_1 или S_2. Доказаны существование слабого и единственность сильного решения этой задачи и для более общего уравнения

$$\operatorname{sign} x_n \cdot u_{x_0x_0} + \Delta_x u = f(x_0,\ x),\ x=(x_1,\ \ldots,\ x_n),$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_n$. Для уравнения

$$x_0^{2m}\Delta_x u - x_0 u_{x_0x_0} + (m-{}^1/_2)\, u_{x_0} = 0 \qquad (9)$$

с пространственно ориентированной гиперплоскостью $x_0=0$ вырождения типа и порядка в смешанной области Ω специального вида поставлены и исследованы краевые задачи, в к-рых часть границы $\partial\Omega$, лежащая в полупространстве $x_0<0$, является носителем данных $u(x_0,\ x)$, а лежащая в полупространстве $x_0>0$ часть границы $\partial\Omega$ (характеристич. коноид уравнения (9)) — носителем нек-рых интегральных средних для $u(x_0,\ x)$.

Исследовались и другие модельные С. т. у. в трехмерных ограниченных и неограниченных областях, в т. ч. уравнения

$$z^{2m+1}u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,\ z^{2m+1}(u_{xx}+u_{yy}) + u_{zz} = 0.$$

Найден также критерий единственности решения задачи Дирихле для широкого класса самосопряженных С. т. у. в цилиндрич. областях.

Лит.: [1] Берс Л., Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, пер. с англ., М., 1961; [2] Бицадзе А. В., Уравнения смешанного типа, М., 1959; [3] его же, К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль линии изменения типа, в сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, М., 1972; [4] Бицадзе А. В., Нахушев А. М., «Докл. АН СССР», 1972, т. 205, № 1; [5] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959; [6] Каратопраклиев Г. Д., «Дифференциальные уравнения», 1969, т. 5, № 1, с. 199—205; [7] Келдыш М. В., «Докл. АН СССР», 1951, т. 77, № 2, с. 181—83; [8] Салахитдинов М. С., «Изв. АН Узб. ССР. Серия физ.-мат. наук», 1969, № 1, с. 27—33; [9] Смирнов М. М., Уравнения смешанного типа, М., 1970; [10] Солдатов А. П., «Дифференциальные уравнения», 1973, т. 9, № 2, с. 325—32; [11] Трикоми Ф., О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, пер. с итал., М.—Л., 1947; [12] Франкль Ф. И., Избранные труды по газовой динамике, М., 1973; [13] Friedrichs K. O., «Communication Pure and Appl. Math.», 1958, v. 11, № 3, p. 333—418; [14] Gellerstedt S., «Ark. mat., astr., fys.», 1936, bd 26A, № 3, s. 1—32; [15] Germain P., Bader R., «C.r. Acad. sci.», 1951, t. 232, p. 463—65. *А. М. Нахушев.*

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ (a, b, c) векторов a, b, c — скалярное произведение вектора a на векторное произведение векторов b и c:

$$(a,\ b,\ c) = (a,\ [b,\ c]).$$

См. *Векторная алгебра.*

СМЕШАННЫЙ ПРОЦЕСС АВТОРЕГРЕССИИ-СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО, АРСС-процесс — стационарный в широком смысле случайный процесс

$X(t)$ с дискретным временем $t=0, \pm 1, \ldots$ значения к-рого удовлетворяют разностному уравнению

$$X(t)+a_1X(t-1)+\ldots+a_pX(t-p)=$$
$$=Y(t)+b_1Y(t-1)+\ldots+b_qY(t-q), \qquad (1)$$

где $\mathsf{E}Y(t)=0$, $\mathsf{E}Y(t)Y(s)=\sigma^2\delta_{ts}$, δ_{ts} — символ Кронекера (т. е. $Y(t)$ — процесс белого шума со спектральной плотностью $\sigma^2/2\pi$), p и q — нек-рые неотрицательные целые числа, а $a_1, \ldots, a_p$, $b_1, \ldots, b_q$ — постоянные коэффициенты. Если все корни уравнения

$$\varphi(z)=1+a_1z+\ldots+a_pz^p=0$$

по модулю отличны от единицы, то стационарный С. п. а.-с. с. $X(t)$ существует и имеет *спектральную плотность*

$$f(\lambda)=(\sigma^2/2\pi)\,|\psi(e^{i\lambda})|^2\,|\varphi(e^{i\lambda})|^{-2},$$

где $\psi(z)=1+b_1z+\ldots+b_qz^q$. Однако для того, чтобы решение уравнения (1) при фиксированных начальных значениях $X(t_0-1), \ldots, X(t_0-p)$ стремились при $t-t_0\to\infty$ к стационарному процессу $X(t)$, необходимо, чтобы все корни уравнения $\varphi(z)=0$ располагались вне единичного круга $|z|\leqslant 1$ (см., напр., [1], [2]).

Класс гауссовских С. п. а.-с. с. совпадает с классом стационарных процессов, имеющих спектральную плотность и являющихся одномерной компонентой многомерного марковского процесса (см. [3]). Частными случаями С. п. а.-с. с. являются *авторегрессионные процессы* (при $q=0$) и *скользящего среднего процессы* (при $p=0$). Обобщением С. п. а.-с. с. являются введенные в рассмотрение Дж. Боксом (G. Box) и Г. Дженкинсом (G. Jenkins) (см. [1]) и часто используемые в прикладных задачах процессы авторегрессии проинтегрированного скользящего среднего — нестационарные процессы со стационарными приращениями такие, что их приращения нек-рого фиксированного порядка образуют С. п. а.-с. с.

Лит.: [1] Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, пер. с англ., в. 1—2, М., 1974; [2] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [3] Doob J. L., «Ann. Math. Stat.», 1944, v. 15, p. 229—82.

А. М. Яглом.

СМЕШАННЫХ ОБЪЕМОВ ТЕОРИЯ — раздел теории выпуклых тел, изучающий функционалы, возникающие при рассмотрении линейных комбинаций тел (см. *Сложение* множеств).

Объем V линейной комбинации $\sum_{i=1}^r\lambda_iK_i$ выпуклых тел K_i в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с коэффициентами $\lambda_i\geqslant 0$ является однородным многочленом степени n относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$:

$$V\Big(\sum\nolimits_{i=1}^r\lambda_iK_i\Big)=\sum\nolimits_{i=1}^r\cdots\sum\nolimits_{i_n=1}^r V_{i_1\ldots i_n}\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_n}. \quad (*)$$

Коэффициенты $V_{i_1\ldots i_n}$ предполагаются симметричными относительно перестановок индексов и обозначаются $V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})$, поскольку они зависят только от тел $K_{i_1}, \ldots, K_{i_n}$; эти коэффициенты наз. смешанными объемами (с. о.) тел $K_{i_1}, \ldots, K_{i_n}$.

Значение С. о. т. связано с универсальностью понятия с. о.: при подстановке в $V(K, K_1, \ldots, K_{n-1})$ конкретных тел $K_1, \ldots, K_{n-1}$ получаются многие величины, связанные с телом K. В их числе: объем, площадь поверхности, интеграл по поверхности от элементарной симметрич. функции главных кривизн (в случае C^2-гладкого тела), а также соответствующие характеристики проекции тела на i-мерную плоскость, $0<i<n$. Частным случаем разложения $(*)$ является разложение Штейнера для объемов параллельных тел в $\mathbb{R}^3$:

$$V_\varepsilon=V+S\varepsilon+\pi B\varepsilon^2+\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3,$$

где V — объем, S — площадь поверхности, B — интегральная средняя кривизна исходного тела, V_ε — объем его ε-окрестности. С. о. $V(K_1, \ldots, K_n)$ инвариантен относительно параллельных переносов любого тела K_i, монотонен (по включению тел), непрерывен и неотрицателен; $V(K_1, \ldots, K_n) > 0$ тогда и только тогда, когда в каждом K_i можно провести по отрезку так, чтобы эти отрезки были линейнонезависимы (см. [1]).

Если K' — проекция K на гиперплоскость, ортогональную единичному отрезку e, то

$$V(K_1, \ldots, K_{n-1}, e) = nV\left(K_1', \ldots, K_{n-1}'\right).$$

Объем проекции тела K на p-мерное подпространство наз. p-й внешней поперечной мерой. Соотношения между средними значениями $W_p(K)$ этих мер — один из объектов интегральной геометрии. Функционалы $W_p(K)$ с точностью до множителя совпадают с p-ми интегралами кривизны:

$$V_p(K) = V(\underbrace{K, \ldots, K}_{p}, \underbrace{U, \ldots, U}_{n-p}),$$

где U — единичный шар. Для C^2-гладких строго выпуклых тел с. о. $V_p(K)$, $0 < p < n$, равен интегралу от p-й элементарной симметрич. функции D_p главных радиусов кривизны, рассматриваемой как функция нормали на сфере S^{n-1}. В случае общих выпуклых тел $V_p(K)$ есть полное значение определяемой ниже меры $\mu_p(\omega)$ на S^{n-1}, называемой функцией кривизны. (В гладком случае D_p есть плотность μ_p.) Подобно тому как объем тела K есть $\frac{1}{n}$ интеграла от его *опорной функции* $K(u)$ по его поверхностной функции, т. е. по площади поверхности, перенесенной на S^{n-1} сферическим отображением, так и с. о. n тел представим интегралом от опорной функции $K_1(u)$ одного из них по нек-рой мере $\mu(\omega) = \mu(K_2, \ldots, K_n, \omega)$ на S^{n-1}, зависящей от остальных тел и называемой смешанной поверхностной функцией тел $K_2, \ldots, K_n$:

$$V(K_1, \ldots, K_n) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} K_1(u)\, d\mu.$$

Функция кривизны $\mu_p(\omega)$ определяется равенством

$$\mu_p(\omega) = \mu(\underbrace{K, \ldots, K}_{p}, \underbrace{U, \ldots, U}_{n-p-1}, \omega).$$

Основным содержанием С. о. т. являются неравенства между с. о. (см. [2], [3]). В их числе — неравенство Минковского

$$V^n(K, L, \ldots, L) \geqslant V(K) V^{n-1}(L)$$

и квадратичное неравенство Минковского

$$V^2(K, L, \ldots, L) \geqslant V(L)\, V(K, K, L, \ldots, L).$$

Эти неравенства тесно связаны с *Брунна — Минковского теоремой*, справедливой не только для выпуклых тел. Обобщает эти неравенства Александрова — Фенхеля неравенство, допускающее следующую модификацию (см. [2]):

$$V^m(K_1, \ldots, K_m, L_1, \ldots, L_{n-m}) \geqslant$$
$$\geqslant \prod_{i=1}^{m} V(K_i, \ldots, K_i, L_1, \ldots, L_{n-m}).$$

В частности,

$$V^n(K_1, \ldots, K_n) \geqslant V(K_1) \ldots V(K_n).$$

Полная система неравенств, характеризующая с. о. $V(K_1, \ldots, K_n)$, получена для двух тел, в связи с этим установлены нек-рые более общие неравенства (см. [4]).

Многие геометрич. неравенства, напр. *изопериметрическое неравенство классическое* и ряд его уточнений, являются для выпуклых тел частными случаями неравенств для с. о.; экстремум одного из функционалов $V_p(K)$ при фиксации другого из них достигается для шара. Неравенства С. о. т. использованы при доказательстве единственности решения обобщенной проблемы Минковского (см. [2]), устойчивости в проблемах Минковского (см. [5]) и Вейля (см. [6]), при решении проблемы Ван дер Вардена о перманенте (см. [7]). Бесконечномерный аналог понятий С. о. т. нашел применение в теории гауссовских случайных процессов (см. [7]).

С. о. т. оказалась глубоко связанной с алгебраич. геометрией. Многочлену $f(z_1, \ldots, z_n)$ от n комплексных переменных сопоставляют многогранник Ньютона $Nw(f)$. Для этого каждому одночлену $z_1^{a_1} \ldots z_n^{a_n}$, входящему в f с ненулевым коэффициентом, сопоставляется точка $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$; многогранник $Nw(f)$ есть выпуклая оболочка этих точек. Типичное число решений системы полиномиальных уравнений $f_1 = \ldots = f_n = 0$ равно деленному на $n!$ с. о. многогранника $Nw(f)$. Эта связь позволила, в частности, дать алгебраич. доказательство неравенства Александрова — Фенхеля (см. [10]).

В С. о. т. выпуклое тело отождествляют с его опорной функцией; допускается распространение на разности этих функций, а затем — на произвольные непрерывные функции на сфере (см. [2], [3]). Из аналогичного разложения для вектора центра тяжести тела $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i K_i$, умноженного на объем этого тела, определяются т. н. смешанные направляющие векторы, являющиеся векторным аналогом смешанных объемов. Центры тяжести функций кривизны тела K с точностью до постоянного множителя совпадают со смешанными направляющими векторами K и шара U (см. [11]).

Лит.: [1] Minkowski H., Gesam. Abh., Bd 2, Lpz.—B., 1911; [2] Александров А. Д., «Матем. сб.», 1937, т. 2, № 5, с. 947—72, № 6, с. 1205—38; 1938, т. 3, № 1, с. 27—46, № 2, с. 227—51; [3] Буземан Г., Выпуклые поверхности, пер. с англ., М., 1964; [4] Shephard G., «Mathematika», 1960, v. 7, № 14, p. 125—38; [5] Дискант В. И., «Сиб. матем. ж.», 1973, т. 14, № 3, с. 669—73; [6] Волков Ю. А., «Укр. геометр. сб.», 1968, № 5—6, с. 44—69; [7] Егорычев Г. П., Решение проблемы Ван-дер-Вардена для перманентов, Красноярск, 1980; [8] Судаков В. Н., «Докл. АН СССР», 1971, т. 197, № 1, с. 43—45; [9] Busemann H., Ewald G., Shephard G., «Math. Ann.», 1963, Bd 151, № 1, S. 1—41; [10] Хованский А. Г., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 4, с. 160—61; [11] Schneider R., «Abh. math. Semin. Univ. Hamburg», 1972, Bd 37, S. 112—32.

Ю. Д. Бураго.

СМЕЩЕННАЯ ОЦЕНКА — статистическая оценка, математич. ожидание к-рой не совпадает с оцениваемой величиной.

Пусть X — случайная величина, принимающая значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$, и пусть $T = T(X)$ — точечная статистич. оценка функции $f(\theta)$, заданной на параметрич. множестве Θ. Предполагается, что математич. ожидание $\mathsf{E}_\theta\{T\}$ оценки T существует. Если в этих условиях функция

$$b(\theta) = \mathsf{E}_\theta\{T\} - f(\theta) = \mathsf{E}_\theta\{T - f(\theta)\}$$

не равна тождественно нулю, т. е. если $b(\theta) \not\equiv 0$, то T наз. смещенной оценкой функции $f(\theta)$, а сама функция $b(\theta)$ наз. смещением или систематической ошибкой оценки T.

Пример. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — взаимно независимые одинаково нормально $N_1(a, \sigma^2)$ распределенные случайные величины и пусть

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n).$$

В таком случае статистика

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

является С. о. дисперсии σ^2, так как

$$\mathsf{E}\{S_n^2\} = \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n},$$

т. е. оценка S_n^2 имеет смещение $b(\sigma^2) = -\sigma^2/n$, при этом квадратичный риск этой С. о. равен

$$\mathsf{E}\{(S_n^2 - \sigma^2)^2\} = \frac{2n-1}{n^2}\sigma^4.$$

Наилучшей *несмещенной оценкой* параметра σ^2 является статистика

$$s_n^2 = \frac{n}{n-1}S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$

квадратичный риск к-рой равен

$$\mathsf{D}\{s_n^2\} = \mathsf{E}\{(s_n^2 - \sigma^2)\} = \frac{2}{n-1}\sigma^4.$$

В данном случае при $n>2$ квадратичный риск С. о. S_n^2 меньше квадратичного риска наилучшей несмещенной оценки s_n^2.

Существуют ситуации, когда несмещенные оценки не существуют. Так, напр., не существует несмещенной оценки для абсолютной величины $|a|$ математич. ожидания a нормального закона $N_1(a, \sigma^2)$, т. е. для $|a|$ можно построить только С. о.

Лит.: [1] Крамер Г., Математич. методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

М. С. Никулин.

СМИРНОВА КЛАСС $E_p(G)$ — совокупность функций $f(z)$, голоморфных в односвязной области $G \subset \mathbb{C}$ с жордановой спрямляемой границей Γ и таких, что для каждой из этих функций существует последовательность замкнутых жордановых спрямляемых кривых $\Gamma_n(f) \subset G$, $n=1,2,\ldots$, со свойствами: 1) $\Gamma_n(f)$ при $n\to\infty$ стремится к Γ в том смысле, что если $G_n(f)$ — ограниченная область с границей $\Gamma_n(f)$, то

$$G_1(f) \subset G_2(f) \subset \ldots \subset G_h \text{ и } \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n(f) = G;$$

2) $\sup_n \left\{\int_{\Gamma_n(f)} |f(z)|^p |dz|\right\} < \infty$ ($p>0$ задано).

Это определение, предложенное М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым [2], *эквивалентно определению* В. И. Смирнова [1], в к-ром вместо $\Gamma_n(f)$ фигурируют кривые $\gamma(\rho)$, являющиеся образами соответствующих окружностей $|w| = \rho < 1$ при нек-ром однолистном конформном отображении $z = \varphi(w)$ круга $|w| < 1$ на область G, а супремум берется по $\rho \in (0, 1)$.

Классы $E_p(G)$ являются наиболее известным и изученным обобщением *Харди классов* H_p и связаны с ними следующим соотношением: $f \in E_p(G)$ тогда и только тогда, когда

$$f(\varphi(w))(\varphi'(w))^{1/p} \in H_p.$$

По своим свойствам классы $E_p(G)$ наиболее близки классам H_p в случае *Смирнова областей* G. Изучалось обобщение С. к. на случай произвольных областей G с границами конечной длины по Хаусдорфу. См. также *Граничные свойства аналитических функций*.

Лит.: [1] Смирнов В. И., «Изв. АН СССР. Отд. матем. и естеств. наук», 1932, № 3, с. 337—72; [2] Келдыш М. В., Лаврентьев М. А., «Ann. sci École Norm. supér.», 1937, t. 54, p. 1—38; [3] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [4] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [5] Duren P. L., Theory of H^p-spaces, N.Y.— L., 1970.

Е. П. Долженко.

СМИРНОВА КРИТЕРИЙ — непараметрический статистич. критерий, применяемый для проверки гипотезы об однородности двух выборок.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — взаимно независимые случайные величины, причем каждая выборка состоит из одинаково непрерывно распределенных элементов, и пусть надлежит проверить гипотезу H_0,

согласно к-рой обе выборки извлечены из одной и той же совокупности. Если

$$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)} \text{ и } Y_{(1)} \leqslant Y_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant Y_{(m)}$$

— вариационные ряды, отвечающие данным выборкам, а $F_n(x)$ и $G_m(x)$ — соответствующие им функции эмпирич. распределения, то гипотезу H_0 можно записать в виде следующего тождества

$$H_0: \mathsf{E}F_n(x) \equiv \mathsf{E}G_m(x).$$

Далее, пусть в качестве возможных альтернатив к H_0 рассматриваются гипотезы

$$H_1^+ = \sup_{|x|<\infty} \mathsf{E}[G_m(x) - F_n(x)] > 0,$$

$$H_1^- = \inf_{|x|<\infty} \mathsf{E}[G_m(x) - F_n(x)] < 0,$$

$$H_1 = \sup_{|x|<\infty} |\mathsf{E}[G_m(x) - F_n(x)]| > 0.$$

Для проверки гипотезы H_0 против односторонних альтернатив H_1^+ и H_1^-, а также против двусторонней H_1, Н. В. Смирновым предложены статистич. критерии, построенные на статистиках

$$D_{m,n}^+ = \sup_{|x|<\infty} [G_m(x) - F_n(x)] = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \left(\frac{k}{m} - F_n(X_{(k)}) \right),$$

$$D_{m,n}^- = -\inf_{|x|<\infty} [G_m(x) - F_n(x)] =$$

$$= \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \left(F_n(X_{(k)}) - \frac{k-1}{m} \right),$$

$$D_{m,n} = \sup_{|x|<\infty} |G_m(x) - F_n(x)| = \max \left(D_{m,n}^+, D_{m,n}^- \right)$$

соответственно, причем, как следует из определений статистик $D_{m,n}^+$ и $D_{m,n}^-$, при справедливости проверяемой гипотезы H_0, статистики $D_{m,n}^-$ и $D_{m,n}^+$ распределены одинаково. В основе этих критериев лежит следующая теорема: если $\min(m, n) \to \infty$ так, что отношение m/n остается постоянным, то при справедливости гипотезы H_0 для любого $y > 0$

$$\lim_{m \to \infty} \mathsf{P}\left\{ \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n}^+ < y \right\} = 1 - e^{-2y^2},$$

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\left\{ \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n} < y \right\} = K(y),$$

где $K(y)$ — функция распределения Колмогорова. Были получены (см. [4] — [6]) асимптотич. разложения для функций распределения статистик $D_{m,n}^+$ и $D_{m,n}$.

Согласно С. к. с уровнем значимости Q гипотеза H_0 отвергается в пользу одной из рассматриваемых альтернатив H_1^+, H_1^-, H, если статистика, соответствующая выбранной альтернативе, превосходит Q — критическое значение критерия, для вычисления к-рого рекомендуется пользоваться аппроксимациями, полученными Л. Н. Большевым [2] с помощью асимптотич. преобразований Пирсона.

См. также *Колмогорова критерий*, *Колмогорова — Смирнова критерий*.

Лит.: [1] Смирнов Н. В., «Бюлл. МГУ», 1939, т. 2, в. 2, с. 3—14; [2] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 2, с. 129—55; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [4] Королюк В. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 4, с. 369—97; [5] Чжан Ли-цянь, «Математика», 1960, т. 4, № 2, с. 135—59; [6] Боровков А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, № 4, с. 605—24.

М. С. Никулин.

СМИРНОВА ОБЛАСТЬ, область типа C, область типа S, — ограниченная односвязная область G с жордановой спрямляемой границей на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ со свойством: существует такое однолистное конформное отображение $z = \varphi(w)$

круга $|w|<1$ на область G, что гармонич. функция $\ln|\varphi'(w)|$ при $|w|<1$ представима интегралом Пуассона по своим угловым граничным значениям $\ln|\varphi'(e^{i\theta})|$:

$$\ln|\varphi'(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(t-\theta)}\ln|\varphi'(e^{it})|\,dt.$$

Эти области введены В. И. Смирновым [1] в 1928 при исследовании полноты системы многочленов в *Смирнова классе* $E_2(G)$. Проблема существования несмирновских областей с жордановыми спрямляемыми границами была решена М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым [2], давшими тонкую и сложную конструкцию таких областей и соответствующих отображающих функций φ с дополнительным свойством: $|\varphi'(e^{i\theta})|=1$ почти для всех $e^{i\theta}$. Основные *граничные свойства аналитических функций* в круге присущи и функциям, аналитическим в С. о., причем многие из таких свойств справедливы в С. о. и только в них. Примеры С. о. дают жордановы области, границы к-рых суть кривые Ляпунова или кусочно ляпуновские кривые с ненулевыми углами.

Лит.: [1] Смирнов В. И., «Ж. Ленингр. физ.-матем. об-ва», 1928, т. 2, № 1, с. 155—79; [2] Келдыш М. В., Лаврентьев М. А., «Ann. sci. École norm. supér», 1937, t. 54, p. 1—38; [3] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [4] Ловатер А., в кн.: Итоги науки. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259; [5] Тумаркин Г. Ц., «Вестн. Ленингр. ун-та», 1962, № 13, с. 47—55.

Е. П. Долженко.

СНЕДЕКОРА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. *Фишера F-распределение.*

СНОБОЛ — *алгоритмический язык,* предназначенный для программирования задач обработки символьной информации, т. е. представленной словами в нек-ром алфавите. В литературе по программированию такие слова наз. строками, или цепочками, а образующие их буквы — литерами. На основе начального варианта С., разработанного в нач. 1960-х гг., было создано несколько версий языка, из к-рых наиболее стабильной оказалась версия С.-4. Аналогично *рефалу*, С. имеет своей теоретич. предпосылкой *нормальные алгорифмы* А. А. Маркова, в к-рых основной вычислительной операцией является обнаружение в слове A вхождения заданного подслова B с последующей заменой этого вхождения на другое слово C.

Общая структура программ на С. типична для алгоритмич. языков. Программа имеет вид последовательности операторов (инструкций) присваивания, сопоставления с образцом, замещения, передачи управления, ввода, вывода и останова. В выражениях могут употребляться как примитивные операции, предикаты и функции, так и функции, определяемые программистом (в т. ч. и рекурсивные). Любая инструкция может быть помечена. Метка в С. может трактоваться как строковая переменная, значением к-рой является инструкция, помеченная этой меткой. Основными типами данных являются строки, целые и действительные числа, имена, образцы. Базисным типом является строка, все остальные данные имеют строковое представление, совпадающее с их способом записи в программе. Однородные данные могут объединяться в массивы и таблицы, произвольные данные объединяются в наборы заданной длины и с заданными именами для каждой позиции (поля) набора. Имена обозначают переменные, метки, формальные параметры и функции. Строки в С. могут быть любой длины. Переменные не имеют постоянно приписываемого им типа, однако *операнды* каждой операции или примитивной функции ожидают данных определенного типа, преобразуя аргументы к ожидаемому типу либо выдавая сообщение об ошибке.

Наиболее характерной операцией С. является сопоставление строки с образцом. Образец — это особое выражение С., создающее в нек-рой последователь-

ности группу контрольных строк и определенную дисциплину движения слева направо (сканирования) вдоль сопоставляемой строки, называемой субъектом. Сопоставление — это последовательность элементарных проверок. Элементарная проверка устанавливает, является ли очередная контрольная строка подстрокой остатка (справа от точки сканирования) субъекта. В зависимости от успеха или неуспеха элементарной проверки происходит либо выработка сообщения об успехе или неуспехе сопоставления в целом, либо переход к следующей контрольной строке образца и перенос точки сканирования. В результате успешного сопоставления в субъекте выделяется последовательность нек-рых подстрок. Эти подстроки могут быть присвоены указанным переменным либо замещены на другие подстроки.

Примитивным образцом является выражение, значение к-рого есть строка, а успехом сопоставления с ней является вхождение этой строки в субъект. Конкатенация AB образцов A и B создает образец, успех в сопоставлении с к-рым требует успеха в сопоставлении с A, а затем — успеха в сопоставлении остатка субъекта с образцом B. Альтернация $A|B$ образцов A и B создает образец, сопоставление с к-рым успешно при сопоставимости либо с A, либо с B. Если A — образец и X — переменная, то конструкция A, X означает образец, успешное сопоставление с к-рым сохраняет в качестве значения X ту контрольную строку, вхождение к-рой в субъект привело к успеху.

Инструкция сопоставления с образцом имеет вид VA, где V — переменная-субъект и A — образец. Условная передача управления изображается инструкцией $VA : F(M1)S(M2)$, где $M1$ и $M2$ — метки перехода в случае неудачи и удачи сопоставления соответственно. Инструкция замещения имеет вид $VA=E$, где E — строковое выражение, значение к-рого при успешном сопоставлении замещает в V выделенную подстроку.

С. имеет развитую библиотеку примитивных функций, к-рые в сочетании с операциями конкатенации и альтернации позволяют создать емкие образцы и компактно записывать в виде инструкции замещения весьма сложные правила анализа и преобразования строк. Программы на С. обрабатываются программирующим процессором интерпретационного типа. Программа транслируется в промежуточную форму, к-рая исполняется с помощью интерпретатора. С. реализован для всех главных архитектур современных ЭВМ. Реализация этого языка содействовала разработке эффективных алгоритмов манипулирования в памяти ЭВМ строками переменной длины.

Лит.: [1] Farber D. J., Griswold R. E., Polonsky I. P., «J. Assoc. Comput. Mach.», 1964, v. 11, № 1, p. 21—30; [2] Griswold R. E., String and list processing in SNOBOL 4. Techniques and applications, Englewood Cliffs (N. Y.), 1975; [3] Грисуолд Р., Поуджд Ж., Полонски И., Язык программирования СНОБОЛ-4, пер. с англ., М., 1980.

А. П. Ершов.

СОБОЛЕВА КЛАСС функций — другое название *Соболева пространства*.

СОБОЛЕВА ОБОБЩЕННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — локально суммируемая обобщенная производная от локально суммируемой функции (см. *Обобщенная функция*).

Подробнее, если Ω есть открытое множество в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ и $F(x)$ и $f(x)$ — заданные на Ω локально суммируемые функции, то $f(x)$ есть обобщенная частная производная по x_j по Соболеву от функции $F(x)$ на Ω:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = f(x),\ x \in \Omega,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

если выполняется равенство

$$\int_\Omega F(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega f(x) \varphi(x) dx$$

для любых бесконечно дифференцируемых финитных в

Ω функций $\varphi(x)$; эта производная — С. о. п.— определена только почти всюду на Ω.

Другое эквивалентное определение С. о. п.: пусть локально суммируемую на Ω функцию $F(x)$ можно видоизменить на множестве n-мерной меры нуль так, что она будет локально абсолютно непрерывной по x_j для почти всех в смысле $(n-1)$-мерной меры точек $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. Тогда функция F будет иметь обычную частную производную x_j почти для всех $x \in \Omega$. Если она локально суммируема, то она и наз. С. о. п.

Третье эквивалентное определение С. о. п.: пусть для определенных на Ω функций $F(x)$ и $f(x)$ можно подобрать последовательность непрерывно дифференцируемых на Ω функций $\{F_k(x)\}$ таких, что для любой области ω, замыкание к-рой принадлежит Ω, имеет место

$$\int_\omega |F_n(x) - F(x)|\,dx \longrightarrow 0,$$

$$\int_\omega \left| \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_j} - f(x) \right| dx \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty;$$

тогда $f(x)$ есть С. о. п. от $F(x)$ на Ω.

По индукции определяются С. о. п. на Ω от F (если они существуют) более высокого порядка:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \quad \ldots$$

Они не зависят от порядка дифференцирования, напр.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$$

почти всюду на Ω.

Лит.: [1] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, [2 изд.], Новосиб., 1962; [2] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975.

С. М. Никольский.

СОБОЛЕВА ПРОСТРАНСТВО — пространство $W_p^l(\Omega)$ функций $f = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, определенных на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (обычно открытом) и интегрируемых с p-й степенью их модуля вместе со своими *обобщенными производными* до порядка l включительно ($1 \leqslant p \leqslant \infty$).

Норма функции $f \in W_p^l(\Omega)$ определяется при помощи равенства

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} = \sum_{|k| \leqslant l} \|f^{(k)}\|_{L_p(\Omega)}. \qquad (1)$$

Здесь

$$f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \quad f^{(0)} = f,$$

есть обобщенная частная производная от f порядка $|k| = \sum_{j=1}^n k_j$ и норма

$$\|\psi\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\psi(x)|^p\,dx \right)^{1/p} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

При $p = \infty$ эта норма равна существенному максимуму:

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \operatorname{vrai} |\psi(x)| \quad (p = \infty),$$

т. е. нижней грани чисел A, для к-рых неравенство $A < |\psi(x)|$ имеет место на множестве меры нуль.

Пространство Соболева $W_p^l(\Omega)$ определено и впервые применено в теории краевых задач математич. физики в [1], [2].

Благодаря тому что в определении С. п. участвуют не обычные, а обобщенные производные, оно является полным, т. е. банаховым пространством.

Наряду с $W_p^l(\Omega)$ рассматривается его линейное подпространство, обозначенное $W_{pc}^l(\Omega)$ и состоящее из

функций, имеющих равномерно непрерывные на Ω частные производные l-го порядка. Подпространство $W^l_{pc}(\Omega)$ имеет преимущества перед $W^l_p(\Omega)$, однако оно не замкнуто в метрике $W^l_p(\Omega)$ и само по себе не является полным пространством, но для широкого класса областей (с липшицевой границей, см. ниже) при $1 \leqslant p < \infty$ пространство $W^l_{pc}(\Omega)$ плотно в $W^l_p(\Omega)$, т. е. для таких областей пространство $W^l_p(\Omega)$, кроме полноты, приобретает новое свойство, заключающееся в том, что каждая принадлежащая к нему функция может быть как угодно хорошо приближена в метрике $W^l_p(\Omega)$ функциями из $W^l_{pc}(\Omega)$.

Выражение (1) для нормы функции $f \in W^l_p(\Omega)$ удобно заменить на следующее выражение:

$$\|f\|'_{W^l_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|k| \leqslant l} |f^{(k)}(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \quad (1 \leqslant p < \infty). \tag{1'}$$

Норма (1′) эквивалентна норме (1) (т. е. $c_1\|f\| \leqslant \|f\|' \leqslant c_2\|f\|$, где c_1, $c_2 > 0$ не зависят от f). При $p=2$ норма (1′) гильбертова, и это широко используется в приложениях.

Граница Γ ограниченной области Ω наз. л и п ш и ц е в о й, если, какова бы ни была точка $x^0 \in \Gamma$, найдется прямоугольная система координат $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ с началом в этой точке и прямоугольник

$$\Delta = \{\xi : |\xi_j| < \delta, \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad |\xi_n| < \delta\}$$

такой, что пересечение $\Gamma\Delta$ описывается функцией $\xi_n = \psi(\xi')$,

$$\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in \Delta' = \{\xi' : |\xi_j| < \delta, \ j = 1, \ldots, n-1\},$$

удовлетворяющей на Δ' (проекции Δ на плоскость $\xi_n = 0$) условию Липшица

$$|\psi(\xi'_1) - \psi(\xi'_2)| \leqslant M |\xi'_1 - \xi'_2|, \quad \xi'_1, \ \xi'_2 \in \Delta',$$

где константа M не зависит от указанных точек ξ'_1, ξ'_2 и $|\xi|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2$. Гладкие и многие кусочно гладкие границы охватываются понятием липшицевой границы.

Для области с липшицевой границей норма (1) эквивалентна следующей:

$$\|f\|_{W^l_p(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|'_{w^l_p(\Omega)},$$

где полунорма

$$\|f\|'_{w^l_p(\Omega)} = \sum_{|k|=l} \|f^{(k)}\|_{L_p(\Omega)}.$$

Можно рассматривать более общие анизотропные пространства (классы) $W^l_p(\Omega)$, где $l = (l_1, \ldots, l_n)$ — положительный вектор (см. *Вложения теоремы*). Для каждого такого вектора l эффективно и в известной мере исчерпывающе определяется класс областей $\mathfrak{M}^{(l)}$, обладающих тем свойством, что если $\Omega \subset \mathfrak{M}^{(l)}$, то любую функцию $f \in W^l_p(\Omega)$ можно продолжить на $\mathbb{R}^n$ с сохранением класса. Точнее, можно определить на $\mathbb{R}^n$ функцию $\overline{f}(x)$ со свойствами

$$\overline{f}(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \ \|\overline{f}\|_{W^l_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|f\|_{W^l_p(\Omega)},$$

где c не зависит от f (см. [3]).

Благодаря этому свойству неравенства типа теорем вложения для функций $f \in W^l_p(\mathbb{R}^n)$ автоматически переносятся на функции $f \in W^l_p(\Omega)$, $\Omega \in \mathfrak{M}^{(l)}$.

Для векторов вида $l = (l_1, \ldots, l_n)$ области $\Omega \in \mathfrak{M}^{(l)}$ имеют липшицевы границы. Для них $W^l_p(\Omega) = W^l_p(\Omega)$.

Исследование пространств (классов) $W^l_p(\Omega)$ ($\Omega \in \mathfrak{M}^{(l)}$) ведется на основе специальных интегральных пред-

ставлений функций, принадлежащих этим классам. Первое такое представление получено (см. [1], [2]) для изотропного пространства $W_p^l(\Omega)$ области Ω, звездной относительно нек-рого шара. Дальнейшее развитие этого метода см., напр., в [3].

Классы W_p^l и W_p^l получили обобщение на случай дробных чисел или векторов $l=(l_1,\ldots,l_n)$ с дробными компонентами l_j.

Пространство $W_p^l(\Omega)$ рассматривают и для отрицательных целых l. Элементами его являются, вообще говоря, *обобщенные функции* f, т. е. линейные функционалы (f, φ) над финитными в Ω бесконечно дифференцируемыми функциями φ.

По определению, обобщенная функция f принадлежит классу $W_p^{-l}(\Omega)$ при натуральном $l=1, 2, 3,\ldots$, если конечна верхняя грань:

$$\|f\|_{W_p^{-l}(\Omega)}=\sup(f,\varphi),$$

распространенная на указанные функции φ с нормой в метрике $W_q^l(\Omega)$, не превышающей единицу ($1/p+1/q=1$). Можно еще сказать, что функции $f\in W_p^{-l}(\Omega)$, $l=1, 2,\ldots$, образуют пространство, сопряженное к банахову пространству $W_q^l(\Omega)$.

Лит.: [1] Соболев С. Л., «Матем. сб.», 1938, т. 4, с. 471—97; [2] его же, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, [2 изд.], Новосиб., 1962; [3] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М., Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., 1974; [4] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969.

С. М. Никольский.

СОБСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ — собственный вектор оператора, действующего в функциональном пространстве.

В. С. Шульман.

СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ оператора (преобразования) A векторного пространства L над полем k — элемент $\lambda\in k$ такой, что существует ненулевой вектор $x\in L$, удовлетворяющий условию

$$Ax=\lambda x.$$

Вектор x в этом равенстве наз. *собственным вектором* оператора A, принадлежащим С. з. λ. В случае, когда оператор A линеен, С. з.— это такой элемент $\lambda\in k$, что оператор $A-\lambda I$ (где I — тождественный оператор) не инъективен. Если пространство L конечномерно, то С. з. совпадают с корнями *характеристического многочлена* $\det\|A-\lambda E\|$ (из поля k), где A — матрица линейного преобразования A в нек-ром базисе, а E — единичная матрица. Кратность С. з. как корня этого многочлена наз. алгебраической кратностью. Для любого линейного преобразования конечномерного пространства над алгебраически замкнутым полем k множество С. з. непусто. Оба условия — конечномерность и алгебраич. замкнутость — существенны. Напр., поворот евклидовой плоскости ($k=\mathbb{R}$) на любой угол, не кратный π, не имеет С. з. С другой стороны, для оператора в гильбертовом пространстве, сопряженного сдвигу, каждое число из открытого единичного круга — С. з.

Совокупность всех С. з. линейного преобразования конечномерного пространства наз. спектром линейного преобразования. Линейное преобразование n-мерного пространства диагонализируемо (т. е. существует базис, в котором матрица преобразования диагональна) тогда и только тогда, когда алгебраическая кратность каждого С. з. равна его геометрической кратности — размерности собственного подпространства (см. *Собственный вектор*), соответствующего данному С. з. В частности, для диагонализируемости линейного преобразования достаточно, чтобы оно имело n различных С. з.

Собственное значение квадратной матрицы A над полем k (или характеристический корень) — корень ее характеристического многочлена.

Лит. см. при статьях *Линейное преобразование, Матрица.*

Т. С. Пиголкина, В. С. Шульман.

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ; численные методы нахождения — методы вычисления собственных значений и соответствующих собственных функций дифференциальных операторов. Колебания упругих ограниченных тел описываются уравнением

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = L\varphi, \tag{1}$$

где $L\varphi$ — нек-рое дифференциальное выражение. Если решение уравнения (1) искать в виде

$$\varphi = T(t)\,u(x),$$

то относительно функции u получается уравнение

$$L(u) + \lambda u = 0 \tag{2}$$

внутри ограниченной области при нек-рых однородных условиях на ее границе. Значения параметра λ, при к-рых существуют отличные от тождественного нуля решения уравнения (2), удовлетворяющие однородным краевым условиям, наз. собственными значениями (числами), а их соответствующие решения — собственными функциями. Возникающая при этом дифференциальная задача на собственные значения состоит в нахождении собственных значений λ и соответствующих им собственных функций.

Численное решение дифференциальной задачи на собственные значения проводится в три этапа:

1) сведение задачи к более простой, напр. к алгебраической (дискретной);

2) выяснение точности дискретной задачи;

3) вычисление собственных значений дискретной задачи (см. *Линейная алгебра*; численные методы).

Сведение к дискретной задаче. Сведение задачи (2) к ее дискретной модели производится в основном *сеток методом* и *проекционными методами*. При этом естественно требовать, чтобы основные свойства исходной задачи сохранялись в ее дискретном аналоге. В частности, должна сохраняться самосопряженность соответствующих дискретных операторов в пространстве функций дискретного аргумента.

Одним из методов такого сведения является интегро-интерполяционный метод. Напр., пусть поставлена задача

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right) + \lambda u = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{4}$$

Эта задача возникает, напр., при изучении поперечных колебаний неоднородной струны и продольных колебаний неоднородного стержня.

На отрезке $[0, 1]$ вводится разностная сетка $\overline{\omega}$ с узлами $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $h = 1/N$. Каждому узлу x_i, $i = 1, \ldots, N-1$, ставится в соответствие элементарная область $S_i\{x_i - h/2 \leqslant x \leqslant x_i + h/2\}$. Интегрирование по областям S_i уравнения (3) приводит к выражению

$$\left.\begin{aligned} \frac{w_{i-1/2} - w_{i+1/2}}{h} &= \lambda\frac{1}{h}\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} u\,dx, \\ w_{i\pm1/2} &= \left(\frac{1}{p}\frac{du}{dx}\right)_{x=x_i\pm h/2}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Пусть

$$u = \text{const} = u_i, \quad x_i - h/2 \leqslant x \leqslant x_i + h/2,$$

$$w = \text{const} = w_{i-1/2}, \quad x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i.$$

Тогда

$$w_{i-1/2}=\frac{u_i-u_{i-1}}{ha_i}, \quad a_i=\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,dx. \qquad (6)$$

При подстановке (6) в (5) получается уравнение

$$-\frac{1}{h}\left(\frac{v_{i+1}-v_i}{a_{i+1}h}-\frac{v_i-v_{i-1}}{a_ih}\right)=\lambda^h v_i, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

где v — искомая сеточная функция. Краевые условия $v_0=0$, $v_N=0$ приводят к алгебраич. задаче на собственные значения

$$Av=\lambda^h v, \qquad (7)$$

где A — трехдиагональная симметрич. матрица порядка $n=N-1$ (см. [10]).

Вариационно-разностный метод сведения к дискретной задаче используется, когда задача на собственные значения может быть сформулирована как вариационная. Напр., собственные значения задачи (3), (4) являются стационарными значениями функционала

$$\frac{D[u]}{H[u]}, \quad D[u]=\int_0^1 \frac{1}{p(x)}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx; \quad H[u]=\int_0^1 u^2\,dx.$$

При замене интегралов квадратурными суммами, а производных — разностными отношениями, дискретный аналог функционала имеет вид

$$\frac{D^h[v]}{H^h[v]}, \quad D^h[v]=\sum_{i=1}^N \frac{1}{a_i}\left(\frac{v_i-v_{i-1}}{h}\right)^2 h;$$

$$H^h[v]=\sum_{i=0}^N v_i^2 h,$$

где a_i — разностный аналог коэффициента $p(x)$, к-рый может быть вычислен по формуле (6). Дискретный аналог задачи (3), (4) получается из необходимого условия экстремума

$$\frac{\partial}{\partial v_i}\left(D^h[v]-\lambda^h H^h[v]\right)=0, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1.$$

Дифференцирование приводит снова к задаче (7) (см. [9]).

Проекционно-разностный метод сведения к дискретной задаче состоит в следующем. Выбирается линейно независимая координатная система функций α_i, $i=1, 2, \ldots, n$, и линейно независимая проекционная система функций β_j, $j=1, 2, \ldots, n$. Приближенные собственные функции ищутся в виде

$$\tilde{u}=\sum_{i=1}^n v_i\alpha_i.$$

Коэффициенты разложения v_i и приближенные собственные значения определяются из условия

$$(L\tilde{u}+\tilde{\lambda}\tilde{u},\ \beta_j)=0, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (8)$$

где $(\ ,\ )$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве. [При совпадении координатной и проекционной систем говорят о методе Бубнова — Галеркина. Если, кроме того, оператор дифференциальной задачи самосопряженный, то метод наз. методом Рэлея — Ритца (см. [4]).] В частности, для задачи (3), (4), если все $\alpha_i=\beta_i$ удовлетворяют (4), условие (8) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n v_i\int_0^1\left(\frac{1}{p(x)}\frac{d\alpha_i}{dx}\frac{d\alpha_j}{dx}-\tilde{\lambda}\alpha_i\alpha_j\right)dx=0,$$
$$j=1,\ \ldots,\ n. \qquad (9)$$

Чтобы упростить получение алгебраич. задачи, систему функций α_i выбирают почти ортогональной.

Взяв в качестве координатной и проекционной систем функции вида

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant x_{i-1}, \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, & x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, \\ 0, & x_{i+1} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

xi=ih из (9) получают

$$\frac{v_i - v_{i-1}}{a_i h} - \frac{v_{i+1} - v_i}{a_{i+1} h} - \lambda^h [(\rho v)_{i-1} + (\rho^* v)_i + (\rho v)_{i+1}] = 0,$$

где

$$a_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p(x)},$$

$$\rho_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha_i \alpha_{i+1}\, dx, \quad \rho_i^* = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \alpha_i^2\, dx.$$

Таким образом, вместе с краевыми условиями получается обобщенная задача на собственные значения:

$$Av = \lambda^h Dv, \quad h = 1/N.$$

Здесь A и D — трехдиагональные симметрич. матрицы порядка $n = N - 1$.

Перечисленными методами получаются дискретные модели в случае и др. уравнений. Напр., для стержня:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(k \frac{d^2u}{dx^2}\right) = \lambda r u;$$

для мембраны:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda r u = 0;$$

для пластины:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(k_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(k_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(k_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \lambda r u.$$

Собственные векторы, соответствующие λ_k, удовлетворяют однородной системе алгебраич. уравнений:

$$(A - \lambda_k E) v_k = 0.$$

Задача нахождения всех собственных значений и собственных векторов матрицы A наз. *полной проблемой* собственных значений. Задача нахождения нескольких собственных значений матрицы A наз. *частичной проблемой* собственных значений. В случае алгебраич. систем, соответствующих рассматриваемой задаче, наиболее часто возникает частичная проблема собственных значений. Применение традиционных методов ее решения требует весьма значительного объема вычислений ввиду плохой разделенности собственных значений матрицы A. В этом случае наиболее эффективны модифицированные градиентные методы с использованием спектрально эквивалентных операторов (см. [16]) и многосеточные методы (см. [17]).

Лит.: [1] Бублик Б. Н., Численное решение задач динамики пластин и оболочек, К., 1969; [2] Воеводин В. В., Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы, М., 1966; [3] Гулд С., Вариационные методы в задачах о собственных значениях, пер. с англ., М., 1970; [4] Коллатц Л., Задачи на собственные значения, пер. с нем., М., 1968; [5] Прикасчиков В. Г., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1965, т. 5, № 4, с. 648—57; [6] его же, там же, 1969, т. 9, № 2, с. 315—336; [7] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [8] Самокиш Б. А., «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1958, № 5(6), с. 105—21; [9] Саульев В. К., «Вычисл. математика», 1957, № 1, с. 87—115; [10] Тихонов А. Н., Самарский А. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1961, т. 1, № 5, с. 784—805; [11] Уилкинсон Дж., Алгебраическая проблема собственных значений,

пер. с англ., М., 1970; [12] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.— Л., 1963; [13] Хао Шоу, «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1963, т. 3, № 6, с. 1014—31; [14] Стренг Г., Фикс Дж., *Теория метода конечных элементов*, пер. с англ., М., 1977; [15] Сьярле Ф., Метод конечных элементов для эллиптических задач, пер. с англ., М., 1980; [16] Дьяконов Е. Г., Орехов М. Ю., «Матем. заметки», 1980, т. 27, № 5, с. 795—812; [17] Hackbusch W., «SIAM. J. Numer. Analysis», 1979, v. 16, № 2, p. 201—15.

В. Г. Приказчиков.

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, численные методы нахождения — методы вычисления полного спектра интегрального оператора или его части (чаще всего ставится задача отыскания одного — двух минимальных или максимальных по модулю собственных значений).

Сопутствующей задачей часто бывает задача приближенного численного нахождения собственных или, более общо, корневых функций данного интегрального оператора, соответствующих искомым собственным значениям. Наибольшее значение имеет задача нахождения собственных значений (и функций) линейного интегрального оператора Фредгольма.

Численные методы нахождения собственных значений интегральных операторов Фредгольма. Задача о собственных значениях и собственных функциях интегрального оператора Фредгольма заключается в нахождении таких комплексных чисел λ, для к-рых существует нетривиальное (в данном функциональном классе) решение интегрального уравнения

$$\lambda A\varphi = \lambda \int_D K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds = \varphi(x). \qquad (1)$$

В уравнении (1) $K(x,\ s)$ — функция (или матрица-функция) двух групп переменных x и s такая, что интегральный оператор с ядром K — фредгольмов в рассматриваемом функциональном классе; D — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$. Функциональным классом может быть пространство $C(D)$ непрерывных функций на D, или $L_2(D)$ — квадратично интегрируемых функций на D, или другие функциональные пространства.

Основным приближенным способом решения задачи на собственные значения (1) является следующий. Выбирается нек-рая аппроксимация интегрального оператора в правой части (1) (см. *Фредгольма уравнение*; численные методы), напр., интеграл заменяется квадратурной формулой:

$$\int_D K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds \approx \sum_{i=1}^{N} a_i^{(N)}\,K(x,\ s_i)\,\varphi(s_i) = \tilde{A}\varphi, \qquad (2)$$

где s_i — узлы квадратурной формулы, $a_i^{(N)}$ — ее веса (см. [3] — [5]).

Вместо задачи (1) рассматривается задача на нахождение собственных значений и соответствующих корневых многообразий нек-рой матрицы, естественным образом связанной с аппроксимацией (2). Именно,

$$\lambda \sum_{i=1}^{N} a_i^{(N)}\,K(s_j,\ s_i)\,\tilde{\varphi}(s_i) = \tilde{\varphi}(s_j), \quad j = 1,\ \ldots,\ N. \qquad (3)$$

Для решения задачи (3) можно воспользоваться любыми методами нахождения собственных значений и векторов (более общо — корневых многообразий), разработанных в линейной алгебре (см. *Линейная алгебра*; численные методы). Найденные собственные значения и векторы алгебраич. задачи (3) будут близки к нек-рым собственным значениям и элементам основной задачи (1), если в определенном смысле близки операторы A и $\tilde{A}$. Вместо (2) можно использовать и иные аппроксимации интегрального оператора. Основная задача (1) при этом редуцируется к алгебраич. задаче, аналогичной задаче (3). Исследование близости решений задач (1) и (3) проводится методами функционального анализа в рамках общей теории приближенных методов.

При этом задача на собственные значения (1) интерпретируется как задача нахождения собственных значений нек-рого вполне непрерывного оператора A, действующего в банаховом пространстве Φ:

$$\lambda A\varphi = \varphi. \tag{4}$$

Задача (3) интерпретируется как задача на собственные значения оператора $\tilde{A}$, близкого к A, но действующего, вообще говоря, в другом пространстве $\tilde{\Phi}$ (связанном с Φ):

$$\lambda \tilde{A}\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}. \tag{5}$$

В общей теории приближенных методов доказываются различные теоремы о близости решений задач (4) и (5). В качестве примера подобных утверждений можно привести следующее. Пусть A_n — последовательность операторов действующих в Φ и

$$\lim_{n\to\infty} \| A_n - A \| = 0.$$

Тогда

$$\overline{\bigcup_n \sigma(A_n)} \supseteq \sigma(A),$$

где $\sigma(\cdot)$ — спектр соответствующих операторов. В этом случае каждое $\tilde{\Phi}$ совпадает с Φ.

Большинство общих оценок близости собственных значений и элементов приближенной задачи (5) к собственным значениям (элементам) в задаче (4) не являются эффективными: эти оценки содержат постоянные, значения к-рых обычно не известны. Для контроля точности в таком случае можно использовать последовательность приближенных собственных значений (элементов), приближающуюся к искомому собственному значению (элементу) в (1) [или (4)]. Такую последовательность целесообразно строить, не используя непосредственно последовательность задач типа (5) с последовательно уточняющимся оператором $\tilde{A}$, т. к. этот путь приводит к весьма громоздким вычислениям. Вместо этого можно применять различные алгоритмы уточнения (напр., основанные на теории возмущений).

Обобщенные задачи о собственных значениях. В приложениях исследуются и более общие, чем (4) задачи о нахождении критич. параметров типа собственных значений. В абстрактной форме подобные задачи могут быть сформулированы следующим образом.

Требуется найти, при каких значениях параметра λ уравнение

$$A(\lambda, \varphi) = \varphi \tag{6}$$

имеет более одного решения относительно φ (A — некоторый нелинейный интегральный оператор в банаховом пространстве Φ, зависящий от комплексного параметра λ).

В задаче (6) могут быть дополнительные ограничения на $\|\varphi\|$ и на λ (напр., ищутся только такие λ, к-рые удовлетворяют условию $|\lambda| \leqslant R$, R задано и $\|\varphi\| \leqslant R$).

С задачей (6) тесно связаны различные задачи о точках бифуркации в нелинейных интегральных уравнениях. Представляет интерес задача (6), в к-рой оператор $A(\lambda, \varphi)$ линеен относительно φ, но параметр λ входит не мультипликативно. Общая задача о точках бифуркации может быть редуцирована к такой форме. Кроме того, задача об отыскании собственных значений линейного оператора (1), лежащих в круге $|\lambda| \leqslant R$, R — фиксирована, сводится к более общей задаче (6), в к-рой однако линейный по φ оператор $A(\lambda, \varphi)$ имеет конечномерную область значений. Действительно, пусть $\hat{A}$ — интегральный оператор с вырожденным ядром, по норме близкий к A, причем $\|\hat{A} - A\| \leqslant \delta$. Соотношение (1), определяющее собственные значения, может быть записано в виде:

$$[E + \lambda(\hat{A} - A)]\varphi = \lambda \hat{A}\varphi.$$

Если $|\lambda|<1/\delta$, то оператор $E+\lambda(\hat{A}-A)$ обратим; собственные значения λ, удовлетворяющие неравенству $|\lambda|<1/\delta$ могут быть найдены из соотношения

$$Z=\lambda\hat{A}(E+\lambda(\hat{A}-A))^{-1}Z, \qquad (7)$$

где $Z=[E+\lambda(\hat{A}-A)]\varphi$. Уравнение (7) эквивалентно (относительно Z) нек-рой системе линейных алгебраич. уравнений. Приравнивание к нулю ее определителя дает уравнение, корни к-рого являются собственными значениями интегрального оператора (1). Это рассуждение справедливо вообще для произвольного вполне непрерывного оператора A в банаховом пространстве Ф, если этот оператор допускает аппроксимацию по норме операторами с конечномерной областью значений. Конструкция (7) может быть использована для уточнения приближенно найденного собственного значения (и собственной функции).

Общая задача (6) может быть приближенно (аппроксимацией оператора A) сведена к конечномерной задаче типа (6). В случае более сложных задач рассматриваемого типа для отыскания собственных значений используется метод Монте-Карло (см. [7]).

Лит.: [1] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.— Л., 1962; [2] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [3] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962; [4] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы, т. 2, М., 1977; [5] Мысовских И. П., «Методы вычислений», 1973, в. 8, с. 3—10; [6] Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд., М., 1981; [7] Владимиров В. С., Соболь И. М., «Вычислительная математика», 1958, № 3, с. 130—37.

А. Б. Бахушинский.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ, свободные колебания,— колебания, совершающиеся в динамич. системе при отсутствии внешнего воздействия при сообщении ей в начальный момент внешнего возмущения, выводящего систему из состояния равновесия. Характер С. к. в основном определяется внутренними силами, обусловленными физич. строением системы. Энергия, необходимая для движения, поступает в систему от внешнего воздействия в начальный момент движения.

Примером С. к. могут служить малые колебания консервативной системы с n степенями свободы около устойчивого состояния равновесия. Уравнения движения имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{si}\ddot{q}_i+c_{si}q_i)=0, \quad s=1, \ldots, n, \qquad (1)$$

где q_i — обобщенные координаты, a_{si}, c_{si} — постоянные коэффициенты. Общее решение системы (1) состоит из суммы n гармонич. колебаний:

$$q_i=\sum_{j=1}^{n}A_j\Delta_i(k_j^2)\sin(k_jt+\beta_j), \quad i=1, \ldots, n,$$

где A_j, β_j — постоянные интегрирования, k_j — собственные частоты — корни уравнения частот

$$\begin{vmatrix} c_{11}-a_{11}k^2 & \ldots & c_{1n}-a_{1n}k^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1}-a_{n1}k^2 & \ldots & c_{nn}-a_{nn}k^2 \end{vmatrix}=0 \qquad (2)$$

(предполагается, что нет нулевых и кратных частот), $\Delta_i(k_j^2)$ — минор, соответствующий i-му столбцу и последней строке определителя (2). Величины $A_j\Delta_i(k_j^2)$, $k_jt+\beta_j$, β_j — соответственно амплитуда, фаза и начальная фаза j-гармоники. Из рассмотренного примера следует: гармонич. колебания одной и той же частоты для всех координат происходят в фазе или противофазе; распределение амплитуд колебаний данной собственной частоты по координатам определяется физич. устройством системы.

Лит.: [1] Бабаков И. М., Теория колебания, 2 изд., М., 1965; [2] Бутенин Н. В., Теория колебаний, М., 1963; [3] Стрелков С. П., Введение в теорию колебаний, 2 изд.,

М., 1964; [4] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959.

Н. В. Бутенин.

СОБСТВЕННЫЙ ВЕКТОР оператора A, действующего в векторном пространстве L над полем k — ненулевой вектор $x \in L$, к-рый переводится данным оператором в пропорциональный ему вектор, т. е.

$$Ax = \lambda x, \quad \lambda \in k.$$

Коэффициент $\lambda \in k$ наз. *собственным значением* оператора A.

Если оператор A линеен, то множество L_λ всех С. в., отвечающих собственному значению λ вместе с нулевым вектором, является линейным подпространством. Оно наз. собственным подпространством оператора A, отвечающим собственному значению λ, и совпадает с ядром $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ оператора $A-\lambda I$ (т. е. с множеством векторов, переводимых этим оператором в 0). Если L — топологич. векторное пространство и A — непрерывный оператор, то L_λ замкнуто для любого λ. Вообще говоря, собственное подпространство не обязано быть конечномерным, но если A вполне непрерывен (компактен), то L_λ конечномерно для любого ненулевого λ.

В сущности, наличие С. в. у операторов в бесконечномерных пространствах — явление довольно редкое, хотя важные для приложений операторы специальных классов (интегральные, дифференциальные и т. п.) часто обладают обширными наборами С. в.

Обобщением понятий С. в. и собственного подпространства являются понятия *корневого вектора* и корневого подпространства. У нормальных (в частности, самосопряженных или унитарных) операторов все корневые векторы являются собственными, и собственные подпространства, отвечающие различным С. в., взаимно ортогональны.

Лит.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977.

Т. С. Пиголкина, В. С. Шульман.

СОБСТВЕННЫЙ МОРФИЗМ — морфизм схем, отделимый, универсально замкнутый и имеющий конечный тип. Морфизм схем $f: X \to Y$ наз. замкнутым, если для любого замкнутого $Z \subset X$ множество $f(Z)$ замкнуто в Y, и универсально замкнутым, если для любой замены базы $Y' \to Y$ замкнут морфизм $X \times_Y Y' \to Y'$. Свойство быть С. м. сохраняется при композиции морфизмов, замене базы и для декартова произведения морфизмов. С. м. близки к проективным морфизмам: любой проективный морфизм собственный, собственный и квазипроективный морфизм проективен. Любой С. м. доминируется проективным (лемма Чжоу). См. также *Полное алгебраическое многообразие*, *Проективная схема*.

С. м. обладают рядом хороших когомологич. свойств. 1) Если морфизм $f: X \to Y$ собственный и F — когерентный пучок O_X-модулей, то для любого $q \geqslant 0$ пучки O_Y-модулей $R^q f_*(F)$ когерентны (теорема конечности). Аналогичный факт имеет место и для этальных когомологий. В частности, если X — полная схема над полем k, то пространства когомологий $H^q(X, F)$ конечномерны. 2) Для любой точки $y \in Y$ пополнение $O_{Y,y}$-модуля $R^q f_*(F)_y$ совпадает с

$$\varprojlim_n H^q(f^{-1}(y),\ F/J^{n+1}F),$$

где J — идеал подсхемы $f^{-1}(y)$ в X (теорема о сравнении). 3) Если X — собственная схема над полным локальным кольцом A, то категории когерентных пучков на X и на ее формальном пополнении $\hat{X}$ эквивалентны (теорема алгебраизуемости). Существуют аналитич. аналоги первого и третье-

го свойств. Напр. (см. [3]): для полной $\mathbb{C}$-схемы X любой аналитический когерентный пучок на $X(\mathbb{C})$ алгебраизуем и

$$H^q(X, F) = H^q(X(\mathbb{C}), F^{\text{ан}}).$$

4) Пусть $f: X \to Y$ — С. м., F — пучок конечных абелевых групп в этальной топологии X, ξ — геометрич. точка схемы Y; тогда слой пучка $R^q f_*(F)$ в точке ξ изоморфен $H^q(f^{-1}(\xi), F|_{f^{-1}\xi})$ (теорема о замене базы, см. [2]).

Лит.: [1] Grothendieck A., Dieudonné J., Eléments de géométrie algébrique, t. 2—3, P., 1961—63; [2] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, t. 1—3*, B. — [a. o.], 1972—73; [3] Revêtements étales et groupe fondamental, B. — [a. o.], 1971; [4] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981.

В. И. Данилов.

СОВЕРШЕННАЯ ГРУППА — группа G такая, что ее *центр* есть единичная подгруппа (т. е. G — т. н. группа без центра) и любой ее автоморфизм является внутренним (см. *Внутренний автоморфизм*). Группа автоморфизмов С. г. G изоморфна самой группе G (с чем и связан термин «совершенная»). Примерами С. г. являются *симметрические группы* S_n при $n \neq 2, 6$. Если нек-рая группа T содержит нормальный делитель, являющийся С. г., то T разлагается в прямое произведение нек-рых своих подгрупп $T = B \times K$ такое, что K — централизатор B в T.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982; [2] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

Н. Н. Вильямс.

СОВЕРШЕННАЯ МЕРА — понятие, введенное Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоровым в [1] с целью «достижения полной гармонии между абстрактной теорией меры и теорией меры в метрических пространствах». Дальнейшее развитие теории обнаружило другие аспекты ценности этого понятия: с одной стороны, класс С. м. весьма широк, с другой — в рамках С. м. не возможен ряд неприятных технич. осложнений, возможных в общей теории меры.

Конечная мера μ на σ-алгебре S подмножеств множества X наз. совершенной, если для любой действительной измеримой функции f на X и любого множества $E \subset \mathbb{R}$ такого, что $f^{-1}(E) \subset S$

$$\mu(f^{-1}(E)) = \inf \{\mu(f^{-1}(G)) : G \supset E,\ G \in \mathfrak{S}\},$$

где $\mathfrak{S}$ — класс открытых подмножеств $\mathbb{R}$. Для совершенности μ достаточно, чтобы для любой действительной измеримой функции f на X существовало борелевское множество $B \subset \mathbb{R}$ такое, что $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(X)$, и необходимо, чтобы для любой действительной измеримой функции f на X и любого множества $E \subset \mathbb{R}$, для к-рого $f^{-1}(E) \in S$, существовало бы такое борелевское множество $B \subset E$, что

$$\mu(f^{-1}(E)) = \mu(f^{-1}(B)).$$

Всякая дискретная мера совершенна. Мера, заданная на σ-алгебре подмножеств сепарабельного метрич. пространства, содержащей все открытые множества, совершенна тогда и только тогда, когда мера любого измеримого множества есть верхняя грань мер лежащих в нем компактов. Ограничение С. м. μ на любую σ-подалгебру σ-алгебры S совершенно. Мера, индуцированная С. м. μ на всяком подмножестве $X_1 \in S$ с $\mu(X_1) > 0$, совершенна. Образ С. м. μ при измеримом отображении (X, S) в другое измеримое пространство совершенен. Мера совершенна тогда и только тогда, когда совершенно ее пополнение. Для того чтобы всякая мера на любой σ-подалгебре σ-алгебры S подмножеств множества X была совершенна, необходимо и достаточно, чтобы для любой действительной измеримой функции f множество $f(X)$ было абсолютно измеримым (т. е. принадлежало области определения пополнения всякой борелевской меры на $\mathbb{R}$). Если $X \subset \mathbb{R}$ и S есть σ-алгебра борелевских подмножеств X, то всякая мера на S совершенна тогда и только тогда, когда X абсолютно измеримо.

Всякое пространство (X, S, μ) с С. м. такое, что S имеет счетное число образующих $\{S_i\}$, отделяющих точки X (т. е. для любых $x,\ y \in X,\ x \neq y$ найдется

$$i: x \in S_i,\quad y \notin S_i \text{ или } x \notin S_i,\quad y \in S_i),$$

почти изоморфно нек-рому пространству $(L, \mathcal{L}, \lambda)$, образованному мерой Лебега на конечном отрезке и не более, чем счетной последовательностью точек положительной массы (существуют $N \in S$ с $\mu(N)=0$ и взаимнооднозначное отображение φ $X \setminus N$ на L такие, что φ и φ^{-1} измеримы и $\lambda = \mu\varphi^{-1}$).

Пусть I — произвольное множество индексов и каждому $i \in I$ соответствует пространство с С. м. (X_i, S_i, μ_i); $X = \Pi_{i \in I} X_i$, и пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, порожденная классом множеств вида $\{x \in X : x_i \in A \in S_i\}$. Если на $\mathcal{A}$ задана конечно аддитивная мера μ' такая, что $\mu'(\{x \in X : x_i \in A\}) = \mu_i(A)$ для любых $i \in I$ и $A \in S_i$, то: 1) μ' счетно аддитивна на $\mathcal{A}$, 2) продолжение μ меры μ' на σ-алгебру S, порожденную алгеброй $\mathcal{A}$, совершенно.

Пусть (X, S, P) — пространство с совершенной вероятностной мерой и S_1, S_2 — две σ-подалгебры σ-алгебры S, причем S_1 имеет счетное число образующих. Тогда существует регулярная условная вероятность на S_1 при условии S_2, т. е. существует функция $p(\cdot, \cdot)$ на $X \times S_1$ такая, что: 1) при фиксированном x $p(x, \cdot)$ есть вероятностная мера на S_1; 2) при фиксированном E $p(\cdot, E)$ измерима относительно S_2; 3) $\int_F p(x, E) P(dx) = P(E \cap F)$ для всех $E \in S_1$ и $F \in S_2$. Более того, функцию $p(\cdot, \cdot)$ можно выбрать так, что меры $p(x, \cdot)$ будут совершенными. Пусть (X, S), $(Y, \mathcal{T})$ — два измеримых пространства и $q(\cdot, \cdot)$ — переходная вероятность на $X \times \mathcal{T}$, т. е. $q(\cdot, E)$ измерима относительно S и $q(x, \cdot)$ есть вероятностная мера на $\mathcal{T}$ для любых $x \in X$, $E \in \mathcal{T}$. Если $q(x, \cdot)$ дискретны и P — совершенная вероятностная мера на S, то мера $\int q(x, \cdot) P(dx)$ совершенна.

С. м. тесно связаны с компактными мерами. Класс подмножеств $\mathcal{K}$ наз. компактным, если $K_i \in \mathcal{K}$, $i = 1, 2, \ldots$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \phi$ влечет $\bigcap_{i=1}^{n} K_i = \phi$ для нек-рого n. Конечная мера μ на (X, S) наз. компактной, если существует компактный класс $\mathcal{K}$ такой, что для любых $\varepsilon > 0$ и $E \in S$ можно выбрать $K \in \mathcal{K}$ и $E_1 \in S$ так, чтобы $E_1 \subset K \subset E$ и $\mu(E \setminus E_1) < \varepsilon$. Всякая компактная мера совершенна. Для того чтобы мера была совершенной, необходимо и достаточно, чтобы ее ограничение на любую σ-подалгебру со счетным числом образующих было компактным.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [2] Marczewski E., «Fundam. math.», 1953, v. 40, p. 113—24; [3] Ryll-Nardzewski C., там же, p. 125—30; [4] Сазонов В. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, с. 391—414; [5] Ramachandran D., Perfect measures, pt 1— Basic theory, pt 2— Special topics, Delhi, 1979 (ISI lecture notes, № 5, 7). *В. В. Сазонов.*

СОВЕРШЕННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА — совершенная дизъюнктивная или совершенная конъюнктивная нормальная форма (см. *Булевых функций нормальные формы*).

СОВЕРШЕННО НОРМАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО — *нормальное пространство*, каждое замкнутое подмножество к-рого имеет тип G_δ.

СОВЕРШЕННОЕ БИКОМПАКТНОЕ РАСШИРЕНИЕ — расширение Y *вполне регулярного пространства* X такое, что замыкание в Y границы любого открытого множества $U \subset X$ служит границей $O(U)$, где $O(U)$ — максимально открытое в Y множество, для к-рого $O(U) \cap X = U$. Эквивалентные требования: а) $O(U \cup V) = O(U) \cup O(V)$ для любой пары непересекающихся открытых множеств U, V; б) если замкнутое множество F разбивает X на открытые множества U и V, то замы-

кание F в Y разбивает Y на $O(U)$ и $O(V)$; в) ни в одной из своих точек $Y \setminus X$ не разбивает Y локально. С. б. р. характеризуется также как монотонный образ *Стоуна — Чеха бикомпактного расширения* βX, причем βX в том и только в том случае является единственным С. б. р. X, когда $X = A \cup M$, где A — бикомпакт, а $\dim M = 0$. Локальная связность X влечет локальную связность любого совершенного расширения Y с 1-й аксиомой счетности (а также расширений, предшествующих Y). Среди всех С. б. р. X минимальное С. б. р. μX существует тогда и только тогда, когда у X имеется хотя бы одно расширение с пунктиформным *наростом*. Нарост в μX пунктиформен, причем μX является при этом максимальным среди всех расширений с пунктиформными наростами. Всякий гомеоморфизм X распространяется до гомеоморфизма μX, а всякое совершенное отображение X на X' продолжается до отображения μX на $\mu X''$ (при условии, что $\mu X'$ существует).

М. И. Войцеховский.

СОВЕРШЕННОЕ КОЛЬЦО л е в о е — ассоциативное кольцо, каждый левый модуль над к-рым обладает проективным накрытием. П р а в о е с о в е р ш е н н о е к о л ь ц о определяется аналогично. Левое С. к. может и не быть правым С. к.

Эквивалентны следующие свойства кольца R: (1) R — левое С. к.; (2) каждое множество попарно ортогональных идемпотентов кольца R конечно и каждый ненулевой правый R-модуль имеет ненулевой цоколь; (3) R удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов; (4) R удовлетворяет условию минимальности для конечно порожденных правых идеалов; (5) каждый правый R-модуль удовлетворяет условию минимальности для конечно порожденных подмодулей; (6) радикал Джекобсона J кольца R исчезает справа (т. е. для любой последовательности $a_1, a_2, \ldots$ элементов из J найдется такой номер n, что произведение $a_1 \ldots a_n = 0$) и факторкольцо R/J классически полупросто; (7) каждый плоский левый R-модуль проективен; (8) R содержит такие идемпотенты $e_1, \ldots, e_n$, что $\sum e_i = 1$, $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$ и $e_i R e_i$ — локальное кольцо для каждого i; (9) каждый левый R-модуль удовлетворяет условию максимальности для циклич. подмодулей; (10) для каждого n каждый левый R-модуль удовлетворяет условию максимальности для n-порожденных подмодулей; (11) каждый проективный левый R-модуль допускает разложение, относительно к-рого дополняемы все прямые слагаемые (см. *Крулля — Ремака — Шмидта теорема*).

Кольцо матриц над С. к. является С. к. Идемпотентные идеалы С. к. порождаются идемпотентами, центральными по модулю радикала. Групповое кольцо RG является С. к. тогда и только тогда, когда R — С. к., а группа G конечна. Кольцо всех эндоморфизмов абелевой группы A оказывается С. к. в том и только в том случае, когда A разлагается в прямую сумму конечной группы и конечного числа экземпляров аддитивной группы рациональных чисел. Локальные С. к. характеризуются возможностью дополнения до базы каждой линейно независимой подсистемы любого свободного левого модуля. Эквивалентны также следующие свойства: (1) R — С. к. и все его факторкольца самоинъективны; (2) все факторкольца кольца R квазифробениусовы; (3) все факторкольца кольца R кообразующие; (4) R — однорядное кольцо.

Лит.: [1] К а ш Ф., Модули и кольца, пер. с нем., М., 1981; [2] Ф е й с К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 19, М., 1981, с. 31—134 (см. также указанные там предыдущие обзоры по теории модулей).

Л. А. Скорняков.

СОВЕРШЕННОЕ МНОЖЕСТВО — множество F топологич. пространства X, являющееся замкнутым множеством и одновременно плотным в себе (т. е. не имею-

щим изолированных точек). Другими словами, F совпадает со своим *производным множеством*. Примеры С. м.: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, *канторово множество*. *М. И. Войцеховский.*

СОВЕРШЕННОЕ НЕПРИВОДИМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — *совершенное отображение* f пространства X на пространство Y, являющееся неприводимым (т. е. Y не является образом никакого замкнутого в X множества, отличного от X). *М. И. Войцеховский.*

СОВЕРШЕННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — непрерывное замкнутое отображение топологич. пространств, при к-ром прообразы всех точек бикомпактны. С. о. во многом аналогичны непрерывным отображениям бикомпактов в хаусдорфовы пространства (каждое такое отображение совершенно), но сферой действия имеют класс всех топологич. пространств. В классе вполне регулярных пространств С. о. характеризуются существованием у них непрерывного продолжения на нек-рые бикомпактные расширения, при к-ром *наросты* расширений отображаются в наросты. С. о. сохраняет метризуемость, паракомпактность, вес, полноту по Чеху в сторону образа; другие инварианты (напр., характер пространства) оно преобразует правильным образом. Класс С. о. замкнут относительно операций произведения и композиции. Сужение С. о. на замкнутое подпространство является С. о. (не так обстоит дело для факторных и открытых отображений).

Названные свойства С. о. привели к тому, что класс этих отображений стал играть стержневую роль в классификации топологич. пространств. Прообразы метрич. пространств при С. о. охарактеризованы как паракомпактные перистые (p)-пространства. Класс паракомпактных p-пространств замкнут уже в обе стороны относительно С. о. Важным свойством С. о. является возможность сузить каждое из них на нек-рое замкнутое подпространство, не уменьшая образа, так, чтобы получившееся отображение было неприводимым — не допускало дальнейшего сужения на замкнутое подпространство без уменьшения образа. Неприводимые С. о. являются отправной точкой построения теории *абсолютов* топологич. пространств. При неприводимом С. о. π-вес образа всегда равен π-весу отображаемого пространства и число Суслина образа равно числу Суслина отображаемого пространства. Если вполне регулярное T_1-пространство X отображается на вполне регулярное T_1-пространство Y посредством С. о., то X гомеоморфно замкнутому подпространству топологич. произведения пространства Y на нек-рый бикомпакт. Диагональное произведение С. о. и непрерывного отображения всегда является С. о., в частности диагональное произведение С. о. и уплотнения является гомеоморфизмом, и если топологическое пространство совершенно отображается в уплотняется на нек-рое (вообще говоря, другое) метрическое пространство, то оно само метризуемо.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968. *А. В. Архангельский.*

СОВЕРШЕННОЕ ПОЛЕ — поле k, любой многочлен над к-рым сепарабелен. Иначе говоря, любое алгебраич. расширение поля k — *сепарабельное расширение*. Все остальные поля наз. несовершенными. Все поля характеристики 0 совершенны. Поле k конечной характеристики p совершенно тогда и только тогда, когда $k=kP$, т. е. возведение в степень p является автоморфизмом поля k. Конечные поля и алгебраически замкнутые поля совершенны. Пример несовершенного поля — поле $F_q(X)$ рациональных функций над полем F_q, где F_q — поле из $q=p^n$ элементов. С. п. k совпадает с полем инвариантов группы всех k-автоморфизмов алгебраич. замыкания $\overline{k}$ поля k. Любое алгебраич. расширение С. п. снова совершенно.

Для произвольного поля k характеристики $p>0$ с алгебраич. замыканием $\overline{k}$ поле

$$k^{p^{-\infty}} = \bigcup_n k^{p^{-n}} \subset \overline{k}$$

является наименьшим С. п., содержащим k. Оно наз. совершенным замыканием поля k в $\overline{k}$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [2] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963.

Л. В. Кузьмин.

СОВЕРШЕННОЕ ЧИСЛО — целое положительное число, обладающее свойством, что оно совпадает с суммой всех своих положительных делителей, отличных от самого этого числа.

Таким образом, целое число $n \geqslant 1$ является С. ч., если

$$n = \sum_{0 < d < n,\ d/n} 1.$$

С. ч. являются, напр., числа 6, 28, 496, 8128, 33550336,...

С. ч. тесно связаны с простыми *Мерсенна числами*, т. е. с простыми числами вида 2^m-1. Еще Евклид установил, что число

$$n = 2^{m-1}(2^m-1)$$

является совершенным, если 2^m-1 — простое число. Л. Эйлер (L. Euler) показал, что этими числами исчерпываются все четные С. ч.

До сих пор (1983) неизвестно, будет ли конечным или бесконечным множество четных С. ч., т. е. неизвестно, будет ли конечным или бесконечным множество простых чисел Мерсенна 2^m-1. Неизвестно также, существуют ли нечетные С. ч.

До 1983 найдено 27 четных С. ч. Первые 23 из них соответствуют следующим значениям m : 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4219, 4423, 9689, 9941, 11213. Список С. ч. с 12-го по 24-е указан в [2]. Четные С. ч. с 25-го по 27-е соответствуют следующим значениям m : 21701, 23209, 44497 (см. [3]). Показано (см. [4]), что нечетных С. ч. нет в интервале от 1 до 10^{50}.

Лит.: [1] Dickson L. E., History of the theory of numbers, v. 1, Wash., 1919, repr., N.—Y., 1952; [2] Nankar M. L., «Ganita Bhārati», 1979, v. 1, N 1—2, p. 7—8; [3] Slowinski D., «J. Recreational Math.», 1979, v. 11, p. 258—61; [4] Hagis P., «Math. Comp.», 1973, v. 27, p. 951—53.

С. А. Степанов.

СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — общий термин, относящийся к распределению нескольких случайных величин, заданных на одном и том же вероятностном пространстве. Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ определены на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P}\}$ и принимают значения в измеримых пространствах $(\mathfrak{X}_k, \mathscr{B}_k)$. Совместным распределением этих величин наз. функция $P_{X_1 \ldots X_n}(B_1, \ldots, B_n)$, определенная на множествах $B_1 \in \mathscr{B}_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}_n$ как

$$P_{X_1 \ldots X_n}(B_1, \ldots, B_n) = \mathsf{P}\{X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n\}.$$

В связи с С. р. говорят о совместной функции распределения и совместной плотности вероятности.

Если $X_1, \ldots, X_n$ — обычные действительные случайные величины, то С. р. есть распределение случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. *Многомерное распределение*). Если $X(t)$, $t \in T$, — случайный процесс, то С. р. значений $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ при $t_1, \ldots, t_n \in T$ наз. конечномерными распределениями случайного процесса $X(t)$.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973.

А. В. Прохоров.

СОВМЕСТНОСТЬ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ — свойство методов суммирования, состоящее в непротиворечивости результатов применения этих методов. Методы A и B совместны, если они не могут суммировать одну и ту же последовательность или ряд к различным пределам, в противном случае они наз. несов-

местными методами суммирования. Точнее, пусть A и B — методы суммирования, напр. последовательностей, A^* и B^* — поля суммируемости этих методов. Методы A и B совместны, если

$$\overline{A}(x) = \overline{B}(x) \qquad (*)$$

для любого $x \in A^* \cap B^*$, где $\overline{A}(x)$ и $\overline{B}(x)$ — числа, к к-рым суммируется последовательность x соответственно методами A и B. Напр., все *Чезаро методы суммирования* (C, k) при $k > -1$ совместны, все регулярные *Вороного методы суммирования* совместны.

Если U — нек-рое *множество последовательностей* и $A(x) = B(x)$ для любого $x \in A^* \cap B^* \cap U$, то говорят, что методы A и B совместны на множестве U. Методы A и B вполне совместны (*для действительных последовательностей*), если равенство (*) справедливо и в том случае, когда в поля суммируемости методов включены последовательности, суммируемые этими методами к $+\infty$ и $-\infty$.

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960. *И. И. Волков.*

СОВПАДЕНИЕ, связь,— группа наблюдений в выборке, имеющих равные значения. Пусть независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ подчиняются одному и тому же абсолютно непрерывному вероятностному закону, плотность вероятности к-рого есть $p(x)$. В таком случае, с вероятностью 1 среди наблюдений $X_1, X_2, \ldots, X_n$ не будет равных, т. е. $X_i \neq X_j$ если $i \neq j$, и, следовательно, каждый член $X_{(i)}$ вариационного ряда

$$X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(n)}, \qquad (*)$$

построенного по выборке $X_1, \ldots, X_n$, будет строго *больше ему предшествующего* $X_{(i-1)}$.

Однако на практике в силу ошибок округлений при вычислении случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ могут появиться несколько групп наблюдений, в каждой из к-рых наблюдения равны между собой. Каждая такая группа совпавших наблюдений наз. совпадением. Таким образом, в общем случае вместо (*) экспериментатор может наблюдать вариационный ряд

$$X_{(1)} = \ldots = X_{(\tau_1)} < X_{(\tau_1+1)} = \ldots = X_{(\tau_1+\tau_2)} < \ldots$$
$$\ldots < X_{(\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_{k-1}+1)} = \ldots = X_{(\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_k)},$$

где все $\tau_i \geqslant 1$, $\tau_1 + \ldots + \tau_k = n$, вследствие чего, если присутствуют С., т. е. если существуют $\tau_j \geqslant 2$, возникают трудности при определении вектора рангов, к-рый играет основную роль при построении *ранговых статистик*. Еще нет четких рекомендаций для определения рангов совпавших наблюдений. Наиболее распространены два подхода к решению этой задачи. Первый заключается в применении рандомизации. Согласно этому подходу в качестве рангов элементов

$$X_{(\tau_1+\ldots+\tau_{j-1}+1)} = \ldots = X_{(\tau_1+\ldots+\tau_j)},$$

образующих j-ю группу, можно взять любую перестановку *чисел*

$$\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_{j-1}+1,\ \tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_{j-1}+2,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_j$$

с вероятностью $1/\tau_j!$. Достоинство этого подхода заключается в его простоте, но при нек-рых альтернативах относительно закона распределения случайной величины X_i на результатах статистич. выводов может сказаться примененная рандомизация.

При втором подходе рекомендуется всем совпавшим наблюдениям

$$X_{(\tau_1+\ldots+\tau_{j-1}+1)} = \ldots = X_{(\tau_1+\ldots+\tau_j)},$$

образующим j-ю группу, приписать один и тот же т. н. средний ранг

$$t_j=\tau_1+\ldots+\tau_{j-1}+\frac{\tau_j+1}{2},$$

равный среднему арифметическому чисел $\tau_1+\ldots+\tau_{j-1}+1$, $\tau_1+\ldots+\tau_{j-1}+2,\ldots,\tau_1+\ldots+\tau_j$. Естественно, что такая процедура тоже сказывается на свойствах ранговых статистик, что следует учитывать на практике. Например, при построении статистики W *Вилкоксона критерия* при наличии С. рекомендуется *пользоваться именно средними рангами, при этом* математич. ожидание $\mathsf{E}W$ статистики W остается таким же, как и в случае отсутствия С., а дисперсия $\mathsf{D}W$ уменьшается за счет усреднения рангов и становится равной

$$\mathsf{D}W=\frac{mn\,(m+n-1)}{12}\left\{1-\frac{1}{(m+n)\,[(m+n)^2-1]}\sum_{j=1}^{k}\tau_j(\tau_j^2-1)\right\},$$

что следует учитывать при нормализации статистики W.

Лит.: [1] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

М. С. Никулин.

СОГЛАСИЯ КРИТЕРИЙ — статистический критерий, применяемый в задаче проверки согласия, суть к-рой заключается в следующем. Пусть $X_1, X_2,\ldots,X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же вероятностному закону, функция распределения к-рого $F(x)$ неизвестна. В таком случае задача статистич. проверки гипотезы H_0, согласно к-рой $F(x)\equiv F_0(x)$, где $F_0(x)$ — нек-рая заданная функция распределения, наз. *задачей проверки согласия*. Напр., если $F_0(x)$ — непрерывная функция распределения, то в качестве С. к. для проверки H_0 можно воспользоваться *Колмогорова критерием*.

См. также *Непараметрические методы статистики*.

М. С. Никулин.

СОГЛАСОВАННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, *вероятностные меры*,— понятие теории вероятностей и теории меры. О С. р. для наиболее важного и часто встречающегося в приложениях случая произведения пространств см. в ст. *Мера*. Ниже дается более общая конструкция. Пусть I множество индексов с отношением предпорядка $\leqslant$, фильтрующееся вправо. И пусть имеется проективная система множеств: для каждого $i\in I$ задано множество X_i и для всякой пары индексов $i\leqslant j$ имеется отображение π_{ij} множества X_j в X_i, причем если $i\leqslant j\leqslant k$, то $\pi_{ik}=\pi_{ij}\pi_{jk}$ и π_{ii} для всякого $i\in I$ есть тождественное отображение X_i на X_i. Предполагается, что для всякого $i\in I$ задана σ-алгебра S_i подмножеств X_i так, что если $i\leqslant j$, то отображение $\pi_{ij}(X_j, S_j)$ в (X_i, S_i) измеримо. Пусть, наконец, для каждого $i\in I$ задано распределение (или, более общо, мера) μ_i на S_i. Система распределений (мер) $\{\mu_i\}$ наз. *согласованной* (или *проективной системой распределений* (мер)), если $i\leqslant j$ влечет $\mu_i=\mu_j\pi_{ij}^{-1}$. При определенных дополнительных условиях на проективном пределе $X=\varprojlim(X_i,\pi_{ij})$ существует мера μ (проективный предел проективной системы $\{\mu_{ij}\}$) такая, что если π_i — каноническая проекция X на X_i, то $\mu_i=\mu\pi_i^{-1}$ для всех $i\in I$.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Bochner S., Harmonic analysis and the theory of probability, Berkeley — Los Angeles, 1955; [3] Metivier M., «Ann. mat. pura ed appl.», 1963, t. 63, p. 225—352; [4] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах, пер. с франц., М., 1977.

В. В. Сазонов.

СОЕДИНЕНИЕ, *джойн*, топологических пространств X и Y — топологическое пространство, обозначаемое $X*Y$ и определяемое как факторпространство произведения $X\times Y\times[0, 1]$ по разбиению, элементами к-рого служат множества $x\times Y\times 0$ $(x\in X)$ и $X\times y\times 1$

($y \in Y$) и отдельные точки множества $X \times Y \times [0, 1] \setminus (X \times Y \times O \cup X \times Y \times 1)$.

Примеры: если X состоит из одной точки, то $X * Y$ есть *конус* над Y; $S^n * Y$ гомеоморфно $(n+1)$-кратной *надстройке* над Y. В частности, $S^n * S^m \approx S^{n+m+1}$. Операция С. коммутативна и ассоциативна. Для вычисления гомологий С. (с коэффициентами из области главных идеалов) используется аналог формулы Кюннета

$$\tilde{H}_{r+1}(X * Y) \approx \sum_{i+j=r} \tilde{H}_i(X) \otimes \tilde{H}_j(Y) \oplus \oplus \sum_{i+j=r-1} \operatorname{Tor}(\tilde{H}_i(X), \tilde{H}_j(Y)).$$

Соединение r-связного пространства и s-связного пространства является $(r+s+2)$-связным. Операция С. лежит в основе конструкции Милнора универсального *главного расслоения*.

М. Ш. Фарбер.

СОИЗМЕРИМЫЕ И НЕСОИЗМЕРИМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ — две однородные величины (напр., длины или площади), обладающие или соответственно не обладающие т. н. общей мерой (так называют величину той же природы, что и рассматриваемые, и содержащуюся целое число раз в каждой из них). Примерами несоизмеримых величин могут служить длины диагонали и стороны квадрата или площади круга и квадрата, построенного на радиусе. Если величины соизмеримы, то их отношение выражается рациональным числом, отношение же несоизмеримых величин — иррациональным.

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

СОКРАЩЕННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА булевой функции — *дизъюнктивная нормальная форма* (д. н. ф.), представляющая собой дизъюнкцию всех простых импликант данной функции. *Конъюнкция* $\mathfrak{A}$ наз. импликантой булевой функции f, если справедливо соотношение $\mathfrak{A} \to f \equiv 1$. Импликанта наз. простой, если после вычеркивания из нее любой буквы она перестает быть импликантой. Построение С. н. ф. является первым этапом *булевых функций минимизации*, поскольку минимальная д. н. ф. получается из сокращенной удалением нек-рых импликант. Число конъюнкций в С. н. ф. характеризует трудоемкость выполнения этого этапа. Оценки этой величины (см. *Булевых функций нормальные формы*) показывают, что вообще говоря, С. н. ф. сложнее исходного задания функции; при переходе к С. н. ф. от совершенной сокращаются только длины конъюнкций, число же их значительно увеличивается. Кроме того, у «почти всех» булевых функций в С. н. ф. нет конъюнкций, состоящих менее чем из $n - \log_2 n$ букв; подавляющая часть конъюнкций состоит из $n - \log_2 \log_2 n$ букв.

В. В. Глаголев.

СОЛВМНОГООБРАЗИЕ, разрешимое многообразие,— однородное пространство M связной разрешимой группы Ли G; его можно отождествить с пространством смежных классов G/H, где H — стационарная подгруппа нек-рой точки многообразия M. Примеры: $\mathbb{R}^n$, тор T^n, многообразие Ивасавы N/I (где N — группа всех верхних треугольных матриц с единицами на диагонали в $GL(3, \mathbb{R})$, I — подгруппа всех целых точек в N), K^2 (бутылка Клейна), Mb (лист Мёбиуса).

Первым среди С. был изучен более узкий класс *нильмногообразий*, т. е. однородных пространств нильпотентных групп Ли (таковы $\mathbb{R}^n$, T^n, N/I, а K^2 и Mb нильмногообразиями не являются). Для них А. И. Мальцевым были доказаны следующие утверждения (см. [5]). 1) Всякое нильмногообразие $M = G/H$ диффеоморфно $M^* \times \mathbb{R}^n$, где M^* — компактное нильмногообразие. 2) Если M компактно и действие G на M эффективно, то стационарная подгруппа H является *дискретной подгруппой*. 3) Нильпотентная группа Ли G может транзитивно и локально эффективно действовать

на нек-ром компактном многообразии тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли $\mathfrak{G}$ имеет $\mathbb{Q}$-форму. При этом если G односвязна, то она изоморфна унипотентной алгебраич. группе, определенной над $\mathbb{Q}$, и H является арифметич. подгруппой в G. 4) Фундаментальная группа $\pi_1(M)$ компактного нильмногообразия M (изоморфная H, если G односвязна и ее действие на M локально эффективно) определяет его однозначно с точностью до диффеоморфизма. Фигурирующие здесь группы $\pi_1(M)$ — это в точности всевозможные конечно порожденные нильпотентные группы без кручения.

Эти результаты отчасти обобщаются на произвольные С. Так, для произвольного С. M существует С. M', конечнолистно накрывающее его и диффеоморфное $M^* \times \mathbb{R}^n$, где M^* — нек-рое компактное С. Произвольное С. не всегда разлагается в прямое произведение $M^* \times \mathbb{R}^n$, но диффеоморфно (см. [1], [4]) пространству векторного расслоения над нек-рым компактным С. (для Mb соответствующим расслоением является нетривиальное линейное расслоение над S^1). Фундаментальная группа $\pi_1(M)$ произвольного С. M полициклична и, если M компактно, определяет многообразие однозначно с точностью до диффеоморфизма. Группа π изоморфна $\pi_1(M)$ для нек-рого компактного С. M тогда и только тогда, когда она включается в точную последовательность вида

$$\{e\} \longrightarrow \Delta \longrightarrow \pi \longrightarrow \mathbb{Z}^s \longrightarrow \{e\},$$

где Δ — нек-рая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения. В каждой полицикличе. группе существует подгруппа конечного индекса, изоморфная $\pi_1(M)$ для нек-рого компактного С. M. Если разрешимая группа Ли G действует на компактном С. $M=G/H$ транзитивно и локально эффективно, то M расслаивается над тором со слоем $N/H \cap N$, где N — нильрадикал в G. Компактность С. $M=G/H$ эквивалентна наличию на MG-инвариантной меры, относительно к-рой объем M конечен.

Каждое С. M асферично (т. е. гомотопич. группы $\pi_i(M)=0$ при $i \geqslant 2$). Среди всех компактных однородных пространств компактные С. характеризуются асферичностью и разрешимостью группы $\pi_1(M)$ (см. [3]).

Лит.: [1] Auslander L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1973, v. 79, № 2, p. 227—85; [2] Auslander L., Szczarba R., «Amer. J. math.», 1975, v. 97, № 1, p. 260—81; [3] Горбацевич В. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1977, т. 41, № 2, с. 285—307; [4] Mostow G., «Amer. J. math.», 1971, v. 93, № 1, p. 11—32; [5] Рагунатан М., Дискретные подгруппы групп Ли, пер. с англ., М., 1977. *В. В. Горбацевич.*

СОЛЕНОИДАЛЬНОЕ ПОЛЕ, трубчатое поле,— векторное поле, не имеющее ни источников, ни стоков, т. е. дивергенция к-рого равна нулю во всех его точках. Поток С. п. через любую замкнутую кусочно гладкую ориентированную границу любой области равен нулю. С. п. характеризуется т. н. векторным потенциалом — функцией $A(M)$ такой, что $a = \mathrm{rot} A(M)$. Примеры С. п.: поле скоростей несжимаемой жидкости, магнитное поле внутри бесконечного соленоида. *А. Б. Иванов.*

СОЛИТОН — решение нелинейного эволюционного уравнения, к-рое в каждый момент времени локализовано в нек-рой области пространства, причем размеры области с течением времени остаются ограниченными, а движение центра области можно интерпретировать как движение частицы. С. уравнения Кортевега — де Фриса

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

описывает уединенную волну

$$u_s(x,\ t) = 3v/\mathrm{ch}^2\,[v^{1/2}(x - vt - x_0)/2]$$

и однозначно определяется двумя параметрами: скоростью $v>0$ и положением максимума в фиксированный момент времени $t=0$, $x=x_0$. Это уравнение обладает

также n-солитонными решениями, к-рые при больших временах ($t\to\pm\infty$) можно приближенно записать в виде суммы n слагаемых $u_s(x,\ t)$, каждое из к-рых характеризуется своей скоростью v_i и положением центра $x_{0i}^{\pm}$. Для n-солитонного решения набор скоростей до столкновения ($t\to-\infty$) и после столкновения ($t\to+\infty$) остается неизменным, возникают только сдвиги центров С. $x_{0i}^{+}\neq x_{0i}^{-}$. Найдено много нелинейных эволюционных уравнений с двумя независимыми переменными, к-рые обладают решениями с приведенными выше свойствами. Так, С. нелинейного уравнения Шрёдингера

$$i\psi_t=-\psi_{xx}-|\psi|^2\psi,\quad \psi\in\mathbb{C},$$

однозначно определяется четырьмя параметрами; С. синус Гордона уравнения

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}+\sin\varphi=0$$

определяется двумя параметрами $v,\ x_0$

$$\varphi_s=4\ \mathrm{arctg}\,[\exp\pm(x-vt-x_0)/\sqrt{1-v^2}],$$

и существует двойной С., к-рый определяется четырьмя параметрами; аналогичная ситуация для уравнения Буссинеска

$$\varphi_{xx}-\varphi_{tt}+(\varphi^2)_{xx}+\varphi_{xxxx}=0,$$

для уравнения Хироты

$$\varphi_t+i3\alpha|\varphi|^2\varphi_x+\beta\varphi_{xxx}+i\sigma\varphi_{xxxx}+\delta|\varphi|^2\varphi=0,\ \alpha\beta=\sigma\delta,$$

и т. д. Существуют физически интересные уравнения и с большим числом независимых переменных, к-рые имеют солитонные решения с приведенными выше свойствами. Напр., С. уравнения Кадомцева — Петвиашвили

$$(u_t+6uu_x+u_{xxx})_x=u_{yy},$$

локализованный по x и y, равен

$$u(x,\ y,\ t)=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\left(\frac{1}{\nu^2}+|x+iy-3\nu^2t|^2\right),\quad \nu\in\mathbb{R}.$$

В физич. литературе термин «С.» означает частицеподобное решение нелинейных уравнений классич. теории поля, для к-рого плотности энергии и импульса остаются локализованными в окрестности нек-рой точки пространства в любой момент времени. В ряде случаев локализация может иметь место вблизи замкнутых линий, поверхностей. Такие локализованные решения наз. также кинками, монополями. При отыскании таких решений играют роль топологич. соображения, в частности для ряда моделей удается построить ток $J_\mu(x)$, дивергенция к-рого равна нулю независимо от уравнений движения, а соответствующий интеграл движения (топологич. заряд) $Q=\int J_0(x)d^3x$ оценивает снизу функционал энергии.

Лит.: [1] Скотт А., Чжу Ф., Маклафлин Д., «ТИИЭР», 1973, т. 61, № 10, с. 79—124; [2] Карпман В. И., Нелинейные волны в диспергирующих средах, М., 1973; [3] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 1, с. 55—136.

П. П. Кулиш.

СОНИНА ИНТЕГРАЛ — представление цилиндрич. функции интегралом по контуру

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}t^{-\nu-1}\,dt,$$

где ν — произвольно, $\mathrm{Re}\,z>0$ или $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}$. Интеграл этого типа рассмотрен Н. Я. Сониным (1870). Иногда С. и. называют интеграл вида:

$$J_{m+n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{2^n\Gamma(n+1)}\int_0^\infty J_m(x\sin t)\sin^{m+1}t\cos^{2n+1}t\,dt,$$

$$m,\ n>-1.$$

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973; [2] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, 2 изд., пер. с нем., М., 1968.

А. Б. Иванов.

СООБЩЕНИЙ КВАНТОВАНИЕ — разбиение множества возможных сообщений, вырабатываемых *источником сообщений*, на конечное (иногда счетное) число непересекающихся подмножеств A_i так, чтобы сообщения каждого класса могли быть представлены с заданной *сообщений точностью воспроизведения* нек-рым специально выбранным элементом этого подмножества $a_i \in A_i$. Заданному С. к. соответствует способ кодирования источника сообщений, задаваемый кодирующей функцией $\varphi(x)=a_i$, если $x \in A_i$. Квантование позволяет заменить передачу непрерывного сигнала дискретным сигналом без нарушения условий точности воспроизведения сообщений.

Лит.: [1] Харкевич А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965; [2] Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963; [3] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [4] Berger T., Rate distortion theory, N. Y., 1971.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

СООБЩЕНИЙ СКОРОСТЬ СОЗДАНИЯ — величина, характеризующая *информации количество*, создаваемое за единицу времени *источником сообщений*. С. с. с. источника сообщений u с дискретным временем, вырабатывающего сообщение $\xi=(\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots)$, образованное последовательностью случайных величин $\{\xi_k, k=\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$, принимающих значение из нек-рого дискретного множества X, определяется равенством

$$\overline{H}(u)=\lim_{n-k\to\infty}\frac{1}{n-k}H(\xi_k^n), \qquad (*)$$

если такой предел существует. Здесь $H(\xi_k^n)$ — энтропия случайной величины $\xi_k^n=(\xi_k, \ldots, \xi_n)$. Величину $\overline{H}(u)$, определяемую равенством (*), называют также энтропией (на символ) источника сообщений.

Доказать существование предела (*) и явно его вычислить удается, напр., для стационарных источников; явные формулы для $\overline{H}(u)$ получены для стационарных марковских источников и гауссовских источников. Понятие С. с. с. $\overline{H}(u)$ тесно связано с понятием *избыточности* источника сообщений.

Если u — стационарный эргодич. источник сообщений с конечным числом состояний, то справедливо следующее свойство асимптотической равнораспределенности (теорема Макмиллана, [1]). Пусть $P(x^L)=\mathsf{P}\{\xi^L=x^L\}$, где $x^L=(x_1, \ldots, x_L)$ суть значения $\xi^L=(\xi_1, \ldots, \xi_L)$ — отрезка сообщений длины L. Для произвольных $\varepsilon>0$, $\delta>0$ существует $L_0(\varepsilon, \delta)$ такое, что при всех $L\geqslant L_0(\varepsilon, \delta)$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{-\log P(\xi^L)}{L}-\overline{H}(u)\right|>\delta\right\}<\varepsilon.$$

Лит.: [1] Вольфовиц Дж., Теоремы кодирования теории информации, пер. с англ., М., 1967; [2] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [3] Файнстейн А., Основы теории информации, пер. с англ., М., 1960.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

СООБЩЕНИЙ ТОЧНОСТЬ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ — мера качества передачи сообщений от *источника сообщений* к получателю (адресату) по *каналу связи*. Требования, предъявляемые к С. т. в. в теории передачи информации, обычно трактуют статистически, выделяя класс W допустимых совместных распределений для пары $(\xi, \tilde{\xi})$ в множестве всех вероятностных мер в произведении $(\mathfrak{X}\times\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\mathfrak{X}}\times S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$, где $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$ — измеримое пространство значений сообщения ξ, вырабатываемого источником, а $(\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$ — измеримое пространство значений воспроизводимого сообщения $\tilde{\xi}$, получаемого адресатом. С. т. в. часто задают при помощи меры иска-

жения $\rho(x, \tilde{x})$, $x \in \mathfrak{X}$, $\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{X}}$, являющейся неотрицательной измеримой функцией от x и $\tilde{x}$. При этом множество допустимых сообщений W выделяют формулой

$$\mathsf{E}\rho(\xi, \tilde{\xi}) \leqslant \varepsilon, \qquad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ — нек-рое число.

В частности, когда $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}}) = (X^n, S_{X^n})$, $(\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\tilde{\mathfrak{X}}}) = (\tilde{X}^n, S_{\tilde{X}^n})$, часто рассматривают покомпонентное условие С. т. в., при к-ром

$$\rho(x^n, \tilde{x}^n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \rho_0(x_k, \tilde{x}_k),$$

где $x^n = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, $\tilde{x}^n = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \in \tilde{X}^n$, $x_k \in X$, $\tilde{x}_k \in \tilde{X}$, $k = 1, \ldots, n$, а $\rho_0(x, \tilde{x})$, $x \in X$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$,— снова неотрицательная измеримая функция. В этом случае вместо условия (1) иногда также рассматривают следующее условие

$$\mathsf{E}\rho_0(\xi_k, \tilde{\xi}_k) \leqslant \varepsilon \text{ для всех } k = 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

В случае, когда $X = \tilde{X}$ и

$$\rho_0(x, \tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = \tilde{x}, \\ 1, & \text{если } x \neq \tilde{x}, \end{cases}$$

условия (1) и (2) переходят соответственно в ограничения на среднюю *ошибочного декодирования вероятность* или максимальную вероятность ошибочного декодирования отдельных компонент сообщения. В случае источников с непрерывными пространствами (напр., гауссовских) часто полагают $\rho_0(x, \tilde{x}) = (x - \tilde{x})^2$.

Лит.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Berger T., Rate distortion theory, N. Y., 1971. *Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.*

СООТВЕТСТВИЕ — понятие, распространяющее на случай двух, вообще говоря, различных множеств или однотипных математич. структур понятие *бинарного отношения*. С. широко используют в математике, а также в различных прикладных областях: теоретич. программировании, теории графов, теории систем, математич. лингвистике и т. д.

Соответствием между множествами A и B наз. любое подмножество R декартова произведения $A \times B$. Другими словами, С. между A и B состоит из нек-рых упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. Как правило, С. обозначают тройкой (R, A, B) и, наряду с записью $(a, b) \in R$, пишут также aRb или $R(a, b)$. Иногда вместо «соответствие» говорят «бинарное отношение» (в широком смысле, не предполагая, что множества A и B совпадают).

Для конечных множеств широко используются матричное и графовое представления С. Пусть в множестве A имеется n элементов, в множестве B имеется m элементов и (R, A, B) — нек-рое С. Этому С. сопоставляется матрица размером $n \times m$, строки к-рой помечены элементами из A, столбцы — элементами из B и в к-рой на пересечении a-й строки и b-го столбца стоит 1, если $(a, b) \in R$, и 0 в противном случае. Обратно, каждая $(n \times m)$-матрица, состоящая из нулей и единиц, описывает вполне определенное С. между A и B. При графовом представлении элементы множеств A и B изображаются точками на плоскости. Обычно эти точки обозначаются теми же буквами, что и соответствующие элементы. Точки a и b соединяются дугой, идущей от a к b, если $(a, b) \in R$. Таким образом, С. представляется ориентированным графом.

Все С. между множествами A и B образуют полную булеву алгебру, нулем к-рой служит пустое С., а единицей — т. н. полное соответствие, состоящее из всех пар (a, b), $a \in A$, $b \in B$. Пусть $R \subseteq A \times B$.

Множество

$$D_R = \{a \in A \mid \exists b \quad (a, b) \in R\}$$

наз. о б л а с т ь ю о п р е д е л е н и я С. R, а множество

$$B_R = \{b \in B \mid \exists a \quad (a, b) \in R\}$$

— о б л а с т ь ю з н а ч е н и й, или о б р а з о м, этого С. Соответствие R всюду определено, если $D_R = A$; С. R сюръективно, если $B_R = B$. Для каждого $a \in A$ множество

$$\mathrm{Im}_R\, a = \{b \in B \mid \quad (a, b) \in R\}$$

наз. о б р а з о м э л е м е н т а a относительно R; для каждого $b \in B$ множество

$$\mathrm{Coim}_R\, b = \{a \in A \mid \quad (a, b) \in R\}$$

наз. п р о о б р а з о м э л е м е н т а b относительно R. При этом

$$D_R = \bigcup_{b \in B} \mathrm{Coim}_R\, b, \quad B_R = \bigcup_{a \in A} \mathrm{Im}_R\, a.$$

Всякое С. R устанавливает *Галуа соответствие* между подмножествами множества A и подмножествами множества B. Именно, каждому подмножеству $X \subseteq A$ сопоставляется подмножество $X' = \bigcap_{a \in X} \mathrm{Im}_R a \subseteq B$. Вместе с д у а л ь н ы м С., к-рое каждому $Y \subseteq B$ сопоставляет множество $Y' = \bigcap_{b \in Y} \mathrm{Coim}_R b$, соответствие Галуа задает на каждом из множеств A и B оператор замыкания.

Инволюция $R^{\#}$ или R^{-1} С. (R, A, B) определяется равенством

$$R^{\#} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Инволюция устанавливает биекцию между С. (R, A, B) и С. (S, B, A), к-рая является изоморфизмом булевых алгебр. Для С. (R, A, B) и (S, B, C) п р о и з в е д е н и е, или к о м п о з и ц и я, определяется равенством

$$(RS, A, C) = \{(a, c) \mid \exists b \ (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}.$$

Умножение С. ассоциативно. Единицами для этого умножения служат диагональные бинарные отношения. Кроме того, $(RS)^{\#} = S^{\#} R^{\#}$ и из $R_1 \subseteq R_2$ следует $R_1{}^{\#} \subseteq R_2^{\#}$. Поэтому все С. между нек-рой совокупностью множеств образуют упорядоченную *категорию с инволюцией*. Умножение и инволюция позволяют выражать свойства С. с помощью алгебраич. соотношений. Напр., С. (R, A, B) всюду определено, если $RR^{\#} \supseteq E_A$ (E_A — диагональ множества A); С. R ф у н к ц и о н а л ь н о, т. е. является графиком функции из A в B, если $RR^{\#} \supseteq E_A$ и $R^{\#} R \subseteq E_B$.

Для всякого С. R существуют такие функциональные С. F и G, что $R = F^{\#} G$. Кроме того, для всякого С. R справедливо включение $R \subseteq RR^{\#} R$. Соответствие R наз. д и ф у н к ц и о н а л ь н ы м, если $R = RR^{\#} R$. Всякое дифункциональное С. индуцирует на области определения и на образе отношения эквивалентности, фактормножества по к-рым равномощны. Такое описание справедливо только для дифункциональных С.

Пусть $\mathfrak{A}$ — класс однотипных математич. структур, замкнутый относительно конечных декартовых произведений. Под С. между структурами A и B из $\mathfrak{A}$ понимают подструктуру R произведения $A \times B$. Так вводятся групповые С., модульные С., кольцевые С. и т. п. Такие С. часто допускают полезные описания своего строения. Пусть, напр., A и B — группы и R — подгруппа прямого произведения $A \times B$. Множества

$$K_R = \{a \in A \mid (a, 1) \in R\}, \ I_R = \{b \in B \mid (1, b) \in R\}$$

наз. я д р о м и н е о п р е д е л е н н о с т ь ю С. R. При этом K_R — нормальный делитель в D_R, I_R — нормальный делитель в B_R и факторгруппы D_R/K_R и

B_R/I_R изоморфны. Из этого описания, в частности, следует, что все групповые С. дифункциональны.

Лит.: [1] Курош А. Г., Общая алгебра. Лекции 1969—1970 учебного года, М., 1974; [2] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [3] Цаленко М. Ш., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1980, т. 41, с. 241—85. *М. Ш. Цаленко.*

СООТВЕТСТВИЕ ГРАНИЦ при конформном отображении — свойство однолистного конформного отображения f конечносвязной области G на область D плоскости z, состоящее в том, что отображение f можно продолжить до *гомеоморфизма* между теми или иными бикомпактными расширениями $\tilde{G}$ и $\tilde{D}$ областей G и D, то есть f индуцирует гомеоморфизм границ $\tilde{G}\setminus G$ и $\tilde{D}\setminus D$. Для обычных (евклидовых) границ ∂G и ∂D областей G и D это свойство не всегда имеет место. Напр., конформное отображение круга K индуцирует гомеоморфизм евклидовых границ ∂K и ∂D, если ∂D гомеоморфна окружности.

Известно несколько бикомпактных расширений односвязной области со свойством С. г. при конформном отображении. Исторически первым из них было расширение Каратеодори (см. [1], а также [2]). Оно наиболее наглядно и часто используется при изучении конформных и других отображений. Элементы получающейся при этом границы К. Каратеодори назвал простыми концами (см. *Граничные элементы*). Была построена теория С. г. при переменном конформном отображении односвязных областей (см. [3]).

Лит.: [1] Мышкис А. Д., Суворов Г. Д., «Докл. АН СССР», 1973, т. 212, № 4, с. 822—24; [2] Carathéodory C., «Math. Ann.», 1913, Bd 73, S. 323—70; [3] Суворов Г. Д., «Матем. сб.», 1953, т. 33 (75), № 1, с. 73—100; [4] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [5] Коллингвуд Э. Ф., Ловатер А. Дж., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [6] Суворов Г. Д., Семейства плоских топологических отображений, Новосиб., 1965; [7] Суворов Г. Д., Метрическая теория простых концов и граничные свойства плоских отображений с ограниченными интегралами Дирихле, К., 1981; [8] Иванов О. В., Суворов Г. Д., Полные решетки конформно-инвариантных компактификаций области, К., 1982. *Б. П. Куфарев.*

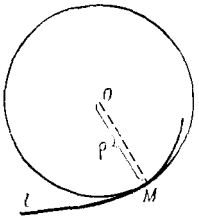
СООТВЕТСТВИЯ ГРАНИЦ ПРИНЦИП — принцип, формулируемый следующим образом. Говорят, что для отображения f имеет место С. г. п., если из того, что f есть непрерывное отображение замыкания $\overline{G}$ области G на замыкание $\overline{D}$ области D и f есть гомеоморфизм $\overline{G}\setminus G$ на $\overline{D}\setminus D$, следует, что f есть топологич. отображение $\overline{G}$ на $\overline{D}$. Таким образом, С. г. п.— свойство, в нек-ром смысле обратное свойству *соответствия границ*.

Если G и D — плоские области, их евклидовы границы гомеоморфны окружности и D ограничена, то для функций f, аналитических в G, выполняется С. г. п., то есть f — конформное отображение G на D. Кроме этой, в практике конформных отображений используются и другие формы С. г. п. (см. [1]). С. г. п. доказан для ориентируемых отображений в евклидовом пространстве (см. [2]).

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд., М., 1965; [2] Кудрявцев Л. Д., «Докл. АН СССР», 1954, т. 14, № 5, с. 921—23; [3] Пинчук С. И., «Матем. сб.», 1980, т. 111, № 1, с. 67—94. *Б. П. Куфарев.*

СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ КВАДРИКА — поверхность 2-го порядка, имеющая с поверхностью в данной ее точке касание 2-го порядка. Примерами С. к. являются *Дарбу квадрика*, *Ли квадрика*. *В. С. Малаховский.*

СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ОКРУЖНОСТЬ в точке M кривой l — окружность, имеющая с l в точке M касание порядка $n\geqslant 2$ (см. *Соприкосновение*). Если кривизна кривой l в точке M равна нулю, то С. о. вырождается в прямую. Радиус С. о. наз. радиусом кривизны кривой l в точке M, а центр С. о.— центром кривизны (см. рис.). Если кривая l плоская



и задана уравнением $y=f(x)$. то радиус С. о. определяется формулой

$$\rho = \left| \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \right|.$$

Если кривая l пространственная и задана уравнениями

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u),$$

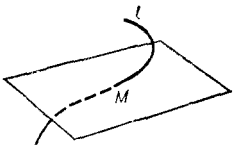
то радиус С. о. определяется формулой

$$\rho = \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}{\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}}$$

(здесь штрихи означают дифференцирование по параметру u).

Иногда С. о. наз. с о п р и к а с а ю щ и м с я к р у г о м. *БСЭ-3.*

СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ПЛОСКОСТЬ в т о ч к е M к р и в о й l — плоскость, имеющая с l в точке M касание порядка $n \geqslant 2$ (см. *Соприкосновение*). С. п. может быть также определена как предел переменной плоскости, проходящей через три точки кривой l, когда эти точки стремятся к точке M. Обычно кривая, кроме исключительных случаев, пронизывает свою С. п. в точке соприкосновения (см. рис.). Если кривая l задана уравнениями



$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u),$$

то уравнение С. п. имеет вид

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

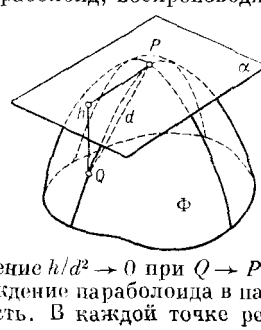
где X, Y, Z — текущие координаты, а x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' вычисляются в точке соприкосновения; если все три коэффициента при X, Y, Z в уравнении С. п. исчезают, то С. п. делается неопределенной (может совпадать с любой плоскостью, проходящей через касательную). *БСЭ-3.*

СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ СФЕРА в т о ч к е M к р и в о й l — сфера, *имеющая с l в точке M касание порядка* $n \geqslant 3$ (см. *Соприкосновение*). С. с. может быть также определена как предел переменной сферы, проходящей через четыре точки кривой l, когда эти точки стремятся к точке M. Если радиус кривизны кривой l в точке M равен ρ, а σ — кручение, то формула для вычисления радиуса С. с. имеет вид

$$R = \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2},$$

где ds — дифференциал дуги кривой l. *БСЭ-3.*

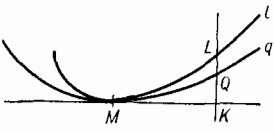
СОПРИКАСАЮЩИЙСЯ ПАРАБОЛОИД п о в е р х н о с т и в т о ч к е M — параболоид, воспроизводящий форму поверхности вблизи этой точки с точностью до величин 2-го порядка малости относительно расстояния от точки P. Пусть Ф — параболоид (см. рис.) с вершиной P, *касающийся поверхности в* этой точке, h и d — расстояние произвольной точки Q поверхности соответственно от параболоида и от точки P. Параболоид Ф наз. С. п., *если отношение* $h/d^2 \to 0$ при $Q \to P$. При этом не исключается вырождение параболоида в параболич. цилиндр или плоскость. В каждой точке ре-



гулярной поверхности существует и притом единственный С. п. С помощью С. п. производится классификация точек поверхности (см. *Эллиптическая точка*, *Гиперболическая точка*, *Параболическая точка*, *Уплощения точка*).

Д. Д. Соколов.

СОПРИКОСНОВЕНИЕ кривой q с кривой l в данной точке M — геометрическое понятие, означающее, что q имеет с l в точке M касание максимального порядка по сравнению с любой кривой из некрого заранее данного семейства кривых $\{q\}$, включающего q. Порядок касания кривых q и l считается равным n, если отрезок QL есть величина $n+1$ порядка малости по отношению к отрезку MK (см. рис., где отрезок QL перпендикулярен к общей касательной кривых q и l в точке M). Таким образом, среди всех кривых семейства $\{q\}$ С. с кривой l имеет та кривая, к-рая наиболее тесно прилегает к l (для нее отрезок QL имеет максимальный порядок малости). Кривая семейства $\{q\}$, к-рая имеет С. с кривой l в данной ее точке M, наз. соприкасающейся кривой данного семейства в указанной точке кривой l. Напр., *соприкасающейся окружностью* в точке M кривой l является окружность, к-рая в этой точке имеет с l максимальный порядок касания по сравнению с любой другой окружностью.



Аналогично вышеизложенному определяется понятие соприкосновения поверхности S, принадлежащей данному семейству поверхностей $\{S\}$, с какой-нибудь кривой l (или с поверхностью) в нек-рой ее точке M (в этих случаях порядок касания определяется также аналогично предыдущему; следует только вместо касательной прямой MK, изображенной на рис., рассматривать касательную плоскость поверхности S в точке M).

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; [2] Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956; [3] Фавар Ж., Курс локальной дифференциальной геометрии, пер. с франц., М., 1960; [4] Залгаллер В. А., Теория огибающих, М., 1975.

БСЭ-3.

СОПРЯЖЕННАЯ МАТРИЦА, эрмитово сопряженная матрица, с данной (прямоугольной или квадратной) матрицей $A=\|a_{ik}\|$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел — матрица A^*, каждый элемент a^*_{ik} к-рой комплексно сопряжен с элементом a_{ki} матрицы A, то есть $a^*_{ik}=\overline{a_{ki}}$. С. м. совпадает с комплексно сопряженной транспонированной матрицей: $A^*=(\overline{A}')$.

Свойства С. м.:

$$(A+B)^*=A^*+B^*, \quad (\lambda A)^*=\overline{\lambda}A^*,$$

$$(AB)^*=B^*A^*, \quad (A^*)^{-1}=(A^{-1})^*, \quad (A^*)^*=A.$$

С. м. соответствуют сопряженным между собой линейным отображениям унитарных пространств в ортонормированных базисах.

Лит. см. при ст. *Матрица.*

Т. С. Пиголкина.

СОПРЯЖЕННАЯ СЕТЬ — сеть линий на поверхности, образованная двумя семействами линий такими, что в каждой точке поверхности линии сети различных семейств имеют *сопряженные направления*. Если координатная сеть является С. с., то коэффициент M второй квадратичной формы поверхности тождественно равен нулю. В окрестности каждой точки поверхности, не являющейся точкой уплощения, может быть введена параметризация так, чтобы координатные линии образовывали С. с. При этом одно семейство координатных линий можно взять произвольно, лишь бы линии этого семейства не имели асимптотич. направлений. Важными примерами С. с. являются асимптотич. сеть и сеть линий кривизны.

Лит.: [1] Погорелов А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969.

Е. В. Шикин.

СОПРЯЖЕННАЯ ФУНКЦИЯ — понятие теории функций, являющееся конкретным отражением некрого инволютивного оператора для соответствующего класса функций.

1) С. ф. к комплекснозначной функции f наз. функцию $\overline{f}$, значения к-рой являются комплексно сопряженными к значениям f.

2) С. ф. к гармонической функции — см. *Сопряженные гармонические функции*.

3) С. ф. к 2π-периодической суммируемой на $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ наз. функцию

$$\overline{f}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} -\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}\, dt;$$

она существует почти всюду и почти всюду совпадает с (C, α)-суммой, $\alpha > 0$, или суммой Абеля — Пуассона *сопряженного тригонометрического ряда*.

4) С. ф. к функции $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, определенной на векторном пространстве X, находящемся в двойственности (относительно билинейной формы $\langle x, y\rangle$) с векторным пространством Y — функция на Y, задаваемая соотношением

$$f^*(y) = \sup_{x \in X} (\langle x, y\rangle - f(x)). \qquad (*)$$

Для функции, заданной на Y, сопряженная функция определяется аналогично.

С. ф. к функции одного переменного $f_p(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $1 < p < \infty$, будет функция

$$f_{p'}(y) = \frac{|y|^{p'}}{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1;$$

С. ф. к функции $f(x) = \frac{(x, x)}{2}$ в гильбертовом пространстве X со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будет функция $\langle y, y\rangle/2$. С. ф. к норме $N(x) = \|x\|$ в нормированном пространстве будет функция $N^*(y)$, равная нулю, если $\|x\| \leqslant 1$, и равная $+\infty$, если $\|x\| > 1$.

Если f — гладкая растущая на бесконечности быстрее линейной функция, то f^* — не что иное, как *Лежандра преобразование* функции f. Для одномерных строго выпуклых функций определение, равносильное $(*)$, было дано У. Юнгом [1], в других терминах. У. Юнг определял С. ф. к функции

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt,$$

где φ непрерывна и строго возрастает, соотношением

$$f^*(y) = \int_0^y \psi(t)\, dt,$$

где ψ — функция, обратная к φ. Определение $(*)$ для одномерных функций было впервые предложено С. Мандельбройтом (S. Mandelbrojt), в конечномерном случае — В. Фенхелем [2], в бесконечномерном — Ж. Моро [3] и А. Брёнстедом [4]. Для выпуклой функции и сопряженной с ней выполнено неравенство Юнга

$$\langle x, y\rangle \leqslant f(x) + f^*(y).$$

С. ф. — выпуклая замкнутая функция. Оператор сопряжения*: $f \to f^*$ однозначно отображает совокупность собственных выпуклых замкнутых функций на X на совокупность собственных выпуклых замкнутых функций на Y (теорема Фенхеля — Моро).

Подробнее см. [5] и [6].

См. также *Выпуклый анализ*, *Опорная функция*, *Двойственность* в экстремальных задачах и выпуклом анализе.

Лит.: [1] Young W. H., «Proc. Roy. Soc. A», 1912, v. 87, p. 225—29; [2] Fenchel W., «Canad. J. Math.», 1949, v. 1, p. 73—77; [3] Moreau J. J., Fonctions convexes en dualité, Montpellier, 1962; [4] Brondsted A., «Math. Fys. Medd. Danske vid. Selsk.», 1964, bd 34, № 2, p. 1—26; [5] Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973; [6] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В., Оптимальное управление, М., 1979.

В. М. Тихомиров.

СОПРЯЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению $l(y)=0$ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение $l^*(\xi)=0$, где

$$l(y)\equiv a_0(t)\,y^{(n)}+\ldots+a_k(t)\,y^{(n-k)}+\ldots+a_n(t)\,y \quad (1)$$
$$(y^{(\nu)}=d^\nu y/dt^\nu,\ y(\cdot)\in C^n(I),\ a_k(\cdot)\in C^{n-k}(I),$$
$$a_0(t)\neq 0,\ t\in I;$$

$C^m(I)$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых комплекснозначных функций на $I=(\alpha,\beta)$) и

$$l^*(\xi)\equiv(-1)^n(\overline{a}_0\xi)^{(n)}+\ldots+(-1)^{n-k}(\overline{a}_k\xi)^{(n-k)}+\ldots$$
$$\ldots+\overline{a}_n\xi,\ \xi\in C^n(I) \quad (2)$$

(черта означает операцию комплексного сопряжения). Из определения следует, что

$$(l_1+l_2)^*=l_1^*+l_2^*,\quad (\lambda l)^*=\overline{\lambda}l^*,$$

где λ — скаляр. Сопряженным к уравнению $l^*(\xi)=0$ является уравнение $l(y)=0$. Для любых n раз непрерывно дифференцируемых функций $y(t)$ и $\xi(t)$ справедливо тождество Лагранжа:

$$\overline{\xi}l(y)-\overline{l^*(\xi)}\,y=\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\times\right.$$
$$\left.\times(a_{n-k}\overline{\xi})^{(j)}\,y^{(k-j-1)}\right\},$$

из к-рого следует формула Грина:

$$\int_s^\tau[\overline{\xi}l(y)-\overline{l^*(\xi)}\,y]\,dt=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j(a_{n-k}\overline{\xi})^{(j)}\,y^{(k-j-1)}\Big|_{t=s}^{t=\tau}.$$

Если $y(t)$, $\xi(t)$ — произвольные решения уравнений $l(y)=0$ и $l^*(\xi)=0$, то

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j(a_{n-k}\overline{\xi})^{(j)}\,y^{(k-j-1)}\equiv\text{const},\ t\in I.$$

Знание $m(\leqslant n)$ линейно независимых решений уравнения $l^*(\xi)=0$ позволяет понизить порядок уравнения $l(y)=0$ на m единиц (см. [1] — [3]).

Для системы дифференциальных уравнений

$$L(x)=0,\quad L(x)\equiv\dot{x}+A(t)\,x,\quad t\in I,$$

с непрерывной комплекснозначной $(n\times n)$-матрицей $A(t)$, сопряженная система определяется равенством

$$L^*(\psi)\equiv-\dot{\psi}+A^*(t)\,\psi=0,\quad t\in I$$

(см. [1], [4]); здесь $A^*(t)$ — эрмитово сопряженная матрица к матрице $A(t)$. Тождество Лагранжа и формула Грина приобретают вид

$$(\overline{\psi},\ L(x))-(\overline{L^*(\psi)},\ x)=\frac{d}{dt}(\overline{\psi},\ x),$$

$$\int_s^\tau[(\overline{\psi},\ L(x))-(\overline{L^*(\psi)},\ x)]\,dt=(\overline{\psi},\ x)\Big|_{t=s}^{t=\tau};$$

здесь $(\cdot,\ \cdot)$ — скалярное произведение (сумма произведений одноименных координат). Если $x(t)$, $\psi(t)$ — произвольные решения уравнений $L(x)=0$, $L^*(\psi)=0$, то

$$(\overline{\psi}(t),\ x(t))\equiv\text{const},\quad t\in I.$$

Понятие С. д. у. тесно связано с общим понятием *сопряженного оператора*. Если, напр., l — линейный дифференциальный оператор, действующий из пространства $C^n(I)$ в пространство $C(I)$ по формуле (1), то со-

пряженный дифференциальный оператор l^* действует из пространства $C^*(I)$, сопряженного к $C(I)$, в пространство $C^n(I)$, сопряженное к $C^n(I)$. Сужение оператора l^* на пространство $C^n(I)$ определяется формулой (2) (см. [5]).

С. д. у. определяется, кроме того, для линейного дифференциального уравнения с частными производными (см. [6], [5]).

Пусть $\Delta=[t_0, t_1]\subset I$ и U_k — линейные и линейно независимые функционалы на пространстве $C^n(\Delta)$. Тогда сопряженная краевая задача к линейной краевой задаче

$$l(y)=0,\ t\in\Delta,\ U_k(y)=0,\ k=1,\ \ldots,\ m,\ m<2n, \quad (2)$$

определяется равенствами

$$l^*(\xi)=0,\ U_j^*(\xi)=0,\ j=1,\ \ldots,\ 2n-m. \quad (3)$$

Здесь U_j^* — линейные функционалы на пространстве $C^n(\Delta)$, описывающие сопряженные краевые условия, т. е. определяемые так, чтобы равенство (см. *Грина формулы*)

$$\int_{t_0}^{t_1}[\overline{\xi}l(y)-\overline{l^*(\xi)}\,y]\,dt=0$$

выполнялось для любой пары функций $y(\cdot),\ \xi(\cdot)\in C^n(\Delta)$, удовлетворяющей условиям $U_k(y)=0$, $k=1,\ldots, m$, $U_j^*(\xi)=0$, $j=1,\ \ldots,\ 2n-m$.

Если

$$U_k(y)\equiv\sum_{p=1}^{n}[\alpha_{kp}y^{(p-1)}(t_0)+\beta_{kp}y^{(p-1)}(t_1)]$$

— линейные формы переменных

$$y^{(p-1)}(t_0),\quad y^{(p-1)}(t_1),\quad p=1,\ \ldots,\ n,$$

то $U_j^*(\xi)$ — тоже линейные формы переменных

$$\xi^{(p-1)}(t_0),\quad \xi^{(p-1)}(t_1),\quad p=1,\ \ldots,\ n.$$

Пример. Для задачи

$$\ddot{y}+a(t)\,y=0,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$
$$y(0)+\alpha y(1)+\beta\dot{y}(1)=0,$$
$$\dot{y}(0)+\gamma y(1)+\delta\dot{y}(1)=0$$

с действительными $a(t)$, α, β, γ, δ, сопряженная краевая задача имеет вид

$$\ddot{\xi}+a(t)\,\xi=0,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$
$$\alpha\xi(0)+\gamma\dot{\xi}(0)+\xi(1)=0,$$
$$\beta\xi(0)+\delta\dot{\xi}(0)+\dot{\xi}(1)=0.$$

Если задача (2) имеет k линейно независимых решений (в этом случае ранг краевой задачи $r=n-k$), то задача (3) имеет $m-n+k$ линейно независимых решений (ее ранг $r'=2n-m-k$). При $m=n$ задачи (2), (3) имеют одинаковое число линейно независимых решений; поэтому при $m=n$ задача (2) не имеет решений, кроме тривиального, в том и только в том случае, когда этим свойством обладает сопряженная краевая задача (3). Справедлива альтернатива Фредгольма: *полуоднородная краевая задача*

$$l(y)=f(t),\quad U_k(y)=0,\quad k=1,\ \ldots,\ n,$$

имеет решение, если функция $f(t)$ ортогональна ко всем нетривиальным решениям $\xi(t)$ сопряженной краевой задачи (3), т. е.

$$\int_{t_0}^{t_1}\overline{\xi}(t)\,f(t)\,dt=0$$

(см. [1] — [3], [7]).

Для задачи о собственных значениях

$$l(y)=\lambda y,\quad U_k(y)=0,\quad k=1,\ \ldots,\ n, \quad (4)$$

сопряженной задачей о собственных значениях наз. задача

$$l^*(\xi)=\mu\xi, \quad U_j^*(\xi)=0, \quad j=1, \ldots, n. \tag{5}$$

Если λ — собственное значение задачи (4), то $\mu=\overline{\lambda}$ — собственное значение задачи (5). Собственные функции $y(t)$, $\xi(t)$, отвечающие собственным значениям λ и μ задач (4) и (5) соответственно, ортогональны, если $\lambda\neq\mu$ (см. [1] — [3]):

$$\int_{t_0}^{t_1}\overline{y}(t)\,\xi(t)\,dt=0.$$

Для линейной краевой задачи

$$L(x)\equiv\dot{x}+A(t)\,x=0, \quad U(x)=0, \quad t\in\Delta, \tag{6}$$

где U есть m-вектор-функционал на пространстве $C_n(\Delta)$ непрерывно дифференцируемых комплекснозначных n-вектор-функций, $m<2n$, сопряженная краевая задача определяется равенствами

$$L^*(\psi)=0, \quad U^*(\psi)=0, \quad t\in\Delta \tag{7}$$

(см. [1]); здесь U^* есть $(2n-m)$-вектор-функционал, определяемый так, чтобы равенство

$$(\psi(t),\ x(t))\Big|_{t=t_0}^{t=t_1}=0$$

выполнялось для любой пары функций $x(\cdot)$, $\psi(\cdot)\in C_n^1(\Delta)$, удовлетворяющей условиям

$$U(x)=0, \quad U^*(\psi)=0.$$

Задачи (6), (7) обладают свойствами, аналогичными перечисленным выше (см. [1]).

Понятие сопряженной краевой задачи тесно связано с понятием сопряженного оператора [5]. Сопряженная краевая задача определяется также для линейной краевой задачи для уравнения с частными производными (см. [6], [7]).

Лит.: [1] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [2] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, М., 1969; [3] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [4] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [5] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, пер. с англ., ч. 2, М., 1966; [6] Михайлов В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных, М., 1976; [7] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981.

Е. Л. Тонков.

СОПРЯЖЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ к линейному преобразованию A — линейное преобразование A* евклидова (или унитарного) пространства L такое, что для любых векторов x и y из L имеет место равенство скалярных произведений

$$(Ax,\ y)=(x,\ A^*y).$$

С. л. п.— частный случай понятия сопряженного линейного отображения. Преобразование A* определяется по A единственным образом. Если L конечномерно, то для всякого A существует С. л. п. A*, причем его матрица B в базисе $e_1, \ldots, e_n$ связана с матрицей A линейного преобразования A в том же базисе соотношением

$$B=\overline{G}^{-1}A^*\overline{G},$$

где A^* — сопряженная с A матрица, а G — *Грама матрица* базиса $e_1, \ldots, e_n$.

В евклидовом пространстве линейное преобразование A и его сопряженное A* имеют одинаковые характеристич. многочлены, равные определители, следы, одинаковые собственные значения. В унитарном пространстве их характеристич. многочлены, определители, следы, собственные значения комплексно сопряжены.

Т. С. Пиголкина.

СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО к топологическому векторному пространству E — векторное пространство E^*, состоящее из непрерывных линейных функционалов на E. Если E — локально выпуклое пространство, то функционалы $f \in E^*$ разделяют точки E (теорема Хана — Банаха). Если E — нормированное пространство, то E^* является банаховым пространством относительно нормы

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Наряду с сильной топологией, определенной нормой $\|f\|$, в E^* рассматривают и слабую $*$-топологию.

Лит.: [1] Райков Д. А., Векторные пространства, М., 1962.

В. И. Ломоносов.

СОПРЯЖЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, гармонически сопряженные функции, — пара действительных гармонич. функций (г. ф.) u и v, являющихся действительной и мнимой частями нек-рой аналитич. функции $f = u + iv$ комплексного аргумента. В случае одного комплексного переменного $z = x + iy$ г. ф. $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ являются С. г. ф. в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда они удовлетворяют в D системе уравнений Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

В системе (1) роль г. ф. u и v не симметрична: функция v является сопряженной для u, но для v сопряженной будет не u, а $-u$. Если задана г. ф. $u = u(x, y)$, то С. г. ф. $v = v(x, y)$ и вся аналитич. функция $f = u + iv$ легко определяются с точностью до чисто мнимого постоянного слагаемого ic; это можно сделать, напр., по формуле Гурса

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + \overline{z^0}}{2}, \frac{z - \overline{z^0}}{2i}\right) - u(x^0, y^0) + ic \tag{2}$$

в окрестности нек-рой точки $z^0 = x^0 + iy^0$ из области определения u.

В случае многих комплексных переменных $z = x + iy = (z_1, \ldots, z_n) = (x_1, \ldots, x_n) + i(y, \ldots, y_n)$, $n > 1$, система Коши — Римана становится переопределенной:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Из (3) вытекает, что при $n > 1$ функция u уже не может быть задана как произвольная г. ф. — она должна принадлежать подклассу *плюригармонических функций*; сопряженную плюригармонич. функцию v можно и в этом случае найти по формуле (2).

Известны различные аналоги системы С. г. ф. (u, v) в виде вектор-функции $f = (u_1, \ldots, u_m)$, компоненты к-рой $u_j = u_j(x_1, \ldots, x_n)$ суть действительные функции действительных переменных $x_1, \ldots, x_n$. Такова, напр., градиентная система $f = (u_1, \ldots, u_n)$, удовлетворяющая обобщенной системе уравнений Коши — Римана

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j, \tag{4}$$

к-рая записывается также в сокращенном виде:

$$\operatorname{div} f = 0, \quad \operatorname{rot} f = 0.$$

Если условия (4) выполняются в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, гомеоморфной шару, то существует г. ф. h в D такая, что $f = \operatorname{grad} h$. При $n = 2$ получают, что $u_2 + iu_1$ есть аналитич. функция переменного $z = x_1 + ix_2$. Поведение решений системы (4) в нек-рых вопросах аналогично системе Коши — Римана (1), напр. при изучении граничных свойств (см. [3]).

Лит.: [1] Бицадзе А. В., *Основы теории аналитических функций комплексного переменного*, 2 изд., М., 1972; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [3] Стейн М., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974. *Е. Д. Соломенцев.*

СОПРЯЖЕННЫЕ ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — координаты на поверхности, в к-рых вторая квадратичная форма записывается в виде

$$II = -\Lambda^2(u, v)(du^2 + dv^2).$$

С. и. к. всегда могут быть введены в достаточно малой окрестности эллиптич. точки регулярной поверхности. В достаточно малой окрестности гиперболич. точки регулярной поверхности можно ввести координаты, в к-рых

$$II = \Lambda^2(u, v)(du^2 - dv^2),$$

однако в этом случае часто пользуются т. н. асимптотическими координатами $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, при к-рых

$$II = \tilde{\Lambda}(\tilde{u}, \tilde{v})\, d\tilde{u}\, d\tilde{v}.$$

Д. Д. Соколов.

СОПРЯЖЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ — пара направлений, исходящих из точки P поверхности S и таких, что содержащие их прямые являются сопряженными диаметрами индикатрисы Дюпена поверхности S в точке P. Для того чтобы направления $(du : dv)$, $(\delta u : \delta v)$ в точке P поверхности S были С. н., необходимо и достаточно выполнения условия

$$L du\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + N dv\delta v = 0,$$

где L, M и N — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S, вычисленные в точке P. Примеры: *асимптотические направления*, *главные направления*.

Лит.: [1] Погорелов А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969. *Е. В. Шикин.*

СОПРЯЖЕННЫЕ СВЯЗНОСТИ — линейные связности Γ и $\tilde{\Gamma}$, задаваемые операторами *ковариантного дифференцирования* ∇ и $\tilde{\nabla}$, такие, что

$$ZB(X, Y) = B(\nabla_Z X, Y) + B(X, \tilde{\nabla}_Z Y) + 2\omega(Z)\, B(X, Y),$$

где X, Y, Z — произвольные векторные поля, $B(\cdot, \cdot)$ — нек-рая квадратичная форма, $\omega(\cdot)$ — нек-рая линейная форма. Говорят также, что ∇ и $\tilde{\nabla}$ сопряжены относительно B. В координатной форме (здесь $X \Rightarrow \partial_i$, $B \Rightarrow b_{ij}$, $\omega \Rightarrow \omega_i$, $\nabla \Rightarrow \Gamma^k_{ij}$):

$$\partial_k b_{ij} - \Gamma^s_{ki} b_{sj} - \tilde{\Gamma}^s_{kj} b_{is} = 2\omega_k b_{ij}.$$

Для операторов кривизны R и $\tilde{R}$ и кручения T и $\tilde{T}$ связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ соответственно выполняются соотношения

$$B(R(T, Z)X, Y) + B(X, \tilde{R}(T, Z)Y) =$$
$$= 2\{\omega([T, Z]) - T\omega(Z) + Z\omega(T)\}\, B(X, Y),$$

$$B(Z, \Delta T(X, Y)) - B(\Delta T(Z, Y)X) =$$
$$= B(\Delta T(Z, X), Y), \quad \Delta T = \tilde{T} - T.$$

В координатной форме:

$$R^m_{rsj} b_{im} + \tilde{R}^m_{rsi} b_{jm} = -2(\partial_r \omega_s - \partial_s \omega_r)\, b_{ij},$$

$$\Delta T^s_{ij} b_{sn} - \Delta T^s_{kj} b_{si} - \Delta T^s_{ki} b_{sj} = 0.$$

Лит.: [1] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976. *М. И. Войцеховский.*

СОПРЯЖЕННЫЙ КЛАСС ФУНКЦИЙ — понятие теории функций, являющееся конкретным отображением *двойственности* в функциональных пространствах. Так, если класс функций X рассматривается как банахово или топологическое векторное пространство, то С. к. ф. наз. класс функций, изометрически изоморфный сопряженному пространству X^*. Напр., между

пространствами $(L^p[a, b])^*$ и $L^q[a, b]$ при $1 \leqslant p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ существует изометрич. изоморфизм, при к-ром соответственные элементы x^* и g связаны соотношением

$$x^*(f) = \int_a^b g(x) f(x)\, dx.$$

Если рассматривается нек-рый класс 2π-периодических суммируемых на $[-\pi, \pi]$ функций X, то С. к. ф. наз. класс функций, сопряженных к функциям из X. Напр., класс функций, сопряженных к $L^p[-\pi, \pi]$, $1 < p < \infty$, совпадает с классом таких функций f из $L^p[-\pi, \pi]$, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0.$$

Класс функций, сопряженных к $\mathrm{Lip}\alpha$, $0 < \alpha < 1$, совпадает с классом таких функций из $\mathrm{Lip}\alpha$, что $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$.

Лит.: [1] Frechet M., «C. r. Acad. sci.», 1907, t. 144, p. 1414—16; [2] Riesz F., там же, S. 1409—11; [3] Privaloff I., «Bull. soc. math. France», 1916, t. 44, p. 100—03; [4] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [5] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., [ч. 1], М., 1962. *Т. П. Лукашенко.*

СОПРЯЖЕННЫЙ МОДУЛЬ, двойственный модуль, дуальный модуль,— модуль гомоморфизмов модуля в основное кольцо. Точнее, пусть M — левый модуль над кольцом R. Абелеву группу $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ гомоморфизмов модуля M в левый R-модуль R можно превратить в правый R-модуль M^*, полагая

$$x(\varphi\lambda) = (x\varphi)\lambda,\ x \in M,\ \varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, R),\ \lambda \in R.$$

Этот правый модуль M^* наз. С. м. модуля M. Если $x \in M$, то можно определить элемент $\bar{x} \in M^{**}$, положив $\bar{x}(\varphi) = x\varphi$ для всех $\varphi \in M^*$. Этим определяется гомоморфизм модуля M в M^{**}. Гомоморфизмом является и отображение $\zeta : M^* \otimes_R C \to \mathrm{Hom}_R(M, C)$ (C — левый R-модуль), определяемое равенством

$$x((\varphi \otimes c)\zeta) = (x\varphi)c,\quad x \in M,\ \varphi \in M^*,\ c \in C.$$

Оба эти гомоморфизма являются изоморфизмами, если M — конечно порожденный проективный модуль [2]. Из свойств функтора Hom вытекает изоморфизм $(\Sigma M_\alpha)^* \cong \Pi M_\alpha^*$ (Σ — прямая сумма, Π — прямое произведение) и существование гомоморфизма M^{***} в M^*. Сквозное отображение $M^* \to M^{***} \to M^*$ является тождественным. Однако M^{***} не обязательно изоморфен M^*. Важными являются и модули без кручения в смысле Басса, т. е. модули, для к-рых указанный выше гомоморфизм M в M^{**} оказывается мономорфизмом. Это свойство равносильно вложимости модуля M в прямое произведение нек-рого множества экземпляров основного кольца. Если R нётерово справа и слева, то отображение $M \to M^*$ осуществляет двойственность между категориями всех левых и всех правых конечно порожденных R-модулей тогда и только тогда, когда R квазифробениусово.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [3] Мишина А. П., Скорняков Л. А., Абелевы группы и модули, М., 1969. *Л. А. Скорняков.*

СОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР — линейный оператор A^*, действующий из пространства Y^* в пространство X^* (сильно сопряженные с локально выпуклыми пространствами Y и X соответственно), к-рый строится по линейному оператору $A : X \to Y$ следующим образом. Пусть D_A — область определения оператора A, всюду плотная в X. Если для всех $x \in D_A$ имеет место

$$\langle Ax, g\rangle = \langle x, g^*\rangle. \qquad (*)$$

где $Ax \in Y$, $g \in Y^*$, $g^* \in X^*$, то на множестве D_{A^*} элементов g, удовлетворяющих (*), однозначно опреде-

лен оператор $A^*g=g^*$, действующий из D_{A^*} в X^*. Если $D_A=X$ и A — линейный непрерывный оператор, то A^* — также линейный непрерывный оператор. Если, кроме того, X и Y — линейные нормированные пространства, то $\|A^*\|=\|A\|$. Если A — вполне непрерывный оператор, то таков же и A^*. Наиболее подробно изучены свойства С. о., когда X и Y — гильбертовы пространства.

Лит.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979.

В. И. Соболев.

СОПРЯЖЕННЫЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД к ряду

$$\sigma=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

— ряд

$$\overline{\sigma}=\sum_{n=1}^{\infty}-b_n\cos nx+a_n\sin nx.$$

Эти ряды являются соответственно действительной и мнимой частями ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-ib_n)\,z^n$$

при $z=e^{ix}$. Формула для частных сумм $\overline{\sigma}[f]$ сопряженного к ряду Фурье функции $f(x)$ тригонометрич. ряда

$$\overline{S}_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\overline{D}_n(t-x)\,dt,$$

где $\overline{D}_n(x)$ — сопряженное *Дирихле ядро*. Если $f(x)$ — функция ограниченной вариации на $[-\pi,\ \pi]$, то необходимым и достаточным условием сходимости ряда $\overline{\sigma}[f]$ в точке x_0 является существование *сопряженной функции* (см. п. 3) $\overline{f}(x_0)$, к-рая представляет тогда сумму ряда $\overline{\sigma}[f]$. Если $f(x)$ — суммируемая на $[-\pi,\ \pi]$ функция, то ряд $\overline{\sigma}[f]$ суммируется почти всюду методами $(C,\ \alpha)$, $\alpha>0$, и методом Абеля — Пуассона и почти всюду совпадает с сопряженной функцией $\overline{f}(x)$. Если функция $\overline{f}(x)$ суммируема, то сопряженный ряд $\overline{\sigma}[f]$ является ее рядом Фурье. Функция $\overline{f}(x)$ может быть несуммируемой; для таких обобщений интеграла Лебега, как *А-интеграл* и *Бокса интеграл*, сопряженный ряд $\overline{\sigma}[f]$ всегда является рядом Фурье сопряженной функции.

Лит.: [1] Tauber A., «Monatsch. Math. Phys.», 1891, Bd 2, S. 79—118; [2] Joung W. H., «Sitzungsber. math.-naturwiss. Hb. Bayerischen Akad. Wiss. München», 1911, Bd 41, S. 361—71; [3] Priwaloff I., «Bull. Soc. math. France», 1916, t. 44, p. 100—103; [4] Привалов И. И., Интеграл Cauchy, Саратов, 1919, с. 61—104; [5] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.— Л., 1951; [6] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [7] Виноградова И. А., Скворцов В. А., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1970, М., 1971, с. 65—107; [8] Жижашвили Л. В., Сопряженные функции и тригонометрические ряды, Тбилиси, 1969.

Т. П. Лукашенко.

СОПРЯЖЕННЫЙ ФУНКТОР — понятие, выражающее универсальность и естественность многих важных математич. конструкций: свободных универсальных алгебр, различных пополнений, прямых и обратных пределов и т. д.

Пусть $F:\mathfrak{K}\to\mathfrak{L}$ — одноместный ковариантный функтор из категории $\mathfrak{K}$ в категорию $\mathfrak{L}$. Функтор F индуцирует функтор

$$H^F(X,\ Y)=H_{\mathfrak{L}}(F(X),\ Y):\mathfrak{K}^*\times\mathfrak{L}\longrightarrow\mathfrak{S},$$

где $\mathfrak{K}^*$ — категория, двойственная категории $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{S}$ — категория множеств, $H_{\mathfrak{L}}(X,\ Y)$: $\mathfrak{L}^*\times\mathfrak{L}\to\mathfrak{S}$ — основной теоретико-множественный функтор. Функтор H^F контравариантен по первому аргументу и ковариантен по второму. Аналогично, любой ковариантный функтор $G:\mathfrak{L}\to\mathfrak{K}$ индуцирует функтор

$$H_G(X,\ Y)=H_{\mathfrak{K}}(X,\ G(Y)):\mathfrak{K}^*\times\mathfrak{L}\longrightarrow\mathfrak{S},$$

также контравариантный по первому аргументу и ковариантный по второму. Функторы F и G сопряжены, или образуют сопряженную пару, если функторы H^F и H_G изоморфны, т. е. существует естественное преобразование $\theta : H^F \to H_G$, к-рое устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами морфизмов $H_{\mathfrak{C}}(F(X), Y)$ и $H_{\mathfrak{K}}(X, G(Y))$ для любых объектов $X \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$ и $Y \in \mathrm{Ob}\mathfrak{C}$. Преобразование θ наз. сопряжением F с G; функтор F наз. левым сопряженным к функтору G, а G — правым сопряженным к F (что обозначается $\theta : F \dashv G$ или просто $F \dashv G$). Преобразование $\theta^{-1} : H_G \to H^F$ наз. косопряжением.

Пусть $\theta : F \dashv G$. Для любых объектов $X \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$ и $Y \in \mathrm{Ob}\mathfrak{C}$ пусть

$$\varepsilon_X = \theta(1_{F(X)}), \quad \eta_Y = \theta^{-1}(1_{G(Y)}).$$

Семейства морфизмов $\{\varepsilon_X\}$ и $\{\eta_Y\}$ определяют естественные преобразования $\varepsilon : \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \to FG$ и $\eta : GF \to \mathrm{Id}_{\mathfrak{C}}$, к-рые наз. соответственно единицей и коединицей сопряжения θ. Для преобразований ε и η справедливы следующие равенства:

$$\varepsilon_{G(Y)} G(\eta_Y) = 1_{G(Y)}, \quad F(\varepsilon_X)\, \eta_{F(X)} = 1_{F(X)}.$$

Вообще, пара естественных преобразований $\varphi : \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \to FG$ и $\psi : GF \to \mathrm{Id}_{\mathfrak{C}}$ состоит из единицы и коединицы нек-рого сопряжения, когда выполнены равенства

$$\varphi_{G(Y)} G(\psi_Y) = 1_{G(Y)}, \quad F(\varphi_X)\, \psi_{F(X)} = 1_{F(X)}$$

для любых объектов X и Y. Естественное преобразование $\varphi : \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \to FG$ является единицей нек-рого сопряжения тогда и только тогда, когда для любого морфизма $\alpha : X \to G(Y)$ из категории $\mathfrak{K}$ существует такой единственный морфизм $\alpha' : F(X) \to Y$ в категории $\mathfrak{C}$, что $\alpha = \varepsilon_X G(\alpha')$. Последнее свойство выражает тот факт, что объект $F(X)$ свободен над X относительно функтора G в смысле следующего определения. Объект $Y \in \mathrm{Ob}\mathfrak{C}$ вместе с морфизмом $\varepsilon : X \to G(Y)$ свободен над объектом $X \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$, если всякий морфизм $\alpha : X \to G(Y')$ однозначно представим в виде $\alpha = \varepsilon G(\alpha')$ для нек-рого морфизма $\alpha' : Y \to Y'$. Функтор $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ тогда и только тогда обладает левым С. ф., когда для каждого $X \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$ существует объект Y, свободный над X относительно G.

Примеры С. ф.

1) Если $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ — категория множеств, то G обладает левым С. ф. тогда и только тогда, когда он представим. Представимый функтор $G \simeq H^A = H_{\mathfrak{C}}(A, Y)$ обладает левым С. ф. тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{C}$ имеются любые копроизведения $\coprod_{x \in X}^{*} A_x$, где $X \in \mathrm{Ob}\mathfrak{S}$ и $A_x = A$ для всех $x \in X$.

2) В категории множеств $\mathfrak{S}$ для любого множества A основной функтор $H^A(Y) = H(A, Y)$ сопряжен слева функтору $X \times A$.

3) В категории абелевых групп функтор $\mathrm{Hom}(A, Y)$ сопряжен слева функтору $X \otimes A$ тензорного умножения на A, а функтор вложения полной подкатегории периодич. групп сопряжен справа функтору взятия периодич. части произвольной абелевой группы.

4) Пусть $P : \mathfrak{A} \to \mathfrak{S}$ — пренебрегающий функтор из произвольного многообразия универсальных алгебр в категорию множеств. Функтор P обладает левым С. ф. $F : \mathfrak{S} \to \mathfrak{A}$, к-рый каждому множеству X сопоставляет свободную алгебру многообразия $\mathfrak{A}$ с множеством X свободных образующих.

5) Функтор вложения $\mathrm{Id}_{\mathfrak{C}, \mathfrak{K}} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ произвольной рефлективной подкатегории $\mathfrak{C}$ категории $\mathfrak{K}$ сопряжен слева $\mathfrak{C}$-рефлектору. В частности, функтор вложения категории абелевых групп в категорию групп

обладает левым С. ф., к-рый каждой группе G сопоставляет ее факторгруппу по коммутанту.

Свойства С. ф. Функтор, сопряженный слева к данному функтору, определен однозначно с точностью до изоморфизма функторов. Сопряженный слева функтор унивалентен тогда и только тогда, когда единица сопряжения состоит из мономорфизмов. Он перестановочен с копределами и переводит нулевые объекты и нулевые морфизмы в нулевые объекты и нулевые морфизмы соответственно.

Пусть $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{L}$ — полные слева и локально малые слева категории. Функтор $G : \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$ тогда и только тогда обладает сопряженным слева функтором $F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$, когда выполнены следующие условия: а) функтор G перестановочен с пределами; б) для каждого $X \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$ хотя бы одно из множеств $H(X, G(Y))$, $Y \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$, непусто; в) для каждого $X \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$ существует такое множество $S \subset \mathrm{Ob}\mathfrak{L}$, что всякий морфизм $\alpha : X \to G(Y)$ представим в виде $\alpha = \varphi G(\alpha')$, где $\varphi : X \to G(B)$, $B \in S$, $\alpha' : B \to Y$.

Переход к двойственным категориям позволяет установить двойственность между понятиями «функтор, сопряженный слева», и «функтор, сопряженный справа», что позволяет выводить свойства сопряженных справа функторов из свойств сопряженных слева функторов.

Понятие С. ф. непосредственно связано с понятием *тройки* (монады) в категории.

Лит.: [1] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974; [2] Mac Lane S., Categories for the working mathematician, N. Y., 1971.

М. Ш. Цаленко.

СОПРЯЖЕННЫЙ ЭЛЕМЕНТ к элементу x группы G — элемент x' такой, что

$$x' = g^{-1} x g$$

для нек-рого элемента g из G. Говорят также, что x' получается на x трансформированием при помощи элемента g. Для С. э. используется иногда степенное обозначение: x^g.

Если A и B два подмножества группы G, то через A^B принято обозначать множество

$$\{a^b \mid a \in A, \quad b \in B\}.$$

Множество $Mg = \{x^g | x \in M\}$, где g — нек-рый фиксированный элемент из G, наз. сопряженным с множеством M в группе G. В частности, две подгруппы U и V наз. сопряженными подгруппами, если $U = Vg$ для нек-рого g из G. Если подгруппа $H = Hg$ для любого элемента $g \in G$ (т. е. H содержит все элементы, сопряженные с ее элементами), то H наз. самосопряженной подгруппой в G, или *нормальным делителем*.

О. А. Иванова.

СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ МЕТОД — метод решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax = b$ с положительно определенной матрицей A. Это прямой и итерационный метод одновременно: при любом начальном приближении он сходится за конечное число итераций, давая точное решение. В С. г. м. матрица системы не меняется в процессе вычислений, на каждой итерации она используется лишь для умножения на вектор. Поэтому порядок систем, решаемых на ЭВМ, может быть высоким, он определяется объемом числовой информации, задающей матрицу.

Структура С. г. м. как прямого метода основана на процессе последовательной A-ортогонализации системы векторов, представляющем собой обычный процесс ортогонализации (см. *Ортогонализации метод*) относительно скалярного произведения $(x, y) = x^T A y$. Если $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ есть A-ортогональный базис пространства, то точное решение x^* системы при любом началь-

ном приближении x_0 может быть получено из разложения

$$x^*-x_0=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j s_j,\quad \alpha_j=\frac{(r_0,\ s_j)}{(s_j,\ As_j)},$$

где $r_0=b-Ax_0$—невязка x_0. В С. г. м. A-ортогональные векторы $s_1,\ s_2,\ldots,\ s_n$ строятся процессом A-ортогонализации невязок $r_0,\ r_1,\ldots,\ r_{n-1}$ последовательности приближений $x_0,\ x_1,\ldots,\ x_{n-1}$, вычисляемых по формулам

$$x_k=x_0+\sum_{j=1}^{k}\alpha_j s_j,\quad \alpha_j=\frac{(r_0,\ s_j)}{(s_j,\ As_j)}.$$

Построенные таким образом векторы $r_0,\ r_1,\ldots,\ r_{n-1}$ и $s_1,\ s_2,\ldots,\ s_n$ обладают следующими свойствами:

$$(r_i,\ r_j)=0,\ i\neq j;\ (r_i,\ s_j)=0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ i. \quad (1)$$

Расчетные формулы С. г. м. даются следующими рекуррентными соотношениями (см. [1]):

$$\left.\begin{gathered} s_1=r_0;\ x_i=x_{i-1}+\alpha_i s_{i-1},\ \alpha_i=-\frac{(s_{i-1},\ r_{i-1})}{(s_{i-1},\ As_{i-1})},\\ r_i=r_{i-1}+\alpha_i As_{i-1},\ s_i=r_i+\beta_i s_{i-1},\\ \beta_i=-\frac{(r_i,\ As_{i-1})}{(s_{i-1},\ As_{i-1})}. \end{gathered}\right\} \quad (2)$$

Процесс заканчивается при нек-ром $k\leqslant n$, для к-рого $r_k=0$. При этом $x^*=x_k$. Момент обрыва процесса определен начальным приближением x_0. Из рекуррентных соотношений (2) следует, что векторы $r_0,\ r_1,\ldots,\ r_i$ являются линейными комбинациями векторов $r_0,\ Ar_0,\ldots,\ A^ir_0$. Так как векторы $r_0,\ r_1,\ldots,\ r_i$ ортогональны, то обращение в нуль r_i возможно лишь тогда, когда векторы $r_0,\ Ar_0,\ldots,\ A^ir_0$ линейно зависимы, напр. когда в разложении r_0 по базису из собственных векторов A только i компонент отличны от нуля. Этим соображением можно руководствоваться при выборе начального приближения.

С. г. м. относится к классу методов, в к-рых за решение принимается вектор, минимизирующий нек-рый функционал. Для вычисления этого вектора строится итерационная последовательность, сходящаяся к точке минимума. Последовательность $x_0,\ x_1,\ldots,\ x_n$ в (2) осуществляет минимизацию функционала $f(x)=(Ax,\ x)-2(b,\ x)$. На i-м шаге процесса (2) вектор s_i совпадает с направлением скорейшего спуска (градиентом) для поверхности $f(x)=c$ в $(n-i)$-мерном эллипсоиде, представляющем собой сечение поверхности плоскостью, сопряженной направлениям $s_1,\ s_2,\ldots,\ s_{i-1}$.

Описанный процесс С. г. м. или близкие к нему имеют много различных названий: метод Ланцоша, метод Хестенса, метод Штифеля и т. д. Из всех методов, осуществляющих минимизацию функционала, С. г. м. является наилучшим в стратегич. плане: он дает максимальную минимизацию за n шагов. Однако вычисления (2) в реальных условиях машинной арифметики чувствительны к ошибкам округления, и условия (1) могут быть нарушены. Это препятствует окончанию процесса за n шагов. Поэтому С. г. м. продолжают за n итераций, рассматривая его как бесконечный итерационный процесс минимизации функционала. Известны модификации схемы вычислений (2), более устойчивые к ошибкам округления (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1963; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 2, М., 1960; [3] Воеводин В. В., Численные методы алгебры, М., 1966; [4] Бахвалов Н. С., Численные методы, М., 1974.

Г. Д. Ким.

СОСТАВНОЙ ИДЕАЛ — идеал кольца или алгебры, не являющийся *простым идеалом*.

СОСТОЯТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА — сокращенный вариант термина «состоятельная последовательность оценок», применяемый к последовательности статистич. оценок, сходящейся к оцениваемой величине.

В теории вероятностей существуют несколько различных понятий сходимости, из к-рых для теории статистич. оценивания наиболее важными являются сходимость по вероятности и сходимость с вероятностью 1. Если последовательность статистич. оценок сходится по вероятности к оцениваемой величине, то про эту последовательность говорят, что она является «слабо состоятельной», или просто «состоятельной», употребляя термин «сильная состоятельность» по отношению к последовательности оценок, сходящейся с вероятностью 1 к оцениваемой величине.

Пример 1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково нормально $N(a, \sigma^2)$ распределенные случайные величины. Тогда статистики

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$$

и

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

являются С. о. для параметров a и σ^2 соответственно.

Пример 2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же вероятностному закону, функция распределения к-рого есть $F(x)$. В этом случае функция эмпирич. распределения $F_n(x)$, построенная по исходной выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$, является С. о. функции распределения $F(x)$.

Пример 3. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же закону Коши, плотность вероятности к-рого есть $p(x) = 1/[1+(x-\mu)^2]$. Для любого натурального числа n статистика

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$$

подчиняется исходному закону Коши и, следовательно, последовательность оценок $\overline{X}_n$ не сходится по вероятности к μ, т. е. в данном примере последовательность $\overline{X}_n$ не является состоятельной. С. о. для μ в данном случае является выборочная медиана.

С. о. обладает следующим свойством: если f — непрерывная функция, а T_n — С. о. параметра θ, то в свою очередь $f(T_n)$ является С. о. для $f(\theta)$. Наиболее распространенный метод получения точечных статистич. оценок — *максимального правдоподобия метод* — приводит к С. о. Следует отметить, что если существует С. о. T_n параметра θ, то она не является единственной, т. к. любая оценка вида $T_n + \beta_n$, где β_n — последовательность случайных величин, сходящаяся по вероятности к нулю, является С. о. для θ. Этот факт принижает значение понятия С. о.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

М. С. Никулин.

СОСТОЯТЕЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ — *статистический критерий*, достоверно отличающий проверяемую гипотезу от альтернативы при неограниченном увеличении числа наблюдений.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$, и пусть проверяется гипотеза $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ против альтернативы $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$, при этом ошибка 1-го рода (см. *Значимости уровень*) задана заранее и равна α $(0 < \alpha < 0{,}5)$. Далее, пусть по первым n наблюдениям $X_1, X_2, \ldots, X_n$ построен статистич. критерий уровня α для проверки H_0 против H_1 и пусть $\beta_n(\theta)$, $\theta \in \Theta$, — его *мощности*

критерия функция, показывающая при каждом θ, с какой вероятностью этот критерий отклоняет H_0, если случайная величина X_i подчиняется закону P_θ, при этом $\beta_n(\theta) \leqslant \alpha$ при всех $\theta \in \Theta_0$. Неограниченно увеличивая число наблюдений, можно построить последовательность статистич. критериев заданного уровня α, предназначенных для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1, при этом соответствующая им последовательность функций мощности $\{\beta_n(\theta)\}$ будет удовлетворять условию

$$\beta_n(\theta) \leqslant \alpha \text{ для любого } n \text{ при всех } \theta \in \Theta_0.$$

Если в этих условиях последовательность функций мощности $\{\beta_n(\theta)\}$ такова, что для любого фиксированного $\theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$

$$\lim_{n \to \infty} \beta_n(\theta) = 1,$$

то говорят, что построена состоятельная последовательность статистич. критериев уровня α для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1. Часто, допуская при этом определенную вольность, говорят, что построен С. к. Так как функция $\beta_n(\theta)$, $\theta \in \Theta_1$, являющаяся сужением функции мощности $\beta_n(\theta)$, $\theta \in \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$, на множество Θ_1, есть мощность статистич. критерия, построенного по наблюдениям $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то в терминах мощности свойство состоятельности последовательности статистич. критериев выражается в том, что соответствующие им мощности $\beta_n(\theta)$, $\theta \in \Theta_1$, сходятся на Θ_1 к функции, тождественно равной 1 на Θ_1.

Пример. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, функция распределения к-рых принадлежит семейству $H = \{F(x)\}$ всех непрерывных функций распределения на $\mathbb{R}^1$, и пусть $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ — вектор положительных вероятностей такой, что $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$. Далее, пусть $F_0(x)$ — произвольная функция распределения из семейства H. Функция распределения $F_0(x)$ и вектор p однозначно определяют разбиение числовой оси на k полуинтервалов $(x_0; x_1], (x_1; x_2], \ldots, (x_{k-1}; x_k]$, где

$$x_0 = -\infty, \quad x_k = +\infty,$$

$$x_i = F_0^{-1}(p_1 + \ldots + p_i) = \inf\{x : F_0(x) \geqslant p_1 + \ldots + p_i\},$$

$$i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Иначе говоря, границы полуинтервалов суть квантили функции распределения $F_0(x)$. С помощью полуинтервалов $(x_0; x_1], (x_1; x_2], \ldots, (x_{k-1}; x_k]$ семейство H можно разбить на два непересекающихся множества H_0 и H_1 по следующему правилу: функция распределения F из H принадлежит H_0 тогда и только тогда, если

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

в противном случае $F \in H_1$. Пусть, далее, $\nu_n = (\nu_{n1}, \nu_{n2}, \ldots, \nu_{nk})$ — вектор частот, получающийся в результате группировки первых n случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n > k)$ по полуинтервалам $(x_0; x_1], \ldots, (x_{k-1}; x_k]$. В этих условиях для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой функция распределения случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ принадлежит множеству H_0, против альтернативы H_1, по к-рой функция распределения случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ принадлежит множеству H_1, можно воспользоваться критерием «хи-квадрат», основанным на статистике

$$X_n^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\nu_{ni} - np_i)^2}{np_i}.$$

Согласно критерию «хи-квадрат» с уровнем значимости α $(0 < \alpha < 0{,}5)$, гипотезу H_0 следует отвергнуть, коль скоро $X_n^2 > \chi_{k-1}^2(\alpha)$, где $\chi_{k-1}^2(\alpha)$ — верхняя α-квантиль «хи-квадрат» распределения с $k-1$ степенями свободы.

Из общей теории критериев типа «хи-квадрат» следует, что при справедливости гипотезы H_1

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{X_n^2 > \chi^2_{k-1}(\alpha) \mid H_1\right\} = 1,$$

что и означает состоятельность критерия «хи-квадрат» для проверки H_0 против H_1. Если же в множестве H_0 выделить произвольное непустое подмножество H_0' и рассмотреть задачу статистич. проверки гипотезы H_0' против альтернативы $H_0''=H_0\setminus H_0'$, то, как очевидно, последовательность критериев «хи-квадрат», основанных на статистиках X_n^2, не будет состоятельной, т. к.

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{X_n^2 > \chi^2_{k-1}(\alpha) \mid H_0\right\} \leqslant \alpha < 1$$

и, в частности,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{X_n^2 > \chi^2_{k-1}(\alpha) \mid H_0''\right\} \leqslant \alpha < 1.$$

Лит.: [1] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.
М. С. Никулин.

СОФОКУСНЫЕ КРИВЫЕ, конфокальные кривые,— линии 2-го порядка, имеющие общие фокусы. Если F и F' — две данные точки плоскости, то через каждую точку плоскости проходит один эллипс и одна гипербола, имеющие F и F' своими фокусами (рис. 1).

Каждый эллипс ортогонален любой софокусной с ним гиперболе, т. е. пересекается с ней (в четырех точках) под прямым углом. Все множество софокусных эллипсов и гипербол в надлежащей системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1, \qquad (*)$$

где c — расстояние фокусов от начала координат, а λ — переменный параметр. При $\lambda > c^2$ это уравнение определяет эллипс, при $0<\lambda<c^2$ — гиперболу (при $\lambda<0$ — мнимую линию 2-го порядка). Если один из фокусов стремится к бесконечности, то в пределе получаются два



Рис. 1.

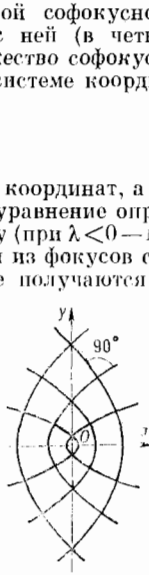


Рис. 2.

семейства софокусных парабол (рис. 2); любые две параболы, относящиеся к разным семействам, также ортогональны друг другу. При помощи софокусных эллипсов и гипербол на плоскости вводится система так наз. эллиптических координат. Именно, если $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, то, подставляя ее координаты x и y в уравнение (*), получают квадратное уравнение для λ; корни его λ_1, λ_2 и наз. эллиптич. координатами точки M. Сами софокусные эллипсы и гиперболы составляют координатную сеть эллиптической координатной системы, т. е. определяются уравнениями $\lambda_1=\text{const}$, $\lambda_2=\text{const}$. *БСЭ-з.*

СОХОЦКОГО ТЕОРЕМА, теорема Вейерштрасса, теорема Вейерштрасса — Сохоцкого — Казорати: каково бы ни было комплексное число w (допускается и $w=\infty$), существует такая последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к *су-*

щественно особой точке a аналитич. функции $w=f(z)$ комплексного переменного z, что

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=w.$$

Эта С. т. явилась первым результатом, характеризующим предельное множество $C(f, a)$ аналитич. функции f в существенно особой точке a: согласно С. т., $C(f, a)$ тотально, т. е. совпадает с расширенной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}_w$ переменного w. С. т. доказана Ю. В. Сохоцким [1] (см. также [2]). К. Вейерштрасс изложил эту теорему в работе 1876 (см. [3]). Дополнительная информация о поведении аналитич. функции в окрестности существенно особой точки содержится в *Пикара теореме*.

На аналитич. отображения $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$, $n>1$, *пространства* $\mathbb{C}^n$ *многих комплексных переменных* $z=(z_1, \ldots, z_n)$ С. т. непосредственно не распространяется (см. [5]).

Лит.: [1] Сохоцкий Ю. В., Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями, СПБ, 1868; [2] Casorati F., Teorica delle funzioni di variabili complesse, Pavia, 1868; [3] Weierstrass K., Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, Math. Werke, Bd 2, B., 1895, S. 77—124; [4] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [5] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

СОХОЦКОГО ФОРМУЛЫ — формулы, найденные впервые Ю. В. Сохоцким [1] и выражающие граничные значения интеграла типа Коши. С более полными доказательствами, но значительно позже С. ф. были получены независимо Й. Племелем [2].

Пусть $\Gamma: t=t(s)$, $0\leqslant s\leqslant l$, $t(0)=t(l)$, — замкнутая гладкая жорданова кривая на плоскости комплексного переменного z, $\varphi(t)$ — заданная на Γ комплексная плотность интеграла типа Коши, относительно к-рой предполагается, что она удовлетворяет условию Гёльдера

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\leqslant C\,|t_1-t_2|^{\alpha},\quad 0<\alpha\leqslant 1;$$

D^+ — область внутри Γ, D^- — внешняя область;

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z},\quad z\in\Gamma, \tag{1}$$

— интеграл типа Коши. Тогда для любой точки $t_0\in\Gamma$ существуют пределы

$$\Phi^+(t_0)=\lim_{z\to t_0,\ z\in D^+}\Phi(z),$$

$$\Phi^-(t_0)=\lim_{z\to t_0,\ z\in D^-}\Phi(z),$$

к-рые выражаются формулами Сохоцкого

$$\left.\begin{aligned}\Phi^+(t_0)&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{2}\varphi(t_0),\\ \Phi^-(t_0)&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}-\frac{1}{2}\varphi(t_0).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

или, иначе,

$$\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},$$

$$\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)=\varphi(t_0).$$

Интеграл вдоль Γ в правых частях С. ф. понимается в смысле главного значения по Коши и наз. сингулярным интегралом. Таким образом, принимая при высказанных условиях $\Phi^+(t)$ (или $\Phi^-(t)$) в качестве значений интеграла $\Phi(z)$ на Γ, получают функцию $\Phi(z)$, непрерывную в замкнутой области $\overline{D}^+=D^+\cup\Gamma$ (соответственно и $\overline{D}^+=D^-\cup\Gamma$); в целом $\Phi(z)$ иногда описывают как кусочно аналитич. функцию.

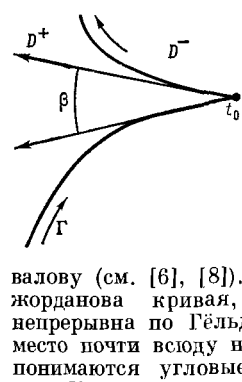
Если $\alpha<1$, то $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ также непрерывны по Гёльдеру на Γ с тем же показателем α, а если $\alpha=1$, то с

любым показателем $\alpha'<1$. Для угловых точек t_0 (см. рис.) кусочно гладкой кривой Г С. ф. принимают вид

$$\Phi^+(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\left(1-\frac{\beta}{2\pi}\right)\varphi(t_0),$$
$$\Phi^-(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}-\frac{\beta}{2\pi}\varphi(t_0),\ 0\leqslant\beta\leqslant 2\pi. \qquad (3)$$

В случае разомкнутой кусочно гладкой кривой Г С. ф. (2) и (3) остаются в силе для внутренних точек дуги Г.

С. ф. играют основную роль при решении граничных задач теории функций и сингулярных интегральных уравнений (см. [3], [5]), а также при решении различных прикладных задач теории функций (см. [4]).



Естественно возникает вопрос о возможном расширении условий на контур Г и плотность $\varphi(t)$ с тем, чтобы С. ф., хотя бы с некрыми оговорками, сохраняли силу. Наиболее значительные результаты в этом направлении принадлежат В. В. Голубеву и И. И. Привалову (см. [6], [8]). Напр., пусть Г — спрямляемая жорданова кривая, а плотность $\varphi(t)$ по-прежнему непрерывна по Гёльдеру на Г. Тогда С. ф. (2) имеют место почти всюду на Г, причем под $\Phi^+(t_0)$ и $\Phi^-(t_0)$ понимаются угловые граничные значения интеграла типа Коши соответственно изнутри и извне Г, но функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, вообще говоря, уже не непрерывны в замкнутых областях $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$.

О пространственных аналогах С. ф. см. в [7].

Лит.: [1] Сохоцкий Ю. В., Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды, СПБ, 1873; [2] Plemelj J., «Monatsh. Math. und Phys.», 1908, Bd 19, S. 205—10, 211—45; [3] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [4] его же, Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд., М., 1966; [5] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977; [6] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950; [7] Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972; [8] Хведелидзе Б. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики, т. 7, М., 1975, с. 5—162. *Е. Д. Соломенцев.*

СОХРАНЕНИЯ ОБЛАСТИ ПРИНЦИП — свойство голоморфных функций в областях комплексной плоскости: множество значений всякой непостоянной голоморфной функции в области $D\subset\mathbb{C}$ также является областью, т. е. открыто и связно. Основным здесь является свойство открытости образа, к-рое следует из *Руше теоремы* или из *аргумента принципа*. С. о. п. можно рассматривать как обобщение *максимума модуля принципа* для голоморфных функций.

С. о. п. справедлив для голоморфных функций на произвольном комплексном многообразии: множество значений любой непостоянной голоморфной функции на связном комплексном многообразии X есть область на комплексной плоскости. Он выполняется также для голоморфных отображений комплексных многообразий в римановы поверхности. Однако голоморфные отображения $f: X\to Y$ в комплексные многообразия Y размерности больше 1 в общем не являются открытыми: если f непостоянно, но, скажем, ранг f всюду меньше $\dim Y$, то образ $f(X)\subset Y$ вообще не имеет внутренних точек. Открытость может нарушаться и в случае, когда $\operatorname{rank} f<\dim Y$ на множествах малой размерности. Напр., при отображении

$$(z_1,\ z_2)\longrightarrow(z_1,\ z_1z_2)$$

пространства $\mathbb{C}^2$ в себя образом будет неоткрытое множество $\mathbb{C}^2\setminus\{w_1=0,\ w_2\neq 0\}$. С. о. п. для голоморфных отображений выполняется, если условие непостоян-

ности f заменять более сильными требованиями, одним из самых простых является условие нульмерности множества точек, в к-рых rank $f<\dim Y$.

Лит.: [1] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд., М., 1977; [2] Геннинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969. *Е. М. Чирка.*

СОЧЕТАНИЕ из m элементов по n — подмножество мощности n нек-рого исходного конечного множества мощности m. Число С. из m элементов по n, обозначаемое C_m^n или $\binom{m}{n}$, равно

$$\frac{m!}{n!\,(m-n)!}\,.$$

Производящая функция для последовательности C_m^n, $n=0, 1, \ldots, m$, $C_m^0=1$, имеет вид

$$\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n=(1+x)^m.$$

С. можно рассматривать так же как неупорядоченную выборку объема n из генеральной совокупности из m элементов. В комбинаторике С.— это класс эквивалентности *размещений* из m элементов по n, при этом два размещения объема n из данного m-элементного множества считаются эквивалентными, если они состоят из одних и тех же элементов, взятых одно и то же число раз. В случае, когда берутся размещения без повторений, каждый класс эквивалентности определяется множеством элементов любого размещения из этого класса и поэтому может рассматриваться как С. В случае размещений с повторениями приходят к обобщению понятия С., и тогда класс эквивалентности размещений с повторениями наз. сочетанием с повторениями. Число С. с повторениями из m по n равно $\binom{m+n-1}{n}$, а производящая функция для этих чисел имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+k-1}{k}x^k=(1-x)^{-m}.$$

Лит.: [1] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [2] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963. *В. М. Михеев.*

СПАРИВАНИЕ — отображение, заданное на декартовом произведении двух множеств; в зависимости от конкретных условий на это отображение накладываются требования билинейности, непрерывности и др. С. $X\times Y\to Z$ определяет отображение множества X во множество функций, действующих из Y в Z (или в нек-рое его подмножество, составленное, напр., из гомоморфизмов, непрерывных отображений и т. д.). Утверждения о свойствах так получаемого отображения составляют суть различных теорем двойственности в алгебре, топологии и функциональном анализе.

М. Ш. Фарбер.

СПЕКТР оператора — совокупность $\sigma(A)$ чисел $\lambda\in\mathbb{C}$, для к-рых оператор $A-\lambda I$ не имеет всюду определенного ограниченного обратного. Здесь A — линейный оператор в комплексном банаховом пространстве X, I — тождественный оператор в X. Если A не замкнут в X, то $\sigma(A)=\mathbb{C}$, поэтому обычно рассматривают С. замкнутых операторов (для операторов, допускающих замыкание, иногда их С. наз. спектр замыкания).

Если $A-\lambda I$ не инъективен или не сюръективен, то $\lambda\in\sigma(A)$. В первом случае λ наз. собственным значением оператора A; совокупность $\sigma_p(A)$ собственных значений наз. точечным спектром. Во втором случае λ наз. точкой непрерывного спектра $\sigma_c(A)$ или остаточного спектра $\sigma_r(A)$ в зависимости от того, плотно или не плотно в X подпространство $(A-\lambda I)X$.

Существуют и другие классификации точек С., напр. $\sigma(A)=\sigma_a(A)\cup\sigma_d(A)$, где $\sigma_a(A)$ состоит из аппрокси-

мативных собственных значений ($\lambda \in \sigma_a(A)$, если существуют $\{x_n\} \subset X$, $\|x_n\| = 1$,

$$\|(A-\lambda)\,x_n\| \longrightarrow 0),$$

$$\sigma_d(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Ker}(A-\lambda I) = 0,$$

$$\overline{(A-\lambda I)\,X} = (A-\lambda I)\,X \neq X\}.$$

При этом $\sigma_d(A) \subset \sigma_r(A)$ и, значит, $\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subset \sigma_a(A)$. В теории возмущений рассматривается предельный спектр $\sigma_{\lim}(A)$, состоящий из предельных точек $\sigma(A)$ и изолированных собственных значений бесконечной кратности, вейлевский спектр, равный пересечению С. всех компактных возмущений, и др.

Если оператор A ограничен, то $\sigma(A)$ компактен и не пуст (в этом случае $\sigma(A)$ совпадает со *спектром* элемента A банаховой алгебры $B(X)$); в общем случае можно утверждать лишь, что $\sigma(A)$ замкнут в $\mathbb{C}$. На множестве $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ определена аналитическая $B(X)$-значная функция $R_A(\lambda) = (A-\lambda I)^{-1}$, наз. резольвентой A ($\rho(A)$ наз. резольвентным множеством). С помощью резольвенты строится функциональное исчисление от оператора A на функциях, аналитических в окрестности $\sigma(A)$:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)\, R_A(\lambda)\, d\lambda,$$

где Γ — контур, охватывающий $\sigma(A)$ (неограниченность A накладывает на выбор Γ нек-рые ограничения); дополнительные условия на геометрию С. и асимптотику резольвенты позволяют расширить это функциональное исчисление.

С. функций от оператора определяются формулой

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

(теорема об отображении спектра); С. $\sigma(A^*)$ сопряженного оператора совпадает с $\sigma(A)$, если A ограничен, а в общем случае $\sigma(A^*) \subset \sigma(A)$.

Если $\dim X < \infty$, то $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ и X раскладывается в прямую сумму инвариантных относительно A подпространств, в каждом из к-рых A индуцирует оператор с одноточечным С.; поисками бесконечномерных аналогов такого разложения занимается *спектральная теория* операторов. См. также *Спектральный анализ*, *Спектральный синтез*, *Спектральный оператор*, *Спектральное разложение*.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., т. 1, М., 1962; [2] Като Т., Теория возмущений линейных операторов, пер. с англ., М., 1972.

В. С. Шульман.

СПЕКТР, прямой и обратный спектр в категории $\mathscr{C}$. Прямым спектром $\{Y^\alpha, f^\beta_\alpha\}$ в категории $\mathscr{C}$ наз. семейство объектов $\{Y^\alpha\}$ с индексами из направленного множества $\Lambda = \{\alpha\}$ и семейство морфизмов $\{f^\beta_\alpha : Y^\alpha \to Y^\beta\}$ из $\mathscr{C}$ (определенных при $\alpha \leqslant \beta$), для к-рых:

1) $f^\alpha_\alpha = 1_{Y^\alpha} : Y_\alpha \longrightarrow Y^\alpha$, $\alpha \in \Lambda$;

2) $f^\gamma_\alpha = f^\gamma_\beta \circ f^\beta_\alpha : Y^\alpha \longrightarrow Y^\gamma$, $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$.

Можно определить категорию $\operatorname{dir}\{Y^\alpha, f^\beta_\alpha\}$, объектами к-рой служат семейства морфизмов $\{g_\alpha : Y^\alpha \to Z\}_{\alpha \in \Lambda}$ таких, что $g_\alpha = g_\beta \circ f^\beta_\alpha$, если $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in \Lambda$. В этой категории морфизмом объекта $\{g_\alpha : Y^\alpha \to Z\}$ в объект $\{g'_\alpha : Y^\alpha \to Z'\}$ наз. такой морфизм $h : Z \to Z'$ категории $\mathscr{C}$, что $hg_\alpha = g'_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$. Инициальный (начальный) объект категории $\operatorname{dir}\{Y^\alpha, f^\beta_\alpha\}$ наз. пределом прямого спектра $\{Y^\alpha, f^\beta_\alpha\}$. Пределы прямых спектров (прямой спектр) множеств, топологич. пространств, R-модулей являются примерами прямых спектров в соответствующих категориях.

Двойственным образом, **обратным спектром** $\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$ в категории $\mathscr{C}$ наз. семейство объектов $\{Y_\alpha\}$ с индексами из направленного множества $\Lambda=\{\alpha\}$ и семейство морфизмов $\{f_\alpha^\beta : Y_\beta \to Y_\alpha\}$ категории $\mathscr{C}$ (определенных, если $\alpha \leqslant \beta$), для к-рых:

1) $f_\alpha^\alpha = 1_{Y\alpha} : Y_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$;

2) $f_\alpha^\gamma = f_\alpha^\beta \circ f_\beta^\gamma : Y_\gamma \to Y_\alpha$, $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$.

Можно определить категорию inv $\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$, объектами к-рой являются занумерованные семейства таких морфизмов $\{g_\alpha : X \to Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, что $g_\alpha = f_\alpha^\beta \circ g_\beta$, если $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in \Lambda$, а морфизмом объекта $\{g_\alpha : X \to Y_\alpha\}$ в объект $\{g'_\alpha : X' \to Y_\alpha\}$ является морфизм $h : X \to X'$ категории $\mathscr{C}$ такой, что $g'_\alpha h = g_\alpha$ при $\alpha \in \Lambda$. Терминальный (интегральный) объект категории inv $\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$ наз. **пределом обратного спектра** $\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$. Пределы обратных спектров (обратный спектр) множеств, групп, R-модулей являются пределами обратных спектров в соответствующих категориях.

Понятие обратного спектра — категорное обобщение топологич. понятия *проекционного спектра*.

Лит.: [1] Спеньер, *Алгебраическая топология*, пер. с англ., М., 1971.

М. И. Войцеховский.

СПЕКТР элемента банаховой алгебры — совокупность чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, для к-рых $a-\lambda e$ необратим (алгебра предполагается комплексной, a — данный элемент, e — единица алгебры). С. — непустое компактное множество (теорема Гельфанда — Мазура). В случае коммутативной алгебры С. совпадает с множеством значений на этом элементе всех характеров алгебры.

На понятии С. основывается построение функционального исчисления от элементов банаховой алгебры: естественное исчисление многочленов от элемента a банаховой алгебры A продолжается до непрерывного гомоморфизма кольца ростков голоморфных в окрестности спектра $\sigma(a)$ функций в A. Необходимость рассматривать функции от нескольких переменных приводит к понятию С. системы элементов банаховой алгебры. Если A коммутативна, то, по определению, С. системы $\{a_i\}_{i=1}^n$ ее элементов — это множество $\sigma(\{a_i\}) \subset \mathbb{C}^n$ всех наборов вида $\{\varphi(a_i)\}_{i=1}^n$, где φ — *характер* A. В общем случае определяют левый и правый спектры системы $\{a_i\}_{i=1}^n$, включая в них те наборы $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$, для к-рых система $\{a_i - \lambda_i e\}$ содержится в нетривиальном левом (правом) идеале алгебры; С. системы элементов наз. объединение левого и правого спектров. Основные результаты многопараметрич. спектральной теории, а также иные подходы к понятию С. системы элементов см. в [1] — [4].

Лит.: [1] Бурбаки Н., Спектральная теория, пер. с франц., М., 1972; [2] Harte R., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1972, v. 78, p. 871—75; [3] Taylor J., «J. Funct. Anal.», 1970, v. 6, p. 172—91; [4] Żelazko W., «Studia Math.», 1979, t. 64, p. 249—61.

В. С. Шульман.

СПЕКТР C^*-АЛГЕБРЫ — множество классов унитарной эквивалентности неприводимых представлений C^*-алгебры. В спектр вводят топологию, считая замыканием любого подмножества совокупность всех (классов эквивалентности) представлений, ядра к-рых содержат пересечение ядер всех представлений этого множества. Для коммутативной C^*-алгебры спектр как топологич. пространство совпадает с пространством *характеров* (гомеоморфен пространству максимальных идеалов). В общем случае спектр C^*-алгебры является базой разложения ее представлений в прямые интегралы неприводимых представлений.

Лит.: [1] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974.

В. С. Шульман.

СПЕКТР ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ $\{T_t\}$ с фазовым пространством X и инвариантной мерой μ — общее название для различных спектральных инвариантов и спектральных свойств соответствующей группы (или полугруппы) унитарных (изометрических) операторов сдвига

$$(U_t f)(x) = f(T_t x)$$

в гильбертовом пространстве $L_2(X, \mu)$. Для динамич. системы в узком смысле слова — *измеримого потока* $\{T_t\}$ или *каскада* $\{T^n\}$ — речь идет о спектральных инвариантах одного *нормального оператора*: во втором случае — унитарного оператора $(U_T f) = f(Tx)$, а в первом — производящего самосопряженного оператора A однопараметрич. группы унитарных операторов $\{U_t\}$ (согласно теореме Стоуна, $U_t = e^{itA}$).

«Спектральная» терминология в теории динамич. систем несколько отличается от обычной. *Спектр* U_T (или A) в обычном смысле, т. е. множество тех λ, при к-рых оператор $U_T - \lambda E$ (или $A - \lambda E$) не имеет ограниченного обратного, для всех практически интересных T и $\{T_t\}$ совпадает с окружностью $|\lambda| = 1$ или с $\mathbb{R}$ (см. [1], [2]). Поэтому: а) спектр в обычном смысле не содержит информации о свойствах данной динамич. системы, отличающих ее от других; б) у спектра в обычном смысле слова практически никогда нет изолированных точек, так что спектр является непрерывным (в обычном смысле слова), причем это опять-таки не содержит информации о специфич. свойствах данной системы. По этой причине в теории динамич. систем говорят о непрерывном спектре в случае, когда у U_T или A нет собственных функций, кроме констант; о дискретном спектре — когда собственные функции образуют полную систему в $L_2(X, \mu)$; о смешанном спектре — в остальных случаях.

Свойства динамич. системы, к-рые определяются ее С. д. с., наз. спектральными. Таковы *эргодичность* (она эквивалентна тому, чтобы у U_T — соответственно у A — собственное значение 1 — соответственно 0 — было однократным) и *перемешивание*. Имеется полная метрич. классификация эргодич. динамич. систем с дискретным спектром; такая система определяется С. д. с. с точностью до метрич. изоморфизма [3]. Аналогичная теория построена и для более общих групп преобразований, нежели $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ (см. [4]). В некоммутативном случае формулировки усложняются, причем С. д. с. уже не полностью определяет систему. Если спектр не дискретный, то ситуация гораздо сложнее.

Лит.: [1] Ionescu Tulcea A., в кн.: Ergodic theory, N. Y.— L., 1963, p. 273—92; [2] Goldstein S., в кн.: Internat. conference on dynamical systems in math. physics, P., 1976 («Astérisque», v. 40); [3] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [4] Макки Г. У., в кн.: Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф., Потоки на однородных пространствах, М., 1966, с. 195—206.

Д. В. Аносов.

СПЕКТР КОЛЬЦА — окольцованное топологич. пространство Spec A, точками к-рого являются простые идеалы $\mathfrak{p}$ кольца A с *Зарисского топологией* на нем (к-рая наз. также спектральной топологией). При этом предполагается, что кольцо A коммутативно и с единицей. Элементы кольца A можно рассматривать как функции на пространстве Spec A, полагая $a(\mathfrak{p}) = a \bmod \mathfrak{p} \in A/\mathfrak{p}$. Пространство Spec A несет пучок локальных колец $\mathcal{O}(\mathrm{Spec}\, A)$, называемый структурным пучком. Для точки $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ слой пучка $\mathcal{O}(\mathrm{Spec}\, A)$ над $\mathfrak{p}$ — это локализация $A_{\mathfrak{p}}$ кольца A относительно $\mathfrak{p}$.

Любому гомоморфизму колец $\varphi : A \to A'$, переводящему единицу в единицу, отвечает непрерывное отображение $\varphi^* : \mathrm{Spec}\, A' \to \mathrm{Spec}\, A$. Если N — нильрадикал кольца A, то естественное отображение $\mathrm{Spec}\, A/N \to \mathrm{Spec}\, A$ является гомеоморфизмом топологич. пространств.

Для ненильпотентного элемента $f \in A$ пусть $D(f) = \operatorname{Spec} A \setminus V(f)$, где $V(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \in \mathfrak{p}\}$. Тогда окольцованные пространства $D(f)$ и $\operatorname{Spec} A_{(f)}$, где $A_{(f)}$ — локализация A относительно f, изоморфны. Множества $D(f)$ паз. главными открытыми множествами. Они образуют базис топологич. пространства $\operatorname{Spec} A$. Точка $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ замкнута тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца A. Сопоставляя точке $\mathfrak{p}$ ее замыкание $\bar{\mathfrak{p}}$ в $\operatorname{Spec} A$, получают взаимно однозначное соответствие между точками пространства $\operatorname{Spec} A$ и множеством замкнутых неприводимых подмножеств в $\operatorname{Spec} A$. Пространство $\operatorname{Spec} A$ квазикомпактно, но, как правило, не является хаусдорфовым. Размерностью пространства $\operatorname{Spec} A$ наз. наибольшее n, для к-рого существует цепочка различных замкнутых неприводимых множеств $Z_0 \subset \ldots \subset Z_n \subseteq \operatorname{Spec} A$.

Многие свойства кольца A можно охарактеризовать в терминах топологич. пространства $\operatorname{Spec} A$. Напр., кольцо A нётерово тогда и только тогда, когда $\operatorname{Spec} A$ — нётерово пространство; пространство $\operatorname{Spec} A$ неприводимо тогда и только тогда, когда кольцо A/N является областью целостности; размерность $\operatorname{Spec} A$ совпадает с размерностью Крулля кольца A и т. д.

Иногда рассматривают максимальный спектр $\operatorname{Specm} A$ — подпространство пространства $\operatorname{Spec} A$, состоящее из замкнутых точек. Для градуированного кольца A рассматривают также проективный спектр $\operatorname{Proj} A$. Если $A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$, то точки $\operatorname{Proj} A$ — это простые однородные идеалы $\mathfrak{p}$ кольца A такие, что $\mathfrak{p} \not\supset \sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972. *Л. В. Кузьмин.*

СПЕКТР МАТРИЦЫ — совокупность ее *собственных значений*. См. также *Характеристический многочлен* матрицы.

СПЕКТР ПРОСТРАНСТВ — представляющий объект для обобщенной теории когомологий, введен в [1].

Спектром пространств $\boldsymbol{M}$ наз. последовательность топологических (как правило, клеточных) пространств $\{M_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ вместе с отображениями $s_n : \Sigma M_n \to M_{n+1}$, где Σ — *надстройка*. С. п. образуют категорию; при этом морфизм спектра $\boldsymbol{M}$ в спектр $\boldsymbol{N}$ — это, грубо говоря, «кофинальная часть» нек-рой функции $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$, к-рая задается семейством отображений $f_n : M_n \to N_n$ с $t_n \circ \Sigma f_n = f_{n+1} \circ s_n$ (t_n относится к $\boldsymbol{N}$ так, как s_n к M). Определяются также гомотопные морфизмы, вводится понятие гомотопич. эквивалентности С. п. и строится гомотопич. категория С. п. [2]. Вводятся *Постникова системы* С. п.

Надстройкой $\Sigma \boldsymbol{M}$ над С. п. $\boldsymbol{M}$ наз. С. п. $\Sigma \boldsymbol{M} = \{N_n\} = \Sigma M_n$. Пусть $(\Sigma^{-1}\boldsymbol{M})_n = M_{n-1}$, тогда Σ и Σ^{-1} — гомотопически взаимно обратные функторы, так что в категории С. п. в отличие от категории пространств функтор надстройки обратим, и это обстоятельство делает удобной категорию С. п. Вообще, в категории С. п. все рассуждения, связанные со стабилизацией (напр., построение спектральной последовательности Адамса), приобретают естественный вид.

Примеры С. п. 1) Для любого пространства X определяется С. п. $\boldsymbol{X} = \{M_n\}$, где $M_n = *$ при $n < 0$ и $M_n = \Sigma^n X$ при $n \geqslant 0$, а s_n есть естественное отождествление $\Sigma(\Sigma^n X) \to \Sigma^{n+1}(X)$. Так, для $X = S^0$ возникает спектр сфер $\{S^n\}$.

2) Спектр пространств Эйленберга — Маклейна $H(\pi)$ (или $\boldsymbol{EM}(\pi)$), где π — абелева группа. Гомотопич. эквивалентность $\omega_n : K(\pi, n) \to \Omega K(\pi, n+1)$, где $K(\pi, n)$ — *Эйленберга — Маклейна пространство*, а ΩX — *петель пространство* над X, задает сопряженное ото-

бражение $s_n : \Sigma K(\pi, n) \to K(\pi, n+1)$, так что имеем С. п. $\{K(\pi, n), S_n\}$. Этот С. п. представляет обычную теорию когомологий с коэффициентами в π.

3) Пусть X — такое пространство, что $\Omega^d X \simeq X$ для нек-рого $d>0$. Для $n=ad+b$, $0 \leqslant b \leqslant d$, $a \in \mathbb{Z}$ пусть $M_n = \Omega^{d-b} X$. Возникает последовательность $\{M_n\}$ вида $\{\ldots, X, \Omega^{d-1}X, \Omega^{d-2}X, \ldots, \Omega^1 X, X \simeq \Omega^d X, \ldots\}$. Гомотопич. эквивалентность $\omega : M_n \to \Omega M_{n+1}$ задает, как и в примере 2, отображение $s_n : \Sigma M_n \to M_{n+1}$, так что имеем С. п. Напр., для *классифицирующего пространства* $BU = \lim BU_n$, где U_n — унитарная группа, имеем $\Omega^2(BU \times \mathbb{Z}) \simeq BU \times \mathbb{Z}$ (теорема Ботта), и возникает С. п. $\{\ldots, U, BU \times \mathbb{Z}, U, BU \times \mathbb{Z}, \ldots\}$, представляющий комплексную K-теорию. Аналогичное верно и для вещественной K-теории ($\Omega^8(BO \times \mathbb{Z}_2) \simeq BO \times \mathbb{Z}_2$).

4) Всевозможные *Тома спектры*, представляющие *кобордизмы*.

Для двух С. п. $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ определено их приведенное произведение $\boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{N}$ (аналог обычного приведенного произведения пространств). Умножением в С. п. $\boldsymbol{M}$ наз. ассоциативный (в надлежащем смысле) морфизм $\boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$. С. п., снабженный умножением, наз. кольцевым, или мультипликативным, и представимая им теория когомологий мультипликативна.

Попытка преодоления трудностей, связанных с «плохой ассоциативностью» вышеупомянутого умножения, привела к пересмотру оснований теории С. п. Именно, в [6] введено понятие бескоординатного С. п. как семейства пространств $\{M_V\}$ (и соответствующих отображений), индексированного линейными подпространствами V из $\mathbb{R}^\infty = \lim_{n \to \infty} \mathbb{R}^n$. Категория бескоординатных С. п. изоморфна обычной категории С. п., но спаривание $\wedge$ в ней легче контролируется, и потому она играет важную роль при рассмотрении тонких геометрич. вопросов, связанных с высшими структурами в С. п. [6], ориентациями в теории когомологий и т. п.

Лит.: [1] Lima E., «Summa Brasiliens. Math.», 1959, с. 91—148; [2] Свитцер Р., *Алгебраическая топология — гомотопии и гомологии*, пер. с англ., М., 1984; [3] Адамс Дж., Бесконечнократные пространства петель, пер. с англ., М., 1982; [4] Мей Дж., «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, в. 6, с. 137—195; [5] May J., E_∞-ring spaces and E_∞-ring spectra, v. 577, N. Y., 1977.

Ю. Б. Рудяк.

СПЕКТРАЛЬНАЯ МЕРА — унитальный гомоморфизм нек-рой булевой алгебры множеств в булеву алгебру проекторов в банаховом пространстве. Всякий оператор T в банаховом пространстве X определяет С. м. на совокупности открыто-замкнутых подмножеств его спектра $\sigma(T)$ по формуле

$$E(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z\mathrm{I} - T)^{-1}\, dz,$$

где Γ — жорданова кривая, отделяющая α от $\sigma(T) \setminus \alpha$. При этом $TE(\alpha) = E(\alpha)T$ и $\sigma(T|E(\alpha)X) \subset \bar{\alpha}$. Построение удовлетворяющих этим условиям С. м. на более широких булевых алгебрах множеств — одна из основных задач *спектральной теории* линейных операторов.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 2— Спектральная теория, М., 1966, ч. 3— Спектральные операторы, М., 1974.

В. С. Шульман.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ, авторегрессионная спектральная оценка, — оценка $f_q^*(\lambda)$ *спектральной плотности* $f(\lambda)$ стационарного случайного процесса с дискретным временем такая, что фиксированное число q отвечающих ей автокорреляций низших порядков совпадает с соответствующими эмпирическими автокорреляциями, подсчитанными по данным наблюдений, и при этом удельная энтропия гауссовского случайного процесса со спектральной плотностью $f_q^*(\lambda)$ оказывается наибольшей возможной. Если из наблюде-

ний известны N выборочных значений x_t, $t=1, \ldots, N$, представляющих собой отрезок одной реализации действительного стационарного процесса X_t, имеющего спектральную плотность $f(\lambda)$, то С. о. м. э. $f_q^*(\lambda)$ будет определяться соотношениями

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos k\lambda f_q^*(\lambda)\, d\lambda = r_k^* \equiv$$

$$\equiv N^{-1} \sum_{j=1}^{N-k} x_j x_{j+k}, \qquad k=0, 1, \ldots, q, \qquad (1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f_q^*(\lambda)\, d\lambda = \max, \qquad (2)$$

где знак $\equiv$ означает «равно по определению». С. о. м. э. имеет вид

$$f_q^*(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi |1+\beta_1 \exp(i\lambda)+ \ldots + \beta_q \exp(iq\lambda)|^2}, \qquad (3)$$

где коэффициенты $\beta_1, \ldots, \beta_q, \sigma^2$ определяются из $q+1$ уравнений (1) (см. [1]). Формула (3) показывает, что С. о. м. э. совпадает с т. н. авторегрессионной спектральной оценкой (см. [2], [3]). Положительное целое число q в применении к С. о. м. э. играет роль, родственную той, к-рую играет обратная ширина спектрального окна в случае непараметрич. оценивания спектральной плотности с помощью сглаживания периодограммы (см. *Спектральное окно*, *Статистические задачи* теории случайных процессов). Имеются нек-рые методы оценивания оптимального значения q по данным наблюдений (см., напр., [1], [4], [5]). Значения коэффициентов $\beta_1, \ldots, \beta_q, \sigma^2$ могут быть найдены, в частности, с помощью решения системы уравнений Юла — Уокера

$$r_k^* + \sum_{j=1}^{q} \beta_j r_{|k-j|}^* = 0, \qquad k=1, \ldots, q, \qquad (4)$$

$$r_0^* + \sum_{j=1}^{q} \beta_j r_j^* = \sigma^2; \qquad (5)$$

существуют и другие, вычислительно более удобные, методы расчета этих коэффициентов (см., напр., [1], [4] — [6]).

С. о. м. э. и обобщающие их *спектральные оценки параметрические* в случае относительно небольшого объема выборки или спектральных плотностей сложной формы обладают определенными преимуществами перед непараметрич. оценками функции $f(\lambda)$: они обычно имеют более правильную форму и обладают лучшей разрешающей способностью, т. е. позволяют лучше различать близкие пики графика спектральной плотности (см. [1], [4] — [7]). Поэтому С. о. м. э. широко используются в прикладном *спектральном анализе* стационарных случайных процессов.

Лит.: [1] Modern spectrum analysis, N. Y., 1978; [2] Parzen E., «Radio Sci.», 1964, v. 68, p. 937—51; [3] Akaike H., «Ann. Inst. Stat. Math.», 1969, v. 21, № 3, p. 407—19; [4] Nonlinear methods of spectral analysis, B. — [a. o.], 1979; [5] Кей С. М., Марпл С. Л., «Тр. ин-та инж. электротехн. радиоэлектр.», 1981, т. 69, № 11, с. 5—51; [6] Методы спектрального оценивания. Тематич. вып., там же, 1982, т. 70, № 9; [7] Писаренко В. Ф., в сб.: Вычислительная сейсмология, в. 10, М., 1977, с. 118—49.

А. М. Яглом.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ — оценка спектральной плотности $f(\lambda)$ стационарного случайного процесса, отвечающая нек-рой фиксированной параметрич. модели $f(\lambda)$ (т. е. гипотезе о том, что функция $f(\lambda)$ принадлежит определенному семейству спектральных плотностей, описываемых конечным числом параметров). При нахождении С. о. п. данные наблюдений над процессом используются лишь для оценки неизвестных параметров модели, т. е. задача оценивания спектральной плотности здесь сводится к статистич. задаче оценки параметров. Наиболее широко используемой на практике С. о. п. является *спектральная оценка максимальной энтропии*, отвеча-

ющая допущению, что функция $[f(\lambda)]^{-1}$ представляет собой квадрат нек-рого тригонометрич. многочлена фиксированного порядка. Более общий класс С. о. п., сравнительно часто применяющийся в прикладных задачах, опирается на использование модели *смешанного процесса авторегрессии-скользящего среднего*, т. е. на предположение о том, что $f(\lambda)$ представляет собой отношение квадратов модулей двух тригонометрич. многочленов фиксированных порядков (см. [1]—[3]).

Лит.: [1] Nonlinear methods of spectral analysis, B.— [a. o.], 1979; [2] Кей С. М., Марпл С. Л., «Тр. ин-та инж. электротехн. радиоэлектр.», 1981, т. 69, № 11, с. 5—51; [3] Методы спектрального оценивания. Тематич. вып., там же, 1982, т. 70, № 9.

А. М. Яглом.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ стационарного случайного процесса или однородного случайного поля в n-мерном пространстве — преобразование Фурье ковариационной функции стационарного в широком смысле случайного процесса или однородного в широком смысле случайного поля. Стационарные случайные процессы и однородные случайные поля, преобразование Фурье ковариационной функции к-рых существует, наз. процессами, имеющими С. п.

Пусть

$$X(t)=\{X_k(t)\}_{k=\overline{1,n}}$$

есть n-мерный стационарный случайный процесс, а

$$X(t)=\int e^{it\lambda}\Phi(d\lambda), \quad \Phi=\{\Phi_k\}_{k=\overline{1,n}}$$

— его спектральное представление (Φ_k — спектральная случайная мера, отвечающая k-й компоненте $X_k(t)$ многомерного случайного процесса $X(t)$); интегрирование здесь проводится в пределах $-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi$ в случае дискретного времени t и в пределах $-\infty<\lambda<+\infty$ в случае непрерывного времени t. Процесс $X(t)$ имеет С. п.

$$f(\lambda)=\{f_{k,l}(\lambda)\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}},$$

если все элементы

$$F_{k,l}(\Delta)=\mathsf{E}\Phi_k(\Delta)\overline{\Phi_l(\Delta)}, \quad k,\ l=\overline{1,n},$$

спектральной меры $F=\{F_{k,l}\}_{l=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,n}}$ абсолютно непрерывны и

$$f_{k,l}(\lambda)=\frac{F_{k,l}(d\lambda)}{d\lambda}.$$

В частности, если для процесса $X(t)$, $t=0,\pm1,\ldots$, выполняется соотношение

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}|B_{k,l}(t)|<\infty, \quad k,\ l=\overline{1,n},$$

где

$$B(t)=\{B_{k,l}(t)\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}=\{\mathsf{E}X_k(t+s)\overline{X_l(s)}\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}$$

— ковариационная функция процесса $X(t)$, то $X(t)$ имеет С. п. и

$$f_{k,l}(\lambda)=(2\pi)^{-1}\sum_{l=-\infty}^{\infty}B_{k,l}(t)\exp\{-i\lambda t\},$$
$$-\infty<\lambda<\infty,$$
$$k,\ l=\overline{1,n}.$$

Аналогично обстоит дело и в случае процессов $X(t)$ с непрерывным временем t. С. п. $f(\lambda)$ иногда наз. спектральной плотностью 2-го порядка, в отличие от старших С. п. (см. *Спектральный семиинвариант*).

Однородное n-мерное случайное поле $X(t_1,\ldots,t_n)$ имеет С. п. $f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, если его спектральная функ-

ция $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ обладает тем свойством, что ее смешанная производная $\partial^n F/\partial\lambda_1 \ldots \partial\lambda_n$ существует почти всюду, причем

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \partial^n F/\partial\lambda_1 \ldots \partial\lambda_n$$

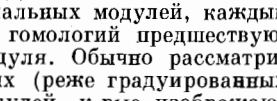
и

$$F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \int_{\lambda_{01}}^{\lambda_1} \ldots \int_{\lambda_{0n}}^{\lambda_n} f(\mu_1, \ldots, \mu_n)\, d\mu_1 \ldots d\mu_n + \text{const}.$$

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [2] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963. *И. Г. Журбенко.*

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность дифференциальных модулей, каждый из к-рых является модулем гомологий предшествующего дифференциального модуля. Обычно рассматривают С. п. биградуированных (реже градуированных или триградуированных) модулей, к-рые изображают графически в виде наложенных друг на друга таблиц на плоскости. Более общо, рассматривают также С. п. объектов произвольной *абелевой категории* (напр., бимодулей, колец, алгебр, коалгебр, алгебр Хопфа и т. д.).

Все известные С. п. получаются из точных пар. Точной парой $(D^1, E^1, i^1, j^1, k^1)$ наз. точная диаграмма вида



Гомоморфизм $d^1 = j^1 k^1$ является дифференциалом в E^1. По каждой точной паре можно построить производную точную пару $(D^2, E^2, i^2, j^2, k^2)$, для к-рой $D^2 = \operatorname{Im} i^1$ и $E^2 = H(E^1, d^1)$. Итерирование этой конструкции дает С. п. $E = \{E^n, d^n\}$.

1) С. п. Лере. Фильтрованный цепной комплекс модулей $(\{K^p\}, d)$ определяет точную пару биградуированных модулей $D^1_{p,q} = H_{p+q}(K^p)$, $E^1_{p,q} = H_{p+q}(K^p/K^{p-1})$. В ассоциированной С. п. бистепень дифференциала d^r равна $(-r, r-1)$ и

$$E^r_{p,q} = \frac{\operatorname{Ker}\left(d^{r-1}_{p,q} : E^{r-1}_{p,q} \longrightarrow E^{r-1}_{p-r+1,\, q+r-2}\right)}{\operatorname{Im}\left(d^{r-1}_{p+r-1,\, q-r+2} : E^{r-1}_{p+r-1,\, q-r+2} \longrightarrow E^{r-1}_{p,q}\right)} \cong$$

$$\cong \frac{\operatorname{Im}\left(H_{p+q}(K^p/K^{p-r}) \longrightarrow H_{p+q}(K^p/K^{p-1})\right)}{\operatorname{Im}\left(\partial : H_{p+q+1}(K^{p+r-1}/K^p) \longrightarrow H_{p+q}(K^p/K^{p-1})\right)}.$$

Модули $F_{p,q} = \operatorname{Im}(H_{p+q}(K^p) \to H_{p+q}(K))$ образуют фильтрацию в $H_*(K)$. Биградуированный модуль

$$E^\infty_{p,q} = F_{p,q}/F_{p-1,q+1} \cong$$

$$\cong \frac{\operatorname{Im}\left(H_{p+q}(K^p) \longrightarrow H_{p+q}(K^p/K^{p-1})\right)}{\operatorname{Im}\left(\partial : H_{p+q+1}(K/K^p) \longrightarrow H_{p+q}(K^p/K^{p-1})\right)}$$

наз. присоединенным к $H_*(K)$. Фильтрация $\{K^p\}$ наз. регулярной, если $K^p = 0$ при $p < 0$, $E^1_{p,q} = 0$ при $q < 0$ и $K = \bigcup K^p$. Для регулярной фильтрации $E^r_{p,q} = 0$ или $p < 0$ или $q < 0$; такая С. п. наз. С. п. первой четверти. Кроме того, $E^r_{p,q} \cong E^{r+1}_{p,q} \cong E^\infty_{p,q}$ при $r > \max(p, q+1)$. В этом случае говорят, что С. п. сходится к $H_*(K)$, и пишут $E^r_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}(K)$.

2) С. п. Лере — Серра. Частный случай С. п. Лере возникает из цепного (или коцепного) комплекса фильтрованного топологич. пространства. Напр., фильтрация клеточного разбиения X его остовами дает вырожденную С. п. $E^r_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}(X)$, для к-рой $E^r_{p,q} = E^\infty_{p,q} = 0$ при $q \neq 0$ и $E^2_{n,0} = E^\infty_{n,0} = H_n(X)$. С. п. Лере — Серра получается из фильтрации тотального пространства E расслоения в смысле Серра $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ прообразами $p^{-1}(B^n)$ остовов B^n базы B. Если слой F и база B

линейно связаны, то для каждой группы коэффициентов G это дает С. п. $E_{p,q}^r \Rightarrow H_{p+q}(E, G)$ с дифференциалами d^r бистепени $(-r, r-1)$, для к-рой

$$E_{p,q}^1 \cong C_p(B) \otimes H_q(F; G) \text{ и } E_{p,q}^2 \cong H_p(B; \mathcal{H}_q(F, G)),$$

где $\mathcal{H}_q(F; G)$ — система локальных коэффициентов над B, состоящая из групп $H_q(F; G)$. При этом гомоморфизм $i_* : H_n(F; G) \to H_n(E; G)$ совпадает с композицией

$$H_n(F; G) = E_{0,n}^2 \longrightarrow E_{0,n}^r = E_{0,n}^\infty = F_{0,n} \subset H_n(E; G),$$

а гомоморфизм $p_* : H_n(E; G) \to H_n(B; G)$ совпадает с композицией

$$H_n(E; G) = F_{n,0} \longrightarrow E_{n,0}^\infty = E_{n,0}^r \subset E_{n,0}^2 = H_n(B; G),$$

где r достаточно велико. Дифференциал $d_{n,0}^n$ С. п. совпадает с *трансгрессией*: $\tau : H_n(B; G) \to H_{n-1}(F; G)$.

Этой гомологич. С. п. Лере — Серра двойственна когомологич. С. п. Лере — Серра $E_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(E; G)$ с дифференциалами d_r бистепени $(r, -r+1)$, для к-рой $E_2^{p,q} \cong H^p(B; \mathcal{H}^q(F; G))$. Если G является кольцом, то каждый член E_r является биградуированным кольцом, дифференциал d_r является дифференцированием кольца E_r и умножение в E_{r+1} индуцировано умножением в E_r. Если G — поле и база B односвязна, то $E_2^{**} \cong H^*(B; G) \otimes H^*(F; G)$.

3) С. п. Атьи — Хирцебруха (— Уайтхеда) получается применением функтора обобщенных (ко)гомологий $h_*^{(*)}$ к той же фильтрации пространства E. В ее когомологич. варианте $E_r^{p,q} \Rightarrow h^{p+q}(E)$, $E_2^{p,q} = H^p(B; h^q(F))$. В отличие от С. п. Лере — Серра С. п. Атьи — Хирцебруха для тривиального расслоения $id : X \to X$, вообще говоря, невырождена.

4) С. п. Эйленберга — Мура ассоциирована с каждым квадратом расслоений

$$\begin{array}{ccc} E & \to & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & B \end{array}$$

В ее когомологич. варианте

$$E_r \Rightarrow H^*(E; R), \quad E_2^{p,q} \cong \operatorname{Tor}_{H^*(B;R)}^{p,q}(H^*(X, R); H^*(Y, R)).$$

Если R — поле и квадрат состоит из H-пространств и H-отображений, то эта С. п.— в категории биградуированных алгебр Хопфа.

5) С. п. Адамса $E_r^{s,t}$ пишется для каждого простого $p \geqslant 2$ и любых пространств X и Y (удовлетворяющих нек-рым условиям конечности). Для нее

$$E_2^{s,t} \cong \operatorname{Ext}_{A_p}^{s,t}(H^*(X; \mathbb{Z}_p); H^*(Y; \mathbb{Z}_p)),$$

где A_p — *Стинрода алгебра* mod p. Бистепень d_r равна $(r, r-1)$. Эта С. п. сходится в том смысле, что при $r > s$ существует мономорфизм $E_{r+1}^{s,t} \to E_r^{s,t}$ и, значит, определена группа $E_\infty^{s,t} = \bigcap_{r>s} E_r^{s,t}$. Существует такая убывающая фильтрация $\{F^s\}$ группы $\{Y, X\}$ стабильных гомотопич. классов отображений $Y \to X$, что

$$F^s\{S^{t-s}YX\}/F^{s+1}\{S^{t-s}Y, X\} \cong E_\infty^{s,t},$$

а $F^\infty = \bigcap_{s \geqslant 0} F^s$ состоит из всех элементов группы $\{Y, X\}$ конечного порядка, взаимно простого с p. Эта С. п. при $X = Y = S^0$ позволяет «в принципе» вычислить p-компоненты стабильных гомотопич. групп сфер. С. п. Адамса обобщена А. С. Мищенко и С. П. Новиковым на произвольные *обобщенные теории когомологий*. Имеются также обобщения С. п. Адамса, сходящиеся к нестабильным гомотопич. группам.

Лит.: [1] Мошер Р., Тангора М., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ.,

М., 1970; [2] Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л., Гомотопическая топология, М., 1969; [3] Серр Ж.-П., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения. Сб. переводов, М., 1958, с. 9—114; [4] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [5] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [6] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [7] Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, пер. с англ., М., 1964; [8] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [9] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, с. 855—951; [10] Adams J. F., Stable homotopy and generalised homology, Chi.— L., 1974; [11] Switzer R. M., Algebraic topology: homotopy and homology, B.— Hdlb.— N. Y., 1975; [12] Smith L., Lectures on the Eilenberg-Moore spectral sequence, B.— Hdlb.— N. Y., 1970; [13] Ravenel D. C., в кн.: Geometric applications of homotopy theory, II, B.— Hdlb.— N. Y., 1978, p. 404—75.

С. Н. Малыгин.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ дифференциальных операторов — раздел общей спектральной теории операторов, к-рый изучает спектральные свойства дифференциальных операторов в различных пространствах функций, особенно в гильбертовых пространствах измеримых функций.

Пусть Ω_n — область в $\mathbb{R}^n$, Γ — ее граница,

$$l(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha \qquad (1)$$

— линейный дифференциальный оператор (д. о.), и

$$l_j(u) = \sum_{|\alpha| \leqslant m_1} b_{\alpha, j}(x) D^\alpha u \,|_\Gamma = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \qquad (2)$$

— краевые условия, заданные линейными д. о. l_j. Здесь

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \ D = (D_1, \ldots, D_n), \ D_j = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

α_j — неотрицательные целые числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{nj}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, а функции a_α и $b_{\alpha j}$ определены в Ω_n и Γ соответственно. В дальнейшем везде, где нет особых оговорок, предполагается, что a_α и $b_{\alpha j}$ — достаточно гладкие функции при $n > 1$ и $a_{1n}(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$, если $n = 1$ и $\Omega_1 = (a, b)$.

Самосопряженные расширения д. о. Пусть L_0' — д. о., к-рый задается выражением (1) на функциях из $C_0^\infty(\Omega_n)$, т. е. имеющих производные любого порядка и обращающихся в нуль вне компакта, лежащего внутри Ω_n. Если для любой пары функций $u(x)$ и $v(x)$ из $C_0^\infty(\Omega_n)$

$$\delta_{\Omega_n} l(x, D, u)\, \overline{v}\, dx = \int_{\Omega_n} u \overline{l(x, D, v)}\, dx, \qquad (3)$$

то L_0' наз. симметрическим д. о., а l — формально самосопряженным д. о. Пусть L_0 — замыкание д. о. L_0' в $L_2(\Omega_n)$. Тогда д. о. L_0 и сопряженный к нему L_0^* соответственно наз. минимальным и максимальным операторами, порожденными $l(x, D)$; L_0^* — расширение д. о. L_0. Важной задачей теории д. о. является описание L_0 и L_0^*, а также всех самосопряженных расширений д. о. L_0.

Здесь можно применять абстрактную теорию *расширений* симметрич. операторов. Однако для д. о. самосопряженные расширения часто удается описать в терминах граничных условий.

Пусть

$$H_\pm = \{u(x) \mid u(x) \in D(L_0^*), \ L_0^* u = \pm iu\} \qquad (4)$$

— *дефектные подпространства* оператора L_0. Если $\dim H_\pm = 0$, то $L_0 = L_0^*$, и д. о. L_0^* наз. существенно самосопряженным. Любые из следующих условий достаточны для существенной само-

сопряженности д. о. L_0' в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Формально самосопряженный д. о. $l(x, D)$ имеет вид

$$-\sum_{k,\,j=1}^{n} D_k a_{kj}(x) D_j + q(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (5)$$

с действительными коэффициентами, и L_0' ограничен снизу; имеет вид (5), является эллиптическим, a_{kj} — постоянные, $q(x) \geqslant -Q(|x|)$, $Q(r)$ монотонно не убывает и интеграл

$$\int^{\infty} Q^{-1/2}(r)\, dr = \infty;$$

имеет постоянные и действительные коэффициенты; имеет ограниченные коэффициенты, а главный член — эллиптич. типа с действительными и постоянными коэффициентами.

Пусть д. о. L_0 имеет конечные индексы дефекта $n_{\pm} = \dim H_{\pm}$, что является характерным для обыкновенных д. о. В этом случае числа $n_{\pm}$ совпадают с размерностями подпространств решений уравнений $l(u) = \pm iu$ из $L_2(a, b)$. Поэтому $n_{\pm} < m$ и вычисление индексов дефекта д. о. связано с качественной теорией и асимптотич. методами обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть $n = 1$, $x \in (a, b)$. Если $n_+ \neq n_-$, то д. о. L_0' не имеет ни одного самосопряженного расширения. Если $n_+ = n_- = k$, то для самосопряженности расширений д. о. L_0' надо задавать k граничных условий и они полностью описаны. Граничные условия принимают простой вид, когда выражение L_0' имеет два регулярных конца или имеет один регулярный конец, но $m = 2k$, $n_{\pm} = k$. Конец a наз. регулярным, если $a > -\infty$ и $\frac{1}{a_m(x)}$, $a_j(x)$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$ суммируемы на $[a, \beta]$ при любом $\beta < b$.

Имеются примеры д. о. с частными производными в $L_2(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 3$, с разрывными коэффициентами и с конечными индексами дефекта, но их теория еще слабо развита. В терминах граничных условий описаны не все самосопряженные расширения симметрич. д. о. с частными производными в ограниченной области, но описаны разнообразные расширения с заданными свойствами.

Пусть l — формально самосопряженный эллиптический д. о. четного порядка $m = 2k$ с действительными коэффициентами, $C_k^{\infty}(\Omega_n)$ — множество всех функций, имеющих производные любого порядка в ограниченной замкнутой области $\overline{\Omega}_n$ и удовлетворяющих краевым условиям типа Дирихле $D^{\alpha} u = 0$, $x \in \Gamma$, $|\alpha| \leqslant k-1$. Тогда д. о., определенный выражением l с областью определения $C_k^{\infty}(\Omega_n)$, является симметрическим, а его замыкание L_m — самосопряженным. Имеются другие примеры конкретных самосопряженных краевых условий для д. о., из них наиболее полно изучены д. о. 2-го порядка с краевыми условиями типа Дирихле, Неймана и третьего рода.

Спектральный анализ самосопряженного д. о. Всякий самосопряженный д. о. L допускает спектральное разложение вида

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dE_{\lambda}, \qquad (6)$$

где E_{λ} — разложение единицы (ортогональное семейство *проекторов*). Однако общая формула не дает непосредственного разложения по собственным функциям конкретных самосопряженных д. о., и поэтому важно уметь семейство E_{λ} выразить с помощью собственных функций. Если самосопряженный д. о. L имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}$ с соответствующими ортонорми-

рованными собственными функциями $\{\varphi_k(x)\}$, то E_λ — интегральный оператор с (спектральным) ядром

$$E(x, y, \lambda) = \sum_{\lambda_k \in (0, \lambda]} \varphi_n(x)\, \varphi_n(y). \qquad (7)$$

При наличии непрерывного спектра у д. о. вопрос становится сложным: для непрерывного спектра нет собственных функций из $L_2(\Omega_n)$. Однако имеют место следующие результаты.

Пусть L — самосопряженный обыкновенный д. о. вида (1) в $L_2(-\infty, \infty)$, $\varphi_1(x, \lambda), \ldots, \varphi_m(x, \lambda)$ — фундаментальная система решений уравнения $lu = \lambda u$. Тогда существует монотонная матричная функция $\sigma(\lambda) = \|\sigma_{ij}(\lambda)\|_{i,\, j=1}^{m}$ (спектральная мера) такая, что разложение единицы E_λ д. о. L задается ядром

$$E(x, y, \lambda) = \int_0^\lambda \sum_{i,\, j=1}^{m} \varphi_i(x, \lambda)\, \varphi_j(y, \lambda)\, d\sigma_{ij}(\lambda). \qquad (8)$$

Далее, для любой функции $f(x)$ из $L_2(-\infty, \infty)$ интеграл

$$\{F_j(\lambda)\} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_j(x, \lambda)\, f(x)\, dx \right\} \qquad (9)$$

сходится в пространстве вектор-функций $L_2(-\infty, \infty;\ d\sigma(\lambda))$, порожденном мерой $\sigma(\lambda)$, и обратно, интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,\, j=1}^{m} F_i(\lambda)\, \varphi_j(x, \lambda)\, d\sigma_{ij}(\lambda)$$

сходится к $f(x)$ в $L_2(-\infty, \infty)$. Если выражение (1) имеет один регулярный конец a и $m = 2k$, а индексы дефекта $n_\pm = k$, то функции $\varphi_1(x, \lambda), \ldots, \varphi_k(x, \lambda)$ выбираются так, чтобы они образовали фундаментальную систему в классе решений уравнения $lu = \lambda u$, удовлетворяющих краевым условиям в a, и в этом случае порядок спектральной меры будет равен k.

Пусть L — самосопряженный эллиптич. д. о. в $L_2(\Omega_n)$. Тогда его разложение единицы E — интегральный оператор с ядром $E(x, y, \lambda)$ и существует неубывающая функция $\rho(\lambda)$ такая, что для любых чисел λ_1 и λ_2 имеет место

$$E(x, y, \lambda_1) - E(x, y, \lambda_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(x, y, \lambda)\, d\rho(\lambda), \qquad (10)$$

при этом при каждом λ существует конечная или бесконечная система $\{\varphi_j(x, \lambda)\}$ решений уравнения $lu = \lambda u$ и

$$\varphi(x, y, \lambda) = \sum_j \varphi_j(x, \lambda)\, \varphi_j(y, \lambda). \qquad (11)$$

Для оператора Шрёдингера $Lu \equiv -\Delta u + q(x)u$, $x \in \mathbb{R}^3$, при условии $|q(x)| \leqslant c(1 + |x|)^{-2-\varepsilon}$ ядро $E(x, y, \lambda)$ явно выражается через решения задачи теории рассеяния.

Для произвольных самосопряженных д. о. с частными производными также справедливы формулы (10), (11), в этом случае $\{\varphi_j(x, \lambda)\}$ могут быть обобщенными функциями, но конечного порядка.

Характер сходимости разложения по собственным функциям д. о. и асимптотич. свойства спектрального ядра помогают в обосновании метода Фурье при решении уравнений математич. физики. Для обыкновенных д. о. имеет место следующий окончательный результат — теорема равносходимости: разложения заданной суммируемой функции по собственным функциям д. о., ограниченного снизу, и интеграл Фурье сходятся или расходятся в точке одновременно. Для д. о. с частными производными вопрос становится сложным.

Качественная теория спектра д. о. занимается изучением природы спектра в зависимости от поведения коэффициентов, геометрии области и граничных условий.

Имеется серия признаков дискретности спектра д. о. Наиболее общим является следующий критерий и его обобщения: если $q(x) \geqslant 1$, то для дискретности

спектра д. о., порожденного выражением $lu=-u''+q(x)u$ в $L_2(-\infty, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $j>0$

$$\lim_{|x|\to\infty}\int_x^{x+j} q(t)\,dt=\infty.$$

Для д. о. с частными производными обобщение этого критерия принимает более сложный вид. Имеются другие, более простые признаки дискретности спектра д. о., напр. самосопряженный д. о., порожденный выражением (5), будет иметь дискретный спектр, если $q(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$; самосопряженный д. о. L_m имеет дискретный спектр.

Изучение природы спектра при наличии непрерывной части становится трудной задачей. Вот нек-рые результаты: 1) если обыкновенный д. о. определяется формально самосопряженным выражением (1) с периодич. коэффициентами на $(-\infty, \infty)$ с общим периодом, то его спектр непрерывный и состоит из последовательности *непересекающихся интервалов*, концы к-рых стремятся к $-\infty$ или $+\infty$; 2) если д. о. определяется выражением $(-1)^k(D_1^2+\ldots+D_n^2)^k+q(x)$ $BL_2(\mathbb{R}^n)$ и $\lim q(x)=0$, $|x|\to+\infty$, непрерывный спектр его заполняет $[0, \infty]$, а отрицательный спектр дискретный и может иметь предельную точку в нуле. Если $k=1$, $|q(x)|\leqslant M(|x|)$ и

$$\int^{\infty} rM(r)\,dr<\infty \qquad (M(r)=O(r^{-1})),$$

то отрицательный спектр будет конечным (на непрерывном спектре нет собственных значений).

Природа спектра зависит также от граничных условий. В ограниченной области описаны конкретные граничные условия, при выполнении к-рых самосопряженный д. о. Лапласа имеет непрерывную часть спектра. Это — результат бесконечности индексов дефекта минимального д. о. Лапласа в области с границей.

Функции от самосопряженного д. о. изучаются с целью решения смешанных задач для дифференциальных уравнений, а также для внутренних задач теории д. о. Пусть L — эллиптич. д. о. порядка m. Хорошо изучена резольвента $(L+\lambda)^{-1}$ при $\lambda>0$ и функции $\exp(-Lt)$ и $\exp(iL^{1/m}t)$ при $t>0$. Последние являются разрешающими операторами для обобщенного уравнения теплопроводности $u_t=-Lu$, $u(0, x)=f(x)$ и обобщенного волнового уравнения $u_t=iL^{1/m}u$, $u(0, x)=f(x)$. Все три оператор-функции являются интегральными с ядрами $R(x, y, \lambda)$, $K(x, y, t)$, $G(x, y, t)$ (функции Грина) соответственно. Формула

$$R(x, y, \lambda)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}K(x, y, t)\,dt \qquad (12)$$

устанавливает связь между R и K. Нек-рые свойства $R(x, y, \lambda)$: если L — эллиптический самосопряженный д. о. порядка m в $L_2(\Omega_n)$, то при $p>n/2m$ оператору $(L+\lambda)^{-p}$ отвечает ядро типа Карлемана; при $p>n/m$ оператор $(L_m+\lambda)^{-p}$ является ядерным и поэтому

$$S_p(L+\lambda)^{-p}=\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k+\lambda)^{-p}, \qquad (13)$$

где $\{\lambda_k\}$ — собственные значения д. о. L_m. Имеются и другие признаки ядерности оператора $(L+\lambda)^{-p}$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Аналитич. и асимптотич. свойства функций Грина дают полезную информацию о спектральных характеристиках д. о. L. Напр., если в (13) известно поведение $S_p(L+\lambda)^{-p}$ при $\lambda\to\infty$, то применение тауберовых теорем позволяет найти асимптотику λ_k. То же самое удается, если известна асимптотика $S_p\exp(-Lt)$ при $t\to+0$. Асимптотика $R(x, y, \lambda)$ и $K(x, y, t)$ устанавливается, напр., методом параметрикс, методом потенциалов и т. д. Так, на этом пути удалось найти асимптотику λ_k

для обширного класса эллиптич. д. о. Для определения асимптотики спектрального ядра $E(x, y, \lambda)$ эллиптич. д. о. оказалось эффективным изучение асимптотики ядра $G(x, y, t)$ при $t \to 0$ с дальнейшим применением различных тауберовых теорем. В частности, при $x = y$, $x \notin \Gamma$

$$E(x, x, \lambda) = (2\pi)^{-n} \int_{l_0(x, \xi) < \lambda} d\xi + O\left(\lambda^{(n-1)/m}\right).$$

Несамосопряженные д. о. Наиболее полные результаты имеются для обыкновенных д. о. на конечном отрезке. Пусть д. о. L определяется выражением (1) при $n = 1$, $a_m(x) \equiv 1$ на функциях, имеющих $(m-1)$ абсолютно непрерывные производные и удовлетворяющие краевым условиям:

$$l_{\nu_0}(u) + l_{\nu_1}(u) \equiv 2_\nu u^{(k_\nu)}(0) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu_j} u^{(j)}(0) +$$

$$+ \beta_\nu u^{(k_\nu)}(1) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \beta_{\nu_j} u^{(j)}(1) = 0, \qquad 1 \leqslant \nu \leqslant m.$$

Здесь $m-1 \geqslant k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_m \geqslant 0$, $k_{\nu-2} < k_\nu$ и числа a_ν, b_ν одновременно не равны нулю. Пусть краевые условия (2) являются регулярными. Таковыми будут краевые условия типа Штурма — Лиувилля ($m = 2k$, $l_{\nu_0}(u) = l_{\nu_1}(u) = 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant m-1$) и периодич. типа ($\alpha_\nu = \beta_\nu = 1$). Тогда д. о. L имеет бесконечное число собственных значений, к-рые имеют точную асимптотику; система собственных и присоединенных функций д. о. L полна в $L_p(0, 1)$; разложение функций $f(x)$ из $D(L)$ по собственным и присоединенным функциям д. о. L сходится равномерно на $(0, 1]$. Факт полноты системы собственных и присоединенных функций имеет место также при нек-рых нерегулярных краевых условиях, в частности типа распадающихся ($l_{\nu_0}(u) = 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant m_1$, $l_{\nu_1}(u) = 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant m_2$, $m_1 \neq m_2$, $m_1 + m_2 = m$), однако сходимость разложения в ряд по собственным и присоединенным функциям справедлива только для узкого класса (l-аналитических) функций.

Пусть L_0 — самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H — имеет собственные значения $\{\lambda_k\}$ и при нек-ром $p > 0$ оператор L_0^{-p} является ядерным. Пусть L_1 — другой оператор такой, что $L_1 L_0^{-1}$ является вполне непрерывным. Тогда система собственных и присоединенных векторов оператора $L_0 + L_1$ полна в H (теорема Келдыша). Применение этой теоремы дает классы д. о., к-рые имеют полную систему собственных и присоединенных функций.

Пусть L_m — д. о. в $L_2(\Omega_n)$ и

$$L_1 u = \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} d_\alpha(x) D^\alpha u,$$

тогда система собственных и присоединенных функций для д. о. $L_m + L_1$ полна в $L_2(\Omega_n)$. Однако разложение функции в ряд по этой системе, вообще говоря, расходится и суммируется со скобками по обобщенному методу Абеля.

Если область Ω_n неограничена, то для выполнения условий теоремы Келдыша надо налагать дополнительные условия на рост коэффициентных функций д. о.

Мало изучены несамосопряженные д. о. с непрерывной частью спектра. Это связано с тем, что для них нет аналога теоремы о спектральном разложении. Исключение составляет д. о., порожденный выражением $-\frac{d^2x}{dx^2} + q(x)$ при $x \in [0, \infty)$ или $x \in (-\infty, \infty)$ с комплекснозначной функцией $q(x)$. Пусть $\varphi(x, k)$ является решением уравнения $-u^{(4)} + q(x)u = k^2 u$ при $0 \leqslant x < \infty$ и удовлетворяет начальным условиям $\varphi(0, k) = 1$,

$\varphi'(0, k)=h$. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — финитные функции из $L_2(0, \infty)$ и

$$F_j(k)=\int_0^\infty f_j(x)\,\varphi(x, k)\,dx.$$

Тогда существует линейный функционал R на линейном топологич. пространстве G такой, что $F_1F_2\in G$,

$$(R, F_1F_2)=\int_0^\infty f_1(x)\,f_2(x)\,dx.$$

Пространство G — множество всех целых четных функций первого порядка роста конечного типа, суммируемых на действительной оси. Если $xq(x)\in L_1(0, \infty)$, то R явно вычисляется. В этом случае на непрерывном спектре появляются спектральные особенности — полюсы ядра резольвенты, к-рые не являются собственными значениями д. о. Спектральные особенности присущи несамосопряженным операторам и из-за них вопросы разложения (и его сходимость) по собственным функциям принимают более сложный характер. Для д. о.

$$Lu\equiv(-D_1^2-D_2^2-D_3^2+q(x))\,u$$

в $L_2(\mathbb{R}^3)$ в предположении, что комплексная функция $q(x)$ убывает экспоненциально, также найден вид спектрального разложения через решение задачи теории рассеяния с учетом влияния спектральных особенностей.

В о б р а т н ы х з а д а ч а х с п е к т р а л ь н о г о а н а л и з а требуется определение д. о. по некрым спектральным характеристикам. Полностью решены задачи определения одномерных дифференциальных уравнений Шрёдингера и систем типа Дирака по спектрам различных расширений, по спектральной мере, по данным рассеяния, т. е. по асимптотич. поведению нормированных собственных функций, и т. д. Обратные задачи нашли приложение в интегрировании нелинейных уравнений.

С. т. дифференциальных операторов возникла в связи с исследованиями колебания струны и вызвала к жизни теорию ортогональных разложений (18—19 вв.). Систематич. изучение самосопряженного д. о. 2-го порядка на конечном отрезке начинается с 1830 (*Штурма — Лиувилля задача*) и в 19 в. было предметом многих исследований, в частности в связи с теорией специальных функций. Однако замкнутость системы собственных функций д. о. Штурма — Лиувилля была доказана только в 1896, тогда же изучен и характер сходимости разложения по собственным функциям. Теория сингулярных д. о. берет свое начало в 1909—1910, когда было найдено спектральное разложение самосопряженного неограниченного д. о. 2-го порядка с произвольной структурой спектра и, по существу, введено понятие индекса дефекта и получены первые результаты по теории расширений. Интерес к сингулярным д. о. возрос с 1920 с возникновением квантовой механики. Систематич. исследование несамосопряженных сингулярных д. о. началось с 1950, когда были заложены основы теории операторных пучков и указан метод доказательства полноты системы собственных и присоединенных функций для д. о.

Лит.: [1] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965; [2] Глазман И. М., Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1963; [3] Данфорд Н., Шварц Дж.-Т., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 2, М., 1966; [4] Като Т., Теория возмущений линейных операторов, пер. с англ., М., 1972; [5] Левитан Б. М., Саргсян И. С., Введение в спектральную теорию, М., 1970; [6] Марченко В. А., Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля, К., 1972; [7] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [8] Титчмарш Э. Ч., Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, пер. с англ., ч. 1—2, М., 1960—61; [9] Фаддеев Л. Д., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1963, т. 69; 1964, т. 73, с. 314—36; [10] Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М., «Успехи матем. наук», 1976,

т. 31, в. 6, с. 28—83; 1977, т. 32, в. 1, с. 107—30; [11] Березанский Ю. М., «Укр. матем. ж.», 1974, т. 26, в. 5, с. 579—590; [12] Гасымов М. Г., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1968, т. 19, с. 41—112; [13] Левитан Б. М., Гасымов М. Г., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 2, с. 3—63; [14] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П., там же, 1976, т. 31, в. 1, с. 55—136; [15] Костюченко А. Г., в кн.: IV летняя математическая школа, К., 1968, с. 42—117; [16] Хёрмандер Л., «Математика», 1969, т. 13, № 6, с. 114—37.

М. Г. Гасымов.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ линейных операторов — раздел функционального анализа, изучающий структуру линейного оператора на основании свойств его спектральных характеристик (расположения спектра, поведения резольвенты, асимптотики собственных значений и т. д.). При этом под описанием структуры оператора может пониматься нахождение эквивалентного ему оператора в фиксированном классе конкретных (часто функциональных) моделей; определенный способ его восстановления из совокупности более простых операторов (напр., в форме прямой суммы или прямого интеграла); отыскание базиса, в к-ром матрица оператора имеет наиболее простой вид, доказательство полноты системы корневых векторов; полное описание решетки инвариантных подпространств, выделение максимальных цепочек инвариантных подпространств (треугольное представление); построение достаточно широкого функционального исчисления и т. д.

Весьма популярна (и плодотворна) в С. т. идея разложения оператора в прямую сумму операторов, соответствующую разбиению его спектра. Первые (для пространств бесконечной размерности) результаты такого рода получил Ф. Рисс (F. Riesz, 1909), предложивший следующую конструкцию. Пусть T — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве X, $\sigma(T)$ — его спектр, $R_T(\lambda)$ — его резольвента (т. е. $R_T(\lambda)=(T-\lambda I)^{-1}$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\sigma(T)$); тогда формула

$$f(T)=(2\pi i)^{-1}\oint_\Gamma f(\lambda)\,R_T(\lambda)\,d\lambda,$$

где Γ — произвольный контур, охватывающий $\sigma(T)$, определяет функциональное исчисление на алгебре ростков голоморфных функций в окрестности $\sigma(T)$. Если δ — открыто-замкнутое подмножество $\sigma(T)$ и f — функция, равная 1 в окрестности δ и 0 в окрестности $\sigma(T)\setminus\delta$, то получается проектор $P_T(\delta)$, перестановочный с T и такой, что $\sigma(T|P_T(\delta)X)=\delta$.

Более общая С. т. основывается на понятии спектрального подпространства. Спектральным многообразием оператора T, соответствующим замкнутому подмножеству $\delta\in\sigma(T)$, наз. совокупность $X_T(\delta)$ всех векторов $x\in X$, имеющих в $\mathbb{C}\setminus\delta$ локальную резольвенту (т. е. аналитическую X-значную функцию $f(\lambda)$, удовлетворяющую условию $(T-\lambda I)f(\lambda)=x$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\delta$); спектральное подпространство — это замыкание спектрального многообразия. Если любые две локальные резольвенты одного и того же вектора совпадают на пересечении областей их определения (это означает, что локальная резольвента нулевого вектора равна нулю — условие, выполненное, напр., для всех операторов без собственных значений), то говорят, что оператор имеет свойство однозначного распространения. В этом случае для каждого $x\in X$ определена локальная резольвента с максимальной областью определения, дополнение к к-рой наз. локальным спектром оператора T на векторе x и обозначается $\sigma(T, x)$. Таким образом, для оператора T, обладающего свойством однозначного распространения,

$$X_T(\delta)=\{x\in X:\sigma(T, x)\subset\delta\};$$

если при этом $X_T(\delta)$ замкнуто, то $\sigma(T|X_T(\delta))\subset\delta$. В общем случае аналогичное включение для спектральных подпространств не выполнено. Спектральные под-

пространства удовлетворяют условию дуальности $X_T(\delta_1)^{\perp} \supset X_{T^*}(\delta_2)$ (δ_1 и δ_2 — *непересекающиеся* замкнутые множества), однако другое естественное условие $X_T(\overline{G}_1)^{\perp} \subset \overline{X_{T^*}(\overline{G}_2)}$ (G_1 и G_2 открыты, $G_1 \cup G_2 = \sigma(T)$) может нарушаться. Это включение становится справедливым, если его правую часть заменить «слабым спектральным подпространством» $X_T^W(\overline{G}_2)$ (по определению, $X_T^W(\delta)$ состоит из векторов $x \in X$, для к-рых каждому $\varepsilon > 0$ поставлена в соответствие аналитическая X-значная функция $f_\varepsilon(\lambda)$ со свойством $\|(T-\lambda I) f_\varepsilon(\lambda) - x\| \leqslant \varepsilon$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \delta$). Известны достаточные условия более сильной отделимости спектра. В частности, для операторов с вещественным спектром условие умеренности роста резольвенты

$$\int_0 \log^+\log^+ (\sup_s \| R_T(s+it) \|)\, dt < \infty$$

влечет существование (для любого открытого покрытия спектра) семейства T-инвариантных подпространств с вписанными в покрытие спектрами сужений, линейно порождающих X. Фактически такие операторы принадлежат классу р а з л о ж и м ы х о п е р а т о р о в, к-рый можно определить требованием замкнутости спектральных многообразий и следующим условием: для любого открытого покрытия $\{G_i\}_{i=1}^n$ спектра T подпространства $X_T(\overline{G}_i)$ линейно порождают X. Этот класс операторов содержит все операторы, резольвенты к-рых удовлетворяют условию аналитич. мажорантности (таковы, в частности, компактные операторы, слабые возмущения спектральных операторов, мультипликаторы рядов Фурье в l^p, J-симметричные операторы) и устойчив относительно аналитич. отображений и (при нек-рых ограничениях) предельных переходов, относительно образования сужений и факторов. В то же время обилие спектральных подпространств (при достаточно богатом спектре) обеспечивает содержательность С. т. Построен пример оператора, находящегося вне рамок каких бы то ни было спектральных разложений ввиду того, что спектры всех его сужений на инвариантные подпространства совпадают с отрезком $[0, 1]$.

Даже в случае разреженного спектра сужения оператора на спектральные подпространства могут обладать достаточно сложным строением (тонкой структурой). Так, всякий полюс резольвенты — собственное значение, подъем к-рого (максимальная из длин корневых цепочек) равен порядку полюса; соответствующее спектральное подпространство является корневым подпространством. В случае операторов, действующих в конечномерных пространствах, это приводит к разложению оператора в прямую сумму жордановых клеток, построенных по корневым цепочкам. Аналоги жорданова представления занимают важное место и в общей С. т.; при этом роль жордановых клеток могут играть операторы с одноточечным спектром и циклич. вектором, операторы с линейно упорядоченной решеткой инвариантных подпространств (такие операторы наз. одноклеточными; среди операторов в конечномерных пространствах таким свойством обладают только жордановы клетки) или операторы, *имеющие простые конкретные представления* (модели). Однако возможность такого разложения не универсальна — существуют операторы, решетка инвариантных подпространств и спектр к-рых устроены слишком сложно, чтобы их можно было считать элементарными «клетками», в то же время не обладающие ни одной парой непересекающихся инвариантных подпространств. Более того, неизвестно (1984), всякий ли ограниченный оператор (в пространстве, размерность к-рого больше 1) обладает нетривиальным инвариантным подпространством.

Положительный ответ на этот вопрос получен для компактных операторов, операторов, перестановочных с компактными, близких к эрмитовым или унитарным, субнормальных, а также принадлежащих нек-рым специальным классам.

Часть результатов конечномерной С. т. имеет простые аналоги в С. т. компактных операторов. Так, спектр компактного оператора не более чем счетен и его точкой сгущения может быть лишь 0, ненулевые точки спектра являются полюсами резольвенты, причем корневые подпространства конечномерны, сопряженный оператор имеет ту же структуру сужений на корневые подпространства. Однако даже в том случае, когда точечный спектр достаточно богат и корневые векторы оператора T порождают все пространство X (в таких случаях говорят, что T — полный оператор), разложение X в прямую сумму корневых подпространств может быть неосуществимо из-за геометрич. особенностей их взаимного расположения.

Если пространство X — гильбертово (в этом случае будем писать H вместо X), то всякий компактный оператор $T\in\mathfrak{S}(H)$ представляется в виде суммы ряда

$$\sum_n s_n f_n\otimes e_n,$$

т. е.

$$Tx=\sum_n s_n(x,\ f_n)\,e_n,\qquad x\in H,$$

где $\{s_n\}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, а $\{f_n\}$ и $\{e_n\}$ — ортонормированные системы. Числа $s_n=s_n(T)$ наз. сингулярными числами, или s-числами, оператора T; они совпадают с собственными значениями оператора $(TT^*)^{1/2}$, занумерованными в порядке убывания с учетом кратностей. Кроме того, $s_n(T)=\inf\|TP\|$, где P пробегает множество проекторов коранга n (минимаксная характеризация сингулярных чисел), и $s_n(T)$ совпадает с расстоянием от T до множества операторов ранга n, что количественно выражает соответствие между скоростью убывания сингулярных чисел оператора и его близостью к операторам конечного ранга. На этом основаны оценки сингулярных чисел для сумм и произведений, из к-рых следует, что определенные условия на скорость убывания s-чисел выделяют идеалы в алгебре операторов. В частности,

$$\gamma_p=\{T:|\ T\ |_p\equiv\left(\sum s_n^p(T)\right)^{1/p}<\infty\}-$$

идеал, являющийся при $p\geqslant 1$ банаховым пространством относительно нормы $|\ T\ |_p$. Пространство γ_2 — гильбертово, его элементы наз. операторами Гильберта — Шмидта; любой L_2-реализации пространства H соответствует представление всех операторов Гильберта — Шмидта интегральными операторами с квадратично суммируемыми ядрами. Операторы из γ_1 наз. ядерными или операторами со следом: определенный на идеале операторов конечного ранга след продолжается до непрерывного функционала на γ_1, значение к-рого на любом операторе совпадает с суммой (ряда) диагональных элементов его матрицы, а также с суммой собственных значений. Для операторов вида $I+T$, где $T\in\gamma_1$, вводится понятие определителя (бесконечное произведение, составленное из собственных значений): функция $\det(I-\mu T)$ наз. характеристическим определителем оператора T. Характеристич. определитель является естественным обобщением характеристич. многочлена матрицы и, ввиду наличия удобных оценок, играет полезную роль в С. т. ядерных операторов. В частности, резольвента оператора $T\in\gamma_1$ выражается через характеристич. определитель по формуле (восходящей к Э. Фредгольму, E. Fredholm, 1903)

$$R_T(\lambda)=F_T(\lambda^{-1})\det(I-\lambda^{-1}T)^{-1},$$

где F_T — целая оператор-функция, коэффициенты к-рой выражаются в терминах «частичных следов» оператора T. Получаемые таким образом формулы и оценки резольвенты переносятся на операторы из γ_p, $p>1$ (что важно для приложений), и приводят к следующим критериям полноты: 1) если $T=A(I+S)$, где $A=A^*\in\gamma_p$, S компактен и $\operatorname{Ker} A=0$, то T полон (т е о р е м а К е л д ы ш а, имеющая многочисленные приложения в С. т. дифференциальных операторов); 2) если $T\in\gamma_p$ и область значений квадратичной формы (Tx, x) содержится в нек-ром угле величины π/p, то T полон.

Компактные операторы, спектры к-рых состоят из единственной точки $\lambda=0$ (условие, противоположное условию полноты), наз. в о л ь т е р р о в ы м и, ввиду того что интегральные операторы Вольтерра

$$Tf(x)=\int_0^x K(x, y)\, f(y)\, dy$$

являются их моделями. Точнее, всякий вольтерров оператор Гильберта — Шмидта унитарно эквивалентен интегральному оператору Вольтерра в пространстве вектор-функций; операторы, не принадлежащие γ_2, имеют модели, ядра к-рых — обобщенные функции. Такие интегральные представления являются аналогами треугольных представлений для матриц. Развита техника интегрирования операторных функций по цепочке проекторов и на ее основе получено абстрактное треугольное представление вольтеррова оператора

$$T=\int_{\mathcal{P}} P\,(T-T^*)\,dP,$$

где $\mathcal{P}$ — максимальная цепочка T-инвариантных проекторов. Это привело к уточнению и обобщению основных теорем теории интегральных моделей, доказательству важных соотношений между распределениями собственных значений эрмитовых компонент вольтерровых операторов, близких к единичному, построению треугольных факторизаций операторов, установлению связи С. т. с нек-рыми вопросами теории краевых задач для канонич. систем дифференциальных уравнений (в частности, позволило операторными методами исследовать вопросы устойчивости таких систем).

Долго остававшаяся открытой проблема существования цепочек ранга 1 для произвольного компактного оператора была решена отрицательно. Существование инвариантных цепочек ранга 1 доказано для диссипативных операторов с ядерной мнимой компонентой, вследствие чего их треугольные представления имеют наиболее законченный вид. Для таких операторов построена и теория жордановых представлений, сходная с классической (конечномерной): всякий оператор разлагается в квазипрямую сумму одноклеточных, причем одноклеточность в этом классе операторов эквивалентна существованию циклич. вектора. В этой теории центральную роль играет понятие характеристической оператор-функции (х. о.-ф.).

Тесно связанное с геометрич. конструкциями теории унитарных дилатаций понятие х. о.-ф. сжатия (т. е. оператора, норма к-рого не превосходит единицы) лежит в основе С. т. этого класса операторов. Х. о.-ф. сжатия T — это функция $\theta_T(\lambda)$, определенная в открытом единичном круге $\Delta\in\mathbb{C}$, принимающая значения в пространстве операторов, действующих из $\overline{D_T(H)}$ в $\overline{D_{T^*}(H)}$ (где $D_T=(I-T^*T)^{1/2}$), и удовлетворяющая соотношению

$$\theta_T(\lambda)\, D_T = D_{T^*}\,(I-\lambda T^*)^{-1}\,(I\lambda - T).$$

Х. о.-ф. аналитична в Δ и является сжимающей $\|\theta_T(\lambda)\|\leqslant 1$; если T^n и T^{*n} стремятся к нулю в сильной операторной топологии (такие операторы образуют класс C_{00}), то θ_T — в н у т р е н н я я ф у н к ц и я,

т. е. ее предельные значения на $\partial\Delta$ почти всюду унитарны. Обратно, по любой внутренней операторнозначной функции $\theta:\Delta\to\mathcal{B}(E_1, E_2)$ можно построить сжатие T, для к-рого $\theta_T=\theta$, ограничивая оператор умножения на λ в пространстве Харди $H^2_{E_2}(\Delta)$ на ортогональное дополнение K_θ к подпространству $\theta H^2_{E_1}$. Эта конструкция, наз. функциональной моделью сжатия, дает возможность переводить задачи С. т. на язык классич. теории функций, где они приобретают вид проблем интерполяции, рациональной аппроксимации, аналитич. продолжения, специальной факторизации и т. д. Функциональную модель можно использовать для построения более богатого функционального исчисления, определяя для $\varphi\in H^\infty(\Delta)$ оператор $\varphi(T)$ как ограничение на K_θ оператора умножения на $\varphi(\lambda)$ (условие $T\in C_{00}$ здесь не обязательно, важно, чтобы T был вполне неунитарным). Если это исчисление не инъективно, т. е. $\varphi(T)=0$ для нек-рой функции $\varphi\in H^\infty$, $\varphi\neq 0$, то T наз. сжатием класса C_0. Сжатие $T\in C_0$ обладает минимальной внутренней функцией m_T (образующей в идеале всех функций, аннулирующих T); m_T является аналогом минимального многочлена матрицы — в терминах ее характеристик описываются многие спектральные свойства T. Так, полнота сжатия $T\in C_0$ имеет место тогда и только тогда, когда m_T — *Бляшке произведение* (и в этом случае T допускает *спектральный синтез*). Точечный спектр $\sigma_p(T)$ сжатия $T\in C_0$ совпадает с множеством нулей функции m_T, а $\sigma(T)$ получается из $\sigma_p(T)$ добавлением тех точек окружности $\partial\Delta$, через к-рые m_T не может быть аналитически продолжена. То, что сжатия класса C_0 имеют в Δ не более чем счетный спектр, указывает на ограниченность этого класса; с другой стороны, ему принадлежат, напр., все сжатия, для к-рых дефектные операторы D_T, D_{T^*} ядерные. Если D_T, D_{T^*} — операторы ранга 1, то функциональная модель действует в классич. пространстве Харди $H^2(\Delta)$ и полностью определяется скалярной внутренней функцией $m=m_T=\theta_T$, в связи с чем принято обозначение $T=S(m)$. С. т. сжатий $S(m)$ наиболее тесно связана с теорией аналитич. функций и наиболее изучена; эти сжатия играют роль жордановых клеток в С. т. сжатий класса C_0 ввиду того, что всякое сжатие $T\in C_0$ квазиподобно прямой сумме $\bigoplus_{i=1}^N S(m_i)$. Более привычное жорданово разложение (на одноклеточные операторы) для $T\in C_0$ не всегда возможно.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 2 — Спектральная теория, М., 1966; ч. 3—Спектральные операторы, М., 1974; [2] Radjavi H., Rosenthal P., Invariant subspaces, B., 1973; [3] Colojara I., Foiaş C., The theory of generalized spectral operators, N. Y., 1968; [4] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1965; [5] их же, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., 1967; [6] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970; [7] Никольский Н. К., Лекции об операторе сдвига, М., 1980.

В. С. Шульман.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, разложение единицы, — монотонное непрерывное слева в сильной операторной топологии отображение $P(\cdot)$ действительной прямой во множество ортогональных проекторов в гильбертовом пространстве, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t\to-\infty} P(t)=0, \qquad \lim_{t\to+\infty} P(t)=I.$$

Всякая самосопряженная (т. е. принимающая самосопряженные значения) сильно счетно аддитивная борелевская *спектральная мера* $E(\cdot)$ на прямой определяет С. ф. по формуле $P(t)=E(-\infty, t)$ и для всякой С. ф. существует единственная определяющая ее спектральная мера.

Понятие С. ф. является основным в спектральной теории самосопряженных операторов: по теореме о *спектральном разложении*, всякий такой оператор имеет интегральное представление $\int_{-\infty}^{\infty} t dP(t)$, где $P(t)$ — нек-рая С. ф. Аналогичную роль в теории симметрических операторов играет понятие о б о б щ е н н о й С. ф.— так называется отображение действительной прямой во множество неотрицательных операторов, удовлетворяющее всем условиям, накладываемым на С. ф., за исключением проекторнозначности. Всякая обобщенная С. ф. может быть продолжена в более широком пространстве (т е о р е м а Н а й м а р к а).

Лит.: [1] А х и е з е р Н. И., Г л а з м а н И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [2] Н а й м а р к М. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1940, т. 4, № 1, с. 53—104.

В. С. Шульман.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ с т а ц и о н а р н о г о с л у ч а й н о г о п р о ц е с с а или о д н о р о д н о г о с л у ч а й н о г о п о л я в n-мерном пространстве — функция круговой частоты λ или соответственно волнового вектора $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, входящая в *спектральное разложение* ковариационной функции стационарного в широком смысле случайного процесса или однородного в широком смысле случайного поля в n-мерном пространстве. Класс С. ф. стационарных случайных процессов совпадает с классом всевозможных ограниченных монотонно неубывающих функций λ, а класс С. ф. однородных случайных полей — с классом функций n переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, отличающихся лишь неотрицательным постоянным множителем от n-мерных функций распределения.

А. М. Яглом.

СПЕКТРАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО — 1) С. м. о п е р а т о р а A в нормированном пространстве — такое подмножество $S\in\mathbb{C}$, что

$$\|p(A)\|\leqslant\sup\{|p(z)|:z\in S\}$$

для любого многочлена $p(z)$. Так, единичный круг — С. м. для любого с ж а т и я (оператора, норма к-рого не превосходит единицы) в гильбертовом пространстве (т е о р е м а Н е й м а н а). Этот результат тесно связан с существованием унитарной с т е п е н н о й дилатации у любого сжатия (с т е п е н н о й д и л а т а ц и е й оператора A в гильбертовом пространстве H наз. такой оператор A_1 в гильбертовом пространстве $H_1\subset H$, что $P_H A_1^n|_H=A^n$, $n\in\mathbb{Z}^+$); компактное подмножество $S\in\mathbb{C}$ спектрально для A тогда и только тогда, когда S имеет нормальную степенную дилатацию со спектром в ∂S. Минимальный радиус круга, являющегося С. м. для всякого сжатия в банаховом пространстве, равен e.

2) С. м., м н о ж е с т в о с п е к т р а л ь н о г о с и н т е з а, д л я к о м м у т а т и в н о й б а н а х о в о й а л г е б р ы $\mathfrak{A}$ — замкнутое подмножество пространства максимальных идеалов $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$, являющееся оболочкой ровно одного идеала $I\in\mathfrak{A}$. В случае, когда $\mathfrak{A}$ — групповая алгебра локально компактной абелевой группы, С. м. наз. также м н о ж е с т в а м и г а р м о н и ч е с к о г о с и н т е з а.

Лит.: [1] N e u m a n n J., «Math. Nachr.», 1951, Bd 4, S. 258—81; [2] К а ц н е л ь с о н В. Э., М а ц а е в В. И., «Теория функций, функц. анализ и их приложения», 1966, в. 3, с. 3—10.

В. С. Шульман.

СПЕКТРАЛЬНОЕ ОКНО о ц е н к и с п е к т р а л ь н о й п л о т н о с т и — функция круговой частоты λ, определяющая весовую функцию, используемую при непараметрич. оценивании *спектральной плотности* $f(\lambda)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ с помощью сглаживания *периодограммы*, построенной по данным наблюдений за процессом. Обычно за оценку значения спектральной плотности в точке λ_0 принимают интеграл по $d\lambda$ от произведения периодограммы в точке λ на выражение типа $B_N A(B_N(\lambda-\lambda_0))$, где $A(\lambda)$ — фиксированная функция частоты, принимающая наиболь-

шее значение в точке $\lambda=0$ и такая, что ее интеграл по всем значениям λ равен единице (именно эту функцию и наз. спектральным окном, хотя иногда тот же термин прилагается и к функции $B_N A(B_N\lambda)$), а B_N^{-1} — зависящая от размера выборки N (т. е. от длины наблюдавшегося отрезка реализации процесса $X(t)$) и при $N\to\infty$ стремящаяся к нулю (но медленнее, чем N^{-1}) ширина С. о. Преобразование Фурье С. о. (а в случае дискретного времени t, когда $-\pi\leqslant\lambda<\pi$ — совокупность коэффициентов Фурье С. о.) наз. корреляционным окном оценки спектральной плотности; оно определяет весовую функцию дискретного или непрерывного аргумента (в зависимости от того, дискретно или непрерывно время t), на к-рую надо умножить эмпирич. автокорреляции, построенные по выборке, для того чтобы преобразование Фурье полученного произведения совпало с рекомендуемой *спектральной плотности оценкой*.

Лит.: [1] Blackman R. B., Tukey J. W., The measurement of power spectra from the point of view of communications engineering, N. Y., 1959; [2] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 1—2, М., 1971—72; [3] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980.

А. М. Яглом.

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ линейного оператора — представление оператора в виде интеграла по *спектральной мере (спектральной функции)*. Для любого самосопряженного оператора T в гильбертовом пространстве H существует такая спектральная функция $P(\cdot)$, что

$$T=\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dP(t).$$

Это означает, что

$$D_T=\left\{x\in H:\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 d(P(t)x,\,x)<\infty\right\},$$

$$(Tx,\,y)=\int_{-\infty}^{+\infty} t\,d(P(t)x,\,y)$$

для любых $x\in D_T$, $y\in H$. Спектральная функция самосопряженного оператора T может быть вычислена через его резольвенту $R(\lambda,\,T)$ по формуле

$$P(b)-P(a)=\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{a+\delta}^{b-\delta}(R(\lambda-i\varepsilon,\,T)-$$
$$-R(\lambda+i\varepsilon,\,T))\,d\lambda.$$

Из теоремы о С. р. самосопряженного оператора следует возможность реализации самосопряженных операторов операторами умножения и существование функционального исчисления на борелевских функциях.

Используя С. р. самосопряженного оператора и теорию расширений с выходом из пространства (см. [2]), можно получить интегральное представление *симметрического оператора* через обобщенную спектральную функцию. Аналогично строится интегральное представление *изометрических операторов*. При этом аналогия между С. р. самосопряженных и унитарных операторов, с одной стороны, и интегральными представлениями симметрических и изометрических — с другой, далеко не полная (отсутствие единственности обобщенных спектральных функций, отсутствие сильной сходимости интегралов, сравнительная узость функционального исчисления и т. п.).

Для любого ограниченного *нормального оператора* T в гильбертовом пространстве H существует такая счетно аддитивная в сильной операторной топологии самосопряженная спектральная мера $E(\cdot)$ на σ-алгебре борелевских подмножеств комплексной плоскости, что

$$T=\int_{\mathbf{C}} z\,E(dz).$$

При этом supp $E(\cdot)=\sigma(T)$, $TE(\alpha)=E(\alpha)T$, $\sigma(T|E(\alpha)H)\subset\overline{\alpha}$. Эта теорема допускает следующую удобную переформулировку: всякий ограниченный нормальный оператор унитарно эквивалентен оператору умножения на нек-рую существенно ограниченную функцию в пространстве $L^2(S, \Sigma, \mu)$, причем мера μ может быть выбрана конечной, если пространство сепарабельно.

Из теоремы о С. р. следует существование функционального исчисления от нормального оператора, т. е. гомоморфизма $f\to f(T)$ алгебры существенно ограниченных борелевских функций на $\sigma(T)$ в алгебру ограниченных операторов, удовлетворяющего условию $id(T)=T$ и переводящего всякую ограниченную поточечно сходящуюся последовательность функций в сильно сходящуюся последовательность операторов. Образ этого гомоморфизма (т. е. множество всех функций от оператора T) совпадает с множеством всех операторов, перестановочных с каждым оператором, перестановочным с T. Поскольку из существования функционального исчисления, в свою очередь, следует теорема о С. р., этот результат можно считать одной из форм спектральной теоремы. Теорема о С. р. обобщается и на неограниченные нормальные операторы (см. [2]).

Спектральная мера в случае С. р. унитарного оператора — частного случая нормального оператора — может быть задана на единичной окружности. С. р. унитарного оператора U иногда записывается в виде

$$U=\int_0^{2\pi} e^{i\theta}\,dE\,(\theta),$$

где $E(\cdot)$ — спектральная функция, сосредоточенная на отрезке $[0, 2\pi]$. Таким образом, С. р. дает возможность представить унитарный оператор в виде $\exp iA$, где A — самосопряженный оператор. Этот результат обобщает теорема Стоуна: всякая сильно непрерывная однопараметрическая группа унитарных операторов представляется в виде

$$U(t)=\exp itA,$$

где A — самосопряженный (возможно, неограниченный) оператор.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 2 — Спектральная теория, М., 1966; [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966.

В. С. Шульман.

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ случайной функции — 1) разложение случайной функции (в частности, случайного процесса) в ряд или интеграл по той или иной специальной системе функций такое, что коэффициенты этого разложения представляют собой взаимно некоррелированные случайные величины. Широкий класс С. р. комплекснозначных случайных функций $X(t)$, $t\in T$, с нулевым средним значением (т. е. таких, что $\mathsf{E}X(t)=0$) может быть представлен в виде

$$X(t)=\int_\Lambda \varphi(t;\ \lambda)\,Z(d\lambda), \qquad (1)$$

где Λ — нек-рое множество с заданной системой «измеримых подмножеств» (т. е. измеримое пространство); $\varphi(t;\lambda)$, $t\in T$, $\lambda\in\Lambda$, — система комплекснозначных функций на T, зависящих от параметра $\lambda\in\Lambda$; $Z(d\lambda)$ — случайная мера на Λ с некоррелированными значениями (так что $\mathsf{E}Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)}=0$ для любых двух непересекающихся измеримых подмножеств Δ_1 и Δ_2), а интеграл в правой части (1) можно или определить как предел в среднем квадратичном соответствующей последовательности интегральных сумм Коши ([1]), или же понимать как более общий «интеграл Лебега по мере $Z(d\lambda)$» (о к-ром см., напр., [2]). Согласно общей теореме Карунена о спектральном раз-

ложении, для существования С. р. (1) случайной функции $X(t)$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующая корреляционная функция $B(t, s)=\mathsf{E}X(t)\overline{X(s)}$ допускала представление в виде

$$B(t, s)=\int_{\Lambda}\varphi(t;\lambda)\overline{\varphi(s;\lambda)}F(d\lambda),$$

где $F(d\lambda)=\mathsf{E}|Z(d\lambda)|^2$ — неотрицательная мера на Λ.

Наиболее известный класс С. р. случайных функций — представления стационарных случайных процессов $X(t)$ в виде интеграла Фурье — Стилтьеса

$$X(t)=\int_{\Lambda}e^{it\lambda}dZ(\lambda), \tag{2}$$

где $Z(\lambda)$ — случайная функция λ с некоррелированными приращениями, а Λ — ось $(-\infty, \infty)$ в случае процессов с непрерывным временем t или же интервал $[-\pi, \pi]$, если время t дискретно (принимает целочисленные значения). Существование такого спектрального разложения следует из общей теоремы Хинчина об интегральном представлении корреляционной функции $B(s)=\mathsf{E}X(t+s)\overline{X(t)}$ (см. *Стационарный случайный процесс*); оно показывает, что любой стационарный случайный процесс можно рассматривать как наложение некоррелированных друг с другом гармонич. колебаний различных частот со случайными фазами и амплитудами. С. р. аналогичного вида, но с заменой гармонич. колебаний n-мерными плоскими волнами имеет место и для однородных случайных полей, заданных на евклидовом n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ или же на решетке $\mathbb{Z}^n$ точек $\mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами. В случае обобщенного стационарного случайного процесса — линейного функционала $X(\varphi)$ на пространстве D финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$, удовлетворяющего условиям

$$\mathsf{E}X(V_a\varphi)=\mathsf{E}X(\varphi),$$

$$\mathsf{E}X(V_a\varphi_1)\overline{X(V_a\varphi_2)}=\mathsf{E}X(\varphi_1)\overline{X(\varphi_2)}$$

при всех действительных a, где $V_a\varphi(t)=\varphi(t+a)$ — С. р. Функционал $X(\varphi)$ имеет вид

$$X(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(\lambda)\,dZ(\lambda), \tag{3}$$

где

$$\tilde{\varphi}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\varphi(t)\,dt$$

— преобразование Фурье функции $\varphi(t)$. Формула (3) следует из того, что

$$B(\varphi_1, \varphi_2)=\mathsf{E}X(\varphi_1)\overline{X(\varphi_2)}$$

можно представить в виде

$$B(\varphi_1, \varphi_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}_1(\lambda)\overline{\tilde{\varphi}_2(\lambda)}\,dF(\lambda),$$

где функция $F(\lambda)=\mathsf{E}|Z(\lambda)-Z(-\infty)|^2$ — монотонно неубывающая спектральная функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+\lambda^2)^{-m}\,dF(\lambda)<\infty$$

при нек-ром неотрицательном целом m (см. [3]). Если же в качестве пространства функций $\varphi(t)$ принять некрое пространство целых аналитич. функций, то можно прийти и к обобщенным стационарным случайным процессам $X(\varphi)$ с экспоненциально возрастающей спектральной функцией $F(\lambda)$ (см., напр., [4]).

С. р. специального вида имеют место и для однородных случайных полей на группах G и однородных пространствах S; этот факт в силу теоремы Карунена о С. р. следует из ряда имеющихся результатов об общем виде положительно определенных функций (или ядер — функций двух переменных) на множествах G и S. В ча-

стности, для однородного поля $X(g)$ на произвольной локально компактной коммутативной группе G С. р. поля $X(g)$ имеет вид (1), где роль функций $\varphi(t;\lambda)$ играют характеры $\chi^{(\lambda)}(g)$ группы G, а областью интегрирования Λ является соответствующая группа характеров $\hat{G}$ (см., напр., [5], [6]). С. р. более сложного вида при широких условиях имеют место и для однородных полей на некоммутативных топологич. группах (см. [5]). Наконец, в случае однородных полей на однородных пространствах $S=\{s\}$ С. р. поля $X(s)$ включает сферич. функции пространства S, а в выражение для корреляционной функции $B(s_1, s_2)=\mathsf{E}X(s_1)\overline{X(s_2)}$ входят соответствующие зональные сферич. функции (см. [5], [6]). В частности, общее однородное поле $X(\theta, \varphi)$ на сфере S_2 трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ допускает С. р. вида

$$X(\theta, \varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{l,m}(\theta, \varphi)\, Z_{l,m}, \qquad (4)$$

где

$$Y_{l,m}=e^{-im\varphi}P_l^m(\cos\theta)$$

— обычные сферич. функции, а случайные величины $Z_{l,m}$ таковы, что $\mathsf{E}Z_{l,m}\overline{Z}_{j,n}=\delta_{lj}\delta_{mn}f_l$, где δ_{lj} — символ Кронекера. Отвечающее формуле (4) выражение для корреляционной функции

$$\mathsf{E}X(\theta_1, \varphi_1)\,\overline{X(\theta_2, \varphi_2)}=B(\theta_{12}),$$

где θ_{12}— угловое расстояние между точками (θ_1, φ_1) и (θ_2, φ_2), имеет вид

$$B(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}[(2l+1)/2]\, f_l P_l(\cos\theta),$$

где P_l — многочлены Лежандра. Если же $X(r, \varphi)$, где (r, φ) — полярные координаты,— однородное и изотропное поле на плоскости $\mathbb{R}^2$ (так что $\mathsf{E}X(r_1, \varphi_1)\overline{X(r_2, \varphi_2)}=B(r_{12})$, где r_{12}— евклидово расстояние между точками (r_1, φ_1) и (r_2, φ_2)), то С. р. поля $X(r, \varphi)$ записывается в виде

$$X(r, \varphi)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi}\int_0^{\infty} J_k(\lambda r)\, dZ_k(\lambda), \qquad (5)$$

где $J_k(x)$ — функция Бесселя порядка k. Здесь $Z_k(\lambda)$ — случайные функции с некоррелированными приращениями такие, что

$$\mathsf{E}Z_k(\Delta_1)\,\overline{Z_m(\Delta_2)}=\delta_{km}F(\Delta_1\cap\Delta_2),$$

где

$$Z_k(\Delta)=\int_{\Delta} dZ_k(\lambda),$$

а $F(\Delta)$ — неотрицательная мера на полуоси $[0, \infty)$. С. р. (5) отвечает следующее выражение для корреляционной функции $B(r)$:

$$B(r)=\int_0^{\infty} J_0(\lambda r)\, dF(\lambda).$$

Дальнейшие примеры С. р. однородных полей см. в [5] — [7].

С. р. случайных функций существуют не только для стационарных случайных процессов и однородных случайных полей. Так, напр., если $X(t)$ — произвольный случайный процесс на интервале $a\leqslant t\leqslant b$ с непрерывной по обоим аргументам корреляционной функцией

$$B(t, s)=\mathsf{E}X(t)\,\overline{X(s)},$$

то в силу теоремы Мерсера теории интегральных уравнений и теоремы Карунена о С. р. процесс $X(t)$ будет допускать С. р. вида

$$X(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)\, Z_k/\sqrt{\lambda_k}, \qquad (6)$$

где $\varphi_k(t)$, $k=1, 2, \ldots$, и λ_k, $k=1, 2, \ldots$, — собственные функции и собственные значения интегрального оператора в функциональном пространстве с ядром $B(t, s)$, а $\mathsf{E}Z_k\overline{Z}_j=\delta_{kj}$. С. р. (6) случайного процесса $X(t)$, заданного на конечном интервале, представляет собой континуальный аналог разложения случайного вектора на его главные компоненты, часто используемого в многомерном статистич. анализе; оно было независимо получено целым рядом ученых (об этом см., напр., [5]) и чаще всего наз. разложением Карунена — Лоэва. Подобного рода С. р. широко используются также во многих приложениях, в частности в теории автоматич. управления, где разложение (6) (и нек-рые родственные ему разложения) часто наз. канонич. представлениями случайных процессов (см. [8]), и в геофизике, где обычно используется термин «метод эмпирических ортогональных функций», т. к. собственные функции $\varphi_k(t)$ здесь сами приближенно определяются по эмпирич. данным (см. [9]).

2) Под С. р. случайной функции $X(t)$, $t\in T$, иногда понимают также общее разложение вида (1) по некрой стандартной (достаточно простой) полной системе функций $\varphi(t; \lambda)$. Особенно часто такое С. р. рассматривается в применении к случайному процессу $X(t)$ с непрерывным временем и функциям $\varphi(t; \lambda)=e^{it\lambda}$, так что равенство (1) обращается в (2). Из (2) следует, что $B(t, s)=\mathsf{E}X(t)\overline{X(s)}$ допускает представление в виде

$$B(t, s)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda t-\mu s)}F(d\lambda\times d\mu), \qquad (7)$$

где $F(d\lambda\times d\mu)$ — комплекснозначная мера на плоскости (λ, μ), задаваемая соотношением

$$F(\Delta_1, \Delta_2)=\mathsf{E}Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)};$$

обратно, из представимости $B(t, s)$ в виде (7) следует и существование С. р. (2) (см., напр., [2]). Случайные процессы, допускающие С. р. (2), где $Z(\lambda)$ не обязательно имеет некоррелированные приращения, наз. гармонизуемыми случайными процессами; комплексная мера $F(d\lambda\times d\mu)$ в таком случае наз. спектральной мерой $X(t)$, а совокупность точек плоскости (λ, μ), не имеющих окрестности нулевой спектральной меры, наз. спектром процесса $X(t)$. Спектр стационарного процесса $X(t)$ сосредоточен на прямой $\lambda=\mu$. Гармонизуемыми при широких условиях будут и периодически-коррелированные (иначе, периодически-нестационарные) случайные процессы $X(t)$, обладающие тем свойством, что

$$\mathsf{E}X(t+mT)=\mathsf{E}X(t),$$

$$\mathsf{E}X(t+mT)\overline{X(s+mT)}=\mathsf{E}X(t)\overline{X(s)}$$

при нек-ром $T>0$ и произвольном целом m; спектр таких процессов сосредоточен на совокупности прямых $\lambda=\mu+2\pi k/T$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ (см., напр., [10]).

Лит.: [1] Karhunen K., «Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A, Math.— Phys.», 1947, № 37, p. 3—79; [2] Розанов Ю. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1959, т. 4, в. 3, с. 291—310; [3] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [4] Onoyama T., «Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A», 1959, v. 13, p. 208—13; [5] Яглом А. М., в кн.: Тр. 4-го Всесоюзного матем. съезда, Ленинград, 1961, Л., 1963, с. 250—73; [6] Хеннан Э., Представления групп и прикладная теория вероятностей, пер. с англ., М., 1970; [7] Ядренко М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980; [8] Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, 3 изд., М., 1962; [9] Фортус М. И., «Метеорол. и гидрология», 1980, № 4, с. 113—19; [10] Рытов С. М., Случайные процессы, М., 1976 (Введение в статистическую радиофизику, 2 изд., ч. 1).

А. М. Яглом.

СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ОЦЕНКА — функция от наблюденных значений $X(1), \ldots, X(N)$ стационарного случайного процесса с дискретным време-

нем, используемая в качестве оценки спектральной плотности $f(\lambda)$. В качестве С. п. о. часто используются квадратичные формы

$$\sum_{s,\,t=1}^{N} b_{s,\,t}^{(N)}\, X(s)\, X(t),$$

где $b_{s,\,t}^{(N)}$ — нек-рые комплексные коэффициенты (зависящие от λ). Можно показать, что асимптотич. поведение при $N\to\infty$ первых двух моментов С. п. о. в целом не ухудшится, если рассмотреть лишь подкласс квадратичных форм таких, что $b_{s_1,t_1}^{(N)}=b_{s_2,t_2}^{(N)}$ при $s_1-t_1=s_2-t_2$; это позволяет ограничиться С. п. о. вида

$$\hat{f}_N(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{t=-N+1}^{N-1} e^{it\lambda} b_N(t)\, B_N(t),$$

где

$$B_N(t)=\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N-|t|} X(s)\, X(s+|t|)$$

есть выборочная оценка ковариационной функции стационарного процесса $X(t)$. Оценку $\hat{f}_N(\lambda)$ можно представить также в виде

$$\hat{f}_N(\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_N(x)\, I_N(x+\lambda)\, dx,$$

где $I_N(x)$ — *периодограмма*, а $\Phi_N(x)$ — нек-рая непрерывная четная функция, определяемая своими коэффициентами Фурье

$$b_N(t)=\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_N(x)\, e^{itx}\, dx, \qquad t=-N+1,\ \ldots,\ N-1.$$

Функцию $\Phi_N(x)$ наз. *спектральным окном*; обычно рассматривают спектральные окна вида

$$\Phi_N(x)=A_N\Phi(A_N x),$$

где $\Phi(x)$ — нек-рая непрерывная на $(-\infty,\ \infty)$ функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)\, dx=1,$$

а $A_N\to\infty$ при $N\to\infty$, но $A_N N^{-1}\to 0$. Аналогично рассматривают коэффициенты $b_N(t)$ вида

$$b_N(t)=K(A_N^{-1}t)$$

и функцию $K(x)$, называемую к о в а р и а ц и о н н ы м о к н о м. При достаточно слабых ограничениях на гладкость спектральной плотности $f(\lambda)$ или на условия перемешивания случайного процесса $X(t)$ для широкого класса спектральных или ковариационных окон оценка $\hat{f}_N(\lambda)$ оказывается асимптотически несмещенной и состоятельной.

В случае многомерного случайного процесса для оценки элементов матрицы спектральных плотностей $f_{k,\,l}(\lambda)$ поступают аналогичным образом, используя соответствующие периодограммы $I_N^{(k,\,l)}(\lambda)$. Вместо С. п. о. в виде квадратичных форм от наблюдений часто также предполагают, что спектральная плотность имеет нек-рую заданную форму, зависящую от конечного числа параметров, и затем разыскивают зависящие от наблюдений оценки параметров, содержащихся в выражении для спектральной плотности (см. *Спектральная оценка максимальной энтропии*, *Спектральная оценка параметрическая*).

Лит.: [1] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [2] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974; [3] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976.

И. Г. Журбенко.

СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ОЦЕНКА — функция от наблюденных значений $X(1),\ \ldots,\ X(N)$ стационарного случайного процесса с дискретным временем, используемая в качестве оценки спектральной

функции $F(\lambda)$. В качестве С. ф. о. часто используется функция вида

$$F_N(\lambda)=\frac{2\pi}{N}\sum_{-\pi\leqslant\frac{2\pi k}{N}\leqslant\lambda} I_N\left(\frac{2\pi k}{N}\right),$$

где $I_N(x)$ — *периодограмма*. При достаточно широких условиях гладкости $F(\lambda)$ или условиях перемешивания случайного процесса $X(t)$ эта оценка оказывается асимптотически несмещенной и состоятельной.

Приведенная оценка $F(\lambda)$ является частным случаем оценок

$$\frac{2\pi}{N}\sum_{-\pi\leqslant\frac{2\pi k}{N}\leqslant\pi} A\left(\frac{2\pi k}{N}\right) I_N\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

функционала

$$I(A)=\int_{-\pi}^{\pi} A(x)\,f(x)\,dx$$

от спектральной плотности $f(\lambda)$. В частности, к этому виду с функцией $A(x)$, зависящей от длины выборки N и концентрирующейся около точки $x=\lambda$, сводятся многие *спектральной плотности оценки*.

Лит.: [1] Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980; [2] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974.

И. Г. Журбенко.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ГОМОЛОГИИ — обратный предел

$$\check{H}_n(X;\,G)=\varprojlim H_n(\alpha;\,G)$$

групп гомологий с коэффициентами в абелевой группе G нервов открытых покрытий α топологич. пространства X (они наз. также гомологиями Чеха, или Александрова — Чеха). Для замкнутого множества $A\subset X$ группы $\check{H}_n(A;\,G)$ могут быть определены аналогичным образом с помощью подсистем $\alpha'\subset\alpha$ всех тех множеств из α, к-рые имеют непустое пересечение с A. Обратный предел групп пар $H_n(\alpha,\,\alpha';\,G)$ наз. группой С. г. $\check{H}_n(X,\,A;\,G)$ пары $(X,\,A)$.

Поскольку функтор обратного предела не сохраняет точность, гомологич. последовательность пары $(X,\,A)$ в общем случае не точна. Она полуточна в том смысле, что композиция любых двух отображений равна нулю. Для компактных X последовательность оказывается точной в случае, когда G — компактная группа или поле (в более общей ситуации — когда группа G алгебраически компактна). С. г. непрерывны в том смысле, что

$$\check{H}_n(\varprojlim X_\lambda;\;G)=\varprojlim \check{H}_n(X_\lambda,\;G).$$

Отсутствие точности — не единственный недостаток С. г. Группы $\check{H}_n$ оказываются неаддитивными в том смысле, что гомологии дискретного объединения $X=\bigcup_\lambda X_\lambda$ могут отличаться от прямой суммы $\sum_\lambda \check{H}_n(X_\lambda;\,G)$. От этого недостатка свободны спектральные гомологии $\check{H}_n^C(X;\,G)$ с компактными носителями, определяемые как прямой предел $\varinjlim \check{H}_n(C;\,G)$, взятый по всем компактным подмножествам $C\subset X$. Естественность функтора $\check{H}_n^C$ подтверждается также тем, что любые обычные гомологии (симплициальные, клеточные, сингулярные) — это гомологии с компактными носителями.

Несовпадение функторов $\check{H}_n$ и $\check{H}_n^C$ — один из примеров того, как гомологии реагируют на логич. нюансы в их исходном определении (наоборот, когомологии проявляют в этом отношении значительную устойчивость). Среди логически возможных вариантов определения гомологий в общих категориях топологич. пространств правильный был отобран не сразу, в связи

с чем ассоциированная с когомологиями Александрова — Чеха теория гомологий H^C_* стала распространяться лишь в 60-е гг. (хотя первые определения были даны в 40—50-х гг.). Теория H^C_* удовлетворяет всем *Стинрода — Эйленберга аксиомам* (и является теорией с компактными носителями). Для компактных X имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow \varprojlim{}^1 H_{n+1}(\alpha;\ G) \longrightarrow H_n(X,\ G) \longrightarrow \check{H}(X;\ G) \longrightarrow 0$$

($\varprojlim^1$ — производный функтор обратного предела). В общем случае имеется эпиморфизм $H^C_n(X;G) \to \check{H}^C_n(X;\ G)$, к-рый имеет нулевое ядро для любой алгебраически *компактной группы* G. *Для любого гомологически* локально связного (по отношению к H^C_*) локально компактного пространства функторы $\check{H}_n$, $\check{H}^C_n$ и H^C_n изоморфны.

Лит.: [1] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [2] Скляренко Е. Г., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 6, с. 90—118; [3] Масси У., Теория гомологий и когомологий, пер. с англ., М., 1981.
Е. Г. Скляренко.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ — исследование спектральных *характеристик линейных операторов*: геометрии спектра и его основных частей, спектральной кратности, асимптотики собственных значений и т. д.

Для операторов, действующих в конечномерных пространствах, задача определения спектра эквивалентна задаче локализации корней характеристич. уравнения $\det(A-\lambda I)=0$; в бесконечномерных пространствах дело обстоит значительно сложнее, хотя аппарат определителей строится и успешно используется в С. а. некрых бесконечномерных операторов. В ряде случаев С. а. оператора основывается на явной конструкции функционального исчисления (операторы умножения в функциональных пространствах, другие модельные операторы, а также операторы, подобные их сужениям или факторам). Широко применяются в С. а. различные теоремы об отображении спектра для функций одного или нескольких операторов — от простейших (спектр многочлена от оператора состоит из значений этого многочлена на спектре оператора, спектр суммы двух коммутирующих операторов содержится в алгебраич. сумме их спектров) до весьма тонких, описывающих спектры функций от некоммутирующих операторов, функций от оператора, имеющих разрывы в граничных точках его спектра, совместные спектры образов многозначных отображений, отображения аппроксимативных, точечных и дефектных спектров и т. д. Полезную информацию о спектре оператора можно извлечь из его топологич. характеристик (напр., спектр непрерывного оператора компактен, а спектр компактного — не более чем счетен, причем его ненулевые точки — изолированные собственные значения), поведения относительно выделенного в пространстве конуса (ведущие собственные значения у положительного оператора) или скалярного произведения (спектр самосопряженного оператора веществен, эрмитово положительного — неотрицателен, диссипативного — лежит в верхней полуплоскости, унитарного — на единичной окружности). Если скалярное произведение не является знакоопределенным, но его индекс индефинитности $\varkappa$ конечен, то спектр сохраняющего его оператора (такие операторы наз. J-унитарными) может иметь не более $2\varkappa$ точек вне единичной окружности; для J-самосопряженных и J-диссипативных операторов положение аналогично (см. [5]).

Спектральные характеристики могут обладать определенными свойствами устойчивости (непрерывности); эти свойства являются объектом теории возмущений спектра (раздел общей теории возмущений). Так, спектр является полунепрерывной сверху

функцией оператора: *любая окрестность спектра ограниченного оператора* содержит спектры всех достаточно близких к нему операторов (случай неограниченных операторов требует небольшой модификации). Это позволяет проследить за изменением изолированных точек спектра при малых возмущениях и аналитически (в виде ряда по степеням параметра μ) выразить собственные значения оператора $A+\mu B$, лежащие в окрестности изолированного конечнократного собственного значения оператора A. В нек-рых случаях удается также оценить изменение числа собственных значений оператора в заданной области под действием возмущения, к-рое не предполагается малым по норме, но имеет фиксированный (конечный) ранг. В том же круге идей лежит теорема Вейля (H. Weyl, 1909) об инвариантности спектра сгущения (дополнение в спектре к множеству изолированных собственных значений конечной кратности) самосопряженного оператора при компактных возмущениях. Фактически им показано, что спектр сгущения самосопряженного оператора A совпадает с его существенным спектром

$$\sigma_l(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}: A-\lambda I \text{ не фредгольмов}\},$$

а равенство $\sigma_l(A+K)=\sigma_l(A)$ справедливо для любого замкнутого A и компактного K. Из теоремы Вейля следует, что все самосопряженные расширения симметрического оператора с конечными (и равными) дефектными числами имеют одинаковые существенные спектры. Теорема Вейля переносится на случай относительно компактных возмущений (оператор K наз. компактным относительно A, если он переводит всякое ограниченное множество с ограниченным A-образом в компактное), откуда следует совпадение существенных спектров всех самосопряженных расширений симметричных многомерных дифференциальных операторов широкого класса. Теорема Вейля допускает обращение (Дж. Нейман, J. Neumann, 1935): если два самосопряженных оператора имеют одинаковые существенные спектры, то один из них унитарно эквивалентен возмущению другого компактным (даже принадлежащим классу Гильберта — Шмидта) оператором, имеющим произвольно малую норму. Найдены обобщения этого результата на случай нормальных, существенно нормальных операторов, а также на представления некоммутативных *C*-алгебр*.

Теорема Вейля — Неймана показывает, что существенный спектр — единственная спектральная характеристика самосопряженного оператора, устойчивая относительно компактных возмущений, и что непрерывный и точечный спектры крайне неустойчивы. В то же время абсолютно непрерывный спектр $\sigma_{ac}(A)$ (спектр сужения A на подпространство $H_{ac}(A)$ всех векторов $x\in H$, для к-рых функция $\lambda\to(E_A(\lambda)x, x)$ абсолютно непрерывна) также обладает нек-рой устойчивостью: он не меняется при ядерных возмущениях. Это один из основных результатов теории волновых операторов, тесно связанный с квантовомеханич. теорией рассеяния (см. [2]). Волновой оператор $W(A, B)$ для пары самосопряженных операторов A, B — это изометрическое линейное отображение

$$x\longrightarrow\lim_{t\to\infty}\exp(itB)\exp(-itA)x,$$

определенное на замкнутом подпространстве $\Sigma(A, B)$ всех векторов $x\in H$, для к-рых предел существует. Соотношения $W(A, B)\,A=B\,W(A, B)$ и $W(A, B)\Sigma(A, B)=\Sigma(B, A)$ показывают, что $W(A, B)$ осуществляет унитарную эквивалентность операторов A, B, если $\Sigma(A, B)=\Sigma(B, A)=H$. Условие ядерности оператора $B-A$ влечет включения $H_{ac}(A)\subset\Sigma(A, B)$, $H_{ac}(B)\subset\Sigma(B, A)$, а следовательно,— унитарную эквивалентность абсолютно непрерывных частей операторов A и B,

обеспечивающую тождественность спектральных характеристик.

Существует иной подход к задаче доказательства унитарной эквивалентности (в случае несамосопряженных операторов — подобия) возмущенного оператора невозмущенному. При этом подходе записывают условия подобия операторов A и $A+K$ в виде линейного операторного уравнения $AV-VA=VK$; ищут линейный оператор Γ, обратный слева к оператору умножения $X\to AX-XA$, т. е. $A\Gamma(X)-\Gamma(X)A=X$, для к-рого оператор $\Gamma_K: X\to\Gamma(XK)$ является сжатием в пространстве операторов. Если такой оператор Γ найти удается, то в качестве V можно взять оператор $(I+\Gamma_K)^{-1}I$, проверив предварительно его обратимость. Этим методом удается исследовать широкий класс нормальных операторов с дискретным и непрерывным спектром, квазинильпотентных операторов, операторов взвешенного сдвига и, что особенно важно для приложений, многомерных интегро-дифференциальных операторов.

С. а. операторов, порожденных аналитич. (дифференциальными, интегральными, разностными и т. д.) операциями в функциональных пространствах, предполагает описание спектра операторов в терминах параметров (коэффициентов) соответствующей операции; широкая применимость теории возмущений в таких задачах объясняется тем, что выделить главную часть и возмущение часто удается в тех же терминах (перераспределяя коэффициенты). Напр., пусть $A_q(G)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$, q — вещественный потенциал, т. е. числовая функция на G) — оператор Шрёдингера, определяемый в $L^2(G)$ дифференциальной операцией $l_q(u)=-\Delta u+qu$ и наиболее жесткими граничными условиями (минимальный оператор). В этом случае $A_q(G)$ симметричен. Естественно считать $-\Delta$ (точнее, $A_0(G)$) невозмущенным оператором, а умножение на q — возмущением; такое представление дает полезные следствия, когда потенциал в каком-то смысле мал. Так, если $q(M)\to 0$ при $G\ni M\to\infty$, то теорема Вейля обеспечивает совпадение существенных спектров операторов A_q и A_0 (совпадающих с существенным спектром их самосопряженных расширений); если область G «достаточно велика» и потенциал квадратично интегрируем, то $\sigma_l(A_q)\supseteq[0,\ \infty)$, а если к тому же величина

$$\sum_{|j|\leqslant n+1}\int_G(1+r^2)\,|\,\partial^j q\,|\,dV$$

достаточно мала, то A_q и A_0 унитарно эквивалентны. В других случаях в качестве невозмущенного оператора берется $A_{\tilde{q}}$, где потенциал $\tilde{q}$ «близок» к q, но имеет более простую структуру. Это позволяет доказать, напр., что в интервале $(-\infty, a)$ спектр самосопряженных расширений оператора A_q конечен, если $\lim q(M)\to a$ при $M\to\infty$ (в частности, A_q полуограничен и имеет дискретный спектр, если $q(M)\to\infty$ при $G\ni M\to\infty$).

В С. а. симметрических дифференциальных операторов (в особенности одномерных) распространен также подход, основанный не на теории возмущений спектра, а на специальной форме теоремы о спектральном разложении. Унитарное преобразование, осуществляющее спектральное представление дифференциального оператора, может быть реализовано (в простейшем случае оператора с циклическим вектором) интегральным оператором

$$Uf(\lambda)=\int_G u(x,\ \lambda)\,f(x)\,dx,$$

ядро к-рого $u(x,\lambda)$ при любом λ является решением дифференциального уравнения $l(y)=\lambda y$, где l — исходная дифференциальная операция. Это позволяет использовать для С. а. дифференциальных операторов качественную теорию дифференциальных уравнений и приводит не только к описанию геометрии спектра

(здесь возможности данного подхода примерно соответствуют, а в многомерном случае даже уступают возможностям теории возмущений), но и к удобным аналитич. выражениям для спектральных характеристик, тонким результатам о сходимости спектральных разложений и т. д.

Функции $u(x, \lambda)$, по к-рым ведется спектральное разложение дифференциального оператора, не являются, в случае непрерывного спектра, его собственными функциями, поскольку они не принадлежат $L^2(G)$. Абстрактный вариант разложения по «обобщенным собственным функциям» строится в рамках теории оснащенных гильбертовых пространств (см. [4]). Оснащенное гильбертово пространство — это тройка $\Phi \subset H \subset \Phi'$, где H — гильбертово пространство, Φ — непрерывно вложенное в H топологическое векторное пространство, Φ' — сопряженное к Φ. Элемент $f \in \Phi'$ наз. обобщенным собственным вектором оператора A, действующего в H, если $A\Phi \subset \Phi$ и $f(Ax - \lambda x) = 0$ для всех $x \in \Phi$ (λ — соответствующее собственное значение). Для каждого самосопряженного оператора A можно таким образом выбрать оснащение, чтобы система обобщенных собственных векторов $\{f_\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ оператора A была полна в следующем смысле: для любого $x \in \Phi$

$$\|x\| = \int_{\sigma(A)} |f_\lambda(x)|^2 \, d\rho(\lambda),$$

где ρ — нек-рая мера на $\sigma(A)$. Если оператор A имеет циклич. вектор x_0, то в качестве меры ρ можно брать $(E_A(\cdot)x, x)$, где E_A — спектральная мера A; при этом $f_\lambda = \frac{dP_\lambda x_0}{d\rho(-\infty, \lambda)}$ (предел берется в топологии пространства Φ').

Для операторов с точечным спектром первостепенную важность имеет вопрос об асимптотике собственных значений; в случае самосопряженного оператора несколько проще описывать асимптотич. поведение функции $N(\lambda)$, равной числу собственных значений, меньших λ, или, что то же, размерности спектрального подпространства, соответствующего интервалу $(-\infty, \lambda)$. Наиболее известный результат: для оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функция $N(\lambda)$ асимптотически равна $r_n (2\pi)^{-n} |\Omega| \lambda^{n/2}$, где $|\Omega|$ — объем области Ω, а r_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 2 — Спектральная теория, М., 1966; ч. 3 — Спектральные операторы, М., 1974; [2] Като Т., Теория возмущений линейных операторов, пер. с англ., М., 1972; [3] Глазман И. М., Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1963; [4] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965; [5] Иохвидов И. С., Крейн М. Г., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1956, т. 5, с. 367—432; [6] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., Итоги науки и техники. Математич. анализ, т. 14, М., 1977, с. 5—58.

В. С. Шульман.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ стационарных случайных процессов, С. а. временных рядов, — 1) то же, что и *спектральное разложение* стационарных случайных процессов; 2) совокупность статистич. приемов, позволяющих оценить значение спектральной плотности стационарного случайного процесса по данным наблюдений за одной реализацией этого процесса (см. [1] — [4], а также *Статистические задачи* теории случайных процессов, *Периодограмма*, *Спектральной плотности оценка*, *Спектральная оценка максимальной энтропии*, *Спектральная оценка параметрическая*).

Лит.: [1] Дженкинс Г., Ваттс Д., Спектральный анализ и его приложения, пер. с англ., в. 1—2, М., 1971—72; [2] Modern spectrum analysis, N. Y., 1978; [3] Nonlinear methods of spectral analysis, B.— [a. o.], 1979; [4] Кей С. М., Марпл С. Л., «Тр. ин-та инж. электротехн. радиоэлектроники», 1981, т. 69, № 11, с. 5—51.

А. М. Яглом.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — ограниченный линейный оператор A, отображающий банахово пространство X в себя и такой, что для σ-алгебры $\mathcal{B}$ борелевских множеств δ на плоскости существует *разложение единицы* $E(\delta)$ со свойствами: 1) для любого $\delta\in\mathcal{B}$ проектор $E(\delta)$ приводит A, т. е. $E(\delta)A=AE(\delta)$, и спектр $\sigma(A_\delta)$ лежит в $\bar{\delta}$, где A_δ — сужение оператора A на инвариантное подпространство $E(\delta)X$; 2) отображение $\delta\to E(\delta)$ есть гомоморфизм $\mathcal{B}=\{\delta\}$ в булеву алгебру $\{E(\delta)\}$; 3) все проекторы $E(\delta)$ ограничены, т. е. $\|E(\delta)\|\leqslant M$, $\delta\in\mathcal{B}$; 4) разложение единицы $E(\delta)$ счетно аддитивно в сильной топологии пространства X, т. е. для любого $x\in X$ и любой последовательности $\{\delta_n\}\subset\mathcal{B}$, состоящей из попарно непересекающихся множеств,

$$E\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\delta_n\Big)x=\sum_{n=1}^{\infty}E(\delta_n)x.$$

Понятие С. о. можно распространить на неограниченные замкнутые операторы. При этом в 1) надо дополнительно потребовать, чтобы выполнялось включение $E(\delta)D(A)\subset D(A)$, где $D(A)$ — область определения оператора A, и $E(\delta)X\subset D(A)$ для ограниченных δ.

С. о. являются все линейные операторы в конечномерном пространстве, самосопряженные и нормальные операторы в гильбертовом пространстве, напр. оператор

$$Ax(t)=tx+\int_{-\infty}^{\infty}K(t,\ s)x(s)\,ds$$

в $L_p(-\infty,\ \infty)$, $1<p<\infty$, на

$$D(A)=\Big\{x(t)\Big|\int_{-\infty}^{\infty}|tx(t)|^2\,dt<\infty,$$

если ядро $K(t,s)$ есть преобразование Фурье борелевской меры μ на плоскости с полной вариацией $\operatorname{var}\mu<1/2\pi$ и такое, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(t,\ s)x(s)\,ds,\quad\int_{-\infty}^{\infty}K(t,\ s)x(t)\,dt$$

суть ограниченные линейные операторы в $L_p(-\infty,\ \infty)$.

С. о. обладают рядом важных свойств, напр.:

$$\lambda\in\delta(A)\Leftrightarrow\exists\,\{x_n\}\subset X,\ \|x_n\|=1,\ (A-\lambda I)x_n\longrightarrow 0;$$

в случае сепарабельного X точечный и остаточный спектры A не более чем счетны и др.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, ч. 3— Спектральные операторы, пер. с англ., М., 1974; [2] Данфорд Н., «Математика», 1960, т. 4, в. 1, с. 53—100.

В. И. Соболев.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ РАДИУС элемента банаховой алгебры — радиус ρ наименьшего круга на плоскости, содержащего спектр этого элемента. С. р. элемента a связан с нормами его степеней формулой

$$\rho(a)=\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{1/n}=\inf\|a^n\|^{1/n},$$

из к-рой следует, в частности, что $\rho(a)\leqslant\|a\|$. С. р. ограниченного оператора в банаховом пространстве — это его С. р. как элемента банаховой алгебры всех операторов. В гильбертовом пространстве С. р. оператора равен точной нижней грани норм подобных ему операторов (см. [2]):

$$\rho(A)=\inf_X\|XAX^{-1}\|.$$

Если оператор нормален, то $\rho(A)=\|A\|$.

С. р.— полунепрерывная сверху (но, вообще говоря, не непрерывная) функция элемента банаховой алгебры. Доказана [3] субгармоничность С. р. (это означает, что если $z\to h(z)$ — голоморфное отображение нек-рой области $D\subset\mathbb{C}$ в банахову алгебру $\mathfrak{A}$, то $z\to\rho(h(z))$ — субгармонич. функция).

Лит.: [1] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [2] Халмош П., Гильбертово пространство в задачах, пер. с англ., М., 1970; [3] Vesentini E., «Boll. Un. Mat. Ital.», 1968, v. 1, p. 427—29; [4] Ptak V., «Bull. London Math. Soc.», 1970, v. 2, p. 327—34. *В. С. Шульман.*

СПЕКТРАЛЬНЫЙ СЕМИИНВАРИАНТ — одна из характеристик стационарного случайного процесса. Пусть $X(t)$, $-\infty<t<\infty$, — действительный стационарный случайный процесс, для к-рого $\mathsf{E}|X(t)|^n<C<\infty$. Семиинварианты этого процесса

$$S^{(n)}(t_1 \dots t_n) = \frac{i^{-n}\,\partial^n}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \ln \mathsf{E}\, e^{i(u_1 X(t_1)+\dots+u_n X(t_n))}\Big|_{u_1=\dots u_n=0}$$

связаны с моментами

$$M^{(n)}(t_1 \dots t_n) = \mathsf{E}\{X(t_1) \dots X(t_n)\}$$

соотношениями

$$S^{(n)}(I) = \sum\nolimits_{\bigcup_{p=1}^{q} I_p = I} (-1)^{q-1}(q-1)! \prod\nolimits_{p=1}^{q} M^{(p)}(I_p),$$

$$M^{(n)}(I) = \sum\nolimits_{\bigcup_{p=1}^{q} I_p = I} \prod\nolimits_{p=1}^{q} S^{(p)}(I_p),$$

где

$$I=(t_1 \dots t_n),\ I_p=(t_{i_1} \dots t_{i_p}) \subseteq I$$

и суммирование ведется по всем разбиениям множества I на непересекающиеся подмножества I_p. Говорят, что $X(t)\in\Phi^{(n)}$, если для всех $1\leqslant k\leqslant n$ в пространстве $\mathbb{R}^k$ существует мера $M^{(k)}(\Delta)$ ограниченной вариации такая, что для всех $t_1 \dots t_k$

$$M^{(k)}(t_1 \dots t_k) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i(t_1\lambda_1+\dots+t_k\lambda_k)}\, M^{(k)}(d\lambda_1 \dots d\lambda_k) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{i(t,\lambda)}\, M^{(k)}(d\lambda).$$

Меру $F^{(n)}$, определенную на системе борелевских множеств, наз. спектральным семиинвариантом, если для всех $t_1 \dots t_n$

$$S^{(n)}(t_1 \dots t_n) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t,\lambda)} F^{(n)}(d\lambda).$$

Мера $F^{(n)}$ существует и имеет ограниченную вариацию, если $X(t)\in\Phi^{(n)}$. В случае стационарного процесса $X(t)$ семиинварианты $S^{(n)}(t_1 \dots t_n)$ инвариантны относительно сдвигов:

$$S^{(n)}(t_1+\tau, \dots, t_n+\tau) = S^{(n)}(t_1 \dots t_n),$$

а спектральные меры $F^{(n)}$ и $M^{(n)}$ сосредоточены на многообразии $\lambda_1+\dots+\lambda_n=0$. Если мера $F^{(n)}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на этом многообразии, то существует спектральная плотность n-го порядка $f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$, определяемая равенствами

$$S^{(n)}(t_1 \dots t_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda_1(t_2-t_1)+\dots+\lambda_{n-1}(t_n-t_1))} \times f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})\, d\lambda,$$

верными при всех $t_1 \dots t_n$. В случае дискретного времени под $\mathbb{R}^{(k)}$ во всех приведенных выше формулах надо понимать k-мерный куб $-\pi\leqslant\lambda_i\leqslant\pi$, $1\leqslant i\leqslant k$.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [2] Леонов В. П., Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов, М., 1964. *И. Г. Журбенко.*

СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ — восстановление инвариантных подпространств семейства линейных операторов по содержащимся в них собственным или корневым подпространствам этого семейства. Точнее, пусть $\mathfrak{A}$ — коммутативное семейство операторов в топологическом векторном пространстве X, $\sigma_p(\mathfrak{A})$ — его точечный спектр, т. е. совокупность числовых функ-

ций $\lambda=\lambda(A)$ на $\mathfrak{A}$, для к-рых собственные подпространства

$$N_{\mathfrak{A}}(\lambda)=\bigcap_{A\in\mathfrak{A}}\operatorname{Ker}(A-\lambda(A)I)$$

отличны от нулевого,

$$K_{\mathfrak{A}}(\lambda)=\bigcap_{A\in\mathfrak{A}}\bigcup_{n\in N}\operatorname{Ker}(A-\lambda(A)I)^n-$$

корневые подпространства, соответствующие точкам $\lambda\in\sigma_p(\mathfrak{A})$. Подпространство $L\subset X$, инвариантное относительно $\mathfrak{A}$, допускает С. с., если L совпадает с замыканием содержащихся в нем корневых подпространств. Если все $\mathfrak{A}$-инвариантные подпространства допускают С. с., то говорят, что само семейство $\mathfrak{A}$ допускает С. с.

Примером семейства, допускающего С. с., является всякая компактная коммутативная группа операторов в банаховом пространстве и, более общо, всякая группа с относительно компактными траекториями. Если $\dim X<\infty$, то всякое одноэлементное семейство допускает С. с. ввиду существования жорданова разложения. В общем случае, для того чтобы оператор допускал С. с., необходимо, по крайней мере, потребовать, чтобы все пространство X допускало С. с. относительно A, т. е. чтобы A имел полную систему корневых подпространств. Условие полноты, однако, не обеспечивает возможности С. с. даже для нормальных операторов в гильбертовом пространстве; для того чтобы нормальный оператор A допускал С. с., необходимо и достаточно, чтобы $\sigma_p(A)$ не содержал носителя меры, ортогональной многочленам. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда для любой области $G\subset\mathbb{C}$ найдется функция f, аналитическая в G, для к-рой

$$\sup_{z\in G}|f(z)|<\sup_{z\in G\cap\sigma_p(A)}|f(z)|.$$

В частности, полные унитарные и полные самосопряженные операторы допускают С. с. Допускают С. с. и *полные операторы, «близкие» к унитарным или самосопряженным* (диссипативные операторы с ядерной мнимой компонентой, операторы со спектром на окружности и нормальным ростом резольвенты при приближении к этой окружности).

Полнота системы корневых подпространств не обеспечивает С. с. инвариантных подпространств и при дополнительном условии компактности оператора: сужение полного компактного оператора на инвариантное подпространство не обязано иметь собственных векторов и, более того, может совпадать с любым наперед заданным компактным оператором.

В круг задач С. с. инвариантных подпространств входит, кроме выяснения возможности аппроксимации этих элементов линейными комбинациями корневых векторов, также построение и оценка скорости сходимости аппроксимирующей последовательности. В случае операторов со счетным спектром аппроксимирующая последовательность обычно строится усреднением последовательности частичных сумм формального ряда Фурье $x\sim\sum_{\lambda\in\sigma_p(A)}\varepsilon_\lambda x$, где ε_λ — проектор Рисса:

$$\varepsilon_\lambda x=(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_\lambda}(z-A)^{-1}\,dz,$$

Γ_λ — контур, определяющий точку $\lambda\in\sigma_p(A)$ от остального спектра.

Если пространство X состоит из функций на локально компактной абелевой группе, а $\mathfrak{A}$ совпадает с семейством всех операторов сдвига, то собственные относительно $\mathfrak{A}$ подпространства — это одномерные подпространства, порожденные характерами группы. Таким образом, теория С. с. инвариантных подпространств включает классич. задачи гармонич. синтеза

на локально компактной абелевой группе (см. *Гармонический анализ абстрактный*), состоящие в нахождении условий, при к-рых инвариантные относительно сдвигов подпространства в нек-ром топологическом векторном пространстве функций на группе порождаются содержащимися в них характерами. В частности, возможность С. с. на компактных группах или, более общо, в пространствах почти периодических функций на группах является следствием сформулированного выше результата о С. с. для групп операторов с относительно компактными траекториями. Далее, проблематика С. с. тесно связана и с задачами синтеза идеалов в регулярных коммутативных банаховых алгебрах: замкнутый идеал является пересечением максимальных («допускает синтез») тогда и только тогда, когда его аннулятор в сопряженном пространстве допускает С. с. относительно семейства операторов, сопряженных к операторам умножения на элементы алгебры.

Приведенное определение С. с. можно расширить таким образом, чтобы оно охватывало и семейства операторов без обширного точечного спектра (и даже некоммутативные). Для этого его заменяют требованием взаимной однозначности соответствия между инвариантными подпространствами и спектральными характеристиками сужений данного семейства операторов на эти подпространства. В этом смысле говорят о С. с. для модулей над регулярными коммутативными банаховыми алгебрами, для представлений локально компактной абелевой группы.

Лит.: [1] Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 1—2, М., 1975; [2] Никольский Н. К., в кн.: Итоги науки и техники. Математич. анализ, т. 12, М., 1974, с. 199—412; [3] Benedetto J., Spectral synthesis, N. Y., 1975. *В. С. Шульман.*

СПЕКТРАЛЬНЫЙ ТИП меры, тип Хеллингера, — содержащий эту меру класс эквивалентности по отношению к взаимной абсолютной непрерывности во множестве всех неотрицательных мер на данной σ-алгебре. Множество С. т. с отношением порядка, индуцированным отношением абсолютной непрерывности мер, является полной дистрибутивной структурой, в к-рой всякое счетное подмножество ограничено.

Теория С. т. используется для построения системы унитарных инвариантов нормальных операторов. Пусть A — произвольный нормальный оператор в пространстве H, $E_A(\cdot)$ — соответствующая спектральная мера на плоскости; спектральным типом $\sigma_A(x)$ вектора $x \in H$ наз. спектральный тип меры $(E_A(\cdot)x, x)$. Все С. т. вида $\sigma_A(x)$ наз. подчиненными оператору A. Если H сепарабельно, то среди С. т., подчиненных A, есть максимальный; в частности, все циклические нормальные операторы имеют максимальный С. т. Оказывается, что циклический нормальный оператор определяется своим максимальным С. т. с точностью до унитарной эквивалентности. В общем случае система унитарных инвариантов включает кратности однородных компонент максимального С. т.

Лит.: [1] Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965; [2] Dixmier J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien, 2 éd., P., 1969. *В. С. Шульман.*

СПЕЦИАЛИЗАЦИЯ ТОЧКИ x топологического пространства X — точка $y \in X$, для к-рой выполняется включение $y \in \overline{\{x\}}$ (что эквивалентно включению $\overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}}$). Точка x наз. общей, если любая точка пространства X является ее специализацией, т. е. $\overline{\{x\}} = X$. Другой крайний случай — замкнутая точка — точка, у к-рой имеется единственная специализация, совпадающая с ней самой.

Для аффинной схемы Spec (A) кольца A точка y является С. т. x, если для соответствующих простых идеалов из A справедливо включение $p_x \subset p_y$. Когда A — кольцо без делителей нуля, точка $\{0\} \in \mathrm{Spec}\, A$ является общей. Можно представлять себе, что отноше-

ние специализации распределяет точки по уровням: выше всех находятся замкнутые точки, на следующем уровне — точки, специализации к-рых замкнуты, на i-м уровне — точки, специализации к-рых принадлежат уровням с номерами $\leqslant i-1$. Напр., для Spec $(\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n])$ имеется $n+1$ уровень: замкнутые точки, общие точки кривых, общие точки поверхностей, . . ., общая точка n-мерного аффинного пространства.

Лит.: [1] Манин Ю. И., Лекции по алгебраической геометрии, М., 1970; [2] Grothendieck A., Eléments de géométrie algébrique, t. 1, P., 1960. *В. В. Шокуров.*

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ГРУППА степени n над кольцом R — подгруппа $SL(n, R)$ полной линейной группы $GL(n, R)$, являющаяся ядром гомоморфизма (т. н. определителя) $\det_n$. Строение группы $SL(n, R)$ зависит от кольца R, степени n и типа определителя, заданного на $GL(n, R)$. Существуют три основных типа определителя, относительно к-рого рассматриваются группы $SL(n, R)$: обычный определитель в случае, когда R — коммутативное кольцо, некоммутативный определитель Дьёдонне, если R — тело (см. [1]), и гомоморфизм приведенной нормы — для конечномерных над своим центром тел R (см. [2]).

С группой $SL(n, R)$ обычно связывают следующие группы: группу $E(n, R)$, порожденную элементарными матрицами e_{ij}^{λ} (см. *Алгебраическая K-теория*), а также для каждого двустороннего идеала q кольца R конгруэнц-подгруппу $SL(n, R, q)$ и группу $E(n, R, q)$ — нормальный делитель $E(n, R)$, порожденный матрицами e_{ij}^{λ} для $\lambda \in q$. Пусть $A \in E(n, R, q)$, $A \to \left\| \begin{matrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$, — вложение $E(n, R, q)$ в $E(n+1, R, q)$. Тогда переход к прямому пределу приводит к группе $E(R, q)$. Аналогично определяется группа $SL(R, q)$. Для $q=R$ вместо $E(R, R)$ и $SL(R, R)$ пишут соответственно $E(R)$ и $SL(R)$; последняя группа наз. стабильной специальной линейной группой кольца R. Нормальное строение $SL(R)$, тесно связанное со строением групп $SL(n, R)$, таково. Группа H является нормальным делителем $SL(R)$ тогда и только тогда, когда для нек-рого (причем единственного) двустороннего идеала q кольца R имеют место включения

$$E(R, q) \subset H \subset SL(R, q).$$

Таким образом, абелевы группы $SK_1(R, q) = SL(R, q)/E(R, q)$ классифицируют нормальные делители $SL(R)$. Группа $SK_1(R) = SK_1(R, R)$ наз. приведенной группой Уайтхеда кольца R. Удовлетворительное описание нормального строения группы $SL(n, R)$ в случае произвольного кольца R связано с условием стабильности ранга идеала q ($st.r.q$). Именно, если $n \geqslant st.r.q + 1$, то имеет место изоморфизм

$$SL(n, R, q)/E(n, R, q) \simeq SK_1(R, q).$$

Кроме того, если выполнено условие $n \geqslant st.r.R+1$, $n \geqslant 3$, то для всякого нормального делителя H группы $SL(n, R)$ при подходящем q имеет место включения

$$E(n, R, q) \subset H \subset SL'(n, R, q),$$

где $SL'(n, R, q) = GL'(n, R, q) \cap SL(n, R)$, $CL'(n, R, q)$ — прообраз центра группы $GL(n, R/q)$ в $GL(n, R)$. Для специальных колец имеются окончательные результаты (см., напр., [2], [4]).

В случае некоммутативного определителя Дьёдонне результаты имеют исчерпывающий характер. Группы $SL(n, R)$ и $E(n, R)$ совпадают. $SL(n, R)$ — коммутант группы $GL(n, R)$, за исключением случая $SL(2, F_2)$ (F_q — поле из q элементов). Центр Z_n группы $SL(n, R)$ состоит из скалярных матриц $\operatorname{diag}(\alpha, \ldots, \alpha)$, где α — элемент центра R и $\alpha^n \in [R^*, R^*]$, где $[R^*, R^*]$ — коммутант мультипликативной группы R^* тела R. Факторгруппа $SL(n, R)/Z_n$ проста, за исключением случая

$n=2, R=F_2, F_3$. В случае $n=2$ $SL(2, F_2)=SL(2, F_2)/Z_2$ и группа $SL(2, F_2)$ изоморфна симметрич. группе S_3 степени 3, а группа $SL(2, F_3)/Z_3$ изоморфна знакопеременной группе A_4 степени 4.

Если $\det_n$ — гомоморфизм приведенной нормы, то всегда

$$SL(n, R)/E(n, R) \simeq SK_1(R)$$

и

$$SK_1(R) \simeq SL(1, R)/[R^*, R^*],$$

причем для полей R группа $SK_1(R)$ тривиальна Долгое время существовала гипотеза, что $SK_1(R)=\{0\}$ для произвольного тела R. Однако в 1975 показано, что это не так (см. [5]). Группы $SK_1(R)$ играют важную роль в алгебраич. геометрии (см. [6], [7]). Имеются также нек-рые обобщения гомоморфизма приведенной нормы, что стимулировало ряд новых исследований по С. л. г.

Лит.: [1] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [2] Басс Х., Алгебраическая K-теория, пер. с англ., М., 1973; [3] Милнор Дж., Введение в алгебраическую K-теорию, пер. с англ., М., 1974; [4] Суслин А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1977, т. 41, № 2, с. 235—52; [5] Платонов В. П., «Докл. АН СССР», 1975, т. 222, № 6, с. 1299—1302; [6] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1976, т. 40, № 2, с. 227—61; [7] его же, в сб.: «Proc. Intern. Congr. Math.», 1980, v. 1, p. 311—23.

В. И. Янчевский.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ — в широком смысле совокупность отдельных классов функций, возникающих при решении как теоретических, так и прикладных задач в самых различных разделах математики.

В узком смысле под С. ф. подразумеваются С. ф. математич. физики, к-рые появляются при решении дифференциальных уравнений с частными производными методом разделения переменных.

С. ф. могут быть определены с помощью степенных рядов, производящих функций, бесконечных произведений, последовательного дифференцирования, интегральных представлений, дифференциальных, разностных, интегральных и функциональных уравнений, тригонометрич. рядов, рядов по ортогональным функциям.

К наиболее важным классам С. ф. относятся *гамма-функция* и *бета-функция*, *гипергеометрическая функция* и *вырожденная гипергеометрическая функция*, *Бесселя функции*, *Лежандра функции*, *параболического цилиндра функции*, *интегральный синус*, *интегральный косинус*, *неполная гамма-функция*, *интеграл вероятности*, различные классы *ортогональных многочленов* одного и многих переменных, *эллиптическая функция* и *эллиптический интеграл*, *Ламе функции* и *Матьё функции*, *дзета-функция Римана*, *автоморфная функция*, нек-рые С. ф. дискретного аргумента.

Теория С. ф. связана с представлением групп, методами интегральных представлений, опирающихся на обобщение формулы Родрига для классич. ортогональных многочленов и методами теории вероятностей.

Для С. ф. имеются таблицы значений, а также таблицы интегралов и рядов.

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1973—74; [2] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами, пер. с англ., М., 1979; [3] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 3 изд., М., 1977; [4] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М.—Л., 1963; [5] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 1—2, М., 1963; [6] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [7] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1, М., 1949; [8] Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, пер. с англ., М., 1952; [9] Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965; [10] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б., Специальные функции математической физики, М., 1978; [11] Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [12] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967; [13] Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произ-

ведений, 5 изд., М., 1971; [14] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., Интегралы и ряды. Элементарные функции, М., 1981; [15] их же, Интегралы и ряды Специальные функции, М., 1983. *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.*

СПЕЦИАЛЬНЫЙ АВТОМОРФИЗМ, построенный по автоморфизму S *пространства с мерой* (X, ν) и функции f (заданной на X и принимающей положительные целочисленные значения),— автоморфизм T нек-рого нового пространства с мерой (M, μ), строящийся следующим образом. Точки M суть пары (x, n), где $x \in X$ и n целое, $0 \leqslant n < f(x)$; при этом M снабжается очевидной мерой μ: если $A \subset X$ и $f(x) > n$ при всех $x \in A$, то $\mu(A \times n) = \nu(A)$. Если $\mu(M) = \int_X f d\nu < \infty$, то эту меру обычно еще нормируют. Преобразование T увеличивает вторую координату точки (x, n) на единицу, если $n+1 < f(x)$, т. е. если при этом точка не выходит из M; в противном случае $T(x, n) = (Sx, 0)$. Преобразование T оказывается автоморфизмом пространства с мерой (M, μ).

Описанная конструкция часто применяется в *эргодической теории* при построении различных примеров. С другой стороны, роль С. а. ясна из следующего. Отождествляя точку $x \in X$ с $(x, 0)$, можно считать, что $X \subset M$. Тогда $f(x)$ есть время, за к-рое точка, находившаяся вначале в X и двигающаяся под действием каскада $\{T^n\}$, возвращается снова в X, а S есть *производный автоморфизм* T_X. Таким образом, с помощью С. а. как бы восстанавливают траектории динамич. системы во всем фазовом пространстве, наблюдая только прохождения движущейся точки через множество X. *Д. В. Аносов.*

СПЕЦИАЛЬНЫЙ ПОТОК, построенный по автоморфизму S *пространства с мерой* (X, ν) и измеримой функции f, заданной на X и принимающей положительные значения,— *измеримый поток* в нек-ром новом пространстве с мерой (M, μ), строящийся следующим образом. Точки M суть пары (x, s), где $x \in X$ и $0 \leqslant s < f(x)$; мера μ — ограничение на множестве M, рассматриваемом как подмножество в $X \times [0, \infty)$ — прямого произведения меры ν на X и меры Лебега на $[0, \infty)$. Если $\mu(M) = \int_X f d\nu < \infty$, то эту меру обычно еще нормируют. Движение же происходит таким образом, что вторая координата точки (x, s) увеличивается с единичной скоростью, пока не достигает значения $f(x)$; а этот момент времени точка перескакивает в положение $(Sx, 0)$.

В *эргодической теории* С. п. играет роль, аналогичную роли сечений и *последования отображений* при исследовании гладких динамич. систем: X играет роль сечения, а S — отображения последования. Но в топологич. теории построить сечение в виде многообразия удается, вообще говоря, только локально. В эргодической же теории построение глобального сечения возможно при очень широких условиях, ибо здесь нет ограничений, связанных с топологией. (Если даже исходный поток является гладким, все равно допускается, чтобы секущая поверхность была разрывной.) Поэтому при очень широких условиях измеримый поток метрически изоморфен нек-рому С. п., даже с нек-рыми дополнительными условиями на f (см. [1]). Родственным понятием является *специальный автоморфизм.*

Лит.: [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980. *Д. В. Аносов.*

СПИН — одна из величин, характеризующая внутренние степени свободы квантовой частицы (или квантового поля). Нерелятивистская частица имеет спин S ($S = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$), если ее волновая функция $\psi(x)$ принимает значения из нек-рого линейного пространства L, в к-ром действует неприводимое (однозначное или двузначное) представление $g \to Tg$ веса S группы вращений SO_3 трехмерного пространства (см. [1], [2]) так, что при переходе от одной ортогональной

системы координат в $\mathbb{R}$ к другой при помощи матрицы $g \in SO_3$ значения волновой функции преобразуются матрицей Tg. В случае релятивистской частицы, волновая функция к-рой преобразуется с помощью какого-нибудь представления $g \to Tg$ группы Лоренца, ее С. наз. максимальный из весов неприводимых представлений группы вращений SO_3, на к-рые раскладывается представление $g \to Tg$.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 3 изд., М., 1974; [2] Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения, М., 1958.

Р. А. Минлос.

СПИНОР — элемент пространства *спинорного представления*. Напр., если Q — невырожденная квадратичная форма в n-мерном пространстве V над полем k, имеющая максимальный индекс Витта $m = [n/2]$ (последнее условие всегда выполнено, если поле k алгебраически замкнуто), то в качестве пространства С., отвечающего форме Q, можно рассматривать внешнюю алгебру над максимальными (размерности m) вполне изотропными подпространствами в V.

С. были рассмотрены впервые в 1913 Э. Картаном (É. Cartan) в его исследованиях по теории представлений непрерывных групп и вновь открыты в 1929 Б. Л. Ван дер Варденом (B. L. van der Waerden) в исследованиях по квантовой механике [так, было обнаружено, что явление спина электрона и других элементарных частиц описывается физич. величинами, не принадлежащими к известным ранее типам величин (тензорам, псевдотензорам и т. д.), напр., они определяются лишь с точностью до знака, и при повороте системы координат на угол 2π вокруг нек-рой оси все компоненты этих величин меняют знак].

В настоящее время спинорное исчисление нашло широкое применение во многих отраслях математики и позволило решить ряд трудных задач алгебраической и дифференциальной топологии (напр., задача о числе ненулевых векторных полей на k-мерной сфере, задача об индексе эллиптического оператора, K-теория).

Лит.: [1] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, М., 1979; [2] Желнорович В. А., Теория спиноров и ее применение в физике и механике, М., 1982; [3] Картан Э., Теория спиноров, пер. с франц., М., 1947; [4] Каруби М., K-теория. Введение, пер. с англ., М., 1981.

М. И. Войцеховский.

СПИНОРНАЯ ГРУППА невырожденной квадратичной формы Q на n-мерном ($n \geqslant 3$) векторном пространстве V над полем k — связная линейная алгебраич. группа, являющаяся универсальной накрывающей неприводимой компоненты единицы $O_n^+(Q)$ ортогональной группы $O_n(Q)$ формы Q. Если $\mathrm{char}\ k \neq 2$, то группа $O_n^+(Q)$ совпадает со специальной ортогональной группой $SO_n(Q)$. С. г. строится следующим образом. Пусть $C = C(Q)$ — *Клиффорда алгебра* пары (V, Q), C^+ (соответственно C^-) — подпространство в C, порожденное произведениями четного (соответственно нечетного) числа элементов из V, β — канонич. антиавтоморфизм алгебры C, определяемый формулой

$$\beta(v_1 v_2 \dots v_k) = v_k \dots v_2 v_1.$$

Вложение $V \subset C$ позволяет определить группу Клиффорда

$$G = \{s \in C \mid s \text{ обратим в } C \text{ и } sVs^{-1} = V\}$$

и четную (или специальную) группу Клиффорда

$$G^+ = G \cap G^+.$$

С. г. $\mathrm{Spin}_n = \mathrm{Spin}_n(Q)$ определяется равенством

$$\mathrm{Spin}_n = \{s \in G^+ \mid s\beta(s) = 1\}.$$

С. г. Spin_n — простая (при $n \neq 4$) связная односвязная линейная алгебраич. группа типа B_m при $n = 2m+1$

и типа D_m при $n=2m\geqslant 8$; при $n=6$ это A_3, а при $n=4$ это $A_1\times A_1$. Имеют место изоморфизмы

$$\mathrm{Spin}_3\cong \mathrm{SL}_2,\ \mathrm{Spin}_n\cong \mathrm{SL}_2\times \mathrm{SL}_2,$$

$$\mathrm{Spin}_5\cong \mathrm{Sp}_4,\ \mathrm{Spin}_6\cong \mathrm{SL}_4.$$

Линейное представление θ С. г. Spin_n в пространстве V, определяемое равенством

$$\theta(s)\cdot v=svs^{-1},\ s\in \mathrm{Spin}_n,\ v\in V,$$

наз. ее **векторным представлением**. При этом

$$\theta(\mathrm{Spin}_n(Q))=O_n^+(Q)\ \text{и}\ \mathrm{Ker}\,\theta=\{\pm 1\}.$$

Группа Spin_n допускает также точное линейное представление (см. *Спинорное представление*).

Если $k=\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, а квадратичная форма Q положительно (или отрицательно) определена, то группа $\mathrm{Spin}_n^{\mathbb{R}}$ вещественных точек алгебраич. группы Spin_n также наз. С. г. Это связная односвязная компактная группа Ли, являющаяся двулистной накрывающей специальной ортогональной группы $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Имеют место изоморфизмы

$$\mathrm{Spin}_3^{\mathbb{R}}\cong \mathrm{SU}_2,\ \mathrm{Spin}_4^{\mathbb{R}}\cong \mathrm{SU}_2\times \mathrm{SU}_2,$$

$$\mathrm{Spin}_5^{\mathbb{R}}\cong \mathrm{Sp}_4\,(2)\ \text{(см. } \textit{Симплектическая группа}),$$

$$\mathrm{Spin}_6^{\mathbb{R}}\cong \mathrm{SU}_4.$$

Лит.: [1] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [2] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [3] Картан Э., Теория спиноров, пер. с франц., М., 1947; [4] Постников М. М., Группы и алгебры Ли, М., 1982; [5] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948.
В. Л. Попов.

СПИНОРНАЯ СТРУКТУРА на n-мерном многообразии M, расслоение спин-реперов, — главное расслоение $\pi\colon \tilde{P}\to M$ над M со структурной группой $\mathrm{Spin}\,(n)$ (см. *Спинорная группа*), накрывающее нек-рое главное расслоение $\pi\colon P\to M$ реперов со структурной группой $\mathrm{SO}\,(n)$. Последнее условие означает, что задан тождественный по базе сюръективный гомоморфизм $\varkappa$ главных расслоений $\tilde{P}\to P$, согласованный с естественным гомоморфизмом $\rho\colon \mathrm{Spin}\,(n)\to \mathrm{SO}\,(n)$. Говорят, что С. с. $(\tilde{\pi},\varkappa)$ подчинена римановой метрике g на M, определяемой расслоением π. С точки зрения теории G-структур С. с. есть обобщенная G-структура со структурной группой $G=\mathrm{Spin}\,(n)$, рассматриваемой вместе с неточным представлением $\rho\colon \mathrm{Spin}\,(n)\to \mathrm{SO}\,(n)$.

Аналогичным образом определяются С. с., подчиненная псевдоримановой метрике, и С. с. на комплексном многообразии, подчиненная комплексной метрике. Необходимые и достаточные условия существования С. с. на M состоят в ориентируемости многообразия M и обращении в нуль класса Штифеля — Уитни $W_2(M)$. При выполнении этих условий число неизоморфных С. с. на M, подчиненных данной римановой метрике, совпадает с порядком группы $H^1(M,\mathbb{Z}_2)$ (см. [6]).

Пусть C — комплексификация *Клиффорда алгебры* пространства $\mathbb{R}^n$ относительно квадратичной формы $q=-\sum_{i=1}^n x_i^2$. Алгебра C обладает неприводимым представлением в пространстве S над $\mathbb{C}$ размерности $2^{[n/2]}$, к-рое определяет представление группы $\mathrm{Spin}\,(n)\subset C$ в пространстве S. Всякая С. с. $\tilde{\pi}$ на M задает ассоциированное векторное расслоение $\pi_S\colon S(M)\to M$ со слоем S, называемое **расслоением спиноров**. Риманова связность на M определяет каноническим образом связность в расслоении π_S. В пространстве $\Gamma(S)$ гладких сечений расслоения π_S (**спинорных полей**) действует линейный дифференциальный опе-

ратор D порядка 1 — оператор Дирака, к-рый локально определяется формулой

$$Du=\sum_{i=1}^{n} s_i\cdot\nabla_{s_i}u,$$

где ∇_{s_i} — ковариантные производные по направлениям ортонормированных векторных полей s_i, а умножение элементов из S на векторы из $\mathbb{R}^n$ соответствует определенной выше структуре C-модуля на S.

Спинорные поля, аннулируемые оператором D, иногда наз. гармоническими. Если M компактно, то $\dim\ker D<\infty$, причем эта размерность не меняется при конформной деформации метрики [4]. Если при этом риманова метрика на M имеет положительную скалярную кривизну, то $\ker D=0$ (см. [4], [5]).

С. с. в пространстве-времени (M, g) (т. е. в четырехмерном лоренцевом многообразии) наз. С. с., подчиненная лоренцевой метрике g. Существование С. с. в некомпактном пространстве-времени M эквивалентно абсолютной параллелизуемости многообразия M (см. [3]). Пространство спиноров S как модуль над спинорной группой $\mathrm{Spin}(1,3)\approx\mathrm{SL}(2,G)$ разлагается в прямую сумму двух комплексных двумерных комплексно-сопряженных $\mathrm{SL}(2, G)$-модулей $\mathbb{C}^2$ и $\bar{\mathbb{C}}^2$. Этому разложению соответствует разложение $S(M)=\mathbb{C}^2(M)\oplus\bar{\mathbb{C}}^2(M)$ расслоения спиноров, причем тензорное произведение $\mathbb{C}^2(M)\otimes\bar{\mathbb{C}}^2(M)$ отождествляется с комплексификацией касательного расслоения TM. Спинорные поля в пространстве-времени, являющиеся собственными функциями оператора Дирака, описывают свободные поля частиц со спином $^1/_2$, напр. электронов.

Лит.: [1] Казанова Г., Векторная алгебра, пер. с франц., М., 1979; [2] Пенроуз Р., Структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1972; [3] Geroch R., «J. Math. Phys.», 1968, v. 9, p. 1739—44; [4] Hitchin N., «Adv. Math.», 1974, v. 14, p. 1—55; [5] Lichnerowicz A., «Bull. Soc. math. France», 1964, t. 92, p. 11—100; [6] Milnor J., «Enseign. math.», 1963, t. 9, p. 198—203; [7] Твисторы и калибровочные поля, пер. с англ., М., 1983. *Д. В. Алексеевский.*

СПИНОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — простейшее точное линейное представление *спинорной группы* $\mathrm{Spin}_n(Q)$ или определяющее его линейное представление объемлющей четной алгебры Клиффорда $C^+=C^+(Q)$. Если основное поле K алгебраически замкнуто, то алгебра C^+ изоморфна полной матричной алгебре $M_{2^m}(K)$ (при $n=2m+1$) или алгебре $M_{2^m-1}(K)\oplus M_{2^m-1}(K)$ (при $n=2m$). Тем самым определено линейное представление ρ алгебры C^+ в пространстве размерности 2^m над K, к-рое наз. спинорным. Ограничение $\rho|\mathrm{Spin}_n(Q)$ наз. С. п. группы $\mathrm{Spin}_n(Q)$. С. п. при нечетном n неприводимо, а при четном n распадается в прямую сумму двух неэквивалентных неприводимых представлений ρ' и ρ'', к-рые наз. полуспинорными. Элементы пространства С. п. наз. спинорами, а полуспинорных — полуспинорами. С. п. спинорной группы Spin_n самоконтрагредиентно при любом $n\geqslant 3$; полуспинорные представления ρ' и ρ'' спинорной группы Spin_{2m} самоконтрагредиентны при четном m и контрагредиентны друг другу при нечетном m. С. п. группы Spin_n точно при любом $n\geqslant 3$, полуспинорные представления группы Spin_{2m} точны при нечетном m и имеют ядро, состоящее из двух элементов, при четном m.

Если квадратичная форма Q задана в пространстве V над нек-рым подполем $k\subset K$, то С. п. не всегда определено над k. Однако, если индекс Витта квадратичной формы Q максимален, то есть равен $[n/2]$ (в частности, если поле k алгебраически замкнуто), то спинорное и полуспинорные представления определены над k. В этом случае указанные представления могут быть описаны следующим образом (см. [1]). Пусть L и M — не-

пересекающиеся определенные над k максимальные вполне изотропные (относительно симметрической билинейной формы в V, ассоциированной с квадратичной формой Q) подпространства в V, C_L — подалгебра в алгебре Клиффорда $C=C(Q)$, порожденная подпространством $L\subset V$, и $e_M\in C$ — произведение m векторов, составляющих определенный над k базис пространства M. Если $n=2m$ четно, то С. п. реализуется в простом левом идеале Ce_M и действует там с помощью левых сдвигов: $\rho(s)x=sx$ ($s\in C^+$, $x\in Ce_M$). Далее соответствие $x\mapsto xe_M$ определяет изоморфизм векторных пространств $C_L\to Ce_M$, что позволяет реализовать С. п. в пространстве C_L, естественно изоморфном внешней алгебре над пространством L. При этом полуспинорные представления ρ' и ρ'' реализуются в инвариантных 2^{m-1}-мерных подпространствах $C_L\cap C^+$ и $C_L\cap C^-$.

Если n нечетно, то пространство V можно включить в $(n+1)$-мерное векторное пространство $V_1=V\oplus k\varepsilon$ над k и определить в V_1 квадратичную форму Q_1, положив $Q_1(v+\lambda\varepsilon)=Q(v)-\lambda^2$ при всех $v\in V$ и $\lambda\in k$. При этом Q_1 — *определенная над k невырожденная* квадратичная форма максимального индекса Витта на четномерном векторном пространстве V_1. С. п. алгебры $C^+(Q)$ (группы $\mathrm{Spin}_n(Q)$) получается путем ограничения любого из полуспинорных представлений алгебры $C^+(Q_1)$ (группы $\mathrm{Spin}_{n+1}(Q_1)$) на подалгебру $C^+(Q)$ (соответственно подгруппу $\mathrm{Spin}_n(Q)$).

В случае, когда $3\leqslant n\leqslant 14$, а k — алгебраически замкнутое поле характеристики 0, решена задача классификации спиноров (см. [4], [8], [9]), к-рая состоит в 1) описании всех орбит группы $\rho(\mathrm{Spin}_n)$ в пространстве спиноров, т. е. указании в каждой орбите нек-рого единственного представителя, 2) вычислении стабилизаторов группы Spin_n в каждом из этих представителей, 3) описании алгебры инвариантов линейной группы $\rho(\mathrm{Spin}_n)$.

Существование спинорных и полуспинорных представлений алгебр Ли $\mathfrak{so}_n$ групп Spin_n было открыто Э. Картаном (É. Cartan) в 1913, когда он классифицировал все неприводимые конечномерные представления простых алгебр Ли [6]. Впоследствии, в 1935 Р. Брауэр (R. Brauer) и Г. Вейль (H. Weyl) описали спинорные и полуспинорные представления в терминах алгебр Клиффорда [5]. П. Дирак (P. Dirac, [3]) обнаружил, что при помощи спиноров в квантовой механике описывается вращение электрона.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с нем., М., 1947; [3] Дирак П., Принципы квантовой механики, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [4] Попов В. Л., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1978, т. 37, с. 173—217; [5] Brauer R., Weyl H., «Amer. J. Math.», 1935, v. 57, № 2, p. 425—49; [6] Cartan E., Œuvres complètes, v. 1, pt 1, P., 1952, p. 355—98; [7] Chevalley C., The algebraic theory of spinors, N. Y., 1954; [8] Gatti V., Viniberghi E., «Advances in Math.», 1978, v. 30, № 2, p. 137—55; [9] Igusa J.-i., «Amer. J. Math.», 1970, v. 92, № 4, p. 997—1028.

В. Л. Попов.

СПИРАЛИ — плоские кривые, к-рые обычно обходят вокруг одной (или нескольких точек), приближаясь или удаляясь от нее.

Среди С. выделяют алгебраич. С. и псевдоспирали.

Алгебраические спирали — спирали, уравнения к-рых в полярных координатах являются алгебраическими относительно переменных ρ и φ. К алгебраическим С. относятся: *гиперболическая спираль, архимедова спираль, Галилея спираль, Ферма спираль, параболическая спираль, жезл.*

Псевдоспирали — спирали, натуральные уравнения к-рых могут быть записаны в виде

$$r=as^m,$$

где r — радиус кривизны, s — длина дуги. При $m=1$ псевдоспираль наз. *логарифмической спиралью*, при

$m=-1$ — *Корню спиралью*, при $m=1/2$ является *эвольвентой* окружности.

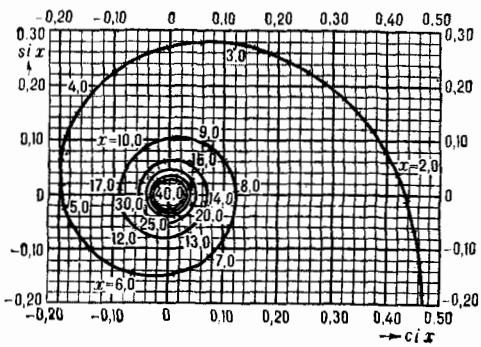
Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

SICI-СПИРАЛЬ — плоская кривая, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах (x, y) имеет вид

$$x=\mathrm{ci}\,(t),\quad y=\mathrm{si}(t),$$

где ci — интегральный косинус, si — интегральный синус, t — действительный параметр (рис.). Дли-



на дуги от точки $t=0$ до точки t_0 равна $\ln t_0$, а кривизна $\varkappa=t_0$.

Лит.: [1] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968.

Д. Д. Соколов.

СПИРМЕНА КОЭФФИЦИЕНТ РАНГОВОЙ КОРРЕЛЯЦИИ — мера зависимости двух случайных величин (признаков) X и Y, основанная на ранжировании независимых результатов наблюдений $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$. *Если ранги значений X расположены в естественном порядке* $i=1, \ldots, n$, а R_i — ранг Y, соответствующий той паре (X, Y), для к-рой ранг X равен i, то С. к. р. к. определяется формулой

$$r_s=\frac{12}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{n+1}{2}\right)\left(R_i-\frac{n+1}{2}\right)$$

или, что равносильно,

$$r_s=1-\frac{6\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{n(n^2-1)},$$

где d_i — разность между рангами X_i и Y_i. Значение r_s меняется от -1 до $+1$, причем $r_s=+1$, когда последовательности рангов полностью совпадают, т. е. $i=R_i$, $i=1, \ldots, n$, и $r_s=-1$, когда последовательности *рангов полностью противоположны*, т. е. $i=(n+1)-R_i$, $i=1, \ldots, n$. С. к. р. к., как и любая другая ранговая статистика, применяется для проверки гипотезы независимости двух признаков. Если признаки независимы, то $\mathrm{E}r_s=0$, $\mathrm{D}r_s=\frac{1}{n-1}$. Таким образом, по величине отклонения r_s от нуля можно сделать вывод о зависимости или независимости признаков. Для построения соответствующего критерия вычисляется распределение r_s для независимых признаков X и Y. При $4\leqslant n\leqslant 10$ используют таблицы точного распределения (см. [2], [4]), а при $n>10$ можно воспользоваться, напр., тем, что случайная величина $\sqrt{n-1}\,r_s$ при $n\to\infty$ распределена асимптотически нормально с параметрами (0, 1). В последнем случае гипотеза независимости отвергается, если $|r_s|>u_{1-\frac{\alpha}{2}}/\sqrt{n-1}$, где $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ есть корень уравнения $\Phi(u)=1-\frac{\alpha}{2}$ ($\Phi(u)$ — функция стандартного нормального распределения).

В предположении, что X и Y имеют совместное нормальное распределение с обычным коэффициентом корреляции ρ, при достаточно больших n

$$\mathsf{E} r_s \sim \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{2},$$

и поэтому величину $2 \sin \frac{\pi}{6} r_s$ можно использовать в качестве оценки для ρ.

С. к. р. к. был назван по имени психолога Ч. Спирмена (Ch. Spearman, 1904), к-рый использовал его в исследованиях по психологии вместо обычного коэффициента корреляции. Критерии, основанные на С. к. р. к и на *Кендалла коэффициенте ранговой корреляции*, асимптотически эквивалентны (при $n=2$ соответствующие ранговые статистики совпадают).

Лит.: [1] Spearman C., «Amer. J. Psychol.», 1904, v. 15, p. 72—101; [2] Кендэл М., Ранговые корреляции, пер. с англ., М., 1975; [3] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, [3 изд.], М., 1983. *А. В. Прохоров.*

СПЛАЙН — функция $s_m(\Delta_n; x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, совпадающая на частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$, образованных сеткой Δ_n: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ с нек-рыми алгебраическими многочленами степени не выше m, и имеющая на $[a, b]$ непрерывную $(m-1)$-ю производную. Для С. справедливо представление

$$s_m(\Delta_n; x) = P_{m-1}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-x_k)_+^m,$$

где c_k — действительные числа, $P_{m-1}(x)$ — многочлен степени не выше $(m-1)$ и $(x-t)_+^m = [\max(0, x-t)]$. Точки $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$ наз. у з л а м и С. Если С. $s_m(\Delta_n; x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную $(m-k)$-ю производную $(k \geqslant 1)$, а $(m-k-1)$-я производная в узлах С. разрывна, то говорят, что он имеет д е ф е к т k. Наряду с введенными выше С. (п о л и н о м и а л ь н ы м и с п л а й н а м и) рассматриваются более общие С. (L-с п л а й н ы), к-рые «склеиваются» из решений линейного однородного дифференциального уравнения $Ly=0$ и С. (L_g-с п л а й н ы) с разной гладкостью в различных узлах, а также С. многих переменных. С. и их обобщения часто появляются как экстремальные функции при решении экстремальных задач: наилучшие квадратурные формулы, наилучшее численное дифференцирование и др. С. применяются для приближения функций (см. *Сплайн-аппроксимация*, *Сплайн-интерполяция*), построения приближенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. С помощью С. строятся ортонормированные системы, обладающие хорошими свойствами сходимости.

Лит.: [1] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976. *Ю. Н. Субботин.*

СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ—приближенное представление функции или приближенное восстановление функции из заданного класса по неполной информации (напр., по значениям на сетке) с помощью *сплайнов*.

Как и в классич. теории приближения функций, изучаются линейные методы С.-а., включая *сплайн-интерполяцию*, наилучшие методы, а также аппроксимации классами нелинейных сплайнов, напр. сплайнами с нефиксированными узлами.

Н а и л у ч ш и е п р и б л и ж е н и я с п л а й н а м и. Изучаются вопросы существования, единственности, характеристич. свойства наилучшего сплайна (н. с.) (см. *Наилучшего приближения элемент*), а также порядки, асимптотика и точные верхние грани уклонений сплайнов от заданного класса функций. Сплайны с фиксированными узлами не образуют *Чебышева систему*, поэтому в $C[a, b]$ нет единственности

н. с. и характеристич. свойства н. с. сложнее, чем характеристич. свойства *Наилучшего приближения многочлена* (см. [8]). Однако в $L[a, b]$ для подкласса непрерывных функций н. с., если они склеиваются из гладких функций, образующих систему Чебышева на $[a, b]$, обладают свойствами единственности [2]. Сплайны с фиксированной гладкостью, но с нефиксированными узлами (предполагается, что число узлов не превосходит заданного числа) не образуют замкнутого множества, поэтому здесь может не существовать н. с. Порядок приближения может быть охарактеризован следующим результатом [6]:

$$\left\| f^{(i)}(x) - S^{(i)}_{m,\,\Delta_n}(x) \right\|_{L_p[a,\,b]} \leqslant$$

$$\leqslant c \, \| \Delta_n \|^{1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \, \omega_{m-i}(f^{(i+1)}, \| \Delta_n \|)_q, \qquad (1)$$

$$1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty,$$

где $S_{m,\,\Delta_n}(x)$ — полиномиальный сплайн степени m с узлами в точках сетки

$$\Delta_n : a = x_0^{(n)} \leqslant x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} = b,$$

$$\| \Delta_n \| = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i),$$

$\omega_k(f, \delta)_q$ — модуль гладкости порядка k в $L_q[a, b]$ и функция $f(x)$ имеет абсолютно непрерывную $(l-1)$-ю производную и l-ю из L_q $(1 \leqslant l \leqslant m)$, $i = 0, 1, \ldots, l-1$. При $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ в (1) можно i заменить на $i-1$ и убрать множитель $\|\Delta_n\|^{1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$. Более слабые аналоги неравенства (1) получены для многомерных сплайнов. Напр., если $f \in W_2^k(\Omega)$ ($W_2^k(\Omega)$ — пространство Соболева) и S_h^k — совокупность сплайнов (степени не выше k по каждой переменной) с равномерными узлами и шагом h и область Ω удовлетворяет строгому условию конуса (см. *Вложения теоремы*), то

$$\inf_{S \in S_h^k} \| f - S \|_{W_2^j(\Omega)} \leqslant c \cdot h^{k-j} \, \| f \|_{W_2^k(\Omega)}, \qquad 0 \leqslant j \leqslant k.$$

Для равномерной сетки ($\|\Delta_n\| = 1/n$) и класса W_q^{m+1} порядок правой части в (1) при $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ равен $n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - m - 1 + i}$. Если рассматривать приближение сплайнами степени m гладкости $m-1$ с нефиксированными узлами, число к-рых не превосходит n, то за счет выбора узлов можно добиться [7], чтобы порядок аппроксимации был равен n^{-m-1+i}. Для наилучшего равномерного приближения нек-рых классов периодических функций полиномиальными сплайнами с равномерными узлами имеется ряд окончательных результатов. Напр., для класса $\tilde{W}^r H_\omega$, где $\omega(\delta)$ — выпуклый модуль непрерывности, подсчитана верхняя грань уклонения от сплайнов степени r [4]. Она совпадает с соответствующим *поперечником* этого класса. Изучаются также наилучшие приближения сплайнами при дополнительных ограничениях на его старшую производную [13]. В связи с изучением наилучших квадратурных формул естественно возникает задача наилучшего приближения специальной функции $(b-t)^r$ (см. *Моносплайн*).

Линейные методы приближения сплайнами начали изучать раньше наилучших приближений. При этом преимущественно изучались приближения *интерполяционными сплайнами* (и. с.) (см. [1], [3], [5]). И. с. часто дают тот же порядок приближения, что и наилучшие; это является одним из преимуществ перед интерполированием многочленами. Так, если функция $f(x)$ имеет непрерывную r-ю производную на $(-\infty, \infty)$, то для приближения полиноми-

альными и. с. $S_n(x, h)$ степени $n \geqslant r$ с равномерными узлами интерполяции $x_i = ih$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и узлами сплайна справедлива оценка [6].

$$\| f^{(i)}(x) - S_n^{(i)}(x, h) \|_{C(-\infty, \infty)} \leqslant$$
$$\leqslant c \cdot \omega_{r+1-i}(f^{(i)}, h), \quad i = 0, 1, \ldots, r.$$

При изучении и. с. с произвольными узлами в качестве параметра приближения выбирается максимальное расстояние между узлами интерполяции; обычно узлы интерполяции и узлы сплайна тесно связаны между собой. В приложениях наиболее широко используются полиномиальные и. с. $S_3(x)$ 3-й степени — к у б и ч е с к и е с п л а й н ы. Это связано с тем, что построение таких сплайнов сводится в большинстве случаев к решению системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, имеющей доминирующую главную диагональ. Решение таких систем легко реализуется на ЭВМ. Кроме того, если функция $f(x)$ имеет непрерывную k-ю, $0 \leqslant k \leqslant 3$, производную на $[a, b]$, то имеют место оценки

$$\| f^{(i)}(x) - S_3^{(i)}(x) \|_{C[a, b]} \leqslant$$
$$\leqslant c \| \Delta_n \|^{k-i} \omega(f^{(k)}, \| \Delta_n \|), \quad 0 \leqslant i \leqslant k,$$

где $\{x_i^{(n)}\}$ — узлы интерполяции. При $k = 1, 2$ константа $c > 0$ не зависит от f и от сеток Δ_n. При $k = 0$ и $k = 3$ на последовательность сеток Δ_n налагаются дополнительные ограничения. Аналог этого результата имеет место также для многомерных кубических сплайнов, а также для сплайнов большей степени.

И. с. нечетной степени обладает рядом экстремальных свойств. Напр., среди всех функций, имеющих абсолютно непрерывную $(m-1)$-ю производную на $[a, b]$ и m-ю производную из $L_2[a, b]$ и принимающих в точках $\{x_i\}$, $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b$, заданные значения $\{y_i\}$, полиномиальный сплайн $S_{2m-1}(x)$ с узлами $\{x_i\}$, принимающий в точках $\{x_i\}$ значения $\{y_i\}$, имеющий непрерывную $(2m-2)$-ю производную на $[a, b]$ и совпадающий на $[a, x_0)$ и $(x_n, b]$ с многочленами степени не выше $m-1$, имеет наименьшую норму m-й производной в $L_2[a, b]$. Это свойство послужило основой для многочисленных обобщений сплайнов. Для нек-рых классов функций верхняя грань уклонений от и. с. совпадает с верхней гранью уклонений для н. с., напр. для класса $\tilde{W}^r H_\omega$ при $\omega(\delta) = \delta$.

Сплайны играют важную роль в задаче сглаживания [3], [5] сеточной функции, заданной с погрешностью. С помощью сплайнов строятся базисы [5] и ортонормированные базисы [9], *Лебега константы* к-рых ограничены.

Методы С.-а. тесно связаны с численным решением уравнений в частных производных м е т о д о м к о н е ч н ы х э л е м е н т о в, в основе к-рого лежит *Ритца метод* при специальном выборе базисных функций. В методе конечных элементов в качестве базисных функций выбираются кусочно полиномиальные функции, т. е. *сплайны*. Пусть, напр., Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^2$, к-рую можно разложить на конечное число правильных треугольных подобластей T_i, $1 \leqslant i \leqslant N$. Для фиксированного i многочлен

$$P_i(p_{ij}) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_1 x_2 + \alpha_6 x_2^2$$

определяется из условий

$$P_i(p_{ij}) = f(p_{ij}), \quad P_i(q_{ij}) = f(q_{ij}), \quad j = 1, 2, 3,$$

где функция $f(p)$ непрерывна на $\bar{\Omega}$ и p_{ij} — вершины треугольника T_i, а q_{ij} — середины его сторон. Пусть $S(p) = P_i(p)$ при $p \in T_i$, $i = 0, 1, \ldots, N$. Если $f \in W_2^3(\Omega)$, то

$$\| f - S \|_{W_2^j(\Omega)} \leqslant c h^{3-j} \| f \|_{W_2^3(\Omega)}, \quad j = 0, 1,$$

где h — длина стороны треугольника T_i и c — абсолютная постоянная.

Лит.: [1] Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и ее приложения, пер. с англ., М., 1972; [2] Галкин П. В., «Матем. заметки», 1974, т. 15, в. 1, с. 3—14; [3] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л., Методы сплайн-функций, М., 1980; [4] Корнейчук Н. П., «Докл. АН СССР», 1973, т. 213, № 3, с. 525—29; [5] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976; [6] Субботин Ю. Н., «Матем. заметки», 1974, т. 16, № 5, с. 843—54; [7] Субботин Ю. Н., Черных Н. И., там же, 1970, т. 7, № 1, с. 31—48; [8] Schumaker L. L., «J. Math. and Mech.», 1968, t. 18, p. 369—77; [9] Zieselsky Z., «Studia math.», 1972, t. 41, s. 211—24.

Ю. Н. Субботин.

СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ — интерполирование посредством *сплайнов*, т. е. построение *интерполяционного сплайна* (и. с.), принимающего в заданных точках $\{x_i\}$ заданные значения $\{f(x_i)\}$, $i=0, 1, \ldots, n$. Обычно и. с. удовлетворяют дополнительным условиям в концевых точках. Так, для кубического сплайна $S_3(\Delta_n, x)$, Δ_n: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, к-рый склеен на $[a, b]$ из кубических многочленов и имеет непрерывную 2-ю производную, требуют, чтобы $S_3(\Delta_n, x_i)=f(x_i)$, и, кроме того, задают по одному условию в концевых точках, напр. $S_3'(\Delta_n, a)=y_0'$ и $S_3'(\Delta_n, b)=y_n'$ или $S_3''(\Delta_n, a)=y_0''$ и $S_3''(\Delta_n, b)=y_n''$. Если $f(x_i)$ — значения $(b-a)$-периодической функции, то требуют, чтобы сплайн был также $(b-a)$-периодическим. Для полиномиальных сплайнов степени $2k+1$ число дополнительных условий в каждой из точек a и b увеличивается до k. Для и. с. степени $2k$ обычно узлы сплайна (точки разрыва $2k$-й производной) выбираются посредине между точками $\{x_i\}$ и задается еще по k условий в точках a и b.

С.-и. имеет нек-рые преимущества по сравнению с интерполированием многочленами; напр., существуют такие последовательности сеток Δ_{n_k}: $a=x_0^{(k)}<x_1^{(k)}<\ldots<x_{n_k}^{(k)}=b$ и и. с., для к-рых интерполяционный процесс сходится для любой непрерывной функции, если

$$\|\Delta_{n_k}\|=\max_{0\leqslant i\leqslant n_k-1}\left(x_{i+1}^{(k)}-x_i^{(k)}\right)\to 0.$$

Многие процессы С.-и. дают тот же порядок приближения, что и *наилучшие приближения*. Более того, при С.-и. нек-рых классов дифференцируемых функций погрешность не превосходит *поперечника* соответствующего класса. С.-и. дает решение нек-рых вариационных задач. Напр., и. с. при достаточно общих дополнительных условиях в точках a и b удовлетворяет соотношению

$$\int_a^b\left[f^{(m)}(t)-S_{2m-1}^{(m)}(\Delta_n, t)\right]^2dt=\int_a^b[f^{(m)}(t)]^2dt-$$
$$-\int_a^b\left[S_{2m-1}^{(m)}(t)\right]^2dt. \qquad (1)$$

Из этого соотношения следует существование и единственность и. с. нечетной степени, а также простейшие результаты о сходимости:

$$\left.\begin{aligned}&\|f^{(i)}(t)-S_{2m-1}^{(i)}(\Delta_n, t)\|_{L_2[a, b]}\leqslant\\&\leqslant c_{i, m}\|\Delta_n\|^{m-i}\|f^{(m)}(t)\|_{L_2[a, b]},\\&\|f^{(i)}(t)-S_{2m-1}^{(i)}(\Delta_n, t)\|_{C[a, b]}\leqslant\\&\leqslant c_{i, m}\|\Delta_n\|^{m-\frac{1}{2}-i}\|f^{(m)}(t)\|_{L_2[a, b]},\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$i=0, 1, \ldots, m-1$, где константа $c_{i, m}$ зависит только от i и m и $\|\Delta_n\|=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}(x_{i+1}-x_i)$. Для нек-рых классов дифференцируемых функций последовательность и. с. сходится к интерполируемой функции на любой последовательности сеток Δ_{n_k}, для к-рой $\|\Delta_{n_k}\|\to 0$, напр., это имеет место в случае (2).

Наряду с полиномиальными и. с. в С.-и. используются сплайны более общего вида (L-сплайны, L_q-сплайны). Для многих из них также справедливы аналоги равенства (1) и неравенств (2). Для сплайнов с дефектом, большим единицы, обычно рассматривается интерполирование с кратными узлами.

См. также *Сплайн-аппроксимация*.

Лит. см. при ст. *Сплайн*. *Ю. Н. Субботин.*

СПЛЕТАЮЩИЙ ОПЕРАТОР — непрерывный линейный оператор $T: E_1 \to E_2$ такой, что $T\pi_1(x)=\pi_2(x)T$, где π_1 и π_2 — отображения множества X в топологические векторные пространства E_1 и E_2, а $x \in X$. Понятие «С. о.» особенно плодотворно в случае, если X — группа или алгебра, а π_1, π_2 — представления этой группы или алгебры. Совокупность С. о. образует пространство $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$, являющееся подпространством пространства всех непрерывных линейных отображений E_1 в E_2. Если $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)=(0)$, $\mathrm{Hom}(\pi_2, \pi_1)=(0)$, то представления π_1 и π_2 наз. дизъюнктными представлениями. Если пространство $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ содержит оператор, определяющий изоморфизм пространств E_1 и E_2, то представления π_1 и π_2 эквивалентны. Если E_1, E_2 — локально выпуклые пространства, E_1^*, E_2^* — их сопряженные и π_1^*, π_2^* — представления, являющиеся сопряженными представлениями к π_1 и π_2 соответственно, то для любого $T \in \mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ оператор T^* содержится в $\mathrm{Hom}(\pi_2^*, \pi_1^*)$. Если π_1 и π_2 конечномерны или унитарны и представление π_1 неприводимо, то представление π_2 тогда и только тогда допускает подпредставление, эквивалентное π_1, когда $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2) \neq (0)$. См. также *Сплетения число*.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976. *А. И. Штерн.*

СПЛЕТЕНИЕ — 1) С. групп A и B строится следующим образом. Пусть A^B — множество всех функций, определенных на группе B со значениями в A; они образуют относительно покомпонентного умножения группу, к-рая является полным прямым произведением групп, изоморфных группе A в количестве, равном количеству элементов группы B. Группа B на A^B действует автоморфизмами по правилу: если $b \in B$, $\varphi \in A^B$, то $\varphi^b(x)=\varphi(xb^{-1})$ для $x \in B$. Относительно этого действия можно составить полупрямое произведение W групп B и A^B, т. е. множество всех пар (b, φ), где $b \in B$, $\varphi \in A^B$, с операцией умножения

$$(b, \varphi)(c, \psi)=(bc, \varphi^c\psi).$$

Построенная группа W наз. декартовым (или полным) сплетением группы A и B и обозначается $A \operatorname{Wr} B$ (или $A \wr B$). Если в этой конструкции вместо A^B взять меньшую группу $A^{(B)}$, состоящую из всех функций с конечным носителем, т. е. функций, принимающих неединичные значения лишь в конечном множестве точек, то получится подгруппа группы W, наз. сплетением (прямым сплетением, дискретным сплетением) групп A и B; она обозначается через $A \operatorname{wr} B$ (или $A \wr B$). Оба С. широко используются для построения различных примеров групп.

Лит.: [1] Неймани Х., Многообразия групп, пер. с англ., М., 1969; [2] Krasner M., Kaloujnine L., «Acta Sci. Math. Szeged», 1950, v. 13, p. 208—30, 1951, v. 14, p. 39—66, p. 69—82. *А. Л. Шмелькин.*

2) С. полугрупп, веночное произведение, узловое произведение,— конструкция, сопоставляющая двум полугруппам третью следующим образом: W есть С. A и B, если W определена на прямом произведении $F(B, A) \times B$, где $F(B, A)$ — полугруппа всех отображений из B в A относительно поточечного умножения, и операция на W задана формулой: $(f, b)(g, c)=(f \cdot {}^b g, bc)$, где отобра-

жение ${}^b g$ задано условием ${}^b g(y) = g(yb)$. С. A и B обозначается A wr B. Определенное выше С. наз. стандартным; другие определения и обобщения см. [1], [2], [4] — [7].

С. A и B содержит в качестве подполугруппы прямое произведение $A \times B$. Если A содержит единицу, то любое *идеальное расширение* A при помощи полугруппы B вкладывается в A wr B (см. [3]).

Вопрос о том, когда те или иные свойства полугрупп A и B наследуются A wr B, исследован главным образом для различных типов простоты (см. *Простая полугруппа*). Напр., если A и B — идеально простые полугруппы и B — полугруппа с правым сокращением, то A wr B — идеально простая полугруппа; если A и B — *вполне простые полугруппы* и A — простая слева, то A wr B вполне простая полугруппа [3]; если A и B — полугруппы с вполне простыми ядрами (см. *Ядро полугруппы*), то A wr B содержит вполне простое ядро [4]; более того, в последнем случае ядро сплетения равно квадрату сплетения ядер [7]. Если одна из полугрупп A, B регулярна, а вторая проста слева, то A wr B регулярно [6]. Пусть $|A| > 1$; для того чтобы A wr B было *инверсной полугруппой (правой группой)*, необходимо и достаточно, чтобы A была инверсной полугруппой (правой группой), а B — группой [6].

С помощью С. получено компактное доказательство теоремы Эванса о вложимости всякой счетной полугруппы S в полугруппу с двумя образующими [1]; при таком вложении, если S — конечнопорожденная и периодическая, то S может быть вложена в периодическую полугруппу с двумя образующими.

С. и его обобщения играют важную роль в алгебраической теории автоматов. Напр., с использованием С. доказана теорема *о разложении всякого конечного полугруппового автомата в каскадное соединение* триггеров и простых групповых автоматов ([2], см. также [5]) — т. н. теорема Крона — Роудза.

Лит.: [1] Neumann B. H., «J. London Math. Soc.», 1960, v. 35, pt 2, № 138, p. 184—92; [2] Krohn K., Rhodes J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 116, p. 450—64; [3] Hunter R. P., «Bull. Soc. Math. Belgique», 1966, t. 18, fasc. 1, p. 3—16; [4] McKnight J. D. jr., Sadowski E., «Semigroup Forum», 1972, v. 4, p. 232—36; [5] Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп, пер. с англ., М., 1975; [6] Кошелев Ю. Г., «Semigroup Forum», 1975, v. 11, № 1, p. 1—13; [7] Nakajima S., «Proc. First. Symp. Semigr.», Matsue, 1977, p. 84—88. *Э. А. Голубов, Л. Н. Шеврин.*

СПЛЕТЕНИЯ ЧИСЛО — размерность $c(\pi_1, \pi_2)$ пространства $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ *сплетающих операторов* для отображений π_1 и π_2 множества X в топологические векторные пространства E_1 и E_2. Понятие «С. ч.» особенно плодотворно в случае, если X — группа или алгебра, а π_1, π_2 — ее представления. Вообще говоря, даже для *конечномерных представлений* $c(\pi_1, \pi_2) \neq c(\pi_2, \pi_1)$, но для конечномерных представлений π_1, π_2, π_3 справедливы равенства

$$c(\pi_1 \oplus \pi_2, \pi_3) = c(\pi_1, \pi_3) + c(\pi_2, \pi_3);$$

$$c(\pi_1, \pi_2 \oplus \pi_3) = c(\pi_1, \pi_2) + c(\pi_1, \pi_3),$$

а если X — группа, то и равенство

$$c(\pi_1 \otimes \pi_2, \pi_3) = c(\pi_1, \pi_2^* \otimes \pi_3).$$

Если π_1 и π_2 неприводимы, то $c(\pi_1, \pi_2)$ равно 1 или 0 в зависимости от того, эквивалентны или нет представления π_1 и π_2. Для непрерывных конечномерных представлений компактной группы С. ч. может быть выражено через характеры этих представлений.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [2] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976. *А. И. Штерн.*

СПОРАДИЧЕСКАЯ ПРОСТАЯ ГРУППА — *простая конечная группа*, не входящая ни в одну из известных бесконечных серий простых конечных групп. Открытые (к 1984) 26 С. п. г. перечислены в таблице.

Обозначение	Название	Порядок
M_{11}	Группы Матье	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$
M_{12}		$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$
M_{22}		$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
M_{23}		$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
M_{24}		$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
J_1	Группа Янко	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
J_2, HJ	Группа Холла — Янко	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$
J_3, HJM	Группа Хигмана — Янко — Маккея	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$
J_4	Группа Янко	$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \times$ $\times 37 \cdot 43$
Co_1,.1	Группы Конвея	$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$
Co_2,.2		$2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
Co_3,.3		$2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
F_{22}, M (22)	Группы Фишера	$2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
F_{23}, M (23)		$2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$
F'_{24}, M (24)′		$2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$
HS	Группа Хигмана — Симса	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
He, HHM	Группа Хельда — Хигмана — Маккея	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 17$
Suz	Группа Судзуки	$2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
M^c	Группа Маклафлина	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
Ly	Группа Лайонса	$2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$
Ru	Группа Рудвалиса	$2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$
O'N, O'NS	Группа О'Нэна — Симса	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$
F_1, M	Большой монстр, группа Фишера — Грайса	$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \times$ $\times 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$
F_2, B	Малый монстр, группа Фишера	$2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \times$ $\times 23 \cdot 31 \cdot 47$
F_3, E, T	Группа Томпсона	$2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$
F_5, D	Группа Харады	$2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$

Лит.: [1] Сыскин С. А., «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, № 5, с. 181—212; [2] Ашбахер М., там же, 1981, т. 36, № 2, с. 141—72.
В. Д. Мазуров.

СПРЯМЛЕНИЯ ТОЧКА, распрямления точка,— точка кривой, в к-рой кривизна обращается в нуль. В С. т. уклонение кривой от касательной не ниже 3-го порядка. Если при переходе через С. т. кривая пересекает касательную в С. т., то С. т. является *перегиба точкой.*
А. Б. Иванов.

СПРЯМЛЯЕМАЯ КРИВАЯ — кривая, имеющая конечную длину. Пусть Γ — непрерывная параметрич. кривая в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, т. е. $\Gamma = \{x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ x_3 = x_3(t)\}$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, где $x_k(t)$, $k = 1, 2, 3$ — непрерывные на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции, $\Pi = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$ — произвольное разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ и $A_j(x_1(t_j), x_2(t_j), x_3(t_j))$ — порожденная им последовательность точек на кривой Γ. И пусть Γ_Π — ломаная, вписанная в кривую Γ и имеющая вершины в точках $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Длина этой ломаной

$$s(\Gamma_\Pi) = \sum_{j=1}^{n} |A_{j-1}A_j|,$$

где

$$|A_{j-1}A_j| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} (x_k(t_j) - x_k(t_{j-1}))^2}.$$

Величина

$$s(\Gamma) = \sup_{\Pi} s(\Gamma_\Pi)$$

наз. длиной кривой Γ. Длина $s(\Gamma)$ не зависит от способа параметризации кривой Γ. Если $s(\Gamma) < +\infty$, то кривая Γ наз. спрямляемой кривой. С. к.

Г имеет касательную почти во всех своих точках $A(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, т. е. почти при всех значениях параметра $t \in [\alpha, \beta]$. Изучение С. к. было начато Л. Шеффером [1] и продолжено К. Жорданом [2], к-рый доказал, что кривая Г спрямляема тогда и только тогда, когда все три функции $x_k(t)$, $k=1, 2, 3$, являются *ограниченной вариации функциями* на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Лит.: [1] Scheeffer L., «Acta math.», 1885, t. 5, p. 49—82; [2] Jordan C., Cours d'analyse de l'École polytechnique, 3 éd., t. 1, P., 1909.

Б. И. Голубов.

СПРЯМЛЯЮЩАЯ ПЛОСКОСТЬ — одна из плоскостей *Френе трехгранника*, проходящая через заданную точку A кривой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ и содержащая касательную $\boldsymbol{t}$ и бинормаль $\boldsymbol{b}$ к кривой, проведенные в заданной точке кривой. Уравнение С. п.:

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}'\,[\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'']=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} X-x(A) & Y-y(A) & Z-z(A) \\ x'(A) & y'(A) & z'(A) \\ \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \end{vmatrix}=0,$$

где $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(x(t),\ y(t),\ z(t))$ — уравнение кривой.

Л. А. Сидоров.

СПУСКА МЕТОД — метод решения задачи минимизации

$$f(x^*)=\min_x f(x),$$

где f — нек-рая функция переменной $x=(x_1, \ldots, x_n)$. Итерационная последовательность $\{x^k\}$ С. м. вычисляется по формуле

$$x^{k+1}=x^k+\alpha_k g^k,$$

где g^k — вектор, указывающий нек-рое направление убывания функции f в точке x^k, а α_k — итерационный параметр, величина к-рого указывает длину шага в направлении g^k. Если функция f дифференцируема и x^k не является ее точкой экстремума, то вектор g^k должен удовлетворять неравенству

$$(f'(x^k),\ g^k)<0, \qquad (*)$$

где $f'(x^k)$ — градиент функции f в точке x^k.

Если f — достаточно гладкая функция (напр., дважды непрерывно дифференцируемая) и последовательность векторов $\{g^k\}$ удовлетворяет неравенству $(*)$, то существует такая последовательность $\{\alpha_k\}$, что

$$f(x^0)>f(x^1)>\ldots>f(x^k)>\ldots$$

При определенных ограничениях (см. [3]) на функцию f и способ выбора параметров $\{\alpha_k\}$ и векторов g_k последовательность $\{x^k\}$ сходится к решению x^* исходной задачи.

К С. м. относятся градиентные методы, в к-рых векторы $\{g^*\}$ каким-либо образом выражаются через векторы $\{f'(x^k)\}$. Одним из наиболее распространенных является случай, когда

$$g^k=-B(x^k)\,f'(x^k),$$

где $B(x)$ — симметрическая матрица, удовлетворяющая для любых векторов x и y неравенству

$$m(x,\ x)\leqslant(B(y)\,x,\ x)\leqslant M(x,\ x)$$

с нек-рыми константами $M\geqslant m>0$. При дополнительных предположениях (см. [3]) относительно f и специальном выборе $\{\alpha_x\}$ градиентный метод обеспечивает сходимость последовательности $\{x^k\}$ к решению $\{x^*\}$ исходной задачи со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем $q<1$. Частным случаем градиентных методов является *наискорейшего спуска метод*, в к-ром матрица $B(x)$ выбирается единичной.

Лит.: [1] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, 2 изд.,

М., 1977; [2] Зойтендейк Г., Методы возможных направлений, пер. с англ., М., 1963; [3] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах, М., 1975; [4] Поляк Б. Т., «Ж. вычисл. математики и матем. физики», 1963, т. 3, № 4, с. 643—54. *Ю. А. Кузнецов.*

СРАВНЕНИЕ — соотношение между целыми числами a и b вида $a=b+mk$, означающее, что их разность $a-b$ делится на заданное целое положительное число m, наз. модулем сравнения; при этом a наз. *вычетом* целого числа b по модулю m. Для выражения сравнимости чисел a и b по модулю m употребляется символ

$$a \equiv b \pmod m.$$

Если разность $a-b$ не делится на m, то a и b наз. несравнимыми по модулю m и для выражения несравнимости a и b употребляется символ

$$a \not\equiv b \pmod m.$$

Наличие С. $a\equiv b \pmod m$ эквивалентно тому, что a и b имеют одинаковые остатки при делении на m.

Отношение сравнимости по фиксированному модулю m является отношением эквивалентности: оно рефлексивно, т. к. $a\equiv a \pmod m$, симметрично, т. к. из $a\equiv b \pmod m$ следует $b\equiv a \pmod m$, и транзитивно, т. к. из $a\equiv b \pmod m$ и $b\equiv c \pmod m$ следует, что $a\equiv c \pmod m$. Тем самым отношение «$\equiv \pmod m$» разбивает множество всех целых чисел на непересекающиеся классы эквивалентности A, B, C, . . . Два целых числа лежат в одном и том же классе тогда и только тогда, когда они сравнимы по модулю m. Эти классы наз. классами вычетов по модулю m. Каждое целое число сравнимо по модулю m лишь с одним из чисел 0, 1, . . ., $m-1$; числа 0, 1, . . ., $m-1$ лежат в различных классах, поэтому имеется в точности m классов вычетов, а числа 0, 1, . . ., $m-1$ образуют множество представителей этих классов. Любое множество из m целых чисел, взятых по одному из каждого класса вычетов, наз. полной системой вычетов по модулю m.

С. с одним и тем же модулем можно складывать, вычитать и перемножать подобно обычным равенствам, т. е. из

$$a \equiv b \pmod m \text{ и } c \equiv d \pmod m$$

следует, что

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod m \text{ и } ac \equiv bd \pmod m.$$

Обе части С. можно умножить на одно и то же целое число, обе части С. можно разделить на их общий делитель, если последний взаимно прост с модулем С. Если же общий делитель числа, на к-рое делятся обе части С., и модуля С. m есть d, то после деления на d получается С. по модулю m/d.

Операции сложения, вычитания и умножения С. индуцируют подобные же операции над классами вычетов. Так, если a и b произвольные элементы из классов вычетов A и B соответственно, то $a+b$ всегда лежит в одном и том же классе вычетов, наз. суммой $A+B$ классов A и B. Аналогично определяется разность $A-B$ и произведение $A\cdot B$ двух классов вычетов A и B. Классы вычетов по модулю m образуют по сложению абелеву группу порядка m. Нулевым элементом этой группы является класс, состоящий из всех целых чисел, кратных числу m; обратным к классу A является класс A, состоящий из всех элементов класса A, взятых со знаком минус. Более того, классы вычетов по модулю m образуют кольцо относительно определенных выше операций сложения, вычитания и умножения.

Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — многочлен от n переменных с целыми коэффициентами. Выражение вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod m \qquad (*)$$

наз. *алгебраическим сравнением*. Решением сравнения (*) наз. всякий набор a_1, a_2, . . ., a_n целых значений

неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такой, что число $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ сравнимо с нулем по модулю m. Если a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, лежат соответственно в классах вычетов X_i по модулю m, то любой другой набор a_i', $1 \leqslant i \leqslant n$, где $a_i' \in X_i$, также будет решением С. Поэтому принято наз. решением С. (*) также сам набор классов вычетов, представителями к-рых являются $a_1, a_2, \ldots, a_n$, т. е. решение алгебраического уравнения $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ в кольце классов вычетов по модулю m. При таком соглашении С. (*) будет иметь столько решений, сколько наборов классов вычетов полной системы по модулю m удовлетворяют уравнению $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Аналогично определяется число решений С. более общего вида, а также систем С.

С. 1-й степени

$$ax \equiv b \pmod m,$$

если a взаимно просто с m (что обозначается $(a, m) = 1$), имеет единственное решение. Классы вычетов по модулю m, элементы к-рых взаимно просты с m, образуют абелеву группу по умножению. Единицей этой группы является класс E, содержащий число 1, и обратным к классу A является класс A^{-1}, содержащий решение x С.

$$ax \equiv 1 \pmod m, \text{ где } a \in A.$$

Классы вычетов по модулю m, элементы к-рых взаимно просты с m, наз. приведенными классами, а любая система чисел, взятых по одному из каждого приведенного класса, наз. приведенной системой вычетов. Приведенная система вычетов состоит из $\varphi(m)$ элементов, где $\varphi(m)$ — *Эйлера функция*, указывающая количество чисел в множестве $1, 2, \ldots, m$, взаимно простых с m.

Строение мультипликативной группы приведенных классов вычетов по модулю m в значительной степени выясняют теоремы Эйлера и Ферма, показывающие, что порядок любого ее элемента делит величину $\varphi(m)$.

Теорема Эйлера. Если a и m взаимно просты, то

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$$

(см. *Эйлера теорема*).

Частный случай этой теоремы для простого модуля — теорема Ферма: если p — простое число и a не делится на p, то

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

(см. *Ферма малая теорема*).

Важным понятием для изучения мультипликативной группы приведенных классов вычетов является понятие *первообразного корня* по модулю m. При $(a, m) = 1$ существуют положительные целые γ с условием $a^\gamma \equiv 1 \pmod m$, напр. $\gamma = \varphi(m)$. Наименьшее из них наз. показателем, к-рому принадлежит число a по модулю m.

Числа, принадлежащие показателю $\varphi(m)$ (если такие существуют), наз. первообразными корнями по модулю m. Если g — первообразный корень по модулю m и γ пробегает полную систему вычетов по модулю $\varphi(m)$, то g^γ пробегает приведенную систему вычетов по модулю m. Таким образом, если $(a, m) = 1$, то при нек-ром γ из множества $0, 1, \ldots, \varphi(m) - 1$ имеет место С. $a \equiv g^\gamma \pmod m$. Такое γ наз. индексом числа a по модулю m при основании g и обозначается символом $\operatorname{ind} a$ или, более точно, $\operatorname{ind}_g a$. Свойства индекса во многом аналогичны свойствам логарифма. Первообразные корни существуют только для модулей $m > 1$ вида $2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$, где $p \geqslant 3$ — простое число и $\alpha \geqslant 1$ — целое. В этих случаях мультипликативная группа приведенных клас-

сов вычетов по модулю m имеет наиболее простую структуру, являясь циклической группой порядка $\varphi(m)$. В остальных случаях группы приведенных классов вычетов устроены значительно сложнее.

Многие задачи теории чисел сводятся к вопросу о разрешимости или неразрешимости того или иного типа С. Ввиду этого теория С., впервые систематически изложенная К. Гауссом (см. [5]) и поставленная им в основу классической теории чисел, до сих пор является одним из основных средств при решении теоретико-числовых задач. В этой связи фундаментальное значение для теории чисел имеет исследование вопроса о числе решений алгебраич. С. Простейшим типом алгебраич. С. являются С. 1-й степени с одним неизвестным $ax \equiv b \pmod m$. Полный ответ на вопрос о числе решений С. 1-й степени дает следующая теорема. Пусть $(a, m) = d$. Сравнение $ax \equiv b \pmod m$ неразрешимо, если b не делится на d. При b, кратном d, С. имеет ровно d решений.

Вопрос о разрешимости системы линейных С.

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} x_j \equiv b_i \pmod p, \quad i = 1, 2, \ldots, t,$$

по простому модулю $p > 2$ полностью решается в общей теории линейных уравнений над произвольными полями. Случай составного модуля можно свести к случаю простого модуля.

Следующим по сложности изучения видом алгебраич. С. с одним неизвестным является *двучленное сравнение*

$$x^n \equiv a \pmod m \text{ при } (a, m) = 1.$$

Если С. $x^n \equiv a \pmod m$ имеет решения, то a наз. вычетом степени n по модулю m. В противном случае a наз. невычетом степени n по модулю m. В частности, при $n = 2$ вычеты или невычеты называются квадратичными, при $n = 3$ — кубическими, а при $n = 4$ — биквадратичными.

Вопрос о числе решений С.

$$f(x) \equiv 0 \pmod m$$

по составному модулю $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$ сводится к вопросу о числе решений С.

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$$

для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$. Имеет место следующая теорема: если $m_1, \ldots, m_r$ — попарно взаимно простые целые положительные числа, то число N решений С. $f(x) \equiv 0 \pmod{m_1 \ldots m_r}$ выражается через величины N_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, равные числу решений соответствующих С. $f(x) \equiv 0 \pmod{m_i}$ по формуле $N = \prod_{i=1}^{r} N_i$. В свою очередь, вопрос о числе решений С.

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}, \quad \alpha > 1,$$

в основном сводится к вопросу о числе решений С. $f(x) \equiv 0 \pmod p$ по простому модулю p. Основой для такого сведения служит следующая теорема: всякое решение $x \equiv x_1 \pmod p$ сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod p$ единственным образом продолжается до решения $x \equiv x_\alpha \pmod{p^\alpha}$ сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$, если только формальная производная $f'(x_1) \not\equiv 0 \pmod p$, т. е. найдется единственное решение x_α С. $f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$ такое, что $x_\alpha \equiv x_1 \pmod p$.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае алгебраич. С. от нескольких переменных, т. е. в невырожденных случаях вопрос о числе решений С. $F(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod m$ по составному модулю m редуцируется к вопросу о числе решений такого же С. по простому модулю.

Верхнюю границу для числа решений С. $f(x) \equiv 0 \pmod p$, где $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \not\equiv 0 \pmod p$, дает теорема Лагранжа: число решений С. $f(x) \equiv 0 \pmod p$ не превосходит степени многочлена $f(x)$. Изучение вопроса о точном числе решений С. $f(x) \equiv 0 \pmod p$ в общем случае встречает значительные трудности, и в этом направлении к настоящему времени (1984) получены лишь немногие результаты.

Утверждение теоремы Лагранжа перестает быть верным для составного модуля. Указанное специфическое свойство простых чисел объясняется тем, что классы вычетов по простому модулю p образуют поле (см. *Сравнение по простому модулю*). Другое специфическое свойство простых чисел, объясняемое тем же фактом, выражает *Вильсона теорема*.

При изучении квадратичных С.

$$x^2 \equiv a \pmod p$$

по простому модулю p и для их приложений вводятся *Лежандра символ* и *Якоби символ*.

Алгебраич. С. по простому модулю с двумя неизвестными (и вообще с любым числом неизвестных)

$$F(x, y) \equiv 0 \pmod p$$

можно трактовать как уравнения над простым конечным полем из p элементов. Поэтому для их изучения наряду с методами теории чисел применяются методы теории алгебраич. функций и алгебраич. геометрии. Именно этими методами была впервые получена асимптотика вида

$$N_p = p + O(\sqrt{p})$$

для числа N_p решений широкого класса С. $F(x, y) \equiv 0 \pmod p$. Такая же асимптотика была впоследствии выведена методами теории чисел без выхода за рамки теории С. (см. [6]).

Об алгебраич. С. от многих неизвестных известно сравнительно мало. В качестве общего результата можно привести следующее (теорема Шевалле). Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен с целыми рациональными коэффициентами, степень к-рого меньше n. Тогда число решений С.

$$F(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod p$$

делится на простое число p. Сильный результат в этом круге вопросов получен П. Делинем [9] (см. также [10]).

Большое значение имеет также исследование вопроса о числе решений С. на неполной системе вычетов. Систематич. решение этого вопроса было начато работами И. М. Виноградова (см. [4]). В качестве примера задач такого типа может служить задача о распределении квадратичных вычетов и невычетов во множестве $1, 2, \ldots, p-1$, связанная с изучением решений С. $y^2 \equiv x \pmod p$ (см. *Виноградова гипотезы*, *Распределение степенных вычетов и невычетов*).

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.—Л., 1937; [3] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [4] Виноградов И. М., Избр. труды, М., 1952; [5] Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел, пер. с нем., М., 1959; [6] Степанов С. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 132, с. 237—46; [7] Хассе Г., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953; [8] Чандрасекхаран К., Введение в аналитическую теорию чисел, пер. с англ., М., 1974; [9] Deligne P., «Publ. Math. IHÉS», 1973, v. 43, p. 273—307; [10] Katz N. M., «Proc. Simp. Pure Math.», 1976, v. 28, p. 275—305.

С. А. Степанов.

СРАВНЕНИЕ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ — сравнение вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod m, \qquad (1)$$

где $f(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен от $n \geqslant 2$ переменных с целыми рациональными коэффициентами, не все из

к-рых делятся на m. Разрешимость такого сравнения для составного модуля $m=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}$, где $p_1, \ldots, p_s$ — различные простые числа, равносильна разрешимости сравнений

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}} \qquad (2)$$

для всех $i=1, \ldots, s$. При этом число N решений сравнения (1) равно произведению $N_1 \ldots N_s$, где N_i — число решений сравнения (2). Таким образом, при изучении сравнений вида (1) достаточно ограничиться модулями, являющимися степенями простых чисел.

Для разрешимости сравнения

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}, \quad \alpha > 1, \qquad (3)$$

необходимо, чтобы было разрешимо сравнение

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{p} \qquad (4)$$

по простому модулю p. В невырожденных случаях разрешимость сравнения (4) является также и достаточным условием для разрешимости сравнения (3). Точнее, справедливо следующее утверждение: каждое решение $x_i \equiv x_i^{(1)} \pmod{p}$ сравнения (4) такое, что $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) \not\equiv 0 \pmod{p}$, хотя бы для одного $i=1, 2, \ldots, n$ порождает $p^{(\alpha-1)(n-1)}$ решений $x_i \equiv x_i^{(\alpha)} \pmod{p^\alpha}$ сравнения (3), причем $x_i^{(\alpha)} \equiv x_i^{(1)} \pmod{p}$ при $i=1, 2, \ldots, n$.

Итак, в невырожденном случае вопрос о числе решений сравнения (1) по составному модулю m сводится к вопросу о числе решений сравнений вида (4) по простым модулям p, делящим m. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — абсолютно неприводимый многочлен с целыми рациональными коэффициентами, то для числа N_p решений сравнения (4) имеет место оценка

$$|N_p - p^{n-1}| \leqslant C(f)\, p^{n-1-1/2},$$

где константа $C(f)$ зависит только от многочлена f и не зависит от p. Из этой оценки, в частности, следует, что сравнение (4) разрешимо для всех простых p, больших нек-рой эффективно вычислимой константы $C_0(f)$, зависящей от данного многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ (см. также *Сравнение по простому модулю*). Более сильный результат в этом вопросе получен П. Делинем [3].

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Хассе Г., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953; [3] Deligne P., «Publ. Math. IHÉS», 1973, v. 43, p. 273—307. *С. А. Степанов.*

СРАВНЕНИЕ ПО ДВОЙНОМУ МОДУЛЮ $(p, f(x))$ — соотношение между целочисленными многочленами $a(x)$ и $b(x)$ вида

$$a(x) - b(x) = f(x)\, g(x) + ph(x),$$

где p — простое число, а $f(x)=x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\ldots+\alpha_n$, $g(x)$ и $h(x)$ — многочлены с целыми рациональными коэффициентами. Иными словами, многочлены $a(x)$ и $b(x)$ с целыми рациональными коэффициентами наз. сравнимыми по двойному модулю $(p, f(x))$, если их разность $a(x)-b(x)$ делится на $f(x)$ по модулю p. Для обозначения сравнимости $a(x)$ и $b(x)$ по двойному модулю $(p, f(x))$ используется символ

$$a(x) \equiv b(x) \pmod{p,\ f(x)},$$

введенный, как и само понятие «С. по д. м.», Р. Дедекиндом (R. Dedekind).

Сравнимость по двойному модулю является отношением эквивалентности на множестве всех целочисленных многочленов и, следовательно, разбивает это множество на непересекающиеся классы — классы вычетов по двойному модулю $(p, f(x))$. Поскольку каждый

многочлен $a(x)$ сравним по двойному модулю $(p, f(x))$ с одним и только одним многочленом вида

$$\beta_1 x^{n-1} + \beta_2 x^{n-2} + \ldots + \beta_n,$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_n$ пробегают независимо друг от друга полную систему вычетов по модулю p, то имеется в точности p^n классов вычетов по двойному модулю.

С. по д. м. можно складывать, вычитать и перемножать, подобно обычным сравнениям. Эти операции индуцируют аналогичные операции на классах вычетов по двойному модулю, превращая множество классов вычетов в коммутативное кольцо.

Кольцо классов вычетов по двойному модулю $(p, f(x))$ является факторкольцом кольца многочленов $K_p[x]$ с коэффициентами из простого конечного поля K_p по идеалу $(\bar{f}(x))$, порожденному многочленом $\bar{f}(x)$, полученному из $f(x)$ редукцией по модулю p. В частности, если $f(x)$ неприводим по модулю p, то $(\bar{f}(x))$ — максимальный идеал в $K_p[x]$ и $K_p[x]/(\bar{f}(x))$ — поле, состоящее из p^n элементов (расширение степени n простого поля K_p).

Если $f(x)$ неприводим по модулю p, то для сравнений по двойному модулю имеет место аналог *Ферма малой теоремы*:

$$a(x)^{p^n} \equiv a(x) \pmod{p,\ f(x)},$$

а также *Лагранжа теоремы*: сравнение

$$z^m + a_1(x) z^{m-1} + \ldots + a_m(x) \equiv 0 \pmod{p,\ f(x)},$$

коэффициенты к-рого целочисленные многочлены, имеет не более m несравнимых по модулю $(p, f(x))$ решений. Из этих теорем можно получить, что

$$x^{p^n} - x \equiv \prod_{d/n} \Phi_d(x) \pmod{p},$$

где $\Phi_d(x)$ — произведение всевозможных различных нормированных (т. е. со старшим коэффициентом 1) неприводимых по модулю p многочленов степени d. Если через (n) обозначить число различных нормированных неприводимых по модулю p многочленов степени n, то

$$(n) = \frac{1}{n} \sum_{d/n} \mu(d)\, p^{\frac{n}{d}},$$

$\mu(d)$ — функция Мёбиуса и, в частности, $(n) > 0$ для любого натурального n. Следовательно, для любого целого $n > 0$ существует конечное поле K_q, состоящее из p^n элементов и являющееся расширением степени n поля вычетов K_p по простому модулю p.

Лит.: [1] Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.—Л., 1937.

С. А. Степанов.

СРАВНЕНИЕ ПО ПРОСТОМУ МОДУЛЮ — сравнение, в к-ром модуль является простым числом. Отличительной чертой теории С. по п. м. является то, что классы вычетов по модулю p образуют конечное поле из p элементов. Поэтому С. по п. м. можно трактовать как уравнения над простыми конечными полями и применять для их изучения, наряду с методами теории чисел, алгебро-геометрические методы.

Одним из основных вопросов теории сравнений от одного переменного x, имеющим важное значение в теории алгебраич. чисел, теории кодирования и других разделах математики, является вопрос об изучении законов разложения

$$f(x) \equiv f_1(x) \ldots f_r(x) \pmod{p}$$

по простому модулю p произвольных целочисленных многочленов $f(x)$ на неприводимые сомножители.

Основным вопросом теории С. по п. м. p от $n \geqslant 2$ переменных является вопрос о числе решений *алгебраических сравнений*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{p},$$

когда x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ независимо друг от друга пробегают или все множество классов вычетов по модулю p (задачи на полную систему вычетов), или же некрую его собственную часть (задачи на неполную систему вычетов).

Первые результаты в исследовании вопроса о числе решений квадратичных и биквадратичных сравнений с двумя переменными были получены К. Гауссом [1] и Ж. Лагранжем [2]. Э. Артином [3] была установлена связь задачи о числе решений гиперэллиптич. сравнений $y^2 \equiv f(x) \pmod p$ на полной системе вычетов по простому модулю p с гипотезой Римана для введенных им ζ-функций полей алгебраич. функций с конечным полем констант. В частности, им была высказана гипотеза, что для числа N_p решений сравнения $y^2 \equiv f(x) \pmod p$, где многочлен $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ не является квадратом другого многочлена по модулю p, справедлива оценка

$$|N_p - p| \leqslant 2\left[\frac{n-1}{2}\right] p^{1/2}$$

(здесь $[x]$ — целая часть числа x).

Гипотеза Артина впервые была доказана Х. Хассе [6] для случая эллиптич. сравнений

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod p.$$

Позже А. Вейль [8] распространил метод Хассе на общий случай и получил для числа N_q решений уравнения $f(x, y)=0$ в элементах поля F_q, состоящего из $q=p^r$ элементов, где $f(x, y)$ — абсолютно неприводимый многочлен с коэффициентами из F_q, оценку

$$|N_q - q| \leqslant c(f)\, q^{1/2}.$$

Метод Хассе — Вейля сложен и требует привлечения современного аппарата абстрактной алгебраич. геометрии. В работе [7] найден простой и чисто арифметич. метод доказательства результатов Хассе — Вейля.

Менее изучены С. по п. м. от n переменных. В качестве общего результата здесь можно указать следующую теорему. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ абсолютно неприводимый многочлен с целыми рациональными коэффициентами. Тогда для числа N_p решений сравнения

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod p, \quad n \geqslant 2,$$

имеет место оценка

$$|N_p - p^{n-1}| \leqslant c(f)\, p^{n-1-1/2},$$

где константа $c(f)$ не зависит от p. Более сильная оценка получена П. Делинем [9].

О С. по п. м. на неполной системе вычетов см. *Виноградова гипотезы*, *Двучленное сравнение*, *Распределение степенных вычетов и невычетов*.

Лит.: [1] Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел, пер. с нем., М., 1959; [2] Lagrange J. L., Oeuvres, t. 3, P., 1869, p. 189—201; [3] Artin E., «Math. Zeitschrift», 1924, Bd 19, S. 207—46; [4] Виноградов И. М., Избр. труды, М., 1952; [5] Хассе Г., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953; [6] Hasse H., «Abh. Math. Seminar Hamburg. Univ.», 1934, Bd 10, S. 325—47; [7] Степанов С. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 132, с. 237—46; [8] Weil A., Sur les courbes algébriques et les variétés..., P., 1948; [9] Deligne P., «Publ. Math. IHES», 1973, v. 43, p. 273—307. *С. А. Степанов.*

СРАВНЕНИЕ ТОПОЛОГИЙ — отношение порядка в множестве всех топологий в одном и том же множестве. Топология $\mathscr{T}_1$ мажорирует топологию $\mathscr{T}_2$ (или $\mathscr{T}_1$ не слабее $\mathscr{T}_2$), если тождественное отображение $X_1 \to X_2$, где X_i — множество X, наделенное топологией $\mathscr{T}_i$, $i=1, 2$, непрерывно. Если, кроме того, $\mathscr{T}_1 \neq \mathscr{T}_2$, то $\mathscr{T}_1$ сильнее $\mathscr{T}_2$ (а $\mathscr{T}_2$ слабее $\mathscr{T}_1$).

Следующие предложения равносильны.

1) $\mathscr{T}_1$ мажорирует $\mathscr{T}_2$.

2) Каково бы ни было $x \in X$, всякая окрестность x в топологии $\mathscr{T}_2$ есть окрестность x в топологии $\mathscr{T}_1$.

3) Для любого $A \subset X$ замыкание A в топологии $\mathscr{T}_2$ индуцирует замыкание A в топологии $\mathscr{T}_1$.

4) Всякое множество из X, замкнутое в $\mathscr{T}_2$, замкнуто и в $\mathscr{T}_1$.

5) Всякое множество, открытое в $\mathscr{T}_2$, открыто и в $\mathscr{T}_1$.

В упорядоченном множестве топологий на X дискретная топология с а м а я с и л ь н а я, а топология, единственными замкнутыми множествами к-рой являются Ф и X, с а м а я с л а б а я. Говоря образно, чем топология сильнее, тем больше в X открытых множеств, замкнутых множеств, окрестностей; замыкание (соответственно, внутренность) множества тем меньше (соответственно, больше), чем топология сильнее, и тем меньше всюду плотных множеств.

М. И. Войцеховский.

СРАВНЕНИЯ ПРИЗНАК — 1) С. п. с х о д и м о с т и р я д а с н е о т р и ц а т е л ь н ы м и ч л е н а м и (см. *Ряд*).

2) С. п. с х о д и м о с т и н е с о б с т в е н н о г о и н т е г р а л а от знакопостоянных функций (см. *Несобственный интеграл*).

СРАВНЕНИЯ ТЕОРЕМА в т е о р и и д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы х у р а в н е н и й — теорема, утверждающая наличие определенного свойства решений дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений) в предположении, что нек-рым свойством обладает вспомогательное уравнение или неравенство (система дифференциальных уравнений или неравенств).

П р и м е р ы С. т. 1) Т е о р е м а Ш т у р м а: любое нетривиальное решение уравнения

$$\ddot{y}+p(t)\,y=0,\ p(\cdot)\in C[t_0,\ t_1],$$

обращается в нуль на отрезке $[t_0,\ t_1]$ не более m раз ($m\geqslant 1$), если этим свойством обладает уравнение

$$\ddot{z}+q(t)\,z=0,\ q(\cdot)\in C[t_0,\ t_1]$$

и $q(t)\geqslant p(t)$ при $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ (см. [1]).

2) Д и ф ф е р е н ц и а л ь н о е н е р а в е н с т в о: решение задачи

$$\dot{x}_i=f_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\ x_i(t_0)=x_i^0,\ i=1,\ \ldots,\ n,$$

покомпонентно неотрицательно при $t\geqslant t_0$, если этим свойством обладает решение задачи

$$\dot{y}_i=g_i(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n),\ y_i(t_0)=y_i^0,\ i=1,\ \ldots,\ n,$$

и выполнены неравенства

$$f_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)\geqslant g_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n),$$
$$x_i^0\geqslant y_i^0,\ i=1,\ \ldots,\ n,$$
$$\partial f_i/\partial x_j\geqslant 0,\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n,\ i\neq j\ \text{(см. [2])}.$$

Другие примеры С. т., в том числе теорема Чаплыгина, см. в ст. *Дифференциальное неравенство*. О С. т. для дифференциальных уравнений с частными производными см., напр., [3].

Богатым источником для получения С. т. служит п р и н ц и п с р а в н е н и я с вектор-функцией Ляпунова (см. [4]—[7]). Идея принципа сравнения состоит в следующем. Пусть заданы система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(t,\ x),\ x=(x_1,\ \ldots,\ x_n) \qquad (1)$$

и вектор-функции

$$V(t,\ x)=(V_1(t,\ x),\ \ldots,\ V_m(t,\ x)),$$
$$W(t,\ v)=(W_1(t,\ v),\ \ldots,\ W_m(t,\ v)),$$

где $v=(v_1,\ \ldots,\ v_m)$. Для любого решения $x(t)$ системы (1) функция $v_j(t)=V_j(t,\ x(t))$, $j=1,\ \ldots,\ m$, удовлетворяет равенству

$$\dot{v}_j(t)=\frac{\partial V_j(t,\ x(t))}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V_j(t,\ x(t))}{\partial x_k}f_k(t,\ x(t)).$$

Поэтому если выполнены неравенства

$$\frac{\partial V_j(t,\ x)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V_j(t,\ x)}{\partial x_k}f_k(t,\ x)\leqslant$$
$$\leqslant W_j(t,\ V(t,\ x)),\quad j=1,\ \ldots,\ m, \qquad (2)$$

то на основе свойств системы дифференц. неравенств

$$\dot{v}_j\leqslant W_j(t,\ v_1,\ \ldots,\ v_m),\ j=1,\ \ldots,\ m, \qquad (3)$$

можно судить о поведении функций $V_j(t,\ x(t))$, являющихся решениями системы (3). В свою очередь, знание поведения функций $V_j(t,\ x)$ на каждом решении $x(t)$ системы (1) позволяет выносить суждения о свойствах решений системы (1).

Напр., пусть вектор-функции $V(t,\ x)$, $W(t,\ v)$ удовлетворяют неравенствам (2) и для любых $t_1\geqslant t_0$, $\gamma>0$, существует число $M>0$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{m}|V_j(t,\ x)|\geqslant M$$

при всех $t\in[t_0,\ t_1]$, $\|x\|\geqslant\gamma$. Пусть, далее, каждое решение системы неравенств (3) определено на $[t_0,\ \infty)$. Тогда каждое решение системы (1) также определено на $[t_0,\ \infty)$.

Большое число содержательных утверждений получено на основе принципа сравнения в теории устойчивости движения [см. [4] — [6]). Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова с успехом применяется для *дифференциального уравнения абстрактного*, *дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом*, *дифференциального включения*. В частности, для дифференциального включения $\dot{x}\in F(t,\ x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, где $F(t,x)$ — множество в $\mathbb{R}^n$, зависящее от $(t,\ x)\in\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n$, роль неравенств (2) играют неравенства

$$\frac{\partial V_j(t,\ x)}{\partial t}+\sup_{y\in F(t,\ x)}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V_j(t,\ x)}{\partial x_k}y_k\leqslant$$
$$\leqslant W_j(t,\ V(t,\ x)).$$

Большое число теорем сравнения приведено в [8].

Лит.: [1] Sturm C., «J. math. pures et appl.», 1836, t. 1, p. 106—86; [2] Ważewski T., «Ann. Soc. polon. math.», 1950, t. 23, p. 112—66; [3] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [4] Bellman R., «J. Soc. industr. and appl. math. Ser. A Control.», 1962, v. 1, № 1, p. 32—34; [5] Матросов В. М., «Дифференц. уравнения», 1968, т. 4, № 8, с. 1374—86, № 10, с. 1739—52, 1969, т. 5, № 7, с. 1171—85, № 12, с. 2129—43; [6] Мартынюк А. А., Устойчивость движения сложных систем, К., 1975; [7] Мартынюк А. А., Гутовски Р., Интегральные неравенства и устойчивость движения, К., 1979; [8] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976. *Е. Л. Тонков.*

СРАВНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ в алгебраической геометрии — теоремы о связях между гомотопическими инвариантами схем конечного типа над полем $\mathbb{C}$ в классической и этальной топологиях.

Пусть X — схема конечного типа над $\mathbb{C}$, а F — конструктивный периодический пучок абелевых групп на $X_{\text{étale}}$. Тогда F индуцирует пучок на X в классической топологии и существуют канонич. изоморфизмы

$$H^q(X_{\text{étale}},\ F)\cong H^q(X_{\text{class}},\ F).$$

С другой стороны, конечное топологич. накрытие гладкой схемы X конечного типа над $\mathbb{C}$ имеет единственную алгебраич. структуру (теорема существования Римана). Поэтому [1] этальная фундаментальная группа $X_{\text{étale}}$ является проконечным пополнением обычной группы классов гомотопически эквивалентных петель:

$$\pi_1(X_{\text{étale}})=\widehat{\pi_1(X_{\text{class}})}.$$

Если, кроме того, X_{class} односвязна, то $X_{\text{ét}}=\hat{X}_{\text{cl}}$, где X_{cl} и $X_{\text{ét}}$ — классический и этальный гомотопические типы схемы X соответственно (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Artin M., в сб.: Тр. международного конгресса математиков. Москва, 1966, М., 1968, с. 44—56; [2] Сулливан Д., Геометрическая топология, пер. с англ., М., 1975.

С. Г. Танкеев.

СРАВНЕНИЯ ФУНКЦИЯ — функция, применяемая при исследовании характера роста модуля *целой функции* $a(z)$ при $z \to \infty$; при этом обычно сравнивают поведение $|a(z)|$ с поведением нек-рой в том или ином смысле «хорошей» целой функции $A(z)$. В связи с этим естественным образом возникает задача об описании достаточно обширного множества целых функций $\mathfrak{A} = \{A(z)\}$, элементы к-рого успешно выполняли бы роль «эталонов сравнения».

Целая функция $A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$ наз. функцией сравнения или $A(z) \in \mathfrak{A}$, если: 1) $A_k > 0$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), 2) $\frac{A_{k+1}}{A_k} \searrow 0$ при $k \to \infty$. Целая функция $a(z)$ наз. A-сравнимой, если существует такая постоянная τ, $\tau > 0$, что

$$a(z) = O(A(\tau |z|)) \text{ при } z \to \infty. \qquad (1)$$

Нижняя грань σ чисел $\{\tau\}$, для к-рых выполняется соотношение (1), наз. A-типом A-сравнимой целой функции $a(z)$. Имеет место теорема об A-типе: если целая функция $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ сравнима с $A(z)$, $A(z) \in \mathfrak{A}$, то ее A-тип σ вычисляется по формуле

$$\sigma = \lim_{k \to \infty} \sup \left| \frac{a_k}{A_k} \right|^{1/k}. \qquad (2)$$

Выделенный класс $\mathfrak{A}$ С. ф. в известном смысле полностью решает поставленную задачу, ибо какова бы ни была целая функция $a(z)$, отличная от полинома, существует С. ф. $A(z)$, $A(z) \in \mathfrak{A}$, такая, что $a(z)$ сравнима с $A(z)$ и ее A-тип равен 1.

Если целая функция $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ сравнима с $A(z)$, $A(z) \in \mathfrak{A}$, и ее A-тип равен σ, то функция

$$\gamma_A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k / A_k}{t^{k+1}}$$

аналитическая, согласно (2), при $|t| > \sigma$, наз. A-ассоциированной с $a(z)$. В этом случае для $a(z)$ имеет место обобщенное представление Бореля:

$$a(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t| = \sigma + \varepsilon} A(zt) \gamma_A(t)\, dt \quad (\forall \varepsilon,\ \varepsilon > 0). \qquad (3)$$

Если в качестве С. ф. в (3) фигурирует $A(z) \equiv e^z$, то (3) является классическим интегральным представлением Бореля целых функций экспоненциального типа σ.

Если же в (3) имеет место $A(z) \equiv E_\rho(z)$, где $E_\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(1 + k/\rho)$ ($\rho > 0$) есть функция Миттаг-Леффлера, то (3) — интегральное представление для любой целой функции $a(z)$ порядка ρ типа $\sigma^{1/\rho}$ ($\sigma^{1/\rho}$ — тип $a(z)$ в классич. смысле).

Для нек-рых частных случаев $A(z)$ построено преобразование, обратное (3) (см., напр., [1], где имеется библиография, относящаяся к С. ф.). С. ф. и A-представление Бореля (3) находят применение в различных вопросах анализа (см., напр., [2], [3]). Если $[A; \infty)$ — класс целых функций, сравнимых с данной С. ф. $A(z)$, то, какова бы ни была последовательность С. ф. $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, всегда существует целая функция $a(z)$ такая, что $a(z) \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} [A_n; \infty)$.

Лит.: [1] Boas R. P., Buck R. C., Polynomial expansions of analytic functions, B.— [u. a.], 1958; [2] Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966; [3] Казьмин Ю. А., «Матем. сб.», 1973, т. 90, № 4, с. 521—43.

Ю. А. Казьмин.

СРЕДНЕЕ с весом $q=(q_1, \ldots, q_n)$, $q_i>0$, $\sum q_i=1$, совокупности действительных чисел $a=(a_1, \ldots, a_n)$ — величина

$$\mathfrak{M}_\varphi(a, q)=\varphi^{-1}\left(\sum_i q_i\varphi(a_i)\right),$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная строго монотонная функция на $\mathbb{R}$. При $\varphi(x)=x^r$ получается

$$\mathfrak{M}_r(a, q)=\left(\sum_i q_i a_i^r\right)^{1/r}$$

и, в частности, при $r=1$, $q_i=\frac{1}{n}$, $i=1, \ldots, n$, $\mathfrak{M}_r\left(a, \frac{1}{n}\right)=\mathfrak{A}(a)$ будет средним арифметическим чисел $a_1, \ldots, a_n$, а при $r=-1$ — средним гармоническим. Отдельно вводятся понятия среднего геометрического $\mathfrak{G}(a)=\left(\prod_i a_i\right)^{1/n}$ и взвешенного среднего геометрического $\mathfrak{G}(a, p)=\left(\prod_i a_i^{p_i}\right)^{1/\sum_i p_i}$.

Одним из основных результатов теории С. является неравенство $\mathfrak{G}(a)<\mathfrak{A}(a)$, кроме случая, когда все a_i равны между собой. Другие результаты:

1) $\mathfrak{M}_\varphi(ka, p)=k\mathfrak{M}_\varphi(a, p)$, $k>0$;

2) $\mathfrak{M}_\psi(a, p)=\mathfrak{M}_\varphi(a, p) \Leftrightarrow \psi=\alpha\varphi+\beta$, $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$;

3) $\mathfrak{M}_\psi(a, p)\leqslant\mathfrak{M}_\varphi(a, p) \Leftrightarrow \varphi\circ\psi^{-1}$ — выпуклая функция, в частности $\mathfrak{M}_r(a, p)\leqslant\mathfrak{M}_s(a, p)$, если $r<s$.

Понятие «С.» может быть распространено на бесконечные последовательности в предположении, что соответствующие ряды и произведения сходятся, и на функции. Таково, напр., С.

$$\mathfrak{M}_\varphi(f, p)=\varphi^{-1}\left(\int_a^b p(x)\varphi(f(x))\,dx\right)\Big/\int_a^b p(x)dx$$

при условии, что $f(x)\geqslant 0$ в соответствующем промежутке почти всюду и $p(x)>0$. При этом

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx\leqslant\mathfrak{M}_\varphi(f, p)\int_a^b p(x)\,dx.$$

Лит.: [1] Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948.

В. И. Соболев.

СРЕДНЕЕ ДВИЖЕНИЕ аргумента $\arg f(t)$ комплекснозначной равномерной почти периодической функции $f(t)$ — явление, состоящее в существовании (при нек-рых условиях, см. ниже) предела

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\arg f(t)=c;$$

С. д. наз. также сам этот предел. Если $|f(t)|\neq 0$ при всех t, то подразумевается, что выбрана непрерывная ветвь $\arg f(t)$. Для аналитических почти периодических функций можно сохранить понятие о С. д. даже при наличии нулей у f. Именно, вводят «правый» и «левый» аргументы, претерпевающие в k-кратном нуле f скачок на $\pm k\pi$, и соответственно говорят о правом и левом С. д., а если они совпадают, то просто о С. д.

Вопрос о С. д. возник в связи с тем, что в небесной механике долгота перигелия планеты выражается (в нек-ром приближении) как аргумент нек-рого тригонометрич. полинома

$$f=\sum_{j=1}^n a_j\exp(i\omega_j t).$$

Ж. Лагранж, рассмотрев два простых случая, когда одно из $|a_j|$ больше, чем сумма остальных коэффициентов, и когда $n=2$, отметил, что в прочих случаях вопрос представляется сложным. Изучением этого вопроса занялись лишь в 20 в. (об истории см. [1] — [3]). Окон-

чательный результат — у тригонометрич. полинома всегда существует С. д.— был высказан Б. Иессеном в 1938 (доказательство см. в [1]). (С точки зрения теории динамических систем, речь идет об осреднении нек-рой функции на торе вдоль траекторий потока, определяемого сдвигами на элементы однопараметрической подгруппы. Однако эта функция имеет особенности, что препятствует автоматич. применению соответствующей общей теоремы.) Еще раньше Х. Бор (H. Bohr) доказал существование С. д. для любой равномерной почти периодической функции, для к-рой $\inf|f(t)|>0$ (см. [4]). В этом случае разность $\arg f(t)-ct$ является равномерной почти периодической функцией и, в частности, ограничена. Было исследовано С. д. аналитических почти периодических функций в общем случае (см. [1], [4]). В этом случае С. д. существует не всегда, а если существует, то разность $\arg f(t)-ct$ не обязана быть ограниченной. Все же она может обладать нек-рыми обобщенными свойствами почти периодичности; в частности, это так для тригонометрич. полиномов [5]. Исключая аналитич. случай, имеются лишь отдельные результаты о С. д. для f, у к-рых $|f(t)|\neq 0$, $\inf|f(t)|=0$ (см. [6], [7]).

Лит.: [1] Jessen B., Tornhave H., «Acta math.», 1945, v. 77, p. 137—279; [2] Иессен Б., в кн.: Международный математический конгресс в Амстердаме 1954 г., М., 1961, с. 151—64; [3] Вейль Г., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 4, с. 213—19; [4] Левитан Б. М., Почти периодические функции, М., 1953; [5] Doss R., «Amer. J. Math.», 1957, v. 79, № 2, p. 389—96; [6] Левитан Б. М., «Матем. заметки», 1967, т. 1, № 1, с. 35—44; [7] Горин Е. А., «Матем. сб.», 1970, т. 82, № 2, с. 260—72.

Д. В. Аносов.

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ функции — приближение функции $f(t)$ функцией $\varphi(t)$ в случае, когда мера погрешности $\mu(f;\varphi)$ определяется формулой

$$\mu_\sigma(f;\varphi)=\int_a^b[f(t)-\varphi(t)]^2\,d\sigma(t),$$

где $\sigma(t)$ — неубывающая на $[a,\ b]$ функция, отличная от постоянной.

Пусть

$$u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots,\ u_n(t),\ \ldots \qquad (*)$$

— ортонормированная на $[a,\ b]$ относительно распределения $d\sigma(t)$ система функций. В случае С. п. функции $f(t)$ линейными комбинациями $\sum_{k=1}^n\lambda_k u_k(t)$ минимальную погрешность при каждом $n=1,\ 2,\ \ldots$ дают суммы

$$\sum_{k=1}^n c_k(f)\,u_k(t),$$

где $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f(t)$ по системе $(*)$, так что наилучший метод приближения является линейным.

Лит.: [1] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [2] Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

СРЕДНИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования рядов и последовательностей. Ряд

$$\sum_{k=0}^\infty u_k$$

суммируем методом средних арифметических к сумме s, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_0+s_1+\ldots+s_n}{n+1}=s,$$

где $s_n=\sum_{k=0}^n u_k$. В этом случае говорят также, что последовательность $\{s_n\}$ суммируема методом средних арифметических к пределу s. С. а. м. с. наз. также *Чезаро методом суммирования* первого порядка. С. а. м. с. является вполне регулярным (см. *Регулярные методы*

суммирования) и транслятивным (см. *Транслятивность метода суммирования*).

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951.

И. И. Волков.

СРЕДНЯЯ КРИВИЗНА поверхности Φ^2 в евклидовом трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ — полусумма *главных кривизн* k_1 и k_2, вычисленных в точке A этой поверхности:

$$H(A)=\frac{1}{2}(k_1+k_2).$$

Для гиперповерхности Φ^n в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ эта формула обобщается следующим образом:

$$H(A)=\frac{1}{n}(k_1+k_2+\ldots+k_n),$$

где k_i, $i=1, 2, \ldots, n$,— главные кривизны гиперповерхности, вычисленные в точке $A\in\Phi^n$.

С. к. поверхности в $\mathbb{R}^3$ может быть выражена через коэффициенты первой и второй квадратичных форм этой поверхности:

$$H(A)=\frac{1}{2}\,\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2},$$

где E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы, L, M, N — коэффициенты второй квадратичной формы, вычисленные в точке $A\in\Phi^2$. В частном случае задания поверхности уравнением $z=f(x, y)$ С. к. вычисляется по формуле:

$$H(A)=\frac{(1+f_y'^2)f''_{xx}-2f'_xf'_yf''_{xy}+(1+f_x'^2)f''_{yy}}{(1+f_x'^2+f_y'^2)^{3/2}},$$

к-рая обобщается для гиперповерхности Φ^n в $\mathbb{R}^{n+1}$, заданной уравнением $x_{n+1}=f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$H(A)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(1+p^2-f_{x_i}'^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}-\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\frac{\partial f}{\partial x_j}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}}{(1+p^2)^{3/2}},$$

где

$$p^2=|\operatorname{grad} f|^2=f_{x_1}'^2+f_{x_2}'^2+\ldots+f_{x_n}'^2.$$

Л. А. Сидоров.

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Третья сторона треугольника при этом наз. основанием треугольника. С. л. треугольника параллельна основанию и равна половине его длины. Во всяком треугольнике С. л. отсекает от него треугольник, ему подобный.

С. л. трапеции — отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции. С. л. трапеции параллельна ее основаниям и равна полусумме их длин.

БСЭ-3.

СТАБИЛИЗАТОР элемента a множества M — подгруппа G_a группы подстановок G, действующей на M, состоящая из всех подстановок, оставляющих на месте элемент a: $G_a=\{g\mid g\in G,\ ag=a\}$. С. элемента a наз. также группой изотропии элемента a или стационарной подгруппой этого элемента. Если $b\in M$, $f\in G$ и $af=b$, то $G_b=f^{-1}G_af$. Если рассматривается действие группы G на себе самой посредством сопряжений, С. элемента a будет *централизатором* этого элемента в G; если группа действует посредством сопряжений на множестве своих подгрупп, то С. подгруппы H будет *нормализатором* этой подгруппы.

Н. Н. Вильямс.

СТАБИЛЬНАЯ ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ГРУППА, k-я стабильная гомотопическая группа $\pi_k^s(X)$ топологич. пространства X,— индуктивный предел последовательности

$$\pi_k(X)\xrightarrow{E}\pi_{k+1}(EX)\xrightarrow{E}\pi_{k+2}(E^2X)\xrightarrow{E}\ldots, \qquad (*)$$

где EY — *надстройка* над топологич. пространством Y. Гомоморфизм надстройки $E : \pi_m(Y) \to \pi_{m+1}(EY)$ относит классу сфероида $f : S^m \to Y$ класс сфероида $Ef : ES^m = S^{m+1} \to EY$, где Ef получается факторизацией из отображения $f \times \mathrm{id}\ (0, 1]$. Последовательность (*) стабилизируется в $(k+3)$-м члене (см. [2]) так, что $\pi_k^s(X) = \pi_{k+2}(E^{k+2}X)$.

Для вычисления С. г. г. используют *спектральную последовательность* Адамса (см. [1]). До настоящего времени (1984) С. г. г. ни одного нестягиваемого пространства полностью не известно. Частичные вычисления имеются для *сфер гомотопических групп*, бесконечномерного вещественного проективного пространства и нек-рых других пространств.

Лит.: [1] Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л., Гомотопическая топология, 2 изд., М., 1969; [2] Уайтхед Дж., Новейшие достижения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1974.

Д. Б. Фукс.

СТАБИЛЬНОСТИ ТЕОРЕМЫ в алгебраической K-теории — утверждения о неизменности групп $K_i(R)$ или их подгрупп при нек-рых специальных расширениях основного кольца R (см. *Алгебраическая K-теория*).

Наиболее известны следующие теоремы стабильности. Пусть R — регулярное кольцо и $R[t_1, \ldots, t_n]$ — кольцо многочленов от переменных $t_1, \ldots, t_n$ над R. Теорема стабильности для групп Уайтхеда при переходе от R к $R[t_1, \ldots, t_n]$ утверждает [1], что естественный гомоморфизм вложения R в $R[t_1, \ldots, t_n]$ индуцирует изоморфизм между $K_1(R)$ и $K_1(R[t_1, \ldots, t_n])$.

В случае конечномерного над своим центром $Z(R)$ тела R определен гомоморфизм приведенной нормы $\mathrm{Nrd}_R : R^* \to Z(R)^*$ мультипликативной группы R^* тела R в мультипликативную группу $Z(R)^*$ его центра. Ядро этого гомоморфизма, обычно обозначаемое $SL(1, R)$, определяет приведенную группу Уайтхеда $SK_1(R)$ тела R:

$$SK_1(R) \simeq SL(1, R)/[R^*, R^*]$$

(см. *Специальная линейная группа*), являющуюся подгруппой в $K_1(R)$. Если $Z(R)(t_1, \ldots, t_n)$ — поле рациональных функций от $t_1, \ldots, t_n$ над $Z(R)$, то алгебра

$$R(t_1, \ldots, t_n) = R \otimes_{Z(R)} Z(R)(t_1, \ldots, t_n)$$

является телом и естественное вложение $\varphi_{t_1, \ldots, t_n}$ тела R в $R(t_1, \ldots, t_n)$ индуцирует гомоморфизм

$$\psi'_{t_1, \ldots, t_n} : SK_1(R) \to SK_1(R(t_1, \ldots, t_n)).$$

Теорема стабильности для приведенных групп Уайтхеда утверждает, что гомоморфизм $\psi'_{t_1, \ldots, t_n}$ биективен ([2], см. также [3]). Аналогичное утверждение имеет место и в унитарной алгебраич. K-теории (см. [4]).

С. т. наз. также теоремы о стабилизации для K_i-функторов при переходе от стабильных объектов $K_i(R)$ к нестабильным (см. [5]).

Лит.: [1] Bass H., Heller A., Swan R., «Publ. Math. IHES», 1964, № 22, p. 61—79; [2] Платонов В. П., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1976, т. 142, с. 198—207; [3] Платонов В. П., Янчевский В. И., «Докл. АН СССР», 1979, т. 249, № 5, с. 1064—68; [4] Янчевский В. И., «Матем. сб.», 1979, т. 110, № 4, с. 579—96; [5] Басс Х., Алгебраическая K-теория, пер. с англ., М., 1973.

В. И. Янчевский.

СТАБИЛЬНЫЕ И НЕСТАБИЛЬНЫЕ ТЕОРИИ — раздел *моделей теории*, изучающий стабильность *элементарных теорий*. Пусть T — полная теория первого порядка сигнатуры Ω, A — модель теории T и $X \subseteq |A|$. Сигнатура $\langle \Omega, X \rangle$ получается из Ω добавлением символов c_a выделенных элементов для всех $a \in X$. Система $\langle A, X \rangle$ имеет сигнатуру $\langle \Omega, X \rangle$ и является обогащением модели A, в к-ром c_a интерпретируется как a для всех $a \in X$. Теория $T(A, X)$ представляет собой совокупность истинных в $\langle A, X \rangle$

формул сигнатуры $\langle \Omega, X \rangle$. Множество максимальных, совместных с $T(A, X)$, множеств формул сигнатуры $\langle \Omega, X \rangle$, не содержащих свободных переменных, отличных от нек-рого фиксированного v_0, обозначается через $S(A, X)$. Теория T наз. стабильной в мощности λ, если для любой модели A теории T и любого $X \subseteq |A|$, мощность к-рого не превосходит λ, мощность $S(A, X)$ также не превосходит λ. Теория наз. стабильной, если она стабильна хотя бы в одной бесконечной мощности.

Пусть $|T|$ обозначает мощность множества формул сигнатуры Ω. Если теория T стабильна, то она стабильна во всех мощностях, удовлетворяющих равенству $\lambda = \lambda^{|T|}$. Если теория T стабильна, то существуют модель A теории T и бесконечное множество $Y \subseteq |A|$ такие, что для любой формулы $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ сигнатуры Ω и для любых двух последовательностей $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ различных элементов множества Y истинность $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ в A эквивалентна истинности $\varphi(b_1, \ldots, b_n)$ в A; при этом множество Y наз. множеством неразличимых в T элементов. Оказывается, что характеристич. свойством нестабильных теорий является существование множества, имеющего в определенном смысле противоположные свойства. А именно, нестабильность теории T эквивалентна существованию формулы $\varphi(v_1, \ldots, v_n; u_1, \ldots, u_n)$ сигнатуры Ω, модели A теории T и последовательности $\langle a_1^0, \ldots, a_n^0 \rangle, \ldots, \langle a_1^k, \ldots, a_n^k \rangle, \ldots$ наборов элементов A таких, что истинность $\varphi(a_1^i, \ldots, a_n^i; a_1^j, \ldots, a_n^j)$ в A равносильна неравенству $i < j$. Поэтому нестабильны полные расширения теории линейно упорядоченных множеств, имеющие бесконечные модели, а также теория любой бесконечной *булевой алгебры*. В частности, нестабильна теория натуральных чисел со сложением и теория поля действительных чисел. Если теория T нестабильна, то число типов изоморфизма моделей T в каждой несчетной мощности $\lambda > |T|$ равно 2^λ. Поэтому теория T, категоричная в несчетной мощности $\lambda > |T|$, стабильна. Существуют, однако, стабильные теории, не категоричные ни в какой бесконечной мощности. Такова теория T_1, сигнатура к-рой состоит из одноместного предиката и счетного множества выделенных элементов. Аксиомы этой теории утверждают, что предикат истинен на выделенных элементах и делит каждую модель T_1 на два бесконечных множества, а также что выделенные элементы не равны между собой.

Теории конечной или счетной сигнатуры, стабильные в счетной мощности, наз. также тотально трансцендентными. Всякая тотально трансцендентная теория стабильна во всех бесконечных мощностях. Всякая категоричная в несчетной мощности теория конечной или счетной сигнатуры является тотально трансцендентной. Упомянутая выше теория T_1 тотально трансцендентна. Тотально трансцендентные теории можно характеризовать и в других терминах. Пусть T — полная теория конечной или счетной сигнатуры Ω, A — бесконечная модель теории T. Формуле $\varphi(v_0)$ сигнатуры $\langle \Omega, |A| \rangle$ припишем ранг -1, если она ложна на всех элементах модели $\langle A, |A| \rangle$, и ранг α (α — ординал), если ей не приписан никакой ранг, меньший α, но для каждого элементарного расширения B системы A и для каждой формулы $\psi(v_0)$ сигнатуры $\langle \Omega, |B| \rangle$ одной из формул $\psi(v_0) \,\&\, \varphi(v_0)$ или $\neg\psi(v_0) \,\&\, \varphi(v_0)$ приписан ранг, меньший α. Теория T тогда и только тогда является тотально трансцендентной, когда для каждой модели A теории T каждой формуле φ сигнатуры $\langle \Omega, |A| \rangle$ приписан нек-рый ранг.

Лит.: [1] Shelah S., «Ann. of math. logic», 1971, v. 3, № 3, p. 271—362; [2] его же, Classification theory and the number of non-isomorphic models, Amst.—[a. o.], 1978.

Е. А. Палютин, М. А. Тайцлин.

СТАБИЛЬНЫЙ РАНГ кольца R — наименьшее число d такое, что любой d-порожденный проективный модуль над R свободен. Кольцо R здесь предполагается ассоциативно-коммутативным. Для некоммутативных колец аналогичным образом определяемые левый и правый С. р. могут и не совпадать между собой.

О. А. Иванова.

СТАНДАРТИЗАЦИИ И УНИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, в к-рых требуется определить оптимальные ряды изделий и их составных частей.

Оптимальный ряд изделий — это такой набор различных типов изделий, взятых из исходного ряда, к-рый позволяет удовлетворить все заданные виды спроса в требуемом объеме с минимальными суммарными затратами на разработку, производство и эксплуатацию всех изделий. Оптимальный ряд изделий существует, поскольку с ростом числа типов изделий затраты на их разработку монотонно возрастают, а серийные и эксплуатационные затраты — убывают.

Терминологич. различие между задачами стандартизации и задачами унификации является в определенной степени условным. Существуют различные взгляды на вопрос о разграничении задач стандартизации и унификации. Напр., к задачам стандартизации относят задачи выбора оптимальных рядов относительно простых деталей и изделий, производимых массовыми сериями, тогда как к задачам унификации относят задачи выбора оптимальных рядов сложных дорогостоящих изделий и их составных частей. Другой подход к разграничению задач стандартизации и унификации основан на учете степени детальности, с к-рой исследуется структура изделий, входящих в исходный ряд. Если изделия различного типа, входящие в исходный ряд, полностью отличаются друг от друга и не имеют одинаковых, т. е. унифицированных составных частей, то говорят об *одноуровневой задаче стандартизации*, или просто о *задаче стандартизации*. Если изделия ряда рассматриваются с учетом их структуры и того, что изделия различного типа могут иметь унифицированные составные части, то говорят о двухуровневой задаче стандартизации. При дальнейшем рассмотрении структуры составных частей изделий можно получить n-уровневую задачу стандартизации. Задачи унификации — это n-уровневые задачи стандартизации с числом уровней $n>1$. Если предположить, что при определении оптимальных рядов сложных изделий, как правило, должны одновременно определяться оптимальные ряды их наиболее важных составных частей, то два описанных подхода к разграничению задач стандартизации и унификации совпадут.

Наиболее простым количественным методом, предназначенным для решения задач стандартизации при установлении рациональных параметров и размеров машин и оборудования, является использование системы предпочтительных чисел, основанной на применении геометрич. прогрессий. Установленные ряды предпочтительных чисел $R5$, $R10$, $R20$, $R40$ представляют собой ряды геометрич. прогрессий со знаменателями соответственно

$$\sqrt[5]{10} \approx 1{,}6, \quad \sqrt[10]{10} \approx 1{,}25,$$

$$\sqrt[20]{10} \approx 1{,}12, \quad \sqrt[40]{10} \approx 1{,}06.$$

Если для рассматриваемого класса изделий обоснована оптимальность одного из этих рядов и выбрано минимальное значение главного параметра a_0, то можно получить значения главного параметра всех остальных изделий ряда, округляя в случае необходимости величины $a_0 q^n$, $n=1, 2, \ldots$, где q — знаменатель выбранного ряда.

Подход, основанный на системе предпочтительных чисел, дает весьма приближенное решение задач стандартизации. К тому же область применимости этого подхода ограничена узким классом сравнительно простых, одномерных задач стандартизации, в к-рых изделия ряда характеризуются одним главным параметром. В большинстве случаев, особенно если рассматриваются сложные и дорогостоящие изделия, к-рые невозможно охарактеризовать одним главным параметром, оптимальное решение задач стандартизации и унификации следует определять с привлечением более строгих математич. методов.

Математич. модели, разрабатываемые для решения задач стандартизации и унификации, сводятся в общем случае к достаточно сложным многоэкстремальным задачам нелинейного программирования, решение к-рых требует привлечения современных вычислительных методов и ЭВМ с высоким быстродействием и большой памятью.

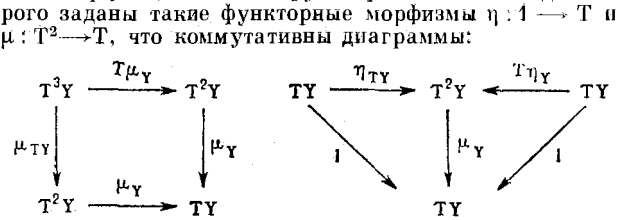
Для специально выделенных классов задач стандартизации и унификации, в к-рых удается существенно использовать их специфику, возможно построение более простых эффективных методов решения.

Лит.: [1] Коктев А. А., Основы стандартизации в машиностроении, 4 изд., М., 1973; [2] Чуев Ю. В., Спехова Г. П., Технические задачи исследования операций, М., 1971; [3] Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т., Экстремальные задачи стандартизации, Новосиб., 1978; [4] Вапнярский И. Б., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1978, т. 18, № 2, с. 484—87.

И. Б. Вапнярский.

СТАНДАРТНАЯ КОНСТРУКЦИЯ — понятие гомологич. алгебры. Другие названия — тройка, монада, функтор-алгебра.

Пусть $\mathfrak{C}$ — нек-рая категория. Стандартной конструкцией наз. функтор $T: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$, для к-рого заданы такие функторные морфизмы $\eta: 1 \to T$ и $\mu: T^2 \to T$, что коммутативны диаграммы:



Основная область применения С. к. в топологии — построение различных классифицирующих пространств и их алгебраич. аналогов — т. н. бар-конструкций.

Лит.: [1] Бордман Дж., Фогт Р., Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. [Дополнение], пер. с англ., М., 1977. *Ю. Б. Рудяк.*

СТАНДАРТНАЯ ПРОГРАММА, подпрограмма,— программа, представляющая собой описание вычислительного алгоритма решения задачи на одном из алгоритмич. языков (языков программирования) в рамках специальных требований операционной системы и системы программирования, допускающих ее использование (в содержательном смысле) в качестве конструктивного элемента процесса решения более общей задачи на ЭВМ. Обычно понятие С. п. относят к области применения математич. методов в численных расчетах на ЭВМ (вычислительная математика, математич. статистика и др.), хотя оно применимо и к другим сферам использования вычислительной техники. Совокупности С. п., как правило, оформляются в виде библиотек С. п., а также могут служить основой функционального наполнения пакетов прикладных программ. Библиотеки С. п. представляют собой определенным образом организованную совокупность загрузочных, объектных или исходных модулей, хранящихся во внешней памяти ЭВМ, к к-рой может обращаться операционная система. При составлении С. п.

могут учитываться дополнительные требования: модульный принцип, дисциплина программирования, самодокументированность, фильтрация входных данных и диагностика ошибок, обеспечение качества и др. Помимо штатных программных средств *математического обеспечения* могут использоваться инструментальные системы автоматизации конструирования библиотек С. п. для классов ЭВМ (системы верификации, преобразования и генерации программ, форматирования, тестирования, документально-справочные, автоматизации комментирования и др.). Для библиотек С. п. актуальны вопросы разработки проблемно-ориентированных языков, что наряду с вопросами разработки архитектуры и средств управления базами данных, а также средств управления решением задач делает проблематику создания библиотек С. п. близкой к проблематике создания пакетов прикладных программ. Математич. обеспечение современных ЭВМ включает обширные библиотеки С. п., составляющие основу специального метода *автоматизации программирования* (метод библиотечных программ).

Лит.: [1] Воеводин В. В., Арушанян О. Б., в сб.: Численный анализ на ФОРТРАНе, М., 1979, с. 73—83; [2] Карпов В. Я., Корягин Д. А., Самарский А. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1978, т. 18, № 2, с. 458—67.

О. В. Арушанян.

СТАНДАРТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ — то же, что *квадратичное отклонение*.

СТАНДАРТНЫЙ СИМПЛЕКС — 1) С. с.— симплекс Δ^n размерности n в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ с вершинами в точках $e_i=(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, $i=0, \ldots, n$ (единица стоит на i-м месте), т. е.

$$\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_{n+1}) \mid 0 \leqslant t_i \leqslant 1 \Sigma t_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Для любого топологич. пространства X непрерывные отображения $\sigma : \Delta^n \to X$ представляют собой сингулярные симплексы пространства X (см. *Сингулярные гомологии*).

2) С. с.— *симплициальная схема* Δ^n, вершинами к-рой являются точки l_i, а симплексами — произвольные непустые подмножества вершин. Геометрич. реализация этой симплициальной схемы совпадает с С. с. в смысле п. 1).

3) С. с.— *симплициальное множество* Δ^n, получающееся применением функтора O^+ к симплициальной схеме п. 2) и представляющее собой контравариантный функтор на категории Δ (см. *Симплициальный объект*), для к-рого

$$\Delta^n([m]) = \Delta([m], [n]), \quad \Delta^n(\lambda)(\mu) = \mu\lambda.$$

Таким образом, m-мерными симплексами симплициального множества Δ^n являются неубывающие последовательности $(a_0, \ldots, a_m)$ чисел из $[n]$, а операторы граней d_i и вырождения s_i этого симплициального множества определяются формулами

$$d_i(a_0, \ldots, a_m) = (a_0, \ldots, \widehat{a_i}, a_{i+1}, \ldots, a_m),$$
$$s_i(a_0, \ldots, a_m) = (a_0, \ldots, a_i, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_m),$$

где знак $\wedge$ означает, что символ, стоящий под ним, опускается. Симплициальное множество Δ^1 наз. также симплициальным отрезком. Симплекс $\iota_n=(0, 1, \ldots, n)$ (единственный невырожденный n-мерный симплекс из Δ^n) наз. фундаментальным симплексом симплициального множества Δ^n. Наименьшее симплициальное подмножество симплициального множества Δ^{n+1}, содержащее все симплексы вида $d_i\iota_{n+1}$ с $i \neq k$, обозначается Δ^n_k и наз. k-м стандартным фунтиком.

Для любого симплициального множества K и произвольного его n-мерного симплекса σ существует единственное симплициальное отображение $\chi_\sigma : \Delta^n \to K$, для к-рого $\chi(\iota_n)=\sigma$. Это отображение наз. характеристическим для K.

4) С. с.— фундаментальный симплекс t_n симплициального множества п. 3), к-рый в этом случае обозначается Δ_n. *С. Н. Малыгин, М. М. Постников.*

СТАТИКА — раздел механики, в к-ром изучается равновесие материальных тел, находящихся под действием сил, и условия эквивалентности систем сил. Равновесие изучается по отношению к системе отсчета, в к-рой определены все силы, действующие на материальные тела (напр., равновесие по отношению к Земле). Как и в *динамике*, в С. вводятся модели реальных тел, дающие возможность сводить задачи о равновесии к более простым. Такими моделями являются материальная точка, упруго деформируемое тело, абсолютно твердое тело, континуум, идеальная жидкость, вязкая жидкость и т. п. В зависимости от свойств материальных тел С. разделяется на С. твердого тела, С. упруго деформируемого тела, С. жидкости и газа. По своим методам исследования С. делится на геометрическую и аналитическую.

Геометрическая С. изучает геометрич. свойства систем сил (векторов сил), действующих на изучаемую систему материальных точек, построение эквивалентных систем сил, приведение их к простейшему виду и установление условий равновесия систем сил, а также тел, находящихся под действием сил. Важнейшей в геометрич. С. является С. абсолютно твердого тела.

В основе аналитической С. лежит понятие работы сил, действующих на систему материальных точек, на произвольном возможном перемещении системы. Основной принцип аналитич. С.— *возможных перемещений принцип*.

Начало развития С. относится к глубокой древности и связано с именем греч. механика и математика Архимеда. Основные законы равновесия геометрич. С. установлены нидерл. механиком С. Стевином (S. Stevin) и франц. механиком и геометром Л. Пуансо (L. Poinsot). Первая общая формулировка принципа возможных перемещений принадлежит И. Бернулли (J. Bernoulli). Ж. Лагранж (J. Lagrange) дал первое доказательство принципа возможных перемещений и получил следствия о равновесии системы.

Лит.: [1] Пуансо Л., Начало статики, пер. с франц., М.—П., 1920; [2] Бернулли И., Избранные сочинения по механике, пер. с франц., М.— Л., 1937; [3] Лагранж Ж., Аналитическая механика, т. 1, пер. с франц., М.— Л., 1950; [4] Остроградский М. В., Общие соображения относительно моментов сил, в кн.: Остроградский М. В. Избранные труды, М., 1958; [5] Жуковский Н. Е., Теоретическая механика, 2 изд., М.—Л., 1952; [6] Чаплыгин С. А., Курсы лекций по теоретической механике, в кн.: Чаплыгин С. А., Собр. соч., т. 4, М.—Л., 1949; [7] Аппель П., Теоретическая механика, т. 1, пер. с франц., М., 1960. *Е. Н. Березкин.*

СТАТИСТИКА — термин, употребляемый в математич. статистике для названия функций от результатов наблюдений.

Пусть случайная величина X принимает значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \mathsf{P}^X)$. Тогда любое $\mathcal{B}$-измеримое *отображение* $T(\cdot)$ пространства $\mathfrak{X}$ в некрое измеримое пространство $(\mathfrak{Y}, \mathcal{A})$ наз. статистикой, при этом распределение вероятностей статистики T определяется формулой

$$\mathsf{P}^T\{B\} = \mathsf{P}\{T(X) \in B\} = \mathsf{P}\{X \in T^{-1}(B)\} = \mathsf{P}^X\{T^{-1}(B)\} \ (\forall B \in \mathcal{A}).$$

Примеры. 1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие дисперсию. Тогда С.

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{и} \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

суть *несмещенные оценки* для математич. ожидания $\mathsf{E}X_1$ и дисперсии $\mathsf{D}X_1$ соответственно.

2. Члены *вариационного ряда*

$$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)},$$

построенного по наблюдениям $X_1, \ldots, X_n$ суть *порядковые статистики*.

3. Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ образуют *стационарный случайный процесс*, спектральная плотность к-рого есть $f(\cdot)$. В этом случае С.

$$I_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k e^{-ik\lambda}\right|^2, \quad \lambda \in [-\pi;\ \pi],$$

называемая *периодограммой*, при определенных условиях регулярности на $f(\cdot)$ является асимптотически несмещенной оценкой для $f(\cdot)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E} I_n(\lambda) = f(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi;\ \pi].$$

В теории оценивания и проверки статистич. гипотез важную роль играет понятие *достаточной статистики*, к-рая позволяет производить редукцию данных без потери информации об изучаемом параметрич. семействе распределений.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964.

М. С. Никулин.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ГИПОТЕЗА — определенное предположение о свойствах распределения вероятностей, лежащего в основе наблюдаемых случайных явлений. Результаты наблюдений представляются обычно в виде реализации нек-рой совокупности случайных величин, конечной или бесконечной. При этом совместное распределение этих случайных величин известно не полностью, и С. г. предполагает принадлежность его к нек-рому определенному классу распределений. В такой ситуации ставится задача *статистических гипотез проверки*.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ИГРА — *антагонистическая игра*, в к-рой игрок I интерпретируется как природа, игрок II — как статистик, стратегия игрока I — как случайный процесс, стратегия игрока II — как решающее правило (решающая функция), а функция выигрыша игрока I — как функция потерь («риск») статистика. Смешанной стратегией игрока I будет тогда вероятностная мера на множестве случайных процессов, смешанной стратегией игрока II — рандомизированное *решающее правило*, а функция выигрыша игрока I определяется как математич. ожидание функции потерь статистика. С. и. возникли из задач математич. статистики (напр., задачи оценки параметров, испытания гипотез и т. п.), в к-рых принимается минимаксный критерий (см. *Минимакса принцип*). Систематич. описание задач математич. статистики (в т. ч. задач последовательного анализа) как С. и. впервые было проделано А. Вальдом (A. Wald), показавшим справедливость теоремы о минимаксе для широкого класса С. и. (см. [1]). Эта теорема дает метод решения задач математич. статистики, т. к. в ряде случаев нахождение максимина удобнее и легче, чем нахождение минимакса, что, в свою очередь, облегчает нахождение оптимального рандомизированного правила.

Лит.: [1] Вальд А., Статистические решающие функции, в сб.: Позиционные игры, М., 1967; [2] Блекуэлл Д., Гиршик М. А., Теория игр и статистических решений, пер. с англ., М., 1958.

А. Н. Ляпунов.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА — функция от случайных величин, применяемая для оценки неизвестных параметров распределения вероятностей. См. *Оценка статистическая*.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА — функция, используемая в равновесной статистич. физике, равная нормировочной константе в выражении для плотности (или матрицы плотности — в случае квантовой системы) в каноническом гиббсовском ансамбле.

1) В случае классич. системы плотность распределения Гиббса $p(\omega)$, $\omega \in \Omega$ (Ω — фазовое пространство

системы) относительно естественной меры $d\omega$ на Ω задается формулой

$$p(\omega) = (\Xi)^{-1} \exp\{-\beta[H_0(\omega) + \mu_1 H_1(\omega) + \mu_k H_k(\omega)]\},$$

где $H_0(\omega)$ — функция Гамильтона (энергия) системы, а $H_i(\omega)$, $i=1, \ldots, k$,— нек-рый набор величин, сохраняющийся при движении системы, задаваемой гамильтонианом $H_0(\omega)$; $\beta>0$, $\mu_1, \ldots, \mu_k$ — действительные параметры. Нормировочный множитель

$$\Xi(\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k) = \int_\Omega \exp\left\{-\beta\left[H_0(\omega) + \sum_{i=1}^k \mu_i H_i(\omega)\right]\right\} d\omega$$

и наз. С. с. (иногда статистическим интегралом или интегралом состояний).

2) В случае квантовой системы каноническое гиббсовское состояние задается матрицей плотности

$$\rho = (\Xi)^{-1} \exp\{-\beta(\hat{H}_0 + \mu_1 \hat{H}_1 + \ldots + \mu_k \hat{H}_k)\},$$

где $\hat{H}_0$ — гамильтониан (оператор энергии) системы, а $\hat{H}_i$, $i=1, \ldots, k$,— нек-рые коммутирующие между собой операторы, соответствующие сохраняющимся во времени величинам; $\beta>0$, $\mu_1, \ldots, \mu_k$ — действительные параметры. Нормировочный множитель (наз. статистич. суммой) равен

$$\Xi(\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k) = \mathrm{Sp} \exp\left\{-\beta_0\left(\hat{H}_0 + \sum_{i=1}^k \mu_i \hat{H}_i\right)\right\}.$$

Аналогично определяются С. с. для других гиббсовских ансамблей (микроканонического и малого канонического), а также в случае гиббсовских ансамблей, определенных для различных упрощенных модификаций реальных физич. систем (решетчатые системы, конфигурационные системы и т. д.).

В типичном случае, когда система заключена в ограниченной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ и энергия $H_0(\omega)$ (или $\hat{H}_0$), а также другие величины $H_i(\omega)$, $i=1, \ldots, k$ (соответственно операторы $\hat{H}_i$, $i=1, \ldots, k$), входящие в определение гиббсовского ансамбля, инвариантны относительно сдвигов в $\mathbb{R}^3$ и почти аддитивны, т. е. (в случае классич. системы)

$$H_i(\omega_1, \omega_2) \approx H_i(\omega_1) + H_i(\omega_2), \quad i=0, 1, \ldots, k,$$

где ω_1 и ω_2 — две конфигурации частиц, достаточно далеко отстоящие друг от друга (точную формулировку этого условия, а также его квантовый аналог см., напр., в [2]), в термодинамическом предельном переходе $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^3$ статистич. сумма Ξ имеет следующую асимптотику:

$$\Xi(\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k) = \exp\{|\Lambda| \chi(\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k) + o(|\Lambda|)\},$$

где $|\Lambda|$ — объем области Λ, а функция $\chi(\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k)$ — т. н. термодинамический потенциал — является важной термодинамич. характеристикой системы: с ее помощью выражаются многие другие термодинамич. характеристики (удельная энергия, плотность, удельная энтропия и т. д.).

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, М., 1964 (Теоретическая физика, т. 5); [2] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1970; [3] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1—2, М., 1978.

Р. А. Минлос.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА — другое название эргодической *Неймана теоремы* и ее обобщений.

Д. В. Аносов.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ теории случайных процессов — раздел математич. статистики, посвященный статистич. выводам на основе наблюдений, представимых в виде случайного процесса. В самой общей постановке наблюдаются значения случайной функции $x(t)$ для $t \in T$ и на основании этих наблюдений надлежит сделать статистич. выводы о нек-рых характеристиках случайного процесса $x(t)$. При столь широком определении сюда формально включается и

вся классич. статистика независимых наблюдений. На самом деле под статистикой случайных процессов понимают только статистику зависимых наблюдений, исключая, напр., статистич. анализ большого числа независимых реализаций случайного процесса. При этом основания статистич. теории, основные постановки задач (*статистическое оценивание*, *статистических гипотез проверка*), основные понятия (достаточность, несмещенность, состоятельность и т. д.) — те же, что и в классич. теории. Однако при решении конкретных задач возникают порой значительные трудности и явления нового порядка. Частично эти трудности связаны с наличием зависимости, более сложной структуры наблюдаемого процесса, частично, в случае наблюдений с непрерывным временем, с необходимостью рассматривать распределения в бесконечномерных пространствах.

На самом деле при решении С. з. теории случайных процессов существенно используется структура наблюдаемого процесса и в соответствии с классификацией случайных процессов рассматривают С. з. гауссовских, марковских, стационарных, ветвящихся, диффузионных и т. д. процессов. При этом наиболее далеко продвинута статистич. теория стационарных процессов (*анализ временных рядов*).

Необходимость статистич. анализа случайных процессов возникла в 19 в.: анализ метеорологич., экономич. рядов, исследование циклич. процессов (колебания цен, солнечные пятна). В настоящее время круг задач, связанных со статистич. анализом случайных процессов, чрезвычайно широк. Достаточно упомянуть статистич. анализ случайных шумов, вибраций, турбулентных явлений, морского волнения, кардиограмм, энцефалограмм и т. д. Теоретич. аспекты проблемы выделения сигнала на фоне шума в значительной степени являются С. з. теории случайных процессов.

В дальнейшем предполагается, что наблюдается отрезок $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, случайного процесса $x(t)$, причем параметр t пробегает либо весь отрезок $[0, T]$, либо целые числа этого отрезка. Обычно в С. з. о распределении P^T случайного процесса $\{x(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$ известно лишь, что оно принадлежит нек-рому семейству $\{P^T\}$ распределений. Это семейство всегда можно записать в параметрич. форме.

Пример 1. Наблюдаемый процесс $x(t)$ представляет собой либо сумму неслучайной функции $s(t)$ («сигнал») и случайной функции $\xi(t)$ («шум»), либо одну случайную функцию $\xi(t)$. Надлежит проверить гипотезу $H_0 : x(t) = s(t) + \xi(t)$ против альтернативы $H_1 : x(t) = \xi(t)$ (задача обнаружения сигнала в шуме). Это — пример задачи проверки статистич. гипотез.

Пример 2. Наблюдаемый процесс $x(t) = s(t) + \xi(t)$, где $s(t)$ — неизвестная наблюдателю неслучайная функция (сигнал), а $\xi(t)$ — случайный процесс (шум). Надлежит оценить функцию s или ее значение $s(t_0)$ в заданной точке t_0. Сходным образом можно предположить, что $x(t) = s(t; \theta) + \xi(t)$, где s — известная функция, зависящая от неизвестного параметра θ, к-рый и нужно оценить по наблюдению $x(t)$ (задачи выделения сигнала на фоне шума). Это — примеры задач оценивания.

Отношение правдоподобия для случайных процессов. В С. з. отношение правдоподобия и функция правдоподобия играют большую роль (см. *Неймана — Пирсона лемма*, *Статистических гипотез проверка*, *Статистическое оценивание*). Отношением правдоподобия двух распределений P_u^T и P_v^T наз. плотность

$$p(x(\cdot); u, v) = p(x(\cdot)) = \frac{dP_u^T}{dP_v^T}(x(\cdot)).$$

Функцией правдоподобия наз. функцию

$$L(\theta) = \frac{dP_\theta^T}{d\mu}(x(\cdot)),$$

где μ есть σ-конечная мера, относительно к-рой абсолютно непрерывны все меры P_θ^T. В дискретном случае, когда t пробегает целые точки отрезка $[0, T]$ и $T<\infty$, отношение правдоподобия, напр., всегда существует, если распределения P_u и P_v имеют положительные плотности распределения, совпадая с отношением этих плотностей.

Если t пробегает весь отрезок $[0, T]$, то возможны случаи, когда меры P_u^T и P_v^T не абсолютно непрерывны относительно друг друга; более того, встречаются ситуации, когда меры P_u^T и P_v^T взаимно сингулярны, т. е. для нек-рого множества A в пространстве реализаций $x(t)$

$$P_u^T\{x \in A\} = 0, \quad P_v^T\{x \in A\} = 1.$$

В этом случае $p(x; u, v)$ не существует. Сингулярность мер P_θ^T приводит к важным и в какой-то степени парадоксальным статистич. следствиям, позволяя делать безошибочные выводы о параметре θ. Пусть, напр., $\Theta = \{0, 1\}$; сингулярность мер P_0^T, P_1^T означает, что с помощью критерия: «принять H_0, если $x \notin A$, отвергнуть H_0, если $x \in A$», гипотезы H_0 : $\theta=0$ и H_1 : $\theta=1$ разделяются безошибочно. Наличие таких совершенных критериев часто указывает, что С. з. поставлена не совсем удачно и из нее исключены какие-то существенные случайные возмущения.

Пример 3. Пусть $x(t) = \theta + \xi(t)$, где $\xi(t)$ — стационарный эргодич. процесс с нулевым средним, θ — действительный параметр. Пусть реализации $\xi(t)$ с вероятностью 1 аналитичны в полосе, содержащей действительную ось. По эргодич. теореме

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt = \theta$$

и все меры P_θ^∞ взаимно сингулярны. Так как аналитич. функция $x(t)$ полностью определяется своими значениями в окрестности нуля, параметр θ оценивается безошибочно по наблюдениям $\{x(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ для любого $T>0$.

Вычисление отношения правдоподобия в тех случаях, когда оно существует, — трудная задача. Вычисления часто основаны на предельном соотношении

$$p(x(\cdot); u, v) = \lim_{n \to \infty} \frac{p_u(x(t_1), \ldots, x(t_n))}{p_v(x(t_1), \ldots, x(t_n))},$$

где p_u, p_v — плотности распределения вектора $(x(t_1), \ldots, x(t_n))$, а $\{t_1, t_2, \ldots\}$ — плотное в $[0, T]$ множество. Исследование правой части последнего равенства полезно и при доказательстве сингулярности P_u, P_v.

Пример 4. Пусть либо наблюдение $x(t) = w(t)$, где $w(t)$ — винеровский процесс (гипотеза H_0), либо $x(t) = m(t) + w(t)$, m — неслучайная функция (гипотеза H_1). Меры P_0, P_1 взаимно абсолютно непрерывны, если $m' \in L_2(0, T)$, и взаимно сингулярны, если $m' \notin L_2(0, T)$. Отношение правдоподобия

$$\frac{dP_1^T}{dP_0^T}(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T [m'(t)]^2\, dt + \int_0^T m'(t)\, dx(t)\right\}.$$

Пример 5. Пусть $x(t) = \theta + \xi(t)$, где θ — действительный параметр, а $\xi(t)$ — стационарный марковский гауссовский процесс с нулевым средним и известной корреляционной функцией $r(t) = e^{-\alpha|t|}$, $\alpha>0$.

Меры P_θ^T взаимно абсолютно непрерывны с функцией правдоподобия

$$\frac{dP_\theta^T}{dP_\theta^0}(x)=\exp\left\{\frac{1}{2}\theta x(0)+\frac{1}{2}\theta x(T)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\theta\alpha\int_0^T x(t)\,dt-\frac{1}{2}\theta^2-\frac{1}{4}\theta^2\alpha T\right\}.$$

В частности, $x(0)+x(T)+\alpha\int_0^T x(t)\,dt$ — достаточная статистика для семейства P_θ^T.

Линейные задачи статистики случайных процессов. Пусть наблюдается функция

$$x(t)=\sum_1^k\theta_j\varphi_j(t)+\xi(t), \qquad (*)$$

где $\xi(t)$ — случайный процесс с нулевым средним и известной корреляционной функцией $r(t, s)$, φ_j — известные неслучайные функции, $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ — неизвестный параметр (θ_j — коэффициенты регрессии), параметрич. множество Θ — подпространство R^k. Линейные оценки для θ_j суть оценки вида $\sum c_j x(t_j)$ или их пределы в среднем квадратичном. Задача отыскания оптимальных в среднем квадратичном несмещенных линейных оценок сводится к решению линейных алгебраических или линейных интегральных уравнений, определяемых r. Именно, такая оптимальная оценка $\hat{\theta}$ определяется уравнениями $\mathsf{E}_\theta(\hat{\theta}_j\xi)=0$ для любой величины ξ вида $\xi=\sum b_j x(t_j)$, $\sum b_j\varphi_l(t_j)=0$. В ряде случаев оценки θ, полученные по методу наименьших квадратов асимптотически, при $T\to\infty$, не хуже оптимальных линейных оценок. Оценки метода наименьших квадратов вычисляются проще и не зависят от r.

Пример 6. В условиях примера 5, $k=1$, $\varphi_1(t)\equiv 1$. Оптимальная несмещенная линейная оценка имеет вид

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2+\alpha T}\left(x(0)+x(T)+\alpha\int_0^T x(t)\,dt\right).$$

Оценка

$$\theta^*=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

имеет асимптотически ту же дисперсию.

Статистические задачи гауссовских процессов. Пусть процесс $\{x(t), 0\leqslant t\leqslant T, P_\theta^T\}$ — гауссовский при всех $\theta\in\Theta$. Для гауссовских процессов имеет место альтернатива: любые две меры P_u^T, P_v^T либо взаимно абсолютно непрерывны, либо сингулярны. Так как гауссовское распределение P_θ^T полностью определяется средним значением $m_\theta(t)=\mathsf{E}_\theta x(t)$ и корреляционной функцией $r_\theta(s, t)=\mathsf{E}_\theta x(s)x(t)$, отношение правдоподобия dP_u^T/dP_v^T выражается через m_u, m_v, r_u, r_v сложным образом. Относительно прост тот случай, когда $r_u=r_v=r$, r — непрерывная функция. Именно, пусть $\Theta=\{0, 1\}$, $r_0=r_1=r$; λ_i и $\varphi_i(t)$ — собственные значения и соответствующие им нормированные в $L_2(0, T)$ собственные функции интегрального уравнения

$$\lambda\varphi(s)=\int_0^T r(s, t)\varphi(t)\,dt;$$

средние $m_0(t)$, $m_1(t)$ — непрерывные функции, и пусть

$$m_{ij}=\int_0^T m_i(t)\varphi_i(t)\,dt.$$

Меры P_0, P_1 абсолютно непрерывны в том и только в том случае, если

$$\sum_{j=1}^\infty(m_{0j}-m_{1j})^2\lambda_j^{-1}<\infty.$$

При этом

$$\frac{dP_1^T}{dP_0^T}(x) = \exp\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_{1j} - m_{0j}}{\lambda_j} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\int_0^T x(t)\,\varphi_j(t)\,dt - \frac{m_{1j} - m_{0j}}{2} \right) \right\}.$$

Последнее равенство можно использовать для построения критерия для проверки гипотезы $H_0 : m = m_0$ против альтернативы $H_1 : m = m_1$ в предположении, что функция r известна наблюдателю.

Статистические задачи стационарных процессов. Пусть наблюдение $x(t)$ — стационарный процесс со средним m и корреляционной функцией $r(t)$; $f(\lambda)$ и $F(\lambda)$ — его спектральная плотность и спектральная функция. Основные задачи статистики стационарных процессов относятся к проверке гипотез или оцениванию, касающихся тех или иных характеристик m, r, f, F. В случае эргодич. процесса $x(t)$ состоятельными оценками (при $T \to \infty$) для m и $r(t)$ служат соответственно

$$m^* = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,dt,$$

$$r^*(t) = \frac{1}{T} \int_0^{T-t} x(t+s)\,x(s)\,ds.$$

Задачу оценки m при известном r часто рассматривают в рамках линейных задач. К этому последнему кругу задач относятся и более общие задачи оценки коэффициентов регрессии по наблюдениям вида (*) со стационарным $\xi(t)$.

Пусть $x(t)$ имеет нулевое среднее и спектральную плотность $f(\lambda; \theta)$, зависящую от конечномерного параметра $\theta \in \Theta$. Если процесс $x(t)$ — гауссовский, можно указать формулы для отношения правдоподобия $dP_\theta / dP_{\theta^0}$ (если последнее существует), к-рые в ряде случаев позволяют найти оценки максимального правдоподобия или «хорошие» (при больших T) приближения к ним. В достаточно широких предположениях эти оценки асимптотически нормальны $\left(\theta, \frac{c(\theta)}{\sqrt{T}}\right)$ и асимптотически эффективны.

Пример 7. Пусть $x(t)$ — стационарный гауссовский процесс с непрерывным временем и рациональной спектральной плотностью $f(\lambda) = \left|\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)}\right|^2$, P, Q — многочлены. Меры P_0^T, P_1^T, отвечающие рациональным спектральным плотностям f_0, f_1, абсолютно непрерывны в том и только в том случае, если

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{f_0(\lambda)}{f_1(\lambda)} = 1.$$

Параметром θ здесь служит совокупность всех коэффициентов многочленов P, Q.

Пример 8. Важный класс стационарных гауссовских процессов образуют процессы авторегрессии $x(t)$:

$$x^{(n)}(t) + \theta_n x^{(n-1)}(t) + \ldots + \theta_1 x(t) = \varepsilon(t),$$

где $\varepsilon(t)$ — гауссовский белый шум единичной интенсивности, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ — неизвестный параметр. В этом случае спектральная плотность

$$f(\lambda; \theta) = (2\pi)^{-1} |P(i\lambda)|^{-2},$$

где

$$P(z) = \theta_1 + \theta_2 z + \ldots + \theta_n z^{n-1} + z^n.$$

Функция правдоподобия

$$\frac{dP_\theta^T}{dP_{\theta^0}^T} = \sqrt{\frac{K(\theta)}{K(\theta)^0}} \exp\left\{\frac{\theta_n - \theta^0 n}{T} - \right.$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}[\lambda_j(\theta) - \lambda_j(\theta^0)] \times$$

$$\left.\times \int_0^T [x^{(j)}(t)]^2\,dt - \frac{1}{2}(\lambda(\theta) - \lambda(\theta^0))\right\}.$$

Здесь $\lambda_j(\theta)$, $\lambda(\theta)$ суть квадратичные формы от θ, зависящие от значений $x^{(j)}(t)$, $j=1, 2, \ldots, (n-1)$, в точках $t=0$, T; $K(\theta)$ — определитель корреляционной матрицы вектора $(x(0), x^{(1)}(0), \ldots, x^{(n-1)}(0))$.

Оценки максимального правдоподобия для параметра авторегрессии θ асимптотически нормальны и асимптотически эффективны. Теми же свойствами обладает и решение θ_T^{**} приближенного уравнения правдоподобия

$$\frac{1}{2T}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\partial\lambda_j(\theta)}{\partial\theta_i}\int_0^T [x^{(j)}(t)]^2\,dt = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant i < n, \\ \frac{1}{2}, & i = n. \end{cases}$$

Важную роль при статистич. исследовании спектра стационарного процесса играет *периодограмма* $I_T(\lambda)$. Эта статистика определяется как

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{t=0}^T e^{-it\lambda}x(t)\right| \text{ (время дискретно)},$$

$$I_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}\left|\int_0^T e^{-it\lambda}x(t)\,dt\right|^2 \text{ (время непрерывно)}.$$

Периодограмма широко используется для построения различного рода оценок для $f(\lambda)$, $F(\lambda)$ и критериев для проверки гипотез об этих характеристиках. В широких предположениях статистики $\int I_T(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda$ являются состоятельными оценками для $\int f(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda$. В частности, $\int_\alpha^\beta I_T(\lambda)d\lambda$ служат оценкой для $F(\beta) - F(\alpha)$. Если последовательность $\varphi_T(\lambda; \lambda_0)$ сходится подходящим образом к δ-функции $\delta(\lambda - \lambda_0)$, то интегралы $\int\varphi_T(\lambda; \lambda_0)I_T(\lambda)d\lambda$ будут состоятельными оценками для $f(\lambda_0)$. Часто в качестве функций $\varphi_T(\lambda; \lambda_0)$ выбирают функции вида $a_T\psi(a_T(\lambda - \lambda_0))$, $a_T \to \infty$. Если $x(t)$ — процесс с дискретным временем, эти оценки можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{t=-T+1}^{T-1} e^{-it\lambda}r^*(t)c_T(t),$$

где эмпирическая корреляционная функция

$$r^*(t) = \frac{1}{T}\sum_{u=0}^{T-t} x(u+t)x(u),$$

а неслучайные коэффициенты $c_T(t)$ определяются выбором ψ, a_T. Последний выбор, в свою очередь, зависит от априорных сведений о $f(\lambda)$. Аналогичное представление имеет место и для процессов с непрерывным временем.

Иногда к задачам статистич. анализа стационарных процессов относят и задачи экстраполяции, интерполяции и фильтрации стационарных процессов.

Статистические задачи марковских процессов. Пусть наблюдения X_0, X_1, $\ldots$, X_T связаны в однородную цепь Маркова. При достаточно широких предположениях функция правдоподобия

$$\frac{dP_\theta^T}{d\mu^T} = p_0(X_0; \theta)\,p(X_1 \mid X_0; \theta)\ldots p(X_T \mid X_{T-1}, \theta),$$

где p_0, p — начальная и переходная плотности распределения. Это выражение сходно с функцией правдоподобия для последовательности независимых наблюдений и при соблюдении условий регулярности (гладкость по $\theta \in \Theta \subset R^k$) можно построить теорию оценивания и проверки гипотез, аналогичную соответствующей теории для независимых наблюдений.

Более сложная ситуация возникает, если $x(t)$ — марковский процесс с непрерывным временем. Пусть $x(t)$ — однородный марковский процесс с конечным числом состояний N и дифференцируемыми вероятностями перехода $P_{ij}(t)$. Матрица вероятностей перехода определяется матрицей $Q = \|q_{ij}\|$, $q_{ij} = P'_{ij}(0)$, $q_i = -q_{ii}$. Пусть в начальный момент $x(0) = i_0$ независимо от Q. Выбирая какую-нибудь матрицу $Q_0 = \|q^0_{ij}\|$, находят

$$\frac{dP^T_Q}{dP^T_{Q_0}}(x) = \exp\left\{\left(q^0_{i_n} - q_{i_n}\right) T\right\} \cdot \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{q_{j_\nu j_{\nu+1}}}{q^0_{j_\nu j_{\nu+1}}} \times$$

$$\times \exp\left\{t_\nu \left(q_{i_n} - q_{i_\nu} - q^0_{i_\nu} + q^0_{i_n}\right)\right\}.$$

Здесь статистики $n(x)$, $t_\nu(x)$, $j_\nu(x)$ определяются следующим образом: n — это число скачков $x(t)$ на интервале $[0, T)$, τ_ν — момент ν-го скачка, $t_\nu = \tau_{\nu+1} - \tau_\nu$, $z_\nu = x(\tau_\nu)$. Из указанного выражения выводятся оценки максимального правдоподобия для параметров q_{ij}: $q^*_{ij} = \frac{m_{ij}}{\mu_i}$, где m_{ij} — число переходов из i в j на отрезке $[0, T)$, а μ_i — время, проведенное процессом $x(t)$ в состоянии i.

Пример 9. Пусть $x(t)$ — *рождения и гибели процесс* с постоянными интенсивностями размножения λ и гибели μ. Это значит, что $q_{i,i+1} = i\lambda$, $q_{i,i-1} = i\mu$, $q_{ii} = -i(\lambda+\mu)$, $q_{ij} = 0$, если $|i-j| > 1$. В этом примере число состояний бесконечно. Пусть $x(0) \equiv 1$. Отношение правдоподобия

$$\frac{dP^T_{\lambda\mu}}{dP^T_{\lambda_0, \mu_0}}(x) =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^B \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^D \exp\left\{-(\lambda+\mu-\lambda_0-\mu_0)\int_0^T x(s)\,ds\right\}.$$

Здесь B — общее число рождений (скачков размера $+1$), D — смертей (скачков размера -1). Оценки максимума правдоподобия для λ и μ:

$$\lambda^*_T = \frac{1}{B}\int_0^T x(s)\,ds, \quad \mu^*_T = \frac{1}{D}\int_0^T x(s)\,ds.$$

Пусть $x(t)$ — диффузионный процесс с коэффициентом сноса a и коэффициентом диффузии b, так что $x(t)$ удовлетворяет следующему *стохастическому дифференциальному уравнению*

$$dx(t) = a(t, x(t))\,dt + b(t, x(t))\,dw(t), \; x(0) = x_0,$$

где w — винеровский процесс. Тогда при определенных ограничениях

$$\frac{dP^T_{a,b}}{dP^T_{a_0 b}}(x) = \exp\left\{-\int_0^T (b(t, x(t)))^{-1}(a(t, x(t)) - \right.$$

$$\left. - a_0(t, x(t))\,dx(t) + \frac{1}{2}\int_0^T (b(t, x(t)))^{-1}(a(t, x(t) - \right.$$

$$\left. - a_0(t, x(t))^2\,dt\right\}$$

(здесь a_0 — фиксированный коэффициент).

Пример 10. Пусть

$$dx(t) = a(t, x(t); \theta)\,dt + dw,$$

a — известная функция, θ — неизвестный действи-

тельный параметр. Если обозначить через μ меру Винера, то функция правдоподобия

$$\frac{dP_\theta^T}{d\mu} = \exp\left\{\int_0^T a(t, x(t); \theta)\, dx - \frac{1}{2}\int_0^T a^2(t, x(t); \theta)\, dt,\right.$$

и при условиях регулярности выполняется неравенство Крамера — Рао: для оценки τ со смещением $\Delta(\theta) = \mathsf{E}_\theta\tau - \theta$

$$\mathsf{E}_\theta |\tau - \theta|^2 \geqslant \frac{\left(1+\frac{d\Delta}{d\theta}\right)^2}{\mathsf{E}_\theta \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial\theta} a(t, x(t); \theta)\right]^2 dt} + \Delta^2(\theta).$$

Если зависимость от θ линейная, оценки максимального правдоподобия

$$\theta_T^* = \int_0^T a(t, x(t))\, dt \left(\int_0^T a^2(t, x(t))\, dt\right)^{-1}.$$

Лит.: [1] Гренандер У., Случайные процессы и статистические выводы, пер. с англ., М., 1961; [2] Хеннан Э., Анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1964; [3] Grenander U., Rosenblatt M., Statistical analysis of stationary time series, Stockh., 1956; [4] Grenander U., Abstract inference, N. Y., 1981; [5] Розанов Ю. А., Гауссовские бесконечномерные распределения, М., 1968 (Тр. матем. ин-та им. Стеклова, т. 108); [6] Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970; [7] Биллингсли Д., Временные ряды, пер. с англ., М., 1980; [8] Billingsley P., Statistical inference for Markov processes, Chi., 1961; [9] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [10] Ягломи А. М., *Корреляционная теория стационарных случайных функций*, Л., 1981; [11] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976.

И. А. Ибрагимов.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ — раздел математич. статистики и теории случайных процессов, посвященный исследованию и решению *статистических задач* случайных процессов.

И. А. Ибрагимов.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ — принятое в статистич. физике название фазового пространства (пространства состояний) какой-нибудь физич. системы вместе с нек-рым способом усреднения физич. величин (т. н. наблюдаемых), связанных с этой системой. В случае классич. системы с фазовым пространством Ω наблюдаемые — действительные функции, определенные на Ω, а их усреднение происходит с помощью интегрирования по нек-рой вероятностной мере μ на пространстве Ω. В случае квантовой системы, описываемой векторами гильбертова пространства $\mathcal{H}$, наблюдаемые задаются самосопряженными операторами, действующими в $\mathcal{H}$, и усреднение вводится с помощью нек-рого положительного и нормированного функционала ρ, определенного на алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ операторов, действующих в $\mathcal{H}$ (такие функционалы на $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ наз. состояниями). Обычно состояние задается в виде

$$\rho(A) = \mathrm{Sp}\,\hat{\rho}(A), \quad A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H}), \qquad (1)$$

где $\hat{\rho}$ — положительный оператор в $\mathcal{H}$ такой, что $\mathrm{Sp}\hat{\rho} = 1$ (оператор $\hat{\rho}$ наз. матрицей плотности состояния ρ).

Если задана эволюция физич. системы во времени (динамика системы), т. е. (в классич. случае) — группа $\Gamma_t : \Omega \to \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, взаимно однозначных преобразований фазового пространства в себя, порождаемая гамильтоновыми уравнениями движения с нек-рой функцией Гамильтона $H(\omega)$, $\omega \in \Omega$ (энергия системы), или (в квантовом случае) — группа унитарных преобразований $U_t : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$, гильбертова пространства в себя, порождаемая оператором Гамильтона $\hat{H}$ (оператором энергии системы), то естественно определяется эволюция во времени любого С. а., определенного для этой системы

$$\left.\begin{aligned} &\mu_t(C) = \mu\left(\Gamma_t^{-1}C\right), \quad C \subset \Omega \text{ (классич. случай)}, \\ &\rho_t(A) = \rho\left(U_t A U_t^{-1}\right) \qquad \text{(квантовый случай)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Для описания стационарного поведения системы рассматриваются равновесные ансамбли, т. е. меры или состояния, неизменные относительно эволюции (2). Хотя равновесных С. а., вообще говоря, много, в статистич. физике рассматривают только специальные — т. н. канонические ансамбли Гиббса (*распределения*).

Классические ансамбли Гиббса. Пусть, кроме гамильтониана $H=H_0(\omega)$, имеется некрый функционально независимый вместе с H_0 набор $H_1(\omega), \ldots, H_k(\omega)$, $k=0, 1, \ldots$, функций на Ω, инвариантных относительно динамики Γ_t (в случае систем, состоящих из конечного, но произвольного числа частиц одного или нескольких видов, $H_i(\omega)$ равно, напр., числу частиц какого-нибудь вида в конфигурации $\omega\in\Omega$; в случае системы магнитных диполей $H_i(\omega)$ равно какой-нибудь составляющей их суммарного магнитного момента и т. д.). Большим каноническим ансамблем Гиббса наз. мера

$$d\mu_{\beta,\,\nu_1,\,\ldots,\,\nu_k} = \\ =(\Xi)^{-1}\exp\{-\beta(H_0+\nu_1H_1+\ldots+\nu_kH_k)\}\,d\omega, \quad (3)$$

где $d\omega$ — мера, порождаемая симплектич. структурой на Ω, $\beta>0$ и $\nu_1, \ldots, \nu_k$ — действительные параметры, а Ξ — нормировочный множитель, наз. большой статистической суммой:

$$\Xi=\int_\Omega \exp\{-\beta(H_0+\nu_1H_1+\ldots+\nu_kH_k\}\,d\omega. \quad (4)$$

Мера $\mu_{h_0,\,h_1,\,\ldots,\,h_k}$, сосредоточенная на множестве $\{\omega\mid H_i(\omega)=h_i,\ i=0, 1, \ldots, k\}$, $h_i\in\mathbb{R}$, $i=0, 1, \ldots, k$, и совпадающая с условным распределением на этом множестве, порожденным мерой (3), наз. микроканонич. ансамблем Гиббса. Рассматриваются также и «промежуточные» ансамбли — т. н. малые канонич. ансамбли Гиббса, получающиеся аналогичным образом из ансамбля (3) фиксированием значений всех или части функций $H_i(\omega)$, $i=1, 2, \ldots, k$.

Квантовые ансамбли Гиббса. Пусть $\hat H_1, \ldots, \hat H_k$ (k — произвольно) — попарно коммутирующие операторы, коммутирующие с оператором $\hat H=\hat H_0$ («сохраняющиеся величины»). Состояние на $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$, задаваемое матрицей плотности

$$\hat\rho_{\beta,\,\nu_1,\,\ldots,\,\nu_k}=(\Xi)^{-1}\exp\{-\beta(\hat H_0+\nu_1\hat H_1+\ldots+\nu_kH_k)\},$$

где

$$\Xi=\mathrm{Sp}\,(\exp\{-\beta(\hat H_0+\nu_1\hat H_1+\nu_k\hat H_k)\}-$$

— большая статистич. сумма, а $\beta>0$, $\nu_1, \ldots, \nu_k$ — параметры, наз. большим каноним. ансамблем Гиббса. Пусть $P^{h_i}_{\hat H_i}$, $i=0, 1, \ldots, k$, — проекторы в $\mathscr{H}$ на собственное подпространство оператора $\hat H_i$ с собственным значением h_i. Микроканонич. ансамблем Гиббса наз. состояние с матрицей плотности

$$\hat\rho_{h_0,\,h_1,\,\ldots,\,h_k}=(Q)^{-1}P^{h_0}_{\hat H_0}P^{h_1}_{\hat H_1}\ldots P^{h_k}_{\hat H_k},$$

где $Q=\dim(Im\,\hat\rho_{h_0,\,h_1,\,\ldots,\,h_k})$. Аналогично вводятся и малые канонич. ансамбли Гиббса, напр. С. а. с матрицей плотности

$$\hat\rho_{\beta,\,h_1,\,\ldots,\,h_k}=(Z)^{-1}\exp\{-\beta\hat H_0\}\prod_{i=1}^k P^{h_i}_{\hat H_i},$$

где Z — нормирующий множитель (малая статистич. сумма).

Иногда рассматриваются нек-рые модельные модификации описанных С. а. (напр., ансамбли Гиббса в конфигурационных или решетчатых системах), а также т. н. предельные ансамбли Гиббса, т. е. распределения вероятностей (или состояния) на фазовом пространстве бесконечной системы (напр., системы с бесконечным числом частиц, движущихся во всем пространстве). Эти С. а. возникают с помощью термодинамич. предельного перехода из описанных выше ансамблей для конечных систем (см. [3]).

Существует гипотеза — т. н. принцип предельной эквивалентности ансамблей — о том, что при выполнении нек-рых естественных условий (грубо говоря, в отсутствии фазового перехода) предельные гиббсовские С. а., получающиеся с помощью разных допредельных гиббсовских ансамблей (большого канонического, малого канонического, микроканонического), совпадают при определенном соответствии между задающими эти ансамбли параметрами. Эта гипотеза подтверждена (см. [3]) для нек-рых частных ситуаций.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, М., 1964 (Теоретическая физика, т. 5); [2] Минлос Р. А., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 1, с. 133—90; [3] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1970; [4] Престон К., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1977.

Р. А. Минлос.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА — раздел математич. статистики, методы к-рого используются в промышленности для определения фактически достигнутого уровня качества, тенденций его изменений и выработки обоснованных воздействий на технологич. процесс. Качество массовой промышленной продукции характеризуется совокупностью свойств, представимых в виде набора чисел или функций. Требуемый уровень качества определяется государственными стандартами (ГОСТ), в к-рых даны правила оценки фактич. уровня показателей качества. Использование ГОСТа необходимо, т. к. принимаемые по результатам контроля решения связаны с реальными затратами и затрагивают интересы производственных коллективов. Методы С. к. к. играют важную роль в общей системе мероприятий по управлению качеством массовой промышленной продукции. Это обусловлено в первую очередь тем, что изменчивость числовых характеристик основных показателей качества изделий носит случайный характер. Стремление сделать контроль более объективным, не имеющим систематич. ошибок, приводит к необходимости использования методов рандомизации, что также обусловливает необходимость использования вероятностных и статистич. методов.

Математич. методы, используемые в С. к. к., разнообразны. Наиболее часто используются методы С. к. к. непрерывного потока массовой продукции в процессе ее изготовления с целью выявления нежелательных отклонений и необходимости соответствующих подналадок оборудования.

Пусть $\{O_t\}$ — последовательность изделий, $t=1, 2, \ldots$. В результате контроля изделию O_t сопоставляется число ε_t. При контроле по альтернативному признаку $\varepsilon_t=0$, если изделие O_t — годное, и $\varepsilon_t=1$, если изделие O_t — дефектное. Дефектные изделия исключаются. Текущий контроль по планам Доджа $\Pi(f, i)$ описывается следующей системой правил. Контроль начинается сплошной проверкой изделий последовательности $\{O_t\}$, к-рая проводится до тех пор, пока не встретится серия из i годных изделий. Далее, каждое последующее изделие отбирается на контроль случайно с вероятностью f, $0<f<1$. При первом обнаружении дефектного изделия вновь переходят к сплошному контролю до обнаружения серии из i годных изделий. Затем вновь переходят к выборочному контролю с ве-

роятностью отбора f и т. д. Пусть, напр., ε_t является последовательностью Бернулли, $P\{\varepsilon_t=1\}=q$. Тогда средняя доля контролируемых изделий по плану $\Pi(f, i)$ равна

$$f(q)=f[f+(1-f)(1-q)^i]^{-1}.$$

При выборе подходящих значений f, i используется значение уровня предельного среднего выходного качества

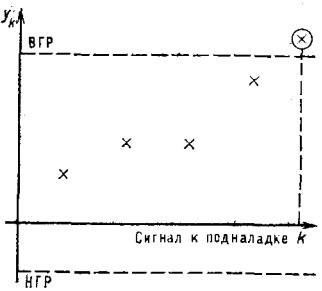
$$L^*=\max_{0\leqslant q\leqslant 1} L(q),$$

где

$$L(q)=\frac{q[1-f(q)]}{1-qf(q)}$$ —

условная вероятность того, что изделие окажется дефектным, при условии, что оно не было проконтролировано (см. [1], [2]).

В тех случаях, когда контроль последовательности изделий $\{O_t\}$ ведется по количественному признаку, значения результатов контроля ε_t рассматриваются как случайный процесс. В основных ГОСТах исходят из допущения, что в отсутствии разладок значения $\{\varepsilon_t\}$ образуют последовательность взаимно независимых нормально распределенных случайных величин. Проверка исходных допущений о типе закона распределения ε_t является необходимым предварительным условием эффективного использования контроля по количественному признаку. Наличие разладок приводит либо к появлению т р е н д а — систематич. увеличения (уменьшения) средних значений ε_t, либо к увеличению дисперсии ε_t и т. п. С целью выявления подобных нарушений (разладок) самое широкое применение находят методы С. к. к., использующие контрольные карты (к. к.). На к. к. (см. рис.) по оси абсцисс откладывается номер k контролируемой выборки $O_{t_k+1}, \ldots, O_{t_k+n}$, по оси ординат откладывается значение величины y_k, определяемой значениями $\varepsilon_{t_k+1}=x_1, \ldots, \varepsilon_{t_k+n}=x_n$. Обычно n невелико, $n=3\div 5$. В качестве показателей y_k часто используются: среднее значение $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, медиана, оценка дисперсии $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, размах и т. д. На к. к. предварительно наносятся две линии: верхняя граница регулирования (ВГР) и нижняя граница регулирования (НГР). Если значение y_k окажется выше или ниже этих границ, то требуется произвести воздействие на технологич. процесс с целью восстановления его стабильности.



К. к. были предложены У. Шухартом [3]. В настоящее время (1984) используются разнообразные варианты к. к. (см. [4], [5]). Наличие различных типов к. к. обусловлено тем, что они не одинаково эффективны для выявления различных разладок. Так, для выявления скачкообразных изменений средних значений ε_t более эффективными по сравнению с к. к., показанными на рис., могут оказаться так называемые к. к. накопленных сумм. Точный расчет различных характеристик к. к., напр. среднего времени запаздывания в выявлении определенного типа разладок, является трудной задачей, требующей большого объема вычислений, что, как правило, возможно лишь с использованием ЭВМ.

В тех случаях, когда контролируемая продукция разбита на совокупности — партии, широкое применение находят методы статистического приемочного контроля.

Лит.: [1] Dodge H. F., «Ann. Math. Statistics», 1943, v. 14, p. 264—79; [2] Беляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [3] Shewhart W. A., Economic control of quality of manufactured product, N. Y., 1931; [4] Шиндовский Э., Шюрц О., Статистические методы управления качеством, пер. с нем., М., 1976; [5] Джонсон Н., Лион Ф., Статистика и планирование эксперимента в технике и науке, т. 1 — Методы обработки данных, пер. с англ., 2 изд., М., 1980. *Ю. К. Беляев.*

СТАТИСТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ — решающее правило, по к-рому на основе результатов наблюдений принимается решение в задаче *статистических гипотез проверки*.

Пусть по реализации $x=(x_1, \ldots, x_n)$ случайного вектора $X=(X_1, \ldots, X_n)$, принимающего значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}_n, \mathscr{B}_n, P_\theta^n)$, $\theta\in\Theta$, надлежит проверить гипотезу $H_0: \theta\in\Theta_0\subset\Theta$ против альтернативы $H_1: \theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$. Далее, пусть $\varphi_n(\cdot)$ — произвольная $\mathscr{B}_n$-измеримая функция, отображающая пространство реализаций $\mathfrak{X}_n$ в отрезок $[0; 1]$. В таком случае правило, согласно к-рому гипотеза H_0 отвергается с вероятностью $\varphi_n(X)$, а альтернатива H_1 отклоняется с вероятностью $1-\varphi_n(X)$, наз. статистич. критерием для проверки гипотезы H_0 против H_1; $\varphi_n(\cdot)$ является критич. функцией С. к. Функция $\beta(\theta)=\mathrm{E}_\theta\varphi_n(X)$, $\theta\in\Theta$, наз. функцией мощности С. к.

В результате применения С. к. можно либо принять правильное решение, либо совершить одну из двух ошибок: отклонить гипотезу H_0 и, значит, принять гипотезу H_1, когда на самом деле H_0 справедлива (ошибка 1-го рода), или же принять H_0, когда на самом деле справедлива гипотеза H_1 (ошибка 2-го рода). Одной из основных задач классич. теории статистич. проверки гипотез является построение такого С. к., к-рый при заданной верхней границе $\alpha=\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}\beta_n(\theta)$, $0<\alpha<1$, для вероятностей ошибок 1-го рода минимизировал бы вероятности ошибок 2-го рода. Число α принято называть *значимости уровнем* С. к.

Для приложений наибольший интерес представляют нерандомизированные С. к., т. е. такие, критич. функция $\varphi_n(\cdot)$ к-рых есть характеристич. функция нек-рого $\mathscr{B}_n$-измеримого множества K из пространства реализаций $\mathfrak{X}$:

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in K,\\ 0, & \text{если } x\in\overline{K}=\mathfrak{X}_n\setminus K.\end{cases}$$

Таким образом, нерандомизированный С. к. отклоняет гипотезу H_0, если происходит событие $\{X\in K\}$; если же происходит событие $\{X\in\overline{K}\}$, то гипотеза H_0 принимается. Множество K наз. критическим множеством С. к.

Как правило, нерандомизированный С. к. бывает основан на нек-рой статистике $T_n=T_n(X)$, называемой статистикой критерия, при этом критич. множество K такого критерия обычно задается с помощью соотношений вида $K=\{x: T_n(x)<t_1\}$, $K=\{x: T_n(x)>t_2\}$, $K=\{x: T_n(x)<t_1\}\cup\{x: T_n(x)>t_2\}$. Постоянные t_1, t_2, называемые критическими значениями статистики критерия T_n, определяются из условия $\alpha=\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}\beta_n(\theta)$, при этом в первых двух случаях принято говорить об односторонних С. к., а в третьем случае — о двустороннем критерии. Структура статистики критерия T_n отражает в себе специфику конкурирующих гипотез H_0 и H_1. В случае, когда семейство $\{P_\theta^n, \theta\in\Theta\}$ обладает достаточной статистикой $\Psi=\Psi(X)$, естественно, что ста-

тистику критерия следует искать в классе необходимых статистик, так как

$$\beta_n(\theta) = \mathsf{E}_\theta \varphi_n(X) = \mathsf{E}_\theta T_n(X)$$

при всех $\theta \in \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$, где $T_n(X) = \mathsf{E}\{\varphi_n(X) | \Psi\}$.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [3] Крамер Г., Математические методы статистики, 2 изд., пер. с англ., М., 1975; [4] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [5] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

М. С. Никулин.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПРИЕМОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ — совокупность методов статистич. контроля качества массовой промышленной продукции с целью выявления ее соответствия заданным требованиям. С. п. к. ведется на основе государственных стандартов (ГОСТ), содержащих таблицы планов контроля и правила выбора планов из этих таблиц. Предусматривается возможность ведения контроля на разных уровнях жесткости. При выборе плана контроля и уровня жесткости учитывают объем контролируемой партии (число входящих в нее изделий), результаты контроля предыдущих партий и др. факторы. С. п. к — действенное средство поддержания требуемого уровня качества продукции.

Наиболее часто используются две разновидности С. п. к. — контроль по альтернативному признаку и контроль по количественному признаку. При контроле по альтернативному признаку изделия классифицируются на годные и дефектные. При контроле по количественному признаку измеряются параметры изделий, принимающие вещественные значения.

При отборе изделий на контроль используются различные методы. Широко используется случайный выбор без возвращения (см. *Выборочный метод*), при к-ром все выборки одинакового объема имеют равные вероятности. Если контроль носит разрушающий характер (испытания на разрыв), то сплошной контроль невозможен. При С. п. к., как правило, проверяется лишь часть изделий, составляющих выборку, поэтому возможны ошибочные решения. В теории С. п. к. разрабатываются методы расчета вероятностных показателей планов контроля и статистич. методы оценки эффективности С. п. к. на основе накапливаемой информации о ходе контроля.

Часто С. п. к. проводят с использованием одноступенчатых планов. Пусть $\mathfrak{P}$ — контролируемая партия из N изделий. Одноступенчатый план характеризуется заданием объема n выборки и приемочным числом c. Если число дефектных изделий в выборке окажется равным d и $d \leqslant c$, то $\mathfrak{P}$ принимается. Если же $d > c$, то $\mathfrak{P}$ бракуется. В зависимости от вида изделий решение о браковке может либо означать сплошную проверку всех изделий из $\mathfrak{P}$, не попавших в выборку, либо снижение сортности и т. п. В стандартах допускается использование двухступенчатых, многоступенчатых и последовательных планов. Двухступенчатый план характеризуется заданием объемов n_1 и n_2 первой и второй выборок, приемочных чисел c_1, c_2, браковочных чисел r_1, r_2 ($r_1 > c_1$, $r_2 = c_2 + 1$). Если число дефектных изделий в первой выборке $d_1 \leqslant c_1$, то $\mathfrak{P}$ принимается. Если $d_1 \geqslant r_1$, то $\mathfrak{P}$ бракуется. В том случае, когда $c_1 < d_1 < r_1$, берется вторая выборка. Если d_2 — число дефектных изделий во второй выборке и $d_1 + d_2 \leqslant c_2$, то $\mathfrak{P}$ принимается. Если $d_1 + d_2 \geqslant r_2$, то $\mathfrak{P}$ бракуется.

Важной числовой характеристикой планов С. п. к. при контроле по альтернативному признаку является оперативная характеристика $P(D)$, равная вероятности принять партию по результатам контроля изделий, составляющих выборку. Для одноступенчатого плана

$$P(D) = \sum_{d=0}^{c} h_{N, D}^{n, d},$$

где

$$h_{N,\ D}^{n,\ d} = \binom{n}{d}\binom{N-n}{D-d}\Big/\binom{N}{D} -$$

вероятность обнаружить d дефектных изделий в случайной выборке без возвращения объема n, когда $\mathfrak{P}$ содержит D дефектных изделий. Распределение с вероятностями $P_d = h_{N,D}^{n,d}$, $d=0, \ldots, n$, наз. гипергеометрическим. Расчет числовых показателей планов контроля часто проводится на основе аппроксимации гипергеометрического распределения биномиальным или пуассоновским распределениями. Для двухступенчатых и последовательных планов существенным показателем является среднее число контролируемых изделий $m(D)$.

Таблицы планов контроля в стандартах содержат параметры планов, обладающих (по крайней мере приближенно) различными свойствами оптимальности. Пусть $q=D/N$ — доля дефектных изделий, q_H — средняя доля дефектных изделий при стационарном процессе производства. Поиск оптимальных планов контроля можно проводить среди планов, имеющих одинаковые средние расходы при $q=q_H$. Средние расходы равны стоимости контроля изделий, составляющих выборку, и ущерба от напрасной забраковки годных изделий. Иногда целесообразно в сумму расходов включать ущерб от принятия дефектных изделий. В стандарте [1] содержатся таблицы одноступенчатых планов, обеспечивающих при заданном среднем уровне расходов на контроль и заданном q_H приближенно наилучшую защиту потребителю от принятия партий, содержащих D дефектных изделий, в широком интервале значений $D>Nq_H$. Это означает, что оперативные характеристики таких планов для широкого интервала значений D близки к нижней огибающей оперативных характеристик всех одноступенчатых планов, имеющих при $q=q_H$ одинаковые средние расходы на проведение контроля. Составление таблиц планов, включаемых в стандарты, требует больших затрат машинного времени ЭВМ.

По результатам С. п. к. многих партий продукции можно построить т. н. последующие оценки различных величин, отражающих эффективность используемого стандарта на С. п. к. Напр., можно найти несмещенные оценки для суммарного числа дефектных изделий, содержавшихся в предъявленных на контроль партиях. При контроле с использованием одноступенчатых планов можно построить статистич. оценки суммарного числа дефектных изделий, принятых потребителем. Смещения этих оценок быстро убывают с ростом объема выборок. Идея использования последующих оценок в С. п. к. была предложена А. Н. Колмогоровым [2]. Известны различные обобщения методов С. п. к. по альтернативному признаку (см. [3], [4]), в нек-рых приложениях целесообразно рассматривать С. п. к., при к-ром возможна ошибочная классификация дефектных изделий как годных и годных изделий как дефектных [5]. В С. п. к. широко используются бейесовские методы [6].

Стандарты на С. п. к. по количественному признаку основаны на допущении, что измеряемые при контроле характеристики изделий в выборке являются взаимно независимыми одинаково распределенными случайными величинами, функции распределения к-рых принадлежат нек-рому параметрич. семейству. Наиболее часто используются стандарты, в к-рых таким семейством являются нормальные (гауссовские) распределения. На практике выполнение указанных допущений требует тщательной проверки и должно предшествовать решению об использовании стандарта С. п. к. по количественному признаку.

Только обоснованное использование С. п. к. по количественному признаку может дать более эффективные результаты по сравнению со С. п. к. по альтернативному признаку.

Лит.: [1] ГОСТ 24660—81; [2] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 4, с. 303—26; [3] Беляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; [4] Лумельский Я. П., Статистические оценки результатов контроля качества, М., 1979; [5] Беляев Ю. К., «Докл. АН СССР», 1976, т. 231, № 3, с. 521—24; [6] Hald A., Statistical theory of sampling inspection by attributes, L.— [a. o.], 1981.

Ю. К. Беляев.

СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ ПРОВЕРКА — один из основных разделов математич. статистики, в к-ром развиваются идеи и методы статистич. проверки соответствия между экспериментальными данными и гипотезами об их вероятностной природе.

Пусть наблюдается случайный вектор $X=(X_1, \ldots, X_n)$, принимающий значения $x=(x_1, \ldots, x_n)$ в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}_n, \mathscr{B}_n)$, и пусть известно, что распределение вероятностей этого случайного вектора X принадлежит заданному множеству вероятностных распределений $H=\{P_\theta,\ \theta\in\Theta\}$, где Θ — нек-рое параметрич. множество. Множество H наз. *множеством допустимых гипотез*, а любое его непустое подмножество H_i — *статистич. гипотезой* или просто *гипотезой*. Если H_i содержит ровно один элемент, то такая гипотеза наз. *простой*, в противном случае — *сложной*. Далее, пусть в H выделены две т. н. конкурирующие между собой гипотезы

$$H_0=\{P_\theta,\ \theta\in\Theta_0\subset\Theta\}$$

и

$$H_1=H\setminus H_0=\{P_\theta,\ \theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0\},$$

одну из к-рых, напр. H_0, наз. *основной*, а другую — *альтернативной гипотезой* или просто альтернативой к H_0. В терминах гипотез H_0 и H_1 удобно формулировать основную задачу теории С. г. п. в рамках модели Неймана — Пирсона (см. [1], [2]). Именно, найти оптимальный способ, пользуясь к-рым можно было бы на основе наблюденной реализации случайного вектора X проверить, справедлива ли гипотеза H_0 : $\theta\in\Theta_0$, согласно к-рой распределение вероятностей вектора X принадлежит множеству $H_0=\{P_\theta,\ \theta\in\Theta_0\}$, или же справедлива альтернативная гипотеза H_1 : $\theta\in\Theta_1$, согласно к-рой распределение вероятностей наблюдаемого вектора X принадлежит множеству

$$H_1=\{P_\theta,\ \theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0\}.$$

Пример 1. Пусть наблюдается случайный вектор $X=(X_1, \ldots, X_n)$, компоненты к-рого $X_1, \ldots, X_n$ суть независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же нормальному закону $N_1(\theta, 1)$, математич. ожидание к-рого $\theta=\mathsf{E}X_i$ неизвестно ($|\theta|<\infty$), а дисперсия равна 1, т. е. для любого действительного числа x

$$\mathsf{P}\{X_i<x\mid\theta\}=\Phi(x-\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}(t-\theta)^2}\,dt,$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

В этих условиях можно, напр., рассмотреть задачу проверки гипотезы H_0 : $\theta=\theta_0$ против альтернативы H_1 : $\theta\neq\theta_0$, где θ_0 — нек-рое заданное число. В данном примере гипотеза H_0 является простой, а конкурирующая с ней гипотеза H_1 — сложной.

Формально, конкурирующие гипотезы H_0 и H_1 являются равноправными в задаче различения гипотез и вопрос о том, какое из двух непересекающихся и взаимно дополняющих множеств из H назвать основной гипотезой, не является существенным и не влияет на построение самой теории С. г. п. Однако, как правило,

на выборе основной гипотезы сказывается отношение экспериментатора к самой задаче, в результате чего основной гипотезой чаще наз. то множество H_0 из множества всех допустимых гипотез H, к-рое, по мнению экспериментатора, по природе изучаемого явления либо из каких-либо физич. соображений, должно лучше согласовываться с ожидаемыми экспериментальными данными. Именно поэтому гипотезу H_0 часто наз. проверяемой гипотезой. В теоретич. плане различие между гипотезами H_0 и H_1 часто сказывается в том, что, как правило, множество H_0 оказывается более просто устроенным, чем H_1, что отражает желание экспериментатора иметь дело с более простой моделью.

В теории С. г. п. суждение о справедливости H_0 или H_1 делается на основании наблюденной реализации случайного вектора X; при этом решающее правило, с помощью к-рого принимается решение «справедлива гипотеза H_i» ($i=0,1$), наз. *статистическим критерием*. Структура любого статистич. критерия полностью определяется его т. н. критич. функцией $\varphi_n(\cdot) : \mathfrak{X}_n \to [0; 1]$. Согласно статистич. критерию, имеющему критич. функцию $\varphi_n(\cdot)$, проверяемая гипотеза H_0 отвергается с вероятностью $\varphi_n(X)$ в пользу альтернативы H_1, а гипотеза H_1 отвергается с вероятностью $1-\varphi_n(X)$ в пользу H_0. С практич. точки зрения наибольший интерес представляют т. н. нерандомизированные критерии, критич. функции к-рых принимают лишь два значения: 0 и 1. Какой бы критерий не применялся для различения гипотез H_0 и H_1, в результате его применения можно либо принять правильное решение, либо прийти к ошибочному. В теории С. г. п. ошибочные выводы принято классифицировать следующим образом.

Если критерий бракует проверяемую гипотезу H_0, когда она в действительности верна, то говорят, что совершена ошибка 1-го рода. Напротив, если статистич. критерий не отклоняет проверяемую гипотезу H_0 (и, значит, согласно этому критерию, гипотеза H_0 принимается), когда она на самом деле неверна, то говорят, что совершена ошибка 2-го рода. Задачу проверки гипотезы H_0 против H_1 желательно провести таким образом, чтобы минимизировать вероятности этих ошибок. К сожалению, управлять обеими вероятностями ошибок одновременно при фиксированной размерности n вектора наблюдений X невозможно: уменьшение одной из них ведет, как правило, к увеличению другой. Численно вероятности этих ошибок выражаются в терминах т. н. функции мощности $\beta_n(\cdot)$ статистич. критерия, определенной на множестве $\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1$ по следующему правилу:

$$\beta_n(\theta)=\mathsf{E}_\theta\,\varphi_n(X)=\int_{\mathfrak{X}}\varphi_n(x)\,dP_\theta(x),\ \theta\in\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1.$$

Из определения функции мощности $\beta_n(\cdot)$ следует, что если случайный вектор X подчиняется закону P_θ, $\theta\in\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1$, то статистич. критерий, основанный на критич. функции $\varphi_n(\cdot)$, будет отклонять проверяемую гипотезу H_0 с вероятностью $\beta_n(X)$. Таким образом, сужение функции мощности $\beta_n(\cdot)$ с Θ на Θ_0 будет показывать вероятности ошибок 1-го рода, т. е. вероятности напрасного отклонения H_0. Напротив, сужение функции мощности $\beta_n(\cdot)$ с Θ на Θ_1, называемое м о щ н о с т ь ю с т а т и с т и ч. к р и т е р и я, показывает другое важное качество статистич. критерия: вероятности отклонения проверяемой гипотезы H_0, когда в действительности справедлива конкурирующая гипотеза H_1. Иногда мощностью статистич. критерия наз. число

$$\beta=\inf_{\theta\in\Theta_1}\beta_n(\theta)=\inf_{\theta\in\Theta_1}\mathsf{E}_\theta\varphi_n(X).$$

Дополнение же мощности до 1, т. е. функция $1-\beta_n(\cdot)$, заданная на множестве Θ_1, позволяет вычислять вероятности ошибок 2-го рода.

В рамках классич. модели С. г. п. Неймана — Пирсона задачу проверки H_0 против H_1 начинают с выбора верхней границы $\alpha\,(0<\alpha<1)$ для вероятности напрасного отклонения проверяемой гипотезы H_0, т. е. для вероятности ошибки 1-го рода, и уже при заданной границе α стараются построить такой критерий, к-рый имел бы наибольшую мощность. Исходя из особой роли, к-рую играет гипотеза H_0 для экспериментатора, число α, наз. *уровнем значимости* критерия, выбирают достаточно малым, напр. равным 0,01; 0,05; 0,1 и т. п. Выбор уровня значимости α означает, что множество всех статистич. критериев, предназначенных для проверки H_0 против H_1, сужается до множества критериев, удовлетворяющих условию:

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta_n(\theta)=\sup_{\theta\in\Theta_0}\mathsf{E}_\theta\varphi_n(X)=\alpha. \qquad (1)$$

(Иногда вместо условия (1) требуют, чтобы $\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta_n(\theta)\leqslant\alpha$, что никак не отражается на построении общей теории С. г. п.) Статистич. критерий, удовлетворяющий условию (1), наз. критерием уровня α. Таким образом, в классич. постановке задача проверки H_0 против H_1 сводится к построению такого статистич. критерия уровня α, функция мощности к-рого удовлетворяла бы условию

$$\beta_n^*(\theta)\geqslant\beta_n(\theta)\ \text{при всех}\ \theta\in\Theta_1, \qquad (2)$$

где $\beta_n(\cdot)$ — функция мощности произвольного критерия уровня α. В случае, когда гипотезы H_0 и H_1 являются простыми, эффективное решение этой вариационной задачи дает *отношения правдоподобия критерий*. Если же гипотеза H_1 является сложной, то статистич. критерий, удовлетворяющий условию (2), удается построить редко. Но если такой критерий существует, то именно этот критерий признается наилучшим для проверки H_0 против H_1 и его наз. *равномерно наиболее мощным критерием* уровня α в задаче различения статистич. гипотез H_0 и H_1. В силу того что равномерно наиболее мощные критерии существуют редко, приходится сужать класс статистич. критериев с помощью нек-рых дополнительных требований, таких, как несмещенность, подобие, полнота и др., и уже в более узком классе строить наилучший критерий в смысле (2). Напр., требование несмещенности критерия означает, что его функция мощности должна удовлетворять соотношению

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta_n(\theta)\leqslant\inf_{\theta\in\Theta_1}\beta_n(\theta).$$

Пример 2. В условиях примера 1 при любом фиксированном уровне значимости α существует нерандомизированный равномерно наиболее мощный несмещенный критерий уровня α для проверки H_0 против альтернативы H_1 — отношения правдоподобия критерий. Критич. функция этого наилучшего критерия определяется следующим образом:

$$\varphi_n(X)=\begin{cases}1, & \text{если } |X.-\theta_0|>\frac{1}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\\ 0, & \text{если } |X.-\theta_0|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\end{cases}$$

где

$$X.=\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n).$$

В силу того что статистика $X.$, называемая статистикой критерия, подчиняется нормальному закону $N_1(\theta,\,1/n)$ с параметрами $\mathsf{E}X.=\theta$ и $\mathsf{D}X.=\frac{1}{n}$, т. е. для любого действительного числа x

$$\mathsf{P}\{X.<x\,|\,\theta\}=\Phi\left[\sqrt{n}\,(x-\theta)\right],$$

функция мощности $\beta_n(\cdot)$ наилучшего критерия для проверки H_0 против H_1 выражается формулой

$$\beta_n(\theta) = \mathsf{E}_\theta \varphi_n(X) = \mathsf{P}\left\{ |X_\cdot - \theta_0| > \right.$$

$$\left. > \frac{1}{n}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \middle| \theta \right\} = \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt{n}(\theta_0-\theta)\right] +$$

$$+ \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt{n}(\theta_0-\theta)\right],$$

причем $\beta_n(\theta) \geqslant \beta_n(\theta_0) = \alpha$. Рисунок дает графич. представление о поведении функции мощности $\beta_n(\cdot)$.



Наименьшее значение, равное уровню значимости α, функция $\beta_n(\cdot)$ достигает в точке $\theta=\theta_0$, и, по мере удаления θ от θ_0, ее значения растут, приближаясь тем ближе к 1, чем больше величина $|\theta-\theta_0|$.

Теория С. г. п. позволяет с единой точки зрения трактовать различные задачи, выдвигаемые практикой: построение интервальных оценок для неизвестных параметров, оценка расхождения между средними значениями *вероятностных законов*, проверка гипотез о независимости наблюдений, задачи статистич. контроля качества и др. Так, напр., в примере 2 зона принятия гипотезы H_0 представляет собой наилучший доверительный интервал с коэффициентом доверия $1-\alpha$ для неизвестного математич. ожидания θ.

Наряду с классич. подходом Неймана — Пирсона к решению задачи различения гипотез существуют и другие: бейесовский подход, минимаксный подход, метод последовательного различения Вальда и др. Кроме того, в теории С. г. п. рассматриваются приближенные методы, основанные на изучении асимптотич. поведения последовательности $\{\beta_n(\cdot)\}$ функций мощности статистич. критериев, предназначенных для проверки H_0 против H_1, когда размерность n вектора наблюдений $X=(X_1, \ldots, X_n)$ неограниченно растет. В такой ситуации обычно требуют, чтобы построенная последовательность критериев была состоятельной, т. е. чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n(\theta) = 1 \text{ для любого } \theta \in \Theta_1,$$

что означает, что с ростом n гипотезы H_0 и H_1 можно будет различать с любой степенью достоверности. В примере 2 построена состоятельная последовательность критериев (если $n\to\infty$).

В любом случае, каким бы статистич. критерием не пользоваться в задаче различения гипотез H_0 и H_1, принятие гипотезы H_0 (H_1) означает не то, что эта гипотеза H_0 (H_1) в действительности истинна, а лишь факт отсутствия противоречий результатов наблюдений с принимаемой гипотезой на данном этапе исследований. Именно в силу этого согласия опыта и теории у экспериментатора нет оснований не верить в истинность H_0 (H_1) до тех пор, пока не появятся новые наблюдения, к-рые могут заставить изменить его отношение к принятой ранее гипотезе, а может даже и ко всей модели вообще.

Лит.: [1] Neyman J., Pearson E. S., «Biometrika», 1928, v. 20 A, p. 175—240; p. 263—94; [2] их же, «Phil. Trans Roy. Soc.», ser. A, 1933, v. 231, p. 289—337; [3] Леман Э., *Проверка статистических гипотез*, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, 2 изд., пер. с англ., М., 1975; [5] Гаек Я., Шидак З., *Теория ранговых критериев*, пер. с англ., М., 1971.

М. С. Никулин

СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ МЕТОД — метод численного расчета, при к-ром искомые неизвестные интерпретируют как характеристики соответствующего случайного явления (с. я.) Ф; это с. я. численно моделируется, после чего искомые величины оцениваются из имитаций наблюдений Ф. Как правило, для неизвестной z отыскивают представление в виде математич. ожидания $z=\mathsf{E}Z(\omega)$ какой-либо случайной величины $Z(\omega)$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, описывающем с. я. Ф, и имитируют независимые наблюдения Ф (см. *Независимость*). Тогда на основании *больших чисел закона*

$$z \approx \zeta_n = N^{-1}[Z(\omega^{(1)}) + \ldots + Z(\omega^{(N)})].$$

При $\mathsf{E}|Z(\omega)|^2 < \infty$ случайная погрешность этой формулы может быть грубо оценена по вероятности с помощью *Чебышева неравенства* или, асимптотически, на основании *центральной предельной теоремы*

$$\mathsf{P}\{|z-\zeta_n| < a\sigma(Z)N^{-1/2}\} \approx \operatorname{erf}(a),$$

$$\sigma^2 = \mathsf{E}|Z(\omega)|^2 - |\mathsf{E}Z(\omega)|^2. \qquad (1)$$

Математич. ожидание $\mathsf{E}|Z(\omega)|^2$ также может быть оценено «из экспериментов», что позволяет дать апостериорную доверительную оценку точности расчета (см. *Доверительное оценивание*). Имитацию с. я. обычно разыгрывают по последовательности независимых случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке $\{x : 0 \leqslant r \leqslant 1\}$. Для этого используют какое-либо естественное измеримое отображение f на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ единичного счетномерного гиперкуба

$$H = \bigtimes_{k=1}^{\infty} \{x_k : 0 \leqslant x_k \leqslant 1\}$$

с лебеговым объемом $dV = \prod_k dx_k$ на нем; $\Omega = f(H)$, $P = Vf^{-1}$, где функция f сильно зависит в основном только от координат с малыми номерами. Таким образом, формально задача сводится к вычислению интеграла

$$\int_H Z(f(x))\, dV$$

по простейшей квадратурной формуле с равными весами и случайными абсциссами $x^{(n)}$. Как следует из (1), объем вычислительной работы, необходимой для достижения заданной точности ε расчета z, определяется, при фиксированном уровне доверия $\operatorname{erf}(a)$, произведением $N\tau = \varepsilon^{-2} a^2 \sigma^2(Z)\tau(Z)$, где τ — математич. ожидание объема вычислительной работы по построению одной реализации $Z(\omega)$. Оно быстро растет с уменьшением ε; поэтому большое значение имеет удачный выбор модели с достаточно малым $\sigma^2\tau$. В частности, в первоначальной интегральной записи может оказаться выгоднее заранее аналитически проинтегрировать по части переменных x_i, сделать замену других переменных, разбить куб интегрирования на области, выделить главную часть интеграла, использовать группы зависимых узлов x^n, задающих точную квадратурную формулу для какого-либо класса функций и т. п. Выбор наиболее выгодной «модели» можно проводить, грубо оценивая величины σ^2 и τ в небольших предварительных численных экспериментах. При проведении серии расчетов заметного повышения точности удается добиться также надлежащей статистич. обработкой «наблюдений» и выбором соответствующего плана «экспериментов».

Большой класс моделей, используемых в С. и. м., связан со схемой случайных блужданий. В простейшем случае B — квадратная матрица порядка m, $b_{ij} = r_{ij} \cdot p_{ij}$, где $|r_{ij}| < 1$, $p_{ij} \geqslant 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$; $p_{i1} + \ldots + p_{im} < 1$, $i = 1, \ldots, m$. Организуем марковское случайное блуждание $w = \{\theta(0), \theta(1), \ldots, \theta(v)\}$ по m состояниям $\theta_1, \ldots, \theta_m$, с вероятностями перехода p_{ij} из θ_i в θ_j, до перехода на случайном $(v+1)$-м шаге в дополнитель-

ное поглощающее состояние θ_0, с вероятностью поглощения $p_{i0}=1-(p_{i1}+\ldots+p_{im})$, $p_{00}=1$. В предположении, что блуждающая частица изменяет свой вес по правилу $\rho_k=\rho_{k-1}r_{ij}$, если k-й случайный переход был из θ_i в θ_j; $\rho_0=1$, решение уравнения $(\mathbb{1}-B)y=g$ с помощью ряда Неймана можно покоординатно проинтерпретировать как

$$y_e=g_e+(Bg)_e+(B^2g)_e+\ldots=$$
$$=\mathsf{E}\,[g(\theta(0))+\rho_1 g(\theta(1))+\ldots+\rho_\nu g(\theta(\nu))], \qquad (2)$$

где $\theta(0)=\theta_e$, $g(\theta_s)=g_s$, $s=1,\ldots,m$. Каждая «траектория» $\omega^{(k)}$ моделируется по своей последовательности случайных чисел $x_n^{(k)}$; переход в θ_j совершается на n-м шаге из $\theta(n-1)=\theta_i$ при $p_{i0}+\ldots+p_{i,j-1}\leqslant x_n^{(k)}\leqslant p_{i0}+\ldots+p_{ij}$. Объем работы по построению траектории и расчету функционала от нее пропорционален ее «длине» ν; в этой схеме $\mathsf{E}\nu<\infty$.

При моделировании случайных блужданий с непрерывным временем движение приходится дискретизировать. Пусть требуется подсчитать долю b излучения, выходящего из шара радиуса R, в центре к-рого помещен источник. Частицы излучения движутся прямолинейно; на пути ds с вероятностью $a\,ds$ частица взаимодействует со средой, в результате с вероятностью $1-q$ она поглощается, а с вероятностью q — сферически симметрично рассеивается. Ответ задачи выписывается через решение интегро-дифференциального уравнения переноса, отвечающего приведенному стохастич. дифференциальному описанию движения. Вместо того чтобы разбить приближенный путь частицы на шаги Δs и проверять на каждом шаге, не произошло ли взаимодействие, можно, напр., по показательному закону с плотностью $p(s)=a\exp(-as)$, $s\geqslant 0$, разыграть с помощью единственного случайного числа длину n-го случайного пробега s_n и найти очередную точку взаимодействия $\boldsymbol{r}_n$. Далее, можно не разыгрывать тип взаимодействия со средой, а учитывать поглощение весовым множителем по правилу $\rho_n=q\rho_{n-1}$. Затем разыгрываются полярный и азимутальный углы (θ,φ) нового направления движения; $\cos\theta$ распределен равновероятно на отрезке $[-1,1]$, а φ — на полуинтервале $[0,2\pi)$. Они определяют орт $\boldsymbol{e}_n$ нового направления движения. Моделирование проводится до вылета из шара, т. е. до первого события $s_n\geqslant l_n$, где l_n — длина пути до границы шара, $|\boldsymbol{r}_n+l_n\boldsymbol{e}_n|=R$. Тогда средний вес вылетевших «частиц» дает оценку b. Полученное интегральное выражение для искомой величины (вытекающее также из интегрального уравнения переноса) можно преобразовать к интегралу по тем траекториям ω, к-рые шар не покидают. Пробег s_n при этом надо разыгрывать по условному закону с плотностью $a\,[1-\exp(-al_n)]^{-1}\exp(-as)$; новый вес определяется правилом $\rho_{n+1}=q\rho_n[1-\exp(-al_n)]$, и на каждой траектории подсчитывается функционал $\beta=\sum\rho_n\exp(-al_n)$. Тогда $b=\mathsf{E}\beta$, где $\beta(\omega(x))$ — непрерывная функция внутри H. В этой модели траектории бесконечны, но вклад их звеньев с большими номерами мал; поэтому можно кончать их моделирование, как только $\rho_n\leqslant\delta$, внося в подсчет b небольшую систематич. ошибку. Описанная схема дает неплохие результаты при $aR\sim 1$. Однако при больших R ее использование может привести к ложным заключениям. При $aR\gg 1$ выход из шара является редким событием и в основном осуществляется траекториями, все звенья к-рых «в среднем» длинны. Если N недостаточно велико, то весьма вероятно, что такие атипичные траектории с относительно большим значением β попадаться не будут и можно прийти к заниженным (но не нулевым) оценкам как искомого среднего b, так и дисперсии $\mathsf{D}\beta$, т. е. апостериорной меры ошибки. Повысить точность здесь

можно, если воспользоваться экспоненциальным преобразованием, моделируя траектории по показательному *закону с завышенным средним пробегом и компенсируя* это дополнительным экспоненциальным множителем в весе.

Как следует из формулы (2), решая С. и. м. систему линейных уравнений, можно найти приближенно выделенное неизвестное, не вычисляя остальных. Это важное свойство оправдывает использование С. и. м., несмотря на его медленную сходимость, напр. при решении краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений 2-го порядка, когда требуется узнать решение лишь в одной выделенной точке. В частности, для уравнения Лапласа решение записывается в виде интеграла по винеровской траектории, т. е. траектории броуновского движения. Решение нек-рых краевых задач для метагармонического (в т. ч.— бигармонического) уравнения удается записать в виде интегралов по траектории броуновской частицы с матричным весом. Моделирование самих броуновских траекторий, испытывающих бесконечно много столкновений за любой интервал времени, удается проводить при этом крупными участками с помощью разработанных специфич. приемов.

Для решения С. и. м. нелинейных уравнений используются более сложные модели потоков многих частиц, стохастически взаимодействующих со средой и между собой, в т. ч. каскадов размножающихся частиц.

К недостаткам метода, кроме медленной сходимости, следует отнести недостаточную надежность апостериорной оценки (1) вероятной относительной погрешности. Она может быть занижена как из-за «некачественности» (т. е. коррелированности) использованных случайных чисел, так и из-за «нетипичности» (т. е. малой вероятности) исходов ω, дающих основной вклад в интеграл.

Другое название С. п. м.— *Монте-Карло метод* — в большей степени относится к теории модификаций С. и. м.

Лит. см. при ст. *Монте-Карло метод.* *Н. Н. Ченцов.*

СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ТЕОРИЯ — общая теория проведения статистич. наблюдений, их обработки и использования. При более широком толковании термина С. р. т. — теория выбора оптимального недетерминированного поведения в условиях неопределенности.

Предметом математич. статистики являются обратные задачи теории вероятностей. Имеется нек-рое случайное явление Ф, описываемое качественно измеримым пространством $(\Omega, \mathcal{A})$ всех мыслимых его исходов ω и количественно — распределением P вероятностей исходов. Статистику описание Ф известно только качественно, а относительно P у него до опытов имеется лишь неполная информация типа $P \in \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ — известное ему семейство вероятностных законов. Проведя одно или несколько наблюдений Ф и обработав полученный материал, статистик должен сделать выводы о законе P и выбрать наиболее выгодное поведение (в частности, он может решить, что собранного материала недостаточно и что надо продолжить серию наблюдений, прежде чем делать окончательные выводы). В классич. задачах математич. статистики число наблюдений (объем выборки) фиксировалось и отыскивались оптимальные оценки неизвестного закона P. Современная общая концепция статистич. решения принадлежит А. Вальду (A. Wald, см. [2]). Принимают, что каждый эксперимент имеет стоимость, за к-рую надо уплачивать, а за ошибочное решение статистик также несет потери — с него взыскивается соответствующий ошибке «штраф». Поэтому, с точки зрения статистика, решающее правило (р. п.) П оптимально тогда, когда оно минимизирует риск $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P, \Pi)$ — математич.

ожидание суммы всех его убытков. Этот подход был положен А. Вальдом [1] в основу статистич. *последовательного анализа* и привел к созданию в *статистическом приемочном контроле* процедур, использующих, при той же точности выводов, в среднем почти вдвое меньше наблюдений, чем классич. р. п. В описанной постановке любая задача статистич. решения может рассматриваться как игра двух игроков в смысле Дж. Неймана (J. Neumann, см. [3]), в к-рой одним из игроков является статистик, а другим — природа. Впрочем, еще в 1820 П. Лаплас (P. Laplace) уподобил получение статистич. оценки азартной игре, в к-рой статистик терпит поражение, если его оценки плохи.

Величина риска $\mathfrak{R}(P, \Pi)$ зависит как от р. п. Π, так и от вероятностного закона P, по к-рому распределены исходы наблюдаемого явления. Так как это «истинное» значение P неизвестно, то приходится минимизировать по Π всю функцию риска $\mathfrak{R}(P, \Pi)$ как функцию от $P \in \mathcal{P}$ при заданном Π. Говорят, что р. п. Π_1 равномерно лучше правила Π_2, если $\mathfrak{R}(P, \Pi_1) \leqslant \mathfrak{R}(P, \Pi_2)$ при всех $P \in \mathcal{P}$ и $\mathfrak{R}(P, \Pi_1) < \mathfrak{R}(P, \Pi_2)$, хотя бы при одном $P \in \mathcal{P}$. Р. п. Π наз. допустимым, если не существует равномерно лучших р. п. Нек-рый класс C р. п. наз. полным (существенно полным), если для любого р. п. $\Pi \notin C$ найдется равномерно лучшее (не худшее) р. п. $\Pi^* \in C$. Наиболее важен минимальный полный класс р. п., к-рый совпадает (если только существует) с множеством всех допустимых р. п. Если минимальный полный класс содержит ровно одно р. п., то оно и будет оптимальным. В общем случае функции риска, отвечающие допустимым р. п., приходится дополнительно сравнивать по значению какого-либо функционала, напр. максимума риска. Оптимальное в последнем смысле р. п. Π_0

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} \mathfrak{R}(P, \Pi_0) = \inf_{\Pi} \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathfrak{R}(P, \Pi) = \mathfrak{R}^*$$

наз. минимаксным. Возможно сравнение по бейесовскому риску

$$\mathfrak{R}_\mu(\Pi) = \int_{\mathcal{P}} \mathfrak{R}(P, \Pi)\, \mu\{dP(\cdot)\}$$

— усреднению риска по нек-рой априорной вероятностной мере μ на семействе $\mathcal{P}$. Такой выбор функционала является естественным, в частности, когда проводятся многократные серии экспериментов, в каждой серии наблюдается свой случайный объект с известным распределением μ попасть в эксперимент (см. *Бейесовский подход*). Оптимальное в этом смысле р. п. Π,

$$\mathfrak{R}_\mu(\Pi_0) = \inf_{\Pi} \mathfrak{R}_\mu(\Pi),$$

наз. бейесовским относительно *априорного распределения* (а. р.) μ. Наконец, а. р. ν наз. наименее благоприятным (для данной задачи), если

$$\inf_{\Pi} \mathfrak{R}_\nu(\Pi) = \sup_{\mu} \inf_{\Pi} \mathfrak{R}_\mu(\Pi) = \mathfrak{R}_0.$$

При весьма общих предположениях доказано, что: 1) для любого а. р. μ существует бейесовское р. п.; 2) совокупность всех бейесовских р. п. и их пределов образует полный класс; 3) минимаксные р. п. существуют и являются бейесовскими относительно наименее благоприятного а. р., и $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}_0$ (см. [4]). Конкретный вид оптимальных решающих правил существенно зависит от типа статистич. задачи. Однако в классич. задачах статистич. оценки при больших объемах выборки оптимальное р. п. слабо зависит от избранного способа сравнения функций риска.

Р. п. в задачах С. р. т. могут быть детерминированными и рандомизированными. Первые задаются функ-

ционными, напр. измеримым отображением пространства Ω^n всех выборок $(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n)})$ объема n в измеримое пространство (и. п.) $(\Delta, \mathscr{B})$ решений δ. Вторые задаются марковскими переходными распределениями вероятностей вида $\Pi(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n)}; d\delta)$ из $(\Omega^n, \mathscr{A}^n)$ в $(\Delta, \mathscr{B})$, описывающими вероятностный закон, по к-рому надо дополнительно независимо «разыграть» принимаемое значение δ (см. *Статистических испытаний метод*). Допущение рандомизированных процедур делает множество р. п. задачи выпуклым, что сильно облегчает теоретич. анализ. Более того, существуют задачи, в к-рых оптимальное р. п. является рандомизированным. Тем не менее на практике статистики стремятся по возможности их избегать, т. к. использование таблиц или иного датчика случайных чисел для «розыгрыша» выводов усложняет работу.

Статистич. р. п. есть, по определению, переходное распределение вероятностей из нек-рого и. п. $(\Omega, \mathscr{A})$ исходов эксперимента в и. п. $(\Delta, \mathscr{B})$ выводов. Обратно, каждое переходное распределение вероятностей $\Pi(\omega; d\delta)$ можно истолковать как р. п. в любой статистич. задаче решения с и. п. $(\Omega, \mathscr{A})$ исходов и и. п. $(\Delta, \mathscr{B})$ выводов (а также как канал связи без памяти, с входным алфавитом Ω и выходным алфавитом Δ). Статистич. р. п. Π образуют алгебраич. категорию с объектами Car $(\Omega, \mathscr{A})$ — совокупностями всех распределений вероятностей на всевозможных и. п. $(\Omega, \mathscr{A})$, и морфизмами — переходными вероятностями Π. Инварианты и эквиварианты этой категории определяют многие естественные понятия и закономерности математич. статистики (см. [5]). Напр., на объектах категории существует единственная, с точностью до множителя, инвариантная риманова метрика. Она задается *информационной матрицей* Фишера. Морфизмы категории порождают отношения эквивалентности и порядка для параметризованных семейств распределений вероятностей и для статистич. задач решения, что позволяет дать естественное определение *достаточной статистики*. Несимметричное информационное уклонение Кульбака $I(Q:P)$, характеризующее непохожесть распределения вероятностей Q на P (см. *Информационное расстояние*), является монотонным инвариантом в категории:

$$I(Q_1:P_1) \geqslant (Q_2:P_2)$$

при $(Q_1, P_1) \geqslant (Q_2, P_2)$, т. е. когда $Q_2 = Q\Pi$ и $P_2 = P_1\Pi$ при нек-ром Π. Если в задаче статистич. оценки по выборке фиксированного объема N требуется оценить сам закон распределения P исходов наблюдений, принадлежащий априори к гладкому семейству $\mathscr{P}$, то, при выборе $2I(Q:P)$ за инвариантную функцию потерь при ответе Q, минимаксный риск

$$\mathfrak{R}^* = N^{-1} \dim \mathscr{P} + o(N^{-1}).$$

Логика квантовых событий не является аристотелевой; поэтому случайные явления микромира не подчиняются законам классич. теории вероятностей. Разработанный для их описания формализм принимает существование некоммутирующих случайных величин и содержит классич. теорию как вырожденную коммутативную схему. При соответствующей интерпретации многие задачи теории квантово-механич. измерений становятся некоммутативными аналогами задач С. р. т. (см. [6]).

Лит.: [1] Вальд А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; [2] Вальд А., Основные идеи общей теории статистических решений, пер. с англ. (приложение к [1]); [3] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [4] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [5] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [6] Холево А. С., Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории, М., 1980.

Н. Н. Ченцов.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ — метод прикладной и вычислительной математики, состоящий

в реализации на ЭВМ специально разрабатываемых стохастич. моделей изучаемых явлений или объектов. Расширение области применения С. м. связано с быстрым развитием техники и особенно многопроцессорных вычислительных систем, к-рые позволяют одновременно моделировать много независимых статистич. экспериментов. С другой стороны, классические вычислительные методы во многих случаях неудовлетворительны для исследования все усложняющихся математич. моделей исследуемых явлений. Это также повышает роль С. м., эффективность к-рого слабо зависит от размерности и геометрич. деталей задачи. К положительным свойствам этого метода следует отнести также простоту и естественность алгоритмов и возможность построения модификаций с учетом информации о решении (см. *Монте-Карло метод*).

Задачи, к-рые решаются методом С. м., можно условно разделить на два класса. К первому можно отнести задачи со стохастич. природой, когда используется прямое моделирование естественной вероятностной модели. Ко второму классу относятся детерминированные задачи; здесь искусственно строится вероятностный процесс, с помощью к-рого дается формальное решение задачи. Затем этот процесс моделируется на ЭВМ и строится численное решение в виде статистич. оценок. Имеется и промежуточный (между двумя приведенными) класс задач. Эти задачи, к-рые описываются детерминистич. уравнениями, но в к-рых случайны либо коэффициенты, либо граничные условия, или правая часть. Здесь особенно эффективной оказывается иногда «двойная рандомизация» (см. [1]), состоящая в том, что для данной реализации случайных параметров строится лишь небольшое число траекторий процесса, решающего уравнение.

Ниже рассмотрены области применения С. м.

Решение задач теории переноса излучения можно осуществить путем моделирования траекторий частиц: нейтронов, фотонов, гамма-квантов, электронов и т. д. Хорошо разработаны алгоритмы С. м. для решения задач атмосферной оптики (см. [2]) и нейтронной физики (см. [3]). С. м. полезно также для исследования диффузии примеси (см. [4]), особенно в стохастич. полях скоростей (см. [5]).

С. м. применяется для решения ряда задач статистич. физики (см. [7]) путем усреднения «по времени» нек-рой модели со стохастич. кинетикой (часто искусственной). С помощью С. м. получены новые результаты в теории фазовых переходов, твердых тел с неупорядоченностью (в частности, магнетиков), поверхностных явлений и т. д. (см. [7]). Для решения сложных задач теории разреженных газов эффективны модификации метода прямого С. м., связанного с расщеплением нелинейного кинетич. уравнения Больцмана (см. [6]). Это уравнение можно связать также с нек-рым ветвящимся марковским процессом (см. [1]).

С. м. можно использовать для решения краевых задач математич. физики на основе специальных вероятностных моделей (см. [5]). С. м. полезно для решения стохастич. задач: дифракции волн на случайных поверхностях, теории упругости со случайными нагрузками и т. д.

С. м. широко применяется для решения задач теории массового обслуживания и других сложных стохастич. систем (см., напр., [1], [8]).

Лит.: [1] Ермаков С. М., Михайлов Г. А., Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982; [2] Марчук Г. И. и др., Метод Монте-Карло в атмосферной оптике, Новосиб., 1976; [3] Франк-Каменецкий А. Д., Моделирование траекторий нейтронов при расчете реакторов методом Монте-Карло, М., 1978; [4] Галкин Л. М., Решение диффузионных задач методом Монте-Карло, М., 1975; [5] Еленов Б. С. и др., *Решение краевых задач методом Монте-Карло*, Новосиб., 1980; [6] Белоцерковский О. М., Ерофеев А. И., Яницкий В. Е., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1980,

т. 20, № 5, с. 1174—1204; [7] Биндер К. и др., Методы Монте-Карло в статистической физике, пер. с англ., М., 1982; [8] Бусленко Н. П. и др., Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), М., 1962. *Г. А. Михайлов.*

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ — один из основных разделов математич. статистики, посвященный оцениванию по случайным наблюдениям тех или иных характеристик их распределения.

Пример 1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины (наблюдения) с общим распределением $\mathcal{P}$ на прямой, неизвестным наблюдателю. Эмпирическое (выборочное) распределение $\mathcal{P}_n^*$, приписывающее нагрузку $\frac{1}{n}$ каждой случайной точке X_i, является оценкой для $\mathcal{P}$. Эмпирич. моменты

$$a_\nu = \int x^\nu d\mathcal{P}_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

служат оценками для моментов $\alpha_\nu = \int x^\nu d\mathcal{P}$. В частности,

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

— оценка средней,

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$$

— оценка дисперсии.

Основные понятия. В общей теории оценивания наблюдение X есть *случайный элемент* со значениями в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$, неизвестное распределение к-рого принадлежит заданному семейству распределений P. Семейство распределений всегда можно параметризовать и записать в виде $\{\mathcal{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$. Здесь форма зависимости от параметра и множество Θ предполагаются известными. Задача оценивания по наблюдению X неизвестного параметра θ или значения $g(\theta)$ функции g в точке θ заключается в том, чтобы построить функцию $\theta^*(X)$ от наблюдений, достаточно хорошо аппроксимирующую θ ($g(\theta)$).

Сравнение оценок производится следующим образом. Пусть на множестве $\Theta \times \Theta$ ($g(\Theta) \times g(\Theta)$) задана неотрицательная функция потерь $w(y_1; y_2)$, смысл к-рой состоит в том, что употребление оценки θ^* при фактическом значении параметра θ приводит к потерям $w(\theta^*; \theta)$. Средние потери, функцию риска $R_w(\theta^*; \theta) = \mathsf{E}_\theta w(\theta^*; \theta)$ принимают за меру качества статистики θ^* как оценки θ при функции потерь w. Тем самым на множество оценок вводится отношение частичного упорядочения: оценка T_1 предпочтительнее оценки T_2, если $R_w(T_1; \theta) \leqslant R_w(T_2; \theta)$. В частности, оценка T параметра θ наз. *недопустимой* (по отношению к функции потерь w), если найдется оценка T' такая, что $R_w(T'; \theta) \leqslant R_w(T; \theta)$ для всех $\theta \in \Theta$, причем для какого-нибудь θ имеет место знак строгого неравенства. При таком способе сравнения качества оценивания многие оценки оказываются несравнимыми, кроме того, выбор функции потерь в значительной степени произволен.

Иногда удается найти оценки, оптимальные внутри нек-рого более узкого класса оценок. Важный класс образуют *несмещенные оценки*. Если исходный эксперимент инвариантен относительно нек-рой группы преобразований, естественно ограничиться оценками, не нарушающими симметрию задачи (см. *Эквивариантная оценка*).

Оценки можно сравнивать по их поведению в «худших» точках: оценка T_0 параметра θ наз. *минимаксной* (см. *Минимаксная оценка*) по отношению к функции потерь w, если

$$\sup_\theta R_w(T_0; \theta) = \inf_T \sup_\theta R_w(T; \theta)$$

и нижняя грань берется по всем оценкам $T = T(X)$.

В бейесовской постановке задачи оценивания считается, что неизвестный параметр θ представляет значения случайной величины с априорным распределением Q на Θ. В этом случае наилучшая по отношению к функции потерь w оценка T_0 определяется соотношением

$$r_w(T_0) = \mathsf{E}_w(T_0;\ \theta) = \int_\Theta \mathsf{E}_\theta w(T_0;\ \theta)\, Q(d\theta) =$$
$$= \inf_T \int_\Theta \mathsf{E}_\theta w(T;\ \theta)\, Q(d\theta)$$

и нижняя грань берется по всем оценкам $T = T(X)$.

Различают параметрич. задачи оценивания, когда Θ есть подмножество конечномерного евклидова пространства, и непараметрические. В параметрич. случае обычно рассматривают функции потерь вида $l(|\theta_1 - \theta_2|)$, l — неотрицательная неубывающая функция на $\mathbb{R}^+$. Особую роль играет наиболее часто употребляемая квадратическая функция потерь $|\theta_1 - \theta_2|^2$.

Если $T = T(X)$ — *достаточная статистика* для семейства $\{\mathcal{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$, то часто можно ограничиться оценками $\theta^* = h(T)$. Так, если $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, $w(\theta_1;\ \theta_2) = l(|\theta_1 - \theta_2|)$, l — выпуклая функция, и θ^* — какая-нибудь оценка для θ, найдется оценка $h(T)$, к-рая не хуже θ^*; если θ^* — несмещенная, $h(T)$ можно выбрать несмещенной (теорема Блекуэлла). Если T — полная достаточная статистика для семейства $\{\mathcal{P}_\theta\}$, θ^* — несмещенная оценка для $g(\theta)$, найдется несмещенная оценка вида $h(T)$ с минимальной в классе несмещенных оценок дисперсией (теорема Лемана — Шеффе).

Как правило, в параметрич. задачах оценивания предполагается, что элементы семейства $\{\mathcal{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$ абсолютно непрерывны по отношению к нек-рой σ-конечной мере μ и существует плотность $\frac{d\mathcal{P}_\theta}{d\mu} = p(x;\ \theta)$. Если $p(x;\ \theta)$ достаточно гладкая функция θ и существует информационная матрица Фишера

$$I(\theta) = \int_{\mathfrak{X}} \frac{\partial p}{\partial \theta}(x,\ \theta) \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}(x,\ \theta)\right)^T \frac{\mu(dx)}{p(x;\ \theta)}$$

задача оценивания наз. регулярной. Для регулярных задач точность оценивания ограничивается снизу неравенством Крамера — Рао: если $\Theta \subset \mathbb{R}^1$, то для любой оценки T

$$\mathsf{E}_\theta |T - \theta|^2 \geqslant \frac{\left(1 + \frac{db}{d\theta}(\theta)\right)^2}{I(\theta)} + b^2(\theta),\ b(\theta) = \mathsf{E}_\theta T - \theta.$$

Примеры задач оценивания. 2. Наиболее распространенная постановка, когда наблюдается выборка объема n: $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные величины, принимающие значения в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ с общей плотностью распределения $f(x,\ \theta)$ относительно меры ν, $\theta \in \Theta$. В регулярных задачах, если $I(\theta)$ — информация Фишера на одно наблюдение, то информация Фишера всей выборки $I_n(\theta) = nI(\theta)$. Неравенство Крамера — Рао принимает вид

$$\mathsf{E}_\theta |T - \theta|^2 \geqslant \frac{\left(1 + \frac{db}{d\theta}\right)^2}{nI(\theta)} + b^2(\theta),$$
$$T = T(X_1, \ldots, X_n).$$

2.1. Пусть X_j — нормальные случайные величины с плотностью распределения

$$(2\pi)^{-1/2} \exp\{-2^{-1}\sigma^{-2}(x-a)^2\}.$$

Неизвестный параметр $\theta = (a,\ \sigma^2)$; оценками для a и σ^2 могут служить $\bar{X}$ и s^2. При этом $(\bar{X},\ s^2)$ — достаточная статистика. Оценка $\bar{X}$ — несмещенная, s^2 — сме-

щенная. Если σ^2 известна, $\overline{X}$ — несмещенная оценка минимальной дисперсии, $\overline{X}$ — минимаксная оценка по отношению к квадратичной функции потерь.

2.2. Пусть X_j — нормальные величины в $\mathbb{R}^k$ с плотностью

$$(2\pi)^{-k/2} \exp\{-2^{-1} | x-\theta |^2\}, \ \theta \in \mathbb{R}^k.$$

Статистика $\overline{X}$ — несмещенная оценка θ, если $k \leqslant 2$ она допустима по отношению к квадратичной функции потерь, если $k>2$ — недопустима.

2.3. Пусть X_j — случайные величины в $\mathbb{R}^1$ с неизвестной плотностью распределения f, принадлежащей заданному семейству F плотностей. Для достаточно широкого класса F это непараметрическая задача. Задача оценки значения плотности $f(x_0)$ в точке x_0 — это задача оценки функционала $g(f)=f(x_0)$.

3. Линейная регрессионная модель. Наблюдаются величины

$$X_i = \sum_{\alpha=1}^{p} a_{\alpha i}\theta_\alpha + \xi_i.$$

ξ_i — случайные возмущения, $i=\overline{1, n}$, матрица $\|a_{\alpha i}\|$ известна, оценке подлежит параметр $(\theta_1, \ldots, \theta_p)$.

4. Наблюдается отрезок гауссовского стационарного процесса $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, с рациональной спектральной плотностью $|\sum_{j=0}^{m} a_j \lambda^j|^2 \cdot |\sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j|^{-2}$; оценке подлежат неизвестные параметры $\{a_j\}$, $\{b_j\}$.

Способы построения оценок. Наиболее распространенный *максимального правдоподобия метод* рекомендует в качестве оценки θ максимального правдоподобия оценку $\hat{\theta}(X)$, определяемую как точка максимума случайной функции $p(X;\ \theta)$. Если $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, оценки максимального правдоподобия содержатся среди корней уравнения правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(\theta;\ X) = 0.$$

Наименьших квадратов метод в применении к задаче примера 3 рекомендует в качестве оценки точку минимума функции

$$m(\theta) = \sum_1^n (X_1 - \sum_\alpha a_{\alpha i}\theta_\alpha)^2.$$

Еще один способ построения состоит в том, что в качестве оценки для θ выбирается байесовская по отношению к нек-рой функции потерь w и нек-рому априорному распределению Q оценка T, хотя исходная постановка не является байесовской. Напр., если $\Theta = \mathbb{R}^1$ можно оценить θ посредством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta p(X;\ \theta)\, d\theta \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(X;\ \theta)\, d\theta \right)^{-1}.$$

Это байесовская оценка по отношению к квадратической функции потерь и равномерному априорному распределению.

Моментов метод заключается в следующем. Пусть $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ и пусть имеется k «хороших» оценок $a_1(X), \ldots, a_k(X)$ для $\alpha_1(\theta), \ldots, \alpha_k(\theta)$. Оценки метода моментов суть решения системы $\alpha_i(\theta)=a_i$. Часто в качестве a_i выбирают эмпирич. моменты (см. пример 1).

Если наблюдается выборка $X_1, \ldots, X_n$, то (см. пример 1) в качестве оценки для $g(\mathcal{P})$ можно выбрать $g(\mathcal{P}_n^*)$. Если функция $g(\mathcal{P}_n^*)$ не определена (напр., $g(\mathcal{P}) = \frac{d\mathcal{P}}{d\lambda}(x)$, λ — мера Лебега), выбирают подходящие модификации $g_n(\mathcal{P}_n^*)$. Напр., для оценки плотности употребляется *гистограмма* или оценки вида

$$\int \varphi_n(x-y)\, d\mathcal{P}_n^*(y).$$

Асимптотическое поведение оценок. Пусть для определенности рассматривается задача примера 2, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$. Можно ожидать, что при $n \to \infty$ «хорошие» оценки должны неограниченно сближаться с оцениваемой характеристикой. Последовательность оценок $\theta_n^*(X_1, \ldots, X_n)$ наз. состоятельной последовательностью оценок θ, если $\theta_n^* \to \theta$ по P_θ — вероятности для всех θ. Перечисленные выше способы построения оценок в широких предположениях приводят к *состоятельным оценкам*. Оценки примера 1 состоятельны. Для регулярных задач оценивания оценки максимального правдоподобия и байесовские асимптотически нормальны со средним θ и корреляционной матрицей $(nI(\theta))^{-1}$. В этих же условиях эти оценки асимптотически локально минимаксны по отношению к широкому классу функций потерь и их можно рассматривать как асимптотически оптимальные (см. *Асимптотически эффективная оценка*).

Интервальное оценивание. Случайное подмножество $E = E(X)$ множества Θ наз. доверительным множеством для оценки θ с доверительным коэффициентом γ, если $P_\theta\{E \supset \theta\} = \gamma\ (\geqslant \gamma)$. Обычно существует много доверительных областей с заданным γ и проблема заключается в том, чтобы выбрать ту, к-рая обладает нек-рыми оптимальными свойствами (напр., интервал минимальной длины, если $\Theta \subset \mathbb{R}^1$). Пусть в условиях примера 2.1 $\sigma = 1$, тогда интервал

$$\left[\overline{X} - \frac{\lambda}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right],$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_\lambda^\infty \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du$$

является доверительным интервалом с доверительным коэффициентом γ (см. *Интервальная оценка*).

Лит.: [1] Fisher R., «Phil. Trans. Roy. Soc.» (A), 1922, t. 222, s. 309—68; [2] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР», сер. Матем., 1942, т. 6, № 1; [3] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., М., 1948; [4] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [5] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [6] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [7] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [8] Grenander U., Abstract inference, N. Y., 1981. *И. А. Ибрагимов.*

СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — совокупность общих проблем математич. физики, возникших из стремления четко осмыслить основные концепции и факты статистич. механики. Эти проблемы можно условно разделить на следующие группы:

1) обоснование основных принципов статистич. механики,

2) равновесные ансамбли в термодинамич. пределе, вывод термодинамич. соотношений,

3) фазовые переходы,

4) эволюция ансамблей, проблема релаксации, исследование кинетич. и гидродинамич. уравнений,

5) основные состояния, элементарные возбуждения (в случае квантовых систем).

Статистич. механика изучает системы, состоящие из большого числа (микроскопических) частиц, заключенных внутри большой (сравнительно с характерными размерами частиц) области V пространства $\mathbb{R}^3$. Статистич. механика — в зависимости от способа описания системы — разделяется на классическую и квантовую.

Описание классич. системы, заключенной в области V, включает указание пространства X возможных состояний каждой отдельной частицы (одночастичное пространство), а также совокупности $\Omega_V \bigcup_{N \geqslant 0} X^N$ допустимых конфигураций $\omega = \{x_1, \ldots, x_N\}$; $x \in X^N$;

$i=1, \ldots, N$; $N=1, 2, \ldots$, конечного числа частиц внутри V, задание энергии $H=H_V(\omega)$ для каждой конфигурации $\omega \in \Omega_V$ и закона эволюции системы во времени (наз. иначе д и н а м и к о й), т. е. полугруппы (чаще всего группы) преобразований U_t^V, $t \geqslant 0$, пространства Ω_V в себя, сохраняющих энергию H_V:

$$H_V(U_t^V \omega) = H_V(\omega)$$

для любой $\omega \in \Omega_V$ и любого t. Во многих случаях пространство Ω_V бывает естественно наделено симплектич. структурой, и преобразования U_t^V строятся с помощью решений т. н. гамильтоновых уравнений движения, порождаемых функцией Гамильтона $H=H_V$ (см. [1]). Кроме того, обычно в пространстве X существует нек-рая естественная мера dx такая, что мера $d^V x = \bigoplus_N d^N x$ в Ω_V ($d^N x = dx \times \ldots \times dx$ — мера в X^N) инвариантна относительно эволюции U_t^V. Однако для макроскопич. систем, состоящих из большого числа частиц, столь детальное описание их состояний и динамики этих состояний (т. е. описание траекторий каждой отдельной частицы) оказывается малообозримым, да и бесполезным с точки зрения изучения макроскопич. свойств всей системы. Эти свойства определяются лишь нек-рыми средними характеристиками конфигурации ω, а также ее эволюции $\omega(t)$, $t>0$ во времени: напр., долей $\rho_1(S; t)$, $S \subset X$ частиц в конфигурации $\omega(t)$, состояния к-рых принадлежат заданному множеству S одночастичного пространства X, или долей $\rho_2(S_1, S_2; t_1, t_2)$ частиц, состояния к-рых в момент времени t_1 принадлежат множеству $S_1 \subset X$, а в момент t_2 — множеству $S_2 \subset X$ и т. д.

Эти соображения привели к следующей радикальной идее: состояние макроскопич. системы следует задавать каким-либо вероятностным распределением P на фазовом пространстве Ω_V, причем эволюция p_t, $t>0$, этого распределения во времени порождается исходной эволюцией самой системы:

$$p_t(A) = \mathsf{P}\{(U_t^V)^{-1} A\}, \quad A \subset \Omega_V, \qquad (1)$$

где $(U_t^V)^{-1}A$ — полный прообраз множеств $A \subset \Omega_V$ при отображении U_t^V. Это соглашение дополняется следующим постулатом: для всякого «хорошего» распределения вероятностей P на фазовом пространстве Ω_V и подходящей физич. величины f (т. е. действительной функции на Ω_V) принимаемые ею значения с вероятностью, близкой к единице (вычисленной с помощью распределения P), близки к ее среднему значению $\langle f \rangle_{\mathsf{P}}$. Одна из проблем, относящаяся к обоснованию статистич. механики, состоит в том, чтобы придать этому утверждению точную форму. Один из возможных результатов такого рода: пусть распределение P на Ω_V обладает свойством быстрого убывания зависимости (т. е. порождаемые им распределения вероятностей конфигураций для двух далеко отстоящих друг от друга подсистем почти независимы), а физич. величина сумматорна, т. е.

$$f(\omega) = \sum \varphi(\omega|_S)\, S \subset \{1, \ldots, N\}, \ |S| = n, \qquad (2)$$

где $n \leqslant \infty$ произвольно, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — нек-рая симметрическая «хорошо локализованная» функция на пространстве X^n (т. е. φ быстро стремится к нулю при взаимном удалении точек $x_1, \ldots, x_n$ друг от друга), а $\omega|_S = \{x_i,\ i \in S\}$, если конфигурация $\omega = \{x_i,\ i=1, \ldots, N\}$. В этом случае $\langle f \rangle_{\mathsf{P}} \sim |V|$, а флуктуации $\Delta f = f - \langle f \rangle_{\mathsf{P}} \sim |V|^{1/2}$ (с вероятностью, близкой к единице при больших $|V|$), причем распределение величины $\Delta f / |V|^{1/2}$ близко к нормальному (по-прежнему при $|V| \to \infty$, см. [2]).

Распределение вероятностей P на фазовом пространстве наз. р а в н о в е с н ы м, если оно инвариантно относительно динамики U_t^V. Пусть, кроме энер-

гии $H_V = H_V^0$, существует еще несколько т. н. интегралов движения $H_V^1, \ldots, H_V^k$, т. е. функций на Ω_V, инвариантных относительно динамики U_t^V (напр., число частиц в системе, суммарный импульс частиц, суммарный спин и т. д.). Всякое распределение на Ω_V вида

$$d\mathrm{P} = f\left(H_V^0, H_V^1, \ldots, H_V^k\right) d^V x,$$

где $d^V x$ — инвариантная мера на Ω_V, а $f > 0$ — нек-рая функция (возможно и обобщенная), является равновесным распределением. Равновесное распределение, задаваемое плотностью вида

$$f(\xi^0, \ldots, \xi^k) = Q^{-1} \prod_{i=0}^{k} \delta(\xi^i - \overline{\xi}^i), \quad \overline{\xi}^i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, \ldots, k \tag{3}$$

(Q^{-1} — нормировочный множитель), наз. микроканоническим распределением (или микроканоническим ансамблем), сосредоточенным на поверхности

$$S_{\overline{\xi}^0, \ldots, \overline{\xi}^k} = \{\omega \in \Omega_V : H^i(\omega) = \overline{\xi}^i, \ i = 0, \ldots, k\} \tag{4}$$

постоянства первых интегралов.

В статистич. механике постулируется, что микроканонич. распределение (3) является равновесным распределением (т. е. вычисляемые с его помощью средние значения физич. величин с большой точностью совпадают с экспериментально измеряемыми значениями). Долгое время полагали, что для обоснования этого постулата нужно доказать известную эргодич. гипотезу: в случае когда $H_V^0, H_V^1, \ldots, H_V^k$ — полный набор (гладких) интегралов движения, единственным (гладким) равновесным распределением на любой поверхности $S_{\overline{\xi}^0, \ldots, \overline{\xi}^k}$ является микроканонич. распределение. Попытки доказательства этой гипотезы породили современную эргодич. теорию (см. [3], [4]). Ныне, однако, стало ясным, что эргодичность конечных систем является излишне жестким предположением: для обоснования постулата о микроканонич. распределении достаточно установить эргодичность системы в термодинамич. пределе $V \nearrow \mathbb{R}^3$. Кроме микроканонич. распределения часто рассматривают гиббсовское равновесное распределение (наз. иначе большим каноническим ансамблем), определяемое плотностью

$$f = Z^{-1} \exp\{-\beta(H_V^0 + \mu_1 H_V^1 + \ldots + \mu_k H_V^k)\}, \tag{5}$$

где Z^{-1} — нормирующий множитель, $\beta > 0$, $\mu_1, \ldots, \mu_k$ — произвольные действительные параметры (параметр $\beta = 1/KT$, где T — абсолютная температура, k — абсолютная константа, наз. постоянной Больцмана). Рассматривают иногда и промежуточные распределения (малые канонич. ансамбли) с плотностью вида

$$f = \tilde{Z}^{-1} \exp\left\{-\beta\left(H_V^0 + \mu_{i_1} H_V^{i_1} + \ldots + \mu_{i_s} H_V^{i_s}\right)\right\} \times \prod_{p=1}^{k-s} \delta\left(H_{j_p} - \overline{\xi}_{j_p}\right), \tag{6}$$

где $i_1, \ldots, i_s$ и $j_1, \ldots, j_p$ — два дополняющих друг друга подмножества индексов $(1, 2, \ldots, k)$. Гиббсовское распределение (5), а также распределение (6) во многом удобнее микроканонич. распределения (3), а их использование оправдывается следующей гипотезой — т. н. принципом эквивалентности ансамблей: для «подходящей» физич. величины на Ω_V (напр., для сумматорной величины вида (2)) при значениях параметров $\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k$, при к-рых существует только одна равновесная фаза, среднее $\langle f \rangle_{\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k}$, вычисленное по гиббсовскому

распределению (5) при больших V, близко к среднему $\langle f \rangle_{\xi^0, \ldots, \xi^k}$, вычисленному по микроканонич. ансамблю на поверхности $S_{\xi^0, \ldots, \xi^k}$, где $\langle \xi^i \rangle = \langle H_V^i \rangle_{\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k}$. Доказательство этой эквивалентности также составляет одну из общих математич. проблем статистич. механики и термодинамики (см. [5], [6], [7]).

Принятый в статистич. механике способ описания систем оправдан при достаточно большом объеме области V, иначе говоря, статистич. механика изучает асимптотич. свойства систем в предельном переходе $V \nearrow \mathbb{R}^3$ (т. е. рассматривается нек-рая последовательность систем из одних и тех же частиц, заключенных соответственно в объемах $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$, причем $\bigcup_n V_n = \mathbb{R}^3$). Этот предельный переход наз. обычно термодинамич. предельным переходом. Одна из первых задач, связанных с термодинамич. пределом, состоит в том, чтобы, исходя из равновесных ансамблей, определить т. н. термодинамич. потенциалы и соотношения термодинамики. Оказывается, все термодинамич. потенциалы могут быть найдены из асимптотики при $V \nearrow \mathbb{R}^3$ нормировочных множителей Q^{-1}, Z^{-1}, $\tilde{Z}^{-1}$ и т. д. в ансамблях (3), (5), (6), так, напр., термодинамич. потенциал Гиббса равен

$$p(\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k) = \lim_{V \nearrow \mathbb{R}^3} \frac{\ln Z}{|V|}, \qquad (7)$$

где Z^{-1} — нормирующий множитель в гиббсовском ансамбле (5). Аналогично вводятся и др. термодинамич. функции, а также устанавливаются связывающие их соотношения. Большинство возникающих здесь математич. задач (существование предела, свойства термодинамич. потенциалов и т. д.) исследовано довольно полно, хотя и имеется ряд нерешенных вопросов (см., напр., [7]).

С конца 60-х гг. 20 в. в математич. статистич. механике утвердился следующий общий подход: вместо изучения асимптотич. свойств конечных систем в термодинамическом предельном переходе следует рассматривать определенным образом построенные идеализированные бесконечные системы, характеристики к-рых совпадают с исследуемой асимптотикой (неявно такая точка зрения встречалась и в более ранних работах). Рассмотрение бесконечных систем придает наглядный смысл несколько формальной процедуре термодинамического предельного перехода и позволяет вообще обойтись без нее. Фазовое пространство Ω_∞ бесконечной системы состоит из бесконечных конфигураций частиц $\omega = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $x_i \in X^V$, $i = 1, 2, \ldots$, располагающихся во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, а их динамика $U_t^\infty : \Omega_\infty \to \Omega_\infty$, $t \in \mathbb{R}$, строится как предел динамик U_t^V конечных систем при $V \nearrow \mathbb{R}^3$. Макроскопич. состояния бесконечной системы задаются по-прежнему вероятностными распределениями на пространстве Ω_∞, к-рые эволюционируют в соответствии с динамикой U_t^∞ в Ω_∞ (см. (1)). На пространстве Ω_∞ можно ввести предельные гиббсовские распределения $p^\infty_{\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k}$, к-рые строятся определенным образом с помощью гиббсовских распределений (5) $p^V_{\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k}$ в конечных системах (см. [5], [9]). Хотя введение бесконечных систем является общепринятым и плодотворным приемом, оно приводит к сложным и во многом нерешенным (1984) еще математич. задачам. Сложным, напр., оказывается построение динамики U_t^∞, построение предельных гиббсовских распределений, исследование их свойств и т. д.

Одна из главных проблем статистич. механики состоит в изучении т. н. фазовых переходов,

т. е. резкого изменения состояния макроскопич. системы, находящейся в состоянии равновесия, при небольшом изменении описывающих это равновесие параметров — температуры, плотности частиц, давления и т. д. При современном математич. подходе в терминах предельных гиббсовских распределений задачу о фазовых переходах можно описать следующим образом: при нек-рых значениях параметров β, μ_1, . . ., μ_k можно построить, вообще говоря, несколько гиббсовских распределений на Ω_∞, инвариантных относительно действия группы T^3 сдвигов в пространстве $\mathbb{R}^3$ (или нек-рой ее подгруппы $G \subset T^3$ такой, что факторгруппа T^3/G компактна), и эргодичных *относительно* этой группы (т. н. *чистые фазы*). Точка $(\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k)$ пространства параметров наз. регулярной, если существует достаточно малая ее окрестность, внутри к-рой структура множества чистых фаз, а также основные их качественные свойства (напр., характер убывания корреляций) остаются неизменными. При этом предполагается, что все числовые характеристики этих распределений (корреляционные функции, семиинварианты и т. д.) в окрестности регулярных точек зависят от параметров $\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k$ аналитически. Все остальные (не регулярные) точки в пространстве параметров β, μ_1, . . ., μ_k и являются точками фазового перехода. Таким образом, в точках фазового перехода происходит резкое изменение либо в структуре гиббсовских распределений (скажем, исчезает или возникает новая фаза) или в их свойствах (напр., убывание корреляций из экспоненциального становится степенным). При этом считается, что какие-нибудь из характеристик распределения как функции параметров β, μ_1, . . ., μ_k имеют в точке фазового перехода особенность. Описать для каждой конкретной системы структуру фаз, их свойства, определить точки фазового перехода, характер особенностей в этих точках и т. д.— этот круг вопросов и составляет проблему фазовых переходов. Хотя существует большой класс модельных систем, для к-рых (при малых значениях температуры) разработаны нек-рые общие методы решения этой задачи (см. [9]), *теория фазовых переходов еще далека от окончательного завершения*. Особенно сложным является изучение т. н. критич. точек (в к-рых, грубо говоря, происходит слияние разных фаз; см. [10]), поскольку в этих точках гиббсовское распределение имеет очень медленное убывание корреляций.

Большой круг проблем статистич. механики связан с изучением эволюций распределений на фазовом пространстве, в частности с проблемой *релаксации*, т. е. приближения к равновесию. Считается, что по прошествии большого времени всякое распределение на фазовом пространстве приближается к равновесному (гиббсовскому) распределению. Несмотря на то, что выработано много общих представлений о механизме этого процесса, а также исследован ряд упрощенных его моделей, законченной теории пока (1984) не существует. Основные представления о процессе релаксации (во многом еще гипотетичные) сводятся к тому, что этот процесс проходит три стадии. На первой из них (за время столкновений нескольких частиц) распределение p_t приходит к такому режиму эволюции, к-рый целиком определяется изменением первой корреляционной функции (т. е. распределением в одночастичном пространстве X). Затем, во второй — кинетич. стадии, протекающей за промежуток времени порядка продолжительности «свободного пробега» частицы, изменение первой корреляционной функции переходит в такой режим эволюции, при к-ром все зависит лишь от средних значений плотности частиц, их скорости, плотности, энергии и т. д. Наконец, наступает последняя (гидродинамическая) стадия, во

время к-рой (сравнимое с макроскопич. временем) эти средние значения плотности, скорости и т. д. приближаются к равновесным значениям (см. [11], [12]). *Обоснование этой картины в целом или в отдельных* ее частях представляет сложную математич. проблему, и до ее полного решения сейчас (1984) еще далеко. Основным средством *исследования* являются различные системы т. н. кинетич. уравнений — как точных, т. е. непосредственно вытекающих из определения уравнения Лиувилля (иерархич. цепочка ББГКИ — Боголюбова, Борна, Грина, Кирквуда, Ивона), так и приближенных (уравнения Больцмана, Чепмена — Энскога, Власова — Ландау, гидродинамич. уравнения и т. д.). Сами эти уравнения и их соотношение с истинной картиной эволюции также являются предметом пристального математич. изучения.

Квантовая статистич. механика основана на тех же принципах, что и классическая. Квантовое описание системы частиц, находящихся внутри области V, включает указание гильбертова пространства $\mathcal{H}_V$ — *пространства состояний* системы и самосопряженного оператора H_V, действующего в $\mathcal{H}_V$ — *оператора энергии* системы. При этом динамика системы задается группой $U_t^V = \exp\{iH_V\}$, $t \in \mathbb{R}$, унитарных операторов, действующих в $\mathcal{H}_V$, причем динамика $\{U_t^V,\ t \in \mathbb{R}\}$ порождает группу автоморфизмов в W_t^V алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_V)$ ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}_V$ (наблюдаемых):

$$W_t^V A = U_t^V A (U_t^V)^{-1}.$$

Переход к статистич. описанию в квантовом случае состоит в задании нек-рого «среднего» $<A>$ на алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_V)$, т. е. линейного положительного функционала $\rho(A) = <A>$ на этой алгебре, наз. обычно *состоянием*. Всякое состояние на $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_V)$ может быть записано в виде

$$\rho(A) = \mathrm{Sp}\, A\tilde{\rho},$$

где ρ — положительный ядерный оператор из $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_V)$, причем $\mathrm{Sp}\tilde{\rho} = 1$. Оператор $\tilde{\rho}$ обычно наз. *матрицей плотности* состояний ρ. Эволюция состояния ρ во времени задается эволюцией W_t^V самой алгебры: $\rho_+(A) = \rho((W_t^V)^{-1}A)$. Состояния, инвариантные относительно этой эволюции, по-прежнему наз. *равновесными*. Для системы, в к-рой кроме энергии $H_V = H_V^0$ имеется еще несколько попарно коммутирующих интегралов движения $H_V^1, \ldots, H_V^k$, равновесное состояние с матрицей плотности

$$\tilde{\rho} = Z^{-1} \exp\left\{-\beta\left(H_V^0 + \mu_1 H_V^1 + \ldots + \mu_k H_V^k\right)\right\}$$

наз. *гиббсовским состоянием* ($\beta > 0$, $\mu_1, \ldots, \mu_k$ — параметры, Z^{-1} — нормирующий множитель). Аналогично классич. случаю при переходе к термодинамич. пределу $V \nearrow \mathbb{R}^3$ вводится бесконечная квантовая система (см. [5]). Для описания этой системы рассматривают *C*-алгебру* $\mathfrak{A}_\infty = \overline{\bigcup_{V \subset \mathbb{R}^3} \mathfrak{A}(\mathcal{H}_V)}$ (черта означает замыкание в равномерной топологии) — т. н. *алгебру квазилокальных наблюдаемых*, а эволюция W_t^∞ в $\mathfrak{A}_\infty$ задается как предел эволюций W_t^V в конечных алгебрах $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_V)$. На алгебре $\mathfrak{A}_\infty$ можно ввести предельные гиббсовские состояния подобно тому, как это делается для классич. систем (см. [5]). При этом задача о фазовых переходах в квантовых системах в терминах предельных гиббсовских состояний формулируется аналогично классич. случаю.

Наконец, в квантовой статистич. механике также существует весь круг кинетич. проблем, хотя, конечно,

механизмы процесса релаксации в квантовой механике сложнее классических и изучены еще меньше.

Существует специфическая для квантового случая задача о т. н. основном состоянии системы (соответствующему нулевой температуре) и о возбуждениях этого основного состояния, имеющих конечную энергию. С этой проблемой связано изучение ряда интересных явлений (сверхтекучесть, сверхпроводимость), происходящих при очень низких температурах [13]. Проблема построения и изучения квантовых полей может быть исследована с помощью развитых в статистич. механике методов теории гиббсовских полей (см. [14], [15]).

Лит.: [1] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979; [2] Нахапетян Б. С., в кн.: Многокомпонентные случайные системы, М., 1978, с. 276—88; [3] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980; [4] Крылов Н. С., Работы по обоснованию статистической физики, М.—Л., 1950; [5] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [6] Халфина А. М., «Матем. сб.», 1969, т. 80, № 1, с. 3—51; [7] Минлос Р. А., Хаитов А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1975, т. 32, с. 147—86; [8] Ланфорд III О. Э., в кн.: Гиббсовские состояния в статистической физике, пер. с англ., М., 1978, с. 159—218; [9] Синай Я. Г., Теория фазовых переходов. Строгие результаты, М., 1980; [10] Стенли Г., Фазовые переходы и критические явления, пер. с англ., М., 1973; [11] Либов Р., Введение в теорию кинетических уравнений, пер. с англ., М., 1974; [12] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, т. 1—2, пер. с англ., М., 1978; [13] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, 2 изд., М., 1964; [14] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [15] Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход. Сб. статей, пер. с англ., М., 1978.

Р. А. Минлос.

СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, возникающие при применении математич. аппарата в статистич. физике. С. ф. м. з. в основном связаны с двумя направлениями статистич. теории: с равновесной статистич. механикой, основные математич. проблемы к-рой связаны с разработкой методов расчета средних по равновесному *Гиббса распределению* (см. *Статистической механики математические задачи*) и с неравновесной статистич. физикой, основные трудности к-рой составляют проблемы получения эволюционных уравнений для функций распределения, характеризующих систему на разных этапах ее эволюции, с последующим их решением (см., напр., *Кинетическое уравнение*, *Броуновского движения процесс*).

В задачу методов равновесной статистич. механики входит расчет средних следующих типов (в случае использования канонич. распределения Гиббса):

$$Z = \mathrm{Sp}\, e^{-H/\theta}; \quad \langle A \rangle = \frac{1}{Z} \mathrm{Sp}\, A e^{-H/A};$$

$$\langle BA(t) \rangle = \frac{1}{Z} \mathrm{Sp}\, BA(t)\, e^{-H/A}$$

и т. д., где H — гамильтониан системы, $\theta = kT$ — температура, $A(t)$ — оператор в гейзенберговском временно́м представлении, Z — статистич. сумма, связанная со свободной энергией системы соотношением $F = -\theta \ln Z$ (в случае использования большого канонич. распределения вместо оператора H фигурирует оператор $H - \mu N$, где μ — химич. потенциал, N — число частиц, вместо Z — большая статистич. сумма, вместо F — термодинамич. потенциал $\Omega = F - \mu N$, и т. д.).

Расчет безвременных средних Z и $\langle A \rangle$ решает проблемы равновесной теории (все равновесные характеристики, такие, как внутренняя энергия, теплоемкость, уравнения состояния, статич. восприимчивости и т. д., определяются методами термодинамики, исходя из свободной энергии F), а также теории флуктуаций; расчет величин типа $\langle BA(t) \rangle$ позволяет исследовать целый ряд динамических (зависящих от частоты) восприимчивостей системы, коэффициентов

переноса и т. д., а также исследовать особенности простейших возбуждений системы (в общем случае при $\theta \neq 0$), их энергию, затухание и т. д.

Указанные средние рассчитываются до конца только в исключительных случаях: для идеальных систем и для нек-рых специальных моделей. Эти расчеты в дальнейших исследованиях могут служить нулевым приближением. Наиболее часто рассматриваемыми моделями неидеальных статистич. систем являются системы с прямым взаимодействием частиц друг с другом (взаимодействием конечного радиуса, кулоновским взаимодействием и др.), с взаимодействием частиц с полем типа фотонного (в твердом теле описывающего тепловое движение кристаллич. решетки), дискретные системы типа Изинга и гейзенберговского магнетика с взаимодействием узлов конечного радиуса действия, а также сочетания взаимодействий подобных типов. В представлении вторичного квантования гамильтониан $H = H_0 + H_1$ в этих случаях выражается через квадратичные комбинации операторов рождения и уничтожения (в части H_0 без взаимодействия), четвертную форму (если H_1 включает прямое взаимодействие частиц), тройную форму типа используемой в квантовой электродинамике (электронфотонное взаимодействие в H_1) и т. д.

Приближенные методы расчета указанных средних в большинстве случаев основываются на добавлении поправок к результатам, полученным для случая $H = H_0$ (если нулевое приближение в физич. отношении действительно является таковым), имеющих вид явного или модифицированного разложения по степеням параметра, определяющего интенсивность взаимодействия, включенного в гамильтониан H_1. При сопоставлении рассматриваемой формальной модели с реальными системами в целом ряде случаев, имеющих прикладной интерес, параметр взаимодействия, по к-рому производится «разложение», не оказывается малым. Такие трудности существуют в проблеме электронного газа в металлах, в теории неидеального бозе-газа, в теории жидкостей, при рассмотрении ситуаций в области фазовых переходов или вблизи критич. точек и т. д.

Если отвлечься от этих проблем постановочного характера и считать, что малый параметр для каких-то частных случаев все же имеется, то при развитии теории возмущений по нему появляются специфические для многотельных систем трудности, формально проявляющиеся в появлении расходимостей в членах, учитывающих многочастичные корреляции. Их появление связано с тем, что простой ряд по целым степеням используемого «малого» параметра, начиная с нек-рой степени, уже не отражает действительной зависимости исследуемой характеристики системы от этого параметра. Эти трудности, как чисто математические, в принципе преодолимы. Для выявления этих «неаналитически» зависящих от малого параметра поправок разработаны методы, в основе своей связанные с учетом определенных классов наиболее существенных для каждого конкретного случая формального ряда теории возмущений по параметру взаимодействия.

В задачах статистич. механики классич. систем с прямым взаимодействием частиц исследование в большинстве случаев строится на основе развития метода Боголюбова [1] (см. *Боголюбова цепочка уравнений*) или метода Майера [2]. В первом случае, связанном с исследованием цепочки интегро-дифференциальных уравнений для одно-, двух- и т. д. частичных функций распределения, основой аппроксимационной процедуры является обрыв этой цепочки. При этом входящая в интегральную часть последнего из рассматриваемых уравнений цепочки функция распределения более

высокого ранга выражается с помощью какой-либо комбинации функций распределения низшего порядка. Процедура такого расщепления исходит из анализа физич. особенностей системы и характерного для данной ситуации малого параметра. Так, в системах с короткодействующими силами взаимодействия — это куб отношения радиуса взаимодействия к среднему расстоянию между частицами (основа т. н. вириального разложения, или разложения по обратным степеням удельного объёма $v=V/N$); в системах с кулоновским взаимодействием такой параметр связан с отношением средней энергии кулоновского взаимодействия частиц к средней их кинетич. энергии и т. д. После расщепления цепочки математич. проблема сводится к решению системы нелинейных в своей интегральной части уравнений (или одного нелинейного интегрального уравнения) относительно функций распределения, подчиненных условиям нормировки и ослабления корреляций (распадение многочастичных функций при «раздвигании» пространственных их аргументов на произведение функций более низкой частичности), играющих роль своеобразных граничных условий.

Метод Майера (см. [2]) для систем с короткодействующим потенциалом взаимодействия

$$\Phi_{ij}=\Phi(|r_i-r_j|),$$

включающим бесконечное отталкивание на малых расстояниях, исходит из представления классич. интеграла состояний Z в виде

$$\frac{Z}{Z_{\text{ид}}}=\frac{1}{V^N}\int_{(V)} dr_1 \ldots dr_N \prod_{1\leqslant i<j\leqslant N}(1+f_{ij}),$$

где функция Майера $f_{ij}=\exp(-\Phi_{ij}/\theta)-1$, и получения для удельной свободной энергии

$$F/N=-\theta\ln Z^{1/N}$$

и других характеристик системы вириальных разложений с коэффициентами, выражающимися через интегралы от произведений все возрастающего числа функций f_{ij}, связанных попарно одним из двух своих аргументов r_j или r_i (для реальных моделей потенциала Φ_{ij} эти интегралы вычисляются с помощью численных методов). Математич. проблемы, возникающие в связи с использованием вириального разложения, — это проблемы разработки методов суммирования этих рядов (хотя бы частичного) с целью подойти к области фазового перехода газ — жидкость или критич. области, а также общие проблемы сходимости самого разложения и т. д.

В задачах статистич. механики неидеальных квантовых систем, связанной с представлением операторов динамич. величин через квантовые операторы рождения или уничтожения, эффективными оказались методы, развитые первоначально в квантовой теории поля. Наиболее распространенными являются бестемпературная многовременная техника функций Грина причинного типа, безвременная температурная техника и метод двухвременных температурных функций Грина. В первых двух подходах (см. [3]) формальный ряд теории возмущений по интенсивности взаимодействия частиц друг с другом или каким-либо полем в известном смысле аналогичен соответствующим разложениям в квантовой теории поля (в чисто температурной технике роль «времени» играет мнимая обратная температура). Поэтому значительное развитие в этих формализмах получили диаграммные представления ряда теории возмущений, сводящиеся к рассмотрению вместо исходных частиц, и взаимодействия — квазичастиц с перенормированной энергией и конечным затуханием, перенормированного эффективного взаимодействия (вершинных частей) и т. д. Система интегральных уравнений для функции Грина квазичастиц и

вершинных частей или эффективного взаимодействия составляется, как правило, с таким расчетом, чтобы ее решение было бы эквивалентно учету бесконечной последовательности членов формального ряда теории возмущений, отобранных по определенному принципу (напр., для данной конкретной системы наиболее сильных в каждом из порядков теории возмущений).

В двухвременном температурном формализме (см. [1], [4]) аналогичные задачи связаны с исследованием боголюбовского типа цепочки зацепляющихся уравнений для функций Грина возрастающей «частичности» и составлением замкнутой системы интегральных уравнений (как правило нелинейных), являющейся следствием реализации процедуры расцепления. Математич. проблемы, связанные с исследованием этих уравнений, ограничиваются в основном отысканием определенных асимптотик их решений, гарантированных в смысле приближения, или классом суммированных диаграмм, или способом расцепления.

Такими методами исследуются такие системы, как электронный газ с кулоновским взаимодействием (учет только наиболее сильных вкладов в каждом порядке по теории возмущений эквивалентен учету экранировки исходного взаимодействия), системы низкой плотности с короткодействующими силами взаимодействия (первый этап суммирования или эквивалентной ему операции приводит к замене исходного взаимодействия на эффективное, определяемое в результате решения уравнения, аналогичного квантовомеханическому уравнению для t-матрицы рассеяния), электронфотонная система, гейзенберговская магнитная система и т. д.

Ряд задач статистич. механики допускает асимптотически точное (в предельном статистическом смысле $N \to \infty$, $N/V = \text{const}$) рассмотрение: это — системы с факторизующимся четверным взаимодействием, обобщающим модельную сверхпроводящую систему типа Бардина — Купера — Шриффера и др. Эта методика (см. [5]) связана с построением аппроксимирующего гамильтониана, допускающего точное решение, с последующим доказательством асимптотич. близости результатов, полученных с его помощью, к тем, к-рые соответствуют исходной системе.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избранные труды, т. 1, К., 1969; [2] Уленбек Дж., Форд Дж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965; [3] Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р., Молекулярная теория газов и жидкостей, пер. с англ., М., 1961; [4] Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962; [5] Тябликов С. В., Методы квантовой теории магнетизма, М., 1965; [6] Бонч-Бруевич В. Л., Тябликов С. В., Метод функций Грина в статистической механике, М., 1961; [7] Зубарев Д. Н., «Успехи физич. наук», 1960, т. 71, № 1, с. 71—116; [8] Боголюбов Н. Н. (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, М., 1974.

И. А. Квасников.

СТАЦИОНАРНАЯ ПОДГРУППА — то же, что *изотропии группа*.

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей однородной *Маркова цепи*, не зависящее от времени. Пусть $\xi(t)$ — однородная цепь Маркова со множеством состояний S и переходными вероятностями $p_{ij}(t) = \mathsf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}$. С. р.— такой набор чисел $\{\pi_j,\ j \in S\}$, что

$$\pi_j \geqslant 0, \quad \sum_{j \in S} \pi_j = 1, \tag{1}$$

$$\sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}(t) = \pi_j, \ j \in S, \ t > 0. \tag{2}$$

Равенства (2) означают, что С. р. инвариантно во времени: если $\mathsf{P}\{\xi(0) = i\} = \pi_i$, $i \in S$, то $\mathsf{P}\{\xi(t) = i\} = \pi_i$ при любых $i \in S$, $t > 0$; более того, при любых $t, t_1, \ldots, t_k > 0$, $i_1, \ldots, i_k \in S$

$$\mathsf{P}\{\xi(t_1 + t) = i_1, \ \ldots, \ \xi(t_k + t) = i_k\} = \\ = \mathsf{P}\{\xi(t_1) = i_1, \ \ldots, \ \xi(t_k) = i_k\}.$$

Если $i \in S$ — такое состояние цепи Маркова $\xi(t)$, что существуют пределы

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \pi_j(i) \geqslant 0, \ j \in S, \ \sum_{j \in S} \pi_j(i) = 1,$$

то набор чисел $\{\pi_j(i), j \in S\}$ удовлетворяет (2) и является С. р. цепи $\xi(t)$ (см. также *Переходные вероятности*).

Система линейных уравнений (2) относительно $\{\pi_j\}$ при дополнительных условиях (1) имеет единственное решение, если число положительных классов состояний цепи Маркова $\xi(t)$ равно 1; если цепь имеет k положительных классов состояний, то множество ее С. р. является выпуклой оболочкой k стационарных распределений, каждое из к-рых сосредоточено на одном положительном классе (см. *Маркова цепи положительный класс состояний*).

Любое неотрицательное решение системы (2) наз. стационарной мерой; стационарная мера может существовать и в случае, когда система (1), (2) несовместна. Напр., случайное блуждание на $\{0, 1, 2, \ldots\}$:

$$\xi(0) = 0, \ \xi(t) = \xi(t-1) + \eta(t), \ t = 1, 2, \ldots,$$

где $\eta(1), \eta(2), \ldots$ — независимые случайные величины такие, что

$$\mathsf{P}\{\eta(i) = 1\} = p, \ \mathsf{P}\{\eta(i) = -1\} = 1 - p, \ 0 < p < 1, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

не имеет стационарного распределения, но имеет стационарную меру

$$\pi_j = \left(\frac{p}{1-p}\right)^j, \ j = 0, \pm 1, \ldots.$$

Одна из возможных вероятностных интерпретаций стационарной меры $\{\pi_j\}$ цепи Маркова $\xi(t)$ со множеством состояний S такова. Пусть имеется счетное множество независимых реализаций цепи $\xi(t)$ и $\eta_t(i)$ — число реализаций, для к-рых $\xi(t) = i$. Если случайные величины $\eta_0(i)$, $i \in S$, независимы и подчиняются распределению Пуассона со средними π_i, $i \in S$, соответственно, то при любом $t > 0$ случайные величины $\eta_t(i)$, $i \in S$, независимы и имеют те же распределения, что и $\eta_0(i)$, $i \in S$.

Лит.: [1] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [2] Карлин С., Основы теории случайных процессов, пер. с англ., М., 1971.

А. М. Зубков.

СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ МЕТОД — метод вычисления асимптотики интегралов от быстро осциллирующих функций:

$$F(\lambda) = \int_\Omega f(x) e^{i\lambda S(x)} dx, \qquad (*)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, $\lambda \to +\infty$ — большой параметр, Ω — ограниченная область, функция $S(x)$ (фаза) действительная, функция $f(x)$ комплексная, и $f, S \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, т. е. f финитна, и фаза $S(x)$ не имеет стационарных точек (т. е. точек, в к-рых $S'(x) = 0$) на носителе $\operatorname{supp} f$, то $F(\lambda) = O(\lambda^{-\infty})$, $\lambda \to +\infty$. Поэтому основной вклад в асимптотику интеграла (*) при $\lambda \to +\infty$ вносят точки стационарной фазы и граница $\partial\Omega$. Вкладом от изолированной стационарной точки x^0 и от границы наз. соответственно интегралы

$$V_{x^0}(\lambda) = \int_\Omega f(x) \varphi_0(x) e^{i\lambda S(x)} dx,$$

$$V_{\partial\Omega}(\lambda) = \int_\Omega f(x) \varphi_{\partial\Omega}(x) e^{i\lambda S(x)} dx,$$

где $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi_0 \equiv 1$ вблизи точки x^0 и $\operatorname{supp} \varphi_0$ не содержит других стационарных точек, $\varphi_{\partial\Omega} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и

$\varphi_{\partial\Omega} \equiv 1$ в нек-рой окрестности границы. При $n=1$, $\Omega=(a,\ b)$ имеем:

1. $V_a(\lambda)=\frac{i}{\lambda S'(a)}\, e^{i\lambda S(a)}\,[f(a)+O(\lambda^{-1})]$,

если $S'(a)\neq 0$;

2. $V_{x^0}(\lambda)=\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\,|S''(x^0)|}}\; e^{i\left(\lambda S(x^0)+\frac{\pi}{4}\delta_0\right)}\times[f(x^0)+$ $+O(\lambda^{-1})]$, $\delta_0=\operatorname{sgn} S''(x^0)$,

если x^0 — внутренняя точка отрезка Ω и $S'(x^0)=0$, $S''(x^0)\neq 0$.

Полностью исследован случай, когда $n=1$, фаза S имеет конечное число стационарных точек, все они конечной кратности, и функция f имеет нули конечной кратности в этих точках и на концах отрезка Ω. Получены асимптотич. разложения. Исследован случай, когда функции f, S имеют степенные особенности: напр., $f=x^\alpha f_1(x)$, $S=x^\beta S_1(x)$, где f_1, S_1 — гладкие при $x=0$ функции, $\alpha>-1$, $\beta>0$.

Пусть $n\geqslant 2$, $x^0\in\Omega$ — невырожденная стационарная точка (т. е. $\Delta_S(x^0)=\det S''(x^0)\neq 0$). Тогда вклад от точки x^0 равен

$$V_{x^0}(\lambda)=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}|\Delta_S(x^0)|^{-1/2}\exp\left[i\left(\lambda S(x^0)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\pi}{4}\delta_S(x^0)\right)\right][f(x^0)+O(\lambda^{-1})],$$

где $\delta_S(x^0)$ — сигнатура матрицы $S''(x^0)$. Имеется также асимптотич. ряд для $V_{x^0}(\lambda)$ (формулы для вклада $V_{\partial\Omega}(\lambda)$ в случае гладкой границы см. [5]).

Если $x^0\in\Omega$ — стационарная точка конечной кратности, то (см. [6])

$$V_{x^0}(\lambda)\sim\exp[i\lambda S(x^0)]\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{N}a_{kl}\lambda^{-r_k}(\ln\lambda)^l\right),$$

где r_k — рациональные числа, $\frac{n}{2}\leqslant r_0<r_1<\ldots<r_k\to+\infty$. Исследованы вырожденные стационарные точки (см. [3], [4]).

Исследован случай, когда фаза $S=S(x,\ \alpha)$ зависит от действительного параметра α и при малых $|\alpha|$ имеет две близкие невырожденные стационарные точки. В этом случае асимптотика интеграла $F(\lambda,\ \alpha)$ выражается через функции Эйри (см. [5]). Имеется операторный вариант С. ф. м.: $\lambda=A$, где A — инфинитезимальный оператор сильно непрерывной группы $\{e^{itA}\}$ ограниченных на оси $-\infty<t<\infty$ операторов, действующих в банаховом пространстве B, и $f(x)$, $S(x)$ — гладкие функции со значениями в B [9]. Если функции аналитические, то С. ф. м. есть частный случай *перевала метода*.

Лит.: [1] Thomson W., «Philos. Mag.», 1887, v. 23, p. 252—55; [2] Эрдейи А., Асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1962; [3] Риекстыньш Э. Я., Асимптотические разложения интегралов, т. 1—2, Рига, 1974—77; [4] Olver F. W. J., Asymptotics and special functions, N. Y.—L., 1974; [5] Федорюк М. В., Метод перевала, М., 1977; [6] Atiyah M. F., «Comm. Pure and Appl. Math.», 1970, v. 23, № 2, p. 145—50; [7] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 5, с. 1—44; [8] Варченко А. Н., «Функциональный анализ», 1976, т. 10, № 3, с. 13—38; [9] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976.

М. В. Федорюк.

СТАЦИОНАРНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС, однородный во времени случайный процесс,— случайный процесс $X(t)$, статистич. характеристики к-рого не меняются с теченнем времени t, т. е. инварнантны относительно временных сдвигов: $t\to t+a$, $X(t)\to X(t+a)$ при любом фиксированном значении a (действительном или целочисленном в зависимости от того, идет ли речь о случайном процессе с непрерывным или дискретным временем). Понятие С. с. п. широко используется в приложениях

теории вероятностей к различным разделам естествознания и техники, т. к. такие процессы с хорошей точностью описывают многие реальные явления, сопровождающиеся неупорядоченными флуктуациями. Так, напр., пульсации силы тока или напряжения в электрич. цепи (электрич. «шум») можно рассматривать как С. с. п., если цепь находится в стационарном режиме; пульсации скорости или давления в точке турбулентного течения представляют собой С. с. п., если течение является установившимся и т. д.

В математич. теории С. с. п. важную роль играют моменты распределений вероятностей значений процесса $X(t)$, причем особенно важны моменты первых двух порядков — среднее значение С. с. п. $\mathsf{E}X(t)=m$ и его корреляционная функция $\mathsf{E}X(t+\tau)X(t)=B(\tau)$. Во многих исследованиях по теории С. с. п. изучаются только те их свойства, к-рые полностью определяются одними лишь характеристиками m и $B(\tau)$ (т. н. к о р р е л я ц и о н н а я т е о р и я или теория второго порядка С. с. п.). В связи с этим случайные процессы $X(t)$, для к-рых $\mathsf{E}X(t)$ и $\mathsf{E}X(t+\tau)X(t)$ не зависят от значения t, часто выделяют в особый класс и наз. с т а ц и о н а р н ы м и с л у ч а й н ы м и п р о ц е с с а м и в ш и р о к о м с м ы с л е. Более частные случайные процессы, все характеристики к-рых не меняются со временем (так что функция распределения $F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-мерной случайной величины $\{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\}$ здесь при любом n зависит только от $n-1$ разностей $t_2-t_1, \ldots, t_n-t_1$), наз. с т а ц и о н а р н ы м и с л у ч а й н ы м и п р о ц е с с а м и в у з к о м с м ы с л е. В соответствии с этим теория С. с. п. делится на теорию С. с. п. в узком смысле и теорию С. с. п. в широком смысле, использующие разный математич. аппарат.

Теория С. с. п. в узком смысле может излагаться вне рамок теории вероятностей как теория однопараметрич. групп, сохраняющих меру преобразований измеримого пространства с мерой на нем; она близко соприкасается с общей теорией динамич. систем и эргодич. теорией. Важнейшей общей теоремой теории С. с. п. в узком смысле является э р г о д и ч е с к а я т е о р е м а Б и р к г о ф а — Х и н ч и н а, согласно к-рой для любого С. с. п. в узком смысле $X(t)$, имеющего математич. ожидание (т. е. такого, что $\mathsf{E}|X(t)|<\infty$), с вероятностью 1 существует предел

$$\lim_{T-S\to\infty}\int_S^T X(t)\,dt=\hat{X} \tag{1}$$

или

$$\lim_{T-S\to\infty}\sum_{t=S+1}^{T} X(t)=\hat{X} \tag{1a}$$

(формула (1) относится к С. с. п. с непрерывным временем, а (1а) — к процессам с дискретным временем). В силу относящегося уже к теории С. с. п. в широком смысле результата Е. Е. Слуцкого [1], утверждающего, что предел (1) или (1а) существует в смысле предела в среднем квадратичном и совпадает с $\mathsf{E}X(t)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_0^T b(\tau)\,d\tau=0 \tag{2}$$

или соответственно

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\sum_{\tau=0}^{T-1} b(\tau)=0, \tag{2a}$$

где

$$b(\tau)=B(\tau)-m^2=\mathsf{E}\{[X(t+\tau)-m]\,[X(t)-m]\},$$

при условии (2) или (2а) (т. е., в частности, всегда, когда $b(\tau)\to 0$ при $\tau\to\infty$) предел (1) или (1а) будет совпадать с $\mathsf{E}X(t)$. Теорема Биркгофа — Хинчина

может быть приложена и к всевозможным С. с. п. в узком смысле вида

$$Y_{\Phi}(s) = \Phi[X(t+s)],$$

где $\Phi[X(t)]$ — произвольный функционал от С. с. п. $X(t)$, являющийся случайной величиной, имеющей математич. ожидание; если для всех таких С. с. п. $Y_{\Phi}(s)$ соответствующий предел $\bar{Y}_{\Phi}$ совпадает с $\mathsf{E}\,Y_{\Phi}$, то С. с. п. $X(t)$ наз. м е т р и ч е с к и т р а н з и т и в н ы м. Для гауссовских С. с. п. $X(t)$, условие стационарности к-рых в узком смысле совпадает с условием стационарности в широком смысле, метрич. транзитивность будет иметь место тогда и только тогда, когда спектральная функция $F(\lambda)$ процесса $X(t)$ является непрерывной функцией λ (см., напр., [2], [3]). В общем случае нет простых необходимых и достаточных условий метрич. транзитивности С. с. п. $X(t)$.

Кроме указанного выше результата, касающегося метрич. транзитивности, имеется также множество других результатов, относящихся к гауссовским С. с. п.; в частности, для таких процессов подробно изучен вопрос о локальных свойствах реализаций (т. е. отдельных наблюденных значений) С. с. п. $X(t)$, о статистич. свойствах последовательности нулей или максимумов реализации С. с. п. $X(t)$ и точек пересечения ею заданного уровня (см., напр., [3]). Типичным примером результатов, касающихся пересечений уровня, является утверждение о том, что при широких условиях регулярности совокупность точек пересечения высокого уровня $x=u$ гауссовским С. с. п. $X(t)$ в нек-ром специальном масштабе времени (зависящем от u и быстро стремящемся к бесконечности при $u \to \infty$) сходится при $u \to \infty$ к пуассоновскому потоку событий единичной интенсивности (см. [3]).

При рассмотрении С. с. п. в широком смысле вводят в рассмотрение гильбертово пространство H_X всевозможных линейных комбинаций значений процесса $X(t)$ и пределов в среднем квадратичном последовательностей таких линейных комбинаций, скалярное произведение в к-ром задается формулой $(Y_1, Y_2) = \mathsf{E}\,Y_1\bar{Y}_2$. В таком случае преобразование $X(t) \to X(t+a)$, где a — фиксированное число, будет порождать линейный унитарный оператор U_a, отображающий пространство H_X на себя; при этом семейство операторов U_a очевидно удовлетворяет условию $U_a U_b = U_{a+b}$, а значения $X(t) = U_t X(0)$ представляют собой совокупность точек (кривую, если время t непрерывно, и счетную последовательность точек, если время дискретно), переводимую в себя всеми операторами U_a. Соответственно этому теория С. с. п. в широком смысле может быть переформулирована в терминах функционального анализа как изучение совокупностей точек $X(t) = U_t X(0)$ гильбертова пространства H_X, где U_t — семейство линейных унитарных операторов таких, что $U_a U_b = U_{a+b}$.

Центральное место в теории С. с. п. в широком смысле занимают спектральные рассмотрения, опирающиеся на разложение случайного процесса $X(t)$ и его корреляционной функции $B(\tau)$ в интеграл Фурье — Стилтьеса. В силу теоремы Хинчина [4] (являющейся простым следствием аналитич. теоремы Бохнера об общем виде положительно определенной функции) корреляционная функция $B(\tau)$ С. с. п. с непрерывным временем всегда может быть представлена в виде

$$B(\tau) = \int_{\Lambda} e^{i\tau\lambda}\, dF(\lambda), \qquad (3)$$

где $F(\lambda)$ — ограниченная монотонно неубывающая функция λ, а $\Lambda = (-\infty, \infty)$; теорема Герглотца об общем виде положительно определенных последовательностей аналогичным образом показывает, что

такое же представление, но только с $\Lambda=[-\pi, \pi]$, имеет место и для корреляционной функции С. с. п. с дискретным временем. Если корреляционная функция $B(\tau)$ достаточно быстро убывает при $|\tau| \to \infty$ (как это чаще всего и бывает в приложениях при условии, что под $X(t)$ понимается разность $X(t)-m$, т. е. считается, что $\mathsf{E}X(t)=0$), то интеграл в правой части (3) обращается в обыкновенный интеграл Фурье

$$B(\tau)=\int_{\Lambda} e^{i\tau\lambda} f(\lambda)\, d\lambda, \qquad (4)$$

где $f(\lambda)=F'(\lambda)$ — неотрицательная функция. Функция $F(\lambda)$ наз. спектральной функцией С. с. п. $X(t)$, а функция $f(\lambda)$ (в случаях, когда имеет место равенство (4)) — его спектральной плотностью. Исходя из формулы Хинчина (3) (или из задания С. с. п. $X(t)$ в виде совокупности точек $X(t)=U_t X(0)$ гильбертова пространства H_X и теоремы Стоуна о спектральном представлении однопарамет рич. групп унитарных операторов в гильбертовом пространстве), можно также показать, что сам процесс $X(t)$ допускает спектральное разложение вида

$$X(t)=\int_{\Lambda} e^{it\lambda}\, dZ(\lambda), \qquad (5)$$

где $Z(\lambda)$ — случайная функция с некоррелированными приращениями (т. е. такая, что $\mathsf{E}dZ(\lambda_1)\overline{dZ(\lambda_2)}=0$ при $\lambda_1\neq\lambda_2$), удовлетворяющая условию $\mathsf{E}|dZ(\lambda)|^2=dF(\lambda)$, а интеграл справа понимается как предел в среднем квадратичном соответствующей последовательности интегральных сумм. Разложение (5) дает основание рассматривать любой С. с. п. в широком смысле $X(t)$ как суперпозицию совокупности некоррелированных друг с другом гармонич. колебаний различных частот со случайными амплитудами и фазами; при этом спектральная функция $F(\lambda)$ и спектральная плотность $f(\lambda)$ определяют распределение средней энергии (или, точнее, мощности) входящих в состав $X(t)$ гармонич. колебаний по спектру частот λ (в связи с чем в прикладных исследованиях функция $f(\lambda)$ часто наз. также энергетическим спектром, или спектром мощности, С. с. п. $X(t)$).

Спектральное разложение корреляционной функции $B(\tau)$, задаваемое формулой (3), показывает, что отображение $X(t) \to e^{it\lambda}$, переводящее элементы $X(t)$ гильбертова пространства H_X в элементы $e^{it\lambda}$ гильбертова пространства $L^2(dF)$ комплекснозначных функций на множестве Λ с интегрируемым по $dF(\lambda)$ квадратом модуля, является изометрич. отображением H на $L^2(dF)$. Это отображение может быть далее продолжено до изометрического линейного отображения, M всего пространства H_X в пространство $L^2(dF)$, что позволяет переформулировать многие задачи теории С. с. п. в широком смысле в виде задач теории функций.

Значительная часть теории С. с. п. в широком смысле посвящена методам решения линейных аппроксимационных задач для таких процессов, т. е. методам нахождения линейной комбинации каких-то «известных» значений $X(t)$, к-рая лучше всего (в смысле минимума среднеквадратичной ошибки) приближает нек-рое «неизвестное» значение того же процесса или какую-то «неизвестную» случайную величину Y. В частности, задача об оптимальной линейной экстраполяции С. с. п. $X(t)$ состоит в отыскании наилучшего приближения $X^*(s)$ к значению $X(s)$, $s>0$, линейно зависящего от «прошлых значений» $X(t)$ с $t\leqslant 0$; задача об оптимальной линейной интерполяции — в отыскании наилучшего приближения к $X(s)$, линейно зависящего от значений $X(t)$, где t пробегает все значения, не принадлежащие выделенному интервалу оси вре-

мени (к к-рому принадлежит s); задача об оптимальной линейной фильтрации может быть сформулирована как задача отыскания наилучшего приближения Y^* к нек-рой случайной величине Y (обычно являющейся значением при каком-то $t=s$ корреляционно связанного с $X(t)$ С. с. п. $Y(t)$, причем чаще всего $Y(t)$ здесь играет роль «сигнала», а $X(t)=Y(t)+N(t)$ — известная из наблюдений сумма «сигнала» и искажающего его «шума» $N(t)$), линейно зависящего от значений $X(t)$ при $t\leqslant 0$ (см. *Случайных процессов прогнозирование*, *Случайных процессов фильтрация*).

Геометрически все эти задачи сводятся к задаче опускания перпендикуляра из нек-рой точки гильбертова пространства H_X (или его расширения) на заданное подпространство этого пространства. Опираясь на такую геометрич. интерполяцию и на изоморфизм пространств H_X и $L^2(dF)$, А. Н. Колмогоров вывел общие формулы, позволяющие по спектральной функции $F(\lambda)$ С. с. п. $X(t)$ с дискретным временем t определить средний квадрат ошибки оптимальной линейной экстраполяции или интерполяции, отвечающей случаю, когда значение $X(t)$ неизвестно только при $t=s$ (см. [2], [5] — [6]). В применении к задаче экстраполяции аналогичные же результаты для С. с. п. $X(t)$ с непрерывным временем были позже получены М. Г. Крейном и К. Каруненом (K. Karhunen). Н. Винер [8] показал, что нахождение наилучшего приближения $X^*(s)$ или $Y^*=Y^*(s)$ в случае задач об оптимальной линейной экстраполяции и фильтрации может быть сведено к решению нек-рого интегрального уравнения типа Винера — Хопфа или (в случае дискретного t) — дискретного аналога такого уравнения, что позволяет применить здесь метод факторизации (см. *Винера — Хопфа уравнение*, *Винера — Хопфа метод*). Что касается задач об оптимальной линейной экстраполяции или фильтрации С. с. п. $X(t)$ с непрерывным временем в случае, когда известны не все его прошлые значения при $t\leqslant 0$, но лишь значения на конечном интервале — $T\leqslant t\leqslant 0$, а также задачи оптимальной линейной интерполяции такого $X(t)$, то они могут быть сведены к нек-рым задачам о восстановлении дифференциального уравнения специального вида («обобщенного уравнения струны») по его спектру (см. [9], [10]).

Указанные выше подходы к решению задач об оптимальной линейной экстраполяции, интерполяции и фильтрации только в нек-рых исключительных случаях позволяют получить достаточно простые явные формулы для искомого наилучшего приближения $X^*(s)$ или Y^*, могущие с успехом применяться на практике. Важный случай, когда такие явные формулы существуют, — это случай С. с. п. $X(t)$ с рациональной относительно $e^{i\lambda}$ (если t дискретно) или относительно λ (если t непрерывно) спектральной плотностью $f(\lambda)$, специально изученный (в применении к задачам экстраполяции и фильтрации по значениям при $t\leqslant 0$) Н. Винером [8]. Позже было показано, что для таких С. с. п. с рациональной спектральной плотностью находится явное решение и задач о линейной интерполяции, экстраполяции и фильтрации по данным на конечном интервале — $T\leqslant t\leqslant 0$ (см., напр., [2], [11]). Простота процессов с рациональной спектральной плотностью может быть объяснена тем обстоятельством, что такие С. с. п. (и практически только они) представляют собой одномерную компоненту многомерного стационарного марковского процесса (см. [12]).

Понятие С. с. п. допускает целый ряд обобщений. Одним из них является понятие о б о б щ е н н о г о с т а ц и о н а р н о г о с л у ч а й н о г о п р о ц е с с а — такого *случайного процесса обобщенного* $X(\varphi)$ (т. е. случайного линейного функционала, заданного

на пространстве D финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$), что или распределение вероятностей случайного вектора $\{X(V_a\varphi_1), X(V_a\varphi_2), \ldots, X(V_a\varphi_n)\}$, где $V_a\varphi(t)=\varphi(t+a)$, при любом целом положительном n, действительном a и функциях $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ из D совпадает с распределением вероятностей вектора $\{X(\varphi_1), X(\varphi_2), \ldots, X(\varphi_n)\}$ (обобщенный С. с. п. в узком смысле), или же

$$\mathsf{E}X(\varphi)=\mathsf{E}X(V_a\varphi),$$

$$\mathsf{E}X(V_a\varphi_1)\overline{X(V_a\varphi_2)}=\mathsf{E}X(\varphi_1)\overline{X(\varphi_2)},$$

при всех a (обобщенный С. с. п. в узком смысле). Обобщенный С. с. п. в широком смысле $X(\varphi)$ и его корреляционный функционал $B(\varphi_1, \varphi_2)=\mathsf{E}X(\varphi_1)\overline{X(\varphi_2)}$ допускают родственное (3) и (5) спектральное разложение (см. *Спектральное разложение случайной функции*). Другими часто используемыми обобщениями понятия С. с. п. являются понятия случайного процесса со стационарными приращениями цек-рого порядка и *случайного поля однородного*.

Лит.: [1] Слуцкий Е. Е., Избр. труды, М., 1960, с. 252—68; [2] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [3] Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения, пер. с англ., М., 1969; [4] Хинчин А. Я., «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 42—51; [5] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1941, т. 5, № 1, с. 3—14; [6] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [7] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [8] Wiener N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, N. Y., 1949; [9] Крейн М. Г., «Докл. АН СССР», 1954, т. 94, № 1, с. 13—16; [10] Dym H., McKean H. P., Gaussian processes, function theory and the inverse spectral problem, N. Y.—[a. o.], 1976; [11] Ягломом А. М., «Труды Моск. матем. об-ва», 1955, т. 4, с. 333—74; [12] Doob J. L., «Ann. Math. Stat.», 1944, v. 15, p. 229—82.

А. М. Яглом.

СТЕКЛОВА ПРОБЛЕМЫ в теории ортогональных многочленов — задачи, в которых асимптотич. свойства ортогональных многочленов рассматриваются в зависимости от свойств и, в частности, от особенностей весовой функции и контура ортогональности.

При изучении многочленов $\{P_n(x)\}$, ортонормированных на сегменте $[-1, 1]$ с весом

$$h(x)=\frac{h_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x\in(-1, 1), \tag{1}$$

возникает вопрос об условиях ограниченности последовательности $\{P_n(x)\}$ в отдельной точке либо на нек-ром множестве $A\subset[-1, 1]$, либо на всем сегменте ортогональности. Этот вопрос важен потому, что при ограниченности последовательности $\{P_n(x)\}$ на ряды Фурье по ортогональным многочленам переносятся нек-рые свойства тригонометрич. рядов Фурье.

В. А. Стеклов [1] высказал предположение, что для выполнения неравенства

$$|P_n(x)|\leqslant C_1, \ x\in A\subset[-1, 1], \tag{2}$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$h_0(x)\geqslant C_2>0, \ x\in A\subset[-1, 1]. \tag{3}$$

Значение функции $h_0(t)$ в точке x, где рассматриваются неравенства (2) и (3), должно быть связано со значениями этой функции в точках, близких к x, и задача заключается в том, чтобы вывести (2) из (3) при минимальных ограничениях на функцию $h_0(t)$ в окрестности точки x (первая задача Стеклова). Имеются (см. [2], [5]) различные локальные и глобальные условия, при к-рых из (3) следует (2). В частности, если в (1) функция $h_0(x)$ положительна, непрерывна и удовлетворяет нек-рым дополнительным условиям, то для многочленов $\{P_n(x)\}$ имеет место асимптотич. формула, из к-рой следует неравенство (2) при $A=[-1, 1]$.

Кроме того, Стеклов [1] рассмотрел случаи алгебраич. нулей весовой функции и установил ряд результатов, послуживших началом двух направлений исследований. Одно из них характеризуется т. н. глобальными, или равномерными, оценками роста ортонормированных многочленов, к-рые получаются при довольно общих условиях на весовую функцию (вторая задача Стеклова). Напр. (см. [2], с. 177), если неравенство (3) выполняется на всем сегменте $[-1, 1]$, то существует такая последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to 0$, что имеет место неравенство

$$|P_n(x)|\leqslant \varepsilon_n\sqrt{n}\,,\quad x\in[-1, 1].$$

Третья задача Стеклова состоит в исследовании асимптотич. свойств ортогональных многочленов при гладких особенностях весовой функции. К этому направлению можно отнести асимптотич. свойства *Якоби многочленов*, весовая функция к-рых имеет особенности на концах сегмента ортогональности, с чем связано различие асимптотич. свойств многочленов Якоби внутри интервала $(-1, 1)$ и на его концах. Отличие результатов последнего направления от глобальных оценок ортогональных многочленов состоит в том, что в этом случае весовая функция может обращаться в отдельных точках в нуль или бесконечность определенного порядка и удовлетворяет нек-рым условиям гладкости. При этом асимптотич. формулы и оценки для ортогональных многочленов устанавливаются отдельно в особых точках весовой функции (нули, полюса, концы сегмента ортогональности) и на остальной части сегмента ортогональности.

Формулировки и особенно доказательства по всем вышеперечисленным вопросам наиболее естественны в случае многочленов, ортогональных на окружности, ибо в этом случае можно применять многие результаты о приближении периодич. функций тригонометрич. полиномами.

Лит.: [1] Стеклов В. А., «Изв. Российской Акад. наук», 1921, т. 15, с. 267—80, с. 281—302, с. 303—26; [2] Геронимус Я. Л., Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке, М., 1958; [3] Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [4] Суетин П. К., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 2, с. 41—88; [5] его же, в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 15, М., 1977, с. 5—82.

П. К. Суетин.

СТЕКЛОВА ФУНКЦИЯ для интегрируемой на любом конечном отрезке $[a, b]$ функции $f(t)$ — функция

$$f_h(t)=\frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2} f(u)\,du=\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} f(t+v)\,dv. \quad (*)$$

Функции вида (*), а также повторные функции

$$f_{h,\,r}(t)=\frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2} f_{h,\,r-1}(u)\,du,\ r=2,\ 3,\ \ldots;$$

$$f_{h,\,1}(t)=f_h(t),$$

впервые были введены В. А. Стекловым в 1907 (см. [1]) при решении проблемы разложения заданной функции в ряд по собственным функциям. С. ф. $f_h(t)$ почти всюду имеет производную

$$f_h'(t)=\frac{1}{h}\left\{f\left(t+\frac{h}{2}\right)-f\left(t-\frac{h}{2}\right)\right\},$$

если $f(t)$ равномерно непрерывна на всей оси, то

$$\sup_{t\in(-\infty,\ \infty)}|f(t)-f_h(t)|\leqslant\omega\left(\frac{h}{2}, f\right),$$

$$\sup_{t\in(-\infty,\ \infty)}|f_h'(t)|\leqslant\frac{1}{h}\,\omega(h,\ f),$$

где $\omega(\delta,\ f)$ — модуль непрерывности функции $f(t)$. Аналогичные неравенства имеют место и в метрике $L^p(-\infty,\ \infty)$, если только $f\in L^p(-\infty,\ \infty)$.

Лит.: [1] Стеклов В. А., Об асимптотическом выражении некоторых функций, определяемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка, и их применении к задаче разложения произвольной функции в ряд по этим функциям, Хар., 1956; [2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965.

А. В. Ефимов.

СТЕПАНОВА ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — класс S_l^p измеримых и суммируемых вместе со своей p-й степенью ($p \geqslant 1$) в каждом конечном интервале $[x, x+l]$ функций, к-рые могут быть в метрике пространства Степанова (см. ниже) аппроксимированы конечными суммами вида

$$\sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x},$$

где a_n — комплексные коэффициенты, λ_n — действительные числа. Расстояние в пространстве Степанова определяется формулой

$$D_{S_l^p}[f(x),\ g(x)] =$$

$$= \sup_{-\infty < x < \infty} \left[\frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(x) - \varphi(x)|^p \, dx \right]^{1/p}.$$

Функции класса S_l^p могут быть также определены с помощью понятия *почти периода*.

Функции класса $S^p = S_1^p$ обладают рядом свойств, аналогичных свойствам равномерных почти периодич. функций. Напр., функции класса S^p ограничены и равномерно непрерывны (в метрике $D_{S_l^p}$ соответствуют различным топологически эквивалентным S_l^p), предел $f(x)$ сходящейся последовательности С. п. п. ф. $\{f_n(x)\}$ (в метрике S^p) принадлежит классу S^p. Если функция класса S^p равномерно непрерывна (в обычном смысле) на всей действительной оси, то она есть равномерная почти периодич. функция. Введены В. В. Степановым [1].

Лит: [1] Степанов В. В., «С. r. Acad. sci.», 1925, t. 181, p. 90—94.

В. М. Бредихин.

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ — функция

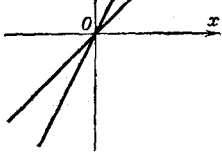
$$y = x^a,$$

где a — постоянное число. Если a — целое число, то С. ф.— частный случай *рациональной функции*. При комплексных значениях x и a С. ф. неоднозначна, если a — нецелое число.

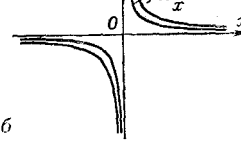
При фиксированных действительных x и a число x^a является *степенью*, поэтому свойства С. ф. $y = x^a$ вытекают из свойств степени.

При $x > 0$ С. ф. x^a определена и положительна для любого действительного a. При $x \leqslant 0$ С. ф. x^a определена в следующих случаях.

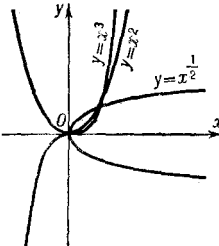
а) С. ф. x^a при $x = 0$ определена и равна нулю, если $a > 0$, и не определена, если $a < 0$. С. ф. x^0 равна единице при $x \neq 0$, обычно считают, что $x^0 \equiv 1$ при всех x, хотя символ 0^0 не определен.



а



б



в

б) Если n — натуральное число, то С. ф. x^n определена при всех x, а С. ф. $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ определена при $x \neq 0$.

в) С. ф. $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, где n — нечетное натуральное число, определена и отрицательна при $x < 0$. Однако иногда удобно считать, что и в этом случае С. ф. $x^{1/n}$

определена только при $x \geqslant 0$. Аналогичные соглашения принимаются и для С. ф. $x^{m/n}$, когда m/n — несократимая дробь.

Свойства С. ф. x^a обычно рассматриваются при $x>0$, хотя многие из них справедливы и при $x \leqslant 0$, напр., когда a — натуральное число.

Функции вида $y=cx^a$, где c — постоянный коэффициент, при $a=1$ выражают **прямую пропорциональность** (их графики — прямые, проходящие через начало координат, см. рис. *а*), при $a=-1$ — **обратную пропорциональность** (графики — равносторонние гиперболы с центром в начале координат, имеющие оси координат своими асимптотами, см. рис. *б*). Многие законы физики математически выражаются при помощи функций вида $y=cx^a$ (см. рис. *в*).

С. ф. x^a при $x>0$ непрерывна, монотонна (возрастает, если $a>0$, убывает, если $a<0$), бесконечно дифференцируема и в окрестности каждой точки x_0 может быть разложена в ряд Тейлора. При этом

$$(x^a)' = ax^{a-1},$$

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad \text{при } a \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$x^a = \sum_{n=0}^{\infty} C_a^n x_0^{a-n} (x-x_0)^n$$

при $|x-x_0|<|x_0|$, где C_a^n — биномиальные коэффициенты.

В комплексной области С. ф. z^a определяется для всех $z \neq 0$ формулой

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = e^{a(\ln|z| + i \arg z + 2k\pi i)}, \qquad (*)$$

где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Если a — целое, то С. ф. z^a однозначна:

$$z^a = |z|^a e^{ia \arg z}.$$

Если a — рациональное ($a=p/q$, где p и q взаимно просты), то С. ф. z^a принимает q различных значений:

$$(z^a)_k = |z|^a e^{ia \arg z} \varepsilon_k,$$

где $\varepsilon_k = e^{2k\pi i/q}$ — корни степени q из единицы: $\varepsilon_k^q = 1$ и $k=0, 1, \ldots, q-1$. Если a — иррациональное, то С. ф. z^a — бесконечнозначна: множитель $e^{a2k\pi}$ принимает для разных k различные значения. При комплексных значениях a С. ф. z^a определяется той же формулой (*).

В. И. Битюцков.

СТЕПЕННОЙ ВЫЧЕТ по модулю m — целое число a, для к-рого при заданном целом $n>1$ сравнение

$$x^n \equiv a \pmod m$$

разрешимо. При этом число a наз. **вычетом** степени n по модулю m. Если указанное сравнение не разрешимо, то число a наз. **невычетом** степени n по модулю m. При $n=2$ степенные вычеты и невычеты наз. **квадратичными**, при $n=3$ — **кубическими** и при $n=4$ — **биквадратичными**.

В случае простого модуля $m=p$ вопрос о разрешимости сравнения $x^n \equiv a \pmod p$ может быть выяснен с помощью **критерия Эйлера**: если $q=(n, p-1)$, то для разрешимости сравнения $x^n \equiv a \pmod m$ необходимо и достаточно, чтобы

$$a^{(p-1)/q} \equiv 1 \pmod p,$$

и в случае выполнимости этого условия рассматриваемое сравнение имеет q различных по модулю p решений. Из этого критерия следует, что среди чисел $1, 2, \ldots, p-1$ имеется ровно $(p-1)/q$ вычетов и

$(q-1)(p-1)/q$ невычетов степени n по модулю p. См. *Распределение степенных вычетов и невычетов.*

С. А. Степанов.

СТЕПЕННОЙ РЯД — 1) С. р. по одному комплексному переменному z — функциональный ряд вида

$$s(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k, \qquad (1)$$

где a — центр ряда, b_k — его коэффициенты, $b_k(z-a)^k$ — члены ряда. Существует число r, $0\leqslant r\leqslant\infty$, называемое радиусом сходимости С. р. (1) и определяемое по формуле Коши — Адамара

$$r=\frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|b_k|}}, \qquad (2)$$

такое, что при $|z-a|<r$ ряд (1) абсолютно сходится, а при $|z-a|>r$ — расходится (теорема Коши — Адамара). В связи с этим круг $D=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|<r\}$ на плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z наз. кругом сходимости С. р. (см. рис. 1). В случае $r=0$ круг сходимости вырождается в единственную точку $z=a$, напр. для С. р. $\sum_{k=0}^{\infty} k!\,(z-a)^k$ (этот случай интереса не представляет, и всюду в дальнейшем предполагается, что $r>0$). В случае $r=\infty$ круг сходимости совпадает со всей плоскостью $\mathbb{C}$, напр. для С. р. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(z-a)^k$. Множество сходимости, т. е. совокупность всех точек сходимости С. р. (1), в случае $0<r<\infty$, кроме точек круга сходимости D, может включать все или нек-рые точки, или ни одной точки окружности сходимости $S=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|=r\}$. Круг сходимости в этом случае есть внутренность множества точек абсолютной сходимости С. р.

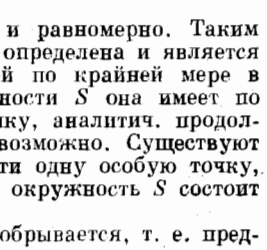


Рис. 1.

Внутри круга D, т. е. на любом компакте $K\subset D$, С. р. (1) сходится абсолютно и равномерно. Таким образом, сумма ряда $s(z)$ определена и является регулярной аналитич. функцией по крайней мере в круге D. При этом на окружности S она имеет по меньшей мере одну особую точку, аналитич. продолжение в к-рую суммы $s(z)$ невозможно. Существуют С. р., имеющие на S в точности одну особую точку, равно как и С. р., у к-рых вся окружность S состоит из особых точек.

В случае $r=\infty$ ряд (1) либо обрывается, т. е. представляет собой многочлен

$$s(z)=\sum_{k=0}^{m} b_k (z-a)^k,$$

либо его сумма $s(z)$ есть целая трансцендентная функция, регулярная во всей плоскости $\mathbb{C}$ и имеющая в бесконечности *существенно особую точку*.

Обратно, само понятие аналитичности функции $f(z)$ в точке a состоит в том, что $f(z)$ в нек-рой окрестности a разлагается в С. р.

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k,$$

к-рый является для $f(z)$ рядом Тейлора, т. е. его коэффициенты определяются формулами

$$b_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

В связи с этим важно свойство единственности С. р.: если сумма $s(z)$ ряда (1) обращается в

нуль на бесконечном множестве $E \subset D$, имеющем предельную точку внутри D, то $s(z) \equiv 0$ и все $b_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$. В частности, если $s(z) = 0$ в окрестности нек-рой точки $z_0 \in D$, то $s(z) \equiv 0$ и все $b_k = 0$. Таким образом, всякий С. р. есть ряд Тейлора для своей суммы.

Пусть наряду с С. р. (1) имеется другой С. р.

$$\sigma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \qquad (3)$$

с тем же центром a и радиусом сходимости $r_1 > 0$. Тогда по крайней мере в круге $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \rho\}$, где $\rho = \min\{r, r_1\}$, имеют смысл сложение, вычитание и умножение С. р. (1) и (3) по формулам:

$$\left.\begin{aligned} s(z) \pm \sigma(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (b_k \pm c_k)(z-a)^k, \\ s(z)\sigma(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} b_n c_{k-n} \right) (z-a)^k. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности справедливы, причем вычитание есть действие, обратное сложению. Таким образом, множество С. р. с положительными радиусами сходимости и фиксированным центром есть кольцо над полем $\mathbb{C}$. Если $c_0 \neq 0$, то возможно и деление С. р.:

$$\frac{s(z)}{\sigma(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-a)^k, \qquad (5)$$

причем коэффициенты d_k однозначно определяются из бесконечной системы уравнений

$$\sum_{n=0}^{k} c_n d_{k-n} = a_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

При $c_0 \neq 0$, $r > 0$ и $r_1 > 0$ радиус сходимости ряда (5) также положительный.

Пусть для простоты в (1) и (3) $a = \sigma(0) = c_0 = 0$. Тогда сложная функция $s(\sigma(z))$ будет регулярной в окрестности начала координат, и процедура разложения ее в С. р. носит название подстановки ряда в ряд:

$$s(\sigma(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \right)^n = \sum_{m=0}^{\infty} g_m z^m. \qquad (6)$$

Коэффициент g_m в (6) получается как сумма одноименных коэффициентов в разложениях каждой из функций $b_n(\sigma(z))^n$, а эти последние разложения получаются путем n-кратного умножения ряда для $\sigma(z)$ самого на себя. Ряд (6) заведомо сходится при $|z| < \rho$, где ρ таково, что $|\sigma(z)| < r$. Пусть опять $a = \sigma(0) = c_0 = 0$ и, кроме того, $c_1 = \sigma'(0) \neq 0$, $w = \sigma(z)$. Задача построения ряда для обратной функции $z = \varphi(w)$, к-рая при указанных условиях регулярна в окрестности начала, наз. обращением ряда (3). Ее решением является ряд Лагранжа:

$$z = \varphi(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\zeta}{\sigma(\zeta)} \right)_{\zeta=0}^{(n)} w^n$$

(о более общей задаче обращения см. в ст. *Бюрмана — Лагранжа ряд*).

Если С. р. (1) сходится в нек-рой точке $z_0 \neq a$, то он абсолютно сходится для всех z таких, что $|z-a| < |z_0-a|$, — в этом состоит первая теорема Абеля. Эта теорема также позволяет установить вид области сходимости С. р. Более тонкий результат представляет собой вторая теорема Абеля: если С. р. (1) сходится в точке $z_0 = a + re^{i\theta_0}$ на окружности сходимости S, то

$$\lim_{\rho \to r} s(a + \rho e^{i\theta_0}) = s(z_0),$$

т. е. сумма ряда $s(z)$ в точке $z_0 \in S$ имеет радиальное граничное значение $s(z_0)$ и, следовательно, непрерывна вдоль радиуса $z = a + \rho e^{i\theta_0}$, $0 \leqslant \rho \leqslant r$; более того, $s(z)$

имеет и угловое граничное значение $s(z_0)$. Эту теорему (1827) можно считать первым крупным результатом в направлении исследования граничных свойств С. р. Обращение второй теоремы Абеля без дополнительных ограничений на коэффициенты С. р. невозможно. Однако, если предположить, напр., что $b_k = o(1/k)$ и существует предел $\lim\limits_{\rho \to r} s(a + \rho e^{i\theta_0}) = s_0$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z_0 - a)^k$ сходится к сумме s_0. Такого рода частичные обращения второй теоремы Абеля получили название *тауберовых теорем*.

Другие результаты о граничных свойствах С. р. и, в частности, о расположении особых точек С. р. см. в статьях *Адамара теорема*, *Аналитическое продолжение*, *Граничные свойства аналитических функций*, *Фату теорема* (см. также [3]—[5]).

2) С. р. по многим комплексным переменным $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $n > 1$, или кратный С. р.— функциональный ряд вида

$$s(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} b_k (z-a)^k = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} b_{k_1 \ldots k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \ldots (z_n - a_n)^{k_n}, \tag{7}$$

где $b_k = b_{k_1 \ldots k_n}$, $(z-a)^k = (z_1 - a_1)^{k_1} \ldots (z_n - a_n)^{k_n}$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — центр ряда, точка комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Областью сходимости D С. р. (7) наз. внутренность множества точек абсолютной сходимости, но при $n > 1$ она не имеет столь простого вида, как при $n = 1$. Область D пространства $\mathbb{C}^n$ тогда и только тогда является областью сходимости нек-рого С. р. (7), когда D — логарифмически выпуклая полная *кратно круговая область* пространства $\mathbb{C}^n$. Если нек-рая точка $z^0 \in D$, то замыкание $\overline{U}(a, r)$ поликруга $U(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_\nu - a_\nu| < r_\nu,\ \nu = 1, \ldots, n\}$, где $r_\nu = |z_\nu^0 - a_\nu|$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$, также принадлежит D и ряд (7) сходится в $\overline{U}(a, r)$ абсолютно и равномерно (аналог первой теоремы Абеля). Поликруг $U(a, r)$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$, наз. поликругом сходимости С. р. (7), если $U(a, r) \subset D$, но в любом несколько большем поликруге $\{z \in \mathbb{C}^n : |z_\nu - a_\nu| < r'_\nu\}$, где $r'_\nu \geqslant r_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, и по крайней мере одно неравенство строгое, имеются точки, в к-рых ряд (7) расходится. Радиусы r_ν поликруга сходимости наз. сопряженными радиусами сходимости С. р. (7), они удовлетворяют соотношению, являющемуся аналогом формулы Коши — Адамара:

$$\lim_{|k| \to \infty} \sup \sqrt[|k|]{|b_k| r^k} = 1,$$

где $|b_k| = |b_{k_1} \ldots b_{k_n}|$, $r^k = r_1^{k_1} \ldots r_n^{k_n}$. Область сходимости D исчерпывается поликругами сходимости. Напр., для ряда $\sum_{k=0}^{\infty} (z_1 z_2)^k$ поликруги сходимости имеют вид

$$U(0, r_1, 1/r_1) = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < r_1,\ |z_2| < 1/r_1\},$$

а область сходимости $D = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| \cdot |z_2| < 1\}$ (на рис. 2 она изображена на абсолютной четверть-плоскости).

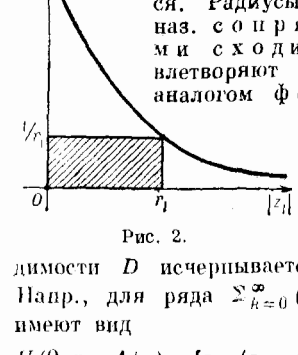


Рис. 2.

Свойство единственности С. р. сохраняется в том смысле, что если $s(z) = 0$ в нек-рой окрестности точки z^0 в $\mathbb{C}^n$ (достаточно даже в $\mathbb{R}^n$, т. е. на множестве $\{z = x + iy \in \mathbb{C}^n : |x - \operatorname{Re} a| < r,\ y = \operatorname{Im} a\}$), то $s(z) \equiv 0$ и все $b_k = 0$.

Действия с кратными С. р. производятся в основном по тем же правилам, что и в случае $n=1$. Другие свойства кратных С. р. см., напр., [8], [9].

3) С. р. по действительным переменным $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $n\geqslant 1$, — функциональный ряд вида

$$s(x)=\sum_{|k|=0}^{\infty} b_k (x-a)^k, \qquad (8)$$

где использованы сокращенные обозначения, как и в (7), $a=(a_1, \ldots, a_n)\in\mathbb{R}^n$ — центр ряда. Если ряд (8) абсолютно сходится в нек-ром параллелепипеде $\Pi=\{x\in\mathbb{R}^n : |x_k-a_k|<r_k,\ k=1, \ldots, n\}$, то он абсолютно сходится и в поликруге $U(a, r)=\{z\in\mathbb{C}^n : |z-a|<r\}$, $r=(r_1, \ldots, r_n)$. При этом сумма ряда $s(x)$, будучи аналитич. функцией действительных переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$ в Π, аналитически продолжается в виде С. р.

$$s(z)=\sum_{|k|=0}^{\infty} b_k (z-a)^k \qquad (9)$$

до аналитич. функции $s(z)$ комплексных переменных $z=x+iy=(z_1=x_1+iy_1, \ldots, z_n=x_n+iy_n)$ в $U(a, r)$. Если D — область сходимости С. р. (9) в пространстве $\mathbb{C}^n$ комплексных переменных $z=x+iy$, то сужение Δ области D на пространство $\mathbb{R}^n$ действительных переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$ является областью сходимости С. р. (8), $\Delta\subset D$. В частности, при $n=1$ область D является кругом сходимости, а его сужением Δ является интервал сходимости на числовой оси $\mathbb{R}$, $\Delta=\{x\in\mathbb{R} : a-r<x<a+r\}$, где r — радиус сходимости.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [3] Титчмарш Е., Теория функций, пер. с англ., М.—Л., 1951; [4] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967; [5] Landau E., Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2 Aufl., B., 1929; [6] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [7] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [8] Бохнер С., Мартин У. Т., Функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1951; [9] Янушаускас А. И., Двойные ряды, Новосиб., 1980.

Е. Д. Соломенцев.

СТЕПЕНЬ — в первоначальном понимании (целая и положительная С.) есть произведение нескольких n раз равных сомножителей. Обозначение: $a^n=\overbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ раз}}$, где a — основание, n — показатель, a^n — степень. Основные действия над С. даются формулами

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m},\ a^n : a^m=a^{n-m},\ (a^n)^m=a^{nm}.$$

Дальнейшие обобщения С.: нулевая $a^0=1$ (при $a\neq 0$); отрицательная $a^{-n}=1/a^n$; дробная $a^{n/m}=\sqrt[m]{a^n}$ и С. с иррациональным показателем $a^\alpha=\lim_{r_n\to\alpha} a^{r_n}$, где r_n — произвольная последовательность рациональных чисел, стремящаяся к α. Рассматриваются С. с комплексным основанием (см. *Муавра формула*) и с комплексными основанием и показателем (по определению: $z^u=e^{u\operatorname{Ln} z}$).

БСЭ-3.

СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ, степень непрерывного отображения $f : (M, \partial M)\to(N, \partial N)$ связных компактных многообразий одинаковой размерности — целое число $\deg f$ такое, что $f_*(\mu_M)=\deg f\cdot\mu_N$, где μ_M, μ_N — *фундаментальные классы* многообразий M и N над кольцом $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_2$, f_* — индуцированное отображение. В случае неориентированных многообразий С. о. однозначно определена по mod2. Если $f : M\to N$ — дифференцируемое отображение замкнутых дифференцируемых многообразий, то $\deg f$ совпадает mod 2 с числом прообразов регулярного значения y отображения f. В случае ориентированных многообразий

$$\deg f=\sum_{x\in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_x,$$

где sign J_x — знак якобиана отображения f в точке x (степень Брауэра).

Для непрерывного отображения $f: \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$ и изолированной точки x в прообразе нуля определено понятие локальной степени $\deg_x f$ в точке x: $\deg_x f = \deg \pi \cdot h$, где h — сужение отображения f на маленькую сферу

$$S^n_\varepsilon = \partial B^n_\varepsilon,\ B^n_\varepsilon \cap f^{-1}(0) = x \in \mathrm{Int} \in B^n_\varepsilon,$$

π — проекция из нуля на единичную сферу. В случае дифференцируемого f справедлива формула

$$|\deg_x f| = \dim Q(f) - 2\dim I,$$

где $Q(f)$ — кольцо *ростков* гладких функций в нуле, профакторизованное по идеалу, порожденному компонентами f, I — идеал факторкольца, максимальный по отношению к свойству $I^2 = 0$. Пусть $J_0 \in Q(f)$ — класс якобиана отображения f, тогда для линейного функционала $\varphi: Q(f) \to R$ такого, что $\varphi(J_0) > 0$, выполнено $\deg_x f = \mathrm{Index} <\ ,\ >_\varphi$, где $\langle p, q\rangle_\varphi = \varphi(p.q)$ — симметричная билинейная форма на $Q(f)$.

Лит.: [1] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976; [2] Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология, пер. с англ., М., 1972; [3] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М., Особенности дифференцируемых отображений, М., 1982; [4] Eisenbud D., Levine H., «Ann. Math.», 1977, v. 106, N. 1, p. 19—38.

А. В. Хохлов.

СТЕПЕНЬ ТОЧКИ $M(x_0, y_0)$ относительно окружности

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

с центром в точке (a, b) — число

$$p = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2.$$

С. т. $p < 0$, если точка M_0 лежит внутри окружности; $p = 0$, если точка M_0 принадлежит окружности; $p > 0$, если точка M_0 лежит вне окружности. С. т. M_0 относительно окружности может быть представлена как произведение векторов $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$, где M_1 и M_2 — точки пересечения окружности с произвольной прямой, проходящей через точку M_0. В частности, С. т. относительно окружности равна квадрату длины касательной, проведенной из точки M_0 к окружности.

Совокупность всех окружностей на плоскости, относительно к-рых данная точка имеет одинаковую степень, составляет *связку* окружностей. Множество точек, имеющих относительно двух неконцентрич. окружностей одинаковую степень, образует радикальную ось.

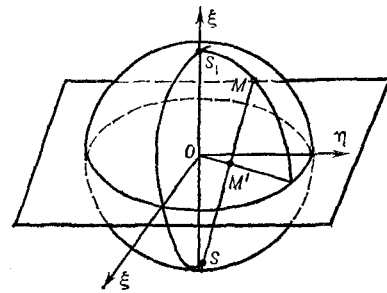
Аналогично определяется С. т. относительно сферы. Совокупность всех сфер, относительно к-рых данная точка имеет одинаковую степень, составляет *сеть* сфер. Совокупность всех сфер, относительно к-рых точки нек-рой прямой (радикальной оси) имеют одинаковую степень (различную для разных точек), составляет *связку* сфер. Совокупность всех сфер, относительно к-рых точки нек-рой плоскости (радикальной плоскости) имеют одинаковую степень (различную для разных точек), составляет *пучок* сфер.

А. Б. Иванов.

СТЕРАДИАН — единица измерения телесного угла. С.— телесный угол, вырезающий на сфере, описанной вокруг вершины угла, поверхность, площадь к-рой равна квадрату радиуса сферы. Полная сфера образует телесный угол, равный 4π. Обозначается *стер*. *БСЭ-3.*

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ — соответствие между точками сферы и плоскости, получаемое следующим образом: из нек-рой точки S на сфере (центра С. п.) другие точки сферы проектируются лучами на плоскость, перпендикулярную радиусу сферы SO (на рис. эта плоскость экваториальная, ее можно

проводить и через конец S_1 диаметра SS_1). При этом каждая точка M на сфере переходит в нек-рую определенную точку M' на плоскости. Если условиться считать, что точке S соответствует бесконечно удаленная точка плоскости, то соответствие точек сферы и плоскости будет взаимно однозначным. Основные свойства С. п.: 1) окружностям на сфере соответствуют окружности на плоскости, причем окружностям, проходящим через центр С. п., соответствуют окружности, проходящие через бесконечно удаленную точку, т. е. прямые; 2) при С. п. углы между линиями сохраняются.



Если точку трехмерного пространства задавать однородными координатами x_1, x_2, x_3, x_4 и считать, что уравнение сферы $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$, а точку плоскости — декартовыми прямоугольными координатами ξ, η, то связь между координатами точек сферы и плоскости задается формулами

$$\sigma x_1=\xi,\ \sigma x_2=\eta,$$

$$\sigma x_3=\frac{1-(\xi^2+\eta^2)}{2},\quad \sigma x_4=\frac{1+(\xi^2+\eta^2)}{2}.$$

Координаты x_1, x_2, x_3, x_4 можно рассматривать как координаты точки на плоскости (*тетрациклические координаты*).

С. п. устанавливает соответствие не только между точками сферы и плоскости, но и между точками вне сферы и окружностями на плоскости. Для точки вне сферы полярная плоскость пересекает сферу по окружности. При С. п. эта окружность переходит в окружность на плоскости, к-рая и рассматривается как С. п. точки вне сферы на плоскость. Координаты точки трехмерного пространства рассматриваются как тетрацикличе. координаты окружности на плоскость. Точкам внутри сферы при С. п. соответствуют мнимые образы на плоскости.

С. п. можно рассматривать и более общо: вместо сферы брать любую поверхность 2-го порядка. Это проектирование называется также *отображением Гессе*.

В многомерном случае С. п.— проекция точек евклидова пространства E_{n+1} на пространство E_n, дополненное одной бесконечно удаленной точкой, из точки P сферы S_n в E_{n+1}, когда P не принадлежит E_n. Все рассуждения и формулы аналогичны приведенным выше.

При помощи С. п. расширенная комплексная плоскость отображается взаимно однозначно и конформно на *Римана сферу*.

Лит.: [1] Клейн Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.—Л., 1939; [2] Blaschke W., Vorlesungen über Differential-Geometrie, Bd 3, B., 1929; [3] Бушманова Г. В., Норден А. П., Элементы конформной геометрии, Казань, 1972.

Г. В. Бушманова.

СТЕРЕОЭДР — выпуклый многогранник правильного разбиения пространства на равные многогранники, т. е. выпуклые фундаментальные области произвольных (федоровских) групп движений. Число различных сетей для правильного разбиения n-мерного пространства, в к-ром С. примыкают по целым граням (сторонам фундаментальных областей), конечно и зависит только от размерности пространства. Для $n=3$ число граней С. не превышает 390. Классификация проведена

(1984) лишь для частных видов С., напр. для *параллелоэдров*.

Лит.: [1] Узоры симметрии, пер. с англ., М., 1980; [2] Делоне Б. Н., Сандакова Н. Н., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 64, с. 28—51.

А. Б. Иванов.

СТЕФАНА ЗАДАЧА — задача, возникающая при исследовании физич. процессов, связанных с фазовым превращением вещества. Простейшая двухфазная С. з. в теплофизич. терминах формулируется следующим образом ([1], [2]): найти распределение температуры $u(x, t)$ и закон движения границы раздела фаз $\xi = \xi(t)$ (напр., границы «лед—вода» внутри замерзающей воды) из уравнения теплопроводности:

$$c_1\rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при $0 < x < \xi(t)$, $t > 0$,

$$c_2\rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при $\xi(t) < x < +\infty$, $t > 0$,

граничного условия

$$u(0, t) = u_1 = \text{const} < T, \quad t > 0,$$

начального условия

$$u(x, 0) = u_2 = \text{const} > T, \quad x \geqslant 0,$$

и условия на границе замерзания

$$u(\xi(t) - 0, t) = u(\xi(t) + 0, t), \quad t > 0,$$

$$\lambda\rho_1 \frac{d\xi(t)}{dt} = k_1 \frac{\partial u(\xi(t) - 0, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(\xi(t) + 0, t)}{\partial x},$$

$$t > 0, \quad \xi(0) = 0,$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты теплопроводности, c_1 и c_2 — удельные теплоемкости, ρ_1 и ρ_2 — плотности твердой и соответственно жидкой фаз, λ — скрытая теплота плавления, отнесенная к единице массы, T — температура замерзания. Эта задача имеет автомодельное решение $u = u(xt^{-1/2})$, $\xi(t) = \alpha t^{1/2}$, $\alpha = \text{const} > 0$.

Достаточно общая постановка С. з. в пространственно трехмерном случае сводится к краевой задаче для квазилинейного параболич. уравнения 2-го порядка с кусочно непрерывными коэффициентами, терпящими разрывы 1-го рода на заранее неизвестных и подлежащих определению поверхностях, на к-рых задается значение искомой функции и, кроме того, удовлетворяющих дифференциальному *Стефана условию*. Исследовались (см. [3]—[6]) существование и единственность классического и обобщенного решений С. з.; о методах приближенного решения С. з. см. [2], [4], [6].

Такого типа задачу одним из первых исследовал И. Стефан [1].

Лит.: [1] Stefan J., «Sitzungsber. Wien. Akad. Math. naturwiss», 1890, Bd 98, Abth. 2^a, S. 473—84; [2] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972; [3] Олейник О. А., «Докл. АН СССР», 1960, т. 135, № 5, с. 1054—57; [4] Будак Б. М., Успенский А. Б., «Ж. вычисл. матем. и матем физ.», 1969, т. 9, № 6, с. 1299—315; [5] Будак Б. М., Москал М. З., «Докл. АН СССР», 1970, т. 191, № 4, с. 751—54; [6] Будак Б. М., Васильев Ф. П., Успенский А. Б., Численные методы в газовой динамике, М., 1965, с. 139—83.

Ф. П. Васильев.

СТЕФАНА ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА — задача, заключающаяся в том, чтобы по заданному закону движения границы раздела фаз (см. *Стефана задача*) восстановить закон изменения граничных условий или коэффициентов уравнения. Напр., найти поток $q(t) = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x}$ из условий:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi(t), \quad 0 < t \leqslant T,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \xi_0; \quad u(\xi(t) - 0, t) = \mu(t),$$

$$\gamma(t) \frac{d\xi(t)}{dt} = -\frac{\partial u(\xi(t) - 0, t)}{\partial x}; \quad \xi(0) = \xi_0 > 0,$$

где $\varphi(x)$, $\mu(t)$, $\gamma(t) \geqslant \gamma_0 > 0$, $\xi(t)$ — заданные функции. Для приближенного решения такой задачи часто используется вариационный подход (см. [1]).

Лит.: [1] Будак Б. М., Васильева В. Н., Решения задач Стефана, М., [1971], с. 65—86. *Ф. П. Васильев.*

СТЕФАНА УСЛОВИЕ — условие, описывающее закон движения границы, разделяющей две различные фазы вещества, и выражающее собой закон сохранения энергии при фазовых превращениях. Напр., граница раздела между твердой и жидкой фазами вещества при затвердевании (или при плавлении) в одномерном случае может быть описана функцией $\xi = \xi(t)$, связанной с распределением температуры $u(x, t)$ посредством С. у.:

$$\lambda\rho_1 \frac{d\xi}{dt} = k_1 \frac{\partial u(\xi(t)-0, t)}{\partial x} - k_2 \frac{\partial u(\xi(t)+0, t)}{\partial x}, \quad t > 0,$$

(об обозначениях см. *Стефана задача*). За время Δt затвердевает (или расплавляется) масса

$$\rho_1 \Delta\xi = \rho_1 [\xi(t+\Delta t) - \xi(t)].$$

Выделяющееся при этом количество тепла $\lambda\rho_1\Delta\xi$ равно разности количеств тепла, прошедших через границы $\xi(t)$ и $\xi(t+\Delta t)$:

$$\lambda\rho_1\Delta\xi = \left[k_1 \frac{\partial u(\xi(t)-0, t)}{\partial x} - k_2 \frac{\partial u(\xi(t+\Delta t)+0, t+\Delta t)}{\partial x}\right]\Delta t.$$

Отсюда при $\Delta t \to 0$ получается С. у. Кроме того, на границе раздела фаз $\xi = \xi(t)$ температура предполагается непрерывной и ее значение принимается равной известной температуре плавления.

Аналогичные условия на неизвестных границах, встречающиеся при исследовании нек-рых других процессов и вытекающие из законов сохранения, также принято называть С. у. (см. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; задача со свободными границами).

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972.
Ф. П. Васильев.

СТЕФАНА — БОЛЬЦМАНА ЗАКОН: полная испускательная способность u абсолютно черного тела пропорциональна 4-й степени его абсолютной температуры T:

$$u = \sigma T^4,$$

где $\sigma = (5{,}67032 \pm 0{,}00071) \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4) (постоянная Стефана — Больцмана). Этот закон получен эмпирически из анализа экспериментальных данных Й. Стефаном (J. Stefan, 1879), выведен термодинамическим путем Л. Больцманом (L. Boltzmann, 1884). *А. Б. Иванов.*

СТЕФФЕНСЕНА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — форма записи интерполяционного многочлена, получающегося из *Стирлинга интерполяционной формулы* по узлам x_0, x_0+h, x_0-h, ..., x_0+nh, x_0-nh в точке $x = x_0 + th$:

$$L_{2n}(x_0+th) = f_0 + tf_0' + \frac{t^2}{2!} f_0^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!} f_0^{2n-1} + \frac{t^2(t^2-1)\ldots[(t^2-(n-1)^2]}{(2n)!} f_0^{2n},$$

с помощью соотношений

$$f_0^{2k-1} = \frac{1}{2}(f_{1/2}^{2k-1} + f_{-1/2}^{2k-1}), \quad f_0^{2k} = f_{1/2}^{2k-1} - f_{-1/2}^{2k-1}.$$

После приведения подобных членов С. и. ф. записывается в виде

$$L_{2n}(x) = L_{2n}(x_0+th) = f_0 + \frac{t(t+1)}{2!} f_{1/2}' - \frac{t(t-1)}{2!} f_{1/2}' + \ldots$$

$$\ldots + \frac{t(t^2-1)\cdot\ldots\cdot[t^2-(n-1)^2](t+n)}{(2n)!} f_{1/2}^{2n-1} -$$

$$- \frac{t(t^2-1)\cdot\ldots\cdot[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!} f_{-1/2}^{2n-1}.$$

Лит.: [1] Корн Г., Корн Т., Справочник по математике для научных работников и инженеров, [пер. с англ.], М., 1973.

М. К. Самарин.

СТИЛТЬЕСА ИНТЕГРАЛ — обобщение понятия *Римана интеграла*, реализующее идею интегрирования функции $f(x)$ относительно другой функции $u(x)$. Пусть функции $f(x)$ и $u(x)$ определены и ограничены на $[a, b]$ и $a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b_n$. Сумму вида

$$\sigma=f(\xi_1)[u(x_1)-u(x_0)]+\ldots+f(\xi_i)[u(x_i)-u(x_{i-1})]+\ldots \\ \ldots+f(\xi_n)[u(x_n)-u(x_{n-1})], \qquad (1)$$

где $x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, наз. интегральной суммой Стилтьеса. Число I наз. пределом интегральных сумм (1) при $\max\limits_i\Delta x_i\to 0$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что при $\max\Delta x_i<\delta$ справедливо неравенство $|\sigma-I|<\varepsilon$. Если существует конечный предел I интегральных сумм (1) при $\max\limits_i\Delta x_i\to 0$, то функцию $f(x)$ наз. интегрируемой по функции $u(x)$ на $[a, b]$, а указанный предел — интегралом Стилтьеса (или интегралом Римана — Стилтьеса) от функции $f(x)$ по функции $u(x)$ и обозначают

$$I=\int_a^b f(x)\,du(x); \qquad (2)$$

функция $u(x)$ наз. при этом интегрирующей. Т. Стилтьес [1] пришел к идее такого интеграла, рассматривая положительное «распределение масс» на прямой, заданное возрастающей функцией $u(x)$, точки разрыва к-рой соответствуют массам, «сконцентрированным в одной точке».

Интеграл Римана представляет собой частный случай С. и., когда в качестве интегрирующей функции $u(x)$ взята функция $x+C$, где $C=\text{const}$.

В случае, когда интегрирующая функция $u(x)$ монотонно возрастает, рассматривают верхнюю и нижнюю суммы Дарбу — Стилтьеса:

$$S=\sum_{i=1}^n M_i[u(x_i)-u(x_{i-1})], \\ s=\sum m_i[u(x_i)-u(x_{i-1})], \qquad (3)$$

где M_i и m_i — точные верхняя и нижняя грани $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$.

Для существования С. и. достаточно выполнение одного из условий: 1) функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а функция $u(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$; 2) функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ в смысле Римана, а функция $u(x)$ удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица, т. е. $|u(x_1)-u(x_2)|\leqslant C|x_1-x_2|$, где $C=\text{const}$, для любых x_1 и x_2 из $[a, b]$; 3) функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ в смысле Римана, а функция $u(x)$ представима на $[a, b]$ в виде интеграла с переменным верхним пределом

$$u(x)=C+\int_a^x g(t)\,dt,$$

где $g(t)$ абсолютно интегрируема на $a\leqslant t\leqslant b$.

При выполнении условий 3) интеграл (2) сводится к интегралу Римана по формуле

$$\int_a^b f(x)\,du(x)=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx. \qquad (4)$$

В частности, равенство (4) имеет место в случае, если $u(x)$ имеет ограниченную и интегрируемую в смысле Римана на $[a, b]$ производную $u'(x)$, в этом случае $g(x)=u'(x)$.

Если функция $u(x)$ интегрируема по функции $f(x)$ на $[a, b]$, то и функция $f(x)$ интегрируема по $u(x)$ на этом отрезке. Это утверждение позволяет получить ряд дополнительных условий существования С. и.

С. и. обладает свойством линейности как относительно интегрируемой, так и относительно интегрирующей функции (при условии существования каждого из С. и. в правой части):

$$\int_a^b [\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)]\,du(x) =$$
$$= \alpha \int_a^b f_1(x)\,du(x)+\beta \int_a^b f_2(x)\,du(x).$$

$$\int_a^b f(x)\,d[\alpha u_1(x)+\beta u_2(x)] =$$
$$= \alpha \int_a^b f(x)\,du_1 x+\beta \int_a^b f(x)\,du_2(x).$$

Свойством аддитивности С. и., вообще говоря, не обладает: из существования обоих интегралов $\int_a^c f(x)du(x)$ и $\int_c^b f(x)du(x)$ не следует существование интеграла $\int_b^a f(x)du(x)$ (обратное утверждение при $a<c<b$ вместе с тем справедливо).

Если $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, так что $m\leqslant f(x)\leqslant M$, а $u(x)$ монотонно возрастает на $[a, b]$, то найдется μ, удовлетворяющее неравенствам $m\leqslant\mu\leqslant M$, такое, что для С. и. справедлива формула среднего значения

$$\int_a^b f(x)\,du(x)=\mu\,[u(b)-u(a)]. \qquad (5)$$

В частности, если дополнительно предположить непрерывность $f(x)$ на $[a, b]$, то найдется точка $\xi\in[a, b]$ такая, что $\mu=f(\xi)$.

С. и. $\int_a^b f(x)du(x)$, где $u(x)$ имеет ограниченную вариацию, дает общий вид линейного непрерывного функционала $F(f)$ на пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций (теорема Рисса).

В случае, когда функция $u(x)$ имеет ограниченную вариацию, значение С. и. совпадает со значением соответствующего *Лебега — Стилтьеса интеграла*.

Лит.: [1] Stieltjes Th. J., Recherches sur les fractions continues, P., 1894; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959; [3] Гливенко В. И., Интеграл Стильтьеса, М.—Л., 1936.

В. А. Ильин.

СТИЛТЬЕСА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F(x)=\int_0^\infty \frac{f(x)}{x+t}\,dt. \qquad (*)$$

С. п. возникает при итерировании *Лапласа преобразования* и является частным случаем преобразования свертки.

Одна из формул обращения: если функция $f(t)\sqrt{t}$ непрерывна и ограничена на $(0, \infty)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2\pi}\left(\frac{e}{n}\right)^{2n}[x^{2n}F^{(n)}(x)]^{(n)}=f(x)$$

на $x\in(0, \infty)$.

С. п. обобщенное имеет вид

$$F(x)=\int_0^\infty f(t)\,\frac{dt}{(x+t)^\rho},$$

где ρ — комплексное число.

С. п. интегрированное имеет вид:

$$F(x)=\int_{+0}^\infty K(x, t)\,f(t)\,dt,$$

где

$$K(x, t)=\begin{cases}\dfrac{\ln\frac{x}{t}}{x-t}, & t\neq x\\ 1/x, & t=x.\end{cases}$$

С. п. введены и для обобщенных функций. Преобразование (*) рассмотрено Т. Стилтьесом (T. Stieltjes, 1894—95).

Лит.: [1] Widder D. V., The Laplace transform, N. Y. — L., 1946; [2] Boas R. P., Widder D. V., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1939, v. 45, p. 1—72; [3] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.—Л., 1948; [4] Брычков Ю. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования обобщенных функций, М., 1977.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

СТИНРОДА АЛГЕБРА — градуированная алгебра A_p над полем $\mathbb{Z}_p$ стационарных *когомологических операций* $\mathrm{mod}p$. Для любого пространства (*спектра пространств*) X группа $H^*(X;\mathbb{Z}_p)$ является модулем над С. а. A_p. С. а. мультипликативно порождается *Стинрода операциями*. Так, С. а. A_2 является градуированной ассоциативной алгеброй, мультипликативно порожденной символами Sq^i и $\deg Sq^i=i$, подчиненными соотношениям Адема:

$$Sq^aSq^b=\sum_t \binom{b-t-1}{a-2t} Sq^{a+b-t}Sq^t,$$

$a<2b$, так что аддитивный базис (над $\mathbb{Z}_2$) С. а. A_2 состоит из операций $Sq^{i_1},\ldots,Sq^{i_r}$, $i_k\geqslant 2i_{k+1}$ (т. н. базис Картана — Серра). Аналогичное верно и для A_p с $p>2$. Далее,

$$(A_p)^i\cong H^{i+n}(K(\mathbb{Z}_p,n);\mathbb{Z}_p),\quad n\gg i,$$

где $K(\mathbb{Z}_p,n)$ — *Эйленберга — Маклейна пространство*. Умножение

$$K(\mathbb{Z}_p,m)\wedge K(\mathbb{Z}_p,n)\longrightarrow K(\mathbb{Z}_p,m+n)$$

задает в С. а. диагональ $\Delta: A_p\to A_p\otimes A_p$, являющуюся гомоморфизмом алгебр и, следовательно, превращающую A_p в *Хопфа алгебру*.

Лит.: [1] Стинрод Н., Эпстейн Д., Когомологические операции, пер. с англ., М., 1983; [2] Milnor J., «Ann. Math.», 1958, v. 67, p. 150—71; [3] Мошер Р., Тангора М., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970.

Ю. Б. Рудяк.

СТИНРОДА ДВОЙСТВЕННОСТЬ — изоморфизм p-мерных гомологий компактного подмножества A сферы S^n ($n-p-1$)-мерным когомологиям дополнения (гомологии и когомологии в размерности нуль — приведенные). Рассмотрена Н. Стинродом [1]. В случае когда A — открытый или замкнутый подполиэдр, аналогичный изоморфизм известен как *Александера двойственность*, а для любого открытого подмножества A — как *Понтрягина двойственность*. Изоморфизм

$$H_p^c(A;G)=H^{n-p-1}(S^n\setminus A;G)$$

имеет место и для произвольного подмножества A (двойственность Ситникова); здесь H_p^c — гомологии с компактными носителями Стинрода — Ситникова, а H^q — когомологии Александрова — Чеха. Двойственность Александера — Понтрягина — Стинрода — Ситникова — простое следствие двойственности Пуанкаре — Лефшеца и точной последовательности пары. Она справедлива не только для S^n, но и для любого многообразия, ацикличного в размерностях p и $p+1$.

Лит: [1] Steenrod N., «Ann. Math.», 1940, v. 41, p. 833—51; [2] Ситников К. А., «Докл. АН СССР», 1951, т. 81, с. 359—62; [3] Скляренко Е. Г., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 6, с. 90—118; [4] Масси У., Теория гомологий и когомологий, пер. с англ., М., 1981.

Е. Г. Скляренко.

СТИНРОДА ЗАДАЧА — задача реализации циклов сингулярными многообразиями; поставлена Н. Стинродом (N. Steenrod, см. [1]). Пусть M — замкнутое ориентированное многообразие (топологическое, кусочно линейное, гладкое и т. д.), и пусть $[M]\in H_n(M)$ — его ориентация (здесь $H_n(M)$ — n-мерная *гомологий группа* многообразия M). Любое непрерывное отображение $f: M\to X$ задает элемент $f_*[M]\in H_n(X)$. С. з. состоит в описании тех гомологич. классов из X, называемых реализуемыми, к-рые получаются

таким способом, т. е. имеют вид $f_*[M]$ для нек-рых M из данного класса. Все элементы групп $H_1(X)H_2(X)$ реализуются. Любой элемент группы $H_n(X)$, $n\neq 3$ реализуется, но уже нек-рым отображением *Пуанкаре комплекса* P. Кроме того, любой цикл можно реализовать псевдомногообразием. Можно также рассматривать неориентированные многообразия.

Так, для гладких M С. з. состоит в описании образа гомоморфизма $\Omega_n(X)\to H_n(X)$, где $\Omega_n(X)$ — группа ориентированных *бордизмов* пространства. Открытая Р. Томом (R. Thom, [2]) связь бордизмов Ω_* с *Тома пространствами* $MSO(k)$ прояснила С. з., сведя ее к изучению отображений $H^*(MSO(k))\to H^*(X)$. Был указан нереализуемый класс $x\in H_7(X)$, где X — *Эйленберга — Маклейна пространство* $K(\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_3, 1)$. Для любого класса x нек-рые его кратные nx реализуются (гладкими многообразиями).

Лит.: [1] Eilenberg S., «Ann. Math.», 1949, v. 50, p. 247—60; [2] Том Р., в сб.: Расслоенные пространства и их приложения, пер. с франц., М., 1958, с. 293—351; [3] Коннер П., Флойд Э., Гладкие периодические отображения, пер. с англ., М., 1969; [4] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973. *Ю. Б. Рудяк.*

СТИНРОДА КВАДРАТ — стационарная (стабильная) *когомологическая операция* Sq^i, $i\geqslant 0$, типа $(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$, повышающая размерность на i. Это означает, что для каждого натурального n и каждой пары топологич. пространств (X, Y) задан такой гомоморфизм

$$Sq^i: H^n(X, Y; \mathbb{Z}_2)\longrightarrow H^{n+i}(X, Y; \mathbb{Z}_2),$$

что $\delta Sq^i = Sq^i\delta$, где δ — когранничный гомоморфизм $\delta: H^q(Y; \mathbb{Z}_2)\to H^{q+1}(X, Y; \mathbb{Z}_2)$ (стационарность) и $f^*Sq^i = Sq^i f^*$ для любого непрерывного отображения $f: (X, Y)\to(X', Y')$ (естественность). С. к. Sq^i обладает следующими свойствами:

1) $Sq^0 = id$;

2) $Sq^1 = \beta$, где β — гомоморфизм Бокштейна, ассоциированный с короткой точной последовательностью групп коэффициентов $0\to\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_4\to\mathbb{Z}_2\to 0$;

3) если $i = \dim x$, то $Sq^i x = x^2$;

4) если $i > \dim x$, то $Sq^i x = 0$;

5) (формула Картана) $Sq^i(xy) = \Sigma_{j=0}^{i}(Sq^j x)\times(Sq^{i-j}y)$;

6) (соотношения Адема) при $a < 2bSq^a Sq^b = \sum_{t=0}^{\left[\frac{a}{2}\right]}\binom{b-t-1}{a-2t}_2 Sq^{a+b-t}Sq^t$, где $(:)_2$ — биномиальные коэффициенты mod 2.

В формуле Картана умножение можно считать как внешним ($\times$-умножением), так и внутренним ($\cup$-умножением). Она равносильна утверждению, что отображение $Sq: H^*(X; \mathbb{Z}_2)\to H^*(X; \mathbb{Z}_2)$, определенное формулой

$$Sqx = x + Sq^1 x + \ldots + Sq^{n-1}x + x^2,\ x\in H^n(X; \mathbb{Z}_2),$$

является гомоморфизмом колец. Из условия стационарности вытекает, что С. к. Sq^i перестановочны с *надстройкой* и *трансгрессией*.

Операции Sq^i однозначно характеризуются свойствами 1), 3), 4), к-рые поэтому можно принять за определяющие их аксиомы. Конструктивное определение операций Sq^i основывается на симплициальной структуре в группах цепей $C_*(X)$ и на существовании диагонального отображения $\Delta: X\to X\times X$. Пусть W — минимальный ациклический свободный цепной $\mathbb{Z}_2$-комплекс, т. е. цепной комплекс, для к-рого

$$W_i = \mathbb{Z}[e_i, Te_i],\ de_i = e_{i-1} + (-1)^i Te_{i-1},$$

где T — образующая группы $\mathbb{Z}_2$. Методом ацикличных носителей или явным построением (см. [4]) доказывается существование такого эквивариантного цепного отображения

$$\varphi: W\otimes C_*(X)\longrightarrow C_*(X)\otimes C_*(X),$$

что

$$\varphi:(e_i\otimes\sigma)\in C_*(\sigma\otimes\sigma)\subset C_*(X)\otimes C_*(X)=C_*(X\times X)$$

для любого симплекса $\sigma\in C_*(X)$ (символом $C_*(\sigma\otimes\sigma)$ здесь обозначен наименьший подкомплекс цепного комплекса $C_*(X)\otimes C_*(X)$, содержащий элемент $\sigma\otimes\sigma$). Пусть $i\geqslant 0$. Любым двум коцепям $u\in C^p(X)$, $v\in C^q(X)$ ставится в соответствие формулой $(u\cup_i v)(\sigma)=(u\otimes v)(\varphi(e_i\otimes\sigma))$ для любого симплекса $\sigma\in C_{p+q-i}(X)$ коцепь $u\cup_i v\in C^{p+q-i}(X)$, наз. их $\cup_i$-произведением. Для когранницы этой коцепи имеет место формула

$$\delta(u\cup_i v)=(-1)^i\,\delta u\cup_i v+(-1)^{i+p}u\cup_i\delta v+$$
$$+(-1)^{i+1}u\cup_{i-1}v+(-1)^{pq+1}v\cup_{i-1}u,$$

из к-рой следует, что формула $Sq^{p-i}\{u\}=\{u\cup_i u\}$ корректно определяет нек-рый гомоморфизм

$$Sq^{p-i}:H^p(X;\ \mathbb{Z}_2)\longrightarrow H^{2p-i}(X;\ \mathbb{Z}_2),$$

к-рый не зависит от выбора отображения φ.

Аналогичным образом операции Sq^i строятся и в других симплициальных структурах с диагональным отображением, напр. в когомологиях симплициальных абелевых групп, симплициальных алгебр Ли и т. п. Однако при этом сохраняются не все свойства С. к. Sq^i (напр., вообще говоря, $Sq^0\neq id$) и единой общей теории обобщенных операций Sq^i до сих пор (1984) нет (см. [5], [6]).

Через С. к. и их аналоги при $p>2$ (см. *Стинрода приведенная степень*) выражаются многие когомологич. операции, действующие в группах когомологий с коэффициентами в группах $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_p$. Это определяет основополагающую роль, к-рую С. к. играют в алгебраич. топологии и ее приложениях. Напр., группы *бордизмов* вычисляются с помощью С. к.

С. к. введен Н. Стинродом [4].

Лит.: [1] Стинрод Н., Эпстейн Д., Когомологические операции, пер. с англ., М., 1983; [2] Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л., Гомотопическая топология, 2 изд., М., 1969; [3] Мошер Р. Э., Тангора М. К., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970; [4] Steenrod N. E., «Ann. Math.», 1947, v. 48, p. 290—320; [5] Epstein D., «Invent. Math.», 1966, v. 1, № 2, p. 152—208; [6] May J., в кн.: The Steenrod algebra and its applications, B.—N. Y., 1970; [7] «Математика», 1961, т. 5, № 2, с. 3—11, 11—30, 30—49, 50—102.

С. Н. Малыгин, М. М. Постников.

СТИНРОДА ОПЕРАЦИЯ — общее название для стационарных *когомологических операций*, построенных Н. Стинродом (см. [1]) для каждого простого p. Для $p=2$ это — *Стинрода квадрат* Sq^i, для $p>2$ — *Стинрода приведенная степень* $\mathcal{P}^i$. Операции Sq^i мультипликативно порождают *Стинрода алгебру* mod2, а операции $\mathcal{P}^i$ вместе с гомоморфизмом Бокштейна мультипликативно порождают алгебру Стинрода mod p.

Лит.: [1] Стинрод Н., «Математика», 1958, т. 2, в. 6, с. 11—48; [2] Стинрод Н., Эпстейн Д., Когомологические операции, пер. с англ., М., 1983; [3] Мошер Р., Тангора М., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970.

Ю. Б. Рудяк.

СТИНРОДА ПРИВЕДЕННАЯ СТЕПЕНЬ — стационарная *когомологическая операция* $\mathcal{P}^i$, $i\geqslant 0$, типа $(\mathbb{Z}_p,\ \mathbb{Z}_p)$, где p — фиксированное нечетное простое число, являющееся аналогом mod$p$ *Стинрода квадрата*, и представляющая собой гомоморфизм

$$\mathcal{P}^i:H^n(X,\ Y;\ \mathbb{Z}_p)\longrightarrow H^{n+2i(p-1)}(X,\ Y;\ \mathbb{Z}_p),$$

определенный для каждой пары топологич. пространств $(X,\ Y)$ и любого натурального n. С. п. с. обладает следующими свойствами (кроме естественности $f^*\mathcal{P}^i=\mathcal{P}^i f^*$ и стационарности $\delta\mathcal{P}^i=\mathcal{P}^i\delta$, где δ: $H^q(Y;\ \mathbb{Z}_p)\to$ $\to H^{q+1}(X,\ Y;\ \mathbb{Z}_p)$ когранничный гомоморфизм):

1) $\mathcal{P}^0=id$;

2) если $2i=\dim x$, то $\mathcal{P}^i x=x^p$;

3) если $2i>\dim x$, то $\mathcal{P}^i x=0$;

4) (формула Картана) $\mathcal{P}^i(x, y)=\sum_{j=0}^{i}(\mathcal{P}^j x)\times$ $\times(\mathcal{P}^{i-j}x)$;

5) (соотношения Адема)

$$\mathcal{P}^a\mathcal{P}^b=\sum_{t=0}^{\left[\frac{p}{p}\right]}(-1)^{a+t}\binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt}_p\mathcal{P}^{a+b-t}$$

при $a<pb$,

$$\mathcal{P}^a\beta\mathcal{P}^b=\sum_{t=0}^{\left[\frac{a}{p}\right]}(-1)^{a+t}\binom{(p-1)(b-t)}{a-pt}_p\times$$

$$\times\beta\mathcal{P}^{a+b-t}\mathcal{P}^t+\sum_{t=0}^{\left[\frac{a-1}{p}\right]}(-1)^{a+t-1}\times$$

$$\times\binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt-1}_p\mathcal{P}^{a+b-t}\beta\mathcal{P}^t \text{ при } a\leqslant pb,$$

где β — гомоморфизм Бокштейна, ассоциированный с короткой точной последовательностью групп коэффициентов $0\to\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}_{p^2}\to\mathbb{Z}_p\to 0$, а $(:)_p$ — биномиальные коэффициенты, приведенные по mod p.

Эти свойства аналогичны соответствующим свойствам квадратов Стинрода, при этом операции $\mathcal{P}^i$ соответствует операция Sq^{2i}. Так же, как и для квадратов Стинрода, умножение в 4) можно считать как внешним ($\times$-умножением), так и внутренним ($\cup$-умножением). С. п. с. перестановочны с *надстройкой* и *трансгрессией*.

Свойства 1) —3) однозначно характеризуют $\mathcal{P}^i$, а конструктивно они строятся аналогично квадратам Стинрода с помощью минимального ациклического свободного цепного $\mathbb{Z}_p$-комплекса W.

Лит.: [1] Стинрод Н., Эпстейн Д., Когомологические операции, пер. с англ., М., 1983; [2] «Математика», 1961, т. 5, № 2, с. 3—11, 11—30, 30—49, 50—102.

С. Н. Малыгин, М. М. Постников.

СТИНРОДА — ЭЙЛЕНБЕРГА АКСИОМЫ — основные свойства групп гомологий (когомологий), однозначно определяющих рассматриваемую теорию гомологий (когомологий). На нек-рой категории пар (X, A) топологич. пространств задана аксиоматическая теория гомологий, если при любом целом q каждой паре (X, A) сопоставлена абелева группа (или модуль над нек-рым кольцом) $H_q(X, A)$, а каждому отображению $f:(X, A)\to(Y, B)$ — гомоморфизм $f_*: H_q(X, A)\to H_q(Y, B)$ таким образом, что выполнены следующие аксиомы:

1) f_* — тождественный изоморфизм, если f — тождественный гомеоморфизм;

2) $(gf)_*=g_*f_*$, где $g:(Y, B)\to(Z, C)$;

3) определены связывающие гомоморфизмы ∂: $H_q(X, A)\to H_{q-1}(A)$, причем $\partial f_*=f_*\partial$ (здесь $A=(A, \varnothing)$, $\varnothing$ — пустое множество, а определяемое f отображение $A\to B$ обозначено через f);

4) аксиома точности: гомологическая последовательность $\ldots\to H_{q+1}(X, A)\xrightarrow{\partial}H_q(A)\xrightarrow{i_*}$ $H_q(X)\xrightarrow{j_*}H_q(X, A)\xrightarrow{\partial}H_{q-1}(A)\to\ldots$, где $i: A\subset X$, $j: X\subset(X, A)$ — естественные вложения, точна, т. е. ядро каждого следующего гомоморфизма совпадает с образом предыдущего;

5) аксиома гомотопии: $f_*=f'_*$ для гомотопных в категории отображений $f, f': (X, A)\to$ $\to(Y, B)$;

6) аксиома вырезания: если замыкание в X открытого в X подмножества U содержится во внутренности A, а вложение $i: (X\setminus U, A\setminus U)\subset(X, A)$ принадлежит категории, то i_* — изоморфизмы;

7) аксиома размерности: $H_q(P)=0$ при $q\neq 0$ для любого одноточечного P. Группа $H_0(P)$ наз. обычно группой коэффициентов. Двойственным образом определяются аксиоматич. когомологии (отоб-

ражениям f соответствуют гомоморфизмы $f^*: H^q(Y, B) \to H^q(X, A)$; связывающие гомоморфизмы имеют вид $\partial: H^q(A) \to H^{q+1}(X, A)$). В категории компактных полиэдров обычные гомологии и когомологии являются единственными аксиоматич. теориями с данной группой коэффициентов (теорема единственности). В категории всех полиэдров теорема единственности справедлива при дополнительном требовании, что гомологии (когомологии) объединения открыто-замкнутых попарно не пересекающихся подпространств естественно изоморфны прямой сумме гомологий (прямому произведению когомологий) подпространств (аксиома аддитивности Милнора). Имеется аксиоматич. описание гомологий и когомологий и в более общих категориях топологич. пространств (см. [2], [3]). *Обобщенные теории когомологий* удовлетворяют всем С.-Э. аксиомам (кроме размерности), но не определяются ими однозначно.

Лит.: [1] Стинрод Н., Эйленберг С., *Основания алгебраической топологии*, пер. с англ., М., 1958; [2] Петкова С. В., «Матем. сб.», 1973, т. 90, № 4, с. 607—24; [3] Масси У., Теория гомологий и когомологий, пер. с англ., М., 1981.

Е. Г. Скляренко.

СТИРАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ — см. в ст. *Устранимое множество.*

СТИРЛИНГА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — полусумма *Гаусса интерполяционной формулы* для интерполирования вперед по узлам x_0, x_0+h, x_0-h, . . ., x_0+nh, x_0-nh в точке $x=x_0+th$

$$G_{2n}(x_0+th) = f_0 + f'_{1/2}t + f_0^2\frac{t(t-1)}{2!} + \ldots +$$
$$+ f_0^{2n}\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}$$

и формулы Гаусса того же порядка для интерполирования назад по узлам x_0, x_0-h, x_0+h, . . ., x_0-nh, x_0+nh

$$G_{2n}(x_0+th) = f_0 + f'_{-1/2}t + f_0^2\frac{t(t+1)}{2!} + \ldots +$$
$$+ f_0^{2n}\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t+n)}{(2n)!}.$$

С использованием обозначения

$$f_0^{2k-1} = \frac{1}{2}\left[f_{1/2}^{2k-1} + f_{-1/2}^{2k-1}\right]$$

С. и. ф. имеет следующий вид:

$$L_{2n}(x) = L_{2n}(x_0+th) = f_0 + tf'_0 + \frac{t^2}{2!}f_0^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}f_0^{2n-1} + \frac{t^2(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2]}{(2n)!}f_0^{2n}.$$

При малых t С. и. ф. является более точной по сравнению с другими интерполяционными формулами.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966.

М. К. Самарин.

СТИРЛИНГА ФОРМУЛА — асимптотическое представление, позволяющее находить приближенные значения факториалов $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ и гамма-функции при больших значениях n и имеющее вид:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\theta(n)}, \qquad (*)$$

где $|\theta(n)| < \frac{1}{12n}$. Имеют место асимптотич. равенства

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n},\ n \to \infty,$$
$$\Gamma(z+1) \approx \sqrt{2\pi z}\, z^z e^{-z},\ \mathrm{Re}\, z \to +\infty,$$

означающие, что при $n \to \infty$ или $\mathrm{Re}\, z \to +\infty$ отношение левой и правой частей стремится к единице.

Представление (*) получено Дж. Стирлингом (J. Stirling, 1730).

Е. Д. Соломенцев.

СТОКСА ТЕОРЕМА — теорема, устанавливающая связь между потоком векторного поля через ориентированную поверхность с *циркуляцией этого поля по* краю поверхности.

Л. Д. Кудрявцев.

СТОКСА ФОРМУЛА — 1) формула, выражающая связь между потоком векторного поля через двумерное ориентированное многообразие и циркуляцию этого поля по соответствующим образом ориентированному краю этого многообразия. Пусть S — ориентированная кусочно гладкая поверхность, $\nu = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичная нормаль к поверхности S (в тех точках, конечно, где она существует), задающая ориентацию S, и пусть край поверхности S состоит из конечного числа кусочно гладких контуров. Через ∂S обозначен край поверхности S, ориентированный с помощью единичного касательного к нему вектора τ так, чтобы получающаяся ориентация края ∂S была согласована с ориентацией ν поверхности S.

Если $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$ — непрерывно дифференцируемое в окрестности поверхности S векторное поле, то

$$\iint_S (\operatorname{rot} \boldsymbol{a}, \nu)\, dS = \int_{\partial S} (\boldsymbol{a}, \tau)\, ds \qquad (*)$$

(dS — элемент площади поверхности S, ds — дифференциал длины дуги края ∂S поверхности S) или, в координатном виде:

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \int_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Предложена Дж. Стоксом (G. Stokes, 1854). 2) С. ф. наз. также обобщение формулы (*), представляющее собой равенство интеграла от внешнего дифференциала дифференциальной формы ω по ориентированному компактному многообразию M и интеграла от самой формы ω по ориентированному согласованно с ориентацией многообразия M краю ∂M многообразия M:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Частными случаями этой формулы являются *Ньютона — Лейбница формула*, *Грина формула*, *Остроградского формула*. *Л. Д. Кудрявцев.*

СТОКСА ЯВЛЕНИЕ — свойство функции $f(z)$ иметь различные асимптотические выражения при $|z| \to \infty$ в различных областях комплексной плоскости z. Дж. Стокс показал [1], что решение $w_0(z)$ т. н. уравнения Эйри:

$$w'' - zw = 0,$$

убывающее при действительных $z = x \to +\infty$, имеет асимптотику при $|z| \to \infty$:

$$w_0(z) \sim Cz^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right),$$

$$|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon < \pi;$$

$$w_0(z) \sim Ce^{i\pi/4} z^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3} z^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$|\arg z - \pi| \leqslant \varepsilon < \pi,$$

где $C \neq 0$ — постоянная; функция $w_0(z)$ — целая, а ее асимптотика — разрывная функция.

С. я. имеет место для интегралов Лапласа, решений обыкновенных дифференциальных уравнений и т. д. (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Stokes G. G., «Trans. Cambridge Phil. Soc.», 1864, v. 10, p. 106—28; [2] Хединг Дж., Введение в метод фазовых интегралов (Метод ВКБ), пер. с англ., М., 1965; [3] Брёйн де Н. Г., Асимптотические методы в анализе, пер. с англ., М., 1961. *М. В. Федорюк.*

СТОУНА ПРОСТРАНСТВО булевой алгебры $\mathcal{B}$ — вполне несвязное бикомпактное пространство (X, τ), поле всех открыто-замкнутых множеств к-рого изоморфно $\mathcal{B}$. Это пространство канонически определяется по $\mathcal{B}$ следующим образом: X есть множество всех *ультрафильтров* $\mathcal{B}$, а топология τ порождена семействои подмножеств вида $\{\xi \in X : A \in \xi\}$, где A — произвольный

элемент $\mathcal{B}$. Вместо ультрафильтров можно использовать множества максимальных идеалов, двузначных гомоморфизмов, двузначных мер на $\mathcal{B}$ с соответствующей топологией. Изоморфные булевы алгебры имеют гомеоморфные С. п. Каждое вполне несвязное бикомпактное пространство есть С. п. булевой алгебры своих открыто-замкнутых множеств.

Понятие С. п. и основные его свойства найдены и исследованы М. Стоуном (M. Stone, 1934—37, см. [1]).

С. п. булевой алгебры метризуемо тогда и только тогда, когда она счетна. Булева алгебра полна тогда и только тогда, когда ее С. п. экстремально несвязно (т. е. замыкание любого открытого множества в нем открыто). Канторово совершенное множество есть С. п. счетной безатомной бесконечной булевой алгебры (все они изоморфны). Канторов обобщенный дисконтинуум D^m есть С. п. свободной булевой алгебры с m образующими.

Лит.: [1] Сикорский Р., Булевы алгебры, пер. с англ., М., 1969.

В. И. Малыхин.

СТОУНА РЕШЕТКА — дистрибутивная решетка L с псевдодополнениями (см. *Решетка с дополнениями*), в к-рой $a^* \vee a^{**} = 1$ для всех $a \in L$. Дистрибутивная решетка L с псевдодополнениями является С. р. тогда и только тогда, когда теоретико-структурное объединение двух ее различных минимальных простых идеалов совпадает с L (теорема Гретцера — Шмидта, [3]).

С. р., рассматриваемая как универсальная алгебра с основными операциями $\langle \vee, \wedge, ^*, 0, 1 \rangle$, наз. алгеброй Стоуна. Всякая алгебра Стоуна является подпрямым произведением двухэлементных и трехэлементных цепей. В решетке с псевдодополнениями элемент x наз. плотным, если $x^* = 0$. Центр $C(L)$ решетки Стоуна L — булева алгебра, а множество $D(L)$ всех ее плотных элементов — дистрибутивная решетка с единицей. При этом гомоморфизм φ^L решетки $C(L)$ в решетку $F(D(L))$ фильтров решетки $D(L)$, определяемый условием

$$a\varphi^L = \{x \mid x \in D(L),\ x \geqslant a^*\},$$

сохраняет 0 и 1.

Тройкой, ассоциированной с алгеброй Стоуна L, наз. тройка $\langle C(L), D(L), \varphi^L \rangle$. Естественным образом определяются гомоморфизмы и изоморфизмы троек. Произвольная тройка $\langle C, D, \varphi \rangle$, где C — булева алгебра, D — дистрибутивная решетка с 1, а $\varphi\colon C \to F(D)$ — гомоморфизм, сохраняющий 0 и 1, изоморфна тройке, ассоциированной с нек-рой алгеброй Стоуна; алгебры Стоуна изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны ассоциированные с ними тройки (теорема Чена — Гретцера, [2]).

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория решеток, пер. с англ., М., 1984; [2] Chen C. C., Grätzer G., «Canad. J. Math.», 1969, v. 21, № 4, p. 884—903; [3] Grätzer G., Schmidt E. T., «Acta math. Acad. sci. hung.», 1957, v. 8, fasc. 3—4, p. 455—60; [4] Фофанова Т. С., в кн.: Упорядоченные множества и решетки, в. 3, Саратов, 1975, с. 22—40.

Т. С. Фофанова.

СТОУНА — ЧЕХА БИКОМПАКТНОЕ РАСШИРЕНИЕ — наибольшее бикомпактное расширение βX вполне регулярного топологич. пространства X. Построено Э. Чехом [1] и М. Стоуном [2].

Пусть $\{f_\alpha : X \to [0,1]\}_{\alpha \in A}$ — множество всех непрерывных функций $X \to [0,1]$. Отображение $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^A$, где $\varphi(x)_\alpha = f_\alpha(x)$, является гомеоморфизмом на свой образ. Тогда, по определению, $\beta X = [\varphi(X)]$ (где $[\cdot]$ — операция замыкания). Для любого бикомпактного расширения bX существует непрерывное отображение $\beta X \to bX$, тождественное на X, что и выражается эпитетом «наибольшее».

С.—Ч. б. р. квазинормального пространства совпадает с его *Уолмена бикомпактным расширением.*

Лит.: [1] Čech E., «Ann. Math.», 1937, v. 38, p. 823—44; [2] Stone M., «Trans. Amer. Soc.», 1937, v. 41, p. 375—

481; [3] Engelking R., Outline of general topology, Amst., 1968; [4] Александров П. С., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 2, с. 25—95.

И. Г. Кошевникова.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ — метод решения класса задач статистич. оценивания, в к-ром новое значение оценки представляет собой поправку к уже имеющейся оценке, основанную на новом наблюдении. Первая процедура С. а. была предложена в 1951 Х. Роббинсом (H. Robbins) и С. Монро (S. Monre).

Пусть каждое измерение $Y_n(X_n)$ функции $R(x)$, $x\in\mathbb{R}^1$, в точке X_n содержит случайную ошибку с нулевым средним. Процедура С. а. Роббинса—Монро для нахождения корня уравнения $R(x)=\alpha$ имеет вид

$$X_{n+1}=X_n+a_n(Y_n(X_n)-\alpha). \qquad (1)$$

Если $\sum a_n=\infty$, $\sum a_n^2<\infty$, функция $R(x)$, напр., убывает, $|R(x)|$ растет не быстрее, чем линейная функция, а случайные ошибки независимы, то X_n стремится к корню x_0 уравнения $R(x)=\alpha$ с вероятностью 1 и в среднем квадратическом (см. [1], [2]). Из (1) видно, что процедура С. а. рекуррентна, т. е. получение нового значения оценки возможно без запоминания старых измерений Y_n, и удобна, когда неизвестно заранее, в какой момент потребуется представление оценки — она формируется непрерывно на основании наблюдений, имеющихся к данному моменту. Эти черты сближают С. а. с рекуррентными фильтрами и обусловливают популярность С. а. в теоретических и прикладных работах. Процедура (1) непосредственно обобщается на многомерный случай.

Другая процедура С. а., применимая для нахождения точки максимума функции регрессии $R(x)$, принадлежит Дж. Киферу (J. Kiefer) и Дж. Вольфовицу (J. Wolfowitz). Пусть $Y_n(x)$ — наблюдение в точке x. Тогда процедура С. а. Кифера — Вольфовица имеет вид

$$X_{n+1}-X_n=[Y_n(X_n+C_n)-Y_n(X_n-C_n)]/2C_n. \qquad (2)$$

Доказывается, что X_n сходится к точке максимума $x_{\max}$ функции $R(x)$, если, напр., $R'(x)(x-x_{\max})<0$ при $x\neq x_{\max}$, функция регрессии и дисперсия случайных ошибок растут не слишком быстро при $|x|\to\infty$ и выполнены условия

$$a_n>0,\ \sum c_n=\infty,\ c_n>0,$$
$$\sum a_nc_n<\infty,\ \sum a_n^2/c_n^2<\infty,\ c_n\to 0.$$

Процедура С. а. Кифера — Вольфовица также допускает многомерное обобщение: вместо правой части в (2) следует подставить приближенное значение градиента функции $Y_n(x)$.

Процедуры С. а. естественным образом обобщаются на непрерывный процесс наблюдений. Напр., если процесс наблюдений возмущается гауссовским белым шумом, то аналог процедуры (1) имеет вид

$$dX(t)=a(t)\,dY(t),$$

где

$$dY(t)=R(X(t))\,dt+\sigma(X(t),t)\,dw(t)$$

— дифференциал наблюдаемого процесса, $w(t)$ — *винеровский процесс*. Условия сходимости непрерывных процедур аналогичны приведенным выше условиям для дискретного времени (см. [2]). Основным инструментом доказательства сходимости процедур С. а. является теорема о сходимости неотрицательных супермартингалов (см. *Мартингал*).

Изучалось предельное поведение при соответствующей нормировке разности X_n-x_0 при $n\to\infty$. Пусть в (1)

$$a_n=an^{-1},\ Y_n(X_n)=R(X_n)+G(n,X_n,\omega)$$

и $X_n\to x_0$ почти наверное при $n\to\infty$. При нек-рых

ограничениях, основными из к-рых являются требования

$$R'(x_0) < 0,\ aR'(x_0) + \frac{1}{2} < 0,$$

$$\mathsf{E}G^2(n, x, \omega) \longrightarrow S_0$$

при $n \to \infty$, $x \to x_0$, доказывается асимптотич. нормальность с параметрами 0, $a^2S|(-2aR'(x_0)-1)$ величины $Z_n = \sqrt{n}(X_n - x_0)$. Наименьшая дисперсия предельного распределения достигается при $a_0 = -[R'(x_0)]^{-1}$. Такой выбор a невозможен, т. к. функция $R(x)$ и ее производная неизвестны наблюдателю. Однако в ряде работ построены адаптивные процедуры, в к-рых $a = a(n)$ зависит от наблюдений и приближается к a_0 при $n \to \infty$. Эти процедуры обладают асимптотически оптимальными в смысле асимптотич. дисперсии свойствами.

Результаты об асимптотич. нормальности известны и в многомерном случае. Пусть все корни матрицы

$$A = a\frac{\partial R}{\partial x}(x_0) + \frac{1}{2}I$$

имеют отрицательные действительные части (I — единичная матрица),

$$\mathsf{E}G(n, x, \omega)\, G^*(n, x, \omega) = S(n, x) \longrightarrow S_0$$

при $n \to \infty$, $x \to x_0$ и $X_n \to x_0$ почти наверное, и выполнены нек-рые другие не слишком ограничительные условия. Тогда вектор $Z_n = \sqrt{n}(X_n - x_0)$ асимптотически нормален с нулевым средним и ковариационной матрицей

$$S = a^2 \int_0^\infty \exp(At)\, S_0 \exp(A^*t)\, dt.$$

Приведенный выше результат об асимптотически оптимальной процедуре Роббинса — Монро также обобщен на многомерный случай. Доказано, что случайный процесс Z_n сходится к гауссовскому марковскому процессу в логарифмич. масштабе. При нек-рых условиях доказана сходимость моментов случайной величины X_n к моментам предельного закона.

Процедуры типа С. а. удобны в непараметрич. ситуации, т. к. они применимы при наличии скудной априорной информации о функции регрессии. Однако они применимы и для оценки параметра θ плотности $f(x, \theta)$ по независимым наблюдениям $X_1, \ldots, X_n$ с этой плотностью. При нек-рых ограничениях рекуррентная процедура

$$\theta_{n+1} - \theta_n = \frac{1}{n} I^{-1}(\theta_n)\, \mathrm{grad}_\theta \ln f(X_{n+1}, \theta_n)$$

($I(\theta)$ — *информационная матрица* Фишера плотности f) является состоятельной и асимптотически эффективной рекуррентной оценкой параметра θ. Аналогичная процедура возможна и в случае непрерывного времени.

Изучалось поведение процедур С. а. в случае, когда функция регрессии имеет несколько нулей (несколько точек экстремума), различные модификации и обобщения процедур С. а.

Лит.: [1] Вазан М., Стохастическая аппроксимация, пер. с англ., М., 1972; [2] Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З., Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание, М., 1972; [3] Цыпкин Я. З., Адаптация и обучение в автоматических системах, М., 1968; [4] его же, Основы теории обучающих систем, М., 1970. *Р. З. Хасьминский.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — математическая дисциплина, изучающая взаимоотношения между геометрией и теорией вероятностей. С. г. развилась из классич. *интегральной геометрии* и задач о *геометрических вероятностях* с привнесением идей и методов теории случайных процессов, в особенности теории точечных процессов.

Одним из основных понятий С. г. является понятие процесса геометрич. элементов (геометрич. процесса)

в нек-ром «основном» пространстве X; геометрич. процессы определяются как точечные процессы на многообразиях, представляющих пространство соответствующих элементов. Так, процессы прямых на плоскости определяются как точечные процессы на листе Мёбиуса (последний представляет пространство прямых на $\mathbb{R}^2$). Рассматриваются также процессы d-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, процессы выпуклых фигур в $\mathbb{R}^n$, случайные мозаики в $\mathbb{R}^n$ (последние можно рассматривать как процессы выпуклых многогранников, в реализациях к-рых с вероятностью 1 внутренности многогранников не пересекаются, а объединение их замыканий дают все $\mathbb{R}^n$) и т. д.

Более общим понятием являются процессы многообразий; здесь С. г. смыкается с теорией случайных множеств (см. [1]).

Другой особенностью, выделяющей С. г. из теории случайных множеств, является интерес С. г. к геометрич. процессам с распределениями, инвариантными относительно групп, действующих в основном пространстве X. Характерным результатом в этом направлении является следующий (см. [2]). Рассматривается класс процессов прямых на $\mathbb{R}^2$, обладающих конечной интенсивностью и инвариантных относительно группы евклидовых движений плоскости. Процесс наз. н е о с о б е н н ы м, если его распределение Палма абсолютно непрерывно относительно (безусловного) распределения процесса. Все неособенные процессы прямых суть дважды стохастические пуассоновские (т. е. пуассоновские, управляемые случайной мерой). Для точечных полей в $\mathbb{R}^n$ это не имеет места.

Ряд столь же неожиданных свойств других геометрич. процессов, инвариантных относительно групп, было обнаружено с помощью аппарата комбинаторной интегральной геометрии (см. [3]). Способом усреднения комбинаторных разложений по пространству реализаций процесса был получен, напр., следующий результат (см. [3]). Рассматривается случайное множество U на $\mathbb{R}^2$, представляющее собой объединение областей из нек-рого процесса выпуклых областей, инвариантного относительно евклидовой группы. Пусть U — черное множество, его дополнение — белое. Альтернирующий процесс черных и белых интервалов, индуцируемый множеством U на прямой Ox, наз. черно-рекуррентным, если:

а) белые интервалы a_i составляют независимый процесс восстановления;

б) тройки $(b_i,\ a_i,\ \beta_i)$, где b_i — длина i-го черного интервала, a_i, β_i — углы пересечения Ox с ∂U на концах b_i, для разных i независимы.

При общих предположениях эргодичности и существования нек-рых моментов, а также при отсутствии прямолинейных участков на ∂U, из черно-рекуррентности следует, что длина белого интервала распределена экспоненциально.

Важное значение в С. г. имеет развитое здесь понятие «типичного» элемента данного геометрич. процесса. Рассматриваются задачи об описании распределений, удовлетворяющих различным условиям «типичных» k-подмножеств элементов в геометрич. процессах (пример такой задачи: найти распределение евклидово инвариантных характеристик «типичного» треугольника с вершинами в реализациях точечного процесса, причем требуется, чтобы внутренность треугольника содержала бы l точек из реализации). Решение таких задач получено для пуассоновских процессов. Подобные задачи возникают, напр., в астрофизике.

Задачи т. н. стереологии также относятся к С. г., если они ставятся для процессов геометрич. фигур. (В стереологии требуется описать многомерный образ по его сечениям прямыми или плоскостями меньшего числа измерений.) Здесь имеются результаты по стереологии первой и второй моментной меры.

Выше были затронуты лишь наиболее характерные задачи, т. к. границы С. г. вряд ли можно точно определить. К С. г. примыкают следующие области: геометрич. статистика [4], теория (случайных) множеств дробной размерности [5], математич. морфология и анализ изображений [6].

Лит.: [1] Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия, пер. с англ., М., 1978; [2] Harding E. F., Kendall D. G., Stochastic geometry, N. Y., 1974; [3] Ambartzumian R. V., Combinatorial integral geometry, N. Y., 1982; [4] Ripley B. D., Spatial statistics, N. Y.—[a. o.], 1981; [5] Mandelbrot B. B., Fractals: Form, chance and dimension, S. F., 1977; [6] Serra J., Image analysis and mathematical morphology, N. Y., 1982.

Р. В. Амбарцумян.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ (вероятностная, статистическая) — зависимость между случайными величинами, к-рая выражается в изменении условных распределений любой из величин при изменении значений других величин. Виды С. з. многообразны: если случайные величины не являются взаимно независимыми, то им в той или иной степени свойственна С. з. Одним из наиболее общих типов С. з. является корреляционная зависимость (см. *Корреляция, Регрессия*). Из конкретных видов С. з. наиболее изучена марковская зависимость (см. *Маркова цепь, Марковский процесс, Марковское свойство*).

См., кроме того, *Случайный процесс, Стационарный случайный процесс.*

А. В. Прохоров.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ИГРА — *динамическая игра*, у к-рой переходная функция распределения не зависит от предыстории игры, т. е.

$$F(x_k \mid x_1, s^{(x_1)}, \ldots, x_{k-1}, s^{(x_{k-1})}) = F(x_k \mid x_{k-1}, s^{(x_{k-1})}).$$

С. и. были впервые определены Л. Шепли [1], к-рый рассматривал антагонистич. С. и. с интегральным выигрышем (игры Шепли). В играх Шепли как множество X состояний игры, так и множества элементарных стратегий игроков конечны и, кроме того, на любом шаге при любом выборе игроками альтернатив имеется ненулевая вероятность окончания партии. Вследствие последнего условия, партия с вероятностью 1 заканчивается за конечное число шагов, и математич. ожидание выигрыша каждого из игроков конечно. Любая такая игра обладает значением и оба игрока имеют стационарные оптимальные стратегии, т. е. стратегии, в к-рых выбор игроком элементарной стратегии в каждом состоянии игры зависит лишь от текущего состояния. Им же была указана процедура, дающая возможность найти как значение игры, так и оптимальные стратегии.

Рассматривались также С. и., отличающиеся от игр Шепли возможностью бесконечных партий, с предельным средним выигрышем, т. е. антагонистич. С. и. с

$$h_1(P) = -h_2(P) = \lim_{n\to\infty} \sup \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} h_i(x_k, s^{(x_k)}).$$

Было показано существование значения такой игры и стационарных оптимальных стратегий в предположении эргодичности марковской цепи, возникающей при подстановке в переходные функции $F(x_k|x_{k-1}, s^{(x_{k-1})})$ любых стационарных стратегий. Эти результаты обобщались как в направлении снятия ограничений на число состояний и элементарных стратегий, так и на случай иных форм выигрышей.

Лит.: [1] Shapley L. S., «Proc. Nat. Acad. Sci.», 1953, v. 39, p. 1095—1100; [2] Gillette D., в кн.: Contributions to the theory of games, v. 3, Princeton (N. J.), 1957, p. 179—87.

В. К. Доманский.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МАТРИЦА — квадратная (возможно, бесконечная) матрица $P = \|p_{ij}\|$ с неотрицательными элементами такими, что

$$\sum_j p_{ij} = 1 \text{ при любом } i.$$

Множество всех С. м. n-го порядка представляет собой выпуклую оболочку n^n С. м., составленных из нулей и единиц. Любую С. м. P можно рассматривать как *переходных вероятностей матрицу* цепи Маркова $\xi^P(t)$ с дискретным временем.

Абсолютные величины собственных значений С. м. не превосходят единицы; единица является собственным значением любой С. м. Если С. м. P неразложима (цепь Маркова $\xi^P(t)$ имеет один положительный класс состояний), то единица является простым собственным значением матрицы P (т. е. имеет кратность 1); в общем случае кратность собственного значения 1 совпадает с числом положительных классов цепи Маркова $\xi^P(t)$. Если С. м. неразложима и положительный класс состояний цепи Маркова имеет период d, то множество всех собственных значений матрицы P, как множество точек комплексной плоскости, переходит в себя при повороте на угол $2\pi/d$. При $d=1$ С. м. P и цепь Маркова $\xi^P(t)$ наз. н е п е р и о д и ч е с к и м и.

Левые собственные векторы $\pi=\{\pi_j\}$ С. м. P конечного порядка, соответствующие единичному собственному значению:

$$\pi_j=\sum_i \pi_i p_{ij} \text{ при всех } j, \qquad (1)$$

и удовлетворяющие условиям $\pi_j\geqslant 0$, $\sum_j \pi_j=1$, определяют стационарные распределения цепи Маркова $\xi^P(t)$; в случае неразложимой С. м. P стационарное распределение единственно.

Если P — неразложимая непериодическая С. м. конечного порядка, то существует

$$\lim_{n\to\infty} P^n=\Pi, \qquad (2)$$

где Π — матрица, каждая строка к-рой совпадает с вектором π (см. также *Маркова цепь эргодическая*; для бесконечных С. м. P система уравнений (1) может не иметь ненулевых решений, удовлетворяющих условию $\sum_j \pi_j<\infty$; в этом случае матрица Π — нулевая). Скорость сходимости в (2) можно оценить геометрич. прогрессией с любым показателем ρ, к-рый по модулю больше всех собственных значений матрицы P, отличных от 1.

Если $P=\|p_{ij}\|$ — С. м. n-го порядка, то любое ее собственное значение λ удовлетворяет неравенству (см. [3]):

$$|\lambda-\omega|\leqslant 1-\omega, \text{ где } \omega=\min_{1\leqslant i\leqslant n} p_{ii}.$$

Описано множество M_n, являющееся объединением множеств собственных значений всех С. м. n-го порядка (см. [4]).

С. м. $P=\|p_{ij}\|$, удовлетворяющая дополнительному условию

$$\sum_i p_{ij}=1 \text{ при всех } j,$$

наз. д в а ж д ы с т о х а с т и ч е с к о й м а т р и ц е й. Множество дважды стохастич. матриц n-го порядка представляет собой выпуклую оболочку $n!$ перестановочных матриц n-го порядка (т. е. дважды стохастич. матриц, составленных из нулей и единиц). Стационарное распределение конечной цепи Маркова $\xi^P(t)$ с дважды стохастич. матрицей P является равномерным.

Лит.: [1] Г а н т м а х е р Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967; [2] Б е л л м а н Р., Введение в теорию матриц, пер. с англ., М., 1969; [3] М а р к у с М., М и н к Х., Обзор по теории матриц и матричных неравенств, пер. с англ., М., 1972; [4] К а р п е л е в и ч Ф. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1951, т. 15, с. 361—83.

А. М. Зубков.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ — свойство выборочных функций случайного процесса. Случайный процесс $X(t)$, заданный на нек-ром множестве $T\subseteq\mathbb{R}^1$,

наз. стохастически непрерывным на этом множестве, если для любого $\varepsilon>0$ при всех $t_0\in T$

$$\lim_{t\to t_0}\mathsf{P}\{\rho[X(t),\ X(t_0)]>\varepsilon\}=0,$$

где ρ — расстояние между точками в соответствующем пространстве значений процесса $X(t)$.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973. *А. В. Прохоров.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ НЕРАЗЛИЧИМОСТЬ — свойство двух случайных процессов $X=(X_t(\omega))_{t\geqslant 0}$ и $Y=(Y_t(\omega))_{t\geqslant 0}$, означающее, что случайное множество

$$\{X\neq Y\}=\{(\omega,\ t): X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)\}$$

является пренебрежимым, т. е. вероятность множества $\{\omega:\ \exists t\geqslant 0$, что $(\omega,\ t)\in\{X\neq Y\}\}$ равна нулю. Если X и Y стохастически неразличимы, то $X_t=Y_t$ (для всех $t\geqslant 0$, т. е. X и Y — стохастически эквивалентны). Обратное, вообще говоря, неверно, но для процессов непрерывных справа (слева) из стохастич. эквивалентности следует С. н.

Лит.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975. *А. Н. Ширяев.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ, ограниченность по вероятности,— свойство случайного процесса $X(t)$, $t\in T$, к-рое выражается условием: для произвольного $\varepsilon>0$ существует такое $C>0$, что при всех $t\in T$

$$\mathsf{P}\{|X(t)|>C\}<\varepsilon.$$ *А. В. Прохоров.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность случайных величин $X=(X_n)_{n\geqslant 1}$, заданная на измеримом пространстве $(\Omega,\mathcal{F})$, с выделенным на нем неубывающим семейством σ-алгебр $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$, $\mathcal{F}_n\subseteq\mathcal{F}$, обладающих свойством согласованности (адаптированности): X_n при каждом $n\geqslant 1$ $\mathcal{F}_n$-измеримы. Для записи таких последовательностей часто используется обозначение $X=(X_n,\ \mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$, подчеркивающее измеримость X_n относительно $\mathcal{F}_n$. Типичными примерами С. п., заданных на вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$, являются марковские последовательности, *мартингалы*, *семимартингалы* и др. В случае непрерывного времени (когда дискретное время $n\geqslant 1$ заменяется на $t\geqslant 0$) соответствующая совокупность объектов $X=(X_t,\ \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ наз. стохастическим процессом. *А. Н. Ширяев.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ СХОДИМОСТЬ — то же, что *сходимость по вероятности*.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ — отношение эквивалентности между случайными величинами, *различающимися лишь на множестве нулевой вероятности*. Точнее, случайные величины X_1 и X_2, заданные на одном вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$, наз. стохастически эквивалентными, если $\mathsf{P}\{X_1=X_2\}=1$. В большинстве задач теории вероятностей имеют дело не с самими случайными величинами, а с классами эквивалентных случайных величин.

Случайные процессы $X_1(t)$ и $X_2(t)$, $t\in T$, определенные на одном вероятностном пространстве, наз. стохастически эквивалентными, если при любом $t\in T$ имеет место С. э. между соответствующими случайными величинами: $\mathsf{P}\{X_1(t)=X_2(t)\}=1$. По отношению к случайным процессам $X_1(t)$ и $X_2(t)$, у к-рых совпадают *соответственные конечномерные распределения*, применим также термин «С. э.» в широком смысле. *А. В. Прохоров.*

СТОХАСТИЧЕСКИЙ БАЗИС — полное вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathsf{P})$ с выделенным на нем неубывающим семейством $\mathbb{F}=(\mathcal{F})_{t\geqslant 0}$ под-σ-алгебр $\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}$, удовлетворяющих (т. н. обычным) условиям:

1) непрерывность справа, $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}\ (=\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s)$, $t\geqslant 0$,

2) пополненность, т. е. $\mathcal{F}_t$ содержит все подмножества из $\mathcal{F}$ P-нулевой меры. Для С. б. используют также обозначения $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathsf{P})$ или $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$.

А. Н. Ширяев.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ — вычислительный алгоритм, включающий операции со случайными числами, вследствие чего результат вычисления является случайным. Стохастическими являются алгоритмы *статистического моделирования*, используемые для численного исследования случайных процессов и явлений, и алгоритмы *Монте-Карло метода* для решения детерминированных задач: вычисления интегралов, решения интегральных уравнений, краевых задач и т. д.

Особый класс С. в. а. составляют рандомизированные вычислительные процедуры интерполяционных и квадратурных формул со случайными узлами. Рандомизация здесь обычно производится так, чтобы математич. ожидание результата вычисления по С. в. а. равнялось искомой величине. Окончательная оценка строится путем осреднения результатов нескольких реализаций С. в. а. (о погрешности и трудоемкости таких оценок см. в статье *Монте-Карло метод*). Для задач большой размерности рандомизация может дать существенную экономию памяти времени ЭВМ (см. [1]—[4]). Это показывают, в частности, оценки трудоемкости рандомизированного метода конечных сумм для решения интегральных уравнений 2-го рода (см. [4]). Особенно эффективны такие С. в. а. при использовании многопроцессорных вычислительных систем, к-рые позволяют строить одновременно несколько реализаций алгоритма.

Специальные С. в. а. строятся для реализации случайного поиска глобального экстремума функции многих переменных (см. [5]). Такие алгоритмы сравнительно эффективны, если значение функции определяется со случайной погрешностью.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., т. 1, М., 1975; [2] Ермаков С. М., Метод Монте-Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975; [3] Соболь И. М., Численные методы Монте-Карло, М., 1973; [4] Михайлов Г. А., Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло, Новосиб., 1974; [5] Растригин Л. А., Статистические методы поиска, М., 1968.

Г. А. Михайлов.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ — случайная функция интервала dX, определяемая формулой

$$(dX)\, I = X_t - X_s,\ I = (s,\ t],$$

для каждого процесса $X = (X_t, \mathcal{F}_t, \mathsf{P})$ из класса семимартингалов S, рассматриваемых на стохастич. базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$. В семействе С. д. $dS = \{dX : X \in S\}$ вводятся: аддитивная (А), мультипликативная (М) операции и операция умножения (Р) соответственно по формулам:

(А) $$dX + dY = d(X+Y)$$

(М) $(\Phi dX)\ (s,\ t) = \int_s^t \Phi\, dX$ (стохастический интеграл, где Φ — локально ограниченный процесс, согласованный с потоком $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$),

(Р) $$dX \cdot dY = d(XY) - X dY - Y dX.$$

При этом оказывается, что

$$(dX \cdot dY)\ (s,\ t] = \underset{|\Delta|\to 0}{\text{l.i.p.}} \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}),$$

где $\Delta = (s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t)$ — произвольное разбиение интервала $(s,\ t]$, l. i. p. — предел по вероятности, $|\Delta| = \max |t_i - t_{i-1}|$.

В стохастическом исчислении важное место принадлежит правилу «дифференцирования» случайных функций, или формуле Ито: если $X', \ldots, X^n \in S$ и функция $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in C^2$, то процесс

$$Y = f(X', \ldots, X^n) \in S$$

и

$$df(X', \ldots, X^n) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f \cdot dX^i + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} \partial_i \partial_j f \cdot dX^i dX^j, \qquad (1)$$

где ∂_i частная производная по i-й координате. В частности, из (1) выводится, что если $X \in S$, то

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-})\, dX_s + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_{s-})\, d\langle X\rangle^c + \sum_{0<s\leqslant t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - \\ - f'(X_{s-})\, \Delta X_s], \qquad (2)$$

где X^c — непрерывная мартингальная составляющая X, $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$.

Формуле (2) можно придать следующий вид:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-})\, dX_s + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_{s-})\, d[X, X]_s + \sum_{0<s\leqslant t} [f(X_s) - \\ - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\, \Delta X_s - \frac{1}{2} f''(X_{s-})\, (\Delta X_s)^2],$$

где $[X, X]$ — квадратическая вариация X.

Лит.: [1] Itô K., Watanabe Sh., Introduction to *stochastic differential equations*, в кн.: *Proc. of Intern., Symp.* SDE Kyoto, 1976, N. Y.— [a. o], 1978, p. I—XXX; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982. *А. Н. Ширяев.*

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл «$\int H dX$» по *семимартингалу* X, определенный для всякого предсказуемого процесса локально ограниченного $H = (H_t, \mathcal{F}_t)$. Одна из возможных конструкций С. и. состоит в следующем. Сначала С. и. определяется для простых предсказуемых процессов H, имеющих вид

$$H_t = h(\omega)\, I_{(a,\, b]}(t), \quad a < b.$$

В этом случае под С. и. $\int_0^t H_s\, dX_s$ (или $(H \cdot X)_t$, или $\int_{(t,0]} H_s dX_s$) понимают величину

$$h(\omega)\, (X_{b \wedge t} - X_{a \wedge t}).$$

Отображение $H \rightsquigarrow H \cdot X$, где

$$H \cdot X = (H \cdot X)_t, \quad t \geqslant 0,$$

допускает продолжение (обозначаемое $H \cdot X$) на множество всех ограниченных предсказуемых функций, обладающее следующими свойствами:

а) процесс $(H \cdot X)_t$, $t \geqslant 0$, является непрерывным справа и имеющим пределы слева;

б) $H \rightsquigarrow H \cdot X$ линейно, т. е.

$$(cH_1 + H_2) \cdot X = c\, (H_1 \cdot X) + H_2 \cdot X;$$

в) если $\{H^n\}$ — последовательность предсказуемых равномерно ограниченных функций, H — предсказуемая функция и

$$\sup_{s \leqslant t} |\, H_s^n - H_s\, | \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad t > 0,$$

то

$$(H^n \cdot X)_t \xrightarrow{\mathsf{P}} (H \cdot X)_t, \quad t > 0.$$

При этом продолжение $H \cdot X$ единственно в том смысле, что если $H \rightsquigarrow \alpha(H)$ — другое отображение со свойствами а) — в), то $H \cdot X$ и $\alpha(H)$ стохастически неразличимы.

Определение

$$(H \cdot X)_t = h(\omega)\, (X_{b \wedge t} - X_{a \wedge t}),$$

данное для функций $H_t = h(\omega)\, I_{(a,b]}(t)$, имеет смысл для любого процесса X, а не только для семимартингала. Продолжение $H \cdot X$ с указанными свойствами а) — в) на класс ограниченных предсказуемых процессов оказывается возможным лишь для того случая, когда X есть семимартингал. В этом смысле класс семимартингалов является тем максимальным классом, для к-рого определен С. и. с естественными свойствами а) — в).

Если X — семимартингал, а $T = T(\omega)$ — марковский момент, то «остановленный» процесс $X^T = (X_{t \wedge T}, \mathcal{F}_t)$ также является семимартингалом и для всякого предсказуемого ограниченного процесса H

$$(H \cdot X)^T = H \cdot X^T = (H I_{[\![0,\, T]\!]}) \cdot X.$$

Это свойство позволяет распространить определение С. и. на класс локально ограниченных предсказуемых функций H. Если T_n — локализующая (для H) последовательность марковских моментов, то H^{T_n} ограничены. Значит $H \cdot I_{[\![0,\, T]\!]}$ ограничены и

$$[(H I_{[\![0, T_{n+1}]\!]}) \cdot X]^{T_n}$$

стохастически неотличим от $H I_{[\![0,\, T_n]\!]} \cdot X$ (см. *Стохастическая неразличимость*). Поэтому существует такой процесс $H \cdot X$, называемый снова С. и., что

$$(H \cdot X)^{T_n} = H I_{[\![0, T_n]\!]} \cdot X, \quad n \geqslant 0.$$

Построенный С. и. $H \cdot X$ обладает свойствами: $H \cdot X$ — семимартингал; отображение $X \rightsquigarrow H \cdot X$ линейно; если X — процесс локально ограниченной вариации, то таков же и интеграл $H \cdot X$; при этом $H \cdot X$ совпадает с интегралом Стилтьеса от H по dX; $\Delta(H \cdot X) = H \Delta X$; $K \cdot (H \cdot X) = (KH) \cdot X$.

В зависимости от дополнительных предположений на X С. и. $H \cdot X$ удается определить и для более широкого запаса функций H. Напр., если X является локально квадратично интегрируемым мартингалом, то С. и. $H \cdot X$ (со свойствами а) — в)) можно определить для любого предсказуемого процесса H, обладающего тем свойством, что процесс

$$\left(\int_0^t H_s^2 \, d\langle X \rangle_s \right)_{t \geqslant 0}$$

локально интегрируем (здесь $\langle X \rangle$ — квадратическая вариация X, т. е. такой предсказуемый возрастающий процесс, что $X^2 - \langle X \rangle$ есть локальный мартингал).

Лит.: [1] Jacod J., Calcul stochastique et problèmes de martingales, B., 1979; [2] Dellacherie C., Meyer P., Probabilites et potentiel, v. 11, P., 1980.

А. Н. Ширяев.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕРВАЛ — интервал одного из видов:

$$[\![\sigma, \tau]\!] = \{(\omega, t) : t \geqslant 0,\ \sigma(\omega) \leqslant t \leqslant \tau(\omega)\},$$

$$[\![\sigma, \tau[\![= \{(\omega, t) : t \geqslant 0,\ \sigma(\omega) \leqslant t < \tau(\omega)\},$$

$$]\!]\sigma, \tau]\!] = \{(\omega, t) : t \geqslant 0,\ \sigma(\omega) < t \leqslant \tau(\omega)\},$$

$$]\!]\sigma, \tau[\![= \{(\omega, t) : t \geqslant 0,\ \sigma(\omega) < t < \tau(\omega)\},$$

где $\sigma = \sigma(\omega)$ и $\tau = \tau(\omega)$ — два марковских момента, определенных на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$, с выделенным на нем неубывающим семейством $\mathbb{F} = (\mathcal{F})_{t \geqslant 0}$ под-σ-алгебр $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$.

Лит.: [1] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975.

А. Н. Ширяев.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС — то же, что *случайный процесс*.

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ для процесса $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ по винеровскому процессу $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ — уравнение вида

$$dX_t = a(t, X)\, dt + b(t, X)\, dW_t, \quad X_0 = \xi, \qquad (1)$$

где $a(t, X)$ и $b(t, X)$ — неупреждающие функционалы, а случайная величина ξ играет роль начального значения. Различают два понятия решения С. д. у.— сильное и слабое.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство с выделенным на нем неубывающим семейством σ-алгебр $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, $W=(W_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — винеровский процесс. Говорят, что непрерывный стохастич. процесс $X=(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ есть с и л ь н о е р е ш е н и е С. д. у. (1) с коэффициентами сноса $a(t, X)$, диффузии $b(t, X)$ и начальным значением ξ, если для каждого $t>0$ с вероятностью единица

$$X_t=\xi+\int_0^t a(s, X)\,ds+\int_0^t b(s, X)\,dW_s, \qquad (2)$$

где подразумевается, что входящие в (2) интегралы определены.

Первый общий результат относительно существования и единственности сильного решения С. д. у. вида

$$dX_t=a(t, X_t)\,dt+b(t, X_t)\,dW_t \qquad (3)$$

был получен К. Ито (K. Ito). Им было показано, что если для каждого $t>0$ функции $a(t, x)$ и $b(t, x)$ удовлетворяют по x условию Липшица и растут не быстрее, чем линейно, то существует непрерывное решение $X=(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ уравнения (3) и оно единственно в том смысле, что если $Y=(Y_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — другое непрерывное решение, то

$$\mathsf{P}\{\sup_{s\leqslant t}|X_s-Y_s|>0\}=0,\ t\geqslant 0.$$

Для случая $b(t, x)\equiv$const измеримость и ограниченность коэффициента (вектора) сноса $a(t, x)$ обеспечивает существование и единственность сильного решения. Уравнение $dX_t=a(t, X)dt+dW_t$, вообще говоря, не имеет сильного решения для любого ограниченного неупреждающего функционала $a(t, X)$.

При рассмотрении понятия слабого решения С. д. у. (1) не фиксируются заранее вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ с семейством σ-алгебр $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, винеровский процесс $W=(W_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ и случайная величина ξ, а фиксируются лишь неупреждающие функционалы $a(t, X)$, $b(t, X)$, определенные для непрерывных функций $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$, функция распределения $F(x)$ (так сказать, начального значения). Тогда под с л а б ы м р е ш е н и е м С. д. у. (1) с заданными $a(t, X)$, $b(t, X)$ и $F(x)$ понимается набор объектов

$$\tilde{\mathcal{A}}=(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geqslant 0}, \tilde{W}=(\tilde{W}_t)_{t\geqslant 0}, \tilde{X}=(\tilde{X}_t)_{t\geqslant 0}{}^{\mathsf{P}}),$$

где $\tilde{W}=(\tilde{W})_{t\geqslant 0}$ — винеровский процесс относительно $((\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$, $\tilde{W}$ и $\tilde{X}$ связаны соотношением

$$\tilde{X}_t=\tilde{X}_0+\int_0^t a(s, \tilde{X})\,ds+\int_0^t b(s, \tilde{X})\,d\tilde{W}s,$$

причем $\tilde{\mathsf{P}}\{\tilde{X}_0\leqslant x\}=F(x)$. Иногда термин «слабое решение» относят лишь к процессу $\tilde{X}$, входящему в набор $\tilde{\mathcal{A}}$. Слабое решение С. д. у. (1) существует при более слабых допущениях. Достаточно, напр., чтобы $b^2(t,x)\geqslant c>0$, а также непрерывности $b^2(t, x)$ по (t, x), измеримости $a(t, x)$ по (t, x) и ограниченности: $|a|+|b|\leqslant$const.

Развитие теории стохастич. интегрирования (см. *Стохастический интеграл*) по *семимартингалам* и случайным мерам привело к рассмотрению более общих С. д. у., где в качестве порождающих выступают (помимо винеровского процесса) семимартингалы или случайные меры. Типичным результатом в этом направлении является следующий. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — неубывающее семейство σ-алгебр, $Z=(Z_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ есть m-мерный семи-

мартингал, $G(t, X)=\|g^{ij}(t, X)\|_{ij}$ — матрица, состоящая из неупреждающих функционалов $g^{ij}(t, X)$ таких, что

$$|g^{ij}(t, X)-g^{ij}(t, Y)|\leqslant L_t^{ij}\sup_{s\leqslant t}|X_s-Y_s|,$$

где L_t^{ij} растут (по t) не слишком быстро. Тогда С. д. у. $dX_t=G(t, X)\,dZ_t$, $X_0=0$, имеет и притом единственное сильное решение.

Если функции $a(t, x)$ и $b(t, x)$, $t\geqslant 0$, $x\in R$, удовлетворяют (по x) условию Липшица и растут не быстрее, чем линейно, то (единственное с точностью до *стохастической эквивалентности*) решение $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ С. д. у. (1) будет марковским процессом. Если, кроме того, $a(t, x)$ и $b(t, x)$ непрерывны по совокупности переменных, то этот процесс будет диффузионным. Тем самым с помощью С. д. у., отправляясь лишь от винеровского процесса, можно строить марковские и диффузионные процессы.

При нек-рых дополнительных условиях гладкости функций $a(t, x)$ и $b(t, x)$ решение $(X_t^x)_{t\geqslant 0}$ С. д. у. (1) с начальным условием $X_0^x=x$ таково, что функция $u(s, x)=\mathsf{E}f(X_s^x)$ при достаточно гладкой функции $f(x)$ удовлетворяет в области $s\in(0, t)$, $x\in R$, обратному уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial u(s, x)}{\partial s}+a(s, x)\frac{\partial u(s, x)}{\partial x}+\frac{b^2(s, x)}{2}\frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2}=0,$$

с граничным условием

$$\lim_{s\uparrow t}u(s, x)=f(x).$$

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения, К., 1982; [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

А. Н. Ширяев.

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — раздел *математического программирования*, изучающий теорию и методы решения условных экстремальных задач при неполной информации о целях и ограничениях задачи. В схемы С. п. укладываются многочисленные практич. задачи управления, планирования и проектирования. Методы С. п. могут быть также использованы для адаптации устройств и алгоритмов к случайно меняющемуся состоянию среды, где они функционируют. Стохастич. модели оптимизации обычно более адекватны реальным условиям выбора решений, чем детерминированные постановки экстремальных задач.

Для построения рациональных стохастич. моделей процессов управления необходимо, помимо статистич. характеристик случайных параметров условий, располагать еще данными о порядке поступления, хранения и использования информации, о допустимой очередности решений и о требованиях к качеству решений. Различают одноэтапные, двухэтапные и многоэтапные стохастич. задачи.

В одноэтапных задачах С. п. динамика поступления исходной информации не играет роли, а решение принимается один раз и не корректируется. Одноэтапные задачи классифицируются по типу целевого функционала, по характеру ограничений и по виду решения. Чаще других в качестве целевой функции используют вероятность попадания в нек-рую, вообще говоря, случайную область (*P*-модели) и математич. ожидание или дисперсию нек-рой функции от решения (соответственно *M*-модели и *V*-модели). Область допустимых решений одноэтапной задачи С. п. определяется жесткими, вероятностными или статистич. ограничениями. Ограничения задачи, к-рые должны выполняться при всех (или почти при всех) реализациях случая, наз. жесткими. Ограничения стохастич. задач наз. вероятностными, если допустимы невязки в условиях задачи с вероятностью, не превы-

шающей заданной величины. Ограничения наз. статистическими, если по содержательным соображениям требуется только, чтобы они удовлетворялись в среднем.

Одноэтапные задачи различаются также в зависимости от того, принимается ли решение до или после наблюдения реализаций исходных данных. В первом случае решение определяется в виде детерминированного вектора, а во втором — в виде «решающего правила» — функции от случайных параметров условий задачи.

Исследуются прямые и косвенные методы решения одноэтапных задач С. п. Прямые методы — это итеративные процедуры, позволяющие по наблюдениям последовательных реализаций условий приближаться к решению задачи. Прямые методы интерпретируются в содержательных терминах как методы адаптации. Эти методы обобщают т. н. схемы *стохастической аппроксимации*. Косвенные методы сводятся к построению детерминированных эквивалентов стохастич. задач и к использованию известных методов детерминированного математич. программирования. Как прямые, так и косвенные методы эффективны в тех случаях, когда детерминированный эквивалент представляет собой задачу *выпуклого программирования*.

Двухэтапные задачи С. п. представляют собой наиболее распространенные модели процессов управления в условиях неполной информации. Двухэтапные модели обобщаются на стохастич. задачи различной информационной структуры, отражающей возможные аспекты динамики накопления информации и выбора и корректирования решений. Теория многоэтапных стохастич. моделей охватывает, в частности, марковское программирование (см., напр., [6]) и стохастическое дискретное оптимальное управление.

Теория и методы С. п. обобщаются на ряд классов стохастического оптимального управления (см. [5]).

Лит.: [1] Юдин Д. Б., Математические методы управления в условиях неполной информации, М., 1974; [2] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А., Управляемые марковские процессы и их приложения, М., 1975; [3] Ермольев Ю. М., Методы стохастического программирования, М., 1976; [4] Аркин В. И., Евстигнеев И. В., Вероятностные модели управления и экономической динамики, М., 1979; [5] Юдин Д. Б., *Задачи и методы стохастического программирования*, М., 1979; [6] Юдин Д. Б., Юдин А. Д., Экстремальные модели в экономике, М., 1979. *Д. Б. Юдин.*

СТРАННЫЙ АТТРАКТОР — аттрактор (т. е. притягивающее множество *динамической системы*) со сложной структурой. Аттрактор — компактное инвариантное подмножество фазового пространства, к-рое асимптотически устойчиво, т. е. оно устойчиво по Ляпунову, и все траектории из нек-рой его окрестности стремятся к нему при $t \to \infty$. (Иногда в понятие аттрактора устойчивость по Ляпунову не включается, однако практически важные аттракторы обладают этим свойством.) Сложная структура — выражение несколько неопределенное, с чем связана и нек-рая неопределенность термина С. а. Для гладких динамич. систем теоретически изучены два типа С. а., сохраняющихся при малых возмущениях,— аттракторы, являющиеся *гиперболическими множествами*, и *Лоренца аттрактор*, в связи с к-рым был введен и сам термин С. а. В обоих этих примерах С. а. обладает *топологической транзитивностью*; возможно, это или какое-то родственное свойство следует включать в понятие С. а. На основании численных экспериментов можно предполагать существование многих других типов С. а., по-видимому, тоже «выдерживающих» малые возмущения, однако ситуация с ними не выяснена с достаточной полнотой. Так, в одном из первых экспериментов появился аттрактор Энона (см. [2]), однако близко к нему имеются устойчивые периодич. траектории, и не исключено, что именно к ним стремится большинство траекторий. При нек-рой модификации этого примера полу-

чается аттрактор Лози (см. [3]), существование к-рого может быть строго доказано, но в этом примере гладкость динамич. системы кое-где нарушается.

Лит.: [1] Марсден Дж., Мак-Кракен М., Бифуркация рождения цикла и ее приложения, пер. с англ., М., 1980; [2] Странные аттракторы. Сб. ст., пер. с англ., М., 1981; [3] Lozi R., «J. de Physique», 1978, ser. C, t. 39, № 5, p. 9—10.

Д. В. Аносов.

СТРАТЕГИЯ в теории игр — возможный в соответствии с правилами стратегич. игры способ действия игрока или коалиции действия (см. *Игр теория*). В играх в нормальной форме (см. *Бескоалиционная игра*) непосредственное описание множеств стратегий входит в «правила» игры. В *позиционных играх* (см. также *Динамическая игра*) С. не задаются непосредственно правилами игры, а определяются на их основе косвенным образом. Если в бескоалиционной игре выбор стратегий фиксирован (напр., нек-рым принципом оптимальности), то игра превращается в нестратегическую (см. *Кооперативная игра*).

СТРАТИФИКАЦИЯ — разложение многообразия (может быть, бесконечномерного) на связные подмногообразия, размерности к-рых строго убывают.

М. И. Войцеховский.

СТРЕЛЬБЫ МЕТОД — численный метод решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, основанный на нек-рой специальной параметризации задачи. См. *Пристрелки метод*.

СТРОГАЯ ЭРГОДИЧНОСТЬ *топологической динамической системы* в узком смысле (потока или каскада) — свойство, рассматриваемое в *эргодической теории*. Оно состоит в следующем: 1) система имеет единственную инвариантную нормированную меру μ (совместимую с топологией); 2) $\mu(U)>0$ для любого непустого открытого множества U; 3) для любой ограниченной непрерывной функции f ее временные средние вдоль любой траектории стремятся к $\int f d\mu$. Хотя приведенное определение имеет смысл независимо от каких-либо ограничений на фазовое пространство W, практически оно применяется тогда, когда W — полное сепарабельное метрич. пространство (обычно даже метрич. компакт). В этом случае С. э. означает, что W представляет собой *эргодическое множество*. Из С. э. следует, что W является *минимальным множеством* (но не обратно). Любой эргодич. поток или каскад в *Лебега пространстве* метрически изоморфен нек-рому топологич. потоку или каскаду со свойством С. э.

Иногда под С. э. понимается одно только свойство 1); в этом смысле употребляется также термин однозэргодичность.

Д. В. Аносов.

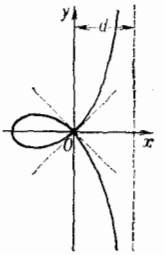
СТРОГОЙ ИМПЛИКАЦИИ ИСЧИСЛЕНИЕ — логическое исчисление, основанное на строгой импликации, т. е. логической операции, соответствующей союзу «если..., то...». Для строгой импликации устраняются (полностью или частично) т. н. «парадоксы (материальной) импликации»: ложное высказывание имплицирует (влечет) любое высказывание и истинное высказывание имплицируется любым высказыванием.

С. и. и. ставит своей целью отразить связь по смыслу между посылкой и заключением условного предложения. Существует целый ряд С. и. и. (исчисления Льюиса, Аккермана и т. д.), отличающихся друг от друга тем, что в одних выводимы формулы, невыводимые в других (напр., в исчислениях Льюиса «парадоксы импликации» устраняются лишь частично, в то время как в исчислении Аккермана они устраняются полностью). С. и. и. тесно связано с формализацией модальных выражений («возможно», «невозможно», «необходимо» и т. д.): в одних исчислениях строгая импликация выражается через модальности, а в других, наоборот, модальности выражаются через строгую импликацию.

Лит.: [1] Фейс Р., Модальная логика, пер. с англ., М., 1974; [2] Lewis C. I., Langford C. H., Symbolic logic, N. Y.—L., 1932; [3] Ackermann W., «J. Symbolic Logic», 1956, v. 21, № 2, p. 113—28.
В. В. Донченко.

СТРОФОИДА — плоская алгебраич. кривая 3-го порядка, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах A_α имеет вид:

$$y^2 = x^2\frac{d+x}{d-x};$$



в полярных координатах:

$$\rho = -d\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Начало координат — узловая точка с касательными $y=\pm x$ (см. рис.). Асимптота $x=d$. Площадь петли:

$$S = 2d^2 - 1/2\pi d^2.$$

Площадь между кривой и асимптотой:

$$S_2 = 2d^2 + 1/2\pi d^2.$$

С. относится к т. н. *узлам*.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960; [2] Смогоржевский А. С., Столова Е. С., Справочник по теории кривых третьего порядка, М., 1961.
Д. Д. Соколов.

СТРУВЕ ФУНКЦИЯ — функция

$$\mathbf{H}_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^{\pi/2}\sin(z\cos t)\sin^{2\nu}t\,dt,$$
$$\operatorname{Re}\nu > -1/2,$$

удовлетворяющая неоднородному уравнению Бесселя:

$$z^2y'' + zy' + (z^2-\nu^2)y = \frac{4(z/2)^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}.$$

Разложение в степенной ряд:

$$\mathbf{H}_\nu(z) =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{(z/2)^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+3/2)}\left[1 - \frac{z^2}{3(2\nu+3)} + \frac{z^4}{3\cdot5(2\nu+3)(2\nu+5)} - \dots\right].$$

С. ф. целого порядка n связана с *Вебера функцией* следующими соотношениями:

$$\mathbf{H}_0(z) = -E_0(z),\ \mathbf{H}_1(z) = 2/\pi - E_1(z),$$
$$\mathbf{H}_2(z) = \frac{z}{3\pi} - E_2(z)\dots.$$

С. ф. порядка $n+1/2$ (n — целое число) являются элементарными функциями, напр.

$$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\mathbf{H}_{1/2}(z) = \frac{1-\cos z}{\sqrt{z}}.$$

При $|z|\gg1$, $|z|\gg|\nu|$ имеет место асимптотич. разложение

$$\mathbf{H}_\nu(z) - N_\nu(z) \approx$$
$$\approx \frac{(z/2)^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\left[1 + \frac{1\cdot(2\nu-1)}{z^2} + \frac{1\cdot3\cdot(2\nu-1)(2\nu-3)}{z^4} + \dots\right],$$

где $N_\nu(z)$ — *Неймана функция*.

Модифицированная функция Струве — функция

$$\mathbf{L}_\nu(z) = -ie^{i\nu\pi/2}\mathbf{H}_\nu(iz).$$

Ее разложение в ряд:

$$\mathbf{L}_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2k}}{\Gamma(k+3/2)\,\Gamma(k+\nu+3/2)}.$$

Для больших $|z|$ имеет место асимптотич. разложение

$$\mathbf{L}_\nu(z) - I_{-\nu}(z) \approx \frac{1}{\pi},$$

где $I_{-\nu}$ — модифицированная функция Бесселя.

С. ф. иногда обозначается $S_\nu(z)$. Функцию ввел Х. Струве [1].

Лит.: [1] Struve H., «Ann. der Physik und Chemie», 1882, Bd 17, S. 1008—16; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 3 изд., М., 1977; [3] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами, пер. с англ., М., 1979. *А. Б. Иванов.*

СТРУКТУРА — 1) С., математическая структура,— родовое название, объединяющее понятия, общей чертой к-рых является то, что они применимы к множествам, природа элементов к-рых не определена. Чтобы определить С., задают отношения, в к-рых находятся элементы множества (типовая характеристика С.), затем постулируют, что данные отношения удовлетворяют условиям — аксиомам С.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Очерки по истории математики, пер. с франц., М., 1963; [2] его же, Теория множеств, пер. с франц., М., 1965. *М. И. Войцеховский.*

2) С.— то же, что *решетка*.

3) С. на многообразии, геометрическая величина, поле геометрических объектов,— сечение расслоения, ассоциированного с главным расслоением кореперов многообразия M. Интуитивно геометрич. величину можно рассматривать как величину, значение к-рой зависит не только от точки x многообразия M, но и от выбора корепера — инфинитезимальной системы координат в точке x (см. *Карта*).

Более подробно, пусть $GL^k(n)$ — общая дифференциальная группа порядка k (группа k-струй в нуле преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих начало координат), M_k — многообразие кореперов порядка k n-мерного многообразия M (т. е. многообразие k-струй $j^k_x(u)$ локальных карт $u : M \supset U \to \mathbb{R}^n$ с началом в точке $x = u^{-1}(0)$). Группа $GL^k(n)$ действует слева на многообразии M_k по формуле

$$j^k_0(\varphi)\, j^k_0(u) = j^k_x(\varphi \circ u), \quad j^k_0(\varphi) \in GL^k(n), \quad j^k_x(u) \in M_k,$$

и это действие определяет в M_k структуру главного $GL^k(n)$-расслоения $\pi_k : M_k \to M$, называемого расслоением кореперов порядка k. Пусть W — произвольное $GL^k(n)$-многообразие, т. е. многообразие с левым действием группы $GL^k(n)$. Пусть, наконец, $W(M)$ — пространство орбит левого действия группы $GL^k(n)$ в $M_k \times W$, а π_W — его естественная проекция на M. Расслоение π_W: $W(M) \to M$ (ассоциированное с M_k и W) наз. расслоением геометрических структур порядка $\leqslant k$ и типа W, а его сечения — структурами типа W. С. типа W находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с $GL^k(n)$-эквивариантными отображениями $S : M_k \to W$. Таким образом, С. типа W можно рассматривать как W-значную функцию S на многообразии M_k k-реперов, удовлетворяющую следующему условию эквивариантности:

$$S(gu^k) = gS(u^k), \quad g \in GL^k(n), \quad u^k \in M_k.$$

Расслоение π_W геометрич. объектов является естественным расслоением в том смысле, что группа диффеоморфизмов многообразия M действует как группа автоморфизмов π_W.

Если W есть векторное пространство с линейным (соответственно аффинным) действием группы $GL^k(n)$, то С. типа W наз. линейными (соответственно аффинными).

Основными примерами линейных С. 1-го порядка являются тензорные С., или тензорные поля. Пусть $V = \mathbb{R}^n$, $V^* = \mathrm{Hom}\ (V, \mathbb{R})$ и $V^p_q = ((\otimes^p V)) \otimes ((\otimes^q V^*))$ — пространство тензоров типа (p, q) с естественным тензорным представлением группы $GL^1(n) = GL(n)$. С. типа V^p_q наз. тензорным полем типа (p, q). Ее можно рассматривать как вектор-функцию на многообразии кореперов M_1, сопоставляющую кореперу

$\theta = j^1_x(u) = (du^1, \ldots, du^n)$ набор координат $S(\theta)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ тензора $S(\theta) \in V^p_q$, относительно стандартного базиса

$$\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{*j_1} \otimes \ldots \otimes e^{*j_p}\}$$

пространства V^p_q. При линейном преобразовании кореперa $\theta \to g\theta = (g^i_a\, du^a)$ координаты $S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ преобразуются по тензорному представлению:

$$S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}(q\theta) = g^{i_1}_{a_1} \ldots g^{i_p}_{a_p} (g^{-1})^{b_1}_{j_1} \ldots (g^{-1})^{b_q}_{j_q} S(\theta)^{a_1\ldots a_p}_{b_1\ldots b_q}.$$

Важнейшим примером тензорных С. являются *векторное поле*, *дифференциальная форма*, *риманова метрика*, *симплектическая структура*, *комплексная структура* и, более общо, *аффинор*. Все линейные С. (любых порядков) исчерпываются сверхтензорами Рашевского [4]. Примером аффинной С. 2-го порядка служит *аффинная связность* без кручения, к-рую можно рассматривать как С. типа $V^1_{(2)}$, где $V^1_{(2)} \approx V \otimes S^2 V^*$ — ядро естественного гомоморфизма $GL^2(n) \to GL^1(n)$, рассматриваемое как векторное пространство с естественным действием группы $GL^2(n) = GL(n) V^1_{(2)}$. Широким и важным классом С. является класс инфинитезимально однородных структур, или G-*структур*, — структур типа W, где $W = GL^k(n)/G$ — однородное пространство группы $GL^k(n)$.

Приведенное выше определение С. оказывается недостаточно общим и не охватывает ряд важных геометрич. С.— спинорную С., симплектическую спинорную С. и др. Естественное обобщение состоит в рассмотрении обобщенных G-структур — главных расслоений, гомоморфно отображающих на G-структуру, и сечений ассоциированных с ними расслоений.

Лит.: [1] Рашевский П., «Тр. сем. по вект. и тенз. анализу...», 1933, в. 1, с. 126—42; [2] Вагнер В., «Докл. АН СССР», 1945, т. 46, № 9, с. 383—86; [3] Веблен О., Уайтхед Дж., Основания дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1949; [4] Рашевский П. К., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1957, т. 6, с. 337—70; [5] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [6] Ehresmann Ch., «Géométrie diff. Coll. internat. du Centre Nat. de la recherche Sci.», 1953, p. 97—110.

Д. В. Алексеевский.

G-СТРУКТУРА на многообразии — главное подрасслоение расслоения кореперов многообразия со структурной группой G. Более подробно, пусть π_k: $M_k \to M$ — главное $GL^k(n)$-расслоение всех кореперов порядка k n-мерного многообразия M и G — подгруппа общей дифференциальной группы $GL^k(n)$ порядка k. Подмногообразие P многообразия k-кореперов M_k задает G-структуру порядка k $\pi = \pi_k|P$: $P \to M$, если π есть главное G-расслоение, т. е. слои отображения π являются орбитами группы G. Напр., сечение $x \mapsto u^k_x$ расслоения π_k (поле кореперов) определяет G-структуру $P = \{gu^k_x,\ x \in M,\ g \in G\}$, наз. G-структурой, порожденной полем кореперов. Локально любая G-структура порождается полем кореперов. Стандартной плоской G-структурой наз. G-структура в пространстве $V = \mathbb{R}^n$, порождаемая полем кореперов $x \mapsto j^k_x(id)$, где $id : V \to V$ — тождественное отображение.

Пусть $\pi : P \to M$ есть G-С. Отображение многообразия P в точку $eG \in GL^k(n)/G$ продолжается до $GL^k(n)$-эквивариантного отображения $S : M_k \to GL^k(n)/G$, к-рое можно рассматривать как структуру типа $GL^k(n)/G$ на M. Если однородное пространство $GL^k(n)/G$ вкладывается в качестве орбиты в векторное пространство W с линейным действием группы $GL^k(n)$, то структуру S можно рассматривать как линейную структуру типа W. Она наз. тензором Бернара G-С. π и часто отождествляется с последней. Обратно, пусть $S : M_k \to W$ — линейная геометрич. структура типа W (напр., тензорное поле), причем $S(M_k)$ принадлежит

одной орбите $GL^k(n)w_0$ группы $GL^k(n)$. Тогда $P=S^{-1}(w_0)$ есть G-С., где G — стабилизатор точки w_0 в $GL^k(n)$, и S является ее тензором Бернара. Напр., риманова метрика задает $O(n)$-структуру, почти симплектич. структура — $Sp(\frac{n}{2}, \mathbb{R})$-структуру, почти комплексная структура — $GL(\frac{n}{2}, \mathbb{C})$-структуру, аффинная связность без кручения — $GL(n)$-структуру 2-го порядка ($GL(n)$ рассматривается здесь как подгруппа группы $GL^2(n)$). Аффинор (поле эндоморфизмов) задает G-С. тогда и только тогда, когда он во всех точках приводится к одной и той же жордановой нормальной форме A, причем G есть централизатор матрицы A в $GL(n)$.

Элементы многообразия M_k можно рассматривать как кореперы порядка 1 на M_{k-1}, что позволяет рассматривать естественное расслоение $\pi^k : M_k \to M_{k-1}$ как N^k-структуру 1-го порядка, где N^k — ядро естественного гомоморфизма $GL^k(n) \to GL^{k-1}(n)$. С каждой G-С. $\pi : P \to M$ порядка k связывается последовательность G-С. 1-го порядка

$$P \longrightarrow P_{-1} \longrightarrow P_{-2} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_{-k} = M,$$

где $P_{-i} = \pi^k(P_{-i+1}) \subset M_{k-i}$. Благодаря этому изучение G-С. высших порядков сводится к изучению G-С. первого порядка. Корепер $u^1_x \in M_1$ можно рассматривать как изоморфизм $u^1_x : T_xM \to V$.

1-форма $\theta : TM_1 \to V$, значение к-рой на векторе $X \in T_{u^1_x}M_1$ равно $\theta_{u^1_x}(X) = u^1_x(\pi_1)_*X$, наз. ф о р м о й с м е щ е н и я. В локальных координатах (x^i, u^a_i) многообразия M_1 форма θ имеет вид $\theta = u^a_i\, dx^i \otimes e_a$, где e_a — стандартный базис в V.

Ограничение θ_P формы смещения θ на G-С. $P \subset M_1$ наз. ф о р м о й с м е щ е н и я G-С. Она обладает следующими свойствами: 1) строгая горизонтальность: $\theta_P(X)=0 \Leftrightarrow \pi_*X=0$; 2) G-эквивариантность: $\theta_P \circ g = g \circ \theta_P$ для любого $g \in G$.

С помощью формы θ_P можно охарактеризовать главные расслоения с базой M, изоморфные G-С. А именно, главное G-расслоение $\pi : P \to M$ изоморфно G-С. тогда и только тогда, когда имеются точное линейное представление α группы G в n-мерном векторном пространстве V, $n=\dim M$, и V-значная строго горизонтальная G-эквивариантная 1-форма θ на P. Отказ от требования точности представления α приводит к понятию обобщенной G-С. (1-го порядка) на M — это главное G-расслоение $P \to M$ вместе с линейным представлением $\alpha : G \to GL(V)$, $\dim V = \dim M$, и V-значной строго горизонтальной G-эквивариантной 1-формой θ на P.

Примером обобщенной G-С. является канонич. расслоение $\pi : P \to G \backslash P$ над однородным пространством $G \backslash P$ группы Ли P. Здесь α — *изотропии представление* группы G, а θ определяется *Маурера — Картана формой* группы Ли P.

Пусть $\pi : P \to M$ есть G-С. 1-го порядка. Расслоение $\pi' : P' \to P$ 1-струй локальных сечений расслоения π можно рассматривать как G'-структуру на P, где $G' = \mathrm{Hom}(V, \mathfrak{g})$ — коммутативная группа, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, линейно представленная в пространстве $V \oplus \mathfrak{g}$ формулой

$$A(v, X) = (v, X + A(v)),\ A \in G',\ v \in V,\ X \in \mathfrak{g},$$

и действующая на многообразии P' по формуле

$$H \mapsto AH = \{l_p A(\theta(h)) + H,\ A \in G',\ p = \pi'(H),\ h \in H\},$$

где l_p — канонич. изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G на вертикальное подпространство $T^V_p P = T_p(\pi^{-1}(\pi(p)))$. Элемент $H \in P'$ может рассматриваться как горизонтальное (т. е. дополнительное к вертикальному) подпространство в $T_p P$. Он определяет корепер $\theta'_H : T_p P \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g} + V$, к-рый на вертикальном подпростран-

ство задается отображением l_p, а на горизонтальном — отображением $\theta_H = \theta | H$. Вектор-функция $C' : P' \to W = \mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$, заданная формулой $H \mapsto C'_H$, $C'_H(u, v) = d\theta(\theta_H^{-1} u, \theta_H^{-1} v)$, наз. функцией кручения G-С. п. Сечение $s : x \mapsto H_{P(x)}$ расслоения $\pi \circ \pi' : P' \to M$ задает связность в расслоении π, а ограничение функции C' на $S(M)$ есть функция, задающая координаты тензора кручения этой связности относительно поля кореперов $p(x)$.

Отображение $C' : P' \to W$ G'-эквивариантно относительно вышеуказанного действия группы G' в P и действия G' в W, задаваемого формулой

$$A : w \mapsto Aw = w + \delta A,$$

где $\delta : G' \to W$, $(\delta A)(u, v) = A(u)v - A(v)u$. Индуцированное отображением C' отображение $C : P \to G' \backslash W$ наз. структурной функцией G-структуры π. Обращение в нуль функции C равносильно существованию в расслоении π связности без кручения.

Выбор подпространства $D \subset W$, дополнительного к $\delta G'$, определяет подрасслоение $P^{(1)} = C'^{-1}(D)$ расслоения кореперов $\pi' : P' \to P$ со структурной группой $G^{(1)} = G' \cap \mathrm{Ker}\,\delta \cong \mathfrak{g} \otimes V^* \cap V \otimes S^2 V^* \subset V \otimes V^{*2}$, т. е. $G^{(1)}$-структуру $\pi^{(1)} = \pi'|_{P^{(1)}} : P^{(1)} \to P$ на P. Она наз. первым продолжением G-С. п. По индукции определяется i-е продолжение $\pi^{(i)} : P^{(i)} \to P^{(i-1)}$ как $G^{(i)}$-структура на $P^{(i-1)}$, где группа $G^{(i)}$ изоморфна векторной группе $\mathfrak{g} \otimes S^i V^* \cap V \otimes S^{i+1} V^* \subset V \otimes V^{*(i+1)}$. Структурная функция $C^{(i)}$ i-го продолжения наз. структурной функцией i-го порядка G-С. п.

Центральной проблемой теории G-С. является локальная проблема эквивалентности — нахождение необходимых и достаточных условий, при к-рых две G-С. п. $\pi : P \to M$ и $\bar{\pi} : \bar{P} \to \bar{M}$ с одной и той же структурной группой G локально эквивалентны, т. е. существует локальный диффеоморфизм $\varphi : M \supset U \to \bar{U} \subset \bar{M}$ многообразий M и $\bar{M}$, индуцирующий изоморфизм G-С. над окрестностями U и $\bar{U}$. Частным случаем этой проблемы является проблема интегрируемости — нахождение необходимых и достаточных условий локальной эквивалентности данной G-С. и стандартной плоской G-С. Проблему локальной эквивалентности можно переформулировать как проблему нахождения полной системы локальных инвариантов G-С.

Для $O(n)$-структуры, к-рая отождествляется с римановой метрикой, проблема интегрируемости была решена Б. Риманом (B. Riemann): необходимые и достаточные условия интегрируемости состоят в обращении в нуль тензора кривизны метрики, а локальная проблема эквивалентности — Э. Кристоффелем (E. Christoffel) и Р. Липшицем (R. Lipschitz): полная система локальных инвариантов римановой метрики состоит из ее тензора кривизны и его последовательных ковариантных производных (см. [1]).

Подход к решению проблемы эквивалентности основан на понятиях продолжения и структурной функции. С каждой G-С. п. $\pi : P \to M$ 1-го порядка со структурной группой $G \subset GL(n)$ связываются последовательность продолжений

$$\ldots \longrightarrow P^{(i)} \longrightarrow P^{(i-1)} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$$

и последовательность структурных функций $C^{(i)}$. Для $O(n)$-структуры структурная функция $C^{(0)} = C$ на $P^{(0)} = P$ равна 0, а существенные части остальных структурных функций $C^{(i)}$, $i > 0$, отождествляются с тензором кривизны соответствующей метрики и его последовательными ковариантными производными. Для интегрируемости G-С. п необходимо и достаточно посто-

янство структурных функций $C^{(0)}$, $C^{(1)}$, . . ., $C^{(k)}$ и совпадение их значений с соответствующими значениями структурных функций стандартной плоской G-С. (см. [6]). Число k зависит только от группы G. Для широкого класса линейных групп, в частности для всех неприводимых групп $G \subset GL(n)$, не принадлежащих списку Берже групп голономии пространств аффинной связности без кручения [3], $k=0$, для интегрируемости G-С. необходимо и достаточно обращение в 0 структурной функции $C^{(0)}$ или, что эквивалентно, существование линейной связности без кручения, сохраняющей G-С.

G-С. п наз. G-С. к о н е ч н о г о т и п а (равного k), если $G^{(k-1)} \neq \{e\}$, $G^{(k)} = \{e\}$. В этом случае $\pi^{(k)} : P^{(k)} \to P^{(k-1)}$ есть поле кореперов (абсолютный параллелизм), группа автоморфизмов G-С. п изоморфна группе автоморфизмов этого параллелизма и является группой Ли. Проблема локальной эквивалентности таких структур сводится к проблеме эквивалентности абсолютных параллелизмов и решается в терминах конечной последовательности структурных функций (см. [2]). Для G-С. бесконечного типа проблема локальной эквивалентности в общем случае не решена (1984).

Две G-С. $\pi : P \to M$ и $\pi' : P' \to M'$ наз. ф о р м а л ь н о э к в и в а л е н т н ы м и в точках $x \in M$, $x' \in M'$, если существует изоморфизм слоев $\pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(x')$, к-рый продолжается до изоморфизма соответствующих слоев продолжений $P^{(i)} \to M$ и $P'^{(i)} \to M'$ $(i \geqslant 0)$. Известны примеры, к-рые показывают, что из формальной эквивалентности двух G-С. класса C^∞ для всех пар $(x, x') \in M \times M'$, вообще говоря, не следует их локальная эквивалентность [6]. В аналитич. случае существуют такие собственные подмножества $S(M) \subset M$, $S(M') \subset M'$, являющиеся счетными объединениями аналитич. множеств, что для любых $x \in M \setminus S(M)$, $x' \in M' \setminus S(M')$ из формальной эквивалентности структур P и P' в точках x, x' следует их локальная эквивалентность [7].

Лит.: [1] К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К., Основы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1981; [2] С т е р н б е р г С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [3] B e r g e r M., «Bull. Soc. math. de France», 1955, t. 83, p. 279—330; [4] C h e r n S.-S., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1966, v. 72, p. 167—219; [5] K o b a y a s h i S., Transformation groups in differential geometry, B.—N. Y., 1972; [6] M o l i n o P., Théorie des G-structures. Le problème d'équivalence, B.—N. Y., 1977; [7] M o r i m o t o T., «C. r. Acad. Sci.», 1981, t. 292, № 1, p. 63—66.

Д. В. Алексеевский.

(B, φ)-СТРУКТУРА — нек-рая структура в векторном (или сферическом) расслоении, обобщение понятия структурной группы расслоения.

Пусть $\varphi_n : B_n \to BO_n$ — нек-рое расслоение и ξ — нек-рое n-мерное векторное расслоение над пространством X, классифицируемое отображением $\xi : X \to BO_n$. Тогда (B_n, φ_n)-структурой на ξ наз. гомотопич. класс поднятий отображения $\xi : X \to BO_n$ до отображения в B_n, т. е. класс эквивалентности отображений $\tilde{\xi} : X \to B_n$ таких, что $\varphi_n \circ \tilde{\xi} = \xi$, где отображения $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\xi}' : X \to B_n$ наз. э к в и в а л е н т н ы м и, если они послойно гомотопны. Не существует способа согласованно определять (B_n, φ_n)-структуры для эквивалентных расслоений, ибо это согласование зависит от выбора эквивалентности.

Пусть задана последовательность (B, φ, g) расслоений $\varphi_r : B_r \to BO_r$ и отображений $g_r : B_r \to B_{r+1}$ таких, что $j_r \circ \varphi_r = \varphi_{r+1} \circ g_r$ ($j_r : BO_r \to BO_{r+1}$ — стандартное отображение). Семейство $\{B_r, \varphi_r, g_r\}$ (а иногда лишь (B_r, φ_r)) наз. с т р у к т у р н о й с е р и е й. (B, φ)-с т р у к т у р о й на многообразии M^n наз. класс эквивалентности последовательностей (B_r, φ_r)-структур на *нормальном расслоении* $\{\xi_r\}$ многообразия M^n; они совпадают начиная с нек-рого достаточно большого r. (B, φ)-м н о г о о б р а з и е м наз. многообразие M^n вместе с фиксированной (B, φ)-С. на нем.

Вместо BO_n можно более общим образом рассматривать пространство BG_n, классифицирующее сферич. расслоения, и вводить (B, φ)-С. на них.

Лит.: [1] Lashof R., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1963, v. 109, p. 257—77; [2] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973.

Ю. Б. Рудяк.

СТРУКТУРНАЯ КОНСТАНТА алгебры A над полем или ассоциативно-коммутативным кольцом P — элемент $c^{\gamma}_{\alpha\beta} \in P$, $\alpha, \beta, \gamma \in I$, определяемый равенством

$$e_\alpha e_\beta = \sum_\gamma c^{\gamma}_{\alpha\beta} e_\gamma,$$

где $\{e_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — фиксированная база алгебры A. С. к. определяют алгебру однозначно. Если d^{ξ}_{η} — С. к. алгебры A в другой базе $\{f_\xi \mid \xi \in J\}$, где $f_\xi = \Sigma t^{\alpha}_{\xi} e_\alpha$, то

$$\sum_\xi d^{\xi}_{\eta\iota} t^{\gamma}_{\xi} = \sum_{\alpha,\beta} t^{\alpha}_{\xi} t^{\beta}_{\eta} c^{\gamma}_{\alpha\beta}.$$

Всякое тождество, справедливое в алгебре A, может быть выражено соотношениями между С. к. Напр.,

$$c^{\gamma}_{\alpha\beta} = c^{\gamma}_{\beta\alpha}$$

— коммутативность,

$$\sum_\xi c^{\xi}_{\alpha\beta} c^{\lambda}_{\xi\gamma} = \sum_\sigma c^{\lambda}_{\alpha\sigma} c^{\sigma}_{\beta\gamma}$$

— ассоциативность,

$$\sum_\xi \left(c^{\xi}_{\alpha\beta} c^{\lambda}_{\xi\gamma} + c^{\xi}_{\beta\gamma} c^{\lambda}_{\xi\alpha} + c^{\xi}_{\gamma\alpha} c^{\lambda}_{\xi\beta}\right) = 0$$

— тождество Якоби.

Л. А. Скорняков.

СТРУКТУРНАЯ ЛИНГВИСТИКА — раздел лингвистики, для к-рого характерно преимущественное внимание к исследованию структуры языковых механизмов и стремление к точному описанию этой структуры. Развитие С. л. привело к созданию математич. методов изучения структуры языка и возникновению *математической лингвистики*. Общие принципы С. л. впервые были сформулированы Ф. де Соссюром (F. de Saussure, [1]) в 1916.

В С. л. различают язык и речь, при этом основной задачей С. л. является изучение языка. Язык представляет собой определенную систему знаков; каждый языковой знак есть соединение означаемого — смысла — и означающего — акустического образа. Напр., означаемое русского слова «стол» — понятие стола, а означающее — акустический образ, возникающий в мозгу носителя русского языка, когда он слышит соответствующую последовательность звуков. Языковой знак произволен в том смысле, что выбор *означающего*, за редкими исключениями, не мотивирован никакими свойствами означаемого. Вообще, «материал» знака несуществен для языка, существенны только отношения между знаками. Это сближает язык с изучаемыми в математике абстрактными системами и делает возможным изучение его строения математич. методами.

Поскольку язык непрерывно изменяется, его можно изучать в двух планах: синхроническом (изучение языка в данный фиксированный момент времени) и диахроническом (изучение процесса изменения языка). Основные достижения С. л. относятся к области синхронич. изучения языка.

В С. л. разработано учение о фонеме — минимальной смыслоразличительной единице языка, характеризуемой определенным набором т. н. дифференциальных (или различительных) признаков (см. [2], [3]). Напр., в русском языке звуковые сегменты, передаваемые на письме как «м», «а» и «ма», — смыслоразличительные, так как для каждого из них существует содержащая его значащая языковая единица (слово), в к-рой замена этого сегмента другим приводит к изменению смысла: замена «м» на «б» в слове «мак» дает «бак», замена «а» на «и» в слове «шар» дает «шир», замена «ма» на «ду» в слове «мало» дает «дуло». При этом сегмент «ма» не

минимальный, т. к. он разлагается на смыслоразличительные сегменты «м» и «а», к-рые уже не могут быть разложены, т. е. они являются минимальными. Из всевозможных признаков, к-рыми могут характеризоваться звуки языка, в каждом конкретном языке лишь нек-рые являются различительными, и совокупность различительных признаков меняется от языка к языку. Так, долгота гласного, не имеющая различительного значения в русском языке, имеет его в латышском (напр., pile — капля, а pīle — утка) и в ряде других языков. Предпринимались попытки формальной трактовки понятия фонемы с привлечением простейших математич. средств (см., напр., [4], [5]), однако достаточно полной формальной теории фонемы пока (1984) нет. С точки зрения различительных признаков в С. л. рассматриваются и минимальные значимые единицы языка — м о р ф е м ы. Напр., в русском слове «столику» выделяются: корневая морфема «стол»—, словообразовательная морфема —«ик» — и словоизменительная морфема — «у», несущая различительные признаки единственного числа и дательного падежа.

В С. л. разработаны т. н. дескриптивные процедуры исследования языка (см. [6], [7]), основанные на работе с информантом — носителем языка, к-рому исследователь задает вопросы типа «Правильно ли данное выражение?» и «Одинаковы или различны смыслы двух данных выражений?». Многие используемые в математич. лингвистике конструкции представляют собой, по существу, формализацию таких процедур (см. *Аналитическая модель языка*). Разработаны строго формальные, по существу математические, способы описания структуры предложения (см. *Синтаксическая структура*), позволившие изучить ряд важных проблем теории синтаксиса. Развивается с т р у к т у р н а я с е м а н т и к а, изучающая структуру отношений между смыслом языковых выражений и их формой и между смыслами различных выражений (см., напр., [10], [11]).

Развитие идей С. л. привело к выработке представления о языке как о механизме, служащем для порождения речевых выражений или для преобразования означаемых (смыслов) в означающие (тексты) и обратно (см. [8]—[10]). Это представление легло в основу теории формальных *грамматик*.

Лит.: [1] Д е С о с с ю р Ф., Труды по языкознанию, пер. с франц., М., 1977; [2] Т р у б е ц к о й Н. С., Основы фонологии, пер. с нем., М., 1960; [3] Я к о б с о н Р., Фант Г. М., Халле М., в кн.: Новое в лингвистике, в. 2, М., 1962, с. 173—230; [4] У с п е н с к и й В. А., «Вопросы языкознания», 1964, № 6, с. 39—53; [5] Р е в з и н И. И., Структура языка как моделирующей системы, М., 1978; [6] Б л у м ф и л д Л., Язык, пер. с англ., М., 1968; [7] H a r r i s Z. S., Structural linguistics, Chi., 1961; [8] Х о м с к и й Н., в кн.: Новое в лингвистике, в. 2, М., 1962, с. 412—527; [9] е г о ж е, Аспекты теории синтаксиса, пер. с англ., М., 1972; [10] М е л ь ч у к И. А., Опыт теории лингвистических моделей «Смысл↔текст», М., 1974; [11] А п р е с я н Ю. Д., Лексическая семантика, М., 1974; [12] е г о ж е, Идеи и методы современной структурной лингвистики, М., 1966. *А. В. Гладкий.*

СТРУКТУРНО УПОРЯДОЧЕННАЯ ГРУППА, р е ш е т о ч н о у п о р я д о ч е н н а я г р у п п а, *l*-г р у п п а,— группа G, на множестве элементов к-рой задано отношение частичного порядка $\leqslant$, обладающее свойствами: 1) G — решетка относительно $\leqslant$, т. е. для любых x, $y\in G$ существуют элементы $x\wedge y$, $x\vee y$ такие, что $x\wedge y\leqslant x$, y и $x\vee y\geqslant x$, y; для любого $z\in G$, $z\leqslant x$, y выполнено $z\leqslant x\wedge y$, и для любого $t\in G$ и x, $y\leqslant t$ выполнено $x\vee y\leqslant t$; 2) для любых a, b, x, $y\in G$ неравенство $a\leqslant b$ влечет за собой $xay\leqslant xby$. Эквивалентным образом С. у. г. может быть определена как алгебраич. система в сигнатуре $\langle\cdot,^{-1},e,\vee,\wedge\rangle$, удовлетворяющая аксиомам: 3) $\langle G,\cdot,^{-1},e\rangle$ — группа; 4) $\langle G,\vee,\wedge\rangle$ — решетка; 5) $x(y\vee z)\,t=xyt\vee xzt$ и $x(y\wedge z)\,t=xyt\wedge xzt$ для любых x, y, z, $t\in G$.

Решетка элементов С. у. г. дистрибутивна. М о д у л е м (*соответственно п о л о ж и т е л ь н о й и от-*

рицательной частью) элемента x наз. элемент $|x|=x\vee x^{-1}$ (соответственно $x^+=x\vee e$ и $x^-=x\wedge e$). В С. у. г. верны соотношения:

$$x=x^+x^-,\ |x|^{-1}\leqslant x\leqslant|x|,$$
$$|x|=x^+(x^-)^{-1},\ x^+\wedge(x^-)^{-1}=e,$$
$$(x\vee y)^{-1}=x^{-1}\wedge y^{-1},\ (x\wedge y)^{-1}=x^{-1}\vee y^{-1}.$$

Элементы x и y наз. ортогональными, если $|x|\vee|y|=e$. Ортогональные элементы перестановочны.

Подмножество H l-группы G наз. l-подгруппой, если H — подгруппа и подрешетка в G; l-подгруппа H наз. l-идеалом С. у. г. G, если она нормальна и выпукла в G. Множество l-подгрупп С. у. г. образует подрешетку решетки всех ее подгрупп. Решетка l-идеалов С. у. г. дистрибутивна. l-гомоморфизмом l-группы G в l-группу H наз. гомоморфизм φ группы G в группу H такой, что

$$\varphi(x\vee y)=\varphi(x)\vee\varphi(y),\ \varphi(x\wedge y)=\varphi(x)\wedge\varphi(y).$$

Ядрами l-гомоморфизмов являются в точности l-идеалы l-групп. Если G есть l-группа, $M\subset G$, то множество $M^\perp=\{x\in G|\ |x|\wedge|m|$-е для всякого $m\in M\}$ является выпуклой l-подгруппой в G.

Группа $A(L)$ взаимно однозначных сохраняющих порядок отображений линейно упорядоченного множества L на себя есть l-группа (если для $f,\ g\in A(L)$ положить $f\leqslant g$ тогда и только тогда, когда $f(\alpha)\leqslant g(\alpha)$ для любого $\alpha\in L$). Всякая l-группа l-изоморфна l-подгруппе С. у. г. $A(L)$ для нек-рого подходящего множества L.

Класс всех С. у. г. является многообразием сигнатуры $\langle\cdot,^{-1},e,\wedge,\vee\rangle$. Важнейшее его подмногообразие — класс С. у. г., аппроксимирующихся линейно упорядоченными группами (класс представимых l-групп).

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраич. системы, пер. с англ., М., 1965.

В. М. Копытов.

СТРУКТУРНОЕ ПРОСТРАНСТВО кольца — множество $\mathfrak{P}$ всех его примитивных идеалов с топологией, замкнутые множества в к-рой суть такие подмножества $C\subseteq\mathfrak{P}$, что C содержит всякий идеал, содержащий пересечение всех идеалов из C (ср. *Зарисского топология*). С. п. кольца R гомеоморфно С. п. факторкольца R/J, где J — радикал Джекобсона. С. п. является T_0-пространством. Если все примитивные идеалы кольца максимальны, то С. п. оказывается T_1-пространством. С. п. кольца с единицей компактно. С. п. бирегулярного кольца (см. *Регулярное кольцо*) локально компактно и вполне несвязно. Оно используется для представления бирегулярного кольца в виде кольца непрерывных функций с компактными носителями.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961.

Л. А. Скорняков.

СТРУКТУРНЫЙ ИЗОМОРФИЗМ — изоморфизм между *решетками* (структурами) двух однотипных алгебраич. систем.

Для групп исследовался вопрос о том, когда из С. и. двух групп следует их изоморфизм (см. [1]).

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

О. А. Иванова.

СТРУХАЛЯ ЧИСЛО — критерий подобия нестационарных движений жидкостей или газов. С. ч. характеризует одинаковость протекания процессов во времени:

$$Sh=l/vt=\omega l/v,$$

где v — характерная скорость течения, l — характерный линейный размер, t — характерный для нестационарного движения промежуток времени, ω — характерная частота (иногда через Sh обозначают обратную величину vt/l).

Аналогичный критерий $H_0=vt/l$ в механических, тепловых и электромагнитных процессах наз. критерием гомохромности.

С. ч. наз. по имени В. Струхаля (V. Strouhal). *По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.*

СТРУЯ, джет,— многочлен $j^k f$, получающийся усечением (формального) ряда Тейлора дифференцируемой функции f. Подробнее, пусть M, N суть C^k-многообразия. Тогда k-струей из M в N наз. класс $[x, f, U]$ эквивалентных троек (x, f, U), где $U \to M$ — открыто, $x \in U$, $f : U \to N$ — отображение класса C^k. Эквивалентность определяется так:

$$(x, f, u) \sim (x', f', u'),$$

если $x = x'$ и локальные представления отображений f, f' в x по отношению к нек-рой паре карт имеют одинаковые производные до k-го порядка включительно. Пространство С. $J^k(M, N)$ является C^0-многообразием.

Лит.: [1] Брёкер Т., Ландер Л., Дифференцируемые ростки и катастрофы, пер. с англ., М., 1977; [2] Голубицкий М., Гийемин В., Устойчивые отображения и их особенности, пер. с англ., М., 1977; [3] Постон Т., Стюарт И., Теория катастроф и ее приложения, пер. с англ., М., 1980.

М. И. Войцеховский.

СТУПЕНЧАТАЯ СЕМАНТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — вариант *конструктивной семантики*, предложенный А. А. Марковым (см. [2], [3]). Основное внимание при построении этой системы уделяется одной из проблем семантики — конструктивному истолкованию *импликации*. Традиционное интуиционистское разъяснение смысла утверждения $(A \supset B)$ состоит в том, что $(A \supset B)$ выражает осуществимость конструкции p такой, что если q — произвольная конструкция, подтверждающая A, то p и q в совокупности позволяют отыскать конструкцию, подтверждающую B. Приведенное неформальное разъяснение по ряду причин плохо поддается уточнению. Идея А. А. Маркова состоит в том, что импликация $(A \supset B)$ рассматривается как формулировка утверждения о выводимости B из посылки A средствами нек-рой теории с правилом бесконечной индукции (полуформальной теории). При этом рассматриваемая полуформальная теория, так же как и семантика формул A и B, должна быть объяснена ранее на нек-ром предыдущем этапе построения. В результате возникает С. с. с., в к-рой смысл формул следующей ступени определяется в терминах объектов предыдущей ступени.

А. А. Марков построил два эквивалентных варианта С. с. с.— «длинная башня» [2] и «короткая башня» [3]. Ниже кратко описан вариант построения короткой башни в традиционных обозначениях *предикатов исчисления* и для языка *арифметики формальной* (сам А. А. Марков использовал бесскобочные обозначения формул). Элементарные формулы языка $Я_0$ имеют один из видов $(t = r)$ или $(t \neq r)$, где t, r — примитивно-рекурсивные термы (термы $Я_0$). Остальные формулы $Я_0$ строятся обычным образом с помощью логических связок *конъюнкции* $\wedge$, *дизъюнкции* $\vee$ и *ограниченных кванторов* $(\forall x \leqslant t)\varphi$, $(\exists x \leqslant t)\varphi$, где φ — формула $Я_0$ и t — терм $Я_0$. Язык $Я_0$ разрешим в том смысле, что имеется общий способ распознавания истинных замкнутых формул $Я_0$ среди всего множества формул $Я_0$. Семантика формул $Я_0$ определяется индукцией по построению формулы. Всякая формула $Я_0$ эквивалентна бескванторной формуле.

Формулы $Я_1$ строятся исходя из формул $Я_0$ с помощью любого числа применений связок $\wedge$, $\vee$ и квантора существования. Язык $Я_1$ неразрешим, но может быть построено нек-рое исчисление $И$, в к-ром выводятся все истинные замкнутые формулы $Я_1$ и только они.

Формулы $Я_2$ строятся индуктивно исходя из формул $Я_1$ с помощью однократного применения связки $\supset$ и любого числа применений конъюнкции $\wedge$ и квантора общности $\forall$. Таким образом, формулы $Я_2$ имеют один из следующих видов: 1) формулы $Я_1$; 2) $(\varphi \wedge \psi)$, где φ, ψ — формулы $Я_2$; 3) $(\alpha \supset \beta)$, где α, β — формулы

языка $Я_i$; 4) $\forall x\varphi$, где φ — формула $Я_2$. Импликации $(\alpha\supset\beta)$ понимаются следующим образом: $(\alpha\supset\beta)$ выражает наличие общего метода, позволяющего по любому слову Q в алфавите языков устанавливать, что Q не есть вывод формулы α в исчислении $И$, либо давать вывод β в исчислении $И$. Затем строится полуформальная теория S_2, в к-рой выводимы замкнутые формулы $Я_2$ (роль S_2 для $Я_1$ играет $И$). Аксиомами S_2 являются верные формулы $Я_2$. Среди обычных правил вывода имеется и эффективное ω-правило с бесконечным числом посылок: если имеется общий метод, позволяющий вывести в S_2 формулу $\varphi(n)$ при всяком натуральном n, то и формула $\forall x\ \varphi(x)$ может считаться выводимой в S_2. Семантическая пригодность S_2 выражается следующей теоремой: всякая замкнутая формула $Я_2$, выводимая из верной формулы $Я_2$ как из посылки, верна в $Я_2$.

Формулы $Я_3$ строятся индуктивно исходя из формул $Я_2$ с помощью однократного применения связки $\supset_1$ и любого числа применений $\wedge$ и $\forall$. Импликация $(\alpha\supset_1\beta)$ выражает, что β выводится из формулы α в теории S_2. Можно показать, что два вида импликаций в языке $Я_3$ согласованы между собой там, где оба они применимы. Затем строится полуформальная теория S_3 и доказывается ее семантическая пригодность. Аналогичным образом определяются языки $Я_4$, $Я_5$, ... и полуформальные теории S_4, S_5, ... Формулы $Я_{n+1}$ строятся исходя из формул $Я_n$ с помощью однократного применения связки $\supset_{(n-1)}$ к формулам предыдущего языка $Я_n$ и любого числа применений связок $\wedge$ и $\forall$ к формулам языка $Я_{n+1}$. Импликация $(\alpha\supset_{(n-1)}\beta)$ выражает, что β выводится из α в теории S_n. Все S_n семантически пригодны: всякая замкнутая формула $Я_n$, выводимая из верной формулы, верна. Импликации различных уровней согласованы там, где обе они применимы.

Указанная согласованность дает возможность объединить все языки $Я_n$ в один язык $Я_\omega$, формулы к-рого получаются, если у импликаций всех языков $Я_n$ убрать индексы. Формула φ языка $Я_\omega$ считается верной, если она верна в нек-ром языке $Я_n$ при произвольной расстановке индексов у импликаций, превращающей φ в формулу языка $Я_n$.

Если ввести в $Я_\omega$ отрицание $\neg\varphi$ как сокращение для $(\varphi\supset 0=1)$, то формула вида $\neg\neg\alpha\supset\alpha$ верна в $Я_\omega$ для всякой формулы α языка $Я_1$. Таким образом, *конструктивного подбора принцип* оказывается верным в $Я_\omega$. Языки $Я_n$ образуют существенно невырожденную иерархию с точки зрения выразительных возможностей формул этих языков. Классическое исчисление предикатов со связками $\wedge$, $\neg$, $\supset$, $\forall$ является полным относительно истинности в $Я_\omega$.

Наконец, язык $Я_{\omega+1}$ содержит все формулы формальной арифметики. С помощью алгоритма выявления конструктивной задачи по Шанину [4] всякая замкнутая формула φ языка $Я_{\omega+1}$ может быть приведена к виду $\exists x\ \psi(x)$, где $\psi(x)$ — формула языка $Я_\omega$. Формула φ считается верной, если осуществимо натуральное число n такое, что $\varphi(n)$ верна в $Я_\omega$. Такое понимание суждений арифметики хорошо согласовано со всеми основными принципами *конструктивной математики*. В частности, всякая формула $Я_{\omega+1}$ эквивалентна утверждению о собственной рекурсивной реализуемости по Клини [5].

Лит.: [1] Гейтинг А., Интуиционизм, пер. с англ., М., 1965; [2] Марков А. А., «Rev. internat. Phil.», 1971, t. 25, fasc. 4, p. 477—507; [3] его же, «Докл. АН СССР», 1974, т. 214, № 1, с. 40—43; № 2, с. 279—82; № 3, с. 513—16; № 4, с. 765—68; № 5, с. 1031—34; № 6, с. 1262—64; т. 215, № 1, с. 57—60; № 2, с. 266—69; [4] Шанин Н. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 52, с. 226—311; [5] Драгалин А. Г., Математич. интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., 1979.

А. Г. Драгалин.

СТЬЮДЕНТА КРИТЕРИЙ, *t*-критерий,— *значимости критерий* для средних значений нормальных распределений.

О д н о в ы б о р о ч н ы й С. к. Пусть независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ подчиняются нормальному $N_1(a, \sigma^2)$ закону, параметры к-рого a и σ^2 неизвестны, и пусть проверяется *сложная гипотеза* $H_0: a=a_0$ против сложной альтернативы $H_1: a \neq a_0$. Для решения этой задачи используется С. к., основанный на статистике

$$t_{n-1} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a_0}{s},$$

где

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ и } s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

— оценки параметров a и σ^2, вычисленные по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$. При справедливости гипотезы H_0 статистика t_{n-1} подчиняется *Стьюдента распределению* с $f=n-1$ степенями свободы, т. е.

$$\mathsf{P}\{|t_{n-1}|<t \mid H_0\} = 2S_{n-1}(t)-1,\ t>0,$$

где $S_f(t)$ — функция распределения Стьюдента с f степенями свободы. Согласно одновыборочному С. к. с уровнем значимости α, $0<\alpha<0{,}5$, гипотезу H_0 следует принять, если

$$\left|\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a_0}{s}\right| < t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),$$

где $t_{n-1}(1-\alpha/2)$ — *квантиль* уровня $1-\alpha/2$ распределения Стьюдента с $f=n-1$ степенями свободы, т. е. $t_{n-1}(1-\alpha/2)$ — решение уравнения $S_{n-1}(t)=1-\alpha/2$. Напротив, если

$$\left|\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a_0}{s}\right| \geqslant t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),$$

то согласно С. к. уровня α проверяемую гипотезу $H_0: a=a_0$ следует отвергнуть и принять конкурирующую гипотезу $H_1: a\neq a_0$.

Д в у х в ы б о р о ч н ы й С. к. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ — взаимно независимые *нормально распределенные случайные величины*, имеющие одинаковую, но неизвестную дисперсию σ^2, и пусть

$$\mathsf{E}X_1 = \mathsf{E}X_2 = \ldots = \mathsf{E}X_n = a_1,$$
$$\mathsf{E}Y_1 = \mathsf{E}Y_2 = \ldots = \mathsf{E}Y_m = a_2,$$

причем параметры a_1 и a_2 тоже неизвестны (часто говорят, что имеются две независимые нормальные выборки). Далее, пусть проверяется гипотеза $H_0: a_1=a_2$ против альтернативы $H_1: a_1\neq a_2$. В этом случае как проверяемая гипотеза H_0, так и конкурирующая гипотеза H_1 являются сложными. По наблюдениям $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ можно вычислить оценки

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ и } \overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_j$$

для неизвестных математич. ожиданий a_1 и a_2, а также оценки

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \text{ и } s_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\overline{Y})^2$$

для неизвестной дисперсии σ^2. Далее, пусть

$$s^2 = \frac{1}{n+m-2}\left[(n-1)\,s_1^2+(m-1)\,s_2^2\right].$$

Тогда при справедливости гипотезы H_0 статистика

$$t_{n+m-2} = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{s\sqrt{1/n+1/m}}$$

подчиняется распределению Стьюдента с $f=n+m-2$ степенями свободы. Именно этот факт и лежит в основе двухвыборочного С. к., предназначенного для проверки H_0 против H_1. Согласно двухвыборочному С. к. уровня α, $0<\alpha<0{,}5$ гипотеза H_0 принимается, если

$$|t_{n+m-2}| < t_{n+m-2}(1-\alpha/2),$$

где t_{n+m-2} $(1-\alpha/2)$ — квантиль уровня $1-\alpha/2$ распределения Стьюдента с $f=n+m-2$ степенями свободы. Если же

$$|t_{n+m-2}| \geqslant t_{n+m-2}(1-\alpha/2),$$

то согласно С. к. уровня α гипотеза H_0 отвергается в пользу H_1.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, 2 изд., пер. с англ., М., 1975; [2] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [3] Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Краткий курс математич. статистики для технич. приложений, М., 1959; [4] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математич. статистики, 3 изд., М., 1983; [5] Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистич. теории обработки наблюдений, М., 1958.

М. С. Никулин.

СТЬЮДЕНТА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ с f степенями свободы, t-распределение,— распределение вероятностей случайной величины

$$t_f = \frac{U}{\sqrt{\frac{1}{f}\chi_f^2}},$$

где U — случайная величина, подчиняющаяся стандартному нормальному $N(0, 1)$ закону, χ_f^2 — случайная величина, не зависящая от U и подчиняющаяся *«хи-квадрат» распределению* с f степенями свободы. Функция распределения случайной величины t_f выражается формулой

$$\mathsf{P}\{t_f \leqslant x\} = S_f(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi f}} \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \int_{-\infty}^{x} \left(1+\frac{u^2}{f}\right)^{-\frac{f+1}{2}} du, \quad |x| < \infty.$$

В частности, если $f=1$, то

$$S_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$$

представляет собой функцию распределения закона Коши. Плотность вероятности С. р. симметрична относительно 0, поэтому

$$S_f(t) + S_f(-t) = 1 \text{ для любого } t \in \mathbb{R}^1.$$

Моменты $\mu_r = \mathsf{E} t_f^r$ С. р. существуют только для $r<f$, при этом нечетные моменты равны 0, в частности $\mathsf{E}\, t_f = 0$. Четные моменты С. р. выражаются формулой

$$\mu_{2r} = f^r \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f}{2}-r\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)}, \quad 2 \leqslant 2r < f,$$

в частности $\mu_2 = \mathsf{D}\{t_f\} = f/(f-2)$. Функция распределения $S_f(x)$ случайной величины t_f выражается в терминах функции *бета-распределения* следующим образом:

$$S_f(x) = 1 - \frac{1}{2} I_{f/(f+x^2)}\left(\frac{f}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

где $I_z(a, b)$ — неполная бета-функция, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Если $f \to \infty$, то С. р. сходится к стандартному нормальному закону, т. е.

$$\lim_{f\to\infty} S_f(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Пример. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково нормально $N(a, \sigma^2)$ распределенные случайные величины, причем параметры a и σ^2 неизвестны. Тогда статистики

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ и } s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

являются наилучшими несмещенными оценками параметров a и σ^2, причем $\overline{X}$ и s^2 стохастически независимы.

Так как случайная величина $\sqrt{n}(\overline{X}-a)/\sigma$ подчиняется стандартному нормальному закону, а

$$\frac{n-1}{\sigma^2}s^2=\chi^2_{n-1}$$

распределена по закону «хи-квадрат» с $f=(n-1)$ степенями свободы, то в силу их независимости дробь

$$\frac{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a}{\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\chi^2_{n-1}}}=\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}-a)}{s}$$

подчиняется С. р. с $f=n-1$ степенями свободы. Пусть $t_f(P)$ и $t_f(1-P)=-t_f(P)$ суть решения уравнений

$$S_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}-a)}{s}\right)=\begin{cases}P, & 0,5<P<1,\\ 1-P, & f=n-1.\end{cases}$$

Тогда статистики $\overline{X}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_f(P)$ и $\overline{X}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_f(P)$ суть нижняя и верхняя границы доверительного множества для неизвестного математич. ожидания a нормального закона $N(a,\ \sigma^2)$, причем коэффициент доверия этого доверительного множества равен $2P-1$, т. е.

$$\mathrm{P}\left\{\overline{X}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_f(P)<a<\overline{X}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_f(P)\right\}=2P-1.$$

С. р. впервые было использовано У. С. Госсетом (W. S. Gosset, псевдоним Student — Стьюдент).

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [3] «Student» (Gosset W. S.), «Biometrika», 1908, v. 6, p. 1—25.

М. С. Никулин.

СТЬЮДЕНТИЗИРОВАННЫЙ РАЗМАХ — статистика из класса т. н. стьюдентизированных статистик, получающихся в результате специальной нормировки линейной комбинации порядковых статистик, построенных по нормальной выборке.

Пусть $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ — независимые нормально $N(a,\ \sigma^2)$ распределенные случайные величины, и пусть $X^{(n)}=(X_{(n1)},\ \ldots,\ X_{(nn)})$ — вектор порядковых статистик, построенный по наблюдениям $X_1,\ \ldots,\ X_n$. Далее, пусть статистика $\sum_{i=1}^n a_i\,X_{(ni)}$, являющаяся линейной комбинацией порядковых статистик $X_{(n1)},\ \ldots,\ X_{(nn)}$, не зависит от нек-рой среднеквадратической оценки s_f^2 дисперсии σ^2, причем $fs_f^2/\sigma^2=\chi_f^2$. В таком случае говорят, что

$$\frac{1}{s_f}\sum_{i=1}^n a_iX_{(ni)}$$

является стьюдентизированной статистикой.

С. р.— стьюдентизированная статистика, когда $\sum_{i=1}^n a_i\,X_{(ni)}$ представляет собой размах выборки $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$, т. е.

$$\sum_{i=1}^n a_iX_{(ni)}=X_{(nn)}-X_{(n1)},$$

и, следовательно, С. р. имеет вид

$$[X_{(nn)}-X_{(n1)}]/s_f.$$

Лит.: [1] Дэйвид Г., Порядковые статистики, пер. с англ., М., 1979; [2] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

М. С. Никулин.

СТЭНТОНА ЧИСЛО — один из критериев подобия тепловых процессов, характеризующий интенсивность диссипации энергии в потоке жидкости или газа:

$$\mathrm{St}=\alpha/c_p\rho v,$$

где α — коэффициент теплоотдачи, c_p — удельная теплоемкость среды при постоянном давлении, ρ — плотность, v — скорость течения.

С. ч. связано с *Нуссельта числом* Nu и *Пекле числом* Pe соотношением: St=Nu/Pe.

С. ч. наз. по имени Т. Стэнтона (Th. Stanton).

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

СУБГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция $u=u(x): D \to [-\infty, \infty)$ точки $x=(x_1, \ldots, x_n)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, определенная в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и обладающая следующими свойствами: 1) $u(x)$ полунепрерывна сверху в D; 2) для любой точки $x_0 \in D$ существуют сколь угодно малые значения $r>0$ такие, что

$$u(x_0) \leqslant I(u; x_0, r) = \frac{1}{s_n r^{n-1}} \int_{S(x_0, r)} u(x)\, d\sigma(x),$$

где $I(u; x_0, r)$ — среднее значение функции $u(x)$ по площади сферы $S(x_0, r)$ с центром x_0 радиуса r, $s_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$; 3) $u(x) \not\equiv -\infty$ (это условие иногда опускается). В данном определении С. ф. среднее значение $I(u; x_0, r)$ по площади сферы можно заменить на среднее значение

$$J(u; x_0, r) = \frac{1}{v_n r^n} \int_{B(x_0, r)} u(x)\, dv(x)$$

по объему шара $B(x_0, r)$, где $v_n = s_n/n$ — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Равносильное определение С. ф., объясняющее название «С. ф.», получается, если условие 2) заменить на 2′) : если Δ — относительно компактная подобласть D, а $v(x)$ — гармоническая функция в Δ, непрерывная на замыкании $\bar{\Delta}$ и такая, что

$$u(x) \leqslant v(x) \qquad (1)$$

на границе $\partial\Delta$, то неравенство (1) сохраняется и всюду в области Δ ($v(x)$ наз. г а р м о н и ч е с к о й м а ж о р а н т о й С. ф. $u(x)$ в Δ). Если функция $u(x)$ принадлежит классу $C^2(D)$, то для того чтобы она была С. ф., необходимо и достаточно, чтобы в D оператор Лапласа Δu был неотрицательным.

Идея С. ф. была заложена по существу в *выметания методе* А. Пуанкаре (H. Poincaré). Важные применения С. ф. нашли в основополагающих работах Ф. Гартогса [1] по теории аналитич. функций многих комплексных переменных; систематич. изучение С. ф. началось с работ Ф. Рисса [2]. Тесная связь С. ф. с аналитич. функциями $f(z)$ одного или нескольких комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n \geqslant 1$, и вытекающие отсюда возможности применения С. ф. для изучения аналитич. функций обусловлены тем, что модуль $|f(z)|$ и логарифм модуля $\ln|f(z)|$ аналитич. функции суть С. ф. С другой стороны, условие 2′) показывает, что С. ф. можно рассматривать как аналог *выпуклых функций* одного действительного переменного.

П р о с т е й ш и е с в о й с т в а С. ф. 1) Если $u_1, \ldots, u_m$ — С. ф. в D и $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — неотрицательные числа, то линейная комбинация $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k u_k$ есть С. ф. в D. 2) Верхняя огибающая $\sup\{u_k(x) : 1 \leqslant k \leqslant m\}$ конечного семейства С. ф. $\{u_k\}_{k=1}^{m}$ есть С. ф. Если верхняя огибающая бесконечного семейства С. ф. полунепрерывна сверху, то она есть также С. ф. 3) Равномерно сходящаяся и монотонно убывающая последовательности С. ф. сходятся к С. ф. 4) Если $u(x)$ — С. ф. в D, а $\varphi(u)$ — выпуклая неубывающая функция на области значений E функции u в D, или если $u(x)$ — гармоническая функция в D, а $\varphi(u)$ — выпуклая функция на E, то $\varphi(u(x))$ — С. ф. в D. В частности, если $u(x)$ — С. ф. в D, то $e^{\lambda u(x)}$, $\lambda>0$, и $[u^+(x)]^k$, $k \geqslant 1$, где $u^+(x)=\max\{u(x), 0\}$, суть С. ф. в D; если $u(x)$ — гармоническая функция в D, то $|u(x)|^k$, $k \geqslant 1$,— С. ф. в D. 5) П р и н ц и п м а к с и м у м а: если $u(x)$ — С. ф. в D и для любой граничной точки $\xi \in \partial D$ и любого $\varepsilon>0$ существует окрестность $V=V(\xi)$ такая, что $u(x)<\varepsilon$ в $D \cap V$,

либо $u(x)<0$ в D, либо $u(x)\equiv 0$. Это свойство остается в силе и для неограниченных областей D, причем если $\xi=\infty\in\partial D$, то под окрестностью V понимается внешность шара $V=V(\infty)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|>R\}$. 6) Если $u(z)$ — С. ф. в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, и $z=z(w)$ — голоморфное отображение области $D'\subset\mathbb{C}^n$ в D, то $u(z(w))$ — С. ф. в D'. 7) Функция $u(x)$ — гармоническая в области $D\subset\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $u(x)$ и $-u(x)$ суть С. ф. в D. 8) Если $u(x)$ — С. ф. во всей плоскости $\mathbb{R}^2$, ограниченная сверху, то $u(x)=\mathrm{const}$ (в $\mathbb{R}^n$ при $n\geqslant 3$ это свойство не имеет места). На свойствах 2), 5) и 7) основан *Перрона метод* решения задачи Дирихле для гармонич. функций.

Большое значение имеют свойства выпуклости средних значений С. ф.: если $u(x)$ — С. ф. в кольце $r_1\leqslant r=|x-x_0|\leqslant r_2$, $0<r_1<r_2$, то средние $I(u;\ x_0,\ r)$, $J(u;\ x_0,\ r)$, а также максимум

$$M(u;\ x_0,\ r)=\max\{u(x):|x-x_0|=r\}$$

суть выпуклые функции относительно $\ln r$ для $n=2$ или относительно r^{2-n} для $n\geqslant 3$ на отрезке $r_1\leqslant r\leqslant r_2$; если $u(x)$ — С. ф. в шаре $0\leqslant r=|x-x_0|\leqslant r_2$, то, кроме того, $I(u;\ x_0,\ r)$ и $J(u;\ x_0,\ r)$ суть непрерывные неубывающие функции от r на отрезке $0\leqslant r\leqslant r_2$, причем принимается

$$I(u;\ x_0,\ 0)=J(u;\ x_0,\ 0)=u(x_0);$$

в этом последнем случае

$$u(x_0)\leqslant J(u;\ x_0,\ r)\leqslant I(u;\ x_0,\ r)$$

для $0\leqslant r\leqslant r_2$. Средние $I(u;\ x_0,\ r)$ и $J(u;\ x_0,\ r)$, рассматриваемые как функции точки x_0 при фиксированных u и r, суть С. ф. в соответствующей подобласти $D'\subset D$, причем $J(u;\ x_0,\ r)$ непрерывна. Составляя итерации достаточно высокого порядка

$$u_m^{(k)}(x)=J\left(u_m^{(k-1)};\ x,\ \frac{1}{m}\right),\quad u_m^{(0)}(x)=u(x),$$

можно получить монотонно убывающую последовательность сколь угодно гладких С. ф. $\{u_m^{(k)}(x)\}_{m=m_0}^{\infty}$, сходящуюся при $m\to\infty$ к произвольно заданной С. ф. $u(x)$.

Ньютонов потенциал и *логарифмический потенциал* неотрицательных масс, взятые со знаком минус, суть С. ф. всюду в пространстве $\mathbb{R}^n$. С другой стороны, одной из основных в теории С. ф. является теорема Рисса о локальном представлении произвольной С. ф. в виде суммы гармонич. функции и взятого со знаком минус потенциала (см. [2]). Точнее, если $u(x)$ — С. ф. в области $D\subset\mathbb{R}^n$, то существует единственная неотрицательная борелевская мера μ на D (ассоциированная с $u(x)$ мера, или мера Рисса) такая, что для любого компакта $E\subset D$ справедливо представление

$$u(x)=\int_E K(x-\xi)\,d\mu(\xi)+h(x),\qquad(2)$$

где $K(x-\xi)=\ln|x-\xi|$ при $n=2$, $K(x-\xi)=-|x-\xi|^{2-n}$ при $n\geqslant 3$, $h(x)$ — гармонич. функция во внутренности E. Теорема Рисса устанавливает тесную связь теории С. ф. с *потенциала теорией*.

Если компакт E есть регулярная замкнутая область $\overline{G}$, $E=\overline{G}$, ограниченная, напр., поверхностью Ляпунова и допускающая *Грина функцию* $g(x,\ \xi)$, то наряду с (2) справедливо представление с участием потенциала Грина:

$$u(x)=-\int_{\overline{G}} g(x,\ \xi)\,d\mu(\xi)+w(x),\qquad(3)$$

где $w(x)$ — наименьшая гармоническая мажоранта С. ф. $u(x)$ в области G.

Представление вида (3), вообще говоря, не имеет места во всей области определения D С. ф. $u(x)$,

и в теории С. ф. важное значение имеет вопрос о выделении класса тех С. ф. $u(x)$, к-рые допускают представление (3) во всей области D, т. е. вопрос о выделении класса A С. ф. $u(x)$, имеющих гармонич. мажоранту во всей области D. Напр., если $D=B(0, R)$ — шар и существует константа $C=C(u)$ такая, что

$$\int_{S(0, R)} u^+(r\xi)\, d\sigma(\xi) < C(u) < +\infty,\ 0<r<1, \quad (4)$$

то $u(x)$ допускает представление (3) в D, причем наименьшая гармонич. мажоранта $w(x)$ в свою очередь представима интегралом Пуассона — Стилтьеса

$$w(x) = \int \frac{R^{n-2}(R^2-|x|^2)}{|x-\xi|^n}\, d\nu(\xi), \quad (5)$$

где ν — борелевская мера произвольного знака, сосредоточенная на граничной сфере $\partial D=S(0, R)$ (граничная мера) и нормированная условием $\int d\nu(\xi)=1$.

В связи с представлением (5) в приложениях важно знать, при каких условиях граничная мера ν имеет только отрицательную сингулярную составляющую, т. е. при каких условиях в каноническом разложении $\nu=\nu^+-\nu^-$ составляющая ν^+ абсолютно непрерывна. Этот вопрос решается введением класса сильно субгармонических функций (см. [11]—[13], [15], а также [10], где рассмотрены и обобщения). Пусть $\psi(y)$ — возрастающая вогнутая функция от y такая, что $\lim\limits_{y\to+\infty} y/\psi(y)=+\infty$. Функция $u(x)$, $x\in D$, наз. сильно субгармонической относительно $\psi(y)$, если $\psi(u(x))$ есть С. ф. Напр., к классу сильно субгармонических относятся *логарифмически субгармонические функции* $u(x)\geqslant 0$, для к-рых $\ln u(x)$ есть С. ф. Если для сильно С. ф. $u(x)$ в шаре D выполняется условие (4), то $u(x)$ представима в виде (3) в D и для нее граничная мера ν характеризуется разложением

$$d\nu(\xi) = u(\xi)\, d\sigma(\xi) - d\nu^-(\xi),\ \xi\in\partial D,$$

где $u(\xi)$ — радиальные граничные значения функции $u(x)$ (существующие почти всюду по мере Лебега на сфере $\partial D=S(0, R)$), $d\nu^-\geqslant 0$ — сингулярная составляющая меры ν.

С. ф. класса A в шаре D почти всюду на граничной сфере $\partial D=S(0, R)$ имеют радиальные граничные значения. Однако построены примеры ограниченных и непрерывных в шаре D С. ф., нигде на сфере ∂D не имеющих угловых граничных значений,— явление, не имеющее места для гармонич. функций. Для существования угловых граничных значений нужно наложить дополнительные, кроме (4), условия на ассоциированную меру μ в D (см., напр., [14]).

Одним из существенных вопросов в теории С. ф. и ее приложениях является характеризация граничных свойств функций различных подклассов класса A. Общий способ введения таких подклассов состоит в том, что для сильно субгармонич. функций $u(x)$ относительно вогнутой функции $\psi(y)$ рассматривается какая-либо неубывающая функция $\varphi(y)$, выпуклая относительно $\psi(y)$ и такая, что $\lim\limits_{y\to+\infty} \varphi(y)/\psi(y)=+\infty$, и вводится класс A_φ, *определяемый для шара условием*

$$\int_{S(0, R)} \varphi^+(u(r\xi))\, d\sigma(\xi) < C(u, \varphi) < +\infty, 0<r<1.$$

О граничных свойствах С. ф. см. [3]—[5], [10]—[16].

Для функций, представимых в виде разности двух С. ф., вводится понятие характеристической функции по Р. Неванлинне (R. Nevanlinna) и обобщается теория *ограниченного вида функций* (см. [3], [7]).

Своеобразным обобщением теории *целых функций* является теория С. ф. во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Здесь получаются обобщения классич. теорем о представле-

нии целых функций Вейерштрасса и Адамара, теория роста и распределения значений, теория асимптотич. значений и асимптотич. путей и др. (см. [7]).

В теории аналитич. функций многих комплексных переменных важное значение имеет изучение таких подклассов С. ф., как *плюрисубгармонические функции* и *плюригармонические функции* (см. [17]). Об аксиоматических обобщениях С. ф. см. [9].

Лит.: [1] Hartogs F., «Math. Ann.», 1906, Bd 62, S. 1—88; [2] Riesz F., «Acta math.», 1926, v. 48, p. 329—43; 1930, v. 54, p. 321—60; [3] Привалов И. И., Субгармонические функции, М.—Л., 1937; [4] его же, Граничные свойства однозначных аналитических функций, М., 1941; [5] его же, Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950; [6] Radó T., Subharmonic functions, B., 1937; [7] Хейман У., Кеннеди П., Субгармонические функции, пер. с англ., М., 1980; [8] Brelot M., Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point, P., 1934; [9] его же, Lectures on potential theory, Bombay, 1960; [10] Heins M., Hardy classes on Riemann surfaces, B.—[u. a.], 1969; [11] Соломенцев Е. Д., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1938, № 5—6, с. 571—82; [12] Привалов И. И., Кузнецов П. И., «Матем. сб.», 1939, т. 6, № 3, с. 345—76; [13] Соломенцев Е. Д., «Вестн. МГУ», 1959, № 5; [14] его же, «Чехосл. матем. ж.», 1958, т. 8, № 4, с. 520—36; [15] Gårding L., Hörmander L., «Math. Scand.», 1964, v. 15, p. 93—96; 1966, v. 18, p. 183; [16] Соломенцев Е. Д., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964, с. 83—100; [17] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

СУБДИФФЕРЕНЦИАЛ выпуклой функции $f: X \to \mathbb{R}$ в точке x_0, определенной на пространстве X, находящемся в двойственности с пространством Y — множество в Y, определяемое соотношением:

$$\partial f(x_0) = \{y \in Y : f(x) - f(x_0) \geqslant \geqslant \langle y,\ x - x_0 \rangle \text{ для всех } x \in X\}.$$

Напр., С. нормы $f(x) = \|x\|$ в нормированном пространстве X с сопряженным X^* имеет вид

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{x^* \in X^* : \langle x^*,\ x\rangle = \|x\|,\ \|x^*\| = 1\}, & \text{если } x \neq 0, \\ \{x^* : \|x^*\| = 1\}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

С. выпуклой функции f в точке x_0 является выпуклым множеством. Если f непрерывна в этой точке, то С. непуст и компактен в топологии $\sigma(Y, X)$.

С. выпуклой функции играет роль, подобную роли производной в классич. анализе. Для него справедливы теоремы, аналогичные соответствующим теоремам для производной. Напр., если f_1 и f_2 — выпуклые функции и в нек-рой точке $x \in (\operatorname{dom} f_1) \wedge (\operatorname{dom} f_2)$, по крайней мере, одна из функций непрерывна, то

$$\partial f_1(x) + \partial f_2(x) = \partial (f_1 + f_2)(x)$$

для всех x (теорема Моро — Рокафеллара).

С. опорной функции выпуклого множества A из X, компактного в топологии $\sigma(Y, X)$, совпадает с самим множеством A. Это выражает двойственность между выпуклыми компактными множествами и выпуклыми замкнутыми однородными функциями (см. также *Опорная функция*, *Надграфик*, *Выпуклый анализ*).

Лит.: [1] Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973.

В. М. Тихомиров.

СУБМЕРСИЯ — отображение $f: M \to N$ m-мерного многообразия M в n-мерное многообразие N, $n \leqslant m$, при к-ром для любой точки $p \in M$ можно так ввести локальные координаты $x_1, \ldots, x_m$ на M возле p и $y_1, \ldots, y_n$ на N возле $f(p)$, что в терминах этих координат f локально представляется в виде

$$(x_1, \ldots, x_m) \longrightarrow (x_1, \ldots, x_n).$$

Если M и N снабжены структурой кусочно линейного, аналитического или дифференцируемого (класса C^k) многообразия и локальные координаты можно выбрать кусочно линейными, аналитическими или дифференцируемыми (класса C^l, $l \leqslant k$), то С. наз. кусочно

линейной, аналитической или дифференцируемой (класса C^l). С. можно также определить для многообразия с краем (при этом в топологич. задачах оказывается целесообразным налагать дополнительное условие о поведении отображения возле края, см. [1]) и в бесконечномерном случае (см. [2]). Понятие С. в нек-ром неформальном смысле двойственно понятию *погружения* (иммерсии), и теории их аналогичны.

Лит.: [1] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [2] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967.

Д. В. Аносов.

СУБНОРМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА, достижимая подгруппа,— любой член нек-рого субнормального ряда группы. Для обозначения субнормальности подгруппы H в группе G используется обозначение $H \lhd\lhd G$.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, М., 1972.

Н. Н. Вильямс.

СУБНОРМАЛЬНЫЙ РЯД группы — *подгрупп ряд* группы G

$$E = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G,$$

где каждая подгруппа G_i является нормальной подгруппой в G_{i+1}. Факторгруппы G_{i+1}/G_i наз. факторами, а число n — длиной С. р. Рассматриваются и бесконечные С. р. (см. *Подгрупп система*). Неуплотняемый далее С. р. наз. композиционным рядом, а его факторы — композиционными факторами.

О. А. Иванова.

СУБПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, субтепловая функция,— аналог *субгармонической функции* для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \qquad (*)$$

где $u = u(x,\ t)$, $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа. Напр., функция $v = v(x,\ t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, класса C^2 будет С. ф. в прямоугольнике

$$D = \{(x,\ t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : a < x < b,\ 0 < t < h\},$$

если

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0$$

всюду в D. В более общем случае пусть точка $(x_0,\ t_0) \in D$ и Δ — достаточно малый равносторонний треугольник, основание к-рого параллельно оси $t = 0$, $(x_0,\ t_0) \in \Delta \subset D$. Непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$ функция $v = v(x,\ t)$ наз. субпараболической в D, если ее значение в любой точке $(x_0,\ t_0) \in D$ не больше, чем значение в этой точке того решения уравнения (*) в любом достаточно малом треугольнике Δ, $(x_0,\ t_0) \in \Delta$, к-рое имеет на сторонах Δ те же значения, что и $v(x,\ t)$.

Для С. ф. справедливы многие свойства субгармонических функций, в т. ч. и принцип максимума.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958; [2] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [3] его же, «Compos. math.», 1935, t. 1, p. 383—419.

Е. Д. Соломенцев.

СУБПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО — одно из обобщений пространств постоянной кривизны (проективного пространства). Определяется k-кратное проективное пространство аффинной связности, геодезические линии к-рого выражаются в нек-рой системе координат системой из $(n - 1)$ уравнений, из к-рых ровно k линейных. При $k = n - 2$ геодезич. линии являются плоскими, располагаясь в двумерных евклидовых плоскостях, и пространство наз. субпроективным, если все эти двумерные евклидовы плоскости проходят через общую точку или параллельны одному направлению (общая точка — бесконечно удаленная).

Пусть A_n есть n-мерное С. п. аффинной связности без кручения. В нек-рой проективной системе x^i координат пространства A_n коэффициенты связности имеют вид

$$\Gamma^i_{jk} = x^i f_{jk} + \delta^i_k p_j + \delta^i_j p_k, \quad f_{jk} = f_{kj},$$

где δ^i_j — символ Кронекера,

$$p_k = \frac{1}{2}(\Gamma^k_{kk} - f_{kk}x^k);$$

в этой системе координат все двумерные евклидовы плоскости, в к-рых расположены геодезич. линии A_n, проходят через начало координат.

Вообще в С. п. A_n существует канонич. система координат x^i, в к-рой коэффициенты связности принимают наиболее простой вид

$$\Gamma^i_{jk} = x^i f_{jk}.$$

Аналогично определяется риманово субпроективное пространство V_n, метрика к-рого приводится к одному из трех возможных видов:

$$ds^2 = g_{\alpha\gamma}dx^\alpha dx^\gamma,$$

где

1) $g_{ik} = \partial_i\tau\partial_k\tau + \frac{\lambda}{\theta}\partial_{ik}\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)$,

2) $g_{ik} = \partial_i\tau\partial_k\tau + c\frac{\lambda}{\theta}\partial_{ik}\lambda$, $c = \text{const} \neq 0$;

здесь θ — произвольная функция координат x^i, τ — функция величины $\frac{\lambda}{\theta}$, ν — квадратичная форма от x^i, λ в 1) — линейная форма, а в 2) — квадратный корень из квадратичной формы, не являющейся полным квадратом.

3) Исключительный случай

$$\theta ds^2 = a_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + 2d\lambda dx^{n-1} + 2d\nu dx^n,$$

где $a_{\alpha\beta} = \text{const}$, $\det|a_{\alpha\beta}| \neq 0$, θ — однородная функция 1-й степени от x^{n-1} и x^n, λ и ν — функции, связанные соотношением

$$\frac{1}{2}a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + \lambda x^{n-1} + \nu x^n = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n-2.$$

Функции λ и ν не являются однородными функциями 1-й степени.

Все эти три случая могут быть приведены путем выбора координат z^i к единообразному виду:

1) $ds^2 = e^{-2\mu(z^1)}(e_1dz^{1^2} + e_2dz^{2^2} + \ldots + e_ndz^{n^2})$,

2) $ds^2 = e^{-2\mu(z)}\sum_{i=1}^n (e_idz^{i^2})$, $z = \sqrt{\sum_{i=1}^n e_idz^{i^2}}$,

3) $ds^2 = e^{-2\mu(z^1)}\left(2dz^1dz^2 + \sum_{i=3}^n e_idz^{i^2}\right)$,

$i = 3, \ldots, n$ $(e_i = \text{const})$.

Все римановы С. п. V_n являются конформно-евклидовыми пространствами. Римановы С. п. принадлежат к классу полуприводимых римановых пространств и имеют специальное построение метрик.

Существуют тензорные признаки конформно евклидовых С. п., выделяющие их из класса всех конформно евклидовых пространств. Всякое С. п. V_n (кроме случая 3) может быть реализовано на нек-рой гиперповерхности в евклидовом пространстве E_{n+1} в случае 1) или на гиперповерхности вращения в E_{n+1} в случае 2). Имеет место и обратное утверждение: всякая гиперповерхность вращения вокруг неизотропной оси в евклидовом пространстве E_{n+1}, $n > 2$, представляет собой риманово С. п. с метрикой вида 2).

Движения в римановых С. п. V_n определяются обычным способом. С. р. V_n характеризуются тем, что если V_n не является пространством постоянной кривизны, то оно допускает максимальную нетранзитивную группу движений порядка $\frac{1}{2}n(n-1)$, и, наоборот, всякое риманово пространство V_n, допускающее максимальную нетранзитивную группу порядка $\frac{1}{2}n(n-1)$, является С. п. Римановы С. п. V_n являются максимально подвижными неэйнштейновыми пространствами (аналогичное место занимают пространства постоянной кривизны среди пространств Эйнштейна).

Понятие С. п. допускает следующее обобщение: пространство аффинной связности A_n наз. обобщенным субпроективным пространством, если его геодезич. линии лежат в евклидовых плоскостях E_{r+1}, $1 \leqslant r \leqslant n-2$, проходящих через фиксированную плоскость E_{r-1} (конечную или бесконечно удаленную).

Лит.: [1] Каган В. Ф., Субпроективные пространства, М., 1961.

Л. А. Сидоров.

СУДЗУКИ ГРУППА — простая конечная группа, член бесконечной серии простых групп $Sz(q)$, открытых М. Судзуки (M. Suzuki).

Пусть n — натуральное число, F — конечное поле из $q=2^{2n+1}$ элементов, θ — такой автоморфизм поля F, что $\alpha^{\theta^2}=\alpha^2$ для любого $\alpha \in F$. Тогда С. г. $Sz(q)$ порождается подгруппой T, состоящей из всех диагональных матриц порядка 4 с диагональными элементами $\lambda^{1+\theta}$, λ, λ^{-1}, $(\lambda^{1+\theta})^{-1}$ ($\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$), подгруппой U, состоящей из всех треугольных матриц вида

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^{1+\theta}+\beta & \alpha^{\theta} & 1 & 0 \\ \alpha^{2+\theta}+\alpha\beta+\beta^{\theta}\beta & \alpha & 1 \end{Vmatrix}$$

(α, $\beta \in F$), и матрицей

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Подгруппа U — силовская 2-подгруппа группы $Sz(q)$; она является *Судзуки 2-группой*. Подгруппа UT совпадает с нормализатором подгруппы U. Подстановочное представление группы $Sz(q)$ на смежных классах по UT дважды транзитивно; степень его равна q^2+1. Порядок С. г. $Sz(q)$ равен $q^2(q-1)(q^2+1)$ и не делится на 3. Наоборот, любая неабелева конечная простая группа, чей порядок не делится на 3, изоморфна некрой С. г. Группа $Sz(q)$ — максимальная подгруппа симплектической группы $Sp(4, q)$ и централизатор в $Sp(4, q)$ нек-рого автоморфизма порядка 2 группы $Sp(4, q)=B_2(q)$. Иными словами, $Sz(q)$ изоморфна ${}^2B_2(q)$ — скрещенному аналогу *Шевалле группы* типа B_2 над полем из q элементов.

Лит.: [1] Suzuki M., «Ann. Math.», 1962, v. 75, № 1, p. 105—45; [2] Картер Р., «Математика», 1966, т. 10, № 5, с. 3—47.

В. Д. Мазуров.

СУДЗУКИ 2-ГРУППА — конечная неабелева 2-группа U, отличная от группы кватернионов, к-рая допускает циклическую группу автоморфизмов $\langle a \rangle$, действующую транзитивно на множестве Ω элементов порядка 2 группы U. Последнее означает, что для любых двух элементов x, y из Ω найдется такое натуральное число n, что $y=x^{a^n}$. В С. 2-г. U множество Ω вместе с единичным элементом составляют подгруппу Z, совпадающую с центром группы U; при этом факторгруппа U/Z элементарна. Если порядок Z равен q, то порядок U равен q^2 или q^3.

С. 2-г. полностью описаны (см. [1]). Название связано с тем, что в *Судзуки группах* силовская 2-подгруппа U обладает этими же свойствами.

Лит.: [1] Higman G., «Ill. J. Math.», 1963, v. 7, № 1, p. 79—96.

В. Д. Мазуров.

СУДЗУКИ СПОРАДИЧЕСКАЯ ГРУППА — простая конечная группа порядка

$$448\ 345\ 497\ 600 = 2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13,$$

построенная М. Судзуки (M. Suzuki) как примитивная группа подстановок степени 1782 со стабилизатором точки, изоморфным *Шевалле группе* G_2 (4).

О других спорадических группах см. *Спорадическая простая группа.*

СУЖДЕНИЕ, предложение, утверждение, высказывание,— повествовательное сообщение, к-рое в силу своего смысла может быть истинным или ложным. В более узком значении термина под С. в математич. логике понимается замкнутая формула логико-математич. языка, к-рая в силу семантических соглашений языка, *семантики* языка, может быть квалифицирована как истинная или ложная.

Так, в аксиоматич. теории множеств различные математич. утверждения, напр. *выбора аксиома* или *континуум-гипотеза*, записываются в виде нек-рых формул, к-рые в силу общих семантических соображений могут быть истолкованы как выражающие соответствующие содержательные утверждения. При этом совершенно не обязательно, чтобы имелся способ распознавания истинных и ложных утверждений языка. Более того, сама семантика может оказаться недостаточно разработанной или может встречаться с принципиальными трудностями при решении вопроса относительно истинности нек-рых С. языка. Неразрешимость С. в рамках нек-рой теории выясняется с помощью *формализации метода* (примеры см. в ст. *Аксиоматическая теория множеств*).

А. Г. Драгалин.

СУЖЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ на инвариантное подпространство — то же, что *подпредставление представления*; С. п. л группы X на подгруппу Y (алгебры X на подалгебру Y) — представление ρ группы (алгебры) Y, определяемое формулой $\rho(y) = \pi(y)$ для всех $y \in Y$. С. п. л наз. также ограничением представления π соответственно на инвариантное подпространство или на подгруппу, подалгебру. Если π — непрерывное представление, то и С. п. л также непрерывно.

А. И. Штерн.

СУММАТОРНАЯ ФУНКЦИЯ функции f — функция $x \geqslant 1$, обозначающая сумму значений $f(n)$ на множестве натуральных чисел $n \leqslant x$, $\sum_{n \leqslant x} f(n)$. С. ф. *являются одним из основных средств выражения* разнообразных свойств числовых последовательностей.

Примеры С. ф.: число простых чисел $\leqslant x$, $\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)$ — *Чебышева функция*, число делителей всех $n \leqslant x$ и т. п. (см. [1], [2]).

Основная задача состоит в том, чтобы найти возможно более точное асимптотич. выражение С. ф., а для С. ф., не имеющей асимптотики, наилучшую оценку ее модуля для больших значений x.

В основе аналитич. методов изучения С. ф. лежат *Коши интегральная теорема* и *Дирихле ряды* вида

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, n^{-s}.$$

Если такой ряд абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > \sigma_0 \geqslant 1$, то для нецелого x, $c > \sigma_0$, справедливо тождество

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\, \frac{x^s}{s}\, ds,$$

из к-рого, имея аналитич. продолжение $F(s)$ переносом пути интегрирования влево на нек-рое $\operatorname{Re} s = \sigma_1 < 0$ за счет оценок интеграла по новому контуру, получается

соответствующая оценка для С. ф. f. В случае $f(n)=\Lambda(n)$, напр., интегрирование можно перенести на $\operatorname{Re} s=-\infty$, что дает формулу Римана — Мангольдта для $\psi(x)$. Из общих применений метода известна следующая теорема.

Предположения: $f(n)$, l_n — комплексные числа, $\alpha\geqslant 0$, α_r, γ_r — действительные числа, σ_r, β_r — положительные числа, μ и ν — целые числа $\geqslant 1$, Γ — гамма-функция, $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots$.

1) Для любого $\varepsilon>0$ $f(n)\ll n^{\alpha+\varepsilon}$.

2) Определенная для $s=\sigma+it$, $\sigma>1+\alpha$, функция

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, n^{-s}$$

мероморфна во всей плоскости и имеет конечное число полюсов в полосе $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$.

3) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} l_n \exp(\lambda_n s)$ абсолютно сходится при $\sigma<0$.

4) Для $\sigma<0$

$$\prod_{r=1}^{\mu}\Gamma(\alpha_r+\beta_r s)\,F(s)=$$

$$=\prod_{r=1}^{\nu}\Gamma(\gamma_r-\delta_r s)\sum_{n=1}^{\infty} l_n \exp(\lambda_n s).$$

5) $\beta_1+\ldots+\beta_\mu=\delta_1+\ldots+\delta_\nu$.

6) Если положить

$$\sum_{r=1}^{\nu}\gamma_r-\sum_{r=1}^{\mu}\alpha_r+\frac{1}{2}(\mu-\nu)=\eta,$$

то $\eta\geqslant\alpha+\frac{1}{2}$.

Для фиксированной полосы $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$ найдется постоянная $\gamma=\gamma(\sigma_1,\sigma_2)$ такая, что $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$ и больших $|t|$ имеет место оценка $F(s)\ll\exp(\gamma|t|)$.

Заключение. Для любого $\varepsilon>0$ имеют

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)=R(x)+O\left(x^{(\alpha+1)\frac{2\eta-1}{2\eta+1}+\varepsilon}\right),$$

где $R(x)$ — сумма вычетов функции $F(s)\,x^s/s$ для всех ее полюсов в полосе

$$(\alpha+1)\frac{2\eta-1}{2\eta+1}<\sigma\leqslant\alpha+1.$$

Лит.: [1] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М., 1953; [2] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964.

А. Ф. Лаврик.

СУММИРОВАНИЕ рядов, последовательностей, интегралов — вычисление соответственно сумм рядов, пределов последовательностей, значений интегралов. Термин «С.» обозначает и само определение суммы ряда (предела последовательности, значения интеграла), когда в обычном определении эти значения не существуют, т. е. ряд (последовательность, интеграл) расходится. Такое определение задают обычно в виде некого правила и называют *суммирования методом* рядов (последовательностей, интегралов).

И. И. Волков.

СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ — построение обобщенных сумм расходящихся рядов с помощью *суммирования методов*. Если по некому правилу P ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \qquad (*)$$

относят число s, называемое его суммой ряда, то говорят, что ряд суммируем к сумме s методом суммирования P или P-суммируем к сумме s и этот факт обозначается одним из символов

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k=s\,(P),$$

$$\lim s_n=s\,(P),\ P\text{-}\lim s_n=s,$$

где s_n — частичные суммы ряда (*). Число s в этом случае наз. также P-суммой ряда. Напр., для ряда (*) рассматривают последовательность $\{\sigma_n\}$ средних арифметических первых n частичных сумм ряда

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{(n+1)} .$$

Если при этом σ_n имеет предел при $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = s,$$

то говорят, что ряд (*) суммируем к сумме s *средних арифметических методом суммирования* и обозначают символом

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = s\,(C, 1),$$

или

$$\lim s_k = s\,(C,\ 1)$$

(см. *Чезаро методы суммирования*).

При таком определении суммы ряда каждый сходящийся ряд суммируем, причем к той же сумме, к к-рой он сходится, и, кроме того, существуют расходящиеся ряды, суммируемые этим методом. Напр., ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

суммируем указанным методом и его $(C, 1)$-сумма равна $^1/_2$.

Определение метода суммирования обычно подчиняется ряду требований. Напр., требуют, чтобы метод суммировал целый класс рядов; чтобы не противоречил сходимости, т. е., будучи применен к сходящемуся ряду, суммировал бы его к той же сумме, к к-рой ряд сходится (*см. Регулярные методы суммирования*); чтобы из суммируемости рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

данным методом соответственно к суммам u и v следовала суммируемость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda u_k + \mu v_k),$$

причем к сумме $\lambda U + \mu V$ (свойство **линейности**). См. также *Расходящийся ряд*.

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Кангро Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70; [4] Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, 1977; [5] Peyerimhoff A., Lectures on summability, B., 1969; [6] Knopp K., Theory and application on infinite series, N. Y., 1971; [7] Zeller K., Beekmann V., Theorie der Limitierungsverfahren, 2 Aufl., B.—Hdlb.— N. Y., 1970; [8] Petersen G. M., Regular matrix transformations, L., 1966. *И. И. Волков.*

СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ — построение средних рядов Фурье с помощью *суммирования методов*. Наиболее развита теория С. р. Ф. по тригонометрич. системе. В этом случае для функций $f \in L\,(0, 2\pi)$ с рядами Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k\,(x)$$

изучаются свойства средних, соответствующих рассматриваемому методу суммирования. Напр., для *Абеля — Пуассона метода суммирования* средними являются гармонические в единичном круге функции

$$f\,(r,\ x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k A_k\,(x),$$

а для *средних арифметических метода суммирования* — суммы Фейера

$$\sigma_n\,(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) A_k\,(x).$$

Кроме названных, наиболее важными в теории одномерных тригонометрич. рядов являются *Чезаро методы суммирования*, *Рисса метод суммирования*, *Римана метод суммирования*, *Бернштейна — Рогозинского метод суммирования*, *Валле Пуссена метод суммирования*. Рассматриваются также методы суммирования, порождаемые более или менее произвольной последовательностью λ-множителей

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{n,\,k} A_k(x).$$

С. р. Ф. применяется в следующих задачах.

Представление функций с помощью рядов Фурье. Напр., средние Абеля — Пуассона $f(r, x)$ при $r \to 1-0$ и суммы Фейера $\sigma_n(x)$ при $n \to \infty$ сходятся к функции $f(x)$ в точках ее непрерывности, причем сходятся равномерно, если f непрерывна во всех точках; для каждой функции $f \in L$ эти средние сходятся к ней в метрике L. Частные суммы рядов Фурье указанными свойствами не обладают.

Построение полиномов с хорошими аппроксимативными свойствами. Фактически с помощью С. р. Ф. было установлено *Джексона неравенство*. Для решения этой задачи, наряду с использованием известных методов суммирования, были предложены новые методы — *Джексона сингулярный интеграл*, *Валле Пуссена суммы*.

В терминах средних рядов Фурье можно характеризовать многие свойства функций. Напр., функция f является существенно ограниченной в том и только том случае, когда существует такая постоянная M, что $|\sigma_n(x)| \leqslant M$ для всех n и x.

Существенную роль играет С. р. Ф. в теории кратных тригонометрич. рядов. Так, вместо сферических частных сумм чаще используют их средние Рисса достаточно высокого порядка.

Рассматривается также С. р. Ф. по другим ортонормированным системам функций — как по конкретным системам или классам систем, напр., по ортогональным многочленам, так и по произвольным ортонормированным системам.

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1—2, пер. с англ., М., 1965; [3] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [4] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [5] Тчман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960.

С. А. Теляковский.

СУММИРОВАНИЯ МЕТОДЫ — способы построения обобщенных сумм рядов, обобщенных пределов последовательностей, значений несобственных интегралов.

В математич. анализе возникает потребность обобщить понятие суммы ряда (предела последовательности, значения интеграла) на случай, когда в обычном смысле ряд (последовательность, интеграл) расходится. Такое обобщение задают обычно в виде нек-рого правила или операции и называют методом суммирования.

1) Ряд Фурье непрерывной 2π-периодической функции $f(x)$ может расходиться на бесконечном множестве точек $E \subset [0, 2\pi]$. Последовательность же $\{\sigma_n(x)\}$ средних арифметических первых n частичных сумм этого ряда

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1} \qquad (1)$$

равномерно сходится на всей оси Ox к функции $f(x)$. Если сумму ряда определить как

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n(x),$$

то в этом смысле ряд Фурье 2π-периодической непрерывной функции будет равномерно сходиться к $f(x)$ на всей оси Ox.

2) Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \tag{2}$$

полученный в результате умножения двух рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

сходящихся соответственно к A и B, может оказаться расходящимся. Если сумму ряда (2) определить, как в примере 1), т. е. как предел последовательности средних арифметических первых n частичных сумм, то в этом смысле произведение указанных рядов будет сходиться к сумме $C=AB$.

3) Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{3}$$

сходится для $|z|<1$ к сумме $1/(1-z)$ и расходится для $|z|\geqslant 1$. Если же сумму ряда (3) определить как

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n x^n}{n!},$$

где s_n — частичные суммы ряда (3), то в этом смысле ряд (3) будет сходиться для всех z, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}\, z<1$, причем его суммой будет функция $1/(1-z)$ (см. *Бореля метод суммирования*).

Важнейшими свойствами С. м. являются регулярность (см. *Регулярные методы суммирования*) и линейность (см. *Линейный метод суммирования*). Наиболее распространенные С. м. обладают этими свойствами. Многие из методов обладают также свойством транслятивности (см. *Транслятивность метода суммирования*). Широкий класс С. м. составляют *матричные методы суммирования* и *полунепрерывные методы суммирования*. Эти методы являются линейными и для них установлены условия регулярности. К матричным С. м., в частности, относятся *Вороного метод суммирования*, *Чезаро методы суммирования*. Подкласс матричных С. м. составляют методы, определенные конечнострочными матрицами (см. *Конечнострочный метод суммирования*) и в частности треугольными матрицами (см. *Треугольный метод суммирования*). Полунепрерывными методами суммирования являются *Абеля метод суммирования*, Бореля метод суммирования, *Миттаг-Леффлера метод суммирования*, *Линделёфа метод суммирования*, *Рисса метод суммирования*. Существуют С. м., не относящиеся к указанным видам, напр. интегральный метод суммирования Бореля, *Гёльдера методы суммирования*.

Одна и та же последовательность (ряд) может быть суммируема одним методом и не суммируема другим. Множество всех последовательностей (рядов), суммируемых данным методом, наз. *суммируемости полем* данного метода.

Если рассматривают два С. м., и поле суммируемости одного метода содержит поле другого метода, то говорят о *включении методов суммирования*; в случае совпадения полей говорят о равносильности методов суммирования. Если поле С. м. состоит только из сходящихся последовательностей, то говорят, что С. м. эквивалентен сходимости. Установление условий, при к-рых имеет место включение С. м., является одной из задач теории суммируемости. Два или несколько С. м. могут быть совместными и несовместными. С. м. наз. совместными методами суммирования, если они не могут суммировать одну и ту же последовательность к различным пределам. В тех случаях когда из суммируемости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

методом A всегда следует суммируемость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k u_k$$

методом B, говорят, что числа λ_k являются *суммируемости множителями* типа (A, B).

Относительно С. м. различают два типа теорем. В теоремах 1-го (абелевого) типа из свойств последовательности делают заключение о свойствах средних этой последовательности, полученных в результате преобразования, определяющего С. м. Напр., теорема Коши, устанавливающая, что из $s_n \to s$ всегда следует $(s_0 + s_1 + \ldots + s_n)/n+1 \to s$. В теоремах 2-го (тауберова) типа из свойств средних, соответствующих данному С. м., и дополнительных условий делают заключения о свойствах преобразуемой последовательности (см. *Тауберовы теоремы*).

По аналогии с обычной сходимостью вводят понятия специальных видов суммируемости: абсолютной суммируемости, безусловной суммируемости, сильной суммируемости, почти-суммируемости, λ-суммируемости и др. видов суммируемости.

Понятие обобщенного предела вводят также для функций и интегралов. В этих случаях говорят о суммировании функции (соответственно интеграла). Напр., для функции $s(y)$, определенной для всех y, С. м., аналогичный матричному С. м. последовательностей, состоит в том, что рассматривается интегральное преобразование типа

$$t(x) = \int_0^{\infty} c(x, y)\, s(y)\, dy$$

с ядром $c(x, y)$, и функции $s(y)$ в качестве ее обобщенного предела при $y \to \infty$ относят число s, если

$$\lim_{x \to \infty} t(x) = s.$$

Аналогично, один из С. м. несобственных интегралов

$$\int_0^{\infty} a(t)\, dt \qquad (4)$$

состоит в том, что рассматривают преобразования

$$\gamma(x) = \int_0^{x} K(x, t)\, a(t)\, dt$$

с ядром $K(x, t)$, и интеграл (4) называют суммируемым к значению s, если

$$\lim_{x \to \infty} \gamma(x) = s.$$

Определение С. м., введенное для суммирования числовых и функциональных последовательностей, обобщается на последовательности из элементов любого множества и общее определение С. м. может быть сформулировано так: пусть X — заданное множество, $s(X)$ — множество последовательностей $x = \{\xi_n\}$ из элементов $\xi_n \in X$, $\overline{A}$ — оператор, определенный на нек-ром подмножестве $A^* \subset s(X)$ со значениями в X. Тогда пару $(\overline{A}, A^*)$ наз. м е т о д о м с у м м и р о в а н и я, определенным в $s(X)$, а A^* — полем суммируемости. В этом случае последовательность $x \in A^*$ (или ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ с членами $u_k = \xi_k - \xi_{k-1}$) наз. суммируемой к пределу $\overline{A}(x)$, где $\overline{A}(x) = Ax$.

Лит.: [1] Х а р д и Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] К у к Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] К а н г р о Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники, Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70; [4] Б а р о н С., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, 1977; [5] P e y e r i m h o f f A., Lectures on summability, B.— Hdlb.— N. Y., 1969; [6] K n o p p K., Theory and application on infinite series, L., 1966; [7] Z e l l e r K., B e e k m a n n W., Theorie der Limitierungsverfahren, 2 Aufl., B.—Hdlb.—N. Y., 1970; [8]

Pitt H., Tauberian theorem's, L., 1958; [9] Ganelius T. H., Tauberian remainder theorems, B.—[a. o.], 1971; [10] Petersen G. M., Regular matrix transformations, N. Y.—Toronto—Sydney, [1966]; [11] Брудно А. Л., «Матем. сб.», 1945, т. 16 (58), № 2, с. 191—247. *И. И. Волков.*

СУММИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ — функция $f: X \to \mathbb{R}$, где (X, μ) — пространство с неотрицательной мерой, для к-рой определен и конечен *Лебега интеграл* $\int_X f d\mu$. Множество С. ф. $L(X)$ образует линейное подпространство пространства измеримых функций. Взятие абсолютной величины функции, максимума и минимума конечной системы функций не выводит из $L(X)$. Если $\mu X < \infty$, то $L(X)$ замкнуто в смысле равномерной сходимости. *И. А. Виноградова.*

СУММИРУЕМОСТИ МНОЖИТЕЛИ — числовые множители λ_n (для членов ряда), преобразующие ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{1}$$

суммируемый *суммирования методом A*, в ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n, \tag{2}$$

суммируемый методом B. В этом случае С. м. λ_n наз. множителями суммируемости типа (A, B). Напр., числа $\lambda_n = 1/(n+1)^s$ являются С. м. типа $((c, k), (c, k-s))$ (см. *Чезаро методы суммирования*) при $0 < s < k+1$ (см. [1]).

Основной задачей теории С. м. является отыскание условий, при к-рых числа λ_n будут С. м. того или иного типа. Точнее этот вопрос формулируется так: если X и Y — два класса рядов, то каковы должны быть условия на числа λ_n, чтобы для каждого ряда (1) из класса X ряд (2) принадлежал классу Y. Возникновение теории С. м. восходит к теореме Дедекинда — Адамара: ряд (2) сходится для любого сходящегося ряда (1) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta\lambda_n| < \infty,$$

где $\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$. Имеется обобщение этой теоремы со сходимости на суммируемость методом Чезаро.

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кангро Г. Ф., «Ученые записки Тартуского университета», 1955, т. 37, с. 191—232; [3] его же, в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70; [4] Барон С., Введение в теорию суммируемости, Таллин, 1977; [5] Moore C. N., Summable series and convergence factors, N. Y., 1938. *И. И. Волков.*

СУММИРУЕМОСТИ ПОЛЕ, поле сходимости метода суммирования, для методов суммирования последовательностей — множество всех последовательностей, суммируемых данным методом. С. п. любого регулярного матричного метода суммирования не может содержать все ограниченные последовательности [3]. С. п. регулярного матричного метода, суммирующего хотя бы одну расходящуюся последовательность, не может состоять только из ограниченных последовательностей [4]. Однако существуют регулярные матричные методы суммирования, суммирующие расходящиеся последовательности, С. п. к-рых не содержит ограниченных расходящихся последовательностей. Множество ограниченных последовательностей, суммируемых данным методом, наз. ограниченным полем. С. п. регулярного матричного метода суммирования является полным метрическим локально-выпуклым пространством с непрерывными координатными проекциями.

Лит.: [1] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [2] Кангро Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70; [3] Steinhaus H., «Prace mat. fizyczno», 1911, v. 22, p. 121—34; [4] Mazur S., Orlicz W., «C. r. Acad. sci.», 1933, t. 196, p. 32—34. *И. И. Волков.*

СУММИРУЕМОСТЬ СИЛЬНАЯ комплексной числовой или функциональной последовательности $\{S_n\}$ (или

ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ с частичными суммами S_n) — суммируемость методом $A=|(a_{nk})|$ такая, что для нек-рого $p>0$:

1) последовательность

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\,|S_k-S|^p$$

сходится для каждого $n>1$ и для почти всех x в случае функциональной последовательности;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=0$.

Если, сохранив п. 2), заменить п. 1) на:

1′) для каждой монотонно возрастающей последовательности индексов $\{\nu_k\}$ последовательность

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{n\nu_k}\,|S_{\nu_k}-S|^p$$

сходится для каждого $n>1$ и для почти всех x в случае функциональной последовательности, то приходят к понятию очень сильной суммируемости.

Понятие С. с. введено в связи с $(C,1)$-суммируемостью рядов Фурье. Смысл этого понятия хорошо иллюстрируется на примере сильной $(C,1)$-суммируемости. Именно, сильная $(C,1)$-суммируемость означает, что частичные суммы S_{ν_1}, S_{ν_2}, ..., S_{ν_n}, ..., к-рые портят сходимость последовательности $\{S_n\}$, расположены достаточно редко, т. е. имеют нулевую плотность. В отличие от С. с., очень сильная суммируемость означает, что сходимость последовательности $\{S_n\}$ портят только очень редкие последовательности $\{S_{\nu_m}\}$.

Лит.: [1] Hardy G. H., Littlervood J. E., «C. r. Acad. sci.», 1913, t. 156, p. 1307—09; [2] Алексич Г., Проблема сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963; [3] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 2, М., 1965; [4] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [5] Sunouchi Gen-Ichirô, «Tôhoku Math. J.», 1964, v. 16, p. 228—37; [6] его же, «Acta sci. math.», 1966, v. 27, № 1—2, p. 71—76; [7] Болгов В. А., Ефимов А. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 6, с. 1389—408; [8] Zalewasser Z., «Studia Math.», 1936, v. 6, p. 82—88; [9] Leindler L., «Acta math. Acad. sci. hung.», 1962, v. 13, № 3—4, p. 401—14.

А. В. Ефимов.

СУММЫ РАНГОВ КРИТЕРИЙ — критерий однородности двух выборок $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, основанный на ранговой статистике $R_1+R_2+\ldots+R_m$ — сумме рангов R_j случайных величин Y_j в общем вариационном ряду X_i и Y_j (элементы двух выборок взаимно независимы и подчиняются непрерывным распределениям). Является вариантом *Вилкоксона критерия.*

А. В. Прохоров.

СУПЕРАЛГЕБРА — $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра над полем k (см. *Градуированная алгебра*), т. е. *суперпространство* A над k, снабженное четным линейным отображением $A\otimes A\to A$. С. наз. коммутативной (или градуированно-коммутативной), если

$$ab=(-1)^{p(a)p(b)}ba,\ a,\ b\in A.$$

Определение С. можно обобщить на случай, когда областью скаляров является произвольная ассоциативно-коммутативная С. C. Примеры ассоциативных С. над C: алгебра $M_{m\setminus n}(C)$ матриц вида $\left\|\begin{matrix}X & Y\\ Z & T\end{matrix}\right\|$, где $X\in M_m(C)$, $T\in M_n(C)$, снабженная естественной $\mathbb{Z}_2$-градуировкой; *тензорная алгебра* $T(M)$ $\mathbb{Z}_2$-градуированного модуля M над C; *симметрическая алгебра* $S(M)=T(M)/I$ модуля M, где I — идеал, порожденный элементами вида

$$x\otimes y-(-1)^{p(x)p(y)}y\otimes x;$$

внешняя алгебра $\Lambda(M)=S(\Pi(M))$ модуля M (последние две С. коммутативны).

С. $\mathfrak{G}$ над полем характеристики 0 с умножением $[,]$ наз. супералгеброй Ли, если $\forall x, y, z \in \mathfrak{G}$

$$[x, y] = (-1)^{p(x)p(y)+1}[y, x],$$

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{p(x)p(y)}[y, [x, z]].$$

Примеры. Любая ассоциативная С., снабженная операцией коммутирования

$$[x, y] = xy + (-1)^{p(x)p(y)+1}yx;$$

алгебра Der A дифференцирований произвольной С. A (т. е. линейных преобразований δ: $A \to A$ таких, что $\delta(ab) = (\delta a)b + (-1)^{p(\delta)p(a)}a(\delta b)$) с операцией коммутирования. По любой С. Ли $\mathfrak{G}$ строится ассоциативная универсальная обертывающая С., причем справедливо обобщение *Биркгофа — Витта теоремы*.

Известна классификация конечномерных простых С. Ли над полем $\mathbb{C}$ (см. [2], [3]). Они делятся на С. Ли классического типа (характеризуемые тем, что алгебра Ли $\mathfrak{G}_{\bar{0}}$ редуктивна) и С. Ли картановского типа. С. Ли классич. типа исчерпываются следующими сериями матричных алгебр:

$$sl(m, n) = \left\{ \left\| \begin{matrix} X & Y \\ Z & T \end{matrix} \right\| \in M_{m|n}(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} X = \operatorname{tr} T \right\} \quad (m \neq n);$$

$$psl(n, n) = sl(n, n)/\{cE \mid c \in \mathbb{C}\};$$

$$osp(m, 2n) = \{\alpha \in M_{m|2n}(\mathbb{C}) \mid \beta(\alpha(x), y) + \beta(x, \alpha(y)) = 0\};$$

$$\Pi(n) = \{\alpha \in M_{n|n}(\mathbb{C}) \mid \beta(\alpha(x), y) + \beta(x, \alpha(y)) = 0\}$$

для четной (соответственно нечетной) симметрической невырожденной билинейной формы;

$$Q(n)/\{cE \mid c \in \mathbb{C}\},$$

где $Q(n) = \left\{ \left\| \begin{matrix} X & Y \\ Y & X \end{matrix} \right\| \in M_{n|n}(\mathbb{C}) \right\}$, а также нек-рыми исключительными алгебрами. С. картановского типа — это алгебра Der $\Lambda(\mathbb{C}^n)$ и ее подалгебры, аналогичные простым *Ли градуированным алгебрам* W_n, S_n, H_n.

Известны также классификация конечномерных простых С. Ли над $\mathbb{R}$ и описание полупростых С. Ли в терминах простых.

Теория линейных представлений С. Ли существенно сложнее, чем для алгебр Ли, поскольку представления простых С. Ли, как правило, не являются вполне приводимыми, а неприводимые представления разрешимых С. Ли могут не быть одномерными. Известны классификация неприводимых представлений простых конечномерных С. Ли над $\mathbb{C}$ в терминах старших весов (см. [1], [2]), а также явное описание конечномерных представлений и *характеров формула* для нек-рых серий этих алгебр [1].

Лит.: [1] Лейтес Д. А., «Функциональный анализ и его приложения», 1980, т. 14, с. 35—38; [2] Kac V. G., «Adv. math.», 1977, v. 26, p. 8—96; [3] Scheunert M., The theory of Lie superalgebras. An introduction, B.—Hdlb.—N. Y., 1979.

Д. А. Лейтес.

СУПЕРГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — такая функция $u(x)$ точки x евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, что $-u(x)$ является *субгармонической функцией*.

Е. Д. Соломенцев.

СУПЕРГРУППА, супергруппа Ли,— групповой объект в категории супермногообразий. С. $\mathcal{G}$ задается функтором точек $\underline{\mathcal{G}}$ из категории коммутативных супералгебр в категорию групп. На С. переносятся *Ли теоремы*, что дает соответствие между С. и конечномерными супералгебрами Ли [1, 2].

Примеры. 1) С. $GL_{n|m}$ задается функтором $C \mapsto GL_{n|m}(C)$ в группы четных обратимых матриц из $M_{n|m}(C)$ (см. *Суперпространство*), т. е. матриц вида $\left\| \begin{matrix} X & Y \\ Z & T \end{matrix} \right\|$, где X, T — обратимые матрицы порядков

n, m над $C_{\bar{0}}$, а Y, Z — матрицы над $C_{\bar{1}}$. Определен гомоморфизм $GL_{n|m}(C) \to C_{\bar{0}}^*$, заданный формулой

$$\mathrm{Ber}\begin{Vmatrix} X & Y \\ Z & T \end{Vmatrix} = \det(X - YT^{-1}Z)\det T^{-1}$$ (березиниан);

2) С. $SL_{n|m} = \mathrm{Ker\ Ber}$;

3) Подгруппы $OSp_{n|2m} \subset GL_{n|2m}$ и $\Pi_n \subset GL_{n|n}$, оставляющие инвариантными четную или нечетную невырожденную симметрическую билинейную форму в соответствующем суперпространстве.

С каждой С. $\mathcal{G}$ и ее подсупергруппой $\mathcal{H}$ связано супермногообразие $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, представляемое функтором $C \mapsto \mathcal{G}(C)/\mathcal{H}(C)$, — однородное пространство С. $\mathcal{G}$.

Лит.: [1] Березин Ф. А., Кац Г. И., «Матем. сб.», 1970, т. 82, с. 343—59; [2] Березин Ф. А., Лейтес Д. А., «Докл. АН СССР», 1975, т. 224, с. 505—08.

Д. А. Лейтес.

СУПЕРМНОГООБРАЗИЕ — обобщение понятия многообразия, в к-ром функции принимают значения в коммутативной *супералгебре*. Структура С. на дифференцируемом многообразии M со структурным пучком $\mathcal{O}_M$ задается пучком $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ коммутативных супералгебр над пучком $\mathcal{O}_M$, причем любая точка $p \in M$ обладает такой окрестностью U, что окольцованное пространство $(U, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}|U)$ изоморфно $(U, (\mathcal{O}_M|U) \otimes \Lambda(\mathbb{R}^m))$, где $\Lambda(\mathbb{R}^m)$ — внешняя алгебра с m нечетными образующими. Аналогично определяются аналитич. С. Дифференцируемые (или аналитические) С. образуют категорию, морфизмами к-рой служат морфизмы окольцованных пространств, четные на структурных пучках. Размерностью С. наз. пара $(\dim M, m)$. Суперобластью размерности (n, m) наз. С. вида $(U, \mathcal{O}_U \otimes \Lambda(\mathbb{R}^m))$, где $(U, \mathcal{O}_U)$ — открытое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$. Каждое С. локально изоморфно суперобласти.

Если E — векторное расслоение над M, то пучок сечений $L_{\Lambda E}$ расслоения ΛE определяет на M структуру С. Каждое дифференцируемое С. изоморфно С. вида $(M, L_{\Lambda E})$ (см. [1], в комплексно-аналитическом случае это неверно). В то же время морфизмов в категории С. больше, чем в категории векторных расслоений.

С. $\mathcal{M}$ можно задавать функтором точек, т. е. функтором $\mathcal{M}$ из категории коммутативных супералгебр в категорию множеств, сопоставляющим супералгебре C множество $\mathcal{M}(C) = \mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}\ C, \mathcal{M})$, где $\mathrm{Spec}\ C$ — множество простых идеалов в C, снабженное естественным пучком супералгебр (см. *Представимый функтор*).

На С. переносятся основные понятия анализа на дифференцируемых многообразиях (см. [3], [5]).

Понятие С. возникло в теоретич. физике; оно позволяет объединять в единые мультиплеты частицы с *Бозе — Эйнштейна статистикой* и *Ферми — Дирака статистикой*, а также объединять в единую супергруппу внутренние и динамические симметрии калибровочных теорий [4].

Лит.: [1] Batchelor M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1979, v. 253, p. 329—38; [2] Kostant B., в кн.: Differential geometrical methods in mathematical physics, B., 1977, p. 177—306; [3] Лейтес Д. А., «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, № 1, с. 3—57; [4] Огиевецкий В. И., Мезинческу Л., «Успехи физич. наук», 1975, т. 117, № 4, с. 637—83; [5] Шандер В. Н., «Функциональный анализ и его приложения», 1980, т. 14, № 2, с. 91—92.

Д. А. Лейтес.

СУПЕРПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, супертепловая функция,— такая функция $v(x, t)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, что $-v(x, t)$ является *субпараболической функцией*.

Е. Д. Соломенцев.

СУПЕРПОЗИЦИЯ ФУНКЦИЙ, композиция функций,— составление из двух функций *сложной функции*.

СУПЕРПРОСТРАНСТВО — векторное пространство V над полем k, наделенное $\mathbb{Z}_2$-градуировкой $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$. Элементы пространств $V_{\bar{0}}$ и $V_{\bar{1}}$ наз. соответственно четными и нечетными; для $x\in V_i$ определена четность $p(x)=i$ ($i\in\mathbb{Z}_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$). С каждым С. V связано С. $\Pi(V)$ такое, что $\Pi(V)_i=V_{i+\bar{1}}$ ($i\in\mathbb{Z}_2$). Размерностью С. V наз. пара (m, n), где $m=\dim V_{\bar{0}}$, $n=\dim V_{\bar{1}}$. Поле k обычно рассматривается как С. размерности $(1, 0)$.

Для С. V и W естественным образом определяется структура С. в пространствах $V\oplus W$, $\mathrm{Hom}_k(V, W)$, V^* и т. д. В частности, линейное отображение $\varphi: V\to W$ четно, если $\varphi(V_i)\subset W_i$, и нечетно, если $\varphi(V_i)\subset W_{i+\bar{1}}$. Однородная билинейная форма $\beta\in V^*\oplus V^*$ наз. симметрической, если

$$\beta(y, x)=(-1)^{p(x)\,p(y)+p(\beta)\,(p(x)+p(y))}\,\beta(x, y),$$

и кососимметрической, если

$$\beta(y, x)=-(-1)^{p(x)\,p(y)+p(\beta)\,(p(x)+p(y))}\,\beta(x, y).$$

Все эти понятия переносятся на $\mathbb{Z}_2$-градуированные свободные модули V над произвольной коммутативной *супералгеброй* C. Базис в V обычно выбирается так, чтобы первые его векторы были четными, а последние — нечетными. Любой эндоморфизм φ модуля V записывается в таком базисе блочной матрицей $\alpha=\begin{Vmatrix} X & Y \\ Z & T \end{Vmatrix}$, где $X\in M_n(C)$, $T\in M_m(C)$, причем, если φ четен, то X и T состоят из четных, а Y и Z из нечетных элементов (матрица α четна), а если φ нечетен, то X и T состоят из нечетных, а Y и Z из четных элементов (α нечетна).

Лит.: [1] Березин Ф. А., *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными*, М., 1983; [2] Лейтес Д. А., Теория супермногообразий, Петрозаводск, 1983.

Д. А. Лейтес.

СУСЛИНА ГИПОТЕЗА — гипотеза, утверждающая, что всякое линейно упорядоченное множество без первого и последнего элементов, являющееся полным, плотным и удовлетворяющее условию Суслина, изоморфно действительной прямой. При этом полнота означает существование точной верхней грани у всякого непустого ограниченного подмножества, плотность — непустоту любого интервала (a, b), условие Суслина состоит в том, что всякая непересекающаяся система интервалов не более чем счетна. Действительная прямая обладает всеми свойствами, фигурирующими в формулировке С. г. Таким образом, С. г. состоит в том, что отмеченные свойства действительной прямой полностью ее определяют. Эта гипотеза сформулирована М. Суслиным в 1920 [1].

В рамках системы ZFC (системы ZF с аксиомой выбора) С. г. нельзя ни доказать, ни опровергнуть при условии, что ZF непротиворечива. При этом из аксиомы конструктивности Гёделя (см. *Конструктивное по Гёделю множество*) вытекает отрицание С. г. Совместимость С. г. с аксиомами ZFC доказывается построением соответствующей модели с помощью разновидности *вынуждения метода* (итерированное вынуждение). Добавление к ZFC континуум-гипотезы также не позволяет дать ни положит., ни отрицат. решения С. г.

С. г. и ее обобщения оказали большое влияние на развитие аксиоматич. теории множеств. С ней связана разработка ряда идей и методов. Это — комбинаторные принципы Йенсена $\diamondsuit_k$ к $\square_k$ (см. [4]) и теория тонкой структуры конструктивной иерархии (см. [5]), аксиома Мартина [7] и метод итерированного вынуждения [2].

Принцип Йенсена $\diamondsuit_k$. Подмножество $A\subseteq k$ кардинала $k=\{\alpha|\alpha<k\}$ наз. замкнутым неограниченным, если оно содержит все свои предельные точки и для всякого $\alpha<k$ существует $\beta\in A$ такое, что $\alpha<\beta$. Множество $A\subseteq k$ наз. стационарным, если его пересечение с каждым замкнутым неог-

раниченным подмножеством кардинала k непусто. Принцип $\diamondsuit_k$: существует последовательность $\langle S_\alpha | \alpha < k\rangle$, $S_\alpha \subseteq \alpha$, такая, что для всякого $X \subseteq k$ множество $\{\alpha < k | S_\alpha = X \cap \alpha\}$ стационарно. Для всякого регулярного k принцип $\diamondsuit_k$ вытекает из аксиомы конструктивности, а из $\diamondsuit_{\omega_1}$ следует отрицание С. г. Комбинаторные принципы Йенсена, а также аксиома Мартина (см. ниже) нашли плодотворные применения в топологии (см. [4], [6], [8]).

Пусть P — частично упорядоченное множество. Множество $D \subseteq P$ наз. плотным, если для всякого $p \in P$ существует $d \in D$ такое, что $d \leqslant p$. Множество $Q \subseteq P$ наз. совместимым, если для любого конечного подмножества $F \subseteq Q$ найдется такое $p \in P$, что $p \leqslant r$ для всякого $r \in F$. Два элемента p_1 и p_2 из P наз. несовместимыми, если множество $\{p_1, p_2\}$ не является совместимым. Говорят, что частично упорядоченное множество P удовлетворяет условию счетности антицепей, если всякое множество, состоящее из попарно несовместимых элементов, не более чем счетно. Аксиома Мартина (MA) утверждает следующее: если частично упорядоченное множество удовлетворяет условию счетности антицепей и $\mathcal{P}$ — семейство мощности $< 2^\omega$ плотных подмножеств, то существует совместимое множество $Q \subseteq P$ такое, что для всякого $D \in \mathcal{P}$ пересечение $D \cap Q$ непусто.

При наличии *континуум-гипотезы* (CH) аксиома Мартина доказуема. Наиболее интересные следствия дает сочетание аксиомы Мартина (MA) с отрицанием континуум-гипотезы ($\neg$CH). Принцип $\diamondsuit_{\omega_1}$ противоречит сочетанию MA+$\neg$CH, так как $\diamondsuit_{\omega_1}$ влечет CH. При этом часто оказывается, что предложение, выводимое из $\diamondsuit_{\omega_1}$, будет опровержимо в предположении MA+$\neg$CH. Так, напр., обстоит дело с С. г. Именно, MA+$\neg$CH влечет С. г., в то время как $\diamondsuit_{\omega_1}$ влечет отрицание С. г.

Сочетание MA+$\neg$CH совместимо с ZFC, если ZF непротиворечива.

Лит.: [1] Suslin M., «Fundam. math.», 1920, v. 1, p. 223; [2] Devlin K. J., Johnsbråten H., The Souslin problem, B.—[a. o.], 1974 (Lecture Notes in Math., v. 405); [3] Йех Т., Теория множеств и метод форсинга, пер. с англ., М., 1973; [4] Справочная книга по математической логике в четырех частях, ч. 2 — Теория множеств, пер. с англ., М., 1982; [5] Devlin K. J., Aspects of Constructibility, B.—[a. o.], 1973 (Lecture Notes in Math., v. 354); [6] Федорчук В. В., «Матем. сб.», 1976, т. 99, № 1, с. 3—33; [7] Martin D. A., Solovay R., «Ann. Math. Logic», 1970, v. 2, p. 143—78; [8] Малыхин В. И., «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 1, с. 69—118.

В. Н. Гришин.

СУСЛИНА КРИТЕРИЙ — см. *Суслина теорема.*

СУСЛИНА ПРОБЛЕМА: подобно ли множеству действительных чисел плотное в себе линейно упорядоченное множество без первого и последнего элементов, в к-ром всякое семейство непустых дизъюнктных интервалов счетно.

Утверждение положительного решения этой проблемы есть гипотеза Суслина — она выдвинута М. Я. Суслиным [1]. Гипотеза Суслина эквивалентна несуществованию линейно упорядоченного несепарабельного бикомпакта, в к-ром всякое семейство непустых дизъюнктных интервалов счетно,— такой бикомпакт наз. континуумом Суслина.

В настоящее время (1984) известна независимость С. п. от основных аксиом теории множеств. Впервые континуум Суслина методом форсинга построен в 1967—68. В 1970 было доказано, что конъюнкция аксиомы Мартина и отрицания континуум-гипотезы (совместная с системой Цермело — Френкеля аксиом теории множеств) влечет несуществование континуума Суслина, т. е. справедливость гипотезы Суслина.

Лит.: [1] Suslin M., Problem 3, «Fundam. math.», 1920, v. 1, p. 223.

В. И. Малыхин.

СУСЛИНА ТЕОРЕМА (в дескриптивной теории множеств) —

1) Существует A-множество (числовой прямой $\mathbb{R}$), не являющееся *борелевским множеством*.

2) Для того чтобы данное A-множество было борелевским, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение было также A-множеством.

3) Всякое A-множество n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ есть (ортогональная) проекция борелевского (даже типа G_δ) множества пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ (и следовательно, существует плоское борелевское множество типа G_δ, проекция которого не является борелевским множеством); проекция всякого A-множества есть A-множество.

Все эти результаты получены М. Я. Суслиным [1]. Для определения A-множества там использовалась *A-операция*, а другие способы задания A-множеств были найдены позже. A-операция фактически построена П. С. Александровым [2], к-рый показал (хотя явно и не формулировал), что всякое борелевское множество может быть получено как результат A-операции над замкнутыми множествами (следовательно, является A-множеством), и использовал это для доказательства теоремы о мощности борелевских (на самом деле, A-) множеств пространства $\mathbb{R}$. После этого Н. Н. Лузиным был поставлен вопрос о существовании A-множества, не являющегося борелевским. Ответом на этот вопрос и явилась теорема 1). Теоремы 1) и 2) даны М. Я. Суслиным [1] без доказательств. Доказательства их, полученные М. Я. Суслиным, были позже упрощены Н. Н. Лузиным и только тогда опубликованы. Для доказательства теоремы 1) М. Я. Суслин построил плоское A-множество, универсальное для всех борелевских множеств и рассмотрел множество его точек, лежащих на диагонали $x=y$ (см. [3], с. 94). Теорема 2) теперь часто наз. критерием Суслина борелевских множеств. Доказательство М. Я. Суслина этой теоремы было основано на разложении *CA-множества* на сумму $\xi\xi_1$ борелевских множеств (см. [4], [5]).

Лит.: [1] Суслин М. Я., «C. r. Acad. sci.», 1917, t. 164, p. 88—91; [2] Александров П. С., там же, 1916, t. 162, p. 323—25; [3] Келдыш Л. В., Новиков П. С., «Успехи матем. наук», 1953, т. 8, в. 2, с. 93—104; [4] Лузин Н. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1958; [5] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937.

А. Г. Елькин.

СУСЛИНА УСЛОВИЕ — условие, возникшее при выдвижении *Суслина гипотезы*. Топологич. пространство (булева алгебра, частично упорядоченное множество) удовлетворяет С. у. тогда и только тогда, когда всякое семейство непустых дизъюнктных открытых подмножеств (ненулевых попарно несовместных элементов) не более чем счетно. С. у. обобщено на произвольный кардинал; соответствующий кардинальнозначный инвариант — число Суслина.

В. И. Малыхин.

СУЩЕСТВЕННО НЕРАЗРЕШИМАЯ ТЕОРИЯ — алгоритмически неразрешимая логическая теория, все непротиворечивые расширения к-рой также неразрешимы (см. *Неразрешимость*). *Элементарная теория* является С. н. т. тогда и только тогда, когда всякая ее модель имеет неразрешимую элементарную теорию. С. н. т. является всякая полная неразрешимая теория, *арифметика формальная*; всякая теория, имеющая конечную модель, не является С. н. т.

Существенная неразрешимость подходящей конечно аксиоматизируемой элементарной теории S часто используется при доказательстве неразрешимости данной теории T (см. [1], [2]). При таком доказательстве теория S интерпретируется в какой-либо модели M теории T. Область интерпретации и значения элементов сигнатуры теории S определяются с помощью значений в модели M подходящих формул в языке теории T. Если построенная интерпретация является моделью теории S, то теория T неразрешима; более того, эта теория н а-

следственно неразрешима, т. е. неразрешима всякая ее подтеория той же сигнатуры, что и T. Таким методом может быть доказана неразрешимость элементарной логики предикатов, элементарной теории групп, элементарной теории полей и т. п. В качестве С. н. т. S часто берут конечно аксиоматизированную формальную арифметику.

Лит.: [1] Tarski A., Mostowski A., Robinson R. M., Undecidable theories, Amst., 1953; [2] Ершов Ю. Л. [и др.], «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 4, с. 37—108; [3] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *А. Л. Семенов.*

СУЩЕСТВЕННО ОСОБАЯ ТОЧКА — *изолированная особая точка a* однозначного характера аналитич. функции $f(z)$ комплексного переменного z, для к-рой не существует никакого, конечного или бесконечного, предела $\lim\limits_{z\to a} f(z)$. В достаточно малой проколотой окрестности $V=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z-a|<r\}$ С. о. т. $a\neq\infty$ или $V'=\{z\in\mathbb{C}: r<|z|<\infty\}$ в случае $a=\infty$ функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k,\ a\neq\infty,\ z\in V,$$

или соответственно

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{z^k},\ a=\infty,\ z\in V',$$

причем в главной части этих рядов имеется бесконечно много отличных от нуля коэффициентов c_k с отрицательными индексами k.

Сохоцкого теорема показывает, что любое комплексное значение w из расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ является предельным для функции $f(z)$ в любой сколь угодно малой окрестности С. о. т. a. Согласно *Пикара теореме*, любое конечное комплексное значение $w\in\mathbb{C}$ за исключением, быть может, одного, даже принимается функцией $f(z)$, и притом бесконечно часто, в любой окрестности С. о. т. a. Теорему Сохоцкого иначе выражают, говоря, что *предельное множество* $C(a; f)$ функции $f(z)$ в С. о. т. a совпадает со всей расширенной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$. Для регулярных точек и полюсов это множество, напротив, вырожденное, т. е. сводится к одной точке $w\in\overline{\mathbb{C}}$. Поэтому в более общем смысле существенно особой точкой аналитич. функции $f(z)$ наз. всякая такая особая точка a (не обязательно изолированная), в к-рой не существует конечного или бесконечного предела $\lim\limits_{z\to a} f(z)$, или, иначе говоря, в к-рой предельное множество $C(a; f)$ невырожденное. Теоремы Сохоцкого и Пикара для таких С. о. т., не являющихся изолированными точками множества всех особых точек, доказаны лишь при нек-рых дополнительных предположениях. Напр., эти теоремы остаются в силе для изолированной точки a множества С. о. т., в частности для предельной точки a полюсов *мероморфной функции*.

Точка $a=(a_1, \ldots, a_n)$ комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 2$, наз. точкой мероморфности аналитич. функции $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, если $f(z)$ есть мероморфная функция в нек-рой окрестности U точки a, т. е. если $f(z)$ представима в U в виде отношения двух голоморфных функций $f(z)=p(z)/q(z)$, $z\in U$. Существенно особыми точками аналитич. функции $f(z)$ многих комплексных переменных наз. особые точки a функции $f(z)$, не являющиеся точками мероморфности. При этом невырожденность предельного множества $C(a; f)$ перестает быть характеристическим свойством С. о. т.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [2] Фукс Б. А., Введение в теорию аналитич. функций многих комплексных переменных, М., 1962. *Е. Д. Соломенцев.*

СУЩЕСТВЕННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — непрерывное отображение f топологич. пространства X в открытый симплекс T^n такое, что всякое непрерывное отображение $f_1 : X \to T^n$, совпадающее с f во всех точках множества $f^{-1}(\overline{T}^n \setminus T^n)$, есть отображение на все T^n. Напр., тождественное отображение $\overline{T}^n$ на себя есть С. о.

Лит.: [1] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности ..., М., 1973.

М. И. Войцеховский.

СУЩЕСТВОВАНИЯ КВАНТОР — логическая операция, служащая для образования высказываний с помощью оборота «для некоторых x» («существует x, для которого»). В формализованных языках С. к. обозначается через $\exists x$, $(\exists x)$, $\bigcup_x$, $\vee_x$, Σ_x. *В. Е. Плиско.*

СФЕР ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ — объект изучения классич. теории гомотопий. Вычисление С. г. г. $\pi_i(S^n)$ в свое время (особенно в 50-х гг.) рассматривалось как одна из центральных задач топологии. Топологи надеялись, что эти группы удастся полностью вычислить и что с их помощью можно будет решать другие классификационные гомотопич. задачи. Эти надежды в основном не сбылись: С. г. г. удалось вычислить лишь частично, и с развитием теории обобщенных когомологий задача их вычисления стала менее актуальной. Все же накопленная информация об этих группах не пропала даром, она нашла применения там, где их не ждали, в частности в дифференциальной топологии (классификации дифференциальных структур на сферах и многомерных узлов).

I. Общая теория. 1) Если $i<n$ или $i>n=1$, то $\pi_i(S^n)=0$.

2) $\pi_n(S^n)=\mathbb{Z}$ (теорема Брауэра—Хопфа); этот изоморфизм относит элементу группы $\pi_n(S^n)$ степень представляющего его отображения $S^n \to S^n$.

3) Группы $\pi_{4m-1}(S^{2m})$ имеют ранг 1; прочие группы $\pi_i(S^n)$ с $i \neq n$ конечны.

Гомоморфизм *надстройки*

$$E\colon \pi_i(S^n) \longrightarrow \pi_{i+1}(S^{n+1})$$

относит элементу группы $\pi_i(S^n)$, представляемому сфероидом $f : S^i \to S^n$, класс сфероида $Ef : S^{i+1} \to S^{n+1}$, определяемого формулой

$$Ef(\sqrt{1-x^2}\,x,\ x) = \begin{cases} (\sqrt{1-x^2}\,f(x),\ x), & |x| \leqslant 1, \\ (0,\ x), & |x| = 1, \end{cases}$$

где $x \in S^i$, $x \in \mathbb{R}$.

4) Гомоморфизм E является изоморфизмом при $i>2n-1$ и эпиморфизмом при $i \geqslant 2n-1$.

Таким образом, при каждом k группы $\pi_{n+k}(S^n)$ могут быть составлены в последовательность

$$\pi_{1+k}(S^1) \xrightarrow{E} \pi_{2+k}(S^2) \xrightarrow{E} \pi_{3+k}(S^3) \xrightarrow{E} \dots,$$

в $(k+2)$-м члене к-рой наступает стабилизация; группа $\pi_{n+k}(S^n)$ с $n \geqslant k+2$ наз. k-й стабильной С. г. г. и обозначается π_k^s. При этом $\pi_k^s=0$ при $k<0$ и $\pi_0^s=\mathbb{Z}$.

Как и в *гомотопических группах* любого топологич. пространства, в С. г. г. определено умножение Уайтхеда:

$$\pi_i(S^n) \times \pi_j(S^n) \longrightarrow \pi_{i+j-1}(S^n),\ (\alpha,\ \beta) \longrightarrow [\alpha,\ \beta].$$

К обычным его свойствам (дистрибутивность, косая коммутативность, тождество Якоби) добавляется

5) $E\,[\alpha,\ \beta]=0$.

Умножение Уайтхеда позволяет сделать следующее уточнение к 4):

6) ядро эпиморфизма $E : \pi_{2n-1}(S^n) \to \pi_{2n}(S^{n+1})$ порождается классом $[i_n,\ i_n]$, где i_n — каноническая образующая группы $\pi_n(S^n)$ (представляемая тождественным сфероидом).

С умножением Уайтхеда тесно связан *Хопфа инвариант* $H(\alpha)$, определенный для $\alpha \in \pi_{4m-1}(S^{2m})$. Так,

элемент группы $\pi_3(S^2)$, представляемый отображением Хопфа $h: S^3 \to S^2$, действующим по формуле $h(z_1, z_2) = z_1 : z_2$ (в к-рой S^3 интерпретируется как единичная сфера пространства $\mathbb{C}^2$, а S^2 — как $\mathbb{C}P^1$), имеет инвариант Хопфа, равный 1.

7) Отображение $H: \pi_3(S^2) \to \mathbb{Z}$ есть изоморфизм.

8) $H([i_{2m}, i_{2m}]) = 2$.

Следствием 8) является бесконечность групп $\pi_{4m-1}(S^{2m})$, уже утверждавшаяся в 3).

9) При $m \neq 1, 2, 4$ в $\pi_{4m-1}(S^{2m})$ отсутствуют элементы с нечетным инвариантом Хопфа (как было известно задолго до доказательства этой теоремы, ее утверждение равносильно следующей гипотезе Фробениуса: при $l \neq 1, 2, 4, 8$ в $\mathbb{R}^l$ отсутствует билинейное умножение с однозначным делением на ненулевые элементы).

Специфическим для сфер является композиционное умножение

$$\pi_i(S^j) \times \pi_j(S^n) \longrightarrow \pi_i(S^n), \quad (\beta, \alpha) \longrightarrow \alpha \circ \beta,$$

определяемое при помощи компонирования представляющих отображений.

10) Для любых α, α_1, $\alpha_2 \in \pi_j(S^n)$, β, β_1, $\beta_2 \in \pi_i(S^j)$, $\delta \in \pi_{i-1}(S^{j-1})$, $\gamma \in \pi_k(S^j)$, имеет место:

а) $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$,

б) $\alpha \circ (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \circ \beta_1 + \alpha \circ \beta_2$,

в) $(\alpha_1 + \alpha_2) \circ E\delta = \alpha_1 \circ E\delta + \alpha_2 \circ E\delta$,

г) $E(\alpha \circ \beta) = E\alpha \circ E\beta$.

«Левый закон дистрибутивности» $(\alpha_1 + \alpha_2) \circ \beta = \alpha_1 \circ \beta + \alpha_2 \circ \beta$, вообще говоря, места не имеет. Утверждение г) позволяет определить стабильное композиционное умножение

$$\pi_q^s \times \pi_r^s \longrightarrow \pi_{q+r}^s, \quad (\beta, \alpha) \longrightarrow \alpha \circ \beta.$$

11) Для любых α, α_1, $\alpha_2 \in \pi_i^s$, β, $\beta_1 \beta_2 \in \pi_q^s$, $\gamma \in \pi_p^s$ имеют место утверждения а), б) из 10), а также:

в′) $(\alpha_1 + \alpha_2) \circ \beta = \alpha_1 \circ \beta + \alpha_2 \circ \beta$,

д) $\alpha \circ \beta = (-1)^{qr} \beta \circ \alpha$.

II. Методы вычисления. Геометрич. метод Понтрягина (см. [1]), предложенный в сер. 30-х гг., основывается на следующем определении. Гладкое m-мерное компактное многообразие X пространства $\mathbb{R}^i$ наз. оснащенным, если на нем задано гладкое поле трансверсальных к нему $(i-m)$-реперов; само это поле наз. оснащением. Оснащенные многообразия X_0, $X_1 \subset \mathbb{R}^i$, не имеющие края, наз. кобордантными, если существует оснащенное многообразие $Y \subset \mathbb{R}^i \times (0, 1] \subset \mathbb{R}^{i+1}$ с $\partial Y = (X_0 \times 0) \cup (X_1 \times 1)$, у к-рого сужение оснащения на $X_0 \times 0$ и $X_1 \times 1$ содержится в $\mathbb{R}^i \times 0$ и $\mathbb{R}^i \times 1$, и при естественном отождествлении $\mathbb{R}^i \times 0$ и $\mathbb{R}^i \times 1$ с $\mathbb{R}^i$ превращается в заданное оснащение многообразий X_0 и X_1. Множество классов кобордантных оснащенных m-мерных многообразий без края в $\mathbb{R}^i$ обозначается через $\Omega^m(i)$.

1) Имеет место взаимно однозначное соответствие между $\pi_i(S^n)$ и $\Omega^{i-n}(i)$.

Метод дает хорошие результаты при небольших $i-n$. Он позволяет также доказать нек-рые из теорем п. I и доставляет разнообразную геометрич. информацию о многообразиях малых размерностей.

Другую группу методов составляют элементарные алгебраич. методы, состоящие в использовании гомотопич. последовательностей различных расслоений, свойств умножения Уайтхеда, композиционного умножения и соответствующего высшего умножения (скобок Тоды, см. [3]), а также следующую теорему Джеймса.

2) Имеется последовательность групп и гомоморфизмов

$$\ldots \pi_i(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{i+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H} \pi_{i+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{P} \longrightarrow \pi_{i-1}(S^n) \longrightarrow \ldots,$$

точная при нечетном n и при $i<3n-1$ (в этой последовательности H — обобщение инварианта Хопфа).

Элементарные алгебраич. методы оказываются довольно действенными: почти не прибегая к другим приемам, удается вычислить группы $\pi_i(S^n)$ при $i-n\leqslant 13$.

Далее, имеется метод *убивающих пространств* (см. [5]). Этот метод пригоден для вычисления гомотопич. групп любого пространства. Он основывается на построении по пространству X последовательности убивающих пространств $X|_k$ со следующим свойством:

$$\pi_i(X|_k)=\begin{cases}\pi_i(X), & i\geqslant k,\\ 0, & i<k.\end{cases}$$

Таким образом, $\pi_i(X)=\pi_i(X|_i)=H_i(X|_i)$ и задача вычисления гомотопич. групп сводится к задаче вычисления гомологий (и когомологий) пространства $X|_i$. Эти гомологии находятся по индукции при помощи *спектральных последовательностей* расслоений: $X|_k$ расслаивается со слоем $X|_{k+1}$ над *Эйленберга — Маклейна пространством* $K(\pi_k(X), k)$. Вычисление не носит автоматич. характера: чтобы продвинуться в нем, необходимо как можно больше знать о когомологиях пространства X, включая действие в них примарных и высших *когомологических операций*.

Более удобный аппарат для вычисления стабильных С. г. г. доставляет спектральная последовательность Адамса. Пусть p — простое число, а $A_{(p)}$ — *Стинрода алгебра* стабильных когомологич. операций, действующих в когомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$.

3) Существует спектральная последовательность, начальный член к-рой совпадает с когомологиями алгебры Стинрода (т. е. с $\mathrm{Ext}_{A_{(p)}}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$), а предельный член присоединен к стабильным С. г. г., профакторизованным по кручению порядка, взаимно простого с p.

Спектральная последовательность Адамса позволяет продвинуться в вычислении стабильных гомотопич. С. г. г. довольно далеко. Аналогичная спектральная последовательность имеется для вычисления стабильных гомотопич. групп любого пространства. Имеется и нестабильный аналог спектральной последовательности Адамса (см. [4]).

Более современные методы вычисления С. г. г. основываются на привлечении *обобщенных теорий когомологий*. Один из них заключается в использовании тесно связанного с K-теорией e-инварианта Адамса. Для его построения фиксируется отображение $f: S^i\to S^n$, представляющее класс $\alpha\in\pi_i(S^n)$, и рассматривается пространство $X_\alpha=S^n\cup_f D^{i+1}$, полученное приклеиванием к сфере S^n $(i+1)$-мерной клетки по отображению f. Оказывается

$$H_n(X_\alpha;\ \mathbb{Z})\cong H_{n+i+1}(X_\alpha;\ \mathbb{Z})\cong\mathbb{Z};$$

пусть u, v — канонические образующие этих групп. Существует комплексное векторное расслоение ξ над X_α, *Чжэня характер* $\mathrm{ch}\,\xi$ к-рого удовлетворяет соотношению $\langle\mathrm{ch}\,\xi, u\rangle=1$. Тогда $\langle\mathrm{ch}\,\xi, v\rangle$ есть рациональное число, вычет к-рого по модулю 1 не зависит от выбора ξ. Этот вычет и есть e-инвариант $e(\alpha)$ класса α. Функция e представляет собой гомоморфизм

$$e:\ \pi_i(S^n)\longrightarrow\mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

образ к-рого может быть найден (см. [2]).

Наконец, потенциально самый мощный метод вычисления С. г. г. (и не только сфер) доставляет спектральная последовательность Адамса — Новикова — аналог спектральной последовательности Адамса, построенный на базе не обычных когомологий, а кобордизмов. Однако уже явное вычисление начального члена этой последовательности содержит в себе трудности, пока (1984) не преодоленные.

III. Результаты вычисления. 1) Группы $\pi_i(S^n)$ с $i-n\leqslant 2$ изоморфны группам из следующей таблицы:

$i-n$ \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	стаб.
1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	$\mathbb{Z}_2$
2	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	...	...	...	...	...	...	...	...	$\mathbb{Z}_2$
3	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_{24}$	...	...	...	...	...	...	...	$\mathbb{Z}_{24}$
4	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	0	...	...	...	...	...	...	0
5	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	...	...	...	...	...	0
6	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{24}\oplus\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	...	...	...	...	$\mathbb{Z}_2$
7	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{30}$	$\mathbb{Z}_{60}$	$\mathbb{Z}_{120}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{120}$	$\mathbb{Z}_{240}$	...	...	...	$\mathbb{Z}_{240}$
8	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^2$	...	...	$\mathbb{Z}_2^2$
9	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^5$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	...	$\mathbb{Z}_2^3$
10	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{12}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{120}\oplus\mathbb{Z}_{12}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{72}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{72}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}\oplus\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_6$
11	$\mathbb{Z}_{12}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{84}\oplus\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{84}\oplus\mathbb{Z}_2^5$	$\mathbb{Z}_{504}\oplus\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_{504}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{504}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{504}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{504}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{504}$	$\mathbb{Z}_{504}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{504}$	$\mathbb{Z}_{504}$

2) Группы π_k^s с $12\leqslant k\leqslant 22$ изоморфны группам из следующей таблицы:

$k=12$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{480}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_8\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{264}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$

Дальнейшие результаты вычисления групп $\pi_i(S^n)$ см. [3]. Особенного прогресса удалось достичь в вычислении нечетных примарных компонент этих групп.

Более современные методы вычисления С. г. г. основываются на привлечении *обобщенных теорий когомологий*. Один из них заключается в использовании тесно связанного с K-теорией e-инварианта Адамса. Для его построения фиксируется отображение $f: S^i \to S^n$, представляющее класс $\alpha \in \pi_i(S^n)$, и рассматривается пространство $X_\alpha = S^n \bigcup_f D^{i+1}$, полученное приклеиванием к сфере S^n $(i+1)$-мерной клетки по отображению f. Оказывается

$$H_n(X_\alpha;\ \mathbb{Z}) \cong H_{n+i+1}(X_\alpha;\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z};$$

пусть u, v — канонические образующие этих групп. Существует комплексное векторное расслоение ξ над X_α, *Чжэня характер* ch ξ к-рого удовлетворяет соотношению $\langle \mathrm{ch}\ \xi,\ u\rangle = 1$. Тогда $\langle \mathrm{ch}\ \xi,\ v\rangle$ есть рациональное число, вычет к-рого по модулю 1 не зависит от выбора ξ. Этот вычет и есть e-инвариант $e(\alpha)$ класса α. Функция e представляет собой гомоморфизм

$$e:\ \pi_i(S^n) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

образ к-рого может быть найден (см. [2]).

Наконец, потенциально самый мощный метод вычисления С. г. г. (и не только сфер) доставляет спектральная последовательность Адамса — Новикова — аналог спектральной последовательности Адамса, построенный на базе не обычных когомологий, а кобордизмов. Однако уже явное вычисление начального члена этой последовательности содержит в себе трудности, пока (1984) не преодоленные.

III. Результаты вычисления. 1) Группы $\pi_i(S^n)$ с $i-n \leqslant 2$ изоморфны группам из следующей таблицы:

7	8	9	10	11	12	стаб.
..	...	...	...	...	...	$\mathbb{Z}_2$
..	...	...	...	...	...	$\mathbb{Z}_2$
..	...	...	...	...	...	$\mathbb{Z}_{24}$
..	...	...	...	...	...	0
0	...	...	...	...	...	0
$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	...	...	...	...	$\mathbb{Z}_2$
120	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{120}$	$\mathbb{Z}_{240}$	...	...	...	$\mathbb{Z}_{240}$
$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^2$	...	...	$\mathbb{Z}_2^2$
$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^5$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	...	$\mathbb{Z}_2^3$
$\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}\oplus \mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_6$
$\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{504}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{504}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{504}$	$\mathbb{Z}_{504}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{504}$	$\mathbb{Z}_{504}$

2) Группы π_k^s с $12 \leqslant k \leqslant 22$ изоморфны группам из следующей таблицы:

$k=12$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{480}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_8\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{264}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$

Дальнейшие результаты вычисления групп $\pi_i(S^n)$ см. [3]. Особенного прогресса удалось достичь в вычислении нечетных примарных компонент этих групп.

Так, например:

3) если p — нечетное простое число, то p-примарная компонента группы π_k^s есть $\mathbb{Z}_p$ при $k=2l(p-1)-1$, $l=1, \ldots, (p-1)$, и тривиальна при других $k<2p(p-1)-2$.

Имеется большое количество результатов о С. г. г., область действия к-рых не ограничивается никаким конечным диапазоном значений $i-n$. В частности, известно большое количество бесконечных серий нетривиальных элементов групп $\pi_i(S^n)$ (см. [4]).

4) Порядок образа *Уайтхеда гомоморфизма* J_k равен знаменателю несократимой дроби, равной $B_k/4k$, где B_k есть k-е *Бернулли число*. В частности, Card Im $J_1=24$, Card Im $J_2=240$, Card Im $J_3=504$, Card Im $J_4=480$.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976; [2] Adams J., «Topology», 1963, v. 2, p. 181—95; 1965, v. 3, p. 137—81, 193—222; 1966, v. 5, p. 21—71; [3] Тода Х., Композиционные методы в теории гомотопических групп сфер, пер. с англ., М., 1982; [4] Уайтхед Дж., Новейшие достижения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1974; [5] Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л., Гомотопическая топология, 2 изд., М., 1969. *Д. Б. Фукс.*

СФЕРА — множество S^n точек x евклидова пространства E^{n+1}, находящихся от нек-рой точки x_0 (центр С.) на постоянном расстоянии R (радиус С.), т. е.

$$S^n=\{x\in E^{n+1}\colon \rho(x, x_0)=R\}.$$

С. S^0 — пара точек, С. S^1 — это окружность, С. S^n при $n>2$ иногда наз. гиперсферой. Объем С. S^n (длина при $n=1$, поверхность при $n=2$) вычисляется по формуле

$$S^n=\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}R^n,$$

в частности,

$$S^1=2\pi R,\ S^2=4\pi R^2,\ S^3=2\pi^2R^3,\ S^4=\frac{8}{3}\pi^2R^4.$$

Уравнение С. S^n в декартовых прямоугольных координатах в E^{n+1} имеет вид

$$\sum(x^i-x_0^i)^2=R^2$$

(здесь x^i, x_0^i, $i=1, \ldots, n+1$,— координаты x, x_0 соответственно), т. е. С.— (гипер)квадрика, или поверхность второго порядка специального вида.

Положение какой-либо точки в пространстве относительно С. характеризуется *степенью точки*. Совокупность всех С., относительно к-рых данная точка имеет одинаковую степень, составляет *сеть* С. Совокупность всех С., относительно к-рых точки нек-рой прямой (радикальной оси) имеют одинаковую степень (различную для различных точек), составляет *связку* С. Совокупность всех С., относительно к-рых точки нек-рой плоскости (радикальной плоскости) имеют одинаковую степень (различную для разных точек), составляет *пучок* С.

С точки зрения дифференциальной геометрии, С. S^n — *риманово пространство*, имеющее постоянную (гауссову при $n=2$ и риманову при $n>2$) кривизну $k=\frac{1}{R^n}$. Все геодезич. линии С. замкнуты и имеют постоянную длину $2\pi R$ — это т. н. большие окружности, т. е. пересечения с S^n двумерных плоскостей в E^{n+1}, проходящих через ее центр. Внешнегеометрич. свойства S^n: все нормали пересекаются в одной точке, кривизна любого нормального сечения одна и та же и не зависит от точки, в к-рой оно рассматривается, в частности имеет постоянную среднюю кривизну, причем полная средняя кривизна С. — наименьшая среди выпуклых поверхностей одинаковой площади, все точки С. омбилические.

Нек-рые из таких свойств, принятые за основные, послужили отправной точкой для обобщения понятия С. Так, напр., *аффинная сфера* определяется тем, что все ее (аффинные) нормали пересекаются в одной точке; *псевдосфера* — поверхность в E^3 постоянной гауссовой кривизны (но уже отрицательной); одна из интерпретаций *орисферы* (предельной сферы) — множество точек внутри S^2, определяемое уравнением также второго порядка

$$(1-x^2-y^2-z^2)=\text{const}\,(1-x\alpha-y\beta-z\gamma)^2.$$

На С. S^n дважды транзитивно действует ортогональная группа $O(n+1)$ пространства E^{n+1} (2-транзитивность означает, что для любых двух пар точек с равными расстояниями между ними существует вращение — элемент $O(n+1)$, переводящее одну пару в другую); эта группа является полной группой изометрий S^n; наконец, С. есть однородное пространство: $S^n=O(n+1)/O(n)$.

С точки зрения (дифференциальной) топологии, С. S^n — замкнутое дифференцируемое многообразие, разделяющее E^{n+1} на две области и являющееся их общей границей; при этом ограниченная область, гомеоморфная E^{n+1},— это (открытый) *шар*, так что С. можно определить как его границу.

Группы гомологий С. S^n, $n\geqslant 1$:

$$H_k(S^n)=\begin{cases}0, & k\neq n,\\ \mathbb{Z}, & k=n,\end{cases}$$

в частности S^n не стягивается в точку сама по себе, т. е. тождественное отображение S^n в себя существенно.

Группы гомотопий С. S^n, $n\geqslant 1$:

$$\pi_k(S^n)=\begin{cases}0, & k<n,\\ \mathbb{Z}, & k=n.\end{cases}$$

Напр., $\pi_3(S^2)=\mathbb{Z}$, $\pi_{n+1}(S^n)=\pi_{n+2}(S^n)=\mathbb{Z}_2$ при $n>2$. В общем случае — для любых k и n, $k>n$, группы $\pi_k(S^n)$ не вычислены (см. *Сфер гомотопические группы*).

И здесь понятие С. получает обобщение. Напр., *дикая сфера* — топологич. С. (см. ниже) в E^{n+1}, не ограничивающая области, гомеоморфной E^{n+1}; *Милнора сфера* (экзотическая С.) — многообразие, гомеоморфное, но не диффеоморфное S^n.

Топологич. пространство, гомеоморфное С., наз. топологической сферой. Одним из основных здесь является вопрос об условиях того, что нек-рое пространство является топологич. сферой.

Примеры. а) Инвариантная топологич. характеристика С. S^n при $n>2$ не известна (1984). О случае $n=1$ см. *Одномерное многообразие*. Для того чтобы континуум был гомеоморфен С. S^2, необходимо и достаточно, чтобы он был локально связан, содержал хотя бы одну простую замкнутую линию и чтобы всякая лежащая на нем такая линия разбивала его на две области, имеющие эту линию своей общей границей (теорема Уайлдера).

б) Полное односвязное риманово пространство размерности $n\geqslant 2$, кривизна K_δ к-рого для всех касательных двумерных плоскостей σ δ-ограничена с $\delta>1/4$, т. е. $\delta\leqslant K_\delta\leqslant 1$ гомеоморфно S^n (теорема о сфере, см. *Римановa геометрия*).

в) Односвязное замкнутое гладкое многообразие, (целые) гомологии к-рого совпадают с гомологиями S^n, гомеоморфно S^n при $n\geqslant 4$ (при $n=3$ — неизвестно (1984)). Если $n=5$, 6, то оно также и гомеоморфно S^n (обобщенная гипотеза Пуанкаре), при $n=3$, 4 гипотеза остается (1984), при $n\geqslant 7$ диффеоморфизм не имеет места.

Совершенно аналогично определяется С. S в метрич. пространстве (M, ρ): $S=\{x\in M,\ \rho(x, x_0)=R\}$.

Однако это множество, вообще говоря, может быть устроено достаточно сложно (или может быть пустым).

В нормированном пространстве E с нормой $\|\cdot\|$ С. наз. множество $S=\{x\in E,\ \|x\|=R\}$; это, по существу, произвольная, вообще говоря, бесконечномерная выпуклая (гипер)поверхность, не всегда обладающая, напр., гладкостью, округлостью и т. п. полезными свойствами обычной С. Один из вариантов, применяющихся в топологии,— т. н. *бесконечномерная сфера* — строгий индуктивный предел S^∞ последовательности вложенных сфер:

$$S^1\subset S^2\subset\ldots;$$

другое определение: $S^\infty=V_1(\mathbb{R}^\infty)$, где $V_1(\mathbb{R}^\infty)$ — бесконечномерное *Штифеля многообразие*. Для любого i оказывается, что $\pi_i(S^\infty)=0$.

Приложения понятия С. чрезвычайно разнообразны. Напр., С. участвует в конструкциях новых пространств или дополнительных структур на них. Так, напр., проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ можно интерпретировать как С. S^n с отождествленными диаметрально противоположными точками; С. с ручками и дырами используется в *ручек теории*; см. также *Когомотопическая группа*, *Сферическое отображение*.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Многомерные пространства, М., 1966; [2] его же, Неевклидовы пространства, М., 1969; [3] Леви П., Конкретные проблемы функционального анализа, пер. с франц., М., 1967; [4] Введение в топологию, М., 1980; [5] Буземан Г., Геометрия геодезических, пер. с англ., М., 1962.

И. С. Шарадзе.

СФЕРИЧЕСКАЯ ГАРМОНИКА степени k — сужение однородного *гармонического многочлена* $h^{(k)}(x)$ степени k от n переменных $x=(x_1,\ldots,x_n)$ на единичной сфере S^{n-1} евклидова пространства E^n, $n\geqslant 3$. В частности, при $n=3$ С. г. — это классич. *сферические функции*.

Пусть $x\in E^n$, $x\neq 0$, $r=|x|$, $x'=x/r\in S^{n-1}$. Основным свойством С. г. является свойство ортогональности: если $Y^{(k)}(x')$ и $Y^{(l)}(x')$ — С. г. соответственно степеней k и l, причем $k\neq l$, то

$$\int_{S^{n-1}} Y^{(k)}(x')\,Y^{(l)}(x')\,dx'=0.$$

Простейшими С. г. являются зональные сферические гармоники. Для любого $t'\in S^{n-1}$ и любого $k>0$ существует зональная С. г. $Z_{t'}^{(k)}(x')$, постоянная на любой параллели сферы S^{n-1}, ортогональной вектору t'. Зональные С. г. $Z_{t'}^{(k)}(x')$ лишь постоянным множителем отличаются от *Лежандра многочленов* $P_k^{(\lambda)}$ при $n=3$ или от *ультрасферических многочленов* $P_k^{(\lambda)}$ при $n>3$:

$$Z_{t'}^{(k)}(x')=c(k,\ n)\,P_k^{(\lambda)}(x't'),$$

где многочлены $P_k^{(\lambda)}$ определяются при $n\geqslant 3$ через производящую функцию

$$(1-2st+s^2)^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k^{(\lambda)}(t)\,s^k,$$

$0\leqslant|s|<1$, $|t|=1$, $\lambda=(n-2)/2$. Многочлены $P_k^{(\lambda)}$, $k=0,1,\ldots$, ортогональны с весом $(1-t^2)^{\lambda-1/2}$ и образуют ортогональный базис пространства $L^2([-1,1];\ (1-t^2)^{\lambda-1/2})$. Если $f(x')$ — функция из пространства $L^2(S^{n-1})$, причем $\int_{S^{n-1}}f(x')dx'=0$, то существует единственный набор С. г. $Y^{(k)}$ такой, что

$$f(x')=\sum_{k=1}^{\infty}Y^{(k)}(x'),$$

причем ряд сходится по норме $L^2(S^{n-1})$.

Разложения по С. г. во многом аналогичны разложениям в ряды Фурье, обобщением к-рых они в сущности являются. Однородные гармонические многочле-

ны $h^{(k)}(x)$ иногда наз. пространственными С. г. В силу однородности

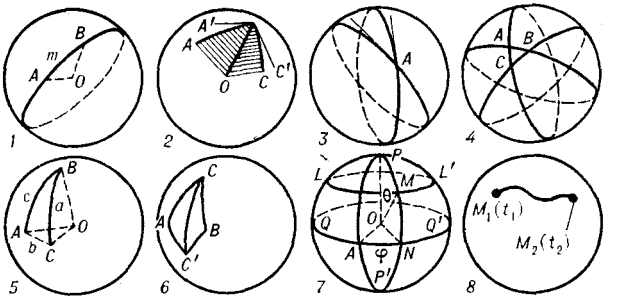
$$h^k(x) = |x|^k Y^{(k)}(x'),$$

в связи с чем С. г. иногда наз. также поверхностными С. г.

Лит.: [1] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1—2, М., 1960; [2] Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974. *Е. Д. Соломенцев.*

СФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — математич. дисциплина, изучающая геометрич. образы, находящиеся на сфере, подобно тому как планиметрия изучает геометрич. образы, находящиеся на плоскости.

Всякая плоскость, пересекающая сферу, дает в сечении нек-рую окружность; если секущая плоскость проходит через центр O сферы, то в сечении получается т. н. большой круг. Через каждые две точки A и B на сфере (рис., *1*), кроме случая диаметрально



противоположных точек, можно провести единственный большой круг. Большие круги сферы являются ее *геодезическими линиями* и поэтому в С. г. играют роль, аналогичную роли прямых в планиметрии. Однако в то время как любой отрезок прямой является кратчайшим между его концами, дуга большого круга на сфере будет кратчайшей лишь в случае, когда она короче дополнительной дуги. Во многих других отношениях С. г. также отлична от планиметрии; так, напр., в С. г. не существует параллельных геодезических: два больших круга всегда пересекаются, и притом в двух точках.

Длину отрезка AB на сфере, то есть дугу AmB (рис., *1*) большого круга, измеряют соответствующим пропорциональным ей центральным углом AOB. Угол ABC (рис., *2*), образованный на сфере дугами двух больших кругов, измеряют углом $A'BC'$ между касательными к соответствующим дугам в точке пересечения B или двугранным углом, образованным плоскостями OBA и OBC.

При пересечении двух больших кругов на сфере образуются четыре сферических двуугольника (рис., *3*). Сферич. двуугольник определяется заданием своего угла. Площадь сферич. двуугольника определяется по формуле $S = 2R^2A$, где R — радиус сферы, A — угол двуугольника, выраженный в радианах.

Три больших круга, не пересекающихся в одной паре диаметрально противоположных точек, образуют на сфере восемь сферических треугольников (рис., *4*); зная элементы (углы и стороны) одного из них, легко определить элементы всех остальных. Поэтому обычно рассматривают соотношения между элементами лишь одного треугольника, притом того, все стороны к-рого меньше половины большого круга (такие треугольники наз. эйлеровыми треугольниками). Стороны a, b, c сферич. треугольника измеряются плоскими углами трехгранного угла $OABC$ (рис., *5*), углы A, B, C треугольника — двугранными углами того же трехгранного угла. Свойства

сферич. треугольников во многом отличаются от свойств треугольников на плоскости (прямолинейных треугольников). Так, к известным трем случаям равенства прямолинейных треугольников для треугольников на сфере добавляется еще четвертый: два треугольника равны, если равны их соответствующие углы (на сфере не существует подобных треугольников).

Равными треугольниками считаются те, к-рые могут быть совмещены после передвижения по сфере. Равные сферич. треугольники имеют равные элементы и одинаковую ориентацию. Треугольники, имеющие равные элементы и различную ориентацию, наз. симметричными; таковы, напр., треугольники $AC'C$ и BCC' на рис., *6*.

Во всяком сферич. треугольнике (эйлеровом) каждая сторона меньше суммы и больше разности двух других; сумма всех сторон всегда меньше 2π. Сумма углов сферического треугольника всегда меньше 3π и больше π. Разность $s-\pi=\varepsilon$, где s — сумма углов сферического треугольника, наз. сферическим избытком. Площадь сферич. треугольника определяется по формуле $S=R^2\varepsilon$, где R — радиус сферы. О соотношениях между углами и сторонами сферич. треугольника см. *Сферическая тригонометрия*.

Положение каждой точки на сфере вполне определяется заданием двух чисел: эти числа (координаты) можно определить, напр., следующим образом. Фиксируются (рис., *7*) нек-рый большой круг QQ' (экватор), одна из двух точек пересечения диаметра PP' сферы, перпендикулярного к плоскости экватора, с поверхностью сферы, напр. P (полюс), и один из больших полукругов PAP', выходящих из полюса (нулевой меридиан). Большие полукруги сферы, выходящие из P, наз. меридианами, малые ее круги, *параллельные экватору*,— параллелями. В качестве одной из координат точки M на сфере принимается угол $\theta=POM$ — полярное расстояние, в качестве второй — угол $\varphi=AON$ между нулевым меридианом и меридианом, проходящим через точку M,— долгота, отсчитываемая против часовой стрелки.

Длина L дуги M_1M_2 (рис., *8*) линии $\theta=f(t)$, $\varphi=g(t)$ вычисляется по формуле

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2+\left(\sin f\,\frac{dg}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Лит.: [1] Степанов Н. Н., Сферическая тригонометрия, 2 изд., Л.—М., 1948; [2] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4 — Геометрия, М., 1963. *В. И. Битюцков.*

СФЕРИЧЕСКАЯ ИНДИКАТРИСА — изображение кривой трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ с помощью отображения точек кривой в единичную сферу S^2 какими-либо единичными векторами: касательным, главной нормали, бинормали этой кривой. Пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ — радиус-вектор кривой l, s — естественный параметр, $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(s)$ — радиус-вектор сферич. отображения кривой l в единичную сферу S^2 с центром в начале координат с помощью одного из указанных единичных векторов. Уравнение С. и. касательных определится уравнением

$$\boldsymbol{R}(s)=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},$$

С. и. главных нормалей — уравнением

$$\boldsymbol{R}(s)=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\Big/\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|,$$

а С. и. бинормалей — уравнением

$$\boldsymbol{R}(s)=\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right)\Big/\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|.$$

Касательная к С. и. в соответствующих точках s параллельна главной нормали кривой. Кривизна и кручение С. и. выражаются через кривизну и кручение

самой кривой. Для каждой из С. и. существует бесконечное множество кривых, для к-рых она является индикатрисой, т. е. кривая не может быть однозначно восстановлена по ее С. и.

Лит.: [1] Выгодский М. Я., Дифференциальная геометрия, М.—Л., 1949.

Л. А. Сидоров.

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ — математич. дисциплина, изучающая зависимости между углами и сторонами сферических треугольников (см. *Сферическая геометрия*). Пусть A, B, C — углы и a, b, c — противолежащие им стороны сферического треугольника ABC. Углы и стороны сферич. треугольника связаны следующими основными формулами С. т.:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \qquad (1)$$

— теорема синусов;

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \qquad (2)$$

— теорема косинусов для сторон;

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \qquad (2_1)$$

— теорема косинусов для углов;

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \qquad (3)$$

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \qquad (3_1)$$

— формулы, связывающие пять элементов. В этих формулах стороны a, b, c измеряются соответствующими центральными углами, длины этих сторон равны соответственно aR, bR, cR, где R — радиус сферы. Меняя обозначения углов (и сторон) по правилу круговой перестановки: $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A$ ($a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow a$), можно написать другие формулы С. т., аналогичные указанным. Формулы С. т. позволяют по любым трем элементам сферич. треугольника определить три остальные.

Для решения сферич. треугольника по данным двум сторонам a, b и углу C между ними и по данным двум углам A, B и прилежащей к ним стороне c применяются следующие формулы (аналогии Непера):

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \operatorname{ctg}\frac{c}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \operatorname{ctg}\frac{c}{2}; \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} \operatorname{tg}\frac{c}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} \operatorname{tg}\frac{c}{2}. \qquad (5)$$

Для прямоугольных сферич. треугольников ($A = 90°$, a — гипотенуза, b, c — катеты) формулы С. т. упрощаются, напр.:

$$\sin b = \sin a \sin B \qquad (1')$$

— теорема синусов;

$$\cos a = \cos b \cos c \qquad (2')$$

— сферическая теорема Пифагора;

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c. \qquad (3')$$

При решении задач удобны следующие формулы Делам,бра, связывающие все шесть элементов сферич. треугольника:

$$\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(B-C) = \sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b+c),$$

$$\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B-C) = \cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b-c),$$

$$\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(B+C) = \sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(b+c),$$

$$\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B+C) = \cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(b-c);$$

формулы половинных углов:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}},\quad s=\frac{a+b+c}{2};$$

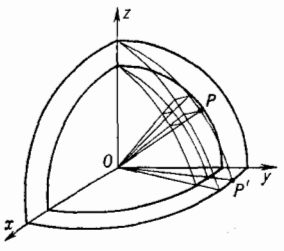
$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}},$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}},\quad S=\frac{A+B+C}{2}.$$

Лит. см. при ст. *Сферическая геометрия*. *В. И. Битюцков.*

СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — числа ρ, θ и φ, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x, y и z формулами

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta,$$
$$y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z=\rho\cos\theta,$$



где $0\leqslant\rho<\infty$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Координатные поверхности (см. рис.): концентрич. сферы с центром O ($\rho=OP=\text{const}$); полуплоскости, проходящие через ось Oz ($\varphi=\angle xOP'=\text{const}$); круговые конусы ($\theta=\angle zOP=\text{const}$). Система С. к.— ортогональная.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\rho=1,\quad L_\varphi=\rho\sin\theta,\quad L_\theta=\rho.$$

Элемент площади поверхности:

$$d\sigma=\sqrt{\rho^2\sin^2\theta\,(d\rho\,d\varphi)^2+\rho^2\,(d\rho\,d\theta)^2+\rho^4\sin^2\theta\,(d\varphi\,d\theta)^2}.$$

Элемент объема:

$$dV=\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\operatorname{grad}_\rho f=\frac{\partial f}{\partial\rho},\quad \operatorname{grad}_\varphi f=\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi},\quad \operatorname{grad}_\theta f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\theta};$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{\rho}a_\rho+\frac{\partial a_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho\operatorname{tg}\theta}a_\theta+\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta};$$

$$\operatorname{rot}_\rho\boldsymbol{a}=\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\theta}-\frac{1}{\rho\operatorname{tg}\theta}a_\varphi;$$

$$\operatorname{rot}_\theta\boldsymbol{a}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\theta}-\frac{\partial a_\theta}{\partial\rho}-\frac{a_\theta}{\rho};$$

$$\operatorname{rot}_\varphi\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_\varphi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}a_\varphi-\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi};$$

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}.$$

Обобщенными С. к. наз. числа u, v и w, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x, y и z формулами

$$x=au\cos v\sin w,\quad y=bu\sin v\sin w,\quad z=cu\cos w,$$

где $0\leqslant u<\infty$, $0\leqslant v<2\pi$, $0\leqslant w\leqslant\pi$, $a>b$, $b>0$. Координатные поверхности: эллипсоиды ($u=\text{const}$), полуплоскости ($v=\text{const}$) и эллиптич. конусы ($w=\text{const}$).

Д. Д. Соколов.

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, шаровые функции, присоединенные функции Лежандра 1-го и 2-го рода,— два линейно независимых решения $P_\nu^\mu(z)$ и $Q_\nu^\mu(z)$ дифференциального уравнения

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}-2z\frac{dy}{dz}+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right]=0,$$

где μ, ν — комплексные постоянные, к-рое возникает

при решении нек-рых классов дифференциальных уравнений с частными производными методом разделения переменных. Точки $z=\pm 1,\ \infty$ являются в общем случае точками ветвления решений. С. ф. являются частными случаями гипергеометрич. функции:

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2}{}_2F_1\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)$$

$$\left(\arg\frac{z+1}{z-1}=0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z=0,\ z>1\right),$$

$$Q_\nu^\mu(z)=\frac{e^{\mu\pi i}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+\nu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+3/2)}\frac{(z^2-1)^{\mu/2}}{z^{\mu+\nu+1}}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu+1}{2},\ \frac{\mu+\nu+2}{2};\ \nu+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right)$$

$$(\arg z=0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z=0,\ z>0;\ \arg(z^2-1)=0$$
$$\text{при}\ \operatorname{Im} z=0,\ z>1).$$

С. ф. $P_\nu^\mu(z)$ и $Q_\nu^\mu(z)$ определены и однозначны соответственно в областях $|1-z|<2$ и $|z|>1$ комплексной плоскости, разрезанной вдоль действительной оси от $-\infty$ до $+1$.

Если $\operatorname{Im} z=0$, $z=x$, $-1<x<1$, то обычно в качестве решений рассматриваются функции

$$P_\nu^\mu(x)=\frac{1}{2}\left[e^{\mu\pi i/2}P_\nu^\mu(x+i0)+e^{-\mu\pi i/2}P_\nu^\mu(x-i0)\right]=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2}{}_2F_1\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-x}{2}\right),$$

$$Q_\nu^\mu(x)=\frac{1}{2}e^{\mu\pi i}\left[e^{-\mu\pi i/2}Q_\nu^\mu(x+i0)+e^{\mu\pi i/2}Q_\nu^\mu(x-i0)\right]=$$
$$=\frac{\pi}{2\sin\mu\pi}\left[\cos\mu\pi P_\nu^\mu(x)-\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}P_\nu^{-\mu}(x)\right],$$

где $f(x+i0)$ ($f(x-i0)$) — значения функции $f(z)$ на верхней (нижней) границе разреза.

При $\mu=0$, $\nu=n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ $P_n(z)\equiv P_n^0(z)$ — многочлены Лежандра. О зональных С. ф. см. ст. *Сферическая гармоника*.

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1974; [2] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математич. таблицами, пер. с англ., М., 1979; [3] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963; [4] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [5] Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, пер. с англ., М., 1952.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК МЕТОД — способ приближенного решения кинетич. уравнения с помощью разложения фазовой плотности частиц в конечную сумму по сферич. функциям от аргументов, задающих направление скорости частицы (см. [1]). Метод широко применяется при решении задач нейтронной физики.

В одномерной плоской геометрии стационарное интегро-дифференциальное кинетич. уравнение переноса (при изотропном рассеянии частиц)

$$\mu\frac{d\psi(x,\ \mu)}{dx}+\psi(x,\ \mu)=\frac{c}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x,\ \mu')\,d\mu' \qquad (1)$$

приближенно заменяется системой дифференциальных уравнений для $\tilde{\psi}_n(x)$ — приближенных значений коэффициентов Фурье

$$\psi_n(x)=\int_{-1}^{+1}\psi(x,\ \mu)\,P_n(\mu)\,d\mu,$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2N-1. \qquad (2)$$

Система вида

$$n\frac{d\tilde{\psi}_{n-1}(x)}{dx}+(2n+1-c\delta_{n0})\,\tilde{\psi}_n(x)+(n+1)\frac{d\tilde{\psi}_{n+1}(x)}{dx}=0 \qquad (3)$$

возникает при условии

$$\tilde{\psi}_{2N}(x)\equiv 0. \qquad (4)$$

Здесь $\psi(x,\ \mu)$ — фазовая плотность частиц, распространяющихся в веществе, c — среднее число вторичных частиц, возникающих в одном акте взаимодействия с частицами вещества, $P_n(\mu)$ — многочлен Лежандра степени n. Система (3) определяет P_{2N-1}-приближение С. г. м. для уравнения (1). Приближенное значение фазовой плотности

$$\tilde{\psi}(x,\ \mu)=\sum_{n=0}^{2N-1}\frac{2n+1}{2}\,\tilde{\psi}_n(x)\,P_n(\mu). \qquad (5)$$

Для уравнения (1) типичные краевые условия имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}&\psi(0,\ \mu)=0 \quad \text{для} \quad 0<\mu\leqslant 1,\\ &\psi(h,\ \mu)=0 \quad \text{для} \quad -1\leqslant\mu<0.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Таковы, напр., краевые условия для задачи нейтронной физики о критич. режиме слоя толщины h со свободными поверхностями $x=0$ и $x=h$ (границы с вакуумом). В этой задаче необходимо найти положительное решение (1), (6) и собственное значение c.

В С. г. м. вместо (6) естественно взять

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^1 P_n(\mu)\,\tilde{\psi}(0,\ \mu)\,d\mu=0\\ &\int_{-1}^0 P_n(\mu)\,\tilde{\psi}(h,\ \mu)\,d\mu=0,\\ &n=0,\ 1,\ \ldots,\ 2N-1.\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Однако такой подход дает в два раза больше условий, чем необходимо для частного решения системы (3). На практике был испытан различный выбор значений n в (7). Наилучший результат дают условия с $n=2k+1$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$. Для односкоростного уравнения переноса общего вида из *Владимирова вариационного принципа* получается система уравнений С. г. м. и указанные граничные условия (при выборе пробных функций в виде линейной комбинации *сферических гармоник*). Для трехмерной геометрии граничные условия можно записать в виде

$$\int_{(\Omega n)<0}(\Omega n)\,\tilde{\psi}(\boldsymbol{r},\ \Omega)\,Y_{2k,\,i}(\Omega)\,d\Omega\Big|_{r\in\Gamma}=0, \qquad (8)$$
$$i=0,\ \pm1,\ \ldots,\ \pm 2k;\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$$

Здесь $\boldsymbol{r}$ — вектор пространственной координаты, Ω — единичный вектор скорости частицы, имеющий сферич. координаты $\{\theta,\ \varphi\}$, n — единичный вектор внешней нормали к кусочно гладкой поверхности Γ, ограничивающей выпуклую область пространства, в к-рой решается задача

$$Y_{k,\,i}(\Omega)=P_k^{(|\,i\,|)}(\cos\theta)\sin^{|\,i\,|}\varphi,\ i=-k,\ \ldots,\ -1,$$
$$Y_{k,\,i}(\Omega)=P^{(i)}(\cos\theta)\cos i\varphi,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ k,$$

— сферич. функции, $P_k^{(i)}(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра 1-го рода ($P_k^{(0)}(\mu)=P_k(\mu)$ — многочлены Лежандра).

Низшие приближения С. г. м. (P_1, P_3) широко используются при решении задач нейтронной физики и дают хорошие результаты вдали от границ области, от источников и сильных поглотителей нейтронов. Теория возраста также строится в P_1-приближении. Обобщенное решение С. г. м. сходится к решению уравнения переноса при $N\to\infty$ (см. [2]). Скорость сходимости $\tilde{\psi}(x,\ \mu)\to\psi(x,\ \mu)$ легко оценить, сравнив интегральные уравнения для $\tilde{\psi}_0(x)$ и $\psi_0(x)$, т. е. оценив близость их ядер. Уравнение (1) с граничными условиями (6) приводит к интегральному уравнению с ядром

$$E_1(|\,x-s\,|)=\int_0^1\frac{e^{-|\,x-s\,|/\mu}}{\mu}\,d\mu.$$

Система С. г. м. (3) при граничных условиях, аналогичных (6),

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\psi}(0,\mu_i)=0 \quad &\text{для} \quad 0<\mu_i<1, \quad i=1,2,\ldots,N,\\ \tilde{\psi}(h,\mu_i)=0 \quad &\text{для} \quad -1<\mu_i<0, \quad i=-1,-2,\ldots,-N,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где μ_i — корни $P_{2N}(\mu)$, приводит к интегральному уравнению с ядром

$$\tilde{E}_1(|x-s|)=\sum_{i=1}^{N} a_i \frac{e^{-|x-s|/\mu_i}}{\mu_i},$$

где a_i — веса квадратурной формулы Гаусса для системы узлов $-1<\mu_i<1$. Особенность, к-рую имеет функция $\frac{e^{-|x-s|/\mu}}{\mu}$, приводит к медленной сходимости при больших N:

$$\int_0^h |E_1(x)-\tilde{E}_1(x)|\,dx<\frac{\text{const}}{N}, \quad |\psi_0(x)-\tilde{\psi}_0(x)|<\frac{\text{const}}{N}.$$

Приближенное собственное значение сходится к точному со скоростью $1/N^2$.

Граничные условия (9) возникают естественно при решении кинетич. уравнения м е т о д о м д и с к р е т н ы х о р д и н а т, к-рый состоит в замене (1) на приближенную систему

$$\mu_i \frac{\partial\tilde{\psi}_i(x)}{\partial x}+\tilde{\psi}_i(x)=\frac{c}{2}\sum_{i=-N}^{N} a_i\tilde{\psi}_i(x). \tag{10}$$

Метод дискретных ординат в одномерной геометрии эквивалентен С. г. м. (см. [3]), т. к. система (10) может быть получена из (3) с помощью линейного преобразования неизвестных функций:

$$\tilde{\psi}_n(x)=\sum_{i=-N}^{N} a_i\tilde{\psi}_i(x)\,P_n(\mu_i).$$

Однако в многомерных задачах С. г. м. в низших приближениях дает большую точность, чем метод дискретных ординат.

Лит.: [1] М а р ч у к Г. И., Л е б е д е в В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд., М., 1981; [2] С у л т а н г а з и н У. М., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1974, т. 14, № 1, с. 166—78; [3] Р и х т м а й е р Р., М о р т о н К., Разностные методы решения краевых задач, пер. с англ., М., 1972. *В. А. Чуянов.*

СФЕРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ — образ *сферического отображения.*

СФЕРИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение гладкой ориентируемой (гипер)поверхности M^k пространства E^{k+1} в (единичную) сферу S^k с центром в начале координат E^{k+1}, сопоставляющее точке $x\in M^k$ точку $x^*\in S^k$ с радиус-вектором $\bar{n}(x)$ — (единичной) нормалью к M^k в x. Иначе, С. о. определяется поливектором, построенным из k независимых векторов, касательных к M^k:

$$\bar{n}=\frac{\bar{x}_1\wedge\ldots\wedge\bar{x}_k}{|\bar{x}_1\wedge\ldots\wedge\bar{x}_k|}$$

(здесь $u^1,\ldots,u^k$ — локальные координаты точки x, $\bar{x}_i=\frac{\partial\bar{x}}{\partial u^i}$, $\bar{x}$ — радиус-вектор M^k). Напр., при $k=2$

$$\bar{n}=\frac{[\bar{x}_u,\bar{x}_v]}{|[\bar{x}_u,\bar{x}_v]|},$$

где $[\cdot,\cdot]$ — векторное произведение; этот простейший случай был рассмотрен К. Гауссом (C. Gauss, 1814). Образ С. о. наз. с ф е р и ч е с к и м и з о б р а ж е н и е м M^k, или его с ф е р и ч е с к и м о б р а з о м.

Форма

$$d\bar{n}^2=\gamma_{ij}\,du^i\,du^j$$

— обратный образ метрич. формы S^k — наз. т р е т ь е й к в а д р а т и ч н о й ф о р м о й (гипер)поверх-

ности M^k. Отвечающий ей тензор γ_{ij} связан с тензорами g_{ij} и b_{ij} соответственно первой и второй квадратичных форм соотношением

$$\gamma_{ij} = g^{kl} b_{ik} b_{jl},$$

а метрич. связности, соответствующие g_{ij} и γ_{ij}, оказываются *сопряженными связностями*.

Наряду со С. о. в случае (гипер)поверхности, однозначно проектирующейся на нек-рую (гипер)плоскость, удобно рассматривать т. н. **нормальное отображение** $\tilde{n}$. Для (гипер)поверхности, заданной уравнением

$$x^{k+1} = f(x^1, \ldots, x^k)$$

(здесь x^i — декартовы координаты в E^{k+1}), оно определяется так:

$$\tilde{n} = \{p_1, \ldots, p_k\},$$

где $p_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, при этом $\tilde{n} = n\sqrt{1 + \Sigma p_i^2}$.

Для неориентируемых (гипер)поверхностей используется т. н. **неориентируемое** С. о.— отображение M^k в эллиптич. пространство $\mathcal{E}^k$ (интерпретируемое как связка прямых, проходящих через центр E^{k+1}): точке $x \in M^k$ ставится в соответствие прямая, перпендикулярная касательной плоскости к M^k в x.

С. о. характеризует искривленность (гипер)поверхности в пространстве. Именно, отношение элементов площадей сферич. образа dS^* и самой поверхности dS в точке $x \in M^k$ равно **полной** (или **кронекеровой**, или **внешней**) **кривизне** K_l — произведению главных кривизн M^k в x:

$$K_l = dS^*/dS, \quad \text{т. е.} \quad K(ds^*) = \frac{K(ds)}{K_l}.$$

Точно так же (интегральная) кривизна множества $F \subset M^k$ равна площади его сферич. образа (т. е. множества $F^* = \tilde{n}(F) \subset S^k$):

$$\int\int K_l \, dS = \int\int dS^*. \qquad (1)$$

Обобщения сферического отображения.

1) **Касательное представление** — С. о. подмногообразия M^k в E^N — отображение

$$M^k \longrightarrow G_{K,M},$$

где $G_{K,M}$ — *Грассмана многообразие*, определяемое (здесь) следующим образом. Пусть T_x — касательное пространство к M^k в точке x, к-рое можно считать (гипер)плоскостью в E^N, а $T(x)$ есть K-мерное подпространство, проходящее через начало координат E^N параллельно T_x. Отображение $x \to T(x)$ и наз. С. о. Имеет место обобщение формулы (1) (для четных k):

$$\int_{T_N(M^k)} \tilde{\Omega} = \int_{M^k} \Omega,$$

здесь $\Omega = \varepsilon^{i_1 \ldots i_k} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{k-1} i_k}$, где Ω_{ij} — *кривизны форма* на M^k, $\tilde{\Omega}$ — аналогичная форма на $G_{K,N}$, $T_N(M^k)$ — образ M^k при С. о. Двойственным образом определяется **нормальное отображение** $M^k \to G_{N,K}$: точке $x \in M^k$ сопоставляется ортогональное дополнение к $T(x)$.

2) **Гауссово отображение** (г. о.) *векторного расслоения* ξ^k в векторное пространство F^N, $k \leqslant N \leqslant \infty$,— (произвольное) отображение

$$g : E(\xi^k) \longrightarrow F^N$$

пространства расслоения $E(\xi^k)$, индуцирующее на каждом слое линейный мономорфизм. Для канонического векторного расслоения γ_k^N (подрасслоения расслое-

ния-произведения ($G_{N,k}\times\mathbb{R}^N$, p, $G_{N,k}$), пространство к-рого состоит из всевозможных пар $(V, x)\in G_{N,k}\times\mathbb{R}^N$ с $x\in V$) отображение $(V, x)\to x$ наз. каноническим гауссовым отображением. Для любого расслоения ξ^k каждое г. о. является композицией канонич. г. о. и нек-рого морфизма расслоений; г. о. существует тогда и только тогда, когда существует такое отображение (B — база расслоения) $f\colon B(\xi)\to G_{N,k}$, что ξ и $f^*(\gamma_k^N)$ изоморфны (в частности, для каждого векторного расслоения над паракомпактным пространством существует г. о. в F^∞). Для подмногообразий риманова пространства имеется несколько обобщений С. о.

3) Локальное гауссово отображение. Пусть U — риманова нормальная координатная окрестность точки $x\in M^k\subset V^N$, $\perp U$ — сужение на U нормального расслоения многообразия M^k. Тогда отображение

$$G_U\colon \perp U\longrightarrow M_x\longrightarrow M_x^\perp,$$

где M_x, $M_x^\perp$ — соответственно касательная и нормальная (гипер)плоскости к M^k в x, наз. локально гауссовым, если $G_U(z)$, $z\in U$, есть параллельный перенос в V^N вектора z назад вдоль геодезич. луча в U, идущего из x в начальную точку вектора z. Если V^N имеет тривиальную группу голономии, то перенос не зависит от пути, так что можно определить глобальное отображение G на $\perp M$ согласованно с G_U на $\perp U$.

4) Ефимовское отображение относится к поверхностям M^2 в римановом пространстве V^3 и является развитием упомянутого выше понятия сопряженных связностей. Оно определяется более формально из-за отсутствия абсолютного параллелизма в V^3 и рассматривает аналог третьей квадратич. формы — квадрат ковариантного дифференциала нормали — $(Dn)^2$. При этом связь гауссовых кривизн $K(ds^*)$ и $K(ds)$ оказывается более сложной (вследствие неоднородности, вообще говоря, уравнений Кодацци). Эта связь остается прежней, т. е. $K(|Dn|)=\frac{K(ds)}{K_l}$, здесь $K(ds)$, $K(|Dn|)$ — гауссовы кривизны метрик ds и $|Dn|$ (в случае $V^3=E^3$ $K(ds)=K_l$), и получается прежняя формула $K(|Dn|)=K(|dn|)=1$, где K_l — внешняя кривизна M^2 в V^3, напр. в следующей ситуации: нормаль к M^2 является собственным вектором *Риччи тензора* пространства V^3 (рассматриваемого в точках M^2), другими словами, M^2 — одна из главных поверхностей этого тензора. Это всегда так, если V^3 является пространством постоянной кривизны.

Наконец, понятие С. о. вводится для нек-рых классов нерегулярных поверхностей.

5) Полярное отображение — С. о. выпуклой (гипер)поверхности F^k в E^{k+1}, сопоставляющее точке $x\in F^k$ множество $\nu(x)$ всех тех единичных векторов, отложенных от начала координат, к-рые параллельны нормалям к опорным (гипер)плоскостям к F^k в x. Теорема Александрова: сферич. образ $\nu(A)$ каждого борелевского множества $A\subset F^k$ измерим, и интегральная кривизна $K(A)=\mathrm{mes}\,\nu(A)$ есть вполне аддитивная функция.

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей . . . , ч. 2, М.—Л., 1948; [2] Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е., Введение в дифференциальную геометрию «в целом», М., 1973; [3] Мищенко А. С., Фоменко А. Т., Курс дифференциальной геометрии и топологии, М., 1980; [4] Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976; [5] Шварц Дж., Дифференциальная геометрия и топология, пер. с англ., М., 1970; [6] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [7] Бишоп Р. Л., Криттенден Р., Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967; [8] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [9] Буземан Г., Выпуклые поверхности, пер. с англ., М., 1964.

Л. А. Сидоров.

СХЕМА — окольцованное пространство, локально изоморфное *аффинной схеме*. Подробнее, С. состоит из топологич. пространства X (базисного пространства схемы) и пучка $\mathcal{O}_X$ коммутативных колец с единицей на X (структурного пучка схемы); при этом должно существовать открытое покрытие $(X_i)_{i\in I}$ пространства X такое, что $(X_i, \mathcal{O}_X|X_i)$ изоморфно аффинной схеме $\operatorname{Spec}\Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$ кольца сечений $\mathcal{O}_X$ над X_i. С.— одно из обобщений понятия *алгебраического многообразия*. О формировании понятия С. см. [2], [3], [5].

Основные понятия и свойства. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — С. Для каждой точки $x\in X$ слой пучка $\mathcal{O}_{X,x}$ является локальным кольцом; поле вычетов этого кольца обозначается $k(x)$ и наз. полем вычетов точки x. Топологич. свойствами С. наз. свойства базисного пространства X (напр., квазикомпактность, связность, неприводимость). Если P — нек-рое свойство аффинных С. (то есть свойство колец), то говорят, что С. локально обладает свойством P, если любая ее точка имеет открытую аффинную окрестность, обладающую этим свойством. Примером является свойство локальной нётеровости (см. *Нётерова схема*). С. регулярна, если все ее локальные кольца регулярны. Аналогично определяются нормальные, приведенные С., схемы Коэна — Маколея и т. д.

Морфизм схем — это морфизм их как локально окольцованных пространств. Иначе говоря, *морфизм* f С. X в С. Y состоит из непрерывного отображения $f: X\to Y$ и гомоморфизма пучков колец $f^*: \mathcal{O}_Y\to f_*\mathcal{O}_X$, причем для любой точки $x\in X$ гомоморфизм локальных колец $\mathcal{O}_{Y,f(x)}\to\mathcal{O}_{X,x}$ должен переводить максимальный идеал в максимальный. Для любого кольца A морфизмы С. X в $\operatorname{Spec}A$ находятся в биективном соответствии с гомоморфизмами колец $A\to\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Для любой точки $x\in X$ вложение ее в X также можно рассматривать как морфизм С. $\operatorname{Spec}k(x)\to X$. Важным свойством является существование в категории С. прямых и *расслоенных произведений*, обобщающих понятие тензорного произведения колец. Базисное топологич. пространство произведения С. X и Y отличается, вообще говоря, от произведения базисных пространств $X\times Y$.

С. X, снабженная морфизмом f в схему S, наз. S-схемой, или схемой над S. Морфизмом S-схем $f: X\to S$ и $g: Y\to S$ наз. морфизм $h: X\to Y$, для к-рого $f=g\circ h$. Любую С. можно рассматривать как С. над $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. Задание морфизма *замены базы* $S'\to S$ позволяет переходить от S-схемы X к S'-схеме $X_{S'}=X\times_S S'$ — расслоенному произведению X и S'. Если базисная схема S является спектром кольца k, то говорят также о k-схеме. k-схема наз. k-схемой конечного типа, если существует конечное аффинное покрытие $(X_i)_{i\in I}$ схемы X такое, что k-алгебры $\Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$ порождаются конечным числом элементов. Алгебраическим многообразием обычно наз. С. конечного типа над полем, требуя иногда отделимость и целостность. Рациональной точкой k-схемы X наз. морфизм k-схем $\operatorname{Spec}k\to X$; множество таких точек обозначается $X(k)$.

Для S-схемы $f: X\to S$ и точки $s\in S$ слоем морфизма f над s наз. $k(s)$-схема $f^{-1}(s)=X_s$, получаемая из X заменой базы $\operatorname{Spec}k(s)\to X$. Если вместо поля $k(s)$ в этом определении взять его алгебраич. замыкание, то получится понятие геометрического слоя. Тем самым S-схема X может рассматриваться как семейство схем X_s, параметризованное схемой S; часто, говоря о семействах, требуют дополнительно, чтобы морфизм f был плоским.

Понятия, связанные со схемами над S, часто наз. относительными в противоположность абсолютным по-

нятиям, связанным со С. Фактически у каждого понятия, применимого к С., есть относительный вариант. Напр., S-схема X наз. отделимой, если диагональное вложение $X \to X \times_S X$ является замкнутым; морфизм $f : X \to S$ наз. гладким, если он плоский и все его геометрич. слои регулярны. Аналогично определяются *морфизмы: аффинный, проективный, собственный, конечный, этальный, неразветвленный, конечного типа* и т. д. Свойство морфизма наз. универсальным, если оно сохраняется после любой замены базы.

Когомологии схем. Исследование схем, а также алгебро-геометрич. объектов, связанных со С., часто удается разбить на две задачи — локальную и глобальную. Локальные задачи обычно линеаризуются и данные их описываются теми или иными *когерентными пучками* или комплексами пучков. Напр., при изучении локального строения морфизма $X \to S$ важную роль играют пучки $\Omega^p_{X/S}$ относительных *дифференциальных форм*. Глобальная часть обычно связана с когомологиями этих пучков (см., напр., *Деформация* алгебраического многообразия). Здесь бывают полезны *конечности теоремы* и теоремы об обращении в нуль когомологий (см. *Кодаиры теорема*), *двойственность*, *Кюннета формулы*, *Римана — Роха теорема* и т. д.

С. конечного типа над полем $\mathbb{C}$ может рассматриваться и как комплексное *аналитическое пространство*. Используя трансцендентные методы, можно вычислять когомологии когерентных пучков; более важно, однако, что можно говорить о комплексной, или сильной, топологии на $X(\mathbb{C})$, фундаментальной группе, числах Бетти и т. д. Желание иметь нечто подобное для произвольных схем и глубокие арифметич. гипотезы (см. *Дзета-функция* в алгебраической геометрии) привели к построению различных топологий в категории схем, наиболее известной из к-рых является *этальная топология*. Это позволило определить фундаментальную группу С., другие гомотопич. инварианты, когомологии со значениями в дискретных пучках, числа Бетти и т. д. (см. *l-адические когомологии*, *Вейля когомологии*, *Мотивов теория*).

Конструкции схем. Чаще всего построение конкретной С. использует понятия аффинного или проективного спектра (см. *Аффинный морфизм*, *Проективная схема*), включая задание подсхемы пучком идеалов. Конструкция проективного спектра позволяет, в частности, строить раздутие, или моноидальное преобразование схем. Для построения С. используются также расслоенное произведение или склеивание. Менее элементарные конструкции опираются на понятие представимого функтора. Располагая хорошим понятием семейства объектов, параметризованных С., и сопоставляя каждой С. S множество $F(S)$ семейств, параметризованных схемой S, получают контравариантный функтор F из категории С. в категорию множеств (снабженных, быть может, дополнительной структурой). Если функтор F представим, т. е. существует С. X такая, что $F(S) = \mathrm{Hom}(S, X)$ для любого S, то получается универсальное семейство объектов, параметризованное С. X. Так строятся, напр., *Пикара схема* или *Гильберта схема* (см. также *Алгебраическое пространство*, *Модулей теория*).

Еще один способ порождения новых С. — переход к факторпространству по отношению эквивалентности на С. Как правило, такой фактор существует как алгебраич. пространство. Частный случай этой конструкции — С. орбит X/G при действии схемы групп G на схеме X (см. *Инвариантов теория*).

Одно из обобщений понятия С. — формальная С., к-рую можно понимать как индуктивный предел С. с одним и тем же базисным топологич. пространством.

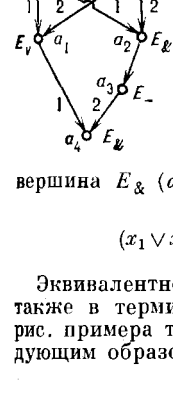
Лит.: [1] Grothendieck A., Dieudonné J., Elements de géométrie algébrique, t. 1, B.—Hdlb.—N. Y., 1971; [2] Дьедонне Ж., «Математика», 1965, т. 9, № 1, с. 54—126; [3] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [4] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981; [5] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 47—112.

В. И. Данилов.

СХЕМА ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ — математич. модель реальных объектов, связанных с переработкой информации, в к-рых допускается многократное использование промежуточных результатов. К подобным объектам относятся, напр., электронно-ламповые схемы, сети нейронов, нек-рые виды вычислительных алгоритмов. Это один из основных классов *управляющих систем*. С. из ф. э. можно рассматривать как *автомат* без памяти.

Математически С. из ф. э. можно определить как ориентированный *граф* без циклов с помеченными ребрами и вершинами, множество вершин к-рого разбито на два подмножества. Вершины одного из них наз. входами С. из ф. э. Им не инцидентны входящие ребра, и каждой из них приписана буква из алфавита переменных $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$. Вершинам другого подмножества приписаны буквы из алфавита $\mathcal{E}=\{\varphi_1(\ ), \ldots, \varphi_m(\ )\}$ функциональных символов.

Алфавиту $\mathcal{E}$, таким образом, соответствует однозначно множество функций $\bar{\mathcal{E}}=\{\varphi_1(\ ), \ldots, \varphi_m(\ )\}$. Нек-рые вершины графа выделены и объявлены выходами С. из ф. э. Вершина с входящими в нее (занумерованными) ребрами, к-рой приписан символ φ_i из $\mathcal{E}$ (местность его равна числу входящих ребер), наз. функциональным элементом E_{φ_i}. Другие концы инцидентных этой вершине входящих ребер суть входы функционального элемента E_{φ_i}, а сама вершина есть выход функционального элемента E_{φ_i}. Если на входы функционального элемента E_{φ_i} подать набор $\tilde{\sigma}$ значений переменных из X, то на выходе E_{φ_i} (т. е. в вершине φ_i) реализуется значение функции φ_i на этом наборе $\tilde{\sigma}$; таким образом, функциональный элемент E_{φ_i} реализует функцию φ_i. Всякая С. из ф. э. также реализует на своих выходах нек-рые функции. Набор функциональных элементов, соответствующий алфавиту $\mathcal{E}$, из к-рого строятся С. из ф. э., наз. базисом $B_{\mathcal{E}}$. Множество всех С. из ф. э., построенных при помощи функциональных элементов из $B_{\mathcal{E}}$, наз. множеством С. из ф. э. в базисе $B_{\mathcal{E}}$. Если $\bar{\mathcal{E}}$ полно, то $B_{\mathcal{E}}$ полон, и С. из ф. э. в $B_{\mathcal{E}}$ можно реализовать любую функцию. Далее предполагается, что переменные из X принимают значения 0, 1, и $\bar{\mathcal{E}}$ — подмножество функций алгебры логики. Именно такого типа базисы изучены наиболее полно.



В качестве примера С. из ф. э. может служить изображенная на рис. С. из ф. э. в базисе $\{\&, \vee, {}^-\}$. Ее входы — вершины x_1 и x_2, выход — вершина $E_\&$ (a_4), на нем реализуется функция

$$(x_1 \vee x_2)\,\&\,\overline{x_1\,\&\,x_2}, \quad \text{т. е.} \quad x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2.$$

Эквивалентное определение С. из ф. э. можно дать также в терминах равенств. Для рассмотренного на рис. примера такая система может быть записана следующим образом:

$$a_1 = x_1 \vee x_2, \quad a_2 = x_1\,\&\,x_2,$$

$$a_3 = \bar{a}_2, \quad a_4 = a_1\,\&\,a_3 = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2.$$

Обычно функциональным элементам из $B_{\mathcal{E}}$ приписываются неотрицательные числа, именуемые **весами** (или **сложностями**) **функциональных элементов** базиса. Под **сложностью** С. из ф. э. понимается сумма весов всех функциональных элементов, присутствующих в этой С. из ф. э. Минимальная сложность, достаточная для реализации произвольной функции алгебры логики от n переменных С. из ф. э. в произвольном конечном базисе (с ненулевыми весами), асимптотически равна $\rho 2^n/n$ (см. [1]), где ρ — константа для рассматриваемого базиса (см. *Синтеза задачи*). Минимальная сложность, достаточная для реализации С. из ф. э. системы F функций, зависящих от одних и тех же переменных, асимптотически равна

$$\rho \frac{\log_2 |F|}{\log_2 \log_2 |F|},$$

где $|F|$ — число функций F, а ρ — константа, вычисляемая по базису.

По числу входов, к-рые могут быть присоединены к выходу произвольного функционального элемента, из класса С. из ф. э. выделяются т. н. С. из ф. э. **без ветвления выходов**, или **формулы** (к выходу каждого функционального элемента такой С. из ф. э. может быть присоединен только один вход). В отличие от формул, С. из ф. э. общего вида можно рассматривать как схемы вычислений с запоминанием промежуточных результатов. Для класса формул минимальная сложность, необходимая для реализации произвольной функции алгебры логики от n переменных формулой в произвольном конечном базисе (с ненулевыми весами), асимптотически равна $\rho 2^n/\log n$, где ρ — константа, зависящая от базиса (ср. с контактными π-схемами, см. *Контактная схема*). Для базисов, содержащих элементы с нулевыми весами, сложности С. из ф. э. ведут себя иначе (см., напр., [5]).

Кроме того, интерес представляет задача о синтезе схем в бесконечных базисах. Наиболее полно исследован случай, когда элементы базиса реализуют пороговые функции. Функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ наз. **пороговой**, если существуют действительные числа $w_1, \ldots, w_n, h$ такие, что

$$w_1 x_1 + \ldots + w_n x_n \geqslant h \qquad (*)$$

тогда и только тогда, когда $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Функциональный элемент, реализующий пороговую функцию, наз. **пороговым элементом**. С. из ф. э. в базисе из пороговых элементов наз. **схемами из пороговых элементов**. Обычно рассматриваются два типа базисов из пороговых элементов: 1) веса пороговых элементов равны единице, 2) вес порогового элемента равен сумме модулей всех коэффициентов w_i (при условии, что пороговые функции задаются целочисленным неравенством (*)). Для каждого из этих базисов получены асимптотические оценки сложности схем из пороговых элементов: 1) $2(2^n/n)^{1/2}$, 2) $2^n/n$.

Путь между входом и выходом С. из ф. э. наз. **цепью**. Число вершин цепи, отличных от входа, наз. **длиной цепи**. Максимальная длина цепи в С. из ф. э. наз. **глубиной** С. из ф. э. Минимальная глубина С. из ф. э. (и формулы), достаточная для реализации произвольной функции алгебры логики от n переменных в базисе $\{\&, \vee, {}^-\}$, равна

$$n - \log_2 \log_2 n + O(1).$$

Кроме весов, функциональным элементам базиса могут быть приписаны неотрицательные числа, именуемые **задержками**. Под **задержкой цепи** понимается сумма задержек присутствующих в ней функциональных элементов. Под **задержкой С. из ф. э.** понимается максимальная задержка цепей этой

С. из ф. э. Понятия задержки (при единичных задержках базиса) и глубины С. из ф. э., вообще говоря, не совпадают (см. [9]).

В качестве примера других определений сложности С. из ф. э. можно упомянуть мощность С. из ф. э.: **мощностью С. из ф. э. на наборе** $\tilde{\sigma}$ наз. число ее функциональных элементов, выходы к-рых находятся в состоянии 1 при подаче на входы S набора $\tilde{\sigma}$. **Мощность С. из ф. э.** S — максимум ее мощностей на множестве всех наборов. Минимальная мощность, достаточная для реализации произвольной функции алгебры логики от n переменных С. из ф. э. в произвольном конечном базисе, по порядку не меньше n и не больше $2^n/n$.

Лит.: [1] Лупанов О. Б., «Изв. вузов. Радиофизика», 1958, т. 1, № 1, с. 120—40; [2] его же, «Проблемы кибернетики», 1965, в. 14, с. 31—110; [3] его же, там же, 1960, в. 3, с. 61—80; 1962, в. 7, с. 61—114; [4] Нечипорук Э. И., там же, 1962, в. 8, с. 123—60; [5] Лупанов О. Б., там же, 1973, в. 26, с. 109—40; [6] Захарова Е. Ю., там же, 1963, в. 9, с. 317—19; [7] Гашков С. Б., там же, 1978, в. 34, с. 265—68; [8] Храпченко В. М., там же, 1979, в. 35, с. 141—68; [9] Лупанов О. Б., там же, 1970, в. 23, с. 43—81; [10] Вайнцвайг М. Н., «Докл. АН СССР», 1961, т. 139, № 2, с. 320—23; [11] Касим-заде О. М., «Проблемы кибернетики», 1981, в. 38, с. 117—79; 1978, в. 33, с. 215—20.

Н. А. Карпова.

СХЕМНАЯ ВЯЗКОСТЬ — понятие, характеризующее диссипативность разностных схем (см. [1]). С. в. показывает, какие дополнительные диссипативные свойства появляются при *аппроксимации дифференциального уравнения разностным* (см. [2], [3]). Наряду с термином «С. в.» употребляют термин «**аппроксимационная вязкость**» (см. [4], [5]). С. в. является *диссипативной функцией* (см. [6]). Структура С. в. определяется видом коэффициентов при четных производных минимального порядка по пространственным переменным от вычисляемых функций при разложении разностных функций в ряд Тейлора по сеточным параметрам (см. [7]—[9]). Коэффициенты при третьих производных по пространственным переменным представляют собой коэффициенты (матрицу) схемной дисперсии (см. [10]). Дифференциальное представление включает в себя все члены разложения (бесконечное число) разностного оператора в ряд Тейлора по сеточным параметрам (см. [9], [10]). Дифференциальное приближение включает в себя часть членов разложения; первое дифференциальное приближение состоит из исходного дифференциального оператора и первого ненулевого члена разложения.

В зависимости от формы исходной системы дифференциальных уравнений и типа базисных функций разложения реализуются различные виды матриц С. в. и дисперсионных матриц. При рассмотрении *газовой динамики численных методов* различают 6 видов матриц С. в. (см. [10]).

Условие неотрицательности матрицы С. в. параболич. формы первого дифференциального приближения рассматривается как условие устойчивости разностной схемы; в этом случае реализуется *корректная задача* (см. [8]). Путем рассмотрения уравнения со С. в. можно с помощью аппарата дифференциальных приближений производить групповую классификацию разностных схем (см. [9]).

С. в. для каждой детерминированной разностной схемы определена однозначно. Для возможности эффективного управления С. в. целесообразно рассматривать классы разностных схем. Так, введя многопараметрич. класс разностных схем расщепления (см. [10]), можно путем варьирования числовых значений параметров изменять величины членов С. в., придавая С. в. вид Навье-Стоксовской, турбулентной и др. вязкости. С. в., зависящую от параметров, можно оптимизировать (см. [11]), требуя выполнения различных условий: математических, программистских, архитектурных.

При выполнении условий неотрицательности С. в. и минимальности С. в. по параметрам из многопараметрич. класса разностных схем расщепления выделяется семейство оптимальных схем (минимально диссипативных и устойчивых), к-рому принадлежит разностная схема *крупных частиц метода* (см. [12]).

При исследовании С. в. целесообразно выявить внутреннюю структуру матрицы С. в. (см. [11]), напр.: рассматривать матрицу С. в. расщепления, нестационарную матрицу С. в., матрицу С. в. переноса, архитектурную матрицу С. в. и др.

При решении краевой задачи вводится понятие С. в. и дифференциального приближения или представления разностных краевых условий (см. [10]).

С помощью рассмотрения С. в. исследуется устойчивость нелинейных разностных схем как во внутренних точках расчетной области, так и на границах и в их окрестности.

Лит.: [1] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Самарский А. А., Попов Ю. П., Разностные методы решения задач газовой динамики, 2 изд., М., 1980; [4] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977; [5] Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики, М., 1979; [6] Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М., Диссипативные свойства разностных схем, М., 1981; [7] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, 2 изд., М., 1978; [8] Яненко Н. Н., Шокин Ю. И., «Докл. АН СССР», 1968, т. 182, № 2, с. 280—81; [9] *Шокин Ю. И.*, Метод дифференциального приближения, Новосиб., 1979; [10] Давыдов Ю. М., Дифференциальные приближения и представления разностных схем, М., 1981; [11] его же, «Докл. АН СССР», 1979, т. 245, № 4, с. 812—16; [12] Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М., Метод крупных частиц в газовой динамике, М., 1982.

Ю. М. Давыдов.

СХЕМЫ СЕРИЙ случайных величин — см. *Серий схема.*

СХОДИМОСТИ МНОЖИТЕЛИ для функционального ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ — числа λ_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, такие, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n u_n(x)$ сходится почти всюду на измеримом множестве X, где $u_n(x)$ — числовые функции, определенные на X.

Напр., для тригонометрич. ряда Фурье функции из L_1 С. м. являются числа $\lambda_n = \frac{1}{\ln n}$, $n=2, 3, \ldots$ (λ_0 и λ_1 можно выбрать произвольно), то есть если $f \in L_1[-\pi, \pi]$ и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

то ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{\ln n}$$

сходится почти всюду на всей числовой прямой. Если же $f \in L_p[-\pi, \pi]$, $p>1$, то ее тригонометрич. ряд Фурье уже сам сходится почти всюду (см. *Карлесона теорема*).

Л. Д. Кудрявцев.

СХОДИМОСТИ СКОРОСТЬ — характеристика итерационного метода, позволяющая судить о зависимости погрешности метода на n-й итерации от числа n (см. [1]—[3]). Напр., если $\|z^n\| \leqslant q^n \|z^0\|$, где $\|z^n\|$ — норма погрешности на n-й итерации, а $q<1$, то говорят, что метод сходится со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем q, а величину $-\ln q$ наз. асимптотической скоростью сходимости.

При наличии неравенств типа $\|z^{n+1}\| \leqslant C\|z^n\|^k$ говорят о степенной с порядком k скорости сходимости (напр., о квадратичной скорости сходимости итерационного метода Ньютона — Канторовича).

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [3] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

Е. Г. Дьяконов.

СХОДИМОСТИ УСКОРЕНИЕ (для итерационного метода) — построение по рассматриваемому итерационному методу нек-рой его модификации, обладающей большей *сходимости скоростью*. Применяемые способы ускорения (процессы ускорения) довольно разнообразны (см. [1]—[4]) и зависят как от решаемой задачи, так и от типа итерационного метода. В тех случаях, когда итерационный метод может рассматриваться как частный случай нек-рого класса итерационных методов, содержащих свободные итерационные параметры, С. у. может быть сведено к задаче оптимального выбора этих параметров. Задача оптимизации может ставиться в различных формах, приводя, напр., к переходу от метода простой итерации

$$u^{n+1} = u^n - \tau (Lu^n - f) \qquad (1)$$

для решения системы линейных алгебраич. уравнений

$$Lu = f, \quad L = L^* > 0 \qquad (2)$$

или к методу Ричардсона с чебышевскими параметрами, или к методу сопряженных градиентов. Скорость сходимости подобных классич. итерационных методов зависит от числа обусловленности $\nu(L)$ матрицы L и может быть довольно медленной при больших $\nu(L)$. В таких ситуациях, и в особенности для решения систем сеточных уравнений, часто используются модификации этих методов, определяемые тем, что они применяются не для (2), а для эквивалентной ей системы

$$B^{-1}Lu = B^{-1}f,$$

где $B = B^* > 0$ — специально подобранный оператор (см. [2]—[4]).

Оператор $B^{-1}L$ является самосопряженным и положительным оператором в нек-ром евклидовом пространстве и скорость сходимости получающихся модификаций зависит от $\nu(B^{-1}L)$. Подобные же модификации применяются и для более общих задач, включая нелинейные (см. *Нелинейное уравнение*; численные методы решения). При их реализации важно уметь эффективно решать системы $Bv = g$, т. к., напр., модификация (1) сводится к соотношению

$$u^{n+1} = u^n - \tau B^{-1}(Lu^n - f) \qquad (3)$$

(см. *Минимизация вычислительной работы*).

Одним из традиционных и общих приемов С. у. для методов (1) является δ^2-процесс. Он же вместе с целым рядом других способов ускорения (см. [1]) применяется и в итерационных методах для частичной задачи на собственные значения.

При решении нелинейных задач С. у. часто достигается за счет специального выбора начального приближения на основе методов продолжения по параметру. Для этих же задач С. у. иногда осуществляется и на основе использования итерационных методов более высокого порядка (метод Ньютона — Канторовича и др.).

Различные приемы С. у. применяются и в вероятностных итерационных методах типа метода Монте-Карло (см. [2]).

Лит.: [1] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.—Л., 1963; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [4] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

Е. Г. Дьяконов.

СХОДИМОСТЬ — одно из основных понятий математич. анализа, означающее, что нек-рый математич. объект имеет *предел*. В этом смысле говорят о С. последовательности каких-либо элементов, С. ряда, С. бесконечного произведения, С. цепной дроби, С. интеграла *и т. п.* Понятие С. возникает, напр., при изучении математич. объектов с помощью приближения их в каком-то смысле более простыми. Так, для вычисления площади круга используется последовательность площадей пра-

вильных многоугольников, вписанных в этот круг; для приближенных вычислений интегралов от функций применяются аппроксимации их кусочно линейными функциями или, более общо, *сплайнами* и т. п. Можно сказать, что математич. анализ начинается с того момента, когда в множестве тех или иных элементов введено понятие С.

I. Сходимость последовательностей. В одном и том же множестве элементов можно вводить разные понятия С. его элементов в зависимости от изучаемого вопроса. Большую роль использование понятия С. играет при решении всевозможных уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных и т. п.), в частности при нахождении их численных приближенных решений. Например, с помощью *последовательных приближений метода* можно получить последовательность функций, сходящихся к соответствующему решению данного обыкновенного дифференциального уравнения, и тем самым одновременно доказать при определенных условиях существование решения и дать метод, позволяющий вычислить это решение с нужной точностью. Как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений с частными производными существует теория различных сходящихся разностных методов их численного решения, удобных для их использования на современных вычислительных машинах.

Если в нек-ром множестве X введено понятие С. последовательностей его элементов, т. е. в совокупности всех указанных последовательностей выделен некрый класс, каждая последовательность к-рого названа сходящейся, и всякой сходящейся последовательности поставлен в соответствие нек-рый элемент из множества X, наз. ее пределом, то само множество X наз. пространством со сходимостью.

Обычно от понятия С. последовательностей требуется, чтобы оно обладало следующими свойствами:

1) каждая последовательность элементов множества X может иметь не более одного предела;

2) всякая стационарная последовательность $\{x, x, \ldots, x, \ldots\}$, $x \in X$, является сходящейся и ее пределом является элемент x;

3) всякая подпоследовательность сходящейся последовательности также является сходящейся и имеет тот же предел, что и вся последовательность.

При выполнении этих условий пространство X наз. часто пространством со сходимостью по Фреше. Примером такого пространства является всякое хаусдорфово топологич. пространство, а следовательно, любое метрич. пространство, в частности счетно-нормированное, а потому и просто нормированное (но отнюдь не всякое полунормированное) пространство. Для того чтобы последовательность сходилась в полном метрич. пространстве, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Примером неметризуемого пространства со сходимостью по Фреше является пространство всех действительных функций, определенных на числовой оси $\mathbb{R}$, для к-рых С. последовательности $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, означает ее С. при каждом фиксированном $x \in X$.

Если в пространстве со сходимостью по Фреше X определить для каждого его подмножества $A \subset X$ замыкание $\bar{A}$ как совокупность всех точек пространства X, к-рые являются пределом последовательностей точек, принадлежащих множеству A, то пространство X может не оказаться топологич. пространством, т. к. не обязательно замыкание $\bar{\bar{A}}$ замыкания $\bar{A}$ всякого множества A при данном определении будет совпадать с $\bar{A}$.

Если в одном и том же множестве введены два определения С. и всякая последовательность, сходящаяся в смысле первого определения, сходится и в смысле вто-

рого, то говорят, что вторая сходимость сильнее первой. Во всяком пространстве со С. X можно ввести более сильную С. так, что порожденная ей операция замыкания превратит уже X в топологич. пространство, короче говоря, каждое пространство со С. может быть вложено в топологич. пространство, состоящее из тех же точек.

Во всяком топологич. пространстве определено понятие С. последовательностей его точек, но этого понятия недостаточно, вообще говоря, для того чтобы описать замыкание любого множества в этом пространстве, т. е. дать определение точек прикосновения множества, и, следовательно, недостаточно, чтобы полностью описать топологию данного пространства. Чтобы это стало возможно, вводится понятие сходящейся обобщенной последовательности.

Частично упорядоченное множество $\mathfrak{A}=(\mathfrak{A}, \geqslant)$ наз. *направленным множеством*, если за любыми двумя его элементами имеется следующий за ними. Отображение $f: \mathfrak{A}\to X$ направленного множества $\mathfrak{A}$ в нек-рое множество X наз. обобщенной последовательностью или *направленностью* в X. Обобщенная последовательность $f: \mathfrak{A}\to X$ в топологич. пространстве X наз. сходящейся к точке x_0 из X, если для каждой окрестности U точки x_0 существует такое $\alpha_0\in\mathfrak{A}$, что для всех $\alpha\geqslant\alpha_0$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, выполняется включение $f(\alpha)\in U$. В этом случае говорят, что предел обобщенной последовательности $f: \mathfrak{A}\to X$ существует и равен x_0, при этом пишут $\lim f(\alpha)=x_0$.

В этих терминах замыкание множества, лежащего в топологич. пространстве X, описывается следующим образом: для того чтобы точка x принадлежала замыканию $\bar{A}$ множества $A\subset X$, необходимо и достаточно, чтобы нек-рая обобщенная последовательность точек из X сходилась к x; а для того чтобы топологич. пространство было хаусдорфовым, необходимо и достаточно, чтобы каждая обобщенная последовательность его точек имела не более одного предела.

В терминах С. обобщенных последовательностей можно сформулировать и критерий непрерывности отображения F топологич. пространства X в топологич. пространство Y: для непрерывности отображения F в точке $x_0\in X$ необходимо и достаточно, чтобы для каждой обобщенной последовательности $f: \mathfrak{A}\to X$ такой, что $\lim\limits_{\mathfrak{A}} f(\alpha)=x_0$, выполнялось бы условие $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F(f(\alpha))=F(x_0)$.

II. Сходимость числовых последовательностей и рядов. Простейшим примером, иллюстрирующим понятие С., являются сходящиеся числовые последовательности, т. е. последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$, имеющие конечные пределы, и сходящиеся числовые ряды, т. е. ряды, последовательности частичных сумм к-рых сходятся. Сходящиеся числовые последовательности и ряды часто применяются для получения различных оценок, а в численных методах — для приближенных вычислений значений функций и различных постоянных. В подобных задачах важно, с какой «скоростью» сходится рассматриваемая последовательность к своему пределу. Напр., число π можно представить в виде суммы рядов следующими способами:

$$\pi=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

$$\pi=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left[\frac{4}{5^{2n-1}}-\frac{1}{239^{2n-1}}\right].$$

Ясно, что для приближенного вычисления числа π с достаточно большой точностью целесообразно воспользоваться второй формулой (формулой Мэчина), т. к. для одной и той же заданной степени точности вычислений при использовании второй формулы будет возможным ограничиться меньшим числом членов ряда.

Для описания сравнения С. двух рядов вводится следующее определение. Пусть даны два сходящихся ряда с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geqq 0, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n \geqq 0, \tag{2}$$

и пусть $\alpha_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$, $\beta_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{n+k}$ — их остатки порядка $n = 1, 2, \ldots$. Ряд (1) наз. сходящимся быстрее ряда (2), или, что то же самое, ряд (2) наз. сходящимся медленнее ряда (1), если $\alpha_n = o(\beta_n)$ при $n \to \infty$, т. е. если существует такая бесконечно малая последовательность $\{\varepsilon_n\}$, что $\alpha_n = \varepsilon_n \beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Если же ряды (1) и (2) расходятся и $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ — их частичные суммы порядка $n = 1, 2, \ldots$, то ряд (1) наз. расходящимся быстрее ряда (2), или ряд (2) расходящимся медленнее ряда (1), если $\sigma_n = o(s_n)$ при $n \to \infty$.

Для каждого сходящегося ряда с неотрицательными членами существует ряд также с неотрицательными членами, к-рый медленнее сходится, а для всякого расходящегося — к-рый медленнее расходится. Существуют методы, позволяющие преобразовать данный сходящийся ряд в быстрее сходящийся без изменения его суммы. Для этого применяется, напр., *Абеля преобразование*.

Наряду с обычным, указанным выше понятием суммы ряда, имеются и другие более общие определения его суммы, базирующиеся на различных методах суммирования рядов, основанных на построении по определенным правилам из членов ряда вместо последовательностей частичных сумм других последовательностей, к-рые могут оказаться сходящимися в том случае, когда последовательность частичных сумм расходится. Пределы построенных последовательностей и наз. обобщенными суммами ряда.

Аналогично случаю рядов вводится понятие более быстрой С. и расходимости для несобственных интегралов, причем одним из самых распространенных методов убыстрения С. (расходимости) интегралов является метод интегрирования по частям. Имеются и различные методы усреднения несобственных интегралов, аналогичные методам суммирования рядов и позволяющие для нек-рых расходящихся интегралов определить обобщенную С.

III. Сходимость функциональных рядов и последовательностей. В случае последовательностей функций

$$f_n : X \longrightarrow Y, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

при соответствующих предположениях о множествах X и Y существуют различные понятия С., хорошо иллюстрирующие многообразие конкретных реализаций этого понятия. Если Y — топологич. пространство и последовательность (3) сходится при каждом фиксированном $x \in X$, то она наз. (поточечно) сходящейся на множестве X. Если Y — равномерное топологич. пространство (в частности, метрич. пространство или топологич. группа), то можно ввести понятие равномерно сходящейся последовательности (см. *Равномерная сходимость*).

Пусть $X = (X, S, \mu)$ является пространством с мерой μ (т. е. во множестве X выделена σ-*алгебра* $\{S\}$ его подмножеств, на которых задана мера μ), $Y = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ — расширенное множество действительных чисел $\mathbb{R}$, а функции

$$f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

почти всюду конечны и измеримы.

Последовательность (4) наз. сходящейся почти всюду к функции $f: X \to \bar{\mathbb{R}}$, если существует такое множество $X_0 \subset X$ меры нуль, что сужения функций последовательности (4) на множестве $X \setminus X_0$ сходится на этом множестве к сужению на нем функции f. Если последовательность (4) почти всюду сходится к функции f, то эта функция также почти всюду конечна и измерима. Связь между С. последовательности почти всюду и равномерной С. устанавливается *Егорова теоремой*.

Последовательность (4) наз. сходящейся по мере на множестве X к измеримой функции $f: X \to \bar{\mathbb{R}}$, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$\lim_{n \to \infty} \mu \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} = 0.$$

Если последовательность (4) сходится почти всюду к функции f, то она сходится к этой функции и по мере, а если последовательность (4) сходится к функции f по мере, то в последовательности (4) существует подпоследовательность, к-рая сходится к функции f почти всюду.

Пусть для функции $f: X \to \bar{\mathbb{R}}$

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < +\infty, \tag{5}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \operatorname{vrai} |f(x)| \tag{6}$$

и пусть $L_p(X)$ — пространство функций f, для к-рых

$$\|f\|_p < +\infty, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{7}$$

Эти пространства наз. обычно пространствами Лебега. На классах эквивалентных относительно меры μ функций, для к-рых выполняется условие (7), функционал $\|\cdot\|_p$ является нормой (см. *Сходимость по норме*).

Если последовательность (4) сходится по норме (6) к функции, то она сходится к этой функции почти всюду. Если последовательность $f_n \in L_p(X)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится по норме $\|\cdot\|_p$, $1 \leqslant p < +\infty$, к нек-рой функции $f: X \to \bar{\mathbb{R}}$, то $f \in L_p(X)$ и данная последовательность наз. сходящейся к f в пространстве $L_p(X)$. С. по норме $\|\cdot\|_p$, $1 \leqslant p < +\infty$, наз. также сильной сходимостью в пространстве $L_p(X)$, или, при $1 \leqslant p < +\infty$, сходимостью в среднем порядка p, в частности, при $p = 1$ — сходимостью в среднем, а при $p = 2$ — сходимостью в смысле среднего квадратичного. Примером последовательностей функций, сходящихся в смысле среднего квадратичного, являются последовательности частичных сумм Фурье рядов функций, принадлежащих пространству $L_2[-\pi, \pi]$.

Если последовательность (4) сходится в $L_p(X)$, $1 \leqslant p < +\infty$, к функции f, то она сходится к этой функции на множестве X и по мере, а следовательно, из последовательности (4) можно выделить подпоследовательность, к-рая будет сходиться к функции f почти всюду на X. Если $1 \leqslant p \leqslant q < +\infty$, $\mu X < +\infty$ и последовательность (4) сходится в пространстве $L_q(X)$, то она сходится и в пространстве $L_p(X)$.

Последовательность (4) функций $f_n \in L_p(X)$, $1 < p < +\infty$ наз. слабо сходящейся в пространстве $L_p(X)$ к функции $f \in L_p(X)$, если для любой функции $g \in L_q(X)$, $1/p + 1/q = 1$, имеет место

$$\lim_{n \to \infty} \int_X [f_n(x) - f(x)]\, g(x)\, dx = 0.$$

Если последовательность $f_n \in L_p(X)$, $n = 1, 2, \ldots$, сильно сходится в пространстве $L_p(X)$, $1 < p < +\infty$, то она и слабо сходится к той же функции, и в пространстве $L_p(X)$ существуют слабо сходящиеся последователь-

ности, не сходящиеся сильно. Напр., последовательность функций $\sin nx$, $n=1, 2, \ldots$, слабо сходится к нулю в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, но не сходится сильно. Действительно, для любой функции $g \in L_2[-\pi, \pi]$ интегралы

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\,dx$$

являются коэффициентами Фурье функции g по системе $\{\sin nx\}$ и потому стремятся к нулю при $n\to\infty$, однако $\|\sin nx\|_2=\sqrt{\pi}$, $n=1, 2, \ldots$

Пределы последовательностей функций, сходящихся почти всюду, по мере, в смысле сильной или слабой С. в пространстве $L_p(X)$, в случае полной меры μ определяются однозначно с точностью до эквивалентных относительно меры μ функций.

Обобщениями пространства Лебега $L_p(X)$ являются *Никольского пространства*, *Орлича пространства*, *Соболева пространства* и ряд др.

Понятие сильной и слабой С. обобщается на более общие пространства, в частности на линейные нормированные пространства.

Другого типа понятия С. последовательности функций (являющиеся частным случаем С. в *счетнонормированных пространствах*) встречаются в теории обобщенных функций. Напр., пусть D является пространством основных функций, состоящим из бесконечно дифференцируемых финитных функций $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Последовательность $f_n\in D$, $n=1, 2, \ldots$, наз. сходящейся к f в пространстве D, если существует такой отрезок $[a, b]$, что носители всех функций f_n, $n=1, 2, \ldots$, и f содержатся в нем, а последовательности $\{f_n^{(k)}\}$ самих функций f_n и всех их производных равномерно на $[a, b]$ сходятся соответственно к $f^{(k)}$, $k=0, 1, \ldots$ При изучении преобразования Фурье обобщенных функций рассматриваются другие пространства основных функций со С.

Перечисленные отдельные виды С. последовательностей функций приспособлены к изучению различных вопросов математич. анализа. Так, понятие равномерной сходимости дает возможность сформулировать условия, когда при предельном переходе сохраняется непрерывность: напр., если X — топологич. пространство, Y — метрич. пространство, и члены последовательности (3) непрерывны на X и последовательность (3) равномерно сходится на X, то предельная функция также непрерывна на пространстве X. В терминах понятия С. почти всюду или С. в среднем порядка p можно сформулировать условия перехода к пределу под знаком интеграла. Если X — пространство с мерой μ, $Y=\overline{\mathbb{R}}$, последовательность $f_n\in L_1(X)$, $n=1, 2, \ldots$, сходится почти всюду на X и существует такая функция $F\in L_1(X)$, что для почти всех $x\in X$ и всех $n=1, 2, \ldots$, выполняется неравенство $|f_n(x)|\leqslant F(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,dx=\int_X\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]dx. \qquad (8)$$

Если $\mu X<+\infty$, $f_n\in L_p(X)$, $n=1, 2, \ldots$, $1<p<+\infty$ и последовательность $\{f_n\}$ сходится слабо (сильно) в пространстве $L_p(X)$, то справедлива формула (8).

В теории вероятностей для последовательностей случайных величин употребляются понятия *сходимости почти наверное* (С. с вероятностью единица), соответствующее понятию С. почти всюду, *сходимости по вероятности*, соответствующее понятию С. по мере, *сходимости по распределению*.

Обобщением понятия С. последовательности функций является С. семейства функций по параметру, к-рый принадлежит нек-рому топологич. пространству.

Математики древности (Евклид, Архимед) по существу употребляли понятие С., используя ряды для на-

хождения площадей и объемов. Доказательством С. рядов им служили рассуждения по схеме исчерпывания метода. Термин «С.» в применении к рядам был введен в 1668 Дж. Грегори (J. Gregory) при исследовании нек-рых способов вычисления площади круга и гиперболич. сектора. Математики 17 в. обычно имели достаточно ясное представление о С. употребляемых ими рядов, хотя и не могли проводить строгих с современной точки зрения доказательств С. В 18 в. широко распространилось в математич. анализе употребление заведомо расходящихся рядов [в частности, их широко применял Л. Эйлер (L. Euler). Это привело впоследствии, с одной стороны, ко многим недоразумениям и ошибкам, устраненным лишь с развитием четкой теории С., а с другой — предвосхитило современную теорию суммирования расходящихся рядов. Строгие методы исследования С. рядов были разработаны в 19 в. О. Коши (A. Cauchy), Н. Абелем (N. Abel), Б. Больцано (B. Bolzano), К. Вейерштрассом (K. Weierstrass) и др. Понятие равномерной С. сформировалось в работах Н. Абеля (1826), Ф. Зайделя (Ph. Seidel, 1847—48), Дж. Стокса (G. Stokes, 1847—48), О. Коши (1853) и стало систематически применяться в лекциях по математич. анализу К. Вейерштрассом в кон. 50-х гг. прошлого столетия. Дальнейшие расширения понятия С. были связаны с развитием теории функций, функционального анализа и топологии.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Келли Дж. Л., Общая топология, 2 изд., М., 1981; [4] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1, 3 изд., М., 1971, ч. 2, 2 изд., М., 1980; [5] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1981; [6] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев.

СХОДИМОСТЬ В СРЕДНЕМ ПОРЯДКА p — см. *Сходимость.*

СХОДИМОСТЬ ДИСКРЕТНАЯ — сходимость сеточных функций и операторов в соответствующих пространствах. Пусть E, F, E_n, F_n ($n \in N = \{1, 2, 3, \ldots\}$) — банаховы пространства, а $P = \{p_n\}$ и $Q = \{q_n\}$ — системы линейных операторов (связывающих отображений) $p_n : E \to E_n$, $q_n : F \to F_n$ со свойством

$$\| p_n x \| \longrightarrow \| x \|, \quad \| q_n y \| \longrightarrow \| y \| \ (n \in N) \ \forall x \in E, \quad y \in F.$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{A} & F \\ {\scriptstyle p_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_n} \\ E_n & \xrightarrow{A_n} & F_n \end{array}$$

Последовательность $\{x_n\}_{n \in N' \subset N}$ с $x_n \in E_n$:

а) дискретно сходится (или P-сходится) к $x \in E$, если $\|x_n - p_n x\| \to 0$ ($n \in N'$); б) дискретно компактна (или P-компактна), если для любого бесконечного $N'' \subset N'$ существует бесконечное $N''' \subset N''$ такое, что подпоследовательность $\{x_n\}_{n \in N'''}$ дискретно сходится.

Последовательность $\{A_n\}_{n \in N}$ операторов $A_n : E_n \to F_n$:

а) дискретно сходится (или PQ-сходится) к оператору $A : E \to F$, если для любой P-сходящейся последовательности $\{x_n\}$ имеет место соотношение

$$x_n \xrightarrow{P} x \ (n \in N) \Rightarrow A_n x_n \xrightarrow{Q} Ax \ (n \in N); \qquad (1)$$

б) компактно сходится к A, если кроме (1) выполняется условие: $x_n \in E_n$, $\|x_n\| \leqslant \mathrm{const}$ $(n \in N) \Rightarrow$ $\Rightarrow \{A_n x_n\}$ Q-компактна;

в) регулярно (или собственно) сходится к A, если кроме (1) выполняется условие: $x_n \in E_n$, $\|x_n\| \leqslant \mathrm{const}$, $\{A_n x_n\}$ Q-компактна $\Rightarrow \{x_n\}$ P-компактна;

г) устойчиво сходится к A, если кроме (1) выполняется условие: $\exists A_n^{-1} \in L(F_n, E_n)$, $\|A_n^{-1}\| \leqslant \mathrm{const}$ $(n \geqslant n_0)$.

Пусть A и A_n — линейные ограниченные операторы. Тогда $A_n \xrightarrow{PQ} A$ тогда и только тогда, когда $\|A_n\| \leqslant \mathrm{const}$ $(n \in N)$ и $\|A_n p_n x - q_n A x\| \to 0$ для каждого x из нек-рого плотного в E подмножества.

Для линейных ограниченных операторов A и A_n следующие условия равносильны: 1) $A_n \xrightarrow{PQ} A$ устойчиво, $AE = F$; 2) $A_n \xrightarrow{PQ} A$ регулярно, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, операторы A_n $(n \geqslant n_0)$ фредгольмовы с нулевым индексом; 3) $A_n \xrightarrow{PQ} A$ устойчиво и регулярно. Если выполнено одно из условий 1), 2) и 3), то существуют A^{-1} и (при достаточно больших n) A_n^{-1}, причем $A_n^{-1} \xrightarrow{QP} A^{-1}$ устойчиво и регулярно. Выполнение условий 1), 2), 3) можно трактовать как теорему сходимости для уравнений $Ax = y$ и $A_n x_n = y_n$: *если выполнено условие* 1), 2) или 3), то из $y_n \xrightarrow{Q} y$ следует сходимость

$$x_n = A_n^{-1} y_n \xrightarrow{P} A^{-1} y = x$$

с быстротой

$$c_1 \| A_n p_n x - y_n \|_{F_n} \leqslant \| x_n - p_n x \|_{E_n} \leqslant c_2 \| A_n p_n x - y_n \|_{F_n}.$$

При доказательстве сходимости приближенных методов чаще всего используются условия 1) и 2). В качестве E и F выбираются подходящие пространства функций, а в качестве p_n и q_n — операторы перехода от функций к их значениям на сетке.

Лит.: [1] Stummel F., «Math. Z», 1971, Bd 120, S. 231—64; [2] Вайникко Г. М., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 16, 1979, с. 5—53.

Г. М. Вайникко.

СХОДИМОСТЬ МЕР — понятие теории меры, задаваемое той или иной топологией в пространстве мер, определенных на нек-рой σ-алгебре $\mathfrak{B}$ подмножеств пространства X или, более общо, в пространстве $\mathfrak{M}(X, \mathfrak{B})$ зарядов, т. е. счетно аддитивных действительных или комплексных функций $\mu = \{\mu(A), A \in \mathfrak{B}\}$, определенных на множествах из $\mathfrak{B}$. Наиболее употребительны следующие топологии в подпространстве $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{M}(X, \mathfrak{B})$ пространства $\mathfrak{M}(X, \mathfrak{B})$, состоящем из ограниченных зарядов, т. е. таких, что $\sup |(\mu(A)| < \infty$, $A \in \mathfrak{B}$.

1) В пространстве $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$ вводится норма

$$\|\mu\| \equiv \mathrm{Var}\,\mu = \sup_{A \in \mathfrak{B}} (|\mu(A)| + |\mu(X \setminus A)|), \quad \mu \in \mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B}),$$

наз. вариацией заряда μ. Сходимость последовательности зарядов $\mu_n \to \mu$, $n \to \infty$ к заряду $\mu \in \mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$ в этой норме наз. сходимостью по вариации.

2) В пространстве $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$ рассматривается обычная слабая топология: сходимость последовательности зарядов $\mu_n \to \mu$, $n \to \infty$ этой топологии (слабая сходимость) означает, что для любого линейного непрерывного функционала на пространстве $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$, $F(\mu_n) \to F(\mu)$, $n \to \infty$. Эта сходимость равносильна тому, что последовательность зарядов ограничена: $\sup_n \|\mu_n\| < \infty$ и для любого множества $A \in \mathfrak{B}$ последовательность значений $\mu_n(A) \to \mu(A)$, $n \to \infty$. Слабая сходимость последовательности зарядов μ_n, $n = 1, 2, \ldots$ влечет сходимость интегралов $\int_X f(x) d\mu_n \to \int_X f(x) d\mu$, $n \to \infty$, для любой ограниченной измеримой относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$ функции f на X.

3) В случае, когда X — топологич. пространство, а $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(X)$ — его борелевская σ-алгебра в пространстве $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$, рассматривают топологию, также наз.

слабой (иногда узкой) топологией. Она определяется как самая слабая из топологий в $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$, относительно к-рой непрерывны все функционалы вида

$$F_f(\mu) = \int_X f(x)\, d\mu,$$

где f — произвольная ограниченная непрерывная функция на пространстве X. Эта топология слабее предыдущей топологии и сходимость последовательности зарядов $\mu_n \to \mu$, $n \to \infty$ относительно нее (с л а б а я или у з к а я с х о д и м о с т ь) равносильна сходимости значений $\mu_n(A) \to \mu(A)$, $n \to \infty$ для любого борелевского множества $A \in \mathfrak{B}(X)$, для к-рого $\mu(\partial A) = 0$, где $\partial A = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$ и чертой обозначена операция замыкания множества.

4) В случае, когда X — локально компактное топологич. пространство (а $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(X)$ — борелевская σ-алгебра) в пространстве $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$, рассматривают т. н. широкую топологию: сходимость последовательности зарядов $\mu_n \to \mu$, $n \to \infty$ (ш и р о к а я с х о д и м о с т ь) означает сходимость функционалов $F_f(\mu_n) \to F(\mu)$, $n \to \infty$, для любой непрерывной функции f с компактным носителем. Эта топология слабее, чем слабая топология в $\mathfrak{M}^b(X, \mathfrak{B})$. Аналогичная топология естественно определяется и в более широком пространстве $\mathfrak{M}^b_{\text{лок}}(X, \mathfrak{B})$ локально ограниченных зарядов μ, т. е. таких, что для любой точки $x \in X$ найдется такая ее окрестность U, что $\sup |\mu(A)| \subset \infty$, $A \subset U$, $A \in \mathfrak{B}(X)$.

Лит.: [1] Б у р б а к и Н., Интегрирование. Меры, интегрирование мер, пер. с франц., М., 1967; [2] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д ж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., т. 1, М., 1962; [3] Б и л л и н г с л е й П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977. *Р. А. Минлос.*

СХОДИМОСТЬ ПО ВАРИАЦИИ — см. *Распределений сходимость, Сходимость мер.*

СХОДИМОСТЬ ПО ВЕРОЯТНОСТИ — сходимость последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, заданных на нек-ром вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, к случайной величине X, определяемая следующим образом: $X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} X$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В математич. анализе этот вид сходимости называют с х о д и м о с т ь ю п о м е р е. Из С. по в. вытекает *сходимость по распределению.* *В. И. Битюцков.*

СХОДИМОСТЬ ПО МЕРЕ — см. *Сходимость.*

СХОДИМОСТЬ ПО НОРМЕ — сходимость последовательности $\{x_n\}$ в нормированном векторном пространстве X к x, определяемая следующим образом: $x_n \to x$, если

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Здесь $\|\cdot\|$ — норма в X. *М. И. Войцеховский.*

СХОДИМОСТЬ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ — сходимость последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, заданная на нек-ром вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, к случайной величине X, определяемая следующим образом: $X_n \xrightarrow{d} X$, если

$$\mathsf{E} f(X_n) \to \mathsf{E} f(X) \quad \text{при} \quad n \to \infty \qquad (*)$$

для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)$. Наименование этого вида сходимости связано с тем, что условие $(*)$ эквивалентно сходимости функций распределения $F_{X_n}(x)$ к функции распределения $F_X(x)$ в каждой точке x, где $F_X(x)$ непрерывна. *В. И. Битюцков.*

СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ — см. *Сходимость.*

СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ НАВЕРНОЕ, с х о д и м о с т ь с в е р о я т н о с т ь ю е д и н и ц а,— сходимость последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, заданных на нек-ром вероятностном пространстве

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, к случайной величине X, определяемая следующим образом: $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$ (или $X_n \to X$ Р-п. н.), если

$$\mathsf{P}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \to 0\} = 1, \quad \omega \in \Omega.$$

В математич. анализе этот вид сходимости называют сходимостью почти всюду. Из С. п. н. вытекает *сходимость по вероятности*. *В. И. Битюцков.*

СХОДИМОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ — см. *Распределений сходимость*.

СХОДИМОСТЬ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ ЕДИНИЦА — см. *Сходимость почти наверное*.

СЧЕТНОАДДИТИВНАЯ ФУНКЦИЯ множеств — аддитивная *функция множеств*, определенная на алгебре Σ подмножеств множества M такая, что

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

для любых непересекающихся множеств E из Σ. *М. И. Войцеховский.*

СЧЕТНОЕ МНОЖЕСТВО — множество, равномощное множеству натуральных чисел. Напр., множества рациональных чисел, алгебраических чисел. *М. И. Войцеховский.*

СЧЕТНОКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологич. пространство X такое, что из любого счетного открытого покрытия его можно выделить конечное подпокрытие. *М. И. Войцеховский.*

СЧЕТНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — нормальное пространство X, представимое в виде суммы $X = U_{i=1}^{\infty} X_i$ своих подпространств X_i размерности $\dim X_i \leqslant 0$. *М. И. Войцеховский.*

СЧЕТНОНОРМИРОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО — локально-выпуклое пространство X, топология к-рого задается с помощью счетной совокупности согласованных норм $\|*\|_1, \ldots, \|*\|_n, \ldots$, т. е. таких, что если последовательность $\{x_n\} \subset X$, фундаментальная по нормам $\|*\|_p$ и $\|*\|_q$, по одной из них сходится к нулю, то по второй также сходится к нулю. Последовательность норм $\{\|*\|_n\}$ можно заменить неубывающей, $\|*\|_p \leqslant \|*\|_q$ при $p < q$, порождающей ту же топологию с базой окрестностей нуля $U_{p,\varepsilon} = \{x \in X : \|x\|_p < \varepsilon\}$. С. п. метризуемо, и метрика может быть задана равенством

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n}.$$

Пример С. п.— пространство целых аналитических в единичном круге $|z| < 1$ функций с топологией равномерной сходимости на любом замкнутом подмножестве этого круга и совокупностью норм $\|x(z)\| = \max_{|z| \leqslant 1/n} |x(z)|$.

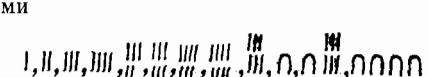
Лит.: [1] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958.

В. И. Соболев.

СЧИСЛЕНИЕ, нумерация,— совокупность приемов представления натуральных чисел. В любой системе счисления (с. с.) нек-рые символы (слова или знаки) служат для обозначения определенных чисел, наз. узловыми, остальные числа (алгоритмические) получаются в результате каких-либо операций из узловых чисел. С. с. различаются выбором узловых чисел и способами образования алгоритмических, а с появлением письменных обозначений числовых символов с. с. стали различаться характером числовых знаков и принципами их записи.

Напр., у древних вавилонян узловыми являлись числа 1, 10, 60; у маори (коренных жителей Новой Зеландии) узловыми являлись числа 1, 11, 11^2, 11^3. В римской с. с. узловыми являются числа 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, обозначаемые соответственно знаками I, V, X, L, C, D, M.

С. с., в к-рых алгоритмич. числа образуются сложением узловых, наз. а д д и т и в н ы м и. Так, в древнеегипетской (иероглифической) с. с. числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 19, 40 обозначались соответственно символами



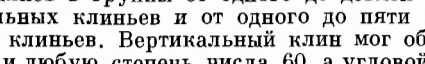
Те же числа в римской с. с. обозначаются следующим образом: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XIX, XL. В этой с. с. алгоритмич. числа получаются путем сложения и вычитания узловых. В числительных русского языка отчетливо выражен аддитивно-мультипликативный способ образования алгоритмич. чисел, напр. триста пятьдесят семь.

В нек-рых с. с., наз. а л ф а в и т н ы м и, числа обозначались теми же знаками, что и буквы. Так, древние греки числа от 1 до 9, а также все десятки и сотни обозначали при помощи последовательных букв алфавита, снабженных черточками. К примеру, числа 803, 833 и 83 записывались так:

$$\overline{\omega\gamma},\ \overline{\omega\lambda\gamma},\ \overline{\pi\gamma}.$$

Алфавитные изображения чисел употребляли славяне и многие другие народы.

С. с. наз. н е п о з и ц и о н н о й, если каждый числовой знак в записи любого числа в ней имеет одно и то же значение. Если же значение числового знака зависит от его расположения в записи числа, то система наз. п о з и ц и о н н о й. Римская с. с. — непозиционная. *Любое число в вавилонской с. с. записывалось* при помощи комбинации двух знаков: вертикального клина и углового клина (пример см. ниже). Эти знаки объединялись в группы от одного до девяти в случае вертикальных клиньев и от одного до пяти в случае угловых клиньев. Вертикальный клин мог обозначать единицу и любую степень числа 60, а угловой клин — 10 и произведение 10 на любую степень числа 60. Порядок следования разрядов чисел совпадал с ныне принятым. Так,



$$=1\cdot60^2+2\cdot600+1\cdot60+1\cdot10+6=4876$$

В связи с тем, что в вавилонской С. с. отсутствовал знак для пропуска разряда, соответствующий нашему нулю, запись числа не гарантировала однозначность

ее прочтения. Точный смысл записи обычно устанавливался из контекста рукописи. Поэтому описанную с. с. принято называть неабсолютно позиционной. Позднее в древнем Вавилоне стали употреблять специальный знак для пропуска разряда. Современная десятичная с. с.— позиционная.

Все известные позиционные с. с.— аддитивно-мультипликативные системы. Позиционный принцип записи чисел в таких системах оправдывается следующей теоремой элементарной теории чисел.

Пусть $q_0=1$ и $q_1, q_2, \ldots$ — последовательность отличных от единицы натуральных чисел. Тогда для любого натурального числа a можно найти одно и только одно натуральное число n, для к-рого уравнение

$$a_0+a_1q_1+a_2q_1q_2+\ldots+a_{n-1}q_1\ldots q_{n-1}=a \qquad (1)$$

имеет решение в целых числах $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ таких, что

$$0\leqslant a_0<q_1,\ \ldots,\ 0\leqslant a_{n-1}<q_{n-1},\ 0<a_{n-1}<q_n. \qquad (2)$$

При этом уравнению (1) удовлетворяет только один упорядоченный набор (кортеж)

$$\langle a_{n-1},\ \ldots,\ a_0\rangle \qquad (3)$$

целых чисел с условием (2).

В вавилонской с. с. $q_1=10$, $q_2=6$, $q_3=10$, $q_6=6$, ... и т. д. У индейцев племени майя $q_1=5$, $q_2=4$, $q_3=18$, $q_4=q_5=\ldots=20$.

С. с., в к-рой все члены упомянутой в теореме последовательности $q_1, \ldots, q_n$ равны одному и тому же числу q и в к-рой каждое из чисел от 0 до $q-1$ обозначается определенным символом, наз. q-и ч н о й с. с. или п о з и ц и о н н о й с. с. с о с н о в а н и е м q. В q-ичной с. с. каждое натуральное число обозначается кортежем из указанных символов. Для выполнения сложения и умножения чисел, записанных в q-ичной с. с., достаточно иметь таблицы сложения и умножения для всех чисел от 0 до $q-1$.

Лит.: [1] Башмакова И. Г., Юшкевич А. П., Происхождение систем счисления, в кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. 1, М.—Л., 1951, с. 11—74; [2] Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959; [3] Юшкевич А. П., История математики в ср. века, М., 1961; [4] Вайман А. А., Шумеро-вавилонская математика, М., 1961; [5] История математики, т. 1, М., 1970.

В. И. Нечаев.

СЮРЪЕКЦИЯ, с ю р ъ е к т и в н о е о т о б р а ж е н и е множества A в множество B — отображение f такое, что $f(A)=B$. Вместо «f сюръективно» говорят также «f есть отображение множества A на множество B». С. множества A на A наз. также п е р е с т а н о в к о й множества A.

О. А. Иванова.

ТАБЛИЧНАЯ СВОДИМОСТЬ, *tt*-сводимость,— специальный вид *алгоритмической сводимости*. Пусть A и B — два подмножества натурального ряда. Говорят, что A табличносводится к B (обозначение: $A \leqslant_{tt} B$), если существует алгоритм f, к-рый по всякому натуральному числу a строит булеву функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (функция задается, напр., своей таблицей, число аргументов функции может зависеть от a) и числа $b_1, \ldots, b_n$ такие, что принадлежность a к B эквивалентна истинности $\varphi(b_1 \in B, b_2 \in B, \ldots, b_n \in B)$.

Отношение $\leqslant_{tt}$ является предпорядком на множестве всех подмножеств натурального ряда, упорядочение по нему образует верхнюю полурешетку. Отношению $\leqslant_{tt}$ соответствует отношение эквивалентности $\equiv_{tt}$ на подмножествах натурального ряда, а именно: $A \equiv_{tt} B$, если $A \leqslant_{tt} B$ и $B \leqslant_{tt} A$. Классы эквивалентности по этому отношению наз. табличными степенями (или *tt*-степенями).

В теории алгоритмов рассматриваются также специальные виды Т. с., напр., ограниченная Т. с. (*btt*-сводимость), определяемая дополнительным требованием, чтобы число аргументов функции φ не зависело от a. Если в качестве функции φ берется просто функция x_1, то сводимость наз. m-сводимостью (обозначение: $\leqslant_m$). Сводимости, промежуточные между *tt*-сводимостью и m-сводимостью (т. е. такие алгоритмич. сводимости $\leqslant_r$, что $\leqslant_{tt} \supseteq \supseteq \leqslant_r \supseteq \leqslant_m$), в частности все упомянутые выше, иногда наз. сводимостями табличного типа.

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [2] Дегтев А. Н., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 3, с. 137—68.

А. Л. Семенов.

ТАВТОЛОГИЯ — формула языка исчисления высказываний, принимающая *истинностное значение* «истина» независимо от того, какое истинностное значение «истина» или «ложь» принимает каждая ее пропозициональная переменная. Примеры Т.: $A \supset A$, $A \vee \neg A$, $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$.

Вопрос о тавтологичности данной формулы решается в общем случае прямым перебором всех наборов значений ее пропозициональных переменных.

В. Н. Гришин.

ТАЙХМЮЛЛЕРА ПРОСТРАНСТВО, пространство Тейхмюллера,— метрическое пространство (M_g, d), точками к-рого являются абстрактные римановы поверхности (т. е. классы $\overline{X}$ конформно эквивалентных римановых поверхностей X рода g с выделенными эквивалентными относительно тождественного отображения системами Σ-образующих фундаментальной группы $\pi_1(X)$), а расстояние d между $\overline{X}$ и $\overline{X}'$ равно $\ln K$, где постоянная K — отклонение отображения Тайхмюллера (квазиконформного отображения $\overline{X} \to \overline{X}'$, дающего наименьшее максимальное отклонение среди всех таких отображений). Введено О. Тайхмюллером [1].

Лит.: [1] Teichmüller O., «Abhandl. Preuss. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl.», 1939, № 22, S. 3—197; [2] Альфорс Л., Берс Л., Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, пер. с англ., М., 1961; [3] Крушкаль С. Л., Квазиконформные отображения и римановы поверхности, Новосиб., 1975.

М. И. Войцеховский.

ТАКТИЧЕСКАЯ КОНФИГУРАЦИЯ, t-схема, t-$(v,\ k,\ \lambda)$-схема на v-множестве S,— система k-подмножеств (блоков) множества S такая, что каждое t-подмножество элементов из S встречается точно в λ блоках. Класс 2-схем совпадает с классом уравновешенных неполных *блок-схем*. Иногда Т. к. наз. также *инцидентности система*, в к-рой каждое множество инцидентно в точности k элементам, а любой элемент инцидентен в точности r множествам. Т. к. при $t=k$ наз. тривиальной. Если Т. к. нетривиальна, то

$$t+1\leqslant k\leqslant v-1-t.$$

Каждая t-схема есть s-схема при любом $s\leqslant t$. Число λ_s появлений произвольного s-подмножества в блоках t-схемы дается формулой

$$\lambda_s=\binom{k-s}{t-s}^{-1}\binom{v-s}{t-s}\lambda,\quad 0<s\leqslant t.$$

Условия целостности λ_s — необходимые условия существования Т. к. В частности, при $t\geqslant 2$ каждая Т. к. есть уравновешенная неполная блок-схема.

Центральным вопросом для Т. к. является проблема их существования и построения. Долгое время для $t>3$ были известны лишь отдельные примеры, в частности 5-(12, 6, 1)- и 5-(24, 8, 1)-схемы, связанные с пятикратно транзитивными группами Матьё M_{12} и M_{24} соответственно. Однако в 60-х гг. 20 в. была открыта связь Т. к. с теорией кодирования (см., напр., [3], [4]) и указан способ построения Т. к., исходя из векторов с v ненулевыми координатами, принадлежащих линейному $(n,\ k)$-коду, к-рый представляет собой k-мерное векторное подпространство в n-мерном пространстве над конечным полем (см. [5], [7]).

Известно, что t-кратно транзитивные группы, отличные от симметрической и знакопеременной, приводят к нетривиальным t-схемам; это дает несколько бесконечных серий 3-схем. С помощью теоретико-групповых и геометрич. соображений были построены также бесконечные классы 4- и 5-схем (см., напр., [6]).

Для числа b блоков в t-схеме справедливо неравенство

$$b\geqslant\begin{cases}\binom{v}{s}, & \text{если } t=2s,\quad v\geqslant k+s,\\ 2\binom{v-1}{s}, & \text{если } t=2s+1,\quad v-1\geqslant k+s,\end{cases}\qquad(*)$$

обобщающее неравенство Фишера ($b\geqslant v$) для уравновешенных неполных блок-схем. При равенстве в (*) Т. к. наз. плотной. Плотные Т. к. обобщают симметричные 2-схемы; в частности, при $t=2s$ множество чисел пересечений блоков плотной Т. к. содержит в точности s различных элементов. Для существования плотной 4-схемы необходимо, чтобы

$$(v-3)\mid 2(k-1)(k-2)\quad\text{и}\quad(k-3)\mid 4\lambda.$$

Плотные 3-схемы адамаровы, т. е. суть 3-$(4n,\ 2n,\ n-1)$-схемы, а при $s\geqslant 2$ нетривиальных плотных $(2s+1)$-схем не существует. Из данной t-$(v,\ k,\ \lambda)$-схемы можно построить три других Т. к.: а) беря дополнения в S для каждого блока, б) удаляя какой-либо элемент и все блоки, его содержащие, в) беря блоки, содержа-

щие какой-либо элемент, и удаляя его из них. Полученные Т. к. наз. соответственно дополнительной, остаточной и производной по отношению к исходной Т. к.; они суть соответственно: t-$(v,\ v-k,\ \lambda^c)$-схема с

$$\lambda^c=\binom{k}{t}^{-1}\binom{v-k}{t}\lambda;$$

$(t-1)$-$(v-1,\ k,\ \lambda^r)$-схема с

$$\lambda^r=(v-k)\,(k-t+1)^{-1}\lambda$$

и $(t-1)$-$(v-1,\ k-1,\ \lambda)$-схема.

Лит.: [1] Dembowski P., Finite geometries, B.—N. Y., 1968; [2] Ray-Chaudhuri D. K., Wilson R. M., «Osaka J. Math.», 1975, v. 12, p. 737—44; [3] Assmus E. F., Mattson H. F., «Arch. Math.», Basel, 1966, Bd 17, S. 121—35; [4] их же, «J. Comb. Theory», 1969, v. 6, p. 122—51; [5] Семаков Н. В., Зиновьев В. А., «Проблемы передачи информации», 1969, т. 5, в. 3, с. 28—36; [6] Alltop W. O., «J. Comb. Theory», 1972, v. 12, p. 390—95; [7] Pless Vera, «J. Comb. Theory», 1972, v. 12, p. 119—42.

В. Е. Тараканов.

ТАМАГАВЫ МЕРА — мера τ на группе *аделей* G_A связной линейной алгебраич. группы G, определенной над глобальным полем K, конструируемая следующим образом. Пусть ω — ненулевая K-определенная дифференциальная форма на G максимальной степени. Для нормирования v из множества V всех неэквивалентных нормирований поля K через ω_v обозначается мера Хаара на локально компактной группе G_{K_v} точек G над пополнением K_v, получаемая из ω (см. [1], [2]). Если произведение $\prod\omega_v(G_{O_v})$, взятое по всем неархимедовым v, где G_{O_v} — группа целых v-адических точек, абсолютно сходится (что всегда имеет место для полупростых и унипотентных групп G), то полагают $\tau=\prod_{v\in V}\omega_v$. В противном случае для определения τ нек-рым канонич. способом вводят систему чисел $(\lambda_v)_{v\in V}$, называемых множителями сходимости, таких, что произведение $\prod_{v\in V}\lambda_v\omega_v(G_{O_v})$ абсолютно сходится, и тогда $\tau=\prod_{v\in V}\lambda_v\omega_v$ (см. [13]). Получаемая описанным образом мера τ не зависит от первоначального выбора формы ω, являясь канонической мерой Хаара на G_A. Это позволяет однозначно говорить об объеме однородных пространств, связанных с G_A (см. *Тамагавы число*).

Лит.: [1] Вейль А., «Математика», 1964, т. 8, № 4, с. 3—74; [2] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969, с. 374—96; [3] Ono T., «Ann. Math.», 1963, v. 78, № 1, p. 47—73.

А. С. Рапинчук.

ТАМАГАВЫ ЧИСЛО — объем однородного пространства $G_A^{(1)}/G_K$, ассоциированного с группой аделей связной линейной алгебраич. группы G, определенной над глобальным полем K, относительно *Тамагавы меры*. Здесь $G_A^{(1)}$ — подгруппа в G_A, состоящая из таких аделей $g=(g_v)_{v\in V}\in G_A$, что

$$\prod_{v\in V}|\chi(g_v)|_v=1$$

для любого K-определенного характера χ группы G (произведение берется по всем нормированиям v из множества V нормализованных нормирований поля K). Конечность Т. ч. вытекает из теории приведения (см. [5]).

При описании значений $\tau(G)$ удобно различать случаи унипотентных групп, алгебраич. торов и полупростых групп. Для унипотентных групп всегда Т. ч. равно 1. Если T — алгебраич. K-тор, то

$$\tau(T)=\frac{[H^1(K,\ \hat{T})]}{[Ш(T)]},$$

где $[H^1(K,\ \hat{T})]$ и $[Ш(T)]$ — порядки группы одномерных когомологий Галуа модуля рациональных характеров $\hat{T}$ тора T и его группы Шафаревича — Тейта соответственно. На основании этой формулы построен пример тора, у к-рого $\tau(T)$ не является целым [8].

Для вычисления Т. ч. полупростых групп над числовым полем получена редукция к односвязным группам [9]: пусть G — полупростая K-группа, $\pi : \tilde{G} \to G$ — универсальное K-определенное накрытие, $F = \operatorname{Ker} \pi$ — фундаментальная группа для G и $\hat{F}$ — ее группа характеров; тогда

$$\tau(G) = \tau(\tilde{G}) \frac{h^0(\hat{F})}{i^1(\hat{F})},$$

где $h^0(\hat{F}) = [H^0(K, \hat{F})]$, $i^1(\hat{F})$ — порядок ядра канонич. отображения

$$H^1(K, \hat{F}) \longrightarrow \coprod\nolimits_{v \in V} H^1(K_v, \hat{F}).$$

Существует гипотеза, что для всех односвязных групп Т. ч. равно единице (гипотеза Вейля). Это доказано для большинства типов простых групп над числовыми полями ([3], [4], [7]), а также для групп Шевалле над числовыми полями (см. [2]) и над функциональными глобальными полями [6].

Лит.: [1] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [2] Арифметические группы и автоморфные функции, пер. с англ. и франц., М., 1969; [3] Вейль А., «Математика», 1964, т. 8, № 4, с. 3—74; [4] его же, там же, 1969, т. 13, № 6, с. 18—98; [5] Платонов В. П., «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 3, с. 3—54; [6] Harder G., «Ann. Math.», 1974, v. 100, p. 249—306; [7] Mars J. G. M., там же, 1969, v. 89, p. 557—74; [8] Ono T., там же, 1963, v. 78, p. 47—73; [9] его же, там же, 1965, v. 82, p. 88—111. *А. С. Рапинчук.*

ТАНГЕНС — одна из тригонометрических функций:

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

другие обозначения: tan, T, t. Область определения — вся числовая ось, за исключением точек, абсциссы к-рых $\pi/2 + n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Т. — функция неограниченная нечетная периодическая (с периодом π). Т. и котангенс связаны соотношением

$$\operatorname{tg} x = 1/\operatorname{ctg} x.$$

Функция, обратная Т., наз. арктангенсом. Производная Т.:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Интеграл от Т.:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + c.$$

Т. разлагается в ряд

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots, \quad |x| > \frac{\pi}{2}.$$

Т. комплексного аргумента z — мероморфная функция, нули к-рой находятся в точках $z = k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. *Ю. А. Горьков.*

ТАНГЕНС АМПЛИТУДЫ — отношение двух основных эллиптич. функций Якоби:

$$\operatorname{sc} u = \operatorname{tg} \operatorname{am} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}.$$

См. *Якоби эллиптические функции.* *Е. Д. Соломенцев.*

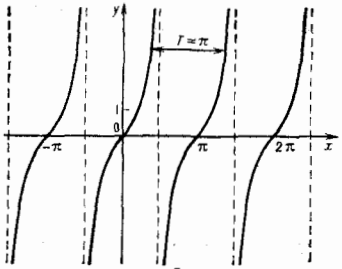
ТАНГЕНС ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ — см. *Гиперболические функции.*

ТАНГЕНСОВ ФОРМУЛА — формула, устанавливающая зависимость между длинами двух сторон плоского треугольника и тангенсами полусуммы и полуразности противолежащих им углов. Т. ф. имеет вид:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+b}{2}}.$$

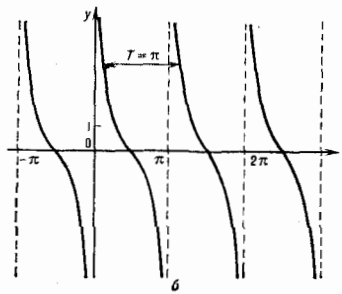
Т. ф. иногда наз. формулой Региомонтана, по имени ученого, установившего эту формулу во 2-й пол. 15 в. *А. Б. Иванов.*

ТАНГЕНСОИДА — график функции $y=\operatorname{tg} x$ (рис. *а*). Т.— периодич. кривая с периодом $T=\pi$ и асимптотами $x=(k+1/2)\pi$. При изменении x от $-\pi/2$ до $+\pi/2$ y монотонно растет от $-\infty$ до $+\infty$; таким образом, Т. состоит из бесконечного числа отдельных конгруэнтных кривых, получаемых одна из другой сдвигом по оси Ox на $k\pi$. Пересечения с осью Ox: 0, $(k\pi, 0)$, они же — точки перегиба с углом наклона $\pi/4$ к оси Ox.



а

Т., зеркально отраженная относительно оси Ox и сдвинутая влево на отрезок $\pi/2$ (рис. *б*), является графиком функции $y=\operatorname{ctg} x=-\operatorname{tg}(\pi/2+x)$; асимптоты $x=k\pi$, пересечения с осью Ox: $[(k+1/2)\pi, 0]$, они же — точки перегиба с углом наклона $-\pi/4$ к оси Ox.



б

Ю. А. Горьков.

ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ — название для коэффициентов в уравнении прямой, к-рые рассматриваются как координаты. Для уравнения прямой $ux+vy+1=0$ коэффициенты u и v наз. неоднородными Т. к.; для однородного уравнения прямой $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ коэффициенты u_1, u_2, u_3 наз. однородными Т. к. Уравнение, связывающее Т. к. касательной к кривой, наз. тангенциальным уравнением этой кривой. Тангенциальное уравнение алгебраич. кривой является алгебраическим. Тангенциальное уравнение кривой двойственно уравнению кривой в точечных координатах. Степень тангенциального уравнения наз. классом кривой.

По материалам одноименной статьи из БСЭ-2.

ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ, теоремы тауберова типа,— теоремы, устанавливающие условия, определяющие множество рядов (или последовательностей), на к-ром для двух данных *суммирования методов* A и B происходит включение $A\subset B$. Наиболее часто в теории суммирования рассматривается случай, когда метод B тождествен сходимости. В Т. т., относящихся к этим случаям, устанавливаются условия на ряд (последовательность), при к-рых из суммируемости ряда данным методом следует его сходимость. Назв. теорем восходит к А. Тауберу [1], впервые доказавшему две теоремы такого типа для *Абеля метода суммирования*:

1) если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

суммируем методом Абеля к сумме S и $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, то ряд сходится к S;

2) для того чтобы из суммируемости ряда $(*)$ методом Абеля к сумме S следовала сходимость этого ряда к сумме S, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^{n} ka_k = o(n).$$

Теорема 1) была позднее усилена, а именно, было показано, что условие $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$ можно заменить на $a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$. Условия, к-рые накладываются на ряд в

этих случаях, помимо его суммируемости, наз. т а у б е р о в ы м и у с л о в и я м и. Эти условия могут выражаться в различных формах. Наиболее распространенными для рядов (*) являются условия вида:

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad a_n > -\frac{H}{n}, \quad a_n < \frac{H}{n},$$

H — постоянная,

$$\sum_{k=0}^{n} k a_k = o(n),$$

а также их обобщения, где натуральный параметр n заменен переменным τ_n. В Т. т. к таким условиям, помимо приведенных выше, относятся, напр., следующие: если ряд (*) суммируем методом Бореля к сумме S и $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, то ряд сходится к S.

Для каждого регулярного матричного метода суммирования существуют числа $\tau_n \geqslant 0$, такие, что $\sum_{n=0}^{\infty} \tau_n = \infty$ и условие $a_n = o(\tau_n)$ является тауберовым для этого метода (т. е. из суммируемости ряда этим методом и условия $a_n = o(\tau_n)$ следует сходимость ряда).

Тауберовы условия могут выражаться через оценки частичных сумм S_n ряда или оценки разности $S_n - S_m$ при определенных соотношениях между n и m. Примерами Т. т. с такими условиями являются следующие: если ряд (*) с частичными суммами S_n суммируем методом Бореля к сумме S и

$$\varliminf_{m \to \infty} (S_n - S_m) \geqslant 0, \quad n > m,$$

$\frac{m-n}{\sqrt{m}} \to 0$, то ряд сходится к S; если ряд (*) суммируем методом Абеля к сумме S и его частичные суммы S_n удовлетворяют условию $S_n = O(1)$, то он суммируем к S методом Чезаро $(C, 1)$.

Тауберовым условием может служить лакунарность ряда: $a_n = 0$ при $n = n_k$; условие в этом случае выражается через свойства последовательности $\{n_k\}$.

Кроме обычной суммируемости, в теории суммирования рассматриваются Т. т. для специальных видов суммируемости (абсолютной, сильной, суммируемости со скоростью и др.).

Лит.: [1] T a u b e r A., «Monats. Math. und Physik», 1897, Bd 8, S. 273—77; [2] Х а р д и Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [3] W i d d e r D. V., The Laplace transform., Princeton — L., 1941; [4] P i t t H., Tauberian theorem's, L.—[a. o.], 1958; [5] P e y e r i m h o f f A., Lectures on summability, B., 1969; [6] Z e l l e r K., B e e k m a n n W., Theorie der Limitierungsverfahren, B.—Hdlb.— N. Y., 1970; [7] К а н р о Г. Ф., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70.

И. И. Волков.

ТЕЙЛОРА МНОГОЧЛЕН степени n для функции f n раз дифференцируемой при $x = x_0$ — многочлен вида

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Значения Т. м. и его производных до порядка n включительно в точке $x = x_0$ совпадают со значениями функции и ее соответствующих производных в той же точке:

$$f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Т. м. является многочленом наилучшего приближения функции f при $x \to x_0$ в том смысле, что

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \longrightarrow x_0, \qquad (*)$$

и если к.-л. многочлен $Q_n(x)$ степени, не превышающей n, обладает тем свойством, что

$$f(x) - Q_n(x) = o((x - x_0)^m), \quad x \longrightarrow x_0,$$

где $m \geqslant n$, то он совпадает с Т. м. $P_n(x)$. Иначе говоря, многочлен, обладающий свойством (*), единствен.

Если хотя бы одна из производных $f^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, не равна нулю в точке x_0, то Т. м. является главной частью *Тейлора формулы*.

Л. Д. Кудрявцев.

ТЕЙЛОРА РЯД — степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (1)$$

где числовая функция f определена в нек-рой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Частными суммами Т. р. являются *Тейлора многочлены*.

Если x_0 — комплексное число, функция f определена в нек-рой окрестности точки x_0 во множестве комплексных чисел и дифференцируема в точке x_0, то существует окрестность этой точки, на к-рой функция f является суммой своего Т. р. (1) (см. *Степенной ряд*). Если же x_0 — действительное число, функция f определена в нек-рой окрестности точки x_0 во множестве действительных чисел и имеет в точке x_0 производные всех порядков, то функция f может ни в какой окрестности точки x_0 не быть суммой своего Т. р. Напр., функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0, \end{cases} \qquad (2)$$

бесконечно дифференцируема на всей действительной оси, не равна тождественно нулю ни в какой окрестности точки $x=0$, а все коэффициенты ее Т. р. в этой точке равны нулю.

Если функция раскладывается в нек-рой окрестности данной точки в степенной ряд, то такой ряд единствен и является ее Т. р. в этой точке. Однако один и тот же степенной ряд может являться Т. р. для разных действительных функций. Так, степенной ряд, у к-рого все коэффициенты равны нулю, является как Т. р. функции, тождественно равной нулю на всей действительной оси, так и Т. р. функции (2) в точке $x=0$.

Достаточным условием сходимости Т. р. (1) к действительной функции f на интервале $(x_0-h,\ x_0+h)$ является ограниченность в совокупности всех ее производных на этом интервале.

Т. р. обобщается на случай отображения подмножеств линейных нормированных пространств в подобные же пространства, в частности на числовые функции нескольких переменных и функции матричного аргумента.

Ряд (1) был опубликован Б. Тейлором (B. Taylor) в 1715; ряд, сводящийся к ряду (1) простым преобразованием, был опубликован И. Бернулли (I. Bernoulli) в 1694.

Лит.: [1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., Математический анализ, М., 1979; [2] Никольский С. М., Курс математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1983.

Л. Д. Кудрявцев.

ТЕЙЛОРА ФОРМУЛА — представление функции в виде суммы ее многочлена Тейлора степени n ($n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) и остаточного члена. Если действительная функция f одного переменного имеет n производных в точке x_0, то ее Т. ф. имеет вид

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x),$$

где

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

— *Тейлора многочлен*, а остаточный член $r_n(x)$ может быть записан в форме Пеано

$$r_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right),\quad x\to x_0.$$

Если функция f дифференцируема $n+1$ раз в нек-рой окрестности $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $\delta>0$, точки x_0, то остаточный член в этой окрестности может быть записан в форме Шлёмильха — Роша

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!\,p}(1-\theta)^{n-p+1}(x-x_0)^{n+1},$$

где $p=1, 2, \ldots, n+1$, частным видом к-рой являются форма Лагранжа

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

и форма Коши

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},$$

$$0<\theta<1, \quad x\in(x_0-\delta, x_0+\delta).$$

Если производная порядка $n+1$ функции f интегрируема на отрезке с концами в точках x и x_0, то остаточный член можно записать в интегральной форме

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Т. ф. со всеми указанными формами записи ее остаточного члена обобщается на случай функций нескольких переменных. Т. ф. справедлива и для отображений подмножеств нормированных пространств в подобные же пространства, причем в этом случае остаточный член может быть записан в форме Пеано и интегральной форме.

Т. ф. позволяет изучение ряда свойств определенное число раз дифференцируемой функции свести к существенно более простой задаче изучения этих свойств у соответствующего многочлена Тейлора — на этом и основаны разнообразные и многочисленные применения Т. ф., напр. для вычисления пределов функций, исследования их экстремумов, точек перегиба, интервалов выпуклости и вогнутости, сходимости рядов и интегралов, оценки скорости их сходимости или расходимости.

Лит.: [1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., Математический анализ, М., 1979; [2] Никольский С. М., Курс математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1983.

Л. Д. Кудрявцев.

ТЕЙТА ГИПОТЕЗЫ — гипотезы, описывающие связи между диофантовыми и алгебро-геометрическими свойствами алгебраич. многообразия; высказаны Дж. Тейтом (Tate J., см. [1]).

Гипотеза 1. Если поле k конечно порождено над своим простым подполем, V — гладкое проективное многообразие над k, l — простое число, отличное от характеристики поля k,

$$\rho_l^{(i)}:\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)\longrightarrow \mathrm{Aut}_{Q_l}H_l^{2i}(V\otimes_k\bar{k})(i)$$

— естественное l-адическое представление и $g_l^{(i)}=\mathrm{Lie}\left(\mathrm{Im}\left(\rho_l^{(i)}\right)\right)$, то Q_l-пространство $[H_l^{2i}(V\otimes_k\bar{k})_i]$ порождается классами когомологий алгебраич. циклов коразмерности i на $V\otimes_k\bar{k}$.

Гипотеза 2. Ранг группы классов алгебраич. циклов коразмерности i на V по модулю гомологич. эквивалентности совпадает с порядком полюса функции $\Phi_{2i}(s)$ в точке $s=\dim Y+i$.

Гипотезы проверены для целого ряда частных случаев (ограничения накладываются как на поле k, так и на многообразие V).

Лит.: [1] Тэйт Дж., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 6, с. 27—40.

С. Г. Танкеев.

ТЕЙТА МОДУЛЬ — свободный Z_p-модуль $T(G)$, сопоставляемый *p-делимой группе* G, определенной над полным дискретно нормированным кольцом R характеристики 0 с полем вычетов k характеристики p. Пусть $G=\{G_\nu, i_\nu\}$, $\nu\geqslant 0$, а $T(G)=\varprojlim G_\nu(K)$, где $\bar{K}$ — алгебраич. замыкание поля частных K кольца R (предел берется относительно отображений $j_\nu: G_{\nu+1}\to G_\nu$ таких, что $i_\nu\circ j_\nu=p$). Тогда $T(G)=Z_p^h$, где h — высота группы G, $T(G)$ обладает естественной структурой $G(\bar{K}/K)$-модуля. Функтор $G\longrightarrow T(G)$ позволяет сводить ряд вопросов о группе G к более простым вопросам о $G(\bar{K}/K)$-модулях.

Аналогично определяется Т. м. для абелева многообразия. Пусть A — абелево многообразие, определенное над k и A_{p^n} — группа точек порядка p^n в $A(\bar{k})$. Тогда $T_p(A)$ определяется как $\varprojlim A_{p^n}$. Модулем Тейта кривой X наз. Т. м. якобиева многообразия этой кривой.

Конструкция модуля $T_p(X)$ обобщается на случай числовых полей. Пусть k — поле алгебраич. чисел и k_∞ — нек-рое Z_p-расширение поля k (расширение с группой Галуа изоморфной Z_p). Для промежуточного поля k_n степени p^n над k пусть $\mathrm{Cl}(k_n)_p$ есть p-компонента группы классов идеалов поля k_n. Тогда $T_p(k_\infty) = \varprojlim \mathrm{Cl}(k_n)_p$, где предел берется относительно норменных отображений $\mathrm{Cl}(k_m)_p \to \mathrm{Cl}(k_n)_p$ для $m > n$. Модуль $T_p(k_\infty)$ характеризуется своими инвариантами Ивасавы λ, μ, ν, к-рые определяются из условия

$$|\mathrm{Cl}(k_n)_p| = p^{e_n},$$

где $e_n = \lambda n + \mu p^n + \nu$ для всех достаточно больших n. Имеется предположение, что для круговых Z_p-расширений инвариант μ равен 0. Это доказано для абелевых полей [4]. Известны примеры некруговых Z_p-расширений с $\mu > 0$ (см. [3]). Даже в случае, когда $\mu = 0$, $T_p(k_\infty)$ не обязан быть свободным Z_p-модулем.

Лит.: [1] Тэйт Дж., «Математика», 1969, т. 13, № 2, с. 3—25; [2] Шафаревич И. Р., ζ-функция, М., 1969; [3] Iwasawa K., в сб.: Number theory, algebraic geometry and commutative algebra, Tokyo, 1973, p. 1—11; [4] Ferrero B., Washington L. C., «Ann. Math.», 1979, v. 109, p. 377—95.

Л. В. Кузьмин.

ТЕЛЕГРАФНОЕ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + (\alpha + \beta)\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\beta u = 0. \qquad (1)$$

Этому уравнению удовлетворяет напряжение тока в проводе, рассматриваемое как функция времени t и расстояния s от нек-рой фиксированной точки провода. Здесь c — скорость света, α — емкостный, β — индуктивный коэффициенты.

Преобразованием

$$e^{1/2(\alpha+\beta)t} u(s, t) = v(x, y), \quad x = s + ct, \quad y = s - ct,$$

уравнение (1) приводится к виду

$$v_{xy} + \lambda v = 0, \quad \lambda = \left(\frac{\alpha - \beta}{4c}\right)^2. \qquad (2)$$

Это уравнение принадлежит к классу гиперболич. уравнений 2-го порядка

$$v_{xy} + a v_x + b v_y + c v = f,$$

в теории к-рых важную роль играет функция Римана $R(x, y; \xi, \eta)$. Для уравнения (2) эта функция выписывается в явном виде:

$$R(x, y; \xi, \eta) = J_0\left(\sqrt{4\lambda (x - \xi)(y - \eta)}\right),$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя.

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964.

А. П. Солдатов.

ТЕЛЕСНЫЙ УГОЛ — часть пространства, ограниченная одной полостью нек-рой конич. поверхности (рис.), направляющая к-рой гомеоморфна окружности. Частными случаями Т. у. являются многогранные углы. За меру Т. у. принимают отношение площади той части сферы с центром в вер-



шине конич. поверхности, к-рая вырезается этим Т. у., к квадрату радиуса сферы. Напр., Т. у., заключающий $^1/_8$ часть пространства (октант), измеряется числом $4\pi R^2/8R^2 = \pi/2$. Единицей измерения Т. у. является *стерадиан*. *БСЭ-з.*

ТЕЛО — кольцо, в к-ром уравнения $ax=b$ и $ya=b$, где $a\neq 0$, однозначно разрешимы. В случае ассоциативного кольца достаточно потребовать существования единицы 1 и однозначной разрешимости уравнений $ax=1$ и $ya=1$ для любого $a\neq 0$. Коммутативное ассоциативное Т. является *полем*. Пример некоммутативного ассоциативного Т. — тело кватернионов, определяемое как множество матриц вида $\begin{Vmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{Vmatrix}$ над полем комплексных чисел с обычными операциями (ср. *Кватернион*). Примером неассоциативного Т. является *Кэли — Диксона алгебра*, состоящая из всех матриц того же вида над телом кватернионов. Это Т. альтернативно (см. *Альтернативные кольца и алгебры*). Всякое Т. является *алгеброй с делением* или над полем рациональных чисел, или над полем вычетов. Тело кватернионов является 4-мерной алгеброй над полем действительных чисел, а алгебра Кэли — Диксона 8-мерной. Размерность любой алгебры с делением над полем действительных чисел равна 1, 2, 4 или 8 (см. [1], а также *Топологическое кольцо*). Поля действительных и комплексных чисел и тело кватернионов и только они являются связными локально компактными ассоциативными Т. (см. [5]). Всякая конечномерная алгебра без делителей нуля есть Т. Всякое конечное ассоциативное Т. коммутативно (см. [6], [8]). Ассоциативное Т. характеризуется тем, что все ненулевые модули над ним свободны. Всякое неассоциативное альтернативное Т. конечномерно [3]. Сходный результат верен для тел Мальцева [7] (см. *Мальцева алгебра*) и йордановых Т. [4] (см. *Йорданова алгебра*). В отличие от коммутативного случая, не всякое ассоциативное кольцо без делителей нуля вложимо в Т. (см. *Вложение кольца*).

Лит.: [1] Адамс Д. Ф., «Математика», 1961, т. 5, № 4, с. 3—86; [2] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [3] Жевлаков К. А. и др., Кольца, близкие к ассоциативным, М., 1978; [4] Зельманов Е. И., «Алгебра и логика», 1979, т. 18, № 3, с. 286—310; [5] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [6] Скорняков Л. А., Элементы общей алгебры, М., 1983; [7] Филиппов В. Т., «Алгебра и логика», 1976, т. 15, № 2, с. 235—42; [8] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972. *Л. А. Скорняков.*

ТЕНЗОР на векторном пространстве V над полем k — элемент t векторного пространства

$$T^{p,\,q}(V)=\left(\bigotimes^{p} V\right)\otimes\left(\bigotimes^{q} V^*\right),$$

где $V^*=\mathrm{Hom}\,(V,\,k)$ — пространство, сопряженное с V. Говорят, что тензор t является p раз контравариантным и q раз ковариантным или что t имеет тип $(p,\,q)$. Число p наз. контравариантной валентностью, q — ковариантной валентностью, а число $p+q$ — общей валентностью тензора t. Пространство $T^{0,0}(V)$ отождествляется с k. Тензоры типа $(p,\,0)$ наз. контравариантными, типа $(0,\,q)$ — ковариантными, а остальные — смешанными.

Примеры Т. 1) Вектор пространства V (Т. типа $(1,\,0)$).

2) Ковектор пространства V (Т. типа $(0,\,1)$).

3) Каждый ковариантный Т.

$$t=\sum\nolimits_{i=1}^{s} h_{i1}\otimes\ldots\otimes h_{iq},$$

где $h_{ij}\in V^*$, определяет q-линейную форму $\hat{t}$ на V по формуле

$$\hat{t}\,(x_1,\,\ldots,\,x_q)=\sum\nolimits_{i=1}^{s} h_{i1}\,(x_1)\ldots h_{iq}\,(x_q);$$

отображение $t \longmapsto \hat{t}$ пространства $T^{0,q}$ в пространство $L^q(V)$ всех q-линейных форм на V линейно и инъективно; если $\dim V < \infty$, то это отображение является изоморфизмом, так что любая q-линейная форма отвечает нек-рому Т. типа $(0, q)$.

4) Аналогично, каждый контравариантный Т. из $T^{p,0}(V)$ определяет нек-рую p-линейную форму на V^*, а если V конечномерно, то верно и обратное.

5) Каждый Т.

$$t = \sum_{i=1}^{s} x_i \otimes h_i \in T^{1,1}(V),$$

где $x_i \in V$, $h_i \in V^*$, определяет линейное преобразование $\hat{t}$ пространства V, заданное формулой

$$\hat{t}(y) = \sum_{i=1}^{s} h_i(y)\, x_i;$$

если $\dim V < \infty$, то любое линейное преобразование пространства V определяется Т. типа (1, 1).

6) Аналогично, любой Т. типа (1, 2) определяет в V билинейную операцию, т. е. структуру k-алгебры; при этом, если $\dim V < \infty$, то любая структура k-алгебры в V определяется нек-рым Т. типа (1, 2), к-рый наз. структурным тензором алгебры.

Пусть V конечномерно и $v_1, \ldots, v_n$ — его базис, $v^1, \ldots, v^n$ — сопряженный базис пространства V^*. Тогда Т.

$$v^{i_1 \ldots i_q}_{t_1 \ldots t_p} = v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_p} \otimes v^{j_1} \otimes \ldots \otimes v^{j_q}$$

составляют базис пространства $T^{p,q}(V)$. Координаты $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ тензора $t \in T^{p,q}(V)$ в этом базисе наз. также к о о р д и н а т а м и т е н з о р а t в б а з и с е $v_1, \ldots, v_n$ пространства V. Напр., координаты вектора и ковектора совпадают с их обычными координатами в базисах (v_i) и (v^j), координаты Т. типа (0, 2) совпадают с элементами матрицы соответствующей билинейной формы, координаты Т. типа (1, 1) — с элементами матрицы соответствующего линейного преобразования, координаты структурного Т. алгебры — с ее структурными константами. Если $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$ — другой базис пространства V, $\tilde{v}_j = a^i_j v_i$, $\|b^i_j\| = (\|a^i_j\|^{\top})^{-1}$, то координаты $\tilde{t}^{i_1, \ldots, i_p}_{j_1, \ldots, j_q}$ тензора t в этом базисе определяются по формулам

$$\tilde{t}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = b^{i_1}_{k_1} \ldots b^{i_p}_{k_p} a^{l_1}_{j_1} \ldots a^{l_q}_{j_q} t^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q}. \qquad (1)$$

Здесь, как это часто делается в тензорном исчислении, применимо п р а в и л о с у м м и р о в а н и я Э й н ш т е й н а: по каждой паре одинаковых индексов, один из к-рых — верхний, а другой — нижний, подразумевается суммирование от 1 до n. Обратно, если система n^{p+q} элементов поля k, зависящая от базиса пространства V, изменяется при переходе от базиса к базису по формулам (1), то эта система является набором координат нек-рого Т. типа (p, q).

В векторном пространстве $T^{p,q}(V)$ определены операции сложения Т. и умножения Т. на скаляр из k. При этих операциях соответствующие координаты Т. складываются или умножаются на скаляр. Определена также операция умножения Т. разных типов, к-рая вводится следующим образом. Имеет место естественный изоморфизм векторных пространств

$$T^{p,q}(V) \otimes T^{r,s}(V) \cong T^{p+r,\ q+s}(V),$$

переводящий

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_q) \otimes$$

$$\otimes (x'_1 \otimes \ldots \otimes x'_r \otimes h'_1 \otimes \ldots \otimes h_s)$$

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes x'_1 \otimes \ldots \otimes x'_r \otimes$$
$$\otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_q \otimes h'_1 \otimes \ldots \otimes h'_s.$$

Поэтому для любых $t \in T^{p,q}(V)$ и $u \in T^{r,s}(V)$ элемент $v = t \otimes u$ может рассматриваться как Т. типа $(p+r, q+s)$, к-рый и наз. произведением тензоров t и u. Координаты произведения вычисляются по формуле

$$v^{i_1 \ldots i_{p+r}}_{j_1 \ldots j_{q+s}} = t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} u^{i_{p+1} \ldots i_{p+r}}_{i_{q+1} \ldots i_{q+s}}.$$

Пусть $p > 0$, $q > 0$ и пусть фиксированы числа α и β, где $1 \leqslant \alpha \leqslant p$, $1 \leqslant \beta \leqslant q$. Тогда определено линейное отображение $Y^\alpha_\beta : T^{p,q}(V) \to T^{p-1,q-1}(V)$ такое, что

$$Y^\alpha_\beta (x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_q) =$$
$$= h_\beta (x_\alpha)\, x_1 \otimes \ldots \otimes x_{\alpha-1} \otimes x_{\alpha+1} \otimes \ldots \otimes x_p \otimes$$
$$\otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_{\beta-1} \otimes h_{\beta+1} \otimes \ldots \otimes h_q.$$

Оно наз. свертыванием (или сверткой) по α-му контравариантному и β-му ковариантному индексам. В координатах свертка записывается формулами

$$(Y^\alpha_\beta t)^{i_1 \ldots i_{p-1}}_{j_1 \ldots j_{q-1}} = t^{i_1 \ldots i_{\alpha-1} i i_{\alpha+1} \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{\beta-1} i j_{\beta+1} \ldots j_q}.$$

Напр., свертка $Y^1_1 t$ Т. типа (1, 1) есть след соответствующего линейного преобразования.

Аналогично определяются Т. на произвольном унитарном модуле V над коммутативно-ассоциативным кольцом с единицей. Перечисленные выше примеры и свойства Т. переносятся с соответствующими изменениями на этот случай, причем иногда надо предполагать, что V — свободный или конечно порожденный свободный модуль.

Пусть в конечномерном векторном пространстве над полем k фиксирована невырожденная билинейная форма g (напр., V — евклидово или псевдоевклидово пространство над $\mathbb{R}$); форму g называют в этом случае метрическим тензором. Метрический Т. определяет изоморфизм $\gamma : V \to V^*$ по формуле

$$\gamma(x)(y) = g(x, y), \quad x, y \in V.$$

Пусть $p > 0$ и пусть фиксирован индекс α, $1 \leqslant \alpha \leqslant p$. Тогда формула

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_q \mapsto$$
$$\mapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_{\alpha-1} \otimes x_{\alpha+1} \otimes \ldots \otimes x_p \otimes$$
$$\otimes \gamma(x_\alpha) \otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_q$$

определяет изоморфизм $\gamma^\alpha : T^{p,q}(V) \to T^{p-1,q+1}(V)$, называемый опусканием α-го контравариантного индекса. Иначе,

$$\gamma^\alpha(t) = Y^\alpha_1 (g \otimes t).$$

В координатах опускание индекса имеет вид

$$\gamma^\alpha(t)^{i_1 \ldots i_{p-1}}_{j_1 \ldots j_{q+1}} = g_{ij} t^{i_1 \ldots i_{\alpha-1} i i_{\alpha+1} \ldots i_{p-1}}_{j_2 \ldots j_{q+1}}.$$

Аналогично определяется изоморфизм подъема β-го ковариантного индекса $(1 \leqslant \beta \leqslant q)$:

$$\gamma_\beta : x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_q \mapsto$$
$$\mapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes \gamma^{-1}(h_\beta) \otimes$$
$$\otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_{\beta-1} \otimes h_{\beta+1} \otimes \ldots \otimes h_q,$$

отображающий $T^{p,q}(V)$ на $T^{p+1,q-1}(V)$. В координатах подъем индекса записывается формулой

$$\gamma_\beta(t)^{i_1 \ldots i_{p+1}}_{j_1 \ldots j_{q-1}} = g^{i i_{p+1}} t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{\beta-1} i j_\beta \ldots j_{q-1}},$$

где $\|g^{kl}\| = (\|g_{ij}\|^{\top})^{-1}$. В частности, подъем сначала 1-го, а потом и оставшегося ковариантного индекса метрич. тензора g приводит к Т. типа (2, 0) с координатами g^{kl} (контравариантный метрический тензор). Иногда опущенный (поднятый) индекс не передвигают на первое (последнее) место, а пишут на том же месте в нижней (верхней) группе индексов, ставя на образовавшемся пустом месте точку. Напр., для $t \in T^{2,0}(V)$ координаты Т. $\gamma^2(t)$ записывают в виде $t^{i\cdot}_{j} = g_{kj} t^{ik}$.

Любое линейное отображение $f: V \to W$ векторных пространств над k естественным образом определяет линейные отображения

$$T^{p,0}(f) = \bigotimes^{p} f : T^{p,0}(V) \longrightarrow T^{p,0}(W)$$

и

$$T^{q,0}(f^*) = \bigotimes^{q} f^* : T^{0,q}(W) \longrightarrow T^{0,q}(V).$$

Если f — изоморфизм, то определяется также линейное отображение

$$T^{p,q}(f) : T^{p,q}(V) \longrightarrow T^{p,q}(W),$$

причем $T^{0,q}(f) = T^{q,0}(f^*)^{-1}$. Соответствие $f \longmapsto T^{p,q}(f)$ обладает функторными свойствами. В частности, оно определяет линейное представление $a \longmapsto T^{p,q}(a)$ группы $\mathrm{GL}(V)$ в пространстве $T^{p,q}(V)$ (тензорное представление).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, 4 изд., М., 1971; [3] Кострикин А. И., Манин Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980; [4] Постников М. М., Линейная алгебра и дифференциальная геометрия, М., 1979; [5] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.

А. Л. Онищик.

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА — 1) Раздел тензорного исчисления, в к-ром изучаются алгебраич. операции над *тензорами*.

2) Т. а. унитарного модуля V над коммутативно-ассоциативным кольцом A с единицей — алгебра $T(V)$ над A, модуль к-рой имеет вид

$$T(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^{p,0}(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigotimes^{p} V,$$

а умножение определяется при помощи умножения *тензоров*. Наряду с контравариантной Т. а., рассматривают также ковариантную Т. а.

$$T(V^*) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^{0,p}(V)$$

и смешанную Т. а.

$$\hat{T}(V) = \bigoplus_{p,\,q=0}^{\infty} T^{p,q}(V).$$

Если модуль V свободен и конечно порожден, то $T(V^*)$ естественно изоморфна алгебре всех *полилинейных форм* на V. Любой гомоморфизм A-модулей $V \to W$ естественным образом определяет гомоморфизм Т. а. $T(V) \to T(W)$.

Т. а. $T(V)$ ассоциативна, но, вообще говоря, не коммутативна. Ее единицей является единица кольца $A = T^0(V)$. Любое A-линейное отображение модуля V в ассоциативную A-алгебру B с единицей единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебр $T(V) \to B$, переводящего единицу в единицу. Если V — свободный модуль с базисом $(v_i)_{i \in I}$, то $T(V)$ есть *свободная ассоциативная алгебра* с системой образующих $(v_i)_{i \in I}$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Кострикин А. И., Манин Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980.

А. Л. Онищик.

ТЕНЗОРНАЯ ПЛОТНОСТЬ, псевдотензор,— геометрический объект, описываемый в системе коорди-

нат $x=(x^1, \ldots, x^n)$ компонентами $a^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$, $1 \leqslant i_\nu, j_\mu \leqslant n$, в количестве n^{p+q}, изменяющимися при замене координат $x \to y=(y^1, \ldots, y^n)$ по правилу:

$$a^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \Delta^{-\varkappa} a^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdot \frac{\partial y^{i_2}}{\partial x^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \times$$

$$\times \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial y^{j_1}} \cdot \frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial y^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_p}}{\partial y^{j_p}},$$

где $\Delta = \det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right)$. Число $\varkappa$ наз. весом Т. п. При $\varkappa=0$ Т. п. является *тензором*. Такие понятия, как тип, валентность, ковариантность, контравариантность и т. п., вводятся по аналогии с соответствующими тензорными понятиями. Т. п. типа (1, 0) и (0, 1) наз. векторными плотностями, Т. п. типа (0, 0) — скалярными плотностями.

Л. П. Купцов.

ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — традиционное название раздела математики, изучающего *тензоры* и тензорные поля (см. *Тензорное расслоение*). Т. и. разделяется на *тензорную алгебру* (входящую в качестве основной части в *полилинейную алгебру*) и *тензорный анализ*, изучающий дифференциальные операторы на алгебре тензорных полей.

Т. и. является важной составной частью аппарата дифференциальной геометрии. В этой связи оно впервые систематически было развито Г. Риччи (G. Ricci) и Т. Леви-Чивитой (T. Levi-Civita) (см. [1]); его часто называли «исчислением Риччи».

Термин «тензор» еще с сер. 19 в. употребляется в механике при описании упругих деформаций тел (см. *Деформаций тензор*, *Напряжений тензор*). С нач. 20 в. аппарат Т. и. систематически используется в релятивистской физике (см. [2]).

Лит.: [1] Ricci G., Levi-Civita T., «Math. Ann.», 1901, Bd 54, S.125—201; [2] Einstein A., Grassmann M., «Z. Math. und Physik», 1914, Bd 62, S. 225—61. *А. Л. Онищик.*

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ — 1) Т. п. унитарных модулей V_1 и V_2 над коммутативно-ассоциативным кольцом A с единицей — A-модуль $V_1 \otimes_A V_2$ вместе с билинейным отображением

$$(x_1, x_2) \mapsto x_1 \otimes x_2 \in V_1 \otimes_A V_2,$$

универсальным в следующем смысле: для любого билинейного отображения β: $V_1 \times V_2 \to W$, где W — произвольный A-модуль, существует единственное линейное отображение b : $V_1 \otimes_A V_2 \to W$ такое, что

$$\beta(x_1, x_2) = b(x_1 \otimes x_2), \quad x_1 \in V_1, \ x_2 \in V_2.$$

Т. п. определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Оно всегда существует и может быть построено как фактормодуль свободного A-модуля F, порожденного множеством $V_1 \times V_2$, по подмодулю R, порожденному элементами вида

$$(x_1+y, x_2)-(x_1, x_2)-(y, x_2),$$
$$(x_1, x_2+z)-(x_1, x_2)-(x_1, z),$$
$$(cx_1, x_2)-c(x_1, x_2),$$
$$(x_1, cx_2)-c(x_1, x_2),$$
$$x_1, y \in V_1, \ x_2, z \in V_2, \ c \in A;$$

при этом $x_1 \otimes x_2 = (x_1, x_2)+R$. Если отказаться от коммутативности кольца A, то близкая конструкция позволяет сопоставить правому A-модулю V_1 и левому A-модулю V_2 абелеву группу $V_1 \otimes_A V_2$, также называемую Т. п. этих модулей [1]. В дальнейшем A предполагается коммутативным.

Т. п. обладает следующими свойствами:

$$A\otimes V^i \cong V,$$

$$V_1\otimes_A V_2 \cong V_2\otimes_A V_1,$$

$$(V_1\otimes_A V_2)\otimes_A V_3 \cong V_1\otimes_A (V_2\otimes_A V_3),$$

$$(\oplus_{i\in I} V_i)\otimes_A W \cong \oplus_{i\in I}(V_i\otimes_A W)$$

для любых A-модулей V, V_i, W.

Если $(x_i)_{i\in I}$ и $(y_j)_{j\in J}$ — базисы модулей V_1 и V_2, то $(x_i\otimes y_j)_{(i,\,j)\in I\times J}$ — базис модуля $V_1\otimes_A V_2$. В частности,

$$\dim (V_1\otimes_A V_2) = \dim V_1\cdot \dim V_2,$$

если V_i — свободные конечно порожденные модули (напр., конечномерные векторные пространства над полем A). Т. п. циклич. A-модулей вычисляется по формуле

$$(A/I)\otimes_A (A/J) \cong A/(I+J),$$

где I, J — идеалы в A.

Определяется также Т. п. любого (не обязательно конечного) семейства A-модулей. Т. п.

$$\overset{p}{\otimes} V = \underbrace{V\otimes_A \ldots \otimes_A V}_{p \text{ раз}}$$

наз. p-й тензорной степенью A-модуля V; его элементы — это контравариантные *тензоры* валентности p на V.

Любым двум гомоморфизмам A-модулей $\alpha_i : V_i\to W_i$, $i=1, 2$, сопоставляется их Т. п. $\alpha_1\otimes\alpha_2$, являющееся гомоморфизмом A-модулей $V_1\otimes_A V_2\to W_1\otimes_A W_2$ и определяемое формулой

$$(\alpha_1\otimes\alpha_2)(x_1\otimes x_2) = \alpha(x_1)\otimes\alpha_2(x_2), \quad x_i\in V_i.$$

Эта операция также распространяется на любые семейства гомоморфизмов и обладает функторными свойствами (см. *Модуль*). Она определяет гомоморфизм A-модулей

$$\mathrm{Hom}_A(V_1, W_1)\otimes_A \mathrm{Hom}_A(V_2, W_2)\longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(V_1\otimes V_2,\ W_1\otimes W_2),$$

к-рый является изоморфизмом, если все V_i, W_i свободны и конечно порождены.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Кэш Ф., Модули и кольца, пер. с нем., М., 1981; [3] Кострикин А. И., Манин Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980.

А. Л. Онищик.

2) Т. п. алгебр C_1 и C_2 над коммутативно-ассоциативным кольцом A с единицей — алгебра $C_1\otimes_A C_2$ над A, к-рая получается, если ввести в Т. п. A-модулей $C_1\otimes_A C_2$ умножение по формуле

$$(x_1\otimes x_2)(y_1\otimes y_2) = (x_1y_1)\otimes(x_2y_2), \quad x_i,\ y_i\in C_i.$$

Определение распространяется на случай любого семейства сомножителей. Т. п. $C_1\otimes_A C_2$ ассоциативно, коммутативно или содержит единицу, если этим свойством обладают обе алгебры C_i. Если C_1 и C_2 — алгебры с единицами над полем A, то $\tilde{C}_1 = C_1\otimes 1$ и $\tilde{C}_2 = C_2\otimes 1$ — подалгебры в $C_1\otimes_A C_2$, изоморфные C_1 и C_2 и поэлементно перестановочные. Обратно, пусть C — алгебра с единицей над полем A, C_1, C_2 — ее подалгебры, содержащие единицу и такие, что $x_1x_2 = x_2x_1$ для любых $x_i\in C_i$. Тогда существует гомоморфизм A-алгебр $\varphi : C_1\otimes_A C_2\to C$ такой, что $\varphi(x_1\otimes x_2) = x_1x_2$, $x_i\in C_i$. Для того чтобы φ был изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы в C_1 существовал базис над A, являющийся базисом правого C_2-модуля C.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962.

А. Л. Онищик.

3) Т. п., кронекерово произведение, матриц $A=\|\alpha_{ij}\|$ и B — матрица

$$A\otimes B=\begin{Vmatrix}\alpha_{11}B & \dots & \alpha_{1n}B\\ \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{m1}B & \dots & \alpha_{mn}B\end{Vmatrix}$$

Здесь A есть $(m\times n)$-матрица, B есть $(p\times q)$-матрица, а $A\otimes B$ есть $(mp\times nq)$-матрица над коммутативно-ассоциативным кольцом k с единицей.

Свойства Т. п. матриц:

$$(A_1+A_2)\otimes B=A_1\otimes B+A_2\otimes B,$$
$$A\otimes(B_1+B_2)=A\otimes B_1+A\otimes B_2,$$
$$\alpha(A\otimes B)=\alpha A\otimes B=A\otimes\alpha B,$$

где $\alpha\in k$,

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=AC\otimes BD.$$

Если $m=n$ и $p=q$, то

$$\det(A\otimes B)=(\det A)^p(\det B)^n.$$

Пусть k — поле, $m=n$ и $p=q$. Тогда $A\otimes B$ подобна $B\otimes A$ и $\det(A\otimes E_p-E_n\otimes B)$, где E_n — единичная матрица, совпадает с результантом характеристич. многочленов матриц A и B.

Если $\alpha: V\to V'$, $\beta: W\to W'$ — гомоморфизмы унитарных свободных конечно порожденных k-модулей и A, B — их матрицы в нек-рых базисах, то $A\otimes B$ является матрицей гомоморфизма $\alpha\otimes\beta: V\otimes W\to V'\otimes W'$ в базисах, состоящих из Т. п. базисных векторов.

Лит.: [1] Халмош П., Конечномерные векторные пространства, пер. с англ., М., 1963; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962, гл. 3. *Д. А. Супруненко.*

4) Т. п. представлений π_1 и π_2 группы G в векторных пространствах E_1 и E_2 соответственно — представление $\pi_1\otimes\pi_2$ группы G в векторном пространстве $E_1\otimes E_2$, однозначно определенное условием:

$$(\pi_1\otimes\pi_2)(\xi_1\otimes\xi_2)=\pi_1(g)\,\xi_1\otimes\pi_2(g)\,\xi_2$$

для всех $\xi_1\in E_1$, $\xi_2\in E_2$, $g\in G$. Если π_1 и π_2 — непрерывные *унитарные представления* топологич. группы G в гильбертовых пространствах E_1 и E_2 соответственно, то операторы $(\pi_1\otimes\pi_2)(g)$, $g\in G$, в векторном пространстве $E_1\otimes E_2$ допускают однозначное продолжение по непрерывности до непрерывных линейных операторов $(\pi_1\widehat{\otimes}\pi_2)(g)$, $g\in G$, в гильбертовом пространстве $E_1\widehat{\otimes}E_2$ (пополнении пространства $E_1\otimes E_2$ относительно скалярного произведения, определяемого формулой $(\xi_1\otimes\xi_2,\ \eta_1\otimes\eta_2)=(\xi_1,\ \eta_1)(\xi_2,\ \eta_2)$) и отображение $\pi_1\otimes\pi_2: g\to(\pi_1\widehat{\otimes}\pi_2)g$, $g\in G$ является непрерывным унитарным представлением группы G в гильбертовом пространстве $E_1\widehat{\otimes}E_2$, называемым тензорным произведением унитарных представлений π_1 и π_2. Представления $\pi_1\otimes\pi_2$ и $\pi_2\otimes\pi_1$ эквивалентны (унитарно, если π_1 и π_2 унитарны). Операция Т. п. может быть определена и для непрерывных представлений топологич. групп в топологич. векторных пространствах общего вида. *А. И. Штерн.*

5) Т. п. векторных расслоений E и F над топологическим пространством X — векторное расслоение $E\otimes F$ над X, слоем к-рого в точке $x\in X$ является Т. п. слоев $E_x\otimes F_x$. Т. п. можно определить как расслоение, функции перехода к-рого являются Т. п. функций перехода расслоений E и F в одном и том же тривиализирующем покрытии (см. *Тензорное произведение* матриц).

Лит.: [1] Атья М., Лекции по K-теории, пер. с англ., М., 1967. *А. Л. Онищик.*

ТЕНЗОРНОЕ РАССЛОЕНИЕ типа (p, q) на дифференцируемом многообразии M — векторное расслоение $T^{p,q}(M)$ над M, ассоциированное с расслоением касательных реперов и имеющее в каче-

стве стандартного слоя пространство $T^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *тензоров* типа (p, q) на $\mathbb{R}^n$, в к-ром группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ действует при помощи тензорного представления. Напр., $T^{1,0}(M)$ совпадает с *касательным расслоением* $T(M)$ над M, а $T^{0,1}(M)$ — с кокасательным расслоением $T(M)^*$. В общем случае Т. р. изоморфно тензорному произведению касательных и кокасательных расслоений:

$$T^{p,q}(M) \cong \bigotimes^{p} T(M) \otimes \bigotimes^{q} T(M)^*.$$

Сечения Т. р. типа (p, q) наз. тензорными полями типа (p, q) и являются основным объектом исследования дифференциальной геометрии. Напр., риманова структура на M — это гладкое сечение расслоения $T^{0,2}(M)$, значения к-рого являются положительно определенными симметрич. формами. Гладкие сечения расслоения $T^{p,q}(M)$ образуют модуль $D^{p,q}(M)$ над алгеброй $F^\infty(M) = D^{0,0}(M)$ гладких функций на M. Если M — паракомпактное хаусдорфово многообразие, то

$$D^{p,q}(M) \cong \bigotimes^{p} D^1(M) \otimes \bigotimes^{q} D^1(M)^*,$$

где $D^1(M) = D^{1,0}(M)$ — модуль гладких векторных полей, $D^1(M)^* = D^{0,1}(M)$ — модуль пфаффовых дифференциальных форм, а тензорные произведения берутся над $F^\infty(M)$. В классической дифференциальной геометрии тензорные поля иногда наз. просто тензорами на M.

Лит.: [1] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии, т. 1, пер. с англ., М., 1981; [2] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964. *А. Л. Онищик.*

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ — обобщение *векторного анализа*, раздел *тензорного исчисления*, изучающий дифференциальные операторы, действующие на алгебре тензорных полей $D(M)$ дифференцируемого многообразия M. Рассматриваются также операторы, действующие на более общие, чем тензорные поля, геометрич. объекты: тензорные плотности, дифференциальные формы со значениями в векторном расслоении и т. д.

Наибольший интерес представляют операторы, действие к-рых не выводит за пределы алгебры $D(M)$.

1) *Ковариантная производная* вдоль векторного поля X — линейное отображение ∇_X пространства векторных полей $D^1(M)$ многообразия M, зависящее от векторного поля X и удовлетворяющее условиям:

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \quad \nabla_X (fZ) = f\nabla_X Z + (Xf)Y,$$

где $X, Y, Z \in D'(M)$, f, g — гладкие функции на M. Определяемые этим оператором *связность* Γ и *параллельное перенесение* позволяют распространить действие ковариантной производной до линейного отображения алгебры $D(M)$ в себя; при этом отображение ∇_X есть дифференцирование, сохраняет тип тензорного поля и перестановочно со сверткой.

В локальных координатах $u^1, u^2, \ldots, u^n$ ковариантная производная тензора с компонентами $T\left(\begin{smallmatrix} i_1 \ldots i_l \\ j_1 \ldots j_m \end{smallmatrix}\right)$ относительно вектора $X = \xi^i \dfrac{\partial}{\partial u^i}$ определяется так:

$$\nabla_X T = \xi^s \left(\frac{\partial T^{i_1 \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_m}}{\partial u^s} + \Gamma^{i_1}_{ks} T^{k \ldots i_l}_{j_1 \ldots j_m} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots - \Gamma^{k}_{j_1 s} T^{i_1 \ldots i_l}_{k \ldots j_m} - \ldots \right),$$

Γ^i_{ks} — объект связности Γ.

2) *Ли производная* вдоль векторного поля X — отображение L_X пространства $D'(M)$, определяемое формулой $L_X : Y \to [X, Y]$, где $[X, Y]$ — коммутатор век-

торных полей X, Y. Этот оператор также однозначно продолжается до дифференцирования $D(M)$, сохраняет тип тензоров и перестановочен со сверткой. В локальных координатах производная Ли тензора $T\left(T\begin{pmatrix} i_1 \dots i_l \\ j_1 \dots j_m \end{pmatrix}\right)$ выражается так:

$$L_X T = \xi^k \frac{\partial T^{i_1 \dots i_l}_{j_1 \dots j_m}}{\partial u^k} + T^{i_1 \dots i_l}_{k \dots j_m} \frac{\partial \xi^k}{\partial u^{i_1}} + \dots$$

$$\dots - T^{k \dots i_l}_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial \xi^{i_1}}{\partial u^k} - \dots .$$

3) Внешний дифференциал (внешняя производная) — линейный оператор d, сопоставляющий внешней *дифференциальной форме* (кососимметричному ковариантному тензору) степени p форму такого же вида и степени $p+1$, удовлетворяющий условиям:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2, \qquad d(d\omega) = 0,$$

где $\wedge$ — символ внешнего произведения, r — степень ω_1. В локальных координатах внешняя производная тензора $\omega(\omega_{i_1 \dots i_p})$ выражается так:

$$d\omega = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^k \frac{\partial \omega_{i_1 \dots \hat{i_k} \dots i_{p+1}}}{\partial u^{i_k}}.$$

Оператор d — обобщение оператора rot.

4) *Кривизны тензор* симметричного невырожденного дважды ковариантного тензора g_{ij} представляет собой действие нек-рого нелинейного оператора R:

$$g_{ij} \longrightarrow R^s_{mlk} = \frac{\partial \Gamma^s_{km}}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma^s_{kl}}{\partial u^m} + \sum_p \left(\Gamma^s_{lp}\Gamma^p_{km} - \Gamma^s_{mp}\Gamma^p_{kl}\right),$$

где

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is}\left(\frac{\partial g_{js}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial u^s} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^s}\right).$$

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [2] Схоутен Я.-А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., М., 1965; [3] Мак-Коннел А.-Д., Введение в тензорный анализ, пер. с англ., М., 1963; [4] Сокольников И. С., Тензорный анализ, пер. с англ., М., 1971.

К. М. Белов.

ТЕОРЕМА — математическое утверждение, истинность к-рого установлена путем *доказательства*.

Понятие Т. развивалось и уточнялось вместе с понятием математич. доказательства. При использовании *аксиоматического метода* Т. рассматриваемой теории определяются как высказывания, выводимые чисто логич. путем из нек-рых заранее выбранных и фиксированных высказываний, называемых аксиомами. Поскольку аксиомы предполагаются истинными, то истинными должны быть и Т. Дальнейшее уточнение понятий доказательства и Т. связано с предпринятым в математич. логике исследованием понятия *логического следствия*, в результате чего для широкого класса математич. теорий процесс логич. вывода удалось свести к преобразованию формул, т. е. математич. утверждений, записанных на подходящем формализованном языке, по точно сформулированным правилам (*вывода правилам*), относящимся лишь к форме (а не к содержанию) предложений. В возникающих таким образом формальных теориях доказательством наз. конечная последовательность формул, каждая из к-рых либо является аксиомой, либо получается из нек-рых предыдущих формул этой последовательности по одному из правил вывода. Т. наз. формула, являющаяся последней формулой в нек-ром доказательстве.

Такое уточнение понятия Т. позволило получить, пользуясь строгими математич. методами, ряд важных

результатов о математич. теориях. В частности, было установлено, что аксиоматич. теории, представляющие многие существенные разделы математики (напр., арифметику), неполны, т. е. существуют предложения, истинность или ложность к-рых нельзя установить чисто логич. путем на основе аксиом. Эти теории, как правило, неразрешимы, т. е. не существует единого метода (алгоритма), позволяющего установить, является ли Т. произвольное данное высказывание. *В. Е. Плиско.*

ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВАЯ ФУНКЦИЯ — то же, что *арифметическая функция*.

ТЕОРИЯ формальная — то же, что *формальная система*. См. также *Аксиоматический метод*.

***K*-ТЕОРИЯ** — раздел *алгебраической топологии*, изучающий свойства векторных расслоений алгебраич. и топологич. методами. В отличие от *алгебраической K-теории*, иногда наз. топологической *K*-теорией. В расширенном смысле термин «*K*-теория» употребляется для обозначения области математики, включающей в себя алгебраич. *K*-т. и топологич. *K*-т. и характеризующейся специфич. алгебраич. и топологич. методами исследования, называемыми методами *K*-т. В узком смысле *K*-т.— *обобщенная теория когомологий*, порожденная категорией *векторных расслоений*.

Источником *K*-т. являются векторные косые произведения (расслоения), изучаемые в алгебраич. топологии, и их многочисленные гомотопич. и алгебраич. свойства. Наиболее важные свойства расслоений и связанные с ними понятия, используемые в *K*-т.,— это свойства *характеристических классов* расслоений, *классифицирующие пространства*, алгебраич. операции с расслоениями (прямые суммы, тензорные произведения, внешние степени), прообраз расслоения. Вторым источником *K*-т. является связь с алгебраич. *K*-т., к-рая заключается в том, что пространство непрерывных сечений векторного расслоения можно рассматривать как модуль над алгеброй непрерывных функций, к-рый оказывается *проективным модулем*.

По аналогии с *K*-функторами в алгебраич. *K*-т. были определены группы $K(X)$ как *Гротендика группы* категории векторных расслоений с базой X. Используя понятие *индуцированного расслоения*, определенные группы $K(X)$ дополняются до определения функтора из категории топологич. пространств в категорию абелевых групп. Обычно *K*-функтор изучается не во всей категории топологич. пространств, а в меньших подкатегориях. Наиболее употребительной является категория *клеточных пространств* (комплексов). Определение *K*-функтора распространяется на категории пунктированных топологич. пространств и пар топологич. пространств и дополняется группами $K^i(X, A)$, $i \leqslant 0$, полагая

$$K^i(X, A) = K(X \times D^{-i},\ X \times S^{-i-1} \cup A \times D^{-i}),$$

где D^{-i} есть $-i$-мерный диск, а S^{-i-1} — его граница. Совокупность функторов K^i, $i \leqslant 0$, удовлетворяет аксиомам обобщенной теории когомологий, к-рые следует видоизменить с учетом неравенства $i < 0$.

Различают *K*-т., построенную по категории вещественных векторных расслоений (вещественная *K*-теория), и *K*-т., построенную по категории комплексных векторных расслоений (комплексная *K*-теория). Изучаются и др. варианты *K*-т. с учетом дополнительных структур в векторных расслоениях, напр. эквивариантная *K*-т.

Важным свойством групп $K(X)$ при построении обобщенной теории когомологий является периодичность Ботта в комплексной *K*-т. Она позволяет, в частности, снять ограничение $i \leqslant 0$ и превратить функторы K^i в $\mathbb{Z}_2$-градуированную обобщенную теорию когомологий. Основное же значение периодичности Ботта заключает-

ся в широких вычислительных возможностях построенной K-т.

К K-т. применимы вычислительные методы обобщенной теории когомологий, в частности метод *спектральных последовательностей*, позволивший вычислить группы $K(X)$ для многих классических конечномерных и бесконечномерных пространств. Напр., если $X=\mathbb{C}P^n$ — комплексное проективное пространство, то

$$K(\mathbb{C}P^n)=\mathbb{Z}[u]/\{u^{n+1}\},$$

где $u=[\eta]-1$, а η — одномерное расслоение Хопфа.

Для вещественной K-т. с помощью *Ботта теоремы периодичности* строится $\mathbb{Z}_8$-градуированная обобщенная теория когомологий. Применяя дополнительные алгебраич. структуры в векторных расслоениях, построены более общие теории когомологий, органически включающие в себя комплексную вещественную и симплектич. K-т.

В 60-х гг. с помощью K-т. были переосмыслены многие задачи как в топологии, так и в др. разделах математики. Наиболее важные результаты в K-т. связаны с систематич. изучением характеристич. классов и *когомологических операций*, в терминах к-рых были доказаны теоремы целочисленности для мультипликативных родов (аналоги *Римана — Роха теоремы*), даны простые и прозрачные решения классич. задач, связанные с алгебрами с делением и векторными полями на сферах.

Методы топологич. K-т. дали толчок для развития других разделов топологии, напр. теории бордизмов. Важное значение для развития дифференциальной топологии имело доказательство гипотезы Адамса об описании J-функтора в терминах когомологич. операций K-т. (см. [2]).

Наиболее впечатляющим является использование методов K-т. в проблеме вычисления индекса эллиптич. операторов. С помощью геометрич. конструкций векторных расслоений были разумно обобщены понятия дифференциальных и *псевдодифференциальных операторов*, их символов, *Соболева пространств*, эллиптич. операторов и их индексов и получена формула Атьи — Зингера [3]

$$\operatorname{ind}\sigma(D)=\langle \operatorname{ch}\sigma\cdot T(X),\ [X]\rangle,$$

описывающая индекс эллиптич. оператора на компактном замкнутом многообразии X с символом σ в терминах *Тодда класса* $T(X)$ и *Чжэня характера* оператора $\sigma(D)$. Как следствие из формулы Атьи — Зингера получаются частные формулы для различных классов операторов, имеющих важное значение в геометрии, топологии и др. разделах математики. Напр., формула Хирцебруха выражает *сигнатуру* ориентированного компактного замкнутого многообразия через характеристич. *Понтрягина числа* этого многообразия. Сама формула Хирцебруха и ее обобщения на неодносвязные многообразия применяется в дифференциальной топологии в задачах классификации гладких структур многообразий.

В 70-х гг. появились обобщения K-т., связанные с применением в ней функциональных методов и приспособлением K-т. к различным задачам топологии, геометрии, теории дифференциальных уравнений. Одно из обобщений заключается в замене категории векторных расслоений на категорию *локально тривиальных расслоений*, слоем к-рых является конечно порожденные модули, проективные над нек-рой C^*-*алгеброй* A, а структурные группы суть группы автоморфизмов этих модулей. С помощью этого класса расслоений построены нетривиальные когомологич. инварианты бесконечномерных представлений бесконечных дискретных групп π. Если дискретная группа π является фундаментальной группой компактного многообразия, допус-

кающего риманову метрику неположительной кривизны двумерной, то характеристич. числа вида

$$\tau_x(M)=\langle L(M)x,\ [M]\rangle,$$

— т. н. высшие сигнатуры, являются гомотопич. инвариантами (здесь x — произвольный рациональный класс Понтрягина — Хирцебруха многообразия M с фундаментальной группой π).

В расширенном смысле методы K-т. оказали большое влияние на развитие идей дифференциальной топологии. С помощью соединения алгебраич. и топологич. K-т. в дифференциальной топологии были решены задачи о классификации гладких и кусочно линейных структур на многообразиях, о гомотопич. и топологич. инвариантности характеристич. классов Понтрягина и др. Методы K-т. имеют широкое применение в функциональном анализе, в частности в теории *банаховых алгебр*.

Лит.: [1] Атья М., Хирцебрух Ф., «Математика», 1962, т. 6, №2, с. 3—39; [2] Сулливан Д., Геометрическая топология, пер. с англ., М., 1975; [3] Atiyah M., Singer I., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1963, v. 69, p. 422—33; [4] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [5] Атья М., Лекции по K-теории, пер. с англ., М., 1967; [6] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [7] Каруби М., K-теория, пер. с англ., М., 1981.

А. С. Мищенко.

ТЁПЛИЦА МАТРИЦА, T-матрица,— бесконечная матрица $\|a_{nk}\|$, $n,\ k=1,\ 2,\ \ldots$, удовлетворяющая условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\,a_{nk}\,|\leqslant M,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

и M не зависит от n;

$$\lim_{n\to\infty}a_{nk}=0,\ n=1,\ 2,\ \ldots;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}=1.$$

Эти условия являются необходимыми и достаточными, чтобы *матричный метод суммирования*, определенный преобразованием последовательности $\{s_n\}$ в последовательность $\{\sigma_n\}$ посредством матрицы $\|a_{nk}\|$:

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}s_k,$$

был регулярным (см. *Регулярные методы суммирования*). Необходимость и достаточность этих условий для регулярности метода была доказана О. Тёплицем [1] для треугольных матриц.

Лит.: [1] Toeplitz O., «Prace matematyczno-fizyczne», 1911, Bd 22, S. 113—19; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [3] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960.

И. И. Волков.

ТЁПЛИЦЕВА ФОРМА ИНДЕФИНИТНАЯ — квадратичная форма, определенная на пространстве Ф финитных последовательностей $x=\{\xi_p\}_{-\infty}^{\infty}$ выражением

$$(x,\ x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_{p-q}\xi_p\overline{\xi}_q,$$

причем последовательность $c=\{c_p\}_{-\infty}^{\infty}$, $c_0=\overline{c}_0$, такова, что, начиная с нек-рой размерности N, форма $(x,\ x)$ на каждом подпространстве

$$\Phi^N\subset\Phi,\ \Phi^N:\{\xi_p;\ \xi_p=0,\ |\,p\,|>N\}$$

приводится к канонич. виду, содержащему $\varkappa$ положительных квадратов. С помощью Т. ф. и. в пространстве Φ вводится *индефинитное скалярное произведение*; после факторизации по изотропному подпространству и пополнения Φ превращается в *Понтрягина пространство*.

Н. К. Никольский, Б. С. Павлов.

ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ УРАВНЕНИЕ — однородное дифференциальное уравнение с частными производ-

ными

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0.$$

Это уравнение является простейшим представителем *параболического типа уравнений*. При $n=3$ оно описывает процесс распространения тепла в твердом теле. К основным корректно поставленным задачам для Т. у. относятся первая краевая задача (в цилиндрич. области) и задача Коши — Дирихле (в полупространстве). *Решение последней задачи выписывается в явном виде:*

$$u(x, t) = (2a\sqrt{\pi t})^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}\right) \varphi(\xi)\, d\xi, \quad t > 0,$$

где $\varphi(\xi)$ — заданная непрерывная равномерно ограниченная в $\mathbb{R}^n$ функция.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981. *А. П. Солдатов.*

ТЕРМ — языковое выражение, призванное обозначать объекты. Напр., выражения 1, $0+1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ являются различными Т., обозначающими один и тот же объект. Т. могут содержать *свободные переменные* (параметры), фиксация значений к-рых однозначно определяет в соответствии с семантич. правилами языка нек-рый объект — значение Т. при данных значениях его свободных переменных. Так, напр., если f — переменная, значениями к-рой являются интегрируемые действительные функции, а x, a, b — переменные по действительным числам, то выражение $\int_a^b f(x)\, dx$ является Т. с тремя параметрами a, b и f, обозначающим при каждом значении параметров вполне определенное действительное число (переменная x является в этом Т. связанной). Синтаксически Т. характеризуются тем, что их можно подставлять вместо переменных в другие выражения языка — Т. и формулы, получая при этом Т. и формулы соответственно.

В *формализованных языках* имеются формальные, не зависящие от семантики языка правила построения Т. и выделения в них свободных переменных; для многосортных языков имеются также правила, определяющие сорт возникающих Т. *В. Н. Гришин.*

ТЕРМОДИНАМИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, связанные с исследованием наиболее общих свойств макроскопич. систем, находящихся в состоянии термодинамич. равновесия, и процессов перехода между этими состояниями.

Математич. аппарат макроскопич. термодинамики исходит из т. н. начал термодинамики. Согласно нулевому началу, термодинамич. система должна иметь единственное в термодинамич. смысле устойчивое равновесное состояние, определяемое фиксацией внешних условий, в к-рые помещена система. Первое начало — закон сохранения и превращения энергии — для квазистатического бесконечно малого изменения параметров состояния системы (т. е. для достаточно медленного перехода из одного равновесного состояния в другое) связывает тепловой эффект этого процесса δQ с изменением внутренней энергии системы E и величиной произведенной системой работой δW. Если в качестве наглядного и достаточно простого примера выбрать систему типа газа с фиксированным числом частиц, то его состояние можно зафиксировать тремя параметрами, задав, к примеру, его температуру θ, объем V и число частиц N (возможны и другие варианты). Тогда работа, связанная с процессом расширения, $\delta W = p dV$, где p — давление газа, и первое начало определит баланс энергии

$$\delta Q = dE + \delta W = dE + p dV. \qquad (1)$$

Из второго начала термодинамики для квазистатич.

процессов — факта существования энтропии как однозначной функции термодинамич. состояния такой, что ее полный дифференциал

$$dS = \frac{1}{\theta}\,\delta Q, \tag{2}$$

следует система уравнений для удельной энергии $\varepsilon = E/N$ как функции θ и удельного объема $v = V/N$:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta}\right)_v &= c_v(\theta, v); \\ \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\right)_\theta &= \theta\,\frac{\partial p(\theta, v)}{\partial \theta} - p(\theta, v), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

определяющих ее с точностью до константы $\varepsilon = \varepsilon(\theta, v) + \varepsilon_0$, а всю внутреннюю энергию — с точностью до аддитивной константы $E = N\varepsilon(\theta, v) + N\varepsilon_0$, и система уравнений для удельной энтропии

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \theta}\right)_v = \frac{1}{\theta}\,c_v(\theta, v); \quad \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_\theta = \frac{\partial p(\theta, v)}{\partial \theta}, \tag{4}$$

определяющих $s = s(\theta, v) + s_0$ с точностью до энтропийной константы (полная энтропия $S(\theta, V, N) = Ns(\theta, v) + Ns_0$ — с точностью до аддитивной константы Ns_0).

Остальные термодинамич. характеристики системы, термодинамич. потенциалы и т. д. определяются уже с помощью полученных решений с применением математич. операций не сложнее операций дифференцирования.

Для получения решений уравнений (3) и (4) термодинамич. система должна быть задана. Эта конкретизация системы обычно включает задание уравнений состояния (в приведенном упрощенном случае — одного) $p = p(\theta, v)$ и калорич. уравнения состояния — теплоемкости $c_v = c_v(\theta, v)$, к-рые определяют макроскопич. реакцию системы по отношению к изменению внешних параметров (в приведенном случае — объема) и по отношению к ее нагреванию. Константу ε_0 можно отнести в счет выбора начала отсчета энергии. Энтропийная константа, необходимая при решении ряда конкретных проблем, определяется с помощью третьего начала термодинамики, к-рое в радикальной формулировке Планка выглядит как дополнительное условие к системе уравнений (4):

$$\lim s\,|_{\theta \to 0} = 0. \tag{5}$$

Приведенную выше постановку задачи можно назвать прямой. Возможны различные варианты обратных ее постановок.

При исследовании низкотемпературных проблем и в ряде других задач используется и иная постановка: согласно первым уравнениям для ε и s и третьему началу, следует:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon(\theta, v) &= \varepsilon_0(v) = \int_0^\theta c_v(\theta', v)\,d\theta'; \\ s(\theta, v) &= \int_0^\theta \frac{1}{\theta'}\,c_v(\theta', v)\,d\theta'. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Для реализации этих расчетов необходимо задание калорич. уравнения, т. е. $c_v(\theta, v)$, и удельной энергии основного состояния системы $\varepsilon_0(v) = E_0/N$. Как правило, эта величина непосредственно не измеряется, она может быть задана для каких-либо определенных моделей или косвенно определена с помощью упомянутых выше уравнений состояния.

Учет наличия внешних полей (электростатического, магнитного и т. д.) можно включить в указанную схему (увеличится общее число уравнений типа (3) и (4)), но его проще всего произвести с помощью подсчета изменения свободной энергии $F = E - \theta S$ при включении поля a от нуля до заданной величины. Реакция системы на это включение должна быть задана как соответствующее уравнение состояния $A = A(\theta, a)$ такое, что работа

системы при квазистатич. изменении поля на da будет равна $\delta W = A(\theta, a)da$. Так как, согласно (1) и (2),

$$dF = d(E - \theta E) = -Sd\theta + \delta W, \qquad (7)$$

то искомая величина (опущены все переменные, кроме θ и a)

$$\Delta F = F(\theta, a) - F(\theta, 0) = -\int_0^a A(\theta, a')\,da'. \qquad (8)$$

Изменение термодинамич. характеристик, связанное с включением поля a, определяется с помощью соответствующего дифференцирования величины (8) и несложных алгебраич. операций.

Ввиду того что задание термодинамич. системы с помощью удобных формул для c_v, p, A и т. д. возможно только для упрощенных моделей, расчет реальных термодинамич. эффектов (т. е. решение задач технич. термодинамики) производится с помощью численных методов, специальных вспомогательных таблиц и т. д.

Проводились исследования особенностей термодинамич. систем вблизи критич. точки (или фазового перехода 2-го рода ввиду его определенного подобия критич. явлениям). Поведение ряда термодинамич. характеристик вблизи этой точки характеризуют степенями безразмерного отклонения температуры от критической: $(|\theta - \theta_0|/\theta_0)^k$, параметры k наз. критич. индексами, для к-рых методами макроскопич. термодинамики (иногда с привлечением общих схем равновесной статистич. механики) устанавливается ряд универсальных соотношений (обычно в виде неравенств) (3).

Математич. проблемы термодинамич. теории явлений переноса несложны (см. [1], [4]). Это — исследование системы линейных соотношений, связывающих потоки $\dot{\zeta}_l$ с отклонениями макроскопич. величин ζ_l от равновесных значений. Коэффициенты при ζ_l подчинены определенным условиям симметрии и выражаются через реальные коэффициенты переноса. Если же к этим уравнениям отнестись как к временны́м уравнениям для $\zeta_l(t)$ (в достаточно огрубленной шкале времени), то решение этой системы (лишь в редких случаях возможное в общем виде) определит в варианте полуфеноменологич. теории характер релаксации системы к равновесному состоянию.

Лит.: [1] Базаров И. П., Термодинамика, 3 изд., М., 1983; [2] Кубо Р., Термодинамика, пер. с англ., М., 1970; [3] Стенли Г., Фазовые переходы и критические явления, пер. с англ., М., 1973; [4] де Гроот С., Мазур П., Неравновесная термодинамика, пер. с англ., М., 1964. *И. А. Квасников.*

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ — любая из четырех функций, определенных на множестве состояний макроскопич. (термодинамич.) системы: энергия, тепловая функция (или энтальпия), свободная энергия Гельмгольца и свободная энергия Гиббса (иногда наз. термодинамич. потенциалом в узком смысле).

При формальном построении термодинамики состояния (однокомпонентной) термодинамич. системы описываются любой из пар термодинамич. параметров (s, v), (s, p), (T, v), (T, p), где s — удельная энтропия системы, T — ее абсолютная температура, p — давление и v — удельный объем. Каждой из этих пар удобно приписать свой Т. п.: паре (s, v) — энергию $E = E(s, v)$, паре (s, p) — тепловую функцию $W = W(s, p)$, паре (T, v) — свободную энергию Гельмгольца $F = F(T, v)$ и, наконец, паре (T, p) — свободную энергию Гиббса $\Phi = \Phi(T, p)$.

При этом если выбрана какая-нибудь пара параметров, описывающих состояния системы, то два других параметра выражаются как частные производные соответствующего Т. п. (отсюда и название). Параметры s, T и p, v являются сопряженными в том смысле, что каждый из них выражается как частная производная по другому (напр., при выборе пары (s, v) с потенциалом $E(s, v)$ параметры T и p):

$$T = \frac{\partial E}{\partial s}, \quad p = -\frac{\partial E}{\partial v}. \qquad (1)$$

Переход от одной пары параметров с ее потенциалом к другой паре с соответствующим потенциалом задается с помощью *Лежандра преобразования*. Так, при переходе от пары (s, v) к паре (T, v) потенциал $F(T, v)$ этой пары равен

$$F(T, v) = E(s(T), v) - s(T)\,T,$$

где $s(T)$ находится из уравнения (1), т. е. $F(T, v)$ с точностью до знака совпадает с преобразованием Лежандра функции $E(s, v)$ как функции переменной s.

При содержательном построении термодинамики с помощью равновесных гиббсовских ансамблей Т. п. могут быть выражены с помощью термодинамич. предела, деленного на объем логарифма статистич. суммы (и его производных) какого-нибудь из гиббсовских ансамблей. Напр., свободная энергия Гельмгольца равна

$$F(T, v) = \lim_{N \to \infty,\ \frac{|\Lambda|}{N} \to v} |\Lambda|^{-1} \ln Z(T, N, \Lambda),$$

где $Z(T, N, \Lambda)$ — *статистическая сумма* малого канонич. ансамбля для системы из N частиц, заключенных в области Λ ($|\Lambda|$ — объем этой области Λ), при фиксированном значении температуры T (см. [3]).

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая механика, 2 изд., М., 1964 (Теоретич. физика, т. 5); [2] Гельфанд И. М., Фомин В. С., Вариационное исчисление, М., 1961; [3] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971. *Р. А. Минлос.*

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД — основной прием статистич. физики, заключающийся в том, что для изучения большой (но конечной) физич. системы ее аппроксимируют нек-рой бесконечной идеализированной системой. Так, напр., систему, состоящую из N частиц (молекул), заполняющих ограниченную область Λ пространства $\mathbb{R}^3$, при большом N и большой (сравнительно с размерами молекул) области Λ заменяют системой из бесконечного числа тех же молекул, заполняющих все пространство, так что при этом свойства и характеристики конечной системы (характер динамики, свойства равновесных ансамблей и т. д.) асимптотически (по N и по Λ) близки к аналогичным свойствам и характеристикам предельной системы.

Лит.: [1] Рюэль Д., *Статистическая механика. Строгие* результаты, пер. с англ., М., 1970; [2] Гиббсовские состояния в статистической физике, пер. с англ., М., 1978; [3] Минлос Р. А., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 1, с. 133—90. *Р. А. Минлос.*

ТЕРЦИАРНЫЙ ИДЕАЛ — идеал I кольца R, к-рый нельзя представить в виде пересечения строго больших чем I правого частного $r(I, A)$ и идеала B. Все неприводимые идеалы терциарны. В нётеровых кольцах терциарность совпадает с примарностью (см. *Аддитивная теория идеалов*, *Примарный идеал*, *Примарное разложение*).

Пусть кольцо R удовлетворяет условию максимальности для левых и правых частных идеалов и каждый идеал разложим в пересечение конечного числа неприводимых идеалов. Тогда для каждого идеала Q существует терциарный радикал $\mathrm{ter}(Q)$ — наибольший среди таких идеалов T в R, что для любого идеала B

$$r(Q, T) \cap B = Q \Rightarrow B = Q.$$

Как и для примарных идеалов, для Т. и. справедливы теорема пересечения, теорема существования и теорема единственности.

Анализ свойств правых и левых частных (идеалов кольца, подмодулей модуля и др.) приводят к системам с частными, в к-рых естественным образом вводится общее понятие S-примарности и S-примарного радикала. Это позволяет сформулировать в качестве аксиом «теоремы пересечения», «существования» и «единственности». При таком подходе терциарность является единственной примарностью, для к-рой справедливы все эти

три теоремы, т. е. является единственным «хорошим» обобщением классич. примарности (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М., «Изв. АН СССР. Сер. Матем.», 1967, т. 31, № 5, с. 1057—90; [2] Riley J. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1962, v. 105, № 2, p. 177—201.

В. А. Андрунакиевич.

ТЕСТ в кибернетике — одно из важнейших средств логич. анализа информации. Аппарат Т. первоначально был использован в задаче контроля работы электрич. схем. Позже на основе Т. были разработаны эффективные алгоритмы *распознавания образов*. Тестовый подход успешно применяется во многих областях математики. Основные задачи с Т. могут быть сформулированы следующим образом.

1. Дана прямоугольная таблица, содержащая s строк и m столбцов. Строки характеризуются вопросами (признаками) $e_1, \ldots, e_s$ из нек-рого множества E, столбцы — объектами (образами) $f_1, \ldots, f_m$ из множества F. В клетке, лежащей на пересечении i-й строки и j-го столбца, находится ответ $f_j(e_i)$ (значение i-го признака для j-го образа), принадлежащий нек-рому множеству G. Таким образом, поскольку $e_{i_1} \neq e_{i_2}$ при $i_1 \neq i_2$, можно рассматривать j-й столбец ($1 \leqslant j \leqslant m$) как столбец, задающий функцию $f_j(x)$. Естественно считать, что столбцы таблицы попарно различны. Так как природа множеств E и G существенного значения не имеет, то в дальнейшем предполагается $E = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ и $G = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. В нек-рых случаях на множествах E и G задается частичный порядок $\prec$. Иногда столбцам приписываются вероятности $p_1, \ldots, p_m$ ($\Sigma_i p_i = 1$).

	f_1	f_2		f_j		f_m
e_1						
e_s						

2. *Задается цель логич. анализа таблицы.* Для этого фиксируется нек-рое подмножество $\mathfrak{N}$ пар (i, j), $i \neq j$, номеров столбцов. В частности, если множество F разбито на классы, то $(i, j) \in \mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда f_i и f_j принадлежат одному классу, $i \neq j$. Подмножество $\mathfrak{N}$ можно интерпретировать как отношение или как нек-рое свойство.

Имеется два специальных случая: 1) $\mathfrak{N} = \{(1, j)\}$, $j = 2, \ldots, m$ и f_1 — выделенная функция (этот случай связан с задачей о проверке), 2) $\mathfrak{N} = \{(i, j)\}$, $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$, относится к задаче о диагностике (полного различения).

Цель логич. анализа можно сформулировать следующим образом: указать процедуру, к-рая для любых i и j таких, что $(i, j) \in \mathfrak{N}$, позволяла бы отличить образ f_i от образа f_j. Если $\mathfrak{N}$ соответствует разбиению F на классы, то задача эквивалентна задаче об отнесении произвольно заданной функции f из F соответствующему классу. Ниже в основном говорится об этой задаче. Сформулированный вопрос решается тривиально, если полностью известна таблица и все известно о функции f. В реальных задачах получение информации о функции f возможно, но при определенных затратах. Кроме того, для обширного класса задач вся таблица либо не известна, либо настолько велика, что мы не в состоянии с ней оперировать. Поэтому ограничиваются ее нек-рым фрагментом — т. н. представительной выборкой, и задачу ставят в эвристич. варианте.

3. Указываются допустимые средства решения задачи. Пусть загадана нек-рая функция f из F. Требуется путем задавания вопросов, называя нек-рые строки $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$, по ответам $f(e_{i_1}), \ldots, f(e_{i_r})$ узнать, к какому классу принадлежит f. Данный опрос может осуществляться либо при помощи т. н. безусловного эксперимента (см. *Эксперименты с авто-*

матами), при к-ром задаются сразу все вопросы $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$ и затем анализируют ответы на них, т. е. $f(e_{i_1}), \ldots, f(e_{i_r})$, либо при помощи более общей процедуры т. н. условного эксперимента, при к-ром вопросы задаются по очереди и каждый последующий вопрос задается в зависимости от предыдущих вопросов и ответов (а при наличии частичного порядка $\leqslant$ и с учетом $\leqslant$). Условный эксперимент можно изображать в виде ориентированного дерева, у к-рого вершинам приписаны вопросы, ребрам — ответы, а ветвям — результаты эксперимента. Для следующей таблицы на рис. 1 приведены три эксперимента $\mathcal{Э}_1$, $\mathcal{Э}_2$, $\mathcal{Э}_3$.

	f_1	f_2	f_3	f_4
e_1	0	0	1	1
e_2	0	1	0	0
e_3	0	0	0	1

Система T вопросов и необходимая для нее информация (ответы), позволяющая распознать свойство $\mathfrak{N}$, наз. тестом исходной таблицы.

В случае безусловных экспериментов обычно под тестом T понимают такую совокупность вопросов

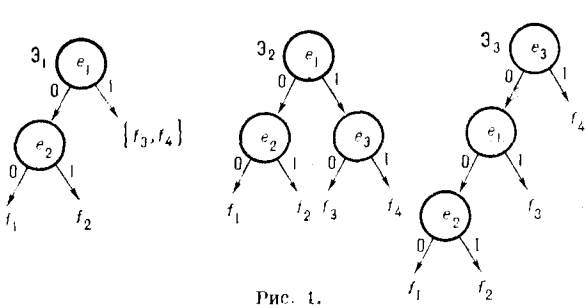


Рис. 1.

$\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}\}$, что для любых (i, j) из $\mathfrak{N}$ найдется $e \in T$ и $f_i(e) \neq f_j(e)$ (условие распознавания $\mathfrak{N}$). Для многозначных (и не всюду определенных) таблиц вместо предиката $\neq$ можно использовать другие предикаты.

В случае условных экспериментов тестом T является ориентированное дерево, получающееся из условного эксперимента $\mathcal{Э}$ путем удаления всех концевых ребер и позволяющее распознать свойство $\mathfrak{N}$. Так, в данном выше примере для диагностич. задачи $\{e_1, e_2, e_3\}$ будет безусловным тестом; эксперименты $\mathcal{Э}_2$ и $\mathcal{Э}_3$ порождают условные тесты T_2 и T_3, а эксперимент $\mathcal{Э}_1$ не приводит к условному тесту.

Для любого $\mathfrak{N}$ множество $T_0 = \{e_1, \ldots, e_s\}$ является безусловным тестом (тривиальным Т.). Если таблица имеет большие размеры, тривиальный Т. приводит к очень трудоемкой процедуре логич. анализа. Поэтому возникает вопрос о построении более простых Т. Для этого уточняется понятие сложности $l(T)$ теста T. Ниже приведены нек-рые варианты определения сложности для безусловных Т:

$l_1(T) = r$, здесь $l_1(T)$ характеризует «кратность» Т., то есть число элементов в T.;

$$l_2(T) = \sum_{j=1}^{r} l(e_{i_j}),$$

данная мера отражает «время» тестирования при последовательной «прогонке» элементов, если $l(e_{i_j})$ трактовать как время реализации e_{i_j};

$$l_3(T) = \max l(e_{i_j}),$$

здесь $l_3(T)$ характеризует время тестирования при параллельной «прогонке» элементов.

Похожие характеристики сложности вводятся и для условных Т., исходя из соответствующего дерева и

отражающих число ветвей дерева, суммарную длину дерева (число ребер дерева) и максимальную длину ветви. Если столбцы таблицы встречаются с вероятностями $p_1, \ldots, p_m$, то естественно в качестве меры сложности T взять величину $\sum_{i=1}^{m} l_i p_i$, где l_i — длина ветви дерева, ведущей к f_i. Тест для данной таблицы, цели контроля $\mathfrak{N}$ и указанных средств контроля и меры сложности наз. м и н и м а л ь н ы м, если он имеет минимальную сложность. Построение минимальных Т. является центральной задачей теории Т. Осмысленность этой задачи можно продемонстрировать на примере безусловных Т. (и когда множества E и G не частично упорядочены). Для каждой таблицы существует тест T такой, что $l_1(T) \leqslant \min(s, m-1)$, и можно указать таблицы, на к-рых оценка достигается. В то же время при $m = m(s)$ и $s \to \infty$ для почти всех таблиц

$$\log_2 m \leqslant l_1(T_{\min}) \leqslant 2 \log_2 m,$$

т. е. минимальный тест $T_{\min}$ в широком диапазоне изменения параметров проще вышеуказанного.

Для построения минимальных Т. существует переборный алгоритм. Напр., для безусловных Т.— просмотр подмножеств множества $\{e_1, \ldots, e_s\}$, для условных Т.— просмотр деревьев с ограниченным ветвлением и ограниченным числом ярусов. Однако эти алгоритмы очень трудоемки. Оказывается, что построение минимальных Т. связано с построением т. н. тупиковых Т. Понятие тупиковости позволяет выделить из множества всех Т. те, к-рые в определенном смысле не имеют избыточности. Для безусловных Т. (без $\leqslant$) тест T относительно $\mathfrak{N}$ исходной таблицы наз. т у п и к о в ы м, если любое его собственное подмножество T', $T' \subseteq T$, не является Т. относительно $\mathfrak{N}$. Понятие тупиковости может быть сформулировано в терминах разбиений множества $\{f_1, \ldots, f_m\}$. Пусть R_T — разбиение столбцов таблицы, при к-ром два столбца принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда они совпадают на строчках из T. Тест T будет тупиковым, если для любых двух подмножеств T' и T'' множества T таких, что $T'' \subseteq T'$ и $T'' \neq T'$, найдется пара $(i, j) \in \mathfrak{N}$, для к-рой $f_i \equiv f_j$ на T'', но $f_i \not\equiv f_j$ на T', т. е. разбиение $R_{T'}$ является подразбиением разбиения $R_{T''}$ относительно $\mathfrak{N}$. Для тупиковых тестов T имеет место $l_1(T) \leqslant m-1$. С другой стороны, из любого Т. путем выбрасывания нек-рых элементов можно получить тупиковый Т.

Для условных Т. (без $\leqslant$) тупиковость Т. означает, что каждый следующий элемент e выбирается так, чтобы хотя бы для одной пары $(i, j) \in \mathfrak{N}$ на предыдущем шаге f_i и f_j находились в одной компоненте разбиения, а $f_i(e) \neq f_j(e)$, т. е. теперь f_i и f_j попадают в разные компоненты разбиения.

В примере тест $T = \{e_1, e_2, e_3\}$ является безусловным тупиковым Т., а T_2 и T_3 — условными тупиковыми Т. Тест T_2 дает нек-рую «экономию» времени по сравнению с безусловным тестом T, поскольку для каждой диагностич. ситуации он требует только двух элементов, а T_3— трех. Обобщая этот пример, легко построить пример таблицы, для к-рой минимальный безусловный тест будет иметь длину $m-1$, а максимальная длина ветви условного Т. будет равна $\log_2 m$. Здесь получается наибольшее преимущество, к-рое могут давать условные Т. по сравнению с безусловными.

В случае когда на множествах E и G задан частичный порядок $\leqslant$, определение тупиковости усложняется. Такая попытка известна для таблиц из автоматных функций $\{f_1, \ldots, f_m\}$, связанных с диагностикой автоматов (см. также *Эксперименты с автоматами*). Здесь элементы из E и G — слова в алфавитах A и B, а отношение $x \leqslant y$ означает, что слово x является началом слова y. При подаче на вход автомата слова $e = a_1$,

$\ldots$, a_t фактически на вход подают также и все слова $e'=a_1\ldots a_{t'}$, где $t'\leqslant t$ (все начала e). Поэтому избыточность может быть заложена в самом элементе e. Более точно, элемент $e=a_1\ldots a_t$ наз. неприводимым, если для любого v, $v=1, 2, \ldots, t-2$, при переходе от слова $a_1\ldots a_v$ к слову $a_1\ldots a_{v+1}$ либо происходит разбиение одной из пар $(i, j)\in\mathfrak{N}$, к-рая принадлежала одной компоненте разбиения $R_{(a_1\ldots a_v)}$, либо осуществляется специальная подготовка к такому разбиению путем перехода в новое состояние системы $(f_1, \ldots, f_m)$ и при $v=t-1$ обязательно происходит разбиение. Оказывается, что каждое слово путем выбрасывания отдельных кусков может быть преобразовано в неприводимое и осуществляющее то же разбиение, что и исходное. Понятие безусловного тупикового Т. здесь пополняется дополнительным требованием, чтобы все элементы из T были неприводимыми. Понятие условного тупикового Т. включает в себя дополнительно два требования: 1) если на очередном шаге выбран элемент e_v, то элемент e_{v+1}, выбираемый на следующем шаге, должен следовать за e_v, $e_v\leqslant e_{v+1}$, и 2) элементы, соответствующие концевым вершинам дерева T, должны быть неприводимыми.

В теории Т. рассматриваются следующие вопросы: построение эффективных алгоритмов для нахождения различных типов Т.; изучение сложности Т. для отдельных классов таблиц; оценка числа тупиковых Т.; классификация Т. и таблиц; исследование влияния дополнительной информации о структуре таблиц на сложность и эффективность построения Т.

Целый ряд диагностич. задач приводится к табличной форме.

1) Поиск неисправностей в электрич. схемах (см. *Надежность и контроль управляющих систем*). Здесь контролируется схема Σ, реализующая булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Множество E состоит из всех наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $s=2^n$, $G=\{0, 1\}$, а F состоит из булевых функций $\{f_1, \ldots, f_m\}$, характеризующих исправные и неисправные состояния схемы.

2) Контроль автоматов. Здесь таблица, вообще говоря, имеет бесконечное число строк (множество входных слов бесконечно). Однако для контроля нужны только те слова, к-рые являются началами неприводимых слов, а их длины ограничены константой, зависящей от m и числа состояний для $f_1, \ldots, f_m$. Получается конечная таблица.

3) Диагностич. задачи медицины. При изучении диагностики определенных классов заболеваний появляется таблица, строки к-рой соответствуют симптомам, а столбцы — характерным для данных классов заболеваний набором значений признаков. Если признаки проявляются дискретным образом (напр., нормальна ли температура, нормально ли кровяное давление и т. п.), то получают таблицу вышеуказанного типа, причем если набор признаков достаточно богат, то все столбцы попарно различны.

4) Распознавание геометрич. образов. Пусть на прямоугольном дискретном табло возможно появление двух символов 0 и 1. Каждый из них может иметь по нескольку реализаций, отличающихся друг от друга своими размерами и положением (рис. 2). Требуется путем задавания вопросов о состоянии конкретных ячеек табло (заштрихована клетка или нет) узнать, какой из символов записан на нем. Здесь $e_1, \ldots, e_s$ — номера клеток, $G=\{0, 1\}$, $f_1, \ldots, f_m$ — все образы 0 и 1. Значение $f_i(e)$ равно 1, если клетка e для образа f_i заштрихована, и равно 0 в противном случае.

5) Игровые задачи. Известная игра «морской бой» состоит фактически в распознавании располо-

жения «кораблей» противника путем последовательного выбора клеток, при этом партнер сообщает каждый раз о результате такого выбора. Здесь может быть составлена таблица, столбцы к-рой характеризуют варианты расположения «кораблей» (строится, как и в задаче распознавания 0 и 1). В качестве средств решения этой задачи оказываются условные Т.



Рис. 2.

б) Минимизация булевых функций. Сводится к специальной тестовой задаче, в к-рой таблица описывает покрытие множества N_f (вершин, в к-рых $f=1$) т. н. максимальными гранями (соответствующими простым импликантам для f).

К тестовым задачам сводятся многие *комбинаторные задачи*, напр. задача о коммивояжере, задача о рюкзаке, а также нек-рые задачи поиска экстремума.

Т. позволяют проанализировать логич. связи между признаками и ввести меру важности признаков. Напр., можно считать, что важность признака определяется как отношение числа тупиковых Т., в к-рые данный признак входит, к числу всех тупиковых Т. Установление меры важности признаков полезно в решении прикладных задач для построения эвристич. алгоритмов. Этот подход успешно используется в решении диагностич. задач геологии, экономики, медицины и т. п.

Лит.: [1] Яблонский С. В., Чегис И. А., «Успехи матем. наук», 1955, т. 10, в. 4, с. 182—84; [2] Соловьев Н. А., Тесты, Новосиб., 1978; [3] Дмитриев А. Н., Журавлев Ю. И., Кренделев Ф. П., «Дискретный анализ», 1966, № 7, с. 3—15. *С. В. Яблонский.*

ТЕСТОВАЯ СТАТИСТИКА — статистика *статистического критерия*.

ТЕТА-РЯД, θ-ряд,— функциональный ряд, применяемый для представления *автоморфных форм* и *автоморфных функций*.

Пусть D — область комплексного пространства $\mathbf{C}^p$, $p\geqslant 1$; Г — дискретная группа автоморфизмов области D. Если группа Г конечна, то из любой мероморфной в D функции $H(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_p)$, можно получить автоморфную функцию

$$\sum\nolimits_{\gamma\in\Gamma} H(\gamma(z)).$$

Для бесконечных групп необходимы множители сходимости, что и приводит к Т.-р. Тета-рядом Пуанкаре, или просто рядом Пуанкаре, ассоциированным с группой Г, наз. ряд вида

$$\theta_m(z)=\sum\nolimits^{*}_{\gamma\in\Gamma} J^m_\gamma(z)\, H(\gamma(z)), \qquad (1)$$

где $J_\gamma(z)=d\gamma(z)/dz$ — якобиан отображения $z\to\gamma(z)$, m — целое действительное число, называемое весом или порядком; звездочка означает, что суммирование выполняется только по тем $\gamma\in\Gamma$, к-рые доставляют различные члены ряда. При отображении $z\to\alpha(z)$, $\alpha\in\Gamma$, функция $\theta_m(z)$ преобразуется по закону $\theta_m(\alpha(z))=J^{-m}_\alpha(z)\theta_m(z)$ и, следовательно, представляет собой автоморфную функцию веса m, ассоциированную с группой Г. Отношение двух Т.-р. одинакового веса дает автоморфную функцию.

Т.-р. частного вида

$$E_m(z)=\sum\nolimits^{*}_{\gamma\in\Gamma} J^m_\gamma(z)$$

наз. тета-рядами Эйзенштейна или просто рядами Эйзенштейна, ассоциированными с группой Г.

А. Пуанкаре (H. Poincaré) в серии работ 80-х гг. 19 в. развил теорию Т.-р. в связи с изучением автоморфных функций одного комплексного переменного. Пусть Γ — дискретная фуксова группа дробно-линейных преобразований

$$\gamma(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1,$$

отображающая единичную окружность на себя, $D=\{z;\ |z|<1\}$ — единичный круг. Ряды Пуанкаре в этом случае имеют вид

$$\theta_m(z)=\sum\nolimits^{*}_{\gamma\in\Gamma}(cz+d)^{-2m}H\left(\frac{az+b}{cz+d}\right), \qquad (2)$$

где H, напр.,— ограниченная голоморфная функция в D. В предположении, что Γ действует свободно на D и фактор $X=D/\Gamma$ компактен, доказано, что ряд (2) сходится абсолютно и равномерно внутри D при $m\geqslant 2$. При высказанных условиях на H и Γ это утверждение верно и для рядов (1) в случае, когда D — ограниченная область в $\mathbb{C}^p$. Для нек-рых фуксовых групп ряды (2) сходятся и при $m=1$.

Название «тета-ряды» употребляется и применительно к разложениям в ряды *тета-функций*, служащих для представления эллиптич. функций (см. *Якоби эллиптические функции*) и *абелевых функций*.

Лит.: [1] Форд Л. Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.—Л., 1936, гл. 5; [2] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972, гл. 9; [3] Fricke R., Klein F., Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen, Lpz., 1897—1912. *Е. Д. Соломенцев.*

ТЕТА-ФУНКЦИЯ, θ-функция, одного комплексного переменного — квазидвоякопериодическая *целая функция* комплексного переменного z, т. е. функция $\theta(z)$, имеющая, кроме периода ω, еще квазипериод $\omega\tau$, $\operatorname{Im}\tau>0$, при прибавлении к-рого к значению аргумента значение функции умножается на нек-рый мультипликатор. Иначе говоря, имеют место тождества по z:

$$\theta(z+\omega)=\theta(z), \quad \theta(z+\omega\tau)=\varphi(z)\theta(z).$$

Как периодическая целая функция, Т.-ф. всегда представима рядом

$$\theta(z)=\sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}}c_n\exp\left(\frac{2\pi i n}{\omega}z\right), \qquad (1)$$

в к-ром подбор коэффициентов c_n должен обеспечивать сходимость. Ряды (1) наз. тета-рядами (по причине первоначальных обозначений). Возможны и иные представления Т.-ф., напр. в виде бесконечного произведения.

В приложениях обычно ограничиваются мультипликаторами вида

$$\varphi(z)=q\exp(-2\pi ikz),$$

где k— натуральное число, называемое порядком или весом Т.-ф., q — числовой множитель. Сходимость обеспечивается, напр., коэффициентами вида

$$c_n=\exp(an^2+2bn+c), \quad \operatorname{Re}a<0.$$

Во многих вопросах удобны Т.-ф., удовлетворяющие условиям

$$\theta(z+1)=\theta(z),$$
$$\theta(z+\tau)=\exp(-2\pi ikz)\cdot\theta(z). \qquad (2)$$

Все Т.-ф. вида (2) одного и того же порядка k составляют векторное пространство размерности k. Базис этого пространства можно записать в виде

$$\theta_r(z)=\sum\nolimits_{s\in\mathbb{Z}}\exp[\pi i\tau s(k(s-1)+2r)+$$
$$+2\pi i(ks+r)z], \quad r=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1.$$

Отдельные примеры Т.-ф. встречаются уже в работах Я. Бернулли (J. Bernoulli, 1713), Л. Эйлера (L. Euler), в теории теплопроводности Ж. Фурье (J. Fourier).

К. Якоби (C. Jacobi) подверг Т.-ф. систематич. исследованию, выделил четыре специальные Т.-ф., к-рые и положил в основу своей теории эллиптич. функций (см. *Якоби эллиптические функции*).

Т.-ф. **нескольких комплексных переменных** возникают как естественное обобщение Т.-ф. одного комплексного переменного. Они строятся следующим образом. Пусть $z=(z_1, \ldots, z_p)$ — матрица-строка p комплексных переменных, $p\geqslant 1$; e_μ есть μ-я строка единичной матрицы E порядка p; $n=(n_1, \ldots, n_p)$ — целочисленная матрица-строка; $A=\|a_{\mu\nu}\|$ — симметрич. матрица порядка p, составленная из комплексных чисел и такая, что матрица $\operatorname{Im} A=\|\operatorname{Im} a_{\mu\nu}\|$ порождает положительно определенную квадратичную форму $n\operatorname{Im} A n^\top$ (здесь $n^\top$ — транспонированная матрица n). **Кратный тета-ряд**

$$\theta(z)=\sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}^p}\exp\left[\pi i\left(nAn^\top+2nz^\top\right)\right] \qquad (3)$$

сходится абсолютно и равномерно на компактах из $\mathbb{C}^p$ и определяет, следовательно, целую трансцендентную функцию p комплексных переменных $z_1, \ldots, z_p$, называемую **тета-функцией порядка** 1. Различные элементы матрицы A наз. **модулями**, или **параметрами** Т.-ф. $\theta(z)$; число модулей равно $p(p+1)/2$. Т.-ф. $\theta(z)$ 1-го порядка удовлетворяет следующим основным тождествам по z:

$$\left.\begin{aligned}&\theta(z+e_\mu)=\theta(z),\\&\theta(z+e_\mu A)=\exp\left[-\pi i\left(a_{\mu\mu}+2z_\mu\right)\right]\cdot\theta(z),\\&2\left(1+\delta_{\mu\nu}\right)\pi i\,\frac{\partial\theta}{\partial a_{\mu\nu}}=\frac{\partial^2\theta}{\partial z_\mu\,\partial z_\nu},\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где $\mu, \nu=1, \ldots, p$; $\delta_{\mu\nu}=1$ при $\mu=\nu$ и $\delta_{\mu\nu}=0$ при $\mu\neq\nu$. Матрица $S=(E, A)$ размера $p\times 2p$ является **системой модулей**, или **системой периодов и квазипериодов**, Т.-ф. $\theta(z)$. Если $m=(m_1, \ldots, m_p)$, $m'=(m'_1, \ldots, m'_p)$ — произвольные целочисленные матрицы-строки, то в более общем виде свойства периодичности Т.-ф. можно записать так:

$$\theta(z+m'+mA)=$$
$$=\exp\left[-\pi i\left(mAm\right)^\top+2m\left(z+m'\right)^\top\right]\cdot\theta(z).$$

Пусть $\gamma=(\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$, $\gamma'=(\gamma'_1, \ldots, \gamma'_p)$ — произвольные комплексные матрицы-строки, $\Gamma=\left\|\begin{matrix}\gamma\\ \gamma'\end{matrix}\right\|$ — матрица размера $2\times p$. Тогда формула

$$\theta_\Gamma(z)=\sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}^p}\exp\left[\pi i\left(n+\gamma\right)A\left(n+\gamma\right)^\top+\right.$$
$$\left.+2\left(n+\gamma\right)\left(z+\gamma'\right)^\top\right]=\exp\left[\pi i\left(\gamma A\gamma^\top+\right.\right.$$
$$\left.\left.+2\gamma\left(z+\gamma'\right)^\top\right)\right]\cdot\theta\left(z+\gamma'+\gamma A\right)$$

определяет Т.-ф. 1-го **порядка с характеристикой** (общего вида) Γ; в этой терминологии Т.-ф. (3) имеет характеристику 0. Матрица Γ иначе наз. **периодич. характеристикой** матрицы $\gamma'+\gamma A$. Всегда $\theta_{-\Gamma}(-z)=\theta_\Gamma(z)$. Свойства (4) для Т.-ф. с характеристикой Γ обобщаются в виде

$$\left.\begin{aligned}&\theta_\Gamma(z+e_\mu)=\exp\left(2\pi i\gamma_\mu\right)\cdot\theta_\Gamma(z),\\&\theta_\Gamma(z+e_\mu A)=\exp\left[-\pi i\left(a_{\mu\mu}+2\left(z_\mu-\gamma'_\mu\right)\right)\right]\cdot\theta_\Gamma(z).\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Характеристика наз. **нормальной**, если $0\leqslant\gamma_i, \gamma'_i<1$, $i=1, \ldots, p$.

Наиболее употребительны **дробные характеристики**, когда все γ_i, γ'_i — неотрицательные правильные рациональные дроби с общим знаменателем δ. Наиболее важный и простой случай — **полуцелые**, или **половинные, характеристики**, когда $\delta=2$. Полуцелые характеристики $H=\left\|\begin{matrix}h\\ h'\end{matrix}\right\|$

можно считать составленными из чисел 0 и 1 (обычно под «тета-характеристиками» подразумевают именно такие характеристики). Для Т.-ф. с тета-характеристикой H формулы (5) принимают вид

$$\theta_H(z+e_\mu)=(-1)^{h_\mu}\cdot\theta_H(z),$$

$$\theta_H(z+e_\mu A)=(-1)^{h'_\mu}\exp[-\pi i(a_{\mu\mu}+2z_\mu)]\cdot\theta_H(z).$$

Тета-характеристика H наз. четной или нечетной в соответствии с тем, четна или нечетна Т.-ф. $\theta_H(z)$. Другими словами, тета-характеристика H четная или нечетная в зависимости от того, четное или нечетное число $h'h^\top$, поскольку

$$\theta_H(-z)=(-1)^{h'h^\top}\cdot\theta_H(z).$$

Всего различных тета-характеристик 2^{2p}, из них $2^{p-1}(2^p+1)$ четных и $2^{p-1}(2^p-1)$ нечетных. Т.-ф. $\theta_H(z)$ обращается в нуль в тех точках $(g'+gA)/2$, тета-характеристики к-рых $G=\|\begin{smallmatrix}g\\g'\end{smallmatrix}\|$ в сумме с H составляют нечетную тета-характеристику. К. Якоби в своей теории эллиптич. функций использовал именно Т.-ф. с полуцелыми характеристиками, только периоды у него равнялись πi, а не 1.

Пусть k — натуральное число. Целая трансцендентная функция $\theta_\Gamma(z)$ наз. Т.-ф. порядка k с характеристикой Γ, если для нее выполняются тождества

$$\theta_\Gamma(z+e_\mu)=\exp(2\pi i\gamma_\mu)\cdot\theta_\Gamma(z),$$

$$\theta_\Gamma(z+e_\mu A)=\exp[-\pi i(ka_{\mu\mu}+2kz_\mu-2\gamma'_\mu)]\cdot\theta_\Gamma(z).$$

Напр., произведение k Т.-ф. 1-го порядка есть Т.-ф. порядка k.

При помощи этих Т.-ф. 1-го порядка с полуцелыми характеристиками строятся мероморфные абелевы функции с $2p$ периодами. Периоды произвольной абелевой функции от p комплексных переменных удовлетворяют соотношениям Римана — Фробениуса, к-рые обеспечивают сходимость рядов, определяющих Т.-ф. с соответствующей системой модулей. А согласно теореме, сформулированной К. Вейерштрассом (K. Weierstrass) и доказанной А. Пуанкаре (H. Poincaré), абелева функция может быть представлена в виде отношения целых Т.-ф. с соответствующей системой модулей. Для решения *Якоби проблемы обращения* абелевых интегралов строятся специальные *Римана тета-функции*, аргументом к-рых является система точек $w_1, \ldots, w_p$ на римановой поверхности.

См. также *Тета-ряд*.

Лит.: [1] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.—Л., 1948, гл. 9; [2] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968, ч. 2, гл. 2; [3] Krazer A., Lehrbuch der Theta-funktionen, Lpz., 1903; [4] Conforto F., Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, B., 1956.

Е. Д. Соломенцев.

ТЕТРАЦИКЛИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ точки на плоскости — четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4, подчиненные равенствам $\sigma x_i=k_iS_i$, $i=1, 2, 3, 4$, где S_i — *степень точки* относительно данных четырех окружностей, k_i — произвольно заданные постоянные, σ — множитель пропорциональности. Т. к. связаны соотношением 2-й степени, к-рое приводится к виду $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$, если исходные окружности взять ортогональными (из них три обязательно имеют действительные радиусы ρ_i, $i=1, 2, 3$, и одна — мнимый ρ_4), а числа k_i равными $1/\rho_i$, $i=1, 2, 3$, и $k_4=1/i\rho_4$. Если в плоскости ввести декартовы координаты ξ, η, а в качестве трех действительных кругов взять $\xi=0$, $\eta=0$ (круги, проходящие через бесконечно удаленную точку плоскости), круг $\xi^2+\eta^2=1$ и мнимый круг $\xi^2+\eta^2=-1$, то

тогда Т. к. точки на плоскости выразятся через декартовы координаты следующим образом:

$$\sigma(x_1)=\xi,\ \sigma x_2=\eta,\ \sigma x_3=\frac{1-(\xi^2+\eta^2)}{2},\quad \sigma x_4=\frac{1+(\xi^2+\eta^2)}{2}.$$

Можно ввести Т. к. и для круга на плоскости. При указанном специальном выборе четырех основных кругов круг с центром в точке (ξ_0, η_0) и радиусом R_0 имеет Т. к. y_i, $i=1, 2, 3, 4$, определенные формулами

$$\sigma y_1=\xi_0,\ \sigma y_2=\eta_0,\ \sigma y_3=\frac{1-\left(\xi_0^2+\eta_0^2-R_0^2\right)}{2},$$

$$\sigma y_4=\frac{1+\left(\xi_0^2+\eta_0^2-R_0^2\right)}{2}.$$

Т. к. точек и кругов на плоскости можно ввести с помощью *стереографической проекции*. При этом Т. к. точки на плоскости — однородные координаты соответствующей при стереографич. проектировании точки на сфере. Т. к. круга на плоскости — однородные координаты точки пространства, являющейся полюсом плоскости круга на сфере, соответствующего в стереографич. проекции кругу на плоскости, относительно этой сферы.

Обобщением Т. к. на случай трехмерного пространства являются *пентасферические координаты*.

Лит.: [1] Клейн Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.—Л., 1939; [2] Бушманова Г. В., Норден А. П., Элементы конформной геометрии, Казань, 1972.

Г. В. Бушманова.

ТЕТРАЭДР — один из пяти типов правильных многогранников. Т. имеет 4 грани (треугольные), 6 ребер, 4 вершины (в каждой вершине сходится 3 ребра). Если a — длина ребра Т., то его объем



$$v=a^3\sqrt{2}/12\approx 0{,}1179a^3.$$

Т. является правильной треугольной пирамидой. *БСЭ-3.*

ТЕТРАЭДРА ПРОСТРАНСТВО — трехмерное пространство, являющееся пространством орбит действия бинарной группы тетраэдра на трехмерной сфере. Эта группа определяется образующими R, S и соотношениями $R^2=S^3=(RS)^3=E$. *М. И. Войцеховский.*

ТЕТРАЭДРАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ точки P в трехмерном пространстве — числа x_1, x_2, x_3, x_4, пропорциональные (с заданным коэффициентом пропорциональности) расстояниям от точки P до граней фиксированного тетраэдра. Аналогично вводятся общие Т. к. для любой размерности. Двумерный аналог Т. к. наз. треугольными координатами. См. также *Барицентрические координаты*.

Д. Д. Соколов.

ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ в области B — функция $f(z)$, аналитическая в нек-рой области B плоскости z, содержащей отрезки вещественной оси, если она вещественна на этих отрезках и $\operatorname{Im} f(z)\cdot \operatorname{Im} z>0$ при $\operatorname{Im} z\neq 0$. Основной класс Т. в. ф.— класс T функций

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n,$$

регулярных и типично вещественных в круге $|z|<1$ (см. [1]). Из определения класса T следует, что c_n, $n\geqslant 2$, вещественны. Класс T содержит класс S_r функций

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$$

с вещественными коэффициентами c_n, регулярных и однолистных в $|z|<1$. Если $f\in T$, то

$$\varphi(z)=\frac{1-z^2}{z}f(z)\in C_r,$$

и, обратно, если $\varphi\in C_r$, то

$$f(z)=\frac{z}{1-z^2}\varphi(z)\in T,$$

где C_r — класс функций

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n,$$

регулярных в $|z|<1$, $\operatorname{Re}\varphi(z)>0$ в $|z|<1$, и таких, что α_n, $n \geqslant 1$, вещественны.

Пусть M_1 — класс функций $\alpha(t)$, неубывающих на $[-1, 1]$ и таких, что $\alpha(1)-\alpha(-1)=1$. Класс T представим в $|z|<1$ интегралом Стилтьеса (см. [2]):

$$f(z) = \int_{-1}^{1} s(z, t)\, d\alpha(t),$$

$$s(z, t) = z(1-2tz+z^2)^{-1}, \quad \alpha(t) \in M_1, \tag{1}$$

в том смысле, что для каждой функции $f \in T$ найдется функция $\alpha \in M_1$ такая, что справедлива формула (1), и, обратно, какую бы $\alpha \in M_1$ ни взять, формула (1) определяет нек-рую функцию $f \in T$; $s(z, t) \in S_r$ при любом фиксированном $t \in [-1, 1]$. Наибольшей областью, в к-рой все функции класса T однолистны, является $\{|z+i|<\sqrt{2}\} \cap \{|z-i|<\sqrt{2}\}$. Исходя из представления (1) на классе T был получен ряд теорем искажения и вращения (см. *Искажения теоремы*, *Вращения теоремы*). Для класса T справедливы точные оценки:

$$-n \leqslant c_n \leqslant n, \text{ если } n \text{ четно}, \tag{2}$$

$$k_n = \min_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \leqslant c_n \leqslant n, \tag{3}$$

$$\text{если } n \text{ нечетно } \left(k_n \sim -\frac{2}{3\pi} n\right),$$

знак равенства в (2) слева достигается только для $s(z, -1)$, справа — только для $s(z, 1)$, в (3) слева — только для функций $f(z)=\lambda s(z, t_n)+(1-\lambda)s(z, -t_n)$ при нек-ром $t_n \in [-1, 1]$, справа — только для $f(z)=\lambda s(z, 1)+(1-\lambda)s(z, -1)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

На классе T найдены области значений систем $\{c_2, c_3, \ldots, c_n\}$, $\{f(z)\}$, $\{f(z), c_2, c_3, \ldots, c_n\}$, $n \geqslant 2$ (см. [3], с. 589—90).

Лит.: [1] Rogosinski W., «Math. Z.», 1932, Bd 35, S. 93—121; [2] Голузин Г. М., «Матем. сб.», 1950, т. 27, № 2, с. 201—18; [3] его же, Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966, с. 523—626.

Е. Г. Голузина.

ТИПОВ ТЕОРИЯ — формальная теория 1-го порядка (см. *Формальная система*), один из вариантов к-рой — простая теория типов — описан ниже. Термин «Т. т.» не имеет жестко зафиксированного значения. Им обозначают формальные теории, отличающиеся следующими особенностями. Во-первых, наличием в формальной системе языкового средства для выражения отношения, передаваемого словами: «кортеж $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ принадлежит y», или «y выполняется на $x_1, \ldots, x_n$»; пусть $y(x_1, \ldots, x_n)$ обозначает выражение, стоящее в кавычках. Во-вторых, расчленением предметной области на слои, или типы, образующие иерархию типов (не обязательно линейную и не обязательно счетную), и наличием теоретико-типовых аксиом свертывания (или их эквивалентов). Если переменные, пробегающие по объектам типа σ, обозначить через x^σ, y^σ, z^σ, ..., то теоретико-типовые аксиомы свертывания имеют вид

$$\exists y^\rho \forall x_1^{\sigma_1}, \ \ldots, \ x_n^{\sigma_n} (y^\rho (x_1^{\sigma_1}, \ \ldots, \ x_n^{\sigma_n}) \leftrightarrow \varphi(x_1^{\sigma_1}, \ \ldots, \ x_n^{\sigma_n})), \tag{*}$$

где $\varphi(x_1^{\sigma_1}, \ \ldots, \ x_n^{\sigma_n})$ — формула рассматриваемой системы со свободными переменными $x_1^{\sigma_1}, \ \ldots, \ x_n^{\sigma_n}$, а тип ρ переменной y^ρ должен находиться (и в этом суть теоретико-типовых систем) на более высоком уровне иерархии типов, чем типы $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Обычно тип ρ определен однозначно по типам $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Он обозначается через $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Таким образом, в теоретико-типовых

системах свойство y и объекты, к-рые этим свойством обладают: $x_1, \ldots, x_n$, принадлежат разным слоям. Часто добавляют аксиому объемности, отождествляющую равнообъемные свойства. В последнем случае теоретико-типовую систему следует рассматривать как теоретико-множественную систему, поскольку соблюдается принцип: «множества полностью определены своими элементами».

Теоретико-типовые системы были введены Б. Расселом (B. Russell) в связи с открытием противоречий в теории множеств. Разнесение множества и его элементов по разным слоям соответствует тому взгляду на *антиномии*, согласно к-рому противоречия объясняются непредикативным характером определения. При этом определение какого-нибудь объекта наз. непредикативным, если этот объект участвует в своем определении, или, что то же, если осмысленность определения предполагает уже существование этого объекта. Так, в аксиоме свертывания (*), рассматриваемой как определение объекта y, непредикативность полностью не устранена, так как в формуле $\varphi(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$ могут встречаться кванторы по переменным, пробегающим ту область, к-рой принадлежит объект y. Поэтому рассматривают также предикативные теоретико-типовые системы, в к-рых производится дальнейшее расчленение предметных областей. В таких системах y в аксиоме (*) должен принадлежать области, отличной от областей пробегания связанных переменных в формуле $\varphi(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$.

Рассматривают теоретико-типовые системы, в к-рых типы упорядочены как нек-рый начальный отрезок ординальных чисел или как множество целых (отрицательных и положительных) чисел, а также системы, в к-рых формулы сами являются объектами определенного типа, и системы, допускающие выражения бесконечной длины (или средства, заменяющие такие выражения, напр. кванторы по типовым индексам). Логики второго и высших порядков можно рассматривать как теоретико-типовые системы.

Простая теория типов (п. т. т.). Язык п. т. т. содержит: для каждого натурального числа $n \geqslant 0$ переменные n-го типа $x_0^n, x_1^n, \ldots, x_i^n, \ldots$; двуместный предикатный символ $\in$; логические связки и кванторы $\supset$, $\vee$, $\&$, $\neg$, $\forall$, $\exists$; скобки (,).

Формулы п. т. т. строятся согласно обычному индуктивному определению формул: выражения вида $(x_i^n \in x_j^{n+1})$ суть формулы; если φ и ψ — формула, а v — переменная, то $(\varphi \supset \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \& \psi)$, $\neg\varphi$, $\forall v\varphi$, $\exists v\varphi$ — формулы. Запись $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ используется как сокращение для $((\varphi \supset \psi) \& (\psi \supset \varphi))$.

Нелогические аксиомы п. т. т.

А1. Аксиомы свертывания:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \varphi),$$

где x, y — переменные типов n и $n+1$ соответственно, а φ — произвольная формула языка п. т. т., не содержащая свободно y.

А2. Аксиомы объемности:

$$\forall t (t \in x \leftrightarrow t \in y) \subset \forall z (x \in z \supset y \in z),$$

где t, x, y, z — переменные типов n, $n+1$, $n+1$, $n+2$ соответственно.

А3. Аксиома бесконечности:

$$\exists x (\exists w (w \in x) \& \forall u \in x \exists v \in x$$
$$(u \subseteq v \& \exists t (t \in v \& \neg t \in u))),$$

где x — переменная типа 2. Типы остальных переменных однозначно восстанавливаются. Здесь записи $\forall u \in x\varphi$, $\exists v \in x\varphi$ обозначают формулы $\forall u (u \in x \supset \varphi)$ и $\exists v (v \in x \& \varphi)$ соответственно, а выражение $u \subseteq v$ является сокращением для $\forall z (z \in u \supset z \in v)$.

Логические аксиомы и правила вывода — это аксиомы и правила вывода классич. исчисления предикатов, сформулированные для рассматриваемого языка. Указанные аксиомы и правила вывода определяют класс выводимых формул или теорем п. т. т. Этот класс можно определить семантически.

Математич. структура $M=(V_0,\ V_1,\ \ldots,\ V_n,\ \ldots;\ \in_M)$, где $\in_M \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}(M_n \times M_{n+1})$ наз. моделью п. т. т., если в ней выполняются все нелогич. аксиомы п. т. т. Из теоремы Гёделя о полноте исчисления предикатов вытекает, что класс теорем п. т. т. совпадает с классом формул, истинных во всех моделях п. т. т. Простая теория типов — достаточно сильная теория. В нее можно погрузить арифметику и анализ (т. е. арифметику 2-го порядка), рассматривать начальные ординальные числа $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, где n — любое наперед заданное натуральное число. Она имеет простую интуитивную теоретико-множественную модель. В качестве V_0 можно взять любое бесконечное множество, а каждый следующий слой V_{n+1} состоит из всех подмножеств предыдущего слоя. Отношение $\in_M$ естественное. Наличие теоретико-множественной модели можно использовать для формального доказательства *непротиворечивости* п. т. т. в рамках достаточно мощной аксиоматич. теории. Такое доказательство непротиворечивости можно провести, напр., в рамках системы Цермело, получающейся из системы Цермело — Френкеля ZF опусканием схемы аксиом подстановки, но сохранением схемы аксиом выделения.

Лит.: [1] Whitehead A., Russel B., Principia mathematica, Camb., 1910 (2 ed., 1925); [2] Френкель А.-А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [3] Справочная книга по математической логике, ч. 4, гл. 4, 6, М., 1983; [4] Такеути Г., Теория доказательств, пер. с англ., М., 1978.

В. Н. Гришин.

ТИТСА РАССЛОЕНИЕ — голоморфное расслоение компактного связного однородного комплексного пространства X над однородным проективным рациональным многообразием D, универсальное в классе всех таких расслоений. Универсальность в данном случае означает, что проекция $\pi'\colon X \to D'$ любого расслоения из этого класса представляется в виде $\pi' = \varphi \circ \pi$, где $\pi\colon X \to D$ — проекция Т. р., а $\varphi\colon D \to D'$ нек-рое голоморфное расслаивающее отображение.

Явное построение Т. р. проводится следующим образом. Пусть G — связная комплексная группа Ли, голоморфно и транзитивно действующая на X, а U — стационарная подгруппа нек-рой точки из X. Нормализатор P связной компоненты единицы группы U является параболич. подгруппой в G, т. е. содержит максимальную связную разрешимую подгруппу (см. [1], [2]). База D Т. р. определяется как факторпространство $D=G/P$, а проекция $\pi\colon X \to D$ задается вложением подгруппы $U \subset P$. Указанная конструкция принадлежит Ж. Титсу (см. [1]), там же доказана универсальность данного расслоения.

Слой Т. р. комплексно параллелизуем. Если пространство X односвязно, то этот слой является комплексным тором. Если X допускает транзитивную группу G, совпадающую со своим коммутантом, то Т. р. совпадает с расслоением мероморфной редукции (см. [3]). Это означает, что все мероморфные функции на X постоянны на слоях Т. р. В случае когда комплексное компактное однородное пространство X является кэлеровым, слоем Т. р. будет комплексный тор (а именно, *Альбанезе многообразие* пространства X), а само расслоение аналитически тривиально [2]. Таким образом, компактное кэлерово однородное пространство есть произведение проективного рационального однородного многообразия на комплексный тор.

Лит.: [1] Tits J., «Comment. math. helv.», 1962, v. 37, p. 111—20; [2] Borel A., Remmert R., «Math. Ann.», 1962, Bd 145, S. 429—39; [3] Грауэрт Г., Реммерт Р.,

в сб.: Комплексные пространства, пер. с нем., М., 1965, с. 190—204. *Д. Н. Ахиезер.*

ТИТСА СИСТЕМА — совокупность (G, B, N, S), где G — группа, B и N — ее подгруппы, S — подмножество в $N/(B\cap N)$, причем выполнены следующие условия: (1) множество $B\cup N$ порождает группу G; (2) $T=B\cap N$ — нормальная подгруппа группы N; (3) множество S порождает группу $W=N/T$ и состоит из элементов порядка 2; (4) $sBw\subset BwB\cup BswB$ для любых $s\in S$, $w\in W$; (5) $sBs\not\subset B$ при $s\in S$. Группа W, называемая группой Вейля системы Титса (G, B, N, S), является *Кокстера группой* относительно системы образующих S. Соответствие $w\longmapsto BwB$ является биекцией множества W на множество двойных смежных классов группы G по B.

Примеры. 1) $G=GL_n(k)$, где k — любое поле, B — подгруппа верхних треугольных матриц, N — подгруппа мономиальных матриц (так что T — подгруппа диагональных матриц и $W=S_n$), S — множество транспозиций $(i\ i+1)$, где $i=1, 2, \ldots n-1$.

2) Более общо, пусть G — связная редуктивная алгебраич. группа над k, T — максимальный среди ее торов, диагонализируемых над k, N — его нормализатор, Z — его централизатор, R — система корней группы G относительно T, $W=N/Z$ — ее группа Вейля и S — множество отражений, соответствующих простым корням. Далее, пусть U — унипотентная подгруппа группы G, порожденная корневыми подгруппами, отвечающими положительным корням, и $P=UZ$. Тогда четверка $(G(k), P(k), N(k), S)$ является Т. с.

3) Пусть $G=GL_n(\mathbb{Q}_p)$, где $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел, B — подгруппа, состоящая из матриц $\|a_{ij}\|\in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ (где $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел), у к-рых $a_{ij}\in p\mathbb{Z}_p$ при $i>j$, и N — подгруппа мономиальных матриц. Тогда существует такое подмножество $S\subset W=N/(B\cap N)$, что четверка (G, B, N, S) является Т. с. Группа W при этом является бесконечной группой Кокстера типа $\tilde{A}_{n-1}$. Аналогично определяются Т. с. с группами Вейля аффинного типа, соответствующие другим связным редуктивным группам над локальными полями.

При нек-рых условиях можно утверждать, что группа G, обладающая Т. с., проста. Напр., для этого достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: (1) группа B разрешима и не содержится ни в какой собственной нормальной подгруппе группы G; (2) группа G совпадает со своим коммутантом; (3) группа Кокстера W неразложима; (4) группа B не содержит никакой нетривиальной нормальной подгруппы группы G. Таким путем доказывается простота *Шевалле групп* (в частности, конечных).

Лит.: [1] Tits J., Buildings of spherical type and finite BN-pairs, B.— N. Y., 1974; [2] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, гл. IV, пер. с франц., М., 1972. *Э. Б. Винберг.*

ТИТЧМАРША ПРОБЛЕМА — проблема отыскания асимптотики выражения

$$Q(n)=\sum_{p\leqslant n}\tau(p-l), \qquad (1)$$

где $\tau(m)$ — число делителей m, l — заданное число, отличное от нуля, p пробегает все простые числа. Аналогом этой проблемы является проблема нахождения асимптотики выражения

$$S(n)=\sum_{p\leqslant n-1}\tau(n-p). \qquad (2)$$

Т. п. была поставлена Э. Титчмаршем (E. Titchmarsh, 1930) и решена им (см. [1]) условно в предположении справедливости расширенной *Римана гипотезы*.

Дисперсионный метод, разработанный Ю. В. Линником, позволяет найти асимптотику для (1) и (2):

$$Q(n)=\frac{315\xi(3)}{2\pi^4}\prod_{p\mid l}\frac{(p-1)^2}{p^2-p+1}\,n+O(n(\ln n)^{-1+\varepsilon});$$

формула для $S(n)$ аналогична.

Теорема Виноградова — Бомбьери о распределении простых чисел в арифметич. прогрессиях в среднем также приводит к решению Т. п. При этом предположение о справедливости расширенной гипотезы Римана заменяется фактически теоремами типа *большого решета*.

Лит.: [1] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, [Л.], 1961; [2] Бредихин Б. М., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 2, с. 89—130; [3] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967.

Б. М. Бредихин.

ТИХОНОВА ТЕОРЕМА о бикомпактности произведения: топологич. произведение любого множества *бикомпактных пространств* бикомпактно. Это одна из основных теорем общей топологии; установлена А. Н. Тихоновым в 1929. Она играет весьма существенную и часто ключевую роль в построении практически всех разделов общей топологии и во многих ее применениях. В частности, Т. т. имеет основное значение для построения *бикомпактных расширений* вполне регулярных T_1-пространств (т. е. тихоновских пространств). С ее помощью строится расширение Стоуна — Чеха произвольного тихоновского пространства. Т. т. позволяет указать стандартные бикомпактные пространства — обобщенные канторовы дисконтинуумы D^τ, являющиеся произведениями дискретных двоеточий в количестве τ и тихоновские кубы I^τ — произведения τ экземпляров обычного отрезка I числовой прямой. В качестве τ здесь может фигурировать любой кардинал. Значение обобщенных канторовых дисконтинуумов D^τ и тихоновских кубов I^τ связано прежде всего с тем, что они являются универсальными объектами: каждый нульмерный бикомпакт гомеоморфен замкнутому подпространству нек-рого D^τ и каждый бикомпакт гомеоморфен замкнутому подпространству нек-рого I^τ.

Т. т. применяется при доказательстве непустоты предела обратного спектра из бикомпактных пространств, при построении теории абсолютов, в теории бикомпактных групп. Если же иметь в виду опосредованные ее применения, то почти вся общая топология попадает в сферу действия этой Т. т. Так же трудно перечислить прямые и опосредованные применения Т. т. в других областях математики. Практически они встречаются всюду, где важную роль играет понятие компактности,— в частности в функциональном анализе (банаховы пространства в слабой топологии, меры на топологич. пространствах), в общей теории оптимального управления и т. д.

Лит.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

ТИХОНОВСКИЙ КУБ — топологич. произведение τ экземпляров обычного отрезка I действительной прямой, где τ — произвольный кардинал; обозначается I^τ. Т. к. введен А. Н. Тихоновым в 1929. Если $\tau=n$ — натуральное число, то Т. к. I^τ есть единичный куб в n-мерном евклидовом пространстве, топология к-рого порождена метрикой скалярного произведения. Если $\tau=\aleph_0$ — мощность натурального ряда, то куб I^τ гомеоморфен *гильбертову кирпичу*. При $\tau_1\neq\tau_2$. Т. к. I^{τ_1} и I^{τ_2} не гомеоморфны между собой: если τ — бесконечный кардинал, то τ есть вес пространства I^τ, а если $\tau=n$ — натуральное число, то n — размерность пространства I^n. Два свойства Т. к. I^τ особенно важны: бикомпактность каждого из них, независимо от τ, и их универсальность по отношению ко вполне регулярным T_1-пространствам веса не большего, чем τ: каждое такое пространство гомеоморфно нек-рому подпространству пространства I^τ. Бикомпактные хаусдорфовы пространства, вес к-рых не превосходит τ, гомеоморфны замкнутым подпространствам тихоновского куба I^τ. Таким образом, всего двух операций — операции топо-

логич. произведения и операции перехода к замкнутому подпространству — достаточно для того, чтобы получить из одного стандартного и весьма простого топологич. пространства — отрезка — любой бикомпакт. Примечательным следствием бикомпактности Т. к. является бикомпактность единичного шара в сопряженном к банахову пространству, наделенном слабой топологией сопряженного. Универсальность Т. к. и простота определения делает их важными стандартными объектами общей топологии. Однако топологич. строение Т. к. далеко не тривиально. В частности, куб I^c, где c — мощность континуума, сепарабелен, хотя состоит из 2^c точек; вес его равен c. Неожиданный факт: число *Суслина каждого* Т. к. I^τ *счетно, независимо от* τ, т. е. каждое семейство попарно непересекающихся открытых множеств в I^τ счетно. Хотя в Т. к. есть много сходящихся последовательностей, этих последних не хватает для того, чтобы описать прямо оператор замыкания в Т. к.

А. В. Архангельский.

ТИХОНОВСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ семейства топологических пространств — то же что *топологическое произведение* семейства топологич. пространств. Понятие Т. п. введено А. Н. Тихоновым (1929).

ТИХОНОВСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, в к-ром каждое конечное множество замкнуто и для всякого замкнутого множества P и любой не принадлежащей P точки x найдется непрерывная вещественная функция f на всем пространстве, к-рая принимает значение 0 в точке x и значение 1 во всех точках множества P. Класс Т. п. совпадает с классом вполне регулярных T_1-пространств. В Т. п. любые две различные точки отделимы непересекающимися окрестностями — т. е. выполняется аксиома отделимости Хаусдорфа, но не всякое Т. п. нормально. А. Н. Тихонов (1929) охарактеризовал Т. п., как подпространства бикомпактных хаусдорфовых пространств.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

ТКАНЕЙ ГЕОМЕТРИЯ — раздел дифференциальной геометрии, в к-ром изучаются нек-рые семейства линий и поверхностей — т. н. ткани (плоские, пространственные, многомерные).

Плоской p-тканью наз. область плоскости, в к-рой заданы p (обычно $p\geqslant 3$) семейств достаточно гладких линий со свойствами: 1) через каждую точку области проходит точно по одной линии каждого семейства; 2) линии разных семейств имеют не более одной общей точки. Пример: *три семейства* прямых, параллельных сторонам равностороннего треугольника, образуют 3-ткань (регулярную, или правильную ткань).

Основным предметом изучения в Т. г. являются свойства, инвариантные при дифференциально топологич. преобразованиях. Ткани наз. эквивалентными, если они (локально или глобально) диффеоморфны. При $p=2$ *ткань диффеоморфна ткани, образованной двумя семействами* параллельных прямых (такие ткани наз. *сетями*). При $p=3$ ткань уже в общем случае недиффеоморфна ни трем семействам параллельных прямых (т. е. не является шестиугольной тканью), ни трем семействам прямых вообще (т. е. не является спрямляемой тканью). Условие шестиугольности ткани в геометрич. форме состоит в выполнении *замыкания условия*. Условие спрямляемости ткани не может быть записано в обозримом виде; его исследованием занимаются в связи с проблемами номографии.

Пространственные криволинейные ткани образуются p семействами кривых в

пространстве при условии, что через каждую точку области проходит одна кривая каждого семейства. Уже при $p=2$ такие ткани не все диффеоморфны. Выделяются ткани четырехугольные, линии которых образуют сети на поверхностях однопараметрического семейства.

Пространственные поверхностные ткани образуются p семействами поверхностей при условии, что через каждую точку проходит по одной поверхности каждого семейства, а три поверхности разных семейств имеют не более одной общей точки. Для таких тканей и их многомерных аналогов также вводится понятие спрямляемости, т. е. диффеоморфности ткани, образованной семействами плоскостей (гиперплоскостей). 4-ткань наз. октаэдрической тканью, если она диффеоморфна ткани, образованной четырьмя семействами плоскостей, параллельных граням правильного октаэдра. 4-ткань наз. шестиугольной, если 3-ткани, высекаемые поверхностями любых трех семейств на поверхностях четвертого,— шестиугольные.

Многомерные ткани образованы p семействами подмногообразий многомерного пространства. Напр., три семейства r-мерных подмногообразий $2r$-мерного пространства образуют 3-ткань, если через каждую точку проходит по одному подмногообразию каждого семейства, а многообразия двух разных семейств имеют не более одной общей точки.

Т. г. рассматривает также проективно-дифференциальные, аффинно-дифференциальные и др. свойства тканей в связи с геометрией несущего ткань многообразия. Рассматриваются ткани, образованные *геодезическими линиями*, линиями, связанными с *Дарбу тензором*, и т. д.

Определение линии третьего семейства линиями двух других (в случае плоской 3-ткани) может рассматриваться как алгебраич. операция квазигруппового типа. В связи с этим возникло понятие абстрактной ткани, или алгебраич. сети (см. *Квазигруппа*).

Лит.: [1] Бляшке В., Введение в геометрию тканей, пер. с нем., М., 1959; [2] Рыжков В. В., Белоусов В. Д., в сб.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, 1971, М., 1972, с. 159—88; [3] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. В. Рыжков.

ТОДДА КЛАСС — *характеристический класс* комплексного расслоения ξ, равный

$$\sum_{j=0}^{\infty} T_j(c_1, \ldots, c_j),$$

где $\{T_j\}$ — мультипликативная последовательность, отвечающая степенному ряду $\frac{t}{1-e^{-t}}$, c_i — *Чжэня классы*.

Введен Дж. Тоддом [1].

Лит.: [1] Todd J., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1937, v. 43, p. 190—225; [2] Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1973.

М. И. Войцеховский.

ТОЖДЕСТВА ПРОБЛЕМА — *алгоритмическая проблема* распознавания равенства (тождества) слов в алгебраич. системе (*группе*, *подгруппе* и др.) с заданной образующей и определяющими соотношениями.

ТОЖДЕСТВЕННАЯ ИСТИННОСТЬ, логическая истинность, общезначимость,— свойство формул языка исчисления предикатов, означающее истинность формулы во всех ее интерпретациях и при всех допустимых значениях ее свободных переменных. Так, для формул, содержащих только один двуместный предикатный символ ρ и переменные одного сорта (т. е. такие переменные, к-рые при интерпретации должны иметь одну и ту же область пробегания), интерпретациями служат пары (M, R), где M — произвольное непустое множество, а $R \subseteq M \times M$ — произвольное двуместное отношение на M. Допустимыми зна-

чениями свободных переменных являются произвольные элементы из M. Истинность формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ при значениях $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 0)$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ соответственно определяется индуктивным образом по построению формулы в соответствии с подразумеваемым логич. смыслом входящих в формулу логич. связок и кванторов и при условии, что связанные переменные пробегают множество M, а предикатный символ ρ обозначает отношение R.

Пусть даны формула φ и набор $\bar{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ переменных, содержащий все свободные переменные формулы φ, и пусть $|\varphi; \bar{x}|$ обозначает множество всех наборов $(a_1, \ldots, a_n)$ элементов из M, для к-рых формула φ истинна в (M, R). Множества вида $|\varphi; \bar{x}|$ можно индуктивно определить следующим образом (при этом считаем, что логич. символами формул φ являются $\wedge$, $\neg$, $\exists$):

$$|\varphi; \bar{x}| = \{(a_1, \ldots, a_n) : (a_i, a_j) \in R\},$$

если φ имеет вид $\rho(x_i, x_j)$;

$$|\varphi_1 \wedge \varphi_2; \bar{x}| = |\varphi_1; \bar{x}| \cap |\varphi_2; \bar{x}|;$$

$$|\neg\varphi; \bar{x}| = M^n - |\varphi; \bar{x}|;$$

$$|\exists y \varphi; \bar{x}| = \mathrm{пр}_{n+1} |\varphi; \bar{x}y|,$$

где $\cap$, $-$, $\mathrm{пр}_{n+1}$ обозначают соответственно пересечение, разность и проекцию вдоль $(n+1)$-й координаты (т. е. образ относительно отображения $(a_1 \ldots a_n a_{n+1}) \mapsto (a_1 \ldots a_n)$) множеств.

Тождественная истинность формулы φ со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$ означает тогда, что для любой интерпретации (M, R) всякий кортеж $(a_1, \ldots, a_n)$ элементов из M принадлежит множеству $|\varphi; x_1 \ldots x_n|$. При $n=0$ множество $|\varphi; \bar{x}|$ либо пусто, либо одноэлементно. Формула

$$\exists y \forall x \rho(x, y) \supset \forall x \exists y \rho(x, y)$$

является тождественно истинной. Обратная же импликация не является тождественно истинной формулой.

В случае когда интерпретация фиксирована, тождественно истинными наз. иногда формулы, истинные в данной интерпретации при любых значениях ее свободных переменных.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Шенфилд Дж., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975.

В. Н. Гришин.

ТОЛЕРАНТНОСТЬ — бинарное отношение $R \subseteq A \times A$ на множестве A, обладающее свойствами рефлексивности и симметричности, т. е. удовлетворяющее условиям aRa для всех $a \in A$ и aRb влечет за собой bRa для любых $a, b \in A$. Т. R на универсальной алгебре $A = \{A, \Omega\}$ наз. совместимой, если она является подалгеброй прямого квадрата $A \times A$, т. е. если для любой n-арной операции ω условие $a_i R b_i$, $i=1, \ldots, n$, влечет за собой $(a_1, \ldots, a_n\omega) R (b_1, \ldots, b_n\omega)$. Таким образом, Т. является естественным обобщением понятия *эквивалентности*, а совместимая Т.— обобщением *конгруэнции*. Любая совместимая Т. решетки с относительными дополнениями является конгруэнцией [1]. Упорядоченное включением множество $\mathrm{LT}(A)$ всех совместимых Т. на универсальной алгебре A является алгебраич. решеткой, содержащей решетку $\mathrm{Con}(A)$ всех конгруэнций в качестве подмножества (но не обязательно в качестве подрешетки). О свойствах решеток $\mathrm{LT}(A)$ и $\mathrm{Con}(A)$ см. [2], [3].

Лит.: [1] Chajda I., Niederle J., Zelinka B., «Czechosl. Math. J.», 1976, v. 26, № 2, p. 304—11; [2] Schmidt E. T., Kongruenzrelationen algebraischer Strukturen, B., 1969; [3] Гретцер Г., Общая теория решеток, пер. с англ., М., 1982.

Т. С. Фофанова.

ТОЛЕРАНТНЫЙ ИНТЕРВАЛ — случайный интервал, построенный по независимым одинаково распределенным случайным величинам, функция распределения

к-рых $F(x)$ неизвестна, и содержащий с заданной вероятностью γ по крайней мере долю p ($0<p<1$) вероятностной меры dF.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же вероятностному закону, функция распределения к-рого $F(x)$ неизвестна, и пусть $T_1=T_1(X_1, \ldots, X_n)$ и $T_2=T_2(X_1, \ldots, X_n)$ — такие статистики, что для заранее фиксированного числа p ($0<p<1$) событие $\{F(T_2)-F(T_1)>p\}$ имеет заданную вероятность γ, т. е.

$$\mathsf{P}\left\{\int_{T_1}^{T_2} dF(x) \geqslant p\right\}=\gamma. \tag{1}$$

В таком случае, случайный интервал (T_1, T_2) наз. γ-т о л е р а н т н ы м и н т е р в а л о м для функции распределения $F(x)$, его границы T_1 и T_2 — т о л е р а н т н ы м и п р е д е л а м и, а вероятность γ — к о э ф ф и ц и е н т о м д о в е р и я. Из (1) следует, что односторонние толерантные пределы T_1 и T_2 представляют собой не что иное, как обычные односторонние доверительные пределы с коэффициентом доверия γ для квантилей $x_{1-p}=F^{-1}(1-p)$ и $x_p=F^{-1}(p)$ соответственно, т. е.

$$\mathsf{P}\{x_{1-p}\in[T_1, +\infty)\}=\gamma,$$
$$\mathsf{P}\{x_p\in(-\infty, T_2]\}=\gamma.$$

П р и м е р. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся нормальному $N(a, \sigma^2)$ закону, параметры к-рого a и σ^2 неизвестны. В этом случае в качестве толерантных пределов T_1 и T_2 естественно выбрать функции, зависящие от достаточной статистики $(\overline{X}, S^2)$, где

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n),\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

Именно, полагают $T_1=\overline{X}-kS$ и $T_2=\overline{X}+kS$, где константа k, называемая толерантным множителем, определяется как решение уравнения

$$\mathsf{P}\left\{\Phi\left(\frac{\overline{X}+kS-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\overline{X}-kS-a}{\sigma}\right)\geqslant p\right\}=\gamma,$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона, при этом $k=k(n, \gamma, p)$ не зависит от неизвестных параметров a и σ^2. Построенный таким образом Т. и. обладает следующим свойством: с доверительной вероятностью γ в интервале $(\overline{X}-kS, \overline{X}+kS)$ содержится не менее чем доля p вероятностной массы нормального распределения, к-рому подчиняются наблюдения $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

В предположении существования плотности вероятности $f(x)=F'(x)$, вероятность события $\{F(T_2)-F(T_1)\geqslant p\}$ не зависит от $F(x)$ тогда и только тогда, когда толерантные пределы T_1 и T_2 суть порядковые статистики. Именно этот факт положен в основу общего метода построения непараметрических или, как их еще называют, свободных от распределения Т. и. Пусть $X^{(\cdot)}=(X_{(n1)}, \ldots, X_{(nn)})$ — вектор порядковых статистик, построенный по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и пусть

$$T_1=X_{(nr)},\ T_2=X_{(ns)},\ 1\leqslant r<s\leqslant n.$$

В силу того, что случайная величина $F(X_{(ns)})-F(X_{(nr)})$ подчиняется бета-распределению с параметрами $s-r$ и $n-s+r+1$, вероятность события $\{F(X_{(ns)})-F(X_{(nr)})\geqslant p\}$ выражается интегралом $I_{1-p}(n-s+r+1, s-r)$, где $I_x(a, b)$ — неполная бета-функция и, следовательно, в этом случае вместо (1) имеет место соотношение

$$I_{1-p}(n-s+r+1,\ s-r)=\gamma, \tag{2}$$

к-рое и позволяет по заданным γ, p и n определять номера r и s порядковых статистик $X_{(nr)}$ и $X_{(ns)}$, являющихся толерантными пределами искомого Т. и. Кроме

того, соотношение (2) позволяет по заданным γ, p, r и s определять необходимый объем n выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ при к-ром (2) справедливо. При решении подобных задач пользуются статистич. таблицами.

Лит.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [2] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [3] Дэйвид Г., Порядковые статистики, пер. с англ., М., 1979; [4] Murphy R. B., «Ann. Math. Statistics», 1948, v. 19, p. 581—89; [5] Somerville P. N., там же, 1958, v. 29, p. 599—601; [6] Scheffé H., Tukey J. W., там же, 1945, v. 16, p. 187—192; [7] Frascr D. A. S., Non parametric methods in statistics, N. Y.— L., 1957; [8] Wald A., Wolfowitz J., «Ann. Math. Statistics», 1946, v. 17, p. 208—15; [9] Robbins H., там же, 1944, v. 15, p. 214—16. *М. С. Никулин.*

ТОМА ИЗОМОРФИЗМ — изоморфизм между (обобщенными) (ко)гомологиями базы векторного (сферического) расслоения ξ и (ко)гомологиями его *Тома пространства* $T(\xi)$.

Пусть n-мерное векторное расслоение ξ над конечным клеточным пространством X ориентируемо в некоторой мультипликативной *обобщенной теории когомологий* E^*, т. е. существует *Тома класс* $u \in \tilde{E}^*(T\xi)$. Объект $\tilde{E}^*(T\xi)$ является $E^*(X)$-модулем, а гомоморфизм $\varphi : E^i(X) \to \tilde{E}^{i+n}(T\xi)$ умножения на класс Тома является изоморфизмом, к-рый и наз. изоморфизмом Тома (или изоморфизмом Тома — Дольда).

Двойственным образом определяется изоморфизм $E_i(X) \to \tilde{E}_{i+n}(T\xi)$.

В случае когда E^* есть классич. теория когомологий H^*, эти изоморфизмы указаны в [1], а для произвольной теории E^* они установлены в [2]. Кроме того, если ξ не является ориентируемым в целочисленной теории когомологий H^*, то имеет место изоморфизм $H^k(X) \cong \cong H^{k+n}(T\xi; \{\mathbb{Z}\})$, где справа стоит группа когомологий с коэффициентами в локальной системе групп $\{\mathbb{Z}\}$. Более общо, если ξ неориентируемо в теории когомологий E^*, то имеется изоморфизм, обобщающий как вышеописанный Т. и., так и изоморфизм Тома — Дольда для E^*-ориентированных расслоений [3].

Лит.: [1] Том Р., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения. Сб. пер., М., 1958, с. 293—351; [2] Дольд А., «Математика», 1965, т. 9, № 2, с. 8—14; [3] Рудяк Ю. Б., «Докл. АН СССР», 1980, т. 255, № 6, с. 1323—25.

Ю. Б. Рудяк.

ТОМА КАТАСТРОФЫ — *особенности дифференцируемых отображений*, классификация к-рых была анонсирована Р. Томом [1] при рассмотрении им градиентных динамич. систем и аналогичная списку *критических точек* коразмерности $\leqslant 4$ дифференцируемых функций. Исходная формулировка результата Тома: 4-параметрические семейства функций в типичном случае устойчивы и с точностью до знака и замены переменных задаются в окрестности критич. точки одним из семи выражений (см. табл.).

Обозначение	Коразмерность	Коранг	Росток	Универсальная деформация	Название
A_2	1	1	x^3+y^2	ux	Складка
A_3	2	1	x^4+y^2	$ux+vx^2$	Сборка
A_4	3	1	x^5+y^2	$ux+vx^2+wx^3$	Ласточкин хвост
D_4^-	3	2	x^3+xy^2	$ux+vx^2+wy$	Гиперболич. омбилика
D_4^+	3	2	x^3-xy^2	$ux+vx^2+wy$	Эллиптич. омбилика
A_5	4	2	x^6+y^2	$ux+vx^2+wx^3+tx^4$	Бабочка
D_5	4	2	x^4+xy^2	$ux+vx^2+wx^3+ty$	Параболич. омбилика

Ростки, отвечающие Т. к., являются конечно определенными (точнее, 6-определенными: в подходящих координатах они записываются как многочлены от двух переменных степени $\leqslant 6$).

Коразмерность codim служит мерой сложности критич. точек; любое достаточно малое возмущение функции f с codim-r приводит к функции, имеющей не более r критич. точки. К о р а з м е р н о с т ь ю о с о б е н н о с т и (т. е. ростка f, для к-рого $f(0)=Df(0)=0$) наз. число $\dim \mathfrak{m}/\langle \partial f\rangle$, где $\mathfrak{m}=\{f : f(0)=0\}$, $\langle \partial f\rangle$ — идеал, порожденный ростками $\partial f/\partial x^i$. Напр., если $f=x^N$, то $\langle \partial f\rangle=\langle x^{N-1}\rangle$, и базисом $\mathfrak{m}/\langle \partial f\rangle$ служат смежные классы элементов x, x^2, . . ., x^{N-2}, так что $\operatorname{codim}=2$. Имеет место неравенство $\operatorname{codim} f \geqslant \frac{c(c+1)}{2}$, где c — коранг гессиана $\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j\,(0)$; отсюда, в частности, если $r\leqslant 4$, то $c\leqslant 2$.

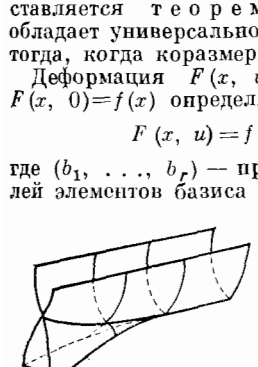
Конечная определенность (достаточность) ростка, грубо говоря, означает, что он определяется с точностью до гладких замен координат своей *струей*. Точнее, росток f наз. k-о п р е д е л е н н ы м, если каждый росток f', имеющий ту же k-струю (т. е. отрезок ряда Тейлора до членов порядка $\leqslant k$), что и f, правоэквивалентен f (см. [2]). Для конечной определенности ростка необходима и достаточна конечность его коразмерности. В частности, если $\operatorname{codim}=r$, то f является $(r+2)$-определенным (отсюда 6-определенности при $r\leqslant 4$).

Т. к., в отличие от случая *общего положения*, являются вырожденными особенностями (т. е. гессиан в них вырожден), и от них можно, как указывалось, избавиться малым возмущением. Однако для многих практически важных случаев, равно как и в теоретич. плане, представляет интерес не индивидуальный объект, а семейство таковых, зависящее от нескольких «управляющих» параметров. Вырожденные особенности, устранимые при каждом фиксированном значении параметров, могут оказаться неустранимыми для всего семейства (устойчивость Т. к. можно рассматривать и в таком смысле). Но тогда естественным объектом изучения является не сама особенность, а семейство (деформация особенности), в к-ром она становится неустранимой (или распадается, «бифурцирует») при изменении параметров. Оказывается, во многих случаях изучение всевозможных деформаций можно свести к изучению одной единственной, в нек-ром смысле самой большой, все остальные получаются из нее. Такие д е ф о р м а ц и и наз. в е р с а л ь н ы м и, а они, в свою очередь, получаются из универсальной (миниверсальной) деформации, к-рая характеризуется наименьшим возможным значением размерности пространства параметров. Важнейшим результатом здесь представляется т е о р е м а М а з е р а: особенность f обладает универсальной деформацией F тогда и только тогда, когда коразмерность f конечна.

Деформация $F(x,\ u)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^r$, ростка $f(x)$, $F(x,\ 0)=f(x)$ определяется формулой

$$F(x,\ u)=f(x)+b_1u_1+\ldots+b_ru_r,$$

где $(b_1,\ \ldots,\ b_r)$ — произвольный набор представителей элементов базиса пространства $\mathfrak{m}/\langle \partial f\rangle$. Т. к. соответствуют не более чем 4-параметрич. деформации.



В приложениях важно т. н. б и ф у р к а ц и о н н о е м н о ж е с т в о $D_f=\Delta_f\cap\Sigma_f$, где $\Delta f=\{(x,u)\in\Sigma_f\}$,

d^2f вырождено (особое множество), а $\Sigma_f = \{(x,\ u) \in \mathbb{R}^n \times U |_{d_{xf}=0}\}$ (множество катастроф), т. к. оно лежит в пространстве управления и, следовательно, «наблюдаемо», и все «скачки», «катастрофы» происходят и на нем. На рис. 1*а*, *б*, *в* изображены случаи, соответствующие codim-3.

Лит.: [1] Thom R., «Topology», 1969, v. 8, p. 313—35; [2] Брёкер Т.,Ландер Л., Дифференцируемые ростки и катастрофы, пер. с англ., М., 1977; [3] Постон Т., Стюарт И., Теория катастроф и ее приложения, пер. с англ., М., 1980. *М. И. Войцеховский.*

ТОМА КЛАСС — элемент в группе (обобщенных) когомологий *Тома пространства*, порождающий ее как модуль над кольцом когомологий базы. Для мультипликативной *обобщенной теории когомологий* E^* пусть $\gamma_n \in \tilde{E}^n(S^n)$ — элемент, являющийся образом единицы $1 \in E^0(S^0)$ при n-кратном изоморфизме *надстройки* $\tilde{E}^0(S^0) \cong \tilde{E}^n(S^n)$. Пусть ξ — векторное n-мерное расслоение над линейно связным конечным клеточным пространством X, и пусть $j : S^n \to T(\xi)$ — соответствующее включение в пространство Тома. Элемент $u \in \tilde{E}^n(T\xi)$ наз. классом Тома (или ориентацией) расслоения ξ, если $j^*u = \gamma_n$. Расслоение может и не обладать Т. к. Расслоение, обладающее (в E^*) Т. к., наз. E-ориентируемым, а расслоение с фиксированным Т. к.— E-ориентированным. Количество Т. к. E-ориентируемого расслоения над X равно количеству элементов группы $\tilde{E}^0(X)$. Гомоморфизм умножения на Т. к. задает *Тома изоморфизм*. *Ю. Б. Рудяк.*

ТОМА ПРОСТРАНСТВО — топологич. пространство, сопоставляемое векторному (или сферическому) расслоению.

Пусть ξ — векторное расслоение над клеточным пространством X. Пусть в нем выбрана риманова метрика и рассматривается ассоциированное с ξ расслоение $D(\xi)$ на замкнутые единичные диски. В $D(\xi)$ содержится подрасслоение $S(\xi)$ на единичные сферы; факторпространство $D(\xi)/S(\xi)$ есть пространство Тома расслоения ξ, обозначаемое $T(\xi)$. Для компактной базы X Т. п. можно описать также как одноточечную компактификацию тотального пространства расслоения ξ. Кроме того, Т. п. является *конусом* проекции $S(\xi) \to X$, и можно таким образом определять Т. п. любого сферич. расслоения. Конечно, Т. п. определены и для любых расслоений со слоем $\mathbb{R}^n$.

Пусть O_k — группа ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^k$. Над ее *классифицирующим пространством* BO_k имеется k-мерное векторное расслоение γ_k, ассоциированное с универсальным O_k-расслоением. Т. п. $T\gamma_k$ часто обозначается через MO_k или TBO_k и наз. пространством Тома группы O_k. Аналогично вводятся Т. п. MU_k, MS_{p_k} и т. д., где U_k и S_{p_k} соответственно — унитарная и симплектическая группы.

Роль Т. п. состоит в том, что они позволяют сводить ряд геометрич. задач к задачам гомотопич. топологии и, следовательно, к алгебраич. задачам. Так, задача вычисления групп *бордизмов* сводится к задаче вычисления гомотопич. групп Т. п. MO_k, MSO_k и т. д. (см. [1], [2], а также *Кобордизм*); задача классификации гладких многообразий сводится к исследованию гомотопич. свойств Т. п. *нормального расслоения* (см. [3]); задача реализации циклов подмногообразиями (см. *Стипрода задача*) сводится к изучению когомологий Т. п. MSO_k и MO_k, и т. д. (см. также *Трансверсальное отображение*, *Трубчатая окрестность*).

Конструкция Т. п. естественна на категории расслоений: любой морфизм (векторных) расслоений $f : \xi \to \eta$ индуцирует непрерывное отображение $T(f) : T(\xi) \to T(\eta)$. В частности, Т. п. n-мерного расслоения над

точкой есть S^n, и потому для любого n-мерного векторного расслоения ξ над X и любой точкой $x \in X$ имеется включение $j_x : S^n \to T(\xi)$ (индуцированное включением слоя над x). Если X линейно связно, то все такие включения гомотопны, и можно говорить об отображении $j : S^n \to T(\xi)$, единственном с точностью до гомотопности.

Для векторных расслоений ξ и η над X и Y соответственно определено расслоение $\xi \times \eta$ над $X \times Y$. При этом $T(\xi \times \eta) = T(\xi) \wedge T(\eta)$ (см. [4]). В частности, для тривиального расслоения θ^n имеет место $T(\xi \oplus \theta^n) = S^n T(\xi)$, где S — оператор *надстройки*, так что $T(\theta^n) = S^n(X \bigcup pt)$. Это обстоятельство позволяет конструировать всевозможные спектры пространств Тома.

Для мультипликативной *обобщенной теории когомологий* E имеется спаривание

$$E^*(D(\xi)) \otimes E^*(D(\xi), S(\xi)) \to E^*(D(\xi), S(\xi)).$$

Возникает спаривание

$$E^*(X) \otimes \tilde{E}^*(T\xi) \to \tilde{E}^*(T\xi),$$

так что $\tilde{E}^*(T\xi)$ является $E^*(X)$-модулем, и это используется при построении *Тома изоморфизма*.

Важной и часто используемой является следующая теорема двойственности Атьи (см. [4], [5]): если M — гладкое многообразие с краем ∂M (возможно пустым) и ν — его нормальное расслоение, то Т. п. $T(\nu)$ находится в S-двойственности к $M/\partial M$.

Лит.: [1] Том Р., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения. Сб. пер., М., 1958, с. 293—351; [2] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [3] Браудер В., Перестройки односвязных многообразий, пер. с англ., М., 1983; [4] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [5] Атья М., «Математика», 1966, т. 10, № 5, с. 48—69.

Ю. Б. Рудяк.

ТОМА СПЕКТР — *спектр пространств*, эквивалентный спектру, ассоциированному с нек-рой структурной серией (см. B, φ-*структура*).

Пусть (B_n, φ_n, g_n) — нек-рая структурная серия, и пусть ξ_n — расслоение над B_n, индуцированное отображением $\varphi_n : B_n \to BO_n$. Пусть $T\xi_n$ — *Тома пространство* расслоения ξ_n. Отображение g_n индуцирует отображение $S_n : ST\xi_n \to T\xi_{n+1}$, где S — *надстройка*, а $ST\xi_n = T(\xi_n \oplus \theta)$ (θ — одномерное тривиальное расслоение). Получается спектр пространств $\{T\xi_n\} = T(B, \varphi, g)$, ассоциированный со структурной серией (B_n, φ_n, g_n), и спектром Тома наз. любой спектр, (гомотопически) эквивалентный спектру вида $T(B, \varphi, g)$. Он представляет теорию (B, φ)-кобордизмов. Так, серии классич. групп Ли O_k, SO_k, U_k, Sp_k приводят к Т. с. TBO, $TBSO$, TBU, $TBSp$.

Пусть β_n — группа кос Артина из n нитей. Гомоморфизм $\beta_n \to S_n \subset O_n$, где S_n — симметрическая группа, задает отображение $B\beta_n \to BO_n$ так, что возникает структурная серия (β_n канонически вкладывается в β_{n+1}). Соответствующий Т. с. эквивалентен спектру Эйленберга — Маклейна $K(\mathbb{Z}/2) = \{K(\mathbb{Z}/2, n)\}$, так что $K(\mathbb{Z}/2)$ есть Т. с. (см. [1], [2]). Апалогичпо, $K(\mathbb{Z})$ есть Т. с., но уже сферич. расслоения.

Ю. Б. Рудяк.

ТОМПСОНА ПОДГРУППА — характеристич. подгруппа p-*группы*, порожденная всеми абелевыми подгруппами максимального порядка. Введена Дж. Томпсоном [1].

Лит.: [1] Thompson J. G., «J. Algebra», 1969, v. 13; [2] Gorenstein D., Finite groups, N. Y., 1968.

Н. Н. Вильямс.

ТОНЕЛЛИ ПЛОСКАЯ ВАРИАЦИЯ — числовая характеристика функции двух переменных, с помощью к-рой определяется класс функций, имеющих ограниченную вариацию в смысле Тонелли. Пусть функция $f(x, y)$ задана на прямоугольнике $D = [a, b] \times [c, d]$. Предполагается, что функции

$$V_f^1(x) \equiv \operatorname*{Var}_{c \leqslant y \leqslant d} f(x, y)$$

и

$$V_f^2(y) \equiv \operatorname*{Var}_{a \leqslant x \leqslant b} f(x, y)$$

измеримы по Лебегу (первая — на отрезке $[a, b]$, вторая — на $[c, d]$). Если

$$T(f, D) \equiv \int_a^b V_f^1(x)\,dx + \int_c^d V_f^2(y)\,dy < \infty,$$

то говорят, что функция $f(x, y)$ имеет ограниченную (конечную) п л о с к у ю в а р и а ц и ю Т о н е л л и на прямоугольнике D, а класс всех таких функций обозначают $T(D)$. Это определение предложено Л. Тонелли (см. [1], [2]). Однако для непрерывных функций $f(x, y)$ другая характеристика класса $T(D)$ (в терминах *Банаха индикатрисы*) содержится в более ранней работе С. Банаха [4]. Если функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике D, то для того чтобы поверхность $z=f(x, y)$ имела конечную площадь, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x, y)$ принадлежала классу $T(D)$.

Лит.: [1] T o n e l l i L., «C. r. Acad. sci.», 1926, t. 182, p. 1198—1200; [2] е г о ж е, «Atti Accad. Naz. Lincei», 1926, t. 3, p. 357—63; [3] В и т у ш к и н А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955, с. 13; [4] B a n a c h S., «Fundam. Math.», 1925, t. 7, p. 225—36; [5] С а к с С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949, с. 268. *Б. И. Голубов.*

ТОНЕЛЛИ ТЕОРЕМА о конечности площади непрерывной поверхности, заданной явным уравнением: пусть действительно-значная функция $f(x, y)$ задана на прямоугольнике $D_0=[a, b]\times[c, d]$; тогда:

а) для того чтобы непрерывная поверхность $z=f(x, y)$, $(x, y)\in D_0$ имела конечную площадь, равную $S(F, D_0)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x, y)$ имела конечную *Тонелли плоскую вариацию* на D_0;

б) если имеет место утверждение а), то

$$S(F, D_0) \geqslant \iint_{D_0} \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2} dx\,dy \equiv$$
$$\equiv L(f, D_0),$$

причем площадь

$$S(D) \equiv S(F, D),\ D=[\alpha, \beta]\times[\gamma, \delta] \subset D_0,$$

является непрерывной аддитивной функцией прямоугольника $D\subset D_0$, и почти для всех точек $(x, y)\in D_0$ справедливо равенство

$$S'(x, y) \equiv \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2};$$

в) для того чтобы имело место равенство $S(F, D_0)=L(F, D_0)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $F(x, y)$ была абсолютно непрерывной на D_0, а для этого необходимо и достаточно, чтобы площадь $S(F, D)$ была абсолютно непрерывной функцией прямоугольника $D\subset D_0$.

Эта теорема доказана Л. Тонелли (см. [1] — [3], а также [4]), а утверждение а) даже для поверхностей, заданных параметрически, установлено С. Банахом [5] (в несколько иной терминологии).

Лит.: [1] T o n e l l i L., «C. r. Acad. sci.», 1926, t. 182, p. 1198—1200; [2] е г о ж е, «Atti Accad. Naz. Lincei», 1926, t. 3, p. 357—63, 445—50, 633—58; [3] е г о ж е, там же, 1927, t. 5, p. 313—18; [4] С а к с С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949, с. 268; [5] B a n a c h S., «Fundam. Math.», 1925, v. 7, p. 225—37. *Б. И. Голубов.*

ТОНКАЯ ТОПОЛОГИЯ в т е о р и и п о т е н ц и а л а — слабейшая из топологий, в к-рых непрерывны все локально супергармонич. функции, заданные на пространстве $\mathbb{R}^n$. Объекты, относящиеся к Т. т., отмечаются дополнительными словами «тонкий», «тонко» и т. п.

Понятие Т. т. тесно связано с понятием разреженного множества (см. *Разреженность множества*). Т. т. сильнее обычной евклидовой топологии $\mathbb{R}^n$, т. е. всякое евклидово открытое множество является тонко от-

тым. Тонкая окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — это множество $V(x_0)$ такое, что $x_0 \in V(x_0)$ и дополнение $CV(x_0)$ является разреженным множеством в точке x_0. Тонко открытые множества — это прообразы при отображении супергармонич. функциями расширенной числовой оси $\overline{\mathbb{R}}$ и интервалов вида $(a, +\infty]$, $[-\infty, b)$, (a, b), $-\infty < a < b < +\infty$. Всякая супергармонич. функция на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ тонко непрерывна на E. Для того чтобы множество $E \subset \mathbb{R}^n$ было разреженным в точке $x_0 \subset E$, необходимо и достаточно, чтобы x_0 была тонко изолированной точкой E.

Пусть x_0 — тонко предельная точка E, т. е. E не разрежено в точке x_0, и числовая функция f определена на E. Число λ наз. тонким пределом функции f в точке x_0, если для любой окрестности $U(\lambda)$ точки λ в $\mathbb{R}$ найдется тонкая окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$x \in E \cap V(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(\lambda).$$

Если λ — тонкий предел f в x_0, то найдется тонкая окрестность $V(x_0)$ такая, что λ будет обычным пределом в x_0 сужения $f|E \cap V(x_0)$ (теорема Картана).

Пусть E — замкнутое множество, разреженное в точке x_0, $f > 0$ — супергармонич. функция, определенная на CE в окрестности x_0; тогда f имеет тонкий предел $\lambda > 0$ в точке x_0.

Т. т. строится и в аксиоматич. теории потенциала (см. [3]).

Лит.: [1] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [2] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [3] Brelot M., Lectures on potential theory, Bombay, 1960. *Е. Д. Соломенцев.*

ТОНКИЙ ПУЧОК — пучок абелевых групп $\mathcal{F}$ на паракомпактном пространстве X, пучок эндоморфизмов к-рого есть *мягкий пучок*. Пучок $\mathcal{F}$ является Т. п. тогда и только тогда, когда для любых замкнутых подмножеств A, $B \subset X$ таких, что $A \cap B = \varnothing$, существует эндоморфизм $h : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, тождественный над A и равный 0 над B, или когда для любого открытого покрытия $(U_i)_{i \in I}$ пространства X существует такое локально конечное семейство $(h_i)_{i \in I}$ эндоморфизмов пучка $\mathcal{F}$, что $\operatorname{supp} h_i \subset U_i$ $(i \in I)$ и $\sum_{i \in I} h_i$ — тождественный эндоморфизм. Всякий Т. п. является мягким, а если $\mathcal{F}$ — пучок колец с единицами, то верно и обратное. Если $\mathcal{F}$ — Т. п., а $\mathcal{L}$ — любой пучок абелевых групп на X, то $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{L}$ — также Т. п. Примером Т. п. служит пучок ростков непрерывных (или дифференцируемых класса C^k) сечений произвольного (соответственно дифференцируемого) векторного расслоения над паракомпактным пространством (соответственно паракомпактным дифференцируемым многообразием).

Лит.: [1] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [2] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976. *А. Л. Онищик.*

ТОНКОЕ МНОЖЕСТВО — подмножество A области $D \subset \mathbb{C}^n$ такое, что для каждой точки $z \in D$ существует открытый полидиск $\Delta(z, r) \subset D$ и функция f, голоморфная и не равная тождественно нулю, но обращающаяся в нуль на $X \cap \Delta(z, r)$. *М. И. Войцеховский.*

ТОПОЛОГИЗИРОВАННАЯ КАТЕГОРИЯ — категория, снабженная топологией Гротендика. Пусть C — категория с расслоенными произведениями. Задать топологию Гротендика в C значит задать для каждого объекта $X \in C$ множество $\operatorname{Cov}(X)$ семейств морфизмов $(X_i \to X)_{i \in I}$, называемых покрытиями, причем должны выполняться следующие условия:

1) $(X \xrightarrow{\mathrm{id}} X)$ — покрытие объекта X;

2) если $(X_i \to X)$ — покрытие X, то получаемое из него заменой базы $Y \to X$ семейство $(X_i \times_X Y \to Y)$ является покрытием объекта Y;

3) если $(X_i \to X)$ — покрытие X, а $(X_{ij} \to X_i)$ покрытия X_i, то $(X_{ij} \to X)$ — покрытие X.

Если в C прямые суммы определены, то семейство $(X_i \to X)$ можно заменить одним морфизмом $\coprod_i X_i \to X$ (для простоты в дальнейшем это предполагается).

Категория открытых подмножеств U топологич. пространства T является Т. к., если в качестве Cov (U) брать семейства $(V_i \subset U)$ такие, что $\bigcup_i V_i = U$. Менее тривиальный пример доставляет *этальная топология* схем: пусть X — схема, C — категория схем, этальных над X; морфизм $Y \to Z$ в C считается покрытием, если он сюръективен.

Наличие покрытий позволяет говорить о пучках на Т. к. и их когомологиях. Контравариантный функтор F из C в категорию множеств наз. п у ч к о м м н о ж е с т в, если для любого покрытия $X' \to X$ выполнено условие

$$F(X) = \{s' \in F(X'),\ p_1^*(s') = p_2^*(s')\},$$

где p_1, p_2 — две проекции $X' \times_X X'$ на X'. К а н о н и ч е с к о й т о п о л о г и е й в категории C наз. наиболее тонкая топология, в к-рой все представимые функторы являются пучками. Если же выполнено обратное — любой пучок относительно канонич. топологии представим, то категория C наз. т о п о с о м. С каждым предпучком множеств можно связать ассоциированный с ним пучок множеств; определяются операции прямого и обратного образа пучков и т. д. Аналогично определяется пучок групп, абелевых групп, модулей и т. д. Категория пучков абелевых групп на Т. к. является *Гротендика категорией*, что позволяет определить когомологии пучков $H^i(X_1 F)$ как производные функторы для функтора $F \mapsto F(X)$ (см. *Когомологии*) и перенести на них обычный формализм.

См. также *Гомотопический тип* топологизированной категории.

Лит.: [1] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, t. 1—3, B.— Hdlb.— N. Y., 1972—73; [2] Cohomologie étale, B.— Hdlb.— N. Y., 1977.

В. И. Данилов.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА — 1) *Универсальная алгебра*, являющаяся топологич. пространством, в к-ром непрерывны все сигнатурные операции.

2) Алгебра (в смысле «операторное кольцо») A над топологич. полем или коммутативным кольцом R, являющаяся топологич. пространством, операции сложения и умножения в к-ром, а также отображение $R \times A \to A$ $((r, a) \to ra)$, непрерывны. Пример Т. а. над полем комплексных чисел — *банаховы алгебры*.

3) Раздел алгебры, к-рый занимается изучением топологич. алгебраич. систем, то есть групп, полугрупп, колец, решеток, векторных пространств, модулей и др., наделенных топологиями, в к-рых рассматриваемые алгебраич. операции непрерывны.

Понятие *топологической группы* возникло в связи с рассмотрением групп непрерывных преобразований. Так, во 2-й пол. 19 в. С. Ли (S. Lie) и его школа создали развитую теорию важного класса топологич. групп — групп дифференцируемых преобразований многообразий в себя, получивших впоследствии название *Ли групп*. Изучение общих топологич. групп началось в 20-е гг. 20 в. (см. [1], [2]). С нач. 30-х гг. топологич. группы, кольца и поля подверглись уже систематич. изучению.

А. Н. Колмогоровым [3] был развит аксиоматич. подход к исследованию топологических проективных геометрий. Их классификация существенно зависела от описания *локально компактных тел*. Полное описание связных локально компактных тел было дано в 1932 Л. С. Понтрягиным (см. [4], гл. 4).

Многочисленные проблемы анализа привели к общему определению *банахова пространства* (см. также [5]), что создало предпосылку для систематич. изуче-

ния топологич. модулей над топологич. кольцами и банаховых алгебр (см. [6], [7]).

Основными разделами Т. а. в настоящее время являются: топологич. группы и их обобщения (в частности, *топологические полугруппы* и квазигруппы), *топологические кольца* (в частности, *топологические поля* и тела) и *топологические модули* над ними (в частности, *топологические векторные пространства*), топологич. решетки (в частности, топологические проективные плоскости), топологические универсальные алгебры (см. [5], [8], [10], [11]).

В Т. а. можно выделить следующие направления исследований: существование топологий в алгебраич. системах (группах, кольцах и др.), превращающих их в топологич. алгебраич. системы с различными свойствами; вопросы продолжения топологий на расширения алгебраич. систем и возможности вложения в топологич. алгебраич. системы определенных классов; свойства топологии топологич. алгебраич. систем, в частности возможность задания топологий метрикой или нормой; строение различных классов топологич. алгебраич. систем (включая теорию радикалов топологич. алгебраич. систем); свободные топологич. алгебраич. системы; вопросы двойственности топологич. алгебраич. систем.

Лит.: [1] Schreier O., «Hamb. Abh.», 1926, Bd 4, S. 15—32; [2] Leja F., «Fund. Math.», 1927, t. 9, p. 37—44; [3] Колмогоров А. Н., «Ann. Math.», 1932, v. 33, p. 175—76; [4] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [5] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [6] Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, М., 1960; [7] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [8] Арнаутов В. И., Водинчар М. И., Михалев А. В., Введение в теорию топологических колец и модулей, Кишинев, 1981; [9] Глушков В. М., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 2, с. 3—41; [10] Скорняков Л. А., «Труды Московского математического об-ва», 1954, т. 3, с. 347—73; [11] Мальцев А. И., Избранные труды, т. 1—2, М., 1976. *В. И. Арнаутов, А. В. Михалёв.*

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ГРУППА — множество G, на к-ром заданы две структуры — группы и топологич. пространства, согласованные условием непрерывности групповых операций. А именно, отображение $(a, b) \mapsto ab^{-1}$ прямого произведения $G \times G$ в G должно быть непрерывным. Подгруппа H Т. г. G является Т. г. в индуцированной топологии. Факторпространство G/H смежных классов снабжается фактортопологией относительно канонич. отображения группы G на G/H. Если H — нормальный делитель Т. г. G, то G/H (факторгруппа группы G по H) — Т. г.

Примеры Т. г.: Векторная группа $\mathbb{R}^n$ — прямое произведение n экземпляров аддитивной группы $\mathbb{R}$ действительных чисел с естественной топологией; окружность $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — факторгруппа группы $\mathbb{R}$ по подгруппе целых чисел $\mathbb{Z}$; каждая *Ли группа*; произвольная абстрактная группа, снабженная дискретной топологией; произвольное топологическое векторное пространство.

Как правило, пространства Т. г. предполагаются хаусдорфовыми. Факторпространство G/H хаусдорфово тогда и только тогда, когда подгруппа H замкнута в G (в дальнейшем все рассматриваемые подгруппы будут предполагаться замкнутыми). Факторпространство G/H смежных классов регулярно. Однако существуют Т. г., пространства к-рых не являются нормальными (см. [7]).

Т. г. наз. связной, вполне несвязной, компактной, локально компактной и т. п., если соответствующим свойством обладает ее топологич. пространство. Связная компонента единицы G° Т. г. G является нормальным делителем в G; G° — наибольшая связная замкнутая подгруппа G. Факторгруппа G/G° вполне несвязна. Локально компактная вполне несвязная группа обладает открытой компакт-

ной подгруппой. Если G — компактная вполне несвязная группа, то в каждой ее окрестности единицы содержится открытая нормальная в G подгруппа. Отсюда вытекает совпадение класса компактных вполне несвязных групп с классом *проконечных групп*, к-рые играют важную роль в теории Галуа, появляясь там в качестве групп Галуа бесконечных расширений полей, снабженных топологией Крулля.

На всякой Т. г. естественным образом определяется структура равномерного пространства. А именно, левая групповая равномерная структура на Т. г. G задается совокупностью множеств

$$L(U)=\{(x,\ y)\in G\times G \mid x^{-1}y\in U\},$$

где U пробегает систему окрестностей единицы группы G; правая равномерная структура определяется симметрично. Топология получающегося равномерного пространства совпадает с исходной топологией группы. Существование равномерной структуры на Т. г. позволяет ввести и использовать понятия равномерной непрерывности (напр., для действительнозначных функций на Т. г.), последовательности Коши, полноты и пополнения. Локально компактная Т. г. полна в своей равномерной структуре. Следствием этого является тот факт, что локально компактная подгруппа хаусдорфовой Т. г. всегда замкнута. Существуют, однако, Т. г., к-рые даже не вкладываются в полные группы.

На каждой локально компактной Т. г. G существует нетривиальная мера μ, инвариантная относительно левых сдвигов (т. е. такая, что для любого измеримого по μ подмножества $A\subseteq G$ и каждого элемента $x\in G$ подмножество xA измеримо и $\mu(xA)=\mu(A)$). Такая мера наз. *Хаара мерой*; она единственна с точностью до постоянного множителя.

Если Т. г. G компактна, то мера Хаара инвариантна также относительно правых сдвигов. Кроме того, в этом случае постоянный множитель можно подобрать так, чтобы $\mu(G)=1$; это позволяет рассматривать соответствующий интеграл $\int f(x)d\mu(x)$ как среднее значение функции $f(x)$ на G. Важнейшие применения меры Хаара относятся к теории непрерывных представлений. Интегрирование по мере Хаара позволило перенести на компактные группы значительную часть теории представлений конечных групп (напр., соотношения ортогональности для характеров или для матричных коэффициентов), а также *Петера — Вейля теорему*, полученную первоначально для групп Ли. Следствием этой теоремы является тот факт, что каждая компактная группа G обладает полной системой конечномерных унитарных представлений (другими словами, для любого отличного от единицы элемента $x\in G$ найдется такое представление ρ, что $\rho(x)\neq E$). Существуют локально компактные группы, не имеющие нетривиальных конечномерных представлений.

Содержательные результаты о строении Т. г. известны по существу лишь для локально компактных групп. В случае локально компактных абелевых групп имеет место следующая основная структурная теорема: каждая локально компактная абелева группа G представима в виде прямого произведения $G=\mathbb{R}^n\times H$, где H — группа, обладающая открытой компактной подгруппой K. Этот результат является следствием теории двойственности для локально компактных абелевых групп (см. *Понтрягина двойственность*). С помощью этой теоремы исследование строения группы G в известном смысле сводится к вопросам о строении дискретных групп H/K и $\hat{K}$, где $\hat{K}$ — группа характеров компактной группы K, т. е. к вопросам абстрактной теории групп.

Определяющую роль в построении теории Т. г. сыграла пятая проблема Гильберта. Сфор-

мулированная в 1900 как проблема о локальных группах преобразований, эта проблема была в процессе развития теории Т. г. переосмыслена. Общепринятой стала следующая ее формулировка: является ли всякая локально евклидова Т. г. группой Ли? (Т. г. наз. локально евклидовой, если она обладает окрестностью единицы, гомеоморфной евклидову пространству $\mathbb{R}^n$, т. е. является топологич. многообразием.) Пятая проблема Гильберта была решена в 1952 (см. [6]). Существенным моментом явилось доказательство следующего критерия лиевости: локально компактная группа G является группой Ли тогда и только тогда, когда G — группа без малых подгрупп (т. е. существует окрестность единицы G, не содержащая нетривиальных подгрупп). Было показано также, что локально компактная группа G с компактной факторгруппой G/G_0 является проективным пределом групп Ли (или, эквивалентно, в каждой окрестности единицы группы G содержится нормальный делитель N с факторгруппой G/N, являющейся группой Ли). Каждая окрестность единицы произвольной локально компактной группы содержит открытое подмножество вида $K\times L$, где K — компактная подгруппа, L — связная локальная группа Ли.

Проективная лиевость локально компактных групп G с компактными факторгруппами G/G_0 позволила перенести на такие группы ряд результатов, известных ранее для групп Ли (см. [8]). Напр., каждая компактная подгруппа из G содержится в нек-рой максимальной компактной подгруппе; любые две максимальные компактные подгруппы группы G сопряжены. Далее, если K — одна из максимальных компактных подгрупп в G, то существует такое множество однопараметрич. подгрупп $L_i\cong\mathbb{R}$, $i=1, \ldots, n$, что отображение, переводящее набор $(k, l_1, \ldots, l_n)$ в произведение $kl_1 \ldots l_n$, является гомеоморфизмом группы $K\times L_1\times \ldots \times L_n$ на G.

После решения пятой проблемы Гильберта на первый план выдвинулась задача более детального изучения строения локально компактных групп, обладающих теми или иными дополнительными свойствами. Были исследованы классы групп, выделяемые нек-рыми условиями конечности, такими, напр., как условие конечности специального ранга, различные варианты условий максимальности и минимальности для подгрупп и т. п. (см. [5]). Была построена теория локально нильпотентных локально компактных групп. Большую часть полученных при этом результатов удалось позднее перенести на более широкий класс локально проективно нильпотентных групп [9].

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства, пер. с франц., М., 1969; [2] Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, пер. с англ., М., 1950; [3] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [4] Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 1, М., 1975; [5] Итоги науки. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 123—60; [6] Глушков В. М., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 2, с. 3—41; [7] Граев М. И., там же, 1950, т. 5, в. 2, с. 3—56; [8] Платонов В. П., «Сибирский матем. ж.», 1966, т. 7, № 4, с. 854—877; [9] его же, «Матем. сб.», 1967, т. 72, № 1, с. 38—58.

О. В. Мельников.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА — раздел теории *динамических систем*, изучающий *топологические динамические системы*. Основное содержание относится к тому случаю, когда *фазовое пространство* — метрич. компакт, а время пробегает $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{N}$ (что и подразумевается ниже).

Возникновение Т. д. (20—30-е гг. 20 в.) связано с тем, что обсуждение ряда понятий, связанных с предельным поведением траекторий (напр., *предельное множество*, *центр* топологической динамической системы) и «повторяемостью» движений, целесообразно провести в общем контексте Т. д., хотя сами эти понятия по большей части возникли при исследовании более

конкретных объектов — дифференцируемых динамич. систем. Из различных свойств «повторяемости» выделяют (в порядке возрастания общности): периодичность, почти-периодичность (в смысле Бора), рекуррентность (в смысле Биркгофа, см. *Минимальное множество*, 2)), *устойчивость по Пуассону*, неблуждаемость (см. *Блуждающая точка*), *цепную рекуррентность*. Любая траектория со временем неограниченно приближается к множеству, образованному «повторяющимися» траекториями; с этой точки зрения вполне оправдано особое внимание, уделяемое последним.

В 60-х гг. изучение минимальных множеств и их расширений привело к значительному развитию Т. д. уже как самостоятельного направления (это было связано прежде всего с *дистальными динамическими системами*). Однако надо иметь в виду, что изучение предельного поведения траекторий не сводится к одному лишь изучению минимальных множеств.

До кон. 60-х гг. к Т. д. относили преимущественно те вопросы, к-рые перечислены выше (см. также след. абзац и [1], [6], [11], [13]—[15] в статье *Динамическая система*). Однако в ряде случаев оказывается нужным уделять внимание и «неповторяющимся» траекториям. [Так, нередко представляют интерес *сепаратрисы* (в частности, они могут описывать волны нек-рого специального типа), независимо от того, обладают ли они хотя бы цепной рекуррентностью. *Градиентные динамические системы*, отвечающие функциям с невырожденными критич. точками, используются при изучении многообразий, между тем как множество «повторяющихся» траекторий в этом случае устроено тривиально.] Поэтому позднее исследовалось поведение траекторий вне множества «повторяющихся» движений, а также рассматривались компактные инвариантные множества, являющиеся изолированными или локально максимальными — в нек-рой окрестности U такого множества нет бо́льших инвариантных множеств. Среди лежащих в нем траекторий могут быть и «неповторяющиеся». Для таких множеств вводятся нек-рые аналоги *Морса индекса* (уже не числа, а объекты более сложной природы) и устанавливаются соотношения, обобщающие *Морса неравенства* (равно как и соответствующие результаты для *Морса — Смейла систем*); обсуждается также поведение этих множеств при непрерывном изменении системы. (Поскольку дальнейшая судьба траекторий, покидающих U, нас в этих вопросах не интересует, то можно, а иногда и нужно, рассматривать «локальные динамич. системы», в к-рых «движение» точки может быть определено не для всех значений времени. Точные формулировки являются довольно громоздкими. См. [1].)

К Т. д. относятся или, по крайней мере, непосредственно примыкают вопросы об *инвариантных мерах*, *топологической энтропии*, асимптотич. циклах (см. [2], [3]) и о том, к какому классу в смысле *дескриптивной теории множеств* принадлежат те или иные подмножества фазового пространства, естественно выделяющиеся по своим свойствам (см. [4], [5]). В Т. д., как и вообще в теории динамич. систем, обсуждается вопрос о тех свойствах динамич. систем, к-рые в каком-то смысле являются «типичными» (см. [9], [10] в статье *Общее положение* и [3] в статье *Цепная рекуррентность*, а также [6], [7]). (Правда, собственно к Т. д. относится только «типичность» в C^0-топологии, тогда как для дифференцируемых динамич. систем адекватной является C^r-топология, $r \geqslant 1$, на соответственно уменьшенном множестве систем.) В рамках Т. д. обсуждались взаимосвязи между *устойчивостью по Ляпунову* и различными родственными понятиями.

Приложения Т. д. к исследованию конкретных динамич. систем или классов таковых в значительной степени связано с использованием понятий и результатов

Т. д. в теории дифференцируемых динамич. систем (отчасти и в *эргодической теории*), причем и при таких применениях Т. д. нередко приходится рассматривать системы, фазовые пространства к-рых не являются многообразиями. (Так происходит, когда Т. д. применяется к ограничению динамич. системы на инвариантном множестве, не являющемся многообразием, а также при использовании *символической динамики*; обе эти причины могут сочетаться.) С сер. 60-х гг. 20 в. и особенно в нач. 80-х гг. большое внимание уделялось каскадам, получающимся при итерировании непрерывного отображения S отрезка или окружности; здесь многое не зависит от гладкости S и не связано с инвариантными мерами, т. е. относится к «чистой» Т. д.

Т. д. была привлечена (см. [8]) для единообразного вывода ряда теоретико-числовых результатов (хотя наиболее глубокие из них требуют обращения к эргодич. теории). Наконец, хотя определение топологич. потока воспроизводит нек-рые из свойств *автономной системы* обыкновенных дифференциальных уравнений, иногда Т. д. косвенным образом применяется и при исследовании нек-рых неавтономных систем (при этом система рассматривается вместе с континуумом других систем, получающихся из нее нек-рым предельным переходом, и возникает конструкция, аналогичная *косому произведению*, 2), см. [9]).

Лит.: [1] Conley Ch., Isolated invariant sets and the Morse index, Providence, 1978; [2] Schwartzman S., «Ann. Math.», 1957, v. 66, № 2, p. 270—84; [3] Rhodes F., «J. London Math. Soc.», 1973, v. 6, pt. 2, p. 247—55; [4] Шарковский А. Н., «Укр. матем. ж.», 1965, т. 17, № 3, с. 104—11; № 5, с. 80—95; 1966, т. 18, № 2, с. 60—83; 1968, т. 20, № 1, с. 136—142; [5] его же, «Доповіді АН УРСР», 1966, № 7, с. 866—70; [6] Добрынский В. А., в кн.: Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений, К., 1973, с. 43—53; [7] Palis J., Pugh Ch., Shub M., Sullivan D., в кн.: Dynamical systems — Warwick, 1974, B.— Hadlb.— N. Y., 1975, p. 241—50; [8] Furstenberg H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1981, v. 5, № 3, p. 211—34; [9] Миллионщиков В. М., в кн.: Международный конгресс математиков в Ницце. 1970. Доклады советских математиков, М., 1972, с. 207—11.

Д. В. Аносов.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — тройка (W, G, F), где W — топологич. пространство, G — топологич. группа, F — непрерывное отображение $G\times W\to W$, определяющее левое действие G на W: если $w\in W$, e — единица группы G и $g, h\in G$, то (при мультипликативной записи операций в G) $F(e,w)=w$,

$$F(gh,\ w)=F(g,\ F(h,\ w)), \qquad (1)$$

(иными словами, если обозначить преобразование $w\mapsto F(g, w)$ через T_g, то $T_{gh}=T_gT_h$). Вместо левого действия часто рассматривается правое действие; в этом случае аргументы F удобнее записывать в другом порядке (считая F отображением $W\times G\to W$), а (1) заменяется условием

$$F(w,\ gh)=F(F(w,\ g),\ h). \qquad (2)$$

Вместо $F(g, w)$ или $F(w, g)$ часто пишется просто gw или wg; тогда (1) и (2) записываются в виде

$$(gh)\,w=g\,(hw),\ \ w\,(gh)=(wg)\,h.$$

Если G коммутативна, различие между правым и левым действием несущественно. Наиболее важные случаи — $G=\mathbb{Z}$ (аддитивная группа целых чисел с дискретной топологией; в этом случае говорят о (топологическом) каскаде) и $G=\mathbb{R}$ (в этом случае говорят о (топологическом) потоке); в узком смысле слова под Т. д. с. понимаются именно эти два случая. Иногда G считается не группой, а полугруппой; впрочем, в основном рассматривается только полугруппа неотрицательных целых чисел (т. е. речь идет об итерациях нек-рого непрерывного отображения $T: W\to W$) и (реже) неотрицательных действительных чисел.

Термин «Т. д. с.» (обычно без первого прилагательного) принят в *топологической динамике*, тогда как в

топологии тот же объект наз. непрерывной группой преобразований. Различие названий отчасти оправдано тем, что в этих двух дисциплинах различны изучаемые свойства и ограничения, налагаемые при этом на изучаемый объект. Так, значительная часть относящихся сюда результатов топологии посвящена компактным G, тогда как в топологич. динамике G обычно считается локально компактной, но никогда не компактной, и интерес представляет предельное поведение траекторий $F(g, w)$ при $g \to \infty$ (т. е. вне сколь угодно больших компактных частей G), к-рое даже в аналитич. случае может быть весьма сложным. В теории алгебраич. групп преобразований (см. *Алгебраическая группа преобразований*) компактности G не предполагают, но зато там имеется очень сильное условие регулярности F как отображения алгебраич. многообразий (причем основное поле обычно предполагается алгебраически замкнутым, так что в классич. ситуации речь идёт о регулярности «во всей комплексной области»). В сочетании со связностью (а обычно также и с редуктивностью) G это позволяет, как и в случае компактных G, получить значительную информацию о возможных типах взаимного примыкания *орбит* и, в частности, исключить возможность различных явлений, связанных со сложным предельным поведением траекторий.

Термин «Т. д. с.» предпочтительнее, чем употребляемое иногда выражение «непрерывная динамич. система (поток, каскад)», ибо «непрерывность» может означать также: а) метрич. непрерывность — см. *Непрерывный поток* 1); б) что $G = \mathbb{R}$. (Когда Т. д. с. понимается в узком смысле слова, то говорят, что поток — это случай непрерывного времени, а каскад — дискретного; соответственно иногда говорят о непрерывной и дискретной динамич. системе.) *Д. В. Аносов.*

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ПОЛУГРУППА — множество, наделенное алгебраич. структурой полугруппы и структурой хаусдорфова топологич. пространства, причем полугрупповая операция непрерывна в заданной топологии. Любая полугруппа становится Т. п., если рассматривать на ней *дискретную топологию*. Существуют полугруппы, допускающие лишь дискретную топологизацию. Любое хаусдорфово топологич. пространство может быть превращено в Т. п., напр. заданием левосингулярного или нулевого умножения.

Сформировалось несколько относительно самостоятельных направлений в теории Т. п.: *общая теория* компактных полугрупп (термин «компактность» употребляется в смысле *бикомпактность*), гомотопич. свойства Т. п., изучение полугрупп на конкретных топологич. пространствах, гармонич. анализ на Т. п., полугруппы непрерывных преобразований топологич. пространств. Началось изучение Т. п., связанное с рассмотрением системы всех замкнутых подполугрупп.

Естественный класс Т. п., включающий компактные и дискретные полугруппы, составляют локально компактные полугруппы. Однако многие свойства, справедливые в классах компактных и дискретных полугрупп, перестают быть верными для произвольных локально компактных полугрупп, поэтому, как правило, накладываются дополнительные ограничения топологич. или алгебраич. характера. Важным условием такого рода является слабая равномерность: локально компактная полугруппа S наз. с л а б о р а в н о м е р н о й, если для любых a, $b \in S$ (один из этих элементов может быть пустым символом) и любых подмножеств Y, $W \subseteq S$, где W — открытое подмножество с компактным замыканием $\bar{W}$, причем $\overline{aYb} \subseteq W$ или $\overline{aYb} \subseteq S \setminus \bar{W}$, найдутся окрестности $V(a)$, $V(b)$ элементов a и b такие, что $V(a)YV(b) \subseteq W$ или соответственно $V(a)YV(b) \subseteq S \setminus \bar{W}$. Класс слабо равномерных полугрупп вклю-

чает в себя компактные полугруппы, дискретные полугруппы, локально компактные группы. Если локально компактная полугруппа S есть группа, то операция взятия обратного элемента непрерывна, т. е. S — топологич. группа. В локально компактной инверсной полугруппе операция взятия инверсного элемента (см: *Регулярный элемент*) непрерывна тогда и только тогда, когда S слабо равномерна. В слабо равномерной полугруппе максимальные подгруппы замкнуты; в произвольной локально компактной полугруппе это свойство может не выполняться.

Произвольная компактная полугруппа S содержит замкнутое ядро $M(S)$ (см. *Ядро полугруппы*), являющееся вполне простой полугруппой; в частности, S имеет идемпотенты. Структура компактных вполне простых (вполне 0-простых) полугрупп описывается теоремой, аналогичной теореме Риса о дискретных вполне простых (вполне 0-простых) полугруппах (см. *Рисовская полугруппа матричного типа*). Аналог теоремы Риса справедлив для слабо равномерных полугрупп, но уже не верен для локально компактных полугрупп [10].

Полугруппа S наз. н и т ь ю, если на S можно задать линейный порядок, превращающий S в связную Т. п. относительно порядковой (интервальной) топологии. Полугруппа S с нулем 0 и единицей e наз. с т а н д а р т н о й н и т ь ю (или 1-п о л у г р у п п о й), если S — нить, причем 0 и e наименьший и наибольший элементы в S. Имеется полное описание стандартных нитей [2]. Компактная полугруппа S с единицей e наз. н е п р и в о д и м о й, если она связна и не содержит собственной связной замкнутой подполугруппы T такой, что $e\in T$ и $T\cap M(S)\neq\varnothing$. Связные компактные полугруппы с единицей содержат неприводимые полугруппы в качестве замкнутых подполугрупп. Имеется следующее описание неприводимых полугрупп: неприводимая полугруппа S коммутативна, *Грина отношение эквивалентности* $\mathcal{H}$ — замкнутая конгруэнция на S, а $S/\mathcal{H}$ — стандартная нить.

«Минимальными блоками» Т. п. являются замыкания моногенных подполугрупп, называемые м о н о т е т и ч е с к и м и п о л у г р у п п а м и. Для компактной монотетич. полугруппы S ядро $M(S)$ есть компактная монотетич. группа. Компактные монотетические полугруппы полностью описаны [9]. Слабо равномерные монотетич. полугруппы либо компактны, либо дискретны. Не известны (1984) примеры не компактных и не дискретных локально компактных монотетич. полугрупп.

Х а р а к т е р о м коммутативной Т. п. S с единицей наз. ненулевой непрерывный гомоморфизм в мультипликативную полугруппу комплексных чисел, модуль к-рых $\leqslant 1$. Множество всех характеров S^* образует коммутативную Т. п. с единицей относительно поточечного умножения (см. *Характер* полугруппы) и *бикомпактно открытой топологии*. Говорят, что для коммутативной Т. п. с единицей справедлива т е о р е м а д в о й с т в е н н о с т и (П о н т р я г и н а), если канонич. гомоморфизм S в полугруппу характеров полугруппы S^* является топологич. изоморфизмом «на». Теорема двойственности справедлива для коммутативной компактной полугруппы S с единицей тогда и только тогда, когда S инверсная полугруппа и ее подполугруппа идемпотентов образует *вполне несвязное пространство*. Найдены необходимые и достаточные условия справедливости теоремы двойственности для коммутативных локально компактных полугрупп [12], одним из необходимых условий является слабая равномерность полугруппы.

Важный подкласс коммутативных компактных полугрупп составляют компактные полурешетки (см. *Идемпотентов полугруппа*). Компактная полурешетка допускает единственную, с точностью до гомеоморфизма,

топологизацию. Описание нек-рых типов Т. п. сводится к метрич. полугруппам. Метрика d на Т. п. S наз. инвариантной, если $d(ax, ay) \leqslant d(x, y)$ и $d(xa, ya) \leqslant d(x, y)$ для любых $a, x, y \in S$. Т. п. наз. метрической, если на S существует инвариантная метрика, порождающая топологию на S. Каждая компактная полугруппа является проективным пределом компактных метрич. полугрупп. Каждая вполне несвязная компактная полугруппа является проективным пределом конечных полугрупп.

Рассматриваются нек-рые обобщения Т. п.: полугруппы, пространство к-рых не обязательно хаусдорфово, полутопологические полугруппы, т. е. топологич. пространства, на к-рых определена ассоциативная бинарная операция, причем все левые и правые внутренние сдвиги являются непрерывными преобразованиями.

Лит.: [1] Paalman-de Miranda A., Topological semigroups, Amst., 1964; [2] Hofmann K., Mostert P., Elements of compact semigroups, Columbus (Ohio), 1966; [3] Berglund J., Hofmann K., Compact semitopological semigroups and weakly almost periodic functions, B.— Hdlb.— N. Y., 1967; [4] Hofmann K., Mislove M., Stralka A., The Pontryagin duality of compact 0-dimensional semilattices and its applications, B.— Hdlb.— N. Y., 1974; [5] Hofmann K., Stralka A., The algebraic theory of compact Lawson semilattices. Applications of Galois connections to compact semilattices, Warsz., 1976; [6] Hofmann K., «Jahresber. d. Dtsch. Math.-Ver.», 1976, Bd 78, p. 9—59; [7] Wallace A., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1955, v. 61, p. 95—112; [8] Williamson J., «J. Lond. Math. Soc.», 1967, v. 42, p. 1—41; [9] Hewitt E., «Duke Math. J.», 1956, v. 23, № 3, p. 447—57; [10] Šneperman L. B., «Sem. Forum», 1981, v. 23, p. 261—73; [11] Дэй Д., в кн.: Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп, пер. с англ., М., 1975, с. 259—83; [12] Шнеперман Л. Б., «Матем. сб.», 1968, т. 77, № 4, с. 508—32.

Б. П. Танана, Л. Н. Шеврин.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА, топология открытая, соответственно, замкнутая — совокупность $\mathfrak{G}$, соответственно, $\mathfrak{F}$ подмножеств множества X, обладающая следующими свойствами:

1. Множество X, равно как и пустое множество $\varnothing$, являются элементами совокупности $\mathfrak{G}$, соответственно, $\mathfrak{F}$.

2$_{\mathfrak{G}}$, соответственно, 2$_{\mathfrak{F}}$. Пересечение, соответственно, объединение, конечного числа и объединение, соответственно, пересечение любого числа элементов совокупности $\mathfrak{G}$, соответственно, $\mathfrak{F}$, является элементом той же совокупности.

После того как введена или определена топология, или Т. с., в данном множестве X, оно именуется топологическим пространством, его элементы наз. точками, а элементы совокупности $\mathfrak{G}$, соответственно, $\mathfrak{F}$, наз. открытыми, соответственно, замкнутыми, множествами полученного топологич. пространства.

Если определена какая-нибудь из совокупностей $\mathfrak{G}$ или $\mathfrak{F}$ подмножеств множества X, обладающая свойством 1 и, соответственно, свойством 2$_{\mathfrak{G}}$ или 2$_{\mathfrak{F}}$, другая совокупность может быть определена двойственным образом как состоящая из дополнений к элементам первой.

П. С. Александров.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТРАНЗИТИВНОСТЬ — свойство, определяемое для *топологической динамической системы* $\{T_t\}$, обычно для потока или каскада (время t пробегает все действительные или целые числа). Оно заключается в существовании траектории $\{T_t w_0\}$, имеющей все фазовое пространство W своим ω-*предельным множеством*. (Эквивалентное свойство заключается в существовании положительной полутраектории $\{T_t w_0,\ t \geqslant 0\}$, всюду плотной в W.) Такую траекторию (полутраекторию) наз. топологически транзитивной.

С Т. т. тесно связано свойство транзитивности областей: для любых непустых открытых множеств $U, V \subset W$ имеется $t > 0$, для к-рого $T_t U \cap V \neq \varnothing$. Именно, из Т. т. следует транзитивность областей, а

если W — полное сепарабельное метрич. пространство, то из транзитивности областей следует (см. [1], [2]) Т. т. (и при этом множество топологич. транзитивных траекторий имеет мощность континуума). Поэтому при том же предположении о W свойство Т. т. симметрично относительно направления времени: если существует траектория $\{T_t w_0\}$, имеющая все W своим α-*предельным множеством*, то имеет место транзитивность областей и Т. т.

Часто под Т. т. понимается существование траектории $\{T_t w_0\}$, всюду плотной в W. (Различие между приведенными определениями существенно, когда точки этой траектории образуют в W открытое множество; в противном случае она сама для себя является ω-предельной или α-предельной, а потому и все W является ее ω-предельным или α-предельным множеством.) Последнее определение годится и для более общих групп преобразований [3]. Определения и часть результатов можно перенести также и на случай необратимых преобразований и полугрупп, хотя обычно в топологич. динамике таковыми не занимаются.

Лит.: [1] Биркгоф Д. Ж. Д., Динамические системы, пер. с англ., М.—Л., 1941; [2] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1949; [3] Gottschalk W., Hedlund G. A., Topological dynamics, Providence, 1955.

Д. В. Аносов.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ — отношение между топологич. пространствами; топологич. пространства X и Y наз. топологически эквивалентными, если они гомеоморфны, т. е. если существует гомеоморфизм пространства X на пространство Y. Т. э. является рефлексивным, симметричным и транзитивным бинарным отношением на классе всех топологич. пространств. В соответствии с этим совокупность всех топологич. пространств разбивается отношением Т. э. на попарно не пересекающиеся классы Т. э. Свойства топологич. пространств, сохраняемые отношением Т. э., т. е. сохраняемые произвольными гомеоморфизмами, наз. *топологическими инвариантами*. Примеры: прямая и интервал (без концов) топологически эквивалентны; прямая и замкнутый интервал, т. е. отрезок, топологически не эквивалентны. Любые два треугольника топологически эквивалентны, однако класс Т. э., содержащий все треугольники, ими не исчерпывается — он содержит, например, еще и все круги. Важным расширением отношения Т. э. является отношение гомотопической эквивалентности (см. *Гомотопический тип*).

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., 1948.

А. В. Архангельский.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭНТРОПИЯ — понятие *топологической динамики* и *эргодической теории*, аналогичное метрич. *энтропии* динамич. систем (введена в [1]). Для открытого покрытия $\mathfrak{A}$ компакта X через $H(\mathfrak{A})$ обозначается логарифм (обычно двоичный) наименьшего числа элементов покрытия, к-рые все еще покрывают X. Если $S: X \to X$ — непрерывное отображение, то существует предел

$$h(S, \mathfrak{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathfrak{A} \vee S^{-1}\mathfrak{A} \vee \ldots \vee S^{-n+1}\mathfrak{A}),$$

где $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ — покрытие, элементы к-рого суть непустые пересечения элементов покрытий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Т. э. $h_{\text{top}}(S)$ определяют как верхнюю грань $h(S, \mathfrak{A})$ по всевозможным $\mathfrak{A}$. Эквивалентное определение в метризуемом случае: пусть для метрики ρ через $K_\varepsilon(X, \rho)$ обозначено наибольшее число точек X, попарные расстояния между к-рыми больше ε; тогда

$$h_{\text{top}}(S) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lg K_\varepsilon(X, \rho_n),$$

где $\rho_n(x, y) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} \rho(S^i x, S^i y)$ (см. [2] — [4]).

Оказывается, что

$$h_{\text{top}}(S^n) = n h_{\text{top}}(S),$$

а если S — гомеоморфизм, то $h_{\text{top}}(S^{-1}) = h_{\text{top}}(S)$. Поэтому Т. э. *каскада* $\{S^n\}$ естественно считать $h_{\text{top}}(S)$. Для топологич. *потока* $\{S_t\}$ оказывается, что

$$h_{\text{top}}(S_t) = |t| h_{\text{top}}(S_1),$$

поэтому Т. э. потока естественно считать $h_{\text{top}}(S_1)$. Несколько иначе определяется Т. э. для других групп преобразований (она уже не сводится к Т. э. одного из преобразований, входящих в группу; см [7]).

Т. э. $h_{\text{top}}(S)$ совпадает с верхней гранью метрич. энтропий $h_\mu(S)$ по всевозможным нормированным борелевским инвариантным мерам μ (см. [2], [5]—[7]). Это — частный случай в а р и а ц и о н н о г о п р и н ц и п а, устанавливающего топологич. интерпретацию величины

$$\sup_\mu \left[h_\mu(S) + \int f d\mu \right]$$

с фиксированной непрерывной функцией f (см. [4], [8], [9]). Т. э. дает характеристику «сложности» или «разнообразия» движений в динамич. системе (см. [10], [3], [4]); с ней также связана в нек-рых случаях асимптотика (при $T \to \infty$) числа *периодических траекторий* (периода $\leqslant T$; см. [3], [4], [11]—[13]). «Гипотеза об энтропии», доказанная лишь частично (1982), утверждает, что Т. э. диффеоморфизма S замкнутого многообразия W не меньше логарифма спектрального радиуса линейного преобразования, индуцируемого S в гомологиях $H_*(W; \mathbb{R})$ (см. [14], [15]).

Лит.: [1] A d l e r R. L., K o n h e i m A. G., M c A n d r e w M. H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 114, p. 309—319; [2] Д и н а б у р г Е. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 2, с. 324—66; [3] А л е к с е е в В. М., Символическая динамика, в кн.: Одиннадцатая математическая школа, К., 1976; [4] Б о у э н Р., Методы символической динамики, пер. с англ., М., 1979; [5] G o o d m a n T. N. T., «Bull. Lond. Math. Soc.», 1971, v. 3, № 2, p. 176—80; [6] G o o d w y n L. W., «Amer. J. Math.», 1972, v. 94, № 2, p. 366—68; [7] Т а г и з а д е А. Т., «Докл. АН Азерб. ССР», 1978, т. 34, № 6, с. 18—22, № 8, с. 11—14; [8] С т е п и н А. М., Т а г и-з а д е А. Т., «Докл. АН СССР», 1980, т. 254, № 3, с. 545—49; [9] M o u l i n O l l a g n i e r J., P i n c h o n D., «Studia math.», 1982, т. 72, fasc. 2, p. 151—59; [10] Б р у д н о А. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1982, т. 44, с. 124—49; [11] К у ш н и р е н к о А. Г., К а т о к А. Б., А л е к с е е в В. М., в кн.: Девятая летняя математическая школа, 2 изд., К., 1976, с. 50—341; [12] К а т о к А. Б., С и н а й Я. Г., С т е п и н А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ, т. 13, М., 1975, с. 129—262; [13] K a t o k A., «Publs. math. Inst. hautes étud. sci.», 1980, № 51, p. 137—73; [14] Гладкие динамические системы, пер. с англ., М., 1977; [15] F r i e d D., S h u b M., «Publs. math. Inst. hautes étud. sci.», 1979, № 50, p. 203—14; [16] D e n k e r M., G r i l l e n b e r g e r C h r., S i g m u n d K., Ergodic theory on compact spaces, B.— Hdlb.— N. Y., 1976.

Д. В. Аносов.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ — произвольное свойство *топологического пространства*.

Если множество X снабжено какой-либо структурой, однозначно порождающей нек-рую топологию и следовательно превращающей X в топологич. пространство, то под Т. и. множества X понимается свойство именно топологич. пространства, порожденного данной в X структурой. Так, напр., говорят о *связности* метрич. пространства или об односвязности данного дифференцируемого многообразия, имея в виду соответствующие свойства топологич. пространства, топология к-рого порождается данной на множестве X метрич. или дифференциально геометрич. структурой.

Уже в самый первый период развития топологии, наряду с простейшими Т. и. как, напр., связность, компактность и др., большое внимание привлекли к себе т. н. ч и с л о в ы е и н в а р и а н т ы, в начале определявшиеся главным образом для полиэдров; таковы в первую очередь были *размерность* и *Бетти числа*. Для замкнутых поверхностей еще раньше рассматривался *род поверхности*, сразу же выражающийся через

первое число Бетти. Затем большое значение приобрели Т. и., являющиеся группами, а впоследствии и др. алгебраич. структурами. Таковы, напр., группы Бетти или *гомологии группы* различных размерностей, рангами к-рых и являются числа Бетти; *фундаментальная группа*, обобщением к-рой для любых размерностей явились *гомотопические группы*, а также пересечений кольцо многообразий, вскоре замененное гораздо более общим и удобным для применений когомологич. кольцом Александера — Колмогорова, определенным не только для полиэдров, но и для чрезвычайно широкого класса топологич. пространств, и др.

В случае полиэдров важные Т. и. часто, и даже преимущественно, определялись как свойства симплициальных комплексов, являющихся триангуляциями данного полиэдра. Такие определения требовали последующего доказательства т. н. теорем инвариантности, утверждавших, что соответствующее свойство не меняется при переходе от одной какой-нибудь триангуляции данного полиэдра к любой триангуляции того же или гомеоморфного ему полиэдра.

П. С. Александров.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ МОДУЛЬ (левый) — абелева топологич. группа A, являющаяся модулем над топологич. кольцом R, при этом требуется, чтобы отображение умножения $R\times A\to A$, переводящее (r, a) в ra, было непрерывно. Аналогичным образом определяются правые Т. м. Любой подмодуль B Т. м. A сам является Т. м. Если модуль A отделим и B замкнут в A, то A/B — отделимый модуль. Прямое произведение топологич. модулей является Т. м. Пополнение $\hat{A}$ модуля A как абелевой топологич. группы можно наделить естественной структурой Т. м. над пополнением $\hat{R}$ кольца R.

Топологическим G-модулем, где G — нек-рая топологич. группа, наз. топологич. абелева группа A, являющаяся G-модулем, причем требуется, чтобы отображение умножения $G\times A\to A$ было непрерывно.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства, пер. с франц., М., 1969; [2] его же, Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

Л. В. Кузьмин.

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО над топологическим полем (т. п.), K — векторное пространство E над K, наделенное топологией, согласующейся со структурой векторного пространства, т. е. удовлетворяющей следующим аксиомам: 1) отображение $(x_1, x_2)\mapsto x_1+x_2$, $E\times E\to E$ непрерывно; 2) отображение $(k, x)\mapsto kx$, $K\times E\to E$ непрерывно (при этом предполагается, что произведения $E\times E$ и $K\times E$ наделены произведениями соответствующих топологий). Совершенно аналогично можно определить топологическое левое и правое векторные пространства над (не обязательно коммутативным) топологич. телом. Для обозначения Т. в. п. E с топологией τ иногда будет использоваться символ (E, τ); с другой стороны, упоминание о поле K часто будет опускаться.

Т. в. п. E_1 и E_2 над одним и тем же т. п. наз. изоморфными, если существует непрерывное линейное взаимно однозначное отображение E_1 на E_2, обратное к-рому также непрерывно. Размерностью Т. в. п. (E, τ) наз. размерность векторного пространства E.

Способы задания топологии Т. в. п. и ее свойства. Пусть (E, τ) — Т. в. п. над т. п. K. Топология τ инвариантна относительно сдвигов (т. е. для каждого $a\in E$ отображение $x\mapsto x+a$ представляет собой гомеоморфизм E на себя); поэтому топология τ однозначно определяется *базой* (базисом, фундаментальной системой) окрестностей всякой фиксированной точки (в частности, нуля). Топология τ согласуется со структу-

рой аддитивной группы пространства E, и справедливы следующие предложения. 1. Для того чтобы E было отделимым, необходимо и достаточно, чтобы для всякой точки $x \in E$, $x \neq 0$ существовала окрестность нуля, не содержащая x. 2. Если E отделимо, то оно вполне регулярно. 3. В E существует единственная равномерная структура, обладающая следующими свойствами: а) она инвариантна относительно сдвигов (т. е. для нее все сдвиги представляют собой равномерно непрерывные отображения); б) ассоциированная с ней топология совпадает с исходной топологией пространства E. Множество в Т. в. п. наз. п о л н ы м, если оно полно относительно равномерной структуры, о к-рой только что шла речь. Т. о., Т. в. п. E полно, если всякий *Коши фильтр* в E сходится. Для всякого Т. в. п. E существует полное Т. в. п. над тем же полем, содержащее E в качестве всюду плотного подмножества и индуцирующее на E исходные линейную структуру и топологию; оно наз. п о п о л н е н и е м пространства E. Всякое отделимое Т. в. п. обладает отделимым пополнением, единственным с точностью до изоморфизма, оставляющего неподвижными элементы пространства E.

Всюду далее предполагается, если не оговорено противное, что K — недискретное нормированное поле, наделенное топологией, определяемой *нормой*. Если E — векторное пространство над K, то множество $Q \subset E$ называется з а к р у г л е н н ы м (или у р а в н о в е ш е н н ы м), если $kQ \subset Q$ при $k \in K$, $|k| \leqslant 1$. Если A и B — два подмножества в E, то говорят, что A п о г л о щ а е т B, если существует такое положительное число r, что $kA \supset B$ при $k \in K$, $|k| > r$. Подмножество пространства E наз. п о г л о щ а ю щ и м (или р а д и а л ь н ы м), если оно поглощает каждое одноточечное множество. Во всяком Т. в. п. E над K существует база $\mathcal{U}$ замкнутых окрестностей нуля со следующими свойствами: 1) для всякого множества $V \in \mathcal{U}$ существует $W \in \mathcal{U}$ такое, что $W + W \subset V$; 2) каждое $V \in \mathcal{U}$ — закругленное поглощающее множество; 3) если $V \in \mathcal{U}$, то и $kV \in \mathcal{U}$ для всякого $k \in K$, $k \neq 0$. С другой стороны, пусть τ — топология в векторном пространстве E над K, инвариантная относительно сдвигов и обладающая базой окрестностей нуля, имеющей свойства (1) и (2), а также следующее свойство: 3а) существует такое $k \in K$, $0 < |k| < 1$, что, если $V \in \mathcal{U}$, то и $kV \in \mathcal{U}$. Тогда E, наделенное топологией τ, — Т. в. п. над K (в том случае, когда норма в поле K архимедова, (3а) является следствием остальных требований, наложенных на (E, τ)). Всякий базис фильтра $\mathcal{U}$ в векторном пространстве E над K, обладающий свойствами (1), (2), (3а), а в случае поля с архимедовой нормой — хотя бы свойствами (1) и (2), — является фундаментальной системой окрестностей нуля (не обязательно замкнутых) нек-рой однозначно определяемой топологии τ в E, согласующейся со структурой векторного пространства в E. Т. в. п. E над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ или над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и его топология наз. л о к а л ь н о в ы п у к л ы м и, если E обладает базой окрестностей нуля, состоящей из выпуклых множеств (иногда в определение локально выпуклого пространства включается еще требование его отделимости).

П р и м е р ы. 1. Всякое т. п. K может рассматриваться как (одномерное) Т. в. п. над K; рассматриваемое таким образом, оно будет обозначаться символом K_0; 2. Пусть I — нек-рое непустое множество и K_0^I — векторное пространство над K, представляющее собой произведение I экземпляров векторного пространства K_0, наделенное топологией, являющейся произведением топологий сомножителей. Тогда K_0^I — Т. в. п. 3. Если топология т. п. K дискретна, то всякое векторное пространство E над K, наделенное топологией,

согласующейся со структурой его аддитивной группы и инвариантной относительно операций умножения на ненулевые элементы из K, является Т. в. п. (этим условиям удовлетворяет, в частности, дискретная топология в E). Т. в. п. над полями с дискретной топологией наз. *топологическими векторными группами*. 4. Пусть E — векторное пространство над т. п. K, $\mathcal{P}$ — нек-рое множество полунорм на E. Шаром радиуса $r>0$ по *полунорме* p на E наз. множество $\{x\in E,\ p(x)<r\}$. Множество пересечений всевозможных конечных семейств шаров [всевозможных (положительных) радиусов] по (всевозможным) полунормам, принадлежащим множеству $\mathcal{P}$, образует базис окрестностей нуля нек-рой топологии $\tau_{\mathcal{P}}$ в E, согласующейся со структурой векторного пространства; говорят, что эта топология задается, или определяется семейством полунорм $\mathcal{P}$. Если $K=\mathbb{R}$ или $K=\mathbb{C}$, то топология $\tau_{\mathcal{P}}$ локально выпукла; обратно, топология всякого *локально выпуклого пространства* (л. в. п.) E может быть задана нек-рым множеством полунорм — например, множеством калибровочных функций (функционалов Минковского) произвольной предбазы окрестностей нуля в E, состоящей из закругленных выпуклых множеств.

Подмножество Т. в. п. наз. *ограниченным*, если оно поглощается всякой окрестностью нуля.

Т. в. п. наз. *нормируемым*, если его топология может быть задана одной нормой. Для того чтобы Т. в. п. над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ было нормируемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было отделимым и обладало выпуклой ограниченной окрестностью нуля (*теорема Колмогорова*).

5. Пусть n — натуральное число, I_n — множество, содержащее n элементов и $K_0^n=K_0^{I_n}$. Топология в K_0^n определяется нормой $\|x\|=\sum_{i=1}^n|x_i|$, где символ $|\cdot|$ обозначает норму в K. Если поле K полно, то всякое n-мерное Т. в. п. над K изоморфно пространству K_0^n (при $n=1$ это верно и без предположения полноты K). Если поле K локально компактно, то для того, чтобы отделимое Т. в. п. над K было конечномерным, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало предкомпактной окрестностью нуля (*теорема Тихонова*).

Т. в. п. наз. *метризуемым*, если его топология может быть задана нек-рой *метрикой* (среди таких метрик всегда существует метрика, инвариантная относительно сдвигов). Для метризуемости Т. в. п. необходимо и достаточно, чтобы оно было отделимым и обладало счетной базой окрестностей нуля.

6. Пусть (E,τ) — Т. в. п., E_1 — векторное подпространство векторного пространства E, τ_1 — топология, индуцированная в E_1 топологией E. Топология τ_1 согласуется со структурой векторного пространства E_1; Т. в. п. (E_1,τ_1) наз. *топологическим векторным подпространством* Т. в. п. (E,τ). Если $\mathcal{U}$ — база (соответственно, предбаза) окрестностей нуля в (E,τ), то множество $\{V\cap E_1 : V\in\mathcal{U}\}$ образует базу (соответственно, предбазу) окрестностей нуля в (E_1,τ_1). Если (E,τ) отделимо (соответственно, метризуемо, локально выпукло), то и (E_1,τ_1) таково же. Если топология τ задается нек-рым множеством полунорм, то топология τ_1 определяется сужениями этих полунорм на E_1.

7. Пусть (E,τ) и E_1 — те же, что в предыдущем пункте, и $E|E_1$ — факторпространство векторного пространства E по его подпространству E_1. Фактортопология τ_2 в $E|E_1$ согласуется со структурой векторного пространства в $E|E_1$; Т. в. п. $(E|E_1,\tau_2)$ наз. *топологическим векторным факторпространством* Т. в. п. (E,τ) по E_1. (По определению фак-

тортопологии, множество $V \subset E|E_1$ открыто в τ_2 в точности тогда, когда его прообраз относительно канонич. отображения $E \to E|E_1$ открыт в $(E, \mathring{\tau})$. Если $\mathcal{U}$ — база окрестностей нуля в E, то множество образов ее элементов относительно канонич. отображения $E \to E|E_1$ образуют базу окрестностей нуля в $(E|E_1, \tau_2)$ (для предбаз это, вообще говоря, не так). Для того чтобы Т. в. п. $(E|E_1, \tau_2)$ было отделимым, необходимо и достаточно, чтобы подпространство E_1 было замкнуто в (E, τ). Если $\{\overline{0}\}$ — замыкание одноточечного множества $\{0\}$ в (E, τ), то (отделимое) топологич. векторное факторпространство $E/\{\overline{0}\}$ наз. о т д е л и м ы м Т. в. п., а с с о ц и и р о в а н н ы м с Т. в. п. E; конечно, если само E отделимо, то ассоциированное с ним отделимое Т. в. п. ему изоморфно. Если E локально выпукло (соответственно, если E метризуемо, а E_1 замкнуто; если E метризуемо и полно), то $E|E_1$ локально выпукло (соответственно, метризуемо; полно); однако E может быть полным (неметризуемым) без того, чтобы (даже отделимое и метризуемое) его топологическое векторное факторпространство было полно (см. ниже).

8. Пусть $\mathcal{F}$ — векторное пространство всех измеримых по Лебегу действительных функций на $[0, 1]$, μ_l — мера Лебега на этом отрезке и для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$

$$V_n = \left\{ f \in \mathcal{F},\ \mu_l \left\{ t \in [0,\ 1] \mid f(t) \mid > \frac{1}{n+1} \right\} < \frac{1}{n+1} \right\}.$$

Множество $\mathcal{U} = \{V_n : n \in N\}$ образует базис фильтра в $\mathcal{F}$, обладающий (определенными выше) свойствами (1) и (2); пусть τ — согласующаяся со структурой векторного пространства топология в $\mathcal{F}$, для к-рой $\mathcal{U}$ является базой окрестностей нуля, и $\mathcal{F}_0$ — ассоциированное с $(\mathcal{F}, \tau)$ отделимое Т. в. п. (само $(\mathcal{F}, \tau)$ неотделимо). Т. в. п. $\mathcal{F}_0$ метризуемо, но не локально выпукло; его можно отождествить — как векторное пространство — с пространством классов μ_l-эквивалентных μ_l-измеримых действительных функций на $[0, 1]$; сходимость последовательностей в пространстве $(\mathcal{F}, \tau)$ (соответственно, в пространстве $\mathcal{F}_0$) совпадает со сходимостью по мере (в первом случае — индивидуальных функций, а во втором — классов μ_l-эквивалентности таких функций).

Всюду далее предполагается, что $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$.

9. Пусть $S = S(\mathbb{R}^n)$ — векторное пространство всех бесконечно дифференцируемых функций φ, определенных на $\mathbb{R}^n$, принимающих значения в K и удовлетворяющих следующему условию [далее $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$]: для всех $k, r \in \mathbb{Z}_+$

$$p_{rk}(\varphi) \equiv \max (1 + \| t \|^r) \| \varphi^{(k)}(t) \| < \infty,$$

где

$$\| t \| = \left(\sum | t_i |^2 \right)^{1/2},$$

$$\| \varphi^{(k)}(t) \| = \max \left\{ \left| \frac{\partial^k \varphi(t)}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_n^{k_n}} \right| : k_1 + \ldots + k_n = k \right\}.$$

Наделенное топологией τ_S, задаваемой семейством норм p_{rk}, определяемых предыдущим равенством, S становится полным метризуемым локально выпуклым пространством (такие пространства наз. п р о с т р а н с т в а м и Ф р е ш е). Пространство (S_i, τ_S) играет важную роль в теории *обобщенных функций*. Интересно, что на S не существует никакой нормы, превращающей S в банахово пространство, в топологии к-рого каждая из функций $\varphi \mapsto \varphi(t)$, $S \to K (t \in \mathbb{R})$ непрерывна (в частности, л. в. п. (S, τ_S) ненормируемо).

Некоторые методы построения Т. в. п. 1. П р о е к т и в н ы е т о п о л о г и и. Пусть E — векторное пространство и для каждого α из нек-рого множества $\mathfrak{A}$ индексов g_α — линейное отображение E в Т. в. п. E_α; тогда в E среди всех топологий, для к-рых непрерывны все отображения g_α, существует самая слабая

топология τ (она является верхней гранью семейства топологий $\{g_\alpha^{-1}(\tau_\alpha) : \alpha \in \mathfrak{A}\}$, где для каждого α τ_α — топология в E_α). Топология τ наз. проективной топологией — а наделенное ею пространство E — проективным пределом семейства пространств E_α относительно отображений g_α; топология τ_α согласуется со структурой векторного пространства в E, а если все пространства E локально выпуклы, то таково же и (E, τ). (Иногда термин «проективный предел» используется для обозначения несколько более специальной конструкции, а не как синоним термина «пространство, наделенное проективной топологией»,— см. *Локально выпуклое пространство*.) Примеры проективных пределов: а) произведение семейства векторных пространств $\{E_\alpha\}$, наделенное проективной топологией относительно отображений g_α, представляющих собой соответствующие проекции — отсюда и термин «проективный предел»; б) пусть E — векторное пространство и $\{\tau_\alpha\}$ — семейство топологий в E, согласующихся со структурой векторного пространства; пространство E, наделенное верхней гранью топологий семейства $\{\tau_\alpha\}$,— это проективный предел семейства Т. в. п. $\{(E, \tau_\alpha)\}$ относительно отображений, каждое из к-рых совпадает с тождественным отображением $E \to E$; в) топологич. векторное подпространство E_1 Т. в. п. E — это проективный предел одноэлементного семейства $\{E\}$ относительно отображения, представляющего собой канонич. вложение $E_1 \to E$; г) произвольное л. в. п. представляет собой проективный предел нек-рого семейства *банаховых пространств*.

2. Индуктивные топологии. Пусть E — векторное пространство и для каждого α из нек-рого множества $\mathfrak{A}$ индексов g_α — линейное отображение Т. в. п. E_α в E. Тогда в E существуют: а) сильнейшая среди всех топологий, для к-рых каждое из отображений g_α непрерывно; б) сильнейшая среди всех топологий, согласующихся со структурой векторного пространства, для к-рых эти же отображения непрерывны; в) сильнейшая среди всех локально выпуклых топологий, для к-рых все отображения g_α непрерывны (даже в том случае, когда все E_α — л. в. п., эти три топологии могут быть различными). Если все E_α — л. в. п., то пространство E, наделенное топологией, определенной в пункте в), наз. индуктивным пределом семейства $\{E_\alpha\}$ л. в. п. относительно отображений g_α, а сама эта топология — индуктивной топологией (того же семейства л. в. п. относительно тех же отображений). Термин «индуктивный предел» также используется в различных смыслах; здесь приведено самое широкое из встречающихся в литературе его определений. Индуктивная топология является и проективной как верхняя грань нек-рого множества топологий. Примеры индуктивных пределов. 1) Локально выпуклая прямая сумма семейства $\{E_\alpha\}$ л. в. п. Это — алгебраич. прямая сумма E семейства векторных пространств $\{E_\alpha\}$, наделенная индуктивной топологией семейства л. в. п. $\{E_\alpha\}$ относительно отображений g_α, представляющих собой канонич. вложения пространств E_α в E. 2) Пусть E — векторное пространство и $\{\tau_\alpha\}$ семейство локально выпуклых топологий в E, согласующихся со структурой векторного пространства, и τ — их нижняя грань в классе локально выпуклых топологий. Л. в. п. (E, τ) — это индуктивный предел семейства л. в. п. $\{E_\alpha\}$ относительно отображений, каждое из к-рых совпадает с тождественным отображением $E_\alpha \to E$. 3) Пусть E — л. в. п., E_1 — его векторное подпространство. Топологич. векторное факторпространство E/E_1 представляет собой индуктивный предел одноэлементного семейства $\{E\}$ относительно канонич. отображения $E \to E/E_1$. 4) Л. в. п. наз. борнологическим, если всякое его линейное отображение в произвольное банахово

пространство, переводящее каждое ограниченное множество в ограниченное, непрерывно. Л. в. п. является борнологическим в том и только в том случае, если оно представляет собой индуктивный предел нек-рого семейства нормируемых л. в. п. 5) Пусть Ω — непустое открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ и для каждого компакта $K \subset \Omega$ D_K — топологическое векторное подпространство пространства $(S(\mathbb{R}^n), \tau_S)$, образованное — как векторное пространство — всеми функциями из $S(\mathbb{R}^n)$, обращающимися в нуль вне K. Пусть $D(\Omega)$ — векторное пространство $\bigcup \{D_K : K \subset \Omega\}$, наделенное индуктивной топологией семейства л. в. п. $\{D_K : K \subset \Omega\}$ относительно канонич. вложений $D_K \to D_\Omega$. Л. в. п. $D(\Omega)$ (также играющее важную роль в теории обобщенных функций) полно, сепарабельно, неметризуемо; оно финально компактно и потому паракомпактно и, следовательно, нормально. Л. в. п. $D(\Omega)$ обладает неполным метризуемым факторпространством [11].

3. Пространства отображений. Пусть E — Т. в. п., T — нек-рое множество, σ — множество нек-рых подмножеств T, направленное по включению, то есть обладающее следующим свойством: для всех B_1, $B_2 \in \sigma$ существует $B_3 \in \sigma$, $B_3 \supset B_1 \cup B_2$; L — нек-рое векторное пространство отображений T в E (с естественными алгебраич. операциями) и $\mathcal{U}$ — база окрестностей нуля в E. Для $B \in \sigma$ и $V \in \mathcal{U}$ пусть $v_{B;V} = \{g \in L,\ g(B) \subset V\}$; множество $\{v_{B;V} : B \in \sigma,\ V \in \mathcal{U}\}$ является базой окрестностей нуля (роль к-рого играет отображение $f \in L$, переводящее все T в нуль пространства E), единственной инвариантной относительно сдвигов топологии в L, наз. топологией равномерной сходимости на множествах из σ или, короче, σ-топологией. Эта топология согласуется со структурой векторного пространства в L в том и только в том случае, если, каковы бы ни были $B \in \sigma$ и $f \in L$, множество $f(B)$ ограничено в E. Так будет, в частности, если σ — это множество всех конечных подмножеств множества T; в этом случае σ — топология в L наз. топологией поточечной сходимости. Эта топология является проективной топологией (в L) семейства $\{E_t : t \in T\}$, элементы к-рого представляют собой различные экземпляры пространства K_0 относительно отображений $L \to E_t$, $g \mapsto g(t)$. Пространство L, наделенное σ-топологией, будет обозначаться символом L_σ; если E — Т. в. п., причем все отображения, являющиеся элементами пространства L, линейны и непрерывны, а все множества, являющиеся элементами σ, ограничены в T, то L_σ — также Т. в. п.; если к тому же E — л. в. п., то и L_σ — л. в. п. Векторное пространство всех линейных непрерывных отображений Т. в. п. E_1 в E_2 обозначается символом $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. В частности, пусть E — л. в. п. Пространством, (топологически) сопряженным к E, наз. векторное пространство E' всех линейных непрерывных функционалов на E; таким образом, $E' = \mathcal{L}(E, K)$. Наделенное топологией сходимости на множестве β всех ограниченных подмножеств л. в. п. E, оно наз. сильным сопряженным (а его топология — сильной топологией) и обозначается символом E'_β. Топология поточечной сходимости в E' наз. также слабой топологией; общепринятое обозначение для пространства E', наделенного слабой топологией,— E'_σ. Топология произвольного л. в. п. может рассматриваться как топология сходимости на нек-ром множестве подмножеств сопряженного пространства.

4. Тензорные произведения. Пусть E_1 и E_2 л. в. п., $E_1 \otimes E_2$ — их алгебраич. *тензорное произведение* и b — канонич. билинейное отображение тополо-

гич. произведения $E_1 \times E_2$ в $E_1 \otimes E_2$. Проективной (соответственно, индуктивной) топологией в $E_1 \otimes E_2$ наз. самая сильная среди всех локально выпуклых топологий в $E_1 \otimes E_2$, для к-рых отображение b непрерывно (соответственно, раздельно непрерывно). Хотя эта терминология не вполне последовательна, она является общепринятой. Л.в. п., получающееся в результате наделения векторного пространства $E_1 \otimes E_2$ проективной (соответственно, индуктивной) топологией, обозначается символом $E_1 \otimes_\pi E_2$ ($E_1 \otimes_i E_2$), а его пополнение — символом $E_1 \widehat{\otimes}_\pi E_2$ ($E_1 \widehat{\otimes}_i E_2$). Пространства $E_1 \otimes_\pi E_2$ и $E_1 \otimes_i E_2$ наз. локально выпуклыми тензорпыми произведениями соответствующих л. в. п., а их пополнения — полными локально выпуклыми тензорными произведениями. Существуют — помимо введенных — и другие локально выпуклые тензорные произведения; они получаются путем наделения алгебраического тензорного произведения топологиями, отличными от описанных. Многие свойства тензорных произведений упрощаются, когда одно из пространств-сомножителей — *ядерное пространство*.

Примеры. Л. в. п. $S(\mathbb{R}^n) \widehat{\otimes}_\pi S(\mathbb{R}^k)$, $S(\mathbb{R}^n) \widehat{\otimes}_i S(\mathbb{R}^k)$ и $S(\mathbb{R}^{n+k})$ канонически изоморфны (изоморфизм первых двух л. в. п. является следствием того, что всякое раздельно непрерывное билинейное отображение *произведения пространств Фреше в произвольное л. в. п.* непрерывно). Л. в. п. $D(\mathbb{R}^n) \widehat{\otimes}_i D(\mathbb{R}^k)$ и $D(\mathbb{R}^{n+k})$ также канонически изоморфны; векторные пространства $D(\mathbb{R}^n) \widehat{\otimes}_\pi D(\mathbb{R}^k)$ и $D(\mathbb{R}^{n+k})$ канонически изоморфны, хотя топологии в них не совпадают [8], [9].

Двойственность. Важную роль при исследовании л. в. п. играет использование двойственности между л. в. п. и его сопряженным. В частности, нек-рые свойства л. в. п. зависят лишь от объема сопряженного пространства. Так, если E — л. в. п., и E' — его сопряженное, то для всех локально выпуклых топологий в E, согласующихся с двойственностью между E и E', ограниченные множества — одни и те же и замкнутые выпуклые множества также одни и те же.

Теория двойственности оказывается полезной при исследовании полных пространств. Так, л. в. п. (соответственно, метризуемое л. в. п.) E полно в том и только в том случае, если всякое гиперподпространство (соответственно, выпуклое подмножество) его сопряженного E', обладающее замкнутыми в топологии $\sigma(E', E)$ пересечениями с полярами всех окрестностей нуля пространства E, само замкнуто в этой топологии (теоремы Банаха-Гротендика и Крейна-Шмульяна).

В связи с этим вводятся следующие определения. Л. в. п. наз. B_r-полным (соответственно, совершенно полным, гиперполным, пространством Крейна—Шмульяна), если всякое всюду плотное линейное подпространство (соответственно, линейное подпространство, абсолютно выпуклое подмножество, выпуклое подмножество) пространства $(E', \sigma(E', E))$, обладающее замкнутыми пересечениями с полярами всех окрестностей нуля из E, само является замкнутым. Эти классы пространств играют важную роль в обобщениях теорем Банаха о замкнутом графике и открытом отображении (см. ниже). Полные метризуемые л. в. п. и сильные сопряженные к рефлексивным (см. ниже) метризуемым л. в. п. входят в каждый из этих классов; в то же время пространства D и D' не входят ни в один из них. Классы гиперполных пространств и пространств Крейна — Шмульяна не совпадают, однако до сих пор (1984) не известно, совпадают или нет классы B_r-полных и гиперполных пространств.

С помощью теории двойственности доказываются также следующие предложения о компактных подмножествах л. в. п. 1) Пусть E — л. в. п. и H — подмножество E, замкнутая выпуклая оболочка которого полна в топологии Макки. Если всякая последовательность элементов из H обладает в E предельной точкой, то H относительно компактно (теорема Эберлейна). 2) Пусть E — метризуемое л. в. п., $\{x_n\}$ — последовательность в E, всякая подпоследовательность к-рой обладает в $(E, \sigma(E, E'))$ предельной точкой. Тогда из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность (теорема Шмульяна). 3) Пусть B — компактное подмножество в отделимом л. в. п. E и C — замкнутая выпуклая оболочка B. Тогда C компактно в том и только в том случае, когда оно полно в топологии Макки (теорема Крейна).

Л. в. п. E наз. полурефлексивным (соответственно, рефлексивным), если канонич. вложение $x \mapsto [g \mapsto g(x)]$, $E \to (E'_\beta)'_\beta$ представляет собой изоморфизм векторных пространств (соответственно, изоморфизм Т. в. п.). Для того чтобы л. в. п. E было полурефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы всякое его ограниченное подмножество было относительно компактно в топологии $\sigma(E, E')$; для того чтобы оно было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы оно было полурефлексивным и *бочечным пространством*.

Отображения Т. в. п. 1. Теоремы о замкнутом графике и открытом отображении. Линейное отображение Т. в. п. E_1 в Т. в. п. E_2 наз. топологическим гомоморфизмом, если оно переводит всякое открытое в E_1 множество в множество, открытое в $f(E_1)$ (в топологии, индуцированной топологией пространства E_2). Графиком отображения $f: E_1 \to E_2$ наз. множество $\{(x, f(x)): x \in E_1\} \subset E_1 \times E_2$.

Пусть $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ — два класса Т. в. п. Говорят, что для пары $(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$ справедлива теорема о замкнутом графике (соответственно, о гомоморфизме), если для всех $E_1 \in \mathscr{E}_1$, $E_2 \in \mathscr{E}_2$ всякое линейное отображение $f: E_1 \to E_2$, обладающее замкнутым в Т. в. п. $E_1 \times E_2$ графиком, непрерывно (соответственно, если всякое непрерывное линейное отображение E_2 на E_1 является топологич. гомоморфизмом). Если $\mathscr{E}$ — класс всех полных метризуемых Т. в. п., то для пары $(\mathscr{E}, \mathscr{E})$ справедливы как теорема о замкнутом графике, так и теорема о гомоморфизме (теорема Банаха). Этот результат усилен: пусть $\mathscr{E}_1$ — класс всех отделимых л. в. п., являющихся индуктивными пределами семейств банаховых пространств, а $\mathscr{E}_2$ — наименьший класс л. в. п., содержащий все полные метризуемые л. в. п. и замкнутый относительно образования проективных и индуктивных пределов счетных семейств входящих в него пространств. Тогда для пары $(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$ справедливы теоремы о замкнутом графике и гомоморфизме (теорема Райкова) [все встречающиеся в функциональном анализе сепарабельные л. в. п. в их неослабленной топологии входят сразу в оба эти класса]. Фактически сформулированное утверждение доказано для нек-рого, более широкого, чем $\mathscr{E}_2$, класса $\mathscr{E}'_2$ Т. в. п. и для многозначных линейных отображений; описан [7] еще один класс $\mathscr{E}''_2 \supset \mathscr{E}'_2$ Т. в. п., к-рый может играть в сформулированном утверждении роль класса $\mathscr{E}_2$ — т. н. пространства с сетью.

Пусть $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}_\mathscr{P}$, $\mathscr{E}^r_\mathscr{P}$, соответственно, — классы всех бочечных, всех совершенно полных и всех B_r-полных л. в. п. Тогда для пары $(\mathscr{E}, \mathscr{E}^r_\mathscr{P})$ справедлива теорема о замкнутом графике, а для пары $(\mathscr{E}, \mathscr{E}_\mathscr{P})$ — теорема о гомоморфизме.

2. Теоремы о неподвижных точках. а) Пусть E — отделимое л. в. п., K — его непустое выпуклое компактное подмножество и f — отображение множества K в множество его непустых выпуклых замкнутых подмножеств. Пусть для каждого $x \in K$ и каждой окрестности $\mathcal{U}$ множества $f(x)$ существует такая окрестность $\mathcal{V}$ точки x, что $f(\mathcal{V} \cap K) \subset \mathcal{U}$ (это свойство отображения f наз. его полунепрерывностью сверху). Тогда существует точка $z \in K$ такая, что $z \in f(z)$ — «неподвижная точка» отображения f (теорема Фаня — обобщение теоремы Шаудера — Тихонова). б) Пусть E — отделимое Т. в. п., K — его непустое компактное выпуклое подмножество и Γ — некоторое множество попарно коммутирующих непрерывных отображений множества K в K, обладающее следующим свойством: если $x, z \in K$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, то $g(\alpha x + \beta z) = \alpha g(x) + \beta g(z)$. Тогда существует точка $z_0 \in K$ такая, что $g(z_0) = z_0$ для всех $g \in \Gamma$ (теорема Маркова — Какутани).

3. Важное значение в теории ЛВП имеют также *Хана — Банаха теорема* и *Банаха — Штейнхауза теорема*.

Ряд интересных результатов получен в теории мер, принимающих значения в л. в. п. и (особенно) в связанной с теорией случайных процессов теории числовых цилиндрич. мер, определенных на л. в. п.

Возник и продолжает развиваться математич. анализ (в широком смысле) на Т. в. п.— т. н. бесконечномерный анализ. Являясь продолжением классич. анализа, он в то же время качественно отличается от него как постановками задач и результатами, так и методами. Бесконечномерный анализ включает теорию дифференцируемых отображений Т. в. п. и дифференцируемых мер на Т. в. п.; теорию обобщенных функций и мер (распределений) на Т. в. п.; теорию дифференциальных уравнений — как относительно функций вещественного аргумента, принимающих значения в Т. в. п., так и относительно числовых функций и мер (возможно, обобщенных), определенных на Т. в. п. На языке бесконечномерного анализа весьма естественно формулируются основные задачи физики бесконечномерных систем — квантовой теории поля, статистич. механики, гидродинамики,— а также нек-рые математич. задачи, первоначально возникшие вне бесконечномерного анализа.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [2] Робертсон А., Робертсон В., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967; [3] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [4] Эдвардс Р.-Э., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969; [5] Пич А., Ядерные локально выпуклые пространства, пер. с нем., М., 1967; [6] его же, Операторные идеалы, пер. с англ., М., 1982; [7] Wilde M. de, Closed graph theorems and webbed spaces, L., 1978; [8] Schwartz L., Théorie des distributions, [2 éd.], P., 1957; nouv. éd., P., 1973; его же, Théorie des distributions à valeurs victorielles, Chartres, 1959; [9] Шавгулидзе Е. Т., «Функц. анализ и его прил.», 1977, т. 11, в. 1, с. 91—92; [10] Смолянов О. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 3, с. 682—96; [11] его же, Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения, М., 1979.

О. Г. Смолянов.

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ КОЛЬЦО — кольцо R, являющееся топологич. пространством, причем требуется, чтобы отображения

$$(x, y) \to x - y \text{ и } (x, y) \to xy$$

были непрерывны. Т. к. R наз. отделимым, если оно отделимо как топологич. пространство. В этом случае пространство R хаусдорфово. Любое подкольцо M Т. к. R, а также факторкольцо R/J по идеалу J являются Т. к. Если R отделимо и идеал J замкнут, то R/J — отделимое Т. к. Замыкание $\bar{M}$ подкольца M в R также является Т. к. Прямое произведение топологич. колец — Т. к.

Гомоморфизм топологич. колец — это гомоморфизм колец, являющийся непрерывным отображением. Если $f: R_1 \to R_2$ — такой гомоморфизм, причем f — эпиморфизм и открытое отображение, то R_2 как Т. к. изоморфно кольцу $R_1/\mathrm{Ker}\, f$. Примеры Т. к. доставляют банаховы алгебры. Важный тип Т. к. определяется тем условием, что в качестве фундаментальной системы окрестностей нуля можно выбрать некоторое множество идеалов. Например, с любым идеалом $\mathfrak{m}$ коммутативного кольца R связана $\mathfrak{m}$-адическая топология, в к-рой множества $\mathfrak{m}^n$ для всех натуральных n образуют фундаментальную систему окрестностей нуля. Эта топология отделима, если выполнено условие

$$\bigcap_n \mathfrak{m}^n = 0.$$

Для Т. к. R определено его пополнение $\hat{R}$, являющееся полным Т. к., причем отделимое кольцо R вкладывается в $\hat{R}$, к-рое тоже отделимо, как всюду плотное подмножество. Аддитивная группа кольца $\hat{R}$ совпадает с пополнением аддитивной группы кольца R как абелевой топологич. группы.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства, пер. с франц., М., 1969; [2] его же, Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [3] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [4] Ван дер Варден Б. Л., *Алгебра, пер. с нем.*, 2 изд., М., 1979. *Л. В. Кузьмин.*

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПОЛЕ — топологическое кольцо K, являющееся полем, причем дополнительно требуется, чтобы отображение $a \to a^{-1}$ было непрерывно на $K \setminus \{0\}$. Любое подполе P Т. п. K и замыкание $\bar{P}$ поля P в K снова являются Т. п.

Связные локально компактные Т. п. исчерпываются полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ (см. *Локально компактное тело*). Каждое нормированное поле является Т. п. относительно топологии, порождаемой нормой (см. *Нормирование*, *Абсолютное значение*). Если существуют два вещественных нормирования u и v поля P, каждое из к-рых превращает P в полное Т. п., и топологии τ_u и τ_v, порождаемые u и v, различны, то поле P алгебраически замкнуто. Поле $\mathbb{C}$ — единственное вещественно нормированное расширение поля $\mathbb{R}$.

На каждом поле бесконечной мощности τ существует ровно 2^{2^τ} различных топологий, превращающих его в Т. п. Топология Т. п. либо антидискретна, либо вполне регулярна. Построены Т. п., топология к-рого не нормальна, и Т. п., топология к-рого нормальна, но не наследственно нормальна. Т. п. либо связно, либо вполне несвязно. Существует связное Т. п. любой конечной характеристики. Неизвестно (1983), можно ли каждое Т. п. вложить в связное Т. п. в качестве подполя. В отличие от топологич. колец и линейных топологич. пространств, не каждое вполне регулярное топологич. пространство можно вложить в качестве подпространства в Т. п. Так, напр., псевдокомпактное (в частности, бикомпактное) подпространство Т. п. всегда метризуемо. Однако каждое вполне регулярное пространство, допускающее взаимно однозначное непрерывное отображение на метрич. пространство, вкладывается в нек-рое Т. п. в качестве подпространства. Если в Т. п. P есть хоть одно счетное незамкнутое множество, то существует более слабая метризуемая топология на поле P, превращающая его в Т. п.

Для Т. п. K определено его пополнение $\tilde{K}$ — полное топологич. кольцо, в к-рое K вкладывается как всюду плотное подполе. Кольцо $\tilde{K}$ может иметь делители нуля. Однако пополнение всякого вещественно нормированного Т. п. есть вещественно нормированное Т. п.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Więsław W., *Topological fields*, Wrocław, 1982; [3] Шахматов Д. Б., «Докл. АН СССР», 1983, т. 271, № 6, с. 1332—36. *Д. Б. Шахматов.*

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, тихоновское произведение, семейства топологических пространств $\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$ — топологич. пространство $(X, \mathscr{T})$, где X — декартово произведение (т. е. полное прямое произведение) множеств X_α по $\alpha \in A$ и $\mathscr{T}$ — слабейшая (т. е. наименьшая) топология на множестве X такая, что все отображения естественного проектирования $\pi_\alpha : (X, \mathscr{T}) \to (X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ непрерывны. Топология $\mathscr{T}$ наз. при этом топологией произведения, а Т. п. $(X, \mathscr{T})$ наз. также топологич. произведением семейства пространств $\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$.

Стандартной базой топологич. пространства $(X, \mathscr{T})$ служит семейство всех множеств вида $\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольный конечный набор элементов индексирующего множества A, а U_{α_i} — любой элемент топологии $\mathscr{T}_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

В частности, если семейство $\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$ состоит из двух пространств X и Y, то базу топологии произведения $Z = X \times Y$ образуют множества вида $U \times V$, где U — произвольное открытое множество в X, а V — произвольное открытое множество в Y. Аналогично описывается база топологии произведения любого конечного упорядоченного множества топологич. пространств. Примеры Т. п.: плоскость — произведение двух прямых, n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$ — произведение n прямых, тор — произведение двух окружностей.

Первоначальные попытки определения Т. п. бесконечного множества топологич. пространств относились к случаю метризуемых сомножителей. Соответственно, топологию произведения пытались указать в терминах сходимости обычных (счетных) последовательностей. Когда семейство сомножителей несчетно, получить на этом пути тот же результат, что и выше, было невозможно, так как оператор замыкания в Т. п. несчетного множества неодноточечных метризуемых пространств не может быть описан на языке сходящихся последовательностей или сведен к замыканиям счетных множеств.

Определение Т. п. произвольного бесконечного множества топологич. пространств было дано А. Н. Тихоновым (1925). Он же доказал, что Т. п. бикомпактных пространств всегда является бикомпактным пространством.

Операция Т. п. является одним из главных средств формирования новых топологич. объектов из уже имеющихся. С ее помощью конструируется ряд основных стандартных объектов общей топологии — в частности, *тихоновские кубы* I^τ, определяемые как топологич. произведение семейства мощности τ отрезков числовой прямой. По теореме Тихонова, все тихоновские кубы бикомпактны. А. Н. Тихонов доказал, что всякое вполне регулярное T_1-пространство гомеоморфно подпространству нек-рого куба I^τ.

Кроме кубов I^τ важную роль в топологии играют пространства D^τ и F^τ, являющиеся соответственно произведениями τ штук пространств, состоящих из двух изолированных точек (простых двоеточий D) и двухточечных пространств с одной изолированной точкой (связных двоеточий F). Всякий компакт есть непрерывный образ канторова совершенного множества, т. е. пространства, гомеоморфного произведению счетного числа простых двоеточий D; всякое индуктивно нульмерное пространство, т. е. T_0-пространство, в к-ром открыто-замкнутые множества образуют базу, гомеоморфно подмножеству нек-рого канторова дископтинуума D^τ; всякое T_0-пространство гомеоморфно подмножеству пространства F^τ.

В связи с силой и ролью операции Т. п. центральное место в проблематике общей топологии занимают вопросы поведения топологич. свойств при операции Т. п. Устойчивы относительно операции Т. п. классы хаусдорфовых пространств, регулярных пространств и вполне регулярных пространств. Но произведение нормального пространства на отрезок может быть не нормальным пространством, не устойчивым относительно операции Т. п., даже в случае конечного числа сомножителей, такие важные топологич. свойства, как линделёфовость и паракомпактность.

Важную роль в общей топологии и ее приложениях (в частности, к построению моделей теории множеств) играет теорема: число Суслина Т. п. любого множества сепарабельных топологич. пространств счетно. В частности, счетно число Суслина любого тихоновского куба.

Операция Т. п. порождает, путем выделения во всем Т. п. определенных подпространств, весьма полезные операции Σ-произведения и σ-произведения. К совершенно иной топологии на декартовом произведении множеств X_α приводит операция ящичного произведения топологий $\mathcal{T}_\alpha$.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968; [3] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

А. В. Архангельский, В. В. Федорчук.

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — совокупность двух объектов: множества X, состоящего из элементов произвольной природы, наз. точками данного пространства, и из введенной в это множество топологической структуры, или топологии, все равно — открытой или замкнутой (одна переходит в другую, если заменить множества, составляющие данную топологию, их дополнениями). Если не сказано противное, под топологией $(\S)$ будет пониматься открытая топология. Логически самый простой способ определения топологии в данном множестве X заключается в непосредственном указании тех подмножеств множества X, к-рые составляют эту топологию. Но часто проще определять не все множества, являющиеся элементами данной топологии, а только нек-рые множества этих элементов (т. е. *базу* данной топологии), достаточные для того, чтобы все остальные элементы топологии получались как объединения (в случае открытой топологии) или пересечения (в случае замкнутой) множеств, к-рые составляют базу. Так, напр., обычная топология числовой прямой получается, если определить в качестве базы ее открытой топологии множество всех интервалов (можно ограничиться даже одними интервалами с рациональными концами). Остальные открытые множества суть объединения интервалов.

Имея в виду базу открытой и, соответственно, замкнутой топологии, часто говорят об открытой, соответственно, замкнутой базе данного Т. п., причем открытые базы рассматриваются чаще замкнутых, поэтому если говорят просто о базе Т. п., то всегда имеют в виду его открытую базу. Наименьшее кардинальное число (в нетривиальных случаях бесконечное), являющееся мощностью какой-либо базы данного Т. п., наз. его *весом*. После мощности множества всех точек пространства вес является важнейшим т. н. кардинальнозначным инвариантом пространства. Особенно важны пространства, имеющие счетную базу; напр., числовая прямая есть такое пространство. Аналогично, счетная база евклидова n-мерного пространства получается, если взять т. н. рациональные (открытые) шары, т. е. шары, радиус к-рых и координаты центра к-рых суть рациональные числа. Часто приходится определять тем или иным стандартным (естественным) способом топологию во

множестве, снабженном какой-либо другой структурой. Так, говорят об естественной топологии метрич. пространства или об естественной (интервальной) топологии упорядоченного множества. Первая имеет своей базой множество всех открытых шаров данного метрич. пространства, вторая — открытые интервалы данного линейно упорядоченного множества.

Т. п. наз. м е т р и з у е м ы м, если во множестве X его точек можно ввести метрику ρ, порождающую топологию данного Т. п. Метризуемые пространства образуют один из важнейших классов Т. п., и к центральным проблемам общей топологии принадлежали в течение нескольких десятилетий общая и специальная проблемы метризации, т. е. проблемы нахождения необходимых и достаточных условий для того, чтобы Т. п. или Т. п. того или иного специального класса было метризуемым. Эти условия составляют содержание общих или специальных метризационных теорем.

Всякое подмножество X_0 множества X всех точек данного Т. п. X, $\mathfrak{S}$ естественно превращается в Т. п. (подпространство пространства X, $\mathfrak{S}$) с топологией, элементы к-рой суть всевозможные множества вида $X_0 \cap \Gamma$, где Γ — любой элемент топологии $\mathfrak{S}$. Пусть дана (открытая) топология $\mathfrak{S}$ в множестве X, превращающая это множество в Т. п. X, $\mathfrak{S}$. Т. к. топология есть множество нек-рых подмножеств множества X, то между различными топологиями в одном и том же множестве X естественно устанавливается отношение (частичного) порядка (по включению), т. е. топология $\mathfrak{S}_2$ больше (или равна) топологии $\mathfrak{S}_1$, если $\mathfrak{S}_1$ есть подмножество множества $\mathfrak{S}_2$, т. е. каждое множество, открытое в топологии $\mathfrak{S}_1$, будет открытым и в топологии $\mathfrak{S}_2$. Если в пределах данного рассуждения речь идет об одной и той же топологии в данном множестве X, то обыкновенно Т. п. X, $\mathfrak{S}$ обозначается просто X. Из понятия топологии выводятся и все остальные основные топологич. понятия. Прежде всего замкнутые множества определяются как дополнения к открытым. Далее, о к р е с т н о с т ь ю точки x в данном пространстве X наз. всякое открытое множество, содержащее точку x. Понятие окрестности позволяет сразу же определить и понятие т о ч к и п р и к о с н о в е н и я для любого множества $M \subset X$ как такой точки, любая окрестность к-рой имеет непустое пересечение с множеством M. Из этого определения следует, что любая точка самого множества M является точкой прикосновения этого множества. Множество всех точек прикосновения множества M наз. з а м ы к а н и е м множества M и обозначается $[M]$. Переход от любого множества M к его замыканию наз. о п е р а ц и е й з а м ы к а н и я в данном Т. п. Свойства этой операции: 1) $M \subset [M]$, причем $M=[M]$ тогда и только тогда, когда M замкнуто, т. е. его дополнение открыто; 2) $[M_1 \cup M_2]=[M_1] \cup [M_2]$; 3) $[[M]]=[M]$. Замыкание любого множества есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество M; другими словами, $[M]$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащее множество M.

Операция замыкания и ее основные свойства 1), 2), 3) получены, исходя из основного (в нашем изложении) понятия топологии или топологич. структуры, введенной в данное множество X. Можно было бы, наоборот, считать основным топологич. понятием понятие замыкания, т. е. считать, что в абстрактно данном множестве X для каждого подмножества M определено подмножество $[M]$, наз. замыканием множества, так что выполнены свойства 1), 2), 3) (наз. в этом случае а к с и о м а м и з а м ы к а н и я, или а к с и о м а м и К у р а т о в с к о г о) и 4) $\varnothing=[\varnothing]$. На основе так введенного понятия замыкания замкнутые множества определятся как множества, совпадающие со

своими замыканиями, а открытые множества — как множества, дополнительные к замкнутым; таким образом получается в точности топология в нашем первоначальном смысле, а операция замыкания, к к-рой она приводит, совпадает с той, к-рая была дана априори. Именно этот путь и был избран К. Куратовским (K. Kuratowski, 1922) для построения понятия Т. п. В 1925 П. С. Александровым были введены открытые топологич. структуры. Оба подхода приводят к одному и тому же классу Т. п., в настоящее время являющемуся общепринятым.

С понятием Т. п. тесно связано понятие непрерывного отображения одного пространства в другое. Отображение $f: X \to Y$ Т. п. X в Т. п. Y **непрерывно в точке** $x \in X$, если для любой окрестности O_y точки $y = f(x) \in Y$ в пространстве Y существует такая окрестность O_x точки x в X, что $f(O_x) \subset O_y$ (**условие Коши**). При этом, не изменяя содержания определения, можно брать окрестности O_y и O_x из любых открытых баз соответственно пространств Y и X. В частности, для метрич. пространств это определение непрерывности переходит в обычное известное из курсов математич. анализа определение. Если отображение $f: X \to Y$ непрерывно в каждой точке $x \in X$, то оно наз. **непрерывным отображением** пространства X в пространство Y. Для непрерывности отображения $f: X \to Y$ каждое из следующих условий необходимо и достаточно. 1) Если x есть точка прикосновения какого-либо множества $M \subset X$, то $f(x)$ есть точка прикосновения множества $f(M)$ в Y. 2) Полный прообраз $f^{-1}(\Gamma)$ всякого открытого в Y множества Γ есть открытое множество в X. Аналогично для замкнутых множеств.

Если дано (непрерывное) отображение f Т. п. X в Т. п. Y и X_0 есть подпространство пространства X, то в силу отображения f пространство X_0 отображается в Y и это отображение (наз. **ограничением отображения** $f: X \to Y$ на подпространство X_0) также непрерывно.

Важный частный случай непрерывных отображений образуют т. н. **факторные отображения**, характеризующиеся каждым из следующих эквивалентных между собой условий. Множество $B \subset Y$ открыто (замкнуто) в Y тогда и только тогда, когда $f^{-1}(B)$ обладает тем же свойством в X. Если непрерывное отображение f пространства X на пространство Y взаимно однозначно, то определено и обратное отображение $f^{-1}: Y \to X$, но это отображение может не быть непрерывным. Если же оно непрерывно, то каждое из отображений f, f^{-1} взаимно однозначно отображает топологию одного из пространств X, Y на топологию другого пространства. Тогда каждое из двух взаимно однозначных отображений f и f^{-1} наз. **топологическим отображением**, или **гомеоморфизмом**. Два пространства X и Y, из к-рых одно может быть гомеоморфно отображено на другое, наз. **гомеоморфными** или **топологически эквивалентными** между собою.

Непрерывное отображение $f: X \to Y$ наз. **неприводимым**, если при этом отображении никакое отличное от всего X замкнутое множество M не отображается на все Y.

Конкретное изучение Т. п. связано прежде всего с выделением из общего класса этих пространств подклассов, характеризующихся теми или иными дополнительными условиями или аксиомами, кроме первоначальных аксиом, определяющих топологию пространства. Эти дополнительные аксиомы бывают разной природы. Прежде всего это группа т. н. **аксиом отделимости**. Первой аксиомой отделимости была **аксиома Хаусдорфа**, заключающаяся в требовании, чтобы любые две различные точки про-

странства были отделимы посредством окрестностей, т. е. содержались в дизъюнктных открытых множествах (совокупность двух или более множеств дизъюнктна или состоит из дизъюнктных множеств, если эти множества попарно не имеют общих элементов). Аксиома отделимости Хаусдорфа иначе наз. аксиомой T_2, а удовлетворяющие ей Т. п. наз. хаусдорфовыми или T_2-пространствами. Определив эти пространства, Ф. Хаусдорф (F. Hausdorff) в 1914 впервые открыл достаточно широкий и в то же время достаточно богатый свойствами класс Т. п. и тем удовлетворил уже вполне назревшую к тому времени потребность математики. Дальнейшее развитие общей топологии исходит именно из хаусдорфовых пространств. Ослаблением аксиомы T_2 является аксиома T_1, требующая, чтобы каждая из любых двух точек Т. п. имела окрестность, не содержащую вторую точку. Это требование равносильно требованию замкнутости в данном пространстве всякого множества, состоящего из конечного числа точек. Пространства, удовлетворяющие этому требованию, наз. T_1-пространствами. Еще более широкий класс Т. п. образуют T_0-пространства, т. е. пространства, в к-рых выполнена аксиома T_0 (аксиома Колмогорова): из любых двух точек этого пространства по крайней мере одна имеет окрестность, не содержащую другую точку. T_0-пространства могут состоять из конечного числа и даже из двух точек, если одна точка образует замкнутое множество, но не открытое, а другая, наоборот, образует открытое, но не замкнутое множество (связное двоеточие).

Аксиома T_3 требует, чтобы произвольная точка пространства и произвольное, не содержащее эту точку замкнутое множество были отделимы окрестностями, т. е. содержались соответственно в двух дизъюнктных открытых множествах. Пространства, удовлетворяющие аксиоме T_3, наз. T_3-пространствами. T_3-пространство может не удовлетворять аксиоме T_1, таково, напр., связное двоеточие. T_0-пространства, удовлетворяющие аксиоме T_1, наз. регулярными; все они — хаусдорфовы пространства. Т. п. наз. T_4-пространством, если в нем всякие два дизъюнктные замкнутые множества имеют дизъюнктные окрестности. T_4-пространства, являющиеся в то же время T_1-пространствами, наз. нормальными, все они регулярны и подавно хаусдорфовы. Всякое множество X_0 точек Т. п. X, $\mathfrak{S}$ получает топологию, однозначно определенную топологией $\mathfrak{S}$, и таким образом становится топологич. подпространством пространства X, $\mathfrak{S}$. При этом всякое подпространство пространства, удовлетворяющего аксиоме T_i, $i=0, 1, 2, 3$, также удовлетворяет аксиоме T_i, т. е. аксиомы T_i наследуются всеми подпространствами данного пространства. Аксиома T_4 этим свойством не обладает: существуют нормальные пространства X, не все (даже открытые в X) подпространства к-рых нормальны. Однако если X_0 — замкнутое множество в нормальном пространстве X, то подпространство X_0 нормально.

До сих пор отделимость точек и множеств понималась в смысле наличия у них дизъюнктных окрестностей. Однако в современной топологии имеет значение и т. н. функциональная отделимость, впервые введенная П. С. Урысоном в 1924. Два множества A и B в Т. п. наз. функционально отделимыми, если существует определенная на всем пространстве X действительная непрерывная и ограниченная на всем X функция f, принимающая во всех точках множества A значение 0 и во всех точках множества B значение 1. В нормальном пространстве всякие два дизъюнктные замкнутые множества функционально отделимы (лемма Урысона). Обратно, из функциональной отделимости двух любых мно-

жеств следует и их отделимость посредством окрестностей. В частности, из функциональной отделимости точки и множества следует их отделимость посредством окрестностей в данном пространстве. Но если пространство регулярно и, значит, всякая точка и всякое не содержащее ее замкнутое множество имеют дизъюнктные окрестности, то отсюда еще не следует, что они функционально отделимы. Таким образом, более сильным, чем свойство регулярности, является свойство полной регулярности пространства, заключающееся в том, что всякая точка и всякое не содержащее ее замкнутое множество в этом пространстве функционально отделимы. Среди удовлетворяющих этому условию (или вполне регулярных) пространств наиболее важны вполне регулярные T_1-пространства, наз. тихоновскими пространствами. В частности, пространство всякой топологич. группы является вполне регулярным, но может не быть нормальным.

Наряду с аксиомами отделимости для всей теории Т. п. имеют значение т. н. условия типа компактности. Они основаны на рассмотрении (открытых) покрытий. Семейство Σ (открытых) множеств данного Т. п. наз. покрытием этого пространства X, если каждая точка $x \in X$ содержится хотя бы в одном множестве — элементе семейства Σ. Если каждый элемент покрытия α' является подмножеством хотя бы одного элемента покрытия α, то говорят, что α' вписано в α, или что α' мельче α, или, наконец, что α' следует за α в частично упорядоченном множестве покрытий данного пространства. Частным случаем следования покрытия α' за α является случай, когда α' содержится в α (т. е. каждый элемент покрытия α' есть и элемент покрытия α). То или иное условие типа компактности предполагает, что даны два класса (открытых) покрытий пространства X: класс $\mathfrak{A}$ и класс $\mathfrak{B}$ так, что $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, т. е. каждое покрытие класса $\mathfrak{B}$ есть и покрытие класса $\mathfrak{A}$. Условие $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-компактности состоит в том, что за каждым покрытием класса $\mathfrak{A}$ следует покрытие класса $\mathfrak{B}$. Важнейшее среди всех условий этого типа получается, если $\mathfrak{A}$ есть класс всех открытых покрытий пространства, а $\mathfrak{B}$ — подкласс конечных покрытий, т. е. покрытий, состоящих из конечного числа элементов. Это условие наз. условием бикомпактности; оно эквивалентно т. н. условию Бореля — Лебега: для каждого открытого покрытия α пространства X существует конечное покрытие α' пространства X, содержащееся в α. Хаусдорфовы пространства, удовлетворяющие условию бикомпактности, наз. бикомпактами. Все они нормальны. Метризуемые бикомпакты (бикомпакты со счетной базой) наз. компактами. В настоящее время получила распространение другая терминология, согласно к-рой бикомпакты наз. компактными Т. п., причем метризуемый случай терминологически не выделяется.

Если за $\mathfrak{A}$ принять класс счетных открытых покрытий, сохраняя в качестве $\mathfrak{B}$ подкласс конечных покрытий, то соответствующая $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-компактность наз. счетной компактностью. Для метризуемых пространств, а также для хаусдорфовых пространств со счетной базой условия бикомпактности и счетной компактности эквивалентны между собой. Если за $\mathfrak{A}$ взять класс всех открытых покрытий, а за $\mathfrak{B}$ — класс счетных покрытий, то получается условие финальной компактности. При формулировке этого условия можно потребовать (как и в случае бикомпактности), чтобы покрытие $\alpha' \in \mathfrak{B}$ не только следовало за покрытием α, но и содержалось в нем.

Важный класс пространств, наз. локально бикомпактными, определяется требованием, чтобы

каждая точка x данного пространства X имела окрестность O_x, замыкание к-рой в пространстве X есть бикомпактное подпространство. Всякое локально бикомпактное хаусдорфово пространство и только такое пространство может рассматриваться как открытое множество нек-рого бикомпакта $\overline{X}$, причем $\overline{X}$ получается из X присоединением одной только точки $\overline{x}$, и топология бикомпакта $\overline{X}$ однозначно определена последним требованием и топологией пространства X; бикомпакт $\overline{X}$ наз. одноточечным, или александровским, бикомпактным расширением пространства X.

Важнейшим после условия бикомпактности условием типа компактности является условие паракомпактности, требующее, чтобы за всяким открытым покрытием α данного пространства X следовало локально конечное открытое покрытие α' (семейство множеств Т. п. наз. локально конечным в нем, если каждая точка его обладает окрестностью, к-рая может иметь общие точки лишь с конечным числом множеств семейства). Здесь уже нельзя требовать, чтобы α' содержалось в α. Все метризуемые пространства являются паракомпактными хаусдорфовыми пространствами.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968; [3] Куратовский К., Топология, т. 1, [пер. с англ.], М., 1966; [4] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности..., М., 1973. *П. С. Александров.*

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ локально выпуклых пространств E_1 и E_2 — локально выпуклое пространство, обладающее свойством универсальности по отношению к заданным на $E_1\times E_2$ билинейным операторам с нек-рым условием непрерывности. Точнее, пусть $\mathscr{K}$ — нек-рый класс локально выпуклых пространств и для каждого $F\in\mathscr{K}$ задано подмножество $T(F)$ множества раздельно непрерывных билинейных операторов из $E_1\times E_2$ в F. Тогда Т. т. п. E_1 и E_2 (относительно класса $T(F)$) наз. локально выпуклое пространство $E_1\widetilde{\otimes}E_2\in\mathscr{K}$ вместе с оператором $B\in T(E_1\widetilde{\otimes}E_2)$, обладающее следующим свойством: для любого $S\in T(F)$, $F\in\mathscr{K}$, существует единственный непрерывный линейный оператор $R: E_1\widetilde{\otimes}E_2\to F$ такой, что $R\circ B=S$. Таким образом, если ситуация позволяет говорить о функторе $T: \mathscr{K}\to$ $\to$Set s, то $E_1\widetilde{\otimes}E_2$ определено как представляющий объект этого функтора.

Во всех известных (1985) примерах $\mathscr{K}$ содержит поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, а $T(\mathbb{C})$ содержит все билинейные функционалы вида $f\circ g: f\in E_1^*,\ g\in E_1^*$, переводящие (x, y) в $f(x)\,g(y)$. В этом случае, если Т. т. п. существует, то в $E_1\widetilde{\otimes}E_2$ есть плотное подпространство, к-рое можно отождествить с пространством $E_1\otimes E_2$ алгебраического *тензорного произведения*; при этом $B(x, y)=x\otimes y$.

Если $\mathscr{K}$ состоит из всех раздельно (соответственно, совместно) непрерывных билинейных операторов, то Т. т. п. наз. индуктивным (соответственно, проективным). Наиболее важно проективное Т. т. п. Пусть $\{p_i\}$ — определяющие семейства полунорм в E_i, $i=1, 2$; через π обозначается топология в $E_1\otimes E_2$, определенная семейством полунорм

$$\{p_1\widetilde{\otimes}\,p_2\}: p_1\widetilde{\otimes}\,p_2\,(u)=$$

$$=\inf\left\{\sum_{k=1}^{n} p_1(x_k)\,p_2(x_k): \sum_{k=1}^{n} x_k\otimes y_k=u\right\}.$$

Тогда если $\mathscr{K}$ — класс всех, соответственно, всех полных локально выпуклых пространств, то проективное Т. т. п. E_1 и E_2 существует и его локально выпуклое пространство есть $E_1\otimes E_2$ с топологией π, соответст-

венно, его *пополнение*. Если E_i — банаховы пространства с нормами p_i, $i=1, 2$, то $p_1 \widehat{\otimes} p_2$ — норма в $E_1 \otimes E_2$, пополнение по к-рой обозначается через $E_1 \widehat{\otimes} E_2$. Элементы $E_1 \otimes E_2$ имеют для каждого $\varepsilon > 0$ представление

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \otimes y_k,$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_1(x_k)\, p_2(y_k) \leqslant p_1 \hat{\otimes} p_2(u) + \varepsilon.$$

Если снабдить $E_1 \otimes E_2$ более слабой, чем π, топологией с помощью семейства полунорм $p_1 \check{\otimes} p_2$:

$$p_1 \check{\otimes} p_2(u) = \sup_{f,\, g \in V \times W} |(f \otimes g)\check{(u)}|,$$

где V и W — поляры единичных шаров относительно p_1 и p_2, то возникает Т. т. п., иногда наз. слабым. Локально выпуклые пространства E_1, обладающие тем свойством, что для любого E_2 обе топологии в $E_1 \otimes E_2$ совпадают, образуют важный класс *ядерных пространств*.

Проективное Т. т. п. связано с понятием с в о й с т в а а п п р о к с и м а ц и и: локально выпуклое пространство E_1 обладает свойством аппроксимации, если для каждого предкомпактного множества $K \subset E_1$ и окрестности нуля U существует непрерывный оператор конечного ранга $\varphi : E_1 \to E_1$ такой, что для всех $x \in K$ $x - \varphi(x) \subset U$. Все ядерные пространства обладают свойством аппроксимации. Банахово пространство E_1 обладает свойством аппроксимации тогда и только тогда, когда для любого банахова пространства E_2 оператор $\tau : [E_1 \widehat{\otimes} E_2] \to (E_1^* \otimes E_2^*)^*$, однозначно определенный равенством $[\tau(x \otimes y)]\,(f \otimes g) = f(x) g(y)$, имеет нулевое ядро. Построено [3] сепарабельное банахово пространство без свойства аппроксимации (и тем самым доказано существование банаховых пространств без базиса Шаудера, поскольку последние всегда имеют свойство аппроксимации,— т. е. отрицательно решена т. н. «проблема базиса» С. Банаха).

Лит.: [1] G r o t h e n d i e c k A., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1955, № 16, pt 1, p. 1—193, pt 2, p. 1—140; [2] Ш е ф е р Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [3] E n f l o P., «Acta Math.», 1973, t. 130, № 3—4, p. 309—317.

А. Я. Хелемский.

ТОПОЛОГИЯ — раздел математики, имеющий своим назначением выяснение и исследование, в рамках математики, идеи непрерывности. Интуитивно идея непрерывности выражает коренные свойства пространства и времени и имеет, следовательно, фундаментальное значение для познания. Соответственно, Т., в к-рой понятие непрерывности получает математич. воплощение, естественно вплетается почти во все разделы математики. В соединении с алгеброй Т. составляет общую основу математики и содействует ее единству.

Предметом топологии является исследование свойств фигур и их взаимного расположения, сохраняющихся *гомеоморфизмами*, т. е. взаимно однозначными и непрерывными в обе стороны отображениями. Следовательно, Т. можно квалифицировать как разновидность геометрии. Важной чертой этой геометрии является необычайная широта класса геометрич. объектов, попадающих в сферу действия ее законов.

Вызвана эта широта тем, что центральное понятие Т.— понятие гомеоморфизма не требует для своего определения никаких классич. геометрич. понятий типа расстояния, прямолинейности, линейности, гладкости и т. д. Понятие гомеоморфизма и лежащее в его основе понятие непрерывного отображения предполагают только, что точки и множества точек рассматриваемой фигуры могут находиться в нек-ром интуитивно ясном отношении близости, отличном, вообще говоря, от простого отношения принадлежности.

Под «фигурой» в Т. понимается любое множество точек, в к-ром задано отношение близости между точками и нек-рыми подмножествами, удовлетворяющее определенным аксиомам. Такие фигуры наз. *топологическими пространствами*. Практически всякая фигура в смысле какой-либо другой геометрии (аффинной, проективной, дифференциальной и т. д.) может естественно рассматриваться и как топологич. пространство. В этом смысле Т. является наиболее общей геометрией; однако многие свойства фигур, к-рые изучаются в других геометриях, сознательно игнорируются Т.

Главной задачей Т. является выделение и изучение топологич. свойств пространств, или *топологических инвариантов*. К числу важнейших топологич. инвариантов относятся, напр., *связность*, *компактность*, *размерность*, *вес*, *фундаментальная группа*, *гомологий группы* и др.

Кроме того, большое внимание в Т. уделяется свойствам типа расположения одной фигуры в другой, одного топологич. пространства в другом, сохраняющимся при гомеоморфизмах объемлющего пространства на себя. Проблематика этого рода началась с *Жордана теоремы*. В развитие этих идей были получены законы двойственности Александера и их обобщения, *узлов теория*.

При общем подходе естественно считать центральным объектом исследования в Т. тройку (X, f, Y), где f — непрерывное отображение топологич. пространства X в топологич. пространство Y, — этим охватываются две постановки основной задачи Т., указанные выше. Главным средством сравнения троек становятся, в духе теории категорий, их непрерывные гомоморфизмы.

Конкретный запас топологич. пространств, или, лучше сказать, типов топологич. пространств, с к-рыми имеет дело современная Т., формировался под воздействием разных областей математики в соответствии с их весьма непохожими потребностями. Этим объясняется большая априорная разнородность мира топологич. пространств.

К числу наиболее важных классов топологич. пространств, сформировавшихся из требований, предъявленных к Т. математикой в целом, относятся, в частности, следующие: *многообразия* (гладкие, кусочно-линейные, топологические и др.) — локально эти топологич. пространства устроены, как евклидово пространство; *полиэдры* — эти пространства правильным образом «скроены» из элементарных фигур, подобных отрезку, треугольнику, тетраэдру и т. д. (стоящее за понятием полиэдра понятие симплициального комплекса является важным техническим средством исследования полиэдров и многообразий); подпространства евклидова пространства (*раздел топологии, посвященный их* изучению и расположению в пространстве, наз. обычно геометрич. Т.); пространства функций (так, пространства непрерывных функций (отображений) в топологии поточечной сходимости или в бикомпактно открытой топологии, *банаховы пространства* в слабой топологии — топологич. объекты этого рода играют фундаментальную роль в функциональном анализе и его приложениях).

Ряд важных классов топологич. пространств был выделен аксиоматически — путем фиксации того или иного важного свойства конкретных топологич. объектов. Так, лемма Гейне — Бореля о том, что из любого покрытия отрезка интервалами можно выбрать конечное подпокрытие, легла в основу определения абстрактного понятия *бикомпактности* (*компактности*) и отвечающего ему класса *бикомпактных пространств* (компактных пространств). Наличие естественных *метрик* на конкретных множествах явилось отправной точкой для абстрактного определения *метрического пространства* и *метризуемого пространст-*

ва. Интуитивно ясная идея отделимости (см. *Отделимости аксиома*) точек и множеств окрестностями нашла выражение в Т. через определения классов *хаусдорфовых пространств*, *нормальных пространств*, *регулярных пространств* и *вполне регулярных пространств* и др. Важен класс *паракомпактных пространств*, отражающий, в частности, идею безграничной делимости пространства.

Исследование всех названных классов пространств объединено общей идеей гомеоморфизма и порожденным ею понятием топологич. инварианта. Так как понятие гомеоморфизма имеет ярко выраженную теоретико-множественную природу, теоретико-множественные методы и конструкции того или иного уровня сложности или общности применяются при исследовании каждого из названных и других классов топологич. пространств. Ряд этих методов имеет общий характер и значение для топологии в целом. В то же время исследование топологич. объектов в пределах какого-либо фиксированного класса пространств требует особых, специфич. методов, обладающих более узким, но и более изощренным действием. Эти методы придают областям топологии, попадающим в сферу их действия, столь яркую и различную окраску, что иногда говорят о распадении Т. на ряд самостоятельных и малосвязанных дисциплин (напр., *алгебраическая топология*, *общая топология*, *дифференциальная топология*, геометрич. топология). Однако Т. объединена изначально своими исходными концепциями и это единство подтверждено в процессе развития Т. общим значением для всех разделов Т., ряда основных конструкций, принципов и понятий — таких, как понятие *факторпространства*, операция *топологического произведения*, идея функциональной отделимости, топологич. аппроксимации и топологич. расширения, принципы, связанные с компактностью, и др.

Топологич. объекты, сформировавшиеся под непосредственным воздействием других областей, часто обладают следующей важной чертой: их Т. порождается нек-рой другой, более жесткой математической структурой, связанной естественно с самой природой рассматриваемого объекта. В связи с этим возникают следующие взаимосвязанные вопросы фундаментального характера:

1) Как связаны инварианты данной «внешней» структуры (комбинаторной, дифференциальной, алгебраической и др.) с топологич. инвариантами порожденной этой структурой топологии?

2) Какие инварианты данной «внешней» структуры являются инвариантами порожденной ею топологии — т. е. топологич. инвариантами?

3) Как много, с точностью до изоморфизма, существует различных «внешних» структур данного типа, порождающих заданную топологию? Прежде всего важно выяснить, есть ли хоть одна такая структура, и особенное значение имеет случай, когда такая структура единственна (с точностью до изоморфизма),— тогда вся она (а следовательно, и все ее характеристики) оказываются (топологич.) инвариантом рассматриваемой Т.

Эти общие вопросы приобретают важное конкретное содержание, напр., в *топологии многообразий*.

Аналогичный в принципе характер имеют вопросы о соотношениях между метрич. и топологич. инвариантами и о существовании метрики, задающей данную Т. (проблема метризации).

В случае более общих пространств возникает вопрос о соотношении между инвариантами равномерной и порожденной ею топологич. структуры. Исследование равномерных инвариантов и их соотношений с топологич. инвариантами составляют предмет равномерной Т. (см. *Равномерное пространство*). Другая тесно

связанная с Т. структура — структура близости. Понятие *близости пространства* основано на отношении близости между подмножествами пространства — в отличие от понятия топологич. пространства.

В зависимости от широты класса исследуемых топологич. пространств меняется характер постановки основной задачи Т. Так, ограничиваясь узким классом пространств, ставят задачу различить их между собой в терминах топологич. инвариантов с точностью до гомеоморфизмов. Задача эта выглядит вполне естественной, напр., в рамках класса топологич. многообразий — но даже и здесь она оказывается чрезвычайно трудной и заведомо алгоритмически неразрешимой. Сложность задачи различения многообразий с точностью до гомеоморфизма приводит к необходимости рассмотреть более широкое, чем гомеоморфность, отношение гомотопич. эквивалентности топологич. пространств. В основе этого отношения лежит понятие *гомотопии* одного непрерывного отображения в другое, имеющее чисто теоретико-множественную природу.

Хотя методы алгебраич. Т. играют исключительно важную роль в топологич. исследовании, существенную роль здесь исполняют и чисто теоретико-множественные конструкции. Это связано с тем, напр., что отношение гомотопич. эквивалентности, примененное к многообразиям, выводит за пределы класса многообразий. При этом получаются более простые топологич. объекты, рассматривать к-рые в технич. отношении весьма полезно. Методы теории гомотопий требуют осуществления теоретико-множественных конструкций типа различных «выметаний», приклеивания одного топологич. пространства к другому вдоль произвольного непрерывного отображения и т. д. Это приводит к понятиям *клеточного разбиения* и *клеточного пространства*; последние и составляют, по-видимому, тот максимально широкий класс пространств, к-рый включает все дифференцируемые многообразия, полиэдры и допускает достаточно полное исследование методами алгебраич. Т.

Для более широких классов пространств — таких, как класс бикомпактов, класс всех паракомпактов или класс всех метризуемых пространств,— ставить проблему различения пространств с точностью до гомеоморфизма посредством обозримой системы вычислимых топологич. инвариантов не представляется возможным ввиду ее интуитивной неразрешимости. На передний план в качестве основной задачи Т. выдвигается здесь задача сравнения не отдельных топологич. пространств, а целых классов топологич. пространств, к-рые, особенно при аксиоматич. подходе, обычно соответствуют отдельным топологич. инвариантам или их комбинациям. При таком подходе основной вопрос Т. превращается в задачу систематич. сравнения топологич. инвариантов. На этом пути удается построить систематическую и развитую классификацию топологич. пространств.

Два метода выступают на первый план в решении этой задачи. Во-первых, метод взаимной классификации пространств и отображений. Речь идет об исследовании поведения топологич. инвариантов при разного типа непрерывных отображениях и о том, когда топологич. пространство из одного данного класса можно представить как образ пространства из другого данного класса при непрерывном отображении того или иного типа. Эта задача тем более важна и естественна, что часто топологич. пространства бывают даны уже будучи связанными нек-рыми непрерывными отображениями — напр., когда новое пространство строится как факторпространство нек-рого исходного топологич. пространства.

Второй метод сравнения заключается в применении кардинальных, или кардинальнозначных, топологич.

инвариантов, наз. также *мощностными характеристиками*. Значениями кардинальных инвариантов являются бесконечные кардинальные числа, что дает возможность их сравнивать, пользуясь операциями и законами кардинальных чисел. Это направление Т. выходит на глубокие положения теории множеств — такие, как аксиома Мартина, континуум-гипотеза. На языке кардинальных инвариантов формулируется гипотеза Суслина, неразрешимость к-рой в рамках системы аксиом Цермело — Френкеля теории множеств доказана. Вот характерное рассуждение с кардинальными инвариантами. Для метризуемых пространств плотность и вес совпадают. Значит, если вес и плотность для данного пространства различимы, то оно не метризуемо. В теории кардинальных инвариантов получено много тонких и неожиданных результатов.

Несмотря на отмеченную выше специфику, к-рую приобретают топологич. задачи и методы в зависимости от того, какой класс топологич. пространств выбран для изучения, ряд основных задач, определяющих развитие Т., формулируется общим образом для всех ее разделов и решается на основе нек-рых общих принципов и методов.

К этим задачам относятся, в частности, следующие: 1) Построение системы топологич. инвариантов на основе Т. или внешних структур, ее порождающих. В этом случае возникает задача нахождения этих инвариантов для отдельных пространств и классов пространств.

2) Исследование поведения топологич. инвариантов при основных операциях над топологич. пространствами, в частности при переходе к подпространству.

3) Исследование поведения топологич. инвариантов при разного типа непрерывных отображениях (в частности, вложениях).

4) Исследование соотношений между топологич. свойствами пространств и их дополнений в нек-ром объемлющем пространстве. Многие результаты геометрич. Т., теоремы двойственности, результаты, связывающие свойства топологич. пространств и их наростов в бикомпактных хаусдорфовых расширениях хорошо иллюстрируют это направление.

К числу общих методов, применяемых в решении большинства задач Т. во всех ее разделах, относятся, в частности, следующие:

1) Метод *покрытий*. Этот метод дает результат при решении проблемы метризации, при определении и исследовании паракомпактных пространств, при определении и исследовании основных объектов комбинаторной Т.— симплициальных и клеточных комплексов. На методе покрытий, в частности на понятии нерва покрытия, основана аппроксимация топологич. пространств полиэдрами. На основе открытых покрытий и отвечающих им разбиений единицы доказываются теоремы о погружениях многообразий в евклидово пространство.

2) Метод *функторов*. Он заключается в сопоставлении топологич. пространствам алгебраич. и алгебро-топологич. объектов, обладающих правильным — функториальным — поведением и допускающих вычисление. *Гомологий группа*, *когомологий кольцо*, *К-функтор*, связанный с понятием векторного расслоения над топологич. пространством, обобщающим понятие касательного многообразия,— важные примеры функторов. На применении таких функторов основан алгебраич. метод в Т.

3) Метод *спектров*. Суть его заключается в представлении более сложно устроенных пространств в качестве предела обратного спектра из пространств более простых (напр., полиэдров), при этом изучается связь между топологич. инвариантами элементов спектра и

предельного пространства. В понятии спектра реализуется определенным образом идея топологич. аппроксимации топологич. пространства более простыми или более удобными для изучения объектами.

На этом методе основано построение теории гомологий для широких классов пространств, построение примеров сложных топологич. пространств с заданными комбинациями свойств.

4) Метод *непрерывных отображений*: вложения, отображения пространств из одного класса на пространства из другого класса, исследование поведения топологич. инвариантов при этом составляют основу этого метода. Важную роль здесь играет решение задачи о непрерывном продолжении отображения, заданного на части пространства, на все пространство. Решение задачи продолжения существенно зависит от гомотопич. свойств пространств, и в теории гомотопии она занимает центральное место. С этой задачей связаны, в частности, теория *препятствий*, теория *ретрактов*.

5) *Аксиоматический метод*. Он дает наиболее широкие и естественные рамки для выяснения взаимосоотношений между топологич. инвариантами и для определения новых топологич. инвариантов и классов топологич. пространств «внутри» самой топологии в соответствии с необходимостью сделать эту классификацию систематической и гармоничной. При этом фиксируют топологич. инвариант, определяя его в терминах самой Т., и отвлекаются обычно от конкретных способов, к-рыми будут заданы пространства рассматриваемого класса, и от того, как вычислять этот топологич. инвариант. Так возникает класс бикомпактов, класс всех континуумов и т. д.

Применения Т. обладают двойной спецификой — определяемой тем, какой раздел Т. применяется и где он применяется. Очевидно, применения Т. возможны всюду, где присутствует идея непрерывности.

Несмотря на чрезвычайное разнообразие конкретных приложений Т. в конкретных ситуациях, являющееся следствием высказанных выше положений, можно указать ряд общих принципов и концепций, на к-рых эти применения более всего основаны. Так, теория многообразий имеет самые прямые применения в механике и теории дифференциальных уравнений; теория гомологии вышла из рамок топологии и развилась в важную самостоятельную дисциплину — *гомологическую алгебру*, получила приложения в алгебраич. геометрии, теории банаховых алгебр и др. Алгебраич. трактовку и связанные с этим применения получили понятия: многообразия; K-функтора, вышедшего из дифференциальной топологии; теория *кобордизмов*, имеющая важное значение в развитии дифференциальной Т. и получившая применения в алгебраич. геометрии (*Римана — Роха теорема*), в теории эллиптич. операторов (*индекса формулы*) и др. Важны применения степени отображения — в частности, на нем основано доказательство т. н. основной теоремы алгебры многочленов. Перенесение гомологич. и гомотопич. понятий и методов на бесконечномерные функциональные пространства оказало существенное влияние на анализ — в частности, в связи с теоремами существования решений для дифференциальных уравнений с частными производными. Для многих применений Т. важны разнообразные теоремы о неподвижных точках непрерывных отображений. Эти теоремы имеют смешанную теоретико-множественную и алгебраич. природу; применения их носят качественный характер; они направлены не на вычисление тех или иных объектов, а на доказательство их существования; то же назначение имеет ряд важных принципов, основанных на соединении топологич. и линейной структур. Среди них — теорема Крейна — Мильмана о крайних точках выпуклого компакта, теорема Банаха — Штейнхауза, теорема о зам-

кнутом графике, теорема Алаоглу о компактности шара в слабой топологии, теорема Эберлейна — Шмульяна о компактах, лежащих в банаховых пространствах, в слабой топологии и др.

Есть ряд топологич. принципов и концепций «чисто» теоретико-множественного характера. Среди них: понятие бикомпактности (компактности); теорема Тихонова о бикомпактности топологич. произведения бикомпактных пространств, теорема о замкнутости всякого бикомпактного множества в любом объемлющем хаусдорфовом пространстве, характеризующая бикомпактность множества как его абсолютную замкнутость, теорема Стоуна — Вейерштрасса и др. Полнота и связанные с ней принципы: теорема о неподвижной точке сжатого отображения, теорема Бэра о непустоте пересечения счетного семейства всюду плотных открытых множеств и др. Топологическая размерность, наряду с понятиями компактности и полноты, несомненно относится к числу важных общематематич. понятий.

В ряде конструкций функционального анализа, теории потенциала и др. существенную роль играют понятия расширения топологич. пространства и границы (алгебра функций, граница Шилова, граница Мартина, граница Шоке).

Природа топологич. динамики требует довольно широкого привлечения теоретико-множественных понятий и конструкций Т. Только это дает естественные рамки для обсуждения и анализа таких понятий, как предельное множество траектории, почти периодичность, минимальное множество, устойчивость по Лагранжу, устойчивость по Пуассону, неблуждающая точка и т. д. Особенно важную роль играет здесь снова компактность.

Понятия и методы Т., особенно теоретико-множественные, естественно входят в топологич. алгебру. Применяя топологич. методы, здесь следует иметь в виду, что в присутствии согласованной с Т. той или иной алгебраич. структурой соотношения между топологич. инвариантами сильно меняются: многие известные соотношения упрощаются и появляются новые глубокие соотношения.

Теоретико-множественные конструкции Т. имеют много важных применений в математич. логике.

Лит.: [1] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.—Л., 1947; [2] Сулливан Д., Геометрическая топология, пер. с англ., М., 1975; [3] Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, пер. с англ., М., 1964; [4] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [5] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [6] Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ., М., 1968; [7] Новиков С. П., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 5, с. 217—32; [8] Александров П. С., там же, 1964, т. 19, в. 6, с. 3—46; [9] Александров П. С., Федорчук В. В., там же, 1978, т. 33, в. 3, с. 3—48; [10] Куратовский К., Топология, т. 1—2, пер. с англ., М., 1966—69; [11] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности..., М., 1973; [12] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [13] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [14] Архангельский А. В., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 5, с. 29—84; [15] Топология, БСЭ-3, т. 26, с. 86—92; [16] Геометрия, БСЭ-3, т. 6, с. 307—13; [17] Сибирский К. С., Введение в топологическую динамику, Кишинев, 1970.

А. В. Архангельский.

ТОПОЛОГИЯ ВЛОЖЕНИЙ, топологические вложения,— раздел топологии, в к-ром изучаются локальные топологич. свойства расположений замкнутых подмножеств евклидова пространства или многообразия.

Теория Т. в. возникла в работах А.Шёнфлиса (A.Schoenflies), Л. Антуана (L. Antoine), П. С. Урысона и Дж. Александера (J. Alexander). Вложения в E^3 были изучены в 50-х гг. В частности, было доказано, что любое Т. в. поверхности в E^3 аппроксимируется полиэдральным вложением. Систематическое исследование Т. в. в E^n при $n>3$ началось после решения *Шёнфлиса гипотезы*. В основном оно происходило в духе накопления

фактов и решения большого числа задач частного характера. Были также выяснены связи методов теории Т. в. и геометрич. *топологии многообразий*. Примерно к сер. 70-х гг. теория Т. в. сформировалась в самостоятельное направление со своей тематикой, методами и задачами. С ее помощью был решен ряд принципиальных задач геометрич. топологии многообразий: доказано существование некомбинаторной триангуляции сфер размерности $\geqslant 5$, получена характеризация топологич. многообразий и классифицированы односвязные четырехмерные многообразия.

Т о п о л о г и ч е с к и м в л о ж е н и е м пространства X (как правило, многообразия, полиэдра или компакта) в евклидово пространство E^n наз. произвольный гомеоморфизм $f: X \to E^n$ пространства X на подмножество $f(X) \subset E^n$. Иногда под Т. в. понимают просто включение $X \subset E^n$. Два вложения $f_1, f_2 : X \to E^n$ наз. э к в и в а л е н т н ы м и, если существует такой гомеоморфизм $h : E^n \to E^n$, что $h \circ f_1 = f_2$. Если h является изотопией, то вложения наз. и з о т о п н ы м и.

Простейшие примеры неэквивалентных вложений получаются с помощью узлов (см. *Узлов теория*), гораздо труднее построить неэквивалентные вложения нульмерных компактов или отрезков в E^3 (см. *Дикий узел*). Канторово множество на прямолинейном отрезке, лежащем в E^3, и дикий нульмерный компакт Антуана в E^3 неэквивалентны.

Тот факт, что основные задачи теории Т. в. сконцентрированы на локальных свойствах, объясняется существованием т. н. диких вложений, для к-рых нарушается регулярность локальной структуры. Исследование глобальных свойств ручных (локально плоских) вложений, как правило, в Т. в. не включается.

Следующие четыре теоремы можно считать основными в теории Т. в.

Т е о р е м а 1 (х а р а к т е р и з а ц и и). Вложение $X \subset E^n$ является ручным тогда и только тогда, когда дополнение $Y = E^n \setminus X$ обладает свойством $1\text{—}ULC$ (для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что каждое δ-отображение $S^1 \to Y$ ε-гомотопно нулю в Y).

Т е о р е м а 2 (о б л и з к и х в л о ж е н и я х). Любые два близких ручных вложения изотопны посредством малой изотопии.

Т е о р е м а 3 (о в л о ж е н и я х в т р и в и а л ь н о й о б л а с т и р а з м е р н о с т е й). Если $2 \dim X + 2 \leqslant n$, то любые два ручных вложения изотопны.

Т е о р е м а 4 (о б а п п р о к с и м а ц и и). Любое вложение аппроксимируется ручным.

Эти теоремы, за исключением теоремы 3, доказаны лишь при определенных размерностных ограничениях, различных для многообразий, полиэдров и компактов.

Вложение многообразия X в E^n наз. р у ч н ы м (или л о к а л ь н о п л о с к и м), если для любой точки $x \in X$ существует такая окрестность $U(x)$ в E^n, что пара $(U(x), U(x) \cap X)$ г о м е о м о р ф н а с т а н д а р т н о й п а р е (E^n, E^r) при гомеоморфизме, переводящем точку в начало координат.

Теорема 1 справедлива в этом случае при $n \neq 4$ и $r \neq n-2$ (при $r = n-2$ и $n \geqslant 5$ ответ также известен: надо чтобы дополнение $Y = E^n \setminus X$ было, грубо говоря, локально гомотопически эквивалентно окружности).

Теорема 2 верна при $r \neq n-2$ и $n \geqslant 5$ (прибавление малого узелка показывает, что при $r = n-2$ теорема 2 заведомо неверна; условия изотопности близких вложений при $r = n-2$ известны). Кроме того, для случая, когда X является сферой S^r, доказано, что при $r \neq n-2$ любое ручное вложение $S^r \to E^n$ изотопно стандартному (при $r = n-2$ и $n \neq 4$ для этого необходимо и достаточно, чтобы дополнение $E^n \setminus S^{n-2}$ было гомотопически эквивалентно окружности).

Теорема 4 верна при $r \neq n-2$ и $n \neq 4$ (причем при

$r=n-2$ и $n\geqslant 6$ эта теорема — как показывают соответствующие контрпримеры — заведомо неверна).

Вложение полиэдра X в E^n наз. ручным, если оно эквивалентно кусочно линейному вложению. В этом случае теоремы 1,2 и 4 верны при $\dim X\leqslant n-3$.

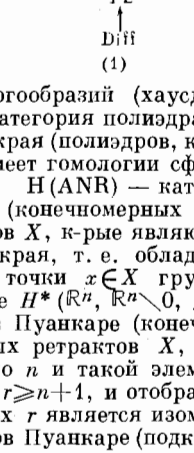
Вложение r-мерного компакта X в E^n наз. ручным, если изотопией его можно снять с любого прямолинейного полиэдра $P\subset E^n$ размерности $\leqslant n-r-1$. В этом случае теорема 1 верна при $r\leqslant n-3$ и $n\neq 4$, теорема 2, вообще говоря, неверна (при $2r+2>n$), а теорема 4 верна для любого r.

Лит.: [1] Келдыш Л. В., Топологические вложения в евклидово пространство, М., 1966; [2] Чернавский А. В., «Докл. АН СССР», 1968, т. 181, № 2, с. 290—93; [3] его же, «Матем. сб.», 1973, т. 91, № 2, с. 279—86; [4] Daverman R., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1973, v. 79, № 2, p. 410—13; [5] Chapman T., «Topology», 1979, v. 18, p. 339—48; [6] Ancel F., Cannon J., «Ann. Math.», 1979, v. 109, p. 61—86; [7] Bryant J., Seebeck C., «Quart. J. Math.», 1968, v. 19, № 75, p. 257—74; [8] Edwards R., «Gen. Top. and Appl.», 1975, v. 5, № 2, p. 147—80; [9] Miller R., «Ann. Math.», 1972, v. 95, № 3, p. 406—16; [10] Bryant J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1972, v. 170, p. 85—95; [11] Edwards R., в кн.: Geometric topology, v. 438, B.— [a. o.], 1975, p. 195—211; [12] Штанько М. А., «Матем. сб.», 1973, т. 90, № 4, с. 625—36.

М. А. Штанько.

ТОПОЛОГИЯ МНОГООБРАЗИЙ — часть теории многообразий, посвященная в основном исследованию взаимоотношений между различными их типами.

Главнейшие типы конечномерных многообразий и взаимоотношения между ними можно изобразить схемой (1), в которой Diff — категория дифференцируемых (гладких) многообразий; PL — категория кусочно линейных (комбинаторных) многообразий; TRI — категория топологических многообразий, являющихся полиэдрами; Handle — категория топологических многообразий, допускающих топологическое разложение на ручки; Lip — категория липшицевых многообразий (с липшицевыми отображениями перехода между локальными картами);



(1)

TOP — категория топологич. многообразий (хаусдорфовых и со счетной базой); H — категория полиэдральных гомологич. многообразий без края (полиэдров, край звезды каждой вершины к-рых имеет гомологии сферы соответствующей размерности); H(ANR) — категория обобщенных многообразий (конечномерных абсолютных окрестностных ретрактов X, к-рые являются гомологич. многообразиями без края, т. е. обладают тем свойством, что для любой точки $x\in X$ группа $H^*(X, X\setminus x;\ \mathbb{Z})$ изоморфна группе $H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus 0,\ \mathbb{Z})$); P(ANR) — категория пространств Пуанкаре (конечномерных абсолютных окрестностных ретрактов X, для которых существует такое число n и такой элемент $\mu\in H_n(X)$, что $H_r(X,\ \mathbb{Z})=0$ при $r\geqslant n+1$, и отображение $\cap\mu H^r(X)\to H_{n-r}(X)$ при всех r является изоморфизмом); P — категория полиэдров Пуанкаре (подкатегория предыдущей категории, состоящая из полиэдров).

Стрелки схемы (1), кроме трех нижних и стрелок H→TOP→P, изображают функторы структуры забывания. Стрелка Diff→PL изображает теорему Уайтхеда о триангулируемости гладких многообразий. В размерностях <8 эта стрелка обратима (любое PL-многообразие сглаживаемо), но в размерностях $\geqslant 8$ существуют несглаживаемые PL-многообразия и даже PL-многообразия, гомотопически неэквивалентные никакому гладкому многообразию. Вложение PL⊂TRI также необратимо в том же сильном смысле (существуют полиэдральные многообразия размерности $\geqslant 5$, гомотопически неэквивалентные никакому PL-многообразию). При этом уже для сферы S^n, $n\geqslant 5$, существуют триангуляции, в к-рых она не является PL-многообразием.

Стрелка PL→Handle изображает тот факт, что любое PL-многообразие допускает разложение на ручки. Стрелка PL→Lip изображает теорему о существовании на произвольном PL-многообразии линпицевой структуры.

Стрелка Handle→TOP обратима при $n\neq 4$ и необратима при $n=4$ (любое топологическое многообразие размерности $n\neq 4$ допускает разложение на ручки, и существуют четырехмерные топологич. многообразия, для к-рых это не так).

Аналогично, при $n\neq 4$ обратима стрелка Lip→TOP (и притом единственным образом).

Вопрос об обратимости стрелки TRI→TOP составляет классическую нерешенную задачу о триангулируемости произвольных топологич. многообразий.

Стрелка H→P необратима в сильном смысле (существуют полиэдры Пуанкаре, гомотопически неэквивалентные никакому гомологич. многообразию).

Стрелка H→TOP изображает теорему о гомотопической эквивалентности любого гомологич. многообразия размерности $\geqslant 5$ топологич. многообразию.

Стрелка TOP→P изображает теорему Кёрби — Зибенмана о гомотопич. эквивалентности любого топологич. многообразия полиэдру.

Вложение TOP$\subset$H(ANR) изображает тот факт, что любое топологич. многообразие является ANR. Обобщенное многообразие $X\in$H(ANR) размерности $\geqslant 5$ тогда и только тогда принадлежит образу этого вложения, когда X обладает свойством р а з д в и ж к и д и с к о в (для любого $\varepsilon>0$ и любых отображений $f_1, f_2 : B^2\to X$, где B^2 — двумерный диск, существуют такие отображения $g_1, g_2 : B^2\to X$, что $\rho(f_i, g_i)<\varepsilon$ и $g_1(B^2)\bigcap g_2(B^2)=\varnothing$).

Аналогичный вопрос для стрелок Diff→PL→TOP→P решается с помощью теории стационарных расслоений (соответственно векторных, кусочно линейных, топологических и сферических), т. е. на основе рассмотрения гомотопических классов отображений многообразия X в соответствующие классифицирующие пространства BO, BPL, BTOP, BG.

Существуют сквозные канонич. отображения

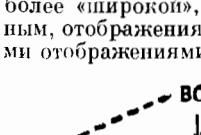
$$\mathrm{BO}\to\mathrm{BPL}\to\mathrm{BTOP}\to\mathrm{BG}, \qquad (2)$$

гомотопич. слои к-рых и их композиций обозначаются соответственно символами

$$\mathrm{PL/O},\ \mathrm{TOP/O},\ \mathrm{G/O},\ \mathrm{TOP/PL},\ \mathrm{G/PL},\ \mathrm{G/TOP}.$$

Для каждого многообразия X любой из категорий Diff, PL, TOP, P существует нормальное стационарное расслоение, т. е. канонич. отображение τ_X многообразия X в соответствующее классифицирующее пространство.

При переходе от «узкой» категории многообразий к более «широкой», напр. от гладких к кусочно линейным, отображения τ_X компонируются с соответствующими отображениями (2). Поэтому, напр., для PL-многообразия X только тогда существует PL-гомеоморфное ему гладкое многообразие (как говорят, многообразие X сглаживаемо), когда разрешима задача поднятия (3), гомотопич. препятствия к разрешимости к-рой лежат в группах $H^{i+1}(X, \pi_i(\mathrm{PL/O}))$. При этом оказывается, что разрешимость задачи (3) не только необходима, но и достаточна для сглаживания PL-многообразия X (и все неэквивалентные сглаживания находятся в биективном соответствии с множеством $[X, \mathrm{PL/O}]$ гомотопич. классов отображений $X\to\mathrm{PL/O}$).



(3)

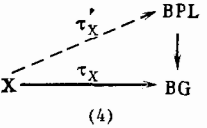
То же самое (с заменой PL/O на TOP/O) справедливо и для сглаживания топологич. многообразий X размерности $\geqslant 5$, а также (с заменой PL/O на TOP/PL) — для их PL-триангулирований.

Гомотопическая группа $\Gamma_k = \pi_k(\mathrm{PL}/\mathrm{O})$ изоморфна группе классов ориентированно диффеоморфных гладких многообразий, получающихся склеиванием краев двух k-мерных шаров. Эта группа конечна для всех k (а при $k \leqslant 6$ даже тривиальна). Поэтому число неэквивалентных сглаживаний произвольного PL-многообразия X конечно и оценивается сверху числом

$$ord \sum_k H^k(X,\ \pi_k(\mathrm{TOP}/\mathrm{O})).$$

Гомотопич. группа $\pi_k(\mathrm{TOP}/\mathrm{PL})$ равна нулю, за исключением группы $\pi_3(\mathrm{TOP}/\mathrm{PL}) = \mathbb{Z}/2$. Поэтому существование PL-триангуляции топологич. многообразия X размерности $\geqslant 5$ определяется равенством нулю нек-рого класса когомологий $\Delta(X) \in H^4(X,\ \mathbb{Z}/2)$, а множество неэквивалентных PL-триангуляций многообразия X находится в биективном соответствии с группой $H^3(X,\ \mathbb{Z}/2)$.

Группа $\pi_k(\mathrm{TOP}/\mathrm{O})$ совпадает с группой Γ_k при $k \neq 3$ и отличается от Γ_k при $k = 3$ на группу $\mathbb{Z}/2$. Число неэквивалентных сглаживаний топологического многообразия X размерности $\geqslant 5$ конечно и оценивается сверху числом $ord\ \Sigma_k H^k(X,\ \pi_k(\mathrm{TOP}/\mathrm{O}))$.



(4)

Аналогичные результаты для полиэдров Пуанкаре места не имеют. Конечно, существование поднятия, напр., в диаграмме (4) является необходимым условием для существования PL-многообразия, гомотопически эквивалентного полиэдру Пуанкаре X, но, вообще говоря, оно обеспечивает (при $n \geqslant 5$) лишь существование такого PL-многообразия M и такого отображения $f : M \to X$ степени 1, что $\tau_M = f \circ \tau'_X$. Превращение этого многообразия в многообразие, гомотопически эквивалентное X, требует техники хирургии (перестроек), первоначально развитой С. П. Новиковым для случая, когда X является односвязным гладким многообразием размерности $\geqslant 5$. Для односвязного X эта техника обобщается на рассматриваемый случай, так что для односвязного полиэдра Пуанкаре X гомотопически эквивалентное ему PL-многообразие размерности $\geqslant 5$ существует тогда и только тогда, когда существует поднятие (4). В задаче существования топологич. или гладких многообразий, гомотопически эквивалентных (даже односвязному) полиэдру Пуанкаре, ситуация оказывается значительно более сложной.

Лит.: [1] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30, №. 1, с. 207—46; [2] Madsen I., Milgram R., «Ann. Math. Stud.», 1979, № 92; [3] Latour F., «Sem. Bourbaki», № 515, 1979, t. 710, p. 169—86; [4] Freedman M., «J. Diff. Geom.», 1982, v. 17, p. 357—453; [5] Quinn F., там же, p. 503—21; [6] Мандельбаум Р., Четырехмерная топология, пер. с англ., М., 1981; [7] Lashof R., «Proc. Symp. in pure Math.», 1971, v. 22, p. 131—64; [8] Edwards R., «Notices Amer. Math. Soc.», 1977, v. 24, № 7, p. A 649; [9] Quinn F., «Abstracts Amer. Math. Soc.», 1980, v. 1, № 7, p. 613—614; [10] Cannon J., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 84, № 5, p. 832—66; [11] Spivak M., «Topology», 1967, v. 6, p. 77—101.

М. А. Штанько.

ТОПОС — категория, эквивалентная категории пучков множеств на нек-рой *топологизированной категории*. Другое определение: Т. — это такая категория C, что любой пучок в канонич. топологии на C представим. Для объектов Т. (являющихся пучками множеств) определены обычные конструкции в категории множеств. По этой причине Т. могут служить нестандартными моделями теории множеств. При этом удобнее пользоваться более общим определением: элементарный топос — это категория C с произведениями и финальным объектом 1, контравариантным функтором $\mathcal{P} : C \to C$ (при этом $\mathcal{P}(X)$ для $X \in C$ понимается как множество частей X) и мономорфизмами $\Sigma_X \to X \times \mathcal{P}(X)$, где Σ — график отношения принадлежности. Множество $\mathcal{P}(1)$ служит естественной областью значений логич. высказываний в топосе C.

Лит.: Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, t. 1—3, B. — [e. a.], 1972—73; [2] Cohomologie étale, B.— [e. a.], 1977; [3] Cartier P., в кн.: Séminaire Bourbaki, v. 1977/1978, B.— [e. a.], 1979.
В. И. Данилов.

ТОР — тело, полученное от вращения замкнутого круга вокруг оси, лежащей в плоскости этого круга и его не пересекающей. Центр круга описывает окружность, наз. осевой окружностью Т., ее центр наз. центром Т. Плоскость осевой окружности Т. наз. экваториальной плоскостью Т., а лежащие на Т. границы кругов, получающихся из данного круга его вращением,— меридианами Т.

Поверхность Т., радиус-вектор к-рой в декартовых координатах евклидова пространства E^3 имеет вид

$$r = a \sin uk + l\,(1 + \varepsilon \cos u)\,(i \cos v + j \sin v)$$

(здесь (u, v) — внутренние координаты, a — радиус вращающейся окружности, l — радиус осевой окружности, $\varepsilon = a/l$ — эксцентриситет), часто также наз. тором. Ее линейный элемент

$$ds^2 = a^2 du^2 + l^2\,(1 + \varepsilon \cos u)^2\, dv^2,$$

а кривизна $K = \dfrac{\cos u}{al\,(1 + \varepsilon \cos u)}$. Т.— частный случай *вращения поверхности* и *каналовой поверхности*.

С топологич. точки зрения Т.— произведение двух окружностей и потому Т.— двумерное замкнутое многообразие рода нуль. Если это произведение метрическое, то его можно реализовать в E^4 или в эллиптич. пространстве $\mathcal{E}^3$ в виде поверхности Клиффорда; ее уравнением в E^4, напр., будет

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2,\ x_3^2 + x_4^2 = b^2.$$

Естественное обобщение Т.— многомерный тор — топологическое произведение нескольких экземпляров окружности S, т. е. многообразия всех комплексных чисел, равных по модулю единице. Естественная гладкость на S определяет на Т. структуру гладкого многообразия, а естественная мультипликативная структура на S индуцирует на Т. структуру связной компактной коммутативной вещественной группы Ли. Последние группы играют важную роль в теории групп Ли, и их также называют торами (см. *Ли компактная группа*, *Максимальный тор*, *Картана подгруппа*). Четномерный Т. допускает комплексную структуру; при выполнении нек-рых условий такая структура превращает Т. в *абелево многообразие* (см. также *Комплексный тор*). В структурной теории алгебраич. групп у Т., как у вещественной группы Ли, имеется важный аналог — *алгебраический тор* (см. также *Алгебраическая группа*, *Линейная алгебраическая группа*). Алгебраич. тор сам не является Т. (в случае основного поля комплексных чисел), но обладает подгруппой, к-рая является Т. и на к-рую он стягивается (как топологич. пространство). Точнее, алгебраич. тор, как группа Ли, изоморфен произведению нек-рого Т. и нескольких экземпляров мультипликативной группы положительных действительных чисел. *М. И. Войцеховский, В. Л. Попов.*

ТОРЕЛЛИ ТЕОРЕМА обобщения — теорема, утверждающая, что структура Ходжа (матрица периодов) в когомологиях $H^*(X, \mathbb{C})$ алгебраического или кэлерова многообразия X полностью характеризует поляризованное многообразие X.

Классич. Т. т. относится к случаю кривых (см. [1], [2]) и утверждает, что кривая определяется с точностью до изоморфизма своими периодами. Пусть X — кривая рода g, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ — базис $H_1(X, \mathbb{Z})$, а $\omega_1, \ldots, \omega_g \in H^0(X, \Omega^1_X) = H^{1,0} \subset H^1(X, \mathbb{C})$ — базис *абелевых дифференциалов*, $(g \times 2g)$-матрица $\Omega = \|\pi_{ij}\|$, где $\pi_{ij} = \int_{\gamma_j} \omega_i$,— матрица периодов. Пересечение

циклов $\gamma_i\gamma_j=q_{ij}$ определяет билинейную кососимметрич. форму Q в $H_1(X, \mathbb{Z})$. Пусть X и X' — две кривые. Тогда если можно выбрать базисы γ и ω, относительно к-рых матрицы периодов Ω и матрицы пересечений Q кривых совпадают, то X и X' изоморфны. Другими словами, если канонически поляризованные якобианы кривых X и X' изоморфны, то и $X\simeq X'$.

Пусть X — проективное многообразие (или, более общо, компактное кэлерово многообразие), $D=D_k$ — многообразие Гриффитса, связанное с примитивными когомологиями $H^k(X, \mathbb{C})_0$ (см. *Отображение периодов*). В D лежат матрицы периодов примитивных k-форм на всех многообразиях, гомеоморфных X. Периоды зависят от выбора изоморфизма $H^k(X, \mathbb{C})_0$ в фиксированное пространство H. Имеется естественно определенная группа Γ аналитич. автоморфизмов многообразия D такая, что $M=D/\Gamma$ — аналитич. пространство и X определяет единственную точку $\Phi(X)\in M$. При этом M наз. модулярным пространством или пространством модулей структур Ходжа.

Глобальная проблема Торелли состоит в выяснении вопроса о том, когда $\Phi(X)$ однозначно определяет X с точностью до изоморфизма. В случае положительного решения проблемы соответствующее утверждение наз. (обобщенной) Т. т. Теорема Торелли справедлива очевидным образом для абелевых многообразий в случае 1-форм и в случае 2-форм (см. [3]). По существу, единственный нетривиальный случай решения глобальной проблемы Торелли (1984) — случай *К3-поверхности*. Т. т. обобщена также на случай кэлеровых К3-поверхностей.

Локальная проблема Торелли заключается в разрешении вопроса о том, когда структуры Ходжа на когомологиях разделяют точки в локальном пространстве модулей (пространстве Куранисси) для многообразия X. Пусть $\mathfrak{X}\xrightarrow{\pi}B$ — семейство поляризованных алгебраич. многообразий, $\pi^{-1}(0)=X$, а $M=D/\Gamma$ — многообразие Гриффитса, связанное с периодами примитивных k-форм на X. Отображение периодов Φ: $B\to M$ сопоставляет $t\in B$ матрицу периодов k-форм на $\pi^{-1}(t)$. Это отображение голоморфно; вычислено соответствующее касательное отображение $d\Phi$ (см. [3]). Локальная проблема Торелли эквивалентна вопросу о том, когда $d\Phi$ является вложением. Рассматривая отображение, двойственное к $d\Phi$, получают котомологич. критерий справедливости локальной Т. т.: если отображение

$$\bigoplus_{0\leqslant r\leqslant[(k-1)/2]} H^{n-r-1}(X,\ \Omega^{n-k+r+1})\otimes$$
$$\otimes H^r(X,\ \Omega^{k-r})\xrightarrow{\mu} H^{n-1}(X,\ \Omega^1\otimes\Omega^n)$$

является эпиморфизмом, то периоды k-форм дают локальные модули для X. Локальная Т. т. для кривых эквивалентна тому, что квадратичные дифференциалы порождаются абелевыми дифференциалами. Теорема Нётера утверждает, что это так, если $g=2$ или $g>2$ и X негиперэллиптическая. Локальная Т. т., очевидно, справедлива в случае $k=n$, если канонич. класс тривиален. К таким многообразиям относятся абелевы многообразия, гиперповерхности степени $n+2$ в $\mathbb{P}^{n+1}$, К3-поверхности. Справедливость локальной Т. т. установлена для различных классов многомерных многообразий. Для неособых гиперповерхностей степени d в $\mathbb{P}^{n+1}$ доказано, что отображение периодов является вложением в общей точке за исключением случая $n=2$, $d=3$ и, возможно, случаев: d делит $n+2$, $d=4$ и $n=4m$ или $d=6$ и $n=6m+1$ (см. [4]).

Лит.: [1] Torelli R., «Rend. Accad. Lincei V», 1913, v. 22, p. 98—103; [2] Weil A., «Nachr. Akad. Wiss. Göttingen», 1957, S. 33—53; [3] Griffiths Ph., «Amer. J. Math.», 1968, v. 90, p. 568—626, 805—65; [4] Donagi R., «Compos. math.», 1983, v. 50, p. 325—53.

Вал. С. Куликов.

ТОРИЧЕСКИЙ УЗЕЛ типа (p, q) — кривая в $\mathbb{R}^3$, к-рая в цилиндрич. координатах r, z, θ задается уравнениями

$$r=2+\cos t,\ z=\sin t,\ \theta=pt/q,$$

где $t\in[0, 2\pi q]$. Здесь p и q — взаимно простые натуральные числа. Т. у. лежит на поверхности незаузленного тора $(r-2)^2+z^2=1$, пересекая меридианы тора в p точках, а параллели — в q точках. Т. у. типов $(p, 1)$ и $(1, q)$ тривиальны. Простейший нетривиальный Т. у.— трилистник (см. рис. 1), имеющий тип $(2, 3)$. Группа Т. у. типа (p, q) имеет копредставление $|a, b : a^p=b^q|$, а многочлен Александера равен

$$(t^{pq}-1)(t-1)(t^p-1)^{-1}(t^q-1)^{-1}.$$

Все Т. у. являются *Нейвирта узлами*. Род Т. у. равен $(p-1)(q-1)/2$.

Другая конструкция Т. у. использует особенность в нуле алгебраич. гиперповерхности

$$V=\{(z_1, z_2)\in\mathbb{C}^2,\ z_1^p+z_2^q=0\}.$$

Если p и q взаимно просты, то пересечение V с достаточно малой сферой $S^3\subset\mathbb{C}^2$ является узлом в S^3, эквивалентным Т. у. типа (p, q). В случае, когда p и q не взаимно просты, это пересечение также лежит на незаузленном торе $T^2\subset S^3$, но состоит из нескольких компонент. Получающееся зацепление наз. торическим зацеплением типа (p, q) (см. рис. 2, где $p=3$, $q=6$).

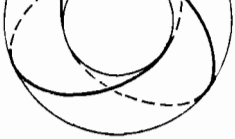


Рис. 1.



Рис. 2.

Лит.: [1] Кроуэлл Р., Фокс Р., Введение в теорию узлов, пер. с англ., М., 1967; [2] Милнор Дж., Особые точки комплексных гиперповерхностей, пер. с англ., М., 1971.

М. Ш. Фарбер.

ТОРОИДАЛЬНАЯ ГАРМОНИКА — функция точки на торе, появляющаяся при решении уравнения Лапласа методом разделения переменных в *тороидальных координатах* (σ, τ, φ). Гармонич. функция $h=h(\sigma, \tau, \varphi)$, являющаяся решением уравнения Лапласа, записывается в виде ряда

$$h=\sqrt{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}\sum_{j,\,k=0}^{\infty}[A_{jk}P_{j-1/2}^{(k)}(\operatorname{ch}\tau)+$$
$$+B_{jk}Q_{j-1/2}^{(k)}(\operatorname{ch}\tau)](a_k\cos k\sigma+b_k\sin k\sigma)\times$$
$$\times(c_j\cos j\varphi+d_j\sin j\varphi),\qquad(*)$$

где $P_{j-1/2}^{(k)}$, $Q_{j-1/2}^{(k)}$ — присоединенные функции Лежандра с полуцелым индексом. Полагая здесь $\tau=\tau_0$, получают Т. г., или, иначе, поверхностную Т. г., в отличие от членов ряда $(*)$, зависящих от трех переменных (σ, τ, φ), к-рые иногда наз. пространственными Т. г.

Ряд $(*)$ используется при решении краевых задач в тороидальных координатах с учетом разложения

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}\tau-\cos\sigma}}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}Q_{k-1/2}(\operatorname{ch}\tau)\cos k\sigma,$$

где $Q_{k-1/2}$ — функции Лежандра 2-го рода.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [2] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1—2, М., 1960.

Е. Д. Соломенцев.

ТОРОИДАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ — числа σ, τ и φ, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x, y и z формулами:

$$x=\frac{a\,\mathrm{sh}\,\tau}{\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma}\cos\varphi,\quad y=\frac{a\,\mathrm{sh}\,\tau}{\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma}\sin\varphi,$$

$$z=\frac{a\sin\sigma}{\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma},$$

где $-\pi\leqslant\sigma\leqslant\pi$, $0\leqslant\tau<\infty$, $0\leqslant\varphi<2\pi$. Координатные поверхности: $\sigma=\mathrm{const}$ — сферы с центром $(0,\ 0,\ a\ \mathrm{ctg}\ \sigma)$ радиуса $a/|\sin\sigma|$; $\tau=\mathrm{const}$ — торы с осевой окружностью в плоскости Oxy, центром в начале координат и радиусом $a\,\mathrm{cth}\,\tau$ и окружностью поперечного сечения радиуса $a/\mathrm{sh}\,\tau$, $\varphi=\mathrm{const}$ — полуплоскости $y/x=\mathrm{tg}\,\varphi$. Система Т. к.— ортогональная.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\sigma=L_\tau=\frac{a^2}{(\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma)^2},$$

$$L_\varphi=\frac{a^2\,\mathrm{sh}^2\,\tau}{(\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma)^2}.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta f=\frac{(\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma)^3}{a^2\,\mathrm{sh}\,\tau}\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\mathrm{sh}\,\tau}{\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma}\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\mathrm{sh}\,\tau}{\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma}\frac{\partial f}{\partial\tau}\right)+\frac{1}{\mathrm{sh}\,\tau\,(\mathrm{ch}\,\tau-\cos\sigma)}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right].$$

Д. Д. Соколов

ТОРС — то же, что *развертывающаяся поверхность*.

ТОТАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО — множество Σ линейных функционалов на векторном пространстве E, разделяющее точки E, т. е. такое, что для любого ненулевого вектора $x\in E$ найдется функционал $f\in\Sigma$ с $f(x)\neq 0$.

В. И. Ломоносов.

ТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА — статистическая оценка, значения к-рой суть точки во множестве значений оцениваемой величины.

Пусть по реализации $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ случайного вектора $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$, принимающего значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, P_\theta)$, $\theta=(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)^\top\in\Theta\subset\mathbb{R}^k$, надлежит оценить неизвестный параметр θ (или нек-рую функцию $g(\theta)$). Тогда любая статистика $T_n=T_n(X)$, осуществляющая отображение множества $\mathfrak{X}$ в Θ (или в множество значений функции $g(\theta)$), наз. точечной оценкой параметра θ (оцениваемой функции $g(\theta)$). Важными характеристиками Т. о. T_n являются ее математич. ожидание

$$\mathsf{E}_\theta\{T_n\}=\int_{\mathfrak{X}}T_n(x)\,dP_\theta(x)$$

и дисперсионная матрица (ковариационная матрица)

$$\mathsf{E}_\theta\{(T_n-\mathsf{E}\{T_n\})(T_n-\mathsf{E}\{T_n\})^\top\}.$$

Вектор $d(X)=T_n(X)-g(\theta)$ наз. вектором ошибок Т. о. T_n. Если

$$b(\theta)=\mathsf{E}_\theta\{d(X)\}=\mathsf{E}_\theta\{T_n\}-g(\theta)$$

— нулевой вектор при всех $\theta\in\Theta$, то говорят, что T_n является несмещенной оценкой функции $g(\theta)$ или что T_n лишена систематич. ошибки, в противном случае Т. о. T_n наз. смещенной, а вектор $b(\theta)$ — смещением или систематической ошибкой Т. о. Качество Т. о. определяется с помощью функции риска.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979.

М. С. Никулин.

ТОЧЕЧНАЯ РЕШЕТКА в $\mathbb{R}^n$ с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — множество $\Lambda=\mathbb{Z}e_1+\ldots+\mathbb{Z}e_n$ точек $a=g_1e_1+\ldots+g_ne_n$, где $g_1, \ldots, g_n$ — целые числа.

Решетку Λ можно рассматривать как свободную абелеву группу с n образующими. Данной решетке Λ отвечает бесконечное множество базисов; их общий вид: $(e_1, \ldots, e_n)U$, где U пробегает все целые матрицы с определителем ± 1. Величина

$$d(\Lambda) = |\det(e_1, \ldots, e_n)| > 0$$

— объем параллелепипеда, построенного на векторах $e_1, \ldots, e_n$,— не зависит от выбора базиса и наз. о п р е д е л и т е л е м р е ш е т к и Λ.

Разбиение Т. р. на *Вороного типы решеток* играет важную роль в геометрии *квадратичных форм*.

А. В. Малышев.

ТОЧКА ПОЛЯ K с о з н а ч е н и я м и в п о л е L, L-з н а ч н а я т о ч к а п о л я K,— отображение $f: K \to L \cup \{\infty\}$, удовлетворяющее условиям

$$f(1) = 1,$$
$$f(a+b) = f(a) + f(b),$$
$$f(ab) = f(a) \cdot f(b)$$

(если выражения, стоящие в правых частях, определены), при этом считается, что

$$\infty \cdot \infty = \infty,$$
$$c + \infty = \infty + c = \infty, \ c \in L,$$
$$c \cdot \infty = \infty \cdot c = \infty, \ c \in L, \ c \neq 0,$$

а выражения $\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$ не определены.

Элемент a из K, для к-рого $f(a) \in L$, наз. к о н е ч н ы м в Т. п. f; множество A конечных элементов является подкольцом в K, а отображение $f: A \to L$ — гомоморфизмом колец. Кольцо A — *локальное кольцо*, его максимальный идеал $\mathfrak{m} = \{a \in K | f(a) = 0\}$.

Т. п. f определяет *нормирование* v поля K с группой значений K^*/A^* (где $K^* = K \setminus \{0\}$ и $A^* = A \setminus \mathfrak{m}$ — группы обратимых элементов поля K и кольца A соответственно). Кольцо этого нормирования совпадает с A. Обратно, любое нормирование v поля K определяет Т. п. K со значениями в поле вычетов нормирования v. При этом кольцо конечных элементов совпадает с кольцом нормирования v.

Лит.: [1] Л е н г С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

Ю. Г. Зархин.

ТОЧНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность

$$\longrightarrow A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_{n+2} \longrightarrow \ldots$$

объектов абелевой категории $\mathfrak{A}$ и морфизмов α_i таких, что

$$\operatorname{Ker} \alpha_{n+1} = \operatorname{Im} \alpha_n.$$

Т. п. $0 \to A \to B \to C \to 0$ наз. к о р о т к о й и состоит из объекта B, его подобъекта A и факторобъекта C.

В. Е. Говоров.

ТОЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — представление, являющееся мономорфизмом.

А. И. Штерн.

ТОЧНЫЙ ФУНКТОР — функтор, перестановочный с нек-рыми пределами и копределами. А именно, функтор $F: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ между абелевыми категориями $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ наз. т о ч н ы м, если он переводит короткие точные последовательности

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

из категории $\mathfrak{A}$ в короткие точные последовательности

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$

категории $\mathfrak{B}$.

Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — неабелевы категории, то функтор $F: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ наз. т о ч н ы м, если он переводит коммутативные диаграммы

$$A \underset{\varepsilon_2}{\overset{\varepsilon_1}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{\nu} C$$

из $\mathfrak{A}$, в к-рых $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — ядерная пара ν, а ν — коядро пары $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, в диаграммы с теми же свойствами в $\mathfrak{B}$.

М. Ш. Цаленко.

ТОЧНЫЙ ЭНДОМОРФИЗМ пространства Лебега (X, μ) — такой эндоморфизм T пространства (X, μ) (см. *Метрический изоморфизм*), что единственным по mod 0 *измеримым разбиением*, к-рое крупнее по mod 0 всех $T^{-n}\varepsilon$, где ε — разбиение на отдельные точки, является тривиальное разбиение, единственный элемент к-рого — все X. Эквивалентное определение: не существует измеримых разбиений ξ, инвариантных (в более старой терминологии — вполне инвариантных) относительно T (т. е. таких, что $T^{-1}\xi = \xi \bmod 0$). Примерами Т. э. являются односторонние сдвиги Бернулли и *растягивающие отображения*.

Т. э. обладают сильными эргодич. свойствами, аналогичными свойствам *К-систем* (с к-рыми формально Т. э. связаны: имеется конструкция, сопоставляющая эндоморфизму нек-рый автоморфизм,— его с т а н д а р т н о е р а с ш и р е н и е; для Т. э. последнее является K-автоморфизмом).

Лит.: [1] Р о х л и н В. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1961, т. 25, № 4, с. 499—530; [2] К о р н ф е л ь д И. П., С и н а й Я. Г., Ф о м и н С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

Д. В. Аносов.

ТРАЕКТОРИЯ в первоначальном значении термина — линия, описываемая движущейся точкой (Т. этой точки). При движении системы материальных точек каждая точка движется по своей Т. В то же время состояние всей системы изображается точкой *фазового пространства*, к-рая тоже движется по нек-рой Т. в этом пространстве. Когда необходимо подчеркнуть, что речь идет о последней Т., то говорят о *фазовой траектории*. (Для «системы», состоящей из одной материальной точки M, различие между ее «геометрической» Т. в обычном пространстве и фазовой Т. все равно сохраняется, ибо состояние не сводится к геометрич. положению M, а включает также и ее скорость.)

В более абстрактной теории *динамических систем* под Т. обычно понимают фазовую Т. (тем более что в общем случае ни в каком ином смысле говорить о Т. не приходится — «система» может не иметь физич. смысла системы материальных точек). Строго говоря, фазовая Т. может не быть линией, а сводиться к одной точке (*равновесия положению*). Наконец, абстрактной концепции динамич. системы как группы или полугруппы преобразований, уже не обязательно однопараметрической, соответствует использование термина «Т.» как синонима *орбиты* (такая Т. не обязана быть линией).

Для *каскада*, получающегося итерированием необратимого отображения S, иногда под Т. (или п о л н о й Т.) точки x понимают совокупность всех ее образов $S^n x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и всех прообразов этих образов при отображениях S^m, $m = 1, 2, \ldots$.

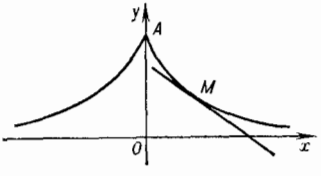
Д. В. Аносов.

ТРАКТРИСА — плоская трансцендентная кривая, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид

$$x = \pm a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \mp \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Т. симметрична относительно оси ординат (см. рис.), ось абсцисс — асимптота. Точка $(0, a)$ — точка возврата с вертикальной касательной. Длина дуги, отсчитываемая от точки $x = 0$:

$$l = a \ln \frac{a}{y}.$$



Радиус кривизны:

$$r = a \operatorname{ctg} \frac{x}{y}.$$

Площадь, ограниченная Т. и ее асимптотой:

$$S = \pi a^2/2.$$

При вращении Т. вокруг оси абсцисс образуется *псевдосфера*. Длина касательной, т. е. отрезок от точки касания M до оси абсцисс, есть величина постоянная. Это свойство позволяет рассматривать Т. как траекторию конца отрезка длины a, когда другой его конец движется по оси абсцисс. Понятие Т. обобщается на случай, когда конец отрезка движется не по прямой, а по нек-рой заданной кривой; получающаяся при этом кривая наз. траекторией данной кривой.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ТРАНЗИТИВНАЯ ГРУППА — группа подстановок (G, X) такая, что каждый элемент $x \in X$ может быть переведен в любой элемент $y \in X$ подходящим элементом $g \in G$, т. е. $x^g = y$. Иными словами, все множество X образует единственную орбиту группы (G, X). Если же число орбит больше 1, то группа (G, X) наз. интранзитивной. Орбиты интранзитивной группы иногда наз. ее областями транзитивности. У интранзитивной группы (G, X) с орбитами X_i

$$X = X_1 + \ldots + X_s$$

ограничение действия группы на X_i транзитивно.

Пусть H — подгруппа в G и пусть

$$G = H + Hx_1 + \ldots + Hx_{s-1}$$

— разложение G на правые смежные классы по H. Пусть, далее, $X = \{Hx_i\}$. Тогда действие (G, X) определяется условием $(Hx_i)g = Hx_ig$. Это действие транзитивно, и обратно, всякое транзитивное действие подобно вышеуказанному для подходящей подгруппы H в G.

Действие (G, X) наз. k раз транзитивным, $k \in \mathbb{N}$, если для любых двух упорядоченных множеств из k различных элементов $(x_1, \ldots, x_k)$ и $(y_1, \ldots, y_k)$, $x_i, y_i \in X$, существует такой элемент $g \in G$, что $y_i = x_i^g$ для всех $i = 1, \ldots, k$; иначе говоря, (G, X) обладает лишь одной антирефлексивной k-орбитой. Для $k \geqslant 2$ k-транзитивная группа наз. кратно транзитивной. Примером дважды транзитивных групп являются группы целых линейных преобразований $x \mapsto ax + b$, $a, b \in K$, нек-рого поля K. Примером трижды транзитивных групп служат группы дробно-линейных преобразований проективной прямой над полем K, т. е. преобразований вида

$$x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d},\ a, b, c, d, x \in K \cup \{\infty\},$$

где $\det \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\| \neq 0$.

Т. г. (G, X) наз. строго k раз транзитивной, если лишь тождественная подстановка может оставлять на месте k различных элементов из Ω. Группа целых линейных и группа дробно-линейных преобразований являются примерами строго дважды и строго трижды транзитивных групп.

Конечная симметрич. группа S_n n раз транзитивна. Конечная знакопеременная группа A_n $(n-2)$ раза транзитивна. Эти две серии кратно транзитивных групп считаются тривиальными. Известны еще две 4 раза транзитивные группы M_{11} и M_{23} и две 5 раз транзитивные группы M_{12} и M_{24} (см. [3], а также *Матьё группа*). Существует гипотеза (1984), что за исключением этих четырех групп не существует нетривиальных k раз транзитивных групп для $k \geqslant 4$. Эта гипотеза доказана в предположении, что верна неоднократно анонсированная классификация конечных простых неабелевых групп [6]. Более того, при указанном предположении можно считать законченной классификацию всех кратно транзитивных групп.

Т. г. определяются также для дробных k вида $m + 1/2$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. А именно, группа (G, X) наз. $1/2$-

транзитивной, если либо $|X|=1$, либо все орбиты группы (G, X) имеют одинаковую длину большую 1. А для $n>1$ группа (G, X) $n+1/2$ раз транзитивна, если фиксатор (G_x, X) $n-1/2$ раз транзитивен на X (см. [3]).

Лит.: [1] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [2] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962; [3] Wielandt H., Finite permutation groups, N. Y.— L., 1964; [4] Passman D., Permutation groups, N. Y.— Amst., 1968; [5] Higman D. G., Lecture on permutation representation, Giessen, 1977; [6] Cameron P. J., «Bull. London Math. Soc.», 1981, v. 13, p. 1—22. *Л. А. Калужнин.*

ТРАНЗИТИВНОСТЬ — одно из важнейших свойств *бинарных отношений*. Отношение R на множестве A наз. транзитивным, если для любых a, b, $c\in A$ из условий aRb и bRc вытекает, что aRc. Отношения эквивалентности и порядка являются примерами транзитивных бинарных отношений. *Т. С. Фофанова.*

ТРАНСВЕКЦИЯ, сдвиг,— линейное преобразование f (правого) векторного пространства V над телом K, обладающее свойствами

$$\mathrm{rk}\,(f-E)=1 \text{ и } \mathrm{Im}\,(f-E)\subset \ker\,(f-E),$$

где E — тождественное линейное преобразование. Т. представляется в виде

$$f(x)=x+a\alpha(x),$$

где $a\in V$, $\alpha\in V^*$ и $\alpha(a)=0$.

Все Т. векторного пространства V порождают группу $\mathrm{SL}(V)$, наз. специальной линейной или унимодулярной группой пространства V и совпадающую с коммутантом группы $\mathrm{GL}(V)$, за исключением случаев, когда $\dim V=1$ или $\dim V=2$ и K — поле из двух элементов. Если K — поле, то $\mathrm{SL}(V)$ — группа матриц с определителем 1. В общем случае (если только $\dim V\neq 1$) группа $\mathrm{SL}(V)$ является ядром эпиморфизма

$$\mathrm{GL}\,(V)\longrightarrow K^*/(K^*,\ K^*),$$

наз. определителем Дьёдонне.

Лит.: [1] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974. *Э. Б. Винберг.*

ТРАНСВЕРСАЛЬНАЯ СИСТЕМА, трансверсальная схема, T-система,— система $T_0(m, t)$ множеств, определяемая для заданной совокупности m попарно непересекающихся конечных множеств $S_1, \ldots, S_m$, каждое из к-рых имеет мощность t. А именно: Т. с. $T_0(m, t)$ есть система из t^2 множеств $Y_1, \ldots, Y_{t^2}$ (блоков, или трансверсалей), содержащих каждое m элементов и таких, что:

1) $|Y_j\cap S_i|=1$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, t^2$,

2) $|Y_j\cap Y_k|\leqslant 1$ при $j\neq k$.

В Т. с. любые два элемента $a\in S_i$ и $b\in S_j$, $i\neq j$, встречаются вместе ровно в одном блоке. Существование Т. с. $T_0(m, t)$ эквивалентно существованию *ортогональной таблицы* OA (t, m).

Т. с. используются в рекурсивных методах построения *блок-схем*.

Множество из t трансверсалей в $T_0(m, t)$ наз. параллельным, если никакие две из них не пересекаются. Если Т. с. $T_0(m, t)$ содержит e (или более) параллельных множеств, то она обозначается $T_e(m, t)$.

Нек-рые из основных свойств Т. с.:

а) если существуют $T_d(m, s)$ и $T_e(m, t)$, то существует и $T_{de}(m, st)$; б) $T_t(m-1, t)$ существует тогда и только тогда, когда существует $T_0(m, t)$; в) если t и s таковы, что существуют $T_s(m, t)$ и $T_0(m, s)$, то существует $T_{s^2}(m, st)$.

Лит.: [1] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [2] Hanani H., «Ann. Math. Stat.», 1961, v. 32, № 2, p. 361—86. *В. Е. Тараканов.*

ТРАНСВЕРСАЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР — дифференциальный или псевдодифференциальный оператор, перестановочный с действием нек-рой

группы Ли на многообразии, где задан оператор, и эллиптический по направлению нормалей к орбитам этой группы. Если оператор действует на сечениях векторных расслоений, то предполагается заданным также поднятие действия рассматриваемой группы G до действия в каждом из рассматриваемых расслоений, так что действие группы продолжается на сечения расслоений. Если группа G дискретна, то Т. э. о.— это обычный эллиптич. оператор, перестановочный с действием G. Если G действует на многообразии X транзитивно, то любой дифференциальный или псевдодифференциальный оператор, перестановочный с действием G, является Т. э. о. Если G и X компактны, то для Т. э. о. определяется и вычисляется индекс, являющийся обобщенной функцией на G (см. *Индекса формулы*).

Лит.: [1] Atiyah M., Elliptic operators and compact groups, B.— [a. o.], 1974.

М. А. Шубин.

ТРАНСВЕРСАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, трансверсально регулярное отображение, — отображение, обладающее нек-рыми свойствами *общего положения*.

Пусть ξ — *векторное расслоение* над конечным *клеточным пространством* X, и пусть тотальное пространство расслоения ξ вложено как открытое подмножество в нек-рое топологич. пространство Z. Непрерывное отображение $f : M \to Z$, где M — гладкое многообразие, наз. трансверсальным к X отображением, если $V = f^{-1}(X)$ является гладким подмногообразием в M с *нормальным расслоением* ν и если при этом ограничение f на *трубчатую окрестность* подмногообразия V в M задает морфизм расслоений $\nu \to \xi$.

Напр., пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение гладких многообразий, и пусть X — гладкое подмногообразие в N. Если дифференциал $df : \tau_M \to \tau_N$ (где τ — касательное расслоение) содержит в своем образе все векторы нормального к X в N расслоения ξ, то f является Т. о.

Аппроксимационная теорема: во множестве всех непрерывных отображений $M \to Z$ Т. о. образуют множество 2-й категории. В частности, любое непрерывное отображение гомотопно Т. о. Эта теорема позволяет сопоставить алгебраич. инвариантам (гомотопич. классам отображения) наглядные геометрич. образы (классы нек-рой эквивалентности многообразий, являющихся прообразами при Т. о.). Возможен и обратный переход — от геометрии к алгебре. Таким путем были вычислены, напр., различные группы *бордизмов*, классифицированы гладкие многообразия данного гомотопич. типа и т. д.

Понятие Т. о. можно перенести также в категории кусочно линейных и топологич. многообразий. При этом в кусочно линейной категории аппроксимационная теорема справедлива, а в топологич. категории этот вопрос остается (1984) открытым. Понятие Т. о. можно сформулировать и для бесконечномерных многообразий.

Лит.: [1] Том Р., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения. Сб. пер., М., 1958, с. 293—351; [2] Браудер В., Перестройки односвязных многообразий, пер. с англ., М., 1983.

Ю. Б. Рудяк.

ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ УСЛОВИЕ — необходимое условие оптимальности в вариационных задачах с подвижными концами. С помощью Т. у. определяются произвольные постоянные, от к-рых зависит решение уравнений Эйлера. Т. у. является необходимым условием обращения в нуль первой вариации функционала.

Для простейшей задачи вариационного исчисления с подвижными концами

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x})\, dt,$$

в к-рой точка

$$(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) = (t_1, x_1, t_2, x_2)$$

не фиксируется, а может принадлежать нек-рому множеству, Т. у. записывается в виде соотношения

$$\left[\left(F-\dot{x}F_{\dot{x}}\right)dt+F_{\dot{x}}\,dx\right]_1^2=0, \tag{1}$$

к-рое должно выполняться при любых значениях дифференциалов dt_1, dx_1, dt_2, dx_2, удовлетворяющих проварьированным граничным условиям.

Если левый и правый концы экстремали могут смещаться вдоль заданных линий $x=\varphi_1(t)$ и $x=\varphi_2(t)$, то в силу

$$dx_1=\dot{\varphi}_1(t)\,dt_1,\ dx_2=\dot{\varphi}_2(t)\,dt_2$$

и независимости вариаций dt_1 и dt_2 из (1) получают

$$\left.\begin{aligned} F(t_1,\ x_1,\ \dot{x}_1)-\left[\dot{\varphi}_1(t_1)-\dot{x}_1\right]F_{\dot{x}}(t_1,\ x_1,\ \dot{x}_1)=0,\\ F(t_2,\ x_2,\ \dot{x}_2)+\left[\dot{\varphi}_2(t_2)-\dot{x}_2\right]F_{\dot{x}}(t_2,\ x_2,\ \dot{x}_2)=0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Если уравнения линий, вдоль к-рых смещаются левый и правый концы экстремали, заданы в неявном виде: $\omega_1(t,\ x)=0$ и $\omega_2(t,\ x)=0$, то Т. у. (1) записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{F-\dot{x}F_{\dot{x}}}{\omega_{1t}}=\frac{F_{\dot{x}}}{\omega_{1x}}\ \text{на левом конце},\\ \frac{F-\dot{x}F_{\dot{x}}}{\omega_{2t}}=\frac{F_{\dot{x}}}{\omega_{2x}}\ \text{на правом конце}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Если на один из концов экстремали не наложено никаких ограничений, то на этом конце, в силу независимости соответствующих концевых вариаций dt и dx, Т. у. (1) принимает вид

$$F=0,\ F_{\dot{x}}=0. \tag{4}$$

Соотношения (2), (3), (4) наз. у с л о в и я м и т р а н с в е р с а л ь н о с т и.

Ниже приводятся Т. у. в более общем случае вариационной задачи на условный экстремум. Пусть имеется *Больца задача*, состоящая в минимизации функционала

$$\left.\begin{aligned} J(x)=\int_{t_1}^{t_2} f(t,\ x,\ \dot{x})\,dt+g(t_1,\ x(t_1),\ t_2,\ x(t_2)),\\ f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

при наличии дифференциальных ограничений типа равенств

$$\varphi(t,\ x,\ \dot{x})=0,\ \varphi:R\times R^n\times R^n\longrightarrow R^m,\ m<n, \tag{6}$$

и граничных условий

$$\psi(t_1,\ x(t_1),\ t_2,\ x(t_2))=0,$$
$$\psi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^p,\ p\leqslant 2n+2. \tag{7}$$

В этой задаче при $p<2n+2$ концы $(t_1,\ x_1^1,\ \ldots,\ x_1^n)$ и $(t_2,\ x_2^1,\ \ldots,\ x_2^n)$ экстремали не закреплены, а могут смещаться вдоль заданных гиперповерхностей $\psi_\mu=0$, $\mu=1,\ \ldots,\ p$.

Согласно Т. у., существуют такие постоянные (м н о ж и т е л и Л а г р а н ж а) e_μ, $\mu=1,\ \ldots,\ p$, а также такие множители λ_0 и $\lambda_i(t)$, $i=1,\ \ldots,\ m$, что на концах экстремали помимо граничных условий (7) выполняется соотношение

$$\left[\left(F-\sum_{i=1}^n \dot{x}^i F_{\dot{x}^i}\right)dt+\sum_{i=1}^n F_{\dot{x}^i}\,dx^i\right]_1^2+$$
$$+\lambda_0\,dg+\sum_{\mu=1}^p e_\mu\,d\psi_\mu=0, \tag{8}$$

к-рое должно иметь место при любом выборе дифференциалов

$$dt_1,\ dx_1^i,\ dt_2,\ dx_2^i,\ i=1,\ \ldots,\ n. \tag{9}$$

Через F в (8) обозначено

$$F = F(t, x, \dot{x}, \lambda) = \lambda_0 f(t, x, \dot{x}) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) \varphi_i(t, x, \dot{x}). \quad (10)$$

В большинстве практич. задач для нормировки множителей Лагранжа полагают $\lambda_0 = 1$ (значение $\lambda_0 = 0$ соответствует анормальному случаю, см. [1]). Множители $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, определяются вместе с $x^i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, из решения системы дифференциальных уравнений Эйлера

$$F_{x^i} - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}^i} = 0, \ i = 1, \ \ldots, \ n, \quad (11)$$

и m уравнений вида (6):

$$\varphi_i(t, x, \dot{x}) = 0, \ i = 1, \ \ldots, \ m.$$

Общее решение полученной системы из n дифференциальных уравнений 2-го порядка и m дифференциальных уравнений 1-го порядка относительно $n+m$ неизвестных функций $x^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ и $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, зависит от $2n$ произвольных постоянных. Действительно, если обозначить

$$\dot{x}^i = u_i, \ i = 1, \ \ldots, \ n, \quad (12)$$

то получается система (11), (12) $2n$ дифференциальных уравнений 1-го порядка и m конечных соотношений

$$\varphi_i(t, x, u) = 0, \ i = 1, \ \ldots, \ m. \quad (13)$$

Выражая из (13) нек-рые m функций u_i через остальные (в предположении, что соответствующий функциональный определитель отличен от нуля) и подставляя их в (11), (12), получают систему $2n$ дифференциальных уравнений 1-го порядка с $2n$ неизвестными функциями, общее решение к-рой зависит от $2n$ произвольных постоянных. Вместе со значениями t_1 и t_2 это дает $2n+2$ произвольных постоянных, определяющих решение вариационной задачи (5) — (7). С помощью Т. у. получают ровно столько же соотношений, позволяющих определить эти произвольные постоянные.

В задачах оптимального управления и в принципе максимума Понтрягина необходимое Т. у. записывается аналогично (8), только вместо

$$F - \sum_{i=1}^{n} \dot{x}^i F_{\dot{x}^i} \text{ и } F_{\dot{x}^i}$$

в (8) следует подставлять гамильтониан H, взятый с обратным знаком, и сопряженные переменные ψ_i.

Необходимое Т. у. позволяет получать недостающие граничные условия для получения замкнутой краевой задачи, к к-рой сводится решение вариационной задачи с подвижными концами.

Лит.: [1] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950.

И. Б. Вапнярский.

ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТЬ — общее название для нек-рых свойств *общего положения*, понятие линейной алгебры, дифференциальной и геометрич. топологии.

а) Два векторных подпространства A, B конечномерного векторного пространства C трансверсальны друг к другу, если A и B порождают C, т. е.

$$\dim A \cap B + \dim C = \dim A + \dim B.$$

б) В дифференцируемой ситуации два подмногообразия L, M многообразия N трансверсальны в точке $x \in L \cap M$, если касательные пространства в этой точке $T_x L$, $T_x M$ порождают $T_x N$. Геометрически (для подмногообразий в узком смысле слова и без края) это означает, что в N можно ввести такие локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ в нек-рой окрестности U точки x, в терминах к-рых $L \cap U$ и $M \cap U$ представляются как трансверсальные векторные подпространства в $\mathbb{R}^n$.

Отображение $f: L \to N$ **трансверсально к подмногообразию** $M \subset N$ в точке $x \in f^{-1}(M)$, если образ $T_x L$ под действием f трансверсален к $T_{f(x)}M$ в $T_{f(x)}N$. Отображения $f: L \to N$ и $g: M \to N$ **трансверсальны друг к другу в точке** $(x, y) \in L \times M$, где $f(x) = g(y)$, если образы $T_x L$ и $T_y M$ порождают $T_{f(x)}N$. Последние два определения тоже перефразируются [1]: говорят, что L трансверсально к M, f — к M (более старый термин: f t-регулярно вдоль M) и f — к g, если соответствующая Т. имеет место во всех точках, для к-рых о ней можно говорить. Эти понятия легко сводятся друг к другу, напр. Т. L и M эквивалентна Т. тождественных вложений L и M в N. Употребительна запись типа $L \pitchfork_x M$, $f \pitchfork M$ и т. д.

Для Т. многообразий с краем иногда целесообразно дополнительно потребовать выполнения нек-рых условий (см. [3]). Т. переносится и на бесконечномерный случай (см. [1], [2]).

Во всех этих случаях роль Т. связана с ее «типичностью» и с «хорошими» свойствами пересечения $L \cap M$, прообразов $f^{-1}(M)$ и т. п. объектов (к-рые к тому же «хорошо» деформируются, если при деформациях исходных объектов сохраняется Т.) (см. [4]).

в) В кусочно линейной и топологич. ситуациях можно определить Т. подмногообразий по аналогии с геометрич. определением в б) (особенно употребителен кусочно линейный вариант для подмногообразий дополнительной размерности, см. [5]). Вообще говоря, полной аналогии со свойствами Т. из б) не получается (см. [6], [8]), поэтому предложены более ограничительные модификации Т. (см. [7], [9]).

Наконец, говорят, что какая-то категория многообразий обладает свойством Т., если в ней любое отображение аппроксимируется трансверсальным отображением.

Лит.: [1] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967; [2] Бурбаки Н., Элементы математики. Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов, пер. с франц., М., 1975; [3] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [4] Хирш М., Дифференциальная топология, пер. с англ., М., 1979; [5] Рурк К., Сандерсон Б., Введение в кусочно-линейную топологию, пер. с англ., М., 1974; [6] Lickorish W., Rourke C. P., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1969, v. 66, № 1, p. 13—16; [7] Rourke C., Sanderson B., «Ann. Math.», 1968, v. 87, p. 256—78; [8] Hudson J., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1969, v. 66, № 1, p. 17—20; [9] Marin A., «Ann. Math.», 1977, v. 106, № 2, p. 269—93.

Д. В. Аносов.

ТРАНСГРЕССИЯ в расслоенном пространстве — соответствие между классами когомологий слоя и базы. Точнее, если E — связное расслоенное пространство с базой B и слоем F, A — абелева группа, то Т. в E есть соответствие

$$\tau \subset H^s(F, A) \times H^{s+1}(B, A),$$

определенное формулой

$$\tau = \{(x, y) \mid \delta x = q^* y\},$$

где $\delta: H^s(F, A) \to H^{s+1}(E, F, A)$ — кограничный гомоморфизм, а $q: H^{s+1}(B, A) \to H^{s+1}(E, F, A)$ — гомоморфизм, определяемый проекцией $E \to B$. Элементы из области определения $T^s(F, A) \subset H^s(F, A)$ соответствия τ наз. **трансгрессивными**; образом элемента $x \in T^s(F, A)$ при Т. наз. любой такой $y \in H^{s+1}(B, A)$, что $x \tau y$. Т. можно рассматривать как гомоморфизм группы $T^s(F, A)$ в нек-рую факторгруппу группы $H^{s+1}(B, A)$. Т. допускает прозрачное истолкование в терминах спектральной последовательности (H_r) расслоения E: по существу, она совпадает с дифференциалом $d_{s+1}: H_{s+1}^{0, s} \to H_{s+1}^{s+1, 0}$.

Описание трансгрессивных классов когомологий слоя весьма существенно при изучении когомологич. строения расслоения. Важную роль здесь играет **теорема трансгрессии Бореля**: если A — поле,

$H^n(E, A)=0$ при $n>0$, $H^*(F, A)=\Lambda P$ — внешняя алгебра над подпространством P, градуированном нечетными степенями, причем когомологии слоев образуют простой пучок над B, то P можно выбрать таким образом, чтобы $P^s=T^s(F, A)$ для любого $s>0$, при этом $H^*(B, A)$ — алгебра многочленов от образов элементов однородного базиса пространства P при Т. В частности, если G — связная группа Ли, не имеющая p-кручения, и $\operatorname{char} A=p$, то $H^*(G, A)=\Lambda P$, где однородные элементы пространства P имеют нечетные степени и трансгрессивны в любом главном расслоении группы G. При этом P совпадает с пространством примитивных классов когомологий.

Лит.: [1] Борель А., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения, пер. с франц., М., 1958, с. 163—246; [2] Серр Ж.-П., там же, с. 9—114.

А. Л. Онищик.

ТРАНСЛЯТИВНОСТЬ МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ — свойство метода, сохраняющее суммируемость ряда после добавления к нему или удаления из него конечного числа членов. Более точно: метод суммирования A наз. транслятивным, если из суммируемости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

к сумме S следует суммируемость этим же методом ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

к сумме $S-a_0$, и наоборот. Для метода суммирования A, определенного преобразованием последовательности $\{S_n\}$ в последовательность или функцию, свойство транслятивности состоит в том, что из условия

$$A-\lim S_n=S$$

следует

$$A-\lim S_{n+1}=S,$$

и наоборот. Если метод суммирования определен регулярной матрицей $\|a_{nk}\|$, то это означает, что из

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}S_k=S \qquad (1)$$

всегда следует

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}S_{k+1}=S, \qquad (2)$$

и наоборот. В случаях, когда такое заключение выполняется только в одну сторону, метод называют транслятивным справа — если из (1) следует (2), но обратное неверно, или транслятивным слева, когда из (2) следует (1), но обратное неверно.

Свойством транслятивности обладают многие распространенные методы суммирования; напр., метод Чезаро (C, k) при $k>0$, метод Рисса (R, n, k) при $k>0$, метод Абеля транслятивны, экспоненциальный метод Бореля транслятивен слева.

Лит.: [1] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [2] Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, 2 изд., Таллин, 1977.

И. И. Волков.

ТРАНСЛЯЦИЯ — отображение алгебраич. системы в себя, к-рое либо есть тождественное отображение, либо может быть представлено в виде произведения конечного числа *главных трансляций* (наз. также элементарными Т.). Эквивалентность на алгебраич. системе является конгруэнцией тогда и только тогда, когда она замкнута относительно всех Т. (и даже только главных Т.).

Лит.: [1] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970.

О. А. Иванова.

ТРАНСЛЯЦИЯ ПРОГРАММ — 1) Т. п. в *программировании*, компиляция программ,— систематический процесс, который любую программу *ip*

на входном *алгоритмическом языке* LI преобразует в некоторую программу *op* на объектном языке LO, при этом так, что обе программы, *ip* и *op*, реализуют одну и ту же функцию, то есть если d — входные данные программы, то $ip(d)=op(d)$.

2) Т. п. в теории *вычислимых функций* и *алгоритмов теории* — любое отображение одной *нумерации* вычислимых функций в другую, сохраняющее свойство образа и прообраза быть номером одной и той же функции (наличие эффективного транслирующего отображения наз. также сводимостью одной нумерации к другой).

В практике программирования обычно входным языком является *программирования язык*, используемый человеком, а объектным языком — язык непосредственно выполняемых машинных программ. Сама Т. п., как правило, совершается автоматически, то есть с помощью программы t на нек-ром языке реализации LR, наз. транслятором (или компилятором), то есть $t(ip)=op$. Систематич. разработка трансляторов для любого входного языка LI из нек-рого класса языков составляет содержание *автоматизации программирования*, а соответствующие средства такой разработки наз. системами построения трансляторов или трансляторами трансляторов, $tt : tt(\mathrm{LI})=t$. При этом язык реализации либо включает объектный язык, либо совпадает с ним: $\mathrm{LO}\subseteq\mathrm{LR}$.

Понятие Т. п. (сводимости) в теории вычислимых функций приводит к понятию главных нумераций, то есть таких, к к-рым сводятся любые другие нумерации из нек-рого класса. Доказано существование главных вычислимых нумераций у всех конкретных моделей вычислимых функций, в частности у частично рекурсивных функций и у машин Тьюринга. В свою очередь, существование главных вычислимых нумераций взаимообусловлено способностью вычислимых функций к т. н. частичным вычислениям, то есть существованием общерекурсивной функции (в программировании — частичного вычислителя, в теории вычислимых функций — s-m-n-функции) $S_n^m(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ такой, что если $U^n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — универсальная функция для вычислимых функций n переменных, то для любой вычислимой функции F от $m+n$ переменных и с номером NF имеет место тождество

$$F(x_1, \ldots, x_{m+n}) = U^{m+n}(NF, x_1, \ldots, x_{m+n}) = \\ = U^n(S_n^m(NF, x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}).$$

Как видно из тождества, частичный вычислитель по программе функции $m+n$ переменных и по заданным значениям m переменных строит программу функции n переменных, получаемой из исходной связыванием m ее аргументов этими значениями. Результат работы частичного вычислителя наз. проекцией $NF_{x_1, \ldots, x_m}$ программы NF на заданные значения $x_1, \ldots, x_m$ ее m аргументов. Существование главных вычислимых нумераций (см. [1], гл. 1, § 2) и частичных вычислителей (см. [2], § 65), а также взаимной связи между ними (см. [3], § 11, теорема 3) является одной из фундаментальных сторон теории вычислимых функций.

Между задачами практич. трансляции в программировании и частичными вычислениями существует непосредственная связь (см. [4]). Пусть язык реализации LR обладает главной вычислимой нумерацией, и пусть NS — программа частичного вычислителя для LR, выраженная на этом же языке. Пусть, далее, входной язык LI задается программой NLI своей универсальной функции, выраженной на объектном подмножестве LO языка LR, то есть $NLI(ip, d)=ip(d)$. (В программи-

рованнии такая программа наз. интерпретатором входного языка.) Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\forall d\ NS\ (NLI,\ ip,\ d) = op\ (d),$$

$$\forall\ ip\ NS(NS,\ NLI,\ ip) = t\ (ip),$$

$$\forall\ NLI\ NS\ (NS,\ NS,\ NLI) = tt\ (NLI),$$

то есть объектная программа — это проекция интерпретатора входного языка на входную программу; транслятор — это проекция частичного вычислителя на интерпретатор входного языка, а транслятор трансляторов — это проекция частичного вычислителя на самого себя.

Лит.: [1] Ершов Ю. Л., Теория нумераций, М., 1977; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [4] Ершов А. П., в кн.: Всесоюзная конференция. Методы математической логики в проблемах искусственного интеллекта и систематическое программирование, Паланга, 3—5 сент. 1980, ч. 2, Вильнюс, 1980, с. 26—55.

А. П. Ершов.

ТРАНСМИССИИ УСЛОВИЕ — условие на *псевдодифференциальный оператор* на гладком многообразии с краем, гарантирующее, что гладкие вплоть до края функции, продолженные нулем, переводятся этим оператором снова в функции, гладкие вплоть до границы. Продолжение нулем здесь делается на некоторую окрестность исходного многообразия, которое считается вложенным в более широкое многообразие без края, так что точки края становятся внутренними точками.

Если символ рассматриваемого псевдодифференциального оператора имеет в локальных координатах в окрестности границы асимптотич. разложение по положительно однородным функциям $a_\alpha(x, \xi)$ (α — порядок однородности), то Т. у. можно записать в виде следующего условия на функции a_α:

$$\partial_x^\gamma \partial_\xi^\beta [a_\alpha(x,\ \xi',\ \xi_n) -$$

$$- e^{-i\pi\alpha} a_\alpha(x, -\xi', -\xi_n)]|_{x_n=0,\ \xi'=0} = 0,$$

где γ, β — любые мультииндексы, координаты x считаются выбранными в окрестности граничной точки так, что $\{x_n = 0\}$ — уравнение края, $x_n \geqslant 0$ на самом многообразии, $\xi = (\xi', \xi_n)$ — координаты, дуальные к координатам $x = (x', x_n)$.

Лит.: [1] Эскин Г. И., Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, М., 1973; [2] Boutet de Monvel L., «Acta math.», 1971, v. 126, № 1/2, p. 11—51.

М. А. Шубин.

ТРАНСПОНИРОВАННАЯ МАТРИЦА — матрица, получающаяся из данной (прямоугольной или квадратной) матрицы $A = \|a_{ik}\|$, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, после замены строк одноименными столбцами, т. е. матрица $\|a'_{ik}\|$, где $a'_{ik} = a_{ki}$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$. Число строк Т. м. равно числу столбцов матрицы A, а число столбцов — числу строк матрицы A. Матрицу, транспонированную по отношению к матрице A, принято обозначать $A^\top$ или A'.

О. А. Иванова.

ТРАНСПОНИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ — 1) Т. у. для линейных алгебраич. систем — уравнения, имеющие *транспонированные матрицы*.

2) Т. у. для линейных *интегральных уравнений* — уравнения с ядрами $K(x, y)$ и $K(y, x)$.

Т. у. наз. также союзными, ассоциированными, присоединенными уравнениями.

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА — один из наиболее важных частных случаев общей задачи *линейного программирования*. Содержательно Т. з. формулируется следующим образом.

Пусть в пунктах $A_1, A_2, \ldots, A_m$ производится некрый однородный продукт, причем объем производства

этого продукта в пункте A_i составляет a_i единиц, $i=1, \ldots, m$. Произведенный в пунктах производства продукт должен быть доставлен в пункты потребления $B_1, B_2, \ldots, B_n$, причем объем потребления в пункте B_j составляет b_j единиц продукта. Предполагается, что транспортировка готовой продукции возможна из любого пункта производства в любой пункт потребления и транспортные издержки, приходящиеся на перевозку единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j, составляют c_{ij} денежных единиц. Задача состоит в организации такого плана перевозок, при к-ром суммарные транспортные издержки были бы минимальными.

Формально задача ставится следующим образом. Пусть x_{ij} — количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j. Требуется определить совокупность из mn величин x_{ij}, удовлетворяющих условиям

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i=1, 2, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j=1, 2, \ldots, n, \\ x_{ij} \geqslant 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

и обращающих в минимум линейную форму

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

Группа ограничений (1) связана с тем обстоятельством, что объем вывезенного из каждого пункта производства продукта в точности равен объему произведенного в этом пункте продукта, а объем ввезенного в пункт потребления продукта в точности соответствует его потребности. При этих ограничениях необходимым и достаточным условием для разрешимости Т. з. является выполнение условия баланса

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \qquad (2)$$

Специфическими для Т. з. являются следующие два обстоятельства: а) каждое из переменных x_{ij} входит в два уравнения системы (1); б) все коэффициенты при переменных x_{ij} принимают лишь два значения 0 или 1. Условия а) и б) позволили разработать для решения Т. з. алгоритмы, существенно более простые, чем *симплексный метод*, к-рый является одним из основных методов решения задач линейного программирования.

Наиболее известными из этих алгоритмов являются метод потенциалов и т. н. венгерский метод. Метод потенциалов — это метод последовательного улучшения плана (перевозок) с использованием второй теоремы двойственности для проверки оптимальности [1]. Венгерский метод — это метод последовательного построения допустимого плана, к-рый автоматически оказывается оптимальным. В основе венгерского алгоритма лежит метод чередующихся цепей [2].

Известны следующие два обобщения классич. Т. з., являющиеся отражением встречающихся на практике ситуаций. Открытая модель Т. з.— это Т. з. с нарушенным условием баланса (2), что означает либо превышение объема производства над объемом потребления, либо наоборот. Такая задача сводится к классич. Т. з. путем введения фиктивного пункта производства (или потребления) с мощностью производства (или потребления), равной разности объемов производства и потребления.

Многоиндексные транспортные задачи при сохранении общей проблемы минимизации транспортных издержек учитывают неоднородность груза (продуктов производства) и неоднородность транспортных средств.

За рубежом Т. з. иногда наз. проблемой Хичкока.

Лит.: [1] Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., Задачи линейного программирования транспортного типа, М., 1969;

[2] Оре О., Теория графов, пер. с англ., М., 1968; [3] Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К., Многогранники. Графы. Оптимизация, М., 1981. *В. К. Леонтьев.*

ТРАНСФИНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ — принцип, позволяющий утверждать суждение $A(x)$ для любого элемента x вполне упорядоченного класса E, если установлено, что для всякого $z \in E$ из истинности $A(y)$ для всех $y < z$ следует истинность $A(z)$:

$$\forall z\,(\forall y\,(y < z \longrightarrow A(y)) \longrightarrow A(z)) \longrightarrow \forall x A(x).$$

Когда E — отрезок ординалов, меньших α, эквивалентна такая формулировка: если $A(0)$, $A(\sigma) \to A(\sigma+1)$ и $A(\sigma)$ сохраняется при предельном переходе

$$(\text{т. е. } \sigma = \sup\{\sigma_i\} \wedge \forall i A(\sigma_i) \longrightarrow A(\sigma)),$$

то $A(\sigma)$ для любого $\sigma < \alpha$. Частным случаем Т. и. является *математическая индукция*. Если отношение $<$ на классе E задает фундированное дерево (т. е. дерево, все ветви к-рого обрываются), то Т. и. для такого E эквивалентна *бар-индукции*: из того, что A верно для всех концевых вершин и наследуется при движении от них к корню, следует, что A верно для корня. Эта форма важна в интуиционистской математике. Доказуемостью Т. и. до различных ординалов измеряют дедуктивную силу формальных систем.

Г. Е. Минц.

ТРАНСФИНИТНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ элементов данного множества X — отображение нек-рого отрезка $[1, \beta]$ или полуинтервала $[1, \beta)$ порядковых (трансфинитных) чисел в множество X. Элементом, или членом, Т. п. $f : [1, \beta] \to X$ (соответственно Т. п. $f : [1, \beta) \to X$) наз. упорядоченная пара (α, x), $x = f(\alpha)$, $x \in X$, $\alpha \in [1, \beta]$ (соответственно $\alpha \in [1, \beta)$), которая обозначается через x_α.

Л. Д. Кудрявцев.

ТРАНСФИНИТНАЯ РЕКУРСИЯ — метод определения функций, заданных на ординалах (см. *Порядковое число*) или вообще на множествах, наделенных ординальной структурой. Определяющее уравнение Т. р. имеет вид

$$F(x) = G(x, F\restriction x), \qquad (*)$$

где $F\restriction x$ есть «кусок» определяемой функции F, ограниченный множеством предшественников x. С помощью Т. р. определяются многие важные для теории множеств функции и классы (напр., класс *конструктивных по Гёделю множеств*). Аналогия между указанной теоретико-множественной конструкцией и рекурсивными определениями числовых функций была предметом рассмотрения теории алгоритмов с самого начала ее возникновения. В частности, эта аналогия лежит в основе различных классификаций общерекурсивных функций (см. [1]).

Большое значение для ряда разделов математич. логики (теория доказательств, теория рекурсивных иерархий) имеют рекурсивные ординалы и связанная с ними модификация Т. р. (Рекурсивные ординалы представляют собой алгоритмич. аналог счетных ординалов; впоследствии были также предложены аналоги ординалов бо́льших мощностей.) В этой ситуации Т. р. наз. леммой Роджерса. При этом уравнение $(*)$ подвергается следующей модификации: функционал G заменяется произвольной рекурсивной функцией, а вместо функции $F\restriction x$ фигурирует ее гёделев номер (т. е. код ее алгоритмич. описания, см. также *Арифметизация*).

Лит.: [1] Петер Р., Рекурсивные функции, пер. с нем., М., 1954; [2] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [3] Barwise J., Admissible sets and structures, B., 1975.

Н. В. Белякин.

ТРАНСФИНИТНОЕ ЧИСЛО — *порядковый тип* бесконечного вполне упорядоченного множества. См. также *Порядковое число, Кардинальное число.*

ТРАНСФИНИТНЫЙ ДИАМЕТР компактного множества — характеристика $d=d(E)$ компактного множества E на комплексной плоскости, служащая геометрич. интерпретацией *емкости* этого множества. Пусть E — компактное бесконечное множество плоскости z. Величина

$$d_n(E)=\left\{\max_{z_k,\, z_l\in E}\prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}[z_k, z_l]\right\}^{2/[n(n-1)]}, \quad (1)$$

$$n=2, 3, \ldots,$$

где $[a, b]=|a-b|$ — евклидово расстояние между точками a, b, наз. n-м диаметром множества E. В частности, $d_2(E)$ — евклидов диаметр множества E. Точки $z_{n,1}, \ldots, z_{n,n}$ множества E, для к-рых в правой части равенства (1) реализуется максимум, наз. точками Фекете (или узлами Вандермонда) для E. Последовательность величин $d_n(E)$ невозрастающая: $d_{n+1}(E)\leqslant d_n(E)$, $n=2, 3, \ldots$, так что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} d_n(E)=d(E).$$

Величина $d(E)$ и наз. трансфинитным диаметром множества E. Если E — конечное множество, то полагают $d(E)=0$. Т. д. $d(E)$, *Чебышева постоянная* $\tau(E)$ и емкость множества $C(E)$ связаны равенствами

$$d(E)=\tau(E)=C(E).$$

Т. д. множества E обладает следующими свойствами: 1) если $E_1\subset E$, то $d(E_1)\leqslant d(E)$; 2) если a — фиксированное комплексное число и $E_1=\{w: w=az, z\in E\}$, то $d(E_1)=|a|d(E)$; 3) если E_ε — множество точек, находящихся на расстоянии от E, меньшем или равном ε, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} d(E_\varepsilon)=d(E)$; 4) если E^* — множество всех корней уравнения

$$Q(z)=z^k+a_1z^{k-1}+\ldots+a_k=w,$$

где $Q(z)$ — данный многочлен, w пробегает множество E, то $d(E^*)=\{d(E)\}^{1/k}$. Т. д. круга равен его радиусу; Т. д. прямолинейного отрезка равен четверти его длины.

Пусть E — ограниченный континуум, D — та из компонент дополнения E до расширенной плоскости, к-рая содержит точку ∞. Тогда Т. д. E равен *конформному радиусу* области D (относительно точки ∞).

Соответствующие понятия для множеств на гиперболич. и эллиптич. плоскостях определяются следующим образом. Пусть в качестве модели гиперболич. плоскости рассматривается круг $|z|<1$ с метрикой, определяемой линейным элементом $ds_h=|dz|/(1-|z|^2)$, и пусть E — замкнутое бесконечное множество в круге $|z|<1$. Тогда n-й гиперболический диаметр $d_{n,h}(E)$ множества E определяется равенством (1), в к-ром

$$[a, b]=\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| \quad (2)$$

— гиперболическое псевдорасстояние между точками a и b, т. е. $[a, b]=\operatorname{th}\rho_h(a, b)$, где $\rho_h(a, b)$ — гиперболич. расстояние между точками a, b круга $|z|<1$ (см. *Гиперболическая метрика*). Как и в евклидовом случае, последовательность $d_{n,h}(E)$ невозрастающая, и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} d_{n,h}(E)=d_h(E),$$

наз. гиперболическим трансфинитным диаметром множества E. Определяя гиперболическую постоянную Чебышева $\tau_h(E)$ и гиперболическую емкость $C_h(E)$ множества E посредством гиперболич. псевдорасстояния (2) между точками круга $|z|<1$ аналогично тому, как постоянная Чебышева $\tau(E)$ и емкость $C(E)$

определяются при помощи евклидова расстояния между точками плоскости z, получают равенства

$$d_h(E)=\tau_h(E)=C_h(E).$$

Гиперболич. Т. д. инвариантен относительно полной группы гиперболич. изометрий. Если E — континуум, то имеется простая связь гиперболич. Т. д. $d_h(E)$ с конформным отображением. Именно, пусть E — континуум в круге $|z|<1$ и дополнение E до круга $|z|<1$ конформно эквивалентно круговому кольцу $r<|w|<1$, $0<r<1$. Тогда $r=d_h(E)$.

Пусть в качестве модели эллиптич. плоскости взята расширенная плоскость z с метрикой ее римановой сферы K диаметра 1, касающейся плоскости z в точке $z=0$, т. е. метрикой, определяемой линейным элементом

$$ds_e=|dz|/(1+|z|^2),$$

при этом пусть отождествлены точки z и $z^*=-1/z$, к-рым при стереографич. проекции расширенной плоскости z на сферу K соответствуют диаметрально противоположные точки на K. Пусть E — замкнутое бесконечное множество на расширенной плоскости z, $E\cap E^*=\varnothing$, где $E^*=\{-1/z : z\in E\}$. Тогда n-й эллиптический диаметр $d_{n,\,e}(E)$ множества E определяется равенством (1), в к-ром

$$[a,\ b]=\left|\frac{a-b}{1+\bar{a}b}\right| \qquad (3)$$

— эллиптическое псевдорасстояние между точками a, b множества E, т. е. $[a,\ b]=\operatorname{tg}\rho_e(a,\ b)$, где $\rho_e(a,\ b)$ ($<\pi/2$) — эллиптич. расстояние между a и b. Как и в предыдущих случаях, последовательность $d_{n,\,e}(E)$ невозрастающая, и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} d_{n,\,e}(E)=d_e(E),$$

называемый эллиптическим трансфинитным диаметром множества E. Определяя эллиптическую постоянную Чебышева $\tau_e(E)$ и эллиптическую емкость $C_e(E)$ множества E посредством эллиптич. псевдорасстояния (3), получают равенства:

$$d_e(E)=\tau_e(E)=C_e(E).$$

Эллиптич. Т. д. $d_e(E)$ инвариантен относительно группы дробно-линейных преобразований

$$z\longrightarrow\frac{pz+q}{-\bar{q}z+\bar{p}},\quad |p|^2+|q|^2=1,$$

расширенной плоскости z на себя, дополненной группой отражений относительно эллиптич. прямых. Первая из этих групп изоморфна группе вращений сферы K относительно ее центра, вторая — группе отражений сферы K относительно плоскостей, проходящих через ее центр. При данном определении эллиптич. Т. д. множества E следующим образом связан с конформным отображением. Если E — континуум на расширенной плоскости z, $E\cap E^*=\varnothing$, и дополнение $E\cup E^*$ до расширенной плоскости конформно эквивалентно круговому кольцу $r<|w|<1/r$, $0<r<1$, то $r=d_e(E)$.

Понятие Т. д. допускает обобщение для компактов E в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 2$, связанное с *потенциала теорией*. Пусть для точек $x\in\mathbb{R}^m$

$$H(|x|)=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{|x|} & \text{при } m=2,\\[2ex] \dfrac{1}{|x|^{m-2}} & \text{при } m\geqslant 3\end{cases}$$

— фундаментальное решение уравнения Лапласа, и для набора точек $(x_j)_{j=1}^n\subset E$ пусть

$$\chi_n(E)=\inf\left\{\frac{2}{n(n-1)}\sum\nolimits_{j,\ k=1,\ j<k}^{n} H(|x_j-x_k|):\ (x_j)_{j=1}^n\subset E\right\}.$$

Тогда при $m=2$ справедливо равенство

$$d(E)=C(E)=\exp\left(-\lim_{n\to\infty}\chi_n(E)\right),$$

а при $m\geqslant 3$ целесообразно принять (см. [4])

$$d(E)=C(E)=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\chi_n(E)}.$$

Лит.: [1] Fekete M., «Math. Z.», 1923, Bd 17, S. 228—49; [2] Pólya G., Szegö G., «J. reine und angew. Math.», 1931, Bd 165, S. 4—51; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [4] Карлесон Л., Избранные проблемы теории исключительных множеств, пер. с англ., М., 1971; [5] Смирнов В. И., Лебедев Н. А., Конструктивная теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1964; [6] Tsuji M., Potential theory in modern function theory, Tokyo, 1959; [7] Kühnau R., Geometrie der konformen Abbildung auf der hyperbolischen und der elliptischen Ebene, B., 1974. *Г. В. Кузьмина, Е. Д. Соломенцев.*

ТРАНСЦЕНДЕНТНАЯ КРИВАЯ — плоская кривая, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах не является алгебраическим. В отличие от алгебраич. кривых Т. к. могут иметь бесконечно много точек пересечения с прямой и бесконечно много точек перегиба. У Т. к. встречаются точки особой природы, к-рых не существует у алгебраич. кривых: точки прекращения, обладающие той особенностью, что окружность достаточно малого радиуса с центром в этой точке пересекает кривую только в одной точке; угловые точки (излома точки), в к-рых прекращаются две ветви кривой, причем каждая из них имеет в такой точке свою касательную; асимптотические точки, к к-рым непрерывно приближается ветвь кривой, делая вокруг точки бесконечное число оборотов. Нек-рые Т. к. обладают своеобразными особенностями формы (напр., имеют пунктирную ветвь из бесконечного множества изолированных точек).

Одна из попыток классифицировать Т. к. основывается на том факте, что у подавляющего большинства известных Т. к. (и у всех алгебраич. кривых) угловой коэффициент y' касательной в каждой точке кривой является корнем алгебраич. уравнения, коэффициенты к-рого представляют собой многочлены от переменных x и y. Иными словами, дифференциальные уравнения большинства известных Т. к. являются уравнениями 1-го порядка вида

$$\sum_{r=0}^{n} f_r(x,\ y)(y')^{n-r}=0,$$

где $f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$ — многочлены без общих множителей. Это обстоятельство позволяет объединить как все алгебраич. кривые, так и почти все Т. к. (кроме, напр., *Корню спирали*) в группу т. н. паналгебраических кривых, к-рые различаются по степени n и по рангу ν — максимальной степени многочленов $f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$. Так, напр., у кривых 3-го порядка $n=1$, $\nu=2$; у *архимедовой спирали* $n=2$, $\nu=4$. Паналгебраич. кривые обладают многими свойствами, присущими алгебраич. кривым. Напр., на них могут быть обобщены понятия *гессианы* и *поляры*. О попытках дальнейшей классификации паналгебраич. кривых см. [1].

Примеры Т. к. см. *Спирали*, *Цепная линия*, *Диностратa квадратриса*, *Циклоида*, а также графики *трансцендентных функций*: показательной, логарифмической, тригонометрической и др.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

ТРАНСЦЕНДЕНТНАЯ ТОЧКА ВЕТВЛЕНИЯ *а* аналитической функции $f(z)$ — точка ветвления, не являющаяся *алгебраической точкой ветвления*. Иначе говоря, это либо точка ветвления конечного порядка $k>0$, в к-рой, однако, не существует ни конечного, ни бесконечного предела $\lim\limits_{z\to a,\ z\neq a} f(z)$, либо *ло-*

гарифмическая точка ветвления бесконечного порядка. Напр., первая возможность реализуется в Т. т. в. $a=0$ для функции $\exp(1/\sqrt[k]{z})$, а вторая — для функции $\ln z$.

В первом случае — Т. т. в. a конечного порядка k — функция $f(z)$ в окрестности a разлагается в ряд Пюизё вида

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^{n/k},$$

причем среди коэффициентов c_n с отрицательными индексами имеется бесконечно много отличных от нуля.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968.

Е. Д. Соломенцев.

ТРАНСЦЕНДЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ — в узком смысле слова *мероморфная функция* в плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z, отличная от *рациональной функции*. В частности, сюда относятся целые Т. ф., т. е. *целые функции*, отличные от многочленов, напр. показательная функция e^z, тригонометрич. функции $\sin z$, $\cos z$, гиперболич. функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, функция $1/\Gamma(z)$, где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. Целые Т. ф. имеют единственную существенно особую точку в бесконечности. Собственно мероморфные Т. ф. характеризуются наличием конечного или бесконечного множества полюсов в конечной плоскости $\mathbb{C}$ и соответственно наличием существенно особой точки или предельной точки полюсов в бесконечности; к ним, напр., относятся тригонометрич. функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, гиперболич. функции $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$, гамма-функция $\Gamma(z)$. Приведенное определение Т. ф. распространяется на мероморфные функции $f(z)$ в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 2$, многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$.

В широком смысле слова под Т. ф. понимается всякая аналитич. функция (однозначная или многозначная), отличная от алгебраич. функции, для вычисления значений к-рой помимо алгебраич. операций над аргументом, необходимо применить предельный переход в той или иной форме. Для Т. ф. характерно наличие у нее хотя бы одной особенности, не являющейся полюсом или алгебраич. точкой ветвления; напр., логарифмич. функция $\ln z$ имеет две трансцендентные точки ветвления $z=0$ и $z=\infty$. Аналитич. функция трансцендентна тогда и только тогда, когда ее риманова поверхность не компактна.

Важный класс Т. ф. составляют часто встречающиеся специальные функции: *гамма-функция* и *бета-функция* Эйлера, *гипергеометрическая функция* и *вырожденная гипергеометрическая функция*, особенно ее частные случаи — *сферические функции*, *цилиндрические функции*, *Матьё функции*.

Лит.: [1] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [2] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963; [3] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1, М., 1962.

Л. Д. Кудрявцев, Е. Д. Соломенцев.

ТРАНСЦЕНДЕНТНОЕ РАСШИРЕНИЕ — расширение поля, не являющееся алгебраическим. Расширение K/k трансцендентно тогда и только тогда, когда поле K содержит элементы, трансцендентные над k, то есть элементы, не являющиеся корнем никакого алгебраич. уравнения с коэффициентами из k.

Элементы множества $X\subset K$ наз. алгебраически независимыми над k, если для любого конечного набора $x_1, x_2, \ldots, x_m\in K$ и любого многочлена $F(X_1, \ldots, X_m)$ с коэффициентами из k

$$F(x_1, \ldots, x_m)\neq 0.$$

Элементы множества X трансцендентны над k. Если X — максимальное множество, все элементы к-рого алгебраически независимы над k, то X наз. базисом трансцендентности поля K над k.

Мощность множества X наз. степенью трансцендентности поля K над k и является инвариантом расширения K/k. Для башни полей $L \supset K \supset k$ степень трансцендентности L/k равна сумме степеней трансцендентности L/K и K/k.

Если все элементы множества X алгебраически независимы над k, то расширение $k(X)$ наз. чисто трансцендентным. В этом случае поле $k(X)$ изоморфно полю рациональных функций от множества переменных X над k. Любое расширение полей L/k представимо в виде башни расширений $L \supset K \supset k$, где L/K — алгебраическое, а K/k — чисто трансцендентное расширение. Если поле K можно выбрать так, чтобы L/K было сепарабельным расширением, то расширение L/k наз. сепарабельно порожденным, а базис трансцендентности K над k — сепарирующим базисом. Если L сепарабельно порождено над k, то L сепарабельно над k. В случае когда расширение L/k конечно порождено, верно и обратное утверждение. Расширение K/k сепарабельно тогда и только тогда, когда любое дифференцирование поля k продолжается на K. Такое продолжение определено однозначно для любого дифференцирования тогда и только тогда, когда расширение K/k алгебраично.

Лит.: [1] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1, М., 1963; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965.

Л. В. Кузьмин.

ТРАНСЦЕНДЕНТНОЕ ЧИСЛО — число, не являющееся корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами. Областью определения таких чисел являются поля действительных, комплексных и p-адических чисел. Существование и явные построения действительных Т. ч. обосновал Ж. Лиувилль [1] на основе замеченного им факта: иррациональные алгебраич. числа не допускают «очень сильных» приближений рациональными числами (см. *Лиувилля теорема* о приближении алгебраич. чисел). Аналогичные соображения позволяют строить p-адические Т. ч. Г. Кантор [2], обнаружив счетность множества всех алгебраич. чисел и несчетность множества всех действительных чисел, тем самым доказал, что действительные Т. ч. образуют множество мощности континуума. Э. Борель [3], введя первые понятия теории меры, установил, что «почти все» действительные числа трансцендентны. Позднее было найдено, что Т. ч. Лиувилля образуют множество, всюду плотное на действительной числовой оси, имеющее мощность континуума и нулевую меру Лебега. Хотя еще в сер. 18 в. возникла гипотеза о трансцендентности чисел типа e, π, $\ln 2$, $2^{\sqrt{2}}$ и др., доказательств этого долго не удавалось получить. Трансцендентность e доказал Ш. Эрмит [4], π и вообще логарифмов алгебраич. чисел — Ф. Линдеман [5], $2^{\sqrt{2}}$ — А. О. Гельфонд [6], К. Зигель [7] разработал общий метод доказательства трансцендентности и алгебраич. независимости значений в алгебраич. точках целых функций определенного класса (E-функции), удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям с полиномиальными коэффициентами. А. О. Гельфонд [8] и Т. Шнайдер [9] одновременно и независимо доказали, что α^β трансцендентно при алгебраическом $\alpha \neq 0, 1$ и алгебраическом иррациональном β (т. н. седьмая проблема Гильберта), А. Бейкер [10] доказал трансцендентность произведений чисел вида α^β при естественных ограничениях. Аналогичные результаты получены для p-адических Т. ч. (исключая теорию E-функций Зигеля). Развитие методов теории Т. ч. оказало сильное влияние на новейшие исследования диофантовых уравнений [10], [11].

Лит.: [1] Liouville J., «C. r. Acad. sci.», 1844, t. 18, p. 883—85, 910—11; [2] Cantor G., Gesammelte Abhandlungen, B., 1932; [3] Borel E., Leçons sur les fonctions discontinues, P., 1898; [4] Hermite C., «C. r. Acad. sci.», 1873, t. 77,

р. 18—24, 74—79, 226—33, 285—93; [5] Lindemann C. L. F., «Math. Ann.», 1882, Bd 20, S. 213—25; [6] Гельфонд А. О., «C. r. Acad. sci.», 1929, t. 189, p. 1224—28; [7] Siegel C., «Abhandl. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Cl.», 1929, № 1, S. 1—70; [8] Гельфонд А. О., «Докл. АН СССР», 1934, т. 2, с. 1—6; [9] Schneider Th., «J. reine und angew. Math.», 1934, Bd 172, S. 65—74; [10] Baker A., Transcendental number theory, L., 1975; [11] Спринджук В. Г., Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных, М., 1982; [12] Фельдман Н. И., Седьмая проблема Гильберта, М., 1982.

В. Г. Спринджук.

ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ МЕРА — функция, характеризующая отклонение заданного *трансцендентного числа* от множества алгебраич. чисел ограниченной степени и ограниченной высоты при изменении границ для этих параметров. Для трансцендентного ω и натуральных n и H Т. м. есть

$$w_n(\omega;\ H)=\min|P(\omega)|,$$

где минимум берется по всем ненулевым целочисленным многочленам $P(x)$ степени не более n и высоты не более H. Из *Дирихле принципа* «ящиков» следует, что всегда

$$w_n(\omega;\ H)<c_1^nH^{-n},$$

где c_1 зависит только от ω. Во многих случаях вместе с доказательством трансцендентности числа ω удается получить оценку снизу для Т. м. в терминах степенной, логарифмической и экспоненциальной функций от n и H. Напр., метод Эрмита доказательства трансцендентности e позволяет получить неравенство

$$w_n(e;\ H)>H^{-n-\frac{c_2n^2\ln n}{\ln\ln H}},$$

где $c_2>0$ — абсолютная постоянная и $H\geqslant H_0(n)$. При любых фиксированных n и $\varepsilon>0$

$$w_n(\omega;\ H)>c_3H^{-n-\varepsilon},\ c_3=c_3(\omega;\ n,\varepsilon)$$

для почти всех (в смысле Лебега) действительных чисел ω (см. *Малера проблема*). Трансцендентные числа могут быть классифицированы на основе различий в асимптотич. поведении $w_n(\omega;\ H)$ при неограниченном изменении n и H (см. [3]).

Лит.: [1] Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952; [2] Cijsouw P. L., Transcendence measures, Amst., 1972 (Diss.); [3] Baker A., Transcendental number theory, L., 1975.

В. Г. Спринджук.

ТРАПЕЦИЙ ФОРМУЛА — частный случай *Ньютона — Котеса квадратурной формулы*, в к-рой берется два узла:

$$\int_a^b f(x)\,dx\cong\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]. \qquad (1)$$

Если подинтегральная функция $f(x)$ сильно отличается от линейной, то формула (1) дает малую точность. Промежуток $[a,\ b]$ разбивается на n частичных промежутков $[x_i,\ x_{i+1}]$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, длины $h=(b-a)/n$ и для вычисления интеграла по промежутку $[x_i,\ x_{i+1}]$ используется Т. к. ф.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx\cong\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})].$$

Суммирование левой и правой части этого приближенного равенства по i от 0 до $n-1$ приводит к составной Т. к. ф.:

$$\int_a^b f(x)\,dx\cong h\left[\frac{f(a)}{2}+f(x_1)+\right.$$
$$\left.+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{f(b)}{2}\right], \qquad (2)$$

где $x_j=a+jh$, $j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Квадратурную формулу (2) также называют Т. к. ф. (без добавления слова составная). Алгебраич. степень точности квадратурной формулы (2), как и формулы (1), равна 1. Квадратурная формула (2) точна для тригонометрич. функций

$$\cos\frac{2\pi}{b-a}kx,\ \sin\frac{2\pi}{b-a}kx,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

В случае $b-a=2\pi$ формула (2) точна для всех тригонометрич. полиномов порядка не выше $n-1$, более того, ее тригонометрич. степень точности равна $n-1$.

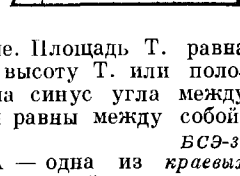
Если подинтегральная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, то погрешность $R(f)$ квадратурной формулы (2) — разность между интегралом и квадратурной суммой — имеет представление

$$R(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi),$$

где ξ — нек-рая точка промежутка $[a, b]$.

И. П. Мысовских.

ТРАПЕЦИЯ — выпуклый четырехугольник, у к-рого две стороны параллельны, а две другие — непараллельны (см. рис.). Параллельные стороны наз. о с н о в а н и я м и Т., а непараллельные — ее б о к о в ы м и с т о р о н а м и; отрезок, соединяющий середины боковых сторон Т.,— ее с р е д н е й л и н и е й; средняя линия параллельна основаниям Т. и равна их полусумме. Площадь Т. равна произведению средней линии на высоту Т. или половине произведения диагоналей на синус угла между ними. Т., боковые стороны к-рой равны между собой, наз. р а в н о б о ч н о й.



БСЭ-3.

ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА — одна из *краевых задач* для дифференциальных уравнений с частными производными. Пусть, напр., в ограниченной области Ω, в каждой точке границы Γ к-рой существует нормаль, задано эллиптич. уравнение 2-го порядка

$$Lu = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)\, u(x) = f(x), \qquad (*)$$

где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$. Т. к. з. для уравнения (*) в области Ω наз. следующая задача: из множества всех решений и $u(x)$ уравнения (*) выделить те, к-рые в каждой граничной точке имеют производные по внутренней конормали N и удовлетворяют условию

$$\frac{\partial u(x)}{\partial N} + \alpha(x)\, u(x) = v(x), \quad x \in \Gamma,$$

где $\alpha > 0$ и v — заданные непрерывные на Γ функции.

А. Б. Иванов.

ТРЕУГОЛЬНАЯ ГРУППА, т р и а н г у л и р у е м а я г р у п п а, — то же, что *Ли вполне разрешимая группа*.

ТРЕУГОЛЬНАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица, у к-рой все элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю. В первом случае матрица наз. в е р х н е й т р е у г о л ь н о й м а т р и ц е й, во втором — н и ж н е й т р е у г о л ь н о й м а т р и ц е й. Определитель Т. м. равен произведению всех ее диагональных элементов.

О. А. Иванова.

ТРЕУГОЛЬНИК в е в к л и д о в о й п л о с к о с т и — три точки (вершины) и три отрезка прямых (стороны) с концами в этих точках. Иногда при определении Т. к нему относят и выпуклую часть плоскости, к-рая ограничена сторонами Т.

Понятие Т. вводится и в многообразиях, отличных от евклидовой плоскости. Т. обычно определяется как три точки и три отрезка геодезических с концами в этих точках. Таковы, напр., сферич. треугольник в *сферической геометрии*, треугольник в плоскости Лобачевского (см. *Неевклидовы геометрии*).

Лит.: [1] К о к с е т е р Г. С. М., Г р е й т ц е р С. Л., Новые встречи с геометрией, пер. с англ., М., 1978; [2] К о к с е т е р Х. С. М., Введение в геометрию, пер. с англ., М., 1966; [3] З е т е л ь С. И., Новая геометрия треугольника, 2 изд., М., 1962; [4] А д а м а р Ж., Элементарная геометрия, ч. 1. Планиметрия, пер. с франц., 4 изд., М., 1957; [5] Е ф р е м о в Д., Новая геометрия треугольника, Одесса, 1902.

А. Б. Иванов.

ТРЕУГОЛЬНОЕ ЧИСЛО — см. *Арифметический ряд.*

ТРЕУГОЛЬНЫЙ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — *матричный метод суммирования*, определенный треугольной матрицей

$$A = \| a_{nk} \|, \ n, \ k = 1, 2, \ldots,$$

т. е. матрицей, у к-рой $a_{nk} = 0$ при $k > n$. Т. м. с. является частным случаем *конечнострочных методов суммирования*. Треугольная матрица A наз. нормальной, если $a_{nn} \neq 0$ для всех n. Преобразование

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} s_k,$$

осуществляемое посредством нормальной треугольной матрицы A, допускает обращение

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}^{-1} \sigma_k,$$

где $A^{-1} = \| a_{nk}^{-1} \|$ — матрица, обратная для A. Этот факт упрощает доказательство ряда теорем для матричных методов суммирования, определенных нормальными треугольными матрицами. К Т. м. с. относятся, напр., *Чезаро метод суммирования*, *Вороного метод суммирования*.

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, 1977.

И. И. Волков.

ТРЕУГОЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ — 1) Т. э. алгебры $\mathrm{End}\, V$ эндоморфизмов конечномерного векторного пространства V над полем k — элемент $X \in \mathrm{End}\, V$, все собственные значения к-рого принадлежат k. Если k алгебраически замкнуто, то всякий элемент из $\mathrm{End}\, V$ треуголен. Для Т. э. X (и только для такого элемента) существует базис в V, относительно к-рого матрица эндоморфизма X треугольна (или, что то же, существует инвариантный относительно X полный флаг в V). Для Т. э. имеется *Жордана разложение* над k. Существует ряд обобщений понятия Т. э. в $\mathrm{End}\, V$ на случай бесконечномерного V (см. [2]).

2) Т. э. конечномерной алгебры A над полем k — такой элемент $a \in A$, что оператор правого (или левого, в зависимости от рассматриваемого случая) умножения на a является Т. э. в алгебре $\mathrm{End}_k A$. Если A изоморфна алгебре $\mathrm{End}\, V$ для нек-рого конечномерного векторного пространства V над k, то эти два (формально различные) определения приводят к одному и тому же понятию.

В алгебрах Ли треугольность элемента $x \in A$ означает треугольность эндоморфизма ad_x (где $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$). Множество всех Т. э. в алгебре Ли, вообще говоря, не замкнуто относительно операций сложения и коммутирования (напр., для $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ — простой алгебры Ли вещественных матриц порядка 2 со следом 0). Однако в случае разрешимой алгебры A это множество является даже характеристич. идеалом в A.

3) Т. э. в связной конечномерной группе Ли G — элемент $g \in G$, для к-рого Ad_g является Т. э. в $\mathrm{End}\, \mathfrak{g}$ (здесь $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}$ — присоединенное представление группы Ли G в группе $\mathrm{Aut}\, \mathfrak{g} \subset \mathrm{End}\, \mathfrak{g}$ автоморфизмов ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Если $\exp : \mathfrak{g} \to G$ — экспоненциальное отображение, а $X \in \mathfrak{g}$ — Т. э. (в смысле пункта 2), то $\exp(X)$ — Т. э. в G. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Алгебры Ли и группы Ли, все элементы к-рых треугольны, наз. треугольными алгебрами или группами соответственно, а также *Ли вполне разрешимыми алгебрами* и *Ли вполне разрешимыми группами*.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Плоткин Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966; [3] Постников М. М., Линейная алгебра и дифференциальная геометрия, М., 1979.

В. В. Горбацевич.

ТРЕФФЦА МЕТОД — один из вариационных методов решения краевых задач. Пусть требуется решить краевую задачу

$$\Delta u = 0, \quad u|_S = \varphi, \qquad (*)$$

где S — граница области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Решение задачи (*) минимизирует функционал

$$J(u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u(x))^2 \, dx$$

среди всех функций, удовлетворяющих краевому условию $u/S = \varphi$. Т. м. заключается в следующем. Пусть дана последовательность гармонических в Ω функций $v_1, v_2, \ldots$, квадратично суммируемых в Ω вместе с первыми производными. Приближенное решение разыскивается в виде

$$u_n = \sum_{j=1}^n c_j v_j,$$

коэффициенты c_j определяются из условия минимума $J(u_n - u)$, где u — точное решение задачи (*). Это приводит к следующей системе уравнений относительно $c_1, \ldots, c_n$:

$$\sum_{j=1}^n c_j \int_S v_j \frac{\partial v_i}{\partial \nu} \, dS = \int_S \varphi \frac{\partial v_i}{\partial \nu} \, dS,$$

$$i = 1, \ \ldots, \ n,$$

где ν — внешняя нормаль к S.

Т. м. допускает обобщение и обоснование для различных краевых задач (см. [2] — [4]).

Метод предложен Э. Треффцем (см. [1]).

Лит.: [1] Trefftz E., в сб.: Verhandl. des 2. Internat. Kongresses für technische Mechanik. Zürich, 1926, 12—17 Sept., Zürich — Lpz., 1927, S. 131—37; [2] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, 2 изд., М., 1970; [3] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы высшей математики, т. 2, Минск, 1975; [4] Бирман М. Ш., «Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ. и астр.», 1956, № 13, в. 3, с. 69—89. *Г. М. Вайникко.*

«ТРЕХ СИГМ ПРАВИЛО» — мнемоническое правило, согласно к-рому в нек-рых задачах теории вероятностей и математич. статистики считают практически невозможным событие, заключающееся в отклонении значения нормально распределенной случайной величины от ее математич. ожидания больше, чем на три стандартных отклонения.

Пусть X — нормально $N(a, \sigma^2)$ распределенная случайная величина. Для любого $k > 0$

$$\mathsf{P}\{|X - a| < k\sigma\} = 2\Phi(k) - 1,$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция распределения стандартного нормального закона, откуда, в частности, при $k = 3$ следует, что

$$\mathsf{P}\{a - 3\sigma < X < a + 3\sigma\} = 0{,}99730.$$

Последнее равенство означает, что значения случайной величины X будут отклоняться от ее математич. ожидания a на расстояние, превосходящее 3σ в среднем не более чем 3 раза на одну тысячу испытаний. Именно это обстоятельство используют иногда экспериментаторы в нек-рых задачах теории вероятностей и математич. статистики, считая, что событие $\{|X - a| > 3\sigma\}$ является практически невозможным и, следовательно, событие $\{|X - a| < 3\sigma\}$ — практически достоверным. В этом случае говорят, что экспериментатор придерживается «правила трех сигм».

Лит.: [1] Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969.

М. С. Никулин.

ТРЕХ ТЕЛ ЗАДАЧА — задача о движении трех тел, рассматриваемых как материальные точки, взаимно притягивающихся по закону тяготения Ньютона. Классич. пример Т. т. з. — задача о движении системы Солнце — Земля — Луна. Т. т. з. состоит в нахожде-

нии общего решения системы дифференциальных уравнений вида

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

$$i = 1, 2, 3,$$

где x_i, y_i, z_i — прямоугольные координаты тела M_i в нек-рой абсолютной системе координат с неизменными направлениями осей, t — время, m_i — масса тела M_i, а U — силовая функция, зависящая только от взаимных расстояний между телами. Функция U определяется соотношением

$$U = f\left(\frac{m_1m_2}{\Delta_{12}} + \frac{m_2m_3}{\Delta_{23}} + \frac{m_3m_1}{\Delta_{13}}\right),$$

где взаимные расстояния Δ_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, даются формулой

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}.$$

Из свойств силовой функции выводятся десять первых интегралов уравнений движения в абсолютной системе координат. Шесть из них, называемые интегралами движения центра масс, определяют равномерное и прямолинейное движение центра масс трех тел. Три интеграла моментов количества движения задают неизменную величину и направление вектора момента количества движения системы трех тел. Интеграл энергии определяет постоянную величину полной энергии системы. Г. Брунс (H. Bruns, 1887) доказал, что уравнения движения Т. т. з. не имеют никаких других первых интегралов, выражающихся с помощью алгебраич. функций от координат и их производных. А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1889) доказал, что уравнения движения Т. т. з. не имеют также трансцендентных интегралов, выражающихся через однозначные аналитич. функции. К. Сундман (C. Sundman, 1912) нашел общее решение задачи в виде степенных рядов относительно нек-рой регуляризирующей переменной, сходящихся для любого момента. Однако ряды Сундмана оказались совершенно бесполезными как для качественных исследований, так и для практических вычислений вследствие их крайне медленной сходимости.

Уравнения Т. т. з. допускают пять частных решений, в к-рых все три материальные точки находятся в некоторой неизменной плоскости. При этом конфигурация трех тел остается неизменной, и они описывают кеплеровские траектории с общим фокусом в центре масс системы. Два частных решения соответствуют случаю, когда три тела все время образуют равносторонний треугольник. Это — т. н. треугольные решения Т. т. з., или решения Лагранжа. Три частных решения, соответствующие расположению всех трех тел на одной прямой, наз. прямолинейными частными решениями Т. т. з., или решениями Эйлера.

Для общего случая Т. т. з. подробно изучены финальные движения, т. е. предельные свойства движения при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$.

Частным случаем Т. т. з. является т.н. ограниченная Т. т. з., к-рая получается из общей Т. т. з. в том случае, когда масса одного из трех тел столь мала, что ее влиянием на движение остальных двух тел можно пренебречь. В этой задаче тела M_1 и M_2 с конечными массами m_1 и m_2 движутся под действием сил взаимного притяжения по кеплеровским орбитам. В правой прямоугольной системе координат $G\xi\eta\zeta$ с началом G в центре масс тел M_1 и M_2, с осью ξ, направленной по линии, соединяющей тела M_1 и M_2, и осью ζ, перпендикулярной плоскости их движения, движение третьего

тела M_3 с малой массой описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\ddot{\xi}-2\dot{v}\dot{\eta}-\dot{v}^2\xi-\ddot{v}\eta=\frac{\partial W}{\partial \xi},$$

$$\ddot{\eta}+2\dot{v}\dot{\xi}-\dot{v}^2\eta+\ddot{v}\xi=\frac{\partial W}{\partial \eta},$$

$$\ddot{\zeta}=\frac{\partial W}{\partial \zeta},$$

где

$$W=f\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}\right),$$

v — истинная аномалия кеплеровского движения тел M_1 и M_2, а r_1 и r_2 — расстояния от тела M_3 до тел M_1 и M_2 соответственно. В случае к р у г о в о й о г р а н и ч е н н о й Т. т. з.

$$\dot{v}=n=\text{const},\quad \ddot{v}=0,$$

и уравнения движения тела M_3 имеют первый интеграл, наз. и н т е г р а л о м Я к о б и, вида

$$\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2=n^2(\xi^2+\eta^2)+2f\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}\right)+C,$$

где C — произвольная постоянная. Поверхность, определяемая уравнением

$$n^2(\xi^2+\eta^2)+2f\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}\right)+C=0,$$

наз. поверхностью нулевой скорости и замечательна тем, что определяет области возможных движений тела M_3 относительно тел M_1 и M_2. Ограниченная Т. т. з. имеет частные решения, аналогичные частным решениям общей Т. т. з. Положения тела с малой массой при этих частных решениях наз. т о ч к а м и л и б р а ц и и.

Для ограниченной задачи удалось исследовать разнообразные классы периодич. движений.

Лит.: [1] Д у б о ш и н Г. Н., Небесная механика. Аналитические и качественные методы, 2 изд., М., 1978; [2] С у б б о т и н М. Ф., Введение в теоретическую астрономию, М., 1968.

Е. П. Аксенов.

ТРЕХМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — топологическое пространство, каждая точка к-рого имеет окрестность, гомеоморфную трехмерному числовому пространству $\mathbb{R}^3$ или замкнутому полупространству $\mathbb{R}^3_+$. Это определение обычно дополняют требованием того, чтобы Т. м. как топологич. пространство, было хаусдорфовым и имело счетную базу. К р а й Т. м., т. е. совокупность его точек, имеющих окрестность второго, но не первого типа, является *двумерным многообразием* без края. Методы топологии Т. м. весьма специфичны, поэтому она занимает особое место в *топологии многообразий*.

П р и м е р ы. Несколько свойств Т. м., не имеющих, вообще говоря, места в старших размерностях: ориентируемое Т. м. всегда параллелизуемо; замкнутое Т. м. ограничивает нек-рое четырехмерное многообразие; на Т. м. всегда можно ввести кусочно линейную и дифференцируемую структуры, причем любой гомеоморфизм между двумя Т. м. можно аппроксимировать как кусочно линейным гомеоморфизмом, так и диффеоморфизмом.

Один из наиболее употребительных способов задания Т. м. состоит в использовании *Хегора разбиений* и тесно связанных с ними *Хегора диаграмм*. Суть этого способа состоит в том, что любое замкнутое ориентируемое Т. м. M можно разбить на два подмногообразия с общим краем, каждое из к-рых гомеоморфно стандартному полному кренделю V нек-рого рода n. Другими словами, Т. м. M можно получить склеиванием двух экземпляров полного кренделя V по нек-рому гомеоморфизму их краев. Этот факт позволяет сводить многие задачи топологии Т. м. к задачам топологии поверхностей. Минимальное возможное число n наз. р о д о м Т. м. M. Другой полезный способ задания Т. м. основан на существовании тесной связи между Т. м.

и зацеплениями в S^3. Дело в том, что любое замкнутое ориентируемое Т. м. M можно представить в виде $M=\partial W$, где четырехмерное многообразие W получается из 4-шара B^4 приклейкой ручек индекса 2 по компонентам нек-рого оснащенного зацепления L в $S^3=\partial B^4$. Эквивалентно, Т. м. M можно получить из сферы S^3 сферич. перестройками. Дополнительно можно добиться, чтобы все компоненты зацепления L имели четные оснащения, и тогда многообразие W получается параллелизуемым. Часто используется представление Т. м. в виде пространств разветвленных накрытий сферы S^3. Если L — зацепление в S^3, то любое конечнолистное накрывающее пространство пространства $S^3 \setminus L$ можно компактифицировать несколькими окружностями и получить замкнутое Т. м. M. Естественная проекция $p: M \to S^3$, локально гомеоморфная вне $p^{-1}(L)$, наз. разветвленным накрытием сферы S^3 с ветвлением вдоль зацепления L. Любое Т. м. рода 2 двулистно накрывает сферу с ветвлением вдоль нек-рого зацепления, тогда как в случае Т. м. произвольного рода можно гарантировать существование только трехлистного накрытия с ветвлением вдоль нек-рого узла. Это обстоятельство служит первопричиной того, что трехмерная гипотеза Пуанкаре и проблема алгоритмич. распознавания сферы решены пока (1984) только в классе Т. м. рода 2.

Основной задачей топологии Т. м. является задача их классификации. Т. м. M наз. п р о с т ы м, если из $M=M_1 \# M_2$ следует, что ровно одно из многообразий M_1, M_2 является сферой. Каждое компактное Т. м. раскладывается в связную сумму конечного числа простых Т. м. Это разложение единственно в ориентируемом случае и единственно с точностью до замены прямого произведения $S^2 \times S^1$ на косое произведение $S^2 \tilde{\times} S^1$ в неориентируемом случае. Вместо понятия простого Т. м. часто бывает удобнее использовать понятие неприводимого Т. м., т. е. многообразия, в к-ром каждая 2-сфера ограничивает шар. Класс неприводимых Т. м. отличается от класса простых Т. м. ровно на три многообразия: S^3, $S^2 \times S^1$, $S^2 \tilde{\times} S^1$. При этом многообразие S^3 неприводимо, но обычно не считается простым, а многообразия $S^2 \times S^1$ и $S^2 \tilde{\times} S^1$ просты, но приводимы. Неприводимые Т. м. с краем изучены достаточно хорошо. Напр., любую гомотопич. эквивалентность пар $f: (M, \partial M) \to (N, \partial N)$, где M, N — компактные ориентируемые и неприводимые Т. м. с краем, можно продеформировать в гомеоморфизм. В замкнутом случае для этого достаточно дополнительно потребовать, чтобы Т. м. M было достаточно большим, т. е. содержало нек-рую двустороннюю несжимаемую поверхность. При этом поверхность $F \subset M$, $F \neq S^2$, наз. н е с ж и м а е м о й, если индуцируемый вложением гомоморфизм группы $\pi_1(F)$ в группу $\pi_1(M)$ инъективен. Если первая группа гомологий компактного неприводимого Т. м. бесконечна, то такая поверхность всегда существует. Любое компактное ориентируемое неприводимое достаточно большое Т. м., фундаментальная группа к-рого содержит бесконечную циклическую нормальную подгруппу, *является Зейферта многообразием*.

Лит.: [1] Hempel J., 3-manifolds, Princeton, 1976; [2] Waldhausen F., «Ann. Math.», 1968, v. 87, p. 56—88; [3] Jaco W., Lectures on three-manifold topology, Providence, 1980.

С. В. Матвеев.

ТРИАДА — четверка $(X; A, B, x_0)$, где X — топологич. пространство, а A и B — такие его подпространства, что $A \cup B = X$ и $x_0 \in A \cap B$. Вводятся гомотопич. группы Т. $\pi_n(X; A, B, x_0)$, $n \geqslant 3$ (при $n=2$ — просто множества), используемые при доказательстве теоремы о гомотопич. вырезании. Имеется также точная последовательность Майера — Вьеториса, связывающая *гомологий группы* пространств X, A, B, $A \cap B$.

Ю. Б. Рудяк.

ТРИАНГУЛЯЦИЯ — 1) Т. полиэдра, прямолинейная триангуляция,— представление *полиэдра* в виде тела геометрического симплициального комплекса K, т. е. такое его разбиение на замкнутые симплексы, что каждые два симплекса либо не пересекаются, либо пересекаются по их общей грани. Прямолинейные Т. полиэдров служат основным инструментом их изучения. Любой полиэдр имеет Т. и любые две его Т. имеют общее подразделение.

Замкнутой звездой $\mathrm{St}(\sigma, T)$ симплекса σ Т. T наз. объединение симплексов из T, содержащих σ. Имеется представление замкнутой звезды симплекса $\sigma \in T$ в виде *соединения* (джойна) σ и его *пояса* (линка): $\mathrm{St}(\sigma, T) = \sigma * \mathrm{lk}(\delta, T)$. В частности, звезда вершины является *конусом* над ее поясом. Если симплекс $\sigma \in T$ представлен в виде соединения двух своих граней δ и γ, то $\mathrm{lk}(\sigma, T) = \mathrm{lk}(\delta, \mathrm{lk}(\gamma, T))$. Пояс симплекса не зависит от Т.: если σ служит симплексом произвольных прямолинейных Т. T_1, T_2 одного и того же полиэдра, то полиэдры $|\mathrm{lk}(\sigma, T_1)|$ и $|\mathrm{lk}(\sigma, T_2)|$ pl-гомеоморфны. Открытая звезда симплекса $\sigma \in T$ определяется как объединение внутренностей тех симплексов Т. T, для к-рых σ служит гранью. Открытые звезды вершин Т. полиэдра P образуют открытое покрытие P. *Нерв* этого покрытия симплициально изоморфен T. Триангуляции T_1 и T_2 полиэдров P_1 и P_2 комбинаторно эквивалентны, если нек-рые их подразделения симплициально изоморфны. Для комбинаторной эквивалентности T_1 и T_2 необходимо и достаточно pl-гомеоморфности P_1 и P_2. Т. многообразия наз. комбинаторной, если звезда любой ее вершины комбинаторно эквивалентна симплексу. В этом случае звезда любого симплекса Т. также комбинаторно эквивалентна симплексу.

Если P — замкнутый подполиэдр полиэдра Q, то любая Т. K полиэдра P продолжается до нек-рой Т. L полиэдра Q. В этом случае говорят, что пара геометрических симплициальных комплексов (L, K) триангулирует пару (Q, P). Т. прямого произведения $\sigma \times \delta \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ симплексов $\sigma \in \mathbb{R}^m$, $\delta \in \mathbb{R}^n$ можно построить следующим способом. Вершинами Т. служат точки $c_{ij} = (a_i b_j)$, $0 \leqslant i \leqslant \dim \sigma$, $0 \leqslant j \leqslant \dim \delta$, где a_i — вершины σ, а b_j — вершины δ. На вершины $c_{i_0 j_0}, c_{i_1 j_1}, \ldots, c_{i_k j_k}$, где $i_0 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k$, тогда и только тогда натянут k-мерный симплекс, когда среди них нет совпадающих и $j_0 \leqslant j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_k$. Аналогичным способом производится Т. прямого произведения двух симплициальных комплексов с упорядоченными вершинами.

2) Т. топологического пространства, криволинейная триангуляция,— пара (K, f), где K — геометрич. симплициальный комплекс и $f : |K| \to X$ — гомеоморфизм. Т. (K, f) и (L, g) пространства X совпадают, если $g^{-1} f : |K| \to |L|$ — симплициальный изоморфизм. Если σ — симплекс комплекса K и (K, f) — Т. пространства X, то пространство $f(\sigma)$, снабженное гомеоморфизмом $f|_\sigma : \sigma \to f(\sigma)$, наз. топологическим симплексом. Звезда и пояс топологич. симплекса триангулированного топологич. пространства X определяются так же, как и в случае прямолинейных Т. Если точка $a \in X$ служит вершиной Т. (K, f) и (L, g) пространства X, то ее пояса в этих Т. гомотопически эквивалентны.

Лит.: [1] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.—Л., 1947; [2] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977.

С. В. Матвеев.

ТРИВЕКТОР — упорядоченная совокупность $[u, v, w]$ трех векторов u, v, w аффинного пространства A, отложенных от общего начала. Т. полагается равным нулю, если определяющие его векторы компланарны (линейно зависимы). Ненулевой Т. определяет несущую его 3-мерную плоскость. Если пространство A

имеет конечную размерность n, и в нек-ром базисе $e=(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ векторы

$$u=\sum_{i=1}^{n} u^i e_i,\ v=\sum_{i=1}^{n} v^i e_i,\ w=\sum_{i=1}^{n} w^i e_i,$$

то величины

$$a^{ijk}=\begin{vmatrix} u^i & v^i & w^i \\ u^j & v^j & w^j \\ u^k & v^k & w^k \end{vmatrix}=3!\ u^{[i}\ v^j\ w^{k]},\ 1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant n,$$

наз. координатами Т. $[u, v, w]$ в базисе e. Эти координаты кососимметричны по любой паре своих индексов, при замене базиса в A изменяются, как координаты трижды контравариантного тензора. Среди этих координат C_n^3 существенных. Два Т. наз. равными, если в каком-либо базисе A равны их координаты. Класс равных Т. наз. с в о б о д н ы м Т.

При наличии в A скалярного произведения на Т. распространяется ряд метрич. понятий векторной алгебры. М е р о й Т. $[u, v, w]$ наз. трехмерный объем параллелепипеда — множества концов векторов вида $h=xu+yv+zw$, где $0\leqslant x, y, z\leqslant 1$, отложенных от общего начала. В случае когда $\dim A=3$, мера Т. равна модулю смешанного произведения векторов u, v, w. С к а л я р н ы м п р о и з в е д е н и е м двух Т. наз. число, равное произведению мер сомножителей на косинус угла между несущими их плоскостями. Скалярное произведение является билинейной формой от координат сомножителей. Если $\dim A=4$, то Т. $[u, v, w]$ может быть отождествлен с вектором пространства A, наз. векторным произведением векторов u, v, w.

Т. в т е н з о р н о м и с ч и с л е н и и есть любой контравариантный кососимметрич. тензор валентности 3 (т. е. тензор типа (3, 0)). Каждый такой тензор может быть представлен в виде суммы нескольких тензоров, к-рым соответствуют Т. с различными несущими их плоскостями.

См. также *Бивектор*, *Внешнее произведение*, *Поливектор*, *Плюккеровы координаты*.

Л. П. Купцов.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — одна из важнейших *ортогональных систем* функций. Функции Т. с.

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$$

ортогональны на любом отрезке вида $[a-\pi, a+\pi]$, а функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \ldots$$

ортонормированы на этом отрезке. Т. с. полна и замкнута в пространстве $L_p[-\pi, \pi]$ при $1\leqslant p<\infty$, а также в пространстве $C_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций. Эта система образует базис в пространстве $L_p[-\pi, \pi]$ при $1<p<\infty$. Ряды по Т. с. изучаются в теории *тригонометрических рядов*.

Наряду с Т. с. широкое применение находит комплексная тригонометрич. система $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Функции этих систем связаны друг с другом формулами Эйлера.

Лит.: [1] Б а р и Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [2] З и г м у н д А., Тригонометрические ряды, т. 1—2, пер. с англ., 2 изд., М., 1965.

Б. И. Голубов.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ СУММА — конечная сумма S вида

$$S=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F(x)},$$

где $P\geqslant 1$, P — целое число, $F(x)$ — действительная функция x. Т. с. также наз. и более общие суммы S' вида

$$S'=\sum_{x_1=1}^{P_1}\ldots\sum_{x_r=1}^{P_r}\Phi(x_1, \ldots, x_r)\, e^{2\pi i F(x_1, \ldots, x_r)},$$

где $F(x_1, \ldots, x_r)$ — действительная функция, а $\Phi(x_1, \ldots, x_r)$ — произвольная комплекснозначная функция.

Если $F(x)$ — многочлен, то S наз. суммой Вейля; если многочлен $F(x)$ имеет вид

$$F(x)=\frac{a_n x^n+\ldots+a_1 x}{q},\ (a_n,\ \ldots,\ a_1,\ q)=1,$$

то S наз. рациональной тригонометрич. суммой; если $P=q$, то S наз. полной тригонометрич. суммой; если $r=1$, $\Phi(x_1)=1$ при простом x_1, и $\Phi(x_1)=0$ при составном x_1, то S наз. тригонометрич. суммой с простыми числами; если $r\geqslant 1$, $\Phi(x_1, \ldots, x_r)=1$, $F(x_1, \ldots, x_r)$ — многочлен, то S' наз. кратной суммой Вейля. Основной проблемой в теории Т. с. является проблема разыскания верхней грани модуля S и S'.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Избр. тр., М., 1952; [2] его же, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [3] его же, Особые варианты метода тригонометрических сумм, М., 1976; [4] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [5] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М., 1953; [6] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н., Кратные тригонометрические суммы, М., 1980.

А. А. Карацуба.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — класс элементарных функций: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс. Обозначаются соответственно: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$.

Тригонометрические функции действительного аргумента. Пусть A — точка окружности с центром в начале координат и радиусом, равным единице, α — угол между осью абсцисс и вектором OA, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс (рис. 1). При этом если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелке — отрицательной, т. е. α — полярный угол точки A. Если (x_α, y_α) — прямоугольные декартовы координаты точки A, то Т. ф. синус и косинус определяются формулами

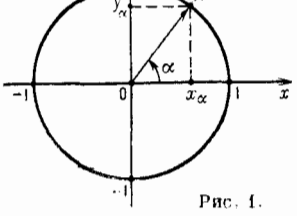


Рис. 1.

$$\sin\alpha=y_\alpha,\quad \cos\alpha=x_\alpha.$$

Остальные Т. ф. могут быть определены формулами

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

Все Т. ф. — периодические функции. Графики Т. ф. даны на рис. 2.

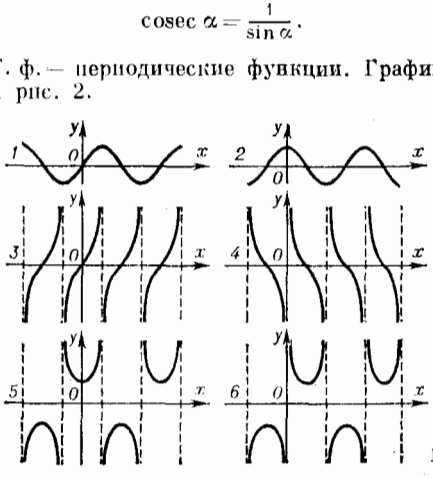


Рис. 2.

Основные свойства Т. ф.: область определения, множество значений, четность и участки монотонности приведены в табл.

Каждая Т. ф. в каждой точке своей области определения непрерывна и бесконечно дифференцируема; производные Т. ф.:

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Интегралы от Т. ф.:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C, \quad \int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C.$$

Все Т. ф. допускают разложение в степенные ряды:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

при $|x| < \infty$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

при $|x| < \infty$,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_n|}{(2n)!}x^{2n-1} + \ldots \text{ при } |x| < \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \left[\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \ldots + \frac{2^{2n}|B_n|}{(2n)!}x^{2n-1}\right],$$

при $0 < |x| < \pi$ (B_n — числа Бернулли).

Функция	Область определения	Множество значений	Четность	Участки монотонности
$\sin x$	$-\infty < x < +\infty$	$[-1, +1]$	нечетная	возрастает при $x \in ((4n-1)\pi/2, (4n+1)\pi/2)$ убывает при $x \in ((4n+1)\pi/2, (4n+3)\pi/2)$
$\cos x$	$-\infty < x < +\infty$	$[-1, +1]$	четная	возрастает при $x \in ((2n-1)\pi, 2n\pi)$ убывает при $x \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$
$\operatorname{tg} x$	$x \neq \pi/2 + \pi n$	$(-\infty, +\infty)$	нечетная	возрастает при $x \in ((2n-1)\pi/2, (2n+1\ \pi/$
$\operatorname{ctg} x$	$x \neq \pi n$	$(-\infty, +\infty)$	нечетная	убывает при $x \in (n\pi, (n+1)\pi)$
$\sec x$	$x \neq \pi/2 + \pi n$	$(-\infty, -1] \cup [+1, +\infty)$	четная	возрастает при $x \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$ убывает при $x \in ((2n-1)\pi, 2n\pi)$
$\operatorname{cosec} x$	$x \neq \pi n$	$(-\infty, -1] \cup [+1, +\infty)$	нечетная	возрастает при $x \in ((4n+1)\pi/2, (4n+3)\pi/2)$ убывает при $x \in ((4n-1)\pi/2, (4n+1)\pi/2)$

Функция $y = \sin x$, являющаяся обратной по отношению к функции $x = \sin y$, определяет y как многозначную функцию от x; она обозначается $y = \operatorname{Arcsin} x$. Аналогично определяются функции, обратные по отношению к другим Т. ф.; все они наз. *обратными тригонометрическими функциями*.

Тригонометрические функции комплексного переменного. Т. ф. для комплексных значений переменного $z = x + iy$ определяются как *аналитические продолжения* соответствующих Т. ф. действительного переменного в комплексную плоскость.

Так, $\sin z$ и $\cos z$ можно определить с помощью рядов для $\sin x$ и $\cos x$. Эти ряды сходятся во всей плоскости, поэтому $\sin z$ и $\cos z$ — *целые функции*.

Т. ф. тангенс и котангенс определяются формулами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Т. ф. $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ — *мероморфные функции*. Полюсы $\operatorname{tg} z$ простые (1-го порядка) и находятся в точках $z = \pi/2 + \pi n$, полюсы $\operatorname{ctg} z$ также простые и находятся в точках $z = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$.

Все формулы, справедливые для Т. ф. действительного аргумента, остаются справедливыми и для комплексного аргумента.

В отличие от Т. ф. действительного переменного, функции $\sin z$ и $\cos z$ принимают все комплексные значения: уравнения $\sin z = a$ и $\cos z = a$ имеют решения для любого комплексного a:

$$z = \arcsin a = -i \ln\left(ia + \sqrt{1 - a^2}\right),$$

$$z = \arccos a = -i \ln\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right).$$

Т. ф. $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ принимают все комплексные значения, кроме $\pm i$: уравнения $\operatorname{tg} z = a$, $\operatorname{ctg} z = a$ имеют решения для любого комплексного числа $a \neq \pm i$:

$$z = \operatorname{arctg} a = \frac{i}{2} \ln \frac{1 - ia}{1 + ia},$$

$$z = \operatorname{arcctg} a = \frac{i}{2} \ln \frac{ia + 1}{ia - 1}.$$

Т. ф. можно выразить через *показательную функцию*:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}),$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \operatorname{tg} z = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}},$$

и *гиперболические функции*:

$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \quad \cos z = \operatorname{ch} iz, \quad \operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz.$$

В. И. Битюцков.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ, конечная тригонометрическая сумма,— выражение вида

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

с действительными коэффициентами a_0, a_k, b_k, $k = 1, \ldots, n$; число n наз. порядком Т. п. ($|a_n| + |b_n| > 0$). Т. п. можно записать в комплексной форме

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

где

$$2c_k = \begin{cases} a_k - ib_k, & k \geqslant 0, \\ a_{-k} + ib_{-k}, & k < 0. \end{cases}$$

Т. п. являются важнейшим средством *приближения функций*.

В. И. Битюцков.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД — ряд по косинусам и синусам кратных дуг, т. е. ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (1)$$

или в комплексной форме

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

где a_k, b_k или, соответственно, c_k наз. коэффициентами Т. р.

Впервые Т. р. встречаются у Л. Эйлера (L. Euler, 1744). Он получил разложения

$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots \quad (0 < x < 2\pi),$$

$$\frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2} = 1 + r\cos x + r^2 \cos 2x + \ldots,$$

$$\frac{r\sin x}{1 - 2r\cos x + r^2} = r\sin x + r^2 \sin 2x + \ldots$$

В сер. 18 в. в связи с исследованиями задачи о свободном колебании струны возник вопрос о возможности

$\operatorname{tg} z$ простые (1-го порядка) и находятся в точках $z=\pi/2+\pi n$, полюсы $\operatorname{ctg} z$ также простые и находятся в точках $z=\pi n$, $n=0, \pm 1, \ldots$.

Все формулы, справедливые для Т. ф. действительного аргумента, остаются справедливыми и для комплексного аргумента.

В отличие от Т. ф. действительного переменного, функции $\sin z$ и $\cos z$ принимают все комплексные значения: уравнения $\sin z=a$ и $\cos z=a$ имеют решения для любого комплексного a:

$$z=\arcsin a=-i\ln\left(ia+\sqrt{1-a^2}\right),$$
$$z=\arccos a=-i\ln\left(a+\sqrt{a^2-1}\right).$$

Т. ф. $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ принимают все комплексные значения, кроме $\pm i$: уравнения $\operatorname{tg} z=a$, $\operatorname{ctg} z=a$ имеют решения для любого комплексного числа $a\neq\pm i$:

$$z=\operatorname{arctg} a=\frac{i}{2}\ln\frac{1-ia}{1+ia},$$
$$z=\operatorname{arcctg} a=\frac{i}{2}\ln\frac{ia+1}{ia-1}.$$

Т. ф. можно выразить через *показательную функцию*:

$$\sin z=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right),$$
$$\cos z=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right),\quad \operatorname{tg} z=\frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}},$$

и *гиперболические функции*:

$$\sin z=-i\operatorname{sh} iz,\quad \cos z=\operatorname{ch} iz,\quad \operatorname{tg} z=-i\operatorname{th} iz.$$

В. И. Битюцков.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ, конечная тригонометрическая сумма,— выражение вида

$$T(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

с действительными коэффициентами a_0, a_k, b_k, $k=1, \ldots, n$; число n наз. порядком Т. п. ($|a_n|+|b_n|>0$). Т. п. можно записать в комплексной форме

$$T(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ikx},$$

где

$$2c_k=\begin{cases}a_k-ib_k, & k\geqslant 0,\\ a_{-k}+ib_{-k}, & k<0.\end{cases}$$

Т. п. являются важнейшим средством *приближения функций*.

В. И. Битюцков.

Участки монотонности
при $x\in((4n-1)\pi/2,\ (4n+1)\pi/2)$
ри $x\in((4n+1)\pi/2,\ (4n+3)\pi/2)$
при $x\in((2n-1)\pi,\ 2n\pi)$
ри $x\in(2n\pi,\ (2n+1)\pi)$
при $x\in((2n-1)\pi/2,\ (2n+1\ \pi/$
ри $x\in(n\pi,\ (n+1)\pi)$
при $x\in(2n\pi,\ (2n+1)\pi)$
ри $x\in((2n-1)\pi,\ 2n\pi)$
при $x\in((4n+1)\pi/2,\ (4n+3)\pi/2)$
ри $x\in((4n-1)\pi/2,\ (4n+1)\pi/2)$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД — ряд по косинусам и синусам кратных дуг, т. е. ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\qquad(1)$$

или в комплексной форме

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx},$$

где a_k, b_k или, соответственно, c_k наз. коэффициентами Т. р.

Впервые Т. р. встречаются у Л. Эйлера (L. Euler, 1744). Он получил разложения

$$\frac{\pi-x}{2}=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots\quad(0<x<2\pi),$$
$$\frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}=1+r\cos x+r^2\cos 2x+\ldots,$$
$$\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}=r\sin x+r^2\sin 2x+\ldots$$

В сер. 18 в. в связи с исследованиями задачи о свободном колебании струны возник вопрос о возможности

представления функции, характеризующей начальное положение струны, в виде суммы Т. р. Этот вопрос вызвал острые споры, продолжавшиеся несколько десятилетий, лучших аналитиков того времени — Д. Бернулли (D. Bernoulli), Ж. Д'Аламбера (J. D'Alembert), Ж. Лагранжа (J. Lagrange), Л. Эйлера (L. Euler). Споры относились к содержанию понятия функции. В то время функции обычно связывались с их аналитич. заданием, что приводило к рассмотрению только аналитических или кусочно аналитических функций. А здесь появилась необходимость для функции, графиком к-рой является достаточно произвольная кривая, построить Т. р., представляющий эту функцию.

Но значение этих споров больше. Фактически в них обсуждались или возникли в связи с ними вопросы, связанные со многими принципиально важными понятиями и идеями математич. анализа вообще,— представление функций рядами Тейлора и аналитич. продолжение функций, использование расходящихся рядов, перестановка пределов, бесконечные системы уравнений, интерполирование функций многочленами и др.

И в дальнейшем, как и в этот начальный период, теория Т. р. служила источником новых идей математич. анализа и влияла на развитие др. его разделов. Существенную роль играли исследования по Т. р. в построении интегралов Римана и Лебега. Теория функций действительного переменного возникла и развивалась затем в тесной связи с теорией Т. р. Как обобщения теории Т. р. появились интеграл Фурье, почти периодические функции, общие ортогональные ряды, абстрактный гармонический анализ. Исследования по Т. р. послужили исходным пунктом при создании теории множеств. Т. р. являются мощным средством представления и исследования функций.

Вопрос, приведший к спорам математиков 18 в., был решен в 1807 Ж. Фурье (J. Fourier), указавшим формулы для вычисления коэффициентов Т. р. (1), к-рый должен представлять на $(0,2\pi)$ функцию $f(x)$:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,\\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и применившим их при решении задач теплопроводности. Формулы (2) получили название ф о р м у л Ф у р ь е, хотя они встречались ранее у А. Клеро (A. Clairaut, 1754), а Л. Эйлер (1777) приходил к ним с помощью почленного интегрирования. Т. р. (1), коэффициенты к-рого определяются по формулам (2), наз. р я д о м Ф у р ь е функции f, а числа a_k, b_k — к о э ф ф и ц и е н т а м и Ф у р ь е.

Характер получаемых результатов зависит от того, как понимается представление функции рядом, как понимается интеграл в формулах (2). Современный вид теория Т. р. приобрела после появления интеграла Лебега.

Теорию Т. р. можно условно разделить на два больших раздела — теорию *Фурье рядов*, в к-рой предполагается, что ряд (1) является рядом Фурье нек-рой функции, и теорию общих Т. р., где такое предположение не делается. Ниже указываются основные результаты, полученные в теории общих Т. р. (при этом мера множеств и измеримость функций понимаются по Лебегу).

Первым систематич. исследованием Т. р., в к-ром не предполагалось, что эти ряды являются рядами Фурье, была диссертация Б. Римана (B. Riemann, 1853). Поэтому теорию общих Т. р. наз. иногда р и м а н о в с к о й т е о р и е й Т. р.

Для изучения свойств произвольного Т. р. (1) со стремящимися к нулю коэффициентами Б. Риман

рассматривал непрерывную функцию $F(x)$, являющуюся суммой равномерно сходящегося ряда

$$\frac{a_0}{4}x^2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k\cos kx+b_k\sin kx}{k^2},$$

полученного после двукратного почленного интегрирования ряда (1). Если ряд (1) сходится в нек-рой точке x к числу s, то в этой точке существует и равна s вторая симметрич. производная функции F:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+2h)-2F(x)+F(x-2h)}{4h^2}=s.$$

Так как

$$\frac{F(x+2h)-2F(x)+F(x-2h)}{4h^2}=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

то это приводит к суммированию ряда (1), порождаемому множителями $\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2$, наз. м е т о д о м с у м м и р о в а н и я Р и м а н а. С помощью функции F формулируется принцип локализации Римана, согласно к-рому поведение ряда (1) в точке x зависит только от поведения функции F в произвольно малой окрестности этой точки.

Если Т. р. сходится на множестве положительной меры, то его коэффициенты стремятся к нулю (т е о р е м а К а н т о р а — Л е б е г а). Стремление к нулю коэффициентов Т. р. следует также из его сходимости на множестве второй категории (У. Юнг, W. Young, 1909).

Одной из центральных проблем теории общих Т. р. является задача о представлении произвольной функции Т. р. Усилив результаты Н. Н. Лузина (1915) о представлении функций Т. р., суммируемыми почти всюду методами Абеля — Пуассона и Римана, Д. Е. Меньшов доказал (1940) следующую теорему, относящуюся к наиболее важному случаю, когда представление функции f понимается как сходимость Т. р. к $f(x)$ почти всюду. Для каждой измеримой и конечной почти всюду функции f существует Т. р., сходящийся к ней почти всюду (т е о р е м а М е н ь ш о в а). Следует отметить, что если даже функция f интегрируема, то в качестве такого ряда нельзя, вообще говоря, взять ряд Фурье функции f, т. к. существуют ряды Фурье, расходящиеся всюду.

Приведенная теорема Меньшова допускает следующее уточнение: если функция f измерима и конечна почти всюду, то существует такая непрерывная функция φ, что $\varphi'(x)=f(x)$ почти всюду и почленно продифференцированный ряд Фурье функции φ сходится к $f(x)$ почти всюду (Н. К. Бари, 1952).

Неизвестно (1984), можно ли в теореме Меньшова опустить условие конечности функции f почти всюду. В частности, неизвестно (1984), может ли Т. р. сходиться почти всюду к $+\infty$.

Поэтому задача о представлении функций, к-рые могут принимать бесконечные значения на множестве положительной меры, была рассмотрена для случая, когда сходимость почти всюду заменяется на более слабое требование — сходимость по мере. Сходимость по мере к функциям, к-рые могут принимать бесконечные значения, определяется так: последовательность частных сумм Т. р. $s_n(x)$ сходится по мере к функции $f(x)$, если

$$s_n(x)=f_n(x)+\alpha_n(x),$$

где $f_n(x)$ сходятся к $f(x)$ почти всюду, а последовательность $\alpha_n(x)$ сходится по мере к нулю. В этой постановке вопрос о представлении функций решен до конца: для каждой измеримой функции существует Т. р., сходящийся к ней по мере (Д. Е. Меньшов, 1948),

Много исследований посвящено проблеме единственности Т. р.: могут ли два разных Т. р. сходиться к одной и той же функции; в др. формулировке: если Т. р. сходится к нулю, то следует ли отсюда, что все коэффициенты ряда равны нулю. Здесь можно иметь в виду сходимость во всех точках или во всех точках вне нек-рого множества. Ответ на эти вопросы существенно зависит от свойств того множества, вне к-рого сходимость не предполагается.

Установилась следующая терминология. Множество $E \subset [0,2\pi]$ наз. *единственности множеством* или *U-множеством*, если из сходимости Т. р. к нулю на $[0,2\pi)$ всюду, кроме, быть может, точек множества E, следует, что все коэффициенты этого ряда равны нулю. В противном случае E наз. *M-множеством*.

Как показал Г. Кантор (G. Cantor, 1872), пустое множество, а также любое конечное множество являются *U*-множествами. Произвольное счетное множество также является *U*-множеством (У. Юнг, 1909). С др. стороны, каждое множество положительной меры является *M*-множеством.

Существование *M*-множеств меры нуль было установлено Д. Е. Меньшовым (1916), к-рый построил первый пример совершенного множества, обладающего этими свойствами. Этот результат имеет принципиальное значение в проблеме единственности. Из существования *M*-множеств меры нуль следует, что при представлении функций Т. р., сходящимися почти всюду, эти ряды определяются заведомо неоднозначно.

Совершенные множества могут быть и *U*-множествами (Н. К. Бари; А. Райхман, A. Rajchman, 1921). В проблеме единственности существенную роль играют весьма тонкие характеристики множеств меры нуль. Общий вопрос о классификации множеств нулевой меры на *M*- и *U*-множества остается (1984) открытым. Он не решен даже для совершенных множеств.

К проблеме единственности примыкает следующая задача. Если Т. р. сходится к функции $f \in L(0,2\pi)$, то должен ли этот ряд быть рядом Фурье функции f. П. Дюбуа-Реймон (P. Du Bois-Reymond, 1877) дал положительный ответ на этот вопрос, если f интегрируема в смысле Римана, а ряд сходится к $f(x)$ во всех точках. Из результатов Ш. Ж. Валле Пуссена (Ch. J. La Vallée Poussin, 1912) следует, что ответ положителен и в том случае, когда всюду, кроме счетного множества точек, ряд сходится и его сумма конечна.

Если Т. р. в нек-рой точке x_0 сходится абсолютно, то точки сходимости этого ряда, а также точки его абсолютной сходимости расположены симметрично относительно точки x_0 (П. Фату, P. Fatou, 1906).

Согласно *Данжуа — Лузина теореме* из абсолютной сходимости Т. р. (1) на множестве положительной меры следует сходимость ряда $\Sigma_k(|a_k|+|b_k|)$ и, следовательно, абсолютная сходимость ряда (1) для всех x. Этим свойством обладают и множества второй категории, а также нек-рые множества меры нуль.

Приведенный обзор охватывает только одномерные Т. р. (1). Имеются отдельные результаты, относящиеся к общим Т. р. от нескольких переменных. Здесь во многих случаях нужно еще найти естественные постановки задач.

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1—2, М., 1965; [3] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.— Л., 1951; [4] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948, с. 225—61. *С. А. Теляковский.*

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ МЕТОД — один из общих методов *аналитической теории чисел*. Две проблемы теории чисел потребовали для своего решения создания Т. с. м.: проблема распределения дробных долей многочлена и проблема представления натурального числа суммою слагаемых определенного вида (аддитивные проблемы теории чисел).

Пусть $f(x)$ — действительная функция, $x=1, 2, \ldots$ $\ldots, P, P \to +\infty$; говорят, что дробные доли $f(x)$ распределены равномерно (р. р.), если при любых α и β, $0 \leqslant \alpha < \beta < 1$, число σ дробных долей $f(x)$, попадающих на интервал (α, β), пропорционально длине этого интервала, т. е.

$$\sigma = (\beta - \alpha) P + o(P).$$

Пусть, теперь $\psi(x)$ — характеристич. функция интервала (α, β), т. е.

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha < x < \beta, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \alpha, \ \beta \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Продолжая $\psi(x)$ периодически на всю прямую, т. е. полагая $\psi(x+1)=\psi(x)$, имеют

$$\sigma = \sum_{x=1}^{P} \psi(f(x)).$$

Разлагая $\psi(x)$ в ряд Фурье, находят

$$\psi(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c(m)\, e^{2\pi i m x}, \quad c(0) = \beta - \alpha.$$

Тем самым

$$\sigma = (\beta - \alpha) P + \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{+\infty} c(m) \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)}. \quad (1)$$

Последнее соотношение, вообще говоря, не верно, т. к. могут быть такие x, что $\{f(x)\}=\alpha$ или $\{f(x)\}=\beta$; но числа α и β можно заменить близкими α' и β' и такими, что при всех $x=1, 2, \ldots, P$, $\{f(x)\} \neq \alpha'$, $\{f(x)\} \neq \beta'$; от такой замены точность соотношения практически не изменится и оно станет верным. Точно также функцию $\psi(x)$ можно так «сгладить» («подправить»), что величина σ практически не изменится, а коэффициенты $c(m)$ ряда Фурье будут «быстро» убывать с ростом m, т. е. будет «быстро» сходиться ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c(m)|.$$

Второе слагаемое в равенстве (1) по абсолютной величине не превосходит $\varkappa$,

$$\varkappa = \sum_{m=-\infty, \ m \neq 0}^{+\infty} |c(m)| \left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)} \right|.$$

Если известно, что

$$|S| = \left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)} \right| \leqslant P\Delta, \quad (2)$$

где $\Delta = \Delta(P) \to 0$ при $P \to +\infty$, то для σ получают

$$\sigma = (\beta - \alpha) P + o(P), \ o(P) = cP\Delta,$$

т. е. дробные доли $f(x)$ распределены равномерно. Таким образом, надо уметь оценивать сверху модуль тригонометрич. суммы. Так как каждое слагаемое в S по модулю равно 1, то тривиальная оценка $|S|$ есть P, т. е. тривиальная оценка — это число слагаемых суммы S. Оценка вида (2) наз. нетривиальной, если $\Delta < 1$, а Δ наз. понижающим множителем.

В задаче о дробных долях $f(x)$ за счет сглаживания $\psi(x)$ можно добиться того, что оценку (2) надо получать для «небольшого» числа значений m, напр., для m из промежутка $0 < |m| < (\ln P)^A$, $A > 0$ — нек-рая постоянная.

Такой же подход применяется при выводе асимптотич. формулы для суммы

$$\sum_{x=1}^{P} \{f(x)\},$$

к-рая возникает в задачах о числе целых точек в областях на плоскости и в пространстве.

В аддитивных проблемах теории чисел тригонометрические суммы появляются следующим образом.

При целом m справедлива формула

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha m}\,d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } m=0, \\ 0, & \text{если } m\neq 0, \end{cases}$$

поэтому, если через $I(N)$ обозначить число решений уравнения

$$N = u_1 + \ldots + u_k,\ u_\nu \in U_\nu,\ \nu = 1,\ \ldots,\ k,$$

где U_ν — нек-рые подмножества натурального ряда чисел, то

$$I(N) = \int_0^1 S_1(\alpha)\ldots S_k(\alpha)\,e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha,$$

где

$$S_\nu(\alpha) = \sum_{u_\nu \in U_\nu} e^{2\pi i\alpha u_\nu},\ \nu = 1,\ \ldots,\ k.$$

Полагая, в частности, $U_\nu = U = \{1^n,\ 2^n,\ \ldots\}$, получают *Варинга проблему*; при $k=3$, $U_\nu = U = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ \ldots,\ p,\ \ldots\}$ — тернарную *Гольдбаха проблему* и т. д. Как и в задаче о распределении дробных долей, главным вопросом здесь является вопрос об оценке сверху модуля $S_\nu(\alpha)$, т. е. вопрос о верхней грани $|S_\nu(\alpha)|$.

Тем самым широкий круг разнообразных проблем теории чисел формулируется единообразно на языке тригонометрич. сумм.

Первая нетривиальная тригонометрич. сумма появилась у К. Гаусса (C. Gauss, 1811) в одном из его доказательств закона взаимности квадратичных вычетов:

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i F(x)},\quad F(x) = \frac{ax^2}{P},$$

и К. Гаусс точно вычислил значение S:

$$S = \begin{cases} (1+i)\sqrt{P}, & \text{если } P \equiv 0 \bmod (4); \\ \sqrt{P}, & \text{если } P \equiv 1 \bmod 4); \\ 0, & \text{если } P \equiv 2 \bmod 4); \\ i\sqrt{P}, & \text{если } P \equiv 3 \bmod 4). \end{cases}$$

Целый ряд независимых работ с применением тригонометрич. сумм появился в нач. 20 в.

Г. Вейль (H. Weyl, 1916), изучая распределение дробных долей многочлена

$$f(x) = \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$$

с действительными коэффициентами $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$, рассмотрел суммы S с функцией $F(x)$ вида $F(x) = mf(x)$, m — целое число, $m \neq 0$. И. М. Виноградов (1917) при изучении распределения целых точек в областях на плоскости и в пространстве рассмотрел суммы S с функцией $F(x)$, от к-рой требовалось только, чтобы ее вторая производная удовлетворяла условиям

$$\frac{c_1}{A} \leqslant F''(x) \leqslant \frac{c_2}{A},$$

где c_1, c_2 — нек-рые абсолютные положительные постоянные, $A = A(P) \to +\infty$ при $P \to +\infty$. Г. Харди (G. Hardy) и Дж. Литлвуд (J. Littlewood) (1918), получив приближенное функциональное уравнение дзета-функции Римана, рассмотрели сумму S с функцией $F(x)$ вида

$$F(x) = t \ln x,$$

где t — действительный параметр, $t = t(P)$.

Во всех указанных работах требовалось найти возможно лучшую оценку сверху модуля суммы S.

Общая схема исследования названных проблем теории чисел Т. с. м. такова: выписывается точная формула, выражающая число решений изучаемого уравнения или число дробных долей изучаемой функции, попадающих на заданный интервал, или число целых точек в заданной области, в виде интеграла от тригоно-

метрич. суммы или в виде ряда, коэффициентами к-рого являются тригонометрич. суммы; точная формула представляется суммою двух слагаемых — главного и дополнительного (напр., если рассматривается ряд Фурье характеристич. функции интервала, то главный член получается от нулевого коэффициента ряда Фурье); главное слагаемое доставляет главный член асимптотич. формулы, дополнительное — остаточный член. В аддитивных задачах, таких, как проблема Варинга, проблема Гольдбаха и др., главное слагаемое исследуется методом, близким к круговому методу Харди — Литлвуда — Рамануджана (этот метод наз. *круговым методом* Харди — Литлвуда — Рамануджана в форме тригонометрич. сумм Виноградова). В большинстве других задач (распределение дробных долей, целые точки в областях и др.) главный член получается тривиально. Теперь возникает проблема оценки остаточного члена, и если удается доказать, что он является величиной меньшего порядка, чем главный, то тем самым и доказывается асимптотич. формула.

Основной задачей при оценке остаточного члена является задача возможно более точных оценок тригонометрич. сумм. О методах оценок тригонометрич. сумм и оценках см. *Тригонометрическая сумма*, а также *Виноградова метод*, *Варинга проблема*, *Гольдбаха проблема*, *Аддитивные проблемы*.

Лит. см. при ст. *Тригонометрическая сумма*.

А. А. Карацуба.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ — приближенное представление функции $f(x)$ в виде тригонометрич. полинома

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

значения к-рого в заданных точках совпадают с соответствующими значениями функции. Именно, всегда можно подобрать $2n+1$ коэффициентов A, a_k, b_k, $k=0, 1, \ldots, n$, полинома n-го порядка $T(x)$ так, чтобы его значения были равны значениям y_k функции $y=f(x)$ в $2n+1$ наперед заданных точках x_k промежутка $[0,2\pi)$. Полином $T(x)$ имеет вид

$$T(x)=\sum_{k=0}^{2n}y_k t_k(x),$$

где

$$t_k(x)=\frac{\Delta x}{\Delta'(x)\,2\sin(x-x_k)/2},\quad \Delta(x)=\prod_{k=0}^{2n}2\sin\frac{x-x_k}{2}.$$

Особенно простой вид полином $T(x)$ приобретает в случае равноотстоящих узлов $x_k=(2k-1)\pi/2n$; его коэффициенты выражены формулами

$$A=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}y_k,$$

$$a_m=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}y_k\cos mx_k,$$

$$b_m=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}y_k\sin mx_k,\quad 1\leqslant m\leqslant n.$$

В. И. Битюцков.

ТРИГОНОМЕТРИЯ — раздел геометрии, в к-ром метрич. соотношения между элементами треугольника описываются через *тригонометрические функции* (см., напр., *Косинусов теорема*, *Синусов теорема*, *Тангенсов формула*), а также устанавливаются соотношения между тригонометрич. функциями (т. н. г о н и о м е т р и я). Т. рассматривается как для евклидовой, так и для *неевклидовой геометрии*. Т. сферы евклидового пространства наз. *сферической тригонометрией*.

А. Б. Иванов.

ТРИКОМИ ЗАДАЧА — задача отыскания решения уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с двумя независимыми переменными и с одной

гладкой разомкнутой линией параболического вырождения AB, принимающего заданные значения на эллиптической части σ границы $\partial\Omega$ области Ω задания уравнения и на одной из двух характеристик AC или BC, образующих гиперболическую часть $\sigma_1 = AC \cup BC$ границы $\partial\Omega = \sigma \cup \sigma_1$ (см. *Смешанного типа уравнение*).

Т. з. для *Трикоми уравнения*

$$Tu \equiv yu_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (1)$$

в области Ω, ограниченной гладкой кривой $\sigma \subset \{(x, y) : y > 0\}$ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1,0)$ и характеристиками AC и BC:

$$AC : x = \frac{2}{3}(-y)^{3/2}, \quad BC : 1 - x = \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$$

впервые была поставлена и изучена Ф. Трикоми (F. Tricomi, [1], [2]).

При определенных ограничениях на гладкость заданных функций и характер поведения производной u_y искомого решения u в точках A и B Т. з.:

$$u|_\sigma = \varphi, \quad u|_{AC} = \psi \qquad (2)$$

для уравнения (1) редуцируется к отысканию регулярного в области $\Omega^+ = \Omega \cap \{x, y) : y > 0\}$ решения $u = u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющего краевым условиям

$$u|_\sigma = \varphi,$$

$$u_y(x, 0) = \alpha D_{0x}^{2/3} u(x, 0) + \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad (3)$$

где $\alpha = \text{const} > 0$, $\psi_1(x)$ — однозначно определяется через ψ, $D_{0x}^{2/3}$ — оператор дробного (в смысле Римана — Лиувилля) дифференцирования порядка $^2/_3$:

$$D_{0x}^{2/3} \tau(x) = \frac{1}{\Gamma(1/3)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau(t)\, dt}{(x-t)^{2/3}},$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Решение задачи (1), (3) в свою очередь сводится к нахождению функции $\nu(x) = u_y(x, 0)$ из нек-рого сингулярного интегрального уравнения. Это уравнение в случае, когда σ совпадает с нормальным контуром

$$\sigma_0 = \left\{(x, y) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{9} y^3 = \frac{1}{4}, \ y \geqslant 0\right\}$$

имеет вид

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2x}\right) \times$$
$$\times \nu(t)\, dt = f(x),$$

где $f(x)$ явно выражается через φ и ψ, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши (см. [1] — [4]).

При доказательстве единственности и существования решения Т. з. наряду с принципом экстремума Бицадзе (см. *Смешанного типа уравнение*) и методом интегральных уравнений широко используется так наз. м е т о д a b c, сущность к-рого заключается в том, что для данного дифференциального оператора 2-го порядка L (напр., T) с областью определения $D(L)$ строится дифференциальный оператор 1-го порядка

$$l = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c(x, y), \ (x, y) \in \Omega$$

обладающий тем свойством, что

$$\int_\Omega lu \cdot Lu\, dx\, dy \geqslant c \| u \|^2 \quad \forall u \in D(L),$$

где $C = \text{const} > 0$; $\| \cdot \|$ — нек-рая норма (см. [5]).

Т. з. получила обобщения как на случай уравнений смешанного типа с несколькими линиями параболиче-

ского вырождения (см. [6]) так и на случай уравнений смешанного гиперболо-параболического типа (см. [7]).

Лит.: [1] Трикоми Ф., О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, пер. с итал., М.— Л., 1947; [2] его же, Лекции по уравнениям в частных производных, пер. с итал., М., 1957; [3] Бицадзе А. В., К проблеме уравнений смешанного типа, М., 1953; [4] его же, Уравнения смешанного типа, М., 1959; [5] Берс Л., Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, пер. с англ., М., 1961; [6] Нахушев А. М., «Докл. АН СССР», 1966, т. 170, с. 38—40; [7] Джураев Т. Д., Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов, Ташкент, 1979.

А. М. Нахушев.

ТРИКОМИ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение вида

$$yu_{xx}+u_{yy}=0,$$

к-рое является простой моделью смешанного эллиптико-гиперболического типа уравнений с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными x, y и с одной разомкнутой нехарактеристической линией параболического вырождения. Т. у. эллиптично при $y>0$, гиперболично при $y<0$ и вырождается в параболического типа уравнение на прямой $y=0$ (см. [1]). Т. у. является прототипом уравнения Чаплыгина

$$k(y)u_{xx}+u_{yy}=0,$$

где $u=u(x,\ y)$ — функция тока плоскопараллельных устанавливающихся газовых течений, $k(y)$ и y — функции скорости течения, к-рые положительны при дозвуковой и отрицательны при сверхзвуковой скорости; x — угол наклона вектора скорости (см. [2], [3]).

К краевым задачам для Т. у. сводятся многие важные проблемы механики сплошных сред, в частности, смешанные течения с образованием локальных дозвуковых зон (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Трикоми Ф., О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, пер. с итал., М.— Л., 1947; [2] Чаплыгин С. А., О газовых струях, М.— Л., 1949; [3] Франкль Ф. И., Избр. труды по газовой динамике, М., 1973; [4] Бицадзе А. В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981.

А. М. Нахушев.

ТРИОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА ПОВЕРХНОСТЕЙ — множество поверхностей в трехмерном пространстве, распадающихся на три однопараметрич. семейства таким образом, что любые две поверхности различных семейств образуют прямой угол в каждой точке их пересечения. Предполагается, что входящие в Т. с. п. поверхности являются регулярными, в этом случае кривые, по к-рым пересекаются входящие в нее поверхности, являются линиями кривизны этих поверхностей (теорема Дюпена).

Т. с. п. образуют системы координатных поверхностей в ортогональной координации пространства. Так, в сферич. системе координат Т. с. п. образуют: одно семейство сфер с общим центром в начале координат, второе семейство конусов вращения с вершиной в начале координат и с осью, через к-рую проходят плоскости третьего семейства координатных поверхностей. С каждой Т. с. п. может быть связана нек-рая ортогональная координация пространства. Линейный элемент пространства в ортогональных координатах u, v, w имеет вид

$$ds^2=H_1^2\,du^2+H_2^2\,dv^2+H_3^2\,dw^2,$$

где $H_i(u,\ v,\ w)$, $i=1,\ 2,\ 3$,— т. н. функции Ламе, для к-рых риманов тензор этой пространственной формы тождественно равен нулю. Этими функциями определяется Т. с. п. с точностью до движения (или отражения). С каждой регулярной поверхностью может быть связана Т. с. п., в состав к-рой она входит. Если задано однопараметрич. семейство регулярных поверхностей, входящее в состав Т. с. п., и если в этом семействе содержится хотя бы одна поверхность, от-

личная от плоскости или сферы, то вся Т. с. п. этим семейством вполне определяется.

Т. с. п. образуют софокусные поверхности поверхностей 2-го порядка в евклидовом пространстве; уравнение систем этих поверхностей в декартовой ортогональной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a+\lambda}+\frac{y^2}{b+\lambda}+\frac{z^2}{c+\lambda}=1,$$

где a, b, c — фиксированные величины, $0<c<b<a$, λ — параметр. При $\lambda<c$ это уравнение определяет семейство эллипсоидов, при $c<\lambda<b$ — семейство однополостных гиперболоидов, а при $b<\lambda<a$ — семейство двуполостных гиперболоидов. Через каждую точку пространства проходят три поверхности этой системы: однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид и эллипсоид. Автоморфизмами Т. с. п. в евклидовом пространстве являются сферич. преобразования.

Лит.: [1] Darboux G., Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, 2 éd., P., 1910; [2] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1—2, М.— Л., 1947—48.

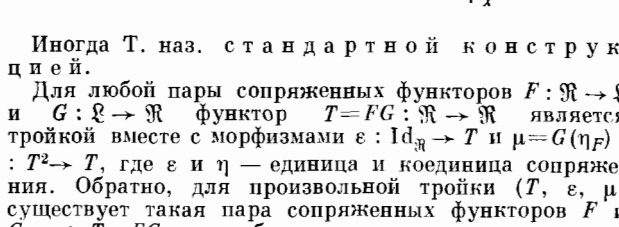
Л. А. Сидоров.

ТРИСЕКЦИЯ УГЛА — задача о делении угла φ на три равные части; одна из классич. задач древности на точное построение с помощью циркуля и линейки. Решение задачи о Т. у. сводится к нахождению рациональных корней кубич. уравнения вида $4x^3-3x-\cos\varphi=0$, где $x=\cos\frac{\varphi}{3}$, к-рое, в общем случае, не разрешимо в квадратных радикалах. Таким образом, задача о Т. у. не может быть решена с помощью циркуля и линейки, что было доказано в 1837 П. Ванцелем (P. Wantzell). Однако такое построение возможно для углов $90°/2^n$, где $n=0, 1, 2, \ldots$, а также при использовании других средств и приемов построения (напр., *Диностата квадратрисы*, *конхоиды*, т. н. метода «вставок»).

Лит.: Энциклопедия элементарной математики, кн. 4. Геометрия, М., 1963, с. 205—27.

Е. Г. Соболевская.

ТРОЙКА, монада, в категории — моноид в категории функторов. Другими словами, Т. в категории $\mathfrak{R}$ наз. ковариантный функтор $T\colon \mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$, снабженный такими естественными преобразованиями $\varepsilon\colon \mathrm{Id}_{\mathfrak{R}}\to T$ и $\mu\colon T^2\to T$, что следующие диаграммы коммутативны (здесь $\mathrm{Id}_{\mathfrak{R}}$ обозначает тождественный функтор категории $\mathfrak{R}$).



Иногда Т. наз. стандартной конструкцией.

Для любой пары сопряженных функторов $F\colon \mathfrak{R}\to\mathfrak{L}$ и $G\colon \mathfrak{L}\to\mathfrak{R}$ функтор $T=FG\colon \mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$ является тройкой вместе с морфизмами $\varepsilon\colon \mathrm{Id}_{\mathfrak{R}}\to T$ и $\mu=G(\eta_F)\colon T^2\to T$, где ε и η — единица и коединица сопряжения. Обратно, для произвольной тройки (T, ε, μ) существует такая пара сопряженных функторов F и G, что $T=FG$, а преобразования ε и μ получаются из единицы и коединицы сопряжения описанным выше способом. Подобных различных разложений для Т. может оказаться целый класс. В этом классе имеется наименьший элемент (конструкция Клейсли) и наибольший элемент (конструкция Эйленберга — Мура).

Примеры. 1) В категории множеств функтор взятия множества подмножеств произвольного множества обладает структурой Т. каждое множество X

естественно вкладывается в множество своих подмножеств, а каждому множеству подмножеств X сопоставляется объединение этих подмножеств.

2) В категории множеств каждый основной функтор $H_A(X)=H(A, X)$ является Т.: отображение $\varepsilon_X : X \to H(A, X)$ сопоставляет каждому $x \in X$ функцию $f_x : A \to X$, тождественно равную x; отображение $\mu_X : H(A, H(A, X)) \simeq H(A \times A, X) \to H(A, X)$ сопоставляет каждой функции от двух переменных ее ограничение на диагональ.

3) В категории R-модулей над коммутативным кольцом R функтор $T_A(X)=A \otimes_R X$ снабжается структурой Т., аналогичной структуре из примера 2).

4) В категории топологич. пространств каждая топологич. группа G позволяет определить функтор $T_G(X)=X \times G$, к-рый является Т.: каждый элемент $x \in X$ переходит в элемент (x, e), где e — единичный элемент группы G, а отображение $\mu : X \times G \times G \to X \times G$ определяется равенством $\mu_X(x, g, g')=(x, g g')$.

Лит.: [1] Адамс Дж., Бесконечнократные пространства петель, пер. с англ., М., 1982; [2] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 13, М., 1975; [4] Mac Lane S., Categories for the working mathematician, N. Y.— [a. o.], 1971; [5] Manes E. G., Algebraic theories, N. Y., 1976. *М. Ш. Цаленко.*

ТРОХОИДА — плоская кривая, являющаяся траекторией точки M вне или внутри окружности, к-рая катится по другой окружности. Т. наз. эпитрохоидой (рис. 1 *а*, *б*) или гипотрохоидой (рис. 2 *а*, *б*) в зависимости от того, будет ли катящаяся окружность иметь внешнее или внутреннее касание



Рис. 1.

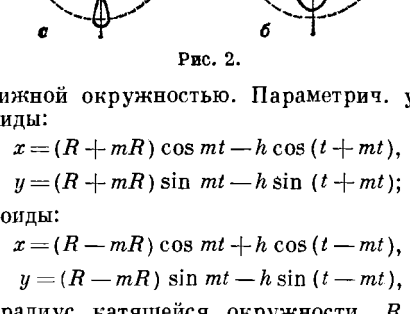


Рис. 2.

с неподвижной окружностью. Параметрич. уравнения эпитрохоиды:

$$x=(R+mR)\cos mt-h\cos(t+mt),$$

$$y=(R+mR)\sin mt-h\sin(t+mt);$$

гипотрохоиды:

$$x=(R-mR)\cos mt+h\cos(t-mt),$$

$$y=(R-mR)\sin mt-h\sin(t-mt),$$

где r — радиус катящейся окружности, R — радиус неподвижной окружности, $m=R/r$ — модуль Т., h — расстояние от вычерчивающей точки до центра катящейся окружности. Если $h>r$, то Т. наз. удлиненной (см. рис. 1*а*, 2*а*), при $h<r$ — укороченной (см. рис. 1*б*, 2*б*), при $h=r$ — *эпициклоидой* или *гипоциклоидой*.

Если $h=R+r$, то Т. наз. трохоидальной розой, уравнение к-рой в полярных координатах

$$\rho=a\sin\mu\varphi.$$

При рациональном значении μ трохоидальная роза — алгебраич. кривая. Если $R=r$, то Т.— *Паскаля улитка*, если $R=2r$ — *Эллипс*.

Т. относится к т. н. *циклоидальным кривым*. Иногда Т. наз. укороченную или удлиненную циклоиду.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ТРУБЧАТАЯ ОБЛАСТЬ, труба,— область T в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ вида

$$T=B+i\mathbb{R}^n=\{z=x+iy: x\in B,\ |y|<\infty\},$$

где B — область в действительном подпространстве $\mathbb{R}^n\subset\mathbb{C}^n$, к-рая наз. основанием Т. о. T. Области вида $\mathbb{R}^n+iB$ тоже наз. Т. о. *Голоморфности оболочка* произвольной Т. о. совпадает с ее выпуклой оболочкой; в частности, всякая функция, голоморфная в Т. о. T, продолжается до функции, голоморфной в выпуклой оболочке T. Т. о. наз. радиальной, если ее основание есть связный конус в $\mathbb{R}^n$.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. М. Чирка.

ТРУБЧАТАЯ ОКРЕСТНОСТЬ — окрестность гладкого подмногообразия N в гладком многообразии M, расслаивающаяся над N со слоем $\mathbb{R}^d$, где

$$d=\dim M-\dim N.$$

Пусть в M выбрана риманова метрика и рассматриваются начинающиеся в N отрезки нормальных к N геодезических. Если N компактно, то найдется такое $\varepsilon>0$, что никакие два отрезка длины $\leqslant\varepsilon$, исходящие из разных точек N, не пересекаются. Объединение всех таких отрезков длины $<\varepsilon$ является открытой окрестностью U подмногообразия N и наз. его трубчатой окрестностью. Для некомпактного N можно строить Т. о., покрыв N счетным множеством компактов и уменьшая ε с ростом номера элемента покрытия. Имеется деформационная ретракция $r: U\to N$, сопоставляющая каждой точке из U начало геодезической, содержащей эту точку. Эта ретракция задает векторное расслоение со слоем $\mathbb{R}^d$, изоморфное нормальному расслоению ν вложения $N\to M$. Таким образом, факторпространство $\overline{U}/\partial\overline{U}$ гомеоморфно *Тома пространству* расслоения ν.

Аналог понятия Т. о. вводится и для топологич. многообразий (где надо рассматривать локально плоские вложения, [2]).

Лит.: [1] Том Р., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения. Сб. пер., М., 1958, с. 293—351; [2] Kirby R., Siebenmann L., Foundational essays on topological manifolds, Princeton, 1977.

Ю. Б. Рудяк.

ТУПИКОВАЯ ДИЗЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА — представляющая заданную *булеву функцию* дизъюнктивная нормальная форма (д. н. ф.), к-рую нельзя упростить ни вычеркиванием буквы из нек-рой конъюнкции, ни удалением какой-либо конъюнкции. Минимальная д. н. ф. получается из сокращенной д. н. ф. путем удаления нек-рых конъюнкций; этот неоднозначный, ветвящийся процесс может привести «в тупик», т. е. к д. н. ф., из к-рой нельзя удалить никакого члена. Такая д. н. ф. и наз. тупиковой. Т. д. н. ф., вообще говоря, не является минимальной.

Значение этого понятия состоит, с одной стороны, в том, что Т. д. н. ф. в задаче оптимизации моделируют локальные минимумы, среди к-рых надо отыскать глобальный (минимальную д. н. ф.). С другой стороны, на практике при минимизации булевых функций зачастую ограничиваются построением Т. д. н. ф. Оценки сложности д. н. ф. показывают: 1) быстрый рост числа Т. д. н. ф. с увеличением числа переменных n булевых функций (эта величина порядка $2^{2^{cn}}$); 2) малую (стремящуюся к нулю при $n\to\infty$) долю минимальных д. н. ф. среди Т. д. н. ф.; 3) неограниченно растущее (при $n\to\infty$) расхождение в сложности на-

угад взятой Т. д. н. ф. и минимальной д. н. ф. Перечисленные факты имеют место как для самой «плохой» функции, так и в «типичном» случае, т. е. для совокупности функций, доля к-рых стремится к единице при $n \to \infty$.

См. также *Булевых функций нормальные формы.*

В. В. Глаголев.

ТУРБУЛЕНТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — вывод, анализ и решение уравнений, описывающих турбулентные течения жидкостей и газов (т. е. такие завихренные течения, термодинамич. и гидродинамич. характеристики к-рых испытывают хаотич. флуктуации из-за наличия многочисленных вихрей различных размеров и потому изменяются в пространстве и времени весьма нерегулярно).

Индивидуальные реализации турбулентных течений описываются обычными уравнениями гидромеханики вязкой жидкости. Единственность решения задачи Коши для них не доказана (доказательство удается лишь для двумерных течений и при специальных предположениях об изменчивости кинематич. вязкости ν). Стационарные решения, отвечающие ламинарным течениям, формально существуют при любых числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = UL/\nu$ (L и U — масштабы длины и скорости), но при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$ они неустойчивы. Гидродинамич. неустойчивость относительно малых возмущений поля скорости вида

$$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \exp(\lambda t)$$

исследуется как задача о собственных значениях соответствующего линеаризованного уравнения для $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ (т. н. *Орра — Зоммерфельда уравнение*).

При значениях числа Рейнольдса Re в нек-рой окрестности $\mathrm{Re}_{кр}$ в фазовом пространстве течения существует однопараметрич. семейство замкнутых траекторий. Если оно появляется лишь при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$, то бифуркация наз. нормальной, и замкнутые траектории суть предельные циклы, к-рым соответствуют периодические по t решения с конечными амплитудами порядка $(\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{кр})^{1/2}$ и произвольными фазами. По *предположению* Л. Д. Ландау (1944), *турбулентность* образуется в результате последовательности нормальных бифуркаций и представляет собой квазипериодическое эргодическое течение с очень большим числом несоизмеримых частот колебаний и соответствующих степеней свободы — фаз колебаний.

Если семейство замкнутых фазовых траекторий появляется еще при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$, то бифуркация наз. обратной, предельные циклы неустойчивы (т. е. траектории с них сматываются); при $\mathrm{Re} \to \mathrm{Re}_{кр} - 0$ они сжимаются и в пределе исчезают, а при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$ возмущения разрастаются со временем и, по-видимому, быстро приобретают непериодич. характер. Возможно, что в этом случае в фазовом пространстве имеется *странный аттрактор*, т. е. множество Λ неблуждающих точек (у к-рых каждая окрестность пересекается с нек-рой траекторией по меньшей мере дважды), отличающихся от неподвижных точек и замкнутых траекторий и имеющих окрестности, в к-рых появляющиеся траектории все асимптотически приближаются к Λ.

Существует гипотеза, что после четырех бифуркаций в фазовом пространстве течений жидкости появляется странный аттрактор, являющийся локально канторовым множеством двумерных поверхностей, попадание на к-рый и создает хаотичность течения, т. е. турбулентность. Однако доказательной теории бифуркаций для гидродинамич. систем еще не построено (см. [3]).

Наиболее полным статистич. описанием турбулентного течения несжимаемой жидкости является задание вероятностной меры $P(\omega)$ на функциональном прост-

ранстве возможных полей скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ или ее функционального преобразования Фурье — характеристич. функционала, напр. в спектральном представлении $\Psi[\boldsymbol{z}(k, t)]$ (см. [1]). Для него из уравнений Навье — Стокса выводится линейное уравнение в вариационных производных (так что статистич. динамика турбулентности оказывается линейной), к-рое надлежит решать при заданном

$$\Psi_0[\boldsymbol{z}(k)] = \Psi[\boldsymbol{z}(k)\,\delta(t-t_0)].$$

В частности, для пространственного характеристич. функционала $\Psi[\boldsymbol{z}(\boldsymbol{k}), t]$, дающего полное статистич. описание поля скорости в фиксированный момент времени t, получается уравнение Хопфа:

$$i\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (H_0 + H_1)\,\Psi;\quad H_0 = -i\nu\int d\boldsymbol{k}k^2 z_\alpha(k)\,D_\alpha(k);$$

$$H_1 = \int\int d\boldsymbol{k}'\,d\boldsymbol{k}'' B_{\alpha,\beta\gamma}(k'+k'')\,z_\beta(k'+k'')\,D_\alpha(k')\,D_\gamma(k''),$$

где

$$B_{\alpha,\beta\gamma}(k) = ik_\alpha(\delta_{\beta\gamma} - k_\beta k_\gamma k^{-2}),$$

а $D_\alpha(\boldsymbol{k})$ — оператор вариационного дифференцирования по $z_\alpha(\boldsymbol{k})$. Это уравнение аналогично уравнению для вектора состояния Ψ в представлении Шрёдингера квантового бозе-поля с сильным взаимодействием специального вида (слияние двух бозонов в один): $z_\alpha(\boldsymbol{k})$ и $D_\alpha(k)$ суть операторы рождения и уничтожения квантов с импульсом $\boldsymbol{k}$, а константой взаимодействия служит Re. Общих методов решения линейных уравнений в вариационных производных еще не создано. При $\mathrm{Re}\gg 1$ теория возмущений не действует, хотя частичное суммирование диаграмм Фейнмана возможно (см. [2]). Решение Ψ можно записать в виде континуального интеграла, но общих методов для вычисления таких интегралов еще нет. Зато общим методом нахождения вероятностных мер $P(\omega)$ для описания турбулентных течений может служить построение таких мер $P_e(\omega)$ для галеркинских аппроксимаций уравнений Навье — Стокса: для семейства мер $\{P_e\}$ доказывается слабая компактность (см. [6]); этим методом, в частности, доказываются нек-рые теоремы существования и единственности решений Ψ.

Эквивалентная формулировка полного статистич. описания турбулентного течения заключается в задании всех конечномерных плотностей вероятности $f_n = P_{M_1\ldots M_n}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ для значений $\boldsymbol{u}_m = u(M_m)$ поля скорости на всевозможных конечных наборах точек $M_m = (x_m, t_m)$ пространства-времени. Для них из уравнений Навье — Стокса выводятся (см. [5]) линейные уравнения

$$\frac{\partial f_n}{\partial t_k} = -\left(\frac{\partial u_{k\alpha} f_n}{\partial x_{k\alpha}} + \frac{\partial w_{k\alpha} f_n}{\partial u_{k\alpha}}\right),$$

где $\boldsymbol{w}_k$ — перенесенное в точку M_k условное математич. ожидание ускорения в точке (x, t_k) при условии, что значения $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}(M_1), \ldots, \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{u}(M_n)$ фиксированы. Величины $w_{k\alpha} f_n$ содержат интегралы по $f_{n+1}\,d\boldsymbol{u}_{n+1}$, так что уравнения для f_n образуют бесконечную цепочку (аналогичную *Боголюбова цепочке уравнений*). Интегрируя уравнение для $\partial f_n/\partial t_k$ по $F(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \times d\boldsymbol{u}_1 \ldots d\boldsymbol{u}_k$, получают **обобщенные уравнения Фридмана — Келлера**

$$\frac{\partial\overline{F}}{\partial t_k} = -\overline{\frac{\partial u_{k\alpha} F}{\partial x_{k\alpha}}} + \overline{w_{k\alpha}\frac{\partial F}{\partial u_{k\alpha}}},$$

где черточка — математич. ожидание. Это уравнение было выведено при $F = u_{1\alpha_1}^{m_1}\ldots u_{n\alpha_n}^{m_n}$, так что $\overline{F}$ — это n-точечный статистич. момент поля скорости порядка $N = m_1 + \ldots + m_n$. Уравнения для моментов образуют

бесконечную цепочку (разрешимость к-рой доказывается с помощью галеркинских аппроксимаций уравнений Навье — Стокса).

При $N=1$ эти уравнения (уравнения Рейнольдса) получаются непосредственным осреднением уравнений Навье — Стокса и отличаются от таковых для осредненного поля скорости $\bar{u}$ появлением дополнительных неизвестных — одноточечных вторых моментов $\tau_{jl}=-\rho\overline{u'_j u'_l}$ (ρ — плотность жидкости, штрихи обозначают отклонения от математич. ожиданий), называемых напряжениями Рейнольдса. Простейшим способом замыкания системы уравнений Фридмана — Келлера является представление τ_{jl} в виде функций от $\partial\bar{u}_l/\partial x_k$. В т. н. полуэмпирич. теории турбулентности эти функции берутся линейными, и для их коэффициентов (имеющих смысл коэффициентов турбулентной вязкости) принимаются те или иные дополнительные предположения (напр., пропорциональность $l\sqrt{b}$, где l и b — масштаб и кинетич. энергия турбулентности в единице массы, для к-рых конструируются дополнительные уравнения — это делает реологию осредненного течения нелинейной и создает специфич. эффекты).

При $N=2$ получаются уравнения для двухточечных корреляционных функций поля скорости $\overline{u'_{1\alpha}u'_{2\beta}}$ (или их преобразований Фурье по (M_1-M_2)-спектральных функций). Для их замыкания необходимы дополнительные предположения о входящих в них третьих моментах (см. [1], [5]). Наиболее естественные методы построения замкнутых уравнений для спектров турбулентности получаются обрезанием частично просуммированных диаграмм Фейнмана.

Существенные геометрич. упрощения получаются в случае однородной и изотропной турбулентности. Эта модель важна, потому что всякая реальная турбулентность с очень большим числом Рейнольдса оказывается локально-стационарной, локально-однородной и локально-изотропной. При этом при фиксированной скорости диссипации кинетич. энергии ε статистич. структура трехмерного турбулентного течения с очень большим числом Рейнольдса в достаточно малых масштабах полностью определяется двумя параметрами ε и ν, так что, напр., структурная функция скоростей при $r\ll L$ должна иметь вид

$$\overline{[u_\alpha(x+r,\ t)-u_\alpha(x,\ t)]^2}=(\varepsilon r)^{2/3}\varphi(r/\lambda),$$

где L — масштаб течения в целом, а $\lambda=\varepsilon^{1/4}\nu^{-3/4}$ — колмогоровский внутренний масштаб; в т. н. инерционном интервале масштабов $L\gg r\gg\lambda$ параметр ν выпадает, и функция φ обращается в константу. Если же учитывать флуктуации поля ε, то колмогоровская автомодельность становится неполной, и структурная функция приобретает поправочный множитель $(r/L)^m$ с небольшим показателем.

В двумерных течениях, кроме энергии, адиабатич. интегралом движения является еще средний квадрат вихря — энстрофия (так что вихревые нити не растягиваются) и, кроме параметров ε и ν, появляется еще скорость вырождения энстрофии ε_ω. При этом от масштабов энергоснабжения энергия передается в сторону больших масштабов по колмогоровскому закону, а энстрофия — в сторону малых масштабов по нелокальному спектральному закону (см. [4]):

$$E(k)=C_\omega\varepsilon_\omega^{2/3}k^{-3}\left(\ln\frac{k}{k_0}\right)^{-1/3}.$$

Такими свойствами обладает крупномасштабная квазидвумерная турбулентность в атмосфере и в океане, образуемая синоптич. вихрями и волнами Россби —

Блиновой. Роль вихря двумерного течения здесь играет т. н. потенциальный вихрь — скалярное произведение вихря абсолютной скорости на градиент энтропии. Уравнение для него в квазигеострофич. приближении получается в виде

$$\frac{\partial \mathscr{L}\psi}{\partial t} + J(\psi, \mathscr{L}\psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = F; \quad \mathscr{L} = \Delta + \frac{\partial}{\partial z} \frac{H^2}{L_R^2} \frac{\partial}{\partial z},$$

где ψ, Δ, J — горизонтальные функция тока, лапласиан и якобиан, z — вертикальная координата, H и $L_R = HN/f$ — толщина слоя и «радиус деформации» Россби (N — частота Вайссала — Брента, f — параметр Кориолиса), x — дуга круга широты, β — производная от f по дуге меридиана, F — неадиабатические [illegible]оры. В масштабах $L \ll L_R$ получается обычное уравнение двумерной турбулентности. Волновое число $k_\beta = (\beta/2U)^{1/2}$ (где U — типичная скорость) разделяет вихри ($k > k_\beta$) и волны Россби — Блиновой ($k < k_\beta$). Малые начальные вихри имеют тенденцию со временем расти, выравниваться по вертикали («баротропизация»), смещаться на запад и вытягиваться вдоль кругов широты.

Важными обобщениями турбулентности в несжимаемой жидкости являются турбулентности в стратифицированной жидкости с архимедовыми силами и гидромагнитная турбулентность.

Лит.: [1] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1—2, М., 1965—67; [2] Гледзер Е. Б., Монин А. С., «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, в. 3, с. 111—59; [3] Монин А. С., «Успехи физич. наук», 1978, т. 125, в. 1, с. 97—122; [4] Мирабель А. П., Монин А. С., «Успехи механики», 1979, т. 2, в. 3, с. 47—95; [5] Монин А. С., Озмидов Р. В., Океанская турбулентность, Л., 1981; [6] Вишик М. И., Фурсиков А. В., Математические задачи статистической гидромеханики, М., 1980. *А. С. Монин.*

ТУРНИР — ориентированный *граф* без петель, каждая пара вершин к-рого соединена дугой точно в одном направлении. Т. с n вершинами может служить описанием исхода состязания n игроков, правилами к-рого запрещен ничейный исход. Понятие Т. используется для упорядочения n объектов методом попарных сравнений. В связи с этим оно находит свои приложения в биологии, социологии и т. п.

Т. наз. транзитивным, если можно так занумеровать его вершины числами $1, 2, \ldots, n$, что из вершины v_i идет дуга в вершину v_j тогда и только тогда, когда $i > j$. В транзитивном Т. отсутствуют контуры. Т. наз. сильным, если для любой упорядоченной пары его вершин v_i, v_j существует ориентированный путь из v_i в v_j. Множество дуг в Т. наз. согласованным, если в подграфе, образованном этими дугами и инцидентными им вершинами, отсутствуют контуры. Максимальная мощность множества согласованных дуг является мерой согласованности при определении «победителя» Т. Всякий Т. содержит подмножество согласованных дуг мощности не меньшей, чем $(n^2/4)(1+o(1))$. Другой мерой согласованности является отношение числа транзитивных k-вершинных подтурниров турнира с n вершинами к числу сильных k-вершинных подтурниров. Максимальное число сильных k-вершинных подтурниров турнира с n вершинами равно

$$C_n^k - kC_{\frac{n-1}{2}}^k, \text{ если } n \text{ нечетно},$$

$$C_n^k - \frac{k}{2}\left(C_{\frac{n}{2}}^{k+1} - C_{\frac{n-2}{2}}^{k-1}\right), \text{ если } n \text{ четно}.$$

Т. является сильным тогда и только тогда, когда он имеет остовный контур. Каждый сильный Т. с n вершинами имеет контур длины k для $k = 3, 4, \ldots, n$. Всякий Т. имеет остовный путь.

Набор всех полустепеней исхода d_i турнира с n вершинами удовлетворяет равенству

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (n-d_i)^2.$$

Пусть набор целых чисел $(d_1, \ldots, d_n)$ удовлетворяет условию $0 \leqslant d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n \leqslant n-1$. Т. с полустепенями исхода $d_1, \ldots, d_n$ существует тогда и только тогда, когда для любого $k=1, \ldots, n-1$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \geqslant \frac{k(k-1)}{2},$$

а для $k=n$ справедливо равенство. При этом Т. является сильным тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{k} d_i > \frac{k(k-1)}{2} \text{ для } k < n.$$

Если T_1 и T_2 — два подтурнира турнира T и для каждой пары вершин v' из T_1, v'' из T_2 существует дуга (v', v''), то пишут $T_1 \to T_2$. Пусть множество вершин Т. разбито на непересекающиеся подмножества $T_1, \ldots, T_m$. И пусть либо $T_i \to T_j$, либо $T_j \to T_i$ для $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$. Тогда разбиение определяет отношение эквивалентности на вершинах Т. T. Турнир наз. простым, если на его вершинах нельзя определить нетривиальное отношение эквивалентности. Всякий Т. с n вершинами является подтурниром нек-рого простого Т. с $n+2$ вершинами. Турнир T с n вершинами является подтурниром нек-рого простого Т. с $n+1$ вершинами тогда и только тогда, когда T не является ни контуром с тремя вершинами, ни нетривиальным транзитивным Т. с нечетным числом вершин. Число попарно неизоморфных Т. с n вершинами асимптотически равно $\frac{1}{n!} 2^{C_n^2}$. Число различных Т. с n нумерованными вершинами равно $2^{C_n^2}$. Производящие функции $t(x)$ и $s(x)$ для Т. и сильных Т. соответственно связаны соотношением:

$$s(x) = \frac{t(x)}{1+t(x)}.$$

Всякий Т. с n вершинами, $n \geqslant 5$, не являющийся сильным, однозначно восстанавливается по совокупности своих вершинных подтурниров.

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [2] Moon J. W., Topics on tournaments, N. Y., [1968].

А. А. Сапоженко.

ТУЭ МЕТОД — метод в теории диофантовых приближений, созданный А. Туэ [1] в связи с проблемой приближения алгебраич. чисел рациональными числами: найти величину $\nu = \nu(n)$, при к-рой для каждого алгебраич. числа α степени n неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{\nu+\varepsilon}} \qquad (1)$$

имеет конечное число решений в целых рациональных числах p и q, $q>0$, при любом $\varepsilon>0$, и бесконечное число решений при любом $\varepsilon<0$.

А. Туэ показал, что $\nu \leqslant \frac{n}{2}+1$. Т. м. основан на свойствах специального многочлена $f(x, y)$ от двух переменных x, y с целыми коэффициентами и предположении существования двух решений неравенства (1) при $\nu \leqslant \frac{n}{2}+1$ с достаточно большими значениями q. Теорема Туэ имеет много важных приложений в теории чисел. В частности, из нее следует, что диофантово уравнение

$$F(x, y) = m, \qquad (2)$$

где $F(x, y)$ — неприводимая форма от переменных x и y с целыми коэффициентами степени $n \geqslant 3$, а m —

целое число, может иметь не более, чем конечное число, решений в целых числах x и y.

Окончательную оценку величины ν в неравенстве (1) получил К. Рот (K. Roth, [2]) путем обобщения Т. м. на случай многочлена любого числа переменных, подобного многочлену $f(x, y)$, и использования большего числа решений неравенства (1). Результат — т е о р е м а Т у э — З и г е л я — Р о т а: $\nu=2$ для любого $n\geqslant 2$. Т. м. имеет обобщение на случай приближения алгебраич. чисел алгебраич. числами. Т. м. является общим методом доказательства конечности целых точек на широкого класса кривых алгебраич. многообразий (см. *Диофантова геометрия*, *Диофантово множество*). Наряду с этим Т. м. имеет существенный недостаток — является неэффективным методом в том смысле, что не дает ответа на вопрос, существуют ли на самом деле используемые в доказательствах решения неравенств (1) или соответствующих уравнений (2). Таким образом, Т. м., решая вопрос о конечности числа решений уравнения (2), не дает возможности определить, разрешимо ли конкретное уравнение такого типа и каковы количествен. оценки решений x, y в зависимости от F.

См. также *Диофантовых приближений проблемы эффективизации*.

Лит.: [1] T h u e A., «J. reine angew. Math.», 1909, Bd 135, S. 284—305; [2] Р о т К. Ф., «Математика», 1957, т. 1, в. 1, с. 3—18; [3] Проблемы теории диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1974.

А. Ф. Лаврик.

ТУЭ ПОЛУСИСТЕМА, п о л у - Т у э с и с т е м а, с и с т е м а п о д с т а н о в о к — см. *Туэ система*.

ТУЭ СИСТЕМА — *ассоциативное исчисление*, названное по имени А. Туэ, к-рый впервые сформулировал проблему распознавания равенства слов в ассоциативных системах (п р о б л е м а Т у э, см. [1]). Если при задании Т. с. допустимыми подстановками считать только подстановки правых частей соотношений вместо левых частей (т. е. исключить обратные подстановки), то получим п о л у с и с т е м ы Т у э (п о л у - Т у э с и с т е м ы, или с и с т е м ы п о д с т а н о в о к), к-рые фактически совпадают также с локальными канонич. системами Поста. Каждая Т. с. может рассматриваться как полусистема Туэ, но обратное неверно.

Лит.: [1] T h u e A., «Videnskapsselskapets Skrifter. Mat. Naturv. Kl.», 1914, № 10; [2] М а л ь ц е в А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965.

С. И. Адян.

ТУЭ — ЗИГЕЛЯ — РОТА ТЕОРЕМА: если α — алгебраич. иррациональность, $\delta>0$ и сколь угодно мало, то существует лишь конечное число целых решений p и $q>0$ (p и q взаимно просты) неравенства

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<q^{-2-\delta}.$$

Эта теорема является наилучшей в своем роде — число 2 в показателе степени уменьшить нельзя. Т.—З.—Р. т. есть усиление теоремы Лиувилля (см. *Лиувилля число*). Результат Лиувилля последовательно усиливали А. Туэ [1], К. Зигель [2] и, наконец, К. Рот [3]. А. Туэ доказал, что если α — алгебраич. число степени $n\geqslant 3$, то неравенство

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<q^{-\nu}$$

имеет лишь конечное число целых решений p и $q>0$ (p и q взаимно просты) при $\nu>\frac{n}{2}+1$. К. Зигель установил, что утверждение теоремы Туэ справедливо при $\nu>2\sqrt{n}$. Окончательный вариант теоремы, сформулированный выше, получен К. Ротом. Имеется p-адический аналог Т.—З.—Р. т. Перечисленные результаты доказываются неэффективными методами (см. *Диофантовых приближений проблемы эффективизации*).

Лит.: [1] T h u e A., «Norske Vid. selesk. Skr.», 1908, Bd 3, S. 1—34; [2] S i e g e l C., «Math. Z.», 1921, Bd 10, S. 173—213;

[3] Roth K. F., «Mathematika», 1955, v. 2, № 1, p. 1—20; [4] Mahler K., Lectures on Diophantine approximations, pt 1, [s. l.], 1961; [5] Ridout D., «Mathematika», 1958, v. 5, № 9, p. 40—48; [6] Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952. *С. В. Котов.*

ТЬЮРИНГА МАШИНА — название, закрепившееся за *вычислительными машинами абстрактными* некрого точно охарактеризованного типа. Концепция такого рода машины возникла в середине 30-х гг. 20 в у А. М. Тьюринга [1] в результате произведенного им анализа действий человека, выполняющего в соответствии с заранее разработанным планом те или иные вычисления, т. е. последовательные преобразования знаковых комплексов. Анализ этот, в свою очередь, был осуществлен им с целью решения назревшей к тому времени проблемы поиска точного математич. эквивалента для общего интуитивного представления об *алгоритме*. В ходе развития *алгоритмов теории* появился ряд модификаций первоначального тьюринговского определения. Здесь дается версия, восходящая к Э. Посту [2],— в таком виде определение Т. м. получило весьма большое распространение (детально Т. м. описаны, напр., в [3] и [4]).

Т. м. удобно представлять себе в виде автоматически функционирующего устройства, способного находиться в конечном числе внутренних состояний и снабженного бесконечной внешней памятью — лентой. Среди состояний имеется два выделенных — начальное и заключительное. Лента разделена на клетки и неограниченна влево и вправо. В каждой клетке ленты может быть записана любая из букв нек-рого *алфавита A* (ради единообразия удобно считать, что в пустой клетке записана «пустая буква»). В каждый момент дискретного времени Т. м. находится в одном из своих состояний и, рассматривая одну из клеток своей ленты, воспринимает записанный в ней символ — букву алфавита *A* или пустую букву.

Находясь в какой-либо момент времени в незаключительном состоянии, Т. м. совершает шаг, к-рый вполне определяется ее текущим состоянием и символом, воспринимаемым ею в данный момент на ленте. Шаг этот заключается в том, что: 1) в рассматриваемой клетке записывается новый символ, быть может, совпадающий со старым или пустой; 2) машина переходит в новое состояние, быть может, совпадающее со старым или заключительное; 3) лента сдвигается влево или вправо на одну клетку или остается на месте. Перечисление всех возможных шагов Т. м. в зависимости от текущей комбинации «незаключительное состояние — воспринимаемый символ», представленное, напр., в виде специальной таблицы с двумя входами, наз. программой, или схемой, данной Т. м. В клетках этой таблицы стоят коды соответствующих шагов машины — ее команды. Программа Т. м. является объектом с точной структурой, и можно условиться отождествлять Т. м. с ее программой. Стремясь подчеркнуть связь так описанной Т. м. с алфавитом *A*, обычно говорят, что эта машина есть Т. м. в алфавите *A*.

Текущее полное описание Т. м. дается ее конфигурацией, к-рая состоит из указания для данного момента следующей информации: 1) конкретного заполнения клеток ленты символами; 2) клетки, находящейся в поле зрения машины; 3) внутреннего состояния, в к-ром машина находится. Конфигурация, соответствующая заключительному состоянию Т. м., также наз. заключительной.

Если зафиксировать какую-либо незаключительную конфигурацию Т. м. в качестве исходной, то работа этой машины будет заключаться в последовательном (*шаг за шагом*) преобразовании исходной конфигурации в соответствии с программой машины до тех пор, пока не будет достигнута заключительная конфигу-

рация. После этого работа Т. м. считается закончившейся, а результатом работы считается достигнутая заключительная конфигурация. Разумеется, работа Т. м. заканчивается, вообще говоря, не при всякой исходной конфигурации.

Понятие Т. м. может быть следующим образом использовано для уточнения общего представления об алгоритме в данном алфавите. Тьюринговским алгоритмом в алфавите A мы назовем всякий алгоритм $\mathfrak{A}$ следующего вида. Фиксируется нек-рая Т. м. $\mathfrak{M}$ в алфавите A. Пусть $\mathcal{P}$ — слово в A, принимаемое в качестве исходного данного для алгоритма $\mathfrak{A}$. Построим следующую исходную конфигурацию машины $\mathfrak{M}$: 1) на ее ленте без пробелов запишем слово $\mathcal{P}$, оставив прочие клетки пустыми; 2) в поле зрения $\mathfrak{M}$ установим клетку с первой буквой слова $\mathcal{P}$; 3) приведем $\mathfrak{M}$ в начальное состояние (если $\mathcal{P}$ пусто, ленту возьмем пустой, а в поле зрения $\mathfrak{M}$ установим произвольную ее клетку). Пусть $\mathfrak{M}$, отправляясь от этой исходной конфигурации, заканчивает работу. Рассмотрим клетку ленты, находящуюся в поле зрения $\mathfrak{M}$ в заключительной конфигурации. Если символ, записанный в ней, пуст, то в качестве $\mathfrak{A}(\mathcal{P})$ берется пустое слово. В противном случае в качестве $\mathfrak{A}(\mathcal{P})$ берется слово, записанное в максимальном, не содержащем пустых клеток отрезке ленты, включающем обозреваемую машиной $\mathfrak{M}$ клетку.

Имеются серьезные основания считать, что уточнение общего представления об *алгоритме в алфавите*, произведенное с помощью понятия Т. м., является адекватным. Именно, считается, что для всякого алгоритма $\mathfrak{A}$ в каком-либо алфавите может быть построен тьюринговский алгоритм, дающий при одинаковых исходных данных те же самые результаты, что и алгоритм $\mathfrak{A}$. Это соглашение известно в теории алгоритмов под названием тезиса Тьюринга. Принятие тезиса Тьюринга равносильно принятию *Чёрча тезиса* (для частично рекурсивных функций) или принципа нормализации (для нормальных алгорифмов). Однако, в отличие от этих последних, тезис Тьюринга в высшей степени непосредственно убедителен. Действительно, производя вычисления согласно избранному плану, математик работает сходным с Т. м. образом: рассматривая какое-либо место в своих записях и находясь в определенном «умонастроении», он делает необходимые изменения в написанном, проникается новым «умонастроением» и переходит к рассмотрению дальнейших записей. То обстоятельство, что при этом он совершает более интегральные, чем Т. м., шаги, представляется не слишком принципиальным.

По структуре своего описания и по типу функционирования Т. м. являются *автоматами* весьма общего типа, так что концепция Тьюринга в значительной степени стимулировала возникновение абстрактной *автоматов теории* и во многом предопределила ее особенности.

Существует много модификаций Т. м. Самыми распространенными среди них являются многоленточные Т. м., имеющие по одной или несколько головок на каждой из лент. Движение головок и запись букв на лентах происходят одновременно согласно программе управляющего устройства. Многоленточные Т. м. удобно использовать для формализации понятия относительного алгоритма. Так, функция f (алгоритмически) вычислима относительно функции g, если существует многоленточная Т. м., к-рая вычисляет функцию f при условии, что в любой начальной конфигурации на одной из лент в фиксированном порядке записаны все значения функции g. В таком виде через относительные вычисления можно ввести важное в теории алгоритмов понятие сводимости по Тьюрингу и другие виды *алгоритмической сводимости*.

С помощью многоленточных Т. м. естественно формализуется понятие вероятностного алгоритма. Распространенный подход состоит в том, что на одной из лент многоленточной Т. м. записывается случайная последовательность, и Т. м. в каждый момент времени считывает ровно один символ этой последовательности. При другом подходе в программе управляющего устройства Т. м. допускается существование различных команд с одинаковыми левыми частями, причем выбор той или иной команды происходит с заданными вероятностями. На близкой идее основывается понятие недетерминированной Т. м., в программе управляющего устройства к-рой также могут иметься различные команды с одинаковыми левыми частями. В обоих случаях вместо одного вычисления для данного входа рассматривается класс всевозможных вычислений, согласованных с программой. Для вероятностных Т. м. рассматривают вероятность тех или иных вычислений, для недетерминированных Т. м.— возможность самого вычисления.

См. также *Алгоритма сложность*, *Вычислимая функция*, *Машина*.

Лит.: [1] Turing A. M., «Proc. London Math. Soc.», 1936/37, v. 42, т. 230—65; 1937, v. 43, p. 544—46; [2] Post E. L., «J. Symbol. Logic», 1936, v. 1, p. 103—05; [3] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [4] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [5] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1971; [6] Минский М., Вычисления и автоматы, пер. с англ., М., 1971; [7] Машины Тьюринга и рекурсивные функции, пер. с нем., М., 1972.

Н. М. Нагорный, С. С. Марченков.

ТЯГОТЕНИЯ ТЕОРИЯ — раздел теории поля в теоретич. и математич. физике, широко использующий математич. методы исследования. Традиционным предметом Т. т. является изучение гравитационного взаимодействия между материальными объектами, сказывающегося на их движении и структуре (см. *Гравитация*); предмет Т. т. охватил, кроме анализа самого гравитационного поля, также структуру пространства-времени в более широком плане, проблемы квантования гравитации и ее связь с теорией элементарных частиц. Соответственно и математич. аппарат, используемый в Т. т., расширился с теории дифференциальных уравнений 2-го порядка с обыкновенными и частными производными до дифференциальной (псевдоримановой) геометрии, теории функций многих комплексных переменных и комплексных многообразий, топологии, теории групп и спинорного и твисторного исчисления. Все чаще применяются расчеты на ЭВМ (в том числе аналитические).

Основы Т. т. были заложены в кон. 16 — нач. 18 вв. в работах Г. Галилея (G. Galilei) и И. Ньютона (I. Newton). В классич. Т. т. Ньютона уравнение для потенциала φ гравитационного поля (поля тяготения) имеет вид уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi\gamma\rho,$$

где γ — гравитационная постоянная Ньютона, ρ — плотность массы источников поля. Напряженность поля определяется как $\boldsymbol{g} = -\nabla\varphi$, а сила, с к-рой поле действует на точечную пробную массу m,— как $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$ (пробная масса сама не возмущает поля). Второй закон Ньютона дает тогда уравнения движения пробной массы. В конкретной постановке Т. т. Ньютона приводит к ряду задач, в частности, баллистики и небесной механики. Она по сей день остается достаточно точной для описания практически всей небесной механики. Как теория потенциала Т. т. Ньютона послужила образцом для создания теории электростатики, а в дальнейшем представления о физическом поле, сформировавшиеся в электродинамике Максвелла, в свою очередь повлияли на генезис релятивистской Т. т. Эйнштейна.

А. Эйнштейн (A. Einstein) начал построение новой Т. т. с внесения в теорию принципа конечности ско-

рости распространения взаимодействий (в том числе — гравитационного) и принципа эквивалентности. Первые шаги в этом направлении он сделал в 1907, а в статье (1913) совместно с М. Гроссманом (M. Grossmann) определил путь построения релятивистской Т. т. (общей теории относительности — ОТО) как геометризацию физики. Мысль о реальности неевклидовой геометрии приходила К. Гауссу (C. Gauss) и Н. И. Лобачевскому, в достаточно определенной форме она высказывалась Б. Риманом (B. Riemann) и У. Клиффордом (W. Clifford), однако лишь А. Эйнштейн связал тяготение с геометрией не 3-мерного пространства, а 4-мерного пространства-времени, что сыграло решающую роль. В окончательной форме уравнения гравитационного поля были даны Д. Гильбертом (D. Hilbert, 1915) и самим А. Эйнштейном (1916, ранее он корректно записал их лишь для поля в вакууме).

В релятивистской Т. т. геометрич. характеристики пространственно-временного многообразия одновременно играют роль переменных, описывающих гравитационное поле. В квадрате интервала $ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, к-рый метризует пространство-время, индефинитный метрический тензор (здесь сигнатура $+\ -\ -\ -$) играет роль многокомпонентного гравитационного потенциала. Уравнение светового конуса $ds^2=0$ используется в формулировке общерелятивистского принципа причинности. Коэффициенты связности, определяющие параллельный перенос и ковариантное дифференцирование ($g_{\mu\nu};\ \alpha=0$), играют роль напряженности. *Римана тензор* кривизны выражается как комбинация производных такой напряженности, т. е. характеризует напряженность поля. Свернутый тензор кривизны — тензор Риччи $R_{\mu\nu}$ («дивергенция напряженности») алгебраически выражается через тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ вещества и полей (кроме гравитационного) — источников поля тяготения:

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\frac{8\pi\gamma}{c^4}T_{\mu\nu} \qquad (1)$$

(уравнения Эйнштейна). Левая часть этих уравнений нелинейна по метрическому тензору и его первым производным, но в случае слабого гравитационного поля нелинейная добавка может быть выделена в отдельный член, к-рый, будучи переведен в правую часть уравнений, объединяется с источниками (отсюда — трактовка нелинейности гравитационного поля как его способности к самодействию). Уравнение движения пробной точечной массы во внешнем гравитационном поле записывается как уравнение геодезической

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0 \qquad (2)$$

и не содержит величины массы частицы (т. е. при прочих равных условиях пробные точечные частицы любых масс движутся одинаково). Это выражает принцип эквивалентности, отвечающий здесь равенству инертной и тяготеющей масс (факт, экспериментально проверенный с относительной точностью около 10^{-12}, последние работы проведены в группе В. Б. Брагинского). В другой формулировке, известной по первым работам Эйнштейна, этот принцип утверждает локальную эквивалентность гравитации и ускорения: в свободно падающей без вращения лаборатории в малом объеме пространства и за короткое время ни в каком физическом эксперименте невозможно заметить проявлений тяготения. Уравнение (2) является первым приближением задачи для системы непробных тел; в 1938—39 А. Эйнштейн совместно с Л. Инфельдом (L. Infeld) и Б. Гофманом (B. Hoffmann) и В. А. Фок развили методы нахождения дальнейших приближений (задача многих тел в ОТО). Уравнения других (негра-

витационных) полей, напр. электромагнитного, получаются из обычной теории соответствующих полей в плоском мире при требовании общей ковариантности. Все уравнения полей, включая (1), как и уравнение движения (2), следуют из принципа экстремума действия при соответствующем задании функций Лагранжа. В полной теории исследуются самосогласованные системы уравнений, но часто ввиду их сложности нек-рые или все негравитационные поля полагаются пробными (для них решается несамосогласованная задача с внешним гравитационным полем).

Ввиду нелинейности уравнений Эйнштейна развиты специальные методы отыскания их точных решений (приближенные решения могут не отражать специфики задачи). При этом важен выбор подходящего базиса (тетрады); часто используется *Картана метод внешних форм*. Комплексная изотропная (светоподобная) тетрада положена в основу мощного вычислительного формализма Ньюмена — Пенроуза (см. [3]). В приложении к уравнениям Эйнштейна развиты новые методы типа преобразований Беклунда обратной задачи теории рассеяния (теории *солитонов*). Уже известно большое число точных решений уравнений Эйнштейна (см. [3]), первое из которых — решение Шварцшильда (1916)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\gamma m}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2\gamma m}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - \\ - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \qquad (3)$$

(в чаще всего используемой системе координат кривизн), имеющее смысл гравитационного поля сферической массы в точке. С физич. точки зрения решения уравнений Эйнштейна можно подразделить на вакуумные поля локализованных источников, внутренние гравитационные поля распределения вещества и др. полей, поля Эйнштейна — Максвелла, волновые гравитационные поля, космологические решения и пр. Развиты различные методы классификации псевдоримановых пространств, к-рые помогают строить решения уравнений Эйнштейна с требуемыми свойствами и интерпретировать уже известные решения. Это — алгебраическая классификация по свойствам тензора конформной кривизны Вейля (три типа по Петрову — I, II, III и два вырожденных подтипа, D и N, а также тривиальный случай — тип 0, отвечающий конформно-плоским пространствам; часто считается, что типы N, II и III отвечают волновым гравитационным полям); алгебраическая классификация по свойствам тензора Риччи (или тензора энергии-импульса); классификация по группам движений (изометрий: пространство-время отображается на себя с помощью переноса Ли без изменения метрики). В приложении к 3-мерным пространствам при требовании их однородности классификация по группам движений приводит к типам Бианки (9 случаев), играющим важную роль в теории однородных космологических моделей. Для получения и особенно исследования решений уравнений Эйнштейна все чаще применяются ЭВМ; успешно применяются в этой области программы аналитических вычислений. Появились сообщения о решении проблемы отождествления метрик, записанных в разных координатных системах, с помощью ЭВМ. Для удобства сравнения выводов Т. т. Эйнштейна и ее разных модификаций и обобщений между собой и с опытом развит феноменологический метод описания метрического тензора и гравитационных эффектов («параметризованная постньютонова Т. т.»).

При анализе конкретных решений уравнений Эйнштейна важную роль играет определение полноты атласа карт данного многообразия (отсюда развитие методов продолжения), нахождение и исследование сингулярностей (их определение принципиально за-

труднено индефинитностью метрики), выяснение асимптотических (включая топологические) свойств решений в случае островных систем. Задачи Т. т. Эйнштейна привели к формулировке нового важного понятия в псевдоримановой геометрии — горизонта. Хотя горизонт (различаются горизонт событий, горизонт частиц, горизонт Коши, горизонт причинности и кажущийся горизонт) не является местом сингулярных точек, он инвариантно выделен в пространстве-времени. Так, горизонт событий в асимптотически плоском мире определяется как предел множества событий, т. е. 4-мерных точек, из к-рых можно уйти на бесконечность, оставаясь внутри светового конуса. Если такой горизонт событий существует, ограниченная им область пространства-времени (откуда нельзя уйти на бесконечность, не превысив скорости света) наз. ч е р н о й д ы р о й; ее простейший пример описывается расширением метрики Шварцшильда (3). Внутри черной дыры находится сингулярность (в частности, нек-рые инварианты римановой кривизны для (3) обращаются в бесконечность при $r \to 0$), причем шварцшильдовская сингулярность пространственноподобна ($ds^2<0$), тогда как для других черных дыр (общий случаї — метрика Керра-Ньюмена [3]) она может быть и временноподобной ($ds^2>0$). Из астрофизич. приложений ОТО известно, что черные дыры могут образоваться в результате гравитационного коллапса массивных звезд; рассматривается ряд кандидатов на роль черных дыр среди наблюдаемых небесных тел, к-рые проявляют себя через процессы, происходящие в близкой к ним внешней области, где гравитационные поля сильны. Считается, что при выполнении т. н. энергетических условий (фактически — естественных условий на тензор энергии-импульса материи) сингулярное состояние в прошлом и будущем при эволюции материальных систем неизбежно [теоремы о сингулярности Р. Пенроуза (R. Penrose), С. Хокинга (S. Hawking) и др.], однако требуется, чтобы сингулярности были скрыты под горизонтами (принцип «космической цензуры»).

Развиты основы квантовой Т. т. (как в смысле квантования гравитационного поля, так и квантования др. полей на фоне неплоской классич. геометрии). Одним из следствий является эффект Хокинга рождения частиц (фотонов и др.) черными дырами, приводящий к их «испарению». Квантовые эффекты гравитации важны на ранних стадиях расширения Вселенной. При описании квантовой Т. т. опираются на канонический формализм теории поля, фейнмановские интегралы по путям и др.; в связи с этим развивают евклидову (в смысле сигнатуры) теорию поля и исследуют инстантонные решения уравнений Эйнштейна, развивают твисторное исчисление Пенроуза, близкое по ряду результатов к теории комплексифицированных пространств с самодуальным или антисамодуальным тензором конформной кривизны Вейля (H-пространства). Др. обобщения Т. т. включают теорию Эйнштейна — Картана с кривизной и кручением, аффинные Т. т., Т. т. с квадратичными по кривизне лагранжианами, биметрические Т. т. и др. (см. [6]).

Т. т. Эйнштейна приводит к новым по сравнению с классической Т. т. Ньютона эффектам, однако они трудно обнаружимы экспериментально; в остальном обе Т. т. дают одинаковые следствия. Пока получили подтверждения следующие эффекты: гравитационное красное смещение, отклонение лучей света, движение

перигелия планет, нестационарность (расширение) Вселенной. Можно считать косвенно подтвержденным эффект гравитационного излучения (по потере энергии двойной системой, вращающейся вокруг общего центра масс). Ни одного факта, к-рый противоречил бы Т. т. Эйнштейна, не обнаружено. На грани возможностей эксперимента в настоящее время находятся: прием гравитационных волн от космических источников и эффекты увлечения в гравитационных полях вращающихся тел (прецессия оси гироскопа и пр.).

Лит.: [1] Эйнштейн А., Собрание научных трудов, т. 1—4, М., 1965—67; [2] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, т. 1—3, пер. с англ., М., 1977; [3] Крамер Д. [и др.], Точные решения уравнений Эйнштейна, пер. с англ., М., 1982; [4] Петров А. З., Новые методы в общей теории относительности, М., 1966; [5] Хокинг С., Эллис Дж., Крупномасштабная структура пространства-времени, пер. с англ., М., 1977; [6] General relativity and gravitation, v. 1—2, N. Y. — L., 1980.

Н. В. Мицкевич.

ТЯЖЕЛОГО ШАРИКА МЕТОД — метод решения задачи минимизации дифференцируемой функции $f(x)$ на евклидовом пространстве E^n. Метод основан на рассмотрении системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+\frac{f'(x)}{1+|f'(x)|^2}=0,\quad t\geqslant 0, \qquad (1)$$

$$x=(x_1,\ \ldots,\ x_n),$$

к-рая описывает движение материальной точки по поверхности $y=f(x)$ в поле тяжести, направленном в отрицательном направлении оси Oy, при условии, что точка не может оторваться от поверхности и трение пропорционально скорости; $f'(x)$ — градиент функции $f(x)$ в точке x, $a\geqslant 0$ — коэффициент трения. Этим объясняется название метода. Учитывая, что в окрестности стационарной точки величина $|f'(x)|^2$ мала, систему (1) часто заменяют системой

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+f'(x)=0,\quad t\geqslant 0. \qquad (2)$$

При нек-рых предположениях относительно функции $f(x)$ и начальных условий

$$x(0)=x_0,\quad \frac{dx(0)}{dt}=x_1$$

можно доказать, что соответствующее решение $x(t)$ системы (1) или (2) при $t\to\infty$ сходится к какой-либо стационарной точке x_* функции $f(x)$; если $f(x)$ — выпуклая функция, то x_* — точка минимума $f(x)$ на E^n. Таким образом, Т. ш. м. является частным случаем *установления метода* (см. [1]). Для численного решения систем (1), (2) могут быть применены, напр., разностные методы. В зависимости от выбора разностного метода получаются дискретные аналоги Т. ш. м., охватывающие как частный случай *овражных функций методы минимизации*, *сопряженных градиентов метод* и т. п. Выбор величины шага разностного метода и коэффициента a существенно влияют на скорость сходимости Т. ш. м. Вместо (1), (2) возможно использование других систем 1-го или 2-го порядка (см. [1]).

В задачах минимизации функции $f(x)$ при ограничениях

$$g_i(x)\leqslant 0,\ i=1,\ \ldots,\ m;\ g_i(x)=0,\ i=m+1,\ \ldots,\ s,$$

Т. ш. м. применяется в сочетании с *штрафных функций методом*, *Лагранжа функцией* и др. (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Васильев Ф. П., Численные методы решения экстремальных задач, М., 1980; [3] Евтушенко Ю. Г., Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации, М., 1982.

Ф. П. Васильев.

УАЙТХЕДА ГОМОМОРФИЗМ, J-гомоморфизм,— гомоморфизм из *стабильных гомотопических групп* спектра SO в стабильные гомотопич. группы спектра сфер S^0, задаваемый специальным образом. Одна из конструкций У. г.— конструкция Хопфа: пусть дано отображение $\varphi : S^m \to SO(q)$; отображение φ задает отображение $(J\varphi) : S^m \times S^{q+1} \to S^{q-1}$, к-рое продолжается до отображения $J\varphi : S^m \times S^q \to E^q_+$ в верхнюю полусферу сферы S^q. Имеется также продолжение $J\varphi : S^{m+1} \times S^{q-1} \to E^q_-$ в нижнюю полусферу сферы S^q, и определено отображение $J\varphi : S^{m+q} \to S^q$. Эта конструкция задает отображение гомотопич. классов и задает гомоморфизм $J : \pi^S_m(SO) \to \pi^S_m(S^0)$, к-рый и наз. гомоморфизмом Уайтхеда.

Впервые этот гомоморфизм был построен Дж. Уайтхедом [1] и им была доказана теорема о нетривиальности бесконечной серии гомотопич. групп сфер $\pi_n(S^r) \neq 0$ при следующих значениях n и r:

n	14	14	$8k$	$16k+2$	$8k+1$	$16k+3$
r	7	4	$4k$	$8k$	$4k+1$	$8k+1$

Стабильные гомотопич. группы $\pi^S_m(SO)$ описываются теоремой периодичности Ботта [2]:

$m \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi^S_m(SO)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$

Образ У. г. вычислен полностью (см. [4], [5]): при $m \equiv 0 \bmod 8$ и $m > 0$ У. г. является мономорфизмом и его образ выделяется прямым слагаемым в группе $\pi^S_m(S^0)$; при $m \equiv 1 \bmod 8$ и $m > 1$ У. г. является мономорфизмом на прямое слагаемое группы $\pi^S_m(S^0)$; при $m = 4s-1$ образом У. г. является циклич. группа порядка $\tau(2s)$, выделяющаяся прямым слагаемым в $\pi^S_m(S^0)$, где $\tau(2s)$ — знаменатель несократимой дроби $B_s/4s$, B_s есть s-е *Бернулли число*.

Лит.: [1] Whitehead G. W., «Ann. Math.», 1942, v. 43, p. 634—40, 1950, v. 51, p. 192—237; [2] Bott R., там же, 1959, v. 70, p. 313—37; [3] Адамс Дж., «Математика», 1966, т. 10, № 5, с. 70—84, 1967, т. 11, № 4, с. 3—41, 1968, т. 12, № 3, с. 3—97; [4] Beckcr J., Gottlieb D., «Topology», 1975, v. 14, № 1, p. 1—12; [5] Адамс Дж., Бесконечнократные пространства петель, пер. с англ., М., 1982.

А. В. Шокуров.

УАЙТХЕДА ГРУППА — абелева группа, к-рая сопоставляется ассоциативному кольцу по определенному правилу; введена Дж. Уайтхедом [1]. Пусть A — ассоциативное кольцо с единицей и $GL(n, A)$ — группа невырожденных $(n \times n)$-матриц над A. Имеются естественные вложения $GL(1, A) \subset \ldots \subset GL(n, A) G \ldots$, и пусть $GL(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} GL(i, A)$. Матрица, отличающаяся от единичной единственным недиагональным элементом, наз. элементарной. Подгруппа $E(A) \subset GL(A)$, порожденная всеми элементарными матрицами, совпадает с коммутантом группы $GL(A)$. Коммут-

тативная факторгруппа $K_1A=GL(A)/E(A)$ и наз. группой Уайтхеда кольца A. Пусть $[-1]\in K_1A$ — элемент, соответствующий матрице

$$\begin{Vmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Он имеет порядок 2. Факторгруппа $\overline{K}_1A=K_1A/\{0, [-1]\}$ наз. приведенной группой Уайтхеда кольца A.

Пусть Π — мультипликативная группа, и $\mathbb{Z}[\Pi]$ — групповое кольцо этой группы над $\mathbb{Z}$. Имеется гомоморфизм $\Pi \xrightarrow{j} \overline{K}_1\mathbb{Z}[\Pi]$. Факторгруппа $Wh(\Pi)=\overline{K}_1[\Pi]/j(\Pi)$ наз. группой Уайтхеда группы Π.

Пусть дан гомоморфизм групп $f\colon \Pi_1 \to \Pi_2$. Тогда определен гомоморфизм $Wh(f)$: $Wh(\Pi_1) \to Wh(\Pi_2)$, причем $Wh(g\circ f)=Wh(g)\circ Wh(f)$, где $g:\Pi_2\to\Pi_3$. Поэтому Wh задает ковариантный функтор из категории групп в категорию абелевых групп. Если $f\colon \Pi \to \Pi$ — внутренний изоморфизм, то $Wh(f)=\mathrm{id}_{Wh(\Pi)}$.

Рассматривая У. г. фундаментальной группы пространства, можно не заботиться о выборе отмеченной точки, что существенно для определения важного инварианта отображений — *Уайтхеда кручения*.

Лит.: [1] Whitehead J. H. C., «Amer. J. Math.», 1950, v. 72, p. 1—57; [2] Милнор Дж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 3—42; [3] его же, Введение в алгебраическую K-теорию, пер. с англ., М., 1974. *А. В. Шокуров.*

УАЙТХЕДА КРУЧЕНИЕ — элемент *Уайтхеда группы* $\overline{K}_1A$, построенный по комплексу A-модулей. В частности, получается У. к. отображения комплексов. Пусть A — кольцо, F — конечнопорожденный A-модуль. Пусть $b=(b_1, \ldots, b_k)$ и $c=(c_1, \ldots, c_k)$ — два его базиса, и $e_i=\sum_{j=1}^{k} a_{ij}b_j$. Тогда матрица $\|a_{ij}\|$ невырождена и, следовательно, определяет элемент группы $\overline{K}_1A$, обозначаемый $[c/b]$. Если $[c/b]=0$, то базисы b и c наз. эквивалентными. Очевидно,

$$[e/c]+[c/b]=[e/b],\ [b/b]=0.$$

Для произвольной точной последовательности $0\to E\to F\to G\to 0$ свободных A-модулей и базисов e и g в E и G определен базис $eg=(e, f)$ в F, причем образом элементов f является базис g. Класс эквивалентности этого базиса зависит только от базисов e и g.

Пусть теперь $C: C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} C_0$ — комплекс из свободных A-модулей C_i с отмеченными базисами e_i, гомологии этого комплекса свободны и в них также выбраны базисы h_i. Пусть образы гомоморфизмов $\partial: C_{i+1}\to C_i$ также свободны. Комбинации базисов $b_ih_ib_{i-1}$ задают новые базисы в C_i. Тогда кручение комплекса C определяется формулой

$$\tau(C)=-\sum_{i=0}^{n}(-1)[c_i/b_ih_ib_{i-1}]\in\overline{K}_1A.$$

При этом кручение не зависит от базисов b_i в группах границ, а только от c_i и h_i.

Пусть дана пара (K, L), состоящая из конечного связного клеточного разбиения K и подкомплекса L, являющегося *деформационным ретрактом* K. Пусть $\Pi \cong \pi_1(K) \cong \pi_1(L)$. Если $\tilde{K}$ и $\tilde{L}$ — универсальные накрывающие разбиений K и L, то $\sigma \in \Pi$ определяет клеточное отображение $\sigma : (\tilde{k}, \tilde{i}) \to (\tilde{K}, \tilde{L})$, а следовательно, и отображение групп цепей $\sigma_* : C(\tilde{K}, \tilde{L}) \to C(\tilde{K}, \tilde{L})$, т. е. $C_p(\tilde{K}, \tilde{L})$ является $\mathbb{Z}[\Pi]$-модулем. Получается свободный цепной комплекс $C_n(\tilde{K}, \tilde{L}) \to C_{n-1}(\tilde{K}, \tilde{L}) \to \ldots \to C_0(\tilde{K}, \tilde{L})$ над $\mathbb{Z}[\Pi]$. Гомологии этого комплекса тривиальны, т. е. $\tilde{L}$ — деформационный ретракт $\tilde{K}$.

Пусть $e_1, \ldots, e_\alpha$ суть p-клетки в $K \setminus L$. Для каждой клетки e_i выбирается клетка-представитель $\tilde{e}_i$ в $\tilde{K}$, лежащая над e_i, и фиксируется ее ориентация. Тогда $c_p = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_\alpha)$ — базис в $C_p(\tilde{K}, \tilde{L})$. Следовательно, определено подмножество $\tau C(\tilde{K}, \tilde{L}) \subset K_1 \mathbb{Z}[\Pi]$, т. к. кручение, вообще говоря, зависит от выбора базиса c_p. Однако уже образ этого множества в группе Уайтхеда $Wh(\Pi)$ состоит из одного элемента $\tau(K, L)$ и наз. к р у ч е н и е м У а й т х е д а п а р ы (K, L).

Важным свойством У. к. является его комбинаторная инвариантность. Является ли $\tau(K, L)$ топологич. инвариантом, неизвестно (1984).

Пусть $f : X \to Y$ — гомотопич. эквивалентность (X и Y — клеточные комплексы). Тогда кручение отображения f определяется как $\tau(f) = f_* \tau(M_f, X) \in Wh(\pi_1 Y)$, где M_f — цилиндр отображения f. Если $\tau(f) = 0$, то f наз. п р о с т о й г о м о т о п и ч е с к о й э к в и в а л е н т н о с т ь ю. Свойства кручения $\tau(f)$: 1) если $i : L \to K$ — включение, то $\tau(i) = \tau(K, L)$; 2) $\tau(g \circ f) = \tau(g) + g_* \tau(f)$; 3) если f гомотопно f', то $\tau(f) = \tau(f')$; 4) если I — тождественное отображение односвязного комплекса с эйлеровой характеристикой χ, то $\tau(I \times f) = \chi \cdot \tau(f)$.

Лит.: [1] Whitehead J. H. C., «Amer. J. Math.», 1950, v. 72, p. 1—57; [2] Милнор Дж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 3—42.

А. В. Шокуров.

УАЙТХЕДА ПРОИЗВЕДЕНИЕ элементов гомотопич. групп пунктированного топологич. пространства — см. *Уайтхеда умножение*.

УАЙТХЕДА УМНОЖЕНИЕ — умножение в *гомотопических группах* $\pi_m(X) \times \pi_n(X) \to \pi_{n+m-1}(X)$, определенное Дж. Уайтхедом [1]. Пусть в S^k фиксировано разбиение на две клетки e^0 и e^k. Тогда в произведении сфер $S^m \times S^n$ индуцируется разбиение на клетки e^0, e^m, e^n, e^{m+n}. Поэтому характеристич. отображение $\varphi_{n,m}$:

$$\partial e^{n+m} = S^{n+m-1} \longrightarrow S^m \times S^n$$

разлагается в композицию

$$S^{n+m-1} \xrightarrow{W(m,n)} S^m \vee S^n \longrightarrow S^m \times S^n,$$

где $S^m \vee S^n$ — букет сфер. Пусть, теперь, классы $\alpha \in \pi_m(X)$ и $\beta \in \pi_n(X)$ представляются отображениями f и g. Тогда п р о и з в е д е н и е У а й т х е д а $[\alpha, \beta] \in \pi_{n+m-1}(X)$ представляется композицией отображений

$$\overset{W(n,m)}{\longrightarrow} S^m \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X.$$

Для этого умножения выполняются следующие свойства:

1) $[\alpha, \beta] = (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} [\beta, \alpha]$;

2) если $\alpha, \beta \in \pi_1(X)$, то $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$;

3) если X n-просто, то $[\alpha, \beta] = 0$ для $\alpha \in \pi_1(X)$; $\beta \in \pi_n(X)$;

4) если $[\alpha, \beta]=0$ для любых $\alpha\in\pi_1(X)$, $\beta\in\pi_n(X)$, то X n-просто;

5) если $\alpha\in\pi_n(X)$, $\beta\in\pi_m(X)$, $\gamma\in\pi_k(X)$, $n, m, k>1$, то $(-1)^{nk}[[\alpha, \beta], \gamma]+(-1)^{mn}[[\beta, \gamma], \alpha]+(-1)^{mk}[[\gamma, \alpha], \beta]=0$;

6) элемент $[i_1, i_2]\in\pi_3(S^2)$, где $i_2\in\pi_2(S^2)=\mathbb{Z}$ — образующая, равен удвоенной образующей группы $\pi_3(S^2)=\mathbb{Z}$;

7) ядро эпиморфизма $\Sigma:\pi_{4n-1}(S^{2n})\to\pi_{4n}(S^{2n+1})$ порождается одним элементом $[i_{2n}, i_{2n}]\in\pi_{4n-1}(S^{2n})$, где $i_{2n}\in\pi_{2n}(S^{2n})$ — канонич. образующая.

Лит.: [1] Whitehead G. W., «Ann. Math.», 1946, v. 47, p. 460—75; 1950, v. 51, p. 192—237.

А. В. Шокуров.

УБИВАЮЩЕЕ ПРОСТРАНСТВО (X, n) — пространство расслоения $p_n:(X, n)\to X$, для к-рого гомотопич. группы $\pi_i(X, n)=0$ при $i<n$ и такое, что отображение $p_{n*}:\pi_i(X, n)\to\pi_i(X)$ — изоморфизм при $i\geqslant n$. Пространство (X, n) строится по индукции по n. Если пространство $(X, n-1)$ уже построено, то за (X, n) принимается гомотопич. слой естественного вложения в *Эйленберга — Маклейна пространство*

$$(X, n-1)\longrightarrow K(\pi_{n-1}(X), n-1).$$

Последовательность пространств (X, n) и отображений p_n является системой Мура — Постникова отображения $*\to X$.

А. Ф. Харшиладзе.

УБЫВАЮЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — такая последовательность x_n, что для всех $n=1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $x_n>x_{n+1}$. Иногда такие последовательности наз. строго убывающими, а термин «У. п.» применяется к последовательностям, удовлетворяющим для всех n лишь условию $x_n\geqslant x_{n+1}$. Такие последовательности наз. также невозрастающими. Всякая ограниченная снизу невозрастающая последовательность имеет конечный предел, а всякая не ограниченная снизу имеет бесконечный предел, равный $-\infty$.

Л. Д. Кудрявцев.

УБЫВАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ — такая функция $f(x)$, определенная на нек-ром числовом множестве E, что из условия

$$x'<x'',\ x',\ x''\in E,$$

следует

$$f(x')>f(x'').$$

Иногда такие функции наз. строго убывающими, а термин «У. ф.» применяется к функциям, удовлетворяющим для указанных x', x'' лишь условию $f(x')\geqslant f(x'')$ (невозрастающая функция). У всякой строго У. ф. обратная функция является однозначной и также строго убывающей. Если x_0 — правосторонняя (соответственно левосторонняя) предельная точка множества E, $f(x)$ — невозрастающая функция и множество $\{y: y=f(x), x>x_0, x\in E\}$ ограничено сверху (соответственно $\{y: y=f(x), x<x_0, x\in E\}$ ограничено снизу), то при $x\to x_0+0$ (соответственно $x\to x_0-0$), $x\in E$, у функции $f(x)$ существует конечный предел; если же указанное множество не ограничено сверху (соответственно снизу), то $f(x)$ имеет бесконечный предел, равный $+\infty$ (соответственно $-\infty$).

Л. Д. Кудрявцев.

УГЛОВАЯ ТОЧКА — то же, что *излома точка*.

УГЛОВОЕ ГРАНИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ, граничное значение по всем некасательным путям,— значение комплексной функции $f(z)$, определенной в единичном круге $D=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$, в граничной точке $\zeta=e^{i\theta}$, равное пределу

$$\lim_{z\to\zeta,\ z\in S(\zeta,\ \varepsilon)} f(z)=f^*(\zeta)$$

функции $f(z)$ по множеству точек угловой области

$$S(\zeta,\ \varepsilon)=\left\{z=re^{i\varphi}\in D: |\arg(e^{i\theta}-z)|<\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right\}$$

при условии, что этот предел существует для всех ε, $0<\varepsilon<\pi/2$, и, следовательно, не зависит от ε. Этот термин иногда употребляется в обобщенном смысле для функций $f(z)$, заданных в произвольных (включая многомерные) областях D, причем в качестве $S(\zeta, \varepsilon)$ берется пересечение с D угловой (или конической) области с вершиной $\zeta \in \partial D$, осью к-рой является нормаль к границе ∂D в точке ζ, а угол раствора равен $\pi/2 - \varepsilon$, $0<\varepsilon<\pi/2$.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950.

Е. Д. Соломенцев.

УГОЛ — геометрическая фигура, состоящая из двух различных лучей, выходящих из одной точки. Лучи наз. с т о р о н а м и У., а их общее начало — в е р ш и н о й У. Пусть $[BA)$, $[BC)$ — стороны угла, B — его вершина, α — плоскость, определяемая сторонами У. Фигура $\Gamma=[BA)\cup[BC)$ делит плоскость α на две фигуры $\alpha_i'=\alpha\setminus\Gamma$, $i=1, 2$: $\alpha_1'\cup\alpha_2'=\alpha\setminus\Gamma$. Фигура $\alpha_i=\alpha_i'\cup\Gamma$, $i=1, 2$, также наз. У. или п л о с к и м у г л о м, α_i' наз. внутренней областью плоского У. α_i.

Два угла наз. р а в н ы м и (или к о н г р у э н т н ы м и), если они могут быть совмещены так, что совпадут их соответствующие стороны и вершины. От любого луча на плоскости в данную сторону от него можно отложить единственный У., равный данному У. Сравнение У. осуществляется двумя способами. Если У. рассматривается как пара лучей с общим началом, то для выяснения вопроса, какой из двух У. больше, необходимо совместить в одной плоскости вершины У. и одну пару их сторон (см. рис. 1). Если вторая сторона одного У. окажется расположенной внутри другого У., то говорят, что первый У. меньше, чем второй. Второй способ сравнения У. основан на сопоставлении каждому У. нек-рого числа. Равным У. будет соответствовать одинаковое число градусов или радиан (см. ниже), большему У.— большее число, меньшему — меньшее.



Рис. 1.

Два У. наз. с м е ж н ы м и, если у них общая вершина и одна сторона, а две другие стороны образуют прямую (см. рис. 2). Вообще, У., имеющие общую вершину и одну общую сторону, наз. п р и л е ж а щ и м и. У. наз. в е р т и к а л ь н ы м и, если стороны одного являются продолжениями за вершину сторон другого У. Вертикальные У. равны между собой. У., у к-рого стороны образуют прямую, наз. р а з в е р н у т ы м. Половина развернутого У. наз. п р я м ы м У. Прямой У. можно эквивалентно определить иначе: У., равный своему смежному, наз. п р я м ы м. Внутренняя область плоского У., не превосходящего развернутого, является выпуклой областью на плоскости.

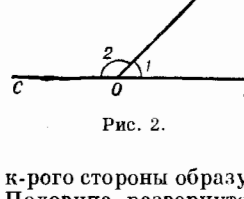


Рис. 2.

За единицу измерения У. принимается 90-я доля прямого У., наз. градусом.

Используется и т. н. к р у г о в а я, или р а д и а н н а я, мера У. Числовое значение радианной меры У. равно длине дуги, высекаемой сторонами У. из единичной окружности. Один радиан приписывается У., соответствующему дуге, длина к-рой равна ее радиусу. Развернутый У. равен π радиан.

При пересечении двух прямых, лежащих в одной плоскости, третьей прямой образуются У. (см. рис. 3): 1 и 5, 2 и 6, 4 и 8, 3 и 7 — наз. с о о т в е т с т в е н-

ными; 2 и 5, 3 и 8 — внутренними односторонними; 1 и 6, 4 и 7 — внешними односторонними; 3 и 5, 2 и 8 — внутренними накрест лежащими; 1 и 7, 4 и 6 — внешними накрест лежащими.

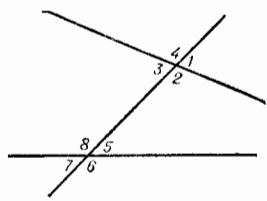


Рис. 3.

В практич. задачах целесообразно рассматривать У. как меру поворота фиксированного луча вокруг его начала до заданного положения. В зависимости от направления поворота У. в этом случае можно рассматривать как положительные, так и отрицательные. Тем самым У. в этом смысле может иметь своей величиной любое действительное число. У. как мера поворота луча рассматривается в теории тригонометрич. функций: для любых значений аргумента (У.) можно определить значения тригонометрич. функций. Понятие У. в геометрич. системе, в основу к-рой положена точечно-векторная аксиоматика, в корне отличается от определений У. как фигуры — в этой аксиоматике под У. понимают определенную метрич. величину, связанную с двумя векторами с помощью операции скалярного умножения векторов. Именно, каждая пара векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяет нек-рый угол φ — число, связанное с векторами формулой

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|},$$

где $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ — скалярное произведение векторов.

Понятие У. как плоской фигуры и как нек-рой числовой величины применяется в различных геометрич. задачах, в к-рых У. определяется специальным образом. Так, под У. между пересекающимися кривыми, имеющими определенные касательные в точке пересечения, понимают У., образованный этими касательными.

За угол между прямой и плоскостью принимается У., образованный прямой и ее прямоугольной проекцией на плоскость; он измеряется в пределах от 0° до 90°. Под У. между скрещивающимися прямыми понимают У. между направлениями этих прямых, т. е. между прямыми, параллельными, скрещивающимися и проведенными через одну точку.

Телесным углом наз. часть пространства, ограниченная нек-рой конической поверхностью; частным случаем телесного У. является *многогранный угол*.

В многомерной геометрии определяется У. между многомерными плоскостями, между прямыми и плоскостями и т. д. Углы между прямыми, плоскостями и прямыми, многомерными плоскостями определяются и в неевклидовых пространствах. *Л. А. Сидоров.*

УДАРНЫХ ВОЛН МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — математическое описание свойств, движения и взаимодействия с окружающей средой поверхностей разрыва параметров среды (ударных волн). В более широком и абстрактном смысле У. в. м. т. описывает свойства поверхностей разрыва решений *квазилинейных гиперболических уравнений и систем*. У. в. м. т. возникла в связи с задачами движения газов и сжимаемых жидкостей во 2-й пол. 19 в.; ее основы были заложены в работах С. Ирншоу, Б. Римана, У. Ранкина, П. Гюгоньо (см., напр., [1] — [4]).

При идеализации реальных газов и жидкостей рассматривают среды, лишенные диссипативных свойств, в к-рых отсутствуют вязкость и теплопроводность. В процессе движения в таких идеальных средах могут возникать разрывы в распределениях всех параметров течения (плотности, давления, температуры, скорости и др.). Множества точек разрыва параметров течения

могут быть весьма сложными. Систематически рассмотрен лишь простейший основной случай, когда эти множества образуют кусочно гладкие поверхности разрыва, состоящие из точек разрыва параметров 1-го рода. В общем случае двумерные поверхности разрыва перемещаются в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ с течением времени. Ударные волны являются одним из возможных типов поверхностей разрыва.

Появление разрывов существенно осложняет математич. постановку задачи о течении идеальных газов и жидкостей, так как разрывные функции не могут быть решениями дифференциальных уравнений газовой динамики (гидродинамики). Поэтому течения с поверхностями разрыва описываются обобщенными решениями системы квазилинейных *газовой динамики уравнений* и У. в. м. т. является частью теории обобщенных решений системы интегральных законов сохранения газовой динамики.

Поверхности разрыва. На поверхностях разрыва должны выполняться условия, вытекающие из интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии. Исключение составляют лишь разрывы в момент начала движения (т. н. начальные разрывы), к-рые могут быть произвольными. Пусть $\Sigma(t)$ — гладкая поверхность разрыва параметров течения газа (жидкости); D — нормальная скорость движения поверхности разрыва. Рассматриваются лишь гомогенные среды, к-рые характеризуются плотностью $\rho(\boldsymbol{r}, t)$, давлением $p(\boldsymbol{r}, t)$, внутренней энергией единицы массы газа $\varepsilon(\boldsymbol{r}, t)$ и вектором скорости движения среды $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$.

Пусть в точках поверхности $\Sigma(t)$ $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_n+\boldsymbol{u}_\tau$, где $\boldsymbol{u}_n$ — нормальная и $\boldsymbol{u}_\tau$ — тангенциальная (по отношению к $\Sigma(t)$) составляющие вектора скорости $\boldsymbol{u}$. Условия непрерывности потоков массы, импульса и энергии на поверхности $\Sigma(t)$ записываются в виде равенств

$$\left.\begin{aligned}&[\rho(u_n-D)]=0,\quad [p+\rho(u_n-D)^2]=0,\\ &[\rho(u_n-D)\boldsymbol{u}_\tau]=0,\ [\rho(u_n-D)(\varepsilon+p/\rho+(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{D})^2/2]=0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где квадратные скобки означают скачок стоящей внутри их величины при переходе с одной стороны поверхности разрыва на другую, т. е. $[f(\boldsymbol{r}, t)]=f_1-f_0$, где f_1, f_0 — предельные значения величины f в точке $(\boldsymbol{r}, t)\in\Sigma(t)$ при приближении к ней с разных сторон. Условия (1) являются внутренними граничными условиями, к-рые добавляются к уравнениям газовой динамики на поверхностях разрыва параметров среды.

Существует два типа разрывов: тангенциальные разрывы при $u_{n1}=u_{n0}=D$; $j=\rho_1(u_{n1}-D)=\rho_0(u_{n0}-D)=0$, и ударные волны при $j\neq 0$. Вектор $\boldsymbol{j}$ наз. потоком массы через единичную площадку движущейся поверхности разрыва (ударной волны) $\Sigma(t)$.

Тангенциальные и контактные разрывы. Для тангенциального разрыва ($j=0$) давление непрерывно, $[p]=0$ на $\Sigma(t)$, а величины ρ, ε, $\boldsymbol{u}_\tau$ могут иметь на $\Sigma(t)$ произвольный скачок. Если хотя бы одна из величин $[\rho]$, $[\varepsilon]$ отлична от нуля, то разрыв наз. также контактным разрывом. В случае контактного разрыва поверхность $\Sigma(t)$ является границей раздела сред с разными свойствами, в частности с разными уравнениями состояния; она образуется линиями тока, выпущенными из поверхности начального контактного разрыва.

Тангенциальный разрыв ($j=0$, $[\boldsymbol{u}_\tau]\neq 0$) неустойчив, т. к. под действием даже малой вязкости, присущей газам и жидкостям, начальный разрыв тангенциальной составляющей $\boldsymbol{u}_\tau$ вектора скорости размывается во все более широкую зону непрерывного перехода. За исключением особых случаев, когда он осуществляется на коротких интервалах времени (тангенциальные раз-

рывы в соплах, начальные участки зон смешения различных потоков и т. п.), он не рассматривается как допустимый разрыв. В этом проявляется ограниченность описания «идеальной» средой среды даже с малой вязкостью, т. к. в идеальной среде тангенциальные разрывы сохраняются. Поэтому вопрос о допустимости или недопустимости тангенциального разрыва в течении идеальной среды решается в связи с условиями конкретной задачи.

Чисто контактный разрыв ($j=0$, $[u_\tau]=0$, $[p]=0$, $[\rho]^2+[\varepsilon]^2\neq 0$) может разрушаться процессами молекулярной диффузии; как правило, эти процессы столь медленны, что контактный разрыв можно считать устойчивым на умеренных интервалах времени.

Однако контактный разрыв также становится неустойчивым и быстро разрушается, если в течение значительного интервала времени ускорение среды на контактной границе направлено в сторону среды с меньшей плотностью. В этом случае контактный разрыв разрушается и начинается «перемешивание» сред, расположенных первоначально по разные стороны от контактного разрыва. Простейшим примером подобной, существенно многомерной, неустойчивости является разрушение в поле силы тяжести горизонтального контактного разрыва между легкой жидкостью, находящейся в нижней части сосуда, и налитой на нее сверху более тяжелой жидкостью (т. н. тейлоровская неустойчивость).

Ударные волны. В этом случае $j=\rho_1(u_{n1}-D)=\rho_0(u_{n0}-D)\neq 0$ и из (1) следует $[u_\tau]=0$, т. е. отсутствует разрыв тангенциальной составляющей вектора скорости. Условия (1) на ударной волне $\Sigma(t)$ сводятся к трем уравнениям

$$\left.\begin{aligned}&[\rho(u_n-D)]=0,\ [p+\rho(u_n-D)^2]=0,\\&[\varepsilon+p/\rho+(u_n-D)^2/2]=0,\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

к-рые наз. условиями Ранкина — Гюгоньо. Если $u_\tau=0$, то ударную волну наз. прямой, в противном случае — косой. Исключение из (2) величин $(u_{n1}-D)$, $(u_{n0}-D)$ дает соотношение

$$\varepsilon_1-\varepsilon_0+\frac{1}{2}(V_1-V_0)(p_1+p_0)=0,\ V=\frac{1}{\rho},\qquad(3)$$

к-рое связывает лишь термодинамич. параметры среды по разные стороны ударной волны; оно наз. ударной адиабатой или адиабатой Гюгоньо.

Пусть поверхность $\Sigma(t)$ движется в направлении D слева направо. Тогда, если $j<0$, то ударная волна относительно среды движется направо, в процессе движения вещество пересекает ударную волну $\Sigma(t)$, двигаясь относительно $\Sigma(t)$ справа налево. Наоборот, если $j>0$, то ударная волна движется относительно среды налево. Среду справа от ударной волны при $j<0$ и слева от ударной волны при $j>0$ наз. средой перед ударной волной, др. среду — средой за ударной волной. Параметры среды перед ударной волной — $u_{n0}=u_0$, V_0, p_0, ε_0; параметры среды за ударной волной — $u_{n1}=u_1$, V_1, p_1, ε_1. В процессе движения частицы перед ударной волной переходят через поверхность $\Sigma(t)$ ударной волны и присоединяются к среде за ударной волной (u_0, V_0, p_0, $\varepsilon_0\to u_1$, V_1, p_1, ε_1). При этом они проходят через зону больших градиентов (зона ударной волны), в к-рой существенно действие диссипативных процессов — трения и теплопроводности — несмотря на малые коэффициенты вязкости и теплопроводности вещества. Ввиду необратимости диссипативных процессов должно выполняться условие $S_0<S_1$, где S — энтропия газа. Это неравенство уже не позволяет менять местами состояния u_0, V_0, p_0, ε_0 и u_1, V_1, p_1, ε_1 (как это допускается условиями (2) и (3)), а, напротив, указы-

вает определенное положение этих состояний относительно поверхности $\Sigma(t)$.

Условие $S_1 > S_0$ наз. условием устойчивости ударной волны. Вопрос о реализуемости (допустимости) ударной волны, на к-рой выполняются условия (2), (3) и $S_1 > S_0$, решается сравнительно просто лишь для т. н. нормального газа. Газ (жидкость) наз. нормальным газом, если его уравнения состояния удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial V}(V, S) < 0,\ \dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial V^2}(V, S) > 0,\ p(V, S) \longrightarrow \infty \text{ при } V \longrightarrow 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial S}(V, S) > 0,\ c_V = \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial T}(V, T) > 0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Для нормального газа условие $S_1 > S_0$ гарантирует устойчивость ударной волны; при этом из условий Гюгоньо (2) состояние u_1, V_1, p_1, ε_1 за фронтом ударной волны определяется однозначно по заданным состоянию u_0, V_0, p_0, ε_0 и потоку массы j, если

$$-j^2 < \frac{\partial p}{\partial V}(V_0, S_0).$$

Из условия устойчивости $S_1 > S_0$ ударной волны вытекают свойства: а) ударная волна движется со сверхзвуковой скоростью по среде перед ее фронтом и с дозвуковой скоростью по среде за ее фронтом (теорема Цемплена), т. е.

$$|u_0 - D| > c_0,\ |u_1 - D| < c_1,\ c^2 = -V^2 \frac{\partial p}{\partial V}(V, S);$$

б) ударные волны приводят к сжатию вещества и увеличению в нем давления, т. е. из $S_1 > S_0 \to \rho_1 > \rho_0$, $p_1 > p_0$.

Ударная адиабата (3) для нормального газа изображается в плоскости переменных V, p выпуклой вниз кривой $H(V, p; V_0, p_0) = 0$, $V_1 = V$, $p_1 = p$, проходящей через точку (V_0, p_0), называемую центром ударной адиабаты. График ударной адиабаты при $V < V_0$ лежит выше графика адиабаты Пуассона $S = S_0$ и ниже его при $V > V_0$; в точке (V_0, p_0) эти две адиабаты имеют касание не ниже 2-го порядка. Состояниям (V_1, p_1) за фронтом ударной волны соответствует левая ветвь ударной адиабаты $(V < V_0)$.

Для среды с уравнениями состояния

$$pV = RT,\ \varepsilon = pV/(\gamma - 1),\ \gamma = \text{const} > 1,$$

(т. н. идеальный газ), условия (4) выполнены, а уравнение (3) имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} (p + hp_0)(V - hV_0) = (1 - h^2) p_0 V_0,\ p = p_1, \\ V = V_1,\ \ 0 < h = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1} < 1. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Уравнение (5) определяет гиперболу с асимптотами $V = hV_0$, $p = -hp_0$. Предельное сжатие вещества достигается за бесконечно сильной ударной волной

$$p_1/p_0 = \infty,\ V_0/V_1 = \rho_1/\rho_0 = 1/h = (\gamma + 1)/(\gamma - 1).$$

Решение уравнений (2) относительно u_{n1}, ρ_1, p_1 при заданных u_{n0}, ρ_0, p_0 и D дается формулами

$$\left.\begin{array}{l} u_{n1} = u_{n0} - (\operatorname{sign} j)(1 - h) c_0 (M_0 - 1/M_0), \\ \rho_1 = \rho_0 M_0^2/(1 - h + hM_0^2),\ p_1 = p_0 [(1 + h) M_0^2 - h]; \\ M_0 = |u_0 - D|/c_0,\ M_0 > 1. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Для газов с аномальными термодинамич. свойствами, когда нарушаются условия (4), требование $S_1 > S_0$ уже не гарантирует устойчивости (допустимости) ударного перехода. Вопрос об условиях допустимости ударного перехода значительно усложняется и для газов с произвольными уравнениями состояния, удовлетворяющими лишь необходимым условиям термодинамики,

до конца не решен. Наиболее изучен случай, когда нарушается лишь требование $p''_{VV}(V,\ S)>$ из условий (4) и величина $p''_{VV}(V,\ S)$ может быть знакопеременной. В этом случае ударная адиабата (3) содержит состояния $V_1,\ p_1,\ \varepsilon_1$, для к-рых ударный переход $V_0,\ p_0,\ \varepsilon_0 \to V_1,\ p_1,\ \varepsilon_1$ является неустойчивым даже при выполнении условия $S_1>S_0$.

Зона ударного перехода и его ширина. Так называют зону непрерывного изменения параметров среды от их значений перед фронтом до значений за фронтом ударной волны (и ее эффективную ширину) для реальных сред, обладающих конечной вязкостью и теплопроводностью. Предполагается, что непрерывный переход существует только для устойчивых ударных волн. Поэтому изучение непрерывного ударного перехода дает критерий допустимости ударной волны. Исследуется и характер изменения параметров среды в зоне перехода.

При малой ширине зоны перехода любая ударная волна может рассматриваться как локально плоская. Поэтому ударный переход описывается решениями одномерных с плоской симметрией уравнений газовой динамики для вязкого и теплопроводящего газа:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}=0;\ \frac{\partial\rho u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\rho u^2-\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\\ &\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varepsilon+\rho\frac{u^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\,(\varepsilon+p/\rho+u^2/2)-\mu u\frac{\partial u}{\partial x}-\right.\\ &\qquad\left.-\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right]=0, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

где μ и $\varkappa$ — коэффициенты вязкости и теплопроводности (предполагаемые здесь постоянными). К уравнениям (7) добавляются уравнения состояния $p=p(V,\ T)$ из $\varepsilon=\varepsilon(V,\ T)$. В системе координат, движущейся со скоростью D ударной волны, ударный переход описывается стационарными решениями уравнений (7). Для них имеются два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &j\mu\frac{dV}{dx}=M(V,\ T)=p+j^2V-f,\\ &\varkappa\frac{dT}{dx}=L(V,\ T)=j\,(\varepsilon-j^2V^2/2+fV)-g, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

где $j>0,\ f,\ g$ — постоянные.

Для уравнений (8) ставится задача: найти решение $V(x),\ T(x)$ такое, что $V(x)\to V_0,\ T(x)\to T_0$ при $x\to\infty$ и $V(x)\to V_1,\ T(x)\to T_1$ при $x\to-\infty$. Необходимые условия существования такого решения

$$M(V_0,\ T_0)=L(V_0,\ T_0)=M(V_1,\ T_1)=L(V_1,\ T_1)=0$$

приводят к условиям Гюгоньо (2).

Качественное изучение картины интегральных кривых системы (8) приводит к выводу о существовании единственной интегральной кривой этой задачи, если для уравнений состояния газа выполнены условия (4), параметры $V_0,\ p_0,\ u_0$ и $V_1,\ p_1,\ \varepsilon_1$ удовлетворяют условиям Гюгоньо и условию устойчивости ударной волны $S_1>S_0$. «Ширина» зоны ударного перехода бесконечна, и примыкание к предельным значениям происходит экспоненциально. В случае невязкого теплопроводного газа ($\mu=0,\ \varkappa>0$), к-рый можно рассматривать как предельный при $\mu\to 0$, также существует непрерывное решение задачи об ударном переходе, если кривая $M(V,\ T)=0$ в плоскости переменных $V,\ T$ является монотонной. В противном случае (что бывает для достаточно сильных ударных волн) предел при $\mu\to 0$ интегральных кривых может иметь разрыв плотности при постоянной температуре (т. н. изотермический скачок). Это означает, что решения уравнений газовой динамики для теплопроводящей среды, лишенной вязкости, могут быть разрывными. Если среда обладает вязкостью ($\mu>0$) и лишена теплопроводности ($\varkappa=0$), то всегда существует непрерывный

переход $V_0,\ T_0 \to V_1,\ T_1$. Из этого можно сделать вывод, что решения уравнений газовой динамики для среды, обладающей вязкостью, не могут иметь разрывов типа ударной волны, т. е. для них задача Коши разрешима в целом (при любых $t>0$). Однако строгое доказательство этого отсутствует.

Подробно изучен ударный переход для идеального газа: $p=RT/V,\ \varepsilon=c_V T$ ($R,\ c_V$ — константы). Уравнения (8) в этом случае интегрируются при $\varkappa=0,\ \mu>0$:

$$[V_0-V(x)]^{\frac{V_0}{V_0-V_1}}\cdot[V(x)-V_1]^{\frac{V_1}{V_0-V_1}}=c\exp\{(\gamma+1)x/2\mu\}.$$

Эффективную ширину зоны ударного перехода определяют так:

$$l=(V_0-V_1)/\max\left|\frac{dV}{dx}(x)\right|.$$

Вычисления показывают, что ширина l ударной волны имеет порядок длины свободного пробега молекулы. Тем самым оправдывается точка зрения, согласно к-рой течение газа подразделяется на области обратимых процессов, где течение описывается уравнениями газовой динамики без учета диссипативных членов, и на области необратимых процессов, к-рые представляют собой узкие зоны и могут быть эффективно описаны подвижными поверхностями разрыва (ударными волнами). Более точно поведение параметров среды в зоне ударного перехода описывается *Больцмана уравнением* для неравновесных газодинамич. процессов.

Для газов с аномальными термодинамич. свойствами изучение зоны ударного перехода осложняется. Рассмотрен случай, когда величина $p''_{VV}(V,\ S)$ знакопеременна. Пусть $\varkappa=0,\ \mu>0$ в системе (8). Тогда $L(V,\ T)=0$ и нахождение $V(x),\ T(x)$ сводится к решению одного уравнения

$$j\mu\frac{dV}{dx}=M(V,\ T)=[p(V,\ T)+j^2V-f]. \qquad (9)$$

Решение этого уравнения $V=V(x),\ V(x)\to V_0$ при $x\to-\infty$ и $V(x)\to V_1$ при $x\to+\infty$, существует, если $V_0,\ p_0,\ \varepsilon_0$ и $V_1,\ p_1,\ \varepsilon_1$ лежат на ударной адиабате (3) и

$$\frac{p-p_0}{V-V_0}\geqslant -j^2=\frac{p_1-p_0}{V_1-V_0} \qquad (10)$$

в точках кривой $L(V,\ T)=0$ при $(V-V_0)(V-V_0)<0$. Из (10) следует, что $S_1\geqslant S_0$, причем если $S_1=S_0$, то отрезок адиабаты Гюгоньо (3) между точками $(V_0,\ p_0)$ и $(V_1,\ p_1)$ в плоскости переменных $V,\ p$ — отрезок прямой $p-p_0=j^2(V_0-V)$. Неравенство (10) дает условия допустимости ударной волны в случае знакопеременности величины $p''_{VV}(V,\ S)$. Основные свойства ударных волн в этом случае видоизменяются: а) $|u_{n0}-D|\geqslant c_0,\ |u_{n1}-D|\leqslant c_1$; б) ударные волны приводят к неубыванию энтропии ($S_1\geqslant S_0$). Существуют ударные волны сжатия ($\rho_1>\rho_0$) и ударные волны разрежения ($\rho_1<\rho_0$).

Возникновение ударных волн в идеальных средах происходит как в результате распада начального разрыва параметров на устойчивые разрывы (ударные волны, контактные и тангенциальные разрывы), так и в процессе непрерывного до того течения. Напр., в однородном изоэнтропическом течении идеального газа ($S(x,\ t)=\text{const}$) ударные волны не возникают, если при $t=0$ выполнены условия

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u-\frac{2}{\gamma-1}c\right)\geqslant 0;\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(u+\frac{2}{\gamma-1}c\right)\geqslant 0$$

и, наоборот, они возникают, если какое-либо из этих условий нарушено.

В теории разрывных решений квазилинейных гиперболич. уравнений и систем также развивается теория разрывов, подобная У. в. м. т. в газовой динамике.

Основные результаты (далекие от завершения) получены лишь для случая двух независимых переменных x t. Одно квазилинейное уравнение

$$u_t + [\varphi(u)]_x = 0 \qquad (11)$$

будем рассматривать как закон сохранения, тогда $\varphi(u)$ — поток величины u. Непрерывность потока на линии разрыва $x = x(t)$ приводит к условию

$$[Du - \varphi(u)] = 0;\ D = x'(t), \qquad (12)$$

к-рое по аналогии с (1) наз. условием Гюгонью. Так же как и для ударных волн в газовой динамике, к (12) добавляется требование устойчивости разрыва, к-рое обеспечивает единственность решения задачи Коши для уравнения (11) в классе разрывных функций. Если $\varphi(u) \in C^2$ и $\varphi''_{uu}(u) \neq 0$, то условие устойчивости имеет вид

$$\varphi'_u(u(x(t) - 0,\ t)) \geqslant \varphi'_u(u(x(t) + 0,\ t)).$$

Для системы квазилинейных законов сохранения

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_i(u)}{\partial x} = 0,\ i = 1, \ldots, n,\ u = \{u_1, \ldots, u_n\}, \qquad (13)$$

условия Гюгоньо имеют вид (12), где $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\varphi(u) = \{\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)\}$. Вопрос о корректных условиях устойчивости разрыва решения решен лишь для узких классов систем вида (13).

Лит.: [1] Earnshow S., «Philos. Trans. Roy. Soc. London», 1860, v. 150, p. 133—48; [2] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948, с. 376—95; [3] Rankine W. J. M., «Philos. Trans. Roy. Soc. London», 1870, v. 160, p. 277—88; [4] Hugoniot H., «J. École polytech.», 1889, cahier 58, p. 1—125; [5] Кочин Н. Е., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1949, с. 5—42; [6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, 2 изд., М., 1954; [7] Weyl H., «Communs Pure and Appl. Math.», 1949, v. 2, p. 103—22; [8] Gilbarg D., «Amer. J. Math.», 1951, v. 73, p. 256—74; [9] Becker R., «Z. Phys.», 1922, Bd 8, S. 321—62; [10] Курант Р., Фридрихс К., Сверхзвуковое течение и ударные волны, пер. с англ., М., 1950; [11] Седов Л. И., Механика сплошной среды, 3 изд., т. 1, М., 1976; [12] Зельдович Я. Б., Теория горения и детонации газов, М.— Л., 1944; [13] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, 2 изд., М., 1978; [14] Олейник О. А., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 3, с. 3—73.

Б. Л. Рождественский.

УДВОЕНИЕ КУБА — задача на построение куба, объем к-рого вдвое больше объема данного куба; одна из классич. задач древности на точное построение циркулем и линейкой. Длина ребра x искомого куба численно равна $\sqrt[3]{2}$ и определяется из кубического уравнения $x^3 - 2 = 0$. Однако точное построение отрезка $\sqrt[3]{2}$ посредством циркуля и линейки неосуществимо вследствие неразрешимости кубического уравнения в квадратных радикалах. Первое строгое доказательство неразрешимости задачи У. к. с помощью циркуля и линейки дал в 1837 П. Ванцель (P. Wantzell).

Лит.: Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963, с. 205—27.

Е. Г. Соболевская.

УЗЕЛ. 1) У.— тип расположения траекторий автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\dot{x} = f(x),\ x = (x_1, x_2),\ f\colon G \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad (*)$$

$f \in C(G)$, G — область единственности, в окрестности особой точки x_0. Этот тип характеризуется следующим образом. Существует окрестность U точки x_0 такая, что для всех траекторий системы, начинающихся в $U \setminus \{x_0\}$, отрицательные полутраектории являются уходящими (с течением времени покидают любой компакт $V \subset U$), а положительные полутраектории — асимптотическими (не выходя из U, примыкают к x_0, причем, будучи дополнены точкой x_0, касаются в ней определенных направлений), или наоборот. У. наз. при этом и сама точка x_0.

У. либо асимптотически устойчив по Ляпунову, либо вполне неустойчив (асимптотически устойчив при $t \to -\infty$). Индекс Пуанкаре для У. равен 1.

Для системы (*) класса C^1 ($f \in C^1(G)$) с ненулевой матрицей $A = f'(x_0)$ точка покоя x_0 является У., когда собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A действительны и удовлетворяют условиям $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, но может быть У. и в тех случаях, когда $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. В случае $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ точка x_0 будет У., если $f \in C^2(G)$; при несоблюдении этого условия она может оказаться *фокусом*. В любом из перечисленных выше случаев траектории системы, примыкающие к У. x_0, касаются в этой точке направлений, определяемых собственными векторами матрицы A. Если $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2|$, то существует четыре таких направления (если различать диаметрально противоположные); при этом все траектории системы касаются в точке x_0 направлений, соответствующих собственному значению λ_1, за исключением двух траекторий, к-рые касаются в x_0 направлений, соответствующих собственному значению λ_2 (рис. 1). Это — о б ы к н о в е н н ы й У. Если $\lambda_2 = \lambda_1$, то собственными для матрицы A в точке x_0 будут либо лишь два противоположных направления (в этом случае У. наз. в ы р о ж д е н н ы м, рис. 2),

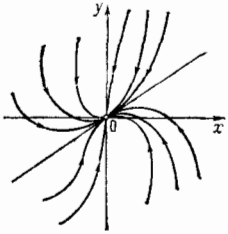


Рис. 1.

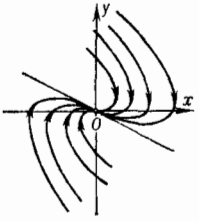


Рис. 2.

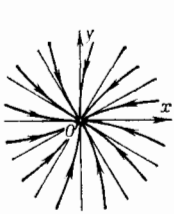


Рис. 3.

либо — все направления. В последнем случае при условии $f \in C^2(G)$ каждого направления касается в точке x_0 единственная траектория системы. Такой У. наз. д и к р и т и ч е с к и м (рис. 3).

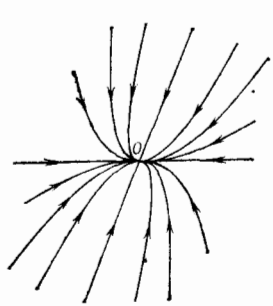


Рис. 4.

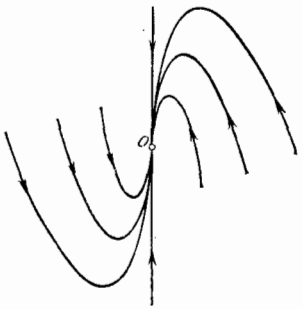


Рис. 5.

Если система (*) линейна ($f(x) = A(x - x_0)$, A — постоянная матрица), то для нее точка x_0 является У. лишь в тех случаях, когда собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A действительны и $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Любой луч $x = x_0 + ps$ (p — собственный вектор матрицы A, $s \neq 0$ — параметр) является для нее траекторией. Обыкновенный, вырожденный и дикритический У. для линейной системы изображены соответственно на рис. 4, 5, 6. В случае обыкновенного У. все криволинейные тра-

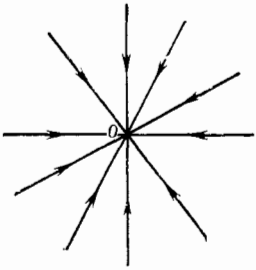


Рис. 6.

ектории являются аффинными образами парабол $x_2 = c|x_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Термин «У.» применяют и для наименования точек покоя систем вида (*) порядка $n \geqslant 3$ с аналогичным поведением траекторий в их окрестностях.

Лит. см. при ст. *Особая точка* дифференциального уравнения. *А. Ф. Андреев.*

2) У. в геометрии — плоская кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид

$$\rho = a \operatorname{ctg} k\varphi.$$

Имеет в начале координат узловую точку и асимптоты, параллельные координатным осям (см. рис.). При $k=1$ У. есть *каппа*, при $k=1/2$ — *строфоида*. Инверсия У. относительно начала координат есть У., конгруэнтный данному, но повернутый на 90°.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

3) У. в топологии — см. *Узлов теория*.

УЗКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ — см. *Предикатов исчисление*.

УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ ГРУППЫ — класс групп, изоморфных *фундаментальным группам* $G(k) = \pi_1(M(k))$ дополнительных пространств $M(k) = S^n \setminus k$ зацеплений k коразмерности 2 в сферах S^n.

Для случая $n \geqslant 5$ группы G гладких зацеплений кратности μ выделяются такими свойствами [3]: 1) G порождается как свой нормальный делитель μ элементами; 2) двумерная группа гомологий $H_2(G; Z)$ группы G с целыми коэффициентами и тривиальным действием G в Z равна 0; 3) факторгруппа G по ее коммутанту G' равна свободной абелевой группе J^μ ранга μ. Если G — группа зацепления k, то свойство 1) выполнено, так как G становится единичной группой после приравнивания единице меридианов (см. ниже), свойство 2) вытекает из теоремы Хопфа, согласно к-рой $H^2(G; Z)$ есть факторгруппа группы $H_2(M(k); Z)$, равной нулю в силу *Александера двойственности*; свойство 3) вытекает из того, что $G/G' \approx H_1(M(k); Z)$ и $H_1(M(k); Z) = J^\mu$ по двойственности Александера.

В случаях $n=3$ и $n=4$ необходимые и достаточные условия еще (1984) не получены. Если $n=3$, то k не распадается тогда и только тогда, когда $M(k)$ асферично, т. е. является пространством Эйленберга — Маклейна типа $K(G, 1)$. Зацепление k распадается тогда и только тогда, когда дефект группы G больше единицы [3]. Дополнение многомерного ($n \geqslant 4$) зацепления, имеющего больше одной компоненты, никогда не асферично, а дополнение многомерного узла может быть асферичным только при условии $G \approx \mathbb{Z}$ [5]. Более того, при $n \geqslant 6$ всякий n-мерный узел с асферичным дополнением тривиален. Известно также, что при $n=3$ зацепление тривиально тогда и только тогда, когда его группа свободна [3]. Дальше принимается, что $n=3$. Для получения копредставления группы $G(k)$ по общему правилу (см. *Фундаментальная группа*) в S^3 строят двумерный комплекс K, содержащий исходный узел k и такой, что $\pi_1(S^3 - K) = 1$. Тогда 2-клетки K дают систему образующих $G(k)$, а обходы вокруг 1-клеток из $K \setminus k$ — соотношения. Если в качестве K взять конус над k, идущий из точки снизу от плоскости проекции, получается верхнее копредставление Виртингера (см. *Узлов и зацеплений диаграммы*). Если в качестве K взять объединение черной и белой поверхностей, получаемых из диаграммы k (удалив внешнюю область), получится копредставление Дена.

Задание k в виде замкнутой косы приводит к копредставлению $G(k)$ вида $\{s_i; s_i = L_i s_k L_i^{-1}\}$, где L_i — слово в алфавите s_i, s_i^{-1}, причем $\prod_{i=1}^{N} (L_i s_k L_i^{-1}) = \prod_{i=1}^{N} s_i$ в свободной группе $\{s_i;\}$. При этом каждое копредставление такого типа получается из замкнутой косы. О других копредставлениях см. [1], [2], [4], [7], [8].

Сравнение верхнего и нижнего копредставлений Виртингера приводит к особого рода двойственности в $G(k)$ (см. [7]). Она формулируется в терминах исчисления Фокса: $G(k)$ имеет два таких копредставления $(x_i;\ r_j)$ и $(y_i;\ s_j)$, что для нек-рой их эквивалентности $\theta\colon (x_i;\ r_j)\to(y_i;\ s_j)$ имеет место $\theta x_i = y_i^{-1}$ и $\theta\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}(x_j-1)\right) = \frac{\partial s_j}{\partial y_i}(y_i-1)$, где сравнения берутся по модулю ядра гомоморфизма группового кольца свободной группы на групповое кольцо G/G'. Из этой двойственности вытекает симметрия в *Александера инвариантах*.

Проблема тождества решается лишь для отдельных классов узлов (напр., для торических, нек-рых крендельных [6] и др.). Не существует (см. [1]) алгоритма для распознавания групп трехмерных узлов по копредставлениям. Более сильным инвариантом для k является групповая система $\langle G,\ T_i\rangle$, состоящая из $G(k)$ и из системы классов T_i сопряженных подгрупп. Подгруппа $S_i\subset T_i$ наз. периферической подгруппой компоненты k_i; это образ при гомоморфизме вложения фундаментальной группы $\pi_1(\partial N(k_i))$ края нек-рой регулярной окрестности $N(k_i)$ компоненты $k_i\subset k$. Если k_i не является тривиальным узлом, отделенным от остальных компонент 2-сферой, то $S_i\approx\pi_1(\partial N(k_i))$. Меридиан и параллель в $\partial N(k_i)$ порождает в S_i два элемента, к-рые также наз. меридианом m_i и параллелью l_i для k_i в групповой системе. В случае $\mu=1$ параллель определяется самой группой G в подгруппе S_i однозначно, а меридиан только с точностью до сомножителя вида l_i^n. О силе $\langle G,\ T_i\rangle$ как инварианта см. *Узлов теория*. Группа автоморфизмов группы G полностью изучена лишь для торич. зацеплений, для *Листинга узла* и, в значительной степени, для *Нейвирта узлов* (см. [2]). Представления G в различных группах, особенно с учетом $\langle G,\ T_i\rangle$,— мощный метод различения узлов. Напр., представления в группе движений плоскости Лобачевского позволяют заметить необратимые узлы. Систематически изучены метациклич. представления.

Если k не распадается, то для подгрупп $F\subset G(k)$ пространствами типа $K(F;\ 1)$ служат накрывающие M, к-рые, как и M, имеют *гомотопический тип* двумерного комплекса. Отсюда следует, что абелевы подгруппы $G(k)$ изоморфны J или $J\oplus J$; в частности, $G(k)$ не имеет элементов конечного порядка. Для $\mu=1$ периферич. подгруппы S_i являются максимальными во множестве абелевых подгрупп. Центр имеют только группы торич. зацеплений [10]. Особую роль играет подгруппа $L(k)$, в к-рую входят элементы $G(k)$, коэффициент зацепления к-рых с объединением ориентированных компонент k_i равен нулю. Если $\mu=1$, то $L(k)$ — коммутант. Вообще, $G(k)/L(k)\approx J$. Поэтому $L(k)$ служит группой накрывающего $\tilde{M}_0$ над $M(k)$ с бесконечной циклич. группой J скольжений. Если $F(k)$ — связная ориентируемая поверхность в S^3 с краем k, то она накрыта в $\tilde{M}_0$ счетной системой поверхностей $\tilde{F}_j$, к-рые разрезают $\tilde{M}_0$ на счетное число кусков M_j (край $\partial M_j=F_j\cup F_{j+1}$). Отсюда получается, что $L(k)$ есть предел диаграммы

$$\ldots \xleftarrow{i_{j*}} \pi_1 F_j \xrightarrow{i_{j*}} \pi_1 M_j \xleftarrow{i'_{j+1*}} \pi_1 F_{j+1} \xleftarrow{i_{j+1*}} \ldots,$$

где все i_{j*}, i'_{j*} индуцированы вложением. Оказывается, что либо все они — изоморфизмы, либо ни один из них не эпиморфен [2]. Если род связной $F(k)$ равен роду $\gamma(k)$ зацепления (такое k наз. вполне неразложимым), то все i_{j*}, i'_{j*} — мономорфизмы, и тогда $L(k)$ — либо свободная группа ранга $2\gamma+\mu-1$, либо не имеет конечной системы образующих (и не свободна, если приведенный многочлен Александера не нуль; это

так, в частности, для узлов). Вполне неразложимое зацепление с конечно порожденной $L(k)$ наз. зацеплением Нейвирта.

Лит.: [1] Кроуэлл Р., Фокс Р., Введение в теорию узлов, пер. с англ., М., 1967; [2] Neuwirth L. P., «Ann. Math. Stud.», 1965, № 56; [3] Hillman J. A., «Lect. Notes in Math.», 1981, v. 883; [4] Gordon C. McA., там же, 1978, v. 685, p. 1—60; [5] Eckmann B., «Comment. math. helv.», 1976, v. 51, p. 93—98; [6] Reidemeister K., «Hamburg. Abh.», 1928, Bd 6, S. 56—64; [7] Hotz G., там же, 1960, Bd 24, S. 132—48; [8] Trotter H. F., «Ann. Math.», 1962, v. 76, p. 464—98; [9] его же, «Topology», 1964, v. 2, p. 341—58; [10] Burde G., Zieschang H., «Math. Ann.», 1966, Bd 167, S. 169—76.

А. В. Чернавский.

УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ ДИАГРАММЫ — графическое изображение узлов и зацеплений, основу к-рых составляют плоские проекции. Пусть $k \subset \mathbb{R}^3$ — зацепление и $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ — проекция $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$. Порядком точки $p \in \pi(k)$ наз. число элементов множества $\pi^{-1}(p) \cap k$. Точки порядка два наз. двойными, точки порядка >1 — кратными. Говорят, что полигональное зацепление k находится в регулярном положении, если: (1) все его кратные точки являются двойными и их число конечно и (2) никакая двойная точка не является образом вершины. Всякое зацепление может быть переведено в регулярное положение сколь угодно малым вращением пространства. Если k находится в регулярном положении, то в каждой двойной точке ветвь, лежащая выше (в направлении координаты z), наз. переходом, а ветвь, лежащая ниже,— проходом. Чтобы задать диаграмму зацепления, находящегося в регулярном положении, нужно указать его проекцию $\pi(k) \subset \mathbb{R}^2$ и разорвать образы проходов в двойных точках (см. рис. 1). Если зацепление ориентировано, т. е. заданы обходы компонент, то они указываются на диаграмме D стрелками. Если при обходе каждой компоненты зацепления на ее проекции проходы и переходы чередуются, то диаграмма наз. альтернирующей. Зацепление, имеющее хотя бы одну альтернирующую диаграмму, наз. альтернирующим зацеплением (см. *Альтернирующие узлы и зацепления*).

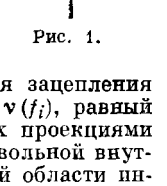


Рис. 1.

Каждой области f_i, на к-рые проекция зацепления делит плоскость $\mathbb{R}^2$, отвечает ее индекс $\nu(f_i)$, равный суммарному числу обходов, совершаемых проекциями всех компонент зацепления вокруг произвольной внутренней точки f_i. При переходе к смежной области индекс меняется на единицу, откуда следует, что все области f_i можно раскрасить в черный и белый цвета в шахматном порядке.

Во множество диаграмм на плоскости вводится некрое отношение эквивалентности, причем две диаграммы оказываются эквивалентными тогда и только тогда, когда отвечающие им зацепления объемлемо изотопны. Это дает возможность свести изучение узлов к плоской топологии. Именно, $D_1 \sim D_2$, если D_1 можно получить

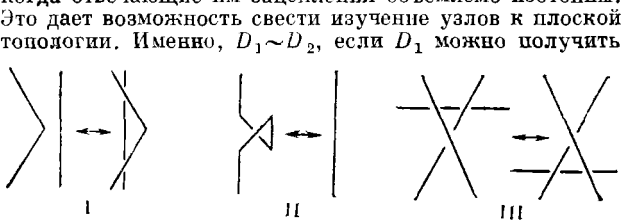


Рис. 2.

из D_2 применением конечного числа элементарных операций I, II, III, показанных на рис. 2, и изотопич. деформаций. Подход к теории узлов, основанный на указанном сведении, является типичным подходом комбинаторной топологии. Он был основным в 1-й период развития теории узлов (примерно до 40-х гг. 20 в.). В рамках этого подхода инварианты узлов оп-

ределяют исходя из диаграмм, а затем доказывают, что результат не зависит от выбора диаграммы (см. [1]). В современных исследованиях определения инвариантов предпочитают давать в терминах алгебраич. топологии, выделяя тем самым на первый план их геометрич. сущность.

Диаграмма ориентированного зацепления используется для построения его поверхности Зейферта. Пусть x — произвольная не двойная точка ориентированной диаграммы D зацепления k. Обход D, начиная от x, совершается в направлении, указанном ориентацией. В первой встретившейся двойной точке осуществляется поворот и продолжается движение в направлении ориентации D до возвращения в x; при этом будет описан простой замкнутый контур, к-рый наз. окружностью Зейферта. Диаграмма D распадается на такие окружности Зейферта C_j, причем они могут лишь соприкасаться. Пусть для каждой окружности C_j через D_j обозначается диск, лежащий в плоскости, параллельной $\mathbb{R}^2$, так что его край проектируется в C_j. Для каждой двойной точки α_i рассматривается прямоугольник H_i, помещенный вертикально над α_i, к-рый скручивается на 90° так, чтобы верхняя сторона лежала на крае D_{j_1}, а нижняя — на крае D_{j_2}, если C_{j_1} и C_{j_2} — примыкающие к α_i окружности Зейферта. Если каждое скручивание произвести в нужную сторону, то край возникающей поверхности $F=U_jD_j\cup U_jH_i$ изотопен зацеплению k. Так получаемая поверхность ориентируема. Более простую, но, возможно, неориентируемую поверхность, натянутую на зацепление, можно построить, взяв по диску над каждой черной областью шахматной диаграммы и соединив их, как и выше, скрученными прямоугольниками.

Известно несколько способов выписывания копредставления группы зацепления по его диаграмме. Чтобы получить копредставление Виртингера, рассматривают множество компонент связности $t_1, \ldots, t_n$ диаграммы зацепления (множество переходов), занумерованных в порядке их прохождения по каждой компоненте зацепления в направлении, указанном ориентацией. Пусть γ_i — нек-рый символ, сопоставленный t_i. Для каждой двойной точки составляется соотношение $\gamma_i=\gamma_j\gamma_{i+1}\gamma_j^{-1}$ или $\gamma_i=\gamma_j^{-1}\gamma_{i+1}\gamma_j$, в зависимости от того, имеет ли диаграмма зацепления в окрестности этой двойной точки вид, изображенный на рис. 3*а* или на рис. 3*б*. Группа, заданная копредставлением с образующими $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (по одному для каждого перехода) и указанными выше соотношениями (по одному для каждой двойной точки), изоморфна группе рассматриваемого зацепления. Полученное копредставление наз. ее верхним копредставлением Виртингера. Двойственным образом определяется нижнее копредставление Виртингера.

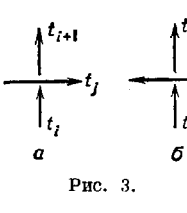


Рис. 3.

Для нахождения копредставления Дена рассматривают области f_i, на к-рые проекция зацепления делит плоскость, и берут по одному символу $\bar{f}_i$ для каждой области f_i. Символы $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, ... принимают за образующие, а соотношения получают обходом точек α_i: пишут подряд символы, отвечающие областям, примыкающим к α_i, причем если f_1 и f_2 лежат слева от прохода, то степени $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_3$ равны -1, а f_2 и f_4 равны 1. Кроме того, считается, что $\bar{f}_0=1$, где f_0 — внешняя область.

Использование У. и з. д. для преобразования зацепления в замкнутую

косу (см. *Кос теория*). Пусть точка $o \in \Pi$ выбрана вне D так, что лучи, исходящие из o, не содержат двойных точек и отрезков D. Обход одной из компонент k_i зацепления осуществляется до тех пор, пока соответствующий обход проекции k происходит в одном и том же направлении вокруг o. Пусть l — первый отрезок, направленный в противоположную сторону, и точка c взята так, чтобы треугольник cab, где a и b — концы l, содержал o внутри и стороны ac и bc находились в общем положении по отношению к $D(k)$. Можно считать, что на l лежит не более одной двойной точки. Заменив l в $D(k)$ на $ac \cup bc$, причем если l не содержит двойной точки или является переходом, полагают, что ac и bc являются переходами во всех точках своего пересечения с $D(k)$. Если l — проход, то пусть и они являются проходами. Продолжая это построение для k_i и применяя его последовательно для всех компонент, получают в результате новую диаграмму для k, в к-рой проекции всех компонент обходят o все время в одну сторону, т. е. k будет представлено в виде замкнутой косы [2].

Лит.: [1] Reidemeister K., Knotentheorie, B., 1932; [2] Alexander J. W., «Proc. Nat. Acad. USA», 1923, v. 9, p. 193.

А. В. Чернавский.

УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ — формы, сопоставляемые трехмерным узлам и зацеплениям; нек-рые инварианты этих форм являются топологич. инвариантами изотопич. типа узлов и зацеплений. У. и з. к. ф. возникают в результате симметризации спариваний Зейферта (см. *Зейферта матрица*). Если V^2 — многообразие Зейферта зацепления $L=(S^3, l)$, а

$$\theta\colon H_1(V;\ \mathbb{Z}) \otimes H_1(V;\ \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

— спаривание Зейферта, то билинейная симметричная форма

$$q\colon H_1(V;\ \mathbb{Z}) \otimes H_1(V;\ \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

заданная равенством

$$q(v_1 \otimes v_2) = \theta(v_1 \otimes v_2) + \theta(v_2 \otimes v_1),$$

наз. квадратичной формой зацепления L. Форма q описывается матрицей $M+M'$, где M — матрица Зейферта, а штрих означает транспонирование. Форма q сама по себе не является инвариантом зацепления L, однако ее сигнатура $\sigma(q) \in \mathbb{Z}$ и единицы Минковского $C_p(q) \in \{-1, +1\}$, где p — простое число, не зависят от выбора многообразия Зейферта. Они наз. соответственно сигнатурой и единицами Минковского зацепления L и обозначаются так: $\sigma(L)=\sigma(q)$, $C_p(L)=C_p(q)$. Размерность $n(q)$ радикала формы q также является инвариантом зацепления L. Число $n(L)=n(q)+1$ наз. дефектом зацепления L. Имеют место неравенства: $d(L) \leqslant n(L) \leqslant \mu(L)$, где $d(L)$ — максимальное число компонент связности, к-рое может иметь многообразие Зейферта зацепления L, а $\mu(L)$ — кратность, т. е. число компонент зацепления L.

Пусть N — локально плоское двумерное ориентируемое подмногообразие шара D^4 с $N \cap S^3 = \partial N = l$. Род $h(N)$ многообразия N оценивается снизу следующим неравенством:

$$2h(N) + \mu(L) - \mu(N) \geqslant |\sigma(L)| + |n(L) - \mu(N)|,$$

где $\mu(N)$ — число компонент многообразия N. Нижняя граница для $h(N)$ наз. 4-родом, или внешним родом зацепления L. Задача вычисления внешнего рода различных зацеплений тесно связана с задачей реализации двумерных гомологич. классов четырехмерных многообразий замкнутыми ориентируемыми поверхностями как можно меньшего рода. Внешний род всякого специального альтернирующего узла равен его роду и совпадает с половиной степени многочлена Алек-

сандера. **Срезанные узлы** (см. *Узлов кобордизм*) — это узлы внешнего рода нуль. Сигнатура и единицы Минковского узла определяются его классом кобордизмов. Функция на группе кобордизмов одномерных узлов в S^3 со значениями в группе $\mathbb{Z}$, к-рая сопоставляет классу кобордизмов сигнатуру представляющего его узла, является гомоморфизмом, образ к-рого совпадает с подгруппой четных чисел. Число заузливания всякого узла не менее половины его сигнатуры.

У. и з. к. ф. тесно связаны с двулистными разветвленными накрывающими Σ^4 шара D^4 с ветвлением над ориентируемыми двумерными поверхностями $N \subset D^4$ с $N \cap S^3 = \partial N = l$. В частности, сигнатура и единицы Минковского зацепления $L = (S^3, l)$ равны соответственно сигнатуре и единицам Минковского многообразия Σ^4. Край $\partial\Sigma^4 = \Sigma^3$, будучи двулистным накрытием сферы S^3, разветвленным над зацеплением l, является инвариантом зацеплений L. В случае узлов $H_1(\Sigma^3; \mathbb{Z})$ является конечной группой. Эта группа, а также форма коэффициентов зацепления

$$\lambda\colon H_1(\Sigma^3; \mathbb{Z}) \otimes H_1(\Sigma^3; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

определяется квадратичной формой узла следующим образом. Группой с зацеплением или V-г р у п п о й наз. пара (G, μ), состоящая из конечной абелевой группы G и невырожденной билинейной симметричной формы $\mu : G \otimes G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Каждой невырожденной симметричной целочисленной $(n \times n)$-матрице A сопоставляется V-группа (G, μ), определяемая так: группа G порождается элементами $g_1, \ldots, g_n$ со следующими определяющими соотношениями: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j = 0$, $i = 1, \ldots, n$, где $A = \|a_{ij}\|$, а $\mu(g_i, g_j)$ равно mod 1 элементу матрицы A^{-1}, находящемуся на месте (i, j). Оказывается, что V-группа, определяемая этим способом по матрице $M + M'$ квадратичной формы узла, изоморфна V-группе $(H_1(\Sigma^3; \mathbb{Z}), \lambda)$ многообразия Σ^3 (см. [4], [9]). Числовые инварианты V-групп находятся методом Бланчфилда — Фокса [5]. С их помощью в нек-рых случаях удается различать узлы, имеющие изоморфные группы.

Инварианты зацепления в двулистном накрытии S^3, разветвленном над узлом, могут быть найдены непосредственно по проекции узла с помощью следующей конструкции, к-рая приводит к к в а д р а т и ч н о й ф о р м е д и а г р а м м ы у з л а. Регулярная проекция узла делит плоскость на области, к-рые могут быть однозначно окрашены в черный и белый цвета таким образом, чтобы бесконечная область G_0 была окрашена в черный цвет, а всякие две области, примыкающие друг к другу по дуге, были бы окрашены в разные цвета. Пусть $G_0, G_1, \ldots, G_n$ — все черные области. Каждой двойной точке x диаграммы узла сопоставляется следующим образом нек-рое число $\eta(x) \in \{-1, 0, 1\}$. Пусть точка x является общей граничной точкой двух черных областей G_i и G_k. Если $i = k$, то $\eta(x) = 0$. Если же $i \neq k$, то $\eta(x) = 1$ тогда и только тогда, когда вращение от перехода к проходу вокруг точки x по черной области происходит по часовой стрелке; в противном случае $\eta(x) = -1$. Образуется следующая $(n \times n)$-матрица $A = \|a_{ij}\|$, где a_{ii} — сумма всех чисел $\eta(x)$, отвечающих двойным точкам x, лежащим на границе области G_i, а a_{ik} с $i \neq k$ есть взятая с обратным знаком сумма всех чисел $\eta(x)$, где x пробегает все общие граничные точки G_i и G_k. Форма $f = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ наз. к в а д р а т и ч н о й ф о р м о й д и а г р а м м ы у з л а. Матрица $A = \|a_{ij}\|$ определяется типом узла с точностью до следующего отношения связанности: две квадратные матрицы наз. с в я з а н н ы м и, если одна может быть переведена в другую конечной последовательностью следующих операций: $Q_1 : A \to T'AT$, где T — целочисленная унимодулярная матрица, $Q_2 : A \to \left\| \begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{smallmatrix} \right\|$, и

обратных к ним. Модуль определителя матрицы A является инвариантом узла и наз. детерминантом узла. Для всякого узла он нечетен и равен $|\Delta(-1)|$, где $\Delta(t)$ — многочлен Александера (см. *Александера инварианты*). V-группа, определяемая указанным выше способом по матрице квадратичной формы произвольной диаграммы, является инвариантом узла. Более того, эта V-группа изоморфна V-группе $(H_1(\Sigma^3, \mathbb{Z}), \lambda)$ двулистного накрытия сферы S^3, разветвленного над узлом K.

Лит.: [1] Reidemeister K., Knotentheorie, B., 1932; [2] Goeritz L., «Math. Z.», 1933, Bd 36, S. 647; [3] Seifert H., «Abh. Math. Sem. Hamb. Univ.», 1936, № 11, S. 84—101; [4] Kneser M., Puppe D., «Math. Z.», 1953, Bd 58, S. 376—84; [5] Blanchfield R., Fox R., «Ann. Math.», 1951, v. 53, p. 556—64; [6] Trotter H., «Ann. Math.», 1962, v. 76, p. 464—68; [7] Murasugi K., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 117, p. 387—422; [8] Tristram A., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1969, v. 66, p. 251—64; [9] Виро О. Я., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1973, т. 37, с. 1241—58. *М. Ш. Фарбер.*

УЗЛОВ КОБОРДИЗМ (правильнее бордизм узлов, см. *Бордизм*) — отношение эквивалентности на множестве узлов, более слабое, чем изотопич. тип. Два гладких n-мерных узла $K_1=(S^{n+2}, k_1^n)$ и $K_2=(S^{n+2}, k_2^n)$ наз. кобордантными, если существует гладкое ориентированное $(n+1)$-мерное подмногообразие V многообразия $[0, 1]\times S^{n+2}$, причем V гомеоморфно $[0, 1]\times S^n$ и $\partial V = V \cap [0,1]\times (S^{n+2}) = (0\times k_1) \cup (1\times -k_2)$. Здесь знак минус означает обращение ориентации. Узлы, кобордантные тривиальному узлу, наз. кобордантными нулю или срезанными узлами. Множество классов эквивалентности (кобордантности) n-мерных гладких узлов обозначается C_n. Операция несвязной суммы определяет во множестве C_n структуру абелевой группы. Обратным для класса У. к. (S^{n+2}, k^n) служит класс У. к. $(-S^{k+2}, -k^n)$.

При всех четных n группа C_n равна нулю. Класс У. к. нечетномерного узла определяется его *Зейферта матрицей*. Квадратная целочисленная матрица A называется кобордантной нулю, если она унимодулярно конгруэнтна матрице вида $\left\|\begin{matrix} 0 & N_1 \\ N_2 & N_3 \end{matrix}\right\|$, где N_1, N_2, N_3 — квадратные матрицы одинакового размера, а 0 — нулевая матрица. Две квадратные матрицы A_1 и A_2 наз. кобордантными, если матрица $\left\|\begin{matrix} A_1 & 0 \\ 0 & -A_2 \end{matrix}\right\|$ кобордантна нулю. Квадратная целочисленная матрица A наз. ε-матрицей, где $\varepsilon=+1$ или -1, если $\det(A+\varepsilon A')=\pm 1$. Матрица Зейферта всякого $(2q-1)$-мерного узла является $(-1)^q$-матрицей. Для всякого ε отношение кобордантности является отношением эквивалентности на множестве всех ε-матриц. Множество классов эквивалентности обозначается через G_ε. Операция прямой суммы определяет в G_ε структуру абелевой группы. Имеется гомоморфизм Левина: $\varphi_q : C_{2q-1} \to G_{(-1)^q}$, к-рый сопоставляет классу У. к. K класс кобордизмов матрицы Зейферта узла K. Гомоморфизм Левина φ_q является изоморфизмом при всех $q\geqslant 3$. Гомоморфизм $\varphi_2 : C_3 \to G_+$ является мономорфизмом, и его образ является подгруппой индекса 2 в G_+, состоящей из классов $(+1)$-матриц A, для к-рых сигнатура матрицы $A+A'$ делится на 16. Гомоморфизм $\varphi_1 : C_1 \to G_{-1}$ является эпиморфизмом; его ядро нетривиально.

Для изучения строения групп G_+ и G_- и построения полной системы инвариантов класса У. к. используется следующая конструкция. Изометрической структурой над полем F наз. пара $(<, >; T)$, состоящая из невырожденной квадратичной формы $<, >$, заданной на конечномерном векторном пространстве V над полем F, и ее изометрии $T : V \to V$. Изометрич. структура $(<, >; T)$ наз. кобордантной нулю, если V содержит вполне изотропное инвариантное относительно T подпространство половинной размерности. Операции ортогональной суммы

форм и прямой суммы изометрий определяют во множестве изометрич. структур операцию $\perp$. Две изометрич. структуры $(<, >; T)$ и $(<, >'; T')$ наз. кобордантными, если изометрич. структура $(<, >; T)\perp\perp(-<, >'; T')$ кобордантна нулю. Пусть G_F — множество классов кобордизмов изометрических структур $(<, >; T)$, удовлетворяющих условию $\Delta_T(1)\times\times\Delta_T(-1)\neq 0$, где $\Delta_T(t)$ — характеристич. многочлен изометрии T. В изучении групп G_+ и G_- важную роль играют вложения $f_+ : G_+ \to G_{\mathbb{Q}}$ и $\chi_- : G_- \to G_{\mathbb{Q}}$, к-рые строятся следующим образом. Каждый класс кобордизмов ε-матриц содержит невырожденную матрицу. Если A — невырожденная ε-матрица, то пусть $B=-A^{-1}A'$, $Q=A+A'$ и $(<, >; T)$ — изометрич. структура, в к-рой форма $<, >$ задается матрицей Q, а изометрия T — матрицей B. Это сопоставление корректно определяет гомоморфизмы χ_ε и $\ker\chi_\varepsilon=0$.

Пусть $\alpha=(<, >; T)$ — изометрич. структура на векторном пространстве V и $\lambda\in F[t]$. Пусть V_λ обозначает λ-примарную компоненту пространства V, т. е. $V_\lambda=\ker\lambda(T)^N$ для большого N. Многочлен $\lambda(t)=t^k+\ldots+a_1t^{k-1}+\ldots+a_{n-1}t+1$ наз. возвратным, если $a_i=a_{k-i}$ при всех i. Для каждого неприводимого возвратного многочлена $\lambda\in\mathbb{Q}[t]$ через $\varepsilon_\lambda(\alpha)$ обозначается приведенный по mod 2 показатель, с к-рым λ входит в характеристич. многочлен Δ_T изометрии T. Для каждого возвратного неприводимого в $\mathbb{R}[t]$ многочлена $\lambda\in\mathbb{R}[t]$ обозначается через $\sigma_\lambda(\alpha)$ сигнатура сужения формы $<, >$ на $(V\otimes\mathbb{R})_\lambda$. Для каждого простого числа p и возвратного неприводимого в $\mathbb{Q}_p[t]$ многочлена $\lambda\in\mathbb{Q}_p[t]$ пусть сужение $<, >^p_\lambda$ формы $<, >$ на $(V\otimes\mathbb{Q}_p)_\lambda$, где $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел. Пусть

$$\mu^p_\lambda(\alpha)=(-1, 1)^{\frac{r(r+3)}{2}}\left(\det <, >^p_\lambda, -1\right)^r S\left(<, >^p_\lambda\right),$$

где $(,)$ — символ Гильберта в $\mathbb{Q}_p$, S — символ Хассе, $2r$ — ранг $<, >^p_\lambda$. Две изометрич. структуры кобордантны тогда и только тогда, когда $\varepsilon_\lambda(\alpha)=\varepsilon_\lambda(\beta)$, $\sigma_\lambda(\alpha)=\sigma_\lambda(\beta)$, $\mu^p_\lambda(\alpha)=\mu^p_\lambda(\beta)$ для всех λ и p, для к-рых эти инварианты определены (см. [3], [4]).

Композиция гомоморфизма Левина, гомоморфизма χ и функций ε_λ, σ_λ, μ^p_λ сопоставляет каждому нечетномерному узлу K числа $\varepsilon_\lambda(K)\in\{0, 1\}$, $\sigma_\lambda(K)\in\mathbb{Z}$, $\mu^p_\lambda(K)\in\{-1, 1\}$. Два $(2q-1)$-мерных узла K_1 и K_2, где $q>1$, кобордантны тогда и только тогда, когда

$$\varepsilon_\lambda(K_1)=\varepsilon(K_2),\ \sigma_\lambda(K_1)=\sigma_\lambda(K),\ \mu^p_\lambda(K_1)=\mu^p_\lambda(K_2)$$

для всех λ и p, для к-рых эти инварианты определены. $\Sigma\sigma_\lambda(K)$ равна сигнатуре узла K (см. *Узлов и зацеплений квадратичные формы*), где сумма берется по всем $\lambda(t)$ вида $t^2-2t\cos\theta+1$, где $0<\theta<\pi$, и в этой сумме лишь конечное число слагаемых отлично от нуля.

Аналогичным образом определяются группы кобордизмов локально плоских и кусочно линейных, к-рые обозначаются C^{top}_n и C^{PL}_n соответственно. При всех n имеется изоморфизм $C^{\mathrm{PL}}_n\approx C_n$. Естественное отображение $C_n\to C^{\mathrm{top}}_n$ является изоморфизмом при $n\geqslant 3$, а при $n=3$ оно является мономорфизмом с образом индекса 2. Это, в частности, означает существование несглаживаемых локально плоских топологических трехмерных узлов в S^5 (см. [5]).

Теория У. к. связана с изучением особенностей не локально плоских и кусочно линейных вложений коразмерности 2. Если P есть $(n+1)$-мерное ориентированное многообразие, вложенное как подкомплекс в $(n+3)$-мерное многообразие M, $x\in P$ и N — малая звездная окрестность x в M, то особенность вложения P в M в точке x измеряется следующим образом. Край ∂N является $(n+2)$-мерной сферой, ориентация к-рой

определяется ориентацией M; $P \bigcap \partial N$ является n-мерной сферой, ориентация к-рой определяется ориентацией P. Таким образом, возникает n-мерный узел (∂N, $\partial N \bigcap P$), к-рый наз. особенностью вложения $P \subset M$ в точке x.

Лит.: [1] Fox R. H., Milnor J. W., «Osaka J. Math.», 1966, v. 3, p. 257—67; [2] Kervaire M., «Bull. Soc. Math. France», 1965, t. 93, p. 225—71; [3] Levine J., «Comment. math. helv.», 1969, v. 44, p. 229—44; [4] его же, «Invent. Math.», 1969, v. 8, p. 98—110; [5] Cappell S., Shaneson J., «Topology», 1973, v. 12, p. 33—40; [6] Stoltzfus N., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1977, v. 12, № 192. *М. Ш. Фарбер.*

УЗЛОВ ТАБЛИЦА — перечень диаграмм всех простых узлов, допускающих проекции на плоскость с девятью и меньшим числом двойных точек. Обозначения узлов, приведенных в этой таблице, стандартны: первая цифра указывает число двойных точек, а вторая (расположенная в индексе) — порядковый номер узла. Напр., узел 7_5 — это пятый узел таблицы, имеющий 7 пересечений. Рядом с каждым узлом в закодированном виде указан его многочлен Александера $\Delta(t) = a_{2n}t^{2n} + \ldots + a_n t^n + \ldots + a_0$. Поскольку многочлен Александера всякого узла имеет четную степень и является возвратным (т. е. $a_i = a_{2n-i}$), то для его задания достаточно указать набор последних коэффициентов $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$; именно они и приведены в таблице. Напр., рядом с узлом 8_9 указано 7—5+3—1. Это означает, что его многочлен Александера равен $\Delta(t) = -t^6 + 3t^5 - 5t^4 + 7t^3 - 5t^2 + 3t - 1$. Неальтернирующие узлы помечены звездочкой. Приводимая таблица (см. колонку 485) перепечатана из [1] с небольшими модификациями.

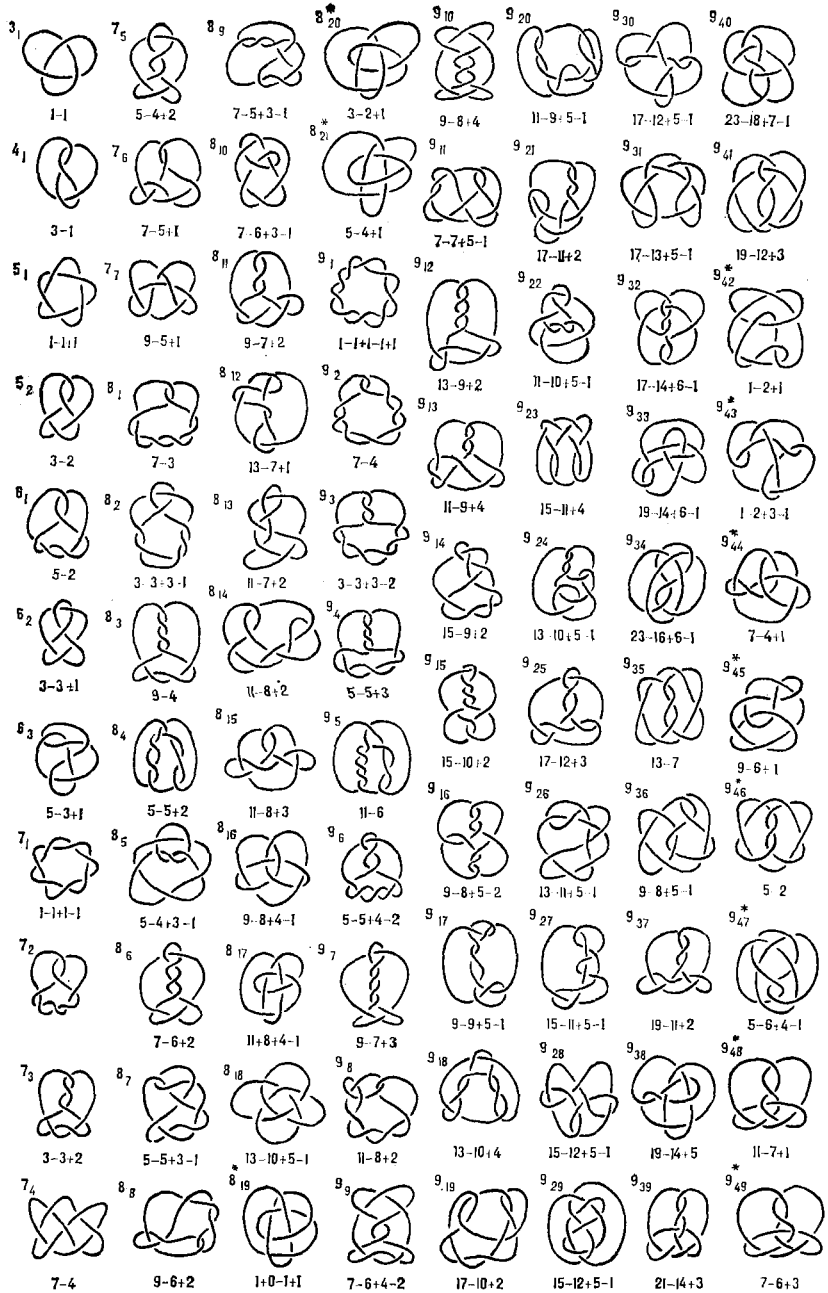
Лит.: [1] Burde G., в кн.: Jahrbuch Überblicke Mathematik, Mannheim, 1978, S. 131—47. *М. Ш. Фарбер.*

УЗЛОВ ТЕОРИЯ — изучение вложений одномерных многообразий в трехмерное евклидово пространство или в сферу S^3. В более широком смысле предметом У. т. являются вложения сфер в многообразия (см. *Многомерный узел*) и вообще вложения многообразий.

Основные понятия У. т. Вложение (чаще — его образ) несвязной суммы μ экземпляров окружности в $\mathbb{R}^3$ или S^3 наз. зацеплением кратности μ. Зацепление кратности $\mu = 1$ наз. узлом. Узлы, составляющие данное зацепление, наз. его компонентами. Объемлемо-изотопич. классы зацеплений (см. *Изотопия*) наз. типами зацеплений. Зацепления одного типа наз. эквивалентными. Тип зацепления «0, 0, . . ., 0», лежащего в плоскости в $\mathbb{R}^3$, наз. тривиальным. Несколько простейших узлов имеют специальные названия; напр., узел 3_1 (см. *Узлов таблица*) наз. трилистником, а узел 4_1 — восьмеркой или *Листинга узлом*. Зацепление, состоящее из нек-рых компонент зацепления L, наз. его частичным зацеплением. Говорят, что зацепление распадается (или расщепляется), если два его частичных зацепления разделены в S^3 двумерной сферой. Зацепление наз. брунновым, если распадается каждое его частичное зацепление, кроме него самого.

Наиболее изучены кусочно линейные зацепления. Рассмотрение гладких или локально плоских топологич. вложений в $\mathbb{R}^3$ приводит к теории, по существу, совпадающей с кусочно линейной.

Обычно зацепления задаются посредством диаграмм (см. *Узлов и зацеплений диаграммы*). Если в косе (см. *Кос теория*) из $2n$ нитей соединить вверху и внизу по n пар соседних концов отрезками, то получится зацепление, называемое $2n$-сплетением. Другой способ конструирования зацеплений из кос состоит в замыкании кос. Если между двумя параллельными плоскостями Π_1 и Π_2 в $\mathbb{R}^3$ взять $2m$ ортогональных им отрезков и соединить их концы попарно m дугами в Π_1 и m дугами в Π_2 без пересечений, то сумма всех дуг и отрезков даст зацепление. Зацепление, допускающее



Поверхностью Зейферта ориентированного зацепления L наз. компактная ориентированная поверхность $F \subset S^3$ с $\partial F = L$, причем требуется, чтобы ориентация L индуцировалась из ориентации F. Родом ориентированного зацепления L наз. минимальный род поверхности Зейферта для L. Вообще говоря, род зависит от ориентации компонент. Известен алгоритм построения поверхности Зейферта по диаграмме; в нек-рых случаях (напр., для *альтернирующих узлов и зацеплений*) он сразу приводит к поверхности минимального рода. Тривиальный узел (но не зацепление) характеризуется тем, что его род равен нулю.

Во множестве типов узлов K имеется операция связной суммы (состоящая, грубо говоря, в завязывании одного узла после другого), к-рая наделяет K структурой абелевой полугруппы с нулем. Род определяет эпиморфизм K на аддитивную полугруппу целых неотрицательных чисел. Отсюда вытекает, что нетривиальный узел не может иметь противоположного узла относительно связной суммы и что каждый узел есть сумма простых (т. е. неразложимых) узлов. Известно, что это разложение единственно. Таким образом, K изоморфна мультипликативной полугруппе натуральных чисел.

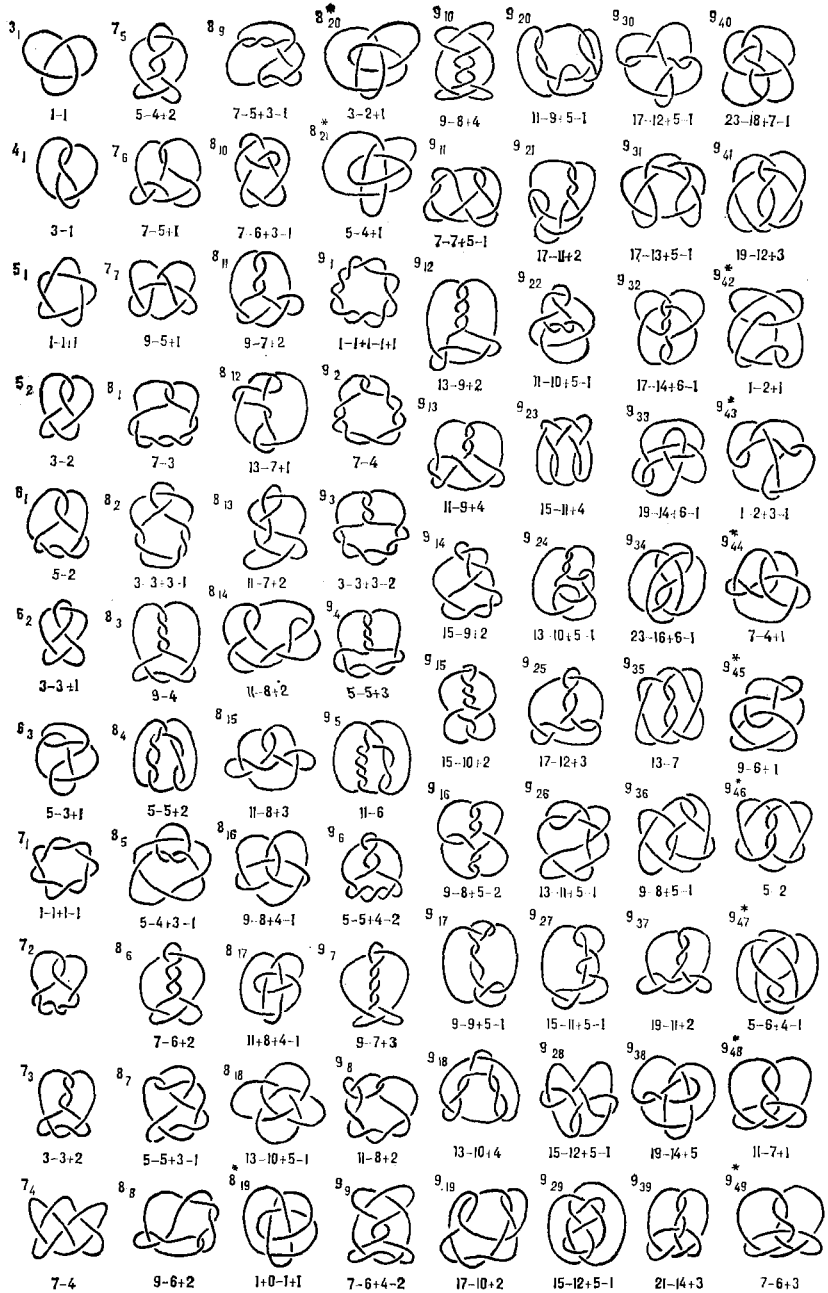
Регулярная окрестность зацепления $L = k_1 \cup \ldots \cup k_\mu \subset \mathbb{R}^3$ кратности μ состоит из μ полных торов N_i. Пространство $M(L) = \mathbb{R}^3 - \bigcup \operatorname{int} N_i$ наз. (дополнительным) пространством, или внешностью, зацепления L. Простые замкнутые кривые l_i на $F_i = \partial N_i$, коэффициенты зацепления к-рых с k_i равны нулю, все изотопны между собой и наз. параллелями i-й компоненты. Простые замкнутые кривые m_i на F_i, гомологичные нулю в N_i, но не на F_i, также все изотопны между собой и наз. меридианами i-й компоненты. Пространство зацепления $M(L)$ вместе с меридианами $m_1, \ldots, m_\mu \subset \partial M(L)$ определяет тип L. Это — главные геометрич. инварианты зацеплений. Предполагается, что для узлов топологич. тип внешности $M(k)$ определяет тип k. Это доказано для всех непростых узлов, для торич. узлов, для большинства обмоток и для многих других классов узлов (см. [10]). Однако имеются неэквивалентные зацепления с гомеоморфными дополнительными пространствами [1].

Помимо отношения объемлемой изотопии, У. т. изучает и другие, более грубые отношения эквивалентности между зацеплениями. Два зацепления (имеющие одинаковое число компонент) наз. изотопными (не объемлемо), если они изотопны как вложения. Зацепления, показанные на рис. 1, изотопны, но не объемлемо изотопны. Таким образом, изотопия зацеплений пренебрегает «маленькими» узлами, и потому ее изучение можно рассматривать как теорию зацеплений по модулю теории узлов. Это



Рис. 1.

такое представление, наз. зацеплением с m мостами. Всякое зацепление можно расположить на стандартно вложенной в $\mathbb{R}^3$ замкнутой поверхности; если зацепление можно расположить на незаузленном торе или кренделе, то оно наз. соответственно торическим, или крендельным (см. *Торический узел*). Зацепление, лежащее на границе трубчатой окрестности узла k, наз. обмоткой узла k. Зацепление, к-рое можно получить многократным взятием обмоток, начиная с тривиального узла, наз. трубчатым, или сложным кабельтовым. Такие зацепления встречаются при изучении сингулярностей алгебраич. кривых; они могут задаваться аналитически как линки изолированных особенностей многочленов от двух переменных [2].



Поверхностью Зейферта ориентированного зацепления L наз. компактная ориентированная поверхность $F \subset S^3$ с $\partial F = L$, причем требуется, чтобы ориентация L индуцировалась из ориентации F. Родом ориентированного зацепления L наз. минимальный род поверхности Зейферта для L. Вообще говоря, род зависит от ориентации компонент. Известен алгоритм построения поверхности Зейферта по диаграмме; в нек-рых случаях (напр., для *альтернирующих узлов и зацеплений*) он сразу приводит к поверхности минимального рода. Тривиальный узел (но не зацепление) характеризуется тем, что его род равен нулю.

Во множестве типов узлов K имеется операция связной суммы (состоящая, грубо говоря, в завязывании одного узла после другого), к-рая наделяет K структурой абелевой полугруппы с нулем. Род определяет эпиморфизм K на аддитивную полугруппу целых неотрицательных чисел. Отсюда вытекает, что нетривиальный узел не может иметь противоположного узла относительно связной суммы и что каждый узел есть сумма простых (т. е. неразложимых) узлов. Известно, что это разложение единственно. Таким образом, K изоморфна мультипликативной полугруппе натуральных чисел.

Регулярная окрестность зацепления $L = k_1 \cup \ldots \cup k_\mu \subset \mathbb{R}^3$ кратности μ состоит из μ полных торов N_i. Пространство $M(L) = \mathbb{R}^3 - \bigcup \operatorname{int} N_i$ наз. (дополнительным) пространством, или внешностью, зацепления L. Простые замкнутые кривые l_i на $F_i = \partial N_i$, коэффициенты зацепления к-рых с k_i равны нулю, все изотопны между собой и наз. параллелями i-й компоненты. Простые замкнутые кривые m_i на F_i, гомологичные нулю в N_i, но не на F_i, также все изотопны между собой и наз. меридианами i-й компоненты. Пространство зацепления $M(L)$ вместе с меридианами $m_1, \ldots, m_\mu \subset \partial M(L)$ определяет тип L. Это — главные геометрич. инварианты зацеплений. Предполагается, что для узлов топологич. тип внешности $M(k)$ определяет тип k. Это доказано для всех непростых узлов, для торич. узлов, для большинства обмоток и для многих других классов узлов (см. [10]). Однако имеются неэквивалентные зацепления с гомеоморфными дополнительными пространствами [1].

Помимо отношения объемлемой изотопии, У. т. изучает и другие, более грубые отношения эквивалентности между зацеплениями. Два зацепления (имеющие одинаковое число компонент) наз. изотопными (не объемлемо), если они изотопны как вложения. Зацепления, показанные на рис. 1, изотопны, но не объемлемо изотопны. Таким образом, изотопия зацеплений пренебрегает «маленькими» узлами, и потому ее изучение можно рассматривать как теорию зацеплений по модулю теории узлов. Это



Рис. 1.

такое представление, наз. зацеплением с m мостами. Всякое зацепление можно расположить на стандартно вложенной в $\mathbb{R}^3$ замкнутой поверхности; если зацепление можно расположить на незаузленном торе или кренделе, то оно наз. соответственно торическим, или крендельным (см. *Торический узел*). Зацепление, лежащее на границе трубчатой окрестности узла k, наз. обмоткой узла k. Зацепление, к-рое можно получить многократным взятием обмоток, начиная с тривиального узла, наз. трубчатым, или сложным кабельтовым. Такие зацепления встречаются при изучении сингулярностей алгебраич. кривых; они могут задаваться аналитически как линки изолированных особенностей многочленов от двух переменных [2].

высказывание обретает точную формулировку в следующей теореме Рольфсена [12]: два изотопных зацепления объемлемо изотопны, если их соответствующие компоненты эквивалентны (как ориентированные узлы). В силу этого изучение изотопии зацеплений редуцируется к объемлемой изотопии.

Другим отношением эквивалентности, изучаемым в У. т., является конкордантность, или кобордизм. Локально плоские вложения i_0 и i_1 многообразия X в многообразие Y наз. конкордантными, если существует такое локально плоское вложение

$$i\colon X\times[0,\ 1]\longrightarrow Y\times[0,\ 1],$$

что $i(x,\ 0)=(i_0(x),\ 0)$, $i(x,\ 1)=(i_1(x),\ 1)$ для всех $x\in X$. Если X есть несвязная сумма нескольких экземпляров окружности, а Y есть $\mathbb{R}^3$ или S^3, то получается определение конкордантности зацеплений. Связная сумма вносит во множество классов конкордантных узлов структуру абелевой группы. Нуль этой группы есть класс, содержащий тривиальный узел. Узлы, конкордантные тривиальному, наз. срезанными. Противоположным к классу узла k является класс узла, получаемого так: нужно сменить ориентацию узла k и взять его образ при отражении от любой плоскости. О строении группы классов конкордантных узлов см. *Узлов кобордизм*. Для того чтобы построить срезанный узел, проще всего взять тривиальное двухкомпонентное зацепление, приклеить к любой из компонент ленточку, как-либо заузлить ее и пропустить через исходное зацепление, а затем приклеить ко второй компоненте. После этого нужно удалить все внутренние точки ленты, а также ее граничные точки, по к-рым производилось приклеивание. В результате получится срезанный узел (см., напр., рис. 2). Обобщение этого построения приводит к понятию ленточного зацепления [1]. Имеется гипотеза, что всякий срезанный узел является ленточным. Из изотопности зацеплений не следует их конкордантность (действительно, всякий узел изотопен тривиальному, но не всякий является срезанным). Однако изотопные зацепления конкордантны, если все их соответствующие компоненты попарно конкордантны [12].



Рис. 2.

Изучаются и другие отношения эквивалентности между зацеплениями, напр. гомотопия и I-эквивалентность (см. [8]).

Аппарат У. т. *Фундаментальная группа* $G(L)$ дополнительного пространства $M(L)$ наз. группой зацепления L. Это — важнейший алгебраич. инвариант зацепления. В случае узлов и нераспадающихся зацеплений внешность $M(L)$ асферична и потому ее *гомотопический тип* определяется группой $G(L)$. Зацепление тривиально тогда и только тогда, когда его группа свободна [8]. Торич. узлы эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют изоморфные группы. Однако утверждение о том, что группа определяет тип зацепления, неверно даже для узлов [1]. Имеется несколько алгоритмов выписывания копредставления группы зацепления по его диаграмме. Наиболее широко известно копредставление Виртингера. О свойствах групп зацеплений см. *Узлов и зацеплений группы*.

Более сильным инвариантом зацеплений является групповая система $\langle G(L);\ T_1,\ldots,\ T_\mu\rangle$, к-рая состоит из группы зацепления $G(L)$ и классов сопряженности ее подгрупп T_i, порожденных классами меридиана и параллели i-й компоненты. Групповая система узла определяет топологич. тип его дополнения.

Полным алгебраич. инвариантом узла является тройка (G, T, m), состоящая из группы узла G, периферич. подгруппы $T \subset G$ и меридиана $m \in T$: два узла эквивалентны тогда и только тогда, когда имеется изоморфизм между их группами, сохраняющий периферич. подгруппы и переводящий меридиан одного узла в меридиан другого или в его обратный. Известны и классифицирующие инварианты узлов, представляющие собой группы. Один такой инвариант (см. [11]) сопоставляет узлу k свободное произведение групп нек-рых обмоток связной суммы узла k и узла Листинга 4_1. В этом определении вместо узла 4_1 можно взять и нек-рые другие узлы, и при этом получающаяся группа, хотя и изменится, но будет по-прежнему полным инвариантом.

Найден (см. [5]) более естественный полный алгебраич. инвариант узла. Пусть узел k задан своей регулярной проекцией на плоскость, и все переходы занумерованы числами от 1 до n. Пусть, далее, в нек-рой двойной точке сходятся переходы с номерами p, q, r, расположенные, как на рис. 3, и $\Gamma(k)$ — дистрибутивный группоид, заданный образующими $a_1, \ldots, a_n$ (их число равно числу переходов), связанными соотношениями $a_p \circ a_q = a_r$ (по одному для каждой двойной точки). Доказано (см. [5]), что, во-первых, группоид $\Gamma(k)$ является инвариантом узла, т. е. не зависит от выбора проекции, и, во-вторых, узлы с изоморфными группоидами эквивалентны.

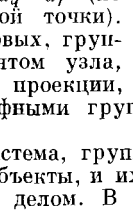


Рис. 3.

Группа узла, групповая система, группоид — достаточно сложные алгебраич. объекты, и их различение часто оказывается непростым делом. В вычислениях удобны а б е л е в ы и н в а р и а н т ы узлов и зацеплений, к-рые устроены проще (напр., они описываются средствами коммутативной алгебры) и в то же время достаточно информативны. Важнейший из абелевых инвариантов — м о д у л ь А л е к с а н д е р а, определяется так. *Гомологий группа* внешности $H_1(M(L))$ зацепления кратности μ есть свободная абелева группа ранга μ (это — следствие *Александера двойственности*), и потому накрытие $p : \tilde{M}(L) \to M(L)$, отвечающее коммутанту группы $G(L)$, имеет $\mathbb{Z}^\mu$ в качестве группы накрывающих преобразований. Если $x_0 \in M(L)$ — базисная точка, а $\tilde{X}_0 = p^{-1}(x_0)$, то группа $H_1(\tilde{M}(L), \tilde{X}_0)$ имеет естественную структуру модуля над $\Lambda_\mu = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}^\mu]$ (кольцом целочисленных лораневских полиномов от μ переменных), к-рый и наз. м о д у л е м А л е к с а н д е р а зацепления L. В случае $\mu = 1$ модуль $H_1(\tilde{M}(L), \tilde{X}_0)$ изоморфен прямой сумме $H_1(\tilde{M}(L))$ и Λ_1; поэтому при изучении узлов модулем Александера принято называть Λ_1-модуль $H_1(\tilde{M}(L))$. Матрица, задающая копредставление модуля Александера, наз. м а т р и ц е й А л е к с а н д е р а. Для нахождения матрицы Александера по копредставлению группы $G(L)$ используется с в о б о д н о е д и ф ф е р е н ц и а л ь н о е и с ч и с л е н и е Фокса [1]. Модуль Александера стандартным образом (см. *Александера инварианты*) задает возрастающую цепочку идеалов кольца Λ_μ (к-рые наз. э л е м е н т а р н ы м и и д е а л а м и) и последовательность целочисленных многочленов $\Delta_1(t_1, \ldots, t_\mu), \Delta_2(t_1, \ldots, t_\mu), \ldots$, определенных с точностью до единиц кольца Λ_μ. Первый многочлен $\Delta_1(t_1, \ldots, t_\mu)$ наз. м н о г о ч л е н о м А л е к с а н д е р а. Модуль Александера определяет также к л а с с и д е а л о в Ш т е й н и ц а — Ф о к с а — С м и т а [8]. С его помощью удается, напр., доказать необратимость нек-рых узлов (узел $k \subset S^3$ наз. о б р а т и м ы м, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм S^3 на себя, переводящий k в k с обраще-

нием ориентации). Обратимость узла влечет следующее свойство его модуля Александера: существует групповой автоморфизм $j : H_1(\tilde{M}(k)) \to H_1(\tilde{M}(k))$ с $j(ta) = t^{-1}j(a)$ для любого $a \in H_1(\tilde{M}(k))$.

Многочлены зацеплений обладают следующим свойством взаимности: для всякого $i \geqslant 1$ главные идеалы кольца Λ_μ, порожденные $\Delta_i(t_1, \ldots, t_\mu)$ и $\Delta_i(t_1^{-1}, \ldots, t_\mu^{-1})$, совпадают. Этот факт — проявление особого рода двойственности в гомологиях универсального абелева накрывающего внешности зацеплений. Двойственность не только накладывает ограничения на модуль Александера, но и задает на нем дополнительную мультипликативную структуру. Напр., в случае узлов имеется инвариантно определенная невырожденная эрмитова форма

$$H_1(\tilde{M}(L)) \times H_1(\tilde{M}(L)) \longrightarrow Q(\Lambda)/\Lambda,$$

к-рая наз. формой Бланчфилда. Здесь $\Lambda = \Lambda_1$, а $Q(\Lambda)$ обозначает поле частных Λ. Определение и свойства аналогов этой формы для зацеплений см. [8]. С формой Бланчфилда тесно связана форма Милнора, принимающая значения в $\mathbb{Q}$ (см. [6]). *Зейферта матрица*, отвечающая любой поверхности Зейферта узла, определяет модуль Александера и формы Бланчфилда и Милнора на нем [13]. Если k_1 и k_2 — два узла, то следующие условия эквивалентны: (1) узлы k_1 и k_2 имеют изоморфные формы Бланчфилда; (2) узлы k_1 и k_2 имеют изоморфные формы Милнора; (3) матрицы Зейферта узлов k_1 и k_2 S-эквивалентны (см. [6]).

Всякий эпиморфизм φ группы зацепления $G(L)$ на произвольную группу H определяет регулярное *накрытие* внешности $M(L)$ с группой накрывающих преобразований H. Если H — конечная группа, то, подклеивая соответствующим образом полнотория к границе накрывающего, получают многообразие $\Sigma_\varphi(L)$ и отображение $\Sigma_\varphi(L) \to S^3$, являющееся разветвленным накрытием с ветвлением над L. На $\Sigma_\varphi(L)$ действует группа H. Поэтому $B_\varphi = H_1(\Sigma_\varphi(L))$ является $\mathbb{Z}[H]$-модулем. Кроме того, поскольку $\Sigma_\varphi(L)$ — замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие, определена форма коэффициентов зацепления

$$\{,\}: \operatorname{Tors}_{\mathbb{Z}} B_\varphi \times \operatorname{Tors}_{\mathbb{Z}} B_\varphi \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Итак, каждому представлению $\varphi : G(L) \to H$ на конечную группу H отвечает $\mathbb{Z}[H]$-модуль B_φ и спаривание $\{,\}$.

Наиболее изучены представления групп зацеплений в циклич. и метациклич. группы. Группа ориентированного зацепления допускает канонич. представление на циклич. группу $\mathbb{Z}_n$ (классу петли α сопоставляется вычет по модулю n коэффициента зацепления α с L). Отвечающее этому представлению разветвленное накрытие $\Sigma_\varphi(L) \to S^3$ наз. n-листным циклическим разветвленным накрытием зацепления L. Соответствующие ему инварианты $(B_\varphi, \{,\})$ часто используются для различения узлов. Они выражаются через матрицу Зейферта, а значит, и через модуль Александера со спариванием Бланчфилда.

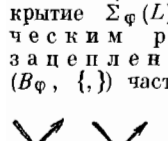


Рис. 4.

Очень эффективным инвариантом узлов и зацеплений является многочлен Конвея. Он вычисляется гораздо проще многочлена Александера (не требуется находить матрицу Александера, подсчитывать определители и т. п.). К тому же можно вычислять многочлен Конвея, не зная его определения, пользуясь следующими тремя его свойствами: (1) многочлен Конвея $\nabla_L(z)$ является инвариантом объемлемо изотопич. типа ориентированного зацепления L; (2) если L — триви-

альный узел, то $\nabla_L(z)=1$; (3) если три зацепления L_+, L_- и L_0 имеют диаграммы, совпадающие всюду за исключением участков, изображенных на рис. 4, то

$$\nabla_{L_+}(z)-\nabla_{L_-}(z)=z\nabla_{L_0}(z).$$

Из этих свойств следует, напр., что многочлен Конвея распадающегося зацепления равен нулю. Благодаря свойству (3) можно следить за изменением многочлена Конвея при варьировании диаграммы в отдельных двойных точках; ясно, что после конечного числа таких модификаций зацепление становится тривиальным и в этот момент вычисления завершаются. Теория, облегчающая нахождение многочлена Конвея, развита в [14]. Для узлов многочлены Конвея и Александера однозначно определяют друг друга. Напр., если известен многочлен Конвея, то многочлен Александера $\Delta(t)$ определяется из равенства $\Delta(t^2)=t^{2n}\nabla_L(t-t^{-1})$.

Классификация узлов и зацеплений. Выше уже упоминались полные алгебраич. инварианты узлов, благодаря к-рым задача различения узлов может быть редуцирована к алгебре. Алгоритм для вычисления рода узла построен Хакеном, но он не применим практически. Для нек-рых классов, напр. для альтернирующих узлов и зацеплений, имеются простые алгоритмы (см. также *Нейвирта узел*).

Перечислены все узлы, имеющие диаграммы с не более чем 11 двойными точками; перечислены также все зацепления, имеющие менее 11 пересечений (см. [17]). Однако не доказано, что среди узлов этого списка, имеющих 11 пересечений, нет повторений. Таблица простых узлов с девятью и меньшим числом пересечений приведена в ст. *Узлов таблица*.

Полностью классифицированы торич. узлы, а также узлы с двумя мостами (см. [16]).

В связи с развитием топологии многообразий стали исследоваться многомерные узлы и зацепления; многомерная У. т. развита во многих отношениях лучше, чем классическая. Так, полностью решена задача классификации многомерных узлов относительно кобордизма (см. *Узлов кобордизм*), получено описание объемлемо изотопич. классов многомерных узлов в стабильно-гомотопич. терминах [15], отдельные наиболее важные виды многомерных узлов описаны в терминах их алгебраич. инвариантов [6]. Кроме того, найдены гомологич. инварианты многомерных узлов, определяющие их тип с точностью до конечного числа возможностей.

Приложения У. т. Значение У. т. для изучения трехмерных многообразий определяется, прежде всего, тем, что всякое замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие можно представить в виде накрывающего сферы S^3, разветвленного над нек-рым зацеплением (теорема Александера). Более того (см. [16]), всякое ориентируемое связное трехмерное многообразие рода 1 (т. е. *линзовое пространство*) гомеоморфно двулистному разветвленному накрывающему нек-рого зацепления с двумя мостами, и зацепления с двумя мостами эквивалентны тогда и только тогда, когда гомеоморфны их двулистные разветвленные накрывающие. Этот факт полезен как для описания трехмерных многообразий, так и для классификации узлов.

Всякое ориентируемое связное трехмерное многообразие рода 2 гомеоморфно двулистному разветвленному накрывающему нек-рого зацепления с тремя мостами; построен (см. [4]) пример неэквивалентных узлов с тремя мостами, имеющих гомеоморфные двулистные разветвленные накрывающие.

Другим важным средством, доставляемым У. т. для изучения трехмерных многообразий, является исчисление оснащенных зацеплений Кёрби [3]. Оснащенным зацеплением наз. конечная совокупность L непересекающихся гладко

вложенных окружностей $l_1, \ldots, l_\mu \subset S^3$ (зауженных или нет), каждой из к-рых приписано нек-рое число n_i. Оснащенное зацепление L определяет четырехмерное многообразие M_L, получаемое приклеиванием к четырехмерному шару ручек индекса два, причем приклеивающее отображение $f_i : S^1 \times D^2 \to S^3$ i-й ручки обладает свойствами: (1) $f_i(S^1 \times 0) = l_i$ и (2) для любого $x \in D^2 \setminus 0$ коэффициент зацепления кривой $f_i(S^1 \times \{x\})$ с l_i равен n_i. Край $W_L = \partial M_L$ — замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие. Оказывается, что, во-первых, всякое замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие гомеоморфно W_L для нек-рого оснащенного зацепления L и, во-вторых, W_{L_1} и W_{L_2} гомеоморфны тогда и только тогда, когда оснащенное зацепление L_1 может быть получено из L_2 описанными ниже преобразованиями $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ или обратными к ним. Преобразование $\mathcal{O}_1$ заключается в добавлении к оснащенному зацеплению незауженной окружности, отделенной от остальных компонент вложенной двумерной сферой и оснащенной $+1$ или -1. Преобразование $\mathcal{O}_2$ осуществляет «сложение» двух компонент l_i и l_j следующим образом. Пусть $\tilde{l}_i$ — кривая на границе малой трубчатой окрестности l_i в S^3, изотопная l_i в этой трубчатой окрестности и имеющая коэффициент зацепления n_i с l_i. Заменив компоненту l_j окружностью $l_j' = l_j \# _b \tilde{l}_i$, где b — нек-рая лента, соединяющая l_j с $\tilde{l}_i$, не задевая остальных частей зацепления L, получают новое оснащенное зацепление L', если новой компоненте l_j' приписать число $n_j' = n_i + n_j \pm 2a_{ij}$. Здесь a_{ij} — коэффициент зацепления компонент l_i и l_j (как-либо ориентированных), а знак $+$ или $-$ выбирается в зависимости от того, согласована ли с только что зафиксированными ориентациями лента b. Напр., для оснащенных зацеплений, изображенных на рис. 5, многообразие W_L есть соответственно линзовое пространство $L(n, 1)$ в случае $а$), линзовое пространство $L(pq-1, p) = L(pq-1, q)$ в случае $б$), пространство додекаэдра в случаях $в$) и $г$).

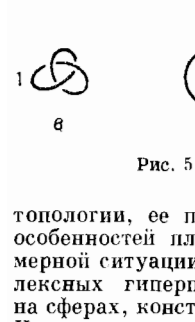


Рис. 5.

Помимо этих и многих других применений У. т. в топологии, ее приложения включают также изучение особенностей плоских алгебраич. кривых, а в многомерной ситуации — изолированных особенностей комплексных гиперповерхностей [2], гладкие структуры на сферах, конструирование динамич. систем и слоений. Имеются попытки применить У. т. в символической динамике [18] и математической теории турбулентности [19].

Историческая справка. По-видимому, К. Гаусс (C. Gauss) был первым, кто рассматривал узел как математич. объект. Он считал, что анализ явлений зауживания и зацепливания является одной из основных задач «geometris situs». Сам К. Гаусс мало написал об узлах и зацеплениях (см. *Зацепления коэффициент*), однако его ученик И. Листинг (J. Listing) посвятил узлам значительную часть своей монографии [7].

К концу 19 в. усилиями П. Тэйта (P. Tait) и К. Литла (C. Little) были составлены таблицы простых узлов, имеющих не более 10 пересечений, и таблицы альтернирующих простых узлов, имеющих не более 11 пересечений. Проблема табулирования узлов имеет два аспекта: во-первых, нужно убедиться в полноте представленного списка, а во-вторых, доказать, что все перечисленные узлы действительно различны. В то время как для

решения первого вопроса необходимы лишь комбинаторные рассуждения (хотя и довольно громоздкие), для ответа на второй вопрос нужны инварианты алгебраич. топологии. Таких инвариантов не было в 19 в., и поэтому неэквивалентность приведенных в таблице узлов обосновывалась эмпирически. Последующий анализ выявил нек-рые ошибки в таблицах 19 в.

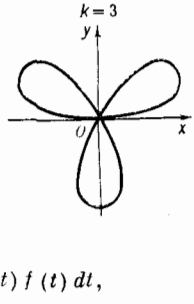
В 1906 Г. Титце (H. Tietze) впервые применил фундаментальную группу для доказательства нетривиальности узла. В 1927 Дж. Александер (J. Alexander) и Л. Бригс (L. Briggs), используя коэффициенты кручения гомологий двулистных и трехлистных разветвленных циклич. накрывающих, различили все табулированные узлы с 8 пересечениями и все узлы, за исключением 3 пар, с 9 пересечениями. В 1928 появился многочлен Александера, но и с его помощью не удалось убедиться в различности всех 84 узлов, имеющих не более 9 пересечений. Этот последний шаг сделал К. Рейдемейстер (K. Reidemeister), рассмотревший коэффициенты зацепления в диэдральных разветвленных накрывающих.

Представление о современном состоянии проблем У. т. дает список проблем [10]; там же можно найти комментарии и литературные ссылки. Подробная библиография по У. т. имеется в [1], [8], [9].

Лит.: [1] Кроуэлл Р., Фокс Р., Введение в теорию узлов, пер. с англ., М., 1967; [2] Милнор Дж., Особые точки комплексных гиперповерхностей, пер. с англ., М., 1971; [3] Мандельбаум Р., Четырехмерная топология, пер. с англ., М., 1981; [4] Вироо Я., «Матем. сб.», 1972, т. 87, с. 216—28; [5] Матвеев С. В., там же, 1982, т. 119, с. 78—88; [6] Фарбер М. Ш., «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 5, с. 59—106; [7] Listing J. B., Vorstudien zur Topologie Gött., 1848; [8] Hillman J. A., Alexander ideals of links B.— Hdlb.— N. Y., 1981; [9] Gordon C. McA., «Lect. Notes Math.», 1978, v. 685, p. 1—60; [10] Kirby R. C., «Proc. Symp. Pure Math.», 1978, v. 32, p. 273—312; [11] Simon J., «Ann. Math.», 1973, v. 97, p. 1—13; [12] Rolfsen D., «J. Indian Math. Soc.». 1972, v. 36, p. 263—78; [13] Levine J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1977, v. 229, p. 1—50; [14] Giller C. A., там же, 1982, v. 270, p. 75—109; [15] Farber M. S., там же, 1980, v. 261, p. 185—209; [16] Schubert H., «Math. Z.», 1956, Bd 65, S. 133—70; [17] Conway J. H., в кн.: Computational problems in abstract algebra, Oxf.— N. Y., 1970, p. 329—58; [18] Franks J. M., «Ann. Math.», 1981, v. 113, p. 529—52; [19] Birman J. S., Williams R. F., «Topology», 1983, v. 22, p. 47—82.

М. Ш. Фарбер, А. В. Чернавский.

УЗЛОВАЯ ТОЧКА — точка самопересечения кривой. При параметрич. задании кривой У. т. соответствует двум или более значениям параметра. Например, у кривой $\rho = a \sin 3\varphi$ У. т.— начало координат.



УИТНИ КЛАСС — см. *Штифеля — Уитни класс.*

УИТТЕКЕРА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F(x) = \int_0^\infty (2xt)^{-1/4} W_{\lambda,\mu}(2xt) f(t)\, dt,$$

где $W_{\lambda,\mu}(z)$ — функция Уиттекера. При $\lambda = 1/4$ и $\mu = \pm 1/4$ У. п. переходит в *Лапласа преобразование*.

Лит.: [1] Meijer C. S., «Proc. Koninkl. ned. akad. wet.», 1941, v. 44, p. 727—37.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

УИТТЕКЕРА УРАВНЕНИЕ — линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$w'' + \left(\frac{1/4 - \mu^2}{z^2} + \frac{\lambda}{z} - \frac{1}{4}\right) w = 0, \qquad (*)$$

где переменные z, w и параметры λ, μ могут принимать любые комплексные значения. Уравнение (*) представляет собой приведенную форму *вырожденного гипергеометрического уравнения* и впервые исследовано Э. Уиттекером [1]. При $\lambda = 0$ У. у. эквивалентно *Бесселя уравнению*. Если 2μ не является целым числом, то

фундаментальную систему решений У. у. составляют функции $M_{\lambda,\,\mu}(z)$ и $M_{\lambda,\,-\mu}(z)$; здесь $M_{\lambda,\,\mu}(z)$ — *Уиттекера функция*. При произвольных значениях параметров общее решение У. у. записывается также в виде линейной комбинации

$$w = C_1 W_{\lambda,\,\mu}(z) + C_2 W_{-\lambda,\,\mu}(-z),$$

где $W_{\lambda,\,\mu}(z)$ — функция Уиттекера.

Лит.: [1] Whittaker E. T., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1903, v. 10, p. 125—34; [2] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, ч. 2, пер. с англ., 2 изд., М., 1963; [3] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, пер. с англ., М., 1965; [4] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963; [5] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

Н. Х. Розов.

УИТТЕКЕРА ФУНКЦИИ — функции $M_{\lambda,\,\mu}(z)$ и $W_{\lambda,\,\mu}(z)$, к-рые являются решениями дифференциального *Уиттекера уравнения*

$$w'' + \left(\frac{1/4 - \mu^2}{z^2} + \frac{\lambda}{z} - \frac{1}{4}\right) w = 0. \qquad (*)$$

Функция $W_{\lambda,\,\mu}$ вводится равенством

$$W_{\lambda,\,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(1/2 - \lambda - \mu)} M_{\lambda,\,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(1/2 - \lambda + \mu)} M_{\lambda,\,-\mu}(z).$$

Пары функций $M_{\lambda,\,\mu}(z)$ и $M_{\lambda,\,-\mu}(z)$, $W_{\lambda,\,\mu}(z)$ и $W_{-\lambda,\,\mu}(-z)$ — линейно независимые решения уравнения (*). Точка $z=0$ — точка ветвления для $M_{\lambda,\,\mu}(z)$ и $W_{\lambda,\,\mu}(z)$, $z=\infty$ — существенно особая точка.

Связь с другими функциями:

с *вырожденной гипергеометрической функцией*:

$$M_{\lambda,\,\mu}(z) = z^{\mu+1/2} e_1^{-z/2} F_1(\mu - \lambda + 1/2;\ 2\mu + 1;\ z),$$

с модифицированной *Бесселя функцией* и *Макдональда функцией*:

$$M_{0,\,\mu}(z) = 2^{2\mu}\Gamma(\mu+1)\sqrt{z}\, I_\mu\left(\frac{z}{2}\right),$$

$$W_{0,\,\mu}(z) = \sqrt{\frac{z}{\pi}}\, K_\mu\left(\frac{z}{2}\right),$$

с *интегралом вероятности*:

$$W_{-\frac{1}{4},\,\frac{1}{4}}(z) = \sqrt{\pi}\, z^{1/4} e^{z/2}\ \mathrm{erfc}\left(\sqrt{z}\right),$$

с *Лагерра многочленами*:

$$W_{n+\mu+1/2,\,\mu}(z) = (-1)^n z^{\mu+1/2} e^{-z/2} L_n^{2\mu}(z).$$

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, пер. с англ., [2 изд.], т. 2, М., 1974; [2] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

УИШАРТА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — совместное распределение элементов выборочной ковариационной матрицы для многомерного нормального распределения. Пусть результаты наблюдений имеют p-мерное нормальное распределение $N(\mu, \Sigma)$ с вектором средних μ и ковариационной матрицей Σ. Тогда плотность распределения матрицы $A = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})'$ определяется формулой

$$w(n, \Sigma) = \frac{|A|^{(n-p)/2} e^{-\frac{1}{2}\,\mathrm{sp}\, A\Sigma^{-1}}}{2^{(n-1)p/2}\, \pi^{p(p-1)/4}\, |\Sigma|^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left(\frac{n-i}{2}\right)}$$

($\mathrm{sp}\, A$ — след матрицы A), если матрица A положительно определена, и $w(n, \Sigma) = 0$ в остальных случаях. Распределением Уишарта с n степенями свободы и матрицей Σ наз. $\frac{p(p+1)}{2}$-мерное распределение $W(n, \Sigma)$ с плотностью $w(n, \Sigma)$. Выборочная кова-

риационная матрица $S=\frac{1}{n-1}A$, являющаяся оценкой матрицы Σ, имеет У. р.

У. р. является основным распределением в многомерном статистич. анализе; оно является в определенном смысле p-мерным обобщением одномерного «хи-квадрат» распределения.

Если независимые случайные векторы X и Y имеют У. р. $W(n_1, \Sigma)$ и $W(n_2, \Sigma)$ соответственно, то вектор $X+Y$ имеет У. р. $W(n_1+n_2, \Sigma)$.

Впервые У. р. было введено Дж. Уишартом [1].

Лит.: [1] Wishart J., «Biometrika», 1928, v. 20 A, p. 32—52; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963.

А. В. Прохоров.

УКЛОНЕНИЕ приближающей функции — расстояние $\rho(g, f)$ между приближающей функцией $g(x)\in K$ и заданной функцией $f(x)\in\mathfrak{M}$. В одном и том же классе $\mathfrak{M}$ могут рассматриваться различные метрики ρ, напр. равномерная метрика

$$\rho(g, f)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|g(x)-f(x)|,$$

интегральные метрики

$$\rho(g, f)=\left(\int_a^b|g(x)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},\quad p\geqslant 1,$$

и др. В качестве класса K приближающих функций рассматриваются алгебраич. многочлены, тригонометрич. полиномы, а также множества частичных сумм ортогональных разложений функции $f(x)$ по ортонормированным системам, линейные средние этих частичных сумм и целый ряд др. множеств.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.—Л., 1947; [2] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949; [3] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [4] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [5] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969.

А. В. Ефимов.

УЛЬТРАБОРНОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — *локально выпуклое пространство*, являющееся индуктивным пределом банаховых пространств. В частности, У. п. является локально выпуклым пространством, для к-рого выполнены следующие условия: а) любое ограниченное замкнутое множество является окрестностью нуля; б) каждое его ограниченное замкнутое подмножество полно. При отказе от условия б) получается т. н. борнологическое пространство (иногда оно наз. пространством Макки). Всякое борнологич. пространство является пределом нормированных пространств.

Лит.: [1] Робертсон А., Робертсон В., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967.

В. И. Ломоносов.

УЛЬТРАБОЧЕЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое векторное пространство E с топологией t, для к-рой любая топология t', обладающая базой окрестностей нуля из t-замкнутых множеств, слабее топологии t. Всякое топологич. векторное пространство, не являющееся множеством первой категории, ультрабочечно. Из ультрабочечности локально выпуклого пространства следует, что оно бочечно, однако бочечное пространство может и не быть ультрабочечным.

Лит.: [1] Эдвардс Р., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969; [2] Robertson W., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1958, v. 8, № 30, p. 242—57.

В. И. Ломоносов.

УЛЬТРАСФЕРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ, многочлены Гегенбауэра, — многочлены, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией $h(x)=(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$; частный случай *Якоби многочленов* при $\alpha=\beta=\lambda-\frac{1}{2}\left(\lambda>-\frac{1}{2}\right)$; *Лежандра многочлены* $P_n(x)$ — частный случай У. м.: $P_n(x)=P_n\left(x,\ \frac{1}{2}\right)$.

Для У. м. принята стандартизация

$$P_n(x,\ \lambda) \equiv C_n^{(\lambda)}(x) =$$

$$= \frac{(-2)^n}{n!} \cdot \frac{\Gamma(n+\lambda)\,\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2n+2\lambda)} (1-x^2)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \times$$

$$\times \left[(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\right]$$

и имеет место представление

$$C_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{\Gamma(n-k+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,k!\,(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

У. м. являются коэффициентами разложения в степенной ряд производящей функции

$$\frac{1}{(1-2xw+w^2)^{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\lambda)}(x)\, w^n.$$

У. м. $C_n^{(\lambda)}(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\,y'' - (2\lambda+1)\,xy' + n(n+2\lambda)\,y = 0.$$

Наиболее употребительны формулы

$$(n+1)\,C_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n+\lambda)\,xC_n^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda-1)\,C_{n-1}^{(\lambda)}(x),$$

$$C_n^{(\lambda)}(-x) = (-1)^n C_n^{(\lambda)}(x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[C_n^{(\lambda)}(x)\right] = 2\lambda C_{n-1}^{(\lambda+1)}(x),$$

$$C_n^{(\lambda)}(\pm 1) = (\pm 1)^n \frac{2\lambda\,(2\lambda+1)\ldots(2\lambda+n-1)}{n!} =$$

$$= (\pm 1)^n \binom{n+2\lambda-1}{n}.$$

Лит. см. при ст. *Ортогональные многочлены.*

П. К. Суетин.

УЛЬТРАФИЛЬТР — *фильтр*, являющийся максимальным в том смысле, что всякий содержащий его фильтр совпадает с ним.

У. можно определить как систему подмножеств, удовлетворяющую трем условиям: 1) пустое множество ей не принадлежит; 2) пересечение двух принадлежащих ей подмножеств также ей принадлежит; 3) для любого подмножества либо оно само, либо его дополнение принадлежит этой системе.

Все У. делятся на два класса: тривиальные (или фиксированные) и свободные. У. наз. т р и в и а л ь н ы м, если он представляет собой систему всех подмножеств, содержащих нек-рую точку, такой У. наз. также фиксированным на этой точке. У. наз. с в о б о д н ы м, если пересечение всех его элементов есть пустое множество, другими словами, если он не фиксирован ни на какой точке. Существование свободных У. недоказуемо без *Выбора аксиомы.*

Для каждого фильтра имеется содержащий его У., более того, каждый фильтр есть в точности пересечение всех содержащих его У.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968; [2] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970.

В. И. Малыхин.

УМНОЖЕНИЕ ч и с е л — одна из основных арифметич. операций. У. заключается в сопоставлении двум числам a и b (называемым с о м н о ж и т е л я м и) третьего числа c (называемого п р о и з в е д е н и е м). У. обозначается знаком $\times$ или $\cdot$; в буквенном обозначении эти знаки, как правило, опускаются.

У. целых положительных чисел определяется следующим образом через сложение: произведением чисел a и b считается число c, равное сумме b слагаемых, каждое из к-рых равно a, так что

$$ab = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{b \text{ раз}}.$$

Число a при этом наз. м н о ж и м ы м, b — м н о ж и т е л е м. У. положительных рациональных чисел $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ определяется равенством

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}$$

(см. *Дробь*). Произведение двух отрицательных сомножителей положительно, а положительного и отрицательного — отрицательно, причем модуль произведения в том и другом случае равен произведению модулей сомножителей. Произведение иррациональных чисел определяется как предел произведений их рациональных приближений. У. комплексных чисел $\alpha=a+bi$ и $\beta=c+di$ задается формулой

$$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$$

или, в тригонометрич. форме, ($\alpha=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1$, $\beta=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$)

$$\alpha\beta=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

У. чисел коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно слева и справа относительно сложения (см. *Коммутативность*, *Ассоциативность*, *Дистрибутивность*). При этом $a\cdot 0=0$, $a\cdot 1=a$.

В общей алгебре У. может называться любая *алгебраическая операция* (n-арная, $n\geqslant 2$); чаще всего — бинарная операция (*группоид*). В нек-рых случаях эти операции являются обобщением обычного У. чисел. Напр., У. кватернионов, У. матриц, У. преобразований. Однако свойства У. чисел (напр., коммутативность) в этих случаях могут утрачиваться.

О. А. Иванова.

УНАРНАЯ АЛГЕБРА, у н о и д,— универсальная алгебра $\langle A, \{f_i|i\in I\}\rangle$ с семейством $\{f_i|i\in I\}$ унарных операций $f_i: A\to A$.

Важный пример У. а. дает групповой гомоморфизм $\varphi: G\to S_A$ произвольной группы G в группу S_A всех подстановок множества A. Такой гомоморфизм наз. д е й с т в и е м группы G на A. Определяя унарную операцию $f_g: A\to A$ для каждого элемента $g\in G$ как подстановку $\varphi(g)$ из S_A, отвечающую элементу g при гомоморфизме φ, получают У. а. $\langle A, \{f_g|g\in G\}\rangle$, в к-рой

$$f_1(x)=x,\ f_g(f_h(x))=f_{gh}(x),\quad x\in A,\ g,\ h\in G.$$

Структуру У. а. несет на себе любой *модуль* над кольцом. Каждый детерминированный полуавтомат с множеством состояний S и входными символами $a_1, \ldots, a_n$ также можно рассматривать как У. а. $\langle S, f_1, \ldots, f_n\rangle$, в к-рой $f_i(s)=a_is$ есть состояние, следующее за состоянием s в зависимости от входного символа a_i.

У. а. с одной основной операцией наз. м о н о у н а р н о й, или у н а р о м. Примером унара может служить алгебра Пеано $\langle P, f\rangle$, где $P=\{1, 2, \ldots\}$ и $f(n)=n+1$.

Тождества произвольной У. а. могут быть лишь следующих типов:

$$\mathrm{I}_1.\ f_{i_1}\ldots f_{i_k}(x)=f_{j_1}\ldots f_{j_l}(x),$$

$$\mathrm{II}_1.\ f_{i_1}\ldots f_{i_k}(x)=f_{j_1}\ldots f_{j_l}(y),$$

$$\mathrm{I}_2.\ f_{i_1}\ldots f_{i_k}(x)=x,\quad \mathrm{II}_2.\ f_{i_1}\ldots f_{i_k}(x)=y,$$

$$\mathrm{I}_3.\ x=x,\quad \mathrm{II}_3.\ x=y.$$

Тождество II_2 равносильно тождеству II_3, выполнимому лишь в одноэлементной алгебре. Многообразие У. а., определяемое лишь тождествами вида I_1, I_2 или I_3, наз. р е г у л я р н о о п р е д е л и м ы м. Существует следующая связь между р е г у л я р н о о п р е д е л и м ы м и многообразиями У. а. и полугруппами (см. [1], [3], [4]).

Пусть V — регулярно определимое многообразие У. а., заданное множеством $\{f_i | i \in I\}$, $I \neq \varnothing$, функциональных символов и множеством Σ тождеств. Каждому символу f_i сопоставляется элемент a_i, а для каждого тождества вида I_1 из Σ выписывается определяющее соотношение

$$a_{i_1} \ldots a_{i_k} = a_{j_1} \ldots a_{j_l}.$$

Пусть P — полугруппа с порождающими a_i, $i \in I$, и выписанными определяющими соотношениями, а P^1 — полугруппа P с внешне присоединенной единицей e. Для каждого тождества вида I_2 из Σ (если такие имеются) выписывают определяющее соотношение $a_{i_1} \ldots a_{i_k} = e$. Полугруппу P_V, получаемую из P^1 присоединением всех таких определяющих соотношений, и считают соответствующей многообразию V. Она во многом характеризует это многообразие. Если Σ содержит лишь тождества вида I_1, то можно ограничиться построением лишь полугруппы P. Определяя в P_V унарные операции $f_i(x) = xa_i$, получают У. а. $\langle P_V, \{f_i | i \in I\}\rangle$, к-рая является V-свободной алгеброй ранга 1. Группа всех автоморфизмов У. а. $\langle P_V, \{f_i | i \in I\}\rangle$ изоморфна группе P_V^* обратимых элементов полугруппы P_V.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [2] Биркгоф Г., Барти Т., Современная прикладная алгебра, пер. с англ., М., 1976; [3] Смирнов Д. М., «Алгебра и логика», 1976, т. 15, № 3, с. 331—42; [4] его же, там же, 1978, т. 17, № 4, с. 468—77; [5] Jonsson B., Topics in universal algebra, B.— Hdlb.— N. Y., 1972. *Д. М. Смирнов.*

УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРА — алгебраическая система с пустым множеством отношений. У. а. часто называют просто алгеброй. Для У. а. справедлива теорема о гомоморфизме: если φ — гомоморфизм У. а. A на У. а. B и θ — ядерная конгруэнция гомоморфизма φ, то B изоморфна факторалгебре A/θ. Всякая У. а. разлагается в подпрямое произведение подпрямо неразложимых У. а.

Если к основным операциям алгебры A присоединить все производные операции, то возникает У. а. $\tilde{A}$ большей сигнатуры. Равенство $\tilde{A} = \tilde{B}$ возможно и при $A \neq B$, что приводит к понятию рациональной эквивалентности У. а. (см. *Универсальных алгебр многообразие*).

С каждой У. а. A связаны сопутствующие структуры: моноид всех эндоморфизмов End A, группа всех автоморфизмов Aut A, решетки всех подалгебр Sub A и всех конгруэнций Con A. Для любых группы G и *алгебраических решеток* U и C существует такая У. а. A, что $G \cong \mathrm{Aut}\, A$, $U \cong \mathrm{Sub}\, A$ и $C \cong \mathrm{Con}\, A$ (см. [12]). Однако при замене Aut A на End A аналогичный результат не имеет места. Такого рода задачи наз. абстрактными задачами реализации. Пример решения конкретной задачи реализации: система подмножеств U множества A совпадает с Sub A для нек-рой У. а. с носителем A тогда и только тогда, когда U замкнута относительно объединения направленных подсистем и произвольных пересечений [11]. Как абстрактную, так и конкретную задачи реализации можно решать и для заданного класса У. а. Исследовались У. а. с теми или иными ограничениями на сопутствующие структуры. Напр., У. а. с дистрибутивной или дедекиндовой решеткой конгруэнций, с двуэлементной решеткой конгруэнций (конгруэнц-простые У. а.), с одноэлементной или двуэлементной решеткой подалгебр (простые У. а.), с коммутативным моноидом эндоморфизмов, с одноэлементной группой автоморфизмов (жесткие У. а.) и т. п. У. а. с перестановочными конгруэнциями изоморфна прямому произведению конечного числа конгруэнц-простых алгебр тогда и только тогда, когда решетка ее конгруэнций удовлетворяет условию максимальности, а точная верхняя грань ее

минимальных конгруэнций равна наибольшей конгруэнции. У. а. с дистрибутивной решеткой конгруэнций и перестановочными конгруэнциями (а р и ф м е т и ч е с к и е У. а.) допускают представление в виде глобального сечения подходящих пучков. Исследовалось, насколько У. а. определяется той или иной из своих сопутствующих структур. Впрочем, большинство результатов такого рода касается конкретных классов У. а. ([9] — [12], [15]).

У. а. наз. ф у н к ц и о н а л ь н о п о л н о й, если всякая операция на ее носителе принадлежит клону, порожденному ее основными операциями и константами. Если отказаться от включения констант, то получается определение п р и м а л ь н о й (или с т р о г о ф у н к ц и о н а л ь н о п о л н о й) У. а. Принадлежность к вышеупомянутому клону всех операций, сохраняемых конгруэнциями, определяет а ф ф и н н о п о л н у ю У. а. Всякая функционально полная У. а. конечна. Поэтому требование конечности часто включают в определение перечисленных классов У. а. (см. [9], [13], [14]).

Формирование теории У. а. началось в 30—40-х гг. 20 в., когда были сформулированы основные определения, охарактеризованы многообразия универсальных алгебр и доказана теорема о подпрямых разложениях (см. [7], [8]). Предыстория теории У. а. восходит к прошлому столетию. Активные исследования в этой области начались в кон. 40-х гг., а в СССР — в нач. 50-х гг. (А. Г. Курош, А. И. Мальцев и их ученики). Привлечение методов математич. логики привело к рассмотрению *алгебраических систем*.

Термин «У. а.» употребляется также в смысле «теория универсальных алгебр».

Лит.: [1] Б и р к г о ф Г., Теория решеток, пер. с англ., 2 изд., М., 1983; [2] К о н П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] К у р о ш А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [4] е г о ж е, Общая алгебра. Лекции 1969—1970 учебного года, М., 1974; [5] М а л ь ц е в А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [6] С к о р н я к о в Л. А., Элементы общей алгебры, М., 1983; [7] B i r k h o f f G., «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1935, v. 31, p. 433—54; [8] е г о ж е, «Bull. Amer. Math. Soc.», 1944, v. 50, p. 764—68; [9] G r ä t z e r G., Universal algebra, 2 ed., N. Y.— Hdlb.— B., 1979; [10] H u T a h K a i, «Math. Nachr.», 1969, Bd 42, N 1—3, S. 157—71; [11] J ó n s s o n B., Topics in universal algebra, B.— Hdlb.— N. Y., 1972; [12] L a m p e W. A., «Algebra universalis», 1972, v. 2, N 3, p. 270—83, 286—95, 296—302; [13] P i x l e y A. F., «Coll. Math. Soc. J. Bolyai», 1982, v. 29, p. 583—608; [14] W e r n e r H., Discriminator-algebras, B., 1978; [15] W o l f A., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1974, v. 148, p. 87—93.

Л. А. Скорняков.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ОБЕРТЫВАЮЩАЯ АЛГЕБРА а л г е б р ы Л и $\mathfrak{g}$ н а д к о м м у т а т и в н ы м к о л ь ц о м k с е д и н и ц е й — ассоциативная k-алгебра $U(\mathfrak{g})$ с единицей, снабженная отображением $\sigma: \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$, для к-рой выполнены следующие свойства: 1) σ является гомоморфизмом алгебр Ли, т. е. σ k-линейно и $\sigma([x, y]) = \sigma(x) \cdot \sigma(y) - \sigma(y) \cdot \sigma(x)$, $x, y \in \mathfrak{g}$; 2) для любой ассоциативной k-алгебры A с единицей и всякого такого k-линейного отображения $\alpha: \mathfrak{g} \to A$, что $\alpha([x, y]) = \alpha(x)\alpha(y) - \alpha(y)\alpha(x)$, $x, y \in \mathfrak{g}$, существует единственный гомоморфизм ассоциативных алгебр $\beta: U(\mathfrak{g}) \to A$, переводящий единицу в единицу, для к-рого $\alpha = \beta \circ \sigma$. У. о. а. определяется однозначно с точностью до изоморфизма и всегда существует: если $T(\mathfrak{g})$ — тензорная алгебра k-модуля $\mathfrak{g}$, I — ее двусторонний идеал, порожденный элементами вида $[x, y] - x \otimes y + y \otimes x$, $x, y \in \mathfrak{g}$ и $\sigma: \mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g})/I$ — каноническое отображение, то $T(\mathfrak{g})/I$ — У. о. а. для $\mathfrak{g}$.

Если k нётерово, а модуль $\mathfrak{g}$ конечного порядка, то алгебра $U(\mathfrak{g})$ — нётерова слева и справа. Если $\mathfrak{g}$ — свободный модуль над областью целостности k, то $U(\mathfrak{g})$ не имеет делителей нуля. Для любой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем k алгебра $U(\mathfrak{g})$ удовлетворяет условию Ope (см. *Вложение полугруппы*) и тем самым обладает телом частных.

Если V — нек-рый k-модуль, то всякий гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}\, V$ продолжается до гомоморфизма ассоциативных алгебр $U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}\, V$. Этим устанавливается изоморфизм категории $\mathfrak{g}$-модулей и категории левых $U(\mathfrak{g})$-модулей, существование к-рого лежит в основе применений У. о. а. в теории представлений алгебр Ли (см. [3], [4]).

У. о. а. прямого произведения алгебр Ли $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ есть тензорное произведение алгебр $U(\mathfrak{g}_i)$. Если $\mathfrak{h}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, причем $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — свободные k-модули, то канонический гомоморфизм $U(\mathfrak{h}) \to U(\mathfrak{g})$ является вложением. Если k' — расширение поля k, то $U(\mathfrak{g} \otimes_k k') = U(\mathfrak{g}) \otimes_k k'$. У. о. а. обладает канонической фильтрацией $U_0(\mathfrak{g}) \subset U_1(\mathfrak{g}) \subset \ldots \subset U_n(\mathfrak{g}) \subset \ldots$, где $U_0(\mathfrak{g}) = k \cdot 1$, а $U_n(\mathfrak{g})$, $n > 0$, — k-подмодуль в $U(\mathfrak{g})$, порожденный произведениями $\sigma(x_1) \ldots \sigma(x_m)$, $m \leqslant n$, $x_i \in \mathfrak{g}_i$ для всех i. Ассоциированная с этой фильтрацией градуированная алгебра $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$ коммутативна и порождается образом естественного отображения $\mathfrak{g} \to \mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$; это отображение определяет гомоморфизм δ симметрической алгебры $S(\mathfrak{g})$ k-модуля $\mathfrak{g}$ в $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$. Согласно **теореме Пуанкаре—Биркгофа—Витта** $\delta : S(\mathfrak{g}) \to \mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$ — изоморфизм алгебр, если $\mathfrak{g}$ — свободный k-модуль. Эквивалентная формулировка состоит в следующем: если $\{x_i\}_{i \in I}$ — базис k-модуля $\mathfrak{g}$, где I — линейно упорядоченное множество, то семейство одночленов $\sigma(x_{i_1}) \ldots \sigma(x_{i_n})$, $i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_n$, $n \geqslant 0$, образует базис k-модуля $U(\mathfrak{g})$ (в частности, σ инъективно).

Пусть $Z(\mathfrak{g})$ — центр алгебры $U(\mathfrak{g})$. Тогда для любой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем характеристики 0 $\mathrm{gr}\, Z(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$ совпадает с подалгеброй G-инвариантных элементов в $S(\mathfrak{g})$. Если $\mathfrak{g}$ полупроста, то $Z(\mathfrak{g})$ является алгеброй многочленов от $rk\mathfrak{g}$ переменных.

Одним из важнейших направлений исследования У. о. а. является изучение их примитивных идеалов (см. [3]).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [2] его же, Группы и алгебры Ли. Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли, пер. с франц., М., 1978; [3] Диксмье Ж., Универсальные обертывающие алгебры, пер. с франц., М., 1978; [4] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [5] Гельфанд И. М., «Матем. сб.», 1950, т. 26, с. 103—12; [6] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969.

В. Л. Попов.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ для данного класса K функций типа $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ — функция $F(y, x_1, \ldots, x_n)$ типа $\mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ такая, что для всякой $f(x_1, \ldots, x_n) \in K$ найдется $i \in \mathbb{N}$, при к-ром

$$f(x_1, \ldots, x_n) = F(i, x_1, \ldots, x_n). \qquad (*)$$

Здесь $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, а равенство $(*)$ означает, что функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $F(i, x_1, \ldots, x_n)$ определены на одних и тех же наборах аргументов $x_1, \ldots, x_n$ и их значения на этих наборах совпадают. Иногда в определении У. ф. требуется, чтобы для всех $i \in \mathbb{N}$ функция $F(i, x_1, \ldots, x_n)$ принадлежала классу K (см. [4]). Имеются также др. варианты определения У. ф. (см. [1], [2]).

У. ф. существуют для всякого счетного класса функций. Следующие У. ф. играют важную роль в теории алгоритмов: 1) универсальные частично рекурсивные функции для классов всех n-местных ($n \geqslant 0$) *частично рекурсивных функций*, 2) общерекурсивные У. ф. для классов всех n-местных *примитивно рекурсивных функций*.

Если функция $\psi(y, x)$ универсальна для класса всех одноместных частично рекурсивных функций, то она не продолжается до рекурсивной всюду определенной функции, а множество $\{x \mid \psi(x, x)$ определена$\}$ явля-

ется примером перечислимого, но не разрешимого множества натуральных чисел.

Лит.: [1] Петер Р., Рекурсивные функции, пер. с нем., М., 1954; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [4] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965. *С. Н. Артемов.*

УНИВЕРСАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО, универсум,— нек-рое множество, фиксированное в рамках данной математич. теории и содержащее в качестве элементов все объекты, рассматриваемые в этой теории. Напр., для элементарной арифметики У. м. является множество всех целых чисел. Особую роль играет понятие У. м. в теории множеств. Объектами исследования в ней являются множества, поэтому У. м. здесь является совокупность всех множеств; однако оно уже не является множеством, т. е. не может быть объектом рассмотрения в теории множеств. На это указывают парадоксы, связанные с понятием множества всех множеств (напр., *антиномия* Кантора).

Множество всех множеств становится объектом исследования в теории множеств и классов. В этой теории наряду с множествами рассматриваются классы — объекты, к-рые не могут быть членами др. множеств или классов.

Лит.: [1] Клини С. К., Математическая логика, пер. с англ., М., 1973; [2] Френкель А.-А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966.

В. Е. Плиско.

УНИВЕРСАЛЬНОЕ НАКРЫТИЕ — накрытие, к-рому подчинены или к-рыми накрываются все остальные накрытия. *М. И. Войцеховский.*

УНИВЕРСАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологич. пространство, содержащее гомеоморфный образ любого топологич. пространства нек-рого класса. Примеры:

1) C [0,1], см. *Банахово пространство*;

2) гильбертов кирпич и тихоновский куб;

3) кривая Менгера (см. *Линия*);

4) универсальное расслоение Милнора (см. *Главное расслоение*).

Свойство универсальности обеспечивает рассмотрение нек-рого абстрактно заданного объекта как подобъекта более простого (с категорной точки зрения) и тем самым наделяет его «внешними» свойствами, большим богатством. С другой стороны, этим подчеркивается отношение «частное от общего».

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968.

М. И. Войцеховский.

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ для данного класса алгоритмов — алгоритм с входным параметром p, к-рый при различных допустимых значениях p моделирует работу любого алгоритма данного класса. Различным формализациям вычислимости соответствуют различные уточнения понятия У. а.: для *рекурсивных функций* это универсальная частично рекурсивная функция (см. *Универсальная функция*), для *Тьюринга машин* — это универсальная машина Тьюринга, для нормальных алгорифмов — это *универсальный нормальный алгорифм*, и т. д.

Лит.: [1] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [2] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [3] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972. *С. Н. Артемов.*

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ НОРМАЛЬНЫЙ АЛГОРИФМ— нормальный алгорифм (н. а.) $\mathfrak{V}$, к-рый в уточненном ниже смысле моделирует работу любого н. а. в алфавите $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$. Н. а. $\mathfrak{V}$ в алфавите $B \supset A \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ (A не содержит букв α, β, γ, δ) является универсальным для алфавита A, если для всякого н. а. $\mathfrak{A}$ в алфавите A и для каждого слова P в алфавите A

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{A}^{\mathfrak{u}}\delta P) \simeq \mathfrak{A}(P).$$

Здесь $\mathfrak{A}^{\mathfrak{u}}$ есть изображение н. а. (см. *Алгоритма изображение*), а символ δ из B играет роль разделитель-

ного знака. Существование У. н. а. доказал А. А. Марков (см. [1]). Важной характеристикой У. н. а. является его **сложность**, т. е. длина его изображения (см. также ***Алгоритма сложность*** описания). Для минимальной сложности У. н. а. как функции от n (количества символов в алфавите A) получены отличающиеся лишь на аддитивную константу нижняя и верхняя оценки вида $5n+C$ (см. [2]).

Лит.: [1] Марков А. А., Теория алгорифмов, М.—Л., 1954 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 42); [2] Жаров В. Г., О сложности универсального нормального алгорифма, в сб.: Теория алгорифмов и математическая логика, М., 1974, с. 34—54.

С. Н. Артемов.

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ РЯД — функциональный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x), \quad x \in [a, b], \tag{1}$$

с помощью к-рого могут быть представлены в том или ином смысле все функции заданного класса. Напр., существует такой ряд (1), что для каждой непрерывной на $[a, b]$ функции f найдется подпоследовательность частных сумм этого ряда $\sum_{i=1}^{n_k} \varphi_i(x)$, сходящаяся к $f(x)$ равномерно на $[a, b]$.

Существуют тригонометрические ряды

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ix + b_i \sin ix) \tag{2}$$

со стремящимися к нулю коэффициентами такие, что для каждой измеримой (по Лебегу) на $[0, 2\pi]$ функции f имеется подпоследовательность частных сумм ряда (2), сходящаяся к $f(x)$ почти всюду.

Указанные ряды наз. универсальными относительно подпоследовательностей частных сумм. Рассматриваются также др. определения У. р. Напр., ряды (1), универсальные относительно подрядов $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{i_k}(x)$ или относительно перестановок членов ряда (1).

Лит.: [1] Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [3] Талалян А. А., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, № 5, с. 77—141.

С. А. Теляковский.

УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР МНОГООБРАЗИЕ — класс универсальных алгебр, определяемый системой тождеств (ср. ***Алгебраических систем многообразие***). У. а. м. характеризуется как непустой класс алгебр, замкнутый относительно факторалгебр, подалгебр и прямых произведений. Последние два условия можно заменить требованием замкнутости относительно подпрямых произведений. У. а. м. наз. **тривиальным**, если оно состоит из одноэлементных алгебр. Каждое нетривиальное У. а. м. содержит ***свободную алгебру*** с базой любой мощности. Если X и Y — базы одной и той же свободной алгебры нетривиального У. а. м. и X бесконечна, то X и Y равномощны. Требование бесконечности одной из баз существенно. Оно может быть снято, если У. а. м. содержит неодноэлементную конечную алгебру.

У. а. м., порожденное классом K, состоит из всех факторалгебр всевозможных подпрямых произведений алгебр из K. Все конечно порожденные алгебры из У. а. м., порожденного конечной алгеброй, конечны. Конгруэнции любой алгебры из У. а. м. M сигнатуры Ω перестановочны в том и только в том случае, когда существует такой тернарный *терм* f сигнатуры Ω, что тождества

$$f(x, x, y) = y = f(y, x, x)$$

справедливы во всех алгебрах из M. Аналогичным образом могут быть охарактеризованы У. а. м., чьи алгебры обладают модулярными или дистрибутивными решетками конгруэнций (см. [1—4, 7, 9, 10]).

В многообразии M n-арная операция f наз. **тривиальной**, если во всех алгебрах из M справедливо

тождество $f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$. Напр., в многообразии колец с нулевым умножением операция умножения тривиальна. Каждую тривиальную операцию f можно заменить 0-арной операцией ν_f, определяемой равенством $\nu_f = f(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть сигнатуры Ω и Ω' У. а. м. M и M' соответственно не содержат тривиальных операций. Отображение Φ сигнатуры Ω в множество $W(\Omega')$ термов сигнатуры Ω' наз. д о п у с т и м ы м, если арности операций f и $\Phi(f)$ совпадают для всех $f \in \Omega$. Допустимое отображение Φ естественным образом продолжается до отображения $W(\Omega)$ в $W(\Omega')$, к-рое также обозначается Φ. Многообразия M и M' наз. р а ц и о н а л ь н о-э к в и в а л е н т н ы м и, если существуют допустимые отображения $\Phi : \Omega \to W(\Omega')$ и $\Phi' : \Omega' \to W(\Omega)$ такие, что $f = \Phi'(\Phi(f))$ для всех $f \in \Omega$, $f' = \Phi(\Phi'(f'))$ для всех $f' \in \Omega'$ и для каждого тождества $u = v$ (соответственно $u' = v'$), входящего в определение многообразия M (многообразия M'), тождество $\Phi(u) = \Phi(v)$ (соответственно $\Phi'(u') = \Phi'(v')$) справедливо во всех алгебрах из M' (из M). Последнее требование равносильно тому, что каждая алгебра A из M (A' из M') превращается в алгебру из M' (из M), если каждую n-арную операцию f' из Ω' (f из Ω) определить равенством $f'(x_1, \ldots, x_n) = \Phi'(f')(x_1, \ldots, x_n)$ (соответственно $f(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(f)(x_1, \ldots, x_n)$). Рационально эквивалентны многообразия булевых колец и *булевых алгебр*. Многообразие *унарных алгебр* сигнатуры Ω, определяемое тождествами

$$\{u_\iota(x) = v_\iota(x) \mid \iota \in \Im\},$$

рационально эквивалентно многообразию всех левых R-*полигонов*, где R — фактормоноид свободного моноида со свободной порождающей системой Ω по конгруэнции, порожденной всеми парами $\{(u_\iota, v_\iota) \mid \iota \in \Im\}$. У. а. м. M рационально эквивалентно многообразию всех правых модулей над нек-рым ассоциативным кольцом тогда и только тогда, когда конгруэнции любой алгебры из M перестановочны, конечные *свободные произведения* в M совпадают с *прямыми произведениями* и существует нуль-арная производная операция, отмечающая подалгебру. Первые два условия можно заменить требованием: каждая подалгебра любой алгебры из M является классом нек-рой конгруэнции и каждая конгруэнция любой алгебры из M однозначно определяется своим классом, являющимся подалгеброй [3, 5, 6, 7].

Многообразие решеток, порожденное решетками конгруэнций всех алгебр нек-рого У. а. м., наз. к о н г р у э н ц-м н о г о о б р а з и е м. Не всякое многообразие решеток является конгруэнц-многообразием. Существуют не модулярные конгруэнц-многообразия, отличные от многообразия всех решеток [7, 8].

Лит.: [1] К о н П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] К у р о ш А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [3] М а л ь ц е в А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [4] С к о р н я к о в Л. А., Элементы общей алгебры, М., 1983; [5] Ч а к а н ь Б., «Acta Scient. Math.», 1963, t. 24, № 1—2, p. 157—64; [6] с р о ж е, там же, 1964, t. 25, № 3—4, p. 202—08; [7] G r ä t z e r G., Universal algebra, 2 ed., N. Y.— Hdlb.— B., 1979; [8] J ó n s s o n B., «Coll. Math. Soc. J. Bolyai», 1982, v. 29, p. 421—36; [9] S m i t h J. D. H., Mal'cev varieties, B.— Hdlb.— N. Y., 1976; [10] T a y l o r W., «Algebra universalis», 1973, v. 3, № 3, p. 351—97.
Л. А. Скорняков.

УНИКУРСАЛЬНАЯ КРИВАЯ — плоская кривая Γ, к-рую можно обойти, побывав дважды только в точках самопересечения. Для того чтобы кривая была уникурсальной, необходимо и достаточно, чтобы у нее было не более двух точек, через к-рые проходит нечетное число путей. Если Γ — плоская алгебраич. кривая n-го порядка, имеющая максимальное число δ двойных точек (включая несобственные и мнимые), то $\delta = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ (причем точки кратности k рассматриваются как $\frac{k(k-1)}{2}$ двойных точек).

Всякий интеграл $\int R(x, y)dx$, где y — функция от x, определяемая уравнением $F(x, y)=0$, задающая алгебраич. У. к., а $R(x, y)$ — рациональная функция, приводится к интегралу от рациональных функций и выражается в элементарных функциях. *М. И. Войцеховский.*

УНИМОДАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, одновершинное распределение,— *вероятностная мера* на прямой, функция распределения к-рой $F(x)$ выпукла при $x<a$ и вогнута при $x>a$ для нек-рого действительного a. Число a в этом случае наз. *модой* (вершиной) и определяется, вообще говоря, неоднозначно; точнее, множество мод (вершин) данного У. р. образует замкнутый интервал, возможно, вырожденный.

Примерами У. р. служат *нормальное распределение*, *равномерное распределение*, *Коши распределение*, *Стьюдента распределение*, *«Хи-квадрат» распределение*. А. Я. Хинчин [1] получил следующий критерий унимодальности: для того чтобы функция $f(t)$ была характеристич. функцией У. р. с модой в нуле, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$f(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(u)\,du, \quad f(0)=1,$$

где $\varphi(u)$ — нек-рая характеристич. функция. В терминах функций распределения это равенство эквивалентно следующему

$$F(x)=\int_0^1 G\left(\frac{x}{u}\right)du,$$

где $F(x)$ и $G(x)$ соответствуют $f(t)$ и $\varphi(t)$. Иными словами, $F(x)$ унимодальна тогда и только тогда, когда она является функцией распределения произведения двух независимых случайных величин, одна из к-рых распределена равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Для распределений, к-рые задаются своими характеристич. функциями (как, напр., для *устойчивого распределения*), проверка факта их унимодальности представляет трудную аналитич. задачу. Кажущийся естественным путь представления данного распределения как предела композиции У. р. не приводит к цели, т. к., вообще говоря, композиция двух У. р. не будет У. р. (хотя для симметричных распределений унимодальность сохраняется при композиции и долгое время казалось, что так будет в общем случае). Напр., если F имеет плотность

$$p(x)=1, \quad 0<x\leqslant\frac{5}{6} \text{ и } p(x)=0$$

в др. случаях, то плотность композиции F с F имеет два максимума. Поэтому было введено (см. [2]) понятие сильной унимодальности (сильной одновершинности): распределение наз. сильно унимодальным (сильно одновершинным), если его свертка с любым У. р. унимодальна. Всякое сильно унимодальное распределение является У. р.

Решетчатое распределение, приписывающее точкам $a+hk$, $k=0, \pm 1, \ldots, h>0$, вероятности p_k наз. У. р., если существует такое целое k_0, что p_k как функция от k является неубывающей при $k\leqslant k_0$ и невозрастающей при $k\geqslant k_0$. Примерами решетчатых У. р. являются *Пуассона распределение*, *биномиальное распределение*, *геометрическое распределение*.

Нек-рые результаты, касающиеся распределений, могут быть усилены в предположении унимодальности. Так, напр., *Чебышева неравенство* для случайной величины ξ, имеющей У. р., можно уточнить следующим образом

$$\mathsf{P}\{|\xi-x_0|\geqslant k\zeta\}\leqslant\frac{4}{9k^2}$$

для любого $k>0$, где x_0 — мода, а $\zeta^2=\mathsf{E}(\xi-x_0)^2$.

Лит.: [1] Хинчин А. Я., Об унимодальных распределениях, «Изв. НИИ матем. и мех. ун-та», Томск, 1938, т. 2, в. 2, с. 1—7; [2] Ибрагимов И. А., О композиции одновершинных распределений, «Теор. вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 283—88; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967.
Н. Г. Ушаков.

УНИМОДУЛЯРНАЯ ГРУППА — топологическая группа, левоинвариантная *Хаара мера* на к-рой правоинвариантна или, что равносильно, инвариантна относительно преобразования $a \mapsto a^{-1}$. Группа Ли G унимодулярна тогда и только тогда, когда

$$|\det \mathrm{Ad}\, g| = 1 \quad (g \in G),$$

где Ad — присоединенное представление. Для связных групп Ли G это равносильно тому, что $\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}\ x = 0$ $(x \in \mathfrak{g})$, где ad — присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Любая компактная, дискретная или абелева локально компактная группа, а также любая связная редуктивная или нильпотентная группа Ли унимодулярна.
А. Л. Онищик.

УНИМОДУЛЯРНАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица, определитель к-рой равен ± 1. Иногда, при рассмотрении матриц над коммутативным кольцом, под У. м. понимают обратимую матрицу.
О. А. Иванова.

УНИМОДУЛЯРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — линейное преобразование конечномерного векторного пространства, матрица к-рого имеет определитель ± 1.
О. А. Иванова.

УНИПОТЕНТНАЯ ГРУППА — подгруппа U линейной алгебраич. группы G, состоящая из *унипотентных элементов*. Если отождествить G с ее образом при изоморфном вложении в группу $GL(V)$ автоморфизмов подходящего конечномерного векторного пространства V, то У. г.— это подгруппа, лежащая в множестве

$$\{g \in GL(V) \mid (1-g)^n = 0\}, \quad n = \dim V,$$

всех унипотентных автоморфизмов пространства V. Зафиксировав в V базис, можно отождествить $GL(V)$ с полной матричной группой $GL_n(K)$, где K — основное алгебраически замкнутое поле; матричная группа U также называется при этом У. г. Пример У. г.— группа $U_n(K)$ всех верхнетреугольных матриц из $GL_n(K)$ с единицами на диагонали. Если k — подполе поля K и U — унипотентная подгруппа в $GL_n(k)$, то U сопряжена над k с нек-рой подгруппой группы $U_n(k)$. В частности, все элементы из U имеют в V общий ненулевой неподвижный вектор, а U является нильпотентной группой. Эта теорема показывает, что алгебраические У. г.— это в точности замкнутые (в топологии Зарисского) подгруппы групп $U_n(K)$ при различных n.

В любой линейной алгебраич. группе H имеется единственная связная нормальная унипотентная подгруппа $R_u(H)$ (унипотентный радикал), фактор $H/R_u(H)$ по к-рому редуктивен. Это в известной степени сводит изучение строения любой группы к изучению строения редуктивных групп и У. г. В отличие от редуктивного случая классификация алгебраических У. г. к настоящему времени (1984) неизвестна.

Всякая подгруппа и всякая факторгруппа алгебраической У. г. снова являются У. г. Если $\mathrm{char}\ K = 0$, то U всегда связна, причем экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{u} \to U$ (где $\mathfrak{u}$ — алгебра Ли группы U) является изоморфизмом алгебраич. многообразий; если же $\mathrm{char}\ K = p > 0$, то существуют несвязные алгебраические У. г.: напр., аддитивная группа $\mathbf{G}_a$ основного поля K (ее можно отождествить с $U_2(K)$) является p-группой и потому содержит конечные У. г. В связной У. г. U имеется такая последовательность нормальных делителей $U = U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_s = \{e\}$, что все факторы U_i/U_{i+1} одномерны. Всякая связная алгебраическая одномерная У. г. изоморфна $\mathbf{G}_a$. Это сводит изучение связных алгебраических У. г. к описанию кратных расширений групп типа $\mathbf{G}_a$.

Значительно больше, чем в общем случае, известно о коммутативных алгебраических У. г. (см. [4]). Если $\mathrm{char}\ K=0$, то это в точности алгебраич. группы, изоморфные $\mathbf{G}_a\times\ldots\times\mathbf{G}_a$; при этом изоморфизм $\mathbf{G}_a\times\ldots\times\mathbf{G}_a\to U$ задается экспоненциальным отображением. Если же $\mathrm{char}\ K=p>0$, то связные коммутативные алгебраические У. г. U — это в точности связные коммутативные алгебраич. группы, являющиеся p-группами. В этом случае U не обязательно изоморфна $\mathbf{G}_a\times\ldots\times\mathbf{G}_a$: для этого необходимо и достаточно, чтобы $g^p=e$ для любого $g\in U$. В общем же случае U изогенна произведению нек-рых специальных групп (т. н. групп Витта, см. [2]).

Если H и U — связные алгебраические У. г. и $H\subset U$, то многообразие U/H изоморфно аффинному пространству. Любая орбита алгебраической У. г. автоморфизмов аффинного алгебраич. многообразия X замкнута в X [5].

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Серр Ж. П., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [3] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980; [4] Kambayachi T., Miyanishi M., Takeuchi M., Unipotent algebraic groups, B.— [a. o.], 1974; [5] Steinberg R., Conjugacy classes in algebraic groups, B.— [a. o.], 1974.

В. Л. Попов.

УНИПОТЕНТНАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица A над кольцом, для к-рой матрица $A-E_n$, где n — порядок матрицы A, нильпотентна, то есть $(A-E_n)^n=0$. Матрица над полем порядка n унипотентна тогда и только тогда, когда ее характеристический многочлен есть $(x-1)^n$.

Группа матриц наз. у н и п о т е н т н о й, если каждая ее матрица унипотентна. Любая унипотентная подгруппа в $GL(n, F)$, где F — поле, сопряжена в $GL(n,F)$ с нек-рой подгруппой специальной треугольной группы (т е о р е м а К о л ч и н а). Это утверждение справедливо и для унипотентных групп над телом, если характеристика тела либо равна 0, либо больше нек-рого $\gamma(n)$.

Д. А. Супруненко.

УНИПОТЕНТНЫЙ ЭЛЕМЕНТ — элемент g линейной алгебраич. группы G, совпадающий с унипотентной компонентой g_u своего *Жордана разложения* в группе G. Если реализовать G как замкнутую подгруппу группы $GL(V)$ автоморфизмов конечномерного векторного пространства V над основным алгебраически замкнутым полем K, то У. э. g — это в точности такие элементы, что $(1-g)^n=0$, $n=\dim V$, или, что их матрицы в нек-ром базисе пространства V являются верхне-треугольными с единицами на диагонали. Множество $U(G)$ всех У. э. в G замкнуто в топологии Зарискoго, а если G определена над подполем $k\subset K$, то и $U(G)$ определено над k. Если $\mathrm{char}\ K=0$, то всякий У. э. g имеет бесконечный порядок. В этом случае наименьшая алгебраич. подгруппа в G, содержащая g, является одномерной *унипотентной группой*. Если же $\mathrm{char}\ K=p>0$, то g будет У. э. в точности тогда, когда он имеет конечный порядок, равный p^t для нек-рого $t\geqslant 0$. Связная группа не содержит У. э. $g\neq e$ тогда и только тогда, когда она является *алгебраическим тором*.

В терминах У. э. может быть дан критерий анизотропности (см. *Анизотропная группа*).

У. э. играют важную роль в теории *дискретных подгрупп* алгебраич. групп и групп Ли. Наличие У. э. в дискретных группах Γ движений симметрических пространств, имеющих некомпактную фундаментальную область конечного объема, является важным средством изучения структуры таких групп и их канонических фундаментальных областей (см. [5]); существование У. э. в таких Γ доказано в [4].

Многообразие $U(G)$ инвариантно относительно внутренних автоморфизмов группы G. Пусть G связна и полупроста. Тогда число классов сопряженных У. э. конечно и для каждой простой G известно полное их

описание (а также описание централизаторов У. э.), см. [7]. В классич. группах такое описание получается с использованием жордановой формы матрицы [2]. Напр., для группы $G=SL_n(K)$ существует биекция между классами сопряженных У. э. и разбиениями $(m_1, \ldots, m_s)$ числа n в сумму положительных целых слагаемых m_i, $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_s$. Если $\lambda=(m_1, \ldots, m_s)$ и $\mu=(l_1, \ldots, l_t)$ — два разбиения числа n, то класс, отвечающий λ, содержит в своем замыкании класс, отвечающий μ, в точности тогда, когда $\sum_{i=1}^{j} m_i \geqslant \sum_{i=1}^{j} l_i$ для всех j. Размерность класса, отвечающего разбиению $(m_1, \ldots, m_s)$ (как алгебраического многообразия), равна $n^2-\sum_{ij} \min(m_i, m_j)$.

Множество всех простых точек алгебраического многообразия $U(G)$ образует один класс сопряженных У. э.— р е г у л я р н ы е У. э. Если G проста, то многообразие особых точек многообразия $U(G)$ также содержит открытый в топологии Зариского класс сопряженных У. э.— с у б р е г у л я р н ы е У. э. По поводу изучения особых точек многообразия $U(G)$ см. также [6].

Лит.: [1] Б о р е л ь А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Семинар по алгебраическим группам, пер. с англ., М., 1973; [3] Х а м ф р и Д ж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980; [4] К а ж д а н Д. А., М а р г у л и с Г. А., «Матем. сб.», 1968, т. 75, № 1, с. 163—68; [5] С е л ь б е р г А., «Математика», 1972, т. 16, в. 4, с. 72—89; [6] S l o d o w y P., Simple singularities and simple algebraic groups, B.— [a. o.], 1980; [7] S p a l t e n s t e i n N., Classes unipotentes et sousgroupes de Borel, B.— [a. o.], 1982.

В. Л. Попов.

УНИРАЦИОНАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — алгебраическое многообразие X над полем k, для к-рого существует такое рациональное отображение проективного пространства $\varphi: P^n \to X$, что $\varphi(P^n)$ плотно в X и расширение полей рациональных функций $k(P^n)/k(X)$ сепарабельно. Другими словами, $k(X)$ имеет сепарабельное чисто трансцендентное расширение.

У. м. близки к *рациональным многообразиям*. Напр., на У. м. нет регулярных дифференциальных форм, $H^0(X, \Omega_X^p)=0$ при $p \geqslant 1$. Вопрос о совпадении понятий рационального и унирационального многообразия наз. *Люрота проблемой*.

Лит.: [1] Ш а ф а р е в и ч И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

Вик. С. Куликов.

УНИТАРНАЯ ГРУППА о т н о с и т е л ь н о ф о р м ы f — группа $U_n(K, f)$ всех линейных преобразований φ n-мерного правого линейного пространства V над телом K, сохраняющих фиксированную невырожденную полуторалинейную (относительно инволюции J тела K) форму f на V, т. е. таких φ, что

$$f(\varphi(v), \varphi(u))=f(v, u) \quad \forall v, u \in V.$$

У. г. принадлежит к числу *классических групп*. Частными случаями У. г. являются *симплектическая группа* (в этом случае K — поле, $J=1$ и f — знакопеременная билинейная форма) и *ортогональная группа* (K — поле, char $K \neq 2$, $J=1$, f — симметрическая билинейная форма). Далее, пусть $J \neq 1$ и f обладает свойством (T) (см. *Витта теорема*). Умножая f на подходящий скаляр, можно, не меняя У. г., добиться того, чтобы f стала эрмитовой формой, а меняя, сверх того, J,— чтобы f стала косоэрмитовой формой.

Если исключить случай $n=2$, $K=\mathbb{F}_4$, то всякий элемент У. г. $U_n(K, f)$ является произведением не более чем $n+1$ к в а з и о т р а ж е н и й (т. е. преобразований, оставляющих на месте все элементы какой-либо неизотропной гиперплоскости в V). Центр Z_n У. г. $U_n(K, f)$ состоит из всех гомотетий пространства V вида $x \mapsto xy$, $\gamma \in K$, $\gamma^J\gamma=1$.

Пусть ν — индекс Витта формы f. Если $\nu \neq 0$, то удобно считать f косоэрмитовой. Пусть $T_n(K, f)$ — нормальный делитель в $U_n(K, f)$, порожденный у н и т а р-

ными сдвигами, т. е. линейными преобразованиями вида $x \mapsto x + a\lambda f(a, x)$, где a — изотропный вектор пространства V, а $\lambda \in S = \{\gamma \in K | \gamma^J = \gamma\}$. Центром группы $T_n(K, f)$ является группа $W_n = T_n(K, f) \cap Z_n$. Факторгруппа $T_n(K, f)/W_n$ проста при $n \geqslant 2$, если $K \neq \mathbb{F}_4$ или $\mathbb{F}_9$. Строение факторгруппы $U_n(K, f)/T_n(K, f)$ описывается следующим образом. Пусть Σ — подгруппа мультипликативной группы K^* тела K, порожденная $K^* \cap S$, а Ω — подгруппа в K^*, порожденная элементами $\lambda \in K^*$, обладающими следующим свойством: в V существует такая гиперболическая плоскость (т. е. двумерное неизотропное подпространство, содержащее изотропный вектор), что $f(v, v) = \lambda - \lambda^J$ для нек-рого вектора $v \in V$, ортогонального к указанной плоскости. Эти подгруппы являются нормальными в K^*. Пусть $[K^*, \Omega]$ — подгруппа в K^*, порожденная коммутаторами $\lambda w \lambda^{-1} w^{-1}$, $\lambda \in K^*$, $w \in \Omega$. Если исключить случай $n = 3$, $K = \mathbb{F}_4$, то $U_n(K, f)/T_n(K, f)$ при $n \geqslant 2$ изоморфна $K^*/\Sigma[K^*, \Omega]$.

Группа $T_n(K, f)$ во многих случаях совпадает с коммутантом У. г. $U_n(K, f)$: это верно, напр., если $\nu \geqslant 2$. Если K коммутативно и $n \geqslant 2$, то $T_n(K, f)$ совпадает с нормальной подгруппой $U_n^+(K, f)$, состоящей из тех элементов, определитель Дьёдонне к-рых равен 1 (за исключением случая $n = 3$, $K = \mathbb{F}_4$). Соотношения между $U_n(K, f)$, $U_n^+(K, f)$ и $T_n(K, f)$ исследованы также в случае, когда тело K имеет конечную размерность над своим центром [1].

Пусть теперь $\nu = 0$. Тогда многие из указанных результатов неверны (имеются примеры У. г., обладающих бесконечным рядом нормальных делителей с абелевыми факторами, примеры У. г., для к-рых $n = 2$ и $U_n^+(K, f)$ не совпадает со своим коммутантом и т. п.). Наиболее изученными являются случаи локально компактного поля характеристики $\neq 2$ и поля алгебраич. чисел.

Один из основных результатов об автоморфизмах У. г. состоит в следующем (см. [1]): если $\mathrm{char}\, K \neq 2$, а $n \geqslant 3$, то всякий автоморфизм У. г. $U_n(K, f)$ имеет вид $\varphi(u) = \chi(u) g u g^{-1}$, $u \in U_n(K, f)$, где χ — гомоморфизм $U_n(K, f)$ в ее центр Z_n, а g — унитарное полуподобие пространства V (т. е. биективное *полулинейное отображение* $V \to V$, удовлетворяющее условию $f(g(x), g(y)) = r_g (f(x, y))^\sigma$, где $x, y \in V$, $r_g \in K^*$, а σ — автоморфизм K, связанный с g). Если n четно, $n \geqslant 6$, K — поле характеристики $\neq 2$ и $\nu \geqslant 1$, то всякий автоморфизм группы $U_n^+(K, f)$ индуцируется автоморфизмом группы $U_n(K, f)$.

Если $K = \mathbb{C}$, J — автоморфизм комплексного сопряжения и эрмитова форма f положительно определена, то У. г. $U_n(K, f)$ обозначается через U_n; она является компактной вещественной связной группой Ли и часто наз. просто У. г. В случае неопределенной формы f группу $U_n(\mathbb{C}, f)$ часто наз. псевдоунитарной. С помощью выбора в V базиса U_n отождествляется с группой всех *унитарных матриц*. Группа $U_n^+(K, f)$ в этом случае наз. специальной унитарной группой и обозначается через SU_n.

Лит.: [1] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [3] Автоморфизмы классических групп, сб. пер. с англ. и франц., М., 1976; [4] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [5] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1962; [6] Залесский А. Е., «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, в. 5, с. 57—107.

В. Л. Попов.

УНИТАРНАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица $A = \|a_{ik}\|_1^n$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, строки к-рой образуют ортонормированную систему, т. е.

$$a_{i1}\overline{a_{k1}} + \ldots + a_{in}\overline{a_{kn}} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k, \end{cases}$$

i, $k=1,\ldots,n$. С помощью У. м. осуществляется переход от одного ортонормированного базиса к др. ортонормированному базису в унитарном пространстве. У. м. служат также матрицами унитарных преобразований в ортонормированном базисе. Квадратная матрица A с комплексными элементами унитарна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет любому из следующих условий:

1) $A^*A=E$,

2) $AA^*=E$,

3) $A^*=A^{-1}$,

4) столбцы матрицы A образуют ортонормированную систему (здесь A^* — сопряженная с A матрица). Определитель У. м. есть комплексное число, модуль к-рого равен единице. *О. А. Иванова.*

УНИТАРНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ — действующие в гильбертовом пространстве H линейные операторы A и B с областями определения D_A и D_B соответственно такие, что

1) $UD_A=D_B$,

2) $UAU^{-1}x=Bx$ для любого $x\in D_B$,

где U — *унитарный оператор*. Если A и B — ограниченные линейные операторы, то условие 1) опускается. Если A — *самосопряженный оператор*, то таков же и B; если A и B — ограниченные операторы, то $\|A\|=\|B\|$.

Самосопряженные У. э. о. имеют унитарно эквивалентные спектральные функции, т. е. $E_\lambda(B)=UF_\lambda(A)U^{-1}$. Поэтому спектры У. э. о. имеют одинаковую структуру: либо оба чисто точечные, либо оба чисто непрерывные, либо оба смешанные. В частности, в случае чисто точечного спектра собственные значения У. э. о. одинаковые и ранги собственных значений совпадают, причем это является не только необходимым, но и достаточным условием унитарной эквивалентности операторов с чисто точечным спектром.

Примером пары У. э. о. в комплексном пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ является оператор дифференцирования $Ax=i\frac{dx}{dt}$ с областью определения D_A, состоящей из абсолютно непрерывных на $(-\infty, \infty)$ функций, имеющих на этом промежутке суммируемую с квадратом производную, и оператор умножения на независимую переменную $Bx=tx(t)$. Унитарным оператором, осуществляющим унитарную эквивалентность, является в этом случае *Фурье преобразование*.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [2] Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979.

В. И. Соболев.

УНИТАРНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ — представления π_1, π_2 группы (алгебры, кольца, полугруппы) X в гильбертовых пространствах H_1, H_2, удовлетворяющие условию

$$U\pi_1(x)=\pi_2(x)\,U$$

для нек-рого унитарного оператора $U: H_1\to H_2$ и всех $x\in X$. См. также *Сплетающий оператор*.

А. И. Штерн.

УНИТАРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ топологической группы — представление топологич. группы унитарными операторами в гильбертовом пространстве. Теория У. п.— один из наиболее разработанных разделов теории представлений топологич. групп, что связано как с его многочисленными приложениями, так и с наличием ряда свойств, упрощающих изучение У. п. А именно, любое У. п. вполне приводимо; для У. п. условия полной неприводимости, тензорной неприводимости, топологич. неприводимости и операторной

неприводимости равносильны; из непрерывности У. п. в слабой операторной топологии следует его непрерывность; для У. п. определена операция тензорного произведения представлений, а также операция перехода к контрагредиентному представлению (в гильбертовом пространстве, комплексно сопряженном к данному), и для операций прямой суммы, тензорного произведения и перехода к контрагредиентному представлению справедлив ряд естественных алгебраических соотношений.

Наиболее разработанной и наиболее важной в приложениях частью общей теории У. п. является теория У. п. локально компактных групп. Не существует описания класса групп, У. п. (или неприводимые У. п.) к-рых разделяют точки группы (1984). Однако если группа G локально компактна, то для любого неединичного элемента $g \in G$ существует такое неприводимое У. п. π группы G, что $\pi(g)$ — неединичный оператор в пространстве представления (теорема Гельфанда — Райкова). Кроме того, между невырожденными симметричными представлениями групповой алгебры $L_1(G)$ (построенной по левой мере Хаара) и непрерывными У. п. группы G существует естественное взаимно однозначное соответствие $\pi' \mapsto \pi$, определяемое формулой

$$\pi'(f) = \int_G f(y)\,\pi(g)\,dm(g), \quad f \in L_1(G);$$

при этом представление π' алгебры $L_1(G)$ тогда и только тогда является топологически неприводимым (факторпредставлением, представлением данного типа, представлением, эквивалентным или квазиэквивалентным другому), когда соответствующее У. п. π группы G обладает тем же свойством.

Теория циклических У. п. локально компактной группы G, связанная с теорией положительных линейных функционалов на $L_1(G)$, может быть изложена с помощью соответствующих сферич. функций (см. *Представление топологической группы*). Сферич. функции, связанные с У. п. локально компактной группы G, являются непрерывными положительно определенными функциями на группе, и обратно, любая непрерывная положительно определенная функция на G, равная 1 в единице, является сферич. функцией, связанной с циклическим У. п. (и определяется циклич. вектором этого У. п.). Совокупность $B(G)$ линейных комбинаций непрерывных положительно определенных функций на G образует коммутативную банахову алгебру (относительно обычного умножения), называемую алгеброй Фурье—Стилтьеса группы G; замкнутый идеал $A(G)$ в $B(G)$, порожденный семейством функций вида $\varphi * \psi$, где $\varphi,\ \psi \in L_2(G)$, наз. алгеброй Фурье группы G. Банаховы алгебры $A(G)$ и $B(G)$ определяют группу G однозначно с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма.

На множестве P_1 непрерывных положительно определенных функций на G, равных 1 в единице группы, топология равномерной сходимости на компактных подмножествах в G совпадает со слабой топологией, определяемой двойственностью между $L_1(G)$ и $L_\infty(G)$ и вложением P_1 в $L_\infty(G)$. Любая функция φ из P_1 есть предел (в этих топологиях) сети выпуклых комбинаций положительно определенных функций, связанных с неприводимыми У. п. группы G; если же группа G сепарабельна, то существует такая положительная мера μ_φ на компактном множестве непрерывных положительно определенных функций на G, не превосходящих 1 по модулю, сосредоточенная на P_1, что

$$\varphi(g) = \int_{P_1} \chi(g)\,d\mu_\varphi(\chi) \quad \text{для всех } g \in G.$$

Конструкция У. п. по положительно определенной функции допускает обобщение на случай положительно

определенных мер на G. Если группа G сепарабельна, то любое представление, определенное положительно определенной мерой, циклично.

У. п. π локально компактной группы G в гильбертовом пространстве H допускает разложение в топологич. прямой интеграл неприводимых У. п. группы G, если либо G, либо H сепарабельны (для несепарабельных групп и пространств это, вообще говоря, неверно); кроме того, в этом случае У. п. π допускает по существу однозначное разложение в прямой интеграл факторпредставлений. В связи с этим существенную роль играет двойственное пространство $\hat{G}$ (факторпространство пространства неприводимых У. п. группы G, рассматриваемого в топологии, определяемой равномерной сходимостью матричных элементов на компактах, и в борелевской структуре, подчиненной этой топологии, по отношению эквивалентности, определяемому унитарной эквивалентностью У. п.) и квазидуальное пространство $\tilde{G}$ (факторпространство пространства факторпредставлений группы G, рассматриваемого в борелевской структуре, подчиненной топологии равномерной сходимости матричных элементов на компактах). Таким образом, $\hat{G}$ — топологическое и борелевское пространство, $\tilde{G}$ — борелевское пространство, к-рое для сепарабельных групп может быть снабжено топологией, продолжающей топологию на $\hat{G}$). Группа G наз. группой типа I, если все ее факторпредставления имеют тип I; для таких групп вопросы теории У. п. решаются проще, чем в общем случае. К группам типа I относятся алгебраич. группы Ли и алгебраич. группы Шевалле над p-адическими полями, нильпотентные группы Ли и др. Известна характеризация односвязных разрешимых групп Ли типа I. Группа G наз. CCR-группой, если для любого неприводимого У. п. π группы G образ $\tilde{\pi}(L_1(G))$ представления $\tilde{\pi}$ содержится в множестве $BC(H_\pi)$ компактных операторов в пространстве H_π представления π. Всякая CCR-группа является группой типа I. Группа типа I является CCR-группой тогда и только тогда, когда ее двойственное пространство есть T_1-пространство. Нильпотентные группы Ли и линейные полупростые группы Ли являются CCR-группами. Образ представления $(\pi\otimes\sigma)^\wedge$ содержится в $BC(H_{\pi\otimes\sigma})$ для всех неприводимых У. п. π, σ группы G тогда и только тогда, когда все ее неприводимые У. п. конечномерны.

Сепарабельная локально компактная группа имеет тип I тогда и только тогда, когда ее двойственное пространство удовлетворяет нулевой аксиоме отделимости. Др. топологич. свойства спектра (T_1-отделимость, хаусдорфовость, дискретность и др.) также связаны со свойствами группы. Особенно тесные связи между топологич. и алгебраич. свойствами группы и ее двойственного пространства существуют в классах групп, обладающих различными условиями компактности. К числу этих классов локально компактных групп относятся: 1) класс $[MAP]$ максимальных почти периодич. групп (допускающих непрерывное вложение в компактную группу); 2) класс $[SIN]$ групп, содержащих фундаментальную систему окрестностей единичного элемента, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов; 3) класс $[FC]^-$ групп с предкомпактными классами сопряженных элементов; 4) класс $[FIA]^-$ групп с предкомпактной группой внутренних автоморфизмов; 5) класс $[FIR]\subset[MAP]\cap[SIN]$ группы, все неприводимые У. п. к-рых конечномерны; 6) класс $[Z]\subset[FIR]$ групп, факторгруппа к-рых по центру компактна. Дуальные пространства групп класса $[FC]^-$ хаусдорфовы, а группы класса $[FIR]$ дискретны тогда и только тогда, когда их двойственное простран-

ство компактно (хотя и не обязательно отделимо). Теория У. п. групп класса $[MAP]$ связана с теорией почти периодич. функций на локально компактных группах.

Характером У. п. локально компактной группы G наз. такой точный нормальный полуконечный след t на множестве положительных элементов алгебры Неймана μ_π, порожденной семейством $\pi(G)$, что множество элементов x из групповой C^*-алгебры $C^*(G)$ группы G (обертывающей C^*-алгебры групповой алгебры $L_1(G)$) таких, что $t(\pi(x^*, x))$ конечен, переходит в множество, порождающее алгебру Неймана $\pi(G)''$. Если π — факторпредставление (соответственно неприводимое У. п.), то характер t определяет У. п. π однозначно с точностью до квазиэквивалентности (соответственно эквивалентности). Если π_1, π_2 — неприводимые У. п. группы G с характерами t_1, t_2 соответственно, то произведение этих следов определяет след на алгебре Неймана, порожденной У. п. $\pi_1 \otimes \pi_2$. Если этот след является характером представления $\pi_1 \otimes \pi_2$, то он (для сепарабельной группы или сепарабельных пространств представлений) определяет разложение У. п. $\pi_1 \otimes \pi_2$ в прямой интеграл факторпредставлений со следом по однозначно определенной мере (мере Планшереля для $\pi_1 \otimes \pi_2$) на квазиспектре $\hat{G}$. Нахождение мер Планшереля тензорных произведений У. п. является одной из общих задач теории У. п.; в ряде случаев (в частности, для групп $SL(2, \mathbb{C})$, $SL(2, \mathbb{R})$, нек-рых У. п. др. полупростых групп Ли и нек-рых разрешимых групп Ли) эта задача решена (с помощью изучения спектрального разложения оператора Лапласа, методом орбит или методом орисфер).

Иногда характером У. п. π в гильбертовом пространстве H наз. линейный функционал $\chi\pi$ на инвариантной относительно сдвигов подалгебре $D_\pi(G)$ в алгебре $M(G)$, определенный равенством $\chi\pi(a) = \operatorname{Tr} \tilde{\pi}(a)$, $a \in D_\pi(G)$, где $\tilde{\pi}$ — представление алгебры $D_\pi(G)$, определенное π (предполагается, что π однозначно определяется представлением $\tilde{\pi}$, операторы представления $\tilde{\pi}$ ядерны и отображение $\tilde{\pi}$ алгебры $D_\pi(G)$ в пространство ядерных операторов непрерывно). Характеры неприводимых У. п. полупростых и нильпотентных групп Ли определяются обобщенными функциями, к-рые в случае полупростых групп измеримы и локально интегрируемы. Характеры неприводимых У. п. разрешимых групп Ли типа I определены, вообще говоря, лишь на подалгебрах алгебры $C_0^\infty(G)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций на G. Вычисление характеров во многом основано на формуле для характера индуцированного представления.

Компактная подгруппа K группы G наз. массивной, если ограничение любого неприводимого У. п. π группы G на подгруппу K содержит любое неприводимое У. п. σ группы K с конечной кратностью. Пусть P_σ^π — проектор в пространстве H_π представления π на подпространство, в к-ром действует представление группы K, кратное σ; функции вида

$$\varphi_\sigma^\pi(g) = \operatorname{Tr}\left(P_\sigma^\pi \pi(g)\right), \quad g \in G,$$

наз. K-сферическими функциями представления π (ср. *Представляющая функция*). Группа G с массивной компактной подгруппой принадлежит типу I; каждое неприводимое У. п. группы G имеет характер и определяется однозначно с точностью до эквивалентности любой ненулевой сферич. функцией; дуальное пространство $\hat{G}$ к группе G можно представить в виде счетного объединения (пересекающихся) хаусдорфовых локально компактных пространств (образованных такими $\pi \in \hat{G}$, что $\varphi_\sigma^\pi = 0$ для данного $\sigma \in \hat{K}_\pi$, а размерность соответствующего проектора P_σ^π имеет

данное значение). К числу групп с массивной компактной подгруппой относятся линейные полупростые группы Ли и $[Z]$-группы.

Пусть π — У. п. группы G в гильбертовом пространстве H, M_π — алгебра Неймана, порожденная семейством $\pi(G)$. Представление π наз. допускающим след, если существует след на M_π^+, являющийся характером У. п. π. Следом на группе G наз. полуконечный полунепрерывный снизу след на $C^*(G)^+$; след на G наз. характером группы G, если соответствующее У. п. группы G есть факторпредставление. Существует каноническое взаимно однозначное соответствие между множеством характеров группы G, определенных с точностью до положительного множителя, и множеством классов квазиэквивалентности факторпредставлений группы G, допускающих след; при этом факторпредставлениям конечного типа соответствуют непрерывные центральные положительно определенные функции на G.

Регулярное представление локально компактной группы G в гильбертовом пространстве $L_2(G)$ есть точное непрерывное У. п.; C^*-алгебра, порожденная образом соответствующего представления алгебры $L_1(G)$, наз. приведенной C^*-алгеброй группы G и обозначается $C_r^*(G)$; пусть N — ядро канонического эпиморфизма $C^*(G)$ на $C_r^*(G)$, определяемого регулярным представлением. Группа G аменабельна, т. е. на $L_\infty(G)$ существует инвариантное среднее, тогда и только тогда, когда $N=\{0\}$ (ограниченное представление аменабельной группы в гильбертовом пространстве эквивалентно У. п.). Семейство таких У. п. $\pi\in\hat{G}$, что ядро соответствующего представления C^*-алгебры $C^*(G)$ содержит N, наз. основной серией; остальные У. п. $\pi\in\hat{G}$ образуют дополнительную серию.

Пусть G — унимодулярная сепарабельная локально компактная группа типа I, $W^*(G)$ — алгебра Неймана μ_λ, где λ — регулярное У. п. группы G. Существует единственная положительная мера $\hat{\mu}$ на спектре $\hat{G}$ группы G, удовлетворяющая условию

$$\int_G |f(g)|^2\, d\mu(g)=\int_{\hat{G}} \mathrm{Tr}\,(\pi(f)\pi(f)^*)\, d\hat{\mu}(\pi) \qquad (*)$$

для всех $f\in L_1(G)\cap L_2(G)$. Мера $\hat{\mu}$ наз. мерой Планшереля. Кроме того, существует изоморфизм пространства $L_2(G)$ на прямой интеграл операторов Гильберта — Шмидта в пространствах представлений $\pi\in\hat{G}$ по мере $\hat{\mu}$, переводящий левое регулярное У. п. λ в прямой интеграл У. п., кратных представлениям π, а след на $W^*(G)$, определяемый следом $\mathcal{E}_e$ на G ($\mathcal{E}_e(f)=f(e)$ для $f\in K(G)$), в прямой интеграл следов $T\otimes 1\to \mathrm{Tr}\,T$ на $(\mu_\pi\otimes\mathbb{C}_1)^+$. След $\mathcal{E}_e$ на $C^*(G)^+$ совпадает со следом $f\to\int_{\hat{G}}\mathrm{Tr}\,\pi(f)\,d\hat{\mu}(\pi)$, $f\in C^*(G)$. Формула $(*)$ наз. формулой Планшереля; она допускает обобщение на несепарабельные унимодулярные локально компактные группы типа I, а также на неунимодулярные сепарабельные локально компактные группы и сепарабельные группы не типа I. Одной из задач теории У. п. является явное построение меры Планшереля для данной локально компактной группы. Эта задача решена лишь частично (напр., для полупростых вещественных групп Ли, разрешимых групп Ли типа I, а также некоторых групп движений, некоторых групп Шевалле и нек-рых групп с условиями компактности). С разложением регулярного У. п. и формулой Планшереля связана теория квадратично интегрируемых представлений, *дискретных серий* и *интегрируемых представлений*.

Полное описание неприводимых У. п. локально компактных групп даже в случае групп Ли не известно.

Оно получено лишь для разрешимых групп Ли типа I, нек-рых редуктивных групп Ли, а также групп Шевалле (в малых размерностях), нек-рых нильпотентных локально компактных групп Ли и нек-рых полупрямых произведений. В этих описаниях решающую роль играет операция индуцирования (и ее обобщения), в частности метод орбит (и его обобщения). Задача изучения более общих проективных У. п. и У. п. с мультипликаторами связана с теорией обычных У. п. с помощью теории (непрерывных или борелевских) когомологий групп. Для групп не типа I полного описания факторпредставлений нет (с точностью до квазиэквивалентности), хотя для нек-рых из них получено описание факторпредставлений конечного типа.

Теория У. п. играет решающую роль в теории ряда (банаховых и топологических) групповых алгебр: в изучении свойств винеровости и полной симметричности, описании максимальных односторонних и двусторонних идеалов и т. д. Теория У. п. играет важную роль также и в вопросах теории представлений и гармонического анализа, требующих использования неунитарных представлений — таких, как построение ограниченных серий и дополнительных серий; определении явного вида операторов, сплетающих представления из аналитич. продолжения основной серии У. п., изучение зацеплений вполне неприводимых представлений, развитие гармонич. анализа в пространствах функций на группах и однородных пространствах, отличных от пространств L_2, изучение структуры и свойств групповых алгебр (алгебры мер, алгебры $L_1(G)$, топологич. алгебры $K(G)$).

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [3] его же, Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [4] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [5] Желобенко Д. П., Штерн А. И., Представления групп Ли, М., 1983; [6] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [7] Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И., Теория представлений и автоморфные функции, М., 1966; [8] Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965; [9] Барут А., Рончка Р., Теория представлений групп и ее приложения, пер. с англ., т. 1—2, М., 1980; [10] Климык А. У., Матричные элементы и коэффициенты Клебша — Гордана представлений групп, К., 1979; [11] Mackey G. W., Unitary group representations in physics, probability and number theory, Reading (Mass.), 1978; [12] Bernat P. [e. a.], Representations des groupes de Lie résolubles, P., 1972; [13] Brezin J., Harmonic analysis on compact solvmanifolds, B.— [a. o.], 1977; [14] Non-commutative harmonic analysis, B.— [a. o.], 1979.

А. И. Штерн.

УНИТАРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — линейное преобразование A унитарного пространства L, сохраняющее скалярное произведение векторов, т. е. такое, что для любых векторов x и y из L имеет место равенство

$$(Ax,\ Ay)=(x,\ y).$$

У. п. сохраняет, в частности, длину вектора. Обратно, если линейное преобразование унитарного пространства сохраняет длины всех векторов, то оно унитарно. Собственные значения У. п. равны по модулю 1; собственные подпространства, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Линейное преобразование A конечномерного унитарного пространства L является У. п. тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет любому из следующих условий:

1) в любом ортонормированном базисе преобразованию A соответствует *унитарная матрица*;

2) A переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный;

3) в L существует ортонормированный базис, состоящий из собственных для A векторов, причем соответствующая A в этом базисе диагональная матрица имеет диагональные элементы, равные по модулю 1.

У. п. данного унитарного пространства образуют относительно умножения преобразований группу (наз. *унитарной группой*). *А. Л. Онищик.*

УНИТАРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, в к-ром задано скалярное умножение векторов (причем произведение (a, b) векторов a и b предполагается, вообще говоря, комплексным числом) и выполняются следующие аксиомы:

1) $(a, b)=\overline{(b, a)}$;

2) $(\alpha a, b)=\alpha(a, b)$;

3) $(a+b, c)=(a, c)+(b, c)$;

4) если $a\neq 0$, то $(a, a)>0$,

т. е. скалярный квадрат ненулевого вектора есть положительное действительное число.

У. п. не предполагается конечномерным. В У. п. точно так же, как и в евклидовых пространствах, вводятся понятия ортогональности и ортонормированной системы векторов, а в конечномерном случае доказывается существование ортонормированного базиса. *О. А. Иванова.*

УНИТАРНЫЙ МОДУЛЬ — левый (или правый) модуль M над кольцом с единицей e такой, что умножение на e служит тождественным оператором, то есть отображение $m\to em$ (соответственно $m\to me$ для правого модуля), $m\in M$,— тождественный автоморфизм группы M. *О. А. Иванова.*

УНИТАРНЫЙ ОПЕРАТОР — линейный оператор U, отображающий линейное нормированное пространство X на линейное нормированное пространство Y и такой, что $\|Ux\|_Y=\|x\|_X$. Наиболее важными являются У. о., отображающие гильбертово пространство в себя. Такой оператор унитарен тогда и только тогда, когда $(x, y)=(Ux, Uy)$ для всех $x, y\in X$. Др. характеристич. на признаками унитарности оператора $U: H\to H$ являются: 1) $U^*U=UU^*=I$, т. е. $U^{-1}=U^*$; 2) спектр оператора U лежит на единичной окружности, и имеет место спектральное разложение $U=\int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\,dE_\varphi$. Совокупность У. о., действующих в H, образует группу.

Примером У. о. и его обратного в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ являются взаимно обратные *Фурье преобразования*.

Лит.: [1] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979; [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [3] Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965. *В. И. Соболев.*

УНИФОРМИЗАЦИЯ множества $A\subset\mathbb{C}^N$ (или $A\subset CP^N$) — тройка (f, D, G), где $f=(f_1, \ldots, f_N)$ — система мероморфных в области $D\subset\mathbb{C}^N$ (соответственно $D\subset\mathbb{C}P^N$) функций, определяющая голоморфное *накрытие* $D_0\to f(D_0)$, причем $f(D_0)$ плотно в A, а G — собственно разрывная группа биголоморфных автоморфизмов D, ограничение к-рой на D_0 служит группой накрывающих гомеоморфизмов этого накрытия, т. е. D_0/G биголоморфно эквивалентно $f(D_0)$.

Можно говорить также об У. многозначных аналитических функций $w=F(z): \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$, понимая под этим У. множества $A=\{(z, w)\}$; это соответствует параметризации F с помощью однозначных мероморфных функций.

Напр., комплексная кривая $z^2+w^2=1$ в $\mathbb{C}^2$ униформизируется тройкой $((z, w), \mathbb{C}, G)$, где $z=\cos t$, $w=\sin t$, G — группа сдвигов $t\to t+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, или тройкой $((z, w), D, G)$, где

$$z=(1-t^2)/(1+t^2),\quad w=2t/(1+t^2),$$

$$D=\mathbb{C}\setminus\{i, -i\},$$

G — тривиальная группа. Менее тривиальный пример дает кубическая кривая $w^2=a_0z^3+a_1z^2+a_2z+a_3$, к-рая не допускает рациональной параметризации, но может быть униформизирована с помощью *эллиптических функций*, а именно тройкой $((f_1, f_2), D, G)$, где f_1 и f_2 — рациональные функции от $\wp$-функции Вейерштрасса $\wp(t)$ и ее производной с соответствующими периодами ω_1, ω_2, а G — группа, порожденная сдвигами $t \to t+\omega_1$, $t \to t+\omega_2$.

Проблема У. произвольной алгебраич. кривой, определяемой общим алгебраич. уравнением

$$P(z, w)=\sum_{j,\ k} a_{jk}z^jw^k=0, \qquad (*)$$

где P — неприводимый алгебраич. многочлен над $\mathbb{C}$, возникла еще в 1-й пол. 19 в., в частности в связи с интегрированием алгебраич. функций. А. Пуанкаре (H. Poincaré) поставил вопрос об У. множества решений произвольных аналитич. уравнений вида (*), когда P — сходящийся степенной ряд от двух переменных, рассматриваемый с его всевозможными аналитич. продолжениями. У. алгебраич. и произвольных аналитич. многообразий составляет содержание двадцать второй проблемы Гильберта. Полного решения проблемы У. пока (к 1984) не получено, за исключением одномерного случая.

Введя во множестве пар (z, w) в $\mathbb{C}^2$, удовлетворяющих (*), комплексную структуру с помощью элементов соответствующей алгебраич. функции $w(z)$ (или $z(w)$), получают компактную риманову поверхность, при этом координаты точек кривой (*) будут мероморфными функциями на этой поверхности. Более того, все компактные римановы поверхности с точностью до конформной эквивалентности получаются таким образом. Поэтому проблема У. алгебраич. кривых сводится к проблеме У. римановых поверхностей.

У. произвольной р и м а н о в о й п о в е р х н о с т и S наз. тройка (D, π, G), где D — область на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$, $\pi : D \to S$ — регулярное голоморфное накрытие с накрывающей группой G конформных автоморфизмов D. Общая проблема заключается в нахождении и описании всех возможных таких троек для данной римановой поверхности.

Возможность У. любой римановой поверхности S, дающая принципиальное решение проблемы, была установлена в классич. работах П. Кёбе (P. Koebe), А. Пуанкаре и Ф. Клейна (F. Klein); было получено окончательное решение, дающее описание всех возможных У. поверхности S (см. [4] — [6]). Справедлива т е о р е м а у н и ф о р м и з а ц и и К л е й н а — П у а н к а р е (доказанная в общем случае А. Пуанкаре, см. [2]); каждая риманова поверхность S конформно эквивалентна фактору D/G, где D — одна из трех канонических областей: риманова сфера $\overline{\mathbb{C}}$, комплексная плоскость $\mathbb{C}$, единичный круг Δ, а G — собственно разрывная группа мёбиусовых (дробно-линейных) автоморфизмов D, определяемая с точностью до сопряжения в группе всех мёбиусовых автоморфизмов D.

Случаи $D=\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ и Δ взаимно исключают друг друга. Поверхности S с такими универсальными голоморфными накрытиями наз. соответственно э л л и п т и ч е с к и м и, п а р а б о л и ч е с к и м и и г и п е р б о л и ч е с к и м и. При этом $D=\overline{\mathbb{C}}$ только в случае, когда сама S конформно эквивалентна $\overline{\mathbb{C}}$ (и, значит; G тривиальна); $D=\mathbb{C}$, когда S конформно эквивалентна либо $\mathbb{C}$, либо $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, либо тору, и соответственно этому G либо тривиальна, либо есть группа, порожденная сдвигом $z \to z+\omega$ $(\omega \in \mathbb{C}\setminus\{0\})$, либо есть группа, порожденная двумя сдвигами $z \to z+\omega_1$, $z \to z+\omega_2$, где ω_1, $\omega_2 \neq 0$ — комплексные числа с $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1)\neq 0$. В остальных случаях S конформно эквивалентна Δ/G, где G — фуксова группа без кручения. Канони-

ческая проекция $\pi : D \to S$ является неразветвленным накрытием и униформизирует все функции f на S, так как функции $f \circ \pi$ однозначны в D. Теорема Клейна — Пуанкаре обобщается и на разветвленные накрытия с заданными порядками ветвления.

Несколько др. подход к проблеме У. (см. [3]) опирается на принцип: если риманова поверхность $\tilde{S}$ гомеоморфна области $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ (не обязательно односвязной), то $\tilde{S}$ и конформно эквивалентна D. Тем самым проблема У. сводится к топологич. проблеме нахождения всех (вообще говоря, разветвленных) плоских накрытий $\tilde{S} \to S$ данной римановой поверхности S. Решение этих проблем дается следующими теоремами Маскита (см. [4], [5]).

I. Пусть S — ориентируемая поверхность, $v_1, \ldots, v_n, \ldots$ — множество простых попарно не пересекающихся петель на S. Если $\tilde{S} \to S$ — регулярное накрытие с определяющей подгруппой $N = \langle v_1^{\alpha_1}, \ldots, v_n^{\alpha_n}, \ldots \rangle$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ — натуральные числа, то $\tilde{S}$ — плоская поверхность, т. е. гомеоморфна области в $\bar{\mathbb{C}}$.

II. Пусть $\tilde{S}$ — плоская поверхность и $\tilde{S} \to S$ — регулярное накрытие ориентируемой поверхности S с определяющей подгруппой N. Если S — поверхность конечного типа, т. е. $\pi_1(S)$ конечно порождена, то существуют конечное множество простых попарно не пересекающихся петель $v_1, \ldots, v_n$ и такие натуральные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что $\langle v_1^{\alpha_1}, \ldots, v_n^{\alpha_n} \rangle = N$.

III. Если $\tilde{S}$ — плоская риманова поверхность и $\bar{G}$ — собственно разрывная группа конформных автоморфизмов $\tilde{S}$, то существует конформный гомеоморфизм $h : \tilde{S} \to D \subset \bar{C}$ такой, что hGh^{-1} есть *клейнова группа* с инвариантной компонентой D.

Таким образом, каждая риманова поверхность униформизируется клейновой группой. Напр., если S — замкнутая риманова поверхность рода $g \geqslant 1$, то ее фундаментальная группа имеет копредставление

$$\pi_1(S) = \left\{ a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g : \prod_{j=1}^{g} [a_j, b_j] = 1 \right\}$$

и в качестве определяющей плоское накрытие $\tilde{S}$ нормальной подгруппы N можно взять наименьшую нормальную подгруппу, порожденную $a_1, \ldots, a_g$ (или $b_1, \ldots, b_g$); тогда S униформизируется группой Шотки G рода g — свободной чисто локсодромической клейновой группой с g образующими (классич. теорема Кёбе о разрезах).

У. римановых поверхностей конечного типа возможные клейновы группы могут быть классифицированы. Для этого используется понятие факторподгруппы. Если G — клейнова группа с инвариантной компонентой $D(G)$, то ее подгруппа H наз. факторподгруппой G, если H — максимальная подгруппа, для к-рой: a) ее инвариантная компонента $D(H) \supset D(G)$ односвязна; b) H не содержит случайных параболических элементов g (т. е. таких параболич. элементов, что при конформном изоморфизме $h : D(H) \to \Delta$ образ $h \circ g \circ h^{-1}$ будет гиперболическим); c) каждый параболический элемент G с неподвижной точкой на предельном множестве H принадлежит H. Напр., в теореме Клейна — Пуанкаре каждая факторподгруппа G совпадает с самой G, а в теореме Кёбе о разрезах все факторподгруппы G тривиальны. У. (D, π, G) римановой поверхности S, где D — инвариантная компонента G, наз. стандартной, если G не имеет кручения и не содержит случайных параболич. элементов. Для замкнутых поверхностей все такие У. описываются следующей теоремой (см. [6]).

Пусть S — замкнутая риманова поверхность рода $g > 0$ и $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — множество простых попарно не

пересекающихся петель на S. Тогда существует единственная с точностью до конформной эквивалентности стандартная У. (D, π, G) поверхности S такая, что каждая факторподгруппа G является либо фуксовой, либо элементарной и накрытие $\pi : D \to S$ построено по наименьшей нормальной подгруппе $\pi_1(S)$, натянутой на петли $v_1, \ldots, v_n$.

Теория *квазиконформных отображений* и *Тайхмюллера пространств* позволила доказать возможность одновременной У. нескольких римановых поверхностей одной клейновой группой, а также всех римановых поверхностей данного типа (см. [7]).

Лит.: [1] Klein Chr. F., «Math. Ann.», 1883, Bd 21, S. 141—218; [2] Poincaré H., «Acta math.», 1907, v. 31, p. 1—63; [3] Koebe P., «Göttinger Nachr.», 1907, S. 177—210; [4] Maskit B., «Ann. Math.», 1965, v. 81, № 2, p. 341—55; [5] его же, «Amer. J. Math.», 1968, v. 90, № 3, p. 718—22; [6] его же, в кн.: Contributions to analysis, N. Y.— L., 1974, p. 293—312; [7] Берс Л., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 4, с. 153—98; [8] Крушкаль С. Л., Апанасов Б. Н., Гусевский Н. А., Клейновы группы и униформизация в примерах и задачах, Новосиб., 1981; [9] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955; [10] Форд Л. Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.— Л., 1936.

Н. А. Гусевский.

УНИФОРМИЗУЮЩИЙ ЭЛЕМЕНТ — элемент π дискретно нормированного кольца A с простым идеалом $\mathfrak{p}$ такой, что $\mathfrak{p}=A\pi$. Если π_1, π_2 — два У. э. в A, то элемент $\pi_1\pi_2^{-1}$ обратим в A. Пусть R — нек-рая система представителей в A элементов поля вычетов $A/\mathfrak{p}$. Тогда любой элемент $a \in A$ однозначно записывается в виде степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} r_i \pi^i$, где $r_i \in R$, π — У. э. Если кольцо A полно относительно дискретного нормирования, то любой степенной ряд указанного вида представляет нек-рый элемент $a \in A$.

Если A — локальное кольцо функций простой точки x алгебраич. кривой X, то π является У. э. тогда и только тогда, когда π имеет нуль первого порядка в точке x.

Л. В. Кузьмин.

УНИЧТОЖЕНИЯ ОПЕРАТОРЫ — семейство замкнутых линейных операторов $\{a(f), f \in H\}$, где H — нек-рое гильбертово пространство, действующих в *Фока пространстве*, построенном над пространством H (т. е. в симметризованной $\Gamma^s(H)$ или антисимметризованной $\Gamma^a(H)$ тензорной экспоненте пространства H) так, что на векторах $(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)\alpha \in \Gamma^\alpha(H)$, $\alpha = s, a$, являющихся симметризованными ($\alpha = s$) или антисимметризованными ($\alpha = a$) тензорными произведениями последовательностей элементов $f_1, \ldots, f_n \in H$, $n = 1, 2, \ldots$, H, они задаются формулами:

$$a(f)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)_s = \sum_{i=1}^{n} (f, f_i)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_{i-1} \otimes f_{i+1} \otimes \ldots \otimes f_n)_s \quad (1)$$

в симметричном случае, и

$$a(f)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)_a = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}(f, f_i)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_{i-1} \otimes f_{i+1} \otimes \ldots \otimes f_n)_a \quad (2)$$

в антисимметричном случае; вакуумный вектор $\Omega \in \Gamma^\alpha(H)$, $\alpha = s, a$ (т. е. единичный вектор в подпространстве констант из $\Gamma^\alpha(H)$) переводится операторами $a(f)$ в нуль. Операторы $\{a^*(f), f \in H\}$, сопряженные к операторам $a(f)$, наз. операторами рождения, действуют на векторы $(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)_\alpha$, $\alpha = s, a$, $h = 1, 2, \ldots$ по формулам

$$a^*(f)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)_\alpha = (f \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)_\alpha \quad (3)$$

и

$$a^*(f)\,\Omega = f.$$

При этом для каждого $n > 0$ подпространство $\Gamma_n^\alpha(H) \overset{\otimes n}{\alpha}$,

$\alpha=s$, a (симметризованная или антисимметризованная n-я тензорная степень H) переводится оператором $a(f)$ в подпространство $\Gamma^{\alpha}_{n-1}(H)$, а оператором $a^*(f)$ — в подпространство $\Gamma^{\alpha}_{n+1}(H)$.

При физич. интерпретации пространства Фока $\Gamma^{\alpha}(H)$, $\alpha=s$, a как пространства состояний системы, состоящей из произвольного (конечного) числа квантовых частиц с пространством H в качестве пространства состояний отдельной частицы, подпространство $\Gamma^{\alpha}_{n}(H)$ соответствует n-частичным состояниям системы, т. е. состояниям, в к-рых имеется ровно n частиц, и, таким образом, n-частичные состояния операторы $a(f)$ переводят в $(n-1)$-частичные («уничтожают» частицу), а операторы $a^*(f)$ — в $(n+1)$-частичные («рождают» частицу).

Операторы $a(f)$ и $a^*(f)$ образуют неприводимое семейство операторов и удовлетворяют следующей системе перестановочных соотношений: в симметричном случае

$$a(f_1)\,a(f_2)-a(f_2)\,a(f_1)=a^*(f_1)\,a^*(f_2)-a^*(f_2)\,a^*(f_1)=0,$$
$$a^*(f_2)\,a(f_1)-a(f_1)\,a^*(f_2)=-(f_1,\ f_2)\,E \qquad (4)$$

(соотношения коммутации), в антисимметричном случае

$$a(f_1)\,a(f_2)+a(f_2)\,a(f_1)=a^*(f_1)\,a^*(f_2)+a^*(f_2)\,a^*(f_1)=0,$$
$$a(f_1)\,a^*(f_2)+a^*(f_2)\,a(f_1)=(f_1,\ f_2)\,E \qquad (5)$$

(соотношения антикоммутации), здесь $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в H, а E — единичный оператор в $\Gamma^{s}(H)$ или $\Gamma^{a}(H)$. Кроме описанных здесь семейств операторов $a(f)$ и $a^*(f)$, $f\in H$ в случае бесконечномерного пространства H существуют и другие, не эквивалентные им, неприводимые представления коммутационных и антикоммутационных соотношений (4) или (5). Иногда их также называют операторами рождения и уничтожения. В случае же конечномерного H все неприводимые представления как коммутационных, так и антикоммутационных соотношений унитарно эквивалентны.

Операторы $\{a(f),\ a^*(f),\ f\in H\}$ являются во многих отношениях удобными «образующими» в совокупности всех линейных операторов, действующих в пространстве $\Gamma^{\alpha}(H)$, $\alpha=s$, a, и представление таких операторов в виде сумм произведений операторов рождения и уничтожения (нормальная форма оператора) бывает часто полезным при их исследовании. Связанный с этим формализм носит название метода вторичного квантования, см. (1).

В частном, но важном для применений случае, когда $H=L_2(\mathbb{R}^{\nu},\ d^{\nu}x)$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots$, (или в более общем случае $H=L_2(M,\ \sigma)$, где $(M,\ \sigma)$ — пространство с мерой) семейство операторов $a(f)$, $a^*(f)$, $f\in L_2(\mathbb{R}^{\nu},\ d^{\nu}x)$, порождает две операторнозначные обобщенные функции $a(x)$ и $a^*(x)$ такие, что

$$a(f)=\int_{\mathbb{R}^{\nu}} a(x)\,f(x)\,d^{\nu}x,\quad a^*(f)=\int_{\mathbb{R}^{\nu}} a^*(x)\,\overline{f}(x)\,d^{\nu}x.$$

Введение функций $a(x)$ и $a^*(x)$ для формализма вторичного квантования оказывается удобным (напр., позволяет непосредственно рассматривать операторы вида

$$\int_{(\mathbb{R}^{\nu})^{m+n}} K(x_1,\ \ldots,\ x_n;\ y_1,\ \ldots,\ y_m)\,a^*(x_1)\ldots a^*(x_n)\times$$
$$\times a(y_1)\ldots a(y_n)\,d^{\nu}x_1\ldots d^{\nu}x_n\,d^{\nu}y_1\ldots d^{\nu}y_m,\ n,\ m=1,\ 2,\ \ldots,$$

где $K(x_1,\ldots,\ x_n;\ y_1,\ldots,\ y_m)$ — нек-рая «достаточно хорошая» функция), не прибегая к их разложению в ряды по мономам

$$a^*(f_1)\ldots a^*(f_n)\,a(g_1)\ldots a(g_m),$$

где

$$f_1,\ \ldots,\ f_n,\ g_1,\ \ldots,\ g_m\in L_2(\mathbb{R}^{\nu},\ d^{\nu}x).$$

Лит.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965; [2] Добрушин Р. Л., Минлос Р. А., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 2, с. 67—122; [3] Gårding L., Wightman A., «Proc. Nat. Acad. sci. USA», 1954, v. 40, № 7, p. 617—26.
Р. А. Минлос.

УОЛЛА ГРУППА — абелева группа, к-рая сопоставляется кольцу с инволюцией, являющейся антиизоморфизмом. В частности, она определена для группового кольца $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$, где $\pi_1(X)$ — фундаментальная группа пространства. Если X — *Пуанкаре комплекс*, то в этой группе определяются *препятствия* к существованию простой гомотопич. эквивалентности в классе *бордизмов* из $\Omega_*(X, \nu)$. Это препятствие наз. *Уолла инвариантом*, см. [1].

Пусть R — кольцо с инволюцией: $R \to R$, являющейся антиизоморфизмом, т. е. $\overline{ab}=\bar{b}\bar{a}$. Если P — левый R-модуль, то $\mathrm{Hom}_R(P, R)$ является левым R-модулем относительно действия $(af)(x)=f(x)\bar{a}$, $f\in\mathrm{Hom}_R(P, R)$, $a\in R$, $x\in P$. Этот модуль обозначается через P^*. Для конечнопорожденного проективного R-модуля P имеется изоморфизм $P \to P^{**} : x \to (f \to \overline{f(x)})$, и можно отождествить P и P^{**} по этому изоморфизму.

Квадратичной $(-1)^k$-формой над кольцом с инволюцией R наз. пара (P, φ), где P — конечнопорожденный проективный R-модуль, а $\varphi : P \to P^*$ — такой гомоморфизм, что $\varphi=(-1)^k\varphi^*$. Морфизмом форм $f : (P, \varphi) \to (Q, \psi)$ наз. гомоморфизм $f : P \to Q$, для к-рого $f^*\psi f=\varphi$. Если φ — изоморфизм, то форма (P, φ) наз. невырожденной. Лагранжевой плоскостью невырожденной формы наз. прямое слагаемое $L\subset P$, для к-рого $L=\mathrm{Ann}\,\varphi(L)$. Если $L\subset P$ — прямое слагаемое, и $L\subset\mathrm{Ann}\,\varphi(L)$, то L наз. сублагранжевой плоскостью. Лагранжевы плоскости L, G формы (P, φ) наз. дополнительными, если $L+G=P$ и $L\cap G=\{0\}$.

Пусть L — проективный R-модуль. Невырожденная $(-1)^k$-форма $H_{(-1)^k}(L)=\left(L\oplus L^*, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}\right)$ наз. гамильтоновой, а $L\subset L\oplus L^*$ и $L^*\subset L\oplus L^*$ — ее дополнительными лагранжевыми плоскостями. Если L — лагранжева плоскость формы (P, φ), то она изоморфна гамильтоновой форме $H_{(-1)^k}(L)$. Выбор дополнительной к L лагранжевой плоскости равносилен выбору изоморфизма $(P, \varphi) \to H_{(-1)^k}(L)$, при к-ром эта дополнительная плоскость отождествляется с L^*.

Пусть $U_{2k}(\mathbb{R})$ — абелева группа, порожденная классами эквивалентности (при изоморфизме) невырожденных квадратичных $(-1)^k$-форм (P, φ) с соотношениями: 1) $[(P, \varphi)]+[(Q, \varphi)]=[(P\oplus Q, \varphi\oplus\psi)]$; 2) $[(P, \varphi)]=0$, если (P, φ) имеет лагранжеву плоскость. Тройка $(H; F, L)$, состоящая из невырожденной $(-1)^k$-формы H и пары лагранжевых плоскостей F, L, наз. $(-1)^k$-формацией. Формация наз. тривиальной, если F и L дополнительны, и элементарной, если существует лагранжева плоскость формы H, дополнительная и к F, и к L. Тривиальная формация $(H_{(-1)^k}(G); G, G)$ наз. гамильтоновой. Изоморфизмом формаций $f : (H; F, L) \to (H_1; F_1, L_1)$ наз. изоморфизм форм $f : H \to H_1$, для к-рого $f(F)=F_1$, $f(L)=L_1$. Всякая тривиальная формация изоморфна гамильтоновой.

Пусть $U_{2k+1}(R)$ — абелева группа, порожденная классами эквивалентности (при изоморфизме) $(-1)^k$-формаций, со следующими соотношениями:

1) $[(H; F, L)]\oplus[(H_1; F_1, L_1)]=[(H\oplus H_1; F\oplus F_1, L\oplus L_1)]$;

2) $[(H; F, L)]=0$, если формация элементарна или тривиальна. Группы $U_n(R)$ и наз. группами Уолла кольца R.

Лит.: [1] Wall C. T. C., Surgery on compact manifolds, L.— N. Y., 1970; [2] Ranicki A., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1980, v. 40, pt 1, p. 87—192.
А. В. Шокуров.

УОЛЛА ИНВАРИАНТ — элемент из *Уолла группы*, являющийся препятствием к перестройке бордизма до простой гомотопич. эквивалентности.

Пусть X — конечный *Пуанкаре комплекс*, ν — расслоение над X и $x=[(M, \varphi, F)]\in\Omega(X, \nu)$ — нек-рый класс, где m — формальная размерность X и $\varphi: M\to X$ имеет степень 1. Отображение всегда можно перестроить до $\left[\frac{m}{2}\right]$-связного отображения. Пусть $\Lambda=\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$ — групповое кольцо, и $^-$ — инволюция в нем: $\Lambda\to\Lambda$, задаваемая по формуле $\Sigma_g n(g)g=\Sigma w(g)n(g)g^{-1}$, где $w:\pi_1(X)\to\{1,-1\}$ определяется первым *Штифеля — Уитни классом* расслоения ν. Пусть

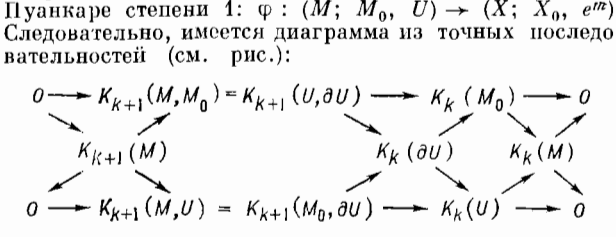
$$K^*(M)=\operatorname{coker}(\varphi^*: H^*(X)\longrightarrow H^*(M)),$$

$$K^*(M)=\ker(\varphi^*: H^*(M)\longrightarrow H_*(X))$$

(коэффициенты в кольце Λ). Инволюция является антиизоморфизмом и определены группы Уолла $U_n(\Lambda)=L_n(\pi_1(X), w)$.

Пусть теперь $m=2k\geqslant 4$. Тогда в стабильно свободном Λ-модуле $G=K_k(M)=\pi_{k+1}(\varphi)$ выделен базис, и *Пуанкаре двойственность* индуцирует простой изоморфизм $\lambda: G\to G^*=K^k(M)$, причем (G, λ) является $(-1)^k$-формой. Поэтому получается класс $\Theta_{2k}(x)=[(G, \lambda)]\in L_{2k}(\pi_1(X), w)$.

Пусть теперь $m=2k+1\geqslant 5$. Можно выбрать образующие в $\pi_{k+1}(\varphi)=K_k(M;\Lambda)$ так, что они представляются вложениями $f_i: S^k\times D^{k+1}\to M$, образы к-рых не пересекаются, и эти образы соединены путями с отмеченной точкой. Пусть $U=\bigcup_i \operatorname{Im} f_i$, $M_0=M\setminus\operatorname{Int} U$. Поскольку $\varphi\circ f_i\sim 0$, то можно заменить φ гомотопным отображением и считать, что $\varphi(u)=*$. Так как X — комплекс Пуанкаре, то можно заменить X комплексом с единственной m-клеткой, т. е. имеется пара Пуанкаре (X_0, S^{m+1}) и $X=X_0\cup e^m$. Выбором подходящей клеточной аппроксимации получается отображение для триад Пуанкаре степени 1: $\varphi: (M; M_0, U)\to(X; X_0, e^m)$. Следовательно, имеется диаграмма из точных последовательностей (см. рис.):



При этом имеется невырожденное спаривание $\hat{\lambda}: K_k(\partial U)\times K_k(\partial U)\to\Lambda$, причем $H=(K_k(\partial U), \lambda)$ — квадратичная $(-1)^k$-форма, а $K_{k+1}(U, \partial U)$ и $K_{k+1}(M_0, \partial U)$ определяют ее лагранжевы плоскости L и P. Тогда $\Theta_{2k+1}(x)=[(H; L, P)]\in U_{2k+1}(\Lambda)=L_{2k+1}\times(\pi_1(x), w)$.

Определенные выше элементы $\Theta_m(x)\in L_m(\pi_1(x), w)$ и наз. инвариантами Уолла. Важным их свойством является независимость $\Theta(x)$ от произвола конструкции и то, что равенство $\Theta(x)=0$ равносильно представимости класса простой гомотопич. эквивалентностью, см. [1].

Лит.: [1] Wall C., Surgery on compact manifolds, L.—N. Y., 1970; [2] Ranicki A., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1980, v. 40, pt 1, p. 87—192; [3] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1970, т. 34, № 2, с. 253—88; № 3, с. 475—500.

А. В. Шокуров.

УОЛМЕНА БИКОМПАКТНОЕ РАСШИРЕНИЕ (правильнее — Уолмена — Шанина *бикомпактное расширение*) ωX топологического пространства X, удовлетворяющего аксиоме T_1 (см. *Отделимости аксиомы*), определяется как множество, точками к-рого являются максимальные центрированные системы $\xi=\{F_\alpha\}$ замкнутых в X множеств. Топология в ωX задаётся замкнутой базой $\{\Phi_F\}$, где F пробегает любые замкнутые в X

множества, а Φ_F состоит из тех и только тех $\xi=\{F_\alpha\}$, что $F=F_\alpha$ при нек-ром α.

У. б. р. было открыто Г. Уолменом [1].

У. б. р. всегда является бикомпактным T_1-пространством: для нормального пространства оно совпадает со *Стоуна — Чеха бикомпактным расширением*.

Если при определении расширения ωX брать не любые замкнутые множества, а только принадлежащие нек-рой фиксированной замкнутой базе, получаем так наз. бикомпактные расширения уолменовского типа. Не всякое хаусдорфово бикомпактное расширение тихоновского пространства является расширением уолменовского типа.

Лит.: [1] Wallman H., «Ann. Math.», 1941, v. 42, p. 687—97.

П. С. Александров.

УОЛША СИСТЕМА функций $\{W_n(x)\}$ на отрезке $[0, 1]$ — функции $W_0(x)\equiv 1$ и $W_n(x)=r_{\nu_1}(x)\cdot r_{\nu_2}(x)\cdot\ldots\cdot r_{\nu_m}(x)$ при $n\geqslant 1$, где $r_k(x)=\operatorname{sign}\sin 2^{k+1}\pi x$, $k=0, 1, 2, \ldots$,— функции Радемахера, $n=2^{\nu_1}+2^{\nu_2}+\ldots+2^{\nu_m}$, $\nu_1>\nu_2>\ldots>\nu_m>0$ — двоичное представление числа $n\geqslant 1$. Эта система была определена и исследована Дж. Уолшем [1], хотя еще в 1900 году Баррет использовал функции этой системы в вопросах связи при размещении проводников в открытых проводных линиях. В теории связи более предпочтительным является другое определение У. с. Именно, если

$$W_0^*(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x\in[0,1),\\ 0 & \text{при } x\in(-\infty,0)\cup[1,\infty),\end{cases}$$

то функции $W_n^*(x)$ определяются следующими рекуррентными формулами:

$$W^*_{2j+p}(x)=W_j^*(2x)+(-1)^{j+p}W_j^*(2x-1),$$
$$p=0, 1;\quad j=0, 1, 2, \ldots$$

Системы $\{W_n(x)\}$ и $\{W_n^*(x)\}$ отличаются только нумерацией в пачках $2^m\leqslant n\leqslant 2^{m+1}-1$, $m=1, 2, \ldots$ Например: $W^*_{2m}(x)=W_{3\cdot 2m-1}(x)$, $W^*_{2^m-1_{-1}}(x)=W_{2^m}(x)$, $W_{2^m+1_{-2}}(x)=W_{2^m+1}(x)$ и т. д. Номер k функции $W_k^*(x)$ соответствует числу перемен знака этой функции в промежутке $(0,1)$, т. е. является аналогом удвоенной частоты для синусоидальных функций. У. с. ортонормирована на отрезке $[0,1]$ и ее можно рассматривать как естественное пополнение системы Радемахера.

У. с. образуют коммутативную мультипликативную группу, единичным элементом в к-рой является функция $W_0(x)$, а обратным к $W_k(x)$ является снова $W_k(x)$.

Лит.: [1] Walsh J. Z., «Amer. J. Math.», 1923, v. 45, p. 5—24; [2] Fowle F. F., «Trans. AJEE», 1905, v. 23, p. 659—87; [3] Fine N. J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1949, v. 65, p. 372—414; [4] Качмаж С., Штейнауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1958; [5] Хармут Х. Ф., Передача информации ортогональными функциями, пер. с англ., М., 1975.

А. В. Ефимов.

УПАКОВКА конечного (или бесконечного) семейства множеств M_1, M_2, ... в множестве A — выполнение условий

$$M_i\subset A,\quad M_i\cap M_j=\varnothing,\quad i\neq j.$$

В *геометрии чисел* обычно $A=\mathbb{R}^n$, $M_i=M+a_i$, где M — заданное множество, a_i пробегает нек-рое множество $\mathfrak{Z}$ векторов из $\mathbb{R}^n$ ($i=1, 2, \ldots$); в этом случае говорят об упаковке $(M, \mathfrak{Z})$ множества M по системе векторов $\mathfrak{Z}$. Если $\mathfrak{Z}=\Lambda$ — точечная решетка в $\mathbb{R}^n$, то говорят о решетчатой упаковке (M, Λ).

Рассматриваются также У. множеств M_1, M_2, ... не только в $\mathbb{R}^n$, но и в др. многообразиях — на n-мерной сфере, в заданной области и т. д. (см. [1], [2]). Иногда У. определяется как система множеств (напр., замкнутых областей) M_1, M_2, ... , не пересекающихся по внутренним точкам (см. [1]).

Лит.: [1] Барановский Е. П., в кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969, с. 189—225; [2] Тот Л. Ф., Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, пер. с нем., М., 1958; [3] Роджерс К., Укладки и покрытия, пер. с англ., М., 1968. *А. В. Малышев.*

УПЛОТНЕНИЕ — биективное непрерывное отображение. *М. И. Войцеховский.*

УПЛОТНЯЮЩИЙ ОПЕРАТОР — оператор U, вообще, нелинейный, определенный на совокупности $\mathfrak{M}$ всех подмножеств множества M нормированного векторного пространства X, со значениями в нормированном векторном пространстве Y и такой, что $\psi_Y[U(A)]$ — мера некомпактности множества $U(A)\subset Y$ — меньше меры некомпактности $\psi_X(A)$ любого некомпактного множества $A\in\mathfrak{M}$. Меры некомпактности могут быть при этом как совпадающие, так и различные. Напр., в качестве и ψ_X, и ψ_Y можно взять меру некомпактности Куратовского: $\alpha(A)=\inf\{d>0 | A$ можно разбить на конечные подмножества диаметра, меньшего $d\}$.

На непрерывные У. о. переносятся многие конструкции и факты теории вполне непрерывных операторов, напр. вращение уплотняющих векторных полей, принципы неподвижной точки У. о. и т. д.

Лит.: [1] Садовский Б. Н., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 1, с. 81—146; [2] Kuratowski C., «Fund. math.», 1930, t. 15, p. 301—09. *В. И. Соболев.*

УПЛОЩЕНИЯ ТОЧКА — точка регулярной поверхности, в к-рой касательный параболоид вырождается в плоскость. В У. т. индикатриса Дюпена не определена, гауссова кривизна равна нулю, тождественно равны нулю вторая квадратичная форма и все нормальные кривизны.

У. т. пространственной кривой наз. точка, в к-рой кручение кривой обращается в нуль. *Д. Д. Соколов.*

УПОРЯДОЧЕННАЯ ГРУППА — группа G, на к-рой задано отношение порядка $\leqslant$ такое, что для любых a, b, x, y из G неравенство $a\leqslant b$ влечет за собой $xay\leqslant xby$. Порядок, как правило, подразумевается линейным и в этом случае понятие У. г. совпадает с понятием *линейно упорядоченной группы*. Иногда порядком называют произвольный частичный порядок и, соответственно, упорядоченными группами — произвольные *частично упорядоченные группы*.

Порядковым гомоморфизмом (частично) У. г. G в У. г. H наз. гомоморфизм φ группы G в группу H такой, что $x\leqslant y$, $x, y\in G$, $\Rightarrow x\varphi\leqslant y\varphi$ в H. Ядрами порядковых гомоморфизмов являются нормальные выпуклые подгруппы и только они. Множество правых смежных классов линейно У. г. G по выпуклой подгруппе H линейно упорядочено, если считать $Hx\leqslant Hy$ тогда и только тогда, когда $x\leqslant y$. Если H — выпуклая нормальная подгруппа линейно У. г. G, то это отношение порядка превращает факторгруппу G/H в линейно У. г.

Система $\Sigma(G)$ выпуклых подгрупп линейно У. г. обладает свойствами: а) $\Sigma(G)$ линейно упорядочена по включению и замкнута относительно пересечений и объединений; б) $\Sigma(G)$ инфраинвариантна, т. е. для любой $H\in\Sigma(G)$ и любого $x\in G$ верно $x^{-1}Hx\in\Sigma(G)$; в) если $A<B$ — скачок в $\Sigma(G)$, т. е. $A, B\in\Sigma(G)$, $A\subset B$, и между ними нет выпуклых подгрупп, то A нормальна в B, факторгруппа B/A — *архимедова группа* и

$$[[N_G(B), N_G(B)], B]\subseteq A,$$

где $N_G(B)$ — нормализатор B в G; г) все подгруппы из $\Sigma(G)$ строго изолированны, т. е. для любого конечного набора $x, g_1, \ldots, g_n$ из G и любой подгруппы $H\in\Sigma(G)$ соотношение

$$x\cdot g_1^{-1}xg_1\ldots g_n^{-1}xg_n\in H$$

влечет за собой $x\in H$.

Расширение G У. г. H с помощью У. г. является У. г., если порядок H устойчив относительно внутренних

автоморфизмов G. Расширение G У. г. H с помощью конечной группы является У. г., если G без кручения и порядок в H устойчив относительно внутренних автоморфизмов G.

Порядковый тип счетной У. г. имеет вид $\eta^{\alpha}\xi$, где η, ξ — порядковые типы множества целых и рациональных чисел соответственно, а α — произвольный счетный ординал. Всякая У. г. G является топологич. группой относительно интервальной топологии, в к-рой базой открытых множеств являются открытые интервалы

$$(a,\ b)=\{x\in G\mid a<x<b\}.$$

Выпуклые подгруппы У. г. открыты в этой топологии.

Лит.: Кокорина А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972.

В. М. Копытов.

УПОРЯДОЧЕННАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа, наделенная структурой (частичного, вообще говоря) порядка $\leqslant$, стабильного относительно полугрупповой операции, т. е. для любых элементов a, b, c из $a\leqslant b$ следует $ca\leqslant cb$ и $ac\leqslant bc$. Если отношение $\leqslant$ на У. п. S есть линейный порядок, то S наз. линейно упорядоченной полугруппой (л. у. п.). Если отношение $\leqslant$ на У. п. S задает решетку (с операциями объединения $\vee$ и пересечения $\wedge$), причем выполняются тождества

$$c\,(a\vee b)=ca\vee cb\ \text{ и }\ (a\vee b)\,c=ac\vee bc,$$

то S наз. решеточно упорядоченной полугруппой (р. у. п.); тем самым класс всех р. у. п., рассматриваемых как алгебры с полугрупповой и решеточными операциями, является многообразием. На р. у. п. тождества

$$c\,(a\wedge b)=ca\wedge cb\ \text{ и }\ (a\wedge b)\,c=ac\wedge bc,$$

вообще говоря, не выполняются, и их наложение выделяет собственное подмногообразие в многообразии всех р. у. п.

У. п. возникают при рассмотрении различных числовых полугрупп, полугрупп функций и бинарных отношений, полугрупп подмножеств (или подсистем различных алгебраич. систем, напр. идеалов колец и полугрупп) и т. п. Всякая У. п. изоморфна нек-рой полугруппе бинарных отношений, рассматриваемой как У. п., где отношение порядка — теоретико-множественное включение. Классич. пример р. у. п.— полугруппа всех бинарных отношений на произвольном множестве.

В общей теории У. п. выделяются два больших раздела: теория л. у. п. и теория р. у. п. Хотя всякая л. у. п. будет р. у. п., обе теории развиваются в значительной степени самостоятельно: исследования по л. у. п. посвящаются свойствам, большей частью не переносимым на произвольные р. у. п., а при рассмотрении р. у. п. изучаются, как правило, свойства, приводящие применительно к л. у. п. к вырожденным случаям. Важнейшим типом У. п. являются *упорядоченные группы*; их теория представляет собой самостоятельный раздел алгебры. В отличие от упорядоченных групп, отношение порядка на произвольной У. п. S, вообще говоря, не определяется множеством ее положительных элементов (т. е. таких элементов a, что $ax\geqslant x$ и $xa\geqslant x$ для любого $x\in S$).

Линейно упорядоченные полугруппы. Полугруппа S наз. упорядочиваемой, если на ней может быть задан линейный порядок, превращающий S в л. у. п. Необходимым условием упорядочиваемости является отсутствие в полугруппе неидемпотентных элементов конечного порядка. Если в упорядочиваемой полугруппе множество всех идемпотентов не пусто, то оно — подполугруппа. Среди упорядочиваемых полугрупп — свободная полугруппа, свободная коммутативная полугруппа, свободная n-ступенно нильпотент-

ная полугруппа. Существует континуум способов упорядочения свободной полугруппы конечного ранга $\geqslant 2$. Найдены нек-рые необходимые и достаточные условия упорядочиваемости произвольной полугруппы, а также полугрупп из ряда известных классов (напр., полугрупп идемпотентов, инверсных полугрупп).

Полностью описано строение л. у. п. идемпотентов; в частности, в разложении такой полугруппы в полурешетку прямоугольных полугрупп (см. *Идемпотентов полугруппа*) прямоугольные компоненты сингулярны, а соответствующая полурешетка является деревом. Вполне простые л. у. п. исчерпываются *правыми группами* и левыми группами, являющимися лексикографич. произведением (см. *Лексикографический порядок*) линейно упорядоченной группы и л. у. п. правых (соответственно, левых) нулей. В терминах, использующих редукцию к линейно упорядоченным группам, получено описание л. у. п. в классе клиффордовых полугрупп, охарактеризованы также инверсные л. у. п. Классифицированы все типы л. у. п., порожденные двумя взаимно инверсными элементами (см. *Регулярный элемент*).

Условия, накладываемые на исследуемые л. у. п., часто постулируют дополнительные связи между операцией и отношением порядка. На этом пути выделены следующие основные типы л. у. п.: *архимедовы полугруппы*, естественно л. у. п. (см. *Естественно упорядоченный группоид*), положительно л. у. п. (в к-рых все элементы положительны), целые л. у. п. (в к-рых $x^2 \leqslant x$ для любого x). Всякая архимедова естественно л. у. п. коммутативна, ее строение полностью описано. Строение произвольной л. у. п. в значительной мере определяется особенностями ее разбиения на *архимедовы классы*. Для периодич. л. у. п. это разбиение совпадает с разбиением на классы кручения, при этом каждый архимедов класс будет *нильполугруппой*. Произвольная линейно упорядоченная нильполугруппа является объединением возрастающей последовательности выпуклых нильпотентных подполугрупп; в частности, она локально нильпотентна.

Гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$ л. у. п. наз. порядковым (или у-гомоморфизмом), если φ есть изотонное отображение A в B. Конгруэнция на л. у. п. наз. у-конгруэнцией, если все ее классы — выпуклые подмножества; у-конгруэнции и только они являются ядерными конгруэнциями у-гомоморфизмов. Разбиение л. у. п. S на архимедовы классы не всегда определяет у-конгруэнцию, т. е. не всегда будет связкой (см. *Связка полугрупп*), но это так, напр., если S периодическая и ее идемпотенты коммутируют или если S — положительно л. у. п.

Для л. у. п. возникают дополнительные условия простоты (см. *Простая полугруппа*), связанные с отношением порядка. Одно из них — отсутствие собственных выпуклых идеалов (выпукло идеально простые, или 0-простые, полугруппы); тривиальный пример таких л. у. п.— линейно упорядоченные группы. Л. у. п. S с наименьшим s и наибольшим g элементами (в частности, конечная) будет выпукло идеально простой тогда и только тогда, когда s и g одновременно левые или правые нули в S. Любая л. у. п. может быть вложена с сохранением порядка (у-изоморфно) в выпукло идеально простую л. у. п. Существуют л. у. п. с сокращением, невложимые в группу, но коммутативная л. у. п. с сокращением у-изоморфно вложима в абелеву линейно упорядоченную группу, причем существует единственная, с точностью до у-изоморфизма, такая группа частных. Л. у. п. тогда и только тогда у-изоморфно вложима в аддитивную группу действительных чисел, когда она удовлетворяет закону сокращения и не содержит аномальных пар (т. е. таких элементов a, b, что либо

$a^n<b^{n+1}$, $b^n<a^{n+1}$ для всех $n>0$, либо $a^n>b^{n+1}, b^n>a^{n+1}$ для всех $n>0$).

Решеточно упорядоченные полугруппы. Если для элементов a и b У. п. в ней существует наибольший элемент x с тем свойством, что $bx\leqslant a$, то он наз. их правым частным и обозначается $a:b$; аналогично определяется левое частное $a:b$. Р. у. п. S наз. р. у. п. с делением, если правое и левое частные существуют в S для любой пары элементов. Такой полугруппой является полная (как решетка) р. у. п., решеточный нуль к-рой является и мультипликативным нулем, и удовлетворяющая бесконечным дистрибутивным законам $a(V_\alpha b_\alpha)=V_\alpha ab_\alpha$, $(V_\alpha b_\alpha)a=V_\alpha b_\alpha a$. Важный пример р. у. п. с делением — мультипликативная полугруппа идеалов ассоциативного кольца, и заметное направление в теории р. у. п. посвящено перенесению многих понятий и результатов теории идеалов ассоциативных колец на случай р. у. п. (однозначное разложение на простые множители, простой, примарный, максимальный, главный элементы р. у. п., и т. д.). Так, напр., известное отношение Артина из теории коммутативных колец следующим образом переносится на р. у. п. с делением, обладающие единицей 1: пусть $a\sim b\Leftrightarrow 1:a=1:b$. Если рассматриваемая р. у. п. S коммутативна, то отношение $\sim$ на ней есть конгруэнция; при этом факторполугруппа $S/\sim$ будет (решеточно упорядоченной) группой тогда и только тогда, когда S целозамкнута, т. е. $a:a=1$ для любого $a\in S$.

Изучение р. у. п. связывается с группами при рассмотрении проблемы вложения р. у. п. в решеточно упорядоченные группы. Напр., любая р. у. п. с сокращением и условием Оре (см. *Вложение полугруппы* в группу), умножение в к-рой дистрибутивно относительно обеих решеточных операций, вложима в решеточно упорядоченную группу.

Начато исследование р. у. п. с точки зрения теории многообразий: описаны свободные р. у. п., найдены минимальные многообразия р. у. п. и т. д.

Лит.: [1] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965; [2] Биркгоф Г., Теория решеток, пер. с англ., М., 1984; [3] Кокорин А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972; [4] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 116—20; [5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1966, М., 1968, с. 99—102; [6] Satyanarayana M., Positively ordered semigroups, N. Y.— Basel, 1979.

Л. Н. Шеврин.

УПОРЯДОЧЕННАЯ СУММА частично упорядоченных множеств — операция, ставящая в соответствие системе непересекающихся частично упорядоченных множеств $\{P_\alpha,\ \alpha\in L\}$, где множество индексов L также частично упорядочено, новое частично упорядоченное множество

$$P=\sum\nolimits_{\alpha\in L} P_\alpha,$$

элементами к-рого являются элементы теоретико-множественного объединения множеств P_α, а порядок устанавливается следующим образом. Во множестве P тогда и только тогда $a\leqslant b$, когда или a, $b\in P_\alpha$ и $a\leqslant b$ в P_α или $a\in P_\alpha$, $b\in P_\beta$ и $\alpha<\beta$. Важнейшими частными случаями У. с. являются кардинальная и ординальная суммы. Первая из них получается, когда L упорядочено тривиально, т. е. каждый его элемент сравним только с самим собой, вторая — когда L является *цепью*. Таким образом, в кардинальной сумме двух непересекающихся частично упорядоченных множеств X и Y отношение $\leqslant$ сохраняет свое значение внутри слагаемых X и Y, а $x\in X$ и $y\in Y$ между собой несравнимы; в ординальной же сумме X и Y отношение порядка также сохраняется на слагаемых и $x\leqslant y$ для всех $x\in X$, $y\in Y$.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория решеток, пер. с англ., М., 1984; [2] Скорняков Л. А., Элементы теории структур, М., 1970.

Т. С. Фофанова.

УПОРЯДОЧЕННОЕ КОЛЬЦО, частично упорядоченное кольцо,— кольцо R (не обязательно ассоциативное), являющееся *частично упорядоченной группой* по сложению, в к-ром для любых a, b, $c \in R$ неравенства $a \leqslant b$ и $c \geqslant 0$ влекут за собой неравенства $ac \leqslant bc$ и $ca \leqslant cb$. Всякое кольцо является У. к. с тривиальным порядком. Примерами У. к. служат также *упорядоченные поля*; кольцо действительных функций на множестве X, где $f \leqslant g$ означает, что $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in X$; кольцо матриц над У. к. R, где, по определению, $\|a_{ij}\| \leqslant \|b_{ij}\|$, если $a_{ij} \leqslant b_{ij}$ для всех i, j. Если R — У. к., то множество

$$P = \{x \mid x \in R, \quad x \geqslant 0\}$$

наз. его положительным конусом. Положительный конус У. к. однозначно определяет его порядок: $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $y - x \in P$. Подмножество P кольца R служит положительным конусом для нек-рого порядка в том и только в том случае, когда

$$P \cap (-P) = \{0\}, \quad P + P \subseteq P \quad \text{и} \quad PP \subseteq P.$$

Равенство $P \cup (-P) = R$ равносильно линейности этого порядка.

У. к., являющееся линейно упорядоченным множеством или решеткой (структурой), наз. соответственно линейно упорядоченным или структурно упорядоченным (решеточно упорядоченным) кольцом (см. также *Архимедово кольцо*). Решеточно упорядоченное кольцо оказывается дистрибутивной решеткой, а его аддитивная группа не имеет кручения (ср. *Структурно упорядоченная группа*). Нек-рые вопросы теории ассоциативных колец и, в частности, теория радикалов имеют аналоги в ассоциативных структурно У. к. Класс колец, допускающих превращение в структурно У. к., не аксиоматизируем. Если a, b, c — элементы структурно У. к. и $c \geqslant 0$, то справедливы соотношения

$$(a \vee b)\, c \geqslant ac \vee bc, \quad c\,(a \vee b) \geqslant ca \vee cb,$$
$$(a \wedge b)\, c \leqslant ac \wedge bc, \quad c\,(a \wedge b) \leqslant ca \wedge cb.$$

Идеалы структурно У. к., являющиеся *выпуклыми подгруппами* аддитивной группы, наз. l-идеалами. Факторкольцо по l-идеалу естественным образом превращается в структурно У. к. Остается справедливой теорема о гомоморфизме.

Структурно У. к. R наз. функциональным кольцом, или f-кольцом, если выполнено любое из следующих эквивалентных друг другу условий: (1) R изоморфно структурно упорядоченному подкольцу прямого произведения линейно У. к.; (2) для любых a, b, $x \in R$ справедлива импликация

$$(a \wedge b = 0) \Rightarrow (a \wedge bx = a \wedge xb = 0);$$

(3) для любого подмножества $X \subseteq R$ множество

$$\{y \mid y \in R, \quad \forall x \in X \; x \wedge y = 0\}$$

является l-идеалом; (4) для любых a, $b \in R$

$$(a \vee 0)\,(b \vee 0) \wedge (-a \vee 0) = (b \vee 0)\,(a \vee 0) \wedge (-a \vee 0) = 0.$$

Условие (4) показывает, что f-кольца образуют многообразие сигнатуры $\{+, -, 0, \cdot, \vee, \wedge\}$. Входящие в это условие равенства не вытекают одно из другого. Не всякое f-кольцо вложимо в f-кольцо с единицей. Если a, b, c — элементы f-кольца и $c \geqslant 0$, то справедливы соотношения

$$(a \vee b)\, c = ac \vee bc, \quad c\,(a \vee b) = ca \vee cb,$$
$$(a \wedge b)\, c = ac \wedge bc, \quad c\,(a \wedge b) = ca \wedge cb,$$
$$(a \vee (-a))\,(b \vee (-b)) = ab \vee (-ab), \quad a^2 \geqslant 0,$$

а также импликация $(a \wedge b = 0) \Rightarrow (ab = 0)$.

Порядок У. к. R с положительным конусом P можно продолжить до линейного так, что R становится линейно У. к. в том и только в том случае, когда для любого

конечного множества $a_1, \ldots, a_n$ из R можно выбрать $\varepsilon_i = 1$ или -1 так, что в полукольце, порожденном конусом P и элементами $\varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_n a_n$, сумма любых двух ненулевых элементов отлична от нуля. При $P = \{0\}$ получается критерий возможности превращения данного кольца в линейно упорядоченное.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория решеток, пер. с англ., М., 1984; [2] Виноградова А. А., «Матем. заметки», 1977, т. 21, № 4, с. 449—52; [3] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965; [4] Bigard A., Keimel K., Wolfenstein S., Groupes et anneaux réticulés, B.—Hdlb.—N. Y., 1977; [5] Brumfiel G., Partially ordered rings and semi-algebraic geometry, Camb., 1979; [6] Steinberg S. A., «Symp. math. Ist. naz. alta mat.», 1977, v. 21, p. 379—400; [7] его же, «J. Algebra», 1981, v. 72, № 1, p. 223—36.

Л. А. Скорняков.

УПОРЯДОЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО — множество, на к-ром задано отношение *порядка*. См. также *Линейно упорядоченное множество*, *Частично упорядоченное множество*.

УПОРЯДОЧЕННОЕ ПОЛЕ — линейно *упорядоченное кольцо*, являющееся полем. Классич. пример — поле действительных чисел с обычным порядком. Напротив, поле комплексных чисел не может быть превращено в У. п., поскольку поле допускает порядок, превращающий его в У. п., тогда и только тогда, когда -1 не представима в нем как сумма квадратов. Такие поля наз. формально действительными; они возникают, напр., если к какому-либо У. п. присоединить все квадратные корни из всех его положительных элементов.

Расширение P У. п. k наз. упорядоченным, если P — У. п., содержащее k в качестве упорядоченного подполя. Это имеет место в том и только в том случае, когда -1 не представима в виде суммы элементов вида λx^2, где $\lambda \in k$, $\lambda \geqslant 0$ и $x \in P$. У. п. наз. действительно замкнутым, если оно не обладает отличными от себя самого упорядоченными расширениями. Порядок действительно замкнутого поля единствен. Эквивалентны следующие свойства У. п. k: (1) k действительно замкнуто; (2) расширение $k(i)$, где $i^2 = -1$, алгебраически замкнуто; (3) каждый положит. элемент из k является квадратом и каждый многочлен нечетной степени над k имеет корень в k. Каждое формально действительное поле обладает действительно замкнутым упорядоченным алгебраич. расширением.

Если k — У. п., то имеет смысл обычное определение фундаментальной последовательности (см. *Действительное число*). Совокупность фундаментальных последовательностей при надлежащем отождествлении и определении операций превращается в упорядоченное расширение $\bar{k}$ поля k. Если k архимедово, то $\bar{k}$ изоморфно У. п. действительных чисел.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [2] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [3] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965.

Л. А. Скорняков.

УПОРЯДОЧЕННЫЙ ГРУППОИД — группоид H, множество элементов к-рого частично упорядочено отношением $\leqslant$, и, кроме того, операция и порядок связаны аксиомой

$$a \leqslant b \Rightarrow ac \leqslant bc, \quad ca \leqslant cb \quad \forall c \in H.$$

Если У. г. H подчиняется более сильной аксиоме

$$a < b \Rightarrow ac < bc, \quad ca < cb \quad \forall c \in H,$$

то порядок в H наз. строгим, а H — строгим частично упорядоченным группоидом. Частично У. г. наз. сильным, если

$$ac \leqslant bc \wedge ca \leqslant cb \Rightarrow a \leqslant b.$$

Сильный частично У. г. всегда является строгим, а для линейно У. г. эти два понятия совпадают.

Элемент a У. г. H наз. положительным (строго положительным), если для всех

$x \in H$ справедливы неравенства $ax \geqslant x$ и $xa \geqslant x$ (соответственно, $ax > x$ и $xa > x$). Отрицательные и строго отрицательные элементы определяются двойственными неравенствами. У. г. наз. положительно (отрицательно) упорядоченным, если все его элементы положительны (отрицательны). Интерес для изучения представляют специальные типы группоидов (см. *Естественно упорядоченный группоид*, *Упорядоченная полугруппа*, *Упорядоченная группа*).

О. А. Иванова.

УПОРЯДОЧИВАЕМАЯ ГРУППА — группа G, на к-рой может быть введено отношение линейного порядка $\leqslant$ такое, что $a \leqslant b$ влечет за собой $xay \leqslant xby$ для любых $a, b, x, y \in G$. Группа G тогда и только тогда является У. г., когда в ней существует подмножество P со свойствами: 1) $PP \subseteq P$; 2) $P \cap P^{-1} = \{1\}$; 3) $P \cup P^{-1} = G$; 4) $x^{-1}Px \subseteq P$ для любого $x \in G$.

Пусть $S(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — нормальная подполугруппа группы G, порожденная элементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Группа G тогда и только тогда является У. г., когда для любого конечного набора $a_1, \ldots, a_n$ элементов из G, отличных от единицы группы, найдется такой набор чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, равных ± 1, что подполугруппа $S(a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, a_n^{\varepsilon_n})$ не содержит единицу. Всякая У. г. есть группа с однозначным извлечением корня. Абелевы группы без кручения, локально нильпотентные группы без кручения, свободные, свободные разрешимые группы суть У. г. Двуступенно разрешимая группа, для всякого неединичного элемента x к-рой $1 \notin S(x)$, является У. г.

Класс У. г. замкнут относительно подгрупп, фильтрованных произведений, локально замкнут и, следовательно, является квазимногообразием. Свободное произведение У. г. есть У. г.

Лит.: [1] Кокорин А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972; [2] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965.

В. М. Копытов.

УПРАВЛЯЕМЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС — случайный процесс, вероятностные характеристики к-рого могут изменяться по ходу наблюдений в зависимости от поставленной цели, заключающейся в минимизации (максимизации) того или иного функционала, определяющего качество управления. Различают разные виды управляемых процессов как по способу их задания и описания, так и по типу целей управления. Наиболее продвинута теория управляемых скачкообразных марковских процессов и управляемых диффузионных процессов, в случае наблюдений по полным данным. Развивается также соответствующая теория в случае наблюдений по неполным данным (частично наблюдаемые процессы).

Управляемый скачкообразный марковский процесс (у.с.м.п.) — управляемый случайный процесс с непрерывным временем и кусочно постоянными траекториями, в к-ром выбор управления влияет на инфинитезимальные характеристики процесса. Обычно (см. [1], [2]), для построения у.с.м.п. задают: 1) борелевское множество E состояний; 2) борелевское множество A управлений и множества $A(x)$ управлений, допустимых в состоянии x, причем $A = \bigcup A(x)$, $\{(x, a) : a \in A(x), x \in E\} \in \mathcal{B}(E \times A)$ ($\mathcal{B}(M)$ есть σ-алгебра борелевских подмножеств борелевского множества M), и возможен измеримый выбор $a = \alpha(x) \in A(x)$; $x \in E$; 3) плотность $q(a, t, x, \Gamma)$ вероятности скачка из x в Γ в момент t при управлении a ($t \geqslant 0$, $x \in E$, $a \in A(x)$, $\Gamma \in \mathcal{B}(E)$), являющуюся борелевской функцией (a, t, x) при любом Γ и счетноаддитивной функцией Γ при любых a, t и x, причем функция q ограничена, $q(a, t, x, \Gamma) \geqslant 0$ при $x \notin \Gamma$, $q(a, t, x, E) = 0$.

Пусть $\Omega = D([0, \infty), E)$ — пространство всех кусочно постоянных непрерывных справа функций $\omega =$

$= x_{[0,\infty)} = (x_t)_{t\geqslant 0}$ со значениями в E, и пусть N_{t-} — минимальная σ-алгебра в Ω, относительно к-рой измеримы функции $x_s = x_s(\omega)$ при $s \leqslant t$ (при $s < t$) и $N = N_\infty$. Любая функция $\alpha_t(\omega)$ на $(0, \infty)\times\Omega$ со значениями $\alpha_t(\omega) \in A(x_{t-}(\omega))$, прогрессивно измеримая относительно семейства $\{N_{t-}\}$, наз. (естественной) с т р а т е г и е й. Из определения следует, что $\alpha_t(\omega) = \alpha(x_{[0,t)})$, где $x_{[0,t)} = (x_s)_{0\leqslant s<t}$. Если $\alpha_t(\omega) = \alpha(t, x_{t-})$, где $\alpha(t, x)$ — борелевская функция на $(0, \infty)\times E$ со свойством $\alpha(t, x) \in A(x)$, то стратегия α наз. м а р к о в с к о й, а если $\alpha(t, x) = \alpha(x)$, то с т а ц и о н а р н о й. Классы естественных, марковских и стационарных стратегий обозначаются соответственно $\mathfrak{A}_E$, $\mathfrak{A}_M$ и $\mathfrak{A}_S$. Ввиду возможности измеримого выбора из $A(x)$ класс $\mathfrak{A}_S$ (следовательно, $\mathfrak{A}_M$ и $\mathfrak{A}_E$) не пуст. Если q ограничена, то по любым $x \in E$ и $\alpha \in \mathfrak{A}_E$ строится единственная вероятностная мера P_x^α на (Ω, N) такая, что $\mathsf{P}_x^\alpha\{x_0 = x\} = 1$ и при любых $t' \geqslant t \geqslant 0$, $\Gamma \in \mathcal{B}(E)$

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{P}_x^\alpha\{\tau > t' \mid N_t\} = \\ = \exp\left[\int_t^{t'} q\left(\alpha\left(x^*_{[0,\,s)}\right),\ s,\ x_t,\ x_t\right) ds\right] (\text{п. н. } \mathsf{P}_x^\alpha), \\ \mathsf{P}_x^\alpha\{x_\tau \in \Gamma \mid N_t(\tau)\} = \\ = -\frac{q\left(\alpha\left(x^*_{[0,\,\tau)}\right),\ \tau,\ x_t,\ \Gamma\right)}{q\left(\alpha\left(x^*_{[0,\,\tau)}\right),\ \tau,\ x_t,\ x_t\right)} (\text{п. н. } \mathsf{P}_x^\alpha), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где $\tau = \tau(t, \omega)$ — момент первого скачка после t, $N_t(\tau)$ — минимальная σ-алгебра в Ω, содержащая N_t, относительно к-рой τ измеримо, $x^*_u = x_t$ при $0 \leqslant u \leqslant t$ и $x^*_u = x_t$ при $u > t$. Случайный процесс $\left\{(x_t)_{t\geqslant 0},\ \mathsf{P}_x^\alpha\right\}$ и есть у.с.м.п. *Марковское свойство* у.с.м.п. состоит в том, что при известном «настоящем» x_t, «прошлое» $(x_u)_{u<t}$ входит в правые части (1) лишь через стратегию α. При произвольной стратегии $\alpha \in \mathfrak{A}_E$ процесс $(x_t)_{t\geqslant 0}$, вообще говоря, не марковский, но если $\alpha \in \mathfrak{A}_M$, то он будет марковским процессом, а если $\alpha \in \mathfrak{A}_S$ и q не зависит от t, то — однородным марковским с плотностью вероятности скачка из x в Γ, равной $q(\alpha(x), x, \Gamma)$. Управление процессом состоит в выборе стратегии.

Типичная задача управления — максимизация функционала

$$v^\alpha(x) = \mathsf{E}_x^\alpha\left[\int_0^T f^{\alpha_t}(t, x_t)\, dt + g(x_T)\right], \quad (2)$$

где $f^a(t, x)$ и $g(x)$ — ограниченные борелевские функции на $A\times[0, \infty)\times E$ и на E, T — фиксированное число. С помощью перехода к другим функциям f и g и введения фиктивных состояний к виду (2) приводится более широкий класс функционалов, содержащих также члены $h^{\alpha_\tau}(\tau, x_{\tau-}, x_\tau)$, τ — момент скачка, и допускающих обрыв или остановку процесса. Ф у н к ц и е й в ы и г р ы ш а (ц е н о й) наз. функция

$$v(x) = \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}_E} v^\alpha(x), \quad x \in E. \quad (3)$$

Стратегия α наз. ε-о п т и м а л ь н о й, если $v^\alpha(x) \geqslant v(x) - \varepsilon$ при всех $x \in E$, и (п. н. μ) ε-о п т и м а л ь н о й, если то же верно при почти всех x относительно меры μ на E. 0-оптимальные стратегии наз. о п т и м а л ь н ы м и. Пусть в модели, полученной из первоначальной схемы сокращением промежутка $[0, \infty)$ до $[t, \infty)$, символы $\mathfrak{A}(t)$ $\mathsf{E}_{t,x}^\alpha$ и $v(t, x)$ имеют тот же смысл, что $\mathfrak{A}$, E_x^α и $v(x)$ в первоначальной модели. Рассматривая скачки как последовательные шаги в управляемой марковской цепи с дискретным временем, можно установить существование (п. н. μ) ε-оптимальных стратегий в классе $\mathfrak{A}_E$ и получить свойство

измеримости v в форме: $\{(t, x): v(t, x) > C\}$ — аналитич. множество. Это позволяет применить идеи *динамического программирования* и вывести соотношение

$$v(t, x) = \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}_E(t)} \mathsf{E}_{t, x}^{\alpha} \left[\int_t^{\tau_1} f^{\alpha_s}(s, x_s) + v(\tau_1, x_{\tau_1}) \right], \quad (4)$$

где $\tau_1 = \min(\tau(t), t')$, $0 \leqslant t < t' \leqslant T$ (вариант принципа Беллмана). При $t' \downarrow t$ из (4) и (1) получается *Беллмана уравнение*

$$-\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} =$$

$$= \sup_{a \in A(x)} \left[f^a(t, x) + \int_E v(t, y)\, q(a, t, x, dy) \right] \text{(п. в.)}. \quad (5)$$

Функция выигрыша $v(t, x)$ — единственная ограниченная абсолютно непрерывная по t функция на $[0, T] \times E$, удовлетворяющая (5) и условию $v(T, x) = g(x)$. Уравнение (5) можно решать методом последовательных приближений. При $\alpha \in \mathfrak{A}_M$ из *Колмогорова уравнения* для марковского процесса $(x_t)_{t \geqslant 0}$ следует, что если супремум в (5) достигается при измеримой функции $a = \alpha(t, x)$, то марковская стратегия α оптимальна. Так устанавливается существование марковских оптимальных стратегий в полунепрерывных моделях (в к-рых A, q, f и g удовлетворяют определенным условиям компактности и непрерывности), в частности в конечных моделях (с конечными E и A). В произвольных борелевских моделях с помощью теорем измеримого выбора выводится существование (п. н. μ) ε-оптимальных марковских стратегий при любом $\varepsilon > 0$. В счетных моделях получаются марковские ε-оптимальные стратегии. Результаты частично переносятся на случаи, когда $T = \infty$ и функции f и g не ограничены, но в общей ситуации достаточность марковских стратегий не доказана.

В однородных моделях, где g и f не зависят от t, наряду с (2) рассматривают функционалы

$$v^{\alpha}(x) = \mathsf{E}_x^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f^{\alpha_t}(x_t)\, dt, \quad (6)$$

$$v^{\alpha}(x) = \lim_{T \to \infty} \mathsf{E}_x^{\alpha} \frac{1}{T} \int_0^T f^{\alpha_t}(x_t)\, dt, \quad (7)$$

причем ставится вопрос о достаточности класса $\mathfrak{A}_S$. Если $\lambda > 0$ и борелевская функция $f^a(x)$ ограничена, то уравнение (5) для функционала (7) обращается в

$$\lambda v(x) = \sup_{a \in A(x)} \left[f^a(x) + \int_E v(y)\, q(a, x, dy) \right]; \quad (8)$$

оно совпадает с уравнением Беллмана для аналогичной задачи с дискретным временем и имеет единственное ограниченное решение. Если супремум в (8) достигается при $a = \alpha(x)$, $\alpha \in \mathfrak{A}_S$, то α оптимальна. Точно так же с заменой $\mathfrak{A}_M$ на $\mathfrak{A}_S$ переносятся на случай функционала (6) и результаты о существовании ε-оптимальных стратегий в моделях разных типов. При критерии (7) законченные результаты получены лишь для конечных и специального вида эргодич. у.с.м.п. и подобны случаю дискретного времени: можно выбрать $\alpha \in \mathfrak{A}_S$ и функцию g на E так, чтобы α была оптимальна по критерию (2) сразу при всех T и, следовательно, оптимальна по критерию (7).

Управляемый диффузионный процесс (у.д.п.) — непрерывный управляемый случайный процесс в d-мерном евклидовом пространстве E_d, допускающий *стохастический дифференциал* по отношению к нек-рому *винеровскому процессу*, не зависящему от управлений. Теория у.д.п. возникла как обобщение теории управления детерминированным движением нек-рой точки $x_t \in E_d$, уравнение движения к-рой имеет вид $dx_t = b(\alpha_t, s + t, x_t)\, dt$, $t \geqslant 0$, где α_t — управляющий параметр.

Для формального описания у.д.п. применяется язык стохастич. уравнений Ито. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — полное вероятностное пространство, $\{\mathcal{F}_t,\ t \geqslant 0\}$ — семейство расширяющихся полных σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, вложенных в $\mathcal{F}$. Пусть $w_t = (w_t^i,\ i = 1, \ldots, d_1)$ — d_1-мерный винеровский процесс относительно $\{\mathcal{F}_t\}$, определенный на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ при $t \geqslant 0$ (т. е. процесс, для к-рого w_t^i являются одномерными непрерывными стандартными винеровскими процессами при каждом i, процессы $w_t^1, \ldots, w_t^{d_1}$ независимы, w_t^i $\mathcal{F}$-измеримо при всяких t, i и при t, $h \geqslant 0$ величины $\{w_{t+h}^i - w_t^i,\ i = 1, \ldots, d_1\}$ не зависят от $\mathcal{F}_t$). Пусть A — нек-рое сепарабельное метрич. пространство. При $\alpha \in A$, $t \geqslant 0$, $x = (x^i, i = 1, \ldots, d) \in E_d$ предполагаются заданными функции $\sigma(\alpha, t, x)$, $b(\alpha, t, x)$, причем $\sigma(\alpha, t, x)$ — матрица размера $d \times d_1$, $b(\alpha, t, x)$ есть d-мерный вектор. Считают, что σ, b — борелевские функции α, t, x, удовлетворяющие условию Липшица по x с постоянной, не зависящей от α, t, и такие, что $|\sigma^{ij}(\alpha, t, 0)|$ и $|b^i(\alpha, t, 0)$ ограничены. Произвольный процесс $\alpha_t = \alpha_t(\omega)$, $t \geqslant 0$, $\omega \in \Omega$, прогрессивно измеримый относительно $\{\mathcal{F}_t\}$ и принимающий значения из A, наз. стратегией; $\mathfrak{A}$ — множество всех стратегий. Для всякого $s \geqslant 0$, $x \in E_d$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ существует и единственно решение стохастич. уравнения Ито

$$dx_t = b(\alpha_t, s+t, x_t)\,dt + \sigma(\alpha_t, s+t, x_t)\,dw_t, \qquad x_0 = x \tag{9}$$

(теорема Ито). Это решение, обозначаемое $x_t^{\alpha, s, x}$, наз. управляемым диффузионным процессом (управляемым процессом диффузионного типа); оно управляется с помощью выбора стратегии $\alpha = \alpha_t$. Кроме стратегий из $\mathfrak{A}$ рассматриваются другие классы стратегий. Пусть $C([0, \infty), E_d)$ — пространство непрерывных функций на $[0, \infty)$ со значениями в E_d. Полуось $[0, \infty)$ интерпретируется как множество значений времени t. Элементы $C([0, \infty), E_d)$ обозначаются через $x_{[0, \infty)}$. И пусть N_t — наименьшая σ-алгебра подмножеств $C([0, \infty), E_d)$, относительно к-рой при $s \leqslant t$ измеримы функции x_s (являющиеся значением элемента $x_{[0, \infty)}$) пространства $C([0, \infty), E_d)$ в момент времени s. Функция $\alpha = \alpha_t(x_{[0, \infty)})$ со значениями в A наз. естественной стратегией, допустимой в точке (s, x), если она прогрессивно измерима относительно $\{N_t\}$ и при $\alpha_t = \alpha_t(x_{[0, \infty)})$ существует хотя бы одно решение уравнения (9), прогрессивно измеримое относительно $\{\mathcal{F}_t\}$. Множество всех естественных стратегий, допустимых в точке (s, x), обозначается $\mathfrak{A}_E(s, x)$, его подмножество, состоящее из всех естественных стратегий вида $\alpha_t(x_t)$, обозначается $\mathfrak{A}_M(s, x)$ и наз. множеством марковских стратегий, допустимых в точке (s, x). Принято говорить, что естественная стратегия определяет управление в момент времени t на основании наблюдений за процессом x_τ на участке времени $[0, t]$, марковская стратегия — на основании наблюдений за процессом только в момент времени t. При $\alpha \in \mathfrak{A}_E(s, x)$ (даже при $\alpha \in \mathfrak{A}_M(s, x)$) решение (9) может не быть единственным. Поэтому для каждых $s \geqslant 0$, $x \in E_d$, $\alpha \in \mathfrak{A}_E(s, x)$, произвольным образом фиксируется к.-н. решение уравнения (9) и оно обозначается $x_t^{\alpha, s, x}$. После этого по формуле $\beta_t(\omega) = \alpha_t(x_{[0, \infty)}^{\alpha, s, x}(\omega))$ определяется вложение $\mathfrak{A}_E(s, x) \subset \mathfrak{A}$, при к-ром $x_t^{\beta, s, x} = x_t^{\alpha, s, x}$ (п. н.).

Целью управления, как правило, является максимизация или минимизация математич. ожидания того или иного функционала от траекторий $x_t^{\alpha, s, x}$. Более общей является следующая задача. Пусть на $A \times [0, \infty) \times E_d$ определены борелевские функции $C^\alpha(t, x) \geqslant 0$, $f^\alpha(t, x)$ и на $[0, \infty) \times E_d$ определена бо-

релевская функция $g(t, x)$. Для $\alpha \in \mathfrak{A}$, $s \geqslant 0$, $x \in E_d$, момент первого выхода $\left(s+t,\ x_t^{\alpha,\ s,\ x}\right)$ из Q,

$$\left.\begin{aligned} \varphi_t^{\alpha,\ s,\ x} &= \int_0^t C^{\alpha_r}\left(s+r,\ x_r^{\alpha,\ s,\ x}\right) dr, \\ v^{\alpha}(s,\ x) &= \mathsf{E}_{s,\ x}^{\alpha}\left[\int_0^{\tau_Q} e^{-\varphi_t} f^{\alpha_t}(s+t,\ x_t)\, dt + \right. \\ &\left. + g\left(s+\tau_Q,\ x_{\tau_Q}\right) e^{-\varphi_{\tau_Q}}\right], \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

где индексы α, s, x у знака математич. ожидания означают, что их нужно вставить под знаком математич. ожидания всюду, где это возможно. Тогда возникает задача о нахождении стратегии α, максимизирующей $v^{\alpha}(s, x)$, и о нахождении функции выигрыша (цены)

$$v(s,\ x) = \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} v^{\alpha}(s,\ x). \quad (11)$$

Стратегии α, для к-рых $v^{\alpha}(s,\ x) \geqslant v(s, x) - \varepsilon$, наз. ε-оптимальными для точки (s, x). Оптимальной наз. 0-стратегия. Если в (11) множество $\mathfrak{A}$ заменить на $\mathfrak{A}_E(s, x)$ ($\mathfrak{A}_M(s, x)$), то соответствующая верхняя грань обозначается $v_{(E)}(s, x)$ ($v_M(s, x)$). Поскольку имеют место вложения $\mathfrak{A}_M(s, x) \subset \mathfrak{A}_E(s, x) \subset \mathfrak{A}$, то $v_{(M)}(s, x) \leqslant v_{(E)}(s, x) \leqslant v(s, x)$. При нек-рых достаточно широких предположениях известно (см. [3]), что $v_{(E)} = v$ (это так, если, напр., σ, b, c, f, g непрерывны по (α, x), непрерывны по x равномерно относительно α при всяком t и абсолютные величины c, f, g не превосходят $K(1+|x|)^m$ при всех α, t, x, где K, m не зависят от α, t, x). Вопрос о равенстве $v_{(M)} = v$ в достаточно общей ситуации является открытым. Формальное применение идей динамич. программирования приводит к соотношению, наз. принципом Беллмана:

$$v(s,\ x) = \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathsf{E}_{s,\ x}^{\alpha}\left[\int_0^{\tau} e^{-\varphi_t} f^{\alpha_t}(s+t,\ x_t)\, dt + \right. \\ \left. + v\left(s+\tau,\ x_{\tau}\right) e^{-\varphi_{\tau}}\right], \quad (12)$$

где $\tau^{\alpha,\ s,\ x}$ — произвольным образом определенные марковские моменты, не превосходящие $\tau_Q^{\alpha,\ s,\ x}$. Если в (12) в качестве τ взять $t \wedge \tau_Q = \min(t,\ \tau_Q)$, применить к $v(s+\tau, x_\tau) e^{-\varphi_\tau}$ формулу Ито, то после нек-рых нестрогих рассуждений можно прийти к уравнению Беллмана:

$$\sup_{\alpha \in A}\left(L^{\alpha} v + f^{\alpha}\right) = 0, \quad (13)$$

где

$$L^{\alpha} v = \frac{\partial v}{\partial s} + a^{ij}(a,\ s,\ x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^i\, \partial x^j} + \\ + b^i(\alpha,\ s,\ x) \frac{\partial v}{\partial x^i} - c^{\alpha}(s,\ x)\, v,$$

по индексам i, j предполагается суммирование от 1 до d, матрица

$$a(\alpha,\ s,\ x) = (a^{ij}(\alpha,\ s,\ x)) = \frac{1}{2}\sigma(\alpha,\ s,\ x)\,\sigma^*(\alpha,\ s,\ x).$$

Уравнение Беллмана играет центральную роль в теории у.д.п., так как часто оказывается, что достаточно «хорошее» его решение, равное на ∂Q функции g, является функцией выигрыша, а если $\alpha = \alpha^0(s, x)$ при каждых (s, x) доставляет верхнюю грань в (13) и $\alpha_t^0 = \alpha^0(s_0 + t,\ x_t)$ — марковская стратегия, допустимая в (s_0, x_0), то стратегия $\alpha^0 = \{\alpha_t^0\}$ является оптимальной в точке (s_0, x_0). Т. о., иногда удается показать, что $v_M(s_0,\ x_0) = v(s_0,\ x_0)$.

Строгое обоснование справедливости приведенных выше выводов наталкивается на серьезные трудности, связанные с нелинейным характером уравнения (13),

к-рое в общем случае оказывается нелинейным вырождающимся параболич. уравнением. Наиболее простым является случай, когда (13) есть невырождающееся квазилинейное уравнение (матрица a не зависит от α и равномерно невырождена в Q). Здесь при нек-рых дополнительных ограничениях на Q, a, b, c, f, g, удается воспользоваться результатами теории квазилинейных параболич. уравнений, доказать разрешимость (13) в гёльдеровских классах функций и дать способ построения ε-оптимальных стратегий, основанный на решении уравнений (13). Аналогичный подход используется (см. [3]), когда $Q=(-\infty, \infty)\times(r_1, r_2)$, a, b, c, f, g ограничены и не зависят от s, a — равномерно отделена от нуля. В этом случае (13) сводится к квазилинейному уравнению 2-го порядка на (r_1, r_2), т. к. $\frac{\partial v}{\partial s}=0$ и уравнение (13) можно разрешить относительно старшей производной v_{xx}. Методы теории дифференциальных уравнений помогают при исследовании уравнения (13) также, если $Q=(-\infty, \infty)\times D$, D — двумерная область, a, b, c, f, g не зависят от s (см. лит. в [3]). Здесь, как и в предыдущем случае, допускается зависимость a от α. Уместно упомянуть также случай уравнений Гамильтона — Якоби ($a\equiv 0$), изученный методами теории дифференциальных уравнений (см. [5]).

Методами теории случайных процессов удается доказать, что функция выигрыша v удовлетворяет уравнению (13) в довольно общем случае при нек-рых предположениях типа гладкости σ, b, c, f, g, если $Q=(-\infty, T)\times E_d$, $T<\infty$ (см. [3]).

Наряду с задачами управления движением, в теории у. д. п. рассматриваются также задачи об оптимальной остановке управляемого процесса одним или двумя лицами. Напр., для $\alpha\in\mathfrak{A}$ и произвольного марковского момента τ:

$$v^{\alpha,\tau}(s, x)=\mathsf{E}^{\alpha}_{s,x}\left[\int_0^{\tau_Q\wedge\tau} e^{-\varphi_t} f^{\alpha_t}(s+t, x_t)\,dt+\right.$$
$$\left.+g\left(s+\tau_Q\wedge\tau,\ x_{\tau_Q\wedge\tau}\right) e^{-\varphi_{\tau_Q\wedge\tau}}\right],$$

теория у. д. п. имеет отношение к управляемым частично наблюдаемым процессам и к задачам управления случайными процессами, в к-рых управление осуществляется выбором меры на $(C([0, \infty), E_d), N_\infty)$ из того или иного заданного класса мер, отвечающих процессам диффузионного типа (см. [3], [4], [6]—[8]).

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Управляемые случайные процессы, К., 1977; [2] Юшкевич А. А., «Теория вероятностей и ее применения», 1980, т. 25, № 2, с. 247—70; [3] Крылов Н. В., Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977; [4] Fleming W. H., Rishel R. W., Deterministic and stochastic optimal control, B.— [a. o.], 1975; [5] Кружков С. Н., «Матем. сб.», 1975, т. 98, № 3, с. 450—93; [6] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [7] Wonham W. M., «SIAM J. Control», 1968, v. 6, № 2, p. 312—26; [8] Davis M. H. A., «SIAM J. control and optimization», 1976, v. 14, № 1, p. 176—88. *Н. В. Крылов, А. Н. Ширяев, А. А. Юшкевич.*

УПРАВЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА — одно из центральных понятий кибернетики. Так наз. объекты, к-рые имеют определенную структуру и обладают нек-рыми функциональными свойствами, отражающими их информационную природу. Понятие У. с. относится к числу понятий, к-рые невозможно полностью объяснить, используя только математич. конструкции; поэтому для обсуждения этого понятия необходимо иметь интуитивное представление о нем. Вот примеры физических (неформальных) У. с.

Нервная ткань, представляющая определенную структуру из нейронов и осуществляющая преобразование раздражений, идущих из внешней среды, в определенные воздействия на органы.

ЭВМ, являющаяся нек-рым соединением элементов и способная выполнять данный перечень элементарных актов (команд).

Химич. молекула, характеризуемая определенной конфигурацией атомов и обладающая интересующим нас перечнем свойств (речь идет о свойствах вещества, построенного из данного типа молекул, в частности о цвете в нек-рой дискретной шкале, физич. состоянии при нормальных условиях и т. п.).

Шахматная позиция, задаваемая расположением фигур на доске и набором допустимых ходов одного из партнеров.

Фраза русского языка, представляющая определенное соединение грамматич. элементов (синтаксис) и обладающая нек-рым смыслом, заложенным автором (семантика).

Каждый из упомянутых объектов выступает как единство нек-рой структуры (или схемы) и определенных свойств, или функции. При рассмотрении объектов как У. с. интересуются, главным образом, их схемно-функциональными характеристиками, не принимая во внимание остальные их качества. Поэтому две У. с., имеющие в нек-ром смысле одинаковые схемы и одинаковое функционирование, не различаются.

Математич. развитие понятия У. с. состоит в уточнении понятия схемы и понятия функции, а также нек-рых других деталей, связанных с учетом информации и расположения частей У. с. Первое построение У. с. относится к 1955 (см. [1]). Позже появились другие, более частные, варианты У. с.— причинные сети Маркова [2], агрегаты Бусленко [3] и др. Полное определение понятия У. с. (см. [1]) устроено так, что включает в себя все известные определения отдельных классов У. с. Ввиду значительной сложности уточнения понятия У. с. ниже дано его краткое описание с выделением в нем четырех основных звеньев: схемы, информации, координат и функции.

С х е м а У. с. представляет собой нек-рое соединение элементов, каждый из к-рых связан с заданной памятью, образуя в ней т. н. элементарные подсхемы. Состояния памяти, принимаемые из нек-рого конечного (или счетного) множества, задают и н ф о р м а ц и ю У. с. Расположение схемы характеризуется набором к о о р д и н а т (также из конечного или счетного множества) ее элементов. Наконец, ф у н к ц и я У. с. определяет возможные преобразования У. с., происходящие (детерминированно или стохастически) в моменты времени, принадлежащие нек-рой дискретной (не более чем счетной) шкале. Эти преобразования могут изменять информацию (перерабатывая состояния памяти), осуществлять движение У. с. (изменяя координаты элементов), изменять схему (структуру) и функцию (поведение).

Примеры показывают, что схема и функция в У. с. могут иметь разнообразный смысл. Благодаря этому У. с. позволяют описывать физич. У. с. адекватным образом, т. е. с сохранением их функциональных свойств и их структуры (схемы). Поэтому У. с. являются мощным средством для моделирования, при к-ром достаточно точно копируется не только функция объекта, но также и его схема.

Поскольку каждая элементарная подсхема данной У. с. фактически определяет нек-рую элементарную У. с., то исходная У. с. может рассматриваться как некий комплекс, нек-рое соединение элементарных У. с. Вот почему говорят не об определении понятия У. с., а о его уточнении, при к-ром одни У. с. выражаются через другие, взятые в качестве неопределяемых, элементарных. Необходимо также отметить широту понятия У. с., к-рое пригодно для описания не только простейших дискретных преобразователей, но и объектов со сложной функцией и структурой. Напр., для описания ЭВМ, АСУ, роботов, систем с переменной структурой, систем с «обучением» и т. п.

У. с. как математич. модели исходных физич. У. с., изучаемых в кибернетике, обладают рядом характерных черт. Прежде всего они являются объектами дискретной природы. Дискретными являются и схема, и ее координаты, и информация, и функция, и время. Для У. с., требующих специальных кибернетич. рассмотрений, характерна большая сложность. Эта сложность проявляется в том, что У. с. может иметь большое количество элементов, сложную структуру их связей, большую и сложно организованную память (и тем самым сложную информацию), сложное функционирование. Реальные объекты можно рассматривать как У. с., вообще говоря, многими способами. Фиксация У. с. зависит от выбора элементарных У. с. и может осуществляться в различных «масштабах». Таким образом, У. с. обладают свойством относительности. Возможность выбора элементарных У. с. в разных масштабах (на различных уровнях) позволяет во многих случаях рассматривать исходную У. с. как иерархию У. с., в к-рой элементарные У. с. более высокого уровня являются У. с. относительно элементарных У. с. более низкого уровня. В этом случае говорят, что У. с. обладает свойством иерархичности. Наконец, как правило, У. с. описывает исходный объект не вполне точно, а с нек-рой погрешностью. Благодаря этому она выступает как нек-рое приближение к объекту.

Существуют попытки расширить трактовку понятия У. с., включив в него и непрерывные объекты. В результате этого появляются «непрерывные» У. с., а также «непрерывно-дискретные» У. с. Впрочем, родственные объекты изучаются давно в теории динамич. систем и в теории регулирования. Между дискретными и непрерывными У. с. существует внешнее сходство, но больше имеется различий. Коренное отличие состоит в том, что дискретные У. с. описывают информационные процессы, а непрерывные — «энергетические» процессы.

Исследование У. с. ведется на специальных классах У. с., на модельных объектах. Выбор типов модельных объектов основан на следующих соображениях: а) их число должно быть небольшим, б) они должны быть непохожими друг на друга, в) они должны охватывать наиболее часто встречающиеся типы, г) они должны давать возможность исследовать на основе данного набора типов другие типы У. с. Ниже приведен список типов модельных объектов.

1) Формулы *алгебры логики* в данном базисе и реализующие *булевы функции* (в частности, дизъюнктивные нормальные формы).

2) *Схемы из функциональных элементов* в данном базисе и реализующие системы булевых функций.

3) *Контактные схемы*, реализующие матрицы из булевых функций.

4) Автоматы в нек-ром автоматном базисе и реализующие преобразования «входных» последовательностей в «выходные» (см. *Автомат конечный*).

5) Операторные алгоритмы, реализующие *вычислимые функции*.

Для данных модельных объектов характерно то, что каждая У.с. U полностью определяется своей схемой Σ и функцией Φ, т. е. парой (Σ, Φ). Здесь $U=(\Sigma, \Phi)$. С другой стороны, для каждого класса $\mathfrak{U}$ модельных объектов существует функция φ такая, что $\Phi=\varphi(\Sigma)$, т. е. функция однозначно определяется схемой. Более того, функция φ является вычислимой функцией. В этом случае каждый из модельных классов может быть охарактеризован другим способом. Пусть $\mathfrak{S}=\{\Sigma\}$ и $\mathfrak{F}=\{\Phi\}$, где $(\Sigma, \Phi)\in\mathfrak{U}$. Класс $\mathfrak{U}$ полностью определен заданием множеств $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{F}$, а также заданием алгоритма A, вычисляющего φ.

Основная проблематика теории У. с. группируется вокруг трех проблем (см. [4]): проблема синтеза (см. *Синтеза задачи*), проблема *эквивалентных преобразо-*

ваний У. с., проблема надежности У. с. (см. *Надежность и контроль управляющих систем*). Сопоставление результатов, полученных по этим проблемам для различных классов модельных объектов, показывает, что имеется четкая закономерность в формулировках соответствующих теорем, наблюдается сходство методов доказательств упомянутых теорем; доказательства теорем для более сложных У. с. часто используют соответствующие теоремы для более простых классов.

Лит.: [1] Яблонский С. В., «Проблемы кибернетики», 1959, в. 2, с. 7—38; [2] Марков А. А., в сб.: Кибернетика, мышление, жизнь, М., 1964; [3] Бусленко Н. П., «Изв. АН СССР. Сер. технич. кибернетика», 1963, № 5, с. 7—18; [4] Ляпунов А. А., Яблонский С. В., «Проблемы кибернетики», 1963, в. 9, с. 5—22.

С. В. Яблонский.

УПРАВЛЯЮЩАЯ ФУНКЦИЯ, управление,— функция $u(t)$, входящая в дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t, x, u), \; x(t_0) = x_0, \quad f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

значения к-рой в каждый момент времени могут выбираться произвольным образом.

Обычно на область изменения $u(t)$ при каждом t налагается ограничение

$$u(t) \in U, \quad (2)$$

где U — заданное замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$. Управление наз. допустимым, если при каждом t оно удовлетворяет ограничению (2). Различные допустимые управления $u(t)$ определяют соответствующие различные траектории $x(t)$, исходящие из начальной точки x_0.

Если задан функционал

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, u)\, dt \quad (3)$$

и граничные условия на правом конце траектории в момент времени t_1:

$$x(t_1) \in X_1, \quad (4)$$

где X_1 — нек-рое множество в $\mathbb{R}^n$ (в частном случае — точка), то можно поставить вопрос об определении оптимального управления $u(t)$, доставляющего оптимальное значение функционала к задаче (1)—(4). Вопросы, связанные с определением оптимальной У. ф., являются предметом теории оптимального управления и вариационного исчисления (см. [1], [2]).

В отличие от переменных $x = (x^1, \ldots, x^n)$, называемых фазовыми переменными (или фазовыми координатами), управления $u = (u^1, \ldots, u^m)$ входят в уравнение (1) без своих производных. Поэтому (1) имеет смысл не только при непрерывном, но и при кусочно непрерывном (и даже измеримом) управлении $u(t)$. Причем при каждом допустимом кусочно непрерывном управлении $u(t)$ уравнение (1) определяет непрерывную, кусочно гладкую траекторию $x(t)$.

В большинстве практич. задач оптимальное управление существует в классе кусочно непрерывных функций. Однако встречаются задачи, в к-рых оптимальное управление не является кусочно непрерывным, а принадлежит классу измеримых по Лебегу функций. В этих задачах оптимальное управление имеет бесконечное число точек разрыва, сгущающихся к нек-рой точке, напр. к точке входа на особый режим k-го порядка, $k > 1$ (см. *Оптимальный режим особый*).

Необходимые условия, сформулированные в теории оптимального управления в виде принципа максимума Понтрягина, доказаны для самого общего случая, в к-ром исследуемая на оптимальность У. ф. предполагается измеримой (в частности, она может быть кусочно непрерывной или непрерывной).

Согласно принципу максимума для оптимальности управления $u(t)$ (в случае минимизации функционала (3)) необходимо, чтобы при каждом t управление $u(t)$ доставляло максимум функции Гамильтона

$$H(t, x, \psi, u) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f^i(t, x, u)$$

на множестве U, где $\psi=(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ — сопряженная вектор-функция, определяемая из сопряженной системы

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i=1, \ldots, n, \quad \psi_0 = \text{const} \leqslant 0.$$

Аналогом принципа максимума в вариационном исчислении, позволяющим определить «свободные» функции в условиях связи, является уравнение Эйлера и необходимое условие Вейерштрасса.

Для существования оптимального измеримого по Лебегу управления, доставляющего минимум функционалу (3), достаточно, чтобы при каждом t, x множество значений вектора правых частей $\{f(t, x, U)\}$, получающееся, когда управление u пробегает всю допустимую область U, было выпуклым в $\mathbb{R}^n$, а точная нижняя граница $\inf\limits_{u \in U} \{f^0(t, x, U)\}$ множества значений, принимаемых подинтегральной функцией, была выпуклой вниз функцией по u. Если эти условия не выполняются, то могут быть случаи, когда минимизирующая последовательность управлений $u_n(t)$ не сходится даже в классе измеримых функций. В этих случаях говорят, что имеет место скользящий оптимальный режим. Скользящему оптимальному режиму можно придать строгий смысл как особому оптимальному управлению в расщепленной задаче, тесно связанной с исходной (см. *Оптимальный режим скользящий*).

Используя необходимые, а также достаточные условия оптимальности, установленные в теории оптимального управления и вариационном исчислении, можно определить оптимальную У. ф. и соответствующую оптимальную фазовую траекторию в рассматриваемой задаче. Имеются различные численные методы построения оптимального управления (см. *Вариационное исчисление*; численные методы).

В более общем случае У. ф. может зависеть от неск. аргументов. В этом случае говорят об У. ф. с распределенными параметрами.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969; [2] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [3] Вапнярский И. Б., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1967, т. 7, № 2, с. 259—83; [4] Бутковский А. Г., Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, М., 1965. *И. Б. Вапнярский.*

УПРУГОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — раздел механики, в к-ром изучаются перемещения, деформации и напряжения, возникающие в покоящихся или движущихся упругих телах под действием нагрузки.

Напряжение в любой точке тела характеризуется 6 величинами — компонентами напряжений: нормальными напряжениями σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz} и касательными напряжениями σ_{xy}, σ_{yz}, σ_{zx}, причем $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$ и т. д. Деформация в любой точке тела также характеризуется 6 величинами — компонентами деформаций: относительными удлинениями ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz} и сдвигами ε_{xy}, ε_{yz}, ε_{zx}, причем $\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}$ и т. д.

Основным физическим законом теории упругости является обобщенный з а к о н Г у к а, согласно к-рому нормальные напряжения линейно зависят от деформаций. Для изотропных материалов эти зависимости имеют вид:

$$\begin{gathered}\sigma_{xx}=3\lambda\varepsilon+2\mu\varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{yy}=3\lambda\varepsilon+2\mu\varepsilon_{yy}, \\ \sigma=3\lambda\varepsilon+2\mu\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{xy}=2\mu\varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{yz}=2\mu\varepsilon_{yz}, \quad \sigma_{zx}=2\mu\varepsilon_{zx},\end{gathered} \tag{1}$$

где $\varepsilon=\frac{1}{3}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz})$ — средняя (гидростатич.) деформация, λ и $\mu=G$ — *Ламе постоянные*. Равенство (1) можно также представить в виде:

$$\sigma_{xx}-\sigma=2\mu(\varepsilon_{xx}-\varepsilon), \ \ldots, \ \sigma_{xy}=2\mu\varepsilon_{xy}, \ \ldots, \ \sigma=3K\varepsilon, \tag{2}$$

где $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})$ — среднее (гидростатич.) напряжение, K — модуль всестороннего сжатия.

Для анизотропного материала 6 зависимостей между компонентами напряжений и деформаций имеют вид:

$$\sigma_{xx} = c_{11}\varepsilon_{xx}+c_{12}\varepsilon_{yy}+c_{13}\varepsilon_{zz}+c_{14}\varepsilon_{xy}+c_{15}\varepsilon_{yz}+c_{16}\varepsilon_{zx},$$

. . . . . .

Из входящих сюда 36 коэффициентов c_{ij}, называемых модулями упругости, 21 между собой независимы и характеризуют упругие свойства анизотропного материала.

У. м. т. при равновесии состоит в том, чтобы, зная действующие внешние силы (нагрузки) и так наз. граничные условия, определить значения в любой точке тела компоненты напряжений и деформаций, а также компоненты u_x, u_y, u_z вектора перемещения каждой частицы тела, т. е. определить эти 15 величин в виде функций от координат x, y, z точек тела. Исходными для решения этой задачи являются дифференциальные уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\rho X=0,\\
\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}+\rho Y=0,\\
\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\rho Z=0,
\end{aligned} \qquad (3)$$

где ρ — плотность материала, X, Y, Z — проекции на координатные оси действующей на каждую частицу тела массовой силы (напр., силы тяжести), отнесенные к массе этой частицы.

К 3 уравнениям равновесия присоединяются 6 равенств (1) в случае изотропного тела и еще 6 равенств вида:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x}, \ldots, \quad 2\varepsilon_{xy}=\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}, \ldots, \qquad (4)$$

устанавливающих зависимости между компонентами деформаций и перемещений.

Когда на часть S_1 граничной поверхности тела действуют заданные поверхностные силы (напр., силы контактного взаимодействия), проекции к-рых, отнесенные к единице площади, равны F_x, F_y, F_z, а для части S_2 этой поверхности заданы перемещения ее точек φ_x, φ_y, φ_z, граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{xx}l_1+\sigma_{xy}l_2+\sigma_{xx}l_3=F_x \quad (\text{на } S_1), \qquad (5)$$

. . . . . .

$$u_x=\varphi_x, \quad u_y=\varphi_y, \quad u_z=\varphi_z \quad (\text{на } S_2), \qquad (6)$$

где l_1, l_2, l_3 — косинусы углов между нормалью к поверхности и координатными осями. Первые условия означают, что искомые напряжения должны удовлетворять на границе S_1 трем равенствам (5), а вторые — что искомые перемещения должны удовлетворять на границе S_2 равенствам (6); в частном случае может быть $\varphi_x=\varphi_y=\varphi_z=0$ (часть поверхности S_2 жестко закреплена).

В общем случае поставленная задача представляет собой пространственную задачу, решение к-рой трудно осуществимо. Точные аналитические решения имеются лишь для нек-рых частных задач: об изгибе и кручении бруса, о контактном взаимодействии двух тел, о концентрации напряжений, о действии силы на вершину конического тела и др. Так как уравнения У. м. т. являются линейными, то решение задачи о совместном действии двух систем сил получается путем суммирования решений для каждой системы сил, действующих раздельно (принцип линейной суперпозиции). В частности, если для к.-н. тела найдено решение при действии сосредоточенной силы в к.-л. произвольной точке тела, то решение задачи при произвольном распределе-

нии нагрузок получается путем суммирования (интегрирования). Такие решения, называемые функциями Грина, получены лишь для небольшого числа тел (неограниченное пространство, полупространство, ограниченное плоскостью, и нек-рые др.). Предложен ряд аналитических методов решения пространственной задачи У. м. т.: вариационные методы (Ритца, Бубнова — Галеркина и др.), метод упругих потенциалов и др. Интенсивно разрабатываются численные методы (конечно-разностные, метод конечных элементов и др.).

При решении плоских задач (когда один из компонентов перемещения равен нулю, а два других зависят только от двух координат) широкое применение находят методы теории функций комплексного переменного. Для стержней, пластин и оболочек, часто используемых в технике, найдены приближенные решения многих практически важных задач на основе нек-рых упрощающих предположений (см. *Плоская задача* теории упругости, *Оболочек теория*).

В задаче термоупругости определяются напряжения и деформации, возникающие вследствие неоднородного распределения температуры. При постановке этой задачи в правую часть первых трех уравнений (1) добавляется член $-(3\lambda+2\mu)\alpha T$, где α — коэффициент линейного теплового расширения, $T(x_1, x_2, x_3)$ — заданное поле температуры. Аналогичным образом строится теория электромагнитоупругости и упругости подвергаемых облучению тел. Большой практический интерес представляют задачи У. м. т. для неоднородных тел. В этих задачах коэффициенты λ и μ в уравнении (1) являются не константами, а функциями координат, определяющими поле упругих свойств тела, к-рое иногда задают статистически (в виде нек-рых функций распределения). Применительно к этим задачам разрабатываются статистич. методы У. м. т., отражающие статистич. природу свойств поликристаллич. тел.

В динамических задачах теории упругости искомые величины являются функциями координат и времени. Исходными для матем. решения этих задач являются дифференциальные уравнения движения, отличающиеся от уравнений (3) тем, что правые части вместо нуля содержат инерционные члены и т. д.

Одной из проблем У. м. т. является постановка задач и разработка методов их решения при конечных (больших) упругих деформациях.

Лит.: [1] Лява А., Математическая теория упругости, пер. с англ., М.— Л., 1935; [2] Лейбензон Л. С., Курс теории упругости, 2 изд., М.— Л., 1947; [3] Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд., М., 1966; [4] Трехмерные задачи математической теории упругости, Тб., 1968; [5] Лурье А. И., Теория упругости, М., 1970; [6] Стретт Дж. В. [лорд Рэлей], Теория звука, пер. с англ., т. 1—2, М., 1955; [7] Теория температурных напряжений, пер. с англ., М., 1964; [8] Снеддон И. Н., Берри Д. С., Классическая теория упругости, пер. с англ., М., 1961; [9] Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Н., Теория упругости, пер. с англ., М., 1975.

По материалам статьи Упругости теория из БСЭ-3.

УРАВНЕНИЕ — аналитическая запись задачи о разыскании значений аргументов, при к-рых значения двух данных функций равны. Аргументы, от к-рых зависят эти функции, наз. обычно неизвестными, а значения неизвестных, при к-рых значения функций равны,— решениями, или корнями, У.; о таких значениях неизвестных говорят, что они удовлетворяют данному У.

Совокупность решений данного У. зависит от области M значений, допускаемых для неизвестных. У. может не иметь решений в M, тогда оно наз. неразрешимым в области M. Если У. разрешимо, то оно может иметь одно или несколько, или даже бесконечное множество решений. Напр., У. $x^4-4=0$ неразрешимо в области рациональных чисел, но имеет два решения: $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$ в области действитель-

ных чисел и четыре решения: $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$, $x_3=i\sqrt{2}$, $x_4=-i\sqrt{2}$ — в области комплексных чисел. У. $\sin x=0$ имеет бесконечное множество решений: $x_k=k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, в области действительных чисел.

Если У. имеет решениями все числа области M, то оно наз. т о ж д е с т в о м в области M.

Совокупность У., для к-рых требуется найти значения неизвестных, удовлетворяющие одновременно всем этим У., наз. с и с т е м о й У.; совокупность значений неизвестных, удовлетворяющих одновременно всем У. системы, наз. р е ш е н и е м с и с т е м ы. Две системы У. (или два У.) наз. р а в н о с и л ь н ы м и, если каждое решение одной системы (одного У.) является решением другой системы (другого У.), и наоборот, причем обе системы (оба У.) рассматриваются в одной и той же области.

Процесс разыскания решений У. заключается обычно в замене У. равносильным. В нек-рых случаях приходится заменять данное У. другим, для к-рого совокупность корней шире, чем у данного У. Поэтому, если при решении У. делались действия, могущие привести к появлению посторонних корней, то все полученные корни преобразованного У. проверяют подстановкой в исходное У.

Наиболее полно изучены *алгебраические уравнения*; их решение было одной из важнейших задач алгебры в 16—17 вв. Если $f(x)$ — трансцендентная функция, то У. $f(x)=0$ наз. т р а н с ц е н д е н т н ы м, причем в зависимости от вида $f(x)$ оно наз. т р и г о н о м е т р и ч е с к и м У., л о г а р и ф м и ч е с к и м У., п о к а з а т е л ь н ы м У.

При практич. решении У. обычно применяются различные приближенные методы (см., напр., *Линейная алгебра*; численные методы).

Среди систем У. простейшими являются системы *линейных уравнений*. Решение системы У. (не обязательно линейных) сводится, вообще говоря, к решению одного У. при помощи т. н. исключения неизвестных (см. *Исключения теория*).

В теории чисел рассматриваются т. н. неопределенные У., изучение решений к-рых составляет предмет теории *диофантовых уравнений*.

В общем случае У. является записью задачи о разыскании таких элементов a нек-рого множества A, что $F(a)=\Phi(a)$, где F и Φ — заданные отображения множества A во множество B. Если A и B — множества чисел, то возникают У. рассмотренного выше вида. Если A и B — множества точек в многомерных пространствах, то получаются системы У. Если A и B — множества функций, то в зависимости от характера отображения могут получаться *дифференциальные уравнения обыкновенные*, *дифференциальные уравнения с частными производными*, *интегральные уравнения* и др. виды У.

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

УРАВНЕНИЕ В ВАРИАЦИЯХ, с и с т е м а у р а в н е н и й в в а р и а ц и я х, — линейное дифференциальное (или разностное) уравнение, решением к-рого является производная по параметру решения дифференциального (соотв. разностного) уравнения. Пусть $x(\cdot):(\alpha, \beta)\longrightarrow \mathbb{R}^n$ есть решение задачи Коши $\dot{x}=f(x, t)$, $x(t_0)=x_0$, график к-рого лежит в области G, в к-рой f и f'_x непрерывны. Тогда для всякого отрезка $[p, s]\subset(\alpha, \beta)$ и для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всякой непрерывной функции g: $G\longrightarrow \mathbb{R}^n$, имеющей в G непрерывную производную g'_x и удовлетворяющей неравенству

$$\|g-f\|_{C(G)}=\sup_{\text{def } (x,\ t)\in G}|g(x,\ t)-f(x,\ t)|<\delta,$$

и всякого $y_0 \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего неравенству $|y_0 - x_0| < \delta$, задача Коши $\dot{y} = g(y, t)$, $y(t_0) = y_0$ имеет решение $y(\cdot)$, определенное в нек-рой окрестности отрезка $[p, s]$. Для разности решений $y(\cdot) - x(\cdot)$ имеет место формула

$$y(t) - x(t) = z(t) + o(|y_0 - x_0| + \|g - f\|_{C^1(G)}),$$

где $z(\cdot)$ — решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{z} = A(t)z + h(t), \qquad (1)$$

в к-ром $A(t) = f'_x(x_0(t), t)$, $h(t) = g(x_0(t), t) - f(x_0(t), t)$, с начальным значением $z(t_0) = y(t_0) - x(t_0)$; здесь $o(\cdot)$ — «о малое» — равномерно относительно $t \in [p, s]$, а норма $\|g - f\|_{C^1(G)}$, по определению, равна

$$\sup_{(x, t) \in G} \{|g(x, t) - f(x, t)| + \|g'_x(x, t) - f'_x(x, t)\|\}.$$

Уравнение (1) наз. уравнением в вариациях уравнения $\dot{x} = f(x, t)$ вдоль решения $x(\cdot)$.

В литературе чаще приводится более слабая форма этой теоремы (в к-рой вместо дифференцируемости по Фреше устанавливается дифференцируемость в более слабом смысле): если функция $f(x, t, \mu): G \times (a, b) \to \mathbb{R}^n$ в произведении $G \times (a, b)$ области $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ и интервала $(a, b) \subset \mathbb{R}$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные f'_x, f'_μ, а функция $x_0(\cdot): (a, b) \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема, то решение $x(\cdot, \mu)$ задачи Коши $\dot{x} = f(x, t, \mu)$, $x(t_0) = x_0(\mu)$ непрерывно дифференцируемо по μ в интервале (a, b) и его производная $x'_\mu(\cdot, \mu)$ есть решение линейного дифференциального уравнения (У. в в. уравнения $\dot{x} = f(x, t, \mu)$ вдоль решения $x(\cdot, \mu)$)

$$\dot{z} = A(t)z + h(t),$$

где $A(t) = f'_x(x(t, \mu), t, \mu)$, $h(t) = f'_\mu(x(t, \mu), t, \mu)$, удовлетворяющее начальному условию $z(t_0) = x'_{0\mu}(\mu)$.

У. в в. k-го порядка — линейное дифференциальное (разностное) уравнение, решением к-рого является k-я производная по параметру решения дифференциального (разностного) уравнения. Линейное однородное уравнение, соответствующее У. в в. любого порядка, — одно и то же (т. е. не зависит от k), различие — в неоднородности $h(t)$.

Если правая часть дифференциального уравнения не варьируется ($g = f$ в первой формулировке, $f(x, t, \mu)$ не зависит от μ — во второй), то У. в в. (1-го порядка) однородно.

У. в в. автономной системы $\dot{x} = f(x)$ в неподвижной точке (т. е. вдоль решения $x(\cdot) \equiv x_0$) есть линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, причем если $f(\cdot)$ не варьируется, то эта система однородная для вариации 1-го порядка и «с квазимногочленом в правой части» — для вариаций высших порядков. У. в в. автономной системы вдоль периодического (почти периодического) решения есть *линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами* (соответственно, *линейная система дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами*).

Приведенная в начале статьи дефиниция относится к уравнениям любого порядка. Напр., У. в в. (если варьируется только начальная точка в фазовом пространстве) уравнения маятника $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$ в нижнем положении равновесия ($x = 0$, $\dot{x} = 0$) есть уравнение $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, наз. уравнением малых колебаний маятника, а в верхнем положении равновесия ($x = \pi$, $\dot{x} = 0$) — уравнение $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$.

Для дифференциального уравнения на дифференцируемом многообразии У. в в. вдоль решения определяется аналогично тому, как выше это было сделано в $\mathbb{R}^n$; значения решений У. в в. принадлежат касательному расслоению многообразия. Существуют и редукции случая произвольного дифференцируемого многообразия к случаю $\mathbb{R}^n$, состоящие первая в том, что многообразие вкладывается в евклидово пространство достаточно большой размерности, а дифференциальное уравнение (векторное поле) продолжается в его окрестность, а вторая — в том, что дифференциальное уравнение, заданное на дифференцируемом многообразии, записывается в окрестности траектории в картах многообразия, причем, выбирая карты, гладко зависящие от точки (напр., для риманова многообразия — пользуясь экспоненциальными геодезич. отображениями), можно записать данное уравнение в виде дифференциального уравнения в $\mathbb{R}^n$, имеющего (как и в первой редукции) правую часть того же класса гладкости, что и правая часть (векторное поле) уравнения на многообразии. Для дифференциального уравнения $\dot{x}=F(x)$ на римановом многообразии У. в в. вдоль траектории $x(t)$, если F не варьируется, может быть записано в виде

$$\nabla_{F(x(t))}\xi = \nabla_{\xi} F(x(t)),$$

где ∇_a — *ковариантная производная*. У. в в. дифференцируемого отображения $f\colon V^n \to V^n$ (V^n — дифференцируемое многообразие) вдоль траектории $\{f^t x\}_{t\in\mathbb{Z}}$ является (если диффеоморфизм не варьируется) уравнение

$$\xi(t+1) = df_{f^t x}\,\xi(t);$$

значение решения $\xi(\cdot)$ этого уравнения в точке t принадлежит касательному пространству $T_{f^t x}V^n$ многообразия V^n в точке $f^t x$, а само решение есть последовательность

$$\{d(f^t)_x \xi\}_{t\in\mathbb{Z}}, \quad \xi \in T_x V^n,$$

где $d(f^m)_x$ — производная m-й степени диффеоморфизма f в точке x.

Пусть V^n — замкнутое дифференцируемое многообразие. Множество S всех диффеоморфизмов f класса C^1, отображающих V^n на V^n, наделяется C^1-топологией. Имеют место утверждения (см. [4]): 1) для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ характеристич. показатель Ляпунова

$$\lambda_{n-k+1}(f, x) \overset{\text{def}}{=} \overset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbb{R}^k \in G_k(T_x V^n)} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^k_*} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |df^t \xi|, \qquad (2)$$

где $G_k(T_x V^n)$ — грассманово многообразие k-мерных векторных подпространств касательного пространства $T_x V^n$, есть функция $\lambda_{n-k+1}(\cdot)\colon S\times V^n \to \mathbb{R}$ второго класса Бэра (см. *Бэра классы*); 2) в пространстве $S\times V^n$ имеется всюду плотное множество D типа G_δ, обладающее свойствами: а) для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\lambda_k(\cdot)\colon S\times V^n \to \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху во всякой точке множества D; б) для всяких $(f, x) \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$ подпространство

$$l_\lambda(f, x) \underset{\text{def}}{=} \left\{ \xi \in T_x V^n \colon \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |df^t \xi| \leqslant \lambda \right\}$$

экспоненциально отделено от своего алгебраич. дополнения l^c_λ в касательном пространстве $T_x V^n$, т. е. существуют $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для всяких $\xi \in l^c_\lambda$, $\upsilon \in l_\lambda(f, x)$ и любых целых $t \geqslant s \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$|df^t \xi| \cdot |df^s \upsilon| \geqslant \alpha\, |df^s \xi| \cdot |df^t \upsilon| \exp(\beta(t-s)).$$

Множество S векторных полей F класса C^1 на замкнутом дифференцируемом многообразии V^n наделяется C^1-топологией. Векторное поле $F \in S$ индуцирует динамич. систему f^t (действие (класса C^1) группы $\mathbb{R}$) на V^n. Для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ показатель Ляпунова $\lambda_{n-k+1}(F, x)$, по определению, равен правой части равенства (2).

Имеют место утверждения:

а) при всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\lambda_k(\cdot)\colon S \times V^n \longrightarrow \mathbb{R}$ принадлежит второму классу Бэра [4];

б) для всякого $F \in S$, для всякого инвариантного относительно динамич. системы f^t, индуцированной векторным полем F, распределения вероятностей на V^n (σ-алгебра к-рого содержит все борелевские множества) почти всякая точка x такова, что У. в в. уравнения $\dot{x} = F(x)$ вдоль траектории $\{f^t x\}$ есть правильная линейная система дифференциальных уравнений (см. [5], [6]);

в) для всякого $m \in \mathbb{N}$ пусть $S^{(m)}$ обозначает множество векторных полей класса C^m на V^n, наделенное C^m-топологией; пусть P — распределение вероятностей на V^n, σ-алгебра к-рого содержит все борелевские множества, и пусть $S_P^{(m)}$ обозначает подпространство пространства $S^{(m)}$, состоящее из тех векторных полей, для к-рых распределение P инвариантно относительно индуцированных ими динамич. систем; тогда (см. [7]):

1) для всяких $m \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{V^n} \lambda_i(\cdot, x)\, dP(x)\colon S_P^{(m)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(фазовое среднее суммы старших показателей Ляпунова У. в в.) полунепрерывна сверху,

2) для всякого $m \in \mathbb{N}$ в пространстве $S_P^{(m)}$ имеется всюду плотное множество типа G_δ, во всякой точке к-рого функция

$$\int_{V^n} \lambda_k(\cdot, x)\, dP(x)\colon S_P^{(m)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

непрерывна (для всякого $k \in \{1, \ldots, n\}$), т. е. в пространствах $S_P^{(m)}$ типична непрерывность фазовых средних показателей Ляпунова У. в в.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956; [2] Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, пер. с англ., М.— Л., 1937; [3] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974; [4] Миллионщиков В. М., «Дифференц. уравнения», 1983, т. 19, № 2, с. 215—20; [5] Оселедец В. И., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1968, т. 19, с. 179—210; [6] Миллионщиков В. М., «Матем. сб.», 1968, т. 77, с. 163—73; [7] его же, «Дифференц. уравнения», 1978, т. 14, № 4, с. 759—60.

В. М. Миллионщиков.

УРАВНЕНИЕ В КОНТИНГЕНЦИЯХ — соотношение

$$D^*x(t) \subset F(t, x(t)),$$

где $D^*x(t)$ — контингенция вектор-функции $x(t)$, т. е. множество всех частичных пределов отношения

$$[x(t') - x(t)]/(t' - t)$$

при $t' \to t$, а $F(t, x)$ — заданное непустое множество в $\mathbb{R}^n$, зависящее от t и x (см. [1], [2]). В случае когда множество $F(t, x)$ ограничено, замкнуто, выпукло и является полунепрерывной сверху относительно включения функцией точки (t, x), У. в к. равносильно уравнению в паратингенциях (определяемому аналогично У. в к., но с использованием отношения

$$[x(t') - x(t'')]/(t' - t'') \quad \text{при} \quad t' \longrightarrow t, \quad t'' \longrightarrow t,$$

см. [3]) и *дифференциальному включению*

$$dx/dt \in F(t, x)$$

(см. [4]). Свойства У. в к. подобны свойствам дифференциальных включений.

Лит.: [1] Marchaud A., «Bull. Soc. math. France», 1934, t. 62, p. 1—38; [2] Барбашин Е. А., Алимов Ю. И., «Изв. высших учебн. заведений. Математика», 1962, № 1, с. 3—13; [3] Zaremba S. C., «Bull. Sci. math.», 1936, ser. 2, t. 60,

№ 5, p. 139—60; [4] W a ż e w s k i T., «Bull. Acad. Polon. sci., Ser. math....», 1961, v. 9, № 12, p. 865—67. *А. Ф. Филиппов.*

УРАВНОВЕШЕННОЕ МНОЖЕСТВО — множество U действительного или комплексного векторного пространства X такое, что из $x \in U$ и $|\lambda| \leqslant 1$ следует $\lambda x \in U$. Примером У. м. может служить единичный шар нормированного векторного пространства и вообще окрестность нуля U базы окрестностей нуля топологич. векторного пространства. Эти окрестности нуля являются, кроме того, поглощающими множествами, т. е. такими, что для любого $x \in X$ существует $\alpha > 0$ такое, что $x \in \lambda U$ при $|\lambda| \geqslant \alpha$. Если U — выпуклое поглощающее У. м., то функционал $p_U(x) = \inf_{x \in \lambda U} |\lambda|$ является *полунормой*, т. е. обладает свойствами

$$p_U(x+y) = p_U(x) + p_U(y), \quad p_U(\lambda x) = |\lambda| p_U(x).$$

У. м. наз. также центрированными.

Лит.: [1] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977. *В. И. Соболев.*

УРНОВАЯ СХЕМА — одна из простейших моделей теории вероятностей. Описание У. с. таково: рассматривается некий сосуд — урна — с шарами белого и черного цвета. Из урны наугад извлекается один шар, а затем он возвращается в урну вместе с c шарами того же цвета, что и вынутый шар, и d шарами другого цвета. После перемешивания шаров в урне процедура повторяется любое нужное число раз. Предполагается, что первоначально урна содержала $a>0$ и $b>0$ белых и черных шаров соответственно. Числа c и d — параметры У. с.— могут быть и отрицательными.

У. с. дает удобную возможность вычисления нек-рых основных вероятностей через условные вероятности. При различных значениях параметров c и d получаются многие известные схемы теории вероятностей: при $c=0$, $d=0$ — схема случайного выбора с возвращением (см. *Бернулли испытания*), при $c=-1$, $d=0$ — схема случайного выбора без возвращения, при $c=-1$, $d=-1$ — модель диффузии Эренфестов, при $c>0$, $d=0$ — урновая схема Пойа и т. д. Эти частные случаи служат моделями многих реальных явлений или методов их исследования. Так, напр., У. с. Пойа используется для описания эпидемий, при к-рых осуществление к.-л. событий увеличивает вероятность их последующего появления. В рамках У. с. могут быть введены многие распределения теории вероятностей, такие, как биномиальное, гипергеометрическое, геометрическое, Пойа. Для описания предельных случайных процессов, возникающих в У. с., применяются отрицательное биномиальное распределение и распределение Пуассона.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967.

А. В. Прохоров.

УРОВНЯ ЛИНИЯ функции Грина — множество точек

$$L_\lambda = \{z \in D : G(z, z_0) = \lambda = \text{const}\}, \ 0 \leqslant \lambda < \infty,$$

где $G(z, z_0)$ — функция Грина области D комплексной плоскости с полюсом в точке $z_0 \in D$. Если область D односвязна, то структура этого множества легко выясняется при конформном отображении D на круг $|\zeta|<1$, переводящем точку z_0 в $\zeta=0$. Функция Грина инвариантна при этом отображении, а У. л. функции Грина круга $|\zeta|<1$ с полюсом в $\zeta=0$, т. е. $\log \frac{1}{|\zeta|}$, служат окружности $|\zeta|=\text{const}$. Таким образом, в случае односвязной области У. л. $G(z, z_0)=\lambda$ являются простые замкнутые кривые, совпадающие при $\lambda=0$ с границей области D и стремящиеся при $\lambda \to +\infty$ к точке z_0. Если область D m-связна и граница ее состоит из жордановых кривых C_ν, $\nu=1, \ldots, m$, то: если $\lambda>0$ достаточно велико, то У. л. является жордановой кривой; при $\lambda \to +\infty$ соответствующая У. л. стремится к точке z_0, а при убывании λ эта кривая удаляется от z_0; если $m>1$, то при нек-ром

значении λ У. л. имеет самопересечение, а затем распадается на непересекающиеся простые замкнутые кривые; при достаточно малом λ У. л. состоит из m жордановых кривых, и при $\lambda \to 0$ каждая из этих кривых стремится к одной из граничных кривых области D.

В вопросах приближения функций многочленами на замкнутом ограниченном множестве B с односвязным дополнением большую роль играют оценки расстояния от точки границы множества B до У. л. дополнения множества B (см. [4], [5]).

При однолистных конформных отображениях круга $|z|<1$ функциями класса

$$S=\{f : f(z)=z+\dots,\ f \text{ регулярна и однолистна в } |z|<1\}$$

поведение У. л. $L(f, r)$ (образов окружностей $|z|=r<1$) наглядно выясняет степень искажения. Любой функцией класса S круг $|z|<r$, $0<r<2-\sqrt{3}$, отображается на выпуклую область, а круг $|z|<r$, $0<r<\operatorname{th}\pi/4$,— на звездообразную область. У. л. $L(f, r)$, $f\in S$, $0<r<1$, принадлежат кольцу

$$K_r=\{w : r(1+r)^{-2}\leqslant |w|\leqslant r(1-r)^{-2}\}$$

и ограничивают односвязную область, содержащую начало координат.

Для кривизны $K(f, r)$ У. л. $L(f, r)$ в классе S имеет место точная оценка:

$$K(f, r)\geqslant \frac{1-4r+r^2}{r}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2,$$

и знак равенства имеет место для функции $f(z)=\frac{z}{(1+z)^2}$ в точке $z=r$. Точная верхняя оценка для $K(f, r)$ в классе S пока (1984) неизвестна. Точная оценка сверху для $K(f, r)$ в подклассе звездообразных функций из S имеет вид:

$$K(f, r)\leqslant \frac{1+4r+r^2}{r}\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2,$$

и знак равенства имеет место для функции $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ в точке $z=r$.

При отображении круга $|z|<1$ функцией класса S число точек перегиба У. л. $L(f, r)$ и число точек нарушения ее звездности (т. е. точек У. л., в к-рых меняется направление вращения радиуса-вектора, когда точка z пробегает окружность $|z|=r$ в определенном направлении) могут изменяться немонотонно при возрастании r, т. е. если $r_1<r_2$, то может оказаться, что У. л. $L(f, r_1)$ имеет больше точек перегиба и больше точек нарушения звездности, чем $L(f, r_2)$.

Лит.: [1] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 2, М., 1962; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (Добавление); [3] Александров И. А., Параметрические продолжения в теории однолистных функций, М., 1976; [4] Дзядык В. К., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 5, с. 697—763; [5] Лебедев Н. А., Широков Н. А., «Изв. АН Арм. ССР. Сер. математика», 1971, т. 6, № 4, с. 311—41.

Е. Г. Голузина.

УРОВНЯ МНОЖЕСТВО функции f — множество точек пространства $\mathbb{R}^n$, на к-ром $f=\text{const}$. Если функция f задана в квадрате Q плоскости $\mathbb{R}^2$ и имеет там частные производные, удовлетворяющие условию Липшица, то для почти всех C из интервала $\min\limits_{Q} f\subset f\subset \max\limits_{Q} f$ У. м.

$$M_c=\{x\in Q : f=c\}$$

состоит из конечного числа регулярных (на них $\operatorname{grad} f\neq 0$) кривых. См. также *Сарда теорема.*

М. И. Войцеховский.

УРЫСОНА ЛЕММА: для любых двух непересекающихся замкнутых множеств A и B нормального пространства X существует действительная и непрерывная во всех точках этого пространства функция f, принимаю-

щая во всех точках множества A значение 0, во всех точках множества B значение 1 и удовлетворяющая во всех точках $x \in X$ неравенству $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Эта лемма выражает не только необходимое, но и достаточное условие для того, чтобы T_1-пространство X было нормальным. *П. С. Александров.*

УРЫСОНА МЕТРИЗАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА: 1) Бикомпактное или счетнокомпактное хаусдорфово пространство тогда и только тогда метризуемо, когда оно имеет счетную базу.

2) Топологическое пространство со счетной базой тогда и только тогда метризуемо, когда оно нормально или (добавление А. Н. Тихонова) когда оно регулярно. *П. С. Александров.*

УРЫСОНА ПРОСТРАНСТВО, пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости Урысона,— топологич. пространство, в к-ром всякие две различные точки имеют окрестности с дизъюнктными замыканиями.

Лит.: [1] Александров П. С., Урысон П. С., Мемуар о компактных топологических пространствах, 3 изд., М., 1971, с. 40; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974. *Б. А. Ефимов.*

УРЫСОНА УРАВНЕНИЕ — нелинейное интегральное уравнение вида

$$\varphi(x) = \lambda \int_\Omega K[x, s, \varphi(s)]\, ds + f(x), \quad x \in \Omega, \qquad (*)$$

где Ω — ограниченное замкнутое множество конечномерного евклидова пространства, $K[x, s, t]$, $f(x)$ — заданные функции при $x, s \in \Omega$, $-\infty < t < \infty$. Пусть функция $K[x, s, t]$ непрерывна по совокупности переменных $x, s \in \Omega$, $|t| \leqslant \rho$ (ρ — нек-рое положительное число) и пусть

$$\left| \frac{\partial K[x, s, t]}{\partial t} \right| \leqslant M = \text{const}, \quad x, s \in \Omega, \quad |t| \leqslant \rho.$$

Тогда, если

$$|\lambda| M \operatorname{mes} \Omega < 1,$$

$$|\lambda| \max_{x \in \Omega} \int_\Omega \max_{|t| \leqslant \rho} |K[x, s, t]|\, ds \leqslant \rho,$$

то уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_\Omega K[x, s, \varphi(s)]\, ds$$

имеет единственное непрерывное решение $\varphi(x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющее неравенству $|\varphi(x)| \leqslant \rho$. Если φ_0 — произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству $|\varphi_0(x)| \leqslant \rho$ ($x \in \Omega$), то последовательные приближения

$$\varphi_n(x) = \lambda \int_\Omega K[x, s, \varphi_{n-1}(s)]\, ds,$$
$$n = 1, 2, \ldots,$$

равномерно на Ω сходятся к $\varphi(x)$.

Пусть оператор Урысона

$$A\varphi(x) = \int_\Omega K[x, s, \varphi(s)]\, ds$$

действует в пространстве $L_p(\Omega)$, $p > 1$, для всех t_1, t_2, $x, s \in \Omega$ выполняется неравенство

$$|K(x, s, t_1) - K(x, s, t_2)| \leqslant K_1(x, s)\, |t_1 - t_2|,$$

где K_1 — измеримая функция

$$\Delta^p = \int_\Omega \left(\int_\Omega K_1^{\frac{p}{p-1}}(x, s)\, ds \right)^{p-1} dx < \infty.$$

Тогда, при $|\lambda| < \Delta^{-1}$ и $f \in L_p(\Omega)$, уравнение $(*)$ имеет в $L_p(\Omega)$ единственное решение.

Уравнение $(*)$ при определенных предположениях впервые было изучено П. С. Урысоном (см. *Нелинейное интегральное уравнение*).

Лит.: [1] Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956; [2] Интегральные уравнения, М., 1968 (Справочная матем. б-ка).
В. В. Хведелидзе.

УРЫСОНА — БРАУЭРА ЛЕММА, Урысона — Брауэра — Тице лемма,— утверждение о возможности продолжения непрерывных функций с подпространства топологич. пространства на все пространство. Пусть X — нормальное пространство и F — его замкнутое подмножество. Тогда любую непрерывную функцию $f: F \to \mathbb{R}$ можно продолжить непрерывно до функции $g: X \to \mathbb{R}$, т. е. можно найти такую непрерывную функцию g, что $g(x)=f(x)$ для всех $x \in F$. При этом если функция f ограничена, то существует такое ее продолжение g, что

$$\sup_{x \in F} |f(x)| = \sup_{x \in X} |g(x)|.$$

У.— Б. л. была доказана Л. Брауэром (L. Brouwer) и А. Лебегом (H. Lebesgue) для $X=\mathbb{R}^n$, А. Тице (A. Titze) для произвольного метрич. пространства X и П. С. Урысоном — в приведенной выше формулировке (к-рая может служить характеризацией нормальных пространств и является, таким образом, окончательной).

Лит.: [1] Урысон П. С., «Math. Ann.», 1925, Bd 94, S. 262—95 (на рус. яз.: Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1, М.— Л., 1951, с. 177—218).
И. Г. Кошевникова.

УСЕЧЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей, получаемое из данного распределения перенесением массы, заключенной вне нек-рого фиксированного отрезка, на этот отрезок. Пусть вероятностное распределение на прямой задано функцией распределения $F(x)$. Усеченным распределением, отвечающим F, наз. распределение с функцией распределения

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant a, \\ \dfrac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)} & \text{при } a < x \leqslant b, \\ 1 & \text{при } x > b,\ a < b. \end{cases} \qquad (1)$$

В частном случае $a=-\infty$ ($b=\infty$) У. р. наз. усеченным справа (слева).

Наряду с (1) рассматриваются У. р. вида

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant a, \\ F(x)-F(a) & \text{при } a < x < c, \\ F(x)+1-F(b) & \text{при } c \leqslant x < b, \\ 1 & \text{при } x \geqslant b, \end{cases} \qquad (2)$$

или

$$F_{a,\,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ F(x) & \text{при } a \leqslant x < b, \\ 1 & \text{при } x \geqslant b. \end{cases} \qquad (3)$$

В (1) масса, сосредоточенная вне $[a, b]$, распределяется по всему отрезку $[a, b]$, в (2) — помещается в точку $c \in (a, b]$ (в том случае, когда $a<0<b$ в качестве c чаще всего берется точка $c=0$), а в (3) эта масса помещается в крайние точки a и b.

У. р. вида (1) могут интерпретироваться следующим образом. Пусть X — случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Тогда У. р. совпадает с условным распределением случайной величины при условии $a < X \leqslant b$.

С понятием У. р. тесно связано понятие усеченной случайной величины: если X — случайная величина, то усеченной случайной величиной наз. величина

$$X^c = \begin{cases} X, & \text{если } |X| \leqslant c, \\ 0, & \text{если } |X| > c. \end{cases}$$

Распределение X^c является У. р. типа (3) по отношению к распределению X.

Операция усечения — переход к У. р. или усеченным случайным величинам — является весьма распространенным технич. приемом. Она позволяет, «немного» изменяя исходное распределение, получить аналитич. свойство — наличие всех моментов.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967; [4] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962. *Н. Г. Ушаков.*

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ — 1) У. в. относительно события — характеристика связи двух событий. Если A и B — события и $P(B)>0$, то У. в. $P(A|B)$ события A относительно (или при условии) B определяется равенством

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

У. в. $P(A|B)$ может рассматриваться как вероятность осуществления события A при условии, что событие B осуществилось. Для независимых событий A и B У. в. $P(A|B)$ совпадает с безусловной вероятностью $P(A)$.

О связи условных и безусловных вероятностей событий см. *Бейеса формула* и *Полной вероятности формула*.

2) У. в. события A относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$ — случайная величина $P(A \mid \mathfrak{B})$, измеримая относительно $\mathfrak{B}$, для к-рой

$$\int_B P(A \mid \mathfrak{B})\, P(d\omega) = P(A \cap B)$$

при любом $B \in \mathfrak{B}$. У. в. относительно σ-алгебры определяется с точностью до эквивалентности.

Если σ-алгебра $\mathfrak{B}$ порождена счетным числом непересекающихся событий $B_1, B_2, \ldots$, имеющих положительные вероятности и в сумме составляющих все пространство Ω, то

$$P(A \mid \mathfrak{B}) = P(A \mid B_k) \quad \text{при} \quad \omega \in B_k, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

У. в. события A относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$ может быть определена как *условное математическое ожидание* $\mathsf{E}(I_A \mid \mathfrak{B})$ индикатора A.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathfrak{B}$ — под-σ-алгебра $\mathcal{A}$. У. в. $P(A \mid \mathfrak{B})$ наз. регулярной, если существует функция $p(\omega, A)$, $\omega \in \Omega$, $A \in \mathcal{A}$, такая, что

а) при фиксированном ω функция $p(\omega, A)$ является вероятностью на σ-алгебре $\mathcal{A}$,

б) $P(A \mid \mathfrak{B}) = p(\omega, A)$ с вероятностью единица.

Для регулярных У. в. условные математич. ожидания выражаются интегралами с У. в. в качестве мер.

У. в. относительно случайной величины X определяется как У. в. относительно σ-алгебры, порожденной X.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [3] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962. *В. Г. Ушаков.*

УСЛОВНАЯ ПЛОТНОСТЬ — плотность *условного распределения*. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра борелевских множеств на прямой, $\mathfrak{F}$ — под-σ-алгебра $\mathcal{A}$,

$$Q(\omega, B) = \mathsf{P}\{X \in B \mid \mathfrak{F}\}, \quad \omega \in \Omega, \quad B \in \mathfrak{B},$$

— условное распределение X относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}$ и

$$F_X(x \mid \mathfrak{F}) = Q(\omega, (-\infty, x))$$

— условная функция распределения X относительно $\mathfrak{F}$. Если

$$F_X(x \mid \mathfrak{F}) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t \mid \mathfrak{F})\, dt,$$

то $f_X(x \mid \mathfrak{F})$ наз. условной плотностью распределения X относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}$.

Если X и Y — **случайные величины**, $f_Y(y)$ — плотность распределения Y, $f_{X,Y}(x, y)$ — совместная плотность распределения X и Y, то

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{1}{f_Y(y)} f_{X,Y}(x, y)$$

определяет У. п. распределения случайной величины X при фиксированном значении Y.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973. *В. Г. Ушаков.*

УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ ряда — свойство ряда, заключающееся в том, что существует сходящийся ряд, полученный из данного нек-рой перестановкой его членов. Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (*)$$

безусловно сходится, если он сходится, и сходится любой ряд, полученный перестановкой его членов, причем сумма любого такого ряда одна и та же, иначе говоря, сумма безусловно сходящегося ряда не зависит от порядка его членов. Если ряд (*) сходится, но не безусловно, то он наз. **условно сходящимся**. Для того чтобы ряд (*) условно сходился, необходимо и достаточно, чтобы он сходился, но не абсолютно, т. е. чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = +\infty$.

Если члены ряда (*) являются действительными числами, через $u_1^+, u_2^+, \ldots, u_n^+, \ldots$ обозначены его неотрицательные члены, а через $-u_1^-, -u_2^-, \ldots, -u_n^-, \ldots$ — отрицательные, то ряд (*) будет условно сходиться тогда и только тогда, когда оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ расходятся (при этом порядок слагаемых в этих рядах безразличен).

Пусть ряд (*) с действительными членами сходится условно и $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, тогда существует такой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$, полученный перестановкой членов ряда (*), что если обозначить через $\{s_n^*\}$ последовательность его частичных сумм, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n^* = \alpha, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n^* = \beta$$

(это есть обобщение теоремы Римана).

Произведение условно сходящихся рядов зависит от порядка, в к-ром суммируются результаты почленного умножения членов данных рядов.

Понятие условной и безусловной сходимости ряда обобщается на ряды, члены к-рых являются элементами нек-рого нормированного векторного пространства X. Если X — конечномерное пространство, то аналогично случаю числовых рядов сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, условно сходится тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_X$ расходится. Если же пространство X бесконечномерное, то в нем существуют безусловно сходящиеся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, не являющиеся абсолютно сходящимися, т. е. такие, что для них $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_X = +\infty$. *Л. Д. Кудрявцев.*

УСЛОВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ точки относительно семейства отображений

$$\{f_t\}_{t\in G^+} : E \longrightarrow E \qquad (1)$$

— равностепенная непрерывность в этой точке семейства $\{f_t|_V\}_{t\in G^+}$ сужений отображений f_t на нек-рое вложенное в E многообразие V; здесь G^+ — множество

неотрицательных чисел: действительных ($G=\mathbb{R}$) или целых ($G=\mathbb{Z}$).

У. у. точки относительно отображения определяется как ее У. у. относительно семейства неотрицательных степеней этого отображения. У. у. точки относительно динамич. системы f^t есть У. у. этой точки относительно семейства отображений $\{f^t\}_{t\in G+}$. У. у. заданного на $t_0+\mathbb{Z}^+$ решения $x_0(\cdot)$ уравнения

$$x(t+1)=g_t x(t)$$

есть У. у. точки $x_0(t_0)$ относительно семейства отображений

$$\left\{f_t \underset{\text{def}}{=} g_{t_0+t}\cdots g_{t_0+1}\,g_{t_0}\right\}_{t\in\mathbb{Z}^+}.$$

У. у. заданного на $t_0+\mathbb{R}^+$ решения $x_0(\cdot)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x}=f(x,\ t) \tag{2}$$

есть У. у. точки $x_0(t_0)$ относительно семейства отображений $\{X(t_0+t,\ t_0)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, где $X(\theta,\ \tau)$ — *Коши оператор* этого уравнения. У. у. заданного на $t_0+\mathbb{R}^+$ решения $y(\cdot)$ дифференциального уравнения

$$y^{(m)}=g(y,\ \dot{y},\ \ldots,\ y^{(m-1)},\ t)$$

порядка m есть У. у. заданного на $t_0+\mathbb{R}^+$ решения $x(\cdot)=(y(\cdot),\ \dot{y}(\cdot),\ \ldots,\ y^{(m-1)}(\cdot))$ соответствующего дифференциального уравнения 1-го порядка вида (2), где

$$x=(x_1,\ \ldots,\ x_m),$$

$$f(x,\ t)=(x_2,\ \ldots,\ x_m,\ g(x_1,\ \ldots,\ x_m,\ t)).$$

Приведенные ниже определения 1—5 являются нек-рыми конкретизациями этих и родственных им определений.

1. Пусть дано дифференциальное уравнение (2), где $x\in E$, E — нормированное n-мерное пространство. Решение $x_0(\cdot)$: $t_0+\mathbb{R}^+\longrightarrow E$ этого уравнения наз. условно устойчивым с индексом $k\in\{0,\ \ldots,\ n\}$, если найдется вложенный в E k-мерный диск D^k (рассматриваемый как многообразие нек-рого класса C^m), содержащий точку $x_0(t_0)$ и обладающий свойством: для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всякого $x\in D^k$, удовлетворяющего неравенству $|x-x_0(t_0)|<\delta$, решение $x(\cdot)$ того же уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0)=x$, единственно, определено на $t_0+\mathbb{R}^+$ и при всяком $t\in t_0+\mathbb{R}^+$ удовлетворяет неравенству $|x(t)-x_0(t)|<\varepsilon$. Если диск D^k, имеющий указанные свойства, может быть выбран так, что

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)-x_0(t)|=0$$

(соответственно,

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln|x(t)-x_0(t)|<0;$$

здесь и далее считается, что $\ln 0=-\infty$) для всякого решения того же уравнения, начинающегося в этом диске (т. е. такого, что $x(t_0)\in D^k$), то решение $x_0(t)$ наз. асимптотически (соответственно, экспоненциально) условно устойчивым (с индексом k).

Решение уравнения (2) ($x\in\mathbb{R}^n$ или $x\in\mathbb{C}^n$) наз. условно (асимптотически, экспоненциально условно) устойчивым с индексом k, если оно становится таковым в результате наделения пространства $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) нек-рой нормой. От выбора нормы это свойство решения не зависит.

2. Пусть дано n-мерное риманово многообразие V^n (расстояние в к-ром обозначается через $d(\cdot,\cdot)$). Точка $x_0\in V^n$ наз. условно устойчивой (с индексом

$k \in \{0, \ldots, n\}$) *относительно отображения* f: $V^n \longrightarrow V^n$, если найдется вложенный (обычно гладко вложенный) в V^n k-мерный диск D^k, содержащий точку x_0 и обладающий свойством: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого $x \in D^k$, удовлетворяющего неравенству $d(x, x_0) < \delta$, имеет место неравенство $d(f^t x, f^t x_0) < \varepsilon$ для всякого $t \in \mathbb{N}$. Если диск D^k, имеющий указанные свойства, может быть выбран так, что

$$d(f^t x, f^t x_0) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow +\infty$$

(соответственно,

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln d(f^t x, f^t x_0) < 0)$$

для всякого $x \in D^k$, то точка x_0 наз. асимптотически (соответственно, экспоненциально) условно устойчивой (с индексом k) относительно отображения f.

Пусть V^n — компактное дифференцируемое многообразие. Точка $x_0 \in V^n$ наз. условно устойчивой (асимптотически, экспоненциально условно устойчивой) с индексом k относительно отображения f: $V^n \longrightarrow V^n$, если она становится таковой в результате наделения V^n нек-рой римановой метрикой. От выбора римановой метрики на V^n это свойство точки x_0 не зависит.

3. Пусть дано дифференциальное уравнение (2) на римановом (или на финслеровом) n-мерном многообразии V^n, расстояние в к-ром обозначается $d(\cdot, \cdot)$. Решение $x_0(\cdot)$: $t_0 + \mathbb{R}^+ \longrightarrow V^n$ этого уравнения наз. условно устойчивым (с индексом k), если найдется k-мерный диск D^k, вложенный в V^n (рассматриваемый как многообразие нек-рого класса C^m, обычно $m \geqslant 1$), содержащий точку $x_0(t_0)$ и обладающий свойством: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого $x \in D^k$, удовлетворяющего неравенству $d(x, x_0(t_0)) < \delta$, решение $x(\cdot)$ того же уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x$, единственно, определено на $t_0 + \mathbb{R}^+$ и при всяком $t \in t_0 + \mathbb{R}^+$ удовлетворяет неравенству $d(x(t), x_0(t)) < \varepsilon$. Если диск D^k, имеющий указанные свойства, может быть выбран так, что

$$d(x(t), x_0(t)) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow +\infty$$

(соответственно,

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln d(x(t), x_0(t)) < 0)$$

для всякого решения $x(\cdot)$ этого же уравнения, начинающегося в этом диске (т. е. такого, что $x(t_0) \in D^k$), то решение $x_0(\cdot)$ наз. асимптотически (соответственно, экспоненциально) условно устойчивым (с индексом k).

4. Пусть V^n есть n-мерное многообразие класса C^m, U — открытое множество в нем. Пусть точка $x_0 \in U$ неподвижна при отображениях f_t: $U \longrightarrow V^n$ класса C^m ($t \in G^+$, где G есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$). Неподвижная точка x_0 наз. условно устойчивой (с индексом k) относительно семейства отображений $\{f_t\}_{t \in G^+}$, если найдется k-мерный диск D^k, гладко вложенный (вложение класса C^m) в V^n и такой, что для всякой окрестности $V \subset V^n$ точки x_0 найдется окрестность W той же точки такая, что $f_t(D^k \cap W) \subset V$ при всяком $t \in G^+$. Если диск D^k, имеющий указанные свойства, может быть выбран так, что $\lim_{t \to +\infty} f_t x = x_0$ для всякого $x \in D^k$, то неподвижная точка x_0 наз. асимптотически условно устойчивой (с индексом k) относительно семейства отображений $\{f_t\}_{t \in G^+}$.

5. Условная (условная асимптотическая, условная экспоненциальная) устойчивость (с индексом k) реше-

ния $y_0(\cdot)$ уравнения произвольного порядка $y^{(m)} = g(y, \dot{y}, \ldots, y^{(m-1)}, t)$ определяется как условная (условная асимптотическая, экспоненциальная) устойчивость (с индексом k) решения $x_0(\cdot) = (y_0(\cdot), \dot{y}_0(\cdot), \ldots, y_0^{(m-1)}(\cdot))$ соответствующего уравнения 1-го порядка (2), где

$$x = (x_1, \ldots, x_m),$$
$$f(x, t) = (x_2, \ldots, x_m, g(x_1, \ldots, x_m, t)).$$

Иногда (см., напр., [3]) в определении У. у. требуют, чтобы индекс k был отличен от нуля: У. у. с индексом нуль всегда имеет место. У. у. (условная асимптотическая, условная экспоненциальная устойчивость) с индексом n (размерность фазового пространства) есть то же, что *устойчивость по Ляпунову* (соответственно, асимптотическая, экспоненциальная).

Исследование положения равновесия на У. у. Пусть в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ задано автономное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x), \tag{3}$$

правая часть к-рого непрерывно дифференцируема и в точке x_0 обращается в нуль. Если в открытой левой комплексной полуплоскости лежат k собственных значений производной df_{x_0}, то неподвижная точка уравнения (3) экспоненциально условно устойчива с индексом k (теорема Ляпунова об условной устойчивости). Напр., верхнее положение равновесия $y = \pi$, $\dot{y} = 0$ уравнения колебаний маятника $\ddot{y} + \omega^2 \sin y = 0$ экспоненциально условно устойчиво с индексом 1, так как один из корней характеристического уравнения $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ *уравнения в вариациях* $\ddot{y} - \omega^2 y = 0$ отрицателен.

Неподвижная точка x_0 дифференцируемого отображения $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ экспоненциально условно устойчива с индексом k относительно f, если k собственных значений производной df_{x_0} лежат в открытом единичном круге. Периодич. точка x_0 дифференцируемого отображения $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, имеющая период m, условно (асимптотически условно, экспоненциально условно) устойчива с индексом k относительно f тогда и только тогда, когда она обладает этим свойством относительно отображения f^m.

Периодич. решение автономного дифференциального уравнения (3) с гладкой правой частью $f(x)$, имеющее период T, (асимптотически, экспоненциально) условно устойчиво с индексом k в том и только в том случае, если его значение в точке $t=0$ (соответственно, асимптотически, экспоненциально) условно устойчиво с индексом k относительно отображения $X(T, 0)$, где $X(\theta, \tau)$ — оператор Коши уравнения (3).

Пример Перрона (см. *Устойчивость по Ляпунову*) показывает, что из отрицательности k показателей Ляпунова уравнения в вариациях вдоль решения уравнения (3) не следует У. у. с индексом k этого решения. Однако имеют место следующие теоремы, показывающие, что ситуация, описываемая примером Перрона, нетипична.

1) Пусть S — множество всех диффеоморфизмов f евклидова пространства E^n, имеющих равномерно непрерывную производную, удовлетворяющую неравенству

$$\sup_{x \in E^n} \max \{\| df_x \|, \quad \| (df_x)^{-1} \|\} < +\infty.$$

Для всякого диффеоморфизма $j \in S$ через S_j обозначается множество диффеоморфизмов $f \in S$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{x \in E^n} | fx - jx | < +\infty;$$

в множестве S_j задается расстояние

$$d(f, g) = \sup_{x \in E^n} (|fx - gx| + \|df_x - dg_x\|).$$

При всяком $j \in S$ в пространстве $S_j \times E^n$ имеется всюду плотное множество D_j типа G_δ, обладающее свойством: для всякого $(f, x) \in D_j$ точка x условно экспоненциально устойчива относительно диффеоморфизма f с индексом

$$\dim \left\{ \xi \in T_x E^n : \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m} \ln |df^m \xi| < 0 \right\},$$

т. е. с индексом, равным числу отрицательных *Ляпунова характеристических показателей* уравнения в вариациях.

2) Для динамич. систем, заданных на замкнутом дифференцируемом многообразии, аналогичная теорема формулируется проще и является дифференциально-топологически инвариантной. Пусть V^n — замкнутое дифференцируемое многообразие. Множество S всех диффеоморфизмов f класса C^1, отображающих V^n на V^n, наделяется C^1-топологией. В пространстве $S \times V^n$ имеется всюду плотное множество D типа G_δ, обладающее свойством: для всякого $(f, x) \in D$ точка x условно экспоненциально устойчива относительно диффеоморфизма f с индексом

$$k(x) = \dim \left\{ \xi \in T_x V^n : \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m} \ln |df^m \xi| < 0 \right\}. \quad (4)$$

3) Для всякого диффеоморфизма $f: V^n \to V^n$ замкнутого дифференцируемого многообразия V^n для всякого инвариантного относительно f распределения вероятностей на V^n (σ-алгебра к-рого содержит все борелевские множества) множество точек $x \in V^n$, условно экспоненциально устойчивых с индексом (4) относительно диффеоморфизма f, имеет вероятность 1.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956; [2] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [3] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967; [4] Изобов Н. А., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146; [5] Песин Я. Б., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 4, с. 55—112.

В. М. Миллионщиков.

УСЛОВНО ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция $A \circ \varphi$, являющаяся композицией 2π-периодич. функции A: $T^n \to \mathbb{C}$, где T^n есть n-мерный тор, и функции φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ такой, что $\dot{\varphi} = \omega$, где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — постоянный вектор с рационально линейно независимыми компонентами. Примером У. п. ф. служит отрезок ряда Фурье

$$\sum_{i=1}^{n} [A_i \sin(\omega_i t + \psi_i) + B_i \cos(\omega_i t + \psi_i)],$$

где

$$A := \sum_{i=1}^{n} [A_i \sin \varphi_i + B_i \cos \varphi_i],$$

$$\varphi := (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) = (\omega_1 t + \psi_1, \ldots, \omega_n t + \psi_n).$$

Если У. п. ф.— непрерывная функция, то она совпадает с *квазипериодической функцией* с периодами $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

Ю. В. Комленко.

УСЛОВНО ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ — прямолинейное движение материальной точки, закон к-рого выражается действительной *условно периодической функцией*.

УСЛОВНО ПОЛНАЯ РЕШЕТКА — решетка, в к-рой каждое непустое ограниченное подмножество имеет точную верхнюю грань и точную нижнюю грань. Примером У. п. р. может служить множество всех действительных чисел с обычным порядком.

Т. С. Фофанова.

УСЛОВНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ случайной величины — функция элементарного собы-

тия, характеризующая случайную величину по отношению к нек-рой σ-алгебре. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, X — заданная на нем случайная величина с конечным математич. ожиданием, $\mathcal{B}$ есть σ-алгебра, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. У. м. о. случайной величины X относительно σ-алгебры $\mathcal{B}$ наз. случайная величина $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{B})$, измеримая относительно σ-алгебры $\mathcal{B}$ и такая, что

$$\int_B XP(d\omega) = \int_B \mathsf{E}(X \mid B)\, P(d\omega) \qquad (*)$$

для каждого $B \in \mathcal{B}$. Если математич. ожидание случайной величины X бесконечно (но определено), т. е. конечна только одна из величин $\mathsf{E}X^+ = \mathsf{E}\max(0, X)$ и $\mathsf{E}X^- = -\mathsf{E}\min(0, X)$, то определение У. м. о. посредством (*) имеет смысл, но $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{B})$ может принимать бесконечные значения.

У. м. о. определяется однозначно с точностью до эквивалентности. В отличие от *математического ожидания*, являющегося числом, У. м. о. представляет собой функцию (случайную величину).

Свойства У. м. о. аналогичны свойствам математич. ожидания:

1) $\mathsf{E}(X_1 \mid \mathcal{B}) \leqslant \mathsf{E}(X_2 \mid \mathcal{B})$, если почти наверное $X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega)$;

2) $\mathsf{E}(c \mid \mathcal{B}) = c$ для любого действительного c;

3) $\mathsf{E}(\alpha X_1 + \beta X_2 \mid \mathcal{B}) = \alpha \mathsf{E}(X_1 \mid \mathcal{B}) + \beta \mathsf{E}(X_2 \mid \mathcal{B})$ для любых действительных α и β;

4) $|\mathsf{E}(X \mid \mathcal{B})| \leqslant \mathsf{E}(|X| \mid \mathcal{B})$;

5) $g(\mathsf{E}(X \mid \mathcal{B})) \leqslant \mathsf{E}(g(X) \mid \mathcal{B})$ для выпуклых функций $g(x)$.

Кроме того, имеют место следующие специфические для У. м. о. свойства:

6) если $\mathcal{B} = \{\varnothing, \Omega\}$ — тривиальная σ-алгебра, то $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{B}) = \mathsf{E}X$;

7) $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{A}) = X$;

8) $\mathsf{E}(\mathsf{E}(X \mid \mathcal{B})) = \mathsf{E}X$;

9) если X не зависит от σ-алгебры $\mathcal{B}$, то $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{B}) = \mathsf{E}X$;

10) если Y измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{B}$, то $\mathsf{E}(XY \mid \mathcal{B}) = Y\mathsf{E}(X \mid \mathcal{B})$.

Имеет место теорема о сходимости под знаком У. м. о.: если $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, $|X_n| \leqslant Y$, $n = 1, 2, \ldots$, $\mathsf{E}Y < \infty$ и $X_n \longrightarrow X$ почти наверное, то почти наверное $\mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{B}) \longrightarrow \mathsf{E}(X \mid \mathcal{B})$.

У. м. о. случайной величины X относительно случайной величины Y определяется как У. м. о. X относительно σ-алгебры, порожденной Y.

Частным случаем У. м. о. является *условная вероятность*.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [3] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [4] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

Н. Г. Ушаков.

УСЛОВНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — функция элементарного события и борелевского множества, при каждом фиксированном элементарном событии являющаяся *распределением вероятностей*, а при каждом фиксированном борелевском множестве — *условной вероятностью*.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathcal{B}$ есть σ-алгебра борелевских множеств на прямой, X — случайная величина, определенная на $(\Omega, \mathcal{A})$, $\mathcal{F}$ — под-σ-алгебра $\mathcal{A}$. Функция $Q(\omega, B)$, определенная на $\Omega \times \mathcal{B}$, наз. (регулярным) условным распределением случайной величины X относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$, если:

а) при фиксированном $B \in \mathcal{B}$ функция $Q(\omega, B)$ $\mathcal{F}$-измерима,

б) с вероятностью единица при фиксированном ω функция $Q(\omega, B)$ является вероятностной мерой на $\mathcal{B}$,

в) для произвольного $F \in \mathfrak{F}$

$$\int_F Q(\omega, B)\,\mathsf{P}(d\omega) = \mathsf{P}\{(X \in B) \cap F\}.$$

Аналогично определяется У. р. случайного элемента $\mathfrak{Y}$ со значениями в произвольном измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$. Если $\mathfrak{X}$ — полное сепарабельное метрич. пространство, $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра борелевских множеств, то У. р. случайного элемента $\mathfrak{Y}$ относительно любой σ-алгебры $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \subset \mathcal{A}$, существует.

Функцию $F_X(x \mid \mathfrak{F}) = Q(\omega, (-\infty, x))$ наз. условной функцией распределения случайной величины X относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}$.

У. р. (условная функция распределения) случайной величины X относительно случайной величины Y определяется как У. р. (условная функция распределения) X относительно σ-алгебры, порожденной Y.

Условная функция распределения $F_X(x \mid Y)$ случайной величины X относительно Y является борелевской функцией от Y; при $Y = y$ ее значение $F_X(x \mid Y = y)$ наз. условной функцией распределения X при фиксированном значении Y. Пусть Y имеет плотность распределения $f_Y(y)$, тогда

$$F_X(x \mid Y = y) = \frac{1}{f_Y(y)} \frac{\partial}{\partial y} F_{X,Y}(x, y),$$

где $F_{X,Y}(x, y)$ — *совместная функция распределения* X и Y.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [2] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971.

В. Г. Ушаков.

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ — минимальное или максимальное значение, достигаемое данной функцией (или функционалом) при условии, что нек-рые другие функции (функционалы) принимают значения из заданного допустимого множества. Если условия, ограничивающие в указанном смысле область изменения независимых переменных (функций), отсутствуют, то говорят о безусловном экстремуме.

Классич. задачей на У. э. является задача определения минимума функции многих переменных

$$f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

при условии, что нек-рые другие функции принимают заданные значения:

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = c_i, \quad i = 1, \ldots, m, \quad m < n. \tag{2}$$

В этой задаче множество G, к-рому должны принадлежать значения вектор-функции $g = (g_1, \ldots, g_m)$, входящей в дополнительные условия (2), есть фиксированная точка $c = (c_1, \ldots, c_m)$ в m-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$.

Если в (2) наряду со знаком равенства допускаются знаки неравенства

$$\left.\begin{aligned} g_i(x_1, \ldots, x_n) &= c_i, \quad i = 1, \ldots, m_1, \ m_1 < n, \\ g_i(x_1, \ldots, x_n) &\leqslant c_i, \quad i = m_1 + 1, \ldots, m_2, \\ g_i(x_1, \ldots, x_n) &\geqslant c_i, \quad i = m_2 + 1, \ldots, m, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

то это приводит к задаче *нелинейного программирования* (1), (3). В задаче (1), (3) множество G допустимых значений вектор-функции g представляет собой нек-рый криволинейный многогранник, принадлежащий $(n - m_1)$-мерной гиперповерхности, задаваемой m_1, $m_1 < n$, условиями типа равенства (3). Границы указанного криволинейного многогранника строятся с учетом $n - m_1$ неравенств, входящих в (3).

Частным случаем задачи (1), (3) на У. э. является задача *линейного программирования*, в к-рой все рассматриваемые функции f и g_i являются линейными по $x_1, \ldots, x_n$. В задаче линейного программирования множество G допустимых значений вектор-функции g, входя-

щей в условия, ограничивающие область изменения переменных $x_1, \ldots, x_n$, представляет собой выпуклый многогранник, принадлежащий $(n-m_1)$-мерной гиперплоскости, задаваемой m_1 условиями типа равенства в (3).

Аналогичным образом большинство задач оптимизации функционалов, представляющих практич. интерес, сводится к задачам на У. э. (см. *Изопериметрическая задача*, *Больца задача*, *Лагранжа задача*, *Майера задача*). Так же, как и в математич. программировании, основными задачами вариационного исчисления и теории оптимального управления являются задачи на У. э.

При решении задач на У. э., особенно при рассмотрении теоретич. вопросов, связанных с задачами на У. э., весьма полезным оказывается использование неопределенных *Лагранжа множителей*, позволяющих свести задачу на У. э. к задаче на безусловный экстремум и упростить вывод необходимых условий оптимальности. Использование множителей Лагранжа лежит в основе большинства классич. методов решения задач на У. э.

Лит.: [1] Хедли Дж., Нелинейное и динамическое программирование, пер. с англ., М., 1967; [2] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [3] Понтрягин Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969. *И. Б. Вапнярский.*

УСРЕДНЕНИЕ — то же, что *осреднение*.

УСТАНОВЛЕНИЯ МЕТОД — метод, заключающийся в том, что решение u нек-рых стационарных задач

$$Au = f \tag{1}$$

можно рассматривать как результат установления (при $t \to \infty$) развивающегося во времени $t > 0$ процесса $u(t)$ — решениях *Коши задачи* для нек-рого нестационарного эволюционного уравнения с тем же оператором A, напр. вида

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{m} C_i \frac{d^i u(t)}{dt^i} = f - Au(t), \\ \left.\frac{d^k u}{dt^k}\right|_{t=0} = u_{0k}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \end{gathered} \tag{2}$$

здесь C_i — нек-рые операторы, гарантирующие существование процесса установления: $\lim\limits_{t \to \infty} u(t) = u$.

Эффект установления позволяет использовать приближенные методы решения задачи (2) для построения *итерационных алгоритмов* решения уравнения (1). Так, если для нестационарного уравнения (2) определен разностный по t метод решения, обеспечивающий сходимость и устойчивость приближенного решения, напр. при $m=1$ явный метод вида

$$C_1 \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau_n} = f - Au(t_n),$$

где $\tau_n = t_{n+1} - t_n > 0$, то этот метод можно интерпретировать как итерационный алгоритм

$$C_1 (u^{n+1} - u^n) = \tau_n (f - Au^n), \quad n = 0, 1, \ldots, \ u^0 = u_{00},$$

для решения уравнения (1), в к-ром C_1 и τ_n рассматриваются уже как характеристики метода.

Варьирование вида операторов C_i и рассмотрение различных аппроксимаций по t в уравнении (2) (явные, неявные схемы, схемы расщепления и т. п.) дают возможность получать достаточно разнообразные семейства итерационных методов решения уравнения (1). Для этих методов уравнение (2) будет *замыканием вычислительного алгоритма*.

Обобщением У. м. является *продолжения по параметру метод*.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977; [3] Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, М., 1971. *В. И. Лебедев.*

УСТОЙЧИВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей, обладающих свойством, что для любых $a_1>0$, b_1, $a_2>0$, b_2 имеет место соотношение

$$F(a_1x+b_1) * F(a_2x+b_2)=F(ax+b), \qquad (1)$$

где $a>0$ и b — нек-рые постоянные, F — функция распределения У. р., $*$ — символ операции свёртки двух функций распределения.

Характеристическая функция У. р.

$$\varphi(t)=\exp\left\{i\,dt+c\,|t|^{\alpha}\left[1+i\beta\frac{t}{|t|}\,\omega(t,\ \alpha)\right]\right\}, \qquad (2)$$

где $0<\alpha\leqslant 2$, $-1\leqslant\beta\leqslant 1$, $c\geqslant 0$, d — любое действительное число, и

$$\omega(t,\ \alpha)=\begin{cases}\operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2}, & \text{при } \alpha\neq 1,\\ \dfrac{2}{\pi}\ln|t|, & \text{при } \alpha=1.\end{cases}$$

Число α наз. показателем устойчивого распределения. У. р. с показателем $\alpha=2$ является *нормальное распределение*, примером У. р. с показателем $\alpha=1$ служит *Коши распределение*, У. р. является *вырожденное распределение* на прямой, У. р.— *безгранично делимое распределение*, и У. р. с показателем α, $0<\alpha<2$, имеет *Леви каноническое представление* с характеристиками $\sigma^2=0$,

$$M(x)=c_1/(x)^{\alpha},\quad N(x)=-c_2/x^2,$$
$$c_1\geqslant 0,\quad c_2\geqslant 0,\quad c_1+c_2>0.$$

γ — любое действительное число.

Для У. р., за исключением вырожденного распределения, существуют плотности. Эти плотности бесконечно дифференцируемы, одновершинны и отличны от нуля или на всей прямой, или на полупрямой. Для У. р. с показателем α, $0<\alpha<2$, при $\delta<\alpha$ выполняются соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{\delta}p(x)\,dx<\infty,\quad \int_{-\infty}^{\infty}|x|^{\alpha}p(x)\,dx=\infty,$$

$p(x)$ — плотность У. р. Явный вид плотностей У. р. известен лишь в немногих случаях. Одной из основных задач теории У. р. является описание их *притяжения областей*.

В совокупности У. р. выделяется класс строго устойчивых распределений, для к-рых имеет место равенство (1) при $b_1=b_2=b=0$. Характеристич. функции строго У. р. с показателем α ($\alpha\neq 1$) даются формулой (2) при $d=0$. При $\alpha=1$ строго У. р. является лишь распределение Коши. Спектрально положительные (отрицательные) У. р. характеризуются тем, что в канонич. представлении Леви $M(x)\equiv 0$ ($N(x)\equiv 0$). Для спектрально положительных У. р. существует преобразование Лапласа при $\operatorname{Re} s\geqslant 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-sx}p(x)\,dx=\begin{cases}\exp\{-cs^{\alpha}-ds\}, & \text{при } \alpha<1,\\ \exp\{cs\ln s-ds\}, & \text{при } \alpha=1,\\ \exp\{cs^{\alpha}-ds\}, & \text{при } \alpha>1,\end{cases}$$

где $p(x)$ — плотность спектрально положительного У. р. с показателем α, $0<\alpha<2$, $c>0$, d — действительное число, у многозначных функций $\ln s$, s^{α} выбираются те ветви, для к-рых $\ln s$ действительный, а $s^{\alpha}>0$ при $s>0$.

У. р., как безгранично делимому распределению, соответствует однородный случайный процесс с независимыми приращениями. Стохастически непрерывный однородный случайный процесс с независимыми приращениями $\{x(\tau),\ \tau\geqslant 0\}$ наз. устойчивым, если приращение $x(1)-x(0)$ имеет У. р.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [2] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [3] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно

связанные величины, М., 1965; [4] Скороход А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, М., 1964; [5] Золотарев В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983.

Б. А. Рогозин.

УСТОЙЧИВОСТИ КРИТЕРИИ — необходимые и достаточные условия отрицательности действительных частей всех корней уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (*)$$

У. к. используются, когда применяется теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению неподвижной точки автономной системы дифференциальных уравнений (см. *Устойчивость по Ляпунову*). Наиболее употребителен следующий У. к., наз. критерием Рауса — Гурвица или критерием Гурвица: для отрицательности действительных частей всех корней уравнения (*) необходимо и достаточно, чтобы выполнялась совокупность неравенств $\Delta_i > 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, где

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ \ldots$$

— главные диагональные миноры матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{Vmatrix}$$

(на главной диагонали этой матрицы стоят $a_1, \ldots, a_n$; при $i > n$ полагают $a_i = 0$).

При $n = 2$ У. к. Рауса — Гурвица выглядит особенно просто: для отрицательности действительных частей корней уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты уравнения были положительны: $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

При всяком $n \in \mathbb{N}$ для отрицательности действительных частей всех корней уравнения (*) необходимо (но при $n > 2$ недостаточно), чтобы все коэффициенты уравнения были положительны: $a_i > 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Если хоть один из определителей Δ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, отрицателен, то у уравнения (*) найдется корень, действительная часть к-рого положительна (это утверждение используется при применении теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению неподвижной точки автономной системы дифференциальных уравнений, см. *Устойчивость по Ляпунову*). Если $\Delta_i \geqslant 0$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$, но $\Delta_i = 0$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$, то расположение корней уравнения (*) относительно мнимой оси тоже можно выяснить, не находя самих корней (см. [5], [8] гл. XVI, § 8).

Более простым для применения является критерий Льенара — Шипара: для отрицательности действительных частей всех корней уравнения (*) необходимо и достаточно, чтобы выполнялась совокупность неравенств $a_i > 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\Delta_{n-2i+1} > 0$, $i \in \left\{1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right\}$ (определители Δ_i — те же, что в критерии Рауса — Гурвица).

Критерий Эрмита (исторически первый, см. [1], [10] § 3.1) позволяет с помощью конечного числа арифметич. действий над коэффициентами уравнения (*) определить, все ли корни этого уравнения имеют отрицательную действительную часть. Сформулированный выше критерий Рауса — Гурвица — это модификация критерия Эрмита, найденная А. Гурвицем. Известен также У. к. Ляпунова (см. [3], [8] гл. XVI, § 5, [10] § 3.5).

При исследовании устойчивости неподвижной точки дифференцируемого отображения (автономной системы

с дискретным временем), а также при исследовании *орбитальной устойчивости* замкнутой траектории автономной системы дифференциальных уравнений применяются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы модули всех корней уравнения (*) были меньше единицы. Эти критерии получаются из У. к., указанных выше, отображением $\lambda \mapsto \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$ открытого единичного круга на открытую левую полуплоскость (см. [10] § 3.2).

Лит.: [1] Hermite Ch., «J. reine und angew. Math.», 1856, Bd 52, S. 39—51; [2] Routh E. J., A treatise on the stability of a given state of motion, L., 1877; [3] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М., 1956; [4] Hurwitz A., «Math. Ann.», 1895, Bd 46, S. 273—84; [5] Orlando L., там же, 1911, Bd 71, S. 233—45; [6] Liénard A., Chipart M. H., «J. math. pure et appl.», Sér. 6, 1914, t. 10, p. 291—346; [7] Четаев Н. Г., Устойчивость движения, М.— Л., 1946; [8] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967; [9] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967; [10] Джури Э., Инноры и устойчивость динамических систем, пер. с англ., М., 1979.
В. М. Миллионщиков.

УСТОЙЧИВОСТИ ОБЛАСТЬ — множество в пространстве значений параметра, от к-рого зависит задача Коши. Это множество (не являющееся, вообще говоря, областью) есть объединение компоненты связности внутренности множества S значений параметра, при к-рых решение задачи Коши устойчиво по Ляпунову, и множества тех точек границы этой компоненты, к-рые принадлежат S. Приведенное определение является попыткой вложить точный смысл в понятие, обычно описываемое в той или иной степени расплывчатым образом (ср. [1] с. 194, 195, 197).

Пример. Нулевое решение уравнения Матьё

$$\ddot{y}+(\delta+\varepsilon\cos t)\,y=0,$$

зависящего от параметра $(\delta, \varepsilon)\in\mathbb{R}^2$, имеет счетное множество У. о. (см. [1] рис. 78). Среди этих областей имеются пересекающиеся с полуплоскостью $\delta<0$, чем объясняется возможность стабилизации верхнего положения равновесия маятника с помощью периодич. (синусоидального) колебания точки подвеса в вертикальном направлении (см. [1] гл. VI, §§ 1, 4).

Лит.: [1] Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, пер. с англ., 2 изд., М., 1953; [2] Баутин Н. Н., Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, 2 изд., М., 1984.
В. М. Миллионщиков.

УСТОЙЧИВОСТИ ТЕОРЕМЫ — теоремы, заключением к-рых является утверждение об *устойчивости*.
В. М. Миллионщиков.

УСТОЙЧИВОСТИ ТЕОРИЯ — совокупность взглядов, представлений, идей, понятий, рассуждений, методов, теорий (содержащих определения, леммы, теоремы и доказательства), возникших и возникающих с целью изучения *устойчивости* движения (понимаемого в самом общем виде). Таким образом, У. т. является теорией в широком смысле этого слова. Среди различных понятий устойчивости движения наиболее известны следующие.

1. Понятия устойчивости, введенные А. М. Ляпуновым, и их модификации: *устойчивость по Ляпунову* (в частности, асимптотич. устойчивость и экспоненциальная устойчивость), *условная устойчивость* (в частности, асимптотическая условная устойчивость и экспоненциальная условная устойчивость), *устойчивость по части переменных*, *равномерная устойчивость*, *устойчивость при постоянно действующих возмущениях*, *орбитальная устойчивость*, наличие аттракторов (см. *Предельный цикл*, *Лоренца аттрактор*), стохастич. устойчивость, *устойчивость абсолютная*. См. также *Устойчивости критерии*, *Устойчивости область*.

2. *Устойчивость по Лагранжу*.

3. *Устойчивость по Пуассону* и связанные с ней понятия (*блуждающая точка*, *полная неустойчивость*).

4. Структурная устойчивость (см. *Грубая система*) — понятие, введенное А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным.

5. Сохранение большинства инвариантных торов интегрируемой гамильтоновой системы при малых возмущениях функции Гамильтона, открытое А. Н. Колмогоровым (см. также *Малые знаменатели*).

В У. т. по Ляпунову (см. [1] т. 2, а также [2] — [4]) выделяют вопросы, связанные с первым методом Ляпунова. Сюда обычно относят теорию линейных систем дифференциальных уравнений (см. *Уравнение в вариациях*, *Линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами*, *Линейная система дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами*, *Правильная линейная система* дифференциальных уравнений, *Неправильности коэффициенты*, *Почти приводимая линейная система* дифференциальных уравнений, *Приводимая линейная система* дифференциальных уравнений, *Мультипликаторы*, *Гамильтонова система линейная*) и имеющую большое пересечение с теорией линейных систем теорию *Ляпунова характеристических показателей* (см. также *Особые показатели*, *Центральные показатели*, *Интегральной разделенности условие*, *Устойчивость характеристических показателей*). По второму методу Ляпунова см. *Ляпунова функция*, а также [5]—[9].

В теории структурной устойчивости выделяют теорию систем Аносова (см. [10]), а также критерии структурной устойчивости (см. [11], [12]).

При исследовании устойчивости по Ляпунову в механике затрагивают вопросы: устойчивость фигур равновесия вращающейся жидкости (см. [1] тт. 3—4), других гравитирующих систем (см. [13]), устойчивость движения жидкости (см. [14], [15]), устойчивость движения деформируемого твердого тела (см. *Устойчивость упругих систем*, а также [16]—[19]), устойчивость движения тел с полостями, содержащими жидкость [20], устойчивость в системах автоматич. управления [21], устойчивость решений уравнений с запаздыванием [22].

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 1—5, М.[—Л.], 1954—65; [2] Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1954; [3] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967; [4] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970; [5] Ла-Салль Ж., Лефшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, пер. с англ., М., 1964; [6] Зубов В. И., Методы А. М. Ляпунова и их применение, Л., 1957; [7] Румянцев В. В., в кн.: Механика в СССР за 50 лет, т. 1, М., 1968; [8] Валеев К. Г., Финин Г. С., Построение функций Ляпунова, К., 1981; [9] Шестаков А. А., «Дифференц. уравнения», 1982, т. 18, № 12, с. 2069—97; [10] Аносов Д. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1967, т. 90; [11] Плисс В. А., Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений, М., 1977; [12] его же, «Дифференц. уравнения», 1980, т. 16, № 10, с. 1891—92; [13] Моляченко В. Л., Фридман А. М., Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, М., 1976; [14] Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, пер. с англ., М., 1958; [15] Джозеф Д., Устойчивость движения жидкости, пер. с англ., М., 1981; [16] Болотин В. В., Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, М., 1961; [17] Болотин В. В., Григолюк Э. И., в кн.: Механика в СССР за 50 лет, т. 3, М., 1972; [18] Вольмир А. С., Устойчивость деформируемых систем, 2 изд., М., 1967; [19] Клюшников В. Д., Устойчивость упруго-пластических систем, М., 1980; [20] Моисеев Н. Н., Румянцев В. В., Динамика тела с полостями, содержащими жидкость, М., 1965; [21] Narenda K. S., Taylor J. H., Frequency domain criteria for absolute stability, N. Y.— L., 1973; [22] Hale J., Functional-differential equations, N. Y.— [a. o.], 1971.

В. М. Миллионщиков.

УСТОЙЧИВОСТЬ — термин, не имеющий четко определенного содержания.

1) У. применительно к движению — характер поведения системы на бесконечном промежутке времени. Этот характер движения выражается следующим образом.

а) Как свойство движущейся системы в том или ином смысле мало отклоняться от нек-рого движения при

малых возмущениях начального положения системы (в *фазовом пространстве*), причем малость отклонения равномерна по $t \geqslant 0$ (см. *Устойчивость по Ляпунову*, *Орбитальная устойчивость*, *Равномерная устойчивость*). В других рассмотрениях У. движения есть свойство движущейся системы мало отклоняться от нек-рого движения при малых возмущениях как начального положения системы (в фазовом пространстве), так и самого закона движения (см. *Устойчивость при постоянно действующих возмущениях*). Иногда малые возмущения начального положения берутся не любые, а подчиненные нек-рому дополнительному условию (см. *Условная устойчивость*); иногда малость возмущения и отклонения измеряется лишь по нек-рым параметрам (см. *Устойчивость по части переменных*).

б) У. движения системы как свойство системы сохранять нек-рые черты фазового портрета при малых возмущениях закона движения (см. *Устойчивости теория*, *Грубая система*).

в) Как свойство системы в процессе движения оставаться в ограниченной области фазового пространства (см. *Устойчивость по Лагранжу*).

г) Как свойство системы в процессе движения сколь угодно поздно возвращаться как угодно близко к своему начальному положению (в фазовом пространстве; см. *Устойчивость по Пуассону*).

2) У. применительно к геометрическим или иным объектам, зависящим от параметров,— непрерывная зависимость этих объектов от параметров (см. [1], [2]).

Однако все эти значения термина «У.» не исчерпывают его содержания.

Лит.: [1] Погорелов А. В., Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек, М., 1967; [2] Решетняк Ю. Г., Теоремы устойчивости в геометрии и анализе, Новосиб., 1982.

В. М. Миллионщиков.

УСТОЙЧИВОСТЬ в теории игр — принцип оптимальности, отражающий прямо или косвенно идею устойчивости ситуации (или множества ситуаций). Выделяют следующие основные концепции У.

1. ф-устойчивость — см. *Коалиционная игра*.

2. ψ-устойчивость — принцип оптимальности в *кооперативных играх*, связанный с понятием У. пары, состоящей из разбиения множества игроков I на коалиции и дележа относительно образования новых коалиций. Разбиение $\mathscr{T} = (T_1, \ldots, T_m)$ множества игроков I наз. коалиционной структурой. Пусть $\langle I, v\rangle$ — кооперативная игра и ψ — функция, сопоставляющая всякой коалиционной структуре $\mathscr{T}$ множество коалиций $\psi(\mathscr{T})$. Пара $(x, \mathscr{T})$, где x — дележ, наз. ψ-устойчивой, если $\sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S)$ для всех $S \in \psi(\mathscr{T})$ и $x_i > v(\{i\})$, когда $\{i\} \notin \mathscr{T}$.

3. k-устойчивость — частный случай ψ-устойчивости, когда в качестве $\psi(\mathscr{T})$ берется множество коалиций, каждая из к-рых отличается от какого-либо элемента $\mathscr{T}$ не более чем на k игроков.

4. M-устойчивость — принцип оптимальности в теории кооперативных игр, формализующий интуитивное понимание У. образования коалиций и дележей значений $v(T)$ характеристич. функции v на образующихся коалициях T между игроками из T относительно возможных угроз одних коалиций против других. Пара $(x, \mathscr{T})$, где $x = (x_i)_{i \in I}$ — вектор, удовлетворяющий условиям $\sum_{i \in T_k} x_i = v(T_k)$, $k = 1, \ldots, m$, а $\mathscr{T} = (T_1, \ldots, T_m)$ — коалиционная структура, наз. конфигурацией. Конфигурация наз. индивидуально рациональной (и. р. к.), если $x_i \geqslant v(\{i\})$, $i \in I$. Конфигурация $(x, \mathscr{T})$ наз. коалиционно рациональной (к. р. к.), если вектор x удовлетворяет условию $\sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S)$ для любой коалиции $S \subset T_k$,

$k=1, \ldots, m$. В случае, когда $\sum_{k=1}^{m} v(T_k)=v(I)$, в частности когда $\mathcal{T}=\{I\}$, для всякой и. р. к. $(x, \mathcal{T})$ вектор x является дележом.

Множество $P(K; \mathcal{T})=\{i \in I \mid i \in T_k$ и $T_k \cap K \neq \varnothing\}$ наз. множеством партнеров коалиции $K \subset I$ в коалиционной структуре $\mathcal{T}$. Пусть $(x, \mathcal{T})$ — к. р. к. и K, $L \subset I$ — непересекающиеся коалиции. К. р. к. (y, U), удовлетворяющая условиям

$$P(K; U) \cap L=\varnothing,$$
$$y_i > x_i \quad \text{для всех} \quad i \in K,$$
$$y_i \geqslant x_i \quad \text{для всех} \quad i \in P(K; U),$$

наз. угрозой коалиции K против L. Контругрозой коалиции L против K наз. к. р. к. (z, V), удовлетворяющая условиям

$$K \not\subset P(L; V),$$
$$z_i \geqslant x_i \quad \text{для всех} \quad i \in P(L; V),$$
$$z_i \geqslant y_i \quad \text{для всех} \quad i \in P(L; V) \cap P(K; U).$$

К. р. к. $(x, \mathcal{T})$ наз. M-устойчивой, если для любой пары непересекающихся коалиций K, L на всякую угрозу K против L существует контругроза L против K. Множество всех M-устойчивых конфигураций для коалиционной структуры $\mathcal{T}$ наз. M-устойчивым множеством и обозначается через M или $M(\mathcal{T})$. В случае, когда $\sum_k v(T_k)=v(I)$, множество M содержит c-ядро (см. *Ядро* в теории игр) кооперативной игры $\langle I, v\rangle$. Множество M часто оказывается пустым, и поэтому чаще рассматривают множество $M_1^{(i)}$, к-рое определяется аналогично M со следующими изменениями: рассматриваются не только к. р. к., но и все и. р. к. и допускаются лишь угрозы и контругрозы между одноэлементными коалициями, т. е. между отдельными игроками. Было показано, что множество $M_1^{(i)}$ не пусто для любой коалиционной структуры. Множество $M_1^{(i)}$ для $\mathcal{T}=\{I\}$ содержит k-ядро и совпадает с ним и c-ядром для *выпуклых игр* $\langle I, v\rangle$.

Понятия M-устойчивости и $M_1^{(i)}$-устойчивости имеют естественное обобщение на кооперативные игры без побочных платежей. Известно, что в этом случае множество $M_1^{(i)}$ может быть пустым; имеются нек-рые условия для непустоты $M_1^{(i)}$.

Лит.: [1] Aumann R. J., Maschler M., в сб.: Advances in game theory, Princeton, 1964, p. 443—76; [2] Воробьев Н. Н., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 2, с. 81—140; [3] Luce R. D., в сб.: Mathematical models of human behavior, Stanford, 1955, p. 32—44; [4] Льюс Р. Д., Райфа Х., Игры и решения, пер. с англ., М., 1961; [5] Peleg B., «Bull. Amer. math. soc.», 1963, v. 69, p. 109—10; [6] его же, «Israel J. math.», 1963, v. 1, p. 48—53; [7] Оуэн Г., Теория игр, пер. с англ., М., 1971.

А. Я. Кирута.

УСТОЙЧИВОСТЬ АБСОЛЮТНАЯ — устойчивость в целом тривиального решения нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (или уравнений другого типа), равномерная для всех систем некоторого класса. Термин «У. а.» подразумевает задание класса систем и указание, в каком смысле понимается устойчивость и равномерность. Кроме обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваются также уравнения в конечных разностях, интегральные уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, уравнения с частными производными.

Пусть рассматривается система, описываемая дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+B\xi(t) \qquad (1)$$

и нек-рым множеством $\mathfrak{M}$ пар функций $\{x(\cdot), \xi(\cdot)\}$. Здесь A, B — постоянные комплексные матрицы размеров $N \times N$ и $N \times n$ соответственно; $x(t)$ и $\xi(t)$ — век-

торные комплекснозначные функции порядков N и n соответственно, причем $\xi(t)$ локально суммируема, а $x(t)$ абсолютно непрерывна. В приложениях обычно A, B, $x(t)$, $\xi(t)$ действительны, уравнение (1) описывает линейную часть системы, а множество $\mathfrak{M}$ определяется свойствами нелинейных блоков системы. В простейшем случае имеется один фиксированный нелинейный блок, к-рый описывается уравнением

$$\xi(t) = \varphi[\sigma(t),\ t], \quad \text{где } \sigma(t) = Cx(t) \tag{2}$$

($\sigma(t)$ и $\xi(t)$ — скалярные функции, C — $(1\times N)$-матрица; $\sigma(t)$, $\xi(t)$, C действительны). В этом случае $\mathfrak{M}$ — множество всех пар $\{x(\cdot), \xi(\cdot)\}$, для которых выполнено (2).

Многочисленные исследования конкретных нелинейных систем привели к пониманию того, что в первую очередь следует учитывать квадратичные соотношения, связывающие $\xi(t)$ и $x(t)$, описываемые несколько специфически. Пусть, напр., относительно функций $\varphi(\sigma,\ t)$ в (2) известно лишь, что для всех $t\geqslant 0$ и σ

$$\mu_1 \leqslant \varphi(\sigma,\ t)/\sigma \leqslant \mu_2.$$

В этом случае $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}[\mu_1,\ \mu_2]$ есть множество всех $x(t)$ и $\xi(t)$, для к-рых почти всюду $\mu_1 \leqslant \xi(t)/\sigma(t) \leqslant \mu_2$, где $\sigma(t) = Cx(t)$, или, иначе

$$[\mu_2\sigma(t) - \xi(t)]\,[\xi(t) - \mu_1\sigma(t)] \geqslant 0. \tag{3}$$

Ниже $n \geqslant 1$, $F(x,\ \xi)$ — эрмитова форма на $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^n$. В общем случае рассматривается класс $\mathfrak{M}_{F,\ \text{Л}}$ пар функций $x(t)$, $\xi(t)$, удовлетворяющих почти всюду л о к а л ь н о й с в я з и

$$F[x(t),\ \ \xi(t)] \geqslant 0, \tag{4}$$

а также класс $\mathfrak{M}_{F,\ \text{И}}(\gamma)$ пар функций $x(t)$, $\xi(t)$, удовлетворяющих и н т е г р а л ь н о й с в я з и

$$\exists T_k \longrightarrow \infty : \int_0^{T_k} F[x(t),\ \xi(t)]\,dt \geqslant -\gamma \tag{5}$$

(числа T_k зависят от $x(\cdot)$, $\xi(\cdot)$). Разнообразные практически важные нелинейные блоки («люфт», гистерезисные нелинейности, импульсные модуляторы разных типов) удовлетворяют связи (5) с подходяще выбранной формой $F(x,\ \xi)$.

Ниже предполагается, что уравнение (1) у п р а в л я е м о (см. [1]), т. е. что ранг $(N\times Nn)$-матрицы

$$\|B,\ AB,\ \ldots,\ A^{N-1}B\|$$

равен N и что выполнено следующее условие м и н и м а л ь н о й у с т о й ч и в о с т и: существует такая $(n\times N)$-матрица R, что $A+BR$ — матрица Гурвица и

$$F(x,\ Rx) \geqslant 0 \quad \text{для любого} \quad x,$$

где F — форма в (4) или (5). Пусть D, E — произвольные матрицы порядков $m\times N$ и $m\times n$ соответственно, $\|D\| + \|E\| \neq 0$, и по ним формируется «выход» системы (1):

$$\eta(t) = Dx(t) + E\xi(t). \tag{6}$$

Различают действительный случай, когда все величины в (1), (6) и коэффициенты формы $F(x,\ \xi)$ действительны, и комплексный случай, когда они, вообще говоря, комплексны. Множество всех действительных $x(\cdot)$, $\xi(\cdot)$, удовлетворяющих (4) (или (5)), ниже обозначено $\mathfrak{M}^0_{F,\ \text{Л}}$ (соответственно $\mathfrak{M}^0_{F,\ \text{И}}(\gamma)$). Пусть

$$\|\eta(\cdot)\|^2 = \int_0^\infty |\eta(t)|^2\,dt.$$

Система (1) наз. а б с о л ю т н о у с т о й ч и в о й п о в ы х о д у (6) в классе $\mathfrak{M}$, если существуют такие постоянные $C_1 \geqslant 0$, $C_2 \geqslant 0$, что из (1), (6) и $[x(\cdot),\ \xi(\cdot)] \in \mathfrak{M}$ следует конечность $\|\eta(\cdot)\|$ и оценка

$$\|\eta(\cdot)\|^2 \leqslant C_1 |x(0)|^2 + C_2. \tag{7}$$

Квадратичный критерий У. а.: для У. а. системы (1) по выходу (6) в классе $\mathfrak{M}_{F,\,\text{И}}(\gamma)$ (в действительном случае — в классе $\mathfrak{M}^{\partial}_{F,\,\text{И}}(\gamma)$) необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists \delta > 0\colon F(\tilde{x},\ \tilde{\xi}) \leqslant -\delta\,|\,\tilde{\eta}\,|^2 \qquad (8)$$

для всех комплексных $\tilde{x}$, $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ и действительных ω, связанных соотношениями

$$i\omega\tilde{x} = A\tilde{x} + B\tilde{\xi}, \quad \tilde{\eta} = D\tilde{x} + E\tilde{\xi}. \qquad (9)$$

При выполнении (8), (9) в (7) $C_2 = C_2'\gamma$, причем числа C_1 и C_2' не зависят от γ в (5). Если $\eta(t) = x(t)$ и выполнено (4), а также (8) (для $\tilde{\eta} = \tilde{x}$), то имеет место экспоненциальная устойчивость в целом:

$$\exists C > 0, \quad \varepsilon > 0:$$

$$|\,x(t)\,| \leqslant Ce^{-\varepsilon(t-t_0)}\,|\,x(t_0)\,| \text{ (для всех } x(\cdot),\ t \geqslant t_0). \qquad (10)$$

Пусть $\det\|\,A - i\omega I\,\| \neq 0$ для всех ω (здесь I — единичная $(N\times N)$-матрица). Для У. а. системы (1) по выходу $\eta(t) = [x(t),\ \xi(t)]$ в классе $\mathfrak{M}_{F,\,\text{Л}}$ необходимо и достаточно, чтобы для любых ω, $-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty$, и любых комплексных $\tilde{\xi} \neq 0$ было выполнено неравенство

$$F\,[\,\|\,A - i\omega I\,\|^{-1} B\tilde{\xi},\ \tilde{\xi}\,] < 0. \qquad (11)$$

Для класса $\mathfrak{M}^{\partial}_{F,\,\text{Л}}$ аналогичное утверждение справедливо лишь в отношении достаточности. Необходимые и достаточные условия У. а. в классе $\mathfrak{M}^{\partial}_{F,\,\text{Л}}$ известны лишь для специальных форм F, а эффективно проверяемые условия — лишь для $N = 2$ (см. [3], [7]).

Из соотношений (9) следует

$$\tilde{\eta} = W^{(\eta)}(i\omega)\,\tilde{\xi}, \quad \text{где} \quad W^{(\eta)}(i\omega) = E + D\,\|\,i\omega I - A\,\|^{-1} B;$$

элемент $W^{(\eta)}_{jk}$ матрицы $W^{(\eta)}(i\omega)$ наз. частотной характеристикой от входа ξ_k к выходу η_j. Критерии, устанавливающие те или иные свойства системы, выраженные через частотные характеристики, наз. частотными критериями устойчивости. Достоинствами частотных критериев являются их удобство в практич. применениях и инвариантность относительно преобразований $x' = Sx$ ($S = \text{const}$, $\det S \neq 0$) системы (1).

В действительном случае с $n = 1$ для класса $\mathfrak{M}[\mu_1, \mu_2]$, определенного соотношением (3), условие (11) приобретает вид

$$\operatorname{Re}\{[\mu_2\overline{W(i\omega)} - 1]\,[1 - \mu_1 W(i\omega)]\} > 0, \qquad (12)$$

где $W(i\omega) = C(A - i\omega I)^{-1} B$ — частотная характеристика от входа $\xi(t)$ к выходу $[-\sigma(t)]$. Частотный критерий (12) (круговой критерий) означает, что частотная характеристика $W(i\omega)$, $-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty$, не пересекается с окружностью, имеющей центр в точке $(-\mu_1^{-1} - \mu_2^{-1})/2$ и проходящей через точки $(-\mu_1^{-1})$, $(-\mu_2^{-1})$. Условие минимальной устойчивости в этом случае означает, что асимптотически устойчива линейная система (1) с $\xi = \mu\sigma$, $\sigma = Cx$ с каким-либо $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$. Критерий (12) является естественным распространением критерия Михайлова — Найквиста на нелинейные системы.

Исторически первым частотным критерием У. а. для нелинейных систем был критерий Попова для $n = 1$ и класса $\mathfrak{M}$ стационарных нелинейностей $\xi(t) = \varphi[\sigma(t)]$, где $0 \leqslant \sigma\varphi(\sigma) \leqslant \mu_0\sigma^2$ (см. [2]). Он имеет вид:

$$\exists \vartheta\colon\ \mu_0^{-1} + \operatorname{Re} W(i\omega) + \vartheta \operatorname{Re}[i\omega W(i\omega)] > 0,$$
$$0 \leqslant \omega \leqslant \infty. \qquad (13)$$

Условие минимальной устойчивости в этом случае равносильно тому, что матрица A в (1) — матрица Гурвица.

Существует определенная связь частотных критериев (6), (12), (13) и других с фактом существования глобаль-

ной функции Ляпунова. Частотные критерии У. а. обычно охватывают все критерии, к-рые могут быть получены с помощью функций Ляпунова из нек-рых многопараметрич. классов функций. Напр., критерий (12) — необходимое и достаточное условие существования функции

$$V(x)=x^*Hx$$

($H=H^*=\text{const}$ — $(N\times N)$-матрица, $*$ — знак эрмитова сопряжения) такой, что ее производная в силу системы (11), (2) с произвольной нелинейностью (2) (для к-рой $\mu_1\leqslant\varphi(\sigma,t)/\sigma\leqslant\mu_2$) удовлетворяет условию

$$dV(x)/dt<0 \text{ при } x\neq 0.$$

Аналогично, частотное условие Попова (13) охватывает все критерии, к-рые можно установить, используя функции Ляпунова вида

$$V(x)=x^*Hx+\vartheta\int_0^\sigma\varphi(\sigma)\,d\sigma.$$

Известно много других частотных критериев У. а. для разных классов нелинейностей (см. [3]—[6]). Они распространены, в частности, на важные для приложений случаи неединственного состояния равновесия (см. [1]). Частотные критерии У. а. позволили выделять классы нелинейных систем общего вида, для к-рых факт устойчивости в целом устанавливается особенно просто. Напр., для системы (1) с $\xi=\varphi(\sigma)$, $\sigma=Cx$, $N\leqslant 3$, $n=1$ (т. е. для произвольной системы не выше 3-го порядка с одной нелинейностью) имеет место асимптотическая устойчивость в целом, если $\mu_1\leqslant\varphi'(\sigma)\leqslant\mu_2$ и если любая линейная система с $\xi=\mu\sigma$, $\mu_1\leqslant\mu\leqslant\mu_2$, асимптотически устойчива. Для систем 4-го (и более высокого) порядка аналогичное утверждение ошибочно. Более того, при $N\geqslant 4$, $n=1$ существуют такие системы (1) и нелинейности $\xi=\varphi(\sigma)$, $\mu_1\leqslant\varphi'(\sigma)\leqslant\mu_2$, что матрица любой линеаризованной системы с $\xi=\mu\sigma$, $\mu_1\leqslant\mu\leqslant\mu_2$,— матрица Гурвица, а нелинейная система имеет периодическое решение.

При замене условия минимальной устойчивости аналогичным условием минимальной неустойчивости неравенства (8), (11), (12), (13) становятся критериями а б с о л ю т н о й н е у с т о й ч и в о с т и (при соответствующем понимании последнего термина). Пусть, напр., в действительном случае с $n=1$ матрица коэффициентов системы (1) с $\xi=\mu\sigma$, $\sigma=Cx$ (т. е. матрица $A+BμC$) при нек-ром μ, $\mu_1\leqslant\mu\leqslant\mu_2$, имеет $k\geqslant 1$ собственных значений в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda>0$ и выполнено частотное условие (12). Тогда у системы (1), (2) с функцией $\varphi(\sigma,t)$, удовлетворяющей условию $\mu_1\leqslant\varphi(\sigma,t)/\sigma\leqslant\mu_2$ (а также у системы (1), (3)), имеются решения $x(t)$, для к-рых

$$|x(t)|\geqslant Ce^{\varepsilon t}|x(0)| \text{ при } t\geqslant 0,$$

где постоянные $C>0$, $\varepsilon>0$ — одни и те же для всех систем указанного класса. Соответствующие векторы $x(0)$ заполняют конус $x(0)^*Hx(0)<0$, где $H=H^*$ — нек-рая матрица, имеющая k отрицательных собственных значений.

Аналогично, при $n=1$ условие (13) является ч а с т о т н ы м к р и т е р и е м а б с о л ю т н о й н е у с т о й ч и в о с т и системы (1) с $\sigma=Cx$ в классе стационарных нелинейностей $\xi(t)=\varphi[\sigma(t)]$, где $0\leqslant\sigma\varphi(\sigma)\leqslant\mu_0\sigma^2$, если в (1) матрица A имеет собственные значения в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda>0$.

В теории У. а. установлены также аналогичные частотные критерии диссипативности, конвергенции, существования периодич. движений (автоколебаний и вынужденных режимов) и др. (см., напр., [3], [5] и литературу в [1], [3], [5]).

Лит.: [1] Г е л и г А. Х., Л е о н о в Г. А., Я к у б о в и ч В. А., Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия, М., 1978; [2] А й з е р м а н М. А.,

Гантмахер Ф. Р., Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем, М., 1963; [3] Якубович В. А., в кн.: Методы исследования нелинейных систем автоматического управления, М., 1975, с. 74—180; [4] Попов В. М., Гиперустойчивость автоматических систем, пер. с рум., М., 1970; [5] Воронов А. А., Устойчивость, управляемость, наблюдаемость, М., 1979; [6] Резван В., Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием, пер. с рум., М., 1983; [7] Пятницкий Е. С., «Автоматика и телемеханика», 1968, № 6, с. 5—36.

В. А. Якубович.

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА — равномерная относительно h и m ограниченность частично разрешающих операторов L_m^h, описывающих последовательные этапы вычислительного алгоритма решения уравнения

$$L^h u^h = f^h,$$

напр. сеточного уравнения с шагом h (см. *Замыкание вычислительного алгоритма*). У. в. а. является гарантией слабого влияния вычислительной погрешности на результат вычислений. Однако не исключена возможность, что величина $p(h)=\sup\limits_m \|L_m^h\|$ растет сравнительно медленно и соответствующее усиление влияния вычислительной погрешности при $h \to 0$ оказывается практически допустимым. Понятие У. в. а. конкретизируется в применении к проекционно-сеточным методам (см. [4]) и в применении к итерационным методам (см. [6]). Имеются и другие определения У. в. а. (см., напр., [1], [3]).

Лит.: [1] Бабушка И., Витасек Э., Прагер М., Численные процессы решения дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1969; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Гавурин М. К., Лекции по методам вычислений, М., 1971; [4] Марчук Г. И., Агошков В. И., Введение в проекционно-сеточные методы, М., 1981; [5] Самарский А. А., Гулин А. В., Устойчивость разностных схем, М., 1973; [6] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

А. Ф. Шапкин.

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА — свойство, характеризующее скорость накопления суммарной вычислительной погрешности. Понятие У. в. п. было введено потому, что в реальных расчетах невозможно оперировать с точными числами, ибо нельзя избежать округления, к-рое иногда может быть причиной быстрой потери точности.

Вычислительный процесс есть последовательность арифметич. операций над числами. Пусть X_i — нормированное линейное пространство и A_i — непрерывный оператор $A_i: X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_i \longrightarrow X_{i+1}$. Тогда последовательность уравнений

$$x_{i+1} = A_i(x_1, x_2, \ldots, x_i),$$
$$x_{i+1} \in X_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \qquad (1)$$

задает вычислительный процесс с исходным данным x_1 и промежуточными результатами x_i, $i = 2, 3, \ldots, N-1$. Обычно $X_i = \mathbb{R}^n$, а оператор A_i состоит из конечного числа арифметич. операций. Как правило, x_{i+1} зависит не от всех ранее полученных промежуточных результатов. Число N может быть задано заранее или определено в самом вычислительном процессе. В последнем случае N зависит от x_1 (напр., если N — число итераций, необходимых для достижения заданной точности).

Реальный вычислительный процесс не может быть проведен в точном соответствии с определением (1), так как при выполнении арифметич. операций допускаются ошибки округления и x_{i+1} получается из неточных предыдущих результатов. Это значит, что вместо элемента x_{i+1} фактически вычисляется элемент

$$\tilde{x}_{i+1} = A_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_i) + \delta_i, \quad \delta_i \in X_{i+1}, \qquad (2)$$

где малая аддитивная ошибка δ_i возникает из-за округлений в ходе выполнения оператора A_i. Значение δ_i определяется значениями $\tilde{x}_j$, $j = 1, 2, \ldots, i$, спосо-

бом округления, рабочей машинной программой и т. п. Однако даже если $\|\delta_j\|$ малы для $j=1, 2, \ldots, i$, это еще не гарантирует, что мала $\|x_{i+1}-\tilde{x}_{i+1}\|$. Она будет малой только для так наз. устойчивого вычислительного процесса, при этом она не будет сильно зависеть от i.

Лит.: [1] Бабушка И., Витасек Э., Прагер М., Численные процессы решения дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1969; [2] Воеводин В. В., Ошибки округления и устойчивость в прямых методах линейной алгебры, М., 1969; [3] Гавурин М. К., Лекции по методам вычислений, М., 1971. *А. Ф. Шапкин.*

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛАГРАНЖУ — свойство точки x (траектории $f^t x$) динамич. системы f^t (или $f(t, \cdot)$, см. [2]), заданной на метрич. пространстве S, состоящее в том, что все точки траектории $f^t x$ содержатся в нек-ром предкомпактном множестве (см. *Предкомпактное пространство*).

Если $S=\mathbb{R}^n$, то У. по Л.— то же, что ограниченность траектории. Если при всех $t\in\mathbb{R}^+$ (соответственно при всех $t\in\mathbb{R}^-$) точки $f^t x$ содержатся в нек-ром предкомпактном множестве, то траектория $f^t x$ (точка x) наз. положительно (соответственно отрицательно) устойчивой по Лагранжу. Понятие У. по Л. введено А. Пуанкаре (H. Poincaré) в связи с анализом результатов Ж. Лагранжа (J. Lagrange) по устойчивости планетных орбит.

Теорема Биркгофа: если S полно, то замыкание положительно или отрицательно устойчивой по Лагранжу траектории содержит хотя бы одно *минимальное множество*. Всякая точка минимального множества является *рекуррентной точкой*.

Лит.: [1] Пуанкаре А., Избранные труды, пер. с франц., т. 2, М., 1972, гл. 26, с. 130—58; [2] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949. *В. М. Миллионщиков.*

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ точки относительно семейства отображений нек-рого пространства E

$$\{f_t\}_{t\in G^+}: E \longrightarrow E \qquad (1)$$

— равностепенная непрерывность этого семейства отображений в этой точке (здесь G^+ — множество неотрицательных чисел: действительных $G=\mathbb{R}$ или целых $G=\mathbb{Z}$). У. по Л. точки относительно семейства отображений (1) эквивалентна непрерывности в этой точке отображения $x\longmapsto x(\cdot)$ ее окрестности во множество функций $x(\cdot)$, определенных формулой $x(t)=f_t(x)$, наделенное топологией равномерной сходимости на G^+. У. по Л. точки относительно отображения определяется как ее У. по Л. относительно семейства неотрицательных степеней этого отображения. У. по Л. точки относительно динамич. системы f^t есть У. по Л. этой точки относительно семейства отображений $\{f^t\}_{t\in G^+}$. У. по Л. заданного на $t_0+\mathbb{Z}^+$ решения $x_0(\cdot)$ уравнения $x(t+1)=g_t x(t)$ есть У. по Л. точки $x_0(t_0)$ относительно семейства отображений $\{f_t \overset{\text{det}}{=} g_{t_0+t}\cdots g_{t_0+1} g_{t_0}\}_{t\in\mathbb{Z}^+}$.

У. по Л. заданного на $t_0+\mathbb{R}^+$ решения $x_0(\cdot)$ дифференциального уравнения $\dot{x}=f(x, t)$ есть У. по Л. точки $x_0(t_0)$ относительно семейства отображений $\{X(t_0+t, t_0)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, где $X(\theta, \tau)$ — *Коши оператор* этого уравнения. У. по Л. заданного на $t_0+\mathbb{R}^+$ решения $y(\cdot)$ дифференциального уравнения

$$y^{(m)}=g(y, \dot{y}, \ldots, y^{(m-1)}, t)$$

порядка m есть У. по Л. заданного на $t_0+\mathbb{R}^+$ решения $x(\cdot)=(y(\cdot), \dot{y}(\cdot), \ldots, y^{(m-1)}(\cdot))$ соответствующего дифференциального уравнения 1-го порядка $\dot{x}=f(x, t)$, где

$$x=(x_1, \ldots, x_m),$$

$$f(x, t)=(x_2, \ldots, x_m, g(x_1, \ldots, x_m, t)).$$

Приводимые ниже определения 1—7 являются нек-рыми конкретизациями этих и родственных им определений.

1. Пусть дано дифференциальное уравнение $\dot{x}=f(x,t)$, где x принадлежит n-мерному нормированному пространству E. Решение $x_0(\cdot):t_0+\mathbb{R}^+\to E$ этого уравнения наз. устойчивым по Ляпунову, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всякого $x\in E$, удовлетворяющего неравенству $|x-x_0(t_0)|<\delta$, решение $x(\cdot)$ задачи Коши

$$\dot{x}=f(x,\ t),\ x(t_0)=x$$

единственно, определено на $t_0+\mathbb{R}^+$ и при всяком $t\in t_0+\mathbb{R}^+$ удовлетворяет неравенству $|x(t)-x_0(t)|<\varepsilon$. Если, сверх того, найдется $\delta_0>0$ такое, что для всякого решения $x(\cdot)$ уравнения $\dot{x}=f(x,t)$, начальное значение к-рого удовлетворяет неравенству

$$|x(t_0)-x_0(t_0)|<\delta_0,$$

имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)-x_0(t)|=0$$

(соответственно неравенство

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|x(t)-x_0(t)|<0;$$

здесь и далее полагают $\ln 0=-\infty$), то решение $x_0(\cdot)$ наз. асимптотически (соответственно экспоненциально) устойчивым.

Решение уравнения

$$\dot{x}=f(x,\ t),\qquad(2)$$

где $x\in\mathbb{R}^n$ или $x\in\mathbb{C}^n$, наз. устойчивым по Ляпунову (асимптотически, экспоненциально устойчивым), если оно становится таковым в результате наделения пространства $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) нек-рой нормой. От выбора нормы это свойство решения не зависит.

2. Пусть дано отображение $f:S\to S$, где $(S,\ d)$ — метрич. пространство. Точка $x_0\in S$ наз. устойчивой по Ляпунову относительно отображения f, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всякого $x\in S$, удовлетворяющего неравенству $d(x,x_0)<\delta$, выполнено неравенство

$$d(f^tx,\ f^tx_0)<\varepsilon$$

для всякого $t\in\mathbb{N}$. Если, сверх того, найдется $\delta_0>0$ такое, что для всякого $x\in S$, удовлетворяющего неравенству $d(x,\ x_0)<\delta_0$, имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty}d(f^tx,\ f^tx_0)=0$$

(неравенство

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln d(f^tx,\ f^tx_0)<0),$$

то точка x_0 наз. асимптотически (соответственно экспоненциально) устойчивой относительно отображения f.

Пусть дано отображение f компактного топологич. пространства S в себя. Точка $x_0\in S$ наз. устойчивой по Ляпунову (асимптотически устойчивой) относительно отображения f, если она становится таковой в результате наделения пространства S нек-рой метрикой. От выбора метрики это свойство точки не зависит.

Если S — компактное дифференцируемое многообразие, то точка $x_0\in S$ наз. экспоненциально устойчивой относительно отображения $f:S\to S$, если она становится таковой в результате наделения S нек-рой римановой метрикой. От выбора римановой метрики на S это свойство точки не зависит.

3. Пусть дано дифференциальное уравнение (2), где x принадлежит векторному топологич. пространству E. Решение $x_0(\cdot): t_0+\mathbb{R}^+ \to E$ этого уравнения наз. устойчивым по Ляпунову, если для всякой окрестности нуля $U \subset E$ множество тех $x \in E$, для к-рых решение $x(\cdot)$ задачи Коши (2), $x(t_0)=x$ единственно, определено на $t_0+\mathbb{R}^+$ и при всяком $t \in t_0+\mathbb{R}^+$ удовлетворяет соотношению $x(t)-x_0(t) \in U$, есть окрестность точки $x_0(t_0)$ в пространстве E. Если, сверх того, найдется окрестность $V_0 \subset E$ точки $x_0(t_0)$ такая, что для всякого решения $x(\cdot)$ уравнения (2), удовлетворяющего условию $x(t_0) \in V_0$, имеет место равенство

$$\lim_{t \to +\infty} (x(t)-x_0(t))=0$$

(равенство

$$\lim_{t \to +\infty} e^{\alpha t}(x(t)-x_0(t))=0$$

для нек-рого $\alpha > 0$), то решение $x_0(\cdot)$ наз. асимптотически (соответственно экспоненциально) устойчивым. Если пространство E нормируемо, то это определение формулируется так же, как в п. 1, если в качестве нормы $|\cdot|$ взять любую норму, согласующуюся с топологией пространства E.

4. Пусть дано дифференциальное уравнение (2) на римановом многообразии U (моделью к-рого служит евклидово или гильбертово пространство) или (более общая ситуация) на финслеровом многообразии U (моделью к-рого служит нормированное пространство); расстояние в U обозначается через $d(\cdot, \cdot)$. Решение $x_0(\cdot): t_0+\mathbb{R}^+ \to U$ этого уравнения наз. устойчивым по Ляпунову, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякого $x \in U$, удовлетворяющего неравенству $d(x, x_0(t_0)) < \delta$, решение $x(\cdot)$ задачи Коши (2), $x(t_0)=x$ единственно, определено на $t_0+\mathbb{R}^+$ и при всяком $t \in t_0+\mathbb{R}^+$ удовлетворяет неравенству $d(x(t), x_0(t)) < \varepsilon$. Если, сверх того, найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для всякого решения $x_0(\cdot)$ уравнения (2), начальное значение к-рого удовлетворяет неравенству $d(x(t_0), x_0(t_0)) < \delta_0$, имеет место равенство

$$\lim_{t \to +\infty} d(x(t), x_0(t))=0$$

(неравенство

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln d(x(t), x_0(t)) < 0),$$

то решение $x_0(\cdot)$ наз. асимптотически (соответственно экспоненциально) устойчивым.

Пусть дано дифференциальное уравнение (2) на компактном дифференцируемом многообразии V^n. Решение этого уравнения наз. устойчивым по Ляпунову (асимптотически, экспоненциально устойчивым), если оно становится таковым в результате наделения многообразия V^n нек-рой римановой метрикой. От выбора римановой метрики это свойство решения не зависит.

5. Пусть E — равномерное пространство. Пусть

$$f_t: U \longrightarrow E, \ t \in G^+ \ (G=\mathbb{R} \text{ или } G=\mathbb{Z}),$$

— отображения, определенные на открытом множестве $U \subset E$. Точка $x_0 \in U$ наз. устойчивой по Ляпунову относительно семейства отображений $\{f_t\}_{t \in G^+}$, если для всякого окружения W найдется окрестность V точки x_0 такая, что множество тех $x \in U$, для к-рых $(f_t x, f_t x_0) \in W$ при всяком $t \in G^+$, есть окрестность точки x_0. Если, сверх того, найдется окрестность V_0 точки x_0 такая, что для всякого $x \in V_0$ для всякого окружения W найдется $t(x, W) \in G^+$ такое, что $(f_t x, f_t x_0) \in W$ при всяком $t \in t(x, W)+\mathbb{R}^+$, то точка x_0 наз. асимптотически устойчивой.

Если E — компактное топологич. пространство, а $f_t\colon U \longrightarrow E$, $t \in G^+$, — отображения, заданные на нек-ром открытом множестве $U \subset E$, то точка $x_0 \in U$ наз. устойчивой по Ляпунову (асимптотически устойчивой) относительно семейства отображений $\{f_t\}_{t \in G^+}$, если она становится таковой в результате наделения пространства E той единственной равномерной структурой, к-рая согласуется с топологией пространства E.

6. Пусть E — топологич. пространство, U — открытое множество в нем. Пусть $f_t\colon U \longrightarrow E$, $t \in G^+$, где G есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$, — отображения, имеющие неподвижную точку x_0. Неподвижная точка x_0 наз. устойчивой по Ляпунову относительно семейства отображений $\{f_t\}_{t \in G^+}$, если для всякой окрестности V точки x_0 найдется окрестность W той же точки такая, что $f_t W \subset V$ при всяком $t \in G^+$. Если, сверх того, найдется окрестность V_0 точки x_0 такая, что $\lim\limits_{t \to +\infty} f_t x = x_0$ для всякого $x \in V_0$, то неподвижная точка x_0 наз. асимптотически устойчивой относительно семейства отображений $\{f_t\}_{t \in G^+}$.

7. У. по Л. (асимптотическая, экспоненциальная устойчивость) решения $y_0(\cdot)$ уравнения произвольного порядка $y^{(m)} = g(y, \dot{y}, \ldots, y^{(m-1)}, t)$ определяется как У. по Л. (соответственно асимптотическая, экспоненциальная устойчивость) решения $x_0(\cdot) = (y_0(\cdot), \dot{y}_0(\cdot), \ldots, y_0^{(m-1)}(\cdot))$ соответствующего уравнения 1-го порядка (2), где $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $f(x, t) = (x_2, \ldots, x_m, g(x_1, \ldots, x_m, t))$.

Определения 1, 2, 4, 6, 7 охватывают устойчивые движения систем с конечным числом степеней свободы (причем уравнения на многообразиях естественно возникают при рассмотрении механич. систем со связями). Определения 2—7 охватывают устойчивые движения в механике сплошной среды и в других разделах физики, устойчивые решения операторных, функционально-дифференциальных (в частности, уравнений с запаздыванием) и др. уравнений.

Исследование на устойчивость *равновесия положения* автономной системы. Пусть в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ задано автономное дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x)$, причем функция $f(\cdot)$ непрерывно дифференцируема и обращается в этой точке в нуль. Если действительные части всех собственных значений производной df_{x_0} отрицательны, то неподвижная точка x_0 дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$ экспоненциально устойчива (теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению); для облегчения проверки условия этой теоремы применяются критерии устойчивости. Если при тех же условиях хоть одно из собственных значений производной df_{x_0} имеет положительную действительную часть (это условие можно проверить, не находя самих собственных значений, см. *Устойчивости критерии*), то неподвижная точка x_0 дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$ неустойчива.

Пример. Уравнение колебаний маятника с трением

$$\ddot{y} + a\dot{y} + b \sin y = 0, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Нижнее положение равновесия $y = \dot{y} = 0$ экспоненциально устойчиво, т. к. корни характеристич. уравнения $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ *уравнения в вариациях* имеют отрицательные действительные части. Верхнее положение равновесия $y = \pi$, $\dot{y} = 0$ неустойчиво, т. к. характеристич. уравнение $\lambda^2 + a\lambda - b = 0$ уравнения в вариациях $\ddot{y} + a\dot{y} - by = 0$ имеет положительный корень. Эта неустойчивость имеет место и в отсутствии трения ($a = 0$). Нижнее положение равновесия маятника без

трения — один из т. н. критических случаев, когда все собственные значения производной df_{x_0} лежат в левой комплексной полуплоскости, причем хоть один из них лежит на мнимой оси.

Для исследования устойчивости в критич. случаях А. М. Ляпунов предложил т. н. второй метод исследования устойчивости (см. *Ляпунова функция*). Для маятника без трения

$$\ddot{y}+b\sin y=0, \quad b>0,$$

нижнее положение равновесия устойчиво по Ляпунову, т. к. существует функция Ляпунова

$$V(y,\ \dot{y})=\frac{1}{2}\dot{y}^2+b(1-\cos y)$$

— полная энергия маятника; условие неположительности производной этой функции — следствие закона сохранения энергии.

Неподвижная точка x_0 дифференцируемого отображения $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ экспоненциально устойчива относительно f, если все собственные значения производной df_{x_0} по модулю меньше 1, и неустойчива, если хоть одно из них имеет модуль >1.

Исследование устойчивости периодич. точки дифференцируемого отображения сводится к исследованию устойчивости неподвижной точки относительно степени этого отображения. Периодич. решение автономного дифференциального уравнения не бывает асимптотически устойчивым (см. *Орбитальная устойчивость*, *Андронова — Витта теорема*).

Не следует думать, что из экспоненциальной устойчивости нулевого решения уравнения в вариациях автономного дифференциального уравнения $\dot{x}=f(x)$ вдоль решения $x(\cdot)$ вытекает устойчивость решения. Это показывает пример Перрона (см. [2], [3]):

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}&=-au,\\ \dot{v}&=(\sin\ln t+\cos\ln t-2a)v+u^2.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

При $a>1/2$ нулевое решение системы уравнений в вариациях

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}&=-au,\\ \dot{v}&=(\sin\ln t+\cos\ln t-2a)v\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

системы (3) (вдоль нулевого решения) экспоненциально устойчиво (*Ляпунова характеристические показатели* системы (4) равны $-a$, $1-2a$), но при $a\in\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-\pi}\right)$ нулевое решение системы (3) неустойчиво. Однако устойчивость по первому приближению типична в смысле, разъясняемом ниже.

Пусть S — множество диффеоморфизмов f евклидова пространства E^n на себя, имеющих равномерно непрерывную производную, удовлетворяющую неравенству

$$\sup_{x\in E^n}\max\{\|df_x\|,\ \|(df_x)^{-1}\|\}<+\infty.$$

Для всякого диффеоморфизма $j\in S$ через S_j обозначается множество диффеоморфизмов $f\in S$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{x\in E^n}|fx-jx|<+\infty;$$

в множестве S_j задается расстояние

$$d(f,\ g)=\sup_{x\in E^n}(|fx-gx|+\|df_x-dg_x\|).$$

При всяком $j\in S$ в пространстве $S_j\times E^n$ имеется всюду плотное множество D_j типа G_δ, обладающее свойст-

ном: если для нек-рого $(f, x) \in D_j$ для всякого $\xi \in T_x E^n$ имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m} \ln |df^m \xi| < 0,$$

то найдется окрестность U точки (f, x) в пространстве $S_j \times E^n$ такая, что для всякого $(g, y) \in U$ точка y экспоненциально устойчива относительно диффеоморфизма g.

Для динамич. систем, заданных на компактном дифференцируемом многообразии, аналогичная теорема формулируется проще и является дифференциально-топологически инвариантной. Пусть V^n — замкнутое дифференцируемое многообразие. Множество S всех диффеоморфизмов f класса C^1, отображающих V^n на V^n, наделяется C^1-топологией. В пространстве $S \times V^n$ имеется всюду плотное множество D типа G_δ, обладающее свойством: если для нек-рого $(f, x) \in D$ для всякого $\xi \in T_x V^n$ выполнено неравенство

$$\overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m} \ln |df^m \xi| < 0,$$

то найдется окрестность U точки (f, x) в пространстве $S \times V^n$ такая, что для всякого $(g, y) \in U$ точка y экспоненциально устойчива относительно диффеоморфизма g.

Понятия У. по Л., асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости были введены А. М. Ляпуновым [1], разработавшим методы исследования устойчивости, понимаемой в смысле этих определений (см. также *Ляпунова теория устойчивости*).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956; [2] Perron O., «Math. Z.», 1928, Bd 29, S. 129—60; [3] Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1954.

В. М. Миллионщиков.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПУАССОНУ — свойство точки x (траектории $f^t x$) динамич. системы f^t (или $f(t, \cdot)$, см. [2]), заданной на топологич. пространстве S, состоящее в следующем: найдутся последовательности $t_k \to +\infty$, $\tau_k \to -\infty$ такие, что

$$\lim_{k \to \infty} f^{t_k} x = \lim_{k \to \infty} f^{\tau_k} x = x.$$

Иными словами, x является α- и ω-*предельной точкой* траектории $f^t x$. Понятие У. по П. введено А. Пуанкаре (H. Poincaré, [1]) на основе анализа результатов С. Пуассона (S. Poisson) по устойчивости планетных орбит.

Всякая точка, устойчивая по Пуассону,— неблуждающая; обратное неверно (см. *Блуждающая точка*). Всякая неподвижная и всякая периодич. точка, вообще всякая *рекуррентная точка*, устойчивы по Пуассону. Если $S = \mathbb{R}^3$ и динамич. система гладкая (т. е. задана векторным полем класса C^1), то всякая точка, устойчивая по Пуассону, является либо неподвижной, либо периодической.

Теорема Пуанкаре о возвращении: если динамич. система задана на ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$ и лебегова мера является инвариантной мерой системы, то устойчивы по Пуассону все точки, кроме точек нек-рого множества первой категории меры нуль (см. [1], [3]). Обобщением этой теоремы на динамич. системы, заданные на пространстве бесконечной меры, является теорема Хопфа о возвращении (см. [2]): если динамич. система задана на произвольной области пространства $\mathbb{R}^n$ (напр., на всем $\mathbb{R}^n$) и лебегова мера является инвариантной мерой системы, то каждая точка x, кроме точек нек-рого множества меры нуль, или устойчива по Пуассону или является уходящей, т. е.

$$|f^t x| \to \infty \text{ при } |t| \to \infty.$$

Имеются и более общие формулировки теорем Пуанкаре и Хопфа (см. [2]).

Лит.: [1] Пуанкаре А., Избранные труды, т. 2, М., 1972, гл. 26, с. 130—58; [2] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [3] Окстоби Дж., Мера и категория, пер. с англ., М., 1974.

В. М. Миллионщиков.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ — устойчивость в смысле Ляпунова решения $x=0$ по отношению не ко всем, а лишь к нек-рым переменным $x_1, \ldots, x_k$, $k<n$, системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s = X_s(t, x_1, \ldots, x_n), \quad s=1, \ldots, n. \qquad (1)$$

Здесь $X_s(t, x)$ — данные действительные непрерывные функции, удовлетворяющие в области

$$t \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \leqslant H = \text{const}, \quad \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2 < \infty \qquad (2)$$

условиям существования и единственности решения $x(t; t_0, x_0)$, причем

$$X_s(t, 0) \equiv 0, \ s=1, \ldots, n,$$

и любое решение определено для всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, при к-рых $\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \leqslant H$.

Пусть $x_i = y_i$ при $i=1, \ldots, k$; $x_{k+j} = z_j$ при $j=1, \ldots, m$, $n=k+m$ и $m \geqslant 0$;

$$\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{k} y_i^2\right)^{1/2}, \quad \|z\| = \left(\sum_{j=1}^{m} z_j^2\right)^{1/2},$$

$$\|x\| = \left(\sum_{s=1}^{n} x_s^2\right)^{1/2}.$$

Решение $x=0$ системы (1) наз.: а) у с т о й ч и в ы м по отношению к $x_1, \ldots, x_k$, или y-у с т о й ч и в ы м, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall t_0 \in I)(\exists \delta > 0)(\forall x_0 \in B_\delta)(\forall t \in J^+),$$

$$\|y(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon,$$

т. е. при всяких произвольно задаваемых числах $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < H$) и $t_0 \geqslant 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что при всяких возмущениях x_0, удовлетворяющих условию $\|x_0\| \leqslant \delta$, и при всяком $t > t_0$ для решения $x(t; t_0, x_0)$ выполняется условие $\|y\| < \varepsilon$;

б) y-н е у с т о й ч и в ы м в противном случае, т. е. если

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists t_0 \in I)(\forall \delta > 0)(\exists x_0 \in B_\delta)(\exists t \in J^+),$$

$$\|y(t; t_0, x_0)\| \geqslant \varepsilon;$$

в) y-у с т о й ч и в ы м р а в н о м е р н о п о t_0, если в определении а) для каждого $\varepsilon > 0$ число $\delta(\varepsilon)$ можно выбрать не зависящим от t_0;

г) а с и м п т о т и ч е с к и y-у с т о й ч и в ы м, если оно y-устойчиво и для каждого $t_0 \geqslant 0$ существует число $\delta_1(t_0) > 0$ такое, что

$$\lim_{t \to \infty} \|y(t; t_0, x_0)\| = 0 \quad \text{при} \quad \|x_0\| \leqslant \delta_1.$$

Здесь $I=[0, \infty)$, J^+ — максимальный правый интервал, где $x(t; t_0, x_0)$ определено, $B_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \delta\}$; в случае г), кроме указанных выше условий, предполагается, что все решения системы (1) существуют на $[t_0, \infty)$.

Постановка задачи об У. по ч. п. дана А. М. Ляпуновым [1] как обобщение задачи устойчивости по всем переменным ($k=n$). При решении этой задачи особенно эффективным оказался метод *Ляпунова функции*, модифицированный (см. [2]) применительно к задачам y-устойчивости. В основе метода лежит ряд теорем, обобщающих классич. теоремы Ляпунова.

Пусть рассматриваются действительные однозначные функции $V(t, x) \in C^1$, $V(t, 0) \equiv 0$, а также их полные

производные по времени в силу (1):

$$\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s.$$

Знакопостоянная функция $V(t,\ x)$ наз. *y-знакоопределенной*, если существует положительно-определенная функция $W(y)$ такая, что в области (2)

$$V(t,\ x)\geqslant W(y) \text{ или } -V(t,\ x)\geqslant W(y).$$

Ограниченная функция $V(t,\ x)$ *допускает бесконечно малый высший предел по* $x_1, \ldots, x_p$, если для всякого числа $l>0$ найдется $\lambda(l)>0$ такое, что

$$|V(t,\ x)|<l$$

при $t\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{p}x_i^2<\lambda$, $-\infty<x_{p+1}, \ldots, x_n<\infty$.

Теорема 1. Если система (1) такова, что существует y-положительно-определенная функция $V(t,\ x)$, производная к-рой $\dot{V}\leqslant 0$, то решение $x=0$ является y-устойчивым.

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, V допускает бесконечно малый высший предел по x, то решение $x=0$ системы (1) y-устойчиво равномерно по t_0.

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, V допускает бесконечно малый высший предел по y, то для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta_2(\varepsilon)>0$ такое, что из $t_0\geqslant 0$, $\|y_0\|\leqslant\delta_2$, $0\leqslant\|z_0\|<\infty$ следует справедливость неравенства

$$\|y(t;\ t_0,\ x_0)\|<\varepsilon \text{ для всех } t\geqslant t_0.$$

Теорема 4. Если система (1) такова, что существует y-положительно-определенная функция V, допускающая бесконечно малый высший предел по $x_1, \ldots, x_p$ $(k\leqslant p\leqslant n)$, производная к-рой $\dot{V}$ отрицательно-определенная по $x_1, \ldots, x_p$, то решение $x=0$ системы (1) асимптотически y-устойчиво.

Для исследования y-неустойчивости успешно применяются теорема о неустойчивости Четаева (см. *Четаева функция*), а также нек-рые другие теоремы. Установлены условия обратимости ряда теорем об y-устойчивости, напр. обратимость теорем 1, 2, а также теоремы 4 при $p=k$. Применяются методы дифференциальных неравенств и вектор-функций Ляпунова; установлены теоремы об асимптотической y-устойчивости в целом, по 1-му приближению и т. п. (см. [3]).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., «Матем. сб.», 1893, т. 17, № 2, с. 253—333; [2] Румянцев В. В., «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астроном., физ., хим.», 1957, № 4, с. 9—16; [3] Озиранер А. С., Румянцев В. В., «Прикл. матем. и механ.», 1972, т. 36, в. 2, с. 364—84.

В. В. Румянцев.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ — свойство решения $x_0(t)$, $t\geqslant t_0$, начальной задачи

$$\dot{x}=f(x,\ t),\ x(t_0)=x_0,\ x\in\mathbb{R}^n, \qquad (*)$$

состоящее в следующем. Для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всякой точки y_0, удовлетворяющей неравенству $|y_0-x_0|<\delta$, и всякого отображения $g(x,\ t)$, удовлетворяющего условиям:

а) g и g_x' непрерывны на множестве

$$E_\varepsilon=\{(x,\ t): t\geqslant t_0,\ |x-x_0(t)|<\varepsilon\},$$

б) $$\sup_{(x,\ t)\in E_\varepsilon}|g(x,\ t)-f(x,\ t)|<\delta,$$

решение $y_0(t)$ начальной задачи

$$\dot{y}=g(y,\ t),\quad y(t_0)=y_0,\quad y\in\mathbb{R}^n,$$

определено при всех $t\geqslant t_0$ и удовлетворяет неравенству

$$\sup_{t\geqslant t_0}|y_0(t)-x_0(t)|<\varepsilon.$$

Теорема Боля [1]. Пусть начальная задача (*), имеющая решение $x_0(t)$, $t \geqslant t_0$, удовлетворяет условиям:

а) f и f'_x непрерывны на E_{ε_0} при нек-ром $\varepsilon_0 > 0$,

б) $\sup\limits_{t \geqslant t_0} \| f'_x(x_0(t),\ t) \| < +\infty$,

в) отображение f дифференцируемо по x в точках $(x_0(t),\ t)$ при $t \geqslant t_0$ равномерно относительно $t \geqslant t_0$, т. е.

$$\sup_{t \geqslant t_0} \frac{1}{|y|} | f(x_0(t)+y,\ t) - f(x_0(t),\ t) - f'_x(x_0(t),\ t)\, y | \longrightarrow 0 \text{ при } y \longrightarrow 0.$$

Тогда для того чтобы решение этой начальной задачи было устойчиво при постоянно действующих возмущениях, необходимо и достаточно, чтобы верхний *особый показатель* системы уравнений в вариациях системы $\dot{x} = f(x,\ t)$ вдоль решения $x_0(t)$ был меньше нуля.

Если $f(x,\ t)$ не зависит от t (автономная система) и решение $x_0(t)$ — периодическое или постоянное, а также если $f(x,\ t)$ — периодическая по t функция и решение $x_0(t)$ — периодическое с тем же (или с соизмеримым) периодом или постоянное, то: а) указанное в теореме Боля условие равномерной дифференцируемости лишнее (оно вытекает из остальных условий теоремы), б) верхний особый показатель системы уравнений в вариациях системы $\dot{x} = f(x,\ t)$ вдоль решения $x_0(t)$ вычисляется эффективно.

Лит.: [1] Bohl P., «J. reine und angew. Math.», 1914, Bd 144, S. 284—318; [2] Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, 2 изд., М., 1966; [3] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970.

В. М. Миллионщиков.

УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ — одно из важных понятий теории разностных (сеточных) методов, характеризующее непрерывную зависимость решений разностных схем по отношению к входной информации. Точнее, пусть разностная схема (разностный или сеточный аналог исходной задачи) использует множество сеток Ω_h с $h \in \{h\}$ в пространстве независимых переменных для исходной задачи, где параметр h является элементом нек-рого линейного нормированного пространства и характеризует конкретную используемую сетку. Пусть каждой такой сетке Ω_h соответствует N_h-мерное линейное пространство U_h и операторное уравнение в U_h (система разностных уравнений)

$$L_h(u_h) = f_h, \quad h \in \{h\}, \tag{1}$$

в к-ром $f_h \in U_h$ и оператор L_h заданы. Обычно h связывается с размерами ячеек сетки и N_h неограниченно возрастает при $\|h\| \longrightarrow 0$. Пусть u_h и f_h — элементы нормированных пространств H_h и F_h, а оператор L_h — линейный. Тогда говорят, что разностная схема устойчива, если: 1) для любого $h \in \{h\}$ существует L_h^{-1}; 2) существует константа $K > 0$, не зависящая от h и такая, что

$$\| L_h^{-1} \|_{F_h \to H_h} \leqslant K, \quad h \in \{h\}. \tag{2}$$

Это определение равносильно корректности (1): решение (1) существует и единственно при любой правой части f_h и равномерно (по h) непрерывно зависит от f_h в смысле пространств H_h и F_h. Оно же на языке априорных оценок означает наличие константы K, не зависящей от h и такой, что для любого решения (1) имеет место априорная оценка

$$\| u_h \|_{H_h} \leqslant K \| f_h \|_{F_h}. \tag{3}$$

Таким образом, если для устойчивой разностной схемы по той или иной причине (напр., в силу приближенного решения (1)) реально отыскивалась не функция

u_h из (1). а функция $\tilde{u}_h$ из возмущенного уравнения $L_h\tilde{u}_h = \tilde{f}_h$, то погрешность легко оценивается сверху:

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{H_h} \leqslant K \|f - \tilde{f}_h\|_{F_h}. \qquad (4)$$

Кроме того, если разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу в смысле пространства F_h, то она является и сходящейся с оценкой погрешности

$$\|z_h\|_{H_h} \leqslant K \|\xi_h\|_{F_h}, \qquad (5)$$

где z_h — погрешность схемы, а ξ_h — погрешность аппроксимации (см. [1], [3], [7]). Приведенная теорема объясняет и причину того, что f_h рассматривается как элемент нормированного пространства F_h: от выбора пространства F_h существенно зависит и погрешность аппроксимации. Поэтому при фиксированном пространстве H_h целесообразны теоремы устойчивости типа (3) с использованием наиболее слабых норм $\|f_h\|_{F_h}$, в к-рых порядок аппроксимации возрастает. При фиксированном же F_h целесообразно изучать устойчивость (1) с использованием наиболее сильных норм $\|u_h\|_{H_h}$. В этом отношении имеет место полная аналогия с задачей изучения корректности исходной краевой задачи. Поэтому и сами пространства H_h и F_h обычно строятся как сеточные аналоги известных функциональных пространств (напр., $C(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $W_2^m(\Omega)$ и т. п., см. [3]—[5]) и допускают соответствующие предельные переходы при $\|h\| \to 0$. Примеры выбора таких сеточных пространств, различные приемы изучения У. р. с. в этих пространствах, а также обзор результатов см. [1]—[15]. В проекционно-сеточных методах (методах конечных элементов, проекционно-разностных, вариационно-разностных) для стационарных задач наиболее распространен прием изучения сходимости на основе оценок погрешности через расстояние до аппроксимирующих подпространств (см. [3]—[5], [7], [10], [12], [13]). Тогда теоремы устойчивости типа (3) нужны лишь для получения оценок (4) и изучение последних при H_h и F_h, совпадающих с евклидовым пространством сеточных функций, часто заменяется традиционным алгебраич. подходом, связанным с изучением чисел обусловленности матриц L_h (см. [10]—[12]).

В нестационарных задачах роль независимой переменной t существенно отлична от роли пространственных переменных, и это обстоятельство приводит к отдельному рассмотрению сетки по времени ω_t и сетки ω_x — по пространственным переменным $x_1, x_2, \ldots, x_d$. Оно же определяет и специфику разностных схем для нестационарных задач, связанную с их расслоением (см. [1]—[6]). Для простоты описания будем считать, что $\omega_t = \omega_{t,\tau}$ определяется шагом $\tau > 0$, т. е.

$$\omega_t = \{t = n\tau = t_n, \quad n = 0, 1, \ldots, [T\tau^{-1}]\},$$

а сетка ω_x определяется вектором $(h_1 h_2, \ldots, h_d)$ шагов по пространственным переменным, $h_r > 0$, $r = 1, 2, \ldots, d$. Тогда сетка Ω из (1) определяется как $\omega_t \times \omega_x$, где $h = \{\tau, h_1, h_2, \ldots, h_d\}$, а пространство U_h состоит из векторов $u = \{u(0), u(\tau), \ldots, u([T\tau^{-1}])\}$, где каждое $u(n\tau) = u^n$ принадлежит линейному пространству $U = U_{(h_1, h_2, \ldots, h_d)}$ сеточных функций заданных на сетке ω_x. Поэтому нормы в пространствах H_h и F_h, встречающиеся в (2)—(5), обычно определяются через различные нормы $\|u\|_H$ и $\|f\|_F$ для линейного пространства U сеточных функций, заданных на сетке ω_x. Напр., в роли $\|u_h\|_{H_h}$ часто берутся выражения типа $\max\limits_{t^n \in \omega_t} \|u^n\|_H$, $\tau \sum\limits_n \|u^n\|_H$ и т. п. (см. [1]—[6]). Наиболее детально изучен при этом случай, когда H и F явля-

ются евклидовыми или унитарными пространствами и получение оценок типа (3) возможно на основе относительно простых средств. Напр., пусть рассматривается линейная двухслойная разностная схема вида

$$\left.\begin{aligned} A_1 u^{n+1} &= A_0 u^n + \tau f^{n+1},\ n \geqslant 0, \\ u^0 &= \varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где векторы φ и f^{n+1} определяются начальным условием и правой частью уравнения, а операторы A_1 и A_0 в евклидовом пространстве H таковы, что $\|A_1^{-1}\| \leqslant C_0$, $\|A_1^{-1}A_0\| \leqslant 1 + C_1\tau$, где неотрицательные константы C_0 и C_1 не зависят от сетки. Тогда для решения (6) справедлива априорная оценка

$$\max_{n,\ t^{n+1}\in\omega_t} \|u^n\|_H \leqslant e^{C_1 T}\left\{\|\varphi\|_H + C_0 \sum_{n,\ t_{n+1}\in\omega_t} \tau \|f^{n+1}\|_H\right\}, \qquad (7)$$

Весьма часто анализ таких схем проводится после записи их в канонич. виде

$$B\left(\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}\right) + Au^n = f^{n+1}$$

на основе изучения свойств оператора перехода $R = E - \tau B^{-1}A$ (E — тождественный оператор) в предположении, что имеется нек-рая относительно простая информация типа операторных неравенств об операторах B и A в евклидовом пространстве H. Напр., если $B = B^* > 0$, $A = A^*$ и $B \geqslant \tau(1+\rho)^{-1}A$, то (см. [3], [6]) существует константа $C = C(T, \rho)$ такая, что

$$\|u^{n+1}\|_B \leqslant C\left(\|u^0\|_B + \tau \sum_{k=0}^{n} \|f^{k+1}\|_{B^{-1}}\right), \qquad t_{n+1} \in \omega_t, \qquad (8)$$

где $\|u^n\|_B \equiv (Bu^n, u^n)_H^{1/2}$. Подобные результаты получены для достаточно широкого круга разностных схем, включая трехслойные и нек-рые многослойные схемы (см. [6]). При этом изучены и нек-рые частные случаи устойчивости (устойчивость по начальным данным, устойчивость по правой части) и их взаимоотношения.

Имеются нек-рые результаты, связанные с изучением необходимых условий подобной устойчивости или близких к ним (см. [3], [6]). Использование энергетич. неравенств (см. [4], [5]) вместо (8) позволяет при родственных условиях получить оценку типа

$$\|u^{n+1}\|_B^2 + \tau \sum_{k=0}^{n} \|u^{k+1}\|_H^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_1\left(\|u^0\|_B^2 + \tau \sum_{k=0}^{n} \|f^{k+1}\|_{B^{-1}}^2\right), \qquad (9)$$

приводящую к устойчивости в несколько более сильной норме для u_h и переходящей в пределе в оценку, часто встречающуюся в теории эволюционных уравнений. Подобные оценки также получены для весьма широкого круга схем (см. [4], [5], [13]).

При изучении У. р. с. выделяют условно устойчивые разностные схемы типа явных схем для уравнения теплопроводности, в к-рых устойчивость имеется лишь при ограничениях типа $\tau(h_s)^{-2} \leqslant \varkappa_0$, и схемы абсолютно устойчивые, в к-рых шаги по времени и по пространственным переменным могут меняться независимо друг от друга, не нарушая устойчивости. Схемы последнего типа часто являются предпочтительными, если они не требуют решения сложных систем на каждом шаге. К таким экономичным разностным схемам для многомерных задач относятся неявные схемы переменных направлений, схемы расщепления, схемы с расщепляющимся оператором и аддитивные схемы (см. [3] — [6]).

Теоремы устойчивости и оценки типа (3), (9) находят применение и в случае, когда погрешность аппроксимации и оценка (5) не рассматриваются, а строятся

соответствующие восполнения решений сеточных задач и устанавливается на основе теорем компактности сходимость к решению исходной задачи (см. [4], [5]). Использование различных априорных оценок и упомянутого принципа компактности особенно характерно для сложных нелинейных задач, в к-рых решение может быть и неединственно, а сходимость устанавливается лишь к нек-рому решению исходной задачи. Иногда изучение нелинейных задач математич. физики по причине их сложности вообще заменяется изучением их линеаризацией, а для разностных схем обращается особое внимание на справедливость сеточных аналогов важнейших физич. законов сохранения (см. [8]). Для слабо же нелинейных задач изучение корректности разностных схем часто проводится с достаточной полнотой, характерной для линейного случая (см. [5] — [7] и *Нелинейная краевая задача*; численные методы решения).

В случае задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений изучение устойчивости разностных схем часто сводится в модельных ситуациях к изучению корней характеристич. уравнения (см. [2], [14], [15]).

Лит.: [1] Рябенький В. С., Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, М., 1956; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 2, 2 изд., М., 1962; [3] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977; [4] Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики, М., 1973; [5] Дьяконов Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, в. 1—2, М., 1971—72; [6] Самарский А. А., Гулин А. В., Устойчивость разностных схем, М., 1973; [7] Самарский А. А., Андреев В. Б., Разностные методы для эллиптических уравнений, М., 1976; [8] Самарский А. А., Попов Ю. П., Разностные методы решения задач газовой динамики, 2 изд., М., 1980; [9] Ладыженская О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2 изд., М., 1970; [10] Оганесян Л. А., Руховец Л. А., Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, Ер., 1979; [11] Михлин С. Г., Численная реализация вариационных методов, М., 1966; [12] Стренг Г., Фикс Дж., Теория метода конечных элементов, пер. с англ., М., 1977; [13] Злотник А. А., «Вестн. Моск. ун-та», сер. 15, 1980, № 1, с. 27—35; [14] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [15] Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г., Численные методы решения жестких систем, М., 1979.

Е. Г. Дьяконов.

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СИСТЕМ — 1) У. у. с.— свойство упругих систем (упругих тел или совокупностей взаимодействующих упругих тел) мало отклоняться от состояния равновесия (движения) при достаточно малых возмущающих воздействиях. Роль возмущающих воздействий играют флуктуации внешних сил, отклонения от идеальной геометрич. формы, дефекты материала и т. п.

2) У. у. с.— раздел механики деформируемого твердого тела, предметом к-рого является изучение У. у. с. В более широкой трактовке этот раздел включает изучение устойчивости вязкоупругих, упруго-пластических и др. деформируемых систем; часто употребляют также термин устойчивость деформируемых систем.

Понятие У. у. с. тесно связано с общим понятием устойчивости движения, в частности с понятием *устойчивости по Ляпунову*. Центральная задача теории У. у. с.— нахождение области в пространстве параметров системы и внешних воздействий, в пределах к-рой рассматриваемое состояние равновесия (движения) остается устойчивым. Поверхность, ограничивающая область устойчивости, наз. критической поверхностью. Часто воздействие на упругую систему задают с точностью до одного параметра β. Без ограничения общности можно принять, что $0 \leqslant \beta < \infty$, причем при $\beta=0$ имеет место устойчивость. Нижняя грань β_* значений параметра β, при к-рых исследуемое равновесие (движение) перестает быть устойчивым, наз. критическим параметром. Задачи

У. у. с. имеют большое прикладное значение: потеря устойчивости элементов конструкций, машин и приборов, как правило, влечет утрату несущей способности или нарушение нормальных условий эксплуатации.

Строгая теория У. у. с. основана на распространении классич. *устойчивости теории* на континуальные системы и может рассматриваться как приложение теории дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Близость исследуемого состояния и возмущенных состояний оценивается по нек-рой норме. В практич. расчетах широко применяют аппроксимацию континуальных систем конечномерными системами с широким привлечением вариационных, сеточных и т. п. приближенных методов.

В случае упругой системы с идеальными связями, нагруженной потенциальными не зависящими от времени силами, система в целом консервативная. Условия устойчивости равновесия даются теоремой Лагранжа — Дирихле, согласно к-рой в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия системы Π имеет *изолированный минимум*. На этой теореме основан энергетический метод исследования У. у. с., состоящий в изучении изменения потенциальной энергии системы Π при изменении параметров. При этом $\Pi[u]$ — функционал от поля перемещений u. В однопараметрич. задачах У. у. с. критич. параметр β_* есть нижняя грань значений β, при к-рых нарушается неравенство $\delta^2\Pi>0$ при условии $\delta\Pi=0$. В окрестности критич. значений β_* происходит бифуркация форм равновесия.

Для вычисления критич. параметров, отвечающих точкам бифуркации, вместо энергетич. метода обычно используют статический метод. При этом задача У. у. с. сводится к линейной задаче о собственных значениях для операторного уравнения, соответствующего вариационному условию $\delta I=0$. Здесь $I[u]$ — квадратичный функционал от поля перемещений, к-рый формально совпадает с $\delta^2\Pi$, если вариацию δu заменить на u. Минимальное собственное значение принимают за критич. параметр. Как правило, дополнительный анализ подтверждает, что при достижении минимального собственного значения происходит бифуркация форм равновесия.

Оба метода берут начало от работ Л. Эйлера (L. Euler) по основам классич. вариационного исчисления (1744—1757). Им же решены простейшие задачи об устойчивости призматич. упругих стержней при осевом сжатии, а также изучено поведение стержней после потери устойчивости. Для стержня, шарнирно опертого по концам, критич. сила равна

$$N_*=\pi^2EJ/l^2,$$

где E — модуль Юнга материала. J — момент инерции поперечного сечения, l — длина стержня. Накоплено большое количество конкретных результатов для стержней, стержневых систем, пластин, оболочек, а также тел, все характерные размеры к-рых имеют одинаковый порядок (см. [1]).

В случае непотенциальных сил энергетич. и статич. методы, вообще говоря, неприменимы (см. [2]). Они неприменимы также в динамических задачах У. у. с. (см. [3]). Во всех этих случаях используют динамический метод, состоящий в рассмотрении малых движений системы в окрестности исследуемого равновесия (движения). При постоянных во времени внешних воздействиях изучение устойчивости сводится к обобщенной задаче о собственных значениях относительно параметров системы, а также характеристич. показателей или комплексных собственных частот. Динамич. метод основан на распространении теорем об устойчивости по первому прибли-

жению на континуальные системы. Если при постановке конкретной задачи не допущено переупрощений, то такой метод дает правильные результаты. В противном случае возможны явления, известные под названием парадоксов стабилизации и дестабилизации (см. [4]). Среди неконсервативных задач теории У. у. с. значительное место принадлежит задачам аэроупругости и гидроупругости (см. [2], [5], [6]), а также задачам устойчивости при периодических внешних воздействиях (см. [3]). Последние тесно связаны с теорией параметрич. резонансов для континуальных систем.

Обобщение теории У. у. с. на упруго-пластические системы связано с преодолением серьезных трудностей исследования устойчивости существенно нелинейных неголономных континуальных систем (см. [7]). Для систем из материалов, подверженных ползучести и другим явлениям, протекающим во времени, требуется исследование устойчивости на конечном интервале времени [8].

Лит.: [1] Вольмир А. С., Устойчивость деформируемых систем, 2 изд., М., 1967; [2] Болотин В. В., Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, М., 1961; [3] его же, Динамическая устойчивость упругих систем, М., 1956; [4] его же, в кн.: Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением, Новосиб., 1979, с. 7—17; [5] Вольмир А. С., Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости, М., 1976; [6] его же, Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости, М., 1979; [7] Клюшников В. Д., Устойчивость упруго-пластических систем, М., 1980; [8] Работнов Ю. Н., Элементы наследственной механики твердых тел, М., 1977.

В. В. Болотин.

УСТОЙЧИВОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ — свойство *Ляпунова характеристических показателей* линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $A(\cdot)$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (или $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$), удовлетворяющее условию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \| A(t) \| < +\infty.$$

Говорят, что характеристич. показатели Ляпунова системы (1) устойчивы, если каждая из функций

$$\lambda_i(\cdot): M_n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

непрерывна в точке A. Здесь $\lambda_1(A) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(A)$ — характеристич. показатели Ляпунова системы (1), а M_n — множество систем (1), наделенное структурой метрич. пространства заданием расстояния

$$d(A, B) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \| A(t) - B(t) \|$$

(для удобства система (1) отождествляется с отображением $A(\cdot)$, причем вместо $A(\cdot)$ пишется A).

Были обнаружены (см. [2], [3]) системы (1) с неустойчивыми характеристич. показателями. Напр., характеристич. показатели системы

$$\dot{u} = 0,$$

$$\dot{v} = (\sin \ln(1+t) + \cos \ln(1+t))\,v + \delta u$$

при $\delta = 0$ неустойчивы, т. к. при $\delta = 0$ ее старший характеристич. показатель $\lambda_1 = 1$, а при $\delta \neq 0$ показатель $\lambda_1 > 1$ и не зависит от $\delta \neq 0$. Для устойчивости характеристич. показателей достаточно, чтобы выполнялось *интегральной разделенности условие* (теорема Перрона). Множество систем (1), удовлетворяющих этому условию, совпадает с внутренностью (в пространстве M_n) множества всех систем (1) с устойчивыми характеристич. показателями.

Если $A(t) \equiv A(0)$ при всех $t \in \mathbb{R}^n$ или $A(t+T) = A(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}^n$ (при нек-ром $T > 0$) (т. е. система (1) имеет постоянные или периодич. коэффициенты), то характеристич. показатели системы (1) устойчивы.

Если $A(\cdot)$ — почти периодич. отображение (см. *Линейная система дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами*), то для У. х. п. системы (1) необходимо и достаточно, чтобы система (1) была почти приводима.

Для того чтобы характеристич. показатели системы (1) были устойчивы, достаточно, чтобы нашлось *Ляпунова преобразование*, приводящее систему (1) к клеточно-диагональному виду

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_i &= B_i(t)\, y_i, \\ y_i &\in \mathbb{R}^{k_i},\ i=1,\ \ldots,\ m,\ \sum_{i=1}^{m} k_i = n, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

такому, что: а) клетки интегрально разделены, т. е. найдутся числа $d>0$, $a>0$ такие, что

$$\| Y_i(\tau, \theta) \|^{-1} \geqslant d\, (\exp [a\cdot(\theta-\tau)])\, \| Y_{i+1}(\theta, \tau) \|$$

для всех $\theta \geqslant \tau \geqslant 0$, $i=1, \ldots, m-1$ (здесь $Y_i(\theta, \tau)$ — *Коши оператор* системы (2)); б) верхний и нижний *центральные показатели* системы (2) равны друг другу:

$$\Omega(B_i) = \omega(B_i) \text{ при всяком } i=1, \ldots, m.$$

Условия этой теоремы являются и необходимыми условиями У. х. п. системы (1) (см. [6]). Системы с неустойчивыми характеристич. показателями могут обладать свойством стохастической У. х. п.

Характеристич. показатели системы (1) паз. с т о х а с т и ч е с к и у с т о й ч и в ы м и (или у с т о й ч и в ы м и п о ч т и н а в е р н о е), если при $\sigma \to 0$ характеристич. показатели Ляпунова системы

$$\dot{y} = A(t)\, y + \sigma^2 C(t, \omega)\, y$$

стремятся с вероятностью 1 к характеристич. показателям Ляпунова системы (1); здесь элементы матрицы, задающей линейные операторы $C(t, \omega): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (в нек-ром — не зависящем от (t, ω) — базисе пространства $\mathbb{R}^n$) суть независимые ненулевые *белые шумы*.

Если отображение $A(\cdot): \mathbb{R} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывно и

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \| A(t) \| < +\infty,$$

то для почти всякого отображения $\tilde{A}(\cdot)$, где

$$\tilde{A}(t) = \lim_{k \to \infty} A(t_k + t),$$

характеристич. показатели системы $\dot{x} = \tilde{A}(t)\, x$ стохастически устойчивы (для *сдвигов динамической системы* $(S = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ рассматривают нормированную инвариантную меру, сосредоточенную на замыкании траектории точки $A(\cdot)$; под почти всяким $\tilde{A}(\cdot)$ понимается почти всякое $\tilde{A}(\cdot)$ в смысле всякой такой меры).

Пусть динамич. система на гладком замкнутом многообразии V^n задана гладким векторным полем. Тогда для почти всякой (в смысле всякой нормированной инвариантной меры) точки $x \in V^n$ характеристич. показатели системы *уравнений в вариациях* вдоль траектории точки x стохастически устойчивы.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956; [2] Perron O., «Math. Z.», 1930, Bd 31, S. 748—66; [3] его же, «J. reine und angew. Math.», 1913, Bd 142, S. 254—70; [4] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1949; [5] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [6] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146.

В. М. Миллионщиков.

УСТРАНИМАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА однозначной аналитической функции $f(z)$ комплексного переменного z — термин для обозначения такой точки a, в проколотой окрестности $V(a) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < \delta\}$ к-рой функция $f(z)$ аналитическая и ограниченная.

При этих условиях существует конечный предел

$$\lim_{z\to a,\ z\neq a} f(z)=f(a).$$

Этот предел принимают за значение $f(z)$ в точке a и получают аналитич. функцию во всей окрестности точки a. *Е. Д. Соломенцев.*

УСТРАНИМОЕ МНОЖЕСТВО E точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$ для нек-рого класса K однозначных аналитических функций относительно области $G\subset\mathbb{C}$ — такое компактное множество $E\subset G$, что любая функция $f(z)$ класса K в $G\setminus E$ продолжается как функция класса K на всю область G. Иначе эту ситуацию описывают словами «множество E стирается для класса K» или «E есть нуль-множество для класса K», сокращенно: $E\in N(K, G)$. Предполагается, что дополнение $G\setminus E$ есть область и что класс K определен для любой области.

Согласно другому определению, множество E устранимо для класса K, $E\in N(K)$, если из того, что $f(z)$ есть функция класса K в дополнении $\overline{\mathbb{C}}\setminus E$, следует, что $f(z)=\text{const}$. При этом включения $E\in N(K, G)$ и $E\in N(K)$, вообще говоря, не равносильны.

Первым результатом об У. м. можно считать классич. теорему Коши — Римана об устранимой особенности: если функция $f(z)$ аналитическая и ограниченная в проколотой окрестности $V(a)=\{z: 0<|z-a|<\delta\}$ точки $a\in\mathbb{C}$, то она *продолжается аналитически в точку* a. Более широкая постановка вопроса (проблема Пенлеве) принадлежит П. Пенлеве (P. Painlevé): найти условия на множество E, необходимые и достаточные для того, чтобы $E\in N(AB, G)$, где $K=AB$ — класс ограниченных аналитич. функций (см. [1]). Сам П. Пенлеве нашел достаточное условие: E должно иметь нулевую линейную меру Хаусдорфа. Необходимое и достаточное условие в проблеме Пенлеве получено Л. Альфорсом (см. [2]): $E\in N(AB, G)$ тогда и только тогда, когда E имеет нулевую *аналитическую емкость*. Существует пример множества E положительной длины, но нулевой аналитич. емкости. Об У. м. для различных классов аналитич. функций одного комплексного переменного и относящихся к ним нерешенных проблемах см. [3], [4], [6], [9].

В случае аналитич. функций $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n\geqslant 2$, постановка задач об У. м. изменяется в силу классич. теоремы Осгуда — Брауна: если $f(z)$ — регулярная аналитическая в области $G\subset\mathbb{C}^n$ функция, за исключением, быть может, компактного множества $E\subset G$ такого, что дополнение $G\setminus E$ связно, то $f(z)$ аналитически продолжается на всю область G. Другие теоремы об У. м. при $n\geqslant 2$, а также их связь с понятием *голоморфности области* см., напр., в [7], [10].

Задачи об У. м. ставятся также для гармонич., субгармонич. функций и др. Так, напр., пусть G — область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, E — компакт, $E\subset G$, HB — класс ограниченных гармонич. функций, HD — класс гармонич. функций с конечным интегралом Дирихле. Тогда включения $E\in N(HB, G)$ и $E\in N(HD, G)$ равносильны и имеют место тогда и только тогда, когда *емкость* E равна нулю (см. [5], [8]).

Лит.: [1] Zoretti L., Leçons sur le prolongement analytique, P., 1911; [2] Ahlfors L., «Duke Math. J.», 1947, v. 14, № 1, p. 1—11; [3] Носиро К., Предельные множества, пер. с англ., М., 1963; [4] Хавинсон С. Я., в сб.: Итоги науки. Математический анализ. 1963, М., 1965, с. 5—80; [5] Карлесон Л., Избранные проблемы теории исключительных множеств, пер. с англ., М., 1971; [6] Мельников М. С., Синанян С. О., в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 143—250; [7] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [8] Хейман У. К., Кеннеди П. Б., Субгармонические функции, пер. с англ., [т. 1], М., 1980; [9] Долженко Е. П., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 4, с. 135—42; [10] Riihentaus J., «Math. Z.», 1978, Bd 158, S. 45—54. *Е. Д. Соломенцев.*

ФАБЕРА МНОГОЧЛЕНЫ — классическая базисная система, служащая для представления аналитич. функций в комплексной области. Пусть дополнение ограниченного континуума K, содержащего более одной точки, есть односвязная область D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а функция $w=\Phi(z)$, $z\in D$, отображает конформно и однолистно область D на область $|w|>1$ при условиях $\Phi(\infty)=\infty$ и $\Phi'(\infty)>0$. Тогда Ф. м. $\{\Phi_n(z)\}$ можно определить как суммы членов с неотрицательными степенями z в разложениях Лорана функций $\{\Phi^n(z)\}$ в окрестности точки $z=\infty$. Ф. м. для континуума K можно определить так же, как коэффициенты разложения

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Phi_n(z)}{w^{n+1}},\quad z\in K,\quad |w|>1, \tag{1}$$

где функция $\zeta=\Psi(w)$ — обратная функции $w=\Phi(\zeta)$. Если континуум K — круг $|z|\leqslant 1$, то $\Phi_n(z)=z^n$. А в случае когда K — отрезок $[-1, 1]$, Ф. м. суть *Чебышева многочлены* 1-го рода. Эти многочлены были введены Г. Фабером [1].

Если континуум K есть замыкание односвязной области G, ограниченной спрямляемой жордановой кривой Γ, а функция $f(z)$ — аналитическая в области G, непрерывная в замкнутой области $\overline{G}$ и имеющая ограниченную вариацию на Γ, то в области G эта функция разлагается в р я д Ф а б е р а

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Phi_n(z),\quad z\in G, \tag{2}$$

сходящийся равномерно внутри области G, т. е. на всяком замкнутом подмножестве области G, причем коэффициенты разложения определяются по формуле

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)}\,d\zeta.$$

Ряд Фабера (2) сходится равномерно в замкнутой области $\overline{G}$, если, напр., кривая Γ имеет непрерывно вращающуюся касательную, угол наклона к-рой к действительной оси как функция длины дуги удовлетворяет условию Липшица. При этом же условии на кривую Γ для всякой функции $f(z)$, аналитической в области G и непрерывной в замкнутой области $\overline{G}$, имеет место неравенство Лебега

$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k(z)\right|\leqslant c_1E_n(f,\overline{G})\ln n,$$
$$z\in\overline{G},$$

где постоянная c_1 не зависит от n и z, а $E_n(f,\overline{G})$ — наилучшее равномерное приближение функции $f(z)$ многочленами степени не старше n в замкнутой области $\overline{G}$.

В числителе левой части формулы (1) можно ввести весовую функцию вида $g[\Psi(w)]$, где функция $g(z)$, аналитическая в области D, отлична от нуля и $g(\infty)>0$.

Тогда коэффициенты разложения (1) наз. обобщенными многочленами Фабера.

Лит.: [1] Faber G., «Math. Ann.», 1903, Bd 57, S. 389—408; [2] Суетин П. К., в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 5, М., 1975, с. 73—140.

П. К. Суетин.

ФАБЕРА — ШАУДЕРА СИСТЕМА — система функций $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, построенная на отрезке $[a, b]$ с помощью любой счетной всюду плотной на этом отрезке последовательности точек $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, $w_1 = a$, $w_2 = b$, следующим образом. Полагают $\varphi_1(t) \equiv 1$ на $[a, b]$. Функция $\varphi_2(t)$ линейна на отрезке $[a, b]$ и такая, что $\varphi_2(a) = 0$, $\varphi_2(b) = 1$. Если же $n > 2$, то отрезок $[a, b]$ делится на $n-2$ части точками $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ и выбирается отрезок $[w_i, w_k]$, $w_i < w_k$, содержащий точку w_n. Затем полагают $\varphi_n(w_i) = \varphi_n(w_k) = 0$, $\varphi_n(w_n) = 1$ и продолжают функцию $\varphi_n(t)$ линейно на отрезки $[w_i, w_n]$ и $[w_n, w_k]$. Вне интервала (w_i, w_k) функцию $\varphi_n(t)$ полагают равной нулю.

В случае когда $a = 0$, $b = 1$, а $\{w_n\}$ — последовательность всех двоично рациональных точек отрезка $[0, 1]$, занумерованных естественным образом (т. е. в порядке

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{2^m},\ \frac{3}{2^m},\ \ldots,\ \frac{2^m-1}{2^m},\ \ldots\Big),$$

система $\{\varphi_n(t)\}$ (ее обозначение $\{F_n(t)\}$) впервые встречается в работе Г. Фабера [1]. Он рассматривал ее (с другой нормировкой) как систему неопределенных интегралов от *Хаара системы*, дополненную функцией, тождественно равной единице. В общем случае построение системы $\{\varphi_n(t)\}$ осуществлено Ю. Шаудером [2], поэтому Ф. — Ш. с. наз. также системой Шаудера.

Система $\{\varphi_n(t)\}$ *является базисом в пространстве* $C[a, b]$ всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f(t)$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|$ (см. [1], [2] или [3]). Если к системе Фабера $\{F_n(t)\}$ применить процесс ортогонализации Шмидта на отрезке $[0, 1]$, то получится *Франклина система*.

Ф. — Ш. с. — первый пример базиса в пространстве непрерывных функций.

Лит.: [1] Faber G., «Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.», 1910, Bd 19, S. 104—12; [2] Schauder J., «Math. Z.», 1928, Bd 28, S. 317—20; [3] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958, с. 63.

Б. И. Голубов.

ФАБРИ ТЕОРЕМА — 1) Ф. т. о лакунах: если в степенном ряде

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$$

с радиусом сходимости R, $0 < R < \infty$, показатели λ_n удовлетворяют условию

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0,$$

то все точки окружности $|z| = R$ суть особые точки для функции $f(z)$. Теорема обобщается на ряды Дирихле.

2) Ф. т. об отношении: если в степенном ряде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

с единичным радиусом сходимости коэффициенты удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=s,$$

то $z=s$ — особая точка функции $f(z)$.

Теоремы 1) и 2) получены Э. Фабри [1].

Лит.: [1] Fabry E., «Ann. scient. École norm. supér.», 1896, t. 13, p. 367—99; [2] Биербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967; [3] Леонтьева А. Ф., Ряды экспонент, М., 1976. *А. Ф. Леонтьев.*

ФАВАРА ЗАДАЧА — задача, состоящая в вычислении точной верхней грани

$$\sup_{f\in W^rMX}\ \inf_{t_n}\|f(x)-t_n(x)\|_X, \qquad (*)$$

где $t_n(x)$ — тригонометрич. полиномы порядка не выше n, W^rMX — класс периодич. функций, у к-рых r-я производная в смысле Вейля (см. *Дробное интегрирование и дифференцирование*) удовлетворяет неравенству $\|f^{(r)}\|_X\leqslant M$. $X=C[0,\ 2\pi]$. Ф. з. была поставлена Ж. Фаваром [1]. В последующем рассматривались более широкие классы функций и полное решение Ф. з. при $X=C$, L и произвольном $r>0$ было получено как следствие более общих результатов (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Favard J., «Bull. sci. math.», 1937, t. 61, p. 209—24, p. 243—56; [2] Стечкин С. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1956, т. 20, № 5, с. 643—48; [3] Дзядык В. К., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 6, с. 933—50; [4] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976. *Ю. Н. Субботин.*

ФАВАРА МЕРА порядка p подмножества M евклидова пространства E^n размерности $n>p$ — обобщение *Хаусдорфа меры*; введена Ж. Фаваром [1]. Точное определение: на совокупности $(n-p)$-мерных аффинных подпространств пространства E^n его группа движений индуцирует единственную с точностью до нормировки левоинвариантную *Хаара меру* μ, а множество M индуцирует функцию f_M, значение к-рой на плоскости τ есть число точек пересечения $\tau\cap M$. Мера Фавара множества M — значение меры μ на функции f_M, если нормирующая константа выбрана так, чтобы $\mu(f_I)=1$ для единичного p-мерного куба I.

Ф.м. порядка p множества M не превосходит его p-меры Хаусдорфа α и, в случае $\alpha<\infty$, совпадает с α тогда и только тогда, когда M распадается на счетное число частей, у одной из к-рых p-мера Хаусдорфа равна нулю, а каждая из остальных расположена на гладком p-мерном многообразии.

Лит.: Favard J., «C. r. Acad. sci.», 1932, t. 194, p. 344—346; [2] Federer H., Geometric measure theory, B.— Hdlb.— N. Y., 1969. *Л. Д. Иванов.*

ФАВАРА НЕРАВЕНСТВО — неравенство

$$\|x\|_{C[0,\ 2\pi]}\leqslant MK_rn^{-r},\quad r=1,\ 2,\ \ldots, \qquad (*)$$

где

$$K_r=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k(r+1)}(2k+1)^{-r-1},$$

функция $x(t)\in W^rMC$ и ортогональна любому тригонометрич. полиному порядка не выше $n-1$. При $r=1$ неравенство $(*)$ было доказано Х. Бором (H. Bohr, 1935), поэтому его наз. также неравенством Бора и *Бора — Фавара неравенством*. Для произвольного натурального r Ф. н. было доказано Ж. Фаваром [1].

Лит.: [1] Favard J., «C. r. Acad. sci.», 1936, t. 203, p. 1122—24; [2] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976. *Ю. Н. Субботин.*

ФАВАРА ТЕОРЕМА об ортогональных системах: если для действительных чисел α_n и β_n выполняется рекуррентное соотношение

$$P_n(x)=(x-\alpha_n)P_{n-1}(x)-\beta_nP_{n-2}(x),$$
$$P_{-1}(x)=0,\quad P_0=1,$$

то существует функция $\alpha(x)$ ограниченной вариации такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x)\,P_m(x)\,d\alpha(x) = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ h_n > 0, & m = n. \end{cases}$$

Установлена Ж. Фаваром [1]. Иногда этот результат связывают также с именем И. Шохата (J. Shohat).

Лит.: [1] Favard J., «C. r. Acad. sci.», 1935, t. 200, p. 2052—53; [2] Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962.

Ю. Н. Субботин.

ФАДДЕЕВА УРАВНЕНИЕ — линейное интегральное уравнение квантовой механики, описывающее рассеяние трех частиц.

Рассеяние трех частиц имеет по сравнению с рассеянием двух частиц принципиальное отличие, обусловленное возможностью образования связанных состояний частиц. Поэтому обычное условие излучения на бесконечности типа условия Зоммерфельда здесь неприменимо.

Математич. исследование трехчастичных систем стало возможным после того, как Л. Д. Фаддеев в 1960 предложил и изучил интегральное уравнение, по решениям к-рого восстанавливаются решения уравнения Шрёдингера, отвечающие правильным физич. условиям на бесконечности.

В сокращенной векторной записи Ф. у. имеет вид:

$$X = X^0 + \begin{Vmatrix} 0 & G_1 & G_1 \\ G_2 & 0 & G_2 \\ G_3 & G_3 & 0 \end{Vmatrix} X, \quad X = \begin{Vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Vmatrix}, \qquad (*)$$

где $G_i = V_i (E + \Delta - V_i)^{-1}$, E — энергия системы, V_i — потенциалы парного взаимодействия частиц, а вектор-функция X^0 определяется начальными данными рассеяния. Если задача рассеяния сформулирована в терминах уравнения Шрёдингера с правой частью $(E - \hat{H})\psi = f$, где $\hat{H}$ — трехчастичный гамильтониан

$$\hat{H} = -\Delta + V_1(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) + V_2(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3) + V_3(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1),$$

то следует выбрать в $(*)$ $X_i^0 = G_i f$. Тогда решение ψ задачи рассеяния выражается через решение X Ф. у. по формуле

$$\psi = (E + \Delta)^{-1}\left(f + \sum\nolimits_i X_i\right).$$

При соответствующих ограничениях на потенциалы V_i уравнение $(*)$ — фредгольмовского типа (см. [1]). Кроме того, с помощью уравнения $(*)$ доказана теорема разложения по собственным функциям оператора Шрёдингера, дано обоснование нестационарной постановки задачи рассеяния, построен унитарный оператор рассеяния.

Ф. у. широко применяется в атомной и ядерной физике и в физике элементарных частиц. Получены релятивистский вариант этого уравнения и обобщение на случай системы N частиц. Важным преимуществом Ф. у. по сравнению с уравнением Шрёдингера является возможность эффективного численного решения.

Лит.: [1] Фаддеев Л. Д., Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц, М.—Л., 1963; [2] Шмид Э., Цигельман Х., Проблема трех тел в квантовой механике, пер. с англ., М., 1979.

В. П. Маслов.

ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ — плоскость $\mathbb{R}^2$, используемая для геометрич. интерпретации *автономной системы* двух обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Ф. п.— частный случай *фазового пространства*. См. также *Динамическая система* (где эта интерпретация названа кинематической), *Качественная теория дифференциальных уравнений*, *Пуанкаре — Бендиксона теория*.

Д. В. Аносов.

ФАЗОВАЯ ТРАЕКТОРИЯ — траектория точки в *фазовом пространстве*, изображающая, как изменяется со временем t состояние *динамической системы*. Если последняя описывается *автономной системой* обыкновенных дифференциальных уравнений (геометриче-

ски — векторным полем), то говорят о Ф. т. автономной системы (поля), используя это название и тогда, когда решения системы определены не для всех значений t. Прилагательное «фазовая» нередко опускают.

Когда состояние не зависит от t, Ф. т. сводится к точке — *равновесия положению*, а при периодич. зависимости от t получается замкнутая Ф. т. (поэтому часто говорят о «периодич. Ф. т.»), что включает и предыдущий случай (однако, говоря о замкнутой Ф. т., часто подразумевают, что она не сводится к точке). Незамкнутые Ф. т. в общем случае могут быть весьма разнообразны; они классифицируются с различных точек зрения в *топологической динамике*. Точка w незамкнутой Ф. т. разбивает ее на две части — положительную и отрицательную полутраектории. Они представляют состояния, соответствующие $t \geqslant 0$ и $t \leqslant 0$, если при $t=0$ система имеет состояние w. (Последнее определение формально применимо и к замкнутой Ф. т., но для нее обе полутраектории совпадают с ней самой.)

Иногда под Ф. т. понимают не просто линию (как множество точек) или ориентированную линию (на к-рой выделено направление, отвечающее изменению состояний с ростом t), но линию, параметризованную в процессе происходящего в системе движения фазовой точки по этой линии. Такое словоупотребление отчасти связано с отсутствием удобного общепринятого названия для этой параметризованной линии. Правда, если динамич. система описывается системой дифференциальных уравнений, речь идет просто о решении последней; но такое название не годится в общем случае, когда динамич. система трактуется как группа преобразований $\{S_t\}$ фазового пространства. (Функцию $t \to S_t w$ с фиксированным w иногда наз. «движением», но в математике «движения» обычно являются преобразованиями всего пространства.) *Д. В. Аносов.*

ФАЗОВОГО РАВНОВЕСИЯ ДИАГРАММА — проекция на плоскость каких-либо двух термодинамич. переменных тех областей поверхности равновесных состояний в пространстве полного набора термодинамич. переменных, к-рые соответствуют n-фазным, $n \geqslant 2$, состояниям термодинамич. системы. В случае однокомпонентной системы участки этой поверхности представляют собой цилиндрич. поверхности и проектируются на плоскость (p, θ) (давление-температура) в виде линии, общий вид уравнения к-рой — равенство химич. потенциалов различных фаз $\mu_1(p, \theta) = \mu_2(p, \theta)$ — может быть в случае фазового перехода 1-го рода записан в форме дифференциального уравнения Клапейрона — Клаузиуса

$$dp/d\theta = q_{12}/\theta\,(v_2 - v_1),$$

где q_{12} — скрытая теплота перехода, v_1 и v_2 — удельные объемы для первой и второй фаз. Трехфазное состояние изображается точкой, наз. тройной точкой.

Лит.: [1] Леонтович М. А., Введение в термодинамику. Статистическая физика, М., 1983. *И. А. Квасников.*

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО — совокупность всевозможных мгновенных состояний физич. (в широком смысле слова) системы, снабженная определенной структурой в зависимости от изучаемой системы и рассматриваемых вопросов. Ф. п. наз. также более конкретный объект — пространство (множество с надлежащей структурой), элементы к-рого (фазовые точки) представляют (условно изображают) состояния системы (напр., *фазовая плоскость*). С математич. точки зрения эти объекты изоморфны, поэтому часто не делают различия между состояниями и изображающими их фазовыми точками.

Математич. формализация понятия «системы» того или иного типа обычно включает в качестве существенной части определение соответствующего Ф. п.

(или класса Ф. п.), что отражает важность понятия состояния системы. Эволюция системы (т. е. изменение со временем ее состояний) может быть строго детерминированной (тогда она описывается группой или полугруппой $\{S_t\}$ преобразований Ф. п.: состояние w за время t переходит в $S_t w$) или иметь вероятностный характер (*случайные процессы*). В первом случае тоже бывает нужно рассматривать статистич. состояния системы; для классич. (неквантовых) систем они описываются посредством вероятностных распределений на Ф. п. Указания, определяющие эволюцию, составляют другую существенную часть формального определения «системы».

В классич. случае дифференцируемой *динамической системы* (что включает основные системы, рассматриваемые в аналитич. механике и классич. статистич. физике) Ф. п.— *дифференцируемое многообразие* M (быть может, с особенностями и (или) краем). Если динамич. система задается *автономной системой* обыкновенных дифференциальных уравнений, то говорят о Ф. п. последней. В этом случае M является той областью в евклидовом пространстве, где определены правые части автономной системы. В подобной ситуации термин «Ф. п.» употребляют и тогда, когда решения не определены при всех t. Дополнительно на M может быть задана *инвариантная мера* (классически — задаваемая плотностью) или *симплектическая структура* (*условие сохранения последней под действием потока* характеризует *гамильтоновы системы*). В частности, в динамике для системы с голономными идеальными связями, не зависящими явно от времени, Ф. п. является касательным или кокасательным расслоением нек-рого многообразия — к о н ф и г у р а ц и о н н о г о п р о с т р а н с т в а. Точка последнего задает (рас)положение (конфигурацию) системы, касательный вектор описывает скорость движения системы (скорость изменения конфигурации), а кокасательный — импульс системы.

В других разделах теории динамич. систем Ф. п. имеет структуру топологич. пространства (в *топологической динамике*), *измеримого пространства* или (чаще) *пространства с мерой* (в *эргодической теории*). В квантовой механике Ф. п.— комплексное гильбертово пространство (впрочем, для квантовой системы, имеющей классический аналог, под Ф. п. часто подразумевают Ф. п. этого аналога). В теории случайных процессов Ф. п.— то измеримое пространство (часто с дополнительной топологической, дифференцируемой или векторной структурой), в к-ром принимает значения процесс. Здесь специально говорят о Ф. п. тогда, когда оно в каком-то смысле нетривиально. Так нередко бывает в теории *марковских процессов*, тогда как для часто встречающихся процессов с числовыми значениями Ф. п. сводится просто к $\mathbb{R}$ со стандартной структурой, и специально говорить о нем не приходится. (Надо иметь в виду, что если стационарный в узком смысле случайный процесс интерпретируется как динамич. система, то Ф. п. последней не совпадает с Ф. п. процесса.)

Д. В. Аносов.

ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ ВЕКТОР — вектор $f(x)$, исходящий из точки x фазового пространства G автономной системы

$$\dot{x} = f(x),\ f \in C^1(G),\ G \subset \mathbb{R}^n.$$

Пусть Γ — фазовая траектория этой системы, проходящая через точку $\xi \in G$; если $f(\xi) \neq 0$, то Ф. с. в. $f(\xi)$ касается кривой Γ в точке ξ и представляет собой мгновенную скорость движения изображающей точки системы по траектории Γ в момент прохождения положения $\xi \in \Gamma$. Если $f(\xi) = 0$, то точка $\xi \in G$ является *равновесия положением*.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 5 изд., М., 1983.

Н. Х. Розов.

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД — физическое явление, происходящее в макроскопич. системах и состоящее в том, что в нек-рых состояниях равновесия системы сколь угодно малое воздействие приводит к резкому изменению ее свойств: система из одной своей однородной фазы переходит в другую. Математически Ф. п. трактуется как резкое нарушение структуры и свойств т. н. гиббсовских распределений, описывающих равновесные состояния системы, при сколь угодно малых изменениях параметров, определяющих равновесие.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, 3 изд., ч. 1, М., 1976; [2] Синай Я. Г., Теория фазовых переходов, М., 1980.

Р. А. Минлос.

ФАЗОВЫХ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОД — то же, что *ВКБ-метод*.

ФАКТОР — инволютивная подалгебра $\mathfrak{N}$ алгебры $B(H_1H)$ линейных операторов в гильбертовом пространстве H, замкнутая относительно т. н. слабой сходимости операторов и обладающая тем свойством, что центр (т. е. совокупность всех операторов из $\mathfrak{N}$, коммутирующих с любым оператором из $\mathfrak{N}$) состоит из скалярнократных единичному оператору.

Если $\mathfrak{N}$ есть Ф., то для большого запаса подпространств F из H можно определить понятие размерности $\dim_{\mathfrak{N}} F$ относительно $\mathfrak{N}$ как инварианта, сохраняющегося не при произвольных изометриях $\mathcal{F}$, а только при изометриях из данного Ф. и обладающих дополнительными естественными свойствами (напр., $\dim_{\mathfrak{N}}(F_1 \oplus F_2) = \dim_{\mathfrak{N}} F_1 + \dim_{\mathfrak{N}} F_2$). Все Ф. разбиваются на пять классов в соответствии со значениями, к-рые может принимать $\dim_{\mathfrak{N}} F$, причем, напр., для Ф. класса II_∞ ее значениями могут быть любые числа из $[0, \infty]$.

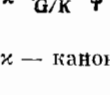
М. И. Войцеховский.

ФАКТОРГРУППА группы G по нормальному делителю N — группа, образуемая *смежными классами* Ng, $g \in G$, группы G и обозначаемая G/N (см. *Нормальный делитель*). Умножение смежных классов производится по формуле

$$Ng_1 \cdot Ng_2 = Ng_1g_2.$$

Единицей Ф. является класс $N = N \cdot 1$, обратным к классу Ng — класс Ng^{-1}.

Отображение $\varkappa : g \to Ng$ будет эпиморфизмом группы G на Ф. G/N, наз. каноническим эпиморфизмом G на G/N. Если φ: $G \to G'$ — произвольный эпиморфизм группы G на группу G', то ядро K эпиморфизма φ — нормальный делитель группы G, а факторгруппа G/K изоморфна группе G', точнее, существует изоморфизм ψ группы G/K на группу G' такой, что диаграмма



коммутативна, где $\varkappa$ — канонич. эпиморфизм $G \to G/K$.

Ф. группы G можно определять, исходя из нек-рой конгруэнции на G, как множество классов конгруэнтных элементов относительно умножения классов. Всевозможные конгруэнции на группе находятся во взаимно однозначном соответствии с нормальными делителями группы, а Ф. по конгруэнциям совпадают с Ф. по нормальным делителям. Ф. является нормальным факторобъектом в категории групп.

Н. Н. Вильямс.

ФАКТОРИАЛ — функция, определенная на множестве целых неотрицательных чисел, значение к-рой равно произведению натуральных чисел от 1 до натурального числа n, т. е. $1 \cdot 2 \ldots \cdot n$; обозначается $n!$ (по определению, $0! = 1$). При больших n приближенное выражение Ф. дается *Стирлинга формулой*. Ф. равен

числу перестановок из n элементов. Ф. наз. также более общее выражение

$$(a)_\mu = a(a+1)(a+2)\dots(a+\mu-1),$$

где a — любое комплексное число, μ — натуральное, $(a)_0=1$. См. также *Гамма-функция*. *БСЭ-3.*

ФАКТОРИАЛЬНОЕ КОЛЬЦО — кольцо с однозначным разложением на множители. Точнее, Ф. к. A — это область целостности, в к-рой можно выбрать систему экстремальных элементов P такую, что любой ненулевой элемент $a\in A$ допускает единственное представление вида

$$a = u\prod_{p\in P} p^{n(p)},$$

где u обратим, а целые неотрицательные показатели $n(p)$ отличны от нуля только для конечного числа элементов $p\in P$. При этом элемент наз. экстремальным в A, если из $p=uv$ следует, что либо u, либо v обратим в A, и p необратим в A.

В Ф. к. существует наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное любых двух элементов. Кольцо A факториально тогда и только тогда, когда оно является кольцом Крулля и выполняется одно из следующих эквивалентных условий: (1) любой дивизориальный идеал в A является главным; (2) любой простой идеал высоты 1 главный; (3) любое непустое семейство главных идеалов обладает максимальным элементом, и пересечение любых двух главных идеалов является главным идеалом. Любое кольцо главных идеалов факториально. Дедекиндово кольцо факториально, только если оно — кольцо главных идеалов. Если S — мультипликативная система в Ф. к. A, то кольцо частных $S^{-1}A$ факториально. Для кольца Зарисского R из факториальности его пополнения $\hat{R}$ следует факториальность самого R.

Подкольцо и факторкольцо Ф. к. не обязаны быть Ф. к. Кольцо многочленов над Ф. к. и кольцо формальных степенных рядов над полем или дискретно нормированным кольцом факториально. Однако кольцо формальных степенных рядов над Ф. к. не обязано быть факториальным.

Область целостности факториальна тогда и только тогда, когда ее мультипликативная полугруппа гауссова (см. *Гауссова полугруппа*), в связи с этим Ф. к. наз. также гауссовыми кольцами.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *Л. В. Кузьмин.*

ФАКТОРИЗАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА, критерий факторизации,— теорема теории статистич. оценивания, указывающая необходимое и достаточное условия того, чтобы статистика T была достаточной для семейства вероятностных распределений $\{P_\theta\}$.

Пусть X — случайный вектор, принимающий значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, P_\theta)$, $\theta\in\Theta$, причем семейство вероятностных распределений $\{P_\theta\}$ доминировано нек-рой мерой μ и пусть

$$p(x;\theta) = dP_\theta(x)/d\mu, \quad \theta\in\Theta.$$

Далее, пусть $T=T(X)$ — статистика, построенная по вектору наблюдений X и отображающая измеримое пространство $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ в измеримое пространство $(\mathfrak{Y}, \mathcal{A})$. В этих условиях возникает вопрос: когда статистика T является достаточной для семейства $\{P_\theta\}$? Отвечая на этот вопрос, Ф. т. утверждает: для того чтобы статистика T была достаточной для семейства $\{P_\theta\}$, допускающего достаточные статистики, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\theta\in\Theta$ плотность вероятности $p(x;\theta)$ можно было факторизовать следующим образом:

$$p(x;\theta) = g(x)\,h(T(x);\theta), \qquad (*)$$

где $g(\cdot)$ есть $\mathcal{B}$-измеримая функция на $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$, $h(\cdot,\theta)$

есть $\mathcal{A}$-измеримая функция на $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$. Ф.т., кроме того, что она дает критерий достаточности, позволяет во многих случаях определить конкретный вид достаточной статистики T, для чего нужно факторизовать плотность $p(x; \theta)$ по формуле (*). На практике обычно предпочитают иметь дело с функцией правдоподобия $L(\theta) = p(X; \theta)$, а не с плотностью $p(x; \theta)$; при этом в терминах функции правдоподобия условие (*) имеет вид $L(\theta) = g(X)\, h(T; \theta)$, явным образом содержащий достаточную статистику T.

Лит.: [1] Fischer R. A., «Philos. Trans. Roy. Soc. London A», 1922, v. 222, p. 309—68; [2] Neyman J., «Giorn. Ist. Ital. Att.», 1935, v. 6, p. 320—34; [3] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [4] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [5] Halmos P. R., Savage L. J., «Ann. Math. Statistics», 1949, v. 20, p. 225—41.

М. С. Никулин.

ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ ТОЖДЕСТВА в теории случайных блужданий — система многопараметрич. тождеств, устанавливающих связи между различными характеристиками *случайного блуждания*. В качестве характеристик здесь фигурируют т. н. граничные функционалы — случайные величины, связанные с достижением блужданием нек-рых границ, напр. супремум блуждания, момент первого достижения этого супремума, величина первого перескока через уровень и т. д.

Название Ф. т. связано с тем, что их получение основано на факторизации — представлении функции $1 - zf(\lambda)$, где $f(\lambda)$ — характеристич. функция случайных величин, порождающих блуждание, $|z| \leqslant 1$, при действительных λ в виде произведения двух сомножителей, один из к-рых аналитичен, ограничен, не обращается в нуль и непрерывен вплоть до границы в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$, а второй обладает теми же свойствами в нижней полуплоскости. Такое представление единственно с точностью до постоянного множителя (ср. *Винера — Хопфа метод*), что позволяет отождествлять соответствующие компоненты различных факторизаций указанного типа, к-рые устанавливаются с помощью вероятностных рассуждений и записываются в терминах характеристич. функций совместных распределений граничных функционалов от случайного блуждания.

Ф. т. позволяют получить в качестве простых следствий многие как новые, так и известные результаты, относящиеся к теории случайных блужданий, например *больших чисел усиленный закон*, *арксинуса закон*.

Лит.: [1] Спицер Ф., Принципы случайного блуждания, пер. с англ., М., 1969; [2] Боровкова А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972.

К. А. Боровков.

ФАКТОРИЗАЦИЯ в теории графов — разложение *графа* на непересекающиеся по ребрам остовные подграфы специального вида. В общем случае фактор есть остовный подграф, обладающий заданным свойством. Примером такого свойства является регулярность подграфа. Регулярный остовный подграф степени k наз. k-фактором; 1-фактор наз. также совершенным паросочетанием. Граф наз. k-факторизуемым, если он может быть представлен как объединение своих непересекающихся по ребрам k-факторов.

В теории графов рассматриваются вопросы о существовании факторов того или иного вида в произвольном графе, о числе факторов, о возможности Ф. данного типа для различных классов графов. Известно, напр., что полный граф с четным числом вершин и полный *граф двудольный* с одинаковым числом вершин в каждой доле являются 1-факторизуемыми. Связный граф является 2-факторизуемым тогда и только тогда, когда он является регулярным графом четной степени. Граф G имеет 1-фактор тогда и только тогда, когда число

его вершин четно и не существует такого подмножества вершин U, что число компонент связности с нечетным числом вершин графа $G - U$, получающегося из G удалением вершин множества U, превышает $|U|$. Всякий двусвязный регулярный граф степени 3 может быть разложен на непересекающиеся 1-фактор и 2-фактор.

Примерами нерегулярных факторов являются остовные *деревья* и леса, остовные плоские подграфы (см. *Графа укладка*) и т. п. С разложением графа на остовные леса связана числовая характеристика, называемая древесностью,— это наименьшее число непересекающихся по ребрам остовных лесов, объединением к-рых является граф. Древесность произвольного графа G равна

$$\max_k \left\{ \frac{g_k}{k-1} \right\},$$

где g_k — наибольшее число ребер в k-вершинных подграфах графа G.

Лит.: [1] Харари Ф., *Теория графов*, пер. с англ., М., 1973.

А. А. Сапоженко.

ФАКТОРКАТЕГОРИЯ — конструкция, аналогичная конструкции *фактормножества* или *факторалгебры*. Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольная категория, и в классе морфизмов $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$ задано отношение эквивалентности $\sim$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) если $\alpha \sim \beta$, то начала и концы морфизмов α и β совпадают; 2) если $\alpha \sim \beta$, $\gamma \sim \delta$ и произведение $\alpha\gamma$ определено, то $\alpha\gamma \sim \beta\delta$. Через $[\alpha]$ обозначается класс эквивалентности морфизма α. Факторкатегорией категории $\mathfrak{K}$ по отношению $\sim$ наз. категория (обозначаемая $\mathfrak{K}/\sim$), у к-рой те же объекты, что и у $\mathfrak{K}$, а для любой пары объектов A, B множество морфизмов $H(A, B)$ в $\mathfrak{K}/\sim$ состоит из классов эквивалентности $[\alpha]$, где $\alpha\colon A \to B$ в $\mathfrak{K}$; умножение морфизмов $[\alpha]$ и $[\beta]$ определяется формулой $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$ (когда произведение $\alpha\beta$ определено).

Всякая малая категория является Ф. категории путей над подходящим ориентированным графом.

М. Ш. Цаленко.

ФАКТОРКОЛЬЦО кольца R по идеалу I — *факторгруппа* аддитивной группы кольца R по подгруппе I с умножением

$$(a+I)(b+I) = ab+I.$$

Ф. оказывается кольцом и обозначается R/I. Отображение $\pi\colon R \to R/I$, где $\pi(x) = x+I$, является сюръективным кольцевым гомоморфизмом, к-рый наз. естественным (ср. *Алгебраическая система*).

Важнейший пример Ф.: кольцо вычетов по модулю n — Ф. кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ по идеалу $\mathbb{Z}n$. Элементами кольца $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$ можно считать числа $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, где сумма и произведение определяются как остатки от деления обычных суммы и произведения на n. Между идеалами Ф. R/I и идеалами кольца R, содержащими I, может быть установлено взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее порядок. В частности, Ф. R/I просто тогда и только тогда, когда I — максимальный идеал. *Л. А. Скорняков.*

ФАКТОРНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение f топологич. пространства X на топологич. пространство Y, при к-ром множество $v \subset Y$ открыто в пространстве Y в том и только том случае, если его прообраз $f^{-1}v$ открыт в пространстве X. Если дано отображение f топологич. пространства X на множество Y, то на Y существует сильнейшая топология $\mathscr{T}_f$ (т. е. содержащая наибольшее число открытых множеств) среди всех топологий, по отношению к к-рым отображение f непрерывно. Топология $\mathscr{T}_f$ состоит из всех множеств $v \subset Y$ таких, что множество $f^{-1}v$ открыто в X. Топология является единственной среди всех топологий на множестве Y такой, что f является Ф.о. Поэтому топология $\mathscr{T}_f$ наз. фактортополо-

гией, отвечающей отображению f и топологии $\mathscr{T}$, заданной на X.

Описанная выше конструкция возникает при рассмотрении разбиений топологич. пространств и приводит к важной операции—переходу от данного топологич. пространства к новому—пространству разбиения. Пусть дано разбиение γ топологич. пространства $(X, \mathscr{T})$, т. е. семейство γ непустых попарно непересекающихся подмножеств множества X, покрывающее X. Тогда определено отображение проектирования $\pi: X \to \gamma$ правилом: $\pi(x) = P \subset \gamma$, если $x \in P \subset X$. Множество γ теперь наделяется фактортопологией $\mathscr{T}\pi$, отвечающей топологии $\mathscr{T}$ на X и отображению π, и топологич. пространство $(\gamma, \mathscr{T}\pi)$ наз. пространством разбиения пространства $(X, \mathscr{T})$. Так, с точностью до гомеоморфизма окружность представляется как пространство разбиения отрезка, сфера — как пространство разбиения круга, лист Мёбиуса — как пространство разбиения прямоугольника, проективная плоскость — как пространство разбиения сферы и т. д.

Важны следующие свойства Ф.о., связанные с рассмотрением диаграмм. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение, причем $f(X) = Y$. Тогда существует топологич. пространство Z, Ф.о. $g: X \to Z$ и непрерывное взаимно-однозначное отображение (т. е. уплотнение) $h: Z \to Y$ такое, что $f = h \circ g$. В качестве Z можно взять пространство разбиения $\gamma = \{f^{-1}y : y \in Y\}$ пространства X на полные прообразы точек при f, а в роли отображения g выступит тогда проектирование π. Пусть даны непрерывное отображение $f_2: X \to Y$ и Ф.о. $f_1: X \to Y_1$, причем выполняется условие: если $x', x'' \in X$ и $f_1(x') = f_1(x'')$, то и $f_2(x') = f_2(x'')$. Тогда однозначно определенное отображение $g: Y_1 \to Y_2$ такое, что $g \circ f_1 = f_2$ оказывается непрерывным отображением. Сужение Ф.о. на подпространство может не быть Ф.о.— даже если это подпространство одновременно открыто и замкнуто в исходном пространстве. Декартово произведение Ф.о. на тождественное отображение может не быть Ф.о. Декартов квадрат Ф.о. также может не быть Ф.о. Сужение Ф.о. на полный прообраз не обязано быть Ф.о. Точнее, если $f: X \to Y$ есть Ф.о. и $Y_1 \subset Y$, $X_1 = f^{-1}Y$, $f_1 = f \mid X_1$, то отображение $f_1: X_1 \to Y_1$ может не быть факторным. Такого не может произойти, если подпространство Y_1 открыто или замкнуто в Y.

Эти факты показывают, что с Ф. о. надо обращаться осторожно и что с точки зрения теории категорий класс Ф. о. не столь гармоничен и удобен, как классы непрерывных отображений, *совершенных отображений* и *открытых отображений*. Однако рассмотрение пространств разбиений и отмеченные выше «диаграммные» свойства Ф. о. обеспечивают классу Ф. о. положение одного из самых важных классов отображений в топологии. Этому безусловно содействует и широта класса Ф. о.— к нему относятся все непрерывные открытые и *замкнутые отображения*. Ф. о. играют существенную роль при классификации пространств методом отображений. Так, k-пространства охарактеризованы как факторпространства (т. е. образы при Ф. о.) локально бикомпактных хаусдорфовых пространств, а секвенциальные пространства — это в точности факторпространства метрич. пространств.

Большинство топологич. свойств не сохраняется при Ф. о. Так, факторпространство метрич. пространства может не быть хаусдорфовым пространством, факторпространство сепарабельного метрич. пространства может не иметь счетной базы. Поэтому вопрос о поведении топологич. свойств при Ф. о. ставится обычно при дополнительных ограничениях на прообразы точек или на образ. Известно, напр., если бикомпакт гомеоморфен пространству разбиения метрич. пространства

на сепарабельные множества, то этот бикомпакт метризуем. При Ф. о. сепарабельного метрич. пространства на регулярное T_1-пространство с первой аксиомой счетности образ метризуем. Но есть топологич. инварианты, устойчивые относительно любых Ф. о. К ним относятся, напр., секвенциальность и оценка сверху на тесноту. В топологич. алгебре Ф. о., являющиеся одновременно алгебраич. гомоморфизмами, часто имеют гораздо более правильное строение, чем в общей топологии. Так, алгебраич. гомоморфизм одной топологич. группы на другую, являющийся Ф. о., есть непременно открытое отображение. Благодаря этому спектр топологич. свойств, сохраняющихся факторными гомоморфизмами, существенно шире (он включает, в частности, метризуемость).

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., 2 изд., М., 1968. *А. В. Архангельский.*

ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ — раздел многомерного статистич. анализа, объединяющий математико-статистич. методы снижения размерности исследуемого многомерного признака $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_p)'$, т. е.—построения,— на основе исследования структуры связей между компонентами $x_i x_j$, $i, j=1, 2, \ldots, p$,— таких моделей, к-рые позволяли бы восстанавливать (с нек-рой случайной ошибкой прогноза ε) значения p анализируемых компонент признака $\boldsymbol{x}$ по существенно меньшему числу m, $m \ll p$, так наз. общих (непосредственно не наблюдаемых) факторов $\boldsymbol{f}=(f_1, f_2, \ldots, f_m)'$.

Простейшим вариантом формализации подобной постановки задачи служит линейная нормальная модель Ф. а. с взаимно ортогональными общими факторами и с некоррелированными остатками:

$$x_k=\sum_{j=1}^{m} q_{kj} f_j+\varepsilon_k, \quad k=1, 2, \ldots, p, \qquad (1)$$

или в матричной записи

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{q}\boldsymbol{f}+\boldsymbol{\varepsilon}, \qquad (1')$$

где $(p\times m)$-матрица q коэффициентов линейного преобразования наз. матрицей нагрузок общих факторов на исследуемые переменные.

Предполагается, что вектор специфич. остатков (ошибок прогнозов) $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$ подчиняется p-мерному нормальному распределению с нулевым вектором средних значений и с неизвестной диагональной ковариационной матрицей V_ε; вектор общих факторов f, в зависимости от специфики решаемой задачи, может интерпретироваться либо как m-мерная случайная величина с ковариационной матрицей V_f специального вида, а именно — с единичной (т. е. $V_f=I_m$), либо как вектор неизвестных неслучайных параметров (взаимно ортогональных и нормированных), значения к-рых меняются от наблюдения к наблюдению.

Если предположить, что наши переменные заранее процентрированы (т. е. $\boldsymbol{\varepsilon x}=0$), то из (1′) с учетом принятых допущений немедленно получается следующее соотношение, связывающее ковариационные матрицы векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ и матрицу нагрузок:

$$V_x=\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}'+V_\varepsilon. \qquad (2)$$

При проведении реального статистич. анализа исследователь располагает лишь оценками элементов ковариационной матрицы V_x (полученными по наблюдениям $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$), в то время как структурные параметры модели—элементы q_{ki} матрицы нагрузок $\boldsymbol{q}$ и дисперсии $v_{kk}=\mathrm{D}\varepsilon_k$ специфич. остатков ε_k являются неизвестными и подлежат определению.

Таким образом, при проведении Ф.а. исследователю приходится последовательно решать следующие основные задачи:

существования или правомерности использования модели типа (1); ведь далеко невсякая ковариацион-

ная матрица V_x представима в виде (2); задача сводится к проверке гипотезы о специальной структуре связей между компонентами исследуемого вектора x;

единственности (идентификации) модели типа (1); принципиальные трудности при вычислениях и интерпретации модели состоят в том, что при $m > 1$ ни структурные параметры, ни сами факторы не определяются однозначно; если пара (q, V_ε) является решением в соотношении (2), то и любая другая пара вида (qc, V_ε), где c — ортогональная матрица размера $m \times m$, тоже будет удовлетворять соотношению (2); обычно выясняют, при каких дополнительных априорных ограничениях на матрицу нагрузок q и на ковариационную матрицу остатков V_ε определение параметров q, f и V_ε анализируемой модели будет единственным; возможность ортогонального вращения решения факторной модели используется также для получения наиболее естественно интерпретируемого решения;

статистич. оценивания (по наблюдениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$) неизвестных структурных параметров модели q и V_ε;

статистич. проверки ряда гипотез, связанных с природой модели (линейность, нелинейность и т. п.) и со значениями ее структурных параметров таких, как гипотеза об истинном числе общих факторов, гипотеза адекватности принятой модели по отношению к имеющимся результатам наблюдения, гипотеза о статистически значимом отличии от нуля коэффициентов q_{ij} и т. п.;

построения статистич. оценок для ненаблюдаемых значений общих факторов f;

алгоритмически — вычислительной реализации процедур статистич. оценивания и статистич. проверки гипотез.

Разработка теоретически обоснованных решений перечисленных задач в достаточно полной мере осуществлена лишь в рамках описанной выше линейной нормальной модели Ф. а.

Однако в практич. применениях широко используются более общие версии моделей Ф. а.: нелинейные, построенные на неколичественных переменных, оперирующие с трехмерными матрицами исходных данных (к двум традиционным измерениям исходных данных — размерности p и числу наблюдений n,— присоединяется еще одна, пространственная или временная, координата). Подобные модели не сопровождаются, как правило, сколько-нибудь убедительным математико-статистич. анализом их свойств, но основаны на вычислительных рекомендациях эвристич. или полуэвристич. характера.

Лит.: [1] Хатман Г., Современный факторный анализ, пер. с англ., М., 1972; [2] Айвазян С. А., Бежаева З. И., Староверов О. В., Классификация многомерных наблюдений, М., 1974; [3] Spearman C., «Amer. J. Psychol.», 1904, v. 15, p. 201—93; [4] Anderson T. W., Rubin H., «Proc. 3 Berkeley symp. math. stat. and probab.», 1956, v. 5, p. 111—50; [5] Rao C. R., «Psychometrika», 1955, v. 20, p. 93—111.

С. А. Айвазян.

ФАКТОРОБЪЕКТ объекта категории — понятие, частным случаем к-рого являются понятия факторможества, факторгруппы, факторпространства и т. п.

Пусть $\mathscr{E}$ — нек-рый класс эпиморфизмов категории $\mathfrak{K}$, содержащий все тождественные морфизмы из $\mathfrak{K}$ и выдерживающий умножение справа на изоморфизмы. Другими словами, для любого $X \in Ob\,\mathfrak{K}$ $1_X \in \mathscr{E}$ и для всякого $\xi: B \longrightarrow C$ из $Iso\,\mathfrak{K}$ и всякого $\varepsilon: A \longrightarrow B$ из $\mathscr{E}$ морфизм $\varepsilon\xi \in \mathscr{E}$. Морфизмы $\varepsilon: A \longrightarrow B$ и $\varepsilon_1: A \longrightarrow C$ из $\mathscr{E}$ наз. эквивалентными, если $\varepsilon_1 = \varepsilon\xi$ для нек-рого изоморфизма ξ. Класс эквивалентности морфизма ε наз. $\mathscr{E}$-факторобъектом объекта A, а пара (ε, B) — представителем этого Ф. Факторобъект с представителем (ε, B) иногда обозначается $[\varepsilon, B)$ или просто $[\varepsilon)$.

Для каждого объекта A класс всех его $\mathcal{E}$-факторобъектов непуст; в нем имеется несобственный Ф. $[1_A, A)$, остальные $\mathcal{E}$-факторобъекты этого класса собственные. Категория $\mathfrak{K}$ наз. $\mathcal{E}$-локально малой справа, если для каждого объекта A из $\mathfrak{K}$ класс $\mathcal{E}$-факторобъектов является множеством.

Если в качестве $\mathcal{E}$ взять подкатегорию всех эпиморфизмов $\mathrm{Epi}\,\mathfrak{K}$, то $\mathrm{Epi}\,\mathfrak{K}$-факторобъекты наз. просто факторобъектами. Если в категории $\mathfrak{K}$ имеется бикатегорная структура $(\mathfrak{K}, \mathcal{E}, \mathfrak{M})$, то $\mathcal{E}$-факторобъекты наз. допустимыми Ф. Аналогично, если $\mathcal{E}$ состоит из всех регулярных (строгих, нормальных и т. п.) эпиморфизмов, то соответствующие Ф. наз. регулярными (нормальными, строгими и т. п.). Напр., в категории топологич. пространств факторпространства соответствуют регулярным Ф.

Понятие Ф. объекта категории дуально понятию *подобъекта* объекта категории. *М. Ш. Цаленко.*

ФАКТОРПРЕДСТАВЛЕНИЕ — 1) линейное представление π группы или *алгебры* X в гильбертовом пространстве H такое, что *Неймана алгебра* в H порожденная семейством $\pi(X)$, *является фактором*. Если этот фактор имеет тип I (соответственно II, III, II_1, II_∞ и т. д.), то Ф. π наз. факторпредставлением типа I и т. д.

2) Ф. π группы или алгебры X — ее представление ρ, определяемое следующим образом. Пусть E — (топологическое) *векторное пространство* представления π, представление ρ есть представление в (топологическом) векторном пространстве $E|F$, являющимся факторпространством пространства E по нек-рому *инвариантному подпространству* F представления π, определенное формулой $\rho(x)\ (\xi+F)=\pi(x)\xi+F$ для всех $x\in X$, $\xi\in E$. Если π — непрерывное представление, то его Ф. также непрерывно. *А. И. Штерн.*

ФАКТОРПРОСТРАНСТВО динамической системы f^t, заданной на топологич. пространстве S,— факторпространство пространства S по отношению эквивалентности: $x\sim y$, если точки x и y принадлежат одной траектории. Иными словами, точками Ф. являются траектории динамич. системы f^t (иное обозначение $f(t, p)$, см. [1]), а топология — сильнейшая из топологий, в к-рых отображение, сопоставляющее каждой точке пространства S ее траекторию, непрерывно (таким образом,

$$\{f^t x_k\}_{t\in\mathbb{R}} \xrightarrow[k\in K]{} \{f^t x\}_{t\in\mathbb{R}}$$

(K — направленное множество) тогда и только тогда, когда найдутся t_k такие, что

$$f^{t_k} x_k \xrightarrow[k\in K]{} x;$$

если S — метрич. пространство, то $k\in\mathbb{N}$). Ф. многих динамич. систем не удовлетворяют ни одной из аксиом отделимости, даже если S им удовлетворяет. Напр., если S — *минимальное множество*, то замыкание всякого непустого множества в Ф. есть все Ф. Если динамич. система, заданная на метрич. пространстве, вполне неустойчива (см. *Полная неустойчивость*), то для того чтобы ее Ф. было хаусдорфовым, необходимо и достаточно, чтобы эта динамич. система не имела *седла в бесконечности*.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М., 1949; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., 2 изд., М., 1968; [3] Миллионщиков В. М., «Дифференц. уравнения», 1974, т. 10, № 12, с. 2292—93. *В. М. Миллионщиков.*

ФАНО МНОГООБРАЗИЕ — гладкое полное неприводимое алгебраич. многообразие X над полем k, антиканонич. пучок K_X^{-1} к-рого обилен. Основы изучения таких многообразий заложены Дж. Фано ([1], [2]).

Ф. м. размерности 2 наз. поверхностью дель Пеццо и является *рациональной поверхностью*. Многомерный аналог поверхностей дель Пеццо — Ф. м. размерности >2 уже не все являются рациональными многообразиями, напр. общая кубика в проективном пространстве P^4. Неизвестно (1984), все ли Ф. м. унирациональны.

Хорошо изучены трехмерные Ф. м. (см. [3], [5]). О Ф. м. размерности больше 3 известны лишь отдельные частные результаты.

Группа Пикара $\mathrm{Pic}\, X$ трехмерного Ф.м. X конечно порождена и не имеет кручения. В случае когда основное поле k совпадает с полем $\mathbb{C}$, ранг группы $\mathrm{Pic}\, X$, равный второму числу Бетти $b_2(X)$, не больше 10 (см. [4]). Если $b_2(X) \geqslant 6$, то Ф.м. изоморфно $P^1 \times S_{11-b_2(X)}$, где S_d — поверхность дель Пеццо степени d. Ф.м. X наз. примитивным, если не существует моноидального преобразования $\sigma: X \to X'$ гладкого многообразия X' с центром в неособой неприводимой кривой. Если Ф.м. X примитивно, то $b_2(X) \leqslant 3$. Если $b_2(X) = 3$, то X является расслоением на коники над $S = P^1 \times P^1$, другими словами, тогда существует морфизм $\pi: X \to S$, слой к-рого изоморфен конике, т. е. алгебраич. схеме, заданной однородным уравнением степени 2 в P^2. Ф.м. X с $b_2(X) = 2$ является расслоением на коники над проективной плоскостью P^2 (см. [3]). В случае $b_2(X) = 1$ существует 18 типов Ф.м., к-рые описаны (см. [6]).

Для трехмерных Ф.м. X индекс самопересечения антиканонич. дивизора $(-K_X^3) \leqslant 64$. Наибольшее целое число $r \geqslant 1$ такое, что $H^{\otimes r}$ изоморфно K_X^{-1} для нек-рого дивизора $H \in \mathrm{Pic}\, X$, наз. индексом Ф.м. Индекс трехмерного Ф.м. может принимать значения 1, 2, 3, 4. Ф.м. индекса 4 изоморфно проективному пространству P^3, а Ф.м. индекса 3 изоморфно гладкой квадрике $Q \subset P^4$. Если $r = 2$, то индекс самопересечения $d = H^3$ может принимать значения $1 \leqslant d \leqslant 7$, причем каждое из них реализуется на нек-ром Ф.м. Для Ф.м. индекса 1 отображение $\varphi_{K_X^{-1}}: X \to P^{\dim |K_X^{-1}|}$, определяемое линейной системой $|K_X^{-1}|$, имеет степень $\deg \varphi_{K_X^{-1}} = 1$ или 2. Описаны Ф.м. индекса 1, для к-рых $\deg \varphi_{K_X^{-1}} = 2$. Если $\deg \varphi_{K_X^{-1}} = 1$, то Ф.м. X реализуется как подмногообразие V_{2g-2} степени $2g-2$ в проективном пространстве P^{g+1}. Число g наз. родом Ф.м. V_{2g-2} и совпадает с родом канонич. кривой — сечения многообразия X при антиканонич. вложении в P^{g+1}. Известна классификация Ф.м. $V_{2g-2} \subset P^{g+1}$, класс гиперплоского сечения к-рых совпадает с антиканонич. классом и порождает группу $\mathrm{Pic}\, V_{2g-2}$ (см. [4], [5]).

Лит.: [1] Fano G., «Atti Congr. internaz. dei matematici. Bologna», 1931, t. 4, p. 115—19; [2] его же, «Comm. Math. Helvetici», 1942, v. 14, p. 202—11; [3] Mori S., Mukai S., «Manuscr. math.», 1981, v. 36, № 2, p. 147—62; [4] Roth L., «Atti Accad. Naz. dei Lincei Rendiconti. Classe sci. fis., mat. e naturali», 1950, v. 9, p. 246—50; [5] Исковских В. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1977, т. 41, № 3, с. 516—62; 1978, т. 42, № 3, с. 506—49; [6] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 12, М., 1979, с. 59—157.

Вик. С. Куликов.

ФАНО ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, параметризующая семейство прямых, лежащих на неособой кубич. поверхности $V_3 \subset P^4$. Дж. Фано изучал семейства прямых $F(V_3)$ на трехмерной кубике [1].

Через общую точку неособой кубики $V_3 \subset P^4$ проходит ровно 6 прямых, лежащих на ней, и Ф. п. $F(V_3)$ является неособой неприводимой приведенной алгебраич. поверхностью геометрич. рода $p_g = 10$, иррегулярности $q = 5$, топологич. эйлерова характеристика (в случае $k = \mathbb{C}$) к-рой равна 27. По Ф. п. $F(V_3)$ можно восстановить кубику V_3 (см. [2]).

Лит.: [1] Fano G., «Atti Reale Accad. Sci. Torino», 1903/04, t. 39, p. 778—92; [2] Тюрин А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1970, т. 34, № 6, с. 1200—08; [3] Clemens C., Griffiths Ph., «Ann. Math.», 1972, v. 95, № 2, p. 281—356.
Вик. С. Куликов.

ФАНО ПОСТУЛАТ — предложение проективной геометрии, установленное Дж. Фано (G. Fano, 1892) и заключающееся в том, что диагональные точки полного четырехвершинника неколлинеарны. Ф. п. равносилен тому, что характеристика тела K, соответствующего рассматриваемой проективной геометрии, не равна 2. Ф. п. не выполняется, напр., на конечной проективной плоскости, состоящей из семи точек и прямых, отвечающей телу K из двух элементов: 0,1.
М. И. Войцеховский.

ФАНО СХЕМА проективного алгебраического многообразия X над полем k — алгебраич. схема, параметризующая семейство прямых, лежащих на подмногообразии X проективного пространства P^n. Ф.с. $F(X)$ проективного многообразия X может быть задана как замкнутая подсхема в грассманиане $G(2, n+1)$ прямых проективного пространства P^n. В отличие от Ф.с. трехмерной кубики (см. *Фано поверхность*) Ф.с. произвольного проективного многообразия не обязательно является неособой, приведенной или неприводимой схемой. Так, линейчатая поверхность R прямых, лежащих на квартике Ферма $\sum_{i=0}^{4} x_i^4 = 0$, состоит из 40 конусов, высекаемых гиперплоскостями $x_i = \zeta x_j$, $i \neq j$, где ζ пробегает первообразные корни 8-й степени из 1. Каждый из конусов входит в поверхность R с кратностью 2 (см. [4]). Таким образом, эта Ф.с. приводима и каждая ее компонента не приведена в общей точке.

Лит.: [1] Tennison B., «Proc. London Math. Soc.», 1974, v. 29, p. 714—34.
Вик. С. Куликов.

ФАНЬЯНО ЗАДАЧА — задача, в к-рой в данный остроугольный треугольник требуется вписать треугольник наименьшего возможного периметра. Решением задачи является т. н. ортоцентрический треугольник, т. е. треугольник, вершинами к-рого являются основания высот данного треугольника. Задача была поставлена Дж. Фаньяно деи Тоски (G. Fagnano dei Toschi) в 1775.
П. С. Моденов.

ФАРЕЯ РЯД порядка n — возрастающая последовательность неотрицательных несократимых дробей, не превосходящих 1, со знаменателем, не превосходящим n. Напр., Ф.р. порядка 5 является последовательность

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$

Верны следующие утверждения.

1) Если $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$ — два последовательных члена Ф.р. порядка n, то

$$ba' - ab' = 1.$$

2) Если $\frac{a}{b}$, $\frac{a''}{b''}$, $\frac{a'}{b'}$ — три последовательных члена Ф.р. порядка n, то

$$\frac{a''}{b''} = \frac{a+a'}{b+b'}.$$

3) Число членов Ф. р. порядка n равно

$$1 + \sum_{x=1}^{n} \varphi(x).$$

Ф. р. рассматривались Дж. Фареем (J. Farey, 1816).

Лит.: [1] Бухштаб А. А., Теория чисел, 2 изд., М., 1966; [2] Hall R. R., «J. London Math. Soc.», 1970, v. 2, p. 139—48.
В. И. Нечаев.

ФАТУ ДУГА для функции $f(z)$, мероморфной в области G плоскости комплексного переменного z, — *достижимая дуга границы* области G, обладающая тем свойством, что она входит в состав границы нек-рой

жордановой области $g \subset G$, в к-рой $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, ограничена. Иногда это определение расширяют, заменяя условие ограниченности $f(z)$ в g более общим условием неплотности в плоскости w образа области g при отображении $w=f(z)$. Усиленная теорема Фату из теории граничных свойств аналитич. функций утверждает, что если γ — дуга Фату (даже в расширенном смысле) для функции $f(z)$, мероморфной в круге $D: |z|<1$, то почти в каждой точке $\zeta \in \gamma$ функция $f(z)$ имеет конечный предел при стремлении z к ζ изнутри D по любому углу с вершиной ζ, образованному парой хорд круга D.

Лит.: [1] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

Е. П. Долженко.

ФАТУ ТЕОРЕМА в теории функций комплексного переменного: 1) Пусть гармонич. функция $u(z)$, $z=re^{i\varphi}$, представима в единичном круге $U=\{z \in \mathbb{C} : |z|<1\}$ интегралом Пуассона — Стилтьеса

$$u(z)=\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\mu(\zeta),\quad \zeta=e^{i\theta},$$

где μ — борелевская мера, сосредоточенная на единичной окружности $T=\{\zeta : |\zeta|=1\}$, $\int d\mu(\zeta)=1$. Тогда почти всюду по мере Лебега на T функция $u(z)$ имеет *угловые граничные значения*.

Эта Ф.т. обобщается для гармонич. функций $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, представимых интегралом Пуассона — Стилтьеса в областях Ляпунова $D \subset \mathbb{R}^n$ (см. [2], [3]). О Ф.т. для *радиальных граничных значений* кратно гармонич. функций $u(z)$ в поликруге $U^n=\{z=(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j|<1,\ j=1, \ldots, n\}$ см. [4], [5].

2) Если $f(z)$ — ограниченная аналитич. функция в U, то почти всюду по мере Лебега на T она имеет угловые граничные значения.

Эта Ф. т. обобщается для *ограниченного вида функций* (см. [6]). Точки $\zeta \in T$, в к-рых существует угловое граничное значение $f(\zeta)$, наз. точками Фату. Относительно обобщений Ф. т. для аналитич. функций $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n \geqslant 2$, см. [7]; оказывается, что при $n \geqslant 2$ существуют граничные значения и по комплексным касательным направлениям.

3) Если коэффициенты степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ с единичным кругом сходимости U стремятся к нулю, $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = 0$, то этот ряд равномерно сходится на каждой дуге $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ окружности T, состоящей только из регулярных граничных точек для суммы ряда.

Если $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = 0$ и ряд равномерно сходится на дуге $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, то отсюда не следует, что точки этой дуги регулярные для суммы ряда.

Теоремы 1), 2), 3) были доказаны П. Фату [1].

Лит.: [1] Fatou P., «Acta math.», 1906, v. 30, p. 335—400; [2] Привалов И. И., Кузнецов П. И., «Матем. сб.», 1939, т. 6, № 3, с. 345—76; [3] Соломенцев Е. Д., «Чехосл. матем. ж.», 1958, т. 8, с. 520—36; [4] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1—2, М., 1965; [5] Рудин У., Теория функций в поликруге, пер. с англ., М., 1974; [6] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950; [7] Хенкин Г. М., Чирка Е. М., в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 13—142.

Е. Д. Соломенцев.

ФАТУ ТЕОРЕМА о переходе к пределу под знаком интеграла Лебега: если последовательность измеримых и неотрицательных функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... почти всюду на множестве

E сходится к функции $f(x)$, то

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx.$$

Доказана впервые П. Фату [1]. Часто в ее формулировке $\varlimsup_{n\to\infty}$ заменяют на $\sup_n$.

Лит.: [1] Fatou P., «Acta math.», 1906, v. 30, p. 335—400; [2] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [3] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974.

Т. П. Лукашенко.

ФЕДОРОВСКАЯ ГРУППА — то же, что *кристаллографическая группа*. Названа по имени Е. С. Федорова, к-рый в 1891 перечислил все такие группы в трехмерном случае (см. [1]).

Лит.: [1] Федоров Е. С., Симметрия и структура кристаллов. Основные работы, М., 1949, с. 111—255.

Э. Б. Винберг.

ФЕЙЕРА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — *средних арифметических метод суммирования*, примененный к суммированию рядов Фурье. Впервые был применен Л. Фейером [1].

Ряд Фурье

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

функции $f(x) \in L(-\pi, \pi)$ суммируем Ф. м. с. к сумме $s(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = s(x),$$

где

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k(x), \qquad (2)$$

$s_k(x)$ — частичные суммы ряда (1).

Если x — точка непрерывности функции $f(x)$ или точка разрыва 1-го рода, то в этой точке ее ряд Фурье суммируем Ф.м.с. соответственно к $f(x)$ или к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Если $f(x)$ непрерывна на нек-ром интервале (a, b), то ее ряд Фурье суммируем Ф.м.с. равномерно на всяком отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$; если же $f(x)$ непрерывна всюду, то указанный ряд суммируем равномерно к $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ (теорема Фейера).

Этот результат был усилен А. Лебегом [2], показавшим, что для любой суммируемой функции $f(x)$ ее ряд Фурье почти всюду суммируем Ф. м. с. к $f(x)$.

Функция

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \cos \nu x \right) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin (n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$$

наз. ядром Фейера. С ее помощью средние Фейера (2) функции $f(x)$ выражаются в виде

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\, K_n(u)\, du.$$

Лит.: [1] Fejér L., «Math. Ann.», 1903, Bd 58, S. 51—69; [2] Lebesgue H., «Math. Ann.», 1905, Bd 61, S. 251—80; [3] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [4] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1—2, М., 1965.

И. И. Волков.

ФЕЙЕРА ПОЛИНОМ — тригонометрич. полином вида

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} (\cos(2n+k)x - \cos(2n-k)x)$$

или аналогичный полином по синусам. Ф. п. используются при построении непрерывных функций с заданными особенностями их рядов Фурье.

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961.

С. А. Теляковский.

ФЕ

вида

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, \Phi_n(t)\, dt,$$

где

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \frac{\sin^2 (n+1)\, t/2}{\sin^2 t/2}$$

— ядро Фейера. Ф.с.и. является интегральным представлением *Фейера сумм* $\sigma_n(f, x)$.

Лит. см. при ст. *Фейера сумма*. *С. А. Теляковский.*

ФЕЙЕРА СУММА — средние арифметические частных сумм ряда Фурье по тригонометрич. системе

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k(f, x) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f.

Если функция f непрерывна, то $\sigma_n(f, x)$ сходятся к $f(x)$ равномерно; $\sigma_n(f, x)$ сходятся к $f(x)$ в метрике L.

Если f принадлежит классу функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка $\alpha < 1$, то справедлива оценка

$$\| f(x) - \sigma_n(f, x) \|_c = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

т. е. в этом случае Ф. с. приближают f со скоростью наилучших приближений функций указанного класса. Но Ф. с. не могут обеспечить высокую скорость приближения: оценка

$$\| f(x) - \sigma_n(f, x) \|_c = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

верна только для функций, являющихся константами.

Ф. с. введены Л. Фейером [1].

Лит.: [1] Fejér L., «Math. Ann.», 1903, Bd 58, S. 51—69; [2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [3] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965; [4] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.— Л., 1949; [5] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.

С. А. Теляковский.

ФЕЙНМАНА ИНТЕГРАЛ — собирательное название для представлений в виде континуального интеграла, или *интеграла по траекториям*, переходных функций (функций Грина) того или иного эволюционного процесса.

Пусть дано уравнение

$$\frac{du}{dt} = Hu, \qquad (1)$$

где $0 \leqslant t \leqslant T$; $T > 0$, а $u(t, \omega)$ — функция, определенная на множестве $T \times \Omega$, где $\Omega \ni \omega$ — нек-рое пространство, и H — линейный оператор, действующий в подходящим образом подобранном пространстве функций, определенных на Ω. В ряде случаев переходную функцию $G(\omega_1, \omega_2, t)$ уравнения (1) (т. е. ядро оператора из полугруппы $\exp\{tH\}$, $t \geqslant 0$) можно представить в виде континуального интеграла

$$G(\omega_1, \omega_2, t) =$$

$$= \int_{\substack{\omega : \omega(0) = \omega_1 \\ \omega(t) = \omega_2}} \exp\left\{\int_0^t W[\omega(\tau)]\, d\tau\right\} \mu_{\omega_1, \omega_2, t}(d\omega), \qquad (2)$$

где $W(\cdot)$ — нек-рая функция, определенная на Ω, а интегрирование происходит по множеству «траекторий» $\omega(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, со значениями в Ω, «выходящих» в нулевой момент времени из ω_1 и «приходящих» в ω_2 в момент t, наконец, $\mu_{\omega_1, \omega_2, t}$ — нек-рая мера (или предмера), заданная на этом множестве траекторий. Интеграл понимается либо в обычном лебеговском смысле, либо в смысле, предписываемом какой-либо из процедур континуального интегрирования (см. [5], [6]).

Интегралы вида (2), а также интегралы, полученные из них с помощью каких-нибудь естественных преобразований (напр., заменой переменных интегрирования, дополнительным интегрированием по «концам» ω_1 и ω_2 или другим параметрам, входящим в выражение (2), дифференцированием по этим параметрам и т. д.), и наз. обычно интегралом Фейнмана.

Представление (2) было введено Р. Фейнманом [1] в связи с предложенной им новой интерпретацией квантовой механики. Им рассмотрен случай, когда $\Omega=\mathbb{R}^n$, $n=1, 2, \ldots$, оператор H имеет вид $H=iL$, где L — дифференциальный оператор Штурма—Лиувилля $Lu=-a\Delta u+Vu$, Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, V — нек-рая функция, определенная на $\mathbb{R}^n$ (потенциал), $a>0$. При этом в представлении (2) для функции $G(x_1, x_2, t)$, $x_1, x_2\in\mathbb{R}^n$, $t>0$, полагается $W=V$, а комплексная предмера $\mu_{x_1, x_2, t}$ (мера Фейнмана) задается на цилиндрич. множествах вида

$$\{x(\tau): x(0)=x_1,\ x(t)=x_2,\ x(\tau_i)\in G_i,\ i=1, 2, \ldots, k\},$$

где

$$0<\tau_1<\ldots<\tau_k<t,\ G_i\subset\mathbb{R}^n,\ i=1, 2, \ldots, k,\ k=1, 2, \ldots,$$

интегрированием по множеству $G_1\times\ldots\times G_k\subseteq(\mathbb{R}^n)^k$ (по обычной лебеговской мере в $(\mathbb{R}^n)^k$) плотности

$$\prod_{j=1}^{k+1}\left[(2\pi ia(\tau_j-\tau_{j-1}))\right]^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{(\xi_j-\xi_{j-1})^2}{2ai(\tau_j-\tau_{j-1})}\right\},$$

где обозначено $\xi_0=x_1$, $\xi_{k+1}=x_2$, $\tau_0=0$, $\tau_{k+1}=t$. Выражение (2) рассматривалось Р. Фейманом как предел конечнократных интегралов, полученных заменой интеграла $\int_0^t W[\omega(t)]\,dt$ в подинтегральной экспоненте в (2) какой-либо его интегральной суммой. Однако строгого обоснования корректности такого определения интеграла, а также справедливости равенства (2) дано не было.

Позднее для случая оператора $H=L$, где L имеет вид (3), представление (2), в к-ром мера $\mu_{x_1, x_2, t}$ совпадает с *Винера мерой*, получено М. Кацем [2] с полной математич. строгостью. Поэтому представление (2) часто наз. формулой Фейнмана—Каца.

Ф. и. в качестве удобного и гибкого аналитич. средства используется в разных вопросах математич. физики ([3], [4], [6]), теории вероятностей [7] и в теории дифференциальных уравнений [5].

Лит.: [1] Feynman R., «Rev. Modern Phys.», 1948, v. 20, p. 367—87; [2] Kac M., в кн.: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berk.—Los Ang., 1951, p. 189—215; [3] Genibre J., Statistical mechanics and quantum field theory, N. Y., 1971; [4] Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976; [5] Далецкий Ю. Л., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1966, М., 1967, с. 83—124; [6] Albeverio S., Høegh-Krohn R., Mathematical theory of Feynman path integrals, B.—[a. o.], 1976; [7] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 3, М., 1975; [8] Голубева В. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 135—202.

Р. А. Минлос.

ФЕЙНМАНА МЕРА — комплексная *предмера*, определенная на цилиндрич. множествах в пространстве функций $x(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, $T>0$, со значениями в $\mathbb{R}^n$, $n=1, 2, \ldots$, формулой

$$\mu_{x,\,T}\{B^A_{\tau_1,\ldots,\tau_k,\,x}\}=\prod_{j=1}^{k}(2\pi ia(\tau_j-\tau_{j-1}))^{-n/2}\times$$
$$\times\int_A\prod_{j=1}^{k+1}\exp\left\{-\frac{1}{2ai}\sum_{j=1}^{k+1}\frac{(\xi_j-\xi_{j-1})^2}{(\tau_j-\tau_{j-1})}\right\}\times$$
$$\times d\xi_1\ldots d\xi_{k+1}. \qquad (1)$$

Здесь $a>0$ — параметр, $0<\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_k<T$, а

$$B^A_{\tau_1,\ldots,\tau_k,\,x}=\{x(t): x(0)=x=\xi_0,$$

$$\{x(\tau_1), \ldots, x(\tau_k), x(T)\}\in A\},\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad k=0, 1, \ldots,$$

где A — нек-рое борелевское подмножество пространства $(\mathbb{R}^n)^{(k+1)}$. Иногда рассматривается и т. н. условная мера Фейнмана $\mu_{x,y,T}$, получающаяся из меры (1) сужением ее на множество траекторий с «концом» в точке $y \in \mathbb{R}^n: x(T)=y$. Мера $\mu_{x,T}$, как и мера $\mu_{x,y,T}$, были введены в Р. Фейнманом в связи с представлением полугруппы $\exp\{itH\}$, где H — оператор Штурма — Лиувилля, в виде континуального интеграла — *Фейнмана интеграла*.

Лит.: [1] Feynman R., «Rev. Modern Phys.», 1948, v. 20, p. 367—87; [2] Далецкий Ю. Л., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1966, М., 1967, с. 83—124; [3] Albeverio S., Høegh-Krohn R., Mathematical theory of Feynman path integrals, B., 1976.

Р. А. Минлос.

ФЕЛЛЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС — однородный марковский процесс $X(t)$, $t \in T$, где T — аддитивная подполугруппа действительной оси $\mathbb{R}$ со значениями в топологич. пространстве E с топологией $\mathscr{C}$ и борелевской σ-алгеброй $\mathscr{B}$, переходная функция $P(t, x, B)$, $t \in T$, $x \in E$, $B \in \mathscr{B}$ к-рого обладает определенным свойством гладкости, а именно для непрерывной ограниченной функции f функция

$$x \longmapsto P^t f(x) = \int f(y)\, P(t, x, dy)$$

является непрерывной. Естественность такого требования на переходную функцию обусловлена тем, что переходные операторы P^t, $t \in T$, действующие на пространстве ограниченных борелевских функций, оставляют инвариантным пространство $C(E)$ непрерывных ограниченных функций, т. е. полугруппу $\mathscr{P} = \{P^t, t \in T\}$ переходных операторов можно считать действующей на $C(E)$. Впервые полугруппы такого типа рассматривались В. Феллером (W. Feller, 1952) (см. [1]).

Как правило, на топологич. пространство накладываются дополнительные требования: обычно $(E, \mathscr{C})$ — локально компактное метризуемое пространство. В этом случае Ф. п., удовлетворяющий условию стохастич. непрерывности, допускает модификацию, являющуюся стандартным марковским процессом (см. *Марковский процесс*, строго марковское свойство). Обратно, стандартный процесс является Ф. п. для естественной топологии $\mathscr{C}_0$; базу топологии $\mathscr{C}_0$ составляют такие множества $B \in \mathscr{B}$, что для момента $\theta(B)$ первого выхода из B почти наверное выполняется $\theta(B) > 0$, если процесс начинается в B (см. [1]).

Важный подкласс Ф. п. образуют сильно феллеровские процессы (с. ф. п.) [2]; в этом случае на переходную функцию накладываются более жесткие требования гладкости: функция $x \longmapsto P^t f(x)$ должна быть непрерывной для любой ограниченной борелевской функции f. Если, более того, функция $x \longmapsto P(t, x, \cdot)$ непрерывна по норме вариации в пространстве ограниченных мер, то марковский процесс, отвечающий такой переходной функции, наз. с. ф. п. в узком смысле. Если переходные функции P и Q отвечают с. ф. п., то их композиция $P \cdot Q$ отвечает с. ф. п. в узком смысле при обычных предположениях на $(E, \mathscr{C})$. Невырожденные *диффузионные процессы* являются с. ф. п. (см. [3]). Естественным обобщением с. ф. п. являются марковские процессы с непрерывной компонентой (см. [4]).

Если T — подмножество натуральных чисел, то Ф.п. $X(t)$, $t \in T$, наз. феллеровской цепью (ф.ц.). Примером ф.ц. может служить случайное блуждание на прямой $\mathbb{R}$: последовательность S_n, $n \in T = \{0, 1, \ldots\}$, где $S_{n+1} = S_n + Y_n$, $\{Y_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. При этом случайное блуждание $\{S_n\}$ является сильно феллеровской цепью тогда и только тогда, когда распределение случайной величины Y_1 имеет плотность.

Для Ф.п. имеется естественное обобщение классификации состояний цепи Маркова со счетным множеством состояний (см. *Маркова цепь*); состояния x и y из E

сообщаются, если для любых окрестностей U_x точки x и V_y точки y существуют t, $s \in T$ такие, что $P(t, x, V_y) > 0$ и $P(s, y, U_x) > 0$ (цепи со счетным множеством состояний являются феллеровскими с дискретной топологией). Эргодические свойства и методы их исследования для Ф. п. имеют определенную специфику по сравнению с классич. *эргодической теорией*. Наиболее «правильное» поведение обнаруживается у неприводимых (топологически неразложимых) Ф.п.; это Ф. п., у к-рых все состояния сообщаются (см. [7]). При этом эргодич. свойства Ф.п. носят сравнительно слабый характер.

В качестве примера можно сравнить свойства типа возвратности для цепи Маркова с общим пространством состояний. Пусть для любого начального состояния $x \in E$ и множества A из системы $\mathcal{A}$ почти наверное выполняется $X(t) \in A$ для бесконечного множества значений времени t (t принимает натуральные значения). Если $\mathcal{A}$ есть система множеств вида $\mathcal{A} = \{A : \mu(A) > 0\}$, где μ — нек-рая мера, то получают свойство возвратности цепи в смысле Харриса (см. [8]), а если для Ф.п. в качестве $\mathcal{A}$ выбрать топологию $\mathcal{C}$ на E, то — свойство диффузности (см. [7]) (топологич. возвратности) для Ф.п. Случайное блуждание $\{S_n\}$, у к-рого Y_1 имеет конечное математич. ожидание $\mathsf{E}Y_1$ будет диффузной ф.п. тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}Y_1 = 0$ и распределение Y_1 не является арифметическим, при этом цепь $\{S_n\}$ будет возвратной в смысле Харриса только в том случае, когда для нек-рого n распределение S_n имеет абсолютно непрерывную компоненту.

С формальной точки зрения теорию цепей Маркова с общим пространством состояний E можно свести к изучению ф.ц. с компактным пространством состояний $\hat{E}$ — расширением E, получаемым при помощи теоремы Гельфанда — Наймарка (см. *Банахова алгебра* и [9]). Такое расширение, однако, «слишком велико»; возможны и другие конструкции феллеровских расширений для цепей Маркова (см. [10]).

Теория Ф.п. и ф.ц. является также вероятностным обобщением *топологической динамики*, поскольку детерминированному (вырожденному) Ф.п. $X(t)$, $t \in T$, отвечает динамич. система $\{S_t,\ t \in T\}$, где отображение $(t, x) \mapsto S_t x$ из $T \times E$ в E непрерывно и $X(t) = S_t x$ (почти наверное).

Лит.: [1] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [2] Гирсанов И. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т. 5, № 3, с. 314—30; [3] Молчанов С. А., там же, 1968, т. 13, № 3, с. 493—98; [4] Tuominen P., Tweedie R., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1979, v. 38, p. 89—114; [5] Foguel S., «Ann. Scuola norm. Super. Pisa», 1973, v. 27, № 1, p. 19—51; [6] Sine R., «Indiana Univ. Math. J.», 1976, v. 25, № 1, p. 23—43; [7] Смирнов С. Н., «Докл. АН СССР», 1982, т. 263, № 3, с. 554—58; [8] Revuz D., Markov chains, Amst.— Oxf.— N. Y., 1975; [9] Жданок А. И., в кн.: Топологич. пространства и их отображения, Рига, 1981, с. 18—33; [10] Шур М. Г., «Теория вероятн. и ее примен.», 1981, т. 26, №3, с. 496—509.

С. Н. Смирнов.

ФЕРМА МАЛАЯ ТЕОРЕМА: при a, не делящемся на простое число p, имеет место сравнение $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Эта теорема была установлена П. Ферма (P. Fermat, 1640). Она показывает, что порядок каждого элемента *мультипликативной группы* классов вычетов по модулю p делит порядок этой группы. Ф.м.т. была обобщена Л. Эйлером (L. Euler) на случай произвольного модуля m. Именно, им было доказано, что для всякого числа a, взаимно простого с заданным числом $m > 1$, имеет место сравнение

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m,$$

где $\varphi(m)$ — *Эйлера функция*. Другим обобщением Ф.м.т. является равенство $x^q = x$, справедливое для всех элементов x конечного поля k_q, состоящего из q элементов.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981.

С. А. Степанов.

ФЕРМА ПРИНЦИП — вариационный принцип, позволяющий находить лучи, т. е. кривые, вдоль к-рых распространяется волновой процесс. Пусть $x=x(\sigma)$, $x=x_1, \ldots, x_m$, $\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1$, — уравнение кривой l, соединяющей точки M_0 и M_1, $c=c(x)>0$ — скорость распространения волн в точке x. Ф.п. утверждает, что $\delta \int ds/c = 0$ для луча, соединяющего M_0 и M_1. Здесь δ — символ вариации, $ds=\sqrt{\Sigma(dx_i)^2}$ — дифференциал дуги. Физич. смысл $\int_{M_0}^{M_1} ds/c$ — время движения из M_0 в M_1 вдоль l со скоростью $c(x)$. Из Ф.п. следуют классич. законы отражения, преломления, прямолинейность лучей при $c=\text{const}$. Дифракционные лучи, лучи, распространяющиеся от краев экранов, лучи головных волн тоже можно найти, пользуясь Ф.п. Лучи, определяемые Ф.п., являются характеристиками *эйконала уравнения*. Интеграл $\int ds/c$ задает риманову метрику частного типа. Лучи — геодезические, соответствующие этой метрике. Ф.п. обобщается на случай скорости, зависящей от направления (анизотропная среда). Лучи в этом случае — геодезические нек-рой финслеровой метрики.

Ф. п. для задачи преломления света был впервые высказан П. Ферма (P. Fermat, ок. 1660).

Лит. см. при ст. *Лучевой метод*. *В. М. Бабич.*

ФЕРМА СПИРАЛЬ — плоская трансцендентная кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид

$$\rho = a\sqrt{\varphi}.$$

Каждому значению φ соответствуют два значения ρ — положительное и отрицательное. Ф. с. центрально симметрична относительно полюса, к-рый является точкой перегиба. Относится к так называемым алгебраическим спиралям (см. *Спирали*).



Ф. с. впервые рассмотрена П. Ферма (P. Fermat, 1636).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

ФЕРМА ТЕОРЕМА, великая теорема Ферма, знаменитая теорема Ферма, большая теорема Ферма, последняя теорема Ферма,— утверждение, что для любого натурального числа $n>2$ уравнение $x^n+y^n=z^n$ (уравнение Ферма) не имеет решений в целых ненулевых числах x, y, z. Она была сформулирована П. Ферма (P. Fermat) примерно в 1630 на полях книги Диофанта «Арифметика» [1] следующим образом: «невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата, и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем». И далее добавил: «я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком малы». В бумагах П. Ферма нашли доказательство Ф. т. для $n=4$. Общее доказательство до сих пор (1984) не получено, несмотря на усилия многих математиков (как профессионалов, так и любителей). Нездоровый интерес к доказательству этой теоремы среди неспециалистов в области математики был в свое время вызван большой международной премией, аннулированной в конце 1-й мировой войны.

Предполагается, что доказательство Ф. т. вообще не существовало.

Для $n=3$ Ф. т. доказал Л. Эйлер (L. Euler, 1770), для $n=5$ — Н. Дирихле (P. Dirichlet) и А. Лежандр (A. Legendre, 1825), для $n=7$ — Г. Ламе (G. Lamé, 1839) (см. [2]). Ф. т. достаточно доказать для любого

простого показателя $n=p>2$, т. е. достаточно доказать, что уравнение

$$x^p+y^p=z^p \qquad (1)$$

не имеет решений в целых ненулевых взаимно простых числах x, y, z. Можно также считать, что числа x и y взаимно просты с p. При доказательстве Ф.т. рассматривают два случая: случай 1, когда $(xyz,\ p)=1$ и случай 2, когда $p|z$. Доказательство 2-го случая Ф.т. более сложно и обычно проводится методом бесконечного спуска. Существенный вклад в доказательство Ф.т. внес Э. Куммер (E. Kummer), к-рый создал принципиально новый метод, основанный на разработанной им арифметич. теории *кругового поля*. Используется тот факт, что в поле $\mathbb{Q}(\zeta)$, $\zeta=e^{2\pi i/p}$, левая часть уравнения (1) разлагается на линейные множители $x^p+y^p=\prod_{i=0}^{p-1}(x+y\zeta^i)$, к-рые являются p-ми степенями *идеальных чисел* поля $\mathbb{Q}(\zeta)$ в случае 1 и отличаются от p-х степеней на множитель $(1-\zeta)$, $i>0$ в случае 2. Если p делит числители *Бернулли чисел* B_{2n} $(n=1,\ 2,\ \ldots,\ (p-3)/2)$, то по критерию регулярности p не делит число h классов идеалов поля $\mathbb{Q}(\zeta)$ и эти идеальные числа — главные. В этом случае Э. Куммер [3] доказал Ф.т. Не известно бесконечно или конечно число регулярных чисел p (по теореме Иенсена число иррегулярных простых чисел бесконечно [4]). Э. Куммер [5] доказал Ф.т. для нек-рых классов иррегулярных простых чисел и тем самым установил ее справедливость для всех $p<100$. В случае 1 он показал, что из (1) следует выполнимость сравнений

$$B_n\left[\frac{d^{p-n}}{dv^{p-n}}\ln(x+e^v y)\right]_{v=0}\equiv 0 \pmod p,$$
$$n=2,\ 4,\ \ldots,\ p-3,$$

справедливых при любой перестановке x, y, $-z$. Отсюда он получил, что если в случае 1 уравнение (1) разрешимо, то для $n=3,\ 5$

$$B_{p-n}\equiv 0 \pmod p. \qquad (2)$$

В случае 2 Э. Куммер доказал Ф.т. при следующих условиях: 1) $p\mid h_1$, $p^2\nmid h_1$, где h_1 — первый множитель числа классов идеалов поля $\mathbb{Q}(\zeta)$ (это равносильно требованию, что числитель только одного числа B_{2n}, где $2n=2,\ 4,\ \ldots,\ p-3$, делится на p); 2) $B_{2np}\not\equiv 0 \pmod{p^3}$; 3) найдется идеал, по модулю к-рого единица

$$E_n=\sum_{i=1}^{(p-3)/2}e_i^{g^{-2i}n}$$

не сравнима с p-й степенью целого числа из $\mathbb{Q}(\zeta)$, где g — первообразный корень по модулю p, а

$$e_i=\left(\zeta^{g^{i+1}/2}-\zeta^{-g^{i+1}/2}\right)\Big/\left(\zeta^{g^{i/2}}-\zeta^{-g^{i/2}}\right).$$

Метод Куммера получил широкое развитие во многих работах по Ф.т. (см. [6], [7]). Из (1) в случае 1 установлена выполнимость сравнений (2) для $n=7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19$. М. Краснер [8] при тех же условиях показал, что найдется такое число p_0, что при $p>p_0$ сравнение (2) верно для всех чисел $n=2k+1$, где $1\leqslant k\leqslant\left[\sqrt[3]{\ln p}\right]$.

Х. Брюкнер [9] доказал, что число чисел B_n, $n=2,\ 4,\ \ldots,\ p-3$, числители к-рых делятся на p больше, чем $\sqrt{p}-2$. Пусть $p^k\mid h_1$, $p^{k+1}\nmid h_1$. П. Реморов [10] показал, что существуют такие постоянные N_k и M_k, $N_k<M_k$, что для всех $p<N_k$, $p>M_k$, случай 1 Ф.т. справедлив. М. Айхлер [11] установил, что случай 1 Ф.т. верен при $H\leqslant\left[\sqrt{p}\right]-1$, где H — индекс иррегулярности поля $\mathbb{Q}(\zeta)$, $p^H\|h$. Г. Вандивер [12] доказал случай 1 при $p\nmid h_2$, где h_2 — второй множитель числа классов идеалов поля $\mathbb{Q}(\zeta)$. Интересные резуль-

таты по случаю 2 Ф. т. получены им в [13], [6]. Напр., он показал, что Ф. т. истинна при следующих условиях: 1) $(h_2,\ p)=1$, 2) $B_{np}\not\equiv 0 \pmod{p^3}$, $n=2,\ 4,\ \ldots,\ p-3$. Наиболее важной является теорема: пусть p — иррегулярное простое число, $2a_1,\ 2a_2,\ \ldots,\ 2a_s$ — индексы чисел Бернулли из $B_2,\ B_4, \ldots,\ B_{p-3}$, числители к-рых делятся на p; если ни одна из единиц $E_a\,(a=a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s)$ не сравнима с p-й степенью целого числа из $\mathbb{Q}(\zeta)$ по mod $\mathfrak{P}$, где $\mathfrak{P}$ — простой идеал, делитель простого числа $q<p^2-p$ и $q\equiv 1 \pmod{p}$, то Ф. т. верна. Отсюда Г. Вандивер [14] получил эффективно проверяемый критерий для иррегулярных простых чисел, с помощью к-рого на ЭВМ доказана Ф. т. для всех $p<125\,000$ (см. [15]).

Результаты по случаю 1 Ф. т. разнообразней. Еще в 1823 А. Лежандр публикует результат С. Жермен (S. Germen): если существует простое число q такое, что сравнение $\xi^p+\eta^p+\zeta^p\equiv 0 \pmod{q}$ не имеет целых решений $\xi,\ \eta,\ \zeta$, не делящихся на q, и p не является вычетом p-й степени по mod q, то справедлив случай 1 Ф. т. (см. [2]). Отсюда он показал, что если хотя бы одно из чисел $2kp+1$, $k\not\equiv 0 \pmod{3}$, $k\leqslant 8$, простое, то имеет место случай 1 Ф. т. Это предложение выведено для всех $k\leqslant 55$. А. Виферих [16] открыл следующий критерий: если $p\nmid q\,(2)$, где $q\,(m)=(m^{p-1}-1)/p$ — частное Ферма, то случай 1 Ф. т. верен. М. Мириманов [17] доказал это при $p\nmid q\,(3)$. В дальнейшем, рядом других авторов случай 1 Ф. т. был установлен для всех p, для к-рых $p\nmid q\,(m)$, где m — какое-нибудь простое число $\leqslant 43$. Отсюда следует 1-й случай Ф. т. для $p=a\pm b$, где $a,\ b,\in\mathbb{N}_n$ содержат в своих разложениях только простые числа $\leqslant 43$. Вычисления на ЭВМ показали [18], что среди чисел $p<6\cdot 10^9$ только два: $p=1093$ и $p=3511$ удовлетворяют условию $p\mid q\,(2)$, но для них $p\nmid q\,(3)$. Это доказывает случай 1 Ф. т. для всех $p<6\cdot 10^9$. Ф. Фуртвенглер [19] на основе закона взаимности Эйзенштейна довольно просто повторил результаты А. Вифериха и М. Мириманова. Он доказал также, что если x, y, z решение уравнения (1) и $(x,\ y)=1$, то $p\mid q\,(r)$, где $r\mid x$, но $p\nmid x$, или $r\mid y$, но $p\nmid y$, или $r\mid(x\pm y)$, но $p\nmid(x^2-y^2)$.

Известно много других различных критериев для случая 1 Ф. т., к-рые связаны с разрешимостью определенных сравнений или с существованием простых чисел определенного вида, но неизвестно (1984), бесконечно ли число простых чисел p, для к-рых случай 1 Ф. т. справедлив. Следует отметить, что уравнение $x^{2p}+y^{2p}=z^{2p}$ неверно, если $2p$ не делит ни x, ни y (см. [20]). Контрпример к Ф. т. практически привести невозможно. К. Инкери [21] показал, что если целые числа $x,\ y,\ z,\ 0<x<y<z$ удовлетворяют уравнению (1), то $x>\frac{1}{2}\,p^{3p-4}$, а в случае 1: $x>\left(\frac{2p^3+p}{\ln^3 p}\right)^p$.

Ф. т. может быть сформулирована так: для любого натурального числа $n>2$ на кривой Ферма $x^n+y^n=1$ нет рациональных точек, кроме тривиальных $(0,\ \pm 1)$, $(\pm 1,\ 0)$. Рациональные точки на кривой Ферма исследуются методами алгебраич. геометрии. Этими методами доказано (1983), что число рациональных точек на кривой Ферма во всяком случае конечно, что следует из *Морделла гипотезы*, доказанной Г. Фалтингсом [23].

Уравнение Ферма рассматривается в алгебраич. числах, целых функциях, матрицах и т. д. Имеются обобщения Ф. т. для уравнений вида $x^n+y^n=Dz^n$.

Лит.: [1] Диофант Александрийский, Арифметика и книга о многоугольных числах, пер. с др.-греч., М., 1974; [2] Эдвардс Г., Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел, пер. с англ., М., 1980; [3] Kummer E., «J. reine und angew. Math.», 1850, Bd 40, S. 93—138; [4] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [5] Kummer E., «Abh. Akad. Wiss. Berlin, Math. Kl.», 1857, S. 41—74; [6] Vandiver H., «Amer. Math. Monthly», 1946, v. 53, p. 555—78; [7] Riben-

boim P., 13 lectures on Fermat's last theorem, N. Y.— [a.o.], 1979; [8] Krasner M., «C. r. Acad. sci.», 1934, t. 199, p. 256—258; [9] Brückner H., «J. reine und ang. Math.», 1972, Bd 253, S. 15—18; [10] Реморов П. Н., «Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем. наук», в. 23, 1952, т. 144, с. 26—34; [11] Eichler M., «Acta Arithm.», 1965, v. 11, p. 129—31; [12] Vandiver H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1934, v. 40, p. 118—26; [13] его же, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1929, v. 31, p. 613—42; [14] его же, «Proc. Nat. Acad. Sci.», 1954, v. 40, p. 732—35; [15] Wagstaff S., «Math. Comput.», 1978, v. 32, p. 583—91; [16] Wieferich A., «J. reine und angew. Math.», 1909, Bd 136, S. 293—302; [17] Mirimanoff D., «J. reine und angew. Math.», 1911, Bd 139, S. 309—24; [18] Lehmer D. H., «Math. Comput.», 1981, v. 36, p. 289—90; [19] Furtwängler P., «Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien. Math.-naturwiss. Kl.» IIa, 1912, Bd 121, S. 589—92; [20] Terjanian G., «C.r. Acad. sci.», 1977, A 285—B 285, № 16, p. 973 A—975 A; [21] Inkeri K., «Ann. Univ. Turku», Ser. A., 1953, № 1, p. 3—9; [22] Постников М. М., Введение в теорию алгебраических чисел, М., 1982; [23] Faltings G., «Invent. math.», 1983, Bd 73, S. 349—66.

А. В. Толстиков.

ФЕРМА ТЕОРЕМА — необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции. Пусть действительная функция f определена в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и дифференцируема в этой точке. Тогда, если функция f имеет в точке x_0 локальный экстремум, то ее производная в x_0 равна нулю: $f'(x_0)=0$. Геометрически это означает, что касательная к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ горизонтальна. Впервые равносильное условие для экстремумов многочленов было получено П. Ферма (P. Fermat) в 1629, но опубликовано лишь в 1679.

Л. Д. Кудрявцев.

ФЕРМИ КООРДИНАТЫ — координаты, в к-рых компоненты метрич. тензора риманова пространства, вычисленные в точках нек-рой кривой, совпадают с компонентами метрич. тензора евклидова пространства в декартовых координатах. Понятие Ф. к. обобщается на случай псевдоримановых пространств, для к-рых их и ввел впервые Э. Ферми (E. Fermi, 1922). Он показал, что в окрестности достаточно малого отрезка достаточно регулярной времениподобной кривой на достаточно регулярном псевдоримановом многообразии лоренцевой сигнатуры действительно существуют Ф. к.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.

Д. Д. Соколов.

ФЕРМИ — ДИРАКА СТАТИСТИКА, статистика Ферми,— квантовая статистика, применимая к системам тождественных частиц с полуцелым спином ($^1/_2$, $^3/_2$, $^5/_2$, ... в единицах $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ эрг·сек). Предложена Э. Ферми (E. Fermi, 1926), ее квантовомеханич. смысл выяснен П. Дираком (P. Dirac, 1926). Согласно Ф.— Д. с. в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы (принцип Паули). Для системы частиц, подчиняющихся Ф.— Д. с., квантовомеханич. состояния описываются волновыми функциями, антисимметричными относительно перестановок частиц (т. е. их координат и спинов), а для *Бозе — Эйнштейна статистики* она симметрична.

Квантовое состояние идеального газа определяется заданием совокупности чисел заполнения уровней системы в пространстве импульсов p и спинов σ $\{n_{p\sigma}\}$, где каждое $n_{p\sigma}$ указывает число частиц с импульсом p и спином σ. В случае Ф.—Д. с. $n_{p\sigma}$ может быть равным нулю или единице.

Газ является системой из очень большого числа частиц, поэтому его квантовые уровни расположены очень плотно и стремятся к непрерывному спектру при стремлении объема к бесконечности. Уровни энергии удобно сгруппировать по малым ячейкам, содержащим G_i уровней в ячейке. Каждой ячейке соответствует средняя энергия ε_i, а число G_i предполагается очень большим. Квантовомеханич. состояние системы определяется набором $\{N_i\}$, где N_i — число частиц в ячейке, т. е. сумма $n_{p\sigma}$ по уровням ячейки. Число различных распределений частиц по ячейкам (т. е. ста-

тистич. вес состояния идеального газа Ферми — Дирака) равно

$$W\{N_i\} = \prod_i \frac{G_i!}{N_i!\,(G_i - N_i)!} \qquad (1)$$

и определяет вероятность распределения частиц по ячейкам, к-рые характеризуются числами заполнения $N_1, N_2, \ldots$ Статистич. вес вычислен с помощью комбинаторного анализа с учетом неразличимости частиц и того, что в каждом состоянии не может быть более одной частицы.

Наиболее вероятное распределение частиц по квантовым состояниям, соответствующее заданной энергии E и числу частиц N

$$E = \sum_i \varepsilon_i N_i, \quad N = \sum_i N_i, \qquad (2)$$

находится из экстремума статистич. веса (1) при дополнительных условиях (2). Соответствующие средние числа заполнения равны

$$\bar{n}_i = \frac{\bar{N}_i}{G_i} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}, \qquad (3)$$

где μ — химич. потенциал, $\beta = 1/kT$, k — постоянная Больцмана (универсальная постоянная $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ *эрг/град*), T — абсолютная температура. Величины β и μ находятся из условий (2).

Энтропия идеального газа Ферми определяется логарифмом статистич. веса (1) для наиболее вероятного распределения (3)

$$S = k \ln W\{\bar{n}_i\} = -k \sum_i G_i \{\bar{n}_i \ln n_i + (1 - \bar{n}_i) \ln (1 - \bar{n}_i)\},$$

где суммирование ведется по всем ячейкам. С помощью энтропии можно вычислить свободную энергию и другие термодинамич. функции.

В случае неидеального газа Ферми вычисление термодинамич. функций является сложной проблемой и не сводится к простой задаче комбинаторного анализа. Их вычисление основано на методе Гиббса с учетом Ф.— Д. с. Если известен оператор Гамильтона H системы, то свободная энергия равна

$$F = -kT \ln \mathrm{Sp} \exp\left\{-\frac{H}{kT}\right\},$$

где операция шпура берется по состояниям, удовлетворяющим требованиям Ф.— Д. с., т. е. по антисимметрическим волновым функциям. Этого можно достигнуть, если для H использовать представление, в к-ром его действие определено в пространстве волновых функций и чисел заполнения, т. е. перейти к представлению вторичного квантования.

Лит. см. при ст. *Бозе — Эйнштейна статистика.*

Д. Н. Зубарев.

ФЕРРАРИ МЕТОД — метод сведения решения уравнения 4-й степени к решению одного кубического и двух квадратных уравнений; найден Л. Феррари (L. Ferrari, опубл. 1545).

Ф. м. для уравнения

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$$

состоит в следующем. При помощи подстановки $y = x - \frac{a}{4}$ данное уравнение приводится к уравнению

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \qquad (1)$$

не содержащему члена с x^3. Вводя вспомогательный параметр α, левую часть уравнения (1) можно преобразовать по формуле

$$x^4 + px^2 + qx + r = \left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - \left[2\alpha x^2 - qx + \left(\alpha^2 + p\alpha + \frac{p^2}{4} - r\right)\right]. \qquad (2)$$

Затем подбирается значение α так, чтобы выражение в квадратных скобках было полным квадратом. Для этого нужно, чтобы дискриминант квадратного трехчлена был равен нулю. Это дает для α *кубическое уравнение*

$$q^2-4\cdot 2\alpha\left(\alpha^2+p\alpha+\frac{p^2}{4}-r\right)=0.$$

Пусть α_0 — один из корней этого уравнения. При $\alpha=\alpha_0$ многочлен в квадратных скобках в (2) имеет один двукратный корень

$$x_0=\frac{q}{4\alpha_0},$$

что приводит к уравнению

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha_0\right)^2-2\alpha_0\,(x-x_0)^2=0.$$

Это уравнение 4-й степени распадается на два квадратных уравнения. Корни этих уравнений и служат корнями уравнения (1).

Лит.: [1] К у р о ш А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975.

И. В. Проскуряков.

ФИБОНАЧЧИ МЕТОД — разновидность одномерного поиска экстремума функции путем последовательного сужения интервала неопределенности. Единственное ограничение, налагаемое на исследуемую функцию

$$f(x)\,(x\in(a_0,\ b_0)\subset\mathbb{R}^1),$$

— требование строгой унимодальности на заданном интервале.

При последовательном сужении значения $f(x)$ вычисляются (или замеряются) в заранее ограниченном числе n пробных точек. В результате получается последовательность сужающихся интервалов неопределенности, содержащих искомый экстремум:

$$(a_0,\ b_0)\supset(a_1,\ b_1)\supset\ldots\supset(a_n,\ b_n).$$

Чтобы сузить интервал неопределенности для произвольной строго унимодальной функции, нужно знать не менее двух ее пробных значений. В Ф.м. внутри каждого текущего интервала неопределенности $(a_i,\ b_i)$ подбираются ровно две пробные точки симметрично от середины интервала. Далее, от одной из пробных точек отбрасывается конец интервала с наихудшими значениями $f(x)$. Получается $(a_{i+1},\ b_{i+1})$, где в дополнение к оставшейся старой пробной точке симметрично строится новая. Отсюда для длин интервалов

$$\Delta_i=b_i-a_i$$

следует рекуррентное уравнение

$$\Delta_i=\Delta_{i+1}+\Delta_{i+2}.$$

(Помимо прочего выше предполагалось, что выполнено условие перекрывания $\Delta_1<{}^2/_3\cdot\Delta_0$.)

Решение уравнения при условии $\Delta_{n+1}=\Delta_{n+2}$ дает

$$\Delta_i=\frac{F_{n+3-i}}{F_{n+2}}\Delta_0,\ \ i=2,\ \ldots,\ n,$$

где $F_{(\cdot)}$ — *Фибоначчи числа*.

Точка экстремума $x_{\text{opt}}\approx(a_n+b_n)/2$.

В простейшем варианте Ф. м. (когда предполагается, что пробные точки и пробные значения $f(x)$ определяются абсолютно точно), чтобы сузить исходный интервал неопределенности с Δ до ε, надо взять число n пробных точек из неравенства $2\Delta/\varepsilon\leqslant F_{n+2}$. С учетом поправок на точность определения значений функции вышеприведенная оценка несколько усложняется.

Существует предел

$$\tau=\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0{,}618033989\ldots$$

Это дает основание ввести метод золотого сечения — такой вариант Ф.м., где $\forall i\ \Delta_{i+1} = \tau\Delta_i$, т. е. пробные точки осуществляют золотое сечение текущего интервала. Преимущество последнего метода заключается в том, что число пробных точек заранее не планируется.

Разработаны модификации Ф. м. для нефинитных функций, для сокращения вычислений при равенстве $f(x)$ в двух пробных точках, для повышения устойчивости счета и др.

Ф. м. значительно превосходит по эффективности дихотомию (см. *Половинного деления метод*). Однако для оптимизации дифференцируемых функций Ф. м. малоцелесообразен (см. *Спуска метод*, *Максимизация и минимизация функций*).

Лит.: [1] Kiefer J., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 4, p. 502—06; [2] Уайлд Д. - Дж., Методы поиска экстремума, пер. с англ., М., 1967; [3] Васильев Ф. П., Численные методы решения экстремальных задач, М., 1980.

Ю. П. Иванилов, В. В. Охрименко.

ФИБОНАЧЧИ ЧИСЛА — элементы последовательности $u_1, u_2, \ldots$, задаваемой начальными значениями $u_1 = u_2 = 1$ и рекуррентным соотношением $u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$. Первые 14 Ф.ч. были впервые в 1228 приведены в рукописи Леонарда Пизанского (Фибоначчи, Fibonacci).

Действия, выполняемые над индексами Ф. ч., могут быть сведены к действиям над самими Ф. ч. В основе этого лежит «формула сложения»:

$$u_{m+n} = u_{m-1}u_n + u_m u_{n+1}.$$

Ее непосредственными следствиями являются:

$$u_{2n} = u_n\,(u_{n-1} + u_{n+1}),\quad u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3$$

и т. д. Общая «формула умножения» более сложна:

$$u_{mn} = \sum_{k=1}^{m} C_m^k u_k u_n^k u_{n-1}^{m-k}.$$

Элементарные свойства делимости Ф.ч. в основном определяются следующими фактами: $u_{(m,\ n)} = (u_m,\ u_n)$; если p — простое вида $5t+1$, то на p делится u_{p-1}, а если вида $5t+2$, то u_{p+1}; если u_n делится на простое q и $p \neq q$, то u_{np}/u_n не делится на q; если u_n делится на простое $p \neq 2$, то u_{np}/u_n делится на p, но не делится на p^2; если u_n делится на 4, то u_{2n}/u_n делится на 2, но не делится на 4; если u_n делится на 2, но не делится на 4, то u_{2n}/u_n делится на 4, но не делится на 8. Вместе с тем нек-рые связанные с Ф.ч. теоретико-числовые проблемы весьма трудны. Напр., не решен (1984) вопрос о конечности множества простых Ф.ч.

Важную роль в теории Ф.ч. играет число $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, являющееся корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Так, имеет место формула Бине:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(\alpha^n - (-\alpha)^{-n});$$

из нее следует, что u_n есть ближайшее к $\frac{1}{\sqrt{5}}\,\alpha^n$ целое число, и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha.$$

Ф. ч. занимают особое положение в теории непрерывных дробей. В разложении дроби u_{n+1}/u_n в непрерывную все неполные частные суть единицы и их число не меньше, чем число неполных частных разложения любой другой дроби со знаменателем, меньшим u_{n+1}. В известном смысле число α описывается своими подходящими дробями u_{n+1}/u_n «наихудшим» образом.

Лит.: [1] Boncompagni B. (ed.), Illiber Abbaci di Leonardo Pisano..., Roma, 1857; [2] Воробьев Н. Н., Числа Фибоначчи, 5 изд., М., 1984; [3] Hoggatt W., Fibonacci and Lucas numbers, Boston, 1969; [4] Alfred U., An introduction to Fibonacci discovery, San Jose (Calif.), 1965; «Fibonacci Quart.», 1963—.

Н. Н. Воробьев.

ФИГУР МНОГООБРАЗИЕ — многообразие, образующими элементами к-рых являются различные фигуры *рассматриваемого однородного пространства*. С аналитич. точки зрения наиболее простыми фигурами являются алгебраич. линии и поверхности. Поэтому в основном исследовались многообразия (как правило, в евклидовом, аффинном и в проективном пространствах), образующими элементами к-рых являются точки, прямые линии, плоскости, окружности, сферы, коники, квадрики и их многомерные аналоги.

m-мерное многообразие $\mathfrak{M}_m$ фигур F ранга N определяется замкнутой системой дифференциальных уравнений

$$\Omega^a = \lambda_i^a \Omega^i,\ \Delta\lambda_i^a \wedge \Omega^i = 0,\ i,\ j = 1,\ \ldots,\ m;$$
$$a,\ b = m+1,\ \ldots,\ N, \qquad (1)$$

где Ω^J $(J = 1, \ldots, N)$ — левые части уравнений стационарности фигуры F и $\Delta\lambda_i^a$ — формы Пфаффа, возникающие при замыкании пфаффовых уравнений системы (1), причем $\Omega^1 \wedge \Omega^2 \wedge \ldots \wedge \Omega^m \neq 0$. Осуществляя последовательные продолжения системы (1), получают последовательность фундаментальных объектов многообразия $\mathfrak{M}_m$, выделяют из нее основной объект многообразия и осуществляют инвариантное построение дифференциальной геометрии многообразия.

Дифференциальная геометрия линейчатых многообразий разработана достаточно глубоко. Простейшими многообразиями с нелинейными образующими элементами являются многообразия коник. Со всяким одномерным многообразием C_1^2 коник в трехмерном пространстве (евклидовом, аффинном или проективном) ассоциируется торс T, являющийся огибающей поверхностью плоскостей коник. Многообразие C_1^2 наз. фокальным или нефокальным в зависимости от того, касается коники образующая торса T или нет. Двумерное многообразие (конгруэнция) коник в трехмерном пространстве имеет в общем случае шесть фокальных поверхностей и шесть фокальных семейств. Все коники конгруэнции касаются этих поверхностей. Конгруэнции коник с неопределенными фокальными семействами (всякие две смежные коники к-рой пересекаются с точностью до 2-го порядка малости) характеризуются принадлежностью всех коник конгруэнции одной квадрике. Конгруэнции коник, плоскости к-рых образуют однопараметрич. семейство, имеют одно счетверенное фокальное семейство, к-рому соответствуют четыре фокальные точки пересечения двух смежных коник, принадлежащих одной *плоскости*. Две другие *фокальные точки* являются точками пересечения коники с характеристикой ее плоскости.

Конгруэнция K_2 квадрик в P_3 имеет в общем случае восемь фокальных поверхностей, к-рых касаются все квадрики конгруэнции. Точка квадрики $F=0$ конгруэнции K_2, определяемая вдоль любого направления системой уравнений $F=0$, $dF=0$, ..., $d^mF=0$, наз. ее фокальной точкой порядка m. Фокальная точка 2-го порядка является четырехкратной точкой 1-го порядка; фокальная точка 3-го порядка является фокальной точкой любого порядка $m>3$. На каждой конике C трехмерного многообразия (комплекса) коник существуют в общем случае шесть инвариантных точек (t-фокальные точки коники). Для каждой коники C комплекса, плоскости к-рого образуют двупараметрич. семейство, однозначно определяется коника C^*, проходящая через характеристич. точку плоскости коники C и четыре точки пересечения коники со смежной коникой той же плоскости. Геометрич. свойства многопараметрич. семейств коник существенно зависят от числа параметров, характеризующих плоскости коник таких семейств.

Непосредственным обобщением коники в P_3 является квадратичный элемент — $(n-2)$-мерная невырожденная квадрика в $P_n\,(n>3)$. Многообразием $(h,\ m,\ n)^2$ в пространстве P_n наз. m-параметрич. семейство квадратичных элементов, гиперплоскости к-рых образуют h-параметрич. семейство. Многообразия $(h,\ h,\ 3)^2$, $h=1,\ 2,\ 3$, являются наиболее общими однопараметрич. семействами, конгруэнциями и комплексами коник в P_3. С каждым локальным квадратичным элементом многообразия $(h,\ h,\ n)^2$ при $h<n$ ассоциируется $(n-h-1)$-мерное характеристич. подпространство и $(h-1)$-мерное полярное подпространство. Рангом многообразия $(h,\ h,\ n)^2$ наз. число R, равное $n-h-1-\nu$, где ν — размерность подпространства, по к-рому характеристич. подпространство пересекается с его полярным пространством.

Дифференциальную геометрию многообразия $(n,\ n,\ n)^2$ можно рассматривать как геометрию нек-рой регулярной гиперповерхности $(n+1)$-мерного тангенциального центропроективного пространства P_0^{n+1}, в к-ром исходное n-мерное пространство играет роль неподвижной точки.

Квадрика размерности $p\leqslant n-2$ пространства P_n всегда лежит в $(p+1)$-мерном подпространстве. Алгебраич. поверхности порядка $k>2$ этим свойством в общем случае не обладают. При исследовании многообразий алгебраич. поверхностей оказалось целесообразным выделить семейства поверхностей таких, к-рые лежат в плоскостях на единицу большей размерности. Невырожденная $(n-2)$-мерная алгебраич. поверхность порядка k, принадлежащая гиперплоскости P_{n-1} пространства P_n, наз. плоским алгебраич. элементом порядка k. Многообразием $(h,\ m,\ n)^k$ наз. m-мерное многообразие плоских алгебраич. элементов порядка k, гиперплоскости к-рых образуют h-параметрич. семейство. Фундаментальный объект 1-го порядка является основным объектом многообразия $(h,\ m,\ n)^k$.

В применениях геометрии к гидромеханике, теории поля и дифференциальным уравнениям используются многообразия линий и поверхностей, не являющихся в общем случае алгебраическими. Изучение таких многообразий представляет и самостоятельный интерес для геометрии. Криволинейной конгруэнцией в трехмерном пространстве наз. двупараметрич. семейство Γ_t кривых $x=x(t,\ u,\ v)$ такое, что через каждую точку пространства проходит в общем случае единственная кривая семейства. При фиксированных u и v выделяется кривая C_t семейства Γ_t; при фиксированном t и переменных $u,\ v$ выделяется поверхность s_{uv}, называемая трансверсальной поверхностью конгруэнции Γ_t. Точки кривой C_t, в к-рых $(xx_tx_u)=0$, наз. фокальными точками. Совокупность фокальных точек кривых C_t конгруэнции Γ_t образует фокальную поверхность конгруэнции. Поверхность $v=v(u)$ конгруэнции Γ_t, на к-рой кривые C_t имеют огибающую, наз. главной поверхностью конгруэнции Γ_t.

Лит.: [1] Малаховский В. С., в кн.: Итоги науки и техники. Проблемы геометрии, т. 12, М., 1981, с. 31—60.

В. С. Малаховский.

ФИГУРА — подмножество F однородного пространства E_n с фундаментальной группой G, к-рое можно включить в систему $R(F)$ подмножеств этого пространства, изоморфную нек-рому пространству геометрич. объекта Ф (см. *Геометрических объектов теория*). Множество $R(F)$ наз. пространством фигуры F. Компоненты геометрич. объекта Ф наз. координатами соответствующей Ф. F. Каждой Ф. F пространства E_n соответствует класс $\{\Phi\}$ подобных геометрич. объектов. Ранг, жанр, характеристика и тип геометрич. объекта Ф класса $\{\Phi\}$ наз. рангом,

жанром, характеристикой и типом фигуры F (т. н. арифметические инварианты фигуры). Напр., окружность в трехмерном евклидовом пространстве является фигурой ранга 6, жанра 1, характеристики 1, типа 1; точка в трехмерном проективном пространстве — фигурой ранга 3, жанра 0, характеристики 2, типа 1. Вполне интегрируемая система уравнений Пфаффа, определяющая геометрический объект Ф, наз. системой уравнений стационарности фигуры F.

Пусть F и $\overline{F}$ — две Ф. пространства E_n. Если существует отображение пространства $R(F)$ на пространство $R(\overline{F})$, при к-ром любой геометрич. объект, соответствующий Ф. $\overline{F}$, охватывается любым геометрич. объектом, соответствующим Ф. F, то говорят, что Ф. F охватывает или индуцирует Ф. $\overline{F}$ (Ф. $\overline{F}$ охватывается или индуцируется Ф. F). Ф. F ранга N наз. простой, если она не охватывает никакой другой Ф. меньшего ранга. Ф. F наз. индуцирующей фигурой индекса $\overline{N} < N$, если существует охватываемая ею Ф. ранга $\overline{N}$, причем ранг N' любой другой Ф. F', охватываемой Ф. F, не превосходит $\overline{N}$. Напр., точка, p-мерная плоскость, гиперквадрика в n-мерном проективном пространстве являются простыми Ф., а гиперквадрика в n-мерном аффинном пространстве и d-мерная ($d \leqslant n-2$) квадрика в n-мерном проективном пространстве являются индуцирующими Ф. соответственно индексов n и $(d+2)$ $(n-d-1)$.

Парой фигур $F=(F_1, F_2)$ наз. упорядоченная совокупность двух Ф. Коэффициентом инцидентности пары Ф. наз. число $k=N_1+N_2-N$, где N_i $(i=1,2)$ ранг фигуры F_i, а N — ранг системы форм $\Omega^{J_1}_1, \Omega^{J_2}_2, J_i=1, 2, \ldots, N_i$, являющихся левыми частями уравнений стационарности Ф. F_1 и F_2. Если $k=0$, то пара $F=(F_1, F_2)$ наз. неинцидентной.

Лит.: [1] Лаптев Г. Ф., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1953, т. 2, с. 275—383; [2] Малаховский В. С., «Тр. Геометр. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР», 1969, т. 2, с. 179—206; [3] его же, в сб.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 113—58.

В. С. Малаховский.

ФИГУРНОЕ ЧИСЛО — см. *Арифметический ряд.*

ФИДУЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение P^*_x параметра θ семейства распределений $\mathcal{P}=\{P_\theta,\ \theta \in \Theta\}$ наблюдения x. Введено Р. Фишером [1] для числовых θ и x в случае, когда функция распределения $F(x \mid \theta)$ наблюдения x убывает с ростом θ так, что $F^*(\theta \mid x) = 1 - F(x \mid \theta)$, рассматриваемая как функция от θ при фиксированном x, обладает свойствами функции распределения (к такой ситуации часто приводит использование в качестве x достаточной статистики).

Ф. р. определено для инвариантных семейств распределений (см. [2]—(4]). Именно, пусть группа G преобразований g действует на множествах X и Θ. Семейство распределений наз. инвариантным, если gx имеет распределение $P_{g\theta}$, когда x имеет распределение P_θ. В этом случае рассматривают эквивариантные решающие правила $\delta\colon X \to D$ (такие, что $\delta(gx) = g\delta(x)$ для всех x и g) и инвариантные функции потерь $L_\theta(d)$ (такие, что $L_{g\theta}(gd) = L_\theta(d)$ для всех θ, d и g). Если действие группы G на множестве Θ транзитивно, то семейство $\mathcal{P}$ обладает определенным свойством однородности: для фиксированного значения параметра θ_0 и наблюдения x, имеющего распределение P_{θ_0}, распределение gx пробегает все семейство $\mathcal{P}$, когда g пробегает G. Пусть D — множество вероятностных мер на Θ (предполагаются заданными нек-рые σ-алгебры $\mathcal{B}(\Theta)$ и $\mathcal{B}(X)$, так что преобразования группы G измеримы). Пусть действие G на D задано соотноше-

нием $(g\alpha)(B)=\alpha(g^{-1}(B))$, $B\in\mathcal{B}(\Theta)$. Ф. р. описывается семейством $\mathcal{P}^*=\{P_x^*,\ x\in X\}$ вероятностных мер на Θ, минимизирующее риск $\int L_\theta(\delta(x))\,dP_\theta(x)$ в классе эквивариантных решающих правил для каждой инвариантной функции потерь, удовлетворяющей условию типа несмещенности

$$\int L_\theta(\alpha)\,d\beta(\theta)\geqslant\int L_\theta(\beta)\,d\beta(\theta).$$

Если G действует на X транзитивно, то семейство Ф. р. однозначно выделяется требованиями инвариантности $\mathcal{P}^*=\{P_x^*:\ x\in X\}$ и совпадения доверительных и фидуциальных вероятностей $P_\theta\{\theta\in S(x)\}=P_x^*\{\theta\in S(x)\}$ для инвариантных семейств $S(x)$ (инвариантность $S(x)$ означает, что из $\theta\in S(x)$, $g\in G$ следует $g\theta\in S(gx)$).

Лит.: [1] Fisher R. A., «Proc. Camb. Philos. Soc.», 1930, v. 26, p. 528—35; [2] Fraser D. A. S., «Biometrika», 1961, v. 48, p. 261—80; [3] Климов Г. П., «Докл. АН СССР», 1970, т. 191, № 4, 763—65; [4] его же, Инвариантные выводы в статистике, М., 1973.

А. Д. Кузьмин.

ФИЛЬТР, дуальный идеал,— непустое подмножество F частично упорядоченного множества P, удовлетворяющее условиям: а) если $a,\ b\in F$ и нижняя грань $\inf\{a,\ b\}$ существует, то $\inf\{a,\ b\}\in F$; б) если $a\in F$ и $a\leqslant b$, то $b\in F$. Понятие Ф. является двойственным к понятию *идеала* частично упорядоченного множества.

Фильтром над непустым множеством E (или в множестве E) наз. собственный Ф. частично упорядоченного (относительно включения) множества подмножеств множества E, т. е. любая непустая совокупность F подмножеств множества E, удовлетворяющая условиям: если $A,\ B\in F$, то $A\cap B\in F$; если $A\in F$ и $A\subseteq B$, то $B\in F$; пустое подмножество не принадлежит F.

Базой фильтра наз. система подмножеств множества E, удовлетворяющая двум условиям: 1) пустое множество ей не принадлежит; 2) пересечение двух принадлежащих ей подмножеств содержит некрое третье принадлежащее ей подмножество. Каждый Ф. полностью определяется любой из своих баз. Система всех подмножеств множества E, каждое из к-рых содержит какой-нибудь элемент базы Ф., есть Ф. Он наз. натянутым на эту базу.

Множество всех Ф. над данным множеством частично упорядочено по включению. Максимальный элемент его наз. ультрафильтром (ультрафильтром наз. также максимальный собственный Ф. в любой булевой алгебре).

Примеры Ф. 1) Пусть N_k — подмножество натуральных чисел, кратных натуральному числу k; система $\{N_k:\ k=1,\ 2,\ \ldots\}$ есть база Ф.; натянутый на эту базу Ф. состоит из подмножеств, каждое из к-рых содержит нек-рое подмножество N_k. 2) Совокупность всех подмножеств, содержащих любое непустое фиксированное подмножество $A\in E$, является Ф. над E, называемым главным фильтром. Все Ф. над конечными множествами — главные. 3) Если E — бесконечное множество мощности α и F — совокупность всех подмножеств множества E, дополнения к-рых имеют мощность меньше α, то F является Ф. (он наз. фильтром Фреше). Фильтр Фреше — пример неглавного Ф. 4) Система подмножеств, содержащих нек-рую фиксированную точку множества, тоже есть Ф., более того, это — ультрафильтр. 5) Пусть на множестве E задана топология, тогда окрестности любой точки $x\in E$ образуют Ф.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968; [2] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970.

В. И. Малыхин, Т. С. Фофанова.

ФИЛЬТРОВАННАЯ АЛГЕБРА — алгебра S, в к-рой выделены подпространства S_α, индексированные элементами линейно упорядоченной группы A (чаще всего A — аддитивная группа целых чисел $\mathbb{Z}$), таким образом, что $S_\alpha \subseteq S_\beta$ при $\alpha < \beta$ и $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha+\beta}$ (возрастающая фильтрация). Иногда рассматривают случай, когда $S_\alpha \supseteq S_\beta$ при $\alpha < \beta$ (убывающая фильтрация), но он сводится к предыдущему путем обращения порядка в группе A. С каждой Ф. а. S ассоциируется *градуированная алгебра*

$$\operatorname{gr} S = \bigoplus_\alpha \overline{S}_\alpha,$$

где $\overline{S}_\alpha = S_\alpha / \sum_{\beta<\alpha} S_\beta$ (если $A = \mathbb{Z}$, то $\overline{S}_\alpha = S_\alpha / S_{\alpha-1}$), а произведение элементов $\bar{x} \in \overline{S}_\alpha$ и $\bar{y} \in \overline{S}_\beta$ определяется по формуле $\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$, где x, y — представители смежных классов $\bar{x}$, $\bar{y}$, а $\overline{xy}$ — смежный класс по $\sum_{\gamma<\alpha+\beta} S_\gamma$, порожденный элементом $xy \in S_{\alpha+\beta}$. Если в алгебре S выполняется какое-либо полилинейное тождество (напр., коммутативность, ассоциативность или тождество Якоби), то в алгебре $\operatorname{gr} S$ также выполняется это тождество.

Примеры. 1) Пусть S — *Клиффорда алгебра* и S_n, $n \in \mathbb{Z}$, — совокупность элементов, представимых в виде (некоммутативных) многочленов степени $\leqslant n$ от образующих. Получается возрастающая $\mathbb{Z}$-фильтрация алгебры S, в к-рой $S_n = 0$ при $n < 0$. Ассоциированной градуированной алгеброй будет *внешняя алгебра* с тем же числом образующих.

2) В *универсальной обертывающей алгебре* алгебры Ли так же, как в предыдущем примере, определяется возрастающая $\mathbb{Z}$-фильтрация. Согласно *Биркгофа — Витта теореме*, ассоциированная градуированная алгебра есть алгебра многочленов. *Э. Б. Винберг.*

ФИЛЬТРОВАННЫЙ МОДУЛЬ — модуль M, снабженный возрастающей или убывающей фильтрацией, т. е. возрастающим или убывающим семейством подмодулей $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Фильтрация наз. исчерпывающей, если $M = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} M_n$, и отделимой, если $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} M_n = 0$. Если N — подмодуль Ф. м. M, то на N и M/N естественным образом определяются фильтрации. Если $M = \sum_{n \in \mathbb{Z}} M_{(n)}$ — *градуированный модуль*, то подмодули $M_n = \sum_{i \geqslant n} M_{(i)}$ определяют в M исчерпывающую и отделимую убывающую фильтрацию. Обратно, с любым Ф. м. M, снабженным, напр., убывающей фильтрацией, связывается градуированный модуль

$$\operatorname{gr} M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{gr}_n M,$$

где $\operatorname{gr}_n M = M_n / M_{n+1}$. Фильтрация $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ определяет на модуле M топологию, в к-рой подмодули M_n составляют фундаментальную систему окрестностей нуля. Эта топология отделима тогда и только тогда, когда фильтрация отделима, и дискретна тогда и только тогда, когда $M_n = 0$ для нек-рого n.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

А. Л. Онищик.

ФИНАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ, терминальный объект, категории — понятие, формализующее свойства одноточечного множества. Объект T категории $\mathfrak{K}$ наз. финальным, если для любого объекта X из $\mathfrak{K}$ множество $H(X, T)$ состоит из одного морфизма. Ф. о. наз. также правым нулем категории $\mathfrak{K}$. Дуальным образом определяется левый нуль, или инициальный объект, категории.

В категории множеств Ф. о. являются одноточечные множества и только они. В любой категории с нулевыми объектами Ф. о. являются нулевые объекты. Не-

стандартные примеры Ф. о. возникают в различных категориях диаграмм, где понятие Ф. о. по существу эквивалентно понятию предела диаграммы. Напр., пусть $\alpha, \beta : A \to B$ и пусть $\mathrm{Eq}_l(\alpha, \beta)$ — категория левых уравнителей пары (α, β); другими словами, объекты $\mathrm{Eq}_l(\alpha, \beta)$ — это морфизмы $X \xrightarrow{\mu} A$, для к-рых $\mu\alpha = \mu\beta$, а морфизмы из $\mathrm{Eq}_l(\alpha, \beta)$ — это такие морфизмы $\gamma : (X, \mu) \to (Y, \sigma)$, для к-рых $\gamma\sigma = \mu$. Ф. о. категории $\mathrm{Eq}_l(\alpha, \beta)$ — это *ядро* пары морфизмов (α, β).

М. Ш. Цаленко.

ФИНИТИЗМ — идущая от Д. Гильберта (D. Hilbert) методологич. точка зрения на то, какие объекты и способы рассуждений в математике следует считать абсолютно надежными. Основные требования Ф. таковы:

1) объекты рассуждений — *конструктивные объекты*, напр. цифровые записи натуральных чисел, формулы в символич. языке и их конечные совокупности;

2) применяемые операции однозначно определены и принципиально выполнимы (вычислимы);

3) никогда не рассматривается множество всех предметов x какой-либо бесконечной совокупности; всеобщее суждение $A(x)$ есть высказывание о произвольном объекте x, к-рое подтверждается в каждом конкретном случае;

4) утверждение о существовании объекта x, обладающего свойством $A(x)$, означает либо предъявление конкретного такого объекта, либо указание способа его построения.

Ограничения Ф. на логику близки к интуиционистским, хотя в целом финитная точка зрения является более жесткой. Рассуждение, удовлетворяющее требованиям 1) — 4), не выводит за рамки интуиционистской арифметики (см. *Интуиционизм*).

После проведения формализации (см. *Аксиоматический метод*) содержательные математич. теории становятся конструктивными объектами (совокупностями конструктивных объектов). В рамках подхода Д. Гильберта и его последователей Ф. нужен для изучения таких формализованных теорий; надежно установленными считаются только те свойства теорий, к-рые доказаны финитными методами. *Гёделя теорема о неполноте* показала принципиальную недостаточность финитных средств для подобного обоснования математики. Это привело к необходимости расширить применяемые в теории доказательств средства за рамки Ф.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [3] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., 2 изд., М., 1982.

С. Н. Артемов.

ФИНИТНАЯ ЗАДАЧА — см. *Финитная общезначимость*.

ФИНИТНАЯ ОБЩЕЗНАЧИМОСТЬ — одна из неклассич. интерпретаций логич. формул, предложенная с целью уточнения выдвинутой А. Н. Колмогоровым программы истолкования интуиционистской логики высказываний как исчисления задач.

А. Н. Колмогоров высказал [1] идею, что наряду с традиционной логикой, к-рая систематизирует схемы доказательств теоретич. истин, возможна также логика, систематизирующая схемы решения задач. Не уточняя понятия задачи, можно, однако, рассматривать нек-рые конкретные задачи, напр.:

1) найти четыре натуральных числа x, y, z, n, для к-рых выполняются соотношения: $x^n + y^n = z^n$, $n > 2$;

2) доказать ложность *Ферма теоремы*;

3) в предположении, что число π выражается в виде $\pi = m/n$, где m, n — целые числа, найти аналогичное выражение для числа e.

Можно также естественным образом определить следующие операции над задачами. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — нек-рые

задачи, то $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$ означает задачу: «решить обе задачи $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$»; $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ означает «решить хотя бы одну из задач $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$»; $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ означает задачу: «предположив, что дано решение задачи $\mathfrak{A}$, найти решение задачи $\mathfrak{B}$ (т. е. свести задачу $\mathfrak{A}$ к задаче $\mathfrak{B}$)»; $\neg\mathfrak{A}$ означает задачу: «предположив, что дано решение задачи $\mathfrak{A}$, придти к противоречию».

Если в пропозициональную формулу, построенную из переменных a, b, c, ... с помощью логич. связок $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, вместо переменных подставить какие-либо задачи, то в соответствии с указанными операциями получится нек-рая задача. Формула наз. о б щ е з н а ч и м о й, если существует общий метод, позволяющий решить любую задачу, полученную таким способом из данной формулы. Все формулы, выводимые в интуиционистском исчислении высказываний, оказываются общезначимыми в этом смысле. В то же время формула $A\vee\neg A$, выражающая классич. закон исключенного третьего, не может быть общезначимой, т. к. ее общезначимость означала бы возможность общего метода, позволяющего для любой задачи либо получить ее решение, либо привести к противоречию предположение о существовании такого решения.

Описанная интерпретация логич. формул не является достаточно строгой и требует уточнения таких понятий, как «задача», «решение задачи», «общий метод». Одним из таких уточнений является понятие Ф. о., предложенное Ю. Т. Медведевым [2].

Ф и н и т н о й з а д а ч е й наз. всякая задача, решение к-рой является элементом нек-рой заранее известной непустой конечной совокупности F допустимых возможностей; множество решений задачи может быть пустым. Таким образом, финитная задача может рассматриваться как упорядоченная пара $\mathfrak{A}=\langle F, X\rangle$, где F — конечное множество допустимых возможностей для $\mathfrak{A}$, а X — множество решений ($X\subseteq F$). Если $\mathfrak{A}=\langle F, X\rangle$, пишут $F=\varphi(\mathfrak{A})$, $X=\chi(\mathfrak{A})$. Пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — произвольные финитные задачи, причем

$$\varphi(\mathfrak{A}_i)=F_i,\ \chi(\mathfrak{A}_i)=X_i,\ i=1,\ 2.$$

Следующим образом определяются операции над финитными задачами. Для конъюнкции $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\&\mathfrak{A}_2$ полагают

$$\varphi(\mathfrak{A})=F_1\times F_2,\ \chi(\mathfrak{A})=X_1\times X_2,$$

где через $A\times B$ обозначено декартово произведение множеств A и B, т. е. множество всех упорядоченных пар $\langle a, b\rangle$, $a\in A$, $b\in B$. Для дизъюнкции $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2$ полагают

$$\varphi(\mathfrak{A})=F_1\mid F_2,\ \chi(\mathfrak{A})=X_1\mid X_2,$$

где через $A\mid B$ обозначено упорядоченное объединение множеств A и B, т. е. теоретико-множественное объединение множеств $A\times\{1\}$ и $B\times\{2\}$. Для импликации $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\supset\mathfrak{A}_2$ полагают $\varphi(\mathfrak{A})=F_2^{F_1}$ — множество всех отображений F_1 в F_2, $\chi(\mathfrak{A})$ — множество таких f из $F_2^{F_1}$, что $f(X_1)\subseteq X_2$. Отрицание $\neg\mathfrak{A}$ задачи $\mathfrak{A}$ определяется как задача $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}_0$, где $\mathfrak{A}_0$ — фиксированная задача с пустым множеством решений (все дальнейшие построения не зависят от выбора конкретной такой задачи).

Подставив в пропозициональную формулу $A(p_1, \ldots, p_n)$ какие-либо финитные задачи $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ вместо переменных $p_1, \ldots, p_n$, получают составную задачу $\mathfrak{A}=A(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$. При этом $\varphi(\mathfrak{A})$ определяется лишь множествами $F_1=\varphi(\mathfrak{A}_1), \ldots, F_n=\varphi(\mathfrak{A}_n)$ и не зависит от $X_1=\chi(\mathfrak{A}_1), \ldots, X_n=\chi(\mathfrak{A}_n)$. При фиксированных множествах $F_1, \ldots, F_n$ выбору разных множеств $X_i\subseteq F_i$, $i=1, \ldots, n$, будут отвечать разные задачи $A(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ с одним и тем же множеством F и, вообще говоря, разными множествами X. Если существует элемент из F, принадлежащий всем таким X, то говорят, что

формула A разрешима на системе множеств $F_1, \ldots, F_n$. Если формула $A(p_1, \ldots, p_n)$ разрешима на любой системе непустых конечных множеств $F_1, \ldots, F_n$, то она наз. всегда разрешимой или финитно общезначимой. Это определение имеет прозрачный смысл: Ф. о. формулы A означает, что можно решить любую задачу $A(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$, зная лишь множества допустимых возможностей задач $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$.

Множество ML всех финитно общезначимых пропозициональных формул замкнуто относительно выводимости в интуиционистском исчислении высказываний и содержит все формулы, выводимые в этом исчислении. Тем самым ML является промежуточной (или суперинтуиционистской, суперконструктивной) логикой, наз. логикой Медведева. Эта логика содержит формулы, не выводимые в интуиционистском исчислении высказываний (такова, напр., формула $(\neg a \supset (b \vee c)) \supset ((\neg a \supset b) \vee (\neg a \supset c))$). Логика Медведева обладает свойством дизъюнктивности: если формула вида $A \vee B$ финитно общезначима, то по крайней мере одна из формул A или B финитно общезначима. Если пропозициональная формула не содержит какого-либо из логич. знаков $\neg$, $\vee$, $\supset$, то она финитно общезначима тогда и только тогда, когда выводима в интуиционистском исчислении высказываний. Все финитно общезначимые формулы выводимы в классич. исчислении высказываний; в то же время, напр., классически выводимая формула $a \vee \neg a$ не является финитно общезначимой. Получены характеризации логики Медведева в терминах алгебраич. моделей. Понятие Ф. о. различными способами может быть распространено на предикатные формулы.

Лит.: [1] Колмогоров А., «Math. Z.», 1932, Bd 35, S. 58—65; [2] Медведев Ю. Т., «Докл. АН СССР», 1962, т. 142, № 5, с. 1015—18; 1966, т. 169, № 1, с. 20—23.

В. Е. Плиско.

ФИНИТНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, определенная в нек-рой области пространства E^n и имеющая принадлежащий к этой области компактный носитель. Точнее, пусть функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена на области $\Omega \subset E^n$. Носителем f наз. замыкание множества точек $x \in \Omega$, для к-рых $f(x)$ отлично от нуля ($f(x) \neq 0$). Таким образом, можно еще сказать, что Ф. ф. в Ω есть такая определенная на Ω функция, что ее носитель Λ есть замкнутое ограниченное множество, отстоящее от границы Γ области Ω на расстоянии большем, чем $\delta > 0$, где δ достаточно мало.

Обычно рассматривают непрерывно дифференцируемые k раз Ф. ф., где k — заданное натуральное число. Еще чаще рассматривают бесконечно дифференцируемые Ф. ф. Функция

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-1/(|x|^2-1)}, & |x| < 1, \ x^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

может служить примером бесконечно дифференцируемой Ф. ф. в области Ω, содержащей в себе шар $|x| \leqslant 1$.

Множество всех бесконечно дифференцируемых Ф. ф. в области $\Omega \subset E^n$ обозначают D. Над D определяют линейные функционалы (*обобщенные функции*). При помощи функций $v \in D$ определяют *обобщенные решения* краевых задач.

В теоремах, посвященных задачам на нахождение обобщенных решений, часто важно знать, является ли пространство D плотным в нек-ром конкретно заданном пространстве функций. Известно, напр., что если граница Γ ограниченной области $\Omega \subset E^n$ достаточно гладкая, то D плотно в пространстве функций

$$\overset{0}{W}{}_p^r(\Omega) = \left\{ f : f \in W_p^r(\Omega), \ \frac{\partial^s f}{\partial n^s}\Big|_\Gamma = 0, \ s = 0, 1, \ldots, r-1 \right\},$$

$(1 \leqslant p < \infty)$, т. е. в пространстве функций класса $W_p^r(\Omega)$ Соболева, равных нулю на Γ вместе со своими

нормальными производными до порядка $r-1$ включительно ($r=1,2,\ldots$).

Лит.: [1] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979; [2] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962. *С. М. Никольский.*

ФИНИТНО АППРОКСИМИРУЕМАЯ ГРУППА — группа, аппроксимируемая конечными группами. Пусть G — группа, ρ — отношение (иначе говоря, предикат) между элементами и множествами элементов, определенное на G и всех ее гомоморфных образах (напр., бинарное отношение равенства элементов, бинарное отношение «элемент x входит в подгруппу y», бинарное отношение сопряженности элементов и т. п.). Пусть K — класс групп. Говорят, что группа G *аппроксимируется группами из K относительно ρ*, если для любых элементов и множеств элементов из G, не находящихся в отношении ρ, существует такой гомоморфизм группы G на группу из K, при к-ром образы этих элементов и множеств тоже не находятся в отношении ρ. Аппроксимируемость относительно равенства элементов наз. просто аппроксимируемостью. Группа тогда и только тогда аппроксимируется группами класса K, когда она вкладывается в декартово произведение групп из K. Финитная аппроксимируемость относительно ρ обозначается $\Phi A\rho$; в частности, если ρ пробегает предикаты равенства, сопряженности, вхождения в подгруппу, вхождения в конечно порожденную подгруппу и т. п., то получаются свойства (и классы) ФАР, ФАС, ФАВ, $\Phi A B_\omega$ и т. п. Из наличия этих свойств в группе вытекает разрешимость соответствующей алгоритмич. проблемы.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982. *Ю. И. Мерзляков.*

ФИНИТНО АППРОКСИМИРУЕМАЯ ПОЛУГРУППА, *residually finite semigroup*, — полугруппа, для любых двух различных элементов a и b к-рой существует такой ее гомоморфизм φ в конечную полугруппу S, что $\varphi(a)\neq\varphi(b)$. Свойство полугруппы S быть Ф. а. п. эквивалентно тому, что S — подпрямое произведение конечных полугрупп. Финитная аппроксимируемость является одним из важных условий конечности (см. *Полугруппа с условием конечности*); оно тесно связано с *алгоритмическими проблемами*: если S — конечно определенная Ф. а. п., то в ней алгоритмически разрешима проблема равенства слов.

Ф. а. п. будут свободные полугруппы, свободные коммутативные полугруппы, свободные n-ступенно нильпотентные полугруппы, свободные инверсные полугруппы (как алгебры с двумя операциями), полурешетки, конечно порожденные коммутативные полугруппы [1], конечно порожденные полугруппы матриц над нильпотентным или коммутативным кольцом, конечно порожденные n-ступенно нильпотентные в смысле Мальцева (см. *Нильпотентная полугруппа*) регулярные полугруппы [4], см. также *Финитно аппроксимируемая группа*.

Прямое произведение, свободное произведение, ординальная сумма (см. *Связка полугрупп*), 0-прямое объединение произвольного множества Ф. а. п. сами будут Ф. а. п. Другие конструкции, вообще говоря, не сохраняют финитную аппроксимируемость. Идеальное расширение Ф. а. п. S при помощи произвольной Ф. а. п. будет Ф. а. п., если, напр., S редуктивная, т. е. любые два различных элемента из S индуцируют различные левые и различные правые внутренние сдвиги, в частности, если S с сокращением или инверсная. Полурешетка нек-рого семейства редуктивных Ф. а. п. будет Ф. а. п.

Если S — Ф. а. п., то все ее максимальные подгруппы финитно аппроксимируемы. Для нек-рых типов

полугрупп указанное необходимое условие будет и достаточным; таковы: регулярные полугруппы с конечным числом идемпотентов в каждом главном факторе [2], клиффордовы инверсные полугруппы, вполне 0-простые полугруппы с конечным числом $\mathscr{L}$- или $\mathscr{R}$-классов (см. *Грина отношения эквивалентности*). Для ряда классов полугрупп описание Ф. а. п. в них получено в терминах, не использующих редукцию к максимальным подгруппам.

Несколькими способами описаны многообразия, состоящие из Ф. а. п. [3]. Одно из таких описаний следующее. Пусть L, R, N, I — двухэлементные полугруппы левых нулей, правых нулей, с нулевым умножением и полурешетка соответственно, P — трехэлементная полугруппа $\{e, p, 0\}$, где $e^2=e$, $ep=p$, остальные произведения равны 0, а P^* — полугруппа, антиизоморфная P. Многообразие M состоит из Ф. а. п. тогда и только тогда, когда M порождается подмножеством одного из следующих трех множеств: $\{L, R, N, I, G\}$, $\{R, P, C\}$, $\{L, P^*, C\}$, где G — конечная группа с абелевыми силовскими подгруппами, C — конечная циклич. группа.

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Уч. зап. Ивановского пед. ин-та», 1958, т. 18, с. 49—60; [2] Голубов Э. А., «Матем. заметки», 1975, т. 17, № 3, с. 423—32; [3] Голубов Э. А., Сапир М. В., «Докл. АН СССР», 1979, т. 247, № 5, с. 1037—1041; [4] Lallement G., «Pacific J. Math.», 1972, v. 42, № 3, p. 693—700.

Э. А. Голубов, Л. Н. Шеврин.

ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ — метрическое обобщение *римановой геометрии*, возникающее вслед за введением общего определения длины вектора, не ограниченного частным римановым определением в виде корня квадратного из квадратичной формы. Развитие такого обобщения начинается с работы П. Финслера [1].

Предметом изучения в Ф. г. является действительное N-мерное дифференцируемое многообразие M (по меньшей мере класса C^3) с системой локальных координат x^i, на к-ром задана действительная неотрицательная скалярная функция $F(x, y)$ от $2N$ независимых переменных x^i и y^i, где y^i — компоненты контравариантных векторов, касательных к M и опирающихся на точку x^i. Пусть $F(x, y)$ принадлежит классу C^3 по x^i, и пусть в каждом касательном к M пространстве M_x существует такая область M_x^*, что, во-первых, она является конической (в том смысле, что если какой-либо вектор y^i, опирающийся на нек-рую точку x^i, принадлежит M_x^*, то M_x^* принадлежит и любой другой касательный вектор, коллинеарный y^i и опирающийся на ту же точку x^i), и, во-вторых, $F(x, y)$ принадлежит классу C^5 по $y^i \in M_x^*$. Ненулевые векторы $y^i \in M_x^*$ наз. допустимыми. Пусть, далее, для любого допустимого y^i и любой точки x^i справедливо:

$$F(x, y) > 0, \det(\partial^2 F^2(x, y)/\partial y^i\, \partial y^j) \neq 0,$$

а также пусть функция $F(x, y)$ положительно однородна первой степени по y^i, т. е. $F(x, ky) = kF(x, y)$ при любом $k > 0$ для всех x^i и допустимых y^i. При этих условиях тройка $(M, M_x^*, F(x, y))$ наз. N-мерным финслеровым пространством, а F — финслеровой метрической функцией. Значение функции $F(x, y)$ понимается как длина вектора y^i, опирающегося на точку x^i.

Если финслерово пространство допускает такую координатную систему x^i, что F не зависит от этих x, то оно наз. пространством Минковского. Последнее находится в таком же отношении к финслерову пространству, в каком евклидово пространство к риманову пространству. Финслерово пространство называется положительно определенным, если на F наложены условия, обеспечивающие

положительную определенность квадратичной формы $z^i z^j \frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j}$ при любых x^i и ненулевых y^i.

Наложение условия однородности на F по y^i имеет ясный геометрич. смысл с точки зрения инвариантных понятий, имеющихся в центроаффинных пространствах, каковыми являются касательные пространства M_x. Именно, отношение длин любых двух коллинеарных векторов y_1^i и $y_2^i = ky_1^i$ из M_x^* может быть инвариантно определено следующим образом: $y_1^1/y_2^1 = y_1^2/y_2^2 = \ldots = k$, что не включает никакой метрич. функции. Таким образом, наложенное на F условие однородности является условием согласованности финслерова определения длины с частным центроаффинным определением; финслерова метрич. функция требуется для сравнения длин неколлинеарных векторов.

Тензор

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j}$$

наз. финслеровым метрическим тензором. В силу теорем Эйлера об однородных функциях

$$F^2(x, y) = g_{ij}(x, y) y^i y^j, \quad y_i = \frac{1}{2} \frac{\partial F^2(x, y)}{\partial y^i},$$

где, по определению, $y_i = g_{ij}(x, y) y^j$. Эти формулы представляют собой непосредственное обобщение своих римановых аналогов, вытекающее из одного лишь условия однородности. Ф. г. сводится к римановой в случае, когда метрич. тензор $g_{ij}(x, y)$ предполагается не зависящим от y^n. Последнее условие можно записать в виде $C_{ijk} = 0$, где

$$C_{ijk}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}(x, y)}{\partial y^k} \equiv \frac{1}{4} \frac{\partial^3 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k}$$

наз. картановским тензором кручения. Он удовлетворяет тождеству $y^i C_{ijk} = 0$. Все финслеровы соотношения переходят в свои римановы аналоги при обращении в нуль тензора C_{ijk}. Символы Кристоффеля $\gamma_{ij}^k(x, y)$, построенные по финслерову метрическому тензору по той же формуле, что и в римановой геометрии, не подчиняются закону преобразования коэффициентов связности. Тем не менее из первых производных от финслерова метрич. тензора можно построить коэффициенты связности такие, что (как и в римановой геометрии) ковариантная производная от метрич. тензора будет обращаться в нуль. Они наз. картановскими коэффициентами связности и имеют вид

$$\Gamma_{ij}^k(x, y) = \gamma_{ij}^k - C_{in}^k G_j^n - C_{jn}^k G_i^n + C_{ijn} G^{kn},$$

где

$$G_j^n = -2C_{jm}^n G^m + y^m \gamma_{mj}^n, \quad 2G^m = y^n y^k \gamma_{nk}^m.$$

Из коммутаторов различных ковариантных производных находятся выражения финслеровых тензоров кривизны.

В каждом касательном пространстве M_x финслерова метрич. функция определяет $(N-1)$-мерную гиперповерхность $F(x, y) = 1$ (где x^i рассматриваются фиксированными, y^i — произвольными), наз. индикатрисой. Индикатриса образуется концами единичных касательных векторов $l^i = y^i/F(x, y)$, опирающихся на точку x^i. Фундаментальное значение понятия индикатрисы видно уже из того, что вследствие однородности финслеровой метрич. функции индикатриса в точке x^i однозначно определяет вид финслеровой метрич. функции $F(x, y)$ в этой точке x^i. В римановом случае индикатрисой является сфера. Вообще говоря, инди-

катрисой финслерова пространства может быть поверхность довольно общего вида. Финслеров метрич. тензор индуцирует на индикатрисе риманову метрику, превращая ее в римановo пространство. При каждом фиксированном x финслеров метрич. тензор является римановым по переменным y. Пара $(M_x^*,\ g_{ij}(x,\ y))$, где x^n фиксированы, а y^n переменны, наз. касательным римановым пространством в точке x (евклидово пространство в случае римановой геометрии); риманов тензор кривизны этого пространства сводится к выражению $C^j_{mh}C^m_{ik}-C^j_{mk}C^m_{ih}$. Индикатриса является гиперповерхностью, вложенной в касательное римановo пространство. Ближайшим примером финслеровой метрич. функции является корень f-й степени из формы f-го порядка.

Пусть $f(x)$ и $r^A(x)$ — действительные скалярные функции класса C^3, в каждой точке x удовлетворяющие условиям $f\neq 0,\ 1,\ 2$ и $r^A\neq 0$, а $S^A_i(x)$ суть N линейно независимых действительных ковариантных векторных полей класса C^3, $A=1,\ 2,\ \ldots,\ N$. Тогда для

$$F_1(x,\ y)=\left[\sum\nolimits_{A=1}^{N} r^A(x)\cdot(S^A_m(x)\,y^m)^{f(x)}\right]^{1/f(x)}$$

кривизна индикатрисы постоянна и равна $f^2/4\,(f-1)$, а для

$$F_2(x,\ y)=\prod\nolimits_{A=1}^{N}(S^A(x)\,y^m)^{r^A(x)},$$

$$\sum\nolimits_{A=1}^{N} r^A(x)=1$$

тензор кривизны индикатрисы равен нулю. Определитель финслерова метрич. тензора не зависит от y^i тогда и только тогда, когда $C_i=0$, где $C_i=C^n_{in}$. Если финслерово пространство положительно определено и индикатриса — выпуклая поверхность, то $C_i\neq 0$. Функция F_2 — единственный известный (1984) пример финслеровой метрич. функции, для к-рой $C_i=0$ (не считая собственно риманова случая).

Можно выделять специальные типы финслеровых пространств, постулируя какой-либо специальный вид характерных финслеровых тензоров. Если основное многообразие M допускает поле реперов $S^A_i(x)$ глобально, а $F^*(y^A)$ — метрич. функция какого-либо пространства Минковского, то на M можно ввести финслерову метрич. функцию:

$$F(x^n,\ y^i)=F^*(S^A_i(x^n)\,y^i).$$

В этом случае финслерово пространство и метрич. функция наз. 1-формовыми. Функции F_1 и F_2 являются 1-формовыми, когда f и r^A константы. Пространства 1-формовые можно считать наиболее простыми с точки зрения способа вхождения переменных x^n в метрич. функцию. Финслерово пространство наз. C-сводимым, если оно не является римановым, $N>2$ и картановский тензор кручения представляется в виде

$$C_{ijm}=\frac{1}{N+1}(h_{ij}C_m+h_{jm}C_i+h_{mi}C_j),$$

где $h_{ij}=g_{ij}-l_il_j$. Пространства C-сводимые могут иметь метрич. функцию только двух типов: либо метрич. функцию Кропиной $F_3=\alpha^2/\beta$, либо метрич. функцию Рандерса $F_4=\alpha+\beta$, где $\beta=b_i(x)\,y^i$, $\alpha^2=a_{ij}y^iy^j$, $b_i(x)$ — ковариантное векторное поле, $a_{ij}(x)$ — риманов метрич. тензор. Напр., функция Лагранжа пробного электрич. заряда в гравитационном и электромагнитном полях является функцией Рандерса. Финслеров метрич. тензор, отвечающий функции F_2, имеет сигнатуру $(+---\ldots)$, что делает ее интересной для развития финслерова обобщения общей теории относительности; такая сигнатура встречается и в случае

выбора метрич. функций вида F_1. Такое обобщение можно основывать на концепции соприкосновения риманова пространства финслеровым, согласно к-рой каждому векторному полю $y^i(x)$ финслеров метрич. тензор ставит в соответствие т. н. соприкасающийся риманов метрич. тензор $g_{mn}(x, y(x))$. Выделяя зависящие только от x^i тензорные поля $z^A(x)$, из к-рых строится финслерова метрич. функция согласно $F(x, y) = v(z^A(x), y)$, где v — скалярная функция, можно трактовать z^A как собственно гравитационные полевые переменные. Финслерова геометризация пространства-времени дает также возможность развивать теорию физич. полей с различными внутренними симметриями, опираясь на понятие группы преобразований касательных векторов y^i, оставляющих инвариантной финслерову метрич. функцию.

Лит.: [1] Finsler P., Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Gött., 1918 (*Diss.*); [2] Рунд Х., Дифференциальная геометрия финслеровых пространств, пер. с англ., М., 1981; [3] Asanov G. S., Finslerian Extension of General Relativity, Dordrecht, 1984.

Г. С. Асанов.

ФИНСЛЕРОВА МЕТРИКА — метрика пространства, задаваемая действительной положительной и положительно определенной выпуклой функцией $F(x, y)$ координат x и компонент контравариантных векторов y, опирающихся на точку x. Пространство, наделенное Ф. м., наз. финслеровым, а геометрия его — *финслеровой геометрией*.

М. И. Войцеховский.

ФИНСЛЕРОВО ПРОСТРАНСТВО — обобщение *риманова пространства*, пространство, в малых областях к-рого имеет место приближенно *Минковского геометрия*. По существу, Ф. п.— то же, что финслерово многообразие, т. е. дифференцируемое многообразие, наделенное *финслеровой метрикой*.

М. И. Войцеховский.

ФИНСЛЕРОВО ПРОСТРАНСТВО ОБОБЩЕННОЕ — пространство с *внутренней метрикой*, подчиненное нек-рым ограничениям на поведение кратчайших (т. е. кривых, длины к-рых равны расстояниям между концами). К таким пространствам относятся G-пространства (см. *Геодезических геометрия*) и, в частности, *финслеровы пространства*, так что рассматриваемые пространства можно характеризовать как обобщение финслеровых, а не только римановых пространств. Ф. п. о. отличаются от финслеровых не только большей общностью, но и тем, что их определяют и исследуют, исходя из метрики, без координат.

G-пространство можно определить как конечно компактное пространство (т. е. в нем замкнутые ограниченные множества компактны) с внутренней метрикой, в к-ром кратчайшие локально однозначно продолжаемы, т. е. выполняются следующие два условия.

1) Существование продолжения: у каждой точки есть такая окрестность U, что для всякой кратчайшей $AB \subset U$ существует кратчайшая $AC \supset AB$, $C \neq B$.

2) Единственность продолжения, или «неналегание»: если $AC \supset AB$ и $AC_1 \supset AB$, то либо $AC \supset AC_1$, либо $AC_1 \supset AC$. Само существование кратчайших обеспечено конечной компактностью: в конечно компактном пространстве с внутренней метрикой любые две точки соединимы кратчайшей. Из однозначной продолжаемости следует локальная единственность кратчайшей с данными концами. Таким образом, G-пространство можно характеризовать как конечно компактное пространство, в к-ром любые две точки, соединимые кратчайшей и локально кратчайшей, имеют основные свойства прямолинейных отрезков.

Для пространства с внутренней метрикой конечная компактность равносильна сочетанию локальной компактности и полноты (см. [3]).

G-пространство топологически однородно, т. е. для любых двух точек в нем существует гомеоморфизм

пространства на себя, переводящий одну из этих точек в другую. Более того, такой гомеоморфизм можно выбрать изотопным тождественному. G-пространства размерности $\leqslant 3$ являются топологич. многообразиями. Конечномерное G-пространство обладает свойством инвариантности областей, т. е. если одно из двух гомеоморфных подмножеств его открыто, то и другое открыто. Неизвестно (1984), является ли всякое G-пространство конечномерным.

Множество V в пространстве M с внутренней метрикой наз. выпуклым, если любые точки X, $Y \in V$ соединимы в M кратчайшей XY и всякая такая кратчайшая содержится в V. Пространство M обладает свойством в ы п у к л о с т и м а л ы х ш а р о в, если у всякой его точки существует окрестность такая, что всякий содержащийся в ней шар выпуклый. Всякое G-пространство с малыми выпуклыми шарами конечномерно. В частности, это верно для G-пространств с кривизной $\leqslant K$ (см. *Риманово пространство обобщенное*) и для G-пространств неположительной кривизны (в смысле Буземана). Последнее означает, что локально во всяком треугольнике, составленном из кратчайших, длина средней линии треугольника не больше половины соответствующей стороны треугольника. То же верно и для G-пространств с кривизной $\geqslant K$ (см. [4]).

Д в и ж е н и е м метрич. пространства наз. отображение пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками. Группа всех движений компактного G-пространства с компактно открытой топологией является группой Ли (см. [1]). Это верно и в некомпактном случае, если G-пространство удовлетворяет условию выпуклости малых шаров (см. [6]).

Метрич. пространство однородно, если для любых двух точек пространства существует движение, переводящее одну из точек в другую. Движение Ф метрич. пространства наз. с и м м е т р и е й относительно точки p, если $\Phi(\Phi(x)) = x$ для всех x, и p — изолированная неподвижная точка отображения Ф. Пространство наз. с и м м е т р и ч е с к и м, если для любой точки его существует симметрия относительно этой точки. Симметрич. G-пространства однородны и удовлетворяют условию выпуклости малых шаров. Группа всех движений однородного G-пространства есть группа Ли, а само пространство — топологич. многообразие (см. [5]). Симметрич. G-пространство является финслеровым пространством с выпуклыми индикатрисами. Если, кроме того, между любыми двумя кратчайшими, исходящими из одной точки, существует угол, то пространство является симметрическим римановым пространством.

Пусть M — метрич. пространство с метрикой ρ, снабженное структурой группы. Метрика ρ наз. л е в о и н в а р и а н т н о й, если отображение левого сдвига на элемент g есть движение пространства. Аналогично определяется п р а в о и н в а р и а н т н а я метрика. Метрика, одновременно лево- и правоинвариантная, наз. б и и н в а р и а н т н о й. G-пространство, являющееся группой с биинвариантной метрикой, является симметрич. группой Ли (см. [5]) и, следовательно, финслеровым пространством. Это — обобщение известного результата для римановых пространств.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.—Л., 1948; [2] е г о ж е, «Тр.Матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 5—23; [3] е г о ж е, «Schrift. Inst. Math. Deutsch. Akad. Wiss.», 1957, Bd 1, S. 33—84; [4] Б е р е с т о в с к и й В. Н., «Сиб. матем. ж.», 1975, т. 16, № 4, с. 651—62; [5] Н и к о л а е в И. Г., там же, 1978, т. 19, № 6, с. 1341—48; [6] е г о ж е, там же, 1979, т. 20, № 2, с. 345—53; [7] Р е ш е т н я к Ю. Г., «Матем. сб.», 1960, т. 52, № 3, с. 789—98; [8] е г о ж е, «Сиб. матем. ж.», 1968, т. 9, № 4, с. 918—27.

А. Д. Александров, В. Н. Берестовский.

ФИТТИНГА ПОДГРУППА — характеристич. подгруппа $F(G)=F$ группы G, порожденная всеми нильпотентными нормальными делителями G, наз. также радикалом Фиттинга. Впервые рассматривалась Х. Фиттингом [1]. Для конечных групп Ф. п. нильпотентна и является единственным максимальным нильпотентным нормальным делителем группы. Для конечной группы G справедливы соотношения:

$$[F, F] \subseteq \Phi \subseteq F \text{ и } F/\Phi = F(G/\Phi),$$

где через Φ обозначена *Фраттини подгруппа* группы G, а через $[F, F]$ — *коммутант* Ф. п. F.

Лит.: [1] Fitting H., «Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.», 1938, Bd 48, S. 77—141; [2] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [3] Gorenstein D., Finite groups, N.Y.—Evanston—L., 1968.

Н. Н. Вильямс.

ФИШЕРА ИНФОРМАЦИОННОЕ КОЛИЧЕСТВО — см. *Рао — Крамера неравенство.*

ФИШЕРА F-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, F-распределение, Фишера — Снедекора распределение, Снедекора распределение,— непрерывное сосредоточенное на $(0, \infty)$ распределение вероятностей с плотностью

$$f_{\nu_1, \nu_2}(x) = \frac{1}{B\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} x^{\frac{\nu_1}{2}-1} \left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}},$$

$$x > 0, \qquad (1)$$

где $\nu_1 > 0$ и $\nu_2 > 0$ — параметры, а $B(l_1, l_2)$ — бета-функция. При $\nu_1 > 2$ это — унимодальное (одновершинное) с положительной асимметрией распределение с модой в точке $x = \frac{\nu_1-2}{\nu_1} \cdot \frac{\nu_2}{\nu_2+2}$. Математич. ожидание и дисперсия Ф. F-р. равны соответственно

$$\nu_2/(\nu_2-2) \text{ при } \nu_2 > 2$$

и

$$\frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)} \text{ при } \nu_2 > 4.$$

Ф. F-р. сводится к *бета-распределению* 2-го рода (распределению типа VI по классификации Пирсона). Ф. F-р. можно рассматривать как распределение случайной величины, представимой в форме отношения

$$F_{\nu_1, \nu_2} = \nu_2 X_1 / \nu_1 X_2,$$

где независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют *гамма-распределения* с параметрами $\nu_1/2$ и $\nu_2/2$ соответственно. Функция распределения для F_{ν_1, ν_2} выражается через функцию распределения $B_{l_1, l_2}(x)$ бета-распределения:

$$P\{F_{\nu_1, \nu_2} < x\} = B_{\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}}\left(\frac{\frac{\nu_1}{\nu_2}x}{1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x}\right). \qquad (2)$$

Это соотношение используется для вычисления значений Ф. F-р. с помощью таблиц бета-распределения. Если $\nu_1 = m$ и $\nu_2 = n$ целые, то F-распределением Фишера с m и n степенями свободы наз. распределение F-отношения

$$F_{mn} = \frac{\chi_m^2}{m} \Big/ \frac{\chi_n^2}{n}, \qquad (3)$$

где χ_m^2 и χ_n^2 — независимые случайные величины, имеющие *«хи-квадрат» распределения* с m и n степенями свободы соответственно.

Ф. F-р. играет фундаментальную роль в математической статистике и появляется в первую очередь как распределение отношения двух выборочных дисперсий. Именно, пусть $X_1, \ldots, X_m$ и $Y_1, \ldots, Y_n$ — выборки из

нормальных совокупностей с параметрами (a_1, σ_1^2) и (a_2, σ_2^2). Выражения

$$s_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_i (X_i - \overline{X})^2 \text{ и } s_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (Y_j - \overline{Y})^2,$$

где $\overline{X} = \sum_i X_i/m$, $\overline{Y} = \sum_j Y_j/n$, служат оценками дисперсий σ_1^2 и σ_2^2. Тогда т. н. дисперсионное отношение $F = \frac{\sigma_2^2 s_1^2}{\sigma_1^2 s_2^2}$ имеет при гипотезе $\sigma_1 = \sigma_2$ Ф. F-р. с $m-1$ и $n-1$ степенями свободы (в этом качестве Ф. F-р. наз. также распределением дисперсионного отношения). На статистике F основан F-критерий, используемый, в частности, для проверки гипотезы равенства дисперсий двух совокупностей, в дисперсионном анализе, регрессионном анализе, многомерном статистич. анализе.

Универсальность Ф. F-р. подчеркивается связями с другими распределениями. При $m=1$ квадрат величины F_{mn} из (3) имеет *Стьюдента распределение* с n степенями свободы. Существуют различные аппроксимации Ф. F-р. с помощью нормального распределения и «хи-квадрат» распределения.

Введение в дисперсионный анализ Ф. F-р. связано с именем Р. Фишера (R. Fisher, 1924), хотя сам Фишер использовал для дисперсионного отношения величину Z, к-рая связана с F равенством $Z = \frac{1}{2}\log F$. Распределение Z было табулировано Р. Фишером, а Ф. F-р.— Дж. Снедекором (G. Snedecor, 1937). В современной практике предпочитают более простое Ф. F-р., используя его связь с бета-распределением (2) и таблицы неполной бета-функции.

См. также *Дисперсионный анализ*, *Фишера z-распределение*.

Лит.: [1] Fisher R. A., On a distribution yielding the error functions of several well known statistics, «Proc. Intern. Math. Congr. Toronto», 1928, v. 2, p. 805—13; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [3] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., 2 изд., М., 1980; [4] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968. *А. В. Прохоров.*

ФИШЕРА z-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное, сосредоточенное на всей прямой распределение вероятностей с плотностью

$$f(x) = 2m_1^{\frac{m_1}{2}} m_2^{\frac{m_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right) e^{m_1 x}}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)(m_1 e^{2x} + m_2)^{\frac{m_1+m_2}{2}}}.$$

Параметры $m_1 \geqslant 1$ и $m_2 \geqslant 1$ наз. степенями свободы. Характеристич. функция имеет вид

$$\varphi(t) = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{it}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m_1+it}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2-it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)}.$$

Математич. ожидание и дисперсия равны соответственно $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1}\right)$ и $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)$.

Если случайная величина F имеет *Фишера F-распределение* с m_1, m_2 степенями свободы, то величина $z = \frac{1}{2}\ln F$ имеет Ф. z-р. с m_1, m_2 степенями свободы. Вместе с F-распределением Фишера, известным как распределение дисперсионного отношения, Ф. z-р. было введено первоначально в дисперсионный анализ Р. Фишером (R. Fisher, 1924). По его замыслу z-р. должно было бы стать основным распределением при проверке статистич. гипотез в дисперсионном анализе. Ф. z-р. было тогда же табулировано и первые исследования относились к статистике z, однако в совр. математич. статистике используют более простую статистику F.

Лит.: [1] Fisher R. A., On a distribution yielding the error functions of several well known statistics, «Proc. Intern. Math. Congr. Toronto», 1928, v. 2, p. 805—13; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966.

А. В. Прохоров.

ФЛАГ типа ν в n-мерном векторном пространстве V — такой набор линейных подпространств $V_1, V_2, \ldots, V_k$ в V размерностей соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_k$, что $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_k$ (здесь $\nu = (n_1, \ldots, n_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$; $0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n$). Флаг типа $\nu_0 = (1, 2, \ldots, n-1)$ наз. полным флагом. Любые два флага одного и того же типа переводятся друг в друга нек-рыми линейными преобразованиями пространства V, т. е. множество $F_\nu(V)$ всех флагов типа ν в V является однородным пространством *полной линейной группы* $GL(V)$. Унимодулярная группа $SL(V)$ тоже транзитивно действует на многообразии флагов $F_\nu(V)$. При этом стационарная подгруппа H_F флага F в группе $GL(V)$ (а также в группе $SL(V)$) является параболич. подгруппой в $GL(V)$ (соответственно в $SL(V)$). Если F — полный флаг в V, определяемый подпространствами $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1}$, то H_F — полная треугольная подгруппа в $GL(V)$ (соответственно в $SL(V)$) относительно такого базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V, что $e_i \in V_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Вообще, факторпространства линейных алгебраич. групп по параболич. подгруппам иногда наз. флаговыми многообразиями. При $k=1$ флаг типа (n_1) — это просто n_1-мерное линейное подпространство в V и $F_{(n_1)}(V)$ — *Грассмана многообразие* G_{n, n_1}. В частности, $F_{(1)}(V)$ — проективное пространство, ассоциированное с векторным пространством V. Каждое многообразие флагов $F_\nu(V)$ канонич. образом снабжается структурой проективного алгебраич. многообразия (см. [1]). Если V — действительное или комплексное векторное пространство, то все многообразия $F_\nu(V)$ компактны. Известны (см. [3]) клеточные разбиения и кольца когомологий многообразий $F_\nu(V)$ (см. также *Брюа разложение*).

Лит. см. при статье *Флаговая структура.*

Д. В. Алексеевский.

ФЛАГОВАЯ СТРУКТУРА — то же, что *флаг.*

2) Ф. с. типа $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ на n-мерном многообразии M — дифференциально-геометрич. структура, к-рая представляет собой поле флагов F_x типа ν, определяемых подпространствами

$$V_1(x), V_2(x), \ldots, V_k(x)$$

в касательных пространствах M_x, гладко зависящими от точки $x \in M$. Иными словами, Ф. с. типа ν на M — это гладкое сечение расслоения флагов типа ν на M, типовым слоем к-рого в точке $x \in M$ является многообразие $F_\nu(M_x)$. Ф. с. типа ν_0 наз. полной. Ф. с. типа ν на многообразии является G-структурой, где G — группа всех линейных преобразований n-мерного векторного пространства, сохраняющих нек-рый флаг типа ν. Это G-структура бесконечного типа. Группа автоморфизмов Ф. с., вообще говоря, бесконечномерна. Алгебра Ли L инфинитезимальных автоморфизмов Ф. с. на M обладает цепочкой идеалов $L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_k$, где L_i состоит из таких векторных полей $X \in L$, что $X(x) \in V_i(x)$ при всех $x \in M$.

Важным частным случаем Ф. с. являются Ф. с. типа (n_1), или n_1-мерные распределения (здесь $k=1$, $0 < n_1 < n$).

Ф. с. типа ν на M наз. локально плоской, или интегрируемой, если у любой точки $p \in M$ существует такая окрестность U_p и такая система координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ в ней, что подпространства $V_i(x)$ порождены векторами

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial x^{n_i}}$$

при всех $x \in U_p$ и всех $i=1, 2, \ldots, k$. Это означает, что окрестность U_p обладает таким набором слоений $S_1, S_2, \ldots, S_k$, что при всех $x \in U_p$ флаг F_x определяется набором подпространств пространства M_x, касательных к листам этих слоений, проходящих через точку x. Ф. с. тогда и только тогда является локально плоской, когда при любом $i=1, 2, \ldots, k$ распределение $V_i(x)$ является инволютивным, т. е. для любых двух векторных полей X и Y на M таких, что $X(x) \in V_i(x)$ и $Y(x) \in V_i(x)$ при всех $x \in M$, справедливо включение

$$[X, Y](x) \in V_i(x),$$

где $[X, Y]$ — скобка Ли векторных полей X и Y.

Существование на многообразии глобальных (всюду определенных) Ф. с. накладывает довольно жесткие ограничения на его топологич. строение. Напр., для существования на односвязном компактном многообразии поля прямых, т. е. Ф. с. типа (1), необходимо и достаточно, чтобы его эйлерова характеристика была равна нулю. На односвязном многообразии тогда и только тогда существует полная Ф. с., когда оно вполне параллелизуемо, т. е. когда его касательное расслоение тривиально. Если на полном односвязном n-мерном римановом многообразии M существует инвариантная относительно параллельных переносов Ф. с. типа $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, то M изометрично прямому произведению односвязных римановых многообразий размерностей

$$n_1,\ n_2-n_1,\ n_3-n_2,\ \ldots,\ n_k-n_{k-1},\ n-n_k.$$

Транзитивная группа диффеоморфизмов многообразия M тогда и только тогда оставляет инвариантной нек-рую Ф. с. типа ν на M, когда ее линейная группа изотропии сохраняет нек-рый флаг типа ν в касательном пространстве к M. В частности, если H — такая замкнутая подгруппа группы Ли G, что сужение на H присоединенного представления группы G задает треугольную линейную группу, то на однородном пространстве G/H существует инвариантная полная Ф. с., а также инвариантная Ф. с. любого другого типа.

Развита теория деформаций Ф. с. на компактных многообразиях [4].

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980; [3] Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 3, с. 3—26; [4] Kodaira K., Spencer D. C., «Ann. Math.», 1961, v. 74, p. 52—100.

Д. В. Алексеевский.

ФЛАГОВОЕ ПРОСТРАНСТВО — проективное n-пространство, метрика к-рого определяется абсолютом, состоящим из совокупности вложенных друг в друга m-плоскостей, $m=0, 1, \ldots, n-1$, называемых флагом; Ф. п. обозначается F_n. Абсолют Ф. п. может быть получен из абсолютов галилеева или псевдогалилеева пространств путем предельного перехода в квадриках абсолютов. В частности, флаг (абсолют) пространства F_3 состоит из 2-плоскости T_0, в ней лежит прямая T_1 (евклидова прямая), на прямой — точка T_2. Плоскость F_2 представляет собой проективную 2-плоскость с выделенной прямой T_0 и точкой T_1 и совпадает с галилеевой 2-плоскостью. Прямая F_1 представляет собой проективную прямую с выделенной точкой T_0 и совпадает с евклидовой прямой.

Если в Ф. п. F_n выбрана такая система аффинных координат (x^i), что векторы прямых, проходящих через $(n-m-1)$-плоскость T_m, определяются условием $x^1=x^2=\ldots=x^m=0$, то за расстояние между точками $X(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $Y(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ принимается число $d=|x^1-y^1|$; если $y^1=x^1, \ldots, y^{k-1}=x^{k-1}$, то расстояние определяется числом $d^{(k-1)}=|x^k-y^k|$.

Прямые, пересекающие $(n-m)$-плоскость и не пересекающие $(n-m-1)$-плоскость, наз. прямыми порядка m.

Движениями Ф. п. являются коллинеации, переводящие абсолют в себя. Движения Ф. п. являются подгруппой аффинных преобразований аффинного n-пространства, и эта группа движений Ф. п. является группой Ли.

Пространство F_n двойственно самому себе. За величину угла между двумя $(n-1)$-плоскостями принимается расстояние между точками, двойственными этим плоскостям.

Ф. п. является частным случаем *полуэллиптических пространств*. В частности, Ф. п. F_3 совпадает с 3-пространством S_3^{012}. Флаговое 3-пространство является единственным пространством с параболич. метриками расстояний на прямых, в полуплоскостях и в пучках плоскостей.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров.

ФЛОКЕ ТЕОРИЯ — теория о строении пространства решений и о свойствах самих решений *линейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами*

$$x' = A(t)\,x,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n; \qquad (1)$$

матрица $A(t)$ периодическая по t с периодом $\omega > 0$ и суммируемая на каждом компактном интервале из $\mathbb{R}$.

1) Любая фундаментальная матрица X системы (1) имеет представление

$$X(t) = F(t)\exp(tK), \qquad (2)$$

наз. представлением Флоке (см. [1]), где $F(t)$ — нек-рая ω-периодич. матрица, K — нек-рая постоянная матрица. Существует базис $x_1, \ldots, x_n$ пространства решений системы (1) такой, что в этом базисе матрица K имеет жорданову форму; этот базис можно представить в виде

$$x_i = (\psi_{1i}\exp(\alpha_i t), \ldots, \psi_{ni}\exp(\alpha_i t)),$$

где ψ_{ki} — многочлены относительно t с ω-периодич. коэффициентами, α_i — *характеристические показатели* системы (1). Любая компонента решения системы (1) является линейной комбинацией функций вида (решений Флоке) $\psi_{ki}\exp(\alpha_i t)$. В случае когда все характеристич. показатели различны (или среди них есть кратные, но им отвечают простые элементарные делители), функции ψ_{ki} суть просто ω-периодич. функции. В представлении (2) матрицы $F(t)$ и K, вообще говоря, комплекснозначны. Если ограничиться только действительным случаем, то $F(t)$ может не быть ω-периодической, но обязательно будет 2ω-периодической.

2) Систему (1) можно привести к дифференциальному уравнению с постоянной матрицей $y' = Ky$ с помощью преобразования Ляпунова

$$x = F(t)\,y, \qquad (3)$$

где $F(t)$ и K — матрицы из представления Флоке (2) (см. [2]). Представление (2) вместе с подстановкой (3) часто называют теоремой Флоке — Ляпунова.

3) Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — спектр матрицы K. Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ такого, что $\alpha \neq \operatorname{Re}\alpha_j$, $j = 1, \ldots, l$, в силу представления (2) пространство $\mathbb{R}^n$ распадается в прямую сумму двух подпространств S_α и U_α

$$(\mathbb{R}^n = S_\alpha + U_\alpha,\ S_\alpha \cap U_\alpha = \varnothing)$$

таких, что

$$\lim_{t \to +\infty} \exp(-\alpha t)\,V(t)\,x(0) = 0 \Leftrightarrow x(0) \in S_\alpha,$$

$$\lim_{t \to -\infty} \exp(-\alpha t)\,V(t)\,x(0) = 0 \Leftrightarrow x(0) \in U_\alpha;$$

здесь $V(t)$ — **нормированная в нуле фундаментальная матрица системы (1). Отсюда следует экспоненциальная** *дихотомия* системы (1), если $\operatorname{Re}\alpha_j \neq 0$ ни для какого $j = 1, \ldots, l$.

Лит.: [1] Floquet G., «Ann. sci. École norm. supér.», 1883, t. 12, № 2, p. 47—88; [2] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956, с. 7—263; [3] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967; [4] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972; [5] Массера Х.-Л., Шеффер Х.-Х., Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства, пер. с англ., М., 1970; [6] Еругин Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963.

Ю. В. Комленко.

ФЛОКЕ — ЛЯПУНОВА ТЕОРЕМА — см. *Флоке теория.*

ФОКА ПРОСТРАНСТВО, *фоковское пространство*,— в простейшем и чаще всего употребляемом случае — гильбертово пространство, состоящее из бесконечных последовательностей вида

$$F = \{f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots\}, \qquad (1)$$

где

$$f_0 \in \mathbb{C},\ f_1 \in L_2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x),\ f_n \in L_2^S((\mathbb{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n),$$

или

$$f_n \in L_2^a((\mathbb{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n),\ n = 2, 3, \ldots, \nu = 1, 2, \ldots,$$

причем

$$L_2^S((\mathbb{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n) \text{ или } L_2^a((\mathbb{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n)$$

означает гильбертово пространство симметрич. (соответственно антисимметрич.) функций от n переменных $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^\nu$, $n = 2, 3, \ldots$. Скалярное произведение двух последовательностей F и G вида (1) равно

$$(F, G) = f_0\overline{g}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, g_n)_{L_2((\mathbb{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n)}.$$

В случае когда последовательности F состоят из симметрич. функций, говорят о *симметрическом* (или *бозонном*) Ф. п., а в случае последовательностей антисимметрич. функций — Ф. п. наз. *антисимметрическим* (или *фермионным*). В таком простейшем случае Ф. п. были впервые введены В. А. Фоком [1].

В общем случае произвольного гильбертова пространства H Ф. п. $\Gamma^S(H)$ (или $\Gamma^a(H)$), построенным над H, наз. симметризованную (или антисимметризованную) тензорную экспоненту пространства H, т. е. пространства

$$\Gamma^\alpha(H) \equiv \operatorname{Exp}_\alpha H = \bigoplus \sum_{n=0}^{\infty} (H^{\otimes n})_\alpha,\ \alpha = S, a, \qquad (2)$$

где знак $\bigoplus$ означает прямую ортогональную сумму гильбертовых пространств, $(H^{\otimes 0})_\alpha = \mathbb{C}^1$, $(H^{\otimes 1})_\alpha = H$, а $(H^{\otimes n})_\alpha$, $n > 1$,— симметризованную при $\alpha = S$ или антисимметризованную ($\alpha = a$) n-ю тензорную степень пространства H. В случае $H = L_2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x)$ определение (2) эквивалентно определению Ф. п., приведенному в начале статьи, если отождествить пространства $L_2^\alpha((\mathbb{R}^\nu)^n, (d^\nu x))^n$ и $(L_2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x))_\alpha^{\otimes n}$ так, что тензорному произведению

$$(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)_\alpha \in (L_2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x))_\alpha^{\otimes n}$$

последовательности функций

$$f_1, \ldots, f_n \in L_2(\mathbb{R}^\nu, d^\nu x)$$

соответствует функция

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_\sigma (\pm 1)^{\operatorname{sign}\sigma} \prod_{i=1}^{n} f(x_{\sigma(i)}) \in L_2^\alpha((\mathbb{R}^\nu)^n, (d^\nu x)^n), \qquad (3)$$

где суммирование происходит по всем перестановкам σ индексов $1, 2, \ldots, n$, $\operatorname{sign}\sigma$ — четность перестановки σ, а знак $+1$ или -1 в выражении (3) соответствует симметрич. или антисимметрич. случаю.

В квантовой механике Ф. п. $\Gamma^S(H)$ или $\Gamma^a(H)$ служат пространствами состояний квантовомеханич. системы, состоящей из произвольного (но конечного) числа одинаковых частиц таких, что пространством состояний каждой отдельной частицы является пространство H. При этом в зависимости от того, каким из Ф. п.— симметрическим $\Gamma^S(H)$ или антисимметрическим $\Gamma^a(H)$ описывается эта система — сами частицы наз. б о з о н а м и или соответственно ф е р м и о н а м и. Для любого $n=1, 2, \ldots$ подпространство $\Gamma_n^\alpha(H) \equiv \equiv \left(H^{\bigotimes n}\right)_\alpha \subset \Gamma^\alpha(H)$, $\alpha = S, a$, наз. n-ч а с т и ч н ы м п о д п р о с т р а н с т в о м: его векторы описывают те состояния, в к-рых имеется ровно n частиц; единичный вектор $\Omega \in \left(H^{\bigotimes 0}\right)_\alpha \subset \Gamma^\alpha(H)$, $\alpha = S, a$ (в записи (1): $\Omega = \{1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$), наз. в а к у у м н ы м в е к т о р о м, описывает состояние системы, в к-ром нет ни одной частицы.

При изучении линейных операторов, действующих в Ф. п. $\Gamma^S(H)$ и $\Gamma^a(H)$, часто применяется специальный формализм, наз. м е т о д о м в т о р и ч н о г о к в а н т о в а н и я. Он основан на введении в каждом из пространств $\Gamma^\alpha(H)$, $\alpha = S, a$, двух семейств линейных операторов: т. н. о п е р а т о р о в у н и ч т о ж е н и я $\{a_\alpha(f), f \in H\}$, $\alpha = S, a$, и семейства сопряженных к ним операторов $\left\{a_\alpha^*(f)\, f \in H\right\}$, наз. о п е р а т о р а м и р о ж д е н и я. Операторы уничтожения задаются как замыкания операторов, действующих на векторы

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)\, \alpha \in \Gamma^\alpha(H), \quad \alpha = S, a, \qquad (4)$$

где $(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)\alpha$ симметризованные (при $\alpha = S$) или антисимметризованные ($\alpha = a$) тензорные произведения последовательностей векторов $f_1, \ldots, f_n \in H$, $n = 1, 2, \ldots$, по формулам

$$a_\alpha(f)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)_\alpha = \sum_{i=1}^n (-1)^{g_\alpha(i)} (f_i, f) \times$$
$$\times (f_1 \otimes \cdots \otimes f_{i-1} \otimes f_{i+1} \otimes \cdots \otimes f_n)\alpha,$$
$$\alpha = S, a, \quad a_\alpha(f)\,\Omega = 0,$$

где $g_S(i) = 0$ и $g_a(i) = i - 1$. Операторы же рождения $a_\alpha^*(f)$ действуют на векторы (3) по формулам

$$a_\alpha^*(f)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)_\alpha = (f \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n),$$
$$a_\alpha^*(f)\,\Omega = f.$$

При этом для любого $f \in H$, $a_\alpha(f) : \Gamma_n^\alpha(H) \longrightarrow \Gamma_{n-1}^\alpha(H)$, $n = 1, 2, \ldots$, а $a_\alpha^*(f) : \Gamma_n^\alpha(H) \longrightarrow \Gamma_{n+1}^\alpha(H)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, т. е. состояние физич. системы с n частицами операторами уничтожения $a_\alpha(f)$ переводится в состояние с $(n-1)$-й частицей, а операторами рождения $a_\alpha^*(f)$ — в состояние с $(n+1)$-й частицей. Операторы рождения и уничтожения оказываются во многих случаях удобной системой «образующих» в совокупности всех операторов (ограниченных и неограниченных), действующих в Ф. п. Представление таких операторов в виде суммы (конечной или бесконечной) операторов вида

$$a_\alpha^*(f_1) \ldots a_\alpha^*(f_n)\, a_\alpha(g_1) \ldots a_\alpha(g_m),$$
$$(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m \in H, \; n, m = 0, 1, 2, \ldots),$$

т. н. н о р м а л ь н а я ф о р м а о п е р а т о р а,— и основанные на таком представлении способы действия с операторами (вычисление функций от них, приведение операторов к какому-нибудь «простейшему» виду, различные приемы аппроксимации и т. д.) и составляют содержание упомянутого выше формализма вторичного квантования (см. [2]).

В случае симметричного Ф. п. $\Gamma^S(H)$ над действительным пространством H существует канонич. изоморфизм между этим пространством и гильбертовым пространством квадратично суммируемых функционалов от гауссовской линейной случайной функции $\{\xi_f, f\in H\}$, определенной на пространстве H, и такой, что

$$M_{\xi_f}=0,\ M(\xi_{f_1}\xi_{f_2})=(f_1, f_2)_H,\ f, f_1, f_2\in H.$$

Этот изоморфизм, наз. отображением Ито—Сигала—Вика, однозначно определяемый тем условием, что для любой ортонормированной системы элементов $f_1, \ldots, f_k\in H$ и любого набора целых неотрицательных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$ вектор

$$\underbrace{f_1\otimes\ldots\otimes f_1}_{n_1\text{ раз}}\otimes\ldots\otimes\underbrace{f_k\otimes\ldots\otimes f_k}_{n_k\text{ раз}}\in\Gamma^S(H)$$

переходит в функционал

$$\prod_{i=1}^{k} H_{n_i}(\xi_{f_i}),$$

где $H_n(\cdot)$, $n=0, 1, \ldots$,— многочлен Эрмита со старшим коэффициентом, равным единице (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Fock V., «Z. Phys.», 1932, Bd 75, S. 622—47; [2] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965; [3] Добрушин Р. Л., Минлос Р. А., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 2, с. 67—122; [4] Саймон Б., Модель $P\varphi_2$ эвклидовой квантовой теории поля, пер. с англ., М., 1976.

Р. А. Минлос.

ФОКАЛЬНАЯ СЕТЬ конгруэнции — сеть, к-рую на фокальной поверхности конгруэнции прямых (гиперболической) высекают развертывающиеся поверхности этой конгруэнции. Ф. с. конгруэнции — *сопряженная сеть*. Одно семейство ее линий состоит из ребер возврата одного семейства развертывающихся поверхностей конгруэнции; другое семейство образовано линиями касания с фокальной поверхностью развертывающихся поверхностей другого семейства. Всякая сопряженная сеть на двумерной поверхности является Ф. с. конгруэнции касательных к линиям одного из семейств этой сети. У каждой гиперболич. конгруэнции прямых две Ф. с.

Лит.: [1] Фиников С. П., Теория конгруэнций, М.—Л., 1950.

В. Т. Базылев.

ФОККЕРА — ПЛАНКА УРАВНЕНИЕ — уравнение для плотности переходной функции, описывающей непрерывный марковский процесс диффузионного типа. Ф.—П. у. — то же, что прямое *Колмогорова уравнение*. См. также *Диффузионный процесс*.

ФОКУС — точка F, лежащая в плоскости кривой 2-го порядка и такая, что отношение расстояния любой точки кривой до F к расстоянию до заданной прямой (директрисы) равно постоянному числу (эксцентриситету). См. также *Конические сечения*.

Ф. кривой 2-го порядка могут быть определены как точки пересечения касательных к этой кривой, проведенных из *круговых точек* плоскости. Это определение Ф. распространяется и на алгебраич. кривые n-го порядка.

А. Б. Иванов.

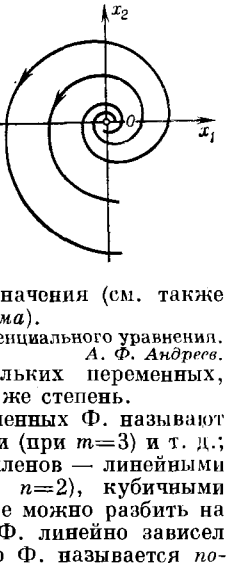
ФОКУС — тип расположения траекторий автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\dot{x}=f(x),\ x=(x_1, x_2),\ f: G\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2, \qquad (*)$$

$f\in C(G)$, G — область единственности, в окрестности особой точки x_0. Этот тип характеризуется следующим образом. Существует окрестность U точки x_0 такая, что для всех траекторий системы, начинающихся в $U\setminus\{x_0\}$, отрицательные полутраектории являются уходящими (с течением времени покидают любой компакт $V\subset U$), а положительные полутраектории, не выходя из U, примыкают к точке x_0, наматываясь на нее наподобие логарифмич. спиралей, или наоборот. Ф. наз. при этом и сама точка x_0. Характер приближения тра-

екторий системы к Ф. x_0 можно описать точнее, если ввести на плоскости (x_1, x_2) полярные координаты r, φ с полюсом в x_0. Тогда для любой примыкающей к Ф. x_0 полутраектории $r=r(t)$, $\varphi=\varphi(t)$, $t\geqslant 0$ $(t\leqslant 0)$, полярный угол переменной точки $\varphi(t)\to+\infty$ (левый Ф.) или $-\infty$ (правый Ф.) при $t\to\infty$.

Ф. либо асимптотически устойчив по Ляпунову, либо вполне неустойчив (асимптотически устойчив при $t\to-\infty$). Его индекс Пуанкаре равен 1. На рис. изображен правый неустойчивый Ф. $x_0=(0, 0)$.



Для системы (*) класса C^1 $(f\in C^1(G))$ точка покоя x_0 является Ф. в случае, когда матрица $A=f'(x_0)$ имеет комплексно сопряженные собственные значения с отличной от нуля действительной частью, но может быть Ф. и в тех случаях, когда эта матрица имеет чисто мнимые или кратные действительные собственные значения (см. также *Центр, Центра и фокуса проблема*).

Лит. см. при ст. *Особая точка* дифференциального уравнения.

А. Ф. Андреев.

ФОРМА — многочлен от нескольких переменных, все члены к-рого имеют одну и ту же степень.

В зависимости от числа m переменных Ф. называют бинарными (при $m=2$), тернарными (при $m=3$) и т. д.; в зависимости от степени n их членов — линейными (при $n=1$), квадратичными (при $n=2$), кубичными (при $n=3$) и т. д. Если переменные можно разбить на группы так, чтобы каждый член Ф. линейно зависел от переменных каждой группы, то Ф. называется *полилинейной формой*. Любая Ф. может быть получена из полилинейной Ф. путем отождествления нек-рых переменных. Обратно — из каждой Ф. можно путем нек-рого процесса, называемого процессом поляризации, получить полилинейную Ф.

Наиболее важными для приложений являются *квадратичные формы*. Теория квадратичных Ф. тесно связана с теорией кривых и поверхностей 2-го порядка (см. также *Эрмитова форма*).

В теории чисел весьма важным является вопрос о представимости целых чисел как значений Ф. с целочисленными коэффициентами при целочисленных значениях переменных.

В дифференциальной и римановой геометрии используются *дифференциальные формы*. Многие теоремы интегрального исчисления (см. *Грина формулы, Остроградского формула, Стокса формула*) могут рассматриваться как теоремы о связи дифференциальных Ф. различной степени.

По материалам одноименной статьи БСЭ-3.

ФОРМА алгебраической группы G, определенной над полем k, — алгебраич. группа G', определенная над k и изоморфная группе G над нек-рым расширением L поля k. В этом случае G' наз. L/k-формой алгебраич. группы G. Если k_s — сепарабельное замыкание поля k в фиксированном основном алгебраически замкнутом поле K (универсальной области), то k_s/k-формы наз. просто k-формами группы G. Две L/k-формы группы наз. эквивалентными, если они изоморфны над k. Множество всех классов эквивалентных L/k-форм группы G обозначается через $E(L/k, G)$ (в случае $L=k_s$ — через $E(k, G)$) (см. [5], [7], [8]).

Пример. Пусть $k=\mathbb{R}$, $K=\mathbb{C}$, а

$$G'=\left\{\begin{Vmatrix} x & y \\ -y & x \end{Vmatrix} \mid x^2+y^2=1\right\}$$

и

$$G=\{\operatorname{diag}(x, y) \mid xy=1\}$$

— две определенные над k подгруппы полной линейной группы $GL(2)$, тогда G' является k-формой G (соответствующий определенный над K изоморфизм $\varphi : G' \to G$ задается формулой

$$\varphi\left(\begin{Vmatrix} x & y \\ -y & x \end{Vmatrix}\right) = \operatorname{diag}(x+iy,\ x-iy).$$

Эта k-форма не эквивалентна G (если рассматривать G как свою собственную k-форму относительно тождественного изоморфизма $G \to G$). В рассмотренном примере множество $E(k, G)$ состоит из двух элементов, представленных указанными двумя k-формами.

Задача классификации Ф. алгебраич. групп естественно переформулируется на языке *Галуа когомологий*; [3, 5]. А именно, пусть L/k — расширение Галуа с группой Галуа $\Gamma_{L/k}$ (снабженной топологией Крулля). Группа $\Gamma_{L/k}$ естественно действует на группе $\operatorname{Aut}_L G$ всех L-автоморфизмов группы G, а также на множестве всех L-изоморфизмов группы G' в группу G (в координатах эти действия сводятся к применению автоморфизмов из $\Gamma_{L/k}$ к коэффициентам рациональных функций, определяющих соответствующее отображение). Пусть $\varphi: G' \to G$ — нек-рый L-изоморфизм, $\sigma \in \Gamma_{L/k}$ и φ^σ — образ φ под действием σ. Тогда отображение $\Gamma_{L/k} \to \operatorname{Aut}_L G$, $\sigma \mapsto c_\sigma = \varphi^\sigma \circ \varphi^{-1}$ является непрерывным *1-коциклом группы* $\Gamma_{L/k}$ *со значениями в дискретной* группе $\operatorname{Aut}_L G$. При замене φ на другой L-изоморфизм $G' \to G$ указанный коцикл заменяется на когомологичный. Тем самым возникает отображение $E(L/k, G) \to H^1(\Gamma_{L/k}, \operatorname{Aut}_L G)$. Основное утверждение о когомологич. интерпретации задачи описания Ф. группы G состоит в том, что это отображение биективно. В случае когда все автоморфизмы c_σ внутренние, G' наз. *внутренней формой группы* G, а *в противном случае — внешней*.

Для связных редуктивных групп имеется глубоко развитая теория Ф. В ней устанавливаются относительные варианты структурной теории редуктивных групп над алгебраически замкнутым полем: k-корни, k-группа Вейля, разложение Брюа над k и т. п.; при этом роль максимальных торов играют максимальные k-разложимые торы, а роль борелевских подгрупп — минимальные k-параболич. подгруппы [1, 2, 6, 7]. Эта теория позволяет свести вопрос о классификации Ф. к классификации анизотропных над k редуктивных групп (см. *Анизотропная группа*, *Анизотропное ядро*); вопрос о классификации последних существенно зависит от свойств поля k. Если $k=\mathbb{R}$, а $K=\mathbb{C}$, то описание Ф. полупростых алгебраич. групп — это описание вещественных Ф. комплексных полупростых алгебраич. групп (см. *Комплексификация группы Ли*).

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980; [3] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [4] его же, Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [5] Воскресенский В. Е., Алгебраические торы, М., 1977; [6] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, в. 1, с. 43—111; в. 2, с. 3—31; [7] Tits J., «Proc. Symposia pure Math.», 1966, v. 9, p. 33—62; [8] Springer T. A., там же, 1979, v. 33, pt. 1, p. 3—27; [9] Serre J.-P., Local fields, N. Y.— [a.o.], 1979.

В. Л. Попов.

ФОРМАЛИЗАЦИИ МЕТОД — способ получения *формальной системы* из содержательной математич. теории; один из основных методов в *доказательстве теории*.

Применение Ф. м. подразумевает выполнение следующих этапов.

1) Символизация исходной математич. теории. При этом все предложения теории записываются в подходящем логико-математич. языке L.

2) Дедуктивный анализ теории и выделение аксиом, т. е. тех предложений теории, из к-рых логически выводимы все предложения теории.

3) Присоединение аксиом в их символич. записи к подходящему, основанному на языке L, *логическому исчислению*.

Полученная при этом формальная система уже сама является объектом точного математич. изучения (см. *Аксиоматический метод*, *Доказательств теория*).

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

С. Н. Артемов.

ФОРМАЛИЗМ — направление в основаниях математики, программа к-рого была выдвинута Д. Гильбертом (D. Hilbert). Целью этой программы было доказательство *непротиворечивости* математики точным математич. способом. Программа Гильберта предусматривала уточнение понятия доказательства, чтобы последние могли быть объектами математич. теории — *доказательств теории*.

Чтобы сделать возможным точное рассмотрение доказательств, им придается единая, точно определенная форма. Это осуществляется с помощью формализации теорий: утверждения теории заменяются конечными последовательностями определенных знаков, а логич. способы заключения — формальными правилами образования новых формально представленных высказываний из уже доказанных. Таким образом, математич. теория заменяется *формальной системой*.

Несмотря на то что попытка осуществления программы Гильберта в целом оказалась несостоятельной (см. *Гёделя теорема о неполноте*), проведенные в рамках этой программы исследования имели большое значение для развития многих разделов математич. логики.

Термин «Ф.» часто употребляется как синоним формальной системы и вообще для обозначения исчисления, позволяющего заменять операции с объектами операциями с соответствующими им знаками. В философии математики Ф. означает взгляд на природу математики, согласно к-рому математика характеризуется скорее своим методом, нежели предметом изучения; ее объекты либо не определяются, либо если и определяются, то таковы, что подлинная их природа несущественна.

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Генцен Г., в кн.: Математическая теория логического вывода, М., 1967, с. 77—153; [3] Gödel K., «Monatsh. Math. und Phys.», 1931, Bd 38, S. 173—98; [4] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [5] Клини С., Математическая логика, пер. с англ., М., 1973; [6] Карри Х., Основания математической логики, пер. с англ., М., 1969.

В. Е. Плиско.

ФОРМАЛИЗОВАННЫЙ ЯЗЫК — искусственный язык, для к-рого имеется точное формальное определение класса выражений языка и достаточно строгое объяснение значения или смысла этих выражений. Обычно выражения Ф. я. представляют собой формальные комбинации исходных символов, образующиеся по определенным правилам образования выражений данного языка. Описание выражений Ф. я. и связей между ними составляет синтаксис языка. Выявление смысла выражений относится к семантике языка. Таким образом, задать Ф. я.— это значит построить его синтаксис и указать семантику. В формулировках синтаксич. понятий Ф. я. не разрешается использовать семантич. понятия. Все синтаксич. определения должны быть понятны лицу, незнакомому с семантикой языка. Это основное требование, отличающее Ф. я. от естественных, ведет к отделению синтаксиса от семантики и к появлению языков с одинаковым синтаксисом, но разными семантиками. Часто под Ф. я. понимают только его синтаксис, а возможные семантики наз. интерпретациями языка.

Достигаемая в Ф. я. четкая фиксация языковых средств выражения позволяет устранить неявные ссылки на интуитивную очевидность, неизбежные при неформальном аксиоматич. построении теории (см. *Неформальный аксиоматический метод*). Формализация языка создает основу для формализации дедуктивных средств исследуемой математич. теории. Понятие Ф. я. лежит в основе гильбертовского понятия *формальной системы*.

Иногда в понятие Ф. я. включают не только его синтаксис и семантику, но и точную фиксацию допустимых дедуктивных средств получения верных предложений Ф. я. (т. е. включают аксиомы и правила вывода). Конкретные примеры Ф. я. приведены в статьях *Аксиоматическая теория множеств*, *Арифметика формальная*, *Предикатов исчисление*, *Типов теория*.

С семантич. точки зрения выделяют следующие виды языковых выражений: переменные, термы, формулы. Каждой переменной сопоставляется (при семантич. истолковании) нек-рая область ее допустимых значений — область изменения переменной. Если у всех переменных область изменения оказывается одной и той же, то язык наз. о д н о с о р т н ы м. В противном случае — м н о г о с о р т н ы м. В многосортном языке должны быть синтаксич. правила образования сортов, наз. также т и п а м и. Каждая переменная такого языка имеет вполне определенный тип. Семантич. правила должны сопоставлять каждому типу τ нек-рую область V_τ. Переменные, имеющие тип τ, «пробегают» область V_τ.

Термы и формулы могут содержать параметры, т. е. иметь свободные вхождения переменных (см. *Свободная переменная*). С семантич. точки зрения терм без параметров (з а м к н у т ы й т е р м) является, вообще говоря, составным *именем*, обозначающим вполне определенный объект, а формула без параметров (з а м к н у т а я ф о р м у л а, или п р е д л о ж е н и е) является сложным высказыванием, выражающим вполне определенное суждение. В Ф. я. могут быть простейшие термы, наз. к о н с т а н т а м и. Они относятся к числу исходных символов Ф. я.

При наличии параметров термы являются и м е н н ы м и ф о р м а м и, а формулы — в ы с к а з ы в а т е л ь н ы м и ф о р м а м и. Это означает, что при каждом допустимом наборе значений свободных переменных (параметров) в соответствии с семантикой языка именная форма обозначает вполне определенный объект, а высказывательная форма выражает вполне определенное суждение. Обычно переменные относят к термам. При таком подходе терм, являющийся переменной, имеет эту переменную своим параметром. Термы и формулы, параметры к-рых содержатся среди переменных $x_1, \ldots, x_n$, можно рассматривать как имена функций и соответственно предикатов от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Формулы можно рассматривать и как термы, принимающие особые *истинностные значения* (в классич. случае имеется два истинностных значения: «истина» и «ложь»). При таком понимании формул для формулировки суждений можно ограничиться суждениями, выражающими равенство термов одному выделенному терму, обозначающему «истину».

Широко распространены Ф. я., удовлетворяющие требованиям эффективности, состоящим в том, что выражениями языка должны быть финитные объекты, и все его синтаксич. понятия (термы, формулы и др.) должны быть алгоритмически разрешимы. Рассматривают иногда языки, не удовлетворяющие требованиям эффективности, содержащие, напр., бесконечно длинные выражения или использующие нефинитные объекты в качестве исходных символов. (Так, при изучении векторных пространств употребителен язык,

среди исходных символов к-рого содержатся все действительные числа.)

В случае когда выражениями Ф. я. являются нефинитные объекты, правила образования его выражений уже нельзя считать интуитивно очевидными конструкциями, порождающими новые выражения из уже построенных. Необходимо уточнить как сами правила, так и способ, к-рым они определяют класс выражений. Можно, напр., рассматривать эти правила как операции на множествах уже имеющихся «выражений», а не как конструкции, порождающие новые выражения. При этом Ф. я. должен быть свободным объектом в подходящей категории. Употребительно также теоретико-множественное уточнение, при к-ром нефинитные объекты (в частности, выражения) берутся из нек-рого достаточно богатого множествами теоретико-множественного универсума (наз. допустимым множеством). Правила образования выражений рассматриваются как пункты индуктивного определения, выделяющего из допустимого множества подкласс, состоящий из выражений.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960; [2] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., 2 изд., М., 1982; [3] Справочная книга по математической логике, ч. 1—4, М., 1982,1983.

В. Н. Гришин.

ФОРМАЛЬНАЯ ГРУППА — алгебраический аналог понятия локальной группы Ли. Теория Ф. г. имеет многочисленные применения в алгебраической геометрии, теории полей классов и теории кобордизмов.

Ф. г. над полем k — групповой объект в категории связных аффинных формальных схем над k (см. [1], [4], [6], [7]). Здесь связная аффинная формальная схема — ковариантный функтор H из категории конечномерных коммутативных k-алгебр B в категорию множеств, изоморфный функтору H_A, сопоставляющему алгебре B множество гомоморфизмов алгебр $A \to B$ из нек-рой нётеровой коммутативной локальной k-алгебры A с максимальным идеалом m и полем вычетов k, полной в m-адической топологии, переводящих идеал m в множество нильпотентных элементов $\mathrm{nil}\,(B)$ алгебры B. То, что H — групповой объект означает, что на всех множествах $H(B)$ задана структура группы, причем для любого гомоморфизма k-алгебр $B_1 \to B_2$ соответствующее отображение $H(B_1) \to H(B_2)$ является гомоморфизмом групп. Если все группы $H(B)$ коммутативны, то Ф. г. H наз. коммутативной. Любая связная *групповая схема* G над k определяет Ф. г. $\hat{G}$; $B \mapsto G(B)$. При этом в качестве A можно взять пополнение локального кольца схемы G в единице.

Если A — кольцо формальных степенных рядов $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ от n переменных над k, то Ф. г. H наз. n-мерной Ф. г. Ли. Для связной *алгебраической группы* G над k Ф. г. $\hat{G}$ — Ф. г. Ли. Ф. г. Ли H изоморфна, как функтор в категорию множеств, функтору $D^n : B \mapsto \mathrm{nil}\,(B)^n$, сопоставляющему алгебре B, n-кратное декартово произведение ее нильрадикала $\mathrm{nil}\,(B)$ на себя. Групповая структура на множествах $H(B) = \mathrm{nil}\,(B)^n$ задается формальным групповым законом — набором из n формальных степенных рядов от $2n$ переменных $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$:

$$F_1(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n), \ldots,$$
$$F_n(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n),$$

удовлетворяющих следующим условиям:

$$F_i(X, 0) = X_i,\ F_i(0, Y) = Y_i,$$
$$F_i(X_1, \ldots, X_n, F_1(Y, Z), \ldots, F_n(Y, Z)) =$$
$$= F_i(F_1(X, Y), \ldots, F_n(X, Y), Z_1, \ldots, Z_n).$$

Здесь $X = (X_1, \ldots, X_n), Y = (Y_1, \ldots, Y_n), Z = (Z_1, \ldots,$

Z_n), $0=(0, \ldots, 0)$. Групповой закон на множествах $H(B)=\mathrm{nil}(B)^n$ задается формулами

$$(x_1, \ldots, x_n) \bigcirc (y_1, \ldots, y_n)=(z_1, \ldots, z_n),$$

где $z_i=F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$; в силу нильпотентности x и y все члены рядов кроме конечного числа равны 0. И любой формальный групповой закон задает на $\mathrm{nil}(B)^n$ структуры групп с помощью формул (*) и превращает функтор D^n в Ф. г. Ли. Понятие формального группового закона, и тем самым понятие Ф. г. Ли, обобщается на случай произвольных коммутативных базисных колец (см. [2], [5]). Иногда под Ф. г. понимают лишь Ф. г. Ли или даже формальный групповой закон.

Так же как и для *Ли локальных групп*, определяется алгебра Ли Ф. г. Ли. Над полями k характеристики 0 сопоставление Ф. г. Ли ее алгебры Ли определяет эквивалентность соответствующих категорий. В характеристике $p>0$ ситуация сложнее. Так, над алгебраически замкнутым полем (при $p>0$) существует счетное число попарно неизоморфных одномерных коммутативных Ф. г. Ли [1], в то время как все одномерные алгебры Ли изоморфны [3]. Над совершенными полями конечной характеристики коммутативные Ф. г. Ли классифицируются с помощью модулей Дьёдонне (см. [1, 6]).

Теория Ф. г. над полями обобщается на случай произвольных базисных формальных схем [7].

Лит.: [1] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 6, с. 3—90; [2] Бухштабер В. М., в кн.: Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981; [5] Lazard M., Commutative formal groups, B.— Hdlb.— N. Y., 1975; [6] Fontaine J.-M., Groupes p-divisibles sur les corps locaux, P., 1977, [7] Mazur B., Tate J., в кн.: Arithmetic and geometry, v. 1, Boston — Basel — Stuttg., 1983, p. 195—237. *Ю. Г. Зархин.*

ФОРМАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — производная многочлена, рациональной функции или формального степенного ряда, определяемая чисто алгебраически (без использования понятия предельного перехода) и имеющая смысл для любого кольца коэффициентов. Для многочлена

$$F(X)=\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

(или степенного ряда

$$A(X)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i)$$

Ф. п. $F'(X)$ определяется как $\sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$ (соответственно как $\sum_{i=1}^{\infty} i b_i X^{i-1}$), а для рациональной функции $f(X)=P(X)/Q(X)$ — это рациональная функция

$$f'(X)=\{P'(X)\,Q(X)-Q'(X)\,P(X)\}/[Q(X)]^2.$$

Аналогично определяются Ф. п. высших порядков и частные Ф. п. для функций от нескольких переменных.

Для Ф. п. остается справедливым ряд свойств обычной производной. Так, если $F'(X)=0$, то $F(X)$ — константа из поля коэффициентов (в случае характеристики 0) и равна $G(X^p)$ (в случае характеристики p). Если x_0 — корень многочлена кратности k, то x_0 является корнем производной $F'(X)$ кратности $k-1$.

Л. В. Кузьмин.

ФОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА, дедуктивная система,— в математич. логике неинтерпретированное *исчисление*, задаваемое правилами образования выражений этого исчисления и правилами построения *выводов* в этом исчислении. Выражения Ф. с. рассматриваются как чисто формальные комбинации символов; правила вывода определяют, в каких случаях одно формальное выражение A выводится из других формальных выражений $B_1, \ldots, B_n$. Если $n=0$,

то A наз. аксиомой. Выводы представляют собой либо последовательности, либо древовидные фигуры, составленные из формальных выражений согласно правилам вывода. Если в вершинах дерева вывода находятся только аксиомы, то формальное выражение, завершающее вывод, наз. выводимым в Ф. с.

Наиболее интересны Ф. с., удовлетворяющие требованиям эффективности языка и понятия вывода. Это означает, что должна иметься эффективная процедура для распознавания того, является ли произвольная последовательность символов выражением Ф. с. или нет. Такому же требованию должно удовлетворять понятие вывода. Понятие выводимого выражения в эффективных Ф. с., вообще говоря, не является эффективным.

Понятие Ф. с.— одно из центральных в математич. логике, оно обслуживает нужды как самой математич. логики, так и смежных с ней областей математики.

Наиболее важный класс Ф. с.— формальные теории 1-го порядка (см. [4]), формализующие какую-либо область содержательной математики. Исторически этот класс Ф. с. возник в связи с программой Д. Гильберта (D. Hilbert) обоснования математики (см. *Формализм*).

Понятия и методы, выработанные математич. логикой при изучении Ф. с., нашли применения в различных областях математики, напр. в теории групп и теории категорий. Ценность понятия Ф. с. определяется плодотворностью способа исследования, основанного на идеях, связанных с этим понятием.

См. также *Формальный математический анализ.*

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960, с. 15—63; [4] Mac Lane S., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1976, v. 82, № 1, p. 1—40.

В. Н. Гришин.

ФОРМАЛЬНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ тригонометрических рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad \text{и} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$$

— ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{inx},$$

где

$$K_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \gamma_{n-m}.$$

Если $c_n \xrightarrow[|n|\to\infty]{} 0$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\gamma_n| < \infty$ и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$$

сходится к сумме $\lambda(x)$,
то ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (K_n - \lambda(x)\, c_n)\, e^{inx}$$

сходится к нулю равномерно на $[-\pi, \pi]$. Условие

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\gamma_n| < \infty$$

выполняется, если, напр.,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$$

есть ряд Фурье трижды дифференцируемой функции $\lambda(x)$.

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1—2, М., 1965.
Т. П. Лукашенко.

ФОРМАЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ — название формальной аксиоматич. теории, специально предназначенной для формализации (точного описания доказательств) математич. анализа. При этом формальную аксиоматич. теорию стараются выбирать по возможности минимальной по своим дедуктивным и выразительным возможностям, но все же достаточной для формализации всего традиционного материала математич. анализа.

Наиболее распространенный вариант Ф. м. а., принадлежащий Д. Гильберту (D. Hilbert) и П. Бернайсу (P. Bernays; см. [1]), можно описать следующим образом. К языку классич. *арифметики формальной* добавляется новый вид переменных X, Y, Z, . . ., к-рые рассматриваются как пробегающие множества натуральных чисел. Добавляется новый вид атомарных формул: $(t \in X)$ («t принадлежит множеству X»). Логич. аксиомы формальной арифметики и схема аксиом индукции естественно усиливаются таким образом, чтобы включать в себя формулы расширенного языка. Наконец, добавляется единственная новая схема аксиом — схема аксиом свертывания:

$$\exists X \forall y\,(y \in X \equiv A(y)),$$

где $A(y)$ — формула рассматриваемого языка, не содержащая свободно X, y — переменная для натуральных чисел.

Эта теория (т. н. теория Гильберта — Бернайса, в ней идет речь лишь о натуральных числах и о множествах натуральных чисел) достаточна для естественной формализации математич. анализа. Интересна проблема обоснования непротиворечивости теории Гильберта — Бернайса конструктивными в достаточной степени методами. Согласно *Гёделя теореме о неполноте*, для этого необходимо использовать метаматематич. средства, выходящие за пределы Ф. м. а. К. Спектору (см. [3]) удалось доказать непротиворечивость этой теории с помощью остроумной модификации интерпретации Гёделя для интуиционистской арифметики (см. *Гёделя интерпретация* интуиционистской арифметики), к-рая представляет собой нек-рое далеко идущее расширение требований *интуиционизма*. Фундаментальные трудности в попытках доказательства непротиворечивости теории Гильберта — Бернайса связаны с той особенностью аксиомы свертывания этой теории, что в формуле $A(y)$ этой системы разрешается свободно использовать кванторы по множествам. Таким образом, при выяснении принадлежности числа y определяемому в аксиоме множеству X необходимо использовать наличие всех множеств натуральных чисел, в том числе и определяемое множество X. Можно сказать, что аксиома свертывания формального анализа выражает до нек-рой степени необходимость актуального существования всех множеств одновременно.

Эта особенность (она встречается во многих теоретико-множественных формальных теориях) наз. непредикативностью теории. Формальный анализ Гильберта — Бернайса является анализом непредикативным.

Для устранения непредикативности были предложены различные формальные аксиоматич. теории предикативного (иначе, разветвленного) анализа. Напр., в одной из распространенных формулировок, восходящих к Г. Вейлю (H. Weyl), рассматриваются переменные вида X^m, Y^k, . . . с натуральными верхними индексами. Переменные рассматриваются как пробегающие множества натураль-

ных чисел. Схема аксиом свертывания в этой теории имеет вид

$$\exists X^m \forall y\,(y \in X^m \equiv A(y)),$$

где в $A(y)$ связанные переменные по множествам имеют индекс $<m$, а свободные переменные по множествам — индекс $\leqslant m$. Таким образом, множества натуральных чисел в предикативном анализе, содержательно говоря, распадаются («разветвляются») на слои, причем множества более высокого слоя определяются лишь с помощью множеств меньших слоев (и уже построенных множеств данного слоя). Непротиворечивость разветвленного анализа сравнительно легко обосновывается конструктивными средствами, но простота этой теории достигается дорогой ценой: разветвленный анализ несравненно хуже приспособлен для формализации. Так, наименьшая верхняя грань ограниченного множества действительных чисел определяется существенно непредикативным способом и соответствующая теорема Ф. м. а. в предикативном анализе приобретает весьма неестественный вид.

Имеется эквивалентная формулировка непредикативного анализа Гильберта — Бернайса, в к-рой вместо множеств натуральных чисел фигурируют функции, перерабатывающие натуральные числа в натуральные. А именно, для такого вида функций к формальной арифметике добавляются переменные α, β, γ, ... и новый вид термов: $\alpha(t)$ («результат применения α к t»); логич. аксиомы и схема аксиом индукции естественно распространяются на формулы нового языка, и, наконец, добавляется единственная новая схема аксиом, так наз. а к с и о м а в ы б о р а а н а л и з а:

$$\forall x \exists y A(x, y) \supset \exists \alpha \forall x A(x, \alpha(x)),$$

утверждающая, что если для всякого x найдется y, удовлетворяющий условию $A(x, y)$, то существует функция α, выдающая по x соответствующий y. Ценность этой формулировки состоит в том, что после исключения из числа логич. аксиом теории закона исключенного третьего полученная система удобна для формализации в ней интуиционистского или конструктивного Ф. м. а. И н т у и ц и о н и с т с к и й (соответственно к о н с т р у к т и в н ы й) Ф. м. а. представляет собой переработку традиционного материала математич. анализа в соответствии с требованиями программы *интуиционизма* (соответственно *конструктивной математики*). При формализации этих дисциплин открывается возможность трактовать переменные α, β, γ, ... как пробегающие только «эффективные» в том или ином смысле функции, напр. интуиционистские свободно становящиеся последовательности. При такой интерпретации аксиома выбора анализа является истинным утверждением. Для развития содержательных разделов анализа последнюю теорию пополняют новыми аксиомами, выражающими специфически интуиционистские или конструктивные принципы, такие, как *бар-индукция* или принцип конструктивного подбора А. А. Маркова.

Лит.: [1] Г и л ь б е р т Д., Б е р н а й с П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., [2 изд.], М., 1982; [2] Ф р е н к е л ь А., Б а р - Х и л л е л И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [3] S p e k t o r C l., в кн.: Recursive function theory, Providence, 1962, p. 1—27 («Proc. Sympos. Pure Math.», 1962, v. 5).

А. Г. Драгалин.

ФОРМАЛЬНЫЙ СТЕПЕННОЙ РЯД над кольцом A от коммутирующих переменных $T_1, \ldots, T_n$ — алгебраич. выражение вида

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k,$$

где F_k — форма от $T_1, \ldots, T_n$ с коэффициентами из A степени k. Минимальное значение k, для к-рого $F_k \neq 0$, наз. п о р я д к о м ряда F, а форма F_k наз. н а ч а л ь н о й ф о р м о й ряда.

Если

$$F=\sum_{k=0}^{\infty} F_k \quad \text{и} \quad G=\sum_{k=0}^{\infty} G_k$$

— два Ф. с. р., то, по определению,

$$F+G=\sum_{k=0}^{\infty}(F_k+G_k)$$

и

$$F\cdot G=\sum_{n=0}^{\infty} H_n,$$

где

$$H_n=\sum_{k=0}^{n} F_k G_{n-k}.$$

Относительно этих операций множество $A[[T_1, \ldots, T_n]]$ всех Ф. с. р. образует кольцо.

Многочлен $F=\sum_{k=0}^{n} F_k$, где F_k—форма степени k, отождествляется с Ф. с. р. $C=\sum_{k=0}^{\infty} C_k$, где $C_k=F_k$ при $k\leqslant n$ и $C_k=0$ при $k>n$. Это определяет вложение i кольца многочленов $A[T_1, \ldots, T_n]$ в кольцо $A[[T_1, \ldots, T_n]]$. В кольце $A[[T_1, \ldots, T_n]]$ определена топология, для к-рой идеалы

$$I_n=\{F\in A[[T_1, \ldots, T_n]] \mid F_k=0 \text{ при } k\leqslant n\}$$

образуют фундаментальную систему окрестностей нуля. Эта топология отделима, кольцо $A[[T_1, \ldots, T_n]]$ полно относительно этой топологии, и образ вложения i всюду плотен в $A[[T_1, \ldots, T_n]]$. Относительно этой топологии Ф. с. р. F является пределом своих частичных сумм $\sum_{k=0}^{n} F_k$.

Пусть A—коммутативное кольцо с единицей. Тогда таково же и кольцо $A[[T_1, \ldots, T_n]]$. Если A—область целостности, то и $A[[T_1, \ldots, T_n]]$—область целостности. Ф. с. р. F обратим в кольце $A[[T_1, \ldots, T_n]]$ тогда и только тогда, когда F_0 обратим в A. Если A—нётерово, то и $A[[T_1, \ldots, T_n]]$ также нётерово. Если A—локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, то $A[[T_1, \ldots, T_n]]$—локальное кольцо с максимальным идеалом $(\mathfrak{m}, T_1, \ldots, T_n)$.

Если локальное кольцо A отделимо и полно в $\mathfrak{m}$-адической тонологии, то в кольце $A[[T_1, \ldots, T_n]]$ справедлива подготовительная теорема Вейерштрасса. Пусть F—Ф. с. р. такой, что для нек-рого k форма F_k содержит член aT_n^k, где $a\notin\mathfrak{m}$, и пусть k—минимальный индекс с этим свойством. Тогда $F=UP$, где U—обратимый Ф. с. р. и P—многочлен вида $T_n^k+a_{k-1}T_n^{k-1}+\ldots+a_0$, где коэффициенты a_i принадлежат максимальному идеалу кольца $A[[T_1, \ldots, T_{n-1}]]$. Элементы U и P однозначно определены рядом F.

Кольцо Ф. с. р. над полем или дискретно нормированным кольцом факториально.

Рассматриваются также кольца Ф. с. р. от некоммутирующих переменных.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, т. 2, пер. с англ., М., 1963.

Л. В. Кузьмин.

ФОРМАЛЬНЫЙ ЯЗЫК в математической лингвистике — произвольное множество цепочек (т. е. *слов*) в нек-ром (конечном или бесконечном) *алфавите* V (иногда называемом также словарем), т. е. выражений вида $\omega=a_1\ldots a_k$, где $a_1, \ldots, a_k\in V$; число k, обычно обозначаемое $|\omega|$, есть длина цепочки ω. Рассматривается также пустая цепочка, обозначаемая через Λ; полагают $|\Lambda|=0$. Часто говорят о языке в алфавите V, опуская слово «формальный». В *математической лингвистике* и *автоматов теории* рассматриваются различные эффективные способы за-

дания Ф. я., главным образом с помощью формальных *грамматик* и с помощью автоматов различных типов, к-рые в большинстве случаев могут быть описаны как модификации недетерминированных *Тьюринга машин*, часто многоленточных, с теми или иными ограничениями на способ работы машины на каждой ленте.

Операции над Ф. я. Кроме обычных теоретико-множественных операций, над Ф. я. производятся: умножение (или прямое умножение, или конкатенация) —

$$L_1L_2=\{xy \mid x \in L_1 \& y \in L_2\};$$

левое деление —

$$L_2 \backslash L_1=\{x \mid \exists y,\ z\,(y \in L_1 \& z \in L_2 \& y=zx)\};$$

правое деление L_1/L_2 определяется симметрично левому; итерация —

$$L^*=L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots,$$

где L^0 обозначает $\{\Lambda\}$ и $L^{n+1}=L^nL$ (в частности, множество всех цепочек в алфавите V есть V^*); усеченная итерация —

$$L^+=L^1 \cup L^2 \cup \ldots;$$

подстановка: если L — язык в конечном алфавите $\{a_1, \ldots, a_n\}$ и $L_1, \ldots, L_n$ — произвольные языки, то

$$S(L;\ a_1, \ldots, a_n \mid L_1, \ldots, L_n)=$$
$$=\{x_{i_1} \ldots x_{i_k} \mid a_{i_1} \ldots a_{i_k} \in L \& x_{i_1} \in L_{i_1} \& \ldots$$
$$\ldots \& x_{i_k} \in L_{i_k}\};$$

если каждый из языков L_i, $i=1, \ldots, n$, состоит из одной цепочки z_i, подстановка наз. *гомоморфизмом*; если при этом все z_i непусты, говорят о неукорачивающем гомоморфизме. Если язык $\{x\}$ состоит из одной цепочки x, то вместо $\{x\}L$, $\{x\}\backslash L$ и т. п. пишут xL, $x\backslash L$ и т. д. соответственно.

Многообразием языков наз. упорядоченная пара $(\mathcal{E}, \mathcal{L})$ (или $\mathcal{L}$, если $\mathcal{E}$ подразумевается), где $\mathcal{E}$ — бесконечный алфавит, а $\mathcal{L}$ — класс языков такой, что: 1) для каждого $L \in \mathcal{L}$ существует конечный алфавит $\Sigma \subset \mathcal{E}$ такой, что $L \subset \Sigma^*$; 2) $L \neq \varnothing$ для нек-рого $L \in \mathcal{L}$; 3) $\mathcal{L}$ замкнут относительно объединения, умножения, пересечения с регулярными множествами, усеченной итерации, неукорачивающих гомоморфизмов и обращений произвольных гомоморфизмов. Многообразие языков, замкнутое относительно произвольных гомоморфизмов, наз. полным.

Лит.: [1] Гладкий А. В., Формальные грамматики и языки, М., 1973; [2] Ginsburg S., Greibach S., Hopcroft Y., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1969, № 87, p. 1—32.

А. В. Гладкий.

ФОРМАЛЬНЫЙ ЯЗЫК, ПРЕДСТАВИМЫЙ МАШИНОЙ, формальный язык, распознаваемый машиной,— множество всех тех *слов*, при работе над к-рыми машина попадает в одно из выделенных состояний. Всякое рекурсивно перечислимое множество слов есть формальный язык (ф. я.), представимый нек-рой *Тьюринга машиной*. Чаще всего рассматривают распознавание машинами рекурсивных ф. я. Так, регулярные языки и только они распознаются *автоматами конечными*; контекстно-свободные языки и только они распознаются автоматами с магазинной памятью.

В том случае, когда ф. я. состоит из бесконечных слов (сверхслов), он наз. сверхъязыком. Определение распознавания сверхъязыка на машине может отличаться от основного определения. Напр., слово x принадлежит сверхъязыку, распознаваемому конечным автоматом $\mathfrak{A}$, тогда и только тогда, когда при работе над словом x автомат $\mathfrak{A}$ бесконечное число раз попадает в выделенное подмножество состояний.

При изучении конкретных ф. я., заданных не в машинных терминах (напр., посредством формальных *грамматик*), часто возникает потребность нек-рым образом охарактеризовать сложность языка. Одним из наиболее распространенных путей в этом направлении является отыскание подходящего класса машин, распознающих рассматриваемые языки, и определение сложности языков через сложностные характеристики машин. С другой стороны, изучение конкретного класса машин, как правило, включает описание Ф. я., п. м. этого класса. Дальнейшее исследование Ф. я., п. м. затрагивает вопросы соотношения с известными классами языков, свойства замкнутости (относительно теоретико-множественных операций и т. п.), вопросы алгоритмического и сложностного характеров.

Лит.: [1] Языки и автоматы. Сб. переводов, М., 1975.

С. С. Марченков.

ФОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ — отношение между формальными системами, состоящее в том, что множества выражений, выводимых в этих системах совпадают. Точнее, две формальные системы S_1 и S_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: 1) всякая аксиома системы S_1 выводима в системе S_2; 2) всякая аксиома системы S_2 выводима в системе S_1; 3) если выражение B непосредственно следует из выражений $A_1, \ldots, A_n$ в силу одного из правил вывода системы S_1 и выражения $A_1, \ldots, A_n$ выводимы в системе S_2, то B также выводимо в системе S_2; 4) аналогично 3) с заменой S_1 на S_2 и S_2 на S_1.

В. Е. Плиско.

ФОРМУЛА — выражение *формализованного языка*, предназначенное для записи суждения. Примеры точного определения понятия Ф. в различных формализованных языках см. в ст. *Аксиоматическая теория множеств*, *Арифметика формальная*, *Предикатов исчисление*, *Типов теория*. В математич. практике Ф. наз. также осмысленные комбинации символов, несущие разнообразную смысловую нагрузку. Они могут быть как именными, так и высказывательными формами, определениями-сокращениями и пр.

В. Н. Гришин.

ФОРТРАН (от ФОРмульный ТРАНслятор) — первоначально язык программирования задач вычислительной математики, разработанный в 1954—56 для машины ИБМ 704 и в версии Ф. II ставший первым в мире широко распространенным *алгоритмическим языком*.

Позднее под Ф. стали понимать семейство языков программирования, восходящих к Ф. II, прямо или косвенно претендующих на роль его преемника и сохраняющих название Ф. Большинство из них построено как расширение одного из двух стандартов (1962—64): Basic Fortran и Ф. IV и сходится в следующем.

Ф. предоставляет средства изображения, ввода и вывода арифметических, логических и текстовых данных. Арифметич. данные включают целые, действительные (обыкновенной и повышенной точности) и обычно также комплексные числа. Над арифметич. значениями определен обычный набор операций и отношений. Такие значения можно запоминать в скалярных переменных или элементах однородных массивов (таблиц) того же типа.

Программа состоит из «ведущей программы» и набора подпрограмм (*процедур*), причем возможна их раздельная трансляция. Изменение текстуального порядка исполнения осуществляется посредством простых и вычисляемых переходов по метке, условных операторов, циклов и вызовов процедур.

Подпрограммы передают друг другу информацию через свои параметры и общие блоки памяти (COMMON blocks). Так как рекурсивные вызовы запрещены, а границы массивов константны, часть действий по

доступу к элементам массивов может быть подготовлена при трансляции, что значительно ускоряет счет по готовой программе.

Можно сказать, что главная особенность Ф. заключена не в самом языке, а в той уникальной роли, к-рую он обеспечил себе в мировом программировании. Из «математического автокода» для ИБМ 704 он путем эволюции, напоминающей эволюцию естественных языков, превратился в самый распространенный язык программирования. Наличие хотя бы одной реализации Ф. стало практически обязательным для всякой ЭВМ общего назначения.

В этой эволюции Ф. удержал ряд особенностей автокодов, важных для удобства программирования или использования программы,— таких, как составные константы (DATA) и раздельная трансляция. Они способствовали накоплению огромных библиотек написанных на Ф. подпрограмм по численным методам анализа, статистике, машинной графике, инженерным расчетам и т. д.

В то же время Ф. сохранил весьма архаичный синтаксис. Группировку операторов (напр., в циклах) обеспечивают метки, что не только затемняет программу, но и ослабляет синтаксич. контроль. Поскольку описания идентификаторов необязательны, помехоустойчивость Ф. очень низка. Напр., если в типичном цикле

$$DO\ 2I = 1{,}100$$

$$2\ A(I,\ J) = 0$$

пропустить любую запятую или заменить первую из них точкой, ошибка обнаружена не будет. Это снижает достоверность программ на Ф. и составляет важнейший недостаток языка. Отчасти он преодолен в новых стандартах (напр., в Ф. 77).

Лит.: [1] Мак-Кракен Д., Дорн У., Численные методы и программирование на ФОРТРАНе, пер. с англ., 2 изд., М., 1977; [2] Грунд Ф., Программирование на языке ФОРТРАН IV, пер. с нем., М., 1976; [3] Катцан Г., Язык Фортран 77, пер. с англ., М., 1982. *С. Б. Покровский.*

ФОССА ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, несущая *Фосса сеть*.

ФОССА СЕТЬ — сопряженная *геодезическая сеть*. Поверхность, несущая Ф. с., наз. поверхностью Фосса. На минимальной поверхности Ф. с. является изотропной сетью. Каждая Ф. с. на двумерной поверхности является главным основанием изгибания поверхности. Только геликоид несет бесконечное множество Ф. с. Вопрос о существовании поверхностей, несущих Ф. с., был поставлен А. Фоссом [1].

Лит.: [1] Voss A., «Sitzungsber. math.-naturwiss. Kl. Bayerischen Akad. Wiss. München», 1888, № 18, S. 95—102; [2] Фиников С. П., Изгибание на главном основании, М.— Л., 1937. *В. Т. Базылев.*

ФРАГМЕНА — ЛИНДЕЛЁФА ТЕОРЕМА — обобщение *максимума модуля принципа* аналитич. функций на случай функций, априори заданных как неограниченные; впервые в простейшей форме дано Э. Фрагменом и Э. Линделёфом [1]. Пусть $f(z)$ — регулярная аналитич. функция комплексного переменного z в области D на плоскости $\mathbb{C}$ с границей Γ. Говорят, что $f(z)$ не превосходит по модулю числа M в граничной точке $\zeta \in \Gamma$, если

$$\lim_{z \to \zeta} \sup_{z \in D} |f(z)| \leqslant M,$$

т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ найдется круг Δ (зависящий от ζ и ε) с центром ζ такой, что $|f(z)| < M + \varepsilon$ при $z \in D \cap \Delta$. Основное содержание результатов Э. Фрагмена и Э. Линделёфа, в несколько модернизированной форме, заключается в следующих двух положениях, последовательно расширяющих принцип максимума модуля.

1. Если регулярная аналитич. функция $f(z)$ всюду на границе Γ не превосходит по модулю числа M, то

$|f(z)| \leqslant M$ всюду в области D. Это положение иногда называют принципом Фрагмена — Линделёфа. Оно расширяет принцип максимума модуля на функции, о граничном поведении к-рых имеется лишь частичная информация.

II. Пусть регулярная аналитич. функция $f(z)$ не превосходит по модулю числа M во всех точках границы Γ, не принадлежащих нек-рому множеству $E \subset \Gamma$. Пусть, кроме того, существует функция $\omega(z)$ со следующими свойствами: 1) $\omega(z)$ регулярна в D, 2) $|\omega(z)| < 1$ в D, 3) $\omega(z) \neq 0$ в D, 4) для любого $\sigma > 0$ функция $|\omega(z)|^\sigma |f(z)|$ не превосходит числа M в каждой точке $\zeta \in E$. При этих условиях $|f(z)| \leqslant M$ всюду в D.

Ф.— Л. т. получила многочисленные применения, также часто именуемые теоремами Фрагмена — Линделёфа и связанные с конкретным видом области D, множества E и функции $\omega(z)$ (см. [1] — [4], в частности обобщения Ф.— Л. т. в [4]). Чаще всего в приложениях множество E состоит из одной точки ∞. Напр., пусть функция $f(z)$ регулярна в угловой области

$$D = \{z = re^{i\varphi}: \ |\varphi| < \lambda\pi/2, \ \lambda > 0, \ 0 < r < \infty\} \qquad (*)$$

и на сторонах угла не превосходит по модулю числа M. Тогда имеет место альтернатива: либо

$$|f(z)| \leqslant M$$

всюду в D, либо максимум модуля

$$M(r) = \max\{|f(z)|; \ |z| = r, \ z \in D\}$$

растет быстрее при $r \to \infty$, чем $\exp(r^k)$ при любом k, $0 < k < 1/\lambda$. Эта теорема получается из положений I и II при $\zeta = \infty$, $\omega(z) = \exp(-z^{k'})$, где $k < k' < 1/\lambda$.

Формулировки I и II остаются в силе для голоморфной функции $f(z)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, заданной в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$. Многие работы посвящены получению результатов типа Ф.—Л. т. для решений дифференциальных уравнений с частными производными и систем уравнений эллиптич. типа. Положения I и II остаются верными для *субгармонической функции* $u(P)$, определенной в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, или $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, при условии, что в них $|f(z)|$ заменяется на $u(P)$, а функция $\omega(P)$, $0 < \omega(P) < 1$, предполагается логарифмически-субгармонической в D (см. [5], [6]). Напр., пусть $u(z)$ — субгармоническая функция в угловой области (*) и на сторонах угла не превосходит числа M. Тогда имеет место альтернатива: либо $u(z) \leqslant M$ всюду в D, либо максимум

$$M(r) = \max\{u(z); \ |z| = r, \ z \in D\}$$

растет быстрее, чем r^k при любом k, $0 < k < 1/\lambda$. Аналогичные результаты имеются и для решений других эллиптич. уравнений. Их можно назвать «слабыми» теоремами типа Фрагмена — Линделёфа в том смысле, что в них за счет слабого ограничения на границе только на саму функцию получается довольно слабое утверждение о росте.

В других результатах, к-рые можно назвать «сильными» теоремами типа Фрагмена — Линделёфа, за счет ограничения на границе на саму функцию и ее нормальную производную получается более сильное утверждение о росте. Такова, напр., следующая формулировка для цилиндрич. области

$$D = \{(\rho, \varphi, t); \ 0 \leqslant \rho < a, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \ |t| < \infty\}$$

в $\mathbb{R}^3$. Пусть $u(P)$ — гармонич. функция в цилиндре D и на его боковой поверхности Γ, причем $|u(P)| \leqslant M$ и $|\partial u/\partial n| \leqslant M$ на Γ. Тогда либо $|u(P)| \leqslant M$ всюду в D, либо максимум

$$M(t) = \max\{u(\rho, \varphi, t); \ 0 \leqslant \rho < a, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$$

растет быстрее при $|t| \to \infty$, чем

$$c \cdot \exp\left(\frac{\pi |t|}{e^{2(a+\varepsilon)}}\right),$$

при любом $\varepsilon > 0$, $c > 0$ (см. [5] — [8]).

Лит.: [1] Phragmen E., Lindelöf E., «Acta math.», 1908, v. 31, p. 381—406; [2] Титчмарш Е., Теория функций, пер. с англ., М.— Л., 1951; [3] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1—2, М., 1962; [4] Евграфов М. А., Аналитические функции, 2 изд., М., 1968; [5] Привалов И. И., Субгармонические функции, М.— Л., 1937; [6] Соломенцев Е. Д., в сб.: Итоги науки. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964, с. 83—100; [7] Евграфов М. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1963, т. 27, с. 843—54; [8] Ландис Е. М., Уравнение второго порядка эллиптического и параболического типов, М., 1971.

Е. Д. Соломенцев.

ФРАНКЛИНА СИСТЕМА — одна из классических ортонормированных систем непрерывных функций. Ф. с. $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ (см. [1] или [2]) получается применением процесса ортогонализации Шмидта на отрезке $[0, 1]$ к *Фабера — Шаудера системе*, построенной с помощью множества всех двоично рациональных точек отрезка $[0, 1]$; в этом случае система Фабера — Шаудера с точностью до постоянных множителей совпадает с системой $\left\{1, \int_0^t \chi_n(x)\,dx\right\}$, где $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *Хаара система*. Ф. с. является исторически первым примером *базиса* в пространстве непрерывных функций, обладающего свойством ортогональности. Эта система также является базисом во всех пространствах $L_p[0, 1]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (см. [3]). Если непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция $f(t)$ имеет модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$, а $S_n(t, f)$ — частная сумма порядка n ряда Фурье функции $f(t)$ по системе Франклина, то

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t) - S_n(t, f)| \leqslant 8\omega\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

При этом коэффициенты Фурье — Франклина $a_n(f)$ функции $f(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$|a_n(f)| \leqslant \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{2^m}}\,\omega\left(\frac{1}{2^m}, f\right), \quad n = 2^m + k, \quad k = 1, \ldots, 2^m, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

а условия:

а) $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t) - S_n(t, f)| = O(n^{-\alpha}), \quad n \to \infty,$

б) $a_n(f) = O\left(n^{-\alpha - 1/2}\right), \quad n \to \infty,$

в) $\omega(\delta, f) = O(\delta^{\alpha}), \quad \delta \to +0,$

при $0 < \alpha < 1$ являются равносильными.

Если непрерывная функция $f(t)$ такова, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) < \infty,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f) f_n(t)|$$

сходится на отрезке $[0, 1]$ равномерно, а если

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}\,\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) < \infty,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)| < \infty.$$

Все эти свойства Ф. с. доказываются с помощью неравенства

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \sum_{k=1}^{2^n} |f_{2^n + k}(t)| \leqslant C\sqrt{2^n},$$

$$n = 0, 1, \ldots; \quad C = 2^5\sqrt{3}.$$

Ф. с. является безусловным базисом во всех пространствах $L_p[0, 1]$ $(1 < p < \infty)$ и, более того, во всех рефлексивных пространствах Орлича (см. [5]). Если функция $f(t)$ принадлежит пространству $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, то имеют место неравенства

$$A_p \| f \|_p \leqslant \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2(f) f_k^2(t) \right)^{1/2} \right\|_p \leqslant B_p \| f \|_p,$$

где $\|\cdot\|_p$ обозначает норму в пространстве $L_p[0, 1]$, а постоянные $A_p > 0$ и $B_p > 0$ зависят лишь от p.

Ф. с. нашла важные приложения в различных вопросах анализа. В частности, с помощью этой системы были построены базисы в пространствах $C^1(I^2)$ (см. [4]) и $A(D)$ (см. [5]). Здесь $C^1(I^2)$ — пространство всех непрерывно дифференцируемых на квадрате $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ функций $f(x, y)$ с нормой

$$\| f \| = \max | f(x, y) | + \max \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \max \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|,$$

а $A(D)$ — пространство всех функций $f(z)$ с нормой

$$\| f \| = \max_{|z| \leqslant 1} | f(z) |,$$

аналитических в открытом круге $D = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости и непрерывных в замкнутом круге $\overline{D} = \{z : |z| \leqslant 1\}$. Вопросы о существовании базисов в пространствах $C^1(I^2)$ и $A(D)$ были поставлены С. Банахом [6].

Лит.: [1] Franklin P., «Math. Ann.», 1928, Bd 100, S. 522—29; [2] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958, с. 144; [3] Ciesielski Z., «Studia math.», 1963, v. 23, № 2, p. 141—57; [4] его же, там же, 1969, v. 33, № 2, p. 243—47; [5] Бочкарев С. В., «Матем. сб.», 1974, т. 95, № 1, с. 3—18; [6] Banach S., Théorie des opérationes linéaires, Warsz., 1932.

Б. И. Голубов.

ФРАТТИНИ ПОДГРУППА — *характеристическая подгруппа* $\Phi(G)$ группы G, определяемая как пересечение всех *максимальных подгрупп* G, если такие существуют; если же максимальных подгрупп в группе G нет, то G сама наз. своей Ф. п. Введена Дж. Фраттини [1]. Ф. п. состоит из тех и только тех элементов группы G, каждый из к-рых может быть удален из любой, содержащей его системы образующих группы, т. е.

$$\Phi(G) = \{x \mid x \in G,\ \{x,\ M\} = G \Rightarrow \{M\} = G\}.$$

Конечная группа тогда и только тогда нильпотентна, когда ее коммутант содержится в ее Ф. п. Для любой конечной и любой полициклич. группы G подгруппа $\Phi(G)$ нильпотентна.

Лит.: [1] Frattini G., «Atti Accad. Lincei, Rend. (IV)», 1885, t. 1, p. 281—85; [2] Курош А. Г., Теория групп, 2 изд., М., 1967.

Н. Н. Вильямс.

ФРЕДГОЛЬМА АЛЬТЕРНАТИВА — альтернативное утверждение, вытекающее из *Фредгольма теорем*. В случае линейного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s)\, ds = f(x),\ x \in [a, b], \quad (1)$$

Ф. а. утверждает: либо уравнение (1) и сопряженное с ним уравнение

$$\psi(x) - \overline{\lambda} \int_a^b \overline{K(s, x)}\, \psi(s)\, ds = g(x),\ x \in [a, b], \quad (2)$$

имеют единственные решения φ, ψ, каковы бы ни были известные функции f, g, либо соответствующие однородные уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s)\, ds = 0, \quad (1')$$

$$\psi(x) - \overline{\lambda} \int_a^b \overline{K(s, x)}\, \psi(s)\, ds = 0 \quad (2')$$

имеют ненулевые решения, причем число линейно независимых решений конечно и одинаково для обоих уравнений.

Во втором случае для того чтобы уравнение (1) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_a^b f(x)\,\overline{\psi_k(x)}\,dx = 0,\ k = 1,\ \ldots,\ n,$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — полная система линейно независимых решений уравнения (2′). При этом общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi_*(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x),$$

где φ_k — какое-нибудь решение уравнения (1), $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — полная система линейно независимых решений уравнения (1′), c_k — произвольные постоянные. Сходные утверждения имеют место и для уравнения (2).

Пусть T — непрерывный линейный оператор, отображающий банахово пространство E в себя; E^*, T^* — соответствующие сопряженные пространство и оператор. Рассматриваются уравнения:

$$T(x) = y,\ x,\ y \in E, \tag{3}$$

$$T^*(g) = f,\ g,\ f \in E^*, \tag{4}$$

$$T(x) = 0,\ x \in E, \tag{3′}$$

$$T^*(g) = 0,\ g \in E^*. \tag{4′}$$

Справедливость Ф. а. для оператора T означает следующее: 1) либо уравнения (3) и (4) разрешимы, каковы бы ни были их правые части, и тогда их решения единственны; 2) либо однородные уравнения (3′) и (4′) имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений $x_1, \ldots, x_n$ и $g_1, \ldots, g_n$ соответственно; в этом случае для разрешимости уравнения (3) соответственно уравнения (4), необходимо и достаточно, чтобы $g_k(y) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, соответственно $f(x_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$; при этом общее решение уравнения (3) дается равенством

$$x = x^* + \sum_{k=1}^{n} c_k x_k,$$

а общее решение уравнения (4) — равенством

$$g = g^* + \sum_{k=1}^{n} c_k g_k,$$

где x^* (соответственно g^*) — какое-нибудь решение уравнения (3) (уравнения (4)), а $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные.

Каждое из следующих двух условий необходимо и достаточно, чтобы для оператора T имела место Ф. а. 1) Оператор T представим в форме

$$T = W + V,$$

где W — оператор, имеющий двусторонний непрерывный обратный, а V — вполне непрерывный оператор, 2) оператор T представим в форме

$$T = W_1 + V_1,$$

где W_1 — оператор, имеющий двусторонний непрерывный обратный, а V_1 — конечномерный оператор.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, ч. 1, 6 изд., М., 1974; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977. *Б. В. Хведелидзе.*

ФРЕДГОЛЬМА ОПЕРАТОР — линейный оператор, отображающий одно *локально выпуклое пространство* в другое и ядерный оператор относительно *Макки топологии* в этих пространствах. *А. Б. Бакушинский.*

ФРЕДГОЛЬМА ТЕОРЕМЫ для интегральных уравнений:

Теорема 1. Однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds = 0 \tag{1}$$

и союзное с ним уравнение

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b K(s,\ x)\psi(s)\,ds=0 \qquad (2)$$

при фиксированном значении параметра λ имеют либо лишь тривиальные решения, либо одинаковое конечное число линейно независимых решений: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$; $\psi_1, \ldots, \psi_n$.

Теорема 2. Для разрешимости неоднородного уравнения

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\,ds=f(x) \qquad (3)$$

необходимо и достаточно, чтобы его правая часть была ортогональна полной системе линейно независимых решений соответствующего однородного союзного уравнения (2):

$$\int_a^b f(x)\psi_j(x)\,dx=0,\ j=1,\ \ldots,\ n. \qquad (4)$$

Теорема 3 (альтернатива Фредгольма). Либо неоднородное уравнение (3) разрешимо, какова бы ни была его правая часть f, либо соответствующее однородное уравнение (1) имеет ненулевые решения.

Теорема 4. Множество характеристических чисел уравнения (1) не более чем счетно, с единственной возможной предельной точкой на бесконечности.

Для справедливости Ф. т. в функциональном пространстве $L_2(a,\ b)$ достаточно, чтобы ядро K уравнения (3) было интегрируемым с квадратом на множестве $[a,\ b]\times[a,\ b]$ (a, b могут быть и бесконечными). Когда это условие нарушается, уравнение (3) может оказаться *нефредгольмовым интегральным уравнением*. Когда параметр λ и функции, участвующие в уравнении (3), принимают комплексные значения, тогда взамен союзного уравнения (2) часто рассматривают сопряженное к (1) уравнение

$$\psi(x)-\bar{\lambda}\int_a^b \overline{K(s,\ x)}\psi(s)\,ds=0.$$

В этом случае условие (4) заменяется условием

$$\int_a^b f(x)\,\overline{\psi_j(x)}\,dx=0,\ j=1,\ \ldots,\ n.$$

Теоремы доказаны Э. Фредгольмом [1].

Лит.: [1] Fredholm E. I., «Acta math.», 1903, v. 27, p. 365—390.

Б. В. Хведелидзе.

ФРЕДГОЛЬМА УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение вида

$$\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\,ds=f(x),\ x\in[a,\ b],$$

— Ф. у. 1-го рода, или вида

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\,ds=f(x),\ x\in[a,\ b], \qquad (1)$$

— Ф. у. 2-го рода, если интегральный оператор

$$K\varphi(x)=\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\,ds,\ x\in[a,\ b], \qquad (2)$$

является вполне непрерывным в нек-ром функциональном пространстве E. Предполагается, что свободный член f и искомая функция φ принадлежат пространству E. Важным примером Ф. у. является уравнение, в к-ром ядро K удовлетворяет условию

$$B^2=\int_a^b\int_a^b |K(x,\ s)|^2\,dx\,ds<\infty, \qquad (3)$$

а $E=L_2([a,\ b])$.

Численный параметр λ и функции f, φ, K могут принимать как действительные, так и комплексные значения. О Ф. у. 1-го рода см. *Интегральное уравнение с симметричным ядром* и *Некорректные задачи*. Ниже рассматриваются лишь Ф. у. 2-го рода.

Метод последовательных приближений решения Ф. у. 2-го рода. Это — первый метод, к-рый был предложен для решения уравнения (1). Для формулировки этого метода пусть уравнение (1) записано в виде

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda K\varphi(x),\ x\in[a,\ b]. \qquad (4)$$

Предполагается, что ядро K удовлетворяет условию (3), а $E=L_2([a,\ b])$. Пусть начальное приближение искомого решения $\varphi_0=f$; если $(n-1)$-е приближение φ_{n-1} построено, то

$$\varphi_n=f+\lambda K\varphi_{n-1};$$

при этом

$$\varphi_n=\sum_{m=0}^{n}\lambda^m K_m f, \qquad (5)$$

где K_m обозначает m-е итерированное ядро ядра K. Функция (5) является частичной суммой ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m K_m f, \qquad (6)$$

к-рый наз. рядом Неймана (или рядом Лиувилля — Неймана). Если $|\lambda|<B^{-1}$, то ряд (6) сходится в среднем к решению уравнения (1), и это решение — единственное (см., напр., [5]). Если существует такая положительная постоянная A, что

$$\int_a^b |K(x,\ s)|^2\,ds\leqslant A,\ \ x\in[a,\ b],$$

то ряд (6) сходится абсолютно и равномерно. Вообще говоря, ряд (6) расходится, если $|\lambda|\geqslant B^{-1}$. Именно, это так, если ядро K имеет характеристич. число. Если же ядро не имеет характеристич. чисел (как, напр., в случае ядра Вольтерра), то ряд (6) сходится при любом значении λ.

Метод Фредгольма решения Ф. у. 2-го рода. Метод последовательных приближений дает возможность построить решение уравнения (1), вообще говоря, лишь при малых значениях параметра λ. Метод, дающий возможность решить уравнение (1) для любого значения параметра λ, был впервые предложен Э. Фредгольмом (E. Fredholm, 1903). В предположении, что ядро K непрерывно на квадрате $[a,\ b]\times[a,\ b]$, а свободный член и искомое решение непрерывны на сегменте $[a,\ b]$, ниже кратко описана идея этого метода.

Отрезок $[a,\ b]$ делится на n равных частей длины $h=(b-a)/n$. Если заменить интеграл в (1) интегральной суммой, то точное уравнение (1) заменяется приближенным

$$\varphi(x)-\lambda h\sum_{j=1}^{n}K(x,\ s_j)\varphi(s_j)=f(x),\ x\in[a,\ b]. \qquad (7)$$

Полагая в (7) последовательно $x=s_1,\ \ldots,\ s_n$ для определения приближенного значения неизвестной функции φ в точках s_j, получают линейную алгебраич. систему

$$\varphi_i-\lambda h\sum_{j=0}^{n}K_{ij}\varphi_j=f_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (8)$$

где $f(s_i)=f_i$, $\varphi(s_i)=\varphi_i$, $K(s_i,\ s_j)=K_{ij}$. Разрешимость системы (8) зависит от значения определителя

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda hK_{11} & -\lambda hK_{12} & \ldots & -\lambda hK_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -\lambda hK_{n1} & -\lambda hK_{n2} & \ldots & 1-\lambda hK_{nn}\end{vmatrix},$$

к-рый является многочленом относительно λ. Если λ

отличен от корней этого многочлена, то система (8) разрешима. Решив эту систему и подставив полученные значения $\varphi_i=\varphi(s_j)$ в (7), получают приближенное решение уравнения (1)

$$\varphi(x)\approx f(x)+\lambda\frac{Q(x,\ s_1,\ \ldots,\ s_n;\ \lambda)}{\Delta(\lambda)}, \qquad (9)$$

где Q и Δ — многочлены относительно λ. Приведенный путь является одним из возможных вариантов построения приближенного решения Ф. у. (1) (см. [6]).

Можно ожидать, что в пределе, когда $n\to\infty$ так, что интегральная сумма в (7) совпадает с интегралом в (1), предел правой части в (9) совпадает с точным решением уравнения (1). С помощью формальных переходов к пределам в соответствующих выражениях Э. Фредгольм установил формулу, к-рая должна представлять решение уравнения (1)

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,\ s;\ \lambda)\,f(s)\,ds, \qquad (10)$$

где

$$R(x,\ s;\ \lambda)=D(x,\ s;\ \lambda)/D(\lambda), \qquad (11)$$

$$D(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}A_m\lambda^m, \qquad (12)$$

$$D(x,\ s;\ \lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}B_m(x,\ s)\,\lambda^m, \qquad (13)$$

$$A_m=\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m\\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m\end{pmatrix}ds_1\ \ldots\ ds_m, \qquad (14)$$

$$B_m(x,\ s)=\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}x,\ s_1,\ \ldots,\ s_m\\ s,\ s_1,\ \ldots,\ s_m\end{pmatrix}ds_1\ldots ds_m, \qquad (15)$$

$$K\begin{pmatrix}x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}K(x_1,s_1)\,K(x_1,s_2)\ldots K(x_1,s_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ K(x_n,s_1)\,K(x_n,s_2)\ldots K(x_n,s_n)\end{vmatrix}.$$

Для вычисления A_m и $B_m(x,\ s)$ вместо формул (14), (15) можно воспользоваться следующими рекуррентными соотношениями:

$$A_0=1,\quad B_0(x,\ s)=K(x,\ s),\quad A_m=\int_a^b B_{m-1}(s,\ s)\,ds,$$

$$B_m(x,\ s)=K(x,\ s)\,A_m-m\int_a^b K(x,\ t)\,B_{m-1}(t,\ s)\,dt,$$

$$m=1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Ряды (12) и (13) наз. р я д а м и Ф р е д г о л ь м а. Функцию $D(\lambda)$ наз. о п р е д е л и т е л е м Ф р е д г о л ь м а ядра K, функцию $D(x,\ s;\ \lambda)$ — п е р в ы м м и н о р о м Ф р е д г о л ь м а для $D(\lambda)$, а функцию (11) — р е з о л ь в е н т о й (или р а з р е ш а ю щ и м я д р о м, или в з а и м н ы м я д р о м) ядра K (или уравнения (1)).

Обоснование упомянутых выше предельных переходов, к-рые приводят к формуле (10), было сделано Д. Гильбертом (см. *Интегральное уравнение*). Э. Фредгольм, построив формально ряды (12), (13), затем непосредственно строго доказал, что они сходятся для всех конечных значений параметра λ, а ряд (13), кроме того, сходится равномерно по x и s на квадрате $[a,\ b]\times[a,\ b]$. Установление связи между функциями $D(\lambda)$ и $D(x,\ s;\ \lambda)$ позволило ему доказать следующее предложение: если $D(\lambda)\neq 0$, то уравнение (1) имеет одно и только одно решение, к-рое выражается формулой (10).

Из этого предложения вытекает, что значение параметра λ, которое не является корнем определителя Фредгольма, есть регулярное значение для однородного уравнения, соответствующего уравнению (1):

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds=0,\quad x\in[a,\ b], \qquad (1_0)$$

т. е. это уравнение в рассматриваемом случае имеет лишь нулевое решение. Если λ — корень уравнения

$D(\lambda)=0$, то λ есть полюс резольвенты (11) уравнения (1_0) и характеристич. число этого последнего уравнения. Чтобы построить по методу Фредгольма собственные функции, принадлежащие этому характеристическому числу, вводится понятие p-го минора $D(\lambda)$. Пусть

$$B_0\begin{pmatrix}x_1, & \ldots, & x_p\\ s_1, & \ldots, & s_p\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}x_1, & \ldots, & x_p\\ s_1, & \ldots, & s_p\end{pmatrix},$$

$$B_m\begin{pmatrix}x_1, \ldots, x_p\\ s_1, \ldots, s_p\end{pmatrix}=\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}x_1, \ldots, x_p, t_1, \ldots, t_m\\ s_1, \ldots, s_p, t_1, \ldots, t_m\end{pmatrix}\times$$
$$\times\, dt_1\ldots dt_m.$$

Тогда p-м и н о р о м для $D(\lambda)$ наз. ряд

$$D\begin{pmatrix}x_1, & \ldots, & x_p\\ s_1, & \ldots, & s_p\end{pmatrix};\ \lambda\Bigg)=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}B_m\begin{pmatrix}x_1, \ldots, x_p\\ s_1, \ldots, s_p\end{pmatrix}\lambda^{m+p}, \qquad (16)$$

к-рый при $p=1$ обращается в $D(x, s; \lambda)$. Ряд (16) сходится абсолютно для всех конечных значений λ и равномерно относительно $x_1, \ldots, x_p, s_1, \ldots, s_p$, удовлетворяющих неравенствам $a\leqslant x_n\leqslant b$, $a\leqslant s_n\leqslant b$, $k=1, \ldots, p$. Пусть теперь λ_0 есть характеристич. число ядра K; $D(\lambda_0)=0$, $\lambda_0\neq 0$, так как $D(0)=1$. Пусть r — кратность корня λ_0 уравнения $D(\lambda_0)=0$. Существует такое натуральное число $q\leqslant r$, что все миноры для $D(\lambda_0)$, порядок к-рых меньше q, тождественно равны нулю, а минор порядка q отличен от нуля. Существует нек-рая совокупность значений $x_1', \ldots, x_q', s_1', \ldots, s_q'$ таких, что

$$D\begin{pmatrix}x_1', & \ldots, & x_q'\\ s_1', & \ldots, & s_q'\end{pmatrix};\ \lambda_0\Bigg)\neq 0.$$

Число q наз. р а н г о м характеристич. числа λ_0. Функции

$$\varphi_k(x)=\frac{D\begin{pmatrix}x_1', \ldots, x_{k-1}', x, x_{k+1}', \ldots, x_q'\\ s_1', \ldots, s_{k-1}', s_k', s_{k+1}', \ldots, s_q'\end{pmatrix};\ \lambda_0\Bigg)}{D\begin{pmatrix}x_1', & \ldots, & x_q'\\ s_1', & \ldots, & s_q'\end{pmatrix};\ \lambda_0\Bigg)} \qquad (17)$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (1_0).

Пусть характеристич. числу λ_0 принадлежат собственные функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$. Эти функции наз. п о л н о й с и с т е м о й с о б с т в е н н ы х ф у н к ц и й уравнения (1_0) (или ядра K), принадлежащих числу λ_0, если любая другая собственная функция, принадлежащая этому числу, есть линейная комбинация функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$.

Если λ_0 является характеристич. числом однородного уравнения (1_0) с рангом q, то оно будет также собственным значением с рангом q и для союзного с (1_0) уравнения

$$\psi(x)-\lambda_0\int_a^b K(s, x)\psi(s)\,ds=0, \qquad (1_0')$$

причем полная система собственных функций уравнения (1_0) определяется формулами (17), а для уравнения $(1_0')$ — аналогичными формулами, построенными для союзного ядра $K(s, x)$.

Если λ_0 — характеристич. число ядра K с рангом q, то уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда, когда удовлетворяются условия:

$$\int_a^b f(t)\psi_k(t)\,dt=0, \quad k=1, 2, \ldots, q, \qquad (18)$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_q$ составляют полную систему собствен-

ных функций уравнения $(1_0')$. Если условия (18) выполняются, то все решения уравнения (1) определяются формулой

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^b H(x,\ s)\,f(s)\,ds+\sum_{k=1}^{q} c_k\varphi_k(x),$$

где $c_1,\ \ldots,\ c_q$ — произвольные постоянные, $\{\varphi_k\}$ — полная система собственных функций однородного уравнения (1_0), а функция H определяется равенством

$$H(x,\ s)=\frac{D\begin{pmatrix} x,\ x_1',\ \ldots,\ x_q' \\ s,\ s_1',\ \ldots,\ s_q' \end{pmatrix};\ \lambda_0}{D\begin{pmatrix} x_1',\ \ldots,\ x_q' \\ s_1',\ \ldots,\ s_q' \end{pmatrix};\ \lambda_0}.$$

Непрерывное ядро K имеет не более счетного множества характеристич. чисел, к-рые могут иметь предельную точку только при $\lambda=\infty$.

Сформулированные выше предложения для уравнения (1) называются *Фредгольма теоремами*. Эти теоремы Э. Фредгольм распространил на случай системы таких же уравнений, а также на случай одного класса ядер со слабой особенностью (см. *Интегральный оператор*).

Из сопоставления теорем Фредгольма вытекает *Фредгольма альтернатива*.

Часто в теоремах Фредгольма вместо союзного уравнения $(1_0')$ рассматривают сопряженное с (1) уравнение

$$\psi(x)-\overline{\lambda_0}\int_a^b \overline{K(s,\ x)}\,\psi(s)\,ds=0.$$

В этом случае условия (18) заменяются условиями

$$\int_a^b f(t)\,\overline{\psi_k(t)}\,dt=0,\quad k=1,\ \ldots,\ q.$$

Изложенный выше метод Фредгольма был обобщен Т. Карлеманом [9] (см. также [7], [11]) на случай, когда f, φ, K в уравнении (1) предполагаются интегрируемыми с квадратом функциями. В этих предположениях справедливы сформулированные выше результаты Фредгольма.

Кроме метода последовательных приближений и метода Фредгольма для решения Ф. у., Э. Шмидт (E. Smidt) под влиянием исследований Д. Гильберта разработал метод, основой к-рого является построение, независимо от теории Фредгольма, теории уравнения (1) с симметричным действительным ядром.

Исследования Д. Гильберта и Э. Шмидта подготовили почву для абстрактного изложения теории Фредгольма. Д. Гильберт обратил внимание на то, что теория Фредгольма в основном опирается на свойство т. н. полной непрерывности интегрального преобразования с ядром K. Это свойство Д. Гильберт сформулировал для билинейных форм. Ф. Рисс (см. [8]) показал, что основные результаты теории Фредгольма остаются в силе, если в уравнении (1) интегральный оператор заменить произвольным вполне непрерывным оператором, действующим в полном функциональном пространстве. Исследования Ф. Рисса были пополнены Ю. Шаудером (см. [10]) с помощью введения понятия сопряженного оператора в банаховом пространстве, что и дало возможность окончательной абстрактной формулировки в пространствах Банаха аналогов теорем Фредгольма. Эти теоремы часто наз. т е о р е м а м и Р и с с а — Ш а у д е р а. Оператор V, участвующий в нижеприведенных формулировках этих теорем, предполагается действующим в банаховом пространстве E; через E^* обозначено банахово пространство, сопряженное с E, а через V^* — сопряженный оператор.

Т е о р е м а 1. Однородное уравнение

$$\varphi-V\varphi=0,\quad \varphi\in E, \tag{19}$$

и сопряженное с ним уравнение

$$\psi - V^*\psi = 0, \quad \psi \in E^*, \tag{20}$$

имеют лишь нулевые решения или одинаковое конечное число линейно независимых решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$, $\psi_1, \ldots, \psi_q$.

Теорема 2. Для разрешимости неоднородного уравнения

$$\varphi - \lambda V\varphi = f, \quad f, \varphi \in E, \tag{21}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_k(f) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, q$; если эти условия выполнены и φ_0 — какое-либо решение уравнения (21), то его общее решение имеет вид

$$\varphi_0 + \sum_{k=1}^{q} c_k \varphi_k,$$

где c_k — произвольные постоянные.

Теорема 3. Каково бы ни было $r \neq 0$, круг $|\lambda| \leqslant r$ содержит разве лишь конечное число характеристических значений оператора V, т. е. значений λ, для к-рых уравнение $\varphi - \lambda V = 0$ имеет отличные от нуля решения.

Эти теоремы дают возможность обосновать справедливость теорем Фредгольма для уравнения (1) в случае различных конкретных классов интегрального оператора (2). Напр., если заданные и искомая функции интегрируемы с квадратом.

В качестве области интегрирования вместо отрезка $[a, b]$ в уравнении (1) можно рассматривать нек-рое ограниченное или неограниченное измеримое множество D в пространстве любого числа измерений. Вместо обычного интеграла можно брать интеграл Стилтьеса относительно неотрицательной меры.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 6 изд., т. 4, ч. 1, М., 1974; [2] Гурса Э., Курс математического анализа, т. 3, ч. 2, пер. с франц., М.—Л., 1934; [3] Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 3 изд., М., 1965; [4] Ловитт У., Линейные интегральные уравнения, пер. с англ., М., 1957; [5] Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959; [6] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.—Л., 1962; [7] Михлин С. Г., «Докл. АН СССР», 1944, т. 42, № 9, с. 387—90; [8] Riesz F., «Acta math.», 1918, v. 41, p. 71—98; рус. пер.: «Успехи матем. наук», 1936, в. 1, с. 175—99; [9] Carleman T., «Math. Z.», 1921, Bd 9, S. 196—217; [10] Schauder J., «Studia Math.», 1930, № 2, p. 183—96; [11] Smithies F., «Duke Math. J.», 1941, № 8, p. 107—30.

Б. В. Хведелидзе.

ФРЕДГОЛЬМА УРАВНЕНИЕ; численные методы решения — методы приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, сводящиеся к выполнению конечного числа действий над числами.

Пусть

$$\varphi(x) - \lambda \int_D K(x, s)\varphi(s)\, ds = f(x) \tag{1}$$

— интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода, где λ — комплексное число, $f(x)$ — известная вектор-функция, $\varphi(x)$ — искомая вектор-функция, $K(x, s)$ — ядро уравнения (1), D — область в нек-ром m-мерном евклидовом пространстве. Ниже предполагается, что λ не принадлежит спектру интегрального оператора с ядром K (т. е. при данном λ уравнение (1) имеет единственное решение в нек-ром функциональном классе, соответствующем гладкости K). Выражение (1) естественно включает случай системы Ф. у.

Для общего описания проблем конструирования и исследования численных методов решения Ф. у. 2-го рода используется язык функционального анализа. Интегральное уравнение (1) можно записать как линейное операторное уравнение

$$(E - \lambda A)\varphi = f, \tag{2}$$

где φ — искомый элемент нек-рого банахова пространства Φ, f — заданный элемент пространства Φ, A — линейный ограниченный оператор из Φ в Φ. Оператор $E - \lambda A$ предполагается действующим обратимо из Φ в

Ф. Схема любого численного метода решения уравнения (1) состоит в следующем. Пусть $\tilde{\Phi}$, вообще говоря, отличное от Ф банахово пространство, нек-рым образом связанное с Ф, $\tilde{A}$ — линейный оператор из $\tilde{\Phi}$ в $\tilde{\Phi}$. Уравнение

$$(E-\lambda\tilde{A})\,\tilde{\varphi}=\tilde{f} \qquad (3)$$

наз. аппроксимирующим уравнением для (2). Обычно аппроксимирующий оператор $\tilde{A}$ подбирается так, чтобы либо было возможно непосредственное вычисление $\tilde{\varphi}$ из (3), либо (более общо) можно было бы найти приближенное решение (3) вида

$$\tilde{\tilde{\varphi}}=\psi(\tilde{A},\ \tilde{f}) \qquad (4)$$

так, чтобы правую часть (4) можно было вычислить за конечное число арифметич. действий. Выражение $\psi(\tilde{A},\ \tilde{f})$ означает проведение нек-рых действий над $\tilde{A}$ и $\tilde{f}$, в частности ψ может быть просто операторной функцией от $\tilde{A}$ (напр., $\psi(\tilde{A},\ \tilde{f})=(E-\tilde{A})^{-1}\tilde{f}$). Выбор $\tilde{A}$, ψ и $\tilde{f}$, а также пространства $\tilde{\Phi}$ прежде всего подчинен требованию близости (в каком-либо смысле) $\tilde{\tilde{\varphi}}$ и точного решения φ уравнения (1), (2) и, вообще говоря, неоднозначен. Точно также для конкретного численного метода (конкретной формулы аппроксимации для A) выбор пространства $\tilde{\Phi}$ также неоднозначен. Конкретный выбор Ф и $\tilde{\Phi}$ диктуется требованиями «близости» $\tilde{\tilde{\varphi}}$ и φ, также удобствами исследования. Специфика численных методов решения Ф. у. 2-го рода заключена в основном именно в той или иной конкретной аппроксимации оператора A при помощи $\tilde{A}$. Поэтому обычно способ аппроксимации и дает название тому или иному методу численного решения уравнения (1).

После того как выбраны Ф, $\tilde{\Phi}$, $\tilde{A}$ и $\tilde{f}$, близость φ и $\tilde{\tilde{\varphi}}$ устанавливается с помощью теорем общей теории приближенных методов решения операторных уравнений.

В случае $\Phi=\tilde{\Phi}$ для установления близости $\tilde{\tilde{\varphi}}$ и φ достаточно показать, что $\|\tilde{A}-A\|$ мала. При подходящем выборе Ф это удается сделать для большинства классич. методов приближенного решения Ф. у. 2-го рода.

В большинстве конкретных методов решение уравнения (3) легко редуцируется к решению системы линейных алгебраич. уравнений; для построения ψ в (4) можно воспользоваться нек-рым алгоритмом решения систем линейных алгебраич. уравнений (см. *Линейная алгебра*; численные методы).

Основные способы построения аппроксимирующих операторов:

Методы квадратурных сумм и их обобщения являются наиболее распространенными методами аппроксимации интегрального оператора A в уравнении (1). Основной из этих методов, применение к-рого возможно в случае непрерывных $K(x,\ s)$, $\varphi(s)$ и $f(x)$, состоит в замене интеграла (по s) в (1) какой-либо квадратурной формулой по сетке узлов $\{s_i\}\in D$.

При этом

$$\tilde{A}y=\sum_{i=1}^{N}a_i^{(N)}K(x,\ s_i)\,y(s_i), \qquad (5)$$

где $a_i^{(N)}$ — коэффициенты квадратурной формулы.

Аппроксимирующее уравнение (3) можно рассматривать как операторное в том же самом пространстве, что и основное уравнение (1) (напр., в пространстве

$C(D)$ непрерывных вектор-функций на D). В этом случае оно будет иметь вид

$$\tilde{\varphi}(x)-\lambda\sum_{i=1}^{N} a_i^{(N)} K(x, s_i)\tilde{\varphi}(s_i)=f(x). \qquad (6)$$

Уравнение (6) редуцируется к системе линейных алгебраич. уравнений относительно $\tilde{\varphi}(s_i)$, $i=1, \ldots, N$:

$$\tilde{\varphi}(s_i)-\lambda\sum_{i=1}^{N} a_i^{(N)} K(s_j, s_i)\tilde{\varphi}(s_i),\ j=1, \ldots, N. \qquad (7)$$

Решение (точное или приближенное) системы (7) дает $\tilde{\tilde{\varphi}}$.

Иногда само уравнение (7) считают аппроксимирующим уравнение (1), тогда уравнение (7) соответствует уравнению (3).

При таком подходе пространство $\tilde{\Phi}$ не совпадает с Φ. Пространство $\tilde{\Phi}$ можно, напр., естественно отождествить с факторпространством Φ по подпространству функций из Φ, обращающихся в нуль в точках $\{s_i\}$, $i=1, \ldots, N$. Метод (5) допускает различные обобщения, к-рыми удобно пользоваться, напр., в случае разрывных $K(x, s)$. В этих обобщенных методах оператор $\tilde{A}$ имеет вид

$$\tilde{A}y=\sum_{i=1}^{N} a_i^{(N)}(x)\, y(s_i), \qquad (5')$$

где $a_i^{(N)}(x)$ — функции, связанные с ядром $K(x, s)$.

См. также *Квадратурных сумм метод*.

Методы замены ядра на близкое используют аппроксимирующий оператор $\tilde{A}$ вида

$$\tilde{A}y=\int_D \tilde{K}(x, s)\, y(s)\, ds,$$

где $\tilde{K}$ — нек-рая функция, близкая к K, но более просто устроенная. Чаще всего $\tilde{K}$ — вырожденное ядро, т. е.

$$\tilde{K}(x, s)=\sum_{i=1}^{N} a_i(x)\, b_i(s). \qquad (8)$$

Уравнение (3) в данном случае — интегральное Ф. у. с вырожденным ядром. Его решение сводится к решению системы линейных алгебраич. уравнений. Однако элементы матрицы полученной системы уравнений будут выражаться интегралами от известных функций и при численном решении их, вообще говоря, нужно аппроксимировать квадратурными суммами.

Существует много способов конкретного выбора $\tilde{K}$ по формуле (8) (см., напр., *полос метод*). Теоретич. исследование близости решений уравнений (3) и (1) в этих методах обычно значительно проще, чем, напр., в методах квадратурных сумм, т. к. в большинстве случаев можно положить $\Phi=\tilde{\Phi}$ и выбор Φ естественно определяется непосредственно постановкой задачи. Близость $\tilde{K}$ и K, как правило, обеспечивает близость A и $\tilde{A}$ по норме Φ. Однако практич. реализация этих методов в большинстве случаев значительно более трудоемка по сравнению с методами квадратурных сумм и их обобщениями.

Проекционные методы приводят к аппроксимирующему уравнению (3) вида $\tilde{\varphi}+PA\tilde{\varphi}=Pf$, причем $\tilde{\Phi}$ — подпространство Φ и P — проектор на это подпространство. Произвол в выборе Φ, $\tilde{\Phi}$ и даже самого P приводит к многочисленным конкретным проекционным методам решения интегральных Ф. у. 2-го рода. Типичным примером проекционного метода является *Галеркина метод*. Для получения конкретных расчетных формул этого метода нужно (если это возможно) интегральное уравнение (1) трактовать как операторное уравнение в гильбертовом пространстве $L_2(D)$ функций, интегрируемых с квадратом в D, и взять в качестве P ортопроектор, сопоставляющий функции из $L_2(D)$ N-членный отрезок ее ряда Фурье

по нек-рой полной ортонормальной в $L_2(D)$ системе функций $\{\psi_k\}$.

В другой интерпретации метод Галеркина эквивалентен методу замены ядра на вырожденное вида

$$\tilde{K}(x,\ s) = \sum_{i=1}^{N} \int_D K(x,\ s)\,\varphi_i(x)\,dx \cdot \varphi_i(x)$$

с одновременной заменой правой части на близкую к ней:

$$\tilde{f}(s) = \sum_{i=1}^{N} \int_D f(s)\,\varphi_i(s)\,ds \cdot \varphi_i(s).$$

Другим важным примером проекционных методов может служить *коллокаций метод* (совпадений метод). Если $K(x,\ s)$ и $f(x)$ — непрерывные функции, то уравнение (1) можно рассматривать как операторное (2) в пространстве $C(D)$ — пространстве непрерывных функций на D. Метод коллокаций соответствует выбору P в виде

$$Py = Z(y), \quad y \in (D),$$

где Z — интерполяционный полином Лагранжа, построенный по нек-рой сетке узлов в D.

При практич. реализации большинства проекционных методов в применении к интегральным Ф. у. 2-го рода возникают трудности дополнительной аппроксимации появляющихся интегралов, что и делает эти методы (так же как и методы замены ядра на близкое) обычно более трудоемкими по сравнению с типичными методами квадратурных сумм. Однако это утверждение условно, так как сама классификация методов является условной. Напр., метод коллокаций можно интерпретировать как проекционный метод и как обобщенный метод квадратурных сумм.

Методы решения аппроксимирующих уравнений. Обычно решение аппроксимирующего уравнения (3) сводится к решению системы линейных алгебраич. уравнений. Методами последовательных приближений можно пользоваться (простейшими из них) при относительно малой величине $|\lambda|$, а при должной их модификации (напр., при методе осреднения функциональных поправок) ими можно пользоваться при любых λ, не принадлежащих спектру интегрального оператора A.

Получение последовательности уточняющих приближений. При теоретич. исследовании того или иного численного метода в большинстве случаев удается установить только сам факт сходимости приближений $\tilde{\varphi}$ или $\tilde{\tilde{\varphi}}$ к решению (1), (2) при сходимости $\tilde{A}$ к A в каком-либо смысле, и весьма редко удается получить эффективные оценки близости $\tilde{\varphi}$ или $\tilde{\tilde{\varphi}}$ к решению (1), (2). Для контроля точности на практике используют последовательность приближенных решений уравнения (3) с уточняющимся оператором $\tilde{A}$. В простейшем варианте контроля сравнивают два соседних члена в этой последовательности приближенных решений и прекращают дальнейшее получение приближений при совпадении двух предыдущих с заданной точностью. Громоздкость непосредственного получения членов такой последовательности частично преодолевается в разнообразных алгоритмах итеративного уточнения приближенного решения. Типичным примером подобных алгоритмов является следующий. Если последовательность $\{A_n\}$ приближенных операторов сходится по норме какого-либо банахова функционального пространства Φ к A в (2), то итеративная процедура

$$(E - \lambda A_0)\,\varphi_{n+1} = \lambda(A_{n+1} - A_0)\,\varphi_n + f_n \qquad (9)$$

дает сходящуюся к φ последовательность приближений φ_n, если f_n по норме сходится к f и A_0 достаточно

близок по норме к A. При использовании последовательности (9) требуется только одно обращение оператора. Сходимость ее тем лучше, чем ближе A_0 к A по норме. Удобен, напр., выбор операторов в виде (5). При нек-рых требованиях на ядро можно в этом случае установить равномерную сходимость φ_n к φ в D.

А. Б. Бакушинский.

ФРЕДГОЛЬМА ЯДРО. 1) Ф. я.— функция $K(x, y)$, определенная на $\Omega\times\Omega$ и порождающая вполне непрерывный оператор

$$K\varphi \equiv \int_\Omega K(x, y)\,\varphi(y)\,dy : E \longrightarrow E_1, \qquad (*)$$

где Ω — измеримое множество в n-мерном евклидовом пространстве, а E, E_1 — нек-рые функциональные пространства. Оператор (*) наз. интегральным оператором Фредгольма из E в E_1. Важным классом Ф. я. являются измеримые на $\Omega\times\Omega$ функции $K(x, y)$ такие, что

$$\int_\Omega \int_\Omega |K(x, y)|^2\,dx\,dy < +\infty.$$

Ф. я., удовлетворяющее этому условию, наз. также L_2-ядром.

Ф. я. наз. вырожденным, если оно представляет сумму произведений функции только от x на функцию только от y:

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x)\,\beta_k(y).$$

Если для почти всех $(x, y) \in \Omega\times\Omega$ имеет место равенство $\overline{K(x, y)} = K(y, x)$, то Ф. я. наз. симметричным, а если $\overline{K(x, y)} = K(y, x)$ — эрмитово симметричным (здесь черта означает переход к комплексно сопряженному значению). Ф. я. $K(x, y)$ наз. кососимметричным, если $\overline{K(x, y)} = -K(y, x)$.

Ф. я. $K(x, y)$ и $K(y, x)$ наз. транспонированными или союзными, а ядра $K(x, y)$ и $\overline{K(y, x)}$ — сопряженными.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 6 изд., т. 4, ч. 1, М., 1974.

Б. В. Хведелидзе.

2) Ф. я. — двухвалентный тензор, порождающий оператор Фредгольма. Пусть E и F — *локально выпуклые пространства*, $E \overline{\otimes} F$ — пополнение *тензорного произведения* $E\times F$ этих пространств в индуктивной топологии, т. е. в самой сильной локально выпуклой топологии, при к-рой непрерывно каноническое билинейное отображение $E\times F \longrightarrow E \overline{\otimes} F$. Элемент $u \in E \overline{\otimes} F$ наз. Ф. я., если он может быть представлен в виде

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \otimes f_i,$$

где $\{\lambda_i\}$ — суммируемая числовая последовательность, а $\{e_i\}$ и $\{f_i\}$ — последовательности элементов нек-рых полных выпуклых закругленных ограниченных множеств в E и F соответственно. Пусть E совпадает с сопряженным пространством G' к нек-рому локально выпуклому пространству G. Тогда Ф. я. порождает оператор Фредгольма $A: G \longrightarrow F$, имеющий вид

$$x \longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x, e_i\rangle f_i,$$

где $\langle x, e_i\rangle$ — значение функционала $e_i \in G'$ на элементе $x \in G$. Если E и F — банаховы пространства, то любой элемент из $E \overline{\otimes} F$ является Ф. я.

Понятие Ф. я. допускает обобщение и на случай тензорного произведения нескольких локально выпуклых пространств. Ф. я. и операторы Фредгольма составляют естественную область применения теории Фредгольма.

Лит.: [1] Гротендик А., «Математика», 1958, т. 2, № 5, с. 51—100.

Г. Л. Литвинов.

ФРЕДГОЛЬМОВ ОПЕРАТОР — линейный нормально разрешимый оператор B, действующий в банаховом пространстве E и обладающий нулевым индексом $\varkappa_B$ ($\varkappa_B = \dim \ker B - \dim \operatorname{coker} B$). Классич. примером Ф. о. является оператор вида

$$B = I + T, \tag{1}$$

где I — единичный, а T — вполне непрерывный операторы в E. В частности, Ф. о. в пространствах $C(a, b)$ или $L_2(a, b)$ будет оператор вида

$$B\varphi = \varphi(x) + \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,dS, \tag{2}$$

где ядро $K(x, s)$ — непрерывная или квадратично суммируемая на $[a, b]\times[a, b]$ функция.

Существуют Ф. о., отличные от (1) (см. [2]). Таковыми, при нек-рых условиях, являются, напр., оператор вида $I+K$, где K — интегральный оператор свертки на полуоси или всей оси (не являющийся вполне непрерывным), и многие дифференциальные операторы.

Для операторных уравнений вида $B\varphi = f$ с Ф. о. B легко формулировать различные теоремы разрешимости (см. *Фредгольма ядро*).

Встречаются и другие трактовки термина «Ф. о.». Напр., иногда Ф. о. наз. любой линейный ограниченный оператор B в E с конечным индексом $\varkappa_B$.

В классич. теории линейных интегральных уравнений Ф. о. часто наз. сам интегральный оператор в (2).

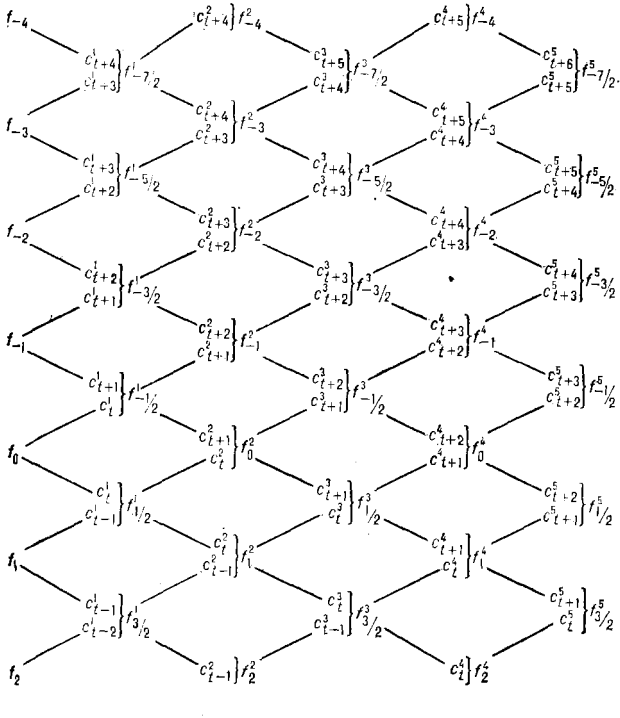
Лит.: [1] К р е й н С. Г., Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971; [2] М и х л и н С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, М., 1959.

А. Б. Бакушинский.

ФРЕЗЕРА ДИАГРАММА — способ получения интерполяционных формул по узлам x_0, x_0+h, x_0-h, x_0+2h, x_0-2h, ... в точке $x=x_0+th$, основанный на соотношении

$$C_p^q f_r^q + C_{p+1}^{q+1} f_{r+1/2}^{q+1} = C_p^q f_{r+1}^q + C_p^{q+1} f_{r+1/2}^{q+1} =$$
$$= C_p^q f_{r+1/2}^q + \frac{1}{2}\left(C_{p+1}^{q+1} + C_p^{q+1}\right) f_{r+1/2}^{q+1},$$

где f_l^k — конечные разности функции $f(x)$, а C_p^q — бино-



миальные коэффициенты. Каждому пути, идущему от произвольного элемента левого столбца по сторонам или горизонтальным диагоналям ромбов Ф. д., соответствует нек-рая интерполяционная формула, для получения к-рой надо руководствоваться следующими правилами.

1) Когда столбец разностей пересекается слева направо, добавляется один член.

2) Если путь входит (слева) в нек-рый столбец разностей по стороне ромба, то добавочный член равен произведению разности, стоящей на пересечении пути и столбца, на коэффициент, соответствующий пройденной стороне ромба.

3) Если путь входит (слева) в нек-рый столбец разностей по горизонтальной диагонали ромба, то добавочный член равен произведению разности, стоящей на пересечении пути и столбца, на полусумму коэффициентов, соответствующих сторонам, входящим (слева) в ту же вершину ромба.

4) Если путь пересекает (слева направо) столбец разностей по горизонтальной диагонали ромба между двумя разностями, то добавляется произведение полусуммы этих двух разностей на коэффициент, соответствующий стороне ромба, лежащей точно над (или под) пройденным участком диагонали.

5) Каждая часть пути, проходимая справа налево, вызывает те же самые члены, что и при прохождении слева направо, но с противоположным знаком.

6) Со столбцом табличных значений функции можно обращаться, как со столбцом разностей нулевого порядка, по тем же правилам, что и с остальными столбцами разностей.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Корн Г.-А., Корн Т.-М., Справочник по математике, пер. с англ., М., 1973.

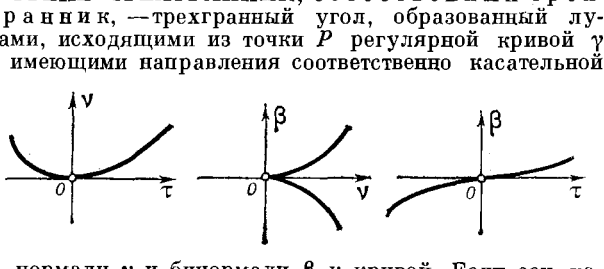
М. К. Самарин.

ФРЕЙДЕНТАЛЯ БИКОМПАКТНОЕ РАСШИРЕНИЕ — максимальное бикомпактное расширение с нульмерным *наростом*. Любое *периферически бикомпактное пространство* обладает Ф. б. р. (это доказано Х. Фрейденталем [1]). Среди всех таких расширений существует единственное максимальное и оно наз. Ф. б. р. (иногда Ф. б. р. наз. также любое бикомпактное расширение с нульмерным наростом). Ф. б. р. можно охарактеризовать также как (единственное) совершенное расширение с нульмерным наростом, а также как минимальное совершенное расширение, см. [3].

Лит.: [1] Freudenthal H., «Ann. Math.», 1942, v. 43, № 2, p. 261—79; «Indagat. math.», 1951, v. 13, p. 184—92; [2] Скляренко Е. Г., «Докл. АН СССР», 1958, т. 120, № 6, с. 1200—03; [3] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, № 3, с. 427—52; 1963, т. 27, № 5, с. 1165—80.

И. Г. Кошевникова.

ФРЕНЕ ТРЕХГРАННИК, естественный трехгранник, — трехгранный угол, образованный лучами, исходящими из точки P регулярной кривой γ и имеющими направления соответственно касательной



τ, нормали ν и бинормали β к кривой. Если оси координат x, y, z соответственно совпадают со сторонами Ф. т., то уравнение кривой в этой системе координат имеет вид

$$x = \Delta s - \frac{k_1^2 \Delta s^3}{6} + o(\Delta s^3),$$

$$y = \frac{k_1 \Delta s^2}{2} + \frac{k_1' \Delta s^3}{6} + o(\Delta s^3),$$

$$z = -\frac{k_1 k_2}{6} \Delta s^3 + o(\Delta s^3),$$

где k_1 и k_2 — кривизна и кручение кривой, s — натуральный параметр. Качественный вид проекций кривой на плоскости Ф. т. при $k_1 \neq 0$ и $k_2 \neq 0$ см. на рис.

Ф. т. рассматривался Ф. Френе (F. Frenet, 1847). *Д. Д. Соколов.*

ФРЕНЕ ФОРМУЛЫ — формулы, выражающие производные единичных векторов касательной $\boldsymbol{\tau}$, нормали $\boldsymbol{\nu}$ и бинормали $\boldsymbol{\beta}$ к регулярной кривой по натуральному параметру s через эти же векторы и значения кривизны k_1 и кручения k_2 кривой:

$$\boldsymbol{\tau}_s' = k_1\boldsymbol{\nu},$$
$$\boldsymbol{\nu}_s' = -k_1\boldsymbol{\tau} - k_2\boldsymbol{\beta},$$
$$\boldsymbol{\beta}_s' = k_2\boldsymbol{\nu}.$$

Получены Ф. Френе (F. Frenet, 1847). *Д. Д. Соколов.*

ФРЕНЕЛЯ ИНТЕГРАЛЫ — специальные функции

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2\, dt,$$

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2\, dt;$$

$$\lim_{x \to +\infty} C(x) = \lim_{x \to +\infty} S(x) = \frac{1}{2}.$$

Ф. и. представляют в виде рядов

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!\,(4k+1)},$$

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!\,(4k+3)}.$$

Асимптотич. представление при больших x:

$$C(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \sin x^2 + O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

$$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cos x^2 + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

В прямоугольной системе координат (x, y) проекциями кривой

$$x = t,\quad y = C\left(\frac{\pi}{2} t^2\right),\quad z = S\left(\frac{\pi}{2} t^2\right),$$

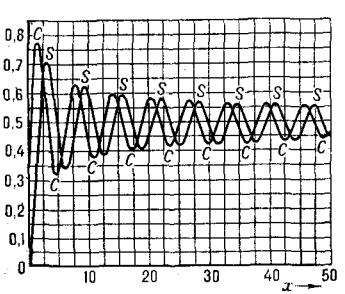


Рис. 1.

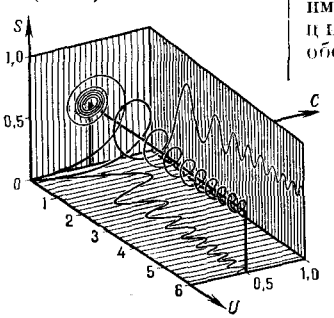


Рис. 2.

где t — действительный параметр, на координатные плоскости являются *Корню спираль* и кривые $y = C\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)$, $z = S\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)$ (см. рис. 2).

Обобщенными Ф. и. (см. [1]) наз. функции вида:

$$C(x, \alpha) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} \cos t\, dt,$$

$$S(x, \alpha) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} \sin t\, dt.$$

Ф. и. связаны с обобщенными Ф. и. следующим образом:

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} C\left(x, \frac{1}{2}\right);$$

$$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 3 изд., М., 1977. *А. Б. Иванов.*

ФРЕШЕ ВАРИАЦИЯ — одна из числовых характеристик функции нескольких переменных, к-рую можно рассматривать как многомерный аналог *вариации функции* одного переменного. Пусть действительнозначная функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ задана на n-мерном параллелепипеде

$$D_n = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

и введены обозначения

$$\Delta_{h_k}(f, x) = f(x_1, \ldots, x_k + h_k, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n),\ k = 1, \ldots, n,$$

$$\Delta_{h_1 \ldots h_k}(f; x) = \Delta_{h_k}(\Delta_{h_1 \ldots h_{k-1}}; x),\ k = 2, \ldots, n.$$

Пусть Π — произвольное разбиение параллелепипеда D_n гиперплоскостями

$$x_s = x_s^{(r_s)} \left(x_s^{(r_s)} < x_s^{(r_s+1)},\quad x_s^{(r_s+1)} - x_s^{(r_s)} = h_s^{(r_s)},\right.$$
$$x_s^{(0)} = a_s,$$
$$\left. x_s^{(l_s)} = b_s,\ r_s = 0, 1, \ldots, l_s,\ s = 1, 2, \ldots, n \right)$$

на n-мерные параллелепипеды, а $\varepsilon_1^{(r_1)}, \ldots, \varepsilon_n^{(r_n)}$ могут принимать значения ± 1 произвольным образом. Вариация Фреше определяется так:

$$F(f, D_n) \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \sup_{\varepsilon} \sup_{\Pi} \left| \sum_{r_1=0}^{l_1-1} \ldots \sum_{r_n=0}^{l_n-1} \varepsilon_n^{(r_1)} \ldots \varepsilon_n^{(r_n)} \times \right.$$
$$\left. \times \Delta_{h_1^{(r_1)} \ldots h_n^{(r_n)}}(f;\ x_1^{(r_1)}, \ldots, x_n^{(r_n)}) \right|.$$

Если $F(f; D_n) < \infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченную (конечную) вариацию Фреше на D_n, а класс всех таких функций обозначается через $F(D_n)$. Этот класс при $n = 2$ введен М. Фреше [1] в связи с исследованием общего вида билинейного непрерывного функционала $U(\varphi_1, \varphi_2)$ в пространстве непрерывных на квадрате $Q_2 = [a, b] \times [a, b]$ функций вида $\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$. Он доказал, что всякий такой функционал представляется в виде

$$U(\varphi_1, \varphi_2) = \int_a^b \int_a^b \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\, d_{x_1} d_{x_2} u(x_1, x_2),$$

где $u(x_1, x_2) \in F(Q_2)$, $u(a, x_2) \equiv u(x, b) \equiv 0$.

Для 2π-периодических функций класса $F(Q_n)$ ($Q_n = [0, 2\pi] \times \ldots \times [0, 2\pi]$) справедливы аналоги многих классических признаков сходимости рядов Фурье [2]. Например, если $f(x) \in F(Q_n)$, $n = 2, 3, \ldots$, то прямоугольные частичные суммы ряда Фурье функции $f(x)$ в каждой точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ сходятся к числу

$$\frac{1}{2^n} \sum f(x_1 \pm 0, \ldots, x_n \pm 0),$$

где суммирование распространяется на все 2^n возможных комбинаций знаков $\pm$. При этом, если функция непрерывна, то сходимость равномерная (аналог признака Жордана).

Лит.: [1] Frechet M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1915, v. 16, № 3, p. 215—34; [2] Morse M., Transue W., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1949, v. 35, № 7, p. 395—99. *В. И. Голубов.*

ФРЕШЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛ в точке x_0 отображения $f\colon X \to Y$ нормированного пространства X в нормированное пространство Y — отображение $h \to D(x_0, h)$,

Лит.: [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., 2 изд., М., 1974; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 3 изд., М., 1977.
А. Б. Иванов.

ФРЕШЕ ВАРИАЦИЯ — одна из числовых характеристик функции нескольких переменных, к-рую можно рассматривать как многомерный аналог *вариации функции* одного переменного. Пусть действительнозначная функция $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ задана на n-мерном параллелепипеде

$$D_n=[a_1, b_1]\times\ldots\times[a_n, b_n]$$

и введены обозначения

$$\Delta_{h_k}(f, x)=f(x_1, \ldots, x_k+h_k, \ldots, x_n)-$$
$$-f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n),\ k=1, \ldots, n,$$
$$\Delta_{h_1\ldots h_k}(f; x)=\Delta_{h_k}(\Delta_{h_1\ldots h_{k-1}}; x),\ k=2, \ldots, n.$$

Пусть Π — произвольное разбиение параллелепипеда D_n гиперплоскостями

$$x_s=x_s^{(r_s)}\Big(x_s^{(r_s)}<x_s^{(r_s+1)},\quad x_s^{(r_s+1)}-x_s^{(r_s)}=h_s^{(r_s)},$$
$$x_s^{(0)}=a_s,$$
$$x_s^{(l_s)}=b_s,\ r_s=0, 1, \ldots, l_s,\ s=1, 2, \ldots, n\Big)$$

на n-мерные параллелепипеды, а $\varepsilon_1^{(r_1)}, \ldots, \varepsilon_n^{(r_n)}$ могут принимать значения ± 1 произвольным образом. Вариация Фреше определяется так:

$$F(f, D_n)\overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=}\sup_{\varepsilon}\sup_{\Pi}\Big|\sum_{r_1=0}^{l_1-1}\ldots\sum_{r_n=0}^{l_n-1}\varepsilon_n^{(r_1)}\ldots\varepsilon_n^{(r_n)}\times$$
$$\times\Delta_{h_1^{(r_1)}\ldots h_n^{(r_n)}}(f; x_1^{(r_1)}, \ldots, x_n^{(r_n)})\Big|.$$

Если $F(f; D_n)<\infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченную (конечную) вариацию Фреше на D_n, а класс всех таких функций обозначается через $F(D_n)$. Этот класс при $n=2$ введен М. Фреше [1] в связи с исследованием общего вида билинейного непрерывного функционала $U(\varphi_1, \varphi_2)$ в пространстве непрерывных на квадрате $Q_2=[a, b]\times[a, b]$ функций вида $\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$. Он доказал, что всякий такой функционал представляется в виде

$$U(\varphi_1, \varphi_2)=\int_a^b\int_a^b\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\,d_{x_1}d_{x_2}u(x_1, x_2),$$

где $u(x_1, x_2)\in F(Q_2)$, $u(a, x_2)\equiv u(x, b)\equiv 0$.

Для 2π-периодических функций класса $F(Q_n)$ ($Q_n=[0, 2\pi]\times\ldots\times[0, 2\pi]$) справедливы аналоги многих классических признаков сходимости рядов Фурье [2]. Например, если $f(x)\in F(Q_n)$, $n=2, 3, \ldots$, то прямоугольные частичные суммы ряда Фурье функции $f(x)$ в каждой точке $x=(x_1, \ldots, x_n)$ сходятся к числу

$$\frac{1}{2^n}\sum f(x_1\pm 0, \ldots, x_n\pm 0),$$

где суммирование распространяется на все 2^n возможных комбинаций знаков $\pm$. При этом, если функция непрерывна, то сходимость равномерная (аналог признака Жордана).

Лит.: [1] Frechet M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1915, v. 16, № 3, p. 215—34; [2] Morse M., Transue W., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1949, v. 35, № 7, p. 395—99.
Б. И. Голубов.

ФРЕШЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛ в точке x_0 отображения $f\colon X\to Y$ нормированного пространства X в нормированное пространство Y — отображение $h\to D(x_0, h)$,

являющееся линейным и непрерывным отображением из X в Y и обладающее тем свойством, что

$$f(x_0+h)=f(x_0)+D(x_0,\ h)+\varepsilon(h), \qquad (1)$$

где

$$\lim_{\|h\|\to 0} \|\varepsilon(h)\| / \|h\|=0.$$

Если отображение f в точке x_0 допускает разложение (1), то оно наз. дифференцируемым по Фреше, а сам оператор

$$f'(x_0)\,h=D(x_0,\ h),\ f'(x_0)\in L(X,\ Y),$$

наз. *Фреше производной*.

Для функции f конечного числа переменных Ф. д.— линейная функция

$$h\longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i=l_{x_0}h,$$

обладающая тем свойством, что

$$f(x_0+h)=f(x_0)+l_{x_0}(h)+o(|h|), \qquad (2)$$

где $|h|=\left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2\right)^{1/2}$ или любая другая равносильная норма в $\mathbb{R}^n$. При этом $\alpha_i=\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$ — частные производные функции f в точке x_0.

Определение (2), являющееся ныне общепринятым, впервые в явной форме появилось, по-видимому, в лекциях К. Вейерштрасса (1861, см. [1]). В кон. 19 в. это определение постепенно входит в учебники (см. [2], [3] и др.). Однако к моменту, когда М. Фреше (см. [4], [5]) начал разработку бесконечномерного анализа, классическое ныне определение дифференциала было настолько необщепринятым, что и сам М. Фреше полагал, что определенный им дифференциал на бесконечномерном пространстве является новым понятием и в конечномерном случае. В настоящее время термин употребляется лишь при рассмотрении бесконечномерных отображений. См. *Гато дифференциал*, *Дифференцирование отображения*.

Лит.: [1] Dugac P., Eléments d'analyse de Karl Weierstrass, P., 1972; [2] Stolz O., Grundzüge der Differential-und Integralrechnung, Bd 1, Lpz., 1893; [3] Young W., The fundamental theorems of the differential calculus, Camb., 1910; [4] Fréchet M., «C. r. Acad. sci.», 1911, t. 152, p. 845—47; [5] его же, «Nouvelles ann. math.», 4 sér., 1912, t. 12; [6] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [7] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В., Оптимальное управление, М., 1979.

В. М. Тихомиров.

ФРЕШЕ ПОВЕРХНОСТЬ — обобщение понятия поверхности в евклидовом или произвольном метрич. пространстве A. Пусть M^2 — компактное двумерное многообразие (замкнутое или с краем). Точки M^2 играют роль параметра. Непрерывные отображения $f: M^2\to A$ называют параметризованными поверхностями (п. п.). Две п. п. считают эквивалентными, если

$$\rho(f_1,\ f_2)\equiv \inf_{\sigma}\max_{x\in M^2} d(f_1(x),\ f_2(\sigma(x)))=0,$$

где d — расстояние в A, а $\sigma: M^2\to M^2$ — всевозможные гомеоморфизмы M^2 на себя. Класс эквивалентных п. п. называют поверхностью Фреше (см. [1]), а каждую из входящих в этот класс п. п.— параметризацией Ф. п. Многие свойства п. п. являются свойствами Ф. п., а не ее конкретной параметризации. Для двух Ф. п. значение $\rho(f_1,\ f_2)$ не зависит от выбора параметризаций f_1, f_2; его называют расстоянием по Фреше между Ф. п. Замена в определении Ф. п. области M^2 изменения параметра окружностью или замкнутым отрезком дает определение кривой Фреше (см. [2]).

Лит.: [1] Fréchet M., «Ann. soc. polon. math.», 1924, t. 3, p. 4—19; [2] его же, «Rend. Circolo mat. Palermo», 1906, t. 22, p. 1—74.

В. А. Залгаллер.

ФРЕШЕ ПРОИЗВОДНАЯ, сильная производная,— наиболее распространенная (наряду с *Гато производной*, наз. иногда слабой производной) производная функционала или отображения. Ф. п. в точке x_0 отображения $f: X \to Y$ нормированного пространства X в нормированное пространство Y называют линейный непрерывный оператор $\Lambda: X \to Y$, удовлетворяющий условию

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\Lambda h+\varepsilon(h),$$

где

$$\lim_{\|h\|\to 0} \|\varepsilon(h)\|/\|h\|=0.$$

Оператор Λ, удовлетворяющий этим условиям, единствен и обозначается $f'(x_0)$, линейное отображение $h \to f'(x_0)h$ наз. *Фреше дифференциалом*. Если отображение f имеет в точке x_0 Ф. п., оно наз. дифференцируемым по Фреше. Для Ф. п. выполнены важнейшие теоремы дифференциального исчисления — о дифференцировании сложной функции, о среднем. Если функция f непрерывно дифференцируема по Фреше в окрестности точки x_0 и в точке x_0 Ф. п. $f'(x_0)$ является гомеоморфизмом банаховых пространств X и Y, то имеет место теорема об обратном отображении. См. также *Дифференцирование отображения*.

В. М. Тихомиров.

ФРЕШЕ ПРОСТРАНСТВО — полное метризуемое локально выпуклое топологическое векторное пространство. Банаховы пространства доставляют примеры Ф. п., однако многие важные функциональные пространства являются Ф. п., не являясь вместе с тем банаховыми. К числу таковых относятся: пространство Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ всех бесконечно дифференцируемых комплексных функций на $\mathbb{R}^n$, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными быстрее любого многочлена, с топологией, задаваемой системой полунорм

$$p_{\alpha\beta}(x(\cdot))=\sup_{t\in\mathbb{R}^n}\left|t_1^{\beta_1}\dots t_n^{\beta_n}\,\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}x(t_1,\dots,t_n)}{\partial t_1^{\alpha_1}\dots\partial t_n^{\alpha_n}}\right|,$$

где α и β — целочисленные неотрицательные векторы; пространство $H(D)$ всех голоморфных функций на нек-ром открытом подмножестве D комплексной плоскости с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах D и т. д.

Замкнутое подпространство Ф. п. является Ф. п.; факторпространство Ф. п. по замкнутому подпространству является также Ф. п.; Ф. п. является *бочечным пространством*, и потому для отображений из Ф. п. в локально выпуклые пространства оказывается верной *Банаха — Штейнхауза теорема*. Если отделимое локально выпуклое пространство является образом Ф. п. при открытом отображении, то оно само является Ф. п. Взаимно однозначное непрерывное линейное отображение Ф. п. на Ф. п. есть изоморфизм (аналог теоремы Банаха).

Названо в честь М. Фреше (M. Fréchet).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [2] Робертсон А., Робертсон В., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967.

В. М. Тихомиров.

ФРИДРИХСА НЕРАВЕНСТВО — неравенство вида

$$\int_\Omega f^2\,d\Omega \leqslant C\left\{\int_\Omega \sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega+\int_\Gamma f^2\,d\Gamma\right\}, \quad (1)$$

где Ω — ограниченная область точек $x=x(x_1,\dots,x_n)$ n-мерного евклидова пространства с $(n-1)$-мерной границей Γ, удовлетворяющей локально условию Липшица, функция $f\equiv f(x)\in W_2^1(\Omega)$ (пространству Соболева).

Правая часть Ф. н. задает эквивалентную норму в $W_2^1(\Omega)$. С помощью другой эквивалентной нормы

ровки $W_2^1(\Omega)$ получена (см. [2]) модификация Ф. н. вида

$$\int_\Omega f^2 d\Omega \leqslant C\left\{\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega + \left(\int_\Gamma f d\Gamma\right)^2\right\}. \quad (2)$$

Имеются обобщения (см. [3]—[5]) Ф. н. на весовые классы (см. *Весовое пространство*, *Вложения теоремы*). Пусть $\Gamma \subset C^{(l)}$, числа r, p, α действительные, причем r—натуральное, $1 \leqslant p < \infty$. Говорят, что $f \in W^r_{p,\alpha}(\Omega)$, если конечна норма

$$\|f\|_{W^r_{p,\alpha}(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{\omega^r_{p,\alpha}(\Omega)},$$

где

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p d\Omega\right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{\omega^r_{p,\alpha}(\Omega)} = \sum_{|k|=r} \|\rho^\alpha f^{(k)}\|_{L_p(\Omega)},$$

$$f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad |k| = \sum_{i=1}^n k_i,$$

$\rho \equiv \rho(x)$—функция, эквивалентная расстоянию от $x \in \Omega$ до Γ.

Пусть число s_0—натуральное и

$$r - \alpha - 1/p \leqslant s_0 < r - \alpha + 1 - 1/p.$$

Тогда, если $\Gamma \subset C^{(s_0+1)}$, $-1/p < \alpha < r - 1/p$, $r/2 \leqslant s_0$, то для $f \in W^r_{p,\alpha}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C\left\{\sum_{l+s<r/2} \left\| \left(\frac{\partial^s f}{\partial n^s}\Big|_\Gamma\right)^{(l)} \right\|_{L_p(\Gamma)} + \|f\|_{\omega^r_{p,\alpha}(\Omega)}\right\},$$

где $\frac{\partial^s f}{\partial n^s}\Big|_\Gamma$—производная порядка s по внутренней нормали к Γ в точках Γ.

Также получается и неравенство типа неравенства (2), к-рое в простейшем случае имеет вид

$$\|f\|^p_{L_p(\Omega)} \leqslant C\left(\|f\|^p_{\omega^1_{p,\alpha}(\Omega)} + \left|\int_\Gamma u\tau\, d\Gamma\right|^p\right),$$

где

$$p > 1,\ \gamma > 1,\ -1/p < \alpha < 1 - 1/p - 1/\gamma,$$

$$\tau \in L\gamma(\Gamma),\ \int_\Gamma \tau\, d\Gamma \neq 0.$$

Всюду постоянная C не зависит от f.

Неравенство названо по имени К. Фридрихса, к-рый получил его при $n=2$, $f \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$ (см. [1]).

Лит.: [1] Friedrichs K., «Math. Ann.», 1927, Bd 98, S. 566—75; [2] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962; [3] Никольский С. М., Лизоркин П. И., «Докл. АН СССР», 1964, т. 159, № 3, с. 512—15; [4] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [5] Калиниченко Д. Ф., «Матем. сб.», 1964, т. 64, № 3, с. 436—57; [6] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., 2 изд., т. 2, М.—Л., 1951; [7] Nirenberg L., «Ann. Scuola norm. super.», 1959, ser. 3, v. 13, № 2; [8] Sandgren L., «Meddel. från Lunds univers. matem. semin.», 1955, Bd 13, p. 1—84.

Д. Ф. Калиниченко, Н. В. Мирошин.

ФРОБЕНИУСА АВТОМОРФИЗМ—элемент группы Галуа специального вида, играющий фундаментальную роль в теории полей классов. Пусть L—алгебраич. расширение конечного поля K. Тогда Ф. а. наз. автоморфизм $\varphi_{L/K}$, определяемый формулой $\varphi_{L/K}(a) = a^q$ для всех $a \in L$, где $q = \#K$ (мощность K). Если L/K—конечное расширение, то $\varphi_{L/K}$ порождает группу Галуа $G(L/K)$. Для бесконечного расширения L/K автоморфизм $\varphi_{L/K}$ является топологич. образующей группы $G(L/K)$. Если $L \supset E \supset K$ и $[E:K] < \infty$, то $\varphi_{L/E} = \varphi_{L/K}^{[E:K]}$.

Пусть k—локальное поле с конечным полем вычетов $\overline{k}$, а K—неразветвленное расширение поля k.

Тогда Ф. а. $\varphi_{\overline{K}/\overline{k}}$ расширений полей вычетов однозначно продолжается до автоморфизма $\varphi_{K/k} \in G(K/k)$, наз. Ф. а. неразветвленного расширения K/k. Пусть $\#\overline{k} = q$, $\mathcal{O}_K$ — кольцо целых элементов поля K и $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал в $\mathcal{O}_K$. Тогда Ф. а. $\varphi_{K/k}$ однозначно определяется условием $\varphi_{K/k}(a) \equiv a^q \bmod \mathfrak{p}$ для любого $a \in \mathcal{O}_K$. Если K/k — произвольное расширение Галуа локальных полей, то Ф. а. расширения K/k иногда называют любой автоморфизм $\varphi \in G(K/k)$, индуцирующий на максимальном неразветвленном подрасширении поля K Ф. а. в указанном выше смысле.

Пусть K/k — расширение Галуа глобальных полей, $\mathfrak{p}$ — простой идеал поля k и $\mathfrak{P}$ — нек-рый простой идеал поля K, лежащий над $\mathfrak{p}$. И пусть $\mathfrak{P}$ не разветвлен в расширении K/k и $\varphi_{\mathfrak{P}} \in G(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$ — Ф. а. неразветвленного расширения локальных полей $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$. Отождествляя группу Галуа $G(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$ с подгруппой разложения идеала $\mathfrak{p}$ в $G(K/k)$, можно рассматривать $\varphi_{\mathfrak{P}}$ как элемент группы $G(K/k)$. Этот элемент наз. Ф. а., соответствующим простому идеалу $\mathfrak{P}$. Если K/k — конечное расширение, то согласно теореме Чеботарева о плотности для любого автоморфизма $\sigma \in G(K/k)$ существует бесконечное число простых идеалов $\mathfrak{P}$, не разветвленных в K/k таких, что $\sigma = \varphi_{\mathfrak{P}}$. Для абелева расширения K/k элемент $\varphi_{\mathfrak{P}}$ зависит только от $\mathfrak{p}$. В этом случае $\varphi_{\mathfrak{P}}$ обозначается через $(\mathfrak{p}, K/k)$ и наз. символом Артина простого идеала $\mathfrak{p}$.

Лит.: [1] Вейль А., Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972.
Л. В. Кузьмин.

ФРОБЕНИУСА ТЕОРЕМА — теорема, описывающая все конечномерные ассоциативные действительные алгебры без делителей нуля, доказана Г. Фробениусом [1]. Ф. т. утверждает, что:

1) Поле действительных чисел и поле комплексных чисел являются единственными конечномерными действительными ассоциативно-коммутативными алгебрами без делителей нуля.

2) Тело кватернионов является единственной конечномерной действительной ассоциативной, но не коммутативной алгеброй без делителей нуля.

Существует также описание альтернативных конечномерных алгебр без делителей нуля:

3) Алгебра Кэли является единственной конечномерной действительной альтернативной, но не ассоциативной алгеброй без делителей нуля.

Объединение этих трех утверждений наз. обобщенной теоремой Фробениуса. Все участвующие в формулировке теоремы алгебры оказываются алгебрами с однозначным делением и с единицей. Ф. т. не может быть обобщена на случай неальтернативных алгебр. Доказано, однако, что размерность любой конечномерной действительной алгебры без делителей нуля может принимать лишь значения, равные 1, 2, 4 или 8.

Лит.: [1] Frobenius F., «J. reine und angew. Math.», 1877, Bd 82, S. 230—315; [2] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973.
О. А. Иванова.

ФРОБЕНИУСА ТЕОРЕМА — теорема об условиях полной интегрируемости системы уравнений Пфаффа или (в геометрич. терминах) об условиях, при к-рых заданное на дифференцируемом многообразии поле n-мерных касательных подпространств является касательным полем нек-рого *слоения*. Несколько эквивалентных формулировок Ф. т. см. в статьях *Инволютивное распределение*, *Коши задача*; вариант с минимальными требованиями дифференцируемости см. в [2]. Название Ф. т. связано с изложением этой теоремы в [1], но не соответствует приводимым там сведениям об ее истории.

Лит.: [1] Frobenius F., «J. reine und angew. Math.», 1877, Bd 82, S. 230—315; [2] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970.

Д. В. Аносов.

ФРОБЕНИУСА ФОРМУЛА — формула, выражающая отношение обобщенного определителя Вандермонда к обычному (см. *Вандермонда определитель*) через степенные суммы. В качестве коэффициентов в Ф. ф. участвуют характеры *представлений симметрической группы*.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — независимые переменные. Для любого набора $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ неотрицательных целых чисел, удовлетворяющего условию $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, пусть

$$W_\lambda = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_1+n-1} & \ldots & x_n^{\lambda_1+n-1} \\ x_1^{\lambda_2+n-2} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \ldots & x_n^{\lambda_1+n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{\lambda_n} & x_2^{\lambda_n} & \ldots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix},$$

так что W_0 есть обычный определитель Вандермонда. И пусть $\sum\lambda_i=m$; тогда набор λ после выкидывания нулей можно рассматривать как разбиение числа m. Рассматривается соответствующее неприводимое представление T_λ группы S_m. Для любого разбиения $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ числа m через $a_{\lambda\mu}$ обозначается значение характера представления T_λ на классе сопряженных элементов группы S_m, определяемом разбиением μ, и через c_μ — порядок централизатора любой подстановки из этого класса. Пусть $s_\mu = s_{\mu_1} s_{\mu_2} \ldots s_{\mu_r}$, где $s_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$. Тогда

$$\frac{W_\lambda}{W_0} = \sum\nolimits_\mu a_{\lambda\mu} c_\mu^{-1} s_\mu,$$

где сумма берется по всем (неупорядоченным) разбиениям числа m. При этом, если разбиение μ содержит k_1 единиц, k_2 двоек и т. д., то

$$c_\mu = k_1!\ k_2!\ \ldots\ 1^{k_1}\ 2^{k_2}\ \ldots$$

Если $n \geqslant m$, то Ф. ф. может быть преобразована к виду

$$\sum\nolimits_\lambda a_{\lambda\mu} W_\lambda = s_\mu W_0,$$

где сумма берется по всем разбиениям числа m (дополненным надлежащим числом нулей). Последняя формула может быть использована для вычисления характеров симметрич. группы. А именно, $a_{\lambda\mu}$ есть коэффициент при $x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} \ldots x_n^{\lambda_n}$ в многочлене $s_\mu W_0$.

Лит.: [1] Мурнаган Ф. Д., Теория представлений групп, пер. с англ., М., 1950.

Э. Б. Винберг.

ФРОБЕНИУСА ЭНДОМОРФИЗМ — эндоморфизм φ: $X \to X$ схемы X над конечным полем F_q из q элементов такой, что φ — тождественное отображение топологич. пространства X, а отображение структурного пучка φ^*: $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ совпадает с возведением в степень q. Ф. э. является чисто несепарабельным морфизмом и имеет нулевой дифференциал. Для аффинного многообразия $X \subset A^n$, определенного над F_q, Ф. э. φ переводит точку $(x_1, \ldots, x_n)$ в точку $(x_1^q, \ldots, x_n^q)$.

Число геометрич. точек схемы X, определенных над F_q, совпадает с числом неподвижных точек Ф. э. φ, что позволяет использовать для определения числа таких точек *Лефшеца формулу*.

Лит.: [1] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981.

Л. В. Кузьмин.

ФРОБЕНИУСОВА АЛГЕБРА — конечномерная алгебра R над полем P такая, что левые R-модули R и $\mathrm{Hom}_P(R, P)$ изоморфны. На языке представлений это означает эквивалентность правого и левого регулярных представлений. Всякая групповая алгебра конеч-

ной группы над полем является Ф. а. Каждая Ф. а. является *квазифробениусовым кольцом*. Обратное утверждение неверно. Эквивалентны следующие свойства конечномерной P-алгебры R:

1) R — Ф. а.;

2) существует такая невырожденная билинейная форма $f: R\times R\to P$, что $f(ab, c)=f(a, bc)$ для любых a, b, $c\in R$;

3) если L — левый, а H — правый идеалы алгебры R, то (см. *Аннулятор*)

$$\mathfrak{Z}_l(\mathfrak{Z}_r(L))=L,\quad \mathfrak{Z}_r(\mathfrak{Z}_l(H))=H,$$

$$\dim_P \mathfrak{Z}_r(L)+\dim_P L=\dim_P R=\dim_P \mathfrak{Z}_l(H)+\dim_P H.$$

Ф. а., по существу, появились впервые в работах Г. Фробениуса [3].

Лит.: [1] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [2] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [3] Frobenius G., «Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss.», 1903, № 24, S. 504—507, 634—45.

Л. А. Скорняков.

ФРОММЕРА МЕТОД — метод исследования особых точек автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\dot p=f(p),\ p=(x, y),\ f=(X, Y): G\longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad (1)$$

где функция f аналитическая или достаточно гладкая в области G.

Пусть $O=(0, 0)$ — особая точка системы (1), т. е. $f(O)=0$, а X, Y — аналитические в точке O функции, не имеющие общего аналитического исчезающего в O множителя. Ф. м. позволяет выявить все TO-к р и в ы е системы (1) — полутраектории этой системы, примыкающие к O по определенным направлениям. Каждая TO-кривая системы (1), не лежащая на оси $x=0$, является O-к р и в о й уравнения

$$y'=\frac{Y(x, y)}{X(x, y)}, \qquad (2)$$

(т. е. представима вблизи точки O в виде

$$y=\varphi(x),\quad \varphi(x)\longrightarrow 0\ \text{ при }\ x\longrightarrow 0, \qquad (3)$$

где $\varphi: I\to\mathbb{R}$ — решение уравнения (2), $I=(0, \delta)$ или $(-\delta, 0)$, $\delta>0$, $\varphi(x)\equiv 0$ или $\varphi(x)\neq 0$ для любого $x\in I$) и наоборот.

Пусть уравнение (2) рассматривается сначала в области $x>0$. Если оно представляет собой п р о с т о е у р а в н е н и е Б е н д и к с о н а, т. е. удовлетворяет условиям

$$X(x, y)\equiv x^h,\quad h\geqslant 1,\quad Y'_y(0, 0)=a\neq 0,$$

то для него в области $x>0$ существует единственная O-кривая при $a<0$; область $x>0$, $x^2+y^2<r^2$, где r — достаточно малое положительное число, представляет собой параболич. *сектор* при $a>0$. В противном случае для выявления O-кривых уравнения (2) в области $x>0$ применяют Ф. м. Основой для его применения является тот факт, что каждая O-кривая (3) уравнения (2), $\varphi(x)\not\equiv 0$, обладает в точке O вполне определенной асимптотикой, а именно, будучи представлена в виде

$$y=x^{\nu(x)}\operatorname{sign}\varphi(x),$$

она допускает конечный или бесконечный предел

$$\nu=\lim_{x\to 0}\nu(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|\varphi(x)|}{\ln x}\in[0, +\infty],$$

к-рый наз. ее п о р я д к о м к р и в и з н ы в точке O, а при $\nu\in(0, +\infty)$ допускает еще и конечный или бесконечный предел

$$\gamma=\lim_{x\to 0}\varphi(x)\,x^{-\nu}\in[-\infty, +\infty],$$

к-рый наз. ее м е р о й к р и в и з н ы в точке O. При этом O-кривой $y=0$, $x\in(0, \delta)$, приписывается порядок кривизны $\nu=+\infty$.

Первый шаг Ф. м. состоит в следующем. Алгебраич. средствами вычисляются все возможные порядки кривизны ν (их всегда конечное число) и для каждого порядка $\nu \in (0, +\infty)$ — все возможные меры кривизны γ для O-кривых уравнения (2). На основании общих теорем метода выясняется вопрос о существовании у уравнения (2) O-кривых со всеми возможными порядками и мерами кривизны, за исключением конечного ($\geqslant 0$) числа т. н. характеристических пар (ν, γ). Для каждой из последних $\nu = r/s$, где r, s — натуральные числа, $0 < |\gamma| < +\infty$. Поэтому подстановка $x \longrightarrow x^s$, $y \longrightarrow (\gamma + y)\, x^r$ преобразует уравнение (2) в производное уравнение (2_1) того же вида, сводя вопрос о существовании у уравнения (2) O-кривых с порядком кривизны ν и мерой кривизны γ к вопросу о существовании у уравнения (2_1) O-кривых в области $x > 0$.

Если уравнение (2) не имеет характеристич. пар или если каждое из его производных уравнений оказывается простым уравнением Бендиксона, то все O-кривые уравнения (2) в области $x > 0$ выявляются на первом шаге процесса. В противном случае делают второй шаг — изучают по схеме первого шага производные уравнения, не являющиеся простыми уравнениями Бендиксона. При этом приходят к производным уравнениям 2-й серии и т. д. На каждом шаге процесс, вообще говоря, ветвится, однако для фиксированного уравнения (2) число ветвей процесса конечно и любая ветвь заканчивается приведенным уравнением, к-рое либо является простым уравнением Бендиксона, либо не имеет характеристич. пар.

Таким образом, с помощью конечного числа шагов Ф. м. можно выявить все TO-кривые системы (1) в области $x > 0$ вместе с их асимптотикой в точке O. Замена в системе (1) x на $-x$ позволяет сделать то же самое для области $x < 0$, а непосредственная проверка позволяет установить, являются ли TO-кривыми полуоси оси $x = 0$. Поведение всех траекторий системы (1) в окрестности точки O выясняется на основании этой информации следующим образом.

Если система (1) не имеет TO-кривых, то точка O является для нее *центром*, *фокусом* или *центро-фокусом*. Если множество H всех TO-кривых системы (1) непусто, то информация об их асимптотике в точке O, полученная Ф. м., позволяет разбить H на конечное число непересекающихся пучков TO-кривых: $H_1, H_2, \ldots, H_k$, $k \geqslant 2$, каждый из к-рых либо открыт: состоит из одноименных (положительных или отрицательных) полутраекторий, заполняющих область, либо «замкнут»: состоит из единственной TO-кривой. Представители этих пучков $l_1, l_2, \ldots, l_k$ имеют различную асимптотику в точке O, что позволяет установить циклич. порядок следования пучков при обходе точки O по окружности C малого радиуса r, и разбивают круг Q, ограниченный окружностью C, на k секторов $S_1, \ldots, S_k$.

Пусть сектор S_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, имеет своими боковыми стенками TO-кривые l_i и l_{i+1}, где l_{k+1} совпадает с l_1. Тогда сектор S_i будет: а) эллиптическим, б) гиперболическим или в) параболическим, смотря по тому, будут ли пучки H_i, H_{i+1} соответственно а) открытыми, б) «замкнутыми» или в) разноименными.

Таким образом, Ф. м. позволяет конечным числом шагов либо найти для системы (1) циклич. последовательность гиперболич., параболич. и эллиптич. секторов, примыкающих к точке O, и тем самым полностью выяснить топологич. тип расположения ее траекторий в окрестности точки O, либо показать, что для точки O возникает проблема различения центра, фокуса и центро-фокуса.

Ф. м. был предложен М. Фроммером [1]. Он может быть приспособлен и для исследования особых точек систем 3-го порядка.

Лит.: [1] Frommer M., «Math. Ann.», 1928, Bd 99, S. 222—72; [2] Андреев А. Ф., Особые точки дифференциальных уравнений, Минск, 1979. *А. Ф. Андреев.*

ФРОНТ ВОЛНОВОЙ *обобщенной функции* или гиперфункции — коническое множество в кокасательном расслоении к многообразию, на к-ром задана рассматриваемая обобщенная функция или гиперфункция, характеризующее ее особенности. Гиперфункция — это сумма формальных граничных значений голоморфных функций. Две такие суммы отождествляются, если они эквивалентны в смысле эквивалентности, даваемой аналогом *Боголюбова теорема* «остриё клина», в к-ром, однако, ни в каком смысле не предполагается существование пределов рассматриваемых голоморфных функций.

Ф. в. гиперфункции часто наз. также аналитическим Ф. в. или сингулярным носителем (последний термин чаще употребляется в совсем другом смысле, когда он означает дополнение к множеству той или иной регулярности обобщенной функции или гиперфункции на самом многообразии, а не в кокасательном расслоении). Понятие Ф. в. лежит в основе микролокального анализа, представляющего собой комплекс идей и методов, использующих Ф. в. и другие связанные с ним понятия и средства (в частности, псевдодифференциальные операторы и интегральные операторы Фурье) для изучения уравнений с частными производными (в основном, линейных).

Пусть X — область в $\mathbb{R}^n$, $u \in D'(X)$, т. е. u — обобщенная функция на X. Тогда Ф. в. $WF(u)$ обобщенной функции u представляет собой замкнутое конич. подмножество в $T^*X \setminus 0 = X \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$, к-рое определяется следующим образом: если $(x_0, \xi_0) \in X \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$, то $(x_0, \xi_0) \in WF(u)$ означает, что существуют такая функция $\varphi \in C_0^\infty(X)$, равная 1 в окрестности точки x_0, и такая конич. окрестность Γ точки ξ_0 в $\mathbb{R}^n \setminus 0$, что для любого $N > 0$ выполнена оценка

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leqslant C_N (1 + |\xi|)^{-N}, \quad \xi \in \Gamma,$$

где

$$C_N > 0, \ \widehat{\varphi u}(\xi) = \langle u(x), \varphi(x) e^{-ix \cdot \xi} \rangle,$$

т. е. $\widehat{\varphi u}$ — преобразование Фурье от φu.

Если X — многообразие и u — обобщенная функция на X (или, более общо, обобщенное сечение гладкого векторного расслоения), то $WF(u)$ определяется так же, как и выше (после перехода к локальным координатам). В этом случае $WF(u)$ оказывается корректно определенным конич. подмножеством в $T^*X \setminus 0$ (кокасательном расслоении без нулевого сечения).

Введем канонич. проекцию π: $T^*X \setminus 0 \longrightarrow X$. Тогда

$$\pi(WF(u)) = \operatorname{sing\,supp} u, \tag{1}$$

где singsupp u — дополнение к наибольшему открытому подмножеству в X, на котором u совпадает с бесконечно дифференцируемой функцией. Это соотношение показывает, что $WF(u)$ действительно является более детальной характеристикой особенностей u, чем singsupp u.

Пусть A — псевдодифференциальный оператор на X порядка m с главным символом $a_m(x, \xi)$, $\operatorname{char} A$ — множество его характеристич. направлений, т. е.

$$\operatorname{char} A = \{(x, \xi) \in T^*X \setminus 0 : a_m(x, \xi) = 0\}$$

Тогда

$$WF(Au) \subset WF(u) \subset WF(Au) \cup \operatorname{char} A. \tag{2}$$

Здесь первое включение характеризует псевдолокальность оператора A, а второе является далеко идущим обобщением теоремы о гладкости решений эллиптич. уравнений с гладкими коэффициентами.

Если главный символ $a_m(x, \xi)$ оператора A действительнозначен, то имеет место следующая теорема о

распространении особенностей: если дан связный кусок γ бихарактеристики (т. е. траектории гамильтонова поля на $T^*X\setminus 0$ с гамильтонианом a_m), не пересекающийся с $WF(Au)$, то либо $\gamma\subset WF(u)$, либо $\gamma\cap WF(u)=\varnothing$.

Эта теорема показывает, что особенности решений (т. е. их Ф. в.) уравнения $Au=f$ с гладкой правой частью f распространяются по бихарактеристикам главного символа a_m оператора A (см. [3], [4], [8], [11], [12]).

Аналитич. Ф. в. $WF_a(u)$ для обобщенной функции $u\in D'(X)$ может быть определен одним из следующих трех эквивалентных (см. [13]) способов (здесь для простоты X — область в $\mathbb{R}^n$):

1) $(x_0, \xi_0)\notin WF_a(u)$, если существуют такие окрестность ω точки x_0, открытые собственные выпуклые конусы $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ в $\mathbb{R}^n$ и функции f_j, голоморфные в $\omega+i\Gamma_j$, что $\xi_0\notin\Gamma_j^0$, $j=1, \ldots, N$, и $u=\sum_{j=1}^N b(f_j)$, где Γ_j^0 — двойственный конус к Γ_j, а $b(f_j)$ — граничное значение голоморфной функции $f_j(x+iy)$ при $y\to 0$, $y\in\Gamma_j$, понимаемое в смысле слабой сходимости обобщенных функций. Это определение применимо и к гиперфункциям, если иначе понимать граничное значение.

2) Пусть

$$F_u(\xi, \lambda; x)=\int \exp[-iy\cdot\xi-\lambda|y-x|^2]\,u(y)\,dy$$

(обобщенное преобразование Фурье); тогда $(x_0, \xi_0)\notin WF(u)$ в том и только в том случае, если для любой функции $\chi\in C_0^\infty(X)$, аналитической в окрестности точки x_0, существуют такие конич. окрестность Γ точки ξ_0 и положительные постоянные α, γ, C_N, что

$$F_{\chi u}(\xi, \lambda; x_0)\leqslant C_N(1+|\xi|)^{-N}e^{-\lambda\alpha},\ \xi\in\Gamma, 0<\lambda<\gamma|\xi|.$$

3) $(x_0, \xi_0)\notin WF_a(u)$ тогда и только тогда, когда существуют такие окрестность ω точки x_0 в X, ограниченная последовательность обобщенных функций u_k, $k=1, 2, \ldots$, с компактным носителем и постоянная $C>0$, что $u_k=u$ в ω и

$$|\widehat{u_k}(\xi)|\leqslant C^{k+1}k!\,|\xi|^{-k},\ \xi\in\Gamma.$$

Для аналитич. Ф. в. имеет место аналог свойства (1):

$$\pi(WF_a(u))=\operatorname{sing\,supp}_a u,$$

где $\operatorname{sing\,supp}_a u$ — дополнение к наибольшему множеству, на к-ром u действительно-аналитична. Имеет место аналог свойства (2), где в качестве A можно брать дифференциальный оператор с действительно-аналитич. коэффициентами или аналитич. псевдодифференциальный оператор (см. [6], [9], [11], [15]). Для таких операторов A с действительным главным символом выполняется теорема о распространении аналитич. Ф. в., аналогичная сформулированной выше теореме об обычных Ф. в. (см. [11]).

Лит.: [1] Sato M., Proc. 2nd Conf. on Functional Anal., Tokyo, 1969, p. 91—94; [2] Хёрмандер Л., «Математика», 1972, т. 16, № 1, с. 16—61, т. 16, № 2, с. 67—136; [3] Duistermaat J. J., Hörmander L., «Acta Math.», 1972, v. 128, p. 183—269; [4] Duistermaat J. J., Fourier integral operators, N. Y., 1973; [5] Шубин М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., 1978; [6] Трев Ф., Введение в теорию псевдо-дифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье, пер. с англ., т. 1—2, М., 1984; [7] Taylor M., Pseudodifferential operators, Princeton, 1981; [8] Ниренберг Л., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 4, с. 147—204; [9] Sato M., Kawai T., Kashiwara M., «Lect. Notes in Math.», 1973, v. 287, p. 265—529; [10] Шапира П., Теория гиперфункций, пер. с франц., М., 1972; [11] Sjöstrand J., Singularités analytiques microlocales, Orsay, 1982; [12] Lascar R., Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-differentiel-

les à caractéristiques de multiplicités variables, B.— [e. a.], 1981; [13] Bony J. «Sém. Goulaouic — Schwartz», 1976—1977, p. III. 1—III. 12; [14] Bros J., Iagolnitzer D., «Sém. Goulaouic — Lions — Schwartz», 1974—75, № 16—18; [15] Hörmander L., «Comm. Pure Appl. Math.», 1970, v. 23, p. 329—358. *М. А. Шубин.*

ФРУДА ЧИСЛО — один из критериев подобия движения жидкостей или газов, применяемый в случаях, когда существенно воздействие силы тяжести. Ф. ч. характеризует соотношение между инерционной силой и силой тяжести, действующими на элементарный объем жидкости или газа. Ф. ч.

$$\mathrm{Fr} = v^2/gl,$$

где v — скорость течения (или скорость движущегося тела), g — ускорение силы тяжести, l — характерный размер потока или тела.

Ф. ч. введено У. Фрудом (W. Froude, 1870).

По материалам одноименной статьи БСЭ-3.

ФУБИНИ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — интерпретация многообразия прямых трехмерного эллиптич. пространства S_3 на паре двумерных эллиптич. плоскостей S_2. Пары взаимно полярных прямых пространства S_3 взаимно однозначно изображаются парами диаметрально противоположных точек двух сфер единичного радиуса в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. При отождествлении диаметрально противоположных точек получается взаимно однозначное изображение пар полярных прямых пространства S_3 точками двух эллиптич. плоскостей S_2. Многообразие пар полярных прямых гомеоморфно топологич. произведению этих двух плоскостей S_2. Движения пространства S_3 изображаются в Ф. и. независимыми движениями двух плоскостей S_2: каждая связная группа движений пространства S_3 изоморфна прямому произведению двух групп движений плоскости S_2: группа движений пространства S_3 изоморфна прямому произведению двух групп движений пары плоскостей S_2.

Ф. и. строится и для трехмерного гиперболич. пространства ${}^2S_3$. В этом случае используется *Плюккера интерпретация* проективного пространства P_3 в пространстве ${}^3S_5$. Группа движений пространства ${}^2S_3$ изоморфна прямому произведению двух групп движений плоскости ${}^1S_2$; она изображается в интерпретации Плюккера подгруппой группы движений пространства ${}^3S_5$, переводящей в себя две взаимно полярные гиперболич. 2-плоскости. Линии пересечения этих плоскостей с абсолютом пространства ${}^3S_5$ изображают семейства прямолинейных образующих линейчатой квадрики. Многообразие пар полярных эллиптич. прямых пространства ${}^2S_3$ гомеоморфно топологич. произведению собственных областей двух плоскостей ${}^1S_2$, т. е. топологич. произведению двух кругов, а многообразие пар полярных гиперболич. прямых гомеоморфно произведению идеальных областей двух плоскостей ${}^1S_2$, т. е. топологич. произведению двух листов Мёбиуса.

Ф. и. предложена Г. Фубини [1].

Лит.: [1] Fubini G., «Ann. Scuola Norm. Super.», 1904, t. 9, p. 1—74; [2] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *Л. А. Сидоров.*

ФУБИНИ ТЕОРЕМА — теорема, устанавливающая связь между кратным интегралом и повторным. Пусть $(X, \mathfrak{S}_X, \mu_x)$ и $(Y, \mathfrak{S}_Y, \mu_y)$ — измеримые пространства с σ-конечными полными мерами μ_x и μ_y, определенными соответственно на σ-алгебрах $\mathfrak{S}_X$ и $\mathfrak{S}_Y$. Если функция $f(x, y)$ интегрируема на произведении $X \times Y$ пространств X и Y по произведению $\mu = \mu_x \times \mu_y$ мер μ_x и μ_y, то для почти всех $y \in Y$ функция $f(x, y)$ переменной x интегрируема на пространстве X по мере μ_x, функция $g(y) = \int_X f(x, y)\, d\mu_x$ интегрируема на пространстве Y по мере μ_y и имеет место равенство

$$\int_{X\times Y} f(x, y)\, d\mu = \int_Y d\mu_y \int_X f(x, y)\, d\mu_x. \qquad (1)$$

Ф. т. справедлива, в частности, для случая, когда μ_x, μ_y и μ — меры Лебега соответственно в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{m+n}$ (m и n — натуральные числа), $X=\mathbb{R}^m$, $Y=\mathbb{R}^n$, $X\times Y=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{m+n}$, $f=f(x,\ y)$ — измеримая по Лебегу на пространстве $\mathbb{R}^{m+n}$ функция, $x\in\mathbb{R}^m$, $y\in\mathbb{R}^n$. При этих предположениях формула (1) имеет вид

$$\int\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_{\mathbb{R}^n} dy\int_{\mathbb{R}^m} f(x,\ y)\,dx. \quad (2)$$

Для того чтобы в случае функции f, определенной на произвольном измеримом по Лебегу множестве $E\subset\mathbb{R}^{m+n}$, выразить кратный интеграл через повторный, нужно продолжить функцию f нулем на все пространство $\mathbb{R}^{m+n}$ и применить формулу (2). См. также *Повторный интеграл*.

Ф. т. установлена Г. Фубини [1].

Лит.: [1] Fubini G., Sugli integrali multipli (1907), Opere scelte, v. 2, Roma, 1958, p. 243—49. *Л. Д. Кудрявцев.*

ФУБИНИ ФОРМА — дифференциальная форма (квадратичная F_2 и кубическая F_3), на основе к-рой строится *проективная дифференциальная геометрия*. Введены Г. Фубини (см. [1]).

Пусть $x^\alpha(u^1,\ u^2)$ — (однородные) проективные координаты точки поверхности с внутренними координатами u^1, u^2 и пусть

$$b_{ij}=(x^\alpha,\ x_1^\alpha,\ x_2^\alpha,\ x_{ij}^\alpha),$$

$$b_{ijk}=a_{ijk}-\frac{1}{2}\,\partial_k b_{ij}+\frac{1}{2}\,b_{i,\,j}\,\partial_k\ln\sqrt{|b|},$$

$$b=\det b_{ij},\quad a_{ijk}=(x^\alpha,\ x_1^\alpha,\ x_2^\alpha,\ x_{ijk}^\alpha).$$

Тогда Ф. ф. определяются так:

$$F_2=b_{ij}du^i\,du^j\,|\,b\,|^{-1/4},\qquad F_3=b_{ijk}\,du^i\,du^j\,du^k\,|\,b\,|^{-1/4}.$$

Однако сами проективные координаты не вполне определены: они допускают введение произвольных множителей и однородных линейных преобразований. Поэтому Ф. ф. определены только с точностью до множителя и чтобы избежать связанных с этим затруднений, нормируют координаты и определенные через них формы; напр., при унимодулярных проективных преобразованиях Ф. ф. сохраняют свое значение (с точностью до знака). Отношение F_3/F_2, наз. проективным линейным элементом, уже не зависит от нормирования (и определяет проективный метрич. элемент).

Построенные метрич. средствами, исходя из второй квадратичной формы и формы Дарбу (определяемой *Дарбу тензором*), Ф. ф.

$$f_2=\lambda F_2,\quad f_3=\lambda F_3,$$

инварианты относительно эквиаффинных преобразований и потому могут быть положены в основу эквиаффинной дифференциальной геометрии.

Лит.: [1] Fubini G., Čech E., Geometria proiettiva differenziali, v. 1—2, Bologna, 1926—27; [2] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей..., т. 2, М.—Л., 1948; [3] Широков П. А., Широков А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1959. *М. И. Войцеховский.*

ФУБИНИ — ШТУДИ МЕТРИКА — эрмитова метрика на комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$, определяемая эрмитовым скалярным произведением $(u,\ v)$ в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$. Была введена почти одновременно Г. Фубини [1] и Э. Штуди [2]. Ф.— Ш. м. задается формулой

$$ds^2=\frac{1}{|x|^4}\,(|x|^2\,|dx|^2-(x,\ d\bar{x})\,(\bar{x},\ dx)),$$

где $|x|^2=(x,\ x)$; расстояние $\rho(\hat{x},\ \hat{y})$ между точками $\hat{x}=\mathbb{C}x$, $\hat{y}=\mathbb{C}y$, где $x,\ y\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$, определяется из формулы

$$\cos\rho(\hat{x},\ \hat{y})=\frac{|(x,\ y)|}{|x|\,|y|}.$$

Ф.— Ш.м. является кэлеровой (и даже метрикой Ходжа), соответствующая ей кэлерова форма имеет вид

$$\omega = \frac{i}{2\pi}\,\partial\,\overline{\partial}\ln|z|^2.$$

Ф.— Ш. м.— это единственная с точностью до пропорциональности риманова метрика на $\mathbb{C}P^n$, инвариантная относительно унитарной группы $U(n+1)$, сохраняющей скалярное произведение. Пространство $\mathbb{C}P^n$, снабженное Ф.— Ш. м., является компактным эрмитовым симметрич. пространством ранга 1. Оно наз. также эллиптическим эрмитовым пространством.

Лит.: [1] Fubini G., «Atti Istit. Veneto», 1904, v. 63, p. 502—13; [2] Study E., «Math. Ann.», 1905, Bd 60, S. 321—78; [3] Cartan E., Leçons sur la géometrie projective complexe, P., 1950; [4] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [5] Чжень Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961.

А. Л. Онищик.

ФУКСА УРАВНЕНИЕ, уравнение класса Фукса — линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение в комплексной области

$$w^{(n)} + p_1(z)\,w^{(n-1)} + \ldots + p_n(z)\,w = 0 \qquad (1)$$

с аналитич. коэффициентами, все особые точки к-рого на *Римана сфере* являются *регулярными особыми точками*. Для того чтобы уравнение (1) принадлежало классу Фукса, необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты имели вид

$$p_j(z) = \prod_{m=1}^{k} (z-z_m)^{-j}\,q_j(z),$$

где $z_1, \ldots, z_k$ — различные точки, $q_j(z)$ — многочлен степени $\leqslant j\,(k-1)$. Система $w' = A(z)\,w$ из n уравнений принадлежит классу Фукса, если она имеет вид

$$\frac{dw}{dz} = \sum_{m=1}^{k} \frac{A_m}{z-z_m}\,w, \qquad (2)$$

где $z_1, \ldots, z_k$ — различные точки, $A_m \neq 0$ — постоянные матрицы порядка $n\times n$. Особыми для уравнения (1) и системы (2) являются точки $z_1, \ldots, z_k, \infty$. Для Ф. у. (1) справедливо тождество Фукса:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{k}\rho_j^m + \rho_j^\infty\right) = (k-1)\,\frac{n(n-1)}{2},$$

где $\rho_1^m, \ldots, \rho_n^m$ — характеристич. показатели в точке z_m, а $\rho_1^\infty, \ldots, \rho_n^\infty$ — в точке ∞. Ф. у. (и системы) наз. также регулярными уравнениями (системами). Этот класс уравнений и систем был введен Л. Фуксом [1].

Пусть D — сфера Римана с проколами в точках $z_1, \ldots, z_k, \infty$. Любое нетривиальное решение Ф. у. (1) (соответственно любая компонента решения системы (2)) есть аналитическая в области D функция. Как правило, эта функция бесконечнозначна, а все особые точки уравнения (1) (системы (2)) являются ее точками ветвления бесконечного порядка.

Ф. у. 2-го порядка с особыми точками $z_1, z_2, \ldots, z_k, \infty$ имеет вид

$$w'' + \sum_{m=1}^{k}\frac{1-(\rho_1^m+\rho_2^m)}{z-z_m}\,w' + \sum_{m=1}^{k}\left[\frac{\rho_1^m\rho_2^m\prod_{j=1}^{'k}(z_m-z_j)}{z-z_m} + Q_{k-2}(z)\right]\times \frac{w}{\prod_{m=1}^{k}(z-z_m)} = 0, \qquad (3)$$

где $Q_{k-2}(z)$ — многочлен степени $k-2$. Преобразование $w = (z-z_m)^l\,\tilde{w}$ переводит Ф. у. в Ф. у., причем

$$(\rho_1^m,\ \rho_2^m) \longrightarrow (\rho_1^m - l,\ \rho_2^m - l),$$
$$(\rho_1^\infty,\ \rho_2^\infty) \longrightarrow (\rho_1^\infty + l,\ \rho_2^\infty + l),$$

а характеристич. показатели в остальных особых точках не меняются. С помощью таких преобразований уравнение (3) приводится к виду

$$w''+\sum_{m=1}^{k}\frac{1-(\rho_2^m+\rho_1^m)}{z-z_m}w'+$$

$$+(\overline{\rho}_1^{\infty}\overline{\rho}_2^{\infty}z^{n-2}+d_0z^{n-3}+\ldots+d_{n-2})\frac{w}{\prod_{m=1}^{k}(z-z_m)}=0,$$

$$\overline{\rho}_j^{\infty}=\rho_j^{\infty}+\sum_{m=1}^{k}\rho_j^m.$$

Ф. у. 2-го порядка, имеющее N особых точек, полностью определяется заданием характеристич. показателей в этих точках тогда и только тогда, когда $N<4$. С помощью дробно-линейного преобразования уравнение приводится к виду: а) $N=1$, $\tilde{w}''=0$; б) $N=2$, $\zeta^2\tilde{w}''+a\zeta\tilde{w}'+b\tilde{w}=0$ (Эйлера уравнение); в) $N=3$ — *Папперица уравнение* (или уравнение Римана).

Матричное Ф. у. имеет вид

$$\frac{dW}{dz}=\sum_{m=1}^{k}\frac{WU_m}{z-z_m}, \qquad (4)$$

где $z_1, \ldots, z_k$ — различные точки, W — матрица-функция порядка $n\times n$, $U_m\neq 0$ — постоянные матрицы. Матрица U_m наз. дифференциальной подстановкой в точке z_m. Пусть γ — простая замкнутая кривая с началом в неособой точке b, положительно ориентированная и содержащая внутри себя только одну особую точку z_m. Если $W(z)$ — голоморфное в точке b решение уравнения (4), то при аналитич. продолжении вдоль γ

$$W\longrightarrow V_mW,$$

где V_m — постоянная матрица, наз. интегральной подстановкой в z_m. А. Пуанкаре (H. Poincaré, см. [2]) поставил для систем вида (4) задачу, к-рая наз. прямой регулярной задачей Пуанкаре. Она состоит из следующих трех задач:

А) представление решения $W(z)$ во всей области его существования;

Б) построение интегральных подстановок в точках z_m;

В) аналитич. характеристика особенностей решений.

В частности, решение задачи Б) позволяет построить группу монодромии уравнения (4). Решение задачи Пуанкаре было получено И. А. Лаппо-Данилевским [3]. Пусть $L_b\left(z_{j_1}, \ldots, z_{j_\nu}\,|\,z\right)$, $j_m\in\{1, \ldots, k\}$, $\nu=1, 2, \ldots$, — гиперлогарифмы:

$$L_b(z_m\,|\,z)=\int_b^z\frac{dz}{z-z_m}, \quad L_b(z_{j_1}, \ldots, z_{j_\nu}\,|\,z)=$$

$$=\int_b^z\frac{L_b(z_{j_1}, \ldots, z_{j_{\nu-1}}\,|\,z)}{z-z_{j_\nu}}dz,$$

$W_0(z)$ — элемент (росток) в точке b решения уравнения (4), нормированный условием $W_0(b)=I$ и $W(z)$ — аналитическая в области D матрица-функция, порожденная этим элементом. Тогда $W(z)$ есть целая функция от матриц $U_1, \ldots, U_k$ и разлагается в ряд

$$W(z)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, k)}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}L_b(z_{j_1}, \ldots, z_{j_\nu}\,|\,z),$$

к-рый сходится равномерно по z на любом компакте $K\subset D$. Интегральная подстановка V_m в точке z_m, отвечающая решению $W(z)$, есть целая функция от матриц $U_1, \ldots, U_k$ и разлагается в ряд

$$V_m=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, k)}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}P_j(z_{j_1}, \ldots, z_{j_\nu}\,|\,b),$$

где P_j выражаются через гиперлогарифмы (см. [3], [6]).

Получены также формулы, дающие решение задачи B) (см. [3]).

Лит.: [1] Fuchs L., «J. reine und angew. Math.», 1866, Bd 66, S. 121—60; 1868, Bd 68, S. 354—85; [2] Пуанкаре А., Избр. труды, пер. с франц., т. 3, М., 1974; [3] Лаппо-Данилевский И. А., Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с франц., М.,1957; [4] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М.,1958; [5] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1950; [6] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3, ч. 2, М., 1974; [7] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Хар., 1939. *М. В. Федорюк.*

ФУКСОВА ГРУППА — *дискретная группа* голоморфных преобразований (открытого) круга K на сфере Римана, т. е. круга или полуплоскости на комплексной плоскости. Чаще всего в качестве K берут верхнюю полуплоскость

$$U=\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im} z>0\}$$

или единичный круг

$$D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}.$$

В первом случае элементы Ф. г. являются дробно-линейными преобразованиями

$$z\longmapsto\frac{az+b}{cz+d}$$

с действительными коэффициентами, и Ф. г. представляет собой не что иное, как *дискретную подгруппу* группы PSL_2. Во втором случае элементы Ф. г. являются дробно-линейными преобразованиями с псевдоунитарными матрицами.

Если рассматривать круг K как конформную модель плоскости Лобачевского, то Ф. г. может быть определена как дискретная группа его движений, сохраняющих ориентацию. Ф. г. представляют собой частный случай *клейновых групп*.

Произвольные Ф. г. впервые рассматривались А. Пуанкаре (H. Poincaré, см. [2]) в 1882 в связи с проблемой униформизации. Группы были названы им фуксовыми в честь Л. Фукса, работа [1] к-рого стимулировала введение этого понятия. Для описания Ф. г. Пуанкаре применил комбинаторно-геометрич. метод, ставший впоследствии одним из основных методов теории дискретных групп преобразований. Понятие Ф. г. послужило основой для теории автоморфных функций, созданной А. Пуанкаре и Ф. Клейном (F. Klein).

Ф. г., сохраняющая какую-либо точку в замыкании $\overline{K}$ круга K или прямую в смысле геометрии Лобачевского, наз. *элементарной*. Если Γ — неэлементарная Ф. г., то множество $L(\Gamma)$ предельных точек орбиты точки $x\in\overline{K}$, лежащее на граничной окружности ∂K, не зависит от x и наз. *предельным множеством группы* Γ. Группа Γ наз. Ф. г. *1-го рода*, если $L(\Gamma)=\partial K$, и *2-го рода* — в противном случае (тогда $L(\Gamma)$ — нигде не плотное совершенное подмножество в ∂K).

Конечно порожденная Ф. г. является Ф. г. 1-го рода тогда и только тогда, когда площадь (в смысле геометрии Лобачевского) ее фундаментальной области конечна. В качестве фундаментальной области такой группы Γ всегда может быть выбран выпуклый многоугольник P плоскости Лобачевского со сторонами

$$a_1, b_1', a_1', b_1, \ldots, a_g, b_g', a_g', b_g, c_1, c_1', \ldots, c_n, c_n'$$

таким образом, что

$$a_i=\alpha_i(a_i'),\quad b_i=\beta_i(b_i'),\quad c_i=\gamma_i(c_i')$$

для нек-рых элементов

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_g,\quad \beta_1, \ldots, \beta_g,\quad \gamma_1, \ldots, \gamma_n,$$

порождающих группу Γ с определяющими соотношениями

$$\prod_{i=1}^{g}(\alpha_i\beta_i\alpha_i^{-1}\beta_i^{-1})\prod_{i=1}^{n}\gamma_i=1,$$

$$\gamma_i^{k_i}=1,\quad i=1,\ldots,n,$$

где k_i — целое число $\geqslant 2$ или ∞. Элемент γ_i оставляет на месте вершину C_i многоугольника P, общую сторонам c_i и c_i'. Он является эллиптическим, если $k_i<\infty$, и параболическим, если $k_i=\infty$; в последнем случае вершина C_i лежит на окружности ∂K, т. е. является бесконечно удаленной точкой плоскости Лобачевского. Всякий эллиптич. или параболич. элемент группы Γ сопряжен степени нек-рого однозначно определенного образующего γ_i. Углы многоугольника P при вершинах C_i, $i=1,\ldots,n$, равны $2\pi/k_i$, сумма всех остальных углов равна 2π. Стороны a_i и a_i', а также b_i и b_i', c_i и c_i' имеют одинаковую длину. Обратно, всякий выпуклый многоугольник на плоскости Лобачевского, удовлетворяющий этим условиям, является фундаментальным многоугольником описанного выше типа нек-рой конечно порожденной Ф. г. 1-го рода.

Всякая система образующих группы Γ, к-рая получается описанным способом, наз. с т а н д а р т н о й. При абстрактном изоморфизме конечно порожденных Ф. г. 1-го рода, отображающем множество параболич. элементов одной группы на множество параболич. элементов другой группы, всякая стандартная система образующих переходит в стандартную систему образующих.

Площадь фундаментальной области группы Γ равна $-2\pi\chi(\Gamma)$, где

$$\chi(\Gamma)=\chi(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)=2-2g-\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k_i}\right).$$

Набор чисел $(g;\ k_1,\ldots,\ k_n)$, где $k_1,\ldots,\ k_n$ считаются неупорядоченными, является топологич. инвариантом группы Γ как группы гомеоморфизмов круга и наз. ее с и г н а т у р о й. Единственным ограничением на сигнатуру является условие

$$\chi(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)<0. \qquad (*)$$

Для подгруппы Δ конечного индекса Ф. г. Γ имеет место ф о р м у л а Р и м а н а — Г у р в и ц а:

$$\chi(\Delta)=\chi(\Gamma)\,[\Gamma:\Delta].$$

Во всякой Ф. г. существует подгруппа конечного индекса, не имеющая элементов конечного порядка.

Факторпространство K/Γ компактифицируется путем добавления конечного числа точек, соответствующих бесконечно удаленным вершинам фундаментального многоугольника. На компактифицированном пространстве S имеется единственная комплексная структура, для к-рой отображение факторизации $p\colon K\longrightarrow S$ голоморфно. При этом S является римановой поверхностью рода g, а отображение p — регулярным разветвленным накрытием с индексами ветвления $k_1,\ \ldots,\ k_n$. Обратно, т е о р е м а у н и ф о р м и з а ц и и утверждает, что для любой компактной римановой поверхности S рода g с отмеченными точками $x_1,\ \ldots,\ x_n$ и для любых $k_1,\ \ldots,\ \ldots,\ k_n$ (k_i — целое число $\geqslant 2$ или ∞), удовлетворяющих условию (*), существует регулярное голоморфное разветвленное накрытие $p\colon K\longrightarrow S$, ветвящееся в точности над точками $x_1,\ \ldots,\ x_n$ с индексами ветвления $k_1,\ \ldots,\ \ldots,\ k_n$ соответственно. Накрытие p определено однозначно с точностью до автоморфизма круга K. Его группа скольжений есть Ф. г. сигнатуры $(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)$.

Конечно порожденные Ф. г. 1-го рода фиксированной сигнатуры $(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)$ могут быть параметризованы точками нек-рого $(3n-3+n)$-мерного комплексного многообразия, гомеоморфного клетке,— т. н. п р о-

странства Тайхмюллера $T(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)$ (см. [4]). При этом двум точкам пространства Тайхмюллера соответствует одна и та же (с точностью до сопряженности в группе автоморфизмов круга) Ф. г. тогда и только тогда, когда эти точки эквивалентны относительно нек-рой дискретной группы голоморфных преобразований пространства $T(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)$—т. н. модулярной группы $\mathrm{Mod}(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)$. Имеется изоморфизм

$$T(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n) \cong T(g;\ \underbrace{\infty,\ \ldots,\ \infty}_{n}),$$

при к-ром группа $\mathrm{Mod}(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)$ переходит в подгруппу конечного индекса группы $\mathrm{Mod}(g;\ \infty,\ \ldots,\ \infty)$.

Если Ф. г. сигнатуры $(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)$ содержит подгруппу конечного индекса сигнатуры $(h;\ l_1,\ \ldots,\ l_m)$, то пространство $T(g;\ k_1,\ \ldots,\ k_n)$ естественным образом вкладывается в виде замкнутого подмножества в пространство $T(h;\ l_1,\ \ldots,\ l_m)$. В нек-рых исключительных случаях эти пространства совпадают [10]. Напр., $T(2) = T(0;\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2)$; это означает, что всякая компактная риманова поверхность рода 2 допускает гиперэллиптич. инволюцию и, значит, является гиперэллиптич. кривой.

Для Ф. г. сигнатуры $(0;\ k_1,\ k_2,\ k_3)$, называемых треугольными группами, и только для них, пространство Тайхмюллера состоит из одной точки. Всякая треугольная группа является подгруппой индекса 2 в группе, порожденной отражениями относительно сторон треугольника с углами $\frac{\pi}{k_1}$, $\frac{\pi}{k_2}$, $\frac{\pi}{k_3}$ (см. *Отражений группа*). Примером треугольной группы служит модулярная группа Клейна; ее сигнатура равна $(0;\ 2,\ 3,\ \infty)$.

Всякая конечно порожденная Ф. г. 2-го рода топологически (как группа гомеоморфизмов круга) изоморфна конечно порожденной Ф. г. 1-го рода и допускает аналогичное геометрич. описание, с той разницей, что нек-рые пары сторон c_i, c_i' фундаментального многоугольника не имеют общих точек, даже бесконечно удаленных, а соответствующие образующие γ_i являются гиперболич. преобразованиями. Компактифицированное факторпространство представляет собой риманову поверхность с краем.

Всякая бесконечно порожденная Ф. г. является свободным произведением циклич. подгрупп. Ее фундаментальная область может быть построена как предел фундаментальных областей конечно порожденных групп (см. [5]).

Лит.: [1] Fuchs L., «J. reine und angew. Math.», 1880, Bd 89, S. 151—69; [2] Пуанкаре А., Теория фуксовых групп, в кн.: Избр. труды, т. 3, пер. с франц., М., 1974, с. 9—62; [3] Frieke R., Klein F., Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd 1—2, Lpz., 1897—1912; [4] Альфорс Л., Берс Л., Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, пер. с англ., М., 1961; [5] Крушкаль С. Л., Апанасов Б. Н., Гусевский Н. А., Клейновы группы и униформизация в примерах и задачах, Новосиб., 1981; [6] Натанзон С. М., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 4, с. 145—60; [7] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 16, М., 1978, с. 191—245; [8] Lehner J., Discontinuous groups and automorphic functions, Providence, 1964; [9] Magnus W., Noneuclidean tesselations and their groups, N. Y., 1974; [10] Singerman D., «J. London Math. Soc.», 1972, v. 6, № 1, p. 29—38. *Э. Б. Винберг.*

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА, группа Пуанкаре,— первая абсолютная *гомотопическая группа* $\pi_1(X,\ x_0)$. Пусть I — отрезок $[0,\ 1]$, $\partial I = \{0,\ 1\}$ — его граница. Элементами Ф. г. пунктированного топологич. пространства $(X,\ x_0)$ служат гомотопич. классы замкнутых путей в X, т. е. классы гомотопных rel $\{0,\ 1\}$ непрерывных отображений пары $(I,\ \partial I)$ в $(X,\ x_0)$. Путь $s_1 s_2$:

$$s_1 s_2\,(t) = \begin{cases} s_1\,(2t), & t \leqslant 1/2, \\ s_2\,(2t-1), & t \geqslant 1/2, \end{cases}$$

наз. произведением путей s_1 и s_2. Гомотопич. класс произведения зависит только от классов сомножителей, возникающая операция, вообще говоря, некоммутативна. Единицей служит класс постоянного отображения в x_0, обратным к классу $\overline{\varphi}$, содержащему путь $\varphi(t)$, служит класс пути $\psi(t)=\varphi(-t)$. Непрерывному отображению $f:(X, x_0)\to(Y, y_0)$ соответствует гомоморфизм

$$f_{\#}(\overline{\varphi})=\overline{f\circ\varphi}:\pi_1(X, x_0)\longrightarrow\pi_1(Y, y_0),$$

т. е. π_1 является функтором на категории топологич. пространств в категорию (неабелевых) групп. Для любого пути φ, соединяющего точки x_1 и x_2, определен изоморфизм

$$\widehat{\varphi}:\pi_1(X, x_2)\longrightarrow\pi_1(X, x_1),\ \widehat{\varphi}(u)\,t=$$
$$=\begin{cases}\varphi(3t), & t\leqslant 1/3,\\ u(3t-1), & 1/3\leqslant t\leqslant 2/3,\\ \varphi(3-3t), & 2/3\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

зависящий только от гомотопич. класса пути φ. Группа $\pi_1(X, x_0)$ действует автоморфизмами на $\pi_n(X, x_0)$, в случае $n=1$ элемент $\overline{\varphi}$ действует как внутренний автоморфизм $u\mapsto\varphi\overline{u}\overline{\varphi}^{-1}=\widehat{\varphi}(\overline{u})$. Гомоморфизм Гуревича $h:\pi_1(X, x_0)\longrightarrow H_1(X)$ является эпиморфизмом с ядром $[\pi_1, \pi_1]$ (теорема Пуанкаре).

Линейно связное топологич. пространство с нулевой Ф. г. наз. односвязным. Ф. г. произведения $\Pi_\alpha(X_\alpha)$ пространств изоморфна прямому произведению Ф. г. сомножителей: $\pi_1(\Pi_\alpha(X_\alpha))=\Pi_\alpha\pi_1(X_\alpha)$. Пусть (X, x_0) — линейно связное топологич. пространство, $\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ — покрытие X замкнутой относительно пересечений системой открытых множеств U_λ таких, что $x_0\in\bigcap_\lambda U_\lambda$, тогда $\pi_1(X, x_0)$ — прямой предел диаграммы $\{G_\lambda, \varphi_{\lambda\mu\#}\}$, где $G_\lambda=\pi_1(U_\lambda, x_0)$, а $\varphi_{\lambda\mu\#}$ индуцировано включением $\varphi_{\lambda\mu}: U_\lambda\longrightarrow U_\mu$ (теорема Зейферта—Ван Кампена). Напр., если дано покрытие, состоящее из U_0, U_1, U_2, и $U_0=U_1\bigcap U_2$ односвязно, то $\pi_1(X, x_0)$ есть свободное произведение групп $\pi_1(U_1, x_0)$ и $\pi_1(U_2, x_0)$. В случае клеточного пространства утверждение теоремы справедливо также для замкнутых клеточных подпространств в X.

Для клеточного пространства X, нульмерный остов к-рого состоит из единственной точки x_0, каждая одномерная клетка $e^1_\lambda\in X$ задает образующую Ф. г. $\pi_1(X, x_0)$, каждая двумерная клетка $e^2_\lambda\in X$ задает соотношение, отвечающее приклеивающему отображению клетки e^2_λ.

Пусть X обладает покрытием $\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ таким, что гомоморфизм включения $\pi_1(U_\lambda, z)=\pi_1(X, z)$ нулевой для любой точки z. Тогда существует *накрытие* p: $\widetilde{X}\to X$ с $\pi_1(\widetilde{X}, x)=0$. В этом случае группа коммутирующих с p гомеоморфизмов пространства $\widetilde{X}$ на себя (скольжений) изоморфна $\pi_1(X, x_0)$, порядок группы $\pi_1(X, x_0)$ равен мощности слоя $p^{-1}x_0$. Для отображения $f:(Y, y_0)\to(X, x_0)$ линейно связных пространств такого, что $f_{\#}(\pi_1(Y, y_0))=0$, существует поднятие $\widetilde{f}$: $Y\longrightarrow\widetilde{X}$, $p\circ\widetilde{f}=f$. Накрытие p: $\widetilde{X}\longrightarrow X$ наз. универсальным.

Лит.: [1] Масси У., Столлингс Дж., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1977; [2] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии, М., 1977; [3] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971.

А. В. Хохлов.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ОБЛАСТЬ дискретной группы Γ преобразований топологич. пространства X — подмножество $D\subset X$, содержащее элементы из всех орбит группы Γ, причем из орбит общего положения — ровно по одному элементу. Имеются различные варианты точного определения Ф. о. Иногда Ф. о. наз. любое подмножество, принадлежащее заданной σ-алгебре (напр., борелевское) и содержащее по одному представителю из каждой орбиты. Однако

если X — топологич. многообразие, то Ф. о. обычно наз. подмножество $D \subset X$, являющееся замыканием открытого подмножества и такое, что подмножества γD, $\gamma \in \Gamma$, не имеют попарно общих внутренних точек и образуют локально конечное покрытие пространства X. Напр., в качестве Ф. о. группы параллельных переносов плоскости $\mathbb{R}^2$ на целочисленные векторы может быть взят квадрат

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Выбор Ф. о., как правило, неоднозначен.

Э. Б. Винберг.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, последовательность Коши, точек метрического пространства X — последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ и $m > n_0$ выполняется неравенство $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Обобщением Ф. п. является понятие *направленности* Коши в равномерном пространстве. Пусть X — равномерное пространство с равномерностью $\mathfrak{U} = \{U\}$. Направленность $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$, $x_\alpha \in X$, A — направленное множество, наз. направленностью Коши, если для каждого элемента $U \in \mathfrak{U}$ существует такой индекс $\alpha_0 \in A$, что для всех $\alpha \in A$ и $\beta \in A$, следующих в A за α_0, имеет место включение $(x_\alpha, x_\beta) \in U$.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981.

Л. Д. Кудрявцев.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — базис векторного пространства действительных (комплексных) решений этой системы. (Система может состоять и из одного уравнения.) Более подробно это определение формулируется следующим образом.

Множество действительных (комплексных) решений $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ (заданных на нек-ром множестве E) линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений наз. Ф. с. р. этой системы уравнений (на множестве E) при выполнении совокупности следующих двух условий: 1) если действительные (комплексные) числа $C_1, \ldots, C_n$ таковы, что функция

$$C_1 x_1(t) + \ldots + C_n x_n(t)$$

тождественно равна нулю на E, то все числа $C_1, \ldots, C_n$ равны нулю; 2) для всякого действительного (комплексного) решения $x(t)$ рассматриваемой системы уравнений найдутся действительные (соответственно комплексные) числа $C_1, \ldots, C_n$ (не зависящие от t) такие, что

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \ldots + C_n x_n(t) \text{ при всех } t \in E.$$

Если $\| c_{ij} \|$, $i, j = 1, \ldots, n$ — произвольная невырожденная $(n \times n)$-матрица, а $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ есть Ф. с. р., то $\left\{ \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j(t), \ldots, \sum_{j=1}^n c_{nj} x_j(t) \right\}$ также есть Ф. с. р.; всякая Ф. с. р. получается таким преобразованием из данной Ф. с. р.

Если система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot{x} = A(t)\, x, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ (или $x \in \mathbb{C}^n$), а

$$A(\cdot) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \text{ (соответственно } (\alpha, \beta) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)),$$

причем отображение $A(\cdot)$ суммируемо на каждом отрезке, содержащемся в (α, β) ((α, β) — конечный или бесконечный интервал в $\mathbb{R}$), то векторное пространство решений этой системы изоморфно $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$). Следовательно, система (1) имеет бесконечно мно-

го Ф. с. р., и каждая такая Ф. с. р. состоит из n решений. Напр., для системы уравнений

$$\dot{u} = u, \quad \dot{v} = -v$$

произвольная Ф. с. р. имеет вид

$$\left\{\begin{pmatrix} e^t u_1 \\ e^{-t} v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^t u_2 \\ e^{-t} v_2 \end{pmatrix}\right\},$$

где $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ — произвольные линейно независимые векторы-столбцы.

Всякая Ф. с. р. системы (1) имеет вид

$$\{X(t, \tau) x_1, \ldots, X(t, \tau) x_n\},$$

где $X(t, \tau)$ — *Коши оператор* системы (1), τ — произвольное фиксированное число из интервала (α, β), а $x_1, \ldots, x_n$ — произвольный фиксированный базис пространства $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$).

Если система дифференциальных уравнений состоит из одного уравнения

$$x^{(k)} + a_1(t) x^{(k-1)} + \ldots + a_k(t) x = 0, \qquad (2)$$

где функции

$$a_1(t), \ldots, a_k(t) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (или } (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{C})$$

суммируемы на каждом отрезке, содержащемся в (α, β) (где (α, β) — конечный или бесконечный интервал в $\mathbb{R}$), то векторное пространство решений этого уравнения изоморфно $\mathbb{R}^k$ (соответственно $\mathbb{C}^k$). Следовательно, уравнение (2) имеет бесконечно много Ф. с. р., и каждая из них состоит из k решений. Напр., уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega \neq 0,$$

имеет Ф. с. р. $\{\cos \omega t, \sin \omega t\}$; общее действительное решение этого уравнения дается формулой

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

где C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные.

Если система дифференциальных уравнений имеет вид

$$x^{(k)} = A_1(t) x^{(k-1)} + \ldots + A_k(t) x, \qquad (3)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ (или $x \in \mathbb{C}^n$) и при всяком $i = 1, \ldots, k-1$ отображение

$$A_i(\cdot) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \text{ (или } (\alpha, \beta) \longrightarrow \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n))$$

суммируемо на каждом отрезке, содержащемся в (α, β) (где (α, β) — конечный или бесконечный интервал в $\mathbb{R}$), то пространство решений этой системы уравнений изоморфно $\mathbb{R}^{kn}$ (соответственно $\mathbb{C}^{kn}$); Ф. с. р. системы (3) существуют, и каждая из них состоит из kn решений.

Для линейных однородных систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старших производных, даже если коэффициенты системы постоянные, число решений, входящих в Ф. с. р. (т. е. размерность векторного пространства решений), вычисляется иногда не столь просто, как в вышеприведенных случаях. (В [1], § 11 рассмотрено такое вычисление для линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, не разрешенных относительно старших производных.)

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974. *В. М. Миллионщиков.*

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ линейного дифференциального уравнения с частными производными — решение дифференциального уравнения с частными производными $Lu(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, с коэффициентами класса C^∞ в виде функции $I(x, y)$, удовлетворяющей при фиксированном $y \in \mathbb{R}^n$ уравнению

$$LI(x, y) = \delta(x - y), \quad x \neq y,$$

к-рая понимается в смысле теории обобщенных функций, где δ — дельта-функция. Ф. р. существует для всякого дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, а также для произвольных эллиптич. уравнений. Напр., для эллиптич. уравнения

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

с постоянными коэффициентами a_{ij}, образующими положительно определенную матрицу a, Ф. р. служит функция

$$I(x,\,y) = \begin{cases} \left[\sum_{i,\,j=1}^{n} A_{ij}\,(x_i - y_i)\,(x_j - y_j)\right]^{(2-n)/2}, & n > 2, \\ \log\left[\sum_{i,\,j=1}^{n} A_{ij}\,(x_i - y_i)\,(x_j - y_j)\right], & n = 2, \end{cases}$$

где A_{ij} — алгебраич. дополнение к a_{ij} в матрице a.

В теории эллиптич. уравнений Ф. р. широко используются при изучении краевых задач с помощью интегральных уравнений.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979; [2] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [3] Йон Ф., Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, пер. с англ., М., 1958.

А. П. Солдатов.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ГРУППОИД — группоид (категория, все морфизмы к-рой — изоморфизмы), определенный для топологич. пространства X; объектами являются точки X, морфизмами объекта x_0 в x_1 — гомотопич. классы $\mathrm{rel}\,\{0,\,1\}$ путей с началом x_0 и концом в x_1, композицией — произведение классов путей. Группа изоморфизмов объекта x_0 на себя совпадает с *фундаментальной группой* $\pi_1(X,\,x_0)$.

А. В. Хохлов.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ КЛАСС — 1) Ф. к. $(n-1)$-связного (т. е. такого, что $\pi_i(X)$ при $i \leqslant n-1$) топологич. пространства X — элемент r_n группы $H^n(X;\,\pi_n(X))$. Соответствующий при изоморфизме $H^n(X;\,\pi) \approx \mathrm{Hom}\,(H_n(X);\,\pi)$, в к-рый вырождается формула универсальных коэффициентов

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}\,(H_{n-1}(X);\,\pi) \longrightarrow H^n(X;\,\pi) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hom}\,(H_n(X);\,\pi) \longrightarrow 0,$$

гомоморфизму h^{-1}, обратному к гомоморфизму Гуревича h: $\pi_n(X) \longrightarrow H_n(X)$ (являющемуся по теореме Гуревича (см. *Гомотопическая группа*) изоморфизмом). Если X является клеточным разбиением (клеточным пространством), то Ф. к. r_n совпадает с первым *препятствием* к построению сечения *Серра расслоения* $\Omega X \longrightarrow EX \longrightarrow X$, к-рое лежит в $H^n(X,\,\pi_{n-1}(\Omega X)) = H^n(X;\,\pi_n(X))$, а также с первым препятствием к гомотопии тождественного отображения $\mathrm{id}\colon X \longrightarrow X$ постоянному отображению. В случае, когда $(n-1)$-мерный остов клеточного разбиения X состоит из одной точки (на самом деле это предположение общности не ограничивает, поскольку любое $(n-1)$-связное клеточное разбиение гомотопически эквивалентно клеточному разбиению без клеток положительной размерности, меньшей n), замыкание каждой n-мерной клетки является n-мерной сферой и потому ее характеристич. отображение определяет нек-рый элемент группы $\pi_n(X)$. Поскольку эти клетки образуют базис группы $C_n(X)$, тем самым определена n-мерная коцепь из $C^n(X;\,\pi_n(X))$. Эта коцепь является коциклом, класс когомологий к-рого и есть Ф. к.

2) Ф. к., ориентационный класс, связного ориентируемого n-мерного многообразия M без края (соответственно, с краем ∂M) — образующая $[M]$ группы $H_n(M)$ (соответственно, группы $H_n(M,\,\partial M)$), являющейся свободной циклич. группой. Если многообразие M триангулируемо, то Ф. к. представляет собой класс гомологий цикла, яв-

ляющегося суммой всех когерентно ориентированных n-мерных симплексов произвольной его триангуляции. Для каждого q гомоморфизм

$$D_M: H^q(M) \longrightarrow H_{n-q}(M), \quad D_M: x \longrightarrow x \cap [M],$$

где $\cap$-произведение определяется формулой

$$(x \cup y)(c) = x(y \cap c), \quad \dim x + \dim y = \dim c,$$

является изоморфизмом, называемым *Пуанкаре двойственностью* (если многообразие M имеет край ∂M, то $D_M: H^q(M) \longrightarrow H_{n-q}(M, \partial M)$). О Ф. к. говорят также и для неориентируемых (но связных) многообразий M без края; в этом случае под ним понимается единственный отличный от нуля элемент группы $H_n(M; \mathbb{Z}_2)$ (если многообразие имеет край ∂M, то группы $H_n(M, \partial M; \mathbb{Z}_2)$). В этом случае двойственность Пуанкаре также имеет место.

Лит.: [1] Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л., Гомотопическая топология, 2 изд., М., 1969; [2] Мошер Р. Э., Тангора М. К., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970; [3] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [4] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [5] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976.

С. Н. Малыгин, М. М. Постников.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ КОЦИКЛ клеточного пространства X такого, что $(n-1)$-остов X^{n-1} является точкой x_0,— коцепь из $C^n(X, \pi_n(X))$, значение к-рой на клетке e_i^n есть элемент $\pi_n(X, x_0)$, соответствующий замыканию $\overline{e_i^n}$. Класс когомологий Ф. к. является *фундаментальным классом* пространства X. *А. В. Хохлов.*

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ЦИКЛ, n-мерного многообразия цикл, задающий *фундаментальный класс* этого многообразия.

Лит.: [1] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976; [2] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [3] Милнор Дж., Сташеф Д., Характеристические классы, пер. с англ., М., 1979.

А. В. Хохлов.

ФУНКТОР — отображение одной *категории* в другую, согласованное со структурой категории. Точнее, о д н о м е с т н ы м к о в а р и а н т н ы м ф у н к т о р о м из категории $\mathfrak{K}$ в категорию $\mathfrak{C}$, или, короче, Ф. из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{C}$, наз. пара отображений ($\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K} \to \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$, $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K} \to \mathrm{Mor}\,\mathfrak{C}$), обозначаемых обычно одной и той же буквой, напр. F ($F: \mathfrak{K} \longrightarrow \mathfrak{C}$), подчиненных условиям:

1) $F(1_A) = 1_{F(A)}$ для каждого $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$;

2) $F(\alpha\beta) = F(\alpha) \cdot F(\beta)$ для любых морфизмов $\alpha \in H_{\mathfrak{K}}(A, B)$, $\beta \in H_{\mathfrak{K}}(B, C)$.

Ф. из категории $\mathfrak{K}^*$, двойственной категории $\mathfrak{K}$, в категорию $\mathfrak{C}$ наз. о д н о м е с т н ы м к о н т р а в а р и а н т н ы м ф у н к т о р о м из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{C}$. Таким образом, для контравариантного Ф. $F: \mathfrak{K} \longrightarrow \mathfrak{C}$ по-прежнему должно выполняться условие 1), а вместо условия 2) — условие 2*) $F(\alpha\beta) = F(\beta) \cdot F(\alpha)$ для любых морфизмов $\alpha \in H_{\mathfrak{K}}(A, B)$, $\beta \in H_{\mathfrak{K}}(B, C)$.

n-м е с т н ы м ф у н к т о р о м из категорий $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n$ в категорию $\mathfrak{C}$, ковариантным по аргументам $1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n$ и контравариантным по остальным аргументам, наз. функтор из декартова произведения категорий

$$\prod_{i=1}^{n} \tilde{\mathfrak{K}}_i$$

в категорию $\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}_i$ при $i = i_1, \ldots, i_k$ и $\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}_i^*$ при остальных i. Двуместные Ф., ковариантные по обоим аргументам, наз. б и ф у н к т о р а м и.

Примеры функторов. 1) Тождественное отображение произвольной категории $\mathfrak{K}$ в себя есть одноместный ковариантный Ф., к-рый наз. т о ж д е с т в е н н ы м ф у н к т о р о м категории и обозначается $\mathrm{Id}_{\mathfrak{K}}$. 2) Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольная категория, $\mathfrak{S}$ — категория множеств, A — фиксированный объект из $\mathfrak{K}$. Сопостав-

ление каждому $X \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ множества $H^A(X) = H_{\mathfrak{K}}(A, X)$ и каждому морфизму $\alpha\colon X \to Y$ отображения $H^A(\alpha)$: $H^A(X) \to H^A(Y)$, где $\gamma H^A(\alpha) = \gamma\alpha$ для каждого $\gamma \in H^A(X)$, является Ф. из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{S}$. Этот Ф. наз. основным ковариантным функтором из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{S}$ с представляющим объектом A. Аналогично, сопоставляя объекту X множество $H_A(X) = H_{\mathfrak{K}}(X, A)$ и морфизму $\alpha\colon Y \to X$ отображение $H_A(\alpha)$: $H_A(X) \to H_A(Y)$, где $\gamma H_A(\alpha) = \alpha\gamma$, строится основной контравариантный функтор из $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{S}$ с представляющим объектом A. Эти Ф. обозначаются H^A и H_A соответственно. Если $\mathfrak{K}$ — категория векторных пространств над полем K, то Ф. H_K задает переход от пространства E к сопряженному пространству линейных функционалов E^*. В категории топологических абелевых групп Ф. H_Q, где Q — факторгруппа группы действительных чисел по подгруппе целых чисел, сопоставляет каждой группе ее группу характеров. 3) Сопоставление каждой паре объектов X, Y произвольной категории множества $H(X, Y)$, а каждой паре морфизмов $\alpha\colon X' \to X$, $\beta\colon Y \to Y'$ — отображения $H(\alpha, \beta)$: $H(X, Y) \to H(X', Y')$, определяемого равенством $\gamma H(\alpha, \beta) = \alpha\gamma\beta$ для любого $\gamma \in H(X, Y)$, является двуместным Ф. в категорию $\mathfrak{S}$, контравариантным по первому аргументу и ковариантным по второму.

В любой категории с конечными произведениями произведение можно рассматривать как n-местный Ф., ковариантный по всем аргументам, при любом натуральном n. Как правило, конструкции, к-рые определяются для любого объекта категории или для любой последовательности объектов фиксированной длины независимо от индивидуальных свойств объектов, являются Ф. Таковы, напр., конструкция свободных алгебр нек-рого многообразия универсальных алгебр, к-рые единообразно сопоставляются каждому объекту категории множеств, конструкция фундаментальной группы топологич. пространства, конструкции групп гомологий и когомологий различных размерностей и т. д.

Любой Ф. $F\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ определяет отображение каждого множества $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ в множество $H_{\mathfrak{L}}(F(A), F(B))$, сопоставляя морфизму $\alpha\colon A \to B$ морфизм $F(\alpha)\colon F(A) \to F(\beta)$. Ф. F наз. универсальным, если все указанные отображения инъективны, и полным, если все эти отображения сюръективны. Для всякой *малой категории* $\mathfrak{D}$ сопоставление $D \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{D} \to H_D$ можно продолжить до полного универсального Ф. J из $\mathfrak{D}$ в категорию $F(\mathfrak{D}^*, \mathfrak{S})$ *диаграмм* со схемой $\mathfrak{D}$ над категорией множеств $\mathfrak{S}$.

Лит.: [1] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [2] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [3] Mac Lane S., Kategorien. Begriffssprache und mathematische Theorie, B., 1972; [4] Schubert H., Kategorien, I—II, B.— Hdlb.— N. Y., 1970; [5] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974.

М. Ш. Цаленко.

K-ФУНКТОР в алгебраической геометрии — инвариант когомологич. типа, сопоставляемый схемам в алгебраич. K-теории. Точнее говоря, в алгебраич. K-теории строится контравариантный функтор

$$X \mapsto K_*(X) = \coprod_{i \geqslant 0} K_i(X)$$

из категории схем в категорию градуированных коммутативных колец [1]. K-Ф. родствен этальным когомологиям, однако между ними есть важное отличие: K-теория несет в себе обширную «целочисленную» информацию, к-рая отсутствует в этальных когомологиях, имеющих конечные коэффициенты.

Первое применение K-теории в алгебраич. геометрии совпадает с ее возникновением. Это доказательство обобщения (в частности, на гладкие многообразия про

извольной размерности) классич. *Римана—Роха теоремы* (см. [2]). После создания высшей алгебраич. K-теории, то есть когомологич. теории функторов K_i, $i>0$ (см. [1], [12]) начинается интенсивное проникновение ее идей в алгебраич. геометрию. К настоящему времени можно выделить следующие области исследований в этом направлении.

1) Изучение алгебраич. циклов на алгебраич. многообразиях. Пусть X — гладкое алгебраич. многообразие, $CH(X)$ — кольцо Чжоу алгебраич. циклов на X по модулю рациональной эквивалентности. Тогда имеют место изоморфизмы

$$CH(X)\otimes\mathbb{Q}\cong K_0(X)\otimes\mathbb{Q},$$

$$CH(X)\cong\coprod_{i\geqslant 0}H^i(X,\ \mathscr{K}_i),$$

где $\mathscr{K}_i$ — пучок в топологии Зарисского, связанный с предпучком $U\longrightarrow K_i\cdot\Gamma(U,\ \mathcal{O}_X)$. Эти факты являются основой для изучения колец $CH(X)$ методами K-теории. В частности, этими методами доказаны теоремы о конечности для групп Чжоу 0-циклов на арифметич. поверхностях [4].

2) Значения дзета-функции и L-функции алгебраич. многообразий в целых точках. Имеются гипотезы о связи значений дзета-функций полей алгебраич. чисел в целых точках с порядками подгрупп кручения в K-Ф. их колец целых, а также значений L-функций многообразий над полями алгебраич. чисел в целых точках с рангами их групп K_i и объемами решеток, порождаемых образом K-Ф. в их когомологиях (см. [1], [9]). Эти гипотезы подтверждаются в ряде частных случаев, они дополняют гипотезы Берча — Суиннертона-Дайера (см. *Дзета-функция* в алгебраической геометрии).

3) Теория полей классов в высших размерностях описывает группу Галуа максимального абелева расширения полей рациональных функций арифметич. схем размерности $i\geqslant 1$, а также соответствующих локальных объектов (i-мерных локальных полей [7], [10]). В этом описании роль, к-рую обычно играет мультипликативная группа размерности 1, выполняют группы K_i Милнора.

4) Связь кристаллич. когомологий и деформаций K-Ф. (см. [3]).

5) Теория характеристич. классов в алгебраич. K-теории и теорема Римана — Роха — Гротендика (см. [5], [11]).

6) Вычисление алгебраического K-Ф. для широкого класса схем. В частности, вычислены K-Ф. с конечными коэффициентами алгебраически замкнутых полей [8].

Лит.: [1] Algebraic K-theory, v. 1, p. 85—147, v. 2, p. 489—501, B.— Hdlb.— N. Y., 1973; [2] Théorie des intersections et théorème de Riemann — Roch, B.— Hdlb.— N. Y., 1971; [3] Bloch S., «Publ. math. IHES», 1977, № 47, p. 187—268; [4] Colliot Thélène J.-L., Sansuc J.-J., Soulé C., «C. r. Acad. sci.», 1982, t. 294, ser. 1, p. 749—52; [5] Gillet H., «Adv. in math.», 1981, v. 40, p. 203—89; [6] Harris B., Segal G., «Ann. math.», 1975, v. 101, № 1, p. 20—33; [7] Kato K., «J. Fac. Sci. Univ. Tokyo», 1979—80, Sec. IA, v. 26, № 2, p. 303—76, v. 27, № 3, p. 603—83; [8] Suslin A. A., «Invent. Math.», 1983, v. 73, № 2, p. 241—45; [9] Бейлинсон А. А., «Функциональный анализ», 1980, т. 14, в. 2, с. 46—47; [10] Шаршин А. Н., «Докл. АН СССР», 1978, т. 243, № 4, с. 855—58; [11] Шехтман В. В., «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, в. 6, с. 179—80; [12] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 20, М., 1982, с. 71—152.

В. В. Шехтман.

ФУНКТОРНЫЙ МОРФИЗМ — аналог понятия гомоморфизма (левых) модулей с общим кольцом скаляров (роль кольца при этом играет область определения функторов, а сами функторы играют роль модулей). Пусть F_1 и F_2 — одноместные ковариантные функторы из категории $\mathfrak{N}$ в категорию $\mathfrak{S}$. Функторным морфизмом $\varphi\colon F_1\longrightarrow F_2$ наз. такое сопоставление каждому объекту A из $\mathfrak{N}$ морфизма $\varphi_A\colon F_1(A)\longrightarrow F_2(A)$,

что для любого морфизма $\alpha\colon A \longrightarrow B$ из $\mathfrak{R}$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{F_1(\alpha)} & F_1(B) \\ \varphi_A \downarrow & & \downarrow \varphi_B \\ F_2(A) & \xrightarrow[F_2(\alpha)]{} & F_2(B). \end{array}$$

Если $F_1 = F_2$, то, полагая $\varphi_A = 1_{F_1(A)}$, получают т. н. тождественный морфизм функтора F_1. Если $\varphi\colon F_1 \longrightarrow F_2$ и $\psi\colon F_2 \longrightarrow F_3$ — два Ф. м., то, полагая $(\varphi\psi)_A = \varphi_A\psi_A$, получают Ф. м. $\varphi\psi\colon F_1 \longrightarrow F_3$, называемый произведением φ и ψ. Композиция Ф. м. ассоциативна. Поэтому для малой категории $\mathfrak{R}$ все функторы из $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{C}$ и их Ф. м. образуют т. н. категорию функторов $\mathrm{Funct}(\mathfrak{R}, \mathfrak{C})$, или категорию диаграмм со схемой $\mathfrak{R}$.

Пусть $\varphi\colon F_1 \longrightarrow F_2 : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{C}$ — Ф. м. и $G\colon \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{R}$, $H\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{N}$ — два функтора. Формулы

$$\forall B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}\ (G * \varphi)_B = \varphi_{G(B)},$$
$$\forall A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{R}\ (\varphi * H)_A = H(\varphi_A)$$

определяют Ф. м. $G * \varphi\colon GF_1 \longrightarrow GF_2$ и $\varphi * H\colon F_1H \longrightarrow F_2H$ соответственно. Тогда для любых Ф. м. $\varphi\colon F_1 \longrightarrow F_2\colon \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{C}$ и $\psi\colon H_1 \longrightarrow H_2 : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{N}$ справедливо соотношение

$$(\varphi * H_1)(F_2 * \psi) = (F_1 * \psi)(\varphi * H_2).$$

Ф.м. наз. также естественными преобразованиями функторов. По аналогии с Ф. м. одноместных функторов определяются Ф. м. многоместных функторов. *М. Ш. Цаленко.*

ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТЕОРИЯ — область математич. анализа, в к-рой изучаются вопросы представления и приближения функций, их локальные и глобальные свойства. Для современной Ф. д. п. т. характерно широкое применение теоретико-множественных методов наряду, естественно, с классическими.

Таким образом, объектом изучения в Ф. д. п. т. является функция. По поводу этого понятия Н. Н. Лузин [3] писал: «Оно не сложилось сразу, но, возникнув более двухсот лет тому назад в знаменитом споре о звучащей струне, подверглось глубоким изменениям уже в начавшейся тогда энергичной полемике. С тех пор идут непрестанное углубление и эволюция этого понятия, которые продолжаются до настоящего времени. Поэтому ни одно отдельное формальное определение не может охватить всего содержания этого понятия...». В соответствии с этим представляется вполне естественным отнести истоки зарождения Ф. д. п. т. ко времени спора о колеблющейся струне [Л. Эйлер (L. Euler), Д. Бернулли (D. Bernoulli), Ж. Д'Аламбер (J. D'Alembert), Ж. Лагранж (J. Lagrange) и др.], хотя становление этой теории происходило в 19 в. [Ж. Фурье (J. Fourier), О. Коши (A. Cauchy), Н. И. Лобачевский, П. Дирихле (P. Dirichlet), Б. Риман (B. Riemann), П. Л. Чебышев, К. Жордан (C. Jordan) и др.].

В классич. анализе изучались в основном функции, имеющие определенную степень гладкости. Однако во 2-й пол. 19 в. в анализе четко обрисовались нек-рые проблемы, ждавшие своего решения и касающиеся более общих классов функций, а также более глубокого изучения и гладких функций. К таким проблемам следует отнести проблемы меры множества, длин кривых и площадей поверхностей, приближения и представления функций, первообразной и интеграла, взаимосвязи интегрирования и дифференцирования, почленное интегрирование и дифференцирование рядов, свойства функций, полученных в результате предельного перехода и др. Решение этих проблем имело принципиальное значение для математики. Классич. методы анализа

уже не могли дать достаточно удовлетворительного ответа на такого типа вопросы. В связи с этим и возникла в кон. 19 в. настоятельная необходимость нового критич. пересмотра основ математич. анализа, что и было осуществлено в кон. 19— нач. 20 вв. на базе *множеств теории*, чем и завершилось создание основ современной Ф. д. п. т.

Обычно современную Ф. д. п. т. условно делят на три части: 1) дескриптивная теория, 2) метрическая теория, 3) теория приближения.

Особенно близки между собой первые две части, основы к-рых были заложены Э. Борелем (E. Borel), Р. Бэром (R. Baire), А. Лебегом (H. Lebesgue) и др.

1) В дескриптивной теории функций изучаются свойства тех или иных классов функций, полученных в результате предельных переходов. Это изучение (на базе и в связи с дескриптивной теорией множеств) показало, что понятие функции крайне сложно. В этом направлении были открыты *Бэра классы* функций, к-рые оказались самым тесным образом связаны с классификацией *борелевских множеств*.

Основополагающие результаты по дескриптивной теории множеств и функций были получены в Советском Союзе во 2-м и 3-м десятилетиях 20 в. (Н. Н. Лузин, М. Я. Суслин, П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, Л. В. Келдыш, П. С. Новиков и др.).

2) В метрич. теории функций изучаются свойства функций на основе понятия меры множества. Современное понятие меры множества (*Лебега мера*) было введено А. Лебегом в 1902. Тогда же на базе этого понятия им была создана и теория интеграла (*Лебега интеграл*). Эти два крайне важных понятия — мера и интеграл — образуют фундамент метрич. теории функций, к-рая занимается изучением свойств функций, производных, интегралов, функциональных рядов и т. п.

Первые крупные результаты в России в этом направлении были получены во 2-м десятилетии 20 в. Д. Ф. Егоровым и Н. Н. Лузиным (см. *Егорова теорема*, *Лузина С-свойство*). Создателем и руководителем школы метрич. теории функций в СССР был Н. Н. Лузин.

К метрич. теории функций следует отнести теорию *суммирования* рядов и последовательностей, а также теорию *почти периодических функций*. Эта последняя была создана работами П. Боля (P. Bohl), Х. Бора (H. Bohr), Н. Н. Боголюбова, Г. Вейля (H. Weyl), В. В. Степанова и др.

Исследования по метрич. теории функций и созданные в ней понятия и методы оказали особенно большое влияние на различные области современной математики, а именно: во многих аналитич. исследованиях по разным разделам математики редко обходятся без меры и интеграла Лебега (или соответствующих их аналогов и обобщений).

3) Основы теории приближения функций действительного переменного были заложены в классич. работах П. Л. Чебышева (сер. 19 в.). Им было введено чрезвычайно важное понятие *наилучшего приближения* $E_n(f)$ и доказана одна из основных теорем о наилучшем приближении функций многочленами (*Чебышева теорема*). Дальнейшее развитие этой теории в 19 в. происходило главным образом в России — в трудах Е. И. Золотарева, А. Н. Коркина и братьев А. А. и В. А. Марковых. Большую роль в теории приближения сыграла *Вейерштрасса теорема* о возможности приближения непрерывных функций многочленами.

В нач. 20 в. было выяснено, что дифференциальные свойства функций влияют на быстроту стремления к нулю $E_n(f)$ при $n \to \infty$ [А. Лебег, Э. Борель, Ш. Валле Пуссен (Ch. Vallée Poussin)].

Важнейшие задачи, относящиеся к выяснению связей между структурными свойствами функций и ско-

ростью их приближения полиномами, были решены С. Н. Бернштейном и Д. Джексоном.

Начиная с 30-х гг. исследования в СССР по теории приближения функций действительного переменного приобретают особенно большой размах. Наряду с исследованиями С. Н. Бернштейна здесь в первую очередь следует отметить крупные достижения А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского, а также их учеников.

Лит.: [1] Бэр Р., Теория разрывных функций, пер. с франц., М.—Л., 1932; [2] Лузин Н. Н., Лекции об аналитических множествах и их приложениях, М., 1953; [3] его же, Собр. соч., т. 3, М., 1959, с. 319—41; [4] Ляпунов А. А., Новиков П. С., Дескриптивная теория множеств, в кн.: Математика в СССР за тридцать лет, М.— Л., 1948; [5] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.— Л., 1934; [6] Камке Э., Интеграл Лебега — Стилтьеса, пер. с нем., М., 1959; [7] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [8] Ульянов П. Л., Метрическая теория функций, в кн.: История отечественной математики, т. 3, К., 1968; [9] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [10] Бор Г., Почти периодические функции, пер. с нем., М.— Л., 1934; [11] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953; [12] Чебышев П. Л., Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций (1859), Полн. собр. соч., т. 2, М.—Л., 1947, с. 151—235; [13] Лозинский С. М., Натансон И. П., Метрическая и конструктивная теория функций вещественной переменной, в кн.: Математика в СССР за сорок лет, т. 1, М., 1959; [14] Никольский С. М., Теория приближения функций многочленами, в кн.: История отечественной математики, т. 3, К., 1968; [15] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977.

П. Л. Ульянов.

ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТЕОРИЯ — в широком смысле слова теория функций, областью определения к-рых является нек-рое множество точек z комплексной плоскости $\mathbb{C}=\mathbb{C}^1$ (функции одного комплексного переменного) или множество точек $z=(z_1,\ldots,z_n)$ комплексного евклидова пространства $\mathbb{C}^n$, $n>1$ (функции многих комплексных переменных). В узком смысле слова Ф. к. п. т. есть теория *аналитических функций* одного или многих комплексных переменных.

Как самостоятельная дисциплина Ф. к. п. т. оформилась примерно к сер. 19 в. в качестве теории аналитич. функций. Основополагающими здесь были работы О. Коши (A. Cauchy), К. Вейерштрасса (K. Weierstrass) и Б. Римана (B. Riemann), к-рые подходили к развитию теории с различных позиций.

По Вейерштрассу, функция $w=f(z):\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ наз. аналитической (или голоморфной) в области $D\subset\mathbb{C}$, если в окрестности каждой точки $z_0\in D$ она разлагается в степенной ряд

$$w=f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k; \qquad (1)$$

в случае многих комплексных переменных, когда $D\subset\mathbb{C}^n$, $n>1$, ряд (1) понимается как кратный степенной ряд. Для определения аналитич. функции достаточно даже, чтобы сходящийся ряд (1) был задан в окрестности одной единственной точки z_0, ибо ее значения в других точках z_1 и соответствующие ряды могут быть определены в процессе *аналитического продолжения* вдоль различных путей, расположенных в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (или в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n>1$) и соединяющих точки z_0 и z_1.

При аналитич. продолжении могут встретиться *особые точки*, аналитич. продолжение в к-рые, хотя бы вдоль нек-рых путей, невозможно. Эти особые точки определяют общее поведение аналитич. функции в том отношении, что если два пути L_1 и L_2, соединяющие одни и те же фиксированные точки z_0 и z_1, не гомотопны, т. е. если L_2 нельзя непрерывно деформировать в L_1, не переходя при этом через особые точки, то значения функции $f(z_1)$, получаемые при аналитич. продолжении вдоль L_1 и L_2, могут оказаться различными. Следовательно, *полная аналитическая функция* $w=f(z)$, получаемая аналитич. продолжением исходного

элемента (1) по всевозможным путям, может оказаться многозначной в своей естественной области определения на $\mathbb{C}$ (или на $\mathbb{C}^n$, $n>1$). Таковы, напр., функции $w=\sqrt[n]{z}$ или $w=\ln z$. Можно избавиться от этой многозначности, запретив аналитич. продолжение по некоторым путям, устроив, как говорят, р а з р е з ы на комплексной плоскости и выделив однозначные *ветви аналитической функции*. Однако более совершенный способ превращения многозначной аналитич. функции в однозначную состоит в том, что ее следует рассматривать не как функцию точки комплексной плоскости, а как функцию точки *римановой поверхности*, состоящей из нескольких листов, накрывающих комплексную плоскость и определенным образом соединяющихся между собой. В случае многих переменных вместо римановой поверхности возникает *риманова область*, многолистно накрывающая пространство $\mathbb{C}^n$, $n>1$.

О. Коши в своем построении теории аналитич. функций исходил из понятия м о н о г е н н о с т и. Функцию $w=f(z)$, $z\in D\subset\mathbb{C}$, он называл моногенной, если она имеет всюду в D м о н о д р о м н у ю (т. е. однозначную и непрерывную, кроме, быть может, полюсов) п р о и з в о д н у ю. Несколько расширяя это понятие, под моногенной на множестве $E\subset D$ функцией $w=f(z)$ обычно понимают такую (однозначную) функцию, для к-рой существует во всех точках $z_0\in E$ п р о и з в о д н а я п о м н о ж е с т в у E

$$f'_E(z)=\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}. \qquad (2)$$

Моногенность в смысле Коши, когда $E=D$, совпадает с аналитичностью. О. Коши развил теорию интегрирования аналитич. функций, доказав важную теорему о *вычетах*, *Коши интегральную теорему* и введя понятие *Коши интеграла*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}, \qquad (3)$$

выражающего значение аналитич. функции $f(z)$ через ее значения на любом замкнутом контуре Γ, охватывающем точку z и не содержащем внутри или на Γ особых точек $f(z)$. Как простейшее интегральное представление аналитич. функций, понятие интеграла Коши сохраняется и для функций многих переменных.

Введя комплексные переменные $z=x+iy$, $\bar z=x-iy$, можно записать любую функцию двух переменных x и y: $w=f(x,\,y)=u(x,\,y)+iv(x,\,y)$ как функцию от z и $\bar z$. *Коши—Римана условия*, выделяющие среди таких функций аналитические, состоят в том, что функции $w=u(x,\,y)+iv(x,\,y)$ должны быть дифференцируемыми по совокупности переменных $(x,\,y)$, причем всюду в D должно выполняться равенство

$$\frac{\partial w}{\partial\bar z}=0, \qquad (4)$$

или, подробнее, $u'_x=v'_y$, $u'_y=-v'_x$.

Условия (4) означают, что действительная и мнимая части аналитич. функции $u(x,\,y)$ и $v(x,\,y)$ должны быть *сопряженными гармоническими функциями*. В случае аналитич. функций многих комплексных переменных условия (4) должны выполняться по всем переменным $\bar z_\nu$, $\nu=1,\,\ldots,\,n$.

Для Б. Римана наиболее важным было то обстоятельство, что выделяемая условиями (4) аналитич. функция $w=f(z)$ осуществляет при определенных условиях *конформное отображение* области D на некрую другую область на плоскости комплексного переменного w. Связь аналитич. функций с конформными отображениями открывает путь для решения ряда задач математич. физики.

Дальнейшее развитие Ф. к. п. т. происходило и происходит прежде всего как углубление и расширение теории аналитич. функций (см., напр., *Граничные задачи теории аналитических функций*, *Граничные свойства аналитических функций*, *Единственности свойства* аналитических функций, *Интегральное представление аналитической функции*, *Мероморфная функция*, *Многолистная функция*, *Однолистная функция*, *Целая функция)*. Важное значение имеют связанные с аналитич. функциями проблемы аппроксимации и интерполирования функций. При этом оказывается, что в теории аналитич. функций многих переменных специфика и трудность задач таковы, что они поддаются решению лишь с привлечением самых современных методов алгебры, топологии и анализа.

Большое теоретическое и прикладное значение имеет изучение граничных свойств голоморфных функций, в частности интеграла типа Коши (см. *Коши интеграл*), получаемого из (3), когда значения $f(\zeta)$ на контуре Γ задаются совершенно произвольно, его многомерных аналогов и других интегральных представлений.

Важные для приложений *обобщенные аналитические функции* получаются, в своей простейшей форме, как решения более общего, чем (4), уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + A(z)\, w + B(z)\, \bar{w} = F(z).$$

Их основные свойства (в случае одного переменного) довольно подробно исследованы.

Большое значение для самой теории аналитич. функций (в частности, для теории римановых поверхностей) и для приложений имеет изучение *квазиконформных отображений*.

Развивается также теория *аналитических функций абстрактных* со значениями в различных векторных пространствах.

Лит.: [1] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд., М., 1977; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [3] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973; [4] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [5] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., т. 1—2, М., 1976; [6] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959.

Е. Д. Соломенцев.

ФУНКЦИЙ ТЕОРИЯ — раздел математики, в к-ром изучаются общие свойства *функций*. Ф. т. распадается на две части: *функций действительного переменного теория* и *функций комплексного переменного теория*.

ФУНКЦИОНАЛ — отображение f произвольного множества X в множество $\mathbb{R}$ действительных или $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Если X наделено структурой *векторного пространства*, *топологического пространства*, упорядоченного множества, то возникают соответственно важные классы линейных, непрерывных, монотонных Ф.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981.

В. И. Соболев.

ФУНКЦИОНАЛ от марковского процесса — случайная величина или случайная функция, зависящая измеримым образом от траектории марковского процесса; условие измеримости варьируется в зависимости от конкретной ситуации. В общей теории марковских процессов принимается следующее определение Ф. Пусть в измеримом пространстве $(E, \mathcal{B})$ задан необрывающийся однородный марковский процесс $X = (x_t, \mathcal{F}_t, \mathsf{P}_x)$ с операторами временно́го сдвига θ_t, и пусть $\mathcal{N}$ — наименьшая из σ-алгебр в пространстве элементарных событий, содержащих любое событие вида $\{\omega\colon x_t \in \mathcal{B}\}$, где $t \geqslant 0$, $B \in \mathcal{B}$, а $\overline{\mathcal{N}}$ — пересечение всех пополнений $\mathcal{N}$ по всевозможным мерам P_x $(x \in E)$. Случайная функция γ_t, $t \geqslant 0$, наз. *функционалом от марковского процесса* X, если

при каждом $t \geqslant 0$ величина γ_t измерима относительно σ-алгебры $\overline{\mathcal{N}_t} \cap \mathcal{F}_t$.

Особый интерес представляют мультипликативные и аддитивные Ф. от марковских процессов. Первые из них выделяются условием $\gamma_{t+s} = \gamma_t \cdot \theta_t \gamma_s$, вторые — условием $\gamma_{t+s} = \gamma_t + \theta_t \gamma_s$, $s,\ t \geqslant 0$, причем функцию γ_t считают непрерывной справа на $[0,\ \infty)$ (с другой стороны, иногда приходится предполагать эти условия выполняющимися лишь P_x-почти наверное для любых фиксированных $s,\ t \geqslant 0$). Соответствующие формулировки принимаются в случае обрывающихся и неоднородных процессов. Примеры аддитивных Ф. от марковского процесса $X = (x_t,\ \zeta,\ \mathcal{F}_t,\ \mathsf{P}_x)$ можно получить, приравняв γ_t при $t < \zeta$ к $f(x_t) - f(x_0)$, или к $\int_0^t f(x_s)\, ds$, или к сумме скачков случайной функции $f(x_s)$ при $s \in [0,\ t]$, где $f(x)$ — ограниченная и измеримая относительно $\mathcal{B}$ функция (второй и третий примеры корректны лишь при нек-рых дополнительных условиях). Переход от любого аддитивного Ф. γ_t к $\exp \gamma_t$ доставляет пример мультипликативного Ф. В случае стандартного марковского процесса интересным и важным примером мультипликативного Ф. служит случайная функция, равная 1 при $t < \tau$ и 0 при $t \geqslant \tau$, где τ — момент первого выхода X из нек-рого множества $A \in \mathcal{B}$, т. е. $\tau = \inf \{t \in [0,\ \zeta) : x_t \notin A\}$.

С мультипликативными Ф., подчиненными условию $0 \leqslant \gamma_t \leqslant 1$, связано одно естественное преобразование марковского процесса — переход к подпроцессу. По переходной функции $P(t,\ x,\ B)$ процесса $X = (x_t,\ \zeta,\ \mathcal{F}_t,\ \mathsf{P}_x)$ строят новую

$$\tilde{\mathsf{P}}(t,\ x,\ B) = \int_{\{x_t \in B\}} \gamma_t \mathsf{P}_x \{d\omega\}, \quad A \in \mathcal{B},$$

причем может оказаться, что $\tilde{\mathsf{P}}(0,\ x,\ E) < 1$ в нек-рых точках $x \in E$. Новой переходной функции в $(E,\ \mathcal{B})$ соответствует нек-рый марковский процесс $\tilde{X} = (\tilde{x}_t,\ \tilde{\zeta},\ \tilde{\mathcal{F}}_t,\ \mathsf{P}_x)$, к-рый вместе с исходным можно реализовать на одном и том же пространстве элементарных событий с одними и теми же мерами P_x, $x \in E$, причем так, что $\tilde{\zeta} \leqslant \zeta$, $\tilde{x}_t = x_t$ при $0 \leqslant t < \tilde{\zeta}$ и что σ-алгебра $\tilde{\mathcal{F}}_t$ является следом σ-алгебры $\mathcal{F}_t$ в множестве $\{\omega : \zeta > t\}$. Процесс $\tilde{X}$ наз. подпроцессом марковского процесса X, получаемым в результате «убивания» или сокращения времени жизни. Подпроцесс, отвечающий мультипликативному Ф. из последнего примера, наз. частью X на множестве A; его фазовым пространством естественно считать не все $(E,\ \mathcal{B})$, а лишь $(A,\ \mathcal{B}_A)$, где $\mathcal{B}_A = \{B \in \mathcal{B} : B \subset A\}$.

Аддитивные Ф. $\gamma_t \geqslant 0$ порождают другой тип преобразований марковских процессов — случайную замену времени, к-рая сводится к изменению времени прохождения различных участков траектории. Пусть, напр., $\gamma_t \geqslant 0$ — непрерывный аддитивный Ф. от стандартного марковского процесса X, причем $\gamma_t > 0$ при $t > 0$. Тогда $Y = (X_{\tau_t},\ \gamma_{\zeta -},\ \mathcal{F}_{\tau_t},\ \mathsf{P}_x)$ является стандартным марковским процессом, где $\tau_t = \sup \{s : \gamma_s \leqslant t\}$ при $t \in [0,\ \gamma_{\zeta -})$. При этом говорят, что Y получен из X в результате случайной замены $t \longrightarrow \tau_t$.

Хорошо изучены различные классы аддитивных Ф., в первую очередь от стандартных процессов.

Лит.: [1] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [2] Дынкин Е. Б., Основания теории марковских процессов, М., 1959; [3] его же, Марковские процессы, М., 1963; [4] Revuz D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1970, v. 148, p. 501—31; [5] Benveniste A., «Lect. Notes Math.», 1973, № 321, p. 1—24.

М. Г. Шур.

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ОТДЕЛИМОСТЬ — свойство множеств A и B топологич. пространства X, когда существует непрерывная действительная функция f на X такая, что замыкания множеств $f(A)$ и $f(B)$ (по отношению к обычной топологии действительной прямой $\mathbb{R}$) не пересекаются. Напр., пространство вполне регулярно, если всякое замкнутое множество отделимо от каждого одноточечного множества, с ним не пересекающегося. Пространство нормально, если функционально отделимы любые два его замкнутые непересекающиеся подмножества. Если в пространстве функционально отделимы каждые два одноточечных (различных) множества, то оно наз. функционально хаусдорфовым. Содержание данных определений не изменяется, если вместо непрерывных действительных функций привлечь непрерывные отображения в плоскость, в отрезок или в гильбертов кирпич.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981.

А. В. Архангельский.

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, производная Вольтерра, — одно из первых понятий производной в бесконечномерном пространстве. Пусть $I(y)$ — нек-рый функционал от непрерывной функции одного переменного $y(x)$; x_0 — нек-рая внутренняя точка отрезка $[x_1, x_2]$; $y_1(x) = y_0(x) + \delta y(x)$, где вариация $\delta y(x)$ отлична от нуля в малой окрестности $[a, b]$ точки x_0; $\sigma = \int_a^b \delta y(x)\,dx$. Предел

$$\lim_{\sigma \to 0,\ a \to x_0,\ b \to x_0} \frac{I(y_1) - I(y_0)}{\sigma}$$

в предположении, что он существует, наз. функциональной производной функционала I и обозначается $\left.\frac{\delta I(y_0)}{\delta y}\right|_{x=x_0}$. Напр., для простейшего функционала классического вариационного исчисления

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, \dot{y})\,dx$$

его Ф. п. имеет вид

$$\left.\frac{\delta I(y_0)}{\delta y}\right|_{x=x_0} = \frac{\partial F(x_0, y_0(x_0), \dot{y}_0(x_0))}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{F(x_0, y(x_0), \dot{y}(x_0))}{\partial \dot{y}},$$

т. е. представляет собой левую часть уравнения Эйлера, являющегося необходимым условием минимума функционала $I(y)$.

В теоретич. вопросах понятие Ф. п. имеет лишь историч. интерес и практически вытеснено понятиями *Гато производной* и *Фреше производной*. Однако понятие Ф. п. с успехом применяется в численных методах классического вариационного исчисления (см. *Вариационное исчисление*; численные методы).

И. Б. Вапнярский.

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА — множество функций с нек-рым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого множества. Ф. с. являются одним из основных объектов математич. кибернетики и дискретной математики и отражают следующие главные особенности реальных и абстрактных *управляющих систем*: функционирование (в Ф. с. это функции), правила построения более сложных управляющих систем из заданных и описание функционирования сложных систем по функционированию их компонент (последние два момента отражены в операциях Ф. с.). Примерами Ф. с. являются *многозначные логики*, алгебры *автоматов*, алгебры *вычислимых функций* и др. Ф. с. обладает определенной спецификой, состоящей в рассмотрении задач и подходов, возникающих при исследовании Ф. с. с позиций математич. кибернетики, математич. логики и алгебры. Так, с позиций математич. кибернетики Ф. с. рассматриваются как модели, описывающие функционирование сложных кибернетич. систем;

с позиций математич. логики — как модели логик, т. е. как системы предложений с логич. операциями над ними; с точки зрения алгебры — как универсальные алгебры.

Важной особенностью Ф. с., выделяющей их из общего класса универсальных алгебр, является их содержательная связь с реальными кибернетич. моделями управляющих систем. Эта связь, с одной стороны, определяет серию существенных требований, к-рые накладываются на Ф.с., а с другой стороны, порождает класс важных задач, имеющих как теоретическое, так и прикладное значение. Проблематика Ф. с. обширна и имеет много общего с проблематикой многозначных логик. К числу важнейших задач для Ф. с. относятся задачи о полноте, о сложности выражения одних функций через другие, о тождественных преобразованиях, о синтезе и анализе и другие.

Изучение Ф. с. осуществлялось путем исследования конкретных модельных Ф. с., среди к-рых одной из первых изучались двузначная и трехзначная, а затем и k-значная логики. Наряду с этими Ф. с. интенсивно изучаются алгебры автоматов, такие, как Ф. с. функций с задержками, Ф. с. *ограниченно-детерминированных функций* и детерминированных функций, счетнозначные логики, Ф. с. вычислимых функций, Ф. с. неоднородных функций и другие.

Вместе с накоплением модельных Ф. с. и изучением их свойств вырабатывались общие понятия Ф. с., анализировались Ф. с. с точки зрения решения упомянутых задач для них. В качестве обобщений реальных Ф. с. могут рассматриваться и универсальные алгебры, однако в этом случае теряются основные достоинства реальных Ф. с. и прежде всего такие, как конструктивность множеств и операций и ряд других.

Достаточную общность имеет следующий подход к пониманию Ф. с. Суть подхода состоит в рассмотрении в качестве Ф. с. пар вида $\langle \mathfrak{M}, \Omega \rangle$, где $\mathfrak{M}$ является множеством функций k-значной или счетно-значной логики или множеством последовательностных функций, а также множеством нек-рых ближайших обобщений таких функций (напр., частичных или неоднородных функций и т. п.); а в качестве Ω выступает множество в определенном смысле автоматных операций, к-рые обладают теми нужными свойствами, какими наделены операции в примерах упомянутых Ф. с.: это и локальность информации о функциях, используемой при применении операций к функциям, и вычислимый характер операций, причем вычислимый в определенном смысле простейшими, т. е. автоматными, средствами, и конструктивность заданий самих операций и т. п. Само понятие Ф. с. в соответствии с реальными Ф. с. распадается на понятия истинностной Ф. с. и последовательностной Ф. с. В первом случае в паре $\langle \mathfrak{M}, \Omega \rangle$ множество $\mathfrak{M}$ состоит из функций многозначной логики, а во втором — из последовательностных функций, т. е. функций, определенных на словах. Все реальные Ф. с. оказываются либо истинностными, либо последовательностными Ф. с.

Важную роль при изучении Ф. с. играет оператор замыкания I_Ω, к-рый соответствует Ф. с. $\langle \mathfrak{M}, \Omega \rangle$, если ее рассматривать как частичную универсальную алгебру. Этот оператор, как и операции из Ω, наз. автоматным. Установлено, что классы автоматных и алгебраич. операторов замыкания совпадают. Отсюда, в частности, следует, что все реальные Ф. с. являются истинностными или последовательностными Ф.с. и с формальной точки зрения.

Лит.: [1] Яблонский С. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 51, с. 5—142; [2] его же, «Научный Совет АН СССР «Кибернетика». Информационные материалы», 1970, № 5 (42), с. 5—15; [3] его же, «Труды международного конгресса математиков», Хельсинки, 1978, с. 963—71; [4] Post E. L.,

Two-valued iterative systems of mathematical logic, Princeton (N. J.), 1941; [5] Кудрявцев В. Б., Функциональные системы, М., 1982. *В. Б. Кудрявцев.*

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ — гомоморфизм нек-рой алгебры функций A в алгебру $L(X)$ непрерывных линейных операторов в топологич. векторном пространстве X. Ф. и. — один из основных инструментов общего спектрального анализа и теории банаховых алгебр, к-рый позволяет использовать в этих дисциплинах функционально-аналитич. методы. Обычно A — топологическая (в частности, нормированная) алгебра функций на нек-ром подмножестве K пространства $\mathbb{C}^n$, содержащая многочлены переменных $z^1, \ldots, z^n$ (часто K — плотное подмножество), так что Ф. и. $\varphi\colon A \longrightarrow L(X)$ является естественным продолжением полиномиального исчисления $p(z^1, \ldots, z^n) \longrightarrow p(T_1, \ldots, T_n)$ коммутирующих операторов $T_i = \varphi(z^i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$; в этом случае говорят, что набор $T = (T_1, \ldots, T_n)$ допускает A-исчисление, и пишут $\varphi(T) = f(T) = f(T_1, \ldots, T_n)$. A-исчисление для T — это род спектральной теоремы, так как соответствие $a \longrightarrow \langle \varphi(a)x, x' \rangle$, где $x \in X$, $x' \in X^*$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — двойственность между X и X^*, определяет слабое операторнозначное A-распределение, перестановочное с T.

Классическое Ф. и. Неймана — Мурье — Данфорда ($A = C(K)$, X — рефлексивное пространство) приводит к операторной (проекторной) спектральной мере

$$\varepsilon = \varepsilon_T : f(T_1, \ldots, T_n) = \int f d\varepsilon.$$

Ф. и. Рисса — Данфорда ($n = 1$, $A = \mathrm{Hol}(\sigma(T))$ — все функции, голоморфные на спектре $\sigma(T)$ оператора T) приводит к формуле

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda) R(\lambda, T) d\lambda,$$

где $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$ — резольвента оператора, γ — контур, охватывающий $\sigma(T)$, вплоть до к-рого регулярна функция f. Формулы последнего типа для многих переменных (операторов) зависят от записи линейного функционала на $\mathrm{Hol}(\sigma(T))$ и способа определения совместного спектра $\sigma(T)$ набора $T = (T_1, \ldots, T_n)$ (от определения $\sigma(T)$ зависит и объем Ф. и.).

Если T — спектральный оператор, S и N — его скалярная и квазинильпотентная части соответственно, а $f \in \mathrm{Hol}(\sigma(T))$, то формула

$$f(T) = \sum\nolimits_{n \geqslant 0} \frac{N^n}{n!} \int_{\sigma(T)} f^{(n)} d\varepsilon,$$

где ε — разложение единицы T, позволяет распространить Ф. и. Рисса — Данфорда для T на более широкий класс функций. В частности, если $N^{m+1} = \mathbf{0}$, то T допускает Ф. и. на классе $C^m(\sigma(T))$ m раз непрерывно дифференцируемых функций. Если T — оператор скалярного типа, то в эту формулу можно подставить ограниченные борелевские функции на $\sigma(T)$. В частности, такое Ф. и. допускают нормальные операторы в гильбертовом пространстве. Верно и обратное: если оператор T допускает Ф. и. (для операторов в рефлексивных пространствах достаточно предполагать существование Ф. и. на классе непрерывных функций), то T — спектральный оператор скалярного типа (в гильбертовом пространстве — линейно подобный нормальному оператору).

Для операторов с достаточно медленным ростом резольвенты вблизи спектра построена [5] теория неаналитических $C\{M_k\}$ — исчислений, опирающаяся на классы Карлемана $C(\{M_k\}, \sigma(T))$ и использующая формулу

$$f(T) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(\lambda) R(\lambda, T) d\lambda d\bar{\lambda},$$

где $\tilde{f}$ — т. н. $\bar{\partial}$-продолжение функции f за пределы

спектра $\sigma(T)$, т. е. финитная C^1-функция в $\mathbb{C}$, для которой

$$f = \tilde{f}|_{\sigma(T)}, \quad \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}}(\lambda)\right| \leqslant \text{const} \cdot h_{\{M_k\}}(c\,\text{dist}(\lambda, K));$$

здесь

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right),$$

$$h_{\{M_k\}}(r) \overset{\text{def}}{=} \inf_n r^{n-1}\frac{M_n}{n!},$$

а оператор T удовлетворяет условию

$$\|R(\lambda, T)\| \leqslant \left(h_{\{M_k\}}(\text{dist}(\lambda, K))\,|\ln \text{dist}(\lambda, K)|^{-1}\right).$$

С другой стороны, более широкие (чем $\text{Hol}(\sigma(T))$ исчисления возникают как следствия оценок операторных многочленов $p(T)$; напр., если X — гильбертово пространство, то неравенство Неймана — Хайнца

$$\|p(T)\| \leqslant \max\{|p(\zeta)| : |\zeta| \leqslant \|T\|\}$$

приводит к Ф. и. Сёкефальви-Надя—Фояша (A — алгебра всех голоморфных и ограниченных в круге $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ функций, T — сжатие без унитарных частей), а оно — к многочисленным приложениям в теории функциональной модели для сжимающих операторов. Аналог неравенств Неймана — Хайнца для симметричных пространств функций порождает Ф. и. в терминах мультипликаторов (соответствующих сверточных пространств, [8]).

Применения. Тип Ф. и., допускаемый оператором T, является инвариантом относительно линейного подобия $T \to V^{-1}TV$ и успешно используется для классификации операторов. В частности, построена обширная теория т. н. A-скалярных операторов, применимая ко многим классам операторов, не укладывающихся в классическую спектральную теорию. Для успешного использования Ф. и. имеют значения т. н. теоремы об отображении спектра:

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)), \quad f \in A,$$

для всех перечисленных выше Ф. и. такие теоремы доказаны (после надлежащего осмысления правой части формулы).

Если алгебра A содержит мелкие разбиения единицы (напр., $A = C^\infty$), то A-Ф. и. позволяет построить локальный спектральный анализ и, в частности, доказать существование нетривиальных инвариантных подпространств оператора T (если $\sigma(T)$ — не одноточечное множество); пример — оператор T (в банаховом пространстве), спектр которого лежит на гладкой кривой γ, и $S_0 \ln + \ln + \delta(r)dr < \infty$, где $\delta(r) = \max\{\|R(\lambda; T)\| : \text{dist}(\lambda, \gamma) \geqslant rY\}$. Следствием локального анализа является и теорема Шилова об идемпотентах [2].

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 1, М., 1962, ч. 3, М., 1974; [2] Бурбаки Н., Спектральная теория, пер. с франц., М., 1972; [3] Waelbroeck L., Étude spectrale des algèbres complètes, Brux., 1960; [4] Taylor J. L., «Acta math.», 1970, v. 125, № 1—2, p. 1—38; [5] Дынькин Е. М., «Записки науч. семин. ЛОМИ», 1972, т. 30, с. 33—39; [6] von Neumann J., «Math. Nachr.», 1950/51, Bd 4, S. 258—81; [7] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970; [8] Пеллер В. В., «Матем. заметки», 1979, т. 25, № 6, с. 899—912; [9] Colojoară I., Foiaş C., Theory of generalized spectral operators, N. Y.— L., 1968; [10] Любич Ю. И., Мацаев В. И., «Матем. сб.», 1962, т. 56, № 4, с. 433—68; [11] Микусинский Я., Операторное исчисление, пер. с польск., М., 1956; [12] Маслов В. П., Операторные методы, М., 1973.

Н. К. Никольский, В. В. Пеллер.

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ОТНОШЕНИЕ — *бинарное отношение* R на множестве A, удовлетворяющее соотношению $R^{-1} \circ R \subseteq \Delta$, где Δ — диагональ множества A. Это означает, что из $(a, b) \in R$ и $(a, c) \in R$ следует,

что $b=c$, т. е. каждому $a \in A$, стоящему на первом месте, соответствует не более одного $b \in A$ на втором месте в паре из R. Таким образом, отношение R определяет (быть может, не всюду определенную) функцию на множестве A. При выполнении соотношения $R^{-1} \circ R = \Delta$ эта функция всюду определена и взаимно однозначна. *О. А. Иванова.*

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение (линейное или нелинейное), в к-ром неизвестным является элемент какого-либо банахова пространства, конкретного (функционального) или абстрактного, т. е. уравнение вида

$$P(x)=y, \qquad (1)$$

где $P(x)$ — нек-рый, вообще говоря, нелинейный оператор, переводящий элементы пространства X типа B в элементы пространства Y того же типа. Если Ф. у. содержит еще и числовой (или общий функциональный) параметр λ, то вместо (1) пишут

$$P(x;\ \lambda)=y,$$

где $x \in X$, $y \in Y$, $\lambda \in \Lambda$, Λ — пространство параметров.

Уравнениями вида (1) являются конкретные или абстрактные дифференциальные уравнения, обыкновенные и с частными производными, интегральные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения, функционально-дифференциальные и более сложные уравнения математич. анализа, а также системы алгебраич. уравнений, конечные и бесконечные, уравнения в конечных разностях и др.

В линейном случае рассматриваются Ф. у. 1-го рода $Ax=y$ и 2-го рода $x-\lambda Ax=y$, где A — линейный оператор из X в Y, а λ — параметр. При этом формально Ф. у. 2-го рода может быть записано в виде уравнения 1-го рода $Tx=y$ ($T=I-\lambda A$). Однако выделение тождественного оператора I оказывается целесообразным, так как оператор A может обладать лучшими свойствами, чем оператор T, что позволяет полнее исследовать рассматриваемое уравнение.

Ф. у. рассматриваются также и в др. пространствах, напр. в пространствах, нормированных элементами полуупорядоченных пространств.

Если решения Ф. у. являются элементами пространства операторов, то такие Ф. у. наз. о п е р а т о р н ы м и у р а в н е н и я м и (о. у.), конкретными или абстрактными. Здесь также могут быть алгебраич. о. у., линейные и нелинейные, дифференциальные, интегральные и другие о. у. Напр., пусть в нормированном кольце $[X]=[X \to X]$ линейных операторов, переводящих пространство X типа B в себя, рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение на бесконечном промежутке $0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$:

$$\frac{dx}{d\lambda} = -Ax \ (=-xA), \ x(0)=x_0, \qquad (2)$$

где A, $x_0 \in [X]$, $x(\lambda)$ — абстрактная функция со значениями в банаховом пространстве $[X]$. Это уравнение является простейшим абстрактным линейным дифференциальным о. у., оно получается, напр., из применения прямого метода вариации параметра к построению операторов вида $P(A)=e^{-A\lambda}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$, в частности проекторов $P(A)$ ($[P(A)]^2=P(A)$) с единичной нормой. Проекторы вида $P(A)$, $P(AC)$ и $P(CA)$, $C \in [X]$, применяются, напр., при построении прямым методом вариации параметра явных и неявных псевдообратных операторов и псевдорешений линейных Ф. у., а также собственных элементов (собственных подпространств) оператора A. Сведение различных задач к задачам для уравнения (2) и др. является весьма удобным при разработке приближенных методов решения. Интерес представляют также о. у. вида

$$\frac{dx}{d\lambda} = A(\lambda)\,x + F(\lambda) \ (=xA(\lambda)+F(\lambda)), \ x(0)=x_0,$$

где $A(\lambda)$, $F(\lambda)$ — абстрактные функции со значениями из $[X]$, и др. линейные и нелинейные о. у.

В нек-рых задачах, связанных с дифференциальными и др. уравнениями, приходится исследовать линейные алгебраич. о. у. вида $Ax+xB=y$ и подобные им. Здесь x — искомый, а A, B, y — заданные линейные операторы, принимающие, быть может, и нулевые значения.

Под Ф. у. в узком смысле этого слова понимают уравнения, в к-рых искомые функции связаны с известными функциями одного или нескольких переменных при помощи операции образования сложной функции. Напр., пусть $\varphi_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$,— заданные функции и $C_i(x)=f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, где Ψ — произвольные постоянные. Исключение C_i из $n+1$ уравнения вида

$$\Psi(\varphi_\nu(x))=f(\varphi_\nu(x), C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

$$\nu=0, 1, 2, \ldots, n, \varphi_0(x)=x,$$

приводит к Ф. у. вида

$$F[x, \Psi(x), \Psi(\varphi_1(x)), \Psi(\varphi_2(x)), \ldots, \Psi(\varphi_n(x))]=0, \quad (3)$$

к-рое будет иметь решение $\Psi(x)=f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Построение Ф. у. представляет собой прямую задачу функционального исчисления, аналогичную с определением производных высшего порядка в дифференциальном исчислении.

Исключение C_i из $n+1$ уравнения вида

$$\Psi^{\nu+1}(x)=f(\Psi^\nu(x), C_1, C_2, \ldots, C_n), \nu=0, 1, 2, \ldots, n,$$

$$\Psi^0(x)=x, \Psi^1(x)=\Psi(x), \Psi^2(x)=\Psi(\Psi^1(x)), \ldots,$$

приводит к Ф. у. вида

$$F[x, \Psi(x), \Psi^2(x), \ldots, \Psi^{n+1}(x)]=0, \quad (4)$$

имеющему решение $\Psi(x)=f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Иногда Ф. у. различаются по порядкам и классам. Под порядком уравнения подразумевается порядок искомой функции, входящей в уравнение, а под классом уравнения — число данных функций, к к-рым применяется неизвестная функция. Так, уравнение (3) является Ф. у. 1-го порядка и $(n+1)$-го класса. Уравнение (4) является Ф. у. $(n+1)$-го порядка и 1-го класса.

Соотношения (3) и (4) являются тождествами относительно x, уравнениями их называют постольку, поскольку искомой является функция $\Psi(x)$.

Уравнения (3) и (4) являются Ф. у. с одним независимым переменным. Могут рассматриваться Ф. у. с несколькими независимыми переменными, Ф. у. дробных порядков и др., а также системы совместных Ф. у. При этом Ф. у. или системы Ф. у. могут содержать в себе большее число существенных, существенно различимых между собой переменных, чем искомая функция с максимальным числом переменных.

К системам Ф. у. приходят, напр., при определении произвольных функций, входящих в интегралы уравнений с частными производными и удовлетворяющих условиям задачи. Если в интеграл входит n произвольных функций, то, подчиняя их n условиям, получают n совместных Ф. у. Системы Ф. у. в нек-рых случаях удобно записываются в более краткой записи в виде векторного или матричного Ф. у.

Ф. у. можно также рассматривать как выражение свойства, характеризующего тот или иной класс функций [напр., Ф. у. $f(x)=f(-x)$ ($f(-x)=-f(x)$) характеризует класс четных (нечетных) функций; Ф. у. $f(x+1)=f(x)$ — класс функций, имеющих период 1, и т. д.].

Одними из простейших Ф. у. являются, напр., уравнения Коши

$$\left.\begin{array}{l} f(x+y)=f(x)+f(y), \ f(x+y)=f(x)f(y), \\ f(xy)=f(x)+f(y), \ f(xy)=f(x)f(y), \end{array}\right\} \quad (5)$$

непрерывные решения к-рых имеют соответственно вид (в классе разрывных функций могут быть и др. решения):

$$f(x)=Cx,\ e^{Cx},\ C\ln x,\ x^C\ (x>0).$$

Ф. у. (5) могут служить средством для определения указанных функций при дополнительном требовании непрерывности. Рассматриваются также обобщенные Ф. у. Коши относительно трех и более неизвестных функций и др., а также Ф. у. в комплексной области. Ф. у. вида $F(f(x),\ f(y),\ f(x+y))=0$ и вида $\Phi(f(x),\ f(y),\ f(xy))=0$ носят название соответственно т е о р е м а с л о ж е н и я и т е о р е м а у м н о ж е н и я функции $f(t)$. Простейшими Ф. у., в к-рых искомая функция зависит от двух переменных, являются, напр., уравнения

$$\varphi(x,\ y)+\varphi(y,\ z)=\varphi(x,\ z) \text{ и } \varphi(x,\ y)\,\varphi(y,\ z)=\varphi(x,\ z),$$

решения к-рых имеют соответственно вид

$$\varphi(y,\ z)=\Psi(y)-\Psi(z) \text{ и } \varphi(x,\ y)=\Psi(y)/\Psi(x),$$

где Ψ — произвольная функция.

Лит.: [1] К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [2] Р и с с Ф., С ё к е ф а л ь в и - Н а д ь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979; [3] Д а в и д е н к о Д. Ф., в кн.: Математическое программирование и смежные вопросы. Вычислительные методы, М., 1976, с. 187—212; [4] К а н т о р о в и ч Л. В., «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, в. 6, с. 99—116; [5] Д а в и д е н к о Д. Ф., в кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика, Новосиб., 1980, с. 59—65; [6] Д а л е ц к и й Ю. Л., К р е й н М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970; [7] Энциклопедия элементарной математики, кн. 3, Функции и пределы, М.—Л., 1952; [8] А ц е л ь Я., «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, в. 3, с. 3—68; [9] Ф и х т е н г о л ь ц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, 7 изд., М., 1969.

Д. Ф. Давиденко.

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ; м е т о д ы р е ш е н и я — методы нахождения точных или приближенных решений функциональных конкретных или абстрактных уравнений, т. е. уравнений вида

$$P(x)=y, \qquad (1)$$

где $P(x)$ — нек-рый, вообще говоря, нелинейный оператор, переводящий элементы пространства X типа B (или другого типа) в элементы пространства Y того же типа (см. *Функциональное уравнение*). Точные решения в виде аналитич. выражений получаются лишь для немногих типов Ф. у., поэтому особое значение имеют приближенные методы решения.

Для нахождения решений общих Ф. у. вида (1) развит ряд методов, напр. метод бесконечных степенных рядов, метод последовательных приближений, метод Галеркина (метод моментов), метод касательных гипербол, метод Чебышева (касательных парабол), метод Ньютона — Канторовича и его модификации, метод наискорейшего спуска и др., а также методы вариации параметра (прямые, итерационные и комбинированные) определенных типов и их различные модификации, в том числе и с последовательной аппроксимацией обратного оператора. Общие методы применяются к решению различных конкретных Ф. у. математич. анализа. Кроме того, существуют специальные методы решения конкретных Ф. у., в том числе и численные методы, напр. метод сеток и др. Метод вариации параметра, метод Ньютона — Канторовича и нек-рые др. из указанных методов имеют также и теоретич. значение, так как с их помощью можно делать заключение о существовании, единственности и области расположения решения Ф. у., не находя самого решения, что подчас не менее важно, чем фактич. знание решения. Ниже в качестве примера рассматривается прямой метод вариации параметра.

Пусть в банаховом пространстве $[X]=[X\to X]$ линейных ограниченных операторов задано нелиней-

ное операторное обыкновенное дифференциальное уравнение на бесконечном промежутке

$$\frac{dx}{d\lambda} = x(I - Ax)\,(= (I - xA)\,x),\ x(0) = x_0, \qquad (2)$$

где A, x_0, $I \in [X]$ (A, x_0 — заданные, I — тождественный оператор), $x(\lambda)$ — абстрактная функция со значениями из $[X]$ (X — пространство типа B). К решению уравнения (2) приводится прямым методом вариации параметра задача построения обратного оператора A^{-1} для обратимого оператора A, решение линейного операторного уравнения вида $I - Ax = 0$ и др. задачи. Если спектр оператора Ax_0 (x_0A) расположен в правой полуплоскости, то задача (2) имеет единственное решение $x(\lambda)$, $x(0) = x_0$, $\forall \lambda \in [0, \infty)$.

Аналитич. применение к задаче Коши (2) методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений приводит к целому классу прямых методов вариации параметра решения операторного уравнения (2), а следовательно, и решения тех задач, к-рые сводятся к задаче (2). Напр., метод Эйлера с неравномерным шагом h_k приводит к следующему методу построения оператора A^{-1}:

$$x_{k+1} = x_k + h_k x_k (I - Ax_k)\,(+ h_k (I - x_k A)\,x_k),$$
$$k = 0, 1, 2 \ldots \qquad (3)$$

Шаги h_k в формуле (3) выбирают различными способами. Когда спектр оператора $I - Ax_0$ ($I - x_0A$) расположен на действительной оси в интервале $[-\rho_0, 0]$, $0 < \rho_0 < \infty$, весьма эффективным является следующий способ выбора шагов h_k:

$$h_k = 1/(1 + \rho_k),\ \rho_{k+1} = \rho_k L_k,\ 4L_k = \rho_k/(1 + \rho_k),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots,\ h_{k+1} = 4h_k/(1 + h_k)^2. \qquad (4)$$

При этом быстрота сходимости метода (3) имеет порядок выше, чем 2^k, норма невязки убывает по закону $\rho_{k+1} = \rho_k^2/4\,(1 + \rho_k)$. Случай интервала $[0, \bar{\rho}_0]$, $0 < \bar{\rho}_0 < 1$, выгодно сводится к рассмотренному одним шагом метода (3) при

$$h = 1/(1 - \bar{\rho}_0),\ \rho_0 = \bar{\rho}_0^2/4\,(1 - \bar{\rho}_0).$$

Относительно сходимости метода (3), (4) для конкретных операторных уравнений можно высказать на основании общих фактов те или иные результаты в зависимости от того, какое пространство берется за основу.

К решению задачи (2) сводится также задача построения проекторов вида

$$P(Ax_0)\ (P(x_0A)),\ P(K) = e^{-K\lambda}\big|_{\lambda = \infty},\ K \in [X],$$

[случай, когда спектр оператора $I - Ax_0$ ($I - x_0A$) расположен в интервале $[-\rho_0, 1]$] и задача построения псевдообратных операторов x^+ (^+x) для оператора A таких, что

$$I - Ax^+ = P(Ax_0),\ I - {}^+xA = P(x_0A),\ x^+ = {}^+x.$$

Для непосредственного построения проекторов $P(Ax_0)$ ($P(x_0A)$) метод (3), (4) можно переписать в виде

$$P_{k+1} = P_k + h_k P_k (P_k - I),\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$P_0 = I - Ax_0\ (P_0 = I - x_0A).$$

В зависимости от расположения спектра и свойств оператора A в качестве x_0 выбирают, напр., операторы I, A, A^* или др.

К абстрактному линейному функциональному обыкновенному дифференциальному уравнению ($0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$)

$$\frac{dy}{d\lambda} = x_0 (b - Ay),\ y(0) = y_0, \qquad (5)$$

где b, $y_0 \in X$, x_0, $A \in [X]$, $y(\lambda)$ — абстрактная функция со значениями в X, сводится прямым методом вариации

параметра задача непосредственного построения псевдорешений y^+ линейных Ф. у. вида

$$b - Ay^+ = P(Ax_0)(b - Ay_0) \qquad (6)$$

или Ф. у. $b - Ay^+ = 0$, если $P(Ax_0)(b - Ay_0) = 0$. К задаче (5) сводятся также и др. задачи, в том числе задачи для дифференциальных уравнений обыкновенных и с частными производными, интегральные уравнения и др. Формула

$$y(\lambda) = e^{-x_0 A\lambda} y_0 + r(\lambda) x_0 b, \; r(\lambda) = \int_0^\lambda e^{-x_0 A(\lambda - s)}\, ds,$$

дает единственное решение уравнения (5), удовлетворяющее условию $y(0) = y_0$.

Применение к задаче (5), напр., метода Эйлера с шагом h_{k+1} вперед приводит к следующему методу построения псевдорешений y^+ Ф. у. (6):

$$y_{k+1} = y_k + h_{k+1} x_0 (b - Ay_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (7)$$

Шаги h_{k+1} выбирают, напр., через корни многочленов Чебышева $T_N(t)$:

$$h_j = 2[M + m - (M - m)\, t_j]^{-1},$$

$$t_j = \cos[(2\varkappa_j - 1)\pi/2N], \quad j = 1, 2, \ldots, N, \qquad (8)$$

когда $x_0 A$ — самосопряженный оператор с ненулевой частью спектра на отрезке $[m, M]$, $0 < m \leqslant M$, $P_N = (\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_N)$ — нек-рое упорядочение чисел $1, 2, \ldots, N$ для устойчивости счета, N — порядок требуемого многочлена. Метод (7), (8) дает оптимальную оценку сходимости только на N-м шаге. При $N = 2^l$ (или $\approx 2^l$) весьма эффективным является выбор шагов в (7) последовательно через корни многочленов Чебышева

$$T_2(t) - T_0(t),\; T_1(t),\; T_1(t),\; T_2(t),\; T_2(t),\; \ldots$$
$$\ldots,\; T_{2^{l-2}}(t),\; T_{2^{l-2}}(t)$$

вместо многочлена $T_N(t)$, что существенно упрощает задачу упорядочения шагов h_j и повышает эффективность счета, особенно при больших N. В этом случае погрешность оптимально уменьшается после употребления всех упорядоченных корней каждого многочлена, что важно для упрощения контроля счета. В случае, если $P(Ax_0)(b - Ay_0) = 0$, то $P(x_0 A) \times (y^+ - y_0) = 0$; при этом, если $P(x_0 A)$ — ортопроектор, то $y^+ - y_0$ является нормальным решением Ф. у. $A(y^+ - y_0) = b - Ay_0$. С другой стороны, из (7) вытекает

$$b - Ay_{k+1} = U_{k+1}(b - Ay_0), \; U_{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1} (I - h_i A x_0),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

При этом, если $P(Ax_0)$ — проектор, то

$$\| U_k - P(Ax_0) \| \leqslant 2q^k/(1 + q^{2k}) \longrightarrow 0$$

при $k \longrightarrow \infty$ $(q = (\sqrt{M} - \sqrt{m})/(\sqrt{M} + \sqrt{m}))$.

Существуют также прямые методы вариации параметра типа метода Эйлера, использующие рекуррентные соотношения для многочленов Чебышева и близких к ним (без явного использования корней этих многочленов), с убыванием погрешности на каждом шаге. Эти методы являются многошаговыми и обладают повышенной быстротой сходимости. Применение к задаче (5) метода Эйлера с шагом h_{k+1} назад дает следующий эффективный класс методов

$$y_{k+1} = y_k + h_{k+1}(I + h_{k+1} x_0 A)^{-1} x_0 (b - Ay_0),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

откуда

$$b - Ay_{k+1} = W_{k+1}(b - Ay_0),$$

$$W_{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1} (I + h_i A x_0)^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

При этом, если $P(Ax_0)$ — проектор и $h_i>0$ такие, что для любого i

$$\|(I-P(Ax_0))(I+h_iAx_0)^{-1}\|\leqslant\rho_i<1,$$

то

$$\|W_k-P(Ax_0)\|\leqslant\prod_{i=1}^{k}\rho_i\xrightarrow[k\to\infty]{}0.$$

Существуют аналогичные методы и для решения нелинейных Ф. у. и операторных уравнений, а также методы с повышенной степенью точности типа методов Рунге — Кутта s-го порядка точности и др. типов.

Решения Ф. у. в узком смысле этого слова и систем таких уравнений могут быть как конкретными функциями, так и классами функций, зависящих от произвольных параметров или произвольных функций. В теории Ф. у. известно мало общих методов решения таких уравнений. Поэтому в каждом частном случае необходимо, как правило, исследовать степень общности полученного решения.

Одним из более или менее общих методов решения Ф. у. является метод сведения их к решению уравнений в конечных разностях. Пусть, напр., имеется Ф. у. n-го порядка и 1-го класса вида

$$F(x,\ \varphi(x),\ \varphi^2(x),\ \ldots,\ \varphi^n(x))=0, \tag{9}$$

где функция F задана, функция $\varphi(x)$ — искомая;

$$\varphi^0(x)=x,\ \varphi^1(x)=\varphi(x),\ \varphi^2(x)=\varphi(\varphi(x)),\ \ldots$$

При этом полагают $x=u_z$, $\varphi(x)=u_{z+1}$. Здесь переход от x к $\varphi(x)$ заменяется введением нового переменного z и изменением z на 1 в функции u_z. После такой замены уравнение (9) принимает вид

$$F(u_z,\ u_{z+1},\ \ldots,\ u_{z+n})=0. \tag{10}$$

Решение уравнения (10) в конечных разностях n-го порядка дает выражение для u_z через z и n произвольных периодич. функций C_i от z с периодом, равным единице. Решение Ф. у. (9) в самом общем виде представляется системой двух совместных уравнений

$$\left.\begin{aligned} u_z=x=f(z,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n),\\ u_{z+1}=\varphi(x)=f(z+1,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n).\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Выбирая в качестве C_i их частные значения, можно из (11) исключить z и получить таким образом частное решение уравнения (9). Напр., для Ф. у. 2-го порядка

$$\varphi[\varphi(x)]+a\varphi(x)+bx=0 \tag{12}$$

общее решение (11) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} u_z=x=C_1\ \lambda_1^z+C_2\lambda_2^z,\\ u_{z+1}=\varphi(x)=C_1\lambda_1^{z+1}+C_2\lambda_2^{z+1},\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения $\lambda^2+a\lambda+b=0$, C_1 и C_2 — произвольные постоянные периодич. функции с периодом, равным единице. Если для C_1 и C_2 дать значение произвольных постоянных и исключить z из (13), то получается полное решение Ф. у. (12):

$$\frac{x\lambda_2-\varphi(x)}{\lambda_2-\lambda_1}=C_1\left[\frac{x\lambda_1-\varphi(x)}{C_2(\lambda_1-\lambda_2)}\right]^{\gamma},\quad\gamma=\ln\lambda_1/\ln\lambda_2.$$

Метод сведения к уравнениям в конечных разностях применяется также и при решении прямых задач функционального исчисления. Пусть, напр., задана функция $\varphi(x)=a+bx$ и пусть требуется построить выражение $\varphi^n(x)$ ($\varphi^i(x)=\varphi(\varphi^{i-1}(x))$). При этом полагают $\varphi^n(x)=u_n$ и записывают уравнение в конечных разностях $u_{n+1}=a+bu_n$, решением к-рого является $u_n=Cb^n+a/(1-b)$. Отсюда при $n=0$ получают $u_0=x=C+a/(1-b)$, т. е. $C=x-a/(1-b)$. Таким образом,

$$\varphi^n(x)=\alpha_n+\beta_nx,\ \alpha_n=a(b^n-1)/(b-1),\ \beta_n=b^n.$$

Здесь же при желании можно записать и Ф. у. вида $\varphi^n(x)=\beta_{n-1}\varphi(x)+\alpha_{n-1}$, решением к-рого при любом n является $\varphi(x)$ и др. Решая это Ф. у. тем же методом, можно построить и др. значения $\varphi(x)$. В частности, для нечетных n получается еще одно действительное решение $\varphi(x)=-bx+a(1+b)/(1-b)$.

Для решения Ф. у. применяется также метод подстановок. Пусть, напр., имеется Ф. у.

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y. \qquad (14)$$

Применяя последовательно подстановки

$$x=0,\ y=t;\ x=\frac{\pi}{2}+t,\ y=\frac{\pi}{2};\ x=\frac{\pi}{2},\ y=\frac{\pi}{2}+t,$$

из (14) получают соответственно уравнения

$$f(t)+f(-t)=2a\cos t,\quad f(\pi+t)+f(t)=0$$

и

$$f(\pi+t)+f(-t)=2b\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-2b\sin t,$$

где обозначено $f(0)=a$, $f(\pi/2)=b$. Отсюда путем вычитания из суммы первых двух уравнений третьего уравнения получают $2f(t)=2a\cos t+2b\sin t$. Общим решением исходного Ф. у. (14) является функция $f(x)=a\cos x+b\sin x$. Этот метод применим также и к др. уравнениям типа

$$H[f(x+y),\ f(x-y),\ f(x),\ x,\ y]=0$$

при нек-рых предположениях относительно функции H. К уравнениям других типов применяются различные другие подстановки.

Метод подстановок применяется и для сведения одних Ф. у. к другим уравнениям того же типа, в частности к Ф. у. с известными решениями. Напр., Ф. у.

$$f((x+y)/2)=f(x)/2+f(y)/2 \qquad (15)$$

может быть приведено к Ф. у. Коши

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad (16)$$

с непрерывным решением $f(x)=Cx$. С этой целью подставляют в (15) $x+y$ вместо x и 0 вместо y:

$$f((x+y)/2)=f(x+y)/2+a/2,\ a=f(0).$$

Сравнивая это с исходным Ф. у. (15), получают Ф. у. вида $f(x+y)=f(x)+f(y)-a$, откуда $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, $\varphi(x)=f(x)-a$ и $\varphi(x)=Cx$. Решением является функция $f(x)=Cx+a$.

Для сведения к другим Ф. у. того же типа применяют также логарифмирование и др. приемы. Напр., решение Ф. у.

$$f(x+y)=f(x)f(y) \qquad (17)$$

путем логарифмирования можно свести к решению Ф. у. (16). Непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая Ф. у. (17), всегда строго положительна, а функция $\varphi(x)=\ln f(x)$ — непрерывна (как результат суперпозиции непрерывных функций) и удовлетворяет условию $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, $\varphi(x)=Cx$. Решением является функция $f(x)=e^{Cx}=a^x$.

Во многих случаях для решения Ф. у. применяется также метод сведения их к дифференциальным уравнениям. Напр., Ф. у. (14) можно свести к уравнению вида $f''(x)=-f(x)$. К этому уравнению сводятся и другие Ф. у. Этот метод дает лишь решения, принадлежащие классу дифференцируемых функций. Решение, напр., Ф. у. Коши (16) при условии дифференцируемости функции $f(x)$ можно найти следующим образом. Дифференцируя (16) по x, получают $f'(x+y)=f'(x)$, и так как y здесь произвольное, то $f'(x)=C$. Тогда интегрирование дает $f(x)=Cx+C_1$, где C_1 — новая постоянная. Подставляя найденное выражение для $f(x)$ снова в Ф. у. (16), устанавливают, что при всех

значениях x и y должно быть $C_1=0$. Решением является функция $f(x)=Cx$.

Для решения Ф. у. в ряде случаев применяют также и метод итераций.

Лит.: [1] Канторович Л. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1949, т. 28, с. 104—44; [2] Красносельский М. А. и др., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [3] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [4] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [5] Давиденко Д. Ф., в кн.: Приближенные методы решения операторных уравнений и их приложения, Иркутск, 1982, с. 71—83; [6] Мертвецова М. А. «Докл. АН СССР», 1953, т. 88, № 4, с. 611—14; [7] Нечепуренко М. И., «Успехи матем. наук», 1954, т. 9, в. 2, с. 163—70; [8] Тамме Э. Э., «Докл. АН СССР», 1955, т. 103, № 5, с. 769—72; [9] Мысовских И. П., «Вестн. Ленингр. ун-та», 1953, № 11, с. 25—48; [10] Давиденко Д. Ф., в кн.: Совещание по программированию и матем. методам решения физических задач, Дубна, 1974, с. 542—48; [11] Бельтюков Б. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1965, т. 5, № 5, с. 927—31; [12] Ваарманн О., «Изв. АН Эст. ССР», 1971, т. 20, № 4, с. 386—93; [13] Давиденко Д. Ф., в кн.: Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики, М., 1981, с. 61—63; [14] Лившицов А. И., «Матем. сб.», 1876, т. 8, в. 1, с. 80—160; [15] Синцов Д. М., «Изв. физ.-матем. об-ва Казанск. ун-та», 1903, сер. 2, т. 13, № 2, с. 46—72.

Д. Ф. Давиденко.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ — часть современного математического анализа, основной целью к-рой является изучение функций $y=f(x)$, где, по крайней мере, одна из переменных x, y меняется по бесконечномерному пространству. В самых общих чертах такое изучение распадается на три части: 1) введение и изучение бесконечномерных пространств как таковых; 2) изучение простейших функций, а именно, когда x бесконечномерно, а y одномерно (такие функции носят название *функционалов*, откуда и произошло название «Ф. а.»); 3) изучение общих функций указанного типа — *операторов*. Наиболее полно изучены линейные функции $X \ni x \mapsto f(x)=y \in Y$ — линейные операторы. Их теория является по существу обобщением *линейной алгебры* на бесконечномерный случай. Для методов Ф. а. характерно объединение подходов классич. анализа и алгебры, что приводит к установлению связей между на первый взгляд весьма отдаленными разделами математики.

Ф. а. как самостоятельная математич. дисциплина начал складываться на рубеже 19 и 20 вв. и окончательно оформился в 20—30 гг. этого столетия, с одной стороны, под влиянием изучения конкретных классов линейных операторов — интегральных операторов и связанных с ними интегральных уравнений, а с другой — под влиянием чисто внутреннего развития современной математики с ее желанием обобщить и тем самым осознать истинную природу тех или иных закономерностей. Огромное влияние на развитие Ф. а. имела также квантовая механика, так как ее основные понятия, например энергия, оказались линейными операторами в бесконечномерных пространствах (к-рые физики вначале не вполне строго интерпретировали как бесконечномерные матрицы).

1. Понятие пространства. Наиболее общими пространствами, фигурирующими в Ф. а., являются *топологические векторные пространства*. Так называется векторное (линейное) пространство X над полем комплексных чисел $\mathbb{C}^1$ (или каким-либо другим полем, напр. действительных чисел $\mathbb{R}^1$), к-рое одновременно является и топологич. пространством, причем линейная структура и топология согласованы в том смысле, что линейные операции непрерывны в рассматриваемой топологии. В частности, если X — метрич. пространство, то возникает метрическое векторное пространство.

Более частная, однако очень важная, ситуация возникает, когда в векторном пространстве X аксиоматически вводится понятие нормы $\|x\|$ (длины) векторов $x \in X$. Векторное пространство с нормой наз. нормированным пространством. Оно метри-

зуемо. Метрика ρ в нем вводится формулой: $\rho(x, y)=\|x-y\|$. Векторное пространство с нормой называется *банаховым пространством*, если оно полно относительно указанной метрики.

В огромном количестве задач возникает ситуация, когда в векторном пространстве X можно ввести *скалярное произведение* (x, y) для любых двух его векторов, обобщающее обычное скалярное произведение в трехмерном пространстве. Пространство, наделенное скалярным произведением, наз. предгильбертовым, оно является частным случаем нормированного пространства. Если это пространство полное, то оно называется гильбертовым пространством.

В Ф. а. изучаются б е с к о н е ч н о м е р н ы е п р о с т р а н с т в а, т. е. такие пространства, в к-рых существует бесконечное множество линейно независимых векторов.

С геометрич. точки зрения наиболее простыми являются гильбертовы пространства $X=H$, свойства к-рых больше всего напоминают свойства конечномерных пространств благодаря возможности ввести через скалярное произведение понятие, аналогичное углу между двумя векторами. В частности, два вектора $x, y \in H$ наз. ортогональными ($x \perp y$), если $(x, y)=0$. В H справедлив следующий результат: пусть G — подпространство H. Тогда для любого вектора $x \in H$ существует его проекция x_G на G, т. е. такой вектор $x_G \in G$, что $x-X_G$ ортогонально любому вектору из G. Благодаря этому факту большое число геометрич. конструкций, имеющих место для конечномерных пространств, переносится на гильбертовы пространства, где они часто приобретают аналитич. характер.

Геометрич. вопросы резко усложняются при переходе от гильбертовых пространств к банаховым и тем более к общим топологическим векторным пространствам в связи с невозможностью ортогонального проектирования в них. Напр., в пространстве $l_p (p \geqslant 1)$ векторы $e_n=(0,0, \ldots, 0,1,0,0, \ldots)$ образуют базис в том смысле, что для каждого вектора $x \in l_p$ справедливо «покоординатное» разложение:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

Построение базиса в пространстве $C[a, b]$ уже намного сложнее; вместе с тем базисы удавалось строить в каждом из известных примеров банаховых пространств. Возникла проблема: возможно, базис существует в каждом банаховом пространстве? Эта проблема, несмотря на усилия многих математиков, не поддавалась решению более 40 лет и лишь в 1972 была решена отрицательно (см. [23]). В Ф. а. важное место занимает «геометрическая» тематика, посвященная выяснению свойств различных множеств в банаховом и других пространствах, напр. выпуклых, компактных (последнее означает, что из всякой последовательности точек такого множества Q можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке из Q) и т. п. Здесь часто просто формулируемые вопросы имеют весьма нетривиальные решения. Эта проблематика тесно связана с изучением изоморфизма пространств, с нахождением универсальных представителей в том или ином классе пространств.

Детально изучены конкретные функциональные пространства, т. к. свойства этих пространств обычно определяют характер решения задачи, получаемого методами Ф. а. Примером могут служить т. н. вложения теоремы для Соболева пространств $W_p^l(G), G \subseteq \mathbb{R}^n$ и различные их обобщения.

В связи с запросами современной математич. физики возникло большое количество конкретных пространств, в к-рых естественно ставятся задачи и изучение к-рых весьма существенно.

Эти пространства обычно строятся из исходных при помощи нек-рых конструкций. Вот наиболее употребительные из этих конструкций в простейших вариантах.

1) Образование ортогональной суммы $H=\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$ гильбертовых пространств H_n, $n=1, 2, \ldots$, — конструкция пространства H по пространствам H_n, подобная образованию H по одномерным пространствам.

2) Переход к факторпространству: в векторном пространстве X задается вырожденное скалярное произведение (x, y) (т. е. для $x\neq 0$ возможно равенство $(x, x)=0$); гильбертово пространство H образуется пополнением X относительно $(\cdot, \cdot)$, после предварительного отождествления с 0 тех векторов, для к-рых $(x, x)=0$.

3) Образование тензорного произведения $\bigotimes_{j=1}^{n} H_j$ — аналогичное переходу от функции одной переменной $f(x_1)$ к функциям многих переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; сходная конструкция применяется и для бесконечного числа сомножителей; рассматриваются также симметричные или антисимметричные тензорные произведения, состоящие в случае функций из функций многих переменных, обладающих этими свойствами.

4) Образование проективного предела X банаховых пространств X_α, где α пробегает нек-рое множество индексов A: по определению, $X=\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha$; топология в X, грубо говоря, задается сходимостью $x_n \longrightarrow x$, к-рая означает, что $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ по норме каждого X_α.

5) Образование индуктивного предела X банаховых пространств X_α: по определению, $X=\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$, топология в X, грубо говоря, задается сходимостью $x_n \longrightarrow x$, к-рая означает, что все x_n лежат в нек-ром X_α и по норме этого пространства $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$.

6) Интерполяция — образование по двум пространствам X_1 и X_2 «промежуточных» X_α, где $\alpha\in(1, 2)$, напр. построение по $W_p^1(G)$ и $W_p^2(G)$ пространств $W_p^\alpha(G)$ с дробной производной $\alpha\in(1, 2)$.

Процедуры 4), 5) обычно применяются при построении топологических векторных пространств. Среди таких пространств отметим весьма важный класс т. н. *ядерных пространств*, каждое из к-рых строится как проективный предел гильбертовых пространств H_α, обладающих тем свойством, что для каждого $\alpha\in A$ найдется $\beta\in A$ такое, что $H_\beta\subseteq H_\alpha$ и оператор вложения $H_\beta \ni x \longrightarrow x \in H_\alpha$ — оператор Гильберта — Шмидта (см. ниже п. 3).

Разработан большой и важный раздел Ф. а., в к-ром изучаются топологические и нормированные векторные пространства с введенной аксиоматически структурой полуупорядоченности, обладающей естественными свойствами (полуупорядоченные пространства).

2. Функционалы. В Ф. а. существенную роль играет изучение *непрерывных функционалов* и *линейных функционалов*; их свойства тесно связаны со свойствами исходного пространства X.

Пусть X — банахово пространство, X' — совокупность линейных непрерывных функционалов на нем; X' — векторное пространство относительно обычных операций сложения функций и умножения их на число, оно становится банаховым, если ввести норму

$$\|l\|=\sup_{x\in X}\frac{|l(x)|}{\|x\|}.$$

Пространство X' носит название сопряженного к X.

Если X конечномерно, то всякий линейный функционал имеет вид

$$l(x)=\sum_{j=1}^{n} x_j\bar{a}_j,$$

где x_j — координаты вектора x при разложении по некоторому базису, а a_j — числа, определяемые функционалом. Оказывается, что такая же формула имеет место и в случае, когда $X=H$ — гильбертово (теорема Рисса), именно, в этом случае $l(x)=(x, a)$, где a — нек-рый вектор из H. Эта формула показывает, что в случае гильбертова пространства сопряженное к нему по существу с ним совпадает.

В случае банахова пространства ситуация гораздо сложнее: можно строить $X''=(X')'$, $X'''=(X'')'$, ... и эти пространства могут оказаться все различными. Вместе с тем всегда существует канонич. вложение X в X'', а именно, каждому $x\in X$ можно сопоставить функционал L_x, полагая $L_x(l)=l(x)$, $l\in X'$. Пространства, для к-рых $X''=X$, наз. рефлексивными. Вообще, в случае банахова пространства непростым является даже вопрос о существовании нетривиальных (т. е. отличных от 0) линейных функционалов. Этот вопрос легко решается в положительном смысле с помощью *Хана — Банаха теоремы*.

Сопряженное пространство X' в известном смысле «лучше» исходного X. Так, напр., в X' можно ввести, наряду с нормой, другую (слабую) топологию, к-рая в терминах сходимости означает, что $l_n\longrightarrow l$, если $l_n(x)\longrightarrow l(x)$ для каждого $x\in X$. В этой топологии шар из X' будет компактным (чего никогда не будет для бесконечномерных пространств относительно топологии, порождаемой нормой). Это обстоятельство дает возможность более детально изучить ряд геометрич. вопросов для множеств из сопряженного пространства (например, установить структуру выпуклых множеств и т. п.).

Для ряда конкретных пространств X сопряженные пространства X' могут быть найдены. Однако для большинства банаховых и в особенности топологических векторных пространств функционалы являются элементами новой природы, не выражающимися просто средствами классич. анализа. Элементы сопряженного пространства носят название обобщенных функций.

Для многих вопросов Ф. а. и его приложений существенную роль играют тройки пространств $\Phi'\supseteq H\supseteq\Phi$, где H — исходное гильбертово пространство, Φ — топологическое векторное пространство (в частности, гильбертово с другим скалярным произведением), а Φ' — сопряженное ему пространство, элементы к-рого можно понимать как обобщенные функции. Само пространство H носит тогда название оснащенного гильбертова пространства.

Изучение линейных функционалов на X во многом способствует более глубокому пониманию природы исходного пространства X. С другой стороны, в большом количестве задач возникает необходимость изучать общие функции $X\ni x\to f(x)\in C'$, т. е. *нелинейные функционалы*, в случае бесконечномерного X. Так как шар в таком пространстве X некомпактен, то их изучение часто связано с существенными трудностями, хотя, напр., такие понятия, как дифференцируемость $f(x)$, ее аналитичность и т. п. легко обобщаются. Можно рассматривать совокупность функций $X\ni x\mapsto f(x)\in\in\mathbb{C}^1$, обладающих определенными свойствами, как новое топологическое векторное пространство функций «бесконечного числа переменных». Такие функции также появляются при конструировании бесконечных тензорных произведений $\bigotimes_{n=1}^{\infty} H_n$ пространств функций

от одной переменной. Изучение подобных пространств, операторов в них и т. п. связано с потребностями квантовой теории поля (см. [22]).

3. Операторы. Главными объектами изучения в Ф. а. являются операторы $X \ni x \mapsto f(x) \in Y$, где X, Y — топологические векторные (большей частью нормированные или гильбертовы) пространства, прежде всего *линейные операторы*.

В случае конечномерных X и Y из линейности оператора следует, что он имеет вид

$$(Ax)_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk} x_k, \quad j = 1, 2, \ldots, M,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — координаты вектора X в нек-ром базисе, $(Ax)_1, \ldots, (Ax)_M$ — аналогичные координаты вектора $y = Ax$. Таким образом, в конечномерном случае каждому линейному оператору A в фиксированных базисах в X и в Y соответствует матрица

$$\| a_{jk} \|_{j,\,k=1}^{M,\,N},$$

через к-рую A выражается просто. Изучение линейных операторов в этом случае является предметом линейной алгебры.

Положение резко усложняется при переходе к бесконечномерным (даже гильбертовым) X и Y. Здесь прежде всего возникают два класса операторов: непрерывные, для к-рых функция $X \ni x \mapsto Ax \in Y$ непрерывна (их также называют ограниченными, так как непрерывность оператора в случае банаховых пространств эквивалентна ограниченности его), и неограниченные, где такой непрерывности нет. Операторы первого типа более простые, однако второй тип чаще встречается, так, дифференциальные операторы именно второго типа.

Наиболее изучен важный, в частности для квантовой механики, класс *самосопряженных операторов* в гильбертовом пространстве H.

С самосопряженными операторами тесно связаны другие классы операторов в H (т. н. *унитарные операторы*, *нормальные операторы*), к-рые также хорошо изучены.

Из общих фактов, касающихся ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X, можно выделить построение операционного исчисления аналитич. функций от них. Именно, р е з о л ь в е н т о й о п е р а т о р а A наз. оператор $R_z = (A - zI)^{-1}$, где I — единичный оператор, а $z \in \mathbb{C}^1$. Точки z, для к-рых *обратный оператор* $(A - zI)^{-1}$ существует, наз. р е г у л я р н ы м и т о ч к а м и оператора A, дополнение к множеству регулярных точек наз. с п е к т р о м $s(A)$ оператора A. Спектр всегда не пуст и содержится в круге $|z| \leqslant \|A\|$; собственные значения оператора A, разумеется, входят в $s(A)$, но спектр, вообще говоря, ими не исчерпывается. Если $f(z)$ — аналитич. функция, определенная в окрестности $s(A)$, а Γ — нек-рый замкнутый контур, охватывающий $s(A)$ и входящий в область аналитичности $f(z)$, то полагают

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) R_z \, dz$$

и наз. $f(A)$ ф у н к ц и е й о т о п е р а т о р а. Если $f(z)$ — многочлен, то $f(A)$ получается простой заменой z в этом многочлене на A. Соответствие $f(z) \mapsto f(A)$ обладает важным свойством гомоморфизма:

$$(f+g)(A) = f(A) + g(A), \quad (fg)(A) = f(A)\, g(A).$$

Таким образом, при определенных условиях на A можно определить, например, e^A, $\sin A$, $\sqrt{A}$ и т. п.

Среди специальных классов операторов, действующих в банаховом пространстве X, наиболее важную

роль играют т. н. *вполне непрерывные операторы* или *компактные операторы*. Если A компактен, то уравнение вида $x-Ax=y$ ($y\in X$ — заданный, $x\in X$ — искомый векторы) хорошо изучено. Для него справедливы аналоги всех фактов, имеющих место для линейных уравнений в конечномерном пространстве (т. н. теория Фредгольма). Для компактных операторов A исследованы условия, обеспечивающие полноту в X системы собственных и присоединенных векторов A, т. е. возможность приближения любого вектора из X линейными комбинациями собственных и присоединенных векторов, и т. п. Вместе с тем даже для компактных операторов возникают естественно формулируемые вопросы, с трудом поддающиеся доказательству (напр., теорема о том, что у всякого такого оператора существует отличное от 0 и всего X инвариантное подпространство G, т. е. такое G, что $AG\subseteq G$; в конечномерном случае существование G тривиально следует из непустоты спектра).

Спектр компактного A дискретен и может сгущаться лишь к 0. В соответствии со скоростью его приближения к 0 выделяются важные подклассы класса компактных операторов. Так, весьма часто встречаются Гильберта — Шмидта операторы. Если A — оператор в $H=L_2(G)$, то он — оператор Гильберта — Шмидта тогда и только тогда, когда он интегральный и его ядро $K(t, s)$ суммируемо с квадратом по двум переменным. Подробно изучены также компактные Вольтерра операторы. Изучались также спектральные операторы, для к-рых имеется аналог разложения единицы $E(\lambda)$ и т. п. (см. [8]).

4. Банаховы алгебры и теория представлений. На ранних этапах развития Ф. а. изучались задачи, для постановки и решения к-рых необходимы были лишь линейные операции над элементами пространства.

Одним из мощных приемов в математике является представление абстрактных математич. объектов более простыми. Так, напр., спектральную теорему можно интерпретировать как представление самосопряженного оператора в виде оператора умножения измеримых функций нек-рого класса на независимую переменную. Если рассмотреть умножение функций того же класса на борелевские функции, то получают представление коммутативного нормального кольца операторов в гильбертовом пространстве. Более общий пример представления доставляет нам одна из главных теорем теории коммутативных банаховых алгебр.

Пусть A — коммутативная банахова алгебра, для простоты с единицей, т. е. банахово пространство, в к-ром определена коммутативная и ассоциативная операция умножения элементов $x\cdot y$, x, $y\in A$, и пусть норма удовлетворяет условию $\|xy\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$. Пусть, далее $\mathfrak{M}$ — множество всех максимальных идеалов. Тогда в $\mathfrak{M}$ можно так ввести локально компактную топологию, что каждый элемент $x\in A$ отобразится в комплекснозначную непрерывную функцию $x(m)$, $m\in\mathfrak{M}$, причем сумме $x+y$ и произведению $x\cdot y$ соответствует сумма $x(m)+y(m)$ и произведение $x(m)\cdot y(m)$ соответствующих функций (см. [7]). В некоммутативном случае теория представлений наиболее полно изучена для т. н. алгебр с инволюцией (см. *Банахова алгебра*).

Значительно полнее теория представлений развита для топологич. групп.

5. Нелинейный Ф. а. Одновременно с развитием и углублением понятия пространства шло развитие и обобщение понятия функции. В конечном счете пришли к необходимости рассматривать отображения (не обязательно линейные) одного пространства в другое. Одной из центральных задач нелинейного Ф. а. является изучение таких отображений. Как и в линейном случае, отображение пространства в числа (действительные или комплексные) наз. функционалом. Для нели-

нейных отображений (в частности, нелинейных функционалов) можно различными способами определить понятие дифференциала, производной по направлению и т. д., аналогичные соответствующим понятиям классического математического анализа (см. [11], [13], [15]).

Важной задачей нелинейного Ф. а. является задача отыскания неподвижных точек отображения (см. [11], [13], [15]).

При изучении собственных векторов нелинейного отображения, содержащего параметр, возникает существенное для нелинейного анализа явление — т. н. ветвления точки (см. [15]).

При исследовании неподвижных точек и точек ветвления широко используются топологич. методы: обобщения на бесконечномерные пространства теоремы Брауэра — Боля о существовании неподвижных точек отображений конечномерных пространств, индексы отображений и т. п.

6. Применение Ф. а. в математической и теоретической физике. Ниже указано, в каких разделах математич. физики применяются те или иные главы Ф. а.

1) Спектральная теория операторов — во всех теориях квантовой физики: в квантовой теории n тел, квантовой теории поля, квантовой статистич. физике. Кроме этого, спектральная теория применяется при изучении моделей динамич. систем в классич. механике, при изучении линеаризованных уравнений гидродинамики, при исследовании гиббсовских полей и т. д.

2) Теория рассеяния — в квантовой физике. Следует отметить, что современная математич. теория рассеяния первоначально возникла в физике. В последнее время теория рассеяния (обратная задача) получила много применений при интегрировании модельных нелинейных уравнений математической физики.

3) Банаховы алгебры — в квантовой теории поля, особенно т. н. аксиоматич. теории поля, при изучении различных интегрируемых моделей квантового поля и статистич. физики. В этих вопросах используются также алгебры Неймана.

4) Теория возмущений, главным образом теория возмущений линейных операторов,— почти во всех областях математич. физики: в квантовой теории поля, статистич. физике, равновесной и неравновесной (особенно при исследовании т. н. кинетич. уравнений, сложных спектров многочастичных систем и т. д.).

5) Функциональное интегрирование и меры в функциональных пространствах — в конструктивной квантовой теории поля и в квантовой статистич. физике.

6) Различные интегральные представления (теорема Рисса, теорема Крейна — Мильмана, теорема Шоке и др.) — в аксиоматич. квантовой теории поля, в статистич. физике.

7) Векторные пространства (главным образом гильбертовы) — в квантовой теории, в статистич. физике.

8) Обобщенные функции — везде в математич. физике, как важный аналитич. аппарат.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [2] Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1948; [3] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965; [4] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [5] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961; [6] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, М., 1958; [7] Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, М., 1960; [8] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. *Общая теория*, пер. с англ., М., 1962; *их же*, Линейные

операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, пер. с англ., М., 1966; их же, Линейные операторы. Спектральные операторы, пер. с англ., М., 1974; [9] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [10] Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 6, с. 89—185; [11] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959; [12] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [13] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и *функционального анализа*, 5 *изд., М., 1981*; [14] Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956; [15] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [16] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [17] его же, Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [18] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1977; [19] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979; [20] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962; [21] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962; [22] Шварц А. С., Математические основы квантовой теории поля, М., 1975; [23] Эпфло П., «Математика», 1974, т. 18, № 1, с. 146—55.

Ю. М. Березанский, Б. М. Левитан.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ — определитель, элементами к-рого являются функции. Ф. о. определенных видов играют важную роль в математич. анализе. Прежде всего это относится к *якобианам* и *вронскианам*. Понятие якобиана существенно используется при изучении дифференцируемых отображений областей евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, при замене переменного в кратных интегралах, при выяснении условий, когда система уравнений определяет неявную функцию или когда система заданных функций зависима, и т. п. Понятие вронскиана широко применяется в теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Л. Д. Кудрявцев.

ФУНКЦИЯ — одно из основных понятий математики. Пусть заданы два множества X и Y и каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие элемент $y \in Y$, к-рый обозначен через $f(x)$. В этом случае говорят, что на множестве X задана функция f (а также — что переменная y есть функция переменной x, или что y зависит от x) и пишут $f : X \to Y$.

В античной математике идея функциональной зависимости не была явно выражена и не являлась самостоятельным объектом исследования, хотя и был известен широкий круг конкретных систематически изучавшихся *функциональных соответствий*. В зачаточной форме понятие Ф. появляется в трудах ученых в средние века, но лишь в работах математиков 17 в., и прежде всего у П. Ферма (P. Fermat), Р. Декарта (R. Descartes), И. Ньютона (I. Newton) и Г. Лейбница (G. Leibniz), это понятие стало оформляться как самостоятельное. Термин «Ф.» впервые появился у Г. Лейбница. Для задания Ф. использовались геометрич., аналитич. и кинематич. концепции, но постепенно стало превалировать представление о Ф. как о нек-ром аналитич. выражении. В четкой форме это было сформулировано в 18 в.; И. Бернулли (J. Bernoulli) принадлежит определение, что «функцией переменной величины... называется количество, составленное каким угодно способом из переменной величины и постоянных». Л. Эйлер (L. Euler), приняв это определение, написал в своем курсе анализа, что «весь анализ бесконечно малых вращается вокруг переменных величин и их функций» [1]. У Л. Эйлера появился уже и более общий подход к понятию Ф. как зависимости *одной* переменной величины от другой. Эта точка зрения получила свое дальнейшее развитие в трудах Ж. Фурье (J. Fourier), Н. И. Лобачевского, П. Дирихле (P. Dirichlet), Б. Больцано (B. Bolzano), О. Коши (A. Cauchy), где стало выкристаллизовываться представление о Ф. как о соответствии между двумя число-

выми множествами. Так, в 1834 Н. И. Лобачевский [2] писал: «Общее понятие функции требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, к-рое подает средство испытывать все числа и выбрать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной». Определение Ф. как соответствия между двумя произвольными (не обязательно числовыми) множествами в 1887 было сформулировано Р. Дедекиндом (R. Dedekind) [3].

Понятие соответствия, а следовательно, и понятие Ф., иногда сводится к другим понятиям (множеству [4], отношению [5] или несколько другим теоретико-множественным и логико-математич. концепциям [6]), а иногда принимается за первичное, неопределимое понятие [7], поскольку, как это выразил, напр., А. Чёрч (A. Church): «В конечном счете понятие функции — или какое-либо сходное понятие, напр., понятие класса,— приходится считать первоначальным, или неопределимым» [8].

Ниже рассматривается понятие Ф., основанное на понятии множества и простейших операций над множествами.

Говорят, что число элементов множества A равно 1, или что множество A состоит из одного элемента, если в нем имеется элемент a и нет других (иначе говоря, если после вычитания из множества A множества $\{a\}$ получается пустое множество). Непустое множество A наз. множеством из двух элементов или п а р о й: $A=\{a, b\}$, если после вычитания из него множества, состоящего только из одного элемента $a\in A$, останется множество, к-рое также состоит из одного элемента $b\in A$ (это определение не зависит от выбора указанного элемента $a\in A$).

Если задана пара $A=\{a, b\}$, то пара $\{a, \{a, b\}\}$ наз. у п о р я д о ч е н н о й п а р о й элементов $a\in A$ и $b\in A$ и обозначается (a, b). Элемент $a\in A$ наз. ее первым элементом, а элемент $b\in A$ — вторым.

Если заданы множества X и Y, то множество всех упорядоченных пар (x, y), $x\in X$, $y\in Y$, наз. п р о и з в е д е н и е м м н о ж е с т в X и Y и обозначается через $X\times Y$. При этом не предполагается, что обязательно множество X отлично от множества Y, т. е. возможен случай, когда $X=Y$.

Всякое множество $f=\{(x, y)\}$ упорядоченных пар (x, y), $x\in X$, $y\in Y$, такое, что для любых пар $(x', y')\in f$ и $(x'', y'')\in f$ из условия $y'\neq y''$ следует, что $x'\neq x''$, наз. ф у н к ц и е й, или, что то же самое, о т о б р а ж е н и е м.

Наряду с терминами «Ф.» и «отображение» употребляются равнозначные им в определенных ситуациях термины «преобразование», «морфизм», «соответствие».

Множество всех первых элементов упорядоченных пар (x, y) нек-рой функции f наз. *областью определения* (или множеством определения) этой функции и обозначается X_f, а множество всех вторых элементов *областью значений* (множеством значений) и обозначается Y_f. Само множество упорядоченных пар $f=\{(x, y)\}$, рассматриваемое как подмножество произведения $X\times Y$, наз. г р а ф и к о м функции f.

Элемент $x\in X_f$ наз. а р г у м е н т о м Ф. или н е з а в и с и м о й п е р е м е н н о й, а элемент $y\in Y$ — з а в и с и м о й п е р е м е н н о й.

Если $f=\{(x, y)\}$ есть функция, то пишут $f: X_f\longrightarrow Y$ и говорят, что f отображает множество X_f в множество Y. В случае $X=X_f$ пишется просто $f: X\longrightarrow Y$.

Если $f: X\longrightarrow Y$ — Ф. и $(x, y)\in f$, то пишут $y=f(x)$ (иногда просто $y=fx$, или $y=xf$), а также $f: x\longmapsto y$, $x\in X$, $y\in Y$, и говорят, что Ф. f ставит в соответствие элементу x элемент y (отображение f отображает элемент x в элемент y) или, что тоже самое, элемент y

соответствует элементу x. В этом случае говорят также, что элемент y является значением Ф. f в точке x, или образом элемента x при отображении f.

Наряду с символом $f(x_0)$ для обозначения значения Ф. f в точке x_0 употребляется также обозначение $f(x)|_{x=x_0}$.

Иногда сама функция f обозначается символом $f(x)$. Обозначение Ф. $f: X \longrightarrow Y$ и ее значения в точке $x \in X$ одним и тем же символом $f(x)$ обычно не приводит к недоразумению, так как в каждом конкретном случае, как правило, всегда бывает ясно, о чем именно идет речь. Обозначение $f(x)$ часто оказывается удобнее обозначения $f: x \longmapsto y$ при вычислениях. Напр., запись $f(x)=x^2$ удобнее и проще использовать при аналитич. преобразованиях, чем запись $f: x \longmapsto x^2$.

При заданном $y \in Y$ совокупность всех таких элементов $x \in X$, что $f(x)=y$ наз. прообразом элемента y и обозначается $f^{-1}(y)$. Таким образом,

$$f^{-1}(y)=\{x: x \in X,\ f(x)=y\}.$$

Очевидно, если $y \in Y \setminus Y_f$, то $f^{-1}(y)=\varnothing$.

Пусть задано отображение $f: X \longrightarrow Y$. Иначе говоря, каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие нек-рый единственный элемент $y \in Y$, и каждый элемент $y \in Y_f \subset Y$ поставлен в соответствие хотя бы одному элементу $x \in X$. Если $Y=X$, то говорят, что отображение f отображает множество X в себя. Если $Y=Y_f$, т. е. множество Y совпадает с множеством значений функции f, то говорят, что f отображает множество X на множество Y, или что отображение f является сюръективным отображением, короче *сюръекцией*. Таким образом, отображение $f: X \longrightarrow Y$ есть сюръекция, если для любого элемента $y \in Y$ существует, по крайней мере, один такой элемент $x \in X$, что $f(x)=y$.

Если при отображении $f: X \longrightarrow Y$ разным элементам $x \in X$ соответствуют разные элементы $y \in Y$, т. е. при $x' \neq x''$ имеет место $f(x') \neq f(x'')$, то отображение f наз. взаимно однозначным отображением X в Y, а также однолистным отображением, или *инъекцией*. Таким образом, отображение $f: X \longrightarrow Y$ однолистно (инъективно) тогда и только тогда, когда прообраз каждого элемента y принадлежащего множеству значений функции f, т. е. $y \in Y_f$, состоит в точности из одного элемента. Если отображение $f: X \longrightarrow Y$ является одновременно взаимно однозначным и на множество Y (см. *Взаимно однозначное соответствие*), т. е. является одновременно инъекцией и сюръекцией, то оно наз. биективным отображением, или *биекцией*.

Если $f: X \longrightarrow Y$ и $A \subset X$, то множество

$$S=\{y: y \in Y,\ y=f(x),\ x \in A\},$$

т. е. множество всех тех y, в каждый из к-рых при отображении f отображается хотя бы один элемент из подмножества A множества X, наз. образом подмножества A и пишется $S=f(A)$. В частности, всегда $Y_f=f(X)$. Для образов множеств $A \subset X$ и $B \subset X$ справедливы следующие соотношения

$$f(A \cup B)=f(A) \cup f(B),$$
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$
$$f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B),$$

а если $A \subset B$, то $f(A) \subset f(B)$.

Если $f: X \longrightarrow Y$ и $S \subset Y$, то множество

$$A=\{x: x \in X,\ f(x) \in S\}$$

наз. прообразом множества S и пишут $A=f^{-1}(S)$. Таким образом, прообраз множества S состоит из всех тех элементов $x \in X$, к-рые при отображении f отображаются в элементы из S, или, что

то же самое, к-рое состоит из всех прообразов элементов $y \in S: f^{-1}(S) = \bigcup_{y \in S} f^{-1}(y)$. Для прообразов множеств $S \subset Y$ и $T \subset Y$ справедливы соотношения

$$f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T),$$
$$f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T),$$
$$f^{-1}(S \setminus T) = f^{-1}(S) \setminus f^{-1}(T),$$

а если $S \subset T$, то $f^{-1}(S) \subset f^{-1}(T)$.

Если $A \subset X$, то функция $f: X \to Y$ естественным образом порождает функцию, определенную на множестве A, ставящую в соответствие каждому элементу $x \in A$ элемент $f(x)$. Эта функция наз. с у ж е н и е м ф у н к ц и и f на множестве A и иногда обозначается f_A. Таким образом, $f_A: A \to Y$ и для любого $x \in A$ имеет место $f_A: x \mapsto f(x)$. Если множество A не совпадает со множеством X, то сужение f_A функции f на множестве A имеет другую область определения, чем функция f, и, следовательно, является другой, чем f, функцией.

Если $f: X \to Y$ и каждый элемент $y \in Y_f$ представляет из себя множество каких-то элементов $y \in \{z\}$, причем среди этих множеств имеется по крайней мере одно непустое множество, состоящее не из одного элемента, то такая Ф. f наз. *многозначной функцией*. При этом элементы множества $f(x) = \{z\}$ часто наз. значениями Ф. f в точке x. Если каждое множество $f(x)$, $x \in X$, состоит только из одного элемента, то Ф. f наз. также о д н о з н а ч н о й ф у н к ц и е й.

Если $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$, то Ф. $F: X \to Z$, определенная для каждого $x \in X$ формулой $F(x) = g(f(x))$, наз. к о м п о з и ц и е й (с у п е р п о з и ц и е й) функций f и g, или *сложной функцией*, и обозначается $g \circ f$.

Пусть задана Ф. $f: X \to Y$ и Y_f — множество ее значений. Совокупность всевозможных упорядоченных пар вида $(y, f^{-1}(y))$, $y \in Y_f$, образует Ф., к-рая наз. *обратной функцией* для Ф. f и обозначается f^{-1}. Обратная функция f^{-1} ставит в соответствие каждому элементу $y \in Y_f$ его прообраз $f^{-1}(y)$, т. е. нек-рое множество элементов. Тем самым обратная Ф. является, вообще говоря, многозначной функцией. Если отображение $f: X \to Y$ однолистно, то обратное отображение является однозначной функцией и отображает множество значений Ф. Y_f на ее область определения X.

Числовые функции. Важным классом Ф. являются ч и с л е н н о з н а ч н ы е ф у н к ц и и $f: X \to Y$, $Y \subset \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел. Над численнозначными функциями можно производить различные арифметич. операции. Если даны две численнозначные Ф. f и g, определенные на одном и том же множестве X, а λ — нек-рое число, то Ф. λf определяется как Ф., принимающая в каждой точке $x \in X$ значение $\lambda f(x)$; Ф. $f + g$ — как Ф., принимающая в каждой точке значение $f(x) + g(x)$; Ф. fg — как Ф., принимающая в каждой точке значение $f(x)\,g(x)$; наконец, f/g — как Ф., в каждой точке $x \in X$ равная $\frac{f(x)}{g(x)}$ (что, конечно, имеет смысл лишь при $g(x) \neq 0$).

Ф. $f: X \to \mathbb{R}$ наз. д е й с т в и т е л ь н о з н а ч н о й ф у н к ц и е й ($\mathbb{R}$ — множество действительных чисел). Действительнозначная функция $f: X \to Y$ наз. о г р а н и ч е н н о й с в е р х у (ограниченной снизу) на множестве X, если множество ее значений ограничено сверху (ограничено снизу). Иначе говоря, Ф. $f: X \to \mathbb{R}$ ограничена сверху (ограничена снизу) на множестве X, если существует такая постоянная c, что для каждого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant c$ (соответственно неравенство $f(x) \geqslant c$). Ф. f, ограниченная на множестве X как сверху, так и снизу, наз. просто о г р а н и ч е н н о й на этом множестве. Верхняя (нижняя) грань множества значений функции $f: X \to \mathbb{R}$ наз. в е р х н е й (н и ж н е й) г р а н ь ю ф у н к ц и и f.

Большую роль в математич. анализе играют **числовые функции**, или, более подробно, численнозначные функции числового аргумента, т. е. Ф. $f: X \to Y$, где $X \subset \mathbb{C}$, $Y \subset \mathbb{C}$. Если множество определения функции и множество ее значений являются подмножествами множества действительных чисел, то такая Ф. наз. **действительной функцией**, или, более подробно, действительной функцией действительного аргумента. Обобщением понятия числовой Ф. является, прежде всего, численнозначная функция нескольких числовых аргументов — т. н. **числовые функции многих переменных**. Дальнейшее обобщение числовых функций составляют векторнозначные функции (см. *Вектор-функция*) и вообще Ф., множества определений и значений к-рых наделены определенными структурами. Напр., если множества значений Ф. принадлежат к нек-рому векторному пространству, то такие Ф. можно складывать, если к кольцу — то их можно складывать и умножать, если к множеству, в к-ром имеется определенного рода упорядоченность,— то в этом случае можно на функции обобщить понятия ограниченности числовых функций, верхней и нижней граней и т. п. Наличие топологич. структур на множествах X и Y позволяет ввести понятие *непрерывной функции* $f: X \to Y$. В случае когда X и Y — топологические векторные пространства для Ф. $f: X \to Y$, вводится понятие дифференцируемой функции.

Способы задания функций. Числовые Ф. (и нек-рые их обобщения) могут задаваться с помощью формул. Такой способ их задания наз. **аналитическим**. Для этого используется нек-рый запас изученных и специально обозначенных Ф. (прежде всего, элементарных Ф.), алгебраич. действия, композиция и предельный переход (что включает в себя такие операции математич. анализа, как дифференцирование, интегрирование, суммирование рядов), напр.:

$$y = ax + b,\quad y = ax^2,\quad y = 1 + \sqrt{\ln \cos 2\pi x},$$

$$\sigma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z},$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n},$$

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx.$$

Класс функций, представимых в определенном смысле в виде сумм рядов, даже одних только тригонометрических, очень широк. Аналитически Ф. могут задаваться явным образом, т. е. формулами вида $y = f(x)$, а также и как *неявные функции*, т. е. уравнениями вида $F(x, y) = 0$. Иногда функция задается с помощью нескольких формул, напр.,

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ x - 1, & \text{если } x < 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Ф. может быть задана также с помощью описания соответствия. Пусть, напр., каждому числу $x > 0$ поставлено в соответствие число 1, числу 0 — число 0, а каждому $x < 0$ — число -1. В результате получают функцию, определенную на всей числовой оси и принимающую три значения: 1, 0, -1. Эта Ф. имеет специальное обозначение $\operatorname{sign} x$. Другой пример: каждому рациональному числу поставлено в соответствие число 1, а каждому иррациональному — число 0. Полученная функция наз. *Дирихле функцией*. Одна и та же Ф. может быть задана различными способами, так Ф. $\operatorname{sign} x$ и функция Дирихле могут быть определены не только с помощью словесного описания, но и формулами.

Всякая формула является символич. записью некрого ранее описанного соответствия, так что в конце концов нет принципиального различия между заданием функции с помощью формулы или с помощью словесного описания соответствия; это различие чисто внешнее. Следует иметь в виду, что всякая вновь определенная тем или иным способом Ф., если для нее ввести специальное обозначение, может служить для определения других Ф. с помощью формул, включающих этот новый символ. Однако при аналитич. задании Ф. весьма существенным является запас Ф. и операций, используемых в формулах, задающих данные Ф.; обычно этот запас стараются сделать по возможности минимальным, а входящие в него Ф. и операции выбрать в определенном смысле наиболее простыми.

Когда речь идет о действительных функциях одного действительного аргумента, то для наглядного представления о характере функциональной зависимости часто строятся графики Ф. на координатной плоскости, иначе говоря, для Ф. $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, на плоскости переменных x и y рассматривается множество точек

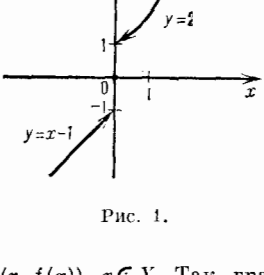


Рис. 1.

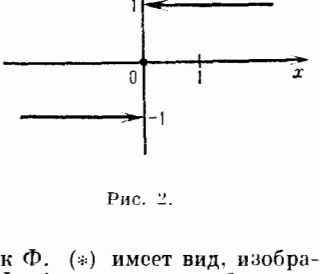


Рис. 2.

$(x, f(x))$, $x \in X$. Так, график Ф. (*) имеет вид, изображенный на рис. 1, график Ф. $\operatorname{sign} x$ — на рис. 2, а график Ф. $y = 1 + \sqrt{\ln \cos 2\pi x}$, состоящий из отдельных точек, на рис. 3. Графич. изображение Ф. также может служить для задания функциональной зависимости. Это задание будет приближенно, потому что измерение отрезков практически можно производить лишь с определенной степенью точности, не говоря уже о том, что когда область определения Ф. неограничена, то ее принципиально невозможно нарисовать на координатной плоскости.

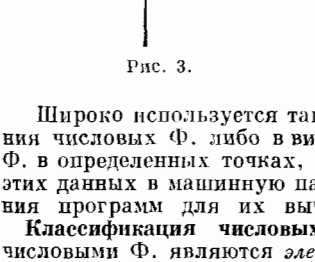


Рис. 3.

Широко используется также табличный метод задания числовых Ф. либо в виде готовых таблиц значений Ф. в определенных точках, либо посредством введения этих данных в машинную память, либо путем составления программ для их вычисления на компьютерах.

Классификация числовых функций. Простейшими числовыми Ф. являются *элементарные функции*, среди к-рых следует выделить алгебраич. многочлены, тригонометрич. полиномы, а также *рациональные функции*. Особая роль этих Ф. состоит в том, что один из методов изучения и использования более общих Ф. основан на приближении их алгебраич. многочленами, тригонометрич. полиномами или рациональными Ф., а также Ф., составленными из указанных Ф. определенным образом (см. *Сплайн*). Раздел теории Ф., занимающийся изучением аппроксимаций Ф., посредством наборов простых в каком-то смысле Ф., наз. *приближения теорией*. В этой теории большое значение имеют также приближения Ф. посредством агрегатов, составленных

из специальных Ф., являющихся собственными функциями нек-рых операторов.

Важный класс, содержащий в себе рациональные Ф., составляют *аналитические функции*, т. е. Ф., представимые в виде степенных рядов. Аналитич. Ф. делятся на *алгебраические функции*, т. е. такие Ф. $y=f(x_1, \ldots, x_n)$, к-рые могут быть заданы уравнением $P(x_1, \ldots, x_n, y)=0$, где P — неприводимый многочлен с комплексными коэффициентами, и трансцендентные, т. е. не являющиеся алгебраическими. С понятием *производной* связаны классы определенное число раз дифференцируемых Ф., с понятием *интеграла* — классы интегрируемых в том или ином смысле Ф., с понятием непрерывности — класс непрерывных Ф. С помощью последовательного поточечного предельного перехода из класса непрерывных Ф. получаются *Бэра классы* функций (см. также *Борелевская функция*). На понятиях измеримого множества и меры базируется определение *измеримых функций*. Раздел теории Ф., изучающий свойства Ф., связанные с понятием меры, обычно наз. *метрической теорией функций*.

При объединении Ф., обладающих нек-рыми общими свойствами, возникают функциональные пространства. Так, все Ф., определенные на одном и том же множестве X n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и, напр. измеримые по Лебегу, соответственно непрерывные или удовлетворяющие *Гёльдера условию* данного порядка, образуют векторные пространства. Аналогично векторные пространства составляют пространства m раз (непрерывно) дифференцируемых Ф., $m=1, 2, \ldots$, бесконечно дифференцируемые Ф., финитные Ф., аналитич. Ф. и мн. другие классы Ф.

В ряде векторных пространств Ф. можно ввести норму. Напр., в пространстве непрерывных на компакте X функций $f: X \to \mathbb{C}$ нормой является функционал $\|f\| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$; нормированное пространство непрерывных функций с этой нормой обозначается $C(X)$. Если в пространстве измеримых Ф. $f: X \to \mathbb{C}$, определенных на пространстве $(X, \mathfrak{S}, \mu)$, где X — *нек-рое множество*, $\mathfrak{S}$ — *нек-рая σ-алгебра его подмножеств*, а μ — мера, определенная на множествах $A \in \mathfrak{S}$, положить

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leqslant p < +\infty, \\ \sup\limits_{x \in X} \operatorname{vrai} |f(x)|, & \text{если } p = +\infty, \end{cases}$$

то функционал $\|f\|_p$ на множестве Ф., для к-рых $\|f\|_p < +\infty$, является *нормой*. Пространство Ф. с такой нормой обычно наз. л е б е г о в ы м п р о с т р а н с т в о м ф у н к ц и й L_p (X). Из других функциональных пространств, играющих важную роль в математич. анализе, следует отметить *Гёльдерово пространство*, *Никольского пространство*, *Орлича пространство*, *Соболева пространство*. Все эти пространства являются полными метрич. пространствами, что в большой степени и обусловливает изучение мн. задач как самой теории Ф., так и задач из смежных разделов математики в этих пространствах и нек-рых их обобщениях. Связи между различными нормами Ф., принадлежащих одновременно разным функциональным пространствам, изучаются в теории вложения функциональных пространств (см. *Вложения теоремы*). Важным свойством основных функциональных пространств является плотность в них бесконечно дифференцируемых Ф., что позволяет изучать ряд свойств входящих в эти пространства Ф. на достаточно гладких Ф., перенося затем полученные результаты на все Ф. рассматриваемого пространства с помощью предельного перехода.

Зависимость функций — свойство систем Ф., обобщающее понятие их линейной зависимости и означаю-

щее, что между значениями Ф. из данной системы существуют определенные связи, в частности значения одной из них выражаются через значения остальных. Напр., Ф. $f_1(x)=\sin^2 x$ и $f_2(x)=\cos^2(x)$ зависимы на всей числовой прямой, поскольку всегда $\sin^2 x = =1-\cos^2 x$. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $\overline{D}$ — ее замыкание, $f:\overline{D}\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $f(x)=\{y_i=f_i(x),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, $x\in\overline{D}$. Функции f_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, наз. зависимыми на $\overline{D}$, если существует такая непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция $F(y)$, $y\in\mathbb{R}^n$, множество нулей к-рой образует нигде не плотное в пространстве $\mathbb{R}^n$ множество, что композиция $F\circ f$ тождественно равна нулю на $\overline{D}$.

Функции f_i: $G\longrightarrow\mathbb{R}$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, наз. зависимыми на области $G\subset\mathbb{R}^n$, если они зависимы на замыкании $\overline{D}$ любой области $D\subset G$ такой, что $\overline{D}\subset G$.

Непрерывно дифференцируемые в области $G\subset\mathbb{R}^n$ функции f_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, зависимы на G тогда и только тогда, когда их *якобиан*

$$\frac{\partial(f_1,\ \ldots,\ f_n)}{\partial(x_1,\ \ldots,\ x_n)}$$

тождественно равен нулю на области G.

Пусть теперь

$$f_i:G\longrightarrow\mathbb{R}^m,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m\leqslant n,\ G\subset\mathbb{R}^n. \qquad (1)$$

Если для Ф. $y_i=f_i(x)$, $x\in G$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, $G\subset\mathbb{R}^n$, существуют открытое в $R^{m-1}_{y_1y_2\ldots y_{m-1}}$ множество Γ и непрерывно дифференцируемая на Γ функция $\Phi(y_1,\ \ldots,\ y_{m-1})$ такие, что в любой точке $x\in G$ выполняются условия

$$(f_1(x),\ \ldots,\ f_{m-1}(x))\in\Gamma$$

и

$$\Phi(f_1(x),\ \ldots,\ f_{m-1}(x))=f_m(x),$$

то Ф. f_m наз. зависимой на множестве G от Ф. $f_1,\ \ldots,\ f_{m-1}$.

Если Ф. f_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m=n$, непрерывны в области G и в окрестности каждой точки $x\in G$ одна из них зависит от остальных, то Ф. f_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, зависимы на области G.

Если в окрестности каждой точки $x\in G$ одна из непрерывно дифференцируемых в области $G\subset\mathbb{R}^n$ функций f_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m\leqslant n$, зависит от остальных, то в любой точке области G ранг матрицы Якоби

$$\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\|,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (2)$$

меньше m, т. е. градиенты ∇f_1, ∇f_2, $\ldots$, ∇f_m линейно зависимы в каждой точке $x\in G$.

Пусть Ф. (1) непрерывно дифференцируемы на области $G\subset\mathbb{R}^n$ и ранг их матрицы Якоби (2) в каждой точке $x\in G$ не превышает нек-рого числа r, $1\leqslant r<m\leqslant n$, а в нек-рой точке $x^{(0)}\in G$ равен r. Иначе говоря, существуют такие переменные $x_{j_1},\ \ldots,\ x_{j_r}$ и функции $y_{i_1}=f_{i_1}(x)$, $y_{i_2}=f_{i_2}(x)$, $\ldots$, $y_{i_r}=f_{i_r}(x)$, что

$$\left.\frac{\partial(f_{i_1},\ f_{i_2},\ \ldots,\ f_{i_r})}{\partial(x_{j_1},\ x_{j_2},\ \ldots,\ x_{j_r})}\right|_{x=x^{(0)}}\neq 0. \qquad (3)$$

Тогда ни в какой окрестности точки $x^{(0)}$ ни одна из Ф. f_{i_1}, f_{i_2}, $\ldots$, f_{i_r} не является зависимой от остальных из них и существует такая окрестность точки $x^{(0)}$, что каждая из оставшихся Ф. f_i, $i\neq i_k$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ r$, зависит на этой окрестности от Ф. f_{i_1}, f_{i_2}, $\ldots$, f_{i_r}. В частности, если градиенты ∇f_1, ∇f_2, $\ldots$, ∇f_m линейно зависимы во всех точках области G и в нек-рой точке $x^{(0)}\in G$ среди них $(m-1)$ линейно независимы, и, следовательно, один из них, напр. ∇f_m, является линейной комбинацией остальных, то существует такая

окрестность точки $x^{(0)}$, что на этой окрестности Ф. f_m зависит от остальных Ф. $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$.

Лит.: [1] Эйлер Л., Введение в анализ бесконечных, пер. с лат., 2 изд., т. 1, М., 1961; [2] Лобачевский Н. И., Полное собр. соч., т. 5, М.— Л., 1951; [3] Дедекинд Р., Что такое числа и для чего они служат?, пер. с нем., Казань, 1905; [4] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.—Л., 1937; [5] Тарский А., Введение в логику и методологию дедуктивных наук, пер. с англ., М., 1948; [6] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 1, М., 1966; [7] Frege G., Function, Begriff, Bedeutung, Göttingen, 1962, S. 79—95; [8] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960; [9] Юшкевич А. П., «Истор.-матем. исследования», 1966, в. 17, с. 123—50; [10] Медведев Ф. А., Очерки истории теории функций действительного переменного, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев.

L-ФУНКЦИЯ — обобщение *дзета функции* за счет введения *характеров*. L-ф. составляют сложной природы класс специальных функций комплексного переменного, определяемых *Дирихле рядами* или *Эйлера произведениями* с характерами. Они служат основным инструментом для изучения аналитич. методами арифметики соответствующих математич. объектов: поля рациональных чисел, алгебраич. полей, алгебраич. многообразий над конечными полями и т. п. Простейшими представителями L-ф. являются *Дирихле L-функции*. Остальные L-ф. представляют собой более или менее близкие аналоги и обобщения этих L-ф.

А. Ф. Лаврик.

ФУНКЦИЯ МНОЖЕСТВ — отображение f нек-рой совокупности Σ подмножеств данного множества X в другое множество, обычно в множество $\mathbb{R}$ действительных или $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Важным классом Ф. м. являются аддитивные функции множеств, для к-рых

$$f\Big(\bigcup_{i=1}^{n} M_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i), \qquad (*)$$
$$M_i \in \Sigma,\ M_i \cap M_j = \varnothing,\ i \neq j,$$

и σ-аддитивные функции множеств, к-рые удовлетворяют равенству (*) и для счетной совокупности множеств. Если f принимает лишь неотрицательные значения, $R(\varnothing)=0$ и Σ является σ-алгеброй, то такая функция наз. мерой.

Лит.: [1] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977.

В. И. Соболев.

ФУРЬЕ ИНТЕГРАЛ — континуальный аналог *Фурье ряда*. Для функции, заданной на конечном промежутке действительной оси, важное значение имеет представление ее рядом Фурье. Для функции $f(x)$, заданной на всей оси, аналогичную роль играет разложение f в интеграл Фурье:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\,dx, \qquad (1)$$

где

$$A = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi\,d\xi,$$
$$B = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi. \qquad (2)$$

Разложение (1) можно формально строить в предположениях, обеспечивающих существование написанных интегралов. Оно справедливо, напр., для гладкой финитной функции $f(x)$. Имеется большое число признаков, обеспечивающих равенство (1) в том или ином смысле. Подстановка (2) в (1) дает т. н. интегральную формулу Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,d\xi, \qquad (3)$$

обоснование к-рой и приводит к упомянутым признакам. Большую пользу приносит при этом представление $f(x)$ простым интегралом Фурье

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\frac{\sin N(x-\xi)}{x-\xi}\,d\xi,$$

к-рое получается из (3), если записать внешний интеграл как предел по интервалу $(0, N)$ и поменять порядок интегрирования. В прикладных науках представление (1) часто интерпретируется как разложение по гармоникам: если

$$D(\lambda)=\sqrt{|A(\lambda)|^2+|B(\lambda)|^2},\ \cos\varphi(\lambda)=\frac{B(\lambda)}{D(\lambda)},$$

$$\sin\varphi(\lambda)=\frac{A(\lambda)}{D(\lambda)},$$

то (1) принимает вид:

$$f(x)=\int_0^\infty D(\lambda)\sin[\lambda x+\varphi(\lambda)]\,d\lambda$$

и таким образом f представляется в виде суперпозиции гармоник, частоты λ к-рых непрерывно заполняют действительную полуось $(0, \infty)$, а амплитуда D и начальная фаза φ зависят от λ.

Во многих случаях (в частности, для комплекснозначных функций f) разложение (1) удобнее представлять в экспоненциальной форме:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}C(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda,\ \ C(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\tilde f(\lambda), \qquad (4)$$

где

$$\tilde f(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx. \qquad (5)$$

Функция $\tilde f(\lambda)$ именуется при этом *Фурье преобразованием* функции f (в прикладных науках $C(\lambda)$ наз. частотной характеристикой, или с п е к т р о м, f).

При условии, что функция $f(x)$ суммируема: $f\in L_1(-\infty, +\infty)$, функция $\tilde f$ ограничена, равномерно непрерывна на оси и $\tilde f(\lambda)\to 0$ при $|\lambda|\to\infty$. Функция $\tilde f(\lambda)$ может оказаться несуммируемой и интеграл (4) — несуществующим. Однако равенство (4) допускает разумное истолкование, если воспользоваться методами суммирования интегралов [при этом можно рассматривать не только поточечную сходимость, но и сходимость в среднем]. Напр., средние арифметические усеченных Ф. и.

$$\frac{1}{N}\int_0^N d\omega\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde f(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^N\left(1-\frac{|\lambda|}{N}\right)\tilde f(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,\frac{2\sin^2\frac{N(x-\xi)}{2}}{N(x-\xi)^2}\,d\xi$$

суммируемой функции $f(x)$ сходятся к $f(x)$ почти всюду и в среднем при $N\to\infty$. При наличии дополнительных ограничений на функцию $f(x)$ получаются более конкретные утверждения. Напр., если $f\in L_1$ и имеет ограниченную вариацию в окрестности x, то

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\omega}^{+\omega}\tilde f(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda. \qquad (6)$$

В приложениях часто используется разложение

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde f(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda,$$

верное для кусочно гладкой в каждом конечном интервале абсолютно интегрируемой функции $f(x)$, где интеграл справа понимается в смысле главного значения (6). Ф. и. изучается также в предположении локальной суммируемости функции f и при тех или иных требованиях, накладывающих ограничения на поведение f в ∞. Пусть, напр., $f\in L_p$, $1\leqslant p\leqslant 2$, тогда

$$\tilde f(\lambda)=\lim_{A\to\infty}{}^{p'}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{+A}f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx, \qquad (7)$$

где предел понимается в смысле сходимости в среднем порядка p', $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ [однако предел в (7) существует и в смысле сходимости почти всюду]. Простую форму приобретает этот результат при $p=2$ (см. *Планшереля теорема*).

Аналогично строится теория кратных Ф. и., когда речь идет о разложении функции, заданной в n-мерном пространстве. Понятие Ф. и. распространяется также и на обобщенные функции.

Лит.: [1] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.— Л., 1948; [2] Бохнер С., Лекции об интегралах Фурье, пер. с англ., М., 1962; [3] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 2, М., 1965.

П. И. Лизоркин.

ФУРЬЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — интегральный оператор, обобщенное ядро к-рого является быстроосциллирующей функцией или интегралом от такой функции. Операторы такого типа возникли при исследовании асимптотики быстроосциллирующих решений уравнений с частными производными (см. [1], [2]) и при исследовании особенностей фундаментальных решений гиперболич. уравнений (см. [1], [2], [3]).

I. Канонический оператор Маслова (КОМ). Пусть Λ есть n-мерное *лагранжево многообразие* класса C^∞ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}_{x,p}$, где $x\in\mathbb{R}^n$, $p\in\mathbb{R}^n$, и $d\sigma$ — объем на Λ. Каноническим атласом наз. локально конечное счетное покрытие многообразия Λ ограниченными односвязными областями Ω_j (картами), в каждой из к-рых в качестве координат можно взять либо переменные x, либо p, либо смешанный набор

$$(p_\alpha,\ x_\beta),\ \alpha=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_s),\ \beta=(\beta_1,\ \ldots,\ \beta_{n-s}),$$

не содержащий сопряженных пар $(p_j,\ x_j)$. КОМ действует из $C_0^\infty(\Lambda)$ в $C(\mathbb{R}^n_x)$. Канонич. операторы $K(\Omega_j)$ вводятся следующим образом.

1) Пусть карта Ω_j — неособая, т. е. Ω_j задается уравнением $p=p(x)$ и

$$(K(\Omega_j)\varphi)(x)=\sqrt{\left|\frac{d\sigma}{dx}\right|}\exp\left[i\lambda\int_{r^0}^{r}(p,\ dx)\right]\varphi(r),$$
$$r=(x,\ p(x)).$$

Здесь $\lambda\geqslant 1$ — параметр, $r^0\in\Omega_j$ — фиксированная точка, $(p,\ dx)=\sum_{j=1}^n p_j\,dx_j$, и функция $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$.

2) Пусть в карте Ω_j локальные координаты суть p, т. е. Ω_j задается уравнением $x=x(p)$ и пусть

$$(K(\Omega_j)\varphi)(x)=F^{-1}_{\lambda,\,p\to x}\left\{\sqrt{\left|\frac{d\sigma}{dp}\right|}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[i\lambda\left(\int_{r^0}^{r}(p,\ dx)-(x(p),\ p)\right)\right]\varphi(r)\right\},$$
$$r=(x(p),\ p).$$

Здесь F^{-1} есть λ-преобразование Фурье

$$F^{-1}_{\lambda,\,p\to x}\psi(p)=\left(\frac{\lambda}{-2\pi i}\right)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left[i\lambda(x,\ p)\right]\psi(p)\,dp.$$

Аналогично определяется $K(\Omega_j)$ в случае, когда координаты в Ω_j — набор $(p_\alpha,\ x_\beta)$. Пусть $\oint_l(p,\ dx)=0$ и индекс Маслова $\operatorname{ind}\gamma=0$ для любого замкнутого пути l, лежащего на Λ. Вводится разбиение единицы класса C^∞ на Λ;

$$\sum_{j=1}^{\infty}e_j(x)=1\ \text{при}\ \operatorname{supp}e_j\subset\Omega_j$$

и фиксируется точка $r^0\in\Omega_{j_0}$. КОМ определяется формулой

$$(K_\Lambda\varphi(r))(x)=\sum_j c_jK(\Omega_j)(e_j\varphi)(x),$$

$$c_j=\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\gamma_j\right),$$

и γ_j — индекс Маслова цепочки карт, соединяющих карты Ω_{j_0} и Ω_j.

Точка $r \in \Lambda$ наз. особой, если в ее окрестности Λ задается уравнением $p = p(x)$. Пусть пересечение карт Ω_i, Ω_j непусто и связно, $r \in \Omega_i \cap \Omega_j$ — неособая точка и (p_α, x_β), $(p_{\tilde{\alpha}}, x_{\tilde{\beta}})$ — координаты в этих картах. Индексом Маслова пары карт Ω_i, Ω_j наз. число

$$\gamma_{ij} = \sigma_- \left(\frac{\partial x_\alpha(r)}{\partial p_\alpha} \right) - \sigma_- \left(\frac{\partial x_{\tilde{\alpha}}(r)}{\partial p_{\tilde{\alpha}}} \right),$$

где $\sigma_-(A)$ — число отрицательных собственных значений матрицы A. Индекс Маслова цепочки карт определяется по аддитивности. Аналогично определяется индекс Маслова $\mathrm{ind}\, l$ пути l. Индекс Маслова $\mathrm{ind} \pmod 4$ пути на лагранжевом многообразии есть целочисленный гомотопич. инвариант (см. [1], [3]). КОМ инвариантен относительно выбора канонич. атласа локальных координат в картах и разбиения единицы, в следующем смысле: если K_Λ, $\tilde{K}_\Lambda$ — два КОМ, то в $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$(K_\Lambda \varphi - \tilde{K}_\Lambda \varphi)(x) = O(\lambda^{-1}),\ \lambda \to \infty$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda)$.

Важнейший результат теории КОМ — формула коммутации КОМ и λ-дифференциального (или λ-псевдодифференциального [3]) оператора.

Пусть $L(x, \lambda^{-1}D)$ — дифференциальный оператор с действительным символом $L(x, p)$ класса C^∞, и выполнены условия: $L(x, p) = 0$ на Λ. Многообразие Λ и объем $d\sigma$ инвариантны относительно гамильтоновой системы

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial L}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial L}{\partial x}.$$

Тогда справедлива формула коммутации (здесь $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda)$, $\lambda \to \infty$):

$$L(x, \lambda^{-1}D)(K_\Lambda \varphi)(x) = \frac{1}{i\lambda} K_\lambda [R\varphi + O(\lambda^{-1})],$$

$$R\varphi = \left[\frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(x, p)}{\partial x_j \partial p_j} \right] \varphi, \qquad (1)$$

где $d/d\tau$ — производная в силу гамильтоновой системы. Следующие члены разложения (1) и оценки остаточных членов см. [3]. Уравнение $R\varphi = 0$ наз. уравнением переноса. Из формулы коммутации следует, что если $R\varphi = 0$, то функция $u = K_\Lambda \varphi$ есть формальное асимптотич. решение уравнения $L(x, \lambda^{-1}D)u = 0$.

Метод КОМ позволил решить следующие задачи.

1) Построение асимптотики решения задачи Коши с быстроосциллирующими начальными данными в большом (т. е. за любое конечное время) для строго гиперболич. систем дифференциальных уравнений с частными производными, для систем Дирака, Максвелла, теории упругости, для уравнения Шрёдингера (см. [1], [9] — [6], а также *Квазиклассическое приближение*), а также решения нек-рых смешанных задач [4].

2) Построение асимптотики серий собственных значений самосопряженных дифференциальных операторов, ассоциированных с инвариантными относительно соответствующей гамильтоновой системы лагранжевыми многообразиями (см. [1], [3]).

3) Построение асимптотич. разложения по гладкости фундаментального решения строго гиперболич. системы уравнений с частными производными (см. [1], [5], [6]).

4) Построение коротковолновой асимптотики функции Грина, решения задачи о рассеянии и амплитуды рассеяния для уравнения Шрёдингера асимптотики спектральной функции (см. [5] — [7]).

Развит новый вариант КОМ на лагранжевых многообразиях с комплексным ростком (см. [8], [9]).

II. Интегральный оператор Фурье (ИОФ).

Пусть X, Y — ограниченные области в $\mathbb{R}^{N_1}_x$, $\mathbb{R}^{N_2}_y$, $N=N_1+N_2$, $\Gamma = X\times Y\times(\mathbb{R}^N_0\setminus\{0\})$ и $u(y)\in C^\infty_0(Y)$. *ИОФ* наз. оператор

$$(Au)(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+2N}{4}}}\int_{\mathbb{R}^N_\theta}\int_Y \exp[i\varphi(x,\ y,\ \theta)]\times$$
$$\times p(x,\ y,\ \theta)\,u(y)\,dy\,d\theta. \quad (2)$$

Здесь φ (фазовая функция) — действительная и положительно однородная по θ порядка 1, $\varphi\in C^\infty(\Gamma)$ и $\nabla_{x,\,y,\,\theta}\varphi\neq 0$ при $\theta\neq 0$. Функция $p\in C^\infty(\Gamma)$ (символ) и в простейшем случае разлагается при $|\theta|\longrightarrow\infty$ в асимптотич. ряд

$$p=\sum\nolimits_{j=0}^{\infty} p_j\left(x,\ y,\ \frac{\theta}{|\theta|}\right)|\theta|^{m+\frac{n-2n}{4}-j}.$$

Интеграл (2) сходится после соответствующей регуляризации и определяет непрерывный линейный оператор $A: C^\infty_0(Y)\to D(X)$. Ядро оператора A равно

$$K(x,\ y)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+2N}{4}}}\int_{\mathbb{R}^N_\theta}\exp[i\varphi(x,\ y,\ \theta)]\,p(x,\ y,\ \theta)\,d\theta.$$

Функция $K(x,\ y)\in D'(X\times Y)$ и бесконечно дифференцируема вне проекции πC на $X\times Y$ множества $C=\{(x,\ y,\ \theta)\in\Gamma:\varphi'_\theta=0\}$. Особенности K зависят только от тейлоровского разложения символа p в окрестности C (при фиксированной фазе φ). Пусть фаза φ невырождена, т. е. дифференциалы $d_{x,\,y,\,\theta}\varphi'_{\theta_j}$, $1\leqslant j\leqslant N$ линейно независимы на C'; тогда C — гладкое многообразие размерности n. Оператору A отвечает гладкое, коническое (по переменному $(\zeta,\ \eta)$, двойственному к $z=(x,\ y)$) лагранжево многообразие $\Lambda\subset T^*(X\times Y)\setminus\{0\}$ размерности n — образ C при отображении

$$C\ni(z,\ \theta)\longrightarrow(z,\ \varphi'_z)\in\Lambda. \quad (3)$$

В дальнейшем оператор A рассматривается на плотностях $u(y)$ порядка $1/2$:

$$A: C^\infty_0(X,\ \Omega_{1/2})\longrightarrow D'(Y,\ \Omega_{1/2}),$$

т. е. $u(y)\to u(\tilde{y})\sqrt{|d\tilde{y}/dy|}$ при замене переменных $y\to\psi(\tilde{y})$. Символу p ставится в соответствие плотность $b(z,\ \tau)$ порядка $1/2$ на Λ, к-рая является образом $p\sqrt{d_C}$ при отображении (3), где $d_C=\left|\frac{D(\lambda,\ \varphi'_\theta)}{D(x,\ \theta)}\right|^{-1}$ и $\lambda=(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)$ — координаты на Λ первого порядка однородности по τ, перенесенные с помощью (3) на C. Плотность b при $|\tau|\to\infty$ разлагается в асимптотич. ряд

$$b(z,\ \tau)=\sum\nolimits_{j=0}^{\infty} b_j\left(z,\ \frac{\tau}{|\tau|}\right)|\tau|^{m-\frac{n}{4}-j},$$

коэффициент b_0 наз. главным символом оператора A.

Пусть оператор A представим в виде (2), но с другой невырожденной фазовой функцией $\tilde{\varphi}(x,\ y,\ \tilde{\theta})$, $\tilde{\theta}\in\mathbb{R}^N$ и с другим символом $\tilde{p}(x,\ y,\ \tilde{\theta})$. Тогда для этого представления многообразие Λ остается прежним, величина $\sigma=\operatorname{sign}\varphi''_{\theta\theta}-\operatorname{sign}\tilde{\varphi}''_{\tilde{\theta}\tilde{\theta}}$ постоянна, а главный символ $\tilde{b}_0$ равен

$$\tilde{b}_0=\exp\left[\frac{i\pi\sigma}{4}\right]\tilde{b}_0.$$

Общее определение ИОФ таково. Пусть X, Y — гладкие многообразия размерности N_1, N_2 и $\Lambda\subset T_*(X\times Y)\setminus\{0\}$ — конич. гладкое лагранжево много-

образие размерности $n=N_1+N_2$. Для любой точки $\lambda\in\Lambda$ существует невырожденная фазовая функция такая, что построенное по ней лагранжево многообразие локально совпадает с Λ. Пусть $\{x'_j, y'_j, \varphi_j, N^j, \Gamma_j, u_j\}$ — множество объектов, состоящих из:

а) локальных координатных окрестностей $X'\subset X$, $Y'\subset Y$ с локальными координатами $x\in\mathbb{R}^{N_1}$, $y\in\mathbb{R}^{N_2}$, $z=(x, y)$;

б) целого числа N и невырожденной фазовой функции φ, определенной в $\Gamma=X'\times Y'\times(\mathbb{R}^N\setminus\{0\})$ и такой, что отображение

$$\{(z, \theta)\in\Gamma,\ \varphi'_\theta(z, \theta)=0\}\ni(z, \theta)\longrightarrow(z, \varphi'_z)$$

есть диффеоморфизм на открытое подмножество $U\subset\Lambda$. ИОФ наз. оператор

$$A=\sum A_j,$$

где A_j имеет вид (2), $N=N^j$, $\varphi=\varphi_j$ — $\pi\frac{N^j}{4}$ и носитель символа $p=p_j$ содержится в множестве $K_j\times\mathbb{R}^{N^j}$, K_j — компакт в $X'_j\times Y'_j$. Класс таких операторов A обозначают $I^m(\Lambda)$.

Пусть $\tilde{S}^{m-\frac{n}{4}}(\Lambda, \Omega_{1/2})$ — множество однородных порядка $m-\frac{n}{4}$ по τ плотностей на Λ порядка $1/2$. По главным символам $b^j_0(z, \tau)$ операторов A_j естественным образом строится главный символ $b_0(z, \tau)\in\tilde{S}^{\frac{m-n}{4}}(\Lambda, \Omega_{1/2}\otimes L)$ оператора A, так что отображение

$$I^m(\Lambda)/I^{m-1}(\Lambda)\longrightarrow\tilde{S}^{m-\frac{n}{4}}(\Lambda, \Omega_{1/2}\otimes L)$$

есть изоморфизм (см. [2], [14]).

Наиболее важным для приложений ИОФ к дифференциальным уравнениям с частными производными является случай, когда проекции $\Lambda\to T^*(Y)$ — локальные диффеоморфизмы. Тогда $N_1=N_2$, и плотность d_C равна

$$d_C^{-1}=\det\begin{Vmatrix}\varphi''_{\theta\theta} & \varphi''_{\theta x}\\ \varphi''_{y\theta} & \varphi''_{yx}\end{Vmatrix},$$

и ограничен оператор

$$I^0(\Lambda)\ni\Lambda: L^2_{\text{loc}}(Y, \Omega_{1/2})\longrightarrow L^2_{\text{loc}}(X, \Omega_{1/2}).$$

Так же, как и для КОМ, для ИОФ есть формулы коммутации с дифференциальными операторами со всеми вытекающими из них следствиями. Локально ИОФ можно представить в виде интеграла по параметру от КОМ (см. [10]). ИОФ применяется:

1) Для построения параметрикса и изучения микролокальной структуры особенностей (волновых фронтов) решений гиперболич. уравнений, уравнений главного типа и краевых задач (см. [2], [14]).

2) При исследовании вопроса о локальной и глобальной разрешимости и субэллиптичности уравнений (см. [12]).

3) Для получения асимптотики спектральной функции псевдодифференциальных операторов (см. [13]).

Лит.: [1] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; [2] Хёрмандер Л., «Математика», 1972; т. 16, № 1, с. 17—61, № 2, с. 67—136; [3] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976; [4] Федорюк М. В., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 6, с. 67—115; [5] Кучеренко В. В., «Теор. и матем. физика», 1969, т. 1, № 3, с. 384—406; [6] Вайнберг Б. Р., Асимптотические методы в уравнениях математической физики, М., 1982; [7] его же, «Матем. сб.», 1984, т. 123, № 2, с. 195—211; [8] Кучеренко В. В., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 8, М., 1977, с. 41—136; [9] Маслов В. П., Операторные методы, М., 1973; [10] Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е., Лагран-

жевы многообразия и метод канонического оператора, М., 1978; [11] Лере Ж., Лагранжев анализ и квантовая механика, пер. с франц., М., 1981; [12] Егоров Ю. В., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 2, с. 57—114; [13] Шубин М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., 1978; [14] Treves F., Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators, v. 1—2, N. Y.— L., 1980.

Б. Р. Вайнберг, М. В. Федорюк.

ФУРЬЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ — коэффициенты

$$c_i = \frac{\int_X f\varphi_i\,dx}{\int_X \varphi_i^2\,dx}, \quad c_i = \frac{\int_X f\overline{\varphi_i}\,dx}{\int_X \varphi_i\overline{\varphi_i}\,dx} \qquad (*)$$

разложения функции $f(x)$, определенной на пространстве X по ортогональной системе действительнозначных (комплекснозначных) функций на X. Если $\{\varphi_i\}$ — ортогональная система в гильбертовом (предгильбертовом) пространстве, то для элемента f этого пространства числа $c_i = \frac{(f,\ \varphi_i)}{(\varphi_i,\ \varphi_i)}$ также наз. Ф. к. f по системе $\{\varphi_i\}$. Ж. Фурье (J. Fourier) впервые исследовал тригонометрич. ряды с коэффициентами, определяемыми согласно (*).

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958.

Т. П. Лукашенко.

ФУРЬЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ почти периодической функции — коэффициенты a_n *Фурье ряда*, соответствующего данной почти периодич. функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n x},$$

где

$$a_n = M\{f(x)\,e^{-i\lambda_n x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,e^{-i\lambda_n x}\,dx.$$

Коэффициенты a_n вполне определяются теоремой о существовании среднего значения

$$a(\lambda) = M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\},$$

к-рое отлично от нуля только на счетном множестве значений $\lambda = \lambda_n$.

Е. А. Бредихина.

ФУРЬЕ МЕТОД, метод разделения переменных, — метод отыскания частных решений дифференциальных уравнений

$$(Lu)(x,\ y) = Mu - Nu = 0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ y\in\mathbb{R}^m, \qquad (1)$$

где $M(N)$ — линейные дифференциальные выражения, содержащие производные только по переменным $x(y)$, с коэффициентами, также зависящими только от $x(y)$. Функция

$$u(x,\ y) = v(x)\,w(y) \qquad (2)$$

будет решением уравнения (1), если существует такая константа λ, что

$$Mv + \lambda v = 0,\ Nw + \lambda w = 0. \qquad (3)$$

Напр., для уравнения колебаний струны

$$u_{xx} - u_{yy} = 0,\ m = n = 1, \qquad (4)$$

$M\varphi = N\varphi = \varphi''$ и решение (2) принимает вид

$$u(x,\ y) = \begin{cases} (c_1x + c_2)(c_3x + c_4), & \lambda = 0, \\ (c_1e^{\mu x} + c_2)(c_3e^{\mu y} + c_4), & \lambda = -\mu^2, \\ (c_1\cos\mu x + c_2\sin\mu x)(c_3\cos\mu y + c_4\sin\mu y), & \lambda = \mu^2, \end{cases} \qquad (5)$$

где c_i, $1\leqslant i\leqslant 4$ — произвольные постоянные и $\mu > 0$. В полуполосе $0\leqslant x\leqslant\pi$, $y\geqslant 0$ при $c_1 = 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu = 1, 2, \ldots$, решения (5) удовлетворяют краевому условию

$$u(0,\ y) = u(\pi,\ y) = 0,\ y\geqslant 0. \qquad (6)$$

Составленный из этих функций ряд

$$U(x,\ y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx\,(a_n\cos ny + b_n\sin ny) \qquad (7)$$

доставляет решение начально-краевой задачи (4), (6) и

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

если a_n и nb_n являются коэффициентами Фурье

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin nx \, dx,$$

$$nb_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(x) \sin nx \, dx$$

от достаточно гладких начальных данных φ и ψ. Аналогичным образом можно получать решения начально-краевых задач для более общих классов уравнений (1), при этом роль теории рядов Фурье, связанных с разложением (7), играет спектральная теория линейных операторов.

Ф. м. тесно связан со специальными функциями, к-рые являются решениями уравнений (3) при $m = n = 1$ для частных случаев операторов M и N, многие из этих функций первоначально возникли таким способом. Напр., при применении этого метода к уравнению Гельмгольца

$$u_{xx} + u_{yy} + u = 0,$$

записанного в полярных координатах в виде (1) с

$$M = r^2 \frac{\partial}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + r^2, \quad N = -\frac{\partial}{\partial \theta^2},$$

первое уравнение в (3) является уравнением Бесселя.

Одно и то же дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, целое семейство систем координат, в к-рых оно допускает разделение переменных, т. е. приводится к виду (1). Задача разыскания таких систем координат тесно связана с групповыми свойствами дифференциальных уравнений. Применение методов теории групп Ли позволяет описать все решения с разделенными переменными многих классич. уравнений математич. физики (Лапласа, Гельмгольца, Шрёдингера, волнового уравнения и др.). На этом пути получается также целый ряд соотношений из теории специальных функций.

Метод разделения переменных был предложен для решения волнового уравнения Ж. Д'Аламбером (J. D'Alembert, 1749), с достаточной полнотой метод был развит в нач. 19 в. Ж. Фурье (J. Fourier) и в полной общности сформулирован М. В. Остроградским в 1828.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [2] Миллер У., Симметрия и разделение переменных, пер. с англ., М., 1981.

А. П. Солдатов.

ФУРЬЕ ПОКАЗАТЕЛИ почти периодической функции — действительные числа λ_n в *Фурье ряде*, соответствующем данной почти периодич. функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n x},$$

где a_n — *Фурье коэффициенты* функции $f(x)$. Множество показателей Фурье функции $f(x)$ наз. спектром этой функции. В отличие от периодич. случая спектр почти периодич. функции может иметь предельные точки на конечном расстоянии и даже быть всюду плотным. Поэтому поведение ряда Фурье почти периодич. функции существенно зависит от арифметич. структуры ее спектра.

Е. А. Бредихина.

ФУРЬЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, одно из *интегральных преобразований*, — линейный оператор F, действующий в пространстве, элементами к-рого являются функции $f(x)$ от n действительных переменных. Минимальной областью определения F считается совокупность $D = C_0^\infty$ бесконечно дифференцируемых финитных функций φ. Для таких функций

$$(F\varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \varphi(\xi) e^{-ix\xi} \, d\xi. \qquad (1)$$

В нек-ром смысле наиболее естественной областью определения F является совокупность S бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, исчезающих на бесконечности вместе со своими производными быстрее любой степени $|x|$. Формула (1) сохраняется для $\varphi \in S$ и при этом $(F\varphi)(x) \equiv \psi(x) \in S$. Более того, F осуществляет изоморфизм S на себя, обратное отображение F^{-1} — обращение Ф. п., о б р а т н о е п р е о б р а з о в а н и е Ф у р ь е, — задается формулой:

$$\varphi(x) = (F^{-1}\psi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, e^{ix\xi}\, d\xi. \qquad (2)$$

Формула (1) еще действует в пространстве $L_1(\mathbb{R}^n)$ суммируемых функций. Дальнейшее расширение области определения оператора F требует обобщения формулы (1). В классич. анализе такие обобщения строятся для локально суммируемых функций с теми или иными ограничениями на их поведение при $|x| \to \infty$ (см. *Фурье интеграл*). В теории обобщенных функций определение оператора F освобождено от многих требований классич. анализа.

Основные задачи, связанные с изучением Ф. п. F: исследование области определения Φ оператора F и области его значений $F\Phi = \Psi$, свойства отображения F: $\Phi \to \Psi$ (в частности, условия существования обратного оператора F^{-1} и его выражение). Формула обращения Ф. п. весьма проста:

$$F^{-1}[g(x)] = F[g(-x)].$$

Под действием Ф. п. линейные операторы в исходном пространстве, инвариантные относительно сдвига, переходят в пространстве образов в операторы умножения (при нек-рых условиях). В частности, свертка функций f и g переходит в произведение функций Ff и Fg:

$$F(f * g) = Ff \cdot Fg,$$

дифференцирование порождает умножение на независимую переменную:

$$F(D^\alpha f) = (ix)^\alpha Ff.$$

В пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, оператор F определен формулой (1) на множестве $D_F = L_1 \cap L_p(\mathbb{R}^n)$ и является ограниченным оператором из $L_p(\mathbb{R}^n)$ в $L_q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\left\{(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |(Ff)(x)|^q\, dx\right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx\right\}^{1/p}$$

(н е р а в е н с т в о Х а у с д о р ф а — Ю н г а). По непрерывности F допускает продолжение на все пространство $L_p(\mathbb{R}^n)$, к-рое (для $1 < p \leqslant 2$) дается формулой

$$(Ff)(x) = \lim_{R \to \infty}{}^{q} (2\pi)^{-n/2} \int_{|\xi| < R} f(\xi)\, e^{-i\xi x}\, d\xi = \tilde{f}(x), \qquad (3)$$

где сходимость понимается по норме пространства $L_q(\mathbb{R}^n)$. Если $p \neq 2$, образ пространства L_p под действием оператора F не совпадает с L_q, т. е. вложение $FL_p \subset L_q$ строгое при $1 \leqslant p < 2$ (случай $p = 2$ см. в статье *Планшереля теорема*). Обратный оператор F^{-1} определен на FL_p формулой

$$(F^{-1}\tilde{f})(x) = \lim_{R \to \infty}{}^{p} (2\pi)^{-n/2} \int_{|\xi| < R} \tilde{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi,$$

$$1 < p \leqslant 2.$$

Задача о распространении Ф. п. на возможно широкий класс функций постоянно возникает в анализе и его приложениях. См., напр., *Фурье преобразование о б о б щ е н н о й ф у н к ц и и*.

Лит.: [1] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.—Л., 1948; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 2, М., 1965; [3] Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974. *П. И. Лизоркин.*

ФУРЬЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ обобщенной функции — расширение операции преобразования Фурье с основных функций на *обобщенные функции*. Пусть K — пространство основных функций, на к-ром определена операция преобразования Фурье F,

$$\varphi \longrightarrow F[\varphi] = \int \varphi(x)\, e^{i(\xi, x)}\, dx,\ \varphi \in K,$$

причем F — изоморфизм K на пространство основных функций $\tilde{K}$. Тогда операция преобразования Фурье $f \to F[f]$, определяемая на пространстве обобщенных функций $\tilde{K}'$ равенством

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]),\ \varphi \in K,$$

осуществляет изоморфизм $\tilde{K}'$ на пространство основных функций K'.

Примеры. 1) $K = S = \tilde{K}$, $K' = S' = \tilde{K}'$. Здесь обратной операцией к F служит операция

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-\xi)],\ f \in S'$$

и справедливы основные формулы для $f \in S'$

$$D^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f],\ F[D^\alpha f] = (-i\xi)^\alpha F[f].$$

2) $K = \bigcap\limits_{s \geqslant 0} L_s^2$, $\tilde{K} = D_{L^2} = \bigcap\limits_{s \geqslant 0} H_s$, $\tilde{K}' = D'_{L^2} = \bigcup\limits_{s \geqslant 0} H_{-s}$, где L_s^2 — совокупность функций φ таких, что $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \varphi \in L^2$ и $H_s = \tilde{L}_s^2$, $-\infty < s < \infty$.

3) $K = D$, $\tilde{K} = Z$, где Z — совокупность целых функций $\varphi(z)$, удовлетворяющих условию роста: существует число $a = a_f \geqslant 0$, что для любого $N \geqslant 0$ найдется $C_N > 0$ такое, что

$$|\varphi(z)| \leqslant c_N e^{a|\operatorname{Im} z|} (1 + |z|)^{-N},\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Ряды Фурье обобщенной функции. Если обобщенная функция f — периодическая с n-периодом $T = (T_1, \ldots, T_n)$, $T_j > 0$, то $f \in S'$ и ее можно разложить в тригонометрич. ряд

$$f(x) = \sum\nolimits_{|k|=0}^{\infty} c_k(f)\, e^{i(k\omega, x)},\ |c_k(f)| \leqslant A(1 + |k|)^m,$$

сходящийся к f в S'; здесь

$$\omega = \left(\frac{2\pi}{T_1}, \ldots, \frac{2\pi}{T_n}\right),\ k\omega = \left(\frac{2\pi k_1}{T_1}, \ldots, \frac{2\pi k_n}{T_n}\right).$$

Примеры. 4) $F(x^\alpha) = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi)$, в частности $F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi)$.

5) $F[D^\alpha \delta] = (-i\xi)^\alpha$, в частности $F[\delta] = 1$.

6) $F[\theta] = \frac{i}{\xi + i0} = \pi\delta(\xi) + iP\frac{1}{\xi}$, где θ — функция Хевисайда.

Преобразование Фурье свертки обобщенных функций. Пусть прямое произведение $f(x) \times g(y)$ обобщенных функций f и g из $D'(\mathbb{R}^n)$ допускает расширение на функции вида $\varphi(x+y)$, $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Именно, пусть для любой последовательности $\eta_k(x; y)$, $k \to \infty$, из $D(\mathbb{R}^{2n})$ со свойствами: $|D^\alpha \eta_k(x; y)| \leqslant c_\alpha$, $\eta_k(x; y) \rightrightarrows 1$, $D^\alpha \eta_k(x; y) \rightrightarrows 0$, $|\alpha| \geqslant 1$, $k \to \infty$ (равномерно на любом компакте), числовая последовательность

$$(f(x) \times g(y),\ \eta_k(x; y)\, \varphi(x+y)),\ k \longrightarrow \infty,$$

имеет предел, обозначаемый $(f(x) \times g(y), \varphi(x+y))$, не зависящий от последовательности $\{\eta_k\}$ из указанного класса. В этом случае функционал $f * g$, действующий по формуле $(f * g, \varphi) = (f(x) \times g(y),\ \varphi(x+y))$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$,

наз. сверткой обобщенных функций f и g, $f*g\in\in D'(\mathbb{R}^n)$. Свертка существует не для любых пар обобщенных функций f и g. Она заведомо существует, если при любом $R>0$ множество

$$T_R=[(x,\ y):x\in\operatorname{supp} f,\ y\in\operatorname{supp} g,\ |x+y|\leqslant R]$$

ограничено в $\mathbb{R}^{2n}$ (в частности, если f или g финитна). Если свертка $f*g$ существует, то она коммутативна, $f*g=g*f$, и коммутирует со сдвигом и с производной: $f*D^\alpha g=D^\alpha(f*g)=D^\alpha f*g$; δ-функция Дирака играет роль «единицы»: $f=\delta*f=f*\delta$. Свертка — неассоциативная операция. Однако существуют ассоциативные (и коммутативные) сверточные алгебры. Единицей в них служит дельта-функция Дирака δ. Сверточную алгебру образует, напр., множество D'_Γ, состоящее из обобщенных функций из $D'(\mathbb{R}^n)$ с носителем в выпуклом остром замкнутом конусе Γ с вершиной в O. Множество $S'_\Gamma=S'\cap D'_\Gamma$ образует сверточную подалгебру алгебры D'_Γ. Обозначают: $D'_+=D'_{[0,\ \infty)}$, $S'_+=S'_{[0,\ \infty)}$ (при $n=1$). Формула Ф. п. свертки

$$F[f*g]=F[f]\,F[g]$$

справедлива в следующих случаях:

а) $f\in S'$, g — финитна,

б) f и $g\in D'_{L^2}$,

в) $f\in D'$, g — финитна,

г) f и $g\in S'_\Gamma$. В этом случае произведение $F[f]F[g]$ обобщенных функций $F[f]$ и $F[g]$ понимается как граничное значение в S' произведения $\tilde f(\zeta)\tilde g(\zeta)$, $\zeta=\xi+i\eta$ при $\eta\to 0$, $\eta\in\operatorname{int}\Gamma^*$, где $\tilde f$ и $\tilde g$ обозначают преобразования Лапласа f и g (см. *Обобщенных функций произведение*).

Лит.: [1] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979; [2] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции, в. 1, М., 1958; [3] Schwartz L., Théorie des distributions, t. 2, P., 1951; [4] Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р., Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход, пер. с англ., М., 1976.

В. С. Владимиров.

ФУРЬЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИСКРЕТНОЕ — преобразование, используемое для гармонич. анализа функций, заданных на дискретном множестве точек.

Если на множестве точек $t_k=k\Delta t$ функция задана своими значениями x_k, $k=\overline{0,\ N-1}$, $\Delta t=T/N$, $T>0$ — период функции, то Ф. п. д. вектора $x=(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{N-1})$ есть вектор $\hat x=Fx$, где F — матрица с элементами

$$\exp\{-2\pi i\omega_m t_k\},$$

i — мнимая единица, $\omega_m=m\Delta\omega$, $m=\overline{0,\ N-1}$, $\Delta\omega=1/T$. Компоненты вектора $\hat x$ аналогичны коэффициентам Фурье в обычных тригонометрич. разложениях. Ф. п. д. используется для приближенного вычисления этих коэффициентов, спектров, авто- и взаимно корреляционных функций и т. п. Прямое вычисление Ф. п. д. требует выполнения около N^2 арифметич. операций и большой затраты машинного времени. Метод быстрого преобразования Фурье (см. [1]) позволил существенно сократить число операций. При $N=n_1\,n_2\ldots n_m$ этот метод выполняет Ф. п. д. приблизительно за $N(n_1+n_2+\ldots+n_m)$ операций, повышая точность вычислений. Особенно удобные для реализации алгоритмы получаются при $N=2^m$. Имеется значительное число программ, реализующих или использующих быстрое преобразование Фурье для решения прикладных задач. Метод быстрого преобразования Фурье включает в себя широко известные экономичные способы вычисления Ф. п. д., напр. метод Рунге (см. [2]).

Лит.: [1] Cooley J., Tukey J., «Math. Comput.», 1965, v. 19, p. 297—301; [2] Runge C. Z., «Math. Phys.», 1903, v. 48, p. 443.

В. А. Морозов.

ФУРЬЕ РЯД по ортогональным многочленам — ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \tag{1}$$

где многочлены $\{P_n(x)\}$ ортонормированы на интервале (a, b) с весом $h(x)$ (см. *Ортогональные многочлены*), а коэффициенты $\{a_n\}$ вычисляются по формуле

$$a_n = \int_a^b h(x) f(x) P_n(x)\, dx, \tag{2}$$

причем функция $f(x)$ входит в класс функций $L_2 = L_2[a, b, h(x)]$, квадрат к-рых суммируем (интегрируем по Лебегу) с весовой функцией $h(x)$ по интервалу ортогональности (a, b).

Как и у любого ортогонального ряда, частичные суммы $\{s_n(x, f)\}$ ряда (1) приближают функцию $f(x)$ наилучшим образом в метрике пространства L_2 и выполняется условие

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0. \tag{3}$$

Для доказательства сходимости ряда (1) в отдельной точке x или на нек-ром множестве из (a, b) обычно применяется равенство

$$f(x) - s_n(x, f) = \mu_n [a_n(\varphi_x) P_{n+1}(x) - a_{n+1}(\varphi_x) P_n(x)],$$

где $\{a_n(\varphi_x)\}$ — коэффициенты Фурье вспомогательной функции

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x) - f(t)}{x - t}, \quad t \in (a, b),$$

при фиксированном x, а μ_n — коэффициент из формулы Кристоффеля—Дарбу. Если отрезок ортогональности $[a, b]$ конечен, $\varphi_x(t) \in L_2$ и последовательность $\{P_n(x)\}$ ограничена в данной точке x, то ряд (1) сходится к значению $f(x)$.

Коэффициенты (2) можно определять и для функции $f(t)$ из класса $L_1 = L_1[a, b, h(t)]$, т. е. для функций, суммируемых с весом $h(t)$ на интервале (a, b). В случае конечного отрезка $[a, b]$ условие (3) имеет место, если $f(t) \in L_1 = L_1[a, b, h(t)]$, а последовательность $\{P_n(t)\}$ ограничена равномерно на всем отрезке $[a, b]$. При этих условиях ряд (1) сходится в нек-рой точке $x \in [a, b]$ к значению $f(x)$, если $\varphi_x(t) \in L_1[a, b, h(t)]$.

Пусть A — та часть интервала (a, b), где последовательность $\{P_n(t)\}$ ограничена равномерно, $B = [a, b] \setminus A$ и $L_p(A) = L_p[A, h(t)]$ — класс функций, суммируемых в степени p по множеству A с весом $h(t)$. Если при фиксированном $x \in A$ имеем $\varphi_x(t) \in L_1(A)$ и $\varphi_x(t) \in L_2(B)$, то ряд (1) сходится к $f(x)$.

Для рядов (1) имеет место принцип локализации условий сходимости: если две функции $f(t)$ и $g(t)$ из пространства L_2 совпадают в интервале $(x - \delta, x + \delta)$, где $x \in A$, то Ф. р. по ортогональным многочленам этих двух функций в точке x сходятся или расходятся одновременно. Аналогичное утверждение справедливо, если $f(t)$ и $g(t)$ входят в пространства $L_1(A)$ и $L_2(B)$, причем $x \in A$.

Для классических ортогональных многочленов имеют место теоремы о равносходимости ряда (1) с нек-рым ассоциированным тригонометрич. рядом Фурье (см. *Равносходящиеся ряды*).

Равномерная сходимость ряда (1) на всем конечном отрезке ортогональности $[a, b]$ или на части его обычно исследуется с помощью неравенства Лебега

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x) \right| \leqslant [1 + L_n(x)] E_n(f), \quad x \in [a, b],$$

где функция Лебега

$$L_n(x) = \int_a^b h(t) \left| \sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_k(t) \right| dt$$

не зависит от функции $f(x)$, а $E_n(f)$ — наилучшее равномерное приближение непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ многочленами степени не выше n. В зависимости от свойств весовой функции $h(x)$ последовательность функций Лебега $\{L_n(x)\}$ в разных точках отрезка $[a, b]$ может возрастать с различной скоростью. А для всего отрезка $[a, b]$ вводятся постоянные Лебега

$$L_n = \max_{x \in [a, b]} L_n(x),$$

к-рые возрастают неограниченно при $n \to \infty$, причем для различных систем ортогональных многочленов постоянные Лебега могут возрастать с различной скоростью. Из неравенства Лебега следует, что если выполняется условие

$$\lim_{n \to \infty} L_n E_n(f) = 0,$$

то ряд (1) сходится к функции $f(x)$ равномерно на всем отрезке $[a, b]$. С другой стороны, скорость сходимости последовательности $\{E_n(f)\}$ к нулю зависит от дифференциальных свойств функции $f(x)$. Поэтому во многих случаях нетрудно сформулировать достаточные условия, при к-рых правая часть неравенства Лебега стремится к нулю при $n \to \infty$ (см., напр., *Лежандра многочлены*, *Чебышева многочлены*, *Якоби многочлены*). В общем случае произвольного веса конкретные результаты получаются, если для рассматриваемых ортогональных многочленов известны асимптотич. формулы или оценки.

Лит.: [1] Сегё Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [2] Геронимус Я. Л., Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке, М., 1958; [3] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979; см. также лит. при ст. *Ортогональные многочлены.*

П. К. Суетин.

ФУРЬЕ РЯД почти периодической функции — ряд вида

$$f(x) \sim \sum_n a_n e^{-i\lambda_n x}, \qquad (*)$$

где λ_n — *Фурье показатели*, a_n — *Фурье коэффициенты* почти периодич. функции $f(x)$. Ряд (*) соответствует любой числовой почти периодич. функции. Поведение Ф. р. существенно зависит от структуры множества показателей Фурье этой функции, а также от ограничений, наложенных на коэффициенты Фурье этой функции.

Напр., имеют место следующие теоремы. Если

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty,$$

то существует *Безиковича почти периодическая функция*, для к-рой тригонометрич. ряд (*) является ее Ф. р. Если $a_n > 0$ для равномерной почти периодич. функции, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

сходится. Если показатели Фурье равномерной почти периодич. функции линейно независимы, то Ф. р. этой функции сходится абсолютно. Если равномерная почти периодич. функция имеет лакунарный Ф. р., то он сходится равномерно.

Лит.: [1] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953; [2] Купцов Н. П., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 4 (142), с. 117—78; [3] Гапошкин В. Ф., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 6 (132), с. 3—82.

Е. А. Бредихина.

ФУРЬЕ РЯД функции $f(x)$ по ортонормированной на промежутке (a, b) системе функций $\{\varphi_n(x)\}$ — ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$$

коэффициенты к-рого определяются по формулам

$$c_k = \int_a^b f(x)\, \varphi_k(x)\, dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

и наз. коэффициентами Фурье функции f. О функции f в общем случае предполагается, что она интегрируема с квадратом на (a, b). Для многих систем $\{\varphi_k\}$ это требование можно ослабить, заменив его каким-либо другим, обеспечивающим существование всех интегралов (1).

По тригонометрич. системе Ф. р. определяется для каждой функции f, интегрируемой на $(0, 2\pi)$. Это ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \qquad (2)$$

с коэффициентами

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx. \qquad (3)$$

Аналогично строятся Ф. р. для функций от многих переменных. Дальнейшие обобщения приводят к коэффициентам Фурье и Ф. р. элементов гильбертова пространства.

Наиболее глубоко разработана теория Ф. р. по тригонометрич. системе, к-рые были первыми примерами Ф. р. Имея в виду Ф. р. по тригонометрич. системе, обычно говорят просто о Ф. р., не указывая, по какой системе они строятся.

Ф. р. составляют значительную часть теории *тригонометрических рядов*. Впервые Ф. р. появились в работах Ж. Фурье (J. Fourier, 1807), посвященных исследованию задач теплопроводности. Он предложил для представления функции f, заданной на $(0,2\pi)$, тригонометрич. рядом брать ряд (2) с коэффициентами, определяемыми по формулам (3). Такой выбор коэффициентов является естественным со многих точек зрения. Напр., если ряд (2) сходится к функции $f(x)$ равномерно, то почленное интегрирование приводит к выражению коэффициентов a_k и b_k по формулам (3). С помощью почленного интегрирования эти формулы получал еще Л. Эйлер (L. Euler, 1777).

С помощью формул (3) Ф. р. (2) строится для каждой функции, интегрируемой на $[0, 2\pi]$. Интегрируемость функции может пониматься по-разному, напр. как интегрируемость по Риману или по Лебегу. В зависимости от этого говорят о рядах Фурье—Римана, Фурье—Лебега и т. п. Сами понятия интегралов Римана и Лебега возникли в значительной степени в связи с исследованиями Ф. р. Современный вид теория Ф. р. приобрела после построения интеграла Лебега, после чего она развивается главным образом как теория рядов Фурье—Лебега. Ниже о функции f предполагается, что она имеет период 2π и интегрируема по Лебегу на периоде.

В теории Ф. р. изучается связь свойств функций со свойствами их Ф. р., в частности исследуются вопросы представления функций с помощью Ф. р.

К работе Ф. Бесселя (F. Bessel, 1828) восходит доказательство минимального свойства частных сумм Ф. р.: для функций $f\in L^2$ среди тригонометрич. полиномов порядка n

$$t_n(x)=A_0+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$$

наименьшее значение интегралу

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)-t_n(x)]^2\,dx$$

доставляет частная сумма Ф. р. (2) функции f:

$$s_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Это наименьшее значение равно

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right].$$

Отсюда следует *Бесселя неравенство*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)\,dx,$$

выполняющееся для каждой функции f из L^2.

Система тригонометрич. функций является *замкнутой системой*, т. е. если $f\in L^2$, то справедливо *Парсеваля равенство*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)\,dx,$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f. В частности, для функций f из L^2 сходится ряд

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2). \qquad (4)$$

Имеет место и обратное утверждение: если для системы чисел a_k, b_k ряд (4) сходится, то эти числа являются коэффициентами Фурье нек-рой функции $f\in L^2$ [Ф. Рисс (F. Riesz), Э. Фишер (E. Fischer), 1907].

Коэффициенты Фурье каждой интегрируемой функции стремятся к нулю. Эту теорему наз. т е о р е м о й Р и м а н а — Л е б е г а. Б. Риман (B. Riemann) доказал ее для рядов Фурье—Римана, А. Лебег (H. Lebesgue) — для рядов Фурье—Лебега.

Если функция f абсолютно непрерывна, то Ф. р. производной f' можно получить почленным дифференцированием Ф. р. функции f. Отсюда следует, что если производная порядка $r\geqslant 0$ функции f абсолютно непрерывна, то для коэффициентов Фурье функции f справедлива оценка

$$a_k,\ b_k=o\left(k^{-(r+1)}\right),\quad k\longrightarrow\infty.$$

Первый признак сходимости Ф. р. получил П. Дирихле (P. Dirichlet, 1829). Его результат (*Дирихле теорема*) можно сформулировать так: если функция f имеет на периоде конечное число максимумов и минимумов и непрерывна всюду, кроме конечного числа точек, в к-рых она может иметь разрывы 1-го рода, то Ф. р. функции f сходится для всех x, причем в точках непрерывности он сходится к $f(x)$, а в точках разрыва к $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$. В дальнейшем это утверждение было распространено на произвольные функции ограниченной вариации [К. Жордан (C. Jordan), 1881].

Согласно принципу локализации, доказанному Б. Риманом (1853), сходимость или расходимость Ф. р. функции f в точке x и значение суммы в случае сходимости зависят только от поведения функции f в как угодно малой окрестности точки x.

Известно много разных признаков сходимости Ф. р. в точке. Р. Липшиц (R. Lipschitz, 1864) установил, что Ф. р. функции f сходится в точке x, если для достаточно малых h выполнено условие $|f(x+h)-f(x)|\leqslant M|h|^{\alpha}$, где M и α — нек-рые положительные постоянные. Более общим является *Дини признак*: Ф. р. функции f сходится в точке x к числу S, если сходится интеграл

$$\int_0^{\pi}|\varphi_x(t)|\,\frac{dt}{t},$$

где $\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2S$. В качестве числа S обычно выступает значение $f(x)$. Напр., если Ф. р. функции f сходится в точке x, в к-рой эта функция непрерывна, то сумма ряда обязательно равна $f(x)$.

А. Лебег (1905) доказал, что если при $h\to 0$ справедливы оценки

$$\int_0^h|\varphi_x(t)|\,dt=o(h),$$

$$\int_h^{\pi}|\varphi_x(t+h)-\varphi_x(t)|\,\frac{dt}{t}=o(1),$$

то Ф. р. функции f сходится в точке x к числу S. Этот *Лебега признак* сильнее как всех приведенных выше, так и *Валле Пуссена признака* и *Юнга признака*. Но проверка его обычно затруднительна.

Признак сходимости другого типа дает теорема Харди — Литлвуда (1932): Ф. р. функции f сходится в точке x, если выполнены следующие условия:

1) при $h \to 0$

$$f(x+h) - f(x) = o\left(\ln^{-1}\frac{1}{|h|}\right),$$

2) для коэффициентов Фурье функции f справедливы оценки

$$a_k = O(k^{-\delta}),\ b_k = O(k^{-\delta}),\ \delta > 0.$$

Наряду с признаками сходимости Ф. р. в точке, изучаются признаки равномерной сходимости. Пусть функция f имеет период 2π и непрерывна. Тогда ее Ф. р. сходится к ней равномерно на всей числовой оси, если $\omega(f,\delta)$ — *непрерывности модуль* функции f — удовлетворяет условию

$$\omega(f,\ \delta)\ln\delta \longrightarrow 0 \ \text{ при } \ \delta \longrightarrow 0$$

(*Дини—Липшица признак*) или если f имеет ограниченную вариацию (*Жордана признак*).

Отсюда можно получать признаки равномерной сходимости Ф. р. на нек-ром отрезке, если воспользоваться принципом локализации для равномерной сходимости, к-рый формулируется так. Если две функции равны на отрезке $[a,\ b]$, то на каждом строго внутренним к нему отрезке $[a+\varepsilon,\ b-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, Ф. р. этих функций или оба равномерно сходятся или оба не являются равномерно сходящимися. Другими словами, равномерная сходимость Ф. р. функции f на отрезке зависит только от поведения функции f в произвольно малом расширении этого отрезка.

П. Дюбуа-Реймон (P. Du Bois Reymond, 1873) установил, что непрерывность функции в нек-рой точке не гарантирует сходимость ее Ф. р. в этой точке. В дальнейшем было доказано, что Ф. р. непрерывной функции может расходиться на всюду плотном множестве точек меры нуль, имеющем вторую категорию.

Если о функции не предполагать ничего, кроме интегрируемости, то ее Ф. р. может оказаться расходящимся почти всюду или даже всюду. Первые примеры таких функций построил А. Н. Колмогоров (1923). Позднее было выяснено, что этим свойством могут обладать Ф. р. и самой функции и функции, сопряженной с ней.

Еще в 1915 Н. Н. Лузин высказал гипотезу, что Ф. р. каждой функции из L^2 сходится почти всюду. Долгое время в этом направлении получали лишь частные результаты. В общем виде задача оказалась очень трудной и только в 1966 Л. Карлесон (L. Carleson) доказал справедливость этой гипотезы (см. *Карлесона теорема*). Ф. р. функций из L^p при $p>1$ также сходятся почти всюду. Пример Колмогорова показывает, что дальнейшее усиление этого результата в терминах пространств L^p невозможно.

Поскольку частные суммы Ф. р. не всегда сходятся, рассматривается *суммирование рядов Фурье*, когда для представления функции используются те или иные средние частных сумм ее Ф. р. Один из наиболее простых примеров — *Фейера суммы*, являющиеся средними арифметическими частных сумм Ф. р. $s_k(f,\ x)$,

$$\sigma_n(f,\ x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(f,\ x).$$

Для каждой интегрируемой функции f суммы $\sigma_n(f,\ x)$ сходятся к $f(x)$ почти всюду, при этом сходятся в каждой точке непрерывности f, а если f непрерывна всюду, то сходятся равномерно.

Согласно *Данжуа—Лузина теореме*, если тригонометрич. ряд (2) сходится абсолютно на множестве положительной меры, то сходится ряд

$$\sum_k (|a_k|+|b_k|) \tag{5}$$

и, значит, ряд (2) абсолютно сходится для всех x. Таким образом, абсолютная сходимость ряда (2) эквивалентна сходимости ряда (5).

С. Н. Бернштейн (1934) доказал, что если модуль непрерывности $\omega(f, \delta)$ функции f удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, \omega\left(f, \frac{1}{n}\right) < \infty,$$

то Ф. р. функции f сходится абсолютно. Это условие нельзя ослабить: если функция типа модуля непрерывности $\omega(\delta)$ такова, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

расходится, то найдется функция f, для модуля непрерывности к-рой выполняется оценка $\omega(f, \delta) \leqslant \omega(\delta)$, а ее Ф. р. не сходится абсолютно.

В частности, абсолютно сходятся Ф. р. функций, удовлетворяющих *Липшица условию* порядка $\alpha > \frac{1}{2}$. А при $\alpha = \frac{1}{2}$ абсолютной сходимости может не быть (С. Н. Бернштейн, 1914).

Если функция f имеет ограниченную вариацию и ее модуль непрерывности удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)} < \infty, \tag{6}$$

то Ф. р. функции f сходится абсолютно (см. [9]). Условие (6) ослабить нельзя (см. [10]).

В отличие от предыдущих следующая теорема дает критерий абсолютной сходимости для индивидуальной функции. Для абсолютной сходимости Ф. р. функции необходима и достаточна сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\, e_n(f),$$

где $e_n(f)$ — *наилучшее приближение функции* f в метрике пространства L^2 тригонометрич. полиномами, содержащими n гармоник (см. [11]).

Ряд (2) можно рассматривать как действительную часть степенного ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k)\, e^{ikx}.$$

Мнимую часть

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx) \tag{7}$$

наз. рядом, сопряженным с рядом (2).

Пусть $f \in L$ и (2) — ее Ф. р. Тогда для почти всех x существует функция

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x-t)-f(x+t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}\, dt$$

(И. И. Привалов, 1919). Функцию $\tilde{f}$ наз. сопряженной с f, она может быть неинтегрируемой. Но если $\tilde{f} \in L$, то Ф. р. функции $\tilde{f}$ является ряд (7) (В. И. Смирнов, 1928).

Во многих случаях по свойствам функции f или ее Ф. р. (2) удается установить те или иные свойства сопряженного ряда (7), напр. его сходимость в метрике L^p, сходимость или суммируемость в точке, почти всюду и т. п.

Изучаются также свойства Ф. р. при специальных предположениях об их коэффициентах. Напр., *лакунарные тригонометрические ряды*, когда отличны от

нуля только коэффициенты с номерами n_m, образующими *лакунарную последовательность*, т. е. такими, что $n_{m+1}/n_m \geqslant \lambda > 1$. Другой пример специальных рядов — ряды с монотонными коэффициентами.

Все сказанное выше относилось к Ф. р. вида (2). Для Ф. р. по переставленной тригонометрич. системе нек-рые свойства Ф. р. по тригонометрич. системе, взятой в обычном порядке, не имеют места. Напр., существует такая непрерывная функция, что ее Ф. р. после нек-рой перестановки расходится почти всюду (см. [12] — [15]).

Теория Ф. р. для функций многих переменных разработана в меньшей степени. Часть многомерных результатов аналогична одномерным. Но имеются и существенные отличия.

Пусть $x=(x_1, \ldots, x_N)$ — точка N-мерного пространства, $k=(k_1, \ldots, k_N)$ есть N-мерный вектор с целочисленными координатами и $(k, x)=k_1x_1+\ldots+k_Nx_N$. Для функции $f(x)$, имеющей период 2π по каждой переменной и интегрируемой по Лебегу на N-мерном кубе $[0,2\pi]^N$, Ф. р. по тригонометрич. системе наз. ряд

$$\sum\nolimits_k c_k e^{i(k, x)}, \tag{8}$$

где суммирование ведется по всем k и

$$c_k=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-i(k, x)}\, dx$$

— коэффициенты Фурье функции f. Ф. р. (8) записан в комплексной форме. Запись его в тригонометрич. форме как ряда по произведениям косинусов и синусов кратных дуг более громоздка.

Возможны различные определения частных сумм ряда (8), напр. частные суммы по прямоугольникам

$$\sum\nolimits_{|k_1|\leqslant n_1}\cdots\sum\nolimits_{|k_N|\leqslant n_N} c_k e^{i(k, x)},$$

по кругам

$$\sum\nolimits_{|k|\leqslant n} c_k e^{i(k, x)}, \tag{9}$$

где n — радиус и $|k|=\sqrt{k_1^2+\ldots+k_N^2}$.

Для представления функций круговые частные суммы (9) менее пригодны, чем их средние Рисса

$$\sum\nolimits_{|k|\leqslant n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)^{\alpha} c_k e^{i(k, x)}.$$

Для средних Рисса порядка $\alpha \geqslant \frac{N-1}{2}$ Ф. р. функций из L^2 справедлив принцип локализации, а для меньших α это не так (С. Бохнер, S. Bochner, 1936). Средние Рисса круговых частных сумм критич. порядка $\alpha=\frac{N-1}{2}$ играют существенную роль и в других вопросах Ф. р. функций многих переменных.

Существует непрерывная функция двух переменных, Ф. р. к-рой не сходится по прямоугольникам ни в одной внутренней точке квадрата $[0, 2\pi]^2$ (см. [16]).

Нек-рые результаты, относящиеся к Ф. р. по тригонометрич. системе, допускают значительные обобщения, напр. могут быть соответствующим образом перенесены на спектральные разложения, отвечающие самосопряженным эллиптическим дифференциальным операторам.

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1965; [3] Харди Г. Х., Рогозинский В. В., Ряды Фурье, пер. с англ., М., 1959; [4] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.— Л., 1951; [5] Lebesgue H., Leçons sur les séries trigonométriques, P., 1906; [6] Паплаускас А. Б., Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега, М., 1966; [7] Ульянов П. Л., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 1, с. 3—69; [8] Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М., там же, 1976, т. 31, в. 6, с. 28—83; [9] Salem R., «Duke Math. J.», 1943, v. 10, p. 23—31; [10] Бочкарев С. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1973, т. 37, с. 630—38; [11] Стечкин

С. Б., «Докл. АН СССР», 1955, т. 102, с. 37—40; [12] Kolmogoroff A., Menschoff D., «Math. Z.», 1927, Bd 26, S. 432—41; [13] Zahorski Z., «C. r. Acad. sci.», 1960, t. 251, p. 501—03; [14] Ульянов П. Л., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 3, с. 61—142; [15] Олевский А. М., «Докл. АН СССР», 1961, т. 141, с. 28—31; [16] Fefferman C., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1971, v. 77, p. 191—95.

С. А. Теляковский.

ФУРЬЕ ЧИСЛО — один из критериев подобия нестационарных тепловых процессов. Характеризует соотношение между скоростью изменения тепловых условий в окружающей среде и скоростью перестройки поля температуры внутри рассматриваемой системы (тела), к-рый зависит от размеров тела и коэффициента его теплопроводности. Ф. ч. $Fo=at_0/l^2$, где $a=\lambda/\rho c$ — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, ρ — плотность, c — удельная теплоемкость, l — характерный линейный размер тела, t_0 — характерное время изменения внешних условий.

Название по имени Ж. Фурье (J. Fourier).

По материалам одноименной статьи БСЭ-3.

ФУРЬЕ — БЕССЕЛЯ ИНТЕГРАЛ, интеграл Ганкеля,— аналог *Фурье интеграла* для *Бесселя функций*, имеющий вид

$$f(x)=\int_0^\infty \lambda J_\nu(\lambda x)\,d\lambda \int_0^\infty y J_\nu(\lambda y)\,f(y)\,dy. \qquad (*)$$

Формула (*) может быть получена из *Фурье—Бесселя ряда* для интервала $(0, l)$ переходом к пределу при $l\to+\infty$. Г. Ганкель (H. Hankel, 1875) установил теорему: если функция $f(x)$ кусочно непрерывная и имеет ограниченную вариацию на любом интервале $0<x<l$, интеграл

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\,|f(x)|\,dx$$

сходится, то формула (*) справедлива при $\nu>-1/2$ во всех точках непрерывности $f(x)$, $0<x<+\infty$. В точках разрыва x_0, $0<x_0<+\infty$, правая часть формулы (*) равна $[f(x_0-0)+f(x_0+0)]/2$, при $x_0=0$ она дает $f(0+)/2$.

Аналоги Ф.—Б. и. (*) для цилиндрич. функций $Z_\nu(x)$ других типов также справедливы, но пределы интегралов должны быть соответственно изменены.

Е. Д. Соломенцев.

ФУРЬЕ — БЕССЕЛЯ РЯД — разложение функции $f(x)$ в ряд

$$f(x)=\sum_{m=1}^\infty c_m J_\nu\left(x_m^{(\nu)}\cdot\frac{x}{a}\right),\ 0<x<a, \qquad (*)$$

где $f(x)$ — заданная в интервале $(0, a)$ функция, $J_\nu(x)$ — *Бесселя функция* порядка $\nu>-\frac{1}{2}$, $x_m^{(\nu)}$ — положительные нули функции $J_\nu(x)$, расположенные в порядке возрастания; коэффициенты ряда c_m имеют следующие значения

$$c_m=\frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2\left(x_m^{(\nu)}\right)}\int_0^a r f(r) J_\nu\left(x_m^{(\nu)}\cdot\frac{r}{a}\right)dr.$$

Если $f(x)$ — кусочно непрерывная функция, заданная на интервале (o, a) и интеграл

$$\int_0^a \sqrt{r}\,|f(r)|\,dr<\infty,$$

то Ф.— Б. р. сходится и сумма его равна $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$ в каждой внутренней точке x интервала $(0, a)$, в окрестности к-рой $f(x)$ имеет ограниченную вариацию.

Л. Н. Кармазина.

ФУРЬЕ — СТИЛТЬЕСА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — одно из *интегральных преобразований*, родственное *Фурье преобразованию*. Пусть функция $F(x)$ имеет ограниченное изменение на $(-\infty, +\infty)$. Функция

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\,dF(y) \qquad (*)$$

наз. преобразованием Фурье—Стилтьеса для F. Функция φ, определенная интегралом (1), ограничена и непрерывна. Всякая периодич. функция $\varphi(x)$, разлагающаяся в ряд Фурье $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$ с абсолютно сходящимся рядом коэффициентов, может быть записана в форме интеграла (*) с $F(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n$.

Формула (*) допускает обращение: если $F(x)$ имеет ограниченное изменение и

$$\mathring{F}(x) = \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}, \text{ то}$$

$$\mathring{F}(x) - \mathring{F}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{e^{i\xi x}-1}{i\xi} d\xi, \; x \in (-\infty, +\infty),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения на ∞.

Если в формуле (*) в качестве функции $F(x)$ допустить лишь неубывающие функции ограниченной вариации, то совокупность получающихся непрерывных функций $\varphi(x)$ полностью характеризуется свойством: для любой системы действительных чисел $t_1, \ldots, t_n$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} \varphi(t_i - t_j)\, \xi_i \overline{\xi}_j \geqslant 0,$$

каковы бы ни были комплексные числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ (теорема Бохнера — Хинчина). Такие функции наз. положительно определенными. Ф.-С. п. находит широкое применение в теории вероятностей, где неубывающую функцию

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(x)$$

подчиняют дополнительным ограничениям $\lim_{x \to -\infty} P(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} P(x) = 1$, $P(x)$ непрерывна слева, и именуют распределением, функцию

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\, dP(y)$$

— характеристической функцией [распределения $P(x)$]. Теорема Бохнера—Хинчина вы-

ражает тогда необходимое и достаточное условие того, что непрерывная функция $\Phi(x)$ [для к-рой $\Phi(0)=1$] является характеристической функцией нек-рого распределения.

Теория Ф.-С. п. развита и в n-мерном случае.

Лит.: [1] Бохнер С., Лекции об интегралах Фурье, пер. с англ., М., 1962; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 2, М., 1965; [3] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969. *П. П. Лизоркин.*

ФУРЬЕ — СТИЛТЬЕСА РЯД — ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dF(x),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dF(x),$$

$$n=0,\ 1,\ \ldots,$$

(интегралы понимаются в смысле Стилтьеса). $F(x)$ — функция с ограниченным изменением на $[0,\ 2\pi]$. Иначе можно записать

$$dF(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \qquad (*)$$

Если $F(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,\ 2\pi]$, то $(*)$ есть ряд Фурье функции $F'(x)$. В комплексной форме ряд $(*)$ имеет вид

$$dF(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx},$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-inx}\,dF(x),$$

при этом

$$F(x)-c_0x\sim C_0+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_n}{in}e^{inx},\quad n\neq 0,$$

и $\{c_n\}$ будет ограниченной. Если $c_n\longrightarrow 0$, то F непрерывна на $[0,\ 2\pi]$. Существует непрерывная функция $F(x)$, для к-рой $c_n\not\to 0$ при $n\longrightarrow+\infty$. Ряд $(*)$ суммируем методом Чезаро $(C,\ r)$, $r>0$, почти всюду на $[0,\ 2\pi]$ к $F'(x)$.

Лит.: [1] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965. *А. А. Конюшков.*

ХААРА МЕРА — ненулевая положительная мера μ на σ-кольце M подмножеств E локально компактной группы G, порожденном семейством всех компактных подмножеств, принимающая конечные значения на всех компактных подмножествах в G и удовлетворяющая либо условию левоинвариантности: $\mu(E)=\mu(gE)$ для всех $E\in M$, $g\in G$, где $gE=\{gx|x\in E\}$, либо условию правоинвариантности: $\mu(E)=\mu(Eg)$ для всех $E\in M$, $g\in G$, где $Eg=\{xg|x\in E\}$. Соответственно говорят о лево- или правоинвариантной Х. м. Всякая Х. м. μ-регулярна, т. е.

$$\mu(E)=\sup_K\{\mu(K)\mid K\subset E,\ K \text{ компактно}\}$$

для всех $E\in M$.

Левоинвариантная (а также правоинвариантная) Х.м. существует и определена однозначно с точностью до положительного множителя; это было установлено А. Хааром [1] (при дополнительном предположении о сепарабельности группы G).

Если f — финитная непрерывная функция на G, то f интегрируема относительно левоинвариантной Х. м. на G и соответствующий интеграл левоинвариантен (см. *Инвариантное интегрирование*), т. е.

$$\int_G f(g)\,d\mu(g)=\int_G f(g_0g)\,d\mu(g)$$

для всех $g_0\in G$. Аналогичным свойством обладает правоинвариантная Х. м. Мера Хаара всей группы G конечна тогда и только тогда, когда G компактна.

Если μ — левоинвариантная Х. м. на G, то для любого $g_0\in G$ имеет место равенство

$$\int_G f(gg_0^{-1})d\mu(g)=\Delta(g_0)\int_G f(g)\,d\mu(g),$$

где Δ — непрерывный гомоморфизм группы G в мультипликативную группу R^+ положительных действительных чисел, не зависящий от выбора непрерывной финитной функции f на G. Гомоморфизм Δ наз. модулем группы G; мера $\Delta(g^{-1})d\mu(g)$ является правоинвариантной Х. м. на G. Если $\Delta(g)\equiv 1$, то группа G наз. унимодулярной; в этом случае левоинвариантная Х. м. является также и правоинвариантной и наз. двусторонне инвариантной. В частности, любая компактная, дискретная и абелева локально компактная группа, а также любая связная полупростая или нильпотентная группа Ли унимодулярна. Унимодулярность группы G равносильна также тому, что любая левоинвариантная Х. м. μ на G инверсионно инвариантна, т. е. $\mu(E^{-1})=\mu(E)$ для всех $E\in M$.

Если G — группа Ли, то интеграл по левоинвариантной (правоинвариантной) Х. м. на G определяется формулой

$$\int_G f(x)\,d\mu(x)=\int_G f\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_n,$$

где ω_i — линейно независимые левоинвариантные (правоинвариантные) дифференциальные формы 1-го по-

рядка на G (см. *Маурера — Картана форма*), $n=\dim G$. Модуль группы Ли G определяется формулой

$$\Delta(x)=|\det \mathrm{Ad}\, x|,\quad x\in G,$$

где Ad — присоединенное представление.

Примеры. 1) Х. м. на аддитивной группе $\mathbb{R}$ и на факторгруппе $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (группа вращений окружности) совпадает с обычной лебеговской мерой. 2) Полная линейная группа $GL(n, \Phi)$, $\Phi=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, унимодулярна, причем Х. м. имеет вид

$$d\mu(x)=|\det x|^{-k}\,dx,$$

где $k=n$ при $\Phi=\mathbb{R}$ и $k=2n$ при $\Phi=\mathbb{C}$, а dx — лебеговская мера в евклидовом пространстве всех матриц порядка n над полем Φ.

Если G — локально компактная группа, H — ее замкнутая подгруппа, X — однородное пространство G/H, Δ и δ — модули групп G и H соответственно, χ — непрерывный гомоморфизм группы G в $\mathbb{R}^+$, задаваемый формулой

$$\chi(h)=\delta(h)\,\Delta(h^{-1}),\quad h\in H,$$

то существует положительная мера ν на σ-кольце T множеств $E\subset G/H=X$, порожденном семейством компактных подмножеств в X, однозначно определяемая условием:

$$\int_{G/H}\Big(\int_H f(gh)\,d\mu(h)\Big)d\nu(g)=\int_G f(g)\,\chi(g)\,d\nu(g),$$

где f — любая непрерывная финитная функция на G, $g=gH\in X$, причем

$$\int_X h(g^{-1}x)\,\nu(x)=f(g)\int_X h(x)\,d\nu(x)$$

для всех непрерывных финитных функций f на X.

Лит.: [1] Haar A., «Ann. Math. », 1933, v. 34, p. 147—69; [2] Бурбаки Н., Интегрирование, пер. с франц., М., 1970; [3] Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, пер. с франц., М., 1950; [4] Люмис Л., *Введение в абстрактный гармонический анализ*, пер. с англ., М., 1956; [5] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964.

Д. П. Желобенко, А. И. Штерн.

ХААРА СИСТЕМА — одна из классических ортонормированных систем функций. Функции Хаара $\chi_n(t)$ этой системы определяются на отрезке $[0, 1]$ следующим образом:

$$\chi_1(t)\equiv 1 \text{ на } [0, 1];$$

если $n=2^m+k$, $k=1,\ldots, 2^m$, $m=0, 1,\ldots$, то

$$\chi_n(t)=\begin{cases}\sqrt{2^m} & \text{при } t\in((2k-2)/2^{m+1},\ (2k-1)/2^{m+1}),\\ -\sqrt{2^m} & \text{при } t\in((2k-1)/2^{m+1},\ 2k/2^{m+1}),\\ 0 & \text{при } t\notin[(k-1)/2^m,\ k/2^m].\end{cases}$$

Во внутренних точках разрыва функции Хаара полагаются равными полусумме своих предельных значений справа и слева, а на концах отрезка $[0, 1]$ — своим предельным значениям изнутри отрезка.

Система $\{\chi_n(t)\}$ определена А. Хааром ([1]). Она ортонормирована на отрезке $[0, 1]$. Ряд Фурье по этой системе от любой непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции сходится к ней равномерно. Более того, если

$\omega(\sigma,\ f)$ — модуль непрерывности функции $f(t)$ на отрезке $[0,\ 1]$, то для частных сумм $S_n(t,\ f)$ порядка n ряда Фурье—Хаара функции $f(t)$ справедливо неравенство

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|f(t)-S_n(t,\ f)|\leqslant 12\omega(1/n,\ f),\quad n=1,\ 2,\ \ldots.$$

Х. с. является базисом в пространстве $L_p[0,\ 1]$, $1\leqslant p<\infty$. Если $f(t)\in L_p[0,\ 1]$ и $\omega_p(\delta,\ f)$ — интегральный модуль непрерывности функции $f(t)$ в метрике пространства $L_p[0,\ 1]$, то (см. [3])

$$\|f(t)-S_n(t,f)\|_{L_p[0,\ 1]}\leqslant 24\omega_p(1/n,\ f),\ n=1,\ 2,\ \ldots.$$

Х. с. является безусловным базисом в пространстве $L_p[0,\ 1]$ при $1<p<\infty$.

Если функция $f(t)$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[0,\ 1]$, то ее ряд Фурье—Хаара сходится к ней в любой точке Лебега этой функции и, в частности, почти всюду на $[0,\ 1]$. При этом сходимость (и абсолютная сходимость) ряда Фурье—Хаара в фиксированной точке отрезка $[0,\ 1]$ зависит лишь от значений функции в любой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Для рядов Фурье — Хаара существенно отличаются друг от друга следующие свойства: а) абсолютная сходимость всюду; б) абсолютная сходимость почти всюду; в) абсолютная сходимость на множестве положительной меры; г) абсолютная сходимость ряда коэффициентов Фурье. Для тригонометрич. рядов все эти свойства равносильны.

Свойства коэффициентов Фурье — Хаара резко отличаются от свойств тригонометрич. коэффициентов Фурье. Напр., если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, а $a_n(f)$ — ее коэффициенты Фурье по системе $\{\chi_n(t)\}$, то справедливо неравенство

$$|a_n(f)|\leqslant(1/\sqrt{2n})\,\omega(1/n,\ f),\ n\geqslant 2,$$

откуда следует, что

$$a_n(f)=o(n^{-1/2}),\ n\longrightarrow\infty.$$

В то же время коэффициенты Фурье — Хаара непрерывных функций не могут убывать слишком быстро: если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ и

$$a_n(f)=o(n^{-3/2}),$$

то $f(t)\equiv\text{const}$ на $[0,\ 1]$.

Для функций $f(t)\in L^p[0,\ 1]$, $1\leqslant p<\infty$, справедливы следующие оценки (см. [3]):

$$|a_n(f)|\leqslant n^{(1/p)-(1/2)}\omega_p(1/n,\ f),\ n=1,\ 3,\ \ldots,$$

$$\left(\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}|a_n(f)|^p\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant 8\cdot 2^{n(1/p-1/2)}\omega_p(1/2^n,\ f),\quad n=0,\ 1,\ \ldots.$$

Если же $f(t)$ имеет конечную вариацию $V(f)$ на отрезке $[0,1]$, то

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}|a_n(f)|\leqslant(3/2\sqrt{2^n})\,V(f),\ n=0,\ 1,\ \ldots.$$

Все эти неравенства являются точными в смысле порядка убывания их правых частей при $n\to\infty$ (в соответствующих классах) (см. [3]).

Интересной особенностью отличаются ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\chi_n(t),\qquad(*)$$

безусловно сходящиеся почти всюду: если ряд вида $(*)$ при любом порядке следования его членов сходится почти всюду на множестве $E\subset[0,1]$ положительной меры Лебега (исключительное множество меры нуль может зависеть от порядка следования членов ряда $(*)$), то этот ряд сходится абсолютно почти всюду на $[0,1]$. Для рядов вида $(*)$ справедлив следующий критерий: чтобы ряд $(*)$ сходился почти всюду на измеримом

множестве $E \subset [0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(t)$ сходился почти всюду на E.

Ряды Хаара могут служить для представления измеримых функций: для любой конечной почти всюду на отрезке $[0,1]$ измеримой функции $f(t)$ существует ряд вида (*), к-рый почти всюду на $[0,1]$ сходится к функции $f(t)$. При этом конечность функции $f(t)$ существенна: не существует ряда вида (*), сходящегося к $+\infty$ (или $-\infty$) на множестве положительной меры Лебега.

Лит.: [1] Haar A., «Math. Ann.», 1910, Bd 69, S. 331—71; [2] Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963; [3] Ульянов П. Л., «Матем. сб.», 1964, т. 63, № 3, с. 356—91; [4] его же, там же, 1967, т. 72, № 2, с. 193—225; [5] Голубов Б. И., в сб.: Итоги науки. Математический анализ. 1970, М., 1971, с. 109—43.

Б. И. Голубов.

ХААРА УСЛОВИЕ — условие на непрерывные линейно независимые на ограниченном замкнутом множестве M евклидова пространства функции $x_k(t)$, $k=1, \ldots, n$. Сформулировано А. Хааром ([1]). Х. у. гарантирует для любой непрерывной на M функции $f(t)$ единственность полинома наилучшего приближения (н. п.) по системе $\{x_k(t)\}$, т. е. полинома

$$P_{n-1}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t), \qquad (*)$$

для к-рого

$$\max_{t \in M} |f(t) - P_{n-1}(t)| = \min_{\{a_k\}} \max_{t \in M} \left| f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k x_k(t) \right|.$$

Х. у. состоит в том, что любой нетривиальный полином вида (*) должен иметь в M не более $n-1$ различных нулей. Чтобы для любой непрерывной на M функции $f(t)$ существовал единственный полином н. п. по системе $\{x_k(t)\}_{k=1}^n$, необходимо и достаточно, чтобы эта система удовлетворяла Х. у. Систему функций, удовлетворяющих Х. у., наз. *Чебышева системой*. Для таких систем справедлива *Чебышева теорема* и *Валле Пуссена теорема* (об альтернансе). Х. у. достаточно для единственности полинома н. п. по системе $\{x_k(t)\}_{k=1}^n$ в метрике $L[a, b]$ ($M = [a, b]$) для любой непрерывной на $[a, b]$ функции.

Лит.: [1] Haar A., «Math. Ann.», 1918, Bd 78; [2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965.

Ю. Н. Субботин.

ХАДВИГЕРА ГИПОТЕЗА — задача комбинаторной геометрии о покрытии выпуклого тела фигурами специального вида, выдвинутая Х. Хадвигером [1]. Пусть K — выпуклое тело n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, а $b(K)$ — минимальное число тел, гомотетичных K с коэффициентом гомотетии k, $0 < k < 1$, достаточное для покрытия тела K. Х. г. заключается в следующем: для любого ограниченного $K \subset \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$n+1 \leqslant b(K) \leqslant 2^n. \qquad (*)$$

Причем неравенство $b(K) = 2^n$ характеризует параллелепипед (см. [1]). Х. г. подтверждена для случая $n \leqslant 2$; для $n \geqslant 3$ имеются (1984) лишь частные результаты. Напр., для любого n-мерного ограниченного многогранника $K \subset \mathbb{R}^n$, каждые две вершины к-рого принадлежат двум различным параллельным опорным гиперплоскостям к K, справедливы неравенства (*). Причем $b(K)$ совпадает с числом вершин K, а в множестве таких многогранников равенство $b(K) = 2^n$ проверяется только для параллелепипеда. Этот результат связан с решением одной из *Эрдёша задач* о числе точек в $\mathbb{R}^n$, каждые три из к-рых образуют не тупоугольный треугольник. Х. г. связана и с *покрытия, разбиения* и *освещения задачами*. Напр., Х. г. может быть рассмотрена как обобщение *Борсука проблемы*

о разбиении множества на части меньшего диаметра для случая, когда $\mathbb{R}^n$ заменяется пространством Минковского. Для неограниченного $K \subset \mathbb{R}^n$ число $b(K)$ либо равно $b(K')$, где K' выпуклое и ограниченное тело с меньшим числом измерений, либо ∞. Напр., для $K \subset \mathbb{R}^3$ число $b(K)$ принимает одно из значений: 1, 2, 3, 4, ∞ (см. [2]).

Лит.: [1] Hadwiger H., «Archiv Math.», 1957, v. 8, p. 212—13; [2] Болтянский В. Г., Солтан П. С., Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств, Кишинев, 1978.

П. С. Солтан.

ХАНА РАЗЛОЖЕНИЕ — разбиение множества X, на σ-алгебре Σ подмножеств к-рого задана σ-аддитивная функция множеств f, на два подмножества X_+, X_-, $X_+ \cup X_- = X$ такие, что $f(M) \geqslant 0$, если $M \in \Sigma$, $M \subset X_+$ и $f(M) \leqslant 0$, если $M \in \Sigma$, $M \subset X_-$. Такое разбиение X, вообще говоря, не однозначно.

Лит.: [1] Данфорд Г., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ч. 1, М., 1962.

В. И. Соболев.

ХАНА — БАНАХА ТЕОРЕМА: линейный функционал $f(x)$, определенный на линейном многообразии L действительного или комплексного векторного пространства X, может быть продолжен до линейного функционала $F(X)$, определенного на всем X, если существует полунорма $p(x)$ такая, что

$$|f(x)| \leqslant p(x) \qquad (*)$$

для любого $x \in L$. Такое продолжение определяется, вообще говоря, неоднозначно, но для любого из них неравенство

$$|F(x)| \leqslant p(x)$$

при любом $x \in X$ сохраняется.

В случае действительного пространства X полунорму можно заменить положительно однородным функционалом, а неравенство $(*)$ — односторонним неравенством $f(x) \leqslant p(x)$, остающимся справедливым и для продолженного функционала. Если X — банахово пространство, то в качестве $p(x)$ можно взять $\|f\|_L \cdot \|x\|$, и тогда $\|F\|_X = \|f\|_L$. Доказана Х. Ханом (1927) и независимо С. Банахом (1929).

Лит.: [1] Hahn H., «J. reine und angew. Math.», 1927, Bd 157, S. 214; [2] Banach S., «Stud. math.», 1929, v. 1, p. 211—16, 223—39; [3] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [4] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977.

В. И. Соболев.

ХАНТА — СТЕЙНА ТЕОРЕМА — утверждение, содержащее условия, при выполнении к-рых существует максиминный инвариантный критерий в задаче статистич. проверки гипотез.

Пусть по реализации случайной величины X, принимающей значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$, надлежит проверить гипотезу $H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ против альтернативы $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$, причем предполагается, что семейство $\{\mathsf{P}_\theta\}$ доминировано нек-рой σ-конечной мерой μ. Далее, пусть на $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ действует группа преобразований $G = \{g\}$, оставляющая инвариантной задачу проверки гипотезы H_0 против H_1, и пусть $\mathcal{A}$ — борелевское σ-поле подмножеств группы G. Х.— С. т. утверждает, что если выполняются условия:

1) отображение $(x, g) \to gx$ $(\mathcal{B} \times \mathcal{A})$-измеримо, причем $Ag \in \mathcal{B}$ для любого множества $A \in \mathcal{A}$ и любого элемента $g \in G$;

2) на $\mathcal{A}$ существует асимптотически правоинвариантная последовательность мер ν_n в том смысле, что для любых $g \in G$ и $A \in \mathcal{A}$

$$\lim_{n \to \infty} |\nu_n(Ag) - \nu_n(A)| = 0,$$

то для любого статистич. критерия, предназначенного для проверки H_0 против H_1, критич. функция к-рого есть $\varphi(x)$, найдется (почти) инвариантный критерий

с критич. функцией $\psi(x)$ такой, что при всех $\theta \in \Theta$

$$\inf_{\overline{G}} \mathsf{E}_{\overline{g}\theta}\, \varphi(X) \leqslant \mathsf{E}_{\theta}\, \psi(X) \leqslant \sup_{\overline{G}} \mathsf{E}_{\overline{g},\theta} \varphi(X),$$

где $\overline{G} = \{\overline{g}\}$ — группа, индуцированная группой G.

Из Х.—С. т. следует, что если существует статистический критерий уровня α с критич. функцией φ_0, максимизирующий $\inf_{\theta \in \Theta_1} \mathsf{E}_\theta \varphi_0(X)$, то существует и (почти) инвариантный критерий с таким же свойством.

Условие 2) заведомо выполняется, когда группа G является локально компактной, на к-рой задана правоинвариантная мера Хаара. Х.—С. т. показывает, что если группа G удовлетворяет условиям теоремы, то в любой задаче статистич. проверки гипотез, инвариантной относительно G, в к-рой существует равномерно наиболее мощный критерий, этот критерий является максиминным.

Напротив, пусть в нек-рой задаче статистич. проверки гипотез, инвариантной относительно группы G, установлено, что равномерно наиболее мощный критерий не является максиминным. Это означает, что нарушены условия Х.-С. т. В связи с этим возникает вопрос: может ли заданный критерий быть максиминным в другой задаче проверки гипотез, инвариантной относительно той же группы G? Ответ на этот вопрос уже зависит не только от группы G, но и от самого семейства распределений $\{P_\theta\}$.

Х.—С. т. была получена Хантом (G. Hunt) и Стейном (C. Stein) в 1946, см. [1].

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975. *М. С. Никулин.*

ХАРАКТЕР C^*-алгебры A — ненулевой полунепрерывный снизу полуконечный *след* f на C^*-*алгебре* A, удовлетворяющий следующему условию: если φ — полунепрерывный снизу полуконечный след на C^*-алгебре A и $\varphi(x) \leqslant f(x)$ для всех $x \in A^+$, то $\varphi(x) = \lambda f(x)$ для нек-рого неотрицательного числа λ и всех элементов $x \in A^+$, лежащих в замыкании идеала $\mathfrak{N}_f$, порожденного множеством $\{x : x \in A^+,\ f(x) < +\infty\}$. Существует канонич. взаимно однозначное соответствие между множеством классов квазиэквивалентности непулевых факторпредставлений C^*-алгебры A, допускающих след, и множеством характеров C^*-алгебры A, определенных с точностью до положительного множителя; это соответствие устанавливается формулой $f(x) = \chi(\pi(x))$, $x \in A$, где π — факторпредставление C^*-алгебры A, допускающее след χ. Если след f на C^*-алгебре A конечен, то Х. C^*-алгебры наз. конечным характером; конечный характер непрерывен. Существует каноническое взаимнооднозначное соответствие между множеством классов квазиэквивалентности ненулевых факторпредставлений конечного типа C^*-алгебры A и множеством конечных Х. C^*-алгебры A с нормой 1. Если A коммутативна, то любой характер коммутативной алгебры A есть Х. C^*-алгебры A. Если A — групповая C^*-алгебра компактной группы G, то Х. C^*-алгебры A конечны, и Х. C^*-алгебры A с нормой 1 соответствует нормализованным характерам компактной группы G.

Лит.: [1] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974. *А. И. Штерн.*

ХАРАКТЕР ассоциативной алгебры A над полем k — ненулевой гомоморфизм алгебры A в k. Х. алгебры A иногда называют также мультипликативным функционалом на A. Любой Х. $\chi : A \to k$ сюръективен и обладает свойством $\chi(1) = 1$. Ядро $\operatorname{Ker}\chi$ есть максимальный идеал в A.

Если A — конечно порожденная коммутативная алгебра и поле k алгебраически замкнуто, то любой максимальный идеал в A является ядром единствен-

ного X., так что соответствие между X. и максимальными идеалами биективно. Совокупность Specm A всех X. коммутативной алгебры A, называемая ее максимальным спектром, обладает естественной структурой алгебраического *аффинного многообразия*. Каждый элемент $a \in A$ определяет функцию $\tilde{a}$ на Specm A, заданную формулой $\tilde{a}(\chi) = \chi(a)$, причем функции $\tilde{a}$ составляют алгебру регулярных функций на Specm A. Обратно, если X — аффинное алгебраич. многообразие и A — алгебра регулярных функций на X, то Specm A отождествляется с X: каждой точке $x \in X$ соответствует характер χ_x, действующий по формуле $\chi_x(a) = a(x)$.

Аналогичными свойствами обладают X. коммутативной банаховой алгебры A над полем $\mathbb{C}$. Любой X. $\chi: A \to \mathbb{C}$ непрерывен, его норма $\|\chi\| \leqslant 1$. Любой максимальный идеал в A является ядром единственного X. алгебры A. Множество $\Phi(A)$ всех X., рассматриваемое как подмножество единичного шара в A^*, снабженного слабой топологией, компактно и наз. спектром алгебры A, причем имеется естественный гомоморфизм алгебры A в алгебру непрерывных функций на $\Phi(A)$. Напр., если A — алгебра всех комплекснозначных непрерывных функций на компакте X, снабженная нормой $\|f\| = \max\limits_X |f|$, то $\Phi(A)$ отождествляется с X: каждому элементу $x \in X$ соответствует X. χ_x, действующий по формуле $\chi_x(f) = f(x)$, $f \in A$. Характер χ симметрической коммутативной банаховой алгебры A наз. эрмитовым, если $\chi(a^*) = \overline{\chi(a)}$ $(a \in A)$; χ эрмитов тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\chi$ — симметрический максимальный идеал.

Лит.: [1] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968.

А. И. Штерн.

ХАРАКТЕР группы — гомоморфизм данной группы в нек-рую стандартную абелеву группу A. Обычно в качестве A берется либо мультипликативная группа k^* нек-рого поля k, либо подгруппа

$$T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

группы $\mathbb{C}^*$. Понятие X. группы было первоначально введено для конечных групп G и $A = T$ (впрочем, в этом случае всякий X. $G \to \mathbb{C}^*$ принимает значения в T).

Изучение X. групп сводится к случаю абелевых групп, поскольку имеется естественный изоморфизм между группами $\operatorname{Hom}(G, A)$ и $\operatorname{Hom}(G/(G, G), A)$, где (G, G) — коммутант группы G. Характеры $G \to k^*$ составляют линейно независимую систему в пространстве всех k-значных функций на G. Характер $G \to k^*$ однозначно продолжается до X. групповой алгебры $k[G]$. Характеры $G \to k^*$ являются одномерными линейными представлениями группы G над k; понятие *характера* представления группы в одномерном случае совпадает с понятием X. группы. Иногда X. группы называют X. любого ее конечномерного представления (и даже само это представление).

Характер топологической группы G — это непрерывный гомоморфизм $G \to T$. Если G — локально компактная абелева группа, то ее X. разделяют точки, т. е. для любых $a, b \in G$, $a \neq b$, существует такой X. α: $G \to T$, что $\alpha(a) \neq \alpha(b)$. Для хаусдорфовых абелевых групп G это утверждение, вообще говоря, неверно (см. [3]). Характер алгебраической группы G над алгебраически замкнутым полем K — это рациональный гомоморфизм $G \to K^*$.

В теории чисел важную роль играют X. мультипликативной группы $\mathbb{Z}_k^*$ кольца вычетов $\mathbb{Z}_k$ по модулю k, к-рые взаимно однозначно соответствуют *Дирихле характерам* (mod k): характеру α: $\mathbb{Z}_k^* \to T$ отвечает характер Дирихле χ: $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, определяемый форму-

лой

$$\chi(n)=\begin{cases}\alpha(n+k\mathbb{Z}), & \text{если } (n,k)=1;\\ 0, & \text{если } (n,k)\neq 1.\end{cases}$$

См. также *Характеров группа*.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Моррис С., Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп, пер. с англ., М., 1980; [3] Хьюитт Э., Росс К., Абстрактный гармонический анализ, пер. с англ., т. 1, М., 1976.

А. Л. Онищик.

ХАРАКТЕР конечномерного представления полупростой алгебры Ли — функция, сопоставляющая каждому весу представления размерность соответствующего весового подпространства. Если $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0, $\varphi:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(V)$ — линейное представление и V_λ — весовое подпространство, отвечающее $\lambda\in\mathfrak{h}^*$, то Х. представления φ (или $\mathfrak{g}$-модуля V) записывается в виде

$$\operatorname{ch}V=\sum\nolimits_{\lambda\in\mathfrak{h}^*}(\dim V_\lambda)\,e^\lambda$$

и рассматривается как элемент группового кольца $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$. Если $k=\mathbb{C}$ и $\varphi=d\Phi$, где $\Phi:G\longrightarrow\mathrm{GL}(V)$ — аналитическое линейное представление группы Ли G, алгеброй Ли к-рой является $\mathfrak{g}$, то e^λ можно рассматривать как функцию на $\mathfrak{h}$ и $\operatorname{ch}V$ совпадает с функцией $x\longmapsto\chi_\Phi(\exp x)$ $(x\in\mathfrak{h})$, где χ_Φ — Х. представления Φ. Х. представления алгебры Ли обладает следующими свойствами:

$$\operatorname{ch}(V_1\oplus V_2)=\operatorname{ch}V_1+\operatorname{ch}V_2,$$

$$\operatorname{ch}(V_1\otimes V_2)=\operatorname{ch}V_1\cdot\operatorname{ch}V_2.$$

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [2] Дикс мье Ж., Универсальные обертывающие алгебры, пер. с франц., М., 1978.

А. Л. Онищик.

ХАРАКТЕР полугруппы — ненулевой гомоморфизм коммутативной полугруппы S с единицей в мультипликативную полугруппу комплексных чисел, состоящую из всех чисел с модулем 1 и нуля. Иногда под Х. полугруппы понимают ненулевой гомоморфизм в мультипликативную полугруппу комплексных чисел, модуль к-рых $\leqslant 1$. *Оба понятия Х. полугруппы эквивалентны, если S — клиффордова полугруппа.* Множество S^* всех Х. полугруппы S образует коммутативную полугруппу с единицей (полугруппу характеров) относительно поточечного умножения $*$

$$(\chi*\psi)(a)=\chi(a)\psi(a),\quad a\in S,\ \chi,\psi\in S^*.$$

Идеал P полугруппы S наз. вполне изолированным, если $S\setminus P$ есть подполугруппа. Множество всех вполне изолированных идеалов коммутативной полугруппы с единицей образует полурешетку относительно операции объединения, изоморфную полурешетке идемпотентов (см. *Идемпотентов полугруппа*) полугруппы S^*. Характеры коммутативной полугруппы S отделяют элементы из S, если для любых $a,\ b\in S$, $a\neq b$, найдется $\chi\in S^*$ такой, что $\chi(a)\neq\chi(b)$. Если S с единицей, то Х. полугруппы S отделяют элементы из S тогда и только тогда, когда S — *сепаративная полугруппа*. Задача описания полугруппы X, произвольной коммутативной полугруппы с единицей сводится к описанию Х. полугруппы, являющейся полурешеткой групп; соответствующее описание для случая, когда эта полурешетка удовлетворяет условию минимальности, см., напр. [1], § 5.5. Имеется абстрактная характеризация полугрупп Х. [2].

Для любого $a\in S$, $\chi\in S^*$ отображение $\tilde{a}:\chi\longmapsto\chi(a)$, $\chi\in S^*$, является Х. полугруппы S^*, т. е. $\tilde{a}\in S^{**}$. Отображение $\omega:a\longmapsto\tilde{a}$ является гомоморфизмом S в

S^{**} (так. наз. канонич. гомоморфизм). Если ω является изоморфизмом S на S^{**}, то говорят, что для S справедлива теорема двойственности. Теорема двойственности справедлива для коммутативной полугруппы S с единицей тогда и только тогда, когда S — инверсная полугруппа [3]. О вопросах двойственности для Х. полугрупп в топологич. случае см. *Топологическая полугруппа.*

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [2] Лесохин М. М., «Изв. вузов. Матем.», 1970, № 8, с. 67—74; [3] Austin C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1963, v. 109, № 2, p. 245—56.

Б. П. Танана, Л. Н. Шеврин.

ХАРАКТЕР представления π ассоциативной алгебры A — функция φ на алгебре A, определенная формулой $\varphi(x)=\chi(\pi(x))$ для $x\in A$, где χ — линейный функционал, определенный на нек-ром идеале I в алгебре $\pi(A)$ и удовлетворяющий условию $\chi(ab)=\chi(ba)$ для всех $a\in I$, $b\in\pi(A)$. Если представление π конечномерно или если алгебра $\pi(A)$ содержит ненулевой конечномерный оператор, то в качестве χ обычно рассматривается след оператора. Пусть A есть C^*-алгебра, π — такое представление C^*-алгебры A, что *Неймана алгебра* $\mathfrak{A}$, порожденная алгебрей $\pi(A)$, является фактором полуконечного типа; пусть χ' — точный нормальный полуконечный след на $\mathfrak{A}$, χ — линейное продолжение следа χ' на идеал $\mathfrak{M}_{\chi'}$; если множество $\{x: x\in A,\ \chi'(\pi(x))<+\infty\}$ отлично от нуля, то формула $\varphi(x)=\chi(\pi(x))$, $x\in A$, определяет Х. представления алгебры A, ограничение к-рого на A^+ есть *характер* C^*-алгебры A. Во многих случаях Х. представления алгебры определяет представление однозначно с точностью до нек-рого отношения эквивалентности; напр., характер неприводимого конечномерного представления определяет представление однозначно с точностью до эквивалентности; Х. фактор представления C^*-алгебры, допускающего след, определяет представление однозначно с точностью до квазиэквивалентности.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [3] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974.

А. И. Штерн.

ХАРАКТЕР представления π группы G — в случае конечномерного представления функция χ_π на группе G, определяемая формулой

$$\chi_\pi(g)=\operatorname{tr}\pi(g),\ g\in G.$$

Для произвольных непрерывных представлений топологич. группы G над полем $\mathbb{C}$ это определение обобщается следующим образом:

$$\chi_\pi(g)=\chi(\pi(g))\ \text{для}\ g\in G,$$

где χ — линейный функционал, определенный на некром идеале I в алгебре A, порожденной семейством операторов $\pi(g)$, $g\in G$, и инвариантный относительно внутренних автоморфизмов алгебры A; в нек-рых случаях Х. представления π наз. Х. представления некрой *групповой алгебры* группы G, определенного представлением π (см. *Характер* представления ассоциативной алгебры).

Х. прямой суммы (тензорного произведения) конечномерных представлений равен сумме (произведению) Х. этих представлений. Х. конечномерного представления группы является функцией, постоянной на классах сопряженных элементов; Х. непрерывного конечномерного унитарного представления группы есть непрерывная положительно определенная функция на группе.

Во многих случаях Х. представления группы определяет представление однозначно с точностью до эквивалентности; напр., Х. неприводимого конечномерного представления над полем характеристики 0 определяет представление однозначно с точностью до прост-

ранственной эквивалентности; Х. конечномерного непрерывного унитарного представления компактной группы — с точностью до унитарной эквивалентности.

Х. представления локально компактной группы G, допускающего продолжение до представления алгебры непрерывных финитных функций на G, может определяться мерой на G; в частности, Х. регулярного представления унимодулярной группы задается точечной вероятностной мерой, сосредоточенной в единичном элементе группы G. Х. представления π группы Ли G, допускающего продолжение до представления алгебры $C_0^\infty(G)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций на G, может определяться обобщенной функцией на G. Если G — нильпотентная или линейная полупростая группа Ли, то Х. неприводимых унитарных представлений π группы G определяются локально интегрируемыми функциями ψ_π по формуле

$$\chi_\pi(f)=\int_G f(g)\,\psi_\pi(g)\,dg,\quad f\in C_0^\infty(G);$$

эти Х. определяют представления π однозначно с точностью до унитарной эквивалентности.

Если группа G компактна, то любая непрерывная положительно определенная функция на G, постоянная на классах сопряженных элементов, разлагается в ряд по Х. неприводимых представлений π_α группы G, сходящийся равномерно на G; эти Х. χ_{π_α} образуют ортонормированную систему в пространстве $L^2(G)$, полную в подпространстве функций из $L^2(G)$, постоянных на классах сопряженных элементов в G. Если $\chi_\rho=\sum_\alpha m_\alpha\chi_{\pi_\alpha}$ — разложение Х. непрерывного конечномерного представления ρ группы G по Х. χ_{π_α}, то m_α — целые числа, являющиеся кратностями, с к-рыми π_α входят в ρ. Если ρ — непрерывное представление группы G в квазиполном бочечно локально выпуклом топологич. пространстве E, то существует максимальное подпространство E_α в E такое, что ограничение представления ρ на E_α кратно представлению π_α, и существует непрерывный проектор P_α пространства E на подпространство E_α, определяемый равенством

$$P_\alpha=\chi_{\pi_\alpha}(e)\int_G\overline{\chi_{\pi_\alpha}(g)}\,\rho(g)\,dg,$$

где dg — такая мера Хаара на G, что $\int_G dg=1$.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [3] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [4] Фробениус Г., Теория характеров и представлений групп, пер. с нем., Хар., 1937; [5] Наймарк М. А., Теория представления групп, М., 1976; [6] Littlewood D., The theory of group characters, 2 ed., Oxf., 1950.

А. И. Штерн.

ХАРАКТЕРИЗАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ в теории вероятностей и математической статистике — теоремы, устанавливающие связь между типом распределения случайных величин или случайных векторов и нек-рыми общими свойствами функций от них.

Пример 1. Пусть X — трехмерный случайный вектор такой, что:

1) его проекции X_1, X_2, X_3 на какие-либо три взаимно ортогональные оси независимы и

2) плотность $p(x)$, $x=(x_1, x_2, x_3)$, распределения вероятностей X зависит только от $x_1^2+x_2^2+x_3^2$. Тогда распределение X нормально и

$$p(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\right\},$$

где $\sigma>0$ — нек-рая постоянная (закон Максвелла для распределения скоростей молекул при стационарном состоянии газа).

Пример 2. Пусть $X \in \mathbb{R}^n$ случайный вектор с независимыми и одинаково распределенными компонентами $X=(X_1, \ldots, X_n)$. Если распределение нормально, то «эмпирическое среднее»

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_1^n X_j$$

и «эмпирическая дисперсия»

$$\overline{s^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2$$

будут независимыми случайными величинами. Обратно, если они независимы, то распределение X нормально.

Пример 3. Пусть $X \in \mathbb{R}^n$ — вектор с независимыми и одинаково распределенными компонентами, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ — отличные от нуля постоянные. Случайные величины

$$Y_1 = a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$$

и

$$Y_n = b_1 X_1 + \ldots + b_n X_n$$

будут независимы тогда и только тогда, когда X имеет нормальное распределение. Последнее утверждение остается верным, если предположение, что Y_1 и Y_2 независимы, заменить предположением, что они одинаково распределены, добавив, однако, нек-рые ограничения на коэффициенты a_j и b_j.

Подобного рода характеризация распределения случайного вектора $X \in \mathbb{R}^n$ свойством одинаковой распределенности или независимости двух многочленов $Q_1(X)$ и $Q_2(X)$ дается рядом Х. т., играющих важную роль в математич. статистике.

Лит.: [1] Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р., Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972.

Ю. В. Прохоров.

ХАРАКТЕРИСТИК МЕТОД — метод численного интегрирования уравнений гиперболич. типа. В гиперболич. области существует линейная комбинация исходных уравнений, в к-рую входят лишь внутренние производные вдоль характеристич. поверхностей. При этом существенно упрощаются решаемые уравнения. В Х. м. решение рассчитывается на характеристич. сетке, к-рая выстраивается в процессе счета, тем самым точно учитывается область зависимости решения. Для Х. м. доказаны существование решения и сходимость. Наиболее широкое применение Х. м. нашел при решении задач механики сплошных сред (см. [1]). Напр., уравнения в характеристич. форме

$$\frac{\partial J}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial J}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial p}{\partial x} \pm \rho c \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \qquad (2)$$

представляют собой линейную комбинацию традиционных уравнений газовой динамики: неразрывности, импульса и энергии. Здесь и ниже ρ — плотность, u — скорость, J — внутренняя энергия единицы массы, $p=p(\rho, J)$ — давление, T — температура, x — пространственная координата, t — время. Ставится задача Коши: решение ищется в области $t>0$ при заданных параметрах на линии $t=0$. Энтропией наз. интеграл $S(\rho, J)=\text{const}$ уравнения

$$dJ - \frac{p(\rho, J)}{\rho^2} d\rho = 0.$$

Тогда (1) имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = 0. \qquad (1')$$

В левых частях (1′) и (2) стоят производные $\frac{dS}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{du}{dt}$, взятые в направлениях

$$\frac{dx}{dt} = u \qquad (3)$$

и

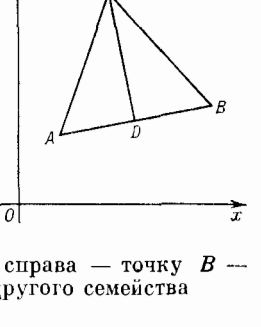
$$\frac{dx}{dt} = u \pm c, \qquad (4)$$

называемых характеристиками. Система (1), (2) имеет три семейства действительных характеристик. Вдоль характеристики (3) выполнено соотношение

$$dS = 0,$$

а вдоль характеристик (4) — соотношения

$$dp \pm \rho c\, du = 0. \qquad (5)$$



Через точку A (см. рис.) проводится характеристика (4) в сторону возрастания t

$$\frac{x - x_A}{t - t_A} = u_A + c_A.$$

Через ближайшую к точке A справа — точку B — проводится характеристика (4) другого семейства

$$\frac{x - x_B}{t - t_B} = u_B - c_B,$$

C — точка пересечения характеристик. При замене выполняемых вдоль характеристик дифференциальных соотношений (5) разностными получают алгебраич. систему

$$(p_C - p_A) + \rho_A c_A (u_C - u_A) = 0,$$

$$(p_C - p_B) - \rho_B c_B (u_C - u_B) = 0,$$

из к-рой определяются p_C и u_C. Из точки C проводится характеристика (3)

$$\frac{x - x_C}{t - t_C} = u_C$$

до пересечения с линией AB в точке D. Значение энтропии S в точке D определяется путем интерполяции между точками A и B (при этом $S_C = S_D$). Из уравнений

$$p(\rho_C, J_C) = p_C,$$

$$S(\rho_C, J_C) = S_C$$

находятся значения внутренней энергии J_C и плотности ρ_C в точке C. По известным данным в двух точках A и B находится решение при большем значении времени t в точке C. Эта процедура вычислений повторяется для каждой пары точек. Затем, используя новые точки C в качестве исходных A, B, делается следующий шаг по t. Расчет проводится до необходимых величин t. Однако из-за нелинейности уравнений газовой динамики счет может прекратиться в определенный момент времени, если характеристики одного семейства будут касаться друг друга или пересекаться.

Описанная разностная схема имеет первый порядок точности (аналог метода ломаных Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений). Повышения точности можно достигнуть путем пересчета и т. д.

Х. м. можно решать стационарные многомерные задачи в области гиперболичности (для газовой динамики — сверхзвуковые течения). При этом можно определить положение вторичных ударных волн в местах, где происходит пересечение или касание характеристик одного семейства. Х. м. рассчитываются задачи с небольшим числом разрывов, так как при скоплении особенностей вычисления затруднены. Расчет Х. м. состоит из ряда элементарных задач: расчет внутренней точки, точек на ударной волне или на обтекаемом теле и т. п.

Возможно построение численных схем Х. м., позволяющих вести счет по «слоям» — сеточно-характеристический метод (см. [2]).

Лит.: [1] Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик, М., 1961; [2] Магомедов К. М., Холодов А. С., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1969, т. 9, № 2, с. 373—86.

Ю. М. Давыдов.

ХАРАКТЕРИСТИКА — одно из основных понятий в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Роль Х. проявляется в существенных свойствах этих уравнений, таких, как локальные свойства решений, разрешимость различных задач, их корректность и др.

Пусть

$$L(x,\ D)=\sum\nolimits_{|\nu|\leqslant m} a_\nu(x)\,D^\nu$$

— линейный дифференциальный оператор с частными производными порядка m, а

$$\sigma(x,\ \xi)=\sum\nolimits_{|\nu|=m} a_\nu(x)\,\xi^\nu$$

— его символ. Здесь $x,\ \xi\in\mathbb{R}^n$, $\nu\in\mathbb{Z}_+^n$ — мультииндекс, $|\nu|=\nu_1+\ldots+\nu_n$, $a_\nu:\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$D^\nu=D_1^{\nu_1}\ldots D_n^{\nu_n},$$

$$D_j^\nu f=(\partial/\partial x_j)^\nu f,\ 1\leqslant j\leqslant n,\ \xi^n=\xi_1^{\nu_1}\ldots\xi_n^{\nu_n},\ j,\ m,\ n\in\mathbb{N}.$$

Пусть S — гиперповерхность, определенная в $\mathbb{R}^n$ уравнением $\varphi(x)=0$, причем $\varphi_x(x)=\operatorname{grad}\varphi(x)\neq 0$ при $x\in S$,

$$\sigma(x,\ \varphi_x(x))=0. \tag{1}$$

В этом случае S наз. характеристической поверхностью, или характеристикой, для оператора $L(x,\ D)$. Другие названия Х.: характеристическое многообразие, характеристическая линия (в случае $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^2$).

Ниже рассмотрен пример задачи Коши. Пусть S — произвольная (не обязательно характеристическая) гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, определенная уравнениями

$$\varphi(x)=0,\ \varphi_x(x)\neq 0.$$

Пусть $u_0,\ \ldots,\ u_{m-1}$ — функции, определенные на S в окрестности U точки $x_0\in S$, и поставлена задача Коши

$$L(x,\ D)\,u=f,\ x\in U,$$

$$u=u_0,\ \frac{\partial u}{\partial n}=u_1,\ \ldots,\ \frac{\partial^{m-1}u}{\partial n^{m-1}}=u_{m-1},\ x\in S,$$

относительно неизвестной функции u. Здесь f — заданная функция, $L(x,\ D)$ — заданный линейный дифференциальный оператор порядка m, n — ортонормированный вектор к S. Считая, для определенности, $(\partial/\partial x_n)\varphi(x)\neq 0$, $x\in U$, заменой переменных

$$x\longrightarrow x',\ \text{где } x_j'=x_j,\ j=1,\ \ldots,\ n-1,\ x_n'=\varphi(x),$$

приходят к уравнению

$$\sigma(x,\ \varphi_x(x))\left(\frac{\partial}{\partial x_n'}\right)^m u+\Sigma\ldots=f. \tag{2}$$

Невыписанное выражение под знаком Σ не содержит частных производных от функции u по x_n' порядка m. Возникают два случая:

1) $\sigma(x,\ \varphi_x(x))\neq 0,\quad x\in U,$

2) $\sigma(x,\ \varphi_x(x))=0,\quad x=x_0.$

В первом случае деление уравнения (2) на σ приводит к уравнению, разрешенному относительно старшей частной производной по переменной x_n', т. е. записанному в нормальной форме. Начальным условиям можно придать вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n'}\right)^j u(x_1',\ \ldots,\ x_{n-1}',\ 0)=u_j(x_1',\ \ldots,\ x_{n-1}'),$$

$$j=0,\ \ldots,\ m-1.$$

Такая постановка задачи Коши хорошо изучена и, напр. при аналитически заданных функциях в уравне-

нии и в начальных условиях, существует единственное решение этой задачи в классе аналитич. функций в достаточно малой окрестности точки x_0. Во втором случае точка x_0 является характеристической, а если равенство (1) верно для всех $x \in S$, то поверхность S является Х. В этом случае начальные данные не могут быть произвольными и исследование задачи Коши усложняется.

Напр., для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \tag{3}$$

могут быть заданы начальные условия на одной из его Х. $x_1 = 0$:

$$u(0, x_2) = u_0(x_2), \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2) = u_1(x_2). \tag{4}$$

Если функция u_1 отлична от постоянной, то задача Коши (3), (4) не имеет решения в пространстве C^2. Если же функция u_1 постоянна, напр. равна $a \in \mathbb{R}$, то решение неединственно в C^2, т. к. им может быть любая функция вида

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + b(x_1) + u_0(x_2),$$

где

$$b,\ u_0 \in C^2,\ b(0) = b'(0) = 0.$$

Таким образом, задача Коши существенно различается в зависимости от того, заданы ли начальные данные на характеристической поверхности или нет.

Х. обладает свойством инвариантности при преобразовании независимых переменных: если $\varphi(x)$ есть решение уравнения (1) и если преобразование $x \longrightarrow x'$ переводит $\varphi(x) \longrightarrow \psi(x')$, $a_\nu(x) \longrightarrow b_\nu(x')$, то $\psi(x')$ удовлетворяет уравнению

$$\sigma_1(x', \psi_{x'}(x')) = 0,$$

где

$$\sigma_1(x', \xi) = \sum\nolimits_{|\nu| = m} b_\nu(x') \xi^\nu.$$

Другое свойство Х. таково, что относительно Х. S оператор $L(x, D)$ является *внутренним дифференциальным оператором*.

Эллиптические линейные дифференциальные операторы определяются как операторы, для к-рых не существует Х. (действительных). Определение гиперболич. и параболич. операторов также тесно связано с понятием Х. Так, линейный дифференциальный оператор 2-го порядка относится к гиперболич. типу, если он имеет два семейства Х., и к параболическому, если — одно. Знание Х. дифференциального уравнения позволяет свести это уравнение к более простому виду. Напр., пусть задано гиперболич. уравнение

$$a_{20}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{11}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{02}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0. \tag{5}$$

Для него уравнение Х. (1) имеет вид

$$a_{20} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right]^2 + a_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + a_{02} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right]^2 = 0.$$

Последнее уравнение определяет два различных семейства Х.:

$$\varphi_1(x) = \psi_1(x) - c_1 = 0,\ c_1 \in \mathbb{R},$$
$$\varphi_2(x) = \psi_2(x) - c_2 = 0,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Существуют две Х. из этих семейств такие, что соответствующие им функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ определяют замену переменных $x \to x'$ по формулам

$$x_1' = \varphi_1(x),\ x_2' = \varphi_2(x)$$

и приводят уравнение (5) к канонич. виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1' \partial x_2'} = 0.$$

Для нелинейного дифференциального уравнения

$$F(x,\ u,\ D^\nu u,\ D^\mu u) = 0, \qquad (6)$$

где μ, $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$ — мультииндексы, причем $|\nu| \leqslant m-1$, $|\mu| = m$, X. S определяется как гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$ с уравнением $\varphi(x) = 0$, причем при $x \in S$. $\varphi_x(x) \neq 0$ и $\sigma(x,\ \varphi_x(x)) = 0$. Символ в этом случае для оператора (6), задаваемого функцией $F(x,\ u,\ v,\ w)$, определяется так:

$$\sigma(x,\ \xi) = \sum\nolimits_{|\mu|=m} F_w(x,\ u,\ D^\nu u,\ D^\mu u)\,\xi^\mu.$$

Кроме переменных x и ξ, очевидно, σ может зависеть от u, $D^\nu u$, $D^\mu u$. Пусть, напр., задано уравнение 1-го порядка ($m=1$). Кроме того, для простоты $n=2$. Уравнение (6) принимает вид

$$F\left(x_1,\ x_2,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = 0$$

с функцией $F(x, y, z, p, q)$. Уравнение Х.:

$$F_p\left(x_1,\ x_2,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} +$$

$$+ F_q\left(x_1,\ x_2,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0.$$

Т. к. решение этого уравнения $\varphi(x_1,\ x_2)$ фактически может зависеть от u, $\partial u/\partial x_1$, $\partial u/\partial x_2$, то ее задают в параметрич. виде

$$x_1 = x(t),\ x_2 = y(t),\ u = z(t),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = p(t),\ \ \frac{\partial u}{\partial x_2} = q(t),$$

причем эти функции удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$x'(t) = F_p,\ y'(t) = F_q,\ z'(t) = pF_p + qF_q,$$
$$p'(t) = -F_x - pF_z,\ q'(t) = -F_y - qF_z.$$

Геометрически это определяет т. н. *характеристическую полосу* (при $\alpha < t < \beta$). Проекция этой полосы на пространство $(x(t),\ y(t),\ z(t))$ определяет такую кривую линию в $\mathbb{R}^3$, что в каждой своей точке она касается плоскости с направляющими коэффициентами $p(t)$, $q(t)$. Эта кривая также наз. Х. уравнения (6).

Лит.: [1] Мизохата С., Теория уравнений с частными производными, пер. с япон., М., 1977; [2] Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, пер. с нем., М., 1966; [3] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [4] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [5] Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М., Уравнения в частных производных математической физики, М., 1970; [6] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [7] Михлин С. Г., Курс математической физики, М., 1968; [8] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977.

Ю. В. Комленко.

ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛЯ — целое положительное простое число или число 0, однозначно определяемое для данного поля следующим образом. Если для нек-рого $n>0$

$$0 = ne = \underbrace{e + \ldots + e}_{n \text{ слагаемых}},$$

где e — единица поля K, то наименьшее из таких n будет простым числом и оно наз. характеристикой поля K. Если же такого числа не существует, то говорят, что Х. п. K равна нулю, или что K — поле нулевой характеристики. Иногда такое поле наз. полем без характеристики или полем бесконечной (∞) характеристики. Всякое поле нулевой характеристики содержит

подполе, изоморфное полю всех рациональных чисел, а поле конечной характеристики p — подполе, изоморфное полю классов вычетов по модулю p.

О. А. Иванова.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ в теории дифференциальных уравнений с частными производными — то же, что *характеристика*. *Ю. В. Комленко.*

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ПОДГРУППА — подгруппа H группы G, инвариантная относительно всех автоморфизмов группы G. *О. А. Иванова.*

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ПОЛОСА дифференциального уравнения с частными производными 1-го порядка — однопараметрическое семейство

$$x=x(t),\ u=y(t),\ u_x=p(t)$$

непрерывно дифференцируемых в интервале $\alpha<t<\beta$ функций, удовлетворяющих уравнениям

$$x'(t)=F_p,\ y'(t)=pF_p,\ p'(t)=-F_x-pF_y,$$

где умножение векторов понимается скалярно;

$$F(x,\ u,\ u_x)=0 \qquad (*)$$

— нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными 1-го порядка относительно неизвестной функции u: $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$. Здесь $u_x=\operatorname{grad}u$, $F(x,\ y,\ p)$: $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, $x,\ p\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$.

Значение Х. п. состоит в том, что она используется при исследовании и нахождении решений уравнения (*).

См. также *Характеристика*.

Лит.: [1] Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, пер. с нем., М., 1966; [2] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970. *Ю. В. Комленко.*

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ множества E пространства X — функция $\chi(x)$, равная 1 при $x\in E$, и равная 0 при $x\in CE$ (где CE — дополнение E в X). Любая функция $\chi(x)$ со значениями в $\{0,\ 1\}$ является Х. ф. нек-рого множества, а именно множества $E=\{x:\ \chi(x)=1\}$. Свойства Х. ф.:

1) $\chi_{CE}=1-\chi_E$, $\chi_{E\setminus F}=\chi_E(1-\chi_F)$;

2) если $F\subset E$, то $\chi_{E\setminus F}=\chi_E-\chi_F$;

3) если $E=\bigcup\limits_\alpha E_\alpha$, то $\chi_E=\sup\limits_\alpha\{\chi_{E_\alpha}\}$;

4) если $E=\bigcap\limits_\alpha E_\alpha$, то $\chi_E=\inf\limits_\alpha\{\chi_{E_\alpha}\}$;

5) если $E_1,\ E_2,\ \ldots$ попарно непересекающиеся, то $\chi_{\bigcup E_K}=\sum\limits_1^\infty\chi_{E_K}$;

6) если $E=\bigcap\limits_K E_K$, то $\chi_E=\prod\limits_1^\infty\chi_{E_K}$.

Лит.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953. *А. А. Конюшков.*

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, преобразование Фурье — Стилтьеса вероятностной меры μ, — комплекснозначная функция, заданная на всей числовой оси $\mathbb{R}^1$ формулой

$$\hat\mu(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(itx)\,d\mu(x),\ t\in\mathbb{R}^1.$$

Х. ф. случайной величины X по определению есть Х. ф. ее вероятностного распределения

$$\mu_X(B)=\mathsf{P}\{X\in B\},\ B\subset\mathbb{R}^1.$$

Метод, связанный с использованием Х. ф., был впервые применен А. М. Ляпуновым и позднее стал одним из основных аналитич. методов теории вероятностей. Особенно эффективно он используется при доказательстве предельных теорем теории вероятностей, напр. доказательство центральной предельной теоремы для независимых одинаково распределенных случайных

величин со 2-ми моментами сводится к элементарному соотношению

$$\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Основные свойства Х. ф. 1) $\hat{\mu}(0)=1$ и $\hat{\mu}$ положительно определена, т. е.

$$\sum \alpha_k \bar{\alpha}_l \hat{\mu}(t_k-t_l) \geqslant 0$$

для любых конечных наборов комплексных чисел α_k и аргументов $t_k \in \mathbb{R}^1$.

2) $\hat{\mu}$ равномерно непрерывна на всей оси $\mathbb{R}^1$.

3) $|\hat{\mu}(t)| \leqslant 1$, $|\hat{\mu}|(t_1)-\hat{\mu}(t_2)|^2 \leqslant$
$\leqslant 2(1-\operatorname{Re}\hat{\mu}(t_1-t_2))$, $t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}^1$.

4) $\overline{\hat{\mu}(t)}=\hat{\mu}(-t)$; в частности, $\hat{\mu}$ принимает только действительные значения (и является четной функцией) в том и только том случае, когда соответствующее вероятностное распределение симметрично, т. е. $\mu(B)=\mu(-B)$, где $-B=\{x: -x \in B\}$.

5) Х. ф. однозначно определяет меру; имеет место формула обращения:

$$\mu(a, b)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{ibt}}{it}\hat{\mu}(t)\,dt$$

для любых интервалов (a, b), концы к-рых имеют нулевую μ-меру. Если $\hat{\mu}$ интегрируема (абсолютно, если интеграл понимать в смысле Римана) на $\mathbb{R}^1$, то соответствующая функция распределения имеет плотность p и

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-itx)\,\hat{\mu}(t)\,dt,\ x \in \mathbb{R}^1.$$

6) Х. ф. свертки двух вероятностных мер (суммы двух независимых случайных величин) есть произведение их Х. ф.

Следующие три свойства выражают связь между существованием моментов случайной величины и степенью гладкости ее Х. ф.

7) Если $\mathsf{E}|X|^n < \infty$ для нек-рого натурального n, то при всех натуральных $r \leqslant n$ существуют производные порядка r от Х. ф. $\hat{\mu}_X$ случайной величины X и имеет место равенство

$$\hat{\mu}_X^{(r)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(ix)^r \exp(itx)\,d\mu_X(x),\quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Т. о., $\mathsf{E}X^r=i^{-r}\hat{\mu}_X^{(r)}(0)$, $r \leqslant n$.

8) Если существует $\hat{\mu}_X^{(2n)}(0)$, то $\mathsf{E}X^{2n} < \infty$.

9) Если $\mathsf{E}|X|^n < \infty$ для всех n и

$$\overline{\lim_n}\,(\mathsf{E}|X|^n)^{1/n}=\frac{1}{R},$$

то при всех $|t| < R$ имеет место

$$\hat{\mu}_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\mathsf{E}|X|^k.$$

Использование метода Х. ф. главным образом основано на указанных выше свойствах Х. ф., а также на следующих двух теоремах.

Теорема Бохнера (описание класса Х. ф.). Пусть функция f задана на $\mathbb{R}^1$ и $f(0)=1$. Для того чтобы f была Х. ф. нек-рой вероятностной меры, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна и положительно определена.

Теорема Леви (непрерывность соответствия). Пусть $\{\mu_n\}$ — последовательность вероятностных мер, а $\{\hat{\mu}_n\}$ — последовательность их Х. ф. Тогда $\{\mu_n\}$ слабо сходится к нек-рой вероятностной мере μ (т. е. $\int \varphi\,d\mu_n \to$ $\to \int \varphi\,d\mu$ для произвольной непрерывной ограничен-

ной функции φ) в том и только том случае, если $\{\hat{\mu}_n(t)\}$ в каждой точке $t \in \mathbb{R}^1$ сходится к нек-рой непрерывной функции f; в случае сходимости функция $f = \hat{\mu}$. Отсюда следует, что относительная компактность (в смысле слабой сходимости) семейства вероятностных мер равносильна равностепенной непрерывности в нуле семейства соответствующих Х. ф.

Теорема Бохнера позволяет смотреть на преобразование Фурье — Стилтьеса как на изоморфизм между полугруппой (относительно операции свертки) вероятностных мер в $\mathbb{R}^1$ и полугруппой (относительно поточечного умножения) положительно определенных непрерывных равных в нуле единице функций на $\mathbb{R}^1$. Теорема Леви утверждает, что этот алгебраич. изоморфизм является и топологич. гомеоморфизмом, если в полугруппе вероятностных мер иметь в виду топологию слабой сходимости, а в полугруппе положительно определенных функций — топологию равномерной сходимости на ограниченных множествах.

Известны выражения Х. ф. основных вероятностных мер (см. [1], [2]), напр., Х. ф. гауссовой меры со средним m и дисперсией σ^2 есть $\exp\left(imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$.

Для неотрицательных целочисленных случайных величин X, наряду с Х. ф., используется ее аналог — производящая функция

$$\Phi_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathrm{P}\{X = k\},$$

связанная с Х. ф. соотношением $\mu_X(t) = \Phi_X(e^{it})$.

Х. ф. вероятностной меры μ в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется аналогично:

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle t, x\rangle)\, d\mu(x), \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

где $\langle t, x\rangle$ означает скалярное произведение. Сформулированные выше факты справедливы и для Х. ф. вероятностных мер в $\mathbb{R}^n$.

Лит.: [1] Лукач Е., Характеристические функции, пер. с англ., М., 1979; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, пер. с англ., М., 1967; [3] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, 2 изд., М., 1973; [4] Золотарев В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983.

Н. Н. Ваханин.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ КЛАСС — естественное сопоставление с каждым расслоением $\xi = (E, p, B)$ (как правило, векторным) определенного типа нек-рого класса когомологий базы B (наз. Х. к. данного расслоения). Естественность означает, что Х. к. расслоения, индуцированного отображением $f : B' \to B$, совпадает с образом при $f^* : H^*(B) \to H^*(B')$ Х. к. расслоения ξ над B. Характеристический класс многообразия — класс когомологий многообразия, являющийся Х. к. его касательного расслоения. Х. к. многообразий связаны с важными топологич. характеристиками многообразий, такими, как ориентируемость, *эйлерова характеристика*, *сигнатура* и т. д.

Примеры.

Ориентируемость расслоения. Имеет место точная последовательность групп

$$1 \longrightarrow SO_n(\mathbb{R}) \longrightarrow O_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1.$$

Отображение

$$w_1 = (\det)_* : H^1(B;\ O_n(\mathbb{R})) \longrightarrow H^1(B;\ \mathbb{Z}_2)$$

сопоставляет с каждым действительным векторным расслоением ξ класс $w_1(\xi)$, к-рый наз. первым классом Штифеля — Уитни расслоения ξ, здесь $H^1(B; O_n(\mathbb{R}))$ — когомологии с коэффициентами в пучке ростков непрерывных функций со значениями в $O_n(\mathbb{R})$ (см. *G-Расслоение*). Точная когомологич. последовательность показывает, что группа расслоения ξ редуцируется

к $SO_n(\mathbb{R})$, т. е. расслоение ориентируемо тогда и только тогда, когда $w_1(\xi)=0$.

Первый класс Чжэня. Дана короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^0 \longrightarrow 0.$$

Связывающий гомоморфизм δ: $H^1(B; \mathbb{C}^0) \longrightarrow H^2(B; \mathbb{Z})$ соответствующей когомологич. последовательности сопоставляет с каждым одномерным комплексным расслоением ξ над B двумерный класс когомологий базы B, наз. первым классом Чжэня расслоения ξ и обозначаемый $c_1(\xi)$. Иными словами, если $g_{\alpha\beta}$: $u_\alpha \cap u_\beta \longrightarrow \mathbb{C}^0$—функции перехода расслоения ξ, то выбором произвольных значений логарифмов $\ln g_{\alpha\beta}$ получается двумерный целочисленный коцикл $\{k_{\alpha\beta\gamma}\}$:

$$k_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\pi i}(\ln g_{\alpha\beta} + \ln g_{\beta\gamma} + \ln g_{\gamma\alpha})$$

и $c_1(\xi)$ есть по определению класс когомологий этого коцикла.

Спинорная структура. Имеет место точная последовательность групп

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO_n(\mathbb{R}) \longrightarrow 1,$$

где $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$—группа, определяемая в теории *Клиффорда алгебр*. Связывающее отображение w_2: $H^1(B; SO_n(\mathbb{R})) \longrightarrow H^2(B; \mathbb{Z}_2)$ соответствующей когомологич. последовательности наз. вторым классом Штифеля—Уитни. Структурная группа ориентированного векторного расслоения ξ может быть редуцирована к $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $w_2(\xi)=0$.

Класс Эйлера. Пусть база B действительного векторного расслоения $\xi=(E, p, B)$ есть гладкое компактное N-мерное многообразие с краем ∂B (возможно пустым), и нулевое сечение i: $B \longrightarrow E$ приведено в «общее положение с самим собой». Пусть близкое и изотопное к i вложение i': $B \longrightarrow E$ трансверсально регулярно относительно $i(B) \subset E$. Тогда $X = i^{-1}(i'(B) \cap i(B))$ будет подмногообразием B и $\partial X \subset \partial B$, $\mathrm{codim}\, X = n = \dim \xi$. Следовательно, $[X] \in H_{N-n}(B, \partial B)$. Двойственный к $[X]$ класс когомологий наз. классом Эйлера расслоения ξ и обозначается $e(\xi) \in H^n(B)$. Расслоение ξ имеет не обращающееся в нуль сечение тогда и только тогда, когда $e(\xi)=0$. Если B связно, $\partial B = \varnothing$, а ξ—касательное расслоение, то $\dim X = 0$, следовательно, X состоит из конечного числа точек. Класс $[X] \subset H_0(B)$ определяется в этом случае целым числом, к-рое обозначается через $\chi(B)$ и совпадает с эйлеровой характеристикой B.

Построение классов Штифеля—Уитни и Чжэня на языке теории *препятствий* (см. [6]—[8]) проводится так. Пусть η: $E \xrightarrow{p} B$—*Серра расслоение*, и B—связное клеточное разбиение. Тогда гомотопич. тип слоя $F = p^{-1}(x)$ не зависит от $x \in B$. Если $\pi_q(F)$—первая нетривиальная гомотопич. группа слоя F и B односвязно, то первое препятствие к построению сечений s: $B \longrightarrow E$ лежит в группе $H^{q+1}(B; \pi_q(F))$. Это препятствие $\varkappa(\eta)$ инвариантно связано с расслоением η. Иногда инвариант $\varkappa(\eta)$ наз. Х. к. расслоения η. Пусть ξ—комплексное векторное расслоение над B, $\dim \xi = n$. Для каждого $1 \leqslant q \leqslant n$ с ξ ассоциируется другое расслоение η^q со слоем U_n/U_{q-1} (комплексным многообразием Штифеля). Из точных последовательностей расслоений следует, что $\pi_i(U_n/U_{q-1}) = 0$ при $i < 2q-1$, $\pi_{2q-1}(U_n/U_{q-1}) = \mathbb{Z}$, так что $\varkappa(\eta^q) \in H^{2q}(B)$. Этот класс наз. q-м классом Чжэня расслоения ξ, $c_q(\xi) = \varkappa(\eta^q)$.

Если ξ—действительное расслоение, $F = \mathbb{R}^n$, то слоем расслоения η^q будет O_n/O_{q-1}. Так как

$$\pi_{q-1}(O_n/O_{q-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{если } q \text{ четно и } q < n, \\ \mathbb{Z}, & \text{если } q \text{ нечетно или } q = n; \end{cases}$$

$$\pi_i(O_n/O_{q-1}) = 0$$

при $i < q-1$, то класс

$$\varkappa(\eta^q) \in \begin{cases} H^q(B), \text{ если } q \text{ нечетно или } q = n, \\ H^q(B;\ \mathbb{Z}_2), \text{ если } q \text{ четно и } q < n. \end{cases}$$

К л а с с а м и Ш т и ф е л я — У и т н и расслоения ξ наз. классы

$$w_q(\xi) = \varkappa(\eta^q) \bmod 2 \in H^q(B;\ \mathbb{Z}_2).$$

Впрочем, если ξ неориентированно, то классы $\varkappa(\eta^q)$ определены корректно лишь с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.

При $q = n$ многообразие Штифеля есть сфера S^{n-1} в действительном случае и S^{2q-1} — в комплексном. Задача о построении сечения расслоения η^n совпадает с задачей о построении не обращающегося в нуль сечения расслоения ξ. Первое препятствие в этом случае наз. к л а с с о м Э й л е р а $e(\xi)$

$$e(\xi) = c_n(\xi) \in H^{2n}(B)$$

в комплексном случае,

$$e(\xi) = \varkappa(\eta^n) \in H^n(B)$$

в действительном ориентированном случае,

$$e(\xi) = w_n(\xi) \in H^n(B;\ \mathbb{Z}_2)$$

в действительном неориентированном случае.

Пусть E_D и E_S — пространства расслоений, ассоциированных с ξ со слоями: диск D^n и сфера S^{n-1}. Если $i\colon B \longrightarrow E_D$ — нулевое сечение, то $e(\xi) = i^*(u)$, где $u \in H^n(E_D, E_S)$ — *Тома класс*. Пусть F — одно из тел $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, где $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, $\mathbb{H}$ — тело кватернионов. Пусть h^* — мультипликативная теория когомологий, обладающая следующим свойством: для каждого конечномерного векторного пространства V над F можно выбрать естественно относительно вложений такой элемент $\alpha_V \in h^d(P(V))$, где $P(V)$ — многообразие всех одномерных подпространств в V, $P(V) = FP^{\dim V - 1}$ и $d = \dim_{\mathbb{R}} F$, что $h^*(P(V)) = h^*(pt)[\alpha_V]/(\alpha_V^n)$, где $n = \dim V$. Для случая $\dim V = 2$ пусть α_V совпадает с фундаментальным классом (ориентацией) многообразия $P(V)$.

Пусть $\xi = (E, p, B)$ — векторное (в смысле F) расслоение над B со слоем V, $\dim \xi = n$, $P(\xi)$ — п р о е к т и в и з а ц и я этого расслоения, т. е. локально тривиальное расслоение над B со слоем $P(V)$, пространство к-рого $P(E)$ состоит из всех одномерных подпространств в слоях расслоения ξ. Над пространством $P(E)$ имеется одномерное расслоение, пространство к-рого состоит из всех пар (l, x), где l — одномерное подпространство слоя расслоения ξ, $l \in P(E)$, x — точка пространства l. Этому расслоению соответствует классифицирующее отображение $j\colon P(E) \longrightarrow P(V)$. Пусть $a = j^*(\alpha_V)$, $a \in h^d(P(E))$. Если снабдить группу $h^*(P(E))$ структурой $h^*(B)$-модуля с помощью гомоморфизма π^*, где $\pi\colon P(E) \longrightarrow B$ — проекция расслоения $P(\xi)$, то этот модуль свободен и имеет базис $1, a, \ldots, a^{n-1}$. Существуют однозначно определенные классы когомологий $\sigma_1(\xi), \sigma_2(\xi), \ldots, \sigma_n(\xi)$, $\sigma_i(\xi) \in h^{di}(B)$, для к-рых

$$a^n - \pi^*(\sigma_1(\xi))\, a^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} \pi^*(\sigma_{n-1}(\xi))\, a + (-1)^n \pi^*(\sigma_n(\xi)) = 0.$$

Для $F = \mathbb{R}$ условиям, налагаемым на теорию h^*, удовлетворяет, напр., теория $H^*(\cdot;\ \mathbb{Z}_2)$. В этом случае определенные выше Х. к. обозначаются через $w_1, w_2, \ldots, w_n$ и наз. к л а с с а м и Ш т и ф е л я — У и т н и. Для $F = \mathbb{C}$ в качестве h^* можно взять обычную теорию когомологий H^*. Определенные выше классы для H^* обозначаются через $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и наз. к л а с с а м и Ч ж э н я. Впрочем, при $F = \mathbb{C}$ требуемым условиям удовлетворяет любая ориентированная теория когомологий. При $F = \mathbb{H}$ также можно рассматривать обычную теорию H^*. В этом случае определенные выше классы

обозначаются через p_1^s, p_2^s, ..., p_n^s и наз. симплектическими классами Понтрягина.

Пусть по-прежнему F — одно из тел $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, h^* — теория когомологий, удовлетворяющая требуемым выше условиям. Принцип расщепления: для произвольного векторного (в смысле F) расслоения ξ над B существуют пространство B' и отображение $f\colon B' \longrightarrow B$, для к-рых расслоение $f^*\xi$ над B' распадается в прямую сумму одномерных расслоений, и гомоморфизм $f^*\colon h^*(B) \longrightarrow h^*(B')$ мономорфен.

В частности, если ξ — универсальное комплексное расслоение над BU_n, то в качестве B' можно взять пространство $BT_n = \mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty$ (n сомножителей), где T_n — максимальный тор в U_n, а в качестве $f\colon BT_n \longrightarrow BU_n$ — отображение, индуцированное включением $T_n \subset U_n$. Отображение

$$f^*\colon H^{**}(BU_n) \longrightarrow H^{**}(BT_n) = \mathbb{Z}\,[[x_1, \ldots, x_n]]$$

мономорфно, и образ f^* совпадает с кольцом всех симметрических формальных степенных рядов, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$, $\dim x_i = 2$.

Для произвольной топологич. группы G множество всех Х. к., определенных для главных G-расслоений и принимающих значения в теории когомологий h^*, находится во взаимно однозначном соответствии с $h^*(BG)$, где BG — *классифицирующее пространство* группы G. В частности, для векторных расслоений и для теории H^* задача описания всех Х. к. сводится к вычислению колец когомологий $H^*(BO_n)$, $H^*(BSO_n)$, $H^*(BU_n)$ и т. д.

Пусть G — компактная группа Ли, и T — максимальный тор в G. Включение $T \subset G$ индуцирует отображение $BT \longrightarrow BG$ классифицирующих пространств. Пространство BT гомотопически эквивалентно произведению $\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty$, в к-ром число сомножителей равно размерности тора T. Поэтому $H^{**}(BT) = \mathbb{Z}\,[[x_1, \ldots, x_n]]$, где $n = \dim T$, $\dim x_i = 2$. На торе T действует группа Вейля $\Phi(G) = N(T)/T$, где $N(T)$ — нормализатор T, следовательно, группа Вейля действует также и на BT. Если группа G связана и пространства G, G/T не имеют кручения в гомологиях, то гомоморфизм $\rho^*\colon H^{**}(BG) \longrightarrow H^{**}(BT)$ мономорфен, и образ ρ^* совпадает с подкольцом всех инвариантных относительно группы Вейля элементов кольца $H^{**}(BT) = \mathbb{Z}\,[[x_1, \ldots, x_n]]$ (теорема Бореля).

Группа U_n удовлетворяет условиям теоремы. Диагональные унитарные матрицы образуют максимальный тор T_n группы U_n. Если элементы диагональной матрицы обозначить через $t_1, \ldots, t_n$, то группа Вейля состоит из всех перестановок переменных $t_1, \ldots, t_n$. Следовательно, $H^{**}(BU_n) = \mathbb{Z}\,[[c_1, \ldots, c_n]]$, где $c_1, \ldots, c_n$ — элементарные симметрич. функции переменных $x_1, \ldots, x_n \in H^2(BT_n)$, совпадающие с классами Чжэня. Группа Sp_n также удовлетворяет требованиям теоремы Бореля. Группа Вейля порождена всеми перестановками $x_1, \ldots, x_n$ и произвольными переменами знаков. Следовательно, $H^{**}(BSp_n) = \mathbb{Z}\,[[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]]$, где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — элементарные симметрич. функции переменных $x_1^2, \ldots, x_n^2$. Группа SO_n не удовлетворяет требованиям теоремы Бореля, однако, если рассматривать в качестве кольца коэффициентов произвольное кольцо Λ, содержащее $1/2$, напр. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ при нечетных p или $\mathbb{Q}$, то видоизмененная таким образом теорема будет справедлива. Максимальный тор группы SO_n образован матрицами вида

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{Vmatrix} \oplus \begin{Vmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{Vmatrix} \oplus \ldots$$

и имеет размерность $[n/2]$. Группа Вейля порождена всеми перестановками $\alpha_1, \ldots, \alpha_{[n/2]}$ и переменами знаков у четного числа этих символов при четном n

и у произвольного числа символов при нечетном n. Поэтому $H^{**}(SO_{2k};\Lambda)=\Lambda[[p_1,\ldots,p_{k-1},e]]$, где $p_1,\ldots,p_{k-1}$ — элементарные симметрич. функции перемен. ных $x_1^2,\ldots,x_k^2$, кроме последней, $e=x_1,\ldots,x_k$. Классы $p_1,\ldots,p_{k-1}$, $p_k=e^2$ совпадают с классами Понтрягина (см. ниже), e — класс Эйлера; $H^{**}(SO_{2k+1};\Lambda)=\Lambda[[p_1,\ldots,p_k]]$.

Классы $x_i\in H^2(BT_n)$, $1\leqslant i\leqslant n$ наз. о б р а з у ю щ и м и В у. Сами они не являются Х. к. (так как не лежат в $H^{**}(BU_n)$), но любой Х. к. выражается через них как симметрический формальный степенной ряд и любой симметрический формальный степенной ряд от $\{x_i\}$ задает Х. к. Напр., классу Эйлера c_n соответствует произведение $\prod_{i=1}^{n}x_i$.

Элемент (формальный степенной ряд) $e^{x_1}+\ldots+e^{x_n}\in\in\mathbb{Z}(x_1,\ldots,x_n)=H^{**}(BT_n)$ симметричен, и задает Х. к. — неоднородный элемент кольца $H^{**}(BU_n)$, обозначаемый ch, наз. х а р а к т е р о м Ч ж э н я. Характер Чжэня «аддитивно-аддитивен» и «мультипликативно-мультипликативен», т. е.

$$\mathrm{ch}(\xi\oplus\eta)=\mathrm{ch}(\xi)+\mathrm{ch}(\eta),$$
$$\mathrm{ch}(\xi\otimes\eta)=\mathrm{ch}(\xi)\cup\mathrm{ch}(\eta).$$

К л а с с ы Ч ж э н я и к р и в и з н а. Пусть база B n-мерного векторного расслоения $\xi=(E,p,B)$ является гладким многообразием. Пусть в расслоении ξ задана произвольная *аффинная связность*. Если фиксировать локальную тривиализацию расслоения ξ в окрестности нек-рой точки базы, то в этой окрестности кривизна данной связности задается 2-формой Ω со значениями в векторном пространстве $gl(\mathbb{C},n)$ комплексных $(n\times n)$-матриц. При замене локальной тривиализации расслоения значения формы Ω преобразуются по правилу $m\to gmg^{-1}$, где $g\in GL(\mathbb{C},n)$ — матрица перехода от одной тривиализации к другой. Если $\varphi\colon gl(\mathbb{C},n)\to\mathbb{C}$ — однородный многочлен степени j, то $\varphi\circ\Omega$ — $\mathbb{C}$-значная внешняя форма степени $2j$. Если, кроме того, многочлен φ инвариантен относительно действия

$$\mathrm{GL}(\mathbb{C},n)\times gl(\mathbb{C},n)\longrightarrow gl(\mathbb{C},n),\ (g,m)\longrightarrow gmg^{-1},$$

то форма $\varphi\circ\Omega$ не зависит от локальных тривиализаций и является $\mathbb{C}$-значной внешней формой на всем многообразии B. Можно показать, что $d(\varphi\circ\Omega)=0$ и что изменение связности меняет $\varphi\circ\Omega$ лишь на точную форму. Так как коэффициенты $\mathrm{tr}(m^i)$ характеристического многочлена матрицы m инвариантны, то, полагая $\varphi_i(m)=\mathrm{tr}(m^i)$, получаются классы когомологий $[\varphi_i\circ\Omega]\in\in H^{2i}(B;\mathbb{C})$. Имеет место равенство $[\varphi_i\circ\Omega]=(C_i(\xi))^{\mathbb{C}}$, где $(C_i(\xi))^{\mathbb{C}}$ — классы Чжэня с комплексными коэффициентами.

К л а с с а м и П о н т р я г и н а действительного векторного расслоения ξ наз. классы $p_i(\xi)=(-1)^iC_{2i}(\xi\otimes\otimes\mathbb{C})\in H^{4i}(B)$, здесь $\xi\otimes\mathbb{C}$ — комплексификация расслоения ξ. (Другое определение см. в [5].) Пусть база B n-мерного расслоения $\xi=(E,p,B)$ есть N-мерное многообразие с краем и σ — целочисленная неубывающая функция аргумента $h=0,\ldots,n-1$. Система векторов $u_1,\ldots,u_m\in\mathbb{R}^h$ наз. п о д ч и н е н н о й функции σ; если $\dim\{u_1,\ldots,u_{h+\sigma(h)}\}\leqslant h$ при всех $h=0,\ldots,h-1$. Пусть в расслоении выбраны сечения $v_1(x),\ldots,v_m(x)$ в общем положении. Подмножество базы $\{x\in B\mid v_1(x),\ldots,v_m(x)$ подчинена $\sigma\}$ есть псевдомногообразие коразмерности $\sigma(0)+\ldots+\sigma(n-1)$. Оно реализует относительный класс гомологий в $H_{N-\Sigma_0^{n-1}\sigma(i)}(B,\partial B)$, а двойственный ему класс когомологий в $H^{\Sigma_0^{n-1}\sigma(i)}(B)$ будет

X. к. расслоения ξ. Класс $p_r(\xi)$ получается, если в качестве σ взять функцию

$$\sigma(0)=\ldots=\sigma(n-2r-1)=0,\ \sigma(n-2r)=\ldots=\sigma(n-1)=2.$$

Классы Понтрягина можно выразить через кривизну связности действительного расслоения аналогично тому, как это сделано для классов Чжэня.

Для произвольной градуированной $\mathbb{Q}$-алгебры A пусть $\Gamma_1 A$ — группа (относительно умножения) рядов вида $1+a_1+a_2+\ldots$, $\deg a_i=i$. Мультипликативной последовательностью наз. такая последовательность многочленов $\{K_i(x_1,\ldots,x_i)\}$, $K_i\in\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_i]$, что соответствие

$$a=(1+a_1+\ldots)\longrightarrow(1+K_1(a_1)+K_2(a_1,\ a_2)+\ldots)=K(a)$$

является гомоморфизмом групп $\Gamma_1 A\longrightarrow\Gamma_1 A$ для любой градуированной $\mathbb{Q}$-алгебры A. В частности, $K_i(x_1,\ \ldots,\ x_i)$ однороден степени i, если $\deg x_j=j$. Если $A=\mathbb{Q}[t]$, то $\Gamma_1 A$ есть группа формальных степенных рядов, начинающихся с 1. Для любого $f(t)\in\Gamma_1(\mathbb{Q}[t])$ существует и единственна мультипликативная последовательность $K=\{K_i\}$, $K(1+t)=f(t)$. При этом

$$K_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\sum_{\omega\in\prod(n)}\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}S_{i_1\ldots i_r}(x_1,\ \ldots,\ x_n),$$

Здесь $f(t)=\sum_0^\infty\lambda_i t^i$, $\lambda_0=1$, суммирование производится по всем разбиениям n, т. е. $\omega=\{i_1,\ \ldots,\ i_r\}$, $i_1,\ \ldots,\ i_r\geqslant 0$, $i_1+\ldots+i_r=n$.

Мультипликативная последовательность, определяемая рядом

$$\frac{\sqrt{t}}{\operatorname{th}\sqrt{t}}=1+\frac{1}{3}t-\frac{1}{45}t^2+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}}{(2k)!}B_n t^k+\ldots,$$

где B_k — числа Бернулли, обозначается обычно $L=\{L_i\}$. Пусть M^n — многообразие, $A=H^{4*}(M,\ \mathbb{Q})$, $p(M)=1+p_1(M)+\ldots+p_{[n/2]}(M)\in\Gamma_1 A$ — полный класс Понтрягина. Рациональное число $\langle L(p(M)),\ [M]\rangle$ наз. L-родом многообразия M^n. L-роды бордантных многообразий равны. Если n не делится на 4, то $\langle L(p(M)),\ [M]\rangle=0$. Если M^n — замкнутое многообразие размерности $n=4k$, то $\langle L(p(M)),\ [M]\rangle=I(M)$, где $I[M]$ — сигнатура квадратичной формы пересечения на $H_{2k}(M,\mathbb{Q})$ (теорема Хирцебруха о сигнатуре).

Для приложений важны многие специальные мультипликативные последовательности, напр. ряд $f(t)=\frac{t}{1-e^{-t}}$ задает мультипликативную последовательность T. Для комплексного расслоения ξ определен класс $\tau(\xi)=T(c(\xi))\in H^*(B(\xi))$, наз. классом Тодда расслоения ξ. Класс Тодда следующим образом связан с характером Чжэня ch:

$$1=(-1)^n\tau(\xi)\cdot\varphi_\xi^{-1}\operatorname{ch}\psi_\xi(1)\in H^*(B,\ \mathbb{Q}),\ n=\dim\xi,$$

здесь $\psi_\xi(1)$ — класс Тома в $K_{\mathbb{C}}$-теории, φ_ξ — *Тома изоморфизм* в H^*. Для действительного расслоения ξ определен класс $J(\xi)=T(\xi_{\mathbb{C}})\in H^*(B(\xi),\ \mathbb{Q})$, наз. индексным классом. Имеет место следующая теорема об индексе (Атьи — Зингера): индекс эллиптич. оператора D на компактном многообразии M размерности n равен

$$(-1)^n\{\operatorname{ch}u\cdot J(M)\}[M^\tau],$$

где M^τ — *Тома пространство* касательного расслоения, $u\in K(M^\tau)$ — класс символа оператора D.

Х. к. сферич. расслоений находятся во взаимно однозначном соответствии с когомологиями классифицирующего пространства BG_n.

Для нечетного простого p в размерностях, меньших $2p(p-1)-1$,

$$H^*(BG;\ \mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p[q_1,\ q_2,\ \ldots]\otimes\Lambda[\beta q_1,\ \beta q_2,\ \ldots],$$

где при всех n классы $q_i \in H^{2i(p-1)}(BG_n;\ \mathbb{Z}_p)$ выражаются по формуле $q_i = \varphi^{-1} P^i \varphi(1)$, здесь P^i — *Стинрода приведенные степени*, φ — изоморфизм Тома, $\Lambda[\beta q_1,\ \beta q_2,\ \ldots]$ — внешняя $\mathbb{Z}_p$-алгебра (теорема Милнора).

Классы q_i являются точными аналогами классов Штифеля — Уитни и так же, как и последние, могут рассматриваться как Х. к. сферич. расслоений, или как классы когомологий пространства BG. Наконец, $H^*(BSG_{2k};\ \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[e]$, где e — класс Эйлера, $H^*(BG_{2k};\ \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[e^2]$.

Показано, что вышеприведенная формула относительно $H^*(BG;\ \mathbb{Z}_p)$ неверна уже в размерности $2p(p-1)-1 : H^{2p(p-1)-1}(BG;\ \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$, и образующая этой группы не выражается через q_i и βq_i, т. е. представляет собой первый экзотический Х. к.

Лит.: [1] Борель А., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения, пер. с франц., М., 1958, с. 163—246; [2] Атья М., Зингер И., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 5, с. 99—142, в. 6, с. 135—49; 1969, т. 24, в. 1, с. 127—82; 1972, т. 27, в. 4, с. 161—78, с. 179—88; [3] Bott R., «Lecture Notes in Mathematics», 1972, v. 299, p. 1—94; [4] Милнор Дж., «Математика», 1959, т. 3, № 4, с. 3—53; 1965, т. 9, № 4, с. 3—40; [5] Понтрягин Л. С., «Докл. АН СССР», 1942, т. 35, с. 35—39; [6] Stiefel E., «Comment. math. helv.», 1935, v. 8, № 4, p. 305—53; [7] Whitney H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1937, v. 43, p. 785—805; [8] Chern S.-S., «Ann. Math.», 1946, v. 47, № 1, p. 85—121; [9] Новиков С. П., «Докл. АН СССР», 1965, т. 163, с. 298—300; [10] Milnor J., «Comment. math. helv.», 1968, v. 43, № 1, p. 51—77; [11] Stasheff J., там же, p. 78—86; [12] Borel A., Hirzebruch F., «Amer. J. Math.», 1958, v. 80, p. 458—538; 1959, v. 81, p. 315—82; 1960, v. 82, p. 491—504; [13] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [14] Милнор Дж., Сташеф Дж., Характеристические классы, пер. с англ., М., 1979.

А. Ф. Харшиладзе.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН матрицы $A = \|a_{ij}\|_1^n$ над полем K — многочлен над полем K

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{Vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{Vmatrix} =$$

$$= (-\lambda)^n + b_1(-\lambda)^{n-1} + \ldots + b_{n-1}(-\lambda) + b_n.$$

Степень Х. м. равна порядку квадратной матрицы A, коэффициент b_1 равен *следу* матрицы A ($b_1 = \operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$), коэффициент b_m равен сумме всех главных *миноров* m-го порядка, в частности $b_n = \det A$. Уравнение $p(\lambda) = 0$ наз. характеристическим уравнением матрицы A, или вековым уравнением.

Корни Х. м., лежащие в K, наз. характеристическими значениями или собственными значениями матрицы A. Если K — числовое поле, употребляются также термины «характеристические числа» или «собственные числа». Иногда рассматривают корни Х. м. в алгебраич. замыкании поля K. Их обычно наз. характеристическими корнями матрицы A. Матрица A порядка n, рассматриваемая над алгебраически замкнутым полем (напр., над полем комплексных чисел) имеет n собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность. См. также *Собственное значение*.

Подобные матрицы имеют один и тот же Х. м. Каждый многочлен над K со старшим коэффициентом $(-1)^n$ является характеристическим для нек-рой матрицы над K порядка n, наз. матрицей Фробениуса.

Лит. см. при статье *Матрица*.

Т. С. Пиголкина.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПОКАЗАТЕЛЬ — 1) Х. п. — то же, что *Ляпунова характеристический показатель*.

2) Х. п. линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффи-

циентами — частные от деления натуральных логарифмов мультипликаторов системы на период коэффициентов системы. В этом случае характеристические показатели Ляпунова системы равны действительным частям Х. п. этой системы. Эквивалентное определение: число α наз. Х. п. линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодич. коэффициентами, если эта система имеет комплексное решение вида $[\exp(\alpha t)]\, y(t)$, где вектор-функция $y(t) \not\equiv 0$ периодическая по t с тем же периодом, $t \in \mathbb{R}$, а $\alpha \in \mathbb{C}$.

3) Встречается также выражение «Х. п. р е ш е н и я системы обыкновенных дифференциальных уравнений», причем рассматриваемая система, вообще говоря, нелинейная. Под этим понимаются Х. п. системы уравнений в вариациях данной системы вдоль данного ее решения, где, в свою очередь, термин «Х. п.» может пониматься как в смысле 1), так и в смысле 2).

В. М. Миллионщиков.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ФУНКЦИОНАЛ — аналог понятия *характеристической функции*, используемый в бесконечномерном случае. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество, Γ — векторное пространство определенных на $\mathfrak{X}$ действительных функций, $\widehat{C}(\mathfrak{X}, \Gamma)$ — наименьшая σ-алгебра подмножеств $\mathfrak{X}$, относительно к-рой измеримы все функции из Γ. Х. ф. вероятностной меры μ, заданной на $\widehat{C}(\mathfrak{X}, \Gamma)$, определяется как комплекснозначный функционал $\hat{\mu}$ на Γ равенством

$$\hat{\mu}(g) = \int_{\mathfrak{X}} \exp[ig(x)]\, d\mu(x), \quad g \in \Gamma.$$

Ниже имеется в виду наиболее важный и простой случай, когда $\mathfrak{X}$ есть сепарабельное действительное банахово пространство и Γ совпадает с его топологическим сопряженным $\mathfrak{X}^*$. В этом случае $\widehat{C}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^*)$ совпадает с σ-алгеброй борелевских множеств пространства $\mathfrak{X}$. Понятие Х. ф. для бесконечномерных банаховых пространств ввел А. Н. Колмогоров [1].

Х. ф. случайного элемента X со значениями в $\mathfrak{X}$, по определению, есть Х. ф. его вероятностного распределения $\mu_X(B) = \mathsf{P}\{X \in B\}$, $B \subset \mathfrak{X}$.

Основные свойства Х. ф.:

1) $\hat{\mu}(0) = 1$ и $\hat{\mu}$ положительно определен, т. е. $\sum_{k,l} \alpha_k \overline{\alpha_l} \hat{\mu}(x_k^* - x_l^*) \geqslant 0$ для любых конечных наборов комплексных чисел α_i и элементов $x_i^* \in \mathfrak{X}^*$;

2) $\hat{\mu}$ непрерывен в сильной топологии и секвенциально непрерывен в $*$-слабой топологии пространства $\mathfrak{X}^*$;

3) $|\hat{\mu}(x^*)| \leqslant 1$,

$$|\hat{\mu}(x_1^*) - \hat{\mu}(x_2^*)|^2 \leqslant 2[1 - \operatorname{Reel} \hat{\mu}(x_1^* - x_2^*)],$$

$$x^*, x_1^*, x_2^* \in \mathfrak{X}^*;$$

4) $\overline{\hat{\mu}(g)} = \hat{\mu}(-g)$; в частности $\hat{\mu}$ принимает только действительные значения (и является четным функционалом) в том и только в том случае, когда мера μ симметрична, т. е. $\mu(B) = \mu(-B)$, где $-B = \{x: -x \in B\}$;

5) Х. ф. однозначно определяет меру;

6) Х. ф. свертки двух вероятностных мер (суммы двух независимых случайных величин) есть произведение их Х. ф.

В конечномерном случае метод Х. ф. основан на теореме о непрерывности соответствия между мерами и их Х. ф., и на теореме об описании класса Х. ф. В бесконечномерном случае прямые аналоги этих теорем не имеют места. Если последовательность вероятностных мер (μ_n) слабо сходится к μ, то $(\hat{\mu}_n)$ поточечно сходится к $\hat{\mu}$ и эта сходимость равномерна на ограниченных множествах из $\mathfrak{X}^*$; если K есть слабо относительно компактное семейство вероятностных мер в $\mathfrak{X}$, то семейство $\{\hat{\mu}: \mu \in K\}$ равностепенно непрерывно в сильной

топологии пространства $\mathfrak{X}^*$. Обратные утверждения верны только в конечномерном случае. Однако условия сходимости и слабой относительной компактности семейств вероятностных мер можно выразить в терминах Х. ф. (см. [2]). В отличие от конечномерного случая, не всякий положительно определенный нормированный (равный в нуле единице) непрерывный функционал является Х. ф.— непрерывности в метрич. топологии не хватает. Топология в $\mathfrak{X}^*$ наз. достаточной, соответственно необходимой, если в этой топологии непрерывность положительно определенного нормированного функционала достаточна, соответственно необходима, для того чтобы он был Х. ф. нек-рой вероятностной меры в $\mathfrak{X}$. Необходимая и достаточная топология наз. S-топологией. Пространство $\mathfrak{X}$ наз. S-пространством, если в $\mathfrak{X}^*$ существует S-топология. Гильбертово пространство является S-пространством (см. [3]).

Наиболее важный класс Х. ф.— характеристич. функционалы гауссовских мер. Мера μ в $\mathfrak{X}$ наз. центрированной гауссовской, если для всех $x^* \in \mathfrak{X}^*$

$$\hat{\mu}(x^*) = \exp\left[-\frac{1}{2} x^*(Rx^*)\right], \qquad (*)$$

где R — ограниченный линейный положительный оператор из $\mathfrak{X}^*$ в $\mathfrak{X}$ — ковариационный оператор меры μ, к-рый определяется соотношением

$$x^*(Rx^*) = \int x^{*2}(x)\, d\mu(x)$$

(см. [4]). В отличие от конечномерного случая, не всякий функционал вида (*) является Х. ф.— нужны дополнительные ограничения на R, зависящие от пространства $\mathfrak{X}$. Напр., если $\mathfrak{X} = l_p$, $1 \leqslant p < \infty$, то дополнительным (необходимым и достаточным) условием является условие $\sum r_{kk}^{p/2} < +\infty$, где $\| r_{ij} \|$ матрица оператора R в естественном базисе (см. [5]). В частности, в гильбертовом пространстве дополнительным условием является ядерность оператора R.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «C. r. Acad. sci.», 1935, t. 200, p. 1717—18; [2] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 2, с. 177—238; [3] Сазонов В. В., там же, 1958, т. 3, в. 2, с. 201—05; [4] Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А., Вероятностные распределения в банаховых пространствах, М., 1985; [5] Vakhania N. N., «C. r. Acad. sci.», 1965, t. 260, p. 1560—62.

Н. Н. Вахания.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ в теории дифференциальных уравнений с частными производными — см. *Характеристика.*

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ в топологии — непрерывное отображение χ замкнутого n-мерного шара E^n в хаусдорфово топологич. пространство X, являющееся на внутренности $\overset{0}{E^n}$ шара гомеоморфизмом. Множество $e^n = \chi\left(\overset{0}{E^n}\right)$ наз. в этом случае клеткой пространства X, а χ — Х. о. клетки e^n. Если X — клеточное пространство, то клетками пространства X наз. те клетки пространства $|X|$, к-рые составляют клеточное разбиение X.

А. Ф. Харшиладзе.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, вековое уравнение, см. в ст. *Характеристический многочлен.*

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО — 1) Х. ч.— то же, что собственное число, собственное значение матрицы (см. *Характеристический многочлен*).

2) Х. ч. — значение *характеристического класса* касательного расслоения замкнутого многообразия на фундаментальном цикле этого многообразия.

А. Ф. Харшиладзе.

ХАРАКТЕРОВ ГРУППА группы G — группа всех *характеров* $X(G) = \mathrm{Hom}(G, A)$ группы G со

значениями в абелевой группе A относительно операции

$$(\alpha\beta)(g) = \alpha(g)\beta(g) \quad (g \in G,\ \alpha,\ \beta \in X(G)),$$

индуцированной операцией в A. В случае когда $A = T$,

$$X(G) \cong \prod_p \mathrm{Hom}(G,\ Z(p^\infty)),$$

где $Z(p^\infty)$ — квазициклические группы, взятые по одной для каждого простого числа p. Эта группа алгебраически компактна (см. *Сервантная подгруппа*). Если при этом G абелева, то $X(G)$ является *полной группой* тогда и только тогда, когда G — группа без кручения, и редуцированной тогда и только тогда, когда G периодична [4].

Группа характеров топологической группы G — группа $X(G)$ всех непрерывных гомоморфизмов $G \to T$, снабженная компактно открытой топологией. Она является хаусдорфовой абелевой топологич. группой. Если группа G локально компактна, то и $X(G)$ локально компактна, если G компактна, то $X(G)$ дискретна, а если G дискретна, то $X(G)$ компактна.

Примеры Х. г.:

$$X(T) \cong \mathbb{Z},\ X(\mathbb{Z}) \cong T,\ X(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R},\ X(G) \cong G$$

для любой конечной дискретной абелевой группы G.

С каждым непрерывным гомоморфизмом топологических групп $\varphi\colon G \to H$ связан гомоморфизм Х. г. $\varphi^*\colon X(H) \to X(G)$. При этом соответствие $G \mapsto X(G)$, $\varphi \mapsto \varphi^*$ есть контравариантный функтор из категории топологических групп в категорию топологических абелевых групп. Если ограничиться категорией локально компактных абелевых групп G, то этот функтор определяет эквивалентность указанной категории и двойственной к ней категории (см. *Понтрягина двойственность*).

Группа характеров алгебраической группы G над полем K — группа $X(G)$ всех рациональных характеров $G \to K^* = G_m$. Если G — абелева аффинная алгебраич. группа, то $X(G)$ порождает пространство $K[G]$ (т. е. является базисом в этом пространстве) тогда и только тогда, когда G — *диагонализируемая алгебраическая группа*, т. е. изоморфна замкнутой подгруппе нек-рого тора G_m^s. При этом $X(G)$ — конечно порожденная абелева группа (без p-кручения, если $\mathrm{char}\ K = p > 0$) и $K[G]$ является групповой алгеброй группы $X(G)$ над K, что дает возможность определить двойственность между категорией диагонализируемых групп и категорией конечно порожденных абелевых групп (без p-кручения, если $\mathrm{char}\ K = p > 0$). В случае когда G — конечная группа (рассматриваемая как 0-мерная алгебраич. группа), эта двойственность совпадает с классич. *двойственностью* конечных абелевых групп.

Для любой связной алгебраич. группы G группа $X(G)$ не имеет кручения. В частности, диагонализируемая группа G является тором тогда и только тогда, когда $X(G) \cong \mathbb{Z}^s$.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Моррис С., Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп, пер. с англ., М., 1980; [3] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [4] Фукс Л., Бесконечные абелевы группы, пер. с англ., т. 1, М., 1974; [5] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980.

А. Л. Онищик.

ХАРАКТЕРОВ ФОРМУЛА, формула Вейля, — формула, выражающая *характер* $\mathrm{ch}\, V(\Lambda)$ неприводимого конечномерного представления полупростой алге-

бры Ли $\mathfrak{g}$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 через его старший вес Λ:

$$\operatorname{ch} V(\Lambda) = \frac{\sum_{w \in W} (\det w)\, e^{w(\Lambda+\rho)}}{\sum_{w \in W} (\det w)\, e^{w(\rho)}} =$$

$$= \frac{\sum_{w \in W} (\det w)\, e^{w(\Lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in R^+} (1-e^{-\alpha})}$$

(здесь W — *Вейля группа*, $\rho = {}^1/_2 \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$ — полусумма положительных корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Следствиями Х. ф. являются формула для размерности представления:

$$\dim V(\Lambda) = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{(\Lambda+\rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)}$$

и формула для кратности веса, а также формула Стейнберга для числа m_Λ вхождений неприводимого $\mathfrak{g}$-модуля $V(\Lambda)$ в $V(\Lambda') \otimes V(\Lambda'')$:

$$m_\Lambda = \sum_{s,t \in W} \det(st)\, P(\Lambda+2\rho-s(\Lambda'+\rho)-t(\Lambda''+\rho)),$$

где $P(\mu)$ — число различных представлений элемента μ в виде суммы положительных корней (см. [1]).

Х. ф. обобщается на случай неприводимых представлений градуированных алгебр Ли, определяемых неразложимой *Картана матрицей* (см. также *Ли градуированная алгебра*). Это обобщение приводит к следующим комбинаторным тождествам:

$$e(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i t^{i(3i+1)/2} \quad \text{(тождество Эйлера)},$$

$$\frac{e^2(t)}{e(t^2)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i t^{i^2} \quad \text{(тождество Гаусса)},$$

$$e^3(t) = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i (2i+1) t^{i(i+1)/2} \quad \text{(тождество Якоби)},$$

где

$$e(t) = \prod_{n \geqslant 1} (1-t^n),$$

$$\prod_{i \geqslant 1} (1-t^{5i-4})^{-1} (1-t^{5i-1})^{-1} =$$

$$= \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^{n^2}}{(1-t)\ldots(1-t^n)}$$

(тождество Роджерса — Рамануджана) и другие (см. [3], [4]).

Аналог Х. ф. получен также для неприводимых представлений нек-рых простых *супералгебр* Ли. [2].

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли, пер. с франц., М., 1978; [2] Лейтес Д. А., «Функциональный анализ», 1980, т. 14, № 2, с. 35—38; [3] Kac V. G., «Adv. Math.», 1978, v. 30, p. 85—136; [4] Leprovsky J., в кн.: Lie algebras and related topics, B.— Hdlb.— N. Y., 1982. *Д. А. Лейтес.*

ХАРДИ ВАРИАЦИЯ — одна из числовых характеристик функции нескольких переменных. Пусть функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, $n = 2, 3, \ldots$, задана на n-мерном параллелепипеде

$$D_n = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

и

$$\Delta_{h_k}(f; x) = f(x_1, \ldots, x_k+h_k, \ldots, x_n) -$$

$$-f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n), \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$\Delta_{h_1, \ldots, h_k}(f; x) = \Delta_{h_k}\left(\Delta_{h_1, \ldots, h_{k-1}}; x\right), \quad k = 2, \ldots, n.$$

Пусть, далее, Π — произвольное разбиение параллелепипеда гиперплоскостями

$$x_s = x_s^{(r_s)}, \ r_s = 0, 1, \ldots, l_s; \ s = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_s^{(r_s)} < x_s^{(r_s+1)}, \ x_s^{(0)} = a_s, \ x_s^{(l_s)} = b_s, \ x_s^{(r_s+1)} - x_s^{(r_s)} = h_s^{(r_s)}$$

на n-мерные параллелепипеды и $\tilde{H}_n$ — класс всех функций $f(x)$, для к-рых

$$\tilde{H}_n(f)=\sup_{\pi}\sum_{r_1=0}^{l_1-1}\cdots\sum_{r_n=0}^{l_n-1}\left|\Delta_{h_1^{(r_1)}\ldots h_n^{(r_n)}}\left(f;\ x_1^{(r_1)},\ldots,\right.\right.$$
$$\left.\left.x_n^{(r_n)}\right)\right|<\infty.$$

Пусть, теперь, $\alpha=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_s)$, $s=1,\ \ldots,\ n-1$ — целочисленный вектор, координаты к-рого удовлетворяют неравенствам $1\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_s\leqslant n$ и $\overline{\alpha}$ — целочисленный вектор размерности $n-s$ такой, что его координаты образуют строго возрастающую последовательность и состоят из всех тех чисел $1,\ \ldots,\ n$, к-рые не содержатся среди $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_s$. Тогда каждую точку $x\in D_n$ можно записать в виде $x=(x^{\alpha},\ x^{\overline{\alpha}})$. Если координаты $x_{\alpha_1},\ \ldots,\ x_{\alpha_s}$ точки $x\in D_n$ фиксированы на значениях $\overset{\circ}{x}_{\alpha_1},\ \ldots,\ \overset{\circ}{x}_{\alpha_s}$, то будем писать $x=(\overset{\circ}{x}^{\alpha},\ x^{\overline{\alpha}})$.

Вариация Харди функции $f(x)$ на D_n:

$$H(f,\ D_n)\overset{\text{def}}{=}\sup_{\alpha}\sup_{\overset{\circ}{x}^{\alpha}}\tilde{H}_{n-s}(f(\overset{\circ}{x}^{\alpha},\ x^{\overline{\alpha}})).$$

Если $H(f,\ D_n)<\infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет ограниченную (конечную) Х. в. на параллелепипеде D_n, а класс всех таких функций обозначается $H(D_n)$. Этот класс при $n=2$ был введен Г. Харди [1] (см. также [2]) в связи с исследованием сходимости двойных рядов Фурье. Он доказал, что прямоугольные частичные суммы двойного ряда Фурье функции $f(x_1,\ x_2)$ класса $H(Q_2)$ ($Q_2=[0,\ 2\pi]\times[0,\ 2\pi]$), имеющей период 2π по каждой переменной, сходятся в каждой точке $(x_1,\ x_2)$ к числу

$$\frac{1}{4}\{f(x_1+0,\ x_2+0)+f(x_2+0,\ x_2-0)+$$
$$+f(x_1-0,\ x_2+0)+f(x_1-0,\ x_2-0)\},$$

где

$$f(x_1\pm 0,\ x_2\pm 0)\overset{\text{def}}{=}\lim_{\varepsilon_1\to+0,\ \varepsilon_2\to+0}f(x_1\pm\varepsilon_1,\ x_2\pm\varepsilon_2).$$

Для того чтобы функция $f(x)$ входила в класс $H(D_n)$, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$, где f_1 и f_2 такие конечные на D_n функции, что $\Delta_{h_1,\ \ldots,\ h_k}(f;\ x)\geqslant 0$, $k=2,\ \ldots,\ n$, при всех $x\in D_n$ и допустимых приращениях $h_1,\ \ldots,\ h_n$. Класс $H(D_n)$ содержится в классе $A(D_n)$ функций, имеющих ограниченную *Арцела вариацию* на D_n.

Лит.: [1] Hardy G. H., «Quart. J. Math.», 1905, v. 37, № 1, p. 57—79; [2] Hahn H., Theorie der reellen Funktionen, Bd 1, B., 1921.

Б. И. Голубов.

ХАРДИ КЛАССЫ H^p, $p>0$, — классы аналитич. в круге $D=\{|z|<1\}$ функций $f(z)$, для к-рых

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_T|f(r\xi)|^p\,dm(\xi)\right\}^{1/p}<\infty,\qquad(*)$$

где $dm=|d\xi|/2\pi$ — нормированная мера Лебега на окружности $T=\{|\xi|=1\}$; это равносильно условию существования у субгармонич. функции $|f(z)|^p$ гармонич. мажоранты в D. К Х. к. причисляют также класс H^{∞} ограниченных аналитич. функций в D. Введенные Ф. Риссом [1] и названные им в честь Г. Харди (G. Hardy), первым рассмотревшего свойства p-средних в условии (*), Х. к. играют важную роль в различных вопросах граничных свойств функций, гармонич. анализа, теории степенных рядов, линейных операторов, случайных процессов, экстремальных и аппроксимационных задач.

При любых $0<q<p\leqslant\infty$ справедливы точные вложения $H^p\subset H^q\subset N$, где N — класс Неванлинны *ограни-*

ченного вида функций, в частности функции Х. к. имеют почти всюду на T *угловые граничные значения* $f^*(\xi)$, по к-рым исходные функции $f(z)$ в D восстанавливаются однозначно. Если $f(z)\in H^p$, то $f^*(\xi)\in L^p(T)$ (обратное верно не для любой аналитич. функции $f(z)$) и

$$\lim_{r\to 1-}\int_T |f(r\xi)-f^*(\xi)|^p\,dm(\xi)=0.$$

Классы H^p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, — это в точности классы аналитических в D функций $f(z)$, к-рые имеют граничные значения $f^*(\xi)\in L^p(T)$ и восстанавливаются по ним посредством интеграла Коши. Функции же, представимые в D интегралом типа Коши или Коши—Стилтьеса, принадлежат, вообще говоря, лишь классам H^p, $p<1$ (обратное неверно). Однолистные функции в D принадлежат всем классам H^p, $p<1/2$. Условие $f'(z)\in H^1$ необходимо и достаточно для того, чтобы аналитич. функция $f(z)$ была непрерывна в $\overline{D}$ и абсолютно непрерывна на T. Если функция $f(z)$ конформно отображает круг D на жорданову область G, то условие $f'(z)\in H^1$ равносильно спрямляемости контура ∂G (см. [2], [5]).

Существование взаимно однозначного соответствия между функциями Х. к. и их граничными значениями позволяет рассматривать, когда это удобно, функции $f(z)\in H^p$ как функции на T, при этом классы H^p становятся замкнутыми подпространствами банаховых (полных линейных метрических, если $p<1$) пространств $L^p(T)$. При $0<p<\infty$ эти подпространства совпадают с замыканиями в $L^p(T)$ многочленов от $\xi=e^{it}$, а при $1\leqslant p\leqslant\infty$ — с совокупностями тех функций из $L^p(T)$, коэффициенты Фурье к-рых равны нулю для отрицательных индексов. Теорема Рисса утверждает, что отображение P, выражаемое через ряды Фурье равенством

$$P\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{int}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_ne^{int},$$

является ограниченной проекцией банахова пространства $L^p(T)$ на H^p при любом $1<p<\infty$, но не при $p=1,\ \infty$. Отсюда вытекает совпадение действительных пространств $L^p_{\mathbb{R}}(T)$ и $\operatorname{Re}H^p$, $1<p<\infty$; при других же значениях p эти пространства существенно различны как по аппроксимативным характеристикам и структуре сопряженных пространств, так и (при $p=1$) в отношении свойств коэффициентов Фурье (см. [7], [9]).

Множества нулей $\{z_k\}$ нетривиальных функций Х. к. полностью характеризуются условием $\sum_k(1-|z_k|)<\infty$, обеспечивающим равномерную сходимость внутри D канонич. *Бляшке произведений*

$$B(z)=z^n\prod_k\frac{|z_k|}{z_k}\,\frac{z_k-z}{1-\overline{z}_k\cdot z}\in H^\infty.$$

Для любой функции $f(z)\in H^p$, $f(z)\not\equiv 0$, $p>0$, имеет место факторизация Рисса $f(z)=B(z)\cdot f_0(z)$, где $B(z)$ — произведение Бляшке, построенное по нулям функции $f(z)$, а $f_0(z)\in H^p$ и $f_0(z)\neq 0$ в D. Функция $f_0(z)$ в свою очередь разлагается в произведение $f_0(z)=F(z)\cdot S(z)$ внешней функции

$$F(z)=\exp\left\{\int_T\frac{\xi+z}{\xi-z}\ln\chi(\xi)\,dm(\xi)+i\alpha\right\},\quad\alpha\in\mathbb{R},$$

и внутренней сингулярной функции

$$S(z)=\exp\left\{-\int_T\frac{\xi+z}{\xi-z}\,d\mu(\xi)\right\},$$

где $\chi(\xi)\geqslant 0$, $\ln\chi(\xi)\in L^1(T)$, а $d\mu$ — неотрицательная сингулярная мера на T. Условия

$$f(z)\in H^p,\quad F(z)\in H^p,\quad \chi(\xi)\in L^p(T)$$

равносильны, при этом $|f^*(\xi)|=|F^*(\xi)|=\chi(\xi)$ почти всюду на T. Внутренние функции $G(z)$, имеющие вид $G(z)=B(z)\cdot S(z)$, полностью характеризуются условиями $|G(z)|<1$ в D и $|G^*(\xi)|=1$ почти всюду на T. Часто используют разложение $f(z)=\sqrt{f_0(z)\cdot(\sqrt{f_0(z)}\,B(z))}$ произвольной функции $f(z)\in H^1$ в произведение двух функций из H^2 (см. [4], [5]).

Класс H^2 занимает особое место среди Х. к., так как является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром и имеет простое описание через коэффициенты Тейлора:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2 \Leftrightarrow \{a_n\}\in l^2.$$

Важную роль сыграло изучение оператора умножения на z, или оператора сдвига, в пространстве H^2; оказалось, что все инвариантные подпространства этого оператора порождены внутренними функциями $G(z)$, т. е. имеют вид $G(z)\cdot H^2$ (см. [4]).

Относительно поточечного умножения и sup-нормы класс H^∞ является банаховой алгеброй с весьма сложным строением пространства максимальных идеалов $\mathfrak{M}$ и границы Шилова (см. [4]); вопрос о плотности идеалов $(z-\xi)\cdot H^\infty$, $\xi\in D$, в пространстве $\mathfrak{M}$ с обычной топологией Гельфанда (т. н. проблема короны) был решен положительно на основе описания универсальных интерполяционных последовательностей — последовательностей $\{z_n\}$, $z_n\in D$, таких, что $\{\{f(z_n)\}: f(z)\in H^\infty\}=l^\infty$ (см. [5]).

Х. к. $H^p(G)$, $p>0$, аналитич. функций $f(z)$ в областях $G\subset\mathbb{C}$, отличных от круга, можно определить (в общем случае неэквивалентно) исходя либо из условия существования у функций $|f(z)|^p$ гармонич. мажоранты в G, либо из условия ограниченности интегралов $\int_{L_r}|f(z)|^p|dz|$ по семействам контуров $\{L_r\}$, $L_r\subset G$, в каком-то смысле приближающих границу области G. Первый способ позволяет определить также Х. к. на римановых поверхностях. Второй способ приводит к классам, лучше приспособленным для решения экстремальных и аппроксимационных задач; в случае жордановых областей G со спрямляемой границей последние классы наз. классами Смирнова и обозначаются $E^p(G)$ (см. [2]). Для полуплоскости, напр. $P=\{\operatorname{Re} z>0\}$, классы $H^p(P)$, $p>0$, определяемые условием

$$\sup_{x>0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^p\,dy<\infty,$$

по свойствам близки к Х. к. для круга, однако их приложения в гармонич. анализе связаны уже не с теорией рядов Фурье, а с теорией преобразований Фурье.

Х. к. аналитич. функций $f(z)=f(z_1,\ \ldots,\ z_n)$ в единичном шаре B^n и единичном поликруге D^n пространства $\mathbb{C}^n$ определяются условием (*) с заменой окружности T соответственно сферой ∂B^n или остовом T^n поликруга. Специфика многомерного случая проявляется прежде всего в отсутствии простой характеристики множеств нулей и факторизации функций соответствующих Х. к. (см. [6], [10]). Х. к. определяются, причем различными способами, и для других областей в $\mathbb{C}^n$ (см. [10]).

Многомерными аналогами Х. к. (см. [3]) являются т. н. пространства Харди — пространства $H^p(\mathbb{R}^n)$, $p>0$, систем Рисса — действительных вектор-функций $F(x,y)=\{u_j(x,y)\}_{j=0}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$, $y>0$, удовлетворяющих обобщенным условиям Коши—Римана

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0,\quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k}=\frac{\partial u_k}{\partial x_j},\quad x_0=y,$$

для к-рых

$$\sup_{y>0}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,\ y)|^p\,dx\right\}^{1/p}<\infty.$$

Определение этих пространств можно дать и в терминах лишь «действительных частей» $u_0(x,\ y)$ систем $F(x,\ y)$, потребовав, чтобы функция $u_0(x,\ y)$ была гармонической, а ее максимальная функция по некасательным путям

$$M_a u(x)=\sup_{t,\ y}\{|u_0(t,\ y)|:|t-x|<ay\}\in L^p(\mathbb{R}^n),\quad a>0.$$

При $p>1$ переход от функции $u_0(x,\ y)$ к ее граничным значениям дает отождествление пространств $H^p(\mathbb{R}^n)$ и $L^p(\mathbb{R}^n)$, поэтому интерес представляет лишь случай $p\leqslant 1$. Именно в рамках пространств $H^p(\mathbb{R}^n)$ были первоначально установлены такие фундаментальные результаты теории Х. к., как реализация сопряженного пространства $(H^1)^*$ в виде пространства функций ограниченного среднего колебания (см. [8], [9]) и атомич. разложение классов H^p, $p\leqslant 1$ (см. [7]). Характеристика Х. к. в терминах максимальной функции в ряде случаев требует привлечения вероятностных понятий, связанных с броуновским движением (см. [8]).

Абстрактные Х. к. возникают в теории равномерных алгебр и не связаны непосредственно с аналитич. функциями. Фиксируется замкнутая алгебра A непрерывных функций на компакте X и нек-рый гомоморфизм φ: $A\longrightarrow\mathbb{C}$; существует положительная мера $d\mu$ на X, представляющая φ: $\varphi(f)=\int_X f\cdot d\mu$, $f\in A$. По определению, классы $H^p(d\mu)$, $0<p\leqslant\infty$, суть замыкания (слабое замыкание при $p=\infty$) алгебры A в пространствах $L^p(d\mu)$; изучение классов $H^p(d\mu)$ позволяет получить дополнительную информацию об алгебре A (см. [11]).

Лит.: [1] Riesz F., «Math. Z.», 1923, Bd 18, S. 87—95; [2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [3] Stein E., Weiss G., «Acta math.», 1960, v. 103, p. 25—62; [4] Гофман К., Банаховы пространства аналитических функций, пер. с англ., М., 1963; [5] Duren P., Theory of H^p spaces, N. Y.— L., 1970; [6] Рудин У., Теория функций в поликруге, пер. с англ., М., 1974; [7] Coifman R. R., Weiss G., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1977, v. 83, № 4, p. 569—645; [8] Petersen K. E., Brownian motion, Hardy spaces and bounded mean oscillation, L., 1977; [9] Koosis P., Introduction to H_p spaces. With an appendix on Wolff's proof of the corona theorem, Camb., 1980; [10] Rudin W., Function theory in the unit ball of C^n, N. Y.— B., 1980; [11] Гамелин Т., Равномерные алгебры, пер. с англ., М., 1973.

С. В. Шведенко.

ХАРДИ НЕРАВЕНСТВО для рядов: если $p>1$, $a_n\geqslant 0$ и $A_n=a_1+\ldots+a_n$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p<\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p,$$

кроме случая, когда все a_n равны нулю. Константа $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ в этом неравенстве наилучшая.

Х. н. для интегралов

$$\int_0^{+\infty}x^{-p}\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|^p dx<\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^{+\infty}|f(x)|^p\,dx,\quad p>1$$

и

$$\int_0^{+\infty}\left|\int_x^{+\infty}f(t)\,dt\right|^p dx<p^p\int_0^{+\infty}|xf(x)|^p\,dx,\quad p>1.$$

Неравенства справедливы для всех функций, для к-рых конечны правые части неравенств, кроме случая, когда функция f почти всюду на интервале $(0,\ +\infty)$ равна нулю (в этом случае неравенства обращаются в равен-

ства). Константы $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ и p^p являются наилучшими. Интегральные Х. н. обобщаются на произвольные промежутки:

$$\int_a^b \left| x^{\alpha-1} \int_a^x f(t)\,dt \right|^p dx \leqslant c \int_a^b |x^\alpha f(x)|^p\,dx, \quad \alpha < 1-\frac{1}{p},$$

$$\int_a^b \left| x^{\alpha-1} \int_x^b f(t)\,dt \right|^p dx \leqslant c \int_a^b |x^\alpha f(x)|^p\,dx, \quad \alpha > 1-\frac{1}{p},$$

$$0 \leqslant a < b \leqslant +\infty, \quad 1 \leqslant p \leqslant +\infty,$$

где c — нек-рые постоянные.

Обобщенными неравенствами Харди наз. неравенства вида

$$\int_a^b \left| \varphi(x) \int_a^x f(t)\,dt \right|^p dx \leqslant c \int_a^b |\psi(x) f(x)|^p\,dx, \quad (1)$$

$$\int_a^b \left| \varphi(x) \int_x^b f(t)\,dt \right|^p dx \leqslant c \int_a^b |\psi(x) f(x)|^p\,dx. \quad (2)$$

В случае $a=0$ и $b=+\infty$ неравенство (1) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sup_{x>0} \left[\int_x^{+\infty} |\varphi(t)|^p\,dt \right]^{1/p} \left[\int_0^x |\psi(t)|^{-p'}\,dt \right]^{1/p'} < +\infty,$$

а неравенство (2) тогда и только тогда, когда

$$\sup_{x>0} \left[\int_0^x |\varphi(t)|^p\,dt \right]^{1/p} \left[\int_x^{+\infty} |\psi(t)|^{-p'}\,dt \right]^{1/p'} < +\infty,$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Лит.: [1] Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; [2] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [3] Muckenhoupt B., «Studia math.», 1972, v. 44, p. 31—38. *Л. Д. Кудрявцев.*

ХАРДИ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F(x) = \int_0^\infty C_\nu(xt)\, tf(t)\,dt,$$

где

$$C_\nu(z) = \cos \pi\rho J_\nu(z) + \sin \pi\rho Y_\nu(z),$$

$J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя 1-го и 2-го рода соответственно. При $\rho=0$ Х. п. совпадает с одной из форм преобразования Ганкеля, при $\rho=1/2$ с Y-преобразованием. Х. п. предложено Г. Харди [1].

Формула обращения

$$f(t) = \int_0^\infty \Phi(tx)\, xF(x)\,dx,$$

где

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (x/2)^{\nu+2\rho+2n}}{\Gamma(\rho+n+1)\,\Gamma(\nu+\rho+n+1)}.$$

Х. п. определено также для нек-рых классов обобщенных функций.

Лит.: [1] Hardy G. H., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1925, v. 23, № 7, p. 61; [2] Брычков Ю. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования обобщенных функций, М., 1977. *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.*

ХАРДИ ПРИЗНАК равномерной сходимости функциональных рядов: если последовательность действительных функций $a_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, монотонна при каждом $x \in E$, где E — нек-рое множество, и равномерно стремится к нулю на E, а последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^\infty b_n(x)$ ограничена на E (функции $b_n(x)$ могут принимать комплексные значения), то ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n(x)\, b_n(x)$ равномерно сходится на множестве E.

Х. п. установлен Г. Харди [1].

Лит.: [1] Hardy G. H., «Proc. Lond. Math. Soc. (2)», 1906, v. 4, p. 247—65. *Л. Д. Кудрявцев.*

ХАРДИ ТЕОРЕМА в теории функций комплексного переменного: если $f(z)$ — регулярная

аналитич. функция в круге $|z|<R$, α — любое положительное число и

$$M_\alpha(r)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^\alpha\,d\theta\right\}^{1/\alpha},\quad 0<r<R,$$

— среднее значение, то $M_\alpha(r)$ есть неубывающая функция от r, логарифмически выпуклая относительно $\ln r$. Х. т. установлена Г. Харди [1].

Утверждение о логарифмич. выпуклости остается в силе и для функции $f(z)$, регулярной в кольце $0\leqslant\rho<|z|<R$ (см. [1]).

Эта Х. т. обобщается для *субгармонических функций* в шаре пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$ (см. также [2]).

Лит.: [1] Hardy G. H., «Proc. Lond. Math. Soc. (2)», 1915, v. 14, p. 269—77; [2] Привалов И. И., Субгармонические функции, М. — Л., 1937.

Е. Д. Соломенцев.

ХАРДИ — ЛИТЛВУДА ПРИЗНАК сходимости рядов Фурье: если 2π-периодич. функция $f(x)$ такова, что

$$f(x_0+h)-f(x_0)=o(1/\log 1/|h|),\quad |h|\to+0,$$

а коэффициенты Фурье a_n, b_n этой функции удовлетворяют условиям

$$a_n=O(n^{-\delta}),\quad b_n=O(n^{-\delta}),\quad n\to+\infty,$$

при нек-ром $\delta>0$, то ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к $f(x_0)$.

Х.—Л. п. установлен Г. Харди и Дж. Литлвудом ([1]).

Лит.: [1] Hardy G. H., Littlewood J. E., «J. Lond. Math. Soc.», 1932, v. 7, p. 252—56; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, с. 271.

Б. И. Голубов.

ХАРДИ — ЛИТЛВУДА ПРОБЛЕМА — задача нахождения асимптотич. формулы для числа $Q(n)$ решений уравнения

$$p+x^2+y^2=n, \tag{1}$$

где p — простое, x и y — целые, n — натуральное число ($n\to\infty$). Аналогом этой задачи является проблема нахождения асимптотики для числа решений уравнения

$$p-x^2-y^2=l, \tag{2}$$

где $l\neq 0$ — фиксированное целое число, $p\leqslant n$ ($n\to\infty$).

Х.—Л. п. была поставлена Г. Харди (G. Hardy) и Дж. Литлвудом (J. Littlewood) в 1923 и рассмотрена ими на основе эвристич. и гипотетич. соображений.

Дисперсионный метод, разработанный Ю. В. Линником, позволил ему найти асимптотику для (1):

$$Q(n)=\pi A_0\frac{n}{\ln n}\prod_{p/n}\frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi_4(p)}+R(n),$$

где

$$A_0=\prod_{p/n}\left(1+\frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right),\quad R(n)=O\left(\frac{n}{(\ln n)^{1,042}}\right).$$

Из аналогичной формулы для (2) следует бесконечность множества простых чисел вида $p=x^2+y^2+l$. С помощью дисперсионного метода найдена асимптотика для числа решений обобщенного уравнения Харди — Литлвуда $p+\varphi(x,y)$, где p — простое, $\varphi(x,y)$ — заданная примитивная положительно определенная квадратичная форма.

Рассмотрение аналогичного уравнения $p-\varphi(x,y)=l$ приводит к доказательству бесконечности множества простых чисел вида $p=\varphi(x,y)+l$.

Теорема Виноградова — Бомбьери о распределении простых чисел в арифметич. прогрессиях в среднем также доставляет решение Х.— Л. п., заменяя фактически расширенную гипотезу Римана теоремами типа *большого решета*.

Лит.: [1] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [2] Бредихин Б. М., Линник Ю. В., «Матем. сб.», 1966, т. 71, № 2, с. 145—61; [3] Бредихин Б. М., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 2, с. 89—130.

Б. М. Бредихин.

ХАРДИ — ЛИТЛВУДА ТЕОРЕМА — 1) Х. — Л. т. в теории функций комплексного пе-

ременного: если $a_k \geqslant 0$, $k = 0, 1, \ldots$, и для степенного ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

с радиусом сходимости 1 имеет место на действительной оси асимптотич. равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sim \frac{1}{1-x}, \quad x \longrightarrow 1,$$

то для частичных сумм s_n имеет место асимптотич. равенство

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_n \sim n, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Эта Х.— Л. т., установленная Г. Харди и Дж. Литлвудом [1], является одной из *тауберовых теорем*.

Лит.: [1] Hardy G. H., Littlewood J. E., «Proc. Lond. Math. Soc. (2)», 1914, v. 13, p. 174—91; [2] Титчмарш Е., Теория функций, пер. с англ., М.— Л., 1951.

Е. Д. Соломенцев.

2) Х.—Л. т. о неотрицательной суммируемой функции — теорема об интегральных свойствах нек-рой функции, связанной с данной. Установлена Г. Харди и Дж. Литлвудом ([1]). Пусть $f(x)$ неотрицательна и суммируема на $[a, b]$ и пусть

$$\theta(x) = \theta_f(x) = \sup_{\xi \in [a, b],\ \xi \neq x} \frac{1}{x-\xi} \int_{\xi}^{x} f(t)\, dt.$$

Тогда:

1) если $f \in L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, то

$$\int_a^b \theta^p(x)\, dx \leqslant 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b f^p(x)\, dx;$$

2) если $f \in L(a, b)$, то для всех $\alpha \in (0, 1)$

$$\int_a^b \theta^{\alpha}(x)\, dx \leqslant \frac{2\,(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \int_a^b f(x)\, dx;$$

3) если $f(x) \ln^+ f(x) \in L(a, b)$, то

$$\int_a^b \theta(x)\, dx \leqslant 4 \int_a^b f(x) \ln^+ f(x)\, dx + A,$$

где A зависит только от $b-a$. Здесь

$$\ln^+ u = \begin{cases} 0, & u < 1, \\ \ln u & u \geqslant 1. \end{cases}$$

Пусть $f(x)$ — периодич. функция с периодом 2π, суммируемая на $[-\pi, \pi]$, и

$$M(x) = M_f(x) = \sup_{0 < |t| \leqslant \pi} \frac{1}{t} \int_x^{x+t} |f(u)|\, du.$$

Тогда $M_f(x) \leqslant \theta_{|f|}(x)$, где $\theta_{|f|}(x)$ построена для $[-2\pi, 2\pi]$. Из теоремы для $\theta(x)$ получаются интегральные неравенства для $M(x)$.

Лит.: [1] Hardy G., Littlewood J., «Acta math.», 1930, v. 54, p. 81—116; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965.

А. А. Конюшков.

ХАССЕ ИНВАРИАНТ — 1) Х. и. $h(A)$ центральной простой алгебры A над локальным полем K (соответственно над полями $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) — образ класса алгебры A при канонич. изоморфизме *Брауэра группы* поля K на группу всех комплексных корней из 1 (соответственно на группы $\{\pm 1\}$, $\{1\}$). Для циклич. алгебры A с образующими a, b и определяющими соотношениями $a^n = x$, $b^n = y$, $ba = \varepsilon ab$, где $x, y \in K^*$, $\varepsilon \in K$ — первообразный корень степени n из 1, Х. и. $h(A)$ совпадает с *норменным вычетом* (символом Гильберта) $(x, y)_n$. В частности, Х. и. алгебры кватернионов равен -1.

Для центральной простой алгебры A над глобальным полем K и любого нормирования v этого поля определяется локальный Х. и. $h_v(A)$ как Х. и. алгебры $A \otimes_K K_v$ над пополнением K_v поля K относительно топологии, определяемой нормированием v. Локальные

Х. и. однозначно определяют класс алгебры A. Они связаны следующими условиями: 1) имеется лишь конечное число нормирований v, для к-рых $h_v(A) \neq 1$; 2) $\prod_v h_v(A) = 1$ (закон взаимности). В остальном они могут принимать произвольные значения.

Х. и. предложен Х. Хассе [1], [2].

Лит.: [1] Hasse H., «Math. Ann.», 1931, Bd 104, S. 495—534; [2] его же, там же, 1933, Bd 107, S. 731—60; [3] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [4] Вейль А., Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972.

2) Х. и., инвариант Хассе—Минковского, символ Хассе, $\varepsilon(f)$ невырожденной квадратичной формы $f \sim a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$ над локальным полем K характеристики $\neq 2$ (соответственно над полями $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) — произведение

$$\prod_{i<j} (a_i, a_j) = \pm 1,$$

где $(\ ,\ )$ — квадратичный символ Гильберта, то есть $(a, b) = 1$, если квадратичная форма $ax^2 + by^2$ представляет 1 в поле K и $(a, b) = -1$ в противном случае. Х. и. зависит только от класса эквивалентности формы f, а не от выбора диагональной формы в этом классе. Иногда Х. и. определяют как произведение $\prod_{i \leqslant j} (a_i, a_j)$, что отличается от приведенного выше определения множителем $(d(f), d(f))$, где $d(f)$ — дискриминант формы f.

В случае локального поля K число n переменных, дискриминант и Х. и. определяют класс формы f. При $n \geqslant 3$ инварианты $d(f)$ и $\varepsilon(f)$ могут принимать любые значения независимо друг от друга; при $n = 2$ исключается случай $d(f) = -1$, $\varepsilon(f) = -1$; при $n = 1$ всегда $\varepsilon(f) = 1$.

В случае $K = \mathbb{R}$ Х. и. выражается через сигнатуру, а именно,

$$\varepsilon(f) = (-1)^{s(s-1)/2},$$

где s — отрицательный индекс инерции формы f. В случае $K = \mathbb{C}$ всегда $\varepsilon(f) = 1$.

Для невырожденной квадратичной формы f над глобальным полем K характеристики $\neq 2$ и любого нормирования v поля K определяется локальный Х. и. $\varepsilon_v(f)$ как Х. и. квадратичной формы f, рассматриваемой над пополнением K_v поля K относительно топологии, определяемой нормированием v. Число переменных, дискриминант, локальные Х. и. и сигнатуры над вещественными пополнениями поля K определяют класс формы f.

Необходимые и достаточные условия существования невырожденной квадратичной формы от n переменных над глобальным полем K характеристики $\neq 2$, имеющей заданный дискриминант $d \neq 0$, заданные локальные Х. и. ε_v и, для вещественных нормирований v — заданные отрицательные индексы инерции s_v, состоит в следующем:

a) $\varepsilon_v \neq 1$ лишь для конечного числа нормирований v;

b) $\prod_v \varepsilon_v = 1$ (следствие *квадратичного закона взаимности*);

c) $\varepsilon_v = 1$, если $n = 1$ или $n = 2$ и $d \in (-1)(K_v^*)^2$;

d) $\varepsilon_v = (-1)^{s_v(s_v-1)/2}$ для каждого вещественного нормирования v;

e) $\varepsilon_v = 1$ для каждого комплексного нормирования v;

f) $\operatorname{sgn} d_v = (-1)^{s_v}$ для каждого вещественного нормирования v (здесь d_v — образ d при изоморфизме $K_v \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$).

Х. и. предложен Х. Хассе [1].

Лит.: [1] Hasse H., «J. reine angew. Math.», 1923, Bd 152, S. 129—48, 205—24; 1924, Bd 153, S. 12—43, 113—30, 158—62; [2] O'Meara O. T., Introduction to quadratic forms, B.— [a. o.], 1963; [3] Lam T.-Y., The algebraic theory of quadratic forms, Reading (Mass.), 1973; [4] Кассельс Дж., Рациональные квадратичные формы, пер. с англ., М., 1982.

3) Х. и. эллиптической кривой X над полем K характеристики $p>0$ — число 0 или 1 в зависимости от того, является нулевым или биективным эндоморфизм группы когомологий $H^1(X, O_X)$, индуцированный *Фробениуса эндоморфизмом* кривой X. Кривые, для к-рых Х. и. равен 0, называются суперсингулярными.

Лит.: [1] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981; [2] Манин Ю. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1961, т. 25, № 1, с. 153—72. *Э. Б. Винберг.*

ХАССЕ ПРИНЦИП — один из центральных принципов диофантовой геометрии, сводящий вопрос о существовании рациональных точек на алгебраич. многообразии над глобальным полем к аналогичным вопросам над локальными полями.

Пусть M — нек-рый класс алгебраич. многообразий над глобальным полем K. В классе M выполнен Х. п., если для любого X из M такого, что для всех нетривиальных абсолютных значений v на K множество K_v-рациональных точек $X(K_v)$ многообразия X не пусто, множество K-рациональных точек $X(K)$ тоже не пусто (здесь K_v — пополнение поля K относительно v). В частности, если K — поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то из непустоты множества вещественных точек $X(\mathbb{R})$ и множеств p-адических точек $X(\mathbb{Q}_p)$ для всех простых p вытекает непустота множества рациональных точек $X(\mathbb{Q})$. Х. п. выполнен для квадрик [2], тем самым он справедлив для алгебраич. кривых рода 0 (см. [3]). Для квадрик над числовым полем Х. п. сформулирован и доказан Х. Хассе [1]. Для кубич. гиперповерхностей Х. п., вообще говоря, неверен (см. [3], [4]); контрпримерами (над $\mathbb{Q}$) являются кривая $3x^2+4y^3+5z^3=0$ и поверхность $5x^3+12y^3+9z^3+10t^3=0$.

Для алгебраич. группы G над полем k выполнен Х. п., если он выполнен для класса алгебраич. многообразий $M(G)$, состоящего из всех главных однородных пространств над G (см. *Галуа когомологии*, *Вейля — Шатле группа*, а также [2], [3], [5]). Предполагается [5], и во многих случаях доказано, что Х. п. выполнен для односвязных или присоединенных полупростых алгебраич. групп. Неизвестны (1984) примеры абелевых многообразий G над числовым полем, для к-рых выполнен Х. п.

Лит.: [1] Hasse H., «J. reine und angew. Math.», 1924, Bd 153, S. 113—30; [2] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [3] Касселс Дж., «Математика», 1968, т. 12, № 1, с. 113—60; № 2, с. 1—48; [4] Манин Ю. И., Кубические формы, М., 1972; [5] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968. *Ю. Г. Зархин.*

ХАУСДОРФА АКСИОМА — одна из *отделимости аксиом*. Введена Ф. Хаусдорфом (F. Hausdorff, 1914, см. [1]) при определении им понятия топологич. пространства. В топологич. пространстве выполняется Х. а., если любые две его (различные) точки обладают непересекающимися окрестностями. Пространство, удовлетворяющее Х. а., наз. хаусдорфовым пространством или T_2-пространством.

Лит.: [1] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937. *И. Г. Кошевникова.*

ХАУСДОРФА МЕРА — собирательное название класса мер, определенных на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(X)$ метрич. пространства X с помощью следующего построения: пусть $\mathfrak{A}$ — нек-рый класс открытых подмножеств X, $l=\{l(A),\ A\in\mathfrak{A}\}$ — неотрицательная функция, определенная на классе $\mathfrak{A}$, и

$$\lambda(B,\varepsilon)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{n} l(A_i)\right\},\quad \{A_i,\ i=1,\ \ldots,\ n\},$$

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{n} A_i\in\mathfrak{A},\quad \operatorname{diam} A_i\leqslant\varepsilon,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

где нижняя грань берется по всем конечным или счетным покрытиям борелевского множества $B\subset X$ множествами из $\mathfrak{A}$ с диаметром, не превосходящим ε. Мерой

Хаусдорфа λ, определяемой классом $\mathfrak{A}$ и функцией l, наз. предел

$$\lambda(B) = \lim_{\varepsilon \to 0} \lambda(B, \varepsilon).$$

Примеры Х. м.: 1) пусть $\mathfrak{A}$ — совокупность всех шаров в X, $l(A) = (\operatorname{diam} A)^\alpha$, $\alpha > 0$; соответствующая мера λ наз. α-мерой Хаусдорфа (линейной мерой Хаусдорфа при $\alpha = 1$ или плоской мерой Хаусдорфа при $\alpha = 2$); 2) $X = \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathfrak{A}$ — совокупность цилиндров с шаровыми основаниями и осями, параллельными направлению оси x_{n+1}; $l(A)$ равна n-мерному объему осевого сечения цилиндра $A \in \mathfrak{A}$, соответствующая Х. м. наз. цилиндрической мерой.

Х. м. введена Ф. Хаусдорфом [1].

Лит.: [1] Hausdorff F., «Math. Ann.», 1918, Bd 79, S. 157—79; [2] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., т. 1, М., 1962.

Р. Л. Минлос.

ХАУСДОРФА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — метод суммирования числовых и функциональных рядов; введен Ф. Хаусдорфом [1]; определяется следующим образом. Последовательность $s = \{s_n\}$ подвергается последовательно трем линейным матричным преобразованиям:

$$t = \delta s, \quad \tau = \mu t, \quad \sigma = \delta t,$$

где δ — преобразование посредством треугольной матрицы $\{\delta_{nk}\}$:

$$\delta_{nk} = \begin{cases} (-1)^k \binom{n}{k}, & k \leqslant n, \\ 0, & k > n; \end{cases}$$

μ — диагональное преобразование посредством диагональной матрицы $\|\mu_{nk}\|$:

$$\mu_{nk} = \begin{cases} \mu_n, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases}$$

где μ_n — числовая последовательность. Преобразование

$$\sigma = \lambda s,$$

где $\lambda = \delta\mu\delta$, $\{\mu_n\}$ — произвольная числовая последовательность, наз. общим хаусдорфовым преобразованием, а матрицу $\delta\mu\delta$ — матрицей Хаусдорфа. В матричной записи общее хаусдорфово преобразование имеет вид

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{nk} s_k,$$

где

$$\lambda_{nk} = \begin{cases} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k, & k \leqslant n, \\ 0, & k > n; \end{cases}$$

$$\Delta\mu_k = \mu_k - \mu_{k+1}, \quad \Delta^n \mu_k = \Delta^{n-1}\mu_k - \Delta^{n-1}\mu_{k+1}.$$

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

с частичными суммами s_n суммируем методом Хаусдорфа к сумме S, если

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = S.$$

Поле и регулярность метода Хаусдорфа зависят от последовательности $\{\mu_n\}$. Если $\{\mu_n\}$ — действительная последовательность, то для регулярности метода необходимо и достаточно, чтобы:

$\{\mu_n\}$ была разностью двух абсолютно монотонных последовательностей;

$$\lim_{m \to \infty} \Delta^m \mu_0 = 0;$$

$$\mu_0 = 1;$$

или, в другой терминологии, необходимо и достаточно, чтобы μ_n были регулярными моментами.

Х. м. с. содержит в качестве частных случаев ряд других известных методов суммирования. Так, при $\mu_n = 1/(q+1)^n$ метод Хаусдорфа обращается в метод Эйлера (E, q), при $\mu_n = 1/(n+1)^k$ — в метод Гёльдера (H, k), при $\mu_n = 1\Big/\binom{n+k}{k}$ — в метод Чезаро (C, k).

Лит.: [1] Hausdorff F., «Math. Z.», 1921, Bd 9, S. 74—109; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951.

И. И. Волков.

ХАУСДОРФА ОПЕРАЦИЯ — то же, что *δs-операция*.

А. Г. Елькин.

ХАУСДОРФА РАЗМЕРНОСТЬ — числовой инвариант метрич. пространства, введенный Ф. Хаусдорфом [1]. Пусть X — нек-рое метрич. пространство. Для действительных $p > 0$ и $\varepsilon > 0$ пусть $m_p^\varepsilon = \inf \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^p$, где нижняя грань берется по всем таким счетным покрытиям $\{A_i\}$ пространства X, что $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$. Х. р. пространства X определяется как $\sup \{p \mid m_p(X) > 0\}$, где $m_p(X) = \sup_{\varepsilon > 0} m_p^\varepsilon(X)$. Так определенное число зависит от метрики на X (см. по этому также *Метрическая размерность*) и, вообще говоря, не является целым (напр., Х. р. *канторова множества* равна $\log_3 2$). Топологич. инвариантом является, напр., нижняя грань Х. р. по всем метрикам на данном топологич. пространстве X, и для компактного X этот инвариант совпадает с *Лебега размерностью* для X.

Лит.: [1] Hausdorff F., «Math. Ann.», 1918, Bd 79, S. 157—79; [2] Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ., М., 1948.

И. Г. Кошевникова.

ХАУСДОРФА — ЮНГА НЕРАВЕНСТВА — оценки коэффициентов Фурье функций из L_p; установлены У. Юнгом [1] и Ф. Хаусдорфом [2]. Пусть $\varphi_n(t)$ — ортонормированная система функций на $[a, b]$, $|\varphi_n(t)| \leqslant M$ для всех $t \in [a, b]$ и всех $n = 1, 2, \ldots$ и $1 \leqslant p \leqslant 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Если $f \in L_p$, то

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^{p'} \right)^{1/p'} \leqslant M^{\frac{2-p}{p}} \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, \quad (1)$$

где $c_n(f)$ — коэффициенты Фурье функции f. Если $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$, то существует такая функция, что g

$$\left(\int_a^b |g(t)|^{p'} \, dt \right)^{1/p'} \leqslant M^{\frac{2-p}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}. \quad (2)$$

В качестве $g(t)$ можно взять $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)$, причем этот ряд сходится в $L_{p'}$.

Х.— Ю. н. (1) и (2) эквивалентны. Для $p > 2$ они не имеют места. Более того, если $b_n \geqslant 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$, то существует такая непрерывная функция f, что ее коэффициенты Фурье по тригонометрич. системе $c_n(f)$ удовлетворяют условию $|c_n(f)| > b_n$. Качественная формулировка Х.— Ю. н. (если $f \in L_p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, то $\{c_n(f)\} \in l_{p'}$) для неограниченных ортонормированных систем функций, вообще говоря, не имеет места. Аналог Х.— Ю. н. справедлив для широкого класса функциональных пространств.

Лит.: [1] Young W., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1913, v. 12, p. 71—88; [2] Hausdorff F., «Math. Z.», 1923, Bd 16, S. 163—69; [3] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [4] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [5] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 2, М., 1965; [6] Lecuw K. [и др.], «C. r. Acad. sci.», 1977, t. 285, p. 1001—03; [7] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., Интерполяция линейных операторов, М., 1978.

Е. М. Семенов.

ХАУСДОРФОВА МЕТРИКА, отклонение, — метрика в пространстве подмножеств компакта K, оп-

ределяемая следующим образом. Пусть X, $Y \subset K$ и $D_{x,y}$ — множество чисел $\rho(x, Y)$ и $\rho(y, x)$, где $x \in X$, $y \in Y$, ρ — метрика в K. Тогда метрикой Хаусдорфа dist (X, Y) наз. верхняя грань чисел из $D_{x,y}$. Введена Ф. Хаусдорфом в 1914 (см. [1]), и одним из важнейших его результатов является следующий: пространство замкнутых подмножеств компакта также компактно. (Независимо к такой же теореме пришел в 1921—22 П. С. Урысон, см. [2].)

Лит.: [1] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [2] Урысон П. С., Труды по топологии..., т. 2, М.— Л., 1951.

М. И. Войцеховский.

ХАУСДОРФОВО ПРОСТРАНСТВО, T_2-пространство,— топологич. пространство, каждые две (различные) точки к-рого отделимы непересекающимися окрестностями (см. *Хаусдорфа аксиома* отделимости). Х. п. могут не быть регулярными и тем более вполне регулярными, даже если они состоят лишь из счетного множества точек или имеют счетную базу. Впервые рассмотрены Ф. Хаусдорфом (F. Hausdorff, 1914, см. [1]).

Лит.: [1] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

ХЕГОРА ДИАГРАММА — один из наиболее употребительных способов задания замкнутых ориентируемых *трехмерных многообразий*. Х. д. рода n состоит из двух систем простых замкнутых кривых в замкнутой ориентируемой поверхности F рода n. Кривые каждой системы удовлетворяют следующим условиям: 1) число кривых в системе равно n; 2) кривые системы не должны иметь общих точек; 3) после разрезания поверхности F по этим кривым должна получаться связная поверхность (сфера с $2n$ удаленными открытыми дисками). Х. д. тесно связаны с *Хегора разбиениями*: кривые одной системы представляют собой полную систему меридианов (секущих окружностей ручек) одного кренделя разбиения, кривые второй системы — полную систему меридианов другого кренделя. Х. д. наз. эквивалентными, если эквивалентны отвечающие им разбиения Хегора. Известно, напр., что любые две Х. д. трехмерной сферы эквивалентны, если их род одинаков. Род Х. д. всегда можно увеличить, взяв вместо поверхности F ее связную сумму с двумерным тором и добавив к кривым диаграммы меридиан и параллель этого тора. Такая операция наз. операцией стабилизации. Любые две Х. д. одного и того же многообразия стабильно эквивалентны, т. е. становятся эквивалентными после применения к каждой из них нескольких операций стабилизации.

Лит. см. при статье *Хегора разбиение*.

С. В. Матвеев.

ХЕГОРА РАЗБИЕНИЕ — представление замкнутого *трехмерного многообразия* в виде объединения двух трехмерных подмногообразий с общим краем, каждое из к-рых является полным кренделем (т. е. трехмерным шаром с несколькими ручками индекса 1). Определено в 1898 П. Хегором [1]. Х. р. служат одним из наиболее употребительных приемов в изучении трехмерных многообразий, хотя имеются и более эффективные способы разбиения трехмерных многообразий на простые куски (связные суммы, иерархии). Любое замкнутое трехмерное многообразие имеет Х. р. В качестве кренделей разбиения можно взять, напр., регулярную окрестность одномерного остова нек-рой триангуляции многообразия и замыкания ее дополнения. Род (число ручек) одного кренделя всегда совпадает с родом другого кренделя и наз. родом Х. р. Два Х. р. одного и того же многообразия M^3 эквивалентны, если разбивающую поверхность (общий край кренделей) одного из них можно перевести в разбивающую поверхность другого с помощью нек-рого гомеоморфизма многообразия M^3.

Лит.: [1] Heegaard P., «Bull. Soc. math. France», 1916, t. 44, p. 161—242.

С. В. Матвеев.

ХЕЛЛИ ТЕОРЕМА – 1) Х. т. о пересечении выпуклых множеств с общей точкой: пусть K — семейство из не менее чем $n+1$ выпуклых множеств в n-мерном аффинном пространстве A^n, причем K — конечно или каждое множество из K — компактно; тогда, если каждые $n+1$ из множеств семейства имеют общую точку, то существует точка, общая всем множествам семейства K.

Х. т. посвящены многие исследования, относящиеся к ее приложениям, доказательству различных аналогов и предложений типа Х. т., ее обобщений, напр. в вопросах *чебышевского приближения*, в решениях *освещения задач*, в теории *выпуклых тел*. Часто Х. т. фигурирует в доказательствах комбинаторных утверждений следующего типа: если в нек-ром семействе каждое подсемейство из k членов обладает определенным свойством, то этим свойством обладает и все семейство. Напр., если a и b — две точки множества $K \subset A^n$, то выражение «a видно из b в K» обозначает, что отрезок $[a, b]$ принадлежит K. Пусть компакт $K \subset A^n$ обладает свойством, что для каждых $n+1$ точек из K существует точка в K, из к-рой видны эти точки, тогда в K существует точка, из к-рой видны все точки K, т. е. K — звездное множество.

Большинство аналогов Х. т. и ее обобщений связаны с различными вариантами понятия «выпуклость». Напр., пусть S^n — евклидова сфера; множество наз. выпуклым по Робинсону, если вместе с каждой парой диаметрально непротивоположных точек оно содержит соединяющую эти точки меньшую дугу определяемой ими большой окружности. Если семейство выпуклых по Робинсону замкнутых множеств пространства S^n таково, что каждые $2(n+1)$ его элементов обладают непустым пересечением, то и все элементы этого семейства обладают непустым пересечением.

Х. т. установлена Э. Хелли (E. Helly, 1913).

Лит.: [1] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В., Теорема Хелли, пер. с англ., М., 1968. *И. С. Солтан.*

2) Х. т. в теории функций: если последовательность функций g_n, $n = 1, 2, \ldots$, с ограниченной на отрезке $[a, b]$ вариацией сходится в каждой точке этого отрезка к нек-рой функции g, причем вариации $\bigvee_a^b g_n$ всех функций g_n ограничены в совокупности:

$$\bigvee_a^b g_n \leqslant c, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то предельная функция g также имеет ограниченную на отрезке $[a, b]$ вариацию и для любой непрерывной на $[a, b]$ функции f справедливо равенство

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x)\, dg_n(x) = \int_a^b f(x)\, dg(x).$$

Л. Д. Кудрявцев.

ХЕЛЛИНГЕРА ИНТЕГРАЛ — интеграл типа Римана от функции множества $f(E)$. Если (X, μ) — пространство с конечной неотрицательной несингулярной мерой, $f(E)$, $E \subset X$, — вполне аддитивная функция, причем $f(E) = 0$, если $\mu E = 0$; $\delta = \{E_n\}_1^N$ — разбиение X, то

$$S_\delta = \sum_{n=1}^N \frac{f^2(E_n)}{\mu E_n}$$

и интегралом Хеллингера функции $f(E)$ по X наз.

$$\int_X \frac{f^2(dE)}{d\mu} = \sup_\delta S_\delta,$$

если он конечен. Х. и. можно рассматривать и как предел по направленному множеству разбиений: $\delta_1 < \delta_2$, если δ_2 есть подразбиение δ_1.

Если существует суммируемая функция $\varphi(x)\colon X \to R$ такая, что $f(E)$ есть интеграл Лебега $\int_E \varphi\, d\mu$, то Х. и. выражается через интеграл Лебега

$$\int_X \frac{f^2(dE)}{d\mu} = \int_X \varphi^2\, d\mu.$$

Э. Хеллингер [1] дал определение интеграла для $X=[a, b]$ в терминах функций точки.

Лит.: [1] Hellinger E., «J. reine und angew. Math.», 1909, Bd 136, S. 210—71; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959. *И. А. Виноградова.*

ХЕЛЛИНГЕРА РАССТОЯНИЕ — расстояние между вероятностными мерами, выраженное в терминах *Хеллингера интеграла*. Пусть на измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ задано семейство вероятностных мер $\{\mathsf{P}_\theta\}$, $\theta \in \Theta$, абсолютно непрерывных относительно нек-рой σ-конечной меры μ на $\mathcal{B}$.

Х. р. между мерами P_{θ_1} и P_{θ_2} ($\theta_1, \theta_2 \in \Theta$) определяется по формуле

$$r(\theta_1, \theta_2) = \{2[1 - H(\theta_1, \theta_2)]\}^{1/2} =$$
$$= \left\{\int_{\mathfrak{X}} \left[\sqrt{\frac{d\mathsf{P}_{\theta_1}}{d\mu}} - \sqrt{\frac{d\mathsf{P}_{\theta_2}}{d\mu}}\right]^2 d\mu\right\}^{1/2},$$

где

$$H(\theta_1, \theta_2) = \int_{\mathfrak{X}} \sqrt{\frac{d\mathsf{P}_{\theta_1}}{d\mu}}\, \sqrt{\frac{d\mathsf{P}_{\theta_2}}{d\mu}}\, d\mu$$

— интеграл Хеллингера. Х. р. не зависит от выбора меры μ и обладает следующими свойствами:

1) $0 \leqslant r(\theta_1, \theta_2) \leqslant \sqrt{2}$;

2) $r(\theta_1, \theta_2) = \sqrt{2}$ тогда и только тогда, когда меры P_{θ_1} и P_{θ_2} сингулярны;

3) $r(\theta_1, \theta_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{P}_{\theta_1} = \mathsf{P}_{\theta_2}$.

Пусть

$$\|\mathsf{P}_{\theta_1} - \mathsf{P}_{\theta_2}\| = \sup_{B \in \mathcal{B}} |\mathsf{P}_{\theta_1}(B) - \mathsf{P}_{\theta_2}(B)| =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{X}} \left|\frac{d\mathsf{P}_{\theta_1}}{d\mu} - \frac{d\mathsf{P}_{\theta_2}}{d\mu}\right| d\mu$$

— расстояние по вариации между мерами P_{θ_1} и P_{θ_2}. Тогда

$$\frac{1}{2} r^2(\theta_1, \theta_2) \leqslant \|\mathsf{P}_{\theta_1} - \mathsf{P}_{\theta_2}\| \leqslant r(\theta_1, \theta_2).$$

Лит.: [1] Го Х.-С., Гауссовские меры в банаховых пространствах, пер. с англ., М., 1979; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [4] Золотарев В. М., «Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР», 1979, т. 87, с. 18—35. *М. С. Никулин.*

ХЕФЛИГЕРА СТРУКТУРА коразмерности q и класса C^r на топологич. пространстве X — структура, определяемая с помощью хефлигеровского атласа (наз. также хефлигеровским коциклом) $\{U_\alpha, \Psi_{\alpha\beta}\}$, где U_α — открытые подмножества, покрывающие X, а

$$\Psi_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \Gamma^q_r, \quad u \longmapsto \Psi_{\alpha\beta, u}$$

— непрерывные отображения $U_\alpha \cap U_\beta$ в пучок Γ^q_r *ростков* локальных C^r-диффеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^q$, причем

$$\Psi_{\gamma\alpha, u} = \Psi_{\gamma\beta, u} \circ \Psi_{\beta\alpha, u} \quad \text{при} \quad u \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

Два хефлигеровских атласа определяют одну и ту же Х. с., если они являются частями нек-рого большего хефлигеровского атласа. (Таким образом, Х. с. можно определить как максимальный хефлигеровский атлас.) Если на X задана Х. с. $\mathcal{H}$ посредством атласа $\{U_\alpha, \Psi_{\alpha\beta}\}$ и $f\colon Y \to X$ — непрерывное отображение, то атлас $\{f^{-1}U_\alpha, \Psi'_{\alpha\beta}\}$, где $\Psi'_{\alpha\beta, u} = \Psi_{\alpha\beta, f(u)}$, определяет индуцированную Х. с. $f^*\mathcal{H}$ (она не зависит от конкретного выбора атласа, задающего $\mathcal{H}$).

Пусть X — многообразие, и на нем задано *слоение* $\mathcal{F}$ посредством субмерсий $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, согласованных в том смысле, что если $u \in U_\alpha \cap U_\beta$, то существует локальный C^r-диффеоморфизм $\Phi_{\beta\alpha,\, u}$, с помощью к-рого можно перейти от $\varphi_\alpha(v)$ к $\varphi_\beta(v)$:

$$\varphi_\beta(v) = \Phi_{\beta\alpha,\, u}(\varphi_\alpha(v)) \qquad (*)$$

при всех v, достаточно близких к u. Если положить $\Psi_{\beta\alpha,\, u}$ = росток $\Phi_{\beta\alpha,\, u}$ в u, то $\Psi_{\beta\alpha}: u \longrightarrow \Psi_{\beta\alpha,\, u}$ есть отображение $U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \Gamma^q_r$, и $\{U_\alpha, \Psi_{\beta\alpha}\}$ — хеглигеровский атлас. При этом φ_α однозначно восстанавливается по хеглигеровскому атласу: $\varphi_\alpha(u)$ — та точка, ростком в к-рой является $\Psi_{\alpha\alpha,\, u}$. Полученное соответствие между слоениями и нек-рыми Х. с. не зависит от случайностей построения (выбор системы $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$); различным слоениям соответствуют различные Х. с., но существуют Х. с., не соответствующие никакому слоению. Поэтому Х. с. является обобщением понятия слоения.

В общем случае для Х. с. можно так же, как и выше, определить отображения $\varphi_\alpha: U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^q$. Если $\Phi_{\beta\alpha,\, u}$ — представитель ростка $\Psi_{\beta\alpha,\, u}$, то $\varphi_\alpha(v)$ и $\varphi_\beta(v)$ в нек-рой окрестности точки u по-прежнему связаны соотношением $(*)$. Но так как φ_α и φ_β уже не обязательно субмерсии, то из $(*)$, вообще говоря, уже нельзя однозначно определить $\Psi_{\beta\alpha,\, u}$. Поэтому в общем случае приходится формулировать определение Х. с. не в терминах $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, а включая $\Psi_{\beta\alpha}$ в определение.

Если $f: N \longrightarrow M$ есть C^r-отображение многообразий, трансверсальное к слоям заданного на M слоения $\mathcal{F}$ коразмерности q и класса C^r, то разбиение N на связные компоненты прообразов слоев $\mathcal{F}$ является слоением, к-рое естественно наз. индуцированным слоением; оно обозначается $f^*\mathcal{F}$. Если согласованная система субмерсий $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ задает $\mathcal{F}$, то $f^*\mathcal{F}$ определяется согласованной системой субмерсий $\{(f^{-1}U_\alpha, \varphi_\alpha \circ f)\}$; в этом случае индуцированная Х. с. — по существу то же самое, что и индуцированное слоение. Если же f не трансверсально к слоям $\mathcal{F}$, индуцированного слоения нет, а есть только индуцированная Х. с. Поэтому в гомотопич. теории слоений неизбежно обращение к Х. с., хотя бы на нек-рых промежуточных этапах рассуждений.

Обнаружено (см. [1], [2]), что для Х. с. сохраняется известная для *расслоений* связь между их классификацией и непрерывными отображениями в *классифицирующее пространство*. Таковое для Х. с. коразмерности q и класса C^r обозначается $B\Gamma^r_q$. На нем самом имеется нек-рая «универсальная» Х. с. $\mathcal{H}$ (в этом отношении $B\Gamma^r_q$ напоминает скорее универсальное расслоение). Для любого «хорошего» топологич. пространства X (напр., клеточного полиэдра) любая Х. с. на X индуцируется из $\mathcal{H}$ при нек-ром непрерывном отображении $f: X \longrightarrow B\Gamma^r_q$. Отображения $f_0, f_1: X \longrightarrow B\Gamma^r_q$ гомотопны тогда и только тогда, когда Х. с. $f_0^*\mathcal{H}$ и $f_1^*\mathcal{H}$ конкордантны, т. е. получаются при «ограничении» нек-рой Х. с. на «цилиндре» $X \times [0, 1]$ на его «дно» и «крышку».

Все сказанное относится также к топологическим, аналитическим и кусочно линейным Х. с., причем первые два случая формально охватываются предыдущим текстом, если принять $r=0$ или $r=\omega$, а последний случай требует нек-рой перефразировки.

Лит.: [1] Haefliger A., «Topology», 1970, v. 9, № 2, p. 183—94; [2] его же, в кн.: Manifolds, Amst., 1970, p. 133—63; [3] Lawson H., The quantitative theory of foliations, Providence, 1977; [4] Фукс Д. Б., «Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. матем.», 1978, т. 10, с. 179—285; [5] его же, «Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия», 1981, т. 18, с. 151—213.

Д. В. Аносов.

«ХИ-КВАДРАТ» КРИТЕРИЙ — критерий для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой случайный вектор частот $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ имеет заданное полиномиальное распределение, характеризующееся вектором положительных вероятностей $p=(p_1, \ldots, p_k)$, $p_1+\ldots+p_k=1$. «Х.-к.» к. основан на статистике Пирсона

$$X^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(\nu_i-np_i)^2}{np_i}=\frac{1}{n}\sum\frac{\nu_i^2}{p_i}-n, \quad n=\nu_1+\ldots+\nu_k,$$

к-рая имеет в пределе при $n\to\infty$ *«хи-квадрат» распределение* с $k-1$ степенями свободы, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{X^2\leqslant x\mid H_0\}=\mathsf{P}\{\chi^2_{k-1}\leqslant x\}.$$

Согласно «Х.-к.» к. с уровнем значимости $\approx\alpha$, гипотезу H_0 следует отвергнуть, если $X^2\geqslant\chi^2_{k-1}(\alpha)$, где $\chi^2_{k-1}(\alpha)$ — верхняя α-квантиль «хи-квадрат» распределения с $k-1$ степенями свободы, т. е.

$$\mathsf{P}\{\chi^2_{k-1}\geqslant\chi^2_{k-1}(\alpha)\}=\alpha.$$

Статистику X^2 используют также для проверки гипотезы H_0 о принадлежности функции распределения независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_k$ семейству непрерывных функций $F(x, \theta)$, $x\in R^1$, $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_m)\in\Theta\subset\mathbb{R}^m$, Θ — открытое множество. Разбивая действительную прямую точками $x_0<x_1<\ldots<x_k$, $x_0=-\infty$, $x_k=+\infty$, на k, $k>m$, интервалов $(x_0, x_1]$, $\ldots$, (x_{k-1}, x_k) таких, что при всех $\theta\in\Theta$

$$p_i(\theta)=\mathsf{P}\{X_1\in(x_{i-1}, x_i]\}>0,$$

$i=1, \ldots, k$; $p_1(\theta)+\ldots+p_k(\theta)=1$, образуют вектор частот $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_r)$, получающихся в результате группировки значений случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ по этим интервалам. Пусть

$$X^2(\theta)=\sum_{i=1}^{k}\frac{[\nu_i-np_i(\theta)]^2}{np_i(\theta)}$$

— случайная величина, зависящая от неизвестного параметра θ. Для проверки гипотезы H_0 пользуются статистикой $X^2(\tilde\theta_n)$, где $\tilde\theta_n$ — оценка параметра θ, вычисленная по методу минимума «хи-квадрат», т. е.

$$X^2(\tilde\theta_n)=\min_{\theta\in\Theta}X^2(\theta).$$

Если интервалы группировки выбраны таким образом, что все $p_i(\theta)>0$, а функции $\partial^2p_i(\theta)/\partial\theta_j\,\partial\theta_2$ непрерывны для всех $\theta\in\Theta$, $i=1, \ldots, r$; $j, r=1, \ldots, m$, и матрица $\|\partial p_i(\theta)/\partial\theta_j\|$ имеет ранг m, то при справедливости гипотезы H_0 и $n\to\infty$ статистика $X^2(\tilde\theta_n)$ имеет в пределе «хи-квадрат» распределение с $k-m-1$ степенями свободы, чем и пользуются для проверки гипотезы H_0 по «Х.-к.» к. Если в $X^2(\theta)$ подставить оценку максимального правдоподобия $\hat\theta_n$, вычисленную по негруппированным данным $X_1, \ldots, X_n$, то при справедливости гипотезы H_0 и $n\to\infty$ статистика $X^2(\hat\theta_n)$ распределена в пределе как

$$\xi_1^2+\ldots+\xi_{k-m-1}^2+\mu_1\xi_{k-m}^2+\ldots+\mu_m\xi_{k-1}^2,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$ — независимые стандартные нормально распределенные случайные величины, а числа $\mu_1, \ldots, \mu_m$ лежат между нулем и единицей и, вообще говоря, зависят от неизвестного параметра θ. Из этого следует, что использование оценок максимального правдоподобия при применении «Х.-к.» к. для проверки гипотезы H_0 приводит к затруднениям, связанным с вычислениями нестандартного предельного распределения.

Лит.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Чибисов Д. М., «Теория вероятн. и ее применения», 1971, т. 16, № 1, с. 3—20; [3] Никулин М. С., там же, 1973, т. 18, № 3, с. 675—76.

М. С. Никулин.

«ХИ-КВАДРАТ» РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, χ^2-распределение, — непрерывное, сосредоточенное на положительной полуоси $(0, \infty)$ распределение вероятностей с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1},$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, а положительный целочисленный параметр n наз. числом степеней свободы. «Х.-к.» р. представляет собой частный случай *гамма-распределения* и обладает всеми свойствами последнего. Функция распределения «Х.-к.» р. есть неполная гамма-функция, характеристич. функция выражается формулой

$$\varphi(t) = (1-2it)^{-n/2},$$

математич. ожидание и дисперсия равны, соответственно, n и $2n$. Семейство «Х.-к.» р. замкнуто относительно операции свертки.

«Х.-к.» р. с n степенями свободы может быть выведено как распределение суммы $\chi_n^2 = X_1^2 + \ldots + X_n^2$ квадратов независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, имеющих одинаковое нормальное распределение с нулевым математич. ожиданием и единичной дисперсией. Эта связь с нормальным распределением определяет ту роль, к-рую «Х.-к.» р. играет в теории вероятностей и математич. статистике.

Многие распределения определяются посредством «Х.-к.» р. Таковы, напр., распределение случайной величины $\sqrt{\chi_n^2}$ — длины случайного вектора $(X_1, \ldots, X_n)$ с независимыми, нормально распределенными компонентами (иногда наз. «хи»распределением, см. также частные случаи — *Максвелла распределение*, *Рэлея распределение*); *Стьюдента распределение*, *Фишера F-распределение*. В математич. статистике эти распределения вместе с «Х.-к.» р. описывают выборочные распределения различных статистик от нормально распределенных результатов наблюдений и используются для построения интервальных статистич. оценок и статистических критериев. Особую известность в связи с «Х.-к.» р. получил *«хи-квадрат» критерий*, основанный на т. н. «хи-квадрат» статистике Пирсона.

Имеются подробные удобные для статистич. расчетов таблицы «Х.-к.» р. При больших n используют аппроксимации посредством нормального распределения: напр., согласно центральной предельной теореме распределение нормированной величины $\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}}$ сходится к стандартному нормальному распределению. Более точна аппроксимация

$$P\{\chi_n^2 < x\} \longrightarrow \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(\sqrt{2n-1}) \quad \text{при } n \longrightarrow \infty,$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

См. также *Нецентральное «хи-квадрат» распределение*.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [3] Lancaster H. O., The chi-squared distribution, N. Y.—[a. o], 1969; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

А. В. Прохоров.

ХИЛЛА УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$w''(z) + p(z)\, w(z) = 0$$

с периодич. функцией $p(z)$; все величины могут быть комплексными. Уравнение названо по имени Дж. Хилл-

ла [1], к-рый, изучая движение Луны, получил уравнение

$$w''(z)+\left(\theta_0+2\sum_{r=1}^{\infty}\theta_{2r}\cos 2rz\right)w(z)=0$$

с действительными числами θ_0, θ_2, θ_4, ..., причем ряд $\sum_{r=1}^{\infty}|\theta_{2r}|$ сходится.

Дж. Хилл дал метод решения Х. у. с использованием определителей бесконечного порядка. Это явилось толчком для создания теории таких определителей и, далее, для создания Э. Фредгольмом (E. Fredholm) теории интегральных уравнений. Для Х. у. ставятся прежде всего задачи устойчивости решений, существования или отсутствия периодич. решений. Если в действительном случае в Х. у. ввести параметр:

$$x''+\lambda p(t)\,x=0,$$

то, как установил А. М. Ляпунов [2], существует такая бесконечная последовательность

$$\ldots<\lambda_{-1}\leqslant\lambda_0=0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<\ldots<\lambda_{2n-1}\leqslant$$
$$\leqslant\lambda_{2n}<\lambda_{2n+1}\leqslant\ldots,$$

что при $\lambda\in(\lambda_{2n},\ \lambda_{2n+1})$ Х. у. устойчиво, а при $\lambda\in[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$ Х. у. неустойчиво. При этом λ_{4n} и λ_{4n+3} являются собственными значениями периодич. краевой задачи, а λ_{4n+1} и λ_{4n+2} — собственными значениями полупериодич. краевой задачи. Хорошо изучена теория Х.у. (см. [3]).

Лит.: [1] Hill G., «Acta math.», 1886, v. 8, p. 1; [2] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М., 1956, с. 407—09; [3] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972.

Ю. В. Комленко.

ХИНЧИНА ИНТЕГРАЛ — обобщение узкого *Данжуа интеграла*, введенное А. Я. Хинчиным [1].

Функция $f(x)$ наз. интегрируемой в смысле Хинчина на $[a,\ b]$, если она интегрируема широким интегралом Данжуа и ее неопределенный интеграл почти всюду дифференцируем. Иногда интеграл Хинчина наз. интегралом Данжуа — Хинчина.

Лит.: [1] Хинчин А. Я., «C. r. Acad. sci.», 1916, t. 162, p. 287—91; [2] Хинчин А. Я., «Матем. сб.», 1918, т. 30, с. 543—57; [3] Песин И. Н., Развитие понятия интеграла, М., 1966, с. 171—73; [4] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949, с. 370.

Т. П. Лукашенко.

ХИНЧИНА НЕРАВЕНСТВО для независимых функций — оценка в L_p суммы независимых функций. Пусть f_k — система независимых функций и для нек-рого $p>2$

$$\sup_k\|f_k\|_{L_p}<\infty,\quad\int_0^1 f_k(t)\,dt=0.$$

Тогда

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}c_kf_k\right\|_{L_p}\leqslant M\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\right)^{1/2}.$$

Если

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2<\infty,\ \text{а}\ r_k=\operatorname{sign}\sin 2^k\pi t$$

— функции Радемахера и

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kr_k(t),$$

то для любого $p>0$

$$A_p\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\right)^{1/2}\leqslant\left(\int_0^1|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\leqslant$$
$$\leqslant B_p\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\right)^{1/2},$$

где $B_p=O(\sqrt{p})$ при $p\to\infty$. Это неравенство было установлено А. Я. Хинчиным [1]. Точное значение A_1 равно $1/2$.

Аналог Х.н. справедлив в банаховых пространствах [4]. Существует такая константа $C(p, q)$, $0 < p, q < \infty$, что для любых элементов x_k из банахова пространства E

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k r_k(t) \right\|_E \right\|_{L_p} \leqslant C(p, q) \left\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k r_k(t) \right\|_E \right\|_{L_q}.$$

Одно из многочисленных приложений Х. н.: если

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 < \infty,$$

то для почти всех наборов ± 1 функция

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pm (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

принадлежит всем L_p, $p < \infty$ (см. [5]).

Лит.: [1] Хинчин А., «Math. Z.», 1923, Bd 18, S. 109—116; [2] Karlin S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1949, v. 66, p. 44—64; [3] Гапошкин В. Ф., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 6, с. 3—82; [4] Кахан Ж.-П., Случайные функциональные ряды, пер. с англ., М., 1973; [5] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965.

Е. М. Семенов.

ХИНЧИНА ТЕОРЕМА — 1) Х. т. о факторизации распределений: любое распределение вероятностей P допускает (в сверточной полугруппе распределений вероятностей) факторизацию

$$P = P_1 * P_2, \qquad (*)$$

где P_1 — распределение класса I_0 (см. *Безгранично делимых распределений разложение*), а P_2 — распределение, к-рое либо является вырожденным, либо представимо в виде свертки конечного или счетного множества *неразложимых распределений*. Факторизация (*), вообще говоря, не единственна.

Х. т. была доказана А. Я. Хинчиным [1] для распределений на прямой, позднее выяснилось [2], что она справедлива для распределений на значительно более общих группах. Известен (см. [3], [4] широкий класс топологич. полугрупп, включающий сверточную полугруппу распределений на прямой, в к-рых справедливы факторизационные теоремы, аналогичные Х. т.

Лит.: [1] Хинчин А. Я., «Бюлл. МГУ. Секц. А», 1937, т. 1, в. 1, с. 6—17; [2] Партасарати К. Р., Ранга Рао Р., Варадхан С. Р., «Математика», 1965, т. 9, в. 2, с. 113—46; [3] Kendall D. G., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.», 1968, Bd 9, H. 3, S. 163—95; [4] Davidson R., там же, 1968, Bd 10, H. 2, S. 120—72.

И. В. Островский.

2) Х. т. о диофантовых приближениях — см. *Диофантовых приближений метрическая теория*.

ХОДЖА ГИПОТЕЗА — предположение о том, что для любого гладкого проективного многообразия X над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел и для любого целого $p \geqslant 0$ $\mathbb{Q}$-пространство $H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \bigcap H^{p,p}$, где $H^{p,p}$ — компонента типа (p, p) в разложении Ходжа

$$H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{r=0}^{2p} H^{r, 2p-r},$$

порождается классами когомологий алгебраич. циклов коразмерности p на X. Эта гипотеза была выдвинута У. Ходжем [1].

В случае $p = 1$ Х.г. равносильна *Лефшеца теореме* о когомологиях типа $(1,1)$. Х.г. доказана также для следующих классов многообразий: 1) X — гладкое 4-мерное унилинейчатое многообразие, т. е. такое, что существует рациональное отображение конечной степени $P^1 \times Y \to X$, где Y — гладкое многообразие (см. [2]). Унилинейчатыми многообразиями являются, напр., унирациональные многообразия и 4-мерные полные пересечения с обильным антиканонич. классом (см. [3]). 2) X — гладкая гиперповерхность Ферма простой степени (см. [4], [5]). 3) X — простое 5-мерное абелево многообразие (см. [6]). 4) X — простое d-мерное абелево многообразие, причем

$\mathrm{End}\,(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}=\mathbb{R}^l$, $\frac{d}{l}$ — нечетное число, или $\mathrm{End}\,(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}=[M_2(\mathbb{R})]^l$, $\frac{d}{2l}$ — нечетное число.

Лит.: [1] Hodge W. V. D., «Proc. Intern. Congr. Math.» (Camb., 1950), 1952, v. 1, p. 182—92; [2] Conte A., Murre J. P., «Math. Ann.», 1978, Bd 238, S. 79—88; [3] их же, «J. de géometrie algébrique d'Angers» (Juillet, 1979), 1980, p. 129—41; [4] Ran Z., «Comp. math.», 1980/81, v. 42, № 1, p. 121—42; [5] Shioda T., «Proc. Japan Acad.», 1979, Ser. A, v. 55, № 3, p. 111—14; [6] Таюкеев С. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1981, т. 45, № 4, с. 793—823.

С. Г. Танкеев.

ХОДЖА МНОГООБРАЗИЕ — комплексное многообразие, на к-ром можно задать метрику Ходжа, т. е. *Кэлера метрику*, фундаментальная форма к-рой определяет целочисленный класс когомологий. Компактное комплексное многообразие является Х. м. тогда и только тогда, когда оно изоморфно гладкому алгебраич. подмногообразию комплексного проективного пространства нек-рой размерности (теорема Кодаиры о проективном вложении).

См. также *Кэлерово многообразие*.

Лит.: [1] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1982.

А. Л. Онищик.

ХОДЖА СТРУКТУРА веса n (чистая) — объект, состоящий из решетки $H_{\mathbb{Z}}$ в действительном векторном пространстве $H_{\mathbb{R}}=H_{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{R}$ и разложения $H_{\mathbb{C}}=\oplus_{p+q=n}H^{p,q}$ комплексного векторного пространства $H_{\mathbb{C}}=H_{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{C}$ (разложения Ходжа). При этом должно выполняться условие $\overline{H^{p,q}}=H^{q,p}$, где черта означает комплексное сопряжение в $H_{\mathbb{C}}=H_{\mathbb{R}}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$. Другое описание разложения Ходжа состоит в задании убывающей фильтрации (фильтрации Ходжа) $F^r=\oplus_{p\geqslant r}H^{p,q}$ в $H_{\mathbb{C}}$ такой, что $\overline{F^s}\cap F^r=0$ при $r+s\neq n$. Тогда подпространства $H^{p,q}$ восстанавливаются по формуле $H^{p,q}=F^p\cap\overline{F}^q$.

Примером является Х.с. в пространстве n-мерных когомологий $H^n(X,\mathbb{C})$ компактного кэлерова многообразия X, впервые изученная У. Ходжем (см. [1]). В этом случае подпространства $H^{p,q}$ описываются как пространства *гармонических форм* типа (p,q) или как когомологии $H^q(X,\Omega^p)$ пучков Ω^p голоморфных дифференциальных форм [2]. Фильтрация Ходжа в $H^n(X,\mathbb{C})$ возникает из фильтрации комплекса пучков $\Omega=\sum_{p\geqslant 0}\Omega^p$, n-мерные гиперкогомологии к-рого изоморфны $H^n(X,\mathbb{C})$, подкомплексами $\sum_{r\geqslant p}\Omega^r$.

Более общим понятием является смешанная Х.с. Это — объект, состоящий из решетки $H_{\mathbb{Z}}$ в $H_{\mathbb{R}}=H_{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{R}$, возрастающей фильтрации (фильтрации весов) W_n в $H_{\mathbb{Q}}=H_{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q}$ и убывающей фильтрации (фильтрации Ходжа) F^p в $H_{\mathbb{C}}=H_{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{C}$ таких, что на пространстве $(W_n/W_{n+1})\otimes\mathbb{C}$ фильтрации F^p и $\overline{F}^p$ определяют чистую Х.с. веса n. Рассмотрена [3] смешанная Х.с. в когомологиях комплексного алгебраич. многообразия (не обязательно компактного или гладкого), как аналог структуры модуля Галуа в этальных когомологиях. Х.с. имеют важные приложения в алгебраич. геометрии (см. *Отображение периодов*) и в теории особенностей гладких отображений (см. [4]).

Лит.: [1] Hodge W. V. D., The theorie and applications of harmonic integrals, 2 ed., Camb., 1952; [2] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1982; [3] Deligne P., «Proc. Intern. Congr. Math.» (Vancouver, 1974), 1975, v. 1, p. 79—85; [4] Варченко А. Н., в сб.: Современные проблемы математики, т. 22, М., 1983, с. 130—66 (Итоги науки и техники). См. также *лит.* к статье *Отображение периодов*.

А. И. Овсеевич.

ХОДЖА ТЕОРЕМА — 1) Х. т. об индексе: индекс (*сигнатура*) $\sigma(M)$ компактного кэлерова многообразия M комплексной размерности $2n$ вычисляется по формуле

$$\sigma(M)=\sum_{p,q}(-1)^p h^{p,q}, \quad (p+q \text{ четно}),$$

где $h^{p,q}=\dim H^{p,q}(M)$ — размерность пространства *гармонических форм* типа (p, q) на M. Доказана У. Ходжем [1].

2) Х. т. о разложении пространства гладких сечений эллиптич. комплекса на компактном многообразии в ортогональную прямую сумму подпространств гармонических, точных и коточных сечений (см. *Лапласа оператор*). Была доказана У. Ходжем [2] для комплекса де Рама

$$E^*(M)=\sum_{p\geqslant 0}E^p(M)$$

на ориентируемом компактном римановом многообразии M. В этом случае Х.т. утверждает, что для любого $p\geqslant 0$ пространство $H^p(M)$ гармонич. форм на M конечномерно и существует единственный оператор G: $E^p(M)\longrightarrow E^p(M)$ (оператор Грина—де Рама), удовлетворяющий условиям:

$$G(H^p(M))=0,\ Gd=dG,\ G\delta=\delta G,$$

$$E^p(M)=H^p(M)\oplus d\delta GE^p(M)\oplus \delta dGE^p(M)$$

(разложение Ходжа). В частности, пространство $H^p(M)$ изоморфно пространству $H^p(M, \mathbb{R})$ вещественных когомологий многообразия M. Другой важный частный случай — Х.т. для комплекса Дольбо на компактном комплексном многообразии M (см. *Дифференциальная форма*) [3]. Эти результаты приводят к класич. *Ходжа структуре* в пространствах когомологий компактного кэлерова многообразия.

Лит.: [1] Hodge W. V. D., «Proc. Intern. Congr. Math.» (Camb., 1950), 1952, v. 1, p. 182—92; [2] его же, The theory and applications of harmonic integrals, 2 ed., Camb., 1952; [3] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, т. 1, пер. с англ., М., 1982; [4] де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, пер. с франц., М., 1956.

А. Л. Онищик.

ХОЛЛОВА ПОДГРУППА — подгруппа конечной группы, порядок к-рой взаимно прост с ее индексом. Название связано с именем Ф. Холла (Ph. Hall), к-рый в 20-х гг. 20 в. начал изучать такие подгруппы в конечных разрешимых группах.

В конечном π-*отделимой группе* существует холлова π-подгруппа (Х. п., порядок к-рой делится только на простые числа из π, а индекс взаимно прост с любым числом из π) и все холловы π-подгруппы сопряжены. Конечная разрешимая группа для любого множества π простых чисел обладает холловой π-подгруппой. Любая π-подгруппа конечной разрешимой группы содержится в холловой π-подгруппе и все холловы π-подгруппы сопряжены. Любая холлова π-подгруппа является силовской π-подгруппой. Для нормальной Х. п. H конечной группы G в G всегда существует дополнение, то есть такая подгруппа D, что $G=H\cdot D$ и $H\cap D$ — единичная подгруппа; все дополнения для H в G сопряжены. Если в группе есть нильпотентная холлова π-подгруппа, то все холловы π-подгруппы сопряжены и любая π-подгруппа содержится в нек-рой холловой π-подгруппе. В общем случае Х. п. не обладает такими свойствами. Напр., знакопеременная группа A_5 порядка 60 не имеет холловой $\{2, 5\}$-подгруппы. В A_5 есть холлова $\{2, 3\}$-подгруппа порядка 12, но подгруппа порядка 6 не лежит ни в какой холловой. Наконец, в простой группе порядка 168 холловы $\{2, 3\}$-подгруппы не сопряжены.

Лит.: [1] Чунихин С. А., Подгруппы конечных групп, Минск, 1964; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. 1964, М., 1966, с. 7—46; [3] Huppert B., Endliche Gruppen, v. 1, B., 1979; [4] Reviews on finite groups, Providence, 1974.

В. Д. Мазуров.

ХОПФА АЛГЕБРА, биалгебра, гипералгебра — градуированный модуль A над ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей, снабженный одновременно структурой ассоциативной градуированной алгебры $\mu\colon A\otimes A\longrightarrow A$ с единицей $\iota\colon K\longrightarrow A$ и структурой ассоциативной градуированной *коалгебры* $\delta\colon A\longrightarrow A\otimes A$ с коединицей $\varepsilon\colon A\longrightarrow K$, причем выполнены условия:

1) ι — гомоморфизм градуированных коалгебр;

2) ε — гомоморфизм градуированных алгебр;

3) δ — гомоморфизм градуированных алгебр.

Условие 3) эквивалентно условию:

3′) μ — гомоморфизм градуированных коалгебр.

Иногда требование ассоциативности коумножения отбрасывается; такие алгебры наз. квазихопфовыми.

Для любых двух Х.а. A и B над K их тензорное произведение $A\otimes B$ снабжается естественной структурой Х.а. Пусть $A=\sum_{n\in\mathbb{Z}}A_n$ — Х.а., причем все A_n — конечно порожденные проективные K-модули. Тогда $A^*=\sum_{n\in\mathbb{Z}}A_n^*$, где A_n^* — модуль, сопряженный к A_n, снабженный гомоморфизмами градуированных модулей $\delta^*\colon A^*\otimes A^*\longrightarrow A^*$, $\varepsilon^*\colon K\longrightarrow A^*$, $\mu^*\colon A^*\longrightarrow A^*\otimes A^*$, $\iota^*\colon A^*\longrightarrow K$, является Х.а.; она наз. двойственной к A.

Элемент x Х. а. A наз. примитивным, если

$$\delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x.$$

Примитивные элементы составляют градуированную подалгебру P_A в A относительно операции

$$[x,\ y]=xy-(-1)^{pq}yx,\ x\in A_p,\ y\in A_q.$$

Если A связна (т. е. $A_n=0$ для $n<0$, $A_0=K$) и K — поле характеристики 0, то подпространство P_A порождает алгебру A (относительно умножения) тогда и только тогда, когда коумножение градуированно коммутативно [2].

Примеры. 1) Для любой градуированной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (т. е. градуированной алгебры, являющейся *супералгеброй* Ли относительно естественной $\mathbb{Z}_2$-градуировки) универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ становится Х.а., если положить

$$\varepsilon(x)=0,\ \delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x,\ x\in\mathfrak{g}.$$

При этом $P_{U(\mathfrak{g})}=\mathfrak{g}$. Если K — поле характеристики 0, то связная Х.а. A, порожденная примитивными элементами, естественно изоморфна $U(P_A)$ (см. [2]).

2) Аналогично определяется структура Х.а. (с тривиальной градуировкой) в групповой алгебре $K[G]$ произвольной группы G.

3) Алгебра регулярных функций на аффинной алгебраич. группе G становится Х.а. (с тривиальной градуировкой), если определить гомоморфизмы δ и ε с помощью умножения $G\times G\longrightarrow G$ и вложения $\{e\}\longrightarrow G$, где e — единица группы G (см. [3]).

4) Пусть G — линейно связное H-*пространство* с умножением m и единицей e и пусть $\Delta\colon G\longrightarrow G\times G$, $\iota\colon\{e\}\longrightarrow G$, $p\colon G\longrightarrow\{e\}$ определяются формулами $\Delta(a)=(a,a)$, $\iota(e)=e$, $p(a)=e$, $a\in G$. Если все модули когомологий $H^n(G,K)$ проективны и конечно порождены, то отображения $\mu=\Delta^*$, $\iota=p^*$, $\delta=m^*$, $\varepsilon=\iota^*$, индуцированные в когомологиях, превращают $H^*(G,K)$ в градуированно коммутативную квазихопфову алгебру. Если умножение m гомотопно ассоциативно, то $H^*(G,K)$ — Х.а., а двойственная ей Х.а. есть алгебра гомологий $H_*(G,K)$, снабженная отображениями m_*, ι_*, Δ_*, p_* (алгебра Понтрягина). Если K — поле характеристики 0, то алгебра Понтрягина порождается примитивными элементами и изоморфна

$U(\pi(G, K))$, где $\pi(G, K) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(G) \otimes K$ рассматривается как градуированная алгебра Ли относительно произведения Самельсона (см. [2]).

Алгебра $H^*(G, K)$ из примера 4) была впервые рассмотрена Х. Хопфом [1], показавшим, что она является внешней алгеброй с образующими нечетных степеней, если K — поле характеристики 0 и $H^*(G, K)$ конечномерна. Строение произвольной связной градуированно коммутативной квазихопфовой алгебры A с условием $\dim A_n < \infty$, $n \in \mathbb{Z}$, над совершенным полем K характеристики p описывается следующей теоремой (см. [4]). Алгебра A разлагается в тензорное произведение алгебр с одной образующей x и соотношением $x = 0$, где при $p = 2$ s — степень двойки или ∞, а при $p \neq 2$ s — степень p или ∞ (∞ при $p = 0$), если x имеет четную степень и $s = 2$, если x имеет нечетную степень. В частности, при $p = 0$ A есть тензорное произведение внешней алгебры с образующими нечетных степеней и алгебры многочленов с образующими четных степеней. С другой стороны, всякая связная Х.а. A над полем K, в к-рой $x^2 = 0$ для любого элемента x нечетной степени и все элементы четной степени разложимы, есть внешняя алгебра $A = \Lambda P_A$ (см. [2]). В частности, таковы алгебра когомологий и алгебра Понтрягина связной компактной группы Ли над полем $\mathbb{R}$.

Лит.: [1] Hopf H., «Ann. Math.», 1941, v. 42, p. 22—52; [2] Milnor J. W., Moore J. C., там же, 1965, v. 81, № 2, p. 211—64; [3] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [4] его же, в кн.: Расслоенные пространства и их приложения, пер. с англ. и франц., М., 1958, с. 162—246; [5] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966.

А. Л. Онищик.

ХОПФА ИНВАРИАНТ — инвариант гомотопич. класса отображений топологич. пространств. Впервые был определен Х. Хопфом ([1], [2]) для отображений сфер $f\colon S^{2n-1} \longrightarrow S^n$.

Пусть $f\colon S^{2n-1} \longrightarrow S^n$ — непрерывное отображение. Переходя, если нужно, к гомотопному отображению, можно считать это отображение симплициальным относительно нек-рых триангуляций сфер S^n и S^{2n-1}. Тогда инвариант Хопфа определяется как *зацепления коэффициент* $(n-1)$-мерных непересекающихся подмногообразий $f^{-1}(a)$ и $f^{-1}(b)$ в S^{2n-1} для любых различных $a, b \in S^n$.

Отображение $f\colon S^{2n-1} \longrightarrow S^n$ определяет элемент $[f] \in \pi_{2n-1}(S^n)$ и образ элемента $[f]$ при гомоморфизме

$$\pi_{2n-1}(S^n) = \pi_{2n-2}(\Omega S^n) \xrightarrow{h} H_{2n-2}(\Omega S^n) = \mathbb{Z}$$

совпадает с Х.и. $H(f)$ (здесь h — гомоморфизм Гуревича) [3].

Пусть теперь $f\colon S^{2n-1} \longrightarrow S^n$ — отображение класса C^2, и форма $\Omega \in \Lambda^n S^n$ представляет образующую группы целочисленных когомологий $H^n(S^n, \mathbb{Z})$. В качестве такой формы можно взять, напр., форму $\Omega = \frac{dV}{\mathrm{vol}(S^n)}$, где dV — элемент объема на S^n в нек-рой метрике (напр., в метрике, заданной вложением $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$), а $\mathrm{vol}(S^n)$ — объем сферы S^n. Тогда форма $f^*(\Omega) \in \Lambda^n S^{2n-1}$ замкнута и, ввиду тривиальности группы $H^n(S^{2n-1}, \mathbb{Z})$, является точной. Таким образом, $f^*(\Omega) = d\theta$ для нек-рой формы $\theta \in \Lambda^{n-1} S^{2n-1}$. Имеет место формула для вычисления Х.и. (см. [4]):

$$H(f) = \int_{S^{2n-1}} \theta \wedge d\theta.$$

Определение Х.и. обобщено (см. [5], [6]) на случай отображений $f\colon S^m \longrightarrow S^n$ при $m \leqslant 4n-4$. В этом случае имеется разложение

$$\pi_m(S^n \vee S^n) = \pi_m(S^n) \oplus \pi_m(S^n) \oplus \pi_m(S^{2n-1}) \oplus \ker k_*, \quad (*)$$

где

$$k_*\colon \pi_{m+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) \to \pi_{m+1}(S^{2n})$$

— гомоморфизм, индуцированный проекцией k: $(S^n \times S^n,\ S^n \vee S^n) \longrightarrow (S^n,\ pt)$. Пусть дано отображение g: $S^n \longrightarrow S^n \vee S^n$, заданное стягиванием экватора сферы S^n в точку. Тогда Х.и. наз. гомоморфизм

$$H\colon \pi_m(S^n) \to \pi_m(S^{2n-1}),$$

при к-ром $[f] \in \pi_m(S^n)$ преобразуется в проекцию элемента $[g \circ f] \in \pi_m(S^n \vee S^n)$ на прямое слагаемое $\pi_m(S^{2n-1})$ в разложении (*). При $m = 2n-1$, ввиду равенства $\pi_{2n-1}(S^{2n-1}) = \mathbb{Z}$, получается обычный Х.и. Обобщенным инвариантом Хопфа наз. композиция H^* гомоморфизмов

$$\pi_m(S^n) \xrightarrow{g_*} \pi_m(S^n \vee S^n) \xrightarrow{p} \xrightarrow{p} \pi_{m+1}(S^n \times S^n,\ S^n \vee S^n) \xrightarrow{k_*} \pi_{m+1}(S^{2n}),$$

где p — проекция группы $\pi_m(S^n \vee S^n)$ на прямое слагаемое $\pi_{m+1}(S^n \times S^n,\ S^n \vee S^n)$, а гомоморфизмы g_* и k_* описаны выше. При $m \leqslant 4n-4$ инварианты Хопфа—Уайтхеда H и Хопфа—Хилтона H^* связаны соотношением $H^* = S \circ H$, где S: $\pi_m(S^{2n-1}) \longrightarrow \pi_{m+1}(S^{2n})$ — гомоморфизм *надстройки* (см. [6]).

Пусть дано отображение f: $S^{2n-1} \longrightarrow S^n$ и C_f — его цилиндр. Тогда когомологии $H^*(C_f,\ S^{2n-1})$ имеют однородным $\mathbb{Z}$-базисом пару $\{a,\ b\}$ с $\dim a = n$ и $\dim b = 2n$. Имеет место соотношение $a^2 = H(f)\,b$ (см. [7]). Если n нечетно, то (в силу косокоммутативности умножения в когомологиях) $H(f) = 0$.

Имеется (см. [8]) обобщение инварианта Хопфа — Стинрода через *обобщенные теории когомологий*. Пусть k — полуточный гомотопич. функтор в смысле Дольда (см. [9]), заданный на категории конечных CW-комплексов и принимающий значения в нек-рой абелевой категории A. Тогда отображение комплексов f: $X \longrightarrow Y$ определяет элемент $f^* = d(f) \in \mathrm{Hom}(k(Y),\ k(X))$, где Hom — множество морфизмов в A. Инвариант Хопфа—Адамса $e(f)$ определен, когда $f^* = 0$ и $d(Sf) = 0$, где Sf: $SX \longrightarrow SY$ — соответствующее отображение надстроек. В этом случае последовательности корасслоений

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} Y \cup_f CX \xrightarrow{j} SX \xrightarrow{-Sf} SY$$

соответствует точная последовательность в A:

$$0 \leftarrow k(X) \xleftarrow{i_*} k(Y \cup_f CX) \xleftarrow{j_*} k(SX) \leftarrow 0,$$

к-рая и определяет инвариант Хопфа—Адамса—Стинрода $e(f) = \mathrm{Ext}^1(k(Y),\ k(X))$.

В случае функтора $k = H^*(-;\ \mathbb{Z}_2)$, принимающего значения в категории модулей над *Стинрода алгеброй* по модулю 2, получается инвариант Хопфа—Стинрода $H_2(f) \in \mathbb{Z}$ отображения f: $S^m \longrightarrow S^n$ при $m > n$ (см. [7]). Когомологии $H^*(C_f,\ S^m;\ \mathbb{Z}_2)$ имеют $\mathbb{Z}_2$-базисом пару $\{a,\ b\}$ с $\dim a = n$ и $\dim b = m+1$, и тогда

$$Sq^{m-n+1}a = H_2(f)\,b.$$

Инвариантом Хопфа H_p по модулю p (p — простое) наз. композиция отображений

$$\pi_{2pn}(S^{2n+1})_{(p)} \xrightarrow{\approx} \pi_{2pn-2}(\Omega^2 S^{2n+1})\,p \longrightarrow$$
$$\to \pi_{2pn-2}(\Omega^2 S^{2n+1},\ S^{2n-1})_{(p)} \to$$
$$\to H_{2pn-2}(\Omega^2 S^{2n+1},\ S^{2n-1})_{(p)} = \mathbb{Z}/p,$$

где $(X,\ Y)_p$ — локализация по p пары пространств (см. [10]). Пусть

$$S\colon \pi_{4n-1}(S^{2n}) \to \pi_{4n}(S^{2n+1})$$

— гомоморфизм надстройки. Тогда $H_2(Sf) = H_2(f)$ (см. [10]). Х. и. $H(f)$ можно определить и в терминах *Штифеля чисел* (см. [11]): если M^{n-1} — замкнутое

оснащенное многообразие и $M^{n-1}=\partial V$, то характеристич. число Штифеля—Уитни $w_n(\nu)$ $[V, M]$ нормального расслоения ν совпадает с Х.и. $H_2(f)$ отображения f: $S^{n+r-1}\longrightarrow S^r$, представляющего класс оснащенных кобордизмов многообразия M^{n-1}.

Спектральная последовательность Адамса—Новикова позволяет построить высшие инварианты Хопфа. Именно, индуктивно определены инварианты q_i: $\ker q_{i-1}\longrightarrow E_\infty^{i,*}$ и q_0: $\pi^S\longrightarrow E_\infty^{0,*}$ (см. [12]). Из вида дифференциалов этой спектральной последовательности следует, что

$$\mathrm{Ext}_{A^U}^{i,*}(\Omega_U,\ \Omega_U)\supset E_\infty^{i,*},$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

(Ω_U — кольцо комплексных кобордизмов точки), потому при $i=0,\ 1,\ 2,\ 3$ инварианты q_i лежат в $\mathrm{Ext}_{A^U}^{i,*}(\Omega_U, \Omega_U)$ и наз. инвариантами Хопфа—Новикова. При $i=1$ получается инвариант Адамса.

Значения, к-рые может принимать Х.и., не являются произвольным. Напр., для отображения f: $S^{4n+1}\longrightarrow S^{2n+1}$ Х.и. всегда равен нулю. Х.и. по модулю p $H_{(p)}$: $\pi_{2mp}(S^{2m+1})\longrightarrow \mathbb{Z}_2$ тривиален, за исключением случаев: $p=2$, $m=1,\ 2,\ 4$ и $p>2$, $m=1$. С другой стороны, для любого четного числа k существует отображение f: $S^{4n-1}\longrightarrow S^{2n}$ с Х.и., равным k (n — любое). При $n=1,\ 2,\ 4$ существуют отображения f: $S^{4n-1}\longrightarrow S^{2n}$ с Х.и., равным 1.

Лит.: [1] Hopf H., «Math. Ann.», 1930/1931, Bd 104; [2] его же, «Fund. math.», 1935, v. 25, p. 427—40; [3] Серр Ж.-П., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения. Сб. пер., М., 1958, с. 124—62; [4] Whitehead J. H. C., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1947, v. 33, p. 117—23; [5] его же, «Ann. Math.», 1950, v. 51, p. 192—237; [6] Hilton P., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1951, v. 1, № 3, p. 462—93; [7] Steenrod N., «Ann. Math.», 1949, v. 50, p. 954—88; [8] Адамс Дж., «Математика», 1968, т. 12, в. 3, с. 37—97; [9] Дольд А., там же, 1970, т. 14, в. 1, с. 3—103; [10] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [11] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [12] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 4, с. 855—951; [13] Адамс Дж., «Математика», 1961, т. 5, в. 4, с. 3—86.
А. В. Шокуров.

ХОПФА РАССЛОЕНИЕ — локально тривиальное расслоение f: $S^{2n-1}\longrightarrow S^n$ при $n=2,\ 4,\ 8$. Это — один из самых ранних примеров локально тривиальных расслоений, введенный Х. Хопфом [1]. Эти отображения индуцируют тривиальные отображения в гомологиях и когомологиях, однако они не гомотопны нулевому отображению, что вытекает из нетривиальности *Хопфа инварианта* этих отображений. Для их построения потребуется т. н. конструкция Хопфа.

Пусть $X*Y$ — джойн пространств X и Y, он обладает естественными координатами $\langle x, t, y\rangle$, где $x\in X$, $t\in[0,\ 1]$, $y\in Y$. При этом $X*_{pt}=SX$, где SX — *надстройка* над X. Конструкция Хопфа $\mathfrak{H}$ сопоставляет отображению f: $X\times Y\longrightarrow Z$ отображение $\mathfrak{H}(f)$: $X*Y\longrightarrow SZ$, заданное соотношением $\mathfrak{H}(f)\langle x,\ t,\ y\rangle=\langle f(x,\ y),\ t,\ pt\rangle$.

Пусть отображения μ_n: $S^{n-1}\times S^{n-1}\longrightarrow S^{n-1}$ определены при $n=2,\ 4,\ 8$ при помощи умножений: в комплексных числах при $n=2$, в кватернионах при $n=4$ и в числах Кэли при $n=8$. Тогда $S^{n-1}*S^{n-1}=S^{2n-1}$, и отображением Хопфа наз. отображение

$$\mathfrak{H}_n=\mathfrak{H}(\mu_n)\colon S^{2n-1}\to S^n.$$

Отображение Хопфа $\mathfrak{H}_n$, $n=2,\ 4,\ 8$ является локально тривиальным расслоением со слоем S^{n-1}. Если f: $S^{n-1}\times S^{n-1}\longrightarrow S^{n-1}$ — отображение бистепени (d_1, d_2), то инвариант Хопфа отображения $\mathfrak{H}(f)$ равен d_1d_2. В частности, инвариант Хопфа Х.р. равен 1.

Иногда Х.р. наз. отображение f: $S^{2n+1}\longrightarrow \mathbb{C}P^n$, заданное формулой $(z_0,\ \ldots,\ z_n)\longrightarrow[z_0:z_1:\ldots:z_n]$, $z_i\in\mathbb{C}$. Это отображение является локально тривиальным рас-

слоением со слоем S^1. При $n=1$ получается классич. Х.р. $f\colon S^3 \to S^2$.

Лит.: [1] Hopf H., «Fund. math.», 1935, v. 25, p. 427—40; [2] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970.

А. В. Шокуров.

ХОПФА — РИНОВА ТЕОРЕМА: если M — связное риманово пространство с функцией расстояния ρ и *Леви-Чивита связностью*, то следующие утверждения равносильны:

1) M полно;

2) для каждой точки $p \in M$ *экспоненциальное отображение* $\exp_p$ определено на всем касательном пространстве M_p;

3) каждое ограниченное по отношению к ρ замкнутое множество $A \subset M$ компактно.

Следствие: любые две точки p, $q \in M$ можно соединить на M геодезич. длины $\rho(p, q)$. Установлена Х. Хопфом и У. Риновым [1].

Обобщение Х.— Р. т. (см. [4]): если p, q — две точки в M, то либо существует линия, соединяющая их кратчайшим образом, либо существует выходящая из p геодезич. L со следующими свойствами: 1) L гомеоморфна $0 \leqslant t < 1$; 2) если последовательность точек, лежащих на L, не имеет предельных точек на L, то она не имеет предельных точек и в M, т. е. L замкнуто в M; 3) L содержит кратчайшую связь между любыми двумя точками на L; 4) для каждой точки $x \in L$ справедливо: $\rho(p, x)+\rho(x, q)=\rho(p, q)$; 5) длина L конечна и не превосходит $\rho(p, q)$. При этом функция $\rho(p, q)$ не обязана быть симметричной, и каждую точку можно соединить кратчайшим образом с любой точкой из нек-рой окрестности U_p не обязательно однозначно. Следствие: если в M не существует ограниченных лучей, то каждое ограниченное множество в M компактно.

Лит.: [1] Hopf H., Rinow W., «Comm. math. helv.», 1931, v. 3, p. 209—25; [2] de Rham G., там же, 1952, v. 26, p. 328—44; [3] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [4] Кон-Фоссен С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, [пер. с нем.], М., 1959.

М. И. Войцеховский.

ХОПФОВА ГРУППА — группа, не изоморфная никакой своей истинной факторгруппе. Название дано в честь Х. Хопфа (H. Hopf), поставившего в 1932 вопрос о существовании конечно порожденных групп, не обладающих таким свойством. Известны примеры нехопфовых групп, в том числе пример группы с одним определяющим соотношением и двумя образующими. Всякая конечно порожденная финитно-аппроксимируемая группа — хопфова.

Лит.: [1] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп, пер. с англ., М., 1974.

Н. Н. Вильямс.

ХОРД МЕТОД — то же, что *секущих метод*.

ХОРДА — прямолинейный отрезок, соединяющий две произвольные точки конич. сечения. *БСЭ-3.*

ХОТЕЛЛИНГА КРИТЕРИЙ, T^2-критерий,— критерий, предназначенный для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой истинное значение неизвестного вектора $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_p)$ математич. ожиданий невырожденного p-мерного нормального закона $N(\mu, B)$, ковариационная матрица к-рого B тоже неизвестна, есть вектор $\mu_0=(\mu_{10}, \ldots, \mu_{p0})$. Х. к. основан на следующем результате. Пусть $X_1, \ldots, X_n$—независимые p-мерные случайные векторы, $n-1 \geqslant p$, подчиняющиеся невырожденному нормальному закону $N(\mu, B)$, и пусть

$$T^2 = n\,(\overline{X}-\mu_0)^{\top} S^{-1}\,(\overline{X}-\mu_0),$$

где

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

и

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(X_i - \overline{X})^\top$$

— оценки максимального правдоподобия для неизвестных параметров μ и B. Тогда статистика

$$F = \frac{n-p}{p(n-1)} T^2$$

имеет нецентральное *Фишера F-распределение* с p и $n-p$ степенями свободы и параметром нецентральности

$$n(\mu - \mu_0)^\top B^{-1} (\mu - \mu_0);$$

статистика T^2 имеет *Хотеллинга T^2-распределение*. Следовательно, для проверки гипотезы H_0: $\mu = \mu_0$ против альтернативы H_1: $\mu \neq \mu_0$ можно по реализациям независимых случайных векторов $X_1, \ldots, X_n$, подчиняющихся невырожденному p-мерному нормальному закону $N(\mu, B)$, вычислить значение статистики F, к-рая при справедливости гипотезы H_0 имеет центральное F-распределение с p и $n-p$ степенями свободы. Согласно Х.к. с уровнем значимости α гипотезу H_0 следует отвергнуть, если $F \geqslant F_\alpha(p, n-p)$, где $F_\alpha(p, n-p)$ — верхняя α-квантиль F-распределения. Следует отметить связь, существующую между Х.к. и отношения правдоподобия критерием. Пусть

$$L(\mu, B) = L(X_1, \ldots, X_n; \mu, B) =$$

$$= \frac{|B^{-1}|^{n/2}}{(2\pi)^{np/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^\top B^{-1} (X_i - \mu)\right\}$$

— функция правдоподобия, вычисленная по выборке $X_1, \ldots, X_n$. Критерий отношения правдоподобия для проверки сложной гипотезы H_0: $\mu = \mu_0$ против сложной альтернативы H_1: $\mu \neq \mu_0$ построен на статистике

$$\lambda = \lambda(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\sup\limits_{B} L(\mu_0, B)}{\sup\limits_{\mu, B} L(\mu, B)}.$$

Между статистикой λ и статистиками T^2 и F существуют следующие отношения:

$$\lambda^{2/n} = \frac{n-1}{T^2 + n - 1} = \frac{n-p}{pF + n - p}.$$

Для проверки гипотезы H_0 : $\mu = \mu_0$ Х. к. является равномерно наиболее мощным среди всех критериев, инвариантных относительно преобразований подобия (см. *Наиболее мощный критерий*, *Инвариантный критерий*).

Лит.: [1] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968.

М. С. Никулин.

ХОТЕЛЛИНГА T^2-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное распределение вероятностей, сосредоточенное на положительной полуоси $(0, \infty)$ с плотностью

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{x^{\frac{k}{2}-1}}{n^{\frac{k}{2}}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

зависящей от двух целочисленных параметров n (числа степеней свободы) и k, $n \geqslant k \geqslant 1$. При $k=1$ Х. T^2-р. сводится к *Стьюдента распределению*, а при любом $k > 1$ может рассматриваться как многомерное обобщение распределения Стьюдента в следующем смысле. Если k-мерный случайный вектор Y имеет нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей Σ и если

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i^\top Z_i,$$

где случайные векторы Z_i независимы между собой и от Y и распределены так же, как Y, то случайная величина $T^2 = Y^\top S^{-1} Y$ имеет Х. T^2-р. с n степенями свободы (Y — вектор-столбец, а $^\top$ — транспонирование). Если $k=1$, то

$$T^2 = \frac{Y^2}{\frac{1}{n}\chi_n^2} = t_n^2,$$

где случайная величина t_n имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы. Если при определении случайной величины T^2 допустить, что Y имеет нормальное распределение с параметрами (ν, Σ), а Z_i — нормальное распределение с параметрами $(0, \Sigma)$, то соответствующее распределение будет наз. нецентральным Х. T^2-р. с n степенями свободы и параметром нецентральности ν.

Х. T^2-р. используется в математич. статистике в той же ситуации, что и t-распределение Стьюдента, но только в многомерном случае (см. *Многомерный статистический анализ*). Если результаты наблюдений $X_1, \ldots, X_n$ представляют собой независимые нормально распределенные случайные векторы с вектором средних μ и невырожденной ковариационной матрицей Σ, то статистика

$$T^2 = n(\overline{X} - \mu)^\top S^{-1} (\overline{X} - \mu),$$

где

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

и

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(X_i - \overline{X})^\top,$$

имеет Х. T^2-р. с $n-1$ степенями свободы. Этот факт положен в основу *Хотеллинга критерия*. Для численных расчетов используют таблицы *бета-распределения* или *Фишера F-распределения*, поскольку случайная величина $\frac{n-k+1}{nk} T^2$ имеет F-распределение с k и $n-k+1$ степенями свободы.

Х. T^2-*р.* было предложено Хотеллингом [1] в задаче об однородности двух нормальных выборок.

Лит.: [1] Hotelling H., «Ann. Math. Stat.», 1931, v. 2, p. 360—78; [2] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963.

А. В. Прохоров.

ХЬЮИТТА РАСШИРЕНИЕ — расширение топологич. пространства, наибольшее относительно свойства продолжения действительных непрерывных функций; предложено Э. Хьюиттом [1].

Гомеоморфное вложение $v\colon X \longrightarrow Y$ наз. функциональным расширением, если $v(X)$ плотно в Y и для любой непрерывной функции $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ существует такая непрерывная функция $\tilde{f}\colon Y \longrightarrow \mathbb{R}$, что $f = \tilde{f}v$. Вполне регулярное пространство X наз. Q-пространством, или функционально замкнутым пространством, если любое его функциональное расширение является гомеоморфизмом, т. е. $v(X) = X$. Функциональное расширение $v\colon X \longrightarrow v(X)$ вполне регулярного пространства X наз. расширением Хьюитта, если $v(X)$ является Q-пространством. Любое вполне регулярное пространство обладает Х.р., и последнее единственно с точностью до гомеоморфизма.

Х.р. можно определить так же, как подпространство тех точек *у Стоуна — Чеха бикомпактного расширения* βX, что любая непрерывная действительная функция $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ продолжается на $X \cup \{y\}$.

Лит.: [1] Mewitt E., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1948, v. 64, p. 45—99; [2] Engelking R., Outline of general topology, Amst., 1968; [3] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

И. Г. Кошевникова.

ЦАССЕНХАУЗА ГРУППА — дважды транзитивная группа G подстановок конечного множества M, в к-рой лишь единичная подстановка оставляет на месте более двух символов из M, и для любой пары символов $a,\ b \in M$ подгруппа $H_{a,\,b}$ нетривиальна, где

$$H_{a,\,b} = \{h \mid h \in G,\ h(a) = a,\ h(b) = b\};$$

впервые такие группы рассмотрены Х. Цассенхаузом[1]. Класс Ц. г. включает два семейства конечных простых групп — проективные специальные группы $PSL(2, q)$, $q > 3$, и *Судзуки группы*.

Лит.: [1] Zassenhaus H., «Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg», 1936, Bd 11; [2] Gorenstein D., Finite groups, N. Y., 1968.

Н. Н. Вильямс.

ЦЕЛАЯ РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, (алгебраический) многочлен, (алгебраический) полином, — функция вида

$$w = P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

где n — целое неотрицательное, коэффициенты $a_0, \ldots, a_n$ — действительные или комплексные числа, z — действительное или комплексное переменное. Если $a_0 \neq 0$, n наз. степенью многочлена, многочлен $P(z) \equiv 0$ не имеет степени. Простейшая непостоянная Ц. р. ф.— целая линейная функция

$$w = az + b, \quad a \neq 0.$$

Ц.р.ф. аналитична во всей плоскости, т. е. является *целой функцией* комплексного переменного z, ∞ — полюс n-го порядка для $P_n(z)$ ($P_n(z) \to \infty$ при $n \geqslant 1$, когда $z \to \infty$; обратно, если $f(z)$ — целая функция, и $f(z) \to \infty$ при $z \to \infty$, то $f(z)$ — Ц.р.ф.). Важную роль в математич. анализе играют также многочлены от нескольких действительных или комплексных переменных. Ц.р.ф., как наиболее удобные для вычисления функции, используются для приближенного представления более сложных функций.

См. также *Многочлен*.

Лит.: Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд., М., 1977.

Е. П. Долженко.

ЦЕЛАЯ ТОЧКА — точка в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами. В теории чисел изучается вопрос о количестве Ц. т. нек-рых областей, напр. при $n = 2$ в круге и при $n = 3$ в шаре (см. *Круга проблема)*, а также об условиях равномерного распределения Ц. т. на поверхностях, напр. при $n = 3$ на сфере и на эллипсоидах. Наиболее сильные результаты получаются с помощью метода тригонометрич. сумм и методов алгебраич. и геометрич. теории чисел.

Б. М. Бредихин.

ЦЕЛАЯ ФУНКЦИЯ — функция, аналитическая во всей плоскости комплексного переменного (кроме, возможно, бесконечно удаленной точки). Она разлагается в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k \geqslant 0,$$

сходящийся во всей плоскости $\mathbb{C}$, $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$.

Если $f(z) \neq 0$ всюду, то $f(z) = e^{P(z)}$, где $P(z)$ — Ц.ф. Если имеется конечное число точек, в к-рых $f(z)$ обра-

щается в нуль, и эти точки — $z_1, z_2, \ldots, z_k$ (их наз. нулями функции), то

$$f(z) = (z - z_1)\ldots(z - z_k)\, e^{P(z)},$$

где $P(z)$ есть Ц. ф.

В общем случае, когда у $f(z)$ имеется бесконечно много нулей $z_1, z_2, \ldots$, имеет место представление (см. *Вейерштрасса теорема* о бесконечном произведении)

$$f(z) = z^{\lambda} e^{P(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\frac{z}{z_k} + \frac{z^2}{2z_k^2} + \ldots + \frac{z^k}{kz_k^k}},$$

где $P(z)$ есть Ц. ф., а $\lambda = 0$, если $f(0) \neq 0$, и λ равно кратности нуля $z = 0$, если $f(0) = 0$.

Пусть

$$M(r) = \max_{|z| \leqslant r} |f(z)|.$$

Если при больших r величина $M(r)$ растет не быстрее r^{μ}, то $f(z)$ — многочлен степени не большей μ. Следовательно, если $f(z)$ не многочлен, то $M(r)$ растет быстрее любой степени r. При оценке роста $M(r)$ в этом случае берется в качестве функции сравнения показательная функция.

По определению, $f(z)$ есть Ц. ф. конечного порядка, если имеется конечное μ такое, что

$$M(r) < e^{r^{\mu}}, \quad r > r_0.$$

Нижняя грань ρ множества чисел μ, удовлетворяющих этому условию, наз. порядком Ц. ф. $f(z)$. Порядок вычисляется по формуле

$$\rho = \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{k \ln k}{\ln \left| \frac{1}{a_k} \right|}.$$

Если $f(z)$ порядка ρ удовлетворяет условию

$$M(r) < e^{\alpha r^{\rho}}, \quad \alpha < \infty, \quad r > r_0, \qquad (*)$$

то говорят, что $f(z)$ — функция порядка ρ конечного типа. Нижняя грань σ множества чисел α, удовлетворяющих указанному условию, наз. типом Ц. ф. $f(z)$. Он определяется из формулы

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} k^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[k]{|a_k|} = (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Среди Ц. ф. конечного типа различают Ц. ф. нормального типа ($\sigma > 0$) и минимального типа ($\sigma = 0$). Если условие (*) не выполняется при любом $\alpha < \infty$, то Ц. ф. наз. Ц. ф. максимального, или бесконечного, типа. Ц. ф. порядка 1 и конечного типа, а также Ц. ф. порядка ниже 1, характеризуемые условием

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} k \sqrt[k]{|a_k|} = \beta < \infty,$$

наз. Ц. ф. экспоненциального типа.

Нули $z_1, z_2, \ldots$ Ц. ф. $f(z)$ порядка ρ обладают свойством:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{\rho+\varepsilon}} < \infty, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Пусть p — наименьшее целое ($p \leqslant \rho$) такое, что $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^{-p-1} < \infty$. Тогда (см. *Адамара теорема* о целых функциях) имеет место представление

$$f(z) = z^{\lambda} e^{P(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\frac{z}{z_k} + \frac{z^2}{2z_k^2} + \ldots + \frac{z^p}{pz_k^p}},$$

где $P(z)$ — многочлен степени не выше ρ.

Для характеристики роста Ц. ф. $f(z)$ конечного порядка ρ и конечного типа σ вдоль лучей вводится величина

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho}}$$

— *роста индикатриса*. Всегда

$$|f(re^{i\varphi})| < e^{(h(\varphi)+\varepsilon) r^{\rho}}, \ r > r_0(\varepsilon), \ \forall \varepsilon > 0.$$

Если

$$|f(re^{i\varphi})| > e^{(h(\varphi)-\varepsilon) r^{\rho}}, \ r > r_0(\varepsilon), \ z \notin E_0,$$

где E_0 — в нек-ром смысле малое множество (множество нулевой относительной меры), то нули $f(z)$ расположены на плоскости в определенном смысле весьма правильно и имеется точно описываемая связь между $h(\varphi)$ и характеристикой (плотностью) нулей. Функции $f(z)$ с таким свойством наз. функциями вполне регулярного роста.

Функция многих переменных $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ есть Ц. ф., если она является аналитической при $|z_k| < \infty$ ($k=1, 2, \ldots, n$). Для нее вводятся понятия порядка и типа (сопряженных порядков и типов). Простого представления в виде бесконечного произведения здесь получить не удается, потому что в отличие от случая $n=1$ нули $f(z)$ не являются изолированными.

Лит.: [1] Евграфов М. А., Асимптотические оценки и целые функции, 3 изд., М., 1979; [2] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., 1956; [3] Ронкин Л. И., Введение в теорию целых функций многих переменных, М., 1971.

А. Ф. Леонтьев.

ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ, функция цели,— название оптимизируемой функции в задачах *математического программирования*.

ЦЕЛОЕ РАСШИРЕНИЕ кольца — расширение B коммутативного кольца A с единицей такое, что любой элемент $x \in B$ является целым над A, т. е. удовлетворяет нек-рому уравнению вида

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

где $a_i \in A$, называемому уравнением целой зависимости.

Элемент x цел над A тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух эквивалентных условий: 1) $A[x]$ является A-модулем конечного типа; 2) существует точный $A[x]$-модуль, являющийся A-модулем конечного типа. Целый элемент алгебраичен над A. Если A — поле, то верно и обратное утверждение. Элементы поля комплексных чисел $\mathbb{C}$, целые над кольцом $\mathbb{Z}$, наз. целыми алгебраическими числами. Если кольцо B есть модуль конечного типа над A, то любой элемент $x \in B$ цел над A (обратное может не быть верным).

Пусть кольцо $R \supset A$ коммутативно, x и y — элементы R, целые над A. Тогда $x+y$ и xy также целы над A, и множество всех элементов из R, целых над A, образует подкольцо, наз. целым замыканием A в R.

Все рассматриваемые далее кольца предполагаются коммутативными.

Если B является целым над A и A' — нек-рая A-алгебра, то $B \otimes A'$ цело над A'. Если B — целое расширение кольца A и S — нек-рое мультипликативное подмножество в A, то кольцо $S^{-1}B$ является целым над $S^{-1}A$. Область целостности A наз. ц е л о з а м к н у т о й, если целое замыкание A в своем поле частных совпадает с A. Факториальное кольцо целозамкнуто. Кольцо A целозамкнуто тогда и только тогда, когда для любого максимального идеала $\mathfrak{p} \subset A$ целозамкнуто локальное кольцо $A_{\mathfrak{p}}$.

Пусть B — целое расширение A и $\mathfrak{p}$ — нек-рый простой идеал кольца A. Тогда $\mathfrak{p}B \neq B$ и существует простой идеал $\mathfrak{P}$ кольца B, лежащий над $\mathfrak{p}$ (т. е. такой, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$). Идеал $\mathfrak{P}$ максимален тогда и только тогда, когда максимален $\mathfrak{p}$. Если L — конечное расширение поля частных кольца A и B — целое замыкание A в L, то существует лишь конечное число простых идеалов $\mathfrak{P}$ кольца B, лежащих над заданным простым идеалом кольца A.

Пусть $C \supset B \supset A$; расширение $C \supset A$ — Ц.р. тогда и только тогда, когда целыми являются оба расширения $C \supset B$ и $B \supset A$.

Лит.: [1] Л е н г С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Б у р б а к и Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.
Л. В. Кузьмин.

ЦЕЛОЕ ЧИСЛО — см. *Число.*

ЦЕЛОСТНОЕ КОЛЬЦО — то же, что *область целостности.*

ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — раздел *математического программирования*, в к-ром исследуется задача оптимизации (максимизации или минимизации) функции нескольких переменных, связанных рядом уравнений и (или) неравенств и удовлетворяющих условию целочисленности (используются также термины д и с к р е т н о е п р о г р а м м и р о в а н и е, д и с к р е т н а я о п т и м и з а ц и я). Источником задач Ц. п. является техническая, экономическая и военная проблематика.

Условие целочисленности переменных формально отражает: а) физич. неделимость объектов (напр., при размещении предприятий или выборе варианта боевых действий); б) конечность множества допустимых вариантов, на к-ром проводится оптимизация (напр., множества перестановок в задачах упорядочения); в) наличие логич. условий, выполнение или невыполнение к-рых влечет изменение вида целевой функции и ограничений задачи.

Наиболее изученной и распространенной задачей Ц. п. является т. н. з а д а ч а ц е л о ч и с л е н н о г о л и н е й н о г о п р о г р а м м и р о в а н и я: максимизировать

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$x_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, x_j — целые для $j = 1, \ldots, p$, $p \leqslant n$, где a_{ij}, b_i, c_j — заданные целые числа, x_j — переменные.

Методы решения задач Ц. п. (релаксация, отсечения, динамическое программирование, метод «ветви и границы» и др.) основаны на сокращении перебора допустимых вариантов. «Наивный» подход к решению задач Ц. п., заключающийся в полном переборе всех вариантов (если их множество, конечно), требует объема вычислительной работы, к-рый растет как экспонента от числа переменных, и оказывается практически несостоятельным. Сложность теоретических и вычислительных проблем, возникающих при решении задач Ц. п.,

можно проиллюстрировать тем, что т. н. великая теорема Ферма допускает следующую эквивалентную формулировку: минимизировать

$$(x_1^t + x_2^t - x_3^t)^2$$

при условиях

$$x_1 \geqslant 1,\ x_2 \geqslant 1,\ x_3 \geqslant 1,\ t \geqslant 3,$$

t, x_1, x_2, x_3— целые числа. Если какой-то метод Ц. п. в качестве ответа выдаст положительное значение для минимума целевой функции, это будет конструктивным доказательством теоремы Ферма, если же ответом будет нуль, то это опровергнет ее.

Центральный теоретич. вопрос в Ц. п.: можно ли исключить полный перебор при решении задач Ц. п.? Одна из математич. формулировок этой проблемы: совпадают ли классы P и NP? Класс P (класс NP) — это переборные задачи, разрешимые на детерминированной (недетерминированной) машине Тьюринга за полиномиальное время, т. е. за число вычислительных операций, зависящее как полином от т. п. «длины записи» задачи. Класс NP включает все задачи Ц. п., к-рые имеют экспоненциальное (относительно «длины записи» задачи) количество допустимых решений. Проблема «$P=NP$?» пока (1984) остается открытой.

Лит.: [1] Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., Новые направления в линейном программировании, М., 1966; [2] Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю., Дискретное программирование, М., 1969; [3] Гэри М., Джонсон Д., Вычислительные машины и труднорешаемые задачи, пер. с англ., М., 1982. *Е. Г. Гольштейн, Е. В. Левнер.*

ЦЕЛЫЙ ИДЕАЛ — идеал поля Q относительно кольца A (здесь Q — поле частных кольца A), целиком лежащий в A. При этом Ц. и. является идеалом в A и обратно, всякий идеал кольца A — Ц. и. его поля частных Q. *О. А. Иванова.*

ЦЕЛЫХ ТОЧЕК РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — нек-рые асимптотические формулы аналитич. теории чисел для арифметич. функций, к-рые могут быть сформулированы как задачи о числе *целых точек* в нек-рых многообразиях, в первую очередь, в гомотетически расширяющихся областях в пространстве $\mathbb{R}^n$.

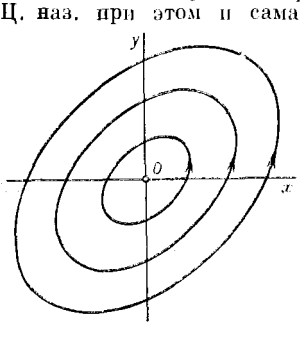
Классическими (исходными) здесь являются *круга проблема* (Гаусса) и *делителей проблема* (Дирихле), а также их многочисленные обобщения.

Лит.: [1] Fricker F., Einführung in die Gitterpunktlehre, Basel — Boston — Stuttgart, 1981; [2] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [3] Вальфиш А. З., Целые точки в многомерных шарах, Тб., 1959. *А. В. Малышев.*

ЦЕНТР — тип расположения траекторий автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\dot{x} = f(x),\ x = (x_1, x_2),\ f\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (*)$$

$f \in C(G)$, G — область единственности, в окрестности особой точки x_0. Этот тип характеризуется следующим образом. Существует окрестность U точки x_0 такая, что все траектории системы, начинающиеся в $U \setminus \{x_0\}$, являются замкнутыми кривыми, окружающими x_0. Ц. наз. при этом и сама точка x_0. На рис. точка O — центр. Движение по траекториям с возрастанием t может происходить по часовой стрелке или против нее (как указано на рис. стрелками). Ц. устойчив по Ляпунову (не асимптотически). Его индекс Пуанкаре равен 1.



Точка x_0 является для системы (*) Ц., напр., когда $f(x) = A(x - x_0)$, где A — постоянная матрица с чисто

мнимыми собственными значениями. В отличие от простых точек покоя других типов, встречающихся для линейных систем 2-го порядка (*седло*, *узел*, *фокус*), точка x_0 типа Ц. при возмущении линейной системы добавками к правой части, вообще говоря, не остается Ц., как бы ни были высоки порядок малости возмущений относительно $\|x-x_0\|$ и порядок их гладкости. Она может перейти при этом в фокус (устойчивый или неустойчивый) или в центрофокус (см. *Центра и фокуса проблема*). Для нелинейной системы (*) класса $C^1(f\in C^1(G))$ точка покоя x_0 может быть Ц. и в том случае, когда матрица $A=f'(x_0)$ имеет два нулевых собственных значения.

Лит.: [1] Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П., Нелинейные колебания в системах второго порядка, Минск, 1982. См. также *лит.* при статье *Особая точка* дифференциального уравнения. *А. Ф. Андреев.*

ЦЕНТР группы — множество Z всех центральных (называемых иногда также инвариантными) элементов этой группы, т. е. элементов, перестановочных со всеми элементами группы. Ц. группы G является нормальным делителем в G и даже характеристич. подгруппой в G. Более того, нормальным делителем в G будет всякая подгруппа Ц. Абелевы группы и только они совпадают со своим Ц. Группы, Ц. к-рых состоит лишь из единицы, наз. группами без центра. Факторгруппа G/Z группы G по своему Ц. не обязана быть группой без Ц.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967. *О. А. Иванова.*

ЦЕНТР кольца — совокупность Z всех элементов кольца, перестановочных с любым элементом, т. е.

$$Z=\{z \mid az=za \text{ для всех } a\}.$$

Ц. кольца оказывается подкольцом, содержащим вместе с каждым обратимым элементом элемент, обратный к нему. Ц. кольца, являющегося алгеброй с единицей над полем, содержит основное поле (ср. *Центральная алгебра*). *Л. А. Скорняков.*

ЦЕНТР *топологической динамической системы* $\{S_t\}$ (*потока* или *каскада* с фазовым пространством X) — наибольшее замкнутое *инвариантное множество* $A\subset X$, все точки к-рого являются *неблуждающими точками* для ограничения исходной системы на A. Ц. заведомо непуст, если пространство X компактно (более общо, если имеется полутраектория с компактным замыканием). Дж. Биркгоф, к-рый ввел понятие Ц., пользовался другим, но эквивалентным, определением с помощью нек-рого трансфинитного процесса (см. [1]—[4]). Число шагов последнего наз. глубиной Ц. (фактически имеется несколько «глубин», так как этот процесс допускает нек-рые модификации). Глубина Ц. невелика для потоков на компактных многообразиях размерности $\leqslant 2$ (см. [5], [6]) и для каскадов, получающихся итерированием гомеоморфизма окружности или непрерывного отображения (даже необратимого) отрезка (см. [7]), но уже для потоков в $\mathbb{R}^3$ и на нек-рых открытых поверхностях может быть сколь угодно большим счетным трансфинитом (см. [8]—[10]). В полном метрич. пространстве Ц. совпадает с замыканием множества точек, обладающих свойством *устойчивости по Пуассону*.

Если X — компакт, а U — окрестность Ц., то траектория любой точки $x\in X$ «проводит бо́льшую часть времени в U»: доля на отрезке $[0, T]$ тех t, для к-рых $S_tx\in U$, стремится к 1 при $T\to\infty$. Впрочем, наименьшее замкнутое инвариантное множество, обладающее тем же свойством (минимальный центр притяжения, см. [3], [4]), является, вообще говоря, только частью Ц.; в метризуемом случае оно совпадает с замыканием объединения всех *эргодических множеств*.

Лит.: [1] Birkhoff G. D., «Nachr. der Gesellschaft der Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl.», 1926, H. 1, S. 81—92;

[2] Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, пер. с англ., М.—Л., 1941; [3] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1949; [4] Сибирский К. С., Введение в топологическую динамику, Кишинев, 1970; [5] Schwartz A. J., Thomas E. S., в кн.: Global analysis. («Proc. symp. in pure math.», v. 14), Providence, 1970, p. 253–64; [6] Neumann D. A., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1976, v. 61, № 1, p. 39—43; [7] Шарковський О. М., «Доповіді АН УРСР», 1964, № 7, с. 865—68; [8] Майер А. Г., «Матем. сб.», 1950, т. 26, № 2, с. 265—90; [9] Шильников Л. П., «Матем. заметки», 1969, т. 5, № 3, с. 335—39; [10] Neumann D. A., «Amer. J. Math.», 1978, v. 100, № 1, p. 1—18.

Д. В. Аносов.

ЦЕНТР частично упорядоченного множества — подмножество элементов частично упорядоченного множества P с 0 и 1 (в частности, решетки), у к-рых при нек-ром разложении P в прямое произведение одна из компонент есть 1, а остальные — 0. Ц. любого частично упорядоченного множества с 0 и 1 является булевой алгеброй. Элемент a решетки L принадлежит ее Ц. тогда и только тогда, когда он нейтрален (т. е. каждая тройка элементов $\{a, x, y\}$ порождает дистрибутивную подрешетку в L) и обладает дополнением. В дедекиндовой решетке с дополнениями Ц. совпадает с множеством всех элементов, обладающих единственным дополнением.

Т. С. Фофанова.

ЦЕНТРА И ФОКУСА ПРОБЛЕМА — проблема определения условий, при к-рых все траектории *автономной системы* обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y) \qquad (*)$$

в нек-рой окрестности *равновесия положения* O, за исключением точки O, являются замкнутыми кривыми. Функции X и Y предполагаются голоморфными в нек-рой окрестности точки O. Проблема поставлена А. Пуанкаре (H. Poincaré, [1]). Основополагающие результаты получены А. М. Ляпуновым [2].

Обычно предполагают, что характеристич. уравнение линеаризованной в точке O системы, т. е. системы

$$\dot{\xi} = X'_x(O)\,\xi + X'_y(O)\,\eta,$$
$$\dot{\eta} = Y'_x(O)\,\xi + Y'_y(O)\,\eta,$$

имеет чисто мнимые корни. Тогда особая точка O является для системы $(*)$ либо *центром* (окружена замкнутыми траекториями), либо *фокусом* (окружена спиралями). В этом случае необходимое и достаточное условие существования центра заключается в том, что система $(*)$ должна иметь не зависящий от t действительный голоморфный в окрестности точки O интеграл $F(x, y) = C$ (см. [2]). На основе этого результата разработаны методы составления условий наличия центра; такие условия представляют собой равенство нулю бесконечной последовательности многочленов от коэффициентов разложений в ряды правых частей системы $(*)$. В случае полиномиальных правых частей из теоремы Гильберта о конечности базиса полиномиальных идеалов следует, что существенных условий в указанной последовательности — лишь конечное число, а остальные являются их следствиями. Задача установления числа существенных условий центра является весьма сложной и полностью решена лишь в случае, когда X и Y являются многочленами 2-й степени (три условия). В случае многочленов более высокой степени разработаны методы установления условий наличия центров определенной структуры: изохронных, устойчивых, симметричных (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М., 1947; [2] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., 1950; [3] Амелькин В. В., «Дифференц. уравнения», 1977, т. 13, № 6, с. 971—80; [4] Сибирский К. С., Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц, Кишинев, 1976.

К. С. Сибирский.

ЦЕНТРАЛИЗАТОР — подмножество кольца, группы или полугруппы R, состоящее из элементов, переста-

новочных (коммутирующих) со всеми элементами из нек-рого множества $S \subseteq R$; централизатор S в R обозначается $C_R(S)$. Ц. неприводимого (т. е. не имеющего собственных инвариантных подгрупп) подкольца эндоморфизмов абелевой группы в кольце всех эндоморфизмов этой группы есть тело (лемма Шура).

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961.

Л. А. Бокуть.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ АЛГЕБРА — алгебра с единицей над полем, центр к-рой (см. *Центр* кольца) совпадает с основным полем. Напр., тело кватернионов является Ц. а. над полем действительных чисел, а поле комплексных чисел не является. Алгебра матриц над полем — Ц. а. Тензорное произведение простой алгебры и простой Ц. а. оказывается простой Ц. а. Всякий автоморфизм конечномерной простой Ц. а. является внутренним, а ее размерность — квадратом целого числа.

Лит.: [1] Дрозд Ю. А., Кириченко В. В., Конечномерные алгебры, К., 1980; [2] Скорняков Л. А., Элементы общей алгебры, М., 1983.

Л. А. Скорняков.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА — общее название ряда предельных теорем теории вероятностей, указывающих условия, при выполнении к-рых суммы или другие функции от большого числа независимых или слабо зависимых случайных величин имеют распределения вероятностей, близкие к *нормальному распределению*.

В классич. варианте Ц. п. т. речь идет о последовательности

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \tag{1}$$

независимых случайных величин, имеющих конечные математич. ожидания $\mathsf{E}X_k = a_k$ и конечные дисперсии $\mathsf{D}X_k = b_k$, и о суммах

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n. \tag{2}$$

Пусть $A_n = \mathsf{E}S_n = a_1 + \ldots + a_n$, $B_n = \mathsf{D}S_n = b_1 + \ldots + b_n$. Функции распределения

$$F_n(x) = \mathsf{P}\{Z_n < x\}$$

т. н. «нормированных» сумм

$$Z_n = \frac{S_n - A_n}{\sqrt{B_n}}, \tag{3}$$

имеющих математич. ожидание, равное нулю, и дисперсию, равную единице, сравнивают со «стандартной» нормальной функцией распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\, dz,$$

соответствующей нормальному распределению с нулевым математич. ожиданием и единичной дисперсией. Утверждение Ц. п. т. в этом случае состоит в том, что при определенных условиях при $n \to \infty$ и при любом x

$$F_n(x) \to \Phi(x)$$

или, что то же самое, для любого интервала (α, β) имеет место сходимость

$$\mathsf{P}\{\alpha < Z_n < \beta\} = \mathsf{P}\{A_n + \alpha\sqrt{B_n} < S_n < A_n + \beta\sqrt{B_n}\} \to$$
$$\to \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

(см. *Лапласа теорема*, *Ляпунова теорема*).

Понять наиболее отчетливо условия возникновения нормального распределения в качестве предельного для распределений сумм независимых случайных величин можно лишь переходя от схемы последовательности к *серий схеме* (см. [4]). В данном случае при каждом $n = 1, 2, 3, \ldots$ получают серию величин

$$X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n},$$

полагая

$$X_{n,k} = \frac{X_k - a_k}{\sqrt{B_n}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Тогда случайные величины внутри каждой серии независимы и

$$Z_n = X_{n,1} + X_{n,2} + \ldots + X_{n,n}.$$

Обычные условия приложимости Ц. п. т. (такие, как условие Ляпунова или условие *Линдеберга — Феллера теоремы*) влекут асимптотическую пренебрегаемость величин $X_{n,k}$. Напр., из условия Ляпунова с третьими моментами, т. е. из условия: при $n \to \infty$

$$L_n = \frac{1}{B_n^{3/2}} \sum_{n=1}^{n} \mathsf{E} \mid X_k - a_k \mid^3 \to 0, \tag{4}$$

при любом $\varepsilon > 0$ вытекает неравенство

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathsf{P}\{ \mid X_{n,k} \mid > \varepsilon \} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathsf{P}\{ \mid X_k - a_k \mid > \varepsilon \sqrt{B_n} \} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{\varepsilon^3 B_n^{3/2}} \mathsf{E} \mid X_k - a_k \mid^3 \leqslant L_n \to 0$$

при $n \to \infty$, а стремление к нулю величины в крайней левой части этой цепочки неравенств и означает асимптотич. пренебрегаемость образующих серии случайных величин.

Пусть теперь дана произвольная схема серий

$$X_{n,1},\ X_{n,2},\ \ldots,\ X_{n,k_n}, \tag{5}$$

$n = 1, 2, \ldots$, асимптотически пренебрегаемых и независимых внутри каждой серии случайных величин. Тогда, если предельное распределение для сумм $Z_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,k_n}$ существует и не является вырожденным, то оно будет нормальным тогда и только тогда, когда при $n \to \infty$ и любом $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left\{ \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \mid X_{n,k} \mid > \varepsilon \right\} \to 0, \tag{6}$$

т. е. когда максимальное слагаемое в Z_n становится исчезающе малым по сравнению со всей этой суммой (без условия (6) можно лишь утверждать, что предельный закон для Z_n принадлежит классу *безгранично делимых распределений*). Два дополнительных условия, к-рые вместе с (6) являются необходимыми и достаточными *для сходимости* распределений сумм Z_n к предельному, указаны в ст. *Серий схема*.

При отказе от условия асимптотич. пренебрегаемости величин в рассмотренной выше схеме серий положение усложняется. Известная теорема Крамера о том, что сумма нескольких независимых случайных величин может быть нормально распределенной тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых нормально распределено, позволяет предположить (как это сделал П. Леви (см. [15], теорема 38, гл. V), что сумма независимых случайных величин имеет распределение, близкое к нормальному, если «большие» слагаемые почти нормальны, а совокупность «малых» слагаемых подчиняется условиям «нормальности» распределений сумм асимптотически пренебрегаемых слагаемых. Впервые точную форму подобного рода соображения получили для схемы серий (5) с $\mathsf{E}X_{n,k} = 0$, $\sum_{n=1}^{k_n} \mathsf{D}X_{n,k} = 1$ (см. [7]). Здесь для сходимости функций распределений $F_n(x) = \mathsf{P}\{Z_n < x\}$ к нормальной функции распределения $\Phi(x)$ необходимо и достаточно одновременное выполнение двух условий:

1) при $n \to \infty$

$$\alpha_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} L(F_{n,k},\ \Phi_{n,k}) \to 0,$$

где $L(F_{n,k},\ \Phi_{n,k})$ — расстояние Леви (см. *Леви метрика*) между функцией распределения $F_{n,k}(x)$ случайной величины $X_{n,k}$ и нормальной функцией распределения $\Phi_{n,k}(x)$ с такими же математич. ожиданием и дисперсией как у $F_{n,k}(x)$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ при $n \longrightarrow \infty$

$$\Delta_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|>\varepsilon} x^2\, dF_{n,k}(x) \to 0,$$

где сумма распространена на те k, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, для к-рых $\mathsf{D}X_{n,k} < \sqrt{\alpha_n}$.

Эта формулировка всего ближе по звучанию к первоначальному предположению Леви. Возможны и иные, в известном смысле более напоминающие теорему Линдеберга — Феллера, формулировки (см. напр., [8]).

В настоящее время эта форма Ц. п. т. может быть получена как частный случай более общей теории суммирования в схеме серий без условия асимптотич. пренебрегаемости.

В практич. отношении важно иметь представление о скорости сходимости распределений сумм к нормальному распределению. Этой цели служат неравенства и асимптотич. разложения (а также теория *больших отклонений вероятностей*, см. также *Крамера теорема*, *Предельные теоремы*). В последующем для простоты изложения рассматривается схема последовательности, причем величины, образующие последовательность (1), предполагаются одинаково распределенными. Пусть $F(x) = \mathsf{P}\{X_k < x\}$. Типичным примером неравенств для отклонений функции распределения $F_n(x)$ нормированной суммы (2) от $\Phi(x)$ служит неравенство Берри — Эссеена: при всех x

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C \frac{\mathsf{E}|X_1 - a_1|^3}{\sigma_1^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad (7)$$

где C — абсолютная постоянная (наилучшее возможное значение константы C в настоящее время (1984) неизвестно, однако можно утверждать, что оно не превосходит 0,7655). Неравенства типа (7) становятся мало информативными, если слагаемые X_k сами «почти-нормальны». Так, если они в точности нормальны, то левая часть (7) равна нулю, а правая $C \cdot \frac{h}{\sqrt{2\pi}}$. Поэтому с нач. 60-х гг. предлагались аналоги неравенства (7), у к-рых в правую часть вместо моментов случайных величин X_k входят другие характеристики, подобные моментам, но определяемые по разности

$$F(x) - \Phi\left(\frac{x - a_1}{\sigma_1}\right),$$

так, что они становятся тем меньше, чем меньше эта разность. В правой части неравенства (7) и его обобщений можно поставить неограниченно убывающие при $|x| \to \infty$ функции от x (так наз. неравномерные оценки). Рассматривают (см. [6]) и другие способы измерения «близости» $F_n(x)$ к $\Phi(x)$, напр., в смысле пространства L^p (в так наз. глобальных вариантах Ц. п. т.) или способы, основанные на сравнении локальных характеристик распределений (см. *Локальные предельные теоремы*).

Асимптотич. разложения для разности $F_n(x) - \Phi(x)$ имеют вид (см. [4], [3]) для $\sigma = 1$:

$$F_n(x) - \Phi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Q_1(x)}{n^{1/2}} + \frac{Q_2(x)}{n} + \frac{Q_3(x)}{n^{3/2}} + \dots \right).$$

Здесь $Q_k(x)$ — многочлен степени $3k-1$ относительно x с коэффициентами, зависящими только от первых $(k-2)$ моментов слагаемых. Для биномиального распределения первый член асимптотич. распределения был указан П. Лапласом (P. Laplace, 1812), а полностью, но без точного обоснования, оно было описано П. Л. Чебышевым (1887). Первая оценка остаточного члена в предположении, что конечен s-й момент $\beta_s = \mathsf{E}|X_k|^s$, $s \geqslant 3$, и выполнено условие

$$\overline{\lim_{|t| \to \infty}} \left| \mathsf{E} e^{itX_k} \right| < 1,$$

— так наз. условие Крамера, была дана Г. Крамером (H. Cramér, 1928). Этот результат в несколько усиленной формулировке утверждает, что

$$F_n(x)-\Phi(x)=\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Q_1(x)}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{Q_{s-2}(x)}{n^{(s-2)/2}}+\right.$$
$$\left.+o\left(\frac{1}{n^{(s-2)/2}}\right)\right)$$

равномерно относительно x. Это асимптотич. разложение служит основой для построения широкого класса *случайных величин преобразований*.

Ц. п. т. может быть распространена на случай, когда последовательность (1) (или обобщающая ее схема серий) образована векторами из m-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Пусть, напр., случайные векторы (1) независимы, одинаково распределены, не лежат с вероятностью 1 в какой-либо гиперплоскости и $\mathsf{E}X_k=0$ и $\mathsf{E}\|X_k\|^2<\infty$, где норма — обычная евклидова норма в $\mathbb{R}^m$. В этих условиях при $n\to\infty$ распределения вероятностей нормированных сумм

$$Z_n'=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{\sqrt{n}}$$

слабо сходятся (см. *Распределений сходимость*) к нормальному распределению Φ_Λ в $\mathbb{R}^m$ с математич. ожиданием, равным нулевому вектору, и матрицей ковариаций Λ, совпадающей с матрицей ковариаций X_k. Более того, эта сходимость равномерна на широких классах подмножеств $\mathbb{R}^m$ (см. [10]). Напр., она равномерна на классе $\mathfrak{S}$ всех борелевских выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^m$: при $n\to\infty$

$$\sup_{A\in\mathfrak{S}}|P_n(A)-\Phi_\Lambda(A)|\to 0. \qquad (8)$$

При дополнительных предположениях может быть оценена скорость сходимости в (8).

Ц. п. т. может быть распространена и на последовательности (и на серии) независимых случайных векторов со значениями в бесконечномерных пространствах. При этом Ц. п. т. в «привычной» форме может и не иметь места (здесь сказывается влияние «геометрии» пространства, см. *Случайный элемент*). Особый интерес представляет случай, когда члены последовательности (1) принимают значения из сепарабельного гильбертова пространства H. Приведенное выше утверждение о слабой сходимости в $\mathbb{R}^m$ распределений нормированных сумм Z_n' к нормальному остается верным в H в точно той же формулировке. При этом сходимость равномерна на сравнительно узких классах (напр., на классе всех шаров с центром в нуле, или шаров, центры к-рых лежат в каком-либо фиксированном шаре; сходимость на классе всех шаров может не быть равномерной). Пусть S_r — шар в H радиуса r и с центром в нуле. Аналогом неравенства (7) здесь служат неравенства следующего типа. Пусть

$$\mathsf{E}X_k=0,\ \mathsf{E}\|X_k\|^2<\infty$$

и распределение X_k не сосредоточено ни в каком конечномерном подпространстве пространства H; тогда в специальных случаях (подобных разбираемому в указанном ниже примере)

$$\Delta_n=\sup_r|\mathsf{P}\{Z_n'\in S_r\}-\Phi_\Lambda(S_r)|=O\left(\frac{1}{n}\right);$$

при условии же $\mathsf{E}\|X_k\|^{3+\alpha}<\infty$, где α фиксировано и не слишком мало, можно утверждать, что при любом $\varepsilon>0$

$$\Delta_n=O\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)$$

(напр., это верно при $\alpha=1$).

К Ц. п. т. в бесконечномерных пространствах, и в частности в H, могут приводить и весьма конкретные задачи, напр. математич. статистики.

Пример. Пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, распределенных равномерно на отрезке [0, 1]. Пусть $X_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, случайные элементы из пространства $L^2[0, 1]$ (пространство функций с интегрируемым по отношению к мере Лебега на [0, 1] квадратом) заданы следующим образом:

$$X_k(t) = -t \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \theta_k$$

$$X_k(t) = 1 - t \quad \text{при } \theta_k < t \leqslant 1.$$

Тогда $\mathbf{E}X_k(t) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ и

$$Z_n'(t) = \frac{X_1(t) + \ldots + X_n(t)}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,(G_n(t) - t),$$

где $G_n(t)$ — эмпирич. функция распределения, построенная по выборке $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ объема n из равномерного на [0, 1] распределения. При этом квадрат нормы

$$\|Z_n'\|^2 = \int_0^1 (Z_n'(t))^2\,dt = n\int_0^1 (H_n(t) - t)^2\,dt$$

совпадает со статистикой ω_n^2 критерия Крамера — Мизеса — Смирнова (см. *Крамера — Мизеса критерий*). В соответствии с Ц. п. т. существует предельное при $n \to \infty$ распределение для ω_n^2. Оно совпадает с распределением квадрата нормы нек-рого нормально распределенного вектора в H и носит название *«омега-квадрат» распределения*. Таким образом, Ц. п. т. дает обоснование замены при больших n распределения ω_n^2 распределением ω^2, что и лежит в основе применения упомянутых выше статистич. критериев.

Известны многочисленные варианты обобщения Ц.п.т. на суммы зависимых величин (в случае однородных конечных цепей Маркова, простейшей неоднородной цепи с двумя состояниями и нек-рых др. схем; это было сделано самим А. А. Марковым, 1907—1911, дальнейшие обобщения связаны, в первую очередь, с именем С. Н. Бернштейна [12]). Основная черта, свойственная всем такого рода обобщениям Ц.п.т., состоит в том (если говорить о схеме последовательности), что зависимость между событиями, определяемыми по $X_1, X_2, \ldots, X_k$, и событиями, определяемыми по $X_{k+p}, X_{k+p+1}, \ldots$, становится исчезающе малой при неограниченном росте p.

Что касается методов доказательства Ц. п. т., то в случае независимых слагаемых наиболее мощным является, как правило, метод характеристич. функций; его дополняет, а порой и заменяет так наз. «метод композиций» (см. [11]) (а также метод, получивший условное название «метода метрических расстояний»). В случае зависимых величин наиболее эффективным, в целом, является метод семиинвариантов (см. напр., [14]). Этот же метод пригоден для изучения функций от случайных величин, более общих чем суммы или линейные функции (напр., для квадратичных и других форм).

Относительно Ц. п. т. в теории чисел см. *Чисел теория вероятностная*. Ц. п. т. применима и в нек-рых вопросах теории функций и теории динамич. систем.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1967; [3] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [4] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949; [5] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [6] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [7] Золотарев В. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1967, т. 12, № 4, с. 666—77; [8] Ротарь В. И., «Матем. заметки», 1975, т. 18, № 1, с. 129—35; [9] Чебышев П. Л., Избр. тр., М., 1955;

[10] Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р., Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1982; [11] Sazonow V. V., Normal approximation..., B.—Hdlb.—N. Y., 1981; [12] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 4, М., 1964; [13] Марков А. А., Избр. тр., М., 1951; [14] Статулявичус В. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т.5, №2; [15] Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, 2 éd., P., 1954.

Ю. В. Прохоров.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРОСТАЯ АЛГЕБРА — простая ассоциативная алгебра с единицей, являющаяся *центральной алгеброй*. Всякая конечномерная Ц.п.а. A над полем K изоморфна алгебре матриц $M_n(C)$ над конечномерной центральной алгеброй с делением C над K. В частности, если K алгебраически замкнуто, то всякая конечномерная Ц.п.а. A над K изоморфна $M_n(K)$, а если $K=\mathbb{R}$, то A изоморфна алгебре вещественных или кватернионных матриц. Тензорное произведение Ц.п.а. A на любую простую алгебру B есть простая алгебра, центральная, если B центральна. Две конечномерные Ц.п.а. A и B над K наз. эквивалентными, если

$$A \otimes_K M_m(K) \cong B \otimes_K M_n(K)$$

для нек-рых m и n, или, что равносильно, если A и B изоморфны алгебрам матриц над одной и той же центральной алгеброй с делением. Классы эквивалентных Ц. п. а. над K образуют *Брауэра группу* поля K относительно операции, индуцируемой тензорным умножением.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [2] Дрозд Ю. А., Кириченко В. В., Конечномерные алгебры, К., 1980.

А. Л. Онищик.

ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ групп — теоретико-групповая конструкция. Группа G называется Ц. п. своих подгрупп A и B, если она порождается ими, если для любых двух элементов $a\in A$ и $b\in B$ верно равенство $ab=ba$ и если пересечение $A\cap B$ лежит в центре $Z(G)$ группы G. В частности, при $A\cap B=1\in G$ Ц. п. оказывается прямым произведением $A\times B$. Фиксируя для произвольных групп A, B и C таких, что $C\leqslant Z(A)$ — нек-рый мономорфизм $\theta\colon C\to Z(B)$, можно определить Ц. п. групп A и B и не предполагая предварительно, что A и B являются подгруппами нек-рой группы G.

Лит.: [1] Gorenstein D., Finite groups, N. Y., 1968.

Н. Н. Вильямс.

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — величины, определяемые формулами

$$\Omega(A)=\lim_{T\to+\infty}\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{1}{kT}\sum_{i=0}^{k-1}\ln\|X((i+1)T,\ iT)\|$$

(верхний центральный показатель) и

$$\omega(A)=\lim_{T\to+\infty}\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{-1}{kT}\sum_{i=0}^{k-1}\ln\|X(iT,\ (i+1)T)\|$$

(нижний центральный показатель); иногда нижним Ц. п. называется величина

$$\lim_{T\to+\infty}\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{-1}{kT}\sum_{i=0}^{k-1}\ln\|X(iT,\ (i+1)T)\|.$$

Здесь $X(\theta,\tau)$ — *Коши оператор* системы

$$\dot{x}=A(t)x,\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $A(\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение

$$\mathbb{R}^+\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n).$$

Ц. п. $\Omega(A)$ и $\omega(A)$ могут равняться $\pm\infty$; имеют место неравенства

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\|A(\tau)\|\,d\tau\geqslant\Omega(A)\geqslant\omega(A)\geqslant$$

$$\geqslant-\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\|A(\tau)\|\,d\tau,$$

из к-рых следует, что если система (1) удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\ \frac{1}{t}\int_0^t \|A(\tau)\|\,d\tau < +\infty,$$

то ее Ц.п. суть числа. Ц.п. связаны с *Ляпунова характеристическими показателями* $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$ и с *особыми показателями* $\Omega^0(A)$, $\omega^0(A)$ неравенствами

$$\Omega^0(A) \geqslant \Omega(A) \geqslant \lambda_1(A) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(A) \geqslant \omega(A) \geqslant \omega^0(A).$$

Для системы (1) с постоянными коэффициентами ($A(t)\equiv A$) Ц. п. $\Omega(A)$ и $\omega(A)$ равны соответственно максимуму и минимуму действительных частей собственных значений оператора A. Для системы (1) с периодич. коэффициентами ($A(t+\theta)=A(t)$ при всех $t\in\mathbb{R}$ для нек-рого $\theta>0$, θ — наименьший период) Ц. п. $\Omega(A)$ и $\omega(A)$ равны соответственно максимуму и минимуму логарифмов модулей *мультипликаторов*, деленных на период θ.

Если $A(\cdot)$ — почти периодич. отображение (см. *Линейная система дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами*), то Ц. п. системы (1) совпадают с особыми показателями:

$$\Omega(A) = \Omega^0(A),\ \omega(A) = \omega^0(A)$$

(теорема Былова).

Для всякой фиксированной системы (1) условие $\Omega(A)<0$ достаточно для существования $\delta>0$ такого, что у всякой системы

$$\dot{x} = A(t)x + g(x, t),$$

удовлетворяющей условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши и условию

$$|g(x, t)| < \delta|x|,$$

решение $x=0$ асимптотически устойчиво (теорема Винограда). Условие $\Omega(A)<0$ в теореме Винограда не только достаточно, но и необходимо (необходимость сохранится и в том случае, если асимптотич. устойчивость заменить на устойчивость по Ляпунову).

Функция $\Omega(A)$ (соответственно $\omega(A)$) на пространстве M_n систем (1) с ограниченными непрерывными коэффициентами (т. е. $A(\cdot)$ непрерывно и $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+}\|A(t)\|<+\infty$), наделенном метрикой

$$d(A, B) = \sup_{t\in\mathbb{R}^+}\|A(t)-B(t)\|,$$

полунепрерывна сверху (соответственно снизу), но каждая из этих функций не всюду непрерывна. Для всякой системы (1) из M_n как угодно близко к ней (в M_n) найдутся системы

$$\dot{x} = B_i(t)x,\ i=1, 2, \qquad (2)$$

такие, что

$$\lambda_1(B_1) = \Omega(A),\ \lambda_n(B_2) = \omega(A),$$

где $\lambda_1(B_i)$ и $\lambda_n(B_i)$, $i=1, 2$, — соответственно наибольший (старший) и наименьший (младший) характеристич. показатели Ляпунова систем (2).

Если отображение $A(\cdot)$: $\mathbb{R}\to\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывно и $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|A(t)\|<+\infty$, то для почти всякого отображения $\tilde{A}$ (в смысле всякой нормированной инвариантной меры *сдвигов динамической системы* ($S=\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$), сосредоточенной на замыкании траектории точки A; отображения $\tilde{A}$, A рассматриваются как точки пространства динамич. системы сдвигов) верхний (нижний) Ц.п. системы $\dot{x}=\tilde{A}(t)x$ равен наибольшему (соответственно наименьшему) характеристич. показателю Ляпунова этой системы:

$$\Omega(\tilde{A}) = \lambda_1(\tilde{A}),\ \omega(\tilde{A}) = \lambda_n(\tilde{A}).$$

Пусть динамич. система на гладком замкнутом многообразии V^n задана гладким векторным полем. Тогда для почти всякой (в смысле всякой нормированной инвариантной меры) точки $x \in V^n$ верхний (нижний) Ц. п. системы уравнений в вариациях вдоль траектории точки x совпадает с ее наибольшим (наименьшим) характеристич. показателем Ляпунова. Рассмотрены типичные (с точки зрения категорий Бэра) свойства Ц. п. (см. [3]).

Лит.: [1] Былов В. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [2] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146; [3] Миллионщиков В. М., «Дифференц. уравнения», 1983, т. 19, № 9, с. 1503—1510; 1984, т. 20, №№ 6, 8.

В. М. Миллионщиков.

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ РЯД группы — нормальный ряд, все факторы к-рого центральны, т. е. ряд подгрупп

$$E = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G,$$

для к-рого G_{i+1}/G лежит в центре группы G/G_i для всех i (см. также *Подгрупп ряд*). Если для всех i подгруппа G_{i+1}/G_i в точности совпадает с центром группы G/G_i, то ряд наз. верхним Ц. р. группы G, а если коммутант G_{i+1} и G совпадает с G_i, то ряд наз. нижним Ц. р. группы G.

Группа, обладающая Ц. р., наз. *нильпотентной группой*. В нильпотентной группе нижний и верхний Ц. р. имеют одну и ту же длину, равную минимальной длине Ц. р. группы. Эта длина наз. классом нильпотентности, или ступенью нильпотентности группы.

О. А. Иванова.

ЦЕНТРИРОВАННОЕ СЕМЕЙСТВО МНОЖЕСТВ — семейство, пересечение любого конечного множества элементов к-рого не пусто. Напр., счетное семейство $\{A_i\colon\ i \in \mathbb{Z}\}$, состоящее из подмножеств натурального ряда чисел $\mathbb{Z}_+$ вида $A_i = \{n \in \mathbb{Z}_+,\ n > i\}$, центрировано. Центрированным будет любое семейство, пересечение всех элементов к-рого не пусто. Этим свойством обладает любое конечное Ц. с. м.

Впервые бесконечные Ц. с. м. были использованы в общей топологии для характеристики бикомпактных пространств. Ц. с. м., замкнутых в топологич. пространстве, используются при построении его бикомпактного расширения и его абсолюта.

Понятие Ц. с. м. допускает следующее обобщение. Пусть m — бесконечное кардинальное число. Тогда m-центрированным семейством множеств наз. такое семейство, что пересечение любого множества его элементов мощности, меньшей m, не пусто. Такие семейства применяются для характеристики m-компактных пространств и в абстрактной теории меры.

Лит.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [2] Gillman L., Jerison M., Rings of continuous functions, Princeton, 1960.

Б. А. Ефимов.

ЦЕНТРОАФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел *аффинной геометрии*, в к-ром изучаются инварианты центроаффинных преобразований; $\overline{x}^i = A^i_s x^s$. Центроаффинные преобразования оставляют неподвижной одну точку (центр). В Ц. г. имеет место полная двойственность: каждому предложению относительно точек соответствует такое же предложение относительно гиперплоскостей.

Л. А. Сидоров.

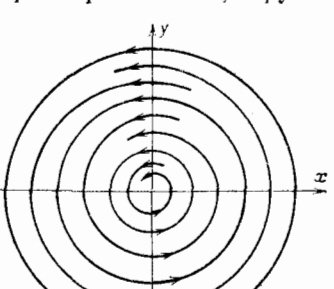
ЦЕНТРОАФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО — *аффинное пространство*, в к-ром основным инвариантом является свойство плоскости проходить или не проходить через нек-рую точку — центр пространства.

Л. А. Сидоров.

ЦЕНТРО-ФОКУС — тип расположения траекторий автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^2,\ f\colon G \to \mathbb{R}^2, \qquad (*)$$

$f \in C(G)$, G — область единственности, в окрестности изолированной особой точки x_0. Этот тип характеризуется следующим образом: в любой окрестности U точки x_0 существуют замкнутые траектории системы, окружающие точку x_0, и целые незамкнутые траектории; последние заполняют стягивающиеся к точке x_0 кольцеобразные области, ограниченные замкнутыми траекториями, и представляют собою спирали, к-рые (в каждом кольце) одним концом асимптотически приближаются к внешней, а другим — к внутренней границам кольца. Ц.-ф. наз. при этом и сама точка x_0. На рис. точка (0,0) есть Ц.-ф.; стрелки указывают направление движения по траекториям системы с возрастанием t (оно может быть и противоположным).



Ц.-ф. устойчив, по Ляпунову (не асимптотически). Его индекс Пуанкаре равен 1.

Лит.: [1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1949; [2] Дюлак Г., О предельных циклах, пер. с франц., М., 1980; [3] Елизаров П. М., Ильяшенко Ю. С., «Матем. сб.», 1983, т. 121, № 1, с. 111—26. *А. Ф. Андреев.*

ЦЕПНАЯ ДРОБЬ, непрерывная дробь,— выражение вида

$$a_0 + b_1/a_1 + \ldots + b_n/a_n + \ldots, \qquad (1)$$

где

$$\{a_n\}_{n=0}^{\omega} \qquad (2)$$

и

$$\{b_n\}_{n=1}^{\omega} \qquad (3)$$

— конечные или бесконечные последовательности комплексных чисел. Вместо выражения (1) употребляется также обозначение

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \cdot \cdot \cdot + \frac{b_n}{a_n +} \ldots.$$

Цепной дробью последовательности (2) наз. выражение вида

$$a_0 + 1/a_1 + \ldots + 1/a_n + \ldots.$$

Для каждой Ц. д. (1) рекуррентные уравнения

$$P_n = a_n P_{n-1} + b_n P_{n-2},$$
$$Q_n = a_n Q_{n-1} + b_n Q_{n-2}$$

с начальными условиями

$$b_0 = 1,\ P_{-2} = 0,\ P_{-1} = 1,\ Q_{-2} = 1,\ Q_{-1} = 0,$$

определяют две последовательности $\{P_n\}_{n=0}^{\omega}$ и $\{Q_n\}_{n=0}^{\omega}$ комплексных чисел. Обычно предполагается, что последовательности (2) и (3) таковы, что $Q_n \neq 0$ для всех n, $0 \leqslant n < \omega + 1$. Дробь $\delta_n = \frac{P_n}{Q_n}$ наз. подходящей дробью порядка n Ц. д. (1). При этом

$$\delta_0 = a_0,\ \delta_1 = a_0 + \frac{b_1}{a_1},\ \delta_2 = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2}},\ \ldots;$$

кроме того,

$$\delta_n - \delta_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1} b_1 \cdot \ldots \cdot b_n}{Q_n Q_{n-1}}.$$

Подходящую дробь порядка n Ц. д. последовательности (2) принято обозначать

$$[a_0;\ a_1,\ \ldots,\ a_n].$$

Для таких подходящих дробей имеют место равенства:

$$[a_n;\ \ldots,\ a_1]=\frac{Q_n}{Q_{n-1}} \quad \text{при } n\geqslant 1,$$

$$[a_n;\ \ldots,\ a_0]=\frac{P_n}{P_{n-1}} \quad \text{при } a_0\neq 0 \text{ и } n\geqslant 0.$$

Если $\omega=\infty$ и последовательность подходящих дробей Ц. д. (1) сходится к нек-рому пределу l, то Ц. д. (1) наз. с х о д я щ е й с я, а число l — з н а ч е н и е м этой Ц. д. Если же $\omega<\infty$, т. е. Ц. д. конечна, то ее значением наз. последнюю подходящую дробь последовательности ее подходящих дробей.

Если все члены последовательностей (2) и (3), кроме, быть может, a_0, положительные действительные числа, а число a_0 действительно, то последовательность $\delta_0, \delta_2, \delta_4, \ldots$ подходящих дробей четного порядка Ц. д. (1) возрастает, а последовательность $\delta_1, \delta_3, \delta_5, \ldots$ подходящих дробей нечетного порядка убывает. При этом любая подходящая дробь четного порядка меньше каждой подходящей дроби нечетного порядка (см. [5]).

Если $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — такая последовательность комплексных чисел, что

$$\alpha_0=a_0+\frac{b_1}{\alpha_1},\ \alpha_1=a_1+\frac{b_2}{\alpha_2},\ \ldots,$$

то выражение (1) наз. р а з л о ж е н и е м ч и с л а в ц е п н у ю д р о б ь. Не всякая Ц. д. сходится и значение Ц. д. не всегда равно числу, разложением к-рого она является. Существует ряд признаков сходимости Ц. д. (см., напр., [3], [5]):

1) Пусть $\omega=\infty$, все члены последовательностей (2) и (3) действительные числа и $a_n>0$ для всех натуральных n, начиная с нек-рого. Если для таких n выполняется неравенство $a_n-|b_n|\geqslant 1$, то Ц. д. (1) сходится.

2) Пусть $\omega=\infty$, и все члены последовательности (2), начиная с a_1, положительны. Тогда Ц. д. последовательности (2) сходится в том и только в том случае, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ расходится (т е о р е м а З е й д е л я).

Ц. д. последовательности (2) наз. п р а в и л ь н о й, если все ее члены (кроме, быть может, a_0) — натуральные числа, a_0 — целое число, а $a_\omega\geqslant 2$, если $1\leqslant\omega<\infty$. *Для любого действительного числа r существует единственная правильная Ц. д., значение к-рой равно r.* Эта дробь конечна в том и только том случае, если число r рационально (см. [1], [2], [4]). Алгоритм разложения действительного числа r в правильную Ц. д. определяется следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &a_0=[r],\quad \alpha_1=\frac{1}{r-a_0}, \quad \text{если } a_0\neq r;\\ &a_1=[\alpha_1],\ \alpha_2=\frac{1}{\alpha_1-a_1}, \text{ если } a_1\neq\alpha_1;\\ &a_2=[\alpha_2]\ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где $[x]$ означает целую часть x.

Числа a_n и α_n, определяемые из условий (4), наз. соответственно п о л н ы м и н е п о л н ы м ч а с т н ы м и порядка n разложения числа r в Ц. д.

В 1776 И. Ламберт (J. Lambert) нашел разложение $\operatorname{tg} x$ в цепную дробь:

$$1\Big/\frac{1}{x}-1\Big/\frac{3}{x}-1\Big/\frac{5}{x}-\ldots-1\Big/\frac{2n+1}{x}-\ldots$$

А. Лежандр (A. Legendre) в предположении, что эта Ц. д. сходится, показал, что ее значение для рациональных значений x иррационально. Принято считать, что тем самым была доказана иррациональность числа π (см. [7]).

Л. Эйлер (L. Euler, 1737) нашел, что

$$\frac{1}{2}(e-1)=1/1+1/6+1/10+1/14+\ldots$$

Действительное число r является иррациональным корнем многочлена 2-й степени с целыми коэффициентами тогда и только тогда, когда неполные частные разложения числа r в Ц. д., начиная с нек-рого, периодически повторяются (теорема Эйлера — Лагранжа, см. [1], [4]). Неизвестны (1984) разложения в правильную Ц. д. алгебраич. чисел 3-й и более высоких степеней. Не доказано и предположение, что неполные частные разложения $\sqrt[3]{2}$ в Ц. д. ограничены.

Правильные Ц. д.— весьма удобный аппарат для приближения действительных чисел рациональными. Справедливы следующие утверждения:

1) Если $\delta_n=\frac{P_n}{Q_n}$ и $\delta_{n+1}=\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ — соседние подходящие дроби разложения числа r в правильную Ц. д., то

$$|r-\delta_n|<|r-\delta_{n+1}|$$

и

$$\left|r-\frac{P_n}{Q_n}\right|\leqslant\frac{1}{Q_nQ_{n+1}},$$

причем в последнем случае равенство имеет место лишь, если $r=\delta_{n+1}$.

2) Из двух соседних подходящих дробей разложения числа r в правильную Ц. д. хотя бы для одной из них выполняется неравенство:

$$\left|r-\frac{P_n}{Q_n}\right|\leqslant\frac{1}{2Q_n^2}.$$

3) Если a и b — целые числа, $b>0$, r — действительное число и

$$\left|r-\frac{a}{b}\right|\leqslant\frac{1}{2b^2},$$

то $\frac{a}{b}$ — подходящая дробь разложения числа r в правильную Ц. д.

4) Если $\delta_n=\frac{P_n}{Q_n}$ — подходящая дробь разложения числа r в правильную Ц. д., то для любых целых a и b, из $b>0$, $\delta_n\neq\frac{a}{b}$ и

$$\left|r-\frac{a}{b}\right|\leqslant|r-\delta_n|$$

следует $b>Q_n$ (теорема о наилучшем приближении).

Первые двадцать пять неполных частных разложения числа π в правильную Ц. д. суть числа: 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1.

Первые пять подходящих дробей разложения числа π в правильную Ц. д. суть:

$$\delta_0=3,\ \delta_1=\frac{22}{7},\ \delta_2=\frac{333}{116},\ \delta_3=\frac{355}{113},\ \delta_4=\frac{103993}{33102}.$$

Поэтому

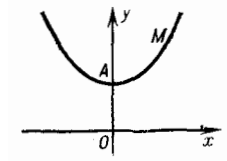
$$\left|\pi-\frac{22}{7}\right|<\frac{1}{742}\text{ и }\left|\pi-\frac{355}{113}\right|<3\cdot10^{-7}.$$

Существуют различные обобщения Ц. д. (см., напр., [9]).

Лит.: [1] Бухштаб А. А., Теория чисел, 2 изд., М., 1966; [2] Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.—Л., 1937; [3] Марков А. А., Избранные труды, М.—Л., 1948; [4] Хинчин А. Я., Цепные дроби, 4 изд., М.—Л., 1978; [5] Хованский А. Н., Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа, М., 1956; [6] История математики, т. 3, М., 1972; [7] О квадратуре круга, пер. с нем., 3 изд., М.—Л., 1936; [8] Perron O., Die Lehre von den Kettenbrüchen, 3 Aufl., Bd 1—2, Stuttg., 1954—57; [9] Szekeres G., «Ann. Univ. sci., Sec. math.», 1970, v. 13, p. 113—40.

В. И. Нечаев.

ЦЕПНАЯ ЛИНИЯ — плоская трансцендентная кривая, форму к-рой принимает под действием силы тяжести однородная гибкая нерастяжимая тяжелая нить с закрепленными концами (см. рис.). Уравнение в декартовых прямоугольных координатах:



$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} .$$

Длина дуги, отсчитываемая от точки $x=0$:

$$l = \frac{1}{2}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right) = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} .$$

Радиус кривизны:

$$r = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} .$$

Площадь, ограничиваемая дугой Ц. л., двумя её ординатами и осью абсцисс:

$$S = a \sqrt{y_2^2 - a^2} - a \sqrt{y_1^2 - a^2} = a^2 \operatorname{sh} \frac{x_2}{a} - a^2 \operatorname{sh} \frac{x_1}{a} .$$

Если дугу Ц. *л.* вращать вокруг *оси абсцисс*, то образуется *катеноид*.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ЦЕПНАЯ РЕКУРРЕНТНОСТЬ — наиболее широкое из свойств «повторяемости движений», рассматриваемое в *топологической динамике*. В основном случае топологич. потока $\{S_t\}$ на метрич. компакте W с метрикой ρ точка $w \in W$ обладает свойством Ц. р., если для *любых* ε, $T > 0$ имеется ε-траектория, исходящая из w и снова возвращающаяся в w через время $T_\varepsilon > T$. Под ε-траекторией понимается такая параметризованная кривая (возможно, разрывная) $w(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T_\varepsilon$, что $\rho(S_\tau w(t),\ w(t+\tau)) < \varepsilon$ при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T_\varepsilon - 1$ («конечный отрезок ε-траектории близок к отрезку настоящей траектории»). Имеется определение Ц. р. и для более общего случая [1]. Если W является замкнутым многообразием, то Ц. р. совпадает со свойством «слабой неблуждаемости» (см. [3]), более непосредственно отражающим влияние малых (в топологич. смысле) возмущений системы на поведение ее траекторий. Вне множества точек со свойством Ц. р. поведение системы напоминает поведение *градиентной динамической системы* (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Conley Ch., Isolated invariant sets and the Morse index, Providence, 1978; [2] Shub M., «Astérisque», 1978, t. 56; [3] Шарковский А. Н., Добрынский В. А., в кн.: Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений, К., 1973, с. 165—74.

Д. В. Аносов.

ЦЕПНОЕ КОЛЬЦО *левое* — кольцо (обычно предполагаемое ассоциативным и с единицей), левые идеалы к-рого образуют цепь. Другими словами, R — левое Ц. к., если R — левый цепной модуль над собой. Всякое левое Ц. к. локально. Аналогично определяются правые Ц. к. Коммутативные Ц. к. часто называют кольцами нормирования. См. также *Дискретного нормирования кольцо*.

Л. А. Скорняков.

ЦЕПНОЙ МОДУЛЬ — модуль, совокупность всех подмодулей к-рого образует цепь, т. е. *линейно упорядоченное множество:* для этого достаточно, чтобы цепью была совокупность всех циклич. подмодулей.

Л. А. Скорняков.

ЦЕПЬ — 1) то же, что *линейно упорядоченное множество*.

2) Ц.— формальная линейная комбинация симплексов (триангуляции, симплициального множества и, в частности, сингулярных симплексов топологич. пространства) или клеток. В более общем смысле — элемент группы цепей произвольного цепного комплекса (как правило, свободного). Ц. с коэффициентами в группе G — элемент тензорного произведения цепного комплекса на группу G.

Лит.: [1] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [2] Хилтон П.-Дж., Уайли С., Теория гомологий, пер. с англ., М., 1966.

А. Ф. Харшиладзе.

ЦЕРМЕЛО АКСИОМА — *выбора аксиома* для произвольного (не обязательно дизъюнктного) семейства множеств. Эту аксиому Э. Цермело сформулировал в 1904 в виде следующего утверждения, названного им принципом выбора [1]: для любого семейства множества t можно выбрать из каждого его члена по единственному представителю и объединить их всех в одно множество,— и дал первое доказательство своей теоремы о вполне упорядочении. В 1906 Б. Рассел (B. Russell) сформулировал аксиому выбора в мультипликативной форме: если t есть дизъюнктное множество непустых множеств, то прямое произведение Πt не пусто. В 1908 Э. Цермело доказал эквивалентность мультипликативной формы аксиомы выбора ее обычной формулировке.

Лит.: [1] Zermelo E., «Math. Ann.», 1904, Bd 59, S. 514—16; [2] Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966.

В. И. Малыхин.

ЦЕРМЕЛО ТЕОРЕМА: всякое множество можно вполне упорядочить (см. *Вполне упорядоченное множество*). Впервые эту теорему доказал Э. Цермело (E. Zermelo, 1904), исходя из принципа выбора — одной из эквивалентных форм аксиомы выбора (см. *Цермело аксиома*). Позднее выяснилось, что Ц. т. эквивалентна аксиоме выбора (в системе обычных аксиом теории множеств), а значит, и многим другим высказываниям теоретико-множественного характера (см. *Выбора аксиома*).

В. И. Малыхин.

ЦИКЛ — *цепь*, граница к-рой равна нулю.

А. Ф. Харшиладзе.

ЦИКЛИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа с одним образующим. Все Ц. г. абелевы. Всякая конечная группа простого порядка — Ц. г. Существует по одной, с точностью до изоморфизма, Ц. г. каждого конечного порядка n и одна бесконечная Ц. г., изоморфная аддитивной группе $\mathbb{Z}$ целых чисел. Конечная Ц. г. G порядка n изоморфна аддитивной группе кольца вычетов $\mathbb{Z}(n)$ по модулю n (а также группе $\mathbb{C}(n)$ (комплексных) корней степени n из 1). В качестве образующего в этой группе может быть взят любой элемент a порядка n. Тогда

$$G = \{1 = a^0 = a^n,\ a,\ a^2,\ \ldots,\ a^{n-1}\}.$$

О. А. Иванова.

ЦИКЛИЧЕСКАЯ ПОЛУГРУППА — то же, что *моногенная полугруппа*.

ЦИКЛИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ—обобщенные координаты нек-рой физич. системы, не входящие явно в выражение характеристич. функции этой системы. При использовании соответствующих уравнений движения можно сразу получить для каждой Ц. к. соответствующий ей интеграл движения. Напр., если *Лагранжа функция* $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, где q_i — обобщенные координаты, $\dot{q}_i$ — обобщенные скорости, t — время, не содержит явно q_j, то q_j — Ц. к. и j-е *Лагранжа уравнение* имеет вид $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0$, что сразу дает интеграл движения

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{const}.$$

Д. Д. Соколов.

ЦИКЛИЧЕСКИЙ МОДУЛЬ над кольцом R (левый) — фактормодуль кольца R, рассматриваемого как левый R-модуль, по нек-рому левому идеалу. В частности, циклическими являются неприводимые модули. С Ц. м. связана проблема Кёте (см. [4]): над какими кольцами каждый (или каждый конечно порожденный) модуль изоморфен прямой сумме Ц. м.? В классе коммутативных колец таковыми ока-

зываются артиновы кольца главных идеалов и только они (см. [1], [3]). Получено и полное описание коммутативных колец, над которыми в прямую сумму Ц. м. разлагается каждый конечно порожденный модуль [2].

Лит.: [1] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [2] Brandal W., Commutative rings whose finitely generated modules decompose, B.—Hdlb.—N. Y., 1979; [3] Faith C., в кн.: Ring Theory. Proc. Antwerp. Conf. 1977, N. Y.—Basel, 1978, p. 9—23; [4] Köthe G., «Math. Z.», 1935, Bd 39, S. 31—44. *Л. А. Скорняков.*

ЦИКЛОИДА — плоская трансцендентная кривая; траектория точки окружности, катящейся по прямой линии (рис. 1).

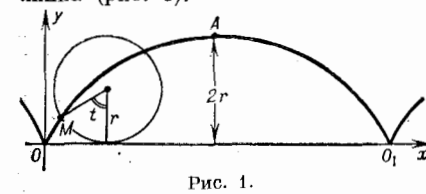


Рис. 1.

Параметрич. уравнения:

$$x = rt - r\sin t,$$
$$y = r - r\cos t,$$

где r — радиус окружности, t — угол поворота окружности. Уравнение в декартовых прямоугольных координатах:

$$x = r\arccos\frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

Ц. — периодич. кривая: период (базис) $OO_1 = 2\pi r$. Точки O, O_k, $(2k\pi r, 0)$, $k = \pm 1, \ldots$, — точки возврата. Точки A, A_k, $[(2k+1)\pi r, 0]$ — т. н. вершины. Площадь: $S_{OA_1O_1O} = 3\pi r^2$, радиус кривизны: $r_k = 4r\sin(t/2)$.

Если кривая описывается точкой, лежащей вне (внутри) окружности, к-рая катится по прямой, то она наз. удлиненной (рис. 2) (укороченной, рис. 3) циклоидой, или, иногда, трохоидой.

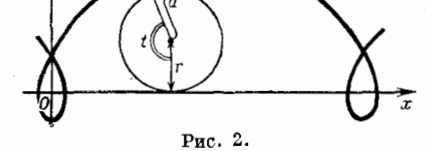


Рис. 2.



Рис. 3.

Параметрические уравнения:

$$x = rt - d\sin t,$$
$$y = r - d\cos t,$$

где d — расстояние точки M от центра катящейся окружности.

Ц. является тautохронной (или изохронной) кривой, т. е. такой, что время спуска материальной точки по этой кривой под действием силы тяжести до определенной высоты не зависит от исходного положения точки на кривой. *Д. Д. Соколов.*

ЦИКЛОИДАЛЬНАЯ КРИВАЯ — плоская кривая, описываемая точкой, к-рая связана с окружностью, катящейся по другой окружности.

Если производящая точка находится на окружности, то Ц. к. наз. *эпициклоидой* или *гипоциклоидой* в зависимости от того, расположена ли катящаяся окружность вне или внутри неподвижной окружности. Если же точка расположена вне или внутри катящейся окружности, то Ц. к. наз. *трохоидой*.

Вид Ц. к. зависит от соотношения между радиусами окружностей. Так, если отношение радиусов — число рациональное, то Ц. к. есть замкнутая алгебраич. кривая, если же это отношение — число иррациональное, то Ц. к. не замкнута. Среди эпициклоид наиболее известна *кардиоида*, среди гипоциклоид — *астроида* и *Штейнера кривая*.

Параметрич. уравнения Ц. к. можно записать в комплексном виде:

$$z = l_1 e^{\omega_1 ti} + l_2 e^{\omega_2 ti}, \quad z = x + iy.$$

Это уравнение является частным случаем уравнения

$$z = l_0 + l_1 e^{\omega_1 ti} + l_2 e^{\omega_2 ti} + \ldots + l_n e^{\omega_n ti},$$

описывающего циклоиды высших порядков.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ЦИЛИНДР — тело, ограниченное *цилиндрической поверхностью* и двумя параллельными плоскостями, пересекающими её. Части плоскостей, лежащие внутри цилиндрич. поверхности, наз. основаниями Ц. Часть цилиндрич. поверхности, заключенная между основаниями, наз. боковой поверхностью Ц. Если основания Ц. суть круги, то Ц. называется круговым. Если образующие боковой поверхности перпендикулярны плоскостям оснований, то Ц. называется прямым. Осью прямого кругового Ц. называется прямая, проходящая через центры оснований. Объем прямого кругового Ц. равен $\pi R^2 h$, где R — радиус основания, h — высота Ц.; площадь боковой поверхности равна $2\pi rh$.

А. Б. Иванов.

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ КОНСТРУКЦИЯ — сопоставление с каждым непрерывным отображением топологич. пространств: $f\colon X \to Y$ топологич. пространства $I_f \supset Y$, к-рое получается из топологич. суммы (несвязного объединения) $X \times [0, 1] \oplus Y$ отождествлением $x \times \{1\} = f(x)$, $x \in X$. Пространство I_f наз. цилиндром отображения f. Подпространство Y является *деформационным ретрактом* пространства I_f. Вложение $i\colon X = X \times \{0\} \subset I_f$ обладает тем свойством, что композиция $\pi \circ i\colon X \to Y$ совпадает с f (здесь π — естественная ретракция I_f на Y). Отображение $\pi\colon I_f \to Y$ — гомотопич. эквивалентность, и с гомотопич. точки зрения каждое непрерывное отображение можно считать вложением и даже *корасслоением*. Аналогичное утверждение имеет место и для *Серра расслоения*. Для любого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ определены с точностью до гомотопич. эквивалентности слой и кослой, причем кослой f имеет гомотопич. тип *надстройки* над слоем f.

Лит.: [1] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [2] Мошер Р. Э., Тангора М. К., Когомологические операции и их приложения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1970.

А. Ф. Харшиладзе.

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ МЕРА — 1) Ц. м. в теории меры в топологических векторных пространствах — конечно аддитивная мера μ, определенная на алгебре $\mathfrak{A}(E)$ цилиндрических множеств в топологическом векторном пространстве E, т. е. множеств вида

$$A = F^{-1}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(B), \qquad (*)$$

где $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ — борелевская σ-алгебра подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — линейные функционалы на E, а $F_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}$ — отображение

$$E \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longrightarrow \{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\} \in \mathbb{R}^n, \quad x \in E.$$

При этом предполагается, что сужение меры μ на любую σ-подалгебру $\mathfrak{B}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(E) \subset \mathfrak{A}(E)$ множеств вида $(*)$, где набор функционалов $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ фиксирован, является σ-аддитивной мерой на $\mathfrak{B}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}$ (другое название — предмера, квазимера).

2) Ц. м. в теории функций многих действительных переменных — специальный случай *Хаусдорфа меры*, определенной на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{n+1})$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ с помощью формулы

$$\lambda(B) = \lim_{\varepsilon \to 0,\ \{A\},\ \operatorname{diam} A < \varepsilon} \inf \left\{ \sum l(A) \right\},$$

где нижняя грань берется по всем конечным или счетным покрытиям множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ цилиндрами A с шаровыми основаниями и осями, параллельными $(n+1)$-й координатной оси в $\mathbb{R}^{n+1}$; при этом $l(A)$ равно n-мерному объему осевого сечения цилиндра A. В случае когда B является графиком непрерывной функции f от n переменных, определенной в области $G \subset \mathbb{R}^n$:

$$B = \{x_1, \ldots, x_{n+1}, x_{n+1}\} = f(x_1, \ldots, x_n), \; x,$$

$\lambda(B)$ совпадает с т. н. n-мерной вариацией функции f.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [2] Витушкин А. Г., О многомерных вариациях, М., 1955. *Р. А. Минлос.*

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, цилиндр,— поверхность, образуемая движением прямой (образующей), перемещающейся параллельно самой себе и пересекающей данную линию (направляющую).

Направляющей цилиндрич. *поверхности второго порядка* служит линия второго порядка. В зависимости от вида направляющей различают эллиптический цилиндр, канонич. уравнение к-рого

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

мнимый эллиптический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

гиперболический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

параболический цилиндр:

$$y^2 = 2px.$$

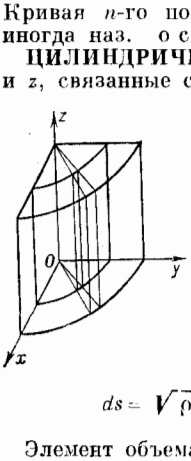
Если направляющая — распадающаяся линия второго порядка, то Ц. п. есть пара плоскостей (пересекающихся, параллельных или совпадающих, действительных или мнимых — в зависимости от соответствующего свойства направляющей).

Цилиндрической поверхностью n-го порядка наз. алгебраич. поверхность, задаваемая в нек-рой аффинной системе координат x, y, z уравнением, не содержащим одну из координат (например, z):

$$f(x, y) = 0. \qquad (*)$$

Кривая n-го порядка, определяемая уравнением (*), иногда наз. основанием Ц. п. *А. Б. Иванов.*

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — числа ρ, φ и z, связанные с прямоугольными декартовыми координатами x, y и z формулами:



$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z,$$

где $0 \leqslant \rho < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Координатные поверхности (см. рис.): круговые цилиндры ($\rho = \text{const}$), полуплоскости ($\varphi = \text{const}$), плоскости ($z = \text{const}$). Система Ц. к.— ортогональная.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\rho = L_z = 1, \quad L_\varphi = \rho.$$

Элемент площади поверхности:

$$ds = \sqrt{\rho^2(d\rho d\varphi)^2 + (d\rho\, dz)^2 + \rho^2(d\varphi\, dz)^2}.$$

Элемент объема:

$$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.$$

Векторные дифференциальные операции:

$$\mathrm{grad}_\rho f = \frac{\partial f}{\partial \rho},\ \mathrm{grad}_\varphi f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi},\ \mathrm{grad}_z f = \frac{\partial f}{\partial z};$$

$$\mathrm{div}\, a = \frac{1}{\rho} a_\rho + \frac{\partial a_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z};$$

$$\mathrm{rot}_\rho a = \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z},\ \mathrm{rot}_\varphi a = \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial z};$$

$$\mathrm{rot}_z a = \frac{1}{\rho} a_\varphi + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi};$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

О б о б щ е н н ы м и Ц. к. наз. числа u, v и w, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x, y и z формулами:

$$x = au\cos v,\quad y = bu\sin v,\ z = cw,$$

где $0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v < 2\pi$, $-\infty < w < \infty$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq b$. Координатные поверхности: эллиптические цилиндры (u=const), полуплоскости (v=const) и плоскости (w=const). *Д. Д. Соколов.*

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, б е с с е л е в ы ф у н к ц и и,— решения Z_ν дифференциального уравнения Бесселя

$$z^2\frac{d^2Z}{dz^2} + z\frac{dZ}{dz} + (z^2 - \nu^2)Z = 0, \qquad (1)$$

где ν — произвольное действительное или комплексное число (см. *Бесселя уравнение*).

Цилиндрические функции произвольного порядка. Если ν не является целым числом, то общее решение уравнения (1) имеет вид

$$Z_\nu = c_1 J_\nu(z) + c_2 J_{-\nu}(z),$$

где c_1 и c_2 — постоянные, а J_ν и $J_{-\nu}$ — т. н. Ц. ф. 1-го р о д а, или *Бесселя функции*. Для них справедливо разложение

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2} z\right)^{\nu+2m}}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+\nu+1)},\ (|\arg z| < \pi).$$

Ряд в правой части для $z^{-\nu}J_\nu(z)$ сходится абсолютно и равномерно при всех $|z| \leqslant R$, $|\nu| \leqslant N$, где R и N — произвольные положительные числа. Функции $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ — аналитические, с особыми точками $z = 0$ и $z = \infty$; производные $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ удовлетворяют следующему тождеству:

$$z\,[J_\nu(z)\,J'_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z)\,J'_\nu(z)] = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}. \qquad (2)$$

Если же ν — целое, то J_ν и $J_{-\nu}$ линейно зависимы, и их линейная комбинация уже не является общим решением уравнения (1). Поэтому, наряду с Ц. ф. 1-го рода, вводят Ц. ф. 2-г о р о д а $N_\nu(z)$ (или *Неймана функции*, ф у н к ц и и В е б е р а):

$$N_\nu(z) = \frac{1}{\sin\nu\pi}\,[J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)] \qquad (3)$$

(другое обозначение $Y_\nu(z)$). При помощи этих функций общее решение уравнения (1) может быть записано в виде

$$Z_\nu = c_1 J_\nu(z) + c_2 N_\nu(z).$$

Важны для приложений и другие решения уравнения (1) — Ц. ф. 3-г о р о д а (или *Ганкеля функции*). Их обозначают через $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$ и, по определению, полагают

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z) = \frac{1}{i\sin\nu\pi}\,[J_{-\nu}(z) - J_\nu(z)\,e^{-i\nu\pi}],$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z) = \frac{1}{i\sin\nu\pi}\,[J_\nu(z)\,e^{i\nu\pi} - J_{-\nu}(z)].$$

Справедливы тождества

$$\left.\begin{aligned} z\,[J_\nu(z)\,N'_\nu(z)-N_\nu(z)J'_\nu(z)]&=\frac{2}{\pi},\\ z\,[H^{(1)}_\nu(z)\,H^{(2)\prime}_\nu(z)-H^{(2)}_\nu(z)\,H^{(1)\prime}_\nu(z)]&=-\frac{4i}{\pi}\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

и соотношения

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2}\,[H^{(1)}_\nu(z)+H^{(2)}_\nu(z)],$$

$$H_\nu(z)=\frac{1}{2i}\,[H^{(1)}_\nu(z)-H^{(2)}_\nu(z)].$$

Для действительных $z=x$ и ν функции Ганкеля являются комплексно сопряженными решениями уравнения (1). При этом функции $J_\nu(z)$ дают действительную часть, а функции $N_\nu(x)$ — мнимую часть функций Ганкеля.

Ц. ф. 1-го, 2-го и 3-го рода Z_ν удовлетворяют рекуррентным формулам

$$\left.\begin{aligned} Z_{\nu-1}(z)+Z_{\nu+1}(z)&=\frac{2\nu}{z}\,Z_\nu(z),\\ Z_{\nu-1}(z)-Z_{\nu+1}(z)&=2Z'_\nu(z).\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Каждая пара функций

$$J_\nu(z),\ J_{-\nu}(z);\ J_\nu(z),\ Y_\nu(z);\ H^{(1)}_\nu(z),\ H^{(2)}_\nu(z)$$

образует (при нецелом ν) фундаментальную систему решений уравнения (1).

М о д и ф и ц и р о в а н н ы м и Ц. ф. наз. Ц. ф. мнимого аргумента

$$I_\nu(z)=\begin{cases} e^{-i\nu\pi/2}J_\nu(e^{i\pi/2}z), & -\pi<\arg z\leqslant\pi/2,\\ e^{3i\nu\pi/2}J_\nu(e^{-3i\pi/2}z), & \pi/2<\arg z\leqslant\pi,\end{cases}$$

и *Макдональда функции*:

$$K_\nu(z)=\frac{1}{2}\,i\pi e^{i\pi\nu/2}H^{(1)}_\nu(e^{i\pi/2}z)=$$

$$=-\frac{1}{2}\,i\pi e^{-i\pi\nu/2}H^{(2)}_\nu(e^{-i\pi/2}z)=\frac{1}{2}\,i\pi e^{-i\nu\pi/2}H^{(1)}_\nu(e^{i\pi/2}z).$$

Эти функции являются решениями дифференциального уравнения

$$z^2\frac{d^2Z}{dz^2}+z\frac{dZ}{dz}-(z^2+\nu^2)\,Z=0$$

и удовлетворяют рекуррентным формулам

$$\left.\begin{aligned} I_{\nu-1}(z)-I_{\nu+1}(z)&=\frac{2\nu}{z}\,I_\nu(z),\\ K_{\nu-1}(z)-K_{\nu+1}(z)&=-\frac{2\nu}{z}\,K_\nu(z),\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$K_{-\nu}(z)=K_\nu(z). \qquad (7)$$

Цилиндрические функции целых и полуцелых порядков. Если $\nu=n$ — целое число, то $J_n(z)$ можно определить с помощью ф о р м у л ы Я к о б и — А н г е р а

$$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}t^nJ_n(z),$$

или

$$\exp\{\pm\,iz\sin\theta\}=J_0(z)+$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\{J_{2n}(z)\cos 2n\theta\pm iJ_{2n+1}(z)\sin(2n+1)\,\theta\}.$$

Справедливы равенства

$$J_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{n+2m}}{2^{n+2m}m!\,(m+n)!},$$

$$J_{-n}(z)=(-1)^n\,J_n(z).$$

Функция $J_n(z)$ есть целая трансцендентная функция аргумента z; для алгебраического $z=a$, $a\neq 0$, $J_n(z)$ есть трансцендентное число и $J_m(a)\neq J_n(a)$ при $m\neq n$.

В качестве второго линейно независимого с $J_n(z)$ решения уравнения (1) обычно берут функцию

$$N_n(z)=\lim_{\nu\to n}\frac{1}{\sin\nu\pi}\left[J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to n}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}-(-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial z}\right]=\frac{2}{\pi}\left(c+\ln\frac{z}{2}\right)J_n(z)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^m}{m!\,(m+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}+\sum_{l=1}^{m+n}\frac{1}{l}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{n-m-1}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots,\quad (8)$$

где $c=0{,}577215\ldots$ — постоянная Эйлера. Если в одной из конечных сумм верхний индекс суммирования меньше нижнего, то соответствующая сумма получает значение 0. Справедливо равенство

$$Y_{-n}(z)=(-1)^n Y_n(z).$$

Ц. ф. тогда и только тогда превращаются в элементарные функции, когда индекс ν принимает значение $\nu=n+1/2$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ (сферические функции Бесселя, или Ц. ф. полуцелого порядка). Справедливы формулы ($n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$):

$$J_{n+1/2}(z)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{n+1/2}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\frac{\sin z}{z},$$

в частности $J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$;

$$J_{-n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{n+1/2}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\frac{\cos z}{z},$$

в частности $J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$;

$$H^{(1)}_{-n-1/2}(z)=i\,(-1)^n H^{(1)}_{n+1/2}(z),$$

$$H^{(2)}_{-n-1/2}(z)=-i\,(-1)^n H^{(2)}_{n+1/2}(z),$$

$$N_{n+1/2}(z)=(-1)^{n+1}J_{-n-1/2}(z);$$

$$N_{-n-1/2}(z)=(-1)^n J_{n+1/2}(z);$$

$$K_{n+1/2}(z)=K_{-n-1/2}(z)=(-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,z^{n+1}\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^n\frac{e^{-z}}{z}.$$

Интегральные представления цилиндрических функций. Для $\nu=n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ имеется интегральное представление Бесселя

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(z\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi$$

и

$$N_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin(z\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi-$$

$$-\frac{2}{\pi}e^{-in\pi/2}\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{sh}\,t}\,\mathrm{cth}\,n\left(t+\frac{1}{2}i\pi\right)dt,\ R(z)>0.$$

Для $R\left(0+\frac{1}{2}\right)>0$ и $R(z)>0$ имеется интегральное представление Пуассона

$$J_\nu(z)=\frac{2\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi/2}\cos(z\sin\varphi)\cos^{2\nu}\varphi\,d\varphi,$$

$$I_\nu(z)=\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}e^{-zt}(1-t^2)^{\nu-1/2}\,dt$$

и

$$H_\nu^{(k)}(z)=\frac{(-1)^k\, i2^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\, z^\nu \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{\nu-1/2}\varphi}{\sin^{2\nu+1}\varphi}\times$$

$$\times\exp\left[(-1)^{k-1}\, i\left(z-\nu\varphi+\frac{1}{2}\varphi\right)-2z\operatorname{ctg}\varphi\right]d\varphi,$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots,$$

$$K_\nu(z)=\frac{\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{cth}t}\operatorname{sh}^{2\nu}t\,dt.$$

Кроме этих представлений, существует много других интегральных представлений, в частности в виде контурных интегралов (см. [2], [4], [5]).

Асимптотическое поведение цилиндрических функций. Для $|z|\ll 1$, $\nu=n+\eta>0$, $0<\eta<1$, справедливо

$$J_\nu(z)\sim z^\nu/2^\nu\nu!,$$

$$J_{-\nu}(z)\sim(-1)^n(\nu-1)!\,\frac{\sin(\pi\eta)}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^\nu.$$

Для действительных $z=x$ имеют место

$$N_0(x)\sim\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+C\right),\qquad N_\nu(x)\sim-\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu.$$

Для $z\gg 1$, $|z|\gg\nu$, имеют место следующие оценки

$$\left[\left(\nu,\ m=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+m\right)}{m!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-m\right)}\right.\text{— символы Ганкеля}\right]:$$

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\times\right.$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{(\nu,\ 2m)}{(2z)^{2m}}+O\left(|z|^{-2M}\right)\right]-$$

$$-\sin\left(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\times$$

$$\left.\times\left[\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(\nu,\ 2m+1)}{(2z)^{2m+1}}+O\left(|z|^{-2M-1}\right)\right]\right\},$$

$$-\pi<\arg z<\pi;$$

$$N_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sin\left(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\times\right.$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{(\nu,\ 2m)}{(2z)^{2m}}+O\left(|z|^{-2M}\right)\right]+$$

$$+\cos\left(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\times$$

$$\left.\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{(\nu,\ 2m+1)}{(2z)^{2m+1}}+O\left(|z|^{-2M-1}\right)\right]\right\},$$

$$-\pi<\arg z<\pi;$$

$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i(z-\nu\pi/2-\pi/4)}\times$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(\nu,\ m)}{(-2iz)^m}+O\left(|z|^{-M}\right)\right],\tag{9}$$

$$-\pi<\arg z<2\pi;$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i(z-\nu\pi/2-\pi/4)}\times$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(\nu,\ m)}{(2iz)^m}+O\left(|z|^{-M}\right)\right],\tag{10}$$

$$-2\pi<\arg z<\pi;$$

$$I_\nu(z)=\frac{\cos(\nu\pi)}{\pi\sqrt{2\pi z}}\left\{\sum_{m=0}^{M-1}\left[e^z-i(-1)^m e^{-i\pi\nu-z}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\Gamma\left(m+\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}+\nu\right)\frac{(2z)^{-m}}{m!}+e^zO\left(|z|^{-M}\right)\right\},$$

$$-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2};$$

$$K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(\nu,\ m)}{(2z)^m}+O\left(|z|^{-M}\right)\right],$$

$$-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}.$$

Для $\nu=n+1/2$, $n=0, 1, 2, \ldots$, ряды (9) и (10) обрываются. Функции Ганкеля являются единственными Ц. ф., к-рые стремятся к нулю для комплексных значений переменного z при $|z|\to\infty$ (и в этом их особое значение для приложений):

$$\lim_{|z|\to\infty} H_\nu^{(1)}(z)=0, \quad 0\leqslant \arg z\leqslant \pi,$$
$$\lim_{|z|\to\infty} H_\nu^{(2)}(z)=0, \quad -\pi\leqslant \arg z\leqslant 0.$$

Для больших значений $|z|$ и $|\nu|$ применимы асимптотич. ряды специальных типов (см. [1], [2], [3], [5]).

Нули цилиндрических функций. Нули произвольной Ц. ф. являются простыми нулями за исключением $z=0$. Если a, b, ν — действительные, то между двумя действительными нулями $J_\nu(z)$ лежит один действительный нуль $aJ_\nu(z)+bN_\nu(z)$. При действительном ν $J_\nu(z)$ имеет бесконечно много действительных нулей; для $\nu>-1$ все нули $J_\nu(z)$ действительны; если $0<j_{\nu,1}<j_{\nu,2}<\ldots$ — положительные нули $J_\nu(z)$, то

$$0<j_{\nu,1}<j_{\nu+1,1}<j_{\nu,2}<j_{\nu+1,2}<j_{\nu,3}<\ldots.$$

Для $\nu>0$ справедливо $j_{\nu,1}>0$; также для наименьшего положительного нуля функции $J'_\nu(z)$ имеет место $j'_{\nu,1}>0$. Пары функций $J_n(z)$, $J_{n+m}(z)$; $J_{n+1/2}(z)$, $J_{n+m+1/2}(z)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, $m=1, 2, 3, \ldots$, не имеют, кроме $z=0$, общих нулей. Если

$$\nu=-(2n+1)-\eta, \quad 0<\eta<1, \quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

то $J_\nu(z)$ имеет ровно $4n+2$ комплексных нулей, из к-рых два — чисто мнимые; если $\nu=-2n-\eta$, $0<\eta<1$, $n=1, 2, 3, \ldots$, то $J_\nu(z)$ имеет ровно $4n$ комплексных нулей с отличной от нуля действительной частью.

Теоремы сложения и разложения в ряды по цилиндрическим функциям. Справедливы следующие теоремы сложения:

$$Z_\nu(\lambda R)\begin{matrix}\cos\nu\psi\\ \sin\nu\psi\end{matrix}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_{\nu+m}(\lambda r_2)J_m(\lambda r_1)\begin{matrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{matrix},$$

$$\frac{Z_\nu(\lambda R)}{(\lambda R)^\nu}=2^\nu\Gamma(\nu)\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}(\nu+m)\frac{Z_{\nu+m}(\lambda r_2)J_{\nu+m}(\lambda r_1)}{(\lambda r_2)^\nu(\lambda r_1)^\nu}C_m^\nu(\cos\theta),$$

$$I_\nu(\lambda R)\begin{matrix}\cos\nu\psi\\ \sin\nu\psi\end{matrix}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m I_{\nu+m}(\lambda r_2)I_m(\lambda r_1)\begin{matrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{matrix},$$

$$\frac{I_\nu(\lambda R)}{(\lambda R)^\nu}=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\nu+m)\times$$
$$\times\frac{I_{\nu+m}(\lambda r_2)I_{\nu+m}(\lambda r_1)}{(\lambda r_2)^\nu(\lambda r_1)^\nu}C_m^\nu(\cos\theta),$$

$$K_\nu(\lambda R)\begin{matrix}\cos\nu\psi\\ \sin\nu\psi\end{matrix}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}K_{\nu+m}(\lambda r_2)I_m(\lambda r_1)\begin{matrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{matrix},$$

$$\frac{K_\nu(\lambda R)}{(\lambda R)^\nu}=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{m=0}^{\infty}(\nu+m)\times$$
$$\times\frac{K_{\nu+m}(\lambda r_2)I_{\nu+m}(\lambda r_1)}{(\lambda r_2)^\nu(\lambda r_1)^\nu}C_m^\nu(\cos\theta),$$

где

$$R=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta}, \quad \sin\psi=\frac{r_1}{R}\sin\theta, \quad r_2>r_1;$$

$$C_m^\nu(x)=\sum_{k=0}^{[m/2]}(-1)^k 2^{m-2k}\frac{\Gamma(\nu+m-k)}{\Gamma(\nu)\,k!\,(m-2k)!}x^{m-2k},$$

$C_0^\nu(x)=0$ — *ультрасферические многочлены*. При разложении Ц. ф. используются *Ломмеля многочлены*, *Неймана ряды*, *Фурье—Бесселя ряды*, *Дирихле ряды*.

С Ц. ф. связаны *Ангера функция*, *Струве функции*, *Ломмеля функции*, *Кельвина функции*, *Эйри функции*.

Ц. ф. можно определить как предельные значения сферич. функций следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\cos\frac{z}{n}\right)=J_0(z),$$

$$\lim_{n\to\infty} n^m P_n^{-m}\left(\cos\frac{x}{n}\right)=J_m(x),\quad 0<x<\pi;$$

$$\lim_{n\to\infty} n^m P_n^{-m}\left(\operatorname{ch}\frac{z}{n}\right)=I_m(z),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-m}\sin(n\pi)}{\sin(m+n)\pi}\,Q_n^m\left(\operatorname{ch}\frac{z}{n}\right)=K_m(z).$$

При этом асимптотич. представления сферич. функций связаны с Ц. ф., и наоборот, как, напр., в формуле Хильба:

$$P_n(\cos\theta)=\sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}}\,J_0\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)+O\left(n^{-3/2}\right),$$

и в разложениях Макдональда, Ватсона, Трикоми и др. (см. [1], [2], [4]).

Вычисление значений Ц. ф. на ЭВМ. Для вычислений значений функций $J_0(x)$, $J_1(x)$, $N_0(x)$, $N_1(x)$, $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$ удобны аппроксимации многочленами и рациональными функциями (см. [5]). О разложениях по многочленам Чебышева см. [6]. Для вычисления функций больших целых порядков, особенно на ЭВМ, применяются рекуррентные соотношения (5)—(7) (см. [5]).

Сведения об имеющихся таблицах Ц. ф. приводятся в [7], [8], [9].

Лит.: [1] Ватсон Дж. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1, М., 1949; [2] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1974; [3] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М.—Л., 1963; [4] Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 5 изд., М., 1971; [5] Abramowitz M., Stegun I. A. [ed.], Handbook of mathematical functions with formulas graphs and mathematical tables, Wash., 1964, ch. 9—11; [6] Clenshaw C. W., Chebyshev series for mathematical functions, L., 1962 (Mathematical tables, v. 5); [7] Лебедев А. В., Федорова Р. М., Справочник по математическим таблицам, М., 1956; [8] Бурунова Н. М., Справочник по математическим таблицам. Дополнение № 1, М., 1959; [9] Fletcher A., Miller J. C. P., Rosenhead L., Comrie L. J., An index of mathematical tables, 2 ed., v. 1—2, Oxf., 1962.

Таблицы: Чистова Э. А., Таблицы функций Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них, М., 1958; Кармазина Л. Н., Чистова Э. А., Таблицы функций Бесселя от мнимого аргумента и интегралов от них, М., 1958; Таблицы функций Бесселя дробного индекса, пер. с англ., т. 1—2, М., 1959; Таблицы функций Бесселя целого положительного индекса, пер. с англ., М., 1960; Таблицы сферических функций Бесселя, пер. с англ., т. 1—2, М., 1963; Таблицы функций Бесселя $J_0(z)$ и $J_1(z)$ в комплексной области, пер. с англ., М., 1963; Таблицы функций Бесселя $Y_0(z)$ и $Y_1(z)$ в комплексной области, пер. с англ., М., 1963; Таблицы нулей функций Бесселя, пер. с англ., М., 1967. *Л. Н. Кармазина, А. П. Прудников.*

ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО — множество S в векторном пространстве L над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, задаваемое уравнением

$$S\equiv S_{\{A;\,F_1,\,\ldots,\,F_n\}}=\{x\in L\colon (F_1(x),\,\ldots,\,F_n(x))\in A\},$$

где $F\in L^*$, $i=1,\,2,\,\ldots$ — линейные функции, определенные на L, а $A\subset\mathbb{R}^n$ — борелевское множество в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$, $n=1,\,2,\,\ldots$.

Совокупность всех Ц. м. в L образует алгебру множеств, наз. цилиндрической алгеброй. Наименьшая σ-алгебра подмножеств L, содержащая Ц. м., наз. цилиндрической σ-алгеброй.

В случае когда пространство L является топологическим векторным пространством, рассматриваются лишь такие Ц. м. $S_{\{A;\,F_1,\,\ldots,\,F_n\}}$, к-рые определяются наборами $\{F_1,\,\ldots,\,F_n\}$ непрерывных линейных функций. При этом под цилиндрич. алгеброй и σ-алгеброй

подразумеваются соответствующие совокупности подмножеств L, порожденные именно такими Ц. м. В важном частном случае, когда пространство L является топологически сопряженным к нек-рому топологическому векторному пространству $M : L = M'$, Ц. м. в L определяются с помощью $*$-слабо непрерывных линейных функций на L, т. е. функций вида

$$F_\varphi(x) = x(\varphi), \qquad x \in L,$$

где φ — произвольный элемент M. *Р. А. Минлос.*

ЦИЛИНДРОИД — *развертывающаяся поверхность*, множество точек пересечения образующих к-рой с каждой из двух параллельных плоскостей π_1 и π_2 является простой замкнутой линией. Ц. наз. замкнутым, если он ограничен двумя плоскими областями, получающимися пересечением с ним плоскостей π_1 и π_2. *И. Х. Сабитов.*

ЦИРКУЛЯЦИЯ векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ вдоль замкнутой кривой L — интеграл вида

$$\oint_L \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r};$$

в координатной форме Ц. равна

$$\int_L (a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz).$$

Работа, совершаемая силами силового поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ при перемещении пробного тела (единичной массы, заряда и т. д.) вдоль кривой L, равна Ц. поля вдоль L. См. *Стокса теорема.* *БСЭ-3.*

ЦИССОИДА — плоская алгебраич. кривая 3-го порядка, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x};$$

параметрич. уравнения:

$$x = \frac{a}{t^2 + 1}, \quad y = \frac{a}{t\,(t^2 + 1)}.$$

Ц. симметрична относительно оси абсцисс (рис.). Начало координат — точка возврата. Асимптота: $x = 2a$. Площадь между кривой и асимптотой: $S = 3\pi a^2$.



Ц. часто наз. циссоидой Диоклеса — по имени др.-греч. математика Диоклеса (3 в. до н. э.), к-рый рассматривал ее в связи с решением задачи об *удвоении куба*.

Ц. — множество точек M, для к-рых $OM = CB$, где B и C — точки пересечения прямой OM с окружностью и касательной AB к окружности в точке A, диаметрально противоположной точке O. Если в этом построении заменить окружность и прямую кривыми $\rho_1 = f_1(\varphi)$ и $\rho_2 = f_2(\varphi)$, то получающаяся кривая $\rho = \rho_1 - \rho_2$ наз. циссоидальной кривой, или циссоидой кривых (заданных).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960; [2] Смогоржевский А. С., Столова Е. С., Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, М., 1961. *Д. Д. Соколов.*

ЦИФРЫ — условные знаки для обозначения *чисел*. Наиболее ранней и вместе с тем примитивной является словесная запись чисел, в отдельных случаях сохранявшаяся довольно долго (напр., нек-рые математики Ср. Азии и Бл. Востока систематически употребляли словесную запись чисел в 10 в. и даже позже). С развитием общественно-хоз. жизни народов возникла потребность в создании более совершенных, чем словесная запись, обозначений чисел и в разработке принципов записи чисел — систем *счисления*.

Древнейшие известные нам Ц.— цифры вавилонян и египтян. Вавилонские Ц. (2-е тыс. до н. э.— нач. н. э.) представляют собой клинописные знаки для чисел 1, 10, 100 (или только для 1 и 10), все остальные натуральные числа записываются посредством их соединения. В египетской иероглифич. нумерации (возникновение ее относится к 3000—2500 до н. э.) существовали отдельные знаки для обозначения единиц десятичных разрядов (вплоть до 10^7).

Нумерациями типа египетской иероглифической являются финикийская, сирийская, греческая аттическая. Возникновение аттической нумерации относится к 6 в. до н. э.; нумерация употреблялась в Аттике до 1 в. н. э., хотя в других греч. землях она была задолго до этого вытеснена более удобной алфавитной ионийской нумерацией, в к-рой единицы, десятки и сотни обозначались буквами греч. алфавита, все остальные числа до 999 — их соединением (первые записи чисел в этой нумерации относятся к 5 в. до н. э.). Алфавитное обозначение чисел существовало также и у др. народов, напр. у арабов, сирийцев, евреев, грузин, армян. Старинная русская нумерация (возникшая ок. 10 в. и встречавшаяся до 16 в.) также была алфавитной (см. *Славянские цифры*). Наиболее долговечной из древнейших цифровых систем оказалась римская нумерация, возникшая у этрусков ок. 500 до н. э.; она употребляется иногда и в наст. время (см. *Римские цифры*).

Прообразы совр. Ц. (включая нуль) появились в Индии, вероятно, не позднее 5 в. н. э. Удобство записи чисел при помощи этих Ц. в десятичной позиционной системе счисления обусловило их распространение из

Индии в др. страны. В Европу индийские Ц. были занесены в 10—13 вв. арабами (отсюда и сохранившееся поныне их др. название — «арабские» Ц.) и получили всеобщее распространение со 2-й пол. 15 в. Начертание индийских Ц. претерпело со временем ряд крупных изменений; ранняя их история плохо изучена.

Лит. см. при ст. *Счисление.* *В. И. Битюцков.*

ЦОКОЛЬ модуля — сумма всех его неприводимых подмодулей. При их отсутствии Ц. считается нулевым. В соответствии с данным определением в кольце можно рассматривать его левый и правый Ц. Каждый из них оказывается двусторонним идеалом, инвариантным относительно всех эндоморфизмов кольца. Ц. представляется в виде прямой суммы неприводимых модулей. *Вполне приводимые модули* могут быть охарактеризованы как модули, совпадающие со своим Ц.

Л. А. Скорняков.

ЦОРНА ЛЕММА, принцип максимальности: *если в частично упорядоченном множестве* X всякое линейно упорядоченное подмножество A ограничено сверху, то X содержит максимальный элемент. Элемент x_0 наз. верхней границей подмножества $A \subset X$, если $x \leqslant x_0$ для всех $x \in A$. Если верхняя граница для A существует, то множество A наз. ограниченным сверху. Элемент $x_0 \in X$ наз. максимальным в X, если не существует элемента $x \in X$, $x \neq x_0$, удовлетворяющего условию $x_0 \leqslant x$.

Ц. л. была сформулирована и доказана М. Цорном [1]. Она эквивалентна *выбора аксиоме*.

Лит.: [1] Zorn M., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1935, v. 41, p. 667—70; [2] Келли Дж., *Общая топология*, пер. с англ., 2 изд., М., 1981.

Б. А. Ефимов.

ЧАПЛЫГИНА МЕТОД — метод приближенного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, состоящий в одновременном построении двух семейств последовательных приближений к ее решению. Напр., в случае задачи Коши для одного уравнения 1-го порядка

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in R, \quad y(x_0) = y_0, \qquad R = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b\} \tag{1}$$

одно из указанных семейств приближает решение с недостатком, а другое — с избытком.

В основе метода лежит *Чаплыгина теорема* о дифференциальных неравенствах. Пусть $y(x)$ — решение задачи (1) и пусть кривые $y=u(x)$ и $y=v(x)$ целиком лежат в прямоугольнике R, проходят через точку (x_0, y_0) и при $x>x_0$ удовлетворяют неравенствам

$$u'(x) - f(x, u(x)) < 0, \quad v'(x) - f(x, v(x)) > 0.$$

Тогда при $x>x_0$ справедливы неравенства

$$u(x) < y(x) < v(x). \tag{2}$$

Функции $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие условиям теоремы Чаплыгина, дают двустороннюю оценку для решения задачи (1).

Если найдена пара начальных приближений $u_0(x)$, $v_0(x)$, удовлетворяющих условиям (2), то Ч. м. позволяет построить пару $u_1(x)$, $v_1(x)$ более точных приближений, удовлетворяющих условиям

$$u_0(x) < u_1(x) < y(x) < v_1(x) < v_0(x). \tag{3}$$

В случае когда $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ сохраняет знак в области R, пара $u_1(x)$, $v_1(x)$ может быть получена путем решения двух линейных дифференциальных уравнений с начальным условием $y(x_0)=y_0$. Если, напр., $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$ в R, то любая кривая, по к-рой плоскость $x=\text{const}$ пересекает поверхность $z=f(x, y)$, выпукла вниз, и каждая ее дуга лежит ниже хорды и выше касательной, проведенных из нек-рой ее точки. Если при нек-ром $x=\text{const}$ уравнение касательной к кривой $z=f(x, y)$ в точке $y=u_0(x)$:

$$z = k(x)\, y + p(x),$$

где

$$k(x) = f'_y(x, u_0(x)), \quad p(x) = f(x, u_0(x)) - u_0(x)\, k(x),$$

а уравнение хорды, проходящей через точки $y=u_0(x)$ и $y=v_0(x)$ той же кривой

$$z = l(x)\, y + q(x),$$

где

$$l(x) = \frac{f(x, v_0(x)) - f(x, u_0(x))}{v_0(x) - u_0(x)},$$

$$q(x) = f(x, u_0(x)) - u_0(x)\, l(x),$$

то для этого значения x имеет место неравенство

$$k(x)\, y + p(x) < f(x, y) < l(x)\, y + q(x). \tag{4}$$

Условия (4) выполняются равномерно по x в области R; решение $y=u_1(x)$ задачи Коши $y'=k(x)y+p(x)$, $y(x_0)=y_0$ и решение $y=v_1(x)$ задачи Коши $y'=l(x)y+p(x)$,

$y(x_0)=y_0$ удовлетворяют условию (2). Можно показать, что они удовлетворяют и условию (3). Зная пару $u_1(x)$, $v_1(x)$, можно тем же способом построить следующую пару $u_2(x)$, $v_2(x)$ и т. д. Процесс очень быстро сходится:

$$v_n - u_n \leqslant c/2^{2^n}, \qquad (5)$$

где константа c не зависит ни от x, ни от n.

Второй способ построения уточненных приближений $u_n(x)$, $v_n(x)$ по известным $u_{n-1}(x)$, $v_{n-1}(x)$ не требует сохранения знака $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ в R. В этом способе

$$u_n(x) = u_{n-1}(x) + \int_{x_0}^{x} e^{-k(x-t)} \left[f(t,\, u_{n-1}(t)) - u'_{n-1}(t) \right] dt,$$

$$v_n(x) = v_{n-1}(x) + \int_{x_0}^{x} e^{-k(x-t)} \left[v'_{n-1}(t) - f(t,\, v_{n-1}(t)) \right] dt,$$

где k — *Липшица константа* функции $f(x,\ y)$ в R. И в этом случае пары функций $u_n(x)$, $v_n(x)$ и $u_{n-1}(x)$, $v_{n-1}(x)$ удовлетворяют условию (3) равномерно по x, но скорость сходимости меньше, чем в формуле (5).

Основная трудность в применении Ч. м. состоит в построении начальных приближений $u_0(x)$, $v_0(x)$.

Метод предложен С. А. Чаплыгиным в 1919.

Лит.: [1] Чаплыгин С. А., Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, М.—Л., 1950; [2] Лузин Н. Н., О методе приближенного интегрирования академика С. А. Чаплыгина, «Тр. ЦАГИ», 1932, в. 141, с. 1—32; [3] Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М., 1965, с. 22—26.

С. С. Гайсарян.

ЧАПЛЫГИНА ТЕОРЕМА о дифференциальном неравенстве: если в *дифференциальном неравенстве*

$$L[y] \equiv y^{(m)} + a_1(x)\, y^{(m-1)} + \ldots + a_m(x)\, y > f(x) \quad (*)$$

все a_i и f суммируемы на $[x_0,\ x_1]$, то существует такое $x^* \in (x_0,\ x_1]$, не зависящее от f, что $y(x) > z(x)$, $x_0 < x \leqslant x^*$, где

$$L[z] = f(x), \quad z(x_0) = y(x_0), \quad \ldots, \quad z^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0).$$

При этом

$$x^* = \max \{ x \in [x_0,\ x_1] \mid \forall \xi \in [x_0,\ x], \quad \forall s \in [\xi,\ x] \Rightarrow G(s;\ \xi) \geqslant 0 \},$$

где $G(x;\ \xi)$ — соответствующая функция Коши, т. е. решение уравнения $L[G]=0$, $\xi \leqslant x \leqslant x_1$, удовлетворяющее начальным условиям

$$G\big|_{x=\xi} = \ldots = G_x^{(m-2)}\big|_{x=\xi} = 0, \quad G_x^{(m-1)}\big|_{x=\xi} = 1.$$

Таким образом, при $m=1$, а также для неравенства $y' - y > f(x)$ получается $x^* = x_1$, тогда как для неравенства $y' + y > f(x)$ получают

$$x^* = \min \{ x_1,\ x_0 + \pi \}.$$

Аналогичные утверждения справедливы: для нестрогих неравенств; для сравнения $y^{(i)}(x)$ с $z^{(i)}(x)$, $i=1, \ldots, m-1$; для начальных условий вида

$$y(x_0) \geqslant z(x_0), \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) \geqslant z^{(n-1)}(x_0);$$

для решения неравенства $(*)$ при $x < x_0$.

Теорема была получена С. А. Чаплыгиным в 1919.

Лит.: [1] Мамедов Я. Д., Аширов С., Атдаев С., Теоремы о неравенствах, Аш., 1980.

См. также лит. при статье *Дифференциальное неравенство.*

А. Д. Мышкис.

ЧАСТИЦ МЕТОД — метод численного эксперимента для моделирования движения сплошных или дискретных сред. Многие Ч. м. используют эйлерово-лагранжево или лагранжево описание движущейся среды. Для решения системы уравнений сжимаемой среды наиболее распространен *крупных частиц метод* (см. [1]), применяемый при исследовании одно- и многофазных гомо- и гетерогенных потоков газа и плазмы. К Ч. м. относится метод свободных точек (см. [1], [2]), в к-ром отсутствует фиксированный шаблон. Одним из первых несовершенных Ч. м. является метод частиц в ячейках (метод PIC, см. [3]). В нем используются две расчетные сетки: эйлерова и лагранжева. Из-за дискретности представления сплошной среды этому методу присущи значительные флуктуации решений. Для уменьшения флуктуаций используется методика частиц-слоев в пространственно-одномерном случае. Методу PIC близок метод FLIC (см. [4]), обладающий плохими диссипативными свойствами. При расчете несжимаемых сред используются метод MAC (см. [5]) и метод SMAC (см. [6]), где частицы играют роль маркеров для выделения поверхностей раздела сред. Ч. м. получили распространение при описании турбулентности, в динамике разреженных газов, при решении задач электродинамики и др. (см. [1], [7]).

Лит.: [1] Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М., Метод крупных частиц в газовой динамике, М., 1982; [2] Дьяченко В. Ф., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1965, т. 5, № 4, с. 680—88; [3] Evans M. W., Harlow F. H., The particle-in-cell method for hidrodynamic calculations, Los Alamos, 1957; [4] Gentry R. A., Martin R. E., Daly B. J., «J. Comp. Phys.», 1966, v. 1, № 1, p. 87—118; [5] The MAC-method, Los Alamos, 1966; [6] Amsden A. A., Harlow F. H., The SMAC-method: a numerical technique for calculating incompressible fluid flows, Los Alamos, 1970; [7] Березин Ю. А., Вшивков В. А., Метод частиц в динамике разреженной плазмы, Новосиб., 1980.

Ю. М. Давыдов.

ЧАСТИЧНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — инцидентностная структура $S=(P, L, I)$, в к-рой отношение инцидентности между точками и прямыми симметрично и удовлетворяет следующим аксиомам:

1) каждая точка инцидентна r прямым, $r\geqslant 2$, и две различные точки инцидентны не более чем одной прямой;

2) каждая прямая инцидентна k точкам, $k\geqslant 2$;

3) через каждую точку, не инцидентную прямой l, проходит ровно $t\geqslant 1$ прямых, пересекающих l.

Если Ч. г. состоит из v точек и b прямых, то

$$v=k\,[(k-1)\,(r-1)+t]/t \quad \text{и} \quad b=r\,[(k-1)\,(r-1)+t]/t,$$

а необходимыми условиями существования такой Ч. г. являются делимость $(k-1)(r-1)kr$ на $t(k+r-t-1)$, $k(k-1)(r-1)$ на t и $r(k-1)(r-1)$ на t (см. [2]).

Ч. г. можно разделить на четыре класса:

а) Ч. г. с $t=k$ или (двойственно) $t=r$. Геометрии этого типа — то же самое, что $2-(v, k, 1)$-схема или $2-(v, r, 1)$-схема (см. *Блок-схема*);

б) Ч. г. с $t=k-1$ или (двойственно) $t=r-1$. В этом случае Ч. г.— то же самое, что и сеть порядка k и дефекта 1 или $k-r+1$;

в) Ч. г. с $t=1$, наз. обобщенными четырехугольниками;

г) Ч. г. с $1<t<\min(k-1, r-1)$. Все известные Ч. г. этого типа строятся с помощью максимальных дуг в проективных плоскостях (см., напр., [3]).

Лит.: [1] Bose R. C., «Pacific J. Math.», 1963, v. 13, № 2, p. 389—419; [2] Тас Дж. А., «Математика», 1980, т. 19, с. 82—100; [3] Thas J. A., «Geometriae dedicata», 1974, v. 3, № 1, p. 61—64.

В. В. Афанасьев.

ЧАСТИЧНАЯ ПРОБЛЕМА собственных значений — задача вычисления одного или не-

скольких собственных значений квадратной матрицы, обычно действительной или комплексной, а также соответствующих им собственных векторов.

Чаще всего в практике встречаются следующие варианты Ч. п. собственных значений: 1) найти группу наименьших (наибольших) по абсолютной величине собственных значений; 2) найти группу собственных значений, ближайших к заданному числу a; 3) найти точки спектра, принадлежащие заданному интервалу (α, β) (для симметричной или эрмитовой матрицы).

Большинство методов решения Ч. п. собственных значений для матриц общего вида имеет в основе идею степенной итерации или ее разновидность — обратную итерацию (см. *Итерационные методы* решения проблемы собственных значений матрицы): если матрица A обладает доминирующим по абсолютной величине собственным значением $\lambda_{\max}$ и $x_{\max}$ — соответствующий собственный вектор, то для почти любого вектора v последовательность $v, Av, A^2v, \ldots, A^kv, \ldots$ сходится по направлению к вектору $x_{\max}$. Если требуется наименьшее по абсолютной величине собственное значение (задача 2)), то степенная итерация проводится с матрицей A^{-1} (метод обратной итерации); при вычислении собственного значения, ближайшего к a (задача 3)),— с матрицей $(A-a)^{-1}$ (метод обратной итерации со сдвигом).

Наиболее важный частный случай Ч. п. собственных значений — вычисление собственных значений и собственных векторов действительной симметричной либо комплексной эрмитовой матрицы A. Здесь имеется ряд эффективных численных методов решения Ч. п. собственных значений, основанных на весьма различных идеях (см. [1]). Среди них: методы, использующие экстремальные свойства функционала Рэлея (наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы A реализуют соответственно максимум и минимум отношения Рэлея $\varphi(A, z)=(Az, z)/(z, z)$, $z \neq 0$; достигаются эти экстремумы на соответствующих собственных векторах); методы, использующие закон инерции Сильвестра (метод последовательности Штурма и, более общо, методы деления спектра); наконец, методы, базирующиеся на аппроксимационных свойствах крыловских подпространств, т. е. линейных оболочек систем вида $v, Av, \ldots, A^{k-1}v$ (метод Ланцоша и его варианты). Выбор того или иного метода определяется такими соображениями, как порядок задачи, степень разреженности матрицы, наличие ленточной структуры, доступная информация о спектре и т. д.

Методы решения Ч. п. собственных значений как в общем, так и в эрмитовом случае можно разделить на групповые и последовательные. Групповые методы характеризуются тем, что в них нужные собственные значения (и соответствующие собственные векторы) вычисляются в известной мере параллельно. Сюда относятся многочисленные методы одновременных итераций, метод Ланцоша, методы деления спектра.

В последовательных методах собственные значения определяются поочередно. При этом, начиная со второго собственного значения, возникает необходимость воспрепятствовать тому, чтобы итерации сходились к ранее найденным корням. С этой необходимостью связаны различные приемы исчерпывания (или дефляции) [2]. В одних случаях исчерпывание приводит к построению матрицы $\tilde{A}$, у к-рой вычисленным собственным значениям A соответствуют нулевые корни; в остальном спектр обеих матриц совпадает, совпадают и их собственные векторы. В других случаях результатом исчерпывания является расщепление матрицы, вследствие чего последовательные собственные значения можно определить, пользуясь матрицами убывающих порядков. В третьих — итерации метода с неизменной матрицей A сопровождаются ортогонализацией по отноше-

нию к прежде вычисленным собственным векторам. Приемы исчерпывания могут использоваться и групповыми методами.

Лит.: [1] Парлетт Б., Симметричная проблема собственных значений. Численные методы, пер. с англ., М., 1983; [2] Уилкинсон Дж., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970. *Х. Д. Икрамов.*

ЧАСТИЧНО РЕКУРСИВНАЯ ФУНКЦИЯ, рекурсивная функция,— одно из эквивалентных уточнений понятия *вычислимой функции.*

В. Е. Плиско.

ЧАСТИЧНО РЕКУРСИВНЫЙ ОПЕРАТОР — отображение класса всех одноместных функций в себя, определяемое следующим образом. Пусть Φ_z — нек-рый *перечисления оператор*. С этим оператором естественным образом связан другой оператор Ψ, к-рый действует на одноместных функциях. А именно, всякая функция φ имеет график — множество всех пар $\langle x, y\rangle$ таких, что $\varphi(x)=y$. При *фиксированном способе кодирования* пар натуральными числами этот график может рассматриваться как множество $\tau(\varphi)$ натуральных чисел. Если теперь $\Phi_z(\tau(\varphi))$ также является графиком нек-рой функции ψ, то полагают $\Psi(\varphi)=\psi$. В противном случае считают, что значение $\Psi(\varphi)$ не определено. Таким образом, каждый оператор перечисления Φ_z определяет нек-рый Ч. р. о. Ψ.

Если Ч. р. о. определен на всех функциях, он наз. рекурсивным оператором. Ч. р. о., к-рый определен на всех всюду определенных функциях и переводит всюду определенные функции во всюду определенные, наз. общерекурсивным оператором. Не всякий Ч. р. о. может быть продолжен до рекурсивного оператора. Всякий общерекурсивный оператор является рекурсивным оператором. Обратное включение не имеет места.

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и *эффективная вычислимость*, пер. с англ., М., 1972.

В. Е. Плиско.

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННАЯ ГРУППА — группа G, на к-рой задано отношение частичного порядка $\leqslant$ такое, что для любых a, b, x, y из G неравенство $a\leqslant b$ влечет за собой $xay\leqslant xby$.

Множество $P=\{x\in G \mid x\geqslant 1\}$ Ч. у. г., называемое положительным конусом, или целой частью, группы G, обладает свойствами: 1) $PP\subseteq P$; 2) $P\cap P^{-1}=\{1\}$; 3) $x^{-1}Px\subseteq P$ для любых $x\in G$. Всякое подмножество P группы G, удовлетворяющее условиям 1)—3), задает на G частичный порядок ($x\leqslant y$ тогда и только тогда, когда $x^{-1}y\in P$), для к-рого P служит положительным конусом.

Примеры Ч. у. г.: аддитивная группа действительных чисел с обычным порядком; группа $F(X, \mathbb{R})$ функций, заданных на произвольном множестве X со значениями в $\mathbb{R}$, с операцией

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

и отношением порядка $f\leqslant g$, если $f(x)\leqslant g(x)$ для всех $x\in X$; группа $A(M)$ всех автоморфизмов линейно упорядоченного множества M на себя, относительно суперпозиции отображений и с отношением порядка: $\varphi\leqslant\psi$, если $\varphi(m)\leqslant\psi(m)$ для любого $m\in M$, $\varphi, \psi\in A(M)$.

Основными понятиями теории Ч. у. г. являются понятия порядкового гомоморфизма (см. *Упорядоченная группа*), *выпуклой подгруппы*, декартова и лексикографич. произведений.

Важнейшие классы Ч. у. г.: *линейно упорядоченные группы*, *структурно упорядоченные группы*.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965. *В. М. Копытов.*

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО — непустое множество, на к-ром зафиксирован нек-рый *порядок*.

Ч. у. м. является примером *модели*.

Примеры Ч. у. м.: 1) множество натуральных чисел с обычным порядком; 2) множество натуральных чисел, где $a \leqslant b$ означает, что a делит b; 3) множество всех подмножеств нек-рого множества, где $a \leqslant b$ означает, что $a \subseteq b$; 4) множество всех действительных функций на отрезке $[0, 1]$, где $f \leqslant g$ означает, что $f(t) \leqslant g(t)$ для всех $t \in [0, 1]$; 5) *множество конечных возрастающих* последовательностей натуральных чисел, где

$$(a_1, \ldots, a_k) \leqslant (b_1, \ldots, b_l)$$

означает, что $k \leqslant l$ и $a_i = b_i$ при $1 \leqslant i \leqslant k$ (см. *Дерево*); 6) произвольное непустое множество, где $a \leqslant b$ означает $a = b$ (такое Ч. у. м. наз. тривиальным, или дискретным).

Каждое Ч. у. м. P можно рассматривать как *малую категорию*, объектами к-рой служат элементы множества P, а множество морфизмов $H(a, b)$ одноэлементно, если $a \leqslant b$, и пусто в остальных случаях. В свою очередь, каждая малая категория, где каждое из множеств $H(a, b)$ содержит не более одного элемента, определяет Ч. у. м.

Если на Ч. у. м. P определить отношение $\trianglelefteq$, полагая $a \trianglelefteq b$, если $b \leqslant a$, то это отношение оказывается порядком. Возникающее таким образом Ч. у. м. наз. дуальным, или двойственным, к P.

Отображение φ Ч. у. м. P в Ч. у. м. P' наз. (анти)изотонным, или (анти)гомоморфизмом, если $a \leqslant b$ в P влечет

$$\varphi(a) \leqslant \varphi(b) \quad (\varphi(b) \leqslant \varphi(a))$$

в P'. Взаимно однозначный (анти)гомоморфизм наз. (анти)изоморфизмом. Тождественное отображение Ч. у. м. P на себя является антиизоморфизмом этого Ч. у. м. на дуальное ему. Изоморфизм является частным случаем *резидуального отображения*. Последовательное выполнение двух антигомоморфизмов дает гомоморфизм. Совокупность всех Ч. у. м. образует *категорию*, если морфизмами считать изотонные отображения. Всякое непустое подмножество Ч. у. м. является Ч. у. м. относительно индуцированного на нем порядка.

Если A — непустое подмножество Ч. у. м. P, то *нижний конус* A^{∇} (*верхний конус* $A^{\triangle}$) определяется как совокупность всех таких элементов $x \in P$, что $x \leqslant a$ ($a \leqslant x$) для всех $a \in A$. Если a, $b \in P$ и $a \leqslant b$, то подмножество

$$[a, b] = a^{\triangle} \cap b^{\nabla} = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

наз. интервалом (хотя с точки зрения словоупотребления, принятого в математич. анализе, здесь следовало бы говорить «отрезок»). Конусы $a^{\triangle}$ и a^{∇}, где $a \in P$, часто также наз. интервалами. Элемент u из подмножества A наз. наибольшим (наименьшим), если $a \leqslant u$ ($u \leqslant a$) для всех $a \in A$. В этом случае u является единственным элементом пересечения $A \cap A^{\triangle}$ ($A \cap A^{\nabla}$). Наибольший (наименьший) элемент Ч. у. м. P (если он существует) наз. единицей (нулем) этого Ч. у. м. Элемент m из подмножества A наз. максимальным (минимальным), если для каждого x из A, для к-рого $m \leqslant x$ ($x \leqslant m$) будет $m = x$. Другими словами,

$$m^{\triangle} \cap A = m \,(m^{\nabla} \cap A = m).$$

Наибольший (наименьший) элемент является максимальным (минимальным). Обратное верно не всегда. Наименьший (наибольший) элемент верхнего (нижнего) конуса $A^{\triangle}$ (A^{∇}) наз. точной верхней (нижней) гранью подмножества A и обозначается как $\sup A$ ($\inf A$). Расшифровывая это определение, можно сказать, что $u = \sup A$, если $u \geqslant a$ для всех $a \in A$ и $u' \geqslant u$, если $u' \geqslant a$ для всех $a \in A$. Аналогично расшиф-

ровывается определение $\inf A$. Если P — цепь, то последнее условие можно заменить таким: «... и $u' \geqslant a_0$ для нек-рого $a_0 \in A$, если $u' < u$», как это принято в математич. анализе. Элементы из A^{Δ} (A^{∇}) часто наз. верхними (нижними) гранями подмножества A. Ясно, что $1 = \sup P$ и $0 = \inf P$. Часто полагают, что $\sup \varnothing = 0$ и $\inf \varnothing = 1$. Среди свойств рассмотренных выше понятий следует отметить следующие:

а) если $A \subseteq B$, то $B^{\Delta} \subseteq A^{\Delta}$ и $B^{\nabla} \subseteq A^{\nabla}$;

б) $A \subseteq A^{\Delta\nabla} \cap A^{\nabla\Delta}$;

в) $A = A^{\Delta\nabla\Delta} = A^{\nabla\Delta\nabla}$;

г) $(A \cup B)^{\Delta} = A^{\Delta} \cap B^{\Delta}$;

д) $(A \cup B)^{\nabla} = A^{\nabla} \cap B^{\nabla}$;

е) если $\sup A$ или $\inf A^{\Delta}$ существует, то $\sup A = \inf A^{\Delta}$;

ж) если $\inf A$ или $\sup A^{\nabla}$ существует, то $\inf A = \sup A^{\nabla}$;

з) (обобщенная ассоциативность) если $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — некоторое множество подмножеств Ч. у. м. P и если существуют $\sup (\bigcup_\alpha A_\alpha)$ и $\sup A_\alpha$ ($\inf (\bigcup_\alpha A_\alpha)$ и $\inf A_\alpha$) для всех $\alpha \in I$, то

$$\sup \left(\bigcup\nolimits_\alpha A_\alpha\right) = \sup \{\sup A_\alpha\}$$

$$\left(\inf \left(\bigcup\nolimits_\alpha A_\alpha\right) = \inf \{\inf A_\alpha\}\right);$$

и) если φ — изотонное отображение Ч. у. м. P в Ч. у. м. P', $A \subseteq P$ и существуют как $\sup A$ в P, так и $\sup \varphi(A)$ в P' (как $\inf A$ в P, так и $\inf \varphi(A)$ в P'), то $\sup \varphi(A) \leqslant \varphi(\sup A)$ ($\varphi(\inf A) \leqslant \inf \varphi(A)$).

Нек-рые из приведенных выше определений и результатов, можно получить из других заменой символа $\leqslant$ на $\geqslant$. Это касается, напр., определения верхнего и нижнего конусов, наибольшего и наименьшего элементов. Такие понятия называют двойственными. В частности, двойственными являются утверждения г) и д), а также е) и ж). Все это является проявлением общего принципа двойственности (см. *Двойственности принцип* в частично упорядоченных множествах).

Специальными видами Ч. у. м. являются *линейно упорядоченные множества* (или цепи), *вполне упорядоченные множества*, *направленные множества*, *решетки* (или структуры), *полурешетки* (или полуструктуры), *булевы алгебры*. Особую роль играют алгебраич. образования, являющиеся в то же время Ч. у. м. (см. *Упорядоченная полугруппа*, *Частично упорядоченная группа*, *Упорядоченное кольцо*). Понятие Ч. у. м. является одним из фундаментальных общематематич. понятий и широко используется как в самой математике, так и в ее приложениях.

Определение Ч. у. м. впервые явно сформулировано Ф. Хаусдорфом [11], хотя входящие в определение порядка аксиомы рассматривались еще Г. Лейбницем (G. Leibniz) около 1690. Аккуратное определение линейно упорядоченного множества впервые дано Г. Кантором [10]. В этой же работе он определил порядковый тип линейно упорядоченного множества, т. е., в современной терминологии, класса линейно упорядоченных множеств, изоморфных данному. Еще раньше Г. Кантор рассматривал вполне упорядоченные множества [9], хотя введенное им определение не удовлетворяет современным требованиям. Оригинальный подход к аксиоматич. определению линейно упорядоченного множества предложил С. О. Шатуновский [6], [7]. В связи с определением понятия предела в математич. анализе С. О. Шатуновский [8], а также Э. Мур и Г. Смит [12] рассматривали направленные множества.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория решеток, пер. с англ., М., 1984; [2] Бурбаки Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965; [3] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [4] Розен В. В., Частичные операции в упорядоченных множествах, Саратов, 1973; [5] Скорняков Л. А.,

Элементы теории структур, 2 изд., М., 1982; [6] Шатуновский С. О., «Записки Новороссийского об-ва естествоиспытателей», 1904, в. 26, с. 21—25; [7] его же, «Тр. I Всероссийского съезда преподавателей математики», 1913, т. 1, с. 276—81; [8] его же, Введение в анализ, Од., 1923; [9] Cantor G., «Math. Ann.», 1883, Bd 21, S. 545—86; [10] его же, «Math. Ann.», 1895, Bd 46, S. 481—512; [11] Hausdorff F., Grundzüge der Mengenlehre, Lpz., 1914; [12] Moore E., Smith H., «Amer. J. Math.», 1922, v. 44, p. 102—21.

См. также обзоры [6]—[9] из статьи *Решетка*.

Л. А. Скорняков.

ЧАСТИЧНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ ОБЛАСТЬ безгранично делимого распределения — совокупность всех функций распределения $F(x)$ таких, что для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ с функцией распределения $F(x)$ при подходящем выборе постоянных A_n и $B_n>0$, $n=1, 2, \ldots$ и нек-рой подпоследовательности целых чисел $n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$ функции распределения случайных величин

$$\left(\sum_{i=1}^{n_k} X_i - A_{n_k}\right)\Big/ B_{n_k}$$

слабо сходятся при $k\to\infty$ к невырожденной функции распределения $V(x)$, к-рая с необходимостью безгранично делима; каждое безгранично делимое распределение имеет непустую Ч. п. о. Существуют распределения, не принадлежащие ни одной Ч. п. о., а также распределения, принадлежащие Ч. п. о. любого безгранично делимого распределения.

Лит.: Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949.

Б. А. Рогозин.

ЧАСТИЧНЫЙ ПОРЯДОК — см. *Порядок*.

ЧАСТИЧНЫЙ ПРЕДЕЛ данной последовательности — предел нек-рой ее подпоследовательности. У всякой числовой последовательности (а также у всякой последовательности точек конечномерного евклидова пространства) существует, по крайней мере, один Ч. п. (конечный или бесконечный).

Л. Д. Кудрявцев.

ЧАСТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ первого порядка функции многих переменных — производная функция по одной из переменных при условии, что все остальные переменные фиксированы. Напр., если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в нек-рой окрестности точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, то Ч. п. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ функции f по переменной x_1 в рассматриваемой точке равна обычной производной $\frac{df}{dx_1}(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ в точке $x_1^{(0)}$ функции $f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ одной переменной x_1. Иначе говоря,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = \frac{df}{dx_1}(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\Big|_{x_1=x_1^{(0)}} =$$

$$= \lim_{\Delta x_1\to 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{\Delta x_1},$$

где

$$\Delta_{x_1} f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) =$$

$$= f(x_1^{(0)}+\Delta x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$

Ч. п.

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}, \quad m_1+\ldots+m_n=m, \qquad (*)$$

порядков $m>1$ определяются по индукции: если определена Ч. п.

$$\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_i^{k_i}\ldots\partial x_n^{k_n}}, \quad k_1+\ldots+k_i+\ldots+k_n=k-1,$$

то, по определению,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_i^{k_i+1} \dots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_i^{k_i} \dots \partial x_n^{k_n}}\right).$$

Ч. п. (*) обозначается также $D^m_{m_1, \dots, m_n} f$. Ч. п. (*), у которой, по крайней мере, два различных показателя m_i не равны нулю, наз. смешанной Ч. п., в противном случае, т. е. когда Ч. п. имеет вид $\frac{\partial^m f}{\partial x_i^m}$, — несмешанной. При достаточно широких предположениях смешанные Ч. п. не зависят от порядка дифференцирования по различным переменным. Это имеет место, напр., если все рассматриваемые Ч. п. непрерывны.

Если при определении Ч. п. положить в основу понятие не обычной, а обобщенной в том или ином смысле производной, то получают определение обобщенной Ч. п. *Л. Д. Кудрявцев.*

ЧАСТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ первого порядка функции многих переменных — дифференциал функции по одной из переменных при условии, что все остальные переменные фиксированы. Напр., если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в нек-рой окрестности точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, то Ч. д. $d_{x_1} f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ функции f по переменной x_1 в рассматриваемой точке равен обычному дифференциалу $df(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ в точке $x_1^{(0)}$ функции $f(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ одной переменной x_1, т. е.

$$d_{x_1} f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = df(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})\Big|_{x_1 = x_1^{(0)}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})\, dx_1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{d_{x_1} f}{dx_1}.$$

Аналогично определяется и Ч. д. порядка $k > 1$: напр., Ч. д. $d^k_{x_k} f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ порядка k функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по переменной x_1 в точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ наз. дифференциал порядка k функции $f(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ одной переменной x_1 в точке $x_1^{(0)}$. Отсюда следует, что

$$d^k_{x_i} f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})\, dx_i^k,$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Л. Д. Кудрявцев.

ЧАСТНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ — мера линейной зависимости между двумя случайными величинами из нек-рой совокупности случайных величин в том случае, когда исключено влияние остальных. Точнее, пусть случайные величины $X_1, \dots, X_n$ имеют совместное распределение в $\mathbb{R}^n$, и пусть $X^*_{1 \cdot 34 \dots n}$ и $X^*_{2 \cdot 34 \dots n}$ — наилучшие линейные приближения величин X_1 и X_2 соответственно величинами $X_3, \dots, X_n$. Тогда Ч. к. к. между X_1 и X_2, обозначаемый $\rho_{12 \cdot 34 \dots n}$, определяется как обычный коэффициент корреляции между случайными величинами $Y_1 = X_1 - X^*_{1 \cdot 34 \dots n}$ и $Y_2 = X_2 - X^*_{2 \cdot 34 \dots n}$:

$$\rho_{12 \cdot 34 \dots n} = \frac{\mathsf{E}\{(Y_1 - \mathsf{E}Y_1)(Y_2 - \mathsf{E}Y_2)\}}{\sqrt{\mathsf{D}Y_1 \mathsf{D}Y_2}}.$$

Из определения следует, что $-1 \leqslant \rho_{12\cdot 34\ldots n} \leqslant 1$. Ч. к. к. выражается через элементы *корреляционной матрицы*. Пусть $P = \|\rho_{ij}\|$, где ρ_{ij} — коэффициент корреляции между X_i и X_j, и пусть P_{ij} есть алгебраич. дополнение элемента ρ_{ij} в определителе $|P|$, тогда

$$\rho_{12\cdot 3\ldots n} = -\frac{P_{12}}{\sqrt{P_{11}P_{22}}}.$$

Напр., при $n=3$

$$\rho_{12\cdot 3} = \frac{\rho_{12}\rho_{33} - \rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{(1-\rho_{13}^2)(1-\rho_{23}^2)}}.$$

Аналогично определяется Ч. к. к. для любых величин X_i и X_j из $X_1, \ldots, X_n$. В самом общем случае Ч. к. к. $\rho_{12\cdot 34\ldots n}$ отличается от (полного) коэффициента корреляции ρ_{12} величин X_1 и X_2. По различию между $\rho_{12\cdot 34\ldots n}$ и ρ_{12} можно судить о том, зависимы ли X_1 и X_2 между собой, или зависимость между ними есть следствие зависимости каждой из них от величин $X_3, \ldots, X_n$. Если величины $X_1, \ldots, X_n$ попарно некоррелированы, то все Ч. к. к. равны нулю.

Выборочным аналогом Ч. к. к. $\rho_{12\cdot 34\ldots n}$ является статистика

$$r_{12\cdot 34\ldots n} = -\frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}R_{22}}},$$

где R_{ij} — алгебраич. дополнение элемента r_{ij} в определителе матрицы $R = \|r_{ij}\|$ выборочных коэффициентов корреляции r_{ij}. Если результаты наблюдений независимы и нормально распределены, то $r_{12\cdot 34\ldots n}$ распределен с плотностью вероятности

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{N-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N-n}{2}\right)} (1-x^2)^{\frac{N-n-2}{2}}, \quad -1 < x < 1$$

(N — объем выборки). Для проверки гипотезы о Ч. к. к. используется тот факт, что статистика

$$t = \sqrt{N-n}\,\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}, \quad \text{где} \quad r = r_{12\cdot 34\ldots n},$$

при указанных условиях имеет *Стьюдента распределение* с $N-n$ степенями свободы.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

А. В. Прохоров.

ЧАСТНЫХ КОЛЬЦО — кольцо, связанное с данным ассоциативным кольцом R с единицей. Кольцом частных (классическим правым) кольца R наз. кольцо $Q_{\mathrm{cl}}(R)$, в к-ром все регулярные элементы (т. е. не делители нуля) кольца R обратимы и любой элемент из $Q_{\mathrm{cl}}(R)$ имеет вид ab^{-1}, где $a, b \in R$. Кольцо $Q_{\mathrm{cl}}(R)$ существует тогда и только тогда, когда R удовлетворяет правому условию Ope (см. *Ассоциативные кольца и алгебры*). Ч. к. максимальное (или полное) правое кольца R — это кольцо $Q_{\max}(R) = \mathrm{Hom}_H(\hat{R}, \hat{R})$, где $\hat{R}$ — инъективная оболочка R как правого R-модуля, $H = \mathrm{Hom}_R(\hat{R}, \hat{R})$ — кольцо эндоморфизмов правого R-модуля $\hat{R}$. Кольцо $Q_{\max}$ можно определить так же, как прямой предел

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(D, R),$$

где D — множество всех плотных правых идеалов кольца R (правый идеал D кольца R наз. плотным, если

$$\forall 0 \neq r_1 \in R, \quad r_2 \in R \exists r \in R \ (r_1 r \neq 0, \ r_2 r \in D)).$$

Лит.: [1] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971; [2] Елизаров В. П., «Алгебра и логика», 1969, т. 8, № 4, с. 381—424; [3] Stenström B., Rings of quotients, B.— N. Y., 1975.

Л. А. Бокуть.

ЧАСТОТНАЯ ТЕОРЕМА — теорема, формулирующая условия разрешимости уравнений Лурье

$$P^*H+HP+hh^*=G, \quad Hq-h\varkappa=q, \tag{1}$$

где P, $G=G^*$, q, g, $\varkappa$ — заданные матрицы размеров $n\times n$, $n\times n$, $n\times m$, $n\times m$, $m\times m$ соответственно, $H=H^*$, h — искомые матрицы размера $n\times n$ и $n\times m$. Уравнения Лурье имеют две другие эквивалентные формы: при $\det\varkappa\neq 0$

$$HQ_0H+(P_0^*H+HP_0)+G_0=0, \tag{2}$$

где $Q_0=Q_0^*\geqslant 0$, $G_0=G_0^*$, и в общем случае

$$2\operatorname{Re}x^*H(Px+q\xi)=\mathcal{G}(x,\xi)-|h^*x-\varkappa\xi|^2 \quad (\forall x,\ \xi), \tag{3}$$

где $\mathcal{G}(x,\xi)$ — заданная эрмитова форма векторов $x\in\mathbb{C}^n$, $\xi\in\mathbb{C}^m$:

$$\mathcal{G}(x,\xi)=x^*Gx+2\operatorname{Re}(x^*g\xi)+\xi^*\Gamma\xi.$$

При этом $\Gamma=\varkappa^*\varkappa\geqslant 0$, $G_0=g\Gamma^{-1}g^*-G$, $P_0=P-g\Gamma g^*$, $Q_0=q\Gamma^{-1}q^*$.

Если пара $\{P,\ q\}$ управляема, то уравнения Лурье сводятся к случаю, когда

$$P=\operatorname{diag}[\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n], \quad \lambda_j+\lambda_h\neq 0.$$

При $m=1$ и когда все матрицы действительны, в скалярной записи уравнения Лурье приобретают вид

$$\sum_{k=1}^n q_k\frac{h_jh_k}{\lambda_j+\lambda_k}-h_j\sqrt{\Gamma}=\gamma_j, \quad j=1,\ \ldots,\ n,$$

здесь $h=[h_1,\ \ldots,\ h_n]$ — искомый вектор.

Пусть пара $\{P,\ q\}$ стабилизируема, т. е. существует r такое, что $R=P+qr^*$ — матрица Гурвица.

Частотная теорема утверждает: для разрешимости уравнений Лурье необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathcal{G}[(i\omega I-P)^{-1}q\xi,\ \xi]\geqslant 0$$

для всех $\xi\in\mathbb{C}^m$, $\omega\in\mathbb{R}^1$, $\det\|i\omega I-P\|\neq 0$ (I — единичная матрица). Ч. т. также формулирует процедуру определения матриц H, h и утверждает, что при

$$\det\Gamma\neq 0,\ \det\|i\omega I-P\|\neq 0,\ \mathcal{G}[\|i\omega I-P\|^{-1}q\xi,\ \xi]>0 \quad (\forall\xi\neq 0,\ \forall\omega)$$

существуют такие (единственные) матрицы H, h, что кроме (3) выполнено: $P+q\varkappa^{-1}h^*$ есть матрица Гурвица (см. [3]).

Уравнение Лурье в форме (2) иногда наз. также матричным алгебраическим уравнением Риккати. Ч. т. используется при решении задач абсолютной устойчивости [2, 4, 5], управления и адаптации (см., напр., [6]).

Лит.: [1] Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, М.— Л., 1951; [2] Попов В. М., Гиперустойчивость автоматических систем, пер. с рум., М., 1970; [3] Якубович В. А., «Сиб. матем. ж.», 1973, т. 14, № 2, с. 384—420; [4] Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А., Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия, М., 1978; [5] Методы исследования нелинейных систем автоматического управления, М., 1975; [6] Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А., Адаптивное управление динамическими объектами, М., 1981.

Г. А. Леонов.

ЧЕБЫШЕВА КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — интерполяционная квадратурная формула с равными коэффициентами:

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx\cong C\sum_{k=1}^N f(x_k). \tag{*}$$

Весовая функция равна 1, промежуток интегрирования конечен и считается совпадающим с $[-1,\ 1]$. Число параметров, определяющих квадратурную формулу (*), равно $N+1$ (N узлов и значение коэффициента C). Параметры определяются требованием, чтобы квадратурная формула (*) была точна для всех многочленов степени не выше N или, что то же самое, для одночленов 1,

$x, x^2, \ldots, x^N$. Параметр C находится из условия, что квадратурная формула точна для $f(x)=1$, и равен $2/N$. Узлы $x_1, \ldots, x_N$ оказываются действительными лишь при $N=1(1)7$ и $N=9$. При $N=1(1)7$ узлы вычислил П. Л. Чебышев. При $N\geqslant 10$ среди узлов Ч. к. ф. всегда имеются комплексные (см. [1]). Алгебраич. степень точности Ч. к. ф. равна N при N нечетном и равна $N+1$ при N четном. Формула (*) предложена П. Л. Чебышевым в 1873.

Лит.: [1] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967. *И. П. Мысовских.*

ЧЕБЫШЕВА МЕТОД — метод получения класса *итерационных алгоритмов* нахождения однократного действительного корня уравнения

$$f(x)=0, \tag{1}$$

где $f(x)$ — достаточно гладкая функция.

В основе метода лежит формальное представление обратной к $f(x)$ функции $x=F(y)$ по формуле Тейлора. Если α — достаточно точное приближение для корня x уравнения (1), $c_0=\beta=f(\alpha)$, $f'(\alpha)\neq 0$, то

$$x=F(y)=\alpha+\sum\nolimits_{n\geqslant 1} d_n (y-\beta)^n, \tag{2}$$

где коэффициенты d_n рекуррентно определяются из соотношения $x\equiv F(f(x))$ через коэффициенты Тейлора c_n функции $f(x)=\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-\alpha)^n$. Полагая в (2) $y=0$, получают соотношение

$$x=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}-\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}-$$
$$-\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^3\left(\frac{1}{2}\left(\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2-\frac{f'''(\alpha)}{6f'(\alpha)}\right)-$$
$$-\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^4\left(\frac{5}{8}\left(\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^3-\frac{5f''(\alpha)\,f'''(\alpha)}{12\,(f'(\alpha))^2}+\frac{f^{\mathrm{IV}}(\alpha)}{24f'(\alpha)}\right)-\ldots \tag{3}$$

Несколько членов справа в (3) дают формулы итерационного алгоритма; так при двух членах получается *Ньютона метод*, а при трех членах получается итерационный метод вида

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)},\quad n=0,1,\ldots \tag{4}$$

С ростом числа учитываемых в (3) членов возрастает скорость сходимости x_n к x (см. [2]). Метод может быть распространен на функциональные уравнения (см. [3]).

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 5, М.—Л., 1951, с. 7—25, 173—76; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962; [3] Нечепуренко М. И., «Успехи матем. наук», 1954, т. 9, в. 2, с. 163—70. *В. И. Лебедев.*

ЧЕБЫШЕВА МНОГОЧЛЕНЫ первого рода — многочлены, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией

$$h_1(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1).$$

Для стандартизованных Ч. м. справедливы формула

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),\quad x\in[-1,1],$$

и рекуррентное соотношение

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),$$

с помощью к-рых находят последовательно

$$T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x,\quad T_2(x)=2x^2-1,$$
$$T_3(x)=4x^3-3x,\quad T_4(x)=8x^4-8x^2+1,$$
$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x,\ \ldots.$$

Ортонормированные Ч. м.:

$$\hat{T}_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,T_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$\hat{T}_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,T_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x),\quad n\geqslant 1.$$

Старший коэффициент многочлена $T_n(x)$ при $n \geqslant 1$ равен 2^{n-1}. Поэтому Ч. п. с единичным старшим коэффициентом определяются формулой

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \quad n \geqslant 1.$$

Нули многочлена $T_n(x)$, определяемые равенством

$$x_k^{(n)} = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

часто применяются в качестве узлов интерполяционных и квадратурных формул. Многочлен $T_n(x)$ является решением дифференциального уравнения

$$(1-x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

Многочлен $\tilde{T}_n(x)$ наименее отклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$, т. е. для всякого другого многочлена $\tilde{P}_n(x)$ степени n с единичным старшим коэффициентом выполняется условие

$$\max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{P}_n(x)| > \max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

С другой стороны, для всякого многочлена $Q_n(x)$ степени не выше n, удовлетворяющего условию

$$\max_{x \in [-1, 1]} |Q_n(x)| = 1,$$

при любом $x_0 \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ имеет место неравенство

$$|Q(x_0)| \leqslant |T_n(x_0)|.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и ее модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ удовлетворяет условию Дини

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta, f) \ln \frac{1}{\delta} = 0,$$

то эта функция разлагается в ряд Фурье — Чебышева

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{T}_n(x), \quad x \in [-1, 1],$$

сходящийся равномерно на отрезке $[-1, 1]$. Коэффициенты этого ряда определяются по формуле

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t) \hat{T}_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Если же функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на отрезке $[-1, 1]$, причем ее p-я производная $f^{(p)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α, т. е. $f^{(p)}(x) \in \operatorname{Lip} \alpha$, то имеет место неравенство

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \hat{T}_k(x) \right| \leqslant \frac{c_1 \ln n}{n^{p+\alpha}}, \quad x \in [-1, 1],$$

где постоянная c_1 не зависит от n и x.

Ч. м. второго рода определяются равенством

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) = \sin[(n+1) \arccos x] \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Эти многочлены ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией

$$h_2(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Для всякого многочлена $\tilde{Q}_n(x)$ с единичным старшим коэффициентом справедливо неравенство

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \int_{-1}^{1} |\tilde{U}_n(x)| \, dx \leqslant \int_{-1}^{1} |\tilde{Q}_n(x)| \, dx.$$

Ч. м. были введены в 1854 П. Л. Чебышевым (см. [1]).

Обе системы Ч. м. являются частными случаями *ультрасферических многочленов* и *Якоби многочленов*.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947, с. 23—51; [2] Сегё Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962.

П. К. Суетин.

ЧЕБЫШЕВА НЕРАВЕНСТВО для конечных монотонных последовательностей

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n,$$
$$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$$

— неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Ч. н. для монотонных функций $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ — неравенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \leqslant (b-a) \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ либо возрастают, либо убывают.

Неравенства установлены П. Л. Чебышевым (1882.)

В. И. Битюцков.

ЧЕБЫШЕВА НЕРАВЕНСТВО, неравенство Бьенеме — Чебышева,— неравенство теории вероятностей, дающее оценку вероятности отклонений значений случайной величины от ее математич. ожидания через ее дисперсию. Пусть $X(\omega)$ — нек-рая случайная величина с конечными математич. ожиданием $\mathsf{E}X(\omega)$ и дисперсией $\mathsf{D}X(\omega)$. Ч. н. состоит в том, что для любого $\varepsilon > 0$ вероятность события

$$\{\omega: |X(\omega) - \mathsf{E}X| \geqslant \varepsilon\}$$

не превосходит $\mathsf{D}X/\varepsilon^2$ или

$$\mathsf{P}\left\{|X - \mathsf{E}X| \geqslant t\sqrt{\mathsf{D}X}\right\} \leqslant \frac{1}{t^2}. \qquad (1)$$

Это неравенство было независимым образом открыто И. Бьенеме (I. Bienaymé, 1853) и П. Л. Чебышевым (1866). В современной литературе это неравенство чаще наз. Ч. н., возможно, и потому, что с именем П. Л. Чебышева связано использование его при доказательстве обобщения *больших чисел закона* (теоремы Чебышева).

Ч. н. является представителем целого класса однотипных неравенств, простейшее из к-рых утверждает, что для неотрицательной случайной величины X с конечным математич. ожиданием $\mathsf{E}X$

$$\mathsf{P}\{X \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathsf{E}X}{\varepsilon} \qquad (2)$$

(иногда наз. неравенством Маркова). Из этого неравенства вытекают неравенства для произвольных случайных величин, зависящие от моментов:

$$\mathsf{P}\{|X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathsf{E}|X|^r}{\varepsilon^r},$$

$$\mathsf{P}\{|X - \mathsf{E}X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathsf{E}|X - \mathsf{E}X|^r}{\varepsilon^r}, \quad r \geqslant 1$$

(при $r = 2$ и само Ч. н.), а также более общее неравенство

$$\mathsf{P}\{|X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathsf{E}f(X)}{f(\varepsilon)} \qquad (3)$$

для неотрицательной четной неубывающей при положительных значениях x функции $f(x)$. Неравенство (3) указывает путь получения новых неравенств того же типа, напр. экспоненциального неравенства:

$$\mathsf{P}\{X \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathsf{E}e^{cX}}{e^{c\varepsilon}}, \quad c > 0.$$

Сложилась традиция относить все эти неравенства к чебышевскому типу и даже наз. Ч. н. Существует общий принцип получения Ч. н. при определенных условиях на моменты, основанный на использовании системы многочленов Чебышева (см. [4]). Для произвольных случайных величин Ч. н. дают точные, неулучшаемые оценки, однако в нек-рых конкретных ситуациях эти оценки можно уточнить. Напр., если X имеет унимодальное распределение с модой μ, совпадающей с мате-

матич. ожиданием, то справедливо неравенство Гаусса:

$$\mathsf{P}\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{4}{3}\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2},\quad \varepsilon\geqslant\frac{2\sigma}{\sqrt{3}},$$

где $\sigma^2=\mathsf{D}X$.

Значение Ч. н. в теории вероятностей определяется в конечном счете не его точностью, а простотой и универсальностью. Большую роль Ч. н. и его видоизменения сыграли применительно к суммам случайных величин при доказательстве различных форм закона больших чисел и закона повторного логарифма. Ч. н. для сумм независимых случайных величин было подвергнуто обобщению и уточнению в двух главных направлениях. Первое из них связано с переходом от Ч. н.

$$\mathsf{P}\{|X_1+\ldots+X_n-(\mathsf{E}X_1+\ldots+\mathsf{E}X_n)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathsf{D}(X_1+\ldots+X_n)}{\varepsilon^2}$$

к значительно более сильному неравенству

$$\mathsf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_1+\ldots+X_k-(\mathsf{E}X_1+\ldots+\mathsf{E}X_k)|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{\mathsf{D}(X_1+\ldots+X_n)}{\varepsilon^2},$$

к-рое было доказано А. Н. Колмогоровым и использовано им при доказательстве *больших чисел усиленного закона* (см. *Колмогорова неравенство*).

Второе направление посвящено замене степенной оценки в Ч. н. на экспоненциально убывающую и приводит к неравенствам Бернштейна — Колмогорова:

$$\mathsf{P}\{|X_1+\ldots+X_n|\geqslant\varepsilon\}\leqslant 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2\left(1+\frac{a}{3}\right)}\right\},$$

где $|X_i|\leqslant C$, $\mathsf{E}X_i=0$, $\sigma^2=\mathsf{D}(X_1+\ldots+X_n)$, $a=\frac{C\varepsilon}{\sigma^2}$ (см. *Бернштейна неравенство*). Такие уточнения Ч. н. получаются при дополнительных условиях ограниченности слагаемых X_i.

Получены многомерные аналоги нек-рых из указанных здесь неравенств (см. [5]).

Лит.: [1] Чебышев П. Л., «Матем. сб.», 1867, т. 2, с. 1—9; [2] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [3] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [4] Карлин С., Стаден В., Чебышевские системы и их применения в анализе и статистике, пер. с англ., М., 1976; [5] Прохоров Ю. В., в сб.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей, матем. статистика, теоретич. кибернетика, т. 10, М., 1972, с. 5—24.

А. В. Прохоров.

ЧЕБЫШЕВА ПОСТОЯННАЯ — числовая характеристика $\tau=\tau(E)$ компактного множества E на комплексной плоскости, употребляемая в теории наилучшего приближения.

Пусть K_n — класс всех многочленов вида

$$p_n(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\ldots+c_n$$

степени n, и пусть

$$M(p_n)=\max\{|p_n(z)|:z\in E\},$$

$$m_n=\inf\{M(p_n):p_n\in K_n\},\quad \tau_n=\sqrt[n]{m_n}.$$

Существует многочлен $t_n(z)\in K_n$, для к-рого $M(t_n)=m_n$, он наз. многочленом Чебышева для E. Кроме того, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n=\tau,$$

к-рый и наз. постоянной Чебышева для E.

Если ограничиться классом $\tilde{K}_n$ всех многочленов

$$\tilde{p}_n(z)=z^n+\ldots+\tilde{c}_n,$$

нули к-рых расположены на E, то получают соответствующие величины $\tilde{m}_n$, $\tilde{\tau}_n$, $\tilde{\tau}$ и многочлен $\tilde{t}_n(z)$ (он

также наз. многочленом Чебышева) такой, что $M(\tilde{t}_n) = \tilde{m}_n$.

Известно, что $\tau = \tilde{\tau} = C(E) = d$, где $C(E)$ — *емкость* компакта E, d — его *трансфинитный диаметр* (см., например, [1]).

Понятие Ч. п. обобщается для компактов E в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, исходя из *потенциала теории*. Пусть для точек $x \in \mathbb{R}^m$

$$H(|x|) = \begin{cases} \ln \frac{1}{|x|} & \text{при} \quad m = 2, \\ \frac{1}{|x|^{m-2}} & \text{при} \quad m \geqslant 3 \end{cases}$$

— фундаментальное решение уравнения Лапласа, и для набора $(x_j)_{j=1}^n \subset E$ пусть

$$\sigma_n(E) = \sup \left\{ \min \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n H(|x - x_j|) : x \in E \right\} : (x_j)_{j=1}^n \subset E \right\}.$$

Тогда при $m=2$ получают равенство

$$\tau = \tilde{\tau} = C(E) = \exp\left(-\lim_{n \to \infty} \sigma_n(E)\right),$$

а при $m \geqslant 3$ принимают (см. [2])

$$\tau = C(E) = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n(E)}.$$

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Карлесон Л., Избранные проблемы теории исключительных множеств, пер. с англ., М., 1971.
Е. Д. Соломенцев.

ЧЕБЫШЕВА СИСТЕМА — система линейно независимых функций $S_n = \{\varphi_i(q)\}_{i=1}^n$ из пространства $C(Q)$, обладающая тем свойством, что любой нетривиальный полином по этой системе имеет не более $(n-1)$-го различного нуля. Примером Ч. с. в $C[0, 1]$ является система $S_n^0 = \{q^i\}_{i=0}^{n-1}$, $0 \leqslant q \leqslant 1$, аппроксимативные свойства к-рой в равномерной метрике впервые рассматривал П. Л. Чебышев [1]. Термин «Ч. с.» введен С. Н. *Бернштейном* [2]. *Произвольная* Ч. с. *наследует* практически все аппроксимативные свойства системы S_n^0.

Для Ч. с. остается справедливой *Чебышева теорема*, *Валле Пуссена теорема* (об альтернансе), сохраняют силу все методы, разработанные для приближенного построения алгебраич. многочленов наилучшего равномерного приближения, справедлива теорема единственности полинома наилучшего равномерного приближения по Ч. с. (см. также *Хаара условие* и *Чебышевское множество*). Для того чтобы на компакте Q существовала Ч. с. порядка $n>1$, необходимо и достаточно, чтобы Q был гомеоморфен окружности или ее подмножеству (при этом Q не гомеоморфен окружности, если n четно). В частности, на m-мерных областях ($m \geqslant 2$), напр. на квадрате, не существует Ч. с. [3].

В качестве системы, не являющейся Ч. с., можно привести систему, состоящую из *сплайнов* степени m с n фиксированными узлами $0 < x_1 < \ldots < x_n < 1$. В этом случае функция $[\max(0, x - x_n)]^m$ принадлежит этой системе и имеет бесконечно много нулей. Отсутствие единственности затрудняет численное построение элемента наилучшего приближения.

Важным частным случаем Ч. с. является *Маркова система функций*.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.—Л., 1947; с. 151—238; [2] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов, Л.—М., 1937; [3] Mairhuber J. C., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1956, v. 7, № 4, p. 609—15; [4] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [5] Карлин С., Стадден В., Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике, пер. с англ., М., 1976.
Ю. Н. Субботин.

ЧЕБЫШЕВА ТЕОРЕМА: если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и

$$A = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P_n(x)|,$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

то $P_n(x)$ тогда и только тогда является многочленом наилучшего равномерного приближения для функции $f(x)$, т. е.

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P_n(x)| = \min_{\{c_k\}_0^n} \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \right|,$$

когда существуют $n+2$ точки $\{x_i\}$, $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \leqslant b$, образующие *чебышевский альтернанс*, то есть удовлетворяющие условию

$$f(x_i) - P_n(x_i) = \varepsilon(A)(-1)^i, \quad i = 0, 1, \ldots, n+1,$$

где $\varepsilon = 1$ или -1. Сформулированная теорема была доказана П. Л. Чебышевым в 1854 (см. [1]) в более общем виде, а именно для наилучшего равномерного приближения непрерывной функции рациональными дробями с фиксированными степенями числителя и знаменателя. Ч. т. сохраняет силу, если вместо алгебраических многочленов рассматривать полином

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x),$$

где $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ — *Чебышева система*. Критерий, сформулированный в Ч. т., применяется в методах приближенного построения полиномов наилучшего равномерного (чебышевского) приближения. В несколько иной формулировке Ч. т. распространяется на приближение функций комплексного переменного (см. [2]) и абстрактных функций (см. [3]).

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947, с. 151—238; [2] Колмогоров А. Н., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 1, с. 216—21; [3] Зуховицкий С. И., Стечкин С. Б., «Докл. АН СССР», 1956, т. 106, № 5, с. 773—76; [4] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977.

Ю. Н. Субботин.

ЧЕБЫШЕВА ТЕОРЕМА о дифференциальном бином е: неопределенный интеграл от дифференциального бинома

$$x^m (a + bx^n)^p,$$

где a и b — действительные числа, m, n, p — рациональные, не выражается через элементарные функции при любых m, n, p, кроме случаев, когда p, $(m+1)/n$, $(m+1)/n + p$ — целые. Установлена П. Л. Чебышевым (1853).

В. И. Битюцков.

ЧЕБЫШЕВА ТЕОРЕМЫ о простых числах — теоремы 1)—8) о распределении простых чисел, доказанные П. Л. Чебышевым [1] в 1848—50.

Пусть $\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x, m — целое $\geqslant 0$, p — простое число, $\ln u$ — натуральный логарифм u,

$$\operatorname{li} x = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + \ldots + \frac{(n-1)!\,x}{\ln^n x} + O\left(\frac{x}{\ln^{n+1} x}\right). \quad (*)$$

1) Для любого m сумма ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\pi(n) - \pi(n-1) - \frac{1}{\ln n}\right) \frac{\ln^m n}{n^s}$$

имеет конечный предел при $s \to 1+$.

2) Как бы ни было мало $a > 0$, а m велико, функция $\pi(x)$ бесконечное число раз удовлетворяет каждому из неравенств:

$$\pi(x) > \operatorname{li} x - ax \ln^{-m} x, \quad \pi(x) < \operatorname{li} x + ax \ln^{-m} x.$$

3) Частное $\pi(x)\ln x/x$ при $x \to \infty$ не может иметь предела, отличного от 1.

4) Если функция $\pi(x)$ может быть выражена до количества порядка $x \ln^{-n} x$ включительно алгебраически в x, $\ln x$, e^x, то таким выражением является выражение (*).

После этого П. Л. Чебышев ввел две новые функции распределения простых чисел $\theta(x)$ и $\psi(x)$ — *Чебышева функции*

$$\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p, \quad \psi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \ln p$$

и установил фактич. порядок роста этих функций. Отсюда впервые им получен фактич. порядок роста числа простых чисел $\pi(x)$ и n-го простого числа P_n. Точнее, он доказал:

5) Для $x > 1$ при $A = \ln 2^{1/2} 3^{1/3} 5^{1/5} / 30^{1/30}$, имеют место неравенства

$$\psi(x) > Ax - \frac{5}{2} \ln x - 1,$$

$$\psi(x) < \frac{6}{5} Ax + \frac{5}{4 \ln 6} \ln^2 x + \frac{5}{4} \ln x + 1.$$

6) Для x, начиная с нек-рого x_0, имеют место неравенства

$$0{,}9212\ldots < \frac{\pi(x) \ln x}{x} < 1{,}1055\ldots$$

7) Существуют постоянные $a > 0$, $A > 0$ такие, что n-е простое число P_n, для всех $n = 1, 2, \ldots$ удовлетворяет неравенствам

$$an \ln n < P_n < An \ln n.$$

8) В интервале $(a, 2a-2)$ при $a > 3$ лежит, по крайней мере, одно простое число (п о с т у л а т Б е р т р а н а).

Главная идея метода доказательства 1)—4) состоит в изучении поведения величин

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+s}} - \frac{1}{s}, \quad \ln s - \sum \ln\left(1 - \frac{1}{p^{1+s}}\right),$$

$$\sum_p \ln\left(1 - \frac{1}{p^{1+s}}\right) + \sum_p \frac{1}{p^{1+s}}$$

и их производных при $s \to 0+$. В основе метода вывода 5)—8) лежит т о ж д е с т в о Ч е б ы ш е в а:

$$\ln [x]! = \sum_{n \leqslant x} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Лит.: [1] Ч е б ы ш е в П. Л., Полн. собр. соч., т. 1, Теория чисел, М.— Л., 1944.

А. Ф. Лаврик.

ЧЕБЫШЕВА УРАВНЕНИЕ — линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + ay = 0$$

или, в самосопряженной форме,

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}\right) + ay = 0,$$

здесь a — константа. Ч. у. представляет собой частный случай *гипергеометрического уравнения*.

Точки $x=-1$ и $x=1$ являются *регулярными особыми точками* Ч. у. Замены независимой переменной

$$t = \arccos x \text{ при } |x| < 1,$$

$$t = \operatorname{Arch} |x| \text{ при } |x| > 1$$

приводят это уравнение соответственно к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ay = 0 \text{ или } \frac{d^2y}{dt^2} - ay = 0,$$

так что Ч. у. интегрируется в замкнутой форме. Фундаментальная система решений Ч. у. на интервале

$-1<x<1$ при $a=n^2$, где n — натуральное число, состоит из *Чебышева многочлена* (1-го рода) степени n

$$T_n(x)=\cos(n \arccos x),$$

и функции $U_n(x)=\sin(n \arccos x)$, связанной с многочленами Чебышева 2-го рода. Многочлен $T_n(x)$ служит действительным решением Ч. у. с $a=n^2$ и на всей действительной оси. Ч. у. изучалось также в комплексной области. *Н. Х. Розов.*

ЧЕБЫШЕВА ФУНКЦИИ — функции положительного аргумента x, определяемые следующим образом:

$$\theta(x)=\sum_{p\leqslant x}\ln p,\ \psi(x)=\sum_{p^m\leqslant x}\ln p.$$

Первая сумма берется по всем простым числам $p\leqslant x$, а вторая — по всем положительным целым степеням простых чисел p, таким, что $p^m\leqslant x$. Функция $\psi(x)$ может быть выражена через *Мангольдта функцию*

$$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n).$$

Из определения функций $\theta(x)$ и $\psi(x)$ следует, что величина $e^{\theta(x)}$ равна произведению всех простых чисел $p\leqslant x$, а величина $e^{\psi(x)}$ равна наименьшему общему кратному всех положительных целых чисел $n\leqslant x$. Функции $\theta(x)$ и $\psi(x)$ связаны между собой соотношением

$$\psi(x)=\theta(x)+\theta(x^{1/2})+\theta(x^{1/3})+\dots .$$

Эти функции тесно связаны также с функцией

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1,$$

указывающей количество простых чисел $p\leqslant x$.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Избр. труды, М., 1955, с. 33—54. *С. А. Степанов.*

ЧЕБЫШЕВСКАЯ СЕТЬ — сеть, направляющие векторы каждого семейства линий к-рой переносятся параллельно по линиям другого семейства. Чебышевской сетью I рода наз. сеть Σ_n такая, что для каждого $i=1, 2, \dots, n$ направления распределения $\Delta_1^i(x)$ параллельны в связности ∇ вдоль любой интегральной кривой каждого из других распределений Δ_1^i, задаваемых этой сетью. Чебышевской сетью II рода наз. сеть $\Sigma_n (n>2)$, для каждого $i=1, 2, \dots, n$ подпространства $\Delta_{n-1}^i(x)\subset\Delta_{n-1}^i$ параллельны в связности ∇ вдоль интегральных кривых распределения Δ_1^i.

Введены П. Л. Чебышевым (1878).

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 5, М., 1951, с. 165—70. *В. Т. Базылев.*

ЧЕБЫШЕВСКАЯ ТОЧКА системы линейных неравенств

$$\eta_i(x)=a_{i1}\xi_1+\dots+a_{in}\xi_n+a_i\leqslant 0,\ i=1, \dots, m,$$

— точка $x=(\xi_1, \dots, \xi_n)$, для к-рой достигается минимакс

$$\min_{x}\ \max_{1\leqslant i\leqslant m}\ \eta_i(x).$$

Задача отыскания Ч. т. сводится к общей задаче линейного программирования [1].

Более общее понятие — чебышевская точка x^* системы гиперплоскостей $\{\mathcal{H}_i\}_{i=1}^m$ из банахова пространства X, т. е. точка x^*, для к-рой

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant m}\ \inf_{z\in H_i}\|z-x^*\|=\inf_{x\in X}\ \sup_{1\leqslant i\leqslant m}\ \inf_{z\in H_i}\|z-x\|.$$

Ч. т. часто выбирается в качестве «решения» несовместной линейной системы уравнений или неравенств.

Лит.: [1] Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И., Линейное и выпуклое программирование, М., 1964; [2] Белобров П. К., «Матем. заметки», 1970, т. 8, № 4, с. 29—40; [3] Еремин И. И., «Докл. АН СССР», 1961, т. 138, № 6, с. 1280—83. *Ю. Н. Субботин.*

ЧЕБЫШЕВСКИЙ АЛЬТЕРНАНС — свойство разности между непрерывной на Q функцией $f(x)$ и полиномом $P_n(x)$ (по *Чебышева системе* $\{\varphi_k(x)\}_0^n$) на упорядоченном множестве $(n+2)$ точек

$$\{x_i\}_0^{n+1} \subset Q,\ x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1},$$

заключающееся в том, что

$$f(x_i) - P_n(x_i) = (-1)^i \varepsilon \| f(x) - P_n(x) \|_{C[Q]},$$

где $\varepsilon = 1$ или -1 и Q — замкнутое множество действительных чисел. Точки $\{x_i\}_0^{n+1}$ наз. точками чебышевского альтернанса (см. также *Альтернанса точки*). *Ю. Н. Субботин.*

ЧЕБЫШЕВСКИЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД — итерационный алгоритм нахождения решения линейного уравнения

$$Au = f, \tag{1}$$

учитывающий информацию о принадлежности $\mathrm{Sp}(A)$ — спектра оператора A — нек-рому множеству Ω, и использующий свойства и параметры многочленов, наименее отклоняющихся от нуля на множестве Ω и равных единице в нуле.

Наибольшее развитие Ч. и. м. получил, когда в уравнении (1) A — линейный самосопряженный оператор и $\mathrm{Sp}(A) \in [m, M]$, где $0 < m < M$ — точные границы спектра; тогда Ч. и. м. использует свойства многочленов Чебышева 1-го рода $T_n(x)$. Для этого случая рассматривают два типа Ч. и. м.:

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_{k+1}(Au^k - f), \tag{2}$$

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_{k+1}(Au^k - f) - \beta_{k+1}(u^k - u^{k-1}), \tag{3}$$

$$\beta_1 = 0,\ k = 0,\ 1, \ldots,$$

в к-рых по заданному u^0 образуют последовательность $u^k \to u$ при $k \to \infty$. В (2), (3) α_i, β_i — числовые параметры методов. Если $\varepsilon^k = u - u^k$, то начальная ошибка ε^0 и ошибка на N-й итерации ε^N будут связаны формулой

$$\varepsilon^N = P_N(A)\,\varepsilon^0,$$

где

$$P_N(t) = \prod_{i=1}^{N} (1 - \gamma_i t),\ P_N(0) = 1. \tag{4}$$

Многочлены $P_N(t)$ вычисляют по параметрам каждого из методов (2), (3): для метода (2)

$$\alpha_k = \gamma_{j_k},\ k = 1,\ 2, \ldots,\ N, \tag{5}$$

где $1 \leqslant j_k \leqslant N$ — элементы перестановки $\varkappa_N = (j_1, j_2, \ldots, j_N)$, а для метода (3) — из рекуррентных соотношений

$$P_{k+1}(t) = (1 - \beta_{k+1} - \alpha_{k+1}t)\,P_k(t) + \beta_{k+1}P_{k-1}(t), \tag{6}$$

$$P_0 = 1,\ \beta_1 = 0,\ k = 0,\ 1, \ldots,\ N-1.$$

При этом

$$\| \varepsilon^N \| \leqslant \sup_{t \in [m, M]} | P_N(t) | \cdot \| \varepsilon^0 \|.$$

Оптимизация методов (2), (3) на классе задач, у к-рых $\mathrm{Sp}(A) \in [m, M]$, заключается в таком выборе параметров, чтобы $P_N(t)$ вида (4) был многочленом, наименее отклоняющимся от нуля на $[m, M]$. П. Л. Чебышевым в 1881 было показано, что это будет многочлен

$$P_N(t) = T_N((M + m - 2t)/(M - m))/T_N(\theta), \tag{7}$$

где $\theta = (M+m)/(M-m)$. Тогда

$$\| \varepsilon^N \| \leqslant 2\tau^N/(1 + \tau^{2N}) \| \varepsilon^0 \|, \tag{8}$$

где

$$\tau = (1 - \sqrt{m/M})/(1 + \sqrt{m/M}).$$

Подставляя (7) при $N=k-1$, k, $k+1$ в (6), определяют параметры α_{k+1}, β_{k+1} метода (3):

$$\alpha_{k+1}=4\delta_{k+1}/(M-m),\ \beta_{k+1}=-\delta_k\delta_{k+1}, \qquad (9)$$

где

$$\delta_0=0,\ \delta_1=\theta^{-1},\ \delta_{k+1}=(2\theta-\delta_k)^{-1},\ k=1,\ \ldots,\ N-1. \qquad (10)$$

Таким образом, вычисляя α_{k+1}, β_{k+1} по формулам (9), (10), получают Ч. и. м. (3), к-рый при любом $N\geqslant 1$ оптимально уменьшает $\|\varepsilon^N\|$.

В оптимальном методе (2) для заданного N параметры α_{k+1} выбирают в соответствии с перестановкой $\varkappa_N$ по формуле (5) так, чтобы было (7), т. е.

$$\gamma_j=2\,(M+m-(M-m)\cos\pi\psi_j)^{-1}, \qquad (11)$$

$$\psi_j=(2j-1)/(2N),\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Тогда после N итераций для $\|\varepsilon^N\|$ будет справедливо неравенство (8).

Важной проблемой при малых m/M является вопрос об устойчивости метода (2), (5), (11). Неосмотрительный выбор $\varkappa_N$ может привести к катастрофич. возрастанию $\|u^k\|$ для нек-рых $1\leqslant k\leqslant N$, к потере значащих цифр, к возрастанию ошибок округления, допущенных на промежуточных итерациях. Известны алгоритмы, перемешивающие параметры (11) и гарантирующие устойчивый счет: для $N=2^p$ см. ст. *Итерационный алгоритм*, а для $N=3^p$ один из алгоритмов построения $\varkappa_N$ следующий: пусть $\varkappa_1=(1)$, а $\varkappa_{3^{r-1}}=(j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_{3^{r-1}})$ — построена, тогда образуют по правилу

$$\varkappa_{3^r}=(j_1,\ 2\cdot 3^{r-1}+j_1,\ 2\cdot 3^{r-1}+1-j_1,\ \ldots,\ 2\cdot 3^{r-1}+1-j_{3^{r-1}}), \qquad (12)$$

$$r=1,\ 2\ldots,\ p.$$

Существует класс методов (2) — устойчивые бесконечно продолжаемые оптимальные Ч. и. м. — позволяющих продолжить метод (2), (5), (11) после N итераций так, чтобы он был устойчив и вновь становился оптимальным для нек-рой последовательности $N_i\to\infty$. Для случая $N_i=3^iN$ из представления

$$T_{3N}(x)=T_N(x)\,(2T_N(x)+\sqrt{3})\,(2T_N(x)-\sqrt{3}) \qquad (13)$$

видно, что треть параметров $P_{3N}(t)$ совпадает с (11). Если после N итераций продолжить итерации (2), (5), (11) далее, взяв в (11) за ψ_j $2N$ значений:

$$\tilde{\psi}_j=(2j-1)/(6N),\ 2j\not\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3), \qquad (14)$$

то снова получается после $3N$ итераций Ч. и. м. Для обеспечения устойчивости множество (14) разбивают на два: к i-му, $i=1,\ 2$, относят те $\tilde{\psi}_j$, для к-рых $\pi\cos\tilde{\psi}_j$ является корнем i-й скобки в (13); внутри каждого из подмножеств $\tilde{\psi}_j$ перемешивают с помощью перестановки $\varkappa_N$. При $N<k\leqslant 2N$ употребляют в (5), (11) элементы первого множества, при $2N<k\leqslant 3N$ — второго, тем самым определяется перестановка $\varkappa_{3N}$. Продолжив аналогичным образом процесс образования параметров, получают бесконечную равномерно распределенную на $[0,\ 1]$ последовательность $\{\omega_j\}_1^\infty$, наз. T-последовательностью, для к-рой метод [2] становится оптимальным при $N_i=3^iN$ и

$$\alpha_{k+1}=2\,(M+m-(M-m)\cos\pi\omega_{k+1})^{-1}, \qquad (15)$$

$$k=0,\ 1,\ \ldots\ .$$

Теория Ч. и. м. (2), (3) может быть распространена на нек-рый класс несамосопряженных операторов, когда Sp A лежит на нескольких отрезках или внутри нескольких специальной формы областей (в частности, эллипса), или, когда известна информация о распреде-

лении начальной ошибки, на случай комбинированных с методом сопряженных градиентов Ч. и. м., на задачи частичной проблемы собственных значений.

Одним из эффективных приемов ускорения сходимости итераций (2), (3) является предварительное преобразование уравнения (1) к эквивалентному уравнению вида

$$BAu = Bf,$$

и применение уже к этому уравнению Ч. и. м. Оператор B определяют, руководствуясь двумя факторами: 1) чтобы алгоритм вычисления величин вида Bv был нетрудоемким, 2) чтобы $\mathrm{Sp}(BA)$ принадлежал множеству, для к-рого обеспечена быстрая сходимость Ч. и. м.

Лит.: [1] Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд., М., 1981; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [4] Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977; [5] Лебедев В. И., Финогенов С. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1971, т. 11, № 2, с. 425—38; 1973, т. 13, № 1, с. 18—33; 1976, т. 16, № 4, с. 895—907; [6] Лебедев В. И., там же, 1969, т. 9, № 6, с. 1247—52; его же, в кн.: Матем. анализ и смежные вопросы математики, Новосиб., 1978, с. 89—108.

В. И. Лебедев.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ РАДИУС ограниченного множества M из метрич. пространства (X, ρ) — точная нижняя грань радиусов всех шаров, содержащих M (см. *Чебышевский центр*).

Ю. Н. Субботин.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ ЦЕНТР ограниченного множества M из метрич. пространства $X=(X, \rho)$ — элемент $x_0 \in X$, для к-рого

$$\sup_{y \in M} \rho(x_0, y) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in M} \rho(x, y). \qquad (*)$$

Величина (*) есть *чебышевский радиус* множества M. Если линейное нормированное пространство является сопряженным к нек-рому линейному нормированному пространству, то любое ограниченное множество $M \subset X$ имеет хотя бы один Ч. ц. Существует банахово пространство и трехточечное множество в нем, не имеющее Ч. ц. Для того чтобы каждое ограниченное множество банахова пространства X имело не более одного Ч. ц., необходимо и достаточно, чтобы X было равномерно выпуклым по каждому направлению, т. е. чтобы для любого $z \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\delta = \delta(z, \varepsilon) > 0$, что если $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, $x_1 - x_2 = \lambda z$ и $\|x_1 + x_2\| \geqslant 1 - \delta$, то $|\lambda| \leqslant \varepsilon$. Ч. ц. каждого ограниченного множества M из линейного нормированного пространства X размерности большей двух принадлежит выпуклой оболочке этого множества тогда и только тогда, когда X гильбертово. Ч. ц. — частный случай более общего понятия наилучшей N-сети.

Лит.: [1] Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 75—132.

Ю. Н. Субботин.

ЧЕБЫШЕВСКОЕ МНОЖЕСТВО — такое множество M в метрич. пространстве (X, ρ), что для любого $x \in X$ в M существует единственный *наилучшего приближения элемент*, т. е. элемент $y \in M$, для к-рого $\rho(x, y) = \rho(x, M)$. Существование и единственность элемента наилучшего приближения являются простейшими, естественными требованиями, весьма удобными как с теоретической, так и с вычислительной точек зрения. Это и определяет роль Ч. м. в теории приближений и теории банаховых пространств. Логически понятие Ч. м. является развитием понятия *Чебышева системы*.

Конечномерное векторное подпространство $L \subset C(Q)$ с базисом $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ тогда и только тогда является Ч. м. (чебышевским подпространством), когда функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ образуют систему Чебышева (т. е. удовлетворяют *Хаара условию*). В евклидовом пространстве Ч. м. являются прямые, плоскости, выпуклые фигуры и тела. Нетривиальные примеры Ч. м. рассматривал впервые П. Л. Чебышев [1]. Это — подпространство алгебраич. многочленов степени $\leqslant n$ и

множество рациональных функций с фиксированными степенями числителя и знаменателя в пространстве $C[a, b]$. В евклидовых пространствах множество является Ч. м. в том и только в том случае, когда оно замкнуто и выпукло.

В геометрии Лобачевского Ч. м. не обязано быть выпуклым [7]. В двумерном нормированном пространстве, если оно негладко, легко строится невыпуклое Ч. м. Существуют негладкие трехмерные пространства, в к-рых каждое Ч. м. выпукло. Проблема выпуклости произвольного Ч. м. в гильбертовом пространстве не решена (1984). В то же время имеются доказательства выпуклости Ч. м. при дополнительных условиях на множество и на пространство, а также условия, эквивалентные выпуклости для Ч. м. (см. *Аппроксимативная компактность*).

Поскольку Ч. м. могут быть невыпуклыми, изучаются другие их характеристики. Ч. м. M наз. солнцем [2], если для любых $x \notin M$ и $z \in \overrightarrow{x'x}$ (где x' — точка в M, ближайшая для x, $\overrightarrow{x'x}$ — луч с вершиной x', проходящий через x) точка x' является ближайшей в M для z. В гладких пространствах условия «M — выпукло» и «M — солнце» эквивалентны для Ч. м. M.

Свойства Ч. м. тесно связаны с аппроксимативной компактностью и непрерывностью *метрической проекции*. Пусть в банаховом пространстве X задано Ч. м. M; если а) M — *ограниченно компактное множество* или б) X равномерно выпукло, а M локально компактно, то M является солнцем (при дополнительном условии «X гладко» — выпуклым множеством). Ч. м. с непрерывной метрич. проекцией выпукло в гладком рефлексивном пространстве, а в $C[0, 1]$ является солнцем. В равномерно выпуклом банаховом пространстве всякое Ч. м. связно (даже пересечения с шарами связны). Однако в $C[0, 1]$ семейство функций x_α, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $x_0(t) \equiv 0$, $x_\alpha(t) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+t)^{-1}$ при $\alpha > 0$, является Ч. м. с изолированной точкой, т. е. несвязно и не является солнцем [8]. Остается нерешенным (1984) вопрос о том, не будет ли каждое Ч. м., являющееся солнцем, в любом банаховом пространстве связным.

В «хороших» пространствах достаточно много Ч. м. В банаховом пространстве X каждое выпуклое замкнутое множество является Ч. м. тогда и только тогда, когда X строго выпукло (строго нормировано) и рефлексивно. В произвольном рефлексивном пространстве всегда существует Ч. м.— гиперплоскость. В n-мерном банаховом пространстве существуют чебышевские подпространства всех размерностей $\leqslant n$ (см. [9]). Существует пространство, в к-ром нет нетривиальных чебышевских подпространств. В равномерно выпуклом банаховом пространстве каждое замкнутое множество M является почти чебышевским множеством в том смысле, что множество точек $x \in X$, для к-рых ближайшая точка в M существует и единственна, является дополнением тощего множества в X. В сепарабельных пространствах существуют подпространства любой конечной размерности, являющиеся «почти Ч. м.». Существует пространство, изоморфное гильбертову, в к-ром метрич. проекция на нек-рое чебышевское подпространство разрывна.

Понятие Ч. м. допускает обобщения, напр. вместо условия единственности элемента наилучшего приближения можно требовать известную «правильность» множества элементов наилучшего приближения для каждого $x \in X$, напр. компактность, связность или выпуклость. Результаты, получаемые при таких обобщениях, во многом аналогичны соответствующим результатам для Ч. м.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947, с. 151—235; [2] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б., «Докл. АН СССР», 1958, т. 118, № 1, с. 17—19; [3] Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969,

с. 75—132; [4] Власов Л. П., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 6, с. 3—66; [5] Singer I., Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces, B.— Hdlb.— N. Y., 1970; [6] его же, The theory of bestapproximation and functional analysis, Phil., 1974; [7] Болтянский В. Г., Яглом И. М., в кн.: Энциклопедия элементарной математики, т. 5, М., 1966, с. 181—269; [8] Dunham C. B., «Canad. Math. Bull.», 1975, v. 18, № 1, p. 35—37; [9] Залгаллер В. А., «Зап. научн. семинаров Ленингр. отделения матем. ин-та АН СССР», 1972, т. 27, с. 67—72. *Л. П. Власов.*

ЧЕБЫШЕВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ, равномерное приближение,— приближение функций $f(x)$, непрерывных на множестве M, функциями $S(x)$ из нек-рого заданного класса функций, когда в качестве меры приближения рассматривается уклонение в равномерной метрике

$$\rho(f, S) = \sup_{x \in M} |f(x) - S(x)|.$$

П. Л. Чебышев в 1853 (см. [1]) поставил и исследовал задачу о наилучшем Ч. п. непрерывной функции алгебраич. многочленами степени не выше n. В этой задаче, а также в более общей задаче о наилучшем Ч. п. непрерывной функции рациональными дробями он получил фундаментальные результаты и тем самым создал основы теории *наилучшего приближения.*

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947, с. 23—51; [2] Гутер Р. С., Кудрявцев Л. Д., Левитан Б. М., Элементы теории функций, М., 1963. *Ю. Н. Субботин.*

ЧЕВЫ ТЕОРЕМА — теорема о соотношении отрезков нек-рых прямых, пересекающих треугольник. Пусть A_1, B_1 и C_1 — три точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC. Для того чтобы прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекались в одной точке или были все параллельны, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Прямые AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в одной точке и проходящие через вершины треугольника, называются прямыми Чевы, или чевианами. Ч. т. метрически двойственна *Менелая теореме.* Название по имени Дж. Чевы [1].

Ч. т. допускает обобщение на случай многоугольника. Пусть в плоскости многоугольника с нечетным числом вершин $A_1A_2 \ldots A_{2n-1}$ дана точка O, и пусть прямые OA_1, OA_2, ..., OA_n, OA_{n+1}, ..., OA_{2n-1} пересекают противоположные вершинам A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}, ..., A_{2n-1} стороны многоугольника соответственно в точках a_n, a_{n+1}, ..., a_{2n-1}, a_1, ..., a_{n-1}. В таком случае

$$\frac{A_1a_1}{a_1A_2} \cdot \frac{A_2a_2}{a_2A_3} \cdots \frac{A_{2n-2}a_{2n-2}}{a_{2n-2}A_{2n-1}} \cdot \frac{A_{2n-1}a_{2n-1}}{a_{2n-1}A_1} = 1.$$

Лит.: [1] Ceva G., De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio, Mil., 1678. *П. С. Моденов.*

ЧЕЗАРО КРИВАЯ — плоская кривая, радиус кривизны R к-рой в произвольной точке M пропорционален отрезку нормали, отсекаемому на этой нормали полярной точки M относительно нек-рой окружности. Натуральное уравнение Ч. к.:

$$s = \int \frac{dR}{(R/b)^m - 1},$$

где b — постоянное, m — действительное число. Исследована Э. Чезаро [1].

Лит.: [1] Cesaro E., Vorlesungen über natürliche Geometrie, 2 Aufl., Lpz., 1926; [2] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

ЧЕЗАРО МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ — совокупность методов суммирования числовых и функциональных рядов; введены Э. Чезаро [1]; обозначаются символом (C, k).

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

с частичными суммами S_n суммируем методом Чезаро порядка k. (C, k)-суммируем, к сумме S, если

$$\sigma_n^k = \frac{S_n^k}{A_n^k} \to S,\ n \to \infty,$$

где S_n^k и A_n^k определяются как коэффициенты разложений

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^k x^n = (1-x)^{-k-1},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n = (1-x)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n =$$

$$= (1-x)^{-k-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Выражения для σ_n^k и A_n^k можно представить в виде

$$\sigma_n^k = \frac{1}{A_n^k} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{k-1} S_n = \frac{1}{A_n^k} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^k a_n,$$

$$A_n^k = \binom{k+n}{n} = \frac{(k+1)\,(k+2)\ldots(k+n)}{n!},\ k \neq -1,\ -2,\ \ldots\ .$$

Метод (C, k) является *матричным методом суммирования* с матрицей $\|a_{n\nu}\|$:

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{A_{n-\nu}^{k-1}}{A_n^k}, & \nu \leqslant n, \\ 0, & \nu > n. \end{cases}$$

При $k=0$ метод совпадает с обычной сходимостью, при $k=1$ есть метод средних арифметических. Методы (C, k) вполне регулярны при $k \geqslant 0$ и не являются регулярными при $k<0$. Сила метода возрастает с увеличением k: если ряд суммируем методом (C, k), то он суммируем к той же сумме методом (C, k') при $k'>k>-1$. При $k<-1$ это свойство не сохраняется. Из суммируемости ряда (*) методом (C, k) следует, что $a_n = o(n^k)$. Метод (C, k) равносилен и совместен с методами суммирования Гёльдера (H, k) и Рисса (R, n, k), $(k>0)$. При любом $k>-1$ метод (C, k) слабее метода Абеля.

Первоначально методы (C, k) были определены Э. Чезаро для целых положительных значений параметра k и применены им к умножению рядов. Позднее они были распространены на произвольные значения k, в том числе и на комплексные. Методы (C, k) имеют многочисленные применения: при умножении рядов, в теории рядов Фурье и др. вопросах.

Лит.: [1] Cesáro E., «Bull. sci. math.», 1890, t. 14, № 1, p. 114—20; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [3] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965; [4] Барон С. А., Введение в теорию суммируемости рядов, 2 изд., Таллин, 1977. *И. И. Волков.*

ЧЕПМЕНА — ЭНСКОГА МЕТОД — способ получения решения *Больцмана уравнения* (кинетического) для одночастичной функции распределения $f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$, являющийся своеобразным методом последовательных приближений, в к-ром локальное распределение Максвелла $f_{\text{лок}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v} \mid n, \boldsymbol{u}, \theta)$ определяется стандартной формулой, но с локальными значениями плотности числа частиц $n(t, \boldsymbol{r})$, гидродинамич. скорости $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{r})$ и температуры $\theta(t, \boldsymbol{r})$, используется в качестве нулевого приближения, а условием существования решения для следующих приближений является выполнение гидродинамич. уравнений для n, $\boldsymbol{u}$, θ в предыдущем приближении. Так как свертки по скорости $\boldsymbol{v}$ интеграла столкновений Больцмана с величинами 1, $\boldsymbol{v}$ и v^2 равны нулю, то в эти уравнения движения для n, $\boldsymbol{u}$ и θ интеграл столкновений явно не входит. Решение самого уравнения Больцмана ищется в виде

$$f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = f_{\text{лок}}(1 + \varphi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})),\ \varphi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) \ll 1,$$

что приводит к неоднородному интегральному уравнению с линеаризованным относительно функции φ интегралом столкновений. Неоднородная часть уравнения содержит величины $n(t, \boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{r})$, $\theta(t, \boldsymbol{r})$, подчиненные упомянутым выше уравнениям. Таким образом, совместно рассматриваются сразу шесть уравнений. Решение уравнения для φ ищется в виде разложения по многочленам Сонина (присоединенные многочлены Лагерра полуцелого индекса) в пространстве скоростей. Для всего метода характерно, что зависимость функции распределения $f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ от времени входит только через ее зависимость от локальных величин $n(t, \boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{r})$, $\theta(t, \boldsymbol{r})$. Нулевое приближение $f = f_{\text{лок}}$ определяет уравнения гидродинамики идеальной жидкости (уравнения Эйлера), к-рые являются условием существования первого приближения для f, ему же соответствуют уже уравнения Навье—Стокса с явными выражениями для коэффициентов диффузии, теплопроводности и двух вязкостей, следующий шаг — уравнение Бэрнетта и т. д. Параметром разложения является, по существу, относительное изменение величин $n(t, \boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{r})$, $\theta(t, \boldsymbol{r})$ на интервале, равном средней длине свободного пробега (параметр неоднородности), поэтому для задач со скачками этих величин (ударные волны и т. п.) метод не может быть использован.

Изложенный метод решения, основанный на идее решения интегральных уравнений Д. Гильберта (D. Hilbert, 1912), был разработан Д. Энскогом (D. Enskog, 1917) и независимо С. Чепменом (S. Chapman, 1916).

То же решение можно получить методом Грэда [5], не столь громоздким, как Ч.— Э. м. При этом функция f представляется в виде ряда по производным $f_{\text{лок}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v} | n, \boldsymbol{u}, \theta)$ по компонентам скорости $\boldsymbol{v}$ (что фактически эквивалентно разложению функции по многочленам Эрмита в трехмерном пространстве скоростей) с зависящими от t и $\boldsymbol{r}$ коэффициентами, являющимися моментами искомой функции распределения, к-рые и определяются с помощью уравнения Больцмана. Первое приближение для f (приводящее к уравнениям Навье—Стокса) содержит только вторые производные от $f_{\text{лок}}$.

Полученное указанными методами решение для одночастичной функции распределения можно вывести непосредственно из *Боголюбова цепочки уравнений* в соответствующем малому значению параметра неоднородности *гидродинамическом приближении* (т. е. минуя кинетич. уравнение). Однако т. к. последовательные приближения, производимые в цепочке, будут включать учет корреляций более высокого порядка, то совпадение результатов произойдет лишь до первого порядка включительно, т. к. следующее приближение для f уже учитывает тройные корреляции частиц, к-рых уравнение Больцмана не содержит, причем вклады от этих членов конкурируют с теми членами, к-рые соответствуют второму приближению для функции f, удовлетворяющей стандартному уравнению Больцмана.

Лит.: [1] Чепмен С., Каулинг Т. Д., Математическая теория неоднородных газов, пер. с англ., М., 1960; [2] Уленбек Дж., Форд Дж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965; [3] Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р., Молекулярная теория газов и жидкостей, пер. с англ., М., 1961; [4] Грэд Г., в кн.: Некоторые вопросы кинетической теории газов, пер. с англ., М., 1965, с. 7—128; [5] Grad H., в кн.: Handbuch der Physik, Bd 12, B.— [a. o.], 1958, S. 205—94.

И. А. Квасников.

ЧЁРЧА λ-АБСТРАКЦИЯ—способ введения функций в языках математич. логики, в особенности в *комбинаторной логике*. А именно, если в нек-ром точном языке определен терм A, выражающий объект теории и зависящий от параметров $x_1, \ldots, x_n$ (и, может быть, также от других параметров), то

$$\lambda x_1 \ldots x_n A \qquad (*)$$

служит в языке обозначением функции, перерабатывающей значения аргументов $x_1, \ldots, x_n$ в объект, выражае-

мый термом A. Выражение (*) и наз. Ч. λ-а. Эта Ч. λ-а., наз. также явным определением функций, употребляется чаще всего в случае, когда в языке теории возникает опасность смешения функции как объекта исследования со значениями функции для нек-рых значений аргумента. Введена А. Чёрчем [1].

Лит.: [1] Church A., The calculi of lambda-conversion, Princeton, 1941; [2] Карри Х. Б., Основания математической логики, пер. с англ., М., 1969. *А. Г. Драгалин.*

ЧЁРЧА ТЕЗИС — принцип, согласно к-рому класс функций, вычислимых с помощью *алгоритмов* в широком интуитивном смысле, совпадает с классом частично рекурсивных функций. Ч. т. — это естественнонаучный факт, подтверждаемый опытом, накопленным в математике за всю ее историю. Все известные в математике примеры алгоритмов удовлетворяют ему. Ч. т. впервые был высказан А. Чёрчем (A. Church, 1936). Различным уточнениям интуитивного понятия алгоритма соответствуют свои формулировки Ч. т. Тезис Тьюринга заключается в том, что всякая вычислимая в интуитивном смысле функция вычислима с помощью нек-рой *Тьюринга машины*, а принцип нормализации Маркова — в том, что всякая вычислимая в интуитивном смысле функция вычислима с помощью нек-рого *нормального алгорифма*. Из эквивалентности известных уточнений понятия алгоритма следует эквивалентность соответствующих вариантов Ч. т. Этот факт является еще одним подтверждением Ч. т. Тезис Чёрча не может быть строго доказан, так как в его формулировке участвует неточное понятие «алгоритм в интуитивном смысле». Были попытки опровергнуть Ч. т., однако они к успеху не привели (1984). Принятие Ч. т. полезно в теории алгоритмов и ее приложениях. Во-первых, при доказательстве существования тех или иных конкретных алгоритмов — машин Тьюринга, рекурсивных функций, нормальных алгорифмов и др.— можно, опираясь на Ч. т., ограничиваться интуитивно ясными построениями и не выписывать соответствующие формальные схемы.

Кроме того, Ч. т. является основанием для вывода о неразрешимости данной *алгоритмической проблемы* после того, как строго доказано, что эта проблема не может быть решена в рамках того или иного уточнения понятия алгоритма.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [2] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972. *С. И. Адян.*

ЧЕТАЕВА ПРИНЦИП — вариационный дифференциальный принцип механики, представляющий собой видоизменение *Гаусса принципа*, установленное Н. Г. Четаевым [1].

Согласно Ч. п., работа на элементарном цикле, состоящем из прямого движения в поле заданных сил и движения обратного (попятного) в поле сил, к-рых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы механич. система была совершенно свободной, для действительного движения имеет относительный (по меньшей мере) максимум в классе мыслимых по Гауссу движений. Ч. п. распространен на физич. системы, а также на сплошные среды (см. [2]).

Подробнее см. *Вариационные принципы классической механики*.

Лит.: [1] Четаев Н. Г., «Прикл. матем. и механ.», 1941, т. 5, в. 1, с. 11—12; [2] Румянцев В. В., «Докл. АН СССР», 1973, т. 210, № 4, с. 787—90. *В. В. Румянцев.*

ЧЕТАЕВА ТЕОРЕМЫ — 1) Ч. т. о неустойчивости — общие теоремы о неустойчивости движения, установленные Н. Г. Четаевым для уравнений возмущенного движения вида

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n), \quad s = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

правые части к-рых X_s — голоморфные функции относительно действительных переменных x_s с коэффициентами, являющимися непрерывными и ограниченными функциями действительной переменной — времени t, определенные в нек-рой области

$$t \geqslant t_0, \quad \sum_{s=1}^{n} x_s^2 < A, \tag{2}$$

причем $X_s\ (t, 0, \ldots, 0) = 0$.

Ч. т. даны в двух формулировках: с двумя функциями V, W и с одной функцией V. Под функциями V, W понимаются действительные функции действительных переменных x_s и t, однозначные и непрерывные в области (2) и обращающиеся в нуль при $x_s = 0$, так же как их полные производные по времени 1-го порядка $\dot{V}$, $\dot{W}$, причем, напр.,

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s.$$

Теорема о неустойчивости с двумя функциями (1934, см. [1], с. 222—24): если дифференциальные уравнения таковы, что: 1) для нек-рой допускающей бесконечно малый высший предел функции V существует область, где $V\dot{V} > 0$, и 2) для нек-рых значений величин x_s, численно сколь угодно малых, в области $V\dot{V} > 0$ возможно выделить область, в к-рой нек-рая функция $W > 0$, на границе области $W = 0$ значения $\dot{W}$ суть одного какого-либо определенного знака, то невозмущенное движение $x = 0$ неустойчиво.

При решении вопроса о неустойчивости целесообразно рассматривать интервал изменения времени $[t_0, \infty]$ закрытым и существование области $V > 0$ понимать как ее непустоту для любого t на этом интервале (см. [1], с. 225—238). Если рассматриваемая область $V\dot{V} > 0$ ограничена $V = 0$ и при этом $\dot{V} \geqslant 0$, то за функцию W возможно взять функцию V.

Условие 2) можно сформулировать многими иными способами, в частности, пусть уравнения (1) имеют первый интеграл $F(t, x) = \text{const}$, обладающий свойствами функций V, и пусть область $F > 0$ не является пустой при численно сколь угодно малых значениях x_s (см. [1], с. 232). Если для возмущенных движений при $F(t, x) = \varepsilon$, сколь бы мало ε не было, тем самым будут выполняться неравенства $\dot{V} > l' > 0$ в области (2) для допускающей малый высший предел функции V, а начальные значения x_{s_0} при удовлетворении интегралу $F(t, x) = \varepsilon = F_0$ возможно выбрать так, чтобы они удовлетворяли также и неравенству $V_0 > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Если интервал времени считать открытым $[t_0, \infty)$ и не вводить условного смысла существования области $V > 0$, то справедлива теорема о неустойчивости с одной функцией (1946, см. [1], с. 5—152): если дифференциальные уравнения (1) таковы, что возможно найти функцию V, ограниченную в области $V > 0$, существующей при всяком $t \geqslant t_0$ и для сколь угодно малых по абсолютной величине значений переменных x_s, производная к-рой $\dot{V}$ была бы определенно-положительной в области $V > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво. Под определенно положительной в области $V > 0$ функцией понимается функция $W(t, x)$, к-рая может обращаться в нуль в этой области лишь на границе $V = 0$, причем для произвольного $\varepsilon > 0$, как бы мало оно не было выбрано, найдется такое число $l > 0$, что при x_s, удовлетворяющих условию $V \geqslant \varepsilon$, и для всякого $t \geqslant t_0$ имеет место неравенство $W \geqslant l$.

Было дано обращение этой теоремы, чем была обоснована ее универсальность (см. [2]).

2) Ч. т. Пуанкаре

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi_j}{dt} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_i}\xi_i + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i}\eta_i\right),\\ \frac{d\eta_j}{dt} &= -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i}\xi_i + \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i}\eta_i\right),\end{aligned}\right\} \quad (3)$$
$$j = 1, \ldots, n,$$

составленных для невозмущенного движения $q_i = q_i(t)$, $p_i = p_i(t)$, предполагаемого таким, что коэффициенты уравнений (3) суть непрерывные ограниченные действительные функции t, $H(t, q_i, p_i)$ — функция Гамильтона, ξ_i и η_i — отклонения координат q_i и импульсов p_i. Уравнения (3) имеют существенное значение в исследованиях устойчивости движений консервативных голономных систем.

Т е о р е м а. Если невозмущенное движение голономной потенциальной системы устойчиво, то характеристич. числа всех решений уравнений в вариациях (3) равны нулю, уравнения (3) являются при этом правильными и приводимыми к системе уравнений с постоянными коэффициентами и имеют знакоопределенный квадратичный интеграл.

Ч. т. обобщает теорему Лагранжа для равновесий и теорему Пуанкаре — Ляпунова для периодич. движений. Согласно теореме, для устойчивого невозмущенного движения потенциальной системы бесконечно близкие возмущенные движения имеют колебательный, волновой характер. Отсюда Н. Г. Четаев сделал вывод, что если существует аналогия между динамикой и математич. теорией света Коши, то ее следует искать в возмущенных движениях вблизи устойчивых движений потенциальных систем. И такую аналогию Н. Г. Четаев нашел (см. [1], с. 404—06), показав, что необходимое условие устойчивости голономных консервативных систем приводит к волновому уравнению. Оптико-механическая аналогия полно исследована Н. Г. Четаевым и в свете теории групп Ли, причем в основу положена оригинальная мысль о существе аналогии между двумя явлениями как о совпадении группы преобразований одного явления (колебательного процесса распространения света) с группой преобразований другого явления (возмущенных движений консервативной системы вблизи ее устойчивого движения). Н. Г. Четаев доказал (см. [1], с. 393—403), что эта последняя группа представляет собой унимодулярную группу линейных преобразований, имеющую представление в полной группе преобразований Лоренца — основной для теории света Коши и Максвелла.

Лит.: [1] Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, М., 1962; [2] Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959.

В. В. Румянцев.

ЧЕТАЕВА УРАВНЕНИЯ — общие канонич. уравнения механики голономных систем, представимые с помощью нек-рой группы Ли бесконечно малых преобразований и эквивалентные *Пуанкаре уравнениям*.

Если вместо независимых переменных η_j, определяющих действительные перемещения, ввести величины

$$y_j = \frac{\partial L}{\partial \eta_j}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

$L(t; x_1, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_k)$ — функция Лагранжа, то уравнения Пуанкаре примут более простой вид Ч. у.

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{k} c_{\alpha j\beta}\frac{\partial H}{\partial y_\alpha}y_\beta - X_j H, \quad \eta_j = \frac{\partial H}{\partial y_j}, \quad j = 1, \ldots, k, \quad (1)$$

где

$$H(t; x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_k) = \sum_{j=1}^{k}\eta_j y_j - L$$

—функция Гамильтона. Вторую группу уравнений (1) можно заменить уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt}=\left(X_0+\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial H}{\partial y_\alpha}X_\alpha\right)x_i,\ i=1,\ \ldots,\ n. \quad (2)$$

Вводя функцию действия по формуле

$$V(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)=\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{\alpha=1}^{k}y_\alpha\eta_\alpha-H\right)dt,$$

где интегрирование происходит по действительной траектории системы, можно получить соотношения

$$y_\alpha=X_\alpha V,\ y_\alpha^0=-X_\alpha^0 V,\ \alpha=1,\ \ldots,\ k. \quad (3)$$

Здесь X_α^0 обозначают операторы X_α, отнесенные к начальному моменту времени t_0 и начальному положению системы x_i^0; y_α^0 — начальные значения y_α. Если функция действия известна, то уравнения (3) решают задачу механики, причем вторая группа уравнений (3) определяет в неявном виде закон движения системы.

Функция действия удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными 1-го порядка

$$X_0V+H(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ X_1V,\ \ldots,\ X_kV)=0. \quad (4)$$

Если известен полный интеграл $V(t, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)$ уравнения (4), то решения Ч. у. определяются соотношениями

$$\frac{\partial V}{\partial a_i}=b_i,\ y_j=X_jV,\ i=1,\ \ldots,\ n,\ j=1,\ \ldots,\ k,$$

где a_i, b_i — произвольные постоянные, стесненные $n-k$ проинтегрированными уравнениями связей.

Вместо переменных x_i могут быть рассмотрены новые переменные α_i, определяющие положение системы. Пусть $A_0=\partial/\partial t$, A_s, $s=1,\ \ldots,\ k$ представляют $(k+1)$-членную группу непрерывных преобразований Ли в переменных α_i со структурными постоянными γ_{srj}, причем $\gamma_{0rj}=0$; π_s и θ_s — переменные, определяющие возможные и действительные перемещения, так что для нек-рой функции

$$f(t,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$$

$$\delta f=\sum_{s=1}^{k}\pi_sA_sf,\ df=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{s=1}^{k}\theta_sA_sf\right)dt.$$

Преобразование переменных определяется характеристич. функцией

$$V(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n),\ \left\|\frac{\partial^2V}{\partial x_i\partial\alpha_j}\right\|\neq 0,$$

и формулами

$$y_s=X_sV,\ \beta_s=-A_sV,\ s=1,\ \ldots,\ k,$$

вместе с проинтегрированными уравнениями связей. Такие преобразования наз. каноническ. преобразованиями, они сохраняют канонич. вид уравнений движения, причем функция Гамильтона в новых переменных принимает вид

$$H^*(t,\ \alpha,\ \beta)=\frac{\partial V}{\partial t}+H.$$

Если характеристич. функция преобразования является полным интегралом уравнения (4) $\left(\text{при } X_0=\frac{\partial}{\partial t}\right)$, то функция $H^*=0$ и Ч. у. (1), (2) в новых переменных принимают вид

$$\frac{d\beta_s}{dt}=\sum_{r,\ j=1}^{k}\gamma_{rsj}\theta_r\beta_j,\ \theta_s=0,\ s=1,\ \ldots,\ k,\ \frac{d\alpha_i}{dt}=\Sigma_s\theta_sA_s\alpha_i,$$

т. е. $\alpha_i=\text{const}$, $\beta_s=\text{const}$, $i=1,\ \ldots,\ n$, $s=1,\ \ldots,\ k$.

Линейная форма $\Omega=\sum_{s=1}^{k}y_s\omega_s$ определяет основной относительный интегральный инвариант динамики.

Условие того, что $f(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = \text{const}$, есть первый интеграл Ч. у., имеет вид

$$X_0 f + (H,\ f) = 0,$$

где

$$(f,\ g) = \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial y_\alpha} X_\alpha g - \frac{\partial g}{\partial y_\alpha} X_\alpha f \right) + \\ + \sum_{\alpha, \beta, s=1}^{k} c_{\alpha\beta s} y_s \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \frac{\partial g}{\partial y_\beta}$$

— скобка Пуассона.

Если $f=a$ и $g=b$ являются первыми интегралами, то интегралом будет и $(f,\ g)=c$ (обобщение *Пуассона теоремы*).

Ч. у. выведены Н. Г. Четаевым [1]—[3], разработавшим и их теорию.

Лит.: [1] Четаев Н. Г., «C. r. Acad. sci.», 1927, t. 185, p. 1577—78; [2] его же, «Докл. АН СССР. А», 1928, № 7, с. 103—04; [3] его же, «Прикл. матем. и механ.», 1941, т. 5, в. 2, с. 253—62.

В. В. Румянцев.

ЧЕТАЕВА ФУНКЦИЯ — функция $v(x)$ в окрестности неподвижной точки $x=0$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ F(0) = 0, \qquad (*)$$

обладающая двумя свойствами: 1) существует примыкающая к точке $x=0$ область G, в к-рой $v>0$, и $v=0$ на границе области G вблизи $x=0$; 2) в области G производная в силу системы $(*)$ (см. *Дифференцирование в силу системы*) $\dot{v}>0$.

Справедлива теорема Четаева [1]: если для системы $(*)$ имеется Ч. ф. v, то неподвижная точка $x=0$ неустойчива по Ляпунову.

Ч. ф. является обобщением *Ляпунова функции* и дает удобный способ доказательства неустойчивости (см. [2]). Напр., для системы

$$\dot{x} = ax + o(|x| + |y|),$$
$$\dot{y} = -by + o(|x| + |y|),$$

где $a,\ b>0$, Ч. ф. будет $v=x^2-c^2y^2$ при любом $c\neq 0$. Предложены обобщения Ч. ф., в частности для неавтономных систем (см. [3]).

Лит.: [1] Четаев Н. Г., «Докл. АН СССР», 1934, т. 1, № 9, с. 529—31; [2] его же, Устойчивость движения, 3 изд., М., 1965; [3] Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959.

А. Д. Брюно.

ЧЕТНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, не меняющая знак при изменении знака независимого переменного, т. е. функция, удовлетворяющая условию $f(-x)=f(x)$. График Ч. ф. симметричен относительно оси ординат.

ЧЕТНОЕ ЧИСЛО — целое число, делящееся (без остатка) на 2.

ЧЕТЫРЕХ КРАСОК ЗАДАЧА: можно ли области любой плоской карты (см. *Граф плоский*) раскрасить четырьмя цветами так, чтобы любые две соседние области были раскрашены в различные цвета?

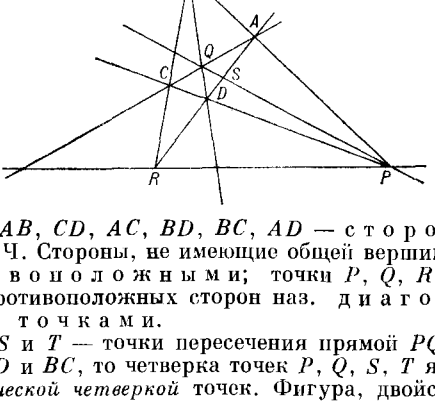
Гипотеза о том, что ответ на Ч. к. з. утвердительный, была сформулирована в сер. 19 в. В 1890 было доказано более слабое утверждение, а именно, что любая плоская карта раскрашивается в пять цветов. Сопоставляя любой плоской карте двойственный ей плоский граф, получают эквивалентную формулировку Ч. к. з. в терминах графов: верно ли, что хроматич. число (см. *Графа раскраска*) любого плоского графа G не превосходит 4 ($\chi(G) \leqslant 4$)? Многочисленные попытки решения Ч. к. з. оказали влияние на развитие ряда направлений *графов теории*. В 1976 анонсировано положительное решение Ч. к. з. с использованием ЭВМ (см. [3]).

Лит.: [1] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; [2] Ore O., The four-color problem, N. Y.— L., 1967; [3] Appel K., Haken W., «Ill. J. Math.», 1977, v. 21, № 3, p. 429—567.

В. Б. Алексеев.

ЧЕТЫРЕХВЕРШИННИК полный — совокупность четырех точек A, B, C, D, лежащих в одной пло-

скости, **из к-рых никакие три не принадлежат** одной прямой, и шести прямых, соединяющих попарно эти точки (см. рис.). Точки A, B, C, D наз. вершинами,



прямые AB, CD, AC, BD, BC, AD — сторонами полного Ч. Стороны, не имеющие общей вершины, наз. противоположными; точки P, Q, R пересечения противоположных сторон наз. диагональными точками.

Если S и T — точки пересечения прямой PQ с прямыми AD и BC, то четверка точек P, Q, S, T является *гармонической четверкой* точек. Фигура, двойственная Ч., наз. четырехсторонником — совокупность четырех прямых, лежащих в одной плоскости, из к-рых никакие три не принадлежат одной точке.

П. С. Моденов, А. С. Пархоменко.

ЧЕТЫРЕХМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — топологич. пространство, каждая точка к-рого имеет окрестность, гомеоморфную четырехмерному числовому пространству $\mathbb{R}^4$ или замкнутому полупространству $\mathbb{R}^4_+$. Это определение обычно дополняют требованием того, чтобы Ч. м., как топологич. пространство, было хаусдорфовым и имело счетную базу. Топология Ч. м. занимает особое место в *топологии многообразий*. С одной стороны, размерность 4 слишком мала для беспрепятственного применения соображений *общего положения* и *трансверсальности*, столь продуктивных в многомерной топологии, и достаточно велика для того, чтобы исключить прямое использование более интуитивных методов трехмерной топологии. С другой стороны, топология Ч. м. наследует многие трудности как трехмерной, так и многомерной топологии многообразий. Это объясняется, напр., тем, что край Ч. м. может быть произвольным трехмерным многообразием, и тем, что любая конечно определенная группа является *фундаментальной группой* нек-рого замкнутого Ч. м. На последнем замечании основано доказательство невозможности алгоритмич. распознавания сферы среди Ч. м. Аномальность размерности 4 хорошо иллюстрируется следующим фактом: на многообразии $\mathbb{R}^n$ существует нестандартная кусочно линейная (и дифференцируемая) структура только при $n=4$. Существуют Ч. м., не допускающие кусочно линейной структуры. Если все же такая структура имеется, то имеется и единственная согласованная с ней дифференцируемая структура. Ч. м., снабженное комплексной структурой, наз. аналитической поверхностью.

Каждому замкнутому ориентированному Ч. м. M отвечает унимодулярная целочисленная симметрическая билинейная форма L_M, задаваемая на свободной части группы $H_2(M; \mathbb{Z})$ с помощью пересечения циклов. Сигнатура этой формы наз. сигнатурой многообразия. Форма пересечений является важнейшим инвариантом Ч. м. Два замкнутых односвязных дифференцируемых Ч. м. h-кобордантны тогда и только тогда, когда их формы изоморфны. Если квадратичная форма, отвечающая билинейной форме L_M дифференцируемого Ч. м. M, принимает только четные значения, то структурную группу SO его стабильного касательного расслоения можно заменить на группу Spin. Такие Ч. м.

наз. спинорными. Имеется топологич. классификация замкнутых односвязных Ч. м. Каждое такое Ч. м. с четной формой полностью определяется ею, причем любая четная целочисленная симметрическая унимодулярная форма реализуема как форма пересечения односвязного топологического Ч. м. В частности, справедлива четырехмерная топологич. гипотеза Пуанкаре. Классифицирующим инвариантом Ч. м. с нечетной формой служат пары вида $(L, \varkappa)$, где L — нечетная целочисленная симметрическая унимодулярная билинейная форма, а $\varkappa=0$ или 1. Каждое замкнутое односвязное Ч. м. M с нечетной формой полностью определяется парой $(L_M, \varkappa_M)$, где $\varkappa_M=0$, если стабильное касательное расслоение многообразия M допускает векторную редукцию, и 1 в противном случае. Любая такая пара реализуема. Вопрос о том, какие формы реализуются односвязными дифференцируемыми Ч. м., до конца не исследован. Известно, что можно реализовать все нечетные неопределенные формы. Из четных неопределенных форм связные суммы *Куммера поверхностей* и многообразий $S^2\times S^2$ реализуют формы вида $mE_8\oplus nU$, если m четно и $3m\leqslant 2n$. Форма указанного вида с нечетным числом m заведомо не является формой пересечения замкнутого дифференцируемого Ч. м., так как сигнатура такого спинорного многообразия обязана делиться на 16, а сигнатура форм $mE_8\oplus nU$ равна $8m$. Из определенных форм реализуемы только формы, задаваемые единичными матрицами.

Лит.: [1] Мандельбаум Р., Четырехмерная топология, пер. с англ., М., 1981; [2] Siebenmann L., La conjecture de Poincaré topologique en dimension 4, Séminaire Bourbaki, 34 année, 1981/82, n° 588, p. 1—30.

С. В. Матвеев.

ЧЕХА КОГОМОЛОГИИ, когомологии Александрова — Чеха, спектральные когомологии,— прямой предел

$$H^n(X;\ G)=\varinjlim H^n(\alpha;\ G)$$

когомологий с коэффициентами в абелевой группе G нервов всевозможных открытых покрытий α топологич. пространства X. Когомологии замкнутого подмножества $A\subset X$ могут быть определены аналогичным образом с помощью подсистем $\alpha'\subset\alpha$ всех тех множеств из α, к-рые имеют непустое пересечение с A. Предел групп пар $H^n(\alpha,\ \alpha';\ G)$ определяет когомологии $H^n(X,\ A;\ G)$ пары $(X,\ A)$. Когомологич. последовательность

$$\ldots\to H^n(X,\ A;\ G)\to H^n(X;\ G)\to H^n(A;\ G)\to$$
$$\to H^{n+1}(X,\ A;\ G)\to\ldots$$

пары $(X,\ A)$ точна как предел точных когомологич. последовательностей пар нервов $(\alpha,\ \alpha')$.

Когомологии Александрова — Чеха служат заменой сингулярных когомологий в общих категориях топологич. пространств и совпадают с ними всякий раз, когда применение последних не вызывает сомнений (а именно, в случае гомологически локально связных, в частности, локально стягиваемых пространств). Они удовлетворяют всем *Стинрода — Эйленберга аксиомам* и в категории паракомпактных пространств однозначно определяются этими аксиомами вместе со следующими требованиями: а) $H^p=0$ при $p<0$; б) когомологии дискретного объединения $\bigcup_\lambda X_\lambda$ естественно изоморфны прямому произведению когомологий пространств X_λ; в) $\varinjlim H^p(U_\lambda;\ G)=H^p(x;\ G)$ для системы всех окрестностей U_λ произвольной точки $x\in X$. Когомологии Александрова — Чеха изоморфны когомологиям Александера — Спеньера. Они могут быть определены с коэффициентами в пучке и для паракомпактных пространств изоморфны когомологиям, определяемым в теории пучков.

Возможность аппроксимации пространств полиэдрами — нервами замкнутых покрытий установлена П. С. Александровым (см. [1]—[3]). Для частного случая им

было дано определение обратного предела топологич. пространств, а на основе аппроксимации — определение чисел Бетти метризуемых компактов. Группы гомологий компактов определялись в терминах циклов Вьеториса. Л. С. Понтрягин [4] ввел прямые и обратные спектры групп, и эти понятия были применены им к изучению групп гомологий компактов. Э. Чех (E. Čech) стал рассматривать нервы конечных открытых покрытий некомпактных пространств и на этой основе положил начало гомологич. теории произвольных топологич. пространств. Позже выяснилось, что рассмотрение исключительно конечных покрытий не оправдано (так как приводит к довольно сложным гомологиям компактификации Стоуна—Чеха). Плодотворность использования произвольных открытых покрытий в теории гомологий и когомологий некомпактных пространств продемонстрировал Х. Даукер [5].

Лит.: [1] Александров П. С., «Math. Ann.», 1927, Bd 96, S. 489—511; [2] его же, «C. r. Acad. sci.», 1927, t. 184, p. 317—20; [3] его же, «Ann. Math.», 1928, v. 30, p. 101—87; [4] Понтрягин Л. С., «Math. Ann.», 1931, Bd 105, H. 2, S. 165—205; [5] Dowker C. H., «Amer. J. Math.», 1947, v. 69, p. 200—42; [6] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [7] Скляренко Е. Г., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 6, с. 90—118; [8] Масси У., Теория гомологий и когомологий, пер. с англ., М., 1981, гл. 1—3, 8 и доб. к гл. 6; [9] Čech E., «Fund. math.», 1932, v. 19, p. 149—83.

Е. Г. Скляренко.

ЧЖОУ КОЛЬЦО — кольцо классов *алгебраических циклов* на неособом квазипроективном алгебраич. многообразии относительно рациональной эквивалентности. Умножение в этом кольце определяется в терминах пересечения циклов (см. *Пересечений теория*).

Ч. к. $A(X)=\oplus_{i\geqslant 0}A^i(X)$ многообразия X является градуированным коммутативным кольцом, если обозначить через $A^i(X)$ группу классов циклов коразмерности i. При этом для морфизма $f\colon X\longrightarrow Y$ гомоморфизм обратного образа $f^*\colon A(Y)\longrightarrow A(X)$ является гомоморфизмом колец, а гомоморфизм прямого образа $f_*\colon A(X)\longrightarrow A(Y)$ является (для собственных f) гомоморфизмом $A(Y)$—модулей. Последнее означает, что имеет место формула проекций:

$$f_*(f^*y\cdot x)=y\cdot f_*(x),\ x\in A(X),\ y\in A(Y).$$

Ч. к. является областью значений для теории классов Чжэня алгебраич. расслоений (см. [1]), а именно, если E — локально свободный пучок ранга r на многообразии X, $P(E)$ — его проективизация, $\pi\colon P(E)\longrightarrow X$ — канонич. проекция, $\zeta\in A^1(P(E))$ — класс дивизоров, соответствующий обратимому пучку $O_{P(E)}(1)$, то π^* является вложением и Ч. к. $A(P(E))$ отождествляется с фактором кольца многочленов $A(X)[\zeta]$ по идеалу, порожденному многочленом

$$\zeta^r-c_1(E)\,\zeta^{r-1}+\ldots+(-1)^r c_r(E).$$

Коэффициент $c_k(E)\in A^k(X)$ наз. k-м классом Чжэня пучка E.

В случае многообразий над полем комплексных чисел имеется гомоморфизм $A(X)\to H(X,\mathbb{Z})$ в кольцо сингулярных когомологий, удваивающий степени и совместимый с гомоморфизмами прямого и обратного образов.

Если X — особое квазипроективное многообразие, то его кольцо Чжоу $A(X)$ определяется как прямой предел колец: $A(X)=\varinjlim A(Y)$ по всем морфизмам $f\colon X\longrightarrow Y$, где Y неособо. Получается контравариантный функтор в категорию градуированных колец, удовлетворяющий формуле проекций (см. [3]).

Лит.: [1] Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981; [2] Anneaux de Chow et applications. Seminaire Chevalley, P., 1958; [3] Fulton W., «Publ. Math. IHES», 1975, № 45, p. 147—67.

Вал. С. Куликов.

ЧЖОУ МНОГООБРАЗИЕ, Чжоу схема, — алгебраическое многообразие, точки к-рого параметризуют

все алгебраич. подмногообразия X размерности r и степени d проективного пространства P^n.

В произведении $X\times(\check{P}^n)^{r+1}$, где $\check{P}^n$ — двойственное к P^n проективное пространство, параметризующее гиперплоскости $u\subset P^n$, рассматривается подмногообразие

$$\Gamma=\{x,\ u^{(0)},\ \ldots,\ u^{(r)}\mid x\in u^{(i)}\ \text{при}\ i=0,\ \ldots,\ r\}.$$

Его образ $p_2(\Gamma)\subset(\check{P}^n)^{r+1}$ при проекции на второй сомножитель есть гиперповерхность в $(\check{P}^n)^{r+1}$, к-рая задается формой F_X от $r+1$ системы и по $n+1$ переменным, однородной степени d по каждой системе переменных. Форма F_X наз. ассоциированной формой (или формой Кэли) многообразия X; она полностью определяет подмногообразие X. Эта форма была введена Б. Л. Ван дер Варденом и В. Чжоу [1]. Коэффициенты формы F_X определены с точностью до постоянного множителя и наз. координатами Чжоу многообразия X.

Координаты Чжоу многообразия X определяют точку $c(X)\in P^\nu$, где ν — нек-рая функция от n, r, d. Точки $c(X)\in P^\nu$, соответствующие всем неприводимым подмногообразиям $X\subset P^n$ размерности r и степени d, заполняют в P^ν квазипроективное подмногообразие $C_{n,r,d}$, называемое многообразием Чжоу. Если рассматривать не только неприводимые подмногообразия, но и положительные алгебраич. циклы (т. е. формальные линейные комбинации многообразий с целыми положительными коэффициентами) размерности r и степени d в P^n, то получается замкнутое подмногообразие $\overline{C}_{n,r,d}\subset P^\nu$, к-рое также наз. многообразием Чжоу. Ч. м. является базой универсального алгебраич. семейства $\mathfrak{X}\xrightarrow{\pi}\overline{C}_{n,r,d}$, где $\mathfrak{X}\subset\overline{C}_{n,r,d}\times P^n$, π индуцировано проекцией и слой $\pi^{-1}(c)$ в точке $c(X)\in\overline{C}_{n,r,d}$ совпадает с циклом X. Простейшими примерами Ч. м. являются многообразия $C_{3,1,d}$ — кривых степени d в P^3. Так, $C_{3,1,1}=\overline{C}_{3,1,1}$ — неприводимое многообразие размерности 4, изоморфное квадрике Плюккера в P^5; $\overline{C}_{3,1,2}=C^{(1)}\cup C^{(2)}$ состоит из двух компонент размерности 8, где $C^{(1)}$ соответствует плоским кривым 2-го порядка, а $C^{(2)}$ — парам прямых; $\overline{C}_{3,1,3}$ состоит из четырех компонент размерности 12, к-рые соответствуют тройкам прямых, кривым, состоящим из прямой и плоской квадрики, плоским кубикам, неплоским кривым степени 3. Во всех этих случаях многообразия $C_{3,1,d}$ рациональны. Однако из нерациональности схемы модулей кривых достаточно большого рода следует, что при достаточно больших d многообразия $C_{3,1,d}$ нерациональны (см. [2]).

Если $V\subset P^n$ — алгебраич. подмногообразие, то циклы $Z\subset P^n$ размерности r и степени d, лежащие в V, образуют алгебраич. подмногообразие $\overline{C}_{r,d}(V)\subset\overline{C}_{n,r,d}$. Этот результат позволяет ввести нек-рую алгебро-геометрич. структуру на множестве положительных r-мерных циклов $Z_r^+(V)=\bigcup_{d>0}\overline{C}_{r,d}(V)$ многообразия V (см. [1]).

О других подходах к проблеме классификации многообразий см. *Гильберта схема*, *Модулей проблема*.

Лит.: [1] Van der Waerden B. L., Chow W.-L., «Math. Ann.», 1937, Bd 113, S. 692—704; [2] Harris J., Mumford D., «Invent. Math.», 1982, v. 67, p. 23—86; [3] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 2, М., 1954; [4] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

Вал. С. Куликов.

ЧЖОУ ТЕОРЕМА: любое аналитич. подмножество комплексного проективного пространства является алгебраическим многообразием. Теорема доказана В. Чжоу [1].

Лит.: [1] Chow W.-L., «Amer. J. Math.», 1949, v. 71, p. 893—914; [2] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы

алгебраической геометрии, т. 1, пер. с англ., М., 1982; [3] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961.
А. Л. Онищик.

ЧЖЭНЯ КЛАСС — *характеристический класс*, определенный для комплексных векторных расслоений. Ч. к. комплексного векторного расслоения ξ с базой B обозначается $c_i(\xi) \in H^{2i}(B)$ и определен для всех натуральных индексов i. Полным Ч. к. наз. неоднородный характеристич. класс $c = 1 + c_1 + c_2 + \ldots$, а полиномом Чжэня — выражение $c_t = 1 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots$, где t — формальная переменная. Ч. к. введены в [1].

Характеристич. классы, определенные для n-мерных комплексных векторных расслоений, со значениями в целочисленных когомологиях, естественно отождествляются с элементами кольца $H^{**}(BU_n)$. В этом смысле Ч. к. c_i можно считать элементами группы $H^{2i}(BU_n)$, полный Ч. к. — неоднородным элементом кольца $H^{**}(BU_n)$, а полином Чжэня — элементом кольца формальных степенных рядов $H^{**}(BU_n)[[t]]$.

Ч. к. обладают следующими свойствами, к-рые однозначно их определяют. 1) Для векторных расслоений ξ, η с общей базой B $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi)\, c(\eta)$, другими словами, $c_k(\xi \oplus \eta) = \sum_i c_i(\xi)\, c_{k-i}(\eta)$, $c_0 = 1$. 2) Для одномерного универсального расслоения $\varkappa_1$ над $\mathbb{C}P^\infty$ имеет место равенство $c(\varkappa_1) = 1 + u$, где $u \in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$ — ориентация расслоения $\varkappa_1$ ($\mathbb{C}P^\infty$ — *Тома пространство* расслоения $\varkappa_1$, к-рое, будучи комплексным, имеет однозначно определенную ориентацию u).

Следствия свойств 1—2): $c_i(\xi) = 0$ при $i > \dim \xi$; $c(\xi) = c(\xi \oplus 0)$, где 0 — тривиальное расслоение. Последнее обстоятельство позволяет определить Ч. к. как элементы кольца $H^{**}(BU)$.

Если $\omega = \{i_1, \ldots, i_k\}$ — набор целых неотрицательных чисел, то через c_ω обозначается характеристич. класс $c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_k} \in H^{2n}(BU)$, где $n = i_1 + \ldots + i_k$.

При естественном мономорфизме $H^{**}(BU_n) \to H^{**}(BT_n) = \mathbb{Z}[[x_1, \ldots, x_n]]$, индуцированном отображением $BT_n = \mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty \to BU_n$, Ч. к. переходят в элементарные симметрич. функции, а полный Ч. к. переходит в многочлен $\prod_{i=1}^n (1 + x_i)$. Образом кольца $H^{**}(BU_n)$ в $H^{**}(BT_n) = \mathbb{Z}[[x_1, \ldots, x_n]]$ является подкольцо всех симметрических формальных степенных рядов. Каждый симметрический формальный степенной ряд от образующих Ву $x_1, \ldots, x_n$ определяет характеристич. класс, к-рый может быть выражен через Ч. к. Напр., ряд $\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{1 - e^{x_i}}$ определяет характеристич. класс с рациональными коэффициентами, наз. классом Тодда и обозначается $T \in H^{**}(BU_n; \mathbb{Q})$.

Пусть $\omega = \{i_1, \ldots, i_k\}$ — набор целых неотрицательных чисел. Через $S_\omega(c_1, \ldots, c_n)$ обозначается характеристич. класс, определяемый наименьшим симметрич. многочленом от переменных $x_1, \ldots, x_n$, где $n \geqslant i_1 + \ldots + i_k$, содержащим одночлен $x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}$.

Пусть h^* — ориентированная мультипликативная теория когомологий. Ч. к. σ_i со значениями в теории h^* обладают такими же, что и обычные Ч. к., свойствами: $\sigma(\xi \oplus \eta) = \sigma(\xi)\, \sigma(\eta)$, $\sigma = 1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots$; $\sigma(\varkappa_1) = 1 + u \in h^*(\mathbb{C}P^\infty)$, где $u \in h^2(\mathbb{C}P^\infty)$ — ориентация расслоения $\varkappa_1$, к-рые их однозначно определяют. Как и для обычных Ч. к., употребляются обозначения $\sigma_\omega = \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_k}$ и $S_\omega(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Если ξ, η — комплексные векторные расслоения, то

$$S_\omega(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(\xi \oplus \eta) =$$

$$= \sum_{\omega' \cup \omega'' = \omega} S_{\omega'}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(\xi)\, S_{\omega''}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(\eta),$$

где суммирование производится по наборам ω', ω'' с $\omega' \bigcup \omega'' = \omega$.

В качестве теории h^* можно взять теорию унитарных *кобордизмов* U^* или *K-теорию*. Для U^*-теории элемент $u \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$ определяется тождественным отображением $\mathbb{C}P^\infty \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty = MU_1$, а для K-теории $u = \beta(1 - [\overline{x}]) \in \widetilde{K}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, где β: $K^0 \longrightarrow K^2$ — оператор периодичности Ботта. Обозначение σ_i сохраняется для Ч. к. со значениями в U^*-теории, а Ч. к. со значениями в K-теории обозначается γ_i.

Согласно общей теории, $\gamma_i(\xi) \in K^{2i}(B)$, где ξ — векторное расслоение с базой B. Однако K-теорию часто удобнее рассматривать как $\mathbb{Z}_2$-градуированную теорию, отождествляя группы $K^n(B)$ с $K^{n+2}(B)$ с помощью оператора периодичности β. Тогда $K^*(B) = K^0(B) \oplus \widetilde{K}^1(B)$, и $\gamma(\xi) \in K^0(B)$ при всех i. При такой точке зрения имеет смысл вместо полного Ч. к. рассматривать полином Чжэня

$$\gamma_t(\xi) = 1 + \sum\nolimits_{i>0} \gamma_i(\xi)\, t^i \in K^0(B)[t].$$

Пусть $\lambda^i(\xi) = [\xi^{\wedge} \ldots {}^{\wedge}\xi]$ — когомологич. операции в K-теории (i сомножителей). Полином

$$\lambda_t(\xi) = \sum\nolimits_{i=0}^{\infty} \lambda^i(\xi)\, t^i \in K^0(B)[t]$$

обладает точно таким же, как и γ_t, свойством мультипликативности

$$\lambda_t(\xi \oplus \eta) = \lambda_t(\xi)\, \lambda_t(\eta).$$

Между этими полиномами имеется следующая связь:

$$\frac{\lambda t}{1-t}\left(\overline{\xi} - \dim \xi\right) = 1 + \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} (-1)\, \gamma_i(\xi)\, t^i = \gamma_{-t}(\xi),$$

здесь обе части равенства лежат в $K^0(B)[t]$, $\dim \xi$ — тривиальное расслоение размерности $\dim \xi$. Построенные классы γ_i отличаются от классов, построенных М. Атьей, к-рый определил их формулой $\gamma_t(\xi) = \frac{\lambda t}{1-t}(\xi)$. Р. Стонг [1] определил классы γ_i, к-рые удовлетворяют условию

$$\gamma_t(\xi) = \frac{\lambda t}{1-t}\left(\overline{\xi} - \dim \xi\right).$$

Расхождение вызвано тем, что у Стонга

$$u = \beta([x_1] - 1) \in \widetilde{K}^2(\mathbb{C}P^\infty).$$

С классами σ_i связано плодотворное в теории гомотопий понятие алгебры Ландвебера — Новикова. Для произвольного набора целых неотрицательных чисел $\omega = \{i_1, \ldots, i_k\}$ рассматривается характеристич. класс $S_\omega(\sigma'_1, \ldots, \sigma_n) \in U^{2d}(BU)$, где $d = i_1 + \ldots + i_k$. Имеет место *Тома изоморфизм* $U^{2d}(BU) \longrightarrow \widetilde{U}^{2d}(MU) \subset U^{2d}(MU)$, здесь MU — *спектр*, соответствующий U^*-теории. Образ класса $S_\omega(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ в $U^{2d}(MU)$ определяет *когомологическую операцию* в U^*-теории. Подалгебра *Стипрода алгебры* в U^*-теории, порожденная операциями такого вида, наз. алгеброй Ландвебера — Новикова. Операция, построенная по набору $\omega = \{i_1, \ldots, i_k\}$, обозначается через S_ω.

Для одномерных расслоений ξ, η имеет место равенство

$$c_1(\xi \oplus \eta) = c_1(\xi) + c_1(\eta).$$

Это важное обстоятельство, позволяющее определить *Чжэня характер*, не имеет места в обобщенных теориях когомологий. Однако существует формальный степенной ряд $g(t)$ с коэффициентами в $h^*(pt) \otimes \mathbb{Q}$, для к-рого $g(\sigma_1(\xi \oplus \eta)) = g(\sigma_1(\xi_1)) + g(\sigma_1(\eta))$, где σ_1 первый Ч. к. со значениями в h^*. Для унитарной теории кобордизмов

$$g(t) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \frac{[\mathbb{C}P^\infty]}{n+1}\, t^{n+1},$$

где $[\mathbb{C}P^\infty] = \Omega_U^* = U^*(pt)$ — класс кобордизма проективного пространства $\mathbb{C}P^\infty$. Этот ряд наз. рядом Мищенко.

Лит.: [1] Chern S. S., «Ann. Math.», 1946, v. 47, № 1, p. 85—121; [2] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [3] Пале Р., Семинар по теореме Атьи — Зингера об индексе, пер. с англ., М., 1970; [4] Кошнер П., Флойд Э., Гладкие периодические отображения, пер. с англ., М., 1969; [5] Атья М. Ф., Зингер И. М., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 5, с. 99—142; Атья М. Ф., Сегал Г. Б., там же, в. 6, с. 135—49; Атья М. Ф., Зингер И. М., там же, 1969, т. 24, в. 1, с. 127—82; 1972, т. 27, в. 4, с. 161—88; [6] Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1973; [7] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970; [8] Бухштабер В. М., «Матем. сб.», 1970, т. 83, с. 575—95; [9] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 4, с. 855—951; [10] Атья М., Лекции по K-теории, пер. с англ., М., 1967.

А. Ф. Харшиладзе.

ЧЖЭНЯ ХАРАКТЕР — характеристич. класс, определяющий кольцевой гомоморфизм $\mathrm{ch}\colon K(X) \longrightarrow H^{**}(X;\ \mathbb{Q})$. Для одномерного расслоения ξ имеет место равенство $\mathrm{ch}\,\xi = e^{c_1(\xi)}$, где $c_1(\xi)$ — рациональный *Чжэня класс*. Это равенство вместе с требованием, чтобы класс ch определял гомоморфизм $K^0(X) \longrightarrow H^{ev}(X, \mathbb{Q})$, однозначно определяют класс ch. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ch}\colon \tilde{K}^0(X) & \to & \tilde{H}^{**}(X;\ \mathbb{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{ch}\colon \tilde{K}^0(S^2 \wedge X) & \to & \tilde{H}^{**}(S^2 \wedge X;\ \mathbb{Q}), \end{array}$$

в к-рой вертикальные стрелки обозначают оператор периодичности и двойную *надстройку*. Пусть отображение

$$\mathrm{ch}\colon K^1(X) = \tilde{K}^0(SX^+) \to H^{odd}(X;\ \mathbb{Q})$$

совпадает с композицией

$$\mathrm{ch}\colon \tilde{K}^0(SX^+) \to \tilde{H}^{ev}(SX^+;\mathbb{Q}) \xrightarrow{S^{-1}} \tilde{H}^{odd}(X^+;\mathbb{Q}) = H^{odd}(X;\mathbb{Q})$$

(здесь через «$+$» обозначается функтор из категории топологич. пространств в категорию пунктированных пространств $X^+ = (X \coprod x_0,\ x_0)$. Полученное преобразование функторов $\mathrm{ch}\colon K^*(X) \longrightarrow H^{**}(X;\ \mathbb{Q})$ индуцирует преобразование $K^*(X) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow H^{**}(X;\ \mathbb{Q})$, к-рое является естественным изоморфизмом $\mathbb{Z}_2$-градуированных колец.

Если h^* — обобщенная теория когомологий, в к-рой определены классы Чжэня σ_i, то для одномерных расслоений ξ обобщенный характер Чжэня

$$\sigma h(\xi) \in h^{**}(X) \otimes \mathbb{Q}$$

определяется формулой:

$$\sigma h(\xi) = e^{g(\sigma_i(\xi))},$$

где $g(t)$ — логарифм соответствующей теории h^* формальной группы. С помощью леммы о расщеплении может быть определен естественный кольцевой гомоморфизм

$$\sigma h\colon K^* \to h^{**}(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Для обобщенной теории когомологий h^* существует единственный естественный изоморфизм градуированных групп $\mathrm{ch}_h\colon h^*(X) \longrightarrow \mathcal{H}^{**}(X;\ h^*(pt) \otimes \mathbb{Q})$, к-рый для $X = pt$ совпадает с отображением

$$h^*(pt) \to h^*(pt) \otimes \mathbb{Q},\ x \to x \otimes 1.$$

Здесь

$$[\mathcal{H}^*(X; h^*(pt) \otimes \mathbb{Q})]_n = \sum\nolimits_i \mathcal{H}^i(X,\ h^{n-i}(pt) \otimes \mathbb{Q}).$$

Отображение ch_k, где K^* — $\mathbb{Z}_2$-градуированная K-теория совпадает с характером Чжэня ch. Естественное преобразование функторов ch_{h^*} наз. характером Чжэня — Дольда.

Пусть h^* — унитарная теория кобордизмов U^*, а X — пространство $\mathbb{C}P^\infty$. Кольцо $U^{**}(\mathbb{C}P^\infty)$ изоморфно кольцу

формальных степенных рядов $\Omega_u^*[[u]]$, где $\Omega_u^* = U^*(pt)$, $u \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$ — ориентация расслоения $\varkappa_1$. Аналогично, кольцо $\mathscr{H}^*(\mathbb{C}P^\infty; \Omega_u^*)$ изоморфно $\Omega_u^*[[x]]$, где $x \in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$ — ориентация расслоения $\varkappa_1$. Формальный степенной ряд $\mathrm{ch}_u(u)$ функционально обратен ряду Мищенко

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\mathbb{C}P^n]}{n+1} u^{n+1}.$$

Лит. см. при статье *Чжэня класс*. *А. Ф. Харшиладзе.*

ЧЖЭНЯ ЧИСЛО — *характеристическое число* квазикомплексных многообразий.

Пусть $x \in H^{**}(BU_n)$ — произвольный характеристич. класс. Для замкнутого квазикомплексного многообразия M^{2n} целое число $x[M^{2n}] = \langle x(\tau M), [M^{2n}]\rangle$ наз. числом Чжэня многообразия M^{2n}, соответствующим классу x, здесь $[M^{2n}] \in H_{2n}(M^{2n})$ — *фундаментальный класс* многообразия или ориентация, однозначно определенная квазикомплексной структурой, τM — касательное расслоение к M. Если в качестве x взять характеристич. класс с рациональными коэффициентами, то соответствующие ему Ч. ч. будут рациональными. Ч. ч. $x[M^{2n}]$ зависит лишь от однородной компоненты степени $2n$ класса x. Ч. ч. инвариантны относительно квазикомплексного бордизма, следовательно, характеристич. класс x индуцирует гомоморфизм $\Omega^u_{2n} \to \mathbb{Z}$.

Разбиением числа n наз. набор $\omega = \{i_1, \ldots, i_k\}$ целых неотрицательных чисел с $i_1 + \ldots + i_k = n$. Если для квазикомплексных многообразий M, N размерности $2n$ при всех разбиениях ω числа n имеет место равенство $c_\omega[M] = c_\omega[N]$ (см. *Чжэня класс*), то многообразия M и N кобордантны (в квазикомплексном смысле).

Пусть A — свободная абелева группа с базисом $\{e_\omega\} = \{e_{i_1 \ldots i_n}\}$, находящимся во взаимно однозначном соответствии со всеми разбиениями числа n. Приведенная теорема утверждает, что гомоморфизм

$$\varphi: \Omega^u_{2n} \to A, \quad \varphi([M^{2n}]) = \sum_\omega c_\omega [M^{2n}] e_\omega$$

мономорфен. Ниже дано описание образа гомоморфизма φ (задача Милнора — Хирцебруха). Другими словами, какие наборы целых чисел $a_\omega = a_{i_1 \ldots i_k}$, заданных для всех разбиений ω числа n, являются Ч. ч. квазикомплексного многообразия? Ч. ч. можно определить в произвольной мультипликативной ориентированной теории когомологий h^*, только в этом случае Ч. ч. квазикомплексного многообразия будет элементом кольца $h^*(pt)$. Для теории когомологий h^* определена двойственная ей теория гомологий h_*, и так как h^* ориентирована и мультипликативна, то для каждого квазикомплексного многообразия M может быть однозначно определен фундаментальный класс $[M, \partial M]^h \in h_{2n}(M, \partial M)$, где $2n = \dim_{\mathbb{R}} M$. Далее, как и в обычной теории, имеется спаривание

$$h^n(M, \partial M) \otimes h_m(M, \partial M) \to h^{n-m}(pt).$$

Если $x \in h^*(M, \partial M)$, то применение x к $[M, \partial M]^h$ относительно этого спаривания обозначается $\{x, [M, \partial M]^h\} \in h^*(pt)$. Для характеристич. класса y со значениями в h^* и замкнутого квазикомплексного многообразия M элемент $\{y(\tau M), [M]^h\} \in h^*(pt)$ наз. числом Чжэня в теории h^*. Предыдущие соображения применимы и к K-теории. Пусть M — квазикомплексное многообразие (возможно, с краем), $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n$, $x \in K^0(M, \partial M)$ — произвольный элемент. Тогда целое число

$$\{x, [M, \partial M]^k\} \in K^{-2n}(pt) \overset{\beta^n}{\cong} K^0(pt) = \mathbb{Z}$$

может быть вычислено по формуле:

$$\{x, [M, \partial M]^k\} = \langle \mathrm{ch}\, x\, T(\tau M), [M, \partial M]\rangle,$$

где T — *Тодда класс*, задаваемый рядом $\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1-e^{-x_i}}$.

Если многообразие M замкнуто, то при $x=1\in K^0(M)$, получается $\{1, [M]^k\}=T[M]$. Характеристич. число $T[M]$ наз. родом Тодда многообразия M и является целым числом для любого замкнутого квазикомплексного многообразия. Часто $T[M]$ обозначают $\mathrm{Td}(M)$.

Касательные многообразия представляют собой один из важных примеров квазикомплексных многообразий. Пусть M — замкнутое действительное многообразие размерности n. Многообразие TN всех касательных векторов к N имеет естественную структуру квазикомплексного многообразия: $\tau TN=\tau N\oplus N$, $i(x, y)=(y, -x)$. Пусть на N выбрана риманова метрика и через $BN\subset TN$ обозначено многообразие с краем, образованное всеми векторами длины, не превосходящей единицы. Если $\sigma\in\tilde{K}^0(BN, \partial BN)$, то целое число $i_t(\sigma)=\{\sigma, [BN, \partial BN]^k\}$ наз. топологическим индексом элемента σ. Если σ есть класс символа эллиптич. оператора D, заданного на многообразии N, то $\mathrm{index}\, D=i_t(\sigma)$ (теорема Атьи — Зингера), а приведенная выше формула для вычисления числа $\{x, [M, \partial M]^k\}$ приводит к когомологич. форме теоремы об индексе.

Для набора $\omega=\{i_1, \ldots, i_n\}$ целых неотрицательных чисел и замкнутого квазикомплексного многообразия M размерности $2n$ пусть $S^k_\omega[M]$ — Ч. ч. в K-теории:

$$S^k_\omega[M]=S_\omega(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)[M]=$$
$$=\{S_\omega(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)(\tau M), [M]^k\},$$

а $S_\omega[M]$ — обычное Ч. ч. $S_\omega(c_1, \ldots, c_n)[M]$. Число $S_\omega[M]$ может быть отлично от нуля лишь тогда, когда ω — разбиение числа n. Число $S^k_\omega[M]$ может быть отлично от нуля при наборах $\omega=\{i_1, \ldots, i_k\}$ с $i_1+\ldots+i_k\leqslant n$. Любой гомоморфизм $\Omega^u_{2n}\to\mathbb{Z}$ может быть представлен в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами гомоморфизмов $S^k_\omega\colon \Omega^u_{2n}\to\mathbb{Z}$, при $|\omega|\leqslant n$, где $|\omega|=i_1+\ldots+i_k$ (теорема Стонга — Хаттори). Характеристич. числа $S^k_\omega[M]$ при $|\omega|\leqslant n$ могут быть представлены в виде

$$S^k_\omega[M]=\sum_{|\omega'|=n} r_{\omega'}c_{\omega'}[M],$$

где $r_{\omega'}$ — рациональные коэффициенты, а M — любое замкнутое квазикомплексное многообразие размерности $2n$. Пусть a произвольный элемент из группы A, $a=\sum_{|\omega'|=n} a_{\omega'}e_{\omega'}$ и $S^k_\omega(a)=\sum_{|\omega'|=n} r_{\omega'}a_{\omega'}$. Тогда элемент $a\in A$ принадлежит образу гомоморфизма $\varphi\colon \Omega^u_{2n}\to A$ тогда и только тогда, когда $S^k_\omega(a)$ — целое число для всех наборов ω с $|\omega|\leqslant n$.

Лит. см. при статье *Чжэня классс.* *А. Ф. Харшиладзе.*

ЧИСЕЛ ТЕОРИЯ — наука о целых числах. Целое число, наряду с простейшими геометрич. фигурами, является первым и древнейшим математич. понятием. Ч. т. возникла из задач *арифметики*, связанных с умножением и делением целых чисел.

В Древней Греции (6 в. до н. э.) изучалась делимость целых чисел, были выделены отдельные подклассы целых чисел (напр., *простые числа*, составные числа, квадратные числа), изучалась структура *совершенных чисел*, было дано решение в целых числах уравнения $x^2+y^2=z^2$, т. е. был указан алгоритм построения прямоугольных треугольников со сторонами, длины к-рых являются целыми числами. Евклид (3 в. до н. э.) в «Началах» дал систематич. построение теории делимости на основе т. н. *Евклида алгоритма* для нахождения *наибольшего общего делителя* двух целых чисел, дока-

зал первую теорему теории простых чисел — бесконечность числа простых чисел. Несколько позднее Эратосфеном был найден метод получения простых чисел, к-рый стал наз. *Эратосфена решетом*.

Систематизация проблем Ч. т. и методов их решений проведена Диофантом (3 в.) в его «Арифметике», где, в частности, дано решение в рациональных числах многих алгебраич. уравнений 1-й и 2-й степени с целыми коэффициентами от нескольких неизвестных.

В Китае, начиная со 2 в., в связи с календарными расчетами, возникла задача определения наименьшего целого числа, дающего при делении на заданные числа заданные остатки, к-рая была решена Сунь-цзы (2—6 вв.) и Цинь Цзюшао (13 в.).

В Индии Брамагупта (7 в.) и Бхаскара (12 в.) дали общие методы решения в целых числах неопределенных уравнений 1-й степени с двумя неизвестными и уравнений вида $ax^2+b=cy^2$, $xy=ax+by+c$.

Расцвет Ч. ч. начался в Европе с работ П. Ферма (P. Fermat, 17 в.). Он исследовал решения многих уравнений в целых числах, в частности высказал гипотезу, что уравнение $x^n+y^n=z^n$, $n>2$, не имеет решений в натуральных числах x, y, z (*Ферма теорема* великая), доказал, что простые числа вида $4n+1$ являются суммою двух квадратов, высказал одно из основных утверждений теории сравнений: a^p-a делится на p, если p — простое число (*Ферма малая теорема*).

Исключительно важный вклад в Ч. т. внес Л. Эйлер (L. Euler). Он доказал теорему Ферма при $n=3$, малую теорему Ферма и ее обобщение, целый ряд теорем о представлении чисел *бинарными квадратичными формами*. Л. Эйлер был первым, кто для решения задач Ч. т. привлек средства математич. анализа, что привело к созданию *аналитической теории чисел*. *Производящие функции* Эйлера явились источником *кругового метода* Харди — Литлвуда — Рамануджана и *тригонометрических сумм метода* И. М. Виноградова — основных методов современной аддитивной теории чисел, а функция $\zeta(s)$, введенная Л. Эйлером, и ее обобщения составляют основу современных аналитич. методов исследования проблем *распределения простых чисел*.

В переписке Х. Гольдбаха (Ch. Goldbach) с Л. Эйлером были поставлены три знаменитые проблемы: всякое нечетное $N\geqslant 5$ есть сумма трех простых, четное $N\geqslant 4$ есть сумма двух простых и нечетное $N=p+2n^2$, где n — целое, p — простое. Первая проблема решена И. М. Виноградовым (1937), две другие проблемы не решены (1984).

К. Гаусс (C. Gauss) создал основные методы и завершил построение теории *сравнений*, доказал *взаимности закон* квадратичных вычетов, сформулированный Л. Эйлером, заложил основы теории представления чисел квадратичными формами $ax^2+bxy+cy^2$ и формами высших степеней со многими переменными, ввел т. н. *Гаусса суммы*

$$S=\sum_{n=0}^{m-1} e^{2\pi i\frac{an^2}{m}},$$

к-рые явились первыми тригонометрич. суммами, и показал их полезность в решении задач Ч. т. Если до К. Гаусса Ч. т. представляла собой собрание отдельных результатов и идей, то после его работ она начала развиваться в различных направлениях как стройная теория.

Большой вклад в развитие Ч. т. внесли многие ученые 19—20 вв.

Особенностью и привлекательностью Ч. т. является простота и доступность формулировок большинства проблем и трудность их решений. Напр., проблема бесконечности числа простых чисел *близнецов* была поставлена еще Евклидом и не решена (1984). Отдельные проблемы Ч. т. стали источником больших самостоятельных направлений математики. Такими являются:

теория *простых чисел* и связанная с ней теория *дзета-функций* и *Дирихле рядов*, теория *диофантовых уравнений*, *аддитивная теория чисел*, *метрическая теория чисел*, теория алгебраических и трансцендентных чисел, *алгебраическая теория чисел*, теория *диофантовых приближений*, *чисел теория* вероятностная, *геометрия чисел*. Напр., источником аналитич. Ч. т. послужили проблема распределения простых чисел в натуральном ряде и проблема представления натуральных чисел суммой слагаемых определенного вида. Решение уравнений в целых числах, к-рые стали наз. диофантовыми, в частности великая теорема Ферма, послужили источником алгебраич. Ч. т. Проблема построения с помощью циркуля и линейки круга единичной площади (*квадратура круга*) привела к вопросу об арифметич. природе числа π, а вместе с ним — к созданию теории алгебраических и трансцендентных чисел.

Все названные направления Ч. т. переплетаются между собой, дополняя и обогащая друг друга.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981; [2] его же, Метод тригонометрических сумм, 2 изд., М., 1980; [3] его же, Особые варианты метода тригонометрических сумм, М., 1976; [4] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, 2 изд., М., 1983; [5] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [6] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971; [7] Чандрасекхаран К., Введение в аналитическую теорию чисел, пер. с англ., М., 1974; [8] Хассе Г., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953; [9] Дирихле П. Г. Л., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М.—Л., 1936; [10] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, пер. с англ., М., 1953; [11] Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.—Л., 1937.

А. А. Карацуба и материалы одноименной статьи БСЭ-2.

ЧИСЕЛ ТЕОРИЯ вероятностная — в широком смысле раздел теории чисел, в к-ром используются идеи и методы теории вероятностей.

Под вероятностной Ч. т. в узком смысле понимается статистич. теория распределения значений *арифметических функций*.

Подавляющее большинство арифметич. функций, изучаемых в теории чисел, являются аддитивными или мультипликативными. Их значения обычно распределены очень сложно. Если проследить за изменением значений таких функций, когда аргумент пробегает последовательные натуральные числа, получится весьма хаотическая картина, к-рая обычно наблюдается при рассмотрении аддитивных свойств целых чисел совместно с мультипликативными. В классич. исследованиях при рассмотрении распределения значений действительных арифметич. функций $f(m)$ обычно изучалось асимптотич. поведение самой функции $f(m)$ или ее среднего значения. В первом случае ищутся простые функции $\psi_1(m)$, $\psi_2(m)$, чтобы было $\psi_1(m)\leqslant f(m)\leqslant\psi_2(m)$ для всех m или хотя бы для всех достаточно больших m. Напр., если $\omega(m)$ означает число всех различных простых делителей числа m, то $\omega(m)\geqslant 1$ для всех $m>1$, $\omega(m)\leqslant 2(\ln\ln m)^{-1}\ln m$ при $m\geqslant m_0$;

$$\lim_{m\to\infty}\inf\omega(m)=1,$$

$$\lim_{m\to\infty}\sup\omega(m)(\ln m)^{-1}\ln\ln m=1.$$

Во втором случае рассматривается поведение

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}f(m). \qquad (1)$$

Для $\omega(m)$ среднее значение (1) равно $(1+o(1))\ln\ln n$. Решение как первой, так и второй задачи в общем случае дает мало информации о поведении функции $f(m)$, об ее колебаниях. Функция может значительно отклоняться от своего среднего значения. При этом оказывается, что большие отклонения встречаются вообще довольно редко. Ставится задача отыскания границ, в к-рых могут колебаться значения функции $f(m)$ для подавляющего большинства значений аргумента.

Если $f(m)$ — действительная аддитивная арифметич. функция,

$$A_n=\sum_{p\leqslant n}\frac{f(p)}{p},\quad B_n^2=\sum_{p^\alpha\leqslant n}\frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha},\qquad(2)$$

где суммы берутся по простым числам p и по степеням простых чисел p^α, то

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(f(m)-A_n)^2\leqslant B_n^2\left(\frac{3}{2}+\frac{c}{\ln n}\right),$$

где c — абсолютная константа. Следовательно, для любого $t>0$ и всех $m\leqslant n$, за исключением $<\left(\frac{3}{2}+\frac{c}{\ln n}\right)nt^{-2}$ чисел, имеет место неравенство

$$|f(m)-A_n|<tB_n$$

(аналог теоретико-вероятностного *больших чисел закона*). Для функции $\omega(m)$ это неравенство можно записать в виде

$$|\omega(m)-\ln\ln n|<t\sqrt{\ln\ln n}.$$

Пусть через $N_n(\ldots)$ обозначено число натуральных $m\leqslant n$, удовлетворяющих условиям, к-рые будут указываться в скобках вместо многоточия. Желая более точно охарактеризовать распределение значений действительных арифметич. функций $f(m)$, приходят к рассмотрению асимптотич. поведения частоты

$$\frac{1}{n}N_n(f(m)\in E)\qquad(3)$$

при $n\to\infty$, где E — любое борелевское множество. Среди асимптотич. законов для (3) наибольший интерес представляют законы двух типов: интегральные и локальные.

Интегральные законы. Изучается асимптотич. поведение функции распределения

$$F_n(C_n+D_nx)=\frac{1}{n}N_n(f(m)<C_n+D_nx),$$

при $n\to\infty$ и заданных C_n, D_n.

В случае арифметических аддитивных функций ищутся условия, при к-рых $F_n(C_n+D_nx)$ стремится к нек-рой функции распределения $F(x)$ во всех ее точках непрерывности. При этом, если $F(x)$ не вырождены, то D_n обязательно должно стремиться к конечному (отличному от 0) или бесконечному пределу.

В случае конечного предела достаточно ограничиться рассмотрением $F_n(C_n+x)$. Для того чтобы $F_n(C_n+x)$ с какими-либо C_n при $n\to\infty$ имела невырожденное предельное распределение, необходимо и достаточно, чтобы $f(m)$ имела вид

$$f(m)=a\ln m+g(m),$$

где a — константа, а функция $g(m)$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{|g(p)|\geqslant 1}\frac{1}{p}<\infty,\quad\sum_{|g(p)|<1}\frac{g^2(p)}{p}<\infty.$$

При этом C_n должны быть равными

$$C_n=a\ln n+\sum_{\substack{p\leqslant n,\\ |g(p)|<1}}\frac{g(p)}{p}+C+o(1),$$

C — константа. Выбор C_n однозначен с точностью до слагаемых $C+o(1)$. Предельное распределение является дискретным, когда $\sum_{f(p)\neq 0}\frac{1}{p}<\infty$, и непрерывным в противном случае.

В частности, $F_n(x)$ (случай $C_n\equiv 0$) тогда и только тогда имеет предельное распределение, когда сходятся ряды

$$\sum_{|f(p)|\geqslant 1}\frac{1}{p},\quad\sum_{|f(p)|<1}\frac{f(p)}{p},\quad\sum_{|f(p)|<1}\frac{f^2(p)}{p}$$

(аналог теоретико-вероятностной теоремы о трех рядах).

Случай $D_n \to \infty$ не исследован до конца. Ниже приведены нек-рые наиболее простые результаты, когда $C_n = A_n$ и $D_n = B_n$ определены формулами (2).

Если для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$

$$B_n^{-2} \sum_{\substack{p^\alpha = n, \\ |f(p^\alpha)| > \varepsilon B_n}} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha} \to 0 \qquad (4)$$

при $n \to \infty$ (аналог условия Линдеберга, см. *Линдеберга — Феллера теорема*), то

$$F_n(A_n + B_n x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du = \Phi(x) \qquad (5)$$

(нормальный закон). Если выполнено (4), то B_n является медленно меняющейся функцией от $\ln n$ в смысле Карамата. Более того, если B_n является такой функцией, то для справедливости (5) условие (4) является необходимым.

Пусть B_n является медленно меняющейся функцией от $\ln n$. Для того чтобы $F_n(A_n + B_n x)$ сходилась к предельному распределению с дисперсией 1, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неубывающая функция $V(u)$, $-\infty < u < \infty$, $V(-\infty) = 0$, $V(\infty) = 1$, что при $n \to \infty$ для всех u, за исключением, быть может, $u = 0$,

$$B_n^{-2} \sum_{\substack{p^\alpha \leqslant n, \\ f(p^\alpha) < uB_n}} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha} \to V(u).$$

Характеристич. функция $\varphi(t)$ предельного закона в случае его существования определяется формулой

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - 1 - itu)\, u^{-2}\, dV(u) \right).$$

Изучается быстрота сходимости к предельному закону. Так, напр., если $f(m)$ — сильно аддитивная функция и

$$\mu_n = B_n^{-1} \max_{p \leqslant n} |f(p)| \to 0$$

при $n \to \infty$, то

$$F_n(A_n + B_n x) = \Phi(x) + O(\mu_n)$$

равномерно по x.

Для мультипликативных арифметич. функций имеют место аналогичные результаты.

Локальные законы. Изучается поведение при $n \to \infty$ частоты $\frac{1}{n} N_n(f(m) = c)$ при заданных c. В случае действительных аддитивных арифметич. функций эта частота всегда имеет предел, к-рый отличен от 0 лишь для не более чем счетного множества значений c. Пусть

$$\lambda_l(f) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} N_n(f(m) = c_l)$$

— не равные нулю пределы, причем хотя бы один такой предел существует. Тогда

$$\sum_l \lambda_l(f) = 1$$

и

$$\sum_l \lambda_l(f)\, e^{itc_l} = \prod_p (1 - 1/p) \sum_{\alpha=0}^{\infty} p^{-\alpha} e^{itf(p^\alpha)}.$$

Если $f(m)$ принимает лишь целые значения,

$$\mu_k(f) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} N_n(f(m) = k),$$

то

$$\sum_k \mu_k(f) = 1$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{f(p)\neq 0} 1/p < \infty.$$

Изучается скорость сходимости к $\mu_k(f)$. Существует такая абсолютная константа C, что для всех целых k и всех целозначных аддитивных арифметич. функций $f(m)$ с условием $f(p)=0$ для всех простых p

$$\left|\frac{1}{n}N_n(f(m)=k)-\mu_k(f)\right|\leqslant Cn^{-1/2}.$$

Изучается также асимптотич. поведение частоты $\frac{1}{n}N_n$ $(f(m)=k_n)$, когда k_n может расти вместе с n.

Лит.: [1] Кац М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963; [2] Кубилюс Й. П., Вероятностные методы в теории чисел, 2 изд., Вильнюс, 1962; [3] его же, в сб.: Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974; [4] Линник Ю. В., Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; [5] его же, Эргодические свойства алгебраических полей, Л., 1967; [6] Постников А. Г., Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений, М., 1966; [7] Elliott P. D. T. A., Probabilistic number theory, v. 1–2, N.-Y.— Hdlb.— B., 1979—80.

Й. П. Кубилюс.

ЧИСЛИТЕЛЬ арифметической дроби $\frac{a}{b}$ — целое число a, показывающее из скольких долей $\frac{1}{b}$ составлена дробь. Числителем алгебраической дроби $\frac{A}{B}$ наз. выражение A (см. *Дробь*).

С. А. Степанов.

ЧИСЛО — основное понятие математики, сложившееся в ходе длительного историч. развития. Возникновение и формирование этого понятия происходило вместе с зарождением и развитием математики. Практич. деятельность человека, с одной стороны, и внутренние потребности математики — с другой определили развитие понятия числа.

Потребность счета предметов привела к возникновению понятия *натурального числа*. Все народы, обладавшие письменностью, владели понятием натурального числа и пользовались той или иной системой счисления. О ранних этапах возникновения и развития понятия Ч. можно судить лишь на основе косвенных данных, к-рые доставляют языкознание и этнография. Первобытному человеку, видимо, не требовалось умение считать, чтобы установить, полной или нет является какая-нибудь совокупность.

Впоследствии за определенным количеством предметов или явлений, с к-рыми люди часто встречались, закрепились особые наименования. Так, в языках нек-рых народностей имелись слова для обозначения таких объектов, как «три человека», «три лодки», . . ., но не было отвлеченного понятия «три». Таким путем, вероятно, возникали сравнительно короткие числовые ряды, служащие для обозначения отдельно людей, отдельно лодок, отдельно кокосовых орехов, . . . На этой стадии отвлеченных Ч. еще не было, Ч. были именованными.

Необходимость передавать сообщения о численности той или иной совокупности привела к выделению стандартной совокупности, состоящей чаще всего из частей человеческого тела. Каждая часть тела в такой системе счета имела определенный порядок и наименование. Когда же частей тела не хватало, пользовались пучком палочек. Той же цели служили камешки, раковины, зарубки на дереве или камне, черточки на земле, веревки с узелками...

Следующий этап в развитии понятия Ч. связан с переходом к счету группами: парами, десятками, дюжинами... Возникают прообразы т. н. узловых чисел и вместе с тем зачатки арифметич. операций, что отражено в названиях Ч. Оформляются определенные при-

емы счета, для счета применяются специальные приспособления, появляются числовые обозначения. Ч. отделяются от сосчитываемых объектов, становятся отвлеченными. Начинают складываться системы *счисления*.

Процесс образования современной системы счисления исключительно сложен. Только о завершении этого процесса можно судить с определенной достоверностью. Известно много разных систем счисления. В Древнем Египте таких систем было несколько. В одной из них имелись особые знаки для 1, 10, 100, 1000. Другие Ч. изображались путем комбинации этих знаков. Основной арифметич. операцией у древних египтян являлось сложение. За две тысячи лет до н. э. вавилоняне употребляли шестидесятиричную систему счисления с позиционным принципом записи Ч. Они пользовались только двумя знаками. Древние греки пользовались алфавитной системой счисления, ее употребляли также славяне. В Индии в начале н. э. была широко распространена словесная позиционная десятичная система нумерации с несколькими синонимами для нуля. Впоследствии там возникла и позиционная десятичная система счисления. С 8 в. н. э. эта система стала распространяться по Арабскому Востоку. Европейцы познакомились с ней в 12 в.

Расширение круга сосчитываемых предметов, что произошло в результате усложнения практич. деятельности людей и, наконец, любознательность, свойственная человеку, шаг за шагом отодвигали границу счета. Возникло представление о неограниченной продолжаемости натурального ряда. Этим представлением отчетливо владели древние греки. Одна из теорем Евклида гласит: «Простых существует больше всякого предложенного их числа». Тем не менее еще Архимеду пришлось убеждать современников, что можно указать число, большее чем «число песчинок в мире».

Для измерения величин требовались дробные Ч. Дробные Ч. были известны уже в Древнем Египте и Вавилоне. Египтяне дроби выражали обычно при помощи аликвотных дробей, т. е. дробей с числителем, равным 1. Вавилоняне пользовались шестидесятиричными дробями. Китайцы и индийцы в начале н. э. пользовались обыкновенными дробями и умели выполнять все арифметич. действия над ними. Среднеазиатские ученые не позднее 10 в. создали позиционную шестидесятиричную систему счисления. Эта система особенно широко применялась в астрономич. вычислениях и таблицах. Следы ее дошли до нас в измерении времени и углов. Десятичные дроби ввел в нач. 15 в. и стал широко применять самаркандский математик Каши (аль-Каши). В Европе десятичные дроби стали распространяться после выхода книги «Десятая» (1585), автором к-рой был С. Стевин (S. Stevin). До введения десятичных дробей в практику вычислений целую часть Ч. европейцы обычно представляли в десятичной системе счисления, а дробную — в шестидесятиричной или в виде обыкновенной дроби.

Дальнейшее расширение понятия Ч. происходило главным образом в связи с потребностями самой математики. Отрицательные Ч. впервые появились в Древнем Китае. Индийские математики пришли к отрицательным Ч., пытаясь формулировать алгоритм решения квадратных уравнений для всех случаев. Диофант (3 в.) свободно оперирует с отрицательными Ч. Они постоянно встречаются в промежуточных вычислениях во многих задачах его «Арифметики». Однако и в 16 и в 17 вв. многие европейские математики не признавали отрицательных Ч., и если такие Ч. встречались в их вычислениях, то они наз. их ложными, невозможными. Положение изменилось, когда в 17 в. было найдено геометрич. истолкование положительным и отрицательным Ч., как противоположно направленным отрезкам.

Проблема существования отношения однородных величин в рамках практики не возникает. Вавилоняне владели алгоритмом нахождения приближенного значения квадратного корня из Ч. с любой заданной точностью. В 5 в. до н. э. греч. математики открыли, что сторона и диагональ квадрата не имеют общей меры. Таким образом, оказалось, что не любые точно заданные отрезки соизмеримы. Греческие математики не стали вводить новых Ч. Указанную трудность они обошли, создав теорию отношения отрезков, не связанную с понятием Ч.

Развитие алгебры и техники приближенных вычислений, в связи с потребностями астрономии, привело арабских математиков к расширению понятия Ч. Любое отношение однородных величин, как соизмеримых, так и несоизмеримых, они стали рассматривать как Ч. Так Насирэддин (1201—74) писал: «Каждое из этих отношений может быть названо числом, к-рое определяется единицей так же, как один из членов этого отношения определяется другим из этих членов». В том же направлении развивалась европейская математика. Если Дж. Кардано (G. Cardano) в «Практической арифметике» (1539) еще говорил об иррациональных числах как о «глухих», о таких, к-рые «нельзя ни услышать, ни представить», то С. Стевин в своей «Арифметике» (1585) заявлял, что «число есть то, чем определяется любая величина», и что «нет никаких абсурдных, иррациональных, неправильных, невыразимых или глухих чисел». И, наконец, И. Ньютон (I. Newton) во «Всеобщей арифметике» (1707) дал следующее определение: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины того же рода, принятой за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное. Целое есть то, что измеряется единицей; дробное — кратное долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей». В связи с тем что величины у И. Ньютона могут быть как положительными, так и отрицательными, то и Ч. в его арифметике могут быть и положительными или же «большими, чем ничто», так и отрицательными или же «меньшими, чем ничто».

Мнимые Ч. впервые появились в труде Дж. Кардано «Великое искусство» (1545). Решая систему уравнений $x+y=10$, $xy=40$, он нашел корни $5+\sqrt{-15}$ и $5-\sqrt{-15}$. Найденные решения Дж. Кардано назвал «чисто отрицательными» и даже «софистически отрицательными». Первый, кто увидел пользу от введения мнимых величин, был Р. Бомбелли (R. Bombelli). В своей «Алгебре» (1572) он показал, что действительные корни уравнения $x^3=px+q$, $p>0$, $q>0$, в случае $\left(\frac{p}{3}\right)^3>\left(\frac{q}{2}\right)^2$ выражаются через радикалы из мнимых величин. Р. Бомбелли определил арифметич. операции над такими величинами и подошел, таким образом, к созданию теории *комплексных чисел*. В 17 и 18 вв. многие математики занимались исследованием свойств мнимых величин и их приложениями. Так, Л. Эйлер (L. Euler) распространил понятие логарифма на любые комплексные Ч. (1738) и указал новый метод интегрирования с помощью комплексных переменных (1776), А. Муавр (A. Moivre) решил задачу об извлечении корня натуральной степени из любого комплексного Ч. (1736). Удачным применением теории комплексных Ч. стала основная теорема алгебры: «Всякий многочлен с действительными коэффициентами степени выше нулевой разлагается в произведение многочленов первой и второй степени с такими же коэффициентами» (Л. Эйлер; Ж. Д'Аламбер, J. D'Alembert; К. Гаусс, C. Gauss). Тем не менее пока на рубеже 18—19 вв. не было дано геометрич. истолкование комплексных Ч., как точкам

плоскости, мнимые Ч. у многих математиков вызывали недоверие.

В нач. 19 в. в связи с большими успехами математич. анализа многими учеными была осознана необходимость обоснования основ анализа — теории пределов. Математиков перестали удовлетворять доказательства, основанные на наглядности или геометрич. представлении. Нерешенной оставалась и проблема построения единой дедуктивной теории Ч. Натуральное Ч. нередко мыслилось как собрание единиц, дробь — как отношение величин, действительное Ч.— как длина отрезка и комплексное Ч.— как точка плоскости. Не было полной ясности в вопросе, как вводить арифметич. операции над Ч. И, наконец, естественно возникал вопрос о дальнейшем развитии понятия Ч. Можно ли, в частности, ввести новые Ч., связанные уже с точками пространства?

Во всех указанных направлениях в 19 в. велись интенсивные исследования. Формулируется принцип, в соответствии с к-рым происходит обобщение понятия Ч.— т. н. принцип перманентности формальных законов счета. В согласии с ним при построении новой более широкой, в сравнении с исходной, системой Ч. операции в ней обобщается таким образом, что остаются в силе законы одноименных действий над Ч. (Дж. Пикок, G. Peacock, 1834; Г. Ганкель, H. Hankel, 1867). Во 2-й пол. 19 в. почти одновременно Г. Кантор (G. Cantor, 1879), Ш. Мере (Ch. Méray, 1869), Р. Дедекинд (R. Dedekind, 1872) и К. Вейерштрасс (K. Weierstrass, 1872) построили теорию *действительных чисел*. При этом Г. Кантор и Ш. Мере исходили из фундаментальных последовательностей рациональных Ч. Р. Дедекинд — из сечений в поле рациональных Ч., а К. Вейерштрасс — из бесконечных десятичных дробей.

В результате работ Дж. Пеано (G. Peano, 1891), К. Вейерштрасса (1878) и Г. Грассмана (H. Grassman, 1861) была построена аксиоматич. теория натуральных Ч., У. Гамильтон (W. Hamilton, 1837) построил теорию комплексных Ч., исходя из пар действительных Ч., К. Вейерштрасс — теорию целых Ч. как пар натуральных Ч., и Ж. Таннери (J. Tannery, 1894) — теорию рациональных Ч. как пар целых Ч.

Попытки найти обобщение понятия комплексного Ч. привели к разработке теории *гиперкомплексных чисел*. Исторически первой системой таких Ч. были *кватернионы*, открытые У. Гамильтоном. В результате проведенных исследований выяснилось (К. Вейерштрасс; Г. Фробениус, G. Frobenius; Б. Пирс, B. Peirce), что всякое расширение понятия комплексного Ч. за пределы системы комплексных Ч. возможно только при отказе от каких-либо обычных свойств Ч.

На протяжении всего 19 в. и до нач. 20 в. в математике происходят глубокие изменения. Меняются представления об объектах и установках математики. Постепенно складывается аксиоматич. метод построения математики на теоретико-множественной основе. В соответствии с ним всякая математич. теория изучает определенную алгебраич. систему. Другими словами, изучает множество с выделенными в нем отношениями, в частности алгебраич. операциями, удовлетворяющими определенным условиям — аксиомам.

С этой точки зрения любая числовая система есть нек-рая алгебраич. система. При определении конкретных числовых систем удобно пользоваться понятием «расширение алгебраической системы». Это понятие является естественным уточнением сформулированного выше принципа перманентности формальных законов счета. Алгебраич. систему A' наз. р а с ш и р е н и е м а л г е б р а и ч. с и с т е м ы A, если основное множество системы A является подмножеством основного множества системы A', если далее существует взаимно однозначное отображение множества отношений систе-

мы A' на множество отношений системы A и если для любого набора элементов системы A, для к-рого выполняется какое-нибудь отношение этой системы, выполняется соответствующее отношение системы A'.

Так, напр., под системой натуральных Ч. обычно понимают алгебраич. систему $\mathbb{N}=\langle N, +, \cdot, 1\rangle$ с двумя бинарными алгебраич. операциями: сложением $(+)$ и умножением $(\cdot)$ и выделенным элементом (1) (единица), удовлетворяющим следующим аксиомам:

1) для любого элемента $a\in N$, $a+1\neq a$;

2) ассоциативность сложения: для любых элементов a, b, c из N

$$(a+b)+c=a+(b+c);$$

3) коммутативность сложения: для любых элементов a, b из N

$$a+b=b+a;$$

4) сократимость сложения: для любых элементов a, b, c из N из равенства $a+c=b+c$ следует равенство $a=b$;

5) 1 — нейтральный элемент умножения, т. е. для любого $a\in N$, $a\cdot 1=a$;

6) ассоциативность умножения: для любых элементов a, b, c из N

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c);$$

7) дистрибутивность умножения: относительно сложения: для любых элементов a, b, c из N

$$(a+b)\cdot c=ac+bc;$$

8) аксиома индукции: если подмножество M множества натуральных Ч. N содержит 1 и вместе с элементом a элемент $a+1$, то $M=N$.

Из аксиом 2, 3, 4, 6 и 7 следует, что система натуральных Ч.— полукольцо относительно операций $(+)$ и $(\cdot)$. Поэтому систему натуральных Ч. можно определить как минимальное полукольцо с нейтральным элементом умножения и без нейтрального элемента сложения.

Система целых Ч. $\mathbb{Z}=\langle Z, +, \cdot, 0, 1\rangle$ определяется как минимальное кольцо, являющееся расширением полукольца $\langle N, +, \cdot, 1\rangle$ натуральных Ч. Система рациональных Ч. $\mathbb{Q}=\langle Q, +, \cdot, 0, 1\rangle$ может быть определена как минимальное поле, являющееся расширением кольца $\langle Z, +, \cdot, 0, 1\rangle$ целых Ч. Система комплексных Ч. $\mathbb{C}=\langle C, +, \cdot, 0, 1, i\rangle$ — минимальное поле, являющееся расширением поля $\langle R, +, \cdot, 0, 1\rangle$ действительных Ч. с элементом i таким, что $i^2+1=0$.

Под системой $\mathbb{R}=\langle R, +, \cdot, 0, 1, >\rangle$ действительных Ч. понимают алгебраич. систему с двумя бинарными алгебраич. операциями $(+)$ и $(\cdot)$, с двумя выделенными элементами (0) и (1) и с одним бинарным отношением порядка $(>)$. Аксиомы $\mathbb{R}$ разделяются на следующие группы:

1) а к с и о м ы п о л я: система $\langle R, +, \cdot, 0, 1\rangle$ — поле;

2) а к с и о м ы п о р я д к а: система $\langle R, +, \cdot, 0, 1, >\rangle$ — линейно и строго упорядоченное поле;

3) а к с и о м а А р х и м е д а: для любых элементов $a>0$ и $b>0$ из R существует натуральное число n такое, что

$$n\cdot a=\underbrace{a+\ldots+a}_{n}>b;$$

4) а к с и о м а п о л н о т ы: любая фундаментальная последовательность $\{r_n\}_n$ действительных Ч. сходится, т. е. если для любого $\varepsilon>0$ существует номер n_ε такой, что для любых $n>n_\varepsilon$ и $m>n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|r_n-r_m|<\varepsilon$, то последовательность $\{r_n\}_n$ сходится к нек-рому элементу поля R.

Короче, система действительных Ч.— полное линейно строго и архимедовски упорядоченное поле. Систему

действительных Ч. эквивалентным образом можно определить и как непрерывное линейно упорядоченное поле. В этом случае аксиомы Архимеда и полноты заменяются аксиомой непрерывности:

если A и B — непустые подмножества R такие, что для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a < b$, то существует такой элемент $c \in R$, что $a \leqslant c \leqslant b$ для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$.

Конструкции действительных Ч., предложенные Г. Кантором и Ш. Мере, могут служить интерпретацией первой системы аксиом для системы действительных Ч., а конструкция Р. Дедекинда — интерпретацией для второй системы. Аналогично, конструкции У. Гамильтона, К. Вейерштрасса и Ж. Таннери — интерпретацией для систем аксиом систем комплексных Ч., целых Ч., рациональных Ч.

Для системы натуральных Ч. в качестве интерпретаций могут служить порядковая теория натуральных Ч., разработанная Дж. Пеано и количественная теория натуральных Ч., принадлежащая Г. Кантору.

В 19 в. была четко поставлена задача обоснования понятия Ч. и, более широко, проблема обоснования математики. Эта проблема стала предметом математич. логики, интенсивное развитие к-рой продолжается в 20 в.

См. также *Арифметика формальная*, *Конструктивный анализ*, *р-адическое число*, *Алгебраическое число*, *Трансцендентное число*, *Кардинальное число*, *Порядковое число*, *Арифметика*.

Лит.: [1] Березкина Э. И., Математика древнего Китая, М., 1980; [2] Бурбаки Н., Очерки по истории математики, пер. с франц., М., 1963; [3] Вайман А. А., Шумеро-вавилонская математика, М., 1961; [4] Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959; [5] Видейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966; [6] Володарский А. И., Очерки истории средневековой индийской математики, М., 1977; [7] Выгодский М. Я., Арифметика и алгебра в древнем мире, 2 изд., М., 1967; [8] Депман И. Я., История арифметики, М., 1959; [9] Кольман Э., История математики в древности, М., 1961; [10] Кэджори Ф., История элементарной математики, пер. с англ., Од., 1910; [11] Нечаев В. И., Числовые системы, М., 1975; [12] Рыбников К. А., История математики, 2 изд., М., 1974; [13] Стройк Д. Я., Краткий очерк истории математики, пер. с нем., 3 изд., М., 1978; [14] Фефферман С., Числовые системы, пер. с англ., М., 1971; [15] Цейтен Н. Г., История математики в древности и в средние века, пер. с франц., 2 изд., М.—Л., 1938; [16] Юшкевич А. П., История математики в средние века, М., 1961; [17] История математики, т. 1—3, М., 1970—72; [18] Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1978.

В. И. Нечаев.

ЧИСЛОВОЕ ПОЛЕ — поле, элементами к-рого являются комплексные (в частности, действительные) числа. Множество комплексных чисел образует Ч. п. тогда и только тогда, когда оно содержит более одного числа и вместе с каждыми числами α и β также и $\alpha - \beta$ и $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$. Всякое Ч. п. содержит бесконечное множество чисел. Поле рациональных чисел содержится во всяком Ч. п.

Примерами Ч. п. являются поля рациональных, действительных, комплексных и гауссовых чисел. Ч. п. образует множество чисел вида $\frac{H(\alpha)}{F(\alpha)}$, $F(\alpha) \neq 0$, где α — любое фиксированное комплексное число, а $H(x)$ и $F(x)$ пробегают всевозможные многочлены с рациональными коэффициентами.

А. Б. Шидловский.

ЧИСЛОВЫХ ФУНКЦИЙ АСИМПТОТИКА, асимптотика арифметических функций — приближенное представление арифметич. функций (определенных при всех натуральных значениях аргумента) посредством сравнительно простых выражений со сколь угодно малой относительной погрешностью. Точнее, для числовой функции $f(x)$ существует асимптотика, если имеет место асимптотич. равенство

$$f(x) = \varphi(x) + R(x),$$

где $\varphi(x)$ — приближающая функция, $R(x)$ — погрешность, относительно к-рой в общем случае известно только, что

$$\lim_{x\to\infty} (R(x)/\varphi(x)) = 0.$$

Краткая запись: $f(x) = \varphi(x) + o(\varphi(x))$ или $f(x) \sim \varphi(x)$ (см. *Асимптотическая формула*).

Нахождение Ч. ф. а. является одной из важнейших задач аналитич. теории чисел. Это объясняется тем, что почти все числовые функции с интересными арифметич. свойствами характеризуются крайней неправильностью своего изменения при возрастании аргумента. При рассмотрении вместо числовой функции $f(x)$ ее среднего значения $\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n)$ (n — натуральное) «неправильность» функции $f(x)$ сглаживается. Поэтому типичной для числовых функций является задача получения асимптотики для их средних значений. Напр., среднее значение функции, означающей число делителей n, будет равняться

$$\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n} \tau(n) \sim \ln n.$$

Возникающая здесь проблема наилучшей возможной оценки погрешности в асимптотич. равенстве для многих функций, в частности для функций $\tau(n)$, в 1984 еще не решена (см. *Аналитическая теория чисел*).

Не менее важную роль играет Ч. ф. а. при решении аддитивных проблем. Для многих из них неизвестны прямые доказательства существования разложения целого числа n на слагаемые заданного вида. Однако, как только удается вывести асимптотику для числа искомых разложений, отсюда уже следует существование требуемого разложения для любого достаточно большого числа n. *В. М. Бредихин.*

ЧИСТЫЙ ПОДМОДУЛЬ в смысле Кона — такой подмодуль A правого R-модуля B, что для любого левого R-модуля C естественный гомоморфизм абелевых групп

$$A \otimes_R C \longrightarrow B \otimes_R C$$

инъективен. Это эквивалентно следующему условию: если система уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_{ij} = a_j, \text{ где } 1 \leqslant j \leqslant m,\ \lambda_{ij} \in R,\ a_j \in A,$$

имеет решение в B, то она имеет решение и в A (ср.

Плоский модуль). Ч. п. является любое прямое слагаемое. Любой подмодуль любого правого R-модуля чист тогда и только тогда, когда R — *регулярное кольцо*.

В случае абелевых групп (т. е. при $R=\mathbb{Z}$) эквивалентны следующие утверждения: (1) A — чистая (или сервантная) подгруппа в B; (2) $nA=A\cap nB$ для любого натурального n; (3) A/nA — прямое слагаемое в B/nA для любого натурального n; (4) если $C\subseteq A$ и A/C — конечно порожденная группа, то A/C — прямое слагаемое в B/C; (5) каждый смежный класс факторгруппы B/A содержит элемент того же порядка, что и порядок этого смежного класса; (6) если $A\subseteq C\subseteq B$ и C/A конечно порождена, то A — прямое слагаемое в C. Если выполнение свойства (2) требуется лишь для простых n, то A наз. слабо сервантной подгруппой.

Аксиоматич. подход к понятию чистоты базируется на рассмотрении класса мономорфизмов $\mathfrak{N}_\omega$, подчиненного следующим требованиям (здесь $A\subseteq_\omega B$ означает, что A — подмодуль в B и естественное вложение принадлежит $\mathfrak{N}_\omega$): (Ч0′) если A — прямое слагаемое в B, то $A\subseteq_\omega B$; (Ч1′) если $A\subseteq_\omega B$ и $B\subseteq_\omega C$, то $A\subseteq_\omega C$; (Ч2′) если $A\subseteq B\subseteq C$ и $A\subseteq_\omega C$, то $A\subseteq_\omega B$; (Ч3′) если $A\subseteq_\omega B$ и $K\subseteq A$, то $A/K\subseteq_\omega B/K$; (Ч4′) если $K\subseteq A\subseteq B$, $K\subseteq_\omega B$ и $A/K\subseteq_\omega B/K$, то $A\subseteq_\omega B$. Рассмотрение класса $\mathfrak{N}_\omega$ вместо класса всех мономорфизмов приводит к относительной гомологич. алгебре. Напр., модуль Q наз. ω-инъективным, если из $A\subseteq_\omega B$ вытекает, что всякий гомоморфизм из A в Q может быть продолжен до гомоморфизма из B в Q (ср. *Инъективный модуль*). Сервантно инъективная абелева группа наз. алгебраически компактной. Эквивалентны следующие свойства абелевой группы Q: (1) Q алгебраически компактна; (2) Q выделяется прямым слагаемым из любой группы, содержащей ее в качестве сервантной подгруппы; (3) Q является прямым слагаемым группы, допускающей компактную топологию; (4) система уравнений над Q разрешима, если разрешима каждая из ее конечных подсистем.

Лит.: [1] Мишина А. П., Скорняков Л. А., Абелевы группы и модули, М., 1969; [2] Скляренко Е. Г., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 3, с. 85—120; [3] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [4] Фукс Л., Бесконечные абелевы группы, пер. с англ., т. 1—2, М., 1974—77.

Л. А. Скорняков.

ШАЛЯ ТЕОРЕМА — 1) Ш. т.: если A, B, C — три произвольные точки оси, то $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$, где $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ — длины направленных отрезков. Ш. т. обобщается для случая площадей ориентированных треугольников и объемов ориентированных тетраэдров (см. [1]).

2) Ш. т.: движение 1-го рода (не меняющее ориентации), отличное от поворота и переноса, является произведением переноса на поворот, ось к-рого параллельна направлению переноса (т. н. винтовое движение). Теорема доказана М. Шалем (M. Chasles, 1830).

Лит.: [1] Моденов П. С., Аналитическая геометрия, М., 1969.

А. Б. Иванов.

ШАПКА, k-шапка, — множество k точек конечного проективного пространства $P(n, q)$, никакие три из к-рых неколлинеарны. Две Ш. считают эквивалентными, если существует коллинеация пространства $P(n, q)$, переводящая одну из них в другую. Нахождение максимального числа $m(n, q)$ точек Ш. в $P(n, q)$, построение и классификация $m(n, q)$-Ш. составляет главный вопрос при изучении Ш., не решенный полностью (1984). Известны следующие результаты (см. [2], [3]):

$m(n, 2)=2^n$: 2^n-Ш. единственна (с точностью до эквивалентности) и является множеством точек $P(n, 2)$, не лежащих в фиксированной гиперплоскости;

$m(2, q)=q+1$, q — нечетное: $(q+1)$-Ш. в $PG(2, q)$ является коникой и единственна;

$m(2, q)=q+2$, q — четное: $(q+2)$-Ш. в $P(2, q)$, вообще говоря, не единственна; $m(3, q)=q^2+1$, q — нечетное: (q^2+1)-Ш. в $P(3, q)$ является эллиптич. квадрикой и единственна;

$m(3, q)=q^2+1$, q — четное: (q^2+1)-Ш. в $P(3, q)$, вообще говоря, не единственна;

$m(4, 3)=20$: 20-Ш. в $P(4,3)$ не единственна;

$m(5,3)=56$: 56-Ш. в $P(5, 3)$ единственна.

Ш. используются в теории кодирования (см., например, [2]).

Лит.: [1] Bose R. C., «Sankhyā», 1947, v. 8, p. 107—66; [2] Hill R., «Discrete Math.», 1978, v. 22, № 2, p. 111—37; [3] Segre B., «Atti Accad. naz. Lincei, Mem.», 1967, v. 8, p. 133—236.

В. В. Афанасьев.

ШАР — множество V^n точек x евклидова пространства E^n, удаленных от нек-рой точки x_0 (центр Ш.) на расстояние, меньшее (открытый шар $\mathring{V}^n$) или не превышающее (замкнутый шар $\bar{V}^n$) величину R (радиус Ш.), т. е.

$$\mathring{V}(\bar{V}^n)=\{x\in E^n,\ \rho(x, x_0) < R\ (\leqslant R)\}.$$

Ш. V^1 — это отрезок, V^2 — это круг, V^n при $n>3$ иногда наз. гипершаром. Границей (поверхностью) Ш. является *сфера*.

Объем Ш.

$$V^n=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}R^n=\frac{S^{n-1}}{n}R,$$

где S^{n-1} — поверхность граничной сферы. В частности,

$$V^1=2R,\ V^2=\pi R^2,\ V^3=\frac{4}{3}\pi R^3,\ V^4=\frac{\pi^2R^4}{2}.$$

С возрастанием размерности объем Ш. «концентрируется» у его поверхности:

$$\frac{V^n(R_2)-V^n(R_1)}{V^n(R_2)} \longrightarrow 1,\ R_1 < R_2,\ n \longrightarrow \infty.$$

Ш.— простейшая геометрич. фигура. Топология его тривиальна. Среди всех тел равного объема Ш. имеет минимальную поверхность, а среди всех тел одинаковой поверхности он имеет наименьший объем.

Совершенно аналогично определяется Ш. в метрич. пространстве, однако при этом, напр., Ш. может быть не строго выпуклым, его поверхность может иметь негладкие точки и т. п.— все то, что бывает у произвольных выпуклых тел.

Бесконечномерный шар — прямой предел последовательности вложенных друг в друга Ш. последовательных размерностей — в отличие от конечномерного Ш. не имеет компактного замыкания. Наоборот, компактность Ш. в топологическом векторном пространстве свидетельствует о его конечномерности.

Лит. см. при статье *Сфера*. *И. С. Шарадзе.*

ШАРЛЬЕ МНОГОЧЛЕНЫ — многочлены, ортогональные на системе неотрицательных целочисленных точек с интегральным весом $d\sigma(x)$, где $\sigma(x)$ — ступенчатая функция, скачки к-рой определяются по формуле

$$j(x) = e^{-a}\frac{a^x}{x!},\ x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ a > 0.$$

Ортонормированные Ш. м. имеют представления

$$P_n(x;\ a) = \sqrt{\frac{a^n}{n!}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k!\,a^{-k}\binom{x}{k} =$$

$$= a^{\frac{n}{2}}(n!)^{-\frac{1}{2}}[j(x)]^{-1}\Delta_j^n(x-n).$$

С *Лагерра многочленами* Ш. м. связаны равенством

$$P_n(x;\ a) = \sqrt{\frac{n!}{a^n}}\,L_n^{(x-n)}(a) = \sqrt{\frac{n!}{a^n}}\,L_n(a;\ x-n).$$

Введены К. Шарлье [1]. Поскольку функция $j(x)$ определяет распределение Пуассона, то многочлены $\{P_n(x;\ a)\}$ наз. также многочленами Пуассона — Шарлье.

Лит.: [1] Charlier C., Application de la théorie des probabilités à l'astronomie, P., 1931; [2] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1974; [3] Сегё Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962. *И. К. Суетин.*

ШАРЛЬЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — малоупотребительное название распределения, плотность к-рого дается *Грама — Шарлье рядом*.

ШАРОВАЯ ФУНКЦИЯ, телесная гармоническая функция,— *сферическая функция* n-й степени с множителем r^n.

ШАУДЕРА МЕТОД — метод решения краевых задач для линейных равномерно эллиптических уравнений 2-го порядка, в основе к-рого лежат априорные оценки и метод продолжения по параметру.

Ш. м. решения *Дирихле задачи* для линейного равномерно эллиптического уравнения

$$Lu \equiv a^{ij}(x)\,u_{x_ix_j} + b^j(x)\,u_{x_j} + b(x)\,u = f(x), \qquad (1)$$

заданного в ограниченной области Ω евклидова пространства точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и с коэффициентом $b(x)\leqslant 0$ описывается следующим образом.

1. Вводятся пространства $C_\alpha(\Omega)$, $C_{1+\alpha}(\Omega)$, $C_{2+\alpha}(\Omega)$ как множества функций $u=u(x)$ с конечными нормами

$$\|u\|_{C_\alpha(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega}|u(x)|+\sup_{x,\,y}\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^\alpha},\quad 0<\alpha<1,$$

$$\|u\|_{C_{1+\alpha}(\Omega)}=\|u\|_{C_\alpha(\Omega)}+\sum_{i=1}^{n}\|u_{x_i}\|_{C_\alpha(\Omega)},$$

$$\|u\|_{C_{2+\alpha}(\Omega)}=\|u\|_{C_{1+\alpha}(\Omega)}+\sum_{i,\,j=1}^{n}\|u_{x_i,\,x_j}\|_{C_\alpha(\Omega)}.$$

2. Предполагается, что граница σ области Ω принадлежит классу $C_{2+\alpha}$, т. е. каждый элемент σ_x $(n-1)$-мерной поверхности σ может быть отображен на часть плоскости с помощью преобразования координат $y=y(x)$ с положительным якобианом, причем функция $y(x)\in C_{2+\alpha}(\sigma_x)$.

3. Доказывается, что если коэффициенты уравнения (1) принадлежат пространству $C_\alpha(\Omega)$ и функция $u\in C_{2+\alpha}(\Omega)$, то справедлива априорная оценка вплоть до границы

$$\|u\|_{C_{2+\alpha}(\Omega)}\leqslant C\left[\|Lu\|_{C_\alpha(\Omega)}+\|u\|_{C_{2+\alpha}(\Omega)}+\|u\|_{C_0(\Omega)}\right],\quad (2)$$

где постоянная C зависит только от Ω, постоянной эллиптичности $m\leqslant a^{ij}(x)\,\xi_i\xi_j/|\xi|^2$, $\xi\neq 0$, и норм коэффициентов оператора L, а

$$\|u\|_{C_0(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

4. Считается известным метод доказательства существования решения $u\in C_{2+\alpha}(\Omega)$ задачи Дирихле

$$u|_\sigma=\varphi(x)\in C_{2+\alpha}(\Omega)$$

для оператора Лапласа $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\partial^2/\partial x_i^2$.

5. Не нарушая общности, полагается $\varphi(x)\equiv 0$ и затем реализуется метод продолжения по параметру, сущность к-рого состоит в том, что:

5_1. Оператор L вкладывается в однопараметрическое семейство операторов

$$L_t u=t\,Lu+(1-t)\,\Delta u,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\quad L_0=\Delta.$$

5_2. Существенно опираясь на априорную оценку (2), устанавливается, что множество T тех значений параметра $t\in[0,\,1]$, для к-рых задача Дирихле $L_t u=f(x)$, $u|_\sigma=0$ имеет решение $u\in C_{2+\alpha}(\Omega)$ при любых $f\in C_\alpha(\Omega)$ является одновременно открытым и, стало быть, совпадает с единичным отрезком $[0,\,1]$.

6. Доказывается, что если D — ограниченная область, содержащаяся в Ω вместе со своим замыканием, то для любой функции $u\in C_{2+\alpha}(D)$ и каждой компактной подобласти $\omega\subset D$ справедлива внутренняя априорная оценка:

$$\|u\|_{C_{2+\alpha}(\omega)}\leqslant C\left[\|Lu\|_{C_\alpha(D)}+\|u\|_{C_0(D)}\right].\quad (3)$$

7. Равномерно аппроксимируя заданные функции φ и f с помощью функций из класса $C_{2+\alpha}$ и применяя оценку (3), показывается существование решения задачи Дирихле для любой непрерывной граничной функции и широкого класса областей с негладкими границами, напр. для областей, представимых как объединение последовательностей областей $\Omega_1\subset\Omega_2\subset\ldots\subset\Omega_j\subset\Omega_{j+1}\subset\ldots$, границы к-рых имеют такую же гладкость, что и σ.

Оценки 2 и 3 получены впервые Ю. Шаудером (см. [1], [2]) и носят его имя. Оценки Шаудера и его метод обобщены на уравнения и системы высшего порядка. Соответствующие им как внутренние, так и вплоть до

границы, априорные оценки иногда наз. оценками шаудеровского типа. Дальнейшим развитием Ш. м. является метод априорных оценок.

Лит.: [1] Schauder J., «Math. Z.», 1934, Bd 38, № 2, S. 257—82; [2] его же, «Stud. math.», 1935, v. 5, p. 34—42; [3] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [4] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Бицадзе А. В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981; [6] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965; [7] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 2 изд., М., 1973.

А. М. Нахушев.

ШАУДЕРА ТЕОРЕМА — один из принципов *неподвижной точки:* если вполне непрерывный оператор A отображает ограниченное замкнутое выпуклое множество K банахова пространства X в себя, то существует по крайней мере одна точка $x\in K$ такая, что $Ax=x$. Доказана Ю. Шаудером [1] как обобщение *Брауэра теоремы*.

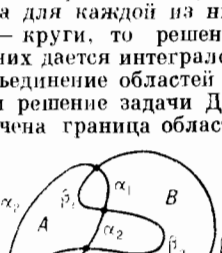
Существуют различные обобщения Ш. т.: теорема Маркова — Какутани, принцип Тихонова и др.

Лит.: [1] Schauder J., «Stud. math.», 1930, v. 2, p. 171—80; [2] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [3] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [4] Эдвардс Р., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969; [5] Ниренберг Л., Лекции по нелинейному функциональному анализу, пер. с англ., М., 1977.

В. И. Соболев.

ШВАРЦА АЛЬТЕРНИРУЮЩИЙ МЕТОД — один из общих методов решения *Дирихле задачи*, позволяющий получить решение задачи Дирихле для дифференциального уравнения эллиптич. типа в областях D, представимых в виде объединения конечного числа областей D_i, для к-рых решение задачи Дирихле уже известно. Работы Г. Шварца (1869; см. [1]) и ряд последующих работ других авторов были посвящены Ш. а. м. решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в плоских областях. Сущность Ш. а. м. применительно к простейшему случаю уравнения Лапласа в объединении двух плоских областей заключается в следующем.

Пусть A и B — две области на плоскости, имеющие непустое пересечение и такие, что решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа для каждой из них известно; напр., если A и B — круги, то решение задачи Дирихле для каждого из них дается интегралом Пуассона. Пусть, далее, D — объединение областей A и B, для к-рого требуется найти решение задачи Дирихле (см. рис.). Через α обозначена граница области A, через α_1 — части границы α, попавшие в B (они входят в D), а через α_2 — оставшиеся части, так что $\alpha=\alpha_1\cup\alpha_2$. Аналогично β — граница области B, β_1 — ее части, попавшие в A (они тоже входят в D), β_2 — оставшиеся части, то есть $\beta=\beta_1\cup\beta_2$. Тогда граница γ области D может быть представлена в виде $\gamma=\alpha_2\cup\beta_2$.



Пусть теперь на γ задана непрерывная функция f и пусть требуется найти гармонич. функцию w в D, непрерывную в замкнутой области $\overline{D}$ и принимающую на γ значения функции f. Сужение функции f на α_2 продолжается непрерывно на всю границу α и для этих граничных значений находится решение u_1 задачи Дирихле в A. Значения u_1 на β_1 вместе со значениями f на β_2 образуют теперь непрерывную функцию на β, для к-рой находится решение v_1 задачи Дирихле в B. Далее, решение u_2 задачи Дирихле в A строится по значениям функции f на α_2 и функции v_1 на α_1 и т. д. Искомая функция имеет вид

$$w=\lim_{n\to\infty} u_n \text{ в } A$$

$$w = \lim_{n\to\infty} v_n \text{ в } B.$$

Применение ограниченных решений задачи Дирихле для кусочно непрерывных граничных данных позволяет полагать, не заботясь о непрерывном продолжении f, значения равными нулю на оставшихся частях границ.

Метод, аналогичный Ш. а. м. (см. [2]), может быть применен к отысканию решения задачи Дирихле в пересечении двух областей A и B, если ее решения для A и B известны.

Ш. а. м. используется и при решении краевых задач более общей природы для общих уравнений эллиптич. типа (в том числе и порядка выше второго), подчиненных нек-рым дополнительным условиям [3], причем также и в пространственных областях.

Важное значение имеет Ш. а. м. для построения гармонич. функций различного вида (с наперед заданными особенностями) на римановых поверхностях [4].

Лит.: [1] Schwarz H., Ges. math. Abh., Bd 2, B., 1890; [2] Neumann C., «Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-naturwiss. Kl.», 1870, Bd 22, S. 264—321; [3] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.—Л., 1962, гл. 7; [4] Неванлинна Р., Униформизация, пер. с нем., М., 1955.

Е. Д. Соломенцев.

ШВАРЦА ДИФФЕРЕНЦИАЛ — главная часть порядка n *Шварца симметрической производной*. Подробнее, если для функции действительного переменного $f(x)$

$$\Delta^n f(x, \Delta x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k f\left(x + \frac{n-2k}{2}\Delta x\right) = A\cdot(\Delta x)^n + o((\Delta x)^n),$$

то выражение $A\cdot(\Delta x)^n$ наз. Ш. д. порядка n. Когда говорят о Ш. д. без указания порядка, то обычно считают $n=2$.

Т. П. Лукашенко.

ШВАРЦА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР, производная Шварца, шварциан, аналитич. функции $f(z)$ комплексного переменного z — дифференциальное выражение

$$\{f, z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2,$$

появившееся при исследовании конформного отображения многоугольников на круг, в частности в работах Г. Шварца [1].

Важнейшее свойство Ш. д. п. — его инвариантность относительно дробно-линейного преобразования функции $f(z)$, т. е. если

$$g(z) = \frac{af(z)+b}{cf(z)+d},$$

то $\{f, z\} = \{g, z\}$. Применения Ш. д. п. связаны прежде всего с вопросами однолистности аналитич. функций. Напр., если $f(z)$ — однолистная аналитич. функция в круге $D = \{z : |z|<1\}$, причем $f(0)=0$, $f'(0)=1$, то

$$|\{f, z\}| \leqslant \frac{6}{(1-|z|^2)^2}, \quad |z| < 1.$$

Обратно, если $f(z)$ регулярна в D и

$$|\{f, z\}| \leqslant \frac{2}{(1-|z|^2)^2}, \quad |z| < 1,$$

то $f(z)$ — однолистная функция в D и константу 2 здесь нельзя увеличить.

Лит.: [1] Schwarz H., Ges. math. Abh., Bd 2, B., 1890; [2] Шеварлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

Е. Д. Соломенцев.

ШВАРЦА ИНТЕГРАЛ — зависящий от параметра интеграл, дающий решение задачи Шварца о выражении аналитич. функции $f(z)=u(z)+iv(z)$ в круге D по граничным значениям ее действительной

(или мнимой) части u на граничной окружности C (см. [1]).

Пусть на единичной окружности $C=\{z: z=e^{i\varphi}, 0<\varphi<2\pi\}$ дана непрерывная действительная функция $u(\varphi)$. Тогда интегральные формулы Шварца, выражающие аналитич. функцию $f(z)=u(z)+iv(z)$, граничные значения действительной части к-рой совпадают с $u(\varphi)$ (или граничные значения мнимой части совпадают с $v(\varphi)$), имеют вид

$$f(z)=Su(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C u(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}+ic=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+re^{i\theta}}{e^{i\varphi}-re^{i\theta}}u(\varphi)\,d\varphi+ic, \qquad (*)$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_C v(t)\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{dt}{t}+c_1=$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+re^{i\theta}}{e^{i\varphi}-re^{i\theta}}v(\varphi)\,d\varphi+c_1,$$

где $z=re^{i\theta}$, $t=e^{i\varphi}$, c и c_1 — произвольные действительные постоянные. Ш. и. (*) тесно связан с *Пуассона интегралом*. Выражение

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{i\varphi}+re^{i\theta}}{e^{i\varphi}-re^{i\theta}}$$

часто наз. ядром Шварца, а интегральный оператор S, фигурирующий в первой формуле (*), — оператором Шварца. Эти понятия обобщаются и на области произвольного вида комплексной плоскости (см. [3]). Ш. и. и его обобщения играют важную роль при решении *граничных задач теории аналитических функций* (см. также [3]) и исследовании *граничных свойств аналитических функций* (см. также [4]).

При применении интегральных формул (*) возникает важный и более трудный вопрос о существовании и выражении граничных значений мнимой части $v(z)$ и всей функции $f(z)$ по данным граничным значениям действительной части $u(\varphi)$ (или граничных значений действительности части $u(z)$ и всей функции $f(z)$ по данным граничным значениям мнимой части $v(\varphi)$). Если данные функции $u(\varphi)$ или $v(\varphi)$ удовлетворяют на C *Гёльдера условию*, то соответствующие граничные значения $v(\varphi)$ или $u(\varphi)$ выражаются формулами Гильберта

$$v(\varphi)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\alpha)\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\varphi}{2}\,d\alpha+c,$$

$$u(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(\alpha)\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\varphi}{2}\,d\alpha+c_1,$$

причем входящие в эти формулы интегралы являются сингулярными и существуют в смысле главного значения по Коши (см. [3]).

Лит.: [1] Schwarz H., Ges. math. Abh., Bd 2, B., 1890; [2] Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972; [3] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977; [4] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950.

Е. Д. Соломенцев.

ШВАРЦА ЛЕММА: если функция $f(z)$ регулярна в круге $E=\{|z|<1\}$, $f(0)=0$ и $|f(z)|\leqslant 1$ в E, то при $z\in E$ справедливы неравенства

$$|f(z)|\leqslant|z| \quad\text{и}\quad |f'(0)|\leqslant 1, \qquad (1)$$

причем знаки равенства в них (в первом из неравенств (1) при $z\neq 0$) имеют место только в случае, когда $f(z)\equiv e^{i\alpha}z$, где α — действительная постоянная (классическая форма Ш. л.). Эта лемма была доказана Г. Шварцем (см. [1]).

Известны различные формы Ш. л. Напр., инвариантная форма Ш. л.: если функция $f(z)$ регу-

лярна в круге E и $|f(z)|\leqslant 1$ в E, то для любых точек $z_1, z_2 \in E$ справедливо неравенство

$$r_E(f(z_1), f(z_2)) \leqslant r_E(z_1, z_2), \qquad (2)$$

где $r_E(a, b)$ — гиперболич. расстояние между точками a, b в круге E (см. *Гиперболическая метрика*); кроме того, при $z \in E$ справедливо неравенство

$$\frac{|df(z)|}{1-|f(z)|^2} \leqslant \frac{|dz|}{1-|z|^2}, \qquad (3)$$

при этом знаки равенства в (2) и (3) имеют место только в случае, когда $f(z)$ — дробно-линейное отображение круга E на себя.

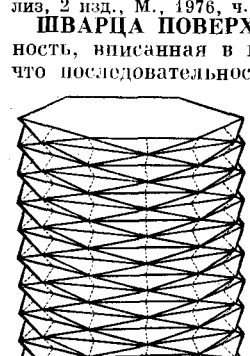
Неравенство (3) наз. также дифференциальной формой Ш. л. Интегрирование этого неравенства приводит к следующей формулировке Ш. л.: при отображении круга E с помощью регулярной функции $f(z)$, для к-рой $|f(z)|<1$ при $z \in E$, гиперболич. длина произвольной дуги в E уменьшается, за исключением того случая, когда $f(z)$ реализует однолистное конформное отображение круга E на себя, в этом случае гиперболич. расстояния между точками E сохраняются.

Обобщением инвариантной формы Ш. л. на многосвязные области, в к-рых может быть определена гиперболич. метрика, служит *гиперболической метрики принцип*. Известны аналоги Ш. л. для голоморфных отображений в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ (см. [4]).

Лит.: [1] Schwarz H. A., Ges. math. Abh., Bd 1—2, B., 1890; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.— Л., 1941; [4] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976, ч. 2.

Г. В. Кузьмина.

ШВАРЦА ПОВЕРХНОСТЬ — многогранная поверхность, вписанная в конечный круговой цилиндр так, что последовательность таких поверхностей при соответствующем подборе параметров может стремиться к любому пределу (в том числе и бесконечному).



Конструкция Ш. п. такова (см. рис.), что при стремлении к нулю максимальных диаметров ее граней они оказываются вовсе не близкими по своему расположению в пространстве к касательной плоскости к поверхности цилиндра. Таким образом грань Ш. п. не может с возрастающей точностью приближать элемент поверхности цилиндра. Поверхность приведена Г. Шварцем (H. Schwarz) в 1880.

Лит.: [1] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3, 5 изд., М., 1969.

А. Б. Иванов.

ШВАРЦА СИММЕТРИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ функции $f(x)$ в точке x_0 — величина

$$D^2 f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

иногда наз. производной Римана, или второй симметрической производной. Впервые введена Б. Риманом в 1854 (см. [2]), рассматривалась Г. Шварцем [1]. Более общо Ш. с. п. называют симметрич. производную порядка n

$$D^n f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta^n f(x, h)}{h^n} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k f\left(x + \frac{n-2k}{2} h\right)}{h^n}.$$

Лит.: [1] Schwarz H., Ges. math. Abh., Bd 2. B., 1890, S. 341—43; [2] Риман Б., Сочинения, пер. с нем., М.— Л., 1948, с. 225—61; [3] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974, с. 279—98; [4] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, с. 185—201; [5] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., 2 изд., М., 1965, т. 1, с. 43—45, 502—18, т. 2, с. 132—39.
Т. П. Лукашенко.

ШВАРЦА ТЕОРЕМА СИММЕТРИИ: если минимальная поверхность проходит через нек-рую прямую l, то l является ее осью симметрии. Из Ш. т. с. следует, что если граница минимальной поверхности содержит отрезок прямой l, то эта поверхность может быть продолжена через этот отрезок симметрично относительно l.
Н. Х. Сабитов.

ШВАРЦА УРАВНЕНИЕ — нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 3-го порядка вида

$$\frac{z'''}{z'}-\frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2=2I(t); \qquad (1)$$

его левая часть наз. производной Шварца функции $z(t)$ и обозначается символом $\{z, t\}$. Это уравнение использовал в своих исследованиях Г. Шварц [1].

Если $x_1(t)$, $x_2(t)$ — фундаментальная система решений линейного уравнения 2-го порядка

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0,\ p\in C^1,\ q\in C, \qquad (2)$$

то на любом интервале, где $x_2(t)\neq 0$, функция

$$z(t)=\frac{x_1(t)}{x_2(t)} \qquad (3)$$

удовлетворяет Ш. у. (1), где

$$I(t)=q(t)-\frac{1}{4}p^2(t)-\frac{1}{2}p'(t)$$

— инвариант линейного уравнения (2). Обратно, любое решение Ш. у. (1) может быть представлено в виде (3), где $x_1(t)$, $x_2(t)$ — нек-рые линейно независимые решения уравнения (2). Решения Ш. у. в комплексной области с рациональной правой частью тесно связаны с задачей описания функций, конформно отображающих верхнюю полуплоскость внутрь многоугольника, ограниченного конечным числом отрезков прямых и дуг окружностей.

Лит.: [1] Schwarz H., «J. reine und angew. Math.», 1873, Bd 75, S. 292—335; [2] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950.
Н. Х. Розов.

ШВАРЦА ФОРМУЛА — формула для *минимальной поверхности*, имеющая вид

$$\boldsymbol{r}(u, v)=\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{r}(t)+i\int[\boldsymbol{n}, d\boldsymbol{r}]\right\},$$

где $\boldsymbol{r}(u, v)$ — радиус-вектор минимальной поверхности F, $\mathrm{Re}\{\boldsymbol{r}(t)\}$ — радиус-вектор произвольной незамкнутой аналитической (относительно t) кривой L, лежащей на F, $\boldsymbol{n}(t)$ — единичная нормаль к F вдоль L (аналитически зависящая от t). После интегрирования параметр t заменяется на $t=u+iv$. Формула установлена Г. Шварцем (H. Schwarz, 1875); она дает в явном виде решение *Бёрнштейна задачи*.
И. Х. Сабитов.

ШВАРЦА ФУНКЦИЯ, функция Римана — Шварца, — аналитич. функция, реализующая конформное отображение треугольника, ограниченного дугами окружностей, на верхнюю полуплоскость (или на единичный круг) и при неограниченном аналитич. продолжении остающаяся однозначной. Ш. ф. являются *автоморфными функциями*, группа к-рых зависит от вида отображаемого треугольника. Требованию однозначности можно удовлетворить лишь в том случае, если углы треугольника равны π/ν_1, π/ν_2, π/ν_3, где ν_1, ν_2, ν_3 — нек-рые специально подобранные натуральные числа.

Если $1/\nu_1+1/\nu_2+1/\nu_3=1$, то получаются прямолинейные треугольники, для к-рых возможны только случаи: $\nu_1=\nu_2=2$, $\nu_3=\infty$ (полуполоса); $\nu_1=2$, $\nu_2=3$,

$\nu_3=6$; $\nu_1=2$, $\nu_2=\nu_3=4$; $\nu_1=\nu_2=\nu_3=3$. Во всех этих случаях Ш. ф. выражаются через тригонометрич. функции или через *Вейерштрасса эллиптические функции* и являются автоморфными функциями, группа к-рых есть группа движений евклидовой плоскости.

Если $1/\nu_1+1/\nu_2+1/\nu_3>1$, то возможны следующие случаи: $\nu_1=\nu_2=2$, ν_3 — любое; $\nu_1=2$, $\nu_2=\nu_3=3$; $\nu_1=2$, $\nu_2=3$, $\nu_3=4$; $\nu_1=2$, $\nu_2=3$, $\nu_3=5$. Во всех этих случаях Ш. ф. являются рациональными автоморфными функциями, группа к-рых есть конечная группа движений сферы. Вследствие связи этой группы с правильными многогранниками такие Ш.ф. наз. также полиэдральными функциями.

Наконец, если $1/\nu_1+1/\nu_2+1/\nu_3<1$, то возможно бесконечно много различных треугольников, т. к. числа ν_1, ν_2, ν_3 можно неограниченно увеличивать. При этом Ш. ф. суть автоморфные функции с непрерывной особой линией (окружностью или прямой). В частности, случаи $\nu_1=2$, $\nu_2=3$, $\nu_3=\infty$ и $\nu_1=\nu_2=\nu_3=\infty$ (круговой треугольник с нулевыми углами) приводят к *модулярным функциям* $J(z)$ и $\lambda(z)$ соответственно. Ш. ф. изучались Г. Шварцем [1].

Лит.: [1] Schwarz H., «J. reine und angew. Math.», 1873, Bd 75, S. 292—335; [2] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950; [3] Форд Л. Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.— Л., 1936. *Е. Д. Соломенцев.*

ШВАРЦА ЯДРО в круге $|z|<1$ — функция

$$T(z;\ \zeta)=\frac{\zeta+z}{\zeta-z},\quad \zeta=e^{i\sigma},\ 0\leqslant\pi\leqslant 2\pi.$$

Пусть D — конечная односвязная или многосвязная область с границей Γ, $G(z;\ \zeta)$ — функция Грина для оператора Лапласа в D, а действительная функция $H(z;\ \zeta)$ — сопряженная с $G(z;\ \zeta)$. Тогда функция $M(z;\ \zeta)=G(z;\ \zeta)+iH(z;\ \zeta)$ наз. комплексной функцией Грина области D. Функция $M(z;\ \zeta)$ — аналитическая, но многозначная (если D — многосвязна) функция от z и однозначная неаналитическая функция ζ. Функция

$$T(z;\ \zeta)=\frac{\partial M(z;\ \zeta)}{\partial\nu},$$

где ν — направление внутренней нормали в точке $\zeta\in\Gamma$, наз. ядром Шварца области D.

Пусть $F(z)=u(z)+iv(z)$ — аналитич. функция, не имеющая в D особых точек, u — однозначная и непрерывная в $D\cup\Gamma$. Тогда справедлива формула

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma u(\zeta)\ T(z;\ \zeta)\ d\sigma+iv(a),$$

где $a\in D$ — фиксированная точка, $v(a)$ — значение в a одной из ветвей функции $v(z)$.

Лит.: [1] Интегральные уравнения, М., 1968; [2] Михлин С. Г., Интегральные уравнения..., 2 изд., М.— Л., 1949. *Б. В. Хведелидзе.*

ШВАРЦШИЛЬДА МЕТРИКА — метрика четырехмерного псевдориманова пространства, к-рая может быть приведена к виду

$$ds^2=-\frac{1}{1-r/r_g}\,dr^2-r^2\,(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)+$$
$$+\left(1-r_g/r\right)c^2\,dt^2,\quad r\neq r_g,\ r\neq 0,$$

где r_g и c — константы. Ш. м. состоит из двух связных компонент: первая из них ($r>r_g$) наз. внешней Ш. м., вторая ($r<r_g$) — внутренней Ш. м. В общей теории относительности Ш. м. служит для описания сферически симметричного поля изолированного точечного тела. В этом случае координаты интерпретируются как время, измеренное по часам бесконечно удаленного наблюдателя, r — как расстояние до объекта, θ и φ — как угловые переменные, c — скорость света в вакууме, $r_g=\frac{2\varkappa M}{c^2}$ — так наз. гравитационный радиус

($\mathfrak{G}$ — постоянная тяготения, M — масса тела). Ш. м. не является геодезически полной. Неполными являются геодезические, к-рые приближаются к точкам $r=0$ или $r=r_g$. В связи с этим принято говорить, что Ш.м. имеет координатные сингулярности при $r=0$ и $r=r_g$. В первом случае сингулярность связана с тем, что вблизи точечного источника величины, характеризующие гравитационное поле, неограниченно возрастают. Координатная сингулярность при $r=0$ является *истинной сингулярностью* (или просто сингулярностью), т. е. не существует четырехмерного псевдориманова пространства N сигнатуры (1, 3) такого, что в него можно вложить Ш. м. так, что предельные точки последовательностей, r-координаты к-рых стремятся к нулю, были бы внутренними точками пространства N. При $r=r_g$ координатная сингулярность не является истинной. Известна так наз. *метрика Крускала*, являющаяся расширением Ш. м., в к-рой точки с $r=r_g$ являются регулярными. Метрика Крускала не допускает расширения без нарушения сигнатуры или регулярности; она имеет более сложное строение, нежели Ш. м. Ряд особенностей этого строения пока не имеет ясного физич. истолкования.

Важной особенностью Ш. м. является то, что при $r<r_g$ всевозможные траектории пробных частиц и лучей света идут в направлении уменьшения r. Другими словами, частица или луч света, проникшие за так наз. *шварцшильдовскую сферу* ($r=r_g$), уже не могут выйти обратно. С этой особенностью Ш. м. связано представление о гравитационном коллапсе массивных звезд и образовании *черных дыр*, т. е. самоизолировавшихся тел, к-рые влияют на остальные тела лишь посредством гравитационного поля. Для описания черных дыр используется также обобщение Ш. м. — *метрика Керра*. Ш. м. может служить и для описания катастрофич. взрывов — так наз. *белых дыр*.

Важным приложением Ш. м. является применение ее для вычисления эффектов общей теории относительности в Солнечной системе. В этом случае гравитационное поле является слабым, т. к. радиусы Солнца и Земли являются много больше их гравитационных радиусов, равных, соответственно, 3 км и 0,4 см. Для описания гравитационного поля внутри небесных тел Ш. м. непригодна.

Ш. м. предложена К. Шварцшильдом (K. Schwarzschild) в 1916 как решение уравнений Эйнштейна в случае сферически симметричного статического гравитационного поля при правой части уравнений Эйнштейна, равной нулю всюду, кроме точки начала координат.

Лит.: [1] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Релятивистская астрофизика, М., 1967; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973.

Д. Д. Соколов.

ШВАРЦШИЛЬДА ПОЛЕ — гравитационное поле изолированного точечного тела, пространственно-временные свойства к-рого определяются *Шварцшильда метрикой*.

Д. Д. Соколов.

ШЕВАЛЛЕ ГРУППА — линейная алгебраич. группа над нек-рым полем, связанная с полупростой комплексной алгеброй Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — *Ли полупростая алгебра* над $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана, Σ — система корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subset \Sigma$ — система простых корней, $\{H_{\alpha_i} (1 \leqslant i \leqslant k),\ X_\alpha (\alpha \in \Sigma)\}$ — базис Шевалле алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ — его линейная оболочка над $\mathbb{Z}$. И пусть φ — точное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в конечномерном векторном пространстве V. Оказывается, что в V существует решетка (т. е. свободная абелева подгруппа, базис к-рой является базисом пространства V), инвариантная относительно всех операторов

$\frac{\varphi(X_\alpha)^m}{m!}$ ($\alpha \in \Sigma$, m — натуральное число). Если k — произвольное поле и $V^k = M \otimes k$, то определены гомоморфизмы x_α: $k \longrightarrow \mathrm{GL}(V^k)$, $\alpha \in \Sigma$, заданные формулами

$$x_\alpha(t) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m \frac{\varphi(X_\alpha)^m}{m!}.$$

Подгруппы $\mathfrak{X}_\alpha = \mathrm{Im}\, x_\alpha$, $\alpha \in \Sigma$, порождают в $\mathrm{GL}(V^k)$ нек-рую подгруппу G_k, к-рая и наз. группой Шевалле, связанной с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, представлением φ, полем k. В случае, когда $\varphi = \mathrm{ad}$ (присоединенное представление), Ш. г. были определены К. Шевалле (C. Chevalley) в 1955 (см. [1]).

Если K — алгебраически замкнутое поле, содержащее k, то Ш. г. G_K есть связная полупростая линейная алгебраич. группа над K, определенная и разложимая над простым подполем $k_0 \subseteq k$. Ее алгебра Ли изоморфна $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \otimes K$. Группа G_k является коммутантом группы $G_K(k)$ точек группы G_K, рациональных над k. Любая связная полупростая линейная алгебраич. группа над K изоморфна одной из Ш. г. Алгебраич. группы G_K (и G_k как абстрактные группы) зависят лишь от решетки $\Gamma_\varphi \subset \mathfrak{h}^*$, порожденной весами представления φ. Если Γ_φ совпадает с решеткой корней Γ_0, то G_K наз. присоединенной группой, а если $\Gamma_\varphi = \Gamma_1$ (решетка весов, см. *Ли полупростая группа*), то G_K наз. универсальной, или односвязной, группой. Если G_K универсальна, то $G_k = G_K(k)$.

Ш. г. G_K всегда совпадает со своим коммутантом. Центр группы G_k конечен. Напр., центр Z универсальной группы G_k изоморфен $\mathrm{Hom}(\Gamma_1/\Gamma_0, k^*)$, а соответствующая присоединенная группа изоморфна G_k/Z и имеет тривиальный центр.

Если алгебра $\mathfrak{g}$ проста, то присоединенная Ш. г. G_k проста, за исключением следующих случаев: $|k| = 2$, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типов A_1, B_2, G_2; $|k| = 3$, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа A_1. Другие серии простых групп можно получить, рассматривая подгруппы неподвижных точек нек-рых автоморфизмов конечного порядка Ш. г. (т. н. скрученные группы).

Если поле k конечно, то порядок универсальной группы G_k вычисляется по формуле

$$|G_k| = q^N \prod_{i=1}^{r} (q^{d_i} - 1),$$

где $q = |k|$, d_i ($i = 1, \ldots, r$) — показатели алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. степени свободных образующих алгебры многочленов на $\mathfrak{h}$, инвариантных относительно *Вейля группы*, $N = \sum_{i=1}^{r} (d_i - 1)$ — число положительных корней.

Имеется развитая теория рациональных линейных представлений Ш. г. G_k над бесконечным полем k, сводящаяся к случаю алгебраически замкнутого поля, а в последнем случае совпадающая с теорией *рациональных представлений* полупростых алгебраич. групп. Если $\mathfrak{g}$ проста, G_k — универсальная Ш. г. над бесконечным полем k и σ — нетривиальное неприводимое конечномерное представление группы G_k (как абстрактной группы) над алгебраически замкнутым полем K, то существуют такой конечный набор вложений φ_i: $k \longrightarrow K$ и такой набор рациональных представлений ρ_i группы $G_{\varphi_i(k)}$, что $\sigma = \bigotimes_i \rho_i \circ \varphi_i$. По поводу представлений Ш. г. см. также [2], [3], [5].

Лит.: [1] Шевалле К., «Математика», 1958, т. 2, № 1, с. 3—53; [2] Стейнберг Р., Лекции о группах Шевалле, пер. с англ., М., 1975; [3] Семинар по алгебраическим группам, пер. с англ., М., 1973; [4] Humphreys J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, N. Y.— Hdlb.— B., 1972; [5] его же, Ordinary and modular representations of Chevalley groups, B.— Hdlb.— N. Y., 1976. *А. Л. Онищик.*

ШЕННОНА ТЕОРЕМА — теорема, устанавливающая условия, при к-рых возможна или невозможна пере-

дача сообщений, вырабатываемых данным *источником сообщений*, по данному *каналу связи* и при заданных условиях точности воспроизведения сообщений (см. *Сообщений точность воспроизведения*). Имеются различные формулировки Ш. т. (см. *Информации передача* и лит. [1] — [4] при этой статье).

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ШЁНФЛИСА ГИПОТЕЗА: общая граница двух плоских областей всегда разложима. При этом пространство X наз. р а з л о ж и м ы м, если оно связно и допускает представление в виде объединения двух замкнутых связных подмножеств, отличных от X. Эта гипотеза была высказана А. Шёнфлисом (A. Schoenflies) в 1908 и опровергнута Л. Брауэром (L. Brouwer) в 1910, открывшим н е р а з л о ж и м ы е к о н т и н у у м ы, т. е. связные компакты, к-рые нельзя представить в виде объединения двух замкнутых собственных связных подмножеств. Для каждого конечного или счетного $k \geqslant 2$ построено k плоских областей, имеющих общую границу, являющуюся неразложимым континуумом.

Лит.: [1] К у р а т о в с к и й К., Топология, пер. с англ., т. 2, М., 1969.

Б. А. Ефимов.

ШЕПЛИ ВЕКТОР — вектор-функция $\varphi(v) = (\varphi_1(v), \ldots, \varphi_n(v))$, заданная на множестве характеристич. функций игр n лиц и удовлетворяющая следующим аксиомам: 1) (э ф ф е к т и в н о с т ь) если коалиция T такова, что для любой коалиции S выполняется равенство $v(S) = v(S \cap T)$, то $\sum_{i \in T} \varphi_i(v) = v(T)$; 2) (с и м м е т р и ч н о с т ь) если π — перестановка множества $J = \{1, \ldots, n\}$ и для любой коалиции S имеет место $v'(\pi S) = v(S)$, то $\varphi_{\pi i}(v') = \varphi_i(v)$; 3) (л и н е й н о с т ь) $\varphi_i(v+u) = \varphi_i(v) + \varphi_i(u)$. Эти аксиомы были введены Л. Шепли [1] для аксиоматич. определения ожидаемого выигрыша игрока в *кооперативной игре*. Было показано, что аксиомам 1) — 3) удовлетворяет единственная вектор-функция

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \ni i} \frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!} [v(S) - v(S - \{i\})].$$

Лит.: [1] S h a p l e y L., в кн.: Contributions to the Theory of Games, v. 2, Princeton (N. J.), 1953, p. 307—17.

А. И. Соболев.

ШЕППАРДА ПОПРАВКИ для м о м е н т о в — поправки на дискретизацию реализаций непрерывных случайных величин, применяемые с целью уменьшения систематич. ошибок в задаче оценивания моментов непрерывных случайных величин при заданной системе округлений.

Впервые такие поправки были предложены У. Шеппардом [1]. Пусть X — непрерывно распределенная случайная величина, плотность вероятности к-рой $p(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, имеет всюду непрерывную на $\mathbb{R}^1$ производную $p^{(s)}(x)$ порядка s такую, что

$$p^{(s)}(x) = O(|x|^{-1-\delta}) \text{ при } x \to \infty$$

для нек-рого $\delta > 0$, и пусть существует момент $\alpha_k = \mathsf{E}X^k$. Далее, пусть задана система округлений результатов наблюдений (т. е. заданы начало отсчета x_0 и шаг h, $h > 0$), выбор к-рой приводит к тому, что вместо реализаций исходной непрерывной случайной величины X в действительности наблюдаются реализации $x_m = x_0 + mh$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ дискретной случайной величины

$$Y = x_0 + h\left[\frac{X - x_0}{h} + \frac{1}{2}\right],$$

где $[a]$ — целая часть числа a. Моменты $a_l = \mathsf{E}Y^l$, $l = 1,$

2, ..., k, случайной величины Y вычисляются по формуле

$$a_i = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m^i P\{Y = x_m\} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m^i \int_{x_m - h/2}^{x_m + h/2} p(x)\, dx.$$

Вообще говоря, $a_i \neq \alpha_i$. В связи с этим возникает вопрос: можно ли подправить моменты $a_1, a_2, \ldots, a_k$ так, чтобы они давали «хорошие» приближения для моментов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$? Ш. п. дают положительный ответ на этот вопрос.

Пусть $g(t)$ — характеристич. функция случайной величины X, $f(t)$ — характеристич. функция случайной величины Y, и пусть

$$\varphi(t) = \mathsf{E} e^{it\eta} = \frac{2}{th} \sin \frac{th}{2}$$

— характеристич. функция случайной величины η, к-рая равномерно распределена на интервале $\left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$ и стохастически независима от X. В этих условиях при малом h

$$f(t) = g(t)\varphi(t) + O(h^{s-1}),$$

откуда следует, что моменты дискретной случайной величины Y совпадают с точностью до $O(h^{s-1})$ с моментами случайной величины $X + \eta$ и, следовательно, с точностью до $O(h^{s-1})$ имеют место следующие равенства

$$\alpha_1 = a_1, \qquad \alpha_4 = a_4 - \frac{1}{2} a_2 h^2 + \frac{7}{240} h^4,$$

$$\alpha_2 = a_2 - \frac{1}{12} h^2, \quad \alpha_5 = a_5 - \frac{5}{6} a_3 h^2 + \frac{7}{48} a_1 h^4,$$

$$\alpha_3 = a_3 - \frac{1}{4} a_1 h^2,$$

$$\alpha_6 = a_6 - \frac{5}{4} a_4 h^2 + \frac{7}{16} a_2 h^4 - \frac{31}{1344} h^6, \ldots,$$

к-рые и содержат т. н. Ш. п. к моментам $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Лит.: [1] Sheppard W. F., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1898, v. 29, p. 353–80; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967; [4] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960.

М. С. Никулин.

ШЕРКА ПОВЕРХНОСТЬ — минимальная поверхность (м. п.), найденная Х. Шерком (H. Scherk, 1834). Она определяется уравнением $z = \ln \frac{\cos y}{\cos x}$ и является единственной м. п., представляемой как *переноса поверхность* вида $z = f(x) + g(y)$. Ш. п. и ее модификации служат для построения вспомогательных функций, позволяющих находить примеры неразрешимости задачи Дирихле для уравнения Эйлера — Лагранжа м. п. над невыпуклыми областями.

Ш. п. обладает рядом интересных свойств: она — полная поверхность бесконечного рода, содержащая счетное число прямых; универсальная накрывающая к ней дает пример полной м. п. конформно-гиперболического типа; ее сферический образ не содержит ровно четыре точки: $\zeta = \pm 1$ и $\zeta = \pm i$. Последнее свойство Ш. п. усматривается из ее представления через *Вейерштрасса формулы* с $f(w) = \frac{2}{1 - w^4}$, $g(w) = w$, где w изменяется в плоскости с четырьмя исключенными точками ± 1 и $\pm i$. По аналогии с этим представлением строятся обобщенные Ш. п. с

$$f(w) = \left[\prod_{m=1}^{k-1} (w - w_m)\right]^{-1}, \quad k \leqslant 4, \quad g(w) = w,$$

являющиеся полными м. п., нормали к к-рым «упускают» ровно k, $1 \leqslant k \leqslant 4$, любых заранее заданных направления. Существование таких м. п. интересно в связи

с гипотезой об отсутствии полных м. п., у к-рых нормали «упускали бы» более четырех направлений. Эта гипотеза доказана (1984) для числа направлений, большего семи.

И. Х. Сабитов.

ШЕФФЕРА ШТРИХ — *логическая операция*, обычно обозначаемая $|$, к-рая задается следующей *истинностной таблицей*:

A	B	$A \mid B$
И	И	Л
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	И

Таким образом, высказывание $A|B$ означает, что A и B несовместны, т. е. не являются истинными одновременно. Через Ш. ш. выражаются все другие логич. операции. Напр., высказывание $\neg A$ (*отрицание* A) эквивалентно высказыванию $A|A$; *дизъюнкция* $A \vee B$ высказываний A и B выражается так:

$$(A \mid A) \mid (B \mid B).$$

Конъюнкция $A\&B$ и *импликация* $A \to B$ выражаются соответственно как $(A|B)|(A|B)$ и $A|(B|B)$. Ш. ш. был введен в рассмотрение Г. Шеффером [1].

Лит.: [1] Sheffer H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1913, v. 14, p. 481—88. *В. Е. Плиско.*

ШЛЕФЛИ ИНТЕГРАЛ — 1) Ш. и.— интегральное представление *Бесселя функции* для любых значений n:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta)\, d\theta - \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-n\theta - z\operatorname{sh}\theta}\, d\theta, \qquad (*)$$

когда $\operatorname{Re} z > 0$. Если n — целое, то формула $(*)$ приводится к виду

$$J_n = \frac{z^n}{2^{n+1}\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} t^{-n-1}\exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) dt.$$

Впервые формула $(*)$ приведена Л. Шлефли [1].

2) Ш. и.— интегральное представление *Лежандра многочлена*

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^n}{2^n (t-z)^{n+1}}\, dt,$$

где C — контур, обходящий вокруг точки z один раз против часовой стрелки. Впервые представление дано Л. Шлефли [2].

Лит.: [1] Schläfli L., «Math. Ann.», 1871, Bd 3, H. 1, S. 134—49; [2] его же, Ueber die zwei Heine'schen Kugelfunktionen, B., 1881; [3] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963; [4] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963. *А. Б. Иванов.*

ШМИДТА ГРУППА — конечная нильпотентная группа, все собственные подгруппы к-рой нильпотентны. Ш. г. является разрешимой группой порядка $p^{\alpha}q^{\beta}$, где p и q — различные простые числа. В любой конечной нильпотентной группе существуют подгруппы, являющиеся Ш. г. Введены О. Ю. Шмидтом (1924).

Лит.: [1] Шмидт О. Ю., Избр. труды, М., 1959, с. 221—27. *Н. Н. Вильямс.*

ШНИРЕЛЬМАНА МЕТОД — метод сложения последовательностей целых неотрицательных чисел; создан Л. Г. Шнирельманом в 1930. Пусть $\nu(x)$ — количество элементов последовательности, не превосходящих x, $\neq 0$. По аналогии с понятием меры множества

$$\alpha = \inf_{n=1,2,\ldots} \frac{\nu(n)}{n}$$

есть плотность последовательности. Суммой последовательностей A и B наз. последовательность C, элементы к-рой $c = a + b$, где $a \in A$, $b \in B$.

Теорема Шнирельмана 1): если α, β — плотности слагаемых, то плотность суммы $\gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta$. Если при сложении последовательности самой с собой конечное число раз получается весь натуральный ряд, то исходная последовательность наз. базисом. Тогда любое натуральное число представимо суммой ограниченного числа слагаемых данной последовательности. Последовательность положительной плотности есть базис.

Теорема Шнирельмана 2): последовательность $\mathcal{P}+\mathcal{P}$ имеет положительную плотность, где $\mathcal{P}$ — последовательность, состоящая из единицы и всех простых чисел; следовательно, $\mathcal{P}$ — базис натурального ряда, то есть любое натуральное число $n\geqslant 2$ представимо суммой ограниченного числа простых чисел. Для количества слагаемых s (абсолютная постоянная Шнирельмана) получено $s\leqslant 19$. В представлении достаточно большого $n\geqslant n_0$ суммой простых чисел для количества слагаемых S (постоянная Шнирельмана) Ш. м. с использованием аналитич. методов дает $S\leqslant 6$. Однако более мощным *тригонометрических сумм методом* И. М. Виноградова получена оценка $S\leqslant 4$.

Ш. м. применен для доказательства того, что последовательность, состоящая из единицы и чисел вида $p+a^m$, где p — простое, $a\geqslant 2$ натуральное, $m=1, 2, \ldots$, есть базис натурального ряда (Н. П. Романов, 1934).

Лит.: [1] Шнирельман Л. Г., «Успехи матем. наук», 1940, в. 7, с. 7—46; [2] Хинчин А. Я., Три жемчужины теории чисел, 2 изд., М.— Л., 1948; [3] Прахар К., Распределение простых чиеел, пер. с нем., М., 1967. *Н. И. Климов.*

ШОКЕ СИМПЛЕКС — непустое компактное выпуклое множество X в *локально выпуклом пространстве* E, обладающее следующим свойством: при вложении E в качестве гиперплоскости $E\times 1$ в пространство $E\times\mathbb{R}$ проектирующий конус

$$\tilde{X}=\{\alpha x\in E\times\mathbb{R}\mid x\in X\}\subset E\times 1,\ \alpha\geqslant 0\}$$

множества X превращает $E\times\mathbb{R}$ в частично упорядоченное пространство, для к-рого пространство разностей $\tilde{Y}-\tilde{X}$ является *решеткой*. В случае конечномерного E Ш. с. есть обычный симплекс с числом вершин $\dim E+1$. Существует ряд эквивалентных определений Ш. с. (см. [1]). Одно из них сводится к требованию, чтобы пересечение $\tilde{X}$ с любым транслятом $\tilde{X}$ снова было транслятом $\tilde{X}$.

Когда дополнительно к наложенным условиям E сепарабельно, а X метризуемо, то для того, чтобы X было Ш. с., необходимо и достаточно, чтобы каждая точка $x\in X$ была центром тяжести единственной меры, сосредоточенной на крайних точках множества X. Понятие Ш. с. существенно при изучении единственности интегральных представлений функций (см. [1], [2]); оно введено Г. Шоке (G. Choke).

Лит.: [1] Фелпс Р., Лекции о теоремах Шоке, пер. с англ., М., 1968; [2] Alfsen E., Compact convex sets and boundary integrals, B.— N. Y., 1971. *В. А. Залгаллер.*

ШОТТКИ ТЕОРЕМА: если функция

$$w=f(z)=c_0+c_1z+\ldots \qquad (*)$$

регулярная аналитическая в круге $D=\{z:|z|<R\}$ и не принимает в D нек-рых конечных значений a_1, a_2, то в любом круге $|z|\leqslant R_1$, $0<R_1<R$, модуль $|f(z)|$ ограничен числом $M(a_1, a_2, c_0, R_1)$, зависящим только от a_1, a_2, c_0, R_1 (см. [1]). Более законченную формулировку получают, объединяя обобщенную Ш. т. и теорему Ландау при произвольном числе $q\geqslant 2$ выпускаемых значений. Пусть функция $(*)$ не принимает нек-рых конечных значений $a_1, \ldots, a_q$, $q\geqslant 2$. Тогда, если $c_1\neq 0$, то радиус R ограничен сверху числом, зависящим только от $a_1, \ldots, a_q$, c_0, c_1 (теорема Ландау). Кроме того, в круге $|z|\leqslant R_1$, $0<R_1<R$, модуль $|f(z)|$

ограничен числом $M(a_1, \ldots, a_q, c_0, R_1)$, зависящим только от $a_1, \ldots, a_q, c_0, R_1$ (теорема Шоттки).

Геометрически Ш. т. означает, что сферич. расстояние (т. е. расстояние на *Римана сфере*) образа круга $|z| \leqslant R_1$ до точек $a_1, \ldots, a_q$ не меньше числа $d(a_1, \ldots, a_q, c_0, R_1)$, зависящего только от $a_1, \ldots, a_q, c_0, R_1$. Ш. т.— один из классич. результатов теории функций комплексного переменного типа *искажения теорем*.

Лит.: [1] Schottky F., «Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.», 1904, 2 H.|Bd, S. 1244—62; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1—2, М., 1962.

Е. Д. Соломенцев.

ШПЕККЕРОВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — алгорифмическая, монотонная, ограниченная последовательность рациональных чисел, не являющаяся конструктивно (алгорифмически) фундаментальной. Соответственно, числовой ряд с алгорифмически заданным неотрицательным рациональным общим членом и ограниченными в совокупности частичными суммами, не являющийся конструктивно сходящимся в себе, наз. шпеккеровым рядом.

Первый пример такой последовательности (ряда) был указан Э. Шпеккером [1]. Более точно, для Ш. п. α невозможна общерекурсивная функция β такая, что при любых i, j, n таких, что $i, j \geqslant \beta(n)$, выполняется неравенство

$$|\alpha(i) - \alpha(j)| < 2^{-n}.$$

Существование Ш. п. является фактом принципиального значения как для конструктивной математики, так и для традиционного математич. анализа. Поскольку Ш. п. не сходится ни к какому конструктивному (вычислимому) действительному числу и из нее нельзя выбрать подпоследовательности с этим свойством, то ее можно рассматривать в качестве контрпримера, опровергающего для наиболее естественной алгорифмич. концепции конструктивного континуума такие фундаментальные принципы, как теорема Вейерштрасса о существовании предела монотонной ограниченной последовательности, теорема Больцано — Вейерштрасса о выборе сходящейся подпоследовательности, теорема о существовании точных границ ограниченных числовых множеств. С точки зрения традиционной математики результат Э. Шпеккера показывает, что объекты, существование к-рых утверждается в упомянутых теоремах, могут иметь довольно сложную природу даже при очень простых исходных ситуациях. Теорема Шпеккера может рассматриваться как первый существенный шаг в исследовании вычислительной и дескриптивной сложности этих объектов.

См. также *Конструктивная математика*, *Конструктивный анализ*.

Лит.: [1] Specker E., «J. Symbol. Log.», 1949, v. 14, p. 145—58; [2] Кушнер Б. А., Лекции по конструктивному математическому анализу, М., 1973.

Б. А. Кушнер.

ШПЕРНЕРА ЛЕММА: если покрытие замкнутого n-мерного симплекса T^n состоит из $n+1$ замкнутых множеств $A_0, A_1, \ldots, A_n$, поставленных в соответствие вершинам $a_0, a_1, \ldots, a_n$ симплекса T^n таким образом, что каждая грань $T_r = (a_{i_0}, \ldots, a_{i_r})$ этого симплекса покрыта множествами $A_{i_0}, \ldots, A_{i_r}$, соответствующими ее вершинам, то существует точка, принадлежащая всем множествам $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Установлена Э. Шпернером (см. [1]). Из Ш. л. следует, что *Лебега размерность* пространства $\mathbb{R}^n$ есть n. Ш. л. используется также для доказательства *Брауэра теорем* о неподвижной точке и об инвариантности области.

Лит.: [1] Sperner E., «Abh. Math. Sem. Hamb.», 1928, Bd 6, S. 265—72; [2] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности..., М., 1973.

И. Г. Кошевникова.

ШРЁДИНГЕРА ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — одно из основных возможных (наряду с *Гейзенберга представлением* и *взаимодействия представлением*) эквивалентных представлений зависимости от времени t операторов A и волновых функций ψ в квантовой механике и квантовой теории поля. В Ш. п. операторы A_S, соответствующие физич. динамич. величинам, не зависят от времени t, поэтому решение *Шрёдингера уравнения*

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H\psi(t) \qquad (1)$$

можно записать с помощью не зависящей от t *Гамильтона функции* H формально в виде

$$\psi(t) \equiv \psi_S(t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\psi(0), \qquad (2)$$

где $\psi(0)$ не зависит от времени, а волновая функция в Ш. п. зависит от t и содержит всю информацию об изменении состояния системы с течением t. Среднее значение оператора A_S в Ш. п.

$$\overline{A} \equiv \overline{A}_S = \psi_S^*(t) A_S \psi_S(t) = \\ = \psi^*(0) e^{+i\frac{H}{\hbar}t} A_S e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\psi(0) \qquad (3)$$

зависит от t вследствие зависимости от t волновых функций $\psi_S(t)$. $\overline{A}$ можно также понимать как среднее значение оператора A_H, зависящего от t, по волновым функциям ψ_H, не зависящим от t:

$$A_H(t) = e^{+i\frac{H}{\hbar}t} A_S e^{-i\frac{H}{\hbar}t}; \quad \psi_H = \psi(0) = e^{i\frac{H}{\hbar}t}\psi_S(t), \qquad (4)$$

т. е. как среднее значение оператора в представлении Гейзенберга. Свойство инвариантности средних значений, к-рые должны быть наблюдаемыми и иметь тем самым физич. смысл, относительно унитарных преобразований типа (4) означает эквивалентность Ш. п. и представлений Гейзенберга и взаимодействия.

Ш. п. названо по имени Э. Шрёдингера (E. Schrödinger), к-рый ввел его в 1926, формулируя в квантовой механике уравнение, получившее впоследствии название уравнения Шрёдингера. *В. Д. Кукин.*

ШРЁДИНГЕРА УРАВНЕНИЕ — основное уравнение квантовой механики, определяющее вместе с соответствующими дополнительными условиями волновую функцию $\psi(t, q)$, характеризующую состояние и микроскопич. свойства квантовой системы. Для нерелятивистской системы частиц без спина сформулировано Э. Шрёдингером (E. Schrödinger, 1926). Оно имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, q) = \hat{H}\psi(t, q),$$

где $H = \hat{H}(\hat{p}, \hat{r})$ — оператор Гамильтона, образованный по общему правилу: в классич. функции Гамильтона $H(p, r)$ импульсы частиц p и их координаты r заменены на операторы, имеющие, в частности, в координатном ($q = \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N$) и импульсном ($q = \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N$) представлениях соответствующий вид

$$\hat{\boldsymbol{p}}_i = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i}, \quad \hat{\boldsymbol{r}}_i = \hat{\boldsymbol{r}}_i; \quad \hat{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{p}_i, \quad \hat{\boldsymbol{r}}_i = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_i};$$

$$i = 1, \ldots, N.$$

Для заряженных частиц в электромагнитном поле, характеризуемом векторным потенциалом $\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{r})$, величина $\boldsymbol{p}$ заменяется на $\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{r})$. В этих представлениях Ш. у. представляет собой дифференциальное уравнение с частными производными, напр. для частицы в поле $U(\boldsymbol{r})$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, \boldsymbol{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(t, \boldsymbol{r}) + U(\boldsymbol{r})\psi(t, \boldsymbol{r}).$$

Возможны дискретные представления, в к-рых ψ-функция многокомпонентна, а оператор $\hat{H}$ имеет вид матрицы. Если волновая функция определена в пространстве чисел заполнения, то оператор $\hat{H}$ выражается с помощью определенных комбинаций операторов рождения и уничтожения (представление вторичного квантования).

Обобщение Ш. у. на случай нерелятивистской частицы со спином (двухкомпонентная функция $\psi(t, r)$) наз. уравнением Паули (1927), на случай релятивистской частицы со спином $^1/_2$ (четырехкомпонентная ψ-функция) — уравнением Дирака (1928), на случай релятивистской бесспиновой частицы уравнением Клейна — Гордона (1926), со спином 1 (ψ-функция — вектор) — уравнением Прока (1936) и т. д.

Решение Ш. у. определяется в классе функций, удовлетворяющих условию нормировки $(\psi^*, \psi)=1$ при всех значениях t, где скобки означают интегрирование или суммирование по всем значениям переменных q. Для нахождения решения необходимо сформулировать начальные и граничные условия, соответствующие характеру рассматриваемой задачи. Наиболее характерные типы таких задач:

1) Стационарное Ш. у. и определение допустимых значений энергии системы. Полагая $\psi(t, q)=\varphi(q)\exp(-iEt/\hbar)$ и требуя в соответствии с условием нормировки и условием отсутствия потоков на бесконечности обращения в нуль волновой функции и ее градиентов при $|r|\to\infty$, приходят к уравнению на собственные значения E_n и собственные функции φ_n оператора Гамильтона:

$$E_n\varphi_n(q)=\hat{H}\varphi_n(q).$$

Характерные примеры точного решения этой проблемы: собственные функции и уровни энергии для гармонич. осциллятора, атома водорода и т. д.

2) Квантовомеханич. задача рассеяния. Ш. у. решается с граничными условиями, соответствующими на большом расстоянии от центра рассеяния (описываемого потенциалом $U(r)$) падающей на него плоской и расходящейся от него сферич. волнам. С учетом такого граничного условия Ш. у. можно записать в виде интегрального уравнения, первая итерация к-рого по члену, содержащему $U(r)$, соответствует т. н. борновскому приближению. Это уравнение можно представить в виде формального решения, к-рое называют также уравнением Липпмана — Швингера.

3) Случай, когда гамильтониан системы зависит от времени, $H=H_0(p, r)+U(t, p, r)$, обычно рассматривается в рамках временной теории возмущений. Это — теория квантовых переходов, определение реакции системы на внешнее возмущение (динамич. восприимчивость) и характеристик релаксационных процессов.

Для решения Ш. у. обычно используют приближенные методы, регулярные (различного типа теории возмущений), вариационные и т. д.

Лит.: [1] Давыдов А. С., Квантовая механика, М., 1973; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 3 изд., М., 1974; [3] Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Квантовая механика, М., 1979.

И. А. Квасников.

ШРЕЙЕРА СИСТЕМА — непустое подмножество свободной группы F с множеством образующих S, удовлетворяющее такому условию. Пусть элемент $g\neq 1$, принадлежащий Ш. с., представлен в виде редуцированного слова от образующих группы:

$$g=S_1^{n_1}\dots S_k^{n_k},$$

и пусть

$$g' = \begin{cases} gS_k, & n_k < 0, \\ gS_k^{-1}, & n_k > 0. \end{cases}$$

Тогда требуется, чтобы элемент g также принадлежал этой системе (элемент g' можно представлять себе как редуцированное слово, полученное из g зачеркиванием его последней буквы). Элемент 1 принадлежит каждой Ш. с.

Введена О. Шрейером (O. Schreier) в 20-х гг., см. [1].

Лит.: [1] Масси У., Столлингс Дж., Алгебраическая топология. Введение, пер. с англ., М., 1977.

М. И. Войцеховский.

ШТЕЙНА МНОГООБРАЗИЕ, голоморфно полное многообразие, — паракомпактное комплексное *аналитическое многообразие* M, обладающее следующими свойствами:

1) для любого компакта $K \subset M$ множество

$$\{x \in X \mid | f(x) | \leqslant \sup_{z \in K} | f(z) | \ (f \in \mathcal{O}(M))\},$$

где $\mathcal{O}(M)$ — алгебра голоморфных функций на M, компактно (голоморфная выпуклость);

2) для любых двух различных точек x, $y \in M$ существует такая функция $f \in \mathcal{O}(M)$, что $f(x) \neq f(y)$ (голоморфная отделимость);

3) в окрестности любой точки существует голоморфная карта, координатные функции к-рой принадлежат $\mathcal{O}(M)$.

Условие голоморфной выпуклости можно заменить следующим: для любой последовательности точек $\{x_n \mid n = 1, 2, \ldots\} \subset M$, не имеющей предельных точек, существует такая функция $f \in \mathcal{O}(M)$, что $\sup_n | f(x_n) | = \infty$.

Класс Ш. м. был введен в рассмотрение К. Штейном [1], как естественное обобщение *голоморфности областей* в $\mathbb{C}^n$. Всякое замкнутое аналитич. подмногообразие в $\mathbb{C}^n$ является Ш. м.; обратно, любое n-мерное Ш. м. допускает собственное голоморфное вложение в $\mathbb{C}^{2n}$. Всякая некомпактная риманова поверхность является Ш. м. Непосредственным обобщением Ш. м. являются *Штейна пространства.*

Лит.: [1] Stein K., «Math. Ann.», 1951, Bd 123, S. 201—22. См. также лит. при статье *Штейна пространство.*

А. Л. Онищик.

ШТЕЙНА ПРОСТРАНСТВО, голоморфно полное пространство, — паракомпактное комплексное аналитич. пространство $(X, \mathcal{O})$, обладающее следующими свойствами:

1) любое компактное аналитич. подмножество в X конечно;

2) любой компакт $K \subset X$ допускает такую открытую окрестность W в X, что множество

$$\{x \in W \mid | f(x) | \leqslant \sup_{z \in K} | f(z) | \quad \text{для всех } f \in \mathcal{O}(X)\}$$

компактно (слабая голоморфная выпуклость).

Комплексное многообразие M тогда и только тогда является Ш. п., когда M — *Штейна многообразие.* Комплексное пространство является Ш. п. тогда и только тогда, когда этим свойством обладает его редукция. Всякое голоморфно выпуклое открытое подпространство в Ш. п. является Ш. п. Приведенное комплексное пространство штейново тогда и только тогда, когда его нормализация есть Ш. п. Всякое замкнутое аналитич. подпространство в Ш. п., напр. в $\mathbb{C}^n$, есть Ш. п. Всякое конечномерное Ш. п. допускает собственное инъективное голоморфное отображение в нек-рое $\mathbb{C}^n$, регулярное в каждой неособой точке. Всякое неразветвленное накрытие Ш. п. есть Ш. п. Прямое произведение двух Ш. п. есть Ш. п. Тем же свойством обладает во многих случаях голоморфное расслоение, база и слой к-рого суть Ш. п. (напр., если

структурной группой является комплексная группа Ли с конечным числом связных компонент). Однако существуют примеры голоморфных расслоений со слоем $\mathbb{C}^2$ и базой $\mathbb{C}$, не являющихся многообразиями Штейна [2].

Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный аналитич. пучок на Ш. п. $(X, \mathcal{O})$. Тогда справедливы *Картана теоремы*:

A) Пространство $H^0(X, \mathcal{F})$ порождает слой $\mathcal{F}_x$ пучка $\mathcal{F}$ в любой точке $x \in X$;

B) $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ для всех $q > 0$.

Обратно, если $H^1(X, \mathcal{J}) = 0$ для любого когерентного пучка идеалов $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}$, то X — Ш. п. Область $D \subset \mathbb{C}^n$ является многообразием Штейна тогда и только тогда, когда $H^1(D, \mathcal{O}) = \ldots = H^{n-1}(D, \mathcal{O}) = 0$.

Из теорем Картана следует, что на Ш. п. всегда разрешима 1-я проблема Кузена, а если $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$ — то и 2-я проблема Кузена (см. *Кузена проблемы*). На любом многообразии Штейна X разрешима проблема Пуанкаре, т. е. всякая мероморфная функция представима в виде $\frac{f}{g}$, где $f, g \in \mathcal{O}(X)$, $g \neq 0$. Если при этом $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$, то f, g можно выбрать так, чтобы ростки f_x, g_x в любой точке $x \in X$ были взаимно просты. Группа классов дивизоров неприводимого приведенного Ш. п. X изоморфна $H^2(X, \mathbb{Z})$. Для любого n-мерного Ш. п. X группа гомологий $H_q(X, \mathbb{Z}) = 0$ для $q > n$, а группа $H_n(X, \mathbb{Z})$ не имеет кручения. Если X — многообразие, то X гомотопически эквивалентно n-мерному клеточному комплексу. С другой стороны, для любой счетной абелевой группы G и для любого $q \geqslant 1$ существует область голоморфности $D \subset \mathbb{C}^{2q+3}$ такая, что $H_q(D, \mathbb{Z}) \cong G$.

Важное направление в теории Ш. п. связано с изучением плюрисубгармонич. функций на них (см. *Леви проблема*, *Псевдовыпуклость и псевдовогнутость*). Основной результат здесь состоит в характеризации Ш. п. как пространства, на к-ром существует исчерпывающая его сильно 1-псевдовыпуклая функция.

Алгебры голоморфных функций $\mathcal{O}(X)$ на Ш. п. X (т. н. штейновы алгебры) обладают следующими свойствами. Для максимального идеала $I \subset \mathcal{O}(X)$ эквивалентны условия: I замкнут в $\mathcal{O}(X)$ относительно топологии компактной сходимости; $I = \{f \in \mathcal{O}(X) \mid f(x) = 0\}$ для нек-рой точки $x \in X$; I конечно порожден. Если X конечномерно, то каждый характер $\chi: \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ имеет вид $\chi(f) = f(x)$ для нек-рой точки $x \in X$. Если $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — два конечномерных Ш. п. с изоморфными алгебрами $\mathcal{O}_X(X) \cong \mathcal{O}_Y(Y)$, то $(X, \mathcal{O}_X) \cong (Y, \mathcal{O}_Y)$, причем любой изоморфизм $\mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$ непрерывен и индуцируется нек-рым изоморфизмом $Y \longrightarrow X$ комплексных пространств.

Большую роль в теории Ш. п. играет т. н. принцип Ока, согласно к-рому многие задачи разрешимы на Ш. п. в классе аналитич. функций тогда и только тогда, когда они разрешимы в классе гладких непрерывных функций. Этому принципу удовлетворяет, напр., 2-я проблема Кузена. Более общим является следующее утверждение: классификация *главных аналитических расслоений*, базой к-рых является заданное приведенное Ш. п. X, а структурной группой — заданная комплексная группа Ли G, совпадает с классификацией топологич. расслоений с той же базой и структурной группой. Совпадают также группы связных компонент в группах аналитических и непрерывных функций $X \to G$.

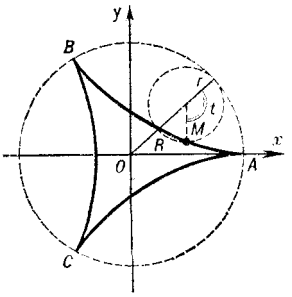
Лит.: [1] Grauert H., Remmert R., Theorie der Steinschen Räume, B. — Hdlb — N. Y., 1977; [2] Demailly J.-P., «Invent. math.», 1978, v. 48, № 3, p. 293—302; [3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 11, М., 1974, с. 125—51; т. 15, М., 1977, с. 93—174.

А. Л. Онищик.

ШТЕЙНЕРА КРИВАЯ — плоская алгебраич. кривая 4-го порядка, к-рая описывается точкой окружности

радиуса r, катящейся по окружности радиуса $R=3r$ и имеющей с ней внутреннее касание; *эпициклоида* с модулем $m=3$. Уравнение Ш. к. в декартовых прямоугольных координатах:

$$(x^2+y^2)^2+8rx\,(3y^2-x^2)+$$
$$+18r^2\,(x^2+y^2)-27x^4=0.$$



Имеются три точки возврата (см. рис.). Длина дуги от точки A:

$$l=\frac{16}{3}\,r\sin^2\frac{t}{4}.$$

Длина всей кривой $16r$. Радиус кривизны $r_k=8r\sin\frac{t}{2}$. Площадь, ограниченная кривой, $S=2\pi r^2$.

Кривая исследовалась Я. Штейнером (J. Steiner).

Д. Д. Соколов.

ШТЕЙНЕРА СИСТЕМА — пара (V, B), где V — конечное множество из v элементов, а B — совокупность k-подмножеств множества V (называемых б л о к а м и) такая, что каждое t-подмножество множества V содержится точно в одном блоке множества $B\,(t<k)$. Число v наз. п о р я д к о м Ш. с. $S(t, k, v)$. Ш. с. является частным случаем *блок-схемы*, а также *тактической конфигурации*. Ш. с. с $t=2$ является уравновешенной неполной блок-схемой (BIB-схемой), а при $v=s^2+s+1$, $k=s+1$ — конечной проективной плоскостью. Необходимым условием существования Ш. с. $S(t, k, v)$ является условие того, что число

$$\binom{v-s}{t-s}\Big/\binom{k-s}{t-s}$$

должно быть целым при всех таких s, что $0\leqslant s<t$. Доказана достаточность этого условия при $(k, t)=(3,2)$, $(4,2)$, $(5,2)$, $(4,3)$ (см. [3], [4]).

В 1844 У. Вулхаус (W. Woolhouse) поставил проблему существования Ш. с., а П. Киркман (P. Kirkman) в 1847 решил ее для $k=3$ (с и с т е м ы т р о е к Ш т е й н е р а). В 1853 Я. Штейнер (J. Steiner, [1]) рассмотрел $S(t, t+1, v)$.

Для Ш. с. обычно рассматриваются задачи: 1) определения максимального числа попарно неизоморфных Ш. с. данного порядка v; 2) существования Ш. с. с заданной группой автоморфизмов; 3) вложения частичных Ш. с. (не содержащих нек-рых t-подмножеств V) в конечную Ш. с.; 4) существования разрешимых Ш. с. (с B, представимой как объединение разбиений V); 5) максимальной упаковки (минимального покрытия) полного множества k-подмножеств V попарно не пересекающимися $S(t, k, v)$ (с помощью Ш. с.).

Большинство результатов по Ш. с. относятся к небольшим значениям k и t (см. [2] — [4]).

Лит.: [1] S t e i n e r J., «J. reine und angew. Math.», 1853, Bd 45, S. 181–82; [2] Х о л л М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [3] L i n d n e r C. C., R o s a A., «Discrete Math.», 1978, v. 22, p. 147–81; [4] H a n a n i H., там же, 1975, v. 11, p. 255—369.

Б. Т. Румов.

ШТЕЙНЕРА ТОЧКА — центр тяжести массы, распределенной по площади поверхности выпуклого тела с плотностью, равной гауссовой кривизне. Для негладкого тела определяется через смешанные объемы (см. *Смешанных объемов теория*). Ш. т. аддитивна относительно сложения тел. Я. Штейнером в 1840 (J. Steiner) впервые рассматривался центр тяжести массы, распределенной на плоском контуре переменной кривизны.

Лит.: [1] Г р ю н б а у м Б., Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел, пер. с англ., М., 1971; [2] S c h n e i d e r R., «Abh. Math. Sem. Univ. Hamb.», 1972, Bd 37, № 1–4.

В. А. Залгаллер.

ШТЕЙНИЦА ТЕОРЕМА: всякий абстрактный многогранник, эйлерова характеристика к-рого равна 2, может быть реализован в виде нек-рого выпуклого мно-

гогранника. При этом под а б с т р а к т н ы м м н о г о г р а н н и к о м понимается конечная совокупность произвольных элементов, называемых вершинами, ребрами и гранями, для к-рых определено симметричное и транзитивное отношение инцидентности: ребро a инцидентно грани α, если a составляет часть границы α; вершина A инцидентна ребру a, если A — конец a; вершина A инцидентна грани α, если A является одной из вершин грани α. Сеть вершин, ребер и граней абстрактного многогранника должна удовлетворять следующим условиям:

1) Каждое ребро инцидентно с двумя и только с двумя вершинами. Каждое ребро инцидентно с двумя и только с двумя гранями.

2) У двух вершин может быть только одно инцидентное им обоим ребро. У двух граней может быть только одно инцидентное обоим ребро.

3) Всякая вершина инцидентна, по крайней мере, трем граням. Всякая вершина инцидентна, по крайней мере, трем вершинам.

Теорема доказана Э. Штейницем (E. Steinitz, 1917).

А. Б. Иванов.

ШТЁРМЕРА МЕТОД, м е т о д С т ё р м е р а,— конечно разностный метод решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, не содержащей первой производной от неизвестной функции:

$$y'' = f(x,\ y),\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'.$$

При интегрировании по сетке с постоянным шагом $x_n = x_0 + nh$, $n = 1, 2, \ldots$, расчетные формулы имеют вид:

а) экстраполяционные:

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} f_{n-\lambda},\ f_n = f(x_n, y_n),$$
$$n = 0, 1, \ldots,$$

или (в разностной форме)

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{p=0}^{k} \beta_p \nabla^p f_n,$$

где

$$\nabla^p f_n = \nabla(\nabla^{p+1} f_n) = \nabla^{p-1} f_n - \nabla^{p-1} f_{n-1},$$

$$\beta_p = \frac{1}{p!}\left(\int_0^1 (1-t)\, t\,(t+1)\ldots(t+(p-1))\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{-1} (-1-t)\, t \ldots (t+(p-1))\, dt\right),\ p = 0, 1, \ldots, k,$$

$$u_{-\lambda} = \sum_{p=\lambda}^{k} \binom{p}{\lambda} \beta_p,\ \lambda = 0, 1, \ldots, k;$$

б) интерполяционные:

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{\lambda=-1}^{k} v_{-\lambda} f_{n-\lambda}$$

или (в разностной форме)

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{p=0}^{k} \gamma_p \nabla^p f_{n+1},$$

где

$$\gamma_p = \frac{1}{p!}\left(\int_0^1 (1-t)\,(t-1)\,t \ldots (t+(p-2))\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{-1} (-1-t)\,(t-1)\,t \ldots (t+(p-2))\, dt\right),$$

$$v_{-\lambda} = \sum_{p=\lambda}^{k+1} \binom{p}{\lambda} \gamma_p,\ \lambda = -1, 0, 1, \ldots, k.$$

Первые значения коэффициентов β_p и γ_p:

$$\beta_0=1,\ \beta_1=0,\ \beta_2=\frac{1}{12},\ \beta_3=\frac{1}{12},\ \beta_4=\frac{19}{240},\ \beta_5=\frac{3}{40},$$

$$\beta_6=\frac{863}{12096};$$

$$\gamma_0=1,\ \gamma_1=-1,\ \gamma_2=\frac{1}{12},\ \gamma_3=0,\ \gamma_4=-\frac{1}{240},$$

$$\gamma_5=-\frac{1}{240},\ \gamma_6=-\frac{221}{60480}.$$

При одном и том же k формула б) точнее, но требует решения нелинейной системы уравнений для нахождения значения y_{n+1}. На практике сначала находят приближенное значение решения y_{n+1} по формуле а), а затем проводят два-три уточнения по формуле

$$y_{n+1}^{(i+1)}-2y_n+y_{n-1}=$$

$$=h^2\left(v_1f_{n+1}^{(i)}+\sum_{\lambda=0}^{k}v_{-\lambda}f_{n-\lambda}\right),\ i=0,\ 1,\ 2,$$

$$f_{n+1}^{(i)}=f\left(x_{n+1},\ y_{n+1}^{(i)}\right),\ y_{n+1}=y_{n+1}^{(3)}.$$

Применение Ш. м. предполагает, что уже известны приближенные значения решения в первых k узлах сетки: $y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_k$ (опорные значения). Эти значения вычисляют по *Рунге — Кутта методу*, либо используя разложение решения по формуле Тейлора. Необходимость использования специальных формул для вычисления значений в начале счета и в случае изменения шага сетки, по к-рой ведется интегрирование, приводит к существенному усложнению расчетных программ на ЭВМ.

Формулы Ш. м. с k членами в правой части имеют погрешность порядка $O(h^{k+1})$. Оценка погрешности аналогична соответствующей оценке для *Адамса метода*. Можно показать, что для любого k существуют устойчивые формулы с погрешностью порядка $O(h^{k+1})$.

На практике обычно используются формулы с $k=4,\ 5,\ 6$. Широко используется Н у м е р о в а м е т о д, принадлежащий к семейству интерполяционных Ш. м.:

$$y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n=\frac{h^2}{12}(f_{n+2}+10f_{n+1}+f_n).$$

Метод предложен К. Штёрмером (C. Störmer, 1920).

Лит.: [1] Б а х в а л о в Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] L a m b e r t J. D., Computational methods in ordinary differential equations, N. Y.— [a. o.], 1973; [3] М и х л и н С. Г., С м о л и ц к и й Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М., 1965.

С. С. Гайсарян.

ШТИФЕЛЯ МНОГООБРАЗИЕ (вещественное) — многообразие $V_{n,k}$ ортонормированных k-реперов в n-мерном евклидовом пространстве. Аналогично определяются комплексное Ш. м. $W_{n,k}$ и кватернионное Ш. м. $X_{n,k}$. Ш. м. являются компактными вещественно-аналитич. многообразиями, а также однородными пространствами классич. компактных групп $O(n)$, $U(n)$ и $\mathrm{Sp}(n)$ соответственно. В частности, $V_{n,1}=S^{n-1}$, $W_{n,1}=S^{2n-1}$, $X_{n,1}=S^{4n-1}$ являются сферами, Ш. м. $V_{n,2}$ есть многообразие единичных касательных векторов к S^{n-1}, Ш. м. $V_{n,n}$, $W_{n,n}$, $X_{n,n}$ отождествляются с группами $O(n)$, $U(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$, а $V_{n,n-1}$ — с группой $SO(n)$. Рассматриваются также некомпактные Ш. м., состоящие из всевозможных k-реперов в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{H}^n$.

Эти многообразия были введены Э. Штифелем [1] в связи с изучением систем линейно независимых векторных полей на гладких многообразиях. Начатое в [1] изучение топологии Ш. м. привело затем к полному вычислению их когомологий (см. [2], [3]). В частности,

$$H^*(W_{n,k};\ \mathbb{Z})=\Lambda_{\mathbb{Z}}(x_{2n-1},\ x_{2n-3},\ \ldots,\ x_{2(n-k)+1}),$$

$$H^*(X_{n,k};\ \mathbb{Z})=\Lambda_{\mathbb{Z}}(x_{4n-1},\ x_{4n-5},\ \ldots,\ x_{4(n-k)+3}),$$

$H^*(V_{n,k}, \mathbb{Z}_2)$ есть коммутативная алгебра с образующими $x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_{n-1}$ и соотношениями

$$x_i x_j = \begin{cases} x_{i+j}, & \text{если } i+j \leqslant n-1, \\ 0, & \text{если } i+j > n-1 \end{cases}$$

(через x_l всюду обозначен элемент степени l). Вещественные, комплексные и кватернионные Ш. м. асферичны в размерностях не более $n-k-1$, $2(n-k)$ и $4(n-k)+2$ соответственно, причем

$$\pi_{n-k}(V_{n,k}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } k=1 \text{ или } n-k \text{ четно}, \\ \mathbb{Z}_2, & \text{если } k>1 \text{ или } n-k \text{ нечетно}; \end{cases}$$

$$\pi_{2(n-k)+1}(W_{n,k}) \cong \pi_{4(n-k)+3}(X_{n,k}) \cong \mathbb{Z}.$$

По поводу вычисления других гомотопич. групп Ш. м. см. [5].

Лит.: [1] Stiefel E., «Comm. math. helv.», 1935—36, v. 8, № 4, p. 305—53; [2] Борель А., в сб.: Расслоенные пространства и их приложения, пер. с франц., М., 1958, с. 163—246; [3] Стинрод Н., Эпстейн Д., Когомологические операции, пер. с англ., М., 1983; [4] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, М., 1971, с. 71—122.

А. Л. Онищик.

ШТИФЕЛЯ ЧИСЛО — *характеристическое число* замкнутого многообразия, принимающее значения вычетов по модулю 2. Пусть $x \in H^{**}(BO; \mathbb{Z}_2)$ — произвольный стабильный характеристич. класс, M — замкнутое многообразие. Вычет по модулю 2, определяемый равенством

$$x[M] = \langle x(\tau M), [M] \rangle,$$

наз. числом Штифеля (или Штифеля—Уитни) многообразия M, соответствующим классу x. Здесь τM — касательное расслоение многообразия M, а $[M] \in H_*(M; \mathbb{Z}_2)$ — фундаментальный класс. Для многообразий размерности n Ш. ч. зависят лишь от однородной компоненты степени n класса x. Группа $H^n(BO; \mathbb{Z}_2)$ изоморфна векторному пространству над полем $\mathbb{Z}_2$ с базисом, находящимся во взаимно однозначном соответствии с множеством всех разбиений $\omega = \{i_1, \ldots, i_k\}$ числа n, т. е. наборов $\{i_1, \ldots, i_k\}$ целых неотрицательных чисел с $i_1 + \ldots + i_k = n$. В качестве базиса группы $H^n(BO; \mathbb{Z}_2)$ естественно взять классы $w_\omega = w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_k}$. Поэтому с точки зрения характеризации многообразия его Ш. ч. достаточно рассматривать классы w_ω, где ω — разбиение размерности многообразия.

Бордантные многообразия имеют одинаковые Ш. ч., так что каждый характеристич. класс x определяет гомоморфизм $x[\,]: \mathfrak{N}^n \to \mathbb{Z}_2$, где $\mathfrak{N}^n$ — группа классов бордантных неориентированных многообразий размерности n. Если для двух замкнутых многообразий M, N имеет место равенство $w_\omega[M] = w_\omega[N]$ при всех разбиениях ω числа $n = \dim M = \dim N$, то многообразия M и N бордантны (теорема Тома).

Пусть A — векторное пространство $\mathrm{Hom}(H^n(BO; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2)$ над полем $\mathbb{Z}_2$. Пусть $\{e_\omega\}$ — базис в пространстве A, дуальный базису $\{w_\omega\}$ пространства $H^n(BO; \mathbb{Z}_2)$, $e_\omega(w_{\omega'}) = \delta_\omega^{\omega'}$, здесь ω, ω' — разбиения числа n; и пусть отображение $\varphi: \mathfrak{N}^n \to A$ определено формулой $\varphi([M]) = \sum_\omega w_\omega[M] e_\omega$. Отображение φ мономорфно и для полного описания группы $\mathfrak{N}^n$ в терминах Ш. ч. нужно найти его образ. Эта проблема аналогична проблеме Милнора—Хирцебруха для *Чженя классов*. Для замкнутого многообразия M пусть $v \in H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ т. н. класс Ву, к-рый однозначно определен равенством $\langle \alpha \cup v, [M] \rangle = \langle Sq\,\alpha, [M] \rangle$, имеющим место при всех $\alpha \in H^*(M; \mathbb{Z}_2)$. Тогда $w(\tau M) = Sqv$, где τM — касательное расслоение к M (теорема Ву).

Из этой теоремы видно, что класс Ву может быть определен как нек-рый характеристич. класс: пусть

$$v = Sq^{-1} w \in H^{**}(BO; \mathbb{Z}_2),$$

где $w \in H^{**}(BO;\ \mathbb{Z}_2)$ — полный Штифеля — Уитни класс, а $Sq^{-1} = 1 + Sq^1 + Sq^2 + Sq^2 Sq^1 + \ldots$ — когомологич. операция, обратная к полному *Стинрода квадрату* Sq. Пусть $\alpha \in H^{**}(BO;\ \mathbb{Z}_2)$ — произвольный характеристич. класс. Тогда, для любого замкнутого многообразия числа $(\alpha \cup v)[M]$ и $(Sq\alpha)[M]$ совпадают. Таким образом, для того чтобы элемент $a \in A$, $a = \sum a_\omega e_\omega$ лежал в образе отображения φ, необходимо, чтобы для всех $\alpha \in H^{**}(BO;\ \mathbb{Z}_2)$ имело место равенство $a(\alpha \cup v) = a(Sq\alpha)$. Для гомоморфизма a: $H^n(BO;\ \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ тогда и только тогда существует такое многообразие M^n, что $x[M^n] = a(x)$ при всех $x \in H^n(BO;\ \mathbb{Z}_2)$, когда $a(\alpha \cup v) = a(Sq\alpha)$ при всех $\alpha \in H^{**}(BO;\ \mathbb{Z}_2)$ (теорема Дольда).

Лит. см. при статье *Штифеля — Уитни класс*.

А. Ф. Харшиладзе.

ШТИФЕЛЯ — УИТНИ КЛАСС — *характеристический класс* со значениями в $H^*(\ ;\ \mathbb{Z}_2)$, определенный для действительных векторных расслоений. Ш.— У. к. обозначаются через w_i, $i > 0$, и для действительного векторного расслоения ξ над топологич. пространством B класс $w_i(\xi)$ лежит в $H^i(B;\ \mathbb{Z}_2)$; введены Э. Штифелем [1] и Х. Уитни [2]; они обла ают следующими свойствами. 1) Для двух действительных векторных расслоений ξ, η над общей базой

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum\nolimits_i w_i(\xi)\, w_{k-i}(\eta),\ w_0 = 1,$$

другими словами, $w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)\, w(\eta)$, где $w = 1 + w_1 + w_2 +$ — полный Ш.— У. к. 2) Для одномерного универсального расслоения ζ_1 над $\mathbb{R}P^\infty$ имеет место равенство $w(\zeta_1) = 1 + y$, где y — ненулевой элемент $H^1(\mathbb{R}P^\infty;\ \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. Этими двумя свойствами Ш.— У. к. определяются однозначно. Ш.— У. к. стабильны, т. е. $w(\xi \oplus \theta) = w(\xi)$, где θ — тривиальное расслоение и $w_i(\xi) = 0$ при $i > \dim \xi$. Для ориентированного векторного расслоения ξ размерности n над базой B класс $w_n(\xi) \in H^n(B;\ \mathbb{Z}_2)$ совпадает с приведением по модулю 2 *эйлерова класса*.

Для векторного расслоения ξ над B пусть B^ξ — *Тома пространство* этого расслоения. Далее, пусть $\Phi: H^*(B;\ \mathbb{Z}_2) \to \tilde{H}^{*+n}(B^\xi;\ \mathbb{Z}_2)$ — *Тома изоморфизм*. Тогда полный Ш. — У. к. $w(\xi)$ совпадает с

$$\Phi^{-1} Sq \Phi(1) \in H^*(B;\ \mathbb{Z}_2),$$

где $Sq = 1 + Sq^1 + Sq^2 + \ldots$ — полный *Стинрода квадрат*. Это свойство Ш.— У. к. можно использовать в качестве их определения. Ш.— У. к. гомотопически инвариантны в том смысле, что они совпадают для послойно-гомотопически эквивалентных расслоений над общей базой.

Любой характеристич. класс со значениями в $H^*(\ ;\ \mathbb{Z}_2)$, определенный для действительных векторных расслоений, выражается через Ш.—У.к.: кольца $H^{**}(BO_n;\ \mathbb{Z}_2)$ и $H^{**}(BO;\ \mathbb{Z}_2)$ являются кольцами формальных степенных рядов от Ш.— У. к.:

$$H^{**}(BO_n;\ \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[[w_1, \ldots, w_n]],$$
$$H^{**}(BO;\ \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[[w_1, \ldots,]].$$

Лит.: [1] Stiefel E., «Comm. math. helv.», 1935—36, v. 8, № 4, p. 305—53; [2] Whitney H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1937, v. 43, p. 785—805; [3] Милнор Дж., «Математика», 1959, т. 3, в. 4, с. 3—53; 1965, т. 9, в. 4, с. 3—40; [4] Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, пер. с англ., М., 1973; [5] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953.

А. Ф. Харшиладзе.

ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОД — метод сведения условно-экстремальных задач к задачам безусловной оптимизации. Проиллюстрировать Ш. ф. м. можно на примере задач *математического программирования*. Рассматривается задача минимизации функции $\varphi(x)$ на множестве $X = \{x: f_i(x) \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$ из n-мерного евклидова пространства. Штрафной функцией, или штрафом (за нарушение ограничений $f_i(x) \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$), наз. функция $\psi(x, \alpha)$, зави-

сящая от x и числового параметра α, обладающая следующими свойствами: $\psi(x, \alpha)=0$, если $x \in X$, и $\psi(x, \alpha)>0$, если $x \notin X$. Пусть $x(\alpha)$ является любой точкой безусловного глобального минимума функции $M(x, \alpha)=\varphi(x)+\psi(x, \alpha)$, а X^* — множеством решений исходной задачи. Функцию $\psi(x, \alpha)$ выбирают таким образом, чтобы расстояние между точками $x(\alpha)$ и множеством X^* стремилось к нулю при $\alpha \longrightarrow \infty$, либо, если это не удается гарантировать, чтобы выполнялось соотношение

$$\lim_{\alpha \to \infty} \varphi(x(\alpha)) = \inf_{x \in X} \varphi(x).$$

В качестве $\psi(x, \alpha)$ часто выбирают функцию

$$\psi(x, \alpha) = \alpha \sum_{i=1}^{m} |\min\{f_i(x), 0\}|^q, \quad q \geqslant 1, \text{ либо } 2.$$

Выбор конкретного вида функции $\psi(x, \alpha)$ связан как с проблемой сходимости Ш. ф. м., так и с проблемами, возникающими при решении задачи безусловной минимизации функции $M(x, \alpha)$.

В несколько более общей постановке Ш. ф. м. заключается в сведении задачи минимизации функции $\varphi(x)$ на множестве X к задаче минимизации нек-рой параметрич. функции $M(x, \alpha)$ на множестве более простой структуры, с точки зрения эффективности применения численных методов минимизации, чем исходное множество X.

Имеет место следующий весьма общий результат, иллюстрирующий универсальность Ш. ф. м. Пусть U и V — рефлексивные банаховы пространства; R — расширенная действительная прямая; φ — функция, определенная на U со значениями в R, слабо полунепрерывная снизу; f_i, $i=1, 2, \ldots, m$ — функции, определенные на U со значениями в R, непрерывные в слабой топологии пространства U; h_j, $j=1, 2, \ldots, n$ — функции, определенные на U со значениями в V, непрерывные в слабых топологиях пространств U и V; множество $X=\{x: f_i(x) \geqslant 0; \ i=1, 2, \ldots, m; \ h_j(x)=0, \ j=1, 2, \ldots, n; \ x \in U\}$ не пусто. Рассматривается задача отыскания таких $x^* \in U$, что

$$\varphi(x^*) \leqslant \varphi(x) \text{ для всех } x \in X. \qquad (*)$$

Для функции

$$M(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \alpha) = \varphi(x) + \alpha \left\{ \sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - y_i|^2 + \sum_{j=1}^{n} \|h_j(x)\|_V^2 \right\}$$

при $\alpha > 0$, $x \in U$, $y_i \in R$, $i=1, 2, \ldots, m$, рассматривается задача отыскания таких $x(\alpha) \in U$ и $y_i(\alpha) \geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, m$, что

$$M(x(\alpha), y_1(\alpha), y_2(\alpha), \ldots, y_m(\alpha), \alpha) \leqslant M(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \alpha)$$

для всех $x \in U$, $y_i \geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, m$. Если

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \varphi(x) = +\infty,$$

то каждая слабо предельная точка произвольной последовательности $\{x(\alpha_k)\}$, $\alpha_k \longrightarrow \infty$, $k \longrightarrow \infty$, является решением задачи (*) и, кроме того,

$$\lim \varphi(x(\alpha_k)) = \varphi(x^*), \ \alpha \longrightarrow \infty.$$

Лит.: [1] Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М., Методы оптимизации, М., 1978; [2] Васильев Ф. П., Численные методы решения экстремальных задач, М., 1980; [3] Фиакко А. В., Мак-Кормик Г. П., Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации, пер. с англ., М., 1972; [4] Сеа Ж., Оптимизация, пер. с франц., М., 1973. *В. Г. Карманов.*

ШТУРМА КРИВЫЕ — плоские трансцендентные кривые, описываемые точкой, связанной с эллипсом, гиперболой или параболой, к-рые катятся по прямой. Примером Ш. к. является траектория фокуса параболы, к-рая катится по оси абсцисс — *цепная линия*.

Эти кривые исследованы И. Штурмом (J. Sturm).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.
Д. Д. Соколов.

ШТУРМА ТЕОРЕМА: если

$$f_0(x),\ f_1(x),\ \ldots,\ f_s(x) \qquad (*)$$

— ряд Штурма для отрезка $[a, b]$, $a<b$ и $w(x)$ — число перемен знака в ряде (*) в точке $x\in[a, b]$ (значения, равные нулю, не учитываются), то число различных корней функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равно разности $w(a)-w(b)$.

Рядом Штурма наз. последовательность действительных функций (*), непрерывных на отрезке $[a, b]$ и имеющих на этом отрезке конечное число корней, и такая, что

1) $f_0(a)\,f_0(b)\neq 0$,

2) $f_s(x)\neq 0$ на $[a, b]$,

3) из $f_k(c)=0$ для нек-рого $k\ (0<k<s)$ и данного c из $[a, b]$ следует $f_{k-1}(c)\,f_{k+1}(c)<0$,

4) из $f_0(c)=0$ для данного $c\,(a<c<b)$ следует, что для достаточно малого $\varepsilon>0$

$$f_0(x)\,f_1(c)<0 \quad (c-\varepsilon<x<c);$$
$$f_0(x)\,f_1(c)>0 \quad (c<x<c+\varepsilon).$$

Теорема доказана Ш. Штурмом [1], к-рый указал также следующий метод построения ряда Штурма для многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами, не имеющего кратных корней: $f_0(x)=f(x)$, $f_1(x)=f'(x)$ и, если уже построены многочлены $f_0(x)$, ..., $f_k(x)$, то за $f_{k+1}(x)$ надо брать с обратным знаком остаток при делении $f_{k-1}(x)$ на $f_k(x)$. При этом $f_s(x)$ будет константой, отличной от нуля.

Лит.: [1] Sturm J. Ch., «Bull. de Férussac», 1829, t. 11; [2] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975.
И. В. Проскуряков.

ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ ЗАДАЧА — задача, порожденная на конечном или бесконечном интервале (a, b) изменения переменной x уравнением

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+l(x)\,y=\lambda r(x)\,y, \qquad (1)$$

и нек-рыми граничными условиями, где $p(x)$ и $r(x)$ положительны, $l(x)$ действительна, а λ — комплексный параметр. Начало глубокому изучению этой задачи положили Ш. Штурм (Ch. Sturm) и Ж. Лиувилль (J. Liouville). Понятия и методы, зародившиеся в процессе изучения Ш.— Л. з., сыграли большую роль в развитии многих направлений математики и физики. Она была и остается постоянным источником новых идей и задач для спектральной теории операторов и смежных вопросов анализа. Особое значение приобрела она в последнее время после открытия связи с нек-рыми нелинейными эволюционными уравнениями математич. физики.

Если $p(x)$ дифференцируема, а $p(x)r(x)$ — дифференцируема дважды, то уравнение (1) с помощью подстановки сводится к виду (см. [1])

$$-y''+q(x)\,y=\lambda y. \qquad (2)$$

Принято различать регулярные и сингулярные задачи. Ш.— Л. з. для уравнения (2) наз. регулярной, если интервал (a, b) изменения переменной x конечен и если функция $q(x)$ суммируема во всем интервале (a, b). Если же интервал (a, b) бесконечен или $q(x)$ несуммируема (или и то и другое), то эта задача наз. сингулярной.

Ниже рассматриваются в отдельности следующие случаи: 1) интервал (a, b) конечен, в этом случае, не нарушая общности, можно считать, что $a=0$ и $b=\pi$; 2) $a=0$, $b=\infty$; 3) $a=-\infty$, $b=\infty$.

1. Рассматривается задача, порожденная на сегменте $[0, \pi]$ уравнением (2) и разделенными граничными условиями

$$y'(0)-hy(0)=0,\ y'(\pi)+Hy(\pi)=0, \qquad (3)$$

где $q(x)$ — действительная суммируемая на сегменте $[0, \pi]$ функция, h и H — произвольные конечные или бесконечные фиксированные действительные числа, λ — комплексный параметр. Если $h=\infty$ ($H=\infty$), то первое (второе) условие в (3) заменяется условием $y(0)=0$ ($y(\pi)=0$). Для определенности далее предполагается, что числа, участвующие в граничных условиях, конечны.

Число λ_0 наз. собственным значением задачи (2), (3), если при $\lambda=\lambda_0$ уравнение (2) имеет нетривиальное решение $y_0(x)\not\equiv 0$, удовлетворяющее граничным условиям (3); при этом функция $y_0(x)$ наз. собственной функцией, соответствующей собственному значению λ_0.

Собственные значения граничной задачи (2), (3) действительны; каждому собственному значению соответствует единственная линейно независимая собственная функция (в силу действительности $q(x)$ и чисел h, H собственные функции задачи (2), (3) можно выбрать действительными); собственные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, т. е. $\int_0^\pi y_1(x)\,y_2(x)\,dx=0$.

Существует неограниченно возрастающая последовательность собственных значений $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ граничной задачи (2), (3); при этом собственная функция $y_n(x)$, соответствующая собственному значению λ_n, имеет ровно n нулей в интервале $(0, \pi)$.

Пусть $W_2^m[0, \pi]$ — пространство Соболева, состоящее из заданных на сегменте $[0, \pi]$ комплекснозначных функций, к-рые имеют $m-1$ абсолютно непрерывных производных и производную порядка m, суммируемую на сегменте $[0, \pi]$. Если $q(x)\in W_2^m[0, \pi]$, то собственные значения λ_n граничной задачи (2), (3) при больших n удовлетворяют асимптотич. равенству (см. [4]):

$$\sqrt{\lambda_n}=n+\sum_{1\leqslant 2j+1\leqslant m+2}\frac{c_{2j+1}}{n^{2j+1}}+$$

$$+\frac{(-1)^{m-1}}{2^{m+2}}\left(S_m(n)+\frac{\tilde S_m(n)}{n}\right)\frac{1}{n^{m+1}}+\frac{\delta_n}{n^{m+2}}+\frac{\varepsilon_n(h, H)}{n^{m+3}},$$

где c_{2j+1} — независимые от n числа,

$$c_1=\frac{1}{\pi}\left(h+H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt\right),$$

$$S_m(n)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi q^{(m)}(t)\sin\left\{2nt-\frac{\pi}{2}(m+1)\right\}dt,$$

$$\tilde S_m(n)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi q^{(m)}(t)(2h-c_1t)\sin\left\{2nt-\frac{\pi}{2}(m+2)\right\}dt,$$

δ_n не зависит от h, H и

$$\sum_{n=0}^\infty|\delta_n|^2<\infty,\quad\sum_{n=0}^\infty|\varepsilon_n(h, H)|^2<\infty.$$

Отсюда, в частности, следует, что если $q(x)\in W_2^1[0, \pi]$, то

$$\lambda_n=n^2+c+\frac{\gamma_n}{n},$$

где

$$c=\frac{2}{\pi}\left(h+H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt\right),\quad\sum_{n=0}^\infty|\gamma_n|^2<\infty.$$

Поэтому ряд $\sum_{n=0}^\infty(\lambda_n-n^2-c)$ сходится. Его сумма наз. регуляризованным следом задачи (2), (3) (см. [13]):

$$\sum_{n=0}^\infty(\lambda_n-n^2-c)=\frac{q(0)+q(\pi)}{4}-\frac{(h+H)^2}{2}+hH-\frac{c}{2}.$$

Пусть $v_0(x), v_1(x), \ldots$ — ортонормированные собственные функции задачи (2), (3), соответствующие собственным значениям $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$. Для каждой функции $f(x)\in$

$\in L_2[0, \pi]$ имеет место так наз. равенство Парсеваля

$$\int_0^\pi |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2,$$

где

$$a_n = \int_0^\pi f(x)\,v_n(x)\,dx,$$

и справедлива формула разложения по собственным функциям

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x), \qquad (4)$$

где ряд сходится в метрике пространства $L_2[0, \pi]$. Теоремы полноты и разложения для регулярной Ш.—Л. з. впервые доказаны В. А. Стекловым [14].

Если функция $f(x)$ имеет вторую непрерывную производную и удовлетворяет граничным условиям (3), то справедливы следующие утверждения (см. [15]):

а) ряд (4) сходится абсолютно и равномерно на сегменте $[0, \pi]$ к функции $f(x)$;

б) один раз продифференцированный ряд (4) сходится абсолютно и равномерно на сегменте $[0, \pi]$ к $f'(x)$;

в) в каждой точке, в к-рой $f''(x)$ удовлетворяет какому-либо локальному условию разложения в ряд Фурье (напр., имеет ограниченную вариацию), дважды продифференцированный ряд (4) сходится к $f''(x)$.

Для любой функции $f(x) \in L_1[0, \pi]$ ряд (4) является равномерно равносходящимся с рядом Фурье функции $f(x)$ по $\cos nx$, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant\pi} |V_{N,f}(x) - c_{N,f}(x)| = 0,$$

где

$$V_{N,f}(x) = \int_0^\pi f(t) \sum_{n=0}^{N} v_n(x)\,v_n(t)\,dt,$$

$$c_{N,f}(x) = \int_0^\pi f(t) \left\{ \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \cos nx \cos nt \right\} dt.$$

Это утверждение означает, что разложение функции $f(x)$ по собственным функциям граничной задачи (2), (3) сходится при тех же условиях, что и разложение $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам (см. [1], [4]).

2. Рассматривается дифференциальное уравнение (2) на полуоси $0 \leqslant x < \infty$ с граничным условием в нуле:

$$y'(0) - hy(0) = 0. \qquad (5)$$

Функция $q(x)$ предполагается действительной и суммируемой в каждом конечном подинтервале интервала $[0, \infty)$, а число h действительным.

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ — решение уравнения (2) с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = h$ (так что $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет и граничному условию (5)). Пусть $f(x)$ — любая функция из $L_2(0, \infty)$ и $\Phi_{f,b}(x) = \int_0^b f(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx$, где b — произвольное конечное положительное число. Для каждой функции $q(x)$ и каждого числа h существует, по крайней мере, одна, не зависящая от $f(x)$, неубывающая функция $\rho(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, обладающая следующими свойствами:

а) существует функция $\Phi_f(\lambda)$, являющаяся пределом $\Phi_{f,b}(\lambda)$ при $b \to \infty$ в метрике $L_{2,\rho}(-\infty, \infty)$ (пространства ρ-измеримых функций $\psi(\lambda)$, для к-рых

$$\|\psi\| = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\lambda)|^2\,d\rho(\lambda) < \infty),$$

т. е.

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_f(\lambda) - \Phi_{f,b}(\lambda)|^2\,d\rho(\lambda) = 0;$$

б) имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_f(\lambda)|^2\,d\rho(\lambda).$$

Функция $\rho(\lambda)$ наз. спектральной функцией (или спектральной плотностью) граничной задачи (2), (5) (см. [9]—[11]).

Для спектральной функции $\rho(\lambda)$ задачи (2), (5) справедлива асимптотич. формула (см. [16]) (в уточненном виде см. [17]):

$$\lim_{\lambda\to-\infty} e^{h\sqrt{\lambda}x}(\rho(\lambda)-\rho(-\infty))=0,\ 0\leqslant x<\infty,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\rho(\lambda)-\rho(-\infty)-\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}+h\right)=0.$$

Справедлива следующая теорема равносходимости: для произвольной функции $f(x)\in L_2(0,\ \infty)$ пусть

$$\Phi_f(\lambda)=\int_0^\infty f(x)\,\varphi(x,\ \lambda)\,dx,$$

$$C_f(\lambda)=\int_0^\infty f(x)\cos\sqrt{\lambda}\,x\,dx$$

(интегралы сходятся в метриках пространств $L_{2,\,\rho}(-\infty,\ \infty)$ и $L_{2,\,\sqrt{\lambda}}(0,\ \infty)$ соответственно); тогда при каждом фиксированном $b<\infty$ сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^0 \Phi_f(\lambda)\,\varphi(x,\ \lambda)\,d\rho(\lambda)$$

абсолютно и равномерно относительно $x\in[0,\ b]$ и

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{0\leqslant x<b}\left|\int_{-\infty}^N \Phi_f(\lambda)\,\varphi(x,\ \lambda)\,d\rho(\lambda)-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{\pi}\int_0^N C_f(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}\,x\,d\sqrt{\lambda}\right|=0.$$

Пусть задача (2), (5) имеет дискретный спектр, т. е. ее спектр состоит из счетного числа собственных значений $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ <\lambda_n,\ <\ldots$ с единственной предельной точкой в бесконечности. При определенных условиях на функцию $q(x)$ для функции $N(\lambda)=\Sigma_{\lambda_n<\lambda}1$, т. е. числа собственных значений, меньших λ, справедлива асимптотич. формула:

$$N(\lambda)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{q(x)<\lambda}(\lambda-q(x))^{1/2}\,dx.$$

Наряду с решением $\varphi(x,\ \lambda)$ вводится второе решение $\theta(x,\ \lambda)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям $\theta(0,\lambda)=0$, $\theta'(0,\lambda)=1$, так что $\varphi(x,\lambda)$ и $\theta(x,\lambda)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2). При фиксированных числах $\lambda\,(\operatorname{Im}\lambda\neq0)$ и $b>0$ рассматривается дробно-линейная функция

$$w_{\lambda,\,b}=w_{\lambda,\,b}(t)=\frac{-\theta'(b,\ \lambda)-t\theta(b,\ \lambda)}{\varphi'(b,\ \lambda)+t\varphi(b,\ \lambda)}.$$

Когда независимая переменная t пробегает действительную ось, точка $w_{\lambda,\,b}$ описывает нек-рую окружность, ограничивающую круг $K_{\lambda,\,b}$. Он всегда лежит в той же полуплоскости (нижней или верхней), что и λ. С увеличением b круг $K_{\lambda,\,b}$ сжимается, т. е. при $b<b'$ круг $K_{\lambda,\,b'}$ лежит целиком внутри круга $K_{\lambda,\,b}$. Существует (при $b\to\infty$) предельный круг или точка $K_{\lambda,\,\infty}$; при этом если

$$\int_0^\infty|\varphi(x,\ \lambda)|^2\,dx<\infty,\qquad(6)$$

то $K_{\lambda,\,\infty}$ будет кругом, и точкой — в противном случае (см. [10]). Если условие (6) выполняется для одного какого-либо недействительного значения λ, то оно выполняется для всех значений λ. В случае предельного круга для всех значений λ все решения уравнения (2) принадлежат пространству $L_2(0,\ \infty)$, а в случае предельной точки для каждого недействительного значения λ это уравнение имеет решение вида $\theta(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda)$, принадлежащее $L_2(0,\ \infty)$, где $m(\lambda)$ — предельная точка $(m(\lambda)=K_{\lambda,\,\infty})$.

Если $q(x)\geqslant -cx^2$, где c — нек-рая положительная постоянная, то имеет место случай предельной точки (см. [19]), более общие результаты см. [20], [21].

3. Рассматривается теперь уравнение (2) на всей оси $-\infty<x<\infty$ при предположении, что $q(x)$ действительная суммируемая в каждом конечном подинтервале из $(-\infty, \infty)$ функция. Пусть $\varphi_1(x, \lambda)$, $\varphi_2(x, \lambda)$ — решения уравнения (2), удовлетворяющие условиям $\varphi_1(0, \lambda)=\varphi_2'(0, \lambda)=1$, $\varphi_1'(0, \lambda)=\varphi_2(0, \lambda)=0$.

Существует, по крайней мере, одна действительная симметрическая неубывающая матрица-функция

$$\mathcal{P}(\lambda)=\left\|\begin{matrix}\rho_{11}(\lambda) & \rho_{12}(\lambda)\\ \rho_{21}(\lambda) & \rho_{22}(\lambda)\end{matrix}\right\|, \quad -\infty<\lambda<\infty,$$

обладающая следующими свойствами:

а) для любой функции $f(x)\in L_2(-\infty, \infty)$ существуют функции $\Phi_{j,f}(\lambda)$, $j=1,2$, определенные равенствами

$$\Phi_{j,f}(\lambda)=\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,\varphi_j(x, \lambda)\,dx, \quad j=1, 2,$$

где предел — по метрике пространства $L_{2,\mathcal{P}}(-\infty, \infty)$;

б) имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\sum_{j,k=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{j,f}(\lambda)\,\overline{\Phi_{k}(\lambda)}\,d\rho_{jk}(\lambda).$$

Лит.: [1] Левитан Б. М., Саргсян И. С., Введение в спектральную теорию, М., 1970; [2] Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, М.— Л., 1950; [3] его же, Теория операторов обобщенного сдвига, М., 1973; [4] Марченко В. А., Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения, К., 1977; [5] Титчмарш Э. Ч., Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, пер. с англ., т. 1, М., 1960; [6] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; [7] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [8] Костюченко А. Г., Саргсян И. С., Распределение собственных значений, М., 1979; [9] Weyl H., «Gött. Nachr.», 1909, S. 37—64; [10] его же, «Math. Ann.», 1910, Bd 68, S. 220—69; [11] его же, «Gött. Nachr.», 1910, S. 442—67; [12] Крейн М. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1952, т. 16, № 4, с. 293—324; [13] Гельфанд И. М., Левитан Б. М., «Докл. АН СССР», 1953, т. 88, № 4, с. 593—96; [14] Стеклов В. А., «Сообщ. Харьк. матем. об-ва», 1896, т. 5, № 1—2; [15] Левитан Б. М., Саргсян И. С., «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 1, с. 3—98; [16] Марченко В. А., «Докл. АН СССР», 1950, т. 72, № 3, с. 457—60; [17] Левитан Б. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1953, т. 17, № 4, с. 331—64, 1955, т. 19, № 1, с. 33—58; [18] Wet J., Mandl F., «Proc. Roy. Soc. Ser. A», 1950, v. 200, p. 572—80; [19] Titchmarsh E., «Canad. J. Math.», 1949, v. 1, p. 191—98; [20] Levinson N., «Casop. Pěst. Mat. Fys.», 1949, v. 74, p. 17—20; [21] Sears D., Titchmarsh E., «Quart. J. Math.» (Oxford ser.), 1950, v. 1, p. 165—75.

Г. Ш. Гусейнов, Б. М. Левитан.

ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА — задача, в к-рой требуется восстановить функцию (потенциал) $q(x)$ по тем или иным спектральным характеристикам оператора A, порождённого дифференциальным выражением $l[y]=-y''+q(x)y$ и нек-рыми граничными условиями в гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$, где (a, b) — конечный или бесконечный интервал изменения переменной x. При этом следует восстановить также вид граничных условий, соответствующих оператору A.

При исследовании обратных задач естественно возникают следующие вопросы: 1) выяснить, какие спектральные характеристики однозначно определяют оператор A; 2) дать метод восстановления оператора A по этим спектральным характеристикам; 3) найти характеристич. свойства рассматриваемых спектральных характеристик. В зависимости от выбора спектральных характеристик возможны многие различные постановки обратных задач (часто возникавших из приложений).

Первый результат по обратным задачам (см. [10]), к-рый положил начало развитию всей теории: пусть λ_0, λ_1, ...— собственные значения задачи

$$\left.\begin{aligned}&-y''+q(x)\,y=\lambda y, \quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ &y'(0)=y'(\pi)=0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причем $q(x)$ — действительная непрерывная на сегменте $[0, \pi]$ функция. Если $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, \ldots$, то $q(x) \equiv 0$.

Углубленное исследование обратных задач началось в 40-х гг. 20 в. (см. [11], [12]). Пусть $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ — собственные значения уравнения (1) при граничных условиях

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \qquad (2)$$

(h и H — действительные числа), а $\mu_0, \mu_1, \ldots$ — собственные значения уравнения (1) при граничных условиях

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \; y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \; h_1 \neq h.$$

Тогда последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ однозначно определяют функцию $q(x)$ и числа h, h_1 и H. Причем если хотя бы одно собственное значение этих задач неопределенно, то все оставшиеся не определяют уравнения (1) однозначно. В частности, один спектр, вообще говоря, не определяет уравнение однозначно (упомянутый выше результат является исключением из общего правила).

Если уравнение (1) изучается на полуоси $(0, \infty)$ и на потенциальную функцию $q(x)$ наложено условие

$$\int_0^\infty x\,|q(x)|\,dx < \infty,$$

то решение $\varphi(x, \lambda)$ задачи $-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$, $y(0) = 0$ допускает при $x \to \infty$ асимптотич. представление

$$\varphi(x, \lambda) = M(\lambda) \sin[\lambda x + \delta(\lambda)] + o(1).$$

Функция $\delta(\lambda)$ наз. ф а з о й р а с с е я н и я. Основной результат состоит в том, что если задача (рассматриваемая в пространстве $L_2(0, \infty)$) не имеет дискретных собственных значений, то фаза рассеяния однозначно определяет потенциальную функцию $q(x)$.

При дальнейшем развитии теории обратных задач решающим оказалось то обстоятельство, что был применен аппарат так наз. операторов преобразования (см. *Штурма — Лиувилля уравнение*), к-рый естественно возник в рамках теории операторов обобщённого сдвига (см. [4]).

Применение операторов преобразования к обратным задачам (см. [13]) позволило обобщить вышеприведенные теоремы, а именно, оказалось, что наиболее общей обратной задачей является задача восстановления уравнения (1) по его спектральной функции (см. *Штурма — Лиувилля задача*). Выяснилось, что спектральная функция определяет это уравнение однозначно. При этом безразлично, рассматривается случай конечного или бесконечного интервала.

В принципе все обратные задачи могут быть сведены к обратной задаче восстановления оператора по его спектральной функции. Однако такой путь не всегда является самым простым; кроме того, на этом пути часто трудно бывает найти необходимые и достаточные условия, к-рым должны удовлетворять рассматриваемые спектральные характеристики, по к-рым восстанавливается оператор.

Значение обратных задач возросло после открытия возможности их использования для решения нек-рых н е л и н е й н ы х э в о л ю ц и о н н ы х у р а в н е н и й м а т е м а т и ч. ф и з и к и. В частности, была установлена связь (см. [25]) между обратными задачами для нек-рых операторов Штурма — Лиувилля с конечным числом лакун в спектре и проблемой обращения Якоби абелевых интегралов. Развитие этих идей в последнее время позволило получить явные формулы для конечнозонных потенциалов, выражающие их через θ-функции Римана (см. [1], [3]).

Ниже рассматриваются два варианта постановки и решения обратных задач.

1. По известной спектральной функции $\rho(\lambda)$ требуется найти дифференциальное выражение вида

$$l[y] = -y'' + q(x)\,y$$

с действительным локально суммируемым потенциалом $q(x)$, $0 \leqslant x < \infty$ и число h из граничного условия

$$y'(0) - hy(0) = 0. \tag{3}$$

Для решения этой задачи полагают

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos\sqrt{\lambda}\,x}{\lambda}\, d\rho(\lambda), \quad 0 < x < \infty, \tag{4}$$

$$f(x,\ y) = \frac{1}{2}\{\Phi''(x+y) + \Phi''(|x-y|)\}.$$

Оказывается, что интегральное уравнение

$$f(x,\ y) + K(x,\ y) + \int_0^x K(x,\ t)\, f(t,\ y)\, dt = 0,$$

$$0 \leqslant y \leqslant x, \tag{5}$$

при каждом фиксированном x имеет единственное решение $K(x, y)$. Потенциал $q(x)$ определяется по формуле

$$q(x) = 2\frac{dK(x,\ x)}{dx},$$

а число h, участвующее в (3),— по формуле $h = K(0, 0)$ (см. [14]). Решение $\varphi(x, \lambda)$ уравнения $l[y] = \lambda y$, удовлетворяющее граничным условиям $\varphi(0, \lambda) = 1$ и $\varphi'(0, \lambda) = h$, можно найти по формуле

$$\varphi(x,\ \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\,x + \int_0^x K(x,\ t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\, dt.$$

Далее, неубывающая функция $\rho(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, тогда и только тогда является спектральной функцией для некоторой задачи вида $-y'' + q(x)y = \lambda y$, $0 \leqslant x < \infty$, $y'(0) - hy(0) = 0$ с действительной функцией $q(x)$, имеющей m локально суммируемых производных, и действительным числом h, когда функция $\Phi(x)$, построенная по $\rho(\lambda)$ формулой (4), имеет $m+3$ локально суммируемых производных и $\Phi''(+0) = -h$ (см. [14], [17], [9]). В ряде частных случаев функции $\rho(\lambda)$ можно эффективно найти $q(x)$ и h. Напр., пусть

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} + \alpha\chi(\lambda - \lambda_0) & \text{для } \lambda > 0, \\ \alpha\chi(\lambda - \lambda_0) & \text{для } \lambda < 0, \end{cases}$$

где $\chi(\lambda) = 0$, если $\lambda < 0$, и $\chi(\lambda) = 1$, если $\lambda > 0$, α — положительное число. В этом случае интегральное уравнение (5) будет уравнением с вырожденным ядром $f(x,\ y) = \alpha\cos\sqrt{\lambda_0}\,x\cos\sqrt{\lambda_0}\,y$ и его решение

$$K(x,\ y) = -\frac{\alpha\cos\sqrt{\lambda_0}\,x\cos\sqrt{\lambda_0}\,y}{1 + \alpha\int_0^x \cos^2\sqrt{\lambda_0}\,t\, dt}.$$

Теперь функция $q(x)$ и число h определяются формулами

$$q(x) = 2\frac{dK(x,\ x)}{dx} = -2\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha\cos^2\sqrt{\lambda_0}\,x}{1 + \alpha\int_0^x \cos^2\sqrt{\lambda_0}\,t\, dt}\right),$$

$$h = K(0,\ 0) = -\alpha.$$

2. Пусть действительная функция $q(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_0^\infty x\,|q(x)|\, dx < \infty. \tag{6}$$

Тогда граничная задача

$$-y'' + q(x)\,y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < \infty, \tag{7}$$

$$y(0) = 0, \tag{7'}$$

имеет ограниченные решения при $\lambda^2 > 0$ и $\lambda = i\lambda_k$, $\lambda_k > 0$,

$k=1, \ldots, n$, причем эти решения удовлетворяют при $x \to \infty$ асимптотич. формулам

$$y(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} - S(\lambda) e^{i\lambda x} + o(1), \quad 0 < \lambda^2 < \infty,$$

$$y(x, i\lambda_k) = m_k e^{-\lambda_k x} [1 + o(1)], \quad m_k > 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Набор величин $\{S(\lambda), -\infty < \lambda < \infty, \lambda_k, m_k, k=1, \ldots, n\}$ наз. данными рассеяния граничной задачи (7), (7′). Требуется восстановить потенциал $q(x)$ по данным рассеяния.

Для решения этой задачи строят функцию $F(x)$ по формуле

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} m_k^2 e^{-\lambda_k x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - S(\lambda)] e^{i\lambda x} d\lambda$$

и рассматривают уравнение

$$F(x+y) + K(x, y) + \int_x^{\infty} K(x, t) F(t+y) dt = 0. \quad (8)$$

Это уравнение имеет единственное решение $K(x, y)$ при каждом $x \geqslant 0$. Решив его, определяют потенциал $q(x)$ по формуле

$$q(x) = -2 \frac{dK(x, x)}{dx}.$$

Для того чтобы набор величин $\{S(\lambda), -\infty < \lambda < \infty; \lambda_k, m_k, \lambda_k > 0, m_k > 0, k = 1, \ldots, n\}$ был данными рассеяния нек-рой граничной задачи вида (7), (7′) с действительным потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим условию (6), необходимо и достаточно выполнение следующих условий (см. [1]):

а) функция $S(\lambda)$ непрерывна на всей оси, $\overline{S(\lambda)} = S(-\lambda) = [S(\lambda)]^{-1}$, $1 - S(\lambda)$ стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$ и является преобразованием Фурье функции

$$F_S(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - S(\lambda)] e^{i\lambda x} d\lambda,$$

представимой в виде суммы двух функций, из к-рых одна принадлежит $L_1(-\infty, \infty)$, а другая ограничена и принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$. На полуоси $0 < x < \infty$ функция $F_S(x)$ имеет производную $F_S'(x)$, удовлетворяющую условию $\int_0^{\infty} x \left| F_S'(x) \right| dx < \infty$;

б) приращение аргумента функции $S(\lambda)$ связано с числом n отрицательных собственных значений (т. е. чисел $-\lambda_1^2, \ldots, -\lambda_n^2$) граничной задачи (7), (7′) формулой

$$n = \frac{\ln S(+0) - \ln S(+\infty)}{2\pi i} - \frac{1 - S(0)}{4}.$$

Интегральное уравнение (8) для $K(x, y)$ допускает явное решение в случае, когда $S(\lambda)$ — рациональная функция. Решения уравнения (7) и потенциал $q(x)$ получаются в этом случае в виде рациональных функций от тригонометрич. и гиперболич. функций. Напр., если

$$S(\lambda) = \frac{(\lambda+i)(\lambda+2i)}{(\lambda-i)(\lambda-2i)}, \quad \lambda_1 = 1, \ m_1 = \sqrt{6},$$

то соответствующий потенциал имеет вид

$$q(x) = -\frac{24}{(2 \operatorname{ch} 2x - \operatorname{sh} 2x)^2}.$$

Лит.: [1] Марченко В. А., Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения, К., 1977; [2] Агранович З. С., Марченко В. А., Обратная задача теории рассеяния, Харьков, 1960; [3] Шадан К., Сабатье П., Обратные задачи в квантовой теории рассеяния, пер. с англ., М., 1980; [4] Левитан Б. М., Теория операторов обобщенного сдвига, М., 1973; [5] Теория солитонов: метод обратной задачи, М., 1980; [6] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965; [7] Фаддеев Л. Д., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 4, с. 57—119; [8] его же, в кн.: Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики, т. 3, М., 1974, с. 93—180; [9] Левитан Б. М., Гасымов М. Г., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 2, с. 3—63; [10] Ambarzumian V., «Z. Phys.», 1929, Bd 53, S. 690—695; [11] Borg G., «Acta math.», 1946, v. 78, p. 1—96; [12] Levinson N., «Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.», 1949, v. 25, № 9, p. 29; [13] Марченко В. А., «Докл. АН СССР»,

1950, т. 72, № 3, с. 457—60; [14] Гельфанд И. М., Левитан Б. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1951, т. 15, № 4, с. 309—60; [15] Крейн М. Г., «Докл. АН СССР», 1951, т. 76, № 1, с. 21—24; 1952, т. 82, № 5, с. 669—72; 1953, т. 88, № 3, с. 405—08; [16] Марченко В. А., там же, 1955, т. 104, № 5, с. 695—98; [17] Левин Б. Я., там же, 1956, т. 106, № 2, с. 187—90; [18] Newton R., Jost R., «Nuovo Cimento», 1955, v. 1, № 4, p. 590—622; [19] Гасымов М. Г., Левитан Б. М., «Докл. АН СССР», 1966, т. 167, № 6, с. 1219—1222; [20] Гасымов М. Г., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1968, т. 19, с. 41—112; [21] Рофе-Бекетов Ф. С., «Теория функций, функц. анализ и их прилож.», Харьков, 1967, в. 4, с. 189—197; [22] Левитан Б. М., в кн.: Задачи механики и математической физики (Посвящ. памяти И. Г. Петровского), М., 1976, с. 166—207; [23] Ахиезер Н. И., «Докл. АН СССР», 1961, т. 141, № 2, с. 263—66; [24] Гусейнов Г. Ш., там же, 1976, т. 231, № 5, с. 1045—48.

Г. Ш. Гусейнов, Б. М. Левитан.

ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ ОПЕРАТОР — самосопряженный оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l[f] = -(p(x)f')' + q(x)f, \quad x \in (a, b),$$

и подходящими граничными условиями в гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$, где (a, b) — конечный или бесконечный интервал, p', p, q — непрерывные действительные функции и $p(x) > 0$ при всех $x \in (a, b)$ (иногда так называют любой оператор, порожденный квазидифференциальным выражением вида l). Начиная с 1830 Ш. Штурм (Ch. Sturm) и Ж. Лиувилль (J. Liouville) опубликовали ряд фундаментальных исследований по теории *Штурма — Лиувилля задачи* на конечном интервале.

Точка a наз. регулярным концом, если a конечно, $p(a) \neq 0$ и p', p, $q \in C(a, b)$. В противном случае эта точка наз. сингулярным концом. Выражение l наз. регулярным или сингулярным в зависимости от того, являются ли оба конца интервала (a, b) регулярными или нет.

Пусть D_1 — множество функций $f \in L_2(a, b)$ таких, что f' — абсолютно непрерывна и $l[f] \in L_2(a, b)$, D_0 — подмножество D_1, состоящее из финитных функций. Пусть, далее, $L_1 : f \to l[f]$, $f \in D_1$ и L_0 — замыкание оператора $L_0' : f \to l[f]$, $f \in D_0$, оператор L_0 является симметрич. оператором и $L_0 = L_1^*$. Ш.— Л. о. является расширением (сужением) оператора $L_0(L_1)$.

1. Пусть l регулярен, векторы $(\alpha_i, \alpha_i', \beta_i, \beta_i')$ линейно независимы и

$$p(b)(\bar{\beta}_i'\beta_j - \bar{\beta}_i\beta_j') - p(a)(\bar{\alpha}_i'\alpha_j - \bar{\alpha}_i\alpha_j') = 0, \; i, j = 1, 2. \quad (1)$$

Тогда множество всех функций $f \in D_1$, удовлетворяющих условиям

$$p(b)(\bar{\beta}_i' f'(b) - \beta_i f(b)) - p(a)(\bar{\alpha}_i' f'(a) - \alpha_i f(a)) = 0, \quad (2)$$

$i = 1, 2$, есть область определения нек-рого Ш.— Л. о. Обратно, область определения всякого Ш.— Л. о. можно найти этим способом.

Среди граничных условий важное место занимают разделенные граничные условия (или граничные условия типа Штурма):

$$f(a)\cos\varphi - f'(a)\sin\varphi = 0, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad (3)$$

$$f(b)\cos\theta - f'(b)\sin\theta = 0, \quad \theta \in [0, \pi], \quad (4)$$

и смешанные граничные условия:

$$f(a) = \nu f(b), \quad f'(a) = \delta f'(b), \quad (5)$$

где $\nu\delta = p(b)/p(a)$. В частности, если $p(a) = p(b)$, то в случае $\nu = \delta = 1$ условия (5) наз. периодическими, а в случае $\nu = \delta = -1$ — антипериодическими (или полупериодическими).

II. Пусть l сингулярен. Случай, когда оба конца (a, b) сингулярны, приводится к случаю с одним сингулярным концом методом расщепления.

II_1. Пусть конец a регулярен, а b сингулярен и пусть число независимых решений уравнения $l[f] = if$, при-

надлежащих $L_2(a, b)$, равно 1. Тогда говорят, что выражение l принадлежит случаю предельной точки Вейля в точке b. Область определения Ш.— Л. о. задается граничным условием (3).

II_2. Если число линейно независимых решений уравнения $l[f]=if$, принадлежащих $L_2(a, b)$, равно 2, то говорят, что выражение l принадлежит случаю предельного круга Вейля в точке b. Оператор L_0 в этом случае имеет индексы дефекта (2,2). Область определения Ш.— Л. о. описывается аналогично I, заменяя условия (2) следующим образом: $p(b)$ следует заменить на $p(a)$, $f(b)$ и $f'(b)$ соответственно на $(Sf)_1(b)$ и $(Sf)_2(b)$, где

$$(Sf)_1(b) = \lim_{x\to b} p(x)[fu_2](x), \qquad (Sf)_2(b) = \lim_{x\to b} p(x)[u_1 f](x);$$

здесь $[\varphi\psi](x)$ — вронскиан функций φ и ψ в точке x, u_i, $i=1, 2$,— решения уравнения $l[f]=0$ с начальными условиями $u_i^{(j-1)}(0)=\delta_{ij}$, $i, j=1, 2$, δ_{ij}— символ Кронекера.

Ядром резольвенты Ш.— Л. о. является *Карлемана ядро*, причем в случаях I и II_2 резольвента является *Гильберта — Шмидта интегральным оператором*, а в случае II_1 таковым может быть или не быть.

Спектральное разложение Ш.— Л. о. в случае дискретности спектра (напр., в случаях I и II_2) аналогично разложению в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля, а в остальных случаях содержит собственные функции, не принадлежащие $L_2(a, b)$.

Большой интерес представляют задачи отыскания условий на коэффициенты p и q, при к-рых спектр Ш.— Л. о. дискретен, заполняет всю ось, выражение l принадлежит случаю предельной точки или предельного круга. Достаточно общие необходимые и достаточные условия на p и q, обеспечивающие принадлежность l к случаю предельного круга или предельной точки ($b=+\infty$), неизвестны (1984).

Лит.: [1] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 3 изд., т. 2, Харьков, 1978; [3] Левитан Б. М., Саргсян И. С., Введение в спектральную теорию, М., 1970; [4] Марченко В. А., Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения, К., 1977; [5] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер с англ., М., 1958; [6] Глазман И. М., Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1963; [7] Hutson V., Pym J., Applications of functional analysis and operators theory, L.— N. Y., 1980; [8] Титчмарш Э. Ч., Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, пер. с англ., т. 1, М., 1960; [9] Мирзоев К. А., «Матем. заметки», 1981, т. 29, № 2, с. 225—33; [10] Молчанов А. М., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1953, т. 2, с. 169—99; [11] Levinson N., «Math.-fyz. časop.», 1949, v. 74, p. 17—20; [12] Исмагилов Р. С., «Докл. АН СССР», 1962, т. 142, № 6, с. 1239—42; [13] Повзнер А. Я., «Матем. сб.», 1948, т. 23, № 1, с. 3—52; [14] Everitt W., в кн.: Differential equations (Proc. Internat. Conf.), Uppsala, 1977, p. 62—81.

Б. М. Левитан, К. А. Мирзоев.

ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка вида

$$-\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dy}{dx}\right\}+l(x)\,y=\lambda r(x)\,y,$$

рассматриваемое на конечном или бесконечном интервале (a, b) изменения переменной x, где $p(x)$, $l(x)$, $r(x)$ — заданные коэффициенты, λ — комплексный параметр, а y — искомое решение. Если $p(x)$, $r(x)$ положительны и $p(x)$ имеет первую производную, а $p(x)r(x)$ — вторую производную, то с помощью подстановки Лиувилля (см. [1]) это уравнение сводится к стандартному виду

$$-y''+q(x)\,y=\lambda y,\ a<x<b. \qquad (1)$$

Предполагается, что комплексная функция $q(x)$ измерима в интервале (a, b) и суммируема в каждом его

внутреннем подинтервале. Наряду с уравнением рассматривается также неоднородное уравнение

$$-y''+q(x)\,y=\lambda y+f(x),\quad a<x<b, \tag{2}$$

где $f(x)$ — заданная функция.

Если функция $f(x)$ измерима в интервале $(a,\ b)$ и суммируема в каждом его внутреннем подинтервале, то каковы бы ни были комплексные числа c_0, c_1 и какова бы ни была внутренняя точка x_0 интервала $(a,\ b)$, уравнение (2) имеет в интервале $(a,\ b)$ одно и только одно решение $y(x,\ \lambda)$, удовлетворяющее условиям $y(x_0,\ \lambda)=c_0$, $y'(x_0,\ \lambda)=c_1$. Для каждого $x\in(a,\ b)$ функция $y(x,\lambda)$ является целой аналитич. функцией λ. В качестве точки x_0 можно взять также и конечный конец интервала $(a,\ b)$ (если этот конец регулярен).

Пусть $y_1(x,\lambda)$ и $y_2(x,\lambda)$ — какие-нибудь два решения уравнения (1). Их вронскиан

$$W(y_1,\ y_2)=y_1(x,\ \lambda)\,y_2'(x,\ \lambda)-y_1'(x,\ \lambda)\,y_2(x,\ \lambda)$$

не зависит от x и равен нулю тогда и только тогда, когда эти решения линейно зависимы. Общее решение уравнения (2) представляется в виде

$$y(x,\ \lambda)=a_1y_1(x,\ \lambda)+a_2y_2(x,\ \lambda)+\int_{x_0}^{x}R(x,\ \xi,\ \lambda)\,f(\xi)\,d\xi,$$

где

$$R(x,\ \xi,\ \lambda)=\frac{1}{W(y_1,\ y_2)}\{y_1(x,\lambda)\,y_2(\xi,\lambda)-y_1(\xi,\lambda)\,y_2(x,\lambda)\},$$

a_1, a_2 — произвольные постоянные, а $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$ — линейно независимые решения уравнения (1).

Справедлива следующая фундаментальная теорема Штурма (см. [1]): пусть даны два уравнения

$$u''+q_1(x)\,u=0, \tag{3}$$

$$v''+q_2(x)\,v=0; \tag{4}$$

если $q_1(x)$, $q_2(x)$ действительны и $q_1(x)<q_2(x)$ во всем интервале $(a,\ b)$, то между каждыми двумя нулями любого нетривиального решения первого уравнения заключен, по крайней мере, один нуль каждого решения второго уравнения.

Следующая теорема известна под названием теоремы сравнения (см. [1]): пусть левый конец интервала $(a,\ b)$ конечен и $u(x)$ есть решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям $u(a)=\sin\alpha$, $u'(a)=-\cos\alpha$, а $v(x)$ — решение уравнения (4) с теми же условиями; кроме того, пусть $q_1(x)<q_2(x)$ во всем интервале $(a,\ b)$; тогда если $u(x)$ в интервале $(a,\ b)$ имеет m нулей, то $v(x)$ в том же интервале имеет не меньше m нулей и k-й нуль $v(x)$ меньше k-го нуля $u(x)$.

Одним из важных свойств уравнения (1) является существование для него так наз. операторов преобразования, имеющих простую структуру. Операторы преобразования возникли из общих алгебраич. соображений, связанных с теорией операторов обобщенного сдвига (преобразование базиса).

Для уравнения (1) существуют следующие типы операторов преобразования. Пусть $y(x,\lambda)$ — решение уравнения

$$-y''+q(x)\,y=\lambda^2y,\quad -a<x<a,\quad a\leqslant\infty, \tag{5}$$

удовлетворяющее условиям

$$y(0,\ \lambda)=1,\quad y'(0,\ \lambda)=i\lambda. \tag{6}$$

Оказывается, что это решение допускает представление

$$y(x,\ \lambda)=e^{i\lambda x}+\int_{-x}^{x}K(x,\ t)\,e^{i\lambda t}\,dt,$$

где $K(x,\ t)$ — непрерывная не зависящая от λ функция, причем

$$K(x,\ x)=\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt,\quad K(x,\ -x)=0.$$

Интегральный оператор $I+K$, определенный формулой

$$(I+K)\,f=f(x)+\int_{-x}^{x}K(x,\ t)\,f(t)\,dt,$$

наз. оператором преобразования, сохраняющим условия в точке $x=0$. Он переводит функцию $e^{i\lambda x}$ (решение простейшего уравнения — $y''=\lambda^2 y$ при условиях (6)) в решение уравнения (5) при тех же данных в точке $x=0$.

Пусть $\varphi_h(x, \lambda)$ и $\varphi_\infty(x, \lambda)$ — решения уравнения (5), удовлетворяющие условиям

$$\varphi_h(0, \lambda)=1, \ \varphi_h'(0, \lambda)=h,$$
$$\varphi_\infty(0, \lambda)=0, \ \varphi_\infty'(0, \lambda)=1.$$

Эти решения допускают представления

$$\varphi_h(x, \lambda)=\cos\lambda x+\int_0^x K_h(x, t)\cos\lambda t\, dt,$$

$$\varphi_\infty(x, \lambda)=\frac{\sin\lambda x}{\lambda}+\int_0^x K_\infty(x, t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\, dt,$$

где $K_h(x, t)$ и $K_\infty(x, t)$ — непрерывные функции.

Введен (см. [8]) новый вид операторов преобразования, сохраняющих асимптотику решений на бесконечности, а именно, оказалось, что для всех λ из верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$ уравнение (5), рассматриваемое на полуоси $0\leqslant x<\infty$, при выполнении условия $\int_0^\infty x|q(x)|dx<\infty$ имеет решение $y(x, \lambda)$, представимое в виде

$$y(x, y)=e^{i\lambda t}+\int_x^\infty K(x, t)\, e^{i\lambda t}\, dt,$$

где функция $K(x, t)$ является непрерывной и удовлетворяет неравенству

$$|K(x, t)|\leqslant\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left\{\sigma_1(x)-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\},$$

в к-ром

$$\sigma(x)=\int_x^\infty |q(t)|\, dt, \ \sigma_1(x)=\int_x^\infty \sigma(t)\, dt.$$

Кроме того,

$$K(x, x)=\frac{1}{2}\int_x^\infty q(t)\, dt.$$

Лит.: [1] Левитан Б. М., Саргсян И. С., Введение в спектральную теорию, М., 1970; [2] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [3] Левитан Б. М., Теория операторов обобщенного сдвига, М., 1973; [4] Марченко В. А., Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения, К., 1977; [5] Delsarte J., «C. r. Acad. sci.», 1938, t. 206, p. 1780—82; [6] Повзнер А. Я., «Матем. сб.», 1948, т. 23, № 1, с. 3—52; [7] Левитан Б. М., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 1, с. 3—112; [8] Левин Б. Я., «Докл. АН СССР», 1956, т. 106, № 2, с. 187—90.

Г. Ш. Гусейнов, Б. М. Левитан.

ШУБЕРТА МНОГООБРАЗИЕ — множество всех m-мерных подпространств W в n-мерном векторном пространстве V над полем k, удовлетворяющих условиям Шуберта: $\dim(W\cap V_j)\geqslant j$, $j=1, \ldots, m$, где $V_1\subset\ldots\subset V_m$ — фиксированный флаг подпространств в V. В грассмановых координатах эти условия выражаются линейными уравнениями; Ш. м. есть неприводимое (вообще говоря, особое) алгебраич. подмногообразие *Грассмана многообразия* $G_{n, m}$. Ш. м. определяют базис *Чжоу кольца* $A(G_{n, m})$, а в случае $k=\mathbb{C}$ — базис группы гомологий $H_*(G_{n, m}, \mathbb{Z})$.

Условия Шуберта рассматривались Х. Шубертом [1] в связи с задачами перечисления геометрич. объектов, обладающих заданными свойствами инцидентности. Обоснованию развитого Шубертом исчисления посвящена 15-я проблема Гильберта (см. [2]).

Лит.: [1] Schubert H., «Mitt. Math. Ges. Hamburg», 1889, Bd 1, S. 134—55; [2] Kleiman S. L., в кн.: Mathematical development arising from Hilbert problems, Providence, 1976, p. 445—82 (Proc. Symp. Pure Math., v. 28); [3] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1982; [4] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 2, М., 1954.

А. Л. Онищик.

ШУМ АДДИТИВНЫЙ — помеха, прибавляемая к сигналу при передаче его по *каналу связи*. Точнее, го-

ворят, что задан канал связи с Ш. а., если переходная функция $Q(y, \cdot)$ канала задается плотностью $q(y, \tilde{y})$, $y \in \mathcal{Y}$, $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}$ ($\mathcal{Y}$ и $\tilde{\mathcal{Y}}$ — пространства значений сигналов на входе и выходе канала соответственно), зависящей лишь от разности $\tilde{y} - y$, т. е. $q(y, \tilde{y}) = q(\tilde{y} - y)$. В этом случае сигнал на выходе канала $\tilde{\eta}$ можно представить в виде суммы сигнала на входе η и не зависящей от него случайной величины ζ, называемой Ш. а., так что $\tilde{\eta} = \eta + \zeta$.

В случае когда рассматриваются каналы с дискретным или непрерывным временем на конечных или бесконечных интервалах, понятие канала с Ш. а. вводят с помощью соотношения $\tilde{\eta}(t) = \eta(t) + \zeta(t)$, где t изменяется в рассматриваемом интервале, а $\eta(t)$, $\tilde{\eta}(t)$ и $\zeta(t)$ — случайные процессы, являющиеся соответственно сигналами на входе и выходе канала с Ш. а., причем процесс $\zeta(t)$ не зависит от процесса $\eta(t)$. В частности, если $\zeta(t)$ — гауссовский случайный процесс, рассматриваемый канал является *каналом гауссовским.*

Лит.: [1] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [2] Харкевич А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ШУРА ЛЕММА: если T, S — алгебраически неприводимые представления нек-рой группы или алгебры в векторных пространствах X и Y соответственно, то любой *сплетающий оператор* для представлений T и S либо равен нулю, либо взаимно однозначно отображает X на Y (в этом случае T и S эквивалентны). Ш. л. установлена для конечномерных неприводимых представлений И. Шуром [1]. Аналогом Ш. л. является описание семейства сплетающих операторов для двух данных представлений. В частности, Ш. л. часто называется следующее утверждение: если T, S — унитарные неприводимые представления нек-рой группы или симметричные неприводимые представления нек-рой алгебры в гильбертовых пространствах X и Y соответственно, то любой замкнутый линейный оператор из X в Y, сплетающий T и S, либо равен нулю, либо унитарен (в этом случае T и S унитарно эквивалентны). Описание семейства сплетающих операторов для представлений, допускающих разложение в прямой интеграл, наз. континуальным аналогом леммы Шура.

А. И. Штерн.

Следующие два предложения являются обобщениями Ш. л. для семейств операторов, действующих в бесконечномерных пространствах.

Пусть T_x, S_x — представления в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_T$ и $\mathcal{H}_S$ симметричного кольца R A: $\mathcal{H}_T \to \mathcal{H}_S$ — линейный замкнутый оператор с нулевым ядром, плотными областью определения и областью значений. Если выполняются соотношения $S_x A \subset A T_x$ для всех $x \in R$, то представления T_x и S_x унитарно эквивалентны.

Пусть R — алгебра линейных непрерывных операторов в локально выпуклом пространстве E, содержащая ненулевой компактный оператор и не имеющая нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств. Тогда любой оператор, перестановочный со всеми операторами алгебры R, кратен единичному оператору.

В. П. Ломоносов.

Лит.: [1] Schur I., «Sitz.-Ber. Akad. Wiss.», 1906, S. 164—184; [2] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [3] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968; [4] его же, Теория представлений групп, М., 1976; [5] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [6] Ломоносов В. И., «Функц. анализ и его прил.», 1973, т. 7, в. 3, с. 55—56.

ШУРА МУЛЬТИПЛИКАТОР группы G — группа когомологий $H^2(G, \mathbb{C}^*)$, где $\mathbb{C}^*$ — мультипликативная группа комплексных чисел с тривиальным действием G. Ш. м. был введен И. Шуром [1] в связи с изучением конечномерных комплексных проективных представлений групп. Если $\rho : G \to \mathrm{PGL}(n)$ — такое пред-

ставление, то ρ можно интерпретировать как отображение $\pi : G \to \mathrm{GL}(n+1)$ такое, что

$$\pi(\sigma)\pi(\tau) = a_{\sigma,\tau}\pi(\sigma,\ \tau),$$

где $a_{\sigma,\tau}$ — нек-рый коцикл со значениями в $\mathbb{C}^*$. В частности, проективное представление ρ является проективизацией нек-рого линейного представления π тогда и только тогда, когда коцикл $a_{\sigma,\tau}$ определяет нулевой элемент группы $H^2(G, \mathbb{C}^*)$. Если $H^2(G, \mathbb{C}^*) = 0$, то группа G наз. з а м к н у т о й в с м ы с л е Ш у р а. *Если G — конечная группа, то существуют* естественные изоморфизмы

$$H^2(G,\ \mathbb{C}^*) \cong H^2(G,\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong H^3(G,\ \mathbb{Z}).$$

Пусть $M(G) = H^{-3}(G, \mathbb{Z}) = \mathrm{Char}(H^3(G, \mathbb{Z}))$. Если задано центральное расширение

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 1 \qquad (*)$$

конечной группы G, то существует естественное отображение $\varphi : M(G) \to A$, образ к-рого совпадает с $A \cap [F, F]$. Отображение φ совпадает с отображением $H^{-3}(G, \mathbb{Z}) \to H^{-1}(G,\ A)$, индуцированным $\cup$-произведением на 2-мерный коцикл из $H^2(G, A)$, определяющий расширение (*). Обратно, для любой подгруппы $C \subset M(G)$ существует расширение (*) такое, что $\mathrm{Ker}\ \varphi = C$. Если $G = [G, G]$, то расширение (*) однозначно определяется гомоморфизмом φ. Если φ — мономорфизм, то любое проективное представление группы G индуцируется нек-рым линейным представлением группы F.

Лит.: [1] S c h u r I., «J. reine und angew. Math.», 1904, Bd 127, S. 20—50; [2] М а к л е й н С., Гомология, пер. с англ., М., 1966.

Л. В. Кузьмин.

ШУРА ТЕОРЕМЫ — теоремы, относящиеся к решению *коэффициентов проблемы* для ограниченных аналитич. функций и полученные И. Шуром [1]. Пусть B — класс функций $f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$, регулярных в круге $|z| < 1$ и *удовлетворяющих в нем условию* $|f(z)| \leqslant 1$. Пусть $\mathbb{R}_n$, $n \geqslant 1$, есть n-мерное комплексное евклидово пространство, точками к-рого являются системы из n комплексных чисел $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$; $B^{(n)}$ — множество точек $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}_n$ таких, что числа $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ являются первыми n коэффициентами нек-рой функции класса B. Множества $B^{(n)}$ — ограниченные, замкнутые и выпуклые в $\mathbb{R}_n$. Тогда *справедливы* следующие теоремы.

П е р в а я т е о р е м а Ш у р а: точкам $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ на границе $B^{(n)}$ соответствует в B только дроби вида

$$\frac{\overline{\alpha}_{n-1} + \overline{\alpha}_{n-2} z + \dots + \overline{\alpha}_0 z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{n-1} z^{n-1}}.$$

В т о р а я т е о р е м а Ш у р а: для того чтобы $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ была внутренней точкой $B^{(n)}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_0 & c_1 & \dots & c_{k-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & c_0 & \dots & c_{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & c_0 \\ \overline{c}_0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{c}_1 & \overline{c}_0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{c}_{k-1} & \overline{c}_{k-2} & \dots & \overline{c}_0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Вторая Ш. т. дает в окончательной форме решение задачи коэффициентов для ограниченных функций в случае внутренних точек области коэффициентов.

Лит.: [1] S c h u r I., «J. reine und angew. Math.», 1917, Bd 147, S. 205—32; [2] B i e b e r b a c h L., Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd 2, B. — Lpz., 1927; [3] Г о л у з и н Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

Ю. Е. Аленицын.

ЭВБУЛИДА ПАРАДОКС, парадокс Евбулида — то же, что *антиномия* Эвбулида.

ЭВЕРЕТТА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — способ записи интерполяционного многочлена, получающегося из *Гаусса интерполяционной формулы* для интерполирования вперед по узлам x_0, x_0+h, x_0-h, ..., x_0+nh, x_0-nh, $x_0+(n+1)h$ в точке $x=x_0+th$

$$G_{2n+1}(x)=G_{2n+1}(x_0+th)=f_0+tf'_{1/2}+\frac{t(t-1)}{2!}f^2_0+\ldots$$

$$\ldots+\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t^2-n^2)}{(2n+1)!}f^{2n+1}_{1/2}$$

исключением конечных разностей нечетного порядка при помощи соотношения

$$f^{2k+1}_{1/2}=f^{2k}_1-f^{2k}_0.$$

После приведения подобных членов получается Э. и. ф.

$$E_{2n+1}(x_0+th)=S_0(u)+S_1(t), \qquad (1)$$

где $u=1-t$,

$$S_q(t)=f_qt+f^2_q\frac{t(t^2-1)}{3!}+\ldots+f^{2n}_q\frac{t(t^2-1)\ldots(t^2-n^2)}{(2n+1)!}. \qquad (2)$$

Формула [1] примерно вдвое сокращает работу по сравнению с другими записями интерполяционного многочлена при решении задачи уплотнения таблиц, т. е. когда по данной таблице значений функции с узлами x_0+kh требуется составить таблицу значений функции с узлами x_0+kh' при $h'=h/l$, где l — целое, поскольку в этом случае значения $f(x_0-th)$ при $0<t<1$ вычисляются по формуле

$$f(x_0-th)=S_0(u)+S_{-1}(t);$$

значение $S_0(u)$ используется при нахождении двух значений $f(x_0\mp th)$.

При ручном счете в случае $n=2$ коэффициент при f^4_q в (2) целесообразно приблизить выражением

$$-k\frac{t(t^2-1)}{3!}$$

и вместо $S_q(t)$ вычислять

$$\overline{S}_q(t)=f_qt+\left(f^2_q-\frac{k}{20}f^4_q\right)\frac{t(t^2-1)}{3!}.$$

Параметр k можно выбирать, напр., из условия минимума главной части величины

$$\sup|E_5(x_0+th)-\overline{E}_5(x_0+th)|,$$

где

$$\overline{E}_5(x_0+th)=\overline{S}_0(u)+\overline{S}_1(t),\ u=1-t.$$

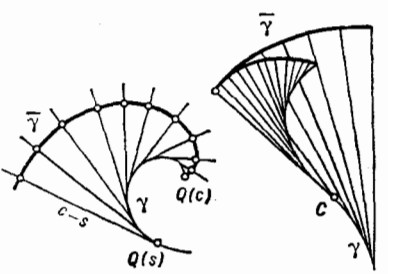
В этом случае значение $k=3{,}6785$.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975. *М. К. Самарин.*

ЭВОЛЬВЕНТА плоской кривой γ — такая кривая $\tilde{\gamma}$, для к-рой кривая γ является *эволютой*. Если $r=r(s)$ (где s — натуральный параметр) — уравнение кривой γ, то уравнение ее Э. имеет вид:

$$r=r(s)+\tau(c-s),$$

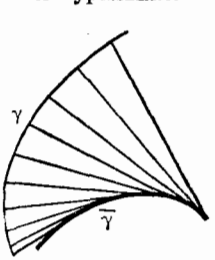
где c — произвольная постоянная, τ — касательный вектор к γ. На рис. показано строение Э. в двух характерных случаях:

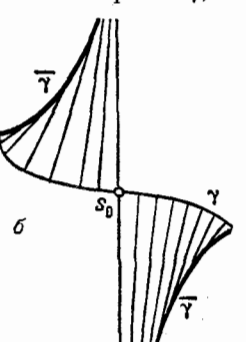


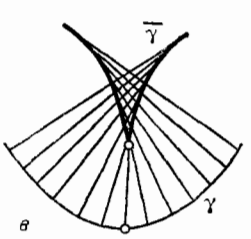
а) для всех $s<c$ кривизна $k(s)$ кривой $\bar\gamma$ не обращается в нуль (Э.— регулярная кривая); б) $k(s)$ обращается в нуль только при $s=s_1$, причем $k'(s_1)\neq 0$ (точка Э., соответствующая $s=s_1$, является точкой возврата 2-го рода).

Об Э. поверхности см. *Эволюта*. *Д. Д. Соколов.*

ЭВОЛЮТА плоской кривой γ — множество $\tilde\gamma$ точек центров кривизны кривой γ. Если $r=r(s)$ (где s — натуральный параметр) — уравнение кривой γ, то







уравнение ее Э. имеет вид:

$$\tilde r = r + \frac{1}{k}\,\nu,$$

где k — кривизна, ν — нормаль кривой γ. На рис. показано строение Э. в трех характерных случаях:

а) вдоль всей кривой производная k' знакоопределена, k не обращается в нуль;

б) вдоль всей кривой производная k' знакоопределена, k обращается в нуль при $s=s_0$;

в) для $s<s_0$ $k'>0$, для $s>s_0$ $k'(s)<0$, $k'(s_0)=0$, k не обращается в нуль (точка Э., соответствующая $s=s_0$, является точкой возврата). Длина отрезка Э., соответствующего отрезку $s_1\leqslant s\leqslant s_2$ кривой γ, равна

$$\tilde s\,(s_1,\ s_2) = \left|\frac{1}{k\,(s_2)} - \frac{1}{k\,(s_1)}\right|.$$

Э. является огибающей нормалей кривой γ. Кривая γ по отношению к своей Э. наз. *эвольвентой*. *Д. Д. Соколов.*

ЭВОЛЮТА, эволютная поверхность,— множество ребер возврата развертывающихся поверхностей, образованных нормалями к поверхности F вдоль одного семейства линий кривизны F. Э. состоит из двух полостей F_u и F_v, каждая из к-рых является множеством

центров нормальных кривизн соответствующего семейства u, v линий кривизны. Поверхность по отношению к своей Э. наз. эвольвентой (эвольвентной поверхностью). Напр., Э. тора есть ось вращения его и окружность, описываемая центром вращающейся окружности.

Радиус-векторы R_u и R_v соответствующих полостей Э. F_u и F_v суть:

$$R_u = r + \rho_u n, \quad R_v = r + \rho_v n,$$

где ρ_u, ρ_v — радиусы нормальных кривизн линий кривизны (u, v), r — радиус-вектор поверхности F, n — нормаль к F. Ортогональные траектории ребер возврата F_u полости Э. F_v совпадают с линиями уровня функции ρ_v и являются геодезическими параллелями.

Средней эволютой (средней огибающей поверхностью Ф) для данной поверхности F наз. огибающая плоскостей, параллельных касательным плоскостям F и проходящих через середину отрезка между центрами нормальных кривизн линий кривизны; ее радиус-вектор $R_c = r + \frac{H}{K} n$, где H и K — соответственно средняя и гауссова кривизны F, так что F и Ф — параллельные поверхности. При этом, если Δ' — второй дифференциальный параметр, соответствующий III квадратичной форме F и $w = (rn)$, то $\Delta' w = -2\left(w + \frac{H}{K}\right)$. Если $w = -\frac{H}{K}$, т. е. средняя Э. вырождается в плоскость, то получается поверхность Бонне, если же $w + \frac{H}{K} = cw$, то поверхность F гомотетична Ф и наз. поверхностью Гурса, в частности при $c = 1$ получается минимальная поверхность.

И. Х. Сабитов.

ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, допускающее истолкование как запись дифференциального закона развития (эволюции) во времени нек-рого процесса. Термин не имеет точного определения, и его применимость может зависеть не только от самого уравнения, но и от постановки задачи для него. Для Э. у. характерна возможность построения решения при заданном начальном условии, к-рое трактуется как запись начального состояния процесса. К Э. у. относятся, прежде всего, обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы общего вида

$$u' = f(t, u), \quad u'' = f(t, u, u') \qquad (*)$$

и т. п. в случае, когда $u(t)$ естественно рассматривать как решение задачи Коши; эти уравнения описывают эволюцию систем с конечным числом степеней свободы. Учет последействия приводит к интегро-дифференциальным уравнениям типа Вольтерра или к дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом. Описание процессов, происходящих в сплошных средах, приводит к дифференциальным уравнениям с частными производными гиперболического, параболического и родственных типов; здесь, наряду с задачей Коши, ставится смешанная (начально-граничная) задача. Если решение $u(x, t)$ таких уравнений трактовать как зависящий от параметра t элемент какого-либо пространства функций от x, то приходят к абстрактным дифференциальным уравнениям вида (*). Все эти уравнения, а также соответствующие им разностные уравнения и относят обычно к Э. у.

Аналогии с реальными процессами приводят к постановкам естественных задач для Э. у. (напр., задача об устойчивости решений) и порой дают методы их изучения (напр., привлечение математич. аналогов законов сохранения или диссипации полной энергии). Эволюционный характер уравнения благоприятен для его численного решения, так как значения $u(t_k)$ $(t_0 < t_1 < \ldots)$ при достаточно малом шаге Δt_k можно получать с помощью постепенного перестраивания, отправляясь

от начального условия. Это привело к тому, что многие задачи о стационарном состоянии среды при их численном решении трактуются как предельные при $t \to +\infty$ для эволюционных задач. (Напр., решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ при заданных граничных условиях служит пределом решений уравнения $\partial u/\partial t = \Delta u$ при тех же граничных условиях и любых начальных условиях; в подобных случаях говорят об установлении решений Э. у.)

А. Д. Мышкис.

ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР — линейная оператор-функция $U(t, s)$ двух переменных t, s, обладающая свойствами:

$$U(s, s) = I;$$

$$U(t, \tau)\, U(\tau, s) = U(t, s);$$

$$U(t, \tau) = U^{-1}(\tau, t).$$

М. П. Войцеховский.

ЭДЖВОРТА РЯД — ряд, определяемый выражением

$$f(x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{b_{k,\,k+2}\,\varphi^{(k+2)}(x) + \ldots + b_{k,\,3k}\,\varphi^{(3k)}(x)}{n^{k/2}}. \quad (*)$$

Здесь $f(x)$ — плотность распределения случайной величины

$$\frac{s_n - \mathrm{E}s_n}{\sqrt{\mathrm{D}s_n}}$$

($s_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимы и одинаково распределены),

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

— плотность стандартного нормального распределения,

$$\varphi^k(x) = \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k}.$$

Коэффициенты $b_{k,\,k+2l}$ не зависят от n и представляют собой многочлены относительно $\lambda_3, \ldots, \lambda_{k-l+3}$, где $\lambda_j = \varkappa_j/\sigma^j$, σ^2 — дисперсия, а $\varkappa_j$ — семиинвариант порядка j случайной величины ξ_1. В частности, первые члены разложения имеют вид

$$f(x) = \varphi(x) - \frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{3!} \lambda_3 \varphi^{(3)}(x) + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{4!}\lambda_4 \varphi^{(4)}(x) + \frac{10}{6!}\lambda_3^2 \varphi^{(6)}(x)\right] - \frac{1}{n^{3/2}}\left[\frac{1}{5!}\lambda_5 \varphi^{(5)}(x) + \frac{35}{7!}\lambda_3 \lambda_4 \varphi^{(7)}(x) + \frac{280}{9!}\lambda_3^3 \varphi^{(9)}(x)\right] + \ldots.$$

Коэффициенты $b_{k,\,k+2l}$ могут быть выражены также через центральные моменты.

Ряды (*) введены Ф. Эджвортом [1]. Их асимптотич. свойства исследованы Г. Крамером (H. Cramèr), к-рый показал, что при довольно общих условиях ряд (*) дает асимптотич. разложение $f(x)$ с остаточным членом порядка первого отброшенного члена.

Лит.: [1] Edgeworth F. Y., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1905, v. 20, p. 36—65; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. *В. Г. Ушаков.*

ЭЙКОНАЛА УРАВНЕНИЕ — уравнение с частными производными, имеющее вид

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x^i}\right)^2 = \frac{1}{c^2(x^1, \ldots, x^m)}.$$

Здесь m — размерность пространства, c — гладкая, не равная нулю функция. В приложениях c имеет смысл скорости распространения волн, а поверхности $\tau(x^1, \ldots, x^m) = \mathrm{const}$ — волновых фронтов. Лучи (см. *Ферма принцип*) являются характеристиками Э. у.

Существует ряд обобщений и аналогов Э. у. В частности, обобщением Э. у. является уравнение

$$H\left(x^1,\ \ldots,\ x^m,\ \frac{\partial\tau}{\partial x^1},\ \ldots,\ \frac{\partial\tau}{\partial x^m}\right)=1,$$

где H — однородная 1-й степени по $\frac{\partial\tau}{\partial x^1},\ \ldots,\ \frac{\partial\tau}{\partial x^m}$ функция, удовлетворяющая нек-рым дополнительным ограничениям. Важное значение имеет нестационарный аналог Э. у.

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+c\,(t,\ x^1,\ \ldots,x^m)\ \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x^i}\right)^2}=0.$$

Последнее уравнение — частный случай встречающихся в теории волновых явлений дисперсионных уравнений, имеющих вид

$$-\frac{\partial\theta}{\partial t}=\omega\,(t,\ x^1,\ \ldots,\ x^m,\ \theta_{x^1},\ \ldots,\ \theta_{x^m}).$$

Здесь ω — заданная функция.

На математич. теорию геометрич. оптики можно смотреть как на теорию Э. у. Все виды Э. у.— дифференциальные уравнения с частными производными 1-го порядка. Решение Э. у. может иметь сингулярности. Их теория — часть теории *особенностей дифференцируемых отображений* (см. также *Гамильтона — Якоби теория*, *Геометрическое приближение*, *Лучевой метод*).

Лит.: [1] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [2] Уизем Дж. Б., Линейные и нелинейные волны, пер. с англ., М., 1977.

В. М. Бабич.

ЭЙЛЕНБЕРГА — МАКЛЕЙНА ПРОСТРАНСТВО — пространство, обозначаемое через $K(\pi,\ n)$ и представляющее функтор $X\to H^n(X;\ \pi)$, где n — неотрицательное число и π — нек-рая группа, коммутативная при $n>1$, а $H^n(X;\ \pi)$ есть n-мерная группа когомологий конечного клеточного пространства X с коэффициентами в π. Существует при любых указанных n и π.

Э.— М. п. $K(\pi,\ n)$ можно характеризовать также следующим условием: $\pi_i(K(\pi,\ n))=\pi$ при $i=n$ и $i=0$ при $i\neq n$, где π_i есть i-я *гомотопическая группа*. Таким образом, пространство $K(\pi,\ n)$ определено однозначно с точностью до слабой гомотопич. эквивалентности. Любое топологич. пространство можно, с точностью до слабой гомотопич. эквивалентности, разложить в косое произведение Э.— М. п. (см. *Постникова система*). Когомологии пространства $K(\pi,\ 1)$ совпадают с когомологиями группы π. Введены С. Эйленбергом и С. Маклейном [1].

Лит.: [1] Eilenberg S., MacLane S., «Ann. Math.», 1945, v. 46, p. 480—509; 1950, v. 51, p. 514—33; [2] Мошер Р., Тангора М., Когомологические операции, пер. с англ., М., 1970; [3] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971.

Ю. Б. Рудяк.

ЭЙЛЕРА КРИТЕРИЙ: при a, не делящемся на простое число $p>2$, имеет место сравнение

$$a^{\frac{p-1}{2}}\equiv\left(\frac{a}{p}\right)\pmod p,$$

где $\left(\frac{a}{p}\right)$ — *Лежандра символ*. Таким образом, Э. к. дает необходимое и достаточное условие того, чтобы число $a\not\equiv 0\pmod p$ являлось *квадратичным вычетом* или же невычетом по модулю p. Доказан Л. Эйлером в 1761 (см. [1]).

Л. Эйлер получил также и более общий результат: для того, чтобы число a ($a\not\equiv 0\pmod p$) было вычетом степени n по простому модулю p, необходимо и достаточно условие

$$a^{\frac{p-1}{\delta}}\equiv 1\pmod p,$$

где $\delta=(n,\ p-1)$.

Оба эти утверждения легко переносятся на случай конечного поля.

Лит.: [1] Euler L., Opera Omnia. Ser. 1, v. 12, Lpz.— B., 1914, p. 493—538; [2] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981. *С. А. Степанов.*

ЭЙЛЕРА МЕТОД — простейший конечно-разностный метод численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0.$$

Выбирается достаточно малый шаг h по оси x, строятся точки $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и искомая интегральная кривая $y(x)$ заменяется ломаной (ломаная Эйлера), звенья к-рой прямолинейны на отрезках $[x_i, x_{i+1}]$, а ординаты определяются по формулам

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Если правая часть $f(x, y)$ уравнения (1) непрерывна, то последовательность ломаных Эйлера при $h \to 0$ на достаточно малом отрезке $[x_0, x_0 + H]$ равномерно стремится к искомой интегральной кривой $y(x)$.

Э. м. заключается в том, что интеграл дифференциального уравнения (1) на каждом последовательном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ представляется двумя членами ряда Тейлора

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

На каждом шаге Э. м. имеет погрешность порядка h^2.

Для уточнения Э. м. используются различные модификации. Напр., в усовершенствованном методе ломаных вместо формулы (2) для определения ординат используют формулу

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где

$$x_{i+1/2} = x_i + h/2, \quad y_{i+1/2} = y_i + (h/2) f(x_i, y_i), \tag{4}$$

то есть учитывают направление поля интегральных кривых в средней точке (4) звена ломаной.

Другой модификацией Э. м. является усовершенствованный метод Эйлера — Коши:

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})}{2}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Последний метод можно еще более уточнить, применив итерационную обработку каждого значения y_{i+1}:

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i^{(k-1)})], \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где нулевое приближение

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Итерационный расчет по формуле (6) продолжают до тех пор, пока два последовательных приближения $y_{i+1}^{(k)}$ и $y_{i+1}^{(k+1)}$ не совпадут между собой в заданном числе десятичных знаков. Если после трех — четырех итераций совпадение требуемого числа десятичных знаков не достигается, то это указывает на необходимость уменьшения шага h. Э. м. с итерационной обработкой ординат дает на каждом шаге погрешность порядка h^3.

Э. м. и его модификации переносятся на более общий случай решения системы n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_k' = f_k(x, y_1, \ldots, y_n), \quad k = 1, \ldots, n,$$

при заданных начальных условиях

$$y_k(x_0) = y_{k_0}.$$

Алгоритм вычислений по Э. м. легко программируется и удобен для реализации на ЭВМ.

Метод предложен Л. Эйлером (L. Euler, 1768).

Лит.: [1] Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики, М., 1960. *И. Б. Вапнярский.*

ЭЙЛЕРА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования числовых и функциональных рядов. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

суммируем методом суммирования Эйлера ((E, q)-суммируем) к сумме S, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} S_k = S,$$

где $q>-1$, $S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$.

Впервые метод при $q=1$ применялся Л. Эйлером (L. Euler) для суммирования медленно сходящихся и расходящихся рядов. На произвольные значения q метод был распространен К. Кноппом [1], поэтому Э. м. с. при любом q наз. также методом суммирования Эйлера — Кноппа. Э. м. с. регулярен при $q\geqslant 0$ (см. *Регулярные методы суммирования*); если ряд (E, q)-суммируем, то он суммируем и методом (E, q') при $q'>q>-1$ к той же сумме (см. *Включение методов суммирования*). При $q=0$ суммируемость Э. м. с. ряда (*) означает сходимость этого ряда. Если ряд (E, q)-суммируем, то его члены a_n удовлетворяют условию $a_n = o\{(2q+1)^n\}$, $q\geqslant 0$. Э. м. с. применяется также для аналитич. продолжения функции, определенной степенным рядом, за круг сходимости. Так, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (E, q)-суммируем к сумме $1/(1-z)$ в круге с центром в точке $-q$ и радиусом, равным $q+1$.

Лит.: [1] Knopp K., «Math. Z.», 1922, Bd 15, S. 226—53; [2] его же, там же, 1923, Bd 18, S. 125—56; [3] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [4] Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, 2 изд., Таллин, 1977. *И. И. Волков.*

ЭЙЛЕРА МНОГОЧЛЕНЫ — многочлены вида

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k},$$

где E_k — *эйлеровы числа*. Э. м. можно последовательно вычислить по формуле

$$E_n(x) + \sum_{s=0}^{n} C_n^s E_s(x) = 2x^n.$$

В частности,

$$E_0(x) = 1,\ E_1(x) = x - \frac{1}{2},\ E_2(x) = x(x-1).$$

Э. м. удовлетворяют разностному уравнению

$$E_n(x+1) + E_n(x) = 2x^n$$

и принадлежат классу *Аппеля многочленов*, т. е. удовлетворяют соотношению

$$\frac{d}{dx} E_n(x) = nE_{n-1}(x).$$

Производящая функция для Э. м.:

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(x)}{n!} t^n.$$

Для Э. м. справедливо разложение в ряд Фурье

$$E_n(x) = \frac{n!}{\pi^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2k+1)\pi x + \frac{n+1}{2}\pi\right]}{(2k+1)^{n+1}}, \qquad (*)$$

$$0\leqslant x\leqslant 1, \quad n\geqslant 1.$$

Э. м. удовлетворяют соотношениям:

$$E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x),$$

$$E_n(mx) = m^n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k E_n\left(x+\frac{h}{m}\right),$$

если m нечетно,

$$E_n(mx) = -\frac{2m^n}{n+1} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k E_{n+1}\left(x+\frac{k}{m}\right),$$

если m четно.

Периодич. функции, совпадающие с правой частью (*), являются экстремальными в *Колмогорова неравенстве* и ряде других экстремальных задач теории функций. Рассматриваются также обобщенные Э. м.

Лит.: [1] Эйлер Л., Дифференциальное исчисление, пер. с лат., М.— Л., 1949; [2] Nörlund N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung, B., 1924.

Ю. Н. Субботин.

ЭЙЛЕРА ПОДСТАНОВКА — замена переменной $x = x(t)$ в интеграле

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \qquad (1)$$

где $R(\cdot, \cdot)$ — рациональная функция своих аргументов, сводящая этот интеграл к интегралу от рациональной функции и имеющая один из следующих трех видов.

Первая подстановка Эйлера: если $a>0$, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t.$$

Вторая подстановка Эйлера: если корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена ax^2+bx+c действительные, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-x_1).$$

Третья подстановка Эйлера: если $c>0$, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$$

(в правых частях равенств можно брать любые комбинации знаков). При всех Э. п. как старая переменная интегрирования x, так и радикал $\sqrt{ax^2+bx+c}$ рационально выражаются через новую переменную t.

Две первые Э. п. позволяют всегда свести интеграл (1) к интегралу от рациональной функции на любом промежутке, на к-ром радикал $\sqrt{ax^2+bx+c}$ принимает только действительные значения.

Геометрич. смысл Э. п. состоит в том, что кривая 2-го порядка

$$y^2 = ax^2+bx+c \qquad (2)$$

имеет рациональное параметрич. представление: именно, если за параметр t взять угловые коэффициенты пучка секущих $y-y_0=t(x-x_0)$, проходящих через точку (x_0, y_0) кривой (2), то координаты этой кривой будут рационально выражаться через переменную t. В случае, когда $a>0$ и, следовательно, кривая (2) является гиперболой, для того, чтобы получить 1-ю Э. п., за точку (x_0, y_0) следует взять одну из бесконечно удаленных точек, определяемых направлениями асимптот этой гиперболы; в случае, когда корни x_1 и x_2 квадратичного трехчлена ax^2+bx+c действительны, для того, чтобы получить 2-ю Э. п., надо взять за точку (x_0, y_0) одну из точек $(x_1, 0)$ или $(x_2, 0)$; а в случае, когда $c>0$, чтобы получить 3-ю Э. п.— одну из точек пересечения кривой (2) с осью ординат, т. е. одну из точек $(0, \pm\sqrt{c})$.

Л. Д. Кудрявцев.

ЭЙЛЕРА ПОСТОЯННАЯ — число c, определяемое равенством

$$c = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) \approx 0{,}57721566490\ldots,$$

рассмотрено Л. Эйлером (L. Euler, 1740). Его существо-

вание следует из монотонного возрастания и ограниченности сверху последовательности

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1).$$

Арифметич. природа Э. п. не изучена, неизвестно (1984) даже является ли она рациональным числом или нет.

Л. Д. Кудрявцев.

ЭЙЛЕРА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — 1) Э. п. рядов: если дан числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n, \tag{1}$$

то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}} \tag{2}$$

наз. рядом, полученным из ряда (1) Э. п. рядов. Здесь

$$\Delta^n a_0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a_k.$$

Если ряд (1) сходится, то сходится и ряд (2) и притом к той же сумме, что и ряд (1). Если ряд (2) сходится (в этом случае ряд (1) может расходиться), то ряд (1) наз. суммируемым по Эйлеру.

Если ряд (1) сходится, $a_n>0$, для всех $k=0, 1, 2, \ldots$ последовательность

$$\Delta^k a_n=\sum_{l=0}^{k}(-1)^l C_k^l a_{n+l}$$

монотонная и

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant q>\frac{1}{2},$$

то сходимость ряда (2) быстрее сходимости ряда (1) (см. *Сходимость*).

Л. Д. Кудрявцев.

2) Э. п.— интегральное преобразование вида

$$w(z)=\int_C (z-t)^{\alpha} v(t)\,dt, \tag{1}$$

где C — контур в комплексной плоскости t. Предложено Л. Эйлером (L. Euler, 1769).

Э. п. применяется к линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$Lw\equiv\sum_{j=0}^{n}(-1)^j w^{(j)}\sum_{k=0}^{n-j}C_{n+\beta-j-1}^{n-k-j}Q_j^{(n-k-j)}(z)=0, \tag{2}$$

где $Q_j(z)$ — многочлен степени $\leqslant n-j$ и β — константа. В таком виде можно представить любое линейное уравнение

$$P_n(z)w^{(n)}+P_{n-1}(z)w^{(n-1)}+\ldots+P_0(z)w=0,$$

где $P_j(z)$ — многочлены степени $\leqslant j$, степень $P_n(z)$ равна n. Уравнение

$$Mv\equiv\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(Q_{n-j}(z)v)^{(j)}=0$$

наз. преобразованием Эйлера уравнения (2). Если $w(z)$ определена формулой (1), причем $\alpha=\beta+n-1$, то справедливо тождество

$$Lw=\int_C (z-t)^{\alpha}M(v)\,dt$$

при условии, что внеинтегральная подстановка, к-рая возникает при интегрировании по частям, обращается в нуль. Отсюда видно, что если $M(v)=0$, то $w(z)$ — решение уравнения (2).

Э. п. позволяет понизить порядок уравнения (2), если $Q_j(z)\equiv 0$ при $j>q$, $q<n$. При $q=0$, $q=1$ уравнение (2) интегрируется (см. *Похгаммера уравнение*).

Лит.: [1] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Харьков, 1939; [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

М. В. Федорюк.

3) Э. п. — 1-го рода — интегральное преобразование вида

$$I^{\mu}f(x)=\mathfrak{R}_{\mu}\{f(t);\ x\}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^x f(t)\,(x-t)^{\mu-1}\,dt,$$

где μ, x — комплексные переменные, причем путем интегрирования является отрезок $t=x\tau$, $0<\tau<1$.

Э. п. 1-го рода наз. также дробным интегралом Римана — Лиувилля порядка μ. (Иногда под интегралом Римана — Лиувилля понимают интеграл

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_x^a f(t)\,(t-x)^{\mu-1}\,dt=\mathfrak{R}_{\mu}\{f(a-t);\ a-x\},$$

где a — комплексное число.)

При нек-рых условиях на функции $f(x)$, $g(x)$ имеют место следующие равенства:

$$I^0f(x)=f(x),$$

$$I^{\mu}[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha I^{\mu}f(x)+\beta I^{\mu}g(x),$$

α, β — комплексные постоянные,

$$I^{\mu}[I^{\nu}f(x)]=I^{\mu+\nu}f(x),$$

$$I^nf(x)=\int_0^x dt_1\int_0^{t_1}dt_2\ldots\int_0^{t_{n-2}}dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}}f(t_n)\,dt_n,$$

$$I^{-n}f(x)=\frac{d^n}{dx^n}f(x),\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Э. п. 2-го рода — интегральное преобразование вида

$$K^{\mu}f(x)=\mathfrak{M}_{\mu}\{f(t);\ x\}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_x^{\infty}f(t)\,(t-x)^{\mu-1}\,dt,$$

где μ, x — комплексные переменные, причем путем интегрирования является луч $t=x\tau$, $\tau>1$, или $t=x+\tau$, $\tau>0$. При нек-рых условиях имеют место следующие равенства

$$K^0f(x)=f(x),$$

$$K^{\mu}[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha K^{\mu}f(x)+\beta K^{\mu}g(x),$$

α, β — комплексные постоянные,

$$K^{\mu}[K^{\nu}f(x)]=K^{\mu+\nu}f(x),$$

$$K^nf(x)=\int_x^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2\ldots\int_{t_{n-2}}^{\infty}dt_{n-1}\int_{t_{n-1}}^{\infty}f(t_n)\,dt_n,$$

$$K^{-n}f(x)=\frac{d^n}{dx^n}f(x),\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Э. п. 2-го рода иногда наз. дробным интегралом Вейля порядка μ.

Указанные преобразования введены также для обобщенных функций.

Лит.: Брычков Ю. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования обобщенных функций, М., 1977.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

ЭЙЛЕРА ПРОИЗВЕДЕНИЕ — бесконечное произведение вида

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

где s — действительное число и p пробегает все простые числа. Это произведение абсолютно сходится при всех $s>1$. Аналогичное произведение для комплексных чисел $s=\sigma+it$ абсолютно сходится при $\sigma>1$ и задает в этой области дзета-функцию Римана

$$\zeta(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

С. А. Степанов.

ЭЙЛЕРА ПРЯМАЯ — прямая, на к-рой лежат точка H пересечения высот треугольника, точка S пересечения медиан и точка O — центр описанной окружности. Если Э. п. проходит через вершину треугольника, то треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный, либо прямоугольный равнобедренный. Для отрезков Э. п. выполняется соотношение:

$$OH:SH=1:2$$

Э. п. впервые была рассмотрена Л. Эйлером (L. Euler, 1765).

П. С. Моденов.

ЭЙЛЕРА РЯД — выражение вида

$$\sum_p \frac{1}{p},$$

где сумма берется по всем простым числам p. Л. Эйлер (L. Euler, 1748) показал, что этот ряд расходится, и тем самым дал еще одно доказательство бесконечности множества простых чисел. Для частичных сумм Э. р. имеет место асимптотика

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + C + O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

где $C = 0{,}261497 \ldots$.

С. А. Степанов.

ЭЙЛЕРА ТЕОРЕМА: у всякого выпуклого многогранника число вершин B плюс число граней Г минус число ребер P равно 2:

$$\text{В} + \Gamma - \text{Р} = 2. \qquad (*)$$

Э. т. справедлива для многогранников рода 0; для многогранников рода p выполняется соотношение

$$\text{В} + \Gamma - \text{Р} = 2 - 2p.$$

Э. т. доказана Л. Эйлером (L. Euler, 1758), соотношение (*) было известно Р. Декарту (R. Descartes, 1620).

А. Б. Иванов.

ЭЙЛЕРА ТОЖДЕСТВО — соотношение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

где $s > 1$ — произвольное действительное число и произведение берется по всем простым числам p. Э. т. справедливо также для всех комплексных чисел $s = \sigma + it$ таких, что $\sigma > 1$.

Обобщением Э. т. является соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 - f(p))^{-1},$$

справедливое для всякой вполне мультипликативной арифметич. функции $f(n)$ с абсолютно сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Другим обобщением Э. т. является соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_p (1 - a_p p^{-s} + p^{2k-1-2s})^{-1}$$

для *Дирихле рядов*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > k + 1,$$

соответствующих модулярным функциям

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

веса $2k$, являющимся собственными функциями операторов Гекке.

Лит.: [1] Чандрасекхаран К., Введение в аналитическую теорию чисел, пер. с англ., М., 1974; [2] Ленг С., Введение в теорию модулярных форм, пер. с англ., М., 1979.

С. А. Степанов.

ЭЙЛЕРА УРАВНЕНИЕ — 1) Э. у. — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \frac{d^i y}{dx^i} = f(x), \qquad (1)$$

где a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, — константы, $a_n \neq 0$. Это уравнение подробно исследовал Л. Эйлер (L. Euler), начиная с 1740.

Замена независимой переменной $x = e^t$ приводит уравнение (1) при $x > 0$ к линейному уравнению n-го порядка

с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D(D-1)\dots(D-i+1)\,y = f(e^t),\quad D = d/dt.$$

Характеристич. уравнение этого линейного уравнения наз. определяющим уравнением Э. у. Точка $x=0$ является *регулярной особой точкой* однородного Э. у. Фундаментальная система (действительных) решений действительного однородного уравнения (1) на полуоси $x>0$ состоит из функций вида

$$x^\alpha \cos(\beta \ln x)\ln^m x,\quad x^\alpha \sin(\beta \ln x)\ln^m x. \qquad (2)$$

Если $x<0$, то в уравнении (1) нужно сделать подстановку $x=-e^t$, а в выражениях (2) заменить x на $|x|$.

Более общее, чем (1), уравнение Лагранжа

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (\alpha x+\beta)^j y^{(j)} = f(x),$$

где α, β, a_j — константы, $\alpha\neq 0$, $a_n\neq 0$, подстановкой

$$\alpha x+\beta = e^t \quad\text{или}\quad \alpha x+\beta = -e^t$$

также сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

Лит.: [1] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

Н. Х. Розов.

2) Э. у.— необходимое условие экстремума в задачах вариационного исчисления, полученное Л. Эйлером (L. Euler, 1744). Впоследствии, используя другой метод, это уравнение вывел Ж. Лагранж (J. Lagrange, 1759). В связи с этим Э. у. иногда наз. уравнением Эйлера — Лагранжа. Э. у. представляет собой необходимое условие обращения в нуль 1-й вариации функционала.

Пусть поставлена задача вариационного исчисления, состоящая в определении экстремума функционала

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} F(t,\ x,\ \dot{x})\,dt \qquad (1)$$

при известных условиях на концах

$$x(t_1) = x_1,\quad x(t_2) = x_2. \qquad (2)$$

И пусть непрерывно дифференцируемая функция $x(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, есть решение задачи (1), (2). Тогда $x(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) можно записать в развернутом виде

$$F_x - F_{t\dot{x}} - F_{x\dot{x}}\dot{x} - F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} = 0. \qquad (4)$$

Гладкое решение уравнения (3) или (4) наз. экстремалью. Если $F_{\dot{x}\dot{x}}\neq 0$ в точке (t, x), лежащей на экстремали, то в этой точке экстремаль имеет непрерывную 2-ю производную $\ddot{x}$. Экстремаль, во всех точках к-рой $F_{\dot{x}\dot{x}}\neq 0$, наз. неособенной. Для неособенной экстремали Э. у. можно записать в виде, разрешенном относительно 2-й производной $\ddot{x}$.

Решение вариационной задачи (1), (2) необязательно должно быть непрерывно дифференцируемым. В общем случае оптимальное решение $x(t)$ может быть кусочно дифференцируемой функцией. Тогда в угловых точках $x(t)$ должны выполняться необходимые условия Вейерштрасса—Эрдмана, обеспечивающие непрерывность при переходе через угловую точку выражений $F_{\dot{x}}$ и $F-\dot{x}F_{\dot{x}}$, а на отрезках между соседними угловыми точками функция $x(t)$ должна удовлетворять Э. у. Кусочно гладкие линии, составленные из кусков экстремалей и удовлетворяющие в угловых точках условиям Вейерштрасса — Эрдмана, наз. ломаными экстремалями.

В общем случае дифференциальное Э. у. является уравнением 2-го порядка и, следовательно, его общее решение зависит от двух произвольных постоянных c_1 и c_2:

$$x = f(t,\ c_1,\ c_2).$$

Эти произвольные постоянные можно определить из граничных условий (2):

$$\left.\begin{aligned} f(t_1,\ c_1,\ c_2) &= x_1, \\ f(t_2,\ c_1,\ c_2) &= x_2. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Если рассматривается функционал, зависящий от нескольких функций

$$J(x^1, \ldots, x^n) = \int_{t_1}^{t_2} F(t,\ x^1, \ldots, x^n,\ \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)\, dt, \qquad (6)$$

то вместо одного Э. у. приходят к системе n Э. у.

$$F_{\dot{x}}: -\frac{d}{dt} F_{\dot{x}^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (7)$$

Общее решение системы (7) зависит от $2n$ произвольных постоянных, к-рые определяются из заданных $2n$ граничных условий (для задачи с закрепленными концами).

Для вариационных задач с подвижными концами, в к-рых левый и правый концы экстремали могут смещаться по нек-рым заданным гиперповерхностям, недостающие граничные условия, позволяющие получить замкнутую систему соотношений типа (5), определяются с помощью необходимого *трансверсальности условия*.

Для функционалов, содержащих производные высших порядков (а не только 1-го, как (1), (6)) необходимое условие, аналогичное Э. у., записывается в виде дифференциального уравнения Эйлера — Пуассона (см. [1]).

Для вариационных задач, в к-рых разыскивается экстремум функционалов, зависящих от функций нескольких переменных, аналогичное Э. у. необходимое условие записывается в виде уравнения Эйлера — Остроградского, представляющего собой дифференциальное уравнение с частными производными (см. [2]).

В случае вариационных задач на условный экстремум получение системы Э. у. связано с использованием *Лагранжа множителей*. Напр., для *Больца задачи*, в к-рой требуется найти экстремум функционала, зависящего от n функций $x = (x^1, \ldots, x^n)$,

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t,\ x,\ \dot{x})\, dt + g(t_1,\ x(t_1),\ t_2,\ x(t_2)) \qquad (8)$$

при наличии дифференциальных ограничений типа равенств

$$\varphi_i(t,\ x,\ \dot{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad m < n, \qquad (9)$$

и граничных условий

$$\psi_\mu(t_1,\ x(t_1),\ t_2,\ x(t_2)) = 0, \ \mu = 1, \ldots, p, \ p \leqslant 2n+2 \qquad (10)$$

с помощью множителей Лагранжа λ_0 и $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, из f и φ_i составляется функция

$$F(t,\ x,\ \dot{x},\ \lambda) = \lambda_0 f(t,\ x,\ \dot{x}) + \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t,\ x,\ \dot{x})$$

и Э. у. записываются в виде

$$\left.\begin{aligned} F_{\lambda_i}: -\frac{d}{dt} F_{\dot{\lambda}_i} \equiv \varphi_i(t,\ x,\ \dot{x}) &= 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ F_{x^i}: -\frac{d}{dt} F_{\dot{x}^i} &= 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Таким образом, оптимальное решение вариационной задачи (8)—(10) должно удовлетворять системе $m+n$ дифференциальных уравнений Эйлера (11), причем первые m из этих уравнений совпадают с заданными условиями связи (9). Используя дополнительно необходимое условие трансверсальности, получают замкнутую кра-

вую задачу для определения решения вариационной задачи (8) — (10).

Помимо Э. у. и условий трансверсальности оптимальное решение вариационной задачи должно удовлетворять остальным необходимым условиям: условию Клебша (Лежандра), условию Вейерштрасса и условию Якоби.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950. *И. Б. Вапнярский.*

3) Э. у.— дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0,$$

где

$$X(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4,$$
$$Y(x)=a_0y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4.$$

Л. Эйлер (L. Euler) рассматривал это уравнение в ряде работ начиная с 1753. Он показал, что общее решение этого уравнения имеет вид $F(x, y)=0$, где $F(x, y)$ — симметрич. многочлен 4-й степени от x и y. *БСЭ-3.*

ЭЙЛЕРА ФОРМУЛА — формула, выражающая нормальную кривизну поверхности в данном направлении l через главные кривизны k_1 и k_2:

$$k_l=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi,$$

где φ — угол, к-рый составляет направление l с главным направлением, соответствующему главной кривизне k_1.

Э. ф. получена Л. Эйлером (L. Euler, 1760).

Д. Д. Соколов.

ЭЙЛЕРА ФОРМУЛЫ — формулы, связывающие показательную и тригонометрические функции:

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,$$
$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

справедливые при всех значениях комплексного переменного z. В частности, при действительном $z=x$ Э. ф. имеют вид:

$$e^{\pm ix}=\cos x\pm i\sin x,$$
$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Эти формулы и были опубликованы Л. Эйлером [1].

Лит.: [1] Euler L., «Miscellanea Berolinensia», 1743, v. 7, p. 193—242; [2] Эйлер Л., Введение в анализ бесконечно малых, пер. с лат., т. 1, М.— Л., 1936; [3] Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, 4 изд., М., 1978. *Е. Д. Соломенцев.*

ЭЙЛЕРА ФУНКЦИЯ — арифметическая функция $\varphi(n)$, значение к-рой равно количеству положительных целых чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n. Э. ф. мультипликативна, т. е. $\varphi(1)=1$ и $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$ при $(m, n)=1$. Для функции $\varphi(n)$ справедливы соотношения

$$\sum_{d/n}\varphi(d)=n,$$
$$c\,\frac{n}{\ln\ln n}\leqslant\varphi(n)\leqslant n,$$
$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\ln x).$$

Введена Л. Эйлером (L. Euler, 1763).

Лит.: [1] Чандрасекхаран К., Введение в аналитическую теорию чисел, пер. с англ., М., 1974.

С. А. Степанов.

ЭЙЛЕРА — ЛАГРАНЖА УРАВНЕНИЕ для минимальной поверхности $z=z(x, y)$ — уравнение вида

$$\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

оно получено Ж. Лагранжем (J. Lagrange, 1760) и истолковано Ж. Мёнье (J. Meusnier) как условие равенства нулю средней кривизны поверхности $z=z(x, y)$, частные интегралы найдены Г. Монжем (G. Monge). Систематические исследования Э.—Л. у. проведены С. М. Бернштейном, который показал, что Э.—Л. у. является квазилинейным эллиптич. уравнением рода $p=2$, вследствие чего решения Э.—Л. у. обладают рядом свойств, резко отличающих их от решений линейных уравнений. К таким свойствам, напр., относятся устранимость изолированных особых точек решения без априорного предположения об ограниченности решения в окрестности особой точки, принцип максимума, имеющий место при тех же условиях, невозможность равномерной априорной оценки $z(x, y)$ в любой компактной подобласти круга через значения z в центре круга (т. е. отсутствие точного аналога неравенства Гарнака), факты, относящиеся к *Дирихле задаче*, отсутствие нелинейного решения Э.—Л. у., определенного над всей плоскостью (*Бернштейна теорема*) и т. д.

Э.—Л. у. обобщается по размерности: для минимальной гиперповерхности $z=z(x_1, \ldots, x_n)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ соответствующее уравнение имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\Big/\sqrt{1+|\nabla z|^2}\right)=0, \quad \nabla z=\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right).$$

Для этого уравнения ($n\geqslant 3$) исследована разрешимость задачи Дирихле, доказана устранимость особенностей решения, если они сосредоточены внутри области на множестве нулевой $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа, показана справедливость теоремы Бернштейна для $n\leqslant 7$ и построены контрпримеры для $n\geqslant 8$.

И. Х. Сабитов.

ЭЙЛЕРА — МАКЛОРЕНА ФОРМУЛА — формула суммирования, связывающая частные суммы ряда с интегралом и производными его общего члена:

$$\sum_{k=p}^{m-1}\varphi(k)=\int_p^m \varphi(t)\,dt+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{B_\nu}{\nu!}\left\{\varphi^{(\nu-1)}(m)-\varphi^{(\nu-1)}(p)\right\}+R_n,$$

где B_ν — *Бернулли числа*, R_n — остаточный член. С помощью *Бернулли многочленов* $B_n(t)$, $B_n(0)=B_n$ остаточный член записывается в виде:

$$R_n=-\frac{1}{n!}\int_0^1 [B_n(t)-B_n]\sum_{k=p}^{m-1}\varphi^{(n)}(k+1-t)\,dt.$$

Для $n=2s$ остаточный член R_{2s} может быть представлен с использованием чисел Бернулли:

$$R_{2s}=\frac{B_{2s}}{(2s)!}\sum_{k=p}^{m-1}\varphi^{(2s)}(k+\theta), \quad 0<\theta<1.$$

Если производные $\varphi^{(2s)}(t)$ и $\varphi^{(2s+1)}(t)$ имеют одинаковые знаки и не меняют знака на $[p, m]$, то

$$R_{2s}=\theta\frac{B_{2s}}{(2s)!}[\varphi^{(2s-1)}(m)-\varphi^{(2s-1)}(p)], \quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

Если, кроме того,

$$\lim_{x\to\infty}\varphi^{(2s-1)}(x)=0,$$

то Э.—М. ф. может быть записана в виде:

$$\sum_{k=p}^{m-1}\varphi(k)=c+\int_p^m \varphi(t)\,dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{2s-2}\frac{B_k}{k!}\varphi^{(k-1)}(m)+\theta\frac{B_{2s}}{(2s)!}\varphi^{(2s-1)}(m), \quad 0<\theta<1.$$

В такой форме Э.—М. ф. применяется, напр., при выводе *Стирлинга формулы*. В этом случае $\varphi(x)=\ln x$ и c — *Эйлера постоянная*. Имеются обобщения Э.—М. ф. на случай кратных сумм.

Э.—М. ф. применяется для приближенного вычисления определенных интегралов, для исследования сходи-

мости рядов, для вычисления сумм и для разложения функций в ряд Тейлора. Напр., при $m=1$, $p=0$, $n=2m+1$, $\varphi(x)=\cos\frac{xt}{2}$ Э.—М. ф. дает следующее выражение:

$$\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{\nu}\frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!}B_{2\nu}+$$
$$+\frac{(-1)^{m+1}t^{m+2}}{2\sin\frac{t}{2}}\int_0^1\frac{B_{2m+1}(t)}{(2m+1)!}\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)t\,dx.$$

Э.—М. ф. играет важную роль при изучении асимптотич. разложений, в теоретико-числовых оценках, в *конечных разностей исчислении*.

Э.—М. ф. иногда применяется в виде:

$$\sum_0^n\varphi_n(x)=\int_0^n\varphi(x)\,dx+\frac{1}{2}(\varphi_0+\varphi_n)+$$
$$+\int_0^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)\,dx.$$

Э.—М. ф. была впервые приведена Л. Эйлером [1] в виде:

$$S=\int t\,dn+\alpha t+\beta\frac{dt}{dn}+\gamma\frac{d^2t}{dn^2}+\delta\frac{d^3t}{dn^3}+\varepsilon\frac{d^4t}{dn^4}+\ldots,$$

где S — сумма первых членов ряда с общим членом $t(n)$, $S=t=0$ при $n=0$, а коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями:

$$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\frac{\alpha}{2!}-\frac{1}{3!}=\frac{1}{12},\ \gamma=\frac{\beta}{2!}-\frac{\alpha}{3!}+\frac{1}{4!}=0,$$
$$\delta=\frac{\gamma}{2!}-\frac{\beta}{3!}+\frac{\alpha}{4!}-\frac{1}{5!}=-\frac{1}{720},\ \varepsilon=0,\ \gamma=0,\ \ldots.$$

Независимо формула была открыта позднее К. Маклореном [2].

Лит.: [1] Euler L., «Comment. Acad. sci. Imp. Petrop.», 1738, t. 6, p. 68—97; [2] Mac Laurin C., A treatise of fluxions, v. 1—2, Edin., 1742; [3] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [4] Nörlund N. E., Vorlesungen über Differenzenrechnung, B., 1924; [5] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, 3 изд., М., 1967.

Ю. Н. Субботин.

ЭЙЛЕРА — ФУРЬЕ ФОРМУЛЫ — формулы для коэффициентов *Фурье ряда*.

ЭЙЛЕРОВ КЛАСС — первое *препятствие* к построению сечения расслоения со слоем сфера, ассоциированного с векторным расслоением. См. *Характеристический класс*.

А. Ф. Харшиладзе.

ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА конечного клеточного комплекса K — целое число

$$\chi(K)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\alpha_k,$$

где α_k — число k-мерных клеток комплекса. Названа в честь Л. Эйлера (L. Euler), к-рый доказал в 1758, что число вершин В, ребер Р и граней Г выпуклого многогранника связаны формулой В—Р+Г=2. В неявном виде эта формула была известна еще Р. Декарту (R. Descartes, 1620). Оказывается, что

$$\chi(K)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k p^k,$$

где p^k есть k-мерное *Бетти число* комплекса K (формула Эйлера — Пуанкаре). Э. х. комплекса K является его гомологическим, гомотопическим и топологическим инвариантом. В частности, Э. х. не зависит от способа разбиения пространства на клетки. Поэтому можно говорить, напр., об Э.х. произвольного компактного полиэдра, понимая под этим Э.х. какой-нибудь его триангуляции. С другой стороны, формула Эйлера—Пуанкаре позволяет распространить понятие Э. х. на более широкий класс пространств и пар пространств, для к-рых правая часть формулы имеет смысл. Для произвольного поля F справедлива обобщенная формула Эйлера — Пуанкаре, выражающая Э. х. через

размерности над полем F групп гомологий с коэффициентами в поле F:

$$\chi(K)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dim_F H_K(K;\ F).$$

Пусть $p: E\to B$ — *локально тривиальное расслоение* со слоем F. Тогда, при нек-рых ограничениях на пространства E, B, F, их Э. х. связаны соотношением $\chi(E)=\chi(B)\chi(F)$. В частности, Э. х. прямого произведения двух пространств равна произведению их Э. х. С помощью соотношения $\chi(A\cup B)=\chi(A)+\chi(B)-\chi(A\cap B)$, справедливого для любой вырезаемой триады $(A\cup B,\ A,\ B)$, вычисляются Э. х. всех компактных двумерных многообразий. Э. х. сферы с g ручками и k удаленными открытыми дисками равна $2-2g-k$, сферы с m листами Мёбиуса и k удаленными дисками — $2-m-k$. Э. х. произвольного компактного многообразия нечетной размерности равна половине Э. х. его края. В частности, Э. х. замкнутого многообразия нечетной размерности равна нулю, так как его край пуст.

С. В. Матвеев.

ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ — интеграл

$$B(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,\quad p>0,\ q>0,$$

наз. эйлеровым интегралом 1-го рода или *бета-функцией*, и интеграл

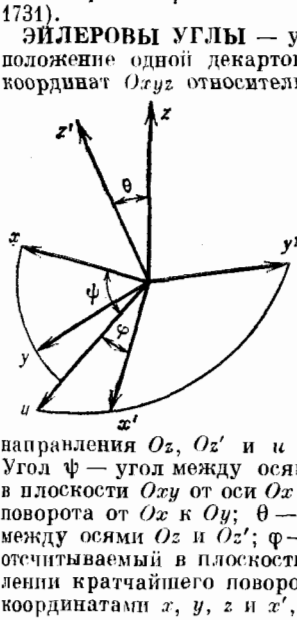
$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$$

— эйлеровым интегралом 2-го рода (при $s>0$ этот интеграл (2) сходится и является представлением *гамма-функции*).

Э. и. рассматривались Л. Эйлером (L. Euler, 1729—1731).

Л. Д. Кудрявцев.

ЭЙЛЕРОВЫ УГЛЫ — углы φ, ψ, θ, определяющие положение одной декартовой прямоугольной системы координат $Oxyz$ относительно другой декартовой прямоугольной системы координат $Ox'y'z'$ с тем же началом координат и с той же ориентацией. Э. у. рассматриваются как углы последовательных поворотов одной системы относительно осей другой, после к-рых обе системы совпадают (см. рис.). Пусть u — ось, совпадающая с линией пересечения плоскости Oxy с плоскостью $Ox'y'$ и направленная так, что три направления Oz, Oz' и u образуют правую тройку. Угол ψ — угол между осями Ox и u, отсчитываемый в плоскости Oxy от оси Ox в направлении кратчайшего поворота от Ox к Oy; θ — не превосходящий π угол между осями Oz и Oz'; φ — угол между осями u и Ox', отсчитываемый в плоскости $Ox'y'$ от оси u в направлении кратчайшего поворота Ox' к Oy'. Связь между координатами x, y, z и x', y', z':



$$x'=(\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi)\,x'+$$
$$+(-\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\theta\cos\varphi)\,y'+(\sin\psi\sin\theta)z',$$

$$y=(\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\cos\theta\sin\varphi)\,x'+$$
$$+(-\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\theta\cos\varphi)\,y'+(-\cos\psi\sin\theta)\,z',$$

$$z=(\sin\theta\sin\varphi)\,x'+(\sin\theta\cos\varphi)\,y'+(\cos\theta)\,z'.$$

Э. у. введены Л. Эйлером (L. Euler, 1748).

Д. Д. Соколов.

ЭЙЛЕРОВЫ ЧИСЛА — коэффициенты E_n в разложении

$$\frac{1}{\operatorname{ch} z}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{z^n}{n!}.$$

Рекуррентная формула для Э. ч. имеет вид (в символической записи, $E^n=E_n$):

$$(E+1)^n+(E-1)^n=0,\quad E_0=1.$$

При этом $E_{2n+1}=0$, E_{4n} — положительные, E_{4n+2} — отрицательные целые числа для всех $n=0, 1, \ldots$; $E_2=-1$, $E_4=5$, $E_6=-61$, $E_8=1385$, $E_{10}=-50521$. Э. ч. связаны с *Бернулли числами* B_n:

$$E_{n-1}=\frac{(4B-1)^n-(4B-3)^n}{2n},$$

$$E_{2n}=\frac{4^{2n+1}}{2n+1}\left(B-\frac{1}{4}\right)^{2n+1}.$$

Э. ч. применяются для суммирования рядов. Напр.,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}=\frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}(2n)!}\,|E_{2n}|.$$

Иногда Э. ч. наз. числа $|E_{2n}|$.

Э. ч. введены Л. Эйлером (L. Euler, 1755).

Лит.: [1] Эйлер Л., Дифференциальное исчисление, пер. с лат., М.—Л., 1949; [2] Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 5 изд., М.— Л., 1971.

Е. Д. Соломенцев.

ЭЙНШТЕЙНА ПРАВИЛО — правило упрощенной (без символа $\sum$) записи конечной суммы, каждое из слагаемых к-рой содержит индекс суммирования дважды: один раз как верхний индекс, и второй раз как нижний индекс. Суммы $\sum_{i=1}^{n}x^ie_i$, $\sum_{i,\,j=1}^{n}x^iy^ja_{ij}$ записываются в виде x^ie_i, $x^ix^ja_{ij}$; при этом $1\leqslant i,\ j\leqslant n$. Требованием записи индексов на разных уровнях иногда пренебрегают.

Э. п. предложено А. Эйнштейном (A. Einstein, 1916).

Л. П. Купцов.

ЭЙНШТЕЙНА УРАВНЕНИЯ гравитационного поля — основные уравнения общей теории относительности, связывающие метрич. тензор пространства-времени, к-рый описывает поле тяготения, и физич. характеристики иных видов материи, к-рые описываются тензором энергии-импульса:

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=\frac{8\pi}{c^4}GT_{ik}.$$

Здесь R_{ik} — *Риччи тензор*, к-рый выражается через метрич. тензор g_{ik}, $R=R_i^i$, T_{ik} — тензор энергии-импульса, c — скорость света в вакууме, G — гравитационная постоянная.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973.

Д. Д. Соколов.

ЭЙНШТЕЙНА — СМОЛУХОВСКОГО УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение для плотности вероятности функции перехода $P(t_0, x_0(t, x))$ из положения x_0 в момент времени t_0 в точку x к моменту t:

$$P(t_0, x_0\,|\,t, x)=\int P(t_0, x_0\,|\,t', x')\times$$

$$\times P(t', x'\,|\,t, x)\,dx',$$

$$t_0<t'<t,\ \int P(t_0, x_0|\,t, x)\,dx=1.$$

Функция P описывает случайный процесс без последействия (*марковский процесс*), для к-рого характерна независимость эволюции системы от t_0 к t от предшествующих моменту t_0 возможных ее состояний. Уравнение было сформулировано М. Смолуховским (M. Smoluchowski, 1906) в связи с разрабатываемым им и одновременно А. Эйнштейном (A. Einstein) представлением о броуновском движении как о случайном процессе. В литературе Э.—С. у. наз. уравнением Колмогорова — Чепмена.

Физич. анализ процесса типа броуновского движения показывает, что описание его с помощью функции P возможно на временах $\Delta t=t-t_0$, значительно превышающих время корреляции случайного процесса (даже

если формально $\Delta t \to 0$) и что рассчитанные с помощью этой функции моменты $\overline{(x-x_0)^k} = M_k$ должны удовлетворять требованию

$$\lim_{\Delta t \to \infty} M_k/\Delta t = 0,\ k \geqslant 3;\quad \lim_{\Delta t \to 0} M_2/\Delta t \neq 0.$$

В этом случае Э.—С. у. сводится к линейному дифференциальному уравнению параболич. типа, называемому уравнением Фоккера—Планка (см. прямое *Колмогорова уравнение*, *Диффузионный процесс*), начальные и граничные условия к к-рому выбираются в соответствии с конкретной решаемой задачей.

Лит.: [1] Эйнштейн А., Смолуховский М., Броуновское движение, пер. с нем., М.—Л., 1936; [2] Чандрасекар С., Стохастические проблемы в физике и астрономии, пер. с англ., М., 1947; [3] Кац М., Несколько вероятностных задач физики и математики, пер. с польск., М., 1967.

И. А. Квасников.

ЭЙРИ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' - xy = 0.$$

Впервые оно появилось в исследованиях Дж. Эйри по оптике [1]. Общее решение Э. у. выражается через *Бесселя функции* порядка $\pm 1/3$:

$$y(x) = c_1 \sqrt{x}\, J_{1/3}\left(\frac{2}{3} ix^{3/2}\right) + c_2 \sqrt{x}\, J_{-1/3}\left(\frac{2}{3} ix^{3/2}\right).$$

Поскольку Э. у. играет важную роль в различных задачах физики, механики, в асимптотич. анализе, его решения выделены в особый класс специальных функций (см. *Эйри функции*).

Решения Э. у. в комплексной плоскости z

$$w'' - zw = 0$$

имеют следующие основные свойства.

1) Всякое решение Э. у. есть целая функция z и разлагается в степенной ряд

$$w(z) = w(0)\left[1 + \frac{z^3}{2\cdot 3} + \frac{z^6}{(2\cdot 3)\cdot(5\cdot 6)} + \dots\right] + w'(0)\left[z + \frac{z^4}{3\cdot 4} + \frac{z^7}{(3\cdot 4)\cdot(6\cdot 7)} + \dots\right],$$

сходящийся при всех z.

2) Если $w(z) \not\equiv 0$ — решение Э. у., то функции $w(\omega z)$ и $w(\omega^2 z)$, где $\omega = e^{2\pi i/3}$, суть решения Э. у. и любые два из этих решений линейно независимы. Справедливо тождество:

$$w(z) + w(\omega z) + w(\omega^2 z) \equiv 0.$$

Лит.: [1] Airy G. B., «Trans. Camb. Phil. Soc.», 1838, v. 6, p. 379—402; [2] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [3] Справочник по специальным функциям, пер. с англ., М., 1979.

М. В. Федорюк.

ЭЙРИ ФУНКЦИИ — частные решения *Эйри уравнения*.

Первая Э. ф. (или просто Э. ф.) определяется равенством

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt.$$

При комплексных z

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \exp\left(zt - \frac{t^3}{3}\right) dt,$$

где $\gamma = (\infty e^{-2\pi i/3}, 0] \cup [0, +\infty)$ — контур в комплексной плоскости t. Вторая Э. ф. определяется равенством

$$\mathrm{Bi}(z) = i\omega^2\, \mathrm{Ai}(\omega^2 z) - i\omega\, \mathrm{Ai}(\omega z),\ \omega = e^{2\pi i/3}.$$

Функции $\mathrm{Ai}(x)$, $\mathrm{Bi}(x)$ действительны при действительных x.

Другой набор Э. ф. ввел В. А. Фок:

$$v(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \mathrm{Ai}(z),$$

$$w_1(z) = 2e^{i\pi/6} v(\omega z),$$

$$w_2(z) = 2e^{-i\pi/6} v(\omega^{-1} z),$$

$v(z)$ **в этом случае наз. функцией Эйри — Фока.** Справедливы тождества:

$$v(z)=\frac{w_1(z)-w_2(z)}{2i},\quad \overline{w_1(z)}=w_2(\bar z). \tag{1}$$

Любые две из Э. ф. $v(z)$, $w_1(z)$, $w_2(z)$ линейно независимы.

Наиболее важна из Э. ф. $v(z)$ (или $\mathrm{Ai}(z)$). Ее асимптотич. поведение на действительной оси таково:

$$v(x)=\frac{1}{2}\frac{x^{-1/4}}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)[1+O(x^{-3/2})],$$
$$x\to+\infty,$$
$$v(x)=\frac{|x|^{-1/4}}{\sqrt{\pi}}\left[\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right)+O(|x|^{-3/2})\right],$$
$$x\to-\infty,$$

так что $v(x)$ быстро убывает при $x>0$, $x\gg 1$ и сильно осциллирует при $x<0$, $|x|\gg 1$. Функции $w_1(x)$, $w_2(x)$ экспоненциально растут при $x\to+\infty$. Для Э. ф. справедливы асимптотич. разложения при комплексных z, $|z|\to\infty$:

$$v(z)\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi}}z^{-1/4}\exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n z^{-3n/2}\ \text{при}\ |\arg z|\leqslant\pi-\varepsilon, \tag{2}$$

$$w_1(z)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}z^{-1/4}\exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{-3n/2}\ \text{при}\ \left|\arg z-\frac{\pi}{3}\right|\leqslant\pi-\varepsilon.$$

Для функции $w_2(z)$ справедливо асимптотич. разложение (2), но в секторе

$$\left|\arg\left(z+\frac{\pi}{3}\right)\right|\leqslant\pi-\varepsilon.$$

Здесь $\varepsilon\in(0,\pi)$ — любое, ветви $\sqrt{z}$, $\sqrt[4]{z}$ положительны на полуоси $(0,\infty)$, асимптотич. разложения равномерны по $\arg z$ и их можно почленно дифференцировать любое число раз. В оставшемся секторе $|\arg(-z)|<\varepsilon$ асимптотич. разложение функции $v(z)$ выражается через асимптотич. разложения функций $w_1(z)$, $w_2(z)$ с помощью (1), так что ее асимптотич. разложение имеет разный вид в разных секторах комплексной плоскости z. Этот факт был впервые установлен Дж. Стоксом [2] и наз. явлением Стокса.

Э. ф. возникают при исследовании интегралов от быстроосциллирующих функций:

$$I(\lambda,\alpha)=\int_a^b\exp[i\lambda S(x,\alpha)]\,f(x,\alpha)\,dx$$

при $\lambda>0$, $\lambda\to+\infty$. Здесь f, S — гладкие функции, S действительна, α — действительный параметр. Пусть при малых $\alpha\geqslant 0$ фаза S имеет две близкие невырожденные стационарные точки $x_1(\alpha)$, $x_2(\alpha)$, к-рые совпадают при $\alpha=0$, напр.,

$$S(x,\alpha)=\alpha x-x^3+O(x^4)\ \text{при}\ x\to 0.$$

Тогда при малых $\alpha\geqslant 0$ и при $\lambda\to+\infty$ вклад в асимптотику интеграла от окрестности точки $x=0$ выражается через Э. ф. v и ее производную (см. [6]). Такого рода интегралы возникают при исследовании коротковолновых полей вблизи простой каустики (см. [7], [8]); Э. ф. возникли в связи с исследованием этой задачи [1].

Пусть рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y''+\lambda^2 q(x)\,y=0, \tag{3}$$

где $q(x)$ — гладкая на отрезке $I=[a,b]$ действительнозначная функция, $\lambda>0$ — большой параметр. Нули

функции $q(x)$ наз. точками поворота (или точками перехода) уравнения (3). Пусть

$$a < x_0 < b, \quad q(x_0) = 0, \quad q'(x_0) \neq 0$$

(такая точка наз. простой),

$$q(x) \neq 0 \text{ при } x \in I,\ x \neq x_0,\ q'(x_0) > 0.$$

Положим

$$\xi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_{x_0}^{x} \sqrt{q(t)}\, dt\right)^{2/3}, \quad \operatorname{sgn} \xi(x) = \operatorname{sgn}(x - x_0),$$

$$Y_0(x) = (\xi'(x))^{-1/2} \operatorname{Ai}(-\lambda^{2/3}\xi(x)),$$

$$Y_1(x) = (\xi'(x))^{-1/2} \operatorname{Bi}(-\lambda^{2/3}\xi(x)).$$

Уравнение (3) имеет линейно независимые решения $y_0(x)$, $y_1(x)$ такие, что при $\lambda \to +\infty$ равномерно по x

$$y_j(x) = Y_j(x)\,[1 + O(\lambda^{-1})], \quad a \leqslant x \leqslant x_0, \quad j = 0, 1,$$

$$y_0(x) = Y_0(x)\,[1 + O(\lambda^{-1})] + Y_1(x)\,O(\lambda^{-1}),$$

$$y_1(x) = Y_1(x)\,[1 + O(\lambda^{-1})] + Y_0(x)\,O(\lambda^{-1}),$$

$$x_0 \leqslant x \leqslant b.$$

Этот результат обобщен в следующих направлениях: получены асимптотич. ряды для решений; исследован случай $q = q(x, \lambda)$ (напр., $q(x, \lambda)$ разлагается в асимптотич. ряд $q \sim \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} q_n(x)$ при $\lambda \to +\infty$); исследована асимптотика решений вблизи кратных точек поворота. Другие обобщения относятся к уравнению

$$w'' + \lambda^2 q(z)\, w = 0, \tag{4}$$

где $q(z)$ — аналитическая в области D комплексной плоскости z функция. Пусть l — максимальная связная компонента линии уровня

$$\operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} \sqrt{q(t)}\, dt = 0,$$

выходящая из точки поворота z_0 и не содержащая других точек поворота; тогда l наз. линией Стокса. Если $q = -z$ (т. е. (4) есть уравнение Эйри), то линии Стокса — лучи $(-\infty, 0)$, $(0, e^{\pm i\pi/3})$. Аналогично, если z_0 — простая точка поворота уравнения (4), то из неё выходят три линии Стокса l_1, l_2, l_3 и угол между соседними линиями в точке z_0 равен $2\pi/3$. Пусть S_j — окрестность точки z_0, из к-рой удалена окрестность линии Стокса l_j. $j = 1, 2, 3$. При подходящей нумерации S_j уравнение (4) имеет три решения $\tilde{w}_j(z)$, $j = 1, 2, 3$, такие, что

$$\tilde{w}_j(z) \sim (\xi(z))^{-1/2}\, e^{-\lambda^{2/3} w^j \xi(z)}, \quad \omega = e^{2\pi i/3},$$

при $\lambda \to +\infty$, $z \in S_j$.

Э. ф. возникают также при исследовании асимптотики решений обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка и систем вблизи простейших точек поворота.

Лит.: [1] Airy G. B., «Trans. Camb. Phil. Soc.», 1838, v. 6, p. 379–402; [2] Stokes G. G., там же, 1857, v. 10, p. 105–28; [3] Фок В. А., Таблицы функций Эйри, М., 1946; [4] Справочник по специальным функциям, пер. с англ., М., 1979; [5] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [6] Федорюк М. В., Метод перевала, М., 1977; [7] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973; [8] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976; [9] Дородницын А. А., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 6, с. 3–96; [10] Вазов В., Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1968; [11] Федорюк М. В., Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1983.

М. В. Федорюк.

ЭЙТКЕНА СХЕМА — метод вычисления значения интерполяционного многочлена $L_n(x)$ по узлам $x_0, x_1, \ldots, x_n$ в точке x, основанный на последовательном применении формулы

$$L_k(x) = L_{(0,\,1,\,\ldots,\,k)}(x) =$$

$$= \frac{1}{x_k - x_0} \begin{vmatrix} L_{(0,\,1,\,\ldots,\,k-1)}(x) & x_0 - x \\ L_{(1,\,2,\,\ldots,\,k)}(x) & x_k - x \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (*)$$

где $L_{(i,\,i+1,\,\ldots,\,m)}(x)$ — интерполяционный многочлен с узлами интерполяции $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m$, в частности $L_{(i)}(x) = f(x_i)$ (см. *Интерполяционная формула*). Процесс вычисления по формуле (*) можно закончить, когда в значениях двух интерполяционных многочленов последовательных степеней совпадает требуемое количество знаков. Э. с. удобно использовать для интерполяции значений таблично заданной функции, перенумеровав узлы интерполяции в порядке возрастания $|x - x_i|$.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975.

М. К. Самарин.

ЭКВИАФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел *аффинной геометрии*, изучающий инварианты *аффинной унимодулярной группы* преобразований. Важнейшим фактом является существование в Э. г. площадей параллелограммов и объемов параллелепипедов.

Л. А. Сидоров.

ЭКВИАФФИННАЯ ПЛОСКОСТЬ — аффинная плоскость, в к-рой площадь параллелограмма является инвариантом относительно *аффинной унимодулярной группы* преобразований.

Л. А. Сидоров.

ЭКВИАФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ — аффинная связность на гладком многообразии M размерности n, обладающая ковариантно постоянной относительно нее отличной от нуля n-формой Φ на M. Форму $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ можно интерпретировать как объем параллелепипеда на векторах полей $X_1, \ldots, X_n$, и это условие означает существование объема, сохраняющегося при параллельном перенесении векторов. Если аффинная связность на M задана с помощью матрицы локальных форм связности

$$\omega^i = \Gamma^i_k(x)\, dx^k, \ \det \| \Gamma^i_k \| \neq 0,$$

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk}(x)\, \omega^k,$$

и $\Phi = \lambda \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n$, то указанное условие на Φ имеет вид

$$d\lambda = \lambda \omega^i_i.$$

Равносильно аффинная связность на M является Э. с. тогда и только тогда, когда ее группа голономии является эквиаффинной. В случае связности без кручения, условие равносильно симметричности тензора Риччи $R_{kl} = R^i_{kli}$, т. е. условию $R_{kl} = R_{lk}$. При наличии Э. с. расслоение реперов в касательных к M пространствах можно привести к подрасслоению, относительно к-рого $\omega^i_i = 0$.

Лит.: Норден А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976.

Ю. Г. Лумисте.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ — *бинарное отношение* $R \subseteq X \times X$ на множестве X, удовлетворяющее условиям:

1) xRx (рефлексивность),

2) $xRy \Rightarrow yRx$ (симметричность),

3) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (транзитивность).

Если f отображает множество X во множество Y, то отношение $R = \{(x_1 x_2) | f x_1 = f x_2\}$ является Э.

Для произвольного $y \in X$ множество $U \subseteq X$, состоящее из всех x, эквивалентных y, наз. *классом эквивалентности* y. Любые два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают, т. е. любая Э. определяет разбиение множества X, и обратно.

В. П. Гришин.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КАТЕГОРИЙ — расширение понятия изоморфизма категорий, обусловленное прежде всего наличием *классов изоморфных объектов*. Две категории $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{L}$ наз. эквивалентными, если существуют такие одноместные ковариантные функторы $F: \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ и $G: \mathfrak{L} \to \mathfrak{K}$, что произведение FG естественно эквивалентно тождественному функтору $1_{\mathfrak{K}}$, а произведение GF — функтору $1_{\mathfrak{L}}$; другими словами, категории $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{L}$ эквивалентны, если существуют «почти» обратные друг другу функторы F и G. Категории эквивалентны тогда и только тогда, когда их скелеты изоморфны (см. *Скелет категории*).

Теорема двойственности Понтрягина устанавливает Э. к. абелевых групп и категории, двойственной категории топологических абелевых групп; категория булевых алгебр эквивалентна категории, двойственной категории булевых пространств; категория бинарных отношений над категорией множеств эквивалентна категории Клейсли для тройки, которую определяет функтор взятия множества подмножеств.

М. Ш. Цаленко.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ — представления π_1 и π_2 группы (алгебры, кольца, полугруппы) X в векторных пространствах E_1 и E_2 соответственно, для к-рых существует *сплетающий оператор*, являющийся изоморфизмом векторных пространств E_1 и E_2 (иногда такие представления наз. алгебраически эквивалентными); если π_1 и π_2 — представления в топологических векторных пространствах E_1 и E_2, то π_1 и π_2 наз. топологически эквивалентными, если существует сплетающий оператор для π_1 и π_2, являющийся изоморфизмом топологических векторных пространств E_1 и E_2. Термин «Э. п.» используется также для обозначения нек-рых других отношений эквивалентности: напр., представления наз. слабо эквивалентными, если существует замкнутый оператор с плотной областью определения и плотным образом, сплетающий эти представления; представления группы Ли в банаховых пространствах наз. инфинитезимально эквивалентными, если определяемые ими представления универсальной обёртывающей алгебры в пространствах аналитич. векторов являются алгебраич. Э. п. Два представления алгебры иногда наз. эквивалентными или изоморфными, если ядра этих представлений совпадают, а представления топологич. группы наз. эквивалентными, если определяемые ими представления той или иной *групповой алгебры* этой группы изоморфны.

А. И. Штерн.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ управляющих систем — преобразования, сохраняющие отношение эквивалентности (о. э.) *управляющих систем* (у. с.). Используются в задачах оптимизации, контроля, а также как средство характеризации (напр., аксиоматизации) определенных классов у. с.; вывод в формальных системах также можно рассматривать как Э. п. управляющих систем. В качестве о. э. обычно рассматривают функциональную эквивалентность, т. е. в этом случае эквивалентными являются у. с., имеющие одинаковые функции. Иногда по тем или иным соображениям рассматривают и другие о. э.

С Э. п. управляющих систем связан широкий круг задач, конкретная постановка к-рых варьируется в зависимости от особенностей рассматриваемого класса у. с. Основные из этих задач следующие.

1. Построение конечных (или рекурсивных) полных систем правил преобразований. Система правил Э. п. наз. полной для данного класса у. с., если с помощью конечного числа применений этих правил произвольную у. с. из рассматриваемого класса можно преобразовать в любую эквивалентную ей у. с. Решение этой задачи существенно зависит как от класса

у. с. и о. э. в нем, так и от допустимых средств преобразований.

Наиболее распространены такие постановки задачи, когда средства решения ограничиваются следующим образом. Определяют понятие фрагмента (или подсхемы) у. с. и рассматривают преобразования у. с., состоящие в замене одних фрагментов у. с. другими. Таким образом, пара (α, β) фрагментов определяет множество преобразований произвольной у. с. γ, каждое из к-рых состоит в замене нек-рого вхождения фрагмента α в γ фрагментом β (если γ не содержит вхождений фрагмента α, то считается, что преобразование, определяемое парой (α, β), оставляет γ без изменения). Пара фрагментов (α, β) наз. *правилом* для данного класса у. с., если преобразования, определяемые этой парой, сохраняют о. э., то есть переводят произвольную у. с. из данного класса в эквивалентную ей. Нек-рые правила могут быть снабжены условиями их применимости, описывающими ситуации, в к-рых их разрешается применять, и гарантирующими сохранение о. э. Если правило (α, β) применимо к любому вхождению фрагмента α во всякой у. с., то оно наз. *локальным*. Нелокальность правила обычно означает, что его применимость определяется строением всей у. с. Понятие полноты системы правил часто определяют в следующей форме.

Говорят, что пара фрагментов (α, β) *выводима* из системы правил Σ, если фрагмент α с помощью правил из Σ можно преобразовать во фрагмент β (применение правил к фрагменту определяется так же, как и для у. с.). Система правил Σ наз. *полной*, если из нее выводимы все пары вида (α, β), где α и β — эквивалентные у. с. Обычно наряду с правилами рассматриваются *схемы правил*, содержащие те или иные параметры (свободные переменные). Каждая схема правил путем придания параметрам конкретных значений порождает в общем случае бесконечное множество правил, и наиболее распространенная постановка задачи состоит в том, чтобы для данного класса у. с. найти конечную полную систему схем правил.

2. Проблема полноты систем правил преобразований (как для индивидуальных систем, так и в алгоритмич. плане): по системе правил определить, является ли она полной или нет.

3. Построение эффективных процедур, порождающих о. э. Эта задача является ослаблением первой. В качестве средств решения допускаются произвольные алгоритмы, а также недетерминированные формально описанные процедуры.

4. Построение оптимизирующих (или вообще целенаправленных) процедур преобразований. Наиболее часто речь здесь идет о минимизации сложности схем у. с. либо о преобразовании у. с. в нек-рую канонич. форму, единственную в классе эквивалентности. В последнем случае решение задачи дает и разрешающую процедуру для о. э. Целью преобразований может быть также построение самокорректирующихся или других специальных у. с. С задачей оптимизации связан целый ряд задач метрического характера, например получение оценок сложности решений, доли оптимальных у. с. и т. п.

5. Проблема разрешения для задач первого типа, т. е. вопрос о существовании конечной или рекурсивной полной системы правил преобразований для произвольного класса у. с. из нек-рого бесконечного множества классов. Таким множеством классов у. с. может быть, напр., совокупность множеств всех термов однотипных алгебр или совокупность классов *схем из функциональных элементов* в различных базисах и т. п.

Особенности конкретных классов у. с. накладывают отпечаток на постановку и методы решения указанных задач. Ниже рассмотрены нек-рые примеры.

Э. п. в алгебрах. Каждой алгебре нек-рой сигнатуры соответствует бесконечный класс у. с.— множество всех термов (формул) данной сигнатуры (вместе с определяемыми ими функциями). Естественным о. э. на множестве термов является отношение функциональной эквивалентности: термы t_1 и t_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда они определяют одну и ту же функцию с точностью до несущественных аргументов. В этом случае обычно пишут: $t_1=t_2$ (или $t_1\equiv t_2$) и такие выражения наз. тождествами или равенствами данной алгебры. В качестве фрагментов термов рассматриваются подтермы, т. е. такие части, к-рые сами являются термами. Так как любая замена подтерма эквивалентным ему термом сохраняет о. э., то любое тождество алгебры (рассматриваемое как неупорядоченная пара термов) является локальным правилом. Всякое тождество алгебры можно рассматривать и как схему правил, параметрами к-рой являются переменные. Поэтому для алгебр задача 1 приобретает следующий вид: для данной алгебры найти конечную полную систему тождеств, рассматриваемых как схемы правил, т. е. в этом случае задача 1 Э. п. совпадает с задачей алгебраич. аксиоматизации алгебр.

Существование конечной полной системы тождеств является функциональным свойством алгебр, т. е. оно полностью определяется классом функций, выразимых в данной алгебре, и не зависит от сигнатуры. Любая функционально полная (конечная) алгебра имеет конечную полную систему тождеств; любая двухэлементная алгебра имеет конечную полную систему тождеств; существуют трехэлементные группоиды, конечные полугруппы и бесконечные группы, не имеющие конечных полных систем тождеств; любая конечная группа имеет конечную полную систему тождеств; для алгебр всех рекурсивных функций, а также для алгебры *регулярных событий* задача 1 решается отрицательно.

Э. п. схем из функциональных элементов. Понятие схемы из функциональных элементов (с. из ф. э.) можно рассматривать как обобщение понятия терма. Класс с. из ф. э. в нек-ром базисе реализует то же множество функций, что и алгебра с набором сигнатурных операций, соответствующим данному базису. Поэтому результаты, относящиеся к задаче Э. п. для алгебр, переносятся с небольшими модификациями на с. из ф. э. Фрагментами с. из ф. э. являются подсхемы, отличающиеся от с. из ф. э., быть может, только наличием нескольких выходов.

Э. п. контактных схем. Как и для термов, понятие фрагмента совпадает с понятием *контактной схемы* (к. с.). Требует уточнения только определение множества полюсов во вхождении фрагмента в схему. Две к. с., между полюсами к-рых установлено взаимно однозначное соответствие, считаются эквивалентными, если функция проводимости между произвольными полюсами одной схемы совпадает с функцией проводимости между соответствующими полюсами другой. Если пары эквивалентных к. с. рассматривать как схемы правил, параметрами к-рых являются буквы, приписанные ребрам схем, и считать, что каждая такая схема порождает правила только путем переименования этих букв, то для класса всех к. с. не существует конечной полной системы схем правил. В то же время для любого n для класса всех к. с., ребрам к-рых приписано не более n различных букв, конечная полная система таких схем правил существует. Если же допустить порождение конкретных правил из схем путем согласованной замены ребер с одинаковыми буквами произвольными к. с., то и для класса всех к. с. может быть построена конечная полная система правил.

Э. п. а в т о м а т о в. Для *автоматов конечных* не существует конечной полной системы локальных правил преобразований. Однако с использованием нелокальных правил или схем правил, зависящих от специальных параметров, задача 1 для них может иметь положительное решение. С конечными автоматами связана алгебра регулярных событий, элементами к-рой являются множества слов, представимые (распознаваемые) конечными автоматами, а сигнатурными операциями служат объединение $x \vee y$, конкатенация xy и итерация x^*. Для этой алгебры не существует конечной полной системы тождеств. Однако подалгебра, состоящая из всех событий, содержащих пустое слово, имеет конечную полную систему тождеств.

Э. п. а л г о р и т м о в. Для полного класса алгоритмов и функционального отношения эквивалентности проблема Э. п. имеет отрицательное решение, поскольку отношение функциональной эквивалентности в этом случае не является рекурсивно перечислимым. Поэтому для получения положительных решений либо сужают класс алгоритмов, либо прибегают к модификации постановки проблемы. Для задания подклассов алгоритмов часто используют конечные автоматы, автоматы с магазинной или стэковой памятью, дискретные преобразователи различного вида, программы с ограничениями на топологическую структуру или на объем рабочей памяти и т. п. Иногда подклассы алгоритмов выделяются по функциональному признаку путем задания класса *вычислимых функций*. В последнем случае обычно задается определенное базисное множество функций, к-рое замыкается с помощью таких операций, как суперпозиция, рекурсия, ограниченное суммирование и т. п. Однако для выделяемых таким путем классов алгоритмов отношение функциональной эквивалентности оказывается разрешимым лишь в тех случаях, когда соответствующий класс функций достаточно беден.

Поэтому развиваются другие подходы, в частности подход, основанный на изучении схем алгоритмов. Схемы алгоритмов отличаются от алгоритмов в основном способом приписывания им функций. При этом отношение эквивалентности схем алгоритмов рассматривается как определенная аппроксимация отношения функциональной эквивалентности алгоритмов, так что решение проблемы Э. п. для схем алгоритмов можно считать приближенным решением этой проблемы для алгоритмов. Однако и здесь положительные решения удается получать лишь для достаточно грубых приближений, близких к конечным автоматам. Возможность получения положительных решений для класса всех алгоритмов появляется при ослаблении понятия полноты системы правил, напр. при отказе от требования конечного числа применений правил. Точнее, система правил наз. п р е д е л ь н о п о л н о й, если, применяя ее правила, можно любые два эквивалентных алгоритма преобразовать в пределе, т. е. за бесконечное число шагов, в один (в общем случае бесконечный) вычислительный комплекс. Конечную предельно полную систему схем локальных правил оказалось возможным построить для функционально полного класса всюду определенных программ в нек-ром простом базисе. Реальный смысл предельной полноты состоит, в частности, в том, что предельно полные системы являются полными в обычном смысле для класса программ, вычисляющих конечные функции.

В связи с задачей оптимизации у. с. важную роль играют направленные преобразования, дающие в конечном счете оптимальные или близкие к ним у. с. В частности, большой интерес представляет изучение возможностей м о н о т о н н ы х п р е о б р а з о в а н и й, к-рые на каждом шаге не повышают сложность у. с. в том или ином смысле.

Лит.: [1] Янов Ю. И., «Mitt. Math. Ges. DDR», 1973, H. 2—3; [2] его же, «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8, с. 75—90; [3] Мурский В. Л., «Докл. АН СССР», 1965, т. 163, № 4, с. 815—18; [4] его же, «Проблемы кибернетики», 1961, в. 5, с. 61—76; [5] его же, там же, 1965, в. 15, с. 101—16; [6] Янов Ю. И., там же, 1958, в. 1, с. 75—127; 1980, в. 37, с. 215—38. *Ю. И. Янов.*

ЭКВИВАРИАНТНАЯ ОЦЕНКА — точечная статистическая оценка, сохраняющая структуру задачи статистич. оценивания относительно заданной группы взаимно однозначных преобразований выборочного пространства.

Пусть по реализации случайного вектора $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, компоненты к-рого $X_1, X_2, \ldots, X_n$ суть независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}^k$, надлежит оценить неизвестное истинное значение параметра θ. Далее, пусть на $\mathfrak{X}$ действует группа взаимно однозначных преобразований $G=\{g\}$ такая, что

$$g\mathfrak{X}=\mathfrak{X} \text{ и } g\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}=\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \text{ для всех } g\in G.$$

Группа G в свою очередь порождает на параметрич. пространстве Θ так наз. индуцированную группу $\overline{G}=\{\overline{g}\}$ преобразований, элементы к-рой определяются по формуле

$$P_\theta(B)=P_{\overline{g}\theta}(gB) \text{ для всех } g\in G,\ B\in\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}.$$

Предполагается, что $\overline{G}$ является группой взаимно однозначных преобразований на Θ таких, что

$$\overline{g}\Theta=\Theta \text{ для всех } \overline{g}\in\overline{G}.$$

В этих условиях про точечную оценку $\hat\theta=\hat\theta(X)$ параметра θ говорят, что она является Э. о. или сохраняет структуру задачи статистич. оценивания параметра θ относительно группы G, если

$$\theta(gX)=\overline{g}\hat\theta(X) \text{ для всех } g\in G.$$

Наиболее интересные результаты в теории эквивариантной оценки получены в предположении, что функция потерь является инвариантной относительно этой же группы G.

Лит.: [1] Заксе Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979. *М. С. Никулин.*

ЭКВИВАРИАНТНЫЕ КОГОМОЛОГИИ — когомологии, учитывающие действие нек-рой группы. Подробнее, Э. к. в категории G-пространств (т. е. топологич. пространств, на к-рых задано непрерывное действие группы G) и их эквивариантных отображений — последовательность контравариантных факторов H^n_G (принимающих значение в категории абелевых групп) и их естественных преобразований

$$H^n_G(L)\longrightarrow H^{n+1}_G(K, L),\ L\subset K,$$

обладающих следующими свойствами: а) эквивариантно гомотопные отображения пар индуцируют одинаковые отображения групп H^n_G; б) включения вида

$$(K, K\cap L)\subset(K\cup L, L)$$

индуцируют изоморфизм

$$H^n_G(K\cup L, L)=H^n_G(K, K\cap L);$$

в) для всякой пары (K, L) точна когомологич. последовательность

$$\ldots H^n_G(K, L)\longrightarrow H^n_G(K)\longrightarrow H^n_G(L)\longrightarrow H^{n+1}_G(K, L)\longrightarrow\ldots$$

Пусть $\pi: E_G\to B_G$ — универсальное G-расслоение и K_G — пространство ассоциированного с π универсального расслоения со слоем K (т. е. факторпространство

$E_G \times K$ при действии G, заданном как $g(l, k) = (lg^{-1}, gk)$. Тогда функторы $H^n_G(K) = H^n(K_G)$ дают эквивариантную теорию когомологий; здесь H^n — произвольная теория когомологий.

Для любой фиксированной группы G набор групп $H^n_G(G/F)$ вместе с индуцированными всевозможными включениями $F_1 \subset F_2$ подгрупп G гомоморфизмами наз. обычно системой коэффициентов для H^*_G-теории. В нек-рых случаях функторы H^n_G однозначно определяются своей системой коэффициентов (напр., когда G конечна и $H^n_G(G/F) = 0$ при $n > 0$).

Лит.: [1] Bredon G., Equivariant cohomology theories, B.— N. Y., 1967; [2] У И Сян, Когомологическая теория топологических групп преобразований, пер. с англ., М., 1979.

Е. Г. Скляренко.

ЭКВИДИСТАНТА множества M в метрическом пространстве R — граница *трубчатой окрестности* M в R, образованной шарами одинакового радиуса d. Если M — дифференцируемое подмногообразие M^k в римановом пространстве V^n, то под Э. понимают (в более узком смысле) множество концов равных отрезков, отложенных от точек M^k на геодезических, перпендикулярных к M^k в соответствующих точках. Если V^n — полное, то Э.— образ *экспоненциального отображения* векторов постоянной длины d нормального расслоения M^k в V^n. Если V^n— неполное, то Э. существует лишь при достаточно малых d.

Примеры Э. 1) Э. на плоскости Лобачевского (гиперцикл) — ортогональная траектория пучка прямых, перпендикулярных к нек-рой прямой (к базисной прямой, или базе). Э. состоит из двух ветвей, расположенных по разные стороны от базисной прямой и вогнутых в сторону базы. Кривизна Э. постоянна. 2) Э. плоскости в пространстве Лобачевского является поверхность постоянной положительной внешней кривизны.

Д. Д. Соколов.

ЭКОНОМЕТРИЯ, эконометрика, — направление в применении математич. методов в экономич. исследованиях, имеющее целью количественное описание закономерностей и взаимосвязей экономич. объектов и процессов на основе теоретич. представлений об их важнейших, определяющих факторах с помощью математич. моделей и статистич. методов обработки данных. Для Э. характерно предположение о проявлении изучаемых закономерностей в измеряемых и используемых в экономич. статистике и прогнозировании показателях в неявном виде, на фоне действия второстепенных, случайных факторов и побочных явлений и, как следствие, установка на выявление теоретически предсказываемых зависимостей с одновременным выбором конкретной формы их выражения.

Отдельные попытки количественного описания взаимосвязей между экономич. показателями предпринимались уже в 19 в. Развиваясь в рамках буржуазной экономич. науки, эконометрич. направление использует ее теоретич. положения, что ограничивает возможности научного анализа и предсказания социально-экономич. процессов при помощи эконометрич. моделей. В то же время практич. потребности изучения явлений на всех уровнях экономики — от народнохозяйственного до отдельных фирм — обусловили разработку и многократное применение набора типовых формулировок экономико-математич. моделей и математич. приемов, позволяющих выявлять и анализировать количественные взаимосвязи, проявляющиеся в статистич. данных, и обосновывать их, предполагая выполненными нек-рые гипотезы, относящиеся к допустимым данным и изучаемым зависимостям.

Выявление и исследование количественных закономерностей и взаимосвязей в социалистическом народном хозяйстве подчинено задачам развития экономич.

теории и потребностям планирования и управления. В СССР и социалистич. странах сложилось более общее по своим задачам и применяемым методам (по сравнению с эконометрич. направлением в буржуазной экономич. науке) научное направление, изучающее количественные закономерности и взаимосвязи в экономике на основе марксистско-ленинской политич. экономии и теории управления народным хозяйством и его звеньями, объединяемое в литературе термином «экономико-математические методы». Оно включило в себя не только методы построения количественно-определенных моделей по статистич. данным, но и всю проблематику, связанную с подготовкой и обоснованием оптимальных экономич. решений, анализом условий, необходимых для их эффективной реализации, моделированием процессов функционирования сложных социально-экономич. систем, в к-рых одновременно происходят материально-вещественные и информационные взаимодействия, вырабатываются и выполняются планы и управленческие решения различных уровней, в том числе создающие условия для активного коренного изменения достаточно устойчиво в прошлом проявлявшихся зависимостей и тенденций.

Э. использует понятия, постановки и методы решения задач из многих разделов математики, в том числе математич. статистики, теории вероятностей, математич. программирования, численные методы решения задач линейной алгебры, систем нелинейных уравнений и нахождения неподвижных точек отображений, во многих случаях имеет дело с обратными и некорректными задачами в стохастич. постановках. В то же время Э. применяет математич. методы не только для определения зависимостей, задаваемых в общепринятой для статистич. исследований форме [напр., в виде линейного по оцениваемым параметрам уравнения регрессии с неслучайными факторами аргументами], но и к более сложным математич. моделям, формализующим типовые для экономич. исследований задачи. К числу типовых экономико-математич. моделей, конструируемых и изучаемых с помощью эконометрич. методов, относятся: производственные функции, выражающие устойчивые, закономерные взаимосвязи между затратами и результатами производственной деятельности экономич. систем различных уровней; факторные модели производительности труда; системы функций спроса групп потребителей и целевые функции потребительского предпочтения; статические и динамические межотраслевые модели производства, распределения и потребления продукции; частные модели межотраслевого и межрегионального распределения и перераспределения ресурсов; модели общего экономического равновесия; модели внешнеторгового обмена для группы стран и др.

Сталкиваясь с практич. необходимостью расширить набор исходных гипотез о случайных факторах, проявляющихся в статистич. данных, Э. формулирует нетрадиционные для прикладного статистич. анализа постановки задач и вырабатывает методы их решения. Так, в ряде эконометрич. моделей независимые переменные и параметры рассматриваются не как детерминированные, а как случайные величины, включаются распределенные во времени взаимозависимости переменных, используются непосредственно не наблюдаемые, латентные переменные и учитываются априорные ограничения на оцениваемые параметры, допускается изменение изучаемых зависимостей во времени или в пространстве факторов и ищутся моменты таких изменений или множества значений факторов, на к-рых они происходят. Наряду с обобщениями постановок задач выявления зависимостей, для Э. характерно теоретич. и эмпирич. [напр., методом Монте-Карло] исследование свойств и сравнительной эффективности различных ме-

тодов решения задач одного класса, а также стремление формулировать систему рекомендаций, используя к-рую можно последовательно проверять и уточнять гипотезы, относящиеся к моделям изучаемых явлений и объектов.

Развитие экономико-математич. направления, использующего богатый арсенал методов прикладной математики и возможности использования средств вычислительной техники для сбора, хранения и обработки данных, приводит к более четкому определению классов моделей, методов их разработки и анализа, объединяемых общностью принимаемых методич. положений. Так, в частности, в чрезвычайно широком по своим задачам эконометрич. подходе к разработке экономико-математич. моделей принято выделять класс собственно эконометрич. моделей, имеющих следующую обобщенную, конкретизируемую во многих направлениях формулировку.

Рассматривается совокупность переменных — экономич. показателей — X_i, $i=1, \ldots, n$, каждой из к-рых в промежутке времени t соответствует ее измеримое значение X_i^t. Предполагается, что эти переменные удовлетворяют системе соотношений

$$F_k(X^t, X^{t-1}, \ldots, X^{t-\tau}; t; a; \varepsilon_k^t)=0, \ k=1, \ldots, m, \quad (1)$$

в к-рой X^t — вектор состояния изучаемой системы в период t с координатами X_i^t, $i=1, \ldots, n$, F_k — функция своих аргументов, задаваемая с точностью до значений параметров, представленных вектором a, ε_k^t — реализация случайной величины ξ_k^t, $k=1, \ldots, m$, такой, что условный закон распределения вероятностей для случайных величин ξ_k^t, $k=1, \ldots, m$, при фиксированных значениях векторов $\varepsilon^{t-1}=\{\varepsilon_k^{t-1}\}$, $\varepsilon^{t-2}=\{\varepsilon_k^{t-2}\}$, $\ldots$, обозначаемый

$$\mathsf{P}(\varepsilon^t \mid \varepsilon^{t-1}, \ldots; b), \quad (2)$$

предполагается известным с точностью до значений нек-рого вектора параметров b.

Для эконометрич. модели (1)—(2) рассматриваются следующие основные задачи:

по известной совокупности данных $X^{T-Q}, \ldots, X^T$ определить значения параметров a и b так, чтобы эти данные в нек-ром, специально оговоренном смысле, хорошо удовлетворяли соотношениям (1);

построить условный прогноз значений m переменных X_j^t, $j=i_1, \ldots, i_m$, при заданных значениях других $(n-m)$ переменных X_i^t, $i=1, \ldots, n$; $i\neq i_1, \ldots, i_m$, для $t=T+1, \ldots, T+\tau$;

сравнить между собой несколько альтернативных моделей вида (1)—(2), отличающихся выбранными функциями F_k и законом $\mathsf{P}(\varepsilon^t|\varepsilon^{t-1}, \ldots; b)$, при определенных значениях их параметров и определить, имеются ли среди них модели, существенно лучше (хуже) соответствующие имеющимся данным и качественным соображениям о природе выявляемых зависимостей.

Эти качественные формулировки задач оценивания параметров эконометрич. моделей, построения с их помощью прогнозов и сравнения таких моделей между собой доопределяются в Э. так, что для некоторых классов функций F_k и законов P оказывается возможным предложить методы решения и, как правило, реализовать их в виде соответствующих программ для ЭВМ.

В практич. исследованиях эконометрич. методы применяются не только при разработке собственно эконометрич. моделей, но и в процессе создания более общих и разносторонних моделей, использующих также нормативные, оптимизационные и имитационные подходы к моделированию и преодолевающих таким образом присущую эконометрическому подходу описательность.

Лит.: [1] Канторович Л. В., Математические методы организации и планирования производства, Л., 1939; [2] его же, Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, М., 1959; [3] Тинтнер Г., Введение в эконометрию, пер. с нем., М., 1965; [4] Михалевский В. П., Система моделей среднесрочного народнохозяйственного планирования, М., 1972; [5] Эконометрические модели и прогнозы, Новосиб., 1975; [6] Колек Ю., Шуян И., Эконометрические модели в социалистических странах, пер. со словац., М., 1978; [7] Фишер Ф., Проблема идентификации в эконометрии, пер. с англ., М., 1978; [8] Пирогов Г. Г., Федоровский Ю. П., Проблемы структурного оценивания в эконометрии, М., 1979; [9] Джонстон Дж., Эконометрические методы, пер. с англ., М., 1980; [10] Зельнер А., Байесовские методы в эконометрии, пер. с англ., М., 1980; [11] Шуарье Д., Эконометрия структурных изменений, пер. с англ., М., 1981; [12] Винн Р., Холден К., Введение в прикладной эконометрический анализ, пер. с англ., М., 1981; [13] Драймз Ф., Распределенные лаги. Проблемы выбора и оценивания модели, пер. с англ., М., 1982; [14] Межотраслевые эконометрические модели, Новосиб., 1983. *Л. В. Канторович, Э. Б. Ершов.*

ЭКСПЕРИМЕНТЫ С АВТОМАТАМИ — способ получения информации о внутренней структуре автоматов по их поведению, причем такой информации, к-рую можно получить из внешних экспериментов (т. е. таких экспериментов, когда на вход автомата подаются входные слова, обозревается соответствующая последовательность выходных слов и на основе этих наблюдений делаются выводы).

При помощи Э. с а. можно искать подходы к решению следующих задач.

1) Известно, что автомат находится в одном из состояний, наз. начальным. Требуется определить это состояние автомата.

2) Построение эксперимента, переводящего автомат из любого состояния в нек-рое наперед заданное (установочная задача).

3) Проверка автомата на исправность. Путем эксперимента требуется узнать, правильно ли функционирует заданный автомат.

4) Диагностика автомата. Требуется узнать не только то, исправен ли автомат, но также и то, какая именно неисправность имеет место.

5) Задача распознавания автомата из заданного класса (расшифровка). Известно, что «черный ящик» совпадает с одним из автоматов данного множества. Требуется узнать, с каким именно автоматом имеется совпадение.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть нек-рый класс инициальных автоматов со входным алфавитом X и выходным алфавитом Y. Пусть, далее, X^* — совокупность всех слов в алфавите X, $\alpha \in X^*$ и $A \subset \mathfrak{A}$. Под экспериментом с автоматом A понимается множество $[\alpha, A]$ всех таких пар вида (x, y), что $x \in \alpha$, а y — слово, в к-рое A перерабатывает x.

Классификация экспериментов. Обычно рассматриваются следующие типы экспериментов.

1. Простой безусловный эксперимент — множество $[\alpha, A]$, где α состоит из единственного слова. В процессе экспериментирования на вход автомата подается единственный элемент α, в результате на выходе автомата появляется нек-рое слово из Y^*.

2. Простой условный эксперимент — множество $[\alpha, A]$, где α состоит из единственного слова $X=(X(1), \ldots, X(\tau))$, причём для любого $j \in \{1, 2, \ldots, \tau\}$ значения $X(j)$ зависят от $[\alpha', A]$, где $\alpha'=(X(1), \ldots, X(j-1))$. Таким образом, в процессе Э. с а. каждая последующая буква входного слова формируется в зависимости от полученного ранее выходного слова.

3. Кратный безусловный эксперимент — обобщение простого безусловного эксперимента на случай, когда множество $[\alpha, A]$ таково, что α состоит более чем из одного слова. Обычно предполагается, что в процессе проведения данного эксперимента либо имеется более чем один экземпляр автомата A,

либо автомат обладает возможностью возврата в начальное состояние.

4. К р а т н ы й у с л о в н ы й э к с п е р и м е н т — обобщение простого условного эксперимента на случай, когда множество $[\alpha, A]$ таково, что α состоит более чем из одного слова:

$$\alpha = \{(X_1(1), \ldots, X_1(\tau_1)), \ldots, (X_s(1), \ldots, X_s(\tau_s))\}.$$

При этом различают две возможности: а) для любых $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, \tau_i\}$ значение $X_i(j)$ зависит только от $[\alpha', A]$, где α' состоит из единственного слова $(X_i(1), \ldots, X_i(j-1))$; б) для любых $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, \tau_i\}$ значение $X_i(j)$ зависит от $[\alpha'', A]$, где α'' — множество, состоящее из наборов $\{(X_1(1), \ldots, X_1(t_j^1)), \ldots, (X_s(1), \ldots, X_s(t_j^s))\}$, а индекс t_j^i для $i \in \{1, \ldots, s\}$ совпадает с τ_i, если $j-1 > \tau_i$, и совпадает с $j-1$, если $j-1 \leqslant \tau_i$.

Меры сложности экспериментов. Это нек-рые числовые характеристики, к-рые оценивают степень сложности эксперимента. Для кратного эксперимента обычными мерами сложности являются: в ы с о т а э к с п е р и м е н т а — количество символов наибольшего входного слова; к р а т н о с т ь — количество входных слов; д л и н а — общее количество символов во всех входных словах. Мерой сложности простого эксперимента считается его длина (количество символов использованного входного слова).

Некоторые результаты. Автомат Мура A с r состояниями, m входными и p выходными символами наз. (r, m, p)-автоматом. Справедлива т е о р е м а о б о т л и ч и м о с т и с о с т о я н и й п р о с т ы м э к с п е р и м е н т о м: если A есть (r, m, p)-автомат и все его состояния попарно отличимы, то отличимость любых двух состояний может быть установлена простым экспериментом длины $r-1$ и граница $r-1$ не может быть понижена (см. [4]).

Задачу определения начального состояния автомата можно решать с помощью простого безусловного эксперимента длины λ, где

$$3^{\frac{r}{6}(1+\varepsilon_1)} \leqslant \lambda < 3^{\frac{r}{6}(1+\varepsilon_2)} \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0 \text{ при } r \to \infty).$$

Установочную задачу для автомата с r состояниями, k из к-рых являются допустимыми, всегда можно решать с помощью простого безусловного эксперимента длины λ, где $\lambda \leqslant (2r-k)(k-1)/2$, и эта граница не может быть улучшена.

Указанные выше оценки, как правило, достигаются лишь для небольшой доли автоматов. Установлено (см. [4]), что задачу определения начального состояния для почти всех (r, m, p)-автоматов с двумя допустимыми состояниями решают простым безусловным экспериментом длины λ, где $\lambda \leqslant \log_m \cdot \log_p r + 4$, а установочную задачу для почти всех (r, m, p)-автоматов можно решать с помощью простого безусловного эксперимента длины λ, где $\lambda < 5 \log_p r$.

Не существует алгоритма, к-рый позволил бы расшифровать инициальные автоматы Мили, для к-рых ничего не известно о числе состояний. Однако оказывается, что большую часть таких автоматов все-таки можно расшифровать.

Э. с а. используются и в качестве средств контроля работы автоматов. Разработан единый подход к задачам контроля автоматов, позволяющий указать принципиальные способы их решения. Построен эффективный алгоритм нахождения всех тупиковых кратных экспериментов для различных автоматов (см. [2]).

Лит.: [1] М у р Э. Ф., в кн.: Автоматы, пер. с англ., М., 1956, с. 179—210; [2] Я б л о н с к и й С. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 133, с. 263—72; [3] Т р а х т е н б р о т Б. А., Б а р з д и н ь Я. М., Конечные автоматы. (Поведение и синтез), М., 1970; [4] Х и б б а р д Т. Н., «Кибернетич. сб.», 1966, в. 2, с. 7—23.

Х. А. Мадатян.

ЭКСПОНЕНТА — то же, что *экспоненциальная функция*.

ЭКСПОНЕНТА группы — наименьшее число n такое, что в данной группе выполняется тождество $x^n=1$. *О. А. Иванова.*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ — слабейшая топология на множестве $\exp X=2^X$ всех замкнутых подмножеств топологич. пространства X, в к-рой множества $\exp A$ открыты (в $\exp X$) для открытых A и замкнуты (в $\exp X$) для замкнутых A. Если $A\subset X$, то через $\exp A$ обозначается множество всех замкнутых подмножеств множества A.

Пример. Топология метрич. пространства замкнутых ограниченных подмножеств метрич. пространства, наделенное *Хаусдорфова метрикой*. Общее определение: пусть $U_1, \ldots, U_n$ — произвольный конечный набор непустых открытых в X множеств; базу Э. т. образуют множества вида

$$\langle U_1, \ldots, U_n\rangle=\left\{\hat{F}\in\exp X: F\subset\bigcup_1^n U_i \,\&\, F\cap U_i\neq\varnothing,\ i=1, \ldots, n\right\},$$

где $\hat{F}$ обозначает точку $\exp X$, соответствующую данному замкнутому множеству $F\subset X$. Пространство $\exp X$, наделенное Э. т., наз. экспоненто й пространства X. Если X есть T_1-пространство, то $\exp X$ также T_1-пространство. Если X регулярно, то $\exp X$ хаусдорфово. Если X нормально, то $\exp X$ вполне регулярно. Для Э. т. нормальность эквивалентна ее бикомпактности. Если пространство X бикомпактно, то $\exp X$ также бикомпактно. Если X — диадический бикомпакт и вес X не превосходит $\aleph_1$, то $\exp X$ — также диадический бикомпакт. С другой стороны, экспонента любого бикомпакта, вес к-рого больше или равен $\aleph_2$, не является диадическим бикомпактом. Экспонента континуума Неано является абсолютным ретрактом в классе метрич. компактов и, следовательно, непрерывным образом отрезка. Однако экспонента несчетного веса не является непрерывным образом тихоновского куба I^τ. Пусть $f: X\to Y$ — замкнутое отображение пространства X на пространство Y. Отображение $\exp f: \exp X\to\exp Y$, действующее по правилу $(\exp f)(\hat{F})=\widehat{f(F)}$, наз. экспоненто й отображения. Если $f: X\to Y$ — непрерывное отображение бикомпакта X на бикомпакт Y, то оно открыто тогда и только тогда, когда открыто отображение $\exp f$. Функтор $\exp X$, действующий из категории бикомпактов и непрерывных отображений в ту же самую категорию, является ковариантным функтором экспоненциального типа, если морфизму ставится экспонента этого морфизма $\exp f$.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, [пер. с англ.], т. 1—2, М., 1966—69. *Б. А. Ефимов.*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, показательная функция,— функция $y=e^x$; обозначается также $y=\exp x$. Иногда Э. ф. наз. и функцию $y=a^x$ при любом основании $a>0$. *БСЭ-3.*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА ФУНКЦИЯ — целая функция $f(z)$, удовлетворяющая условию:

$$|f(z)|<Ae^{a|z|},\ |z|<\infty,\ A<\infty,\ a<\infty.$$

Если $f(z)$ представить рядом

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}z^k,$$

то

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}<\infty.$$

Простейшие примеры Э. т. ф.: e^{cz}, $\sin\alpha z$, $\cos\beta z$, $\sum_{k=1}^{n}A_ke^{\alpha_k z}$.

Э. т. ф. имеет интегральное представление

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \gamma(t)\,e^{zt}\,dt,$$

где $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$ (см. *Бореля преобразование*), а C — замкнутый контур, охватывающий все особенности $\gamma(t)$.

Лит.: [1] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., 1956.
А. Ф. Леонтьев.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение касательного пространства многообразия M в M, определяемое заданной на M *связностью* и являющееся далеко идущим обобщением обычной экспоненциальной функции, рассматриваемой как отображение прямой в себя.

1) Пусть M — многообразие класса C^∞ с аффинной связностью, p — нек-рая точка из M, M_p — касательное пространство к многообразию M в точке p и X — ненулевой вектор из M_p, $t\to\gamma_X(t)$ — геодезическая, проходящая через точку p в направлении вектора X. Существует такая открытая окрестность N_0 точки 0 в M_p и такая открытая окрестность N_p точки p в M, что отображение $X\to\gamma_X(1)$ является диффеоморфизмом N_0 на N_p. Это отображение называется Э. о. в точке p и обозначается Exp. Окрестность N_0 наз. нормальной, если: 1) отображение Exp диффеоморфно отображает N_0 на N_p, 2) если $X\in N_0$ и $0\leqslant t\leqslant 1$, то $tX\in N_0$. В этом случае N_p — нормальная окрестность точки p в многообразии M. Каждая точка $p\in M$ обладает выпуклой нормальной окрестностью N_p точки p: любые две точки такой окрестности можно соединить в точности одним геодезич. отрезком, содержащимся в N_p. Если M — полное риманово многообразие, то Exp есть сюръективное отображение M_p на M.

2) Пусть G — группа Ли с единицей e и g — соответствующая алгебра Ли, состоящая из касательных векторов к G в точке e. Для каждого вектора $X\in g$ существует единственный аналитич. гомоморфизм θ группы $\mathbb{R}$ в G такой, что касательный вектор к $\theta(\mathbb{R})$ в точке e совпадает с X. Отображение $X\to\exp X=\theta(1)$ и наз. Э. о. алгебры g в группу G. Существует такая открытая окрестность N_0 точки 0 в g и такая открытая окрестность N_e точки e в G, что exp является аналитич. диффеоморфизмом окрестности N_0 на N_e. Пусть $X_1,\ \ldots,\ X_n$ — нек-рый базис алгебры g. Отображение $\exp(x_1X_1+\ldots+x_nX_n)\to(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ есть система координат на N_e, эти координаты наз. каноническими.

К понятию Э. о. для группы Ли G можно подойти и с другой точки зрения. Существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех аффинных связностей на G, инвариантных относительно группы левых сдвигов, и множеством билинейных функций $\alpha: g\times g\to g$. Оказывается, что Э. о. exp алгебры g в группу G совпадают с отображением Exp касательного пространства g к многообразию G в точке e в это многообразие относительно левоинвариантной аффинной связности, отвечающей любой кососимметричной билинейной функции α.

Лит.: [1] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964.
А. С. Феденко.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — то же, что *показательное распределение*.

ЭКСТРАПОЛИРОВАНИЕ, экстраполяция, функции — продолжение функции за пределы ее области определения, при к-ром продолженная функция (как правило, аналитическая) принадлежит заданному классу. Э. функций обычно производится с помощью формул, в к-рых использована информация о поведении функции в нек-ром конечном наборе точек (*узлах интерполяции*), принадлежащих ее области определения.

Понятие *интерполирования* **функций** употребляется в качестве противопоставления понятию Э. функций (в узком смысле понимания этого термина), когда конструктивно восстанавливаются (быть может, приближенно) значения функций в областях их определений.

Пример. Если заданы значения функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ в узлах $x_k \in [a, b]$, $k=0, 1, \ldots, n$, то интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ (см. *Лагранжа интерполяционная формула*), будучи определен на всей числовой оси $\mathbb{R}$, является, в частности, Э. функции f вне отрезка $[a, b]$ в классе многочленов степени не выше n.

Иногда при Э. функций используется не вся ее область определения, а только ее часть, т. е. фактически производится Э. значений сужения заданной функции на указанной части. В этом случае экстраполяционные формулы дают, в частности, значения (вообще говоря, приближенные) функции в соответствующих точках ее области определения. Именно таким образом часто поступают при решении практич. задач, когда вне рассматриваемой части области определения нек-рой функции отсутствует достаточная информация, необходимая для вычисления ее значений. *Л. Д. Кудрявцев.*

ЭКСТРЕМАЛЕЙ ПОЛЕ — область $(n+1)$-мерного пространства переменных $x, y_1, \ldots, y_n$, покрытая без пересечений n-параметрич. семейством экстремалей функционала

$$J = \int_{(A)}^{(B)} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx, \qquad (1)$$

где A и B — начальные и конечные точки, через к-рые проходят экстремали семейства.

Различают случаи собственного (или общего) и центрального Э. п. Собственное Э. п. соответствует случаю, когда экстремали семейства трансверсальны нек-рой поверхности

$$\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) = 0, \qquad (2)$$

т. е. на этой поверхности выполняются условия трансверсальности

$$\frac{F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}}{\varphi_x} = \frac{F_{y_1'}}{\varphi_{y_1}} = \ldots = \frac{F_{y_n'}}{\varphi_{y_n}}. \qquad (3)$$

Т. о., для собственного Э. п. точка A (или B) в (1) принадлежит поверхности (2) и в ней выполняются условия (3).

Центральное Э. п. соответствует случаю, когда экстремали семейства исходят из одной точки, находящейся вне поля, напр. из общей начальной точки A.

Наклоном Э. п. наз. вектор-функцию $u(x, y) = (u_1(x, y), \ldots, u_n(x, y))$, относящую каждой точке $(x, y) = (x, y_1, \ldots, y_n)$ поля вектор $y'(x) = (y_1'(x), \ldots, y_n'(x))$.

Для задач с подвижными концами, когда $y(x)$ есть экстремаль, дифференциал интеграла (1) имеет вид

$$dJ = \left[\left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}\right) dx + \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}\, dy_i\right]_{x_1}^{x_2}, \qquad (4)$$

где дифференциалы dx и dy вычисляются вдоль линий смещения подвижных концов $A(x_1, y(x_1))$ и $B(x_2, y(x_2))$, а y' — угловой коэффициент касательной к экстремали $y(x)$.

Выражение в квадратных скобках в (4) можно записать в виде

$$-H\, dx + \sum_{i=1}^{n} p_i\, dy_i, \qquad (5)$$

где

$$H = -F(x, y, u(x, y)) + \sum_{i=1}^{n} u_i(x, y) F_{y_i'}(x, y, u(x, y)),$$

$$p_i = F_{y_i'}(x, y, u(x, y)).$$

В Э. п. выражение (5) является полным дифференциалом нек-рой функции от x, y_1, . . . , y_n, поскольку имеют место равенства

$$-\frac{\partial H}{\partial y_i}=\frac{\partial p_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial y_k}=\frac{\partial p_k}{\partial y_i}, \qquad i,\ k=1,\ \ldots,\ n.$$

Эта функция с точностью до постоянного слагаемого есть криволинейный интеграл

$$\int_C -H(x,\ y,\ p)\,dx+\sum_{i=1}^{n} p_i\,dy_i, \tag{6}$$

он наз. инвариантным интегралом Гильберта. В (6) через C обозначена произвольная кривая $y(x)$, лежащая в Э. п. и соединяющая точки A и B. Термин «инвариантный» подчеркивает тот факт, что интеграл (6) не зависит от выбора кривой C, а определяется только заданными граничными точками.

Интеграл Гильберта (6) можно записать в эквивалентном виде

$$\int_C\left[F(x,\ y,\ u)-\sum_{i=1}^{n} u_i F_{y_i'}(x,\ y,\ u(x,\ y))\right]dx+$$
$$+\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}(x,\ y,\ u)\,dy_i=$$
$$=\int_C\left(F(x,\ y,\ u)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dy_i}{dx}-u_i\right)F_{y_i'}(x,\ y,\ u)\right)dx. \tag{7}$$

Если в качестве кривой сравнения C взять экстремаль E, то $\frac{dy_i}{dx}=u_i$, и для интеграла Гильберта (7) получается выражение

$$\int_E F(x,\ y,\ u(x,\ y))\,dx, \tag{8}$$

что совпадает с геодезич. расстоянием между точками A и B, определяемым как значение функционала (1) на экстремали, соединяющей точки A и B.

Указанное свойство Э. п. и инвариантного интеграла Гильберта лежит в основе теории достаточных условий экстремума, развитой К. Вейерштрассом (K. Weierstrass). Оно позволяет при исследовании на знак приращения функционала

$$\Delta J=J(C)-J(E) \tag{9}$$

выразить значение функционала $J(E)$, взятого вдоль экстремали (в предположении, что она окружена Э. п.) через инвариантный интеграл Гильберта по кривой сравнения C, соединяющей те же точки. Тем самым приращение функционала (9) представляется в виде криволинейного интеграла по кривой сравнения C:

$$\Delta J=\int_C\left(F(x,\ y,\ y')-F(x,\ y,\ u)-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{n}(y_i'-u_i)F_{y_i'}(x,\ y,\ u)\right)dx=$$
$$=\int_C \mathcal{E}(x,\ y,\ u,\ y')\,dx. \tag{10}$$

Подынтегральная функция $\mathcal{E}(x,\ y,\ u,\ y')$ в (10) наз. $\mathcal{E}$-функцией Вейерштрасса. Неотрицательность (неположительность) этой функции в любой точке Э. п. при произвольных конечных значениях y' достаточна для того, чтобы экстремаль E доставляла сильный минимум (максимум) функционалу (1) на множестве всех кривых сравнения, соединяющих точки A и B.

Лит.: [1] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950; [3] Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955. *И. Б. Вапнярский.*

ЭКСТРЕМАЛЕЙ СЕМЕЙСТВО — совокупность решений *Эйлера уравнений*, зависящая от n произвольных постоянных, заполняющая без взаимных пересечений нек-рую часть $(n+1)$-мерного пространства. Здесь n —

число неизвестных функций $y_i(x)$, $i=1, \ldots, n$, от к-рых зависит минимизируемый функционал

$$J(y_1, \ldots, y_n) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx,$$

а уравнение Эйлера понимается в векторном смысле, то есть представляет собой систему n обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ниже приводятся два способа построения Э. с.

Пусть рассматривается пучок экстремалей, выходящих из заданной точки $M_0(x_0, y_0)$ в $(n+1)$-мерном пространстве. Если экстремали пучка взаимно не пересекаются в нек-рой окрестности точки M_0 (кроме точки M_0), то они в этой окрестности образуют семейство экстремалей (центральное Э. с.).

Другой способ построения экстремалей состоит в построении множества экстремалей, трансверсальных к поверхности S_0, заданной в $(n+1)$-мерном пространстве уравнением

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Если в каждой точке этой поверхности условия трансверсальности

$$\frac{F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}}{\varphi_x} = \frac{F_{y_1'}}{\varphi_{y_1}} = \ldots = \frac{F_{y_n'}}{\varphi_{y_n}},$$

представляющие совокупность n условий, определяют значения n производных y_i', $i=1, \ldots, n$, то, принимая эти значения за начальные значения производных, можно через точку поверхности S_0 провести экстремаль, к-рая пересекается с поверхностью S_0 трансверсально. Если в окрестности этой поверхности указанные экстремали взаимно не пересекаются, то они образуют Э. с. (общее, или собственное Э. с.).

Построение Э. с. является исходным пунктом при рассмотрении вопросов, связанных с построением поля *экстремалей*. Э. с. является полем экстремалей, если существует семейство поверхностей, зависящих от одного параметра и пересекающихся трансверсально с экстремалями семейства.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 3 изд., т. 4, М., 1957.

И. Б. Вапнярский.

ЭКСТРЕМАЛЬ — гладкое решение *Эйлера уравнения*, являющегося необходимым условием экстремума в задаче вариационного исчисления.

В случае простейшей задачи вариационного исчисления, в к-рой требуется найти экстремум функционала

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx \qquad (1)$$

среди всех кривых $y(x)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \qquad (2)$$

уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

т. е. представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка, к-рое в развернутом виде можно записать следующим образом

$$F_{y'y'} y'' + F_{y'y} y' + F_{y'x} - F_y = 0. \qquad (3)$$

Если экстремум в задаче (1), (2) достигается на гладкой кривой $y(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, то $y(x)$ является Э., т. е. решением уравнения Эйлера (3) с начальным условием $y(x_1) = y_1$.

При $F_{y'y'} \neq 0$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, уравнение Эйлера имеет только гладкие решения (если $F(x, y, y')$ дважды непрерывно дифференцируемая функция). Если же $F_{y'y'}$ может обращаться в нуль, то среди решений уравнения Эйлера могут быть и кусочно гладкие кривые. Пусть кусочно гладкая кривая $y(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, доставляет экстремум в задаче (1), (2). Тогда всякий ее гладкий участок является Э., а в угловых точках $(c, y(c))$ должны выполняться необходимые условия Вейерштрасса — Эрдмана

$$F_{y'}|_{y'(c-0)} = F_{y'}|_{y'(c+0)},$$
$$(F - y'F_{y'})|_{y'(c-0)} = (F - y'F_{y'})|_{y'(c+0)}.$$

Кусочно гладкая кривая, состоящая из кусков экстремалей и удовлетворяющая в угловых точках условиям Вейерштрасса — Эрдмана, наз. л о м а н о й Э. Если экстремум в задаче (1), (2) достигается на кусочно гладкой кривой, то эта кривая есть ломаная Э. Впрочем, часто для краткости термин «ломаная» опускают и говорят об Э. функционала (1), имея в виду ломаную Э.

В случае функционала $J(y)$, зависящего от нескольких функций, т. е. когда y в (1) есть n-мерный вектор $y=(y_1, \ldots, y_n)$, уравнение Эйлера представляет собой систему n обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0, \ i = 1, \ \ldots, \ n, \tag{4}$$

и определение Э. (ломаной Э.) дается аналогичным образом.

В более общем случае задачи на условный экстремум (см. *Изопериметрическая задача*, *Больца задача*, *Лагранжа задача*, *Майера задача*) Э. определяется с помощью правила множителей.

Пусть, напр., кусочно гладкая кривая $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ доставляет экстремум в задаче Лагранжа

$$\left.\begin{aligned} J(y) &= \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx, \\ f: \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^1, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_\beta(x, y, y') = 0, \ \beta = 1, \ \ldots, \ m < n, \\ \varphi_\beta : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\psi_k(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)) = 0, \quad k = 1, \ \ldots, \ p \leqslant 2n+1. \tag{7}$$

Тогда, согласно правилу множителей, существует такая постоянная λ_0 (вообще говоря, отличная от нуля) и такие множители $\lambda_i(x)$, $i=1, \ldots, m$, что вектор-функция $y(x)$ является обычной (безусловной) Э. для функционала

$$I(y, x) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', \lambda)\, dx, \tag{8}$$

где

$$F(x, y, y', \lambda) = \lambda_0 f + \lambda_1(x)\varphi_1 + \ldots + \lambda_m \varphi_m.$$

Система уравнений Эйлера для задачи на безусловный экстремум функционала (8)

$$F_{\lambda_\beta} - \frac{d}{dx} F_{\lambda_\beta'} = \varphi_\beta(x, y, y') = 0, \ \beta = 1, \ \ldots, \ m, \tag{9}$$

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0, \ i = 1, \ \ldots, \ n, \tag{10}$$

включает в себя m уравнений (9), совпадающих с условиями связи (6), а также n дополнительных уравнений (10), позволяющих совместно с (9) определить неизвестные функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$ (при заданных начальных условиях).

Гладкое (кусочно гладкое) решение системы уравнений Эйлера (9) — (10), записанной для задачи на безусловный экстремум функционала (8), наз. Э. (ломаной Э.) задачи (5) — (6) на условный экстремум.

Свойство кривой быть Э. является не единственным необходимым условием для того, чтобы эта кривая действительно доставляла экстремум функционалу. Это объясняется тем, что уравнение Эйлера выводится как необходимое условие равенства нулю 1-й вариации функционала, так что остается еще проблема исследования на знак 2-й вариации функционала. Дальнейшее исследование Э. осуществляется с помощью необходимых условий Лежандра, Вейерштрасса и Якоби, а также достаточных условий, основанных на построении поля Э.

Лит.: [1] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.— Л., 1950.

И. Б. Вапнярский.

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ДЛИНА семейства кривых — понятие, являющееся, наряду с понятием модуля семейства кривых, общей формой определения конформных инвариантов и лежащее в основе *экстремальной метрики метода.*

Пусть Γ — семейство локально спрямляемых кривых на римановой поверхности R. Для Γ определена проблема модуля, если имеется непустой класс P *конформно-инвариантных метрик* $\rho(z)|dz|$, заданных на R, для к-рых $\rho(z)$ интегрируема с квадратом в плоскости z для каждого локального униформизирующего параметра $z(=x+iy)$, причем

$$A_\rho(R)=\iint_R \rho^2(z)\,dx\,dy \quad \text{и} \quad L_\rho(\Gamma)=\inf_{\gamma\in\Gamma}\int_\gamma \rho(z)\,|dz|$$

не равны одновременно 0 или ∞ (каждый из указанных интегралов понимается как интеграл Лебега). В этом случае величина

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in P} A_\rho(R)/[L_\rho(\Gamma)]^2$$

наз. модулем семейства кривых Γ. Величина, обратная к $M(\Gamma)$, наз. экстремальной длиной семейства кривых Γ.

Проблему модуля для семейства кривых часто определяют и следующим образом. Пусть P_L — такой подкласс P, что для $\rho\in P_L$ и $\gamma\in\Gamma$

$$\int_\gamma \rho(z)\,|dz|\geqslant 1.$$

Если множество P_L не пусто, то под модулем семейства Γ понимают величину

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in P_L} A_\rho(R).$$

Если же P не пусто, а P_L пусто, то под $M(\Gamma)$ понимают ∞. Ниже имеется в виду последнее определение модуля.

Пусть Γ — семейство локально спрямляемых кривых на римановой поверхности R, для к-рого определена проблема модуля, и $M(\Gamma)\neq\infty$. Тогда каждая метрика из P_L является допустимой метрикой проблемы модуля для семейства Γ. Если в P_L существует метрика $\rho^*(z)|dz|$, для к-рой

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in P_L} A_\rho(R),$$

то эта метрика наз. экстремальной метрикой проблемы модуля для семейства кривых Γ.

Основным из свойств модулей является конформная инвариантность.

Теорема 1. Пусть римановы поверхности R и R' конформно эквивалентны, f — однолистное конформное отображение поверхности R на R'. Пусть Γ — семейство локально спрямляемых кривых, заданных на R, Γ' — семейство образов кривых семейства Γ при отображении f. Пусть для Γ определена проблема модуля и пусть модуль семейства Γ равен $M(\Gamma)$. Тогда про-

блема модуля определена и для семейства Γ' и $M(\Gamma') = M(\Gamma)$.

Следующая теорема показывает, что если экстремальная метрика существует, то она, по существу, единственна.

Теорема 2. Пусть Γ — семейство локально спрямляемых кривых на римановой поверхности R и для Γ определена проблема модуля, и пусть $M(\Gamma) \neq \infty$. Если $\rho_1^*(z)|dz|$ и $\rho_2^*(z)|dz|$ — экстремальные метрики для этой проблемы модуля, то всюду на R, за исключением разве лишь подмножества R меры нуль, $\rho_2^*(z) = \rho_1^*(z)$.

Примеры модулей семейств кривых.

1) Пусть D — прямоугольник со сторонами a и b, и Γ (соответственно, Γ') — семейство локально спрямляемых кривых в D, соединяющих стороны длины a (соответственно, стороны длины b). Тогда

$$M(\Gamma) = a/b, \quad M(\Gamma') = b/a.$$

2) Пусть D — круговое кольцо: $r<|z|<1$. Пусть Γ — класс спрямляемых жордановых кривых в D, разделяющих граничные компоненты D, а Γ' — класс локально спрямляемых кривых в D, соединяющих граничные компоненты D. Тогда $M(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$, а $M(\Gamma') = 2\pi/\ln 1/r$. В обоих случаях $M(\Gamma)$ и $M(\Gamma')$ — характеристические конформные инварианты области D. Поэтому $M(\Gamma)$ наз. модулем области D для класса кривых Γ, $M(\Gamma')$ — модулем области D для класса кривых Γ'.

Известна следующая связь между модулями семейств кривых при квазиконформном отображении. Пусть Γ — семейство кривых в нек-рой области D, Γ' — образ семейства Γ при K— квазиконформном отображении области D. Тогда для модулей $M(\Gamma)$ и $M(\Gamma')$ семейств Γ и Γ' справедливы неравенства:

$$K^{-1} M(\Gamma) \leqslant M(\Gamma') \leqslant K M(\Gamma).$$

Важным для приложений оказывается обобщение понятия модуля для нескольких семейств кривых. Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ — семейства локально спрямляемых кривых на римановой поверхности R (как правило, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ — соответствующие гомотопич. классы кривых). Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — неотрицательные действительные числа, не все равные нулю. Пусть $P(\{\Gamma_j\}, \{\alpha_j\})$ — класс конформно-инвариантных метрик $\rho(z)|dz|$ на R, для к-рых $\rho^2(z)$ интегрируема для каждого локального параметра $z = x + iy$ и

$$\int_{\gamma_j} \rho(z)\,|dz| \geqslant \alpha_j \text{ для } \gamma_j \in \Gamma_j, \ j = 1, \ldots, n.$$

Если множество $P(\{\Gamma_j\}, \{\alpha_j\})$ не пусто, то говорят, что определена проблема модуля $\mathcal{P}(\{\Gamma_j\}, \{\alpha_j\})$ для семейств кривых $\{\Gamma_j\}$ и чисел $\{\alpha_j\}$. В этом случае величина

$$M(\{\Gamma_j\}, \{\alpha_j\}) = \inf_{\rho \in P(\{\Gamma_j\}, \{\alpha_j\})} \iint_R \rho^2(z)\, dx\, dy$$

наз. модулем этой проблемы. Если в $P(\{\Gamma_j\}, \{\alpha_j\})$ существует метрика $\rho^*(z)|dz|$, для к-рой

$$\iint_R [\rho^*(z)]^2\, dx\, dy = M(\{\Gamma_j\}, \{\alpha_j\}),$$

то она наз. экстремальной метрикой проблемы модуля $\mathcal{P}(\{\Gamma_j\}, \{\alpha_j\})$.

Модуль, определенный таким образом, также представляет собой конформный инвариант. Для таких модулей справедлива теорема единственности, аналогичная теореме 2. Доказано существование экстремальной метрики проблемы модуля $\mathcal{P}(\{\Gamma_j\}, \{\alpha_j\})$ при достаточно общих предположениях. Приведенное выше определение распространяется на случай семейств кривых

$\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, рассматриваемых на поверхности R', получаемой удалением из R конечного числа отмеченных точек $a_1, \ldots, a_N$, где семейства $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, $k \leqslant n$, состоят из замкнутых жордановых кривых, гомотопных на R' окружностям достаточно малых радиусов с центрами в соответствующих из отмеченных точек. Такая экстремально-метрическая проблема в сочетании с понятием приведенного модуля односвязной области D относительно точки $a \in D$ (см. *Модуль кольца*) связана с теорией *емкости* плоских множеств.

Известны и другие обобщения и модификации понятия модуля семейства кривых (см. [6]—[10]). Понятие модуля семейства кривых распространено на случай пространственных кривых и поверхностей. При этом установлены теоремы единственности и ряд свойств этих модулей, в частности получен аналог неравенств (1) для K-квазиконформных отображений в пространстве (см. [9], [10]).

Лит.: [1] Ahlfors L. V., Beurling A., «Acta math.», 1950, v. 83, p. 101—29; [2] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [3] Альфорс Л., Лекции по квазиконформным отображениям, пер. с англ., М., 1969; [4] Jenkins J. A., «Ann. Math.», 1957, v. 66, № 3, p. 440—53; [5] Кузьмина Г. В., Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы, Л., 1980; [6] Hersch J., «Comment. math. helv.», 1955, v. 29, fasc. 4, p. 301—37; [7] Тамразов П. М., «Докл. АН УССР», 1966, № 1, с. 51—54; [8] Fuglede B., «Acta math.», 1957, v. 98, p. 171—219; [9] Шабат Б. В., «Докл. АН СССР», 1960, т. 130, № 6, с. 1210—13; [10] Сычев А. В., Модули и пространственные квазиконформные отображения, Новосиб., 1983.

Г. В. Кузьмина.

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА — задача отыскания экстремумов функций или экстремумов функционалов, заключающаяся в выборе параметров или функций (управления) из условий минимума или максимума целевой функции или функционала при разного рода (фазовых, дифференциальных, интегральных и др.), накладываемых на них. См. также *Вариационное исчисление*, *Математическое программирование*, *Оптимальное управление*.

ЭКСТРЕМАЛЬНО НЕСВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО — пространство, в к-ром замыкание каждого открытого множества является открытым множеством. В регулярном Э. н. п. не существует сходящихся последовательностей без повторяющихся членов. Поэтому среди метрич. пространств только дискретные экстремально несвязны. Тем не менее Э. н. п. достаточно широко распространены: каждое тихоновское пространство можно представить как образ при *совершенном неприводимом отображении* нек-рого экстремально несвязного тихоновского пространства (см. *Абсолют* топологического пространства). Это означает, что экстремальная несвязность не сохраняется совершенными отображениями. Однако, образ Э. н. п. при непрерывном открытом отображении *является* Э. н. п.

Все регулярные Э. н. п. нульмерны, однако, в отличие от нульмерности, экстремальная несвязность не наследуется произвольными подпространствами, даже замкнутыми. Но всюду плотное подпространство Э. н. п. всегда само экстремально несвязно. Экстремальная несвязность плохо сочетается с топологич. однородностью. В частности, каждый экстремально несвязный топологически однородный бикомпакт конечен. Тем не менее существует недискретное Э. н. п., являющееся топологич. группой (при континуум-гипотезе — даже счетной), где каждый бикомпакт, лежащий в них, непременно конечен. Поэтому каждая экстремально несвязная топологич. группа, пространство к-рой является k-пространством, дискретна.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ МЕТРИКИ МЕТОД — один из основных методов геометрич. теории функций, тесно связанный с дифференциальной геометрией и топологи-

ей. В основе Э. м. м. лежат соотношения между длинами кривых, принадлежащих определенным гомотопич. классам, и площади заполняемой ими области. При этом указанные кривые и площади вычисляются в специальной метрике, соответствующей особенностям исследуемой экстремальной задачи (об экстремальных задачах геометрич. теории функций см. *Однолистная функция*).

Имеются различные формы Э. м. м. Первоначальной формой этого метода был м е т о д п о л о с Г р ё т ш а. Он представляет собой существенное усовершенствование рассуждений, связывающих длину и площадь, оперирующее с характеристич. конформными инвариантами двусвязных областей и четырехугольников (см. *Грётша принцип*). Используя свой метод полос, Х. Грётш (H. Grötzsch) получил ряд классич. результатов в теории конформных и квазиконформных отображений (см., напр., *Грётша теоремы*).

Существенными моментами в развитии Э. м. м. послужили: введение Л. Альфорсом (L. Ahlfors) и А. Бёрлингом (A. Beurling) понятия *экстремальной длины* семейства кривых, предложенное Дж. Дженкинсом (J. Jenkins) обобщение понятия модуля семейства кривых на случай нескольких семейств кривых и доказательство единственности экстремальной метрики проблемы модуля в этом случае.

В 1939—41 О. Тайхмюллер (O. Teichmüller) высказал (без доказательства) общий принцип, состоящий в утверждении, что решения экстремальных задач геометрич. теории функций определенным образом связаны с нек-рыми *квадратичными дифференциалами*. Одним из самых значительных результатов в развитии Э. м. м. явилась «общая теорема о коэффициентах» Дженкинса (см. *Дженкинса теорема* и [2]). Эта теорема содержит в качестве частных приложений почти все известные элементарные результаты об однолистных функциях и приводит к решению многих сложных экстремальных задач (см., напр., *Однолистная функция*). Результат о единственности в теореме Дженкинса был усилен и установлен аналог этой теоремы для квадратичных дифференциалов без кратных полюсов (см. [3]). Таким путем было получено решение нек-рых экстремальных задач для областей с двумя и тремя отмеченными граничными компонентами с полным анализом множества всех экстремальных отображений (см. [4], [5]). Решение экстремальных задач при помощи «общей теоремы о коэффициентах» представляет собой одну из форм Э. м. м., используемую во многих исследованиях.

Широкое распространение получила форма Э. м. м., известная под названием м е т о д а м о д у л е й. Этот метод основывается на установлении прямой связи исследуемой экстремальной задачи с нек-рой проблемой модуля для одного или нескольких семейств кривых (см. *Экстремальная длина* семейства кривых) и решении этой экстремально-метрической проблемы. Как правило, экстремальной метрикой указанной проблемы модуля оказывается метрика $|Q(z)|^{1/2}|dz|$, где $Q(z)dz^2$ — квадратичный дифференциал, полюсы к-рого определяются условиями данной задачи. Непосредственное рассмотрение проблем модуля для семейств кривых привело к окончательным результатам в ряде вопросов, связанных с задачами об экстремальном разбиении данной области на семейство односвязных и двусвязных областей, ассоциированных с определенными гомотопич. классами кривых. Постановка последних задач восходит к исследованиям М. А. Лаврентьева и Г. М. Голузина (см. [5]).

Успешным оказалось сочетание Э. м. м. с вариационными методами и *симметризации методом*. Так, одновременное использование метода модулей и *внутренних вариаций метода* позволило доказать существование экстремальной метрики проблемы модуля для семейств

кривых при весьма общих предположениях. Сочетание Э. м. м. и метода симметризации в ряде случаев дает возможность установить, что в расположении полюсов ассоциированного квадратичного дифференциала имеется соответствующая симметрия, и тем самым свести рассматриваемую задачу к более простому случаю.

Имеются и другие формы Э. м. м. Одна из них состоит в решении экстремальных задач как для однолистных, так и для неоднолистных отображений (в последнем случае принцип Тайхмюллера неприменим) при помощи непосредственного использования выражений для площадей образов при рассматриваемом отображении нек-рых подмножеств данной области, интерпретируемых как площади исходных множеств в нек-рой новой метрике, через площади самих этих множеств. Такая форма Э. м. м. оказалась особенно эффективной при решении задач о размахе многосвязной области (см. [7]). Развитием того же подхода служит «специальная теорема о коэффициентах» Дженкинса (см. *Дженкинса теорема*).

В частных случаях эта теорема сводится к утверждению *площадей принципа*.

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [3] Тамразов П. М., «Матем. сб.», 1967, т. 72, № 1, с. 59—71; т. 73, № 1, с. 97—125; [4] его же, «Тр. Томского гос. ун-та», 1969, т. 210, в. 6, с. 111—18; [5] Кузьмина Г. В., Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы, Л., 1980; [6] Jenkins J. A., «Ann. Math.», 1957, v. 66, № 3, p. 440—53; [7] его же, «Illinois J. Math.», 1963, v. 7, № 1, p. 104—17; [8] Тамразов П. М., «Матем. сб.», 1965, т. 66, № 4, с. 502—24; [9] Сычев А. В., Модули и пространственные квазиконформные отображения, Новосиб., 1983; [10] Rodin B., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1974, v. 80, № 4, p. 587—606.

Г. В. Кузьмина.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ; *численные методы решения* — методы вычислительной математики, применяемые для поиска экстремумов (максимумов или минимумов) функций и функционалов.

Для численного решения экстремальных задач, рассматриваемых в бесконечномерных функциональных пространствах (напр., задач оптимального управления процессами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями или уравнениями с частными производными) могут быть использованы после соответствующего обобщения многие методы математич. программирования, разработанные для задач минимизации или максимизации функций конечного числа переменных. При этом в конкретных задачах весьма важен правильный выбор подходящего функционального пространства, в к-ром следует ее рассматривать. При выборе такого пространства обычно учитываются физич. соображения, свойства допустимых управлений, свойства решений соответствующих начально-краевых задач при фиксированном управлении и т. п.

Напр., задачу оптимального управления, заключающуюся в минимизации функционала

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} f^0(x(t),\ u(t),\ t)\,dt + F(x(T)) \qquad (1)$$

при условиях

$$\dot{x} = f(x,\ u(t),\ t),\ t_0 \leqslant t \leqslant T;\ x(t_0) = x_0, \qquad (2)$$

$$u = u(t) \in V(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (3)$$

часто бывает удобно рассматривать в функциональном пространстве $L_2^r[t_0,\ T]$. Здесь $x=(x^1,\ \ldots,\ x^n)$, $u=(u^1,\ \ldots,\ u^r)$, $f=(f^1,\ \ldots,\ f^n)$, $f^i(x,\ u,\ t)$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, $F(x)$ — заданные функции; t_0, T — известные моменты времени, $t_0<T$; x_0 — заданная начальная точка; $V(t)$ при каждом $t\in[t_0,\ T]$ — заданное множество из евклидова пространства E^r; $L_2^r[t_0,\ T]$ — гильбертово пространство r-мерных вектор-функций $u=u(t)=(u^1(t),\ \ldots,\ u^r(t))$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, где $u^i(t)$ — функция, интегрируе-

мая на $[t_0,\ T]$ по Лебегу вместе со своим квадратом ($L_2^1[t_0,\ T]=L_2[t_0,\ T]$), причем скалярное произведение двух функций $u(t)$, $v(t)$, в этом пространстве равно

$$\langle u,\ v\rangle_{L_2^r}=\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{r}u^i(t)\,v^i(t)\,dt,$$

норма

$$\|u\|_{L_2^r}=\left(\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{r}|u^i(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

При определенной гладкости функций $f^i(x,\ u,\ t)$, $F(x)$ приращение функционала (1) можно представить в виде

$$J(u+h)-J(u)=-\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial H(u)}{\partial u^i}h^i(t)\,dt+R=$$
$$=\left\langle-\frac{\partial H(u)}{\partial u},\ h\right\rangle_{L_2^r}+R,\ R=o\left(\|h\|_{L_2^r}\right),\qquad(4)$$

где

$$H(x,\ \psi,\ u,\ t)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i f^i(x,\ u,\ t)-f^0(x,\ u,\ t),\qquad(5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=\left(\frac{\partial H}{\partial u^1},\ \ldots,\ \frac{\partial H}{\partial u^r}\right),\quad\frac{\partial H(u)}{\partial u}=\frac{\partial H}{\partial u}\Bigg|_{\substack{u=u(t)\\x=x(t;\,u)\\\psi=\psi(t;\,u)}},$$

$x=x(t;\ u)$ — решение задачи (2) при $u=u(t)$, $\psi=\psi(t;\ u)$ — решение сопряженной задачи

$$\dot\psi_i=-\frac{\partial H}{\partial x^i}\Bigg|_{\substack{u=u(t)\\x=x(t;\,u)}},\ t_0\leqslant t\leqslant T,\ i=1,\ \ldots,\ n,\qquad(6)$$

$$\psi_i(T)=-\frac{\partial F}{\partial x^i}\Big|_{x=x(T;\,u)}.\qquad(7)$$

Из формулы (4) следует, что функционал (1) дифференцируем в пространстве $L_2^r[t_0,\ T]$ и его градиентом является вектор-функция

$$J'(u)=-\frac{\partial H(u)}{\partial u}\in L_2^r[t_0,\ T].\qquad(8)$$

Таким образом, для решения задачи (1)—(3) могут быть применены различные методы, использующие градиент функционала. При $V(t)=E^r$ здесь можно применить градиентный метод

$$u_{k+1}(t)=u_k(t)+\alpha_k\frac{\partial H(u_k)}{\partial u},\ k=0,\ 1,\ \ldots$$

Если $V(t)=\{u=(u^1,\ \ldots,\ u^r):\alpha_i(t)\leqslant u^i\leqslant\beta_i(t),\ i=1,\ \ldots,\ r\}$, где $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ — заданные функции из $L_2[t_0,\ T]$, то возможно применение метода проекции градиента

$$u_{k+1}(t)=P\left(u_k(t)+\alpha_k\frac{\partial H(u_k)}{\partial u}\right),\ k=0,\ 1,\ \ldots,$$

где

$$P(w)=(w^1(t),\ \ldots,\ w^r(t)),\ t_0\leqslant t\leqslant T,$$
$$w^i(t)=\begin{cases}\alpha_i(t)\ \text{при}\ v^i(t)\leqslant\alpha_i(t),\\ v^i(t)\ \text{при}\ \alpha_i(t)\leqslant v^i(t)\leqslant\beta_i(t),\\ \beta_i(t)\ \text{при}\ v^i(t)>\beta_i(t),\end{cases}\ i=1,\ \ldots,\ r.$$

Параметр $\alpha_k>0$ может выбираться из условия $J(u_{k+1})<J(u_k)$. Аналогично могут быть расписаны для задачи (1)—(3) методы условного градиента, сопряженных градиентов и др. (см. [4]—[6], [11]). Если задача (1)—(3) рассматривается при дополнительных ограничениях

$$x(t;\ u)\in G(t),\ t_0\leqslant t\leqslant T,\qquad(9)$$

где $G(t)$ — заданное множество из E^n, то для учета ограничений (9) может быть использован *штрафных функций метод*. Напр., если

$$G(t)=\{x\in E^n:g_i(x,\ t)\leqslant 0,\ i=1,\ \ldots,\ m,\ g_i(x,\ t)=0,\ i=m+1,\ \ldots,\ s\},$$

то в качестве штрафной функции можно взять

$$P(u)=\int_{t_0}^{T}\left(\sum_{i=1}^{m}(\max\{g_i(x(t;u),t);\,0)^p+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=m+1}^{s}|g_i(x(t;u),t)|^p\right)dt,\quad p\geqslant 1,$$

и задачу (1)–(3), (9) заменить задачей минимизации функционала $\Phi_k(u)=J(u)+A_kP(u)$ при условиях (2), (3), где A_k — штрафной коэффициент, $\lim\limits_{k\to\infty}A_k=+\infty$.

Другие методы решения задачи (1)—(3), (9) основаны на принципе максимума Понтрягина, на динамич. программировании (см. *Понтрягина принцип максимума*, *Динамическое программирование*, *Вариационное исчисление*; численные методы).

Для решения задачи минимизации квадратичного функционала на решениях систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений или линейных уравнений с частными производными, может быть применен *метод моментов* (см. [3], [8]). Ниже описан этот метод применительно к задаче минимизации функционала

$$J(u)=|x(T;\,u)-y|^2_{E^n},\tag{10}$$

где $x=x(t;\,u)$ — решение задачи

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u(t)+f(t),\ t_0\leqslant t\leqslant T,\ x(t_0)=x_0,\tag{11}$$

управления $u=u(t)\in L_2^r[t_0,\ T]$ таковы, что

$$\|u\|^2_{L_2^r}=\int_{t_0}^{T}|u(t)|^2_{E^r}\,dt\leqslant R^2;\tag{12}$$

здесь $A(t)$, $B(t)$, $f(t)$ — заданные матрицы порядка $n\times n$, $n\times r$, $n\times 1$ соответственно, имеющие кусочно непрерывные элементы на отрезке $t_0\leqslant t\leqslant T$; $0<R\leqslant\infty$, $x_0,\ y\in E^n$ — заданные точки; $|x|^2_{E^m}=\langle x,x\rangle_{E^m}$, $\langle x,\,y\rangle_{E^m}=\sum_{i=1}^{m}x^iy^i$ — скалярное произведение в E^m. Из правила множителей Лагранжа следует, что управление $u=u(t)$ является оптимальным в задаче (10)—(12) тогда и только тогда, когда существует число $\gamma\geqslant 0$ (*Лагранжа множитель* для ограничения (12)) такое, что

$$J'(u)+\gamma u=0,\tag{13}$$
$$\gamma\left(\|u\|_{L_2^r}-R\right)=0,\quad\|u\|_{L_2^r}\leqslant R;\tag{14}$$

при $R=\infty$ здесь $\gamma=0$. Из формул (5)—(8) следует, что градиент $J'(u)$ функционала (10) в $L_2^r[t_0,\ T]$ имеет вид

$$J'(u)=B^T(t)\psi(t;\,u),\ t_0\leqslant t\leqslant T,$$

где $\psi=\psi(t;\,u)$ — решение задачи

$$\dot{\psi}=-A^T(t)\psi,\ t_0\leqslant t\leqslant T,\tag{15}$$
$$\psi(T)=2(x(T;\,u)-y);\tag{16}$$

A^T, B^T — матрицы, полученные транспонированием матриц A, B соответственно. Условие (13) тогда примет вид

$$B^T(t)\psi(t;\,u)+\gamma u(t)=0,\ t_0\leqslant t\leqslant T.\tag{17}$$

Условие (16) равносильно соотношениям

$$\int_{t_0}^{T}\langle u(t),\ B^T(t)p_k(t)\rangle_{E^r}\,dt-\frac{1}{2}\langle\psi(T),\ p_k(T)\rangle_{E^n}=a_k,$$
$$k=1,\ \ldots,\ n,\tag{18}$$

где

$$a_k=\langle y,\ p_k(T)\rangle_{E^n}-\langle x_0,\ p_k(t_0)\rangle_{E^n}-$$
$$-\int_{t_0}^{T}\langle f(t),\ p_k(t)\rangle_{E^r}\,dt,$$

$p_k(t)$ — решение системы (15) при условии $p_k(T)=e_k=(0,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ — единичный вектор.

Таким образом, для определения оптимального управления $u=u(t)$ в задаче (10)—(12) нужно решить систему (14), (15), (17), (18) относительно функций $u(t)$, $\psi(t)$ и числа $\gamma\geqslant 0$. При $R=\infty$ здесь $\gamma=0$, $\psi(t)=0$ и условие (18) приведет к проблеме моментов (см. *Моментов проблема*): найти функцию $u=u(t)$, зная ее моменты

$$\int_{t_0}^{T}\langle u(t),\ \varphi_k(t)\rangle\,dt=a_k$$

по системе $\varphi_k(t)=B^T(t)p_k(t)$, $k=1,\ \ldots,\ n$.

Система (14), (15), (17), (18) представляет собой обобщенную проблему моментов для задачи (10)—(12) при $0<R<\infty$ (см. [3], [8]).

Любое решение $\psi(t)$ системы (15) однозначно представимо в виде

$$\psi(t)=\sum_{k=1}^{n}\psi_k p_k(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant T. \tag{19}$$

При любом фиксированном $\gamma\geqslant 0$ существует решение $\psi(t;\gamma)$, $u(t;\gamma)$ системы (15), (17), (18), причем среди всех решений найдется единственное такое, что $u(t;\gamma)$ имеет вид

$$u(t;\gamma)=\sum_{k=1}^{n}u_k B^T(t)\,p_k(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant T. \tag{20}$$

Для определения $\psi(t;\gamma)$, $u(t;\gamma)$ нужно подставить выражения (19), (20) в (17), (18). В результате получится система линейных алгебраических уравнений относительно $\psi_1,\ \ldots,\ \psi_n,\ u_1,\ \ldots,\ u_n$, из к-рой однозначно определяются величины $\psi_1,\ \ldots,\ \psi_n$, а величины $u_1,\ \ldots,\ u_n$ в случае линейной зависимости системы $\{B^T(t)p_k(t),\ k=1,\ \ldots,\ n\}$ определяются неоднозначно. При практич. решении задачи (10)—(12) целесообразно сначала положить $\gamma=0$, $\psi(t)=0$ и из (18) определить $u(t;0)$ вида (20). Затем следует проверить условие $\|u(t;0)\|_{L_2^r}\leqslant R$. Если это неравенство выполняется, то $u(t;0)$ — оптимальное управление задачи (10)—(12), имеющее минимальную норму среди всех оптимальных управлений; множество всех оптимальных управлений в этом случае исчерпывается управлениями вида

$$u(t)=u(t;0)+v(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant T,$$

где $v(t)$ принадлежит ортогональному дополнению в $L_2^r[t_0,\ T]$ линейной оболочки систем функций

$$\{B^T(t)\,p_k(t),\quad k=1,\ \ldots,\ n\},$$

$$\|v(t)\|^2_{L_2^r}\leqslant R^2-\|u(t;0)\|^2_{L_2^r}.$$

Если $\|u(t;0)\|_{L_2^r}>R$, то из (17), (18) при $\gamma>0$ определяют решения $\psi(t,\gamma)$, $u(t,\gamma)$ вида (19), (20) и находят γ из уравнения

$$\|u(t;\gamma)\|_{L_2^r}=R,\quad \gamma>0; \tag{21}$$

функция $\|u(t;\gamma)\|_{L_2^r}$ переменной γ непрерывна, строго монотонно убывает при $\gamma>0$, $\lim\limits_{\gamma\to+\infty}\|u(t;0)\|_{L_2^r}=0$, поэтому из (21) однозначно определяется искомое $\gamma=\gamma_*$. Управление $u(t;\gamma_*)$ будет оптимальным для задачи (10)—(12); при $\|u(t;0)\|_{L_2^r}>R$ эта задача других оптимальных управлений не имеет.

Метод моментов применим также для решения задачи быстродействия для систем (11) и других линейных систем (см. [3], [8]).

Упомянутые выше методы широко используются и для численного решения задач оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями с частными производными.

Численная реализация многих методов решения задач оптимального управления предполагает использование тех или иных методов приближенного решения

встречающихся начально-краевых задач (см. *Краевая задача*; численные методы решения для уравнений с частными производными), приближенного вычисления интегралов (см. *Интегрирование численное*). В результате исходная задача оптимального управления заменяется нек-рым семейством аппроксимирующих задач, зависящим от нек-рых параметров (напр., от шагов разностной сетки). Вопросы построения аппроксимирующих задач, исследование сходимости см. в [5].

Широкие классы экстремальных задач являются некорректно поставленными (см. *Некорректные задачи*) и для их решения нужно использовать *регуляризации методы* (см. [5], [13]).

Лит.: [1] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В., Оптимальное управление, М., 1979; [2] Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н., Методы и алгоритмы решения задач оптимизации, К., 1983; [3] Бутковский А. Г., Методы управления системами с распределенными параметрами, М., 1975; [4] Васильев Ф. П., Численные методы решения экстремальных задач, М., 1980; [5] его же, Методы решения экстремальных задач, М., 1981; [6] Евтушенко Ю. Г., Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации, М., 1982; [7] Егоров А. И., Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами, М., 1978; [8] Красовский Н. Н., Теория управления движением, М., 1968; [9] Лионс Ж.-Л., Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, пер. с франц., М., 1972; [10] Поляк Б. Т., Введение в оптимизацию, М., 1983; [11] Сеа Ж., Оптимизация. Теория и алгоритмы, пер. с франц., М., 1973; [12] Сиразетдинов Т. К., Оптимизация систем с распределенными параметрами, М., 1977; [13] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, 2 изд., М., 1979; [14] Федоренко Р. П., Приближенное решение задач оптимального управления, М., 1978; [15] Экланд И., Темам Р., Выпуклый анализ и вариационные проблемы, пер. с англ., М., 1979.

Ф. П. Васильев.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ — свойства алгебраических, тригонометрических или обобщенных полиномов, к-рые выделяют их в качестве решений нек-рых экстремальных задач.

Напр., *Чебышева многочлены* $T_n(x)=\cos(n \arccos x)=2^{n-1}x^n+\dots$ имеют наименьшую норму в пространстве $C([-1, 1])$ среди всех алгебраич. многочленов степени n со старшим коэффициентом, равным 2^{n-1} (П. Л. Чебышев, 1853) и, таким образом, являются решением следующей экстремальной задачи

$$\max_{x\in[-1,\,1]} |2^{n-1}x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n| \longrightarrow \inf_{a=(a_1,\,\dots,\,a_n)}.$$

Иначе говоря, многочлен T_n наименее уклоняется от нуля в пространстве $C([-1, 1])$ среди всех многочленов степени n со старшим коэффициентом, равным 2^{n-1}.

Экстремальные задачи на пространствах многочленов в значительной части исследуются в пространствах $L_p([a, b])$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. При этом наиболее известные результаты связаны со случаями $p=1$, 2 и ∞ (метрика C). В частности, в этих метриках решен вопрос о явном виде многочленов, наименее уклоняющихся от нуля. В метрике L_1 — это многочлены Чебышева 2-го рода, в метрике L_2 — *Лежандра многочлены*, о метрике C см. выше. Описано также множество классических ортогональных многочленов, являющихся многочленами наименее уклоняющимися от нуля в пространстве L_2 с весом (*Лагерра многочлены*, *Эрмита многочлены*, *Якоби многочлены* и т. п.).

Е. И. Золотарев (1877) рассмотрел вопрос о многочленах вида $x^n+\sigma x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n$ (с двумя фиксированными старшими коэффициентами), наименее уклоняющихся от нуля в метрике C. Он нашел однопараметрич. семейство многочленов, решающих эту задачу, выразив их через эллиптич. функции.

Многочлены Чебышева экстремальны в задаче о неравенстве для производных, а именно, имеет место следующее точное *Маркова неравенство* (где P_n — многочлен степени $\leqslant n$):

$$\|P_n^{(k)}\|_{C([-1,\,1])}\leqslant|T_n^{(k)}(1)|\,\|P_n\|_{C([-1,\,1])}, \qquad (*)$$

в к-ром равенство достигается на T_n. Неравенство (*) для $k=1$ доказал А. А. Марков (1889), для остальных k — В. А. Марков (1892). О подобном неравенстве для тригонометрич. полиномов см. *Бернштейна неравенство*.

Нек-рые экстремальные свойства алгебраических и тригонометрических полиномов в равномерной метрике переносятся на чебышевские системы функций (см. [2]). О теории экстремальных задач и Э. с. п. см. [6].

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2—3, М.— Л., 1947—48; [2] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, ч. 1, Л.— М., 1937; [3] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [4] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [5] Вороновская Е. В., Метод функционалов и его приложения, Л., 1963; [6] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.
В. М. Тихомиров.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ — свойства отдельных функций, к-рые выделяют их как решения нек-рых экстремальных задач. Большинство специальных функций, возникших в математич. анализе могут быть охарактеризованы нек-рым экстремальным свойством. Таковы, напр., *экстремальные свойства полиномов*: классич. *Лагерра многочлены*, *Лежандра многочлены*, *Чебышева многочлены*, *Эрмита многочлены*, *Якоби многочлены* можно охарактеризовать как многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля в пространстве L_2 с весом. Классич. полиномы являются обычно решениями разных экстремальных задач, нередко возникающих в отдаленных областях анализа. Так, напр., многочлены Чебышева экстремальны в задаче о неравенстве для производных многочленов (см. [1], *Маркова неравенство*). То же можно сказать и о др. специальных функциях. Многие из них являются собственными функциями для дифференциальных операторов, т. е. являются решением нек-рой *изопериметрической задачи*. При этом, наиболее известные специальные функции так или иначе связаны с наличием нек-рой инвариантной структуры (см. *Гармонический анализ абстрактный*), когда они являются собственными функциями *Лапласа — Бельтрами уравнения*, инвариантного относительно сдвигов. Таковы тригонометрич. полиномы, сферич. функции, цилиндрич. функции и др. (см. [2]). Большинство Э. с. ф. может быть сформулировано в виде нек-рого точного неравенства.

С экстремальными задачами теории приближений связаны *Бернштейна неравенство*, *Бора — Фавара неравенство* и др. В частности, неравенство Бора — Фавара отражает экстремальное свойство *Бернулли многочленов*. Э. с. ф. изучаются в теории приближений (см. [6], [7]), в теории численного интегрирования (см. [8]). *Сплайны* могут быть охарактеризованы различными экстремальными свойствами (см. [9]). Многие специальные сплайны обладают рядом экстремальных свойств, касающихся аппроксимации и интерполяции классов функций (см. [7], [8]). Многие Э. с. ф. изучают в комплексном анализе. В частности, *Кёбе функция* является экстремальной функцией ряда задач теории однолистных функций. См. также *Изопериметрическое неравенство*, *Вложения теоремы*.

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, ч. 1, Л.— М., 1937; [2] Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965; [3] Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; [4] Беккенбах Э., Беллман Р., Неравенства, пер. с англ., М., 1965; [5] Mitrinović D. S., Analitičke nejednakosti, Beograd, 1970; [6] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближений, М., 1976; [7] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [8] Никольский С. М., Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979; [9] Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и его приложения, пер. с англ., М., 1972
В. М. Тихомиров.

ЭКСТРЕМУМ — значение непрерывной функции, являющееся максимумом или минимумом (см. *Максимума и минимума точки*). Термин «Э.» употребляется также при изучении наибольших и наименьших значений функционалов в вариационном исчислении. *А. Б. Иванов.*

ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ — число, равное отношению расстояния от любой точки *конического сечения* до данной точки (фокуса) к расстоянию от той же точки до данной прямой (директрисы). Два конич. сечения, имеющие равные Э., подобны между собой. Для эллипса Э. $e<1$ (для окружности $e=0$), для гиперболы $e>1$, для параболы $e=1$. Для эллипса и гиперболы Э. можно определить как отношение расстояний между фокусами к длине бо́льшей оси. *А. Б. Иванов.*

ЭКСЦЕССА КОЭФФИЦИЕНТ, эксцесс, — скалярная характеристика островершинности графика плотности вероятности унимодального распределения, к-рую используют в качестве нек-рой меры отклонения рассматриваемого распределения от нормального. Э. к. γ_2 определяется по формуле

$$\gamma_2=\beta_2-3,$$

где $\beta_2=\mu_4/\mu_2^2$ есть 2-й коэффициент Пирсона, μ_2 и μ_4 — 2-й и 4-й центральные моменты вероятностного распределения. В терминах семиинвариантов (кумулянтов) $\varkappa_2$ и $\varkappa_4$ второго и четвертого порядков Э. к. имеет вид

$$\gamma_2=\frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2}.$$

Если $\gamma_2=0$, то говорят, что плотность вероятности распределения имеет нормальный эксцесс, ибо для нормального распределения Э. к. $\gamma_2=0$. В случае, если Э. к. $\gamma_2>0$, то говорят, что плотность вероятности имеет положительный эксцесс, что, как правило, соответствует тому, что график плотности рассматриваемого распределения в окрестности моды имеет более острую и более высокую вершину, чем нормальная кривая. В случае, когда $\gamma_2<0$, говорят об отрицательном эксцессе плотности, при этом плотность вероятности имеет в окрестности моды более низкую и плоскую вершину, чем плотность нормального закона.

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же непрерывному вероятностному закону, то статистика

$$\hat{\gamma}_2=\frac{1}{n\,(s^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_0)^4-3$$

наз. выборочным коэффициентом эксцесса, где

$$X=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_0)^2.$$

Выборочный Э. к. $\hat{\gamma}_2$ используется в качестве точечной статистич. оценки Э. к. γ_2, когда закон распределения случайной величины X_i неизвестен. В случае нормальной распределенности случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ выборочный Э. к. $\hat{\gamma}_2$ асимптотически нормально распределен при $n\to\infty$ с параметрами

$$\mathsf{E}\hat{\gamma}_2=-\frac{6}{n+1}$$

и

$$\mathsf{D}\hat{\gamma}_2=\frac{24n\,(n-2)\,(n-3)}{(n+1)^2\,(n+3)\,(n+5)}=\frac{24}{n}\left[1-\frac{225}{15n+24}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right].$$

Именно поэтому, если наблюденное значение выборочного Э. к. $\hat{\gamma}_2$ существенно отличается от 0, то следует признать, что распределение случайной величины X_i отлично от нормального, чем и пользуются на практике при проверке гипотезы $H_0:\gamma_2=0$, принятие к-рой равносильно признанию отклонения распределения случайной величины X_i от нормального.

Лит.: [1] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983. *М. С. Никулин.*

ЭКСЦЕССИВНАЯ ФУНКЦИЯ для марковского процесса — аналог неотрицательной супергармонической функции.

Пусть в измеримом пространстве $(E, \mathscr{B})$ задана однородная марковская цепь с вероятностями перехода за один шаг $P(x, B)$ $(x \in E, B \in \mathscr{B})$. Измеримая относительно $\mathscr{B}$ функция $f: E \to [0, \infty]$ наз. эксцессивной функцией для этой цепи, если

$$\int_E f(y)\, P(x, dy) \leqslant f(x)$$

всюду в E. Для цепи с не более чем счетным множеством состояний среди Э. ф. есть отличные от констант тогда и только тогда, когда хоть одно из состояний невозвратно.

При заданном в $(E, \mathscr{B})$ однородном марковском процессе $X = (x_t, \zeta, \mathscr{F}_t, P_x)$ с *переходной функцией* $P(t, x, B)$ определение Э. ф. несколько усложнится. Множество B относят к σ-алгебре $\overline{\mathscr{B}}$, если для любой конечной меры μ на $\mathscr{B}$ найдутся такие множества B^1_μ и B^2_μ, что $B^1_\mu \subset B \subset B^2_\mu$ и $\mu(B^2_\mu \setminus B^1_\mu) = 0$. Функция f: $E \to [0, \infty]$ наз. эксцессивной функцией, если она $\mathscr{B}$-измерима и при $t \geqslant 0$ удовлетворяет всюду в E соотношениям

$$P^t f(x) \equiv \int f(y)\, P(t, x, dy) \leqslant f(x),$$

и

$$f(x) = \lim_{s \downarrow 0} P^s f(x).$$

Для части винеровского процесса в нек-рой области $E \subset \mathbb{R}^n$ (см. *Функционал* от марковского процесса) класс Э. ф. совпадает с классом неотрицательных супергармонических в E функций, пополненным функцией $f(x) \equiv \infty$.

В случае стандартного процесса X в локально компактном сепарабельном пространстве E, для Э. ф. $f(x)$ всюду в E выполняется неравенство

$$M_x f(x_\tau) \leqslant f(x),$$

где τ — марковский момент, M_x — математическое ожидание, отвечающее мере P_x, и где положено $f(x_\tau) = 0$ при $\tau \geqslant \zeta$. Другое часто используемое свойство Э. ф. состоит в том, что P_x — почти наверное случайная функция $f(x_t)$ непрерывна справа на интервале $[0, \zeta)$ (см. [3]).

Э. ф. $f(x) < \infty$ наз. гармонической, если, как бы ни задавался компакт $K \subset E$, выполняется $f(x) \equiv M_x f(x_\tau)$, где τ — момент первого выхода X из K. Потенциалом наз. любую Э. ф. $f(x) < \infty$, для к-рой

$$\lim_{n \to \infty} M_x f(x_{\tau_n}) = 0$$

при любом выборе марковских моментов τ_n, $n \geqslant 1$, таких, что $\tau_n \to \zeta$ при $n \to \infty$. Для части винеровского процесса в области $E \subset \mathbb{R}^n$ гармонич. функции и потенциалы, это, соответственно, неотрицательные в E гармонические в классич. смысле функции и потенциалы Грина борелевских мер, сосредоточенных в E.

Примером потенциала служит потенциал $M_x \gamma_\zeta$ аддитивного функционала $\gamma_t \geqslant 0$ от X, если $M_x \gamma_\zeta < \infty$. Э. ф. $f(x) < \infty$ является потенциалом аддитивного функционала в том и только том случае, когда

$$\lim_{n \to \infty} M_x f(x_{\tau_n}) \equiv 0,$$

где τ_n — момент 1-го попадания в множество $\{x : f(x) \geqslant n\}$.

В рамках аксиоматич. теории гармонич. пространств Брело все неотрицательные супергармонич. функции являются Э. ф. для нек-рого стандартного процесса.

См. также *Мартина граница*, *Ляпунова стохастическая функция*.

Лит.: [1] Хант Дж.-А., Марковские процессы и потенциалы, пер. с англ., М., 1962; [2] Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, 2 изд., М., 1976; [3] Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963; [4] Getoor R. K., Markov processes: Ray processes and right prosesses, B., 1975; [5] Шур М. Г., «Матем. заметки», 1973, т. 13, № 4, с. 587—96; [6] Meyer P.-A., «Ann. Inst. Fourier», 1962, t. 12, p. 125—230; [7] его же, там же, 1963, t. 13, № 2, p. 357—72.

М. Г. Шур.

ЭЛЕМЕНТ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ — совокупность (D, f) области D на плоскости комплексного переменного $\mathbb{C}$ и аналитич. функции $f(z)$, заданной в D при помощи нек-рого аналитич. аппарата, позволяющего эффективно осуществить аналитич. продолжение $f(z)$ во всю ее область существования как *полной аналитической функции*. Наиболее простой и чаще всего применяемой формой Э. а. ф. является круговой элемент в виде совокупности степенного ряда

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \qquad (1)$$

и его круга сходимости $D=\{z\in\mathbb{C} : |z-a|<R\}$ с центром a (центр элемента) и радиусом сходимости $R>0$. Аналитич. продолжение здесь достигается (быть может, многократным) переразложением ряда (1) для различных центров b, $|b-a|\leqslant R$, по формулам вида

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-b)^n = c_0 + \\ +[c_1(b-a)+c_1(z-b)]+[c_2(b-a)^2+ \\ +2c_2(b-a)(z-b)+c_2(z-b)^2]+\dots .$$

Любой из элементов (D, f) полной аналитич. функции определяет ее однозначно и может быть представлен посредством круговых элементов с центрами $a\in D$. В случае бесконечно удаленного центра $a=\infty$ круговой элемент принимает вид

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}$$

с областью сходимости $D=\{z\in\mathbb{C} : |z|>R\}$.

В процессе аналитич. продолжения функция $f(z)$ может оказаться многозначной и могут появиться соответствующие *алгебраическим точкам ветвления* т. н. разветвленные элементы вида

$$f(z)=\sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k/\nu},$$

$$f(z)=\sum_{k=m}^{\infty} c_k z^{-k/\nu},$$

где $\nu>1$, число $\nu-1$ наз. порядком разветвленности. Разветвленные элементы обобщают понятие Э. а. ф., последние в этой связи наз. также неразветвленными (при $\nu=1$) регулярными (при $m\geqslant 0$) элементами.

В качестве простейшего элемента (D, f) аналитич. функции $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, \dots, z_n)$, $n>1$, можно принять совокупность кратного степенного ряда

$$f(z)=\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k = \\ =\sum_{k_1=0}^{\infty}\dots\sum_{k_n=0}^{\infty} c_{k_1\dots k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\dots(z_n-a_n)^{k_n}, \qquad (2)$$

где $a=(a_1, \dots, a_n)$ — центр, $|k|=k_1+\dots+k_n$, $c_k=c_{k_1\dots k_n}$, $(z-a)^k=(z_1-a_1)^{k_1}\dots(z_n-a_n)^{k_n}$, и нек-рого поликруга

$$D=\{z\in\mathbb{C}^n : |z_j-a_j|<R_j, \quad j=1, \dots, n\},$$

в к-ром ряд (2) абсолютно сходится. Однако, при $n>1$

следует иметь в виду, что поликруг не является точной областью абсолютной сходимости степенного ряда.

Понятие Э. а. ф. весьма близко к понятию *ростка* аналитич. функции.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АБЕЛЕВА ГРУППА — абелева группа, порядки всех неединичных элементов к-рой равны одному и тому же простому числу p.

О. А. Иванова.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АРИФМЕТИКА — то же, что *арифметика формальная*.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СИСТЕМА АКСИОМ — система аксиом, записанная на языке узкого исчисления предикатов. Системы аксиом *арифметики формальной*, теории множеств Цермело — Френкеля (см. *Аксиоматическая теория множеств*), *типов теории* — примеры Э. с. а.

В. Н. Гринин.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ — совокупность замкнутых формул логики предикатов 1-й ступени. Э. т. $\mathrm{Th}(K)$ класса K *алгебраических систем* сигнатуры Ω наз. совокупность всех замкнутых формул логики предикатов 1-й ступени сигнатуры Ω, истинных на всех системах из класса K. Если класс K состоит из одной системы A, то Э. т. класса K наз. Э. т. системы A. Две алгебраич. системы одной сигнатуры наз. элементарно эквивалентными, если их Э. т. совпадают. Алгебраич. система A сигнатуры Ω наз. моделью Э. т. T сигнатуры Ω, если все формулы из T истинны в A. Э. т. наз. совместной, если она имеет модели. Совместная Э. т. наз. полной, если любые две ее модели элементарно эквивалентны. Класс всех моделей Э. т. T обозначается $\mathrm{Mod}(T)$. Э. т. T наз. разрешимой, если множество формул $\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T))$ (т. е. совокупность всех логич. следствий из T) рекурсивно. Класс K алгебраич. систем сигнатуры Ω наз. аксиоматизируемым, если существует такая Э. т. T сигнатуры Ω, что $K=\mathrm{Mod}(T)$. В этом случае T наз. совокупностью аксиом для K. Класс K тогда и только тогда аксиоматизируем, когда $K=\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(K))$. Напр., класс плотно линейно упорядоченных множеств без наименьшего и наибольшего элементов аксиоматизируем, его Э. т. разрешима, любые две системы из этого класса элементарно эквивалентны, значит Э. т. этого класса полна; кроме того, Э. т. рассматриваемого класса конечно аксиоматизируема. Класс конечных циклич. групп не является аксиоматизируемым, однако его Э. т. разрешима и, значит, рекурсивно аксиоматизируема. Имеются примеры конечно аксиоматизируемых неразрешимых Э. т. Такими являются Э. т. групп, колец, полей и др. Однако полная рекурсивно аксиоматизируемая Э. т. обязательно разрешима. Поэтому для доказательства разрешимости рекурсивно аксиоматизируемой Э. т. достаточно заметить, что эта Э. т. полна.

Известен ряд методов доказательства полноты. Э. т. наз. категоричной в мощности α, если все ее модели мощности α изоморфны. Э. т., категоричная в нек-рой бесконечной мощности и не имеющая конечных моделей, обязательно полна. Напр., Э. т. алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики рекурсивно аксиоматизируема и категорична в каждой несчетной мощности, а конечных моделей не имеет, поэтому эта теория полна и разрешима. В частности, разрешима Э. т. поля комплексных чисел. Две формулы той же сигнатуры, что и сигнатура теории T, эквивалентны в теории T, если эти формулы имеют одинаковые свободные переменные и для любой модели A теории T и любого способа приписывания этим свободным переменным элементов модели A либо обе формулы одновременно истинны при

этих значениях неизвестных, либо обе они ложны. Полная Э. т. T конечной или счетной сигнатуры тогда и только тогда счетно категорична, когда для каждого n существует конечное число формул с n свободными переменными $v_1, \ldots, v_n$ такое, что каждая формула соответствующей сигнатуры со свободными переменными $v_1, \ldots, v_n$ эквивалентна в T одной из этих формул. Полная теория конечной или счетной сигнатуры, категоричная в одной несчетной мощности, категорична и во всякой другой несчетной мощности. Система A сигнатуры Ω наз. элементарной подсистемой системы B той же сигнатуры, если A является подсистемой системы B и для всякой формулы $\Phi(v_1, \ldots, v_n)$ логики предикатов 1-й ступени сигнатура Ω со свободными переменными $v_1, \ldots, v_n$ и всяких $a_1, \ldots, a_n \in A$ из истинности $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$ в A следует истинность $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$ в B. Э. т. T наз. модельно полной, если для любых ее моделей A и B из того, что A является подсистемой системы B, следует, что A является элементарной подсистемой B. Оказывается, что модельно полная теория, имеющая такую модель, к-рая изоморфно вкладывается во всякую модель этой теории, является полной. Универсально эквивалентными наз. такие алгебраич. системы одной сигнатуры, на к-рых истинны одни и те же предваренные формулы, не содержащие кванторов существования. Модельно полная Э. т., все модели к-рой универсально эквивалентны, является полной. Используя технику модельной полноты, можно доказать полноту и разрешимость Э. т. вещественно замкнутых полей, в частности поля действительных чисел. Среди других Э. т., являющихся разрешимыми,— Э. т. сложения целых и натуральных чисел, Э. т. абелевых групп, поля p-адических чисел, конечных полей, полей вычетов, упорядоченных абелевых групп, булевых алгебр.

Теория неразрешимых Э. т. была заложена А. Тарским (A. Tarski) в 40-е гг. 20 в., хотя неразрешимость логики предикатов первой ступени была доказана А. Чёрчем (A. Church) еще в 1936, а неразрешимость арифметики натуральных чисел — Дж. Россером (J. Rosser) также в 1936. Говорят, что Э. т. Th (K) класса K алгебраич. систем одной сигнатуры Ω неотделима, если не существует рекурсивного множества формул, содержащего все тождественно истинные замкнутые формулы сигнатуры Ω и содержащегося в Th(K). Э. т. класса K_1 систем сигнатуры $<P^{(2)}>$, состоящей из одного двуместного предиката, наз. относительно определимой в Э. т. класса K_2 систем сигнатуры Ω_2, если существуют такие формулы $\Phi(v_0; u_1, \ldots, u_s)$, $\Psi(v_1, v_2; u_1, \ldots, u_s)$ сигнатуры Ω_2, что для каждой системы A_1 из K_1 можно найти такую систему A_2 из K_2 и такие элементы $b_1, \ldots, b_s$ в A_2, что множество $X = \{x \in A_2 | \Phi(x; b_1, \ldots, b_s)$ истинно в $A_2\}$ вместе с предикатом $P^{(2)}$, определенным на X так, что $P^{(2)}(x, y)$ истинно тогда и только тогда, когда $\Psi(x, y; b_1, \ldots, b_s)$ истинно в A_2, образует алгебраич. систему, изоморфную системе A_1. Это определение естественным образом распространяется и на теории классов K_1 произвольной сигнатуры. Если неотделимая Э. т. класса K_1 относительно определима в Э. т. класса K_2, то Э. т. класса K_2 тоже неотделима. Это позволяет доказывать неотделимость Э. т. многих классов алгебраич. систем. В качестве Th(K_1) при этом удобно брать Э. т. всех конечных бинарных предикатов, Э. т. конечных симметричных предикатов и подобные Э. т. Неотделимые Э. т. неразрешимы. К неразрешимым Э. т. относятся также Э. т. поля рациональных чисел, многих классов колец и полей. Важен результат А. И. Мальцева о неразрешимости Э. т. конечных групп.

Лит.: [1] Ершов Ю. Л., [и др.] «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 4, с. 37—108; [2] Ершов Ю. Л., Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., 1980.

Ю. Л. Ершов, М. А. Тайцлин.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ — раздел *чисел теории*, изучающий свойства чисел элементарными методами. Такие методы включают использование свойств делимости, различных форм аксиомы индукции и комбинаторные соображения. Иногда понятие элементарных методов расширяют за счет привлечения простейших элементов математич. анализа. Традиционно неэлементарными считают доказательства, в к-рых используются мнимые числа.

К Э. т. ч. обычно относят задачи, возникающие в таких разделах теории чисел, как теория делимости, теория сравнений, теоретико-числовые функции, неопределенные уравнения, разбиения на слагаемые, аддитивные представления, приближения рациональными числами, цепные дроби. Нередко решение таких задач приводит к необходимости выходить за рамки элементарных методов. Иногда вслед за отысканием неэлементарного решения какой-нибудь задачи находят и ее элементарное решение.

Задачи Э. т. ч. имеют, как правило, многовековую историю и нередко стоят в истоках современных направлений теории чисел и алгебры.

Из сохранившихся клинописных таблиц древних вавилонян можно сделать вывод, что им не были чужды задачи разложения натуральных чисел на простые множители. В 5 в. до н. э. пифагорейцы построили т. н. учение о четных и нечетных числах и обосновали предложение: произведение двух натуральных чисел четно тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей — четное число. Общая теория делимости, по существу, была построена Евклидом. В его «Началах» (3 в. до н. э.) вводится алгоритм отыскания наибольшего общего делителя двух целых чисел и на этой основе намечается обоснование основной теоремы арифметики целых чисел: о возможности и единственности разложения натурального числа в произведение простых сомножителей.

После того как К. Гаусс (C. Gauss) в нач. 19 в. построил теорию делимости для целых комплексных чисел стало ясно, что изучение произвольного *кольца* нужно начинать с *построения теории делимости в нем*.

Все свойства целых чисел так или иначе связаны с *простыми числами*. Поэтому вопросы распределения простых чисел в натуральном ряду издавна интересовали ученых. Евклиду принадлежит первое доказательство бесконечности множества простых чисел. Только в сер. 19 в. П. Л. Чебышев сделал следующий шаг в изучении функции $\pi(x)$ — числа простых чисел, не превосходящих x. Ему удалось элементарными средствами доказать неравенства, из к-рых следовало, что

$$0{,}92129\,\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < 1{,}10555\ldots\,\frac{x}{\ln x}$$

для всех достаточно больших x. В действительности, $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$, но это удалось установить только в кон. 19 в. средствами комплексного анализа. Долгое время считалось, что этот результат не может быть получен элементарно. Однако А. Сельберг (A. Selberg, 1949) получил элементарное доказательство этой теоремы. П. Л. Чебышеву удалось также доказать, что для $n \geqslant 2$ интервал $(n, 2n)$ содержит хотя бы одно простое число. Уточнение интервала, содержащего хотя бы одно простое число, требует более глубокого изучения поведения функции $\pi(x)$.

В 3 в. до н. э. был разработан метод *Эратосфена решета* выделения простых чисел из множества натуральных чисел. В 1918 В. Брун (V. Brun) показал, что видоизменение этого метода может служить основой для изучения множества почти простых чисел. Им была получена *Бруна теорема* о простых близнецах. *Бруна решето* является частным случаем общих *решета ме-*

модов, дающих оценки для количества почти простых чисел, не превосходящих x и принадлежащих последовательности натуральных чисел $\{a_n\}$. Методы решета позволяют получать такие оценки, если известны «хорошие» приближения в среднем для количества чисел $a_n \leqslant x$, принадлежащих прогрессиям, модуль к-рых растет вместе с x. Среди методов решета, развитых после работ В. Бруна, особое значение приобрело *Сельберга решето*. Наиболее сильные результаты получают сочетанием методов решета с аналитическими. Метод решета в сочетании с *Шнирельмана методом* дал возможность эффективно найти значение k такое, что любое натуральное число $n \geqslant 4$ можно представить суммой не более k простых чисел.

Два целых числа a и b наз. сравнимыми по модулю $m \geqslant 1$, если они дают одинаковые остатки при делении на число m. Для этого отношения на множестве целых чисел К. Гаусс (1801) ввел запись $a \equiv b \pmod m$. Эта форма записи, выявляющая аналогию сравнений с уравнениями, оказалась удобной и способствовала развитию *сравнений* теории.

Многие результаты, полученные до этого П. Ферма (P. Fermat), Л. Эйлером (L. Euler), Ж. Лагранжем (J. Lagrange) и др., а также *китайская теорема об остатках*, просто формулируются и доказываются на языке теории сравнений. Один из наиболее интересных результатов этой теории — *квадратичный закон взаимности*.

Древним вавилонянам было известно большое количество «пифагоровых троек», видимо, им был известен какой-то способ, позволяющий находить сколько угодно целочисленных решений неопределенного уравнения $x^2+y^2=z^2$. Пифагорейцы пользовались формулами $x=\frac{a^2-1}{2}$, $y=a$, $z=\frac{a^2+1}{2}$ для отыскания таких решений этого уравнения. Евклид указал метод, позволяющий последовательно находить целочисленные решения уравнения $x^2-2y^2=1$ (частный случай *Пелля уравнения*). В «Арифметике» Диофанта (3 в. н. э.) заметна попытка построения теории неопределенных уравнений (см. *Диофантовы уравнения*). В частности, Диофант при решении уравнений 2-й степени и нек-рых уравнений высших степеней систематически пользуется приемом, к-рый позволяет ему находить из одного рационального решения данного уравнения др. рациональные решения того же уравнения. П. Ферма (17 в.) открыл новый метод — «метод спуска» и решил ряд уравнений таким методом, но объявленная им как решенная *Ферма теорема* великая, оказалась не под силу элементарным методам.

П. Ферма решил задачу о представлении натуральных чисел суммой двух квадратов целых чисел. В результате исследований Ж. Лагранжа (1773) и К. Гаусса (1801) была решена задача о представлении чисел определенной *бинарной квадратичной формой*. К. Гаусс построил общую теорию бинарных квадратичных форм. Решение задачи о представлении чисел формами более высокой степени (напр., *Варинга проблема*) и квадратичными формами с большим числом переменных обычно выходит за рамки элементарных методов. Только нек-рые частные случаи таких задач решаются элементарно. Примером может служить т е о р е м а Л а г р а н ж а: каждое натуральное число есть сумма четырех квадратов целых чисел. Следует заметить, что в своей «Арифметике» Диофант неоднократно пользовался возможностью представить натуральное число суммой четырех квадратов целых чисел.

К Э. т. ч. относят теорию разбиений, основы к-рой были заложены Л. Эйлером (1751). Одна из основных задач теории разбиений — изучение функции $P(n)$ — числа представлений натурального числа n в виде сум-

мы натуральных слагаемых. В теории разбиений рассматривают и др. функции подобного типа.

Цепные дроби появились в связи с задачами приближенных вычислений (извлечение квадратного корня из натурального числа, отыскание приближения действительных чисел обыкновенными дробями с малыми знаменателями). Цепные дроби находят применение при решении неопределенных уравнений 1-й и 2-й степени. Используя аппарат цепных дробей, И. Ламберт (J. Lambert, 1766) впервые установил иррациональность числа π. При решении различных задач о приближении действительных чисел рациональными числами в Э. т. ч. наряду с цепными дробями используют также *Дирихле принцип*.

В теории чисел легко назвать большое число элементарно формулируемых и нерешенных до сих пор задач. Напр.: конечно или нет множество четных совершенных чисел; существует ли хотя бы одно нечетное совершенное число; конечно или нет множество простых чисел Ферма; конечно или бесконечно множество простых *Мерсенна чисел*; конечно или нет множество простых чисел вида n^2+1; верно ли, что между квадратами любых соседних натуральных чисел содержится хотя бы одно простое число; ограничено или нет множество неполных частных разложения $\sqrt[3]{2}$ в цепную дробь.

Лит.: [1] Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.— Л., 1937; [2] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981; [3] Гельфонд А. О., Линник Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962; [4] Хинчин А. Я., Цепные дроби, 4 изд., М., 1978; [5] Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел, пер. с лат., М., 1959; [6] Дэвенпорт Г., Высшая арифметика, пер. с англ., М., 1965; [7] Трост Э., Простые числа, пер. с нем., М., 1959; [8] Эндрюс Г., Теория разбиений, пер. с англ., М., 1982; [9] История математики, т. 1—3, М., 1970—72; [10] Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., М., 1966; [11] Dickson L. E., History of the theory of numbers, v. 1—3, N. Y., 1971; [12] Hardy G. H., Wright E. M., An introduction to the theory of numbers, 5 ed., Oxf., 1979; [13] Sierpiński W., Elementary theory of numbers, Warsz., 1964.

А. А. Бухштаб, В. П. Нечаев.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ СОБЫТИЕ — исходное понятие вероятностной модели. В определении вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ непустое множество Ω наз. пространством Э. с., а его любая точка $\omega \in \Omega$ наз. элементарным событием. При неформальном подходе множество Ω описывает множество всех исходов некрого случайного эксперимента и Э. с. ω соответствует элементарному исходу: эксперимент заканчивается одним и только одним элементарным исходом, эти исходы неразложимы и взаимно исключают друг друга. Существует принципиальная разница между Э. с. ω — точкой множества Ω и событием $\{\omega\}$ — элементом некрого класса множеств $\mathcal{A}$. См. *Вероятностей теория*, *Вероятностное пространство*, *Случайное событие*.

А. В. Прохоров.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ матрицы $F(x)$ над кольцом многочленов $k[x]$ — степени унитарных неприводимых многочленов над полем k, на к-рые разлагаются инвариантные множители матрицы $F(x)$. Две $(m\times n)$-матрицы над $k[x]$, имеющие один и тот же ранг, тогда и только тогда эквивалентны (т. е. получаются одна из другой с помощью элементарных операций), когда они обладают одной и той же системой Э. д.

Элементарными делителями $(n\times n)$-матрицы A над полем k наз. Э. д. ее характеристич. матрицы $\|xE_n - A\|$. Они могут быть получены следующим образом. Пусть $D_l(x)$ — наибольший общий делитель миноров порядка l матрицы $xE_n - A$, $1 \leqslant l \leqslant n$ и $D_0 = 1$. Тогда инвариантными множителями матрицы $\|xE_n - A\|$ служат

$$i_l(x) = \frac{D_l(x)}{D_{l-1}(x)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Множители $i_l(x)$, отличные от 1, содержатся в $k[x]\setminus k$. Каждый из них представим в виде

$$i_l(x) = (p_1(x))^{m_1} \dots (p_t(x))^{m_t},$$

где $p_i(x)$ — унитарные неприводимые над k многочлены, $m_i > 0$, $p_i(x) \neq p_j(x)$ при $i \neq j$. Все полученные таким способом многочлены вида $(p(x))^m$ и составят систему Э. д. матрицы A. Две квадратные матрицы над полем подобны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же систему Э. д. Произведение всех Э. д. матрицы над полем совпадает с ее характеристич. многочленом, а наименьшее общее кратное ее Э. д. равно ее минимальному многочлену. Любой набор многочленов вида $l_i(x) = (g_i(x))^m i$, где $g_i(x)$ — унитарный неприводимый над k многочлен, служит системой Э. д. для одного и только одного класса подобных матриц над k порядка n, где n — степень произведения многочленов $l_i(x)$.

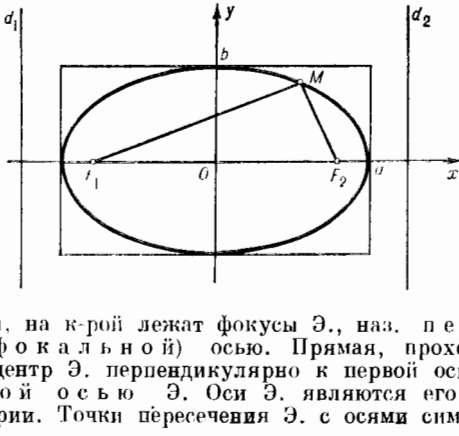
Если k — поле разложения характеристич. многочлена матрицы A, то Э. д. матрицы A имеют вид $(x-\lambda)^m$. В этом случае число Э. д. равно числу клеток Жордана жордановой формы матрицы A, а Э. д. $(x-\lambda)^m$ соответствует жорданова клетка $J_m(\lambda)$ порядка m (см. *Жорданова матрица*). Квадратная матрица над полем k подобна диагональной матрице над k тогда и только тогда, когда каждый ее Э. д. имеет вид $x-\lambda$, где $\lambda \in k$.

Д. А. Супруненко.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ — класс функций, состоящий из *многочленов*, *показательных функций*, *логарифмических функций*, *тригонометрических функций* и *обратных тригонометрических функций*, а также функций, получающихся из перечисленных выше с помощью четырех арифметич. действий и суперпозиции (образование *сложной функции*), примененных конечное число раз. Класс Э. ф. наиболее изучен и чаще всего встречается в приложениях математики. Однако многие вопросы приводят к рассмотрению функций, не являющихся Э. ф. (см., напр., *Специальные функции*). Производная от Э. ф. также является Э. ф.; неопределенный интеграл от Э. ф. не всегда выражается через Э. ф. При изучении неэлементарных функций представляют их через Э. ф. при помощи бесконечных рядов, произведений и т. д.

БСЭ-3.

ЭЛЛИПС (действительный) — плоская кривая, получающаяся в пересечении кругового конуса с плоскостью, не проходящей через вершину конуса и пересекающей все его образующие в точках одной его полости. Э. есть множество точек M плоскости (см. рис.), для каждой из к-рых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) постоянна и равна $2a > F_1F_2$. Расстояние между фокусами наз. фокусным расстоянием, его принято обозначать через $2c$. Середина отрезка F_1F_2 наз. центром Э.



Прямая, на к-рой лежат фокусы Э., наз. первой (или фокальной) осью. Прямая, проходящая через центр Э. перпендикулярно к первой оси, наз. второй осью Э. Оси Э. являются его осями симметрии. Точки пересечения Э. с осями симметрии

наз. его вершинами. Большой осью Э. наз. отрезок (а также длина $2a$ этого отрезка) первой оси Э., заключенный между вершинами Э. Малой осью Э. наз. отрезок (а также длина $2b$ этого отрезка) второй оси Э., заключенного между вершинами Э. Число $e=c/a<1$ наз. *эксцентриситетом* Э. Диаметром Э. наз. любая прямая, проходящая через центр Э.; диаметр может быть определен как прямая, проходящая через середины параллельных хорд. *Директрисой* Э., соответствующей данному фокусу F, наз. прямая d, перпендикулярная первой оси Э. и отстоящая от центра Э. на расстоянии a/e. В общем случае у Э. имеются две директрисы. Э. есть центральная *линия второго порядка*, канонич. уравнение к-рой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Уравнение касательной к Э. в точке (x_0, y_0):

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Фокальный параметр Э. (половина длины хорды, проходящей через фокус перпендикулярно первой оси Э.) равен b^2/a. При помощи фокального параметра можно записать уравнение Э. в виде

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

где ρ, φ — полярные координаты, $0\leqslant\varphi<2\pi$.

Если $a=b$, Э. представляет собой окружность; $F_1\equiv F_2\equiv 0$ — центр окружности, a — ее радиус, $e=0$, директрис нет.

Э. обладает следующим оптическим свойством: световые лучи, исходящие из одного фокуса, после зеркального отражения от Э. проходят через другой фокус.

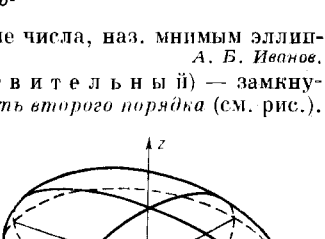
Линия второго порядка, канонич. уравнение к-рой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

где a и b — действительные числа, наз. мнимым эллипсом. *А. Б. Иванов.*

ЭЛЛИПСОИД (действительный) — замкнутая центральная *поверхность второго порядка* (см. рис.). Канонич. уравнение Э. имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$



Положительные числа a, b, c и отрезки соответствующей длины наз. полуосями Э. Сечение Э. любой плоскостью представляет собой эллипс. Если две полуоси Э. равны между собой, то Э. наз. эллипсоидом вращения, сечения Э. вращения плоскостями, параллельными плоскости равных полуосей, являются окружностями. При $a=b=c$ Э. представляет собой сферу. Центр симметрии Э. наз. его центром.

Поверхность второго порядка, канонич. уравнение к-рой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

наз. мнимым эллипсоидом. *А. Б. Иванов.*

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНАЯ ГАРМОНИКА — функция точки на эллипсоиде, появляющаяся при решении уравнения Лапласа методом разделения переменных в *эллипсоидальных координатах.*

Пусть декартовы координаты (x, y, z) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_3$ связаны с эллипсоидальными координатами (ξ_1, ξ_2, ξ_3) тремя однотипными формулами вида

$$\frac{x^2}{\xi^2-a^2}+\frac{y^2}{\xi^2-b^2}+\frac{z^2}{\xi^2-c^2}=1, \quad a>b>c>0,$$

причем $a<\xi_1<+\infty$, $b<\xi_2<a$, $c<\xi_3<b$. Полагая $\xi_1=\xi_1^0$, получают координатные поверхности в виде эллипсоидов. Гармонич. функция $h=h(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, являющаяся решением уравнения Лапласа, записывается как линейная комбинация выражений вида

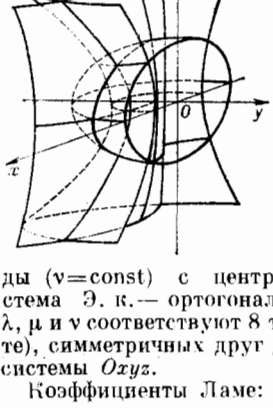
$$E_1(\xi_1)\,E_2(\xi_2)\,E_3(\xi_3), \qquad (*)$$

где сомножители $E_j(\xi_j)$, $j=1, 2, 3$, суть решения *Ламе уравнения*. Выражения вида (*) при $\xi_1=\xi_1^0$ и их линейные комбинации наз. Э. г., или, как их еще называют, п о в е р х н о с т н ы м и Э. г., в отличие от комбинаций выражений (*), зависящих от всех трех переменных (ξ_1, ξ_2, ξ_3), к-рые иногда наз. п р о с т р а н с т в е н н ы м и Э. г.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [2] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1—2, М., 1958—60.

Е. Д. Соломенцев.

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ, э л л и п т и ч е с к и е к о о р д и н а т ы в п р о с т р а н с т в е,— числа λ, μ и ν, связанные с декартовыми прямоугольными координатами x, y и z формулами



$$x^2=\frac{(\lambda+a^2)\,(\mu+a^2)\,(\nu+a^2)}{(b^2-a^2)\,(c^2-a^2)},$$

$$y^2=\frac{(\lambda+b^2)\,(\mu+b^2)\,(\nu+b^2)}{(a^2-b^2)\,(c^2-b^2)},$$

$$z^2=\frac{(\lambda+c^2)\,(\mu+c^2)\,(\nu+c^2)}{(a^2-c^2)\,(b^2-c^2)},$$

где $-a^2<\nu<-b^2<\mu<-c^2<\lambda<\infty$. Координатные поверхности (см. рис.): эллипсоиды ($\lambda=$const), однополостные гиперболоиды ($\mu=$const) и двуполостные гиперболоиды ($\nu=$const) с центрами в начале координат. Система Э. к.— ортогональная. Каждой тройке чисел λ, μ и ν соответствуют 8 точек (по одной в каждом октанте), симметричных друг другу относительно плоскостей системы $Oxyz$.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)\,(\lambda-\nu)}{(\lambda+a^2)\,(\lambda+b^2)\,(\lambda+c^2)}},$$

$$L_\mu=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)\,(\nu-\mu)}{(\mu+a^2)\,(\mu+b^2)\,(\mu+c^2)}},$$

$$L_\nu=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\nu)\,(\mu-\nu)}{(\nu+a^2)\,(\nu+b^2)\,(\nu+c^2)}}.$$

Если в условиях $a^2>b^2>c^2>0$ при определении Э. к. допускать и равенства, то можно получить вырожденные системы Э. к.

Д. Д. Соколов.

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — геометрия пространства, риманова кривизна к рого в любом двумерном направлении постоянна и положительна. Э. г.— многомерное обобщение *Римана геометрии*.

А. Б. Иванов.

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ КРИВАЯ — неособая полная *алгебраическая кривая* рода 1. Теория Э. к. является истоком большей части современной алгебраич. геометрии. Но исторически теория Э. к. возникла как часть анализа, как теория *эллиптических интегралов* и *эллиптических функций*.

П р и м е р ы. Неособая проективная плоская кубич. кривая, пересечение двух неособых квадрик в трехмер-

ном проективном пространстве, двулистное накрытие проективной прямой, разветвленное ровно в четырех точках, а также одномерное абелево многообразие и главное однородное пространство над ним являются Э. к.

Геометрия Э. к. Пусть X — Э. к. над алгебраически замкнутым полем k. Тогда X бирегулярно изоморфна плоской кубич. кривой (см. [1], [9], [13]). Если $\operatorname{char} k \neq 2, 3$, то в проективной плоскости $\mathbf{P}^2$ существует аффинная система координат, в к-рой X имеет уравнение в нормальной форме Вейерштрасса

$$y^2 = x^3 + ax + b. \qquad (1)$$

Кривая X неособа тогда и только тогда, когда многочлен x^3+ax+b не имеет кратных корней, т. е. дискриминант $\Delta = -(4a^3+27b^2) \neq 0$. В $\mathbf{P}^2$ кривая (1) имеет единственную точку на бесконечности, к-рую обозначают P_0; P_0 — точка перегиба кривой (1), а касательная в P_0 — бесконечно удаленная прямая. j-инвариант Э. к. X

$$j(X) = -\frac{4 \cdot 1728}{\Delta} a^3 \in k$$

не зависит от выбора системы координат. Равенство j-инвариантов двух Э. к. равносильно тому, что эти Э. к. бирегулярно изоморфны. Для любого $j \in k$ найдется Э. к. X над k с $j(X) = j$.

Групповая структура на Э. к. Пусть $P_0 \in X$ — фиксированная точка Э. к. X. Отображение $P \longmapsto P - P_0$, сопоставляющее точке $P \in X$ дивизор $P - P_0$ на Э. к. X, устанавливает взаимно однозначное соответствие между Э. к. X и группой $\operatorname{Pic}^0 X$ классов дивизоров степени 0 на X, т. е. *Пикара многообразием* кривой X. Это соответствие переносит на X структуру коммутативной группы, к-рая согласована со структурой алгебраич. многообразия и превращает X в одномерное абелево многообразие (X, P_0); точка P_0 при этом является нулем группы. Введенная групповая структура допускает следующее геометрич. описание. Пусть $X \subset \mathbf{P}^2$ — плоская кубич. кривая. Тогда сумма точек P и Q определяется правилом $P + Q = P_0 \circ (P \circ Q)$, где $P \circ Q$ — третья точка пересечения кривой X с прямой, проходящей через точки P и Q. Иначе говоря, сумма трех точек на X равна нулю тогда и только тогда, когда они лежат на одной прямой.

Э. к. как одномерное абелево многообразие. Пусть n_X обозначает эндоморфизм умножения на $n \in \mathbb{Z}$ в (X, P_0). Если (Y, Q_0) — Э. к. с отмеченной точкой Q_0, то любое рациональное отображение $f : X \to Y$ имеет вид $f(P) = h(P) + Q_1$, где $Q_1 = f(P_0) \in Y$, а $h : (X, P_0) \to (Y, Q_0)$ — гомоморфизм абелевых многообразий. При этом гомоморфизм h является либо постоянным отображением в точку Q_0, либо *изогенией*, т. е. существует гомоморфизм абелевых многообразий $g : (Y, Q_0) \to (X, P_0)$ такой, что $gh = n_X$, $hg = n_Y$ для нек-рого n (см. [1], [6]).

Группа автоморфизмов Э. к. X действует транзитивно на X, а ее подгруппа $G = \operatorname{Aut}(X, P_0)$ автоморфизмов, оставляющих на месте точку P_0, нетривиальна и конечна. Пусть $\operatorname{char} k$ отлична от 2 и 3. Если $j(X)$ не равно 0 или 1728, то группа G состоит из двух элементов 1_X и $(-1)_X$. Порядок G равен 4 при $j(X) = 1728$ и 6 при $j(X) = 0$ (см. [1], [6], [13]).

Важным инвариантом Э. к. является кольцо эндоморфизмов $R = \operatorname{End}(X, P_0)$ абелева многообразия (X, P_0). Отображение $n \longmapsto n_X$ определяет вложение $\mathbb{Z} \subset R$. Если $R \neq \mathbb{Z}$, то говорят, что X — Э. к. с комплексным умножением. Кольцо R может быть одного из следующих типов (см. [1], [9], [13]): I. $R = \mathbb{Z}$. II. $R = \mathbb{Z} + f\mathfrak{O} \subset \mathfrak{O}$. Здесь $\mathfrak{O}$ — кольцо целых алгебраич. чисел мнимого квадратичного поля K, $f \in \mathbb{N}$. III. R — некоммутативная $\mathbb{Z}$-алгебра ранга 4 без делителей нуля. В этом

случае $p = \mathrm{char}\, k > 0$ и R — порядок в алгебре кватернионов над $\mathbb{Q}$, разветвленной только в p и ∞. Такие Э. к. существуют для всех p и наз. суперсингулярными; несуперсингулярные Э. к. в характеристике p наз. обыкновенными Э. к.

Группа $X_n = \mathrm{Ker}\, n_X$ точек Э. к. X, порядок к-рых делит n, имеет следующую структуру: $X_n \approx (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$, если $(n, \mathrm{char}\, k) = 1$. При $p = \mathrm{char}\, k > 0$ для обыкновенных Э. к. $X_{p^m} \approx \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, а для суперсингулярных Э. к. $X_{p^m} \approx \{0\}$. Для простого $l \neq \mathrm{char}\, k$ *Тейта модуль* $T_l(X)$ изоморфен $\mathbb{Z}_l^2$.

Э. к. над незамкнутыми полями. Пусть X — Э. к. над произвольным полем k. Если множество k-рациональных точек $X(k)$ кривой X непусто, то X бирегулярно изоморфна плоской кубич. кривой (1) с $a, b \in k$ ($\mathrm{char}\, k \neq 2, 3$). Бесконечно удаленная точка P_0 кривой (1) определена над k. Как и выше, можно определить групповую структуру на кривой (1), превращающую X в одномерное абелево многообразие над k, а множество $X(k)$ в коммутативную группу с нулем P_0. Если k конечно порождено над своим простым подполем, то $X(k)$ — группа с конечным числом образующих (теорема Морделла — Вейля).

Для любой Э. к. X определено *Якоби многообразие* $J(X)$, являющееся одномерным абелевым многообразием над k. Э. к. X является главным однородным пространством над $J(X)$. Если множество $X(k)$ непусто, то выбор точки $P_0 \in X(k)$ задает изоморфизм $X \simeq J(X)$, при к-ром точка P_0 переходит в нуль группы $J(X)$. В общем случае Э. к. X и $J(X)$ изоморфны над конечным расширением поля k (см. [1], [4], [13]).

Э. к. над полем комплексных чисел. Э. к. X над $\mathbb{C}$ является компактной римановой поверхностью рода 1 и обратно. Групповая структура превращает X в комплексную группу Ли, являющуюся одномерным комплексным тором $\mathbb{C}/\Lambda$, где Λ — решетка в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Обратно, любой одномерный комплексный тор является Э. к. (см. [3]). С топологич. точки зрения Э. к. — двумерный тор.

Теория Э. к. над полем $\mathbb{C}$, по существу, эквивалентна теории эллиптич. функций. Отождествление тора $\mathbb{C}/\Lambda$ с Э. к. осуществляется следующим образом. Эллиптич. функции с данной решеткой периодов Λ образуют поле, порожденное $\wp$-функцией Вейерштрасса (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*) и ее производной $\wp'(z)$, к-рые связаны соотношением

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Отображение $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^2$ ($Z \mapsto (1 : \wp(Z) : \wp'(Z))$) индуцирует изоморфизм тора $\mathbb{C}/\Lambda$ и Э. к. $X \subset \mathbb{P}^2$ с уравнением $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$. Отождествление Э. к. X, заданной уравнением (1), с тором $\mathbb{C}/\Lambda$ осуществляется с помощью криволинейных интегралов от голоморфной формы $\omega = \frac{dx}{y}$ и приводит к совпадению Э. к. X с ее многообразием Якоби $J(X)$.

Описание множества всех Э. к. как торов $\mathbb{C}/\Lambda$ приводит к *модулярной функции* $J(\tau)$. Две решетки Λ и Λ' определяют изоморфные торы тогда и только тогда, когда они подобны, т. е. одна получается из другой умножением на комплексное число. Поэтому можно считать, что решетка Λ порождена числами 1 и τ из $H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, \tau > 0\}$. Две решетки с базисами 1, τ и 1, τ' подобны тогда и только тогда, когда $\tau' = \gamma(\tau)$ для нек-рого элемента γ *модулярной группы* Γ. Модулярная функция

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

наз. также абсолютным инвариантом; $J(\tau) = J(\tau')$ тогда и только тогда, когда $\tau' = \gamma(\tau)$ для

нек-рого $\gamma \in \Gamma$ и функция $J : H/\Gamma \to \mathbb{C}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных Э. к. над $\mathbb{C}$ и комплексными числами. Если $X = \mathbb{C}/\Lambda$, то $j(X) = 1728\, J(\tau)$.

Э. к. X есть Э. к. с комплексным умножением тогда и только тогда, когда τ — мнимая *квадратическая иррациональность*. В этом случае R — подкольцо конечного индекса в кольце целых алгебраич. чисел мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\tau)$. Э. к. с комплексным умножением тесно связаны с *полей классов теорией* для мнимых квадратичных полей (см. [4], [8]).

Арифметика Э. к. Пусть X — Э. к. над конечным полем k из q элементов. Множество $X(k)$ всегда непусто и конечно. Тем самым X снабжается структурой одномерного абелева многообразия над k, а $X(k)$ — структурой конечной коммутативной группы. Порядок A группы $X(k)$ удовлетворяет неравенству $|(q+1) - A| \leqslant 2\sqrt{q}$. Многочлен $t^2 - (q+1-A)t + q$ есть характеристич. многочлен *Фробениуса эндоморфизма*, действующего на модуле Тейта $T_l(X)$, $l \neq \mathrm{char}\, k$. Его корни α, $\bar{\alpha}$ — комплексно сопряженные целые алгебраич. числа, по модулю равные $\sqrt{q}$. Для любого конечного расширения k_n поля k степени n порядок группы $X(k_n)$ равен $q^n + 1 - (\alpha^n + \bar{\alpha}^n)$. *Дзета-функция* Э. к. X равна

$$(1-q^{-s})(1-q^{1-s})/[1-(q+1-A)\,q^{-s}+q^{1-2s}].$$

Для любого целого алгебраического α, лежащего в нек-ром мнимом квадратичном поле (или в $\mathbb{Q}$) и по модулю равного $\sqrt{q}$, найдется такая Э. к. X над k, что порядок группы $X(k)$ равен $q + 1 - (\alpha + \bar{\alpha})$.

Пусть k — поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ или его конечное алгебраич. расширение, B — кольцо целых поля k, X — Э. к. над k и пусть множество $X(k)$ непусто. Групповая структура превращает $X(k)$ в коммутативную компактную одномерную *Ли p-адическую группу*. Группа $X(k)$ двойственна по Понтрягину к *Вейля — Шатле группе* $WC(k, X)$. Если $j(X) \notin B$, то X — кривая Тейта (см. [1], [5]) и существует канонич. униформизация группы $X(k)$, аналогичная случаю поля $\mathbb{C}$.

Пусть X — Э. к. над $\mathbb{Q}$ и множество $X(\mathbb{Q})$ непусто. Тогда X бирегулярно изоморфна кривой (1) с $a, b \in \mathbb{Z}$. Из всех кривых вида (1) с целыми a и b, изоморфных X, выбирается такая, для к-рой абсолютная величина дискриминанта Δ минимальна. Кондуктор N и L-функция $L(X, s)$ Э. к. X определяются как формальные произведения локальных множителей

$$N = \Pi f_p,$$
$$L(X, s) = \Pi L_p(X, s) \qquad (2)$$

по всем простым p (см. [1], [5], [13]). Здесь f_p — нек-рая степень p, $L_p(X, s)$ — мероморфная функция комплексного переменного s, не имеющая ни нуля, ни полюса при $s = 1$. Чтобы определить локальные множители, рассматривается редукция кривой X по модулю p ($\neq 2, 3$) — плоская проективная кривая X_p над полем вычетов $\mathbb{Z}/(p)$, заданная в аффинной системе координат уравнением

$$y^2 = x^3 + \bar{a}x + \bar{b}\ (\bar{a} = a \bmod p,\ \bar{b} = b \bmod p).$$

Пусть A_p — число $\mathbb{Z}/(p)$-точек на X_p. Если p не делит Δ, то X_p — Э. к. над $\mathbb{Z}/(p)$ и полагают

$$f_p = 1, \quad L_p(X, s) = 1/[1 - (p+1-A_p)\,p^{-s} + p^{1-2s}].$$

Если p делит Δ, то многочлен $x^3 + \bar{a}x + \bar{b}$ имеет кратный корень и полагают

$$L_p(X, s) = 1/[1 - (p+1-A_p)\,p^{-s}],\ f_p = p^2 \text{ или } p$$

(в зависимости от того, является этот корень трехкратным или нет). Произведение (2) сходится в правой полу-

плоскости $\mathrm{Re}\, s > \frac{3}{2}$. Предполагается, что $L(X, s)$ мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость и что функция

$$\xi_X(s) = N^{s/2}\,(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\,L(X,\ s)$$

($\Gamma(s)$ - *гамма-функция*) удовлетворяет функциональному уравнению $\xi_X(s) = W\xi_X(2-s)$ с $W = \pm 1$ (см. [5], [13]). Эта гипотеза доказана для Э. к. с комплексным умножением.

Группа $X(\mathbb{Q})$ изоморфна $F \oplus X(\mathbb{Q})_t$, где $X(\mathbb{Q})_t$—конечная абелева группа, а F—свободная абелева группа нек-рого конечного ранга r. Группа $X(\mathbb{Q})_t$ изоморфна одной из следующих 15 групп (см. [11]): $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $1 \leqslant m \leqslant 10$ или $m = 12$ и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2v\mathbb{Z}$, $1 \leqslant v \leqslant 4$. Число r наз. р а н г о м Э. к. над $\mathbb{Q}$, или $\mathbb{Q}$-р а н г о м. Известны примеры Э. к. над $\mathbb{Q}$ ранга $\geqslant 12$. Имеется предположение (см. [1], [13]), что над $\mathbb{Q}$ существуют Э. к. сколь угодно большого ранга.

Для изучения группы $X(\mathbb{Q})$ используется высота Тейта $\hat{h}$: $X(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, являющаяся неотрицательно определенной квадратичной формой на $X(\mathbb{Q})$ (см. [1], [3], [8], а также *Высота* в диофантовой геометрии). Для любого $c \in \mathbb{R}_+$ множество $\{P \in X(\mathbb{Q}) \mid \hat{h}(P) \leqslant c\}$ конечно. В частности, $\hat{h}$ обращается в 0 в точности на подгруппе кручения $X(\mathbb{Q})_t$.

Важным инвариантом Э. к. X является ее группа Тейта — Шафаревича $Ш(X)$ (см. *Вейля — Шатле группа*). Нетривиальные элементы группы $Ш(X)$ — Э. к., не имеющие $\mathbb{Q}$-точек,— доставляют примеры Э. к., для к-рых не выполнен *Хассе принцип*. Группа $Ш(X)$ периодична и для любого n подгруппа ее элементов, порядки к-рых делят n, конечна. Для большого числа Э. к. проверена конечность 2- и 3-компонент группы Ш (см. [1], [4], [5]). Имеется гипотеза, что и группа Ш конечна.

Гипотеза Берча и Суиннертон-Дайера (см. [5], [13]) утверждает, что порядок нуля L-функции $L(X, s)$ при $s=1$ равен $\mathbb{Q}$-рангу Э. к. X. В частности, $L(X, s)$ имеет нуль при $s=1$ тогда и только тогда, когда группа $X(\mathbb{Q})$ бесконечна. Гипотеза не доказана ни для одной Э. к. (1984), хотя для Э. к. с комплексным умножением (и $f=1$) установлено, что бесконечность $X(\mathbb{Q})$ влечет за собой наличие нуля у L-функции при $s=1$ (см. [14]). Гипотеза Берча и Суиннертон-Дайера дает главный член асимптотики L-функции при $s \to 1$, в к-рый входят порядки групп $Ш(X)$ и $X(\mathbb{Q})_t$, определитель высоты Тейта [1]. Эта гипотеза допускает переформулировку в терминах *Тамагавы чисел* (см. [7]).

Предполагается (г и п о т е з а В е й л я), что существует униформизация Э. к. X модулярными функциями относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(N)$ модулярной группы Γ (см. [5], а также *Дзета-функция* в алгебраич. геометрии). Эта гипотеза доказана для Э. к. с комплексным умножением. Известно (см. [15]), что всякая алгебраич. кривая над $\mathbb{Q}$ униформизуется модулярными функциями относительно нек-рой подгруппы конечного индекса группы Γ.

Лит.: [1] К а с с е л с Дж., «Математика», 1968, т. 12, № 1, с. 113—60; № 2, с. 1—48; [2] Г у р в и ц А., К у р а н т Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [3] М а м ф о р д Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971; [4] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969, гл. 12, 13; [5] М а н и н Ю. И., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 6, с. 7—71; [6] Х а р т ш х о р н Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981; [7] B l o c h S., «Invent. math.», 1980, v. 58, p. 65—76; [8] L a n g S., Elliptic curves: diophantine analysis, B.— [a. o.], 1978; [9] е г о ж е, Elliptic functions, Reading (Mass.), 1973; [10] M a z u r B., «Invent. math.», 1978, v. 44, p. 129—62; [11] Modular functions of one variable, v. 4, B.— [a. o.], 1975; [12] M e s t r e J. F., «C. r. Acad. sci.», 1982, t. 295, ser. 1, p. 643—44; [13] T a t e J., «Invent. math.», 1974, v. 23, p. 179—206; [14] C o a t e s J., W i l e s A., «Invent. math.», 1977, v. 39, p. 223—51; [15] Б е л ы й Г. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1979, т. 43, с. 267—76.

Ю. Г. Зархин, Вал. С. Куликов.

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — алгебраическая или аналитическая полная неособая поверхность X, у к-рой имеется пучок *эллиптических кривых*, т. е. морфизм $\pi : X \to B$ на неособую кривую B, общий слой к-рого — неособая эллиптич. кривая. Всякая Э. п. бирационально (бимероморфно) эквивалентна над B однозначно определенной минимальной модели, к-рая характеризуется тем, что слои морфизма π не содержат исключительных кривых 1-го рода. Далее Э. п. будет предполагаться минимальной. Минимальные Э. п. устроены более сложно, чем линейчатые поверхности. Они могут иметь особые слои $X_t = \pi^{-1}(t)$ (т. е. слои, не являющиеся неособыми эллиптич. кривыми). Имеется классификация [3] особых слоев Э. п. Особый слой $X_t = \Sigma n_i E_i$ наз. кратным, если НОД $(n_i) = m \geqslant 2$, тогда $X_t = mF$ и m наз. кратностью слоя X_t.

На минимальной Э. п. канонич. класс K_X содержит дивизор, являющийся рациональной комбинацией слоев, в частности $(K_X^2) = 0$. Более точно, имеет место следующая формула для канонич. класса (см. [1], [4]):

$$K_X = \pi^* (K_B - d) + \sum (m_i - 1) F_i,$$

где $X_{t_i} = m_i F_i$ — все кратные слои морфизма π, а d — дивизор на B степени $-\chi(\mathcal{O}_X)$. Для эйлеровой топологич. характеристики имеет место формула

$$e(X) = \sum e\left(X_{t_i}\right).$$

Классификация эллиптич. пучков. Пучок $\pi : X \to B$ можно рассматривать как эллиптич. кривую над полем функций $k(B)$. Эта кривая, вообще говоря, не имеет структуры абелева многообразия над $k(B)$. Для выполнения последнего необходимо, чтобы она имела рациональную точку над $k(B)$ (и тогда X бирационально изоморфна поверхности, определяемой в $B \times A^2$ уравнением Вейерштрасса $y^2 = x^3 - g_2 x - g_3$, где $g_2, g_3 \in k(B)$). Задание рациональной точки эквивалентно заданию сечения $e : B \to X$ такого, что $\pi e = \mathrm{id}$; необходимым условием существования сечения является отсутствие кратных слоев. Пучки без кратных слоев наз. приведенными. Любой пучок после подходящего разветвленного накрытия базы имеет сечение (т. е. приведен) [3]. Любой пучок можно сделать приведенным также последовательностью преобразований, обратных к логарифмическим [4],— локальных перестроек пучка в окрестностях слоев.

Приведенные эллиптич. пучки описываются следующим образом. Каждому такому пучку π: $X \longrightarrow B$ соответствует единственный пучок $\mathcal{Y}_B(X) \longrightarrow B$, к-рый является групповым объектом и такой, что X/B является главным однородным пространством над $\mathcal{Y}_B(X)/B$. Пучок $\mathcal{Y}_B(X)/B$ наз. якобиевым пучком для X/B, он характеризуется наличием сечения. Для заданного якобиева пучка $\mathcal{Y}/B$ множество $I(\mathcal{Y}/B)$ классов изоморфных пучков X/B, для к-рых $\mathcal{Y}_B(X) \cong \mathcal{Y}$, имеет когомологич. описание, аналогичное описанию *обратимых пучков*. При этом роль пучка $\mathcal{O}_B^*$ играет пучок $\mathcal{H}^0(\mathcal{Y}/B)$ локальных сечений τ: $\mathcal{Y} \longrightarrow B$. Имеется естественное взаимно однозначное соответствие

$$\theta : I(\mathcal{Y}/B) \longrightarrow H^1(B, \mathcal{H}^0(\mathcal{Y}/B)),$$

при к-ром якобиеву пучку соответствует нулевой элемент. С помощью θ можно различать алгебраич. и неалгебраич. пучки: для приведенного пучка $\pi : X \to B$ поверхность X алгебраическая тогда и только тогда, когда соответствующий ему элемент в $H^1(B, \mathcal{H}^0(\mathcal{Y}/B))$ имеет конечный порядок. Аналогию с обратимыми пучками можно продолжить дальше. Аналогом точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_B \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_B^* \longrightarrow 1$$

является точная последовательность

$$0 \longrightarrow R^1\tau_*\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{H}^0(T(\mathcal{Y})/B) \longrightarrow \mathcal{H}^0(\mathcal{Y}/B) \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{H}^0(T(\mathcal{Y})/B)$ — пучок локальных сечений расслоения $T(\mathcal{Y})/B$, а $T(\mathcal{Y})_b$ — касательное пространство к слою $\tau^{-1}(b)$ в точке $e(b)$. Граничный гомоморфизм

$$\delta: H^1(B, \mathcal{H}^0(\mathcal{Y}/B)) \longrightarrow H^2(B, R^1\tau_*\mathbb{Z})$$

позволяет узнать, когда один пучок является деформацией другого. Для этого необходимо и достаточно, чтобы соответствующие этим пучкам элементы имели один и тот же образ относительно δ (см. [4]).

Классификация алгебраич. Э. п. Пусть $\operatorname{char} k=0$. Для Э. п. X канонич. размерность $k(X)\leqslant 1$, т. е. равна -1, 0 или 1. Э. п. с $k(X)=1$ наз. Э. п. основного типа. Они характеризуются условием: $12K_X\neq 0$ и $|12K_X|\neq\varnothing$. Э. п. с $p_g\geqslant 2$ или, более общо, с $P_m\geqslant 2$ при нек-ром m являются Э. п. основного типа.

Э. п. с $k(X)=0$ характеризуются условием $12K_X=0$. В этом случае $\chi(\mathcal{O}_X)$ может принимать три значения: 2, 1, 0. Если $\chi(\mathcal{O}_X)=2$, то X есть эллиптич. КЗ-поверхность ($q=0$, $K_X=0$). В этом случае B изоморфна проективной прямой P^1, пучок не имеет кратных слоев и X имеет инварианты $p_g=1$, $q=0$, $b_2=22$. Если $\chi(\mathcal{O}_X)=1$, то X есть поверхность Энриквеса, т. е. поверхность с $p_g=q=0, 2K_X=0$ (всякая поверхность Энриквеса является эллиптической). В этом случае $B\simeq\mathrm{P}^1$, пучок имеет два кратных слоя кратности 2 и X имеет инварианты $p_g=q=0$, $b_2=10$. Если $\chi(\mathcal{O}_X)=0$, то возможны два случая. Либо X — абелево многообразие (тогда $p_g=1$, $q=2$, $b_2=6$). Либо X — гиперэллиптич. поверхность, т. е. поверхность, у к-рой имеется конечное неразветвленное накрытие — произведение двух эллиптич. кривых. В этом случае $p_g=0$, $b_1=2$, $b_2=2$, $B=\mathrm{P}^1$ и π имеет три или четыре кратных слоя, для кратностей к-рых имеется четыре возможности: (3, 3, 3), (2, 4, 4), (2, 3, 6), (2, 2, 2, 2) и соответственно $3K_X=0, 4K_X=0, 6K_X=0$ и $2K_X=0$.

Э. п. с $k(X)=-1$ являются линейчатыми поверхностями. Они характеризуются условием $|12K_X|=\varnothing$. Здесь возможны два случая: 1) X — поверхность с $p_g=q=0$, $b_2=10$ и π не имеет кратных слоев либо имеет один кратный слой; причем поверхности без кратных слоев получаются следующим образом: нужно взять рациональное отображение $\mathrm{P}^2\to\mathrm{P}^1$, определяемое двумя кубиками $F_0=0$ и $F_1=0$, и раздуть их 9 точек пересечения. 2) X — поверхность с $p_g=0$, $q=1$, $b_2=2$, а кратности m_i удовлетворяют неравенству

$$\sum\left(1-\frac{1}{m_i}\right)<2.$$

Формула для канонич. класса и классификация Э. п. обобщены также на случай конечной характеристики поля (см. [5], [6]).

Классификация неалгебраич. Э. п. Для неалгебраич. поверхностей — алгебраич. размерность $a(X)=\operatorname{tr deg} M(X)=1$ или 0. Если $a(X)=0$, то поверхность X неэллиптическая. Все поверхности с $a(X)=1$ эллиптические. При этом структура Э. п. $\pi: X\to B$ определена почти канонически: любое такое расслоение π обязательно является эллиптическим. Классификация по канонич. размерности точно такая, как и в случае алгебраич. Э. п.: $k(X)=-1\Leftrightarrow|12K_X|=\varnothing$, $k(X)=0\Leftrightarrow 12K_X=0$ и $k(X)=1$ (X — Э. п. основного типа)$\Leftrightarrow|12K_X|\neq\varnothing$, $12K_X\neq 0$.

Неалгебраич. Э. п. с $k(X)=0$ принадлежат одному из классов: 1) КЗ-поверхности ($\chi(\mathcal{O}_X)=2$, $b_1=0$, $b_2=22$, X — односвязна). 2) Комплексные торы ($K_X=0$, $\chi(\mathcal{O}_X)=0$, $b_1=4$, $b_2=6$). 3) Поверхности Кодаиры ($K_X=0$, $\chi(\mathcal{O}_X)=0$, $b_1=3$, $b_2=4$). Поверхности Кодаиры являются расслоениями на эллиптич. кривые с эллиптич.

кривой в качестве базы, а с дифференцируемой точки зрения — расслоениями на окружности над трехмерным тором. 4) Поверхности с $\chi(\mathcal{O}_X)=0$, $p_g=0$, $b_1=1$, $b_2=0$. Для них $mK_X=0$ при $m=2, 3, 4, 6$ (аналогично гиперэллиптич. поверхностям). Они имеют поверхность Кодаиры в качестве конечного неразветвленного накрытия. В случаях 2), 3) и 4) универсальной накрывающей для X является $\mathbb{C}^2$.

Неалгебраич. Э. п. с $k(X)=-1$ являются поверхностями Хопфа, т. е. их универсальная накрывающая есть $\mathbb{C}^2\setminus 0$. Для них $\chi(\mathcal{O}_X)=0$, $b_1=1$, $b_2=0$. Собственные поверхности Хопфа — это $(\mathbb{C}^2\setminus 0)/Z$, где $T(z_1, z_2)=(\alpha_1 z_1, \alpha_2 z_2)$ — действие образующей T. Они гомеоморфны $S^1\times S^3$ и характеризуются этим условием. Произвольные Э. п. Хопфа являются факторами собственных поверхностей Хопфа [4].

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965; [2] Bombieri E., Husemoller D., «Proc. symp. in pure math.», 1975, v. 29, p. 329—420; [3] Kodaira K., «Ann. Math.», 1960, v. 71, p. 111—52; 1963, v. 77, p. 563—626; 1963, v. 78, p. 1—40; [4] его же, «Amer. J. Math.», 1964, v. 86, p. 751—98; 1966, v. 88, p. 682—721; 1966, v. 90, p. 55—83, 1048—66; [5] Mumford D., в кн.: Global analysis. Papers in honor of K. Kodaira, Tokyo, 1969, p. 325—39; [6] Bombieri E., Mumford D., в кн.: Complex analysis and algebraic geometry, [Camb.], 1977, p. 23—42.

Вал. С. Куликов.

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ТОЧКА — точка регулярной поверхности, в к-рой соприкасающийся параболоид является эллиптич. параболоидом. В Э. т. индикатриса Дюпена является эллипсом, гауссова кривизна поверхности положительна, главные кривизны поверхности имеют один знак, а для коэффициентов 2-й квадратичной формы справедливо неравенство

$$LN-M^2>0.$$

Поверхность в окрестности Э. т. является локально выпуклой.

Д. Д. Соколов.

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ в собственном смысле — *двоякопериодическая функция*, мероморфная в конечной плоскости комплексного переменного z. Э. ф. обладают следующими основными свойствами.

Не существует целых Э. ф., кроме констант (теорема Лиувилля).

Пусть $2\omega_1$, $2\omega_3$ — примитивные периоды Э. ф. $f(z)$, $\operatorname{Im}(\omega_3/\omega_1)>0$. Сумма вычетов всех полюсов $f(z)$ в ее параллелограмме периодов

$$\Delta=\{z=2t\omega_1+2\tau\omega_3;\quad 0\leqslant t<1,\quad 0\leqslant\tau<1\}$$

равна нулю.

Пусть r — число полюсов (с учетом их кратности) Э. ф. $f(z)$ в параллелограмме периодов Δ. Тогда $f(z)$ принимает в Δ каждое конечное значение с учетом кратности в точности r раз. Число r наз. порядком Э. ф. Не существует Э. ф., порядок к-рых меньше 2.

Если a_i и b_i, $i=1, \ldots, r$,— все нули и полюсы Э. ф. $f(z)$ в ее параллелограмме периодов Δ с учетом их кратности, то сумма

$$\sum_{i=1}^{r}(a_i-b_i)$$

сравнима с нулем по модулю периодов, т. е.

$$\sum_{i=1}^{r}(a_i-b_i)=2m_1\omega_1+2m_3\omega_3,$$

где m_1, m_3 — целые числа (частный случай теоремы Абеля, см. *Абелева функция*).

Все Э. ф. с фиксированными примитивными периодами $2\omega_1$, $2\omega_3$ образуют алгебраич. поле Э. ф. с двумя образующими. В качестве этих образующих можно взять, напр., функцию Вейерштрасса $\wp$ и ее производную (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*).

Производная Э. ф. является в свою очередь Э. ф. того же порядка с теми же периодами. Каждая Э. ф. удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению 1-го порядка.

Каждая Э. ф. $f(z)$ допускает алгебраическую теорему сложения, т. е. значения $f(z_1)$, $f(z_2)$, $f(z_1+z_2)$ связаны неприводимым алгебраич. уравнением с постоянными коэффициентами. Обратно, имеет место теорема Вейерштрасса: всякая аналитич. функция $f(z)$, допускающая алгебраич. теорему сложения, либо является рациональной функцией от z или от e^z, либо есть Э. ф.

Иногда применяется более общая терминология, связанная с теорией *мета-функций*. Э. ф. III рода наз. всякая мероморфная функция $f(z)$, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$f(z+2\omega_i)=\exp[a_i(z+\omega_i)+b_i]\cdot f(z), \quad i=1,\ 3,$$

где a_i, b_i — нек-рые постоянные. Если $a_1=a_3=0$, то $f(z)$ наз. Э. ф. II рода. Если $a_1=a_3=b_1=b_3=0$, то $f(z)$ наз. Э. ф. I рода, или Э. ф. в собственном смысле. По этой терминологии тета-функции Якоби (см. *Якоби эллиптические функции*) и сигма-функции Вейерштрасса (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*) суть Э. ф. III рода.

Впервые *эллиптические интегралы* исследовались в работах ученых кон. 17 — нач. 19 вв. Я. Бернулли (J. Bernoulli), И. Бернулли (J. Bernoulli), Дж. К. Фаньяно деи Тоски (G. C. Fagnano dei Toschi), Л. Эйлера (L. Euler), А. Лежандра (A. Legendre) конца 17 — начала 19 вв. Эти интегралы появились в задачах вычисления длины дуги эллипса и других кривых 2-го порядка. Они имеют вид $\int R(z, w)\,dz$, где R — рациональная функция от переменных z и w, связанных алгебраич. уравнением

$$w^2=a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4,$$

в к-ром справа стоит многочлен 4-й или 3-й степени без кратных корней. Подынтегральная функция однозначна на двулистной компактной римановой поверхности F рода $g=1$ с четырьмя точками ветвления. Дифференциалы I, II и III рода на F (см. *Дифференциал на римановой поверхности*) порождают соответственно эллиптич. интегралы I, II и III рода. Интеграл I рода является главной униформизирующей поверхности F и поля алгебраич. функций, *порождаемых* F. Если принять его за независимую переменную, то это поле переходит в поле Э. ф.

Идея непосредственного обращения эллиптич. интегралов в нормальной форме Лежандра возникла и была развита в работах Н. Абеля (N. Abel) и К. Якоби (C. Jacobi) в нач. 19 в. Развитое К. Якоби построение Э. ф. на основе тета-функций имеет основное значение для приложений Э. ф. Теоретически более простое построение поля Э. ф., при к-ром в качестве образующих берутся функция $\wp$ и ее производная, было дано К. Вейерштрассом (K. Weierstrass) в 70-х гг. 19 в.

При развитии теории Э. ф. одной из основных является *проблема преобразования* Э. ф. и связанных с ними величин при переходе от примитивных периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$ к другим примитивным периодам $2\widehat{\omega}_1$, $2\widehat{\omega}_3$, связанным соотношениями

$$\widehat{\omega}_1=\alpha\omega_1+\beta\omega_3, \quad \widehat{\omega}_3=\gamma\omega_1+\delta\omega_3,$$

где α, β, γ, δ — целые числа такие, что $\alpha\delta-\beta\gamma=n$, n — натуральное число, называемое *порядком преобразования*. Площадь параллелограмма периодов $2\widehat{\omega}_1$, $2\widehat{\omega}_3$ в n раз больше площади параллелограмма периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$. При $n=1$ получаются преобразования модулярной группы, откуда возникла связанная с Э. ф. теория *модулярных функций*.

Э. ф. можно трактовать как мероморфные функции, инвариантные относительно преобразований группы сдвигов

$$\{z\longrightarrow z+2n\omega_1+2m\omega_3;\quad n,\ m\in\mathbb{Z}\}$$

комплексной плоскости. Обобщение этого подхода привело к рассмотрению *автоморфных функций*, инвариантных относительно *дробно-линейных отображений*, составляющих группы более общей природы. Э. ф. и модулярные функции суть частные случаи автоморфных функций.

Обращение эллиптич. интегралов сразу же привело к *Якоби проблеме обращения* более общих *абелевых интегралов* $\int R(z, w)\,dz$, где переменные z и w связаны произвольным алгебраич. уравнением. На этом пути получаются *абелевы функции* — обобщение Э. ф. на случай нескольких комплексных переменных.

Э. ф. и эллиптич. интегралы находят многочисленные применения (как специальные функции) во многих разделах анализа, как средство *униформизации* в алгебраич. геометрии, а также в механике, электродинамике и других прикладных областях.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970; [2] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., ч. 2, М., 1968; [3] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963; [4] Журавский А. М., Справочник по эллиптическим функциям, М.—Л., 1941; [5] Enneper A., Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte, 2 Aufl., Halle, 1890; [6] Tannery J., Molk J., Eléments de la théories des fonctions elliptiques, t. 1—4, P., 1893—1902.

Е. Д. Соломенцев.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ — числа σ и τ, связанные с декартовыми прямоугольными координатами формулами

$$x^2 = \frac{(\sigma+a^2)(\tau+a^2)}{a^2-b^2}, \qquad y^2 = \frac{(\sigma+b^2)(\tau+b^2)}{b^2-a^2},$$



где $-a^2<\tau<-b^2<\sigma<\infty$. Координатные линии (см. рис.): софокусные эллипсы (σ=const) и гиперболы (τ=const) с фокусами $(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ и $(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$. Система Э. к. — ортогональная. Каждой паре чисел σ и τ соответствуют 4 точки, по одной в каждом квадранте плоскости Oxy, симметричные друг другу относительно осей Ox и Oy.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma-\tau}{(\sigma+a^2)(\tau+b^2)}}, \quad L_\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau-\sigma}{(\sigma+a^2)(\tau+b^2)}}.$$

Уравнение Лапласа допускает в Э. к. разделение переменных.

Вырожденными Э. к. наз. числа $\tilde\sigma$ и $\tilde\tau$, связанные с Э. к. σ и τ формулами (при $a=1$, $b=0$):

$$\sigma = \mathrm{sh}^2\tilde\sigma, \quad \tau = -\sin^2\tilde\tau$$

и с декартовыми прямоугольными координатами x и y — формулами:

$$x = \mathrm{ch}\,\tilde\sigma\cos\tilde\tau, \quad y = \mathrm{sh}\,\tilde\sigma\sin\tilde\tau,$$

где $0\leqslant\tilde\sigma<\infty$, $0\leqslant\tilde\tau<2\pi$. Иногда эти координаты также наз. эллиптическими.

Коэффициенты Ламе:

$$L_{\tilde\sigma} = L_{\tilde\tau} = \sqrt{\mathrm{ch}^2\tilde\sigma - \cos^2\tilde\tau}.$$

Элемент площади:

$$ds = (\mathrm{ch}^2\tilde\sigma - \cos^2\tilde\tau)\,d\tilde\sigma\,d\tilde\tau.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\tilde\sigma - \cos^2\tilde\tau}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde\sigma^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde\tau^2}\right).$$

Д. Д. Соколов.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл от *алгебраической функции* 1 рода, т. е. интеграл вида

$$\int_{z_0}^{z_1} R(z, w)\,dz, \qquad (1)$$

где $R(z, w)$ — рациональная функция от переменных z и w, связанных алгебраич. уравнением

$$w^2 = f(z) \equiv a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4, \qquad (2)$$

в к-ром $f(z)$ — многочлен 3-й или 4-й степени без кратных корней. При этом обычно подразумевается, что интеграл (1) нельзя выразить через одни только элементарные функции. В том случае, когда такое выражение возможно, интеграл (1) наз. *псевдоэллиптическим интегралом*.

Название Э. и. связано с тем, что впервые они появились при спрямлении дуги эллипса и других кривых 2-го порядка в работах кон. 17 — нач. 18 вв. Я. Бернулли (J. Bernoulli), И. Бернулли (J. Bernoulli), Дж. К. Фаньяно деи Тоски (G. C. Fagnano dei Toschi), Л. Эйлер (L. Euler) заложили основы теории Э. и. и *эллиптических функций*, возникающих при *обращении эллиптических интегралов*.

Уравнению (2) соответствует двулистная компактная риманова поверхность F рода $g=1$, гомеоморфная тору, на к-рой z, w, а следовательно, и $R(z, w)$, рассматриваемые как функции точки поверхности F, однозначны. Интеграл (1) задается как интеграл $\int_L \omega$ от *абелева дифференциала* $\omega = R(z, w)dz$ на F, взятый вдоль некрого спрямляемого пути L. Задание начальной z_0 и конечной z_1 точек этого пути L, вообще говоря, не вполне определяет значение Э. и. (1), или, иначе говоря, Э. и. (1) есть многозначная функция от z_0 и z_1.

Любой Э. и. можно выразить в виде суммы элементарных функций и линейной комбинации канонич. Э. и. I, II и III рода. Последние записываются, напр., следующим образом:

$$I_1 = \int \frac{dz}{w}, \quad I_2 = \int \frac{z\,dz}{w}, \quad I_3 = \int \frac{dz}{(z-c)\,w},$$

где c — параметр Э. и. III рода.

Дифференциал I рода dz/w, соответствующий Э. и. I рода I_1, всюду на римановой поверхности F конечен, дифференциалы II и III рода имеют соответственно особенность типа полюса с нулевым вычетом или простого полюса. Рассматриваемые как функции верхнего предела интегрирования при фиксированном нижнем пределе, все три Э. и. на F многозначны. Если же разрезать F вдоль двух циклов базиса гомологий, то в получившейся односвязной области F^* интегралы I_1 и I_2 будут однозначны, а интеграл I_3 сохраняет еще логарифмич. многозначность, появляющуюся при обходе простого полюса. При переходе через разрез каждый интеграл изменяется на целое кратное соответствующего периода, или модуля периодичности, а I_3 имеет еще, кроме того, третий логарифмический период $2\pi i$, соответствующий обходу особой точки. Таким образом, вычисление интеграла типа (1) сводится к вычислению интеграла вдоль пути L^*, соединяющего на F^* точки z_0 и z_1, и прибавлению соответствующей линейной комбинации периодов.

Подвергая переменное z нек-рым преобразованиям, можно привести функцию w и основные Э. и. к нормальным формам.

В нормальной форме Вейерштрасса выполняется соотношение

$$w^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3,$$

и интеграл

$$u = -\int_z^\infty \frac{dz}{w}$$

имеет периоды $2\omega_1$, $2\omega_3$. Обращение этого Э. и. дает эллиптич. функцию Вейерштрасса $\wp(z)$ с периодами $2\omega_1$, $2\omega_3$ и инвариантами g_2, g_3 (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*). Вычисление периодов $2\omega_1$, $2\omega_3$ по заданным инвариантам производится при по-

мощи *модулярной функции* $J(\tau)$. Если в нормальном интеграле II рода

$$\int \frac{z\,dz}{w}$$

принять нормальный интеграл I рода u в качестве переменной интегрирования, то при надлежащем выборе постоянной интегрирования будет выполняться равенство

$$\int \frac{z\,dz}{w} = -\zeta(u),$$

где $\zeta(u)$ — дзета-функция Вейерштрасса. При этом периоды нормального интеграла II рода равны $-2\eta_1 = -2\zeta(\omega_1)$, $-2\eta_3 = -2\zeta(\omega_3)$. Нормальный интеграл III рода по Вейерштрассу имеет вид

$$I(z, w; z_0, w_0) = \frac{1}{2}\int \frac{(w+w_0)dz}{(z-z_0)w} = \log \frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u)\,\sigma(u_0)} + u\frac{\sigma'(u_0)}{\sigma(u_0)},$$

где $\sigma(u)$ — сигма-функция Вейерштрасса, $z_0 = \wp(u_0)$, $w_0 = \wp'(u_0)$, $u_0 \not\equiv 0 \pmod{(2\omega_1, 2\omega_3)}$. При этом справедливо правило перестановки:

$$I(z, w; z_0, w_0) - I(z_0, w_0; z, w) = \frac{\sigma'(u_0)}{\sigma(u_0)}u - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}u_0 + (2n+1)\pi i,$$

где n — целое число. Периоды нормального интеграла III рода имеют вид

$$-u_0\eta_1 + \zeta(u_0)\,\omega_1 + 2n_1\pi t;$$
$$-u_0\eta_3 + \zeta(u_0)\,\omega_3 + 2n_3\pi i,$$

где n_1, n_3 — целые, $2\pi i$ — логарифмич. период.

В приложениях чаще встречается нормальная форма Лежандра. При этом

$$w^2 = (1-z^2)(1-k^2z^2),$$

где k наз. модулем Э. и., k^2 иногда наз. лежандровым модулем, $k' = \sqrt{1-k^2}$ — дополнительным модулем. Чаще всего имеет место нормальный случай, когда $0 < k < 1$, а $z = x = \sin t$ — действительное переменное. Э. и. I рода в нормальной форме Лежандра имеет вид

$$u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} = F(\varphi, k);$$

он наз. также неполным Э. и. I рода; φ — $\operatorname{am} u$ наз. амплитудой Э. и. I рода. Амплитуда есть бесконечнозначная функция от u. Обращение нормального интеграла I рода приводит к эллиптич. функции Якоби $z = \operatorname{sn} u$ (см. *Якоби эллиптические функции*).

Нормальный интеграл II рода в нормальной форме Лежандра имеет вид

$$\int_0^z \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt = E(\varphi, k) = E(u;)$$

он наз. также неполным Э. и. II рода.

Интегралы

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K(k) = K,$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) = K'(k) = K',$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = E(k) = E,$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) = E'(k) = E'$$

наз. полными Э. и. соответственно I и II рода. Лежандровы интегралы I рода имеют периоды $4K$ и $2iK'$, II рода — периоды $4E$ и $2i(K'-E')$.

Нормальный интеграл III рода в нормальной форме Лежандра имеет вид

$$\int_0^z \frac{dx}{(1-n^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{(1-n^2\sin^2 t)\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} = \Pi(\varphi;\ n^2,\ k) = \Pi(u;\ n^2),$$

где n^2 — параметр, чаще всего $-\infty<n^2<\infty$. При $-\infty<u^2<0$ или $k^2<u^2<1$ он наз. циркулярным интегралом, а при $0<n^2<k^2$ или $1<n^2$ — гиперболич. интегралом.

По Якоби нормальный интеграл III рода определяется несколько иначе:

$$\prod_J (u;\ a) = k^2 \operatorname{sn} a \cdot \operatorname{cn} a \cdot \operatorname{dn} a \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u\, du}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{sn}^2 a},$$

где $n^2=k^2\operatorname{sn}^2 a$. Связь между интегралами III рода Якоби и Лежандра выражается формулой

$$\prod (u;\ n^2) = u + \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a \cdot \operatorname{dn} a} \prod_J (u;\ a);$$

циркулярный характер соответствует мнимым a, гиперболический — действительным a.

Наряду с эллиптич. функциями, Э. и. находят многочисленные и важные применения в различных вопросах анализа и геометрии, физики, в частности механики, астрономии и геодезии. Составлены таблицы Э. и. подробные руководства по теории Э. и. и эллиптич. функций, а также сводки формул.

Лит.: [1] Беляков В. М., Кравцова Р. И., Рапопорт М. Г., Таблицы эллиптических интегралов, т. 1—2, М., 1962—63; [2] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 3 изд., М., 1977.

См. также лит. при ст. *Эллиптическая функция.*

Е. Д. Соломенцев.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР — линейный дифференциальный или псевдодифференциальный оператор с обратимым главным символом (см. *Символ оператора*).

Пусть A — дифференциальный или псевдодифференциальный оператор (вообще говоря, матричный) на области $X\subset\mathbb{R}^n$ с главным символом $\sigma_A(x,\xi)$. Если A — оператор порядка m, то $\sigma_A(x,\xi)$ — матричная функция на $X\times(\mathbb{R}^n\setminus 0)$ положительно однородная порядка m по переменному $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus 0$. Тогда эллиптичность означает, что $\sigma_A(x,\xi)$ — обратимая матрица при всех $x\in X$, $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus 0$. Это понятие эллиптичности наз. эллиптичностью по Петровскому.

Другой вид *эллиптичности*, *эллиптичность по Дуглису — Ниренбергу*, предполагает, что A — матричный оператор, $A=(A_{ij})_{i,\,j=1}^{d}$, где A_{ij} — оператор порядка s_j-t_i, $(s_1,\ldots,s_d)$ и $(t_1,\ldots,t_d)$ — нек-рые наборы действительных чисел. Тогда можно образовать матрицу главных символов $\sigma_A(x,\xi)=(\sigma_{A_{ij}}(x,\xi))_{i,\,j=1}^{d}$, где функция $\sigma_{A_{ij}}(x,\xi)$ положительно однородна по ξ порядка s_j-t_i. Тогда *эллиптичность по Дуглису — Ниренбергу* означает, что матрица $\sigma_A(x,\xi)$ обратима при всех $x\in X$, $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus 0$.

Эллиптичность оператора A на многообразии означает эллиптичность операторов, к-рые получаются из него при его записи в локальных координатах. Равносильным образом эту эллиптичность можно описать как обратимость главного символа σ_A, к-рый является функцией на $T^*X\setminus 0$, где T^*X — кокасательное расслоение к X, $T^*X\setminus 0$ — то же расслоение без нулевого сечения. Если оператор A действует в сечениях векторных расслоений $A: C^\infty(X,E)\to C^\infty(X,E)$, то эллиптичность оператора означает обратимость линейного оператора $\sigma_A(x,\xi): E_x\to F_x$ для любой точки $(x,\xi)\in T^*X\setminus 0$ (здесь E_x, F_x — слои расслоений E и F в точке x). Примером Э. о. является *Лапласа оператор*.

Эллиптичность оператора равносильна отсутствию у него действительных характеристич. направлений. Эллиптичность можно также понимать микролокально. А именно, эллиптичность оператора A в точке (x_0, ξ_0) означает обратимость матрицы (линейного отображения) $\sigma_A(x_0, \xi_0)$.

Эллиптичность псевдодифференциального оператора на многообразии с краем (напр., оператора из алгебры Бутеде Монвеля [10], [11]) в граничной точке означает обратимость нек-рого модельного оператора граничной задачи на полуоси. Этот модельный оператор получается из исходного выпрямлением границы, замораживанием коэффициентов главных частей оператора и граничных условий в рассматриваемой точке и взятием преобразования Фурье по касательным направлениям (от x' к ξ') с последующим фиксированием ненулевого вектора ξ', к-рый можно рассматривать как кокасательный вектор к границе. В случае дифференциального оператора и дифференциальных граничных условий описанное условие эллиптичности может быть записано в алгебраич. терминах. В этом случае (а также иногда и в общем случае) это условие часто наз. условием Шапиро — Лопатинского, или условием коэрцитивности.

Наиболее характерными свойствами Э. о. являются: 1) свойства регулярности решений соответствующих уравнений; 2) точные априорные оценки; 3) фредгольмовость Э. о. на компактных многообразиях.

Ниже, для простоты, коэффициенты и символы всех операторов считаются бесконечногладкими.

Пусть дано уравнение $Au=f$, где A — Э. о. Простейшее свойство регулярности таково: если $f\in C^\infty$, то $u\in C^\infty$. Это свойство верно для любых дифференциальных Э. о. с гладкими коэффициентами или псевдодифференциальных Э. о. (с гладкими символами). Оно верно и для Э. о. краевой задачи (т. е. верно вплоть до границы при выполнении условия Шапиро — Лопатинского). Уточнением этого свойства является его микролокальный вариант: если оператор A эллиптичен в точке (x_0, ξ_0) (здесь x_0 — внутренняя точка X) и $(x_0, \xi_0)\notin WF(f)$, то $(x_0, \xi_0)\in WF(u)$, где WF означает *фронт волновой* (распределения или функции). Другое уточнение: если A — Э. о. порядка m и $f\in W_p^s$, то $u\in W_p^{s+m}$, где W_p^s — *Соболева пространство*, $1<p<\infty$. Если A — дифференциальный Э. о. с аналитич. коэффициентами, то из аналитичности f вытекает аналитичность u (в случае уравнений с постоянными коэффициентами это свойство необходимо и достаточно для эллиптичности). Соответствующий микролокальный вариант также справедлив и формулируется на языке аналитических волновых фронтов.

Локальная априорная оценка для Э. о. A порядка m имеет вид

$$\|u\|_{W_p^{s+m}(\Omega)} \leqslant C\left(\|f\|_{W_p^s(\Omega')}+\|u\|_{W_p^{-N}(\Omega')}\right), \qquad (1)$$

где $1<p<\infty$, $s\in\mathbb{R}$, $N\in\mathbb{R}$, Ω и Ω' — две области в $\mathbb{R}^n$, причем $\overline{\Omega}$ — компакт, принадлежащий Ω', $Au=f$ в Ω', постоянная C не зависит от u (но может зависеть от s, Ω, Ω', N).

Глобальная априорная оценка для Э. о. A порядка m на компактном многообразии X без края имеет тот же вид, что и (1), но с заменой Ω и Ω' на X. В случае многообразия с краем вместо норм пространств W_p^s в (1) нужно взять нормы, учитывающие структуру вектор-функций u и f (содержащих, вообще говоря, граничные компоненты). Напр., пусть на компактном многообразии X с краем Y задан Э. о. вида $u\longmapsto (Au, B_1u|_Y, \ldots, B_ru|_Y)$, где A — эллиптический дифференциальный оператор порядка m, B_j — дифференциальные операторы порядков m_j, причем $m_j<m$ и выполнено условие Шапи-

ро — Лопатинского (для оператора A и системы граничных операторов $B_1, \ldots, B_r$). Тогда априорная оценка в пространствах Соболева $H^s = W_2^s$ имеет вид

$$\|u\|_s \leqslant C\left(\|Au\|_{s-m} + \sum_{j=1}^{r} \|B_j u\|'_{s-mj-1/2} + \|u\|_0\right),$$

где $\|\cdot\|_s$ — норма в пространстве $H^s(X)$, $\|\cdot\|'_s$ — норма в пространстве $H^s(Y)$, $s \geqslant m$, $u \in H^s(X)$ и постоянная $C > 0$ не зависит от u (но может зависеть от A, B_j, s, X, Y и выбора норм в пространствах Соболева).

Э. о. на компактном многообразии (возможно, с краем) определяет фредгольмов оператор в соответствующих соболевских пространствах, а также в пространствах бесконечно дифференцируемых функций. Его индекс зависит лишь от главного символа и не меняется при непрерывных деформациях главного символа. Это позволяет поставить вопрос о вычислении индекса (см. *Индекса формулы*).

Важную роль играют Э. о. с параметром (см. [12]). При выполнении условия эллиптичности с параметром на компактном многообразии при больших по модулю значениях параметра рассматриваемый Э. о. оказывается обратимым, причем в глобальной априорной оценке типа (1) можно опустить последний член (младшую норму и в правой части).

Лит.: [1] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [2] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [3] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., 1973; [4] Лионс Ж. Л., Мадженес Э., Неоднородные граничные задачи и их приложения, пер. с франц., М., 1971; [5] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [6] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях, пер. с англ., М., 1962; [7] Хермандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965; [8] Шубин М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., 1978; [9] Палей Р., Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе, пер. с англ., М., 1970; [10] Rempel S., Schulze B. W., Index theory of elliptic boundary problems, B., 1982; [11] Boutet de Monvel L., «Acta math.», 1971, v. 126, p. 11—51; [12] Агранович М. С., Вишик М. И., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 3, с. 53—161. *М. А. Шубин.*

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД — незамкнутая *поверхность второго порядка*. Канонич. уравнение Э. п. имеет вид

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p, q > 0.$$



Э. п. расположен по одну сторону от плоскости Oxy (см. рис.). Сечения Э. п. плоскостями, параллельными плоскости Oxy, являются эллипсами с равным эксцентриситетом (если $p=q$ — окружностями, Э. п. наз. параболоидом вращения). Сечения Э. п. плоскостями, проходящими через ось Oz, являются параболами. Сечения Э. п. плоскостями Oyz и Oxz наз. главными параболами Э. п. Ось симметрии Э. п. наз. его осью, а точка пересечения оси с Э. п.— вершиной. *А. Б. Иванов.*

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР — цилиндрическая *поверхность второго порядка*, для к-рой направляющей служит эллипс. Если эллипс действительный, то Э. ц. наз. действительным и его канонич. уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

если эллипс мнимый, то Э. ц. наз. мнимым и его канонич. уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

А. Б. Иванов.

ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА УРАВНЕНИЕ в данной точке — дифференциальное уравнение с частными производными порядка m

$$\sum a_{i_1}\dots{}_{i_n}(x)\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_r^{i_n}}+L_1u=f,\ \sum_{j=1}^n i_j=m,$$

где L_1 — дифференциальный оператор порядка ниже m, характеристич. форме к-рого

$$K(\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_n)=\sum a_{i_1}\dots{}_{i_n}\lambda_1^{i_1}\dots\lambda_n^{i_n},$$

$$\sum_{j=1}^n i_j=m$$

соответствует канонич. уравнение

$$K(\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_n)=0,$$

не имеющее действительных точек, кроме $\lambda_1=0,\ \dots,\ \lambda_n=0$.

Для уравнения 2-го порядка характеристич. форма является квадратичной

$$Q(\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_n)=\sum_{i,\ j=1}^n A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$$

и может быть при помощи неособого аффинного преобразования переменных $\lambda_i=\lambda_i(\xi_1,\ \dots,\ \xi_n)$, $i=1,\ \dots,\ n$, приведена к виду

$$Q=\sum_{i=1}^n \alpha_i\xi_i^2.$$

Когда все $\alpha_i=1$, или $\alpha_i=-1$, уравнение наз. Э. т. у. Уравнение наз. Э. т. у. в области своего задания, если оно эллиптично в каждой точке этой области.

Э. т. у. наз. равномерно эллиптическим уравнением, если существуют отличные от нуля действительные числа k_0 и k_1 такие, что

$$k_0\sum_{j=1}^n\lambda_i^2\leqslant Q(\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_n)\leqslant k_1\sum_{i=1}^n\lambda_i^2.$$

Лит. см. при ст. *Дифференциальное уравнение с частными производными.* *А. Б. Иванов.*

ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА УРАВНЕНИЕ; численные методы решения — методы приближенного отыскания решений дифференциальных уравнений с частными производными эллиптич. типа. Среди различных классов задач, к-рые ставятся для Э. т. у., наиболее хорошо изучены краевые задачи и задачи с данными Коши. Последние поставлены некорректно и требуют для решения специальных методов [1]. Более типичны для Э. т. у. краевые задачи и для их приближенного решения разработано много различных численных методов (см. [2], [3]). Наиболее широкое распространение в вычислительной практике получили сеточные методы, а среди них — метод конечных разностей (см. *Разностные методы*, *Разностных схем теория*, [4], [5]) и метод конечных элементов (м. к. э.) (см. [6]—[9]). Хотя указанные методы и различаются подходом к построению приближенного решения — в первом из них аппроксимируются (см. *Аппроксимация дифференциальной краевой задачи разностной*) уравнение и граничные (краевые) условия, а во втором — само искомое решение,— однако получающиеся для отыскания приближенного решения алгебраич. системы близки по структуре, а в ряде случаев и вовсе совпадают.

Суть метода конечных разностей состоит в следующем: область непрерывного изменения аргументов исходной задачи заменяется дискретным множеством то-

чек (узлов), называемым сеткой; производные, входящие в дифференциальное уравнение и граничные условия, аппроксимируются разностными отношениями; при этом краевая задача для дифференциального уравнения заменяется системой алгебраич. уравнений (разностной схемой). Если полученная таким образом разностная краевая задача разрешима (быть может, только на достаточно мелкой сетке) и ее решение при безграничном измельчении сетки приближается (сходится) к решению исходной задачи для дифференциального уравнения, то полученное на любой фиксированной сетке решение разностной задачи и принимается за приближенное решение исходной задачи.

Простейшим примером Э. т. у. является уравнение Пуассона (уравнение Лапласа, если $f(x,\ y)\equiv 0$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-f(x,\ y). \qquad (1)$$

Примеры разностных схем для уравнения Пуассона приведены в статьях *Краевая задача*; численные методы решения для уравнений с частными производными и *Разностное уравнение*.

В м. к. э. аппроксимируется обобщенное решение краевой задачи. Если, напр., уравнение (1) задано при $(x,\ y)\in\Omega$ и для него рассматривается однородная задача Дирихле, т. е.

$$u(x,\ y)\,|_{\partial\Omega}=0, \qquad (2)$$

где $\partial\Omega$ — граница Ω, то обобщенным решением задачи (1), (2) наз. функция $u\in \mathring{W}_2^1(\Omega)=\mathring{H}^1(\Omega)$, к-рая при любой функции $v\in\mathring{H}^1(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_\Omega fv\,dx\,dy. \qquad (3)$$

Здесь $\mathring{H}^1(\Omega)$ — *Соболева пространство* функций, обращающихся в нуль (в смысле обобщенных функций) на $\partial\Omega$. Наиболее важный класс м. к. э. образуют м. к. э. галеркинского типа (конформные м. к. э.). В *Галеркина методе* приближенное решение ищется в конечномерном подпространстве того пространства, на к-ром задано интегральное тождество, определяющее обобщенное решение. Применительно к задаче (3) приближенным по Галеркину решением наз. такая функция $u_h\in S_h(\Omega)\subset\mathring{H}^1(\Omega)$, к-рая при любой функции $v\in S_h(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству (3). В м. к. э. подпространство $S_h(\Omega)$ должно обладать нек-рыми специальными свойствами (см. *Разностная вариационная схема*).

Специфику конечномерного подпространства, отличающую м. к. э. от других реализаций метода Галеркина, иллюстрирует следующий пример. Пусть область Ω, в к-рой ищется решение задачи (1), (2), есть многоугольник. Область Ω разбивается на малые треугольники (конечные элементы) так, чтобы любые два треугольника либо вовсе не содержали общих точек, либо имели одну общую вершину, либо одну общую сторону. В качестве конечномерного подпространства пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$ выбирается пространство $S_h(\Omega)$ кусочно линейных, линейных над каждым треугольником, непрерывных и обращающихся в нуль на $\partial\Omega$ функций. Размерность пространства $S_h(\Omega)$ совпадает с числом вершин треугольников (без учета их кратности), не попавших на границу $\partial\Omega$. Указанные вершины наз. у з л а м и. В качестве базиса $S_h(\Omega)$ можно взять совокупность таких элементов $\varphi_i\in S_h(\Omega)$, к-рые отличны от нуля лишь в одном узле. Характерной особенностью этого базиса является то, что у каждого его элемента носитель минимален и образован объединением всех треугольников с общей вершиной в том узле, где данный базисный элемент отличен от нуля. Благодаря этому свойству на каждом конечном элементе (к. э.) отлично от нуля

не более трех (по числу вершин, не попавших на $\partial\Omega$) базисных функций, что позволяет использовать сужения указанных базисных функций на к. э. как базис на к. э. и проводить все вычисления на к. э. без привлечения информации о других к. э. Указанное свойство базиса делает м. к. э. весьма технологичным с точки зрения использования ЭВМ [10].

Если, напр., Ω — единичный квадрат, а разбиение Ω на к. э. осуществляется тремя семействами эквидистантных прямых

$$x = mh,\quad y = nh,\quad y = x + ph,\quad m,\ n,\ p \in \mathbb{Z},\quad h^{-1} = N \in \mathbb{N},$$

то при условии, что отличные от нуля значения базисных функций равны единице, для коэффициентов c_{mn} разложения приближенного решения

$$u_h(x,\ y) = \sum\nolimits_{m,n} c_{mn}\varphi_{mn}(x,\ y)$$

получают систему уравнений, в точности совпадающую с системой уравнений метода конечных разностей. При этом c_{mn} будут значениями приближенного решения в узлах.

Точность описанного м. к. э. характеризуется оценкой

$$\| u - u_h \|_{\mathring{H}^1(\Omega)} = O(h),$$

где h — максимальный линейный размер к. э. Чтобы получить бо́льшую точность, нужно приближенное решение искать не в пространстве кусочно линейных функций, а в пространстве кусочно квадратичных или, вообще, кусочно полиномиальных функций. Точность в этом случае при надлежащей гладкости искомого решения будет $O(h^k)$, где k — степень используемых многочленов.

Помимо треугольных к. э. можно использовать и четырехугольные к. э., однако, если стороны четырехугольников не параллельны координатным осям, то необходимо применять изопараметрич. технику, т. е. сначала отобразить рассматриваемый к. э. на канонич. к. э. (в данном случае на прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям) при помощи невырожденного преобразования, обратное к к-рому задается теми же самыми функциями, что и приближенное решение на канонич. к. э. Можно использовать треугольники и четырехугольники с криволинейными сторонами (снова применяя изопараметрич. технику), что необходимо при решении задач в областях с гладкой границей методами более высокого порядка точности, чем первый.

Помимо м. к. э. галеркинского типа, существуют так наз. неконформные м. к. э., решения в к-рых ищутся в пространствах, не являющихся подпространствами исходных пространств. Особенно часто такие м. к. э. применяются для задач, связанных с Э. т. у. более высокого, чем второй, порядка.

И метод конечных разностей, и м. к. э. приводят к системам линейных алгебраич. уравнений большого порядка с разреженными матрицами; подавляющее большинство элементов этих матриц нулевые (см. [11], [12]). Получил значительное развитие еще один метод приближенного решения краевых задач для Э. т. у.— метод граничных элементов [13].

Лит.: [1] Латтес Р., Лионс Ж.-Л., Метод квазиобращения и его приложения, пер. с франц., М., 1970; [2] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.— Л., 1962; [3] Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М., 1965; [4] Самарский А. А., Андреев В. Б., Разностные методы для эллиптических уравнений, М., 1976; [5] Birkhoff G., в кн.: *Elliptic problem solvers*, N. Y.— L., 1981, p. 17—38; [6] Зенкевич О. К., Метод конечных элементов в технике, пер. с англ., М., 1975; [7] Стренг Г., Фикс Дж., Теория метода конечных элементов, пер. с англ., М., 1977; [8] Сьярле Ф., Метод конечных элементов для эллиптических задач, пер. с англ., М., 1980; [9] Митчелл Э., Уэйтр., Метод

конечных элементов для уравнений с частными производными, пер. с англ., М., 1981; [10] Hinton E., Owen D. R. J., Finite element programming, L., 1977; [11] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [12] Джордж А., Лю Дж., Численное решение больших разреженных систем уравнений, пер. с англ., М., 1984; [13] Бреббиа К., Уокер С., Применение метода граничных элементов в технике, пер. с англ., М., 1982.

В. Б. Андреев.

ЭМДЕНА УРАВНЕНИЕ — нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+y^\alpha=0, \tag{1}$$

или, в самосопряженной форме,

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+x^2y^\alpha=0,$$

где $\alpha>0$, $\alpha\neq1$,— константа. Точка $x=0$ является для Э. у. особой. Заменой переменной $x=1/\xi$ уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{y^\alpha}{\xi^4}=0,$$

а заменой $y=\eta/x$ — к виду

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}+\frac{\eta^\alpha}{x^{\alpha-1}}=0.$$

После замены переменных

$$x=e^{-t},\ y=e^{\mu t}u,\ \mu=2/(\alpha-1),$$

и последующего понижения порядка подстановкой $u'=v(u)$ получается уравнение 1-го порядка

$$\frac{dv}{du}=-(2\mu-1)-\frac{\mu(\mu-1)u+u^\alpha}{v}.$$

Уравнение (1) было получено Р. Эмденом [1] в связи с изучением условий равновесия политропного газового шара; эта задача сводится к задаче существования у уравнения (1) с начальными условиями $y(0)=1$, $y'(0)=0$ решения, определенного на нек-ром отрезке $[0,\ x_0]$, $0<x_0<\infty$, и обладающего свойствами:

$$y(x)>0 \text{ при } 0\leqslant x<x_0,\ y(x_0)=0.$$

Иногда уравнение (1) наз. также уравнением Лейна — Эмдена.

Более общими, чем Э. у., являются уравнение Фаулера

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+x^\lambda y^\alpha=0,\ \lambda>0,\ \alpha>0,$$

и уравнение Эмдена — Фаулера

$$\frac{d}{dx}\left(x^\rho\frac{dy}{dx}\right)\pm x^\lambda y^\alpha=0, \tag{2}$$

где ρ, λ, $\alpha\neq1$ — действительные параметры. Как частный случай это уравнение включает уравнение Томаса — Ферми

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y^{3/2}}{\sqrt{x}},$$

возникающее при изучении распределения электронов в атоме. Если $\rho\neq1$, то уравнение (2) заменой переменных может быть преобразовано к виду

$$\frac{d^2w}{ds^2}\pm s^\sigma w^\alpha=0.$$

Имеются различные результаты качественного и асимптотич. исследования решений уравнения Эмдена — Фаулера (см., напр., [2], [3]). Подробно изучалось также уравнение типа Эмдена — Фаулера

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a(x)\,|\,y\,|^\alpha\operatorname{sign}y=0$$

(см. о нем и его аналоге n-го порядка в [4]).

Лит.: [1] Emden R., Gaskugeln, Lpz.— B., 1907; [2] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 2, М., 1954; [3] Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1954; [4] Кигурадзе И. Т., Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, Тб., 1975.

Н. Х. Розов.

ЭМПИРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, распределение выборки, — распределение вероятностей, к-рое определяется по выборке для оценивания истинного распределения. Пусть результаты наблюдений $X_1, \ldots, X_n$ — взаимно независимые и одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $\mathcal{F}(x)$ и пусть $X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(n)}$ — соответствующий вариационный ряд. Эмпирическим распределением, соответствующим $X_1, \ldots, X_n$, наз. дискретное распределение, приписывающее каждому значению X_k вероятность $1/n$. Функция Э. р. $\hat{\mathcal{F}}_n(x)$ наз. эмпирической функцией распределения, является ступенчатой функцией со скачками, кратными $1/n$, в точках, определяемых величинами $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$:

$$\hat{\mathcal{F}}_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant X_{(1)}, \\ \dfrac{k}{n}, & X_{(k)} < x \leqslant X_{(k+1)}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ 1, & x > X_{(n)}. \end{cases}$$

При фиксированных значениях $X_1, \ldots, X_n$ функция $\hat{\mathcal{F}}_n(x)$ обладает всеми свойствами обычной функции распределения. При каждом фиксированном действительном x функция $\hat{\mathcal{F}}_n(x)$ является случайной величиной как функция $X_1, \ldots, X_n$. Таким образом, Э. р., соответствующее выборке $X_1, \ldots, X_n$, задается семейством случайных величин $\hat{\mathcal{F}}_n(x)$, зависящих от действительного параметра x. При этом для фиксированного x

$$\mathsf{E}\hat{\mathcal{F}}_n(x) = \mathcal{F}(x), \quad \mathsf{D}\hat{\mathcal{F}}_n(x) = \frac{1}{n}\mathcal{F}(x)[1-\mathcal{F}(x)]$$

и

$$\mathsf{P}\left\{\hat{\mathcal{F}}_n(x) = \frac{k}{n}\right\} = C_n^k [\mathcal{F}(x)]^k [1-\mathcal{F}(x)]^{n-k}.$$

В соответствии с законом больших чисел $\hat{\mathcal{F}}_n(x) \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathcal{F}(x)$, $n \to \infty$, при каждом x. Это означает, что $\hat{\mathcal{F}}_n(x)$ — несмещенная и состоятельная оценка функции распределения $\mathcal{F}(x)$. Функция Э. р. равномерно по x сходится с вероятностью 1 к $\mathcal{F}(x)$ при $n \to \infty$ или, если

$$D_n = \sup_x |\hat{\mathcal{F}}_n(x) - \mathcal{F}(x)|,$$

то

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} D_n = 0\right\} = 1$$

(теорема Гливенко — Кантелли).

Величина D_n служит мерой близости $\hat{\mathcal{F}}_n(x)$ к $\mathcal{F}(x)$. А. Н. Колмогоров (1933) нашел предельное распределение: для непрерывной функции $\mathcal{F}(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\sqrt{n}\, D_n < z\} = K(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2}, \; z > 0.$$

Если $\mathcal{F}(x)$ неизвестна, то для проверки гипотезы о том, что эта функция есть заданная непрерывная функция $\mathcal{F}_0(x)$, применяются критерии, основанные на статистиках типа D_n (см. *Колмогорова критерий*, *Колмогорова — Смирнова критерий*, *Непараметрические методы статистики*).

Моменты и любые другие характеристики Э. р. наз. выборочными (эмпирическими) моментами и характеристиками, напр.:

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ — выборочное среднее,

$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - X)^2$ — выборочная дисперсия,

$\hat{\alpha}_r = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^r$ — выборочный момент r-го порядка.

Выборочные характеристики служат статистич. оценками соответствующих характеристик исходного распределения.

Лит.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; [2] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [3] Боровков А. А., Математическая статистика, М., 1984.

А. В. Прохоров.

ЭНГЕЛЕВ ЭЛЕМЕНТ — элемент кольца Ли или ассоциативного кольца, для к-рого определяемое им внутреннее дифференцирование является нильпотентным. Если все элементы конечномерной алгебры Ли над нек-рым полем энгелевы, то алгебра нильпотентна (см. *Энгеля теорема*). Индекс нильпотентности упомянутого дифференцирования наз. индексом энгелевости элемента. Совокупность Э. э. алгебры Ли в общем случае не является даже подпространством. Однако при наложении дополнительных условий типа обобщенной разрешимости эта совокупность оказывается подалгеброй и даже идеалом [1]. При наличии Э. э. индекса 2 алгебра Ли наз. сильно вырожденной. Наименьший идеал алгебры Ли, фактор-алгебра по к-рому не является сильно вырожденной, наз. радикалом Кострикина.

Лит.: [1] Amayo R. K., Stewart I., Infinite-dimensional Lie algebras, Leyden, 1974; [2] Кострикин А. И., в кн.: Избранные вопросы алгебры и логики, Новосиб., 1973, с. 142—60.

Ю. А. Бахтурин.

ЭНГЕЛЕВА АЛГЕБРА — ассоциативная алгебра или алгебра Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая условию Энгеля: для всякого $X \in \mathfrak{g}$ внутреннее дифференцирование $\mathrm{ad}\, X$ нильпотентно. Иначе говоря, все элементы Э. а.— *энгелевы элементы* (см. также *Ли нильалгебра*).

Ю. А. Бахтурин.

ЭНГЕЛЕВА ГРУППА — группа G, в к-рой для любых двух элементов a, $b \in G$ существует такое целое $n = n(a, b)$, что $[[\ldots[[a, b], b], \ldots], b] = 1$, где $[a, b]$ — *коммутатор* элементов a и b. Если это число n можно выбрать не зависящим от a, b, то G наз. Э. г. конечного класса n. Класс Э. г. содержит класс локально нильпотентных групп, но не совпадает с ним. Всякая нильпотентная группа класса n будет Э. г. того же класса. Э. г. класса 2 являются нильпотентными группами класса не большего 3.

Названо по имени Ф. Энгеля (F. Engel).

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

Н. Н. Вильямс.

ЭНГЕЛЯ ТЕОРЕМА: пусть для конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем k линейные операторы

$$\mathrm{ad}\, X \ (\text{где } \mathrm{ad}\, X\,(Y) = [X, Y])$$

нильпотентны для всех $X \in \mathfrak{g}$. Тогда существует базис алгебры $\mathfrak{g}$, относительно к-рого матрицы всех операторов $\mathrm{ad}\, X$ треугольны и имеют нулевую диагональ.

Ф. Энгель доказал (ок. 1887, опубликовано в [1]), что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с указанным свойством разрешима, откуда, в силу *Ли теоремы*, непосредственно вытекает сформулированное выше утверждение. Первое опубликованное доказательство Э. т. принадлежит В. Киллингу [2], указывавшему на приоритет Ф. Энгеля. Э. т. формулируется часто в следующей более общей форме: если $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\, V$ — линейное представление конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве V ($\mathfrak{g}$ и V — над произвольным полем), причем $\rho(X)$ — нильпотентный эндоморфизм для любого $X \in \mathfrak{g}$, то существует ненулевой вектор $v \in V$ такой, что $\rho(X)v = 0$ для любого $X \in \mathfrak{g}$. Если V конечномерно, то отсюда выводится существование в V базиса, относительно к-рого все $\rho(X)$ имеют треугольные матрицы с нуле-

вой диагональю (или, что то же, существует полный флаг $F=\{V_i\}$ в V, для к-рого $\rho(X)\ (V_i)\subset V_{i-1}$ для всех $X\in\mathfrak{g}$ и $i\geqslant 1$). Заключение Э. т. справедливо также для любого представления ρ, для к-рого алгебра Ли $\rho(\mathfrak{g})$ является линейной оболочкой нек-рого своего подмножества, состоящего из нильпотентных эндоморфизмов и замкнутого относительно операции коммутирования [4].

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ наз. э н г е л е в о й, если любой $X\in\mathfrak{g}$ является *энгелевым элементом*, т. е. если все операторы $\mathrm{ad}\,X$, $X\in\mathfrak{g}$, нильпотентны или, что то же, если для любого X найдется такое n, что

$$\underbrace{[X,\,[X\ldots[X,\,Y]\ldots]}_{n}=0$$

для любого $Y\in\mathfrak{g}$. Конечномерная алгебра Ли энгелева тогда и только тогда, когда она нильпотентна. Для бесконечномерных алгебр нильпотентность не вытекает из энгелевости, однако конечно порожденная алгебра Ли, в к-рой $(\mathrm{ad}\,X)^n=0$ для нек-рого n (где n не зависит от X), нильпотентна [3].

Лит.: [1] L i e S., E n g e l F., Theorie der Transformationsgruppen, Bd 3, Lpz., 1893; [2] K i l l i n g W., «Math. Ann.», 1888, Bd 31, S. 252—90; [3] L e v i t z k i J., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1946, v. 52, p. 1033—35; [4] Д ж е к о б с о н Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [5] Б у р б а к и Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976. *В. В. Горбацевич.*

ЭНДОМОРФИЗМ а л г е б р а и ч е с к о й с и с т е м ы — отображение алгебраич. системы A в себя, согласованное с ее структурой. А именно, если A — алгебраич. система, сигнатура к-рой состоит из множества Ω_F символов операций и множества Ω_P символов предикатов, то Э. $\varphi: A\to A$ должен удовлетворять следующим двум условиям:

1) $\varphi(a_1,\ \ldots,\ a_n\omega)=\varphi(a_1)\ldots\varphi(a_n)\,\omega$ *для любой* n-арной операции $\omega\in\Omega_F$ и любой последовательности элементов $a_1,\ \ldots,\ a_n$ системы A;

2) $P(a_1,\ \ldots,\ a_n)\Rightarrow P(a_1\varphi,\ \ldots,\ a_n\varphi)$ для любого n-местного предиката $P\in\Omega_P$ и любой последовательности элементов $a_1,\ \ldots,\ a_n\in A$.

Понятие Э. является частным случаем понятия *гомоморфизма* двух алгебраич. систем. Для любой алгебраич. системы все ее Э. образуют моноид относительно операции последовательного выполнения (суперпозиции) отображений, единицей к-рого служит тождественное отображение основного множества системы (см. *Эндоморфизмов полугруппа*).

Э., для к-рого существует обратный, наз. *автоморфизмом* алгебраич. системы. *М. Ш. Цаленко.*

ЭНДОМОРФИЗМОВ КОЛЬЦО — ассоциативное кольцо $\mathrm{End}\,A=\mathrm{Hom}(A,A)$, состоящее из всех морфизмов A в себя, где A — объект нек-рой *аддитивной категории* C. Умножение в $\mathrm{End}\,A$ совпадает с композицией морфизмов, а *сложение* — со сложением морфизмов, определенным аксиомами аддитивной категории. Тождественный морфизм 1_A является единицей кольца $\mathrm{End}\,A$. Элемент φ из $\mathrm{End}\,A$ обратим тогда и только тогда, когда φ — автоморфизм объекта A. Если A и B — нек-рые объекты категории C, то группа $\mathrm{Hom}(A,B)$ обладает естественной структурой правого модуля над кольцом $\mathrm{End}\,A$ и левого модуля над кольцом $\mathrm{End}\,B$. Пусть $T: C\to C'$ — ковариантный (соответственно контравариантный) аддитивный функтор из аддитивной категории C в аддитивную категорию C'. Тогда для любого объекта A из C функтор T индуцирует естественный гомоморфизм (соответственно естественный антигомоморфизм) $\mathrm{End}\,A\to\mathrm{End}\,(T(A))$.

Пусть C — категория модулей над кольцом R. Для R-модуля A кольцо $\mathrm{End}\,A$ состоит из всех эндоморфизмов абелевой группы A, перестановочных с умноже-

нием на элементы из R. Сумма эндоморфизмов φ, ψ определяется формулой

$$(\varphi+\psi)(a)=\varphi(a)+\psi(a),\ a\in A.$$

Если R — коммутативно, то кольцо End A обладает естественной структурой R-алгебры. Многие свойства модуля A могут быть охарактеризованы в терминах кольца End A. Напр., модуль A неприводим тогда и только тогда, когда End A является телом.

Произвольный гомоморфизм π ассоциативного кольца K в End A наз. представлением кольца K (эндоморфизмами объекта A). Если K — кольцо с единицей, то накладывается дополнительное условие $\pi(1)=1_A$. Любое ассоциативное кольцо K обладает точным представлением в Э. к. нек-рой абелевой группы A. Причем, если K — кольцо с единицей, то в качестве A можно взять аддитивную группу кольца K, на к-рую элементы из K действуют умножением слева. Если же K — кольцо без единицы и K' — кольцо, полученное из K внешним присоединением единицы к K, то в качестве A можно взять аддитивную группу кольца K'.

В случае абелева многообразия X наряду с кольцом End A, являющимся конечно порожденным $\mathbb{Z}$-модулем, рассматривают алгебру эндоморфизмов (алгебру комплексных умножений) $\mathrm{End}^0 X=\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{End}\,X$.

Лит.: [1] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, т. 1—2, пер. с англ., М., 1977—79; [2] Мамфорд Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971; [3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 21, М., 1983, с. 183—254.

Л. В. Кузьмин.

ЭНДОМОРФИЗМОВ ПОЛУГРУППА — полугруппа, состоящая из эндоморфизмов нек-рого объекта (множества X, наделенного какой-либо структурой σ) с операцией умножения (последовательного применения выполнения преобразований). Объектом X могут быть векторное пространство, топологич. пространство, алгебраич. система, граф и т. д.; он рассматривается обычно как объект нек-рой категории, причем, как правило, морфизмами в этой категории являются отображения, сохраняющие отношения структуры σ (линейные преобразования, непрерывные преобразования, гомоморфизмы и т. п.). Множество End X всех эндоморфизмов объекта X (т. е. морфизмов на свои подобъекты) является подполугруппой полугруппы T_X всех преобразований множества X (см. *Преобразований полугруппа*).

Полугруппа End X может нести в себе значительную информацию о структуре σ. Напр., если X, Y — векторные пространства размерности $\geqslant 2$ над телами F и H соответственно, то из изоморфизма полугрупп End X и End Y их эндоморфизмов (т. е. линейных преобразований) вытекает изоморфизм пространств X и Y (и в частности, изоморфизм тел F и H). Нек-рые предупорядоченные множества и решетки, всякое булево кольцо и нек-рые другие алгебраич. системы определяются своими Э. п. с точностью до изоморфизма. Этот же результат справедлив и для нек-рых модулей и полугрупп преобразований. Аналогичную информацию об объекте X несут в себе и нек-рые собственные подполугруппы полугруппы End X (напр., полугруппы гомеоморфных преобразований топологич. пространства).

Нек-рые классы объектов X (напр., графы, топологич. пространства) могут быть таким же образом охарактеризованы своими полугруппами частичных эндоморфизмов, т. е. частичных преобразований множества X, являющихся морфизмами их подобъектов.

Лит.: [1] Глускин Л. М., в кн.: Труды 4-го Всесоюзного математического съезда, т. 2, Л., 1964, с. 3—9; [2] Зыков А. А., Теория конечных графов, Новосиб., 1969; [3] Magill K. D., «Semigroup Forum», 1975/76, v. 11, № 3, p. 189—282; [4] Petrich M., Rings and semigroups, B.— N. Y., 1974.

Л. М. Глускин.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД — см. *Ритца метод.*

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО — неравенство, тем или иным образом оценивающее *энергии интеграл.*

Лит.: [1] Мизохата С., Теория уравнений с частными производными, пер. с япон., М., 1977.

А. Б. Иванов.

ЭНЕРГИЙ ИНТЕГРАЛ — величина, представляющая собой сумму кинетической и потенциальной энергий механич. системы в нек-рый момент времени.

Пусть, напр., в ограниченной области Ω с кусочно гладкой границей S для уравнения гиперболич. типа

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u)-qu+F(x,t)\equiv -Lu+F(x,t), \quad (1)$$

где

$$p\in C^1(G),\ q\in C(\bar G),\ p(x)>0,\ q(x)\geqslant 0,\ x\in C(G),\ \rho\in C(G),$$

поставлена смешанная задача

$$u|_{t=+0}=u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=+0}=u_1(x), \quad (2)$$

$$\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=0,\ t\geqslant 0, \quad (3)$$

$$\alpha\in C(S),\ \beta\in C(S),\ \alpha(x)\geqslant 0,\ \beta(x)\geqslant 0,\ \alpha(x)+\beta(x)>0.$$

Классич. решение задачи (2), (3) — функция $u(x,t)$ класса $C^2(G\times(0,\infty))\cap C^1(\overline{G\times(0,\infty)})$, удовлетворяющая уравнению (1) в цилиндре $G\times(0,\infty)$, начальным условиям (2) на нижнем основании и граничным условиям (3) на боковой поверхности цилиндра.

Справедливо соотношение

$$J^2(t)=J^2(0)+\int_0^t\int_G F(x,t)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau,\ t\geqslant 0, \quad (4)$$

где

$$J^2(0)=\frac{1}{2}\int_G(\rho u_1^2+p|\operatorname{grad}u_0|^2+qu_0^2)\,dx+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{S_0}p\frac{\alpha}{\beta}u_0^2\,dS.$$

Интегралом энергии наз. величина

$$J^2(t)=\frac{1}{2}\int_G\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+p|\operatorname{grad}u|^2+qu^2\right]dx+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{S_0}p\frac{\alpha}{\beta}u^2\,dS.$$

При $F=0$ равенство (4) принимает вид

$$J^2(t)=J^2(0),\ t\geqslant 0.$$

Физич. смысл Э. н. состоит в том, что полная энергия колеблющейся системы при отсутствии внешних возмущений не меняется со временем (закон сохранения энергии).

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981.

А. Б. Иванов.

ЭНЕРГИЯ МЕР — понятие *потенциала теории*, являющееся аналогом физич. понятия потенциальной энергии системы электрич. зарядов. Пусть для точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$,

$$H(|x|)=\begin{cases}\ln\frac{1}{|x|} & \text{при } n=2,\\ \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{при } n\geqslant 3\end{cases} \quad (1)$$

— фундаментальное решение уравнения Лапласа и

$$U_\mu(x)=\int H(|x-y|)\,d\mu(y) \quad (2)$$

— ньютонов (при $n\geqslant 3$) или логарифмический (при $n=2$) потенциал борелевской меры μ на $\mathbb{R}^n$.

Ограничиваясь пока случаем $n\geqslant 3$, определяют взаимную энергию неотрицательных мер μ и ν равенством

$$(\mu,\nu)=\int H(|x-y|)\,d\mu(x)\,d\nu(y)=$$
$$=\int U_\mu(y)\,d\nu(y)=\int U_\nu(x)\,d\mu(x), \quad (3)$$

причем $(\mu, \nu) \geqslant 0$, но может оказаться $(\mu, \nu) = +\infty$. Энергия меры $\mu \geqslant 0$ — это число (μ, μ), $0 \leqslant (\mu, \mu) \leqslant +\infty$. Для мер μ, ν произвольного знака можно воспользоваться канонич. разложениями $\mu = \mu^+ - \mu^-$, $\nu = \nu^+ - \nu^-$ (или любыми разложениями вида $\mu = \mu_1 - \mu_2$, $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$) и определить взаимную Э. м. равенством

$$(\mu, \nu) = (\mu^+, \nu^+) + (\mu^-, \nu^-) - (\mu^+, \nu^-) - (\mu^-, \nu^+),$$

причем взаимная Э. м. может оказаться и отрицательной, но

$$(\mu, \mu) \geqslant \left(\sqrt{(\mu^+, \mu^+)} - \sqrt{(\mu^-, \mu^-)}\right)^2 \geqslant 0.$$

Совокупность $\mathcal{E}$ всех мер с конечной энергией превращается в предгильбертово векторное пространство со скалярным произведением (μ, ν) и энергетической нормой $\|\mu\|_e = \sqrt{(\mu, \mu)}$. При этом выполняются 1) неравенство Буняковского $|(\mu, \nu)| \leqslant \|\mu\|_e \cdot \|\nu\|_e$ и 2) принцип энергии: если $\|\mu\|_e = 0$, то $\mu = 0$. А. Картан (H. Cartan) показал, что пространство $\mathcal{E}$ не является полным, но множество $\mathcal{E}^+ \subset \mathcal{E}$ неотрицательных мер полно в $\mathcal{E}$.

Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Среди всех вероятностных мер λ на K, т. е. таких, что $\lambda \geqslant 0$, $\lambda(K) = 1$, существует экстремальная емкостная мера λ_0 с минимальной Э. м. (λ_0, λ_0), к-рая связана с емкостью $C(K)$ компакта K соотношением

$$(\lambda_0, \lambda_0) = \int_K U_{\lambda_0}(x)\, d\lambda_0(x) = \frac{1}{C(K)}. \qquad (4)$$

Если потенциал $U_\mu(x)$ меры $\mu \in \mathcal{E}$ допускает градиент с суммируемым квадратом, то имеет место равенство

$$c(n) \|\mu\|_e = \|U_\mu\|, \qquad (5)$$

где

$$\|U_\mu\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{grad}^2 U_\mu(x)\, dx\right)^{1/2}$$

— норма Дирихле, а $c(n) = (n-2)\, 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, $n \geqslant 3$. На самом деле равенство (5) остается в силе для любой меры $\mu \in \mathcal{E}$, причем норма Дирихле $\|U_\mu\|$ определяется при помощи соответствующего предельного перехода.

В случае плоскости $\mathbb{R}^2$ непосредственное применение для определения Э. м. формулы (3) с логарифмич. потенциалом (2) невозможно вследствие особого поведения логарифмич. ядра (1) на бесконечности. Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, допускающая функцию Грина $g(x, y)$, и μ — борелевская мера на Ω. Применяя в (3) вместо потенциалов $U_\mu(x)$, $U_\nu(x)$ потенциалы Грина вида

$$G_\mu(x) = \int_\Omega g(x, y)\, d\mu(y),$$

получают при $n \geqslant 3$ определение Э. м., равносильное данному выше для мер на Ω, к-рое, однако, оказывается пригодным и при $n = 2$ с сохранением всех описанных свойств (причем $c(2) = 2\pi$).

Лит.: [1] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [2] Уэрмер Дж., Теория потенциала, пер. с англ., М., 1980; [3] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966.

Е. Д. Соломенцев.

ЭННЕПЕРА ПОВЕРХНОСТЬ — алгебраическая *минимальная поверхность*, наложимая на поверхность вращения. Ее параметрич. уравнения:

$$x = \frac{1}{4}(u^3 - 3u - 3uv^2), \quad y = \frac{1}{4}(3v + 3u^2v - v^3),$$

$$r = \frac{3}{4}(v^2 - u^2).$$

Найдена А. Эннепером (A. Enneper, 1864).

М. И. Войцеховский.

ЭНТРОПИЙНАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ — раздел *эргодической теории*, тесно связанный

с теорией вероятностей и теорией информации. Природа этой связи в общих чертах такова.

Пусть $\{T_t\}$ — динамич. система (обычно *измеримый поток* или *каскад*) с фазовым пространством W и *инвариантной мерой* μ. Пусть $f: W \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, а ξ — *измеримое разбиение* W на прообразы $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$ (для дальнейшего достаточно рассматривать прообразы f, имеющей счетное, обычно даже конечное, число значений и соответствующие ξ). Тогда

$$\{t \longmapsto f(T_t w)\}$$

есть стационарный (в узком смысле слова) *случайный процесс* с пространством элементарных событий W. Обычным образом этот процесс можно рассматривать как процесс $\{X_t(\omega)\}$, пространством элементарных событий к-рого служит пространство Ω *выборочных функций* ω, снабженное надлежащей мерой ν, а $X_t(\omega) = \omega(t)$. Отображение

$$\pi: W \longrightarrow \Omega, \quad (\pi w)(t) = f(T_t w)$$

является гомоморфизмом пространств с мерой (см. определение в ст. *Метрический изоморфизм*), переводящим $\{T_t\}$ в сдвиги $\{S_t\}$, где $(S_t\omega)(\tau) = \omega(t+\tau)$.

Процесс $\{X_t(\omega)\}$ содержит нек-рую информацию об исходной системе $\{T_t\}$. Это может быть даже полная информация, если π — изоморфизм (тогда говорят, что разбиение ξ — о б р а з у ю щ е е для системы $\{T_t\}$; если T — автоморфизм, то разбиение наз. о д н о с т о р о н н е о б р а з у ю щ и м для T, если оно является образующим для каскада $\{T^n, n \geqslant 0\}$, и д в у с т о р о н н е о б р а з у ю щ и м для T, если оно — образующее для $\{T^n, n \in \mathbb{Z}\}$). Однако $\{X_t(\omega)\}$ зависит также от выбора f, т. е. прежде всего от ξ (конкретные значения f на элементах ξ здесь менее важны). Для эргодической теории интересны те свойства индивидуального процесса $\{X_t(\omega)\}$ или совокупности таких процессов (получающихся при различных ξ), к-рые являются свойствами самой системы $\{T_t\}$. Однако выделить такие свойства долго не удавалось либо они сводились к известным.

Эту трудность удалось преодолеть в середине 50-х гг. 20 в. А. Н. Колмогорову, к-рый ввел принципиально новый (неспектральный) инвариант — метрич. *энтропию* динамич. системы — и подчеркнул роль в о з р а с т а ю щ и х измеримых разбиений η (уже континуальных), т. е. таких, для к-рых $T_t\eta$ мельче η (mod 0) при $t > 0$. (Таким является разбиение, описывающее «прошлое» процесса $\{X_t(\omega)\}$.) (См. также *K-система*, *Точный эндоморфизм*.) Разработка этого круга вопросов (включая вопрос о существовании и свойствах образующих разбиений) составляет предмет Э. т. д. с. в том виде, как она сложилась к сер. 60-х гг. (см. [1]). Существенным добавлением к нему явилась более новая и несколько более специальная теория Д. Орнстейна (D. Ornstein), в к-рой более непосредственным образом используются вспомогательные случайные процессы $\{X_t(\omega)\}$ (см. [2]). Ввиду необходимости обеспечить инвариантность относительно метрич. изоморфизма в обеих частях Э. т. д. с., «колмогоровской» и «орнстейновской», вероятностные и теоретико-информационные идеи выступают в существенно преобразованном виде.

Примером могут служить имеющиеся в Э. т. д. с. два условия типа «регулярности» случайного процесса. Одно из них приводит к определению K-систем. Другое, более ограничительное — очень слабая бернуллиевость, — оказывается необходимым и достаточным для того, чтобы сдвиг в пространстве выборочных функций был изоморфен *Бернулли автоморфизму*. Оно поддается проверке в ряде примеров, исходные определения к-рых не имеют отношения к случайным процессам.

Лит.: [1] Р о х л и н В. А., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3—56; [2] О р н с т е й н Д., Эргодическая тео-

рия, случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978.

См. также лит. при статьях *К-система*, *Энтропия*, *Эргодическая теория*. *Д. В. Аносов.*

ЭНТРОПИЯ — теоретико-информационная мера степени неопределенности случайной величины. Если ξ — дискретная случайная величина, определенная на нек-ром вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ и принимающая значения $x_1, x_2, \ldots$ с распределением вероятностей $\{p_k,\ k=1,\ 2, \ldots\}$, $p_k=\mathsf{P}\{\xi=x_k\}$, то Э. определяется формулой

$$H(\xi) = -\sum_{k=1}^{\infty} p_k \log p_k \qquad (1)$$

(при этом считается, что $0 \log 0=0$). Основанием логарифма может служить любое положительное число, но обычно рассматривают логарифмы по основанию 2 или e, что соответствует выбору *бит* или *нат* (натуральная единица) в качестве единицы измерения.

Если ξ и η — две дискретные случайные величины, принимающие значения $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ с распределениями вероятностей $\{p_k,\ k=1,\ 2, \ldots\}$ и $\{q_j,\ j=1,\ 2, \ldots\}$ соответственно, и $\{p_{k|j},\ k=1,\ 2, \ldots\}$ — условное распределение ξ при условии, что $\eta=y_j$, $j=1,\ 2, \ldots$, то (средней) *условной* Э. $H(\xi|\eta)$ величины ξ относительно η наз. величина

$$H(\xi \mid \eta) = -\sum_{j=1}^{\infty} q_j \sum_{k=1}^{\infty} p_{k|j} \log p_{k|j}. \qquad (2)$$

Пусть $\xi=\{\xi_k,\ k=\ldots,\ -1,\ 0,\ 1, \ldots\}$ — стационарный процесс с дискретным временем и дискретным пространством значений такой, что $H(\xi_1)<\infty$. Тогда Э. (точнее, средней Э. на символ) $\overline{H}(\xi)$ такого стационарного процесса наз. предел

$$\overline{H}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi^n), \qquad (3)$$

где $H(\xi^n)$ — Э. случайной величины $\xi^n=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Известно, что предел в правой части (3) всегда существует и имеет место равенство

$$\overline{H}(\xi) = \lim_{n\to\infty} H(\xi_n \mid \xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n-1}), \qquad (4)$$

где $H(\xi_n|\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ — условная Э. ξ_n относительно $\xi^{n-1}=(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Э. стационарных процессов находит важные применения в теории динамич. систем.

Если μ и ν — две меры на нек-ром измеримом пространстве $(\Omega, \mathfrak{A})$, причем мера μ абсолютно непрерывна относительно ν и $d\mu/d\nu$ — соответствующая производная Радона — Никодима, то Э. $H(d\mu/d\nu)$ меры μ относительно меры ν наз. интеграл

$$H(d\mu/d\nu) = \int_{\Omega} \log \frac{d\mu}{d\nu}\, \nu(d\omega). \qquad (5)$$

Частным случаем Э. меры по мере является *дифференциальная энтропия*.

Из многих возможных обобщений понятия Э. для теории информации одним из самых важных является следующее. Пусть ξ и $\tilde{\xi}$ — две случайные величины, принимающие значения в нек-рых измеримых пространствах $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$ и $(\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$ соответственно. Пусть заданы распределение $p(\cdot)$ случайной величины ξ и класс W допустимых совместных распределений пары $(\xi, \tilde{\xi})$ в множестве всех вероятностных мер в произведении $(\mathfrak{X}\times\tilde{\mathfrak{X}},\ S_{\mathfrak{X}}\times S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$. Тогда *W-энтропией* (или Э. при заданном условии *сообщений точности воспроизведения* W) наз. величина

$$H_W(\xi) = \inf I(\xi, \tilde{\xi}), \qquad (6)$$

где $I(\xi, \tilde{\xi})$ — *информации количество* в $\tilde{\xi}$ относительно ξ, а нижняя грань берется по всем парам случайных величин $(\xi, \tilde{\xi})$ таким, что совместное распределение

$p(\cdot, \cdot)$ пары $(\xi, \tilde{\xi})$ принадлежит W, а ξ имеет распределение $p(\cdot)$. Класс W совместных распределений $p(\cdot, \cdot)$ часто задают с помощью нек-рой неотрицательной измеримой действительнозначной функции $\rho(x, \tilde{x}), x \in \mathfrak{X}, x \in \tilde{\mathfrak{X}}$, — **меры искажения** следующим образом:

$$W = \{p(\cdot, \cdot): \mathsf{E}\rho(\xi, \tilde{\xi}) \leqslant \varepsilon\}, \tag{7}$$

где $\varepsilon > 0$ — нек-рое фиксированное число. В этом случае величину, определяемую равенством (6), где W задается (7), называют ε-**энтропией** (**или скоростью как функцией искажения**) и обозначают $H_\varepsilon(\xi)$. Напр., если $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — гауссовский случайный вектор с независимыми компонентами, $\mathsf{E}\xi_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а функция $\rho(x, \tilde{x})$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ имеет вид

$$\rho(x, \tilde{x}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \tilde{x}_k)^2,$$

то $H_\varepsilon(\xi)$ может быть найдена по формуле

$$H_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \log \max\left(\frac{\mathsf{E}\xi_k^2}{\lambda}, 1\right),$$

где λ определяется из уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} \min(\lambda, \mathsf{E}\xi_k^2) = \varepsilon.$$

Если ξ — дискретная случайная величина, пространства $(\mathfrak{X}, S_{\mathfrak{X}})$ и $(\tilde{\mathfrak{X}}, S_{\tilde{\mathfrak{X}}})$ совпадают, а функция $\rho(x, \tilde{x})$ имеет вид

$$\rho(x, \tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = \tilde{x}, \\ 1, & \text{если } x \neq \tilde{x}, \end{cases}$$

то ε-Э. при $\varepsilon = 0$ равна обычной Э., определяемой в (1), т. е. $H_0(\xi) = H(\xi)$.

Лит.: [1] Шеннон К., Математическая теория связи, в сб.: Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963, с. 243—332; [2] Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974; [3] Berger T., Rate distortion theory, Englewood Cliffs (N. J.), 1971; [4] Билингслей П., Эргодическая теория и информация, пер. с англ., М., 1969.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

ЭНТРОПИЯ измеримого разбиения ξ пространства с нормированной мерой (X, μ) — понятие, определяемое следующим образом. Если элементы разбиения ξ, имеющие меру нуль, образуют в совокупности множество положительной меры, то Э. измеримого разбиения $H(\xi) = \infty$, в противном случае

$$H(\xi) = -\sum \mu(C) \log \mu(C),$$

где сумма берется по всем элементам ξ, имеющим положительную меру. Логарифм — обычно двоичный.

Д. В. Аносов.

ЭНТРОПИЯ метрическая динамической системы — один из важнейших инвариантов в *эргодической теории*. Основным является понятие Э. $h(S)$ эндоморфизма S (см. *Метрический изоморфизм*) *Лебега пространства* (X, μ). Для любого конечного *измеримого разбиения* ξ существует предел (энтропия ξ на единицу времени относительно S)

$$h(S, \xi) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\xi_S^n),$$

$$\xi_S^n = \xi \vee S^{-1}\xi \vee \ldots \vee S^{-n+1}\xi,$$

где $H(\xi)$ — *энтропия* измеримого разбиения ξ, а $\xi \vee \eta$ — разбиение, элементы к-рого суть пересечения элементов разбиений ξ и η (это определение дословно переносится на ξ с $H(\xi) < \infty$; другим способом $h(S, \xi)$ определяется для любых измеримых ξ). Э. $h(S)$ определяют как верхнюю грань $h(S, \xi)$ по всевозможным конечным измеримым ξ (она может равняться ∞; использование всех ξ с $H(\xi) < \infty$ или всех измеримых ξ дает ту же Э.).

Первоначально Э. была определена А. Н. Колмогоровым несколько иначе (см. [1]); приведенный выше вариант был дан позже (см. [2]). В основном случае *апериодического автоморфизма* пространства Лебега определения в конечном счете — эквивалентны [3].

Оказывается, что $h(S^n)=nh(S)$, а если S — автоморфизм, то $h(S^{-1})=h(S)$. Поэтому Э. *каскада* $\{S^n\}$ естественно считать $h(S)$. Для *измеримого потока* $\{S_t\}$ оказывается, что $h(S_t)=|t|h(S_1)$. Поэтому Э. потока естественно считать $h(S_1)$. Несколько иначе определяется Э. для других групп преобразований с инвариантной мерой (она уже не сводится к Э. одного из преобразований, входящих в эту группу; см. [5], [6]). Имеется модификация Э. для случая бесконечной инвариантной меры [7]; еще одна модификация — A-**энтропия** (где $A=\{k_n\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел) — получается при замене ξ_S^n на

$$S^{-k_1}\xi \vee \ldots \vee S^{-k_n}\xi$$

и $\lim$ на $\overline{\lim}$ (см. [8]).

Э. является инвариантом метрического изоморфизма динамич. систем, принципиально отличным от известных ранее инвариантов, в основном связанных со *спектром динамической системы*. В частности, с помощью энтропии *Бернулли автоморфизмов* (см. [1]) впервые установлено существование неизоморфных эргодич. систем с одинаковым непрерывным спектром (что контрастирует с ситуацией для дискретного спектра). В более широком плане роль Э. связана с тем, что вместе с ней в эргодич. теории возникло новое направление — **энтропийная теория** динамич. систем (см. [3], [4] и *эргодическая теория*).

Э. дает нек-рую среднюю характеристику скорости *перемешивания* множества малой меры (точнее, набора таковых, образующих разбиение). Наряду с этой «глобальной» ролью Э. играет и «локальную» роль, к-рая устанавливается **эргодической теоремой Бреймана** (**индивидуальная эргодическая теорема теории информации**): для эргодического S при почти всех x

$$\frac{1}{n}\left|\lg \mu\left(C_{\xi_S^n}(x)\right)\right| \longrightarrow h(S, \xi) \text{ при } n \longrightarrow \infty,$$

где $C_\eta(x)$ — элемент разбиения η, содержащий x, а логарифм берется по тому же основанию, что и в определении H (см. [9], [4]). (Теорема Бреймана верна для ξ с $H(\xi)<\infty$ [10], но, вообще говоря, неверна для счетных ξ с $H(\xi)=\infty$ [11]; имеются также варианты с неэргодическим S (см. [4], [12]) и бесконечной μ [13]. Более слабое утверждение о сходимости в смысле L_1 доказано для нек-рого общего класса групп преобразований [6].

Для гладких динамич. систем с гладкой инвариантной мерой установлена связь между Э. и *Ляпунова характеристическими показателями* уравнений в вариациях (см. [14] — [16]).

Название «Э.» объясняется аналогией Э. в теории динамич. систем с Э. в *информации теории* и статистич. физике, вплоть до совпадения этих Э. в нек-рых примерах (см., напр. [4], [17]). Аналогия со статистич. физикой явилась одним из стимулов введения в эргодич. теорию (уже не в чисто метрич. контексте, а для *топологических динамических систем*) новых понятий — «гиббсовских мер», «топологического давления» (аналог свободной энергии) и «вариационного принципа» для последнего (см. *лит.* при статьях *У-система*, *Топологическая энтропия*).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1958, т. 119, № 5, с. 861—64; 1959, т. 124, № 4, с. 754—55; [2] Синай Я. Г., там же, 1959, т. 124, № 4, с. 768—71; [3] Рохлин В. А., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3—56; [4] Биллингслей П., Эргодическая теория и информация, пер. с англ., М., 1969; [5] Сафонов А. В.,

«Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1983, т. 47, № 2, с. 421—26; [6] Kieffer J. C., «Ann. Probab.», 1975, v. 3, № 6, p. 1031—37; [7] Krengel U., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.», 1967, Bd 7, № 3, S. 161—81; [8] Кушниренко А. Г., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 37—65; [9] Breiman L., «Ann. Math. Statistics», 1957, v. 28, № 3, p. 809—11; 1960, v. 31, № 3, p. 809—10; [10] Chung K. L., там же, 1961, v. 32, № 3, p. 612—14; [11] Пицкель Б. С., «Проблемы передачи информации», 1976, т. 12, № 2, с. 98—103; [12] Jonescu-Tulcea A., «Arkiv mat.», 1961, Bd 4, H. 2—3, № 18, S. 235—47; [13] Klimko E. M., Sucheston L., «Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.», 1968, Bd 10, № 3, S. 226—35; [14] Миллионщиков В. М., «Дифференциальные уравнения», 1976, т. 12, № 12, с. 2188—92; [15] Песин Я. Б., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 4, с. 55—112; [16] Mañé R., «Ergodic theory and dynamical systems», 1981, v. 1, № 1, p. 95—102; [17] Robinson D. W., Ruelle D., «Commun. math.-phys.», 1967, v. 5, № 4, p. 288—300.

Д. В. Аносов.

ε-ЭНТРОПИЯ множества в метрическом пространстве — двоичный логарифм наименьшего числа точек ε-сети для этого множества. Иначе говоря, ε-Э. $\mathcal{H}_\varepsilon(C, X)$ множества C, лежащего в метрич. пространстве (X, ρ), равна.

$$\mathcal{H}_\varepsilon(C, X) = \log_2 N_\varepsilon(C, X),$$

где

$$N_\varepsilon(C, X) = \inf\{n \mid \exists x_1, \ldots, x_n,\ x_i \in X:\ C \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)\},$$

а $B(\xi, \alpha) = \{x \in X \mid \rho(x, \xi) \leqslant \alpha\}$ — шар с центром в точке ξ радиуса α. Определение величины $\mathcal{H}_\varepsilon(C, X)$ было дано А. Н. Колмогоровым [1], исходившим от нек-рых идей и определений *информации теории*. Величину $\mathcal{H}_\varepsilon(C, X)$ наз. также относительной ε-энтропией; она зависит от пространства X, в к-ром находится множество C, т. е. от метрич. расширения множества C. Величина

$$\mathcal{H}_\varepsilon(C) = \inf \mathcal{H}_\varepsilon(C, X),$$

где нижняя грань берется по всем метрич. расширениям X пространства C, наз. абсолютной ε-энтропией множества C. Величина $\mathcal{H}_\varepsilon(C)$ допускает и прямое определение (также предложенное А. Н. Колмогоровым [1]): для метрич. пространства C величина $\mathcal{H}_\varepsilon(C)$ есть двоичный логарифм мощности $N_\varepsilon(C)$ наиболее экономного (по числу множеств) 2ε-покрытия C. При этом система множеств $\{C_i\}$ наз. 2ε-покрытием C, если $C_i \subset C$, $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = C$ и диаметр каждого множества не превосходит 2ε. Доказано [2] минимальное свойство абсолютной ε-Э. Величины $N_\varepsilon(C)$, $N_\varepsilon(C, X)$ суть величины, обратные к поперечникам $\varepsilon_N(C)$ и $\varepsilon_N(C, X)$, характеризующим наилучшие возможности восстановления элементов из C с помощью таблицы из N элементов и наилучшие возможности аппроксимации N-точечными множествами. Исследование асимптотики ε-Э. различных функциональных классов составило специальный раздел теории приближений.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1956, т. 108, № 3, с. 385—88; [2] Витушкин А. Г., Оценка сложности задачи табулирования, М., 1959; [3] Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 2, с. 3—86.

В. М. Тихомиров.

ЭПИДЕМИЙ ПРОЦЕСС — случайный процесс, служащий математич. моделью распространения какой-либо эпидемии. Одна из простейших таких моделей описывается марковским процессом с непрерывным временем, состояния к-рого в момент t описываются числом $\mu_1(t)$ больных особей и числом $\mu_2(t)$ восприимчивых особей. Если $\mu_1(t) = m$, $\mu_2(t) = n$, то за время $(t, t+\Delta t)$, $\Delta t \to 0$, вероятности переходов определяются следующим образом: $(m, n) \to (m+1, n-1)$ с вероятностью $\lambda mn\Delta t + o(\Delta t)$; $(m, n) \to (m-1, n)$ с вероятностью $\mu m \Delta t + o(\Delta t)$. В этом случае производящая функция

$$F(t;\ x,\ y) = \mathsf{E} x^{\mu_1(t)} y^{\mu_2(t)}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lambda(x^2 - xy)\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} + \mu(1-x)\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Б. А. Севастьянов.

ЭПИМЕНИДА ПАРАДОКС — то же, что *антиномия* Эпименида.

ЭПИМОРФИЗМ — понятие, отражающее алгебраич. свойства сюръективных отображений множеств. Морфизм $\pi : A \to B$ категории $\mathfrak{N}$ наз. эпиморфизмом, если из равенства $\pi\alpha = \pi\beta$ следует равенство $\alpha = \beta$. Другими словами, Э.— это сократимый слева морфизм.

Всякий изоморфизм является Э. Произведение двух Э. является Э. Поэтому все Э. произвольной категории $\mathfrak{N}$ образуют подкатегорию в $\mathfrak{N}$ (обозначаемую $\mathrm{Epi}\,\mathfrak{N}$).

В категориях множеств, векторных пространств, групп, абелевых групп Э.— это в точности отображения, линейные отображения, гомоморфизмы одного множества, векторного пространства или одной группы на другое множество, векторное пространство или другую группу. Однако в категориях топологич. пространств или ассоциативных колец существуют несюръективные Э. (т. е. не являющиеся отображениями «на»).

Понятие Э. дуально понятию *мономорфизма*.

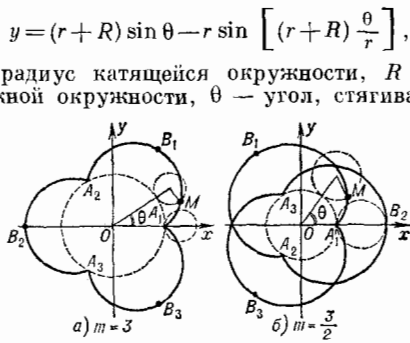
М. Ш. Цаленко.

ЭПИЦИКЛОИДА — плоская кривая, траектория точки окружности, катящейся по другой окружности и имеющей с ней внешнее касание. Параметрич. уравнения:

$$x = (r+R)\cos\theta - r\cos\left[(r+R)\frac{\theta}{r}\right],$$

$$y = (r+R)\sin\theta - r\sin\left[(r+R)\frac{\theta}{r}\right],$$

где r — радиус катящейся окружности, R — радиус неподвижной окружности, θ — угол, стягиваемый дугой между точками касания окружностей (см. рис.). В зависимости от величины модуля $m = R/r$ получаются Э. различной формы. При $m=1$ Э.— *кардиоида*, при m целом кривая состоит из m непересекающихся ветвей. Точки возврата $A_1, A_2, \ldots, A_m$ имеют полярные координаты $\rho = R$, $\varphi = 2k\pi/m$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Вершины кривой $B_1, B_2, \ldots, B_m$ имеют координаты $\rho = R+2r$, $\varphi = \frac{2\pi}{m}\left(k+\frac{1}{2}\right)$. При m дробном ветви пересекаются; при m иррациональном число ветвей бесконечно, точка M в исходное положение не возвращается; при m рациональном Э.— замкнутая алгебраич. кривая. Длина дуги от точки A_1:



$$s = 8Rm(1+m)\sin^2\frac{\theta}{4},$$

длина дуги от точки B_1:

$$s = 4Rm(1+m)\cos\frac{\theta}{2}.$$

Площадь сектора, ограниченного двумя радиус-векторами кривой и дугой кривой:

$$S = m\pi(R+mR)(R+2mR).$$

Радиус кривизны:

$$r_k = \frac{4Rm(1+m)}{2m+1}\sin\frac{\theta}{2}.$$

Если точка находится не на катящейся окружности, а лежит вне (внутри) ее, то кривая наз. удлиненной

(укороченной) эпициклоидой или эпитрохоидой (см. *Трохоида*). Э. относится к т. н. *циклоидальным кривым*.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ЭРАТОСФЕНА РЕШЕТО — метод, разработанный Эратосфеном (3 в. до н. э.) и позволяющий отсеивать составные числа из натурального ряда. Сущность Э. р. заключается в следующем. Зачеркивается единица. Число 2 — простое. Зачеркиваются все натуральные числа, делящиеся на 2. Число 3 — первое незачеркнутое число — будет простым. Далее зачеркиваются все натуральные числа, к-рые делятся одновременно и на 2 и на 3. Число 5 — первое незачеркнутое число — будет простым. Продолжая аналогичные вычисления, можно найти сколь угодно большой отрезок последовательности простых чисел. Э. р. нашло развитие в других более сильных методах решета (см., напр., *Бруна решето*).

Б. М. Бредихин.

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА — см. *Эргодическая теория*.

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ, метрическая теория динамических систем, — раздел теории динамических систем, изучающий системы с *инвариантной мерой* и смежные вопросы.

1) В «абстрактной», или «общей», части Э. т. рассматриваются измеримые динамич. системы. В наиболее общем смысле это тройки (W, G, F), где W — *измеримое пространство* («фазовое пространство»), G — хаусдорфова локально компактная группа (или полугруппа) со счетной базой, а F — измеримое отображение $G\times W\to W$, определяющее (левое) действие G на W: если $w\in W$, e — единица G и g, $h\in G$, то (при мультипликативной записи операций в G) $F(e, w)=w$ и

$$F(gh, w)=F(g, F(h, w)). \qquad (*)$$

[Подразумевается, что $G\times W$ снабжено структурой измеримого пространства как прямое произведение G и W, причем в G измеримыми считаются *борелевские множества*. При сделанных предположениях о G различные варианты последнего понятия (см. *Бореля мера, Бэра множество*) оказываются эквивалентными.]

Обозначая преобразование $w\mapsto F(g, w)$ через T_g, можно записать $(*)$ в виде $T_{gh}=T_gT_h$. (Можно рассматривать и правое действие, для него $T_{gh}=T_hT_g$.) За исключением тех случаев, когда специально обсуждается вопрос о существовании инвариантной меры (возможно, с определенными специальными свойствами), в Э.т. обычно считают, что W является *пространством с мерой* μ, к-рая σ-конечна или конечна и инвариантна относительно T_g: если $A\subset W$ — измеримое множество, то $\mu(T_g^{-1}A)=\mu(A)$. Конечную меру обычно нормируют; чаще всего (W, μ) есть *Лебега пространство*. Что касается G, то основными являются случаи $G=\mathbb{Z}$ или $\mathbb{N}$ (*каскад*) и $G=\mathbb{R}$ (*поток*). О них можно говорить как о случаях с «классич. временем» (дискретным или непрерывным), в соответствии с тем смыслом, к-рый реально может иметь g в конкретных примерах. [По аналогии и в других случаях иногда говорят о «времени» (уже «неклассическом»): не будучи временем в обычном смысле слова, оно может иметь иной физич. смысл, означая, напр., пространственные сдвиги трансляционно инвариантной физич. системы. Э. т. развита в особенности для аменабельных (тем более коммутативных) G; в ряде отношений (хотя и не во всем) в этом случае имеется аналогия с случаем классич. времени. Для неаменабельных G ситуация иная; она изучена хуже.] Ниже рассматривается основной случай: $\{T_t\}$ — *измеримый поток* или каскад в пространстве Лебега (W, μ), сохраняющий μ.

В «абстрактной» Э. т. изучаются как различные статистич. свойства динамич. систем, отражающие их поведение на больших отрезках времени (напр., *эргo-*

дичность, перемешивание), так и вопросы, связанные с метрич. классификацией систем (классификацией относительно *метрического изоморфизма*), причем эти две группы вопросов оказываются тесно связанными. Поскольку неэргодич. системы разлагаются на эргодич. компоненты (ссылки см. в статье *Метрическая транзитивность*), то обе группы вопросов в основном надо исследовать для эргодич. систем. Основная часть «абстрактной» Э. т. охватывается следующими шестью направлениями.

а) Оформление Э. т. в самостоятельный раздел связано с эргодической *Неймана теоремой*, *Биркгофа эргодической теоремой* и осознанием их метрич. природы. В дальнейшем появились различные модификации и обобщения этих теорем, зачастую уже не обязательно связанные с динамич. системами (в этом смысле они выходят за рамки Э. т.), они тоже наз. эргодическими теоремами (см. *Максимальная эргодическая теорема*, *Операторная эргодическая теорема*, *Орнстейна — Чекона эргодическая теорема*). Но их разработка для самой Э. т. имела уже меньшее значение.

б) Спектральная теория динамических систем, т. е. исследование вопросов, связанных со *спектром динамической системы*.

в) *Энтропийная теория динамических систем*.

г) *Аппроксимация периодическими преобразованиями*.

д) Замена времени и монотонная эквивалентность (эквивалентность Какутани).

е) Траекторная теория и смежные вопросы.

Для приложений наиболее важными являются направления б) и в). Применительно к потокам идея д) и е) состоит, грубо говоря, в том, чтобы отделить те свойства потока, к-рые зависят от расположения траекторий в фазовом пространстве, от свойств, зависящих от параметризации траекторий посредством времени. Различие между д) и е) состоит в том, что в д) траектория рассматривается как непрерывная кривая с выделенным положительным направлением и соответственно ограничивается класс допускаемых параметризаций, тогда как в е) траектория рассматривается просто как множество точек и соответственно параметризации могут быть разрывными и не обязаны быть монотонными относительно друг друга. Ниже даны точные определения.

Замена времени в потоке $\{T_t\}$ состоит в переходе к новому потоку $\{S_s\}$: время, за к-рое точка w попадет в положение $T_t w$, для нового потока равно $\int_0^t a(T_\tau w)d\tau$, где a, $\frac{1}{a} \in L^1(W, \mu)$, $a>0 \bmod 0$ (поток $\{S_s\}$ имеет инвариантную меру $\lambda(A)=\int_A \frac{1}{a} d\mu$). Говорят, что $\{T_t\}$ и $\{S_s\}$ монотонно эквивалентны. Равносильное определение: два потока монотонно эквивалентны, если они метрически изоморфны *специальным потокам*, построенным по одному и тому же автоморфизму пространства с мерой (и, вообще говоря, различным положительным функциям). Автоморфизмы T, S (равно как и каскады $\{T^n\}$, $\{S^n\}$) наз. монотонно эквивалентными, если T и S метрически изоморфны *специальным автоморфизмам*, построенным по одному и тому же автоморфизму. Динамич. системы траекторно эквивалентны, если существует метрич. изоморфизм их фазовых пространств, переводящий траектории одной системы в траектории другой (как множества точек).

В д) рассматриваются вопросы: насколько сильно могут измениться свойства потока при замене времени; в частности, нельзя ли посредством замены обеспечить, чтобы новый поток имел какое-нибудь специальное свойство (вопрос может ставиться в общем случае или для конкретного потока; замена времени может быть

подчинена каким-нибудь специальным условиям); что можно сказать о классификации систем относительно монотонной эквивалентности.

Траекторная эквивалентность для систем с «классическим» временем неинтересна: если инвариантная мера непрерывна, то любые два эргодич. потока или каскада траекторно эквивалентны. Однако для систем с «неклассическим» временем траекторная эквивалентность приводит к содержательной теории.

2) В «прикладной» части Э. т. рассматриваются разнообразные конкретные динамич. системы (и классы таковых), возникающие в различных областях математики, а также в физике. [Исторически зарождение Э. т. связано со статистич. физикой (см. *Динамическая система*, *Статистической физики математические задачи*). Ныне наметились новые связи с этой дисциплиной; см., напр., о гиббсовских мерах в последней статье.] Здесь для рассматриваемых систем изучаются те же вопросы о статистич. свойствах и классификации, что и в 1), однако теперь нельзя считать с самого начала, что рассматриваемая система эргодична. Напротив, выяснение вопроса о ее эргодичности — обычно необходимый (и нередко трудный) этап исследования, даже если в конечном счете устанавливается наличие более сильных статистич. свойств.

Имеются и такие случаи (в теории чисел и статистич. физике), когда речь идет не о применении понятий или результатов Э. т., а об использовании соображений, в каком-то отношении родственных имеющимся в Э. т. Наконец, идеи теории динамич. систем, и в частности Э. т., привлекаются для интерпретации результатов нек-рых численных экспериментов (см. *Странный аттрактор*).

Лит.: [1] Хопф Э., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 1, с. 113—82; [2] Рохлин В. А., там же, 1949, т. 4, в. 2, с. 57—128; [3] Халмош П., Лекции по эргодической теории, пер. с англ., М., 1959; [4] «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5, с. 3—172; [5] Биллингслей П., Эргодическая теория и информация, пер. с англ., М., 1969; [6] Вершик А. М., Юзвинский С. А., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 133—87; [7] Синай Я. Г., Введение в эргодическую теорию, Ер., 1973; [8] Каток А. Б., Синай Я. Г., Степин А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975, с. 129—262; [9] Орнстейн Д., Эргодическая теория, случайность и динамические системы, пер. с англ., М., 1978; [10] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

Д. В. Аносов.

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕКОММУТАТИВНАЯ — раздел теории операторных алгебр, изучающий автоморфизмы C^*-*алгебр* с точки зрения *эргодической теории*.

Круг вопросов, рассматриваемых в Э. т. н., и полученные (к 1984) результаты можно в основном разделить на три группы. К первой группе относятся результаты, связанные с построением полной системы инвариантов внешней сопряженности (автоморфизмы θ_1 и θ_2 наз. внешне сопряженными, если существует такой автоморфизм σ, что $\theta_1\sigma\theta_2^{-1}\sigma^{-1}$ есть внутренний автоморфизм). Соответствующая задача классификации решена (см. [1]) для аппроксимативно конечных *факторов* типа II и для факторов типа III_λ, $0<\lambda<1$ (см. [2]).

К другой группе относятся работы, посвященные исследованию свойств равновесных состояний (под состоянием алгебры понимают положительный линейный нормированный функционал на алгебре), инвариантных относительно однопараметрич. групп автоморфизмов. В частности, в них рассматриваются вопросы существования и единственности гиббсовских состояний (см. [3]). К этой группе вопросов примыкают исследования по некоммутативным обобщениям эргодич. теорем (см., напр., [4], [5]).

Третью группу составляют результаты, относящиеся к энтропийной теории автоморфизмов. Построен

[6] инвариант автоморфизмов конечной W^*-алгебры (см. *Неймана алгебра*), обобщающий *энтропию* метрич. динамич. системы. Исследована [7] энтропия автоморфизмов произвольной W^*-алгебры относительно состояния φ.

Лит.: [1] Connes A., «Ann. sci. École norm. supér.», 1975, t. 8, p. 383—419; [2] Голодец В. Я., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 1, с. 43—94; [3] Araki H., «Lecture Notes in Math.», 1978, № 650, p. 66—84; [4] Синай Я. Г., Аншелевич В. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 4, с. 151—67; [5] Lance E. C., «Invent. math.», 1976, t. 37, p. 201—14; [6] Connes A., Størmer E., «Acta math.», 1975, v. 134, p. 289—306; [7] Степин А. М., Шухов А. Г., «Изв. ВУЗов. Математика», 1982, № 8, с. 52—60.

А. М. Степин.

ЭРГОДИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО в *фазовом пространстве* X (являющемся метризуемым компактом) *топологической динамической системы* $\{S_t\}$ (*потока* или *каскада*), отвечающее нормированной эргодической *инвариантной мере* μ, — множество точек $x \in X$, для к-рых:

а) при любой непрерывной функции $f: X \to \mathbb{R}$ «временно́е среднее»

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(S_t x)\,dt \longrightarrow \int_X f\,d\mu \text{ при } T \longrightarrow \infty;$$

б) $\mu(U) > 0$ для любой окрестности U точки x.

Точка, для к-рой при любой непрерывной f существует предел временно́го среднего в а), наз. к в а з и р е г у л я р н о й. Для такой точки этот предел имеет вид $\int f d\mu$, где μ — нек-рая нормированная инвариантная мера, однако не обязательно эргодическая. Если при этом выполняется б), то точка наз. т о ч к о й п л о т н о с т и, а если μ эргодическая, то точка наз. т р а н з и т и в н о й; при выполнении обоих этих условий она наз. р е г у л я р н о й. Множество нерегулярных точек имеет меру нуль относительно любой инвариантной нормированной меры. Разбиение множества регулярных точек на Э. м., отвечающие различным μ, представляет собой наиболее сильную реализацию идеи о разложении динамич. системы на эргодич. компоненты (требующую и наиболее сильных ограничений на систему).

Э. м. введены Н. Н. Боголюбовым и Н. М. Крыловым [1], другие изложения и обсуждения различных обобщений и смежных вопросов см. в лит. при статьях *Инвариантная мера*, 1) и *Метрическая транзитивность*.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Избр. труды, т. 1, К., 1969, с. 411—63.

Д. В. Аносов.

ЭРГОДИЧНОСТЬ д и н а м и ч е с к о й с и с т е м ы — свойство, рассматриваемое в *эргодической теории*. Первоначально оно определялось для *каскадов* $\{T^k\}$ и *потоков* $\{T_t\}$ с конечной *инвариантной мерой* μ следующим образом: если на фазовом пространстве W задана функция $f \in L_1(W, \mu)$, то для почти каждой точки w существует временно́е среднее вдоль траектории этой точки, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k w)$$

или

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(T_t w)\,dt),$$

к-рое совпадает с пространственным средним (т. е. с $\frac{1}{\mu(W)}\int f d\mu$). В этом случае говорят также об э р г о д и ч н о с т и меры μ. В частности, для любого измеримого множества $A \subset W$ среднее время пребывания в A траектории почти каждой точки пропорционально $\mu(A)$ (на самом деле это свойство эквивалентно Э.). Когда была доказана *Биркгофа эргодическая теорема*, стало ясно, что Э. эквивалентна *метрической транзи-*

тивности. В связи с этим стали говорить об Э., понимая под ней метрич. транзитивность, в более общей ситуации, когда уже не приходится говорить о совпадении временны́х и пространственных средних (системы с бесконечной инвариантной или квазиинвариантной мерой, не только потоки и каскады, но и более общие группы и полугруппы преобразований).

Д. В. Аносов.

ЭРДЕША ЗАДАЧА — задача о существовании в n-мерном евклидовом пространстве E_n множества точек, каждые три из к-рых образуют нетупоугольный треугольник (с в о й с т в о Э р д е ш а), содержащего более чем 2^n элементов. Поставлена П. Эрдешом (см. [1]); им же было высказано предположение (доказанное в [2]), что задача имеет отрицательный ответ и если множество, обладающее свойством Эрдеша, содержит 2^n элементов, то это может быть в том и только в том случае, когда оно исчерпывает множество вершин n-мерного прямоугольного параллелепипеда из E_n. Доказательство этого утверждения явилось решением и т. н. з а д а ч и К л и: чему равно число вершин $m(K)$ многогранника $K \subset E_n$, каждые две вершины к-рого лежат в различных параллельных опорных гиперплоскостях к многограннику K (с в о й с т в о К л и). Если множество $N \subset E^n$ обладает свойством Эрдеша, то выпуклая оболочка $\operatorname{conv} N$ множества N представляет собой многогранник $M = \operatorname{conv} N$, обладающий свойством Кли, и $m(M)$ равно мощности множества N. Если многогранник K обладает свойством Кли, то $m(K) \leqslant 2^n$. Равенство $m(K) = 2^n$ характеризует n-мерный параллелепипед в множестве всех многогранников, обладающих свойством Кли.

Э. з. связана с *Хадвигера гипотезой*: $b(M) = m(M)$.

Лит.: [1] E r d ö s P., «Michigan Math. J.», 1957, № 4, p. 291—300; [2] D a n z e r L., G r ü n b a u m B., «Math. Z.», 1962, Bd 79, S. 95—99.

П. С. Солтан.

ЭРЛАНГА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, э р л а н г о в с к о е р а с п р е д е л е н и е,— сосредоточенное на $(0, \infty)$ распределение вероятностей с плотностью

$$p(x) = \frac{(n\mu)^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-n\mu x}, \quad x > 0,$$

где целое $n \geqslant 1$ и действительное $\mu > 0$ — параметры. Характеристич. функция Э. р. имеет вид

$$\left(1 - \frac{it}{n\mu}\right)^{-n},$$

а математич. ожидание и дисперсия — соответственно $1/\mu$ и $1/n\mu^2$.

Э. р. есть специальный случай *гамма-распределения*: $p(x) = \alpha g_\lambda(\alpha x)$, где $g_\lambda(y)$ есть плотность гамма-распределения при $\lambda = n$ и где $\alpha = n\mu$. При $n = 1$ Э. р. совпадает с *показательным распределением* с параметром μ. Э. р. с параметрами n и μ может быть найдено как распределение суммы n независимых случайных величин, имеющих одинаковое показательное распределение с параметром $n\mu$. При $n \to \infty$ Э. р. стремится к вырожденному распределению, сосредоточенному в точке $1/\mu$.

Выделение Э. р. из системы гамма-распределений объясняется использованием Э. р. в теории массового обслуживания. Во многих случайных процессах массового обслуживания Э. р. появляется как распределение промежутков между случайными событиями или как распределение времен обслуживания. Иногда Э. р. наз. гамма-распределение с плотностью

$$\frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\alpha x}, \quad x > 0.$$

Названо по имени А. Эрланга (A. Erlang), построившего первые математич. модели в задачах массового обслуживания.

А. В. Прохоров.

Лит.: [1] С а а т и Т. Л., Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., М., 1971.

ЭРЛАНГЕНСКАЯ ПРОГРАММА — единая точка зрения на различные геометрии (напр., евклидову, аффинную, проективную), сформулированная впервые Ф. Клейном (F. Klein) на лекции, прочитанной в 1872 в ун-те г. Эрланген (Германия) и напечатанной в том же году под назв. «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований».

Сущность Э. п. состоит в следующем. Как известно, евклидова геометрия рассматривает те свойства фигур, к-рые не меняются при движениях; равные фигуры определяются как фигуры, к-рые можно перевести одну в другую движением. Но вместо движений можно выбрать какую-нибудь иную совокупность геометрич. преобразований и объявить «равными» фигуры, получающиеся одна из другой с помощью преобразований этой совокупности; это приводит к иной «геометрии», изучающей свойства фигур, не меняющиеся при рассматриваемых преобразованиях. Введенное «равенство» должно удовлетворять следующим трем естественным условиям: 1) каждая фигура F «равна» сама себе; 2) если фигура F «равна» фигуре F', то и F' «равна» F; 3) если фигура F «равна» F', а F' «равна» F'', то и F «равна» F''. Соответственно этому надо потребовать, чтобы рассматриваемая совокупность преобразований была группой. Теория, к-рая изучает свойства фигур, сохраняющихся при всех преобразованиях данной группы, наз. геометрией этой группы.

Выбор различных групп преобразований приводит к разным геометриям. Так, рассмотрение группы движений приводит к обычной (евклидовой) геометрии; замена движения аффинными преобразованиями или проективными преобразованиями приводит к аффинной соответственно проективной геометрии. Основываясь на идеях А. Кэли (A. Cayley), Ф. Клейн показал, что принятие за основу группы проективных преобразований, переводящих в себя нек-рый круг (или произвольное конич. сечение), приводит к неевклидовой геометрии Лобачевского. Ф. Клейн ввел в рассмотрение довольно широкий круг других геометрий, определяемых подобным же образом.

Э. п. не охватывает нек-рых важных разделов геометрии, напр. риманову геометрию. Однако Э. п. имела для дальнейшего развития геометрии существенное стимулирующее значение.

Лит.: [1] Клейн Ф., Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»), в кн.: Об основаниях геометрии, М., 1956; [2] его же, Элементарная математика с точки зрения высшей, пер. с нем., 2 изд., т. 2, М.— Л., 1934; [3] его же, Высшая геометрия, пер. с нем., М.— Л., 1939; [4] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978.

БСЭ-3.

ЭРМИТА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — форма записи многочлена $H_m(x)$ степени m, решающего задачу интерполирования функции $f(x)$ и ее производных в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, т. е. удовлетворяющего условиям:

$$\left.\begin{aligned} &H_m(x_0)=f(x_0),\ H_m'(x_0)=f'(x_0),\ \ldots \\ &\qquad\ldots,\ H_m^{(\alpha_0-1)}(x_0)=f^{(\alpha_0-1)}(x_0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &H_m(x_n)=f(x_n),\ H_m'(x_n)=f'(x_n),\ \ldots \\ &\qquad\ldots,\ H_m^{(\alpha_n-1)}(x_n)=f^{(\alpha_n-1)}(x_0), \\ &m=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i-1. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Э. и. ф. может быть записана в виде:

$$H_m(x)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1}\sum_{k=0}^{\alpha_i-1} f^{(j)}(x_i)\times$$

$$\times\frac{1}{k!}\frac{1}{j!}\left[\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)}\right]_{x=x_i}^{(k)}\frac{\Omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i-j-k}},$$

где $\Omega(x)=(x-x_0)^{\alpha_0}(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}$.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966.

М. К. Самарин.

ЭРМИТА МНОГОЧЛЕНЫ, многочлены Чебышева — Эрмита,— многочлены, ортогональные на интервале $(-\infty, \infty)$ с весовой функцией $h(x)=\exp(-x^2)$. Стандартизованные Э. м. определяются *Родрига формулой*

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}.$$

Наиболее употребительны формулы

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x),$$

$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x),$$

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k\,n!}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k},$$

$$\exp(2xw-w^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}w^n.$$

Первые Э. м. имеют вид

$$H_0(x)=1,\ H_1(x)=2x,\ H_2(x)=4x^2-2,$$

$$H_3(x)=8x^3-12x,$$

$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12,\quad H_5(x)=32x^5-160x^3+120x,\ldots$$

Многочлен $H_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''-2xy'+2ny=0$.

Ортонормированные Э. м. определяются равенством

$$\hat{H}_n(x)=\frac{H_n(x)}{\sqrt{n!\,2^n\sqrt{\pi}}}.$$

Э. м. с единичным старшим коэффициентом имеют вид

$$\tilde{H}_n(x)=\frac{1}{2^n}H_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n}e^{x^2}(e^{-x})^{(n)}.$$

Ряды Фурье по Э. м. внутри интервала $(-\infty, \infty)$ аналогичны тригонометрич. рядам Фурье.

В математич. статистике и теории вероятностей применяются Э. м., соответствующие весовой функции

$$h(x)=\exp(-x^2/2).$$

Определение Э. м. встречается у П. Лапласа [1]. Подробное исследование этих многочленов опубликовал П. Л. Чебышев в 1859 (см. [2]). Затем эти многочлены изучал Ш. Эрмит [3]. В. А. Стеклов [4] доказал плотность множества всех многочленов в пространстве функций, квадрат к-рых интегрируем с весом $h(x)=\exp(-x^2)$ на всей оси.

См. также *Классические ортогональные многочлены.*

Лит.: [1] Laplace P. S., «Mém. classe sci. math., phys. inst. France», 1810, p. 279—347; [2] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947, с. 335—41; [3] Hermite Ch., «C. r. Acad. sci.», 1864, t. 58, p. 93—100, 266—73; [4] Стеклов В. А., «Изв. АН», 1916, т. 10, с. 403—16; [5] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979.

П. К. Суетин.

ЭРМИТА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$f(n)=H\{F(x)\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n(x)F(x)\,dx,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где $H_n(x)$ — *Эрмита многочлен* степени n. Формула обращения имеет вид

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{f(n)}{2^n\,n!}H_n(x)=H^{-1}\{f(n)\},\quad -\infty<x<\infty,$$

если ряд сходится. Э. п. сводит операцию

$$R[F(x)]=e^{x^2}\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{d}{dx}F(x)\right]$$

к алгебраической по формуле

$$H\{R[F(x)]\} = -2nf(n).$$

Если функция $F(x)$ ограничена вместе со всеми производными до порядка p включительно, то

$$H\{F^{(p)}(x)\} = f(n+p).$$

Э. п. введено также для специального класса обобщенных функций (см. [2]). Оно используется при решении дифференциальных уравнений, содержащих оператор R.

Лит.: [1] Debnath L., «Mat. vesnik», 1964, № 1, с. 285—292; [2] Земанян А. Г., Интегральные преобразования обобщенных функций, пер. с англ., М., 1974.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

ЭРМИТА ПРОБЛЕМА — задача об однородных арифметических минимумах положительных n-арных квадратичных форм с действительными коэффициентами, равносильная задаче о плотнейших решетчатых упаковках n-мерных шаров одинакового радиуса (см. *Геометрия чисел*).

Пусть $f=f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$,— положительная квадратичная форма над $\mathbb{R}$ определителя $d=d(f)=\det(f)\neq 0$;

$$m(f) = \inf_{\substack{x\in\mathbb{Z}^n\\ x\neq 0}} f(x) = \min_{\substack{x\in\mathbb{Z}^n\\ x\neq 0}} f(x)$$

— ее однородный арифметич. минимум. Величина

$$\gamma_n = \sup_{f\text{—п. кв. ф. } \{d(f)\}^{1/n}} \frac{m(f)}{\{d(f)\}^{1/n}} = \max_{f\text{—п. кв. ф. } \{d(f)\}^{1/n}} \frac{m(f)}{\{d(f)\}^{1/n}}$$

наз. постоянной Эрмита; $\gamma_n=\{\gamma(F_n)\}^2$, где $F_n(x)=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/n}$ — лучевая функция, отвечающая шару.

Первоначально под Э. п. понималась задача нахождения или оценки γ_n (сверху и снизу). Точные значения для γ_n известны только для $n\leqslant 8$ (см. [1], с. 318). Оценки для γ_n см. в [2], [1], § 38.

В дальнейшем под Э. п. стали понимать отыскание локальных максимумов для $m(f)/\{d(f)\}^{1/n}$ в пространстве коэффициентов и отвечающих им форм f — предельных или экстремальных. Известны алгоритмы отыскания всех классов предельных форм. В частности, алгоритм Вороного совершенных форм (см. [1], [3], [4]).

Проблема была поставлена Ш. Эрмитом (Ch. Hermite, 1850).

Лит.: [1] Lekkerkerker C. G., Geometry of numbers, Groningen — [a. o.], 1969; [2] Роджерс К., Укладки и покрытия, пер. с англ., М., 1968; [3] Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, М.— Л., 1947; [4] Барановский Е. П., в кн.: Итоги науки. Математика. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969, с. 189—225.

А. В. Малышев.

ЭРМИТА ТОЖДЕСТВО — тождество, примененное Ш. Эрмитом (Ch. Hermite, 1873) к нек-рым специально построенным многочленам для доказательства трансцендентности числа e. В упрощенном виде Э. т.

$$e^x F(0) - F(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt,$$

где $f(x)$ — многочлен от x, а

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^k(x).$$

ЭРМИТА УРАВНЕНИЕ — линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$w'' - 2zw' + 2\lambda w = 0$$

или, в самосопряженной форме,

$$\frac{d}{dz}\left(e^{-z^2}\frac{dw}{dz}\right) + \lambda e^{-z^2} w = 0;$$

здесь λ — константа. Замена неизвестной функции $w=u\exp(z^2/2)$ приводит Э. у. к уравнению

$$u''+(\lambda+1-z^2)\,u=0,$$

а после замены переменных

$$w=v\exp\,(t^2/4),\ t=z\sqrt{2}$$

из Э. у. получается *Вебера уравнение*

$$v''+\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}-\frac{t^2}{4}\right)v=0.$$

Э. у. при $\lambda=2n$, где n — натуральное число, имеет среди своих решений *Эрмита многочлен* степени n

$$H_n(z)=(-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2}).$$

Этим и объясняется название самого дифференциального уравнения. В общем случае решения Э. у. выражаются через специальные функции — функции параболического цилиндра, или функции Вебера — Эрмита. *Н. Х. Розов.*

ЭРМИТА ФУНКЦИИ — решения *Эрмита уравнения*

$$w''-2zw'+2\lambda w=0.$$

Э. ф. имеют вид

$$P_\lambda(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{C_1}\exp\,(-t^2+2zt)\,t^{-\lambda-1}\,dt,$$

$$Q_\lambda(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{C_2}\exp\,(-t^2+2zt)\,t^{-\lambda-1}\,dt,$$

где C_1 — контур в комплексной плоскости t, состоящий из лучей $(-\infty,\ -a)$, $(a,\ +\infty)$ и полуокружности $|t|=a>0$, $\mathrm{Im}\,t\geqslant 0$, $C_2=-C_1$. Полусумма этих решений

$$H_\lambda(z)=[P_\lambda(z)+Q_\lambda(z)]/2$$

при целом $\lambda=n\geqslant 0$ равна *Эрмита многочлену* $H_n(z)$. Уравнением Эрмита наз. также уравнение

$$y''-xy'+\nu y=0.$$

При ν целом это уравнение имеет *фундаментальную систему решений* $He\ (x)$, $he_\nu(x)$, где $He_\nu(x)$ — многочлены Эрмита, $he_\nu(x)$ суть Э. ф. 2-го рода, к-рые выражаются через *вырожденную гипергеометрическую функцию*:

$$he_{2n}(x)=(-2)^n n!\,{}_1F_1\left(-n+\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{2}\right),$$

$$he_{2n+1}(x)=-(-2)^n n!\,{}_1F_1\left(-n-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{2}\right).$$

Справедливы тождества:

$$He_\nu(x)\,he'_\nu(x)-he_\nu(x)\,He'_\nu(x)=\nu!\,e^{x^2/2},$$

$$He_\nu(x)\,he_{\nu-1}(x)-He_{\nu-1}(x)\,he_\nu(x)=(\nu-1)!\,e^{x^2/2}.$$

Лит.: [1] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., 3 изд., т. 1, М.— Л., 1951; [2] Кратцер А., Франц В., Трансцендентные функции, пер. с нем., М., 1963. *М. В. Федорюк.*

ЭРМИТОВ ОПЕРАТОР, симметрический оператор,— линейный оператор A в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D(A)$ и такой, что $\langle Ax,\ y\rangle=\langle x,\ Ay\rangle$ для любых $x,\ y\in D(A)$. Это условие эквивалентно тому, что: 1) $D(A)\subset D(A^*)$, 2) $Ax=A^*x$ для всех $x\in D(A)$, где A^* — оператор, сопряженный с A, т. е. что $A\subset A^*$. Ограниченный Э. о. либо определен на всем H, либо по непрерывности расширяется до такого и при этом $A=A^*$, т. е. A — *самосопряженный оператор*. Неограниченный Э. о. может как иметь, так и не иметь самосопряженных расширений. Иногда эрмитовым наз. самосопряженный оператор, сохраняя для оператора, эрмитова в указанном выше смысле, название симметрический. В конечномерном пространстве Э. о. описывается *эрмитовой матрицей.*

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 3 изд., Хар., 1978; [2] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979. *В. И. Соболев.*

ЭРМИТОВА МАТРИЦА, эрмитово-симметрическая матрица, самосопряженная матрица,— квадратная матрица $A=\|a_{ik}\|$ над полем $\mathbb{C}$, совпадающая со своей эрмитово-сопряженной матрицей

$$A^* = \overline{A}^{\top} = \|\overline{a}_{ki}\|,$$

т. е. матрица, элементы к-рой удовлетворяют условию $a_{ik}=\overline{a}_{ki}$. Если все $a_{ik}\in\mathbb{R}$, то Э. м. A — симметрич. матрица. Э. м. фиксированного порядка образуют векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Если A, B — Э. м. одного порядка, то $AB+BA$ — Э. м. Относительно операции $A\circ B=\frac{1}{2}(AB+BA)$ Э. м. (порядка n) составляют *йорданову алгебру*. Произведение AB Э. м. является Э. м. тогда и только тогда, когда A и B перестановочны.

Э. м. порядка n служат матрицами эрмитовых преобразований n-мерного унитарного пространства в ортонормированном базисе (см. *Самосопряженное линейное преобразование*). С другой стороны, Э. м.—это матрицы эрмитовых форм в n-мерном комплексном векторном пространстве. Как и *эрмитовы формы*, Э. м. могут быть определены над любым телом с антиинволюцией.

Все собственные значения Э. м. действительны. Для каждой Э. м. A существует унитарная матрица U такая, что $U^{-1}AU$ — диагональная действительная матрица. Э. м. наз. неотрицательной (или положительно полуопределенной), если все ее главные миноры неотрицательны, и положительно определенной, если все они положительны. Неотрицательные (положительно определенные) Э. м. соответствуют неотрицательным (положительно определенным) эрмитовым линейным преобразованиям и эрмитовым формам. *А. Л. Онищик.*

ЭРМИТОВА МЕТРИКА — 1) Э. м. в комплексном векторном пространстве V — положительно определенная *эрмитова форма* в V. Пространство V, снабженное Э. м., наз. унитарным (или комплексно евклидовым, или эрмитовым векторным) пространством, а Э. м. в нем — эрмитовым скалярным произведением. Любые две Э. м. в V переводятся друг в друга автоморфизмом пространства V. Таким образом, множество всех Э. м. в V является однородным пространством группы $GL_n(\mathbb{C})$ и отождествляется $GL_n(\mathbb{C})/U(n)$, где $n=\dim V$.

Комплексное векторное пространство V можно рассматривать как вещественное векторное пространство $V^{\mathbb{R}}$, снабженное оператором комплексной структуры $J(x)=ix$. Если h — Э. м. в V, то форма $g=\mathrm{Re}\,h$ является евклидовой метрикой (скалярным произведением) в V, а форма $\omega=\mathrm{Im}h$ — невырожденной кососимметрической билинейной формой в V. При этом $g(Jx, Jy)=g(x, y)$, $\omega(Jx, Jy)=\omega(x, y)$, $\omega(x, y)=g(x, Jy)$. Любая из форм g, ω однозначно определяет h.

2) Э. м. в комплексном векторном расслоении π: $E\to M$ — функция $g: p\longmapsto g_p$ на базе M, сопоставляющая точке $p\in M$ эрмитову метрику g_p в слое $E(p)=\pi^{-1}(p)$ расслоения π и удовлетворяющая следующему условию гладкости: для любых гладких локальных сечений e, e' расслоения π функция $p\longmapsto g_p(e_p, e'_p)$ является гладкой.

В любом комплексном векторном расслоении существует Э. м. Связность ∇ в комплексном векторном расслоении π наз. согласованной с Э. м. g, если g и оператор J комплексной структуры в слоях расслоения π ковариантно постоянны (т. е. $\nabla g=\nabla J=0$), иначе

говоря, если соответствующий параллельный перенос слоев расслоения π вдоль кривых на базе является изоморфизмом слоев как унитарных пространств. Для любой Э. м. существует согласованная с ней связность, к-рая, вообще говоря, не единственна. В случае, когда π есть голоморфное векторное расслоение над комплексным многообразием M (см. *Векторное аналитическое расслоение*), существует единственная связность ∇ расслоения π, согласованная с данной Э. м. и удовлетворяющая следующему условию: ковариантная производная любого голоморфного сечения e расслоения π относительно любого антиголоморфного комплексного векторного поля $\bar{X}$ на M равна нулю (каноническая эрмитова связность). Форму кривизны этой связности можно рассматривать как 2-форму типа (1,1) на M со значением в расслоении эндоморфизмов векторного расслоения π. Канонич. связность можно рассматривать также как связность в главном $GL(n, \mathbb{C})$-расслоении $\tilde{\pi}: P \to M$, ассоциированном с голоморфным расслоением π комплексной размерности n. Она характеризуется как единственная связность в $\tilde{\pi}$, горизонтальные подпространства к-рой являются комплексными подпространствами касательных пространств комплексного многообразия P.

Лит.: [1] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 2, М., 1981; [2] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [3] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [4] Вейль А., Введение в теорию кэлеровых многообразий, пер. с франц., М., 1961. *Д. В. Алексеевский.*

ЭРМИТОВА СВЯЗНОСТЬ — *аффинная связность* на эрмитовом многообразии M, относительно к-рой ковариантно постоянны тензор φ комплексной структуры и фундаментальная 2-форма $\Omega = \frac{i}{2} g_{\alpha\beta}\omega^\beta \wedge \bar{\omega}^\alpha$, следовательно и эрмитова форма $ds^2 = g_{\alpha\beta}\bar{\omega}^\alpha\omega^\beta$. Если аффинная связность на M задана локальными формами связности $\omega_\beta^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha\omega^\gamma + \Gamma_{\beta\bar{\gamma}}^\alpha\bar{\omega}^\gamma$, то эти условия выражаются в виде $\omega_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} = \omega_{\bar{\beta}}^{\alpha} = 0$, $\omega_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} = \bar{\omega}_\beta^\alpha$, $dg_{\alpha\beta} = \bar{\omega}_\alpha^\gamma g_{\gamma\beta} + g_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma$. На заданном эрмитовом многообразии M существует одна и только одна Э. с., у к-рой $\Gamma_{\beta\bar{\gamma}}^\alpha = 0$.

Обобщением Э. с. является почти эрмитова связность, к-рая определяется аналогичными условиями ковариантного постоянства тензоров Φ_j^i и g_{ij} с $g_{kl}\Phi_i^k\Phi_j^l = g_{ij}$ на почти эрмитовом многообразии $\tilde{M}$. Почти Э. с. на заданном $\tilde{M}$ существует с нек-рым произволом, к-рый сосредоточен в ее тензоре кручения: если тензоры кручения двух почти Э. с. совпадают, то и сами связности совпадают. Например, существует одна и только одна почти Э. с., у к-рой формы кручения являются суммами «чистых» форм (т. е. форм типа (2,0) и типа (0,2)), — вторая каноническая связность Лихнеровича.

Лит.: [1] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [2] Yano K., Differential geometry on complex and almost complex spaces, Oxf., 1965. *Ю. Г. Лумисте.*

ЭРМИТОВА СТРУКТУРА на многообразии M — пара (J, g), состоящая из комплексной структуры J многообразия M и эрмитовой метрики g в касательном расслоении TM, т. е. римановой метрики g, инвариантной относительно J:

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

для любых векторных полей X, Y на M. Э. с. задает в каждом касательном пространстве T_pM структуру эрмитова векторного пространства (см. *Эрмитова метрика*). Многообразие с Э. с. наз. эрмитовым многообразием. Э. с. определяет на M диффе-

ренциальную 2-форму $\omega(X, Y)=g(X, JY)$, к-рая наз. канонич. 2-формой эрмитова многообразия. Любую комплексную структуру J на многообразии M можно дополнить нек-рой римановой метрикой g до Э. с. (J, g): в качестве g можно взять метрику $g(X, Y)=g_0(X, Y)+g_0(JX, JY)$, где g_0 — произвольная риманова метрика.

Каноническую эрмитову связность эрмитовой метрики g можно рассматривать как аффинную связность с кручением T на M, относительно к-рой поля J и g ковариантно постоянны. Среди всех аффинных связностей, удовлетворяющих этим условиям, она однозначно характеризуется тождеством $T(JX, Y)=T(X, JY)$, справедливым для ее тензора кручения T и произвольных векторных полей X, Y. Тензор кривизны R канонич. связности удовлетворяет условию $R(JX, JY)=R(X, Y)$. Эрмитово многообразие является *кэлеровым многообразием* тогда и только тогда, когда каноническая эрмитова связность не имеет кручения и совпадает тем самым со связностью Леви-Чивита метрики g.

Естественным обобщением понятия Э. с. является понятие почти эрмитовой структуры — пары (J, g), состоящей из почти комплексной структуры J многообразия M и римановой метрики g, инвариантной относительно J. Если фундаментальная 2-форма $\omega(X, Y)=g(X, JY)$ замкнута, то почти Э. с. наз. почти кэлеровой. Задание почти Э. с. равносильно редукции структурной группы касательного расслоения к группе $U(n)$, где $n=\frac{1}{2}\dim M$. Любая невырожденная дифференциальная 2-форма на многообразии M является фундаментальной 2-формой нек-рой почти Э. с.

Лит. см. при статье *Эрмитова метрика*.

Д. В. Алексеевский.

ЭРМИТОВА ФОРМА на левом R-модуле X — отображение $\varphi: X\times X\to R$, линейное по первому аргументу и удовлетворяющее условию

$$\varphi(y, x)=\varphi(x, y)^J, \quad x, y\in X.$$

При этом R — кольцо с единицей, снабженное инволютным антиавтоморфизмом J. В частности, φ является *полуторалинейной формой* на X. Сам модуль X при этом наз. эрмитовым пространством. Аналогично тому, как это делается для билинейных форм, для Э. ф. определяется эквивалентность (в другой терминологии, изометричность) и, соответственно, изоморфизм (изометрия) эрмитовых пространств (в частности, автоморфизм). Все автоморфизмы Э. ф. φ образуют группу $U(\varphi)$, называемую унитарной группой, ассоциированной с Э. ф. φ; ее строение хорошо изучено, когда R — тело (см. *Унитарная группа*).

Э. ф. является частным случаем ε-эрмитовой формы (ε — элемент центра кольца R), т. е. такой полуторалинейной формы ψ на X, что

$$\psi(y, x)=\varepsilon\psi(x, y)^J, \quad x, y\in X.$$

При $\varepsilon=1$ ε-эрмитова форма является Э. ф., а при $\varepsilon=-1$ она наз. косоэрмитовой, или антиэрмитовой, формой. Если $J=1$, то Э. ф. — это симметрическая билинейная форма, а косоэрмитова форма — это кососимметрическая, или антисимметрическая билинейная форма. Если отображение

$$X\to \mathrm{Hom}_R(X, R), \quad y\mapsto f_y,$$

где $f_y(x)=\varphi(x, y)$ для любого $x\in X$, биективно, то Э. ф. φ наз. невырожденной Э. ф., или эрмитовым скалярным произведением на X.

Если X — свободный R-модуль с базисом $e_1, \ldots, e_n$, то матрица $\|a_{ij}\|$, где $a_{ij}=\varphi(e_i, e_j)$, наз. матрицей Э. ф. φ в указанном базисе; она является *эрмитовой*

матрицей (т. е. $a_{ij}=a_{ji}^{J}$). Э. ф. φ невырождена тогда и только тогда, когда матрица $\|a_{ij}\|$ обратима. Если R — тело, $\mathrm{char}\, R \neq 2$ и X конечномерен над R, то в X существует ортогональный относительно φ базис (в к-ром матрица Э. ф. диагональна).

Если R — коммутативное кольцо с единицей, $R_0=\{r\in R | r^J=r\}$ и матрица Э. ф. φ определена, то определитель этой матрицы лежит в R_0. При замене базиса в X этот определитель умножается на ненулевой элемент из R вида $\alpha\alpha^J$, где α — обратимый элемент кольца R. Указанный определитель, рассматриваемый с точностью до умножения на такие элементы, наз. д е т е р м и н а н т о м Э. ф., или д е т е р м и н а н т о м э р м и т о в а п р о с т р а н с т в а X; он является важным инвариантом Э. ф., участвующим в классификации Э. ф.

Пусть R коммутативно. Тогда Э. ф. φ на X порождает квадратичную форму $Q(x)=\varphi(x, x)$ на X над R_0. Рассмотрение таких форм лежит в основе конструкции группы Витта кольца R с инволюцией (см. *Витта кольцо*, *Витта разложение*, *Витта теорема*). В случае, когда R — максимальное упорядоченное поле, на Э. ф. распространяется *инерции закон* (и возникают связанные с ним понятия сигнатуры, индекса инерции, положительной и отрицательной определенности). Если R — поле и $J\neq 1$, то R является квадратичным расширением Галуа поля R_0, и изометричность двух невырожденных Э. ф. над R равносильна изометричности порожденных ими квадратичных форм над R_0: это сводит классификацию невырожденных Э. ф. над R к классификации невырожденных квадратичных форм над R_0.

Если $R=\mathbb{C}$, а J — инволюция комплексного сопряжения, то полную систему инвариантов Э. ф. на конечномерном пространстве образуют ранг и сигнатура соответствующей квадратичной формы. Если R — локальное поле или поле функций от одной переменной над конечным полем констант, то полную систему инвариантов для невырожденной Э. ф. образуют ранг и детерминант. Если R — конечное поле, то инвариант только один — ранг. О случае, когда R — алгебраич. расширение поля $\mathbb{Q}$, см. [3]. Э. ф. впервые рассмотрены Ш. Эрмитом (Ch. Hermite, 1853) в связи с нек-рыми задачами теории чисел

Лит.: [1] Б у р б а к и Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Д ь е д о н н е Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [3] M i l n o r J., H u s e m o l l e r D., Symmetric bilinear forms, B.— [a. o.], 1972; [4] O'M e a r a O. T., Introduction to quadratic forms, 3 ed., B.— [a. o.], 1973.

В. Л. Попов.

ЭРМИТОВО СИММЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — связное комплексное многообразие M с *эрмитовой структурой*, каждая точка к-рого $p\in M$ является изолированной неподвижной точкой нек-рой голоморфной инволютивной изометрии S_p многообразия M. Компонента единицы G группы голоморфных изометрий пространства M транзитивна на M. Пусть K — стационарная подгруппа в G относительно нек-рой точки $O\in M$. Тогда M наз. пространством компактного или некомпактного типа в соответствии с типом *глобально симметрического риманова пространства* G/K. Каждое Э. с. п. M является прямым произведением $M=M_0\times M_-\times M_+$, где все сомножители есть односвязные Э. с. п., $M_0=\mathbb{C}^n$, M_- и M_+ — пространства компактного и некомпактного типа соответственно. Любое Э. с. п. компактного или некомпактного типа односвязно и является прямым произведением неприводимых Э. с. п.

Некомпактные неприводимые Э. с. п. совпадают с пространствами вида G/K, где G — связная некомпактная простая группа Ли с тривиальным центром, а K — максимальная компактная подгруппа в G, имеющая недискретный центр. Компактные неприводимые Э. с. п. совпадают с пространствами вида G/K, где G — связная компактная простая группа Ли с тривиальным

центром, а K — максимальная связная собственная подгруппа в G, имеющая недискретный центр.

Э. с. п. некомпактного типа имеют следующее истолкование в теории функций многих комплексных переменных. Пусть $\mathbf{C}^n$ есть n-мерное комплексное векторное пространство. Ограниченной областью наз. ограниченное открытое связное подмножество пространства $\mathbf{C}^n$. Ограниченная область наз. симметрической, если каждая точка $p \in D$ является изолированной неподвижной точкой нек-рого инволютивного голоморфного диффеоморфизма области D на себя. Имеет место теорема: а) каждая ограниченная симметрич. область D, будучи снабжена метрикой Бергмана (см. *Бергмана ядро и метрика*, *Однородная ограниченная область*), является Э. с. п. некомпактного типа, в частности, ограниченная симметрич. область обязательно односвязна; б) пусть M — Э. с. п. некомпактного типа, тогда существует ограниченная симметрич. область D и голоморфный диффеоморфизм многообразия M на D.

Лит. см. при статье *Симметрическое пространство*.

А. С. Феденко.

ЭРМИТОВО ЯДРО — комплекснозначная функция $K(x, y)$, интегрируемая с квадратом на $[a, b]\times[a, b]$ и удовлетворяющая условию (эрмитовой симметричности)

$$\overline{K}(x, y) = K(y, x) \qquad (1)$$

для почти всех $(x, y) \in [a, b]\times[a, b]$. Черта в равенстве (1) означает переход к комплексно сопряженному значению. Если Э. я. почти всюду не равно нулю, то оно имеет по крайней мере одно характеристич. значение (собственное значение), т. е. существует такое число λ, что уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0$$

имеет ненулевое решение (собственная функция, соответствующая числу λ). Все характеристич. значения Э. я. действительны и на любом сегменте может находиться лишь конечное их множество. Собственные функции Э. я., соответствующие различным характеристич. значениям, ортогональны между собой.

Существует ортонормированная (конечная или бесконечная) последовательность собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, соответствующих характеристич. значениям $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_k(x)\, \varphi_k(y)/\lambda_k] \qquad (2)$$

сходится в среднем на квадрате $[a, b]\times[a, b]$ к ядру K. Если Э. я. непрерывно и ряд (2) сходится равномерно в $[a, b]\times[a, b]$, то его сумма равна K. Для того чтобы система характеристич. значений и собственных функций Э. я. была конечной, необходимо и достаточно, чтобы ядро было вырожденным.

Все *итерированные ядра* Э. я. также являются Э. я. Линейный интегральный оператор, порожденный Э. я., является самосопряженным. Э. я. наз. полным (или замкнутым), если система его собственных функций полна в $L_2([a, b])$; в противном случае оно наз. неполным. Э. я. наз. положительным (отрицательным), если все его характеристические числа положительны (отрицательны). Полное положительное (отрицательное) ядро наз. положительно (отрицательно) определенным.

Отрезок $[a, b]$ можно заменить областью Ω n-мерного евклидова пространства.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 6 изд., т. 4, ч. 1, М., 1974; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [3] Интегральные уравнения, М., 1968.

Б. В. Хведелидзе.

ЭТАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ — наиболее важный пример топологии Гротендика (см. *Топологизированная кате-*

гория), позволяющий дать определение когомологич. и гомотопич. инвариантов для абстрактных алгебраич. многообразий и схем. Пусть X — схема. Э. т. на X наз. категория X_{et} этальных X-схем, объектами к-рой служат *этальные морфизмы* $U \to X$, а морфизмами — морфизмы X-схем. Конечные семейства $(f_i : U_i \to U)$ такие, что $U = \bigcup_i f_i(U_i)$ объявляются покрытиями, и тем самым в X_{et} вводится топология.

Предпучком множеств (групп, абелевых групп и т. д.) на X_{et} наз. контравариантный функтор F из категории X_{et} в категорию множеств (групп и т. д.). Предпучок $\mathcal{F}$ наз. пучком, если для любого покрытия $(f_i: U_i \to U)$ сечение $s \in \mathcal{F}(U)$ определяется своим ограничением на U_i и для всякого согласованного набора сечений $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ существует единственное сечение $s \in \mathcal{F}(U)$ такое, что $f_i^*(s) = s_i$. На этальные пучки на X (т. е. пучки на категории X_{et}) переносятся многие стандартные понятия *пучков теории*. Напр., если $f: X \to Y$ — морфизм схем, а $\mathcal{F}$ — этальный пучок на X, то, полагая для $V \in Y_{et}$

$$(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(X \times_Y V),$$

получают так наз. прямой образ $f_*\mathcal{F}$ пучка $\mathcal{F}$ при морфизме f. Сопряженный слева к f_* функтор f^* наз. функтором обратного образа. В частности, слоем пучка $\mathcal{F}$ в геометрической точке η: Spec $K \to X$ (где K — алгебраически замкнутое поле) наз. множество $\mathcal{F}_\eta = \eta^*\mathcal{F}(\mathrm{Spec}\ K)$.

Важным примером пучка на X_{et} является пучок $\mathcal{F}_Z$, представимый нек-рой X-схемой Z; для него $\mathcal{F}_Z(U) = \mathrm{Hom}_X(U, Z)$. Если Z — конечная и этальная X-схема, то пучок $\mathcal{F}_Z$ наз. локально постоянным. Пучок $\mathcal{F}$ наз. конструктивным, если существует конечное разбиение схемы X на локально замкнутые подсхемы X_i такое, что ограничение $F \mid X_i$ локально постоянно на каждом X_i.

См. также *Этальные когомологии* и *Гомотопический тип* топологизированной категории.

Лит.: [1] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 6, с. 3—12; [2] Милн Д., Этальные когомологии, пер. с англ., М., 1983; [3] Théorie des topos et cohomologie étale des schemas, t. 1—3, B.— [a. o.], 1972—73; [4] Cohomologie étale, B.— [a. o.], 1977.

В. И. Данилов.

ЭТАЛЬНЫЕ КОГОМОЛОГИИ — когомологии пучков в *этальной топологии*. Они определяются стандартным образом при помощи производных функторов. А именно, пусть X — схема и X_{et} — этальная топология на X. Тогда категория пучков абелевых групп на X_{et} является абелевой категорией с достаточным количеством инъективных объектов. Функтор Γ глобальных сечений точен слева, и его производные функторы $\mathcal{F} \mapsto H^q(X, \mathcal{F})$ (где $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на X_{et}) наз. функторами когомологий. При этом $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$. Аналогично определяются высшие прямые образы $R^q f_*(\mathcal{F})$ пучка $\mathcal{F}$ относительно морфизма $f: X \to Y$; для них имеет место аналог *Лере спектральной последовательности*. Если $\mathcal{F}$ — пучок неабелевых групп, удается определить множество $H^1(X, \mathcal{F})$ (см. *Неабелевы когомологии*).

Наиболее важные результаты в теории Э. к. получены для конструктивных этальных пучков абелевых групп. Центральный из них — теорема конечности и замены базы: пусть $f: X \to Y$ — собственный морфизм, и $\mathcal{F}$ — конструктивный пучок на X. Тогда пучки $R^q f_*(\mathcal{F})$ конструктивны, и слой $R^q f_*\mathcal{F}$ в геометрич. точке $y \to Y$ изоморфен группе когомологий $H^q(f^{-1}(y), \mathcal{F})$ слоя $f^{-1}(y) = X \times_Y y$. Аналогичные теоремы верны для любого морфизма конечного типа, если использовать когомологии с компактными носителями.

Если X — алгебраич. многообразие над алгебраически замкнутым полем, то для любого конструктивного пучка $\mathcal{F}$ на X когомологии с компактными носителя-

ми $H^q_c(X, \mathcal{F})$ конечны и равны 0 при $q > 2\dim X$. Если к тому же X — аффинное многообразие, то $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ для $q > \dim X$.

Для многообразий над полем комплексных чисел Э. к. конструктивных пучков совпадают с классич. когомологиями со значениями в этих пучках. Справедлива теорема о специализации для гладкого морфизма: пусть $f : X \to Y$ — гладкий собственный морфизм схем, и целое число n обратимо на Y; тогда пучки $R^q f_* (\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z})$ локально постоянны на Y.

Для Э. к. имеют место аналог двойственности Пуанкаре (см. *Двойственность* в алгебраической геометрии) и *Кюннета формулы*. Каждый алгебраич. цикл коразмерности i дает класс когомологий в размерности $2i$, что позволяет построить теорию *Чжэня классов*.

Э. к. конструктивных пучков используются для построения *l-адических когомологий* и доказательства гипотез Вейля о *дзета-функции*.

Лит.: [1] Гротендик А., в кн.: Международный математический конгресс в Эдинбурге. Сб. докладов, М., 1962, с. 116—37; [2] Милн Дж., Этальные когомологии, пер. с англ., М., 1983; [3] Cohomologie étale, B.— [e. a.], 1977; [4] Cohomologie l'-adique et fonctions, B.— [e. a.], 1977; [5] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, t. 1—3, B.— [c. a], 1972—73.

В. И. Данилов.

ЭТАЛЬНЫЙ МОРФИЗМ — гладкий морфизм алгебраич. многообразий или схем относительной размерности 0. Эквивалентным образом можно определить Э. м. схем $f : X \to Y$ как локально конечно представленный плоский морфизм такой, что для любой точки $y \in Y$ $k(y)$-схема $f^{-1}(y) = X \otimes_Y k(y)$ конечна и сепарабельна. Э. м. обладает свойством подъема инфинитезимальных деформаций: если $f : X \to Y$ — Э. м., Y' — аффинная Y-схема и Y'_0 — замкнутая подсхема в Y', задаваемая нильпотентным пучком идеалов, то естественное отображение $\mathrm{Hom}_Y(Y', X) \to \mathrm{Hom}_Y(Y'_0, X)$ биективно. Указанное свойство характеризует Э. м. Наконец, Э. м. можно определить как плоский неразветвленный морфизм. (Локально конечно представленный морфизм $f : X \to Y$ неразветвлен, если диагональное вложение $X \to X \times_Y X$ является локальным изоморфизмом.)

Этальность (как и гладкость и неразветвленность) сохраняется при композиции морфизмов и при замене базы. Открытое вложение является Э. м. Любой морфизм между этальными Y-схемами этальный. Для гладких многообразий этальность $f : X \to Y$ означает, что f индуцирует изоморфизм касательных пространств. Локально Э. м. задается многочленом с ненулевой производной.

Э. м. играют важную роль в теории *этальных когомологий*, при определении *фундаментальной группы* схемы, *алгебраического пространства* и *гензелева кольца*.

Лит.: [1] Grothendieck A., Dieudonne J., Eléments de géométrie algébrique, N. Y., 1971; [2] Revêtements étales et groupe fondamental, B.— [e. a.], 1971.

В. И. Данилов.

ЭФФЕКТИВНАЯ ОЦЕНКА — несмещенная статистическая оценка, дисперсия к-рой совпадает с нижней гранью в *Рао — Крамера неравенстве*. Э. о. является достаточной статистикой для оцениваемого параметра. Если Э. о. существует, то ее можно получить с помощью метода максимального правдоподобия. В силу того, что во многих случаях нижняя грань в неравенстве Рао — Крамера не является достижимой, в математич. статистике часто Э. о. наз. оценку, имеющую минимальную дисперсию в классе всех *несмещенных оценок* рассматриваемого параметра.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [3] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968.

М. С. Никулин.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ КРИТЕРИЯ — понятие, позволяющее осуществлять в случае больших выборок количественное сравнение двух

различных статистич. критериев, применяемых для проверки ложной и той же статистич. гипотезы. Необходимость измерять эффективность критериев возникла в 30—40-е гг., когда появились простые с точки зрения вычислений, но «неэффективные» ранговые процедуры.

Существует несколько различных подходов к определению асимптотич. эффективности критерия. Пусть распределение наблюдений определяется действительным параметром θ и требуется проверить гипотезу H_0 : $\theta=\theta_0$ против альтернативы H_1 : $\theta\neq\theta_0$. Пусть также нек-рому критерию с уровнем значимости α требуется N_1 наблюдений для достижения мощности β против заданной альтернативы θ, а другому критерию того же уровня требуется для этого N_2 наблюдений. Тогда можно определить относительную эффективность первого критерия по отношению ко второму формулой $e_{12}=\frac{N_2}{N_1}$. Понятие относительной эффективности дает исчерпывающую информацию при сравнении критериев, но оказывается неудобным для применения, поскольку величина e_{12} является функцией трех аргументов: α, β и θ и обычно не поддается вычислению в явном виде. Для того чтобы обойти эту трудность, используют предельные переходы.

Величина $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} e_{12}(\alpha, \beta, \theta)$ при фиксированных α и β (если этот предел существует) наз. асимптотической относительной эффективностью (АОЭ) по Питмену. Аналогично определяется АОЭ по Бахадуру — в этом случае при фиксированных β и θ устремляют к нулю α, и АОЭ по Ходжесу — Леману, когда при фиксированных α и θ вычисляют предел при $\beta\to 1$.

Каждое из этих определений имеет свои достоинства и недостатки. Так, напр., АОЭ по Питмену вычисляется обычно легче, чем АОЭ по Бахадуру (вычисление последней связано с нетривиальной задачей изучения асимптотики вероятностей больших уклонений тестовых статистик), однако в ряде случаев оказывается менее чувствительным средством для сравнения двух критериев.

Пусть, напр., наблюдения распределены по нормальному закону со средним θ и дисперсией 1 и проверяется гипотеза H_0 : $\theta=0$ против альтернативы H_1 : $\theta>0$. И пусть рассматриваются критерии значимости, основанные на выборочном среднем $\bar{X}$ и дроби Стьюдента t. Поскольку t-критерий не использует информации о величине дисперсии, он должен проигрывать оптимальному критерию, основанному на $\bar{X}$. Однако с точки зрения АОЭ по Питмену эти критерии эквивалентны. С другой стороны, АОЭ по Бахадуру t-критерия по отношению к $\bar{X}$ строго меньше 1 при любом $\theta>0$.

В более сложных случаях АОЭ по Питмену может зависеть от α или β и ее вычисление оказывается очень трудным. Тогда вычисляют ее предельное значение при $\beta\to 1$ или $\alpha\to 0$. Последнее обычно совпадает с предельным значением АОЭ по Бахадуру при $\theta\to\theta_0$.

О других подходах к определению АОЭ см. в [2], [4], последовательные аналоги понятия АОЭ введены в [5] — [7]. Выбор того или иного определения АОЭ должен основываться на том, какая из них дает более точное приближение к относительной эффективности e_{12}, однако в настоящее время (1984) в этом направлении почти ничего не известно.

Лит.: [1] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Bahadur R., «Ann. Math. Stat.», 1967, v. 38, № 2, p. 303—24; [3] Hodges J., Lehmann E., там же, 1956, v. 27, № 2, p. 324—35; [4] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [5] Lai T. L., «Ann. Stat.», 1978, v. 6, № 5, p. 1027—47; [6] Berk R., Brown L., там же, 1978, v. 6, № 3, p. 567—81; [7] Berk R., там же, 1976, v. 4,

№ 5, p. 891—911; [8] Wicand H., там же, 1976, v. 4, № 5, p. 1003—11; [9] Groeneboom P., Oosterhoff J., «Stat. neerlandica», 1977, v. 31, p. 1—24. *Я. Ю. Никитин.*

ЭФФЕКТИВНОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРОЦЕДУРЫ — понятие, используемое при сравнении статистич. процедур из данного класса с оптимальной. В математич. статистике понятие оптимальности статистич. процедуры выражается в терминах риска (функции риска) процедуры, к-рый, в свою очередь, непосредственно зависит от выбора функции потерь. Поэтому может оказаться, что одна и та же статистич. процедура является очень эффективной или даже оптимальной в

ЮНГА ДИАГРАММА порядка m — *Юнга таблица* порядка m, в клетках к-рой каким-либо образом расположены числа 1, 2, ..., m, (см. табл.). Ю. д. наз. стандартной, если в каждой строке и в каждом столбце числа идут в порядке возрастания. Число всех Ю. д. для данной таблицы Юнга t порядка m равно $m!$, а число стандартных Ю. д. равно

$$\frac{m!}{\prod \lambda_{ij}},$$

5	7	9	4
8	2	1	
3			
6			

где произведение берется по всем клеткам c_{ij} таблицы t, а λ_{ij} обозначает длину соответствующего крюка.

Э. Б. Винберг

ЮНГА ПРИЗНАК — один из достаточных признаков сходимости *Фурье ряда* в точке. Пусть функция $f(x)$ имеет период 2π, интегрируема по Лебегу на отрезке $[0, 2\pi]$, $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$ и в точке x_0 выполнены следующие условия: $\varphi_{x_0}(t) \to 0$ при $t \to +0$; функция $\psi(t) = t\varphi_{x_0}(t)$ имеет конечную вариацию $V(\delta) \equiv \mathrm{Var}\,\psi(t)$ на отрезке $[0, \delta]$, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, где $\delta_0 > 0$ — нек-рое фиксированное число; $V(\delta) = O(\delta)$ при $\delta \to +0$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к $f(x_0)$ (см. [2]). Ю. п. сильнее *Жордана признака*. Установлен У. Юнгом [1].

Лит.: [1] Young W. H., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1916, v. 17, p. 195—236; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961. *Б. И. Голубов.*

ЮНГА СИММЕТРИЗАТОР — элемент c_d группового кольца группы S_m, определяемый *Юнга диаграммой* d порядка m по следующему правилу. Пусть R_d (соответственно C_d) — подгруппа группы S_m, состоящая из всех подстановок, переводящих каждое из чисел 1, 2, ..., m в число, находящееся в той же строке (соответственно в том же столбце) диаграммы d. И пусть

$$r_d = \sum_{g \in R_d} g, \quad c_d = \sum_{g \in C_d} \varepsilon(g)\, g,$$

где $\varepsilon(g) = \pm 1$ — четность подстановки g. Тогда $e_d = c_d r_d$ (иногда определяют $e_d = r_d c_d$).

Основное свойство Ю. с. состоит в том, что он пропорционален неразложимому идемпотенту групповой алгебры $\mathbb{C}S_m$. Коэффициент пропорциональности равен произведению длин всех крюков диаграммы d.

Э. Б. Винберг.

ЮНГА ТАБЛИЦА порядка m — графическое представление разбиения $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ натурального числа m (где $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r > 0$, $\sum \lambda_i = m$). Ю. т. t_λ состоит из m клеток, располагающихся в ее строках и столбцах таким образом, что в i-й строке находится

каком-то одном смысле и мало эффективной в другом смысле.

Э. с. п.— понятие, не совсем четко определенное; более точный смысл оно приобретает в конкретных задачах математич. статистики, в таких, как, напр., статистических гипотез проверка и статистическое оценивание.

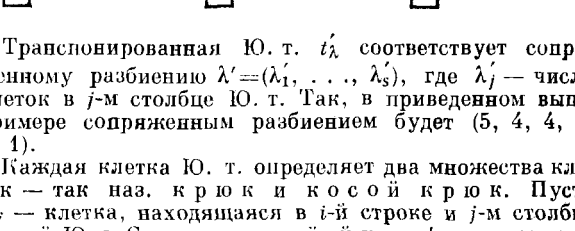
М. С. Никулин.

ЭФФЕКТИВНЫЙ КРИТЕРИЙ — наиболее мощный критерий в рассматриваемом классе статистич. критериев, имеющих один и тот же *значимости уровень*.

М. С. Никулин.

Ю

λ_i клеток, причем первые клетки всех строк находятся в одном (первом) столбце. Напр., разбиение (6, 5, 4, 4, 1) числа 20 представляется Ю. т. (см. табл. слева).



Транспонированная Ю. т. t'_λ соответствует сопряженному разбиению $\lambda'=(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$, где λ'_j — число клеток в j-м столбце Ю. т. Так, в приведенном выше примере сопряженным разбиением будет (5, 4, 4, 4, 2, 1).

Каждая клетка Ю. т. определяет два множества клеток — так наз. крюк и косой крюк. Пусть c_{ij} — клетка, находящаяся в i-й строке и j-м столбце данной Ю. т. Соответствующий ей крюк h_{ij} есть множество, состоящее из клеток c_{il} с $l \geqslant j$ и c_{kj} с $k \geqslant i$, а косой крюк есть наименьшее связное множество крайних клеток, содержащее последнюю клетку i-й строки и последнюю клетку j-го столбца. Напр., для изображенной слева Ю. т. крюк и косой крюк, определяемые клеткой c_{22}, имеют вид, показанный на табл. в центре и справа соответственно.

Длиной крюка (соответственно косого крюка) наз. число входящих в него клеток. Длина крюка h_{ij} равна $\lambda_{ij}=\lambda_i+\lambda'_j-i-j+1$. При удалении из Ю. т. косого крюка длины p получается Ю. т. порядка $m-p$. Высотой крюка (соответственно косого крюка) наз. число строк, в которых располагаются его клетки.

Язык Ю. т. и *Юнга диаграмм* используется в теории *представлений симметрических групп* и в теории *представлений классических групп*. Он был предложен А. Юнгом (см. [1]).

Лит.: [1] Young A., «Proc. Lond. Math. Soc.», 1901, v. 33, p. 97—146; 1902, v. 34, p. 361—402.

Э. Б. Винберг.

ЮНГА ТЕОРЕМА: каждое множество диаметра d евклидова пространства E_n принадлежит шару из E_n радиуса $r=d\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$. Имеются аналоги и обобщения Ю. т. (напр., замена евклидова расстояния на другие метрики) (см. [2]).

Теорема доказана Г. Юнгом [1].

Лит.: [1] Jung H. W. E., «J. reine und angew. Math.», 1901, Bd 123, S. 241—57; [2] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В., Теорема Хелли и ее применения, пер. с англ., М., 1968; [3] Хадвигер Г., Дебруннер Г., Комбинаторная геометрия плоскости, пер. с нем., М., 1965.

И. С. Солтан.

ЯДЕРНАЯ C^*-АЛГЕБРА — C^*-алгебра A, обладающая следующим свойством: для любой C^*-алгебры B в алгебраическом тензорном произведении $A \otimes B$ этих алгебр существует единственная норма, пополнение в к-рой превращает $A \otimes B$ в C^*-алгебру. Таким образом, Я. C^*-а. по отношению к тензорным произведениям ведут себя подобно *ядерным пространствам* (хотя бесконечномерные Я. C^*-а. не являются ядерными пространствами). Класс Я. C^*-а. включает в себя все C^*-алгебры типа 1. Этот класс замкнут относительно индуктивного предела. Если I — замкнутый двусторонний идеал в C^*-алгебре A, то A ядерна тогда и только тогда, когда ядерны I и A/I. Подалгебра в Я. C^*-а. не обязана быть Я. C^*-а. Тензорное произведение C^*-алгебр A и B ядерно тогда и только тогда, когда A и B (обе) являются Я. C^*-а. Если G — аменабельная локально бикомпактная группа, то обертывающая C^*-алгебра групповой алгебры $L^1(G)$ ядерна (обратное неверно). Каждое факторпредставление Я. C^*-а. гиперфинитно, т. е. порождаемая этим представлением *Неймана алгебра* может быть получена из возрастающей последовательности конечномерных факторов (матричных алгебр). Любое факторсостояние на ядерной C^*-подалгебре в C^*-алгебре продолжается до факторсостояния на всей алгебре.

Пусть $L(H)$ есть C^*-алгебра всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H, A есть C^*-алгебра операторов в H. Если A — Я. C^*-а., то ее слабое замыкание $\overline{A}$ является инъективной алгеброй Неймана, т. е. существует проекция $L(H) \to \overline{A}$ с единичной нормой; в этом случае коммутант A' алгебры A также инъективен. Произвольная C^*-алгебра A ядерна тогда и только тогда, когда ее обертывающая алгебра Неймана инъективна.

C^*-алгебра A ядерна тогда и только тогда, когда она обладает свойством вполне положительной аппроксимации, т. е. тождественный оператор в A аппроксимируется в сильной операторной топологии линейными операторами конечного ранга с нормой, не превосходящей 1, и с нек-рым дополнительным свойством «вполне положительности» [1].

Любая Я. C^*-а. обладает свойством аппроксимации и ограниченной аппроксимации (см. *Ядерный оператор*). Однако существует неядерная C^*-алгебра со свойством ограниченной аппроксимации. C^*-алгебра $L(H)$ всех ограниченных операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве H не обладает свойством вполне положительной аппроксимации и даже свойством аппроксимации, так что $L(H)$ не является Я. C^*-а.

Лит.: [1] Lance E. Ch., «Proc. Symp. Pure Math.», 1982, v. 38, pt 1, p. 379—99; [2] Браттели У., Робинсон Д., Операторные алгебры и квантовая статистическая механика, пер. с англ., М., 1982.

Г. Л. Литвинов.

ЯДЕРНАЯ БИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА — билинейная форма $B(f, g)$ на декартовом произведении $F \times G$ локально выпуклых пространств F и G, допускающая представление вида

$$B(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle f, f_i' \rangle \langle g, g_i' \rangle,$$

где $\{\lambda_i\}$ — суммируемая последовательность, $\{f_i'\}$ и $\{g_i'\}$ — равностепенно непрерывные последователь-

ности в сопряженных к F и G пространствах F' и G' соответственно, а значение линейного функционала a' на векторе a обозначается $\langle a, a'\rangle$. Все Я. б. ф. непрерывны. Если F — ядерное пространство, то для любого локально выпуклого пространства G все непрерывные билинейные формы на $F\times G$ являются ядерными (т е о р е м а о я д р е). Этот результат принадлежит А. Гротендику [1]; в приведенной форме теорема о ядре сформулирована в [2], другие формулировки см. в [3]. Справедливо и обратное утверждение: если для пространства F выполняется заключение теоремы о ядре, то это пространство ядерно.

Для пространств гладких финитных функций теорему о ядре впервые получил Л. Шварц [4]. Пусть D — ядерное пространство всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на прямой, наделенное стандартной локально выпуклой топологией Шварца, так что сопряженное пространство D' состоит из всех обобщенных функций на прямой. Для частного случая $F=G=D$ теорема о ядре эквивалентна следующему утверждению: всякий непрерывный билинейный функционал на $D\times D$ имеет вид

$$B(f, g)=\langle f(t_1)\, g(t_2), F\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} F(t_1, t_2)\, f(t_1)\, g(t_2)\, dt_1\, dt_2,$$

где $f(t),\ g(t)\in D$ и $F=F(t_1, t_2)$ — обобщенная функция от двух переменных. Аналогичную формулировку допускает теорема о ядре для пространств гладких финитных функций от нескольких переменных, пространств быстро убывающих функций и других конкретных ядерных пространств. Аналогичные результаты справедливы и для полилинейных форм.

Непрерывную билинейную форму $B(f, g)$ на $D\times D$ можно отождествить с непрерывным линейным оператором $A: D\to D'$ с помощью равенства

$$B(f, g)=\langle g, Af\rangle,$$

что приводит к формулировке т е о р е м ы Ш в а р ц а о я д р е: для каждого непрерывного линейного отображения $A: D\to D'$ существует такая однозначно определенная обобщенная функция $F(t_1, t_2)$ от двух переменных, что

$$A: f(t_1)\mapsto \int_{-\infty}^{\infty} F(t_1, t_2)\, f(t_2)\, dt_2$$

для всех $f\in D$. Другими словами, A является интегральным оператором с ядром F.

Лит.: [1] G r o t h e n d i e c k A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Providence, 1955; [2] Н и ч А., Ядерные локально выпуклые пространства, пер. с нем., М., 1967; [3] Г е л ь ф а н д И. М., В и л е н к и н Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [4] S c h w a r t z L., «Proc. Intern. Congr. Math.» (Camb., 1950), 1952, v. 1, p. 220—30; [5] е г о ж е, «J. d'Analyse Math.», 1954/55, v. 4, p. 88—148.

Г. Л. Литвинов.

ЯДЕРНАЯ КОНГРУЭНЦИЯ гомоморфизма $\varphi: A\to A'$ алгебраич. систем — конгруэнция θ на алгебраич. системе A, состоящая из всех пар $(a, b)\in A\times A$, для к-рых $\varphi(a)=\varphi(b)$. Для всякой конгруэнции θ алгебраич. системы существует гомоморфизм φ этой системы, для к-рого θ является Я. к. Если θ — Я. к. сильного гомоморфизма φ алгебраич. системы A на

систему A', то канонич. отображение $a/\theta \to \varphi(a)$, где $a/\theta = \{x \in A \mid (x, a) \in \theta\}$, есть изоморфизм факторсистемы A/θ на систему A'.

Лит. см. при статье *Гомоморфизм.* *Д. М. Смирнов.*

ЯДЕРНАЯ НОРМА, с л е д о в а я н о р м а,— норма в пространстве $N(X, Y)$ *ядерных операторов*, отображающих банахово пространство X в банахово пространство Y.

Пусть X, Y — банаховы пространства над полем действительных или комплексных чисел, $L(X, Y)$ — пространство всех непрерывных линейных операторов, отображающих X в Y, $F(X, Y)$ — линейное подпространство, состоящее из операторов конечного ранга (т. е. операторов с конечномерным образом). Банахово сопряженное пространство к X обозначается X', значение функционала $x' \in X'$ на векторе $x \in X$ обозначается $\langle x, x' \rangle$.

Каждый ядерный оператор $A \in N(X, Y)$ допускает представление в виде

$$x \mapsto Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i' \rangle y_i, \qquad (1)$$

где $\{x_i'\}$ и $\{y_i\}$ — такие последовательности в X' и Y соответственно, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\| \|y_i\| < \infty;$$

такие представления наз. я д е р н ы м и. Величина

$$\|A\|_1 = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\| \|y_i\|, \qquad (2)$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным ядерным представлениям вида (1), наз. я д е р н о й н о р м о й оператора A. Эта норма превращает $N(X, Y)$ в банахово пространство, к-рое содержит $F(X, Y)$ в качестве плотного линейного подпространства. Если $A \in N(X, Y)$, то сопряженный оператор A' содержится в $N(Y', X')$ и $\|A'\|_1 \leqslant \|A\|_1$. Пусть $\|\cdot\|$ — обычная операторная норма в $L(X, Y)$. Тогда $\|A\| \leqslant \|A_1\|$ для всех $A \in N(X, Y)$. Если $A \in L(Y, Z)$, $B \in N(X, Y)$, то $AB \in N(X, Z)$ и $\|AB\|_1 \leqslant \|A\| \|B\|_1$; если $A \in N(Y, Z)$, $B \in L(X, Y)$, то $AB \in N(X, Z)$ и $\|AB\|_1 \leqslant \|A\|_1 \|B\|$. Любой оператор $F \in F(X, Y)$ представим в виде

$$x \mapsto Fx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i' \rangle y_i. \qquad (3)$$

Величина

$$\|F\|_1^0 = \inf \sum_{i=1}^{n} \|x_i'\| \|y_i\|, \qquad (4)$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным конечным представлениям вида (3), наз. к о н е ч н о й я д е р н о й н о р м о й оператора F. Пространство $F(X, Y)$ можно отождествить с тензорным произведением $X' \otimes Y$. При этом оператору F вида (3) соответствует элемент

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i' \otimes y_i \in X' \otimes Y, \qquad (5)$$

и конечная Я. н. (4) переходит в норму

$$\|u\| = \inf \sum_{i=1}^{n} \|x_i'\| \|y_i\|, \qquad (6)$$

где точная нижняя грань берется по всем конечным представлениям элемента u в виде (5). Эта норма наз. т е н з о р н ы м (или с к р е щ е н н ы м) п р о и з в е д е н и е м норм в Y и в X'. Пополнение $X' \otimes Y$ по норме (6) обозначается $X' \hat{\otimes} Y$. Отображение $X' \otimes Y \to L(X, Y)$, при к-ром элемент (5) переходит в оператор (3), продолжается до непрерывного линейного оператора $\Gamma : X' \hat{\otimes} Y \to L(X, Y)$. Образ оператора Γ совпадает с $N(X, Y)$. Если отображение Γ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $X' \hat{\otimes} Y$ и

$N(X, Y)$, то $N(X, Y)$ совпадает с замыканием $F(X, Y)$ по норме (4); в этом случае сужение Я. н. на $F(X, Y)$ совпадает с конечной Я. н. Однако в общем случае оператор Г может иметь нетривиальное ядро, так что Я. н. является результатом факторизации нормы в $X' \otimes Y$ (см. *Ядерный оператор*).

Пусть $X=Y=H$, где H — сепарабельное гильбертово пространство; $L(H)=L(H, H)$ — алгебра ограниченных операторов в H, $L^1(H)=N(H, H)$ — идеал ядерных операторов в $L(H)$. В этом случае отображение Г взаимно однозначно, для операторов конечного ранга Я. н. совпадает с конечной Я. н. и каждый оператор $A \in L^1(H)$ имеет след $\mathrm{tr}A$ (см. *Ядерный оператор*). Я. н. оператора $A \in L^1(H)$ совпадает с величиной $\mathrm{tr}\,[(A^*A)^{1/2}]$, где A^* — сопряженный к A оператор в H. Я. н. связана с *Гильберта—Шмидта нормой* $\|\cdot\|_2$ неравенством $\|A\|_2 \leqslant \|A\|_1$. Общий вид линейного непрерывного функционала в банаховом пространстве $L^1(H)$ дается формулой

$$A \to \mathrm{tr}\,(AB), \tag{7}$$

где B — произвольный оператор из $L(H)$, причем норма функционала (7) совпадает с $\|B\|$. Следовательно, $L(H)$ изометрично пространству, сопряженному к $L^1(H)$. Формула (7) дает общий вид линейного функционала и на замкнутом подпространстве $L^\infty(H)$ в $L(H)$, состоящем из всех вполне непрерывных (компактных) операторов; при этом $A \in L^\infty(H)$, а B пробегает $L^1(H)$. При этом норма функционала (7) совпадает с $\|B\|_1$, т. е. пространство ядерных операторов $L^1(H)$ с Я. н. изометрично пространству, сопряженному к $L^\infty(H)$ в обычной операторной норме. Перечисленные результаты допускают нетривиальные обобщения на случай операторов в банаховых пространствах.

Пример. Пусть $X=Y=l^1$ — пространство суммируемых последовательностей. Оператор $A \in L(l^1, l^1)$ содержится в $N(l^1, l^1)$ тогда и только тогда, когда существует такая бесконечная матрица $\|\sigma_{ik}\|$, что A переводит последовательность $\{\xi_k\} \in l^1$ в $\{\eta_i\} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{ik}\xi_k\right\} \in l^1$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \sup_k |\sigma_{ik}| < \infty$. В этом случае $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \sup_k |\sigma_{ik}|$.

Лит.: [1] Grothendieck A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Providence, 1955; [2] Пич А., Операторные идеалы, пер. с англ., М., 1982; [3] его же, Ядерные локально выпуклые пространства, пер. с нем., М., 1967; [4] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1965; [5] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [6] Мореп К., Методы гильбертова пространства, пер. с польск., М., 1965; [7] Дэй М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961.

Г. Л. Литвинов.

ЯДЕРНАЯ ПАРА морфизма категории — категорное обобщение отношения эквивалентности, индуцированного отображением одного множества в другое. Пара морфизмов $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : R \to A$ категории $\mathfrak{K}$ наз. ядерной парой морфизма $\alpha : A \to B$, если $\varepsilon_1\alpha = \varepsilon_2\alpha$ и если для любой пары морфизмов $\varphi, \psi : X \to A$, для к-рой $\varphi\alpha = \psi\alpha$, существует такой единственный морфизм $\gamma : X \to R$, что $\varphi = \gamma\varepsilon_1$ и $\psi = \gamma\varepsilon_2$.

Пусть $\mathfrak{Y}$ — произвольная категория однотипных универсальных алгебр и всех гомоморфизмов между ними, замкнутая относительно конечных произведений, и пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : R \to A$ — Я. п. гомоморфизма $f : A \to B$ из $\mathfrak{Y}$. Тогда образ гомоморфизма

$$\varepsilon_1 \times \varepsilon_2 : R \to A \times A,$$

индуцированного парой $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, является конгруэнцией на алгебре A. Обратно, если $R \subseteq A \times A$ — произвольная конгруэнция на A, i — вложение R в $A \times A$, p_1, p_2 — проекции $A \times A$ на A, то пара гомоморфизмов

ip_1, $ip_{\bar{2}}$: $R \to A$ является Я. п. естественного гомоморфизма алгебры A на факторалгебру A/R.

В произвольной категории с конечными произведениями и ядрами пар морфизмов Я. п. морфизма α : $A \to B$ строится следующим образом. Выбирают произведение $A \times A$ с проекциями π_1 и π_2 и находят ядро μ пары морфизмов $\pi_1\alpha$, $\pi_2\alpha$: $A \times A \to B$. Тогда пара морфизмов $\mu\pi_1$, $\mu\pi_2$ является Я. п. морфизма α.

М. Ш. Цаленко.

ЯДЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — *локально выпуклое пространство*, у к-рого все линейные непрерывные отображения в каждое банахово пространство являются *ядерными операторами*. Понятие Я. п. возникло [1] при исследовании вопроса о том, для каких пространств справедливы аналоги теоремы Шварца о ядре (см. *Ядерная билинейная форма*). Основополагающие результаты теории Я. п. принадлежат А. Гротендику [1]. Употребительные в анализе функциональные пространства, как правило, являются банаховыми или Я. п. Важную роль играют Я. п. в спектральном анализе операторов в гильбертовых пространствах (построение оснащенных гильбертовых пространств, разложения по обобщенным собственным векторам и т. п.) (см. [2]). Я. п. тесно связаны с теорией меры на локально выпуклых пространствах (см. [3]). Удается охарактеризовать Я. п. в терминах инвариантов типа размерности (аппроксимативная размерность, диаметральная размерность и др.) (см. [2], [4], [5]). Одним из таких инвариантов является функциональная размерность, к-рая для многих пространств, состоящих из целых аналитич. функций, совпадает с числом переменных, от к-рых зависят эти функции (см. [2]).

По своим свойствам Я. п. приближаются к конечномерным пространствам. Каждое ограниченное множество в Я. п. предкомпактно. Если Я. п. полно (или хотя бы квазиполно, т. е. каждое замкнутое ограниченное множество является полным), то оно полурефлексивно (т. е. второе сопряженное к этому пространству совпадает с ним по запасу элементов) и каждое замкнутое ограниченное множество в нем является компактным. Если квазиполное Я. п. является *бочечным пространством*, то оно является и *Монтеля пространством* (в частности, рефлексивно); всякая слабо сходящаяся счетная последовательность в таком пространстве сходится и в исходной топологии. Нормированное пространство ядерно тогда и только тогда, когда оно конечномерно. Каждое Я. п. обладает свойством аппроксимации: любой непрерывный линейный оператор в таком пространстве можно приблизить в операторной топологии предкомпактной сходимости операторами конечного ранга (т. е. непрерывными линейными операторами с конечномерными образами). Тем не менее существуют ядерные *Фреше пространства*, не обладающие свойством ограниченной аппроксимации: в таком пространстве тождественный оператор не является пределом счетной последовательности операторов конечного ранга в сильной или слабой операторной топологии [6]. Построены Я. п. Фреше без базиса Шаудера, причем такие пространства могут иметь сколь угодно малую диаметральную размерность, т. е. в нек-ром смысле могут быть сколь угодно близкими к конечномерным [7]. Для Я. п. построен и контрпример к проблеме инвариантного подпространства: в нек-ром ядерном пространстве Фреше указан непрерывный линейный оператор, не имеющий нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств [8].

Примеры Я. п. 1) Пусть $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех (действительных или комплексных) бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$, наделенное топологией равномерной сходимости со всеми производными на компактных подмножествах в $\mathbb{R}^n$. Сопряженное к

$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ пространство $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех *обобщенных функций* с компактным носителем. Пусть $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — линейные подпространства в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, состоящие соответственно из функций с компактным носителем и из функций, убывающих при $|x|\to\infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Сопряженные к $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ относительно стандартной топологии пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ состоят соответственно из всех обобщенных функций и всех обобщенных функций медленного роста. Пространства $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$, наделенные сильными топологиями, являются полными рефлексивными Я. п.

2) Пусть $\{a_{np}\}$ — бесконечная матрица, причем $0\leqslant a_{np}<\infty$, $a_{np}\leqslant a_{n(p+1)}$, $n,\ p=1,\ 2,\ \ldots$. Пространство таких последовательностей $\xi=\{\xi_n\}$, что $|\xi|_p=\sum_{n=0}^{\infty}|\xi_n|a_{np}<\infty$ для всех p, с топологией, задаваемой преднормами $\xi\to|\xi|_p$, наз. п р о с т р а н с т в о м К ё т е и обозначается $\mathcal{K}(a_{np})$. Это пространство ядерно тогда и только тогда, когда для любого p найдется такое q, что $\sum_{n=0}^{\infty}(a_{np}/a_{nq})<\infty$.

С в о й с т в а н а с л е д о в а н и я. Локально выпуклое пространство ядерно тогда и только тогда, когда ядерно его пополнение. Каждое подпространство (отделимое факторпространство) Я. п. ядерно. Прямая сумма, индуктивный предел счетного семейства Я. п., а также произведение, проективный предел любого семейства Я. п.— снова Я. п.

Пусть E — произвольное локально выпуклое пространство, E' — сопряженное пространство к E, наделенное сильной топологией. Если E' — Я. п., то E наз. д у а л ь н о я д е р н ы м. Если E — произвольное пространство, а F — Я. п., то пространство $L(E, F)$ непрерывных линейных операторов из E в F является Я. п. относительно сильной *операторной топологии* (простой сходимости); если к тому же E полурефлексивно и дуально ядерно, то $L(E, F)$ ядерно и в топологии ограниченной сходимости.

М е т р и ч е с к и е и д у а л ь н о м е т р и ч е с к и е Я. п. Локально выпуклое пространство E наз. д у а л ь н о м е т р и ч е с к и м или п р о с т р а н с т в о м т и п а $(\mathcal{DF})$, если оно имеет счетную фундаментальную систему ограниченных множеств и каждое (сильно) ограниченное счетное объединение равностепенно непрерывных подмножеств в E' равностепенно непрерывно. Всякое сильное сопряженное к метризуемому локально выпуклому пространству является дуально метрическим; обратное неверно. Если E — пространство типа $(\mathcal{DF})$, то E' — пространство типа $(\mathcal{F})$ (пространство Фреше, т. е. полное и метризуемое). Примерами Я. п. типа $(\mathcal{F})$ являются пространства Кёте, а также $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$; соответственно $\mathcal{E}'$, $\mathcal{S}'$ — Я. п. типа $(\mathcal{DF})$. Пространства $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ не являются ни метрическими, ни дуально метрическими.

Метрические и дуально метрические Я. п. сепарабельны, а если они полны, то рефлексивны. Переход к сопряженному пространству $E\to E'$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между Я. п. типа $(\mathcal{F})$ и полными Я. п. типа $(\mathcal{DF})$. Если E — полное Я. п. типа $(\mathcal{DF})$, а F — Я. п. типа $(\mathcal{F})$, то пространство операторов $L(E, F)$, наделенное топологией ограниченной сходимости, ядерно и дуально ядерно.

Каждое Я. п. типа $(\mathcal{F})$ изоморфно подпространству пространства $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых функций на прямой, т. е. $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ — универсальное пространство для Я. п. типа $(\mathcal{F})$ (см. [10]). Пространство Фреше E ядерно тогда и только тогда, когда всякий безусловно сходящийся ряд в E сходится абсолютно (т. е. по любой непрерывной преднорме). Интенсивно изучаются пространства голоморфных функций на Я. п. типа $(\mathcal{F})$ и $(\mathcal{DF})$ (см. [11]).

Тензорные произведения Я. п. и пространства вектор-функций. Алгебраическое тензорное произведение $E \otimes F$ локально выпуклых пространств E и F можно наделить проективной и слабой топологиями, превращающими $E \otimes F$ в топологическое тензорное произведение. Проективная топология — это сильнейшая локально выпуклая топология, для к-рой каноническое билинейное отображение $E \times F \to E \otimes F$ непрерывно. Слабая топология (или топология (би)равностепенно непрерывной сходимости) индуцируется при естественном вложении $E \otimes F \to L_e(E'_\tau, F)$, где E'_τ — сопряженное пространство к E, наделенное топологией Макки $\tau(E', E)$, а $L_e(E'_\tau, F)$ — пространство непрерывных линейных отображений $E'_\tau \to F$, наделенное топологией равномерной сходимости на равностепенно непрерывных множествах в E'. При этом вложении элемент $x \otimes y \in E \otimes F$ переходит в оператор $x' \mapsto \langle x, x' \rangle y$, где $\langle x, x' \rangle$ — значение функционала $x' \in E'$ на $x \in E$. Пополнение $E \otimes F$ в проективной (слабой) топологии обозначается $E \hat{\otimes} F$ (соответственно $E \tilde{\otimes} F$).

Для того чтобы E было Я. п., необходимо и достаточно, чтобы для произвольного локально выпуклого пространства F проективная и слабая топологии в $E \otimes F$ совпадали, т. е.

$$E \hat{\otimes} F = E \tilde{\otimes} F. \qquad (1)$$

Если F совпадает с пространством l^1 суммируемых последовательностей, то E — Я. п.; вместо l^1 можно взять любое пространство с безусловным базисом (см. [12]). Тем не менее существует такое (*неядерное*) бесконечномерное сепарабельное банахово пространство X, что $X \hat{\otimes} X = X \tilde{\otimes} X$ (см. [13]). Если E и F — полные пространства и F — Я. п., то вложение $E \otimes F \to L_e(E'_\tau, F)$ продолжается до изоморфизма между $E \hat{\otimes} F$ и $L_e(E'_\tau, F)$.

Если E — ненулевое Я. п., то $E \hat{\otimes} F$ ядерно тогда и только тогда, когда F ядерно. Если E и F — оба пространства типа $(\mathcal{F})$ (или $(\mathcal{LF})$) и E — ядерно, то $E \hat{\otimes} F$ — пространство типа $(\mathcal{F})$ (соответственно $(\mathcal{LF})$) и $(E \hat{\otimes} F)' = E' \hat{\otimes} F'$.

Пусть E — полное Я. п., состоящее из скалярных функций (не всех) на нек-ром множестве T, причем E является индуктивным пределом (локально выпуклой оболочкой) счетной последовательности пространств типа $(\mathcal{F})$ и топология в E не слабее топологии поточечной сходимости функций на T. Тогда для любого полного пространства F можно отождествить $E \hat{\otimes} F$ с пространством всех таких отображений (вектор-функций) $T \to F$, что скалярные функции $t \mapsto \langle f(t), y' \rangle$ принадлежат E для всех $y' \in F'$. В частности, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes} F$ совпадает с пространством всех бесконечно дифференцируемых вектор-функций на $\mathbb{R}^n$ со значениями в F, а $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes} \mathcal{E}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Структура Я. п. Пусть U — выпуклая закругленная окрестность нуля в локально выпуклом пространстве E, а p — соответствующий U функционал Минковского (непрерывная преднорма), E_U — факторпространство $E/p^{-1}(0)$ с нормой, индуцированной преднормой p, $\hat{E}_U$ — пополнение нормированного пространства E_U. Определено непрерывное каноническое линейное отображение $E \to \hat{E}_U$; если окрестность U содержит окрестность V, то канонически определяется непрерывное линейное отображение $\hat{E}_V \to \hat{E}_U$.

Для локально выпуклого пространства E следующие условия эквивалентны: 1) E является Я. п.; 2) в E существует такой базис $\mathfrak{B}$ выпуклых закругленных окрестностей нуля, что для любой окрестности $U \in \mathfrak{B}$

канонич. отображение $E \to \hat{E}_U$ является ядерным оператором; 3) отображение $E \mapsto \hat{E}_U$ ядерно для любой выпуклой закругленной окрестности нуля U в E; 4) всякая выпуклая закругленная окрестность нуля U в E содержит другую такую окрестность нуля V, что ядерно канонич. отображение $\hat{E}_V \to \hat{E}_U$.

Пусть E — Я. п. Для любой окрестности нуля U в E и любого такого числа p, что $1 \leqslant p \leqslant \infty$, существует выпуклая закругленная окрестность $V \subset U$, для к-рой E_V (по норме) изоморфно подпространству в пространстве l^p суммируемых со степенью p последовательностей. Таким образом, E совпадает с локально выпуклым ядром (индуктивным пределом) семейства пространств, изоморфных l^p. В частности (случай $p=2$) в любом Я. п. E существует такой базис окрестностей нуля $\{U_\alpha\}$, что все пространства $\hat{E}_{U_\alpha}$ гильбертовы; таким образом, E — мультигильбертово пространство, т. е. топология в E может быть порождена семейством преднорм, каждая из к-рых получается из нек-рой неотрицательно определенной эрмитовой формы на $E \times E$. Любое полное Я. п. изоморфно проективному пределу семейства гильбертовых пространств. Пространство E типа $(\mathscr{F})$ ядерно тогда и только тогда, когда его можно представить в виде такого проективного предела $E = \varprojlim g_{mn} H_n$ счетного семейства гильбертовых пространств H_n, что g_{mn} — ядерные операторы (или хотя бы *Гильберта—Шмидта операторы*) при $m < n$.

Базисы в Я. п. В Я. п. любой равностепенно непрерывный базис является абсолютным. В пространстве типа $(\mathscr{F})$ любой счетный базис (хотя бы слабый) является равностепенно непрерывным базисом Шаудера, так что в Я. п. типа $(\mathscr{F})$ всякий базис является абсолютным (в частности, безусловным). Аналогичный результат справедлив для полных Я. п. типа $(\mathscr{DF})$ и всех Я. п., для к-рых имеет место теорема о замкнутом графике. Факторпространство Я. п. типа $(\mathscr{F})$ с базисом не обязано иметь базис (см. [4], [5], [6]).

Пусть E — Я. п. типа $(\mathscr{F})$. Топологию в E можно задать счетной системой преднорм $x \mapsto \|x\|_p$, $p = 1, 2, \ldots$, причем $\|x\|_p \leqslant \|x\|_{p+1}$ для всех $x \in E$. Если в E существует базис или непрерывная норма, то преднормы $\|\cdot\|_p$ можно считать нормами. Пусть $\{e_n\}$ — базис в E; тогда любой элемент $x \in E$ разлагается в сходящийся (абсолютно и безусловно) ряд

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n,$$

где координаты ξ_n имеют вид $\xi_n = \langle x, x'_n \rangle$, а функционалы x'_n образуют биортогональный базис в E'. Пространство E изоморфно пространству Кёте $\mathscr{K}(a_{np})$, где $a_{np} = \|e_n\|_p$; при этом изоморфизме элемент $x \in E$ переходит в последовательность своих координат $\{\xi_n\}$. Базис $\{f_n\}$ в E эквивалентен базису $\{e_n\}$, т. е. получается из него под действием изоморфизма тогда и только тогда, когда пространства Кёте $\mathscr{K}(\|e_n\|_p)$ и $\mathscr{K}(\|f_n\|_p)$ совпадают как множества [4]. Базис $\{f_n\}$ наз. регулярным (или правильным), если существует система норм $\|\cdot\|_p$ и перестановка индексов σ такие, что $\|f_{\sigma(n)}\|_p / \|f_{\sigma(n)}\|_q$ монотонно убывает при всех $q \geqslant p$. Если Я. п. E типа $(\mathscr{F})$ имеет регулярный базис, то любые два базиса в E квазиэквивалентны (т. е. могут быть сделаны эквивалентными путем перестановки и нормировки элементов одного из них). Существуют и другие достаточные условия, при к-рых все базисы в E квазиэквивалентны (см. [4], [14]). Полное описание класса Я. п., обладающих этим свойством, неизвестно (1984).

Пример. Функции Эрмита $\varphi_n(t) = e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})$ образуют базис в полном метрич. Я. п. $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ быстро убывающих вместе со всеми производными гладких

функций на прямой. Пространство $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ изоморфно пространству Кёте $\mathscr{K}(\mu P)$.

Лит.: [1] Grothendieck A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Providence, 1955; [2] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [3] Минлос Р. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1959, т. 8, с. 497—518; [4] Митягин Б. С., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 4, с. 63—132; [5] Пич А., Ядерные локально выпуклые пространства, пер. с нем., М., 1967; [6] Dubinsky Ed., Structure of nuclear Fréchet spaces, B.— [a. o.], 1979; [7] Зобин Н. М., Митягин Б. С., «Функц. анализ и его прилож.», 1974, т. 8, в. 4, с. 35—47; [8] Atzmon A., «Ann. Math.», 1983, v. 117, № 3 p. 669—94; [9] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [10] Kōmura T., Kōmura Y., «Math. Ann.», 1966, Bd 162, S. 284—88; [11] Dineen S., Complex analysis in locally convex spaces, Amst., 1981; [12] John K., Zizler V., «Math. Ann.», 1979, Bd 244, № 1, S. 83—87; [13] Pisier G., «C. r. Acad. sci.», 1981, t. 293, p. 681—83; [14] Драгилев М. М., Базисы в пространствах Кёте, Ростов н/Д, 1983.

Г. Л. Литвинов.

ЯДЕРНЫЙ ОПЕРАТОР, ядерное отображение,— линейный оператор, отображающий одно *локально выпуклое пространство* в другое и допускающий специального вида аппроксимацию операторами конечного ранга (т. е. линейными непрерывными операторами с конечномерными образами). Я. о. обладает нек-рыми свойствами, присущими конечномерным операторам. В частности, Я. о., отображающий в себя пространство с базисом, имеет конечный след (см. ниже), совпадающий с суммой ряда, составленного из диагональных элементов матрицы этого оператора относительно произвольного базиса. Я. о. и появились первоначально под наименованием «операторов со следом» в математическом аппарате квантовой механики (см. [1], [2]). В гильбертовом пространстве операторы со следом взаимно однозначно соответствуют двухвалентным тензорам, и след оператора совпадает с результатом свертки соответствующего тензора. С помощью такого соответствия А. Растон [3] перенес понятие Я. о. на случай банаховых пространств и независимо А. Гротендик — на случай локально выпуклых пространств в связи с теорией *ядерных пространств* (см. [4], [5]). Пусть E и F — локально выпуклые пространства над полем действительных или комплексных чисел, E' и F' — сопряженные к ним пространства, наделенные сильной топологией, $L(E, F)$ — векторное пространство всех непрерывных линейных отображений E в F, а $S(E, F)$ — пространство всех слабо непрерывных линейных отображений E в F; $L(E)=L(E, E)$, $S(E)=S(E, F)$.

Линейный оператор $A : E\to F$ наз. ядерным, если он представим в виде

$$x \mapsto Ax=\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x, x_i' \rangle y_i, \qquad (1)$$

где $\{\lambda_i\}$ — суммируемая числовая последовательность, $\{x_i'\}$ — равностепенно непрерывная последовательность в E' и $\{y_i\}$ — последовательность элементов из нек-рого полного ограниченного выпуклого закругленного множества в F; при этом значение линейного функционала x' на векторе x обозначается $\langle x, x' \rangle$. Представление (1) можно рассматривать как разложение оператора в сумму операторов ранга 1 (т. е. с одномерным образом), и соответствующий ряд абсолютно сходится в $L(E, F)$ в топологии равномерной сходимости на ограниченных множествах. Таким образом, в этой топологии Я. о. A является пределом последовательности операторов конечного ранга. Если E и F — банаховы пространства, то Я. о. A аппроксимируется операторами конечного ранга по *ядерной норме*.

Разложение (1) наз. ядерным представлением оператора A. Любой Я. о. допускает такое ядерное представление (1), что $x'_i\to 0$, $y_i\to 0$. Если E — *бочечное пространство* и полно или хотя бы квази-

полно (т. е. замкнутые ограниченные множества в E полны), то разложение (1) ядерно тогда и только тогда, когда последовательности $\{x_i'\}$ и $\{y_i\}$ ограничены.

Меняя требования к последовательностям $\{\lambda_i\}$, $\{x_i'\}$, $\{y_i\}$, можно получить различные модификации понятия Я. о. (см. [4], [5], [7]). Если от последовательности $\{x_i'\}$ потребовать (вместо равностепенной непрерывности), чтобы ее элементы содержались в каком-нибудь полном ограниченном выпуклом закругленном множестве в E', то разложение (1) определяет оператор Фредгольма; такие операторы образуют естественную область применения теории Фредгольма (см. [4], [5]). Всякий Я. о. является оператором Фредгольма, а любой оператор Фредгольма $A: E \to F$ превращается в Я. о., если наделить E *Макки топологией*. Я. о. A наз. строго ядерным (или Я. о. порядка 0), если допускает такое ядерное представление (1), что $\{\lambda_i\}$ — быстро убывающая последовательность, т. е. $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p < \infty$ при всех $p > 0$.

Интегральные операторы (в частности, интегральные операторы Фредгольма) дают многочисленные примеры Я. о. и их модификаций (см. [4], [5], [7], [8]).

Свойства Я. о. Всякий Я. о. $A \in L(E, F)$ компактен, т. е. отображает нек-рую окрестность нуля в E во множество с компактным замыканием в F. Таким образом, любой Я. о. непрерывен, а любой оператор Фредгольма слабо непрерывен. Произведение (в любом порядке) Я. о. и непрерывного линейного оператора является Я. о. В частности, совокупность всех Я. о. образует идеал в алгебре $L(E)$; соответственно операторы Фредгольма образуют идеал в $S(E)$. Строго Я. о. также образуют идеал в $L(E)$. Всякий Я. о. $A \in L(E, F)$ имеет единственное продолжение $\hat{A} \in L(\hat{E}, F)$, где $\hat{E}$ — пополнение E, причем $\hat{A}$ — Я. о. Если $A \in L(E, F)$ — оператор Фредгольма, то сопряженное отображение $F' \to E'$ является Я. о. Для любого Я. о. $A \in L(E, F)$ существуют такие банаховы пространства E_1, F_1, компактные операторы $K_1 \in L(E, E_1)$, $K_2 \in L(F_1, F)$ и Я. о. $B \in L(E_1, F_1)$, что $A = K_2 B K_1$. Если $A \in L(E)$ — строго Я. о., то упорядоченная по убыванию абсолютной величины последовательность собственных значений (вообще говоря комплексных) этого оператора является быстро убывающей.

Пусть пространство E ядерно, а F — полное или квазиполное пространство. Тогда для оператора $A \in L(E, F)$ следующие утверждения эквивалентны: 1) A является Я. о.; 2) A компактен; 3) A ограничен, т. е. отображает нек-рую окрестность нуля в ограниченное множество в F; 4) A — строго Я. о.

Пусть E, F, G — гильбертовы пространства, $K_1 \in L(E, F)$, $K_2 \in L(F, G)$ — *Гильберта—Шмидта операторы*. Тогда произведение $K_2 K_1 \in L(E, G)$ является Я. о. Обратно, каждый Я. о. является произведением двух операторов типа Гильберта—Шмидта. Произвольный вполне непрерывный оператор $A \in L(E, F)$ является Я. о. тогда и только тогда, когда сходится ряд, составленный из собственных значений положительно определенного оператора $T \in L(E)$, входящего в полярное разложение $A = UT$, где U — изометрич. оператор, отображающий область значений оператора T в пространство F (см. [9]).

Операторы со следом. Пусть E — произвольное локально выпуклое пространство, A — Я. о. (оператор Фредгольма), отображающий E в себя и допускающий представление вида (1). Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle y_i, x_i' \rangle$ сходится абсолютно, и его сумма, обозначаемая $\mathrm{tr} A$, наз. следом Я. о. (соответственно оператора Фредгольма) A при условии, что эта величина не зависит от представления (1). В этом случае след корректно

определен (см. [4], [5]). Если разложение (1) содержит лишь конечное число слагаемых, то A — оператор конечного ранга и $\mathrm{tr}\,A$ совпадает со следом конечномерного оператора, индуцируемого в образе оператора A.

Пусть $E'\overline{\otimes}E$ — индуктивное тензорное произведение пространств E' и E, т. е. пополнение (алгебраического) тензорного произведения $E'\otimes E$ в самой сильной *локально выпуклой топологии*, при к-рой раздельно непрерывно каноническое билинейное отображение $E'\times E\to E'\otimes E$ (пара (x', x) переходит в $x'\otimes x$). Композиция этого отображения с любой непрерывной линейной формой на $E'\otimes E$ дает раздельно непрерывную билинейную форму на $E'\times E$, причем соответствие между формами указанного типа взаимно однозначно. В частности, билинейная форма $(x', x)\mapsto \langle x, x'\rangle$ соответствует непрерывной линейной форме на $E'\overline{\otimes}E$. Значение этой формы на элементе $u\in E'\overline{\otimes}E$ обозначается $\mathrm{tr}u$. Элемент $u\in E'\overline{\otimes}E$ наз. ядром Фредгольма, если он допускает разложение вида

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x'_i\otimes y_i, \qquad (2)$$

где последовательности $\{\lambda_i\}$, $\{x'_i\}$, $\{y_i\}$ такие же, как в разложении (1) для оператора Фредгольма. Ядра Фредгольма образуют подпространство в $E'\overline{\otimes}E$, обозначаемое $E'\overline{\otimes}E$.

Пусть алгебра $S(E)$ слабо непрерывных операторов в E наделена слабой *операторной топологией*, к-рая задается преднормами $A\mapsto |\langle Ay, x'\rangle|$, где $A\in S(E)$, а x' и y пробегают соответственно E' и E. Отображение $\Gamma: E'\overline{\otimes}E\to S(E)$, переводящее элемент u вида (2) в оператор A вида (1), корректно определено, линейно и непрерывно, причем $\mathrm{tr}u=\mathrm{tr}\Gamma(u)$, если след оператора $A=\Gamma(u)$ корректно определен. Если пространства E и E' полны (напр., если E — *Фреше пространство*), то Γ продолжается по непрерывности на $E'\overline{\otimes}E$. Образы элементов из $E'\overline{\otimes}E$ при этом отображении наз. операторами со следом (см. [4], [5]). Если пространство E банахово, то всякий оператор со следом является Я. о., так что в этом случае классы Я. о., операторов Фредгольма и операторов со следом совпадают. Существуют операторы со следом, не являющиеся операторами Фредгольма (напр., в ядерных пространствах Фреше). Некомпактность таких операторов затрудняет их изучение.

Проблема однозначности. Если отображение Γ взаимно однозначно или хотя бы из условия $\Gamma(u)=0$ следует, что $\mathrm{tr}u=0$, то след оператора $\Gamma(u)$ можно корректно определить равенством $\mathrm{tr}\Gamma(u)=\mathrm{tr}u$.

Указанная возможность тесно связана со свойством аппроксимации, к-рое состоит в том, что $L(E)$ содержит сеть операторов конечного ранга, сходящуюся к единичному оператору в топологии равномерной сходимости на всех предкомпактных множествах. Если E — банахово пространство, то след любого Я. о. корректно определен тогда и только тогда, когда выполнено свойство аппроксимации [4]. Построено [11] рефлексивное сепарабельное пространство X без свойства аппроксимации (и без базиса Шаудера, что решает известную проблему Банаха). Тем самым решен и вопрос об однозначности отображения Γ: существует такой элемент $u\in X'\overline{\otimes}X$, что $\Gamma(u)=0$, но $\mathrm{tr}u=1$. Если локально выпуклое пространство E обладает свойством аппроксимации, то каждый Я. о. имеет корректно определенный след; если $\{B_\nu\}$ — сеть операторов конечного ранга, сходящаяся к произвольному оператору $B\in L(E)$ равномерно на всех предком-

пактных (или хотя бы выпуклых уравновешенных компактных) множествах, то равенство

$$\operatorname{tr}(AB)=\lim_{\nu}\operatorname{tr}(AB_\nu) \qquad (3)$$

справедливо для любого Я. о. A (см. [12]). Однако существует локально выпуклое пространство со свойством аппроксимации, в к-ром нельзя корректно определить след для всех операторов Фредгольма. Любой оператор Фредгольма в локально выпуклом пространстве E имеет корректно определенный след, если E обладает свойством ограниченной аппроксимации, т. е. существует сеть операторов конечного ранга, сходящаяся к единичному оператору в слабой операторной топологии и ограниченная в этой топологии; указанным свойством обладает любое пространство с базисом Шаудера. Если $\{B_\nu\}$ — ограниченная сеть, сходящаяся в $S(E)$ к произвольному оператору B (напр., если $\{B_\nu\}$ — произвольная сходящаяся в $S(E)$ счетная последовательность), то соотношение (3) выполняется для любого оператора Фредгольма A при условии, что операторы AB_ν имеют корректно определенный след (напр., если B_ν — операторы конечного ранга или E обладает свойством ограниченной аппроксимации). Если E обладает свойством аппроксимации (ограниченной аппроксимации), то для любого Я. о. (оператора Фредгольма) A и любого оператора B из $L(E)$ (соответственно из $S(E)$) выполнено: $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$ (см. [12]).

Матричный след. Пусть локально выпуклое пространство E обладает базисом Шаудера $\{e_i\}$, $i=1, 2, \ldots$, так что любой вектор $x\in E$ допускает разложение $x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x, e_i'\rangle e_i$, где $e_i'\in E'$. Величина $\sum_{i=1}^{\infty}\langle Ae_i, e_i'\rangle$ наз. матричным следом оператора A, если указанный ряд сходится; этот ряд сходится абсолютно, если базис безусловный. Любой оператор Фредгольма в пространстве с базисом Шаудера имеет корректно определенный след, совпадающий с матричным следом, к-рый в этом случае не зависит от выбора базиса [13].

Любой непрерывный оператор в гильбертовом пространстве является ядерным тогда и только тогда, когда этот оператор имеет конечный матричный след для любого ортонормированного базиса (см. [2], [8], [9]).

Ядерный след. Пусть T — компактное пространство с мерой Бореля μ, $C(T)$ — банахово пространство непрерывных функций на T, наделенное топологией равномерной сходимости, $K(t, s)$ — непрерывная функция на $T\times T$. Тогда линейный интегральный оператор

$$K\colon \varphi(t)\mapsto\int_T K(t, s)\varphi(s)\,d\mu(s)$$

в пространстве $C(T)$ (классический интегральный оператор Фредгольма) является ядерным и имеет корректно определенный след, причем

$$\operatorname{tr}K=\int_T K(t, t)\,d\mu(t). \qquad (4)$$

Если K — интегральный оператор с ядром $K(t, s)$, действующий в нек-ром пространстве функций на пространстве T с мерой μ, и если правой части равенства (4) можно приписать какой-либо разумный смысл, то эта величина наз. ядерным следом оператора K. Для различных классов интегральных операторов получены условия, обеспечивающие ядерность этих операторов и позволяющие приписать смысл формуле (4) (см. [4], [5], [8], [14]).

Спектральный след. Пусть E — локально выпуклое пространство над полем комплексных чисел, A — Я. о. в E. Спектр оператора A, как и любого компактного оператора, представляет собой либо конечное множество, либо сходящуюся к нулю последователь-

ность, причем любое ненулевое собственное значение имеет конечную спектральную кратность. Если ряд

$$\sum_j \sigma_j(A), \qquad (5)$$

составленный из ненулевых собственных значений оператора A, причем каждое собственное значение входит в (5) столько раз, какова его спектральная кратность, сходится абсолютно, то его сумма наз. с п е к т р а л ь н ы м с л е д о м Я. о. A и обозначается $\mathrm{tr}_\sigma A$. Любой Я. о. в гильбертовом пространстве имеет спектральный след, совпадающий с матричным следом [15]. Пусть E — м у л ь т и г и л ь б е р т о в о п р о с т р а н с т в о, т. е. топология в E может быть порождена семейством преднорм, каждая из к-рых получается из нек-рой неотрицательно определенной эрмитовой формы на $E\times E$; примером мультигильбертова пространства является любое *ядерное пространство*. Тогда всякий Я. о. A в E имеет корректно определенный след и спектральный след, причем $\mathrm{tr}_\sigma A=\mathrm{tr}A$ (см. [13]). При этом Я. о. A может и не иметь матричного следа. Я. о. A в банаховом пространстве может не иметь спектрального следа даже в том случае, когда это пространство имеет базис и след $\mathrm{tr}A$ корректно определен. Может нарушаться и равенство $\mathrm{tr}_\sigma A=\mathrm{tr}A$. Напр., в банаховом пространстве c_0 сходящихся к нулю последовательностей существует такой Я. о. A, что $\mathrm{tr}\,A=1$, $A^2=0$, так что A не имеет ненулевых собственных значений и $\mathrm{tr}_\sigma A=0$. Можно указать условия на оператор, выполнение к-рых обеспечивает существование и совпадение величин $\mathrm{tr}_\sigma A$ и $\mathrm{tr}A$ для Я. о. A, действующего в произвольном банаховом или локально выпуклом пространстве (не обладающем, быть может, какими-либо аппроксимационными свойствами) (см. [4], [14], [16], [17]).

П р и м е р. Пусть E — комплексное банахово пространство, $L(E)$ — алгебра линейных непрерывных операторов в E, наделенная обычной операторной нормой. Для произвольного оператора $A\in L(E)$ пусть $\alpha_r(E)$ обозначает точную нижнюю грань величин $\|A-F\|$, где F пробегает совокупность всех операторов из $L(E)$, р а н г (т. е. размерность образа) к-рых не превосходит числа $r=0, 1, 2, \ldots$ Совокупность всех операторов $A\in L(E)$, для к-рых $\Sigma\alpha_r(A)<\infty$, обозначается $l^1(E)$. Каждый оператор $A\in l^1(E)$ является ядерным; если E — гильбертово пространство, то $l^1(E)$ совпадает с множеством всех Я. о. в E. Для произвольного банахова пространства E каждый оператор $A\in l^1(E)$ имеет след $\mathrm{tr}A$ и спектральный след, и $\mathrm{tr}_\sigma A=\mathrm{tr}A$ (см. [16], [17]).

Лит.: [1] Н е й м а н И., Математические основы квантовой механики, пер. с нем., М., 1964; [2] S c h a t t e n R., N e u m a n n J., «Ann. Math.», 1946, v. 47, № 3, p. 608—30; [3] R u s t o n A. F., «Proc. Lond. Math. Soc.» (2), 1951, v. 53, № 2, p. 109—24; [4] G r o t h e n d i e c k A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Providence, 1955; [5] Г р о т е н д и к А., «Математика», 1958, т. 2, № 5, с. 51—103; [6] Ш е ф е р Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [7] П и ч А., Операторные идеалы, пер. с англ., М., 1982; [8] Г о х б е р г И. Ц., К р е й н М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1965; [9] Г е л ь ф а н д И. М., В и л е н к и н Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [10] П и ч А., Ядерные локально выпуклые пространства, пер. с нем., М., 1967; [11] Э н ф л о П., «Математика», 1974, т. 18, № 1, с. 146—155; [12] Л и т в и н о в Г. Л., «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», 1983, в. 39, с. 73—87; [13] е г о ж е, «Тр. семинара по вект. и тенз. анализу», 1979, в. 19, с. 263—272; [14] P i e t s c h A., «Math. Nachr.», 1981, Bd 100, S. 61—91; [15] Л и д с к и й В. Б., «Докл. АН СССР», 1959, т. 125, № 3, с. 485—87; [16] М а р к у с А. С., М а ц а е в В. П., «Матем. сб.», 1971, т. 86, № 2, с. 299—313; [17] K ö n i g H., «Studia Math.», 1980, t. 67, № 2, p. 157—72.

Г. Л. Литвинов.

ЯДРО в т е о р и и и г р — множество, состоящее из всех недоминируемых ситуаций, т. е. такое множество ситуаций C, что отношение *доминирования* $s\underset{K}{\succ}c$ невозможно ни при каких ситуациях $s\in S$, $c\in C$ и коалиции $K\in\mathfrak{R}_u$. Выделяют следующие основные типы Я.

1) *c*-я д р о — множество $c(v)$ таких дележей, к-рые не доминируются никакими другими дележами; *c*-ядро совпадает с множеством дележей, удовлетворяющих для любой коалиции S условию: $\sum_{i\in S} x_i \geqslant v(S)$. Если $c(v)=\varnothing$ и Н — М-решение (см. *Решение* в теории игр) существует, то c (v) содержится в любом Н — М-решении.

2) *k*-я д р о — множество $k(v)$ таких индивидуально рациональных конфигураций $(x, \mathfrak{P})$ (см. *Устойчивость* в теории игр), что для любых i, $j\in B\in\mathfrak{P}$ выполняется неравенство

$$(\max_{S\in\tau_{ij}} e(S, x) - \max_{S\in\tau_{ji}} e(S, x))\, x_j \leqslant 0,$$

где $e(S, x)=v(S)-\sum_{k\in S} x_k$, а τ_{ij} — множество коалиций, содержащих игрока i и не содержащих игрока j. Я. $k(v)$ содержится в M_1^i-устойчивом множестве.

3) *n*-я д р о — дележ $n(v)$, минимальный на множестве дележей относительно к в а з и п о р я д к а $\underset{v}{\prec}$, определяемого следующим образом: $x\underset{v}{\prec}y$ тогда и только тогда, когда вектор $\theta(x, v)=(\theta_1(x, v),\ldots, \theta_n(x, v))$, где $\theta_i(x, v)=\max\limits_{|\mathfrak{U}|=i} \min\limits_{S\in\mathfrak{U}} e(S, x)$, лексикографически предшествует вектору $\theta(y, v)$. Я. $n(v)$ существует и единственно для любой игры с непустым множеством дележей. В кооперативной игре *n*-ядро содержится в *k*-ядре.

Лит.: [1] В о р о б ь е в Н. Н., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 2, с. 103—07. *А. И. Соболев.*

ЯДРО и н т е г р а л ь н о г о о п е р а т о р а — функция двух аргументов $K(x, y)$, определяющая интегральный оператор A равенством

$$\varphi(y)=A[\varphi(x)]=\int K(x, y)\,\varphi(x)\,d\mu(x),$$

где x пробегает пространство X с мерой $d\mu(x)$, а $\varphi(x)$ принадлежит нек-рому пространству функций, определенных на X. *Г. Л. Литвинов.*

ЯДРО к о м п л е к с н о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т и — множество точек расширенной комплексной плоскости, определенное для последовательности $\{z_n\}$ следующим образом. Пусть R_n — наименьшая замкнутая выпуклая область комплексной плоскости, содержащая точки z_{n+1}, z_{n+2}, ... Если не существует полуплоскости, содержащей эти точки, то областью R_n является вся комплексная плоскость, включая бесконечно удаленную точку ∞; если такие полуплоскости существуют, то R_n их общая часть. При этом точка ∞ включается в R_n, если последовательность $\{z_n\}$ неограничена, и не включается, если ограничена. Пересечение $K=\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$ всех R_n наз. я д р о м п о с л е д о в а т е л ь н о с т и $\{z_n\}$.

Если $\{z_n\}$ ограничена, то ее Я. совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества предельных точек; если $\{z_n\}$ сходится к z_0, $z_0\neq\infty$, то Я. состоит из одной точки z_0. Я. д е й с т в и т е л ь н о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т и $\{z_n\}$ является отрезок действительной оси с концами

$$a=\varliminf_{n\to\infty} z_n \quad \text{и} \quad b=\varlimsup_{n\to\infty} z_n.$$

Я. любой последовательности не может быть пустым, хотя и может состоять из одной бесконечно удаленной точки, как, напр., для последовательности $\{z_n\}$, $z_n=n+in$. Последовательность $\{z_n\}$, Я. к-рой состоит из одной бесконечно удаленной точки, иногда называют о п р е д е л е н н о р а с х о д я щ е й с я. Для действительной последовательности это означает, что или $z_n\to+\infty$ или $z_n\to-\infty$.

В теории суммирования рассматриваются вопросы ядерного включения методов суммирования. Метод

суммирования A ядерно сильнее метода суммирования B на множестве последовательностей U, если для любой последовательности $\{z_n\}\subset U$ имеет место включение $K_A \subset K_B$, где K_A и K_B — ядра A и B — средних последовательности $\{z_n\}$.

Лит.: [1] Кнопр К., «Math. Z.», 1930, Bd 31, S. 97—127, 276—305; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951. *И. И. Волков.*

ЯДРО линейного оператора — линейное подпространство области определения линейного оператора, состоящее из всех векторов, к-рые отображаются этим оператором в нуль. Я. линейного непрерывного оператора, определенного на нек-ром топологическом векторном пространстве, является замкнутым линейным подпространством в этом пространстве. Для случая локально выпуклых пространств линейный непрерывный оператор имеет нулевое ядро (т. е. взаимно однозначно отображает область определения на образ) тогда и только тогда, когда сопряженный оператор имеет слабо плотный образ. *Г. Л. Литвинов.*

ЯДРО лупы — совокупность элементов лупы, являющихся одновременно лево-, право- и среднеассоциативными (или пересечение левого, правого и среднего ядер лупы). Элемент a лупы наз. левоассоциативным, если $a(bc)=(ab)c$ для любых b, c из этой лупы. Совокупность левоассоциативных элементов наз. левым ядром лупы. Аналогично определяются право- и среднеассоциативные элементы и соответствующие Я. Левое и правое Я. могут быть определены и для квазигрупп, но непустым средним Я. обладают только лупы. Все Я. лупы являются ее подгруппами. Все три Я. JP-лупы совпадают между собой, а в лупах Муфанг являются, кроме того, нормальной подлупой (см. *Лупа*). *О. А. Иванова.*

ЯДРО метода суммирования — функция $K_n(t)$ (зависящая от параметра), значения к-рой есть средние данного метода, примененного к ряду

$$\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos \nu t. \qquad (1)$$

Я. метода суммирования служит для интегрального представления средних этого метода при суммировании рядов Фурье. Так, если метод суммирования определен преобразованием последовательности в последовательность посредством матрицы $\|a_{nk}\|$, $n,\ k=0,\ 1,\ \ldots$, то ядром этого метода является функция

$$K_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}D_k(t),$$

где $D_k(t)$ — частичные суммы ряда (1):

$$D_k(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{k}\cos \nu t=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}. \qquad (2)$$

В этом случае средние ряда Фурье 2π-периодич. функции $f(x)$ могут быть выражены через функцию и Я. формулой

$$\sigma_n(f,\ x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K_n(t-x)\,dt.$$

В частности, Я. метода средних арифметических имеет вид

$$K_n(t)=\frac{2}{n+1}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\,t}{2\sin\frac{1}{2}t}\right]^2$$

и наз. ядром Фейера. Я. метода суммирования Абеля выражается формулой

$$K(r,\ t)=\frac{1}{2}\,\frac{1-r}{1-2r\cos t+r^2},\quad 0\leqslant r<1,$$

и наз. ядром Пуассона. Функция $D_k(t)$ в (2) наз. ядром Дирихле.

Функция $\overline{K}_n(t)$, значения к-рой есть средние метода суммирования, примененного к ряду

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sin \nu t,$$

наз. сопряженным ядром метода суммирования.

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1—2, М., 1965. *И. И. Волков.*

ЯДРО множества, открытое ядро множества M — совокупность $\langle M\rangle$ всех внутренних точек M. Если A_1B — взаимно дополнительные множества топологич. пространства X, т. е. $B=X\setminus A$, то $X\setminus[A]=\langle B\rangle$, $X\setminus\langle B\rangle=[A]$, где $[A]$ — замыкание множества A. *М. И. Войцеховский.*

ЯДРО морфизма категории — понятие, частными случаями к-рого являются понятия ядра линейного преобразования векторных пространств, ядра гомоморфизма групп, колец и т. п. Пусть $\mathfrak{K}$ — категория с нулевыми *морфизмами*. Морфизм $\mu: K\to A$ наз. ядром морфизма $\alpha: A\to B$, если $\mu\alpha=0$ и всякий морфизм φ, для к-рого $\varphi\alpha=0$, однозначно представим в виде $\varphi=\psi\mu$. Я. морфизма α обозначается $\ker\alpha$.

Если $\mu=\ker\alpha$ и $\mu'=\ker\alpha$, то $\mu'=\xi\mu$ для единственного изоморфизма ξ. Обратно, если $\mu=\ker\alpha$ и ξ — изоморфизм, то морфизм $\mu'=\xi\mu$ есть ядро α. Таким образом, все Я. морфизма α образуют подобъект объекта A, к-рый обозначается $\mathrm{K}\ker\alpha$.

Если $\mu=\ker\alpha$, то μ — *нормальный мономорфизм*. Обратное, вообще говоря, неверно. Я. нулевого морфизма $0: A\to B$ равно 1_A. Я. единичного морфизма 1_A существует тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{K}$ имеется *нулевой объект*.

Не во всякой категории с нулевыми морфизмами каждый морфизм обладает Я. С другой стороны, в категории $\mathfrak{K}$ с нулевым объектом морфизм $\alpha: A\to B$ обладает ядром в том и только в том случае, когда в $\mathfrak{K}$ существует универсальный квадрат относительно морфизмов α и $0: 0\to B$. Это условие выполнено, в частности, для любого морфизма локально малой слева категории с нулевым объектом и с копроизведениями.

Понятие «Я. морфизма» дуально понятию «коядро морфизма». *М. Ш. Цаленко.*

ЯДРО полугруппы — наименьший двусторонний идеал данной полугруппы. Я. имеет не всякая полугруппа. О свойствах Я. полугрупп и о полугруппах, обладающих Я., см. *Минимальный идеал*, *Архимедова полугруппа*, *Сплетение* полугрупп, *Топологическая полугруппа*. *Л. Н. Шеврин.*

ЯКОБИ МАТРИЦА — квадратная матрица $J=\|a_{ik}\|$ с действительными элементами, у к-рой $a_{ik}=0$ при $|i-k|>1$. Если обозначить $a_i=a_{ii}$ $(i=1, \ldots, n)$, $b_i=a_{i\,i+1}$, $c_i=a_{i+1\,i}$ $(i=1, \ldots, n-1)$, то Я. м. примет вид

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{n-1} & a_n \end{Vmatrix}.$$

Любой минор Я. м. J является произведением нек-рых главных миноров матрицы J и нек-рых ее элементов. Я. м. J вполне неотрицательна (то есть неотрицательны все миноры матрицы J) тогда и только тогда, когда неотрицательны все ее главные миноры и все элементы b_i и c_i $(i=1, \ldots, n-1)$. Если $b_ic_i>0$ при $i=1, \ldots, n-1$, то корни характеристич. многочлена J действительны и различны.

Лит.: [1] Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, 2 изд., М.— Л., 1950. *Д. А. Супруненко.*

ЯКОБИ МЕТОД — 1) Я. м. — метод приведения квадратичной формы к канонич. виду при помощи треугольного преобразования неизвестных, предложенный К. Якоби (C. Jacobi, 1834) (см. [1]).

Пусть дана билинейная форма

$$f=\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ki}x_iy_k$$

(не обязательно симметрическая) над нек-рым полем P, и пусть матрица $A=\|a_{ki}\|$ этой формы удовлетворяет следующему условию:

$$\Delta_k\neq 0,\ k=1,\ \ldots,\ n, \tag{1}$$

где Δ_k — минор k-го порядка, стоящий в ее левом верхнем углу. Тогда форма f может быть записана в таком виде:

$$f=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_kv_k}{\Delta_{k-1}\Delta_k}, \tag{2}$$

где $u_1=\dfrac{\partial f}{\partial y_1}$, $v_2=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, $\Delta_0=1$, а при $k=2,\ \ldots,\ n$,

$$\left.\begin{aligned} u_k&=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k-1} & \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k-1} & \dfrac{\partial f}{\partial y_2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk-1} & \dfrac{\partial f}{\partial y_k} \end{Vmatrix},\\ v_k&=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{k-11} & \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{k-12} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{1k} & a_{2k} & \ldots & a_{k-1k} & \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \end{Vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

В частности, если A — симметрич. матрица и f — квадратичная форма с матрицей A, удовлетворяющая условию (1), то форма f приводится к канонич. виду

$$f=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k^2}{\Delta_{k-1}\Delta_k},\ \Delta_0=1, \tag{4}$$

при помощи следующего преобразования неизвестных:

$$u_k=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k-1} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k-2} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk-1} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x_k} \end{Vmatrix} \tag{5}$$

при $k=2,\ \ldots,\ n$, и

$$u_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Это преобразование имеет треугольную матрицу и записывается в виде

$$u_k=\sum_{i=k}^{n}c_{ki}x_i, \tag{6}$$

где C_{ki} — минор матрицы A, стоящий в строках с номерами $1, 2, \ldots, k-1, k$ и столбцах с номерами $1, 2, \ldots, k-1, i$.

Формулы (2) — (7) наз. иногда формулами Якоби.

В случае, когда матрица квадратичной формы f удовлетворяет лишь условию

$$\Delta_i\neq 0,\ i=1,\ \ldots,\ r,$$
$$\Delta_{r+1}=\ldots=\Delta_n=0,$$

где r — ранг формы, эта форма может быть приведена к каноническому виду

$$f=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\Delta_{k-1}\Delta_k}u_k^2, \qquad (7)$$

(здесь $\Delta_0=1$) треугольным преобразованием неизвестных. Приведение можно осуществить при помощи метода Гаусса (см. [1], с. 272—275). В частности, если поле $P=\mathbb{R}$, то положительный индекс инерции квадратичной формы f равен числу сохранений знака, а отрицательный индекс инерции — числу перемен знака в ряду чисел

$$1,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_r.$$

См. также *Инерции закон*.

Лит.: [1] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966. *И. В. Проскуряков.*

2) Я. м.— *простой итерации метод* для решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax=b$, в к-ром предварительное преобразование системы к виду $x=Bx+g$ осуществляется по правилу

$$B=E-D^{-1}A,\ g=D^{-1}b,\ D=(d_{ij}),\ d_{ii}=a_{ii},$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ d_{ij}=0,\ i\neq j.$$

3) Я. м.— *вращений метод* для решения полной проблемы собственных значений и собственных векторов эрмитовой матрицы. *Г. Д. Ким.*

ЯКОБИ МНОГООБРАЗИЕ, якобиан, алгебраической кривой S — главно поляризованное абелево многообразие $(J(S), \Theta)$, сопоставляемое этой кривой. Иногда Я. м. является просто коммутативной алгебраич. группой. Если S — гладкая проективная кривая рода g над полем $\mathbb{C}$ или, в классич. терминологии, компактная риманова поверхность рода g, то интегрирование голоморфных 1-форм по 1-циклам на S задает вложение

$$H_1(S,\mathbb{Z})\longrightarrow H^0(S,\Omega_S)^*,$$

образ к-рого является решеткой максимального ранга (здесь Ω_S — пучок голоморфных 1-форм на S). Я. м. кривой S есть фактормногообразие

$$J(S)=H^0(S,\Omega_S)^*/H_1(S,\mathbb{Z}).$$

В качестве поляризации на нем берется класс когомологий Θ из

$$H^1(J(S),\ \mathbb{Z})\wedge H^1(J(S),\ \mathbb{Z})=H^2(J(S),\ \mathbb{Z})\subset H^2(J(S),\mathbb{C}),$$

соответствующий форме пересечения на $H_1(S,\mathbb{Z})\cong H_1(J(S),\mathbb{Z})$. Эта поляризация является главной, т. е. $\Theta^g=g!$. Для более явного задания Я. м. обычно берется нек-рый базис $\delta_1,\ \ldots,\ \delta_{2g}$ в $H_1(S,\mathbb{Z})$ и базис из форм $\omega_1,\ \ldots,\ \omega_g$ в $H^0(S,\Omega_S)$. Эти данные определяют матрицу Ω размера $g\times 2g$ — матрицу периодов римановой поверхности

$$\Omega=\left\|\int_{\delta_j}\omega_i\right\|.$$

Тогда $J(S)=\mathbb{C}g/\Lambda$, где Λ — решетка с базисом, состоящим из столбцов матрицы Ω. Базисы $\{\delta_j\}$ и $\{\omega_i\}$ можно выбрать так, что $\Omega=\|E_gZ\|$; при этом матрица $Z=X+iY$ симметрична и $Y>0$ (см. *Абелев дифференциал*). Класс поляризации представляется формой ω, к-рая в стандартных координатах $(z_1,\ \ldots,\ z_g)$ на $\mathbb{C}^g$ записывается в виде

$$\omega=\frac{i}{2}\sum_{1\leqslant j,\,k\leqslant g}(Y^{-1})_{jk}\,dz_j\wedge d\bar{z}_k.$$

Вместо класса когомологий Θ часто рассматривают двойственный к нему эффективный дивизор, обозначаемый той же буквой; он определен однозначно с точностью до сдвига. Геометрич. описание дивизора Θ

дается отображением Абеля $\mu : S \to J(S)$, заданным формулой

$$\mu(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \omega_1, \ldots, \int_{s_0}^{s} \omega_g \right) + \Lambda,$$

где $s_0 \in S$ — фиксированная точка. Пусть $S^{(d)}$ есть d-я симметрич. степень кривой S, т. е. фактормногообразие многообразия S^d по симметрич. группе (точки многообразия $S^{(d)}$ соответствуют эффективным дивизорам степени d на S). Формула $\mu(s_1, \ldots, s_d) = \mu(s_1) + \ldots + \mu(s_d)$ определяет продолжение отображения Абеля до отображения μ: $S^{(d)} \to J(S)$. Тогда $\Theta = W_{g-1} = \mu(S^{(g-1)})$.

Отношение эквивалентности в $S^{(g)}$, определяемое отображением μ, совпадает с рациональной эквивалентностью дивизоров (т е о р е м а А б е л я). Кроме того, $\mu(S^{(g)}) = J(S)$ (т е о р е м а Я к о б и о б о б р а щ е н и и). Сам К. Якоби [1] занимался проблемой обращения в случае $g=2$ (см. также *Якоби проблема обращения*). Указанные теоремы определяют изоморфизм $J(S) \cong \mathrm{Pic}^g(S)$, где $\mathrm{Pic}^g(S)$ — компонента *Пикара группы* $\mathrm{Pic}(S)$, отвечающая дивизорам степени g. Умножение на класс дивизора — gs_0 приводит к канонич. изоморфизму абелевых многообразий $J(S) \cong \mathrm{Pic}^\circ(S)$.

В случае полной гладкой кривой над произвольным полем Я. м. $J(S)$ определяется как *Пикара многообразие* $\mathrm{Pic}S$. Отображение Абеля μ сопоставляет точке $s \in S$ класс дивизора $s - s_0$, а поляризация определяется дивизором $W_{g-1} = \mu(S^{(g-1)})$.

Значение Я. м. в теории алгебраич. кривых видно из следующей *Торелли теоремы*: неособая полная кривая однозначно определяется по своему якобиану (с учетом поляризации), см. [5]. Переход от кривой к ее якобиану позволяет лианеризовать ряд нелинейных задач теории кривых. Напр., вопрос об описании специальных дивизоров на S (т. е. эффективных дивизоров D, для к-рых $h^0(S, O(K-D)) > 0$) по существу переводится на язык особенностей специальных подмногообразий $W_d = \mu(S^{(d)})$ якобиана $J(S)$. Этот перевод основан на теореме Римана — Кэмпфа об особенностях (см. [1], [5]). Одно из следствий теоремы Римана — Кэмпфа состоит в том, что многообразие особых точек дивизора поляризации $\Theta = W_{g-1}$ имеет коразмерность, не превосходящую 4. Это свойство Я. м. является характеристическим, если рассматривать лишь главно поляризованные абелевы многообразия, принадлежащие окрестности якобиана общей кривой. Точнее, если многообразие особых точек дивизора поляризации главно поляризованного абелева многообразия A имеет коразмерность $\leqslant 4$ и A не принадлежит нескольким выделенным компонентам многообразия модулей, то $A \cong J(S)$ для нек-рой гладкой кривой S (см. [2]).

Другой подход к выделению якобианов среди абелевых многообразий — задание уравнений на значения θ-функций и их производных в специальных точках. Отыскание таких уравнений называют п р о б л е м о й Ш о т т к и.

В случае особой кривой S Я. м. $J(S)$ называют подгруппу в $\mathrm{Pic}(S)$, определяемую дивизорами, имеющими степень 0 по каждой неприводимой компоненте кривой S (она совпадает со связной компонентой единицы в $\mathrm{Pic}(S)$). Если кривая S задана модулем m на гладкой модели N, то $J(S)$ обычно называют о б о б щ е н н ы м я к о б и а н о м кривой N (относительно модуля m) и обозначают через Jm (см. [6]).

Лит.: [1] J a c o b i C. G. J., Gesammelte Werke, Bd 2, B., 1882, S. 5—16, 23—50; [2] A n d r e o t t i A., M a y e r A., «Ann. Scu. Norm. Super. Pisa», 1967, v. 21, p. 189—238; [3] G r i f f i t h s Ph. A., An introduction to the theory of special divisors on algebraic curves, Providence, 1980; [4] M u m f o r d D., Curves and their jacobians, Ann Arbor, 1978; [5] Г р и ф ф и т с Ф., Х а р р и с Д ж., Принципы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1982; [6] С е р р Ж. П., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968.

В. В. Шокуров.

ЯКОБИ МНОГОЧЛЕНЫ — многочлены, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией

$$h(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},\quad \alpha>-1,\ \beta>-1,\ x\in[-1, 1].$$

Стандартизованные Я. м. определяются *Родрига формулой*

$$P_n(x;\ \alpha, \beta)=P_n^{(\alpha, \beta)}(x)=$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(1-x^2)^n],$$

а ортонормированные Я. м. имеют вид

$$\hat{P}_n(x; \alpha, \beta)=$$

$$=\sqrt{\frac{n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}}P_n(x;\ \alpha,\ \beta).$$

Многочлен $P_n(x;\ \alpha,\ \beta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)y''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y'+n(n+\alpha+\beta+1)=0.$$

При $\alpha\geqslant-\frac{1}{2}$ и $\beta\geqslant-\frac{1}{2}$ для ортонормированных Я. м. имеет место весовая оценка

$$(1-x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}\mid\hat{P}_n(x;\ \alpha,\ \beta)\mid\leqslant c_1,$$

$$x\in[-1, 1],$$

где постоянная c_1 не зависит от n и x. А в точках $x=\pm1$ последовательность $\{\hat{P}_n(x;\ \alpha,\ \beta)\}$ возрастает со скоростью $n^{\alpha+\frac{1}{2}}$ и $n^{\beta+\frac{1}{2}}$ соответственно.

Ряды Фурье по Я. м. внутри интервала $(-1, 1)$ аналогичны тригонометрич. рядам Фурье. А в окрестности концов отрезка ортогональности свойства рядов Фурье — Якоби иные, ибо в точках $x=\pm1$ ортонормированные Я. м. возрастают неограниченно. Равномерная сходимость ряда Фурье — Якоби на всем отрезке $[-1, 1]$ имеет место, если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на этом отрезке и $f^{(p)}(x)\in\mathrm{Lip}\,\gamma$, причем $p+\gamma>q+\frac{1}{2}$, где

$$q=\max\{\alpha, \beta\}>-\frac{1}{2}.$$

При этих условиях выполняется неравенство

$$\mid f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\hat{P}_k(x;\ \alpha,\ \beta)\mid\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c_2}{n^{p+\gamma}}n^{q+\frac{1}{2}},\quad x\in[-1, 1],$$

где постоянная c_2 не зависит от n и x. С другой стороны, для остатка ряда Фурье — Якоби при $\alpha\geqslant-\frac{1}{2}$ и $\beta\geqslant-\frac{1}{2}$ справедлива весовая оценка

$$(1-x^2)^{1/4}\sqrt{h(x)}\mid f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\hat{P}_k(x;\ \alpha,\ \beta)\mid\leqslant$$

$$\leqslant c_3E_n(f)\ln n,\quad x\in[-1, 1],$$

где $n\geqslant2$, постоянная c_3 не зависит от n и x, а $E_n(f)$ — наилучшее равномерное приближение непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ многочленами порядка не выше n.

Я. м. были введены К. Якоби [1] в связи с решением гипергеометрич. уравнения. Частными случаями Я. м. являются *Лежандра многочлены* (при $\alpha=\beta=0$), *Чебышева многочлены* 1-го рода (при $\alpha=\beta=-1/2$), Чебышева многочлены 2-го рода (при $\alpha=\beta=1/2$), *ультрасферические многочлены* (при $\alpha=\beta$).

См. также ст. *Классические ортогональные многочлены*.

Лит.: [1] Jacobi C., «J. reine und angew. Math.», 1859, Bd 56, S. 149—65; [2] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979. *П. К. Суетин.*

ЯКОБИ ПОЛЕ — поле экстремалей, удовлетворяющих уравнению Якоби (см. *Геодезическая линия*).

ЯКОБИ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$J\{F(x)\} = f^{(\alpha,\beta)}(n) = \int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, F(x)\, dx,$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — *Якоби многочлен* степени n; $\alpha > -1$, $\beta > -1$ — действительные числа. Формула обращения имеет вид

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{-1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \times$$

$$\times f^{(\alpha,\beta)}(n),\ -1 < x < 1,$$

$$\delta_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\,\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,(\alpha+\beta+2n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)},$$

если ряд сходится.

Я. п. сводит операцию

$$T[F(x)] = \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dF}{dx} + [(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)x]\frac{dF}{dx}\right\}$$

к алгебраической по формуле

$$J\{T[F(x)]\} = -(n+1)(n+\alpha+\beta) f^{(\alpha,\beta)}(n) +$$

$$+\{[(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)x] P_n^{(\alpha,\beta)}(x) F(x)\}\Big|_{-1}^{1}.$$

При $\alpha=\beta=0$ Я. п. переходит в *Лежандра преобразование*, при $\alpha=\beta=\nu-\frac{1}{2}$ — в *Гегенбауэра преобразование*. Я. п. применяется при решении дифференциальных уравнений, содержащих оператор T. Я. п. введено также для специального класса обобщенных функций.

Лит.: [1] Scott E. J., «Quart. J. Math.», 1953, v. 4, № 13, p. 36—40; [2] Итоги науки. Математический анализ. 1966, М., 1967; [3] Земанян А. Г., Интегральные преобразования обобщенных функций, пер. с англ., М., 1974.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

ЯКОБИ ПРИНЦИП, принцип стационарного действия, вариационный интегральный принцип механики, установленный К. Якоби [1] для голономных консервативных систем. Согласно Я. п., если заданы начальное P_0 и конечное P_1 положения голономной консервативной системы, то для действительного движения действие по Якоби

$$S = \int_{P_0}^{P_1} \sqrt{2(U+h)}\, ds,\ ds^2 = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} dq_i dq_j$$

имеет стационарное значение по сравнению со всякими другими бесконечно близкими движениями между теми же самыми начальным и конечным положениями и с тем же самым постоянным значением h энергии, что и в действительном движении. Здесь $U(q_1, \ldots, q_n)$ — силовая функция активных сил, действующих на систему, q_i — обобщенные лагранжевы координаты системы, кинетич. энергия к-рой

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,\ \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}.$$

К. Якоби (см. [1]) показал, что если начальное P_0 и конечное P_1 положения системы достаточно близки одно к другому, то действие S имеет минимум для действительного движения. Я. п. приводит задачу определения действительной траектории голономной консервативной системы к геометрич. задаче отыскания в римановом пространстве с метрикой

$$ds^2 = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} dq_i dq_j$$

экстремалей вариационной задачи.

См. также *Вариационные принципы классической механики.*

Лит.: [1] Jacobi C., Vorlesungen über Dynamik, B., 1866 (рус. пер.: Якоби К., Лекции по динамике, Л.— М., 1936).

В. В. Румянцев.

ЯКОБИ ПРОБЛЕМА ОБРАЩЕНИЯ — проблема обращения *абелевых интегралов* I рода произвольного поля *алгебраических функций*. Иначе говоря, проблема обращения абелевых интегралов I рода на компактной римановой поверхности F рода $p\geqslant 1$, соответствующей данному алгебраич. уравнению $F(z, w)=0$.

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ — базис абелевых дифференциалов I рода на F. Обращение одного абелева интеграла, напр. $\int_{c_1}^{w_1}\varphi_1\equiv u_1(w_1)=z_1$, т. е. представление всевозможных рациональных функций от w_1, в частности представление функции $w_1=w_1(z_1)$ как функций от z_1, имеет смысл только при $p=1$ — в этом случае речь идет об *обращении эллиптического интеграла*, к-рое приводит к двоякопериодическим *эллиптическим функциям*. Напр., обращение нормального интеграла I рода в нормальной форме Лежандра

$$u_1(w_1)=\int_0^{w_1}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=z_1$$

приводит к *Якоби эллиптической функции* $w_1=\operatorname{sn} z_1$.

Как заметил еще К. Якоби (C. Jacobi, 1832), проблема обращения при $p>1$ должна рассматриваться для всех абелевых интегралов I рода $\int\varphi_1, \ldots, \int\varphi_p$ в совокупности, так как должны получиться функции с $2p$ периодами. В общем случае при $p\geqslant 1$ рациональная постановка Я. п. о. состоит в следующем: пусть дана система равенств

$$\int_{c_1}^{w_1}\varphi_j+\int_{c_2}^{w_2}\varphi_j+\ldots+\int_{c_p}^{w_p}\varphi_j=z_j,\ j=1, 2, \ldots, p, \quad (1)$$

в к-рой нижние пределы интегрирования $c_1, c_2, \ldots, c_p$ — фиксированные точки на F; $w_1, \ldots, w_p$ — текущие точки на F; $z=(z_1, \ldots, z_p)$ — данные произвольные комплексные числа. Требуется указать, при каких условиях и как можно обратить систему (1), т. е. получить представление всевозможных симметрических рациональных функций от w_k, $k=1, 2, \ldots, p$, как функций от $z=(z_1, \ldots, z_p)$.

Вследствие зависимости от формы путей, соединяющих на F точки c_k и w_k, абелевы интегралы в (1), как функции от верхних пределов w_k, многозначны: при изменении формы пути они могут получить приращение в виде целочисленной линейной комбинации периодов. Отсюда вытекает, что (1) является в сущности системой сравнений по модулю периодов дифференциалов $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$. Получаемые при решении Я. п. о. функции от комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_p)$ не должны изменять своих значений при прибавлении к аргументу любой целочисленной комбинации периодов дифференциалов $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$. Это будут, следовательно, специальные *абелевы функции* с $2p$ независимыми периодами.

Для случая $p=1$, т. е. для *эллиптического интеграла*, построение эллиптич. функций, решающих проблему обращения, достигается при помощи сравнительно простых тета-функций Якоби от одного комплексного переменного z, причем мероморфные эллиптич. функции строятся в виде отношений целых тета-функций. Решение общей Я. п. о. также возможно при помощи тета-функций $\theta_H(z)=\theta_H(z_1, \ldots, z_p)$ 1-го порядка от p комплексных переменных с полуцелыми характеристиками H.

Матрица периодов W базисных абелевых дифференциалов φ_j имеет вид

$$W=\left\|\begin{matrix}\pi i & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p}\\ 0 & \pi i & \ldots & 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \pi i & a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp}\end{matrix}\right\|, a_{jk}=a_{kj}, \quad (2)$$

причем римановы соотношения (см. *Абелева функция*) между периодами обеспечивают равномерную сходимость на компактах пространства $\mathbb{C}^p$ представляющих тета-функции $\theta_H(z)$ рядов, построенных по матрице W. При помощи тета-функции $\theta(z)=\theta_0(z)$ с нулевой характеристикой строится суперпозиция

$$\Phi(w)=\theta(u(w)-z),$$

где

$$u(w)=\left\{u_1(w_1)=\int_{c_1}^{w_1}\varphi_1,\ \ldots,\ u_p(w_p)=\int_{c_p}^{w_p}\varphi_p\right\}$$

— вектор абелевых интегралов, $w=(w_1,\ \ldots,\ w_p)$ — система точек на F; $\Phi(w)$ наз. *Римана тета-функцией*. Для данной системы чисел $z\in\mathbb{C}^p$ либо в нормальном случае функция $\Phi(w)$ имеет на F единственную систему нулей $\eta_1,\ \ldots,\ \eta_p$, либо в исключительном случае тождественно обращается в нуль. Эти нули $\eta_1,\ \ldots,\ \eta_p$ и дают решение Я. п. о. Исключительные точки z, для к-рых $\Phi(w)\equiv 0$, составляют в $\mathbb{C}^p$ множество низшей размерности.

Явные выражения специальных абелевых функций, решающих Я. п. о. в полном объеме, строятся при помощи отношений тета-функций вида $\theta_H(z)/\theta(z)$, в к-рых тета-функция с нулевой характеристикой служит общим знаменателем. При прибавлении к аргументу периодов тета-функции умножаются на определенные мультипликаторы. Для отношений тета-функций, вследствие сокращений, нетривиальным мультипликатором может быть только -1. Следовательно, квадраты отношений не изменяются при прибавлении к аргументу периодов и получаются абелевы функции с $2p$ периодами.

К Я. п. о. примыкает важная проблема построения для данной системы тета-функций $\theta_H(z)$ с общей матрицей W, удовлетворяющей условиям сходимости, соответствующего ей поля алгебраич. функций и соответствующей римановой поверхности. Для того чтобы такое построение было возможно, различные элементы a_{jk} матрицы W, число к-рых равно $p(p+1)/2$, должны удовлетворять $(p-2)(p-3)/2$ дополнительным соотношениям, и исследование этих соотношений при $p>3$ представляет собой весьма трудную задачу (см. [1], [3]—[5]).

Лит.: [1] Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948; [2] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Clebsch A., Gordan P., Theorie der Abelschen Funktionen, [Würzburg], 1967; [4] Conforto F., Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, B., 1956; [5] Мамфорд Д., «Математика», 1973, т. 17, № 4, с. 34—42. *Е. Д. Соломенцев.*

ЯКОБИ СИМВОЛ $\left(\frac{a}{P}\right)$ — функция, определяемая для всех целых a, взаимно простых с заданным нечетным целым числом $P>1$, следующим образом: если $P=p_1p_2\ldots p_r$ — разложение числа P на простые сомножители, не обязательно различные, то

$$\left(\frac{a}{P}\right)=\left(\frac{a}{p_1}\right)\cdot\left(\frac{a}{p_2}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(\frac{a}{p_r}\right),$$

где $\left(\frac{a}{p_i}\right)$ — *Лежандра символы*.

Я. с. является обобщением символа Лежандра и обладает аналогичными с ним свойствами. В частности, для Я. с. справедлив закон взаимности

$$\left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right)=(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}},$$

где P, Q — положительные нечетные взаимно простые числа, а также два дополнения к этому закону

$$\left(\frac{-1}{P}\right)=(-1)^{\frac{P-1}{2}},\quad \left(\frac{2}{P}\right)=(-1)^{\frac{P^2-1}{8}}.$$

Я. с. введен К. Якоби (C. Jacobi, 1837).

С. А. Степанов.

ЯКОБИ СКОБКИ, скобки Майера — дифференциальное выражение

$$[F, G]=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial p_k}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial G}{\partial u}\right)-\frac{\partial G}{\partial p_k}\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}+p_k\frac{\partial F}{\partial u}\right)\right] \tag{1}$$

от двух функций $F(x, u, p)$ и $G(x, u, p)$, $2n+1$ независимых переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $p=(p_1, \ldots, p_n)$.

Основные свойства:

1) $[F, G]=-[G, F]$;

2) $[F, GH]=G[F, H]+H[F, G]$;

3) если $G=g(y)$, $y=(y_1, \ldots, y_s)$ и $y_i=f_i(x)$, то $[F, G]=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial g}{\partial y_i}[F, f_i]$;

4) $[F, [G, H]]+[G, [H, F]]+[H, [F, G]]=\frac{\partial F}{\partial u}[G, H]+\frac{\partial G}{\partial u}[H, F]+\frac{\partial H}{\partial u}[F, G]$.

Последнее свойство носит название тождества Якоби (см. [1], [2]).

Выражение (1) иногда записывается в виде

$$\sum_{k=i}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial x_k}-\frac{\partial G}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial x_k}\right),$$

где принято символическое обозначение

$$\frac{dH}{dx_k}=\frac{\partial H}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial H}{\partial u}, \tag{2}$$

если переменные u и p_k трактовать как значения функций от $x(x_1, \ldots, x_n)$, причем $p_k=\partial u/\partial x_k$, $1\leqslant k\leqslant n$, то (2) приобретает смысл полной производной по x_k.

Если функции F и G не зависят от u, то их Я. с. (1) переходит в *Пуассона скобку*.

Лит.: [1] Jacobi C., «J. reine und angew. Math.», 1862, Bd 60, S. 1—181; [2] Mayer A., «Math. Ann.», 1876, Bd 9, S. 347—70; [3] Гюнтер Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, Л.— М., 1934; [4] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959.

А. П. Солдатов.

ЯКОБИ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Axy+By^2+ax+by+c}{Ax^2+Bxy+\alpha x+\beta y+\gamma},$$

или, в более симметричной форме,

$$(a_1x+b_1y+c_1)\,(x\,dy-y\,dx)+$$
$$+(a_2x+b_2y+c_2)\,dx+(a_3x+b_3y+c_3)\,dy=0,$$

где все коэффициенты — постоянные числа. Это уравнение, являющееся частным случаем *Дарбу уравнения*, впервые исследовал К. Якоби [1]. Я. у. всегда интегрируется в замкнутой форме применением следующего алгоритма. Сначала непосредственной подстановкой отыскивается по крайней мере одно линейное частное решение

$$y=px+q.$$

Затем делается преобразование переменных

$$\xi=\frac{x}{px-y+q},\quad \eta=\frac{y}{px-y+q},$$

в результате чего получается уравнение, приводимое к однородному уравнению.

Лит.: [1] Jacobi C., «J. reine und angew. Math.», 1842, Bd 24; [2] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959; [3] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

Н. Х. Розов.

ЯКОБИ УСЛОВИЕ — необходимое условие оптимальности в задачах вариационного исчисления. Я. у. является необходимым условием неотрицательности 2-й вариации минимизируемого функционала в точке его минимума (равенство нулю 1-й вариации функционала

обеспечивается выполнением необходимых условий первого порядка — дифференциального *Эйлера уравнения*, *трансверсальности условием*, а также *Вейерштрасса условием*).

Пусть, напр., поставлена задача минимизации функционала

$$J(x)=\int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x})\,dt \tag{1}$$

при заданных условиях на концах

$$x(t_1)=x_1,\ x(t_2)=x_2. \tag{2}$$

Если $x(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, есть решение задачи (1), (2), то 1-я вариация функционала δJ должна быть равна нулю, и отсюда следуют необходимые условия 1-го порядка, а 2-я вариация

$$\delta^2 J(\eta)=\int_{t_1}^{t_2}(F_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta}^2+2F_{x\dot{x}}\eta\dot{\eta}+F_{xx}\eta^2)\,dt \tag{3}$$

должна быть больше или равна нулю при любой кусочно гладкой функции $\eta(t)$, удовлетворяющей нулевым граничным условиям

$$\eta(t_1)=0,\quad \eta(t_2)=0. \tag{4}$$

Уравнение Эйлера для функционала $\delta^2 J(\eta)$:

$$F_{xx}\eta+F_{x\dot{x}}\dot{\eta}-\frac{d}{dt}(F_{x\dot{x}}\eta+F_{\dot{x}\dot{x}}\dot{\eta})=0 \tag{5}$$

наз. уравнением Якоби. Это уравнение является линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка относительно неизвестной функции $\eta(t)$. Все коэффициенты в (5) при η и $\dot{\eta}$ вычисляются при значениях t, x, $\dot{x}$, соответствующих известному оптимальному решению $x(t)$ и, следовательно, все они являются известными функциями, зависящими от аргумента t.

Функция $\eta(t)\equiv 0$, $t_1\leqslant 1\leqslant t_2$, удовлетворяет уравнению Якоби при граничных условиях (4), то есть является экстремалью функционала $\delta^2 J(\eta)$. С другой стороны, для $\eta(t)\equiv 0$ 2-я вариация $\delta^2 J(\eta)=0$ и так как для оптимального решения $x(t)$ 2-я вариация неотрицательна при любых $\eta(t)$, то функция $\eta(t)\equiv 0$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, доставляет минимум функционалу $\delta^2 J(\eta)$. Если выполнено условие Лежандра $F_{\dot{x}\dot{x}}\neq 0$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, то есть $x(t)$ является неособенной экстремалью, то при начальных условиях $\eta(t_1)=\dot{\eta}(t_1)=0$ решение уравнения Якоби тождественно равно нулю.

Точка $t=c$ наз. сопряженной с точкой $t=a$, если существует решение уравнения Якоби, обращающееся в нуль при $t=a$ и $t=c$ и не равное тождественно нулю между a и c. Согласно необходимому Я. у., если неособенная экстремаль $x(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, доставляет минимум функционалу (1), то интервал (t_1, t_2) не содержит точек, сопряженных с t_1.

Практич. смысл Я. у. может быть пояснен следующим образом. Пусть Я. у. не выполняется, т. е. существует точка a, $t_1<a<t_2$, сопряженная с t_1. Тогда можно было бы построить непрерывную функцию

$$\eta_1(t)=\begin{cases}\eta(t), & t_1\leqslant t\leqslant a,\quad \eta(t)\not\equiv 0,\\ 0, & a\leqslant t\leqslant t_2,\end{cases}$$

являющуюся решением уравнения (5), для к-рой $\delta^2 J(\eta_1)=0$. Таким образом, $\eta_1(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, является ломаной экстремалью функционала $\delta^2 J(\eta)$ с угловой точкой при $t=a$. Но согласно необходимому условию Вейерштрасса — Эрдмана (см. *Эйлера уравнение*), требующему непрерывности выражений $F-\dot{x}F_{\dot{x}}$ и $F_{\dot{x}}$ в угловой точке, при $t=a$ должно выполняться равенство $\dot{\eta}_1(a)=0$, что вместе с $\eta_1(a)=0$ дает $\eta_1(t)\equiv 0$, а это противоречит предположению $\eta(t)\not\equiv 0$, $t_1\leqslant t\leqslant a$.

Для непосредственной проверки Я. у. следует рассматривать решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям

$$\eta(t_1)=0, \quad \dot{\eta}(t_1)=1.$$

Пусть $\Delta(t_1, t)$ — это решение. Для того, чтобы точка $t=a$, $t_1<a<t_2$, была сопряжена с t_1, необходимо и достаточно, чтобы функция $\Delta(t_1, t)$ обратилась в нуль при $t=a$. Таким образом, выполнение Я. у. эквивалентно условию необращения в нуль решения уравнения Якоби $\Delta(t_1, t)$ на интервале (t_1, t_2).

В более общем случае, когда рассматривается вариационная задача на условный минимум (задача в форме Лагранжа, Майера или Больца), формулировка Я. у. имеет нек-рые особенности. Возникающая здесь задача на минимум 2-й вариации функционала формулируется как задача на условный экстремум (в форме задачи Больца). Эта задача наз. *присоединенной задачей*, а ее экстремали — *присоединенными экстремалями*. Дифференциальные условия связи и граничные условия в присоединенной задаче на минимум 2-й вариации получаются в результате варьирования соответствующих условий исходной вариационной задачи. Определение сопряженной точки остается по форме таким же. Для неотрицательности 2-й вариации функционала на классе присоединенных экстремалей, удовлетворяющих присоединенным условиям для концов, должно выполняться Я. у., требующее, чтобы интервал (t_1, t_2) не содержал точек, сопряженных с t_1.

Я. у. установлено К. Якоби (C. Jacobi, 1837).

Лит.: [1] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950; [2] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.—Л., 1950.

И. Б. Вапнярский.

ЯКОБИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — эллиптические функции, возникшие при непосредственном обращении *эллиптических интегралов* в нормальной форме Лежандра. Эта задача обращения была решена в 1827 независимо К. Якоби (C. Jacobi) и, в несколько иной форме, Н. Абелем (N. Abel). Конструкция Якоби основывается на применении *тета-функций*.

Пусть τ — комплексное число с $\operatorname{Im}\tau>0$. Тета-функции Якоби $\vartheta_0(v)$, $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ представляют собой следующие ряды, абсолютно и равномерно сходящиеся на компактах плоскости комплексного переменного v:

$$\vartheta_0(v)=\vartheta_0(v;\ \tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m e^{i\pi m^2\tau}e^{2i\pi mv}=$$

$$=1+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m e^{i\pi m^2\tau}\cos(2\pi mv);$$

$$\vartheta_1(v)=\vartheta_1(v;\tau)=$$

$$=i\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m e^{i\pi\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2\tau}e^{(2m-1)i\pi v}=$$

$$=2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m e^{i\pi\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\tau}\sin[(2m+1)\pi v];$$

$$\vartheta_2(v)=\vartheta_2(v;\ \tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{i\pi\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2\tau}e^{(2m-1)i\pi v}=$$

$$=2\sum_{m=0}^{\infty}e^{i\pi\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\tau}\cos[(2m+1)\pi v];$$

$$\vartheta_3(v)=\vartheta_3(v;\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{i\pi m^2\tau}e^{2i\pi mv}=$$

$$=1+2\sum_{m=1}^{\infty}e^{i\pi m^2\tau}\cos(2\pi mv).$$

Эти ряды достаточно быстро сходятся. Обозначения $\vartheta_0(v)$, $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ восходят к К. Вейерштрассу

(K. Weierstrass). Вместо $\vartheta_0(v)$ часто пишут $\vartheta_4(v)$, имеются и другие системы обозначений. Сам К. Якоби применял обозначения: $\Theta(v)=\vartheta_0(v/2K)$, $H(v)=\vartheta_1(v/2K)$, $H_1(v)=\vartheta_2(v/2K)$, $\Theta_1(v)=\vartheta_3(v/2K)$, где $K=\pi\vartheta_3^2(0)/2$.

Все тета-функции Якоби представляют собой целые трансцендентные функции комплексного переменного v, причем $\vartheta_1(v)$ — нечетная функция, а остальные функции $\vartheta_0(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ четные.

Имеют место следующие соотношения периодичности:

$$\vartheta_0(v\pm 1)=\vartheta_0(v),$$
$$\vartheta_0(v\pm\tau)=-e^{-i\pi\tau}\cdot e^{\mp 2i\pi v}\cdot\vartheta_0(v);$$
$$\vartheta_1(v\pm 1)=-\vartheta_1(v),$$
$$\vartheta_1(v\pm\tau)=-e^{-i\pi\tau}\cdot e^{\mp 2i\pi v}\cdot\vartheta_1(v);$$
$$\vartheta_2(v\pm 1)=-\vartheta_2(v),$$
$$\vartheta_2(v\pm\tau)=e^{-i\pi\tau}\cdot e^{\mp 2i\pi v}\cdot\vartheta_2(v);$$
$$\vartheta_3(v\pm 1)=\vartheta_3(v),$$
$$\vartheta_3(v\pm\tau)=e^{-i\pi\tau}\cdot e^{\mp 2i\pi v}\cdot\vartheta_3(v),$$

из к-рых вытекает, что тета-функции являются эллиптич. функциями III рода по Эрмиту.

Различные тета-функции связаны между собой формулами преобразования:

$$\vartheta_0\left(v\pm\frac{1}{2}\right)=\vartheta_3(v),$$
$$\vartheta_0\left(v\pm\frac{1}{2}\tau\right)=\pm ie^{-\frac{1}{4}i\pi\tau}\cdot e^{\mp i\pi v}\cdot\vartheta_1(v);$$
$$\vartheta_1\left(v\pm\frac{1}{2}\right)=\pm\vartheta_2(v),$$
$$\vartheta_1\left(v\pm\frac{1}{2}\tau\right)=\pm ie^{-\frac{1}{4}i\pi\tau}\cdot e^{\mp i\pi v}\cdot\vartheta_0(v);$$
$$\vartheta_2\left(v\pm\frac{1}{2}\right)=\mp\vartheta_1(v),$$
$$\vartheta_2\left(v\pm\frac{1}{2}\tau\right)=e^{-\frac{1}{4}i\pi\tau}\cdot e^{\mp i\pi v}\cdot\vartheta_3(v);$$
$$\vartheta_3\left(v\pm\frac{1}{2}\right)=\vartheta_0(v),$$
$$\vartheta_3\left(v\pm\frac{1}{2}\tau\right)=e^{-\frac{1}{4}i\pi\tau}\cdot e^{\mp i\pi v}\cdot\vartheta_2(v).$$

Все четыре тета-функции удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2}=4i\pi\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}.$$

Важное значение имеют так наз. нулевые значения тета-функций $\vartheta_0(0)$, $\vartheta_1'(0)$, $\vartheta_2(0)$, $\vartheta_3(0)$; при этом $\vartheta_1(0)=0$. Между ними имеются следующие соотношения:

$$\vartheta_1'(0)=\pi\vartheta_0(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0),\quad \vartheta_3^4(0)=\vartheta_0^4(0)+\vartheta_2^4(0).$$

По отдельности

$$\vartheta_0(0)=H_0H_3^2,\quad \vartheta_2(0)=2e^{\frac{1}{4}i\pi\tau}H_0H_1^2,$$
$$\vartheta_3(0)=H_0H_2^2,\quad \vartheta_1'(0)=2\pi e^{\frac{1}{4}i\pi\tau}H_0^3,$$

где

$$H_0=\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{2i\pi m\tau}),$$
$$H_1=\prod_{m=1}^{\infty}(1+e^{2i\pi m\tau}),$$
$$H_2=\prod_{m=1}^{\infty}(1+e^{(2m-1)i\pi\tau}),$$
$$H_3=\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{(2m-1)i\pi\tau}),$$
$$H_1H_2H_3=1.$$

Функция $\vartheta_0(v)$ имеет простые нули в точках $m+\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau$; $\vartheta_1(v)$ — в точках $m+n\tau$; $\vartheta_2(v)$ — в точках $m-\frac{1}{2}+n\tau$; $\vartheta_3(v)$ — в точках $m-\frac{1}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau$; $m,\ n=0,\ \pm1,\ \ldots$.

Из соотношений периодичности видно, что нек-рые отношения тета-функций будут эллиптич. функциями в собственном смысле. Основные эллиптические функции Якоби — $\mathrm{sn}u$ (*синус амплитуды*), $\mathrm{cn}u$ (*косинус амплитуды*) и $\mathrm{dn}u$ (*дельта амплитуды*). Эти обозначения введены Х. Гудерманом (Ch. Gudermann, 1838). Названия происходят от старых обозначений, введенных самим К. Якоби ($\mathrm{sn}u=\sin\mathrm{am}u$, $\mathrm{cn}u=\cos\mathrm{am}u$, $\mathrm{dn}u=\Delta\,\mathrm{am}u$) и позднее вышедших из употребления.

Новое переменное u связано с v соотношением $u=v\cdot\pi\vartheta_3^2(0)$. Если $k=\vartheta_2^2(0)/\vartheta_3^2(0)$ — модуль эллиптических функций, то Я. э. ф. следующим образом выражаются через тета-функции или посредством сходящихся в окрестности начала степенных рядов:

$$\mathrm{sn}\,u=\mathrm{sn}\,(u;\ k)=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\,\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}=$$

$$=u-(1+k^2)\,\frac{u^3}{3!}+(1+14k^2+k^4)\,\frac{u^5}{5!}-\ldots,$$

$$\mathrm{cn}\,u=\mathrm{cn}\,(u;\ k)=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)}\,\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}=$$

$$=1-\frac{u^2}{2!}+(1+4k^2)\,\frac{u^4}{4!}-(1+44k^2+16k^4)\,\frac{u^6}{6!}+\ldots,$$

$$\mathrm{dn}\,u=\mathrm{dn}\,(u;\ k)=\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}\,\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}=$$

$$=1-k^2\,\frac{u^2}{2!}+k^2\,(4+k^2)\,\frac{u^4}{4!}-k^2\,(16+44k^2+k^4)\,\frac{u^6}{6!}+\ldots.$$

Удобные обозначения для обратных величин и отношений были введены Дж. Глейшером (J. Glaisher, 1882):

$$\mathrm{ns}\,u=\frac{1}{\mathrm{sn}\,u},\quad \mathrm{nc}\,u=\frac{1}{\mathrm{cn}\,u},\quad \mathrm{nd}\,u=\frac{1}{\mathrm{dn}\,u},$$

$$\mathrm{cs}\,u=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u},\quad \mathrm{ds}\,u=\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u},\quad \mathrm{dc}\,u=\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u},$$

$$\mathrm{sc}\,u=\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u},\quad \mathrm{sd}\,u=\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},\quad \mathrm{cd}\,u=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}.$$

Я. э. ф. $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$, $\mathrm{dn}u$ являются эллиптич. функциями 2-го порядка с периодами: $4K$ и $2iK'$ для $\mathrm{sn}u$; $4K$ и $2(K+iK')$ для $\mathrm{cn}u$; $2K$ и $4iK'$ для $\mathrm{dn}u$. Здесь $K=K(k)=\pi\vartheta_3^2(0)/2$, $K'=K(k')=-i\tau K$ — значения полных эллиптич. интегралов I рода, $k'=\sqrt{1-k^2}$ — дополнительный модуль эллиптических функций. Я. э. ф. имеют только простые полюсы, расположенные в точках $2mK+(2n+1)iK'$; $m,\ n=0,\ \pm1,\ \ldots$.

Три Я. э. ф. связаны соотношениями:

$$\mathrm{sn}^2\,u+\mathrm{cn}^2\,u=1,$$

$$\mathrm{dn}^2\,u+k^2\,\mathrm{sn}^2\,u=1,$$

$$\mathrm{dn}^2\,u-k^2\,\mathrm{cn}^2\,u=1-k^2=k'^2,$$

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{sn}\,u=\mathrm{cn}\,u\cdot\mathrm{dn}\,u,$$

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{cn}\,u=-\,\mathrm{sn}\,u\cdot\mathrm{dn}\,u,$$

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{dn}\,u=-\,k^2\,\mathrm{sn}\,u\cdot\mathrm{cn}\,u$$

и дифференциальными уравнениями

$$\left(\frac{d}{du}\,\mathrm{sn}\,u\right)^2=(1-\mathrm{sn}^2\,u)\,(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u),$$

$$\left(\frac{d}{du}\,\mathrm{cn}\,u\right)^2=(1-\mathrm{cn}^2\,u)\,(k'^2+k^2\,\mathrm{cn}^2\,u),$$

$$\left(\frac{d}{du}\,\mathrm{dn}\,u\right)^2=(1-\mathrm{dn}^2\,u)\,(\mathrm{dn}^2\,u-k'^2).$$

Теоремы сложения для Я. э. ф. имеют вид:

$$\operatorname{sn}(u_1+u_2)=\frac{\operatorname{sn}u_1\cdot\operatorname{cn}u_2\cdot\operatorname{dn}u_2+\operatorname{sn}u_2\cdot\operatorname{cn}u_1\cdot\operatorname{dn}u_1}{1-k^2\operatorname{sn}^2u_1\cdot\operatorname{sn}^2u_2},$$

$$\operatorname{cn}(u_1+u_2)=\frac{\operatorname{cn}u_1\cdot\operatorname{cn}u_2-\operatorname{sn}u_1\cdot\operatorname{dn}u_1\cdot\operatorname{sn}u_2\cdot\operatorname{dn}u_2}{1-k^2\operatorname{sn}^2u_1\cdot\operatorname{sn}^2u_2},$$

$$\operatorname{dn}(u_1+u_2)=\frac{\operatorname{dn}u_1\cdot\operatorname{dn}u_2-k^2\operatorname{sn}u_1\cdot\operatorname{cn}u_1\cdot\operatorname{sn}u_2\cdot\operatorname{cn}u_2}{1-k^2\operatorname{sn}^2u_1\cdot\operatorname{sn}^2u_2}.$$

Связь Я. э. ф. с эллиптич. интегралами выражается в том, что если

$$u=\int_0^z\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=\int_0^{\varphi}\frac{ds}{\sqrt{1-k^2\sin^2s}}$$

— эллиптич. интеграл I рода в нормальной форме Лежандра, то его обращение имеет вид $z=\operatorname{sn}u$; в этом и состоял исходный пункт теории Якоби. Переменная $\varphi=\operatorname{am}u$ есть бесконечнозначная функция от u и наз. амплитудой эллиптического интеграла u,

$$\operatorname{cn}u=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2u}=\cos\operatorname{am}u,$$

$$\operatorname{dn}u=\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2u}=\sqrt{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u}.$$

Основные соотношения между постоянными:

$$K=K(k)=\tfrac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0;\tau),\quad K'=K(k'),$$

$$\tau K=iK',\ k=\frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)},\ k'=\frac{\vartheta_0^2(0)}{\vartheta_3^2(0)}.$$

В прикладных задачах обычно задан модуль k, причем чаще всего имеет место так наз. нормальный случай $0<k<1$, или задан дополнительный модуль $k'=\sqrt{1-k^2}$, $0<k'<1$. Требуется найти K, K', τ или $q=e^{i\pi\tau}$. Полагая $2\varepsilon=(1-\sqrt{k'})/(1+\sqrt{k'})$, при $0<k<1$ имеем $0<\varepsilon<1/2$. Для определения q получается быстро сходящийся при $0<\varepsilon<1/2$ ряд

$$q=e^{i\pi\tau}=\varepsilon+2\varepsilon^5+15\varepsilon^9+150\varepsilon^{13}+O(\varepsilon^{17}).$$

Значения полных эллиптич. интегралов K и K' определяются по формулам

$$K=\tfrac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0;\tau)=\frac{\pi}{2}\left\{1+2\sum_{m=1}^{\infty}q^{m^2}\right\},$$

$$K'=\frac{1}{\pi}K\ln\left(\frac{1}{q}\right),$$

или при помощи таблиц.

При $k=0$ и $k=1$ Я. э. ф. вырождаются соответственно в тригонометрич. и гиперболич. функции:

$$\operatorname{sn}(u;0)=\sin u,\quad \operatorname{cn}(u;0)=\cos u,$$
$$\operatorname{dn}(u;0)=1;\quad \operatorname{sn}(u;1)=\operatorname{th}u,$$
$$\operatorname{cn}(u;1)=\operatorname{dn}(u;1)=1/\operatorname{ch}u.$$

В теоретич. отношении более простое построение теории эллиптич. функций дано К. Вейерштрассом в 1862—63 (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*). При заданном модуле k, $0<k<1$, инварианты Вейерштрасса e_1, e_2, e_3 вычисляются, напр., по формулам $e_1=(2-k^2)/3$, $e_2=(2k^2-1)/3$, $e_3=-(1+k^2)/3$, и далее $g_2=-4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)$, $g_3=4e_1e_2e_3$. Полупериоды теперь определяются по формулам $\omega_1=K/\sqrt{e_1-e_3}$, $\omega_3=iK'/\sqrt{e_1-e_3}$, что и дает возможность вычислить все остальные величины, относящиеся к эллиптич. функциям Вейерштрасса.

Лит.: [1] Jacobi C., Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Königsberg, 1829; Gesammelte Werke, Bd 1, B., 1881; [2] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970; [3] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [4] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963; [5] Enneper A., Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte, 2 Aufl., Halle/Saale, 1890; [6] Tannery J., Molk J., Eléments de la théorie des fonctions elliptiques, t. 1—4, P., 1893—1902; [7] Журавский А. М.,

Справочник по эллиптическим функциям, М.— Л., 1941; [8] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции Формулы, графики,таблицы, пер. с нем., 3 изд., М., 1977.

Е. Д. Соломенцев.

ЯКОБИАН, определитель Якоби, функциональный определитель специального вида, составленный из частных производных 1-го порядка. Пусть заданы m функций $x_i=\varphi_i(t_1, \ldots, t_m, t_{m+1}, \ldots, t_n)$, $i=1, 2, \ldots, m$, имеющих частные производные 1-го порядка по переменным $t_1, t_2, \ldots, t_m$, тогда Я. этих функций называют определитель вида

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_m} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial t_m} \end{vmatrix}$$

кратко обозначаемый символом

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_m)}.$$

Модуль Я. характеризует растяжение (сжатие) элементарного объема при переходе от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ к переменным $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Назван по имени К. Якоби (C. Jacobi), впервые изучившего его свойства и применение.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1—2, М., 1971—73; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., М., 1973; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975.

В. А. Ильин.

ЯНГА—МИЛЛСА ПОЛЕ — *связность* в *главном расслоении* над (псевдо) римановым многообразием, кривизна к-рой удовлетворяет условию гармоничности (уравнению Янга — Миллса).

Я.— М. п., наз. также калибровочными полями, используются в современной физике для описания физич. полей, играющих роль переносчиков взаимодействия. Так, электромагнитное поле в электродинамике, поле векторных W-бозонов — переносчиков слабого взаимодействия в теории электрослабого взаимодействия Вайнберга — Салама и, наконец, глюонное поле — *переносчик сильного взаимодействия* — описываются Я.— М. п. Гравитационное поле также может быть интерпретировано как Я. —М. п. (см. [4]).

Впервые концепция связности как нек-рого поля была развита Г. Вейлем (H. Weyl, 1917), к-рый также сделал попытку описания электромагнитного поля в терминах связности. В 1954 Ч. Янг (C. Yang) и Р. Миллс (R. Mills) предположили, что пространство внутренних степеней свободы элементарных частиц (напр., изотопич. пространство, описывающее две степени свободы нуклона, соответствующих двум его чистым состояниям — протону и нейтрону) зависит от точки пространства — времени, причем внутренние пространства, соответствующие различным точкам, канонически не изоморфны. На геометрич. языке предположение Янга — Миллса состоит в том, что пространство внутренних степеней свободы является векторным расслоением над пространством — временем, не обладающим канонич. тривиализацией, а физич. поля описываются сечениями этого расслоения. Для написания дифференциального уравнения эволюции поля необходимо ввести в расслоение некрую связность — тривиализацию расслоения вдоль кривых базы. Такая связность с фиксированной группой голономии описывает физич. поле (получившее назв. поля Янга — Миллса). Из вариационного принципа выводятся уравнения для свободного Я.— М. п., являющиеся естественным нелинейным обобщением *Максвелла уравнений*.

Более строгое определение Я.— М. п. состоит в следующем. Пусть $\pi: P \to M$ — главное G-расслоение над римановым многообразием M и $E(M)=P\times_G E \to$

$\to M$ — векторное расслоение, ассоциированное с π и G-модулем E. Связность ∇ расслоения π определяет оператор $\nabla^E : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E M)$, действующий в пространстве $\Gamma(E)$ сечений расслоения $E(M)$. Он продолжается до оператора $d^\nabla : \Gamma(E_p) \to \Gamma(E_{p+1})$, действующего в пространстве $\Gamma(E_p)$ $E(M)$-значных p-форм по формуле $d^\nabla(\omega \otimes e) = d\omega \otimes e + (-1)^p \omega \wedge \nabla^E e$. Формально сопряженный к d^∇ оператор δ^∇ на p-формах равен $\delta^\nabla = (-1)^{p+1} * d^\nabla *$, где $*$ — оператор Ходжа.

Связность ∇ в главном G-расслоении наз. полем Янга — Миллса, если кривизна R^∇, рассматриваемая как 2-форма со значениями в векторном расслоении $\mathfrak{g}(M) = P \times_{Ad G} \mathfrak{g}$ (где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G), удовлетворяет уравнению $\delta^\nabla R^\nabla = 0$.

Для *римановой связности* ∇^g риманова многообразия (M, g) уравнение Янга — Миллса равносильно условию симметричности

$$(\nabla^g_X \mathrm{ric})(Y, Z) = (\nabla^g_Y \mathrm{ric})(X, Z), \quad X, Y, Z \in D(M)$$

ковариантной производной тензора Риччи ric. Таким образом, примерами Я.— М. п. служат римановы связности пространств Эйнштейна и прямых произведений таких пространств. В частности, римановы связности пространств Кэлера — Эйнштейна и кватернионных римановых пространств определяют Я.— М. п. в главных расслоениях реперов со структурными группами $U(n/2)$ и $Sp(1) \cdot Sp(n/4)$. Примерами неэйнштейновых римановых связностей, удовлетворяющих уравнению Янга — Миллса, являются римановы связности конформно плоских метрик с постоянной скалярной кривизной и непостоянной секционной кривизной. Примерами нериманових связностей, удовлетворяющих уравнениям Янга — Миллса, являются связности в нормальном расслоении вполне геодезич. подмногообразий симметрического пространства или кватернионных подмногообразий кватернионного пространства, индуцированные римановыми связностями этих пространств.

Уравнение Янга — Миллса является вариационным уравнением Эйлера — Лагранжа для функционала $L(\nabla)$ в пространстве связностей главного расслоения π, задаваемого формулой

$$L(\nabla) = \int_M \langle R^\nabla, R^\nabla \rangle.$$

Риманово многообразие (M, g) предполагается компактным и ориентированным, а скобка $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в слоях векторного расслоения $\mathfrak{g}(M) \otimes \Lambda^2$, определяемое $Ad G$-инвариантным скалярным произведением в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G и скалярным произведением в слоях расслоения Λ^2 2-форм на M, индуцированным метрикой g. Таким образом, Я.— М. п. суть критич. точки функции $L(\nabla)$. Я.— М. п. наз. устойчивым, если 2-й дифференциал функции L в точке ∇ положительно определен (и, следовательно, ∇ есть локальный минимум функции L) и слабо устойчивым, если 2-й дифференциал неотрицательно определен. Известно, что не существует слабо устойчивых Я.—М. п., в произвольном нетривиальном главном расслоении над стандартной сферой S^n при $n \geqslant 5$. С другой стороны, при $n \geqslant 3$ риманова связность стандартной римановой метрики факторпространства S^n/Γ сферы по свободно действующей нетривиальной конечной группе изометрий Γ является устойчивым Я.—М.п. [5].

Наибольший интерес для физики представляет Я.— М.п. на четырехмерных римановых (а также лоренцевых) многообразиях. В этом случае оператор Ходжа $*$ отображает пространство 2-форм на M (со значениями в произвольном векторном расслоении) на себя, причем это отображение является инволютивным ($*^2 = id$) и зависит только от ориентации и конформного класса метрики g. Связность ∇ в главном расслоении над M^4

наз. самодуальной связностью или инстантоном (соответственно, антисамодуальной связностью или антиинстантоном), если ее 2-форма кривизны R^∇ является собственным вектором оператора Ходжа с собственным значением 1 (соответственно, —1). В силу тождества Бьянки инстантоны и антиинстантоны являются Я.— М. п. Более того, они являются точками абсолютного минимума функции L. В случае главного расслоения над стандартной сферой со структурной группой $SU(2)$, $SU(3)$ или $SU(4)$ все локальные минимумы функции L исчерпываются инстантонами и антиинстантонами (и, следовательно, являются глобальными). Риманова связность риманова многообразия M^4 является инстантоном только для многообразий с группой голономии $G\subset \mathrm{Sp}(1)$. Все такие компактные многообразия исчерпываются комплексными поверхностями К3.

Группа $G(\pi)=\Gamma(P*_{\mathrm{Ad}}G)$ тождественных на базе автоморфизмов расслоения $\pi: P\to M$ наз. калибровочной группой. Она естественным образом действует в множестве $C^+(\pi)$ инстантонов расслоения π с группой голономии G. Факторпространство $M^+(\pi)=C^+(\pi)/G(\pi)$ наз. пространством модулей неприводимых инстантонов расслоения π. Если структурная группа G расслоения π компактна и полупроста, а база M^4 является компактным ориентированным римановым многообразием с неотрицательной ненулевой скалярной кривизной и самодуальным тензором конформной кривизны Вейля, то пространство модулей $M^+(\pi)$ либо пусто, либо является многообразием размерности

$$\dim M^+(\pi)=2p_1(\mathfrak{g}(M))-{}^1/_2\dim G(\chi(M^4)-\sigma(M^4)),$$

где $p_1(\mathfrak{g}(M))$ — первое *Понтрягина число* расслоения $\mathfrak{g}(M)$, а $\chi(M^4)$, $\sigma(M^4)$ — характеристика Эйлера — Пуанкаре и *сигнатура* многообразия M^4.

Наиболее полные результаты получены в физически важном случае расслоений над стандартной сферой S^4 с классическими компактными структурными группами G. В частности, получено описание всех инстантонов в таких расслоениях в чисто алгебраич. терминах (напр., в терминах нек-рых модулей над грассмановой алгеброй или в терминах решений нек-рых кватернионных матричных уравнений, см. [1]). Для случая группы $G=Sp(1)$ известно явное описание всех инстантонов. Напр., для $Sp(1)$-расслоения $\pi_1: P_1\to S^4$ с *Понтрягина числом* 1 пространство модулей $M^+(\pi_1)\approx \mathbb{R}^+\times\mathbb{H}$, где $\mathbb{R}^+$ — множество положительных чисел, а $\mathbb{H}$ — множество кватернионов. Паре $(\lambda, a)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{H}$ отвечает инстантон, задаваемый $\mathfrak{g}$-значной 1-формой связности

$$A(x)=\mathrm{Im}\,\frac{\overline{u(x)}\cdot du(x)}{1+|u(x)|^2},$$

где $u(x)=\lambda(\overline{a-x})^{-1}$, $x\in\mathbb{H}$. Кватернионы из $\mathbb{H}\approx\mathbb{R}^4$ отождествляются с точками сферы S^4 с помощью стереографич. проекции, а алгебра Ли $\mathfrak{g}=Sp(1)$ рассматривается как алгебра Ли $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ чисто мнимых кватернионов.

Лит.: [1] Манин Ю. И., в сб.: Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем., т. 17, М., 1981, с. 3—55; [2] Шварц А. С., там же, с. 113—73; [3] Atiyah M. [и др.], «Proc. Roy. Soc. Lond.», 1978, A 362, p. 425—61; [4] Попов Д. А., Дайхин Л. И., «Докл. АН СССР», 1975, т. 225, № 4, с. 790—93; [5] Bourguignon J. [и др.], «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1979, v. 76, № 4, p. 1550—53; [6] Коноплева Н. П., Попов В. Н., Калибровочные поля, 2 изд., М., 1980; [7] Yang C. N., Mills R. L., «Phys. Rev.», 1954, v. 96, № 1, p. 191—95; [8] Геометрические идеи в физике, пер. с англ., М., 1983.

Д. В. Алексеевский.

ЯЧЕЙКА — термин, применяемый иногда для обозначения такого параллелограмма периодов *двоякопериодической функции* $f(z)$, на сторонах к-рого нет полюсов и к-рый получается из основного параллелограмма периодов сдвигом на нек-рый вектор $z_0\in\mathbb{C}$.

Лит.: [1] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963.

Е. Д. Соломенцев.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

В указатель вошли названия всех статей «Математической энциклопедии» (они набраны жирным шрифтом), понятия (термины), определения которых приведены в статьях, а также упоминаемые в статьях наиболее важные результаты. Следом за термином даны указания на номер тома (также набранный жирным шрифтом) и номер столбца. Указатель составлен строго по алфавиту, первые повторяемые термины заменены знаком тире. Названия статей и термины даны, как правило, в единственном числе и лишь некоторые из них во множественном. Так как от этого зависит место статьи (термина) в алфавите, следует иметь в виду оба варианта. Составитель указателя Н. Г. Дорохина.

А

Абак 1, 13
Абелев автомат 1, 67
- групповой объект 1, 1149
Абелев дифференциал 1, 13—15; 2, 240
- -, базис, 1, 13
- -, дивизор 1, 15
- - нормальный 1, 14
- - нормированный 1, 14
- -, полярный период 1, 14
- -, циклический период 1, 14
- идемпотент 4, 941
Абелев интеграл 1, 15—17
- -, Абеля теорема 1, 17
- - канонический 1, 16
- - нормальный 1, 16
- -, матрица периодов 1, 16
- -, полярный период 1, 16
- -, циклический период 1, 16
- потенциал 2, 239
Абелева группа 1, 17—20
- - вполне разложимая 1, 19
- - делимая 1, 19
- - конечно порожденная 1, 18
- -, Куликова критерий 1, 18
- -, нуль 3, 1082
- -, периодическая часть 1, 18
- - полная 1, 19
- - примарная 1, 18
- -, Прюфера ранг 1, 19
- - с конечным числом образующих, основная теорема 1, 18
- - свободная 4, 1078
- -, тип 1, 19
- -, характеристика элемента 1, 19
- -, элемент бесконечной высоты 1, 18
- -, элемент высоты n 1, 18
- - элементарная 5, 972
Абелева категория 1, 20—22
- -, Габриеля — Попеску теорема 1, 21
- -, Митчелла теорема 1, 20
- -, плотная подкатегория 1, 21
- мультипликативная группа 3, 839
Абелева схема 1, 22
- S-схема 1, 22
Абелева функция 1, 22—24
- -, базис периодов 1, 22
- - вырожденная 1, 22
- -, группа периодов 1, 22
- -, матрица периодов 1, 23
- -, модуль периодов 1, 22
- - невырожденная 1, 22
- -, параллелотоп периодов 1, 23
- -, периоды 1, 22
- -, род 1, 23
- -, система основных периодов 1, 22
- -, - периодов 1, 22
- -, - примитивных периодов 1, 22
- -, сложения теорема 1, 24
- - специальная 1, 22
Абелево кольцо 4, 941
Абелево многообразие 1, 143; 2, 1012
- -, Морделла — Вейля теорема 1, 25
- пространство 1, 1066
- расширение 1, 845; 4, 399, 908
- функциональное поле 1, 23
Абеля дифференциальное уравнение 1, 25
Абеля задача 1, 26
Абеля интегральное уравнение 1, 26
- - -, обобщение 1, 26
- - -, ядро 1, 26
Абеля метод суммирования 1, 27
Абеля неравенство 1, 27
Абеля преобразование 1, 27
Абеля признак для функциональных рядов 1, 28
- - для числовых рядов 1, 28
- средние 4, 25
Абеля теорема 1, 28—29
- - для рядов Дирихле 1, 29
- - для степенных рядов 1, 28
- - о дивизорах 2, 132; 5, 1047
- - о мероморфных функциях 3, 648
- - о непрерывности суммы степенного ряда 1, 29
- - о степенных рядах 5, 219
- - об абелевых интегралах 1, 17
- - об алгебраических уравнениях 1, 28, 193, 852
- ядро интегрального уравнения 1, 26
Абеля — Гончарова интерполяционный ряд 1, 30
Абеля — Гончарова проблема 1, 29—31
Абеля — Пуассона метод суммирования 1, 31
Абнормальная подгруппа 1, 32
Абсолют 1, 32—34; 4, 676
- в проективной геометрии 1, 33
- регулярного топологического пространства 1, 32
θ-абсолют пространства 1, 33
Абсолютная величина 1, 34; 2, 77
- - действительного числа 1, 34
- - комплексного числа 1, 34; 2, 1008
- - функционала 4, 479
Абсолютная геометрия 1, 34
- группа топологического пространства 1, 1045
- замкнутость 4, 425
- конгруэнция 1, 492
- неизмеримость 3, 667
Абсолютная непрерывность 1, 34—36
- - интеграла 1, 34
- - меры 1, 34
- - функции 1, 34
- - функции множества 1, 35
- - -, Лебега теорема 1, 36
- неустойчивость 5, 565
- плоскость 1, 492
Абсолютная погрешность 1, 36; 4, 356
- постоянная Шнирельмана 5, 895
- проекционная константа 1, 390
Абсолютная суммируемость 1, 36—38
- - в степени p 1, 37
- устойчивость 5, 562
- ε-энтропия 4, 494; 5, 1008
Абсолютно беспристрастная последовательность 1, 38
- выпуклая подгруппа 1, 792
- выпуклое множество 1, 799; 4, 1010
- гомотопическая группа 1, 1063
- замкнутое пространство 2, 436
Абсолютно интегрируемая функция 1, 38
- линейный компакт 4, 1157
- наименьший вычет 1, 814
- непрерывное распределение 3, 989
- непрерывный спектр 5, 128
- неприводимая группа 3, 995
- неприводимый многочлен 3, 754, 997
- неразветвленный идеал 3, 1001
- нормальное число 3, 1071
- оптимальная стратегия 4, 34
Абсолютно плоское кольцо 1, 39
- полупростой эндоморфизм 4, 466
- равносильные методы суммирования 4, 800
- регулярный метод суммирования 1, 37
- свободная алгебра 4, 1079
- суммирующий базис 1, 377
- сходящееся бесконечное произведение 1, 445
- сходящийся двойной ряд 2, 30
Абсолютно сходящийся несобственный интеграл 1, 39; 3, 1017
- - - -, Коши критерий 1, 39
Абсолютно сходящийся ряд 1, 40; 4, 1065
- эквивалентные методы суммирования 4, 800
Абсолютного будущего область 4, 151
- прошлого область 4, 151
- удаления область 4, 151
Абсолютное дифференцирование 2, 896
Абсолютное значение 1, 41
- - p-адическое 1, 41
- -, аппроксимации теорема 1, 42
- - архимедово 1, 41
- - неархимедово 1, 41
- -, Островского теорема 1, 42
- - тривиальное 1, 41
- - ультраметрическое 1, 41
- кручение 3, 129
Абсолютное топологическое свойство 1, 42
Абсолютные компоненты 1, 935
- координаты 1, 935
Абсолютный базис 1, 377
- инвариант 5, 981
- - в теории геометрических объектов 1, 937
- - в теории модулярных функций 3, 789
- - формы 2, 541
- - p-функции Вейерштрасса 1, 622
- интегральный инвариант 2, 601
- максимум 3, 494
- минимум 3, 494; 4, 1132
Абсолютный момент 1, 42
- параллелизм 4, 204
- ретракт 4, 976
- - окрестностный 4, 976
- экстремум 1, 974
Абстрактная алгебраическая геометрия 1, 141
- аналитическая поверхность 1, 249
- вычислительная машина 1, 825
- машина 1, 825; 3, 626
- почти периодическая функция 3, 1119
- риманова область 4, 1014
- - поверхность 1, 178; 4, 1015; 5, 317
- теория потенциала 4, 531
- триангуляция 3, 152
- функция 3, 1119
- - аналитическая 1, 274
Абстрактное алгебраическое многообразие 1, 188
- дифференциальное уравнение 2, 280
- параболическое уравнение 3, 334
- ядро расширения 4, 899
Абстрактный гармонический анализ 1, 880
- комплекс 3, 151
- многогранник 5, 902
- оператор Вольтерра 1, 754
- симплициальный комплекс 2, 995; 4, 1159
Абстракция актуальной бесконечности 1, 43
Абстракция математическая 1, 43
Абстракция отождествления 1, 44
Абстракция потенциальной осуществимости 1, 44
Абсцисса 1, 45, 244, 358; 2, 80
- сходимости ряда Дирихле 2, 183
«Аварийный останов» 1, 826
Авост 1, 826
Автодуальная проективная плоскость 4, 669
Автоинформативности мера 3, 738
Автоковариации функция 1, 45
Автоковариация 1, 45
Автоколебания 1, 45—47
- релаксационные 1, 46
Автоколебательная система 1, 45
- -, обратная связь 1, 45
- -, принудительная синхронизация 1, 47
Автокорреллограмма 1, 47
Автокорреляция 1, 47
Автомат 1, 47—51; 3, 626
- абелев 1, 67
- автономный 1, 54
-, алгебраическая теория 1, 66
- асинхронный 1, 48, 49
- без памяти 1, 49
- без потери информации 1, 50
- бесконечный 1, 48
Автомат вероятностный 1, 51
-, гомоморфизм 1, 68
- групповой 1, 67
- детерминированный 1, 48
-, диаграмма переходов 1, 72
-, изоморфизм 1, 68
-, композиция 1, 68
Автомат конечный 1, 52—57
- линейный 1, 68
- магазинный 3, 628
-, макроподход 1, 48, 53, 72
-, матрица переходов 1, 72
-, микроподход 1, 50, 55, 75
- Мили 1, 53
- минимальный 1, 69
-, минимизация 1, 69
- Мура 1, 53, 72
-, Мура теорема 1, 69, 78
- над деревьями 1, 68
- над термами 1, 68
- недетерминированный 1, 48
- нечеткий 1, 49
- нильпотентный 1, 67
- обобщенный 1, 68
- обратимый 1, 50
-, операция обратной связи 1, 69
- перестановочный 1, 67
-, полная система 1, 70

-, полугруппа 1, 67
- приведенный 1, 69, 78
-, прямое произведение 1, 68
- растущий 1, 48, 51
- с конечной памятью 1, 50
- с конечным запоминанием 1, 50
- с линейной тактикой 1, 58
- с переменной структурой 1, 49
- самонастраивающийся 1, 50
- свободный 1, 67
-, способ задания 1, 72
- структурный 1, 53
-, суперпозиция 1, 69
-, таблица переходов 1, 72
-, теория 1, 77
-, функциональный элемент 1, 75
- циклический 1, 67
- частичный 1, 49
-, эквивалентность состояний 1, 78
-, элемент памяти 1, 75
МП-автомат 1, 1088
Автомата поведение 1, 57
- - в случайной среде 1, 57
- - в стационарной среде 1, 57
- - оптимальное 1, 57
Автоматизация программирования 1, 58
Автоматический перевод 1, 59
Автоматического управления теория 1, 60—66
Автоматная грамматика 1, 1087
- сеть 1, 53
Автоматное кодирование 2, 938
Автоматный оператор 5, 695
— *язык* 1, 1087
Автоматов алгебраическая теория 1, 66—68
Автоматов гомоморфизм 1, 68
Автоматов композиции 1, 68
Автоматов минимизация 1, 69
Автоматов полные системы 1, 70—72
Автоматов способы задания 1, 72—77
Автоматов теория 1, 77
Автоматов эквивалентность 1, 78
Автоморфизм 1, 79; 3, 370
- алгебраического многообразия 1, 187
- алгебраической поверхности 1, 154
- - системы 1, 198
- апериодический 1, 297
- Бернулли 1, 418
- билинейной формы 1, 482
- бирациональный 1, 494
-, внешняя сопряженность 5, 1012
- вполне эргодический 2, 805
- графа 1, 1112
- группы внешний 1, 736
- - внутренний 1, 736
- инволютивный инверсный 4, 477
- интегральный 2, 601
- кватернионной структуры 2, 839
- кольца внутренний 1, 736
- контраградиентный 2, 1071
- конфигурации 2, 1077
- конформной структуры 2, 1089
- косовой 3, 33
- метрический 1, 482; 3, 668
- моноида внутренний 1, 736
-, мультипликативное разложение Жордана 2, 422
- области 1, 471
- производный 4, 690
- регулярный 4, 944
- специальный 5, 137
- унипотентный 2, 422
- формульный 1, 199
- формы 4, 82
- Фробениуса 1, 849; 5, 667
- *целочисленный* 2, 779
I-автоморфизм 1, 198
IC-автоморфизм 1, 198
K-автоморфизм 4, 1194
Автоморфизмов внутренних группа 4, 639
- группа 1, 198
- - универсальная 1, 199
- многообразия семейство 1, 187
- порядковых группа 1, 199
Автоморфная форма 1, 79
Автоморфная функция 1, 79—81
- -, теорема об алгебраических соотношениях 1, 81
Автономия 1, 81
Автономная система 1, 82—84
- -, геометрическая интерпретация 1, 83
- -, Лиувилля теорема 1, 83
- -, фазовая траектория 1, 83
- -, фазовое пространство 1, 83
- -, фазовый поток 1, 83
- -, эквивалентность 1, 84
Автоморфности условие 3, 786
Автономный автомат 1, 54
Автополярная фигура 4, 476
Автополярный треугольник 4, 990
Авторегрессии — скользящего среднего смешанный процесс 5, 48
Авторегрессионная спектральная оценка 5, 103
Авторегрессионный процесс 1, 84
Авторегрессия 1, 85
Автоустойчивая модель 2, 1060
Агвинея Ньютона 1, 297
Адамара вариационная формула 1, 85
- вариация 4, 218
- квазианалитический класс функций 2, 725
- лакуна 1, 86
Адамара матрица 1, 85
- - обобщенная 1, 86
- неравенство 1, 85
- - некорректно поставленной задачи 3, 47, 608, 937
Адамара теорема 1, 86—88
- - мультипликационная 1, 87
- - о лакунах 1, 86
- - о трех кругах 1, 87
- - о целых функциях 1, 86
- - об определителях 1, 87
- - об умножении особенностей 1, 87
- условие 1, 86
Адамара — Картана теорема о кривизне 3, 101
- - - о римановых многообразиях 4, 1009
Адамарова конфигурация 1, 506
Адамаровская композиция 1, 88
Адамаровское произведение 1, 88
Адамса *e*-инвариант 5, 286
Адамса метод 1, 88
- спектральная последовательность 5, 107
Адаптивное оптимальное управление 4, 47
Аддитивная арифметическая функция 1, 89
- *граница функции* 1, 1042
Аддитивная группа кольца 1, 89; 2, 967
- групповая схема 1, 1147
Аддитивная категория 1, 89
- -, Гротендика группа 1, 1133
Аддитивная проблема делителей 1, 90
Аддитивная равномерная структура 1, 90
- система счисления 5, 315
- схема 4, 912
Аддитивная теория идеалов 1, 90
Аддитивная теория чисел 1, 91—94
Аддитивная функция 1, 94; 3, 636
- - множеств 5, 720
- - сегмента, Варда теорема 1, 578
σ-аддитивная функция множеств 5, 720
Аддитивное отношение 1, 94
- отображение 1, 1133
- *разложение Жордана* 2, 421
Аддитивность 1, 94
Аддитивные задачи теории чисел 1, 91
Аддитивные проблемы теории чисел 1, 94, 256
Аддитивный шум 5, 918
- функтор 1, 89
Аддиционная теорема в топологии 1, 95, 1048; 3, 836
Адекватная матрица 3, 765
Адель 1, 95
Адема соотношения 5, 228, 229, 231
Адиабатический инвариант 1, 96—98; 2, 381
- - вечный 1, 97
- - временной 1, 97
- - стационарный 1, 97
Адиабатическое течение 1, 98
Адическая топология 1, 98
p-адическая группа Ли 3, 240
- единица 1, 100
- норма 1, 41, 100
l-адические когомологии 1, 99
l-адический пучок 1, 99
p-адическое абсолютное значение 1, 41
p-адическое аналитическое многообразие 1, 278
- - пространство 1, 285
p-адическое число 1, 99—101
- -, Гензеля лемма 1, 918
Адо теорема об алгебрах Ли 3, 244
Адсорбция 1, 101
-, Ленгмюра уравнение 1, 101
Адъюнкта 1, 188
Азартная игра 1, 102
Азимутальная проекция 2, 754
Аккретивный оператор 2, 228
Аксиальная точка 3, 1072
Аксиальный вектор 1, 102; 4, 106
Аксиом схема 1, 102
Аксиома 1, 103; 5, 334, 640; *см. также* соответствующее название
Аксиоматизированный класс алгебраических систем 5, 972
Аксиоматизируемый класс 1, 103, 158; 3, 769
Аксиоматика отделимая 3, 414
Аксиоматическая система полуформальная 1, 434
- теория гомологий 5, 231
Аксиоматическая теория множеств 1, 104—109
- - -, класс 2, 862
- - формальная 3, 653
Аксиоматический метод 1, 109—113
- - неформальный 3, 1028
Аксиоматическое исчисление формальное 3, 653
Аксонометрия 1, 113
Активная емкость 1, 1089
Активный вычислительный алгоритм 4, 62
Актуальная бесконечность 1, 43, 44
Акцептор 1, 54
Алберта *алгебра* 3, 900
- кольцо 3, 901
- теорема о лупах 2, 519
Алгамс 1, 113
Алгебра 1, 114, 155; 2, 961; 5, 497
Алгебра (наука) 1, 114—118
Алгебра абсолютно свободная 4, 1079
- Алберта 3, 900
- алгебраическая 1, 134
- альтернативная 1, 237
- альтернионов 1, 239
- аменабельная 2, 916
- антикоммутативная 1, 292
- антисимметричная 1, 133
- ассоциативная 1, 340
- аффиноидная 2, 417
-, базис 1, 374; 2, 1022
- банахова 1, 381
- бесконечного представленческого типа 4, 585
- бинарно лиева 1, 488
-, биразмерность 1, 1054
- борелевская 1, 536
- Брауэра 1, 546; 4, 726
- булева 1, 550
-, Веддерберна теорема 2, 1022
- векторная 1, 632
- векторно-матричная 3, 161
- вектор-функций 1, 650
- внешняя 1, 732
- внутренне свободная 4, 1079
- вполне отделимая 2, 916
- вполне симметричная 4, 1148
- Гейтинга 4, 726
- гильбертова 1, 978
-, главная норма элемента 2, 212
-, главный многочлен 2, 212
-, главный след элемента 2, 212
- гомологическая 1, 1049
-, гомоморфизм 2, 961
- градуированная 1, 1084
- Грассмана 1, 732; 2, 732, 735
-, группа когомологий 2, 909
- групповая 1, 1144, 1145
-, деформация 2, 107
- дикого типа 4, 585
- Дирихле 1, 133
-, дискриминант 2, 211
- дифференциальная 2, 242
- дуальная 2, 390
- дуальных чисел 2, 32
- Жегалкина 2, 409
- жесткая 2, 107
- *m*-значной логики 3, 714
-, изоморфизм 2, 961
- индуцированная 3, 920
- инцидентности 4, 263
- Йорданова 2, 693
- касательная 3, 462
- квазилокальных наблюдаемых 5, 203
- квазихопфова 5, 790
- кватернионов, базис 1, 372
- Клиффорда 2, 881
- коммутативная 2, 981
- комплексных умножений 5, 1001
- конечно определенная 4, 34
- конечного типа 4, 585
- конечномерная 2, 961
-, кронекерово произведение 3, 118
- Кэли 3, 157, 160
- Кэли — Диксона 3, 160, 161
- Ландвебера—Новикова 5, 865
- Ли 3, 242
- - алгебраической группы 3, 245
- - аналитической группы 3, 247
- -, Вейля группа 1, 625
- - группы Ли 3, 247
- - локальной группы Ли 3, 268
- - ограниченная 3, 248
- линейная 3, 291
Алгебра логики 1, 123—129
- локально конечная 3, 431
- нильпотентная 3, 434
- разрешимая 3, 435
- Мальцева 3, 463, 508
- матриц 3, 611
- матричная 3, 611
- ментерова 2, 968
Алгебра мер 1, 129, 881
- метабелева 3, 241
-, минимальный многочлен 2, 212
Алгебра множеств 1, 129, 552; 3, 759
- моноунарная 5, 496
- муфанг-лиева 3, 508
- над полем 3, 291
- неассоциативная 3, 899
- Неймана 1, 978; 3, 920
- нильпотентная 3, 1041
- нормированная 3, 1081
- общая 3, 1140
-, общий элемент 2, 211
- полилинейная 4, 406
- полугрупповая 4, 456
- полупростая 1, 383; 4, 463, 804
- Понтрягина 5, 790
- Поста 3, 714; 4, 513
- предельная 2, 108
- представленческого типа 4, 585
- присоединенная 4, 640
- проективная 4, 663
- простая 4, 700
- псевдобулева 1, 546; 4, 696, 726
- равномерная 2, 966; 4, 785
-, радикал 1, 383; 4, 804
- радикальная 4, 805
-, *ранг* 4, 858
- редуцированная 3, 920
-, резольвента элемента 1, 383
- ручного типа 4, 585
Алгебра с ассоциативными степенями 1, 130
Алгебра с делением 1, 131
- - - центральная 1, 131
- с единицей 1, 381
- с инволюцией 1, 383

- с конечным числом образующих 2, 987
- с равномерной сходимостью, 1, 131
- свободная 4, 1079
- сепарабельная 4, 1113
- симметрическая 4, 1140
- симметрической билинейной формы 2, 693
- симметричная 1, 133; 2, 548; 4, 1148
- слабо наследственная 2, 916
- событий 4, 943
-, спектр элемента 1, 383
- Стинрода 5, 228
- Стоуна 5, 234
- Стоуна — Вейерштрасса 1, 884
-, структурная константа 2, 1022; 5, 254
-, стягивание 2, 108
- тензорная 5, 329
-, тензорное произведение 5, 331
- топологическая 5, 366
- трехосновная 1, 67
- унарная 5, 496
- универсальная 1, 155; 5, 497
- формально жесткая 2, 108
-, Фробениуса теорема 2, 1022

Алгебра функций 1, 131—134; 2, 986
- - аналитическая 1, 132
- - регулярная 1, 132
- фильтрованная 5, 616
- фробениусова 5, 669
- Фурье 1, 382; 5, 509
- Фурье — Стилтьеса 5, 509
- Хопфа 5, 790
- центральная 5, 804
- цилиндрическая 5, 825
- штейнова 5, 900
- энгелева 3, 901; 5, 999
- эндоморфизмов 5, 1001

A-алгебра гензелева 1, 918

*B**-алгебра 1, 118

BL-алгебра 1, 488

***C**-алгебра** 1, 118
-, Гельфанда — Наймарка теорема 1, 384
-, полярное разложение 4, 480
- приведенная 5, 512
-, след 4, 1209
-, спектр 5, 100
-, характер 5, 746
- ядерная 5, 1029

CCR-алгебра 1, 119

k-алгебра аналитическая 1, 278
- квазианалитическая 1, 278

NGCR-алгебра 1, 119

p-алгебра Ли 3, 248

***PI*-алгебра** 1, 120—123

r-алгебра 4, 805

*W**-алгебра 3, 920

σ-алгебра борелевская 1, 130
- борелевских множеств 3, 643
- множеств 1, 130
- опциональная 4, 63
- предсказуемая 4, 581
- цилиндрическая 5, 825

Ω-алгебра 4, 1128
- мультиоператорная (линейная) 3, 839

Алгебраическая алгебра 1, 134
- - Ли 3, 249
- - -, Жордана разложение 2, 422
- - ограниченной степени 1, 134

Алгебраическая геометрия 1, 134—141

Алгебраическая геометрия абстрактная 1, 141
- - арифметическая 1, 182
- -, двойственность 2, 34
- -, конечности теоремы 2, 1024
- гиперповерхность 1, 1009

Алгебраическая группа 1, 142
- - анизотропная 4, 860
- -, Бореля теорема 1, 539
- -, Бореля — Морозова теорема 1, 539
- -, Вейля группа 1, 625
- -, *k*-гомоморфизм 1, 142
- -, группа характеров 5, 767
- - диагонализируемая 2, 122
- -, Жордана разложение 2, 422
- -, *k*-изоморфизм 1, 143
- -, Кнезера — Брюа — Титса теорема 1, 847
- - линейная 1, 143; 3, 297
- -, определенная над полем 1, 142
- - ортогональная 4, 83
- - полупростая 4, 464

Алгебраическая группа преобразований 1, 143
- -, радикал 4, 804
- - разложимая 4, 860
- -, размерность 1, 142
- -, ранг 4, 860
- -, рациональное представление 4, 920
- -, рациональности теоремы 4, 923
- - связная 1, 142
- - собственно ортогональная 4, 83
- - специальная ортогональная 4, 83
- -, форма 5, 634
- -, характер 5, 747
- единица 1, 196
- зависимость 1, 148
- инфинитезимальная симметрия 3, 1023

Алгебраическая иррациональность 1, 144
- кратность собственного значения 5, 58

Алгебраическая кривая 1, 144—148
- -, арифметический род 1, 144
- -, Вейерштрасса точка 1, 619
- -, Гарнака теорема 2, 70
- -, гессиан 1, 955
- - каноническая 1, 146
- - основного типа 1, 146
- -, Петровского теорема 2, 70
- - плоская 4, 309
- -, порядок 4, 504
- -, род 1, 145
- лингвистика 1, 249
- линия 3, 383

Алгебраическая независимость 1, 148
- норма 3, 1048

Алгебраическая операция 1, 149
- -, арность 1, 149
- особая точка 1, 173, 679

Алгебраическая поверхность 1, 149—154, 250
- -, автоморфизм 1, 154
- -, делитель Севери 1, 151
- -, инвариант Цейтена — Сегре 1, 150
- -, иррегулярность 1, 150
- -, классификация 1, 152
- -, линейный род 1, 150
- -, минимальная модель 1, 152
- -, Нётера формула 1, 150
- - общего типа 4, 113
- - основного типа 4, 113
- -, Пикара число 1, 151
- -, плюриканоническая система 1, 150
- -, проблема модулей 1, 153
- - регулярная 1, 150
- -, Римана—Роха теорема 1, 151
- -, системы кривых 1, 151
- -, топологические свойства 1, 151
- -, численные инварианты 1, 150
- подгруппа 1, 142
- производная 2, 733; 4, 26

Алгебраическая размерность 1, 154, 374

Алгебраическая решетка 1, 154
- семантика 4, 696
- сеть 2, 804

Алгебраическая система 1, 155—160
- -, базис тождеств 1, 186
- -, базисный ранг 4, 858
- -, гомоморфизм 1, 1061
- -, диаграмма 3, 766
- -, изоморфизм 1, 156
- - конечная 1, 155
- - конечного типа 1, 155
- - конструктивная 3, 1088
- -, мощность 1, 155
- -, носитель 1, 155
- -, нуль 3, 1082
- - нумерованная 3, 1088
- -, описание 3, 766
- -, основное множество 1, 155
- -, подпрямое произведение 4, 379
- -, порядок 1, 155
- -, расширение 5, 876
- - резидуально конечная 1, 184
- -, реплика 4, 974
- - свободная 1, 374; 4, 1079
- -, свободный базис 1, 373
- -, сигнатура 1, 156; 4, 1128
- -, факторсистема 1, 157
- - финитно аппроксимируемая 1, 184
- -, элементарное расширение 3, 766
- спираль 5, 141
- степень точности 2, 794
- теория автоматов 1, 66
- теория инвариантов 2, 540

Алгебраическая теория чисел 1, 164—169

Алгебраическая *K*-теория 1, 160—164

Алгебраическая топология 1, 169—173
- -, двойственность 2, 35

Алгебраическая точка ветвления 1, 173
- -, порядок 1, 174
- факторгруппа 1, 142
- форма записи комплексного числа 2, 1008

Алгебраическая функция 1, 174—178
- -, группа монодромии 1, 176
- -, индекс ветвления 1, 176
- -, критические значения 1, 175
- -, локальная униформизующая 1, 177
- - полная 1, 177
- -, полюс 1, 176
- -, порядок ветвления 1, 176
- -, род 1, 177; 4, 1048

Алгебраически замкнутое подполе 4, 909

Алгебраически замкнутое поле 1, 178
- зависимые функции 3, 650
- компактная абелева группа 5, 880
- неприводимое представление 3, 997
- эквивалентные представления 5, 943

Алгебраические числа ассоциированные 1, 196
- - сопряженные 1, 196

Алгебраический базис 1, 374
- - векторного пространства 1, 643
- гомоморфизм алгебраической группы 1, 142
- *K*-изоморфизм алгебраической группы 1, 143
- интеграл 1, 15
- класс гомологий 1, 180
- - когомологий 1, 180
- комплекс Пуанкаре 4, 747
- многочлен 5, 797

Алгебраический многочлен наилучшего приближения 1, 179
- полином 5, 797
- пучок когеревтный 2, 903
- - прямых 4, 773
- степенной ряд 3, 1035

Алгебраический тор 1, 179
- -, группа характеров 1, 179
- - расщепимый 1, 179
- узел 3, 739

Алгебраический цикл 1, 179
- -, алгебраическая эквивалентность 1, 180
- -, гомологическая эквивалентность 1, 181
- -, рациональная эквивалентность 1, 180
- -, Тейта гипотеза 1, 181
- -, Ходжа гипотеза 1, 180
- -, численная эквивалентность 1, 181
- -, *k*-эквивалентность 1, 181
- элемент 1, 134; 4, 415, 908

Алгебраически-логарифмическая особая точка 1, 182

Алгебраических многообразий арифметика 1, 182
- подмногообразий семейство 1, 180

Алгебраических систем квазимногообразие 1, 183

Алгебраических систем класс 1, 184

Алгебраических систем многообразие 1, 185
- функций поле 1, 178

Алгебраического многообразия автоморфизм 1, 187

Алгебраическое дополнение 1, 188

Алгебраическое замыкание 1, 188
- значение корня 1, 323
- интерполирование 2, 622

Алгебраическое многообразие 1, 188; 5, 299
- - абстрактное 1, 188
- -, Бертини теоремы 1, 431
- - действительное 2, 70
- -, деформация 2, 105
- -, дифференциальная форма 2, 265
- -, инволюция 2, 549
- -, касательный конус 2, 756
- -, кратность особой точки 3, 90
- -, конструктивное подмножество 2, 1054
- -, особая точка 4, 118
- - полное 4, 423
- - полупризованное 4, 476
- -, размерность 4, 919
- -, рациональная функция 4, 919
- -, теория пересечений 4, 253
- множество 2, 671
- - аффинное 1, 359
- подмногообразие, коразмерность 3, 14
- поле 1, 197

Алгебраическое пространство 1, 189
- расширение 4, 909

Алгебраическое сравнение 1, 190
- -, степень 1, 190

Алгебраическое уравнение 1, 191—195
- -, Абеля теорема 1, 28, 193, 852
- -, Бюдана — Фурье теорема 1, 570
- -, Гаусса метод 1, 898
- -, корень 1, 192; 3, 15
- -, Кронекера — Вебера теорема 1, 852
- -, метод квадратного корня 2, 791
- - неприводимое 1, 192
- - приводимое 1, 192
- -, разрешимость в радикалах 1, 193
- -, результента 4, 949

Алгебраическое число 1, 195—198, 258
- -, высота 1, 196
- -, Дирихле теорема о единицах поля 1, 165
- - над полем 1, 197
- -, поле 1, 196; 4, 398
- - целое 1, 196

Алгебраической независимости мера 1, 198

Алгебраической системы автоморфизм 1, 198

Алгебро-геометрическое кольцо 1, 939

Алгебры логики функция 1, 553; 4, 699

Алгебры основная теорема 1, 199

Алгол 1, 200

Алгол-68 1, 201

Алголоподобная схема программ 4, 650

Алгоритм 1, 202; 2, 1045

Алгоритм в алфавите 1, 206
- вероятностный 5, 458
- вычислительный 1, 826
- Евклида 2, 397
- инвертирующий 1, 1147
- итерационный 2, 689
- Кока 1, 1090
- кольцевой 1, 562
- Куайна 1, 560

Алгоритм локальный 1, 207
- -, величина памяти 1, 209
- -, индекс 1, 209
- - наилучший 1, 209
- -, метрическая теория 1, 228
- метрический 2, 1051
- несамоприменимый 1, 210
- -, область применимости 1, 227

- операторный 1, 825
- регулярных точек 1, 561
- самоприменимый 1, 210
-, сочетание 1, 225
-, теория 1, 226
- универсальный 5, 500
- упорядочивания 1, 208
-, эквивалентность 1, 229
A-алгоритм 1, 561
QR-алгоритм 2, 687
Алгоритма изображение 1, 210
Алгоритма сложность вычислений 1, 210—213
Алгоритма сложность описания 1, 213
Алгоритмическая логика 4, 653
- неразрешимость 3, 1003
Алгоритмическая проблема 1, 214—218, 227; 3, 537
- - ограниченная 1, 221
Алгоритмическая сводимость 1, 218
Алгоритмическая теория информации 1, 219—222
Алгоритмическая теория множеств 1, 222
- условная энтропия 1, 222
- энтропия 1, 222
Алгоритмический вычислительный процесс 1, 202
- оператор 2, 1052
Алгоритмический язык 1, 222—225
- - рекурсивных функций 4, 976
Алгоритмическое количество информации 1, 222
- число 5, 314
Алгоритмов сочетания 1, 225
Алгоритмов теория 1, 226—229
Алгоритмов эквивалентность 1, 229
Алгорифм 1, 202
- нормальный 3, 1072
Александера двойственность 1, 230
- идеал 1, 232
Александера инварианты 1, 231
- матрица 5, 488
- - зацепления 1, 232
- - накрытия 1, 232
- многочлен 1, 232; 5, 488
- модуль 5, 488
- - зацепления 1, 232
- - накрытия 1, 232
- сфера 2, 137
- теорема о комплексах 3, 153
- - о зацеплениях 5, 490
- - о числах Бетти 1, 231
Александера — Понтрягина двойственность 1, 231
- - теорема двойственности 1, 231
Александера — Спеньера когомологии 5, 861
Александрова бикомпактное расширение 1, 233
- компактификация 1, 233
- поперечник 4, 493
- теорема о борновских мерах 3, 644
- - о выпуклых многогранниках 1, 802
- - - - поверхностях 1, 788
- - о канторовых многообразиях 2, 716, 717
- - - - множествах 2, 718
- - о компактах 2, 990
- - о метрике 4, 1200
- - о непрерывных отображениях 3, 987
- - о несущественных отображениях 3, 1020
- - о препятствии 1, 1056; 3, 437
- - о размерностных инвариантах 4, 824
- - о регулярных функциях множеств 4, 938
- - о существенных отображениях 4, 823, 827
- - об измеримости множеств 5, 298
- - об ε-отображениях и ε-сдвигах 4, 827
- - об ω-отображениях 4, 827
формула размерностей бикомпактов 4, 822
Александрова — Урысона теорема о пространстве иррациональных чисел 2, 96
Александрова — Фенхеля неравенство 5, 50
Александрова — Хаусдорфа теорема о метрике 3, 671
- - - о G_δ-множестве 2, 96
- - - о полноте 4, 425
Александрова — Чеха гомологии и когомологии 1, 234; 5, 126
- - группа гомологий 1, 234
- - когомологии 5, 861
- - модуль гомологий 1, 234
Александровское бикомпактное расширение 5, 393
Алеф-нуль 1, 235
Алефы 1, 235
-, Бернштейна формула 1, 235
-, обобщенная континуум-гипотеза 1, 235
-, рекурсивная формула Тарского 1, 235
-, - - Хаусдорфа 1, 235
Аликвотная дробь 1, 235, 315
Алфавит 1, 111, 235; 2, 1043; 4, 1082
- вспомогательный 1, 1092
- входной 1, 53, 54
- выходной 1, 53, 54
- конечный 1, 819
- *основной* 1, 1092
Алфавитная система счисления 5, 315
Алфавитное кодирование 2, 935
Альбанезе многообразие 1, 236
Альбедный метод 1, 236
Альмукантарат 2, 753
Альтернанс, Валле Пуссена теорем 1, 576
- чебышевский 5, 848
- -, точки 1, 236
Альтернанса точки 1, 236
Альтернатива 1, 237; 2, 656; 4, 386
Альтернативная алгебра 1, 237
- гипотеза 5, 185
- сетевая модель 4, 1120
Альтернативное кольцо 1, 237
- - артиново 1, 238
- -, нильпотентность 1, 237
- -, правая нильпотентность 1, 237
- -, разрешимость 1, 237
- -, центр 1, 238
- -, - ассоциативный 1, 238
- -, - коммутативный 1, 238
- тело 1, 237
Альтернативные кольца и алгебры 1, 237—239
Альтернация 1, 240
Альтернион 1, 239
-, алгебра 1, 239
-, модуль 1, 240
Альтернирование 1, 240
Альтернированное полилинейное отображение 4, 407
- произведение 1, 240
Альтернированный интеграл 2, 335
- тензор 1, 240
Альтернирующее зацепление 1, 241
Альтернирующие узлы и зацепления 1, 241
Альтернирующий метод Шварца 5, 884
- узел 1, 241
Альфа 1, 241
Альфана пучок 1, 242
Альфорса аналитическая мера 1, 246
- теорема для клейновых групп 2, 877
- - об аналитической емкости 1, 246
Амальгама 1, 242
Амальгама групп 1, 243
Аменабельная алгебра 2, 916
- группа 2, 535; 5, 512
Амплитуда комплексного числа 2, 1009
- свободного гармонического колебания 4, 1084
Амплитуда эллиптического интеграла 1, 243; 5, 990, 1057
Амплитудно-фазовая функция 4, 241
Амплитуды косинус 3, 38
- синус 4, 1191
Анализ — см. соответствующее название
Анализирующая модель языка 1, 247
Аналитическая алгебра функций 1, 132
- *k*-алгебра 1, 278
Аналитическая геометрия 1, 243—245
- гиперповерхность 1, 1009
- группа 1, 245
- деформация 2, 103
- дуга 1, 246
Аналитическая емкость 1, 246; 2, 407
- иерархия Клини 2, 490
Аналитическая кривая 1, 246
- - замкнутая 1, 246
- - правильная 1, 246
- локальная группа 3, 267
- лупа 3, 462
- мера 1, 246
- - Альфорса 1, 246
Аналитическая модель языка 1, 247—249
- - - парадигматическая 1, 248
- - - синтагматическая 1, 248
- нормальность кольца 1, 939
Аналитическая плоскость 1, 249
Аналитическая поверхность 1, 249; 5, 860
Аналитическая поверхность абстрактная 1, 249
- -, классификация 1, 250
- подгруппа 1, 245
- почти периодическая функция 4, 545
- приведенность кольца 1, 939
- прямая 1, 249
- статика 3, 169
- структура 2, 355
- -, деформация 2, 102
Аналитическая теория дифференциальных уравнений 1, 251—254
Аналитическая теория чисел 1, 254—261
- - -, аддитивные проблемы 1, 256
- - -, дисперсионный метод 1, 260
- - -, круговой метод 1, 259
- - -, метод большого решета 1, 260
- - -, - комплексного интегрирования 1, 259
- - -, - тригонометрических сумм 1, 259
Аналитическая функция 1, 261—274; 5, 690
Аналитическая функция абстрактная 1, 274
- -, ветвь 1, 268, 680
- -, вычет 1, 264, 814, 816
- - гиперкомплексного переменного 1, 1007
- -, граничные задачи 1, 1095
- -, граничные свойства 1, 1098
- -, двойственность 2, 41
- -, единственности теорема 1, 264
- -, Жордана лемма 2, 420
- -, Жюлиа теорема 2, 426
- -, изолированная особая точка 2, 503
- -, интегральная теорема Коши 1, 263
- -, интегральная формула Коши 1, 263
- -, интегральное представление 2, 585
- -, логарифмический вычет 1, 815
- - многозначная 1, 266
- -, Мореры теорема 1, 263
- - на римановой поверхности 4, 1028
- - нескольких комплексных переменных 1, 268
- -, нормальное семейство 3, 1068
- -, область существования 1, 267
- - обобщенная 3, 1099
- -, особая точка 1, 264; 4, 113
- -, особенность 4, 131
- - полная 1, 267; 4, 413
- -, полярное множество 4, 478
- -, проблема граничного представления 1, 1099
- -, проблема единственности 1, 1099
- -, проблема существования граничных значений 1, 1098
- -, рельеф 4, 969
- -, риманова поверхность 4, 1015
- -, росток 4, 415
- -, свойство единственности 2, 401
- -, склеивания теоремы 4, 1201
- -, точка ветвления 1, 679
- -, униформизация 5, 514
- -, элемент 1, 267; 4, 413; 5, 971
Аналитический вектор 1, 275, 276, 447
- волновой фронт 5, 672
Аналитический дифференциал 1, 276; 2, 239
- -, вычет 1, 816
- индекс комплекса 2, 553
- квадратичный дифференциал 2, 786
Аналитический ландшафт 1, 276
- морфизм 1, 281
Аналитический образ 1, 276
Аналитический оператор 1, 276
Аналитический полиэдр 1, 277
- -, грань 1, 277
- -, ребро 1, 277
Аналитический пучок 1, 277, 286
- - когерентный 2, 739
- рельеф 1, 276
- способ задания функции 5, 716
Аналитический функционал 1, 277
- элемент 1, 283; 4, 413
Аналитическое банахово пространство 1, 385
- векторное поле 2, 278
Аналитическое выражение 1, 277
Аналитическое дополнение 1, 278
Аналитическое кольцо 1, 278
- конструирование оптимального регулятора 4, 44
Аналитическое многообразие 1, 278
- - p-адическое 1, 278
- - вещественное 1, 278
- -, комплексная структура 2, 1005
- - комплексное 1, 278
Аналитическое множество 1, 279—281; 2, 93; 3, 455, 762
- - исключительное 1, 288; 2, 673
- -, неприводимая компонента 1, 280
- - неприводимое 1, 280
- - однородное 1, 280
- - приводимое 1, 280
- -, пучок идеалов 2, 904
- -, размерность 1, 280
- -, регулярная точка 1, 280
- -, страта 1, 280
- -, стратификация 1, 280
- -, стягивание 2, 673
- -, точка неприводимости 1, 281
- накрытие 1, 281
Аналитическое отображение 1, 281, 285
- - банаховых пространств 1, 274
- - плоское 1, 282
- подмногообразие 4, 371
- подпространство 1, 286
Аналитическое представление 1, 283, 446
- продолжение 1, 267
- -, канонический элемент 1, 283
- - максимальное 1, 283
- -, Пойа теорема 2, 41
Аналитическое продолжение функции 1, 283
- -, элемент 1, 283
Аналитическое пространство 1, 285
- - p-адическое 1, 285
- - вещественное 1, 285, 689
- - гладкое 1, 285
- -, глобальная размерность 1, 285
- -, двойственность 2, 39

- -, **дифференциальное исчисление 2**, 277
- - жесткое 2, 417
- - комплексное 1, 285
- -, коразмерность 3, 14
- -, модификация 3, 770
- -, неособая точка 1, 285
- - неприводимое 3, 995
- - нормальное 3, 1068
- -, особая точка 1, 285
- - приведенное 1, 286
- -, простая точка 1, 285
- -, размерность 1, 285
- -, теоремы конечности 2, 1024
- семейство векторных пространств 1, 640
- - комплексных многообразий 2, 102
- *K*-аналитическое множество 2, 406
- **Аналлагматическая геометрия 1**, 289; 3, 122
- Анафорическая связь 4, 1184
- **Ангармоническое отношение 1**, 289; 2, 27
- **Ангера функция 1**, 289
- **Андронова — Витта теорема** об устойчивости 1, 289; 4, 69
- Анизотропная алгебраическая группа 4, 860
- билинейная форма 1, 713
- **Анизотропная группа 1**, 290; 3, 487
- диагнозируемая алгебраическая группа 2, 122
- квадратичная форма 2, 778
- - линейная алгебраическая группа 3, 298
- **Анизотропное ядро 1**, 290; 2, 778
- **Аннулятор 1**, 290; 2, 43
- множества 1, 644
- модуля 3, 778
- поливектора 4, 403
- Аномалия лучевой функции 1, 947
- Аномальная пара 5, 524
- Аносова система 4, 1195
- Ансамбль Гиббса канонический 5, 179
- динамических систем 2, 147
- микрокапонический 5, 200
- равновесный 5, 179
- статистический 5, 178
- **Антагонистическая игра 1**, 290; 2, 471
- Антецедент 4, 1104, 1105
- Антецедента закон отрицания 4, 386
- Антецедентное правило 1, 921
- Антианалитическая функция 1, 292
- Антианалитическое представление 1, 283
- Антивиковский символ 4, 1134
- Антиголоморфная функция 1, 292
- Антигомоморфизм решетки 4, 981
- **Антидвижение 1**, 292
- в псевдоевклидовом пространстве 4, 740
- **Антидискретная топология 1**, 292
- **Антидискретное пространство 1**, 292
- **Антиизоморфизм 1**, 292
- Антиинверсия 2, 545
- Антиинстантон 5, 1060
- Антикватернион 1, 240
- **Антикоммутативная алгебра 1**, 292
- Антикоммутации соотношение 5, 518
- Антикоммутационные соотношения 4, 258
- **Антиконформное отображение 1**, 292
- Антилинейное отображение 4, 458
- **Антилогарифм 1**, 292
- **Антиномия 1**, 292—296
- **Антипараллелограмм 1**, 296
- **Антипараллельные прямые 1**, 296
- Антиподера 4, 370
- **Антиподы 1**, 297
- **Антипризма 1**, 297
- Антисимметрирование 1, 240
- Антисимметрическая билинейная форма 1, 482; 3, 41
- Антисимметричная алгебра 1, 133
- - равномерная 4, 786
- Антисимметричное бинарное отношение 1, 488
- **Антисимметричный тензор 1**, 297
- **Антитонное отображение 1**, 297
- Антитонный оператор 3, 960
- **Антье 1**, 297
- **Аньези локон 1**, 297
- **Апериодический автоморфизм 1**, 297
- Антипериодическое условие 5, 915
- Антисимметрическое пространство Фока 5, 631
- Антиэрмитова форма 5, 1021
- **Аполлония задача 1**, 298
- окружность 1, 298
- **Аполлония теорема 1**, 298
- Аполярности условие 1, 354
- **Аполярные сети 1**, 298
- Апория 1, 293
- **Апостериорная вероятность 1**, 298
- **Апостериорное распределение 1**, 298
- **Апофема 1**, 298, 299; 3, 750
- **Аппеля многочлены 1**, 299
- полиномы 1, 299
- **Аппеля преобразование 1**, 301
- **Аппеля уравнения 1**, 301
- **Аппликата 1**, 244, 302, 358; 2, 80
- Аппликация 2, 970
- **Аппроксимативная дифференцируемость 1**, 302
- **Аппроксимативная компактность 1**, 303
- **Аппроксимативная непрерывность 1**, 303
- **Аппроксимативная производная 1**, 303; 3, 804
- Аппроксимативно дифференцируемая функция 1, 302
- **Аппроксимативно компактное множество 1**, 304
- непрерывная функция 1, 303
- Аппроксимативное производное число 1, 304
- Аппроксимативный дифференциал 1, 302
- **Аппроксимативный предел 1**, 304
- Аппроксимации порядок 4, 627
- теорема для почти периодических функций 4, 544, 547
- - об абсолютном значении 1, 42
- теория 4, 627
- Аппроксимационная вязкость 5, 303
- **Аппроксимация 1**, 305
- **Аппроксимация дифференциального оператора разностным 1**, 305
- **Аппроксимация дифференциального уравнения разностным 1**, 307
- **Аппроксимация дифференциальной краевой задачи разностной 1**, 308
- Паде 4, 187
- **Аппроксимация периодическими преобразованиями 1**, 310
- сеточная 3, 304
- симплициальная 4, 1161
- стохастическая 5, 235
- Аппроксимирующая последовательность областей 2, 683
- **Априорная вероятность 1**, 311
- оценка 4, 844
- **Априорное распределение 1**, 311
- - наименее благоприятное 5, 192
- **Арабские цифры 1**, 312
- **Арбитражная схема 1**, 312
- Арбитражное решение 1, 312
- **Аргумент 1**, 313
- комплексного числа 1, 313; 2, 1009
- функции 5, 713
- **Аргумента принцип 1**, 313
- - обобщенный 1, 313
- **Ареа-функция 1**, 313
- Аренса — Ройдена теорема 2, 985
- **Арифметизация 1**, 314
- **Арифметика 1**, 314—319
- алгебраических многообразий 1, 182
- гейтинговская 1, 911
- интуиционистская 1, 911
- конструктивная 2, 1040
- -, основная теорема 4, 876
- Пеано 2, 759; 4, 220
- примитивно рекурсивная 3, 412
- теоретическая 1, 314
- **Арифметика формальная 1**, 319—321
- элементарная 5, 972
- Арифметическая алгебраическая геометрия 1, 182
- голоздрия 3, 108
- **Арифметическая группа 1**, 321
- -, род элемента 4, 1049
- дробь 2, 389
- иерархия Клини — Мостовского 2, 490
- ошибка 2, 928, 929
- полуформальная система 2, 1040
- **Арифметическая прогрессия 1**, 322
- -, делителей проблема 2, 87
- -, Дирихле теорема 2, 187
- **Арифметическая пропорция 1**, 322
- универсальная алгебра 5, 498
- формула 1, 319
- **Арифметическая функция 1**, 322
- - аддитивная 1, 89
- Арифметический инвариант фигуры 5, 614
- код 2, 934
- **Арифметический континуум 1**, 323
- **Арифметический корень 1**, 323
- предикат 1, 320
- **Арифметический род 1**, 323; 4, 1049
- - алгебраической кривой 1, 144
- - виртуальный 1, 323
- **Арифметический ряд 1**, 322, 324
- **Арифметический треугольник 1**, 325
- Арифметических функций асимптотика 5, 878
- Арифметическое значение корня 1, 323
- исчисление 1, 319
- многообразие Коэна — Маколея 3, 69
- **Арифметическое пространство 1**, 325
- **Арифметическое распределение 1**, 325
- **Арифметическое среднее 1**, 325; 5, 161
- Арккосинус 3, 37
- Арккотангенс 3, 43
- Арксинус 4, 1191
- **Арксинуса закон** 1, 325, 419
- **Арксинуса распределение** 1, 326
- Арктангенс 5, 320
- Аркус-функция 1, 326
- **Аркфункция 1**, 326; 3, 1135
- *n*-арная квазигруппа 2, 803
- операция 1, 149
- *n*-арное отношение 4, 153
- Арность 4, 650
- алгебраической операции 1, 149
- операции 1, 155; 4, 18
- отношения 1, 155
- *n*-арный предикат 4, 153
- АРСС-процесс 5, 48
- Артина гипотеза 2, 119
- закон взаимности 1, 168
- компонента 4, 916
- символ 1, 168; 5, 668
- Артина — Риса лемма о кольцах 1, 98
- Артина — Риса условие для идеалов 4, 635
- Артина — Шмидта дзета-функция 2, 119
- Артина — Шрейера теория 3, 149
- **Артинов модуль 1**, 327
- **Артинова группа 1**, 327
- **Артиново кольцо 1**, 327
- - альтернативное 1, 238
- -, Веддерберна — Артина теорема 1, 612
- Арфа инвариант 2, 527
- Архангельского теорема о перистых пространствах 4, 271
- - о хаусдорфовых пространствах 3, 835
- **Архимеда аксиома 1**, 327, 293, 328, 652, 970; 5, 877
- принцип для конусов 2, 1075
- **Архимеда тела 1**, 328; 3, 711; 4, 463
- **Архимедов класс 1**, 328
- **Архимедова группа 1**, 328
- **Архимедова полугруппа 1**, 328, 329
- **Архимедова спираль 1**, 329
- Архимедово абсолютное значение 1, 41
- - -, Островского теорема 1, 42
- **Архимедово кольцо 1**, 329
- отношение эквивалентности 1, 328
- пространство 4, 1038
- свойство 2, 74
- тело 3, 431
- упорядоченное векторное пространство 4, 470
- **Арцела вариация 1**, 330
- теорема о компактности 3, 995
- Арцела — Александрова теорема о квазиравномерной сходимости 2, 820; 4, 792
- **Арцела — Асколи теорема для последовательности непрерывных функций 1**, 330
- - - о компактности 3, 672
- - - о равностепенной непрерывности 4, 801
- **Асимметрии коэффициент 1**, 330
- **Асимметричное многообразие 1**, 331
- Асимметричный граф 1, 1112
- Асимметрия отрицательная 1, 331
- положительная 1, 331
- **Асимметрия распределения 1**, 331
- **Асимптота 1**, 331
- гиперболы 1, 988
- Асимптотика арифметических функций 5, 878
- числовых функций 5, 878
- Асимптотическая линия 1, 332; 2, 252
- -, Бельтрами — Эннепера теорема 1, 332, 409
- орбитальная устойчивость 2, 776
- орбитально устойчивая траектория 4, 69
- относительная эффективность критерия 5, 1026
- оценка 4, 498
- **Асимптотическая плотность 1**, 332
- полоса 4, 438
- **Асимптотическая последовательность 1**, 333
- почти периодическая функция 3, 1120
- **Асимптотическая пренебрегаемость 1**, 333
- **Асимптотическая производная 1**, 333; 3, 804
- Асимптотическая развольвента 4, 453
- **Асимптотическая сеть 1**, 333
- скорость сходимости 5, 304
- **Асимптотическая точка 1**, 334; 5, 424
- *p*-устойчивость 5, 573
- эффективность критерия 5, 1025
- **Асимптотическая формула 1**, 334
- Асимптотически моногенная функция 3, 804
- **Асимптотически несмещенная оценка 1**, 334
- - функция 1, 334
- **Асимптотически несмещенный критерий 1**, 334
- оптимальная последовательность автоматов 1, 58
- равные функции 4, 498
- условно устойчивое решение 5, 550, 551

- устойчивая система 1, 63
- - - линейных дифференциальных уравнений 3, 341
- - схема 4, 846
Асимптотически устойчивое решение 1, 334; 2, 775; 5, 568, 569
- - -, Барбашина — Красовского теорема 1, 65
Асимптотически эффективная оценка 1, 335; 4, 175
Асимптотические координаты 5, 87
Асимптотический базис 1, 335
- конус гиперболоида 1, 1000
- метод Вентцеля — Крамера — Бриллюэна 1, 716
- многоугольник 3, 752
Асимптотический предел 1, 335
Асимптотический ряд 1, 335, 338
- - внешний 3, 503
- - внутренний 3, 503
Асимптотический степенной ряд 1, 335
Асимптотическое выражение 1, 336
Асимптотическое значение 1, 336
- множество 4; 565
Асимптотическое направление 1, 337; 2, 252
Асимптотическое представление 1, 337
Асимптотическое равенство 1, 337
Асимптотическое разложение 1, 337
- - в смысле Пуанкаре 1, 338
- - в смысле Эрдейи 1, 338
- соотношение 4, 497
Асимптотической равнораспределенности свойство 5, 76
Асинхронный автомат 1, 48
Ассемблер 3, 596
n-ассоциатив 4, 444
Ассоциативная алгебра 1, 340
- -, Веддерберна теорема 1, 341
- -, Веддерберна — Мальцева теорема 1, 612
- - конечномерная 2, 1021
- -, представление 4, 584
- -, расширение 4, 898
- - свободная 4; 1081
- -, характер 5, 746
Ассоциативное исчисление 1, 338
- -, изоморфизм 1, 339
- - неразрешимое 1, 339
- кольцо 1, 340; 2, 961
Ассоциативно - коммутативное кольцо 1, 239
Ассоциативности закон 1, 125, 340
Ассоциативность 1, 340
Ассоциативные кольца и алгебры 1, 340
Ассоциативный центр альтернативного кольца 1, 238
Ассоциатор 1, 342
Ассоциированная мера 4, 1039
- по Борелю функция 1, 343, 538
- форма 5, 863
- - многообразия 3, 159
Ассоциированная функция 1, 342, 538
Ассоциированные алгебраические числа 1, 196
- уравнения 5, 419
- числа 1, 166
Астроида 1, 343
Астрометрии математические задачи 1, 343
Астрономии математические задачи 1, 344—346
Астрофизики математические задачи 1, 346—351
- релятивистской математические задачи 4; 970
Атлас 2, 730; 3, 743
- канонический 5, 722
- многообразия 2, 755
- хефлигеровский 5, 782
C^k-атлас 2, 355
Атом 1, 351
- водородоподобный 1, 739
- пространства 3, 638
Атомарная формула 3; 416, 417; 4, 578; 5, 641
Атомарное кольцо 1; 351
Атомическое распределение 1, 352
Атомная решетка 1; 352
Аттрактор 5, 246
- Лоренца 3, 451
Атьи теорема двойственности 5, 363
Атьи — Зингера теорема об индексе 2, 552; 5, 763, 868
- - формулы индекса 2, 551
Атьи — Хирцебруха (— Уайтхеда) спектральная последовательность 5, 107
Аумана теорема в математической экономике 3, 590
Ауслендера — Буксбаума теорема о регулярных кольцах 4; 939
Ауэрбаха система 1, 391
Аффикс 1, 352
Аффинитет 1, 352
Аффинная геометрия 1, 352
Аффинная группа 1, 352, 362
- - Вейля 3, 17
Аффинная дифференциальная геометрия 1, 352—354
- длина дуги 1; 364
Аффинная кривизна 1, 354
Аффинная минимальная поверхность 1, 355
Аффинная нормаль 1, 355
Аффинная оболочка 1, 355
Аффинная связность 1, 355—357; 2, 268
- -, геодезическая линия 1; 357
- -, объект 1, 356
- -, структурные уравнения 1, 356
Аффинная система координат 1, 358
- структура 5, 249
Аффинная сфера 1, 358
Аффинная схема 1, 358
- - дискретная 1, 358
- -, замкнутое вложение 1, 359
- - квазикомпактная 1, 358
- - неприводимая 1, 358
- - нётерова 1, 358
- - нормальная 1, 358
- - приведенная 1, 358
- - регулярная 1, 358
- - связная 1, 358
- - целостная 1, 358
- *S*-схема 1, 363
Аффинная унимодулярная группа 1, 359
Аффинно полная универсальная алгебра 5, 498
Аффинное алгебраическое многообразие 1, 360
Аффинное алгебраическое множество 1, 359
- - -, идеал 1, 359
- - -, координатное кольцо 1, 360
- - - неприводимое 1, 360
- - -, уравнение 1, 360
Аффинное кручение 1, 360
- локально симметрическое пространство 4, 1146
Аффинное многообразие 1, 360
- -, геометрическая точка 1, 361
- -, рациональная точка 1, 361
- отображение 1, 362
- подпространство 1, 362; 3, 345
Аффинное преобразование 1, 361
Аффинное пространство 1, 360, 362
- -, вектор 1, 362
- -, Зарисского топология 2, 444
- -, Шаля соотношение 1, 362
Аффинное псевдорасстояние 1, 363
Аффинное расстояние 1, 363
Аффинной связности однородное пространство 3, 1176
- - пространство 1, 355
- - -, движение 2, 21
Аффинности критерий Серра 1; 359
Аффинные координаты 1, 358
Аффинный балис 1, 358
- изоморфизм 1, 362
Аффинный морфизм 1, 363
- объем 3, 1150
Аффинный параметр 1; 364
- поперечник 4, 493
Аффинный репер 1, 364
Аффинный тензор 1, 364
Аффиноидная алгебра 2, 417
Аффинор 1, 364
«Ахиллес и черепаха» 1, 293
Ациклический элемент 1, 364
Ациклическое топологическое пространство 2, 198
Ацикличный копримум 1, 364
Аэродинамики математические задачи 1, 364—370

Б

База 1; 371
-, вес 1; 371
- гомологии 1, 1040
- деформации 4, 118
- дизъюнктная 1, 371
- σ-дизъюнктная 1, 371
- дискретная 1, 371
- σ-дискретная 1, 371
- замкнутая 1, 371
- локальная 1; 371
- m-локальная 1; 371
- n-m-локальная 1; 371
- локально счетная 1; 371
- σ-локально конечная 1, 371
- открытая 1, 371
- равномерная 1, 371; 3, 657
- равномерности 4, 795
- расслоения 1, 637; 4, 893
- регулярная 1, 372; 3, 657
- решеточная 1, 372
- топологии 1, 371
- m-точечная 1, 371
- n-m-точечная 1, 371
- точечно конечная 1, 371
- точечно счетная 1, 371
- σ-точечно конечная 1, 371
- точки 1, 371
- фильтра 5, 615
π-база 1, 372; 3, 835
Базис 1, 372—378; 4, 101
- абелева дифференциала 1; 13
- абсолютно суммирующий 1, 377
- абсолютный 1, 377
- алгебраический 1, 374
- алгебры 1, 374; 2, 1022
- - кватернионов 1, 372
- асимптотический 1, 335
- аффинный 1, 358
- банахова пространства 1, 392
- бар-индукции 1, 393
- безусловный 1, 377, 392; 4, 101
- булевой алгебры 1, 373
- векторного пространства 1, 374, 643
- векторный 1, 633
- вершины многогранного множества 4, 1152
- вполне суммирующий 1, 377
-, Гамеля (Хамеля) 1, 375
-, Гильберта теорема 1, 971
- двойственный 2, 49
-, дискриминант 2, 210
- дифференциальной сепарабельности 4, 825
- дуальный 2, 49
- идеала 2, 482
- индукции 2, 558; 3, 564
- Картана 3, 273
- Картана — Вейля 2, 740
- Картана — Серра 5; 228
-, квазиэквивалентность 1, 377
-, компоненты 1, 374
-, координаты 1; 374
- корневой системы 3, 17
- многообразия 1, 186
- модуля 1; 374
- натурального ряда 1, 372
- натягивающий 1, 378
- обобщенный 1, 374
- ограниченно полный 1, 378
- ортогональный 4, 85, 99
- ортонормированный 1, 492, 634, 981; 4; 85, 99
- G-ортонормированный 4; 719
- J-ортонормированный 1, 986
- периодов 1; 374; 2, 50
- - абелевой функции 1, 22
- почти периодической функции 1; 375
- простой 3, 718
- Рисса 4, 1035, 1038
- свободный 1, 373
- сепарирующий 5, 426
- слабый суммирующий 1; 377
- - счетный 1, 376
- стохастический 5, 240
- суммирования 1, 392
- суммирующий 1, 377
- счетного типа 1, 376
- счетный 1, 376
- тождеств алгебраической системы 1, 186
- топологии 1, 371, 373
- топологический 1, 375
- трансцендентности 5, 425
- - дифференциальный 4, 825
- условный 1, 392
- фильтра 1, 373
- циклов в графе 1, 1110
- Шаудера 1, 377, 492
- Шевалле 3, 274
- Шура 2, 689
-, эквивалентность 1, 377
T-базис 1, 392
Базиса проблема 1, 376, 392
Базисная размерность 1; 373
- частота 2, 338
Базисное логическое исчисление 3, 412
Базисное множество 1, 378
- отображение 1, 374, 375
- пространство схемы 5, 299
Базисный инвариант 2, 542
Базисный коммутатор 1, 379
- минор системы линейных уравнений 3, 357
- ранг 3, 902
- - алгебраической системы 4, 858
Базовый оператор 1, 224
Баланс межотраслевой 3, 586
Баланса метод 4, 845
- условие 5, 420
Балансовых множителей метод 4, 251
Банаха индикатриса 1, 379, 606
- система 3, 183
- теорема о гомеоморфизме 4, 142
- - о гомоморфизме 5, 384
- - о линейных операторах 3, 372
- - об изоморфизме 3, 1134
- - об обратном операторе 1, 389
Банаха — Алаоглу теорема о полярах 4, 476
Банаха — Гротендика теорема о локально выпуклых пространствах 5, 383
Банаха — Зарецкого теорема о N-свойстве функции 3, 458
Банаха — Мазура оператор 1, 379
- - теорема о метрических пространствах 3, 671
Банаха — Мазура функционал 1, 379
Банаха — Стоуна теорема об изометрии банаховых пространств 1, 390
Банаха — Штейнхауза теорема о линейных операторах 1, 389; 3, 372
Банаха — Штейнхауза теорема о пространствах линейных отображений 1, 380
Банахов модуль 1, 381
- - проективный 1, 381
Банахова алгебра 1, 381
- - вполне симметричная 1, 383
- -, группа когомологий 2, 915
- - коммутативная 1, 381; 2, 984
- - Ли 3, 250
- - с инволюцией 1, 383
- - -, эрмитов элемент 1, 384
Банахова группа Ли 3, 250
- пара 2, 628
Банахова решетка 1, 384
- - ограниченных элементов 1, 385
Банахова симметричная алгебра 4, 1149
- структура 1, 384
Банахово аналитическое многообразие 1, 385
- - множество 1, 385
Банахово аналитическое пространство 1, 385
- многообразие 2, 357

Банахово пространство 1, 386; 3, 1047
- -, аналитическое отображение 1, 274
- -, базис 1, 392
- -, базис суммирования 1, 392
- -, Банаха теорема 1, 389
- -, Банаха — Стоуна теорема 1, 390
- -, Банаха — Штейнхауза теорема 1, 389
- - гладкое 1, 389
- -, Дворецкого — Роджерса теорема 1, 391
- - идеальное 2, 629
- -, качественная теория дифференциальных уравнений 2, 771
- - квазирефлексивное 1, 388
- - конечномерное 1, 391
- -, конус 1, 586; 2, 1075
- -, линейно топологические свойства 1, 390
- - локально равномерно выпуклое 1, 389
- -, проблема базиса 1, 392
- - промежуточное 2, 628
- - равномерно выпуклое 1, 389
- - - гладкое 1, 389
- - рефлексивное 1, 388
- - слабо полное 1, 389
- - строго нормированное 1, 389
- -, Эберлейна — Шмульяна теорема 1, 388

Банга — Мандельбройта условие 2, 799

Барбашина — Красовского теорема об асимптотической устойчивости 1, 65

Барбье теорема о кривых постоянной ширины 1, 392

Бар-индукция 1, 393

Барицентр 1, 393

Барицентрические координаты 1, 393; 2, 996; 4, 1152, 1160

Барицентрическое измельчение 4, 1160

Барицентрическое подразделение 1, 394; 4, 380, 1160

Баркан формула 3, 764

Бар-конструкция 5, 167

Барометрическая формула 1, 519

Барсотти — Тейта группа 2, 82

Бартлетта критерий 1, 394

Барьер 1, 394, 395, 1031
- задерживающий 5, 12
- поглощающий 5, 12
- фильтра 4, 533

Барьера критерий Лебега 4, 933

Барьерный метод вращений 1, 766

Басса теорема о кручении Рейдемейстера 4, 954

Башня полей 1, 395

Бегущей волны метод 1, 396

Беенке — Зоммера теорема для голоморфных функций 3, 990

Беенке — Штейна теорема об областях голоморфности 1, 396, 1031

Безгранично делимая случайная величина 1, 397
- - характеристическая функция 1, 397

Безгранично делимое распределение 1, 397—399
- - -, область частичного притяжения 5, 836

Безгранично делимых распределений разложение 1, 399

Безиковича почти периодические функции 1, 400
- расстояние 3, 1119

Безмоментная теория оболочек 3, 1128

Безотказность 3, 854

Безу кольцо 1, 400

Безу теорема для многочленов 1, 400
- - для систем уравнений 1, 401
- - о гиперповерхностях 4, 254
- - о неприводимых кривых 4, 309

Безусловная суммируемость 1, 401

Безусловная сходимость 1, 401
- - ряда 5, 549

Безусловный базис 1, 377, 392; 4, 101
- эксперимент 3, 860; 5, 342

Бейеса формула 1, 402

Бейесовская оценка 1, 402

Бейесовская решающая функция 1, 403

Бейесовский подход к статистическим задачам 1, 403

Бейесовский подход эмпирический 1, 404—406
- риск 1, 403

Бейесовское решающее правило 5, 192
- *решение оптимальное* 4, 508

Бейтмена метод 1, 406

Бейтмена функция 1, 406

Беллмана уравнение 1, 407, 585
- функция 4, 43

Беллмана — Харриса процесс 1, 407

Белый шум 1, 407

Бельтрами дифференциальный параметр 2, 350; 3, 205, 206

Бельтрами интерпретация 1, 408

Бельтрами координаты 1, 409

Бельтрами метод 1, 409
- теорема в римановой геометрии 2, 67
- - о линейчатых поверхностях 3, 380

Бельтрами уравнение 1, 409; 2, 810; 3, 205, 1101

Бельтрами — Клейна интерпретация 3, 403

Бельтрами — Эннепера теорема об асимптотических линиях 1, 332, 409

Бемольная коцепь 1, 410; 2, 133

Бемольная норма 1, 409

Бемольная форма 1, 410
- цепь 1, 409; 2, 133

Бендиксона критерий 1, 411

Бендиксона преобразование 1, 411

Бендиксона сфера 1, 412
- уравнение простое 5, 670
- формула 4, 1106

Бергмана кернфункция 1, 412
- метрика 1, 413; 3, 1172
- теорема о свободных алгебрах 4, 1081
- - о централизаторе 1, 342

Бергмана — Вейля интеграл 1, 414

Бергмана — Вейля представление 1, 413
- - формула 1, 413

Берег разреза 4, 848

Березиниан 5, 278

Беренса — Фишера проблема 1, 414

Бёркиля интеграл 1, 415

Бёркиля — Колмогорова интеграл 1, 416

Бернайса лемма в исчислении предикатов 1, 910
- - в комбинаторике 2, 978

Бернара тензор 5, 250

Бёрнсайда проблема о конечных группах 1, 416
- - о периодических группах 1, 416
- теорема о конечных группах 3, 1064
- - об алгебре матриц 3, 612

Бернсайдово многообразие 1, 1137

Бёрнсайдовского типа проблемы для нильалгебр 3, 901

Бернулли автоморфизм 1, 418

Бернулли блуждание 1, 418—421

Бернулли интеграл 1, 421

Бернулли испытания 1, 421

Бернулли лемниската 1, 422

Бернулли метод 1, 423

Бернулли многочлены 1, 423

Бернулли распределение 1, 424, 489

Бернулли схема 1, 424

Бернулли теорема в теории вероятностей 1, 424
- топологический автоморфизм 4, 1136

Бернулли уравнение 1, 425

Бернулли числа 1, 425

Бернуллиевская система 4, 1195

Бернштейна интерполяционный процесс 1, 426
- квазианалитический класс функций 2, 799

Бернштейна метод 1, 427—429

Бернштейна многочлены 1, 429
- множество 3, 919

Бернштейна неравенство в теории вероятностей 1, 429
- - в теории приближений 1, 430
- проблема о минимальных поверхностях 4, 306

Бернштейна теорема о минимальных поверхностях 1, 430
- - об эквивалентности множеств 2, 715
- формула для алефов 1, 235

Бернштейна — Рогозинского метод суммирования 1, 431

Бертини инволюция 3, 95

Бертини теоремы об алгебраических многообразиях 1, 431

Бертрана задача 1, 301, 432

Бертрана кривые 1, 432
- пара 1, 432

Бертрана парадокс 1, 432

Бертрана постулат 1, 433; 4, 877; 5, 846

Бертрана признак сходимости числовых рядов 1, 433

Бескванторное логико-математическое исчисление 3, 412

Бескоалиционная игра 1, 433; 2, 471
- -, квазиинформационное расширение 2, 807
- неатомическая игра 3, 903

Бесконечная выпуклая поверхность 1, 788
- группа подстановок 4, 382
- -, представление 4, 585

Бесконечная десятичная дробь 1, 434; 2, 98

Бесконечная игра 1, 434

Бесконечная индукция 1, 434
- -, конструктивное правило 1, 435
- область 3, 1098
- сумма 4, 1063

Бесконечно большая переменная величина 1, 456
- - числовая последовательность 4, 557

Бесконечно большая функция 1, 435
- малая переменная величина 1, 456

Бесконечно малая, порядок 4, 504
- - числовая последовательность 4, 557

Бесконечно малая функция 1, 435; 4, 498, 559

Бесконечно малое изгибание 1, 435—437
- - - жесткое 1, 436
- - - тривиальное 1, 436

Бесконечно малых исчисление 1, 437—442

Бесконечно удаленная гиперплоскость 1, 443
- - особая точка 1, 253; 4, 749
- - плоскость 1, 443
- - прямая 1, 443
- - точка 1, 443, 456; 2, 484

Бесконечно удаленные элементы 1, 442—444, 456

Бесконечного порядка дифференциальный оператор 2, 346
- - системы дифференциальных уравнений 2, 336
- - точка ветвления 1, 680

Бесконечного порядка уравнение 1, 444
- представленческого типа алгебра 4, 585
- типа множество 1, 945
- - целая функция 5, 798

Бесконечное произведение 1, 444—446
- - абсолютно сходящееся 1, 445
- - Вейерштрасса 1, 869
- -, Вейерштрасса теорема 1, 616
- -, значение 1, 445
- - равномерно сходящееся 1, 445
- - сходящееся 1, 444
- расширение 4, 909

Бесконечной высоты элемент абелевой группы 1, 18

Бесконечной индукции правило 1, 921; 2, 728

Бесконечномерная сфера 5, 289

Бесконечномерное векторное пространство 1, 643
- канторово многообразие 2, 717
- многообразие 3, 743

Бесконечномерное представление 1, 446—452
- -, спектральный анализ 1, 451

Бесконечномерное пространство 1, 452—455; 5, 706

Бесконечномерный анализ 5, 385

Бесконечномерный бикомпакт 1, 454
- комплекс 2, 995
- шар 5, 882

Бесконечноместная операция 1, 149

Бесконечносвязная область 1, 455; 3, 748, 1098

Бесконечности аксиома 1, 106, 455; 3, 415; 5, 352

Бесконечность 1, 455—458
- актуальная 1, 43, 44
- потенциальная 1, 44, 45

Бесконечный автомат 1, 48
- геометрический комплекс 1, 933
- латинский квадрат 3, 208
- многоугольник 3, 749

Бесконтекстная грамматика 1, 1087

Бесконтекстные правила 1, 1087

Бесконтекстный язык 1, 1087
- - детерминированный 1, 1088
- - неоднозначный 1, 1088
- - однозначный 1, 1088

Бесповторная формула 3, 716

Беспорядок 2, 545

Бесселев потенциал 1, 458

Бесселева система 1, 458
- функция 1, 460; 5, 820
- мнимого аргумента 1, 461; 3, 476

Бесселево ядро 1, 458

Бесселя интегральное представление 5, 822

Бесселя интерполяционная формула 1, 459

Бесселя неравенство 1, 459; 4, 101
- общее уравнение 1, 462
- сферическая функция 5, 822
- тождество 1, 459

Бесселя уравнение 1, 460—462
- -, индекс 1, 460
- - неоднородное 1, 461
- -, приведенная форма 1, 460

Бесселя функции 1, 462

Бесследный тензор 4, 597

Бета теорема в теории моделей 3, 767

Бета-распределение 1, 463
- -, плотность 1, 866

Бета-функция 1, 464
- неполная 1, 489; 3, 979

Бетти группа 1, 464

Бетти число 1, 99, 464, 627, 1044; 3, 439
- -, Александера теорема 1, 231

Биаксиальное пространство 1, 492

Биалгебра 5, 790

Бианки конгруэнция 1, 465
- первое тождество 3, 132

Бианки поверхность 1, 465

Бианки преобразование 1, 465

Бианки тождество 1, 357, 465; 3, 99, 103; 4, 997, 1007

Бибербаха гипотеза для однолистных функций 1, 466
- - локальная 1, 466

Бибербаха многочлены 1, 467
- неравенство 2, 513
- свойство для групп Ли 2, 201

Бибербаха — Эйленберга функции 1, 467

Библиотека подпрограмм 5, 167

Бивектор 1, 468
-, координаты 1, 469
- свободный 1, 469

Бивекторное пространство 1, 469

Бигармоническая функция 1, 470

Бигармоническое уравнение 1, 470

Биголоморфное отображение 1, 268, 471
Биективное отображение 1, 471; 3, 760; 5, 714
Биективный морфизм 1, 485
Биекция 1, 471; 3, 760
Биение 1, 578; 4, 1085
Биений режим 1, 786
Бинвариантная метрика 5, 625
Бикасательная 4, 333
Бикатегория 1, 471
Биквадратичный вычет 1, 814; 5, 153, 217
- невычет 5, 217
Биквадратное уравнение 1, 471
Бикомпакт 1, 472, 473; 5, 392
- бесконечномерный 1, 454
- диадический 1, 475; 2, 126
- совершенно нормальный 1, 475
- стоуновский 1, 552
- упорядоченный 1, 475
- экстремально несвязный 4, 143
Бикомпактификация 1, 472, 477
Бикомпактная группа, представление 4, 585
Бикомпактно открытая топология 1, 472
Бикомпактное отображение 1, 472; 4, 155
- - открытое 4, 142
- произведение, Тихонова теорема 5, 355
Бикомпактное пространство 1, 473—477; 4, 393
- - локальное 3, 426
- -, Тихонова теорема 1, 473
Бикомпактное расширение 1, 477—481; 4, 909
- - Александрова 1, 233
- - александровское 5, 393
- - максимальное 1, 477
- - одноточечное 5, 393
- - Стоуна — Чеха 5, 234
- - Уолмена 5, 520
- - уолменовского типа 1, 479
- - Фрейденталя 5, 662
- -, эквивалентность 1, 477
Бикомпактности условие 5, 392
Бикомпактность 1, 473, 481
Бикомплекс 1, 481
Бикруг 1, 500
Билинейная интегральная форма 1, 482
- метрика, пространство 4, 717
Билинейная форма 1, 482
- -, автоморфизм 1, 482
- - анизотропная 1, 713
- - антисимметрическая 1, 482; 3, 41
- - знакопеременная 1, 482
- - изометричная 1, 482
- -, изометрия 1, 482
- -, индекс инерции 2, 563
- - кососимметрическая 1, 482; 3, 41
- - неособая 1, 483
- - определенная 1, 713
- - особая 1, 483
- - отрицательно определенная 2, 563
- -, ранг 1, 483; 4, 859
- -, сигнатура 2, 563
- - симметрическая 1, 482
- - ядерная 5, 1029
- -, ядро 1, 483
- функция 1, 484
Билинейное отображение 1, 484
- - вырожденное 1, 484
- -, матрица 1, 484
- - невырожденное 1, 484
- -, прямая сумма 1, 484
- соотношение Римана 1, 13; 4, 995
Билинейный дифференциал 1, 485
- ряд ядра 2, 596
Билинейный функционал 1, 485
Биматричная игра 1, 485; 2, 471
Бимероморфное отображение 3, 651
Бимодальное распределение 1, 485; 3, 763
Бимодуль 1, 485
Биморфизм 1, 485
Бинарная p-адическая группа 1, 486
Бинарная квадратичная форма 1, 486
- - -, дискриминант 1, 486
- - -, Зигеля теорема 1, 487
- - -, определитель 1, 486
- операция 1, 149; 4, 18
- проблема в теории чисел 1, 93
Бинарная форма 1, 487; 5, 634
- -, степень 1, 487
Бинарно лиева алгебра 1, 488
Бинарное отношение 1, 488; 4, 151
- - антисимметричное 1, 488
- -, вычислимый инвариант 1, 821
- - обратное 1, 488
- - рефлексивное 1, 488
- - симметричное 1, 488
- - транзитивное 1, 488
- - функциональное 1, 489
- поле 3, 1044
Бинга критерий для метризуемых пространств 3, 657
Бине формула 5, 613
Бине — Коши формула для определителей 4, 31
Бином 1, 489
- дифференциальный 2, 343
- Ньютона 2, 974; 3, 1089
Биномиальное распределение 1, 489
Биномиальные коэффициенты 1, 490; 2, 974
Биномиальный ряд 1, 491
Бинормаль 1, 491; 2, 250
Биортогональная система 1, 392, 491, 644
Бипланарная геометрия 1, 492
Бипланарное пространство 1, 492
Биполяра 4, 476
Биполярные координаты 1, 492
Бипростая полугруппа 4, 702
Биразмерность алгебры 1, 1054
Бирациональная геометрия 1, 493
Бирационально изоморфные схемы 1, 494
- эквивалентные кривые 4, 309
- - схемы 1, 494
Бирациональное отображение 1, 494; 4, 309, 920
Бирациональное преобразование 1, 494
- соответствие, Зарисского теорема 2, 444
Бирациональный автоморфизм 1, 494
- изоморфизм 1, 494
- инвариант 1, 493
Бирациональный морфизм 1, 494
Бирегулярное кольцо 4, 940
Биркгофа теорема для систем обыкновенных дифференциальных уравнений 3, 499
- - о рекуррентных точках 4, 954
- - о Ω-системах 1, 159, 185
Биркгофа эргодическая теорема 1, 495
Биркгофа — Витта теорема об алгебрах Ли 1, 495
Биркгофа — Тарского принцип 3, 978
Биркгофа — Фринка теорема о решетках 4, 982
Биркгофа — Хинчина эргодическая теорема 5, 210
Бисвязное пространство 1, 496
Бисдвиг полугрупп 4, 1100
Биссектор 1, 496
Биссекторная плоскость 1, 496
Биссектриса 1, 496
Бисферические координаты 1, 492
Бит 1, 496
Битензор 1, 469
Биупорядоченное множество 4, 935
Бифакторное отображение 1, 496
Бифунктор 1, 496; 5, 685
Бифуркационное значение 1, 497
- множество 5, 361
Бифуркация 1, 496—498
Бихарактеристика 1, 498
Бихроматический граф 1, 1108
Бицадзе задача 5, 39
- общая смешанная задача 5, 46
- принцип экстремума 5, 46
Бицадзе уравнение 1, 499
Бициклическая полугруппа 1, 499
Бицилиндр 1, 500
Бицилиндрика 1, 500
Бицилиндрическая область 1, 500
Бицилиндрические координаты 1, 500
Бишопа теорема о продолжении 4, 662
Биэдр 4, 74
Бланчфилда форма 5, 489
Близкая к выпуклой функция 1, 795
Близкие множества 1, 500
Близкое к разрывному периодическое решение 4, 967
Близнецов парадокс 4, 150
- проблема 1, 500
Близнецы 1, 500
-, Бруна теорема 1, 549
Близости пространство 1, 500—504
- -, метризуемость 1, 501
- -, исправление 1, 503
- - правильное 1, 503
- -, равномерное покрытие 1, 502
- - Стоуна — Чеха 1, 501
Близостная структура 1, 500
Близостное произведение 1, 503
Близость 1, 500, 504
- Лодато 1, 501
- нормальная 1, 501
- Федорчука 1, 501
- хаусдорфова 1, 501
Блихфельдта теорема о решетках 1, 948
Блок 1, 504; 5, 412
- выборочный 1, 776
Блоковый код 2, 931
Блок-схема 1, 504
-, матрица инцидентности 1, 505
- с делимостью на группы 1, 506
- симметричная 1, 506
-, схема связанности 1, 505
- типа латинского квадрата 1, 506
- треугольная 1, 506
- уравновешенная неполная 1, 505
- циклическая 1, 506
- частично уравновешенная 1, 505
Блотто игры 1, 506
Блоха константа 1, 506
- теорема о голоморфных функциях 1, 506
Блуждание Бернулли 1, 418
- симметричное 5, 12
- случайное 5, 12
Блуждающая точка 1, 507
Блуждающее множество 1, 507
Блуждающей трубки метод 1, 507
Блэкуэлла теорема в теории статистического оценивания 5, 196
Бляшке множитель 1, 508
- принцип компактности 1, 509
Бляшке произведение 1, 508
Бляшке сумма 4, 1213
Бляшке теорема выбора 1, 509
- - о голоморфной функции 1, 509
- функция 1, 508
Бляшке — Вейля формула 1, 509
Боголюбова неравенство в статистической механике 1, 509
- - для корреляционной функции 1, 510
- - для функции Грина 1, 510
- - для функционала свободной энергии 1, 509
Боголюбова теорема об особенностях типа $1/q^2$ 1, 511
Боголюбова теорема «острие клина» 1, 511
Боголюбова цепочка уравнений 1, 512
Боголюбова — Параскюка теорема о перенормировке 4, 244
Бозе система 1, 514
- статистика 1, 514
Бозе — Эйнштейна статистика 1, 514
Бозон 5, 632
Бозонное пространство Фока 5, 631
Боковая грань призмы 4, 633
- поверхность конуса 2, 1074
- - цилиндра 5, 818
- сторона трапеции 5, 428
Бокса интеграл 1, 515
Бокштейна гомоморфизм 2, 923
Больца задача 1, 516
Больцано — Вейерштрасса принцип выбора 1, 516
- - теорема 2, 991
Больцано — Вейерштрасса теорема в теории пределов 1, 517
- - условие 4, 1104
Больцмана линеаризированное уравнение 1, 517
Больцмана распределение 1, 518
Больцмана статистика 1, 520
Больцмана H-теорема 1, 521
Больцмана уравнение 1, 521
Большая индуктивная размерность 2, 556; 4, 821
- ось эллипса 5, 978
- посылка 3, 790
Большая система 1, 522; 4, 1214
- статистическая сумма 5, 179
- теорема Пикара об аналитических функциях 4, 285
- - Ферма 5, 605
Больших отклонений вероятности 1, 522
Больших чисел закон 1, 522—526; 4, 572
Больших чисел усиленный закон 1, 527—529
- - - - Бореля 1, 539
Большого размаха функция 3, 1058
- решета метод 1, 260
Большое каноническое распределение Гиббса 1, 957
Большое решето 1, 530
Большой канонический ансамбль 5, 200
- - - Гиббса 5, 179
- круг 4, 667; 5, 290
- подмодуль 4, 372
- статистический ансамбль Гиббса 1, 958
Боля почти периодические функции 1, 530
- теорема об устойчивости 5, 575
Бомбьери — Кодаиры теорема об алгебраических поверхностях 4, 113
Бонне поверхность 5, 923
Бонне сеть 1, 531
Бонне теорема в теории поверхностей 1, 531; 2, 253, 785; 3, 380
- - о среднем значении 1, 531
- формула среднего значения 4, 993
Боннезена неравенство 1, 531
Бора компакт 1, 531
- неравенство 5, 585
Бора почти периодические функции 1, 532
- пространство 1, 387
Бора — Фавара неравенство 1, 532
Бордантность 1, 532
(β, φ)-бордантность 2, 889
Бордизм 1, 532—535
- неориентированный 1, 533
- ориентированный 1, 533
-, разложение на ручки 4, 1059
- сингулярный 4, 304
- слоений 1, 534
- узлов 5, 482
- унитарный 1, 534
h-бордизм 1, 534
Борелевская алгебра 1, 536
- σ-алгебра 1, 130
- иерархия 2, 490
- подалгебра 1, 538; 3, 279
- подгруппа 1, 538; 3, 280
Борелевская система множеств 1, 535
- структура Макки 3, 477
Борелевская функция 1, 535
Борелевский изоморфизм 1, 535

Борелевских множеств критерий 1, 535
Борелевское множество 1, 130, 536; 2, 93
- - двустороннее 2, 58
- -, Лузина критерий 1, 535
- -, Суслина критерий 1, 535
Борелевское поле множеств 1, 536
Борелевское поле событий 1, 535
- тело множеств 1, 536
Бореля исключительное значение 2, 674
Бореля лемма о покрытии 1, 540
Бореля мера 1, 536
- - τ-гладкая 1, 537
- - на прямой 1, 537
- - плотная 1, 537
Бореля метод суммирования 1, 537
- подалгебра 1, 538; 4, 192
Бореля подгруппа 1, 538
- представление обобщенное 5, 160
Бореля преобразование 1, 538
- теорема о группах Вейля 5, 761
Бореля теорема о неподвижной точке 1, 539
- - о распределении дробных долей 3, 663
- - плотности 2, 201
- - трансгрессии 5, 416
Бореля усиленный закон больших чисел 1, 539
Бореля — Кантелли лемма для случайных событий 1, 539
Бореля — Лебега теорема о покрытии 1, 540
- - условие 5, 392
Бореля — Морозова теорема для алгебраических групп 1, 539
Бореля — Помпею формула 3, 55
Борнологическое пространство 5, 494
- - локально выпуклое 5, 381
Борсука пара 3, 14
Борсука проблема в комбинаторной геометрии 1, 540
- теорема об антиподах 1, 297
Ботта теорема о спектрах пространств 5, 103
- - периодичности в *K*-теории 1, 541
- - - в теории Морса 3, 829
Боуза — Чоудхури — Хоквингема код 2, 932
Бохнера интеграл 1, 541
Бохнера почти периодические функции 1, 542
- преобразование 2, 589
- теорема о положительно определенной функции 4, 432
- - - - обобщенная 1, 882
- - о характеристических функциях 5, 757
Бохнера — Мартинелли интеграл 1, 543
Бохнера — Мартинелли представление 1, 542
Бохнера — Хинчина теорема о положительно определенных функциях 5, 739
Бочечное пространство 1, 544
Бочка 1, 544; 2, 661
Браве подгруппа 3, 108
- решетка 3, 110
- типы 3, 106
Брандта группоид 1, 544
Брандта полугруппа 1, 544
Брауна теорема об изотопии 2, 520
Брауна — Маккоя радикал 4, 807
Брауна — Робинсона метод для матричных игр 3, 619
Брауэра аксиома в теории размерности 4, 824
- алгебра 1, 546; 4, 726
Брауэра группа 1, 544—546; 2, 911
- -, Тзена теорема 1, 545
- принцип непрерывности 2, 642
- пространство 4, 533
Брауэра решетка 1, 546
- свойство сходимости 4, 532
- степень 5, 222
- структура 1, 546
- теорема об инвариантности области 1, 546
- - о вееpе 1, 613
Брауэра теорема о неподвижной точке 1, 546, 1049; 4, 976
- характер 2, 1021
Брауэра — Гротендика группа 1, 546
Брауэра — Зигеля теорема о квадратичных полях 2, 783
Брауэра — Лебега теорема о размерности 4, 826
Брауэра — Севери многообразие 1, 546
- - схема 1, 547
Брауэра — Трэлла проблема о представлениях 4, 585
Брауэра — Урысона теорема о непрерывном продолжении 4, 661
Брауэра — Хопфа теорема о гомотопических группах 5, 283
Брауэровское понимание принципа выводимости 1, 779
Брахистохрона 1, 548
Бреймана эргодическая теорема 5, 1007
Брело пространство 4, 533
- свойство сходимости 4, 532
- теорема о разрешимых функциях 4, 275
Бриансона теорема о шестисторонниках 1, 548
- точка 1, 548
- шестисторонник 1, 548
Бриансона — Паскаля конфигурация 2, 1078
Брио — Буке уравнение 1, 548
Брискорна группа 3, 36
Броуновского движения процесс 1, 548; 4, 77
Бруна решето 1, 549
Бруна теорема о близнецах 1, 549
Брунна — Минковского теорема о выпуклых множествах 1, 549
- - - - параллельных линиях 4, 209
Брунново зацепление 5, 484
Брушлинского — Эйленберга теорема о компактах 2, 985
Брюа разложение 1, 549
Бубнова — Галеркина метод 1, 550, 842
Буква 1, 550; 2, 1043
- предикатная 4, 577
Буллеан 1, 373
Булева алгебра 1, 550—553
- -, базис 1, 373
- -, вес 1, 552
- - нормированная 1, 552; 5, 20
- - однородная 1, 552
- - полная 1, 552
- - свободная 1, 552; 4, 1081
- -, Стоуна теорема 1, 552
- матрица 1, 554
операция 1, 551
решетка 1, 550
Булева функция 1, 553
- -, граф 1, 557
- -, дизъюнктивная нормальная форма 1, 563
- -, конъюнктивная нормальная форма 1, 563
- -, кратчайшая форма 1, 559
- -, минимальная форма 1, 559
- - монотонная 1, 557; 3, 812
- -, протяженность 1, 556
- -, разброс 1, 565
- -, размерность 1, 556
- -, расшифровка 1, 558
- -, сложность нормальной формы 1, 559
- - случайная 1, 1111
- -, способ задания 1, 553
- -, цепь 1, 556
- -, цикл 1, 557
Булево кольцо 1, 554
- программирование 2, 678
Булево уравнение 1, 553, 554
Булевозначная модель 1, 554—556
Булево-универсальная формула 1, 185
Булевых функций метрическая теория 1, 556—558
Булевых функций минимизация 1, 558—563
Булевых функций нормальные формы 1, 563—565
Бумага вероятностная 1, 665
Буняковского неравенство 1, 565
Бура теорема о винтовой поверхности 1, 706
Бурали — Форти парадокс 1, 295
Бурау представление 3, 34
Бурже функция 1, 565
Буркхольдера неравенства для мартингалов 3, 533
Бута лемниската 1, 566
Бутылка Клейна 2, 873
Бушевание 1, 566
Бушевания многообразие 1, 566
Бушующая система 1, 566
Былова теорема о центральных показателях 5, 810
Быстрого дискретного преобразования Фурье метод 3, 697
Быстродействие игры преследования 4, 602
Быстродействия задача 4, 43
Быстродействующих регуляторов синтез 1, 65
Быстрое время 3, 501
- движение 3, 500
Бьенеме — Чебышева неравенство 5, 842
Бьерлинга задача о минимальных поверхностях 1, 567
Бэра классификация 1, 567
Бэра классы 1, 567; 2, 93
- -, Лебега теорема 1, 535
- критерий для модулей 2, 664
- мера 1, 537
- - плотная 1, 537
Бэра множество 1, 568
- нижний радикал 4, 807
- произведение 1, 569
Бэра пространство 1, 568
- свойство метризуемых пространств 3, 657
Бэра свойство множества 1, 568
Бэра теорема о полных пространствах 1, 568
- - о полунепрерывных функциях 1, 568
- - о разрывных функциях 1, 568
Бэра умножение 1, 569
- функция 1, 567
Бэра — Леви полугруппа 4, 703
Бэровская мора 3, 643
- полугруппа 4, 982
- функция 1, 535, 567
Бэровское кольцо 4, 940
- *-кольцо 4, 986
Бэрри — Эссеена неравенство 1; 569; 5, 820
Бюдана — Фурье теорема об алгебраических уравнениях 1, 570
Бюджетное множество 3, 587
Бюргерса вектор 3, 131
Бюрмана теорема о голоморфных функциях 1, 570
Бюрмана — Лагранжа ряд 1, 570
Бюффона задача об игле 1, 571

В

Вагнера — Престона теорема о полугруппах 2, 546
Вакуум 2, 831
Вакуумный вектор 5, 632
Валентность ковариантная 5, 326
- контравариантная 5, 326
- общая 5, 326
Валирона дефект 2, 100; 4, 888
- исключительное значение 2, 675
Валле Пуссена метод суммирования 1, 573
Валле Пуссена многоточечная задача 1, 573
Валле Пуссена признак 1, 574
Валле Пуссена производная 1, 574
Валле Пуссена сингулярный интеграл 1, 575
Валле Пуссена сумма 1; 575
- - теорема о наилучшем приближении функции 3, 871
Валле Пуссена теорема о простых числах 1, 576
- - - об альтернансе 1, 576
- - формула 2, 180
- - - для задачи Дирихле 1, 782
- - ядро 1, 573, 575
Валлиса формула 1, 576
Вальда редукция 3, 874
Вальда тождество 1, 576
Валюативный критерий полноты 4, 423
дю Валя особенность 4, 119
Ван дер Вардена гипотеза о перманентах 4, 273
Ван дер Вардена критерий 1, 577
- спинор 2, 176
Ван дер Поля уравнение 1, 577
Вана теорема максимальности 2, 201
Вандермонда определитель 1, 578
- узел 5, 422
Вандивера признак для регулярных простых чисел 2, 668
Варда теорема о дифференцировании 1, 578
Вариации коэффициент 1, 579
- параметра метод 4, 211
- *постоянных* метод 2, 440
Вариации среднего значения теорема в статистической механике 1, 579
Вариаций граничных метод 1, 1103
- метод 1, 581
Вариационная задача 1, 579
- - Гаусса 1, 895
- - Дирихле 2, 177
- - многомерная 3, 728
- - разрывная 4, 853
- - с частными производными 3, 728
- разностная схема 4, 831
- формула Адамара 1, 85
- - для однолистных функций 1, 737
Вариационное исчисление 1, 580—586
Вариационное исчисление в целом 1, 592—594
- -, Вейерштрасса основная теорема 1, 620
- -, Вейерштрасса условия экстремума 1, 616
- -, - формула 1, 620
- -, Гамильтона — Якоби теория 1, 857
- -, действие 1, 966
- -, Дюбуа — Реймона лемма 2, 394
- -, качественные методы 1, 585
- -, Клебша условие 2, 872
- -, Лагранжа задача 1, 582
- -, метод вариаций 1, 581
- -, многомерные задачи 1, 593
- -, одномерные задачи 1, 594
- -, Пале—Смейла условие 1, 593
- -, простейшая задача 1, 580
- -, прямые методы 1, 581
- -, связь с теоремой конусов 1, 586
- -, ε-функция 1, 620
- -, Якоби теорема 1, 858
Вариационное исчисление; численные методы 1, 586—592
Вариационно-параметрический метод 1, 594
Вариационно-разностный метод 4, 831
Вариационные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными 2, 302
Вариационные принципы в теории функций комплексного переменного 1, 595
Вариационные принципы классической механики 1, 596—603
- - механики, Журдена принцип 2, 426

Вариационный принцип Д'Аламбера — Лагранжа 2, 11
- - Владимирова 1, 719
- - Гамильтона — Остроградского 1, 856
- - Гаусса 1, 900
- - Герца 1, 954
Вариационный ряд 1, 603; 4, 499
Вариация 1, 603
- Адамара 4, 218
- аргумента 1, 604
- Арцела 1, 330
- Витали 1, 708
- вторая 1, 769
- Гато 1, 894, 895
- заряда 5, 312
- игольчатая 1, 604; 4, 488
- конечная 1, 606
- ломаная 1, 604
Вариация множества 1, 604
- ограниченная 1, 606
Вариация однолистной функции 1, 605
Вариация отображения 1, 606
- первая 1, 608; 4, 234
- по направлениям 1, 604
- полная 4, 415
- произвольных постоянных 4, 693
- Пьерпонта 4, 777
- со скользящим режимом 1, 604
- Тонелли плоская 5, 363
- Фреше 5, 664
Вариация функции 1, 606—608; 4, 161
- Харди 5, 768
- - полная 1, 35
- - положительная 4, 430
Вариация функционала 1, 608
Ф-вариация 1, 607
Варинга проблема в теории чисел 1, 609
- теорема о сравнениях 1, 191
Вариньона теорема в механике 1, 610
Варма преобразование 3, 633
Варшамова — Гилберта оценка 2, 932
Ватсона метод 2, 233
Ватсона преобразование 1, 610
Введения отрицания правило 4, 631
- дизъюнкции правило 1, 781
Введения параметра метод 1, 610; 3, 175
- правило 1, 919
Вебба функция 3, 717
Вебера преобразование 2, 589
Вебера уравнение 1, 611
Вебера функция 1, 612; 4, 200
Вебера — Эрмита функции 1, 612; 4, 200
Веддерберна теорема об алгебрах 2, 1022
- - об ассоциативных алгебрах 1, 341
- - о телах 1, 341
Веддерберна — Артина теорема об артиновых кольцах 1, 612; 3, 612
Веддерберна — Мальцева теорема об ассоциативных алгебрах 1, 612
Ведущее собственное значение 4, 434
Ведущий модуль 2, 192
- - группы классов 1, 167
- - квазихарактера 2, 827
Веер 1, 613
- Кнастера — Куратовского 1, 760; 3, 151
Веерное произведение 1, 613
Вейбулла вероятностная бумага 1, 614
Вейбулла распределение 1, 614
Вейерштрасса аксиома непрерывности 3, 990
- бесконечное произведение 1, 869
- вторая теорема о непрерывности функций 3, 984
- знак 1, 622
- *каноническое произведение* 2, 713
Вейерштрасса кольцо 1, 614
Вейерштрасса координаты 1, 615
Вейерштрасса критерий минимальной поверхности 1, 615
- недифференцируемая функция 3, 909
- необходимое условие экстремума 4, 52
- нормальная форма эллиптического интеграла 5, 989
- первая теорема о непрерывности функций 3, 984
- первичный множитель 1, 616; 2, 714
- *подготовительная теорема* для формальных степенных рядов 5, 643
преобразование 1, 899; 2, 589
- примарный множитель 1, 616; 2, 714
Вейерштрасса признак равномерной сходимости 1, 615
Вейерштрасса теорема о бесконечном произведении 1, 616
- - о мероморфных функциях 3, 648
- - о непрерывных функционалах 3, 994
- - о функциях 2, 991
- - о приближении 1, 616; 4, 615
- - о рядах аналитических функций 1, 617
- - *о сходимости на границе области* 1, 617
- - о целых функциях 1, 265
- - об особых точках 5, 95
- - об эллиптических функциях 5, 987
- - подготовительная 1, 617; 5, 643
Вейерштрасса точка на алгебраической кривой 1, 619
Вейерштрасса условия экстремума 1, 619
- форма уравнения Ламе 3, 189
Вейерштрасса формула для приращения функционала 1, 620
- формулы для минимальных поверхностей 3, 685
Вейерштрасса $\mathcal{E}$-функция 1, 620
Вейерштрасса $\wp$-функция 1, 621, 622
Вейерштрасса ζ-функция 1, 621, 623
Вейерштрасса σ-функция 1, 621, 623
Вейерштрассов эллиптические функции 1, 621—624
Вейерштрасса — Сохоцкого — Казорати теорема об особых точках 5, 95
Вейерштрасса — Стоуна теорема в теории приближений 1, 624
Вейерштрасса — Эрдмана угловые условия 1, 624; 4, 853
Вейерштрассов элемент 4, 114, 116, 413
Вейерштрассова область существования 4, 413
Вейлевский спектр 5, 99
Вейля алгебраических классов гомологий кольцо 1, 181
- аффинная группа 3, 17
- гипотеза 2, 120
- - о числах Тамагавы 5, 320
Вейля группа 1, 625; 3, 16; 5, 354
- - алгебраической группы 1, 625
- - алгебры Ли 1, 625
- - компактной связной группы Ли 1, 626
- - конечномерной редуктивной алгебры Ли 1, 625
- - относительная 1, 626
- - симметрий корневой системы 1, 625
- дивизор 2, 130
- интеграл 2, 384; 5, 930
- камера 1, 626
Вейля когомологии 1, 626
Вейля критерий в теории чисел 1, 627
- - для многомерных распределений дробных долей 4, 876
Вейля метод в теории чисел 1, 627—629
- множитель 4, 103
Вейля область 1, 271, 629
- относительная группа 4, 144
Вейля почти периодические функции 1, 629
- предельная точка 5, 916
- предельный круг 5, 916
Вейля проблема в геометрии 1, 629
- промежуточный якобиан 4, 697
- разложение 1, 414
- расстояние 3, 1119
Вейля связность 1, 630
- *символ* 4, 1134
Вейля сумма 1, 630; 5, 436
- -, Виноградова оценка 1, 704
- тензор 3, 100
- теорема о компактных группах Ли 3, 264
- уравнение 2, 176
- *формула* 1, 414; 5, 767
- - для характера представления 4, 597
Вейля — Шатле группа 1, 631
Вейнгартена деривационные формулы 1, 631
Вейнгартена поверхность 1, 631
Вековое уравнение 1, 632; 5, 764, 766
Вековые возмущения 2, 870
- члены 4, 952
Вектор 1, 632, 642
- аксиальный 1, 102; 4, 106
- аналитический 1, 275, 447
- аффинного пространства 1, 362
-, базис 1, 633
- Бюргерса 3, 131
- в псевдоевклидовом пространстве 4, 739
- вакуумный 5, 632
-, векторное произведение 1, 635
- винта 1, 706
- - Витта 1, 710
- волновой 1, 750
- времениподобный 3, 702; 4, 149
- геодезической нормали 4, 438
- Дарбу 2, 15
-, двойное векторное произведение 1, 635
- дифференцируемый 1, 447; 2, 359
-, длина 1, 632
- допустимый 1, 207
- единичный 1, 632; 4, 79
- изотропный 2, 522; 4, 739
- информационный 1, 207
- Киллинга 2, 856
- ковариантный 2, 899, 900
-, коллинеарность 1, 632; 2, 951
-, компланарность 1, 632; 2, 994
-, компоненты 1, 633; 2, 1013
- контравариантный 2, 899, 1070
-, координаты 1, 633
- корневой 3, 20
-, косое произведение 3, 41
- Лапласа 3, 192
-, левая тройка 1, 634
-, линейная зависимость 1, 633
-, линейная комбинация 1, 643
-, *линейная независимость* 1, 633
-, линейные операции 1, 632
-, модуль 1, 632
-, направляющие косинусы 1, 634
- направляющий смешанный 5, 51
- невязки 4, 420
- нулевой 1, 632
-, ортогональная система 4, 85
-, ортогональность 1, 980
-, ортонормированная система 4, 85, 105
- осевой 4, 106
- ошибок 5, 408
- порядковых статистик 4, 499
-, правая тройка 1, 634
-, проекция на оси 1, 634
-, произведение на число 1, 633
- пространственноподобный 4, 149
-, псевдоскалярное произведение 1, 635
-, равенство 1, 632
-, разность 1, 633
- рангов 4, 862
- светоподобный 4, 149
- свободный 1, 632; 4, 1087
- связанный 1, 632; 4, 1089
-, скалярное произведение 1, 634
- скользящий 1, 632; 4, 1204
- случайный 5, 10
-, смешанное произведение 1, 635; 5, 48
- старший 4, 590, 596
-, сумма 1, 632
- фазовой скорости 2, 144; 5, 588
- K-финитный 1, 448
- циклический 4, 590
- частичный 2, 831
- Шепли 5, 892
p-вектор 4, 402
r-вектор 1, 732; 3, 43
s-вектор разложимый 1, 732
Векторная алгебра 1, 632—636
Векторная группа 1, 636
- дифференциальная форма 2, 264
- интерпретация комплексных чисел 2, 1009
- линия 1, 636
Векторная решетка 1, 636; 2, 14; 4, 1037
- - дистрибутивная 4, 471
- плотность 5, 330
- структура 1, 636
- сумма 4, 1212
Векторная трубка 1, 636
- -, интенсивность 1, 636
Векторная функция 1, 636, 651
- часть кватерниона 2, 838
Векторное алгебраическое расслоение 1, 637
- - - стабильное 1, 638
Векторное аналитическое расслоение 1, 639
- дифференциальное уравнение 2, 284
Векторное исчисление 1, 640
Векторное кольцо 1, 640
- *подпространство* 1, 643; 3, 350
Векторное поле 1, 640; 4, 475
- - аналитическое 2, 278
- -, вращение 1, 765
- - гамильтоново 4, 1156
- -, Гельмгольца теорема 1, 650
- - голоморфное 2, 278
- -, источник 2, 681
- - Киллинга 2, 856
Векторное поле на многообразии 1, 641
- -, особая точка 4, 120
- - параллельное 4, 1005
- - потенциальное 3, 202
- -, поток 4, 340, 537
- -, сток 2, 682
- -, циркуляция 5, 826
- представление 5, 139
Векторное произведение 1, 635, 642; 4, 403
Векторное пространство 1, 642—646; 3, 291
- -, аналитическое семейство 1, 640
- -, базис 1, 374, 643
- -, *вещественная форма* 2, 1004
- -, Витта разложение 1, 713
- -, Витта теорема 1, 714
- -, внешняя алгебра 1, 732
- -, внешняя степень 1, 732
- - вполне изотропное 2, 522
- -, гиперплоскость 1, 1008
- - двойственное 1, 644
- -, Жордана разложение 2, 421
- -, изоморфизм 1, 645
- -, клин 2, 880
- -, комплексификация 2, 1003
- -, комплексная структура 2, 1005
- -, конус 2, 880, 1074
- -, конформная структура 2, 1089
- -, линейное преобразование 1, 644
- - n-мерное 1, 644
- - над телом 1, 643
- -, прямая сумма 1, 645
- -, прямое произведение 1, 645
- -, размерность 1, 643; 4, 858
- -, ранг 4, 858
- - сопряженное 1, 644
- -, тензорное произведение 1, 646

- - *топологическое* **1**, 646; **5**, 377
- - упорядоченное **4**, 470
Векторное расслоение 1, 646—648
- -, кообраз 1, 646
- -, коядро 1, 646
- -, мономорфизм 1, 646
- -, обильное 3, 1097
- -, образ 1, 646
- -, Уитни сумма 1, 647
- -, эпиморфизм 1, 646
- -, ядро 1, 646
- уравнение Лапласа 3, 203
Векторной оптимизации задача 2, 677
Векторно-матричная алгебра 3, 161
Векторно-точечная аксиоматика 1, 648
Векторный анализ 1, 648—650
- потенциал 1, 650; 4, 520
- случайный процесс 5, 23
Вектор-функций алгебра 1, 650
Вектор-функция 1, 651
-, годограф 1, 1027
-, контингенция 5, 543
Векуа метод 1, 651
Великая теорема Ферма 5, 605
Величина 1, 651—653; см. также соответствующее название
Вснгерский метод 5, 420
Венкова приведение квадратичных форм 2, 789
Венна диаграмма 1, 653
Вечночное произведение 5, 147
Вентцеля — Крамера — Бриллюэна метод 1, 716
Вербальная конгруэнция 1, 654
Вербальная подгруппа 1, 654
Вербальное произведение групп 1, 654
Верзиера 1, 297
Верзор 1, 654
Верификация 1, 654
Верма модуль 4, 584
Верная значащая цифра 2, 465
Веронезе линейное пространство 3, 899
- многообразие 1, 655
Веронезе *отображение* 1, 654
Вероятное отклонение 1, 655
Вероятностей распределение 4, 873
Вероятностей теория 1, 655—665
Вероятности интеграл 2, 566
Вероятности переходные 4, 260
Вероятности полной формула 4, 426
Вероятностная бумага 1, 665
- - Вейбулла 1, 614
- зависимость 5, 238
- машина 3, 628
Вероятностная мера 1, 665
- сетевая модель 4, 1120
Вероятностное пространство 1, 666; 3, 638
- - совершенное 1, 666
- распределение 1, 665
Вероятностный автомат 1, 51
- алгоритм 5, 458
Вероятностный процесс 1, 667; 5, 22
Вероятность 1, 657, 665, 667
- *апостериорная* 1, 298
- априорная 1, 311
- безотказной работы 3, 854
- безусловная 3, 914
- вырождения 1, 803
- геометрическая 1, 932
- доверительная 2, 365, 366, 615
-, классическое определение 1, 657
- накрытия 2, 365
- отказа 3, 540
- перехода 4, 259
-, поле 1, 666
-, распределение 1, 660
-, сложения теорема 1, 658
-, умножения теорема 1, 658
- условная 1, 658; 5, 548
- a posteriori 1, 298
- a priori 1, 311
Версальная деформация 2, 103; 4, 129; 5, 361
- схема 2, 105
Версальное семейство 1, 498
Версор 1, 654
Вертикаль 2, 753
Вертикальные углы 5, 467
Вертор 1, 669
Верхнее десятичное приближение 2, 98
- производное число левое 4, 690
- - - правое 4, 690
Верхней релаксации метод 4, 966
Верхний аппроксимативный предел 1, 304
- доверительный предел 2, 616; 3, 923
Верхний и нижний пределы 1, 669
- интеграл Бёркиля 1, 415
- - Дарбу 2, 17
- конус 5, 834
- нильрадикал 4, 807
- оператор Привалова 4, 629
- особый показатель 4, 132
- предел 4, 558
- - последовательности 1, 669, 670
- - спектра 4, 686
- - *топологический* 4, 562
- - функции 1, 670
- радикал 4, 806
- центральный показатель 5, 809
- - ряд 5, 811
- - - подгрупп 4, 367
Верхних и нижних функций метод 1, 670
Верхняя асимптотическая плотность 1, 333
- граница множества 1, 673
- грань 1, 672
Верхняя грань семейства топологий 1, 671
- - функции 5, 715
Верхняя и нижняя грани 1, 672
- квартиль 2, 837
- полуплоскость 4, 462
- - Зигеля 2, 455
- субгармоническая функция 1, 671
- супергармоническая функция 1, 671
Вершина выпуклого многогранника 1, 801
- гиперграфа 1, 1006
- графа 1, 1105
- комплекса 2, 996
- конуса 2, 1033, 1073
- многогранника 3, 708
- многогранного угла 3, 712
- многоугольника 3, 749
- овала 3, 1152
- параболы 4, 191
- сети 4, 1121
- симплекса 2, 996; 4, 1151, 1152
- угла 5, 467
Вершинная связность графа 1, 1114, 1120
Вес (весовая функция) 1, 673, 674, 676; 2, 782
- автоморфной формы 1, 79
- базы 1, 371
- булевой алгебры 1, 552
- в топологии, аддиционная теорема 1, 95
- детерминированной функции 3, 1161
- дифференциальный 2, 435; 3, 1099; 4, 93
- доминантный 4, 584
- измерения 3, 877
- интегральный 3, 1099; 4, 93
- модулярной формы 3, 786
- на алгебре Неймана 3, 921
- полуинварианта 4, 457
Вес представления алгебры Ли 1, 673
- равномерного пространства 4, 795
- сетевой 3, 836; 4, 1124
- старший 4, 590, 596
- статистический 1, 514, 956
- тета-ряда 5, 346
- тета-функции 5, 347
Вес топологического пространства 1, 673; 3, 834
- тригонометрический 4, 95
n-вес 3, 835
Весовая норма 1, 674
- полунорма 1, 674
Весовая функция 1, 674; 2, 793
- - нормы 1, 674
- - полунормы 1, 674
Весовое подпространство 1, 673
Весовое пространство 1, 673, 674—676
- разложение 1, 673
Весовой класс 1, 674
- модуль 1, 673
Ветвление решений нелинейных уравнений 1, 676—679
Ветвления индекс 1, 679
- - линии 3, 385
- кривая 2, 23
- правило 4, 589
- точка 3, 386; 4, 115
- - алгебраическая 1, 173
Ветвления точка аналитической функции 1, 679
- - бесконечного порядка 3, 407
- - логарифмическая 3, 407
Ветвления точка минимальной поверхности 1, 680
- - многообразия 2, 55
- - трансцендентная 5, 424
- *уравнения точка* 1, 677
- условие 1, 681
Ветвь аналитической функции 1, 268, 680
- формальная 3, 1035
Ветвящийся процесс 1, 681—684
- - без иммиграции 4, 1051
- -, вероятность вырождения 1, 803
- - Гальтона — Ватсона 1, 854
Ветвящийся процесс с диффузией 1, 684
Ветвящийся процесс с зависимостью от возраста 1, 684
Ветвящийся процесс с иммиграцией 1, 685
Ветвящийся процесс с конечным числом типов частиц 1, 686
Ветвящийся процесс со случайной средой 1, 687
Ветвящихся процессов регулярность 1, 688
Вечный адиабатический инвариант 1, 97
Вещественная ортогональная группа 4, 84
- ось 2, 1008
- форма алгебры Ли 2, 1003
- - векторного пространства 2, 1004
- - группы Ли 2, 1004
- *K*-теория 5, 335
- часть комплексного числа 2, 1007
Вещественное аналитическое многообразие 1, 278
Вещественное аналитическое пространство 1, 285, 689
- векторное пространство, кватернионная структура 2, 839
- квадратичное поле 2, 783
Вещественное нормирование 1, 689; 3, 1078
Вещественное число 1, 690; 2, 73
Взаимная корреляционная функция 3, 24
- независимость событий 3, 914
- энергия мер 5, 1002
Взаимно однозначное отображение 2, 665; 5, 714
Взаимно однозначное соответствие 1, 690; 3, 760
- полярные фигуры 4, 476
- простые многочлены 3, 754
Взаимно простые числа 1, 690
Взаимности закон Артина 1, 168
- - Гаусса 1, 896; 2, 787
- - для инвариантов Хассе 5, 776
- - квадратичный 2, 787; 3, 231
Взаимности законы в теории чисел 1, 690
Взаимные ядра 1, 692; 5, 653
Взаимный коммутант подгрупп 3, 839
Взаимодействия представление 1, 692
Взвешенная мажорантная игра 2, 1103
Взвешенное квадратичное отклонение 2, 782
- приближение 4, 605
Взвешенное среднее 1, 693
- - геометрическое 5, 161
- среднестепенное приближение 4, 603
Взятия внутренности оператор 4, 727
Вивиани кривая 1, 693
- окно 1, 693
- тело 1, 693
Вид в логике 1, 693
Видовая фаза 1, 520
Виета теорема о корнях 1, 693; 2, 793
- формула 1, 694
Виковский символ 4, 1134
Вилкоксона критерий 1, 694
Вилсона — Хилферти преобразование 5, 34
Вильсона теорема для простых чисел 1, 694
Вильчинского директриса 4, 668
Винера интеграл 1, 694
- компактификация 4, 1030
- критерий регулярности граничной точки 4, 933
Винера мера 1, 666, 695
Винера тауберова теорема 1, 696
- теорема о разрешимых функциях 4, 275
Винера — Хопфа метод 1, 696
Винера — Хопфа уравнение 1, 697
Винеровская гармоническая граница 4, 1030
- емкость 2, 404, 405
- идеальная граница 4, 1030
- мера 1, 695
Винеровский процесс 1, 698—700
Виноградова теорема об устойчивости 5, 810
Виноградова гипотезы 1, 700
Виноградова интеграл 1, 701
Виноградова метод в теории чисел 1, 701—704
- оценка суммы характеров 2, 193
Виноградова оценки 1, 704
- теорема о нечетных числах 1, 92
Виноградова теорема о среднем 1, 705
Виноградова — Гольдбаха теорема в теории чисел 1, 705
Винт 1, 706
Винтовая линия 1, 705
Винтовая поверхность 1, 706
Винтовое исчисление 1, 706
Вирзинга гипотеза в теории диофантовых приближений 3, 665
Вириала теорема в механике 1, 707
Вириальное разложение в механике 1, 708
Вириальный ряд 1, 708
Виртингера копредставление 2, 58; 5, 479, 487
Виртуально - асимптотическая сеть 1, 708
Виртуальное перемещение 1, 1033
Виртуальный арифметический род 1, 323
Виртуальных скоростей принцип 1, 741
Витали вариация 1, 708
- множество 3, 919
- покрытие 1, 709
Витали теорема о покрытии 1, 709
- - о равномерной сходимости 1, 709
Витали — Каратеодори теорема о полунепрерывных функциях 4, 460
Виток винтовой линии 1, 706
Витта вектор 1, 710
- группа 1, 711, 712, 714
- - кольца с инволюцией 1, 712
Витта кольцо 1, 711—713
Витта разложение 1, 713
- схема 1, 710
- теорема о векторном пространстве 1, 714

- - о сокращении 2, 778
- усеченная схема 1, 711
- формы индекс 1, 714
Витта — Гротендика группа 1, 715
- - кольцо 1, 715
Вихревая линия 1, 715
- нить 1, 715
- поверхность 1, 715
- точка 1, 716
- трубка 1, 715
- -, напряженность 1, 716
Вихревое кольцо 1, 715
Вихревой слой 1, 715
Вихрь 1, 715
- векторного поля 1, 640
ВКБ-метод 1, 716
Включение дифференциальное 2, 268
Включение методов суммирования 1, 717
- многозначных отображений 3, 720
Включения и исключения принцип 1, 718
- функция 3, 1107
Владимирова вариационный принцип 1, 719
Владимирова метод 1, 719
- функционал 4, 249
Власова кинетическое уравнение 1, 720
Власова — Ландау уравнение 3, 190
Влияния область 1, 721; 3, 48
Вложение 2, 665; 4, 358
- графа 1, 1115
- дикое 2, 138; 4, 1061
- замкнутое 2, 433
- изометрическое 2, 506
- изотопное 5, 401
Вложение категорий 1, 721
Вложение кольца 1, 721
- локально плоское 3, 435; 5, 401
Вложение полугруппы в группу 1, 722
- правильное 2, 138
- равномерное 4, 795
- ручное 2, 138; 4, 1061; 5, 401
- свободное 3, 1096
- Сегре 4, 1101
- топологическое 5, 400, 401
Вложение функциональных пространств 1, 723
C^k-вложение 2, 356
Вложений топология 5, 400
Вложения оператор 1, 723
- размерность 1, 285
Вложения теоремы 1, 723—731
Вложенный простой идеал 4, 634
Вложенных форм метод 3, 155
Вложимая группа 2, 1022
Вмороженности интеграл 1, 731
Вневписанная кривая 1, 758
Внешне сопряженные автоморфизмы 5, 1012
Внешнее дифференцирование 2, 351
Внешнее произведение 1, 240, 731
- - форм 1, 731
- умножение дифференциалов 2, 238
Внешней информативности мера 3, 738
- плотности точка 4, 320
- устойчивости число графа 1, 1120
Внешние накрест лежащие углы 5, 468
- односторонние углы 5, 468
Внешний автоморфизм группы 1, 736
- асимптотический ряд 3, 503
- дифференциал 2, 262, 733
Внешних форм метод 1, 732
- - - Картана 2, 732
Внешняя алгебра 1, 732
- дифференциальная форма 2, 262, 733, 735
-емкость 2, 406
- задача Дирихле 4, 527
- - Неймана 4, 528
Внешняя и внутренняя краевые задачи 1, 732
- краевая задача 1, 732
- кривизна 3, 100; 5, 297
- - выпуклой поверхности 1, 789
Внешняя мера 1, 734; 3, 639
- - в смысле Каратеодори 1, 734
- - Жордана 2, 420
- - Каратеодори 2, 720
- - Лебега 1, 734; 3, 213
- - метрическая 1, 734
Внешняя нормаль 1, 734
- обратная задача теории потенциала 4, 521
- поперечная мера 5, 50
- степень векторного пространства 1, 732
- точка области 3, 1098
Внешняя форма 1, 735; 2, 732
- - группы 5, 635
Внутренне регулярная мера 4, 809
- свободная алгебра 4, 1079
Внутреннее дифференцирование 2, 351; 4, 640
- - алгебры Ли 3, 242
Внутреннее отображение 1, 735
- произведение 1, 979; 4, 1107
- размерностное ядро 2, 717
- состояние элемента 2, 850
- умножение 2, 263
Внутренней устойчивости число графа 1, 1120
Внутренние волны 1, 735
- накрест лежащие углы 5, 468
- односторонние углы 5, 468
Внутренний автоморфизм группы 1, 736
- - кольца 1, 736
- - моноида 1, 736
- асимптотический ряд 3, 503
Внутренний дифференциальный оператор 1, 736
- пограничный слой 2, 342
- радиус 2, 1099
- символ 4, 1135
- угол многоугольника 3, 749
Внутренних автоморфизмов группа 4, 639
Внутренних вариаций метод 1, 736
Внутренность многообразия 3, 743
Внутренность множества 1, 737
Внутренняя геометрия 1, 737
- гомологичность многообразий 1, 533
Внутренняя граница 1, 738
- емкость 2, 406
- задача Дирихле 4, 527
- - Неймана 4, 527
- краевая задача 1, 732
- кривизна 3, 100
- - выпуклой поверхности 1, 789
- мера 3, 640
- - Жордана 2, 420
- - Лебега 1, 734
Внутренняя метрика 1, 738, 790
- обратная задача теории потенциала 4, 521
- площадь 4, 331
- теорема единственности 2, 401
Внутренняя точка 1, 738; 4, 700
- - области 3, 1098
- форма группы 5, 635
Вогнутая функция 1, 738, 793
Вогнутый и выпуклый операторы 1, 738
- оператор 1, 738
- функционал 1, 803
Водородоподобный атом 1, 739
Возврата ребро 1, 740; 4, 811
Возврата точка 1, 740; 2, 25; 4, 124
- - обыкновенная 2, 759
Возвратная последовательность 1, 740
- ренурсия 4, 963
- цепь Маркова 3, 520
Возвратное уравнение 1, 740
Возвратной индукции аксиома 2, 558
Возвратный ряд 1, 740
Возвращения вероятность 1, 419
- теорема Пуанкаре 4, 749
Возможное перемещение 1, 1033
Возможных направлений метод 3, 603
Возможных перемещений принцип 1, 741
- - - вариационный 1, 597
Возмущение 2, 46
Возмущение линейной системы 1, 742
Возмущений теория 1, 742—748
Возмущения вековые 2, 870
Возмущенное уравнение 2, 288
Возраста теория 1, 748
Возрастающая геометрическая прогрессия 1, 932
Возрастающая последовательность 1, 749
- фильтрация 5, 616
Возрастающая функция 1, 749; 3, 814
Возрастающий идеальный ряд 2, 486
Возрастная функция 1, 749
Возрастное приближение 1, 749
- уравнение 1, 749
Волновое движение идеальной жидкости 3, 79
Волновое уравнение 1, 750; 2, 299
Волновой вектор 1, 750
- оператор 2, 9; 5, 128
- потенциал 3, 609
- фронт 5, 672
Волны 1, 750—752
- внутренние 1, 735
Вольтерра оператор 1, 752, 754
- - абстрактный 1, 754
- - линейный интегральный 1, 752
- - нелинейный интегральный 1, 752
- производная 5, 694
Вольтерра уравнение 1, 752—754
- - линейное интегральное 1, 754
- - нелинейное интегральное 1, 754
- - обобщенное 1, 754
- - однородное 1, 752
- - операторное 1, 754
- -, ядро 1, 752
- формула 2, 151
Вольтерра ядро 1, 754; 2, 591
Вольтерров оператор 3, 1007
Вольфовица неравенство 1, 755
Веста теорема о Ω-системах 1, 160
Воронка интегральная 2, 280, 570
Вороного метод суммирования 1, 755
- полуинвариант 2, 789
Вороного типы решеток 1, 755
Воспроизводящий клин 2, 880
- конус 2, 1075; 4, 470
- - положительный 4, 434
Восстановления марковский процесс 1, 757
- процесс 1, 756
Восстановления теория 1, 756
- уравнение 1, 757
- функция 1, 757
Вота теорема в теории моделей 3, 767
Вписанная кривая 1, 758
Вписанная ломаная 1, 757
Вписанное покрытие 3, 216
Вписанные и описанные фигуры 1, 757
Вписанный многоугольник 1, 757
Вписанный угол 1, 758; 4, 16
Вполне аддитивная функция 1, 758
- - - арифметическая 1, 89
Вполне геодезическое многообразие 1, 758, 931
- гиперболическая система 3, 326
Вполне дедекиндова решетка 1, 758
- дистрибутивная решетка 2, 230
Вполне замкнутое отображение 1, 758
- изолированный идеал 5, 748
- изотропное векторное пространство 2, 522
- изотропный подмодуль 1, 483
- интегрируемая система 2, 612
- - - гамильтонова 1, 859
- - структура Пфаффа 4, 774, 775
Вполне интегрируемое дифференциальное уравнение 1, 759
- конечная мера 3, 638; 4, 719
- σ-конечная мера 3, 638; 4, 719
- минимальный гомеоморфизм 2, 806
- мультипликативная арифметическая функция 3, 840
- наблюдаемая система 4, 44
- непрерывное отображение 1, 759
- - поле 3, 977
Вполне непрерывный оператор 1, 759; 2, 994; 3, 373, 960; 4, 19
- - - положительный 4, 435
Вполне неприводимое множество 1, 760
- несвязная компактная группа 2, 991
- - топологическая группа 5, 367
Вполне несвязное пространство 1, 760; 4, 1096
Вполне несовершенное пространство 1, 760
- неунитарная полугруппа сжатий 4, 1127
- неунитарное сжатие 4, 1124
- неустойчивая динамическая система 4, 417
Вполне нормальное пространство 1, 760
- ограниченное метрическое пространство 3, 672
Вполне ограниченное множество 1, 760
Вполне ограниченное пространство 1, 761; 4, 580
- отделимая алгебра 2, 916
- перечислимый класс 3, 1087
- положительная энтропия 4, 1195
- полупростая полугруппа 1, 1019
- порождающее множество 1, 552
- правильный конус 2, 1076
Вполне приводимая матричная группа 1, 761
Вполне приводимое множество 1, 761
- - представление 1, 761; 4, 592
Вполне приводимый модуль 1, 762
Вполне простая полугруппа 1, 762
- равносильные методы суммирования 4, 800
- разветвленное расширение 2, 203
- разложимая аболева группа 1, 19
- разложимый идеал 1, 167
- разрешимая алгебра Ли 3, 250
- - группа Ли 3, 251
- регулярная банахова алгебра с инволюцией 1, 383
Вполне регулярная полугруппа 1, 762; 2, 883
- регулярного роста функция 5, 799
- регулярное кольцо 1, 118
Вполне регулярное пространство 1, 762; 4, 140; 5, 392
- - -, Зайцева теорема 1, 763
- регулярный метод суммирования 4, 944
- - элемент 4, 945
- симметричная алгебра 4, 1148
- - банахова алгебра с инволюцией 1, 383
- совместные методы суммирования 5, 71
- суммирующий базис 1, 377
- треугольное разложение в группе 1, 900
- упорядочения принцип 1, 772
Вполне упорядоченное множество 1, 763
- - -, теорема о сравнении 1, 764
- - -, Цермело теорема 1, 764
Вполне характеристическая конгруэнция 1, 764

Вполне характеристическая подгруппа 1, 764
- эргодический автоморфизм 2, 805
Вращение 1, 764; 4, 81
Вращение векторного поля 1, 765
- вполне непрерывного поля 3, 977
- второго рода 1, 764
- несобственное 1, 764
-, ось 1, 764
- первого рода 1, 764
- собственное 1, 764
-, центр 1, 764
Вращений группа 4, 81
- диаграмма 1, 765
Вращений индикатриса 1, 765
Вращений метод 1, 766
- - барьерный 1, 766
- - с выбором оптимального элемента 1, 767
- - циклический 1, 766
Вращения гиперболоид 1, 1000
- параболоид 5, 993
Вращения поверхность 1, 767
- -, Клеро теорема 1, 767
Вращения теоремы о конформном отображении 1, 767
- эллипсоид 5, 978
Времениподобная линия 3, 702
Времениподобный вектор 3, 702; 4, 149
Временна́я сложность грамматики 1, 1092
Временно́го типа кривая 2, 814
- - направление 2, 814
Временно́е среднее 1, 495
Временно́й адиабатический инвариант 1, 97
Временно́й ряд 1, 663, 768; 5, 10, 23
- -, коррелограмма 3, 21
- -, спектральный анализ 5, 130
Время собственное 4, 150
Вронскиан 1, 768
-, Лиувилля формула 1, 769
Вроньского определитель 1, 768; 3, 339, 340
Всегда разрешимая формула 5, 619
Всемирного тяготения закон 1, 1078
Всеобщности квантор 1, 769; 2, 837
Вспомогательный алфавит 1, 1092
- вывод 1, 781
- предикат 1, 207
- символ 1, 1092
Вспомогательных функций метод 1, 427
Вставка буквы 2, 930
Встречная прогонка 4, 643
Всюду определенный оператор 4, 18
Всюду плотное множество 1, 769
Вторая аксиома счетности 1, 769
Вторая вариация 1, 769
Вторая квадратичная форма 1, 770; 2, 785; 4, 360
Вторая краевая задача 1, 771; 3, 83, 203, 349
- **кривизна** 3, 129
- основная квадратичная форма поверхности 1, 770
- подстановка Эйлера 5, 928
- симметрическая производная 4, 905; 5, 887
- смешанная задача 5, 37, 41
- теорема Абеля о степенных рядах 5, 219
- - Гарнака 1, 893
- - Гёделя о неполноте 1, 909
Вторичная когомологическая операция 2, 922
- спецификация 2, 978
Вторичного квантования метод 5, 518, 632
Второго порядка линия 3, 387
Второе касательное расслоение 2, 755
Второе сопряженное пространство 1, 388, 771
- уравнение Колмогорова 2, 958
Второй дифференциальный параметр 2, 350; 3, 205
Второй категории множество 2, 764
Второй метод Ляпунова 3, 471
- основной тензор поверхности 1, 771
- принцип отделимости 2, 95
- фундаментальный тензор 4, 360, 361
Ву класс 5, 904
- образующая 5, 762
- теорема о замкнутых многообразиях 5, 904
Вурф 1, 771
Вход схемы из функциональных элементов 5, 301
Входной алфавит 1, 53, 54
- оператор 4, 241
- полюс 4, 968
- поток 3, 542
- сигнал 2, 850
Входных данных погрешность 4, 357
Входящий поток вызовов 3, 541
Вхождение 1, 771
- переменной операторное 4, 1083
- - свободное 4, 578, 1083
- - связанное 4, 578, 1083, 1088
Выбор оптимального элемента в методе вращений 1, 767
Выбора аксиома 1, 106, 772; 5, 642
- - интуиционистская 2, 642
- -, принцип вполне упорядочения 1, 772
- -, принцип максимальности 1, 772
- - принцип 5, 816
- - Больцано — Вейерштрасса 1, 516
- теорема Бляшке 1, 509
Выбора теоремы в комбинаторике 1, 773
- функция 1, 772
Выборка 1, 774, 776, 778, 917
- по важности 3, 817
- простая 1, 918
-, размах 4, 815
-, рассеивание 4, 892
- расслоенная 4, 895
- существенная 3, 817
Выборки распределение 5, 998
Выборочная гровдь 1, 774
Выборочная дисперсия 1, 774; 5, 999
Выборочная квантиль 1, 774
Выборочная медиана 1, 775
Выборочная точка 1, 775, 776
Выборочная функция 1, 775; 5, 11
Выборочная характеристика 1, 776
Выборочное пространство 1, 776
Выборочное среднее 1, 776; 5, 998
Выборочный блок 1, 776
- коэффициент корреляции 3, 28
- - регрессии 1, 925, 927
- - эксцесса 5, 969
Выборочный метод 1, 776—779
Выборочный момент 1, 779; 5, 998
- промежуток 1, 776
Вывод 1, 112, 1092
- в исчислении 2, 685
- вспомогательный 1, 781
-, Генцена теорема 1, 921
-, дерево 1, 1093
Вывод логический 1, 779
- полный 1, 1092
-, правило 1, 111
-, производное правило 4, 690
- результирующий 1, 781
ω-вывод 1, 321
Вывода дерево 1, 780
Вывода правило 1, 780; 3, 568
- -, заключение 1, 780
- -, посылка 1, 780
Выводимая формула 1, 779; 2, 368
Выводимое правило 1, 781
- формальное выражение 5, 640
Выводимости проблема 2, 686
Выводимость 1, 779, 781
-, Маркова правило 1, 912
Выводимый элемент 2, 685
Выводящая производная 1, 736
Выделение сигнала на фоне помех 1, 781
Выделения аксиома 1, 106
- базы гомологии метод 1, 816
- главной части метод 3, 817
Вызова процедуры оператор 1, 224
Выигрывающая коалиция 2, 1103
Выигрыш автомата 1, 58
- интегральный 2, 143
- терминальный 2, 143
Выигрыша функция 1, 781; 2, 471; 5, 529, 532
Выигрышная позиция 2, 475
Выметание для функции 1, 783
- меры 1, 781, 782
Выметания метод 1, 781—783
- проблема 1, 782
Вынуждения метод 1, 783—786
- отношение 1, 783
Вынужденные колебания 1, 786
Выпадение буквы 2, 930
Выпрямления теорема об интегральных кривых 4, 121
Выпуклая гиперповерхность 1, 799
Выпуклая игра 1, 787; 2, 1104
- кривая 1, 799
Выпуклая метрика 1, 787, 789, 790
Выпуклая область 1, 788
Выпукла оболочка 1, 788
- -, Каратеодори теорема 1, 788
- -, Крейна — Мильмана теорема 1, 788
Выпуклая поверхность 1, 788—792, 799
- -, Александрова теорема 1, 788
- - бесконечная 1, 788
- -, внешняя нормаль 1, 734
- -, гауссова кривизна 1, 791
- - гладкая 1, 788
- - замкнутая 1, 788
- -, касательный конус 2, 756
- - коническая 1, 788
- -, кратчайшая 1, 789
- -, кривизна 1, 789
- - однозначно-определенная 1, 790
- -, площадь 1, 791
- - полная 1, 788
- -, полный угол в точке 1, 789
- -, предельный конус 4, 575
- -, расстояние между точками 1, 789
- - ребристая 1, 788
- - регулярная 1, 791
- -, свойство неналегания 1, 789
- -, склеивания теорема 1, 791
- -, удельная кривизна 1, 791
Выпуклая подгруппа 1, 792
Выпуклая последовательность 1, 792
- функция 3, 854
Выпуклая функция действительного аргумента 1, 793—795
Выпуклая функция комплексного переменного 1, 795
C-выпуклая оболочка, теорема 1, 511
k-выпуклая поверхность 4, 361
p-выпуклая функция 4, 728
Выпукло идеально простая полугруппа 5, 524
- компактнозначное многозначное отображение 3, 720
Выпукло-вогнутое пространство 4, 728
Выпуклое множество 1, 644, 796—798, 799
- -, Брунна — Минковского теорема 1, 549
- параметрическое программирование 4, 220
- по Робинсону множество 5, 781
Выпуклое подмножество 1, 798
Выпуклое программирование 1, 798; 2, 678; 3, 602
Выпуклое тело 1, 796, 799
- -, гипотеза об аномалии 1, 947
- -, грань 1, 797
- - двойственное 1, 797
- -, Минковского теорема 1, 944, 946, 947; 3, 703
- - полярное 1, 797
Выпуклости проблема для чебышевского множества 5, 851
Выпуклости радиус 1, 799
- теорема Рисса 4, 1039
Выпуклость 1, 799
- голоморфная 1, 800; 5, 899
Выпуклость логарифмическая 1, 800
- метрики 1, 800
- тригонометрическая 4, 1054
- функционала 1, 800
d-выпуклость 1, 800
H-выпуклость 1, 800
h-выпуклость 1, 800
R-выпуклость компакта 1, 800
Выпуклый анализ 1, 800
- -, двойственность 2, 45
- -, Фенхеля — Моро теорема 2, 46
Выпуклый конус 1, 801; 2, 1074
- - однородный 3, 1180
Выпуклый многогранник 1, 801; 4, 410
- -, Александрова теорема 1, 802
- -, вершина 1, 801
- -, грань 1, 801
- -, Коши теорема 1, 802
- -, Минковского теорема 1, 802
- - правильный 4, 552
- -, ребро 1, 801
- - с краем 1, 801
- -, Штейница теорема 1, 802
- -, Эйлера соотношение 1, 802
Выпуклый многоугольник 1, 802; 3, 750
Выпуклый оператор 1, 738, 802
Выпуклый функционал 1, 803
Выпуклых множеств пространство линейное 1, 803
Выпуклых множеств пространство метрическое 1, 803
Выражение 4, 977
- аналитическое 1, 277
- асимптотическое 1, 336
- в алгоритмическом языке 1, 224
- дифференциальное 2, 345
Выразимая формула 4, 695
Вырезание 2, 1000
Вырезанная аксиома 1, 1045
Вырождающаяся линия второго порядка 3, 389
- нераспадающаяся поверхность второго порядка 4, 344
Вырождения вероятность 1, 803
- оператор 4, 1161, 1167, 1169
- типа уравнения линия 5, 45
Вырожденная абелева функция 1, 22
Вырожденная гипергеометрическая функция 1, 804
- группа 2, 877
Вырожденная игра 1, 805
- квадратичная форма 2, 777
Вырожденная матрица 1, 806
- мера 3, 637
Вырожденная серия представлений 1, 806
Вырожденное билинейное отображение 1, 484
Вырожденное гиперболическое уравнение 1, 806
Вырожденное гипергеометрическое уравнение 1, 806
Вырожденное интегральное уравнение 1, 807
Вырожденное параболическое уравнение 1, 808
- подпространство 4, 718
Вырожденное положение равновесия 1, 808
Вырожденное распределение 1, 809
Вырожденное уравнение с частными производными 1, 809—811
Вырожденное эллиптическое уравнение 1, 811
Вырожденное ядро 1, 811
- - Фредгольма 5, 660
Вырожденные эллиптические координаты 5, 988
Вырожденный континуум 2, 1067
- параллелотоп 4, 205
- симплекс 4, 1163
- узел 5, 475

Вырожденных ядер метод 1; 811
Высказывание 1, 123; 5, 269
-, гейтинговское исчисление 1; 911
-, интуиционистское исчисление 1, 911
-, конструктивное исчисление 2, 1050
- модальное 3, 763
- устойчивое 3, 767
Высказываний исчисление 1, 812; 4, 699
- - классическое 3, 418
- - минимальное 3, 691
Высказывательная форма 4; 698; 5, 637
Высокочастотная асимптотика 2, 809
Высота в диофантовой геометрии 1, 812
Высота в элементарной геометрии 1, 812
Высота идеала 1, 813
- конуса 2, 1074
- крюка 5, 1028
- нормирования 3, 1080
Выступающий конус 2, 1074
Высшая когомологическая операция 2, 923
Высшие аксиомы бесконечности 1, 455
- инварианты Хопфа 4, 23, 34
Высший член многочлена 3, 753
Выход схемы из функциональных элементов 5, 301
Выходной алфавит 1, 53, 54
- полюс 4, 968
- сигнал 2, 850
Выходов функция 1; 53
Вычет 5, 151, 153
- аналитического дифференциала 1, 816
Вычет аналитической функции 1, 264, 814—817
- биквадратичный 1; 814; 5, 153, 217
Вычет в теории чисел 1, 814
- квадратичный 1, 814; 2, 785; 5, 153, 217
-, класс 5, 151
- кубический 1, 814; 3, 143; 5, 217
-, Лере теорема 1, 816
- логарифмический 1, 815; 3, 409
- норменный 3, 1077
- относительно базисного цикла 1, 817
-, полная система 4, 423; 5, 151
-, приведенная система 4, 631; 5, 152
- степени n 5, 217
- степенной 1, 814; 5, 217
-, теорема 1, 815
-, формула 1, 818
Вычет-класс 1, 818
Вычетов метод 3, 815
Вычет-форма 1, 817
Вычисление частичное 5, 418
Вычислений классы сложности 1, 211
- мера 1, 211
Вычисления функции проблема 1, 219
Вычислимая нумерация 3, 1087
Вычислимая функция 1, 227, 818—821
- - по Банаху — Мазуру 1, 380
Вычислимое действительное число 1, 821; 2, 1050, 1055
Вычислимый анализ 2, 1054
Вычислимый инвариант 1, 821
Вычислитель частичный 5, 418
Вычислительная математика 1; 822—825
Вычислительная машина абстрактная 1, 825
- модель 3, 770
- погрешность 4, 357
Вычислительного метода оптимизация 4, 61
Вычислительной работы минимизация 3, 695
Вычислительный алгоритм 1, 826—828
- - активный 4; 62
- -, замыкание 2, 437
- - пассивный 4; 62
- - стохастический 5, 241
Вычислительных алгоритмов оптимизация 4, 61
Вычитаемое 1, 828
Вычитание 1, 828; 4, 1212
- комплексных чисел 2, 1008
- степенных рядов 5, 219
Высториса гомологии 1, 828
- теорема о когомологиях 4, 769
Высторисиан 1, 1041
Вязкость аппроксимационная 5, 303
- схемная 5, 303
Вялый пучок 1, 830

Г

Габриеля — Попеску теорема об абелевых категориях 1, 21
Газовой динамики уравнения 1, 831—835
Газовой динамики численные методы 1, 835—840
Газовых струй теория 1, 840—842
Галеркина метод 1; 842; 4; 250, 684, 1042
Галеркина — Петрова метод 1; 842
Галилеева система координат 1, 843; 4, 149
- - отсчета 2, 562
Галилеево пространство 1; 843
Галилея группа 1; 844; 4, 148
Галилея преобразование 1, 844
Галилея принцип относительности 1, 844
Галилея спираль 1; 844
Галуа группа 1, 845, 850, 1139
- - дифференциальная 1, 845
- - многочлена 1, 845
- - расширения 4, 908
- - уравнения 1, 851
Галуа дифференциальная группа 1, 845
Галуа когомологии 1, 845—848
- модуль 3, 778
- основное соответствие 1; 164
Галуа поле 1, 848
Галуа расширение 1, 849, 850
- -, основная теорема 1, 845
- резольвента 4, 950
Галуа соответствие 1; 845, 849
Галуа теории обратная задача 1, 849
Галуа теория 1, 850—852
Галуа теория колец 1, 853
- -, основная теорема 1, 851
Галуа топологическая группа 1, 854
Гальтона — Ватсона процесс 1, 681, 854
Гамак в теории графов 4, 644
Гамбургера уравнение 4, 859
Гамеля базис 1, 374
- теорема о проективно метрических пространствах 4, 667
Гамильтона оператор 1, 854
Гамильтона уравнения 1, 855
Гамильтона функция 1, 855
Гамильтона — Кэли теорема о матрицах 3, 617
Гамильтона — Остроградского принцип 1, 600, 856
Гамильтона — Якоби теория 1, 857
- - уравнение 1; 585, 858; 2, 808, 809
Гамильтониан 1, 854, 855, 858; 4, 1156
Гамильтонов граф 1, 1113
- цикл 1, 1113, 1119; 2, 972
Гамильтонова алгебра Ли 3, 244
Гамильтонова группа 1, 858
- лупа 3, 462
- псевдогруппа 4, 731
Гамильтонова система 1; 858—861; 2, 808, 809; 4, 1156
- - вполне интегрируемая 1, 859
Гамильтонова система линейная 1, 861—865
- - -, осциллляторные свойства решений 1, 862
- - - с периодическими коэффициентами 1, 863
- -, Лиувилля теорема 1, 860
- -, Нётер теорема 1, 859
- структура 4, 1156
- форма 5, 519
- формация 5, 519
- цепь в графе 1, 1113
Гамильтоново векторное поле 4; 1156
Гамильтоново связный граф 1, 1113
Гамма-корреляция 1; 865
Гамма-распределение 1, 865
Гамма-функция 1, 866—870
- неполная 1, 866; 3, 979
Гаммерштейна оператор 3, 959
Гаммерштейна уравнение 1; 870
Ганкеля интегральное представление 1, 867, 869
- определитель 4, 187
- преобразование 2, 589
Ганкеля функции 1, 870
Гармонизуемая динамическая система 1; 871
Гармонизуемый случайный процесс 1, 871; 5, 124
Гармоника 1; 872; 4, 1085
- основная 1, 887
- сферическая 5, 289
- тороидальная 5, 407
- эллипсоидальная 5, 978
Гармоническая емкость 1; 872; 2, 404
- интерполяция 3, 880
- линеаризация 1, 887
Гармоническая мажоранта 1; 872; 5, 262
- - наилучшая 1, 872
- - наименьшая 1, 872
Гармоническая мера 1; 873; 4; 533
- миноранта 1, 872
- - наибольшая 1, 872
- - поляра 3, 140
- сопряженность 1; 878
Гармоническая форма 1; 873—875
- - примитивная 1; 874
Гармоническая функция 1; 875—879; 2, 239; 3, 205
- -, Гарнака теорема 1, 877, 878, 893
- -, Гурса формула 1; 878
- -, Привалова теорема 1; 875
- -, принцип симметрии 1; 877
- -, принцип экстремума 1; 877
- - регулярная в бесконечности 1, 875
- -, свойство единственности 1; 877
- -, сопряженность 1, 878; 5, 86
- - телесная 5, 882
- -, теорема о среднем значении 1, 876
- -, теорема о стирании особенностей 1, 877
- -, условия сопряженности 3; 67
Гармоническая четверка 1, 878, 879
Гармонические координаты 1, 880
Гармонический анализ 1, 880; 3, 1115
Гармонический анализ абстрактный 1, 880—886
- - на группах 1, 881
- - функций 1, 450
- дифференциал 2, 239
Гармонический многочлен 1; 886
- осциллятор 4, 137, 1085
- пучок 1, 889; 4, 532
Гармонический ряд 1, 887
Гармонического баланса метод 1, 887
- синтеза множество 5, 119
Гармоническое деление 2, 466
Гармоническое колебание 1, 888; 4, 1085
- - простое 4; 1085
- - свободное 4, 1084
- отношение 2, 27
- поле 1, 650
Гармоническое пространство 1; 889; 4, 533
- -, аксиома мажоранты 1, 890
- -, аксиома положительности 1; 889
- -, аксиома разрешимости 1; 889
- -, аксиома сходимости 1, 889
- -, потенциал минимума 1, 890
- спинорное поле 5, 140
Гармоническое среднее 1, 890; 5; 161
Гармонической меры принцип 1; 890
Гарнака интеграл 1; 891
Гарнака неравенство 1, 891—893
- принцип 1, 893
- теорема для алгебраических кривых 2, 70
Гарнака теорема для гармонических функций 1, 877, 878, 893
Гартогса диаграмма 1, 893
Гартогса область 1, 893
- основная теорема о голоморфных функциях 1; 269
- радиус 1, 894
- ряд 1, 894
Гартогса теорема о голоморфных функциях 1; 893
- функция 4, 336
Гартогса — Лорана ряд 1; 894
Гато вариация 1; 894, 895
Гато градиент 1; 894
Гато дифференциал 1; 895
Гато производная 1, 895
- - оператора 3, 960
Гаусса вариационная задача 1; 895
- вариационный принцип 1; 598
Гаусса закон 1; 896
Гаусса закон взаимности 1; 896; 2; 787
- интеграл 2; 445
- - вероятности 2; 567
Гаусса интерполяционная формула 1; 897
Гаусса квадратурная формула 1; 897; 2; 624, 794
- лемма о примитивных многочленах 4, 638
Гаусса метод решения систем линейных уравнений 1, 898
- неравенство в теории вероятностей 5, 843
Гаусса преобразование 1; 899
Гаусса признак сходимости 1; 899
Гаусса принцип в механике 1; 900
Гаусса разложение 1, 900
- ряд 1, 1001, 1003
Гаусса сумма 1, 901
- - для характеров 2; 193
Гаусса теорема (theorema egregium) 1, 902
- - о кривизне 2; 253
- - - поверхности 4; 235
- - о правильных многоугольниках 3, 751
- - о простых числах 4; 707
- - о трех квадратах 2, 170
- тождество 5, 768
- уравнение 1, 1004; 2, 315
- - в теории поверхностей 1, 902
- уравнения для кривизны 4, 361
- формула для гипергеометрической функции 1, 1003
- - для объёмного потенциала 4; 524
- - для потенциала двойного слоя 4, 526
- - *умножения* 1; 867
- ψ-функция 1, 869; 4; 744
Гаусса — Бонне теорема о кривизне 2, 56
Гаусса — Бонне теорема о римановых многообразиях 1; 903
Гаусса — Лапласа распределение 1, 904
Гаусса — Остроградского формула 4, 137
Гауссов случайный элемент 5; 33
Гауссова квадратичная форма 2; 777
Гауссова кривизна 1; 904; 2, 253, 785; 3, 98
- - выпуклой поверхности 1, 791
- матрица 2, 777
Гауссова полугруппа 1; 905
- предмера 3; 646

Гауссова типа квадратурная формула 2, 794; 3, 866
Гауссово кольцо 1, 906; 5, 590
- кручение 3, 130
- отображение 5, 297
Гауссово число 1, 197, 905
Гауссовская случайная величина 1, 907
Гауссовский белый шум 1, 407
- источник сообщений 2, 682
- канал 2, 701
Гауссовский процесс 1, 906
- - комплексный 1, 906
- - обобщенный 1, 906
Гауссовское распределение условное 2, 701
Гегенбауэра многочлены 1, 908; 2, 869; 5, 494
Гегенбауэра преобразование 1, 908
Гёделев номер 1, 314; 4, 960
Гёделя интерпретация 1, 908
- - негативная 4, 357
Гёделя теорема о неполноте 1, 909
Гёделя теорема о полноте 1, 910
Гёделя — Мальцева локальная теорема 1, 158
- - теорема о моделях 3, 766
Гёделя — Тарского перевод 4, 357
Гейзенберга представление 1, 911
- принцип 3, 965
Гейзера инволюция 3, 95
Гейла неравенство 2, 513
Гейне — Бореля лемма о покрытии 1, 540; 5, 395
Гейне — Бореля теорема о покрытии 1, 540, 911
Гейне — Бореля — Лебега лемма о покрытии 2, 991
Гейне — Кантора теорема о равномерно непрерывных функциях 2, 991
Гейтинга алгебра 4, 726
- исчисление 1, 911
Гейтинга формальная система 1, 911
Гейтинговская арифметика 1, 911
Гейтинговское исчисление высказываний 1, 911
- - предикатов 1, 911
Гекке оператор 3, 787
Гексасферические координаты 4, 234
Гексаэдр 1, 913; 3, 136
Геликоид 1, 913; 2, 1036
-, Демулена теорема 2, 90
Геллерстедта задача 1, 913
- условие 5, 39
Гёльдера коэффициент 1, 915
Гёльдера методы суммирования 1, 913
Гёльдера неравенство для сумм 1, 914
- - для интегралов 1, 914
- α-полунорма 1, 915
- теорема для линейно упорядоченных групп 1, 328
- - о гамма-функции 1, 869
- - о симметрических группах 4, 1141
Гёльдера условие 1, 915
Гёльдера функциональный класс 4, 1173
Гёльдерово пространство 1, 915
Гельмгольца теорема для векторных полей 1, 650
Гельмгольца уравнение 1, 916
Гельмгольца — Кирхгофа задача 2, 309
Гельфанда поперечник 4, 493
Гельфанда представление 1, 917
- преобразование 2, 985
- формула для спектрального радиуса 1, 383
Гельфанда — Гординга теорема о представлениях групп Ли 2, 359
Гельфанда — Мазура теорема о банаховых алгебрах 1, 382
- - - о спектре элемента 5, 100
Гельфанда — Наймарка теорема о C-алгебрах 1, 384
- - - о линейных операторах 3, 375
Гельфанда — Райкова теорема об унитарных представлениях 5, 509
Генеральная совокупность 1, 917
Генеральный показатель 2, 772; 3, 330; 4, 132
Генератор 1, 54; 4, 1126
- правого сдвига 3, 1113
Генератриса 1, 918; 4, 691
Генерический фильтр 1, 785
Генерическое относительно модели множество 1, 784
Гензелева A-алгебра 1, 918
Гензелево кольцо 1, 918
Гензеля лемма о p-адических числах 1, 918
Генки — Мизеса условия 4, 299
Генцена основная теорема о нормализации 4, 1105
- теорема о выводах 1, 921
Генцена формальная система 1, 919—921
Геодезии математические задачи 1, 921—923
Геодезическая в римановом пространстве 4, 1004
- замкнутая 2, 431
Геодезическая кривизна 1, 923; 4, 1006
- - интегральная 1, 924
Геодезическая линия 1, 924—926; 4, 673
- - в аффинной связности 1, 357
Геодезическая область 1, 927
Геодезическая окружность 1, 927; 4, 438
- - в смысле Дарбу 1, 928
- цепеля 2, 431
- полоса 4, 438
- проекция 2, 742
Геодезическая сеть 1, 928; 4, 1122
Геодезически выпуклая область 4, 1004
- полное риманово пространство 4, 1004
Геодезические координаты 1, 928
- - нормальные 4, 438
- - полярные 4, 438
Геодезический многоугольник 3, 751
Геодезический поток 1, 928
Геодезический треугольник 1, 929
Геодезических геометрия 1, 929
Геодезических гипотеза 1, 930
Геодезическое кручение 1, 931; 3, 129
Геодезическое многообразие 1, 931
Геодезическое отображение 1, 931
Геодезическое расстояние 1, 931
Геодезической нормали вектор 4, 438
Геокриологии математические задачи 1, 931
Геометрическая величина 5, 249
- голоэдрия 3, 108
- кратность собственного значения 5, 58
Геометрическая прогрессия 1, 932
- реализация комплекса 2, 997
- - симплициальной схемы 4, 1160
- решетка 2, 969; 4, 456
- статика 5, 169
- структура, расслоение 5, 249
- теория инвариантов 2, 543
- - чисел 1, 944
Геометрически линейчатая поверхность 3, 381
- неприводимое многообразие 3, 996
- редуктивная группа 4, 946
- эргодическая цепь Маркова 3, 522
Геометрические вероятности 1, 932
Геометрические построения 1, 933
- точки аффинного многообразия 1, 361
Геометрический вектор 1, 632
- дифференциальный инвариант 2, 344
Геометрический комплекс 1, 939; 4, 748
- объект 1, 934
- -, поле 4, 658; 5, 249
Геометрический род 1, 934; 4, 118, 1049
- - многообразия 2, 266
- ряд 1, 932
- симплекс 2, 996
- симплициальный комплекс 2, 996
- слой 2, 431; 5, 299
Геометрических объектов теория 1, 934—939
Геометрическое кольцо 1, 939
Геометрическое место точек 1, 939
- неравенство 2, 513
Геометрическое приближение 1, 939
Геометрическое распределение 1, 940
- расхождение 1, 940
Геометрическое среднее 1, 940; 5, 161
Геометрическая оптики приближение 2, 809
Геометрия 1, 940—943
- абсолютная 1, 34
- алгебраическая 1, 134
- аналитическая 1, 243, 245
- аналлагматическая 1, 289
- аффинная 1, 352
- бипланарная 1, 492
- бирациональная 1, 493
Геометрия в целом 1, 943
- внутренняя 1, 737
- геодезических 1, 929
- Гильберта 1, 965
- гиперболическая 1, 988; 4, 668
- дезаргова 2, 67
- диофантова 2, 157
- дифференциальная 2, 247
- евклидова 2, 397; 4, 668
- инверсионная 2, 1087
- интегральная 2, 570
- комбинаторная 2, 968, 969
- конечная 2, 975
- конформная 2, 1083
- конформно-дифференциальная 2, 1090
- круговая 2, 1086
- Лобачевского 3, 397
- Мёбиуса 2, 1087
- Минковского 3, 700; 4, 668
- многомерная 3, 729
- начертательная 3, 895
- неархимедова 3, 898
- недезаргова 3, 908
- неевклидова 3, 910
- непаскалева 3, 975
- непрерывная 4, 104
- обратных радиусов 2, 1086
-, основания 4, 107
- паскалева 4, 223
- погруженных многообразий 4, 359
-, принцип двойственности 2, 33
- проективная 4, 664
- - дифференциальная 4, 666
- псевдоримановa 4, 742, 1008
- релятивная 4, 973
- Римана 4, 987, 1003
- с коммутативным умножением 4, 224
- стохастическая 5, 236
- сферическая 5, 290
- тканей 5, 356
- финслерова 4, 1008; 5, 621
- центроаффинная 5, 811
- частичная 5, 831
Геометрия чисел 1, 944—950
- эквиаффинная 5, 942
- эллиптическая 4, 668, 987; 5, 979
Геометродинамика 1, 950
Геометро-оптическое приближение 1, 939
Геон 1, 950
Геотермики математические задачи 1, 951
Геофизики математические задачи 1, 951—954
Герглотца формула 1, 954; 2, 587
Герона треугольник 1, 954
Герона формула 1, 954
Герца вариационный принцип 1, 599
Герца принцип в механике 1, 954
Гессе матрица 3, 1153
- отображение 5, 223
Гессиан алгебраической кривой 1, 955
- формы 2, 896
Гессиан функции 1, 955
Гессиана 1, 955; 3, 140; 4, 310
Гетероклиническая точка 1, 955
Гетероклиническое решение 1, 955
Гетероморфизм 4, 515
Гетероскедастичность 1, 1061
Гжегорчика система 3, 764
Гиббса канонический ансамбль 5, 179
Гиббса распределение 1, 956—958
Гиббса статистический ансамбль 1, 958
Гиббса явление 1, 958
Гиббса — Аппеля уравнение 1, 301
Гиббсовское равновесное распределение 5, 200
- состояние 5, 203
Гидродинамики математические задачи 1, 959—964
- релятивистской математические задачи 4, 971
- уравнение 1, 421
Гидродинамическое приближение 1, 964
Гильберта геометрия 1, 965
- граничная задача 3, 323
Гильберта инвариантный интеграл 1, 966; 5, 956
- квадратичный символ 5, 776
- метрика 1, 965
Гильберта многочлен 1, 967
Гильберта неравенство 1, 967
Гильберта преобразование 1, 968
- проблема десятая 1, 218; 2, 158
- - пятая 1, 245; 3, 255; 5, 368
- - седьмая 5, 426
- - четырнадцатая 2, 543
- - шестнадцатая 2, 70
- символ 3, 1077
Гильберта сингулярный интеграл 1, 969
Гильберта система аксиом евклидовой геометрии 1, 969—971
Гильберта схема 1, 971
Гильберта теорема 1, 971—974
- - 90 1, 973
- - о базисе 1, 971
- - о неприводимости 1, 971
- - о нулях (корнях) 1, 972
- - о плоскости Лобачевского 1, 408
- - о поверхностях отрицательной кривизны 1, 973
- - о сизигиях 1, 973
- - о степенях натуральных чисел 1, 372
- - о циклических расширениях 1, 973
- - об абсолютном экстремуме 1, 974
- - об инвариантах 1, 974
Гильберта теория интегральных уравнений 1, 974
- трансфинитное пространство 3, 899
- финитизм 3, 570
Гильберта ядро 1, 969, 975
Гильберта — Бернайса теория 5, 641
Гильберта — Варинга проблема в теории чисел 1, 609
Гильберта — Камке проблема 1, 975
Гильберта — Привалова граничная задача 3, 323
Гильберта — Самюэля функция 3, 438
Гильберта — Шмидта интегральный оператор 1, 975; 2, 605
Гильберта — Шмидта норма 1, 977
Гильберта — Шмидта оператор 1, 977; 5, 116

Гильберта — Шмидта ряд 1, 977
- - теорема о сходимости 1, 977
Гильберта — Эйлера проблема в теории чисел 1, 977
Гильбертов кирпич 1, 978
Гильбертова алгебра 1, 978
- размерность 1, 981
- шкала 2, 630
Гильбертово многообразие 2, 357
- поле классов 4, 401
Гильбертово пространство 1, 978—985
- -, внутреннее произведение 1, 979
- -, изометрический изоморфизм 1, 979
- -, изоморфизм 1, 979
- -, линейная независимость 1, 982
- -, линейная размерность 1, 981
- -, ортогональное дополнение 1, 980
- -, ортогональные векторы 1, 980
- -, ортогональные линейные многообразия 1, 980
- - оснащенное 4, 106; 5, 130
- -, Пифагора теорема 1, 981
- -, полнота 1, 979
- -, прямая сумма 1, 982
- -, размерность 1, 981
Гильбертово пространство с индефинитной метрикой 1, 985—987; 4, 717
- -, скалярное произведение 1, 979
- -, тензорное произведение 1, 983
Гипералгебра 5, 790
Гипербола 1, 987; 2, 1034; 3, 383, 387
-, асимптота 1, 988
-, диаметр 1, 988
-, директриса 1, 988
-, ось 1, 988
- равнобочная (равносторонняя) 1, 988
-, фокальный параметр 1, 988
-, фокус 1, 987
-, фокусное расстояние 1, 987
-, центр 1, 987
-, эксцентриситет 1, 988
Гиперболическая геометрия 1, 988; 4, 668
- -, косинусов теорема 1, 990
- -, синусов теорема 1, 990
- гомология 1, 1060
- группа Кокстера 2, 945
- длина 1, 988
- емкость 5, 422
- инверсия 2, 545
- инволюция 2, 548
- лемниската Бута 1, 566
- мера 1, 988
Гиперболическая метрика 1, 988, 989
- плоскость 4, 746, 747; 5, 507
- плотность, метрика 1, 989
- площадь 1, 989
- поверхность 5, 515
- показательная функция 4, 27
- постоянная Чебышева 5, 422
- пространственная форма 4, 709
- прямая 2, 801; 3, 12; 4, 746, 747
- связка окружности 4, 1090
- - сфер 4, 1090
- сеть 4, 1123
- система в узком смысле 3, 326
- - симметрическая 3, 327
Гиперболическая спираль 1, 989
- точка 2, 252; 4, 746, 747
- - динамической системы 1, 990
Гиперболическая точка поверхности 1, 990
Гиперболическая тригонометрия 1, 990
- форма 1, 713
Гиперболические функции 1, 991
Гиперболический диаметр 5, 422
- дифференциальный оператор 2, 346
- интеграл 5, 991
- косинус 1, 991; 3, 38
- - интегральный 2, 601
- круг 1, 989
- линейный дифференциальный оператор 3, 366
- луч 2, 1014
Гиперболический параболоид 1, 992
- пучок 4, 772, 773
- сектор 4, 1106
- синус 1, 991; 4, 1191
- - интегральный 2, 601
- тангенс 1, 991; 5, 320
- тип римановой поверхности 4, 1019, 1028
- трансфинитный диаметр 5, 422
Гиперболический цилиндр 1, 992; 5, 819
Гиперболического типа уравнение 1, 992
Гиперболического типа уравнение, численные методы 1, 993—998
Гиперболическое дробно-линейное отображение 2, 386
Гиперболическое множество 1, 998
- пространство 1, 713
- псевдорасстояние 5, 422
- расстояние 1, 988, 989; 4, 283
- уравнение 2, 299, 300, 323
- - вырожденное 1, 806
- - линейное 3, 325
Гиперболической метрики принцип 1, 999
Гиперболичности область 5, 45
Гиперболоид 1, 1000
-, асимптотический конус 1, 1000
- вращения 1, 1000
- однополостный 3, 1172
-, полуоси 1, 1000
- правильный 1, 1000
Гиперболо-параболического типа уравнение 5, 45
Гипергармоническая функция 4, 403
Гипергармонический пучок 1, 889; 4, 532
Гипергеометрическая функция 1, 1001—1003
- - вырожденная 1, 804
- -, Гаусса формула 1, 1003
- - конфлюэнтная 2, 1083
Гипергеометрический ряд 1, 1003
Гипергеометрическое распределение 1, 1003
Гипергеометрическое уравнение 1, 1004
- - вырожденное 1, 806
- - обобщенное 4, 992
Гипергомологий функтор 1, 1005
Гиперграф 1, 1006
-, вершина 1, 1006
-, двойственность 1, 1006
-, инцидентность 1, 1006
-, ребро 1, 1006
-, смежные вершины 1, 1006
-, степень вершины 1, 1006
-, степень ребра 1, 1006
Гипергруппа 3, 1111
Гипериммунное множество 2, 523; 4, 724
Гиперкогомологий функтор 1, 1006
Гиперкомплексная система 1, 1008; 3, 1113
Гиперкомплексного переменного функция 1, 1007
Гиперкомплексное число 1, 1008
Гиперкуб 3, 208
Гипермаксимальный оператор 4, 1074
Гиперпараллельные прямые 4, 747
Гиперплоскость 1, 644, 981, 1008; 3, 345
- бесконечно удаленная 1, 443
- несобственная 4, 675
- опорная 1, 794, 797; 4, 29
-, полюс 4, 477
- пространственно ориентированная 3, 327
Гиперповерхность 1, 1009
- алгебраическая 1, 1009
- аналитическая 1, 1009
- выпуклая 1, 799
- детерминантная 2, 99
- кубическая 3, 140
-, степень (порядок) 1, 1009
Гиперполное локально выпуклое пространство 5, 383
Гиперпростое рекурсивно перечислимое множество 4, 959
Гиперпространство 1, 644, 981, 1009
Гиперфункция 3, 443; 5, 674
Гиперцентр 1, 1010
Гиперцикл 1, 1010; 5, 948
Гипершар 5, 881
Гиперэллиптическая кривая 1, 1010; 4, 312
- поверхность 4, 1032; 5, 985
- тета-функция 4, 999
Гиперэллиптический интеграл 1, 1010
Гиперэллиптическое поле 1, 1011
Гипотеза — см. соответствующее название
Гипотенуза 1, 1011
Гипотетическое распределение 4, 700
Гипотрохоида 1, 1012; 5, 448
Гипоциклоида 1, 1011
Гипоэллиптический линейный дифференциальный оператор 3, 366
Гира определение 2, 413
- процедура 2, 414
Гистограмма 1, 1012
Гишара конгруэнция 1, 1012
- поверхность 1, 1012
Главная ветвь обратной тригонометрической функции 3, 1135
- вычислимая нумерация 3, 1087
- изотопия 2, 519
- категория 1, 1091
- конгруэнц-подгруппа 2, 1013; 3, 784
Главная кривизна 1, 1012; 2, 253; 3, 97
- норма элемента алгебры 2, 212
Главная нормаль 1, 1013; 2, 249
- нумерация 5, 418
- ось линии второго порядка 2, 1034
- парабола 5, 993
- поверхность комплекса 2, 1003
- - конгруэнции 5, 613
- полоса 4, 472
- поляризация 4, 477
- сеть отображения 4, 157
- теорема Гартогса 1, 893
Главная трансляция 1, 1013
Главная часть дифференциального оператора 1, 1013
- - ряда Лорана 1, 265
Главного типа оператор с частными производными 1, 1013
Главное аналитическое расслоение 1, 1013—1015
- значение аргумента комплексного числа 2, 1009
- - логарифма 3, 408
- - несобственного интеграла 3, 1019
Главное направление 1, 1015; 2, 252; 3, 97
- однородное G-множество 1, 1018
Главное однородное пространство 1, 1015
- основание изгибания 2, 493
- открытое множество 5, 102
Главное расслоение 1, 1015
Главное фундаментальное решение эллиптического уравнения 1, 1016
Главный дивизор 2, 129
- - Вейля 2, 130
Главный идеал 1, 813, 1017; 2, 482
- -, область 1, 1019
- идель 2, 486
- -, группа 4, 401
- коннекс 2, 1035
- масштаб 2, 741, 746
- минор системы линейных уравнений 3, 357
- многочлен алгебры 2, 212
- нормальный ряд группы 3, 1076
Главный G-объект в топологизированной категории 1, 1017
Главный ряд 1, 1018; 2, 485
- - подгрупп 4, 368
- символ линейного дифференциального оператора 3, 366
- - оператора 4, 1135
- скрещенный гомоморфизм 4, 1205
- след элемента алгебры 2, 212
Главный фактор полугруппы 1, 1019
- фильтр 5, 615
Главный характер 1, 1019; 2, 192
Главных идеалов кольцо 1, 1019
Гладкая выпуклая поверхность 1, 788
- динамическая система 2, 147
- - -, множество гиперболичности 1, 998
- коцепь 1, 411
- структура 2, 355
Гладкая схема 1, 1020
- точка поверхности 2, 756
Гладкая точка функции 1, 1021
Гладкая функция 1, 1021
τ-гладкая мера Бореля 1, 537
Гладкий гомеоморфизм 2, 234
- каскад 2, 757
Гладкий континуум 1, 1021
Гладкий морфизм 5, 300
Гладкий морфизм схем 1, 1021
- -, теорема о специализации 5, 1025
- поток 4, 538
σ-гладкий функционал 3, 643
τ-гладкий функционал 3, 643
Гладкое пространство 1, 1022
- - аналитическое 1, 285
- - банахово 1, 389
Гладкости класс 2, 357
Гладкости модуль 1, 1022
Гливенко — Кантелли теорема 5, 998
Глиссона доля 1, 133
Глобализуемая псевдогруппа преобразований 4, 731
Глобальная проблема Торелли 5, 406
Глобальная размерность аналитического пространства 1, 285
Глобальная структура траекторий 1, 1022—1024
Глобально выпрямляемая динамическая система 4, 417
Глобально симметрическое риманово пространство 1, 1024—1026
Глобального минимума точка 3, 602
Глобальное поле 1, 1026; 2, 157; 4, 400
Глобальные оптимизирующие преобразования программ 4, 644
Глобальный анализ 3, 962
- индекс пересечения 4, 255
Глубина модуля 1, 1026
- схемы из функциональных элементов 5, 302
Годограф 1, 651, 1027
- Михайлова 3, 707
- скорости 2, 530
Годографа преобразование 1, 1027
Голди теорема о классически полупростых кольцах 2, 868
- - о кольцах 1, 341
Голоморф группы 1, 1028; 4, 913
Голоморфизм 1, 471
Голоморфная выпуклость 1, 800; 5, 899
- - слабая 5, 899
- кривая 1, 249
- матрица 1, 251
- отделимость 5, 899
- редукция пространства 1, 1029
Голоморфная форма 1, 1028
- -, Дольбо — Серра теорема 1, 1029
Голоморфная функция 1, 262, 268, 269, 1029; 4, 1014; 5, 690
- -, Адамара теорема о трех кругах 1, 87
- -, Блоха теорема 1, 506
- -, Бляшке теорема 1, 509
- -, Бюрмана теорема 1, 570
- -, Гартогса основная теорема 1, 269
- -, Гартогса теорема 1, 893
- -, Гурвица теорема 1, 1150

- -, компактное семейство 2, 993
- -, Кузена проблемы 1, 273
- -, Кузена теорема 1, 616
Голоморфно выпуклая область 1, 272, 1031
Голоморфно выпуклое комплексное пространство 1, 1029
- полное многообразие 5, 899
- - пространство 5, 899
Голоморфное векторное поле 2, 278
Голоморфное отображение 1, 268, 282, 285, 1030
- - локально обратимое 1, 1030
- - невырожденное 1, 1030
- представление 1, 283
- расслоение 1, 639
- число Лефшеца 3, 239
Голоморфности область 1, 272, 1030—1032; 4, 414
- -, Беенке — Штейна теорема 1, 396, 1031
- -, Картана — Туллена теорема 1, 1031
Голоморфности оболочка 1, 273, 1032
- полуплоскость 2, 184
- прямая 2, 184
Голоморфный автоморфизм области 1, 471
- дифференциал 2, 239
- изоморфизм 1, 471
- комплекс де Рама 1, 1029
Голономии группа 1, 1032
Голономная сеть 4, 1122
Голономная система 1, 1033
Голономные координаты 1, 1034
Голономный линейный дифференциальный оператор 3, 368
Голоэдрия арифметическая 3, 108
- геометрическая 3, 108
Голубева теорема о мероморфных функциях 4, 566
Голубева — Привалова теорема о комплексной суммируемой функции 1, 1034
- - - об интеграле типа Коши — Стилтьеса 3, 54
- - условие 1, 1034
Голузина теорема искажения 2, 669
Гольдбаха проблема в теории чисел 1, 1035
- - ослабленная 1, 94
Гольдбаха — Варинга проблема в теории чисел 1, 1035
Гольдбаха — Эйлера квазипроблема 1, 93
Гомеоморфизм 1, 1035—1038; 3, 152; 5, 390
- алгебр 2, 961
- вполне минимальный 2, 806
- гладкий 2, 234
- графов 1, 1116
- дифференцируемый 2, 234
- локальный 3, 444
pl-гомеоморфизм 4, 411
Γ-гомеоморфизм 3, 743
Гомеоморфизмов группа 1, 1038
Гомеоморфное отображение 1, 1035
Гомеоморфные пространства 1, 1035; 5, 390
Гомсотопий группа 1, 1038; 3, 33
Гомографическое преобразование 1, 301
Гомогруппа 3, 692
Гомоклиническая точка 1, 1039
Гомоклинический контур 1, 956
Гомоклиническое решение 1, 1039
Гомологии Александрова — Чеха 1, 234; 5, 126
Гомологии база 1, 1040
- Вьеториса 1, 828
- групп 2, 911
- - кос 3, 34, 35
Гомологии группа 1, 1040—1042
Гомологии динамической системы 1, 1042
- и когомологии специальные 1, 234
Гомологии комплекса 1, 1042
- - группа 2, 998
- локальные 3, 441
- относительные 4, 151
Гомологии полиэдра 1, 1043
Гомологии с компактными носителями 1, 1044
- сингулярные 4, 1178
- спектральные 5, 126
Гомологии теория 1, 1044—1049
- -, гомоморфизм 1, 1047
- -, изоморфизм 1, 1047
- - обобщенная 1, 1046
- - частично полуточная 1, 1046
- Чеха 5, 126
Гомологий аксиоматическая теория 5, 231
- алгебраический класс 1, 180
- группа 4, 1163
- теория обобщенная 3, 1123
Гомологическая алгебра 1, 1049—1052
- - относительная 4, 143
- группа 1, 1140
Гомологическая классификация колец 1, 1052
- коразмерность 1, 1027
Гомологическая последовательность 1, 1045, 1052, 1058; 2, 1000, 1002
- - триад 1, 1047, 1048
- - троек 1, 1047
Гомологическая размерность 1, 1053—1055
Гомологическая размерность пространства 1, 1055
- - слабая 1, 1053
- сфера 4, 748
- теория размерности 1, 1055; 4, 823
Гомологически эквивалентные алгебраические циклы 1, 181
Гомологические умножения 1, 1056
Гомологический поперечник 1, 1060
Гомологический функтор 1, 1057
Гомологическое многообразие 1, 1058
Гомологическое опоясывание 1, 1060
Гомологичный нулю цикл 1, 1043; 2, 953
Гомология в проективной геометрии 1, 1060; 2, 951
- гиперболическая 1, 1060
- неособенная 1, 1060
- особенная 1, 1060
-, ось 1, 1060
- параболическая 1, 1060
- полярная 2, 1085
-, проекционная группа 2, 36
- сильная 4, 1130, 1206
- слабая 4, 1205
-, спектровая группа 2, 36
-, центр 1, 1060
Гомоморфизм 1, 1061
- автоматов 1, 68
- алгебраический алгебраической группы 1, 142
- Бокштейна 2, 923
- граничный 1, 1063
- групповых объектов 1, 1149
- Гуревича 1, 1066; 4, 1165
-, Гуревича теорема 1, 1066
- естественный 5, 592
- Левина 5, 482
- локальный 3, 267, 425
- метрический 3, 667
- надстройки 1, 1067
- неукорачивающий 5, 644
- операторный 4, 22, 25
- пополняющий 4, 1084
- порядковый 5, 522, 524
- пучков 4, 767
- связывающий 2, 999, 1000
- сильный 1, 1061
-, p-я симметрическая степень 4, 1141
- Ω-систем 1, 156
- скрещенный 2, 917; 4, 1205
- теории гомологии 1, 1047
- топологический 5, 384
- топологических колец 5, 386
- Уайтхеда 5, 463
-, ядро 2, 962; 3, 1073; 4, 372
J-гомоморфизм 5, 463
I'-гомоморфизм 5, 256
T-гомоморфизм 1, 722
y-гомоморфизм 5, 524
Гомоморфизма образ 2, 961
- теорема 5, 497
Гомоморфные автоматы 1, 68
Гомоскедастичность 1, 1061
Гомотетичные фигуры 1, 1061
Гомотетия 1, 1061
-, коэффициент 1, 1061
-, A-модули 4, 458
-, центр 1, 1061
Гомотопии аксиома 1, 1045; 5, 231
- оператор 4, 632
- теория 1, 1076
Гомотопическая группа 1, 1062—1068; 4, 1165
- - n-мерная 1, 1063
- - пары 1, 1069
- - пространства 1, 1063
- - стабильная 5, 163
- - сфер стабильная 1, 1067
- - стационарная 1, 1067
- - схемы 1, 1075
- единица 4, 713
- последовательность расслоения 1, 1064
- резольвента 1, 1070, 1072; 4, 515, 516
- система 1, 1064
- трансгрессия 1, 1064
- эквивалентность 5, 397
S-гомотопическая группа 2, 48
Гомотопически ассоциативное отображение 4, 713
- инвариантный функтор 1, 1062
- мономорфное отображение 1, 1068
- обратный элемент 4, 713
- n-простое пространство 1, 1065
- устойчивое отображение 4, 128
- эквивалентные пространства 1, 1068
- эпиморфное отображение 1, 1068
Гомотопические группы сфер 5, 283
Гомотопический тип 1, 1068—1074
- -, проблема 1, 1068
- - простой 4, 707
Гомотопический тип топологизированной категории 1, 1074
Гомотопия 1, 1075; 2, 1002; 4, 1164
- клеточная 2, 878
- накрывающая 3, 887; 4, 1166
- отображений пар 1, 1076
- регулярная 4, 358
- свободная 1, 1075
- симплициальная 4, 1169
Гомотопность отображений 1, 1075
Гомотопные морфизмы 2, 1002
Гомотопные симплексы 4, 1165
Гомотопные симплициальные отображения 4, 1164
Гониометрия 1, 1076
Гоноэдр Эрмита — Минковского 2, 788
Гонсета парадокс 1, 295
Гончарова константа 1, 30
- полином 1, 30
- проблема 1, 29
Горбушка 4, 1102
Горджинга неравенство 1, 1076
Гореншгейна кольцо 1, 1076
- схема 1, 1077
Гореншгейнова особенность 4, 915
Горизонтальная плоскость проекций 3, 895
Горизонтальное отображение 4, 154
- поднятие кривой 4, 1098
- подпространство 4, 154
Горизонтальное распределение 1, 1077
Горловой эллипс 1, 1000, 1078
Горнера схема 1, 1078
Гравитационная масса 3, 536
Гравитация 1, 1078—1080
Градиент 1, 895, 1080—1082
- скалярного поля 1, 648
- тензора 2, 898
- функционала 3, 960
Градиента метод 3, 603
Градиентная динамическая система 1, 1082
- система 5, 86
Градиентное поле 1, 1082; 4, 536
Градиентное преобразование 1, 1082—1084
Градиентной инвариантности свойство теории поля 1, 1083
Градиентный метод 1, 1084
- спуск 1, 593
Градуированная алгебра 1, 1084
- - Ли 3, 251
- проективная размерность 1, 1053
Градуированное кольцо 1, 1084
Градуированно - коммутативная супералгебра 5, 276
Градуированный модуль 1, 1084
- -, Гильберта многочлен 1, 967
- объект 2, 1001
Градус 1, 1084
Грама матрица 1, 1084
Грама определитель 1, 1085
Грама — Шарлье ряд 1, 1086
Грама — Шмидта процесс ортогонализации 1, 982; 4, 80
Грамматика 1, 1087
Грамматика автоматная 1, 1087
Грамматика бесконтекстная 1, 1087—1090
- - однозначная 1, 1088
-, временная сложность 1, 1092
Грамматика доминационная 1, 1090
-, емкость 1, 1092
- зависимостей 1, 1090
Грамматика категориальная 1, 1090
- конечно-автоматная 1, 1087
- контекстная 1, 1093
- контекстно-свободная 1, 1087
Грамматика линейная 1, 1091
- матричная 1, 1089
- обобщенная 1, 1092
Грамматика порождающая 1, 1092
- программированная 1, 1089
- с конечным числом состояний 1, 1087
- с порядком 1, 1089
Грамматика составляющих 1, 1093—1095
-, схема 1, 1092
Грамматика трансформационная 1, 1095
- Хомского 1, 1092
КС-грамматика 1, 1087
НС-грамматика 1, 1093
Гранди функция 2, 475
Граней оператор 4, 1161, 1167, 1169
Граница 1, 1095; 2, 260
- абсолютной погрешности 4, 356
- винеровская гармоническая 4, 1030
- - идеальная 4, 1030
- внутренняя 1, 738
- выпуклости функции 1, 799
- доверительная 2, 365, 367
- звездообразности 2, 450
- кольцевая 2, 965
- множества, площадь 4, 330
- области 3, 1097
- относительной погрешности 4, 356
- полуплоскости 4, 462
- функции аддитивная 1, 1042
- - мультипликативная 1, 1042
- Шилова 2, 965, 987
- Шоке 2, 966
- элемента комплекса 2, 995
Граничная задача Карлемана 2, 725
- мера 5, 264
- поверхность 2, 1015
- теорема единственности 4, 566
- - - Лузина — Привалова 2, 402, 403
- точка достижимая 2, 377
- - иррегулярная 2, 666; 4, 275, 533
- - луча 2, 1015
- - неособая 3, 968
- - регулярная 4, 275, 533, 933
Граничное значение по всем некасательным путям 5, 466
- - радиальное 2, 403; 4, 802
- - угловое 2, 402; 4, 566; 5, 466

- предельное множество 4, 567
- условие 3, 605
Граничные задачи теории аналитических функций 1, 1095—1098
Граничные свойства аналитических функций 1, 1098—1102
- - конформных отображений 2, 1099
Граничные условия 1, 1102; 3, 86
- - типа Штурма 5, 915
Граничные элементы области 1, 1102, 1103
Граничный гомоморфизм 1, 1063
- морфизм 1, 1053, 1057
- оператор 1, 1047, 1063; 2, 953, 998
- символ 4, 1135
- элемент, дополнительная точка 1, 1103
- -, Каратеодори теорема 1, 1103
- -, носитель 1, 1103
- - римановой поверхности 4, 1029
- -, смежная точка 1, 1103
- -, тело 1, 1103
Граничных вариаций метод 1, 1103
Грань аналитического полиэдра 1, 277
- верхняя 1, 672
- - точная 5, 834
- выпуклого многогранника 1, 801
- - тела 1, 797
Грань многогранника 1, 1104; 3, 708
- многогранного угла 3, 712
- нижняя 1, 672; 3, 1036
- - точная 5, 834
- области Вейля 1, 629
- симплекса 2, 996; 3, 151; 4, 681, 1152, 1159
- элемента комплекса 2, 995
Грассмана алгебра 1, 732; 2, 732, 735
Грассмана многообразие 1, 1104
Грассмановы координаты 1, 732; 4, 334, 681
Грауэрта теорема конечности 2, 1025
Граф 1, 1105—1108
-, *автоморфизм* 1, 1112
-, асимметричный 1, 1112
-, базис циклов 1, 1110
- бихроматический 1, 1108
- булевой функции 1, 557
- вершина 1, 1105
-, вложение 1, 1115
- гамильтонов 1, 1113
-, гамильтонов цикл 1, 1113, 1119
-, гамильтонова цепь 1, 1113
- гамильтоново связный 1, 1113
-, гомеоморфизм 1, 1116
Граф двудольный 1, 1108
-, дерево 2, 91
-, диаметр 1, 557, 1106
-, добавление вершины 1, 1107
-, - ребра 1, 1107
- дополнительный 1, 1106
-, древесность 1, 1120
-, дуга 1, 1005, 1108
-, замкнутый маршрут 1, 1108
-, изолированная вершина 1, 1106
-, изоморфизм 1, 1105, 1116
- Кокстера 2, 944; 3, 17
-, компонента связности 1, 1114
-, контур 1, 1108
-, концевая вершина 1, 1106
- критический 1, 1111
-, крупность 1, 1120
-, маршрут 1, 1106, 1108
-, матрица инцидентности 1, 1105, 1108
-, - смежности 1, 1105, 1108
-, независимости число 1, 1120
- неориентированный 1, 1105
-, обход 1, 1112
Граф ориентированный 1, 1105, 1108
-, отклоненность вершины 1, 557
- Петерсена 1, 1112
-, петля 1, 1105
- планарный 1, 1109
Граф плоский 1, 1109, 1115
-, плотность 1, 1120
-, подразбиение ребра 1, 1107, 1116
- полный 1, 1106
-, полюс 4, 968
-, Понтрягина — Куратовского теорема (критерий) 1, 1109, 1119
-, правильная укладка 1, 1115
-, простая цепь 1, 1106
-, простой цикл 1, 1106
-, пустой 1, 1106
-, путь 1, 1108
-, радиус 1, 557, 1106
-, разрез 1, 1114
-, раскраска 1, 1113
-, расстояние 1, 1106
-, реберное хроматическое число 1, 1120
- реберный 1, 1106
-, ребро 1, 1105
- регулярный 1, 1106
-, род 1, 1115
-, с выделенными полюсами 4, 1122
- связный 1, 1106, 1114
- - односторонне 1, 1109
- сильносвязный 1, 1109
- сильный 1, 1109
- слабосвязный 1, 1109
- слабый 1, 1109
-, сложение 1, 1107
Граф случайный 1, 1110
-, смежные вершины 1, 1105
-, - ребра 1, 1105
-, степень вершины 1, 1106
-, стягивание ребра 1, 1107
-, теория 1, 1117
-, толщина 1, 1115, 1120
- тотальный 1, 1106
-, удаление вершины 1, 1107
-, - ребра 1, 1107
-, укладка 1, 1115
- k-факторизуемый 5, 591
-, хроматический класс 1, 1114
-, - многочлен 1, 1114
-, хроматическое число 1, 1113, 1120
-, центр 1, 1106
-, цепь 1, 1106
-, цикл 1, 1106
-, цикломатическое число 1, 1120
-, число вершинной связности 1, 1114, 1120
-, - *внешней устойчивости* 1, 1120
-, - внутренней устойчивости 1, 1120
-, - реберной связности 1, 1114, 1120
-, - скрещиваний 1, 1115
-, числовые характеристики 1, 1120
-, Эйлера теорема 1, 1112
- эйлеров 1, 1113
-, эйлеров цикл 1, 1112
-, эйлерова цепь 1, 1112
Граф экстремальный 1, 1111
Графа автоморфизм 1, 1112
Графа обход 1, 1112
Графа раскраска 1, 1113
Графа связность 1, 1114
Графа укладка 1, 1115
График замкнутый 2, 436; 5, 384
- Куратовского 3, 150
- мероморфного отображения 3, 651
- многозначного отображения 3, 720
- оператора 4, 19
График отображения 1, 1115; 5, 384
- сетевой 4, 1119, 1121
-, усечение 4, 27
- функции 5, 713
Графический матроид 3, 623
- способ задания функции 5, 717
Графическое равенство 1, 1116
Графов гомеоморфизм 1, 1116
Графов изоморфизм 1, 1116
Графов теория 1, 1117—1120
Графов числовые характеристики 1, 1120
Грегори формула 1, 1121
Греда метод 5, 854
Греко-латинский квадрат 4, 90
Гретцера — Шмидта теорема о решетках Стоуна 5, 234
Грётша принцип для конформных отображений 1, 1121
Грётша теоремы о конформных отображениях 1, 1122
Греффе метод 3, 401
Грина интеграл 1, 876, 1126
Грина линии 1, 1122
- объемный потенциал 4, 529
Грина отношения эквивалентности на полугруппе 1, 1122
- потенциал двойного слоя 4, 529
Грина пространство 1, 1123
- ребро 4, 668
- теорема о голоморфном отображении 4, 286
Грина формула для потенциалов 4, 527
Грина формулы 1, 270, 876, 1123—1126; 5, 83
Грина функция 1, 1126—1132; 2, 178; 3, 75, 530
- -, Боголюбова неравенство 1, 510
- - в статистической механике 1, 1131
- - комплексная 1, 1131; 5, 889
- -, линия уровня 5, 544
- - обобщенная 4, 531
Грина — де Рама оператор 5, 789
Гринова емкость 2, 405
Грисса — Нельсона логика 2, 1041
Гриффитса гипотеза о компактификации 4, 155
- многообразие 4, 154
- промежуточный тор 4, 697
Гробмана — Хартмана теорема о динамических системах 3, 422
Гроздь выборочная 1, 774
Громола — Майера теорема о кривизне 3, 101
Гронуолла метод суммирования 1, 1132
Гротендика группа 1, 161, 1133
- дуализирующий пучок 2, 35
Гротендика категория 1, 1133
- *когомологии* 2, 907
- кольцо 4, 595
- лемма для дифференциальных форм 2, 264
- теорема жесткости 2, 989
- - *о полных сепарабельных пространствах* 2, 44
- - о пучках 4, 770
Гротендика топология 1, 1134; 5, 365
Гротендика функтор 1, 1134
Грубая ошибка 4, 181, 183
Грубая система 1, 1134; 2, 768
- схема 3, 772
Грубость локальная 3, 422
Груда 1, 1135
- обобщенная 1, 1136
Груды и полугруды 1, 1135
Грунского неравенство 2, 669; 3, 1169
- теорема о конформном отображении 3, 727
Групп категория 1, 1136
- когомологии 2, 909, 916
Групп многообразие 1, 1136—1138
Группа 1, 1138—1141
- абелева 1, 17
- абсолютно неприводимая 3, 995
- автоморфизмов 1, 198
- - билинейной формы 1, 483
- аделей 1, 95
-, алгебра мер 1, 881
- алгебраическая 1, 142
- алгебраически компактная 5, 880
- аменабельная 2, 535; 5, 512
- аналитическая 1, 245
- анизотропная 1, 290; 3, 487
- арифметическая 1, 321
- артинова 1, 327
- архимедова 1, 328
-, ассоциированная с квазигруппой 2, 802
- аффинная 1, 352, 362
- Барсотти — Тейта 2, 82
Группа без кручения 1, 1142
- без малых подгрупп 5, 369
- без центра 5, 66, 802
- бесконечного порядка 4, 504
- Бетти 1, 464
- бинарная p-адическая 1, 486
- Брауэра 1, 544; 2, 911
- Брауэра — Гротендика 1, 546
- Брискорна 3, 36
- Вейля 1, 625; 3, 16
- - группы Ли 1, 626
- - системы Титса 5, 354
- Вейля — Шатле 1, 631
- векторная 1, 636
-, вербальное произведение 1, 654
- Витта 1, 711, 712, 714
- Витта — Гротендика 1, 715
- вложимая 2, 1022
-, внешний автоморфизм 1, 736
-, внутренний автоморфизм 1, 736
- внутренних автоморфизмов 4, 639
- вращений 4, 81
-, второй член нижнего центрального ряда 2, 981
- вырожденная 2, 877
- Галилея 1, 844; 4, 148
- Галуа 1, 845, 850, 1139
- гамильтонова 1, 858
-, главный ряд 1, 1018
- главных идеалов 4, 401
-, голоморф 1, 1028
- голономии 1, 1032
- гомеоморфизмов 1, 1038
- гомеотопий 1, 1038; 3, 33
- гомологии 1, 1040
- - комплекса 2, 998
- - r-мерная 1, 1043
- - проекционная 2, 36
- - спектровая 2, 36
- гомологий 2, 911; 4, 1163
- - алгебры 2, 911
- - Александрова — Чеха 1, 234
- - Вьеториса 1, 830
- - группы 2, 911, 917
- гомологическая 1, 1140
-, гомологическая размерность 1, 1054
- гомотетических преобразований 4, 373
- гомотопическая 1, 1062; 4, 1165
- S-гомотопическая 2, 48
- Гротендика 1, 161, 1133
- движений 2, 22, 529
- - однородного пространства 3, 1175
-, действие 4, 382
- действующая свободно 4, 383
- делимая 4, 415
- p-делимая 2, 82
- диагональная 2, 123
- дивизоров Вейля 2, 130
- Диксона 2, 138
- дискретная 2, 195
- дифференциальная 2, 260
- диэдра 2, 363
- диэдральная 2, 363
- доупорядочиваемая 2, 378
- единиц Пелля 1, 164
-, единица 1, 1138
-, Жордана — Гёльдера теорема 2, 424
- зависимости точки 4, 1184
- замкнутая в смысле Шура 5, 920
- знакопеременная 2, 464
- идеалов 2, 129
- иделей 1, 95; 2, 486
- изометрий 2, 529
- изотропии 2, 521; 4, 731; 5, 163
-, инвариантная компонента 2, 876
-, инвариантное подмножество 2, 534
-, инвариантный ряд 3, 1076
-, интеграл Фурье 1, 882
- иррегулярная 4, 383
- калибровочная 5, 1060
- квазидиэдральная 2, 806
- квазиразложимая 2, 820
- квазирасщепимая 2, 820
- квазифуксова 2, 876
- квазициклическая 2, 827; 4, 416
- кватернионов 2, 840
- классическая 2, 865
- классов в смысле Вебера 1, 168
- - дивизоров 2, 129

- - идеалов 2, 129
- - идеалей 4, 401
- клейнова 2, 875
- Клиффорда 2, 882; 5, 138
- когомологий 2, 909, 919; 4, 1163
- когомологическая комплекса 2, 998
-, когомологическая размерность 1, 1054
- когомотопическая 2, 927
- S-когомотопическая 2, 48
- Констера 2, 944
-, коммутант 2, 981
- коммутативная 2, 989
- компактная 2, 991
- конечная 2, 1016
- конечно определенная 2, 1019; 4, 34
- - порожденная 2, 1019
-, конечный ранг 1, 1143
- конформных преобразований 2, 1084
-, копредставление 3, 10
-, копреобразование Фурье 1, 882
-, Коши теорема 3, 63
- коэффициентов теории гомологий 1, 1046
- кратно примитивная 4, 636
- кратно транзитивная 5, 411
- кремоновых преобразований 4, 917
- Кремоны 3, 94, 95
- кристаллографическая 3, 106
- критическая 1, 1137
- Куммера 3, 148
-, левое (правое) регулярное представление 2, 992
- Ли 1, 245; 3, 254
- линейная 3, 300
- - алгебраическая 3, 297
- - классическая 3, 303
- линейно упорядоченная 3, 322
- линейного комплекса 4, 1157
-, линейное представление 3, 292
- локально бикомпактная, групповая алгебра 1, 1145
- - конечная 3, 432
- - нильпотентная 3, 435
- - нормальная 3, 435
- - разрешимая 3, 436
- - свободная 3, 436
- - циклическая 1, 17
- Лоренца 3, 453; 4, 82, 147
- максимальная почти периодическая 2, 1022
- массивная 5, 511
- матричная 3, 619
- Матьё 3, 623
- метабелева 3, 652
- метанильпотентная 4, 408
- метациклическая 3, 653
- Милнора 1, 162
- минимальная простая 3, 690
- многогранника 3, 711
-, множество разрывности 2, 875
-, модуль 5, 741
- модулярная 3, 784, 788
- - Клейна 2, 195
- монодромии 1, 176; 3, 806
- мономиальная 2, 560; 3, 812
- мультиоператорная 3, 839
- мультипликативная 3, 840
- непрерывная 3, 982
- Нерона — Севери 1, 180; 2, 132; 3, 1005; 4, 283
- нётерова 3, 1025
- нехонфова 3, 1030
- нильпотентная 3, 1042
- норм 3, 1076
-, нормальный ряд 3, 1076
-, область транзитивности 4, 382
- обобщенная 3, 1103
- обобщенно нильпотентная 3, 1110
- - разрешимая 3, 1111
-, обратные элементы 1, 1138
-, общий ранг 4, 861
- односвязная 3, 1182; 5, 891
- операторнан 4, 21
-, орбита 4, 382
- ортогональная 2, 866; 4, 81, 478
- π-отделимая 4, 139
- относительно свободная 4, 1082
- отражений 4, 158
-, период 4, 265
- периодическая 4, 266
- периодов 2, 50; 4, 268
- Пикара 4, 283
- подобных преобразований 4, 373
- подстановок 4, 382
- - примитивная 4, 635
- - унипримитивная 4, 635
-, показатель 4, 159, 265
- полинильпотентная 4, 408
- полициклическая 4, 410
- полная 4, 415
- - линейная 4, 416
-, положительный конус 5, 833
- полупростая 4, 465, 804
-, полупрямое произведение 4, 466
- полурегулярная 4, 383
- поляритета 4, 478
-, порядок 2, 1016
- правая 4, 550
- правоупорядоченная 4, 553
-, предельное множество 2, 875
-, предпучок 4, 581
-, представление 4, 382, 586
-, преобразование Фурье 1, 882
- преобразований 4, 599
- - алгебраическая 1, 143
- - дискретная 2, 195
- - однопараметрическая 3, 1170
- приведенная 2, 888
- приведенно свободная 4, 1082
- примарная 1, 1142
- примитивная 2, 524
- присоединенная 4, 639; 5, 891
- проективная 4, 666, 679
-, проективное представление 4, 678
- производная 2, 981
- проконечная 4, 694
- простая 4, 700
- просто транзитивная 4, 383
- прямоугольная 1, 762
- псевдовогнутая 1, 81
- псевдоортогональная 4, 83
- псевдоунитарная 5, 507
- Пуанкаре 3, 453; 4, 745; 5, 680
-, Пуанкаре гипотеза 2, 159
-, радикал 4, 804
-, разложение по нормальному делителю 5, 36
- -, по подгруппе 5, 36
- разложимая 4, 814
- разрешимая 4, 850
- π-разрешимая 4, 851
-, ранг 2, 737; 4, 861
- расщепимая 3, 487
- расщепляемая 4, 912
-, регулярное представление 4, 383
- редуктивная 4, 946
- редуцированная 1, 19
- решеточно упорядоченная 4, 984; 5, 255

Группа с однозначным извлечением корня 1, 1142
- с полугруппой операторов 4, 22

Группа с условием конечности 1, 1143

Группа с условием максимальности для подгрупп 1, 1144; 3, 1025

Группа с условием минимальности для подгрупп 1, 327, 1144
- сверхразрешимая 4, 1077
- свободная 4, 1082
- Σ-свободная 4, 22
-, связная компонента единицы 4, 1091
- семидиэдральная 2, 806
-, сжатие 4, 1125
- симметрии 4, 1150
- симметрий 1, 1140
- симметрическая 4, 382, 1141
- симплектическая 2, 866; 4, 478, 1154
- сингулярных гомологий 1, 1042
- скольжений 4, 1203
- скрученная 5, 891
- слойно конечная 1, 1144
-, смежный класс 5, 36
- смешанная 5, 36
- совершенная 5, 66
- спектральных гомологий 5, 126
- специальная линейная 5, 411
- проективная 4, 416
-, специальный ранг 4, 861
- спинорная 2, 882; 5, 138
-, сплетение 5, 147
- Стейнберга 1, 162
- строго транзитивная 5, 411
- структурная 4, 1034
- структурно упорядоченная 5, 255
-, субнормальный ряд 3, 1076; 5, 266
- Судзуки 5, 268
-, схема 1, 1146

Группа типа p^∞ 1, 1144; 2, 827
- топологическая 5, 367
- - векторная 5, 379
- транзитивная 5, 411
- треугольная 5, 428, 680
-, треугольное усечение 1, 900
- триангулируемая 5, 428
- Уайтхеда 1, 161; 5, 463
- универсальная 5, 891
- унимодулярная 1, 359; 2, 866; 3, 782; 5, 411, 504, 741
- унипотентная 5, 504, 505
- унитарная 2, 866; 5, 505, 1021
- Уолла 5, 519
- упорядоченная 5, 522
- упорядочиваемая 5, 528
- федоровская 5, 600
- финитно аппроксимируемая 5, 620
- формальная 5, 638
- фуксова 2, 876; 5, 678
- фундаментальная 5, 680
- функциональная 2, 876
-, характер 4, 547; 5, 747
- характеров 5, 766
- - алгебраического тора 1, 179
- хонфова 3, 1030; 5, 794
- Цассенхауза 5, 797
-, целая часть 5, 833
-, центр 5, 802
-, центральное произведение 5, 809
-, центральный ряд 5, 811
- циклическая 2, 1019; 5, 816
-, циклический индекс 2, 978
- частично упорядоченная 5, 833
- Шафаревича — Тейта 1, 847
- Шевалле 5, 890
- Шмидта 5, 894
- Шотки 2, 877; 5, 516
-, Шрейера теорема 2, 424
- эквиаффинная 1, 359
-, экспонента 5, 953
- элементарная 2, 876
- элементарных автоморфизмов 4, 192
- энгелева 5, 999

ИПП-группа 2, 1022
b-группа 2, 877
l-группа 5, 255
M-группа 3, 812
n-группа 1, 1141
O^*-группа 2, 378
p-группа 1, 1142
- регулярная 4, 934

R-группа 1, 1142
ZA-группа 3, 1049
Ω-группа 3, 839
- мультиоператорная 2, 981

Групповая алгебра 1, 1144

Групповая алгебра локально бикомпактной группы 1, 1145
- -, Капланского проблема 1, 1144
- Мальцева — Неймана теорема 1, 722, 1145
- -, Машке теорема 1, 1144

Групповая скорость 1, 1146

Групповая схема 1, 1146
- -, Картье теорема 1, 1147
- - коммутативная 2, 989

Групповое исчисление 1, 1147—1149
- кольцо 4, 1204
- - группы 1, 1144
- слово 1, 1136

Групповой автомат 1, 67

Групповой объект категории 1, 1149
- элемент 2, 883

Группоид 1, 1150
- Брандта 1, 544
- естественно упорядоченный 2, 407
- свободный 4, 1087
- строгий частично упорядоченный 5, 527
- упорядоченный 5, 527
- фундаментальный 5, 684

Группы классов, ведущий модуль 1, 167
- узлов и зацеплений 5, 476

Грэтцера — Шмидта теорема об алгебраической решетке 1, 155

Гудмена гипотеза о многолистных функциях 3, 726

Гука закон 1, 1150

Гурвица критерий 1, 1150; 4, 914
- - устойчивости 5, 558
- матрица 4, 914
- многочлен 4, 914
- соотношение 4, 1000

Гурвица теорема о голоморфных функциях 1, 1150
- - о квадратичных формах 2, 779
- условие 4, 914

Гурвица формула 1, 1150; 4, 1000

Гуревича гомоморфизм 1, 1066; 4, 1165
- изоморфизм 1, 1064; 4, 765
- расслоение 3, 887
- теорема для относительных групп 1, 1066
- - о гомоморфизме 1, 1066
- - об изоморфизмах 4, 1166
- формула для повышающих (понижающих) размерность отображений 4, 828

Гурса задача 1, 1150—1152

Гурса конгруэнция 1, 1152
- поверхность 5, 923
- формула 5, 86
- - для гармонических функций 1, 878

Густота дерева 1, 1089

Гюйгенса принцип 1, 1152

Д

Д'Аламбера вариационный принцип 1, 597

Д'Аламбера оператор 2, 9

Д'Аламбера признак сходимости 2, 9

Д'Аламбера принцип 2, 10

Д'Аламбера уравнение 2, 11; 3, 175

Д'Аламбера формула 2, 11; 3, 48; 4, 763

Д'Аламбера — Гаусса теорема о корнях многочлена 2, 1008

Д'Аламбера — Лагранжа принцип в механике 2, 11
- - - вариационный, 1, 597

Д'Аламбера — Эйлера условия 2, 12; 3, 67

Даламбертиан 2, 9

Далекие множества 1, 500

Дальности действия принцип 1, 1079

Данделена метод 3, 401

Данделена шары 2, 12

Данжуа интеграл 2, 12
- класс квазианалитических функций 2, 799

Данжуа теорема о производных числах 2, 13

Данжуа — Карлемана теорема о квазианалитичности 2, 799

Данжуа — Лузина теорема о тригонометрических рядах 2, 13

Данжуа — Степанова теорема об аппроксимативной непрерывности функции 1, 303

Данжуа — Хинчина интеграл 5, 786
- - теорема об аппроксимативной производной 1, 304

Данциля интеграл 2, 14
- схема 2, 14

Данные Коши 3, 47

Дантово пространство 2, 15

Дарбу вектор 2, 15
- геодезическая окрестность 1, 928
- задача 1, 1151; 5, 39
- инвариант 2, 18
Дарбу инварианты сети 2, 15
- интеграл 2, 17
Дарбу квадрика 2, 15
- линия 2, 18
- направление 2, 16
Дарбу поверхности 2, 16, 18
- свойство сходимости 4, 532
Дарбу сумма 2, 16—18
Дарбу тензор 2, 18
Дарбу теорема о производной 2, 18
Дарбу трехгранник 2, 18
- триэдр 2, 18
Дарбу уравнение 2, 19
Дарбу — Зауэра теорема об изгибаниях 1, 436
Дарбу — Пикара задача 1, 1151
Дарвина — Фаулера метод 2, 20
Даукера теорема о размерности 4, 829
Дважды стохастическая матрица 4, 272; 5, 239
Дверное пространство 2, 20
Движение 2, 20—22
- в псевдоевклидовом пространстве 4, 740
- в римановом пространстве 4, 1004
- евклидово, подгруппа 1, 362
- инфинитезимальное 2, 856
- квазипериодическое 2, 819
- метрического пространства 5, 625
Движений группа 2, 22, 529
Двоеточие 2, 23
- связное 5, 391
Двоичная единица 2, 23
Двоичная система счисления 2, 23
Двоичный дисконтинуум 2, 23
- код 2, 932
Двойная плоскость 2, 23
Двойная последовательность 2, 24
- -, повторный предел 4, 350
- рациональная особенность 4, 119, 915
Двойная точка 2, 24; 3, 88; 4, 124
Двойного отрицания закон 2, 25
- слоя запаздывающий потенциал 2, 860
- - логарифмический потенциал 3, 411
- - ньютонов потенциал 3, 1095; 4, 524
Двойного слоя потенциал 2, 26; 4, 524
- - -, Гаусса формула 4, 526
- - - Грина 4, 529
- - - логарифмический 4, 524
- - -, прямое значение 4, 524
Двойное векторное произведение векторов 1, 635
Двойное отношение 2, 27
- число 2, 31
Двойной интеграл 2, 28; 3, 92
- комплекс 1, 481
Двойной модуль 1, 485; 2, 28
Двойной предел 2, 28
Двойной ряд 2, 29—31
- слой, плотность 3, 1107
- шестисторонник Шлефли 2, 1080
Двойные и дуальные числа 2, 31
Двойственная задача линейного программирования 3, 354
Двойственная категория 2, 32, 762
- конфигурация 2, 1077
Двойственное пространство 5, 510
- - векторное 1, 644
- частично упорядоченное множество 5, 834
Двойственно-инвариантные конфигурации 2, 1077
Двойственности принцип 1, 126; 2, 32—34
- - в проективной геометрии 4, 680
- теорема Атьи 5, 363
- - для топологических групп 5, 373
- - *Макки — Аренса* 2, 44
- - Понтрягина 4, 481
- - - о группе характеров 1, 882
- - Пуанкаре 2, 35
- - Танака — Крейна 4, 482
- - Фробениуса 2, 559
Двойственность 2, 34—47
- Александера 1, 230, 231
- Александера — Понтрягина 1, 231
- в алгебраической геометрии 2, 34
- - - топологии 2, 35
- в выпуклом анализе 2, 45
- в теории аналитических пространств 2, 39
- - - - функций 2, 41
- - - топологических векторных пространств 2, 43
- Колмогорова 2, 953
- конечных абелевых групп 2, 47
- Лефшеца 3, 236
- Лефшеца — Пуанкаре 3, 236; 4, 745
- локально выпуклых пространств 5, 383
- операций 1, 126
- Понтрягина 1, 231; 4, 481
- Пуанкаре 4, 745
- Ситникова 1, 1059; 5, 228
- Спеньера 2, 47
- стационарная 2, 47
- Стинрода 5, 228
***S*-двойственность** 2, 47—49
Двойственные выпуклые тела 1, 797
- гиперграфы 1, 1006
- проективные плоскости 4, 669
Двойственные функции 2, 49
Двойственный базис 2, 49
- код 2, 929
- линейный оператор 1, 645
- модуль 5, 88
- симплексный метод 3, 354
Дворецкого — Роджерса теорема о сходимости в банаховом пространстве 1, 391
Двоякокруговая область 2, 49
Двоякопериодическая функция 2, 50
Двояко-стохастическая матрица 3, 616
Двувершинное распределение 1, 485
Двугранный угол 2, 50
Двудольный граф 1, 1108
Двужидкостная модель плазмы 2, 50
Двузначная логика 2, 51
Двукратная рекурсия 4, 964
Двумерная вариационная задача 3, 728
Двумерная клетка 2, 51
- поверхность, хроматическое число 1, 1113
Двумерное кольцо 2, 51
Двумерное многообразие 2, 51—56
- -, Гаусса—Бонне теорема 2,56
- - замкнутое ориентируемое 2, 51
- -, Кернса теорема 2, 56
- -, комбинаторная эквивалентность 2, 53
- - компактное ориентируемое 2, 52
Двумерное многообразие ограниченной кривизны 2, 56
- - открытое 2, 53
- -, Римана—Гурвица формула 2, 55
- -, Тейхмюллера теорема 2, 56
- -, Уайлдера теорема 2, 54
- проективное пространство 4,668
Двумерный многоугольник 3, 749
Двумерный узел 2, 57
Двуместная операция 4, 18
Двуполостный гиперболоид 1, 1000; 2, 58
Двусвязная область 3, 748, 1098
Двусторонне инвариантная мера Хаара 5, 741
- инвариантный интеграл 2, 531
- образующее разбиение 5, 1004
Двустороннее борелевское множество 2, 58
- преобразование Лапласа 3, 196
Двусторонние методы 2, 59
- связи 1, 1034
Двусторонний идеал 2, 481
- - минимальный 3, 693
- нуль 3, 1082
Двусторонняя гипотеза 4, 1138
- квадратичная форма 2, 790
Двусторонняя оценка 2, 58
Двусторонняя поверхность 2, 59; 3, 1183
Двуугольник сферический 2, 59; 5, 290
Двух констант теорема 2, 59
Двух тел задача 2, 60
Двухступенчатый план 5, 183
Двухточечный тензор 2, 61
Двухфакторная схема 2, 219
Двучленное сравнение 2, 61
Двучленное уравнение 2, 62
Дебаевская длина 2, 62
Дебаевский радиус 2, 62
Дёблина условие для эргодической цепи Маркова 3, 522
Дебре теорема в математической экономике 3, 590
Девиатор 2, 63
- тензора деформаций 2, 102
- - напряжений 3, 891
Девяти точек окружность 2, 63
Дедекинда аксиома 2, 63
- - бесконечности 1, 455
- - непрерывности 3, 889
Дедекинда дзета-функция 2, 63, 117
- - класса дивизоров 2, 118
Дедекинда признак сходимости 2, 63
- принцип 2, 63
Дедекинда теорема о непрерывности 2, 63
Дедекинда—Адамара теорема о множителях суммируемости 5, 275
Дедекиндова решетка 2, 63
- - с дополнениями 2, 64
- структура 2, 63
Дедекиндово кольцо 2, 64
- *полное упорядоченное* векторное пространство 4, 470
- правило 4, 680
Дедекиндово сечение 2, 65; 3, 322, 986
Дедуктивная полнота 3, 413
- система 2, 685; 5, 639
Дедуктивно полная система равенств 1, 128
Дедукции теорема 2, 65
Дезарга конфигурация 2, 66, 1078
Дезарга предложение 2, 66
- теорема 2, 66
Дезаргова геометрия 2, 67
- проективная плоскость 4, 669
Дезаргово пространство 2, 67
Дезориентирующая цепочка симплексов 4, 71
Дезорнентирующий путь 2, 68; 4, 70
Дейвиса гипотеза о диофантовых уравнениях 2, 174
Действие 2, 68
- в вариационном исчислении 1, 966
- в классической механике 1, 600
Действие группы 2, 68; 4, 382
- по Гамильтону 1, 600
Действительная коническая поверхность 2, ,1033
- ось 2, 1008
- - гиперболы 1, 988
Действительная функция 2, 70; 5, 716
- часть комплексного числа 2, 1007
Действительно замкнутое поле 5, 527
Действительное алгебраическое многообразие 2, 70—72
- векторное пространство 1, 642
- кручение Рейдемейстера 4, 953
- перемещение 1, 1033
Действительное число 2, 73—78
- - вычислимое 1, 821; 2, 1050, 1055
- -, десятичное приближение 2, 98
- -, Кантора теорема 2, 714
- - конструктивное 2, 1050, 1055
- -, мера иррациональности 2, 666
- -, модуль 1, 34
Действительнозначная функция 5, 715
Действительный характер Дирихле 2, 192
- эллипс 5, 977
- эллиптический цилиндр 5, 993
- эллипсоид 5, 978
Действия коалиция 2, 887
- функция 4, 43
Действующая свободно группа 4, 383
Декарта правило знаков 2, 78
Декарта теорема о корнях многочлена 2, 78
Декартов квадрат 2, 79; 4, 896
Декартов лист 2, 79
Декартов овал 2, 79
Декартова подгруппа 1, 654
Декартова прямоугольная система координат 1, 243; 2, 80
- форма записи комплексного числа 2, 1008
Декартово замкнутая категория 2, 433
Декартово произведение 2, 80; 4, 723
- - многозначных отображений 3, 720
- - Ω-систем 1, 157
Декартово разложение 2, 80
- сплетение групп 5, 147
Декартовы координаты 2, 80
- - прямоугольные 1, 634
Декодер 2, 933
Декодирование 2, 80, 649, 931, 938
- квантовое 2, 708
- оптимальное 4, 41
Декодирования ошибочного вероятность 4, 185
Декомпозиция 3, 354, 715
Декремент подстановки 4, 382
Деламбра формулы 5, 292
Дележ 2, 80, 470
Деление 2, 81
- в крайнем и среднем отношении 2, 466
- гармоническое 2, 466
- комплексных чисел 2, 1008
- степенных рядов 5, 219
Деления круга многочлен 2, 81
Деления круга поле 2, 82; 3, 120
- - уравнение 2, 82
Делимая абелева группа 1, 19
- группа 4, 415
p-**делимая группа** 2, 82
Делимое 2, 81
Делимости признак 2, 83—85
Делимость в кольце 2, 85
- неограниченная 3, 656
Делителей проблема аддитивная 1, 90
в арифметических прогрессиях 2, 87
- - Дирихле 2, 85
- - *обобщенная* 2, 86
Делителей проблемы 2, 85—88
Делителей число 2, 88
- -, Дирихле формула 2, 86
Делитель 2, 81, 85, 88
Делитель единицы 2, 88, 400
- идеальный 2, 128
- наибольший общий 3, 865
- нормальный 3, 1073; 5, 91
Делитель нуля 2, 88
-, Дирихле формула 2, 188
- элементарный 3, 1053; 5, 976
Дель Пеццо поверхность 4, 917; 5, 597
Дельсарта оператор обобщенного сдвига 3, 1111
Дельта амплитуды 2, 88
Дельта-функции метод 2, 89
Дельта-функция 2, 89; 3, 1105
- Дирака 2, 89, 175

Демидовича теорема об устойчивости 4, 60
Демиквадрика 2, 90
Демулена поверхность 2, 90
- прямая 2, 90
Демулена теорема о геликоидах 2, 90
- тетраэдр 2, 90
Демулена четырехугольник 2, 90
Дена лемма о трехмерном многообразии 2, 90
- копредставление 5, 479
Дендрит 2, 91
Денотат 2, 91, 525
Денотационная семантика 4, 651
Денумерант 2, 91
Де Рама голоморфный комплекс 1, 1029
Де Рама когомологии 2, 91; 4, 855
Де Рама кручение 2, 91; 4, 855
Де Рама теорема 2, 91; 4, 855
«Деревенский парикмахер» 1, 295
Дерево 2, 91
- вывода 1, 780, 1093
-, густота 1, 1089
- информационное 1, 73
- разбора 1, 223
- **синтаксического подчинения** 4, 1183
- **случайное** 1, 1111
- составляющих 4, 1182
- фундированное 5, 421
Деривационные формулы Вейнгартена 1, 631
Десингуляризация 4, 849
- алгебраического многообразия 4, 118
Дескриптивная теория множеств 2, 93—97
Десятисторонник 2, 1079
Десятичная дробь 2, 97, 389
- - бесконечная 1, 434
Десятичная система счисления 2, 98
Десятичное приближение 2, 98
Детальный поиск 3, 757
Детерминант 2, 99; 4, 30
- в программировании 4, 651
- эрмитова пространства 5, 1022
- эрмитовой формы 5, 1022
Детерминантная гиперповерхность 2, 99
- сумма матриц 1, 722
Детерминантное многообразие 2, 99
Детерминантный идеал 2, 99
Детерминированная задача 2, 677
- машина 3, 628
- сетевая модель 4, 1120
- функция 3, 1161
Дстерминированный автомат 1, 48
Дефект 2, 99
- в смысле Валирона 4, 888
- - - Неванлинны 4, 888
- зацепления 5, 480
- массы 3, 536
- матрицы 3, 617
- подпространства 1, 981
- полуспсвдоевклидова пространства 4, 467
- поляритета 4, 478
- сплайна 5, 143
Дефект треугольника 2, 100
- формы 2, 299
Дефектное значение 2, 100
Дефектное подпространство 2, 100; 4, 904
- число 4, 904
- - оператора 2, 99
Дефектов соотношение 2, 100; 4, 888
Дефинизации метод 1, 987
Дефинизирующий оператор 2, 101
Дефинитное подпространство 4, 718
Дефинитное ядро 2, 101
Деформаций тензор 2, 101
Деформационный ретракт 2, 102; 4, 976
Деформация 2, 102—108
-, алгебраизуемость 2, 106
- алгебраического многообразия 2, 105
- алгебры 2, 107
- аналитическая 2, 103
- аналитической структуры 2, 102
- версальная 2, 106; 4, 129; 5, 361
- изометрическая 2, 505
- инфинитезимальная 2, 103, 105
- истинного цикла 2, 681
- локально полная 2, 103
- многообразия 4, 118
- особенностей 4, 118
- подмножества 2, 108
- схемы 2, 105
- тривиальная 2, 108
- универсальная 2, 103
- формальная 2, 105, 107
- формально жесткая 2, 108
Деформируемых систем устойчивость 5, 578
Дециль 2, 108, 820
Дешифровка лингвистическая 3, 567
Джеймса теорема о гомотопических последовательностях 5, 284
- - о пространствах Фреше 2, 44
Джекобсона кольцо 2, 108
Джекобсона радикал 2, 109; 3, 485; 4, 807
- схема 2, 109
- теорема плотности 1, 341
Джексона неравенство 2, 109
- оператор 2, 110
Джексона сингулярный интеграл 2, 110
Джексона теорема в теории приближения 2, 110
- ядро 2, 110
Дженкинса теорема о коэффициентах 2, 110—112
Джет 2, 112; 5, 257
Дживера — Ху геометрическая реализация симплициального топологического пространства 4, 1164
Джини коэффициент рассеяния 2, 112
Джини средняя разность 2, 112
Джойн 2, 112; 3, 153; 5, 72
Дзета-функция 2, 112—122
- Артина — Шмидта 2, 119
- в алгебраической геометрии 2, 119
- в теории чисел 2, 112
- Вейерштрасса 1, 623
- Дедекинда 2, 63, 117
- - класса дивизоров 2, 118
-, нетривиальные нули 4, 878
- Римана 2, 112; 4, 992
-, Линделёфа гипотеза 3, 285
-, функциональное уравнение 2, 1006
Диагонализируемая алгебраическая группа 2, 122
- групповая схема 2, 989
- линейная группа 2, 123
Диагонализируемое линейное пространство 3, 351
Диагональ 2, 123; 4, 664
- многоугольника 3, 750
- тихоновского произведения 1, 672
Диагональная группа 2, 123
Диагональная матрица 2, 123
Диагональная подгруппа 2, 123
- точка 4, 664; 5, 598
Диагональная цепная дробь 2, 123
Диагонально клеточный оператор 2, 123
Диагональное кольцо 2, 124
Диагональное произведение отображений 2, 124
Диагональный оператор 2, 124
Диагональный процесс 2, 125
Диаграмма 1, 1087
- автомата 1, 72
- алгебраической системы 3, 766
Диаграмма в категории 2, 125, 762
- Венна 1, 653
- вращений 1, 765
- Гартогса 1, 893
- коммутативная 1, 1050
- модели 3, 770
- Найквиста 3, 883
- Ньютона 3, 1090
- поворотов 4, 346
- Пюизё 3, 1090
- Фрезера 5, 661
- Хегора 5, 780
- элементарная 3, 770
- Юнга 5, 1027
Диаграммный язык 3, 770
Диаграммы узлов и зацеплений 5, 478
Диада 2, 126
Диадическая операция 4, 18
Диадический бикомпакт 1, 475; 2, 126
Диадическое пространство 2, 127
Диалоговый процессор 1, 225
Диаметр 2, 127
- гиперболический 5, 422
- гиперболы 1, 988
- графа 1, 557, 1106
- линии 2-го порядка 2, 127
- множества 2, 127
- окружности 4, 15
- параболы 4, 191
- трансфинитный 5, 422
- эллипса 5, 978
- эллиптический 5, 423
Дивергентного вида дифференциальный оператор 3, 959
Дивергенция 2, 127
- векторного поля 1, 649
Дивизор 2, 128—132
- абелева дифференциала 1, 15
- главный 2, 129
-, группа классов 1, 144; 2, 129, 871
- дифференциальной формы 2, 266
- дробный 2, 129
-, индекс специальности 1, 151
- исключительный 2, 675
- Картье 2, 130
-, Клиффорда теорема 2, 882
- нулей функции 2, 130
- положительный 1, 144; 2, 129
- полюсов функции 2, 130
- простой 2, 129
- Пуанкаре 4, 746
-, Римана — Роха теорема 1, 15
- специальный 1, 145
-, степень 1, 144; 2, 132; 3, 648
- целый 2, 128, 484
- эффективный 1, 144; 2, 131
Дивизориальный идеал 2, 132
- -, Нагата теорема 2, 871
Дигамма-функция 4, 744
Диезная норма 2, 133
- коцепь 2, 133, 134
Диезная форма 2, 134
- функция 2, 135
- цепь 2, 133
Дизъюнктивная база 1, 371
σ-дизъюнктивная база 1, 371
Дизъюнктивная нормальная форма 1, 126, 563; 2, 135
- - - тупиковая 5, 449
- промежуточная логика 4, 695
Дизъюнктная сумма 2, 135
Дизъюнктное дополнение 2, 135, 374
- множество 2, 136; 4, 471
Дизъюнктное семейство множеств 2, 135
Дизъюнктные представления 2, 136; 5, 147
Дизъюнктные элементы 2, 136; 4, 471
Дизъюнкция 1, 124; 2, 137
-, введения правило 1, 781
- разделительная 4, 811
-, реализация 2, 1047
- слагаемых 1, 125
-, удаления правило 1, 781
- элементарная 1, 563
Дикая сфера 2, 137
Дикий узел 2, 137
Дикого типа алгебра 4, 585
Дикритический узел 5, 475
Дикое вложение 2, 138; 4, 1061
Диксона группа 2, 138
Диксона инвариант 2, 138
Дилатация 2, 139, 810; 4, 1125
- минимальная 4, 1127
- степенная 5, 119
- унитарная 4, 1127
Диметрия 1, 113
Динамика 2, 139—141
- релятивистская 4, 969
- символическая 4, 1135
Динамика сорбции 2, 141
- топологическая 5, 369
Динамики общее уравнение 1, 597
- ряд 1, 768
Динамическая задача 2, 677
Динамическая игра 2, 143
- логика 4, 653
Динамическая система 1, 82; 2, 143—149
- - вполне неустойчивая 4, 417
- - гармонизуемая 1, 871
- -, гиперболическая точка 1, 990
- - гладкая 2, 147
- - глобально выпрямляемая 4, 417
- -, гомологии 1, 1042
- - градиентная 1, 1082
- - дистальная 2, 229
- -, интегральный инвариант 2, 601
- -, каскад 2, 757
- -, когомологии 1, 1042
- -, метрическая теория 5, 1010
- - минимальная 3, 691
- - Морса — Смейла 3, 830
- - нормальная 3, 1050
- -, периодическая точка 4, 267
- -, предельная точка 4, 563
- -, рекуррентная точка 4, 954
- - с дискретным временем 2, 147
- - с непрерывным временем 4, 538
- - сдвигов 4, 1100
- -, спектр 5, 101
- - топологическая 5, 371
- -, траекторная эквивалентность 5, 1011
- -, энтропийная теория 5, 1003
- -,эргодичность 5, 1013
Динамические задачи теории упругости 2, 149—154
Динамический пограничный слой 4, 356
- процесс 4, 37
Динамическое программирование 2, 154—156
Дини признак сходимости 2, 156
- производное число 4, 690
- теорема о поверхностях Лиувилля 3, 392
Дини теорема о равномерной сходимости 2, 156
Дини — Липшица признак сходимости 2, 156
- - условие 4, 96
Динк 4, 550
Диностpата квадратриса 2, 156
Диоклеса циссоида 5, 826
Диофантов анализ 2, 157
Диофантов предикат 2, 157
Диофантова геометрия 2, 157—161
- -, высота 1, 812
- -, логарифмическая высота 1, 813
Диофантово множество 2, 161
- уравнение Маркова 3, 515
- -, Виноградова гипотеза о количестве решений 1, 701
Диофантовы приближения 2, 162—167
- -, Дирихле теорема 2, 186
Диофантовы проблемы аддитивного типа 2, 167
Диофантовы уравнения 2, 168—171
Диофантовых приближений метрическая теория 2, 171—173
Диофантовых приближений проблемы эффективизации 2, 173
Диофантовых уравнений проблема разрешимости 2, 174
Дипольный момент 3, 843
Диполя потенциал 3, 843
Дирака дельта-функция 2, 89, 175
Дирака матрицы 2, 175
- оператор 5, 140
Дирака спинор 2, 175
Дирака уравнение 2, 175—177; 5, 898
- δ-функция 3, 1105

Директриса 2, 177, 1015; 5, 633
- **Вильчинского** 4, 668
- **гиперболы** 1, 988
- параболы 4, 191
Дирихле алгебра 1, 133
Дирихле вариационная задача 2, 177
- главный характер 1, 1019
- данные 4, 236
Дирихле задача 2, 178—180; 3, 83, 203; 4, 236
- -, Валле Пуссена формула 1, 782
- - внешняя 4, 527
- - внутренняя 4, 527
- -, выметания метод 1, 781
- -, обобщенное решение 1, 671
- -, - - в смысле Перрона — Винера 4, 530
Дирихле интеграл 2, 181; 3, 205
- норма 5, 1003
- область 1, 755; 2, 196
Дирихле признак сходимости 2, 181
Дирихле принцип 2, 181
Дирихле принцип «ящиков» 2, 182
- проблема делителей 2, 85
Дирихле разрывной множитель 2, 182
Дирихле распределение 2, 183
Дирихле ряд 2, 183—186
- -, Абеля теорема 1, 29
Дирихле ряд для аналитической почти периодической функции 2, 186
- L-ряд 2, 188
- сингулярный интеграл 2, 194
Дирихле теорема 2, 186—188
- - о диофантовых приближениях 2, 186
- - о единицах поля алгебраических чисел 1, 165; 2, 187
- - о рядах Фурье 2, 188
- - об арифметических прогрессиях 2, 187
- условия 2, 188
Дирихле формула числа делителей 2, 86, 188
Дирихле функция 2, 188
Дирихле L-функция 2, 188—191
- -, Пейджа теорема 4, 231
Дирихле характер 2, 191—193
Дирихле ядро 2, 193; 5, 1043
Дирихле — Вороного разбиение 4, 810
Дирихле — Дугласа функционал 4, 218
Диск 2, 194
-, раздвижка 5, 403
- секущий 4, 1058
- срединный 4, 1058
-, сильная теорема 3, 990
Дисконтинуум двоичный 2, 23
- канторов 2, 715, 718
Дискрепанс 2, 194
Дискретная алгебра Неймана 3, 921
- аффинная схема 1, 358
- база 1, 371
Дискретная группа преобразований 2, 195—198
- математика 2, 207, 1018
Дискретная мера 2, 198
- метрика 3, 658
- оптимизация 5, 800
- плоскость 4, 319
Дискретная подгруппа 2, 198—202
- подкатегория 4, 371
- проективная прямая 4, 671
Дискретная серия представлений 2, 202; 4, 1117
Дискретная сходимость 5, 311
Дискретная топология 2, 202
σ-дискретная база 1, 371
Дискретно компактная последовательность 5, 311
- нормированное кольцо 2, 203
- сходящаяся последовательность 5, 311
Дискретного нормирования кольцо 2, 203
Дискретное нормирование 2, 204
- преобразование Фурье 5, 730
Дискретное программирование 2, 204, 678; 5, 800
Дискретное пространство 2, 205, 953
Дискретное пространство-время 2, 205
- прямое произведение 4, 722
Дискретное распределение вероятностей 2, 206; 5, 9
Дискретное семейство множеств 2, 207; 3, 433
- сплетение групп 5, 147
- частично упорядоченное множество 5, 834
Дискретные системы 2, 207
Дискретный анализ 2, 207—209
- преобразователь 4, 654
- принцип максимума 3, 496
- спектр 5, 101
- эргодический метод Линника 3, 389
Дискриминант 2, 209—212
- алгебры 2, 211
- базиса 2, 210
- бинарной квадратичной формы 1, 486
- в теории эллиптических функций 3, 788
- идеала 2, 211
- многочлена 2, 209
- модуля 2, 211
- полуторалинейной формы 2, 210
- поля 2, 211
- системы элементов поля 2, 210
- $\mathfrak{p}$-функции 1, 622
Дискриминантная кривая 2, 212
Дискриминантная функция 2, 213
Дискриминантное подмножество 4, 118
Дискриминантный анализ 2, 213—217
Дискриминантный информант 2, 217
Дискриминантный тензор 2, 217
Дискриминации правило 2, 213
Дискриминация информационная 2, 331
Дисперсии точка 2, 217
Дисперсионное отношение 2, 217, 222; 5, 627
Дисперсионное соотношение 2, 217
Дисперсионное уравнение 2, 218
Дисперсионный анализ 2, 218—223; 4, 181
Дисперсионный метод 1, 260; 2, 223—225
Дисперсия 2, 225
- выборочная 1, 774; 5, 999
- эмпирическая 2, 661
Дисперсное пространство 2, 226; 4, 1096
Диссипативная система 2, 227, 768
Диссипативная функция 2, 227
Диссипативное расширение 4, 905
Диссипативный оператор 2, 228; 4, 905
Дистальная динамическая система 2, 229
Дистрибутивная квазигруппа 2, 229, 803
- операция 2, 231
Дистрибутивная решетка 2, 230
- - векторная 4, 471
- структура 2, 230
Дистрибутивно порождаемое почтикольцо 4, 550
Дистрибутивности закон 1, 125
Дистрибутивность 2, 230
Дистрибутивный кольцоид 2, 968
Дифракции математическая теория 2, 231—234
Дифункциональное соответствие 5, 78
Диффеоморфизм 2, 234, 356
- Морса — Смейла 3, 830
U-**диффеоморфизм** 2, 234; 4, 1195
C^r-диффеоморфизм 3, 743
Дифференциал 2, 234—237, 260, 273
- абелев 1, 13; 2, 240
- аналитический 1, 276; 2, 239
- аппроксимативный 1, 302
- билинейный 1, 485
- внешний 2, 262, 733
- гармонический 2, 239
- Гато 1, 895
- - оператора 3, 960
- голоморфный 2, 239
- замкнутый 2, 238
- квадратичный 2, 241, 786
- ковариантный 2, 897, 900
- козамкнутый 2, 238
- коточный 2, 238
- Ли 3, 261
- линейный 2, 241
- меромофный 2, 239
Дифференциал на римановой поверхности 2, 237—241
- - - - первого рода 1, 1029
- обратный 2, 241
- отображения 2, 352
-, период 2, 238
- повторный 2, 274
- полный 2, 236, 275; 4, 428
- представления 1, 447
-, размерность 2, 241
- регулярный 2, 239
- - аналитический 2, 239
- слабый 1, 895
- стохастический 5, 241
-, тип 2, 241
- точный 2, 238
- Фреше 1, 274; 5, 664
- - оператора 3, 960
- частный 2, 236, 274; 5, 837
- Шварца 5, 885
Дифференциалов модуль 2, 241
Дифференциальная алгебра 2, 242
Дифференциальная алгебра (наука) 2, 242—247
Дифференциальная геометрия 2, 247—254
- - аффинная 1, 352
- - локальная 3, 423
Дифференциальная геометрия многообразий 2, 254—260
Дифференциальная группа 2, 260
- квадратичная форма, Кристоффеля символ 3, 110
Дифференциальная окрестность 2, 260; 3, 423
- подстановка 5, 677
- размерность 4, 825
- - множества 2, 243
- сепарабельность 4, 825
- система 2, 547
- - жесткая 2, 410
- специализация точки 2, 245
- структура 2, 355
Дифференциальная топология 2, 260—262
Дифференциальная форма 2, 262—266
- - внешняя 2, 733, 735
- - каноническая левая 3, 625
- - леммы Шварца 5, 887
- функция 4, 901
Дифференциальная энтропия 2, 267
Дифференциально алгебраическое расширение 4, 901
- сепарабельное расширение 4, 901
Дифференциально - геометрическая структура 2, 267
Дифференциально - геометрический объект 1, 938
Дифференциальное включение 2, 268
- выражение 2, 345
Дифференциальное исчисление 2, 269—277
Дифференциальное исчисление на аналитических пространствах 2, 277—279
Дифференциальное кольцо 2, 279
Дифференциальное неравенство 2, 279; 5, 158
Дифференциальное поле 2, 280
- -, расширение 4, 900
- - стесненно замкнутое 4, 901
- - частных 4, 901
Дифференциальное уравнение Абеля 1, 25
Дифференциальное уравнение абстрактное 2, 280
- -, аналитическая теория 1, 251
- -, аппроксимация разностным 1, 307
- - бесконечного порядка 1, 444
Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах 2, 282
- вполне интегрируемое 1, 759
- -, замкнутая система 4, 422
- -, интеграл 2, 567
- -, интегрирование в замкнутой форме 2, 610
- -, качественная теория 2, 765
- - Колмогорова 3, 519, 526
- -, Коши задача 3, 45
- -, линейная система 2, 765
- - линейное в банаховом пространстве 3, 329
- - - с постоянными коэффициентами 3, 343
- - малого параметра метод 3, 498, 502
- - матричное 3, 620
- - многозначное 2, 268
- -, нелинейная система 2, 766
- - нелинейное 3, 943
- -, нормальная форма системы 3, 1058
- -, обобщенное решение 3, 1116
- -, общее решение 3, 1146
- -, общий интеграл 3, 1148
Дифференциальное уравнение обыкновенное 2, 282—290
- - -, Грина функция 1, 1127
- - - линейное 3, 339
- - - - второго порядка 3, 337
- - -, краевая задача 3, 74
Дифференциальное уравнение обыкновенное; приближенные методы решения 2, 290—294, 626
- -, особая точка 4, 120
- -, особое решение 4, 131
- - осцилляционное 4, 138
- - Пирсона 4, 94
- -, полная система 4, 422
- -, порядок 4, 504
- - Римана 4, 992
Дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом 2, 294
- - с многозначной правой частью 2, 268
Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом 2, 294—298
- - с периодическими коэффициентами 3, 312
- - с почти периодическими коэффициентами 3, 317
Дифференциальное уравнение с частными производными 2, 298—302
Дифференциальное уравнение с частными производными; вариационные методы решения 2, 302—304
Дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка 2, 323
- - - - вырожденное 1, 809
- - - - гиперболического типа 1, 992
- - - -, Грина функция 1, 1129
Дифференциальное уравнение с частными производными; задача с данными на характеристиках 2, 304
Дифференциальное уравнение с частными производными; задача с косой (наклонной) производной 2, 304—306
Дифференциальное уравнение с частными производными; задача с разрывными коэффициентами 2, 306
Дифференциальное уравнение с частными производными; задача с разрывными начальными (краевыми) условиями 2, 307—309
Дифференциальное уравнение с частными производными; задача со свободными границами 2, 309
- - - -, краевая задача 3, 76—78
- - - - линейное 3, 344

Дифференциальное уравнение с частными производными; метод уравнений Фишера — Рисса, метод Пиконе 2, 309—311
Дифференциальное уравнение с частными производными; методы комплексного переменного 2, 311—318
- - - нелинейное 3, 950
Дифференциальное уравнение с частными производными; функциональные методы решения 2, 318—323
Дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка 2, 324—328
Дифференциальное уравнение с частными производными с особенностями в коэффициентах 2, 328
- - самосопряженное 4, 1072
- - сопряженное 5, 83
- - стохастическое 2, 362; 5, 243
- -, Фукса класс 1, 252
- -, частное решение 3, 1146
Дифференциально - разностное уравнение 2, 294, 329
Дифференциально-функциональное уравнение 2, 329
Дифференциальные игры 2, 329—336, 472
Дифференциальные уравнения на торе 2, 338—340
Дифференциальные уравнения с малым параметром при производных 2, 340—343
Дифференциальные уравнения; системы бесконечного порядка 2, 336—338
Дифференциальный бином 2, 343
- вес 2, 435; 3, 1099; 4, 93
- -, Чебышева теорема 5, 845
- идеал, Ритта — Рауденбаха теорема 2, 242
- - совершенный 2, 242
Дифференциальный инвариант 2, 343
Дифференциальный комитант 2, 344
- многочлен, кольцо 1, 1019; 4, 901
Дифференциальный оператор 2, 345—348; 4, 900
- -, аппроксимация разностным 1, 305
- - внутренний 1, 736
- -, главная часть 1, 1013
- - дивергентного вида 3, 959
- - инвариантный 2, 537
- - линейный 2, 278; 3, 364
- - максимальный 5, 108
- - минимальный 5, 108
Дифференциальный оператор модуля 2, 348
- -, расширение 4, 905
- - симметрический 5, 108
- -, спектральная теория 5, 108
- - существенно самосопряженный 5, 108
- - формально самосопряженный 5, 108
- -, фундаментальное решение 3, 1109
- -, численные методы нахождения собственных значений 5, 59
Дифференциальный параметр 2, 349
- - Бельтрами 2, 350; 3, 205, 206
- - Ламе 2, 350
- - Шварца 5, 885
- пучок 4, 769
- росток 2, 278
- тип множества 2, 243
- - расширения 4, 825
Дифференциатор 2, 349
Дифференцирование 2, 270, 350; 4, 689
- абсолютное 2, 896
Дифференцирование в силу системы 2, 351
- в среднем квадратичном 5, 27
- внешнее 2, 351
- внутреннее 2, 351; 4, 640
- дробное 2, 383
- коварнантное 2, 896
Дифференцирование кольца 2, 350
- Ли 3, 261
Дифференцирование отображения 2, 351—353
Дифференцирование по сети 2, 353
- рядов почленное 4, 1069
- с вероятностью 1 5, 27
- сильное 4, 1131
Дифференцирование численное 2, 353, 629
Дифференцирования метод 3, 175
- оператор 4, 20, 26
- по параметру метод 3, 947
Дифференцируемая функция 2, 235, 270, 273, 275, 354; 4, 689
- - в смысле комплексного анализа 1, 262, 268
- - по Гато 1, 274
- - по Фреше 1, 274
- - эквивалентность автономных систем 1, 84
Дифференцируемое многообразие 2, 354—357
- -, атлас 2, 755
- -, касательное расслоение 2, 755
- -, кватернионная структура 2, 839
- -, кокасательное расслоение 2, 755
- -, нормальное расслоение 2, 755
- - оснащенное 1, 938
- -, поток 4, 538
- отображение 2, 352
- -, особая точка 4, 123
- -, особенность 4, 125
- -, росток 4, 126
- по Фреше отображение 5, 666
- подмногообразие 4, 371
- представление 1, 446
Дифференцируемости класс 2, 357
Дифференцируемость аппроксимативная 1, 302
- по Гато 1, 895; 2, 352
- по Фреше 2, 352
Дифференцируемость решения 2, 357—359
- - по начальному значению 3, 60
Дифференцируемый вектор 1, 447; 2, 359
- гомеоморфизм 2, 234
- по Гато оператор 3, 960
- по Фреше оператор 3, 960
- случайный процесс 5, 27
Диффузии коэффициент 2, 361, 692
- процесс 1, 420
Диффузии уравнение 2, 359
Диффузионного типа процесс 2, 692
- - - управляемый 5, 531
Диффузионное приближение 2, 360
Диффузионные методы 2, 360
Диффузионный пограничный слой 4, 356
Диффузионный процесс 2, 361—363
Дихотомии метод 4, 429
Дихотомия 2, 363
- экспоненциальная 2, 771, 773; 3, 342
Диэдра группа 2, 363
Диэдральная группа 2, 363
Длина 2, 363
- аффинная 1, 364
- вектора 1, 632
- вывода 1, 1092
- гиперболическая 1, 988
- когомологическая 2, 763
- кода 2, 929
- кривой 2, 364; 5, 149
- - в римановом пространстве 4, 1003
- крюка 5, 1028
- пути 4, 1121
- разрешимости группы 4, 850
- слова 4, 1082
- собственная 4, 148
- субнормального ряда 5, 266
- - - подгрупп 4, 367
- цепи в схеме из функциональных элементов 5, 302
Длина частично упорядоченного множества 2, 364
- экстремальная 5, 959
Длинная гомологическая последовательность 2, 1002
Длины и объема принцип 2, 365
Длины и площади принцип 2, 364
Длительность передачи 2, 935
Дно оврага 3, 1153
Добавление вершины графа 1, 1107
- ребра графа 1, 1107
Доверительная вероятность 2, 365, 366, 615
Доверительная граница 2, 365, 367
- зона 2, 616; 4, 180
- оценка 3, 923
Доверительное множество 2, 365, 366, 615; 5, 198
Доверительное оценивание 2, 365—367
Доверительный интервал 2, 367, 615; 3, 923; 4, 178
- -, Неймана метод 3, 922
- коэффициент 5, 198
- предел 2, 367, 615; 3, 923
Доверительный уровень 2, 366, 367
Доверия коэффициент 2, 366, 615, 616; 3, 923; 4, 178; 5, 359
Додекаэдр 2, 367
Додекаэдра пространство 2, 367
Доказатель теория 2, 367—372; 3, 571
Доказательство 2, 367, 372; 5, 334
- индукцией 2, 557
- от противного 2, 25; 3, 1019
- финитное 1, 112
Доказуемая формула 2, 368; 3, 417
Докритический ветвящийся процесс 1, 681, 684, 685, 687, 688
Долговечность 3, 854
Долгота 5, 291
Дольбо теорема для дифференциальных форм 2, 265
Дольбо — Серра теорема о голоморфных формах 1, 1029
Доля Глиссона 1, 133
Доминанта 2, 372
Доминантная линейная форма 4, 590
Доминантный вес 4, 584
Доминационная грамматика 1, 1090
Доминирование 2, 372
Доминирования отношение 2, 1103
- принцип Картана 2, 373
Доминированное семейство распределений 4, 324
Доплера эффект 2, 373
Дополнение 2, 373
- алгебраическое 1, 188
- аналитическое 1, 278
- билинейное ортогональное 1, 484
- дизъюнктное 2, 135
-, Колмогорова теорема 2, 94
- множества 3, 759
- ортогональное 1, 980
- G-ортогональное 4, 718
- элемента 4, 983
Дополнения метод 4, 782
- формула Эйлера 1, 867
Дополнительная серия представлений 2, 374; 4, 1117
- - - унитарных 5, 512
- тактическая конфигурация 5, 319
- точка граничного элемента 1, 1103
Дополнительное подмножество 2, 373
Дополнительности условия 3, 79
Дополнительный граф 1, 1106
- модуль 3, 783; 5, 990
Допускающее след представление 5, 512
Допустимая подгруппа 4, 22
- подстановка 2, 804
- решетка 1, 945
Допустимое множество 5, 638
- - в математическом программировании 3, 602
- подпространство 2, 534
Допустимое правило 2, 375
- решающее правило 4, 6, 68
- решение 2, 676
- управление 1, 60; 4, 48, 488; 5, 536
π-допустимое проективное преобразование 4, 478
Допустимый вектор 1, 207
- кортеж 4, 538
- нормальный делитель 4, 22
- проективный объект 4, 683
- факторобъект 5, 596
- эпиморфизм 1, 471
Достаточная σ-подалгебра 2, 377
Достаточная статистика 2, 375—377, 661; 4, 176
- - минимальная 3, 683
- - необходимая 3, 683
Достаточное множество функционалов 2, 377
- условие экстремума Вейерштрасса 1, 619
Достижимая граничная точка 2, 377
Достижимая дуга границы 2, 377
Достижимая подгруппа 2, 377; 5, 266
- точка границы области 3, 1098
Достижимое пространство 2, 378
Достижимости область 4, 50
Достоверное событие 2, 378
Достоверность 2, 378
Доступная точка границы 2, 446
Доупорядочиваемая группа 2, 378
Древесность 5, 592
- графа 1, 1120
Древовидное многообразие 2, 379—381
- понятие вывода 3, 791
Дрейфовая система 2, 381
Дрейфовые уравнения 2, 381
Дробная доля числа 2, 382
Дробная конгруэнция 2, 382
- производная 1, 727; 2, 383
Дробная степень линейного оператора 2, 382
- часть числа 1, 297
Дробное интегрирование и дифференцирование 2, 383
Дробно-линейная функция 2, 384
Дробно-линейное отображение 2, 384—387
- преобразование 2, 384
Дробно-рациональная функция 2, 387; 4, 917
Дробный дивизор 2, 129
Дробный идеал 2, 387
- интеграл 2, 383
Дробных долей распределение 4, 875
Дробных шагов метод 2, 387—389
Дробовой эффект 2, 389
Дробь 2, 389
- аликвотная 1, 235, 315
- бесконечная десятичная 1, 434
- десятичная 2, 97, 389
-, знаменатель 2, 389, 464
- конструктивная 2, 1056
- неправильная 2, 389
- непрерывная 3, 982; 5, 812
- периодическая 1, 434; 2, 98
- подходящая 4, 384; 5, 812
- правильная 2, 389
- рациональная 4, 922
- цепная 5, 812
-, числитель 2, 389
Дружественные числа 2, 390
Дуализирующий пучок Гротендика 2, 35
Дуальная алгебра 2, 390
- категория 2, 32, 762
- корневая система 3, 16
- кривая 4, 310
Дуальная пара 2, 44, 391
- - подпространств 1, 986
- предсказуемая проекция 4, 1200

Дуально метрическое пространство 5, 1034
- ядерное пространство 5, 1034
Дуальное отображение 4, 310
- преобразование 3, 29
- соответствие 5, 78
- частично упорядоченное множество 5, 834
- число 2, 31
Дуальности принцип 4, 44
Дуальные интегральные уравнения 2, 600
- проективные плоскости 4, 669
Дуальный базис 2, 49
- идеал 2, 483; 5, 615
- модуль 5, 88
Дуба неравенства для мартингалов 3, 533
- теорема о сходимости субмартингалов 3, 534
Дублет 2, 391
Дубль римановой поверхности 2, 391
Дуга 2, 391
- аналитическая 1, 246
Дуга без контакта 2, 391; 4, 505
- графа 1, 1105, 1108
- жорданова 2, 391, 424
- окружности 4, 15
- простая 2, 391, 424; 3, 386; 4, 700
- Фату 5, 598
- Фока — Артина 2, 138
- эквиаффинная 1, 353
Дугласа задача 2, 392; 4, 302
Дугунджи теорема о продолжении метрики 3, 673
Дуффина — Кеммера матрица 2, 176
Дуффина уравнение 2, 392
Дуэль 2, 392
Дыра черная 5, 461
Дьёдонне модуль 2, 393
- определитель 4, 31
Дэвиса неравенства для мартингалов 3, 534
Дюамеля интеграл 2, 393
- принцип 2, 394, 439
Дюбуа-Реймона лемма в вариационном исчислении 2, 394
- - о производных 4, 999
Дюбуа-Реймона признак 2, 394
Дюбуа-Реймона теорема о тригонометрических рядах 2, 394
Дю Валя особенность 4, 915
Дюпена индикатриса 2, 395; 3, 97
Дюпена теорема для поверхностей 2, 396
- - о триортогональных системах поверхностей 5, 446
Дюпена циклоида 2, 396

E

e 2, 397
Евдокса аксиома 1, 328, 652
Евклида аксиома параллельности 4, 778
Евклида алгоритм 2, 397
- «Начала» 3, 893
Евклида теорема о простых числах 2, 397; 4, 877
Евклидов симплекс 2, 996
Евклидова геометрия 2, 397; 4, 668
- -, Гильберта система аксиом 1, 969
- пространственная форма 4, 709
- реализация комплекса 2, 997
Евклидова связность 2, 398
Евклидово движение, подгруппа 1, 363
Евклидово кольцо 2, 398
Евклидово поле 2, 398, 1037
Евклидово пространство 2, 398
- -, движение 2, 20
- расслоение 2, 398
Егорова ряд 2, 399
- сеть 4, 536
Егорова система поверхностей 2, 399
Егорова теорема о сходимости 2, 400
Единица 2, 73, 400
- *p*-адическая 1, 100
- алгебраическая 1, 196
- гомотопическая 4, 713
- группы 1, 1138
- двоичная 2, 23
- кольца 2, 961
- круговая 3, 121
- левая 3, 790
- мнимая 2, 1007; 3, 708
- правая 3, 790
-, разложение 5, 118
- решетки (структуры) 2, 400
- сильная 1, 384; 4, 471
- слабая 4, 471
- сопряжения 5, 90
- частично упорядоченного множества 5, 834
Единичная подгруппа 4, 369
- Ω-система 1, 160
Единичное бинарное отношение 1, 488
Единичное представление 2, 401
Единичный вектор 1, 632; 4, 79
- - в псевдоевклидовом пространстве 4, 739
- морфизм 2, 761
- оператор 4, 20
- поликруг 4, 405
Единственности множество 2, 401
Единственности свойства аналитических функций 1, 264; 2, 401—403
- свойство гармонических функций 1, 877
- - степенного ряда 5, 218
- теорема граничная 4, 566
- - для комплексных чисел 2, 1009
- - для почти периодических функций 4, 544
- - Привалова 4, 630
- - Ф. и М. Риссов 4, 566
- условия для конформных отображений 2, 1094
Единственность примарного разложения 4, 634
Единые теории поля 2, 403
Емкости сигнализирующая функция 1, 211
Емкостная мера 2, 405; 4, 1047
- - экстремальная 5, 1003
Емкостный потенциал 2, 403, 404
Емкость активная 1, 1089
- аналитическая 1, 246
- гармоническая 1, 872
- гиперболическая 5, 422
- грамматики 1, 1092
- логарифмическая 3, 406
Емкость множества 2, 403—407
- эллиптическая 5, 423
ε-емкость 4, 396
Ермакова признак 2, 407
Ергина критерий для приведенных линейных систем 4, 633
Ершова метод пополнения 4, 497
- теорема о ядре 2, 1060
Естественная граница функции 4, 414
- двойственность 2, 44
- метрика 2, 57
- нормальная форма матрицы 3, 1053
- область существования 4, 414
- параметризация 2, 248
- - кривой 3, 892
- регулярная полугруппа 4, 936
- связность без кручения 4, 947
- стратегия 5, 531
Естественно редуктивное пространство 4, 948
Естественно упорядоченный группоид 2, 407
Естественного вывода система 1, 919
Естественное преобразование функторов 5, 688
Естественный гомоморфизм 5, 592
Естественный логический вывод 2, 407
- трехгранник 2, 250; 3, 892; 5, 662
- частичный порядок 4, 936
Ефимовское отображение 5, 298

Ж

Жане теорема о римановых многообразиях 2, 409
Жане — Картана теорема о римановых пространствах 2, 863
Жанр кривой 4, 311
- фигуры 5, 614
Жегалкина алгебра 2, 409
- полином 2, 409
Жезл 2, 409
Желоб 2, 409
Жергонна задача о минимальных поверхностях 3, 686
Жергонна точка 2, 410
Жесткая алгебра 2, 107
Жесткая дифференциальная система 2, 410—417
- задача Коши 3, 49
- особенность 4, 118
- система дифференциальных уравнений 3, 49
- универсальная алгебра 5, 497
Жестко устойчивый метод 2, 413
Жесткое аналитическое пространство 2, 417
- бесконечно малое изгибание 1, 436
- многообразие 2, 103
Жесткости теорема 2, 107
- - об отображении периодов 4, 155
- - сильная 2, 201
- - Фрёлихера — Нейенхёйса 2, 103
Жесткость 2, 417—419
-, Гротендика теорема 2, 989
Жиро условия 2, 419
Жонкьера преобразование 3, 95
Жордана кривая 2, 420
Жордана лемма об аналитических функциях 2, 420
Жордана мера 2, 420; 3, 641
- метод обращения матриц 3, 1136
Жордана признак 2, 421
Жордана разложение 2, 421—423
- - функции ограниченной вариации 2, 421
- - эндоморфизма 2, 421
Жордана теорема о замкнутой кривой 2, 423
- - о линейных группах 3, 302
- - о многоугольниках 3, 749
- - о разбиении плоскости 1, 231
Жордана — Брауэра теорема о разбиении 2, 423
Жордана — Гёльдера теорема для групп 2, 424
Жордана — Дедскинда условие для цепей 4, 456
Жорданова дуга 2, 391, 424
- клетка 2, 425; 3, 372, 1054
- кривая 3, 384
Жорданова матрица 2, 424; 3, 372
Жорданова нормальная форма матрицы 2, 425; 3, 1054
- область 2, 240; 3, 1099
- форма матрицы 2, 425
Жукова теорема о неассоциативных алгебрах 3, 902
Жуковского профиль (крыло) 2, 426
Жуковского теорема в гидромеханике 2, 425
- условия 2, 426
Жуковского функция 2, 426
Журдена вариационный принцип 1, 600
Журдена принцип в механике 2, 426
Жюлиа луч 2, 427
- отрезок (хорда) 2, 427
Жюлиа теорема для аналитических функций 2, 426
- точка 2, 428

З

Зависимая переменная 5, 713
Зависимости область 3, 48
Зависимость алгебраическая 1, 148
- вероятностная 5, 238
- линейная 3, 303, 307
- статистическая 5, 238
- стохастическая 5, 238
Зависимые функции 5, 719
Зависимых испытаний метод 3, 818
Зависящий от параметров интеграл 2, 429
Задача — см. соответствующее название
Задерживающий барьер 5, 12
Задержка 1, 55
- схемы из функциональных элементов 5, 302
Зайцева теорема о вполне регулярных пространствах 1, 763
- - о спектрах 4, 687
Заключительная формула 3, 1072
Заключительное состояние конечного автомата 1, 54
Закон логический 3, 420
Закругленное множество 5, 378
Залгаллера теорема об окружности на выпуклой поверхности 4, 16
Замена базы 2, 430; 5, 66
- переменного в интеграле 2, 579, 583, 611
Замкнутая аналитическая кривая 1, 246
- база 1, 371
- выпуклая оболочка 1, 788
- - поверхность 1, 788
Замкнутая геодезическая 2, 431—433
- звезда 5, 434
Замкнутая категория 2, 433
- кибернетическая система 2, 852
- коса 3, 35
- кривая, Жордана теорема 2, 423
- область 3, 1098
- поверхность 2, 51
Замкнутая подсхема 2, 433
- полуплоскость 4, 462
- полупрямая 4, 466
- риманова поверхность 4, 1015
Замкнутая система 2, 327, 434
- - дифференциальных уравнений 4, 422
- - функций 2, 434; 4, 100
- топология 5, 374
- траектория 4, 267
- форма 2, 263
Замкнутая формула 1, 158, 320; 2, 435; 4, 580; 5, 637
- - истинная 1, 555
- функция 3, 854
- цепь 1, 557
Замкнуто конечный комплекс 2, 995
Замкнутое вложение 2, 433
- - аффинных схем 1, 359
Замкнутое многообразие 2, 435; 3, 87, 743
Замкнутое множество 2, 435; 4, 563
- неограниченное подмножество 5, 279
- ориентируемое двумерное многообразие 2, 51
Замкнутое отображение 2, 435; 4, 155
- покрытие 4, 393
- псевдомногообразие 4, 741
- эрмитово ядро 5, 1023
H-**замкнутое пространство** 2, 436
Замкнутости условие Ляпунова — Стеклова 4, 100
- - Парсеваля — Стеклова 2, 434
Замкнутость абсолютная 4, 425
Замкнутый график 2, 436; 5, 384
- -, теорема 1, 390
- дифференциал 2, 238
- маршрут графа 1, 1108
Замкнутый оператор 2, 437; 4, 19
- подкомплекс 2, 995
- терм 5, 637
- угловой сектор 4, 1106
- шар 5, 881
- элемент 2, 438
Замкнутых классов система 2, 437

Замыкание алгебраическое 1, 188
Замыкание вычислительного алгоритма 2, 437
- кольца целое 5, 799
- линейное 3, 345
Замыкание множества 2, 438; 3, 670; 4, 634; 5, 389
- оператора 2, 437
- пифагорово 1, 712
- *поля совершенное* 5, 70
- сепарабельное 4, 1114
- элемента комплекса 2, 995
Замыкания аксиомы 5, 389
- оператор 1, 373
Замыкания отношение 2, 438
Замыкания условие 2, 439
Замыкающий контакт 2, 1061
Заострения точка 1, 740; 2, 439
Заостренный конус 2, 1074
Запаздывающего типа уравнение 2, 295
Запаздывающий потенциал 2, 441, 860
Запаздывающих потенциалов метод 2, 439—442
Заполненное пространство 2, 442
Запятая 2, 442
Зарисского касательное пространство 2, 443
- теорема о базисном множестве 1, 379
- - о бирациональных отображениях 4, 920
Зарисского теорема о связности 2, 443
Зарисского топология 2, 444
Заряд 2, 444; 5, 312
-, плотность 4, 810
Затухание переходного процесса 1, 65
Заузленная сфера 2, 445
Захватывание частоты 1, 578
Зацепление 5, 484
- альтернирующее 1, 241
- брунново 5, 484
-, группа 5, 476, 487
-, дефект 5, 480
-, диаграмма 5, 478
-, квадратичная форма 5, 480
-, кратность 5, 484
- *локальное* 3, 437
- Нейвирта 5, 478
-, тип 5, 484
Зацепления коэффициент 2, 445
- матрица Александера 1, 232
- модуль Александера 1, 232
Звезда замкнутая 5, 434
- Миттаг-Леффлера 2, 445; 3, 705
- множества 4, 394
- открытая 5, 434
- симплекса 3, 153
- точки 2, 496; 4, 270, 394
- элемента комплекса 2, 995
Звезда элемента функции 2, 445
Звездная конечность покрытия 4, 393
- нормальность 3, 656
- область 2, 449
Звездно вписанное покрытие 4, 794
- - семейство множеств 4, 394
- конечный комплекс 2, 995
Звездного сопряжения оператор 2, 238
Звездное множество 2, 446
- подразделение 3, 153; 4, 379, 413
- покрытие 4, 203
Звездное тело 2, 446
Звездной астрономии математические задачи 2, 447—449
Звездообразная область 2, 449
Звездообразная функция 2, 449
Звездообразности граница 2, 450
- критерий 2, 450
- радиус 2, 450
Звездчато-правильный многоугольник 3, 750
Звездчатый многоугольник 3, 750
-правильный многогранник 4, 553
Зейделя метод 2, 450
- - итерационный 4, 251
- теорема о цепных дробях 5, 813
Зейферта инвариант 2, 452
Зейферта матрица 2, 451
Зейферта многообразие 2, 451
- окружность 5, 479
- поверхность 5, 479, 486
Зейферта расслоение 2, 452—454
- спаривание 2, 451
Зейферта — Ван Кампена теорема о фундаментальных группах 5, 681
Зелинга приведение квадратичных форм 2, 789
Зенона апория 1, 293
Зенона парадокс 2, 454
Зеркало отображения 4, 157
Зигелево среднее 2, 780
Зигеля верхняя полуплоскость 2, 445
Зигеля метод 2, 454
Зигеля область 2, 455
Зигеля теорема 2, 456
- - о бинарных квадратичных формах 1, 487
- - о среднем 1, 947
- - о *L*-функциях Дирихле 2, 456
- - о целых точках 2, 456
- - об алгебраически независимых функциях 3, 650
- формула 2, 780
Зигмунда класс 2, 457
- условие в теории приближений 4, 613
Зимана — Столлингса теорема об изотопии 2, 520
Зингера разностное множество 4, 838
Змеевидный континуум 2, 457
Знак Вейерштрасса 1, 622
Знаки математические 2, 457—463
Знаков критерий 2, 463
y-знакоопределенная функция 5, 574
Знакопеременная билинейная форма 1, 482
Знакопеременная группа 2, 464
- подстановка 4, 381
Знакопеременное полилинейное отображение 4, 407
Знакопеременный многочлен 4, 1145
- ряд 2, 464
Знакочередующийся ряд 2, 464
- -, Лейбница признак 3, 233
Знаменатель 2, 389, 464
- геометрической прогрессии 1, 932
- **малый** 3, 505
Знаменитая теорема Ферма 5, 605
Значащая цифра 2, 465
Значимости критерий 2, 465, 466
Значимости уровень 2, 222, 366, 465; 3, 834
Золотое сечение 2, 466
Зоммерфельда интеграл 2, 468
Зоммерфельда условия излучения 2, 468, 494
Зона в теории графов 4, 644
- доверительная 2, 616; 4, 180
Зональная сферическая гармоника 5, 289
Зональные сферические функции 2, 468; 5, 294
Зоноиды 2, 468
Зонотопы 2, 468
Зоноэдры 2, 468

И

Ивасавы инвариант 5, 325
Ивасавы разложение 2, 469
Иверсена теорема об особых точках 2, 469
Игнорируемая координата 1, 859
Игольчатая вариация 1, 604; 4, 488
Игр теория 2, 469—475
- -, доминирование 2, 372
- -, функция выигрыша 1, 781
Игра 2, 470
- азартная 1, 102
- антагонистическая 1, 290; 2, 471
- без побочных платежей 2, 470, 1104
- бескоалиционная 1, 433; 2, 471
- бесконечная 1, 434
- биматричная 1, 485; 2, 471
- Блотто 1, 506
- в форме функции разбиения 2, 1104
- взвешенная мажорантная 2, 1103
- *выпуклая* 1, 787; 2, 1104
- вырожденная 1, 805
- двух лиц с нулевой суммой 1, 291
- динамическая 2, 143
- дифференциальная 2, 329, 472
-, дуэль 2, 392
-, значение 1, 291
-, информационное множество 2, 656
-, Какутани теорема 2, 699
- коалиционная 2, 886
- колоколообразная 2, 960
- конечная 2, 471
- кооперативная 2, 471, 1103
- матричная 2, 471; 3, 619
Игра на выживание 2, 475
Игра на графе 2, 475
Игра на единичном квадрате 2, 471, 475
- неатомическая 3, 903
- нестратегическая 2, 470
- обобщенно-выпуклая 1, 787
-, партия 2, 143
-, плата 2, 329
- позиционная 2, 471; 4, 386
- полиномиальная 1, 805
- преследования 4, 602
- преследования — уклонения 2, 330
- простая 2, 1103
-, разрешимость по Нэшу 1, 433
- рекурсивная 4, 956
- рынка 2, 1104
Игра с выбором момента времени 2, 476
Игра с иерархической структурой 2, 477—481
- с квотой 2, 1104
- с полной информацией 4, 387
- салонная 4, 1071
- сбалансированная 2, 1103
- статистическая 5, 170
- стохастическая 5, 238
- стратегическая 2, 470
- строго разрешимая 1, 433
-, характеристическая функция 2, 1103
- Шепли 5, 238
-, ядро 2, 472
Игровая ситуация 2, 481
Игрок 2, 470, 481, 1103
Игузы неравенство о размерностях 4, 284
Идеал 2, 481—483
- абсолютно неразветвленный 3, 1001
-, аддитивная теория 1, 90
- Александера 1, 232
- аффинного алгебраического множества 1, 359
- вполне изолированный 5, 748
- - разложимый 1, 167
-, высота 1, 813
- главный 1, 1017; 2, 482
- Ω-группы 3, 839
- двусторонний 2, 481
- детерминантный 2, 99
- дивизориальный 2, 132
-, дискриминант 2, 211
- дробный 2, 387
- дуальный 2, 483; 5, 615
-, индекс ветвления 3, 114
- квадратичный 2, 694
-, Кона теорема 1, 342
- конечно представимый 2, 903
- критический 3, 114
-, Крулля теорема 1, 813
-, Куммера разложение 1, 166
-, - формула 1, 166
- левый 2, 481
- максимальный 2, 483; 3, 485
- минимальный 3, 692
- модулярный 3, 790
- неразветвленный 3, 1001
- несмешанный 3, 69, 1011
- нильпотентный 3, 1043
- нормирования 3, 1078
- обратимый 2, 387
- определения топологии 1, 98
- первичный 4, 237
- плотно вложенный 4, 908
- правый 2, 481
- примарный 1, 91, 132; 4, 635
- примитивный 4, 638
- *простой* 3, 485; 4, 707
-, радикал 4, 804
- разветвленный 3, 114
- регулярный 3, 790; 4, 944
- свободный 1, 342
- составной 5, 92
- стандартный 2, 483
- терциарный 4, 635; 5, 341
- целый 5, 801
- ядерный 2, 483
-якобиев 4, 119
l-идеал 5, 256, 526
p-идеал 3, 249
r-идеал 4, 805
Т-идеал 2, 483
Идеальная граница римановой поверхности 4, 1029
- конгруэнция 4, 444
Идеальная точка 2, 484; 4, 746
Идеально наследственный радикал 4, 806
- простая полугруппа 4, 701
Идеальное банахово пространство 2, 629
- расширение 4, 908
Идеальное число 1, 166; 2, 484
Идеальный делитель 2, 128
Идеальный ряд 2, 485
- фактор 1, 1019; 2, 482
Идель 1, 95; 2, 486
Идемпотент 2, 486
- абелев 4, 941
- конечный 4, 941
- примитивный 1, 762
Идемпотентная медиальная квазигруппа 2, 229
- полугруппа 2, 486
Идемпотентности закон 1, 125
Идемпотентный элемент 2, 486
Идемпотентов полугруппа 2, 486
Идентификатор 1, 224
Идентификации задача 4, 47
Идентификация 1, 223
Иенсена неравенство 2, 487, 489
Иенсена принцип 5, 279
Иенсена формула для мероморфных функций 2, 488
Иерархизованная система составляющих 4, 1184
Иерархия 2, 489—491
- проективная 4, 677
- типов 5, 351
Избыток геодезического треугольника 1, 929
- сферический 2, 491; 5, 291
Избыток треугольника 2, 491
Избыточность 2, 491, 940
Избыточные координаты 3, 10
Извивание кривой 2, 491
Изгибание 2, 491—493, 505
- бесконечно малое 1, 435
Изгибание на главном основании 2, 493
- на кинематическом основании 2, 494
-, основание 4, 106
- проективное 4, 674
Излома точка 2, 494; 5, 424
Излучения условия 2, 232, 494—496
Измельчающееся семейство множеств 2, 496
Измельчение 2, 496
- барицентрическое 4, 1160
Изменение функции 4, 161
- - положительное 4, 430
Измерение, порядок 4, 505
У-измерение 2, 708
Измеримая сильно функция 1, 541
Измеримая функция 2, 497
- -, Лузина критерий 3, 455
B-измеримая функция 1, 535
Измеримое множество 2, 498; 3, 638
- -, Лузина теорема 2, 498

- -, периметр 4, 265
- -, Шоке теорема 2, 406
Измеримое отображение 2, 498; 3, 638
- по Жордану множество 2, 420; 3, 641
- по Лебегу множество 3, 640
- поле алгебры Неймана 3, 922
Измеримое пространство 2, 498; 3, 638
Измеримое разбиение 2, 498
- -, энтропия 5, 1006
B-измеримое множество 1, 536
- отображение 1, 535
C-измеримое множество 2, 406
Измеримый каскад 2, 757
Измеримый поток 2, 499
- прямоугольник 3, 642
Изображение 3, 1110
- алгоритма 1, 210
- логарифмическое 4, 945
- по Лапласу 3, 197
- сферическое 5, 296
Изображений метод 2, 499—501
Изогения 2, 501
Изогенные схемы 2, 501
Изогональная траектория 2, 502
Изогоны и изоэдры 2, 502
Изоклин метод 2, 502; 3, 890
Изоклина 2, 502
Изокола 2, 753
Изолированная вершина графа 1, 1106
Изолированная особая точка 2, 503; 4, 115
Изолированная подгруппа 2, 504
Изолированная точка 2, 24, 504; 4, 124, 125
Изолированное множество 5, 370
Изолированный простой идеал 4, 634
Изоль 2, 504, 523; 4, 959
Изолятор множества 2, 504
Изоляции явление 1, 948
Изомеры 1, 936
Изометрий группа 2, 529
- полугруппа 4, 1127
Изометрическая деформация 2, 505
- структура 5, 482
Изометрически изоморфные гильбертовы пространства 1, 979
Изометрические билинейные формы 1, 482
- риманова пространства 4, 1004
Изометрический оператор 2, 505
Изометрическое вложение 2, 506
- линейное преобразование 3, 352
Изометрическое отображение 2, 505
Изометрическое погружение 2, 506—511
- преобразование 1, 790; 2, 505
- соответствие 2, 505
Изометричные поверхности 2, 253, 511
Изометрия 1, 113; 2, 505
- билинейных форм 1, 482
Изоморфизм 2, 511; 3, 370
- алгебр 2, 961
- алгебраический алгебраической группы 1, 143
- алгебраических систем 1, 156
- ассоциативных исчислений 1, 339
- аффинный 1, 362
- бирациональный 1, 494
- борелевский 1, 535
- векторных пространств 1, 645
- голоморфный 1, 471
- графов 1, 1116
- группа подстановок 4, 382
- Гуревича 1, 1064; 4, 765
- контраградиентный 2, 1071
- локальный 3, 426
- метрический 3, 667
- операторный 4, 22
- решеточный 4, 981
- симплициальный 3, 152
- структурный 5, 256
- теорий гомологии 1, 1047
- типовой 2, 867
- Тома 5, 360
- формаций 5, 519
B-изоморфизм 1, 535
C^n-изоморфизм 2, 356
δ-изоморфизм 1, 502
Изоморфизма проблема 1, 216; 2, 512
Изоморфное отображение 2, 512
Изоморфные автоматы 1, 68
- гильбертовы пространства 1, 979
- графы 1, 1105
- идеальные ряды 2, 485
- комплексы 2, 995
- резольвенты 1, 1072
- топологические векторные пространства 5, 377
Изооптическая кривая 2, 512
Изопериметрическая задача 2, 512
Изопериметрическое неравенство 2, 513—516
Изопериметрическое неравенство классическое 2, 517
Изотерма адсорбции 1, 101
Изотермическая поверхность 2, 518
Изотермическая сеть 2, 518
Изотермические координаты 2, 518
- - сопряженные 5, 87
Изотонное отображение 2, 518; 4, 153
Изотонный оператор 3, 960
Изотопия 1, 1150; 2, 519—521
- накрывающая 2, 519
Изотопные вложения 2, 519; 5, 401
- группоиды 2, 519
- зацепления 5, 486
Изотропии группа 2, 521; 4, 731; 5, 163
- подгруппа 3, 260
Изотропии представление 3, 521
- характер 1, 936
Изотропная квадратичная форма 2, 778
Изотропная конгруэнция 2, 522, 1015
- линейная алгебраическая группа 3, 298
- линия 3, 703
- прямая 2, 801; 3, 12, 124
- система координат 2, 518
Изотропное направление 4, 739
- подпространство 4, 718
- условие Гёльдера 1, 915
Изотропный вектор 2, 522; 4, 739
- конус 2, 522; 4, 739
- подмодуль 1, 482
Изохронная кривая 5, 817
Изоэдры 2, 502
Икосаэдр 2, 522
Икосаэдра пространство 2, 522
Именная форма 2, 525; 5, 637
Имитационная модель 2, 854
Иммерсия 2, 523; 4, 357
Иммунное множество 2, 523
Импликанта 5, 73
Импликативная нормальная форма 2, 523
Импликативное пропозициональное исчисление 2, 523
Импликация 1, 124; 2, 524; 4, 726
- релевантная 2, 66
- строгая 5, 247
Импримитивная группа 2, 524
- псевдогруппа преобразований 4, 730
Импримитивное линейное представление 2, 524
Импримитивности область 2, 524
- система 2, 560
Импульсов метод 2, 440
Имя 2, 525
Инвариант 1, 937; 2, 525—527; 4, 457
- абсолютный 1, 30, 27
- адиабатический 1, 96; 2, 381
- Александера 1, 231
- Арфа 2, 527
- базисный 2, 542
- бирациональный 1, 493
- вычислимый 1, 821
- -, Гильберта теорема 1, 974
- Дарбу 2, 18
- Диксона 2, 138
- дифференциальный 2, 343
- Зейферта 2, 452
- Ивасавы 5, 325
- интегральный 2, 601
- кардинальнозначный 5, 388
- кардинальный 3, 834
- Кервера 2, 847
- Кервера — Милнора 2, 849
- кривизны 4, 1045
- линии второго порядка 3, 388
- максимальный 3, 486
- поверхности второго порядка 4, 344
- Понтрягина 4, 483
- представления группы 2, 541
- размерностный 4, 824
- Римана 4, 170
- симплектический 4, 1157
- топологический 5, 375, 376
- Уолла 5, 520
- формы 2, 540
- ρ-функции 1, 622
- Хассе 5, 775
- Хассе — Минковского 5, 776
- Хопфа 2, 923; 5, 791
- Хопфа — Адамса 5, 792
- Хопфа — Адамса — Стинрода 5, 792
- Хопфа — Новикова 5, 793
- Хопфа — Стинрода 5, 792
- Хопфа — Уафтхеда 5, 792
- Хопфа — Хилтона 5, 792
- числовой 5, 376
Arf-инвариант 2, 527
Инвариантная компонента группы 2, 876
- кривая 2, 533
Инвариантная мера 2, 528
Инвариантная метрика 2, 529—531; 5, 374
- поверхность 2, 533
Инвариантная подгруппа 2, 531, 534; 3, 1073
Инвариантная статистика 2, 531
- точка 2, 533
- форма леммы Шварца 4, 282; 5, 886
- функция 4, 535
Инвариантного погружения метод 4, 218
Инвариантное интегрирование 2, 531
- многообразие 2, 145, 523
Инвариантное множество 2, 532—534, 767
- - модуля 1, 1020
Инвариантное подмножество 2, 534; 4, 153
Инвариантное подпространство векторного пространства 2, 534; 3, 351, 371
Инвариантное подпространство представления группы 2, 534
Инвариантное среднее 2, 534
Инвариантности принцип в теории вероятностей 2, 535
- теорема 5, 377
- уравнение геометрического объекта 1, 935
Инвариантность области, Брауэра теорема 1, 546
- релятивистская 4, 147, 970
Инвариантность статистической процедуры 2, 536
- топологическая 1, 1036; 2, 96
Инвариантный дифференциальный оператор 2, 537
- интеграл 2, 531
- - Гильберта 1, 966; 5, 956
Инвариантный критерий 2, 538
- множитель матрицы 3, 616, 1052
Инвариантный объект 2, 538—540; 3, 1176
- ряд группы 3, 1076
- - подгруппы 4, 367
- элемент группы 5, 802
Инвариантов теория 2, 540—544
Инварианты алгебраической поверхности 1, 150
Инверсии метод 2, 501
Инверсий число 4, 381
Инверсионная геометрия 2, 1087
Инверсионно инвариантная мера Хаара 5, 741
Инверсия в геометрии 2, 544
Инверсия в комбинаторике 2, 545
-, полюс 2, 544; 4, 474
-, степень 2, 544
-, центр 2, 544
Инверсная плоскость 3, 630
Инверсная полугруппа 2, 545—547
- сумма 4, 1213
Инверсно инвариантный интеграл 2, 532
Инверсное исчисление 1, 1148
Инвертирующий алгоритм 1, 1147
Инволютивное распределение 2, 547
Инволютивный инверсный автоморфизм 4, 477
Инволюционная система 2, 547
Инволюция 2, 548, 764; 4, 21
- Бертини 3, 95
- в алгебре 1, 383
- в проективной геометрии 2, 548
- Гейзера 3, 95
- на многообразии 2, 549
Ингредиент 3, 584
Индекс алгебраической точки ветвления 1, 176
- ветвления 1, 679
- - идеала 3, 114
- - линии 3, 385
- - расширения 2, 203
- дефекта оператора 2, 101
- задачи 1, 1096
- - линейного сопряжения 1, 1097; 3, 323, 325
- инерции 2, 299, 778
- - билинейной формы 2, 563
- интегрального сингулярного уравнения 4, 1174
- комплекса линейного дифференциального оператора 3, 367
- краевой задачи 3, 76, 81, 82
- Кронекера 3, 238
- локального алгоритма 1, 209
- Маслова 5, 723
- многообразия Фано 5, 597
- многочлена 4, 1114
Индекс оператора 2, 550; 4, 1174
- особой точки 4, 132
- пересечения 4, 255
- поверхности Дель Пеццо 4, 917
- подгруппы 4, 369; 5, 36
- полуспевдоевклидова пространства 4, 467
- поляритета 4, 478
- псевдоевклидова пространства 4, 739
- Пуанкаре 4, 122
- специальности дивизора 1, 151
- топологический 5, 868
- уравнения Бесселя 1, 460
- формы Витта 1, 714
- функции 4, 1173
Индекс числа 2, 549; 5, 152
- энгелевости 5, 999
Индекса формулы 2, 550—555
Индексное множество 3, 1087
Индефинитная метрика 2, 555
- - в гильбертовом пространстве 1, 985; 4, 717
- -, пространство 4, 717
- тёплицева форма 5, 337
Индефинитное скалярное произведение 1, 861
Индивидная константа 2, 555
Индивидная переменная 2, 555
Индивидуальная константа 2, 1036
Индивидуальная эргодическая теорема 1, 495; 2, 556; 3, 927; 4, 24; 5, 1007
Индивидуально рациональная конфигурация 5, 561

Индивидуальное высказывание 1, 124
Индикатор целой функции **4**, 1054
Индикаторные переменные **2**, 901
Индикатриса **5**, 622
- Банаха **1**, 379, 606
- вращений **1**, 765
- Дюпена **2**, 395; **3**, 97
- касательных **2**, 757
- кривизны **2**, 395
- роста **4**, 1054
- сферическая **5**, 291
Индуктивная размерность 2, 556; **4**, 821
- топология **3**, 428; **5**, 381, 383
- характеризация слова **4**, 1209
Индуктивно нульмерное пространство **4**, 143
Индуктивное определение 2, 556
- предположение **2**, 558; **3**, 564
- размерностное ядро **2**, 717
- топологическое тензорное произведение **5**, 393
Индуктивный предел 2, 557; **3**, 428; **5**, 381
- - семейства топологий **1**, 672
Индукции аксиома 2, 558; **3**, 892; **4**, 228
- параметр **3**, 564
- принцип **2**, 558
Индукционная переменная **2**, 558
- формула **1**, 319
Индукционное предложение **2**, 558
Индукционный переход **3**, 564
- предикат **2**, 558
- шаг **2**, 558
Индукция, базис **2**, 558
- бесконечная **1**, 434
- математическая **3**, 564
- нётерова **3**, 1026
- трансфинитная **5**, 421
Индуцированная алгебра **3**, 920
- топология **4**, 145
Индуцированное представление 2, 558—561
Индуцированное расслоение 2, 561; **4**, 894
Индуцирующая фигура **5**, 614
Инертная масса **3**, 536
Инертное простое число 2, 560
Инерциальная система отсчёта 2, 562
Инерции закон квадратичных форм **2**, 562; **4**, 739
- - механики **1**, 1078
- индекс **2**, 299, 778
- подгруппа **2**, 561
Инициально компактное пространство **2**, 994
Инициальное множество континуума **2**, 563
Инициальный конечный автомат **1**, 54
- объект **5**, 616
Инстантон **5**, 1060
Инструкция **4**, 645
Интеграл 2, 563—566
- абелев **1**, 15
-, абсолютная непрерывность **1**, 34
- алгебраический **1**, 15
- альтернированный **2**, 335
- Бергмана — Вейля **1**, 414
- Бёркилл **1**, 415
- Бёркиля — Колмогорова **1**, 416
- Бернулли **1**, 421
- Бокса **1**, 515
-, Бонне теорема о среднем значении **1**, 531
- Бохнера **1**, 541
- Вейля **2**, 384; **5**, 930
Интеграл вероятности 2, 566
- Винера **1**, 694
- Виноградова **1**, 701
- вмороженности **1**, 731
- Гарнака **1**, 891
- Гаусса **2**, 445
- гиперболический **5**, 991
- гиперэллиптический **1**, 1010
- Грина **1**, 876, 1126
- Данжуа **2**, 12
- Данжуа — Хинчина **5**, 786
- Даниеля **2**, 14
- Дарбу **2**, 17
- двойной **3**, 92
- Дирихле **2**, 181; **3**, 205
Интеграл дифференциального уравнения 2, 567
- дрейфовой системы **2**, 381
- дробный **2**, 383
- Дюамеля **2**, 393
-, зависящий от параметров **2**, 429
-, замена переменного **2**, 579, 583, 611
- Зоммерфельда **2**, 268
- инвариантный **2**, 531
- Кирхгофа **2**, 860
- Колмогорова **2**, 955
- континуальный **2**, 568, 1067
- Коши **3**, 51
- Коши — Зальшюца **1**, 867
- Коши — Лагранжа **1**, 421
- кратный **3**, 91
- криволинейный **3**, 103
- Кристоффеля — Шварца **3**, 111
- Лапласа **3**, 193, 196
- Лебега **3**, 209
- Лебега — Стилтьеса **3**, 218
- Лере **3**, 236
- мультипликативный **3**, 841
- неопределенный **2**, 564, 579
- несобственный **3**, 1016
- общий **2**, 327, 567, 568; **3**, 1148
- определенный **2**, 564, 581; **4**, 29
- особый **2**, 327; **3**, 52
- от дифференциальной формы **2**, 263
- ошибок **2**, 566
- первый **2**, 568; **4**, 238
- Перрона **4**, 274
- Перрона — Стилтьеса **4**, 276
- Петтиса **4**, 281
- по площади поверхности **4**, 339
Интеграл по траекториям 2, 568
- поверхностный **4**, 338
- повторный **4**, 348
- полный **2**, 327, 568; **4**, 428
- промежуточный **2**, 568
- псевдоэллиптический **4**, 744
- Пуассона **4**, 754
- Пуассона — Лебега **4**, 755
- Пуассона — Стилтьеса **4**, 755
- равномерно сингулярный **4**, 1180
- Радона **4**, 809
- расходящийся **4**, 896
- Римана **4**, 992
- Римана — Лиувилля **2**, 383; **5**, 226
- Римана — Стилтьеса **4**, 1002; **5**, 226
- сильный **4**, 1131
- сингулярный **2**, 605; **3**, 52; **4**, 1180; **5**, 96
- Сонина **5**, 75
- состояний **5**, 171
- статистический **5**, 171
- Стилтьеса **2**, 565; **5**, 226
- стохастический **5**, 242
-, суммирование **5**, 274
- типа Бохнера — Мартинелли **1**, 543
- - Коши **3**, 52
- - Коши — Лебега **3**, 53
- - -, Привалова теорема **4**, 631
- - Коши — Стилтьеса **3**, 53
- - потенциала **2**, 384
- тройной **3**, 92
- ультраэллиптический **1**, 1011
- Фейнмана **5**, 601
- Френеля **5**, 663
- функциональный **2**, 568
- Фурье **5**, 720
- - на группе **1**, 882
- Фурье — Бесселя **5**, 738
- Хеллингера **5**, 781
- Хинчина **5**, 786
- циркулярный **5**, 991
- частный **2**, 563, 567
- Шварца **5**, 885
- Шлефли **5**, 894
- Эйлера **1**, 464; **2**, 586
- эйлеров **5**, 937
- элементарный **2**, 14
- эллиптический **5**, 988
- энергии **2**, 145, 531; **5**, 1002
- Якоби **5**, 432
A-интеграл **2**, 566
B-интеграл **1**, 515
Интегралы в инволюции 2, 569
Интегральная воронка 2, 280, 570
- геодезическая кривизна **1**, 924
Интегральная геометрия 2, 570—576
Интегральная кривая 2, 283, 576
- метрика **3**, 658
Интегральная поверхность 2, 325, 577
- подстановка **5**, 677
Интегральная показательная функция 2, 577
Интегральная сумма 2, 578; **4**, 992
- - Лебега **2**, 564
- - Римана **3**, 91
- - Стилтьеса **5**, 226
- теорема Коши **1**, 263; **3**, 55
- - Коши — Пуанкаре **1**, 270
- форма билинейная **1**, 482
- - квадратичная **1**, 482
- - остаточного члена **5**, 324
- формула Коши **1**, 263; **3**, 51, 55
- - Мартинелли — Бохнера **1**, 270
- - Фурье **5**, 720
- - Шварца **5**, 886
Интегрально геометрическая площадь **4**, 330
Интегральное исчисление 2, 578—584
Интегральное многообразие 2, 584; **4**, 773
- неравенство Иенсена **2**, 487
Интегральное представление аналитической функции 2, 585—589
- - Бесселя **5**, 822
- - Ганкеля **1**, 867, 869
- - Пуассона **5**, 822
Интегральное преобразование 2, 589, 604
- - Эйлера **5**, 929
Интегральное уравнение 2, 590—593
- - Абеля **1**, 26
- - Вольтерра **1**, 752, 754
- - вырожденное **1**, 807
- -, Гильберта теория **1**, 974
- - Лалеско — Пикара **3**, 1030
- - линейное **3**, 345
- - нагруженное **3**, 853
- - Некрасова **3**, 938
- - нелинейное **3**, 944
- - нётерово **3**, 1026
- - нефредгольмово **3**, 1030
- -, нормальная разрешимость **3**, 1051
- - особое **3**, 1030
- - Пайерлса **4**, 249
- -, резольвента **4**, 950
Интегральное уравнение с симметричным ядром 2, 595—598
- - сингулярное **4**, 1172
- - сопряженное **4**, 1172
Интегральное уравнение типа свертки 2, 598—600
- - Фишера — Рисса **2**, 310
- - Фредгольма **3**, 1027
- - Фурье **3**, 1030
Интегральное уравнение; численные методы решения **2**, 593—595, 625
Интегральной разделенности условие 2, 600
Интегральный автоморфизм 2, 601
- вес **3**, 1099; **4**, 93
- выигрыш **2**, 143
Интегральный гиперболический косинус 2, 601
Интегральный гиперболический синус 2, 601
Интегральный инвариант 2, 601
- - Пуанкаре **1**, 860
- - Пуанкаре — Картана **1**, 860
Интегральный косинус 2, 602
Интегральный логарифм 2, 603
Интегральный объект категории **2**, 604
Интегральный оператор 2, 604—606; **4**, 20
- - Вольтерра **1**, 752
- - Гильберта — Шмидта **1**, 975
- - с полярной особенностью **4**, 1206
- - со слабой особенностью **4**, 1206
- - Фредгольма **5**, 660
- - Фурье **5**, 722
- -, численные методы нахождения собственных значений **5**, 62
- -, ядро **5**, 1042
- признак Коши **3**, 61
- - Коши — Маклорена **3**, 61
- - сходимости рядов **4**, 1065
- принцип максимума **4**, 49
Интегральный синус 2, 606
- элемент **4**, 774
Интегральных преобразований метод 2, 607
Интегральных соотношений метод 2, 607—610
Интегрант **3**, 181
Интегрирование 2, 579, 610
Интегрирование дифференциальных уравнений в замкнутой форме 2, 610
- - - в квадратурах **2**, 610
- дробное **2**, 383
- инвариантное **2**, 531
Интегрирование по частям 2, 579, 583, 611
Интегрирование подстановкой 2, 611
- рядов почленное **4**, 1069
Интегрирование численное 2, 612, 624
Интегрирования оператор **4**, 26
Интегрируемая в смысле Лебега функция **2**, 564
- - - Римана функция **4**, 992
- по Риману функция **3**, 91
- по функции функция **5**, 226
Интегрируемая почти комплексная структура **4**, 542
- почти симплектическая структура **4**, 548
Интегрируемая система 2, 612
- структура **3**, 745
Интегрируемая флаговая структура **5**, 628
Интегрируемая функция 2, 612
A-интегрируемая функция **2**, 566
R-интегрируемая функция **3**, 91
Интегрируемое представление 1, 448; **2**, 612
Интегрируемость по Бохнеру **1**, 541
Интегрирующая функция **5**, 226
Интегрирующий множитель 2, 612
Интегро - дифференциальное уравнение 2, 613
Интегро-дифференциальный оператор **3**, 959
Интегро-интерполяционный метод **4**, 845; **5**, 59
Интегро-степенная форма **2**, 614
Интегро-степенной ряд 2, 614; **3**, 474, 945
- член **2**, 614
Интенсивностей мера **5**, 31
Интенсивности отказа функция **3**, 854
Интенсивность векторной трубки **1**, 636
- источника **2**, 682
- потока **3**, 542
- пуассоновского процесса **4**, 763
Интенсиональная логика **4**, 1110
- модель **1**, 912
Интервал 2, 614, 615; **4**, 695; **5**, 834
- в частично упорядоченном множестве **2**, 615
- доверительный **2**, 367, 615; **3**, 923; **4**, 178
Интервал и сегмент 2, 615
- простой **4**, 708
- пространства-времени **2**, 614
- смежный **2**, 718
- стохастический **5**, 243
Интервал сходимости 2, 615; **5**, 221
- толерантный **5**, 358

Интервальная оценка 2, 615; 4, 178
- функция 2, 617
Интервальный анализ 2, 616
Интервальная широта 2, 108, 617
Интересов коалиция 2, 887
Интерквантильная широта 2, 617
Интерполирование 2, 617—622, 631
- алгебраическое 2, 622
Интерполирование в вычислительной математике 2, 624—628
- квадратичное 2, 622
- кратное 2, 633
- линейное 2, 622, 631
Интерполирование операторов 2, 628—631
- по методу наименьших квадратов 2, 623
- с кратными узлами 4, 606
- *тригонометрическое* 5, 444
Интерполяционная квадратурная формула 3, 137
- последовательность 2, 621
- - универсальная 3, 906
- проблема Неванлинны — Пика 2, 621
Интерполяционная формула 2, 631, 794
- - Бесселя 1, 459
- - Гаусса 1, 897
- - Лагранжа 3, 170
- - Ньютона 3, 1091
- - Рисса 4, 1035
- - Стеффенсена 5, 225
- - Стирлинга 5, 232
- - Эверетта 5, 921
- - Эрмита 5, 1015
Интерполяционное пространство 2, 629
Интерполяционный метод 2, 292
- - приближения 4, 606, 609
- многочлен Лагранжа 2, 632; 3, 170
- - функциональный 2, 627
- *полином* 2, 622, 631
Интерполяционный процесс 2, 632—635
- - Бернштейна 1, 426
- -, Лебега *константы* 3, 212
- ряд 2, 633
- - Абеля — Гончарова 1, 30
- - Ньютона 2, 634
- - Стирлинга 2, 634
Интерполяционный сплайн 2, 635
- функтор 2, 629
Интерполяция 2, 617—622, 631, 635
- гармоническая 3, 880
- линейная 3, 303
- параболическая 3, 880
- случайных процессов 5, 34
Интерпретатор 5, 419
Интерпретаций метод 1, 110
- поле 1, 110
Интерпретация 2, 635—637
- Бельтрами 1, 408
- Бельтрами — Клейна 3, 403
- в программировании 4, 650
- Гёделя 1, 908
- Клейна 2, 873
- Котельникова 3, 43, 404
- Кэли — Клейна 3, 402
- неправильная 4, 551
- Плюккера 4, 331
- правильная 4, 551
- Пуанкаре 3, 404; 4, 746
- Фубини 5, 674
- языка 5, 636
Интерпретирующего типа семантика 1, 224
Интерсекстильная широта 2, 617
Интранзитивная группа 5, 411
Интранзитивная группа движений 2, 22
Интуиционизм 2, 637—643
Интуиционистская аксиома выбора 2, 642
- арифметика 1, 911
Интуиционистская логика 2, 643
- семантика 1, 909
Интуиционистский анализ 2, 642
- - формальный математический 5, 642
Интуиционистское арифметическое исчисление 2, 641, 644
- исчисление 3, 419
Интуиционистское исчисление высказываний 1, 911; 2, 644
Интуиционистское исчисление предикатов 1, 911; 2, 643; 645; 4, 579
- - пропозициональное 4, 699
Инфиксная операция 4, 18
Инфинитезимальная деформация 2, 103, 105
- карта 2, 730
- образующая 3, 1171
Инфинитезимальная связность 2, 645
Инфинитезимальная структура 2, 267, 645
Инфинитезимально неприводимое рациональное представление 4, 921
- однородная структура 5, 250
- однородное поле 4, 208
- устойчивое отображение 4, 128
- эквивалентные представления 5, 943
Инфинитезимальное движение 2, 856
- преобразование 2, 645
Инфинитезимальный автоморфизм 2, 857
- метод 1, 447
Инфинитезимальный оператор 2, 645; 3, 1113; 4, 262, 451, 692
- - Ли 1, 447
- - полугруппы 4, 448
- *характер* 2, 819
Инфлекционный центр 2, 1002
Информант 2, 645
- дискриминантный 2, 217
Информативность эксперимента 2, 656
Информации количество 2, 646; 4, 175
- - *алгоритмическое* 1, 222
- - в индивидуальном объекте 1, 222
- неравенство в математической статистике 4, 867
Информации передача 2, 647—653
Информации скорость передачи 2, 653
Информации теория 2, 653—655
- - алгоритмическая 1, 219
- -, выделение сигнала на фоне помех 1, 781
- -, Шеннона теорема 2, 941
Информационная дискриминация 2, 331
Информационная матрица 2, 646, 655
- статистика 2, 658
- часть оператора программирования 4, 18
Информационное дерево 1, 73
- количество Фишера 4, 867; 5, 626
Информационное множество 1, 207; 2, 656; 4, 386
Информационное расстояние 2, 656—658
- уклонение 2, 657
Информационно-устойчивая последовательность каналов 2, 650
Информационный вектор 1, 207
Информационный коэффициент корреляции 2, 658
Информация 2, 658—661
- по Фишеру 2, 655
-, преобразователь 2, 852
- различения 2, 657
- управляющей системы 5, 534
Инфрабочечное пространство 2, 661
Инфраинвариантная система 3, 322
- упорядоченная группа 5, 522
Инцидентности алгебра 4, 263
- гиперграфа матрица 1, 1006
Инцидентности коэффициент 2, 662, 995; 5, 614
- матрица 1, 505, 506; 2, 663
Инцидентности система 2, 663
Инцидентность 2, 663
Инъективная оболочка 2, 664
- размерность 2, 664
- - модуля 1, 1053
- резольвента 2, 664, 665; 4, 951
Инъективное отображение 2, 665
Инъективный модуль 2, 663
Инъективный объект 2, 665
- - категории 4, 683
ω-инъективный модуль 5, 880
Инъекция 2, 665
Иоахимсталя поверхность 2, 665
Ионеда лемма о вложении категорий 1, 1134
Иордана критерий 2, 744
Иордана — Каврайского критерий 2, 744
Иосиды оператор 3, 333
Иоста решение 3, 1008
Иррациональная обмотка тора 2, 338
Иррациональное число 2, 75, 666
- -, Александрова — Урысона теорема 2, 96
Иррациональности мера 2, 666
Иррациональность алгебраическая 1, 144
- квадратическая 2, 776
Иррациональный инвариант ϕ-функции 1, 622
Иррегулярная граничная точка 2, 666; 4, 275, 533
- группа 4, 383
Иррегулярная особая точка 1, 251; 2, 667
Иррегулярное многообразие 2, 668
Иррегулярное простое число 2, 667; 4, 942
Иррегулярность 2, 668
- алгебраической поверхности 1, 150
- многообразия 1, 236; 4, 284
Искажение длины 2, 746
-, Кёбе теорема 2, 841
- угла 2, 741
Искажения мера 5, 1006
Искажения показатель 1, 113
Искажения теоремы при конформных отображениях 2, 668—671
- хорд теорема 2, 669
Исключения метод 3, 816
Исключения теория 2, 671—673
Исключенного третьего закон 1, 125; 2, 673
Исключительная кривая 2, 675
- простая компактная алгебра Ли 3, 265
Исключительное аналитическое множество 1, 288; 2, 673
Исключительное значение 2, 674
- - в смысле Бореля 2, 674
- - в смысле Валирона 2, 675
- - в смысле Неванлинны 2, 675
- - в смысле Пикара 2, 674
- направление 2, 769
Исключительное подмногообразие 2, 675
Исключительный дивизор 2, 675
- нуль *L*-функции Дирихле 2, 190
Испытание 2, 676
Испытания Бернулли 1, 421
Исследование операций 2, 676—680
Истинная грань элемента комплекса 2, 995
- замкнутая формула 1, 555
- ошибка 4, 183
- подгруппа 4, 369
Истинностная таблица 1, 125; 2, 680
- функциональная система 5, 695
Истинностное значение 2, 681
Истинностных моделей множество 1, 555
Истинность логическая 5, 357
- тождественная 5, 357
Истинный цикл 1, 829; 2, 681
Источник векторного поля 2, 681
Источник сообщений 2, 682
Источник-изображение 2, 500
Исчезающий цикл 3, 807
Исчезающих когомологий пространство 3, 808
Исчерпание области 2, 683
Исчерпывания метод 2, 683
Исчерпывающая статистика 4, 176
- фильтрация 5, 616
Исчисление 2, 685; см. также соответствующее название
Итеративная сеть 1, 50
Итерации процесс 3, 294
Итераций минимальных метод 3, 693
Итерационная последовательность 2, 690
Итерационные методы 2, 686—689; 3, 948
Итерационный алгоритм 2, 689—691
- метод Зейделя 4, 251
- - чебышевский 5, 848
- - численный 3, 293
- процесс, непрерывный аналог 3, 991
Итерация 2, 690, 691; 4, 942
- простая 4, 250
- формальных языков 5, 644
Итерирование 2, 691
Итерированное преобразование Стилтьеса 5, 227
Итерированное ядро 2, 691
Ито процесс 2, 691
- стохастическое дифференциальное уравнение 2, 363
- теорема об управляемых случайных процессах 5, 531
Ито формула 2, 692; 4, 1112; 5, 241
Ито — Сигала — Вика отображение 5, 633
Йетса поправка 2, 693
Йорданова алгебра 2, 693—696
- - компактная 3, 1180
Йорданово умножение 2, 693

К

Кабельтово зацепление 5, 485
Кавагути пространство 2, 697
Кавальери принцип 2, 698; 3, 1149
Казимира оператор 2, 698
Казимира элемент 2, 698
Кактоид 2, 699
Какутани теорема в теории игр 2, 699
- эквивалентность 5, 1011
Календарное планирование 4, 871
Калибр топологического пространства 2, 699
Калибровки условие 1, 1083
Калибровочная группа 5, 1060
Калибровочное поле 5, 1088
- преобразование 1, 1083
Калмана — Бьюси метод 5, 35
- - фильтр 4, 46
Кальдерона — Зигмунда оператор 2, 699
Кальдерона — Лионса комплексный метод 2, 630
Камера 2, 700
- Вейля 1, 626
- корневой системы 3, 16
Кана расслоение 4, 1166
- условие 4, 1165
Канал 2, 648, 941
Канал без памяти 2, 701
Канал гауссовский 2, 701
-, информационно-устойчивая последовательность 2, 650
Канал многосторонний 2, 702
-, множество состояний 2, 704
- обратной связи 2, 853
-, пропускная способность 2, 709
- прямой связи 2, 853
Канал с конечной памятью 2, 704
Канал с конечным числом состояний 2, 704
Канал с обратной связью 2, 705
Канал связи 2, 706
Канал связи квантовый 2, 707—709

Канал симметричный 2, 709
-, функция надежности 4, 186
Канала пропускная способность 2, 709
Каналовая поверхность 2, 710
Каноническая алгебраическая кривая 1, 146
- гамильтонова система 1, 858
- замена переменных 1, 860
Каноническая корреляция 2, 710
Каноническая кривая 2, 711
- левая дифференциальная форма 3, 625
- линейная гипотеза 3, 300
- нормальная форма матрицы 3, 1054
- особенность 4, 916
- связность 4, 947
- - эрмитова 5, 1020
- сетевая модель 4, 1120
- система линейная 1, 861
- - Поста 4, 513
- топология 5, 366
- форма матрицы 3, 1052
Канонически полиномиальная матрица 3, 616
Канонические коэффициенты корреляции 2, 711
- образующие 2, 738
Канонические разрезы 2, 712
- сечения 2, 712
Канонический абелев интеграл 1, 16
- ансамбль Гиббса 5, 179
- - - статистический 1, 958
- атлас 5, 722
- вид матрицы 3, 1052
Канонический класс 2, 712
- - многообразия 2, 266
- оператор Маслова 5, 722
- разрез многообразия 2, 54
- репер 4, 365
- сдвиг 4, 1161
- формализм 1, 860
- элемент аналитического продолжения 1, 283
- эллиптический интеграл 5, 989
- эпиморфизм 5, 589
Каноническое гауссово отображение 5, 298
- конформное отображение 2, 1093
Каноническое множество замкнутое 2, 713
- - открытое 2, 713
- нормирование 3, 1078
Каноническое погружение 2, 713
- представление Леви 1, 398, 3, 218
- - Леви — Хинчина 1, 397; 3, 225
- - оператора 3, 1056
- - семимартингала 4, 1113
- - числа 4, 876
Каноническое преобразование 1, 860
Каноническое произведение 2, 713
Каноническое распределение Гиббса 1, 957
- уравнение Фредгольма 3, 1027
Кантелли условие 1, 528
Кантора аксиома 1, 970; 2, 714
- - непрерывности 3, 989
- антиномия 1, 295
- множество 2, 718
Кантора парадокс 2, 714
- принцип вложенных отрезков 2, 74, 991
Кантора теорема 2, 714
- - о множестве действительных чисел 2, 714
- - о мощности 2, 714, 723; 3, 838
- - о порядковых типах 4, 503
- - о последовательности множеств 2, 714
- - о равномерной непрерывности 2, 715; 3, 984
- - о тригонометрических рядах 2, 715
- - об эквивалентности множеств 2, 715
Кантора — Бендиксона теорема 2, 714
Кантора — Бернштейна теорема 2, 715, 723; 3, 838
Кантора — Гейне теорема 2, 715
Кантора — Лебега теорема о тригонометрических рядах 5, 440
Канторов диагональный процесс 2, 125
Канторов дисконтинуум 2, 715, 718
Канторова кривая 2, 715; 3, 384
Канторова лестница 2, 718
Канторовича пространство 4, 471, 713
Канторовича процесс 2, 715
Канторовича — Банаха пространство 4, 472
Канторово многообразие 2, 716
Канторово множество 2, 717
- распределение 4, 1178
- совершенное множество 2, 715, 718
Капелли тождество 1, 120
Капланского проблема для групповых алгебр 1, 1144
- теорема о проективных модулях 4, 682
Каппа 2, 718
Каратеодори внешняя мера 1, 734
Каратеодори класс регулярных функций 2, 718—720
Каратеодори мера 2, 720
Каратеодори область 2, 720
- расширение 5, 79
- теорема для граничных элементов 1, 1103
- - о выпуклой оболочке 1, 788
Каратеодори теорема о конформном отображении 2, 720
- - об интегральных представлениях 4, 215
- - об односвязных областях 2, 720
Каратеодори — Тёплица теорема 2, 719
Каратеодори — Фейера задача 2, 721
Кардано формула 2, 722
Кардинал множества 2, 723
Кардинальная сумма 5, 525
Кардинальное число 2, 723; 3, 837
- -, Бернштейна формула 1, 235
Кардинальнозначный инвариант 5, 388
Кардинальный инвариант 3, 834
Кардиоида 2, 724
Карлемана граничная задача 2, 725
- квазианалитический класс функций 2, 726
- континуум 2, 726
Карлемана неравенство 1, 977; 2, 725
- полиномы 2, 727
- принцип 4, 909
Карлемана теорема 2, 725—727
- - о квазианалитических классах 2, 725
- - о моментах 2, 726
- - о приближении 2, 726
- - о равномерном приближении 2, 726
- условие 2, 725, 799
- - для моментов 3, 792
Карлемана ядро 2, 727
Карлемана — Мийю проблема о гармонических мерах 4, 910
Карлесона множество 2, 727
Карлесона теорема о рядах Фурье 2, 727
- - об интерполировании 2, 621
Карлсона метод 2, 727
Карлсона неравенство 2, 728
Карнапа правило 1, 434; 2, 728
Карно теорема в геометрии 2, 729
Карсона преобразование 2, 729
Карта 2, 729; 3, 437, 743; 5, 722
- локальная 2, 355
- плоская 1, 1109
-, Эйлера формула 1, 1109
Картана базис 3, 273
- критерий о полупростых алгебрах Ли 3, 272
- - о разрешимости алгебр Ли 3, 279
- - полупростоты 2, 858
- - разрешимости 2, 858
Картана лемма о внешнем произведении 2, 731
Картана матрица 2, 731, 732; 3, 17
Картана метод внешних форм 2, 732—736
Картана подалгебра 2, 736; 3, 1041
Картана подгруппа 2, 737
- принцип доминирования 2, 373
Картана разложение 2, 738
- связность 4, 1093
- структурные уравнения 2, 736
Картана теорема 2, 738—740
- - о геодезических 4, 673
- - о группах Ли 3, 256
- - о дифференцируемых многообразиях 4, 732
- - о когомологиях 4, 769
- - о римановых пространствах 2, 863
- - о старшем векторе 2, 738
- - о тонком пределе 5, 365
- - о функциях многих комплексных переменных 2, 739
- - об аналитических группах 1, 245
- - об интегральных многообразиях 4, 774
- формула 5, 229, 231
- число 2, 734
Картана — Вейля базис 2, 740
Картана — Кэлера теорема об интегральных многообразиях 4, 774
Картана — Лаптева теорема о связности 4, 1095
Картана — Серра базис 5, 228
- - система 4, 517
- - теорема конечности 2, 1025
Картана — Туллена теорема об областях голоморфности 1, 1031
Картановская композиция 4, 921
Картановский коэффициент связности 5, 622
- тензор кручения 5, 622
Картера подгруппа 2, 740
Картографии математические задачи 2, 740—746
Картографическая проекция 2, 746—754
- сетка 2, 746
Картье дивизор 2, 130
- теорема для групповых схем 1, 1147
Карунена теорема о спектральном разложении 5, 121
Карунена — Лоэва разложение 5, 124
Касание 2, 754
Касательная 2, 249, 754
Касательная алгебра 3, 462
Касательная плоскость 2, 251, 755
- размерность 1, 285
Касательное отображение 2, 352, 755
- поле 4, 1210
- представление 5, 297
Касательное преобразование 2, 755; 4, 634
- пространство 1, 285
- - Зарисского 2, 443
Касательное расслоение 2, 443, 755
- риманово пространство 5, 623
Касательный конус 1, 788; 2, 756
Касательный поток 2, 756
Касательный пучок 2, 443, 757
Касательных индикатриса 2, 757
- метод 3, 1092
Каскад 2, 757; 3, 422; 5, 371
K-каскад 4, 1194
Каскадный код 2, 933
Каскадный метод 2, 758
Касп 2, 759
Кассини овал 2, 759
Кастельнуово критерий рациональности 4, 916
Кастельнуово — Энрикеса критерий 2, 675
Каталана поверхность 2, 759
Катастрофа элементарная 1, 498
Катастрофы Тома 5, 360
Категориальная грамматика 1, 1090
Категоричная в мощности элементарная теория 5, 972
Категоричная система аксиом 2, 759
Категоричность в мощности 2, 760
Категоричный в мощности класс моделей 1, 103
- класс Ω-систем 1, 160
Категория 2, 761—763
- абелева 1, 20
- аддитивная 1, 89
- в грамматике 1, 1091
- Гротендика 1, 1133
- групп 1, 1136
- двойственная 2, 32
- диаграмм со схемой 5, 688
-, диаграмма 2, 125
- дуальная 2, 32
- замкнутая 2, 433
-, идеал 2, 483
-, интегральный объект 2, 604
-, инъективный объект 4, 683
- комплексов 1, 20
- конкретная 3, 758
-, левый нуль 5, 616
-, локализация 3, 420
- локально связная 1, 1074
- малая 3, 497
- множеств 3, 758
Категория множества 2, 764
- модулей 3, 770
- моноидальная 3, 810
- мотивов 3, 833
- надстроечная 2, 47
-, нулевой объект 3, 1082
-, образ морфизма 3, 1129
-, образующий объект 3, 1130
-, объект 3, 1148
- последовательностей 4, 506
-, правый нуль 5, 616
- предабелева 1, 89
-, проективный объект 4, 682
Категория с инволюцией 2, 764
-, скелет 4, 1200
- топологизированная 5, 365
- -, главный *G*-объект 1, 1017
Категория топологического пространства (в смысле Люстерника — Шнирельмана) 2, 763
- функторов 5, 688
-, эквивалентность 5, 943
- эффективных мотивов 3, 833
S-категория 2, 47
Катеноид 2, 765
Катет 2, 765
Катетова равенство для размерностей 4, 829
- теорема о метрических пространствах 3, 1084
- формула для размерностей 4, 822
Каустика 2, 765
Качества задача 2, 330
Качественная теория дифференциальных уравнений 2, 765—771
Качественная теория дифференциальных уравнений в банаховом пространстве 2, 771—776
- - спектра дифференциального оператора 5, 110
Качественные методы вариационного исчисления 1, 585
Квадрант 2, 80, 776
Квадрат 2, 776
- греко-латинский 4, 90
- декартов 2, 79; 4, 896
- интервала 4, 149
- кольца 2, 981
- коуниверсальный 2, 79
- латинский 2, 971; 3, 206
- магический 2, 971; 3, 475
- Понтрягина 4, 483
- Постникова 4, 515
- скалярный 4, 1197
- универсальный 4, 896
- эйлеров 4, 90
Квадрата критерий 3, 207
Квадратическая иррациональность 2, 776

Квадратичная матрица неполная 1, 722
Квадратичная ошибка 2, 776, 783
Квадратичная форма 2, 776—782; 5, 634
- - бинарная 1, 486
- -, группа типов 1, 711
- -, закон инерции 2, 562
- -, кольцо типов 1, 711
- - линии второго порядка 3, 388
- - первая 4, 234
- - поверхности 1, 770; 2, 252
- -, ранг 4, 859
- -, сигнатура 4, 1128
- -, Сильвестра теорема 2, 562
- - третья 5, 296
Квадратичное интерполирование 2, 622
Квадратичное отклонение 2, 782; 3, 877
- отображение 2, 777
Квадратичное поле 2, 783
Квадратичное программирование 2, 678, 784
- симплектическое пространство 4, 714
Квадратичное среднее 2, 784
-уклонение 2, 782
Квадратичные формы поверхности 2, 784
- - узлов и зацеплений 5, 480
Квадратичный вычет 1, 814; 2, 785; 5, 153, 217
Квадратичный дифференциал 2, 241, 786
- -, глобальная структура траекторий 1, 1022
- -, локальная структура траекторий 3, 424
Квадратичный закон взаимности 2, 787; 3, 231
- идеал 2, 694
- критерий абсолютной устойчивости 5, 564
- модуль 2, 777
- невычет 2, 785; 5, 217
- символ Гильберта 5, 776
- характер Дирихле 2, 192
Квадратичных форм приведение 2, 788—791
Квадратная диаграмма 2, 126
- *матрица* 3, 613
- -, порядок 4, 504
- -, след 4, 1208
- -, собственное значение 5, 59
Квадратного корня метод 2, 791
Квадратное уравнение 2, 792
Квадратриса 2, 793
- Диностата 2, 156
Квадратура 2, 610, 793
Квадратура круга 2, 793
- оптимальная 4, 34
-, погрешность 4, 35
Квадратурная сумма 2, 793
Квадратурная формула 2, 793—795; 3, 136
- - Гаусса 1, 897; 2, 624
- - гауссова типа 3, 866
- - Лобатто 3, 397
- - Маркова 3, 513, 867
- - Мелера 3, 633
- - наивысшей алгебраической степени точности 3, 866
- - наилучшая 3, 867; 4, 35
- - Ньютона — Котеса 3, 1093
- - оптимальная 3, 867
- - Радо 4, 809
- - Симпсона 2, 625
- - случайная 3, 817
- - «трех восьмых» 3, 1093
- - Чебышева 5, 839
- - экстремальная 4, 35
- - Эрмита 3, 634
Квадратурных сумм метод 2, 795
Квадраты ортогональные латинские 4, 90
- - попарно 4, 90
Квадрика 2, 796—798
- Дарбу 2, 15
- Ли 3, 263
- соприкасающаяся 5, 79
Квадрируемая фигура 4, 327
Квадрируемое множество 3, 92
Квадрируемость 2, 798
Квадрупольный момент 3, 843
Квадруполя потенциал 3, 843
Квазиабелева функция 2, 798
Квазианалитическая k-алгебра 1, 278
Квазианалитический класс функций 2, 798—800
- - - в смысле Адамара 2, 725
- - - в смысле Карлемана 2, 726
- - -, Карлемана теорема 2, 725
Квазиаффинная схема 2, 800
Квазиаффинный морфизм 2, 800
Квазигеодезическая 2, 800
Квазигеодезическая линия 2, 800
Квазигиперболическое пространство 2, 800—802
Квазиглобальный способ решения многоэкстремальной задачи 3, 756
Квазигруппа 2, 802—805
- дистрибутивная 2, 229
- идемпотентная медиальная 2, 229
F-квазигруппа 2, 803
n-квазигруппа 2, 803
TS-квазигруппа 2, 802
Квазидискретный спектр 2, 805
Квазидиффузии метод 4, 251
Квазидиэдральная группа 2, 806
Квазидуальное пространство 5, 510
Квазиевклидово пространство 2, 806
Квазиестественная нормальная форма матрицы 3, 1054
Квазиинвариантная мера 2, 806
Квазиинтеграл 1, 695
Квазиинформационное расширение 2, 807
Квазиинъективный модуль 2, 664
Квазиклассическое приближение 1, 717; 2, 807—809
Квазикогерентный пучок 2, 809
Квазикомпактная аффинная схема 1, 358
Квазикомпактное пространство 2, 809, 993
Квазикомпонента точки 4, 1096
Квазиконформное отображение 2, 810—813
k-квазиконформное отображение 2, 810
Квазиконформности коэффициент 2, 810
Квазикоординаты 1, 1034
Квазилинеаризация 2, 813
Квазилинейная система 3, 956
Квазилинейное уравнение 2, 326, 814; 3, 951
Квазилинейные гиперболические уравнения и системы 2, 814—818
Квазилинейный дифференциальный оператор 2, 345
Квазилокальные оптимизирующие преобразования программ 4, 644
Квазимера 4, 580; 5, 818
Квазимногообразие 2, 818
- алгебраических систем 1, 183
- конечно определимое 1, 183
- минимальное 1, 184
Квазимногочлен 3, 343
Квазинорма 2, 818
Квазинормальное пространство 2, 818; 3, 1065
Квазинормированное пространство 2, 818
Квазиобратный элемент 2, 820
Квазиоперация 1, 826
Квазиотражение 5, 506
Квазипериод 5, 347
Квазипериодическая полугруппа 4, 267
Квазипериодическая функция 2, 818
Квазипериодический режим 1, 786
Квазипериодическое движение 2, 819
Квазипорядок 4, 505, 581
Квазипроективная схема 2, 819
Квазипроективный морфизм 2, 819
Квазипростое представление 2, 819
Квазипростое число 2, 819; 4, 883
Квазиравномерная сходимость 2, 819
Квазиразложимая группа 2, 820
Квазирасщепимая группа 2, 820
Квазирегулярная точка 5, 1013
Квазирегулярное кольцо 2, 109, 820
- отображение 2, 810
Квазирегулярный радикал 2, 820
- функционал 1, 621
Квазирефлексивное банахово пространство 1, 388
Квазирешение 2, 821; 3, 932
Квазиримаково пространство 4, 467, 468
Квазисимплектическое преобразование 2, 822
Квазисимплектическое пространство 2, 822
Квазисобственная функция 2, 805
Квазисобственное значение 2, 805
Квазисредние 2, 823
Квазисредних метод 2, 823—825
Квазитело 2, 967
Квазитензорный объект 1, 937
Квазитождество 1, 159, 183; 2, 760, 825
Квазиуниверсальный класс Ω-систем 1, 185
Квазиунипотентное действие 3, 807
Квазиунипотентный элемент 4, 155
Квазиупорядоченность 4, 581
Квазифробениусово кольцо 2, 825
Квазифуксова группа 2, 876
Квазихарактер 2, 826
Квазихомотопическая алгебра 5, 790
Квазициклическая группа 2, 827; 4, 416
Квазиэквивалентность базисов 1, 377
Квазиэквивалентные представления 2, 827
Квазиэллиптическое пространство 2, 828
Квантиль 2, 829
- *выборочная* 1, 774
Квантование источника сообщений 2, 683
- сообщений 5, 76
Квантования вторичного метод 5, 518
Квантованное поле 4, 475
Квантовая мера 2, 1037
Квантовая теория поля 2, 829—837
- - конструктивная 2, 1036
Квантовое декодирование 2, 708
- кодирование 2, 707
- поле 4, 475
Квантовый канал связи 2, 707
Квантор 2, 837
- всеобщности 1, 769; 3, 1148
- ограниченный 3, 1162; 4, 637
- существования 4, 93
Квартиль 2, 829, 837
Кватернарная квадратичная форма 2, 837
Кватернарная форма 2, 838
Кватернион 2, 838
-, векторная часть 2, 838
-, норма 2, 838
-, скалярная часть 2, 838
- сопряженный 2, 838
-, тело 5, 326
Кватернионная структура 2, 839
Кватернионное келерово многообразие 2, 839
- риманово многообразие 2, 839
Кватернионов группа 2, 840
Кёбе теорема 2, 841
- - искажения 2, 841
- - о разрезах 5, 516
- - об 1/4 2, 669
- - об отображении областей 2, 841
- - покрытия 2, 841
Кёбе униформизация 2, 877
Кёбе функция 1, 466; 2, 669, 842
Келдыша теорема 2, 842; 3, 117
- - в теории потенциала 2, 842
- - о несамосопряженных дифференциальных операторах 5, 112
- - о приближении 2, 842
- - об иррегулярных граничных точках 4, 275
Келдыша — Лаврентьева пример 2, 843
Келдыша — Лаврентьева теорема о равномерном приближении 2, 843
Келлога лемма 2, 844
Келлога теорема о конформном отображении 2, 844
Келлога — Эванса теорема 2, 844
Кельвина преобразование 2, 844
Кельвина функция 2, 845
Кеммера — Дуффина матрица 2, 875
Кендалла коэффициент ранговой корреляции 2, 846; 4, 863
Кёнига теорема о (0,1)-матрицах 1, 773; 2, 846
- - о порядковых числах 2, 723
Кеплера уравнение 2, 846
Кервера инвариант 2, 847—849
- многообразие 2, 380, 848
- сфера 2, 380
Кервера — Милнора инвариант 2, 849
Керниса теорема о двумерных многообразиях 2, 56
Керн функция 2, 849
- Бергмана 1, 412
Керра метрика 2, 849; 5, 890
Кёте проблема о нильидеалах 3, 1039
- - о циклических модулях 5, 816
- пространство 5, 1034
- радикал 4, 807
Кибернетика 2, 850—856
Кибернетическая система 2, 850
Киллинга вектор 2, 856
- поле объекта 2, 857
- тензорное поле 2, 857
- уравнение 2, 857
Киллинга форма 2, 858
Киллинга — Кокстера элемент 2, 946
Кинематическая мера 2, 571
- теория газов, Больцмана уравнение 1, 521
Кинетическое уравнение 2, 858; 4, 245
- - Власова 1, 720
- - Ландау 3, 190
- - переноса, Владимирова метод 1, 719
Кинк 5, 75
Кирпич гильбертов 1, 978
Кирхгофа интеграл 2, 860
Кирхгофа метод 2, 859
Кирхгофа формула 2, 860—862; 3, 48
Кирхгофа — Лява гипотеза в теории оболочек 3, 1127
Кирхгофа — Соболева формула 2, 862
Китайская теорема об остатках 2, 65, 862
Кифера — Вольфовица процедура стохастической аппроксимации 5, 235
Класс 2, 862—864; см. также соответствующее название
Класс-вычет 1, 818
Классификационный признак 3, 733
Классификация Бэра 1, 567
- Клини — Мостовского 2, 881
Классифицирующее пространство 2, 864
Классическая группа 2, 865—868
- - линейная 3, 303
- -, представление 4, 595
- постановка краевой задачи 3, 607
- простая компактная алгебра Ли 3, 265
- размерность 4, 824
- форма леммы Шварца 5, 886
Классически общезначимая формула 4, 579

Классически полупростое кольцо 2, 868; 4, 805
Классические ортогональные многочлены 2, 868
Классическое вариационное исчисление 1, 580
- изопериметрическое неравенство 2, 517
- исчисление высказываний 3, 418
- - предикатов 3, 417, 418; 4, 578
- - пропозициональное 4, 699
- равенство Парсеваля 4, 223
Классической механики вариационные принципы 1, 596
Классической небесной механики математические задачи 2, 869—871
Классов дивизоров группа 2, 871
Классов исчисление 2, 872
Классы сложности вычислений 1, 211
Кластер 3, 712
Кластера задача 4, 872
Клебша коннекс 2, 1035
Клебша условие 2, 872
Клейна бутылка 2, 873
Клейна интерпретация 2, 873
Клейна координаты 2, 873; 4, 334
- модулярная группа 2, 195; 5, 680
- особенность 4, 915
Клейна поверхность 2, 52, 873
Клейна пространство 2, 874
- четверная группа 4, 1141
Клейна — Гордона уравнение 2, 874; 5, 898
Клейна — Пуанкаре теорема униформизации 2, 876; 5, 515
Клейнова группа 2, 875—878
Клейсли конструкция 5, 447
Клеро теорема о поверхностях вращения 1, 767
Клеро уравнение 2, 878
Клетка двумерная 2, 51
- жорданова 2, 425; 3, 372
- p-мерная 2, 880
-, Уайтхеда теорема 1, 1064
Клеточная гомотопия 2, 878
- коцепь 3, 44
- матрица 3, 614
- система Постникова 4, 516
Клеточно-диагональная матрица 3, 614
Клеточное отображение 2, 878
Клеточное пространство 2, 879
Клеточное разбиение 2, 879
- -, Уайтхеда теорема 1, 1069
Клеточный комплекс 2, 880, 996
Кли задача 5, 1014
Клин в векторном пространстве 2, 880, 1074
Клини аналитическая иерархия 2, 490
- нумерация 3, 1086
- теорема о рекурсивных функциях 3, 1057
Клини — Мостовского арифметическая иерархия 2, 490
Клини — Мостовского классификация 2, 881
Клини — Нельсона теорема в программировании 4, 646
Клини — Россера парадокс 2, 970
Клиффорда алгебра 2, 881
- группа 2, 882; 5, 138
Клиффорда параллель 2, 882; 4, 991
- поверхность 2, 882; 4, 991; 5, 405
Клиффорда теорема о дивизорах 2, 882
- - о полугруппах 4, 1091
- числа 1, 240
Клиффорда — Липшица числа 1, 1008
Клиффорда — Клейна проблема пространственных форм 4, 709
Клиффордова полугруппа 2, 883
Клон операций 2, 884
Клотоида 2, 884; 3, 21
Клофоида 3, 21
Кнастера континуум 2, 884; 3, 892
Кнастера—Куратовского веер 1, 760
Кнезера теорема для главных однородных пространств 1, 1015
Кнезера теорема о слоениях 2, 884
Кнезера — Брюа — Титса теорема об алгебраических группах 1, 847
Кнезера — Титса гипотеза 2, 885
Кнеппа метод суммирования 2, 886
Кнеппа — Лоренца теорема о методах суммирования 1, 37
Коалгебра 2, 886
Коалиционная игра 2, 886
- структура 5, 561
Коалиционно рациональная конфигурация 5, 561
Коалиция 2, 887, 1103
- действия 2, 469
- интересов 2, 470
-, угроза 5, 562
Кобазис 2, 887
Кобол 2, 887
Кобордизм 1, 533; 2, 888—894; 5, 487
- узлов 3, 739; 5, 482
h-кобордизм 2, 894
s-кобордизм 2, 894
Ковариант 2, 344, 980
Ковариант тензора 2, 895
Ковариантная валентность 5, 326
Ковариантная производная 2, 735, 896, 897
Ковариантно постоянное поле 4, 208
Ковариантное дифференцирование 2, 896—899
Ковариантный вектор 2, 899, 900
Ковариантный дифференциал 2, 897, 900
Ковариантный тензор 2, 900; 5, 326
- функтор 2, 762
Ковариационная матрица 2, 900
- функция 5, 105
Ковариационное окно 5, 125
Ковариационный анализ 2, 901
Ковариация 2, 226, 902
Ковариация числа решений 2, 902
Ковер Серпиньского 3, 384; 4, 1118
Ковырождения оператор 4, 1169
Ковысота простого идеала 1, 813
Когенератор 4, 1127
Когерентная когомологическая размерность 2, 926
Когерентное вещественное аналитическое пространство 1, 689
Когерентное кольцо 2, 903
Когерентность, Ока теорема 4, 9
- ориентации 2, 662
Когерентные числа 2, 903
Когерентный алгебраический пучок 2, 903
Когерентный аналитический пучок 2, 739, 904
Когерентный пучок 2, 905
Когомологии 2, 905—909
- l-адические 1, 99
Когомологии алгебр 2, 909—912
Когомологии алгебр Ли 2, 912—915
- Александера — Спеньсра 5, 861
- Александрова — Чеха 1, 234; 5, 861
Когомологии банаховых алгебр 2, 915
- Вейля 1, 626
- Галуа 1, 845
Когомологии групп 2, 916—919
- де Рама 4, 855
- динамической системы 1, 1042
Когомологии комплекса 2, 919
- локальные 3, 442
- неабелевы 3, 896
- относительные 4, 151
- примитивные 3, 237
- сингулярные 4, 1179
- спектральные 5, 861
Когомологии теория 1, 1046
Когомологии Чеха 5, 861
- эквивариантные 5, 947
- этальные 5, 1024
Когомологий алгебраический класс 1, 180
Когомологий группа 2, 919; 4, 1163
Когомологий кольцо 2, 906, 908, 920
- обобщенные теории 3, 1120
- функтор 5, 1024
- экстраординарные теории 3, 1120
Когомологическая группа комплекса 2, 998
- длина 2, 763
- надстройка 2, 921
Когомологическая операция 2, 921—925
Когомологическая последовательность 1, 1046, 1053; 2, 925, 1001
Когомологическая размерность 1, 846, 1055; 2, 925
Когомологически тривиальный модуль 2, 918
Когомологический функтор 1, 1058; 2, 926
Когомологическое многообразие 1, 1059; 2, 926
Когомологичные коциклы 3, 45
Когомологичный нулю коцикл 2, 954
Когомотопическая группа 2, 927
S-когомотопическая группа 2, 48
Кограней оператор 4, 1169
Кограница 3, 44; 4, 1179
Когранично отображение 3, 44
Когранычный оператор 2, 954
Код 1, 220; 2, 649, 928, 939
- арифметический 2, 933
- блоковый 2, 931
- Боуза — Чоудхури — Хоквингема 2, 932
- двоичный 2, 932
- двойственный 2, 929
-, длина 2, 929
- каскадный 2, 933
- линейный 2, 932
- оптимальный 2, 937
- плотно упакованный 4, 396
- префиксный 2, 937
- Рида — Маллера 2, 932
- Рида — Соломона 2, 932
Код с исправлением арифметических ошибок 2, 928—930
Код с исправлением выпадений и вставок 2, 930
Код с исправлением ошибок 2, 930—934, 941
- современный 2, 932; 4, 396
- циклический 2, 933
A-код 2, 929
БЧХ-код 2, 932
РМ-код 2, 932
РС-код 2, 932
Кодаиры размерность 2, 934
- теорема о проективном вложении 3, 156; 5, 788
Кодаиры теорема об исчезновении 2, 935
Кодвижение 2, 801, 829
Кодирование 2, 649, 682, 931, 937
- автоматное 2, 938
Кодирование алфавитное 2, 935—937
Кодирование и декодирование 2, 937—942
- источника сообщений 2, 683
- квантовое 2, 707
- неравномерное 2, 935
- случайное 2, 649; 5, 15
-, теорема 2, 652
-, Шеннона теорема 2, 650
Кодовое расстояние 2, 931
- слово 2, 649
Коевклидово пространство 2, 942—944
Коединица сопряжения 5, 90
Козамкнутый дифференциал 2, 238
Коиндуцированный модуль 2, 917
Кока алгоритм 1, 1090
Кокасательное пространство 1, 285; 2, 755
- расслоение 2, 755
Коконус морфизмов 2, 1074
Кокстера граф 2, 944; 3, 17
Кокстера группа 2, 944—946
- матрица 2, 944
- число 4, 159
Колебание гармоническое 1, 888; 4, 1085
- разрывное 4, 967
- релаксационное 4, 966
- свободное 5, 64
- синусоидальное 1, 888
- собственное 5, 64
Колебание функции 2, 946
Колебаний маятника уравнение 3, 629
Колебаний теория 2, 947—950
Колебания вынужденные 1, 786
- квазилинейные 3, 956
- субгармонические 1, 786
Колебательное уравнение 1, 862
Колеблющееся решение 2, 950
Колец многообразие 2, 950
Количественная эквивалентность 3, 760
Количественный признак 3, 732
Количество информации 2, 646
- - алгоритмическое 1, 222
Коллектив автоматов 1, 58
Коллизия переменных 4, 382, 579
Коллингвуда теорема максимальности 4, 569
Коллинеарность 4, 664
Коллинеарные векторы 1, 632; 2, 951
Коллинеация 2, 951; 4, 669, 680
Коллокации метод 2, 951
Колмогорова аксиома 2, 952; 4, 140; 5, 391
Колмогорова двойственность 2, 953—955
- дифференциальное уравнение 3, 519, 526
Колмогорова интеграл 2, 955
Колмогорова критерий 2, 955
- - для систем независимых функций 3, 919
Колмогорова неравенство 2, 956
- обратное уравнение 2, 361
- поперечник 4, 492
- поток 4, 1195
Колмогорова пространство 2, 952, 958
- прямое уравнение 2, 362
- распределение 4, 180
- система 4, 1195
- теорема о дополнениях 2, 94
- - о законе повторного логарифма 4, 347
- - о композиции (суперкомпозиции) функций 4, 1216
- - о локально выпуклых пространствах 3, 428
- - о непустоте классов 2, 94
- - о нормируемости пространств 3, 1047
- - о применимости усиленного закона больших чисел 1, 528
- - о согласованных распределениях 1, 666
- - о топологических векторных пространствах 5, 379
Колмогорова уравнение 2, 958; 4, 1199
- условие для случайных процессов 5, 24
- функция распределения 2, 955
Колмогорова — Александера произведение 2, 906
Колмогорова — Селиверстова теорема 2, 959
Колмогорова — Смирнова критерий 2, 959
Колмогорова — Чепмена уравнение 2, 960; 4, 259; 5, 960
Колоколообразная пра 2, 960
Колчина теорема о нильпотентных группах Ли 3, 271
- - об унипотентных группах 5, 505

Колчина — Мальцева теорема о группах Ли 3, 285
Кольца и алгебры 2, 960—965
Кольцевая граница 2, 965—967
- норма 3, 1048
Кольцевая область 1, 1023; 2, 967
Кольцевой алгоритм 1, 562
- объект категории 1, 1149
- спектр пространств 5, 103
Кольцо 2, 960, 967
- абелево 4, 941
- абсолютно плоское 1, 39
-, аддитивная группа 1, 89; 2, 967
- аделей 1, 95
- Алберта 3, 901
- алгебраических степенных рядов 1, 918
- алгебро-геометрическое 1, 939
- альтернативное 1, 237
-, аналитическая нормальность 1, 939
-, - приведенность 1, 939
- аналитическое 1, 278
-, Артина — Риса лемма 1, 98
- артиново 1, 327
- архимедово 1, 329
- ассоциативное 1, 340; 2, 961
- ассоциативно-коммутативное 1, 239
- атомарное 1, 351
- Безу 1, 400
- бирегулярное 4, 940
- булево 1, 554
- бэровское 4, 940
- Вейерштрасса 1, 614
- векторное 1, 640
- векторов Витта 1, 710
- Витта 1, 711
- Витта — Гротендика 1, 715
- вихревое 1, 715
-, вложение 1, 721
-, внутренний автоморфизм 1, 736
- вполне регулярное 1, 118
- вычетов 5, 592
-, Галуа теория 1, 853
- гауссово 1, 906; 5, 590
- гензелево 1, 918
- геометрическое 1, 939
- главных идеалов 1, 1019
-, Голди теорема 1, 341
-, гомологическая классификация 1, 1052
- Горенштейна 1, 1076
- градуированное 1, 1084
- Гротендика 4, 595
- групповое 4, 1204
- двумерное 2, 51
- дедекиндово 2, 64
-, делимость 2, 85
- Джекобсона 2, 108
-, Джекобсона радикал 2, 109
- диагональное 2, 124
- дискретно нормированное 2, 203
- дискретного нормирования 2, 203
- дифференциальное 2, 279
- дифференциальных многочленов 1, 1019; 4, 901
- - операторов 2, 349
-, дифференцирование 2, 350
- евклидово 2, 398
-, единица 2, 961
- квазирегулярное 2, 109, 820
-, квазирегулярный радикал 2, 820
- квазифробениусово 2, 825
- классически полупростое 2, 868; 4, 805
- когерентное 2, 903
- когомологий 2, 906, 908, 920
-, коммутант 2, 981
- коммутативное 2, 961, 989
- конечного дискретного главного порядка (кольцо Крулля) 3, 124
- конечное по Дедекинду 4, 941
- косых многочленов 1, 1019
- Коэна — Маколея 3, 68
-, кронекерово произведение 3, 118
- Крулля 3, 124
-, Крулля теорема 1, 98
- Ласкера 3, 206
-, левая глобальная размерность 1, 1054
- Ли 3, 263
- линейно упорядоченное 5, 526
- локально факториальное 2, 871
- локальное 3, 437
- - регулярное 1, 1055
- маколеево 3, 68
- матриц 3, 612
- многочленов 3, 755; 4, 309
- множеств 3, 637
-, Мори теорема 2, 871
-, мультипликативный группоид 2, 967
- неассоциативное 3, 899
- непрерывное слева 4, 940
- нормальное 3, 1051
- нормирования 3, 1078; 5, 815
- нормированное 3, 1081
-, нуль 3, 1082
- однорядное 3, 1182
- оперативное 2, 961
- операторное 4, 24
-, Ope теорема 1, 341
- первичное 3, 901; 4, 237
- полулокальное 3, 439
- полунаследственное 4, 459
- полупервичное 4, 237
- полупростое 4, 465
- J-полупростое 2, 820
- полусовершенное 4, 469
- полуцепное 4, 473
-, правый порядок 4, 505
- превосходное 4, 554
-, предпучок 4, 581
-, представление 3, 778; 5, 1001
- представлений 4, 594
- примарное 4, 634
- примитивное 4, 637
- присоединенное 3, 438
-, проективный спектр 4, 684
- простое 4, 705
-, простой элемент 2, 85
- псевдогеометрическое 1, 939
- псевдофробениусово 2, 826
-, радикал 4, 804
-, T-расширение свободное 1, 722
- регулярное 4, 939
- *-регулярное 4, 941
- решеточно упорядоченное 5, 526
- риккартово 4, 985
- рядное 3, 1182
Кольцо с делением 2, 967
- с областью операторов 4, 24
- самоинъективное 4, 1071
- сбалансированное 4, 1075
- свободное 4, 1079
- - некоммутативное аффинное 1, 123
- символов 2, 349
- скрещенное групповое 4, 1204
-, слабая глобальная размерность 1, 1054
-, совершенное 5, 68
-, спектр 5, 101
-, стабильный ранг 5, 166
- строго гензелево 1, 918
- - регулярное 4, 940
- структурно упорядоченное 5, 526
-, структурное пространство 5, 256
- топологическое 5, 385
- упорядоченное 5, 526
- факториальное 5, 590
-, целое замыкание 2, 64; 5, 799
-, целое расширение 5, 799
- целостное 3, 1099; 5, 800
-, центр 5, 802
- цепное 4, 555; 5, 815
- частично упорядоченное 5, 526
- частных 1, 341; 5, 838
- - полное 3, 422
- Чжоу 1, 181; 5, 862
- эндоморфизмов 5, 1000
- японское 1, 939
PF-кольцо 2, 826
QF-кольцо 2, 825
QF-3-кольцо 2, 826
σ-кольцо 3, 637
*-кольцо бэровское 4, 986
- риккартово 4, 986
Кольцоид 2, 968
Команда 4, 645
- машины Тьюринга 5, 456
Комасса 3, 536
Комбескюра соответствие 4, 280
Комбинатор 2, 970
Комбинаторика 2, 968, 974
Комбинаторная геометрия 2, 968, 969
- конфигурация 2, 974, 975
Комбинаторная логика 2, 969
Комбинаторная математика 2, 970, 974
- полугруппа 4, 934, 935
Комбинаторная топология 2, 970
- -, основная гипотеза 3, 152; 4, 486
Комбинаторное многообразие 3, 154
Комбинаторные задачи классические 2, 971—974
Комбинаторный анализ 2, 974—980
Комбинационный резонанс 4, 217
Комитант 2, 980
- дифференциальный 2, 344
Коммивояжера задача 2, 972
Коммутант 2, 981, 989
Коммутативная алгебра 2, 981—984
- - Ли 3, 242
- -, локализация 3, 421
Коммутативная банахова алгебра 1, 381; 2, 984—989
Коммутативная группа 2, 989
Коммутативная групповая схема 2, 989
- диаграмма 1, 1050; 2, 125
- связка полугрупп 4, 1091
- супералгебра 5, 276
Коммутативное кольцо 2, 961, 989
Коммутативности закон 1, 125
- тождество 1, 120
Коммутативность 2, 989
Коммутативный групповой объект 1, 1149
- центр альтернативного кольца 1, 238
Коммутатор 2, 989
- базисный 1, 379
- правильный 1, 379
Коммутации соотношение 5, 518
Коммутационные соотношения 4, 257
Коммутационных и антикоммутационных соотношений представление 2, 990
Коммутирования операция 5, 277
Компакт 1, 474; 2, 990; 5, 392
-, Аренса — Ройдена теорема 2, 985
- Бора 1, 531
-, Брушлинского — Эйленберга теорема 2, 985
-, R-выпуклость 1, 800
-, емкость 2, 404, 405
- привилегированный 4, 632
-, размерность 4, 821
-, теорема о мешках 1, 1060
-, теорема о поясах 1, 1060
- Эберлейна 4, 717
Компактификация 1, 477
- Александрова 1, 233
- Винера 4, 1030
- Мартина 3, 531
Компактная алгебра Ли 3, 264
Компактная группа 2, 991; 3, 264
- -, представление 4, 586
- йорданова алгебра 3, 1180
- топологическая группа 5, 367
Компактно открытая топология 4, 716, 1100
- порожденная решетка 1, 154
-сходящаяся последовательность 5, 311
Компактное в себе множество 2, 992
- вложение функциональных пространств 1, 723
Компактное множество 2, 992
- неориентируемое двумерное многообразие 2, 52
- ориентируемое двумерное многообразие 2, 52
Компактное пространство 1, 473; 2, 993
- семейство голоморфных функций 2, 993
-σ-компактное пространство 2, 993
Компактной сходимости топология 2, 993
Компактности принцип 2, 993
- - Бляшке 1, 509
- - для голоморфных функций 3, 820
- теорема 1, 158
- - в теории моделей 3, 766
- условие 5, 392
Компактность 2, 993
- аппроксимативная 1, 303
- логики первого порядка 2, 371
- метрического пространства 3, 671
- счетная 5, 392
- финальная 5, 392
Компактный класс подмножеств 5, 67
- носитель 2, 681
Компактный оператор 2, 994; 3, 373, 960; 4, 19; 5, 128
- полиэдр 4, 410
Компактный элемент решетки 2, 994
Компаньон 3, 461
Компенсатор 4, 1200
Компилятор 1, 225; 5, 418
Компиляция программ 5, 417
Компланарные векторы 1, 632; 2, 994
Комплекс 2, 995—1001; 5, 612
Комплекс 2, 1001—1002
- абсолютный линейный 4, 1157
- абстрактный 3, 151
- - симплициальный 2, 995
- бесконечномерный 2, 995
- геометрический 1, 933; 4, 748
- - симплициальный 2, 996
-, гомологии 1, 1042
-, группа когомологий 2, 919
- двойной 1, 481
- де Рама 2, 263, 278
- - неабелев 3, 897
-, джойн 3, 153
- замкнуто конечный 2, 995
- звездно конечный 2, 995
- клеточный 2, 880, 996
- конечномерный 2, 995
- конечный 2, 995
- - геометрический 2, 997
- коцепной 2, 1001
-, коцикл 2, 998
- линейного дифференциального оператора 3, 367
- локально конечный 2, 995
- неабелев коцепной 3, 896
-, подразделение 3, 152
- полиэдральный 2, 996; 4, 412
- полусимплициальный 4, 469, 1161
Комплекс прямых 2, 1002
- Пуанкаре 4, 747
- симплициальный 3, 151; 4, 1159, 1168
-, спектр 4, 393
- цепей 4, 1163
- цепной 1, 1042; 2, 998, 1001; 4, 1163
-, цепь 1, 1043; 2, 998
-, цикл 1, 1043; 2, 998
- Чеха 2, 906; 3, 896
- эллиптический 2, 553
a-комплекс 3, 151
CW-комплекс 2, 879
Комплекс-группа 4, 1157
Комплексификация алгебры Ли 2, 1003
Комплексификация векторного пространства 2, 1003
Комплексификация группы Ли 2, 1004
- многообразия 2, 70
- ростка 1, 689
Комплексная гиперповерхность, особая точка 4, 119
- компактная группа Ли 3, 265
- коразмерность 1, 249
- оболочка алгебры Ли 2, 1003
- плоскость 2, 1008
- - бесконечно удаленная 1, 443
- - расширенная 1, 443; 4, 910
- прямая 1, 249
- размерность 1, 249

Комплексная структура 9, 855, 1005
- суммируемая функция, Привалова — Голубева теорема 1, 1034
- K-теория 5, 335
функция Грина 1, 1131; 5, 889
- - почти периодическая 1, 382
- характеристика отображения 2, 810
Комплексно евклидово пространство 5, 1019
Комплексно-аналитическая кривая 1, 249
- плоскость 1, 249
- поверхность 1, 249
- структура 2, 355
Комплексно-аналитическое слоение 4, 1210
Комплексного дифференцирования оператор 3, 67
Комплексного интегрирования метод 1, 259; 2, 1005—1007
- переменного методы решения краевых задач 3, 80
- - пространство 1, 285; 2, 1007
- векторное пространство 1, 642
Комплексное многообразие 1, 273, 278; 2, 355, 1007
- -, аналитическая деформация 2, 103
- - аналитическое 1, 278; 2, 1007
- -, аналитическое семейство 2, 102
- -, голоморфная форма 1, 1028
- - однородное 3, 1173, 1176
- - Штифеля 5, 759
- отражение 4, 158
Комплексное пространство 1, 285; 2, 1007
- - голоморфно выпуклое 1, 1029
- - конечного типа 1, 1030
- -, мероморфное отображение 3, 650
- - расширенное 1, 443
- -, стягивание 2, 674
Комплексное число 2, 1007—1011
- -, абсолютная величина 2, 1008
- -, амплитуда 2, 1009
- -, аргумент 1, 313; 2, 1009
- -, аффикс 1, 352
- -, векторная интерпретация 2, 1009
- - гиперболического типа 2, 31
- -, действительная (вещественная) часть 2, 1007
- -, матричная интерпретация 2, 1009
- -, мнимая часть 2, 1007
- -, модуль 1, 34; 2, 1008
- -, Муавра формула 2, 1010
- - параболического типа 2, 31
- -, показательная форма 2, 1009
- -, поле 2, 1008
- -, полярная форма 2, 1009
- - расщепляемое 2, 32
- -, тригонометрическая форма 2, 1009
- -, фаза 2, 1009
- - эллиптического типа 2, 31
Комплексный гауссовский процесс 1, 906
- метод Кальдерона — Лионса 2, 630
- модуль винта 1, 706
Комплексный тор 1, 22, 250; 2, 1011
- характер Дирихле 2, 192
- чертеж 3, 895
Комплексных умножений алгебра 5, 1001
Композит 2, 1012
- полей 4, 398
Композиции теорема для нормальных алгорифмов 1, 226
Композиционное умножение 5, 284
Композиционный нормальный ряд группы 3, 1076
Композиционный ряд 2, 485, 1012; 5, 266
- - подгрупп 4, 368
- фактор 5, 266
Композиция 2, 1013; 3, 714
- автоматов 1, 68
- адамаровская 1, 88
- -мартыновская 4, 921
- операций 2, 884
- отображений 4, 153
- соответствий 5, 78
- функций 2, 1013; 4, 1214; 5, 278
Компонента вектора 1, 633; 2, 1013
Компонента пространства 2, 1013
- размерностная 2, 716
- связности графа 1, 1114
- симплициального объекта 4, 1168
- тензора 2, 1070
- точки 4, 1096
Компоненты абсолютные 1, 935
- базиса 1, 374
- разложения по базису 1, 375
Кона теорема об идеалах 1, 342
Конвея группы 5, 149
Конвея многочлен 5, 489
Конгруэнтность 2, 1013
- отрезков 4, 675
Конгруэнтные углы 5, 467
- фигуры 2, 1013
Конгруэнц дзета-функция 2, 119
Конгруэнция 1, 1123; 2, 1014; 4, 405, 1148; 5, 612
- абсолютная 1, 492
- Бианки 1, 465
- вербальная 1, 654
- вполне характеристическая 1, 764
- Г 1, 1012
- Гишара 1, 1012
-, главная поверхность 5, 613
- Гурса 1, 1152
- дробная 2, 382
- идеальная 4, 444
- изотропная 2, 522
- криволинейная 5, 613
- нормальная 2, 802
Конгруэнция прямых 2, 1014
- Рибокура 4, 985
- рисовская 4, 444
- Ω-систем 1, 157
-, фокальная сеть 5, 633
- ядерная 5, 1030
y-конгруэнция 5, 524
W-конгруэнция 2, 1015
Конгруэнц-многообразие 5, 502
Конгруэнц-подгруппа 2, 1013
- главная 3, 784
Конгруэнц-проблема 2, 1013
Конгруэнц-простая универсальная алгебра 5, 497
Конденсатор 2, 403, 404
Конденсации отрезок 2, 22; 3, 184
Конденсации точка 2, 1015
Кондуктор характера 2, 1015
Кондуктор целого замыкания 2, 1016
Конечная абелева группа, двойственность 2, 47
- алгебра Неймана 3, 921
- алгебраическая система 1, 155
- вариация 1, 606
- - Витали 1, 709
- - Фреше 5, 664
- выпуклая игра 1, 787
- геометрия 2, 975
Конечная группа 2, 1016—1018
- - Коксетера 2, 945
- - подстановок 4, 382
- -, порядок 4, 504
- - простая 4, 700
Конечная групповая схема 2, 1018
- игра 2, 471
Конечная математика 2, 208, 1018
- мера 4, 719
- область 3, 1098
- плоскость 4, 319
- - Мёбиуса 3, 631
- последовательность 4, 507
- проективная плоскость 4, 669
- - прямая 4, 671
Конечная разность 2, 1019, 1026
Конечная риманова поверхность 2, 1019; 4, 1015
- ядерная норма 5, 1031
σ-конечная мера 4, 719
Конечно аддитивная мера 3, 637
- - функция 1, 94; 3, 636
- аксиоматизируемый класс моделей 1, 103
- базируемое многообразие групп 1, 1137
- базируемые тривиальные многообразия 1, 186
- определенная алгебра 4, 34
Конечно определенная группа 2, 1019; 4, 34
- определенное банахово аналитическое множество 1, 386
- определенный росток 4, 128
- определимое квазимногообразие 1, 183
Конечно порожденная группа 2, 1019
- - - абелева 1, 18
- - модель 3, 714
- порожденное поле 4, 398
- - расширение 4, 900, 909
- порожденный модуль 3, 780
- представимый идеал 2, 903
- - модуль 3, 780
Конечно-автоматная грамматика 1, 1087
Конечного порядка оператор 3, 1006
- - точка ветвления 1, 679
- - целая функция 5, 798
- типа алгебра 4, 585
- - алгебраическая система 1, 155
- - множество 1, 945
- - расширение 4, 909
- - G-структура 5, 253
- - целая функция 5, 798
Конечное интегральное преобразование 2, 589
- отображение 2, 1021
- по Дедекинду кольцо 4, 941
- - - множество 2, 504
- покрытие 3, 216
Конечное поле 1, 848; 2, 1019
- расширение 4, 909
- - поля 1, 850
Конечнозонный потенциал 3, 31
Конечной группы представление 2, 1019—1021
- площади локальный принцип 3, 458
- суммы аксиома в теории размерности 4, 824
Конечнократное отображение 2, 1021; 4, 156
Конечномерная алгебра 2, 961
Конечномерная ассоциативная алгебра 2, 1021
Конечномерное банахово пространство 1, 391
- векторное пространство 1, 643
Конечномерное представление 2, 1022—1024; 4, 595
- пространство 4, 826
- - с индефинитной метрикой 4, 717
- распределение 1, 663
- - случайного процесса 5, 70
Конечномерный комплекс 2, 995
Конечноразностный метод 4, 195, 761
Конечно-свободная грамматика 1, 1087
Конечносвязная область 3, 748, 1098
Конечности теоремы 2, 1024; 5, 65
- условие 4, 454
- - в теории групп 1, 1143
Конечнострочный метод суммирования 2, 1025
Конечный автомат 1, 52
- алфавит 1, 819
- геометрический комплекс 1, 933; 2, 997
- градуированный объект 2, 1001
- идемпотент 4, 941
- комплекс 2, 995
- преобразователь 1, 54
- проекционный спектр 4, 686
- ранг группы 1, 1143
- распознаватель 1, 54
- след 4, 1209
- характер C^*-алгебры 5, 746
Конечных приращений формула 2, 1025
Конечных разностей исчисление 2, 1026—1032
- элементов метод 3, 307; 4, 250, 831; 5, 145
Коника 2, 1032
Коническая винтовая линия 1, 705
- выпуклая поверхность 1, 788
Коническая конструкция 2, 1033
Коническая поверхность 2, 1033
- поляра 3, 140
- проекции 2, 744, 754; 4, 688
Коническая сеть 2, 1033
- точка 4, 125
- - поверхности 2, 756
Конические сечения 2, 1034
Конический слой 2, 1074
Конкатенация 1, 73, 223; 4, 942; 5, 55, 644
Конкомитант 2, 980
Конкордантность 5, 487
Конкордантные слоения 4, 1211
- структуры Хефлигера 5, 783
Конкретизация 4, 977
Конкретная категория 2, 762; 3, 758
Коннекс 2, 1035
- Клебша 2, 1035
Коноид 2, 1035
Конормаль 2, 1036
Конормальный пучок 3, 1075
Консеквент 4, 1105
Консервативная система 1, 82, 859
Консервативное замкнутое покрытие 4, 203
- семейство множеств 4, 393
Консервативность разностной схемы 4, 845
Консервативные методы суммирования 4, 944
Константа 2, 1036; 5, 637; см. также соответствующее название
Константинеску — Корня теорема в теории потенциала 3, 531
Конституента 1, 223
Конструктивизированная модель 2, 1060
Конструктивная алгебраическая система 3, 1088
- арифметика 2, 1040
- m-ичная дробь 2, 1056
Конструктивная квантовая теория поля 2, 1036—1039
Конструктивная логика 2, 1039—1042
Конструктивная математика 2, 1042—1046
- модель 2, 1059
- последовательность натуральных чисел 2, 1055
- - рациональных чисел 2, 1055
Конструктивная семантика 2, 1046—1049; 4, 696
Конструктивная теория функций 2, 1049
- форма теоремы Гёделя о полноте 1, 910
- функция 2, 1049, 1056
Конструктивная функция действительного переменного 2, 1049
Конструктивного подбора принцип 2, 643, 1049
Конструктивное действительное число 2, 1050, 1055
- исчисление 3, 419
Конструктивное исчисление высказываний 2, 1050
Конструктивное метрическое пространство 2, 1051—1053
- множество 2, 671, 1053
- направление в математике 2, 1042
- отображение 2, 1054
Конструктивное по Гёделю множество 2, 1053
Конструктивное подмножество 2, 1054
- правило бесконечной индукции 1, 435
- правило Карнапа 2, 728
- пропозициональное исчисление 4, 699
Конструктивности аксиома 2, 1053
Конструктивный анализ 2, 1054—1057

- - формальный математический 5, 642
Конструктивный объект 2, 1043, 1057
- процесс 2, 1057
- пучок 5, 1024
Конструктивных моделей теория 2, 1058—1060
Конструкция — см. соответствующее название
Контакт 2, 1061
-, проводимость 4, 969
- основного реле 4, 968
- основной 4, 968
- промежуточного реле 4, 968
Контактная алгебра Ли 3, 244
- псевдогруппа 4, 731
Контактная структура 2, 1060
Контактная схема 2, 1061
- форма 2, 1060
- многообразие 2, 1063; 3, 232
Контактное преобразование 2, 1063; 4, 634
- - *инфинитезимальное* 2, 1063
Контактные задачи теории теплопроводности 2, 1063
Контактные задачи теории упругости 2, 1064—1067
Контактный полюсник 2, 1061
Контекстная грамматика 1, 1093
Контингенция 2, 1067
- вектор-функции 5, 543
Континуальный аналог леммы Шура 5, 919
Континуальный интеграл 2, 568, 1067
Континуум 2, 1067; 4, 1096
- арифметический 1, 323
- ациклический 1, 364
- гладкий 1, 1021
- змеевидный 2, 457
-, инициальное множество 2, 563
- Карлемана 2, 726
- Кнастера 2, 884; 3, 892
- кубовидный 3, 144
- локально связный 3, 437
- наследственно неразложимый 2, 884; 3, 892
- неприводимый 3, 997
- неразложимый 3, 1002; 5, 892
- Суслина 5, 280
-, Тейхмюллера теорема 2, 56
Континуума мощность 2, 1068; 3, 838
- проблема 2, 1068
Континуум-гипотеза 2, 1068
- обобщенная 1, 235; 2, 1053, 1068
Конторовича — Лебедева преобразование 2, 1069
Контравариант 2, 344, 980
- тензора 2, 896
Контравариантная валентность 5, 326
Контравариантный вектор 2, 899, 1070
Контравариантный тензор 2, 1070; 5, 326
- - метрический 5, 329
- функтор 2, 762
Контраградиентная матрица 2, 1072
Контраградиентное представление 2, 1070; 4, 583, 591
Контраградиентный автоморфизм 2, 1071
- изоморфизм 2, 1071
Контранозиции закон 2, 1072
Контраст 2, 1072
Контрмодель 1, 910
Контрстратегия 2, 332
Контругроза 5, 562
Контур в графе 1, 1108
- гомоклинический 1, 956
- нормальный 5, 46
- перевальный 4, 239
Контурного интегрирования метод 2, 1005, 1072
Контурное свойство 2, 1072
Конус 2, 1033, 1073—1076; 4, 811
- асимптотический гиперболоида 1, 1000
-, боковая поверхность 2, 1074
- в банаховом пространстве 1, 586; 2, 1075
- в векторном пространстве 2, 880
- в евклидовом пространстве 2, 1073
-, вершина 2, 1073
- воспроизводящий 2, 1075; 4, 470
- вполне правильный 2, 1076
- выпуклый 1, 801; 2, 1074
-, высота 2, 1074
- выступающий 2, 1074
- заостренный 2, 1074
- изотропный 2, 522; 4, 739
- касательный 1, 788; 2, 756
- кратчайших 4, 1025
- круговой 2, 1074
- миниэдральный 4, 470
- Монжа 2, 325; 3, 799
- морфизма цепных комплексов 2, 1002
- морфизмов 2, 1074
- над топологическим пространством 2, 1074
- направляющий 3, 799
- несплющенный 2, 1075
- нормалей 2, 814
- нормальный 2, 1075
-, образующая 2, 1073
-, основание 2, 1074
-, ось 2, 1074
- отображения 2, 1033, 1074
- оштукатуриваемый 2, 1076
- положительности 2, 781
- положительный 2, 1075; 4, 433, 470; 5, 526
- правильный 2, 1076
- предельный 4, 575
- прямой 2, 1074
- световой 2, 522
- телесный 2, 1075
- усеченный 2, 1074
- характеристический 3, 327
Конуса условие 2, 1076
Конфигураций пространство 3, 32
Конфигурационное многообразие 1, 928
- предложение 2, 1080
- пространство 2, 145
Конфигурация 1, 51; 2, 1076—1083; 5, 561; см. также соответствующее название
(v, k, λ)-конфигурация 1, 506
Конфинальный характер 2, 724
Конфликт 2, 469
Конфликтное управление 4, 46
Конфлюэнтная гипергеометрическая функция 2, 1083
Конфлюэнтное уравнение 1, 806
Конфлюэнтный анализ 2, 1083
Конфокальные кривые 2, 1083; 5, 95
Конформная геометрия 2, 1083—1087
- емкость 2, 404
- кривизна, тензор 3, 100
- проекция 2, 742, 753
Конформная связность 2, 1087—1089
Конформная структура 2, 1089
Конформно плоская почти симплектическая структура 4, 549
Конформно эквивалентные римановы поверхности 3, 775; 4, 1018
Конформно-геодезическая сеть 2, 1090
Конформно - дифференциальная геометрия 2, 1090
Конформное отображение 1, 266; 2, 1091—1097, 1099—1101
- -, вращения теоремы 1, 767
- - второго рода 1, 292
- -, Грётша принцип 1, 1121
- -, Грётша теоремы 1, 1122
- -, инвариантная форма леммы Шварца 1, 1000
- -, искажения теоремы 2, 668
- -, Каратеодори теорема 2, 720
- -, Келлога теорема 2, 844
- -, Римана теорема 1, 266
Конформное преобразование 2, 1097
- -, группа 2, 1084
Конформное пространство 2, 1084, 1090, 1097
Конформно-евклидово пространство 2, 1098
Конформно-инвариантная метрика 2, 1098
Конформно-чебышевская сеть 4, 1053
Конформные классы римановых поверхностей 4, 1030
Конформный радиус области 2, 1098
Конформных отображений граничные свойства 2, 1099—1101
Кон-Фоссена неравенство 1, 904
Кон-Фоссена преобразование 2, 1101
Конхоида 2, 1101
- Никомеда 3, 1039
Концевая вершина графа 1, 1106
- область 1, 1023
- точка 4, 700
- - линии 3, 386
Концентрации функция 2, 1101
Концентрационный пограничный слой 4, 356
Концентрические окружности 4, 15
Конциденция 2, 1035
Конъюнктивная нормальная форма 1, 126, 563; 2, 1102
Конъюнктивный член 2, 1102
Конъюнкция 1, 124; 2, 1102
-, реализация 2, 1047
- сомножителей 1, 125
- элементарная 1, 560, 563
- ядровая 1, 560
Кообраз векторного расслоения 1, 646
Кооперативная игра 2, 471, 1103
- неатомическая 3, 903
Координат метод 3, 9
Координата вектора 1, 633
z-координата особой точки 4, 114
Координатизация решетки 4, 982
Координатная квазигруппа сети 2, 804
- линия 2, 51
- плоскость 1, 358; 2, 80
Координатное кольцо аффинного алгебраического множества 1, 360
- пространство 1, 325
Координаты 3, 9
- абсолютные 1, 935
- асимптотические 5, 87
-, аффинная система 1, 358
- аффинные 1, 358
- базиса 1, 374
- барицентрические 1, 393; 2, 996; 4, 1152, 1160
- Бельтрами 1, 409
- бивектора 1, 469
- биполярные 1, 492
- бисферические 1, 492
- бицилиндрические 1, 500
- в карте 2, 355
- Вейерштрасса 1, 615
-, галилеева система 1, 843
- гармонические 1, 880
- гексасферические 4, 234
- геодезические 1, 918
- - *нормальные* 4, 438
- голономные 1, 1034
- грассмановы 1, 732; 4, 334, 681
-, декартова прямоугольная система 2, 80
- декартовы 2, 80
- - прямоугольные 1, 244, 634
- избыточные 3, 10
- изотермические 2, 518
-, изотропная система 2, 518
- Клейна 2, 873; 4, 334
-, криволинейная система 2, 729
- криволинейные 3, 9
- лагранжевы 1, 1034
- линейные 3, 9
-, начало 1, 358; 2, 80
- неголономные 1, 1034
- нормальные 4, 1006
- обобщенные 1, 1034
- однородные 3, 1180; 4, 681
-, ортогональная система 4, 85
-, ось 1, 358; 2, 80
- параболические 4, 194
- параболоидальные 4, 201
- пентасферические 4, 234
- плюккеровы 1, 732; 4, 334
- полисферические 4, 234
- полугеодезические 4, 438
-, полюс 4, 474
- полярные 4, 480
- - геодезические 4, 438
- - обобщенные 4, 481
- проективные 4, 680
- римановы 1, 928; 4, 1028
-, система 3, 9
- сферические 5, 293
- тангенциальные 5, 321
- тензора 2, 1070; 5, 327
- тетрациклические 2, 1084; 4, 234; 5, 349
- тетраэдральные 5, 350
- тороидальные 5, 408
- точечные 3, 9
- фазовые 5, 536
- Ферми 5, 608
- фигуры 5, 613
- циклические 1, 859; 5, 816
- цилиндрические 5, 819
- Чжоу 5, 863
- эллипсоидальные 5, 979
- эллиптические 5, 95, 988
- - в пространстве 5, 979
Коостов симплициального множества 4, 1167
Копредел функтора 2, 557
Копредставление Виртингера 2, 58; 5, 479, 487
Копредставление группы 3, 10
- Дена 5, 479
Копреобразование Фурье на группе 1, 882
Коприсоединенное представление 3, 10
Копроизведение семейства объектов категории 3, 11
Ко-H-пространство 3, 12
Копсевдогалилеево пространство 3, 12; 4, 439
Копсевдоевклидово пространство 3, 12—14
Коразмерность 3, 14
- гомологическая 1, 1027
- комплексная 1, 249
- особенности 5, 361
- подмногообразия 4, 371
- подпространства 1, 981
- слоения 4, 1210
- структуры Пфаффа 4, 774
Корасслоение 3, 14
Корауса теорема сравнения для ортогональных многочленов 4, 96
Корень 3, 15
- *алгебраического уравнения* 1, 192
-, алгебраическое значение 1, 323
- алгебры 3, 273
-, арифметическое значение 1, 323
- из единицы 3, 15
- корневой системы 3, 16
- кратный 3, 15
- многочлена 1, 192; 3, 753
- -, Гильберта теорема 1, 972
- -, Декарта теорема 2, 78
- первообразный 3, 15; 4, 237; 5, 152
- примитивный 4, 237
- уравнения 5, 539
- устойчивый 2, 340
- характеристический 5, 764
Корепер, расслоение 5, 249
Корефлексивная подкатегория 4, 978
Корна неравенство 3, 16
Корневая система 3, 16—20
- - алгебры 3, 273
- -, группа симметрий Вейля 1, 625
Корневое дерево 2, 91
- подпространство 1, 674; 3, 20
- разложение алгебры 3, 273
Корневой вектор 3, 20
Корнища — Фишера разложение 3, 20
Корню спираль 3, 21
«Короны проблема» 5, 789
Коротковолновое приближение 2, 809
Короткое погружение 2, 506
Корректирование ошибки 2, 930
Корректная задача 3, 21, 930
- - разностная 3, 84
- - сеточная 3, 306

Корректно поставленная задача 3, 930
- - - красная 3, 608
Корректности класс 3, 608
Корректность определения 2, 851
- по Тихонову 3, 932
- условная 3, 932
Корректор 2, 414
Коррекции метод 2, 292
Коррелограмма 3, 21
Корреляции коэффициент 3, 22
- - выборочный 3, 28
- - информационный 2, 658
- - максимальный 3, 486
- - множественный 3, 761
- - сериальный 4, 1117
- - частный 5, 837
Корреляционная матрица 3, 23
- таблица 3, 28
Корреляционная теория стационарных случайных процессов 5, 210
Корреляционная функция в статистической механике 3, 25
- - - -, Боголюбова неравенство 1, 510
Корреляционная функция случайного процесса 1, 47; 3, 23—25
Корреляционное окно 5, 120
Корреляционное отношение 3, 26
Корреляционное поле 3, 28
Корреляционный анализ 3, 28
- функционал 5, 214
Корреляция 3, 26—29, 29; 4, 669, 680
- каноническая 2, 710
- нормальная 2, 1002
- отрицательная 4, 161
- положительная 4, 430
- симплектическая 4, 477
Г-корреляция 1, 865
Кортевега — де Фриса уравнение 3, 30
Кортеж 2, 642; 3, 31
- допустимый 4, 538
Кос теория 3, 31—36
Коса 3, 32
Косая астроида 1, 343
- проекция 2, 753
Косая производная 3, 37
Косеканс 3, 37
Косимплициальный объект категории 4, 1168
Косинус 3, 37
Косинус амплитуды 3, 38
Косинус гиперболический 1, 991; 3, 38
- интегральный 2, 602
- эллиптический 3, 38
Косинусов теорема 3, 38
- - в гиперболической геометрии 1, 990
- - в сферической тригонометрии 5, 292
Косинусоида 4, 1193
Косинус-преобразование Фурье 3, 38
Кослой 3, 14; 4, 1169
Космологическая постоянная 3, 38
Космологические модели 3, 39—41
Косовой автоморфизм 3, 33
Косое произведение 3, 41; 4, 743
Косой геликоид 1, 913
- крюк 5, 1028
- многочлен, кольцо 1, 1019
Косопряжение 5, 90
Кососимметризованное полилинейное отображение 4, 408
Кососимметрирование 1, 240
Кососимметрическая билинейная форма 1, 482; 3, 41
Кососимметрическая матрица 3, 42, 616
Кососимметрический многочлен 4, 1145
Кососимметрический тензор 1, 240; 3, 42
Кососимметрическое полилинейное отображение 4, 407
Косоугольная аксонометрия 1, 113
- декартова система координат 2, 80
Косоэрмитова форма 5, 1021
Коссера уравнения 2, 494
Костанта формула 3, 90
Кострикина радикал 5, 999
- теорема об алгебрах Ли 3, 901
Косущественный подмодуль 4, 372
Котангенс 3, 43
Котельникова интерпретация 3, 43, 404
Котеса коэффициенты 3, 43
Котеса формулы 3, 43
Коточный дифференциал 2, 238
Коуниверсальный квадрат 2, 79
Кохлеоида 3, 44
Коцепной комплекс 2, 1001
Коцепь 2, 954; 3, 44; 4, 1179
- бемольная 1, 410; 2, 133
- гладкая 1, 411
- диезная 2, 133, 134
- различающая 4, 812
Коцикл 2, 954; 3, 44; 4, 1179
- комплекса 2, 998
- фундаментальный 5, 685
- хефлигеровский 5, 782
1-коцикл 4, 1205
Коциклический матроид 3, 623
Коши данные 3, 47, 895
Коши задача 2, 285, 326; 3, 45—49
- -, Д'Аламбера формула 2, 11
- -, *Коши* — Ковалевской теорема 3, 65
- - обобщенная 3, 607
Коши задача; численные методы решения 3, 49—51
Коши интеграл 3, 51—55
Коши интегральная теорема 3, 55
- - формула 3, 51, 55
Коши критерий 1, 39; 3, 56—58; 4, 559
Коши матрица 3, 58, 618
- направленность 5, 682
Коши неравенство 3, 58
Коши оператор 3, 59—61
Коши последовательность 3, 61; 5, 682
Коши признак 3, 61
Коши распределение 3, 61
- сингулярный интеграл, Привалова теорема 4, 630
- - оператор 2, 605
Коши теорема 3, 62
- - в аналитической теории дифференциальных уравнений 1, 252
- - интегральная 1, 263
- - о выпуклых многогранниках 1, 802
- - о промежуточных значениях непрерывных функций 3, 984
- - о сходимости рядов 4, 1065
- условие 5, 390
Коши фильтр 1, 502; 3, 63
- форма остаточного члена 5, 324
- формула для длины овала 3, 1152
- - для решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений 4, 693
- - интегральная 1, 263
- - обобщенная 2, 316
- функциональное уравнение 5, 699
Коши характеристическая задача 3, 63—65
Коши ядро 1, 263; 2, 586; 3, 51, 65
- - сингулярного интегрального оператора 4, 1172
Коши — Адамара неравенство 3, 59
Коши — Адамара теорема о сходимости степенного ряда 3, 65; 5, 218
- - формула 3, 65; 5, 218, 220
Коши — Грина формула 3, 55
Коши — Дирихле задача 3, 348
Коши — Зальцюца интеграл 1, 867
Коши — Ковалевской теорема о существовании решения задачи Коши 3, 65—67
Коши — Лагранжа интеграл 1, 421
Коши — Маклорена интегральный признак 3, 61
Коши — Пуанкаре интегральная теорема 1, 270; 3, 56
Коши — Римана оператор 3, 361
- - система 1, 268
- - теорема об устранимой особенности 5, 582
- - уравнения 1, 262
Коши — Римана условия 3, 67
- - - обобщенные 5, 771
Коши — Стилтьеса сингулярный интеграл 4, 630
Коши — Фантапье формула 3, 55, 235
Коши — Штольца критерий 3, 58
Коэна структурная теорема о регулярных кольцах 4, 939
Коэна — Маколея арифметическое многообразие 3, 69
Коэна — Маколея кольцо 3, 68
Коэна — Маколея модуль 3, 69
Коэна — Маколея схема 3, 69
Коэрцитивная краевая задача 3, 69—71
- форма 3, 71
Коэрцитивности неравенство 3, 71
- условие 5, 992
Коэффициент 3, 72; см. также соответствующее название
Коэффициентов проблема 3, 72
Коядро 3, 74
- векторного расслоения 1, 646
- линейного оператора 3, 370
Кравчука многочлены 3, 74
Краевая задача 1, 771; 2, 301; 3, 74—78, 349, 605
- - внешняя 1, 732
- - внутренняя 1, 732
- - дифференциальная, аппроксимация разностной 1, 308
Краевая задача для эллиптического уравнения 3, 78—80
- -, классическая постановка 3, 607
- -, корректно поставленная 3, 608
- - коэрцитивная 3, 69
- - линейная 3, 303, 338
Краевая задача; методы комплексного переменного 3, 80—83
- - нелинейная 3, 938
- -, обобщенная постановка 3, 607
- -, обобщенное решение 3, 607
- - первая 4, 236
- - самосопряженная 4, 1073
- - смешанная 5, 36
- - сопряженная 5, 84
Краевая задача теории потенциала 3, 83
- - третья 5, 428
Краевая задача, численные методы решения 3, 83—86
- - эллиптическая 3, 69
- особенность 4, 130
- точка 3, 87
Краевые условия 2, 285; 3, 86, 605
- - сопряженные 5, 84
Край 3, 87
- многообразия 2, 51; 3, 743
Крайзеля принцип 2, 642
Крамера правило 3, 87
Крамера теорема в теории вероятностей 3, 87
- - о нормальных распределениях 3, 1067
- условие 3, 87
- формулы 3, 87
Крамера — Мизеса критерий в математической статистике 3, 87
Крамера — Мизеса — Смирнова критерий в математической статистике 3, 88
Крамера — Рао неравенство 5, 178, 196
Кратная замкнутая геодезическая 2, 431
Кратная последовательность 3, 88
- сумма Вейля 5, 436
Кратная точка 3, 88; 4, 124
- характеристика 3, 326
Кратно круговая область 3, 88
- примитивная группа 4, 636
- транзитивная группа 5, 411
Кратногармоническая функция 3, 89
Кратное 2, 85; 3, 89
Кратное интегральное преобразование 2, 590
- интерполирование 2, 633
- наименьшее общее 3, 876
- - перемешивание 4, 243
Кратности точка 4, 310
- функция 1, 379
Кратность веса 3, 89
- ветвления многообразия 2, 55
Кратность особой точки 3, 90
- пересечения 4, 255
- полюса 4, 475
- предельного цикла 4, 576
- слоя эллиптической поверхности 5, 984
Кратный интеграл 3, 91—93
- - Коши 3, 55
- корень 3, 15
- - многочлена 1, 192
Кратный ряд 3, 93
- - степенной 5, 220
- тета-ряд 5, 348
- узел интерполяции 2, 633
s-кратный ряд 3, 93
Кратчайшая 3, 93
- в римановом пространстве 4, 1004
-, конус 4, 1025
- на выпуклой поверхности 1, 789
-, угол 1, 789
Кратчайшее покрытие 4, 395
Кращеная коса 3, 32
Креативное множество 3, 94; 4, 663, 957
Крейга теорема о промежуточных логиках 4, 695
Крейна критерий 2, 228
- теорема о клине 2, 1075
- - о локально выпуклых пространствах 5, 384
- - об индикатрисе касательных 2, 757
Крейна — Мильмана теорема о выпуклой оболочке 1, 788; 3, 429
- - - о конусах 2, 1075
Крейна — Рутмана теорема о собственных значениях 4, 435
Крейна — Шмульяна пространство 5, 383
Крейна — Шмульяна теорема о локально выпуклых пространствах 5, 383
- - - о метризуемых пространствах 2, 44
Кремоново отображение 4, 309
Кремоново преобразование 3, 94
-, группа 4, 917
Кремоны группа 3, 94, 95
Крендельное зацепление 5, 485
Кривая 3, 96, 382
- алгебраическая 1, 444
- аналитическая 1, 246
- ветвления 2, 23
- вневписанная 1, 758
- вписанная 1, 758
- выпуклая 1, 799
- гиперэллиптическая 1, 1010; 4, 312
- голоморфная 1, 249
-, горизонтальное поднятие 4, 1098
- дискриминантная 2, 212
-, длина 5, 149
- дуальная 4, 310
-, жанр 4, 311
-, извивание 2, 491
- изооптическая 2, 512
- изохронная 5, 817
- инвариантная 2, 533
- интегральная 2, 283, 576
- исключительная 2, 675
- каноническая 2, 711
- комплексно-аналитическая 1, 249
- кубическая 3, 140
- модулярная 3, 785
- Мопжа 3, 799
- направляющая 3, 380
- неприводимая 4, 309
- описанная 1, 757

- ортооптическая 2, 512
-, особая точка 4, 119, 124
- паналгебраическая 5, 424
- Персея 4, 277
- плоская 2, 250
-, поворот 1, 790, 924
-, подера 4, 370
-, порядок 4, 309
- постоянной кривизны 4, 519
- постоянной ширины, Барбье теорема 1, 392
- приводимая 4, 309
-, развертка 1, 356; 4, 1093
- рациональная 4, 311, 914
- регрессии 4, 926, 929
- регулярная 2, 248
- Рибокура 4, 985
-, род 4, 311, 1048
- Серпиньского 4, 1118
- соприкасающаяся 5, 81
- спирическая 4, 277
- спрямляемая 2, 364; 5, 149
- таутохронная 5, 817
- трансцендентная 5, 424
-, угол 1, 790
- уникурсальная 4, 311; 5, 502
- фокальная 2, 325; 3, 799
- Фреше 5, 665
- характеристическая 2, 325
- циклоидальная 5, 817
- циссоидальная 5, 820
- Чезаро 5, 862
- Штейнера 5, 900
- Штурма 5, 906
- экспоненциальная 4, 390
- эллиптическая 5, 979

M-кривая 2, 70

Кривизна 2, 249; 3, 96—102
- аффинная 1, 354
- внешняя 3, 100; 5, 297
- внутренняя 3, 100
- вторая 3, 129
- выпуклой поверхности 1, 789, 791
-, Гаусса уравнение 4, 361
-, Гаусса — Бонне теорема 2, 56
- гауссова 1, 904; 2, 253, 785; 3, 98
- геодезическая 1, 923; 4, 1006
- главная 1, 1012; 2, 253; 3, 97
-, индикатриса 2, 395
- конформная 3, 100
- кривой 3, 96
- кронекерова 5, 297
- нормальная 2, 253; 3, 97, 1050
- поверхности 3, 96
- подмногообразия 3, 100
- полная 1, 904; 3, 98; 4, 416; 5, 297
- проективная 3, 101
- пространства Римана 4, 989
-, радиус 2, 250
- риманова 4, 1013
- риманова пространства 3, 98
- Риччи 3, 99; 4, 1044
- секционная 3, 99; 4, 1007, 1109
- скалярная 3, 99; 4, 1007, 1045, 1197
- средняя 2, 253, 785; 3, 97; 5, 163
-, тензорное поле 2, 736
-, центр 2, 250
- эквиаффинная 1, 353

Кривизны инвариант 4, 1045
- круг 3, 118

Кривизны линий сеть 3, 102
Кривизны линия 3, 97, 102
- направлений тензор 1, 630
- область 3, 1072
- объект 4, 1095

Кривизны преобразование 3, 102; 4, 1007
Кривизны тензор 3, 102; 4, 1006
Кривизны форма 3, 102, 311
- функция 5, 50

Кривой полиэдр 4, 412
Криволинейная конгруэнция 2, 1015; 5, 613
- пространственная ткань 5, 356
- регрессия 4, 931
- система координат 2, 729
- триангуляция 4, 412; 5, 434

Криволинейные координаты 3, 9
Криволинейный интеграл 3, 103—105
- многоугольник 3, 751

Кривые Пирсона 4, 288
- софокусные 5, 95

Кривых теория 2, 248
Крипке модели 3, 105
- семантика 4, 696
- структура 3, 765
- схема 2, 643

Криптоуниверсальная формула 1, 185
Кристаллографическая группа 3, 106—108
Кристаллография математическая 3, 109
Кристоффеля коэффициенты 3, 110
Кристоффеля символ 3, 110
Кристоффеля числа 3, 110
Кристоффеля — Дарбу формула 3, 110; 4, 93
Кристоффеля — Шварца интеграл 3, 111
Кристоффеля — Шварца формула 3, 111
Критериальная система подалгебр 3, 715
Критерий — см. соответствующее название
Критическая группа 1, 1137
Критическая область 3, 112
- полоса 2, 113, 189
- решетка 1, 945

Критическая точка 3, 112—114
- - квадратичного дифференциала 2, 786

Критическая функция 3, 114
- частота 1, 864

Критические значения алгебраической функции 1, 175
Критический ветвящийся процесс 1, 681, 684, 685, 687, 688
- граф 1, 1111

Критический идеал 3, 114
- определитель множества 1, 945
- подграф 1, 1112
- путь 4, 1121

Критический уровень 3, 115
Критического пути метод 4, 1121

Критическое значение 3, 115
- - статистического критерия 5, 182
- множество 3, 113
- - статистического критерия 4, 376; 5, 182

Кронекера индекс 3, 238
Кронекера метод 3, 115
- множество 1, 884

Кронекера символ 3, 116
Кронекера теорема в теории чисел 3, 116
- - о диофантовых приближениях 2, 164
- - о равномерно распределенных последовательностях 4, 876

Кронекера формула 3, 117
Кронекера — Вебера теорема о круговых полях 3, 120
- - - об алгебраических уравнениях 1, 852

Кроиекера — Капелли теорема 3, 118, 357
Кронекерова кривизна 5, 297
- матрица 2, 777

Кронекерово произведение 3, 118
- - матриц 5, 332

Кросса многообразие 3, 241
Кроссово многообразие групп 1, 1137
Крофтона формула для овалов 2, 572
Круг 3, 118; 4, 16; 5, 881
- большой 4, 667; 5, 290
- гиперболический 1, 989
- квадратура 2, 793

Круг кривизны 3, 118
- отмеченный 3, 445
- параметрический 3, 445
- соприкасающийся 5, 80

Круг сходимости 1, 29; 3, 118; 5, 218
Круга проблема 3, 119
Круглая коническая поверхность 2, 1033
Круговая геометрия 2, 1086
- единица 3, 121
- коническая поверхность 2, 1033
- мера угла 5, 467
- область 1, 1023; 3, 88
- ограниченная задача трех тел 5, 432
- плоскость 3, 630

Круговая симметризация 3, 120; 4, 1137
- точка 3, 914; 4, 15
- функция 3, 1135
- частичная сумма 2, 31
- частота 4, 1085

Круговое поле 3, 120—122
Круговое преобразование 3, 122
Круговое расширение 3, 122
Круговой конус 2, 1074
- критерий 5, 564

Круговой метод 1, 259; 3, 123
- многочлен 2, 81
- сегмент 4, 1101
- сектор 4, 1105
- цилиндр 5, 818
- элемент 5, 971

Круговые точки 3, 124
Крулля кольцо 3, 124
- теорема о кольцах 1, 98
- - о локальных кольцах 3, 438
- - об идеалах 1, 813
- топология 1, 854

Крулля — Ремака — Шмидта теорема в теории групп и колец 3, 124
Крупность графа 1, 1115, 1120
Крупных частиц метод 3, 125—129
Кручение 2, 249; 3, 129—131
- абелевой группы 3, 131
- абсолютное 3, 129
- аффинное 1, 360
- аффинной связности 3, 130
- в классе алгебр 4, 806
- гауссово 3, 130
- геодезическое 1, 931; 3, 129
- де Рама 4, 855, 953
- h-кобордизма 3, 131
- кривой 3, 129
- отображения 3, 131
- подмногообразия 3, 129
- пространства 3, 131
- Рейдемейстера 4, 953
- риманово 3, 130
-, тензор 3, 130; 4, 542
-, тензорное поле 2, 736
- Уайтхеда 2, 894; 5, 464
-, форма 3, 130
- Франца 4, 953
- эквиаффинное 1, 353

Кручения класс 4, 266
Кручения тензор 3, 131
- - картановский 5, 622

Кручения форма 3, 132
- функция 5, 252

Крыла теория 3, 132—134
Крыло Жуковского 2, 426
- слова 1, 772

Крылова — Боголюбова метод усреднения 3, 134—136
Крюк 5, 1028
Кси-функция Римана 2, 113
Куайна алгоритм 1, 560
Куб 3, 136; 4, 204
- перестановочный 3, 208
- тихоновский 5, 355

Кубатурная формула 3, 136—139
Кубика 3, 139
Кубируемое множество 3, 92
Кубическая гиперповерхность 3, 140—142
- кривая 3, 140

Кубическая парабола 3, 142
- поверхность 3, 141

Кубическая форма 3, 142
- - Фубини — Пика 1, 354

Кубический вычет 1, 814; 3, 143; 5, 153, 217
- невычет 3, 143; 5, 153, 217
- сплайн 4, 604; 5, 145

Кубическое уравнение 3, 143
- -, Кардано формула 2, 722

Кубичная форма 5, 634
Кубовидный континуум 3, 144
Куги многообразие 3, 786
Кузена проблемы 1, 273; 3, 144—147
- теорема о голоморфных функциях 1, 616

Куликова критерий об абелевых группах 1, 18

Куммера гипотеза 3, 147
- группа 3, 148

Куммера поверхность 3, 147
Куммера преобразование 3, 147
- признак регулярности простых чисел 2, 667

Куммера признак сходимости числового ряда 3, 147
- разложение для идеалов 1, 166

Куммера расширение 3, 148
- ряд 1, 804
- спаривание 3, 148

Куммера теорема о разложении идеала 3, 149
- теория 3, 149
- формула для идеалов 1, 166
- функция 1, 804

Кумулянт 3, 149; 4, 1111
Куна теорема в теории игр 4, 387
Куна — Такера теорема в математическом программировании 3, 602
Кураниси пространство 5, 406
Курант 3, 149
Куранта теорема о конформном отображении 3, 149
- условие для устойчивости разностной схемы 1, 995

Куранта — Фридрихса — Леви условие 3, 150
Куратовского аксиомы 5, 389
Куратовского график 3, 150
Куратовского полиэдр 3, 150
- теорема о CA-множествах 3, 763

Куратовского — Дугунджи теорема о локально k-связных пространствах 3, 434
Куратовского — Кнастера веер 3, 151
Куратовского — Понтрягина теорема о полиэдрах 3, 151
Куроша проблема об алгебраических алгебрах 3, 901
- теорема о неассоциативных алгебрах 3, 902
- о свободных произведениях 4, 1087

Куроша — Черникова классы групп 4, 368
Кусочно линейная топология 3, 151—154
- - форма 2, 264
- линейное микрорасслоение 3, 676
- - отображение 3, 151; 4, 410
- - подмногообразие 4, 371
- - слоение 4, 1210
- линейный кобордизм 2, 892

Кусочное склеивание обобщенной функции 3, 1105

Кутта — Мерсонв метод 3, 154
Куфарева — Лёвнера уравнение 3, 227; 4, 219

Кэлера метрика 3, 155
Кэлерова метрика 3, 155
Кэлерова форма 3, 155

Кэлерово многообразие 3, 156
- - однородное 3, 1174

Кэлеровых дифференциалов модуль 2, 241
Кэли алгебра 3, 157, 160
Кэли поверхность 3, 157
Кэли преобразование 2, 505; 3, 157

Кэли таблица 3, 158
- теорема о подстановках 4, 383
- - о симметрических группах 4, 1141

Кэли форма 3, 158—160; 5, 863
Кэли число 3, 160
Кэли — Дарбу уравнение 3, 160
Кэли — Диксона алгебра 3, 160—162
- - процесс 3, 160

Кэли — Клейна интерпретация 3, 402
Кэли — Клейна параметры 3, 162
Кэли — Нётера формула постулации 1, 150
Кэлиана 3, 140
Кэмпбелла — Хаусдорфа формула 3, 163
Кюннета формула 1, 627; 3, 164—166

Л

Лаврентьева теорема 3, 167
- - в дескриптивной теории множеств 3, 167
- - в теории конформных отображений 3, 167
- - в теории приближений 3, 167
- - склеивания 4, 1201
Лаврентьева — Бицадзе уравнение 2, 328; 5, 45
Лагерра многочлены 2, 869; 3, 167
Лагерра преобразование 3, 168
Лагерра уравнение 3, 167, 169
Лагерра формула 3, 169
Лагерра функции 3, 169
Лагранжа вариационный принцип стационарного действия 1, 602
Лагранжа задача 3, 169
- - в вариационном исчислении 1, 582
Лагранжа интерполяционная формула 3, 170
- интерполяционный многочлен 2, 632; 3, 170
- коэффициенты 3, 171
Лагранжа метод 3, 171, 172
Лагранжа множители 3, 172; 5, 414
- постоянная 3, 515
Лагранжа принцип 3, 173
- резольвента 4, 950
Лагранжа решение задачи трех тел 5, 431
Лагранжа ряд 1, 570; 3, 174,1139; 5, 219
Лагранжа скобки 3, 174
Лагранжа спектр 3, 174, 515
Лагранжа теорема 3, 174
- - в дифференциальном исчислении 3, 174
- - в теории групп 3, 174
- - о подгруппах 4, 370
- - о подходящих дробях 3, 515
- - о сравнениях 3, 174; 5, 154, 156
- - о сумме четырех квадратов 1, 372; 3, 174
- - о цепных дробях 3, 174
- - о четырех квадратах 2, 170
- тождество 5, 83
Лагранжа уравнение 2,11; 3, 175; 5, 932
Лагранжа уравнения механики 3, 175—177
- форма остаточного члена 5,324
- формула для самосопряженных операторов 4, 906
- - конечных приращений 2, 1025
Лагранжа функция 3, 177—181
Лагранжа — Гаусса условия приведения 2, 789
Лагранжа — Гурвица проблема в теории чисел 3, 515
Лагранжева лупа 3, 460
- плоскость 5, 519
Лагранжево многообразие 3, 181
Лагранжевы координаты 1, 1034
Лагранжиан 3, 181
Лайонса группа 5, 149
Лакса представление 4, 1191
Лакуна 3, 182
-, Адамара теорема 1, 86
- в геометрии 2, 22
Лакунарная последовательноеть 3, 183
Лакунарная система 3, 183
Лакунарное пространство 2, 22; 3, 184
Лакунарный пучок 3, 443
Лакунарный ряд 3, 185
Лакунарный степенной ряд 3, 185
Лакунарный тригонометрический ряд 3, 186
Лалеско — Пикара интегральное уравнение 3, 1030
Ламберта метод суммирования 3, 186
Ламберта преобразование 3, 187
Ламберта ряд 3, 187
Ламберта четырехугольник 3, 187
Ламе дифференциальный параметр 2, 350
Ламе коэффициенты 3, 188; 4, 85
Ламе кривая 3, 188
Ламе постоянные 3, 189
Ламе уравнение 2, 149; 3, 189
Ламе функция 3, 189; 5, 446
Ландау кинетическое уравнение 3, 190
- теорема о радиусе однолистности 3, 727
- - об аналитических функциях 5, 895
Ландау теоремы о регулярных функциях 3, 191
Ландау — Каратеодори теорема 3, 191
Ландвебера — Новикова алгебра 5, 865
Ландшафт аналитический 1, 276
Ланцоша метод 2, 689; 5, 92
Лапласа вектор 3, 192
Лапласа интеграл 3, 193, 196
Лапласа метод асимптотических оценок 3, 194
- - каскадный 2, 758
Лапласа оператор 3, 194—196
Лапласа последовательность 3, 196
- предельная формула 1, 904
Лапласа преобразование 3, 194—200
Лапласа *преобразование* в геометрии 3, 200
Лапласа распределение 3, 201
Лапласа теорема 3, 201
- - в теории вероятностей 3, 201
- - об определителях 1, 188; 3, 201
- трансформация 3, 196
Лапласа уравнение 2, 299; 3, 202
Лапласа уравнение; численные методы решения 3, 203—205
- формула 1, 420
Лапласа — Бельтрами оператор 3, 194
Лапласа — Бельтрами уравнение 3, 205
Лапласа — Фурье ядро 2, 586
Лапласиан 3, 194
Лаппо — Данилевского условие для матриц 3, 618
Ларжора радиус 3, 206
Ларморовская частота 2, 381
Ларморовский радиус 2, 381; 3, 206
Ласкера кольцо 3, 206
- модуль 3, 206
Латинские квадраты ортогональные 4, 90
Латинский квадрат 2, 971; 3, 206—208
- подквадрат 3, 207
Латинский прямоугольник 3, 208
Лебега барьер 1, 394
- внешняя мера 1, 734
- внутренняя мера 1, 734
Лебега интеграл 3, 209—211
- - кратный 3, 93
- - определенный 2, 565
- интегральная сумма 2, 564
Лебега константы 3, 211—213
- критерий барьера 4, 933
Лебега мера 2, 93; 3, 213, 640
Лебега метод суммирования 3, 213
Лебега множество 2, 93; 3, 214, 217
Лебега неравенство 3, 214
- острие 2, 667; 4, 530
Лебега признак 3, 214
- пример иррегулярной граничной точки 4, 275
- - разреженного множества 4, 848
Лебега пространство 3, 214; 5, 309
Лебега разложение 3, 215; 4, 1178
Лебега размерность 3, 215
Лебега теорема 3, 216
- - в теории размерности 3, 216
- - о классах Бэра 1, 535
- - о «мостовых» 4, 826
- - о предельном переходе под знаком интеграла 3, 216
- - о тригонометрических рядах 2, 715
- - об абсолютной непрерывности функции множеств 1, 36
Лебега точка 3, 217
Лебега функции 3, 217
Лебега число 3, 217
Лебега — Стилтьеса интеграл 3, 217
- - мера 3, 641
Лебегова размерность 4, 826
- цепь 1, 411
Лебегово пространство функций 5, 718
Лебеговский спектр 3, 218
Лебедева преобразование 3, 218
Левая геодезическая кривизна 1, 924
- глобальная размерность кольца 1, 1054
- единица 2, 400; 3, 790
- *F*-квазигруппа 2, 803
- конгруэнция 1, 1123
- мера Хаара 3, 644
- полуплоскость 4, 462
- почти периодическая функция на группе 4, 546
- прогонка 4, 643
- производная 2, 272; 3, 1184
- - функтора 1, 1050
- трансляция 2, 802
- тройка векторов 1, 634
Левенберга — Марквардта метод 3, 490
Лёвенхейма — Сколема теорема в математической логике 1, 910; 3, 218
Лёвенхейма — Сколема — Мальцева теорема о моделях 3, 766
Леви каноническое представление 1, 398; 3, 218—221
Леви метрика 3, 220
Леви неравенство 3, 221
- область псевдовыпуклая 1,1031
- определитель 3, 223
- подгруппа 4, 193
Леви проблема в теории аналитических пространств 3, 222
- - о псевдовыпуклых областях 1, 1031
- разложение 4, 193
- теорема о непрерывности условных математических ожиданий 3, 534
- - о псевдовыпуклых областях 1, 1031
- - о характеристических функциях 5, 757
- - об алгебрах Ли 4, 898
Леви условие в теории аналитических пространств 3, 222
- форма 1, 272
- функция 4, 213
Леви — Крамера теорема в теории вероятностей 3, 223
Леви — Мальцева разложение 3, 224
- - теорема о группах Ли 3, 257
- - - об алгебрах Ли 3, 244
Леви — Прохорова метрика 3, 224
Леви — Хинчина каноническое представление 1, 397; 3, 225
Левина гомоморфизм 5, 482
Левитана почти периодическая функция 3, 1120
Левицкого радикал 3, 434; 4, 807
Леви-Чивита параллельное перенесение 4, 1005
Леви-Чивита связность 3, 225; 4, 209
Лёвнера метод 3, 226
- теорема о граничном искажении 2, 670
Лёвнера уравнение 1, 595; 3, 227
Лёвнера — Куфарева уравнение 3, 1169
Левого сдвига оператор 3, 1111
Левое деление формальных языков 5, 644
Левое *PF*-кольцо 2, 826
- *QF*-3-кольцо 2, 826
- крыло слова 1, 772
- обратное отображение 3, 1133
- примитивное кольцо 4, 637
- псевдофробениусово кольцо 2, 826
- совершенное кольцо 5, 68
- топологическое векторное пространство 5, 377
- цепное кольцо 5, 815
- ядро 3, 460
- - билинейного отображения 1, 484
- - билинейной формы 1, 483
Левозакрученная винтовая линия 1, 706
Левоинвариантная мера Хаара 5, 741
- метрика 5, 625
Левоинвариантное среднее 2, 534
Левоинвариантный интеграл 2, 531
Левоконтекстная грамматика 1, 1094
Левопримитивный идеал 4, 638
Леворегулярная функция гиперкомплексного переменного 1, 1007
Левосингулярная полугруппа 1, 487
Левый аппроксимативный предел 1, 305
- идеал 2, 481
- интеграл Хаара 2, 532
- минимальный идеал 3, 693
- модуль, ранг 4, 861
- *A*-модуль 3, 777
- нуль 3, 1082
- - категории 5, 616
- обратный линейный оператор 3, 370
- σ-объект категории 1, 1018
- поворот кривой 1, 790
- регуляризатор оператора 4, 1175
- символ оператора 4, 1134
- смежный класс 5, 36
- топологический модуль 5, 377
- цоколь 3, 693
- частный элемент 1, 1138; 5, 525
Лежандра многочлены 2, 869; 3, 228
- нормальная форма эллиптического интеграла 5, 990
Лежандра преобразование 3, 229
- присоединенные функции 3, 232; 5, 293
Лежандра символ 3, 230
- соотношение для ζ-функции Вейерштрасса 1, 623
Лежандра теорема 3, 231
Лежандра уравнение 3, 228, 231, 232
Лежандра условие 3, 231
- формула удвоения 1, 867
Лежандра функции 3, 232
Лежандра — Клебша обобщенное условие 4, 57
Лежандров модуль 3, 783; 5, 990
Лежандрово многообразие 3, 232
Лейбница признак сходимости ряда 3, 233
Лейбница ряд 3, 233; 4, 282
- теорема о знакочередующихся рядах 2, 464
Лейбница формула 3, 233
Лейна — Эмдена уравнение 5, 997
Лексема 1, 223
Лексикографический порядок 3, 233
Лексикографическое произведение 3, 233; 4, 504
- расположение членов многочлена 3, 753
Лексическая функция 3, 567
Лемана — Шеффе теорема в теории статистического оценивания 5, 196
Лемма — см. соответствующее название
Лемниската Бернулли 1, 422
- Бута 1, 566
Лемнискатические функции 3, 234
Лемнискатные функции 3, 234
Лемнискаты 3, 234
Лепга теорема для главных однородных пространств 1, 1015
Лепгмюра уравнение 1, 101

Лента 5, 456
Ленточное зацепление 5, 487
Ленточный узел 2, 57
Ленца — Бортоллоти классификация проективных плоскостей 4, 670
Леонтьева модель в математической экономике 3, 586
Лере интеграл 3, 236
Лере спектральная последовательность 3, 235; 5, 106
- теорема о вычетах 1, 816
- - о когомологиях 4, 769
Лере формула 3, 235
Лере — Серра спектральная последовательность 5, 106
Лере — Шаудера принцип 3, 977
Лес 2, 92
Лестница канторова 2, 718
Лефшеца голоморфное число 3, 239
Лефшеца двойственность 3, 236
- пучок 3, 808
- разложение 3, 237
Лефшеца теорема 3, 236—238
Лефшеца формула 3, 238—240
- - для когомологий Вейля 1, 627
Лефшеца число 2, 554; 3, 240
Лефшеца — Пуанкаре двойственность 3, 236
Лежа парадокс 1, 296; 3, 240
Ли *p*-адическая группа 3, 240
Ли алгебр многообразие 3, 241
Ли алгебра 3, 242—245
Ли алгебра алгебраической группы 3, 245—247
Ли алгебра аналитической группы 3, 247
- -, Биркгофа — Витта теорема 1, 495
- -, вес представления 1, 673
- -, вещественная форма 2, 1003
- -, группа гомологий 2, 911
- -, группа когомологий 2, 909, 912
- - группы Ли 3, 247
- - евклидова типа 1, 1025
- -, Картана подалгебра 2, 736
- - компактного типа 1, 1025
- -, комплексификация 2, 1003
- -, комплексная оболочка 2, 1003
- -, корень представления 1, 674
- -, *корневое подпространство* 1, 674
- - локальной группы Ли 3, 268
- - некомпактного типа 1, 1025
- - неприводимая 1, 1025
- - ортогональная симметрическая 1, 1025
- -, полупростой ранг 4, 861
- - почти алгебраическая 3, 250
- -, представление 4, 583
- -, Пуанкаре — Биркгофа — Витта теорема 1, 495
- -, ранг 4, 861
- -, расширение 4, 898
- -, сжатие 4, 1125
- - сильно вырожденная 5, 999
- - специальная 3, 270
- -, стягивание 4, 1125
- -, универсальная обертывающая алгебра 5, 498
- -, Фиттинга разложение 1, 674
Ли *p*-алгебра 3, 248
Ли алгебраическая алгебра 3, 249
- - -, Жордана разложение 2, 422
Ли банахова группа 3, 250
Ли вполне разрешимая алгебра 3, 250
Ли вполне разрешимая группа 3, 251
Ли градуированная алгебра 3, 251—254
Ли группа 1, 245; 3, 254—259
- -, бесконечномерное представление 1, 446
- -, Бибербаха свойство 2, 201
- -, Вейля группа 1, 626
- -, вещественная форма 2, 1004
- -, комплексификация 2, 1004
- -, представления уравнение 1, 935
Ли группа преобразований 3, 259—261
- -, пространство представлений 1, 934
- -, ранг 4, 861
- -, решетка 4, 980
- -, структурная форма представления 1, 935
- - типа (E) 3, 284
- - формальная 5, 638
Ли дифференциал 3, 261
Ли дифференцирование 3, 261—263
- инфинитезимальный оператор 1, 447
Ли квадрика 3, 263
Ли кольцо 3, 263
- -, Якоби тождество 3, 263
Ли компактная группа 3, 264
Ли линейная алгебра 3, 265
- - группа 3, 266
Ли локальная алгебра 3, 266
Ли локальная группа 3, 267—269
Ли нильалгебра 3, 269
Ли нильпотентная алгебра 1, 121; 3, 269—271
Ли нильпотентная группа 3, 271
- оператор 2, 857
Ли особая алгебра 3, 272
- - группа 3, 272
- подалгебра 3, 244
- подгруппа 3, 255
Ли полупростая алгебра 3, 272—276
- -, Картана матрица 2, 731
Ли полупростая группа 3, 276—278
- произведение 2, 990
Ли производная 3, 261, 278
Ли производная группа 3, 278
Ли разрешимая алгебра 3, 278
- -, Картана критерий 3, 279
- -, Ли теорема 3, 279
- -, Мальцева расщепление 3, 279
- - расщепляемая 3, 279
- - треугольная 3, 279
Ли разрешимая группа 3, 280
Ли редуктивная алгебра 3, 281
- - группа 3, 281
Ли свободная алгебра 3, 281
- -, Ширшова теорема 3, 282
Ли скобка 3, 256, 282
- специальная группа 3, 271
- супералгебра 5, 277
- супергруппа 5, 277
Ли теорема 3, 282
- - о группах Ли (3-я) 3, 163
- - о разрешимых алгебрах Ли 3, 279
- - о сетях переноса 4, 247
- треугольная алгебра 3, 250
- - группа 3, 251
Ли тройная система 3, 284
- формальная группа 5, 638
Ли экспоненциальная алгебра 3, 284
Ли экспоненциальная группа 3, 284
Ли — Киллинга уравнение 2, 857
Ли — Колчина теорема 3, 285
Либрации точка 5, 432
Ливщица критерий 2, 228
Лиева алгебра 3, 242
Лиево кольцо 3, 263
Лиевости критерий 5, 369
Лиевского типа многообразие групп 1, 1137
Лингвистика алгебраическая 1, 249
- математическая 3, 565
- структурная 5, 254
Лингвистическая дешифровка 3, 567
Линдеберга условие 3, 285
Линдеберга — Феллера теорема 3, 285
Линделёфа гипотеза 3, 285
Линделёфа конструкция 3, 286
Линделёфа метод суммирования 3, 286
Линделёфа принцип 3, 287
Линделёфа пространство 3, 288
Линделёфа теорема 3, 288
- - о голоморфных функциях 4, 568
- - о метрических пространствах 2, 715
Линделёфа число 3, 834
Линдемана теорема о показательной функции 3, 289
K-линеал 4, 1037
***KB*-линеал** 1, 384
***KN*-линеал** 1, 384
Линеаризации методы 3, 289—291
Линеаризация гармоническая 1, 887
Линеаризированное уравнение Больцмана 1, 517
Линеаризированный оператор столкновений 1, 518
Линейная алгебра 3, 291
Линейная алгебра 3, 291—293
- - Ли 3, 265
- - - эллиптическая 4, 731
Линейная алгебра; численные методы 3, 293—297
Линейная алгебраическая группа 1, 143; 3, 297—300
- вариация множества 1, 604
- гамильтонова система 1, 861
- - - с периодическими коэффициентами 1, 863
Линейная гипотеза 3, 300
- грамматика 1, 1091
Линейная группа 3, 300—303
- - диагонализируемая 2, 123
- - изотропии 2, 521; 4, 731
- - Ли 3, 266
- - полная 2, 866; 3, 612, 615; 4, 416
- - специальная 2, 866; 5, 135
- дифференциальная игра 2, 333
Линейная зависимость 3, 303, 307
- - векторов 1, 633
Линейная интерполяция 3, 303
- каноническая система 1, 861
Линейная классическая группа 3, 303
- комбинация векторов 1, 643
- конгруэнция 2, 1015
Линейная краевая задача 3, 74, 76, 303, 338
- - - самосопряженная 4, 1073
Линейная краевая задача; численные методы решения 3, 303—307
- мера Хаусдорфа 5, 778
Линейная независимость 3, 307
- - векторов 1, 633, 982
Линейная оболочка 3, 308
- - множества 1, 643
- однородная форма, Минковского теорема 1, 946
Линейная оценка 3, 308
- размерность гильбертова пространства 1, 981
- ранговая статистика 4, 864
Линейная регрессия 3, 308; 4, 930
Линейная связность 3, 309—311; 4, 1096
Линейная система 3, 311
- - дифференциальных уравнений 2, 765
Линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами 3, 312—317
Линейная система дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами 3, 317
- среднян квадратическая регрессия 4, 930
- структура 5, 249
Линейная тонология 3, 318
Линейная форма 2, 732; 3, 318, 319, 320, 377; 5 634
- - доминантная 4, 590
Линейная форма от логарифмов 3, 318
Линейная функция 3, 319
n-линейная форма 4, 406
- функция 4, 406
Линейно компактный модуль 3, 318, 320
- независимое множество 1, 643
Линейно разделенные расширения поля 3, 320
Линейно регулярный случайный процесс 3, 320
- редуктивная группа 4, 946
Линейно связное пространство 3, 321
- сингулярный случайный процесс 3, 321
Линейно упорядоченная группа 1, 328; 3, 322
- упорядоченная лупа 3, 462
- - полугруппа 5, 523
- упорядоченное кольцо 5, 526
Линейно упорядоченное множество 3, 322
- эквивалентные дивизоры 2, 131
Линейного представления инвариант 3, 323
Линейного сопряжения задача 1, 1097; 3, 77, 323—325; 4, 1177
Линейное векторное расслоение 1, 637
Линейное гиперболическое уравнение и система 3, 325—329
- диофантово приближение 2, 162
Линейное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве 3, 329—337
Линейное дифференциальное уравнение второго порядка обыкновенное 3, 337—339
Линейное дифференциальное уравнение обыкновенное 3, 339—343
- - - -, ранг 4, 859
Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами 3, 343
Линейное дифференциальное уравнение с частными производными 2, 298; 3, 344
Линейное замыкание 3, 345
Линейное интегральное уравнение 2, 590; 3, 345
- - - Вольтерра 1, 752
- интегро-дифференциальное уравнение 2, 613
- интерполирование 2, 622, 631
Линейное многообразие 1, 362; 3, 345, 358
- -, ортогональность 1, 980
- -, ортонормированный базис 1, 981
- -, раствор 1, 981
Линейное неравенство 3, 345—347
- -, граничных решений принцип 3, 345
- -, Минковского теорема 3, 703
- -, Минковского — Фаркаша теорема 3, 346
- операторное уравнение 1, 754
- отображение векторного пространства 1, 644
- -, ранг 4, 859
- - симплексов 4, 1152
- отражение 4, 157
Линейное параболическое уравнение и система 3, 348—350
- параметрическое программирование 4, 220
Линейное подпространство 3, 350
Линейное представление 3, 350; 4, 595
- - группы 3, 292; 4, 586
- - импримитивное 2, 524
- - кристаллографической группы 3, 108
Линейное преобразование 3, 291, 350—353, 369
- - векторного пространства 1, 644
- - диагонализируемое 3, 351
- - изометрическое 3, 352
- -, корневой вектор 3, 20
- - полупростое 4, 466
- -, полярное разложение 4, 479
- - самосопряженное 3, 352; 4, 1074
- - сопряженное 5, 85
- -, спектр 5, 58
- - унитарное 3, 352
- - эрмитово 3, 352
Линейное программирование 3, 353—355
- - целочисленное 5, 800
Линейное пространство 1, 640, 642; 3, 291, 355
- - выпуклых множеств 1, 803

Линейное топологическое пространство 3, 355
- - -, Банаха — Штейнгауза теорема 1, 380
Линейное уравнение 3, 355
Линейное уравнение алгебраическое **3**, 356—360
- -, критерий совместности системы **3**, 118
- -, Кронекера — Капелли теорема **3**, 118
Линейное эллиптическое уравнение и система 3, 360—363
n-линейнос множество **1**, 121
- отображение **4**, 407
Линейной независимости мера числа 3, 364
Линейные координаты **3**, 9
- операции над векторами **1**, 632
Линейный автомат **1**, 68
- дифференциал **2**, 241
Линейный дифференциальный оператор 2, 278, 345; **3**, 364—369
- - - гиперболический **3**, 366
- - - гипоэллиптический **3**, 366
- - - голономный **3**, 368
- - - , инвариантность **3**, 366
- - -, максимально переопределенный **3**, 368
- - -, недоопределенность **3**, 368
- - - параболический **3**, 366
- - -, переопределенность **3**, 368
- - -, рсзольвента **3**, 368
- - -, символический модуль **3**, 367
- - - универсальный **3**, 366
- - -, характеристика **3**, 366
- - -, характеристическое многообразие **3**, 367
- - -, эллиптический **3**, 366
- интегральный оператор **2**, 604
- - - Вольтерра **1**, 752
- код **2**, 932
- комплекс, группа **4**, 1157
- метод приближения **4**, 605, 609; **5**, 144
Линейный метод суммирования 3, 369
- объект **1**, 937
- - однородный **1**, 937
Линейный оператор 1, 644; **3**, 291, 369—377; **4**, 19
- -, Банаха — Штейнхауза теорема **1**, 389
- - двойственный **1**, 645
- -, дробная степень **2**, 382
- - положительный **4**, 470
- - сопряженный **1**, 645
- -, спектральная теория **5**, 114
- -, спектральное разложение **5**, 120
- -, ядерный **5**, 1037
- -, ядро **5**, 1043
- поперечник **4**, 493
- порядок **4**, 505
- род алгебраической поверхности **1**, 150
Линейный угол 2, 50; **3**, 377
Линейный функционал 1, 644; **3**, 320, 370, 377
- - положительный **1**, 119; **4**, 1149
- - эрмитов **4**, 1149
- элемент, поле **2**, 885
- язык **1**, 1091
Линейных алгебраических групп арифметическая теория 3, 378—380
Линейчатая поверхность 3, 380—382
- -, Бельтрами теорема **3**, 380
- -, Бонне теорема **3**, 380
- -, стрикционная линия **3**, 380
- -, стрикционная точка **3**, 380
Линзовое пространство 3, 382
Линии Грина **1**, 1121
- параллельные **4**, 209
Линия 3, 382—387
- асимптотическая **1**, 332; **2**, 252
- в матрице **1**, 773
- векторная **1**, 636
- винтовая **1**, 705
- вихревая **1**, 715
- времениподобная **3**, 702
Линия второго порядка 2, 1034; **3**, 387—389
- - -, диаметр **2**, 127
- вырождения типа уравнения **5**, 45
- геодезическая **1**, 924; **4**, 673
- Дарбу **2**, 18
- изотропная **3**, 703
-, касательная **2**, 754
- квазигеодезическая **2**, 800
- координатная **2**, 251
- кривизны **3**, 97, 102
- мировая **3**, 703, 704; **4**, 149
- направляющая **2**, 1033
- образующая **2**, 1033
- особая **4**, 125
- откоса **4**, 141
- погони **4**, 351
- предельная **3**, 399; **4**, 73
- прикосновения **2**, 1003
- простая замкнутая **3**, 386
- пространственноподобная **3**, 703
- прямая **1**, 643
- равных расстояний **3**, 398
- регрессии **3**, 27; **4**, 929
- сжатия **3**, 380
- скедастическая **4**, 929
- средняя **5**, 163
- Стокса **1**, 717; **5**, 941
- стрикционная **3**, 380
- уровня **5**, 544
- характеристическая **3**, 799; **5**, 753
- цепная **5**, 815
Линк симплекса **3**, 153
Линника дискретный эргодический метод 3, 389
- дисперсионный метод **2**, 223
Липпмана — Швингера уравнение **5**, 898
Липшица константа 1, 915; **3**, 390
Липшица условие 1, 915; **3**, 49, 390
Липшица условие интегральное **3**, 390
Липшицева граница **5**, 57
Лисп 3, 390
Лист декартов **2**, 79
- Мёбиуса **2**, 52; **3**, 630
Листинга узел 3, 391
p-листная звездообразная область **2**, 449
- функция **3**, 723
Литерал **1**, 224
Литлвуда проблема 3, 391
- теорема о дзета-функции **2**, 117
Лиувилля нормальная форма 3, 392
Лиувилля поверхность 3, 392
- преобразование **3**, 392
Лиувилля сеть 3, 392
Лиувилля теорема 3, 393
- - для автономных систем **1**, 83
- - о гамильтоновых системах **1**, 860
- - о конформных отображениях **2**, 1094; **3**, 393
- - - - преобразованиях **2**, 1084
- - о приближении алгебраических чисел **3**, 393
- - о сохранении фазового объема **3**, 394, 397
- - об аналитических функциях **3**, 393
- - об эллиптических функциях **5**, 986
Лиувилля уравнение 3, 394
- форма **4**, 1156
- формула **3**, 396
- - для вронскиана **1**, 769
- - для линейных дифференциальных уравнений **3**, 341
Лиувилля функция 3, 395
Лиувилля число 3, 395
Лиувилля — Грина приближение **1**, 717
Лиувилля — Неймана ряд **5**, 652
Лиувилля — Остроградского формула 3, 396
Лифт полный **3**, 262
Лихтенбаума теорема о когомологической размерности **2**, 926
Лобатто квадратурная формула 3, 397
Лобачевского геометрия 3, 397—401
- -, Клейна интерпретация **2**, 873
- -, Пуанкаре интерпретация **4**, 746
Лобачевского метод 3, 401
- плоскость **3**, 784
- -, Гильберта теорема **1**, 408
- -, Пуанкаре модель **2**, 197
- -, радиус кривизны **3**, 911
Лобачевского признак сходимости 3, 402
Лобачевского пространство 3, 402—404
- -, Бельтрами — Клейна интерпретация **3**, 403
- -, Кэли — Клейна интерпретация **3**, 402
- -, радиус кривизны **3**, 398, 911
Лобачевского функция 3, 404
Логарифм 3, 405
- интегральный **2**, 603
- - обращенный **1**, 292
Логарифмика **3**, 407
Логарифмическая бумага 3, 405
- выпуклость **1**, 800
- высота в диофантовой геометрии **1**, 813
Логарифмическая емкость 2, 404; **3**, 406
Логарифмическая производная 3, 406
Логарифмическая спираль 3, 406
Логарифмическая точка ветвления 3, 407
Логарифмическая функция 3, 407
- - правдоподобия **2**, 645
Логарифмически выпуклая кратно круговая область **3**, 89
Логарифмически нормальное распределение 3, 408
- оптимальный по порядку метод **3**, 695
-плюрисубгармоническая функция **4**, 336
Логарифмически субгармоническая функция 3, 409
Логарифмический вычет 1, 815; **3**, 409
Логарифмический метод суммирования 3, 410
- период **5**, 989
Логарифмический потенциал 3, 410
- - двойного слоя **4**, 524
- - масс **4**, 524
- - простого слоя **4**, 524
Логарифмический признак сходимости числового ряда **3**, 411
Логарифмическое изображение **4**, 945
- нормирование поля **3**, 1078
- среднее **3**, 410
- уравнение **5**, 540
- ядро **3**, 410
Логика алгоритмическая **4**, 653
- Грисса — Нельсона **2**, 1041
- двузначная **2**, 51
- динамическая **4**, 653
- *m*-значная **3**, 714
- интенсиональная **4**, 1110
- интуиционистская **2**, 643
- комбинаторная **2**, 969
- конструктивная **2**, 1039
- математическая **3**, 568
- Медведева **5**, 619
- многозначная **3**, 713
- модальная **3**, 763
- промежуточная **4**, 695
- символическая **3**, 568
- теоретическая **3**, 568
- Хоара **4**, 653
Логико-математические исчисления 3, 411—414
Логико-математический язык **4**, 578
Логико-термальная история **4**, 652
Логистика 1, 315; **3**, 414
Логистическая система вывода **1**, 919
Логистическое распределение 3, 414
Логицизм 3, 415
Логическая аксиома 3, 415; **5**, 353
- антиномия **1**, 294
- истинность **5**, 357
Логическая матрица 3, 415
Логическая операция 3, 416
- сеть **1**, 55
Логическая формула 3, 416
Логическая функция 3, 416
- часть оператора программирования **4**, 18
Логические исчисления 3, 416—420
Логический вывод **1**, 779
Логический закон 3, 420
Логическое следствие 3, 420
Логнормальное распределение 3, 420
Лодато близость **1**, 501
Ложного положения мстод **4**, 1109
Лози аттрактор **5**, 247
Локализации принцип 3, 420
Локализация в категориях **3**, 420
Локализация в коммутативной алгебре **3**, 421
Локальная алгебра Ли **3**, 266
- база **1**, 371
- гипотеза Бибербаха **1**, 466
Локальная грубость 3, 422
- -, Гробмана — Хартмана теорема **3**, 422
- группа Ли **3**, 267
- - - преобразований **3**, 260
Локальная дифференциальная геометрия 3, 423
- карта **2**, 355, 730
- конечность **4**, 410
- - покрытия **4**, 393
- кратность пересечений **4**, 254
- лоренц-инвариантность **4**, 970
- малость категории **4**, 1119
- монодромия **3**, 807
- однопараметрическая группа **3**, 1171
- параметризация **3**, 743
- подгруппа **3**, 426
- проблема Торелли **5**, 406
Локальная размерность 3, 428
- *k*-связность **3**, 434
- симметрия **3**, 454
- степень **5**, 222
Локальная структура траекторий 3, 424
- теорема Гёделя — Мальцева **1**, 158
- - Лапласа в теории вероятностей **3**, 201
- - Мальцева **3**, 510
Локальная топологическая группа 3, 425
Локальная униформизация 3, 426
- униформизирующая **3**, 445
- униформизующая **1**, 177
- эргодическая теорема **4**, 23
m-локальная база **1**, 371
n-m-локальная база **1**, 371
Локально аналитическая функция **2**, 42
Локально бикомпактное пространство 3, 246; **5**, 392
- вложимая Ω-система **1**, 159
Локально выпуклая решетка 3, 427; **4**, 472
- - структура **3**, 427
Локально выпуклая топология 3, 427; **5**, 378
- выпуклое множество **1**, 799
Локально выпуклое пространство 3, 428—430; **4**, 462
- - *K*-пространство **4**, 472
- - тензорное произведение **5**, 383
- - топологическое векторное пространство **5**, 378
- гауссово отображение **5**, 298
- евклидова топологическая группа **1**, 245; **5**, 369
- евклидово пространство **2**, 355
- замкнутое подмножество **2**, 1054
- изоморфные группы Ли **3**, 255
Локально интегрируемая функция 3, 430

- - компактная топологическая группа 5, 367
Локально компактное тело 3, 430
Локально конечная алгебра 3, 431
- - база 1, 371
Локально конечная группа 3, 432
Локально конечная полугруппа 3, 432
- - симплициальная схема 4, 1159
- конечное малое многообразие полугрупп 4, 441
Локально конечное покрытие 3, 433
Локально конечное семейство 3, 434
- - - множеств 4, 202; 5, 393
- - конечный комплекс 2, 995
- - радикал 3, 432
Локально линейно связное пространство 3, 434
Локально нильпотентная алгебра 3, 434
Локально нильпотентная группа 3, 435
- - полугруппа 3, 1041
Локально нормальная группа 3, 435
- обратимое голоморфное отображение 1, 1030
- одномерная схема 4, 911
- окольцованное пространство 4, 14
- ориентируемый пучок 1, 1058
- плоская конформная структура 2, 1089
- - связность 3, 103
- - флаговая структура 5, 628
Локально плоское вложение 3, 435; 5, 401
- полная деформация 2, 103
- постоянный пучок 4, 766; 5, 1024
- псевдоевклидово пространство 4, 740
- равномерно выпуклое банахово пространство 1, 389
Локально разрешимая алгебра 3, 435
Локально разрешимая группа 3, 436
Локально свободная группа 3, 436
Локально свободный пучок 2, 904; 3, 436
- *связная категория* 1, 1074
- - компактная группа 2, 991
Локально связное пространство 3, 436; 4, 1097
Локально связный континуум 3, 437
- счетная база 1, 371
Локально тривиальное расслоение 3, 437
- факториальное кольцо 2, 871
- циклическая группа 1, 17
- эквинепрерывная полугруппа 4, 452, 453
σ-локально конечная база 1, 371
- конечное открытое покрытие 4, 203
Локального кодирования принцип 4, 1189
- максимума точка 3, 494
- минимума точка 3, 494
Локальное зацепление 3, 437
- исчисление 4, 513
Локальное кольцо 3, 437—439
- - регулярное 1, 1055; 3, 439
- -, топология 1, 98
Локальное поле 3, 439; 4, 400
- - круговое 3, 120
- правило 5, 944
- преобразование 4, 730
Локальное приближение функций 3, 440
Локальное разбиение 3, 440
Локальное свойство в коммутативной алгебре 3, 440
Локальности принцип в теории дифференциальных уравнений 3, 441
Локальные гомологии 3, 441
Локальные и резидуальные свойства алгебраических систем 3, 441
Локальные когомологии 3, 442
- оптимизирующие преобразования программ 4, 644
Локальные предельные теоремы теории вероятностей 3, 443
Локальный алгоритм 1, 207
- - упрощения 1, 560
Локальный гомеоморфизм 3, 444
- гомоморфизм 3, 267, 425
- дендрит 2, 91
- изоморфизм 3, 426
- инвариант Хассе 5, 775, 776
- индекс пересечения 4, 255
- мартингал 3, 534
- модуль, число 2, 106
- параметр 3, 445
- принцип конечной площади 3, 458
- - максимума модуля 2, 965
- слой 4, 1210
- спектр 5, 114
- сплайн 4, 606
Локальный униформизирующий параметр 3, 445
Локальных вариаций метод 3, 446
Локон Аньези 1, 297
Локсодрома 3, 447
Локсодромическое дробно-линейное отображение 2, 386
Локсодромия 3, 447
Ломаная вариация 1, 604
- вписанная 1, 757
- экстремаль 4, 853; 5, 932, 958
Ломмеля многочлен 3, 447
Ломмеля функция 3, 447
Лонгмана метод 3, 448
Лопиталя правило 3, 449
Лорана ряд 1, 264, 265; 3, 450
- - обобщенный 1, 679
- теорема в теории аналитических функций 3, 450
Лоренца аттрактор 3, 451
- группа 3, 453; 4, 82, 147
Лоренца преобразование 3, 453
Лоренца сила 3, 454
Лоренцево пространство-время 4, 719
Лоренц-инвариантность 4, 147, 970
Лоса симметрическое пространство 4, 1147
Лотерея 1, 102
Лузина гипотеза в теории множеств 3, 455
- - - тригонометрических рядов 3, 456
- - - функций комплексного переменного 3, 459
- критерий для борелевских множеств 1, 535
Лузина критерий измеримости функций 3, 455
Лузина множество 3, 455
Лузина примеры в теории функций комплексного переменного 3, 456
Лузина принципы отделимости 3, 456
- проблема в теории множеств 3, 457
Лузина проблема в теории тригонометрических рядов 3, 456
- - функций комплексного переменного 3, 459
Лузина пространство 3, 457
Лузина решето 3, 457
Лузина *C*-свойство 3, 458
Лузина *N*-свойство 3, 458
Лузина теорема 3, 458
- - в дескриптивной теории множеств 3, 459
- - в теории функций комплексного переменного 3, 458
- - о *CA*-множествах 3, 763
- - об измеримых множествах 2, 498
- точка 3, 459
Лузина — Валле Пуссена классификация 2, 95
Лузина — Данжуа теорема 3, 459
Лузина — Привалова граничная теорема единственности 2, 402, 403
Лузина — Привалова теоремы в теории функций комплексного переменного 3, 459
Лукасевича трехзначная логика 3, 719
Лумиса — Уитни неравенство 2, 513
Лунца — Локуциевского пример в теории размерности 4, 822
Лупа 2, 802; 3, 460—462
-, Альберта теорема 2, 519
Лупа аналитическая 3, 462
- Муфанг 3, 844
-, ядро 5, 1043
Лурье уравнение 5, 839
Луч 1, 498; 3, 463; 4, 466
- в программировании 4, 644
- Жюлиа 2, 427
- конгруэнции 2, 1014
G-луч 1, 927
Лучевая функция 3, 463
- -, аномалия 1, 947
- -, минимум в решетке 1, 945
- -, последовательный минимум 1, 947
- -, Эрмита постоянная 1, 945
Лучевой метод 3, 463—465
Лучистости свойство 2, 446
Льенара уравнение 3, 465
Льенара — Шипара критерий 3, 465
- - - устойчивости 5, 558
Люксембурга норма 3, 466
Люрота проблема 3, 466
- теорема о дифференциальных полях 4, 901
- - о полях рациональных функций 3, 466
Люстерника метод 4, 250
Люстерника — Шнирельмана категория 2, 763
Ляпунова второй метод 3, 471
- коэффициент неправильности 3, 980
- критерий о правильных линейных системах 4, 551
- лемма об устойчивости 3, 471
- оптимальная функция 1, 66
Ляпунова поверхности и кривые 3, 467
Ляпунова преобразование 2, 766; 3, 468
- система с демпфированием 3, 957
Ляпунова стохастическая функция 3, 468
- сфера 3, 467
Ляпунова теорема 3, 469
- - в теории вероятностей 3, 469
- - в теории потенциала 3, 469
- - о показателях 3, 471
- - о правильных линейных системах 4, 552
- - о приводимых линейных системах 3, 313; 4, 633
- - о приводимых системах 2, 766
- - об устойчивости 2, 771; 3, 61; 5, 552
- - - по первому приближению 5, 570
Ляпунова теория устойчивости 3, 470
- условие 3, 467, 470
Ляпунова функция 3, 471
- - оптимальная 1, 66
Ляпунова характеристический показатель 3, 471—473
Ляпунова — Перрона фундаментальный результат 2, 769
Ляпунова — Пуанкаре теорема о симплектических матрицах 1, 862
Ляпунова — Стеклова условие замкнутости 4, 100
Ляпунова — Шмидта уравнение 3, 473

M

Магазинный автомат 3, 628
Магарам — Колмогорова теорема о мерах 3, 645
Магистраль 3, 586
Магический квадрат 2, 971; 3, 475
Магнитной гидродинамики математические задачи 3, 475
Мажоранта гармоническая 1, 872; 5, 262
- - наибольшая 1, 872
- - наименьшая 1, 872
Мажоранта и миноранта 3, 476
Мажорантная многошаговая игра 2, 331
- схема 1, 996
- функция 3, 476
Мажорирующее отображение 4, 1025
Мазера теорема 5, 361
Мазура — Орлича — Брудно теорема о методах суммирования 1, 718
Мазуркевича теорема о континуумах 4, 230
- - о локально связном континууме 3, 384
Мазуркевича — Мура — Менгера теорема о локально связных пространствах 3, 437
Мазуркевича — Янишевского теорема о континууме 4, 1097
Майера задача 3, 476
- метод 5, 206
- скобки 5, 1052
- функция 5, 206
Майера — Вьеториса точная последовательность 1, 162
Макдональда функция 1, 458; 3, 476
Макки борелевская структура 3, 477
Макки пространство 3, 478
Макки топология 2, 44; 3, 478
Макки — Аренса теорема двойственности 2, 44
Маклафлина группа 5, 149
Маклорена ряд 3, 478
Маклорена формула 3, 479
Макмиллана теорема в теории передачи информации 5, 76
Мак-Нейла пополнение 4, 496
Маколеево кольцо 3, 68
Макроассемблер 3, 596
Макроподход в теории автоматов 1, 48, 53, 72
Максвелла закон 5, 750
Максвелла распределение 3, 479
Максвелла уравнения 3, 479—482
Максвелла — Больцмана распределение 1, 519
Максимальная дуальная пара подпространств 1, 986
Максимальная компактная подгруппа 3, 482
- нить 1, 33; 4, 686
- подалгебра 2, 987
Максимальная подгруппа 3, 482
- почти периодическая группа 2, 1022
Максимальная эргодическая теорема 3, 483
Максимально переопределенный линейный дифференциальный оператор 3, 368
Максимального правдоподобия метод 3, 483
- - оценка 3, 483; 4, 551
- типа целая функция 5, 798
Максимальное аналитическое продолжение 1, 283
- бикомпактное расширение 1, 477
Максимальное и минимальное расширения симметрического оператора 3, 484
- покрытие 1, 560
- расширение *K*-пространства 4, 472
- рекурсивно перечислимое множество 4, 959
Максимальности принцип 1, 772
- - для частично упорядоченных множеств 5, 828
- теорема Вана 2, 201
- - Коллингвуда 4, 569
Максимальный диссипативный оператор 2, 228; 4, 905
- дифференциальный оператор 5, 108
Максимальный и минимальный операторы 3, 484
Максимальный идеал 2, 483; 3, 495

- -, пространство 2, 985
- -, Шилова теорема 2, 985
Максимальный инвариант 3, 486
Максимальный коэффициент корреляции 3, 486
- монотонный оператор 3, 814
- поток 4, 539
- спектр 5, 102
Максимальный спектральный тип 3, 486
Максимальный тор 3, 486—488
Максимальный член ряда 3, 488
- элемент 5, 834
Максимизация и минимизация функций 3, 489—491
Максимизирующая последовательность 3, 489
Максимин 2, 678; 3, 491
Максимин; численные методы 3, 492—494
Максимина принцип 3, 494
Максиминный критерий 3, 494
Максимум абсолютный 3, 494
Максимум и минимум функции 3, 494
Максимума и минимума точки 3, 494
Максимума модуля принцип 3, 495
- - - локальный 2, 965
Максимума принцип дискретный 3, 496
- - для субгармонических функций 5, 262
- - интегральный 4, 49
Максимума принцип Понтрягина 3, 497; 4, 487
- -, усиление 2, 406
- работы вариационный принцип 1, 600
Малая индуктивная размерность 2, 556; 4, 821
Малая категория 3, 497
- ось эллипса 5, 978
- посылка 3, 790
- статистическая сумма 5, 179
- теорема Пикара о целых функциях 4, 285
- - Ферма 5, 152, 156, 604
Малера гипотеза о диофантовых приближениях 2, 172
- неравенство 3, 701
Малера проблема в теории диофантовых приближений 3, 498
Мало схема 2, 724
Малого параметра метод 3, 498—505
Малое многообразие полугрупп 4, 440
Малоинъективный модуль 2, 664
Малые знаменатели 3, 505—507
Малый канонический ансамбль 5, 200
- - - Гиббса 5, 179
Малый образ 3, 507
Малый объект категории 3, 508
- подмодуль 4, 372
Малых колебаний маятника уравнение 5, 541
Мальцева алгебра 3, 463, 508—510
Мальцева локальные теоремы 3, 510
- проблема о вложимости ассоциативного кольца 1, 721
- - о мальцевском произведении 3, 510
- расщепление 3, 279
- теорема о Ω-системах 1, 160, 185
Мальцева — Неймана теорема о групповой алгебре 1, 722, 1145
- - - о свободных алгебрах 4, 1081
Мальцевское пополнение 3, 435
Мальцевское произведение 1, 186; 3, 510
Мамфорда гипотеза 3, 510—512
Мангольдта функция 3, 512
Манна теорема в теории чисел 3, 512
Манна — Дайсона неравенство 4, 325
Манна — Уитни критерий в математической статистике 3, 512
Мантисса 3, 405
- числа 2, 443
Маргинальное распределение 3, 513
Маркированный случайный точечный процесс 5, 32
Маркова диофантово уравнение 3, 515
Маркова квадратурная формула 3, 513, 867
Маркова критерий в теории приближений 3, 513
- неравенство в теории вероятностей 5, 842
Маркова неравенство для производной многочлена 3, 514
- нормальный алгоритм 1, 820
- постоянная 3, 514
- правило выводимости 1, 912
- пример динамической системы 4, 954, 1100
- принцип 2, 1049
- - конструктивного подбора 2, 643
Маркова проблема спектра 3, 514—516
Маркова система функций 3, 516
Маркова спектр 1, 948; 3, 514, 516
- тезис 1, 821
- теорема о комплексах 3, 153
- тройка 3, 515
Маркова форма 1, 948; 3, 516
Маркова цепи нулевой класс состояний 3, 516, 519
Маркова цепи положительный класс состояний 3, 517, 519
- цепочка 1, 948
Маркова цепь 1, 660; 3, 517—520
Маркова цепь возвратная 3, 520
- - непериодическая 3, 519; 5, 239
Маркова цепь неразложимая 3, 519, 521
- - нерегулярная 4, 260
- -, переход с запрещениями 4, 258
Маркова цепь периодическая 3, 521
Маркова цепь разложимая 3, 519, 521
- - регулярная 4, 260
- - с непрерывным временем 3, 523
Маркова цепь сложная 3, 521
- - топологическая 4, 1136
Маркова цепь эргодическая 3, 521
- число 3, 515
- эргодическая теорема 1, 525
Маркова — Какутани теорема о неподвижной точке 5, 385
Марковская переходная функция 4, 259
- стратегия 5, 529, 531
Марковский источник сообщений 2, 682
Марковский момент 3, 522; 4, 508
Марковский процесс 1, 663; 3, 523—528
- - восстановления 1, 757
- -, эксцессивная функция 5, 970
Марковский стационарный процесс 3, 529
Марковское свойство 3, 523, 529; 4, 391
- случайное поле 5, 16
Мартина аксиома о частично упорядоченных множествах 5, 280
Мартина граница в теории марковских процессов 3, 529—531
Мартина граница в теории потенциала 3, 531
- компактификация 3, 531
- представление 3, 532
- пространство 3, 531
- теорема в теории потенциала 3, 532
- топология 3, 532
- ядро 3, 530
Мартина-Лёфа теорема о сложности двоичных последовательностей 1, 220
Мартингал 3, 532—535
Мартингальное преобразование 3, 534
Мартинелли — Бохнера представление 1, 542
- - формула 1, 543
- - - интегральная 1, 270
Марцинкевича пространство 3, 535
- теорема об интерполяции 4, 1040
- - об операторах 2, 630
Маршо формула 2, 383
Маршрут в графе 1, 1106, 1108
Маскита теорема об униформизации 5, 516
Маслова индекс 5, 723
- канонический оператор 5, 722
Масс логарифмический потенциал 4, 524
Масса 3, 536
Масса движения 3, 536; 4, 146
Масса и комасса 3, 536
- покоя 3, 536; 4, 146
Массив ортогональный 4, 87
Массивная группа 5, 511
- подгруппа 1, 448
Массивное множество 3, 537
Массовая проблема 1, 214; 3, 537, 1004
Массового обслуживания система 3, 537—541
Массового обслуживания система; входящий поток вызовов 3, 541—543
Массового обслуживания система с ожиданием и одним каналом обслуживания 3, 543—550
Массового обслуживания система с ожиданием многоканальная 3, 550—554
Массового обслуживания система с отказами 3, 554—557
Массового обслуживания теория 3, 557—559
Массовый оператор 3, 559
Массы оператор 3, 559
Масштаб главный (общий) 2, 741, 746
- относительный 2, 746
- площади 2, 741
- частный 2, 746
Масштабный параметр 3, 560
Математика 3, 560—564
- вычислительная 1, 822
- дискретная 2, 207, 1018
- комбинаторная 2, 970, 974
- конечная 2, 208, 1018
- конструктивная 2, 1042
- финитная 2, 368
Математическая абстракция 1, 43
Математическая индукция 3, 564
- кристаллография 3, 109
Математическая лингвистика 3, 565—568
Математическая логика 3, 568—574
- -, принцип двойственности 2, 32
Математическая модель 3, 574
- - объекта управления 1, 60
- -, погрешность 4, 357
Математическая статистика 3, 576—581
- структура 5, 249
- теория дифракции 2, 231
Математическая физика 3, 581—584
Математическая экономика 3, 584—591
Математические задачи астрометрии 1, 343
- - астрономии 1, 344
- - астрофизики 1, 346
- - аэродинамики 1, 364
- - геодезии 1, 921
- - геокриологии 1, 931
- - геотермики 1, 951
- - геофизики 1, 951
- - гидродинамики 1, 959
- - звездной астрономии 2, 447
- - картографии 2, 740
- - классической небесной механики 2, 869
- знаки 2, 457
Математический анализ 3, 591—595
- - формальный 5, 641
Математическое моделирование 3, 574
Математическое обеспечение 3, 595—600
Математическое ожидание 3, 600
- - условное 5, 553
Математическое программирование 2, 677; 3, 601—604; 4, 647
Математической индукции принцип 2, 558; 3, 564
- физики уравнение нелинейное эволюционное 5, 912
Математической физики уравнения 3, 604—611
Материальные уравнения среды 3, 480
Матриц алгебра 3, 611
Матриц кольцо 3, 612
Матрица 3, 613—618
- Адамара 1, 85
- адекватная 3, 765
- Александера 5, 488
- билинейного отображения 1, 484
- булева 1, 554
- вырожденная 1, 806
- гауссова 2, 777
- Гессе 3, 1153
- голоморфная 1, 251
- Грама 1, 1084
- Гурвица 4, 914
- дважды стохастическая 4, 272; 5, 239
-, детерминантная сумма 1, 722
- диагональная 2, 123
- Дирака 2, 175
- Дуффина — Кеммера 2, 176
- жорданова 2, 424; 3, 372
-, жорданова нормальная форма 2, 425; 3, 352
-, жорданова форма 2, 425
- зацепления Александера 1, 232
- Зейферта 3, 451
- информационная 2, 646, 655
- инцидентности 1, 505, 506, 1105, 1108; 2, 663
- - гиперграфа 1, 1006
, каноническая форма 3, 1052
-, канонический вид 3, 1052
- Картана 3, 17
- квадратичной формы 2, 777
- квадратная неполная 1, 722
- Кеммера — Дуффина 2, 875
-, Кёнига теорема 1, 773; 2, 846
- ковариационная 2, 900
- Коксетера 2, 944
- контрградиентная 2, 1072
- корреляционная 3, 23
- кососимметрическая 3, 42
- Коши 3, 58, 618
- кронекерова 2, 777
-, кронекерово произведение 5, 332
- линейного оператора 3, 371
- преобразования 3, 291
-, линия 1, 773
- логическая 3, 415
- мероморфная 1, 251
- монодромии 1, 863; 3, 312, 806
- мономиальная 3, 811
- нагрузок 5, 594
- накрытия Александера 1, 232
- невырожденная 3, 906
- неособенная 3, 906
- неразложимая 4, 276
- нормальная 3, 1050
-, нормальная жорданова форма 2, 425; 3, 352
-, нормальная форма 3, 1052
- обратная 3, 1132
-, обращение 3, 1136
- ортогональная 4, 84
- особая 1, 806
- осцилляционная 4, 138
- переходных вероятностей 3, 518; 4, 261
- периодов 4, 1032; 5, 405
- - абелева интеграла 1, 16
- - абелевой функции 1, 23
- - комплексного тора 2, 1011
- - римановой поверхности 5, 1046
-, перманент 2, 976; 4, 1140
- плотности 3, 26; 4, 319

- - состояний 5, 178, 203
-, подобие 4, 377
- показательная 3, 312
- положительно определенная 4, 431
- полунепрерывная 4, 461
- полупростая 4, 465
- полустохастическая 4, 261
-, полюс 1, 251
-, представимости проблема 4, 582
- проверочная 2, 932
- разреженная 4, 848
-, ранг 4, 858
- рассеяния 4, 893
- регрессии 4, 925
- Римана 4, 993
- риманова 1, 23
- Риса 4, 1034
- самосопряженная 5, 1019
- симметрическая 4, 1142
- симплектическая 1, 862; 4, 1154, 1157
- сингулярная 1, 806
- смежности графа 1, 1105, 1108
-, собственное значение (число) 5, 764
- сопряженная 5, 81
-, спектр 5, 102
- стохастическая 4, 261; 5, 238
-, тензорное произведение 5, 332
- Тёплица 4, 943
- транспонированная 5, 419
- треугольная 5, 428
- унимодулярная 5, 504
- унипотентная 5, 505
- унитарная 5, 507
- J-унитарная 1, 861
- управляемости 1, 61
- фундаментальная 2, 766; 3, 340
- характеристическая 3, 326, 765, 1053
-, характеристический корень 5, 764
-, - многочлен 3, 616, 1053; 5, 764
-, характеристическое значение (число) 5, 764
- Хаусдорфа 5, 778
-, Хессенберга форма 2, 687
-, Шура форма 2, 689
- эволюционная 3, 312
- эрмитова 5, 1019
- эрмитовой формы 5, 1021
- эрмитово-симметрическая 5, 1019
- эрмитово-сопряженная 5, 81, 1019
- Якоби 5, 1044
S-матрица 4, 893
T-матрица 4, 943; 5, 337
Матрицант 3, 312, 618
- уравнения 1, 861
Матрица-подстановка 3, 811
Матричная алгебра 3, 611
- грамматика 1, 1089
Матричная группа 3, 619
- - вполне приводимая 1, 761
- - неприводимая 3, 995
Матричная игра 2, 471; 3, 619
- интерпретация комплексных чисел 2, 1009
- *связка полугрупп* 4, 1091
- функция Шура 4, 272
Матричное дифференциальное уравнение 3, 620
- исчисление 3, 613
- уравнение Риккати 4, 987
- - - алгебраическое 5, 839
Матричной прогонки метод 3, 621
Матричной факторизации метод 3, 621
Матричный метод суммирования 3, 621
- след оператора 5, 1040
- элемент представления 4, 591
Матроид 2, 969; 3, 622
- трансверсальный 4, 813
Матьё группа 3, 623; 5, 149
Матьё уравнение 3, 623
Матьё функции 3, 624
Маурера — Картана уравнение 3, 625
Маурера — Картана форма 3, 624
Маха принцип 3, 625
Маха число 3, 625
Махаланобиса расстояние 3, 626
Мацумото теорема о функторах 1, 164
Мацусимы критерий для однородных пространств 3, 626
Машина 3, 626—629
- абстрактная 1, 825
- Поста 4, 505
- Тьюринга 1, 819; 5, 456
Машинная номография 3, 1047
Машинно-зависимые оптимизирующие преобразования программ 4, 644
Машинно-ориентированный язык 1, 223; 3, 629
Машинный перевод 1, 59
- эксперимент 2, 850
- язык 1, 223
Машины сложность 1, 213
Машке теорема для групповых алгебр 1, 1144
Маятника колебаний уравнение 3, 629
Мгновенная фаза 4, 1085
Мгновенное состояние 3, 630
Мёбиуса геометрия 2, 1087
- конфигурация 2, 1079
Мёбиуса лист 2, 52; 3, 630
Мёбиуса плоскость 3, 630
- преобразование 3, 122
Мёбиуса ряд 3, 631
- теорема обращения в комбинаторике 4, 264
Мёбиуса функция 3, 631
Мёбиусово отображение 2, 1094
Медведева логика 5, 619
Медиальная квазигруппа 2, 803
Медиальный закон 2, 230
Медиана в теории вероятностей 3, 632
- выборочная 1, 775
Меднана треугольника 3, 632
Медианта 3, 632
Медленное движение 3, 500
Межотраслевой баланс 3, 586
Мейера преобразование 3, 632
Мейера K-преобразование 3, 633
- свойство 3, 633
Мейера теорема о мероморфных функциях 3, 633
- точка 3, 633; 4, 567
Мейера — Бесселя преобразование 3, 633
Мейера — Вьеториса последовательность 1, 1048
Мелера квадратурная формула 2, 794; 3, 633
Мелера — Фока преобразование 3, 634
Мелкость разбиения 2, 17; 3, 91
Мелина преобразование 3, 635
- формула 2, 86
- ядро 2, 586
Мембранная теория оболочек 3, 1128
Менгера кривая 2, 715; 3, 635
- теорема о линиях в смысле Урысона 3, 385
- - *об индуктивной размерности* 2, 717
- универсальная кривая 3, 385
Менгера — Урысона формула для размерностей 4, 820
Менгера — Урысона — Чеха теорема о размерности 4, 827
Менгерова алгебра 2, 968
Менелая теорема для треугольника 3, 635
Мёнье теорема о кривизне 2, 253; 3, 636
Меньшова пример нуль-ряда 3, 636
- теорема *о тригонометрических рядах* 5, 440
Меньшова — Радемахера теорема для ортогональных рядов 3, 636
Мер алгебра 1, 129
Мера 3, 636—645; 5, 720
- абсолютная непрерывность 1, 34
- автоинформативности 3, 738
- алгебраической независимости 1, 198
- аналитическая 1, 246
- - Альфорса 1, 246
- ассоциированная 4, 1039
- Бэра 1, 537
- бэровская 3, 643
Мера в топологическом векторном *пространстве* 3, 645
- вероятностная 1, 665
- Винера 1, 666, 695
- винеровская 1, 695
- внешней информативности 3, 738
- внешняя 1, 734
- - поперечная 5, 50
- внутренне регулярная 4, 809
- вполне конечная 4, 719
- вполне σ-конечная 4, 719
-, выметание 1, 781, 782
- вычислений 1, 211
- гармоническая 1, 873; 4, 533
- гиперболическая 1, 988
- граничная 5, 264
- дискретная 2, 198
- емкостная 2, 405; 4, 1047
- Жордана 2, 420; 3, 641
- инвариантная 2, 528
- интенсивностей 5, 31
- иррациональности 2, 666
- искажения 5, 1006
- Каратеодори 2, 720
- квазиинвариантная 2, 806
- квантовая 2, 1037
- кинематическая 2, 571
- конечная 4, 719
- σ-*конечная* 4, 719
- Лебега 2, 93; 3, 213, 640
- Лебега — Стилтьеса 3, 641
- неатомическая 3, 904
- некомпактности 3, 977
-, носитель 3, 1081
- обобщенная 2, 444
- общая 5, 73
- Планшереля 5, 512
- погрешности 4, 604
- полная 4, 417
- представляющая 2, 966
- приближения функций 4, 628
-, проективная система распределений 5, 72
- равновесная 2, 405; 4, 1046, 1047
- Радона 4, 809
- регулярная 4, 934, 938
- Рисса 4, 1039; 5, 263
- сложности машин 1, 213
- совершенная 5, 66
-, согласованность 1, 882
- спектральная 3, 496; 5, 103, 124
-, спектральный тип 5, 134
- стационарная 5, 208
- Тамаганы 5, 319
- *точности* 4, 183
- трансцендентности 2, 165; 5, 427
- тривектора 5, 435
- Фавара 5, 585
- Фейнмана 5, 602, 603
- финитная 3, 1081
- Хаара 5, 741
- Хаусдорфа 5, 777
- цилиндрическая 4, 580; 5, 778, 818
- элементарная 2, 571
-, энергия 5, 1002
α-мера Хаусдорфа 5, 778
Мергеляна теорема об аппроксимации функций комплексного переменного 3, 646
Меридиан 1, 767; 4, 949; 5, 291
- тора 5, 405
Мероморфная матрица 1, 251
Мероморфная функция 1, 265; 3, 647—650
- - , дефектное значение 2, 100
- - , Иенсена *формула* 2, 488
- - , Миттаг-Леффлера теорема 1, 265; 3, 705
- - , нормальное семейство 3, 1069
- - , Пуассона — Иенсена формула 2, 488
- - , росток 4, 1054
- - , Шварца — Иенсена формула 2, 488
Мероморфное отображение 3, 650
Мероморфности точка 4, 117; 5, 282
Мероморфный дифференциал 2, 239
Мероопределение проективное 4, 675
Мерсенна число 3, 651
Мерсера теорема об интегральном операторе 3, 651
Мертвая зона 3, 756
Мертенса теорема об умножении рядов 4, 1066
Меры потенциал 4, 529
n-местное отношение 4, 151
Местность операции 4, 18
n-местный предикат 4, 151
n-местный функтор 3, 741; 5, 685
Место 4, 280
Метабелева алгебра 3, 241
Метабелева группа 3, 652
Метагармоническая функция 4, 403
Металогика 3, 652
Метаматематика 3, 571, 652
Метаметатеория 3, 653
Метанильпотентная группа 4, 408
Метатеорема 3, 652
Метатеория 3, 652
Метациклическая группа 3, 653
Метаязык 3, 653
Метеорологии математические задачи 3, 654—656
Метка 1, 224
- в математической логике 4, 1182
Метод—см. соответствующее название
Методическая ошибка 3, 880
Метризационная теорема Урысона 5, 546
Метризуемая структура 4, 795
Метризуемое пространство 3, 656—658
- - близости 1, 501
- - , Крейна — Шмульяна теорема 2, 44
- - топологическое 5, 389
- - - векторное 5, 379
Метрика 3, 658
- Бергмана 1, 413; 3, 1172
- бинвариантная 5, 625
- внутренняя 1, 738, 790
- выпуклая 1, 787, 789, 790
- Гильберта 1, 965
- гиперболическая 1, 988, 989
- естественная 2, 57
- инвариантная 2, 529; 5, 374
- *индефинитная* 2, 555
- Керра 2, 849; 5, 890
- конформно-инвариантная 2, 1098
- Крускала 5, 890
- Кэлера 3, 155
- кэлерова 3, 155
- Леви 3, 220
- Леви — Прохорова 3, 224
- левоинвариантная 5, 625
- Минковского 3, 700
- многогранная 3, 708
- относительная 4, 144
- правоинвариантная 5, 625
- *проективная* 4, 667
- риманова 2, 1089; 4, 1013
- сферическая 4, 910
- финслерова 5, 624
- Фубини — Штуди 5, 675
- Хаусдорфа 3, 674
- хаусдорфова 5, 779
- Ходжа 3, 155; 5, 788
- хордальная 4, 910
- Шварцшильда 5, 889
- экстремальная 5, 959
- эрмитова 5, 1019
G-метрика 1, 985; 4, 717
J-метрика 1, 985
Q-метрика 2, 786
Метрическая мера внешняя 1, 734
- непрерывность 3, 994
- неразложимость 3, 667
- плотность 3, 460
Метрическая проекция 3, 659
- прямая 4, 667
Метрическая размерность 3, 659
Метрическая связность 3, 660
- секунда 4, 1108
- теория алгоритмов 1, 228
- - булевых функций 1, 556

Метрическая теория динамических систем 3, 660; 5, 1010
- - диофантовых приближений 2, 171
- - поверхностей 4, 338
Метрическая теория функций 3, 660—662
Метрическая теория чисел 3, 662—666
- топологическая полугруппа 5, 374
Метрическая транзитивность 3, 666
- форма 3, 668; 4, 234
- функция финслерова 5, 621
- энтропия 5, 1006
Метрически правильный многоугольник 3, 750
- равные операторы 2, 505
- транзитивный стационарный случайный процесс 5, 211
- эквивалентные гильбертовы пространства с индефинитной метрикой 1, 986
Метрический автоморфизм 3, 668
- - модуля 1, 482
- алгоритм 2, 1051
- гомоморфизм 3, 667
Метрический изоморфизм 3, 667
- порядок 3, 659
Метрический тензор 3, 668; 4, 235, 1003; 5, 328
- - основной 4, 1013
- - финслеров 5, 622
- тип 3, 668
- эндоморфизм 3, 668
Метрическое пространство 3, 658, 669—675
- - выпуклых множеств 1, 803
- -, движение 5, 625
- -, истинный цикл 2, 681
- - конструктивное 2, 1051
- - полное 4, 423
- -, симметрия 5, 625
Механики законы Ньютона 3, 1091
Механических квадратур метод 3, 675
Мешающий параметр 3, 676
Мешок вокруг компакта 1, 1060
Микроканонический ансамбль 5, 200
- - Гиббса статистический 1, 958; 5, 179
Микроканоническое распределение 5, 200
- - Гиббса 1, 956
Микроподход в теории автоматов 1, 50, 55, 75
Микрорасслоение 3, 676
Мили автомат 1, 53
Милна метод 3, 676
Милна проблема 3, 677—679
- уравнение 3, 677
Милнора геометрическая реализация симплициального множества 4, 1163
- группа 1, 162
- конструкция 1, 1016; 2, 865
- многообразие 2, 380
Милиора сфера 2, 380; 3, 679
- теорема о характеристических классах 5, 764
- форма 5, 489
- число 4, 119, 129
Милнора — Хирцебруха задача 5, 867
Минимакс 2, 678; 3, 680
Минимакса принцип 3, 680
Минимаксная оценка 3, 681; 5, 195
- фильтрация 4, 46
Минимаксное решающее правило 2, 214; 5, 192
Минимаксное свойство собственных значений 3, 681
Минимаксность статистической процедуры 3, 682
Минимальная дизъюнктивная нормальная форма 1, 127
- дилатация 4, 1127
- динамическая система 3, 691
Минимальная достаточная статистика 2, 376; 3, 683
Минимальная модель 3, 683
- - алгебраической поверхности 1, 152
- цепь 4, 686
Минимальная нормальная подгруппа 3, 684
Минимальная поверхность 2, 253; 3, 684—690
- - аффинная 1, 355
- -, Бернштейна проблема 4, 306
- -, Бернштейна теорема 1, 430
- -, Бьёрлинга задача 1, 567
- -, Вейерштрасса критерий 1, 615
- -, ветвления точка 1, 680
Минимальная простая группа 3, 690
- устойчивость 5, 563
- функция 4, 1125
Минимального типа целая функция 5, 798
Минимальное исчисление высказываний 3, 691
- - предикатов 3, 692
- квазимногообразие 1, 184
- логическое исчисление 3, 418
- многообразие 1, 186
Минимальное множество 2, 767; 3, 690
- покрытие 1, 560
- поле 1, 64
Минимальное пропозициональное исчисление 3, 691
Минимальное свойство 3, 691
- - частных сумм рядов Фурье 5, 733
- симплициальное множество 4, 1166
Минимальное функциональное исчисление 3, 692
Минимальной стоимости поток 4, 540
Минимальности критерий Сегре 3, 142
Минимальный автомат 1, 69
- геликоид 1, 913
- дифференциальный оператор 5, 108
Минимальный идеал 3, 692
- многочлен 3, 617
- - алгебры 2, 212
- период 4, 269
- разрез 4, 540
- тест 3, 861; 5, 344
Минимальный центр притяжения 5, 802
- элемент 5, 834
Минимальных итераций метод 3, 693
Минимальных невязок метод 3, 694
Минимизации задача 3, 716
- оператор 3, 875; 4, 960
- - ограниченный 4, 637
Минимизация автоматов 1, 69
- булевых функций 1, 558
Минимизация вычислительной работы 3, 695—699
Минимизация площади 3, 699
- функций 3, 489
- - алгебры логики 1, 127
Минимизирующая последовательность 1, 303; 3, 489, 699
Минимум 3, 700
- абсолютный 3, 494; 4, 1132
- лучевой функции 1, 945
- сильный относительный 4, 1132
- слабый относительный 4, 1132, 1207
- функции 3, 494
Минимума потенциал для гармонических пространств 1, 890
- точка 3, 494
Миниэдральный конус 4, 434, 470
Минковского геометрия 3, 700; 4, 668
Минковского гипотеза 1, 949; 3, 700
- единица 5, 480
- метрика 3, 700
- неоднородная проблема 1, 949
Минковского неравенство 1, 946; 3, 700; 5, 50
- область приведения 2, 788
Минковского проблема 3, 701
Минковского пространство 3, 702; 4, 148; 5, 621
- пространство-время 4, 719
- сигнатура 5, 480
- сумма 4, 1212
- - многогранников 4, 783
Минковского теорема о выпуклом телс 1, 944, 946, 947; 3, 703
- - о выпуклых многогранниках 1, 802
- - о критическом идеале 3, 114
- - о линейных неравенствах 3, 703
- - о формах 1, 946
- формула 2, 780
Минковского — Фаркаша теорема о линейных неравенствах 3, 346
Минковского — Хассе теорема о диофантовых уравнениях 2, 170
- - - о квадратичных формах 2, 778
Минор 3, 703; 4, 371
Миноранта 3, 476, 704
Минорантная многошаговая игра 2, 331
- функция 3, 476
Минского машина 3, 627
Минута 3, 704
Мировая линия 3, 703, 704; 4, 149
- точка 3, 703; 4, 149
Мировая функция 3, 704
Миттаг-Леффлера звезда 2, 445; 3, 705
Миттаг-Леффлера метод суммирования 3, 705
- разложение 2, 446; 3, 706
Миттаг-Леффлера теорема 3, 705—707
- - о мероморфных функциях 1, 265; 3, 648
Миттаг-Леффлера функция 3, 707; 5, 160
Митчелла теорема об абелевых категориях 1, 20
Михайлова критерий 3, 707
Мищенко ряд 5, 866
Мнимая единица 2, 1007; 3, 708
- коническая поверхность 2, 1033
- линия второго порядка 3, 387
- ось 2, 1008
- - гиперболы 1, 988
- часть комплексного числа 2, 1007
Мнимое квадратичное поле 2, 783
Мнимое число 2, 1007; 3, 708
Мнимоединичный вектор в псевдоевклидовом пространстве 4, 739
Мнимые прямые параллельные 3, 388
- - пересекающиеся 3, 388
Мнимый эллипс 3, 387; 5, 978
- эллипсоид 5, 978
- аллиптический цилиндр 5, 994
Многих масштабов метод 3, 501
- тел задача 2, 870
Многовариантный перевод 1, 59
Многовершинное распределение 3, 839
Многогранная метрика 3, 708
Многогранник 3, 708—711
- абстрактный 5, 902
- выпуклый 1, 801; 4, 410
-, грань 1, 1104
-, Коши теорема 3, 62
- полуправильный 4, 463
- правильный 4, 552
-, равновеликость 4, 783
-, равносоставленность 4, 783
-, ребро 4, 925
Многогранника группа 3, 711
Многогранный угол 3, 712
Многогрупповое приближение 3, 712
Многозначная логика 3, 713—720
Многозначная функция 3, 720
- - аналитическая 1, 266
Многозначного характера особая точка 4, 115
Многозначное дифференциальное уравнение 2, 268
Многозначное отображение 3, 720; 4, 154
Многозначное представление 3, 721
Многозначной логики функции 3, 721
Многозначный оператор 4, 19
Многоиндексная транспортная задача 5, 420
Многократная рекурсия 3, 721
Многокритериальная задача 2, 677; 3, 722
Многолепточная машина Тьюринга 5, 457
Многолистная область 3, 723
Многолистная функция 3, 723—728
Многомерная вариационная задача 3, 728
Многомерная геометрия 3, 729—731
- задача Плато 4, 303
- сетевая модель 4, 1120
- ткань 5, 357
Многомерное нормальное распределение 3, 1066
Многомерное распределение 3, 731
- - дробных долей 4, 875
Многомерные задачи вариационного исчисления 1, 593
Многомерный диффузионный процесс 2, 362
- параллелепипед 1, 325
- признак 3, 732
- сингулярный интегральный оператор 2, 605
- случайный процесс 5, 23
Многомерный статистический анализ 3, 732—738
- тор 5, 405
Многомерный узел 3, 738—740
Многоместная операция 4, 18
Многоместный функтор 3, 740
Многообразие 3, 742—748
- абелево 1, 24, 143; 2, 1012
- алгебр 1, 121
- алгебр Ли 3, 241
- алгебраических систем 1, 185
- алгебраическое 1, 188; 5, 299
- Альбанезе 1, 236
- аналитическое 1, 278
- асимметричное 1, 331
- аффинное 1, 360
- - алгебраическое 1, 360
- банахово 2, 357
- - аналитическое 1, 385
- бернсайдово 1, 1137
-, бордантность 1, 533
- Брауэра — Севери 1, 546
- бушующее 1, 566
-, векторное поле 1, 641
- Веронезе 1, 655
-, ветвления точка 2, 55
-, внутренняя гомологичность 1, 533
- вполне геодезическое 1, 758, 931
- геодезическое 1, 931
- геометрически неприводимое 3, 996
-, геометрический род 2, 266
- гильбертово 2, 357
- голоморфно полное 5, 899
- гомологическое 1, 1058
- Грассмана 1, 1104
- Гриффитса 4, 154
- групп 1, 1136
- - конечно базируемое 1, 1137
- - кроссово 1, 1137
- - лиевского типа 1, 1137
- - почти кроссово 1, 1137
- двумерное 2, 51
-, Дена лемма 2, 90
- детерминантное 2, 99
-, дифференциальная геометрия 2, 254
- дифференцируемое 2, 354
- древовидное 2, 379
- жесткое 2, 103
- замкнутое 2, 435; 3, 87
- Зейферта 2, 451
- инвариантное 2, 145, 533
- интегральное 2, 584; 4, 778
- иррегулярное 2, 668
-, иррегулярность 1, 236
-, канонический класс 2, 266
-, канонический разрез 2, 54
- канторово 2, 716

Многообразие категорий **3**, 747
- Кервера **2**, 380, 848
- когомологическое **1**, 1059; **2**, 926
- колец **2**, 950
- комбинаторное **3**, 154
-, комплексификация **2**, 70
- комплексное **1**, 273, 278; **2**, 355, 1007
- - аналитическое **2**, 1007
- конечного индекса **4**, 440
- контактное **2**, 1063; **3**, 232
- конфигурационное **1**, 928
-, конформная структура **2**, 1089
-, край **2**, 51
- Кросса **3**, 241
- Куги **3**, 786
- кэлерово **3**, 156
- - кватернионное **2**, 839
- лагранжево **3**, 181
- лежандрово **3**, 232
- линейное **1**, 362; **3**, 345, 358
- Милнора **2**, 380
- минимальное **1**, 186
- неориентируемое **3**, 968
- неприводимое **3**, 996
- несглаживаемое **3**, 1010
- нефокальное **5**, 612
- обобщенное **1**, 1058
- одномерное **3**, 1170
-, ориентация **4**, 70
-, ориентированная бордантность **1**, 533
- ориентируемое **4**, 70
- оснащенное **4**, 107; **5**, 284
- открытое **4**, 141
- параллелизуемое **4**, 205
- Пикара **4**, 283
-, погружение **4**, 358
- погруженное **4**, 358
- полугрупп **4**, 440
- проективное **4**, 674
- - алгебраическое **1**, 360
-, разложение на ручки **4**, 1059
- разрешимое **4**, 851; **5**, 73
-, ранг **5**, 613
- рациональное **3**, 466; **4**, 919
- регулярное **2**, 668
- риманово **4**, 1022
- Рохлина **2**, 380
- с краем **3**, 87
- с рациональными особенностями **4**, 118
-, связности число **2**, 54
- Сегре **4**, 1101
- сепаратрисное **4**, 1116
-, сечение **2**, 54
-, сигнатура **4**, 1128; **5**, 860
- симплектическое **4**, 1156
-, слоение **4**, 1210
- спектральное **5**, 114
- специальное **2**, 839
- топологическое **2**, 355
- тороидальное **2**, 584
- трехмерное **5**, 432
- универсальных алгебр **5**, 501
- унилинейчатое **5**, 787
- унирациональное **3**, 466; **5**, 506
- Фано **5**, 596
- фигур **5**, 612
- финслерово **5**, 624
- флаговое **5**, 628
- фокальное **5**, 612
- формальное **3**, 154
- характеристическое **5**, 753, 766
- Ходжа **3**, 156; **5**, 788
- Цассенхауза **4**, 584
- четырехмерное **5**, 860
- Чжоу **5**, 863
- Штейна **5**, 899
- Штифеля **5**, 903
- Шуберта **1**, 1104; **5**, 918
- эрмитово **5**, 1020
- языков **5**, 644
- Якоби **5**, 1046
C^k-многообразие **2**, 355
pl-многообразие **3**, 154; **4**, 414
(B, φ)-многообразие **5**, 253
Многообразий топология **5**, 402
Многосвязная область **3**, 748, 1098
- риманова поверхность **4**, 1018
Многоскоростные уравнения **4**, 248
Многосортный язык **5**, 637
Многосторонний канал **2**, 702
Многосторонник **3**, 751
Многоточечная задача Валле Пуссена **1**, 573
Многоугольная фигура **3**, 749
Многоугольник **3**, 749—752
- вписанный **1**, 757
- выпуклый **1**, 802
- Ньютона **3**, 1090
- описанный **1**, 758
- правильный **4**, 553
-, равнодополняемость **4**, 782
-, равносоставленность **4**, 783
Многоугольное число **1**, 324; **3**, 752
Многоугольный путь **3**, 750
Многочлен **3**, 752—755; **5**, 797
- абсолютно неприводимый **3**, 997
- алгебраический **5**, 797
- Александера **1**, 232; **5**, 488
- Аппеля **1**, 299
-, Виета теорема о корнях **1**, 693
-, Галуа группа **1**, 845
- гармонический **1**, 886
-, Горнера схема **1**, 1078
- Гурвица **4**, 914
-, Декарта теорема **2**, 78
- деления круга **2**, 81
-, дискриминант **2**, 209
- знакопеременный **4**, 1145
-, индекс **4**, 1114
-, кольцо **4**, 309
- Конвея **5**, 489
-, корень **1**, 192
- кососимметрический **4**, 1145
- круговой **2**, 81
- минимальный **3**, 617
- наилучшего приближения **3**, 868
-, наименее уклоняющийся от нуля **3**, 874
- Неймана **3**, 925
- неприводимый **3**, 997
-, поле разложения **1**, 192; **4**, 398
- примитивный **4**, 638
-, производная **2**, 210
- Пуассона — Шарлье **5**, 882
- размерностный **4**, 825
-, редуцированная степень **4**, 1114
- результант **4**, 952
- сепарабельный **4**, 1114
- симметрический **4**, 1145
-, содержание **4**, 638
- Тейлора **5**, 322
- устойчивый **4**, 914
- характеристический **3**, 616, 1053; **5**, 764
Многочленов кольцо **3**, 755
Многочлены Бернулли **1**, 423
- Бернштейна **1**, 429
- Бибербаха **1**, 467
- Гегенбауэра **1**, 908; **2**, 869; **5**, 494
- Гильберта **1**, 967
- Кравчука **3**, 74
- Лагерра **2**, 869
- Лежандра **2**, 869
- ортогональные **4**, 92
- - в комплексной области **4**, 97
- сферические (Лежандра) **3**, 228
- ультрасферические **2**, 869; **5**, 494
- Фабера **5**, 583
- Чебышева **2**, 869; **5**, 840, 843
- Чебышева — Эрмита **5**, 1016
- Шарлье **5**, 882
- Эйлера **5**, 927
- Эрмита **2**, 869; **5**, 1016
- Якоби **2**, 869; **5**, 1048
Многошаговость **2**, 154
Многоэкстремальная задача **3**, 756—758
Многоэлементная кибернетическая система **2**, 851
Множеств алгебра **1**, 129
Множеств категория **3**, 758
Множеств теория **3**, 758—760
- - аксиоматическая **1**, 104
- - алгоритмическая **1**, 222
- - дескриптивная **2**, 93
- - рекурсивная **4**, 957
Множественная регрессия **4**, 931
Множественное сравнение **3**, 760
Множественный коэффициент корреляции **3**, 761
Множество **3**, 762
- абсолютно выпуклое **1**, 799; **4**, 1010
-, аксиоматическая теория **1**, 104
-, σ-алгебра **1**, 130
- алгебраическое **2**, 671
- аналитическое **1**, 279; **2**, 93; **3**, 455, 762
- K-аналитическое **2**, 406
-, аннулятор **1**, 644
- аппроксимативно компактное **1**, 304
- асимптотическое **4**, 565
-, атлас **2**, 730
-, базис **1**, 372
- базисное **1**, 378
- банахово аналитическое **1**, 385
- бесконечного типа **1**, 945
- биупорядоченное **4**, 935
- бифуркационное **5**, 361
- блуждающее **1**, 507
- борелевское **1**, 130, 536; **2**, 93
- Бэра **1**, 568
-, Бэра свойство **1**, 568
- бюджетное **3**, 587
-, вариация **1**, 604
-, верхняя граница **1**, 673
-, внутренность **1**, 737
- вполне неприводимое **1**, 760
- вполне ограниченное **1**, 760
- вполне порождающее **1**, 552
- вполне приводимое **1**, 761
- вполне упорядоченное **1**, 763
- всюду плотное **1**, 769
-, выпуклая оболочка **1**, 788
- выпуклое **1**, 644, 796, 799
- - по Робинсону **5**, 781
- гиперболическое **1**, 998
- гипериммунное **2**, 523; **4**, 724
- гиперпростое **2**, 523
- главное открытое **5**, 102
-, диаметр **2**, 127
- дизъюнктное **4**, 471
-, дизъюнктное семейство **2**, 135
- диофантово **2**, 161
-, дискретное семейство **2**, 207
-, дифференциальная размерность **2**, 243
-, дифференциальный тип **2**, 243
- доверительное **2**, 365, 366, 615; **5**, 198
-, дополнение **2**, 373
- допустимое **5**, 638
- единственности **2**, 401
-, емкость **2**, 403
- закругленное **5**, 378
- замкнутое **2**, 435; **4**, 563
-, замыкание **2**, 438; **4**, 634; **5**, 389
- звездное **2**, 446
- значений отображения **4**, 152
- - функции **3**, 1099
-, измельчающееся семейство **2**, 496
- измеримое **2**, 498; **3**, 638
- - по Жордану **2**, 420
- - по Лебегу **3**, 640
- C-измеримое **2**, 406
- иммунное **2**, 523
- инвариантное **2**, 532, 767
- индексное **3**, 1087
- информационное **1**, 207; **2**, 656; **4**, 386
- истинностных моделей **1**, 555
- канонического замкнутое **2**, 713
- - открытое **2**, 713
- Кантора **2**, 718
- канторово **2**, 717
-, кардинал **2**, 723
- Карлесона **2**, 727
-, карта **2**, 729
- катастроф **5**, 362
-, категория **2**, 764
- квадрируемое **3**, 92
- компактное **2**, 992
- конечного типа **1**, 945
- конечное по Дедекинду **2**, 505
- конструктивное **2**, 671, 1053
- конструктивное по Гёделю **2**, 1053
- креативное **3**, 94; **4**, 663, 957
- критическое **3**, 113
- Кронекера **1**, 884
- кубируемое **3**, 92
- Лебега **2**, 93; **3**, 214, 217
-, линейная оболочка **1**, 643
- линейно независимое **1**, 643
- линейно упорядоченное **3**, 322
- локально выпуклое **1**, 799
- Лузина **3**, 455
- массивное **3**, 537
-, мера **3**, 636
- минимальное **2**, 767; **3**, 690
- моногенности **3**, 805
- мультипликативное **3**, 422
- направленное **3**, 890
- неединственности **2**, 401
- независимое **1**, 552, 884
- неизмеримое **3**, 919
- неопределенности **3**, 649, 651
-, непрерывная сумма элементов **1**, 376
- непрерывное **3**, 986
- непротиворечивое **1**, 910
- неразличимых элементов **5**, 165
- несчетное **3**, 1020
- нигде не плотное **3**, 1036
-, нижняя граница **1**, 673
- номерное **3**, 1087
- нулевое **3**, 639
- нулевой гармонической меры **1**, 873
- - - абсолютной **1**, 873
- пумерованное **3**, 1086
- общерекурсивное **4**, 852
-, объединение **3**, 1148
-, объем **3**, 1149
- ограниченно компактное **3**, 1159
- ограниченное **3**, 1161
-, определимое в модели **2**, 1053
-, ортогональное дополнение **1**, 644
- ортонормированное **1**, 980
- - полное **1**, 980
- остаточное **2**, 764
- открытое **4**, 141
- открыто-замкнутое **4**, 143
- относительно бикомпактное **4**, 145
- - открытое (замкнутое) **4**, 145
-, отношение зависимости **1**, 373
-, параметризация **2**, 729
- партнеров **5**, 562
- Пенлеве **4**, 233
-, пересечение **4**, 253
- перечислимое **1**, 227; **4**, 265
- пика **1**, 133
- планов **3**, 602
- плоское **1**, 643
- плотное **1**, 769; **4**, 319; **5**, 280
-, плотность **4**, 324
-, поглощающее **1**, 544; **5**, 378
-, поглощение **5**, 378
-, подобие **4**, 377
- показательно-диофантово **2**, 174
- покрываемое **4**, 395
- покрывающее **4**, 395
-, покрытие **1**, 559; **4**, 392
- полное **4**, 423; **5**, 378
- полусимплициальное **4**, 1161
- полярное **4**, 478
-, поперечник **4**, 492
-, пополнение **4**, 422
- пористое **4**, 497, 569
-, порция **4**, 497
-, предельная точка **4**, 563
- предельное **4**, 565
-, предпучок **4**, 581; **5**, 1024
- приближающее **4**, 603
- продуктивное **4**, 662
- проективное **2**, 94; **3**, 455; **4**, 677
- - алгебраическое **4**, 674
-, произведение **5**, 713
- производное **4**, 563, 690
- простое **4**, 705
- пустое **4**, 765
-, пучок **5**, 366
-, равномощность **2**, 723
- разделя **4**, 848
- разностное **4**, 837
-, разность **4**, 847
- разреженное **4**, 848
- разреза **4**, 848
- разрешимое **1**, 227; **4**, 532, 852
- разрешимости **4**, 220
- разрывности группы **2**, 875
-, ранг **1**, 373; **2**, 969
- резидуальное **2**, 764
- резольвентное **4**, 449, 951; **5**, 99

- рекурсивно перечислимое 3, 1003; 4, 957
- рекурсивное 4, 852, 957
- свободное 4, 1086
- связное 4, 1092
- Сидона 1, 885
-, симметрическая разность 4, 1144
- симплициальное 4, 1161
- слабо блуждающее 4, 1206
- слабо выпуклое 1, 799
-, сложение 4, 1212
- совершенное 5, 68
- сопряженное 1, 644; 5, 91
- состояний 1, 53
- - канала 2, 704
- спектрального синтеза 5, 119
- спектральное 5, 119
-, стабилизатор 4, 383
- стационарное 5, 279
- суслинское 2, 93; 3, 455
- сходимости 5, 218
- счетное 3, 837
- творческое 3, 94

Множество типа F_σ (G_δ) 3, 762
- тонкое 5, 365
- топологически свободное 4, 1086
- тотальное 4, 424; 5, 408
- транзитивное 1, 783
- универсальное 5, 500
-, униформизация 5, 514
- упорядоченное 5, 527
- уравновешенное 1, 544; 5, 378
- уровня 5, 545
-, устранимое 5, 582
-, фиксатор 4, 383
-, функциональная отделимость 5, 391
- Хельсона 1, 884
- цилиндрическое 4, 580; 5, 818, 825
- частично упорядоченное 5, 833
- чебышевское 5, 850
- эргодическое 5, 1013
-, ядро 1, 567; 5, 1044

A-множество 2, 93; 3, 455, 762; 4, 1194
-, накрытие 2, 95
A_n-множество 4, 677
B-множество 1, 535, 536
-, расщепление 2, 95
CA-множество 2, 94; 3, 763
CA_n-множество 4, 677
F_σ-множество 3, 762
G_δ-множество 3, 762
-, Александрова — Хаусдорфа теорема 2, 96
M-множество 5, 441
n-множество 2, 974
U-множество 2, 401; 5, 441
$\aleph_\alpha$-множество 2, 713
$\aleph_0$-множество 2, 713
π-множество 2, 713; 3, 1065
Множимое 5, 496
Множителей правило 3, 177
Множители Лагранжа 3, 172
- суммируемости 5, 275
Множитель 5, 496
- Бляшке 1, 508
- дробно-линейного отображения 2, 386
- интегрирующий 2, 612
- понижающий 5, 442
- разрывный 4, 854

Мода 3, 763
Модальная логика 3, 763—765
Модальное высказывание 3, 763

Модальность 3, 765
- точки 4, 130
Модальный оператор 3, 764
Моделей теория 3, 766—769
- - неклассическая 3, 928
Моделирование математическое 3, 574
- статистическое 5, 193
Модель 3, 769; см. также соответствующее название

Модель вычислительная 3, 770
Модель математическая 3, 574, 770
Модельно полная элементарная теория 5, 973
Модификация аналитического пространства 3, 770

Модифицированная функция Струве 5, 248
- цилиндрическая функция 1, 461; 3, 476; 5, 821
Модифицированный метод Ньютона 3, 1092
Модулей категория 3, 770
Модулей проблема 3, 771
- - для алгебраических поверхностей 1, 153
- римановых поверхностей проблема 4, 1019, 1031
Модулей теория 3, 772—775
Модули римановой поверхности 3, 775
- скрещенные 4, 1205
Модуль 3, 772, 776, 777—782
Модуль автоморфизма 3, 782
- Александера 5, 488
- альтерниона 1, 240
- артинов 1, 327
-, базис 1, 374
- банахов 1, 381

Модуль без кручения 3, 783
- - - в смысле Басса 5, 88
- ведущий 2, 192
- вектора 1, 632
- - в псевдоевклидовом пространстве 4, 739
- Верма 4, 584
- весовой 1, 673
- вполне приводимый 1, 762
- гладкости 1, 1022
-, глубина 1, 1026
- гомологий Александрова — Чеха 1, 234
- градуированный 1, 1084
- группы 5, 741
- двойной 1, 485; 2, 28
- двойственный 5, 88
- действительного числа 1, 34
-, дискриминант 2, 211
-, дифференциалов 2, 241
-, дифференциальный оператор 2, 348
- дифференциальных форм 2, 242
- дополнительный 5, 990
- дуальный 5, 88
- Дьёдонне 2, 393
- зацепления Александера 1, 232
-, инвариантное множество 1, 1020
-, инъективная размерность 1, 1053
- инъективности 2, 663
- ω-инъективный 5, 880
- квадратичный 2, 777
- квазиинъективный 2, 664
- когомологически тривиальный 2, 918
- коиндуцированный 2, 917
Модуль кольца 3, 783
- комплексного числа 1, 34; 2, 1008
- Коэна — Маколея 3, 69
- колеровых дифференциалов 2, 241
- Ласкера 3, 206
- лежандров 5, 990
- линейно компактный 3, 318, 320
- малоинъективный 2, 664
-, метрический автоморфизм 1, 482
- накрытия Александера 1, 232
- непрерывности 3, 990; 4, 616
- неприводимый 3, 998
- нётеров 3, 1025
-, носитель 3, 1081
- обратимый 3, 1130
- основной 2, 192
- перехода 3, 405
- периодичности эллиптического интеграла 5, 989
- периодов 2, 50
- - абелевой функции 1, 22
- плоский 4, 317
- полупростой 4, 465
- полуцепной 4, 473
-, предпучок 4, 581
- представления 4, 595
-, проективная резольвента 1, 1050
- проективный 4, 682
- простой 3, 998
- псевдоинъективный 2, 664
-, ранг 4, 861
-, расширение 4, 903
-, резольвента 4, 950
- сбалансированный 4, 1075
-, свободное семейство элементов 1, 374
- свободный 4, 1087
Модуль семейства кривых 3, 783; 5, 959
- сизигий 1, 973
-, p-я симметрическая степень 4, 1140
- сопряженный 5, 88
- сравнения 5, 151
- Тейта 1, 99; 5, 324, 325
- теста-функции 5, 348
- топологический 5, 377
- трохоиды 5, 448
- унитарный 5, 514
- фильтрованный 5, 616
- цепной 5, 815
- циклический 5, 816
-, цоколь 5, 828
- числа 1, 41
- элемента 5, 255
-, элементарный делитель 1, 1020
Модуль эллиптического интеграла 3, 783; 5, 990
- эллиптической функции 5, 1056
G-модуль рациональный 4, 920
- топологический 5, 151
Модуля поверхность 1, 276
- проблема 5, 959
Модулярная группа 3, 784, 788
- - Клейна 2, 195; 5, 680
Модулярная кривая 3, 785
- пара 4, 456
Модулярная решетка 2, 63; 3, 786; 4, 456
- структура 2, 63; 3, 786
Модулярная форма 3, 786—788
Модулярная функция 3, 788—790
Модулярное представление 2, 1021
- пространство 5, 406
Модулярности отношение 4, 456
Модулярный закон 2, 63
Модулярный идеал 3, 790
- угол 3, 783
Модус поненс 3, 790
Мозаичная структура 1, 50
Момент 3, 791
- винта 1, 706
- выборочный 1, 776; 5, 998
- дипольный 3, 843
- квадрупольный 3, 843
- марковский 3, 522; 4, 508
- мультипольный 3, 843
- случайной величины абсолютный 1, 42
- тактовый 1, 52
-, Шеппарда поправки 5, 892
Моментальная теория оболочек 3, 1128
Моментов метод 3, 792, 793
- - Галеркина 1, 842
- неравенство 2, 382
Моментов проблема 3, 793—799
Монада 5, 167, 447
Монадическая операция 4, 18
Монжа конус 2, 325; 3, 799
- кривая 2, 325; 3, 799
- ось 2, 326; 3, 799
Монжа уравнение 3, 800
- формулы для минимальных поверхностей 3, 685
Монжа — Ампера уравнение 3, 800—802
Монитор 4, 649
Моногенная полугруппа 3, 802
Моногенная функция 3, 67, 802—805
Моногенности множество 3, 805
Моногенность 5, 691
Монодромии группа 1, 176; 3, 806
Монодромии матрица 1, 863; 3, 312, 806
Монодромии оператор 2, 773; 3, 60, 806; 4, 131
Монодромии преобразование 3, 806—809
Монодромии теорема 3, 809
Монодромии накрытия 3, 888
- семейства 3, 807
Монодромная производная 5, 691
Монодромная функция 3, 809
Моноид 3, 809; 4, 441
-, внутренний автоморфизм 1, 736
-, группа когомологий 2, 909
- свободный 4, 1083
Моноидальная категория 3, 810
Моноидальное преобразование 3, 810
Мономиальная группа 2, 560; 3, 812
Мономиальная группа подстановок 3, 811
Мономиальная матрица 3, 811
- подстановка 3, 811
Мономиальное представление 3, 811
Мономорфизм 1, 471; 3, 370
Мономорфизм в категории 3, 812
- векторных расслоений 1, 646
- нормальный 3, 1074
Монополе 5, 75
Моносплайн 3, 812
Монотетическая полугруппа 5, 373
Монотонная булева функция 1, 557; 3, 812
- непрерывность нормы 2, 1076
Монотонная последовательность 3, 813
Монотонная функция 3, 813
- - алгебры логики 1, 127
- - k-значной логики 3, 813
Монотонно эквивалентные автоморфизмы 5, 1011
- - потоки 5, 1011
Монотонное отображение 2, 519; 3, 814; 4, 156, 1097
Монотонный оператор 3, 814, 960
Моноунарная алгебра 5, 496
Монте-Карло метод 3, 815—820
Монтеля принцип 3, 287
Монтеля пространство 3, 820
Монтеля теорема 3, 820
- - о нормальных семействах аналитических функций 3, 1069
Мопертюи принцип 3, 821
Мора — Маскерони построения 1, 933
де Моргана закон 3, 759
Морделла гипотеза в алгебраической геометрии 2, 159; 3, 822
Морделла — Вейля теорема о группе с конечным числом образующих 5, 981
- - - об абелевых многообразиях 1, 25
Мореры теорема в теории аналитических функций 1, 263; 3, 822
Мори теорема о кольцах 2, 871
Мориты теорема о паракомпактности 4, 394
Мориты эквивалентность 3, 823
Морли теорема в теории моделей 3, 768
Моро — Рокафеллара теорема для выпуклых функций 5, 265
Моровское пространство 3, 657; 4, 271
Морса индекс 3, 823
Морса лемма 3, 824
Морса неравенства 3, 825
Морса перестройка 3, 825—827
- теорема об индексе 3, 824
Морса теория 3, 827—830
Морса функция 3, 830
Морса — Смейла неравенства 3, 831
Морса — Смейла система динамическая 3, 830
Морфема 5, 255
Морфизм 5, 713
- аналитический 1, 281
- аффинный 1, 363
- биективный 1, 485
- бирациональный 1, 494
- гладкий 5, 300
- градуированных объектов 2, 1001
- граничный 1, 1053, 1057
- группы Ли 3, 255
-, единица 2, 761
- замены базы 2, 430, 431
- замкнутый 5, 65
Морфизм категории 2, 761; 3, 831
- -, коядро 3, 74

- квазиаффинный 2, 800
- квазипроективный 2, 819
-, коконус 2, 1074
-, конус 2, 1074
- отделимый 4, 1113
- плоский 4, 318
- расслоений 4, 893
- связывающий 1, 1053, 1057
- сепарабельный 4, 1113
- системы Постникова 4, 515
-, слой 2, 430; 5, 299
- собственный 5, 65
- спектра 5, 102
- стягивающий 2, 1002
- схем 5, 299
- - гладкий 1, 1021
- - проективный 4, 673
-, универсальное свойство 5, 300
- функторный 5, 687
- цепных комплексов 2, 1001
-, Шевалле теорема 2, 1054
- этальный 5, 1025
-, ядерная пара 5, 1032
-, ядро 5, 1044
C^k-морфизм 2, 355
Мост 2, 335
Мостова теорема о многообразиях 4, 1010
Мостова — Карпелевича теорема для однородных пространств 3, 1178
Мотивов теория 3, 832
Мощности критерия функция 3, 833
- функция 5, 182, 186
Мощностная характеристика 3, 834—837
Мощностной метод 4, 1187
Мощность 3, 837
- алгебраической системы 1, 155
- источника 2, 681
- континуума 2, 1068; 3, 838
- множества, Кантора теорема 2, 714, 723
- по Кантору 2, 723
- покрытия 4, 393
Мощность статистического критерия 3, 838; 5, 186
- схемы из функциональных элементов 5, 303
- топологического пространства 3, 834
Муавра формула 2, 1010; 3, 838
Муавра — Лапласа теорема 1, 489; 3, 202, 838
Мультиалгебра 3, 839
Мультигильбертово пространство 5, 1036, 1041
Мультиграф 1, 1105; 3, 839
Мультимодальное распределение 3, 763, 839
Мультиномиальное распределение 4, 409
Мультиоператорная Ω-алгебра 3, 839
Мультиоператорная группа 3, 839
- -, оператор 2, 989
- Ω-группа 2, 981
Мультиоперация частичная 3, 839
Мультипликативная арифметическая функция 3, 840
- граница функции 1, 1042
Мультипликативная группа 3, 840
- групповая схема 1, 1147
- квадратичная форма 2, 778
Мультипликативная полугруппа 3, 840
- последовательность 5, 763
Мультипликативная решетка 3, 840
Мультипликативная система 3, 422, 841
- теория когомологий 3, 1122
Мультипликативное множество 3, 422
- нормирование 1, 41
Мультипликативный группоид кольца 2, 967
Мультипликативный интеграл 3, 841
- оператор замыкания 4, 727
- спектр пространств 5, 103
- функционал 5, 746
Мультипликатор 1, 863; 3, 312; 4, 269
Мультипликатор группы 3, 842
- Шура 2, 910; 5, 919
Мультипликаторный тип 1, 863
Мультипликаторы 3, 842
Мультипликационная теорема Адамара 1, 87
Мультипольный момент 3, 843
Мультиполя потенциал 3, 843
Мультирадиус 4, 405
Мультиструя 4, 127
Мультифункtор 3, 740
Мура автомат 1, 53, 72
Мура пространство 3, 844
- теорема об автоматах 1, 69, 78
Мура — Постникова система отображения 4, 516, 1167
Мурнагана — Накаямы правило 4, 589
Муфанг лупа 3, 844
- теорема о лупах 3, 461
- тождество 1, 239
Муфанг-лиева алгебра 3, 508
Мэчина формула 5, 307
Мюнца теорема 3, 845
Мягкий пучок 3, 846

H

Набла-оператор 1, 854
Наблюдаемый по координатам объект управления 1, 62
Наблюдений обработка 3, 847
Наблюдения задача 4, 44
Набор коэффициентов Фурье 1, 981
- формул 4, 1104
Навье — Стокса уравнения 3, 848—852
Нагаты теорема об алгебраических многообразиях 4, 423
- - об идеалах 2, 871
Нагаты — Смирнова критерий для метризуемых пространств 3, 657, 673
Нагеля точка 3, 853
Нагруженное интегральное уравнение 3, 853
Надграфик функции 3, 853
Надежности теория 3, 854—858
Надежность 3, 854
Надежность и контроль управляющих систем 3, 858—862
Надкоммутативное многообразие полугрупп 4, 440
Надкритический ветвящийся процесс 1, 681, 684, 685, 687, 688
Наднильпотентное кручение 4, 807
Надполе 4, 398
Надстроечная категория 2, 47
Надстроечное последовательностью пространство 1, 1067
Надстройка 3, 862; 5, 102
-, гомоморфизм 1, 1067
- когомологическая 2, 921
-, Фрейденталя теорема 1, 1067
Надъязык 4, 641
Надя теорема об операторных группах 4, 22
Наиболее благоприятное распределение 3, 874
Наиболее мощный критерий 3, 862
Наибольшего гарантированного результата принцип 3, 863—865
- правдоподобия метод 4, 176
- - оценка 4, 551
Наибольший общий делитель 3, 865
- элемент 5, 834
Наивная теория множеств 3, 758
Наивысшая степень точности квадратурной формулы 2, 794
Наивысшей алгебраической степени точности квадратурная формула 3, 866
Наилучшая гармоническая мажоранта 1, 872
Наилучшая квадратурная формула 3, 867; 4, 35
- оценка 4, 174
Наилучшего приближения алгебраический многочлен 1, 179
Наилучшего приближения многочлен 3, 868
- - оператор 3, 659
- - функционал 3, 870
- - функция 4, 605
Наилучшего приближения элемент 3, 869, 870
Наилучшее полное приближение 3, 869
Наилучшее приближение в среднем 3, 872
- - класса функций 3, 871
Наилучшее приближение функции 3, 870—872
- - - интегральное, Маркова критерий 3, 513
- - цепными дробями 5, 814
- - частное приближение 3, 869
Наилучший линейный метод 3, 872
- локальный алгоритм 1, 209
Наилучших приближений последовательность 3, 873
Наименее благоприятное распределение 3, 873
- - - априорное 5, 192
Наименее уклоняющийся от нуля многочлен 3, 874
Наименьшая гармоническая мажоранта 5, 263
Наименьшего действия принцип 1, 857
- - - в форме Лагранжа 3, 173
- - - классической механики 1, 603
- принуждения принцип 1, 900
- - - вариационный 1, 598
Наименьшего числа оператор 3, 875
Наименьшее общее кратное 3, 89, 876
Наименьшей кривизны принцип 1, 954
- - - вариационный 1, 599
Наименьший неотрицательный вычет 1, 814
- элемент 5, 834
Наименьших квадратов метод 3, 876—882
Наименьших реакций принцип 3, 882
- - - вариационный 1, 599
Наискорейшего спуска метод 3, 882
Найквиста диаграмма 3, 883
Найквиста критерий 3, 883
Наймарка теорема о спектральных функциях 5, 119
Наказания стратегия 2, 478
Накаямы лемма о модулях 3, 780
Наклон поля экстремалей 5, 955
Наклонная 3, 884
- производная 3, 37
Накопление погрешности 3, 884—887
Накопления точка 3, 887; 4, 1099
Накрывающая гомотопия 3, 887; 4, 1166
- изотопия 2, 519
Накрывающая поверхность 3, 888
Накрытие 3, 888
- аналитическое 1, 281
- A-множества 2, 95
- ориентирующее 4, 70
-, универсальное 5, 500, 681
-, число листов 2, 55
Накрытия вероятность 2, 365
- матрица Александера 1, 232
- модуль Александера 1, 232
Наложение 4, 675
Наложения область 3, 889
- преобразование 3, 807
Направление 3, 889; 4, 1025
- асимптотическое 1, 337; 2, 252
- главное 1, 1015; 2, 252; 3, 97
- Дарбу 2, 16
- изотропное 4, 739
- исключительное 2, 769
- характеристическое 2, 325; 3, 326, 799
Направлений поле 2, 283, 576, 885; 3, 889
Направления сопряженные 2, 252; 5, 87
Направленное множество 3, 890
Направленность 3, 890
- Коши 5, 682
- псевдомногообразия 4, 741
Направляющая кривая 3, 380
- линия 2, 1033
- поверхность 4, 949
Направляющие косинусы 1, 634; 3, 799
Направляющих функционалов метод 3, 890
Напряжений тензор 3, 891
Напряженность вихревой трубки 1, 716
Нарост пространства 3, 892
- пунктиформный 4, 765
Наследственно неразложимый континуум 2, 884, 1068; 3, 892
- неразрешимая теория 5, 282
- несвязное пространство 2, 226; 4, 1096
- нормальное пространство 3, 1065
Наследственный класс 3, 639
- радикал 4, 806
Насыщения эффект 4, 611
Нат 5, 1005
Натуральная плотность 1, 333
- система 1, 1070; 4, 515
Натуральное уравнение кривой 2, 250; 3, 892
Натуральное число 2, 73; 3, 892
Натуральный логарифм 3, 405, 407
Натуральный параметр на кривой 3, 892
Натуральный репер 3, 892
Натуральный ряд 3, 893
- -, базис 1, 372
- фильтр 4, 561
Натягивающий базис 1, 378
«Начала» Евклида 3, 893—895
Начало координат 1, 358; 2, 80
Начальная задача 3, 895
- позиция 4, 386
- точка 2, 284; 3, 895
- фаза 4, 1085
Начальное значение 2, 284
- порядковое число 4, 502
Начально-краевая задача 5, 36
Начальные условия 3, 339, 604, 895
Начальный отрезок вполне упорядоченного множества 1, 763
- символ 1, 1092
Начальных условий носитель 3, 46
Начертательная геометрия 3, 895
Неабелев коцепной комплекс 3, 896
Неабелево числовое поле 3, 896
Неабелевы когомологии 3, 896—898
Неалгоритмический язык программирования 1, 223
Неархимедова геометрия 3, 898
- прямая 3, 989
Неархимедово абсолютное значение 1, 41
- тело 3, 431
Неассоциативные кольца и алгебры 3, 899—903
Неатомическая игра 3, 903
Неатомическая мера 3, 639, 904
Неатомическое пространство 3, 638
Нёбеллинга — Понтрягина теорема о топологических пространствах 4, 822
Нёбеллинга — Понтрягина — Гуревича — Куратовского теорема о размерности 4, 826
Неблуждающая точка 1, 507; 3, 904
Неванлинновская характеристика функции 3, 904; 4, 887
Неванлинны дефект 4, 888
- исключительное значение 2, 675
- теорема о распределении значений 4, 888
- - о функциях ограниченного вида 3, 1159
Неванлинны теоремы 3, 904
- характеристическая функция 2, 100
Неванлинны — Пика проблема 2, 621; 3, 905
Невозможное событие 3, 906

Невозрастающая последовательность 5, 466
- функция 5, 466
Невыпуклый правильный многогранник 4, 553
Невырождающаяся линия 2-го порядка 3, 389
- нераспадающаяся поверхность 2-го порядка 4, 343
Невырожденная абелева функция 1, 22
- квадратичная форма 2, 777
Невырожденная матрица 3, 614, 906
- особая точка 4, 122
- стационарная точка 5, 209
Невырожденное голоморфное отображение 1, 1030
Невырожденное представление 3, 906
- распределение 1, 809
Невырожденный параллелотоп 4, 205
Невычет 3, 906; 5, 153, 217
- биквадратичный 5, 153, 217
- в теории чисел 1, 814
- квадратичный 2, 785; 5, 153, 217
- кубический 3, 143; 5, 217
- степени n 5, 217
Невычислимости степень 3, 1003
Невязка 3, 906
Невязки вектор 4, 420
Невязок минимальных метод 3, 694
Негативная интерпретация Гёделя 4, 357
Негативный перевод 2, 1040
Неголономная сеть 4, 1122
Неголономные координаты 1, 1034
Неголономные системы 3, 907
Недезаргова геометрия 3, 908
- плоскость 3, 908
- система 3, 908
Неделимых метод 3, 908
Недетерминированная машина 3, 628
- - Тьюринга 5, 458
Недетерминированный автомат 1, 48
Недифференцируемая функция 3, 909
Недоопределенная система 3, 909
Недоопределенный линейный дифференциальный оператор 3, 368
Недостижимая точка границы области 3, 1098
Неевклидово пространство 3, 909
- расстояние 4, 283
Неевклидовы геометрии 3, 910—914
Неединственности множество 2, 401
Независимая переменная 5, 713
Независимое множество 1, 552, 884
Независимости показателей теорема 2, 864
- число графа 1, 1120
Независимость алгебраическая 1, 148
Независимость в теории вероятностей 1, 661; 3, 914—917
- линейная 3, 308
Независимость системы аксиом 3, 918
Независимые измеримые разбиения 3, 918
Независимые меры 3, 918
- случайные величины 1, 660
- события 1, 658; 3, 914
Независимых функций система 3, 918
Незамкнутая система 2, 327
Незаузленный узел 3, 738
Неизвестное 5, 539
Неизмеримое множество 3, 919
Неизмеримость абсолютная 3, 667
Неизотропное условие Гёльдера 1, 915
Неисправности функция 3, 858
Нейвирта зацепление 5, 478
Нейвирта узел 3, 920
Нейенхейса тензор 4, 542
Нейля парабола 3, 920; 4, 458
Неймана алгебра 1, 978; 3, 920—922
Неймана задача 1, 771; 3, 83, 203, 922
- - внешняя 4, 528
- - внутренняя 4, 527
Неймана метод доверительных интервалов 3, 922—924
- многочлен 3, 925
- модель в математической экономике 3, 586
- обертывающая алгебра 1, 120
Неймана ряд 3, 924; 5, 652
Неймана структура 3, 925
- теорема о минимаксе 3, 619
- - о полярном разложении 4, 479
- - о самосопряженных алгебрах 3, 920
- - о сжатии 5, 119
Неймана теорема эргодическая 3, 926
Неймана функции 3, 927
Неймана — Моргенштерна решение игры 2, 472; 4, 979
Неймана — Пирсона лемма 3, 928
Нейтральная форма 1, 713
Нейтрального типа уравнение 2, 295; 3, 928
Нейтральное подпространство 4, 718
Неклассическая теория моделей 3, 928—930
Неколебательное уравнение 1, 862
Некоммутативная эргодическая теория 5, 1012
Некомпактности мера 3, 977
Некорректная по Адамару задача 3, 937
Некорректно поставленные задачи 3, 930
Некорректные задачи 3, 930—936
Некорректные задачи теории функций комплексного переменного 3, 937
Некрасова интегральное уравнение 3, 938
Нелинейная краевая задача 3, 938
Нелинейная краевая задача; численные методы решения 3, 938—942
- регрессия 4, 931
Нелинейная связность 3, 942
- система 2, 766
Нелинейное диофантово приближение 2, 162
Нелинейное дифференциальное уравнение 3, 943
Нелинейное интегральное уравнение 3, 944
- - - Вольтерра 1, 754
- интегро-дифференциальное уравнение 2, 613
Нелинейное программирование 3, 945
- уравнение, ветвление решений 1, 676
- - математической физики эволюционное 5, 912
Нелинейное уравнение; численные методы решения 3, 945—950
Нелинейное уравнение с частными производными 3, 950—956
Нелинейности порядок 1, 936
Нелинейные колебания 3, 956—958
Нелинейный оператор 3, 958—961; 4, 19
- - дифференциальный 2, 345; 3, 959
- - интегральный 2, 604; 3, 959
- - - Вольтерра 1, 752
- - интегро - дифференциальный 3, 959
- - ограниченный 3, 959
- -, полугруппа 4, 445
Нелинейный потенциал 3, 961
Нелинейный функционал 3, 962
Нелинейный функциональный анализ 3, 962
Нелогические аксиомы теории типов 5, 352
Нелогичная аксиома 4, 579
Немыцкого оператор 3, 959
- теорема о полной неустойчивости 4, 417
Неналегания свойство 1, 789
Необрывающийся марковский процесс 3, 524
Необходимая достаточная статистика 2, 376; 3, 683, 962
Необходимое условие Вейерштрасса для экстремума 1, 619
Необходимые и достаточные условия 3, 963
Неограниченная делимость 3, 656
- область 3, 1098
- проблема Бёрнсайда 1, 416
Неограниченно продолжаемое решение 1, 83
Неограниченное случайное блуждание 5, 12
Неограниченный оператор 3, 376, 963
Неоднородная линейная форма, Минковского гипотеза 1, 949
- проблема геометрии чисел 1, 948
- - Минковского 1, 949
- цепь Маркова 3, 518
Неоднородное диофантово приближение 2, 162
- дифференциальное уравнение 3, 339
- - - линейное с периодическими коэффициентами 3, 314
- интегральное уравнение 2, 590
- преобразование Галилея 1, 844
- уравнение Бесселя 1, 461
- - диффузии 2, 359
Неоднородные тангенциальные координаты 5, 321
Неоднородный арифметический минимум лучевой функции 1, 949
Неоида 1, 329
Неокольцо 2, 968
Неопределенная задача 2, 677
- квадратичная форма 2, 777
- проблема моментов 3, 794
- система уравнений 3, 357, 964
Неопределенное уравнение 2, 168; 3, 963
Неопределенностей раскрытие 3, 964
Неопределенности множество 3, 649, 651
Неопределенности принцип 3, 965
- точка 4, 117, 569
Неопределенность когомологической операции 2, 922
- соответствия 5, 78
Неопределенный интеграл 2, 564, 579; 3, 965
- - Бёркиля 1, 416
Неопределенных коэффициентов метод 3, 966
Неопределенных коэффициентов метод построения численных алгоритмов 3, 967
Неориентированный бордизм 1, 533
- граф 1, 1105
Неориентируемое многообразие 3, 968
Неориентируемое сферическое отображение 5, 297
Неориентируемый кобордизм 2, 891
- многогранник 3, 711
Неособая билинейная форма 1, 483
Неособая граничная точка 3, 968
- точка аналитического пространства 1, 285
- экстремаль 3, 232
Неособенная гомология 1, 1060
- матрица 3, 906
- экстремаль 4, 938
Неособое действительное алгебраическое многообразие 2, 70
Неосцилляции промежуток 3, 969
Неотделимость слоя по инвариантам 1, 821
Неотрицательная форма 4, 462
- эрмитова матрица 5, 1019
Неотрицательно определенное ядро 2, 101
Неотрицательное самосопряженное линейное преобразование 4, 1074
Непараметрические методы статистики 3, 969—975
Непараметрический критерий 3, 975
Непаскалева геометрия 3, 975
Непера аналогии 5, 292
Непериодическая задача вариационного исчисления в целом 1, 592
- цепь Маркова 3, 519; 5, 239
Неперово число 2, 397; 3, 975
Неподвижная особая точка 3, 975
Неподвижная точка 3, 975—978; 4, 784; 5, 385
- -, Брауэра теорема 1, 546, 1049
Неподвижной точки свойство 4, 976
Неподвижный элемент 4, 153
Непозиционная система счисления 5, 315
Неполная бета-функция 1, 489; 3, 979
Неполная гамма-функция 1, 866; 3, 979
- двоякокруговая область 2, 49
Неполное эрмитово ядро 5, 1023
Неполной обратной связи канал 2, 705
- релаксации метод 4, 966
Неполнота формализованной арифметики 1, 112
Неполный латинский квадрат 3, 208
- эллиптический интеграл 5, 990
Неположительная квадратичная форма 4, 462
Неположительно определенное ядро 2, 101
Непополнимость 1, 112
Неправильная дробь 2, 389
- интерпретация 4, 551
Неправильности коэффициенты 3, 380
Непредикативное определение 3, 981; 5, 352
Непредикативность теории 5, 641
Непрерывная алгебра Неймана 3, 921
- геометрия 4, 104
Непрерывная группа 3, 982
Непрерывная дробь 3, 982; 5, 812
- мера 3, 639
- проективная прямая 4, 671
Непрерывная серия представлений 3, 982
- сумма элементов множества 1, 376
Непрерывная функция 3, 983—985
- -, Коши теорема о промежуточных значениях 3, 62
Непрерывно дифференцируемых функций пространство 1, 387
Непрерывное линейно упорядоченное множество 3, 323
- многозначное отображение 3, 720
Непрерывное множество 3, 986
Непрерывное отображение 3, 986—988; 4, 558
- -, спектральная последовательность 3, 235
- - топологических пространств 5, 390
Ненрерывное представление 1, 446; 3, 988
- пространство 3, 638
Непрерывное разбиение топологического пространства 3, 988
Непрерывное распределение вероятностей 3, 989; 5, 9
Непрерывное сечение 3, 989
- слева кольцо 4, 940
- ядро 2, 605

δ-непрерывное отображение 1, 501
Непрерывности аксиома 3, 989; 5, 878
Непрерывности модуль 3, 990; 4, 616
- принцип Брауэра 2, 642
- - для голоморфных функций 3, 990
Непрерывности теорема для голоморфных функций 3, 990
- уравнение 3, 481
Непрерывность 3, 991
- аппроксимативная 1, 303
-, Дедекинда теорема 2, 63
- действительных чисел 2, 74
- метрическая 3, 994
- по Гёльдеру 1, 915
- равномерная 4, 786
- равностепенная 4, 797, 800
- стохастическая 5, 239
- суммы степенного ряда, Абеля теорема 1, 29
- функции абсолютная 1, 34
Непрерывные аналоги итерационных методов 3, 991—993
Непрерывный каскад 2, 757
Непрерывный оператор 3, 993; 4, 19
Непрерывный поток 3, 993
- спектр 3, 373; 5, 98
Непрерывный функтор 3, 994
Непрерывный функционал 3, 994
Непрерывных функций пространство 1, 386, 387; 3, 994
Неприводимая алгебра Ли 1, 1025
n-арная операция 2, 804
- аффинная схема 1, 358
- компонента 3, 997
- - аналитического множества 1, 280
- корневая система 3, 16
- кривая 4, 309
Неприводимая матричная группа 3, 995
- полугруппа 5, 373
Неприводимое алгебраическое уравнение 1, 192
- аналитическое множество 1, 280
Неприводимое аналитическое пространство 3, 995
- аффинное алгебраическое множество 1, 360
- глобально симметрическое риманово пространство 1, 1025
Неприводимое многообразие 3, 996
Неприводимое отображение 3, 996; 5, 390
- подкольцо 5, 804
- покрытие 1, 560
Неприводимое представление 1, 448; 3, 996; 4, 546
- примарное разложение 4, 634
- пространство 4, 1097
- - риманово 4, 633
Неприводимое топологическое пространство 3, 997
Неприводимости точка аналитического множества 1, 281
Неприводимый континуум 2, 1068; 3, 997
Неприводимый многочлен 3, 754, 997
- -, Гильберта теорема 1, 971
Неприводимый модуль 3, 998
Непримитивный характер 2, 193
Непротиворечивая формальная система 3, 998
Непротиворечивое множество 1, 910
Непротиворечивость 3, 998
- относительная 1, 110
Непрямые численные методы вариационного исчисления 1, 587
Неравенство 3, 999
Неравномерная оценка 5, 806
Неравномерное кодирование 2, 935
Неразветвленное расширение 2, 203; 3, 114; 5, 668
Неразветвленный идеал 3, 1001
- квазихарактер 2, 826
Неразветвленный характер 3, 1001
- элемент 4, 414; 5, 971
Неразличимость стохастическая 5, 240
Неразложимая группа Конструера 2, 946
- матрица 4, 276
- - Картана 2, 731
- цепь Маркова 3, 519, 521
Неразложимое представление 3, 1001; 4, 592
- пространство 2, 884
Неразложимое распределение 3, 1002
Неразложимость метрическая 3, 667
Неразложимый континуум 2, 1068; 3, 1002; 5, 892
- элемент кольца 1, 351
Неразрешимая элементарная теория 1, 215
Неразрешимое ассоциативное исчисление 1, 339
- предложение 3, 1004
Неразрешимости степень 3, 1002
Неразрешимость 3, 1003
Неразрывности уравнение 3, 1005
Нерандомизированный статистический критерий 5, 182
Нераспадающаяся линия 2-го порядка 3, 387
Нерастягивающее отображение 4, 1025
Нерастягивающий оператор 3, 978
Нерв 3, 1005; 4, 393, 687, 1159
Нерегулярная цепь Маркова 4, 260
Нёрлунда метод суммирования 1, 755
Нерона модель 3, 1005
Нерона — Севери группа 1, 180; 2, 132; 3, 1005; 4, 283
- - теорема об абелевых группах 3, 1005
Несамоприменимый алгоритм 1, 210
Несамосопряженный оператор 3, 1006—1010; 5, 112
Несвязное пространство 4, 1096
Несглаживаемое многообразие 3, 1010
Несепарабельная степень 4, 1114
Несепарабельное расширение 4, 1113
Несепарабельный алгебраический элемент 4, 1114
Несжимаемая поверхность 5, 433
Несмещанный идеал 3, 69, 1011
Несмещенная оценка 3, 1011—1015; 4, 174, 184; 5, 408
Несмещенный критерий 3, 1015
Несобственная аффинная сфера 1, 358
- гиперплоскость 4, 675
- плоскость 4, 664
- подгруппа 4, 369
- прямая 4, 664
- связка окружностей 4, 1089
- - плоскостей 4, 1089
- седловая точка 4, 1102
- точка 2, 484; 4, 664
Несобственное вращение 1, 764
- движение 2, 20
- нормирование поля 3, 1079
- ортогональное преобразование 4, 87
- подобие 4, 372
Несобственное распределение 1, 809; 3, 1016
Несобственные элементы 1, 442, 456
Несобственный интеграл 3, 1016—1019
- - абсолютно сходящийся 1, 39
- -, зависящий от параметров 2, 429
- -, Коши критерий 1, 39
- - нормально сходящийся 3, 1052
- пучок 4, 771, 772
Несовершенное поле 5, 69
Несовместимая нормальная система 3, 1019
Несовместимость 3, 1019
Несовместная нормальная система 3, 1019
- система 3, 998
- - линейных уравнений 3, 357
Несоизмеримые величины 3, 1019; 5, 73
Несократимое представление 1, 91
- слово 4, 1082
Несопряженности промежуток 3, 969
Несплющенный конус 2, 1075
Нестабильные теории 5, 165
Нестандартная модель 3, 1020
Нестандартный анализ 3, 1019
Нестационарная связь 1, 1033
Нестратегическая игра 2, 470
Нестрогий максимум 3, 494
- минимум 3, 494
Несущественное отображение 3, 1020
- состояние цепи Маркова 3, 518
Несчетное множество 3, 1020
Нетерминальный символ 4, 1092
Нётер проблема 1, 972; 3, 1020
Нётер теорема 3, 1021—1024
- - в механике 3, 181
- - о гамильтоновой системе 1, 859
- ток 3, 1023
- формула 3, 1022
Нётера неравенство 4, 113
- теорема для сингулярных интегральных уравнений 4, 1174
- - о нётеровых операторах 3, 1025
- - - проективной плоскости 3, 95
- - об интегральных уравнениях 3, 1027
- формула 4, 1001
- - для рода алгебраической поверхности 1, 150
Нётера — Энрикеса теорема 3, 1024
Нётера — Энрикеса — Петри теорема 3, 1024
Нётеров модуль 3, 1025
Нётеров оператор 3, 1025
Нётерова аффинная схема 1, 358
Нётерова группа 3, 1025
Нётерова индукция 3, 1026
- краевая задача 3, 76
- решетка 3, 840
Нётерова схема 3, 1026
Нётерово интегральное уравнение 3, 1026
Нётерово кольцо 3, 1027
Нётерово пространство 3, 1028
- уравнение 3, 1026
Нётеровость задачи 2, 306
Нетривиальный нуль дзета-функции 2, 113; 4, 878
- - *L*-функции Дирихле 2, 189
Неубывающая последовательность 1, 740
- функция 1, 749
Неудерживающие связи 1, 1034
Неукорачивающий гомоморфизм 5, 644
Неустойчивая сепаратриса 4, 1101
Неустойчивое многообразие седла 4, 1101
Неустойчивость абсолютная 5, 565
- полная 4, 417
y-неустойчивость 5, 573
Неустранимая погрешность 4, 357
Нефокальное многообразие 5, 612
Неформальный аксиоматический метод 3, 1028—1030
Нефредгольмов оператор, индекс 2, 554
Нефредгольмово интегральное уравнение 3, 1030
Нехарактеристическая поверхность 3, 47
Нехари — Покорного условия однолистности 3, 1169
Нехопфова группа 3, 1030
Нецентральная линия 2-го порядка 3, 388
- поверхность 2-го порядка 4, 344
Нецентральное «хи-квадрат» распределение 3, 1031
-Хотелинга T^2-распределение 5, 796
Нечеткий автомат 1, 49
Нечетная подстановка 4, 381
Нечетная функция 3, 1031
Нечетное число 3, 1031
Нечетный овал 2, 70
- характер Дирихле 2, 192
Неэффективная статистика 3, 1031
Неявная формула Штермера 2, 293
Неявная функция 3, 1032—1034
Неявная функция в алгебраической геометрии 3, 1035
Неявный метод 2, 292
Неявный оператор 3, 1036
Нигде не плотное множество 3, 1036
- не связное пространство 4, 1096
Нижнее десятичное приближение 2, 98
- производное число левое 4, 690
- - - правое 4, 690
Нижней релаксации метод 4, 966
Нижний аппроксимативный предел 1, 304
- доверительный предел 2, 615; 3, 923
- интеграл Бёркиля 1, 415
- - Дарбу 2, 17
- конус 5, 834
- оператор Привалова 4, 629
- особый показатель 4, 132
Нижний предел 3, 1036; 4, 558
- - последовательности 1, 669, 670
- - спектра 4, 686
- - функции 1, 670
- радикал 4, 806
- - Бэра 4, 807
- топологический предел 4, 562
- центральный показатель 5, 809
- - ряд 4, 367; 5, 811
Нижняя граница множества 1, 673
Нижняя грань множества 1, 672; 3, 1036
Нижняя грань семейства топологий 3, 1036
- - функции 5, 715
- квартиль 2, 837
- полуплоскость 4, 462
- субгармоническая функция 1, 671
- супергармоническая функция 1, 671
Никольского пространство 3, 1036—1039
Никомеда конхоида 3, 1039
Нильалгебра 3, 901, 1039
- Ли 3, 269
Нильгруппа 3, 1040
Нильмногообразие 3, 1040
Нильполугруппа 3, 1040
Нильпотент 3, 1043
Нильпотентная алгебра 3, 1041
- - Ли 3, 269
Нильпотентная группа 3, 1042
- - Ли 3, 271
- - мультипликаторная 3, 839
- компонента разложения Жордана 2, 421
- матрица 3, 617
- орбита, Шмида теорема 4, 155
Нильпотентная полугруппа 3, 1042
Нильпотентности класс 5, 811
- ступень 5, 811
Нильпотентность альтернативного кольца 1, 237
Нильпотентный автомат 1, 67
Нильпотентный идеал 3, 1043
- радикал 4, 808
Нильпотентный элемент 2, 423; 3, 1043
- эндоморфизм 2, 421
Нильпоток 3, 1044
Нильрадикал 3, 270, 1043; 4, 808
- алгебры 3, 1039
- алгебры Мальцева 3, 509
- верхний 4, 807
Нильсена преобразование 4, 1082
- теорема о свободных группах 4, 1082

Нильсена — Шрайера теорема о свободных группах 4, 1082
Нить 1, 33; 3, 1044; 5, 373
- вихревая 1, 715
- максимальная 4, 686
- минимальная 4, 686
Новикова теорема об отделимости множеств 4, 141
Номер 1, 314
- гёделев 1, 314; 4, 960
Номерное множество 3, 1087
Номинальный признак 3, 733
Номограмма 3, 1044
- составная 3, 1046
- элементарная 3, 1045
Номография 3, 1044—1047
Норма 1, 979; 3, 1047—1049
- p-адическая 1, 41, 100
- бемольная 1, 409
- весовая 1, 674
- Гильберта — Шмидта 1, 977
- группы 3, 1049
- диезная 2, 133
- Дирихле 5, 1003
- кватерниона 2, 838
- Люксембурга 3, 466
-, монотонная непрерывность 2, 1076
- на теле 1, 41
- оператора 3, 1162
- операторная 3, 372, 1048
- Орлича 4, 75
-, полумонотонность 2, 1075
- следовая 5, 1031
- согласованная 5, 314
- строго выпуклая 3, 868
- элемента конечного расширения поля 3, 1076
- энергетическая 4, 833; 5, 1003
- ядерная 5, 1031
Нормализатор 3, 1049
Нормализаторное условие 3, 1049
Нормализации метод 4, 667
Нормализации принцип 1, 215; 3, 1049
- - в теории алгоритмов 3, 1073
- теоремы 2, 1041; 4, 1166
Нормализованная матрица Адамара 1, 86
- поверхность 4, 973
Нормализованное число 2, 443
Нормализованный латинский прямоугольник 3, 209
- функтор 1, 20
Нормаль 2, 249, 251; 3, 1049; 4, 667
- аффинная 1, 355
- главная 1, 1013; 2, 249
- внешняя 1, 734
- проективная 4, 668
Нормальная аксонометрия 1, 113
- аффинная схема 1, 358
- близость 1, 501
- геодезическая область 1, 927
Нормальная динамическая система 3, 1050
- жорданова форма матрицы 3, 352
- картографическая проекция 2, 753
- конгруэнция 2, 802, 1015
- корреляция 2, 1002
Нормальная кривизна 2, 251; 3, 97, 1050
- линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений 3, 340
Нормальная матрица 3, 616, 1050
- область Фроммера 4, 1107
Нормальная плоскость 3, 1050
Нормальная подгруппа 3, 1051, 1073
- подквазигруппа 2, 802
Нормальная подполугруппа полугруппы 3, 1051
- полугруппа 4, 1127
- проективная связность 4, 672
Нормальная производная 3, 1051
- - потенциала простого слоя 4, 525
- -, прямое значение 4, 704
Нормальная разрешимость 3, 1051
- система подгрупп 4, 368
- - Поста 4, 513, 515
Нормальная схема 3, 1051
Нормальная сходимость 3, 1051
Нормальная форма 3, 1052—1061
- - булевой функции 1, 563
- - дизъюнктивная 1, 126; 2, 135
- - импликативная 2, 524
- - конъюнктивная 1, 126; 2, 1102
- - k-кратной рекурсии 3, 722
- - Лиувилля 3, 392
- - оператора 5, 632
- - совершенная 5, 67
- - сокращенная 5, 73
- - эллиптического интеграла 5, 989
- формула 2, 1047
Нормальная фундаментальная система решений 3, 472, 1061
- функция 4, 568
- - в области 3, 1069
Нормально гиперболического типа уравнение 2, 861
- разрешимое уравнение 3, 1062
Нормально разрешимый оператор 3, 1026, 1061
Нормально расположенное подпространство 3, 1062
- сходящийся несобственный интеграл 3, 1052
Нормального притяжения зона 3, 1062
- - область 4, 641
- типа целая функция 5, 798
Нормальное аналитическое пространство 3, 1063
Нормальное p-дополнение 3, 1064
- исчисление 4, 515
- - Поста 4, 515
- кольцо 3, 1051
- отображение 5, 297
- представление 1, 449
Нормальное пространство 3, 1065; 4, 140; 5, 391
- - с мерой 3, 1050
Нормальное разбиение пространства 1, 755
Нормальное распределение 3, 1065—1067
Нормальное расслоение 1, 646; 2, 755; 3, 1067
- - сферическое 4, 748
- расширение 4, 909
Нормальное расширение поля 1, 850; 3, 1068
- решение 3, 935
Нормальное семейство аналитических функций 3, 1068—1070
Нормальное сечение 3, 97, 1070, 1071
- уравнение 3, 879
Нормальное уравнение прямой 3, 1070
Нормальное число 3, 1070
$\varkappa$-нормальное пространство 3, 1065
π-нормальное пространство 3, 1065
Нормальной кривизны эллипс 3, 1071
Нормальности принцип для голоморфных функций 3, 820
Нормальность звездная 3, 656
Нормальные координаты 4, 1006
Нормальный абелев дифференциал 1, 14
- абелев интеграл 1, 16
Нормальный алгорифм 3, 1072
- -, композиции теорема 1, 226
- - Маркова 1, 820
- -, Маркова тезис 1, 821
- -, нормальная композиция 1, 225
- -, нормальное объединение 1, 225
- -, - повторение 1, 225
- -, - разветвление 1, 225
- -, объединения теорема 1, 226
- -, разветвления теорема 1, 226
- - универсальный 5, 500
- -, эквивалентность относительно алфавита 1, 230
- вид квадратичной формы 2, 778
- гиперэллиптический интеграл 1, 1011
Нормальный делитель 3, 1073; 5, 91
- - допустимый 4, 22
Нормальный комплекс полугруппы 3, 1073
- контур 5, 46
- конус 2, 1075; 4, 434
Нормальный мономорфизм 3, 1074
Нормальный нульмерный цикл 3, 1074
Нормальный оператор 3, 375, 1074
Нормальный пучок 3, 1075
- ряд 1, 851
Нормальный ряд группы 3, 1076
- - подгрупп 4, 367
- случайный элемент 5, 33
- факторобъект 5, 596
- элемент алгебры 4, 1148
- эллиптический интеграл 5, 990, 991
Нормальный эпиморфизм 3, 1076
Нормальных меток критерий 3, 972
Норменная подгруппа 3, 1076
Норменное отображение 3, 1076
Норменный вычет 3, 1077
Нормирование вещественное 1, 689
- дискретное 2, 204
- мультипликативное 1, 41
Нормирование поля 3, 1078—1081
Нормирования кольцо 5, 815
Нормированная алгебра 3, 1081
- - булева 1, 552; 5, 20
- - симметричная 4, 1149
- решетка 4, 471
- - ограниченных элементов 1, 384
Нормированная система 3, 1081
Нормированное кольцо 3, 1081
Нормированное поле 3, 1081
Нормированное пространство 3, 1047, 1081; 5, 705
- уравнение прямой 3, 1070
Нормированности условие 4, 93
Нормированный абелев дифференциал 1, 14
Нормировка унимодулярная 2, 385
Нормировки условия для конформных отображений 2, 1094
Нормируемое пространство 3, 1047
- - топологическое векторное 5, 379
Нормирующий множитель 3, 1070, 1081
Нормы топология 4, 716
Носителей семейство 2, 907
Носитель алгебраической системы 1, 155
- граничного элемента 1, 1103
- дивизора 2, 130
- компактный 2, 681
- конструктивного метрического пространства 2, 1051
Носитель меры 3, 644, 1081
Носитель модуля 3, 1081
- начальных условий 3, 46, 895
- обобщенной функции 3, 1105, 1118
- пучка 4, 771
- симплекса 4, 1179
- сингулярный 3, 1118; 5, 672
Носитель функции 3, 1082
Нулевая матрица 3, 613
- схема серий 4, 1118
Нулевое множество 3, 639
- сечение 4, 766, 1124
Нулевой абсолютной гармонической меры множество 1, 873
Нулевой вектор 1, 632
Нулевой гармонической меры множество 1, 873
Нулевой класс Бэра 1, 567
- меридиан 5, 291
Нулевой объект категории 3, 1082
- оператор 4, 20
- - линейный 3, 369
Нуль 2, 73, 76; 3, 1082
- абелевой группы 3, 1082
- алгебраической системы 3, 1082
- дзета-функции 2, 113
Нуль — единица закон 3, 1083
Нуль категории 3, 1082
- кольца 3, 1082
- мероморфной функции 3, 649
- полугруппы 3, 1082
-, порядок 4, 504
- решетки 3, 1082
- функции 3, 1082
- L-функции Дирихле 2, 189
- целой функции 5, 798
- частично упорядоченного множества 5, 834
Нуль-компонента фиттингова 2, 736
Нульмерное отображение 3, 1084
Нульмерное пространство 3, 1084
Нуль-отношение 1, 488; 4, 151
Нуль-последовательность 2, 76
Нуль-ряд, Меньшова пример 3, 636
«Нуль-свойство» 3, 458
Нуль-система 5, 1085
Нумерал 1, 224
Нумераций теория 3, 1085
Нумерация 3, 1085—1088; 5, 314
- главная 5, 418
-, сводимость 5, 418
Нумерически выразимый предикат 3, 1088
- представимая функция 3, 1088
Нумерова метод 5, 903
Нумерованная алгебраическая система 3, 1088
Нумерованная модель 2, 1059; 3, 1088
Нумерованное множество 3, 1086
Нуссельта число 3, 1089
Ньютона агвинея 1, 297
Ньютона бином 2, 974; 3, 1089
Ньютона диаграмма 3, 1090
- закон всемирного тяготения 1, 1078
Ньютона законы механики 3, 1091
Ньютона интерполяционная формула 3, 1091
- интерполяционный ряд 2, 634
- классификация кривых 3-го порядка 4, 311
Ньютона метод 2, 624; 3, 1092
- многоугольник 3, 1090
- ряд 2, 1028
- теорема механики 1, 1079
- - о кривых 3-го порядка 4, 312
- формулы для симметрических многочленов 4, 1145
Ньютона число 3, 1093
Ньютона — Канторовича метод 3, 947, 1093
Ньютона — Котеса квадратурная формула 2, 794; 3, 1093
Ньютона — Лейбница формула 2, 564, 583; 3, 1094
Ньютонов потенциал 3, 1094
- - двойного слоя 4, 524
- - объемный 4, 524
- - простого слоя 4, 524
Ньютонова емкость 2, 404
Нэша решение 1, 312; 4, 979
Нэша теорема в теории игр 1, 433; 3, 1095
- - о римановых пространствах 2, 863
Нэша теоремы в дифференциальной геометрии 3, 1096

О

Обвертывающий ряд 3, 1097
Обертка поверхности 4, 166
Обертывающая алгебра Неймана 1, 120
Обертывающее полярное разложение 4, 479, 480
Обеспечение математическое 3, 595
- программное 3, 595
Обзорный поиск 3, 757
Обильное аналитическое расслоение 4, 433
Обильное векторное расслоение 3, 1097
Обильный пучок 3, 1097
Область 3, 1098; 4, 1096
- абсолютного будущего 4, 149
- - прошлого 4, 149
- - удаления 4, 149

- бесконечносвязная 1, 455; 3, 748
- бицилиндрическая 1, 500
- Вейля 1, 271, 629
- влияния 1, 721; 3, 48
- - устойчивого корня 2, 340
- выпуклая 1, 788
- Гартогса 1, 893
- геодезическая 1, 927
- - нормальная 1, 927
- геодезически выпуклая 4, 1004
- гиперболичности 5, 45
- главных идеалов 1, 1019
- голоморфно выпуклая 1, 272, 1031
- голоморфности 1, 272, 1030; 4, 414
-, граничный элемент 1, 1102, 1103
- двоякокруговая 2, 49
- двусвязная 3, 748
- Дирихле 1, 755; 2, 196
- жорданова 2, 240; 3, 1099
- зависимости 3, 48
- звездообразная (звездная) 2, 449
- Зигеля 2, 455
- значений оператора 4, 18
- - соответствия 5, 78

Область значений функции 3, 1099
- импримитивности 2, 524
-, исчерпание 2, 683
- Каратеодори 2, 720
- кольцевая 1, 1023; 2, 967
- конечносвязная 3, 748
- концевая 1, 1023
- кратно круговая 3, 88
- кривизны 3, 1072
- критическая 3, 112
- круговая 1, 1023; 3, 88
- многолистная 3, 723
- многосвязная 3, 748
- наложения 3, 889
- нормального притяжения 4, 641
-, оболочка голоморфности 1, 1032
- однородная ограниченная 3, 1172
- односвязная 3, 1182
- определения оператора 4, 18
- - отображения 4, 152
- - решения задачи Коши 3, 48
- - соответствия 5, 78

Область определения функции 3, 1099
- плотностная 1, 1024
- подобная 4, 376
- поликруговая 4, 405
- полицилиндрическая 1, 500
- полиэдрическая 2, 683
-, полная кривизна 4, 416
- полосообразная 1, 1023
- полукруговая 1, 893
- предметная 4, 580
- приведения Минковского 2, 788
- - фундаментальная 2, 788
- применения алгоритма 1, 227
- притяжения 4, 640
- - локального экстремума 3, 356
- - тривиального решения 1, 64
- пропускной способности 2, 703
- простые концы 1, 1102, 1103
- псевдовыпуклая 1, 272, 1031
- - по Леви 1, 1031
- регулярная 4, 933
- Рейнхарта 3, 88
- римановa 3, 889; 4, 1014
- Рунге 4, 1055
- k-связная 3, 748
- сеточная 4, 218
-, сечение 1, 1102
- симметрическая 3, 1172; 4, 1142
- смешанная 5, 45
- Смирнова 5, 53
- строго псевдовыпуклая 1, 1031
- существования аналитической функции 1, 267
- - *вейерштрасова* 4, 413
- - естественная 4, 414
- - римановa 4, 415
- сходимости 5, 220
- типа C 5, 53
- - S 5, 53
- транзитивности 5, 411
- - группы 4, 382
-, транзитивность 5, 374
- трубчатая 5, 449
- устойчивости 5, 559
- фундаментальная 5, 681

Область целостности 2, 961; 3, 1099
- - целозамкнутая 5, 800
- частичного притяжения 5, 836
- эллиптичности 5, 45

Обложение 3, 1099
Обмотка 4, 968
-, проводимость 4, 969
- тора иррациональная 2, 338
- узла 5, 485
Обновляющий случайный процесс 2, 692; 5, 28
Обобщения правило 4, 579

Обобщенная аналитическая функция 3, 1099—1103
- винтовая линия 1, 706
- гипергеометрическая функция 1, 1003
- гипотеза Пуанкаре о многообразиях 4, 744; 5, 288
- - Римана 4, 995
- грамматика 1, 1092
- груда 1, 1136

Обобщенная группа 3, 1103
- - кватернионов 2, 840
- дзета-функция 2, 117
- задача Коши 3, 607
- - Римана — Гильберта 3, 81, 1102
- континуум-гипотеза 1, 235; 2, 1053, 1068
- матрица Адамара 1, 86
- мера 2, 444
- минимальная поверхность 3, 685
- поверхность переноса 4, 247
- последовательность 3, 890; 5, 307
- - сходящаяся 5, 307
- постановка краевой задачи 3, 607
- *проблема делителей* 2, 86
- - собственных значений 4, 421
- - типа римановой поверхности 4, 1030

Обобщенная производная 3, 1103
- - Пеано 4, 230, 231
- - симметрическая 1, 574
- - слабая 3, 1107
- - Соболева 5, 55
- резольвента 4, 454
- собственная функция 2, 805
- спектральная функция 5, 119
- субгармоническая функция 1, 671
- сумма ряда 5, 308
- *супергармоническая функция* 1, 671
- теорема Бохнера 1, 882
- теория гомологии 1, 1046
- - гомологий 3, 1123
- формула Коши 2, 316
- - Родрига для ортогональных многочленов 4, 94
- - суммирования Пуассона 1, 883

Обобщенная функция 3, 1104—1110
- - Грина 1, 1128; 4, 531
- - Жуковского 2, 426
- -, свертка 4, 1076; 5, 730
- -, Фурье преобразование 5, 729
- частная производная 5, 55

Обобщенно нильпотентная группа 3, 1110
- однорядное кольцо 3, 1182

Обобщенно разрешимая группа 3, 1111
- фредгольмов оператор 3, 1027
Обобщенно-выпуклая игра 1, 787
Обобщенного градиента метод 3, 603

Обобщенного сдвига операторы 3, 1111—1116
- сжатия принцип 3, 976
Обобщенное гипергеометрическое уравнение 4, 992
- индуктивное определение 2, 565
- интегральное уравнение Абеля 1, 26
- канторово многообразие 2, 717
- многообразие 1, 1058
- неравенство Гёльдера 1, 914
- - Харди 5, 773
- однородное пространство 1, 934
- представление Бореля 5, 160
- преобразование Лагерра 3, 169
- - Стилтьеса 5, 227
- - Фурье 3, 1115
- равенство Парсеваля 4, 223
- распределение арксинуса 1, 326
- - Пуассона 4, 758

Обобщенное решение 3, 333, 1116
- - задачи Дирихле 1, 671
- - - - в смысле Перрона — Винера 4, 530
- - краевой задачи 3, 607
- - смешанной задачи 5, 42
- риманово пространство 4, 1022
- случайное поле 5, 17
- собственное значение 2, 805
- субпроективное пространство 5, 267
- уравнение Вольтерра 1, 754
- условие Голубева — Привалова 1, 1034
- финслерово пространство 5, 624

Обобщенной лучистости свойство 2, 446

Обобщенной функции носитель 3, 1118

Обобщенной функции производная 3, 1118
Обобщенные близнецы 1, 500
- координаты 1, 1034
- - полярные 4, 481
- - сферические 5, 293
- - цилиндрические 5, 820
- многочлены Лагерра 3, 168

Обобщенные почти периодические функции 3, 1118—1120

Обобщенные теории когомологий 3, 1120—1125
- уравнения Фридмана — Келлера 5, 451
- условия Коши — Римана 5, 771
- цилиндрические координаты 5, 820

Обобщенный автомат 1, 68
- базис 1, 374
- гауссовский процесс 1, 906
- гипергеометрический ряд 1, 1003
- инвариант Хопфа 5, 792
- класс Понтрягина 4, 486
- метод Эйткена 4, 252
- нильрадикал 4, 807
- полицилиндр 4, 405
- принцип аргумента 1, 313
- производящий оператор 4, 692
- ряд Лорана 1, 679
- - Фурье 3, 1115
- случайный процесс 5, 17
- - - стационарный 5, 213
- собственный вектор 5, 130
- характер Чжэня 5, 866
- четырехугольник 5, 831
- якобиан 5, 1047

Обобщенных сечений пространство 3, 365

Обобщенных функций произведение 3, 1125

Обобщенных функций пространство 3, 1126

Обогащение модели 5, 164
σ-обогащение модели 2, 1059

Оболочек теория 3, 1127—1129
Оболочка аффинная 1, 355
- выпуклая 1, 788
- голоморфности 1, 273, 1032
- инъективная 2, 664
- линейная 3, 308
- сдвиговая 4, 1100

Образ аналитический 1, 276
- векторного расслоения 1, 646
- гомоморфизма 2, 961
- линейного оператора 3, 370
- множества 4, 153

Образ морфизма категории 3, 1129
- подмножества 5, 714
- соответствия 5, 78
- сферический 5, 296
- формульный 4, 1105
- элемента 5, 78, 714
- эллиптический 1, 622

Образования правило 1, 111
Образующая By 5, 762
- инфинитезимальная 3, 1171
- квадрики 2, 797
- конуса 2, 1073

Образующая линия 2, 1033
Образующая параллелотопа 4, 205
Образующая поверхность 4, 985
Образующая прямолинейная 3, 380
- свободная 4, 1083

Образующий объект категории 3, 1130
Обратимый автомат 1, 50
- идеал 2, 387

Обратимый модуль 3, 1130

Обратимый пучок 3, 1130
- узел 5, 488

Обратимый элемент полугруппы 3, 1131
Обратная задача Стефана 5, 224
- - теории Галуа 1, 849
- - Штурма — Лиувилля 5, 911
Обратная корневая система 3, 16

Обратная матрица 3, 614, 1132
- прогонка 2, 293
- пропорциональность 5, 217
- связь 1, 63, 69
- система 4, 686

Обратная теорема 3, 1132
- - в теории приближения 4, 612, 625

Обратная функция 3, 1132
- -, производная 2, 272

Обратно параболическое уравнение 3, 1133
Обратное бинарное отношение 1, 488
- линейное преобразование 3, 351

Обратное отображение 3, 1133; 4, 153
- преобразование Фурье 5, 728
- уравнение Колмогорова 2, 361, 958
- число 2, 73

Обратной матрицы метод 4, 1153
- связи канал 2, 705
- функции метод 3, 815

Обратные гиперболические функции 3, 1134
- задачи теории потенциала 4, 520

Обратные тригонометрические функции 3, 1135
- элементы группы 1, 1138

Обратный дифференциал 2, 241
- оператор 3, 1133
- - линейный 3, 370
- предел 4, 683
- спектр 4, 686; 5, 100
- ход прогонки 4, 88, 89, 642

Обращение матрицы 3, 1136—1139

Обращение ряда 3, 1139; 5, 219

Обращение эллиптического интеграла 3, 1139
Обращения формула 2, 589
- - преобразования Лапласа 3, 197
- - сингулярного интеграла Гильберта 1, 969
- - Фурье 1, 883

Обращенный логарифм 1, 292
Обрыва момент 3, 526

Обрыва цепей условие 3, 1140
Обрывающийся марковский процесс 3, 526
Обусловленности число 4, 419, 420, 833
Обучающая последовательность 4, 872
Обучения задача без учителя 4, 872
- - с учителем 4, 872
Обход графа 1, 1112

Общая алгебра 3, 1140
- - Ли 3, 244
- валентность 5, 326
- группа Лоренца 3, 453
- декартова система координат 2, 80
- комбинаторная схема 2, 978
- мера 5, 73
- позиционная игра 2, 471
- синусоида 4, 1193

- смешанная задача Бицадзе 5, 46
- теория относительности 4, 145
Общая топология 3, 1141—1143
Общая точка 3, 1143
Общего положения точка 3, 1144; 4, 67
- типа алгебраическая поверхность 4, 113
- - П-разложение 4, 515, 516
Общее кратное 3, 89
Общее положение 3, 1144—1146; 4, 412
Общее решение 2, 286; 3, 339, 1146
- - разностного уравнения 4, 839
- - системы линейных уравнений 3, 358
- уравнение Бесселя 1, 462
- - динамики 1, 597
- - Риккати 4, 986
- хаусдорфово преобразование 5, 778
Общезначимая формула 3, 415, 418, 765, 1147; 4, 695, 700; 5, 618
Общезначимость 3, 1147; 5, 357
- финитная 5, 617
Общей ковариантности принцип 1, 1079
Общерекурсивная функция 1, 820; 3, 1147; 4, 960
Общерекурсивное множество 4, 852
Общерекурсивный оператор 3, 1147; 5, 833
Общий дифференциальный оператор обыкновенный 2, 345
- - - с частными производными 2, 346
Общий интеграл 2, 327, 567, 568; 3, 1148
- кольцевой алгоритм 1, 562
- масштаб 2, 746
- ранг группы 4, 861
- ряд Дирихле 2, 183
- сингулярный оператор 4, 1172
- тригонометрический ряд 5, 439
- элемент алгебры 2, 211
Общих представителей система 1, 773; 3, 1148
Общности квантор 3, 1148
Объединение 4, 942
- многозначных отображений 3, 720
Объединение множеств 3, 759, 1148
- подгрупп 4, 369
- свободное 4, 1086
- событий 1, 658
Объединения теорема для нормальных алгорифмов 1, 226
Объект аффинной связности 1, 356
Объект геометрический 1, 934; 3, 1148
- градуированный 2, 1001
- дифференциально-геометрический 1, 938
- инвариантный 2, 538; 3, 1176
- инициальный 5, 616
- инъективный 2, 665
Объект категории 2, 761; 3, 1148
- - групповой 1, 1149
- -, идеал 2, 483
- - инъективный 4, 683
- - косимплициальный 4, 1168
- - малый 3, 508
- -, подобъект 4, 378
- - проективный 4, 682
- -, произведение 4, 688
- -, расслоенное произведение 4, 895
- -, ретракт 4, 975
- -, рефлектор 4, 978
- - симплициальный 4, 1168
- квазитензорный 1, 937
- конструктивный 2, 1043, 1057
- кривизны 4, 1095
- линейный 1, 937
- - однородный 1, 937
- оснащенный 1, 938
- пунктированный 4, 765
- связности 4, 1094
- терминальный 4, 689; 5, 616
- унарный 3, 758
- управления 2, 853
- финальный 5, 616
G-объект 1, 934
- категории 1, 1017
Объектная программа 5, 419
Объектный язык 4, 1185
Объем 3, 1149—1151
- смешанный 5, 49
Объема функция 3, 659
Объемлющая изотопия 2, 519
Объемности аксиома 1, 105; 3, 1151; 5, 352
Объемный потенциал 3, 1151; 4, 524
- -, Гаусса формула 4, 524
- - Грина 4, 529
- - ньютонов 4, 524
Обыкновенная дихотомия 2, 363
- синусоида 4, 1193
- точка 2, 248, 251
- эллиптическая кривая 5, 981
Обыкновенное дифференциальное уравнение 2, 282
- - - линейное 3, 339
- - - 2-го порядка 3, 337
- - -, приближенные методы решения 2, 290, 626
Обыкновенный линейный дифференциальный оператор 3, 364
- ряд Дирихле 2, 183
- узел 5, 475
Овал 3, 1152
- декартов 2, 79
- Кассини 2, 759
- кривой 2, 70
-, Кройтона формула 2, 572
Овалоид 2, 432; 3, 1153
Овоид 3, 1153
Овраг, дно 3, 1153
-, размерность 3, 1154
Овражная функция 3, 1153
Овражных функций метод минимизации 3, 1153—1157
Огибающая 2, 250; 3, 1157—1159
- средняя 5, 923
Ограничение меры 3, 638
- оператора 4, 19
- отображения 5, 390
- представления 5, 269
- расслоений 4, 893
Ограниченная алгебра Ли 3, 248
- алгоритмическая проблема 1, 221
- вариация 1, 606
- - Витали 1, 709
- - Фреше 5, 664
- задача трех тел 2, 870; 5, 431
- знакопеременная группа 4, 1142
- область 3, 1098
- проблема Бёрнсайда 1, 416
- симметрическая группа 4, 1142
- табличная сводимость 4, 958; 5, 317
- функция 5, 715
Ограниченно компактное множество 3, 1159
- полный базис 1, 378
Ограниченного вида класс функций 1, 1100
Ограниченного вида функция 3, 1159
Ограниченно-детерминированная функция 3, 1160
Ограниченное исчисление 4, 513
Ограниченное множество 3, 1161
- -, чебышевский радиус 5, 850
- -, - центр 5, 850
- подмножество 5, 379
- поле 5, 275
Ограниченной вариации функция 3, 1162
- кривизны двумерное многообразие 2, 56
- - пространство 4, 1008
Ограниченность по вероятности 5, 240
- равномерная 4, 786
- стохастическая 5, 240
Ограниченный квантор 2, 837; 3, 1162; 4, 637
Ограниченный оператор 3, 1162
- - линейный 3, 372; 4, 19
- - минимизации 4, 637
- - нелинейный 3, 959
Ограниченных измеримых функций пространство 1, 387
Ограничивающий цикл 1, 1043
Одновершинное распределение 3, 763; 5, 503
Одновременная рекурсия 4, 962
Одновременное разрешение особенностей 4, 119
Одновременный комитант 2, 980
Однозначная ветвь аналитической функции 1, 681
- функция 5, 715
Однозначного характера особая точка 4, 115
Однозначное отображение 3, 720
Однозначно-определенная выпуклая поверхность 1, 790
Одноклеточный оператор 3, 1008
Однократный числовой ряд 4, 1063
Однолистная функция 1, 266; 3, 1163—1168
- -, вариация 1, 605
- -, вариационная формула 1, 737
- -, Дженкинса теорема 2, 110
- - звездообразная 2, 449
- -, параметрическое представление 4, 218
- -, Тейхмюллера принцип 2, 110
Однолистное отображение 5, 714
Однолистности радиус 3, 1168
Однолистности условия 3, 1168—1170
Одномерная оптимизация 3, 490
- сетевая модель 4, 1120
Одномерное многообразие 3, 1170
- слоение 2, 884
Одномерные задачи вариационного исчисления 1, 594
Одномерный многоугольник 3, 749
- оператор 4, 241
- - сингулярный интегральный 2, 605
- случайный процесс 5, 23
Одноместная операция 4, 18
Одноместное исчисление предикатов 3, 419
Одноместный функтор 5, 685
Однопараметрическая группа преобразований 3, 1170
Однопараметрическая подгруппа 3, 1171
Однопараметрическая полугруппа 3, 1171
Однопериодическая функция 3, 1172
Однополостный гиперболоид 1, 1000; 3, 1172
- -, горловой эллипс 1, 1000
Однородная булева алгебра 1, 552
- краевая задача 3, 75
- линейная функция 3, 319
Однородная ограниченная область 3, 1172
- переходная функция 4, 259
- проблема геометрии чисел 1, 945
- разностная схема 4, 845
- система линейных уравнений 3, 358
- структура 1, 50
Однородная функция 3, 1173
- цепь Маркова 3, 518
Однородное аналитическое множество 1, 280
- диофантово приближение 2, 162
- дифференциальное уравнение 3, 339
- интегральное уравнение 2, 590
Однородное комплексное многообразие 3, 1173—1175, 1176
- кэлерово многообразие 3, 1174
- линейное уравнение 3, 355
Однородное пространство 2, 874; 3, 1175—1179
Однородное пространство алгебраической группы 3, 1179
- - группы 3, 1175; 4, 66
- -, инвариантный объект 2, 538
- - обобщенное 1, 934
- - риманово 4, 1026
- - симметрическое 4, 1147
- - симплектическое 4, 1157
- расслоение 3, 1177
- случайное поле 5, 18
- - - изотропное 5, 19
- - -, спектральная функция 5, 119
- уравнение Вольтерра 1, 752
- - диффузии 2, 359
Однородные координаты 3, 1180; 4, 681
- - тангенциальные 5, 321
Однородный арифметический минимум лучевой функции 1, 945
- во времени случайный процесс 5, 209
Однородный выпуклый конус 3, 1180
- гармонический трехчлен 1, 886
- канал без памяти 2, 701
- - с конечным числом состояний 2, 704
- марковский процесс 3, 525
- многочлен 3, 753
Однородный оператор 3, 960, 1181
- случайный процесс с независимыми приращениями 5, 29
Однорядное кольцо 3, 1182
Односвязная группа 3, 1182; 5, 891
Односвязная область 3, 1098, 1182
- -, Каратеодори теорема 2, 720
- риманова поверхность 4, 1018
Односвязное симплициальное множество 4, 1165
Односкоростное уравнение 4, 248
Односортный язык 5, 637
Одностороннее образующее разбиение 5, 1004
- связный граф 1, 1109
Одностороннее преобразование Лапласа 3, 196
- приближение 4, 608
Односторонние и двусторонние поверхности 3, 1182
- связи 1, 1034
Односторонний предел 3, 1183; 4, 560
Односторонняя гипотеза 4, 1138
- поверхность 3, 1183
Односторонняя производная 3, 1184
Одноступенчатый план 5, 183
Односуккцедентная секвенция 4, 1105
Однотактная релейно-контактная схема 4, 969
Однотипные распределения 4, 886
Одноточечное бикомпактное расширение 5, 393
Одноуровневая задача стандартизации 5, 166
Одночлен 3, 1184
Одноэргодичность 5, 247
Ожидание математическое 3, 600
Означаемое 5, 254
Означающее 5, 254
Ока принцип 5, 900
- теорема о когерентных пучках 2, 905
- - о псевдовыпуклых областях 1, 1031
- - о римановых областях 4, 1014
Ока теоремы 4, 9
Ока — Вейля теорема 4, 9
Ока — Картана теория 2, 739
Окаймление пространства 4, 9
Окаймления метод 4, 9—11
Окатывание 4, 11
Океанологии математические задачи 4, 11—14
Окно Вивиани 1, 693
- ковариационное 5, 125
- корреляционное 5, 120
- спектральное 5, 119
Окольцованное пространство 4, 14
- -, когерентный пучок 2, 905
Окончательная позиция 4, 386
Окрестностный ретракт 4, 976
Окрестность 4, 14; 5, 389
- дифференциальная 2, 260; 3, 423
- отмеченная 3, 445

- параметрическая 3, 445
- тонкая 5, 365
- точки 1, 738
- трубчатая 5, 449
Округление 4, 14
-, ошибка 4, 15
-, погрешность 4, 15
Округления точка 2, 252; 4, 15
Окружности концентрические 4, 15
Окружность 4, 15
- Аполлония 1, 298
- геодезическая 1, 927; 4, 438
- девяти точек 2, 63
- Зейферта 5, 479
- кривизны 3, 118
- на плоскости Лобачевского 3, 398
-, пучок 4, 771
-, радиус 4, 808
-, связка 4, 1089
- соприкасающаяся 2, 250; 5, 79
- фундаментальная 4, 1090
- Эйлера 2, 63
Октант 2, 80; 4, 16
Октаэдр 4, 16
Октаэдра пространство 4, 16
Октаэдрическая ткань 5, 357
Омбилическая точка 3, 97; 4, 15, 17
«Омега-квадрат» критерий в математической статистике 3, 88
«Омега-квадрат» распределение 4, 17
Омега-непротиворечивость 4, 17
Омега-полнота 4, 17
Омонимия синтаксическая 4, 1183
О'Нэна — Симса группа 5, 149
Операнд 4, 18, 404
Оператив 1, 1150
Оператор 4, 18—21, 26
- автоматный 5, 695
- аккретивный 2, 228
- алгоритмический 2, 1052
- аналитический 1, 276
- антитонный 3, 960
- базовый 1, 224
- Банаха — Мазура 1, 379
- в алгоритмическом языке 1, 224
Оператор в программировании 4, 18
- взятия внутренности 4, 727
- вложения 1, 723
- вогнутый 1, 738
- волновой 2, 9; 5, 128
- Вольтерра 1, 752, 754
- вольтерров 3, 1007; 5, 117
- вполне непрерывный 1, 759; 2, 994; 3, 373, 960; 4, 19
- всюду определенный 4, 18
- входной 4, 241
- вызова процедуры 1, 224
- выпуклый 1, 738, 802
- вырождения 4, 1161, 1167, 1169
- Гамильтона 1, 854
- Гаммерштейна 3, 959
- Гекка 3, 787
- Гильберта — Шмидта 1, 977; 5, 116
- гипермаксимальный 4, 1074
- гомотопии 4, 632
- граней 4, 1161, 1167, 1169
- граничный 1, 1047, 1063; 2, 953, 998
- Грина — де Рама 5, 789
- Д'Аламбера 2, 9
-, дефектное подпространство 2, 100
-, дефектное число 2, 99
- дефинизирующий 2, 101
- Джексона 2, 110
- диагонально клеточный 2, 123
- диагональный 2, 124
- Дирака 5, 140
- диссипативный 2, 228; 4, 905
- дифференциальный 2, 345; 4, 900
- дифференцирования 4, 20, 26
-, дифференцируемый по Гато 3, 960
-, - по Фреше 3, 960
- единичный 4, 20
- замкнутый 2, 437; 4, 19
- замыкания 1, 373
- - мультипликативный 4, 727
- звездного сопряжения 2, 238
- изометрический 2, 505
- изотонный 3, 960
-, индекс 2, 550; 4, 1174
-, индекс дефекта 2, 101
- интегральный 2, 604; 4, 20
- интегрирования 4, 26
- интегро-дифференциальный 3, 959
-, интерполирование 2, 627
- инфинитезимальный 2, 645; 3, 1113; 4, 262, 451, 692
- Иосиды 3, 333
- Казимира 2, 698
- Кальдерона — Зигмунда 2, 699
-, каноническое представление 3, 1056
- ковырождения 4, 1169
- кограней 4, 1169
- когранично 2, 954
- компактный 2, 994; 3, 373, 960; 4, 19; 5, 128
- комплексного дифференцирования 3, 67
- конечного порядка 3, 1006
- - ранга 5, 1037
- Коши 3, 59
- Лапласа 3, 194
- Лапласа — Бельтрами 3, 194
- линейный 1, 644; 3, 291, 369; 4, 19
- - дифференциальный 3, 364
- максимальный монотонный 3, 814
- массовый 3, 559
-, матричный след 5, 1040
- минимизации 3, 875; 4, 960
- - ограниченный 4, 637
- многозначный 4, 19
- модальный 3, 764
- монодромии 2, 773; 3, 60, 806; 4, 131
- монотонный 3, 814, 960
- набла 1, 854
- наилучшего приближения 3, 659
- наименьшего числа 3, 875
- нелинейный 3, 958; 4, 19
- Немыцкого 3, 959
- неограниченный 3, 376, 963
- непрерывный 3, 993; 4, 19
- нерастягивающий 3, 978
- несамосопряженный 3, 1006
- нётеров 3, 1025
- нефредгольмов 2, 554
- неявный 3, 1036
-, норма 3, 1162
-, нормальная форма 3, 1056, 1057
- нормально разрешимый 3, 1026, 1061
- нормальный 3, 375, 1074
- нулевой 4, 20
- обобщенно фредгольмов 3, 1027
- обобщенного сдвига 3, 1111
- обратный 3, 1133
- общерекурсивный 3, 1147; 5, 833
- ограниченный 3, 1162
- одноклеточный 3, 1008
- одномерный 4, 241
- однородный 3, 960, 1181
- ортогонального проектирования 1, 981
- ортогональный 3, 375
- передачи управления 1, 224
- перечислсния 4, 262
-, подобис 4, 378
- полилинейный 3, 960; 4, 407
- полный 4, 428; 5, 116
- положительно определенный 4, 432
- положительный 4, 434, 905
-, полугруппа 4, 447
- полунепрерывный 4, 19
- полуограниченный 4, 462
- - снизу 4, 905
- полуфредгольмов 3, 1062
- поля 4, 475
-, полярное разложение 4, 479
- порождающий 1, 373
- потенциальный 3, 947, 960; 4, 537
- преобразования 5, 918
- Привалова 4, 629
- примитивной рекурсии 4, 960
- присваивания 1, 224
- проекционный 4, 684
- производящий 4, 451, 692, 1126
- псевдодифференциальный 4, 733
- равномерно непрерывный 3, 993
- разностный 4, 841
-, расширение 4, 904
- расширенно расщепляющийся 4, 912
- расщепляющийся 4, 912
-, регуляризатор 4, 1176
-, регуляризирующий 3, 933
-, регулярный 2, 774
-, резольвента 4, 950
- рекурсивный 4, 962; 5, 833
- рождения 2, 990; 4, 1051; 5, 632
- с частными производными главного типа 1, 1013
- самосопряженный 3, 375; 4, 1074, 1146
- G-самосопряженный 1, 986
- сдвига 4, 27, 1099; 5, 771
- - по траекториям 3, 61
- секториальный 4, 905
- сжимающий 4, 1124
- сильно эллиптический 3, 362
-, символ 4, 1133
- симметрический 4, 1145; 5, 1018
- G-симметричный 1, 986
- симплектический 4, 1157
- сингулярный 4, 1172
- слабо непрерывный 4, 19
- - регулярный 2, 771
- слабого типа 2, 630
- - следом 5, 116, 1039
- собственно эллиптический 3, 362
-, собственное значение 5, 58, 98
-, - подпространство 5, 65
- собственный 4, 241
-, собственный вектор 5, 65
- совместности 3, 368
- сопряженный 5, 88
- союзный 4, 1172
-, спектр 5, 98
-, спектральное множество 5, 119
- спектральный 5, 131
-, спектральный след 5, 1041
- сплетающий 5, 147
- строго ядерный 5, 1038
- суперпозиции 3, 959; 4, 960
- счетно непрерывный 3, 993
- трансверсально эллиптический 5, 412
- умножения 4, 20
-, унитарная эквивалентность 5, 508
- унитарный 2, 505; 3, 375; 5, 514
- J-унитарный 1, 987; 5, 127
- уничтожения 2, 990; 5, 632
- уплотняющий 3, 977; 5, 522
- Урысона 3, 959; 5, 546
- усиленно непрерывный 4, 19
- факторизованный 4, 912
- Фредгольма 5, 679, 1038
- фредгольмов 3, 373, 1027
-, фундаментальная функция 4, 453
- цикла 1, 224
- циклический 3, 1056
- частично рекурсивный 5, 833
- числовой 4, 26
- Шварца 5, 886
- Штурма — Лиувилля 5, 915
- эволюционный 5, 924
- эллиптический 3, 360; 5, 991
- энергии 5, 178, 203
- эрмитов 3, 375; 4, 1074; 5, 1018
- ядерный 3, 373; 5, 116, 1037
-, ядерный след 5, 1040
F-оператор 3, 1027
μ-оператор 1, 820; 3, 875
Φ-оператор 3, 1027
∇-оператор 1, 854
Операторная группа 4, 21
- норма 3, 372, 1048
- схема 4, 650
Операторная топология 3, 374; 4, 22
- функция 4, 27
Операторная эргодическая теорема 4, 23
Операторно неприводимое представление 4, 24
Операторное вхождение переменной 4, 1083
Операторное кольцо 2, 961; 4, 24
- уравнение 5, 698
- - Вольтерра 1, 754
- - линейное 1, 754
Операторный алгоритм 1, 825
Операторный гомоморфизм 4, 22, 25
- изоморфизм 4, 22
Операторы рождения 5, 517
- уничтожения 5, 517
Операционная семантика 4, 650
- система 3, 597
Операционное исчисление 4, 25—28
Операция — см. соответствующее название
Опережающего типа уравнение 2, 295
Оперение пространства 4, 28, 270
Описание алгебраической системы 3, 766
- в алгоритмическом языке 1, 224
- модели 3, 770
- примитивно рекурсивное 4, 636, 963
Описанная кривая 1, 757
Описанный многоугольник 1, 758
Описательное определение 1, 781
Опорная гиперплоскость 1, 794, 797; 4, 29
Опорная плоскость 4, 29
- прямая 1, 793; 4, 29
- точка 4, 29
Опорная функция 1, 797; 4, 29
- - овала 3, 1152
Опорное полупространство 1, 797
Опорный функционал 4, 29
Опоясывание гомологическое 1, 1060
Определение индуктивное 2, 556
- непредикативное 5, 352
- описательное 1, 781
- рекурсивное 4, 961
Определения область 3, 48
Определенная билинейная форма 1, 713
- проблема моментов 3, 794
- система линейных уравнений 3, 357
Определенно расходящаяся последовательность 5, 1042
Определенное ядро 2, 101
Определенный интеграл 2, 564, 581; 4, 29
- - Лебега 2, 565
- - по Коши 3, 51
- - Римана 4, 992
M-определимое множество 2, 1053
Определитель 4, 30—32
-, Адамара теорема 1, 87
- бинарной квадратичной формы 1, 486
- Вандермонда 1, 578
- Вронъского 1, 768; 3, 339, 340
- Ганкеля 4, 187
- Грама 1, 1085
- квадратичной формы 2, 777
-, Лапласа теорема 1, 188
- *Леви* 3, 223
- решетки 5, 409
- Фредгольма 5, 653
- функциональный 5, 712
- Якоби 5, 1058
Определяющая последовательность областей 4, 1029
- псевдогруппа 4, 732
Определяющая система окрестностей 4, 32
Определяющее уравнение 4, 33
Определяющие соотношения универсальной алгебры 4, 33
Опровержимая формула 4, 34
Оптимальная вероятность ошибочного декодирования 4, 185
Оптимальная гарантирующая стратегия 4, 34
Оптимальная квадратура 4, 34
- квадратурная формула 3, 867
- оценка погрешности 4, 61
- стабилизация системы 4, 44
- - стохастическая 4, 45

- стратегия 5, 529, 532
- точка 3, 602
Оптимальная траектория 4, 35
- функция Ляпунова 1, 66
ε-оптимальная стратегия 5, 529, 532
Оптимального быстродействия задача 4, 36
- регулятора аналитическое конструирование 4, 44
- управления задача 1, 584; 4, 37, 41, 487
Оптимального управления математическая теория 4, 37—41
Оптимальное бейесовское решение 4, 508
Оптимальное декодирование 4, 41
- по Парето решение многокритериальной задачи 3, 722
- поведение автомата в случайной среде 1, 57
- правило 2, 216
- программирование 2, 677
- резервирование 3, 857
- решение 2, 676
Оптимальное управление 4, 39, 41, 48, 488
- - адаптивное 4, 47
- - в условиях неопределенности 4, 40
- - особое 4, 54
Оптимальное управление позиционное 4, 42—47
Оптимальное управление программное 4, 47—51
- - стохастическое 4, 40, 45
- - условное 2, 155
π-оптимальное решение 4, 508
Оптимальности достаточные условия 4, 51—54
Оптимальности принципы 2, 155; 4, 43, 54
Оптимальный код 2, 937
- метод 4, 61
- момент остановки 4, 508
- план 3, 602
- по порядку метод 3, 695
Оптимальный режим особый 4, 54—58
Оптимальный режим скользящий 4, 58—61
Оптимальных регуляторов аналитическое конструирование 1, 66
Оптимизационная задача 2, 676
Оптимизация вычислительного метода 4, 61
Оптимизация вычислительных алгоритмов 4, 61—63
- дискретная 5, 800
- киберистической системы 2, 853
- одномерная 3, 490
Оптимизирующее преобразование программ 4, 643
Оптическая длина пути 1, 857
Оптическое свойство параболы 4, 192
Опускание индекса 5, 328
Опциональная σ-алгебра 4, 63
Опциональный случайный процесс 4, 63
Орбит метод 4, 63—66
- пространство 4, 66
Орбита 2, 147; 4, 66—68
- группы 4, 382
- точки 2, 68
Орбитальная устойчивость 4, 68
Орбитально устойчивый предельный цикл 4, 575
Орбитального разложения задача 4, 67
Орбитальное разложение 2, 544
Ординал 1, 319; 4, 69, 501
- рекурсивный 5, 421
Ординальная сумма 5, 525
Ординальное произведение 3, 233
Ординальное число 1, 783; 4, 69, 501
Ординальный признак 3, 733
Ординарная сумма 4, 1091
Ординарный поток 3, 541
- случайный точечный процесс 5, 31
Ордината 1, 244, 358; 2, 80; 4, 69
Оре теорема о дедекиндовых решетках 2, 64
- - о кольцах 1, 341
- - о решетках 4, 983
- условие для полугрупп 1, 723
Оригинал 3, 197
Ориентационный класс 5, 684
Ориентация 4, 69—73
-, когерентность 2, 662
- многообразия 4, 70
- расслоения 4, 71, 72; 5, 362
Ориентированная бордантность многообразий 1, 533
- площадь 4, 328
Ориентированное расслоение 4, 71
Ориентированный бордизм 1, 533
- граф 1, 1105, 1108
- кобордизм 2, 891
- симплекс 2, 996; 4, 70
Ориентируемое многообразие 4, 70
- расслоение 4, 72
- слоение 2, 884
Ориентируемый многогранник 3, 711
- многоугольник 3, 750
- путь 3, 750
- пучок 1, 1058
Ориентирующее накрытие 4, 70
Ориентирующий пучок 1, 1058
Ориентирующий цикл 4, 71
Орисфера 4, 73
Орицикл 3, 399; 4, 73, 167
Орициклический поток 4, 73
Орлича класс 4, 74
- норма 4, 75
Орлича пространство 4, 75
Орнстейна — Чекона эргодическая теорема 4, 76
Орнштейна — Уленбека процесс 4, 76
Орра — Зоммерфельда уравнение 4, 78
Орт 1, 632, 634; 4, 79
Ортогонализации метод 4, 79
Ортогонализации процесс 4, 80
- - Грама — Шмидта 1, 982
Ортогонализация 4, 80
Ортогонализация системы функций 4, 80
Ортогональная аксонометрия 1, 113
- алгебраическая группа 4, 83
Ортогональная группа 2, 866; 4, 81—84, 478
- - вещественная 4, 84
- линейная регрессия 3, 309
Ортогональная матрица 3, 616; 4, 84
- проекция 4, 688
Ортогональная сеть 4, 85
- симметрическая алгебра Ли 1, 1025
Ортогональная система 4, 85
Ортогональная таблица 4, 87
Ортогональная траектория 2, 502; 4, 87
- - дифференциала 2, 786
Ортогонального проектирования линейный метод приближения 4, 609
- - оператор 1, 981
Ортогональное дополнение 1, 484, 980
- - множества 1, 644
Ортогональное преобразование 4, 81, 87
- разложение Ходжа 3, 196
G-ортогональное дополнение 4, 718
Ортогональной прогонки метод 4, 88
Ортогональности свойство характера Дирихле 2, 192
Ортогональность 4, 89
Ортогональные векторы 1, 980
- идемпотенты 2, 486
- квазигруппы 2, 804
Ортогональные латинские квадраты 4, 90—92
- - прямоугольники 3, 209
- линейные многообразия 1, 980
Ортогональные многочлены 4, 92—97
Ортогональные многочлены в комплексной области 4, 97—99
- - классические 2, 868
- - сокращаты 4, 90
- функции 4, 90
- элементы 5, 256
Ортогональный базис 4, 85, 99
- кобордизм 2, 891
- массив 4, 87
- оператор 3, 375
- подмодуль 1, 484
Ортогональный проектор 4, 99
- репер 4, 974
Ортогональный ряд 4, 100—104
Ортогруппа 2, 883
Ортодополнение 4, 104
Ортодромическая проекция 2, 742, 753
Ортомодулярная решетка 4, 104
Ортоморфизм 4, 91
Ортонормированная система 1, 980; 4, 105
- - векторов 4, 85
- - функций 4, 85
Ортонормированное множество 1, 980
Ортонормированные многочлены 4, 93
Ортонормированный базис 1, 492, 634, 981; 4, 85, 99
- репер 4, 974
G-ортонормированный базис 4, 719
J-ортонормированный базис 1, 986
Ортооптическая кривая 2, 512
Ортопроектор 4, 99
Ортоцентр 4, 105
Ортоцентрический трсугольник 5, 598
Освещения задача 4, 105
Осгуда условие 3, 49
Осгуда — Брауна теорема об аналитическом продолжении 4, 117
- - - об устранении особенностей 1, 894
- - - об устранимых множествах 5, 582
Осгуда — Гобсона теорема о равномерной сходимости 4, 792
Осевая окружность тора 5, 405
Осевой вектор 4, 106
Ослабления метод 4, 966
Ослабленная проблема Гольдбаха 1, 94
Ослабленное решение 3, 332
Оснащение 3, 744; 5, 284
Оснащенное гильбертово пространство 4, 106; 5, 130
- зацепление 5, 490
Оснащенное многообразие 4, 107; 5, 284
- - дифференцируемое 1, 938
Оснащенный объект 1, 938
- поток 4, 539
Основа вхождения 1, 772
Основание изгибания 4, 107
- конуса 2, 1074
- логарифма 3, 405
- отображения 4, 157
- пирамиды 3, 709
- призматоида 4, 634
- призмы 3, 709; 4, 633
- трапеции 5, 428
- трубчатой области 5, 449
- цилиндра 5, 818
- цилиндрической поверхности 5, 819
Основания геометрии 4, 107—113
Основная гармоника 1, 887
- гипотеза в статистике 5, 185
- - комбинаторной топологии 3, 152; 4, 486
- квадратичная форма поверхности 1, 770
- лемма Привалова о сингулярном интеграле Коши 4, 630
- серия представлений 4, 1117
- - - унитарных 5, 512
- структурная теорема для топологических групп 5, 368
- теорема алгебры 1, 199
- - арифметики 4, 876
- - вложения Соболева 1, 724
- - Гартогса о голоморфных функциях 1, 269, 893
- - о расширениях Галуа 1, 845
- - теории Галуа 1, 851
- - элементарной теории чисел 4, 706
Основного типа алгебраическая поверхность 4, 113
Основное множество алгебраической системы 1, 155
- соответствие Галуа 1, 164
- тождество Урысона 4, 822
Основной алфавит 1, 1092
- инвариант поверхности 2-го порядка 4, 344
- контакт 4, 968
- метрический тензор 4, 1013
- модуль 2, 192
- параллелограмм периодов 2, 50
- период 4, 268
- предикат 1, 207
- резонанс 4, 217
- символ 1, 1090, 1092
- тензор 3, 668; 4, 235
- функтор 5, 686
Основные единицы поля алгебраических чисел 2, 187; 4, 946
- периоды абелевой функции 1, 22
Особая алгебра Ли 3, 272
- билинейная форма 1, 483
- группа Ли 3, 272
- линия 4, 125
- матрица 1, 806
Особая точка 2, 248, 251; 4, 113—125, 784
- - алгебраическая 1, 173, 679
- - алгебраически-логарифмическая 1, 182
- - алгебраического многообразия 4, 118
- - аналитического пространства 1, 285
- - аналитической функции 1, 264; 4, 113
- - - -, Иверсена теорема 2, 469
- - бесконечно удаленная 1, 253; 4, 749
- - векторного поля 4, 120
- - дифференциального уравнения 4, 120
- - - - регулярная 3, 338
- - дифференцируемого отображения 4, 123
- - изолированная 2, 503
- - иррегулярная 1, 251; 2, 667
- - квадрики 2, 796
- -, кратность 3, 90
- - кривой 4, 119, 124, 310
- - многозначного характера 1, 679
- - неподвижная 3, 975
- - поверхности 4, 120, 124
- - подвижная 4, 363
- -, ранг 4, 859
- - регулярная 1, 251; 4, 934
- - схемы 1, 1020
- - устранимая 5, 581
- экстремаль 4, 938
Особенная гомология 1, 1060
Особенности дифференцируемых отображений 4, 125—131
Особенность алгебраического многообразия 4, 118
Особенность аналитической функции 4, 131
- гореиштейнова 4, 915
- дю Валя 4, 119, 915
- каноническая 4, 916
- Клейна 4, 915
- краевая 4, 130
- полярная 4, 1206
- простая 4, 915
-, разрешение 4, 849
- рациональная 4, 915
- слабая 4, 1206
- спектральная 3, 1008
- универсальная 4, 127
-, фундаментальный цикл 4, 120
-, характеристика 4, 120
Особого режима участок 4, 938
Особое интегральное уравнение 2, 592; 3, 1030
- оптимальное управление 4, 54
Особое решение 4, 131
- управление 4, 50
Особой точки индекс 4, 132
Особые показатели 4, 132—134
Особый интеграл 2, 327; 3, 52
- оптимальный режим 4, 54

- показатель 3, 330
- слой эллиптической поверхности 5, 984
- элемент 4, 414
Осреднение 4, 134
Остановка, цена 4, 508
Остановки момент 3, 523
Остаток 2, 81
- ряда 4, 1064
Остаточная тактическая конфигурация 5, 319
- функция 3, 1161
Остаточное множество 2, 764
Остаточный спектр 3, 373; 5, 98
Остаточный член 4, 135
- - интерполяции 2, 634
Остов 2, 92; 3, 765; 4, 687, 696
- комплекса 2, 995
- k-мерный 2, 880
- области Вейля 1, 629
- поликруга 4, 405
- симплициального множества 4, 1163
- симплициальной схемы 4, 1159
Остовное дерево 2, 92
Остовный подграф 1, 1106
Острие клина, Боголюбова теорема 1, 511
- Лебега 2, 667; 4, 530
Островского теорема об абсолютном значении 1, 42
- условие 2, 799
Остроградского метод 4, 135
- уравнение 3, 728
Остроградского формула 4, 136
Остроградского — Лиувилля формула 4, 137
Осциллирующее решение 4, 137
Осциллятор Ван дер Поля 1, 577
Осциллятор гармонический 4, 137, 1085
Осцилляционная матрица 4, 138
Осцилляционное дифференциальное уравнение 4, 138
Осцилляционное ядро 4, 139
Ось 1, 634
- абсцисс 1, 358; 2, 80
- аппликат 1, 358; 2, 80
- вещественная 2, 1008
- винта 1, 706
- вращения 1, 764
- гиперболы 1, 988
- гомологии 1, 1060
- действительная 2, 1008
- конуса 2, 1074
- координат 1, 358; 2, 80
- мнимая 2, 1008
- Монжа 2, 326; 3, 799
- ординат 1, 358; 2, 80
- параболы 4, 191
- переноса 4, 1151
- радикальная 4, 772, 808, 1090; 5, 222, 287
- симметрии 4, 1150
- цилиндра 5, 818
- Чеха 4, 668
- эллипса 5, 977
- эллиптического параболоида 5, 993
Отбора метод 3, 816
Отделения правило 3, 790
Отделенная аксиоматика 3, 414
Отделимая S-схема 5, 300
- фильтрация 5, 616
π-отделимая группа 4, 139
Отделимое пополнение кольца 4, 140
Отделимое топологическое векторное пространство 5, 380
- - кольцо 5, 385
Отделимости аксиома 4, 140; 5, 390
- принцип 2, 94, 95
- принципы Лузина 3, 456
Отделимость голоморфная 5, 899
Отделимость множеств 4, 140
- функциональная 4, 140; 5, 694
Отделимый морфизм 4, 1113
Отказа вероятность 3, 540
Отклонение 3, 658; 5, 779
- аргумента 2, 294
- вероятное 1, 655
- квадратичное 2, 782; 3, 877
- срединное 1, 655
- стандартное 2, 782; 5, 168
Отклоненность вершины графа 1, 557
Откоса линия 4, 141
Открытая база 1, 371
Открытая звезда 5, 434
- кибернетическая система 2, 852
- модель транспортной задачи 5, 420
- риманова поверхность 4, 1015
- топология 5, 374
Открытое многообразие 3, 743; 4, 141
- двумерное 2, 53
Открытое множество 4, 141
Открытое отображение 4, 142, 155; 5, 384
- покрытие, Бореля — Лебега теорема 1, 540
- проективно метрическое пространство 4, 667
Открытое ядро 4, 143
Открыто-замкнутое множество 4, 143
Открытый подкомплекс 2, 995
- промежуток 4, 695
- узловой сектор 4, 1106
- шар 5, 881
Отладка программы 4, 646
Отладочный транслятор 1, 225
Отмеченная окрестность 3, 445
- точка 4, 1165
Отмеченное отображение 3, 445
Отмеченный класс расширений 4, 1114
- круг 3, 445
Отнесения система 3, 9
Относительная гомологическая алгебра 4, 143
- группа Вейля 1, 626; 4, 144
- -, Гуревича теорема 1, 1066
- - гомологии комплекса 2, 999
- - когомологии комплекса 2, 1000
- - когомотопическая 2, 927
- - избыточность 2, 940
Относительная метрика 4, 144
- непротиворечивость 1, 110
- погрешность 4, 356
- проекционная константа 1, 390
- рекурсивность 3, 1002
Относительная система корней 4, 144
- схема Пикара 4, 285
Относительная топология 4, 145
- энтропия 2, 657
- ε-энтропия 5, 1008
- эффективность критерия 5, 1026
Относительно бикомпактное множество 4, 145
- выпуклая подгруппа 1, 792
- инвариантный интеграл 2, 532
- компактное множество 2, 992
- минимальная модель 3, 683
- определимая элементарная теория 5, 973
Относительно открытое (замкнутое) множество 4, 145
- равномерная сходимость 4, 1037
- свободная группа 4, 1082
Относительное клеточное разбиение 2, 880
Относительности принцип 4, 145
- - Галилея 1, 844
Относительности теория 4, 145—153
Относительные гомологии 4, 151
- когомологии 2, 913; 4, 151
- - де Рама 4, 855
Относительный инвариант 1, 937
- - в теории эллиптических функций 3, 788
- - дифференциальный 2, 344
- - интегральный 2, 601
- - формы 2, 541
- - p-функции 1, 622
- масштаб 2, 746
- функтор Пикара 4, 284
- - производный 4, 143
Отношение 4, 151
- аддитивное 1, 94
- ангармоническое 1, 289; 2, 27
- бинарное 1, 488
- - единичное 1, 488
- близости 1, 500
- вынуждения 1, 783
- гармоническое 2, 27
- двойное 2, 27
- дисперсионное 5, 627
- доминирования 2, 1103
- замыкания 2, 438
- корреляционное 3, 26
- модулярности 4, 456
- подчинения 4, 384
- порядка 4, 505
- правдоподобия 5, 172
- примитивно рекурсивное 4, 636
- простое 4, 706
- равенства 1, 488
- рекурсивное 4, 961
- рефлексивное 4, 978
- связности 1, 505
- симметричное 4, 1149
- синтаксического подчинения 4, 1183
- сложное 2, 27
- Стьюдента 4, 179
- транзитивное 5, 412
- универсальное 1, 488
- функциональное 5, 697
- функциональной эквивалентности 5, 945
- чисел 2, 81
Отношения правдоподобия критерий 4, 152
Отображение 4, 152—154; 5, 713
- аддитивное 1, 1133
- аналитическое 1, 281, 285
- антиконформное 1, 292
- антилинейное 4, 458
- антитонное 1, 297
- аффинное 1, 362
- базисное 1, 374, 375
- биголоморфное 1, 268, 471
- биективное 1, 471; 3, 760; 5, 714
- бикомпактное 1, 472; 4, 155
- билинейное 1, 484
- бимероморфное 3, 651
- бирациональное 1, 494; 4, 309, 920
- бифакторное 1, 496
- Веронезе 1, 654
- взаимно однозначное 2, 665; 5, 714
- внутреннее 1, 735
- вполне замкнутое 1, 758
- вполне непрерывное 1, 759
- вырезания 2, 1000
- гауссово 5, 297
- геодезическое 1, 931
- Гессе 5, 223
- голоморфное 1, 268, 282, 285, 1030
- гомеоморфное 1, 1035
- гомотопически ассоциативное 4, 713
- - мономорфное 1, 1068
- - устойчивое 4, 128
- - эпиморфное 1, 1068
- n-гомотопное 1, 1069
-, гомотопность 1, 1075
-, график 1, 1115; 5, 384
-, диагональное произведение 2, 124
-, дифференциал 2, 352
-, дифференцирование 2, 351
- дифференцируемое 2, 352
- дробно-линейное 2, 384
- дуальное 4, 310
- ефимовское 5, 298
- замкнутое 2, 435; 4, 155
- измеримое 2, 498; 3, 638
- B-измеримое 1, 535
- изометрическое 2, 505
- изоморфное 2, 512
- изотонное 2, 518
- инфинитезимально устойчивое 4, 128
- инъективное 2, 665
- Ито — Сигала — Вика 5, 633
- касательное 2, 352, 755
- квадратичное 2, 777
- квазиконформное 2, 810
- квазирегулярное 2, 810
- клеточное 2, 878
- когранічное 3, 44
- конечное 2, 1021
- конечнократное 2, 1021; 4, 156
- конструктивное 2, 1054
-, конус 2, 1074
- конформное 1, 266; 2, 1091, 1099
- кремоново 4, 309
- кусочно линейное 3, 151; 4, 410
- n-линейное 4, 407
- мажорирующее 4, 1025
- мёбиусово 2, 1094
- мероморфное 3, 650
- многозначное 3, 720
- монотонное 2, 519; 3, 814; 4, 156, 1097
- непрерывное 3, 986; 4, 558
- δ-непрерывное 1, 501
- неприводимое 3, 996; 5, 390
- нерастягивающее 4, 1025
- несущественное 3, 1020
- нормальное 5, 297
- норменное 3, 1076
- нульмерное 3, 1084
- обратное 3, 1133
- однозначное 3, 720
- однолистное 5, 714
- открытое 4, 155; 5, 384
- отмеченное 3, 445
- параметрическое 3, 445
- периодическое 2, 548
Отображение периодов 4, 154
- перспективное 4, 278
- подобное 4, 378
- полилинейное 4, 407
- положительное 4, 434
- полулинейное 4, 458
- полунепрерывное 4, 460
- полярное 5, 298
- последования 2, 338; 4, 505
-, предел 4, 558
- приклеивающее 4, 1058
- проективное 1, 931
-, производная 2, 352
- псевдоконформное 1, 471; 4, 740
- псевдооткрытое 4, 155, 741
- Пуанкаре 4, 505
- равномерно непрерывное 4, 786, 795
- растягивающее 4, 896
- рациональное 4, 309, 919
- резидуальное 4, 948
- сепарабельное 4, 1113
-, сечение 4, 1124
- сжимающее 3, 672
- симметричное 4, 1149
- симплексов линейное 4, 1152
- симплициальное 2, 998; 3, 151; 4, 1159, 1161, 1168, 1169
- совершенное 2, 435; 4, 155; 5, 69
- - неприводимое 5, 69
- спектра 5, 99
- спроса 3, 587
-, степень 5, 221
- существенное 4, 823; 5, 283
- сферическое 5, 296
- сюръективное 5, 316
- Тайхмюлера 5, 317
- топологическое 1, 1035; 5, 390
- точечно-множественное 3, 720
- трансверсально регулярное 5, 413
- трансверсальное 5, 413
- универсальное 1, 1133
- факторное 4, 155; 5, 390, 532
- характеристическое 5, 766
- эквивариантное 2, 980
- эквилонгальное 4, 1025
- экспоненциальное 4, 1006; 5, 954
- ядерное 5, 1037
C^k-отображение 2, 355
pl-отображение 3, 151
Γ-отображение 3, 743
Отображений классы 4, 155
Отображений метод 2, 499; 4, 156
- пространство 4, 715
Отображения вариация 1, 606
Отображения главная сеть 4, 157
Отождествления абстракция 1, 44
Отражение 4, 157, 1150
- поворотное 1, 765
Отражений группа 4, 158—160
Отражения принцип 4, 160
Отрезок 2, 615; 4, 160; 5, 881
- без контакта 2, 392
- Жюлиа 2, 427
-, конгруэнтность 4, 675
- конденсации 2, 22
- симплициальный 5, 168
- сообщений 2, 682

G-отрезок 1, 927
Отрицание 1, 124; 4, 161
- сильное 2, 1040
Отрицания антецедента закон 4, 386
- двойного закон 2, 25
Отрицательная асимметрия 1, 331
- вариация заряда 2, 444
Отрицательная вариация функции 4, 161
Отрицательная корреляция 4, 161
- полутраектория 5, 587
Отрицательно асимптотическая точка 4, 570
- градуированный модуль 1, 1084
- определенная билинейная форма 2, 563
- определенное эрмитово ядро 5, 1023
- - квадратичная форма 2, 778
- устойчивая по Лагранжу траектория 5, 567
- - по Пуассону точка 4, 570
Отрицательное биномиальное распределение 4, 161
Отрицательное гипергеометрическое распределение 4, 162
- изменение функции 4, 161
- подпространство 4, 718
Отрицательное показательное распределение 4, 163
Отрицательное полиномиальное распределение 4, 163
Отрицательное расслоение 4, 163
- число 2, 73, 76, 77
- эрмитово ядро 5, 1023
Отрицательной кривизны поверхность 1, 973; 4, 163—173
Отрицательный индекс инерции 2, 778
- квадратичный дифференциал 2, 786
- эксцесс 5, 969
Отсчета система 4, 173
Отто — Эйленберга — Хемингсена теорема о перегородках 4, 827
Охватов метод 4, 657
Охватывающий геометрический объект 1, 936
Охваченный геометрический объект 1, 936
Оценама квадратриса 2, 793
Оценивание доверительное 2, 365
- статистическое 5, 195
Оценка априорная 4, 844
асимптотическая 4, 498
-асимптотически несмещенная 1, 334
- бейесовская 1, 402
- Варшамова — Гилберта 2, 932
- Виноградова 1, 704; 2, 193
- двусторонняя 2, 58
- доверительная 3, 923
- интервальная 2, 615
- максимального правдоподобия 4, 551
- минимаксная 5, 195
- наибольшего правдоподобия 4, 551
- недопустимая 5, 195
- неравномерная 5, 806
- несмещенная 3, 1011; 4, 184; 5, 408
- Питмена 4, 290
- погрешности приближения 4, 606
- сверху 2, 58
- сверхэффективная 4, 1078
-смещенная 5, 51, 408
- снизу 2, 58
- состоятельная 5, 93
- спектральной плотности 5, 124
- - функции 5, 125
Оценка статистическая 4, 173—182; 5, 170
- суперэффективная 4, 1078
- точечная 5, 408
- эквивариантная 5, 947
- эффективная 3, 1013; 4, 867; 5, 1025
Оценки итерационных отклонений метод 4, 250
Очень сильная суммируемость 5, 276
Очередей теория 3, 557; 4, 182
Очередности множество 4, 386
Ошибка 4, 181
- арифметическая 2, 928, 929
- грубая 4, 181, 183
- истинная 4, 183
- квадратичная 2, 776, 783
- методическая 3, 880
- округления 4, 15
- постоянная 3, 880
- систематическая 3, 847, 877; 4, 181, 183; 5, 51, 408
- случайная 3, 847, 877; 4, 181, 183
- типа замещения 2, 940
Ошибок вектор 5, 408
- интеграл 2, 566
Ошибок теория 4, 183—185
Ошибочного декодирования вероятность 4, 185
Оштукатуриваемый конус 2, 1076

П

Паде аппроксимация 4, 187—189
- таблица 4, 187
Пайерлса интегральное уравнение 4, 249
Пакетная обработка программ 3, 597
Пале — Смейла условие 3, 830
- - - в вариационном исчислении 1, 593
Пальма функция 3, 542
Памяти сигнализирующая функция 1, 211
Память в программировании 4, 650
- локального алгоритма 1, 209
- полная 4, 386
Паналгебраическая кривая 5, 424
Паппа аксиома 4, 189
- теорема 3, 975
Паннерица уравнение 4, 189
Пара 5, 713
- банахова 2, 628
- Бертрана 1, 432
- Борсука 3, 14
- дуальная 2, 391
- Пуанкаре 4, 748
- пунктированная 1, 1063
- точная 5, 106
- фигур 5, 614
Парабол метод 4, 190
Парабола 2, 1034; 3, 383, 387; 4, 191
- главная 5, 993
- кубическая 3, 142
- Нейля 3, 920; 4, 458
- полукубическая 4, 458
Параболическая гомология 1, 1060
- группа Кокстера 2, 945
- интерполяция 3, 880
- линия уравнения 5, 45
- модулярная форма 3, 786
- поверхность 5, 515
Параболическая подалгебра 4, 192
Параболическая подгруппа 1, 538; 4, 192—194
- -, Леви разложение 4, 193
- - системы Титса 4, 193
- показательная функция 4, 27
- прямая 2, 801
Параболическая регрессия 4, 194, 931
-связка окружностей 4, 1090
- -прямых 4, 1089
- - сфер 4, 1090
-сеть 4, 1123
Параболическая спираль 4, 194
Параболическая точка 2, 252; 4, 194
k-параболическая поверхность 4, 362
Параболические координаты 4, 194
- прямые 3, 12
Параболический дифференциальный оператор 2, 346
- - - линейный 3, 366
- луч 2, 1014
- пучок 4, 772, 773
- сектор 4, 1106
- тип римановой поверхности 4, 1019, 1028
Параболический цилиндр 4, 195; 5, 819
Параболического типа уравнение 4, 195
Параболического типа уравнение; численные методы решения 4, 195—198
Параболического уравнения метод 4, 198—200
Параболического цилиндра функции 1, 612; 4, 200
Параболическое дробно-линейное отображение 2, 386
- уравнение 2, 299, 323
- - абстрактное 3, 334
- - вырожденное 1, 808
- -, Грина функция 1, 1130
- - линейное 3, 348
Параболоид 4, 201
- гиперболический 1, 992
- соприкасающийся 2, 251; 5, 80
- эллиптический 5, 993
Параболоидальные координаты 4, 201
Парадигматическая аналитическая модель языка 1, 248
Парадокс 1, 292; 4, 202; см. также соответствующее название
Паракомпакт 3, 433; 4, 202
Паракомпактное пространство 4, 202
Паракомпактности критерии 4, 203
- условие 5, 393
Паракомплексное число 2, 32
Параллелепипед 4, 204
- *n*-мерный 1, 325
Параллели 3, 397
- Клиффорда 4, 991
- поверхности вращения 1, 767
Параллелизм абсолютный 4, 204
Параллелизуемое многообразие 4, 205
Параллелограмм 4, 205
- периодов 2, 50
Параллелограмник 4, 205
Параллелотоп 4, 205
- периодов абелевой функции 1, 23
Параллелоэдр 1, 946; 4, 206
Параллель 4, 949; 5, 291
- Клиффорда 2, 882
Параллельная аксонометрия 1, 113
- проекция 4, 688
Параллельное векторное поле 4, 1005
Параллельное перенесение 4, 206—208
- - Леви — Чивита 4, 1005
Параллельное поле 4, 208
- программирование 4, 647
Параллельности аксиома 4, 209
- - Евклида 4, 778
- угол 3, 398, 404
Параллельные линии 4, 209
Параллельные поверхности 4, 210
Параллельные прямые 3, 388, 398; 4, 210, 747
Параллельный перенос 4, 210
- -, подгруппа 1, 362
Параметр 4, 578
- аффинный 1, 364
- винта 1, 706
- дифференциальный 2, 349
- индукции 3, 564
- интегрального уравнения 2, 591
- локальный 3, 445
- параболы 4, 191
- Привалова 4, 629
- регулярный 4, 945
- сдвига 4, 1099
Параметра вариации метод 4, 211
Параметризация 3, 742
- естественная 2, 248
- - кривой 3, 892
- множества 2, 729
- поверхности 4, 358
Параметризованная поверхность 5, 665
Параметрикс 4, 737
Параметрикса метод 4, 212—214
Параметрическая задача 2, 677
- окрестность 3, 445
- операторная функция 4, 27
- спектральная оценка 5, 104
Параметрические уравнения линии 3, 383
Параметрический круг 3, 445
- метод Лёвнера 3, 226
- резонанс 1, 864; 3, 316
Параметрических интегральных представлений метод 4, 214
Параметрических представлений метод 4, 215
Параметрического резонанса математическая теория 4, 216—218
Параметрическое отображение 3, 445
- представление 2, 587
Параметрическое представление в теории однолистных функций 4, 218
Параметрическое представление функции 4, 219
Параметрическое программирование 4, 220
Параметрическое уравнение 4, 221
Параметры Кэли — Клейна 3, 162
- Эйлера — Родрига 3, 162
Парастрофа 2, 230
Парастрофия 2, 802
Паратактичные прямые 4, 991
Парето распределение 4, 222
Парикмахера парадокс 4, 222
Парные интегральные уравнения 2, 600
Парсеваля равенство 2, 434; 4, 100, 222, 544, 546; 5, 909
Парсеваля — Планшереля формула 4, 223, 294
Парсеваля — Стеклова равенство 4, 99
- - условие замкнутости 2, 434
Партия в теории игр 2, 143, 471; 4, 386
Пары аксиома 1, 106
Паскалева геометрия 4, 223—225
- плоскость 4, 224
Паскаля прямая 4, 225
Паскаля распределение 4, 225
Паскаля теорема в проективной геометрии 4, 225
Паскаля треугольник 4, 226
Паскаля улитка 4, 226
Пассивный вычислительный алгоритм 4, 62
Пасынкова теорема о перистых пространствах 4, 271
- - о размерностях 4, 822
Паули матрицы 4, 227
- уравнение 5, 898
Паша аксиома 1, 970; 4, 228
Пеано аксиомы 1, 319; 3, 893; 4, 228
- арифметика 2, 759; 4, 229
Пеано кривая 4, 229
Пеано производная 4, 230
- - обобщенная 4, 231
Пеано теорема 3, 976; 4, 231
- форма остаточного члена 5, 323
Пейджа теорема в теории чисел 4, 231
Пекле число 4, 232
Пелля группа единиц 1, 164
Пелля уравнение 4, 232
Пенлеве множество 4, 233
Пенлеве проблема 4, 233; 5, 582
Пенлеве теорема в теории функций комплексного переменного 4, 233
- - для дифференциальных уравнений 1, 253
- теория 4, 566
- трансцендентная функция 4, 233
Пенлеве уравнение 4, 233
Пентасферические координаты 4, 234
Первая аксиома счетности 4, 234
Первая вариация 1, 608; 4, 234
Первая квадратичная форма 2, 784; 4, 234—236, 359

Первая краевая задача 2, 178; 3, 83, 203, 349; 4, 236
- основная форма 3, 668
- подстановка Эйлера 5, 928
- смешанная задача 5, 37, 41
- теорема Абеля о степенных рядах 5, 219
- - Гарнака о сходимости последовательности функций 1, 893
- - Гёделя о неполноте 1, 909
Первичная спецификация 2, 978
Первичное кольцо 3, 901; 4, 237
Первичный идеал 4, 237
- множитель Вейерштрасса 1, 616; 2, 714
Первого приближения критерий 2, 341
Первое уравнение Колмогорова 2, 958
Первой категории множество 2, 764
Первообразная 4, 237
Первообразная функция 2, 563, 579; 4, 237
Первообразный корень 3, 15; 4, 237; 5, 152
- характер 2, 192
Первый дифференциальный параметр 2, 350
- - - Бельтрами 3, 206
Первый интеграл 2, 568; 4, 238
- - уравнения Пфаффа 4, 776
- класс Бэра 1, 567
- принцип отделимости 2, 94
Перевала метод 4, 239
- точка 4, 239
Перевальный контур 4, 239
Перевод автоматический 1, 59
- Гёделя — Тарского 4, 357
- машинный 1, 59
- негативный 2, 1040
d-перевод 2, 1040
Переводное соответствие 1, 59
Переворачивание 4, 81
Перегиба точка 4, 239, 310
Перегородка 2, 556; 4, 240, 821
Передаточная функция 4, 240
Передача информации 2, 647
Передачи управления оператор 1, 224
Перекоса коэффициент 4, 419
Перемена ориентации комплекса 2, 995
Переменная зависимая 5, 713
- индивидная 2, 555
- индукционная 2, 558
- независимая 5, 713
- предикатная 4, 577
- предметная 2, 555; 4, 576, 581
- пропозициональная 4, 698
- регрессионная 4, 929
- свободная 4, 1083
- связанная 4, 1088
Переменное высказывание 1, 124
Переменных направлений метод 4, 241—243
Перемешивание 4, 243
Перемещение виртуальное 1, 1033
- возможное 1, 1033
- действительное 1, 1033
- циклическое 4, 752
Перенесение параллельное 4, 206
Перенормировка 4, 243—245
Перенос параллельный 4, 210
Переноса излучения теория 4, 245—247
Переноса поверхность 4, 247
- принцип Хинчина 2, 164
Переноса сеть 4, 247
Переноса теорема в теории диофантовых приближений 4, 247
- уравнение 3, 464; 5, 723
Переноса уравнения; численные методы решения 4, 248—252
Переопределенная система 2, 327; 4, 252
Переопределенный линейный дифференциальный оператор 3, 368
Пересекающиеся прямые 3, 388, 398; 4, 746
Пересечение многозначных отображений 3, 720
Пересечение множеств 3, 759; 4, 253
Пересечений теория 4, 253—255
Пересечения индекс в теории размерности 4, 255
Пересечения индекс для алгебраических многообразий 4, 255
Перестановка 2, 974; 4, 256, 380; 5, 316
- множества 1, 471
Перестановки в логике 1, 920
Перестановок критерий 4, 256, 864
Перестановочности соотношения 4, 257
Перестановочности операторы 4, 258
Перестановочность 2, 989
Перестановочные операторы 4, 258
Перестановочный автомат 1, 67
- куб 3, 208
Перестройка 4, 258
- Морса 3, 825
- сферическая 4, 1058
Пересчет прямой 4, 724
Переход 4, 280
- индукционный 3, 564
Переход с запрещениями 4, 258
- фазовый 5, 201
Перехода модуль 3, 405
- функция 4, 895
- явления 2, 342
Переходная плотность 1, 698; 4, 259
- система 1, 55
Переходная функция 4, 259
Переходные вероятности 4, 260
Переходный процесс 1, 64
- режим 1, 786
Переходных вероятностей матрица 3, 518; 4, 261
Переходных операторов полугруппа 4, 261
Переходов функция 1, 53
Перечисления оператор 4, 262
Перечисления проблема 4, 263
Перечисления теория 4, 263—265
- - Пойа 2, 977
Перечислимое множество 1, 227; 4, 265
- - слов 4, 513
Перечислительные задачи 2, 976
Периметр 4, 265
Период абелевой функции 1, 22
-, базис 2, 50
- гармонического колебания 1, 888
-, группа 2, 50
Период группы 4, 265
- дифференциала 2, 238
- инволюции 2, 548
- логарифмический 5, 989
- минимальный 4, 269
-, модуль 2, 50
- основной 4, 268
-, *параллелограмм* 2, 50
- примитивный 2, 50; 4, 268
- решения 4, 269
-, решетка 2, 50
- свободного гармонического колебания 4, 1084
- точки 4, 267
Период функции 4, 265, 268
- эллиптического интеграла 5, 989
Периодическая группа 4, 266
- дробь 1, 434; 2, 98
Периодическая полугруппа 4, 266
- теорема Ботта 1, 541
Периодическая точка 4, 267
Периодическая траектория 2, 533; 4, 267
Периодическая функция 4, 267
- цепь Маркова 3, 521
- часть абелевой группы 1, 18
Периодически-коррелированные случайные процессы 5, 124
Периодически - нестационарные случайные процессы 5, 124
Периодическое многообразие полугрупп 4, 440
- отображение 2, 548
Периодическое решение 4, 268—270
- -, близкое к разрывному 4, 967
- - разрывное 4, 967
- условие 5, 915
Периодов базис 1, 374
Периодограмма 4, 270
Перистое пространство 4, 270—272
Периферическая подгруппа 5, 477
Периферически бикомпактное пространство 4, 272
Перманент 4, 272
- матрицы 2, 976; 4, 1140
Перманентные методы суммирования 4, 944
Пермутатор 4, 273
Перпендикуляр 4, 273
- общий двух скрещивающихся прямых 4, 1205
Перпендикулярные прямые 4, 274
Перрона интеграл 4, 274
- *коэффициент неправильности* 3, 980
Перрона метод 4, 274
Перрона преобразование 4, 275
- пример об устойчивости 5, 571
- теорема о преобразованиях 4, 276
Перрона — Винера обобщенное решение задачи Дирихле 4, 530
Перрона — Стилтьеса интеграл 4, 276
Перрона — Фробениуса теорема о матрицах 4, 276
Персея кривая 4, 277
Персидского теорема о коэффициентах неправильности 3, 981
Перспектива 4, 277
Перспективное отображение 4, 278
Перспективно-подобные фигуры 1, 1061
Перцентиль 4, 278
Петель пространство 4, 278
Петера — Вейля теорема о неприводимых представлениях 1, 448
- - - о представлениях групп 2, 992
Петера — Вейля теорема о топологических группах 4, 278
Петерсена граф 1, 1112
Петерсона поверхность 2, 1034; 4, 279
- прообразование 4, 279
Петерсона соответствие 4, 279
Петерсона — Кодацци уравнения 4, 280
Петерсона — Кодацци — Майнарди уравнения 4, 361
Петля 4, 280
- геодезическая 2, 431
- графа 1, 1105
-, теорема 2, 90
Петре *K*-метод 2, 629
Петри сеть 4, 280
Петровского теорема для алгебраических кривых 2, 70
Петтиса интеграл 4, 281
Пеццо поверхность 3, 141
Пи 4, 282
Пика множество 1, 133
Пика теорема о неевклидовых расстояниях 4, 282
- точка 1, 132; 2, 966
Пикара группа 4, 283
- исключительное значение 2, 674
Пикара многообразие 4, 283
- относительный функтор 4, 284
- свойство 4, 286
Пикара схема 4, 284
Пикара теорема об аналитических функциях 4, 285—287
- - об интегральных уравнениях 2, 597
- число 1, 151; 3, 1006; 4, 283
Пикара — Вессио расширение 4, 902
Пикара — Лефшеца формула 3, 808
Пикаровское исключительное значение 4, 286
Пиконе метод 2, 309
Пирамида 3, 709; 4, 287
Пирса стрелка 4, 287
Пирсовское разложение 1, 130; 4, 288
Пирсона дифференциальное уравнение 4, 94
Пирсона кривые 4, 288—290
Пирсона распределение 4, 288, 290
- статистика 5, 784
- уравнение 2, 868; 4, 1050
Питмена оценка 3, 681; 4, 290
Пифагора теорема 4, 89, 290
- - в гильбертовом пространстве 1, 981
- - сферическая 5, 292
Пифагорово замыкание 1, 712
- поле 1, 711
Пифагоровы числа 2, 169; 4, 291
ПЛ/1 4, 291
Плавающая запятая 2, 443
План двухступенчатый 5, 183
- одноступенчатый 5, 183
- *оптимальный* 3, 602
Планарная точка 3, 1072
Планарный граф 1, 1109
Планигон 4, 292
Планирование календарное 4, 877
- сетевое 4, 1120
Планирование эксперимента 4, 293
Планка постоянная 4, 293
Планов множество 3, 602
Планшереля мера 5, 512
Планшереля теорема о сходимости 4, 294
- - об отображении 1, 882
Планшереля тождество 4, 323
Планшереля формула 4, 294; 5, 512
Пластичности математическая теория 4, 295—302
Плата игры 2, 329
Плато задача 4, 302
Плато многомерная задача 4, 303—308
Платона тела 4, 308, 552
Плеснера свойство 4, 308
Плеснера теорема об аналитических функциях 4, 308
- точка 4, 308, 567
Плоская вариация Тонелли 5, 363
Плоская действительная алгебраическая кривая 4, 309—312
Плоская задача теории упругости 4, 313—317
- карта 1, 1109
- контактная схема 2, 1063
- *конфигурация* 2, 1076
- кривая 2, 250
- - алгебраическая 4, 309
- мера Хаусдорфа 5, 778
- область, периметр 4, 265
- обратная задача теории потенциала 4, 522
- связность 4, 207
- *р*-ткань 5, 356
- триангуляция 1, 1110
- фигура, площадь 4, 327
Плоский алгебраический элемент 5, 613
- граф 1, 1109, 1115
Плоский модуль 4, 317
Плоский морфизм 4, 318
- угол 5, 467
Плоское аналитическое отображение 1, 282
- множество 1, 643
- пространство 4, 709
Плоскость 4, 318
- абсолютная 1, 492
- аналитическая 1, 249
- бесконечно удаленная 1, 443
- биссекторная 1, 496
- гиперболическая 4, 746, 747; 5, 507
- двойная 2, 23
- инверсная 3, 630
- касательная 2, 251, 755
- *комплексная* 2, 1008
- комплексно-аналитическая 1, 249
- комплексного переменного 2, 1010
- координатная 1, 358; 2, 80
- круговая 3, 630
- лагранжева 5, 519
- Лобачевского 3, 784
- Мёбиуса 3, 630

- m-мерная 3, 729
- недезаргова 3, 908
- несобственная 4, 664
- нормальная 3, 1050
- опорная 4, 29
- паскалева 4, 224
- полярная 4, 476
- проективная 2, 52, 975; 4, 668
- проекций 3, 895, 896; 4, 688
-, пучок 4, 771
- радикальная 4, 773; 5, 222, 287
- регрессии 4, 926, 931
- Римана 4, 989
-, связка 4, 1089
- симметрии 4, 1150
- соприкасающаяся 2, 249; 5, 80
- спрямляющая 5, 150
- сублагранжева 5, 519
- фазовая 5, 586
- фокальная 2, 1015
- эквиаффинная 5, 942
- эллиптическая 4, 989

m-плоскость 3, 729

Плотная мера Бореля 1, 537
- - Бэра 1, 537
- подкатегория 3, 420
- - полная 1, 21

Плотно вложенный идеал 4, 908
- упакованный код 4, 396

Плотное множество 1, 769; 4, 319; 5, 280
- - линейное упорядоченное 3, 323
- подмножество 1, 785
- расширение 4, 908
- семейство распределений 4, 886

Плотности Джекобсона теорема 1, 341

Плотности матрица 3, 26; 4, 319
- теорема Бореля 2, 201

Плотности точка 4, 320; 5, 1013

Плотностная гипотеза 4, 320
- область 1, 1024

Плотностные теоремы в теории чисел 2, 116; 4, 321

Плотностный метод в теории чисел 4, 322

Плотность асимптотическая 1, 332
- бета-распределения 1, 866
- в графе 1, 1120
- векторная 5, 330

Плотность вероятности 4, 323
- - перехода 3, 519
- - совместная 5, 70
- гиперболической метрики 1, 989
- двойного слоя 3, 1107
- заряда 4, 810
- интеграла типа Коши 3, 52
- источника 2, 682
- метрическая 3, 460

Плотность множества 4, 324
- натуральная 1, 333
- переходная 1, 698; 4, 259
- показательная 1, 866

Плотность последовательности 3, 512; 4, 324; 5, 894
- потенциала 4, 524
- простого слоя 3, 1106
- распределения 3, 989
- сингулярного интеграла 4, 1176
- - - Гильберта 1, 969
- скалярная 5, 330
- спектральная 5, 105, 212, 910
- тензорная 5, 329

Плотность топологического пространства 3, 834; 4, 323
- условная 5, 548

χ^2-плотность 1, 866

Плотный функционал 3, 643
- элемент 5, 234

Площадей метод 4, 325, 326

Площадей принцип 4, 325—327
- теорема 4, 326
- теория 4, 329

Площадь 4, 327—331
- гиперболическая 1, 989
-, минимизация 3, 699
- по Лебегу 4, 329
- поверхности в метрическом пространстве 4, 1026

Плюккера интерпретация 4, 331—333

Плюккера формулы 4, 333

Плюккеровы координаты 1, 732; 4, 334

Плюмбинг 2, 379
- Рохлина 2, 380

Плюригармоническая функция 4, 334

Плюриканонические системы алгебраических поверхностей 1, 150

Плюрисубгармоническая функция 4, 335—337

Плюрисупергармоническая функция 4, 335, 337

Побуквенное кодирование 2, 938

Поведение автомата 1, 57
- - в случайной среде 1, 57
- - инициального автономного 1, 54
- - - конечного 1, 54

Поверхностей теория 2, 251; 4, 337
- -, Бонне теорема 1, 531
- -, вторая квадратичная форма 1, 770
- -, Гаусса теорема 1, 901

Поверхности изометричные 2, 253
- параллельные 4, 210

Поверхностная полоса 4, 437
- пространственная ткань 5, 359
- сферическая гармоника 5, 290
- тороидальная гармоника 5, 407

Поверхностная функция 4, 338; 5, 50
- эллипсоидальная гармоника 5, 979

Поверхностный интеграл 4, 338—341

Поверхностный потенциал 4, 341
- треугольник 4, 1025

Поверхность 4, 341
- алгебраическая 1, 149, 249, 250
- аналитическая 5, 860
- Бианки 1, 465
- Бонне 5, 923
- в метрическом пространстве 4, 1025
- Вейнгартена 1, 631
- винтовая 1, 706
- вихревая 1, 715
- вращения 1, 767

Поверхность второго порядка 4, 343—346
- выпуклая 1, 788, 799
- k-выпуклая 4, 361
- гиперболическая 5, 515
-, гиперболическая точка 1, 990
- гиперэллиптическая 4, 1032; 5, 985
- Гишара 1, 1012
-, главная кривизна 1, 1012
-, главное направление 1, 1015
-, гладкая точка 2, 756
- граничная 2, 1015
- Гурса 5, 923
- Дарбу 2, 16, 18
- двусторонняя 2, 59; 3, 1184
- дель Пеццо 3, 141; 4, 917; 5, 597
- Демулена 2, 90
- замкнутая 2, 51
- Зейферта 5, 479, 486
- изотермическая 2, 518
- инвариантная 2, 533
- интегральная 2, 325, 577
- Иохимсталя 2, 665
- каналовая 2, 710
-, касательная плоскость 2, 755
- Каталана 2, 759
-, квадратичная форма 2, 784
- Клейна 2, 52, 873
- Клиффорда 2, 882; 4, 991; 5, 405
- комплексно-аналитическая 1, 249
- коническая 2, 1033
-, коническая точка 2, 756
- кубическая 3, 141
- Куммера 3, 147
- Кэли 3, 157
- линейчатая 3, 380
- Лиувилля 3, 392
- m-мерная 4, 358
- минимальная 2, 253; 3, 684
- модуля 1, 276
- накрывающая 3, 888
- направляющая 4, 949
- несжимаемая 5, 433
- нехарактеристическая 3, 47
- нормализованная 4, 973
-, обертка 4, 166
- образующая 4, 985
- общего типа 2, 713
- односторонняя 3, 1183
- ориентированная временным образом 3, 328
-, особая точка 4, 120, 124
- отрицательной кривизны 4, 163
- параболическая 5, 515
- k-параболическая 4, 362
-, параметризация 4, 358
- параметризованная 5, 665
-, первая квадратичная форма 4, 359
- переноса 4, 247
- Петерсона 2, 1034; 4, 279
-, Петерсона — Кодацци — Майнарди уравнения 4, 361
-, площадь 4, 328
-, подера 4, 370
- полная 4, 165
-, полная кривизна 4, 416
- Понтрягина 4, 487
- предельная 3, 399
- присоединенная 4, 639
- пространственно ориентированная 3, 328
- Прюфера 4, 721
- равных расстояний 3, 399
- развертывающаяся 4, 811
- k-развертывающаяся 4, 362
- рациональная 4, 916
-, ребристая точка 2, 756
- регрессии 4, 926, 931
- регулярная 2, 251
- резная 4, 949
- Римана — Шварца 4, 1002
- риманова 1, 267; 4, 1015
-, Риччи уравнения 4, 361
-, род 4, 1049
-, Родрига формула 1, 1015
- с краем 2, 52
- свободная 3, 326
- седловая 4, 170, 1102
- k-седловая 4, 362
- секущая 4, 505, 1124
- сингулярная 4, 342
- срединная 4, 347
- суперсингулярная 4, 342
- трансверсальная 5, 613
-, триортогональная система 5, 446
- фокальная 2, 1015; 5, 613
- Фосса 5, 646
- Фреше 5, 665
- характеристическая 2, 815; 3, 326; 5, 753, 756
- Хопфа 1, 250
- цилиндрическая 5, 819
- Шварца 5, 887
- Шерка 5, 893
- эвольвентная 5, 923
- эволютная 5, 922
- эллиптическая 5, 515, 984
- Эннепера 5, 1003
- Энриквеса 5, 985

$K3$-поверхность 4, 342

Поворот вокруг плоскости 1, 765
- - точки 1, 765
- кривой 1, 790, 924

Поворота точка 3, 499

Поворотное отображение от плоскости 1, 765

Поворотов диаграмма 4, 346

Повторений сокращение 1, 920

Повторения теорема для слов 1, 226

Повторного логарифма закон 1, 699; 4, 347

Повторное ядро 2, 691

Повторный дифференциал 2, 274

Повторный интеграл 4, 348

Повторный предел 4, 349

Повторный ряд 4, 350

Повторных подстановок метод 4, 511

Поглощающее множество 1, 544
- подмножество 5, 378

Поглощающее состояние цепи Маркова 4, 351

Поглощающий барьер 5, 12

Поглощение множеств 5, 378
- программное 2, 333

Поглощения законы 1, 125; 4, 351

Погони линия 4, 351

Погорелова преобразование 1, 436

Пограничного слоя метод 3, 503

Пограничного слоя теория 4, 352—356
- - функция 3, 503

Пограничный слой 3, 501; 4, 356
- - внутренний 2, 342
- член 2, 342

Погрешности мера 4, 604
- оптимальная оценка 4, 61

Погрешность 4, 356
- абсолютная 1, 36
- аппроксимации 4, 844
- квадратуры 4, 35
- метода 4, 61
-, накопление 3, 884
- округления 4, 15
- приближения 4, 606

Погружающая операция 2, 370; 4, 357

Погружение 4, 357
- изометрическое 2, 506
- каноническое 2, 713
- короткое 2, 506

Погружение многообразия 4, 358
- свободное 4, 362

Погруженное многообразие 4, 358

Погруженных многообразий геометрия 4, 359—363

Подалгебра борелевская 3, 279
- Бореля 1, 538; 4, 192
- Картана 2, 736; 3, 1041
- Ли 3, 244
- параболическая 4, 192

p-подалгебра 3, 249

σ-подалгебра достаточная 2, 377

Подбора метод 3, 932

Подвижная особая точка 4, 363

Подвижного репера метод 4, 363—366

Подвижных сеток метод 4, 366

Подгиперграф 1, 1006

Подготовительная теорема Вейерштрасса 1, 617
- - - для формальных степенных рядов 1, 618; 5, 643

Подграф 1, 1106
- критический 1, 1112
- остовный 1, 1106

Подгрупп ряд 4, 367

Подгрупп система 4, 368

Подгруппа 4, 369
- абнормальная 1, 32
- абсолютно выпуклая 1, 792
- алгебраическая 1, 142
- борелевская 3, 280
- Бореля 1, 538
- Браве 3, 108
- вербальная 1, 654
- вполне характеристическая 1, 764
- выпуклая 1, 792
- главных аделей 1, 96
- декартова 1, 654
- диагональная 2, 123
- дискретная 2, 198
- допустимая 4, 22
- достижимая 2, 377; 5, 266
- евклидовых движений 1, 363
- изолированная 2, 504
- изотропия 3, 260
- инвариантная 2, 531, 534; 3, 1073
-, индекс 4, 369; 5, 36
- инерции 2, 561
- Картана 2, 737
- Картера 2, 740
- конечного индекса 4, 369
- Леви 4, 193
- Ли 3, 255
- локальная 3, 426
- максимальная 3, 482
- - компактная 3, 482
- массивная 1, 448
- минимальная нормальная 3, 684
- нормальная 3, 1051, 1073
- норменная 3, 1076
- однопараметрическая 3, 1171
- относительно выпуклая 1, 792
- параболическая 1, 538; 4, 192
- параллельных переносов 1, 362
- периферическая 5, 477

- пронормальная 4, 697
- *равномерная* 4, 787
- самосопряженная 3, 1073; 5, 91
- сервантная 4, 1116; 5, 880
- Силова 4, 1129
- силовская 4, 1129
- сопряженная 5, 91
- стационарная 2, 521; 5, 163, 207
- строго изолированная 5, 522
- субабнормальная 1, 32
- субнормальная 5, 266
- Томпсона 5, 363
- Фиттинга 5, 626
- Фраттини 5, 649
- характеристическая 5, 756
- холлова 5, 789
- целых аделей 1, 96
- центроаффинная 1, 363
- чистая 4, 1116; 5, 880
- эквиаффинная 1, 363

l-подгруппа 5, 256

p-подгруппа 1, 1142

π-подгруппа 1, 1142; 4, 851

Подгруппы индекс 4, 369; 5, 36

Подера 4, 370

Подидемпотентное кручение 4, 807

Подкасательная и поднормаль 4, 370

Подкатегория 4, 370
- корефлексивная 4, 978
-, локализация 1, 21, 1134; 3, 420
- плотная 3, 420
- полная 4, 417
- - плотная 1, 21
- рефлексивная 4, 978
- Серра 4, 1119

Подквадрат латинский 3, 207

Подквазигруппа нормальная 2, 802

Подкольцо 2, 967

Подкомплекс 2, 880, 995
- полный 4, 411

Подкручивающий обратимый пучок Серра 3, 1130

Подматрица 4, 371

Подмногообразие 4, 371
- *исключительное* 2, 675
-, коразмерность 3, 14
-, *кривизна* 3, 100
-, степень 3, 159
-, стягивание 2, 675

C^k-подмногообразие 2, 356

Подмногообразий решетка 1, 186

Подмножество 3, 759
- выпуклое 1, 798
-, деформация 2, 108
- дискриминантное 4, 118
- *дополнительное* 2, 373
- замкнутое неограниченное 5, 279
- инвариантное 4, 153
- конструктивное 2, 1054
- плотное 1, 785
- поглощающее 5, 378
- радиальное 5, 378
- разрешимое 2, 1059
- связное 4, 1096
- симметричное 4, 1149
- симплициальное 4, 1161
- тотальное 1, 644

Подмодуль 3, 780; 4, 372
- вполне изотропный 1, 483
- изотропный 1, 483
- ортогональный 1, 484
- примарный 4, 635
- чистый 5, 879

Поднормаль 4, 370

Поднятие кривой горизонтальное 4, 1098

Подобие 3, 370; 4, 373
- групп подстановок 4, 382
- прямое 2, 138

Подобия критерий 4, 374

Подобия теория 4, 373—376

Подобная область 4, 376
- однолистной риманова поверхность 4, 1018

Подобная статистика 4, 377

Подобное отображение 4, 378

Подобно-расположенные фигуры 1, 1061

Подобные геометрические объекты 1, 936

Подобные матрицы 4, 377
- многочлены 3, 753

Подобные множества 4, 377

Подобные операторы 4, 378
- по Витту квадратичные формы 2, 778
- преобразования 4, 600
- фигуры 1, 1061; 4, 373

Подобный критерий 4, 378

Подобъект объекта категории 4, 378

Подошва ручки 4, 1058

Подошвенная сфера 4, 1058

Подпокрытие 4, 393

Подполе 4, 397
- алгебраически замкнутое 4, 909

Подполиэдр 4, 410

Подпредставление 4, 595

Подпредставление представления 4, 378

Подпрограмма 5, 167

Подпространство 1, 643, 674, 980; 3, 308
- аналитическое 1, 286
- аффинное 1, 362; 3, 345
- векторное 1, 643; 3, 350
- весовое 1, 673
- вырожденное 4, 718
- горизонтальное 4, 154
-, дефект 1, 981
- дефектное 2, 100; 4, 904
- дефинитное 4, 718
- допустимое 2, 534
-, дуальная пара 1, 986
- изотропное 4, 718
- инвариантное 2, 534; 3, 351, 371
-, коразмерность 1, 981; 3, 14
- корневое 3, 20
- линейное 3, 350
- нейтральное 4, 718
- нормально расположенное 3, 1062
- отрицательное 4, 718
- положительное 4, 718
- проекционно полное 4, 718
- собственное 5, 65
- спектральное 5, 114
-, факторразмерность 3, 14
- чебышевское 5, 850

Подпроцесс марковского процесса 5, 693

Подпрямая сумма 4, 379

Подпрямое произведение 4, 379

Подпучок 4, 767

Подразбиение ребра графа 1, 1107, 1116

Подразделение 4, 379
- барицентрическое 1, 394; 4, 1160
- звездное 3, 153; 4, 413
- комплекса 3, 152

Подранг 4, 860

Подрасслоение 1, 646

Подрешетка 4, 380

Подсистема алгебраической системы 1, 155

Подстановка 4, 256
- дифференциальная 5, 677
- допустимая 2, 804
- интегральная 5, 677

Подстановка множества 4, 380—382
- мономиальная 3, 811
-, ограниченная знакопеременная группа 4, 1142
-, - симметрическая группа 4, 1142
- *полная* 2, 804
- ряда в ряд 5, 219
-, финитная группа 4, 1142
- формальных языков 5, 644
-, цикловая запись 4, 1141
-, цикловой тип 4, 1141

Подстановки аксиома 1, 105

Подстановки правило 4, 382

Подстановок группа 4, 382—384
- система 5, 455

Подсхема замкнутая 2, 438
- симплициальная 4, 1159

Подформульности свойство 1, 920; 4, 384

Подходящая дробь 4, 384; 5, 812

Подчинения отношение 4, 384

Подчинения принцип 4, 384

Подчиненная функция 4, 384

Подчиняющая функция 4, 384

Подъем индекса 5, 328
- схемы 2, 105

Подъема метод 2, 343; 3, 490

Подъязык 4, 642

Подэра 4, 370

Позитивная последовательность 4, 385

Позитивное логическое исчисление 3, 418

Позитивное пропозициональное исчисление 4, 386
- собственное значение 4, 434, 435

Позиционная игра 2, 471; 4, 386
- система счисления 5, 315

Позиционное управление оптимальное 4, 42

Позиция 1, 223; 4, 386
- в теории игр 2, 471
- выигрышная 2, 475
- игры 2, 330

Поиск детальный 3, 757
- обзорный 3, 757
- симплексный 4, 1154

Пойа процесс 4, 388

Пойа распределение 4, 387
- регулярная частотная функция 2, 960

Пойа теорема в комбинаторике 2, 978; 4, 388
- - для случайных блужданий 5, 14
- - об аналитическом продолжении 2, 41
- теория перечисления 2, 977
- урновая схема 4, 387

Показатели особые 4, 132

Показатель генеральный 2, 772; 3, 330
- группы 4, 159, 265
- искажения 1, 113
- итерации 2, 691
- Ляпунова 3, 471
- особый 3, 330
- сходимости последовательности 2, 714
- устойчивого распределения 5, 557
- Фурье 4, 544
- характеристический 2, 765; 3, 313, 315; 5, 764
- центральный 5, 809

Показательная гиперболическая функция 4, 27
- матрица 3, 312
- параболическая функция 4, 27
- плотность 1, 866
- форма комплексного числа 2, 1009

Показательная функция 4, 390

Показательно-диофантово множество 2, 174

Показательное распределение 4, 391
- уравнение 5, 540

Показательные оценки для вероятности больших отклонений 1, 522

Покоординатного спуска метод 4, 391

Покоя точка 1, 82; 2, 533; 4, 784
- энергия 4, 146

Покрываемое множество 4, 395

Покрывающее множество 4, 395

Покрывающий элемент 4, 392

Покрытие 4, 821; 5, 365, 392
- в комбинаторной геометрии 4, 394
- Витали 1, 709
-, Гейне — Бореля теорема 1, 911
- звездно вписанное 4, 794
- звездное 4, 203
-, Кёбе теорема 2, 841
- консервативное замкнутое 4, 203
- локально конечное 3, 433
- σ-локально конечное открытое 4, 203

максимальное 1, 560
- минимальное 1, 560

Покрытие множества 1, 559; 4, 392—394
- неприводимое 1, 560
- равномерное 4, 794
- топологического пространства 4, 392

e-покрытие 3, 216

Покрытий метод 3, 756

Покрытия и упаковки 4, 394—396

Покрытия теоремы для регулярных функций 4, 396

Поле 4, 397
- *p*-адических чисел 1, 100
- алгебраически замкнутое 1, 178
- алгебраических функций 1, 177
- алгебраических чисел, основные единицы 2, 187
- - -, регулятор 4, 945
- алгебраическое 1, 197
- без характеристики 5, 755
- бесконечной характеристики 5, 755
- бинарное 3, 1044
- векторное 1, 640
- вероятностей 1, 666
- вполне непрерывное 3, 977
- вычетов локального кольца 3, 437
- - нормирования 3, 1078
- - точки 5, 299
- Галуа 1, 848
- гармоническое 1, 650
- геометрических объектов 5, 249
- геометрического объекта 4, 658
- гиперэллиптическое 1, 1011
- глобальное 2, 157; 4, 400
- градиентное 1, 1082; 4, 536
- действительно замкнутое 5, 527
- *деления круга* 2, 82; 3, 120
-, дискриминант 2, 211
-, дискриминант системы элементов 2, 210
- дифференциально-геометрического объекта 1, 938
- дифференциальное 2, 280
- евклидово 2, 398, 1037
-, идеал 2, 482
- интерпретаций 1, 110
- инфинитезимально однородное 4, 208
- калибровочное 5, 1058
- касательное 4, 1210
- квадратичное 2, 783
- *классов в смысле Вебера* 1, 168
- ковариантно постоянное 4, 208
- комплексных чисел 2, 1008
- конечное 1, 848; 2, 1019
- констант 1, 174; 2, 280
- корреляционное 3, 28
- круговое 3, 120
-, круговое расширение 3, 122
- линейных элементов 2, 885
- локальное 3, 439; 4, 400
- минимальное 1, 64
- множеств борелевское 1, 536
- направлений 2, 283, 576, 885; 3, 889
- неабелево числовое 3, 896
- неприводимое 1, 1026
- несовершенное 5, 69
-, нормальное расширение 3, 1068
-, нормирование 3, 1078
- нормированное 3, 1081
-, нуль 3, 1082
- ограниченное 5, 275
- оснащенное 1, 938
-, основные единицы 4, 946
- параллельное 4, 208
- пифагорово 1, 711
- потенциальное 1, 649; 4, 536
- простое 4, 706
- - характеристики *p* 1, 848

Поле разложения многочлена 1, 192; 4, 398
-, размерность 1, 846
-, расширение 1, 850; 4, 908
- рациональных функций 1, 178; 4, 309
- регулирования 1, 63
- сепарабельно замкнутое 4, 1114
- скалярное 4, 1197
- скоростей 3, 1171
- случайное 5, 16
- событий борелевское 1, 536
- совершенное 5, 69
-, совершенное замыкание 5, 70
- соленоидальное 1, 650; 5, 74
- спинорное 5, 139
- суммируемости 5, 275
-, существенное нормирование 2, 129

- сходимости метода суммирования 5, 275
- тензорное 5, 249, 333
- топологическое 5, 386
- трубчатое 5, 74
- упорядоченное 5, 527
- формально действительное 5, 527
- функциональное 1, 178
- - абелево 1, 23
-, характеристика 5, 755
- характеристики нуль 4, 398
- частных дифференциальное 4, 901
- -, единица 2, 400
- числовое 5, 878
- Шварцшильда 5, 890
- экстремалей 5, 955
- эллиптическое 1, 1011
- Якоби 5, 1049
- Янга — Миллса 5, 1058

A-поле 2, 778

σ-поле 1, 536

Полезности теория 4, 399
- функция 3, 587; 4, 399

Полей классов теория 4, 399—402

Полиадическая операция 4, 18

Полианалитическая функция 4, 402

Поливектор 3, 43; 4, 402

Полигамма-функция 1, 869

Полигармоническая функция 4, 403

Полигармоническое уравнение 4, 403

Полигон 4, 404

Поликоническая проекция 2, 754

Поликруг 1, 269; 4, 405
- сходимости 5, 220

Поликруговая область 4, 405

Полилинейная алгебра 4, 406

Полилинейная форма 4, 406
- функция 4, 406

Полилинейное отображение 4, 407
- - кососимметризованное 4, 408
- - симметризованное 4, 408
- тождество 1, 121

Полилинейный оператор 3, 960; 4, 407

Полинильпотентная группа 4, 408
- длина 4, 408

Полинильпотентный ряд 4, 408

Полином 3, 752; 4, 408; 5, 797
- алгебраический 5, 797
- Аппеля 1, 299
- Гончарова 1, 30
- Жегалкина 2, 409
- интерполяционный 2, 622, 631
- Карлемана 2, 727
- наилучшего приближения 3, 868
- приведенный 1, 128
- тригонометрический 5, 438
- Фейера 5, 600
- Хосокавы 1, 233
- Чжэня 5, 864, 865
-, экстремальные свойства 5, 968

Полиномиальная игра 1, 805
- матрица 3, 616
- регрессия 4, 194, 931

Полиномиальная функция 4, 408

Полиномиальное размещение 5, 22

Полиномиальное распределение 4, 409
- тождество 1, 120

Полиномиальный коэффициент 4, 409
- полиэдр 1, 277

Полиномиальный сплайн 4, 604; 5, 143

Полиобласть 4, 405

Полисферические координаты 4, 234

Полициклическая группа 4, 410

Полициклический ранг 4, 410
- ряд 4, 410

Полицилиндр 4, 405

Полицилиндрическая область 1, 500

Полиэдр 3, 151; 2, 996; 4, 410—412, 1160
- аналитический 1, 277
-, гомологии 1, 1043
- Куратовского 3, 150
- полиномиальный 1, 277
- топологический 3, 151
-, триангуляция 2, 997; 5, 434
t-полиэдр 3, 151

Полиэдральная функция 5, 889

Полиэдральная цепь 4, 412

Полиэдральный комплекс 2, 996; 4, 412

Полиэдральный цикл 4, 413

Полиэдрическая область 2, 683

Полиэдрическое исчерпание 2, 683

Полла теорема о квадратичных формах 2, 778

Полячека — Спицера тождество 5, 14

Полная абелева группа 1, 19
- алгебраическая функция 1, 177

Полная аналитическая функция 1, 267; 4, 413—415
- булева алгебра 1, 552
- вариация заряда 2, 444

Полная вариация функции 1, 35; 4, 415
- выпуклая поверхность 1, 788

Полная группа 4, 415
- - движений 2, 22
- - Лоренца 3, 453
- двоякокруговая область 2, 49
- кратно круговая область 3, 89

Полная кривизна 1, 904; 3, 98; 4, 416; 5, 297
- круговая область 3, 89

Полная линейная группа 2, 866; 3, 300, 612, 615; 4, 416
- - -, Гаусса разложение 1, 900
- линейная система 3, 311

Полная мера 3, 639; 4, 417
- минимальная поверхность 3, 689
- независимая система функций 3, 715

Полная неустойчивость 4, 417
- область Гартогса 1, 893
- память 4, 387
- поверхность 4, 165

Полная подкатегория 4, 371, 417
- подстановка 2, 804

Полная проблема собственных значений 4, 417—421
- проективная группа 4, 666

Полная производная функции 4, 421
- псевдобулева алгебра 4, 727

Полная решетка 4, 421
- связность 4, 1093
- симплициальная схема 4, 1159

Полная система вычетов 1, 814; 4, 423; 5, 151

Полная система дифференциальных уравнений 4, 422
- - подгрупп 4, 368
- - собственных функций 5, 654

Полная система функций 4, 100, 423
- статистика 2, 376
- степень одночлена 3, 1184
- структура 4, 421
- сумма вычетов 1, 814
- теория 4, 427
- тригонометрическая сумма 5, 436
- управляемость 4, 48
- флаговая структура 5, 628
- формальная система 4, 851

Полного накопления точка 4, 423

Полное алгебраическое многообразие 4, 423
- включение методов суммирования 1, 718

Полное изменение функции 4, 423
- кольцо матриц 3, 612
- - частных 3, 422
- конструктивное метрическое пространство 2, 1052
- локальное кольцо 3, 438

Полное метрическое пространство 3, 670; 4, 423
- многообразие языков 5, 644

Полное множество 4, 423; 5, 378
- - ортонормированное 1, 980
- по Вейлю пространство 4, 424
- - Дьёдонне пространство 4, 425
- - Райкову пространство 4, 424
- - Чеху пространство 4, 271, 425
- предельное множество 4, 565

Полное приращение 2, 236, 275; 4, 424
- пропозициональное исчисление 4, 699

Полное пространство 3, 639; 4, 424
- -, Бэра теорема 1, 568
- прямое произведение 4, 724

Полное равномерное пространство 4, 425, 795
- расслабление 4, 687

Полное риманово пространство 4, 426, 1004
- семейство распределений 4, 884
- сепарабельное пространство, Гротендика теорема 2, 44
- - -, Эберлейна теорема 2, 44
- симплициальное множество 4, 1165
- соответствие 5, 77
- сплетение групп 5, 147

Полное топологическое пространство 4, 426
- - - векторное 5, 378
- эрмитово ядро 5, 1023

B_r-полное локально выпуклое пространство 5, 383

Полной вероятности формула 1, 659; 4, 426
- индукции аксиома 2, 558
- приводимости принцип 1, 762
- релаксации метод 4, 966

Полнота в математической логике 4, 426—428

Полнота в топологии 4, 428
- гильбертова пространства 1, 979
- дедуктивная 3, 412
- действительных чисел 2, 74

Полноты аксиома 5, 877
- валюативный критерий 4, 423
- проблема 3, 715
- свойство 3, 715
- условие 4, 98

Полные системы автоматов 1, 70

Полный вывод 1, 1092
- граф 1, 1106
- - двудольный 1, 1108

Полный дифференциал 2, 236, 275; 4, 428

Полный интеграл 2, 327, 568; 4, 428
- класс Ω-систем 1, 160
- - Чжэня 5, 864
- латинский квадрат 3, 207
- лифт 3, 262

Полный оператор 4, 428; 5, 116
- подкомплекс 4, 411
- полусимплициальный комплекс 4, 1161
- предел спектра 4, 686
- прообраз 4, 153
- угол выпуклой поверхности в точке 1, 789
- флаг 5, 628
- функтор 5, 686
- четырехвершинник 5, 859
- четырехсторонник 2, 1077
- эллиптический интеграл 5, 991

Половинного деления метод 4, 429

Положение общее 3, 1144

Положительная асимметрия 1, 331
- вариация заряда 2, 444

Положительная вариация функции 4, 430

Положительная корреляция 4, 430
- полутраектория 4, 68; 5, 587
- формула 3, 767

Положительно асимптотическая точка 4, 570
- градуированный модуль 1, 1084
- определенная билинейная форма 2, 563
- - квадратичная форма 2, 778
- - матрица 4, 431

Положительно определенная форма 4, 430

Положительно определенная функция 4, 431; 5, 739
- - эрмитова матрица 5, 1019
- определенное самосопряженное линейное преобразование 4, 1074
- - финслерово пространство 5, 621

Положительно определенное ядро 4, 431
- - - эрмитово 5, 1023

Положительно определенный оператор 4, 432
- полуопределенная эрмитова матрица 5, 1019
- полуопределенное самосопряженное линейное преобразование 4, 1074
- устойчивая по Лагранжу траектория 5, 567
- - по Пуассону точка 4, 570

Положительное изменение функции 4, 430
- отображение 4, 434
- подпространство 4, 718

Положительное расслоение 4, 432
- число 2, 73, 76, 77
- эрмитово ядро 5, 1023

Положительности аксиома гармонического пространства 1, 889
- конус 2, 781

Положительный градуированный объект 2, 1001
- дивизор 1, 144; 2, 129, 131
- индекс инерции 2, 778
- квадратичный дифференциал 2, 786

Положительный конус 2, 1075; 4, 433, 470; 5, 526
- - группы 5, 833
- линейный метод приближения 4, 609
- - оператор 4, 470
- - функционал 4, 1149

Положительный оператор 4, 434, 905
- собственный вектор 4, 435

Положительный функционал 4, 435
- эксцесс 5, 969

Положительный элемент алгебры 4, 436

Полос метод 2, 607; 4, 436, 437

Полоса 4, 437, 471
- асимптотическая 4, 438
- геодезическая 4, 438
- критическая 2, 113, 189
- периодов 4, 268
- поверхностная 4, 437
- фокальная 2, 325
- характеристическая 2, 326; 5, 756

Полосообразная область 1, 1023

Полосы уравнение 2, 325
- условие 2, 325

Полугеодезические координаты 4, 438

Полугиперболическое пространство 4, 439

Полугруда 1, 1135

Полугрупп многообразие 4, 440

Полугруппа 4, 441—445
- автомата 1, 67
- архимедова 1, 328, 329
- бипростая 4, 702
- бициклическая 1, 499
- Брандта 1, 544
- Бэра — Леви 4, 703
- бэровская 4, 982
-, вложение в группу 1, 722
- вполне полупростая 1, 1019
- - простая 1, 762
- - регулярная 1, 762; 2, 883
- выпукло идеально простая 5, 524
- гауссова 1, 905
-, главный фактор 1, 1019
-, Грина отношения эквивалентности 1, 1121
-, идеальный ряд 2, 485
-, - фактор 1, 1019
- идемпотентная 2, 486
- изометрий 4, 1127
- инверсная 2, 545
- квазипериодическая 4, 267

- клиффордова 2, 883
- левых нулей 2, 487
- локально конечная 3, 432
- матричного типа рисовская 4, 1034
- моногенная 3, 802
- монотетическая 5, 373
- мультипликативная 3, 840

Полугруппа нелинейных операторов 4, 445—447
- неприводимая 5, 373
- нильпотентная 3, 1042
- нормальная 4, 1127
-, нормальный комплекс 3, 1073
- однопараметрическая 3, 1172

Полугруппа операторов 4, 447—454
-, Оре условие 1, 723
- переходных вероятностей 4, 261
- периодическая 4, 266
- полупростая 1, 1019
- полутопологическая 5, 374
- правых нулей 2, 487
-, представление 4, 447, 587
- преобразований 4, 600
- примитивная 4, 935
-, производящий оператор 4, 692
- простая 4, 701
- 0-простая 5, 524
-, 0-прямое объединение 4, 723
- прямоугольная 2, 487
-, расширение 4, 907
- регулярная 4, 935
-, регулярный элемент 4, 945
-, Риса теорема 1, 762
- с возрастающим аннуляторным рядом 3, 1041
- с отделяющейся групповой частью 3, 1131
- с правой обратимостью 4, 702
- с правым делением 4, 702

Полугруппа с условием конечности 4, 454—456
- самосопряженная 4, 1127
- свободная 4, 1083
-, связка 4, 1090
-, сдвиг 4, 1099
- сепаративная 4, 1115
- сжатий 4, 1126
- - вполне неунитарная 4, 1127
- сильно непрерывная 4, 1130
- симметрическая 4, 599
- сингулярная 4, 487
- слабо равномерная 5, 372
- - редуктивная 4, 1100
-, сплетение 5, 147
-, тип 4, 1130
- топологическая 5, 372
- Тосье 4, 703
- унитарная 4, 1127
- упорядоченная 5, 523
- упорядочиваемая 5, 523
- феллеровская 4, 535
- финитно аппроксимируемая 5, 620
-, характер 5, 373, 748
- целозамкнутая 5, 525
- циклическая 3, 802; 5, 816
- четырехспиральная 4, 702
- чистая линейная 4, 553
- эндоморфизмов 5, 1001
-, ядро 3, 692; 5, 1044
1-полугруппа 5, 373
n-полугруппа 4, 444

Полугруппа-распределение 4, 451

Полугрупповая алгебра 4, 456

Полудедекиндова решетка 4, 456
- структура 4, 456

Полуевклидово пространство 4, 456

Полуинвариант 4, 457
- Вороного 2, 789
- линии 2-го порядка 3, 388
- поверхности 2-го порядка 4, 344

Полуканонический репер 4, 365

Полукольцо 2, 968; 4, 458
- множеств 3, 637

Полуконечная алгебра Неймана 3, 921

Полуконечный след 4, 1209

Полукруговая область 1, 893

Полукубическая парабола 4, 458

Полулинейное отображение 4, 458
- преобразование 4, 458, 679

Полулокальное кольцо 3, 439

Полумарковский процесс 4, 458

Полумартингал 4, 459

Полумодулярная решетка 4, 456
- структура 4, 456

Полумонотонность нормы 2, 1075

Полунаследственное кольцо 4, 459

Полунеевклидово пространство 4, 457

Полунепрерывная матрица 4, 461

Полунепрерывная функция 4, 460
- -, Бэра теорема 1, 568

Полунепрерывное отображение 4, 460
- - многозначное 3, 720

Полунепрерывное разбиение 4, 460

Полунепрерывность сверху 5, 385

Полунепрерывный метод суммирования 4, 460
- оператор 4„ 19

Полунорма 3, 374, 1048; 4, 461
- весовая 1, 674

α-полунорма Гёльдера 1, 915

Полуограниченный оператор 4, 462
- -, расширение 4, 905
- снизу оператор 4, 905

Полуопределенная форма 4, 462

Полуоси гиперболоида 1, 1000

Полуось эллипсоида 5, 978

Полупервичное кольцо 4, 237

Полупериодическое условие 5, 915

Полуплоскость 4, 462
- голоморфности 2, 184
- сходимости ряда Дирихле 2, 183

Полуподобие унитарное 5, 507

Полуправильные многогранники 3, 711; 4, 463

Полуправильный многоугольник 3, 750

Полупростая алгебра 1, 383; 4, 463, 804
- - Ли 3, 272

Полупростая алгебраическая группа 4, 464

Полупростая группа 4, 465, 804
- - Ли 3, 257, 276
- компонента разложения Жордана 2, 421

Полупростая матрица 4, 465
- полугруппа 1, 1019

Полупростое кольцо 4, 465
- линейное преобразование 4, 466

Полупростое представление 4, 465

J-полупростое кольцо 2, 820

Полупростой модуль 4, 465
- ранг 4, 860
- - алгебры Ли 4, 861

Полупростой элемент 2, 423; 4, 465

Полупростой эндоморфизм 2, 421; 4, 466

Полупространство опорное 1, 797

Полупрямая 4, 466

Полупрямое произведение 4, 466, 912

Полупсевдоевклидово пространство 4, 466

Полупсевдориманово пространство 4, 467

Полурегулярная группа 4, 383

Полурегулярный тор 4, 945

Полуредуктивная группа 4, 946

Полурефлексивное пространство 2, 45
- - локально выпуклое 5, 384

Полурешетка 2, 486; 4, 467

Полуриманово пространство 4, 467

Полусимплектическое преобразование 4, 468

Полусимплектическое пространство 4, 468

Полусимплициальное множество 4, 1161

Полусимплициальный комплекс 4, 469, 1161

Полусовершенное кольцо 4, 469

Полуспинор 5, 140

Полуспинорное представление 5, 140

Полустабильное векторное алгебраическое расслоение 1, 638

Полустохастическая матрица 4, 261

Полуструктура 2, 486; 4, 467

Полутопологическая полугруппа 5, 374

Полуторалинейная форма 4, 469
- -, дискриминант 2, 210

Полутраектория 2, 767; 5, 587
- положительная 4, 68

Полу-Туэ система 5, 455

Полуупорядоченное пространство 4, 469—473

Полуустойчивый предельный цикл 4, 576

Полуформальная аксиоматическая система 1, 434
- система 4, 1181
- теория 1, 434; 5, 257

Полуфредгольмов оператор 3, 1062

Полуцелого порядка цилиндрическая функция 5, 822

Полуцепное кольцо 4, 473

Полуцепной модуль 4, 473

Полуэллиптическое пространство 4, 473

Польке — Шварца теорема о проекциях 1, 113; 4, 474

Полюс 2, 796, 1032; 4, 115, 474, 809; 5, 291
- алгебраической функции 1, 176
- аналитической функции 1, 264
- гиперплоскости 4, 477
- графа 4, 968
- входной 4, 967
- выходной 4, 968
- интерполяции 2, 618
- инверсии 2, 544
- контактной схемы 2, 1061
- координат 4, 480
- матрицы 1, 251
- мероморфной функции 3, 649
- на плоскости Римана 4, 990
-, порядок 4, 504
- сети 4, 1121
- сингулярного интеграла 4, 1176

Полюсник контактный 2, 1061

Поля аксиомы 5, 877

Поля оператор 4, 475
- теория квантовая 2, 829

Поляра 2, 796, 1032; 4, 475
- вторая 3, 140
- гармоническая 3, 140
- коническая 3, 140
- множества 2, 44
- на плоскости Римана 4, 990
- первая 3, 140
- прямолинейная 3, 140
- точки 4, 477

Поляризации степень 4, 477

Поляризация главная 4, 477
- точки 4, 64
- элемента 1, 449

Поляризованное алгебраическое многообразие 4, 476
- многообразие Ω-систем 1, 186
- семейство 4, 477

Поляритет 4, 477

Полярная гомология 2, 1085
- особенность 4, 1206
- плоскость 4, 476
- система 4, 774
- форма 2, 796, 1032
- - комплексного числа 2, 1009

Полярное множество 4, 478
- отображение 5, 298
- преобразование 4, 477

Полярное разложение 4, 479
- расстояние 5, 291

Полярное соответствие 4, 480
- ядро 2, 605

Полярные выпуклые тела 1, 797

Полярные координаты 4, 480
- - геодезические 4, 438

Полярный период абелева дифференциала 1, 14
- - интеграла 1, 16
- радиус 4, 480
- угол 4, 480

Помехоустойчивость 4, 481

Помпею формула 3, 55

Понижающий множитель 5, 442

Понселе — Штейнера построения 1, 933

Понтрягина алгебра 5, 790

Понтрягина двойственность 1, 231; 4, 481—483
- -, теорема для топологических полугрупп 5, 373

Понтрягина инвариант 4, 483

Понтрягина квадрат 4, 483

Понтрягина класс 4, 484—487; 5, 762
- - симплектический 5, 761

Понтрягина поверхности 4, 487

Понтрягина принцип максимума 4, 487—489

Понтрягина пространство 4, 489—491
- степень 4, 484
- теорема двойственности 1, 231, 882
- - о бордантных многообразиях 4, 481
- - об инвариантах 4, 483

Понтрягина характер 4, 491

Понтрягина число 4, 491
- экстремаль 4, 50, 488

Понтрягина — Куратовского теорема (критерий) о графах 1, 1109, 1119

Понтрягина — Нёбелинга теорема о компактах 2, 990

Понтрягинская форма задачи Лагранжа 3, 170

Понтрягинского типа задача 4, 489

Попарная независимость событий 3, 914

Попарно ортогональные квадраты 4, 90

Поперечная проекция 2, 753

Поперечник 4, 622
- гомологический 1, 1066

Поперечник множества 4, 492—495
- p-размерный 1, 1060

Попова критерий 5, 564

Пополнение алгебры 4, 1149
- Мак-Нейла 4, 496
- мальцевское 3, 435
- множества 4, 422
- пространства 1, 666; 3, 671

Пополнение равномерного пространства 4, 496

Пополнение сечениями 4, 496

Пополнение топологического пространства 4, 496; 5, 378

Пополнения метод 4, 496

Пополняющий гомоморфизм 4, 1084

Поправка Йетса 2, 693

Поправление 1, 503

Пористое множество 4, 497, 569

Пористости точка 4, 497

Пороговая функция 5, 302

Пороговый элемент 5, 302

Порождающая грамматика 1, 1092
- система 2, 770

Порождающий оператор 1, 373

Порция множества 4, 497

Порядка аксиома 5, 877
- отношение 4, 505

Порядка соотношение 4, 497

Порядковая статистика 4, 498—501
- сходимость 4, 470, 1037

Порядковая топология 4, 501

Порядково полное упорядоченное векторное пространство 4, 470

Порядковое число 4, 501—503
- -, Кёнига теорема 2, 724

Порядковый гомоморфизм 5, 522, 524
- признак 3, 733

Порядковый тип 4, 503

Порядковых автоморфизмов группа 1, 199

Порядок 4, 504, 505
- алгебраической сети 2, 804
- алгебраической системы 1, 155

- алгебраической точки ветвления 1, 174, 176
- аппроксимации 4, 627
- борелевского множества 1, 536
- величины 4, 498
- гиперповерхности 1, 1009
- группы 2, 1016
- дифференциального оператора 2, 345
- - уравнения 2, 285, 298
- - - линейного 3, 339
- канонического произведения 2, 714
- коварианта 2, 896
- конгруэнции 2, 1014
- кривой 4, 309
- лексикографический 3, 233
- метрический 3, 659
- нелинейности 1, 936
- нуля (полюса) мероморфной функции 3, 649
- подстановки 4, 381
- полюса 4, 475
- прообразования эллиптических функций 5, 987
- приближения 4, 627
- псевдодифференциального оператора 4, 735
- пучка 4, 773
- разветвленности 5, 971
- связности 3, 748
- - области 3, 1098
- тета-ряда 5, 346
- тета-функции 5, 347
- целой функции 5, 798
- частичный 5, 836
- числа 2, 443
- эллиптической функции 5, 986

R-порядок целой функции 2, 185
Последействия эффект 4, 388
Последняя теорема Пуанкаре 4, 751
Последования отображение 2, 338; 4, 505
- функция 4, 505, 576
Последователь порядкового числа 4, 501
Последовательно аннулирующая связка 4, 1091
Последовательного улучшения плана метод 4, 1152
Последовательное правило 4, 508
Последовательной верхней релаксации метод 4, 966, 1077
Последовательностей категория 4, 506
Последовательностная функциональная система 5, 695
Последовательность 4, 506
- абсолютно беспристрастная 1, 38
- асимптотическая 1, 333
- бесконечно большая 4, 557
- бесконечно малая 4, 557
-, верхний предел 1, 669, 670
- возвратная 1, 740
- возрастающая 1, 749
- выпуклая 1, 792
- гомологическая 1, 1045, 1052, 1058; 2, 1000, 1002
- двойная 2, 24
-, двойной предел 2, 28
- дискретно компактная 5, 311
- - сходящаяся 5, 311
- интерполяционная 2, 621
- - универсальная 5, 789
- итерационная 2, 690
- когомологическая 1, 1046, 1053; 2, 925, 1001
- компактно сходящаяся 5, 311
- Коши 3, 61; 5, 682
- кратная 3, 88
- лакунарная 3, 183
- Лапласа 3, 196
- максимизирующая 3, 489
- Мейера — Вьеториса 1, 1048
- минимизирующая 1, 303; 3, 489, 699
- монотонная 3, 813
- мультипликативная 5, 763
- наилучших приближений 3, 873
- невозрастающая 5, 466
- неубывающая 1, 749
-, нижний предел 1, 669, 670
- обобщенная 3, 890; 5, 307
- обучающая 4, 872
- определенно расходящаяся 5, 1042
-, плотность 5, 894
- позитивная 4, 385
-, показатель сходимости 2, 714
-, предел 4, 556, 559, 562
-, равномерная сходимость 4, 787
- расходящаяся 4, 896
-, расщепляемость 4, 632
- расщепляющаяся 4, 913
- регулярно сходящаяся 5, 311
- рекуррентная 1, 740
- серий 4, 1118
- случайная 1, 663; 5, 10, 23
- собственно сходящаяся 5, 311
- спектральная 5, 106
- стохастическая 5, 240
- строго возрастающая 1, 749
- - убывающая 5, 466
- суммирование 5, 270
- сходящаяся 5, 306, 309
- точек равномерно распределенная 4, 876
- точная 5, 409
- трансфинитная 4, 501; 5, 421
- убывающая 5, 466
- устойчиво сходящаяся 5, 312
- фундаментальная 2, 76; 3, 670; 5, 682
- шпеккерова 5, 896

P-последовательность для мероморфной функции 4, 569
α-последовательность 4, 502
Последовательный анализ 4, 507—511
- минимум лучевой функции 1, 947
Последовательных приближений метод 2, 690; 4, 511
Поста алгебра 3, 714; 4, 513
- *m*-значная логика 3, 719
- исчисление 4, 513
Поста каноническая система 4, 513
Поста класс 3, 716; 4, 513
Поста машина 4, 515
Поста нормальная система 4, 515
- нормальное исчисление 4, 515
- нумерация 3, 1086
- проблема 3, 1003
- - о сводимости 4, 958
Поста решетка 4, 515
Поста система продукций 4, 515
- теорема о перечислимых множествах 4, 265
Постепенный переход к пределу 4, 1043
Постникова квадрат 4, 515
Постникова система 1, 1070; 4, 515—518
Постниковский фактор 4, 516
Постоянного охвата тело 4, 519
Постоянное отображение 4, 153
Постоянной кривизны пространство 3, 100; 4, 518
Постоянной ширины кривая 4, 519
Постоянной ширины тело 4, 519
- яркости тело 4, 519
Постоянный пучок 4, 766
Постоянство растяжений 2, 1092
Постулат 2, 368; см. также соответствующее название
Постулации формула Кэли — Нётера 1, 150
Постусловие программы 4, 652
Постфиксная операция 4, 18
Посылка правила 1, 920
- правила вывода 1, 780
Потенциал 1, 890; 4, 519, 533
- абелев 2, 239
- бесселев 1, 458
- векторный 1, 650; 4, 520
- волновой 3, 609
- двойного слоя 2, 26; 4, 524
- - - Грина 4, 529
- - - логарифмический 4, 524
- - - ньютонов 4, 524
- - -, прямое значение 4, 525
- диполя 3, 843
- емкостный 2, 403, 404
- запаздывающий 2, 441, 860
- квадруполя 3, 843
- конечнозонный 3, 31
- логарифмический 3, 410
- - масс 4, 524
- меры 4, 529
- мультиполя 3, 843
- нелинейный 3, 961
- ньютонов 3, 1094
- объёмный 3, 1151; 4, 524
- - Грина 4, 529
- - ньютонов 4, 524
-, плотность 4, 524
- поверхностный 4, 341
-, полярное множество 4, 478
- простого слоя 4, 704
- - - логарифмический 4, 524
- - - ньютонов 4, 524
- - -, прямое значение нормальной производной 4, 525
- - - тепловой 4, 705
- равновесный 2, 403, 404; 4, 528, 1046, 1047
- распределения 4, 530
- Рисса 4, 1036
- риссов 2, 384
- Робена 4, 528, 1046
- скалярный 1, 650; 4, 520, 536
- тепловой 3, 609
- термодинамичесский 5, 171, 340
- функции 4, 262

α-потенциал 4, 1036
Потенциала теории обратные задачи 4, 520—523
Потенциала теория 4, 523—531
Потенциала теория абстрактная 4, 531—535
Потенциалов метод 4, 535; 5, 420
Потенциальная бесконечность 1, 44, 45
- помехоустойчивость 4, 481
Потенциальная сеть 4, 536
- функция 4, 519, 536
Потенциальное поле 1, 649; 4, 536
- - векторное 3, 202
Потенциальный оператор 3, 960, 947; 4, 537
Потерь функция 4, 537
Поток 3, 1170; 4, 538; 5, 371
Поток в интуиционистской математике 4, 538
Поток в сети 4, 539
Поток векторного поля 1, 650; 4, 340, 537
- входной 3, 542
- вызовов входящий 3, 541
- геодезический 1, 928
- главный 4, 538
- измеримый 2, 499
- касательный 2, 756
-, монотонная эквивалентность 5, 1011
- на торе 2, 338
- непрерывный 3, 993
- ориклический 4, 73
- простейший 4, 703
- пуассоновский 3, 542; 4, 763
- разрешимый 4, 852
- специальный 5, 137
- топологический 3, 994
- фазовый 1, 83
- финитарный 1, 613

K-поток 4, 1194
Потоковый анализ программы 4, 644
- метод прогонки 4, 643
Поточечная сходимость 4, 540; 5, 308
Поточечной сходимости топология 4, 540, 716; 5, 382
Похгаммера уравнение 4, 541
- функция 1, 804

Почленное дифференцирование рядов 4, 1069
- интегрирование рядов 4, 1069
Почти всюду 3, 639; 4, 541
- гамильтонова структура 4, 1156
- изометричные банаховы пространства 1, 390
- инвариантная функция 4, 598
- инвариантный элемент 4, 279

Почти комплексная структура 4, 541
- кроссово многообразие групп 1, 1137
- кэлерова структура 5, 1021
- линейная система 2, 816
- нормальная формула 2, 1047

Почти период 4, 543
Почти периодическая функция 1, 375; 4, 543—545
- - - абстрактная 3, 1119
Почти периодическая функция аналитическая 4, 545
- - - асимптотическая 3, 1120
- - - Бора 1, 532
- - -, Дирихле ряд 2, 186
- - - комплексная 1, 382

Почти периодическая функция на группе 3, 1119; 4, 546
- - - - - правая 4, 546
- - - обобщенная 3, 1118
- - - равномерная 1, 532
- периодические функции Безиковича 1, 400
- - - Боля 1, 530
- - - Бохнера 1, 542
- - - Вейля 1, 629
- - - Степанова 5, 216
- периодическое решение 3, 75

Почти приводимая линейная система 4, 547
Почти простое число 4, 548
Почти симплектическая структура 4, 548
- чебышевское множество 5, 851
- эрмитова связность 5, 1020
- - структура 5, 1021

N-почти периодическая функция Левитана 3, 1120
Почтикольцо 2, 968; 4, 549
«Почтовый ящик» 4, 649
Пояс вокруг компакта 1, 1060
Пояс симплекса 3, 153; 4, 550
Правая геодезическая кривизна 1, 924
Правая группа 4, 550
- единица 2, 400; 3, 790
- *F*-квазигруппа 2, 803
- конгруэнция 1, 1123
- мера Хаара 3, 644
- полуплоскость 4, 462
- почти периодическая функция на группе 4, 546
- прогонка 4, 643
- производная 2, 272; 3, 1184
- трансляция 2, 802
- тройка векторов 1, 634

Правдоподобия максимального метод 3, 483
- отношение 5, 172

Правдонодобия уравнение 3, 483; 4, 551
- функция 2, 645; 3, 483; 4, 176; 5, 173
- - логарифмическая 2, 645

Правило — см. соответствующее название
Правильная аналитическая кривая 1, 246
- вершинная (реберная) раскраска графа 1, 1113
- граничная точка 3, 968
- дробь 2, 389
- - цепная 5, 813
- замкнутая кривая типа Пеано 4, 230

Правильная интерпретация 4, 551
- конфигурация 2, 1077

Правильная линейная система 4, 551
- подалгебра булевой алгебры 1, 552
- призма 4, 633
- ткань 5, 355
- точка аналитической функции 1, 264
- укладка графа 1, 1115
- функция 4, 937
- цепная дробь 5, 813

Правильно сходящийся ряд 4, 791
Правильное вложение 2, 138
- пространство близости 1, 503
- разбиение 4, 810

Правильные многогранники 3, 712; 4, 552
Правильные многоугольники 3, 750; 4, 553
Правильный гиперболоид 1, 1000
- коммутатор 1, 379
- конус 2, 1076
- многогранный угол 3, 712

Правого сдвига оператор 3, 1111, 1113

Правое деление формальных языков **5**, 644
- крыло слова **1**, 772
- обратное отображение **3**, 1133
- примитивное кольцо **4**, 637
- совершенное кольцо **5**, 68
- топологическое векторное пространство **5**, 377
- цепное кольцо **5**, 815
- ядро **3**, 460
- - **билинейного** отображения **1**, 484
- - **билинейной** формы **1**, 483
Правозакрученная винтовая линия **1**, 706
Правоинвариантная мера Хаара **5**, 741
- метрика **5**, 625
Правоинвариантное среднее **2**, 534
Правоинвариантный интеграл **2**, 531
Правоконтекстная грамматика **1**, 1094
Правопримитивный идеал **4**, 638
Праворегулярная функция гиперкомплексного переменного **1**, 1007
Правосингулярная полугруппа **2**, 487
Правоупорядоченная группа **4**, 553
Правый аппроксимативный предел **1**, 305
- идеал **2**, 481
- - минимальный **3**, 693
- *A*-модуль **3**, 777
- нуль **3**, 1082
- - категории **5**, 616
- обратный линейный оператор **3**, 370
- *G*-объект категории **1**, 1018
- поворот кривой **1**, 790
- регуляризатор оператора **4**, 1175
- символ оператора **4**, 1134
- смежный класс **5**, 36
- топологический модуль **5**, 377
- цоколь **3**, 693
- частный элемент **1**, 1138; **5**, 525
Прандтля уравнение **4**, 554
Прандтля число **4**, 554
Превосходное кольцо **4**, 554
Предабелева категория **1**, 89
Предбаза **4**, 555
- топологии **1**, 671
Предваренная форма **4**, 556
- - нормальная **4**, 555
Предваренная формула **4**, 555
Предгеометрия **2**, 969
Предгильбертово пространство **1**, 979; **4**, 556
Преддвойственное пространство **3**, 920
Предел **4**, 556—563
- аппроксимативный **1**, 304
- асимптотический **1**, 335
- в компактно открытой топологии **4**, 954
- двойной **2**, 28
- доверительный **2**, 367, 615; **3**, 923
- индуктивный **2**, 557; **3**, 428; **5**, 381
- нижний **3**, 1036
- обратного спектра **5**, 100
- обратный **4**, 683
- односторонний **3**, 1183
- повторный **4**, 349
- последовательности верхний **1**, 669, 670
- - нижний **1**, 669, 670
- проективный **3**, 428; **4**, 683; **5**, 381
- прямого спектра **5**, 99
- система Постникова **4**, 515
- слева **3**, 1184
- справа **3**, 1184
- толерантный **5**, 359
- тонкий **5**, 365
- функции верхний **1**, 670
- -, **Коши критерий** **3**, 56
- - нижний **1**, 670
- -, **Фату теорема** **1**, 31
- частичный **5**, 836
Предельная алгебра **2**, 108
- линия **3**, 399; **4**, 73
- поверхность **3**, 399
- сфера **5**, 288
- теорема Пуассона **4**, 759
- - центральная **5**, 804
- точка Вейля **5**, 916
Предельная точка множества **4**, 563
Предельная точка траектории **4**, 563
- формула Лапласа **1**, 904
α-предельная точка **4**, 563
ω-предельная точка **4**, 563
Предельно ограниченная система **2**, 227
- постоянная случайная величина **1**, 524
Предельного поглощения принцип **4**, 563—565
Предельное значение **4**, 565
- кардинальное число **2**, 724
- множество группы **2**, 875
Предельное множество траектории **4**, 570
- - фуксовой группы **5**, 678
Предельное множество функции **4**, 565—570
- порядковое число **4**, 501
α-предельное множество **4**, 563, 570
ω-предельное множество **4**, 563, 570
Предельной амплитуды принцип **2**, 495; **4**, 571
Предельные теоремы локальные **3**, 443
Предельные теоремы теории вероятностей **1**, 662; **4**, 572—575
Предельный конус **4**, 575
- круг Вейля **5**, 916
- переход термодинамический **5**, 341
Предельный цикл **4**, 575
- спектр **5**, 99
- элемент *вполне* упорядоченного множества **1**, 764
Предикат **4**, 576, 577
- арифметический **1**, *320*
- *n*-арный **4**, 151
-, Бернайса лемма **1**, 910
- вспомогательный **1**, 207
-, гейтинговское исчисление **1**, 911
- индукционный **2**, 558
-, интуиционистское исчисление **1**, 911
- *n*-местный **4**, 151
- нумерически выразимый **3**, 1088
- основной **1**, 207
- разрешимый **4**, 852
- рекурсивный **4**, 961
- универсальный **1**, 320
Предикативная промежуточная логика **4**, 696
- теоретико-типовая система **5**, 352
Предикативность **4**, 577
Предикативный анализ **5**, 641
Предикатная буква **4**, 577
- *константа* **2**, 1036
Предикатная переменная **4**, 577
Предикатный символ **4**, 577
Предикатов исчисление **4**, 577—580
- - интуиционистское **2**, 643
- - классическое **3**, 417, 418
- - минимальное **3**, 692
- - одноместное **3**, 419
- -, основная интерпретация **3**, 418
- - сингулярное **3**, 419
- - узкое **4**, 579
- -, формулы **3**, 416
Предиктор **2**, 414
Предкомпактное пространство **1**, 502; **4**, 580
Предложение **4**, 580; **5**, 269, 637
- индукционное **2**, 558
- конфигурационное **2**, 1080
- неразрешимое **3**, 1004
- формально неразрешимое **3**, 1004
Предмера **4**, 580; **5**, 818
- гауссова **3**, 646
Предметная константа **2**, 555
Предметная область **4**, 580
Предметная переменная **2**, 555; **4**, 576, 581
- теория **3**, 653
Предметный язык **4**, 581, 1185
Преднорма **3**, 378, 1048; **4**, 581
Предписанная продолжительность игры преследования **4**, 602
Предполный класс **1**, 71; **3**, 715
Предположение индуктивное **2**, 558; **3**, 564
Предпорядок **4**, 505, 581
Предпочтение **4**, 399
Предпучок **4**, 581, 766
- множеств **5**, 1024
- сечений **4**, 766
Предсказуемая σ-алгебра **4**, 581
- проекция дуальная **4**, 1200
- случайная мера **4**, 1199
Предсказуемый случайный процесс **4**, 582
Представимая квадратичная форма **2**, 778
Представимости матриц проблема **4**, 582
Представимый функтор **4**, 582
Представление **4**, 586
- алгебраически неприводимое **3**, 997
Представление алгебры Ли **4**, 583
- - -, кратность веса **3**, 89
- аналитическое **1**, 283, 446
- антианалитическое **1**, 283
- асимптотическое **1**, 337
Представление ассоциативной алгебры **4**, 584
- - -, характер **5**, 749
- Бергмана—Вейля **1**, 413
- бесконечномерное **1**, 446
Представление бесконечной группы **4**, 585
Представление бикомпактной группы **4**, 585
- Бурау **3**, 34
- векторное **5**, 139
-, вес **4**, 464
- вполне приводимое **1**, 761; **4**, 592
-, вырожденная серия **1**, 806
- Гейзенберга **1**, 911
- Гельфанда **1**, 917
- голоморфное **1**, 283
- групп Ли, Гельфанда — Гордиша теорема **2**, 359
Представление группы **4**, 382, 586
- -, инвариант **2**, 541
- - регулярное левое (правое) **2**, 992
- -, характер **5**, 749
- дизъюнктное **2**, 136; **5**, 147
-, дискретная серия **2**, 202
-, дифференциал **1**, 447
- дифференцируемое **1**, 446
-, дополнительная серия **2**, 374
- единичное **2**, 401
- изотропии **2**, 521
- индуцированное **2**,, 558
- интегрируемое **1**, 448; **2**, 612
- касательное **5**, 297
- квазипростое **2**, 819
- кольца **3**, 778; **5**, 1001
- коммутационных и антикоммутационных *соотношений* **2**, 990
Представление компактной группы **4**, 586
- конечной группы **2**, 1019
- конечномерное **2**, 1022; **4**, 595
- контрагредиентное **2**, 1070; **4**, 583, 591
- коприсоединенное **3**, 10
- Лакса **4**, 1191
- линейное **3**, 350; **4**, 595
- - кристаллографической группы **3**, 108
- Мартина **3**, 532
- Мартинелли — Бохнера **1**, 542
- многозначное **3**, 721
-, модуль **4**, 595
- модулярное **2**, 1021
- мономиальное **3**, 811
- *невырожденное* **3**, 906
- непрерывное **1**, 446; **3**, 988
- неприводимое **1**, 448; **3**, 996; **4**, 546
- неразложимое **3**, 1001; **4**, 592
- нормальное **1**, 449
-, ограничение **5**, 269
- операторно неприводимое **4**, 24
- параметрическое **2**, 587
-, подпредставление **4**, 378
Представление полугруппы **4**, 447, 587
-, полуинвариант **4**, 457
- полупростое **4**, 465
- полуспинорное **5**, 140
- приводимое **4**, 633
- примарное **4**, 634
- примитивное **2**, 524
- присоединенное **4**, 639
- про-*p*-группы **4**, 655
- проективное **4**, 678
- простое **4**, 706
-, пространство **4**, 595
- раздельно *непрерывное* **1**, 446
- разложимое **4**, 592
-, размерность **1**, 446; **4**, 546, 595
- *рациональное* **4**, 920
- регулярное **4**, 383, 941
- Рисса **4**, 1039
-, серия **4**, 1117
Представление симметрической группы **4**, 588—590
- симметричное **4**, 1150
Представление со старшим вектором **4**, 590
- сопряженное **4**, 591
- спинорное **5**, 140
-, сужение **5**, 269
- Тейхмюллера **1**, 711
- тензорное **5**, 329
-, тензорное произведение **5**, 332
- топологически неприводимое **3**, 996
Представление топологической группы **4**, 591—594
- точное **4**, 595; **5**, 409
- транзитивное импримитивное **2**, 524
- тривиальное **2**, 401
-, унитарная эквивалентность **5**, 508
- унитарное **4**, 546; **5**, 508
- *K*-финитное **1**, 448
- Флоке **2**, 773; **5**, 630
-, формальная размерность **2**, 202
- Шрёдингера **5**, 897
- эквивалентное **5**, 943
- ядерное **5**, 1031
A-представление **1**, 447
Представлений кольцо **4**, 594
- непрерывная серия **3**, 982
Представлений теория **4**, 595
Представления квазиэквивалентные **2**, 827
Представления классических групп **4**, 595—598
Представленческого типа алгебра **4**, 585
Представляющая мера **2**, 966
- точка **2**, 144
Представляющая функция **4**, 598
Представляющее сечение **4**, 599
Представляющий функтор **4**, 582
- *элемент* **4**, 278
Предупорядоченность **4**, 581
Предусловие программы **4**, 652
Предшественник порядкового числа **4**, 501
Предъязык **4**, 642
Прекомпактная равномерность **4**, 796
Прекращения точка **4**, 599; **5**, 713, 424
Пренебрегаемость асимптотическая **1**, 333
Пренексная форма **4**, 555
Преобразование **4**, 599; **5**, 713
- Абеля **1**, 27
- Аппеля **1**, 301
- аффинное **1**, 361
- Бендиксона **1**, 411
- Бианки **1**, 465
- бирациональное **1**, 494
- Бореля **1**, 538
- Бохнера **2**, 589
- Варма **3**, 633
- Ватсона **1**, 610
- Вебера **2**, 589

- Вейерштрасса 1, 899; 2, 589
- Вилсона — Хилферти 5, 34
- Галилея 1, 844
- Ганкеля 2, 589
- Гаусса 1, 899
- Гегенбауэра 1, 908
- Гельфанда 2, 985
- Гильберта 1, 968
- годографа 1, 1027
- гомографическое 1, 301
- градиентное 1, 1082
- двойственности 1, 126
- дробно-линейное 2, 384
- дуальное 3, 29
- Жонкьера 3, 95
- изометрическое 1, 790; 2, 505
- интегральное 2, 589, 604
- инфинитезимальное 2, 645
- калибровочное 1, 1083
- каноническое 1, 860
- Карсона 2, 729
- касательное 2, 755; 4, 634
- квазисимплектическое 2, 822
- Кельвина 2, 844
- контактное 2, 1063; 4, 634
- - инфинитезимальное 2, 1063
- Конторовича — Лебедева 2, 1069
- конформное 2, 1097
- Кон-Фоссена 2, 1101
- кремоново 3, 94
- кривизны 3, 102; 4, 1007
- круговое 3, 122
- Куммера 3, 147
- Кэли 2, 505; 3, 157
- Лагерра 3, 168
- Ламберта 3, 187
- Лапласа 3, 196, 200
- Лебедева 3, 218
- Лежандра 3, 229
- линейное 3, 291, 350, 369
- Лиувилля 3, 392
- локальное 4, 730
- Лоренца 3, 453
- Ляпунова 2, 766; 3, 468
- мартингальное 3, 534
- Мёбиуса 3, 122
- Мейера 3, 632
- Мейера — Бесселя 3, 633
- Мелера — Фока 3, 634
- Меллина 3, 635
- монодромии 3, 806
- моноидальное 3, 810
- наложения 3, 807
- Нильсена 4, 1082
- ортогональное 4, 81, 87
- Перрона 4, 275
- Петерсона 4, 279
- Погорелова 1, 436
- полулинейное 4, 458, 679
- полусимплектическое 4, 468
- полярное 4, 477
- прикосновения 2, 1063; 4, 634
- проективное 4, 666, 679
- , псевдогруппа 4, 730
- Пуанкаре 3, 453; 4, 749
- Пуассона 4, 756
- Радона 4, 809
- свертки 4, 1077
- симметрическое 4, 1074
- симплектическое 4, 1157
- скольжения 3, 807
- случайных величин 5, 33
- , собственное значение 5, 58
- стандартное квадратичное 3, 94
- Стилтьеса 5, 227
- строго контактное 2, 1063
- тождественное 1, 125
- Уиттекера 5, 492
- унимодулярное 5, 504
- унитарное 5, 513
- Фишера 5, 34
- Фурье 2, 590; 4, 294; 5, 727
- - на группе 1, 882
- Фурье — Стилтьеса 5, 738, 756
- Харди 5, 773
- хаусдорфово общее 5, 778
- центроаффинное 5, 811
- цепное 2, 589
- Чаплыгина 1, 1028
- частичное 4, 600
- Эйлера 3, 449; 5, 929
- Эрмита 5, 1016
- эрмитово 4, 1074
- Якоби 5, 1049

λ-преобразование Фурье 5, 722

Преобразований группа 4, 599

Преобразований полугруппа 4, 600

Преобразования оператор 5, 918

Преобразователь дискретный 4, 654

- информации 2, 852
- конечный 1, 54

Препятствие 4, 517, 601

- , Александрова теорема 1, 1056

Препятствий число 1, 153

Преследования игра 4, 602

Преследования — уклонения игра 2, 330

Префиксная операция 4, 18

Префиксный код 2, 937

Приближающее множество 4, 603

Приближение 4, 603

- аналитических функций, Монтеля теорема 3, 820

Приближение в среднем 4, 603, 605

- - - наилучшее 3, 872
- взвешенное 4, 605
- - среднестепенное 4, 603
- геометрическое 1, 939
- геометрической оптики 2, 809
- геометро-оптическое 1, 939
- гидродинамическое 1, 964
- диофантово 2, 162
- диффузионное 2, 360
- квазиклассическое 1, 717; 2, 807

- , Келдыша теорема 2, 842
- коротковолновое 2, 809
- Лиувилля — Грина 1, 717
- многогрупповое 3, 712
- наилучшее полное 3, 869
- одностороннее 4, 608
- равномерное 4, 604, 794; 5, 852
- рациональное 4, 1056
- среднеквадратическое 4, 605; 5, 162
- среднестепенное 4, 603, 605

Приближение функций 4, 603—609

Приближение функций комплексного переменного 4, 624—627

Приближение функций; линейные методы 4, 605, 609—612

- - локальное 3, 440
- - наилучшее 3, 870

Приближение функций; прямые и обратные теоремы 4, 612—614

Приближение функций; случай многих действительных переменных 4, 614—618

Приближение функций; экстремальные задачи на классах функций 4, 618—624

- чебышевское 4, 604; 5, 852

ВКБ-приближение 1, 717

Приближения метод 4, 605

Приближения порядок 4, 627

Приближения теория 4, 627

Приближения функций мера 4, 628

Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений 2, 290, 626

Привалова операторы 4, 629

- основная лемма в теории интеграла типа Коши—Стилтьеса 3, 53
- - - о сингулярном интеграле Коши 4, 630
- параметр 4, 629

Привалова теорема 4, 630

- - единственности 4, 630
- - о гармонических функциях 1, 875; 4, 630
- - о сингулярном интеграле Коши 4, 630
- - о сопряженных функциях 4, 630
- - об интегралах типа Коши — Лебега 4, 631

Приведение к абсурду 4, 631

- квадратичных форм 2, 788
- подобных членов 3, 753

Приведения к абсурду закон 3, 691; 4, 386

- условия Лагранжа — Гаусса 2, 789

Приведенная C^*-алгебра 5, 512

- аффинная схема 1, 358
- гомологическая последовательность 1, 1046

Приведенная группа 2, 888

- - гомологии 1, 1046
- - Уайтхеда 5, 135, 464
- замкнутая подсхема 2, 434
- корневая система 3, 16
- матрица плотности 4, 320
- надстройка 3, 862

Приведенная система вычетов 4, 631; 5, 152

- степень Стинрода 5, 230

Приведенная схема 4, 631

- K-теория 4, 924
- форма уравнения Бесселя 1, 460

Приведенно свободная группа 4, 1082

Приведенное аналитическое пространство 1, 286

- квадратное уравнение 2, 792

Приведенный автомат 1, 69, 78

- вурф 1, 771
- класс вычетов 5, 152
- модуль 3, 783
- полином 1, 128

Привилегированный компакт 4, 632

Приводимая n-арная операция 2, 804

- кривая 4, 309

Приводимая линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений 2, 766; 4, 633

Приводимое алгебраическое уравнение 1, 192

- аналитическое множество 1, 280

Приводимое представление 4, 633

Приводимое риманово пространство 4, 633

Приводимый многочлен 3, 754

Призма 3, 709; 4, 633

Призматоид 4, 634

Прикладное исчисление 3, 411

- программирование 4, 645

Приклеивание ручек 2, 52; 4, 1058

Приклеивающая сфера 4, 1058

Приклеивающее отображение 4, 1058

Прикосновенная линия 2, 1003

Прикосновения преобразование 2, 1063; 4, 634

Прикосновения точка 2, 1002; 4, 634; 5, 389

Прилежащие углы 5, 467

Примальная универсальная алгебра 5, 498

Примарная группа 1, 1142

- - абелева 1, 18

Примарно редуцированное представление 1, 91

Примарное кольцо 4, 634

Примарное представление 4, 634

Примарное разложение 4, 634

Примарный идеал 1, 91, 132; 4, 635

- множитель Вейерштрасса 1, 616; 2, 714
- подмодуль 4, 635
- радикал 1, 91

Примитивная гармоническая форма 1, 874

- группа 2, 524

Примитивная группа подстановок 4, 635

- полугруппа 4, 935
- псевдогруппа преобразований 4, 730

Примитивная рекурсия 4, 636, 963

- функция 4, 237

Примитивно рекурсивная арифметика 3, 412

Примитивно рекурсивная функция 4, 636, 963

- рекурсивное описание 4, 636; 963
- - отношение 4, 636

Примитивное кольцо 4, 637

- представление 2, 524

Примитивной рекурсии оператор 4, 960

Примитивные когомологии 3, 237

- периоды абелевой функции 1, 22

Примитивный алгебраический класс когомологий 1, 181

Примитивный идеал 4, 638

- идемпотент 1, 762

Примитивный класс 1, 185; 4, 638

- корень 4, 237

Примитивный многочлен 4, 638

- одночлен 3, 1184
- период 2, 50; 4, 268
- репер 1, 755
- характер 2, 192
- цикл 3, 237
- элемент 1, 850

Принудительная синхронизация 1, 47, 787

Принцип — см. соответствующее название

Приоритета метод 4, 638

Приписывающая функция 1, 1091

Приращение полное 2, 236, 275; 4, 424

- частное 2, 274; 4, 424

Присваивания оператор 1, 224

Присоединенная алгебра 4, 640

Присоединенная группа 4, 639

Присоединенная поверхность 4, 639

- система 2, 340
- экстремаль 5, 1054

Присоединенное кольцо 3, 438

Присоединенное представление 4, 639

- - алгебры Ли 3, 242
- - группы Ли 3, 257

Присоединенные уравнения 5, 419

- функции Лежандра 3, 232; 5, 293

Присоединенный эндоморфизм 3, 242

Пристрелки метод 3, 939; 4, 640

Пристройка 4, 1058

Притяжения область 4, 640

- - локального экстремума 3, 756

Причесывание косы 3, 34

Проблема — см. соответствующее название

Проблемно - ориентированный язык 1, 223; 4, 641

Проверочная матрица 2, 932

Проводимость контакта 4, 969

- обмотки 4, 969
- цепи 2, 1061

Прогноза метод 2, 292

Прогнозирование случайных процессов 5, 34

Прогомотопический тип 1, 1074

Прогонка обратная 2, 293

- прямая 2, 293

Прогонки метод 4, 642

- - ортогональный 4, 88

Программ оптимизирующие преобразования 4, 643—645

Программа 1, 220, 819; 4, 645

- , алголоподобная схема 4, 650
- действий 3, 601
- , компиляция 5, 417
- машины Тьюринга 5, 456
- объектная 5, 419
- , отладка 4, 646
- , постусловие 4, 652
- , потоковый анализ 4, 644
- , предусловие 4, 652
- программирующая 1, 225
- , проекция 5, 418
- системная 4, 1196
- стандартная 5, 167
- , схема 4, 650
- тотально правильная 4, 652
- , трансляция 5, 417
- управления 1, 62
- частично правильная 4, 652

Программирование 4, 645—647

- , автоматизация 1, 58
- булево 2, 678
- выпуклое 1, 798; 2, 678; 3, 602
- динамическое 2, 154

- дискретное 2, 204, 678; 5, 800
- квадратичное 2, 678, 784
- линейное 2, 678; 3, 353
Программирование математическое 2, 677; 3, 601; 4, 647
- нелинейное 3, 945
-, операнд 4, 18
-, оператор 4, 18
- оптимальное 2, 677
Программирование параллельное 4, 647—649
- *параметрическое* 4, 220
- прикладное 4, 645
- системное 4, 645, 1196
- стохастическое 2, 678; 3, 602; 5, 245
Программирование теоретическое 4, 650—654
-, формальный язык 1, 222
- целочисленное 2, 678; 5, 800
Программирования язык 4, 654
Программированная грамматика 1, 1089
Программирующая программа 1, 225
Программирующий процессор 1, 225
Программное обеспечение 3, 595
- оптимальное управление 4, 47
- поглощение 2, 333
Программы схема 4, 655
Прогрессивно измеримый марковский процесс 3, 525
Прогрессия 4, 655
- арифметическая 1, 322
- геометрическая 1, 932
Про-*p*-группа 1, 846; 4, 655
Продолжаемость решений дифференциальных уравнений 4, 656
Продолжение аналитическое 1, 267, 283
- *геометрического объекта* 1, 938
- линейного дифференциального оператора 3, 365
- меры 3, 637
- отображения 4, 153
- *G*-структуры 5, 252
Продолжений и охватов метод 4, 657—659
Продолжения по параметру метод 3, 948, 992; 4, 659
Продолжения теоремы в аналитической геометрии 4, 662
Продолжения теоремы в теории функций 4, 660—662
Продуктивное множество 4, 662
Продукций система Поста 4, 515
Проективизация векторного расслоения 1, 648
Проективная алгебра 4, 663
Проективная геометрия 4, 664—666
Проективная группа 4, 666, 679
- - *специальная* 4, 416
Проективная дифференциальная геометрия 4, 666
- иерархия 2, 490; 4, 677
- интерпретация Кэли — Клейна 3, 402
- инфинитезимальная структура 2, 645
- конфигурация 2, 1077
- *кривизна, тензор* 3, 101
- мера отрезка 1, 34
Проективная метрика 4, 667
- модель 3, 683
Проективная нормаль 4, 668
Проективная плоскость 2, 52, 975; 4, 668—670
Проективная прямая 4, 671
- размерность 1, 1053
- резольвента 4, 951
- - модуля 1, 1050
Проективная связность 4, 671—673
- *симплектическая группа* 4, 1154
- система распределений мер 5, 72
Проективная схема 4, 673
- топология 3, 427; 5, 381, 383
Проективно метрическое пространство 4, 667
- плоское пространство 1, 931
Проективное алгебраическое многообразие 1, 360
Проективное алгебраическое множество 4, 674
Проективное изгибание 4, 674
Проективное мероопределение 4, 675—677
- многообразие 4, 674
Проективное множество 2, 94; 3, 455; 4, 677
- отображение 1, 931
Проективное представление 4, 678
Проективное преобразование 4, 666, 679
- - π-допустимое 4, 478
Проективное пространство 4, 679
- - *над алгеброй* 4, 714
- расслоение 1, 637
- свойство 4, 664
- соответствие 4, 681
- топологическое тензорное произведение 5, 393
Проективности условие 4, 1183
Проективные координаты 4, 680—682
- - Бельтрами 1, 409
Проективный класс моделей 1, 103
- линейный элемент 5, 675
Проективный модуль 4, 682
- - банахов 1, 381
- -, ранг 4, 862
- морфизм схем 4, 673
Проективный объект категории 4, 682
Проективный предел 3, 428; 4, 683; 5, 381
- спектр 5, 102
Проективный спектр кольца 4, 684
Проектирование 4, 688, 982
Проектор 1, 981; 3, 375; 4, 21, 472, 684
- ортогональный 4, 99
Проекции градиента метод 3, 603
Проекционная группа гомологии 2, 36
Проекционно полное подпространство 4, 718
Проекционно-разностный метод 4, 831; 5, 60
Проекционно-сеточный метод 4, 761
Проекционные методы 4, 684—686, 761
Проекционный линейный метод приближения 4, 609
- оператор 4, 684
Проекционный спектр 4, 686—688
Проекция 3, 889; 4, 688
- азимутальная 2, 754
- вектора на ось 1, 634
- геодезическая 2, 742
- картографическая 2, 746—754
- коническая 2, 744, 754; 4, 688
- конформная 2, 742, 753
- косая 2, 753
- метрическая 3, 659
- ортогональная 4, 688
- ортодромическая 2, 742, 753
- особой точки 4, 114
- параллельная 4, 688
-, плоскость 3, 895, 896
- поликоническая 2, 754
- поперечная 2, 753
- программы 5, 418
- прямоугольная 4, 688
- псевдоконическая 2, 754
- псевдоцилиндрическая 2, 754
- равновеликая 2, 742, 753
- равнопромежуточная 2, 742, 753
- равноугольная 2, 742, 753
- расслоений 4, 893
- стереографическая 5, 222
- центральная 4, 688
- цилиндрическая 2, 754; 4, 688
- чебышевская 2, 745
- эквивалентная 2, 742, 753
- эквидистантная 2, 742
G-проекция 4, 718
Проецирование 4, 688
Произведение 5, 495
- адамаровское 1, 88
- альтернированное 1, 240
- бесконечное 1, 444
- близостное 1, 503
- Бляшке 1, 508
- Бэра 1, 569
- веерное 1, 613
- вектора на число 1, 633
- векторное 1, 642; 4, 403
- веночное 5, 147
- внешнее 1, 240
- внутреннее 4, 1197
- групп подстановок 4, 383
- декартово 2, 80; 4, 723
- измеримых пространств 3, 641
- каноническое 2, 713
- кардинальных чисел 2, 723
- σ-колец 3, 642
- Колмогорова — Александера 2, 906
- комплексных чисел 2, 1008
- косое 3, 41; 4, 743
- кронекерово 3, 118; 5, 332
- лексикографическое 4, 504
- *Ли* 2, 990
- линейных преобразований 3, 351
- мальцевское 1, 186; 3, 510
- матриц 3, 613
- матрицы на элемент (число) 3, 614
- мер 3, 642
- множеств 5, 713
- обобщенных функций 3, 1125
- операторов 4, 21
- подпрямое 4, 379
- полупрямое 4, 466, 912
- порядковых чисел 4, 503
- пространств с мерой 3, 642
- прямое 4, 723
- псевдоскалярное 4, 743
- путей 4, 765
- расслоенное 4, 895
- рациональных чисел 4, 922
- Рисса 4, 1036
-, род 4, 1049
- *ряда на число* 4, 1064
- рядов 4, 1066
- свободное 4, 1086
Произведение семейства объектов категории 4, 688
- скалярное 4, 1197
- скрещенное 4, 1204
- смешанное 5, 48
- соответствий 5, 78
- тензорное 5, 330, 382
- тензоров 5, 328
- тихоновское 5, 356, 387
- топологическое 5, 387
- - тензорное 5, 393
- Уайтхеда 5, 465
- узловое 5, 147
- фильтрованное 1, 159
- форм внешнее 1, 731
- формальное 5, 640
- чисел 2, 73, 76, 78
- Эйлера 5, 930
Производная 2, 270; 4, 689
- *алгебраическая* 2, 733; 4, 26
- аппроксимативная 1, 303; 3, 804
- асимптотическая 1, 333; 3, 804
- в силу системы 2, 351
- Валле Пуссена 1, 574
- Вольтерра 5, 694
- вторая симметрическая 4, 995
- выводящая 1, 736
- Гато 1, 895
- - оператора 3, 960
- группа 2, 981
- - Ли 3, 278
-, Дарбу теорема 2, 18
- дробная 1, 727; 2, 383
- ковариантная 2, 735, 896, 897
- косая 3, 37
- леван 2, 272; 3, 1184
- Ли 3, 261, 278
- логарифмическая 3, 406
- многочлена 2, 210
- монодромная 5, 691
- наклонная 3, 37
- *нормальная* 3, 1051
- обобщенная 3, 1103
- - слабая 3, 1107
- обобщенной функции 3, 1118
- односторонняя 3, 1184
- отображения 2, 352
- Пеано 4, 230
- по множеству 5, 691
- сети 2, 353
- полная 4, 421
- поля пфаффова 1, 938
-, порядок 4, 504
- правая 2, 272; 3, 1184
- Радона — Никодыма 4, 324
- *Римана* 4, 995; 5, 887
- риссова 2, 384
- сильная 1, 895; 4, 1130; 5, 666
- симметрическая 4, 1143
- - вторая 5, 887
- - обобщенная 1, 574
- - Шварца 5, 887
- слабая 1, 895; 4, 1206
- случайного процесса 5, 27
- сферическая 3, 1069; 4, 568
- тактическая конфигурация 5, 319
- точная пара 5, 106
- формальная 3, 805; 5, 639
- Фреше 5, 666
- - оператора 3, 960
- функциональная 5, 694
- частная 2, 274, 275; 5, 836
- Шварца 4, 995; 5, 885, 888
Производное множество 4, 563, 690
- подразделение 4, 379
Производное правило вывода 4, 690
Производное число 3, 805; 4, 690
- - аппроксимативное 1, 304
- -, Данжуа теорема 2, 13
- - симметрическое 4, 1146
Производный автоморфизм 4, 690
- геометрический объект 1, 937
Производный функтор 4, 691
- характер 2, 193
Производственного планирования основная задача 3, 585
Производящая функция 3, 791; 4, 692; 5, 758
Производящий оператор 4, 451, 692, 1126
Производящий оператор полугруппы 4, 448, 692
Произвольная картографическая проекция 2, 753
Произвольных постоянных вариация 4, 693
- функций метод 1, 657
Прока уравнение 5, 898
Проконечная группа 4, 694
Промежуток 2, 615; 4, 695
- выборочный 1, 776
Промежуточная логика 4, 695—697
Промежуточное банахово пространство 2, 628
- пропозициональное исчисление 4, 695, 699
- реле 4, 968
Промежуточный интеграл 2, 568
- тор Гриффитса 4, 697
Промежуточный якобиан 4, 697
Пронормальная подгруппа 4, 697
Прообраз множества 5, 714
- полный 4, 153
- элемента 5, 78, 714
Пропозициональная переменная 4, 698
Пропозициональная связка 4, 698
Пропозициональная форма 4, 698
Пропозициональная формула 4, 698
Пропозициональная функция 4, 698
Пропозициональное исчисление 1, 812; 4, 699
- - минимальное 3, 691
- - промежуточное 4, 695
Пропорциональность обратная 5, 217
- прямая 5, 217
Пропорция арифметическая 1, 322
- разностная 1, 322
Пропускная способность канала 2, 709, 941
Пропускной способности область 2, 703
Простая алгебра 4, 700
- - универсальная 5, 497
- - центральная 5, 809
- выборка 1, 918

Простая гипотеза 4, 700; 5, 185
- - формулы 1, 127
- гомотопическая эквивалентность 3, 131; 5, 465
Простая группа 4, 700
- - Ли 3, 257
- доминационная грамматика 1, 1090
Простая дуга 2, 391, 424; 3, 386; 4, 700
- -, Шёнфлиса теорема 2, 423
- замкнутая геодезическая 2, 431
- - линия 3, 386
- - игра 2, 1103
- импликанта 5, 73
- - итерация 4, 250
Простая конечная группа 4, 700
- особая точка 4, 122
- особенность 4, 915
- - поверхность 4, 341
Простая полугруппа 4, 701—703
- теорил типов 5, 351, 352
- точка аналитического пространства 1, 285
- - схемы 1, 1020
- фигура 5, 614
- функция 2, 565
- характеристика 3, 326
- цепь в графе 1, 1106
O-простая полугруппа 5, 524
Простейшая задача вариационного исчисления 1, 580
- коса 3, 32
Простейший поток 4, 703
Просто порожденное расширение 4, 900
- транзитивная группа 4, 383
Простого слоя потенциал 4, 524, 704
- - - запаздывающий 2, 860
- - - логарифмический 3, 410; 4, 524
- - - ньютонов 3, 1095; 4, 524
- - -, прямое значение нормальной производной 4, 525
- - - тепловой 4, 705
Простое гармоническое колебание 4, 1085
- гауссово число 1, 905
- двоеточие 2, 23
Простое кольцо 4, 705
Простое множество 4, 705
Простое отношение 4, 706
Простое поле 4, 706
- - характеристики p 1, 848
Простое представление 4, 706
- расширение 4, 909
- рекурсивно перечислимое множество 4, 957
- следствие формулы 1, 127
- уравнение Бендиксона 5, 670
Простое число 4, 706
- -, Валле Пуссена теорема 1, 576
- -, Вандивера признак 2, 668
- -, Вильсона теорема 1, 694
- -, Евклида теорема 2, 397
- - идеальное 2, 484
- - инертное 2, 561
- - иррегулярное 2, 667; 4, 942
- -, Куммера признак регулярности 2, 667
- -, распределение 4, 876
- - регулярное 2, 667; 4, 942
- -, Чебышева теорема 5, 845
Простой базис 3, 718
Простой гомотопический тип 4, 707
- дивизор 2, 129
Простой идеал 3, 485; 4, 707
- - вложенный 4, 634
- -, высота 1, 813
- - изолированный 4, 634
- -, ковысота 1, 813
- интеграл Фурье 5, 720
Простой интервал 4, 708
Простой итерации метод 3, 294, 946; 4, 511, 708
Простой корень многочлена 1, 192
- многоугольник 3, 749
- модуль 3, 998
- поливектор 4, 403
- слой, плотность 3, 1106
- случайный точечный процесс 5, 31
- турнир 5, 454
- цикл в графе 1, 1106
Простой элемент 4, 709
- - кольца 1, 352; 2, 85
Просто-периодическая функция 3, 1172
Пространственная группа симметрий 3, 109
- конфигурация 2, 1079
- криволинейная ткань 5, 356
- поверхностная ткань 5, 357
- сферическая гармоника 5, 290
- тороидальная гармоника 5, 407
- форма 4, 518
- эллипсоидальная гармоника 5, 979
Пространственно ориентированная гиперплоскость 3, 327
- - поверхность 3, 328
Пространственного типа элемент 2, 814
Пространственное сечение 4, 149
Пространственноподобная линия 3, 703
Пространственноподобный вектор 3, 702; 4, 149
Пространственные формы 4, 709—712
Пространство 4, 712
- абелево 1, 1065
- абсолютно замкнутое 2, 436
-, θ-абсолют 1, 33
- алгебраическое 1, 189
- аналитических в круге функций 1, 387
- аналитическое 1, 285
- - вещественное 1, 689
- антидискретное 1, 292
- арифметическое 1, 325
- архимедово 4, 1038
-, атом 3, 638
- аффинное 1, 360, 362
- аффинной связности 1, 355
- банахово 1, 386; 3, 1047
- бесконечномерное 1, 452; 5, 706
- биаксиальное 1, 492
- бикомпактное 1, 473; 4, 393
- бивекторное 1, 469
- бипланарное 1, 492
- бисвязное 1, 496
- близости 1, 500
- Бора 1, 387
- борнологическое 5, 494
- бочечное 1, 544
- Брауэра 4, 533
- Брело 4, 533
- Бэра 1, 568
- векторное 1, 642; 3, 291
- вероятностное 1, 666; 3, 638
- весовое 1, 673, 674, 676
- вполне несвязное 1, 760; 4, 1096
- - несовершенное 1, 760
- - нормальное 1, 760
- - ограниченное 1, 761; 4, 580
- - регулярное 1, 762; 4, 140; 5, 392
- второе сопряженное 1, 771
- выборочное 1, 776
- выпукло-вогнутое 4, 728
- галилеево 1, 843
- l-гармонических функций 4, 907
- гармоническое 1, 889; 4, 533
- гёльдерово 1, 915
- гильбертово 1, 978
- гиперболическое 1, 713
- гладкое 1, 1022
- голоморфно полное 5, 899
-, гомеоморфизм 1, 1035
-, гомологическая размерность 1, 1055
-, гомотопическая пара 1, 1063
-, - эквивалентность 1, 1068
- Грина 1, 1123
- дантово 2, 15
- дверное 2, 20
- двойственное 5, 510
- дезаргово 2, 67
- диадическое 2, 127
- дискретное 2, 205, 953
- дисперсное 2, 226; 4, 1096
- додекаэдра 2, 367
- достижимое 2, 378
- дуально метрическое 5, 1034
- евклидово 2, 398
- естественно редуктивное 4, 948
- H-замкнутое 2, 436
- заполненное 2, 442
- измеримое 2, 498; 3, 638
-, изотопия 2, 519
- икосаэдра 2, 522
- индуктивно нульмерное 4, 143
- инициально компактное 2, 994
- интерполяционное 2, 629
- инфрабочечное 2, 661
- исчезающих когомологий 3, 808
- Кавагути 2, 697
- Канторовича 4, 471, 713
- Канторовича — Банаха 4, 472
- касательное 1, 285
- квазигиперболическое 2, 800
- квазидуальное 5, 510
- квазиевклидово 2, 806
- квазикомпактное 2, 809, 993
- квазинормальное 2, 818; 3, 1065
- квазинормированное 2, 818
- квазириманово 4, 467, 468
- квазисимплектическое 2, 822
- квазиэллиптическое 2, 828
- Кёте 5, 1034
- классифицирующее 2, 864
- Клейна 2, 874
- клеточное 2, 879
-, когомологическая размерность 1, 1055
- коевклидово 2, 942
- кокасательное 1, 285; 2, 755
- Колмогорова 2, 952, 958
- компактного типа 1, 1025
- компактное 1, 473; 2, 993
- σ-компактное 2, 993
- комплексно евклидово 5, 1019
- комплексное 1, 285; 2, 1007
- - аналитическое 2, 1007
-, компонента 2, 1013
- конечномерное 4, 826
- конфигураций 3, 32
- конфигурационное 2, 145
- конформное 2, 1084, 1090, 1097
- конформно-евклидово 2, 1098
- координатное 1, 325
- копсевдогалилеево 3, 12; 4, 439
- копсевдоевклидово 3, 12
- коэффициентов 2, 781
- Крейна — Шмульяна 5, 383
- Кураниси 5, 406
- лакунарное 3, 184
- лакунарности 2, 22
- Лебега 3, 214; 5, 309
- Линделёфа 3, 288
- линейно связное 3, 321
- линейное 1, 640, 642; 3, 291, 355
- - топологическое 3, 355
- линзовое 3, 382
- Лобачевского 3, 402
- локально выпуклое 3, 428; 4, 462
- - евклидово 2, 355
- - конечное 5, 393
- - линейно связное 3, 434
- - окольцованное 4, 14
- - псевдоевклидово 4, 740
- - связное 3, 436; 4, 1097
- Лузина 3, 457
- Макки 3, 478
- максимальных идеалов 2, 985
- Мартина 3, 531
- Марцинкевича 3, 535
- метризуемое 3, 656
- метрическое 3, 658, 669
- - полное 4, 423
- Минковского 3, 702; 4, 148; 5, 621
- модулей 2, 103
- - структур Ходжа 5, 406
- модулярное 5, 406
- Монтеля 3, 820
- моровское 3, 657; 4, 271
- мультигильбертово 5, 1036, 1041
- Мура 3, 844
Пространство над алгеброй 4, 713—715
- направлений 4, 1025
- наследственно несвязное 2, 206; 4, 1096
- неатомическое 3, 638
- неевклидово 3, 909
- некомпактного типа 1, 1025
- непрерывно дифференцируемых функций 1, 387
- непрерывное 3, 638
- непрерывных функций 1, 386, 387; 3, 994
- неприводимое 4, 1097
- неразложимое 2, 884
- несвязное 4, 1096
- нётерово 3, 1028
- нигде несвязное 4, 1096
- Никольского 3, 1036
- нормально наследственное 3, 1065
- нормальное 3, 1065; 5, 391
- $\varkappa$-нормальное 3, 1065
- π-нормальное 3, 1065
- нормированное 3, 1047, 1081; 5, 705
- нормируемое 3, 1047
- нульмерное 3, 1084
- обобщенных сечений 3, 365
- - функций 3, 1104, 1126
- ограниченной кривизны 4, 1008
- ограниченных измеримых функций 1, 387
- однородное 2, 874; 3, 1175
- - главное 1, 1015
- - обобщенное 1, 934
-, окаймление 4, 9
- окольцованное 4, 14
- октаэдра 4, 16
-, оперение 4, 28
- орбит 2, 68; 4, 66
- Орлича 4, 75
Пространство отображений 4, 715—717; 5, 382
- паракомпактное 4, 202
- перистое 4, 270
- периферически бикомпактное 4, 272
- петель 4, 278
- плоское 4, 709
- полиэдра 3, 152
- полное 3, 639; 4, 424
- - по Вейлю 4, 424
- - по Дъёдонне 4, 425
- - по Райкову 4, 424
- - по Чеху 4, 271, 425
- полупиперболическое 4, 439
- полуевклидово 4, 456
- полунеевклидово 4, 457
- полупсевдоевклидово 4, 466
- полупсевдориманово 4, 467
- полуребрексивное 2, 45
- полуриманово 4, 467
- полусимплектическое 4, 468
- полуупорядоченное 4, 469
- полуэллиптическое 4, 473
- Понтрягина 4, 489
-, пополнение 1, 666
- постоянной кривизны 3, 100; 4, 518
- предгильбертово 1, 979; 4, 556
- преддвойственное 3, 920
- предкомпактное 4, 580
- представлений группы Ли 1, 934
- представления 4, 595
- прекомпактное 1, 502
- проективно метрическое 4, 667
- проективно плоское 1, 931
- проективное 4, 679
- - двумерное 4, 668
- прямое 1, 930
- псевдогалилеево 4, 730
- псевдоевклидово 4, 739
- псевдокомпактное 4, 740
- псевдометрическое 4, 741
- псевдориманово 4, 743
- Пуанкаре 4, 748
- пунктированное 4, 765
- путей 4, 765
- равномерное 4, 794
- - полное 4, 425
- радиково 4, 809
- разбиений 5, 593
- расслоений 4, 893
- расслоения 1, 637
- расслоенное 4, 896
- регулярное 4, 140, 942; 5, 391
- редуктивное 4, 947
-, резольвента 1, 1073
- репрезентативное 4, 975
- рефлексивное 3, 378; 4, 977; 5, 708
- Римана 4, 990

- -, кривизна 4, 989
- риманово 4, 1003, 1022
- - неприводимое 4, 633
- - полное 4, 426
- - приводимое 4, 633
- Рисса 4, 1037
- с билинейной метрикой 4, 717
- с весом 1, 674
Пространство с индефинитной метрикой 4, 717—719
Пространство с мерой 3, 638, 4, 719
- - - нормальное 3, 1050
- с операторами, когомологии 2, 908
- *с первой аксиомой счетности* 1, 371
- с сетью 5, 384
- с фундаментальной группой Ли 1, 934
- связное 4, 1092, 1096, 1097
-, сдвиг 1, 648
- секвенциально компактное 4, 1104
- секвенциальное 4, 1104, 1139
- сепарабельное 3, 644; 4, 1113
- сильно q-вогнутое 4, 728
- - p-выпуклое 4, 728
- - сопряженное 2, 45
- симметризуемое 3, 657
- симметрическое 4, 1146; 5, 625
- симплектическое 4, 1156
- симплициальное 4, 1168
- слабо бесконечномерное 4, 1206
-, слабо гомотопическая эквивалентность 1, 1068
- слабо сопряженное 2, 44
- со второй аксиомой счетности 1, 371
- со сходимостью 5, 306
- Соболева 5, 56
- совершенно нормальное 1, 475; 3, 1065; 5, 67
- - $\varkappa$-нормальное 3, 1065
- сопряженное 3, 292, 377; 5, 86, 708
- состояний 5, 178, 203
- Стоуна 5, 233
- строго симплектическое 4, 1158
- структурное 4, 638; 5, 256
- субпроективное 5, 266
- счетно компактное 1, 473; 4, 393
- счетномерное 5, 314
- счетнонормированное 5, 314
- Тайхмюллера 4, 1031; 5, 317, 680
- тетраэдра 5, 350
- тихоновское 1, 763; 4, 140; 5, 356, 392
- Тома 5, 362
- топологическое 5, 374, 388
- - векторное 5, 377
- транснормальное 4, 519
- триангулируемое 4, 1160
- убивающее 4, 517; 5, 466
- ультраборнологическое 5, 494
- ультрабочечное 5, 494
- универсальное 5, 500
- унитарное 5, 514
-, уплотнение 1, 1035
- Урысона 5, 546
- фазовое 2, 144, 766; 5, 587
- фигуры 5, 613
- финально компактное 2, 994; 3, 288; 4, 393
- финслерово 5, 621, 624
- флаговое 5, 629
- Фока 5, 631
- фоковское 5, 631
- Фреше 5, 380, 666
- -, Джеймса теорема 2, 44
- Фреше — Урысона 4, 1104
- функций лебегово 5, 718
- функционально замкнутое 5, 796
- - хаусдорфово 5, 694
- Харди 1, 1099; 5, 789
- хаусдорфово 4, 140; 5, 391, 777, 780
- центроаффинное 5, 811
- частично редуктивное 4, 948
- числовое 1, 325
- Шварца 5, 666
- Штейна 5, 899
- Эйленберга—Маклейна 5, 925
- Эйнштейна 4, 1044
-, экспонента 5, 953
- экспоненциально отделенное 5, 542
- экстремально несвязное 4, 1096; 5, 961
- элементарных событий 1, 666, 776
- эллиптическое 4, 990
- - эрмитово 5, 676
- эрмитово 5, 1021
- - векторное 5, 1019
- - симметрическое 5, 1022
- ядерное 5, 1033
AD-пространство 1, 387
B-пространство 1, 386
c-пространство 1, 386
$C^n[U]$-пространство 1, 387
$C[a, b]$-пространство 1, 386
$C^n[a, b]$-пространство 1, 387
$C[K]$-пространство 1, 387
E-пространство 1, 1123
G-пространство 1, 930; 4, 717; 5, 624
***H*-пространство** 4, 713
J-пространство 1, 985
***K*-пространство** 4, 471, 713
KB-пространство 4, 472
l_p-пространство 1, 386
l^2-пространство 1, 979
L^2-пространство 1, 979
$Lp[a, b]$-пространство 1, 387
$Lp(S; \Sigma, \mu)$-пространство 1, 387
m-пространство 1, 386
$M[a, b]$-пространство 1, 387
Q-пространство 5, 796
S-пространство 5, 766
T_0-пространство 2, 952; 5, 391
T_1-пространство 2, 378; 5, 391
T_2-пространство 5, 391, 777, 780, 798
T_3-пространство 4, 942; 5, 391
T_4-пространство 5, 391
$W_l^2(\Omega)$-пространство 1, 980
Пространство-время 4, 148, 719
- дискретное 2, 205
Пространство-произведение 3, 642
Простые близнецы 1, 500
- концы области 1, 1102, 1103
Простых чисел распределение 1, 254
Противоположная теорема 4, 720
Противоположное число 2, 73, 77
Противоположные борелевские подгруппы 1, 538
- векторы 1, 632
Противоречивая система 3, 998
ω-противоречивая теория 4, 428
Противоречивое пропозициональное исчисление 4, 699
Противоречивый класс 4, 720
Противоречие 4, 720
Противоречия закон 1, 125; 4, 721
- принцип 2, 644
Протокол в программировании 4, 651
Протяженность булевой функции 1, 556
Профилактическое обслуживание 3, 856
Профиль Жуковского 2, 426
Профильная плоскость проекций 3, 896
Прохорова теорема о плотных множествах 3, 644
- - о плотных семействах распределений 4, 886
Процедура 4, 721; см. также соответствующее название
Процедура-функция 4, 721
Процедуры тело 1, 224
Процентиль 4, 278
Процесс авторегрессионный 1, 84
- без последействий 1, 663; 3, 523
- Беллмана — Харриса 1, 407
- броуновского движения 1, 548
- вероятностный 1, 667; 5, 22
- ветвящийся 1, 681
- винеровский 1, 698
- восстановления 1, 756
- Гальтона — Ватсона 1, 681, 854
- гауссовский 1, 906
- диагональный 2, 125
- динамический 4, 37
- диффузии 1, 420
- диффузионного типа 2, 692
- диффузионный 2, 361
- интерполяционный 2, 632
- Ито 2, 691
- Канторовича 2, 715
- конструктивный 2, 1057
- марковский 1, 663; 3, 523
- - стационарный 3, 529
- обновляющий 2, 692
- *переходный* 1, 64
- Пойа 4, 388
- полумарковский 4, 458
- пуассоновский 4, 763
- рождения и гибели 4, 1050
- сепарабельный 4, 1114
- скачкообразный 4, 1198
- случайный 1, 663; 5, 22
- стохастический 5, 22, 240, 243
- феллеровский 5, 603
- чистого размножения 4, 261, 1051
- эпидемии 5, 1008
- *Юла* 4, 1051
σ-процесс 3, 810
Процессор диалоговый 1, 225
- программирующий 1, 225
- шаговый 1, 225
Прюфера поверхность 4, 721
- ранг абелевой группы 1, 19
Прямая 3, 383; 4, 721
- аналитическая 1, 249
- бесконечно удаленная 1, 443
- гиперболическая 2, 801; 4, 746, 747
- голоморфности 2, 184
- *Демулена* 2, 90
- изотропная 2, 801; 3, 124
Прямая картографическая проекция 2, 753
Прямая комплексная 1, 249
Прямая линия 1, 643
Прямая метрическая 4, 667
- неархимедова 3, 898
- несобственная 4, 664
- опорная 1, 793; 4, 29
- параболическая 2, 801
- *Паскаля* 4, 225
Прямая призма 4, 633
- *прогонка* 2, 293
Прямая проективная 4, 671
- проективной плоскости 4, 668
- пропорциональность 5, 217
-, пучок 4, 771
- регрессии 4, 926, 930
Прямая регулярная задача Пуанкаре 5, 677
Прямая Римана 4, 989
-, связка 4, 1089
- Симсона 4, 1170
Прямая сумма 4, 722
- - билинейных отображений 1, 484
- - векторных пространств 1, 645
- - гильбертовых пространств 1, 982
- - квадратичных форм 2, 778
- - корневых систем 3, 16
- - представлений 4, 592
Прямая сходимости ряда Дирихле 2, 183
Прямая теорема в теории приближения 4, 612, 625
Прямая фундаментальная 4, 1089
- Чевы 5, 852
- числовая 2, 78
- Эйлера 2, 63; 5, 930
- эллиптическая 2, 801; 4, 989
G-прямая 1, 927
Прямейшего пути вариационный принцип 1, 599, 954
Прямое алгебраическое дополнение 2, 373
- значение нормальной производной 4, 525, 704
- - потенциала двойного слоя 4, 525
- подобие 2, 138
Прямое произведение 4, 723
- - автоматов 1, 68
- - алгебр Неймана 3, 921
- - векторных пространств 1, 645
- - дискретное 4, 722
- пространство 1, 930
- сплетение групп 5, 147
- топологическое дополнение 2, 374
- умножение формальных языков 5, 644
- уравнение Колмогорова 2, 362, 958
0-прямое объединение полугрупп 4, 723
Прямой геликоид 1, 913
- интеграл алгебры Неймана 3, 922
- конус 2, 1074
- параллелепипед 4, 204
Прямой пересчет 4, 724
- предел функтора 2, 557
- спектр 5, 99
- угол 5, 467
- ход прогонки 4, 88, 89, 642
- цилиндр 5, 818
- численный метод 3, 293
Прямолинейная образующая 3, 380
- поляра 3, 140
- *триангуляция* 3, 152; 4, 410; 5, 434
Прямолинейное частное решение задачи *трех тел* 5, 431
Прямоугольная группа 1, 762
- полугруппа 2, 487
- проекция 4, 688
- связка полугрупп 4, 1091
- частичная сумма 2, 29
Прямоугольник 4, 724
- измеримый 3, 642
- латинский 3, 208
Прямоугольников формула 2, 794; 4, 724
Прямоугольное распределение 4, 798
Прямоугольный параллелепипед 4, 204
Прямые антипараллельные 1, 296
- гиперболические 3, 12
- гиперпараллельные 4, 747
- изотропные 3, 12
Прямые методы вариационного исчисления 1, 581
- - - - численные 1, 588
Прямые параболические 3, 12
- параллельные 3, 398; 4, 210, 747
- паратактичные 4, 991
- пересекающиеся 3, 398; 4, 746
- перпендикулярные 4, 274
- равноотстоящие 4, 991
- расходящиеся 3, 398; 4, 747
- скрещивающиеся 4, 1205
- эллиптические 3, 12
Прямых метод 4, 725
Псевдоавтоморфизм 3, 461
Псевдобаза топологического пространства 4, 726
Псевдобулева алгебра 1, 546; 4, 696, 726—728
Псевдовектор 4, 106, 728
Псевдовогнутая группа 1, 81
Псевдовогнутость 4, 728
Псевдовыпуклая область 1, 272, 1031
- -, Леви теорема 1, 1031
- -, Ока теорема 1, 1031
p-псевдовыпуклая функция 4, 728
Псевдовыпуклость и псевдовогнутость 4, 728—730
Псевдогалилеево пространство 4, 730
Псевдогеометрическое кольцо 1, 939
Псевдограф 1, 1105
Псевдогруппа 4, 730—732
- определяющая 4, 732
Псевдогрупповая структура 4, 732—734
Псевдодискриминант 2, 139
Псевдодифференциальный оператор 4, 734—738
Псевдодополнение 4, 726
- относительное 1, 546

Псевдодуга 4, 739
Псевдоевклидово пространство 4, 739
Псевдоинверсная полугруппа 4, 936
Псевдоинъективный модуль 2, 664
Псевдокомпактное пространство 4, 740
Псевдоконическая проекция 2, 754
Псевдоконформное отображение 1, 471; 4, 740
Псевдолокальность 4, 735
Псевдометрика 3, 658; 4, 740
Псевдометрическое пространство 4, 741
Псевдомногообразие 3, 744; 4, 741
Псевдонормирование 4, 741
Псевдоортогональная группа 4, 83
Псевдоортодоксальная полугруппа 4, 936
Псевдооткрытое отображение 4, 155, 742
Псевдоотражение 4, 158
Псевдопериодическая функция 4, 742
Псевдоразность 1, 546
Псевдорасстояние аффинное 1, 363
- гиперболическое 5, 422
- эллиптическое 5, 423
Псевдориманов метрический тензор 3, 669
Псевдориманова геометрия 4, 742, 1008
Псевдориманово пространство 4, 743
- - глобально симметрическое 4, 1147
- - локально симметрическое 4, 1146
- - однородное 3, 1176
Псевдоскаляр 4, 743
Псевдоскалярное произведение 4, 743
- - векторов 1, 635
Псевдослучайные числа 3, 815; 4, 743; 5, 20
Псевдоспираль 5, 141
Псевдосфера 3, 399; 4, 165, 743
Псевдотензор 4, 744; 5, 329
Псевдоунитарная группа 5, 507
Псевдофробениусово кольцо 2, 826
Псевдохарактер 4, 744
- топологического пространства 3, 836
Псевдоцилиндрическая проекция 2, 753
Псевдоэллиптический интеграл 4, 744
Пси-функция 4, 744
-Гаусса 1, 869
Птолемея теорема о четырехугольниках 4, 744
Пуанкаре аксиома в теории размерности 4, 824
- асимптотическое разложение 1, 338
- гипотеза в теории групп 2, 159
Пуанкаре гипотеза о многообразиях 4, 744
- - обобщенная 2, 894; 5, 288
Пуанкаре группа 3, 453; 4, 745; 5, 680
Пуанкаре двойственность 4, 745
Пуанкаре дивизор 4, 746
Пуанкаре задача 1, 1095; 2, 770; 3, 76; 4, 746
- индекс 4, 122
- интегральный инвариант 1, 860
Пуанкаре интерпретация 3, 404; 4, 746
- кинематическая мера 2, 571
Пуанкаре комплекс 4, 747
- комплексов кобордизм 2, 893
- лемма для дифференциальных форм 2, 263
- многочлен 3, 165
- модель 2, 197; 4, 283
- отображение 4, 505
- пара 4, 748
- преобразование 3, 453; 4, 749
- проблема 5, 900
- - о мероморфных функциях 3, 650
Пуанкаре пространство 4, 748
- прямая регулярная задача 5, 677
- ряд 5, 346
Пуанкаре сфера 4, 749
Пуанкаре теорема в теории устойчивости 4, 749
Пуанкаре теорема возвращения 4, 749—751; 5, 572
- - двойственности 2, 35
- - для систем обыкновенных дифференциальных уравнений 3, 499
- - о гомоморфизмах 4, 1165; 5, 681
- - о подгруппах 4, 370
Пуанкаре теорема о римановых многообразиях 4, 749
- - об особых точках 1, 253
Пуанкаре теорема последняя 4, 751
- тета-ряд 2, 877; 5, 346
Пуанкаре уравнения 4, 751—753
- формула 2, 573
- цепная пара 4, 748
Пуанкаре — Бендиксона теория 4, 753
Пуанкаре — Бертрана формула 4, 754
Пуанкаре — Биркгофа — Витта теорема об алгебрах Ли 1, 495; 3, 248, 252
Пуанкаре — Вольтерра теорема об аналитических функциях 4, 414
Пуанкаре-инвариантность 4, 970
Пуанкаре — Картана интегральный инвариант 1, 860; 2, 602
Пуанкаре — Лефшеца двойственность 3, 441; 4, 745
Пуанкаре — Линдштедта метод 3, 957
Пуансо тело 3, 711; 4, 553
Пуассона интеграл 4, 754—756
- интегральное представление 5, 822
Пуассона метод суммирования 4, 756
Пуассона преобразование 4, 756
Пуассона распределение 4, 757
Пуассона скобки 4, 758
- схема 4, 759
Пуассона теорема 4, 759
Пуассона уравнение 4, 760
Пуассона уравнение; численные методы решения 4, 760—762
Пуассона формула 3, 48; 4, 762, 763
Пуассона формула суммирования 4, 763
- - - обобщенная 1, 883
- ядро 4, 755, 756; 5, 1043
Пуассона — Герглотца формула 3, 532
Пуассона — Иенсена формула для мероморфных функций 2, 488
Пуассона — Лебега интеграл 4, 755
Пуассона — Стилтьеса интеграл 4, 755
Пуассона — Шарльс многочлен 5, 882
Пуассоновский поток 3, 542; 4, 763
Пуассоновский процесс 4, 763
Пульверизация 2, 756; 4, 764
Пунктированная пара 1, 1063
Пунктированное пространство 4, 765
- симплициальное множество 4, 1165
Пунктированный объект 4, 765
Пунктиформный нарост 3, 892; 4, 765
Пупце последовательность 2, 1074
Пустая U-свертка 1, 898
Пустое множество 4, 765
- слово 2, 1043; 4, 1209
Пустой граф 1, 1106
Пустых ящиков критерий 4, 765
Путей пространство 4, 765
Путь 4, 765
- в графе 1, 1108
- дезориентирующий 2, 68; 4, 70
- критический 4, 1121
- многоугольный 3, 750
- ориентируемый 3, 750
Пучков теория 4, 766—771
Пучок 4, 766, 771—773
- l-адический 1, 99
- алгебраический когерентный 2, 903
- Альфана 1, 242
- аналитический 1, 277, 286
- аналитических дифференциальных форм 2, 277, 278
- вялый 1, 830
- гармонический 1, 889; 4, 532
- гипергармонический 1, 889; 4, 532
- дифференциальный 4, 769
- идеалов аналитического множества 2, 904
- касательный 2, 443, 757
- квазикогерентный 2, 809
- когерентный 2, 905
- конструктивный 5, 1024
- кругов 2, 1085
- кэлеровых дифференциалов 2, 242
- лакунарный 3, 443
- Лефшеца 3, 808
- локально ориентируемый 1, 1058
- - постоянный 5, 1024
- - свободный 2, 904; 3, 436
- множеств 5, 366
- мягкий 3, 846
- нормальный 3, 1075
- обильный 3, 1097
- обратимый 3, 1130
- окружностей 4, 771
- ориентируемый 1, 1058
- ориентирующий 1, 1058
- относительных дифференциалов 2, 242, 278
- - когомологий де Рама 4, 855
- плоскостей 4, 771
- прямых 4, 771
- - на плоскости Лобачевского 3, 398
- ростков аналитических векторных пространств 2, 278
- - мероморфной функции 3, 649
- сизигетический 3, 140
- структурный 5, 101
- - окольцованного пространства 4, 14
- сфер 2, 1085; 4, 772
- Тейта 1, 99
- тонкий 5, 365
- Фреше 2, 904
- функций 1, 889; 4, 531
- ядерный 3, 165
- якобиев 5, 984
Пфаффа проблема 4, 773
Пфаффа система 4, 774
- - уравнений 2, 733
Пфаффа структура 4, 774
Пфаффа уравнение 4, 775—777
Пфаффа форма 2, 733; 4, 777
Пфаффиан 4, 777
Пфаффова производная поля 1, 938
Пфистера теорема о кольцах Витта 1, 712
Пьерпонта вариация 4, 777
Пэли — Винера теорема о преобразованиях Фурье 4, 778
Пэ-функция Вейерштрасса 1, 622
Пюизё диаграмма 3, 1090
Пюизё разложение 4, 119
Пюизё ряд 1, 174, 176, 276, 679; 3, 1091; 4, 414, 778, 1016
Пятая проблема Гильберта 5, 368
Пятисторонник 2, 1079
Пятый постулат 4, 778

P

Раабе признак сходимости 4, 781
Равенства аксиомы 4, 781
- отношение 1, 488; 4, 151
- слов проблема 1, 216
Равенство 1, 1116; см. также соответствующее название
Равнобочная гипербола 1, 988
Равновеликая проекция 2, 742, 753
Равновеликие и равносоставленные фигуры 4, 781—784
Равновесия задача 4, 1046
Равновесия положение 1, 82; 4, 784
- ситуация 1, 433
Равновесия соотношение 4, 784
- состояние 2, 767; 4, 784
Равновесная мера 2, 405; 4, 1046, 1047
Равновесное распределение вероятностей 5, 199
Равновесный ансамбль 5, 179
- потенциал 2, 403, 404; 4, 528, 1046, 1047
Равнодополняемые многоугольники 4, 782
Равномерная алгебра 2, 966; 4, 785
- база 1, 371; 3, 657
- дискретная подгруппа 2, 198
- метрика 3, 658
Равномерная непрерывность 4, 786
- -, Кантора теорема 2, 715
Равномерная ограниченность 4, 786
Равномерная подгруппа 4, 787
- структура 4, 794
Равномерная сходимость 4, 787—789
- -, Вейерштрасса признак 1, 615
- -, Витали теорема 1, 709
- -, Дини теорема 2, 156
- -, Коши критерий 3, 57
- - на границе области, Вейерштрасса теорема 1, 617
- - рядов аналитических функций, Вейерштрасса теорема 1, 617
Равномерная топология 4, 789
Равномерная устойчивость 2, 771; 4, 789
- y-устойчивость 5, 573
- эргодическая теорема 4, 24
Равномерно выпуклое банахово пространство 1, 389
- гиперболическое уравнение 3, 328
Равномерно наиболее мощный критерий 4, 790
- непрерывное отображение 4, 786, 795
- непрерывный оператор 3, 993
- параболическая система 3, 348
- равносходящиеся ряды 4, 801
- распределенная последовательность точек 4, 876
- сингулярный интеграл 4, 1180
- сходящееся бесконечное произведение 1, 445
Равномерно сходящийся ряд 4, 791—794
- устойчивая система линейных дифференциальных уравнений 3, 341
- устойчивое решение 2, 775
- эллиптическое уравнение 2, 299; 5, 994
Равномерное вложение 4, 795
- покрытие 4, 794
- - пространства близости 1, 502
Равномерное приближение 4, 604, 794; 5, 852
- -, Карлемана теорема 2, 726
- -, Келдыша — Лаврентьева теорема 2, 843
Равномерное пространство 4, 794—798
- - полное 4, 425
- -, пополнение 4, 496
Равномерное распределение 4, 798
- условие Гёльдера 1, 915
Равномерной ограниченности принцип 1, 380
Равномерной сходимости топология 4, 716, 799; 5, 382
Равномерность 4, 794
- универсальная 4, 796
Равномерные почти периодические функции 1, 532

Равномощность 3, 760
Равномощные множества 2, 723
Равноотстоящие прямые 4, 991
Равнопромежуточная проекция 2, 742, 753
Равносильность 4, 800
Равносильные методы суммирования 1, 718; 4, 800; 5, 273
- уравнения 5, 540
- языки 1, 128
Равносоставленные фигуры 4, 781
Равностепенная непрерывность 4, 797, 800
Равносторонне-полуправильный многоугольник 3, 750
Равносходимости теорема 5, 110
Равносходящиеся ряды 4, 801
Равноугольная проекция 2, 742, 753
Равноугольно - полуправильный многоугольник 3, 750
Равные векторы 1, 632
- углы 5, 467
- формулы 1, 124
Равных расстояний линия 3, 398
- - поверхность 3, 399
Радемахера система 4, 86, 801
- теорема об ортонормированных системах 4, 801
Радиальное граничное значение 4, 802
- подмножество 5, 378
Радиан 4, 802
Радианная мера угла 5, 467
Радикал 3, 244, 279; 4, 802
- алгебраической группы 4, 804
- алгебры 1, 383
- - Мальцева 3, 509
- Брауна — Маккоя 4, 807
- Бэра нижний 4, 807
Радикал в классе подгрупп 4, 803
Радикал группы 4, 804
- Джекобсона 2, 109; 3, 485; 4, 807
Радикал идеала 4, 804
- идеально наследственный 4, 806
- квазирегулярный 2, 820
- Кёте 4, 807
- Кострикина 5, 999
- Левицкого 3, 434; 4, 807
- локально конечный 3, 432
- наследственный 4, 806
- нильпотентный 4, 808
- обобщенный 4, 807
- примарного разложения 4, 634
- примарный 1, 91
- специальный 4, 807
- строго наследственный 4, 806
- терциарный 5, 341
- унипотентный 5, 504
r-радикал 4, 805
Радикалы колец и алгебр 4, 804—808
Радикальная алгебра 4, 805
Радикальная ось 4, 772, 808, 1090; 5, 222, 287
- плоскость 4, 773; 5, 222, 287
Радикальный вес корневой системы 3, 17
- центр 4, 808, 1123
Радиус 4, 808
- внутренний 2, 1099
- выпуклости 1, 799
- Гартогса 1, 894
- графа 1, 557, 1106
- звездообразности 2, 450
- конформный 2, 1098
- кривизны 2, 250; 3, 118; 5, 79
- - пространства Лобачевского 3, 398
- ларморовский 2, 381
- лемнискаты 3, 234
- *p*-листности 3, 727
- однолистности 3, 1168
- окружности 4, 15
- полярный 4, 480
- спектральный 1, 383; 5, 131
- сходимости 1, 29; 3, 118; 5, 218
- чебышевский 5, 850
- шара 5, 881
Радиус-вектор 4, 809
Радо квадратурная формула 4, 809
- теорема об аналитических многообразиях 4, 721
Радона интеграл 4, 809
Радона мера 4, 809
Радона преобразование 4, 809
Радона — Никодима производная 4, 324
Радона — Никодима теорема 4, 810
Радоново пространство 4, 809
Разбавление ряда 4, 810
Разбиение 4, 810
- Дирихле — Вороного 4, 810
- измеримое 2, 498
- локальное 3, 440
-, мелкость 2, 17
- непрерывное 3, 988
- полунепрерывное 4, 460
- пространства 1, 755; 4, 811
- - *правильное* 4, 810
-, пространство 5, 593
- симплициальное 4, 1168
- Хегора 5, 780
Разбиения метод 4, 782
- функция 3, 90
Разброс булевой функции 1, 565
Развернутый угол 5, 467
Развертка 4, 811
- кривой 1, 356; 4, 673, 1093
- многогранной поверхности 4, 811
Развертывающаяся поверхность 4, 811
k-развертывающаяся поверхность 4, 362
Разветвления теорема для нормальных алгорифмов 1, 226
Разветвления точка 4, 811
- уравнение 1, 677; 3, 474
Разветвленности порядок 5, 971
Разветвленный анализ 5, 641
- идеал 3, 114
- элемент 4, 415; 5, 971
- язык 1, 784
Раздвижка дисков 5, 403
Раздела множество 4, 848
Разделения переменных метод 2, 302; 4, 811; 5, 726
Разделенная разность 2, 1027
Разделительная дизъюнкция 4, 811
Раздельно непрерывное представление 1, 446
Раздутие 3, 810
Различающая 4, 517, 812
Различающая коцепь 4, 812
Различающий элемент 4, 812
Различения задача 2, 213
Различных представителей система 1, 773; 4, 813
Разложение асимптотическое 1, 337
- бордизма на ручки 4, 1059
- Брюа 1, 549
- Вейля 1, 414
- весовое 1, 673
- *p*-адическое 1, 708
- Витта 1, 713
- Гаусса 1, 900
- группы 5, 36
- декартово 2, 80
Разложение единицы 4, 814; 5, 118
- Жордана 2, 421
- Ивасавы 2, 468
- Картана 2, 738
- Карунена — Лоэва 5, 124
- Корниша — Фишера 3, 20
- Лебега 3, 215; 4, 1178
- Леви 4, 193
- Леви — Мальцева 3, 224
- Лефшеца 3, 237
- Миттаг-Леффлера 2, 446
- многообразия на ручки 4, 1059
- орбитальное 2, 544
- пирсовское 1, 130; 4, 288
- по базису 1, 375
- полярное 4, 479
- примарное 4, 634
- Пюизе 4, 119
- спектральное 5, 120, 121
- Фиттинга 1, 674
- Хана 5, 745
- Ходжа 5, 788
- числа в цепную дробь 5, 813
- Штейнера 5, 49
π-разложение общего типа 4, 515, 516
Разложения поле 4, 398
Разложимая алгебраическая группа 4, 860
- - - диагонализируемая 2, 122
Разложимая группа 4, 814
- цепь Маркова 3, 519, 521
Разложимое представление 4, 592
Разложимость нормированной инвариантной меры 3, 667
Разложимый *s*-вектор 1, 732
- оператор 5, 115
- поливектор 4, 403
Размах выборки 4, 815
- стьюдентизированный 5, 261
Размер критерия 4, 152
Размерное ядро 3, 150
Размерностей анализ 4, 815—820
Размерности аддитивные свойства 4, 820
- аксиома 1, 1045; 5, 231
Размерности теория 4, 820—823
Размерности функция 4, 823
Размерностная компонента 2, 716
- однородность псевдомногообразия 4, 741
Размерностное ядро внутреннее 2, 717
- - индуктивное 2, 717
Размерностный инвариант 4, 824
Размерностный многочлен 4, 825
Размерность алгебраическая 1, 154, 374
- алгебраического многообразия 4, 919
- алгебраической группы 1, 142
- аналитического множества 1, 280
- - пространства 1, 285
- базисная 1, 373
- бесконечного геометрического комплекса 1, 933
- булевой функции 1, 556
- векторного пространства 1, 643; 4, 858
- вложения 1, 285
- гильбертова 1, 981
- гильбертова пространства 1, 981
- гомологическая 1, 1053
-, гомологическая теория 1, 1055
- группы Ли 3, 255
- *p*-делимой группы 2, 83
- дифференциала 2, 241
- дифференциальная 2, 243; 4, 825
- индуктивная 2, 556
- инъективная 2, 664
- карты 2, 729
- касательная 1, 285
- классическая 4, 824
- когомологическая 1, 846; 2, 925
- Кодаиры 2, 934
- кольца, левая глобальная 1, 1054
- -, слабая глобальная 1, 1054
- компакта 4, 821
- комплексная 1, 249
- конечного геометрического комплекса 1, 933
- Лебега 3, 215
- лебегова 4, 826
- линейная гильбертова пространства 1, 981
- локальная 3, 423
- метрическая 3, 659
- оврага 3, 1154
- полиэдра 4, 410
- поля 1, 846
- представления 1, 446; 4, 546, 595
- проективная 1, 1053
- пространства 3, 307; 5, 102
- - гомологическая 1, 1055
- - когомологическая 1, 1055
- расслоения 1, 637, 639, 646
- решета 4, 980
- решетки 4, 980
-, сдвиг 2, 917
- симплекса 3, 152; 4, 1152, 1159
- слоения 4, 1210
- стабильная 2, 927
- структуры Пфаффа 4, 774
- супермногообразия 5, 278
- суперпространства 5, 279
Размерность топологического пространства 4, 826—830
- - - векторного 5, 377
- Хаусдорфа 5, 779
- элемента комплекса 2, 995
Размеченное дерево составляющих 4, 1183
Размещение 2, 974; 4, 830
- полиномиальное 5, 22
- случайное 5, 21
Размещения задача 2, 973
Размножения процесс 4, 261
Размыкающий контакт 2, 1061
Разностная вариационная схема 4, 831—836
- задача корректная 3, 84
- пропорция 1, 322
Разностная схема 4, 836, 843; 5, 995
Разностное множество 4, 837
- семейство 4, 838
Разностное уравнение 4, 838—841
Разностные методы 4, 761, 841
Разностный оператор 4, 841—843
Разностных схем теория 4, 843—847
- - устойчивость 5, 575
Разность 1, 828
- векторов 1, 633
- вперед 2, 1026
- конечная 2, 1019, 1026
Разность множеств 4, 847
- назад 2, 1026
- разделенная 2, 1027
- симметрическая 4, 1144
- центральная 2, 1027
- чисел 2, 73, 78
Разреженная матрица 4, 848
Разреженность множества 4, 848
Разрез 3, 748; 4, 540, 848; 5, 691
- в графе 1, 1114
- канонический 2, 712
- циклический 2, 712
Разреза множество 4, 848
Разрешающая функция 4, 849, 1202
Разрешающее ядро 4, 950; 5, 653
Разрешение особенностей 4, 849
- - одновременное 4, 119
- - алгебраического многообразия 4, 118
Разрешения предиката проблема 1, 219
Разрешения проблема 4, 850
- слова сложность 1, 220
Разрешенная форма задачи Лагранжа 3, 170
Разрешимая алгебра Ли 3, 278
Разрешимая группа 4, 850
- - Ли 3, 280
- мультиоператорная группа 3, 839
- по Нашу игра 1, 433
- промежуточная логика 4, 695
- система 3, 765
- - подгрупп 4, 368
- формальная теория 2, 371
Разрешимая формула 4, 851
- функция 4, 274, 532
- элементарная теория 1, 215; 5, 972
π-разрешимая группа 4, 851
Разрешимое многообразие 4, 851; 5, 73
Разрешимое множество 1, 227; 4, 532, 852
- подмножество 2, 1059
Разрешимости аксиома гармонического пространства 1, 889
- множество 4, 220
- проблема 3, 537; 4, 957
Разрешимость альтернативного кольца 1, 237
- в радикалах алгебраического уравнения 1, 193
Разрешимый аксиоматизируемый класс моделей 1, 103
Разрешимый поток 4, 852
Разрешимый предикат 4, 852
- радикал 3, 257
- ряд 4, 850

Разрыва точка 4, 852
Разрывная вариационная задача 4, 853
Разрывная функция 4, 854
Разрывное колебание 4, 967
- периодическое решение 4, 967
Разрывный множитель 4, 854
- - Дирихле 2, 182
Райзера формула о перманентах 4, 272
Райкова теорема о гомоморфизме 5, 384
«Райский сад» 1, 51
Рама когомологий 4, 855
- комплекс 2, 263, 278
Рама кручение 4, 855, 953
- неабелев комплекс 3, 897
Рама теорема о когомологиях 4, 768, 855
- - о приводимых римановых пространствах 4, 633
Рамануджана гипотеза 4, 856
Рамануджана суммы 4, 856
- формула 2, 117
Рамануджана функция 4, 857
Рамсея теорема 1, 773; 4, 857
Ранг 4, 858
- абелевой группы 1, 19
Ранг алгебраической группы 4, 860
- алгебры 4, 858
Ранг алгебры Ли 4, 861
- базисный 3, 902
- билинейной формы 1, 483; 4, 859
- векторного пространства 4, 858
- внешней формы 2, 733
Ранг группы 2, 737; 4, 861
Ранг группы Ли 4, 861
- индефинитности J-метрики 1, 986
- квадратичной формы 2, 778; 4, 859
- конечной групповой схемы 2, 1018
- корневой системы 3, 16
Ранг линейного обыкновенного дифференциального уравнения 4, 859
- - отображения 4, 859
- матрицы 4, 858
- многообразия 5, 613
- множества 1, 373; 2, 969
Ранг модуля 4, 861
- нормирования 3, 1080
Ранг особой точки 4, 859, 860
- отношения 4, 151
- полициклический 4, 410
- полупростой 4, 860
- проективного модуля 4, 862
- пространства 3, 307
- расслоения 1, 637, 639
- редуктивный 4, 860
- решетки 4, 980
- свободного модуля 4, 862, 1087
- свободной группы 4, 1082
- - полугруппы 4, 1083
- системы векторов 4, 858
- - линейных неравенств 3, 346
- - Пфаффа 4, 776
- стабильный 5, 166
- структуры Пфаффа 4, 774
- фигуры 5, 613
- характеристического числа 5, 654
- эллиптической кривой 5, 983
Рангов вектор 4, 862
Ранговая статистика 4, 863
Ранговой корреляции коэффициент Кендалла 2, 846
- - - Спирмена 5, 142
Ранговый критерий 4, 864
Рандомизации критерий 4, 864
Рандомизация 4, 865
Рао — Блэкуэлла — Колмогорова теорема 2, 376; 4, 865—867
Рао — Крамера неравенство в математической статистике 4, 867
Раскраска графа 1, 1113
Раскроя задача 4, 868—870
Раскрытие неопределенностей 3, 964
Распада разрыва метод 4, 870
Распадающаяся линия 2-го порядка 3, 388
Распараллеливания задача 4, 647
Расписаний теория 4, 870—872
Распознавание образов 3, 931; 4, 872
Распознавания инвариантных свойств полугрупп проблема 1, 216
Распознаватель конечный 1, 54
Распределение 3, 1104; 4, 774, 873; 5, 739
- апостериорное 1, 298
- априорное 1, 311
- арифметическое 1, 325
- арксинуса 1, 326
- атомическое 1, 352
- безгранично делимое 1, 397
- - -, разложение 1, 399
- Бернулли 1, 424, 489
- бимодальное 1, 485; 3, 763
- биномиальное 1, 489
- Больцмана 1, 518
- в теории вероятностей 1, 665
- Вейбулла 1, 614
Распределение вероятностей 1, 660, 665; 4, 873—875
- - дискретное 5, 9
- - непрерывное 5, 9
- -, плотность 4, 323
- - равномерное 5, 199
- вероятностное 1, 665
- выборки 5, 998
- вырожденное 1, 809
- Гаусса — Лапласа 1, 904
- геометрическое 1, 940
- Гиббса 1, 956
- гипергеометрическое 1, 1003
- гипотетическое 4, 700
- горизонтальное 1, 1077
- двувершинное 1, 485
- Дирихле 2, 183
- дискретное 2, 206
- дисперсионного отношения 5, 627
Распределение дробных долей 4, 875
Распределение дробных долей многомерное 4, 875
- инволютивное 2, 547
- канторово 4, 1178
- Колмогорова 4, 180
- конечномерное 1, 663
- Коши 3, 61
- Лапласа 3, 201
- логарифмически-нормальное 3, 408
- логистическое 3, 414
- логнормальное 3, 420
- Максвелла 3, 479
- Максвелла — Больцмана 1, 519
- маргинальное 3, 513
- микроканоническое 5, 200
- многовершинное 3, 839
- многомерное 3, 731
- мультимодальное 3, 763, 839
- мультиномиальное 4, 409
- наиболее благоприятное 3, 874
- наименее благоприятное 3, 873
- невырожденное 1, 809
- непрерывное 3, 989
- неразложимое 3, 1002
- несобственное 1, 809; 3, 1016
- нормальное 3, 1065
- одновершинное 3, 763; 5, 503
- «омега-квадрат» 4, 17
- отрицательное биномиальное 4, 161
- - гипергеометрическое 4, 162
- - показательное 4, 163
- - полиномиальное 4, 163
- Парето 4, 222
- Паскаля 4, 225
- Пирсона 4, 288, 290
- Пойа 4, 387
- показательное 4, 391
- полиномиальное 4, 409
Распределение простых чисел 1, 254; 4, 876—883
- прямоугольное 4, 798
- Пуассона 4, 757
- равновесное 5, 199
- равномерное 4, 798
- решетчатое 4, 984
- Рэлея 4, 1061
- сингулярное 4, 1178
- Снедекора 5, 54, 626
- собственное 1, 809
- совместное 5, 70
- стационарное 5, 207
Распределение степенных вычетов и невычетов 4, 883
- строго устойчивое 5, 557
- Стьюдента 5, 260
- треугольное 4, 798
- Уишарта 2, 901; 3, 734; 5, 493
- унимодальное 3, 763; 5, 503
- усеченное 5, 547
- условное 5, 554
- устойчивое 5, 557
- фидуциальное 5, 614
- Фишера — Снедекора 5, 626
- «хи-квадрат» 5, 785
- - нецентральное 3, 1031
- целых точек 5, 801
- частное 3, 513
- Шарлье 5, 882
- экспоненциальное 5, 954
- эмпирическое 5, 998
- Эрланга 3, 520; 5, 1014
- $\beta(x)$ 1, 463
F-распределение 4, 873; 5, 626
t-распределение 4, 873; 5, 260
T^2-распределение 4, 873
W-распределение 4, 873
z-распределение 4, 873; 5, 627
β-распределение 4, 873
Γ-распределение 1, 865; 4, 873
χ^2-распределение 4, 873; 5, 785
ω^2-распределение 4, 873
Распределений полное семейство 4, 884
- семейство плотное 4, 885
Распределений сходимость 4, 885
Распределений тип 4, 886
Распределения закон 4, 887
Распределения значений теория 4, 887—891
- потенциал 4, 530
- согласованные 5, 72
- -, Колмогорова теорема 1, 666
Распределения функция 3, 1099; 4, 97, 891
Распределительность 2, 230
Распрямления точка 5, 149
Рассеивание выборки 4, 892
Рассеивания эллипсоид 4, 892
Рассела антиномия 1, 294
Рассела парадокс 1, 294; 4, 893
Рассеяния данные 5, 914
- коэффициент Джини 2, 112
Рассеяния матрица 4, 893
- фаза 5, 912
- функция 2, 22
Расслабление 4, 687
Расслоение 4, 893, 975, 1210
-, база 1, 637
- в смысле Кана 4, 1166
- векторное 1, 646
- - алгебраическое 1, 637
- - аналитическое 1, 639
- геометрических структур 5, 249
- главное 1, 1015
- - аналитическое 1, 1013
- голоморфное 1, 639
- Гуревича 3, 887
- евклидово 2, 398
- Зейферта 2, 452
- индуцированное 2, 561
- касательное 2, 443, 755
- кокасательное 2, 755
- кореперов 5, 249
- локально тривиальное 3, 437
- нормальное 1, 646; 2, 755; 3, 1067
- обильное аналитическое 4, 433
- однородное 3, 1177
-, ориентация 4, 71, 72
- ориентированное 4, 71
- ориентируемое 4, 72
- отрицательное 4, 163
- положительное 4, 432
- проективное 1, 637
-, пространство 1, 637
-, размерность 1, 637, 639, 646
-, ранг 1, 637, 639
- риманово 4, 361
- Серра 3, 887; 4, 1119
- слабо отрицательное 4, 433
- - положительное 4, 433
- со структурной группой 4, 894
- Спивака 4, 748
- спиноров 5, 139
- спин-реперов 5, 139
- струй 3, 366; 4, 126
- структурное 4, 733
- тензорное 5, 332
-, тензорное произведение 5, 249
- Титса 5, 353
- универсальное 2, 864
- Хопфа 5, 793
***G*-расслоение** 4, 894
Расслоения гомотопическая последовательность 1, 1064
Расслоенная выборка 4, 895
Расслоенное произведение 4, 895
Расслоенное пространство 4, 896
Расстояние аффинное 1, 363
- Безиковича 3, 1119
- в графе 1, 1106
- в римановом пространстве 4, 1004
- Вейля 3, 1119
- геодезическое 1, 931
- гиперболическое 1, 988, 989; 4, 283
- информационное 2, 656
- кодовое 2, 931
- между скрещивающимися прямыми 4, 1205
- на множестве 3, 658
- неевклидово 4, 283
- от точки до множества 3, 670
- по Фреше 5, 665
- полярное 5, 291
- Степанова 3, 1119
- сферическое 4, 996
- фокусное 1, 987
- Хемминга 2, 931
- хордальное 4, 996
G-расстояние 1, 927
Расстройка 4, 1085
Раствор линейных многообразий 1, 981
Растущий автомат 1, 48, 51
Растягивающее отображение 4, 896
Растяжение 4, 1125
Растяжения коэффициент 2, 1092
Расходящаяся последовательность 4, 896
Расходящиеся прямые 3, 398; 4, 747
- - косые 4, 991
Расходящийся двойной ряд 2, 29
Расходящийся интеграл 4, 896
Расходящийся ряд 4, 897, 1063
- -, суммирование 5, 270
Расхождение 2, 127
- геометрическое 1, 940
Расчленяющее семейство отображений 2, 124
Расширение абелево 1, 845; 4, 399
- алгебраической системы 5, 876
Расширение алгебры Ли 4, 898
Расширение ассоциативной алгебры 4, 898
- бикомпактное 1, 477; 4, 909
- - александровское 5, 393
- - совершенное 5, 67
- вполне разветвленное 2, 203
- Галуа 1, 849, 850
- -, основная теорема 1, 845
Расширение группы 4, 899
Расширение дифференциального поля 4, 900—903
-, дифференциальный тип 4, 825
-, индекс ветвления 2, 203
- квазиинформационное 2, 807
- кольца целое 5, 799
- круговое 3, 122
- Куммера 3, 148
Расширение модуля 4, 903
- неразветвленное 2, 203; 3, 114; 5, 668
- несепарабельное 4, 1113
Расширение оператора 4, 19, 904—907
- отображения 4, 153
Расширение полугруппы 4, 907
Расширение поля 1, 850; 4, 398, 908
- - конечное 1, 850
- - нормальное 1, 850
- - сепарабельное 1, 850
- расщепляемое 4, 912
- Самюэля 4, 796
- сепарабельное 4, 1113

- слабо разветвленное 2, 203
- теории 4, 427
Расширение топологического пространства 4, 909
- трансцендентное 5, 425
- упорядоченное поля 5, 527
- функциональное 5, 796
- хаусдорфово 4, 909
- Хьюитта 5, 796
- чисто несепарабельное 4, 1114
Расширения области принцип 4, 909
Расширенная гипотеза Римана 2, 187, 190; 4, 995
Расширенная комплексная плоскость 1, 443; 4, 910
- числовая прямая 1, 443
Расширенно расщепляющийся оператор 4, 912
Расширенное комплексное пространство 1, 443
- пространство Лобачевского 3, 403
- *K*-пространство 4, 472
Расшифровка булевой функции 1, 558
Расщепимая группа 3, 487
- - диагонализируемая алгебраическая 2, 122
Расщепимый алгебраический тор 1, 179
Расщепление Мальцева 3, 279
- *B*-множества 2, 95
Расщепления метод 3, 818; 4, 251, 910—912
Расщепленная система Постникова 4, 517
Расщепляемая алгебра Кэли 3, 161
Расщепляемая группа 4, 912
- - кристаллографическая 3, 107
- полупростая алгебра Ли 3, 275
- разрешимая алгебра Ли 3, 279
Расщепляемое комплексное число 2, 32
- расширение 4, 912
Расщепляемость последовательности 4, 632
Расщепляющаяся последовательность 4, 913
Расщепляющийся оператор 4, 912
Рауса критерий о корнях многочлена 4, 914
- схема 4, 913
Рауса теорема о корнях многочлена 4, 913
- функция 4, 752
Рауса — Гурвица критерий о корнях многочлена 4, 914
- - - устойчивости 5, 558
- - *теорема о корнях многочлена* 4, 914
- - условие 4, 914
Рауха теорема сравнения 4, 1011
Рациональная дробь 4, 922
Рациональная кривая 4, 311, 914
- линейчатая поверхность 3, 381
- нормальная форма матрицы 3, 1054
Рациональная особенность 4, 915
Рациональная поверхность 4, 916
- точка 5, 299
- тригонометрическая сумма 5, 436
Рациональная функция 3, 754; 4, 917—919
- -, *поле* 4, 309
Рационального раскроя задача 4, 868
Рациональное *p*-адическое число 1, 100
Рациональное многообразие 3, 466; 4, 919
Рациональное отображение 4, 309, 919
Рациональное представление 4, 920—922
- приближение 4, 1056
Рациональное число 1, 260; 2, 74; 4, 922
Рациональности критерий 4, 916
Рациональности теоремы 4, 923
Рационально - эквивалентные *многообразия* 5, 502
Рациональные точки аффинного многообразия 1, 361
Рациональный *G*-модуль 4, 920
Рациональных функций поле 1, 178
Реализация верного равенства 2, 1047
- дизъюнкции 2, 1047
- конъюнкции 2, 1047
- симплициальной схемы 4, 1160
- случайного графа 1, 1110
- случайной функции 5, 11
- суждения 2, 1047
Реализуемая формула 4, 925
Реализуемость 4, 924
- рекурсивная 4, 956
Ребаланса метод 4, 251
Реберная связность графа 1, 1114, 1120
Реберное хроматическое число графа 1, 1120
Реберный граф 1, 1106
Ребристая выпуклая поверхность 1, 788
- точка поверхности 2, 756
Ребро аналитического полиэдра 1, 277
- возврата 1, 740; 4, 811
- выпуклого многогранника 1, 801
- гиперграфа 1, 1006
- графа 1, 1105
- *Грина* 4, 668
- двугранного угла 2, 50
Ребро многогранника 3, 708; 4, 925
- области Вейля 1, 629
- сети 4, 1121
Регномонтана формула 5, 320
Регрессии коэффициент 4, 925, 930
- кривая 4, 926, 929
- линия 3, 27; 4, 929
Регрессии матрица 4, 925
- плоскость 4, 926, 931
Регрессии поверхность 4, 926, 931
- прямая 4, 926, 930
Регрессии спектр 4, 926
- функция 4, 929
Регрессионная переменная 4, 929
Регрессионный анализ 4, 926—929
Регрессия 4, 929—931
- криволинейная 4, 931
- *линейная* 3, *308*; 4, *930*
- *множественная* 4, *931*
- нелинейная 4, 931
- параболическая 4, 194
- полиномиальная 4, 194, 931
- средняя квадратическая 4, 930
Регрессор 4, 929
Регулирования время 1, 65
- закон 1, 63
- поле 1, 63
Регуляризатор оператора 4, 1176
Регуляризации метод 2, 343; 3, 932; 4, 931—933
- параметр 3, 933
- процесс 3, 604
Регуляризация 4, *933*
- обобщенной функции 3, 1105
Регуляризированное решение 3, 933
Регуляризирующий оператор 3, 933
Регуляризованный след 5, 908
Регулярная алгебра функций 1, 132
- алгебраическая поверхность 1, 150
- аналитическая функция 1, 265
- аффинная схема 1, 358
- база 1, 372; 3, 657
- в бесконечности гармоническая функция 1, 875
- ветвь аналитической функции 1, 681
- внутренняя точка геодезической области 1, 927
- выпуклая поверхность 1, 791
- гомотопия 4, 358
Регулярная граничная точка 4, 275, 533, 933
- - - геодезической области 1, 927
Регулярная *p*-группа 4, 934
- дифференциальная форма 2, 266
- задача Штурма — Лиувилля 5, 907
- кривая 2, 248
Регулярная мера 4, 934, 938
- метрика выпуклой поверхности 1, 791
- область 4, 933
- обобщенная функция 3, 1105
Регулярная особая точка 1, 251; 4, 934
- - - дифференциального уравнения 3, 338
- поверхность 2, 251
Регулярная полугруппа 4, 935—937
Регулярная решетка 4, 937
- *A*-система 4, 1194
- структура 4, 937
Регулярная схема 4, 937; 5, 299
- ткань 5, 356
- точка аналитического множества 1, 280
Регулярная функция 1, 265; 4, 937
- - гиперкомплексного переменного 1, 1007
Регулярная функция множества 4, 937
- -, покрытия теоремы 4, 396
- цепь Маркова 4, 260
- частотная функция Пойа 2, 960
Регулярная экстремаль 4, 938
Регулярно гиперболическое уравнение 3, 328
- сходящаяся последовательность 5, 311
Регулярное выражение 4, 942
- кардинальное число 2, 724
Регулярное кольцо в коммутативной алгебре 4, 939
Регулярное кольцо в смысле Неймана 4, 939—941
- - локальное 3, 439
- многообразие 2, 668
- порядковое число 4, 502
Регулярное представление 4, 941
- - группы 4, 383
Регулярное простое число 2, 667; 4, 942
Регулярное пространство 4, 140, 942; 5, 391
- решение 2, 298
Регулярное событие 4, 942
- топологическое пространство, абсолют 1, 32
- *условное распределение* 5, 554
***-регулярное кольцо** 4, 941
u-регулярное кольцо 4, 940
π-регулярное кольцо 4, 940
Регулярности аксиома 4, 140
Регулярности признаки для методов суммирования 4, 943
Регулярно-сходящийся степенной ряд 2, 614
Регулярные методы суммирования 4, 944
Регулярный автоморфизм 4, 944
- дифференциал 2, 239
- - аналитический 2, 239
- граф 1, 1106
Регулярный идеал 3, 790; 4, 944
- оператор 2, 774
- параметр 4, 945
- случайный процесс 4, 1195
Регулярный тор 4, 945
- факторобъект 5, 696
- функционал 1, 621
- элемент 4, 413, 945
Регулярный элемент полугруппы 4, 945
- - унипотентный 5, 506
Регулярных точек алгоритм 1, 561
Регулятор 1, 63; 4, 945
Редеи теорема о полугруппах 4, 455
Редуктивная алгебра Ли 3, 281
Редуктивная группа 4, 946
- - Ли 3, 281
Редуктивное пространство 4, 947
- - однородное 3, 1176
Редуктивный ранг 4, 860
Редукция Вальда 3, 874
- статистической задачи 2, 375
Редуцированная алгебра 3, 920
- - инцидентности 4, 264
- группа 1, 19
- степень *многочлена* 4, 1114
Редуцированный латинский квадрат 3, 207
Режим биений 1, 786
- квазипериодический 1, 786
- переходный 1, 786
- установившийся 1, 786
Резервирование 3, 855
Резидуально конечная алгебраическая система 1, 184
Резидуальное множество 2, 764
Резидуальное отображение 4, 948
Резная поверхность 4, 949
Резольвента 4, 449, 949—951; 5, 99, 653
- асимптотическая 4, 453
- в топологии 1, 1073
- гомотопическая 1, 1070, 1072; 4, 515, 516
-, изоморфизм 1, 1072
- инъективная 2, 664, 665
- линейного оператора 3, 373
- - - дифференциального 3, 368
- *модуля проективная* 1, 1050
- обобщенная 4, 454
- пространства 1, 1073
- свободная 4, 1084, 1087
- симплициального множества 1, 1070
- элемента алгебры 1, 383
Резольвентное множество 4, 449, 951; 5, 99
Резонанс 4, 951
- комбинационный 4, 217
- основной 4, 107
- параметрический 1, 864; 3, 316; 4, 216
Резонансное уравнение 3, 958
Резонансные члены 4, 951
Результант многочленов 4, 952
Результирующий вывод 1, 781
Рейдемейстера кручение 4, 953
- теорема о поверхностях 4, 247
- условие замыкания 2, 439
Рейе конфигурация 2, 1080
Рейнольдса напряжения 5, 452
- уравнения 5, 452
Рейнольдса число 4, 954
Рейнхарта область 3, 88
Рекуррентная последовательность 1, 740
Рекуррентная точка динамической системы 4, 954
- траектория 4, 954
Рекуррентная формула 4, 954, 955
Рекуррентная функция 4, 954
Рекуррентное матричное уравнение Риккати 4, 987
Рекуррентное соотношение 4, 955
Рекуррентность цепная 5, 815
Рекуррентные события 4, 955
Рекурсивная игра 4, 956
Рекурсивная реализуемость 4, 956
- схема 1, 230
- - программы 4, 650
Рекурсивная теория множеств 4, 957—960
- формула Тарского 1, 235
- - Хаусдорфа 1, 235
Рекурсивная функция 4, 960; 5, 833
- -, алгоритмический язык 4, 976
- -, нормальная форма 3, 1057
- -, функциональная эквивалентность 1, 230
- эквивалентность 4, 959
Рекурсивно аксиоматизируемый класс моделей 1, 103
- перечислимое множество 3, *1003*; 4, 957
- устойчивая модель 2, 1060
- эквивалентные модели 2, 1060
Рекурсивное множество 4, 852, 957
Рекурсивное определение 4, 961
Рекурсивное отношение 4, 961
Рекурсивной эквивалентности тип 4, 961
Рекурсивность относительная 3, 1002
Рекурсивный анализ 2, 1054
Рекурсивный оператор 4, 962; 5, 833
- ординал 5, 421
Рекурсивный предикат 4, 962
Рекурсии высших ступеней 4, 962

Рекурсия 4, 962—965
- многократная 3, 721
- примитивная 4, 636
- трансфинитная 5, 421
Релаксации метод 4, 966
Релаксационное колебание 1, 46; 4, 966—968
Релаксационный путь 3, 490
Релаксация 5, 202
Реле, основной контакт 4, 968
- промежуточное 4, 967
Релевантная импликация 2, 66
Релейно-контактная схема 4, 968
Рёло треугольник 4, 519
Рельеф аналитический 1, 276
Рельеф аналитической функции 4, 969
Релятивистская динамика 4, 969
Релятивистская инвариантность 4, 147, 970
- скорость 4, 146
Релятивистской астрофизики математические задачи 4, 970
Релятивистской гидродинамики математические задачи 4, 971
Релятивистской термодинамики математические задачи 4, 972
Релятивная геометрия 4, 973
Реляционная система 1, 155
Реммерта теорема конечности 2, 1025
Реммерта — Штейна — Шифмана теорема о продолжении 4, 662
Ремонтоприспособленность 3, 854
Реньи критерий 4, 973
- статистика 4, 973
- функция распределения 4, 974
Репер 4, 364, 974
- аффинный 1, 364
- канонический 4, 365
- натуральный 3, 892
- полуканонический 4, 365
- примитивный 1, 755
- пространства 4, 681
- сопровождающий 4, 365
- Френе 3, 892
Реплика алгебраической системы 4, 974
Реплика эндоморфизма 4, 975
Реплично полный класс 4, 974
Репрезентативное пространство 4, 975
Ретракт деформационный 2, 102
Ретракт объекта категории 4, 975
Ретракт топологического пространства 4, 975
Ретракция 4, 976
Рефал 4, 976
Референции система 3, 9
Рефлексивная форма 2, 866
Рефлексивное отношение 4, 978
- - бинарное 1, 488
Рефлексивное пространство 3, 378; 4, 977; 5, 708
- - банахово 1, 388
- - локально выпуклое 5, 384
Рефлексивности банаховых пространств критерий 1, 388
Рефлексивность 4, 978; 5, 942
Рефлективная подкатегория 4, 978
- топологическая группа 4, 481
Рефлектор объекта категории 4, 978
Решающая процедура 4, 979
Решающая функция 4, 979
Решающее правило 4, 508
- - байесовское 5, 192
- - допустимое 5, 192
- - минимаксное 5, 192
Решение в теории игр 4, 979
Решета метод 4, 979
Решетка 2, 198; 4, 980—982
- алгебраическая 1, 154
- атомная 1, 352
- банахова 1, 384
- Браве 3, 110
- Брауэра 1, 546
- булева 1, 550
Решетка в группе Ли 4, 980
- векторная 1, 636; 2, 14; 4, 1037
- весов 4, 464
- вполне дедекиндова 1, 758
- геометрическая 2, 969; 4, 456
- дедекиндова 2, 63
- дистрибутивная 2, 230
- допустимая 1, 945
-, **единица** 2, 400
-, идеал 2, 482
- компактно порожденная 1, 154
-, компактный элемент 2, 994
- критическая 1, 945
- локально выпуклая 3, 427; 4, 472
- модулярная 2, 63; 3, 786; 4, 456
- мультипликативная 3, 840
- нётерова 3, 840
- нормированная 4, 471
-, нуль 3, 1082
- ортомодулярная 4, 104
- периодов 2, 50
Решетка подалгебр 4, 982
- подмногообразий 1, 186
- полная 4, 421
- полудедекиндова 4, 456
- полумодулярная 4, 456
- Поста 4, 515
- регулярная 4, 937
Решетка с дополнениями 4, 983
- свободная 4, 1084
- Стоуна 5, 234
- точечная 1, 945; 5, 408
- условно полная 5, 553
Решето большое 1, 530
- Бруна 1, 549
- Лузина 3, 457
-, размерность 4, 980
- Сельберга 4, 1109
- Эратосфена 5, 1010
Решеточная база 1, 372
Решеточно изоморфные алгебры 4, 982
Решеточно упорядоченная группа 4, 984; 5, 255
- - полугруппа 5, 523
- упорядоченное кольцо 5, 526
Решеточный изоморфизм 4, 982
- фильтр 4, 726
Решетчатая упаковка 5, 521
Решетчатое распределение 4, 984
Рибокура конгруэнция 4, 985
Рибокура кривая 4, 985
Рида — Маллера код 2, 932
Рида — Соломона код 2, 932
Риккартово кольцо 4, 985
- *-кольцо 4, 986
Риккати уравнение 4, 986
- - матричное алгебраическое 5, 839
- - - дифференциальное 3, 620
Римана билинейные соотношения 1, 13
Римана геометрия 4, 987—991
Римана гипотезы 4, 991
- граничная задача 3, 323
Римана дзета-функция 2, 112; 4, 992
- -, Линделёфа гипотеза 3, 285
Римана дифференциальное уравнение 4, 992
- инвариант 4, 170
Римана интеграл 4, 992
- интегральная сумма 3, 91
- кратный интеграл 3, 91
- кси-функция 2, 113
- матрица 4, 994
Римана метод 1, 1151; 4, 993—995
Римана метод суммирования 4, 995; 5, 440
Римана обобщенная гипотеза 4, 995
- определенный интеграл 4, 992
- плоскость 4, 989
- -, радиус кривизны 3, 912
- проблема 1, 252
Римана производная 4, 995; 5, 887
- пространство 4, 990
- -, кривизна 4, 989
- -, радиус кривизны 3, 912
- прямая 4, 989
- расширенная гипотеза 2, 187, 190; 4, 995
Римана соотношение 4, 995
Римана сфера 4, 995
Римана тензор 4, 996
Римана теорема 4, 997
- - о конформном отображении 1, 266; 4, 997, 1018
- - о нормальных аналитических пространствах 3, 1063, 1064
- - о перестановке членов ряда 4, 998
- - о продолжении 4, 662
- - о римановых поверхностях 4, 1028
- - о тригонометрических рядах 4, 999
- - об условно сходящихся рядах 5, 549
- - существования в алгебраической геометрии 5, 159
Римана тета-функция 4, 998
- уравнение 5, 677
- P-уравнение 4, 190
- формула для задачи Гурса 1, 1151
- функциональное уравнение 2, 113
Римана функция 2, 312; 3, 420; 4, 993, 999
- - в теории дифференциальных уравнений 4, 1000
- - - тригонометрических рядов 4, 999
- - для задачи Гурса 1, 1151
- - P-функция 4, 992
Римана — Брилля — Нётера теорема об алгебраических кривых 1, 145
Римана — Вольтерра метод 4, 993
Римана — Гильберта задача 1, 1095; 4, 1000
- - - обобщенная 3, 81, 1102
Римана — Гильберта — Пуанкаре задача 1, 1095
Римана—Гурвица формула 2, 55; 4, 1000; 5, 679
Римана — Кристоффеля тензор 4, 1000, 1006
Римана — Лиувилля интеграл 2, 383; 5, 930
Римана — Привалова граничная задача 3, 323
Римана — Роха теорема для алгебраических поверхностей 1, 151
- - - о дивизорах 1, 15
- - - о мероморфных функциях 3, 648
Римана — Роха теорема об алгебраических кривых 4, 1000—1002
Римана — Роха — Хирцебруха теорема о проективных многообразиях 4, 1001
- - - об индексе 2, 552
Римана — Роха — Хирцебруха — Гротендика теорема о проективных многообразиях 4, 1002
Римана — Стилтьеса интеграл 4, 1002; 5, 226
Римана — Фробениуса условие 1, 23
- - - для матрицы периодов 2, 1012
Римана — Шварца поверхность 4, 1002
Римана — Шварца принцип 4, 1002
- - - симметрии 4, 1138
- - функция 5, 888
Риманов метрический тензор 3, 669
Риманова геометрия 4, 1003—1009
Риманова геометрия в целом 4, 1009—1013
Риманова кривизна 4, 1013
- матрица 1, 23
Риманова метрика 2, 1089; 4, 1013
Риманова область 3, 889; 4, 1014
- - существования 4, 415
Риманова поверхность 1, 267; 4, 1015—1021
- - абстрактная 1, 178; 5, 317
- -, дифференциал 1, 1029; 2, 237
- -, дубль 2, 391
- - конечная 2, 1019
- -, конформно - инвариантная метрика 2, 1098
- -, матрица периодов 5, 1046
- -, модули 3, 775
- - с краем 4, 1015
- -, униформизация 5, 515
Риманова связность 4, 1021
Риманово кручение 3, 130
Риманово многообразие 4, 1022
- -, Гаусса — Бонне теорема 1, 903
- -, Жане теорема 2, 409
- - кватернионное 2, 839
- -, скалярная кривизна 4, 1197
Риманово пространство 4, 1003, 1022
- - геодезически полное 4, 1004
- - глобально симметрическое 1, 1024
- -, движение 2, 21
- - касательное 5, 623
- -, класс 2, 863
- -, кривизна 3, 98
- - локально симметрическое 4, 1146
- - неприводимое 4, 633
Риманово пространство обобщенное 4, 1022—1026
Риманово пространство однородное 3, 1176; 4, 1026—1028
- - полное 4, 426, 1004
- - приводимое 4, 633
- - слабо неприводимое 4, 633
- - субпроективное 5, 267
- расслоение 4, 361
Римановская теория тригонометрических рядов 5, 439
Римановы координаты 1, 928; 4, 1028
Римановых поверхностей классификация 4, 1028—1030
Римановых поверхностей конформные классы 4, 1030—1033
Римские цифры 4, 1033
Риса матрица 4, 1034
- теорема о полугруппах 1, 762
Риск бейесовский 1, 403
Риск статистической процедуры 4, 1033
Риска функция 4, 1033; 5, 192
Рисовская конгруэнция 4, 444
Рисовская полугруппа матричного типа 4, 1034
Рисса базис 4, 1035
Рисса интерполяционная формула 4, 1035
- мера 4, 1039; 5, 263
Рисса метод суммирования 4, 1035
Рисса неравенство 4, 1035
Рисса потенциал 4, 1036
- представление 4, 1039
Рисса произведение 4, 1037
Рисса пространство 4, 1037
Рисса система 4, 1038
Рисса теорема 4, 1038
Рисса теорема выпуклости 4, 1039
- - для функционалов 5, 708
- - о классах Харди 5, 770
- - о компактных операторах 3, 373
- - о локальном представлении субгармонической функции 5, 263
- - о субгармонических функциях 4, 1038, 1039
- - об аналитических функциях классов Харди 4, 1039
- - об интегралах Стилтьеса 5, 227
- - об интегральных представлениях 4, 215
- факторизация 5, 770
Рисса — Герглотца теорема 2, 719
Рисса — Торина теорема об интерполяции 4, 1040
Рисса — Фишера теорема для почти периодических функций 4, 544
- - - о рядах по ортонормированной системе 4, 105
Рисса — Фишера теорема об ортонормированных системах 4, 1040
Рисса — Шаудера теорема об операторах 5, 655
Риссов потенциал 2, 384
Риссов теорема 4, 1040
- - единственности 4, 566, 1040
- - об интеграле Коши 4, 1041
Риссова производная 2, 384
Ритта — Рауденбаха теорема о дифференциальных идеалах 2, 242

Ритца метод 4, 1041
Ритца — Галеркина метод 4, 1042
Ричардсона экстраполяция 4, 1042—1044
Риччи кривизна 3, 99; 4, 1044
Риччи тензор 3, 99; 4, 1007, 1045
Риччи теорема о поверхностях 3, 687; 4, 1045
Риччи тождество 2, 899; 4, 996, 1007, 1045
- уравнения 4, 361
Ришара антиномия 1, 296
Ришара парадокс 4, 1046
Робена задача 3, 83; 4, 1046
Робена постоянная 2, 404, 1099; 4, 1046, 1047
- потенциал 4, 528, 1046
Роббинса — Монро процедура стохастической аппроксимации 5, 235
Род алгебраической кривой 1, 145
Род алгебраической функции 4, 1048
- арифметический 1, 323; 4, 1049
- геометрический 1, 934; 4, 118, 1049
- графа 1, 1115
- канонического произведения 2, 714
Род кривой 4, 311, 1048
- линейный алгебраической поверхности 1, 150
- многообразия Фано 5, 597
Род поверхности 4, 1049
- произведения 4, 1049
- Тодда 5, 868
Род целой функции 4, 1049
Род элемента арифметической группы 4, 1049
$\hat{A}$-род 4, 492
L-род 4, 492, 1048
Роджерса лемма о рекурсиях 5, 421
Роджерса — Рамануджана тождество 5, 768
Родовая фаза 1, 520
Родрига обобщенная формула для ортогональных многочленов 4, 94
- теорема о кривизне 3, 97
Родрига формула 2, 868; 4, 1050
- - для поверхностей 1, 1015
Рождения и гибели процесс 4, 1050
Рождения операторы 2, 990; 4, 1051; 5, 517, 632
Роза трохоидальная 5, 448
Розенлихта — Гротендика теорема для алгебраических групп 4, 924
Розы 4, 1051
Ролля теорема 4, 1052
Рольфсена теорема о зацеплениях 5, 487
Ромб 4, 1052
Ромберга метод 4, 1052
- правило 4, 1043, 1052
Ромбическая сеть 4, 1053
Рост экспоненциальный 2, 174
Роста индикатриса 4, 1054
Росток 4, 1054
- аналитической функции 4, 415
- дифференциальный 2, 278
- дифференцируемого отображения 4, 126
-, комплексификация 1, 689
- конечно определенный 4, 128
- мероморфной функции 4, 1054
- нормальный 3, 1035
- k-определенный 5, 361
- функции 4, 1054
Ротор 1, 715; 4, 1054
- векторного поля 1, 649
Роуза формула 2, 1051
Рохлина многообразие (плюмбинг) 2, 380
Рудвалиса группа 5, 149
Рулетта 4, 1054
Рунге область 4, 1055
Рунге правило 4, 1055
Рунге теорема о приближениях 4, 1055
Рунге — Кутта метод 4, 1056—1058
Ручек теория 4, 1058—1061
Ручка 4, 1058
Ручного типа алгебра 4, 585
Ручное вложение 2, 138; 4, 1061; 5, 401
Руше теорема о нулях аналитической функции 4, 1061
Рынок в теории игр 2, 1104
Рэлея распределение 4, 1061
Рэлея уравнение 4, 1062
- формула 1, 1146
- функционал 2, 689
Рэлея — Ритца метод 4, 1042
Рэлея — Шварца частные 2, 59
Ряд 4, 1063—1070
- абсолютно сходящийся 1, 40; 4, 1065
- арифметический 1, 324
- асимптотический 1, 335
-, безусловная сходимость 5, 549
- биномиальный 1, 491
- Бюрмана — Лагранжа 1, 570
- вариационный 1, 603; 4, 499
- вириальный 1, 708
- возвратный 1, 740
- временной 1, 663, 768
- гармонический 1, 887
- Гартогса 1, 894
- Гартогса — Лорана 1, 894
- Гаусса 1, 1001, 1003
- геометрический 1, 932
- Гильберта — Шмидта 1, 977
- гипергеометрический 1, 1003
- главный 2, 485
- Грама — Шарлье 1, 1086
- группы главный 1, 1018
- двойной 2, 29
- динамики 1, 768
- Дирихле 2, 183
- - для аналитической почти периодической функции 2, 186
- Егорова 2, 399
- знакопеременный 2, 464
- знакочередующийся 2, 464
- идеальный 2, 485
- интегро-степенной 2, 614; 3, 474, 945
- интерполяционный 2, 633
- композиционный 2, 485, 1012; 5, 266
- кратный 3, 93
- Куммера 1, 804
-, Куммера признак сходимости 3, 147
- Лагранжа 1, 570; 3, 174, 1139; 5, 219
- лакунарный 3, 185
- Ламберта 3, 187
- Лейбница 3, 233; 4, 282
- Лиувилля — Неймана 5, 652
-, Лобачевского признак сходимости 3, 402
-, логарифмический признак сходимости 3, 411
- Лорана 1, 264, 265; 3, 450
- - обобщенный 1, 679
- Мёбиуса 3, 631
- Маклорена 3, 478
-, максимальный член 3, 488
- Мищенко 5, 866
- натуральный 3, 893
- Неймана 3, 924; 5, 652
- нормальный 1, 851
- Ньютона 2, 1028
- обвертывающий 3, 1097
-, обобщенная сумма 5, 308
-, обращение 3, 1139; 5, 219
- ортогональный 4, 100
-, остаток 4, 1064
- повторный 4, 350
- подгрупп 4, 367
- полинильпотентный 4, 408
- полициклический 4, 410
-, почленное дифференцирование 4, 1069
-, - интегрирование 4, 1069
- правильно сходящийся 4, 791
-, произведение на число 4, 1064
- Пуанкаре 5, 346
- Пюизё 1, 174, 176, 276, 679; 3, 1091; 4, 414, 778, 1016
- равномерно сходящийся 4, 791
-, разбавление 4, 810
- разрешимый 4, 850
- расходящийся 4, 987, 1063
- степенной 5, 218
- Стирлинга 1, 867
- субнормальный 5, 266
-, сумма 4, 1063; 5, 270
-, суммирование 5, 270
- сходящийся 4, 1063, 1068, 1069
- Тейлора 1, 263; 5, 218, 323
- тригонометрический 5, 438
-, умножение 4, 1066
- универсальный 5, 501
-, условная сходимость 5, 549
- условно сходящийся 4, 1065; 5, 549
- Фабера 5, 583
- Фарея 3, 632; 5, 598
- Фредгольма 5, 653
- функциональный 4, 1068
- Фурье 4, 99, 100; 5, 439
- - по ортогональным многочленам 5, 731
- - почти периодической функции 5, 732
- - функции 5, 732
- Фурье — Бесселя 5, 738
- Фурье — Стилтьеса 5, 740
- Фурье — Чебышева 5, 841
- центральный 5, 811
-, частичная сумма 4, 1063, 1068
- числовой 4, 1063
- шнеккеров 5, 896
- Штурма 5, 907
- Эджворта 5, 924
- Эйзенштейна 5, 346
- Эйлера 5, 931
-, Эйлера преобразование 5, 929
L-ряд 2, 188
- Дирихле 2, 188
θ-ряд 5, 346
Рядное кольцо 3, 1182

С

Сазонова топология 3, 646
Саккери четырехугольник 4, 1071
Салонная игра 4, 1071
Самовоспроизведения задача 1, 51
Самодульная связность 5, 1060
Самоинъективное кольцо 4, 1071
Самокорректирующаяся схема 3, 859
Самонастраивающийся автомат 1, 50
Самообучения задача 4, 872
Самопересекающийся многоугольник 3, 749
Самопересечения точка 2, 25; 4, 124, 125, 1072
Самопериметр 4, 1072
Самоприкосновения точка 2, 25; 4, 124, 1072
Самоприменимый алгоритм 1, 210
Самосинхронизация 2, 937
Самосопряженная краевая задача 4, 1073
- линейная система 4, 1073
- матрица 5, 1019
- подгруппа 3, 1073; 5, 91
- полугруппа 4, 1127
Самосопряженное дифференциальное уравнение 4, 1072—1074
Самосопряженное линейное преобразование 4, 1074
- - пространство 3, 352
- расширение 5, 108
Самосопряженный интегральный оператор 2, 605
- однородный выпуклый конус 3, 1180
Самосопряженный оператор 3, 375; 4, 1074, 1146
- элемент алгебры 4, 1148
G-самосопряженный оператор 1, 986
Самюэля расширение 4, 796
Сарда теорема о критическом множестве 3, 113
Сарда теорема о многообразиях 4, 1075
Сбалансированная игра 2, 1103
Сбалансированное кольцо 4, 1075
- состояние 3, 589
Сбалансированный модуль 4, 1075
Свертка обобщенной функции 5, 730
Свертка тензора 4, 1077; 5, 328
Свертка функций 2, 606; 4, 1075
- ядер 4, 1206
U-свертка 1, 898
Свертки преобразование 4, 1077
Свертывание систем линейных неравенств, метод 3, 347
- тензоров 5, 328
Свертывания аксиом схема 5, 641
- аксиомы 1, 105; 5, 352
- - *теоретико-типовые* 5, 351
Сверхразрешимая группа 4, 1077
Сверхрелаксации метод 4, 966, 1077
Сверхслово 1, 53
Сверхсходимость 4, 1077
Сверхъязык 5, 644
Сверхэффективная оценка 4, 1078
Световой конус 2, 522
Светоподобный вектор 4, 149
Свободная абелева группа 4, 1078
Свободная алгебра 4, 1079
- - Ли 3, 281
Свободная алгебра над ассоциативно-коммутативным кольцом 4, 1079
Свободная алгебраическая система 1, 374; 4, 1079—1081
Свободная ассоциативная алгебра 4, 1081
Свободная булева алгебра 1, 552; 4, 1081
- гомотопия 1, 1075
Свободная группа 4, 1082
- -, Нильсена теорема 4, 1082
- -, Столлингса теорема 1, 1055
- поверхность 3, 326
- образующая 4, 1083
Свободная переменная 4, 1083
- полинильпотентная группа 4, 408
Свободная полугруппа 4, 442, 1083
- порождающая система 4, 1079
- про-p-группа 4, 655
Свободная резольвента 4, 1084, 1087
Свободная решетка 4, 1084
Σ-свободная группа 4, 22
Свободно становящаяся последовательность 2, 639; 4, 1084
Свободное вложение 3, 1096
- вхождение 4, 578
- - переменной 4, 1083
Свободное гармоническое колебание 4, 1084—1086
- действие группы 2, 69
- кольцо 4, 1079
Свободное множество 4, 1086
- некоммутативное аффинное кольцо 1, 123
Свободное объединение 4, 1086
- погружение 4, 362
Свободное произведение 4, 1086
Свободное произведение групп 4, 1086
- T-расширение кольца 1, 722
- семейство элементов модуля 1, 374
Свободной подвижности свойство 4, 83
Свободные колебания 5, 64
Свободный автомат 1, 67
- базис алгебраической системы 1, 373
- бивектор 1, 469
Свободный вектор 1, 632; 4, 1087
Свободный группоид 4, 1087
- идеал 1, 342
Свободный модуль 4, 1087
- -, ранг 4, 862
- моноид 4, 1083
- тривектор 5, 435
- ультрафильтр 5, 495
Свободных порождающих система 4, 1082
- точек метод 5, 831
Сводимости аксиома 4, 1088
Сводимость 4, 957
- алгоритмическая 1, 218
- нумераций 5, 418
- табличная 5, 317
- табличного типа 5, 317
btt-сводимость 5, 317

m-сводимость 4, 957; 5, 317
T-сводимость 4, 957
tt-сводимость 5, 317
Свойство 4, 151
C-свойство Лузина 3, 458
N-свойство Лузина 3, 458
Связанная переменная 4, 1088
Связанное вхождение 4, 578
- - переменной 4, 1083, 1088
Связанный вектор 1, 632; 4, 1089
Связи двусторонние 1, 1034
- неудерживающие 1, 1034
- односторонние 1, 1034
- удерживающие 1, 1034
Связка 2, 1041; 4, 1089
- окружностей 4, 1089
- плоскостей 2, 1085; 4, 1089
Связка полугрупп 4, 1090
- пропозициональная 4, 698
- прямых 4, 1089
- сфер 4, 1090
Связная алгебраическая группа 1, 142
- аффинная схема 1, 358
- *p*-делимая группа 2, 82
- коммутативная компактная группа Ли 3, 264
Связная компонента единицы 2, 82; 4, 1091
- полупростая компактная группа Ли 3, 264
Связная сумма 4, 1092
- топологическая группа 5, 367
k-связная область 3, 748
Связное двоеточие 2, 23; 5, 391
Связное множество 4, 1092
- подмножество 4, 1096
Связное пространство 4, 1092, 1096, 1097
- симплициальное множество 4, 1165
Связности коэффициент картановский 5, 622
Связности Леви-Чивита 4, 209
Связности на многообразии 4, 1092—1094
Связности объект 4, 1094
- отношение 1, 505
- сопряженные 5, 87
- схема 1, 505
Связности форма 4, 1095
Связности число 4, 1096
Связность 4, 1096
- аффинная 1, 355; 2, 268
- без кручения естественная 4, 947
- в категории 3, 943
- Вейля 1, 630
- графа 1, 1114
- евклидова 2, 398
-, Вариского теорема 2, 443
- инфинитезимальная 2, 645
- каноническая 4, 947
- Картана 4, 1093
- конформная 2, 1087
- Леви-Чивита 3, 225
- линейная 3, 309
- метрическая 3, 660
Связность на расслоенном пространстве 4, 1097—1099
- неклинейная 3, 942
- плоская 4, 207
- полная 4, 1093
- проективная 4, 671
- римановa 4, 1021
- самодуальная 5, 1060
- симплектическая 3, 660; 4, 1155
- эквиаффинная 5, 942
- эрмитова 5, 1020
- - каноническая 5, 1020
Связный граф 1, 1106, 1114
Связывающий гомоморфизм 2, 999, 1000
- морфизм 1, 1053, 1057
Связь 5, 71
- анафорическая 4, 1184
- нестационарная 1, 1033
- обратная 1, 63, 69
- стационарная 1, 1033
Сглаживаемая особенность 4, 118
Сглаживание углов 4, 1059
Сглаживания свойство 2, 295
Сглаживающий функционал 3, 934
Сгущения точка 4, 1099
Сдвиг 1, 648; 4, 1099, 1154; 5, 412
- канонический 4, 1161
- размерностей 2, 917
- унитарный 5, 506--507
e-сдвиг 4, 822
Сдвига оператор 4, 27, 1099; 5, 771
Сдвига параметр 4, 1099
- по траекториям оператор 3, 61
Сдвиги полугрупп 4, 1099
Сдвигов динамическая система 4, 1100
Сдвиговая оболочка 4, 1100
Севери делитель 1, 151; 3, 1006
- число 3, 1006
Сегё формула для ортогональных многочленов 4, 98
Сегмент 2, 615; 4, 160, 1100, 1101
- в пространстве 4, 1101
- круга 4, 16
- круговой 4, 1101
- на плоскости 4, 1100
- шаровой 4, 1101
Сегре вложение 4, 1101
- критерий минимальности 3, 142
- многообразие 4, 1101
Седло 4, 122, 1101
Седло в бесконечности 4, 1102
-, сепаратриса 4, 1101
Седловая поверхность 4, 170, 1102
Седловая точка 4, 1103
Седловая точка в теории игр 4, 1103
- - несобственная 4, 1102
к-седловая поверхность 4, 362
Седлового типа предельный цикл 4, 576
Седловой сектор 4, 1106
Седло-узел 4, 122, 1103
-, сепаратриса 4, 1103
Седьмая проблема Гильберта 5, 426
Секанс 4, 1104
Секвенциальная формальная система Генцена 1, 919
Секвенциально компактное пространство 4, 1104
Секвенциальное пространство 4, 1104, 1139
Секвенций исчисление 4, 1104
Секвенция 4, 1105
-, сходность 1, 921
Сёкефальви-Надя теорема о сжатии 4, 1125
Сектор 4, 1105
- в пространстве 4, 1105
Сектор в теории дифференциальных уравнений 4, 1106—1108
- гиперболический 4, 1106
- замкнутый узловой 4, 1106
- кратчайших, угол 1, 789
- круга 4, 16
- круговой 4, 1105
- на плоскости 4, 1105
- открытый узловой 4, 1106
- параболический 4, 1106
- седловой 4, 1106
- Фроммера 4, 1107
- шаровой 4, 1106
- эллиптический 4, 1106
Секториальный оператор 4, 905
Секунда 4, 1108
- метрическая 4, 1108
Секущая окружности 4, 15
Секущая поверхность 4, 505, 1124
- сфера 4, 1058
Секущий диск 4, 1058
Секущих метод 2, 624; 4, 1108
Секционная кривизна 3, 99; 4, 1107, 1109
Сельберга метод 4, 1109
Сельберга решето 4, 1109
Семантика 4, 1110; 5, 636
- алгебраическая 4, 696
- в программировании 4, 650
- денотационная 4, 651
- интерпретирующего типа 1, 224
- интуиционистская 1, 909
- конструктивная 2, 1046; 4, 696
- Крипке 4, 696
- операционная 4, 650
- структурная 5, 255
- трансляционного типа 1, 224
Семантическая антиномия 1, 294, 295
- процедура 1, 224
- система ступенчатая 5, 257
Семантически верная формула 4, 426
Семантический анализ 1, 223
- язык 3, 567
Семантическое следование 4, 696
Семафор 4, 649
Семейство—см. соответствующее название
Семидиэдральная группа 2, 806
Семиинвариант 4, 1111
- линии 2-го порядка 3, 388
- поверхности 2-го порядка 4, 344
- спектральный 5, 132
Семимартингал 4, 1112
Сепарабельная алгебра 4, 1113
- изогения 2, 501
- степень 4, 1114
Сепарабельно замкнутое поле 4, 1114
- порожденное расширение 5, 426
Сепарабельное замыкание 4, 1114
- конструктивное метрическое пространство 2, 1052
Сепарабельное отображение 4, 1113
Сепарабельное пространство 3, 644; 4, 1113
Сепарабельное расширение 4, 1113
- - полууниверсальное 4, 901
- - поля 1, 850
- - универсальное 4, 901
Сепарабельность дифференциальная 4, 825
Сепарабельный алгебраический элемент 4, 1114
- многочлен 4, 1114
- морфизм 4, 1113
Сепарабельный процесс 4, 1114
Сепаранта 4, 1114
Сепаративная полугруппа 4, 1115
Сепаратриса 4, 1116
- неустойчивая 4, 1101
- седла 4, 1101
- седло-узла 4, 1103
- устойчивая 4, 1101
Сепаратрисное многообразие 4, 1116
Сепарирующий базис 5, 426
Сервантная подгруппа 4, 1116; 5, 880
Сериальный коэффициент корреляции 4, 1117
Серии представлений 4, 1117
Серий схема 4, 1118
Серия слова 2, 930
- структурная 2, 889
Серпиньского ковер 3, 384; 4, 1118
Серпиньского кривая 4, 1118
- теорема о континууме 2, 1067; 4, 1097
Серра критерий аффинности 1, 359
Серра подкатегория 4, 1119
- подкручивающий обратимый пучок 3, 1130
- проблема о кольце многочленов 3, 755
- - о проективных модулях 4, 682
Серра расслоение 3, 887; 4, 1119
- спектральная последовательность 3, 235
- теорема двойственности 2, 34, 39
- - об аффинных схемах 1, 359
- условие 1, 1027
Сетевая модель 4, 1119
Сетевое планирование 4, 1120
Сетевой вес 3, 836; 4, 1124
Сетевой график 4, 1119, 1121
- метод планирования и управления 4, 1120
Сети аполярные 1, 298
Сетка 4, 836, 844; 5, 995
Сеток метод 4, 195, 843, 1121
Сеточная аппроксимация 3, 304
- задача корректная 3, 306
- область 4, 218
Сеть 4, 1121, 1122, 1123; 5, 357
- автоматная 1, 53
- алгебраическая 2, 804
- асимптотическая 1, 333
- Бонне 1, 531
- в топологическом пространстве 3, 836
- виртуально - асимптотическая 1, 708
- геодезическая 1, 928; 4, 1122
- гиперболическая 4, 1123
- голономная 4, 1122
-, Дарбу инварианты 2, 15
- Егорова 4, 536
- изотермическая 2, 518
- итеративная 1, 50
- коническая 2, 1033
- конформно-геодезическая 2, 1090
- конформно-чебышевская 4, 1053
- **линий** кривизны 3, 102
- Лиувилля 3, 392
- логическая 1, 55
- неголономная 4, 1122
- ортогональная 4, 85
- параболическая 4, 1123
- переноса 4, 247
- Петри 4, 280
- потенциальная 4, 536
- ромбическая 4, 1053
- сопряженная 5, 81
Сеть сфер 4, 1123
Сеть топологического пространства 4, 1124
- транспортная 4, 1122
- фокальная 2, 1015; 5, 633
- Фосса 5, 646
- частично голономная 4, 1122
- чебышевская 4, 168; 5, 847
- - сопряженная 4, 247
- эллиптическая 4, 1123
e-сеть 4, 396
Сечение 2, 65, 75; 4, 505, 766, 975, 1124
- дедекиндово 2, 65; 3, 322, 986
- золотое 2, 466
- каноническое 2, 712
- коническое 2, 1034
- многозначных отображений 3, 720
- многообразия 2, 54
- непрерывное 3, 989
- нормальное 3, 97, 1070, 1071
- нулевое 4, 1124
- области 1, 1102
Сечение отображения 4, 1124
- представляющее 4, 599
- пространственное 4, 149
Сечение расслоения 4, 893, 1124
Сечения правило 1, 920; 4, 1105
Сжатие 4, 907, 1124; 5, 118, 119
Сжатие алгебры Ли 4, 1125
- вполне несунитарное 4, 1124
- группы 4, 1126
- класса 5, 118
Сжатий полугруппа 4, 1126
Сжатия линия 3, 380
Сжатых отображений принцип 3, 673; 4, 1127
Сжимающее отображение 3, 672
Сжимающий оператор 4, 1124
Сжимающих отображений принцип 3, 673; 4, 1127
Сигма-функция Вейерштрасса 1, 623
- с индексом 1, 624
Сигнал входной 2, 850
- выходной 2, 850
- телеграфный 3, 24
Сигнала выделение 1, 781
Сигнализирующая функция 1, 210, 211, 1092
- - емкости 1, 211
- - памяти 1, 211
Сигнатура 4, 1128
- билинейной формы 2, 563; 4, 1128
- класса алгебраической системы 1, 156; 4, 1128
- Минковского 5, 480
- многообразия 5, 860
- псевдоевклидова пространства 4, 739
- фуксовой группы 5, 679
Сигнум 4, 1129
Сидона множество 1, 885
Сизигетический пучок 3, 140
треугольник 3, 140

Сизигия 2, 542; 4, 1129
-, Гильберта теорема 1, 973
-, модуль 1, 973
-, цепь 1, 973
Силова подгруппа 4, 1129
Силова теоремы 4, 1130
Силовская подгруппа 4, 1129
Сильвестра теорема о квадратичных формах 2, 562
Сильная гомология 4, 1130, 1206
- единица 1, 384; 4, 471
- операторная топология 3, 374; 4, 23
Сильная производная 1, 895; 4, 1130; 5, 666
- связка 4, 1091
- связность псевдомногообразия 4, 741
- суммируемость 5, 275
- сходимость 5, 309
- теорема жесткости 2, 201
- топология 2, 44; 5, 382
Сильно аддитивная арифметическая функция 1, 89
- бесконечномерный бикомпакт 1, 454
- q-вогнутое пространство 4, 728
- выпуклая функция 1, 1100
- вырожденная алгебра Ли 5, 999
- гомологичный нулю цикл 4, 1205
- измеримая функция 1, 541
- изолированная подгруппа 2, 504
- конструктивная модель 2, 1059
- мультипликативная арифметическая функция 3, 840
- недостижимое кардинальное число 2, 724
- нелинейная система 2, 816
Сильно непрерывная полугруппа 4, 1130
- неустойчивое уравнение 1, 863
- нормальное расширение 4, 902
- одновершинное распределение 5, 503
- особая точка 2, 667
- плюрисубгармоническая функция 4, 336
- p-псевдовыпуклая функция 4, 728
- p-псевдовыпуклое пространство 4, 728
- сопряженные локально выпуклые пространства 5, 382
- субгармоническая функция 5, 264
- унимодальное распределение 5, 503
- устойчивое уравнение 1, 863
- феллеровский процесс 5, 603
- эллиптический оператор 3, 362
- эллиптическое уравнение 3, 801
Сильное дифференцирование 4, 1131
- отрицание 2, 1040
Сильное решение 4, 1131
- - стохастического дифференциального уравнения 5, 244
- сопряженное пространство 2, 45
- условие конуса 2, 1076
Сильносвязный граф 1, 1109
Сильный гомоморфизм 1, 1061
- - Ω-систем 1, 156
- граф 1, 1109
Сильный интеграл 4, 1131
Сильный относительный минимум 4, 1132
- турнир 5, 453
Сильный экстремум 1, 583; 4, 1133
Символ антивиковский 4, 1134
- Артина 1, 168; 5, 668
- Вейля 4, 1134
- виковский 4, 1134
- внутренний 4, 1135
- вспомогательный 1, 1092
- Гильберта квадратичный 5, 776
- граничный 4, 1135
- комплекса 2, 553
- Кристоффеля 3, 110
- Кронекера 3, 116
- Лежандра 3, 230
- линейного дифференциального оператора 3, 366
- начальный 1, 1092
- нетерминальный 1, 1092
Символ оператора 4, 1133—1135; 5, 753
- - главный 4, 1135
- основной 1, 1090, 1092
- псевдодифференциального оператора 4, 734
- терминальный 1, 1092
- Хассе 5, 776
- Шлефли 3, 712
- эллиптический 4, 1135
- Якоби 5, 1051
Символическая динамика 4, 1135
- логика 3, 568
Символический модуль линейного дифференциального оператора 3, 367
Символов кольцо 2, 349
Симметризатор Юнга 5, 1027
Симметризации метод 4, 1136
- принцип 4, 1136
Симметризация 4, 1137, 1140
- круговая 3, 120
Симметризованное полилинейное отображение 4, 408
Симметризуемое пространство 3, 657
- - топологическое 4, 1139
Симметрии аксиома для метрики 3, 658
Симметрии критерий 4, 1138
Симметрии принцип 4, 1138
- - для гармонических функций 1, 877
- - Римана — Шварца 4, 1002
- теорема Шварца 5, 888
Симметрий группа 1, 1140
Симметрика 3, 674; 4, 1139
Симметрирование 4, 1140
Симметрическая алгебра 4, 1140
- билинейная форма 1, 482
- - -, сигнатура 4, 1128
- гиперболическая система 3, 327
Симметрическая группа 4, 382, 1141
- -, представление 4, 588
- инверсная полугруппа 2, 546
- квазилинейная система 2, 815
Симметрическая матрица 3, 616; 4, 1142
Симметрическая область 3, 1172; 4, 1142
- полугруппа 4, 442, 599
Симметрическая производная 4, 1143
- - вторая 5, 887
- - Шварца 5, 887
Симметрическая разность 4, 1144
p-я симметрическая степень гомоморфизма 4, 1141
- - - модуля 4, 1140
Симметрическая функция 4, 1144
Симметрический многочлен 4, 1145
Симметрический оператор 4, 1145; 5, 1018
- - дифференциальный 5, 108
- -, максимальное и минимальное расширения 3, 484
- -, расширение 4, 904
- поляритет 4, 477
Симметрический тензор 4, 1146
Симметрическое полилинейное отображение 4, 407
- преобразование 4, 1074
Симметрическое производное число 4, 1146
Симметрическое пространство 4, 1146—1148; 5, 625
- - Фока 5, 631
- - эрмитово 5, 1022
- умножение 4, 1140
Симметричная алгебра 1, 133; 2, 548; 4, 1148—1150
- - равномерная 4, 786
- блок-схема 1, 506
Симметричное блуждание 5, 12
- отношение 4, 1150
- - бинарное 1, 488
- отображение 4, 1149
- подмножество 4, 1149
Симметричное представление 4, 1150
- ядро 2, 591, 595
- Фредгольма 5, 660
Симметричной выборки метод 3, 817
Симметричность 4, 1150; 5, 942
Симметричный канал 2, 709
Симметричный оператор 4, 1150
- тензор 4, 1146
G-симметричный оператор 1, 986
Симметрия 4, 1150
- локальная 3, 454
- метрического пространства 5, 625
- относительно окружности 2, 545
Симморфная кристаллографическая группа 3, 107
Симплекс 2, 996; 3, 151; 4, 681, 1151, 1159, 1161
-, вершина 2, 996
- вырожденный 4, 1163
- геометрический 2, 996
-, грань 2, 996
-, дезориентирующая цепочка 4, 72
-, дезориентирующий путь 4, 71
-, джойн 3, 153
- евклидово 2, 996
-, звезда 3, 153
-, линк 3, 153; 4, 550
-, носитель 4, 1179
- ориентированный 2, 996; 4, 70
-, пояс 3, 153; 4, 550
- симплициального объекта категории 4, 1169
-, соединение 3, 153
- стандартный 5, 168
- топологический 5, 434
- фундаментальный 5, 168
- Шоке 5, 895
- Эйленберга — Зильбера 4, 1163
Симплекс-метод 4, 1152
Симплексный метод 4, 1152—1154
Симплексный поиск 4, 1154
Симплектическая группа 2, 866; 4, 478, 1154
- корреляция 4, 477
- матрица 1, 862; 4, 1154, 1157
-, Ляпунова — Пуанкаре теорема 1, 862
Симплектическая связность 3, 660; 4, 1155
Симплектическая структура 1, 860; 4, 548, 1156
- трансвекция 4, 1154
Симплектический инвариант 4, 1157
- класс Понтрягина 5, 761
- оператор 4, 1157
Симплектическое многообразие 4, 1156
- преобразование 4, 1157
Симплектическое пространство 4, 1156
Симплектическое пространство однородное 3, 1176; 4, 1157
Симплициальная аппроксимация 4, 1161
- гомотопия 4, 1169
- коцепь 3, 44
- подсхема 4, 1159
Симплициальная схема 4, 1158—1161, 1161
Симплициальное множество 4, 1161—1168
- -, резольвента 1, 1070
Симплициальное отображение 2, 998; 3, 151; 4, 1159, 1161, 1168, 1169
- подмножество 4, 1161
Симплициальное пространство 4, 1168
- разбиение 4, 1168
Симплициальный изоморфизм 3, 152
Симплициальный комплекс 3, 151; 4, 1159, 1168
Симплициальный объект категории 4, 1168—1170
- отрезок 5, 168
- спектр 4, 1167
Симпсона формула 2, 625; 4, 1170
Симсона прямая 4, 1170
Симула 4, 1170
Симула 1 4, 1170
Симула-67 4, 1171
Сингония 3, 108
Сингулярная задача Штурма — Лиувилля 5, 907
- коцепь 3, 44
- матрица 1, 806
- обобщенная функция 3, 1105
- поверхность 4, 342
- полугруппа 2, 487
Сингулярная функция 4, 1171
- цепь 4, 1179
Сингулярно возмущенное уравнение 2, 343
Сингулярное интегральное уравнение 2, 592; 4, 1172—1178
- исчисление предикатов 3, 419
- кардинальное число 2, 724
- порядковое число 4, 502
Сингулярное распределение 4, 1178
- симплициальное множество 4, 1162
Сингулярные гомологии 4, 1178—1180
- когомологии 4, 1179
- числа оператора 5, 116
Сингулярный бордизм 4, 304
Сингулярный интеграл 2, 605; 3, 52; 4, 1180; 5, 96
- - Валле — Пуссена 1, 575
- - Гильберта 1, 969
- - Джексона 2, 110
- - Дирихле 2, 194
- -, Коши — Привалова, теорема 4, 630
- - Коши — Стилтьеса 4, 630
- - Фейера 5, 601
- интегральный оператор 4, 1172
- носитель 3, 1118; 5, 672
- оператор 4, 1172
- - Коши 2, 605
- симплекс 4, 1179
- тор 4, 945
- функтор 4, 1162
Синоним 2, 525
Синонимия 3, 566
Синтагматическая аналитическая модель языка 1, 248
Синтаксис в математической логике 1, 111; 4, 1181; 5, 636
- теоретический 4, 1185
- элементарный 4, 1185
Синтаксическая омонимия 4, 1183
Синтаксическая структура 4, 1182—1185
Синтаксическая теорема 4, 1185
Синтаксический анализ 1, 223
Синтаксический язык 4, 1185
Синтеза задачи 3, 931; 4, 943, 1185—1190
Синус 4, 1190
Синус амплитуды 4, 1191
Синус гиперболический 1, 991; 4, 1191
Синус Гордона уравнение 4, 1191—1193
- интегральный 2, 606
- эллиптический 4, 1191
Синусов теорема 4, 1193
- - в гиперболической геометрии 1, 990
- - в сферической тригонометрии 5, 292
Синусоида 4, 1193
Синусоидальная спираль 4, 1193
Синусоидальное колебание 1, 46, 888
Синус-преобразование Фурье 4, 1194
Синхронизация принудительная 1, 47, 787
Система — см. соответствующее *название*
***A*-система** 4, 1194
***K*-система** 4, 1194
***J*-система** 4, 1195
Систематическая ошибка 3, 847, 877; 4, 181, 183; 5, 51, 408
Системная программа 4, 1196
Системное программирование 4, 645, 1196—1198
Ситникова двойственность 1, 1059; 5, 228
Ситуация в теории игр 2, 470, 481; 4, 386
- равновесия 1, 433
- элементарная 2, 143
Скаляр 1, 642; 4, 1197
Скалярная кривизна 3, 99; 4, 1007, 1045, 1197

- плотность 5, 330
- часть кватерниона 2, 838
Скалярное поле 4, 475, 1197
Скалярное произведение 1, 979; 4, 1197
- - в псевдоевклидовом пространстве 4, 739
- - в римановом пространстве 4, 1003
- - векторов 1, 634
- - индефинитное 1, 861
- - тривекторов 5, 435
- - эрмитово 5, 1019, 1021
- уравнение Лапласа 3, 203
Скалярный квадрат 4, 1197
- потенциал 1, 650; 4, 520, 536
Сканирования метод 4, 1198
Скачка операция 3, 1003
Скачков функция 4, 1198
Скачкообразный процесс 4, 1199—1201
Скачок 3, 322
- в системе упорядоченных групп 5, 522
Сквозного индуцирования теорема 2, 559
Скедастическая линия 4, 929
Скелет категории 4, 1200
Склеивания метод в теории поверхностей 4, 1200
- теорема о выпуклых поверхностях 1, 791
Склеивания теоремы для аналитических функций 4, 1201
Скобка Лагранжа 3, 174
- Ли 3, 282
- Майера 5, 1052
- Пуассона 4, 758
- Якоби 5, 1052
Склема парадокс 4, 1201
Склема функция 4, 1202
Сколемовская нормальная форма формулы 4, 1202
- функция 4, 1202
Скользящей группа 4, 1203
Скольжения преобразование 3, 807
Скользящего среднего процесс 4, 1203
Скользящее среднее 3, 756
Скользящий вектор 1, 632; 4, 1204
--, Вариньона теорема 1, 610
- оптимальный режим 4, 58
Скорости годограф 2, 530
Скорость групповая 1, 1146
- передачи 2, 932, 936, 940
- - информации 2, 653
- сходимости 5, 304
- фазовая 1, 1146; 5, 588
Скотта полная решетка 4, 654
Скрещенное групповое кольцо 4, 1204
Скрещенное произведение 4, 1204
- - норм 5, 1031
Скрещенно-обратимая лупа 3, 461
Скрещенные модули 4, 1205
Скрещенный гомоморфизм 2, 917; 4, 1205
Скрещиваний число в графе 1, 1115
Скрещивающиеся прямые 4, 1205
- - косые 4, 991
Скрученная группа 5, 891
Скулема функция 4, 1202
Слабая глобальная размерность кольца 1, 1054
- гомоморфная выпуклость 5, 899
- гомологическая размерность 1, 1053
Слабая гомология 4, 1205
- единица 4, 471
- зависимость случайных величин 3, 917
- обобщенная производная 3, 1107
- операторная топология 3, 374; 4, 23
Слабая особенность 4, 1206
Слабая производная 1, 895; 4, 1206
- сходимость 5, 309, 312, 313
- - функционалов 3, 1104
Слабая топология 2, 44; 4, 716, 1206; 5, 382, 1035
Слабо аналитическая функция 1, 274
Слабо бесконечномерное пространство 4, 1206
- бесконечномерный бикомпакт 1, 454
Слабо блуждающее множество 4, 1206
- выпуклое множество 1, 799
- голоморфная функция 3, 1064
- гомологичный нулю цикл 4, 1205
- гомотопически эквивалентные пространства 1, 1068
- недостижимое кардинальное число 2, 724
- нелинейная система 2, 816
- нелинейное уравнение 3, 951
- непрерывный оператор 4, 19
- неприводимое риманово пространство 4, 633
- нормальное число 3, 1071
- относительно компактное семейство распределений 4, 886
- отрицательное расслоение 4, 163, 433
- полное банахово пространство 1, 389
- положительное расслоение 4, 433
- почти периодическая функция 3, 1119
- равномерная полугруппа 5, 372
- разветвленное расширение 2, 203
- регулярный оператор 2, 774
- редуктивная полугруппа 4, 1100
- сервантная подгруппа 5, 880
- сопряженное пространство 2, 44
- эквивалентные представления 5, 943
Слабого типа оператор 2, 630
Слабое перемешивание 4, 243
Слабое решение дифференциального уравнения 4, 1207
- - - - стохастического 5, 244
- - эллиптического уравнения 3, 361
- условие конуса 2, 1076
Слабой заполненности свойство 4, 1153
- проективности условие 4, 1183
Слабосвязный граф 1, 1109
Слабый граф 1, 1109
- дифференциал 1, 895
Слабый относительный минимум 4, 1132, 1207
- суммирующий базис 1, 377
- счетный базис 1, 376
Слабый экстремум 1, 583; 4, 1208
Славянские цифры 4, 1208
Слагаемое 4, 1212
След 4, 1208
- алгебры Неймана 3, 921
След квадратной матрицы 4, 1208
След на C^*-алгебре 4, 1209
- - группе 5, 512
- регуляризованный 5, 908
- тензора 4, 1077
- функции 1, 723
Следа формула 3, 239, 240
Следов проблема 1, 725
Следование семантическое 4, 696
Следовая норма 5, 1031
Следствие логическое 3, 420
- формулы 1, 127
Слейтера условие в математической экономике 3, 585
- - регулярности в математическом программировании 3, 602
Слипшееся двоеточие 2, 23
Слова сложность 1, 220
- - устойчивая 1, 222
Словарь 1, 1092; 3, 568; 5, 643
Слово 1, 819; 2, 1043; 4, 1209
-, вхождение 1, 772
- групповое 1, 1136
-, длина 4, 1082
- кодовое 2, 649
-, крыло 1, 772
-, неотделимость по инвариантам 1, 821
- несократимое 4, 1082
Словосочетание 4, 1182
Слоение 4, 1210—1212
-, бордизм 1, 534
-, Кнезера теорема 2, 884
Слой конический 2, 1074
Сложение 4, 1212
Сложение множеств 4, 1212
- ручек 4, 1060
- степенных рядов 5, 219
Сложная гипотеза 4, 1213; 5, 185
Сложная система 2, 853; 4, 1213
Сложная функция 4, 1214—1216
- -, производная 2, 272, 276
- цепь Маркова 3, 521
Сложное отношение 2, 27
- отображение 4, 153
- распределение Пуассона 4, 758
Сложности машин мера 1, 213
Сложность вычислений алгоритма 1, 210
- декодера 2, 933
- декодирования 2, 937
- дизъюнктивной нормальной формы 1, 563; 3, 716
- конечного объекта 1, 214
- конъюнктивной нормальной формы 1, 563
- кусков рекурсивно перечислимых множеств 1, 214
- машины 1, 213
- нормальной формы булевой функции 1, 559
- нумерованной модели 3, 1088
- объекта по Колмогорову 1, 220
- описания алгоритма 1, 213
- разрешения слова 1, 220
- релейно-контактной схемы 4, 969
- системы 4, 1214
- слова 1, 220
- - устойчивая 1, 222
- теста 5, 343
- универсального нормального алгорифма 5, 501
- управляющей системы 4, 1186
- формул 3, 715
- функционального элемента 5, 302
Слоистой выборки метод 3, 817
Слой 4, 893, 1161, 1210
- вихревой 1, 715
- геометрический 2, 431; 5, 299
- морфизма 2, 430; 5, 299
- пограничный 4, 356
- предметной области 5, 351
- расслоения 4, 1166
- симплициального объекта 4, 1168
- эллиптической поверхности 5, 984
Слойно конечная группа 1, 1144
Случайная булева функция 1, 1111
Случайная величина 1, 660; 5, 9
- -, абсолютный момент 1, 42
- - безгранично делимая 1, 397
- - гауссовская 1, 907
- -, математическое ожидание 3, 600
- -, независимость 1, 660
- - предельно постоянная 1, 524
- -, среднее значение 3, 600
- -, функция концентрации 2, 1101
- замена времени 5, 693
- квадратурная формула 3, 817
- мера предсказуемая 4, 1199
- ошибка 3, 847, 877; 4, 181, 183
Случайная последовательность 1, 663; 5, 10, 23
- среда 1, 57
Случайная функция 5, 10
- - времени 5, 22
- - с некоррелированными приращениями 5, 212
- -, спектральное разложение 5, 121
Случайного спуска метод 3, 603
Случайное блуждание 5, 12
- дерево 1, 1111
Случайное кодирование 2, 649; 5, 15
Случайное отображение 1, 1111; 5, 15
Случайное поле 5, 16
Случайное поле обобщенное 5, 17
Случайное поле однородное 5, 18
- - - изотропное 5, 19
Случайное событие 1, 666; 5, 19
- -, Бореля — Кантелли лемма 1, 539
- -, независимость 1, 658
- -, объединение 1, 658
- -, совмещение 1, 658
Случайные величины независимые 3, 914
- - слабо зависимые 3, 914
Случайные и псевдослучайные числа 5, 20
Случайные размещения 5, 21
Случайный вектор 5, 10
- граф 1, 1110
Случайный процесс 1, 663; 5, 22—27
- -, автоковариация 1, 45
- -, автокоррелограмма 1, 47
- -, автокорреляция 1, 47
- - векторный 5, 23
- - гармонизуемый 1, 871; 5, 124
Случайный процесс дифференцируемый 5, 27
- -, конечномерное распределение 5, 70
- -, корреляционная функция 3, 23
- - линейно регулярный 3, 320
- - - сингулярный 3, 321
- - многомерный 5, 23
Случайный процесс обновляющий 5, 28
Случайный процесс обобщенный 5, 17, 28
- - одномерный 5, 23
- - однородный во времени 5, 209
- - опциональный 4, 63
- - предсказуемый 4, 582
- - регулярный 4, 1195
- - с дискретным временем 5, 10, 23
- - с многомерным временем 5, 16
- - с многомерным параметром 5, 16
Случайный процесс с независимыми приращениями 5, 29
- - с непрерывным временем 5, 23
- - скользящего среднего 4, 1203
Случайный процесс со стационарными приращениями 5, 30
Случайный процесс согласованный 5, 31
- -, спектральная мера 3, 24
- -, спектральное разложение 5, 121
- -, статистические задачи 5, 171
- -, статистический анализ 5, 178
- - стационарный 5, 209
- - управляемый 5, 528
- - устойчивый 5, 557
Случайный точечный процесс 5, 31
Случайный точечный процесс с ограниченным последействием 5, 32
Случайный элемент 5, 32
- - параболический 5, 516
Случайных величин преобразование 5, 33
Случайных процессов интерполяция 5, 34
Случайных процессов прогнозирование 5, 34
Случайных процессов фильтрация 5, 35
- - экстраполяция 5, 34
Смежная точка граничного элемента 1, 1103
Смежности символ 4, 293
Смежные вершины 3, 749
- - гиперграфа 1, 1006
- - графа 1, 1105
- ребра графа 4, 1105
- стороны 3, 749
- углы 5, 467
Смежный интервал 2, 718
Смежный класс 5, 36
- - Ω-систем 1, 157
Смейла аксиома 1, 1135
- теорема в теории Морса 3, 825
Смешанная группа 5, 36
Смешанная задача 3, 83, 203, 606; 5, 36

Смешанная и краевая задачи для гиперболических уравнений и систем 5, 36
Смешанная и краевая задачи для параболических уравнений и систем 5, 40—44
- краевая задача 5, 36, 45
- область 5, 45
- поверхностная функция 5, 50
- стратегия 2, 332; 3, 865
- частная производная 2, 275
Смешанного типа уравнение 2, 299; 5, 44
Смешанное произведение векторов 1, 635; 5, 48
Смешанный дифференциальный параметр 2, 350
- многосторонний канал 2, 702
- момент 3, 791
- направляющий вектор 5, 51
- объем 5, 49
Смешанный процесс авторегрессин-скользящего среднего 5, 48
- семиинвариант 4, 1111
- спектр 5, 101
- тензор 5, 326
Смешанных объемов теория 5, 49
Смещение 4, 175; 5, 51, 408
- статистики 4, 867
Смещения форма 5, 251
Смещенная оценка 5, 51, 408
Смирнова класс 5, 52, 771
Смирнова критерий 5, 52
Смирнова область 5, 53
- статистика 4, 377
Смита нормальная форма матрицы 3, 1052
-теорема о действии группы 2, 69
Снедекора распределение 5, 54, 626
Снобол 5, 54
Сноса коэффициент 2, 361, 692
Снятия двойного отрицания закон 2, 25
Соабсолютные пространства 1, 32
Соболева класс 5, 55
Соболева обобщенная производная 5, 55
- основная теорема вложения 1, 724
Соболева пространство 5, 56
Собственная аффинная сфера 1, 358
- длина 4, 148
- подгруппа 4, 369
- связка окружностей 4, 1089
- - плоскостей 4, 1089
- триада 1, 1048
Собственная функция 3, 338; 5, 58
- - задачи Штурма — Лиувилля 5, 908
- - ядра 2, 591
- частота 1, 888; 5, 64
Собственно ортогональная алгебраическая группа 4, 83
- сходящаяся последовательность 5, 311
- эллиптический оператор 3, 362
Собственное вращение 1, 764
- время 4, 150
- движение 2, 20
Собственное значение 3, 338, 371; 5, 58
- - ведущее 4, 434
- - задачи Штурма — Лиувилля 5, 908
- - матрицы 3, 617; 5, 764
- - -, итерационные методы нахождения 2, 686
- -, минимаксное свойство 3, 681
- - оператора 5, 98
- - позитивное 4, 434, 435
- -, полная проблема 4, 417
- -, частичная проблема 5, 831
- ортогональное преобразование 4, 87
- подобие 4, 373
- подпространство оператора 5, 65
- поле экстремалей 5, 955
- преобразование Лоренца 3, 453
- распределение 1, 809
- число матрицы 5, 764
Собственные значения дифференциальных операторов; численные методы нахождения 5, 59
Собственные значения интегральных операторов; численные методы нахождения 5, 62
Собственные колебания 5, 64
Собственный вектор 3, 351, 371
- - матрицы 3, 617
- - обобщенный 5, 130
Собственный вектор оператора 5, 65
- - положительный 4, 435
Собственный морфизм 5, 65
- оператор 4, 241
- поворот кривой 2, 491
- подмодуль 4, 372
- пучок 4, 771
Событие 1, 666
-, алгебра 4, 943
- достоверное 2, 378
- невозможное 3, 906
-, независимость 1, 658; 3, 914
-, объединение 1, 658
-, представимое конечным автоматом 1, 54
- регулярное 4, 942
- рекуррентное 4, 955
- случайное 5, 19
-, совмещение 1, 658
-, частота 1, 656
- элементарное 1, 657, 661, 666; 5, 976
Совершенная группа 5, 66
Совершенная мера 3, 642; 5, 66
Совершенная нормальная форма 5, 67
- - - дизъюнктивная 1, 126, 563
- - - конъюнктивная 1, 126, 563
- упаковка 4, 395
Совершенно нормальное пространство 1, 475; 3, 1065; 5, 67
- $\varkappa$-нормальное пространство 3, 1065
- нормальный бикомпакт 1, 475
- полное локально выпуклое пространство 5, 383
Совершенное бикомпактное расширение 5, 67
- вероятностное пространство 1, 666
- замыкание поля 5, 70
Совершенное кольцо 5, 68
Совершенное множество 5, 68
- - канторово 2, 715, 718
Совершенное неприводимое отображение 5, 69
Совершенное отображение 2, 435; 4, 155; 5, 69
- паросочетание 5, 591
- покрытие 4, 395
Совершенное поле 5, 69
- разностное множество 4, 837
Совершенное число 5, 70
Совершенный дифференциальный идеал 2, 242
- код 2, 932; 4, 396
Совместимое множество 5, 280
Совместная математическая индукция 3, 565
- плотность распределения вероятностей 4, 323; 5, 70
- система линейных уравнений 3, 357
- функция распределения 5, 70
Совместное распределение 5, 70
Совместности оператор 3, 367
Совместность методов суммирования 5, 70, 273
Совместные диофантовы приближения 2, 163
Совместный инвариант системы форм 2, 541
- комитант 2, 980
Совмещение событий 1, 658
Совпадение 5, 71
Согласия критерий 5, 72
Согласованные меры 1, 882
- нормы 5, 314
Согласованные распределения 5, 72
Согласованный случайный процесс 5, 31
Содержание многочлена 4, 638
Содержательно непротиворечивая система 3, 998
Соединение 5, 72
Соизмеримые дискретные подгруппы 2, 199
Соизмеримые и несоизмеримые величины 5, 73
Соквадраты ортогональные 4, 90
Сокращение повторений 1, 920
Сокращенная нормальная форма 5, 73
- - - дизъюнктивная 1, 126
- - - конъюнктивная 1, 126
Солемногообразие 4, 851; 5, 73
Соленоидальное поле 1, 650; 5, 74
Солитон 5, 74
Солнце 5, 851
Сонина интеграл 5, 75
- формула 1, 868
Сообщающиеся состояния цепи Маркова 3, 518
Сообщение, источник 2, 682
-, отрезок 2, 682
Сообщений квантование 5, 76
Сообщений скорость создания 5, 76
Сообщений точность воспроизведения 5, 76
Соответственные углы 5, 467
Соответствие 5, 77, 713
- взаимно однозначное 1, 690; 3, 760
- Галуа 1, 845, 849
Соответствие границ 5, 79
- изометрическое 2, 505
- Комбескюра 4, 280
- Петереона 4, 279
- полярное 4, 480
- проективное 4, 681
Соответствия границ принцип 5, 79
Соотношение — см. соответствующее название
O-o-соотношения 4, 497
Соприкасающаяся квадрика 5, 79
- кривая 5, 81
Соприкасающаяся окружность 4, 250; 5, 79
Соприкасающаяся плоскость 2, 249; 5, 80
Соприкасающаяся сфера 5, 80
Соприкасающийся круг 5, 80
Соприкасающийся параболоид 2, 251; 5, 80
Соприкосновение 2, 248, 249; 5, 81
Сопровождающая матрица многочлена 3, 1054
Сопровождающий репер 4, 365
Сопряжение 5, 90
Сопряженная краевая задача 5, 84
Сопряженная матрица 5, 81
Сопряженная сеть 5, 81
- - чебышевская 4, 247
Сопряженная функция 5, 82
Сопряженное векторное пространство 1, 644
Сопряженное дифференциальное уравнение 5, 83
- краевое условие 5, 84
Сопряженное линейное преобразование 5, 85
- множество 1, 644
- представление 4, 591
Сопряженное пространство 3, 292, 377; 5, 86, 708
- ядро 5, 1044
- - Дирихле 2, 194
Сопряженные алгебраические числа 1, 196
- банаховы пространства 1, 387
Сопряженные гармонические функции 1, 266, 878; 5, 86
- гиперкомплексные числа 1, 1008
Сопряженные изотермические координаты 5, 87
- интегральные операторы 2, 605
- комплексные числа 2, 1008
Сопряженные направления 2, 252; 5, 87
- переменные 3, 173
- подгруппы 5, 91
- радиусы сходимости 5, 220
Сопряженные связности 5, 87
- функции, Привалова теорема 4, 630
Сопряженный кватернион 2, 838
Сопряженный класс функций 5, 87
- конус 4, 434
Сопряженный модуль 5, 88
Сопряженный оператор 5, 88
- - линейный 1, 645; 3, 373
Сопряженный тригонометрический ряд 5, 89
Сопряженный функтор 5, 89
Сопряженный элемент 5, 91
- - алгебры 4, 1148
Сопряженных градиентов метод 5, 91
Сопутствующая структура 5, 497
Сопутствующие переменные 2, 901
Составляющих грамматика 1, 1093
- дерево 4, 1182
Составная помограмма 3, 1046
Составное имя 2, 525
- число 4, 706
Составной идеал 5, 92
Состояние — см. соответствующее названию
Состояний множество 1, 53
- уравнения 3, 480
Состоятельная логика Хоара 4, 653
Состоятельная оценка 4, 174; 5, 93
- последовательность оценок 5, 198
Состоятельный критерий 5, 93
Софизм 1, 292
Софокусные кривые 5, 95
Сохоцкого теорема об особых точках 5, 95
Сохоцкого формулы 3, 52, 53; 5, 96
Сохранение углов 2, 1092
Сохранения закон 2, 815
Сохранения области принцип 1, 266; 5, 97
- предиката класс 3, 717
Сочетание 2, 974; 5, 98
- с повторением 5, 98
Сочетания алгоритмов 1, 225
Сочетательность 1, 340
Сочетательный закон 1, 340
Сочленение кортежей 2, 642
Союзное интегральное уравнение 4, 1172
- ядро Фредгольма 5, 660
Союзные уравнения 5, 419
Союзный оператор 4, 1172
Спаривание 5, 98
- Зейферта 2, 451
- Куммера 3, 148
Спациальная точка 3, 1072
Спектр абсолютно непрерывный 5, 128
- алгебры 5, 747
Спектр C^*-алгебры 5, 100
Спектр в категории 5, 99
- вейлевский 5, 99
-, верхний предел 4, 686
Спектр динамической системы 5, 101
- дискретный 5, 101
- замыкания 5, 98
- квазидискретный 2, 805
Спектр кольца 5, 101
- комплекса 4, 393
- Лагранжа 3, 174, 515
- лебеговский 3, 218
- линейного оператора 3, 371
- - преобразования 5, 58
- локальный 5, 114
- максимальный 5, 102, 747
- Маркова 1, 948; 3, 514
Спектр матрицы 5, 102
- мощности 5, 212
- нелинейного оператора 3, 961
- непрерывный 3, 373; 5, 98, 101
-, нижний предел 4, 686
- обратный 4, 686; 5, 100
Спектр оператора 5, 98
- остаточный 3, 373; 5, 98
- почти периодической функции 5, 727
- предельный 5, 99
- проективный 4, 684; 5, 102
- проекционный 4, 686

Спектр пространств 3, 1122; 5, 102
- прямой 5, 99
- регрессии 4, 926
- сгущения 5, 128
- симплициальный 4, 1167
- смешанный 5, 101
- стационарного случайного процесса 5, 124
- Тома 5, 363
- точечный 3, 373; 5, 98
- функции 5, 723
- - распределения 3, 796
- характеристических показателей Ляпунова 3, 472

Спектр элемента 5, 100
- - алгебры 1, 383
- энергетический 5, 212

Спектральная мера 3, 486; 5, 103, 124
- - случайного процесса 3, 24
- - функции 3, 531
- особенность 3, 1008

Спектральная оценка максимальной энтропии 5, 103

Спектральная оценка параметрическая 5, 104

Спектральная плотность 5, 105, 212, 910

Спектральная последовательность 5, 106
- - Лере 3, 235; 5, 106
- - накрытия 2, 908
- - Серра 3, 235
- - Хохшильда — Серра 2, 913
- теорема для нормальных линейных операторов 3, 376

Спектральная теория дифференциальных операторов 5, 108

Спектральная теория линейных операторов 5, 114
- топология 2, 444; 5, 101

Спектральная функция 3, 1110; 4, 814; 5, 118, 212, 910

Спектральная функция стационарного случайного процесса 5, 119, 212

Спектральное многообразие 5, 114

Спектральное множество 5, 119

Спектральное окно 5, 119, 120
- подпространство 5, 114

Спектральное разложение линейного оператора 5, 120

Спектральное разложение случайной функции 5, 121

Спектральной плотности оценка 5, 124

Спектральной функции оценка 5, 125

Спектральные гомологии 5, 126
- когомологии 5, 861

Спектральный анализ 5, 127

Спектральный анализ стационарных случайных процессов 5, 130

Спектральный оператор 5, 131

Спектральный радиус 1, 383; 5, 131

Спектральный семиинвариант 5, 132

Спектральный синтез 1, 885; 5, 132
- след оператора 5, 1041
- тип максимальный 3, 486

Спектральный тип меры 5, 134
- функтор гипергомологий 1, 1006

Спектровая группа гомологии 2, 36

Спеньера двойственность 2, 47

Специализация точки топологического пространства 5, 134

Специализированное градиентное преобразование 1, 1083

Специальная абелева функция 1, 22
- алгебра Ли 3, 244, 270
- группа Клиффорда 2, 882; 5, 138
- - Ли 3, 271
- йорданова алгебра 2, 693
- кватернионная структура 2, 839

Специальная линейная группа 2, 866; 5, 135, 412
- ортогональная алгебраическая группа 4, 83
- проективная группа 4, 416
- теория относительности 4, 145
- унитарная группа 5, 507

Специальное многообразие 2, 839
- подпрямое произведение 4, 379
- уравнение Риккати 4, 986

Специальности индекс дивизора 1, 151

Специальные гомологии и когомологии 1, 234

Специальные функции 5, 136

Специальный автоморфизм 5, 137
- дивизор 1, 145

Спецальный поток 5, 137
- радикал 4, 807
- ранг группы 4, 861
- унитарный кобордизм 2, 892

Спецификация вторичная 2, 978
- первичная 2, 978

Спивака расслоение 4, 748

Спин 5, 137

Спинор 5, 138, 140
- Ван дер Вардена 2, 176
- Дирака 2, 175
- , расслоение 5, 139

Спинорная группа 2, 882; 5, 138
- компактная группа Ли 3, 265

Спинорная структура 5, 139

Спинорное поле 4, 475; 5, 139

Спинорное представление 5, 140
- четырехмерное многообразие 5, 861

Спин-репер, расслоение 5, 139

Спирали 5, 141; см. также соответствующее название

Sici-**спираль** 5, 142

Спирическая кривая 4, 277

Спирмена коэффициент ранговой корреляции 4, 864; 5, 142

Сплайн 4, 604; 5, 143
- интерполяционный 2, 635
- кубический 4, 604; 5, 145
- локальный 4, 606
- полиномиальный 4, 604; 5, 143
- эрмитов 4, 606
- L-сплайн 5, 143
- L_g-сплайн 5, 143

Сплайн-аппроксимация 5, 143

Сплайн-интерполяция 5, 146

Сплетающий оператор 5, 147

Сплетение 5, 147, 484
- групп подстановок 4, 383

Сплетения число 5, 148

Спорадическая группа Судзуки 5, 149

Спорадическая простая группа 5, 148

Спроса отображение 3, 587
- функция 3, 587

Спрад 3, 835

Спрямления точка 5, 149

Спрямляемая кривая 2, 364; 5, 149
- ткань 5, 356

Спрямляющая плоскость 5, 150

Спуск градиентный 1, 593

Спуска метод 3, 490, 947; 5, 150
- наискорейшего метод 3, 882

Сравнение 5, 151
- алгебраическое 1, 190
- двучленное 2, 61
- множественное 3, 760

Сравнение от нескольких переменных 5, 154

Сравнение по двойному модулю 5, 155

Сравнение по простому модулю 5, 156

Сравнение топологий 5, 157
- функций 4, 497

Сравнения признак 5, 158
- - сходимости несобственного интеграла 3, 1017
- принцип 5, 158
- рядов признак 4, 1064

Сравнения теорема в теории дифференциальных уравнений 5, 158
- - Корауса для ортогональных многочленов 4, 96

Сравнения теоремы в алгебраической геометрии 5, 159

Сравнения функция 5, 160

Сравнимые симплексы 4, 1165

Сращивания метод 3, 501

Срединная поверхность 4, 347
- - гладкая 3, 1127

Срединное отклонение 1, 655

Срединный диск 4, 1058

Среднего значения формула для интеграла Стилтьеса 5, 227

Среднее 5, 161
- Абеля 4, 24
- арифметическое 1, 325; 5, 161
- вдоль траектории 1, 495
- взвешенное 1, 693; 5, 161
- временно́е 1, 495
- выборочное 1, 776; 5, 998
- гармоническое 1, 890; 5, 161
- геометрическое 1, 940; 5, 161

Среднее движение 5, 161
- зигелево 2, 780
- значение гармонической функции 1, 876
- - для почти периодических функций 4, 546
- -, Коши теорема 3, 63
- - случайной величины 3, 600
- инвариантное 2, 534
- квадратичное 2, 784
- логарифмическое 3, 410
- пропорциональное 1, 940
- скользящее 3, 756
- Чезаро 4, 23
- ядро 3, 460

Среднеквадратическое приближение 4, 605; 5, 162

Среднестепенное приближение 4, 603, 605

Средних арифметических метод суммирования 5, 162

Средних потоков метод 4, 251

Средняя абсолютная линейная регрессия 3, 309
- вероятность ошибочного декодирования 4, 185
- квадратическая регрессия 4, 930
- - - линейная 3, 309

Средняя кривизна 2, 253, 785; 3, 97; 5, 163

Средняя линия 5, 163
- - трапеции 5, 428
- модульная линейная регрессия 3, 309
- огибающая 5, 923
- поверхность конгруэнции 2, 1015
- порядковая статистика 4, 500
- разность Джини 2, 112

Срез, теорема 2, 69

Срезанный узел 5, 482, 487

Срыва точка 2, 342; 3, 501; 4, 967
- явления 2, 342

Стабилизатор 2, 521; 3, 260; 5, 163
- множества 4, 383

Стабилизации операция 5, 780

Стабилизирующий функционал 3, 933

Стабильная гомотопическая группа 5, 163
- - - сфер 1, 1067; 5, 283
- когомотопическая операция 2, 921
- когомотопическая группа 2, 927
- размерность 2, 927
- специальная линейная группа 5, 135

Стабильное векторное алгебраическое расслоение 1, 638
- композиционное умножение 5, 284

Стабильности теоремы в алгебраической K-теории 5, 164

Стабильные и нестабильные теории 5, 164, 165

Стабильный ранг 5, 166

Стандартизации и унификации математические задачи 5, 166

Стандартная диаграмма Юнга 5, 1027

Стандартная конструкция 5, 167, 447
- нить 5, 373
- параболическая подалгебра 4, 192
- плоская G-структура 5, 250
- - Г-структура 4, 732

Стандартная программа 5, 167
- система Постникова 4, 516

Стандартного действия принцип 1, 856

Стандартное квадратичное преобразование 3, 94

Стандартное отклонение 2, 782; 5, 168
- тождество 1, 120

Стандартный идеал 2, 483
- класс 3, 1087
- марковский процесс 3, 526

Стандартный симплекс 5, 168
- фунтик 5, 168

Старший вектор 4, 590, 596
- -, Картана теорема 2, 738
- вес 4, 590, 596
- - неприводимого рационального представления 4, 92
- характеристический показатель Ляпунова 3, 472

Статика 5, 169

Статистика 5, 169
- Бозе 1, 514
- Бозе — Эйнштейна 1, 514
- Больцмана 1, 520
- достаточная 2, 375, 661; 4, 176
- инвариантная 2, 531
- информационная 2, 658
- исчерпывающая 4, 176
- критерия 5, 182
- математическая 3, 576
- необходимая 2, 376
- неэффективная 3, 1031
- Пирсона 5, 784
- подобная 4, 377
- полная 2, 376
- порядковая 4, 498
- ранговая 4, 863
- Реньи 4, 973
- Смирнова 4, 377
- стьюдентизированная 5, 261
- тестовая 5, 346
- Ферми — Дирака 5, 608

Статистическая гипотеза 5, 170, 185
- зависимость 5, 238

Статистическая игра 5, 170
- независимость 3, 914

Статистическая оценка 4, 173; 5, 170
- процедура инвариантная 2, 536
- -, минимаксность 3, 682
- -, риск 4, 1033
- -, эффективность 5, 1027

Статистическая сумма 1, 957; 5, 170
- - большая 5, 179
- - малая 5, 179

Статистическая эргодическая теорема 1, 495; 3, 927; 4, 24; 5, 171

Статистические задачи теории случайных процессов 5, 171

Статистический анализ многомерный 3, 732

Статистический анализ случайных процессов 5, 178

Статистический ансамбль 5, 178
- - Гиббса 1, 958
- вес 1, 514, 956
- интеграл 5, 171

Статистический контроль качества 5, 180

Статистический критерий 5, 182
- -, мощность 3, 838; 5, 186
- метод 3, 576

Статистический приемочный контроль 5, 183

Статистических гипотез проверка 5, 185

Статистических испытаний метод 3, 815; 5, 189

Статистических решений теория 5, 191

Статистическое моделирование 5, 193

Статистическое оценивание 5, 195
- решающее правило 4, 979

Статистической механики математические задачи 5, 198

Статистической физики математические задачи 5, 204

Статическая задача 2, 677

Стационарная гомотопическая группа сфер 1, 1067
- двойственность 2, 47
- когомологическая операция 2, 921

- мера 5, 208
- оптимальная стратегия 5, 238
Стационарная подгруппа 2, 521; 5, 163, 207
- связь 1, 1033
- случайная среда 1, 57
- стратегия 5, 529
- точка 4, 784; 5, 208
Стационарного действия вариационный принцип 1, 600
- - - - Лагранжа 1, 602
- - - - Якоби 1, 602
- - принцип 3, 173; 5, 1049
Стационарное множество 5, 279
Стационарное распределение 5, 207
Стационарной фазы метод 5, 208
Стационарный адиабатический инвариант 1, 97
- источник сообщений 2, 682
- марковский процесс 3, 529
Стационарный случайный процесс 5, 209—214
- - - в узком смысле 5, 210
- - - в широком смысле 5, 210
- - - метрически транзитивный 5, 211
- - - обобщенный 5, 213
- - -, спектр 5, 124
- - -, спектральная функция 5, 119
- - -, спектральный анализ 5, 130
Стейнберга группа 1, 162
Стеклова проблемы в теории ортогональных многочленов 5, 214
Стеклова функция 5, 215
Степанова почти периодические функции 5, 216
- расстояние 3, 1119
- теорема об аппроксимативной дифференцируемости функции 1, 302
Степени аксиома 1, 106
- задача 2, 330
Степенная дилатация 5, 119
- сумма 4, 1145
Степенная функция 5, 216
Степенной вычет 1, 814; 5, 217
- -, Виноградова гипотеза о распределении 1, 700
- -, распределение 4, 883
Степенной ряд 5, 218—221
- -, Абеля теорема 1, 28, 29
- - алгебраический 3, 1035
- - асимптотический 1, 335
- -, интервал сходимости 2, 615
- -, Коши — Адамара теорема 3, 65
- - кратный 5, 220
- -, круг сходимости 1, 29; 3, 118
- - лакунарный 3, 185
- -, радиус сходимости 1, 29
- - формальный 5, 642
Степень 5, 221
- алгебраического сравнения 1, 190
- - уравнения 1, 191
- - числа 1, 195
- бинарной формы 1, 487
- Брауэра 5, 222
- вершины гиперграфа 1, 1006
- - графа 1, 1106
- вычетов 2, 203
- гиперповерхности 1, 1009
- дивизора 1, 144; 2, 132; 3, 648
- инверсии 2, 544
- коварианта 2, 896
- локальная 5, 222
- многочлена 3, 753; 5, 797
- невычислимости 3, 1003
- непрерывного отображения 5, 221
- неразрешимости 3, 1002
- несепарабельности 4, 1114
- однородного оператора 3, 1181
- одночлена 3, 1184
Степень отображения 5, 221
- подмногообразия 3, 159
- поляризации 4, 477
- Понтрягина 4, 484
- пучка 4, 772, 773
- расширения 4, 909
- - поля 1, 850
- ребра гиперграфа 1, 1006
- свободы в механике 1, 1033
- сепарабельная 4, 1114
- сети сфер 4, 1123
- табличная 5, 317
- тензорная 5, 331
Степень точки 5, 222
- трансцендентности 3, 650; 5, 426
- тьюрингова 1, 219; 3, 1003
- характера Дирихле 2, 192
tt-степень 5, 317
T-степень 1, 219; 3, 1003
Стерадиан 5, 222
Стереографическая проекция 5, 222
Стереоэдр 5, 223
Стёрмера метод 5, 902
Стесненно замкнутое дифференциальное поле 4, 901
Стесненное расширение 4, 901
Стефана задача 2, 1064; 5, 224
Стефана обратная задача 5, 224
Стефана условие 5, 225
Стефана — Больцмана закон 5, 225
Стеффенсена интерполяционная формула 5, 225
Стилтьеса интеграл 2, 565; 5, 226
- интегральная сумма 5, 226
Стилтьеса преобразование 5, 227
Стинрода алгебра 5, 228
Стинрода двойственность 5, 228
Стинрода задача 5, 228
Стинрода квадрат 5, 229
Стинрода операция 5, 230
Стинрода приведенная степень 5, 230
Стинрода — Эйленберга аксиомы 5, 231
Стирание особенностей 5, 232
- - гармонических функций 1, 877
Стирлинга интерполяционная формула 5, 232
- ряд 1, 867
- - интерполяционный 2, 634
Стирлинга формула 5, 232
- число 2, 976; 4, 830
Стоилова теорема о внутреннем отображении 1, 735
Стоимость кодирования 2, 935, 939
Сток векторного поля 2, 682
Стокса линия 1, 717; 5, 941
Стокса теорема 5, 232
Стокса формула 5, 233
Стокса явление 5, 233, 940
Столбцевой ранг 4, 858
Столкновений линеаризованный оператор 1, 518
Столлингса теорема о группах когомологий 2, 910
- - - свободных группах 1, 1055
- - об изотопии 2, 520
Стонга теорема о кобордизмах 2, 891
Стонга — Хаттори теорема о гомоморфизмах 4, 492
Сторона многоугольника 3, 749
- угла 5, 467
Стоуна алгебра 5, 234
Стоуна пространство 5, 233
Стоуна решетка 5, 234
- теорема о булевых алгебрах 1, 552
- - - локально конечном покрытии 3, 433
- - - паракомпактности 3, 673
- - - спектральном разложении 5, 121
Стоуна — Архангельского критерий метризуемости 3, 656, 673
Стоуна — Вейерштрасса алгебра 1, 884
- - теорема о C^*-алгебрах 1, 120
Стоуна — Чеха бикомпактное расширение 5, 234
- - пространство близости 1, 501
Стоуновский бикомпакт 1, 552
Стохастическая аппроксимация 5, 235
Стохастическая геометрия 5, 236—238
Стохастическая зависимость 5, 238
- задача 2, 677
Стохастическая игра 5, 238
Стохастическая матрица 3, 616; 4, 261; 5, 238
- независимость 3, 914
Стохастическая непрерывность 5, 239
Стохастическая неразличимость 5, 240
Стохастическая ограниченность 5, 240
Стохастическая последовательность 5, 240
- стабилизация оптимальная 4, 45
Стохастическая сходимость 5, 240
- фильтрация 4, 45
- функция Ляпунова 3, 468
Стохастическая эквивалентность 5, 240
Стохастически устойчивый характеристический показатель 5, 581
Стохастический базис 5, 240
Стохастический вычислительный алгоритм 5, 241
Стохастический дифференциал 5, 241
Стохастический интеграл 5, 242
Стохастический интервал 5, 243
Стохастический процесс 5, 22, 240, 243
Стохастическое дифференциальное уравнение 2, 362; 5, 243—245
- оптимальное управление 4, 40, 45
Стохастическое программирование 2, 678; 3, 602; 5, 245
- ядро 4, 273
Странный аттрактор 5, 246
Страт аналитического множества 1, 280
Стратегическая игра 2, 470
Стратегия 5, 529, 531
- абсолютно оптимальная 4, 34
Стратегия в теории игр 2, 329, 469; 5, 247
- естественная 5, 531
- марковская 5, 529, 531
- наказания 2, 478
- оптимальная 5, 529, 532
- - гарантирующая 4, 34
- ε-оптимальная 5, 529, 532
- поведения 4, 387
- смешанная 2, 332; 3, 865
- стационарная 5, 529
- - оптимальная 5, 238
- чистая 4, 386
- элементарная 2, 143
Стратификация 1, 107; 5, 247
- аналитического множества 1, 280
Стрелка Пирса 4, 287
Стрельбы метод 4, 640; 5, 247
Стрикционная линия 3, 380
- точка 3, 380
Строгая импликация 5, 247
Строгая эргодичность 5, 247
Строгий деформационный ретракт 2, 102
- индуктивный предел 3, 428
- максимум 3, 494
- минимум 3, 494
- порядок 4, 505
- факторобъект 5, 596
H-строгий частично упорядоченный группоид 5, 527
Строго возрастающая последовательность 1, 749
- - функция 1, 749
- выпуклая норма 3, 868
- - функция 1, 793
- гензелево кольцо 1, 918
- гиперболическая система 3, 326
- изолированная подгруппа 5, 522
- контактное преобразование 2, 1063
- коэрцитивная форма 3, 71
- локальное гензелево кольцо 1, 918
- марковский процесс 3, 525
- марковское свойство 3, 525, 529
- монотонная функция 3, 813
наследственный радикал 4, 806
- нормированное банахово пространство 1, 389
- плоский морфизм 4, 318
- позитивная последовательность 4, 385
- псевдовыпуклая область 1, 1031
- *p*-псевдовыпуклая функция 4, 728
- разрешимая игра 1, 433
- регулярное кольцо 4, 940
- симплектическое пространство 4, 1158
- транзитивная группа 5, 411
- убывающая последовательность 5, 466
- - функция 5, 466
- устойчивое распределение 5, 557
- функционально полная универсальная алгебра 5, 498
- ядерный оператор 5, 1038
Строгое предпочтение 4, 399
- представление множества 2, 689
- расширение 4, 908
- условие трансверсальности 1, 1135
Строгой импликации исчисление 5, 247
pl-строение 3, 153
Г-строение 3, 743
Стронга — Хаттори теорема о гомоморфизмах 5, 868
Строфоида 5, 248
Строчный ранг 4, 858
Струве функция 5, 248
Структура 4, 980; 5, 249
- аналитическая 2, 355
- банахова 1, 384
- близостная 1, 500
- Брауэра 1, 546
- векторная 1, 636
- гамильтонова 4, 1156
- гладкая 2, 355
- дедекиндова 2, 63
- дистрибутивная 2, 230
- дифференциальная 2, 355
- дифференциально-геометрическая 2, 267
-, единица 2, 400
- изометрическая 5, 482
- интегрируемая 3, 745
- инфинитезимальная 2, 267, 645
- кватернионная 2, 839
- кибернетической системы 2, 851
- коалиционная 5, 561
- комплексная 2, 355, 1005
- комплексно аналитическая 2, 355
- контактная 2, 1060
- конформная 2, 1089
- Крипке 3, 765
- локально выпуклая 3, 427
- метризуемая 4, 795
- модулярная 2, 63; 3, 786
- мозаичная 1, 50
- на многообразии 3, 745; 5, 249
- Неймана 3, 925
- однородная 1, 50
- полная 4, 421
- полумодулярная 4, 456
- почти гамильтонова 4, 1156
- - комплексная 4, 541
- - кэлерова 5, 1021
- - симплектическая 4, 548
- - эрмитова 5, 1021
- псевдогрупповая 4, 732
- Пфаффа 4, 774
- равномерная 4, 794
- регулярная 4, 937
- симплектическая 1, 860; 4, 548, 1156
- синтаксическая 4, 1182
- сопутствующая 5, 497
- спинорная 5, 139
- топологическая 5, 374, 388
- флаговая 5, 628
- Хефлигера 5, 782
- Ходжа 5, 788
- эрмитова 5, 1020
C^k-структура 2, 355
G-структура 2, 267, 645
***G*-структура** на многообразии 5, 250—253
(*B*, φ)-структура 5, 253
pl-структура 4, 412
Г-структура 4, 732
Структурная группа 4, 1034

Структурная константа алгебры 2, 1022; 5, 254
Структурная лингвистика 5, 254
- семантика 5, 255
- серия 2, 889; 5, 253
- форма геометрического объекта 1, 935
- - представления группы Ли 1, 935
- формула 2, 587
- функция 5, 252
Структурно упорядоченная группа 5, 255
- упорядоченное кольцо 5, 526
- устойчивая система 1, 1134
Структурное правило 1, 919, 921
Структурное пространство 4, 638; 5, 256
- расслоение 4, 733
- свойство функции 1, 261
Структурные уравнения аффинной связности 1, 356
- - Картана 2, 736
- - связности 4, 1095
Структурный автомат 1, 53
Структурный изоморфизм 5, 256
- пучок 5, 101
- - окольцованного пространства 4, 14
- - схемы 5, 299
- тензор 5, 327
Струхаля число 5, 256
Струя 4, 126; 5, 257
k-струя карты 2, 730
Ступенчатая семантическая система 5, 257
Ступенчатое построение исчисления 2, 685
Ступень разрешимости группы 4, 850
Стьюарта метод 2, 687
Стьюдента критерий 5, 258—260
- отношение 4, 179
Стьюдента распределение 5, 260
Стьюдентизированная статистика 5, 261
Стьюдентизированный размах 5, 261
Стэнтона число 5, 261
Стягивание 2, 675
- алгебры 2, 108
- - Ли 4, 1125
- аналитического множества 2, 673; 3, 770
- комплексного пространства 2, 674
- подмногообразия 2, 675
- ребра графа 1, 1107
- элементарное полиэдральное 4, 411
Стягивающий морфизм 2, 1002
Стянутая надстройка 3, 862
Стянутый конус отображения 2, 1033
Субабнормальная подгруппа 1, 32
Субгармоническая функция 2, 280; 5, 262—265
- - обобщенная 1, 671
Субгармонические колебания 1, 786
Субдифференциал 5, 265
Сублагранжева плоскость 5, 519
Субмарковская переходная функция 4, 259
Субмартингал 3, 532; 4, 459
Субмерсия 5, 265
Субнормальная подгруппа 5, 266
- система подгрупп 4, 368
Субнормальный ряд группы 3, 1076; 5, 266
- - подгрупп 4, 367
Субпараболическая функция 5, 266
Субпроективное пространство 5, 266
Субрасслоение 2, 755
Субрегулярный унипотентный элемент 5, 506
Субституента 1, 223
Субтепловая функция 5, 266
Судзуки группа 5, 149, 268
Судзуки 2-группа 5, 268
Судзуки спорадическая группа 5, 269
Суждение 5, 269
-, реализация 2, 1047
Сужение оператора 4, 19
- отображения 4, 153
Сужение представления 5, 269
- функции 5, 715
Сукцедент 4, 1104, 1105
Сукцедентное правило 1, 921
Сумма 4, 1212
- бесконечная 4, 1063
- Бляшке 4, 1213
- Валле Пуссена 1, 575
- вдоль подпространства 4, 1213
- Вейля 1, 630; 5, 436
- векторная 4, 1212
- векторов 1, 632
- Гаусса 1, 901
- - для характеров 2, 193
- групп подстановок 4, 383
- Дарбу 2, 16
- диэъюнктная 2, 135
- идеалов 2, 482
- инверсная 4, 1213
- интегральная 2, 578; 4, 992
- кардинальная 5, 525
- кардинальных чисел 2, 723
- квадратурная 2, 793
- комплексных чисел 2, 1008
- линейных преобразований 3, 351
- матриц 3, 613
- Минковского 4, 1212
- операторов 4, 21
- ординальная 5, 525
- повторного ряда 4, 350
- подпрямая 4, 379
- прямая 4, 722
- Рамануджана 4, 856
- рациональных чисел 4, 922
- ряда 4, 1063; 5, 270
- - частичная 4, 1063, 1068
- связная 4, 1092
- статистическая 1, 957; 5, 170
- степенная 4, 1145
- степенного ряда 5, 218
- тригонометрическая 5, 435
- упорядоченная 5, 525
- Фейера 5, 601
- чисел 2, 73, 76, 77
p-сумма Файри 4, 1213
Суммарный индекс задачи линейного сопряжения 1, 1097
Сумматорная функция 5, 269
Суммирование 5, 270
- по частям 1, 27
Суммирование расходящихся рядов 5, 270
Суммирование рядов Фурье 5, 271
Суммирования базис 1, 392
- метод Абеля 1, 27
- - Абеля — Пуассона 1, 31
- - абсолютно регулярный 1, 37
- - Бернштейна — Рогозинского 1, 431
- - Бореля 1, 537
- - Валле Пуссена 1, 573
- -, включение 1, 717
- - Вороного 1, 755
- - вполне регулярный 4, 944
- - Гёльдера 1, 913
- - Гронуолла 1, 1132
- - конечнострочный 2, 1025
- - Ламберта 3, 186
- - Лебега 3, 213
- - Линделёфа 3, 286
- - линейный 3, 369
- - логарифмический 3, 410
- -, Мазура — Орлича — Брудно теорема 1, 718
- - матричный 3, 621
- - Миттаг-Леффлера 3, 705
- - Нёрлунда 1, 755
- -, равносильность 1, 718
- - Киоппа 2, 886
- -, Киоппа — Лоренца теорема 1, 37
- - полунепрерывный 4, 460
- - Пуассона 4, 756
- -, регулярности признак 4, 943
- - Римана 4, 995; 5, 440
- - Рисса 4, 1035
- -, совместность 5, 70
- - средних арифметических 5, 162
- -, транслятивность 5, 417
- - треугольный 5, 429
- - Фейера 5, 600
- - Хаусдорфа 5, 778
- - Чезаро 5, 852
- - Эйлера 5, 927
- - Эйлера — Киоппа 2, 886; 5, 927
- -, ядро 5, 1043
Суммирования методы 5, 272—275
- - консервативные 4, 944
- - перманентные 4, 944
- - равносильные 4, 800
- - регулярные 4, 944
- формула Пуассона 4, 763
- - - обобщенная 1, 883
Суммируемая полугруппа 4, 448
Суммируемая функция 2, 14; 3, 210; 5, 275
Суммируемости множители 5, 275
Суммируемости поле 5, 275
Суммируемость абсолютная 1, 36
- безусловная 1, 401
Суммируемость сильная 5, 275
Суммируемый по Эйлеру ряд 5, 929
Суммирующий базис 1, 377
Суммы аксиома 1, 106
Суммы рангов критерий 5, 276
Супералгебра 5, 276
Супергармоническая функция 1, 890; 2, 280; 4, 533; 5, 277
- - обобщенная 1, 671
Супергруппа 5, 277
Суперинтуиционистское пропозициональное исчисление 4, 699
Суперконструктивное пропозициональное исчисление 4, 699
Супермартингал 3, 532; 4, 459
Супермногообразие 5, 278
Супероблость 5, 278
Суперпараболическая функция 5, 278
Суперпозиции метод 3, 816
- оператор 3, 959; 4, 960
Суперпозиция 3, 714; 4, 153
- автоматов 1, 69
Суперпозиция функций 1, 820; 2, 1013; 4, 1214; 5, 278, 715
Суперпространство 5, 279
Суперсингулярная поверхность 4, 342
Суперсингулярная эллиптическая кривая 5, 981
Супертепловая функция 5, 278
Суперэффективная оценка 4, 1078
Суслина гипотеза 1, 108; 5, 279, 280
- континуум 5, 280
Суслина критерий 5, 280, 281
- - для борелевских множеств 1, 535
Суслина проблема 5, 280
- - о бикомпактах 3, 834
- - о порядковых типах 4, 503
- свойство 1, 475
Суслина теорема в дескриптивной теории множеств 5, 281
Суслина условие 5, 279, 281
- число 3, 834; 5, 281
Суслинское множество 2, 93; 3, 455
Сушкевича постулаты 2, 803
Существенная выборка 3, 817
Существенная самосопряженность оператора 4, 907
- совокупность переменных 1, 558
- функция 3, 718
Существенно некорректная задача 3, 932
- нелинейная система 3, 957
- нелинейное уравнение 3, 951
Существенно неразрешимая теория 5, 281
Существенно особая точка 1, 253, 264; 4, 115, 117; 5, 282
- самосопряженный дифференциальный оператор 5, 108
Существенное нормирование поля 2, 129
Существенное отображение 4, 823; 5, 283
- расширение 4, 908
- состояние цепи Маркова 3, 518
Существенный подмодуль 4, 372
Существования квантор 2, 837; 5, 283
Сфер гомотопические группы 5, 283—287
Сфера 5, 287
- Александера 2, 137
- аффинная 1, 358
- Бендиксона 1, 412
- бесконечномерная 5, 289
- в геометрии Лобачевского 3, 399
- в пространстве Римана 4, 991
- гомологическая 4, 748
- дикая 2, 137
- заузленная 2, 445
- Кервера 2, 380
- Ляпунова 3, 467
- Милнора 2, 380; 3, 679
- подошвенная 4, 1058
- предельная 5, 288
- приклеивающая 4, 1058
- Пуанкаре 4, 749
-, пучок 4, 772
-, радиус 4, 808
- Римана 4, 995
- с ручками 2, 52
-, связка 4, 1090
- секущая 4, 1058
-, сеть 4, 1123
- соприкасающаяся 5, 80
-, теорема 2, 90
- топологическая 5, 288
- шварцшильдовская 5, 890
- экзотическая 5, 288
Сферическая гармоника 5, 289
Сферическая геометрия 5, 290
Сферическая индикатриса 5, 291
- метрика 4, 910
- перестройка 4, 258, 1058
- производная 3, 1069; 4, 568
- пространственная форма 4, 709
- симметризация 4, 1137
- теорема Пифагора 5, 292
Сферическая тригонометрия 5, 292
- функция 4, 591, 598
- - Бесселя 5, 822
- - зональная 2, 468
K-сферическая функция 5, 511
Сферические координаты 5, 293
- многочлены 3, 228
Сферические функции 5, 293
Сферический двуугольник 2, 59; 5, 290
- избыток 2, 491; 5, 291
- образ 5, 296
- тензор деформаций 2, 102
- - напряжений 3, 891
- треугольник 5, 290
- элемент 4, 279
Сферических гармоник метод 4, 249; 5, 294—296
Сферическое изображение 5, 296
- нормальное расслоение 4, 748
Сферическое отображение 5, 296—298
- расстояние 4, 996
Схема 5, 299
- абелева 1, 22
- аддитивная 4, 912
- аксиом 1, 102
- арбитражная 1, 312
- асимптотически устойчивая 4, 846
- аффинная 1, 358
- Бернулли 1, 424
-, бирациональная эквивалентность 1, 494
- Брауэра — Севери 1, 547
- вариационная разностная 4, 831
- версальная 2, 105
- Витта 1, 710
- Гильберта 1, 971
- гладкая 1, 1020
-, гомотопическая группа 1, 1075
- Гореншейна 1, 1077
- грамматики 1, 1092
- грубая 3, 772
- групповая 1, 1146
- группы 1, 1146
- Даниеля 2, 14
- двухфакторная 2, 219
-, деформация 2, 105
- Джекобсона 2, 109
- из пороговых элементов 5, 302
Схема из функциональных элементов 5, 301
- квазиаффинная 2, 800

- квазипроективная 2, 819
-, когомологическая размерность 2, 925
- комплекса 2, 996; 3, 152
- конечная групповая 2, 1018
- контактная 2, 1061
- Коэна — Маколея 3, 69
- Крипке 2, 643
- локально одномерная 4, 911
- мажорантная 1, 996
- Мало 2, 724
- машины Тьюринга 5, 456
- нормальная 3, 1051
- нормального алгорифма 3, 1072
- операторная 4, 650
-, особая точка 1, 1020
- Пикара 4, 284
-, подъем 2, 105
- приведенная 4, 631
- программы 4, 650, 655
- - с памятью 4, 650
- проективная 4, 673
-, простая точка 1, 1020
- Пуассона 4, 759
- разностная 4, 836, 843; 5, 995
- Рауса 4, 913
- регулярная 4, 937; 5, 299
- рекурсивная 1, 230
- рекурсивной программы 4, 650
- релейно-контактная 4, 968
- связности 1, 505
- симплициальная 4, 1159
- тонкая 3, 772
- трансверсальная 5, 412
- универсальная 2, 105
- управляющей системы 5, 534
- урновая 5, 544
- Фано 5, 598
- формальная 2, 106
- Чжоу 5, 862
- Эйткена 5, 942
- Янова 1, 230; 4, 652

BIB-схема 1, 505
-, система Штейнера 1, 506
h-схема конечного типа 5, 299
PBIB (m)-схема 1, 505
S-схема 5, 299
- аффинная 1, 363
t-схема 5, 318

Схемная вязкость 5, 303
Схемы серий 4, 1118; 5, 304
Сходимости абсцисса 2, 183
- аксиома гармонического пространства 1, 889
- интервал 5, 221
- круг 3, 118; 5, 218
- множество 5, 218

Сходимости множители 5, 304
- область 5, 220
- поликруг 5, 220
- полуплоскость 2, 183
- почти всюду система 4, 103
- признак Бертрана 1, 433
- прямая 2, 183
- радиус 5, 218
- свойство Брауэра 4, 532
- - Брело 4, 532
- - Дарбу 4, 532

Сходимости скорость 5, 304
Сходимости ускорение 5, 305
Сходимость 5, 305—311
- Абеля признак 1, 28
- безусловная 1, 401; 5, 549
- в смысле среднего квадратичного 5, 309
- в среднем 5, 309

Сходимость в среднем порядка p 5, 309, 311
-, Гаусса признак 1, 899
-, Гильберта — Шмидта теорема 1, 977
-, Д'Аламбера признак 2, 9
-, *Дедекинда признак* 2, 63
-, Дини признак 2, 156
-, Дини — Липшица признак 2, 156
-, Дирихле признак 2, 181

Сходимость дискретная 5, 311
-, Дюбуа-Реймона признак 2, 394
-, Егорова теорема 2, 400
-, Ермакова признак 2, 407
-, Жордана признак 2, 421
- квазиравномерная 2, 819
-, Лейбница теорема 2, 464

Сходимость мер 5, 312
- несобственного интеграла 3, 58
- - -, признак сравнения 3, 1017
- нормальная 3, 1051
- относительно равномерная 4, 1037

Сходимость по вариации 4, 886; 5, 312, 313

Сходимость по вероятности 5, 313

Сходимость по мере 5, 309, 313
Сходимость по норме 5, 313
Сходимость по распределению 5, 313
- порядковая 4, 470, 1037
- поточечная 4, 540

Сходимость почти всюду 5, 309, 313, 314

Сходимость почти наверное 5, 313
- равномерная 4, 787
- -, Вейерштрасса признак 1, 615

Сходимость распределений 4, 885; 5, 314
- ряда, Валле Пуссена признак 1, 574
- -, интегральный признак 4, 1065
- -, Коши критерий 3, 57
- -, Коши признак 3, 61
- -, Куммера признак 3, 147

Сходимость с вероятностью единица 5, 310, 313, 314
- с регулятором 4, 1037
- сильная 5, 309
- слабая 5, 309, 312, 313
- стохастическая 5, 240
- узкая 5, 313
- условная 5, 549
- функционалов слабая 3, 1104
- числового ряда, Раабе признак 4, 781
- числовой последовательности, Коши критерий 3, 56
- широкая 5, 313

v-сходимость 4, 1037
r-сходимость 4, 1037
Сходные секвенции 1, 921
Сходящаяся нить 1, 33
- обобщенная последовательность 5, 307
- по мере последовательность функций 5, 309
- последовательность 4, 507; 5, 306
- - функций 5, 309
- почти всюду последовательность функций 5, 309
- цепная дробь 5, 813
- числовая последовательность 5, 307

Сходящееся бесконечное произведение 1, 444
Сходящийся двойной ряд 2, 29
- итерационный алгоритм 2, 690
- повторный ряд 4, 350
- ряд 4, 1063, 1068, 1069
- - числовой 5, 307
- цикл 1, 829

Счетная компактность 2, 994; 5, 392
Счетно компактное пространство 1, 473; 4, 393
- непрерывный оператор 3, 993

Счетноаддитивная функция 3, 636; 5, 314
Счетного типа базис 1, 376

Счетное множество 3, 837; 5, 314
Счетной суммы аксиома в теории размерности 4, 824

Счетнокомпактное пространство 5, 314

Счетномерное пространство 5, 314

Счетнонормированное пространство 5, 314
Счетности аксиома вторая 1, 769
- - первая 4, 234
- антицепей условие 5, 280

Счетный базис 1, 376

Счисление 5, 314
- двоичная система 2, 23
-, десятичная система 2, 98
-, непозиционная система 5, 315
-, *позиционная система* 5, 315

Сэндвич-матрица 4, 1034

Сюръективное отображение 5, 316, 714
Сюръекция 5, 316

T

Таблица — см. соответствующее название
Табличная промежуточная логика 4, 696

Табличная сводимость 4, 958; 5, 317
- степень 5, 317

Тавтология 3, 1147; 5, 317
Тайхмюллера отображение 5, 317

Тайхмюллера пространство 4, 1031; 5, 317, 680
Таксономии задача 4, 872

Тактическая конфигурация 5, 318

τ-тактная релейно-контактная схема 4, 969
Тактовый момент 1, 52

Тамагавы мера 5, 319

Тамагавы число 3, 378; 5, 319
Танаки — Артина проблема 2, 886; 3, 302
Танаки — Крейна теорема двойственности 4, 482

Тангенс 5, 320

Тангенс амплитуды 5, 320

Тангенс гиперболический 1, 991; 5, 320

Тангенсов формула 5, 320

Тангенсоида 5, 321
Тангенциальное уравнение 5, 321

Тангенциальные координаты 5, 321
Тарского рекурсивная формула 1, 235
- система 3, 413
- теорема о кардинальных числах 2, 724
- - о языке формальной арифметики 3, 414

Тарского — Лося теорема о Ω-системах 1, 159
Тауберова теорема Винера 1, 696
- типа теоремы 5, 321

Тауберово условие 5, 322

Тауберовы теоремы 5, 321
Таутохронная кривая 5, 817
Творческое множество 3, 94

Тейлора многочлен 5, 322

Тейлора ряд 1, 263; 5, 218, 323

Тейлора формула 5, 323
Тейта гипотеза об алгебраических циклах 1, 181

Тейта гипотезы об алгебраических многообразиях 5, 324
- когомологии 2, 918

Тейта модуль 1, 99; 5, 324, 325
- мотив 3, 833
- пучок 1, 99

Телеграфное уравнение 5, 325
Телеграфный сигнал 3, 24
Телесная гармоническая функция 5, 882
Телесный конус 2, 1075
- - касательный 2, 756

Телесный угол 5, 325

Тело 5, 326
- альтернативное 1, 237
- Архимеда 1, 328; 3, 711; 4, 463
- архимедово 3, 431
-, Веддеберна теорема 1, 341
- Вивиани 1, 693
- выпуклое 1, 796, 799
- граничного элемента 1, 1103
- *звездное* 2, 446
- кватернионов 5, 326
- комплекса 3, 152
- локально компактное 3, 430
- множеств борелевское 1, 536
- *неархимедово* 3, 431
-, норма 1, 41
-, нуль 3, 1082
- Платона 4, 552
- постоянного охвата 4, 519
- *постоянной ширины* 4, 519
- - яркости 4, 519
- процедуры 1, 224
- Пуансо 3, 711; 4, 553
- симплициальной схемы 4, 1160
- ультраметрическое 3, 431
- цикла 1, 224

Температурный пограничный слой 4, 356
Темпля теорема о двусторонних оценках 2, 59

Тензор 1, 937; 5, 326—329
- альтернированный 1, 240
- аффинный 1, 364
- Бернара 5, 250
- бесследный 4, 597
- Вейля 3, 100
- второй фундаментальный 4, 360, 361
- гауссова кручения 3, 130
- Дарбу 2, 18
- двухточечный 2, 61
- деформаций 2, 101
- дискриминантный 2, 217
-, ковариант 2, 895
- ковариантный 2, 900; 5, 326
-, контравариант 2, 896
- контравариантный 2, 1070; 5, 326
- конформной кривизны 2, 1089; 3, 100
- кососимметрический 1, 240; 3, 42
- кривизны 3, 102; 4, 1006
- - направлений 1, 630
- кручения 3, 130, 131; 4, 542
- - картановский 5, 622
- метрический 3, 668; 4, 235, 1003; 5, 328
- - основной 4, 1013
- - финслеров 5, 622
- напряжений 3, 891
- Нейенхёйса 4, 542
- основной 3, 668; 4, 235
- поверхности второй основной 1, 771
- проективной кривизны 3, 101
- Римана 4, 996
- *Римана — Кристоффеля* 4, 1000, 1006
- риманова кручения 3, 130
- Риччи 3, 99; 4, 1007, 1045
-, свертка 4, 1077
- симметрический 4, 1146
- симметричный 4, 1146
-, след 4, 1077
- смешанный 5, 326
- фундаментальный 3, 668
- *Эйнштейна* 4, 1007

Тензорная алгебра 5, 329
Тензорная плотность 5, 329
- степень 5, 331

Тензорное исчисление 5, 330
- *поле* 5, 249, 333
- - Киллинга 2, 857
- - кривизны 2, 736
- - кручения 2, 736
- представление 5, 329

Тензорное произведение 5, 330—332
- - алгебр 5, 331
- - векторных пространств 1, 646
- - гильбертовых пространств 1, 983
- - матриц 5, 332
- - норм 5, 1031
- - представлений 5, 332
- - расслоений 5, 332
- - унитарных модулей 5, 330

Тензорное расслоение 5, 332
- топологическое произведение 5, 393

Тензорный анализ 5, 333
Теорема 5, 334; см. также соответствующее название
- обратная 3, 1132
- противоположная 4, 720

Теоретико-множественный предел 4, 562
Теоретико-решеточное свойство 4, 959

Теоретико-числовая функция 1, 257, 322; 5, 335

Теоретическая арифметика 1, 314
- логика 3, 568

Теоретический синтаксис 4, 1185
Теоретическое программирование 4, 650

Теория *формальная* 5, 335
- элементарная 4, 427

***K*-теория** 5, 335—337
- алгебраическая 1, 160
-, Ботта теорема периодичности 1, 541
- приведенная 4, 924

Тёплица матрица 4, 943; 5, 337
Тёплицева форма индефинитная 5, 337
Тепловой объемный потенциал **3**, 1152
- пограничный слой 4, 356
- потенциал 3, 609
- - двойного слоя 2, 26
- - простого слоя 4, 705
Теплопроводности теория, контактные задачи 2, 1063
Теплопроводности уравнение 2, 299; 5, 337
Терм 1, 157; **3**, 417; 5, 338
- замкнутый 5, 637
Терминал 2, 702
Терминальный выигрыш 2, 143
- объект 4, 689; 5, 616
- символ 1, 1092
Термодинамики математические задачи 5, 338—340
- релятивистской математические задачи 4, 972
Термодинамический потенциал 5, 171, 201, 340
Термодинамический предельный переход 5, 201, 341
Тернарная форма 5, 634
Тернарное отношение 4, 151
Тернарный идеал 4, 635; 5, 341
- радикал 5, 341
Теснота топологического пространства 3, 836
Тест в кибернетике 3, 860; 5, 342—346
Тестовая статистика 5, 346
Тест-функция 3, 490
Тета-ряд 5, 346, 347
- Пуанкаре 2, 877; 5, 346
- Эйзенштейна 5, 346
Тета-функция 5, 347—349
- гиперэллиптическая 4, 999
- Римана 4, 998
Тетрациклические координаты 2, 1084; 4, 234; 5, 349
Тетраэдр 3, 709; 5, 350
- Демулена 2, 90
Тетраэдра пространство 5, 350
Тетраэдральные координаты 5, 350
Тетраэдрические числа 1, 324
Течение адиабатическое 1, 98
Тзена теорема о группе Брауэра 1, 545
Тип — см. соответствующее название
Типа римановой поверхности проблема 4, 1028
Типично вещественная функция 3, 725; 5, 350
Типов теория 5, 351—353
Типовая дифференциальная размерность 4, 825
Типовой изоморфизм 2, 867
Тиссо уравнение 4, 541
Титса расслоение 5, 353
Титса система 5, 354
Титчмарша проблема 5, 354
- теорема о кольцах 4, 26
Тихонова принцип **3**, 976
- теорема о бикомпактах 4, 145
Тихонова теорема о бикомпактности произведения 5, 355
- - о квазикомпактных пространствах 2, 809
- - о методе малого параметра **3**, 500
- - о топологических векторных пространствах 5, 379
- - о топологическом произведении 1, 473
Тихоновский куб 5, 355
Тихоновское произведение 5, 356, 387
- -, диагональ 1, 672
Тихоновское пространство 1, 763; 4, 140; 5, 355, 356, 392
Тице преобразование в группах 4, 33
Тканей геометрия 5, 356
p-ткань плоская 5, 356
Тодда класс 5, 357
- род 5, 868
Тоёды теорема о квазигруппах 2, 803
Тождества аксиома для метрики 3, 658
Тождества проблема 1, 1148; 5, 357
- слов проблема 1, 216
Тождественная истинность 5, 357
Тождественно истинная формула **3**, 1147
Тождественное преобразование 1, 125
Тождественный линейный оператор **3**, 369
- морфизм 2, 761
- - функтора 5, 688
- функтор 5, 685
Тождество — см. соответствующее название
Ток Нётер **3**, 1028
Толерантность 5, 358
Толерантный интервал 5, 358—360
- предел **5**, 359
Толщина графа 1, 1115, 1120
Тома изоморфизм 5, 360
Тома катастрофы 5, 360—362
Тома класс 5, 362
Тома пространство 4, 72; 5, 362
Тома спектр 5, 363
- теорема о замкнутых многообразиях 5, 904
- - трансверсальности 4, 127
Тома — Дольда изоморфизм 5, 360
Томаса — Ферми уравнение 5, 997
Томпсона группа 5, 149
Томпсона подгруппа 5, 363
Томсена условие замыкания 2, 439
Тонелли плоская вариация 5, 363, 364
Тонелли теорема о площади поверхности 5, 364
Тонкая окрестность 5, 365
- схема 3, 772
Тонкая топология в теории потенциала **5**, 364
Тонкий комплексный модуль **3**, 772
- предел 5, 365
Тонкий пучок 5, 365
Тонко предельная точка 5, 365
Тонкое множество 5, 365
Топологизированная категория 5, 365
- -, главный *G*-объект 1, 1017
- -, гомотопический тип 1, 1074
Топологическая алгебра 5, 366
- векторная группа **5**, 379
Топологическая группа 5, 367—369
- Галуа 1, 854
- -, Гаусса разложение 1, 900
- -, группа характеров 5, 767
- - локальная **3**, 425
- - локально евклидова 1, 245; 5, 369
- -, представление 4, 591
- - рефлективная 4, 481
- -, характер 5, 747
Топологическая динамика 5, 369—371
Топологическая динамическая система 5, 371
- - -, центр 5, 802
- инвариантность 1, 1036; **2**, 96
Топологическая полугруппа 5, 372—374
- проективная плоскость 4, 670
Топологическая структура 5, 374
- сфера 5, 288
- *K*-теория 5, 335
Топологическая транзитивность 5, 374
- характеризация 1, 1036
- цепь Маркова 4, 1136
Топологическая эквивалентность 1, 84; **3**, 371; 5, 375
Топологическая энтропия 5, 375
Топологически неприводимое представление **3**, 996
- свободное множество 4, 1086
- сопряженные локально выпуклые пространства 5, 382
- эквивалентные представления 5, 943
- - пространства **1**, 1035; 5, 390
Топологический автоморфизм Бернулли **4**, 1136
- базис 1, 375
- гомоморфизм **5**, 384
- изоморфизм **3**, 370
Топологический инвариант 5, 375, 376
- индекс 5, 868
- каскад 5, 371
- кобордизм 2, 892
Топологический модуль 5, 377
- *G*-модуль **5**, 377
- полиэдр **3**, 151; **4**, 412
- поток **3**, 994; **5**, 371
- предел 4, 562
- симплекс 4, 1152; **5**, 434
- узел 4, 122
- упорядоченный симплекс 4, 1152
Топологическое векторное подпространство 5, 379
Топологическое векторное пространство 1, 646; **5**, 377—385
- - -, двойственность 2, 43
- - факторпространство 5, 379
- вложение 5, 400, 401
Топологическое кольцо 5, 385
- многообразие 2, 355
- отображение 1, 1035; **5**, 390
Топологическое поле 5, 386
Топологическое произведение 5, 387
- -, Тихонова теорема 1, 473
Топологическое пространство 5, 374, 388—393
- -, абсолютная группа 1, 1045
- - ациклическое 2, 198
- -, база 1, 371
- -, вес 1, 673
- -, гомологии теория 1, 1044
- -, группа гомологий 1, 1040
- -, деформационный ретракт 2, 102
- -, доминанта 2, 372
- -, калибр 2, 699
- -, категория 2, 763
- -, когомологии 2, 905
- -, когомологическая размерность 2, 925
-, копус 2, 1074
-, мощностная характеристика **3**, 834
- - неприводимое **3**, 997
- -, покрытие 4, 392
- -, пополнение 4, 496
- -, псевдобаза 4, 726
- -, размерность 4, 826
- -, расширение 4, 909
- -, ретракт 4, 975
- -, сеть 4, 1124
- - симметризуемое 4, 1139
- -, триангуляция 5, 434
- -, ядро 1, 737
- свойство 1, 1036; **3**, 669
- слоение 4, 1210
Топологическое тензорное произведение 5, 393
Топология 5, 387, 394—400
- адическая 1, 98
- алгебраическая 1, 169
- антидискретная 1, 292
-, база 1, 371
-, базис 1, 371, 373
- бикомпактно открытая 1, 472
Топология вложений 5, 400—402
- выпуклой закругленной компактной сходимости 4, 23
- Гротендика 5, 365
- дискретная 2, 202
- дифференциальная 2, 260
- замкнутая 5, 374
- Зарисского 2, 444
- индуктивная **3**, 428; **5**, 381, 383
- индуцированная 4, 145
- каноническая 5, 366
- комбинаторная 2, 970
- компактно открытая 4, 716, 1100
- компактной сходимости 2, 993
- Крулля 1, 854
- кусочно линейная **3**, 151
- линейная 3, 318
- локально выпуклая **3**, 427
- локального кольца 1, 98
- Макки 2, 44; **3**, 478
- Мартина **3**, 532
Топология многообразий 5, 402—404
- нормы 4, 716
- общая **3**, 1141
- ограниченной сходимости 4, 23
- операторная **3**, 374; **4**, 22
- - сильная 4, 23
- - слабая 4, 23
- - ультрасильная 4, 23
- - ультраслабая 4, 23
- открытая 5, 374
- относительная 4, 145
-, порожденная метрикой 3, 670
- порядковая 4, 501
- поточечной сходимости 4, 23, 540, 716; 5, 382
-, предбаза 1, 671
- предкомпактной сходимости 4, 23
- проективная **3**, 427; 5, 381, 383, 1035
- произведения 5, 387
- простой сходимости 4, 23
- равномерная 4, 789
- равномерной сходимости 4, 716, 799; 5, 382
- Сазонова **3**, 646
- сильная 2, 44; 5, 382
- слабая 2, 44; 4, 716, 1206; 5, 382
- спектральная 2, 444; 5, 101
- тонкая в теории потенциала 5, 364
- Уитни 4, 127
- экспоненциальная 5, 953
- этальная 5, 1023
S-топология 5, 766
σ-топология 2, 993; 4, 23; 5, 382
Топоногова теорема сравнения углов 4, 1011
Топос 5, 366, 404
Тор 5, 405
- алгебраический 1, 179
- комплексный 1, 22, 250; **2**, 1011
- максимальный **3**, 486
- полурегулярный 4, 945
- промежуточный Гриффитса 4, 697
- регулярный 4, 945
- сингулярный 4, 945
Торелли проблема в теории модулей **3**, 774
- теорема о кэлеровых многообразиях 4, 697
Торелли теорема о структурах Ходжа 5, 405
- - об отображении периодов 4, 155
Торический узел 5, 407
Торическое зацепление 5, 407, 485
Тороидальная гармоника 5, 407
Тороидальное многообразие 2, 584
Тороидальные координаты 5, 408
Торс 4, 811; **5**, 408, 612
Тосье полугруппа 4, 703
Тотально правильная программа 4, 652
- трансцендентная теория 5, 165
Тотальное множество 4, 424; **5**, 408
- - линейных функционалов 1, 392
- - предельное 4, 565
- - функционалов 2, 377
- подмножество 1, 644
Тотально-симметрическая квазигруппа 2, 802
Тотальный граф 1, 1106
Точечная аналлагматическая геометрия **3**, 122
- конечность покрытия 4, 393
Точечная оценка 4, 174; **5**, 408
Точечная решетка 1, 945; **5**, 408
m-точечная база 1, 371
n-*m*-точечная база **1**, 371
Точечно конечная база **1**, 371
- счетная база 1, 371
σ-точечно конечная база **1**, 371

Точечного источника метод 3, 609
- - функция 3, 1109
Точечно-множественное отображение 3, 720
Точечные координаты 3, 9
Точечный случайный процесс 5, 31
- спектр 3, 373; 5, 98
Точка аксиальная 3, 1072
- асимптотическая 1, 334; 5, 424
- бесконечно удаленная 1, 443; 2, 484
- ветвления линии 3, 386
- - многообразия 2, 55
- внутренняя 4, 700
- возврата 2, 25; 4, 124
- гетероклиническая 1, 955
- гиперболическая 2, 252; 4, 746, 747
- двойная 2, 24; 3, 88; 4, 124
- диагональная 4, 664; 5, 598
- дисперсии 2, 217
- Жергонна 2, 410
- Жюлиа 2, 428
- замкнутая 5, 134
- заострения 2, 439
- идеальная 2, 484; 4, 746
- излома 2, 494; 5, 424
- изолированная 2, 24, 504; 4, 124, 125
- инвариантная 2, 533
-, квазикомпонента 4, 1096
- квазирегулярная 5, 1013
-, компонента 4, 1096
- конденсации 2, 1015
- коническая 4, 125
- концевая 3, 386; 4, 700
- краевая 3, 87
- кратная 3, 88; 4, 124
- кратности 4, 310
- критическая 3, 112
- круговая 3, 124, 914; 4, 15
- Лебега 3, 217
- либрации 5, 432
- Мейера 4, 567
- мероморфности 4, 117; 5, 282
- мировая 3, 703; 4, 149
- накопления 3, 887; 4, 1099
- начальная 2, 284; 3, 895
- неблуждающая 3, 904
- неопределенности 4, 117
- неподвижная 3, 975; 4, 784; 5, 385
- несобственная 2, 484; 4, 664
- общая 3, 1143; 5, 134
- общего положения 3, 1144
- обыкновенная 2, 248, 251
- округления 2, 252; 4, 15
- омбилическая 3, 97; 4, 15, 17
- опорная 4, 29
- особая 2, 248, 251; 4, 784
- - алгебраического многообразия 4, 118
- - аналитической функции 4, 113
- - векторного поля 4, 120
- - дифференциального уравнения 4, 120
- - дифференцируемого отображения 4, 123
- - кривой 4, 119, 124
- - поверхности 4, 120, 124
- отмеченная 4, 1165
- отрицательно асимптотическая 4, 570
- параболическая 2, 252; 4, 194
- перевала 4, 239
- перегиба 4, 239, 310
- периодическая 4, 267
- пика 2, 966
- планарная 3, 1072
- Плеснера 4, 567
- плотности 4, 320; 5, 1013
- покоя 2, 533; 4, 784
- положительно асимптотическая 4, 570
Точка поля 5, 409
- пористости 4, 497
- предельная 4, 563
- представляющая 2, 144
- прекращения 4, 599; 5, 424
- прикосновения 2, 1002; 4, 634; 5, 389
- проективной плоскости 4, 668
- разветвления 4, 811
- разрыва 4, 852
- распрямления 5, 149
- рациональная 5, 299
- рекуррентная 4, 954
- самопересечения 2, 25; 4, 124, 125, 1072
- самоприкосновения 2, 25; 4, 124, 1072
- сгущения 4, 1099
- седловая 4, 1103
- спациальная 3, 1072
- спрямления 5, 149
- срыва 2, 342; 4, 967
- стационарная 4, 784
- стрикционная 3, 380
- существенно особая 5, 282
- тонко предельная 5, 365
- транзитивная 5, 1013
- тройная 3, 88
- угловая 2, 272, 494; 5, 424, 466
- узловая 2, 25; 4, 124
- уплощения 2, 252; 3, 97; 5, 522
- условно устойчивая 5, 550, 551
- устойчивая по Пуассону 4, 570
- фазовая 2, 144; 5, 587
- Фату 4, 566; 5, 599
- Фекете 5, 422
- фокальная 3, 824; 5, 613
- целая 5, 797
- циклическая 3, 124
- чебышевская 5, 847
- шаровая 3, 97; 4, 15
- Штейнера 5, 901
- эллиптическая 2, 252; 5, 986
A-точка 2, 401
Точная верхняя грань 1, 673; 5, 834
- - - семейства топологий 1, 671
- нижняя грань 1, 673; 5, 834
- гомотопическая последовательность 1, 1063
- пара 5, 106
Точная последовательность 5, 409
- - Майера — Вьеториса 1, 162
- форма 2, 263
Точное представление 3, 778; 4, 595; 5, 409
Точности аксиома 1, 1045; 5, 231
- мера 4, 183
Точный дифференциал 2, 238
- множитель Вейля 4, 103
- модуль 3, 778
- радиус звездообразности 2, 450
Точный функтор 5, 409
Точный эндоморфизм 5, 410
Траектории устойчивое многообразие 1, 999
Траектория 2, 147, 767; 4, 68, 538; 5, 410
- асимптотически орбитально устойчивая 4, 68
- дифференциала 2, 786
- замкнутая 4, 267
- изогональная 2, 502
- оптимальная 4, 35
- ортогональная 2, 502; 4, 87
- отрицательно устойчивая по Лагранжу 5, 567
- периодическая 2, 533; 4, 267
- положительно устойчивая по Лагранжу 5, 567
-, предельное множество 4, 570
- рекуррентная 4, 954
- случайной функции 5, 11
- точки 2, 68
- фазовая 1, 83; 2, 144; 5, 586
Траекторно эквивалентные динамические системы 5, 1011
Трактриса 5, 410
Транзитивная группа 5, 411
- - движений 2, 22
- - подстановок 4, 382
- псевдогруппа преобразований 4, 730
- точка 5, 1013
Транзитивное бинарное отношение 1, 488
- импримитивное представление 2, 524
- множество 1, 783
- отношение 5, 412
Транзитивности область 5, 411
Транзитивность 5, 412, 942
- метрическая 3, 666
- областей 5, 374
- топологическая 5, 374
Транзитивный турнир 5, 453
Трансвекция 3, 302; 5, 412
- симплектическая 4, 1154
Трансверсаль 1, 966; 2, 975; 3, 207, 623; 4, 505, 813; 5, 412
Трансвереальная поверхность 5, 613
Трансверсальная система 5, 412
- схема 5, 412
Трансверсально регулярное отображение 5, 413
Трансверсально эллиптический оператор 5, 412
Трансверсальное отображение 5, 413
Трансверсальности теорема Тома 4, 127
Трансверсальности условие 1, 62; 5, 413—415
- - строгое 1, 1135
Трансверсальность 5, 415
Трансверсальный матроид 3, 623; 4, 813
Трансгрессивный элемент 5, 416
Трансгрессия 5, 416
- гомотопическая 1, 1064
Трансдуктор 1, 224
Транслятивность метода суммирования 5, 417
Транслятор 1, 225; 5, 418, 419
- отладочный 1, 225
Трансляционного типа семантика 1, 224
Трансляция 5, 417
- главная 1, 1013
- относительно элемента 2, 802
Трансляция программ 5, 417—419
Трансмиссии условие 5, 419
Транснормальное пространство 4, 519
Транспозиция 4, 380, 1141
Транспонированная матрица 3, 615; 5, 419
Транспонированное ядро Фредгольма 5, 660
Транспонированные уравнения 5, 419
Транспортная задача 4, 540; 5, 419—421
- сеть 4, 1122
Трансфинит 1, 764
Трансфинитная индукция 5, 421
Трансфинитная последовательность 4, 502; 5, 421
Трансфинитная рекурсия 5, 421
Трансфинитное пространство Гильберта 3, 899
Трансфинитное число 2, 723; 4, 501; 5, 421
Трансфинитный диаметр 5, 422—424
- класс, Колмогорова теорема 2, 94
Трансформационная грамматика 1, 1095
Трансформация Лапласа 3, 196
Трансформирование 5, 91
Трансцендентная кривая 5, 424
Трансцендентная точка ветвления 1, 680; 5, 424
Трансцендентная функция 5, 425
- - Пенлеве 4, 233
Трансцендентное расширение 4, 909; 5, 425
- уравнение 5, 540
Трансцендентное число 1, 260; 5, 426
Трансцендентности базис 5, 425
Трансцендентности мера 2, 165; 5, 427
- степень 3, 650; 5, 426
Трансцендентный элемент 4, 908; 5, 425
Трапеций формула 5, 427
Трапеция 5, 428
-, средняя линия 5, 163, 428
Тренд 5, 181
Треска — Сен-Венана условия 4, 299
Третичная когомологическая операция 2, 923
Третья квадратичная форма 2, 785; 5, 296
Третья краевая задача 3, 83, 349; 5, 428
- подстановка Эйлера 5, 928
- смешанная задача 5, 37, 41
Треугольная алгебра Ли 3, 250
- - - разрешимая 3, 280
- блок-схема 1, 506
Треугольная группа 5, 428, 680
- - Ли 3, 251
- - - связная 3, 281
- диаграмма 2, 125
Треугольная матрица 5, 428
- частичная сумма 2, 31
Треугольник 5, 428
- автополярный 4, 990
- арифметический 1, 325
- геодезический 1, 929
- Герона 1, 954
-, избыток 2, 491
-, медиана 3, 632
-, Менелая теорема 3, 635
- на плоскости Римана 4, 990
-, ортоцентр 4, 105
- ортоцентрический 5, 598
- Паскаля 4, 226
- поверхностный 4, 1025
- Рёло 4, 519
- сизигетический 3, 140
-, средняя линия 5, 163
- сферический 5, 290
- эйлеров 5, 290
Треугольника аксиома для метрики 3, 658
- неравенство 3, 701
Треугольное разложение в группе 1, 900
- распределение 4, 798
- решение задачи трех тел 5, 431
- усечение группы 1, 900
Треугольное число 1, 324; 5, 429
Треугольный метод суммирования 5, 429
Треугольный элемент 5, 429
Треффца метод 5, 430
Трех констант теорема 3, 937
- полюсов теорема 1, 1024
«Трех сигм правило» 3, 1066; 5, 430
Трех тел задача 2, 870; 5, 430—432
Трехвершинник 2, 1077
Трехгранник Дарбу 2, 18
- естественный 2, 250; 3, 892; 5, 662
- Френе 2, 250; 3, 892; 5, 662
Трехзначная логика Лукасевича 3, 719
Трехмерное многообразие 5, 432
Трехосновная алгебра 1, 67
Трехсвязная область 3, 748, 1098
Трехсторонник 2, 1077
Триада 1, 1048; 5, 433
Триангулируемая группа 5, 428
Триангулируемое пространство 4, 1160
Триангуляция 3, 152; 4, 1160, 1168; 5, 434
- криволинейная 4, 412
- плоская 1, 1110
- полиэдра 2, 997
- прямолинейная 4, 410
Тривектор 5, 434
Тривиальная деформация 2, 108
- линейная комбинация 1, 643
- метрика 3, 670
- тактическая конфигурация 5, 318
- формация 5, 519
Тривиальное абсолютное значение 1, 41
- бесконечно малое изгибание 1, 436
- векторное расслоение 1, 637
- изометрическое преобразование 1, 790
- инвариантное подпространство 2, 534
- *многообразие конечно базируемое* 1, 186
- нормирование поля 3, 1079
- представление 2, 401
- расслоение 4, 894
- решение, область притяжения 1, 64
- частично упорядоченное множество 5, 834
Тривиальный нуль дзета-функции 2, 113
- - *L*-функции Дирихле 2, 189

- G-объект категории 1, 1018
- скрещенный гомоморфизм 2,917
- тест 5, 343
- узел 3, 738
- ультрафильтр 5, 495
Тригонометрическая выпуклость 4, 1054
- проблема моментов 3, 796
Тригонометрическая система 5, 435
Тригонометрическая сумма 5,435
- -, Виноградова гипотеза об оценках 1, 701
- -, - оценка 1, 704
- форма комплексного числа 2, 1009
Тригонометрические функции 5, 436—438
Тригонометрический вес 4, 95
Тригонометрический полином 5, 438
Тригонометрический ряд 5, 438—441
- -, Данжуа — Лузина теорема 2, 13
- -, Дюбуа-Реймона теорема 2, 394
- -, Кантора теорема 2, 715
- - лакунарный 3, 186
- -, Лебега теорема 2, 715
- - сопряженный 5, 89
- -, Юнга теорема 2, 715
Тригонометрических сумм метод 1, 259; 5, 441—444
Тригонометрическое интерполирование 5, 444
- уравнение 5, 540
Тригонометрия 5, 444
- гиперболическая 1, 990
- сферическая 5, 292
Трикоми задача 5, 45, 444—446
Трикоми уравнение 2, 299; 5,446
Трилистник 5, 484
Триметрия 1, 113
Триортогональная система, Дюпена теорема 2, 396
- - Егорова 2, 399
Триортогональная система поверхностей 5, 446
Трипрямоугольник 3, 187
Трисекция угла 5, 447
Триэдр Дарбу 2, 18
Тройка 5, 167, 447
- векторов 1, 634
- над категорией 2, 911
Тройная система Ли 3, 283
- точка 3, 88
Тройной интеграл 3, 92
Трохоида 5, 448, 817
Трохоидальная роза 5, 448
Труба 5, 449
Трубка векторная 1, 636
- вихревая 1, 715
Трубчатая область 5, 449
Трубчатая окрестность 5, 449
Трубчатое зацепление 5, 485
- поле 5, 74
Туликовая дизъюнктивная нормальная форма 5, 449
- зависимость переменных 1, 558
Туликовый тест 3, 861; 5, 344
Турбулентности математические задачи 5, 450—453
Турнир 5, 453
Туэ метод 5, 454
Туэ полусистема 5, 455
- проблема для ассоциативных систем 5, 455
Туэ система 5, 455
- теорема о диофантовых приближениях 5, 454
Туэ — Зигеля — Рота теорема о диофантовых приближениях 5, 455
Тьюринга машина 1, 819; 5, 456—458
- тезис 1, 215; 2, 819; 5, 457,855
Тьюринга — Поста машина 1,819
Тьюрингова сводимость 4, 957
- степень 1, 219; 3, 1003
Тьюринговский алгоритм в алфавите 5, 457
Тяготение 1, 1078
Тяготения теория 4, 145; 5, 458—462
Тяжелого шарика метод 3, 992; 5, 462

У

Уайлдера теорема о двумерных многообразиях 2, 54
- - о континуумах 5, 288
Уайтхеда гомоморфизм 5, 463
Уайтхеда группа 1, 161; 5, 463
- - приведенная 3, 302; 5, 135
- -, стабильности теорема 5, 164
Уайтхеда кручение 2, 894; 5, 464
- лемма 2, 914
Уайтхеда произведение 5, 465
- теорема о клетках 1, 1064
- - о клеточных разбиениях 1, 1069
Уайтхеда умножение 5, 465
Убегания задача 2, 334
Убивающее пространство 4, 517; 5, 466
Убывающая геометрическая прогрессия 1, 932
Убывающая последовательность 5, 466
- фильтрация 5, 616
Убывающая функция 3, 814; 5, 466
Угловая точка 2, 272, 494; 5, 424, 466
- - геодезической области 1, 927
- - границы 2, 446
Угловое граничное значение 2, 402; 4, 566; 5, 466
Угловой коэффициент 3, 72
Угловые условия Вейерштрасса — Эрдмана 1, 624
Угол 5, 467
- в римановом пространстве 4, 1004
- вписанный 1, 758; 4, 16
- двугранный 2, 50
- линейный 2, 50; 3, 377
- между кратчайшими 1, 789
- - скрещивающимися прямыми 4, 1205
- многогранный 3, 712
- многоугольника 3, 750
- модулярный 3, 783
- на плоскости Римана 4, 990
- параллельности 3, 398, 404
- полярный 4, 480
- сектора кратчайших 1, 789
- телесный 5, 325
- центральный 4, 16
- эйлеров 5, 937
Угроза коалиции 5, 562
Удаление вершины графа 1, 1107
- ребра графа 1, 1107
Удаления дизъюнкции правило 1, 781
- правило 1, 919
Ударных волн математическая теория 5, 468—474
Удвоение куба 5, 474
Удвоения формула Лежандра 1, 867
Удельная кривизна выпуклой поверхности 1, 791
Удерживающие связи 1, 1034
Удлиненная гипоциклоида 1, 1012
- трохоида 5, 448
- циклоида 5, 817
- эпициклоида 5, 1009
Узел 4, 122; 5, 995
- алгебраический 3, 739
- альтернирующий 1, 241
- в геометрии 5, 476
Узел в теории дифференциальных уравнений 5, 474—476
- в топологии 5, 476, 484
- Вандермонда 5, 422
- двумерный 2, 57
- дикий 2, 137
- интерполяции 2, 618, 631, 633
- квадратурной формулы 2, 793
- коллокации 2, 952
- ленточный 2, 57
- Листинга 3, 391
- многомерный 3, 738
- незаузленный 3, 738
- Нейвирта 3, 920
- потока 4, 538
- сплайна 5, 143
- таблицы 2, 291
- топологический 4, 122
- торический 5, 407
- тривиальный 3, 738
- Хефлигера 2, 520
Узкая сходимость 5, 313
Узкое исчисление предикатов 3, 418; 4, 579; 5, 476
Узлов и зацеплений группы 5, 476—478
Узлов и зацеплений диаграммы 5, 478—480
Узлов и зацеплений квадратичные формы 5, 480—482
Узлов кобордизм 5, 482—484
Узлов таблица 5, 484
Узлов теория 5, 484—492
Узловая точка 2, 25; 4, 124; 5, 492
- - геодезической области 1, 927
Узловое произведение 5, 147
- число 5, 314
Уитнера теорема о решениях дифференциальных уравнений 4, 657
Уитни класс 5, 492
- сумма 1, 647
- теорема о диезной коцепи 2, 134
- - о дифференцируемых отображениях 4, 126
- топология 4, 127
Уиттекера константа 1, 30
Уиттекера преобразование 5,492
Уиттекера уравнение 5, 492
Уиттекера функции 5, 493
Уишарта распределение 2, 901; 3, 734; 5, 493
Укладка 4, 395
- графа 1, 1115
Уклонение 5, 494
- информационное 2, 657
- квадратичное 2, 782
Укороченная гипоциклоида 1, 1012
- нормальная форма системы дифференциальных уравнений 3, 1059
- трохоида 5, 448
- циклоида 5, 817
- эпициклоида 5, 1010
Улама теорема о кардинальных числах 2, 724
Улитка Паскаля 4, 226
Ультраборнологическое пространство 5, 494
Ультрабочечное пространство 5, 494
Ультрагиперболическое уравнение 2, 299, 323; 3, 329
Ультраметрическое абсолютное значение 1, 41
- тело 3, 431
Ультрапараболическое уравнение 1, 810
Ультрапроизведение Ω-систем 1, 160
Ультрасильная операторная топология 4, 23
Ультраслабая операторная топология 4, 23
Ультрасферические многочлены 2, 869; 5, 494
Ультрафильтр 5, 495, 615
Ультраэллиптический интеграл 1, 1011
Уменьшаемое 1, 828
Умножение 5, 495
- Бэра 1, 569
- в спектрах пространств 5, 103
- внутреннее 2, 263
- гомологическое 1, 1057
- йорданово 2, 693
- композиционное 5, 284
- рядов 4, 1066
- симметрическое 4, 1140
- степенных рядов 5, 219
- Уайтхеда 5, 465
- формальных языков 5, 644
Умножения формула Гаусса 1, 867
Умолчания правило 1, 223; 4, 291
Унар 5, 496
Унарная алгебра 5, 496
- операция 1, 149; 3, 893; 4, 18
Унарный объект 3, 758
Унивалентный функтор 5, 686
Универсальная алгебра 1, 155; 5, 497
- -, определяющие соотношения 4, 33
- -, решетка подалгебр 4, 982
- группа 5, 891
- - автоморфизмов 1, 199
- деформация 2, 103
- интерполяционная последовательность 3, 906; 5, 789
- комплексификация группы Ли 2, 1004
- кривая 3, 635
Универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли 5, 498
- особенность 4, 127
- равномерность 4, 796
- схема 2, 105
- формула 1, 159
Универсальная функция 4, 637; 5, 499
Универсально цепное кольцо 4, 555
- эквивалентные алгебраические системы 5, 973
Универсальное множество 5, 500
Универсальное накрытие 5, 500, 681
- отношение 1, 488; 4, 151
- отображение 1, 1133
Универсальное пространство 5, 500
- расслоение 2, 864
- свойство морфизма 5, 300
Универсальные оптимизирующие преобразования программ 4, 644
Универсальный алгоритм 5, 500
- интегральный инвариант 2, 602
- квадрат 4, 896
Универсальный нормальный алгорифм 5, 500
- подкласс класса Ω-систем 1,159
- предикат 1, 320
Универсальный ряд 5, 501
Универсальных алгебр многообразие 5, 501
Универсум 1, 555; 4, 580; 5, 500
Уникурсальная кривая 4, 311; 5, 502
Унилинейчатое многообразие 5, 787
Унимодальное распределение 3, 763; 5, 503
Унимодальности критерий 5, 503
Унимодулярная группа 1, 359; 2, 866; 3, 782; 5, 412, 504, 741
- - аффинная 1, 359
- - проективная 4, 666
Унимодулярная матрица 5, 504
- нормировка 2, 385
Унимодулярное преобразование 5, 504
Унипотентная группа 5, 504, 505
- - линейная 3, 301
Унипотентная матрица 3, 616; 5, 505
Унипотентный автоморфизм 2, 422
- радикал 5, 504
- - группы 4, 804
Унипотентный элемент 2, 423; 5, 505
Унипримитивная группа подстановок 4, 635
Унирациональное многообразие 3, 466; 5, 506
Унитальный модуль 3, 777
- положительный оператор 4,435
Унитарная группа 2, 866; 5, 506, 1021
- дилатация 4, 1127
Унитарная матрица 3, 616; 5, 507
- полугруппа 4, 1127
- эквивалентность 3, 371
J-унитарная матрица 1, 861
Унитарно эквивалентные операторы 4, 378; 5, 508
Унитарно эквивалентные представления 5, 508
Унитарное полуподобие 5, 507
Унитарное представление 4, 546; 5, 508—513

- - индуцированное 2, 560
- - проективное 4, 678
Унитарное преобразование 5, 513
- - линейное 3, 352
Унитарное пространство 5, 514, 1019
Унитарный бордизм 1, 533
- кобордизм 2, 890
Унитарный модуль 3, 777; 5, 514
- -, тензорное произведение 5, 330
Унитарный оператор 2, 505; 3, 375; 5, 514
- сдвиг 5, 506—507
- характер группы 1, 882
- элемент алгебры 4, 1148
J-унитарный оператор 1, 987; 5, 127
Униформизации принцип 2, 644
- теорема 4, 1020; 5, 679
Униформизация аналитической функции 5, 514
-, Клейна — Пуанкаре теорема 2, 876
- локальная 3, 426
Униформизация множества 5, 514—517
- по Кёбе 2, 877
- римановой поверхности 5, 515
Униформизирующая локальная 3, 445
Униформизующий элемент 5, 517
Уничтожения операторы 2, 990; 5, 517, 632
Уноид 5, 496
Уолла группа 5, 519
Уолла инвариант 5, 520
Уолмена бикомпактное расширение 5, 520
Уолменовского типа бикомпактное расширение 1, 479
Уолша система 5, 521
Уолша — Пэли система 4, 86
Упаковка 4, 395; 5, 521
Уплотнение 1, 1035; 4, 156; 5, 522
- идеального ряда 2, 485
- ряда подгрупп 4, 368
- системы подгрупп 4, 368
Уплотняющий оператор 3, 977; 5, 522
Уплощения точка 2, 252; 3, 97; 5, 522
Упорядоченная группа 5, 522
- пара 5, 713
Упорядоченная полугруппа 5, 523—525
- проективная прямая 4, 671
- симплициальная схема 4, 1159
Упорядоченная сумма 5, 525
Упорядоченное векторное пространство 4, 470
Упорядоченное кольцо 5, 526
Упорядоченное множество 5, 527
Упорядоченное поле 5, 527
- расширение 5, 527
Упорядоченный бикомпакт 1, 475
Упорядоченный группоид 5, 527
Упорядочиваемая группа 5, 528
Упорядочивания алгоритм 1, 207
Управление 4, 37; 5, 536
- допустимое 1, 60; 4, 48, 488; 5, 536
- конфликтное 4, 46
- оптимальное 4, 39, 41, 48, 488
- особое 4, 50
-, программа 1, 62
- с поводырем 2, 333
-, цель 1, 61
Управления объект 2, 853
- оптимального математическая теория 4, 37
Управляемое уравнение 5, 563
Управляемости матрица 1, 61
- системы свойства 4, 48
Управляемость полная 4, 48
Управляемый диффузионный процесс 5, 531
- полностью объект 1, 61
- процесс диффузионного типа 5, 531
Управляемый случайный процесс 5, 528—533
Управляющая система 2, 853; 5, 533—536
- -, проблемы надежности 3, 858
- -, эквивалентные преобразования 5, 943
Управляющая функция 5, 536
Управляющий параметр 4, 487
Упругости математическая теория 5, 537—539
- - -, динамические задачи 2, 149
- - -, контактные задачи 2, 1064
- - -, плоская задача 4, 313
Уравнение 5, 539; см. также соответствующее название
Уравнение в вариациях 2, 775; 5, 540—543
Уравнение в контингенциях 5, 543
- в паратингенциях 5, 543
ББГКИ-уравнения 1, 512
Уравновешенная неполная блок-схема 1, 505
Уравновешенное множество 1, 544; 5, 378, 544
Урна 4, 830
Урновая схема 5, 544
- - Пойа 4, 387
Уровень доверительный 2, 366, 367
- значимости 2, 222, 366, 466; 5, 187
- критический 3, 115
- подгруппы 3, 785
Уровня линия 5, 544
Уровня множество 5, 545
Урысона лемма о нормальных пространствах 5, 545
- - о функциональной отделимости 5, 391
- - об отделимости 4, 140
Урысона метризационная теорема 5, 546
- оператор 3, 959; 5, 546
- основное тождество 4, 822
- поперечник 4, 494
Урысона пространство 5, 546
- равенства для размерностей 4, 829
- теорема о гильбертовом кирпиче 1, 978
- - *о канторовых многообразиях* 2, 716
- - о компактах 2, 990
- - об индексе ветвления линии 3, 387
- тождество 3, 216
Урысона уравнение 5, 546
Урысона — Брауэра лемма о продолжении непрерывных функций 5, 547
Урысона — Брауэра — Гитце лемма о продолжении непрерывных функций 5, 547
Урысона — *Тихонова теорема о* регулярных пространствах 3, 834
Усечение графика 4, 27
Усеченная группа зависимости точки 4, 1184
- итерация формальных языков 5, 644
- пирамида 4, 287
- схема Витта 1, 711
Усеченное распределение 5, 547
Усеченный вектор Витта 1, 710
- геометрический объект 1, 937
- конус 2, 1074
Усиленная проблема Пуанкаре о мероморфных функциях 3, 650
Усиленно непрерывный оператор 4, 19
Усиленное условие Лежандра 3, 232
Усиленный закон больших чисел 1, 527
- - - -, Колмогорова теорема 1, 528
- - - - Бореля 1, 539
Ускорение сходимости 5, 305
Ускорения теорема 1, 212
Условие — см. соответствующее название
Условная вероятность 1, 658; 3, 914; 5, 548
- корректность 3, 932
Условная плотность 5, 548
Условная сходимость ряда 5, 549
Условная устойчивость 5, 549—553
- функция распределения 5, 555
- *энтропия* 5, 1005
- - алгоритмическая 1, 222
Условно периодическая функция 5, 553
Условно периодическое движение 5, 553
Условно полная решетка 5, 553
- сходящийся ряд 4, 1065; 5, 549
- устойчивая точка 5, 550, 551
- устойчивое решение 5, 550, 551
Условного градиента метод 3, 603
Условное гауссовское распределение 2, 701
Условное математическое ожидание 5, 553
- оптимальное управление 2, 155
Условное распределение 5, 554
- тождество 1, 183; 2, 825
- уравнение 3, 879
Условный базис 1, 392
- эксперимент 3, 860; 5, 343
Условный экстремум 5, 555
Усреднение 4, 134; 5, 556
Усреднения метод 1, 745
- - Крылова — *Боголюбова* 3, 134
Установившийся режим 1, 786
Установления метод 5, 556
Устойчивая задача минимизации 3, 700
- по Пуассону точка 4, 570
- сепаратриса 4, 1101
- система линейных дифференциальных уравнений 3, 341
- сложность слова 1, 222
Устойчиво сходящаяся последовательность 5, 312
Устойчивое в смысле Пуассона движение 4, 750
- высказывание 3, 767
- многообразие траектории 1, 999
- - седла 4, 1101
Устойчивое распределение 5, 557
- -, область притяжения 4, 640
- решение 2, 768
Устойчивости критерии 5, 558
Устойчивости область 5, 559
Устойчивости теоремы 5, 559
Устойчивости теория 5, 559
- - *Ляпунова* 3, 470
Устойчивость 5, 560
Устойчивость абсолютная 5, 562—566
- асимптотически орбитальная 2, 775
Устойчивость в теории игр 5, 561
Устойчивость вычислительного алгоритма 5, 566
Устойчивость вычислительного процесса 4, 566
- деформируемых систем 5, 578
- минимальная 5, 563
- орбитальная 4, 68
Устойчивость по Лагранжу 5, 567
Устойчивость по Ляпунову 2, 287; 5, 567—572
Устойчивость по Пуассону 5, 572
Устойчивость по части переменных 5, 573
Устойчивость при постоянно действующих возмущениях 5, 574
- равномерная 2, 771; 4, 789
Устойчивость разностных схем 4, 844; 5, 575—578
- - -, Куранта условие 1, 995
Устойчивость упругих систем 5, 578—580
- *условная* 5, 549
Устойчивость характеристических показателей 5, 580
- экспоненциальная 2, 771; 5, 564
A-устойчивость метода 2, 413
y-устойчивость 5, 573
Устойчивый корень 2, 340
- многочлен 4, 914
- почти наверное характеристический показатель 5, 581
- предельный цикл 4, 575
- случайный процесс 5, 557
Устранение особенностей, Осгуда — Брауна теорема 1, 894
Устранения сечения теорема 4, 1105
Устранимая особая точка 1, 264; 5, 581
Устранимости сечения теорема 1, 921
Устранимое множество 5, 582
Утверждение 5, 269
Утончение 1, 919
Уходящая траектория 4, 570
Участок особого режима 4, 938

Ф

Фабера многочлены 5, 583
- ряд 5, 583
Фабера — Шаудера система 5, 584
Фабри теорема о лакунах 5, 584
- - об отношении 5, 584
Фавара задача 5, 585
Фавара мера 5, 585
Фавара неравенство 5, 585
Фавара теорема об ортогональных системах 5, 585
Фаддеева уравнение 5, 586
Фаза видовая 1, 520
- комплексного числа 2, 1009
- мгновенная 4, 1085
- начальная 4, 1085
- рассеяния 5, 912
- родовая 1, 520
- свободного гармонического колебания 4, 1084
Фазовая плоскость 5, 586
- *скорость* 1, 1146
- точка 2, 144; 5, 587
Фазовая траектория 1, 83; 2, 144; 5, 586
- - оптимальная 4, 35
Фазового равновесия диаграмма 5, 587
Фазовое переменное 5, 536
Фазовое пространство 2, 144, 766; 5, 587
Фазовой скорости вектор 5, 588
Фазовые координаты 5, 536
Фазовый переход 5, 201, 589
- поток 1, 83
Фазовых интегралов метод 1, 717; 5, 589
Файри *p*-сумма 4, 1213
Фактор 5, 266, 589, 597
- главный полугруппы 1, 1019
- идеального ряда 2, 485
- идеальный 1, 1019; 2, 482
- композиционный 5, 266
- постниковский 4, 516
- ряда подгрупп 3, 1076
- системы подгрупп 4, 368
- субнормального ряда подгрупп 4, 367
Факторалгебра 2, 1014
Факторгруппа 5, 589
- алгебраическая 1, 142
Факториал 5, 589
Факториальное кольцо 5, 590
Факторизации критерий 5, 590
Факторизационная теорема 5, 590
Факторизационные тождества 5, 591
Факторизация 5, 591
- Рисса 5, 770
- функции 1, 696
Факторизованный оператор 4, 912
- - разностный 4, 843
Факторкатегория 5, 592
Факторкольцо 5, 592
Фактормножество 4, 66
Фактормодуль 3, 779
Факторное отображение 4, 155; 5, 390, 592—594
Факторнорма 3, 1048
Факторный анализ 5, 594
Факторобъект 5, 595

Факторподгруппа 5, 516
Факторполигон 4, 405
Факторпредставление 4, 595; 5, 596
Факторпространство 1, 643; 5, 596
Факторпучок 4, 767
Факторразмерность подпространства 3, 14
Факторрасслоение 1, 646
Факторсистема 2, 1014
- алгебраической системы 1, 157
Фактортопология 5, 592
Фано многообразие 5, 596
Фано поверхность 5, 597
Фано постулат 5, 598
Фано схема 5, 598
Фаньяно задача 5, 598
Фаня теорема о неподвижной точке 5, 385
Фарея ряд 5, 598
Фату дуга 5, 598
- теорема для аналитических функций 5, 599
Фату теорема для гармонических функций 5, 599
- - для степенных рядов 5, 599
Фату теорема о переходе к пределу 5, 599
- - о пределе 1, 31
- - о предельных множествах 4, 566
- - об угловых граничных значениях 5, 599
- точка 4, 566; 5, 599
Фаулера уравнение 5, 997
Федоровская группа 5, 600
Федорчука близость 1, 501
Фейера метод суммирования 5, 600
Фейера полином 5, 600
Фейера сингулярный интеграл 5, 601
Фейера сумма 5, 601
- ядро 5, 600, 1043
Фейнмана интеграл 5, 601
Фейнмана мера 5, 602
Фейнмана — Каца формула 2, 569; 5, 602
Фекете точка 5, 422
Феллеровская полугруппа 4, 535
- цепь 5, 603
Феллеровский процесс 5, 603
- - марковский 3, 525
Фенхеля — Моро теорема в выпуклом анализе 2, 46
- - - о сопряженных функциях 5, 82
Ферма малая теорема 5, 152, 604
Ферма принцип 5, 605
Ферма спираль 5, 605
Ферма теорема 5, 605—607, 608
- уравнение 2, 162; 5, 605
Ферми координаты 5, 608
Ферми — Дирака статистика 5, 608
Фермион 5, 632
Фермионное пространство Фока 5, 631
Феррари метод 5, 609
Фибоначчи метод 5, 610
Фибоначчи числа 5, 611
Фигур многообразие 5, 612
Фигура 5, 613
- автополярная 4, 476
- квадрируемая 4, 327
-, конгруэнтность 2, 1013
- многоугольная 3, 749
-, подобие 4, 373
Фигурное число 1, 324; 5, 614
Фигуры взаимно полярные 4, 476
- равновеликие 4, 781
- равносоставленные 4, 781
Фидуциальное распределение 5, 614
Физика математическая 3, 581
Фиксатор множества 4, 383
Фиксированная запятая 2, 443
Филиппова пример в теории размерности 4, 822
- теорема о перистых пространствах 4, 271
Фильтр 2, 483; 4, 561; 5, 615
-, базис 1, 373
-, барьер 4, 533
- генерический 1, 785
- натуральный 4, 561
-, предел 4, 561
- решеточный 4, 726
Фильтрация возрастающая 5, 616
- исчерпывающая 5, 616
- минимаксная 4, 46
- отделимая 5, 616
- регулярная 5, 106
- случайных процессов 5, 35
- стохастическая 4, 45
- убывающая 5, 616
- Ходжа 5, 788
Фильтрованная алгебра 5, 616
Фильтрованное произведение 1, 159
Фильтрованный модуль 5, 616
Финальная компактность 5, 392
Финально компактное пространство 2, 994; 3, 288; 4, 393
Финальный объект 5, 616
Финитарный поток 1, 613
Финитизм 5, 617
- Гильберта 3, 570
Финитная группа 4, 1142
Финитная задача 5, 617, 618
- математика 2, 368
- мера 3, 1081
Финитная общезначимость 5, 617—619
Финитная функция 5, 619
- - обобщенная 3, 1105, 1118
Финитно аппроксимируемая алгебраическая система 1, 184
Финитно аппроксимируемая группа 5, 620
Финитно аппроксимируемая полугруппа 5, 620
- - промежуточная логика 4, 696
- - система 3, 765
- общезначимая формула 5, 619
Финитное доказательство 1, 112
K-финитное представление 1, 448
K-финитный вектор 1, 448
Финслеров метрический тензор 5, 622
Финслерова геометрия 4, 1008; 5, 621—624
Финслерова метрика 5, 624
- метрическая функция 5, 621
Финслерово многообразие 5, 624
Финслерово пространство 5, 621, 624
Финслерово пространство обобщенное 5, 624
Фиттинга подгруппа 5, 626
- разложение 1, 674
Фиттингова нуль-компонента 2, 736
Фишера группы 5, 149
Фишера информационное количество 4, 867; 5, 626
- преобразование 5, 34
Фишера *F*-распределение 5, 626
Фишера *z*-распределение 5, 627
Фишера — Грайса группа 5, 149
Фишера — Рисса интегральное уравнение 2, 310
Фишера — Снедекора распределение 5, 626
Флаг 5, 628, 629
Флаговая структура 5, 628
Флаговое многообразие 5, 628
Флаговое пространство 5, 629
Флойда метод в программировании 4, 652
Флоке представление 2, 773; 5, 630
- теорема для дифференциальных уравнений 3, 313
Флокс теория 5, 630
Флоке — Ляпунова теорема 5, 630, 631
- - - о матрициантах 3, 312
Флюктуационно - диссипационная теорема 1, 579
Фока пространство 5, 631—633
- формула 4, 200
Фока — Артина дуга 2, 138
Фокальная кривая 2, 325; 3, 799
- ось гиперболы 1, 988
- - эллипса 5, 977
- плоскость 2, 1015
- поверхность 2, 1015; 5, 613
- полоса 2, 325
Фокальная сеть 2, 1015; 5, 633
- точка 3, 824; 5, 613
Фокальное многообразие 5, 612
Фокальный параметр гиперболы 1, 988
- - эллипса 5, 978
Фоккера — Планка уравнение 2, 362; 5, 633
Фоковское пространство 5, 631
Фокус 4, 122; 5, 633
- гиперболы 1, 987
- лемнискаты 3, 234
- луча 2, 1015
- овала Кассини 2, 759
- параболы 4, 191
- эллипса 5, 977
Фокусное расстояние 1, 987; 5, 977
Фонема 5, 254
Форма 3, 753; 5, 634
- автоморфная 1, 79
Форма алгебраической группы 5, 634
- антиэрмитова 5, 1021
- ассоциированная 5, 863
- бемольная 1, 410
- билинейная 1, 482
- - интегральная 1, 482
- бинарная 1, 487
- Бланчфилда 5, 489
-, внешнее произведение 1, 731
- внешняя 1, 735; 2, 732
- высказывательная 4, 698; 5, 637
- гамильтонова 5, 519
- гармоническая 1, 873
-, гессиан 2, 896
- гиперболическая 1, 713
- голоморфная 1, 1028
- диезная 2, 134
- дизъюнктивная нормальная 2, 135
- дифференциальная 2, 262
- замкнутая 2, 263
- именная 2, 525; 5, 637
-, инвариант 2, 540
- интегро-степенная 2, 614
- квадратичная 2, 776
- - бинарная 1, 486
- - интегральная 1, 482
- - первая 4, 234
- кватернарная 2, 838
- - квадратичная 2, 837
- Киллинга 2, 858
- контактная 2, 1060
- конъюнктивная нормальная 2, 1102
- косоэрмитова 5, 1021
- коэрцитивная 3, 71
- кривизны 3, 102, 311
- кручения 3, 130, 132
- кубическая 3, 142
- кусочно линейная 2, 264
- кэлерова 3, 155
- Кэли 3, 158; 5, 863
- Леви 1, 272
- линейная 2, 732; 3, 318, 319, 320, 377
- *n*-линейная 4, 406
- Лиувилля 4, 1156
- Маркова 1, 948
- метрическая 3, 668; 4, 234
- Милнора 5, 489
- модулярная 3, 786
- нейтральная 1, 713
- неотрицательная 4, 462
- неположительная 4, 462
- нормальная 3, 1052
- - предваренная 4, 555
- первая основная 3, 668
- полилинейная 4, 406
- положительно определенная 4, 430
- - - эрмитова 4, 430
- полуопределенная 4, 462
- полуторалинейная 4, 469
- полярная 2, 796, 1032
- предваренная 4, 656
- пренексная 4, 555
- пропозициональная 4, 698
- пространственная 4, 518, 709
- Пфаффа 4, 733; 4, 777
- рефлексивная 2, 866
- связности 4, 1095
- смещения 5, 251
- тёплицева индефинитная 5, 337
- точная 2, 263
- Фубини 5, 675
- характеристическая 2, 298, 814
- Ходжа 3, 156
- Чжоу 3, 159
- эрмитова 5, 1021
1-форма 2, 733
p-форма 2, 262, 733
PL-форма 2, 264
s-форма 2, 735
Форма-вычет 1, 817
Формализации метод 2, 368; 5, 635
Формализм 5, 636
- канонический 1, 860
Формализованная арифметика, неполнота 1, 112
Формализованный язык 5, 636—638
Формальная аксиоматическая теория 3, 653
- арифметика 1, 319
- ветвь 3, 1035
- грамматика 1, 1087
Формальная группа 5, 638
- деформация 2, 105, 107
Формальная производная 3, 805; 5, 639
- размерность представления 2, 202
Формальная система 3, 653; 5, 639
- - Гейтинга 1, 911
- - Генцена 1, 919
- схема 2, 106
- теория, модель 2, 371
- - разрешимая 2, 371
Формально действительное поле 5, 527
- жесткая алгебра 2, 108
- непротиворечивая система 3, 998
- неразрешимая система 1, 909
- неразрешимое предложение 3, 1004
- самосопряженный дифференциальный оператор 5, 108
Формальное аксиоматическое исчисление 3, 653
- многообразие 3, 154
Формальное произведение 5, 640
Формальный главный *G*-объект категории 1, 1018
- групповой закон 5, 638
Формальный математический анализ 5, 641
- росток 3, 1035
Формальный степенной ряд 5, 642
Формальный язык 5, 643
Формальный язык, представимый машиной 5, 644
- - программирования 1, 222
Формальных систем эквивалентность 5, 645
Формация 5, 519
Формула 1, 124, 157; 3, 417; 5, 645; см. также соответствующее название
Формульная модель 3, 714
Формульный автоморфизм 1, 199
- образ 4, 1105
Форсинг-метод 1, 783
Фортран 5, 645
Фосса поверхность 5, 646
Фосса сеть 5, 646
Фрагмена — Линделёфа теорема 5, 646—648
Франклина система 4, 87; 5, 648
Франкля задача 5, 47
Франца кручение 4, 953
Фраттини подгруппа 5, 649
Фредгольма альтернатива 2, 420; 5, 84, 649, 651
- интегральное уравнение 3, 1027
- каноническое уравнение 3, 1027
- минор 5, 653
Фредгольма оператор 5, 650, 1038
- - интегральный 2, 605; 5, 660
- определитель 5, 653
- ряд 5, 653
Фредгольма теоремы для интегральных уравнений 5, 650
Фредгольма уравнение 2, 591; 5, 651—656
Фредгольма уравнение; численные методы решения 5, 656—660

Фредгольма ядро 2, 604; 5, 660, 1039
Фредгольмов оператор 3, 373, 1027; 5, 661
Фредгольмова краевая задача 3, 76
Фредгольмово уравнение 3, 1027
Фредгольмовость задачи 2, 305
Фрезера диаграмма 5, 661
Фрейденталя бикомпактное расширение 5, 662
- единица 4, 471
- теорема о надстройке 1, 1067
- формула 3, 90
Фрёлихера — Нейенхёйса теорема жесткости 2, 103
Френе репер 3, 892
Френе трехгранник 2, 250; 3, 892; 5, 662
Френе формулы 2, 250; 5, 663
Френеля интегралы 5, 663
Фреше вариация 5, 664
Фреше дифференциал 1, 274; 5, 664
- - оператора 3, 960
- кривая 5, 665
- неравенство в математической статистике 4, 867
Фреше поверхность 5, 665
Фреше производная 5, 666
- - оператора 3, 960
Фреше пространство 5, 380, 666
- -, Джеймса теорема 2, 44
- пучок 2, 904
- фильтр 5, 615
Фреше — Урысона пространство 4, 1104
Фридмана — Келлера обобщенные уравнения 5, 451
Фридмановская модель 3, 40
Фридрихса неравенство 5, 666
- расширение 4, 905
- теорема о полуограниченных операторах 4, 462
Фробениуса автоморфизм 1, 849; 5, 667
- гипотеза 5, 284
- теорема двойственности 2, 559
- - о конечных группах 3, 1064
- - о структурах Пфаффа 4, 775
- - об алгебрах 2, 1022
Фробениуса теорема об ассоциативных алгебрах 5, 668
- - о инволютивных распределениях 2, 547
Фробениуса теорема об уравнениях Пфаффа 5, 668
- условие 1, 759
Фробениуса формула 5, 669
Фробениуса эндоморфизм 5, 669
Фробениусова алгебра 5, 669
- нормальная форма матрицы 3, 1054
Фроммера метод 5, 670—672
- нормальная область 4, 1107
- сектор 4, 1107
Фронт волновой 5, 672—674
Фронтальная плоскость проекций 3, 895
Фруда число 5, 674
Фубини интерпретация 5, 674
- нормаль 4, 668
Фубини теорема об интегралах 5, 674
Фубини форма 5, 675
Фубини — Пика кубическая форма 1, 354
Фубини — Штуди метрика 5, 675
Фукса класс дифференциальных уравнений 1, 252; 5, 676
- тождество 5, 676
Фукса уравнение 5, 676—678
- условие для регулярных особых точек 4, 934
Фуксова группа 2, 876; 5, 678—680
Фундаментальная группа 5, 680
- конструктивная последовательность рациональных чисел 2, 1055
- лемма математической статистики 3, 928
- матрица 2, 766; 3, 340
Фундаментальная область 5, 681
- - дискретной группы 2, 196
- - приведения 2, 788
- окружность 4, 1090
Фундаментальная последовательность 2, 76; 3, 670; 5, 682
- прямая 4, 1089
- регулярная полугруппа 4, 935
Фундаментальная система решений 5, 682
- - - системы линейных уравнений 3, 358
- теорема Гартогса 1, 893
- функция оператора 4, 453
- - ядра 2, 591
Фундаментальное значение (число) ядра 2, 591
Фундаментальное решение 2, 298; 3, 609; 5, 683
- - дифференциального оператора 3, 1109
- - линейного эллиптического уравнения 3, 363
Фундаментальный группоид 5, 684
Фундаментальный класс 4, 73; 5, 684
Фундаментальный коцикл 5, 685
- симплекс 5, 168
- тензор 3, 668
Фундаментальный цикл 5, 685
- - особенности 4, 120
Фундирования аксиома 1, 106
Фундированное дерево 5, 421
Функтор 5, 685
- аддитивный 1, 89
- гипергомологий 1, 1005
- гиперкогомологий 1, 1006
- гомологический 1, 1057
- гомотопически инвариантный 1, 1062
- Гротендика 1, 1134
-, индуктивный предел 2, 557
- интерполяционный 2, 629
- ковариантный 2, 762
- когомологий 5, 1024
- когомологический 1, 1058; 2, 926
- контравариантный 2, 762
-, левая производная 1, 1050
- многоместный 3, 740
- мотивных когомологий 3, 833
- непрерывный 3, 994
- нормализованный 1, 20
- относительный производный 4, 143
- представимый 4, 582
- представляющий 4, 582
- производный 4, 691
- семейств 3, 772
- сечений 4, 1119
- сингулярный 4, 1162
- сопряженный 5, 89
- точек 5, 278
- точный 5, 409
***K*-функтор** 5, 686
Функторалгебра 5, 167
Функторный морфизм 5, 687
Функции асимптотически равные 4, 498
- Вебера 4, 200
- Вебера — Эрмита 4, 200
- лемнискатные 3, 234
- одного порядка 4, 498
- ортогональные 4, 90
- параболического цилиндра 4, 200
- эквивалентные 4, 498
Функций алгебра 1, 131; 2, 986
Функций действительного переменного теория 5, 688—690
- комплексного переменного приближение 4, 624
Функций комплексного переменного теория 5, 690—692
- метрическая теория 3, 660
Функций теория 5, 692
Функционал 5, 692
-, абсолютная величина 4, 479
- аналитический 1, 277
- Банаха — Мазура 1, 379
- билинейный 1, 485
-, вариация 1, 608
- Владимирова 4, 249
- вогнутый 1, 803
-, выпуклость 1, 800
- выпуклый 1, 803
-, вычислимость по Банаху — Мазуру 1, 379
- σ-гладкий 3, 643
- τ-гладкий 3, 643
-, градиент 3, 960
- Дирихле — Дугласа 4, 218
- квазирегулярный 1, 621
- корреляционный 5, 214
- линейный 1, 644; 3, 320, 370, 377
- мультипликативный 5, 746
- наилучшего приближения 3, 870
- нелинейный 3, 962
- непрерывный 3, 994
- опорный 4, 29
Функционал от марковского процесса 5, 692
- плотный 3, 643
- положительный 4, 435
-, полярное разложение 4, 479
- регулярный 1, 621
- Рэлея 2, 689
- свободный энергии, Боголюбова неравенство 1, 509
- сглаживающий 3, 934
-, слабая сходимость 3, 1104
- стабилизирующий 3, 933
- характеристический 5, 765
- эллиптический 1, 621
- эффективный 2, 1052
Функционалов направляющих метод 3, 890
Функциональная группа 2, 876
- - гомологии (когомологии) 2, 954
- когомологическая операция 2, 923
- константа 2, 1036
Функциональная отделимость 4, 140; 5, 694
Функциональная производная 5, 694
Функциональная система 5, 694—696
- эквивалентность рекурсивных функций 1, 230
Функционально замкнутое пространство 5, 796
- отделимые множества 5, 391
- полная система 1, 128
- - универсальная алгебра 5, 498
- полный список формул 4, 695
- хаусдорфово пространство 5, 694
Функциональное бинарное отношение 1, 488
Функциональное исчисление 4, 579; 5, 696
- - минимальное 3, 692
- - от нормального оператора 5, 121
Функциональное отношение 5, 697
- поле 1, 178
- пространство, вложение 1, 723
- расширение 5, 796
- соответствие 5, 78
Функциональное уравнение 5, 698—700
- - для *L*-функции Дирихле 2, 189
Функциональное уравнение; методы решения 5, 700—705
- - Римана 2, 113
- - Эйлера 1, 867
- - ζ-функции 2, 1006
Функциональной полноты свойство 3, 715
- эквивалентности отношение 5, 945
Функциональные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными 2, 318
Функциональный анализ 5, 705—712
- - нелинейный 3, 962
- интеграл 2, 568
- класс Гёльдера 4, 1173
Функциональный определитель 5, 712
- ряд 4, 1068
- элемент 1, 50, 55; 5, 301
- - автомата 1, 75
Функционирование конечного автомата 1, 53
Функция 5, 712—720
- абелева 1, 22
- абсолютно интегрируемая 1, 38
- - непрерывная 1, 34
- абстрактная 3, 1119
- автоморфная 1, 79
- аддитивная 1, 94; 3, 636
- алгебраическая 1, 174
- алгебры логики 1, 124, 553; 4, 699
- амплитудно-фазовая 4, 241
- аналитическая 1, 261, 262, 265, 266, 268; 5, 690
- - абстрактная 1, 274
- - полная 4, 413
-, аналитическое продолжение 1, 283
- Ангера 1, 289
- антианалитическая 1, 292
- антиголоморфная 1, 292
- арифметическая 1, 322
- - аддитивная 1, 89
- асимптотически моногенная 3, 804
- Бейтмена 1, 406
- бесконечно большая 1, 435, 456
- бесконечно малая 1, 435, 456; 4, 498, 559
- бесселева 1, 460; 5, 820
- Бесселя 1, 462
- Бибербаха — Эйленберга 1, 467
- бигармоническая 1, 470
- билинейная 1, 484
- Бляшке 1, 508
- большого размаха 3, 1058
- борелевская 1, 535
- булева 1, 553
- - случайная 1, 1111
- Бурже 1, 565
- Бэра 1, 567
- бэровская 1, 535, 567
-, вариация 1, 606, 608
- Вебера 1, 612
- Вебера — Эрмита 1, 612
- векторная 1, 636, 651
-, верхний предел 1, 670
- весовая 1, 674; 2, 793
- включения 3, 1107
- вогнутая 1, 738, 793
- возрастающая 1, 749; 3, 814
- возрастная 1, 749
- восстановления 1, 757
- вполне аддитивная 1, 758
- - регулярного роста 5, 799
- выбора 1, 772
- выборочная 1, 776; 5, 11
- выигрыша 1, 781; 2, 471; 5, 529, 532
- выпуклая 1, 793, 795; 3, 854
- - сильно 1, 1100
- - строго 1, 793
- *p*-выпуклая 4, 728
- вычислимая 1, 227, 818
- Гамильтона 1, 855
- Ганкеля 1, 870
- гармоническая 1, 875; 2, 239; 3, 205
- - телесная 5, 882
- Гартогса 4, 336
-, гессиан 1, 955
- гиперболическая 1, 991
- - показательная 4, 27
- гипергеометрическая 1, 1001
- - вырожденная 1, 804
- - обобщенная 1, 1003
- гладкая 1, 1021
- голоморфная 1, 262, 268, 269, 1029; 4, 20, 48, 1014
- Гранди 2, 475
- Грина 1, 1126; 2, 178
- - в статистической механике 1, 1131
- - комплексная 1, 1131; 5, 889
- - обобщенная 1, 1128; 4, 531
-, двойной предел 2, 28
- двоякопериодическая 2, 50
- действительная 2, 70; 5, 716
- действительнозначная 5, 715
- действия 4, 43
- делимости на число 2, 84
- детерминированная 3, 1161
- диезная 2, 135
- Дирихле 2, 188
- дискриминантная 2, 213
- диссипативная 2, 227
- дифференциальная 4, 901
- дифференцируемая 2, 235, 270, 273, 275, 354; 4, 689

- в смысле комплексного анализа 1, 262, 268
- дробно-линейная 2, 384
- дробно-рациональная 2, 387; 4, 917
- Жуковского 2, 426
- замкнутая 3, 854
- замкнутая система 2, 434
- звездообразная 2, 449
- y-знакоопределенная 5, 574
- m-значной логики 3, 714
- измеримая 2, 297
- - сильно 1, 541
- инвариантная 4, 535
-, индекс 4, 1173
- интегральная показательная 2, 577
- A-интегральная 2, 566
- интегрируемая 2, 612
- - в смысле Римана 4, 992
- - - - Хинчина 5, 786
- - по функции 5, 226
- интегрирующая 5, 226
- интенсивности отказа 3, 854
- интервальная 2, 617
- квазибелева 2, 798
- квазипериодическая 2, 818
- квазисобственная 2, 805
- Кёбе 1, 466; 2, 669, 842
- Кельвина 2, 845
-, композиция 4, 1214
- конечно аддитивная 3, 636
- конструктивная 2, 1049, 1056
- концентрации 2, 1101
- корреляционная 3, 23
- кратногармоническая 3, 89
- кратности 1, 379
- кривизны 5, 50
- критическая 3, 114
- круговая 3, 1135
- кручения 5, 252
- Куммера 1, 804
- Ламе 5, 446
- Лебега 3, 217
- Леви 4, 213
- лексическая 3, 567
- линейная 3, 319
- n-линейная 4, 406
- логарифмическая 3, 407
- логарифмически плюрисубгармоническая 4, 336
- логарифмически - субгармоническая 3, 409
- логическая 3, 416
- локально интегрируемая 3, 430
- лучевая 1, 945; 3, 463
- мажорантная 3, 476
- Макдональда 1, 458
- мероморфная 1, 265; 3, 647
- метагармоническая 4, 403
- минимальная 4, 1125
- минорантная 3, 476
- мировая 3, 704
- многозначная 3, 720
- многолистная 3, 723

Функция множеств 5, 720

- множества, абсолютная непрерывность 1, 35
- - регулярная 4, 937
-, множество значений 3, 1099
- модулярная 3, 788
- моногенная 3, 67, 802
- монодромная 3, 809
- монотонная 3, 813
- мощности 5, 182, 186
- мультипликативная арифметическая 3, 840
- надежности канала 4, 186
- наилучшего приближения 4, 605
- невозрастающая 5, 466
- недифференцируемая 3, 909
- неисправности 3, 858
- непрерывная 3, 983
- неубывающая 1, 749
- нечетная 3, 1031
- неявная 3, 1032, 1035
-, нижний предел 1, 670
- нормальная 3, 1069; 4, 568
-, носитель 3, 1082
-, нуль 3, 1082
- нумерически представимая 3, 1088
-, область значений 3, 1099
-, область определения 3, 1099
- обобщенная 3, 1104
- обратная 3, 1132
- - гиперболическая 3, 1134
- - тригонометрическая 3, 1135
- общерекурсивная 1, 820; 3, 1147; 4, 960
- объема 3, 659
- овражная 3, 1153
- ограниченного вида 3, 1159
- ограниченно - детерминированная 3, 1160
- ограниченной вариации 3, 1162
- -, Жордана разложение 2, 421
- однолистная 1, 266; 3, 1163
- одноперiодическая 3, 1172
- однородная 3, 1173
- операторная 4, 27
- опорная 1, 797; 4, 29
-, ортогональная система 4, 85
-, ортонормированная система 4, 105
- остаточная 3, 1161
- от оператора 5, 709
-, отрицательная вариация 4, 161
- параболическая показательная 4, 27
- параболического цилиндра 1, 612
-, параметрическое представление 4, 219
- Пенлеве 4, *233*
- первообразная 2, 563, 579; 4, 237
- передаточная 4, 240
- перехода 4, 895
- переходная 4, 259
-, период 4, 265, 268
- периодическая 4, 267
- плюригармоническая 4, 334
- плюрисубгармоническая 4, 335
- плюрисупергармоническая 4, 337
- поверхностная 4, 338; 5, 50
- пограничного слоя 3, 503
- подчиненная 4, 384
- подчиняющая 4, 384
- показательная 4, 390
- полезности 3, 587; 4, 399
- полианалитическая 4, 402
- полигармоническая 4, 403
- полилинейная 4, 406
- полиномиальная 4, 408
- полиэдральная 5, 889
-, полное изменение 4, 423
- положительно определенная 4, 431; 5, 739
- полунепрерывная 4, 460
- пороговая 5, 302
- последования 4, 505, 576
- потенциальная 4, 519, 536
- потерь 4, 537
- Похгаммера 1, 804
- почти инвариантная 4, 598
- - периодическая 1, 375; 4, 543
- - комплексная 1, 382
- правдоподобия 2, 644; 3, 483; 4, 176; 5, 173
- правильная 4, 937
-, предел 4, 558
- представляющая 4, 598
-, приближение 4, 603
- примитивная 4, 237
- примитивно рекурсивная 4, 636, 963
- приписывающая 1, 1091
- производящая 3, 791; 4, 691; 5, 758
- пропозициональная 4, 698
- простая 2, 565
- p-псевдовыпуклая 4, 728
- псевдопериодическая 4, 742
-, пучок 4, 531
- разбиения 3, 90
- размерности 4, 823
- разрешающая 4, 849, 1202
- разрешимая 4, 274, 532
- разрывная 4, 854
- Рамануджана 4, 857
- распределения 3, 1099; 4, 97, 891
- - Колмогорова 2, 955
- - Реньи 4, 974
- - совместная 5, 70
- - условная 5, 555
- - эмпирическая 5, 998
- рассеяния 2, 227
- Рауса 4, 752
- рациональная 3, 754; 4, 917
- регрессии 4, 929
- регулярная 1, 265; 4, 937
- рекуррентная 4, 954
- рекурсивная 4, 960; 5, 833
- решающая 4, 979
- Римана 2, 312; 4, 993
- - для задачи Гурса 1, 1151
- Римана — Шварца 5, 888
- риска 4, 1033; 5, 192
-, росток 4, 1054
-, свертка 4, 1075
- сигнализирующая 1, 1092
- сильно плюрисубгармоническая 4, 336
- - p-псевдовыпуклая 4, 728
- - субгармоническая 5, 264
- симметрическая 4, 1144
- сингулярная 4, 1171
- скачков 4, 1198
- Сколема 4, 1202
- Скулема 4, 1202
- слабо голоморфная 3, 1064
-, след 1, 724
- сложная 4, 1214
- случайная 5, 10
- смешанная поверхностная 5, 50
- собственная 5, 58, 59
- сопряженная 5, 82
- спектральная 3, 1110; 4, 814; 5, 118, 119, 212, 910
- специальная 5, 136
- спроса 3, 587
- сравнения 5, 160
- Стеклова 5, 215
- степенная 5, 216
- строго возрастающая 1, 749
- - монотонная 3, 813
- - убывающая 5, 466
- Струве 5, 248
- структурная 5, 252
- субгармоническая 2, 280; 5, 262
- - обобщенная 1, 671
- субпараболическая 5, 266
- субтепловая 5, 266
- сумматорная 5, 269
- суммируемая 2, 14; 3, 201; 5, 275
- супергармоническая 1, 890; 2, 280; 4, 403, 533; 5, 277
- - обобщенная 1, 671
- суперпараболическая 5, 278
-, суперпозиция 4, 1214; 5, 278, 715
- супертепловая 5, 278
- существенная 3, 718
- сферическая 4, 591, 598; 5, 293
- K-сферическая 5, 511
- счетно аддитивная 3, 636
- теоретико-числовая 1, 257, 322; 5, 335
- типично вещественная 3, 725; 5, 350
- точечного источника 3, 1109
- трансцендентная 5, 425
- тригонометрическая 5, 436
- убывающая 3, 814; 5, 466
- Уиттекера 5, 493
- универсальная 4, 637; 5, 499
- управляющая 5, 536
- управляющей системы 5, 534
- условно периодическая 5, 553
- финитная 5, 619
- финслерова метрическая 5, 621
- Фютера 1, 1007
- Хаара 5, 742
- Ханкеля 1, 870
- характеристическая 4, 887; 5, 739, 756
- Хаусдорфа 1, 1008
- целая 1, 265; 5, 797
- - рациональная 3, 754; 4, 917; 5, 797
- целевая 2, 677; 3, 601; 5, 799
- цели 5, 799
- цилиндрическая 5, 820
- - модифицированная 1, 461
- частичная 3, 875; 4, 960
- частично рекурсивная 1, 819, 820; 4, 960; 5, 833
- частотная 4, 241
- Чебышева 5, 847
- Четаева 5, 859
- четная 5, 859
- численнозначная 5, 715
- числовая 5, 716
- шаровая 1, 886; 5, 293, 882
- Шафаревича 1, 169
- Шварца 5, 888
- Эйлера 5, 934
- Эйри 5, 939
- Эйри — Фока 5, 940
- экспоненциальная 4, 390; 5, 953
- экспоненциального типа 5, 953
-, экстремальные свойства 5, 968
- эксцессивная 4, 535; 5, 970
- элементарная 5, 977
- эллипсоидальная гармоническая 3, 189
- эллиптическая 5, 986
- Эрмита 5, 1018
- E-функция 2, 454
- L-функция 5, 720
- Дирихле 2, 188
- N-функция 4, 74
- P-функция 4, 180
- Римана 4, 992
- $\mathfrak{p}$-функция Вейерштрасса 1, 621, 622
- B-функция 1, 464, 535
- Γ-функция 1, 866
- δ-функция 2, 89; 4, 20
- Дирака 3, 1105
- $\mathcal{E}$-функция Вейерштрасса 1, 620
- ζ-функция 2, 112
- Вейерштрасса 1, 621, 623
- θ-функция 5, 347
- σ-функция Вейерштрасса 1, 621, 623
- ψ-функция Гаусса 1, 869; 4, 744

Функция-оригинал 3, 197

- Фунтик 4, 1165
- стандартный 5, 168

Фурье алгебра 1, 382; 5, 509

- быстрого дискретного преобразования метод 3, 697

Фурье интеграл 5, 720—722

- - на группе 1, 882
- интегральная формула 5, 720
- интегральное уравнение 3, 1030

Фурье интегральный оператор 5, 722—726

- копреобразование на группе 1, 882
- коэффициентов набор 1, 981

Фурье коэффициенты 4, 99, 544; 5, 439, 726

Фурье коэффициенты почти периодической функции 5, 726

Фурье метод 5, 726

- обобщенное преобразование 3, 1115

Фурье показатели 4, 544; 5, 727

Фурье преобразование 2, 590; 4, 294; 5, 727—729

Фурье преобразование дискретное 5, 730

- - на группе 1, 882

Фурье преобразование обобщенной функции 5, 729

- ряд 4, 99, 100; 5, 439
- -, Дирихле теорема 2, 188
- -, Карлесона теорема 2, 727
- -, Колмогорова — Селиверстова теорема 2, 959
- - обобщенный 3, 1115

Фурье ряд по ортогональным многочленам 5, 731

Фурье ряд почти периодической функции 5, 732

- -, суммирование 5, 271

Фурье ряд функции 5, 732—738

- синус-преобразование 4, 1194
- формула 5, 439
- - обобщенная 1, 883

Фурье число 5, 738

Фурье — Бесселя интеграл 5, 738

Фурье — Бесселя ряд 5, 738

Фурье-гиперфункция 3, 1127

Фурье — Стилтьеса алгебра 5, 509

Фурье — Стилтьеса преобразование 5, 738, 756

Фурье — Стилтьеса ряд 5, 740

Фютера условие 1, 1007

- функция гиперкомплексного переменного 1, 1007

X

Хаара левый интеграл 2, 532
Хаара мера 5, 741
- - левая 3, 644
- - правая 3, 644
Хаара система 4, 86; 5, 742—744
Хаара условие 5, 744
- функция 5, 742
Хаара — Неймана — Вейля теорема об инвариантных интегралах 2, 532
Хадвигера гипотеза 5, 744
Хайнца неравенство 2, 283
Хамеля базис 1, 375
Хана разложение 5, 745
Хана — Банаха теорема о линейных функционалах 3, 378; 5, 745
- - - о полунормах 4, 462
- - - о функционалах 5, 86
Хана — Жордана разложение 2, 444
Хана — Мазуркевича теорема о континуумах 2, 1067
Ханкеля функции 1, 870
Ханта теорема в абстрактной теории потенциала 4, 534
Ханта — Стейна теорема в математической статистике 2, 538; 5, 745
Ханфа число 3, 929
Харады группа 5, 149
Характер алгебраической группы 5, 747
Характер C^*-алгебры 5, 746
Характер ассоциативной алгебры 5, 746
- Брауэра 2, 1021
- главный 2, 192
- - в теории чисел 1, 1019
Характер группы 4, 547; 5, 512, 747
- - унитарный 1, 882
- Дирихле 2, 181
- изотропии 1, 936
- инфинитезимальный 2, 819
- , кондуктор 2, 1015
Характер конечномерного представления полупростой алгебры Ли 5, 748
- неприводимый 2, 193
- неразветвленный 3, 1001
- первообразный 2, 192
Характер полугруппы 5, 748
- Понтрягина 4, 491
Характер представления ассоциативной алгебры 5, 749
Характер представления группы 5, 749
- примитивный 2, 192
- производный 2, 193
- системы Пфаффа 2, 734
- топологического пространства 3, 836
- топологической группы 5, 747
- - полугруппы 5, 373
- унитарного представления 5, 511
- Чжэня 5, 762, 866
- Чжэня — Дольда 5, 866
Характеризационные теоремы 5, 750
Характеризация топологическая 1, 1036
Характеристик метод 5, 751—753
Характеристика 2, 325; 3, 326; 5, 753—755
- выборочная 1, 776
- линейного дифференциального оператора 3, 366
- логарифма 3, 405
- неванлинновская 4, 887
- особенности 4, 120
Характеристика ноля 4, 398; 5, 755
- сингулярного интеграла 4, 1176
- тета-функции 5, 348
- фигуры 5, 614
- частотная 5, 564
- эйлерова 5, 936
Характеристики нуль поле 4, 398
- *p* простое поле 1, 848
Характеристическая задача Коши 3, 63
- квадратичная форма линии 2-го порядка 3, 388
- кривая 2, 325
- линия 3, 799; 5, 753
- матрица 3, 326, 616, 765, 1053
- - логическая 3, 415
Характеристическая поверхность 2, 815; 3, 326; 5, 753, 756
Характеристическая подгруппа 5, 756
Характеристическая полоса 2, 326; 5, 756
- система 2, 326
- форма 2, 298, 814
- функция 4, 887; 5, 739
- - безгранично делимая 1, 397
Характеристическая функция в теории вероятностей 5, 756—758
- - игры 2, 1103
Характеристическая функция множества 5, 756
- - Неванлинны 2, 100
- часть сингулярного оператора 4, 1172
Характеристический детерминант 2, 300
Характеристический класс 5, 758—764
- конус 3, 327
- корень матрицы 5, 764
Характеристический многочлен матрицы 3, 616, 1053; 5, 764
- определитель оператора 5, 116
Характеристический показатель 2, 765; 3, 313, 315; 5, 764
- - Ляпунова 3, 471
- - стохастически устойчивый 5, 581
- -, устойчивость 5, 580
- - устойчивый почти наверное 5, 581
- сингулярный оператор 4, 1172
Характеристический функционал 5, 765
Характеристическое значение матрицы 5, 764
- - (число) ядра 2, 591
Характеристическое многообразие 5, 753, 766
- - линейного дифференциального оператора 3, 367
- направление 2, 325; 3, 326, 799
Характеристическое отображение 5, 766
Характеристическое уравнение 5, 764, 766
- - линии 2-го порядка 3, 388
Характеристическое число 5, 766
- - матрицы 5, 764
Характеров группа 5, 766
- - алгебраического тора 1, 179
- сумма, Виноградова оценка 1, 704
Характеров формула 5, 767
Харди вариация 5, 768
Харди классы 1, 1099; 5, 769—772
- - аналитических функций 4, 1030
Харди неравенство 5, 772
Харди преобразование 5, 773
Харди признак сходимости 5, 773
- пространство 1, 1099; 5, 789
Харди теорема об аналитических функциях 5, 773
Харди — Литвуда признак сходимости 5, 774
Харди — Литвуда проблема в теории чисел 5, 774
- - теорема о рядах Фурье 5, 735
Харди — Литвуда теорема о суммируемых функциях 5, 775
- - уравнение 2, 225
Харди — Литвуда — Рамануджана круговой метод 1, 259
Хартмана — Винтнера теорема о законе повторного логарифма 4, 347
Харшаньи решение 1, 312
Хассе инвариант 5, 775—777
Хассе принцип 2, 158; 4, 82; 5, 777
- символ 5, 776
Хассе — Минковского инвариант 5, 776
Хаттори теорема о кобордизмах 2, 891
Хаусдорфа аксиома 4, 140; 5, 390, 777
- *аналитическая функция гиперкомплексного переменного* 1, 1008
- классификация 2, 94
- матрица 5, 778
Хаусдорфа мера 5, 777
Хаусдорфа метод суммирования 5, 778
- метрика 3, 674
Хаусдорфа операция 5, 779
Хаусдорфа размерность 5, 779
- рекурсивная формула 1, 235
- теорема, конструктивный вариант 2, 1052
- - о компактах 2, 990
- - о непрерывных отображениях 3, 987
- - о продолжении метрики 3, 673
Хаусдорфа — Юнга неравенства 5, 728, 779
Хаусдорфова близость 1, 501
Хаусдорфова метрика 5, 779
Хаусдорфово общее преобразование 5, 778
Хаусдорфово пространство 4, 140; 5, 391, 777, 780
- расширение 4, 909
Хевисайда функция 3, 1107; 4, 127
Хегора диаграмма 5, 780
Хегора разбиение 5, 780
Хелли теорема 5, 781
- - о вариации функции 5, 781
- - о выпуклых множествах 5, 781
Хеллингера интеграл 5, 781
Хеллингера расстояние 5, 782
- тип 5, 134
Хельда — Хигмана — Маккея группа 5, 149
Хельсона множество 1, 884
Хемминга двоичный код 2, 932
- метод 2, 292
- расстояние 2, 931
Хенкина теорема о полноте 3, 929
Хёрмандера класс 4, 735
Хессенберга теорема в *проективной геометрии* 4, 189
- форма матрицы 2, 687
Хестенса метод 5, 92
Хефлигера структура 5, 782
- узел 2, 520
Хефлигеровский атлас 5, 782
- коцикл 5, 782
«Хи» распределение 5, 803
Хигмана проблема 1, 123
Хигмана — Симса группа 5, 149
Хигмана — Янко — Маккея группа 5, 149
Хигмена теорема о нильалгебрах 3, 1039
«Хи-квадрат» критерий 5, 784
- плотность 1, 866
«Хи-квадрат» распределение 5, 785
Хилла задача 2, 870
Хилла уравнение 1, 861; 5, 785
Хилле — Иосиды условие 2, 772; 4, 1126
- - - для резольвенты 4, 448
Хинчина интеграл 5, 786
Хинчина неравенство для независимых функций 5, 786
- принцип переноса 2, 164
Хинчина теорема 5, 787
- - о диофантовых приближениях 2, 171; 5, 787
- - о факторизации распределений 5, 787
- условие 1, 528
- формула в теории массового обслуживания 3, 546
Хинчина — Колмогорова теорема об *ортонормированных системах* 4, 801
Хиронака теорема о раздутии 4, 850
Хирургия 3, 825
Хирцебруха класс 4, 486
- теорема о замкнутых многообразиях 4, 492
- - о сигнатуре 5, 763
- - об индексе 2, 552
Хирша формула 3, 1178
Хиццакиса формула 1, 332
Хичкока проблема 5, 420
Хоара логика 4, 653
Ход прогонки 4, 642
Ходжа гипотеза 5, 787
- - *об алгебраических циклах* 1, 180
- метрика 3, 155
Ходжа многообразие 3, 156; 5, 788
- разложение 5, 788
- - ортогональное 3, 196
Ходжа структура 5, 788
Ходжа теорема 5, 789
- - о разложении 5, 789
- - об индексе 5, 789
- фильтрация 5, 788
- форма 3, 156
Ходжа — де Рама теорема об индексе 2, 551
Холла теорема в комбинаторике 2, 975; 4, 813
Холла — Янко группа 5, 149
Холлова подгруппа 5, 789
Холловская π-подгруппа 4, 851
Хомского грамматика 1, 1092
Хопфа алгебра 5, 790
Хопфа инвариант 2, 923; 5, 791—793
- конструкция 5, 463, 793
- *отображение* 5, 793
- поверхность 1, 250
- постоянная 3, 679
- проблема 3, 1030
Хопфа расслоение 5, 793
- теорема о возвращении 5, 572
- - об узлах и зацеплениях 5, 476
- формула 3, 238
- - следа 3, 240
Хопфа — Адамса инвариант 5, 792
Хопфа — Адамса — Стинрода инвариант 5, 792
Хопфа — Новикова инвариант 5, 793
Хопфа — Ринова теорема о компактности 4, 426
Хопфа — Ринова теорема о римановых пространствах 5, 794
Хопфа — Стинрода инвариант 5, 792
Хопфа — Уайтхеда инвариант 5, 792
Хопфа — Хилтона инвариант 5, 792
Хопфова группа 3, 1030; 5, 794
Хорд метод 5, 794
Хорда 5, 794
Хордальная метрика 4, 910
Хордальное расстояние 4, 996
Хорновская формула 3, 767
Хорошо доступная точка границы 2, 446
Хосокавы полином 1, 233
Хотеллинга критерий 5, 794
Хотеллинга T^2-распределение 5, 795
Хохшильда группа когомологий 2, 909
Хохшильда — Серра спектральная последовательность 2, 913
Хроматический класс графа 1, 1114
- многочлен графа 1, 1114
Хроматическое число графа 1, 1113, 1120
- - двумерной поверхности 1, 1113
Хронометрический инвариант 4, 970
Хьюитта расширение 5, 796

Ц

Цассенхауза группа 5, 797
- многообразие 4, 584
Цейтена — Сегре инвариант алгебраической поверхности 1, 150
Цейтина теорема об алгоритмических операторах 2, 1052
Целая рациональная функция 3, 754; 4, 917; 5, 797
Целая точка 5, 797
Целая функция 1, 265; 5, 797—799

- -, Адамара теорема 1, 86
- -, Вейерштрасса теорема 1, 265
- -, индикатор 4, 1054
- -, R-порядок 2, 185
- - рациональная 3, 754; 4, 917; 5, 797
- -, род 4, 1049
- часть группы 5, 833
- - числа 1, 297

Целевая функция 2, 677; 3, 601; 5, 799

Целесообразное поведение автомата 1, 58

Цели функция 3, 602; 5, 799

Целое алгебраическое число 1, 196; 5, 799

- замыкание кольца 2, 64; 5, 799

Целое расширение кольца 5, 799

Целое число 2, 73; 5, 800

- - алгебраическое 1, 196

- - p-адическое 1, 100

Целозамкнутая область целостности 5, 800

- полугруппа 5, 525

Целой зависимости уравнение 5, 799

Целостная аффинная схема 1, 358

Целостное кольцо 3, 1099; 5, 800

Целостности область 2, 961; 3, 1099

Целочисленная бинарная квадратичная форма 1, 486

Целочисленное программирование 2, 678; 5, 800

- - линейное 5, 800

Целочисленности теорема 4, 540

Целочисленный автоморфизм 2, 779

Целый дивизор 2, 128, 484

Целый идеал 2, 482; 5, 801

- элемент 5, 799

Целых точек распределение 5, 801

Цель управления 1, 61

Цена 5, 529, 532

- дифференциальной игры 2, 330

- остановки 4, 508

Центиль 4, 278

Центр 4, 122; 5, 801

- альтернативного кольца 1, 238

- вращения 1, 764

- гиперболы 1, 987

- гомологии 1, 1060

- гомотетии 1, 1061

- графа 1, 1106

Центр группы 5, 802

- **двоякокруговой области** 2, 49

- инверсии 2, 544

- инфлекционный 2, 1002

Центр кольца 5, 802

- кривизны 2, 250; 3, 118; 5, 79

- линии 2-го порядка 2, 1034; 3, 388

- луча 2, 1003, 1015

- окружности 4, 15

- поверхности 2-го порядка 4, 344

- проектирования 4, 688

- пучка 4, 772

- радикальный 4, 808, 1123

- рассеивания 4, 892

- связки окружностей 4, 1089

- сети сфер 4, 1123

- симметрии 4, 1150

- симметрического пространства 4, 1148

- симметричного предиката 3, 718

- степенного ряда 5, 218

Центр топологической динамической системы 5, 802

Центр частично упорядоченного множества 5, 803

- чебышевский 5, 850

- шара 5, 881

- элемента аналитической функции 5, 971

- эллипса 5, 977

- эллипсоида 5, 978

Центра и фокуса проблема 5, 803

Централизатор 5, 803

-, Бергмана теорема 1, 342

G-централизатор 2, 521

Центральная аксонометрия 1, 113

Центральная алгебра 5, 804

- - с делением 1, 131

- **линия 2-го порядка** 2, 1034; 3, 388

- **поверхность 2-го порядка** 4, 344

- порядковая **статистика** 4, 500

Центральная предельная теорема 4, 573; 5, 804—809

- - - для цепей Маркова 3, 519

- проекция 4, 688

Центральная простая алгебра 5, 809

- разность 2, 1027

- система подгрупп 4, 368

Центральное поле экстремалей 5, 955

Центральное произведение групп 5, 809

- семейство экстремалей 5, 957

Центральные показатели 5, 809—811

Центральный индекс максимального члена ряда 3, 488

- момент 3, 791

Центральный ряд группы 3, 1042; 5, 811

- - подгрупп 4, 367

- угол 4, 16

- элемент группы 5, 802

Центрированное семейство множеств 5, 811

Центроаффинная геометрия 5, 811

- подгруппа 1, 363

Центроаффинное преобразование 5, 811

Центроаффинное пространство 5, 811

Центро-фокус 4, 122; 5, 811

Цепная дробь 5, 812—814

- - диагональная 2, 123

Цепная линия 5, 815

- пара Пуанкаре 4, 748

Цепная рекуррентность 5, 815

Цепное кольцо 4, 555; 5, 815

- преобразование 2, 589

Цепной комплекс 1, 1042; 2, 998, 1001; 4, 1163

Цепной модуль 5, 815

Цепочка Маркова 1, 948

- уравнений Боголюбова 1, 512

Цепь 1, 556, 1102; 2, 260, 953; 5, 815

- бемольная 1, 409; 2, 133

- в графе 1, 1106

- в контактной схеме 2, 1061

- в релейно-контактной схеме 4, 968

- в схеме из функциональных элементов 5, 302

- диезная 2, 133

- инцидентных полупространств 4, 83

- комплекса 2, 998

- - r-мерная 1, 1043

- лебегова 1, 411

- Маркова 1, 660; 3, 517

- -, поглощающее состояние 4, 351

- полиэдральная 4, 412

- сизигии 1, 973

- сингулярная 4, 1179

- A-системы 4, 1194

- феллеровская 5, 603

- эйлерова 2, 972

ε-цепь 1, 829

Цермело аксиома 5, 816

- аксиоматическая система 1, 105

Цермело теорема о вполне упорядоченных множествах 1, 764; 5, 816

Цермело — Неймана теорема в теории игр 4, 387

Цермело — Френкеля аксиоматическая система 1, 105

Цикл 1, 557; 2, 260, 953; 4, 381; 5, 816

- алгебраический 1, 179

- без контакта 2, 392

- в графе 1, 1106

- гамильтонов 2, 972

- гомологичный нулю 1, 1043

- истинный 1, 829; 2, 681

- исчезающий 3, 807

- комплекса 1, 1043; 2, 998

- нульмерный нормальный 3, 1074

- *ограничивающий* 1, 1043

- ориентирующий 4, 71

- полиэдральный 4, 413

- предельный 4, 575

- **примитивный** 3, 237

- **сильно гомологичный нулю** 4, 1205

- **слабо гомологичный нулю** 4, 1205

- сходящийся 1, 829

- фундаментальный 5, 685

Цикла оператор 1, 224

Циклида Дюпена 2, 396

Циклическая аппроксимация периодическими преобразованиями 1, 311

- блок-схема 1, 506

Циклическая группа 2, 1019; 5, 816

- подгруппа 4, 369

Циклическая полугруппа 3, 802; 5, 816

- прогонка 4, 643

- точка 3, 124

- частота 4, 1085

Циклические координаты 1, 859; 5, 816

Циклический автомат 1, 67

- вектор 4, 590

- индекс группы 2, 978

- итерационный процесс 3, 294

- код 2, 933

- матроид 3, 623

- метод вращений 1, 766

Циклический модуль 5, 816

- оператор 3, 1056

- период абелева дифференциала 1, 14

- - - интеграла 1, 16

- разрез 2, 712

Циклическое перемещение 4, 752

- разностное множество 4, 837

- расширение, Гильберта теорема 1, 973

Цикловая запись подстановки 4, 1141

Цикловой тип подстановки 4, 1141

Циклоида 5, 817

- высшего порядка 5, 818

Циклоидальная кривая 5, 817

Цикломатическое число графа 1, 1120

Цилиндр 4, 811; 5, 818, 819

- гиперболический 1, 992; 5, 819

- отображения 5, 818

- параболический 4, 195; 5, 819

- эллиптический 5, 819, 993

Цилиндрическая алгебра 5, 825

- винтовая линия 1, 705

Цилиндрическая конструкция 5, 818

Цилиндрическая мера 4, 580; 5, 778, 818

Цилиндрическая поверхность 5, 819

- проекция 2, 754; 4, 688

- функция модифицированная 1, 461; 3, 476

Цилиндрические координаты 5, 819

Цилиндрические функции 5, 820—825

Цилиндрическое множество 4, 580; 5, 818, 825

Цилиндроид 5, 826

Циркулярный интеграл 5, 991

Циркуляция 5, 826

- векторного поля 1, 649

Циссоида 5, 826

Циссоидальная кривая 5, 826

Цифры 5, 826—828

- арабские 1, 312

- значащие 2, 465

- римские 4, 1033

- славянские 4, 1208

Цоколь 3, 693

Цоколь модуля 5, 828

Цорна лемма в теории множеств 1, 772; 5, 828

Ч

Чаплыгина метод 5, 829

- неравенство 2, 279

- преобразование 1, 1028

Чаплыгина теорема о дифференциальных неравенствах 5, 829, 830

- уравнение 5, 45, 446

Чатиц метод 5, 831

Частичная геометрия 5, 831

- многозначная когомологическая операция 2, 922

- мультиоперация 3, 839

Частичная проблема собственных значений 5, 831—833

- сумма ряда 4, 1063, 1068

- - - двойного 2, 29

- трансверсаль 3, 207; 4, 813

- функция 3, 875; 4, 960

Частично голономная сеть 4, 1122

- полуточная теория гомологии 1, 1046

- правильная программа 4, 652

- редуктивное пространство 4, 948

Частично рекурсивная функция 1, 819, 820; 4, 960; 5, 833

Частично рекурсивный оператор 5, 833

Частично упорядоченная группа 5, 833

- - лупа 3, 462

- упорядоченное кольцо 5, 526

Частично упорядоченное множество 5, 833—836

- - -, длина 2, 364

- - -, Мартина аксиома 5, 280

- - -, принцип двойственности 2, 34

- - -, простой интервал 4, 708

- - -, центр 5, 803

- уравновешенная блок-схема 1, 505

Частичного приведения к абсурду закон 4, 386

Частичного притяжения область 5, 836

Частичное вычисление 5, 418

- логическое исчисление 3, 418

- преобразование 4, 600

Частичный автомат 1, 49

- вектор 2, 831

- вычислитель 5, 418

- группоид 1, 1150

- латинский квадрат 3, 208

Частичный порядок 5, 836

Частичный предел 4, 558; 5, 836

Частичная проблема изоморфизма 2, 512

Частная производная 2, 274, 275; 5, 836

- - обобщенная 3, 1103

- - смешанная 2, 275

- *теория относительности* 4, 145

Частное 2, 81

Частное многомерное распределение 3, 732

- предельное множество 4, 565

- приращение 2, 274; 4, 424

- распределение 3, 513

- решение 3, 1146

Частное чисел 2, 73, 78

Частный дифференциал 2, 236, 274; 5, 837

- интеграл 2, 567, 568

Частный коэффициент корреляции 5, 837

- масштаб 2, 746

Частных кольцо 1, 341; 5, 838

- - полное 3, 422

Частота базисная 2, 338

- гармонического колебания 1, 888

- критическая 1, 864

- круговая 4, 1085

- ларморовская 2, 381

- свободного гармонического колебания 4, 1084

- собственная 1, 888

- события 1, 656

- циклическая 4, 1085

Частотная теорема 5, 839

- функция 4, 241

- характеристика 5, 564

Частотный критерий 5, 564, 565

Частоты захватывание 1, 578

Чеботарева теорема об автоморфизмах 5, 668

- - плотности 4, 401

Чебышева гиперболическая постоянная 5, 422

Чебышева квадратурная формула 5, 839

- критерий в картографии 2, 744

Чебышева метод 5, 840
Чебышева многочлены 2, 869; 5, 840, 843, 844
Чебышева неравенство в теории вероятностей 5, 842
Чебышева неравенство для монотонных последовательностей и функций 5, 842
Чебышева постоянная 5, 843
- - эллиптическая 5, 423
Чебышева система 5, 844
Чебышева теорема в теории приближений 5, 845
Чебышева теорема о дифференциальном бином 5, 845
- - о многочлене наилучшего приближения 3, 868
Чебышева теоремы о простых числах 5, 845
- тождество 5, 846
- - для простых чисел 4, 877
Чебышева уравнение 5, 846
Чебышева функции 5, 847
Чебышева — Граве теорема в картографии 2, 745
Чебышева — Лагерра многочлены 3, 167
Чебышева — Эрмита многочлены 5, 1016
Чебышевская проекция 2, 745
Чебышевская сеть 4, 168, 247; 5, 847
- система 1, 236
Чебышевская точка 5, 847
Чебышевский альтернанс 1, 236; 5, 848
Чебышевский итерационный метод 5, 848—850
- параметр 2, 690
Чебышевский радиус 5, 850
Чебышевский центр 5, 850
Чебышевское множество 5, 850—852
- подпространство 5, 850
Чебышевское приближение 4, 604; 5, 852
Чевиана 5, 852
Чевы прямая 5, 852
Чевы теорема для треугольников 5, 852
Чезаро кривая 5, 852
Чезаро методы суммирования 5, 852
- средние 4, 23
Чена — Гретцера теорема о решетках Стоуна 5, 234
Чепмена — Энскога метод 5, 853
Черная дыра 5, 461
Чёрча λ-абстракция 5, 854
Чёрча тезис 1, 215, 820; 4, 960; 5, 855
Четаева принцип 5, 855
- - вариационный 1, 600
Четаева теоремы в теории устойчивости 5, 855—857, 859
Четаева уравнения 5, 857—859
Четаева функция 5, 859
Четверная группа Клейна 4, 1141
Четверть 2, 80
Четная группа Клиффорда 5, 138
- подстановка 4, 381
Четная функция 5, 859
Четное число 5, 859
Четный овал 2, 70
- характер Дирихле 2, 192
Четырех красок задача 5, 859
Четырехвершинник 4, 664; 5, 598, 859
Четырехмерное многообразие 5, 860
Четырехспиральная полугруппа 4, 702
Четырехсторонник 4, 664; 5, 860
- полный 2, 1077
Четырехугольник Демулена 2, 90
- Ламберта 3, 187
- обобщенный 5, 831
- Саккери 4, 1071
Чеха гомологии 5, 126
Чеха когомологии 2, 906, 908; 5, 861
- комплекс 2, 906; 3, 896
- ось 4, 668
- теорема о метрических пространствах 3, 674
Чеха — Поспишила теорема о бикомпактах 3, 836
Чжоу кольцо 1, 181; 5, 862
- координаты 5, 863
- лемма о сдвиге 4, 254
- - о собственных морфизмах 5, 65
- - об алгебраических многообразиях 4, 423
Чжоу многообразие 5, 862
- -, координаты 3, 159
- схема 5, 862
Чжоу теорема об аналитических подмножествах 5, 863
- форма 3, 159
Чжэня класс 3, 146; 5, 760, 864—866
- - первый 5, 759
- полином 5, 864, 865
Чжэня характер 5, 762, 866
Чжэня число 5, 867
Чжэня — Дольда характер 5, 866
Чирнгаузена квадратриса 2, 793
Чисел теория 5, 868—870
- - аддитивная 1, 91
- - алгебраическая 1, 164
- - аналитическая 1, 254
Чисел теория вероятностная 5, 870—873
- - геометрическая 1, 944
- - метрическая 3, 662
- - элементарная 5, 974
Числа ассоциированные 1, 166
- Бернулли 1, 425
- взаимно простые 1, 690
- дружественные 2, 390
- Клиффорда 1, 240
- Клиффорда — Липшица 1, 1008
- Кристоффеля 3, 110
- многоугольные 1, 324
- пифагоровы 2, 169; 4, 291
- псевдослучайные 4, 743
- тетраэдрические 1, 324
- треугольные 1, 324
- Фибоначчи 5, 611
- фигурные 1, 324
Численное дифференцирование 2, 353, 625
- интегрирование 2, 612, 624
- преобразование Лапласа 3, 198
Численнозначная функция 5, 715
Численные методы вариационного исчисления 1, 586
- - газовой динамики 1, 835
- - решения уравнений гиперболического типа 1, 993
Численный метод итерационный 3, 293
- - прямой 3, 293
Числитель 2, 389; 5, 873
Число 5, 873—878
- абсолютно нормальное 3, 1071
- *p*-адическое 1, 99
- алгебраическое 1, 195, 260
- алгоритмическое 5, 314
- Бетти 1, 99, 464, 627
- вещественное 1, 690; 2, 73
- вращения 2, 767
- гауссово 1, 197, 905
- - простое 1, 905
- гиперкомплексное 1, 1008
- двойное 2, 31
- действительное 2, 73
- дефектное 4, 904
-, дробная доля 2, 382
- дуальное 2, 31
- *e* 2, 397
- идеальное 1, 166; 2, 484
-, индекс 5, 152
- иррациональное 2, 75, 666
- -, Александрова — Урысона теорема 2, 96
-, каноническое представление 4, 876
- кардинальное 2, 723; 3, 837
- Картана 2, 734
- квазипростое 2, 819; 4, 883
- Кокстера 4, 159
- комплексное 2, 1007
- Кэли 3, 160
- Лебега 3, 217
- Лефшеца 2, 554; 3, 240
-, мантисса 2, 443
- Милнора 4, 119, 129
- мнимое 2, 1007; 3, 708
- многоугольное 3, 752
- натуральное 2, 73; 3, 892
- неперово 2, 397; 3, 975
- нечетное 3, 1031
- нормализованное 2, 443
- нормальное 3, 1070
- обратное 2, 73
- обусловленности 4, 419, 420, 833
- ординальное 1, 783; 4, 69, 501
- отрицательное 2, 73, 76, 77
- паракомплексное 2, 32
- Пикара 4, 283
- положительное 2, 73, 76, 77
- Понтрягина 4, 491
- порядковое 4, 501
-, порядок 2, 443
- почти простое 4, 548
- производное 3, 805; 4, 690
- простое 4, 706
- противоположное 2, 73, 77
- псевдослучайное 5, 20
- рациональное 1, 260; 2, 74; 4, 922
- Рейнольдса 4, 954
- связности 4, 1096
- - многообразия 2, 54
- слабо нормальное 3, 1071
- случайное 5, 20
- собственное 5, 764
- совершенное 5, 70
- составное 4, 706
- сплетения 5, 148
- Стирлинга 2, 976; 4, 830
- Струхаля 5, 256
- Стэнтона 5, 261
- Тамагавы 5, 319
- трансфинитное 2, 723; 4, 501; 5, 421
- трансцендентное 1, 260; 5, 426
- трехугольное 5, 429
- узловое 5, 314
- Фибоначчи 5, 611
- фигурное 5, 614
- Фруда 5, 674
- Фурье 5, 738
- характеристическое 5, 764, 766
- целое 2, 73; 5, 800
- - алгебраическое 5, 799
- четное 5, 859
- Чжэня 5, 867
- чисто мнимое 2, 1008
- Штифеля 5, 904
- Штифеля — Уитни 5, 904
- эйлерово 5, 937
Числовая последовательность сходящаяся 5, 307
- прямая 2, 78
- - расширенная 1, 443
- решетка, Блихфельдта теорема 1, 946
- функция 5, 716
Числовое поле 5, 878
- пространство 1, 325
Числовой инвариант 5, 376
- оператор 4, 26
- ряд 4, 1063
- - сходящийся 5, 307
Числовые характеристики графов 1, 1120
Числовых функций асимптотика 5, 878
Чистая коса 3, 32
- линейная полугруппа 4, 553
- подгруппа 4, 1116; 5, 880
- стратегия 4, 386
- структура Ходжа 5, 788
Чисто мнимое число 2, 1008; 3, 708
- несепарабельное расширение 4, 1114
- несепарабельный элемент 4, 1114
- трансцендентное расширение 5, 426
Чистого размножения процесс 4, 261, 1051
Чистое исчисление предикатов 3, 418
- расширение 4, 908
Чистый многосторонний канал 2, 702
Чистый подмодуль 5, 879
Чудакова теорема о четных числах 1, 92
Чэна гипотеза о двух кардиналах 4, 1202

Ш, Щ

Шаг бар-индукции 1, 393
- винтовой линии 1, 706
- индукции 3, 564
- индукционный 2, 558
- решетчатого распределения 4, 984
- таблицы 2, 291
Шагов метод 2, 295
Шаговый множитель 3, 490
- процессор 1, 225
Шаля соотношение 1, 362
Шаля теорема в геометрии 5, 881
- - о полярных треугольниках 4, 990
Шапиро — Лопатинского условие 5, 992
- - - нётеровости краевой задачи 3, 361
- - - эллиптичности граничной задачи 4, 1135
Шапка 5, 881
Шар 5, 881
- Данделена 2, 12
- по полунорме 5, 379
Шара проблема 3, 119
Шарва приведение квадратичных форм 2, 789
Шарлье многочлены 5, 882
Шарлье распределение 5, 882
Шаровая точка 3, 97; 4, 15
Шаровая функция 1, 886; 5, 293, 882
Шаровой сегмент 4, 1101
- сектор 4, 1106
- тензор напряжений 3, 891
Шаудера базис 1, 377, 492
Шаудера метод 5, 882—884
- принцип 3, 976
- система 5, 584
Шаудера теорема о неподвижной точке 5, 884
Шаудера — Тихонова теорема о локально выпуклых пространствах 3, 429
- - - о неподвижной точке 5, 385
Шаудеровского типа оценка 5, 884
Шафаревича функция 1, 169
Шафаревича — Тейта группа 1, 847
Шварца альтернирующий метод 5, 884
Шварца дифференциал 5, 885
Шварца дифференциальный параметр 5, 885
- задача 5, 885
Шварца интеграл 5, 885
- интегральная формула 5, 886
- лемма в теории конформных отображений 1, 1000
- -, инвариантная форма 4, 282
Шварца лемма о регулярных функциях 5, 886
- оператор 5, 886
Шварца поверхность 5, 887
- *постоянные* 2, 59
- принцип симметрии 4, 1138
- производная 4, 995; 5, 885, 888
- пространство 5, 666
- симметризация 4, 1137
Шварца симметрическая производная 5, 887
- теорема о минимальных множествах 3, 691
- - о римановых поверхностях 4, 1019
- - о ядре 5, 1030
Шварца теорема симметрии 5, 888
Шварца уравнение 1, 252; 5, 888
Шварца формула 5, 888
Шварца функция 5, 888
Шварца ядро 5, 886, 889
Шварца — Иенсена формула для мероморфных функций 2, 488
Шварциан 3, 1165; 5, 885
Шварцшильда метрика 5, 889
Шварцшильда поле 5, 890

Шварцшильдовская сфера 5,890
Шевалле базис 3, 274
Шевалле группа 5, 890
- теорема о морфизмах 2, 1054
- - о полуинвариантах 4, 457
- - о сравнениях 1, 191; 5, 154
- - о топологии локального кольца 3, 438
Шеннона метод 2, 939
Шеннона теорема в теории информации 2, 941; 5, 891
- - о кодировании 2, 649, 650, 651
- функция 3, 859
- энтропия 2, 940
Шёнфлиса гипотеза 5, 892
- теорема о простой дуге 2, 423
Шепли вектор 5, 892
- игра 5, 238
Шеппарда поправки 5, 892
Шерка поверхность 5, 893
Шестисторонник Брианшона 1, 548
- Шлефли 2, 1080
Шестиугольная ткань 5,356, 357
Шестиугольности условие 2, 439
Шефердсона — Стургиса машина 3, 627
Шеффера штрих 5, 894
Шефферова функция 3, 717
Шефферса аналитическая функция гиперкомплексного переменного 1, 1007
Шилова граница 2, 965, 987
- теорема о максимальных идеалах 2, 985
Шилова — Бишопа теорема о равномерных алгебрах 4, 786
Ширина тела 4, 519
Широкая сходимость 5, 313
Широта интердециальная 2, 108, 617
- интерквартильная 2, 617
- интерсекстильная 2, 617
Ширшова проблема о нильалгебрах 3, 901
- теорема о йордановых алгебрах 3, 901
- - о нилькольцах 3, 1040
- - о свободных алгебрах Ли 3, 282, 902
Шкала 3, 765, 1044; 4, 696
Шлемильха — Роша форма остаточного члена 5, 323
Шлефли двойной шестисторонник 2, 1080
Шлефли интеграл 5, 894
- символ 3, 712
Шмида теорема о нильпотентной орбите 4, 155
Шмидта группа 5, 894
- процесс ортогонализации 4, 80
- теорема в теории групп 3, 124
- формула 2, 597
Шмульяна теорема о локально выпуклых пространствах 5, 384
Шнирельмана метод 5, 894
- неравенство 4, 325
- постоянная 5, 895
- теорема о плотности последовательности 5, 895
Шоке граница 2, 966
Шоке симплекс 5, 895
- теорема об измеримых множествах 2, 406
Шоттки группа 2, 877; 5, 516
- проблема 5, 1047
Шоттки теорема об аналитических функциях 5, 895
Шпеккеров ряд 5, 896
Шпеккерова последовательность 5, 896
Шпернера лемма о симплексах 5, 896
Шпехта проблема 1, 121
- - для неассоциативных колец 3, 902
- - о T-идеалах 2, 484
Шпехтово многообразие алгебр Ли 3, 241
- - колец 2, 951
Шрёдингера представление 5,897
Шрёдингера уравнение 2, 807; 5, 897
Шрейера система 5, 898
- теорема для групп 2, 424
Шрейера — Улама — Бэра теорема о симметрических группах 4, 1142
Штейна многообразие 5, 899
Штейна пространство 5, 899
Штейнера квазигруппа 2, 802
Штейнера кривая 5, 900
- разложение 5, 49
- симметризация 4, 1137
Штейнера система 1, 506; 3, 623; 5, 901
- - троек 2, 972; 5, 901
Штейнера точка 5, 901
Штейница теорема о многогранниках 1, 802; 5, 901
Штейнова алгебра 5, 900
Штёрмера метод 5, 902
- формула 2, 293
Штифеля метод 5, 92
Штифеля многообразие 5, 903
- - комплексное 5, 759
Штифеля число 5, 904
Штифеля — Уитни класс 5, 760, 905
- - - второй 5, 759
- - - первый 5, 758
- - число 5, 904
Штраф 5, 905
Штрафа метод 4, 835
Штрафных функций метод 5, 905
Штрих Шеффера 5, 894
Штурма кривые 5, 906
- ряд 5, 907
- теорема в теории дифференциальных уравнений 5, 158,917
Штурма теорема о корнях 5, 907
- - о разделении нулей 3, 338
Штурма — Лиувилля задача 5, 907—911
Штурма — Лиувилля обратная задача 5, 911—915
Штурма — Лиувилля оператор 5, 915
Штурма — Лиувилля уравнение 5, 916—918
Шуберта многообразие 1, 1104; 5, 918
- условия 5, 918
Шубникова — Лавеса сети 4, 293
Шум аддитивный 5, 918
- белый 1, 407
Шура базис 2, 689
- лемма о неприводимых модулях 3, 998
Шура лемма о сплетающих операторах 5, 919
- матричная функция 4, 272
Шура мультипликатор 2, 910; 5, 919
- теорема о кривизнах 4, 743, 1007
- - о пространствах постоянной кривизны 3, 100
- - об алгебре матриц 3, 612
Шура теоремы для ограниченных функций 5, 920
- форма матрицы 2, 689

Щель 3, 323
Щепина теорема в теории размерности 4, 824

Э

Эберлейна компакт 4, 717
- теорема о локально выпуклых пространствах 5, 384
- - о полных сепарабельных пространствах 2, 44
Эберлейна — Шмульяна теорема о банаховых пространствах 1, 388
Эвбулида антиномия 1, 296
Эвбулида парадокс 5, 921
Эверетта интерполяционная формула 5, 921
Эвольвента 2, 250; 5, 921, 923
Эвольвентная поверхность 5,923
Эволюта 2, 250; 5, 922
Эволютная поверхность 5, 922
Эволюционная матрица 3, 312
Эволюционное уравнение 5, 923
Эволюционный оператор 5, 924
Эвристический алгоритм распознавания 4, 872
Эджворта ряд 5, 924
Эдмонса — Фалкерсона теорема в комбинаторике 4, 813
Эйзенштейна критерий о неприводимых уравнениях 1, 192
- ряд 5, 346
Эйконал 1, 857
Эйконала метод 2, 809
Эйконала уравнение 3, 464; 5,924
Эйленберга — Зильбера комплекс 4, 1163
Эйленберга — Маклейна пространство 5, 925
- - симплициальное множество 4, 1163
Эйленберга — Мура конструкция 5, 447
- - спектральная последовательность 5, 107
Эйлера бета-функция 1, 464
- интеграл 2, 586
- класс 5, 760
Эйлера критерий в теории чисел 5, 925
- - для квадратичных вычетов 2, 786
- - разрешимости сравнения 3, 143; 5, 217
Эйлера метод 3, 50; 4, 1056; 5, 926
Эйлера метод суммирования 5, 927
Эйлера многочлены 5, 927
- обыкновенное дифференциальное уравнение 5, 931
- окружность 2, 63
Эйлера подстановка 5, 928
Эйлера постоянная 5, 928
Эйлера преобразование 3, 449; 5, 929
Эйлера произведение 5, 930
Эйлера прямая 2, 63; 5, 930
- рекуррентное соотношение для денумеранта 2, 91
- решение задачи трех тел 5, 431
Эйлера ряд 5, 931
- соотношение для выпуклых многогранников 1, 802
- спираль 3, 21
- теорема о графах 1, 1112
Эйлера теорема о многогранниках 3, 710; 5, 931
Эйлера тождество в теории чисел 5, 152, 768, 931
Эйлера уравнение 5, 677, 931—934
- - в вариационном исчислении 5, 932
- - функциональное 1, 867
Эйлера формула 3, 37, 97; 4, 1191; 5, 934
- - для карты 1, 1109
- - - кривизны поверхности 1, 1013; 2, 253
- - - однородных функций 3, 1173
- - дополнения 1, 867
- - связи показательной функции с тригонометрическими 4, 390
Эйлера формулы 5, 934
Эйлера функция 5, 934
- ядро 2, 586
Эйлера — Дарбу — Пуассона уравнение 5, 40
Эйлера — Кноппа метод суммирования 2, 886; 5, 927
Эйлера — Коши метод 5, 926
Эйлера — Лагранжа теорема о цепных дробях 5, 814
Эйлера — Лагранжа уравнение 3, 684; 5, 932, 934
Эйлера — Маклорена формула 2, 1028; 5, 935
Эйлера — Остроградского уравнение 3, 728
Эйлера — Пуанкаре формула 5, 936
Эйлера — Пуассона — Дарбу уравнение 2, 328
Эйлера — Родрига параметры 3, 162
Эйлера — Фурье формулы 5,936
Эйлеров граф 1, 1113
- интеграл 1-го рода 1, 464
- квадрат 4, 90
Эйлеров класс 5, 936
- треугольник 5, 290
- цикл в графе 1, 1112
Эйлерова характеристика 5, 936
- цепь в графе 1, 1112; 2, 972
Эйлеровы интегралы 5, 937
Эйлеровы углы 5, 937
Эйлеровы числа 5, 937
Эйнштейна правило 5, 938
- - суммирования 5, 327
- пространство 4, 1044
- тензор 4, 1007
- теория гравитации 1, 1079
- - относительности 4, 146
Эйнштейна уравнения 5, 459, 938
Эйнштейна — Смолуховского уравнение 5, 938
Эйнштейново однородное риманово пространство 4, 1027
Эйри критерий 2, 744
Эйри уравнение 5, 939
Эйри функции 5, 939—941
Эйри — Каврайского критерий 2, 744
Эйри — Фока функция 5, 940
Эйткена обобщенный метод 4, 252
Эйткена схема 5, 942
Экватор 5, 291
Экваториальная плоскость тора 5, 405
Эквационального класс 1, 185
Эквиаффинная геометрия 5, 942
- группа 1, 359
- дуга 1, 353
- кривизна 1, 353
Эквиаффинная плоскость 5, 942
- подгруппа 1, 363
Эквиаффинная связность 5, 942
Эквиаффинное кручение 1, 353
Эквивалентная проекция 2, 742, 753
Эквивалентности архимедово отношение 1, 328
- класс 5, 942
Эквивалентность 1, 124; 4, 800; 5, 942
- алгоритмов 1, 229
- базисов 1, 377
- гомотопическая 5, 397
- Какутани 5, 1011
Эквивалентность категорий 5, 943
- количественная 3, 760
- рекурсивная 4, 959
- состояний автомата 1, 78
- стохастическая 5, 240
- топологическая 3, 371; 5, 375
- унитарная 3, 371
- формальных систем 5, 645
Эквивалентные бикомпактные расширения 1, 477
- квадратичные формы 2, 777
Эквивалентные представления 4, 595; 5, 943
Эквивалентные преобразоваиия управляющих систем 5, 943—947
- функции 4, 498
Эквивалентных возмущений метод 3, 886
Эквивариантная оценка 5, 947
Эквивариантное отображение 2, 980
Эквивариантные когомологии 5, 947
- многомерные задачи Плато 4, 307
Эквидистанта 3, 398; 5, 948
Эквидистантная проекция 2, 742
Эквилонгальное отображение 4, 1025
Эквинепрерывная полугруппа 4, 452
Экзотическая сфера 5, 288
Эконометрия 5, 948—951
Экономика математическая 3, 584
Экономики ядро 3, 589
Экономичная разностная схема 4, 846
Эксперимент безусловный 5, 342
- машинный 2, 850
- условный 5, 343
Эксперименты с автоматами 5, 951
Экспонента 4, 390; 5, 953

Экспонента группы 5, 953
- пространства 5, 953
Экспоненциальная алгебра Ли 3, 284
- группа Ли 3, 284
- - - разрешимая 3, 281
- дихотомия 2, 363, 771, 773; 3, 342
- кривая 4, 390
Экспоненциальная тонология 5, 953
- устойчивость 2, 771; 5, 564
Экспоненциальная функция 4, 390; 5, 953
Экспоненциально отделенное подпространство 5, 542
- условно устойчивое решение 5, 550, 551
- устойчивое решение 5, 569
Экспоненциального типа функция 5, 953
- - - целая 5, 798
Экспоненциальное неравенство 5, 842
Экспоненциальное отображение 4, 1006; 5, 954
Экспоненциальное распределение 5, 954
Экспоненциальный рост 2, 174
Экспонирование 4, 384
Экстраординарные теории когомологий 3, 1120
Экстраполирование 5, 954
Экстраполяционный метод 2, 292
Экстраполяция 5, 954
- *по Ричардсону* 2, 292
- Ричардсона 4, 1042
- случайных процессов 5, 34
Экстремалей поле 5, 955
Экстремалей семейство 5, 956
Экстремаль 1, 582; 5, 932, 957—959
- ломаная 4, 853
- неособая 3, 232
- неособенная 4, 398
- особая 4, 938
- *Понтрягина* 4, 488
- присоединенная 5, 1054
- регулярная 4, 938
Экстремальная длина 5, 959—961
- емкостная мера 5, 1003
Экстремальная задача 5, 961
- к мосту стратегия 2, 335
- квадратурная формула 4, 35
- метрика 5, 959, 960
- порядковая статистика 4, 499
- функция области 1, 412
Экстремально несвязное пространство 4, 1096; 5, 961
- несвязный бикомпакт 4, 143
Экстремального прицеливания *правило* 2, 333
Экстремальной метрики метод 5, 961—963
Экстремальные задачи в теории приближений 4, 618
Экстремальные задачи; численные методы 5, 963—967
Экстремальные свойства полиномов 5, 967
Экстремальные свойства функций 5, 968
Экстремальный граф 1, 1111
- элемент 5, 590
- - кольца 1, 351
Экстремум 5, 969
-, Вейерштрасса *необходимое условие* 4, 52
-, необходимое и достаточное условие 1, 583
- сильный 1, 583; 4, 1133
- слабый 1, 583; 4, 1208
- условный 5, 555
- функционала, Вейерштрасса условия 1, 619
Экстремума принцип Бицадзе 5, 46
- - *для гармонических функций* 1, 877
Эксцентриситет 5, 633, 969
- гиперболы 1, 988
Эксцесс 2, 491; 5, 969
Эксцесса коэффициент 5, 969
- - выборочный 5, 969
Эксцессивная функция в теории потенциала 4, 535
Эксцессивная функция для марковского процесса 5, 970
Электростатическая задача 4, 1046
Элемент — см. соответствующее *название*
Элемент аналитической функции 1, 267; 4, 413; 5, 971
Элементарная абелева группа 5, 972
Элементарная арифметика 5, 972
- группа 2, 876
- диаграмма модели 3, 770
- дизъюнкция 1, 563
- катастрофа 1, 498
- категория 1, 1090
- конъюнкция 1, 560, 563
- мера 2, 571; 3, 637
- *номограмма* 3, 1045
- подсистема 3, 766; 5, 973
Элементарная система аксиом 5, 972
- ситуация 2, 143
- стратегия 2, 143
Элементарная теория 1, 215; 4, 427; 5, 972
- - вероятностей 1, 656
- - моделей 2, 1059
- - неразрешимая 1, 215
- - *разрешимая* 1, 215
Элементарная теория чисел 5, 974—976
- - -, основная теорема 4, 706
- *трансляция* 5, 417
- формация 5, 519
- формула 3, 416; 4, 578
- фуксова группа 5, 678
Элементарно эквивалентные модели 1, 103
Элементарное полиэдральное стягивание 4, 411
- расширение алгебраической системы 3, 766
- - модели 1, 103
- *решение* 2, 298
Элементарное событие 1, 657, 661, 666; 5, 976
Элементарные делители 5, 976
Элементарные функции 5, 977
Элементарный делитель матрицы 3, 1053
- - модуля 1, 1020
- симметрический многочлен 4, 1145
- синтаксис 4, 1185
- *топос* 5, 404
Элементарных событий пространство 1, 776
Эллипс 2, 1034; 3, 383, 387; 5, 977
- горловой 1, 1000, 1078
- искажений 2, 753
- нормальной кривизны 3, 1071
Эллипсоид 5, 978
- рассеивания 4, 892
Эллипсоидальная гармоника 5, 978
- гармоническая функция 3, 189
Эллипсоидальные координаты 5, 979
Эллиптико-параболического типа уравнение 5, 45
Эллиптикопараболическое уравнение 1, 810
Эллиптическая геометрия 4, 668, 987; 5, 979
- емкость 5, 423
- *инверсия* 2, 545
- инволюция 2, 549
- краевая задача 3, 69
Эллиптическая кривая 5, 979—983
- лемниската Бута 1, 566
- линейная алгебра Ли 4, 731
- модулярная форма 3, 786
- - функция 3, 788
- плоскость 4, 989
Эллиптическая поверхность 5, 515, 984—986
- *постоянная Чебышева* 5, 423
- прямая 2, 801; 4, 989
- связка окружностей 4, 1090
- - прямых 4, 1089
- - сфер 4, 1090
- сеть 4, 1123
Эллиптическая точка 2, 252; 5, 986
Эллиптическая функция 5, 986—988
- - Вейерштрасса 1, 621
- -, модуль 5, 1056
- - Якоби 5, 1054
Эллиптические координаты 5, 95, 988
- - в пространстве 5, 979
- прямые 3, 12
Эллиптический диаметр 5, 423
- дифференциальный оператор 2, 346
- - - линейный 3, 366
Эллиптический интеграл 5, 988—991
- -, модуль 3, 783
- -, *обращение* 3, 1139
- комплекс 2, 553
- косинус 3, 38
- луч 2, 1014
- образ 1, 622
Эллиптический оператор 3, 360; 5, 991—993
- - псевдодифференциальный 4, 738
Эллиптический параболоид 5, 993
- *пучок* 4, 772, 773
- сектор 4, 1106
- символ 4, 1135
- синус 4, 1191
- тип римановой поверхности 4, 1019, 1028
- трансфинитный диаметр 5, 423
- функционал 1, 621
Эллиптический цилиндр 5, 819, 993
Эллиптического интеграла амплитуда 1, 243
Эллиптического типа уравнение 5, 994
Эллиптического типа уравнение; численные методы решения 5, 994—997
Эллиптическое дробно-линейное отображение 2, 386
- поле 1, 1011
- пространство 4, 990
- псевдорасстояние 5, 423
- уравнение 2, 299, 300, 323
- - вырожденное 1, 811
- -, главное фундаментальное *решение* 1, 1016
- -, Грина функция 1, 1129
- -, краевая задача 3, 78
- - линейное 3, 360
- эрмитово пространство 5, 676
Эллиптичности область 5, 45
Эллиптичность по Петровскому 5, 991
- по Дуглису — Ниренбергу 5, 991
Эмдена уравнение 5, 997
Эмдена — Фаулера уравнение 5, 997
Эмпирическая дисперсия 2, 661
- *линия регрессии* 4, 927
- функция распределения 5, 998
Эмпирическое распределение 5, 998
Энгелев элемент 5, 999
Энгелева алгебра 3, 901; 5, 999
Энгелева группа 5, 999
Энгелевости индекс 5, 999
Энгеля теорема в теории нильпотентных алгебр Ли 3, 270
Энгеля теорема об алгебрах Ли 5, 999
- тождество 1, 123
Эндоморфизм 3, 370; 5, 1000
- метрический 3, 668
- нильпотентный 2, 421
- полупростой 2, 421; 4, 466
- присоединенный 3, 242
-, реплика 4, 975
- точный 5, 410
- Фробениуса 5, 669
Эндоморфизмов алгебра 5, 1001
Эндоморфизмов кольцо 5, 1000
Эндоморфизмов полугруппа 5, 1001
Эндоморфизмы сопряженные 1, 483
Энергетическая норма 4, 833; 5, 1003
Энергетический метод 5, 595, 1002
- спектр 5, 212
Энергетическое неравенство 5, 1002
Энергии интеграл 2, 145, 531; 5, 1002
- *принцип* 5, 1003
Энергия мер 5, 1002
- покоя 4, 146
Эннепера поверхность 5, 1003
Энона аттрактор 5, 246
Энриквеса поверхность 5, 985
Энтропийная теория динамических систем 5, 1003—1005
Энтропия 5, 1005
- алгоритмическая 1, 222
- *вполне положительная* 4, 1195
- дифференциальная 2, 267
Энтропия измеримого разбиения 5, 1006
- индивидуального объекта 1, 220
Энтропия метрическая 5, 1006
- относительная 2, 657
- топологическая 5, 375
- Шеннона 2, 940
ε-энтропия 4, 396; 5, 1006, 1008
- абсолютная 4, 494
- источника сообщений 2, 683
Эпиграф 3, 853
Эпидемии процесс 5, 1008
Эпименида парадокс 1, 296; 5, 1009
Эпиморфизм 3, 370; 5, 1009
- векторных расслоений 1, 646
- допустимый 1, 471
- канонический 5, 589
- нормальный 3, 1076
Эпитрохоида 5, 448, 1010
Эпициклоида 5, 1009
Эпиэллипс 4, 1055
Эпсилон-*ординал* 4, 502
Эратосфена решето 5, 1010
Эргодическая теорема 5, 1010
- - Биркгофа 1, 495
- - Биркгофа — Хинчина 5, 210
- - Бреймана 5, 1007
- - индивидуальная 1, 495; 2, 556; 3, 927; 4, 24; 5, 1007
- - локальная 4, 23
- - максимальная 3, 483
- - Маркова 1, 525
- - Неймана 3, 926
- - *операторная* 4, 23
- - Орнстейна — Чекона 4, 76
- - равномерная 4, 24
- - статистическая 1, 495; 3, 927; 4, 24; 5, 171
Эргодическая теория 5, 1010—1012
- -, косое произведение 3, 41
Эргодическая теория некоммутативная 5, 1012
- цепь Маркова 3, 521
Эргодический источник сообщений 2, 682
- метод Линника 3, 389
Эргодическое множество 5, 1013
Эргодичность динамической системы 5, 1013
- строгая 5, 247
Эрдейи асимптотическое разложение 1, 338
Эрдеша задача 5, 1014
Эрланга распределение 3, 520; 5, 1014
- формула в теории массового обслуживания 3, 555
Эрлангенская программа 2, 527; 5, 1015
Эрмита интерполяционная формула 5, 1015
- квадратурная формула 3, 634
- критерий устойчивости 5, 558
Эрмита многочлены 2, 869; 5, 1016
- постоянная 5, 1017
- - для лучевой функции 1, 945
Эрмита преобразование 5, 1016
Эрмита проблема 5, 1017
Эрмита тождество 5, 1017
Эрмита уравнение 5, 1017
- формула для интерполяционного многочлена 2, 634
- - для функции Вейерштрасса 1, 623

Эрмита функции 5, 1018
Эрмита — Линдемана метод 3, 289
Эрмита — Минковского гоноэдр 2, 788
Эрмитов линейный функционал 4, 1149
Эрмитов оператор 3, 375; 4, 1074; 5, 1018
- сплайн 4, 606
- элемент алгебры 4, 1148
- - банаховой алгебры с инволюцией 1, 384
Эрмитова матрица 3, 616; 5, 1019
Эрмитова метрика 5, 1019
- G-метрика 4, 717
- неотрицательная мажорантная форма 4, 717
- положительно определенная форма 4, 430
Эрмитова связность 5, 1020
- симметричность 5, 1023
Эрмитова структура 5, 1020
Эрмитова форма 5, 1021
Эрмитово многообразие 5, 1020
- преобразование 4, 1074
- пространство 5, 1021
- - векторное 5, 1019
- -, детерминант 5, 1022
- - линейное 3, 352
- - симплектическое 4, 714
Эрмитово симметрическое пространство 5, 1022
- симметричное ядро 5, 660
- скалярное произведение 5, 1019, 1021
- сопряженная матрица 3, 615; 5, 81, 1019
Эрмитово ядро 2, 591, 597; 5, 1023
Эрмитово-симметрическая матрица 5, 1019
Эталонов метод 4, 181
Этальная p-делимая группа 2, 82
- когомологическая последовательность 2, 926
Этальная топология 5, 1023
Этальные когомологии 5, 1024
Этальный морфизм 5, 1025
Эффект Доплера 2, 373
- дробовой 2, 389
- насыщения 4, 611
- последействия 4, 388
Эффективная оценка 3, 1013; 4, 867; 5, 1025
Эффективно непополнимая теория 4, 427
Эффективное ω-правило 2, 1040
Эффективности критерий 3, 863
Эффективность асимптотическая критерия 5, 1025
- в математической статистике 3, 1031
- статистической оценки 4, 174
Эффективность статистической процедуры 5, 1027
- языка 5, 640
Эффективный дивизор 1, 144; 2, 131
Эффективный критерий 5, 1028
- функционал 2, 1052

Ю

Юла процесс 4, 1051
Юнга диаграмма 5, 1027
- неравенство 2, 513; 4, 76; 5, 82
Юнга признак 5, 1027
Юнга симметризатор 5, 1027
Юнга таблица 5, 1027
Юнга теорема в геометрии 5, 1028
- - о тригонометрических рядах 2, 715

Я

Явная формула Штермера 2, 293
Явный метод 2, 292
Ядерная C^*-алгебра 5, 1029
Ядерная билинейная форма 5, 1029
Ядерная конгруэнция 5, 1030
Ядерная норма 5, 1031
Ядерная пара 5, 1032
Ядерное отображение 5, 1037
- представление 5, 1031
- - оператора 5, 1037
Ядерное пространство 5, 1033—1037
Ядерный идеал 2, 483
Ядерный оператор 3, 373; 5, 116, 1037—1041
- пучок 3, 165
- след оператора 5, 1040
Ядра взаимные 1, 692
Ядро Абеля 1, 26
- анизотропное 1, 290; 2, 778
- бесселево 1, 458
-, билинейный ряд 2, 596
Ядро в теории игр 5, 1041
- Валле Пуссена 1, 573, 575
- векторного расслоения 1, 646
- взаимное 5, 653
- Вольтерра 1, 754; 2, 591
- вырожденное 1, 811
- Гильберта 1, 969, 975
- гомоморфизма 2, 962; 3, 1073; 4, 372
- действия группы 4, 382
- дефинитное 2, 101
- Джексона 2, 110
- Дирихле 2, 193; 5, 1043
- игры 2, 472
Ядро интегрального оператора 2, 604; 5, 1042
- - уравнения 2, 590
- - - Абеля 1, 26
- итерированное 2, 691
- Карлемана 2, 727
Ядро комплексной последовательности 5, 1042
- Коши 1, 263; 2, 586; 3, 51, 65
- Лапласа — Фурье 2, 586
- левое 3, 460
Ядро линейного оператора 3, 370; 5, 1043
- логарифмическое 3, 410
Ядро лупы 3, 460; 5, 1043
- Мартина 3, 530
- Меллина 2, 586
Ядро метода суммирования 5, 1043
Ядро множества 1, 567; 5, 1044
Ядро морфизма 5, 1044
- неотрицательно определенное 2, 101
- неположительно определенное 2, 101
- непрерывное 2, 605
- определенное 2, 101
- осцилляционное 4, 139
- открытое 4, 143
- повторное 2, 691
- положительно определенное 4, 431
Ядро полугруппы 3, 692; 5, 1044
- полярное 2, 605
- последовательности областей 2, 720, 721
- правое 3, 460
- преобразования свертки 4, 1077
- Пуассона 4, 755, 756; 5, 1043
- размерное 3, 150
- разрешающее 4, 950; 5, 653
- симметричное 2, 591, 595
- A-системы 4, 1194
- скрещенного гомоморфизма 4, 1205
- со слабой особенностью 2, 605
- соответствия 5, 78
- сопряженное 5, 1044
- среднее 3, 460
- схоластическое 4, 273
- типа потенциала 2, 605
- топологического пространства 1, 737
- уравнения Вольтерра 1, 752
- Фейера 5, 600, 1043
- Фредгольма 2, 604; 5, 660, 1039
- Шварца 5, 886, 889
- Эйлера 2, 586
- экономики 3, 589
- эрмитово 2, 591, 597; 5, 1023
L_2-ядро 2, 605; 5, 660
Ядровая конъюнкция 1, 560
Язык автоматный 1, 1087
- алгоритмический 1, 222
- бесконтекстный 1, 1087
- в алфавите 5, 643
- линейный 1, 1091
- логико-математический 4, 578
- машинно-ориентированный 1, 223
- машинно-ориентируемый 3, 629
- машинный 1, 223
-, многообразие 5, 644
- многосортный 5, 637
-, модель 3, 769
-, - анализирующая 1, 247
-, - аналитическая 1, 247
- над данными символами и константами 1, 125
- объектный 4, 1185
- односортный 5, 637
- определяемый грамматикой 1, 1091
- порождаемый грамматикой 1, 1092
- предметный 4, 581, 1185
- проблемно-ориентированный 1, 223; 4, 641
- программирования 4, 654
- - неалгоритмический 1, 223
- - формальный 1, 222
- разветвленный 1, 784
- семантический 3, 567
- сети Петри 4, 281
- синтаксический 4, 1185
- 1-й ступени 1, 157
- формализованный 5, 636
- формальный 5, 643
Якоби вариационный принцип стационарного действия 1, 602
- интеграл 5, 432
Якоби матрица 5, 1044
Якоби метод 1, 766; 5, 1045
Якоби многообразие 5, 1046
Якоби многочлены 2, 869; 5, 1048
- нормальная форма эллиптического интеграла 5, 989
- определитель 5, 1058
Якоби поле 5, 1049
Якоби преобразование 5, 1049
Якоби принцип 5, 1049
Якоби проблема обращения 5, 1050
Якоби символ 5, 1051
Якоби скобки 5, 1052
- теорема в вариационном исчислении 1, 858
- - о дивизорах 5, 1047
- - о периодах 4, 268
- - об обращении 5, 1047
- тождество 3, 263; 5, 768, 1052
Якоби уравнение 5, 1052
- форма уравнения Ламе 3, 189
- формула 3, 396; 5, 1045
Якоби эллиптические функции 5, 1054—1058
Якоби — Ангера формулы для цилиндрических функций 5, 821
Якобиан 5, 1046, 1058
- обобщенный 5, 1047
- промежуточный 4, 697
Якобиев идеал 4, 119
- пучок 5, 984
Якобиевый критерий для схем 1, 1021
Янга — Миллса поле 5, 1058—1060
Янко группа 5, 149
Янова схема 1, 230; 4, 652
Японское кольцо 1, 939
Ячейка 4, 830; 5, 1060
«Ящиков» принцип Дирихле 2, 162

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОШИБКИ И ОПЕЧАТКИ

Том 1

Столбец	Строка	Напечатано	Следует читать
27	5 сн.	b_N	B_N
31	21 сн.	$\dots \rho^k,$	$\dots \rho^k=$
31	20 сн.	$\rho^k= \dots$	$= \dots$
31	10 сн.	не по касательному	по некасательному
34	32 св.	(см. ниже — п. 3) множества относительно меры μ,	множества относительно меры μ (см. ниже — п. 4),
98	3 св.	числа),	числа,
98	4—5 св.	системы.	системы).
191	26 сн.	для однородных	для неоднородных
277	5 сн.	$\sum_{n=1}^{\infty}$	$\sum_{n=0}^{\infty}$
304	37 св.	$L^p\ (0 < p < \infty)$	$L^p\ (1 < p < \infty)$
304	24 сн.	замкнутое множество	замкнутое выпуклое множество
305	5 сн.	F_h	F
307	19 св.	D_p	D_F
308	35 сн.	оператор на	оператор
308	33 сн.	произвольных	на произвольных
308	16 сн.	D_{hu}	D_{hU}
309	15 сн.	$h < h_0$	$0 < h$
310	12 сн.	разбиения μ	разбиения ξ_n
445	21 сн.	на h	на K

Столбец	Строка	Напечатано	Следует читать
445	19 сн.	$\prod_{k=N}^{n}$	$\prod_{k=1}^{n}$
514	12 сн.	$n_1,\ n_2$	$N_1,\ N_2$
515	4 св.	g_i	G_i
518	5 сн.	объекту	объему
519	8 св.	$\frac{1}{z}$	$\frac{1}{Z}$
519	10 св.	u	U
519	12 сн.	$n(z)=n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$	$n(h)=n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$
519	9 сн.	$z=0$	$h=0$
520	19 св.	h	h^3
541	25 св.	$\Omega^\delta\ \ldots=\pi_{i+\delta}$	$\Omega^s\ \ldots=\pi_{i+s}$
592	16—17 сн.	непериодической задачей	периодической задачей

Том 2

Столбец	Строка	Напечатано	Следует читать
13	12 сн.	сходится	абсолютно сходится
58	8—10 св.	... копредставление Виртингера, т. е. копредставление ... имеет вид $x_i=\omega_{i,j}x_j\omega_{i,j}^{-1}$, в ...	... копредставление Виртингера (т. е. копредставление ... имеет вид $x_i=\omega_{i,j}x_j\omega_{i,j}^{-1}\Big)$, в ...
58	13 св.	Известно, что этот класс шире класса групп k-мерных узлов в S^{k+2}, $k\geqslant 3$.	Известно, что этот класс шире класса групп одномерных узлов в S^3, но уже класса групп k-мерных узлов в S^{k+2}, $k\geqslant 3$.
113	19 сн.	$\sigma>0$	$\sigma<0$
113	18 сн.	$s=2\nu$	$s=-2\nu$
113	16 сн.	$0<s<1$	$\sigma>1$
154	4 св.	*И. А. Молотков.*	*Л. А. Молотков.*
421	8 св.	и E	и $\overline{E}$
432	4 сн.	; в частности,	. Позднее
451	3 св.	$i\neq j$	$j\neq i$
462	4 св.	Знаки индивидуальных операций	Знаки индивидуальных объектов
618	27 св.	$\frac{\ldots(x-x_{n-1})\times}{\ldots(x_k-x_{n-1})\times\frac{\times(x-x_{n+1})\ldots}{\times(x_k-x_{n+1})\ldots}}$	$\frac{\ldots(x-x_{k-1})\times}{\ldots(x_k-x_{k-1})\times\frac{\times(x-x_{k+1})\ldots}{\times(x_k-x_{k+1})\ldots}}$
637	15 сн.	1904	1907
719	32 св.	μ_j	λ_j
741	4 св.	$d\sigma^2\lambda_2^2(x,\ y)$	$d\sigma^2=\lambda_2^2(x,\ y)$
741	18 сн.	f_v	f
794	11 св.	выше	не выше
795	23—24 св.	Другой подход основан на минимизации нормы функционала погрешности $R(f)$ построению К. ф.	Другой подход к построению К. ф. основан на минимизации нормы функционала погрешности $R(f)$.
950	25 сн.	Для системы (2)	Для системы $x'=f(t,\ x)$
1008	1 сн.	$+i\frac{yx'-xy'}{x^2+y^2}$	$+i\frac{xy'-x'y}{x^2+y^2}$
1030	29 св.	15	13

Том 3

Столбец	Строка	Напечатано	Следует читать
59	18 св.	$\limsup_{k\to\infty}$	$\lim_{k\to\infty}$
75	6 сн.	$dt\leqslant 2\ [\ldots]$	$dt<2\ [\ldots]$
167	10 сн.	$\ldots(x^{\alpha+ne-x})$	$\ldots(x^{\alpha+n_e-x})$
395	6 сн.	$\alpha_1=\sum_{n=1}^{\infty}2^n$	$\alpha_1=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n!}$
479	6 св.	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_{z_1}^{(k_1)}(0)\ldots}{k_1!\ldots}$	$\sum_{\lvert k\rvert=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0,\ldots,0)}{k_1!\ldots k_m!}$
479	8 св.	$k=(k_1,k_2,\ldots,k_m),-k_i-$	$k=(k_1,\ldots k_m),$ $\lvert k\rvert=k_1+\ldots+k_m,\ k_i-$
726	24 св.	$=z^2+\ldots$	$=z^q+\ldots$
838	22 св.	сложной	простой
867	1 сн.	$(X_n,\ P_{nm}\subset A$	$(X_n,\ P_{nm})\in A$
868	5 сн.	$t\ V_i^i:$	$t_i^i:$
873	36 св.	...для...	$\ldots=0$ для
1044	11 сн.	$f(\alpha_1)$ и $g(\alpha_1)$	$f_1(\alpha_1)$ и $g_1(\alpha_1)$
1046	25 св.	$g_{12}+g_{24}=f_{56}$	$g_{12}+g_{24}=g_{56}$
1113	13 св.	$L_{k_1,\ldots,k_n h}\varphi(h)$	$L_{k_1\ldots k_n};\ h:\varphi(h)$
1132	22 сн.	однозначной	также строго монотонной

Том 4

Столбец	Строка	Напечатано	Следует читать
10	15 св.	$a_{k+\bar{1},\ k}$	$a_{k-\bar{1},\ k}$
11	16 сн.	$\lvert a_{kk}-v_k A_{k-1}^{-1}u_k\rvert$	$\left(a_{kk}-v_k A_{k-1}^{-1}u_k\right)$
211	32 св.	$[\lambda,$	$[\lambda_0,$
212	21 св.	нелинейных	нелинейных функциональных
296	7 сн.	(B), (7)	(B), (7_1)
297	12 сн.	$\left(\frac{2}{3}\vartheta_{ij}\vartheta_{ij}\right)$	$\left(\frac{r}{3}\vartheta_{ij}\vartheta_{ij}\right)^{1/2}$
299	формула (14)	$\frac{2\sigma_s}{3V_u}$	$\frac{2\sigma_s}{3v_u}$
300	31 сн.	$=\rho U_{i,\ tt}$	$=\rho u_{i,\ tt}$
354	16 св.	$v=v_0$	$\overline{v}=v_0$
496	1 сн.	$a_{k,\ k-\bar{1}},\ a_{k,\ k-\bar{1}}$	$a_{k,\ k-1},\ a_{k,\ k^{-1}}$
612	12 св.	$\leqslant 1$	<1
619	14 сн.	$\lVert f\rVert$	$\lVert f^r\rVert$
685	9 св.	F	Y
685	12 св.	F	Y
1113	8 сн.	счетной базой	счетным всюду плотным множеством.
1210	26 св.	n-мерных	p-мерных
1210	10—11 сн.	расслоению	распределению
1211	1 св.	мерсий, для к-рых заданное поле касается,	мерсий φ_α, для к-рых заданное поле касается φ_α^{-1} (c),
1211	14—15 св.	.Особое положение, где	, где
1211	32 сн.	и	или
1212	27 св.	$B\Gamma_p^r$	$B\Gamma_q^r$
1212	27—28 св.	для $n=3$ (	(для $n=3$